CHUYÊN ĐỀ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI

Bài 1. Xét các hình chóp n – giác $S.A_1A_2...A_n$ (n là số tự nhiên tùy ý lớn hơn 2) thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

a/ Đáy $A_1A_2...A_n$ có tất cả các cạnh đều bằng 1.

b/ $\mathrm{SA_1A_2} = \mathrm{SA_2A_3} = ... = \mathrm{SA_nA_1} = 60^0$

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất độ dài đường cao SH của hình chóp nêu trên.

Hướng dẫn giải

Chứng minh nếu hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ tồn tại thì khi đó hình chóp là đều:

Chứng minh rằng các cạnh bên bằng nhau

Đặt : $SA_1 = x_1$; $SA_2 = x_2$; ..... ; $SA_n = x_n$.

Dùng định lý cosin trong các tam giác SA_1A_2; SA_2A_3; ...; SA_nA_1 ta có:

$$x_2^2 = 1 + x_1^2 - 2x_1\cos 60^0 = 1 + x_1^2 - x_1$$

$$x_3^2 = 1 + x_2^2 - 2x_2\cos 60^0 = 1 + x_2^2 - x_2$$

....

$$x_n^2 = 1 + x_{n-1}^2 - 2x_{n-1}\cos 60^0 = 1 + x_{n-1}^2 - x_{n-1}$$

$$x_1^2 = 1 + x_n^2 - 2x_n\cos 60^0 = 1 + x_n^2 - x_n.$$

Đặt $f(x) = x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$, ta có hệ: $\begin{cases} x_2^2 = f(x_1) \\ x_3^2 = f(x_2) \\ .... \\ x_n^2 = f(x_{n-1}) \\ x_1^2 = f(x_n) \end{cases}$ với $x_1, x_2, ..., x_n \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$

Trên $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$ $f(x)$ đồng biến.

Do đó: $x_1 \neq x_2$ thì vô lý.

Thật vậy: nếu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow \mathrm{x}_2^2 < \mathrm{x}_3^2 \Rightarrow \mathrm{x}_2 < \mathrm{x}_3 \Rightarrow ... \Rightarrow \mathrm{x}_n < \mathrm{x}_1$. Ta có $x_1 < x_1$ (vô lý)

Tương tự nếu $x_1 > x_2$ cũng suy ra điều vô lý: $x_1 > x_1$. Vậy $x_1 = x_2$.

Do $x_1 = x_2$ ta được $x_1^2 = x_1^2 - x_1 + 1 \Leftrightarrow x_1 = 1$. Từ đó ta được: $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$.

Chứng minh đáy $A_1A_2...A_n$ là đa giác đều. Từ $SA_1 = SA_2 = ