CHUYÊN ĐỀ GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI 3.1. TÍNH GIỚI HẠN BẰNG ĐỊNH NGHĨA.

Bài 1. Cho dãy số (a_n) xác định bởi : $\begin{cases} a_1 = a + \dfrac{1}{a} \\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n^3 - 2a_n^2 - 2}{3a_n^2 - 4a_n - 1} \end{cases}$. Chứng minh rằng với mọi số thực $a \neq 0$ thì dãy (a_n) hội tụ. Tùy theo a, hãy tìm giới hạn của dãy (a_n).

Hướng dẫn giải

Nếu $a > 0$ thì $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$ (do bất đẳng thức AM-GM).

Nếu $a < 0$ thì $-a + \dfrac{1}{-a} \geq 2$ (do bất đẳng thức AM-GM) nên $a + \dfrac{1}{a} \leq -2$.

Nếu $a = 1$ thì $a_1 = 2$. Ta chứng minh: $a_n = 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Hiển nhiên $a_1 = 2$.

Giả sử $a_k = 2 \Rightarrow a_{k+1} = \dfrac{2.2^3 - 2.2^2 - 2}{3.2^2 - 4.2 - 1} = 2$.

Vậy $\lim a_n = \lim 2 = 2$.

. Nếu $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$ thì $a_1 > 2$. Ta chứng minh $a_n > 2 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Rõ ràng $a_1 > 2$. .

Giả sử $a_k > 2$. Ta chứng minh $a_{k+1} > 2$.

$$a_{k+1} > 2 \Leftrightarrow \frac{2a_k^3 - 2a_k^2 - 2}{3a_k^2 - 4a_k - 1} > 2 \Leftrightarrow 2a_k(a_k - 2)^2 > 0 \text{ (đúng).}$$

Ta chứng minh (a_n) là dãy giảm, thật vậy :.

$$\forall n,\ a_{n+1} - a_n = \frac{-a_n^3 + 2a_n^2 + a_n - 2}{3a_n^2 - 4a_n - 1} = \frac{-(a_n^2 - 1)(a_n - 2)}{3a_n^2 - 4a_n - 1} < 0.$$

(do tử âm, mẫu dương vì.

$$3a_n^2 - 4a_n - 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_n > \dfrac{2 + \sqrt{7}}{3} \\ a_n < \dfrac{2 - \sqrt{7}}{3} \end{array} \right. .$$

Mà $a_n > 2 > \dfrac{2 + \sqrt{7}}{3} \Rightarrow 3a_n^2 - 4a_n - 1 > 0$).

(a_n) giảm và bị chặn dưới $\Rightarrow (a_n)$ có giới hạn là L.

$\lim a_{n+1}=\lim\dfrac{2a_n^{\ 3}-2a_n^{\ 2}-2}{3a_n^{\ 2}-4a_n-1}\Rightarrow\ \dfrac{2L^3-2L^2-2}{3L^2-4L-1}$.

$\Rightarrow L=2\ \left(a_n>2\Rightarrow L\neq -1\right)$

Vậy $\lim a_n=2$.

. Nếu $a>0$ thì $a_1\le -2$. Tương tự, ta có:.

$$\forall n,\ a_{n+1}-a_n=\frac{-a_n^{\ 3}+2a_n^{\ 2}+a_n-2}{3a_n^{\ 2}-4a_n-1}=\frac{-\left(a_n^{\ 2}-1\right)\left(a_n-2\right)}{3a_n^{\ 2}-4a_n-1}>0.$$

nên $\left(a_n\right)$ tăng. Hơn nữa $\left(a_n\right)$ bị chặn trên bởi -1, thật vậy.

$$a_{k+1}<-1\Leftrightarrow\frac{2a_k^{\ 3}-2a_k^{\ 2}-2}{3a_k^{\ 2}-4a_k-1}<-1\Leftrightarrow\ \left(a_k+1\right)^2(2a-3)<0\ .$$

Vậy $\left(a_n\right)$ tăng và bị chặn trên $\Rightarrow\left(a_n\right)$ có giới hạn là L.

$a_n<-1,\forall n$, $a_{n+1}-a_n>0,\forall n$

$L=\dfrac{2L^3-2L^2-2}{3L^2-4L-1}\Rightarrow L=-1\left(a_n<-1\Rightarrow L\neq 2\ \right)$.

Vậy $\lim a_n=-1$.

Tóm lại: + Nếu $a=1$ thì $\lim a_n=2$.

+ Nếu $\begin{cases}a>0\\ a\neq 1\end{cases}$ thì $\lim a_n=2$.

+ Nếu $a<0$ thì $\lim a_n=-1$.

Bài 2. Cho dãy số $\left(x_n\right)$ được xác định bởi $\begin{cases}x_1>0\\ x_{n+1}=x_n+\dfrac{1}{x_n}+\dfrac{2}{x_n^2}+\dfrac{3}{x_n^3}+\cdots+\dfrac{2015}{x_n^{2015}}\end{cases}\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$. Tìm giới hạn của dãy nx_n^{α} khi $n\to+\infty$, với α là số thực cho trước.

Hướng dẫn giải

Dễ dàng chứng minh được $x_n>0,\forall n\ge 1$ bằng qui nạp.

Ta có.

$$x_{n+1}>x_n+\frac{1}{x_n},\forall n\ge 1\Rightarrow x_{n+1}^2>\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)^2=x_n^2+2+\frac{1}{x_n^2}>x_n^2+2\ ;\forall n\ge 1.$$

Bởi vậy $\forall n\in\mathrm{N},n\ge 2$ thì $x_n^2>x_{n-1}^2+2>x_{n-2}^2+4>\ldots>x_1^2+2\left(n-1\right)$.

$\Rightarrow x_n>1,\forall n\ge 2\,và\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$.

Với $n\in\mathrm{N}^*$, đặt $x_{n+1}=x_n+\dfrac{1}{x_n}+t_n$ trong đó $t_n=\dfrac{2}{x_n^2}+\dfrac{3}{x_n^3}+\ldots+\dfrac{2015}{x_n^{2015}}$.

$x_n > 1; \forall n \geq 2 \Rightarrow 0 < t_n < \frac{t}{x_n^2}$, với $t = 2+3+\ldots+2014+2015$ (1), suy ra.

$$x_{n+1}^2 - x_n^2 = \left(x_n + \frac{1}{x_n} + t_n\right)^2 - x_n^2 = \frac{1}{x_n^2} + t_n^2 + 2 + 2x_n t_n + \frac{2t_n}{x_n} \to 2 \text{. khi } n \to +\infty.$$

Áp dụng định lý trung bình Cesaro cho dãy (b_n) với $\begin{cases} b_1 = x_1^2 \\ b_n = x_n^2 - x_{n-1}^2, \forall n \geq 2. \end{cases}$.

ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 2$ suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 2$..

Mà $\frac{x_n^2}{n} = \frac{\left(x_n^2 - x_{n-1}^2\right) + \left(x_{n-1}^2 - x_{n-2}^2\right) + \ldots + \left(x_2^2 - x_1^2\right) + x_1^2}{n} = \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}$ suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{x_n^2} = \frac{1}{2}$..

Thật vậy ta có thể chứng minh trực tiếp $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{x_n^2} = \frac{1}{2}$ như sau (chứng minh định lý trung bình Cesaro).

Xét dãy $(c_n): c_1 = x_1^2 - 2; c_n = x_n^2 - x_{n-1}^2 - 2$ với $n = 2, 3\ldots$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$ nên $\forall \varepsilon > 0$ tồn tại $m \in \mathrm{N}^*$ sao cho $|c_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq m$..

Gọi $M = max\{|c_i|\}$ với $1 \leq i \leq m-1$.

Với ε ở trên tồn tại $m' = \left[\frac{2(m-1)M}{\varepsilon}\right] + 1$ thì $\frac{2(m-1)M}{\varepsilon} < m'$ hay $\frac{(m-1)M}{m'} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Xét $n > max\{m, m'\}$. ta có.

$\frac{|\sum_{i=1}^{n} c_i|}{n} \leq \frac{\sum_{i=m}^{n} |c_i|}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{m-1} |c_i|}{n} < \frac{(n-m+1)\frac{\varepsilon}{2}}{n} + \frac{(m-1)M}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{(m-1)M}{m'} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$ o đó theo định nghĩa $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|\sum_{i=1}^{n} c_i|}{n} = 0$.

$$\frac{x_n^2}{n} = \frac{\left(x_n^2 - x_{n-1}^2\right) + \left(x_{n-1}^2 - x_{n-2}^2\right) + \ldots + \left(x_2^2 - x_1^2\right) + x_1^2}{n} = \frac{c_1 + c_2 + \ldots + c_n}{n} + 2$$. suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{x_n^2} = \frac{1}{2}$..

Nếu $\alpha = -2$ thì $n.x_n^{\alpha} = n.x_n^{-2} \to \frac{1}{2}$ khi $n \to +\infty$.

Nếu $\alpha > -2$ thì $n.x_n^{\alpha} = x_n^{\alpha+2}.n.x_n^{-2} \to +\infty$ khi $n \to +\infty$.

Nếu $\alpha < -2$ thì $n.x_n^{\alpha} = x_n^{\alpha+2}.n.x_n^{-2} \to 0$ khi $n \to +\infty$.

Bài 3. Cho hai số a_1, b_1 với $0 < b_1 = \sqrt{a_1} < 1$.Lập hai dãy số (a_n), (b_n) với $n = 1, 2, \ldots$Theo quy tắc sau: giải nghĩa cái đó là:. $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, $b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}.b_n}$. Tính: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Hướng dẫn giải

Tính a_2, b_2 với $0 < b_1 = \sqrt{a_1} < 1$ta có thể chọn $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ sao cho: $b_1 = cosa$,.

Suy ra $a_1 = cos^2 a$.

$$a_2 = \frac{1}{2}(\cos^2 a + \cos a) = \frac{1}{2}\cos a(\cos a + 1) = \cos a.\cos^2\frac{a}{2}.$$

$$b_2 = \sqrt{\cos a.\cos^2\frac{a}{2}.\cos a} = \cos a.\cos\frac{a}{2}.$$

Bằng quy nạp, chứng minh được:.

$$a_n = \cos a.\cos\frac{a}{2}...\cos\frac{a}{2^{n-1}}\cos\frac{a}{2^{n-1}} \quad (1)\ b_n = \cos a.\cos\frac{a}{2}...\cos\frac{a}{2^{n-1}} \quad (2).$$

Nhân hai vế của (1) và (2) cho $\sin\dfrac{a}{2^{n-1}}$ và áp dụng công thức $\sin 2a$ được:.

$$a_n = \frac{\sin 2a.\cos\dfrac{a}{2^{n-1}}}{2^n.\sin\dfrac{a}{2^{n-1}}}, \quad \mathrm{b_n} = \frac{\sin 2a}{2^n.\sin\dfrac{a}{2^{n-1}}}.$$

Tính giới hạn:.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\sin 2a}{2a}, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{\sin 2a}{2a}.$$

Bài 4. Cho dãy số $(a_n), a_1 = 1$ và $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}$.Chứng minh: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

$$a_{k+1}^2 = a_k^2 + \frac{1}{a_k^2} + 2 \Rightarrow \sum_{i=2}^{n} a_i^2 = \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{a_j^2} + 2(n-1)..$$

$$a_n^2 = 2n - 1 + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{a_j^2}.\text{Vậy } a_n > \sqrt{2n-1},\ \forall \mathrm{n} \ge 2..$$

$$a_k^2 > 2k - 1\ \ \forall \mathrm{k} \ge 2 \Rightarrow \frac{1}{\mathrm{a_k^4}} < \frac{1}{(2\mathrm{k}\text{-}1)^2} < \frac{1}{(2\mathrm{k}\text{-}1)^2 - 1} = \frac{1}{4\mathrm{k}(\mathrm{k}+1)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right).$$

$$\text{Suyra: } \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{a_k^4} < \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{n-1}) < \frac{1}{4} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{a_j^4} < 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

$$\text{Suyra: } \sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{a_j^2} \le \sqrt{(n-1)\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{a_j^4}} < \sqrt{(n-1)\frac{5}{4}} \quad (\mathrm{n} \ge 2)..$$

$$\text{Vậy: } a_n^2 < 2n - 1 + \frac{\sqrt{5(n-1)}}{2} \quad (\mathrm{n} \ge 2).$$

Suyra: $n \ge 2$; $\sqrt{2n-1} < a_n < \sqrt{2n-1+\frac{\sqrt{5(n-1)}}{2}} \Rightarrow \sqrt{2-\frac{1}{n}} < \frac{a_n}{\sqrt{n}} < \sqrt{2n-1+\frac{\sqrt{5(n-1)}}{2}}$.

Dođó: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} \sqrt{2}$.

Bài 5. Cho hai số a_1, b_1 với $a_1 = \cos^2\frac{\pi}{8}$, $b_1 = \cos\frac{\pi}{8}$. Lập hai dãy số $(a_n),(b_n)$ với $n = 1,2,...$ theo quy tắc sau:. $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, $b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}.b_n}$. Tính: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Hướng dẫn giải

+Tính a_2, b_2 :.

$$a_2 = \frac{1}{2}(\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{8}(\cos x\frac{\pi}{8} + 1) = \cos\frac{\pi}{8}.\cos^2\frac{\pi}{16}.$$

$$b_2 = \sqrt{\cos\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{8}} = \cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}.$$

+ Bằng quy nạp, chứng minh được:.

$$a_n = \cos\frac{\pi}{2.4}\cos\frac{\pi}{2^2.4}...\cos\frac{\pi}{2^n.4}\cos\frac{\pi}{2^n.4} \quad (1)\ b_n = \cos\frac{\pi}{2.4}\cos\frac{\pi}{2^2.4}...\cos\frac{\pi}{2^n.4} \quad (2).$$

+Nhân hai vế của (1) và (2) cho $\sin\frac{\pi}{2^n.4}$ và áp dụng công thức $\sin 2a$ được:.

$$a_n = \frac{\sin\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{2^n.4}}{2^n.\sin\frac{\pi}{2^n.4}}, \quad b_n = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{2^n.\sin\frac{\pi}{2^n.4}}.$$

+Tính giới hạn:.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{4\sin\frac{\pi}{4}}{\pi}, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{4\sin\frac{\pi}{4}}{\pi}.$$

Bài 6. Cho dãy số (u_n) biết:.

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^{\ 2}} \end{cases}, \forall n \in N^*.$$

Hãy tính $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\sqrt{n})$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $u_1 > 0 \Rightarrow u_n > 0, \forall n \in N^*$.

$$un + 1 - un = u_n/(1+u_n^2) - un = (-u_n^3)/(1+u_n^2) < 0 \quad \forall n \in N^*.$$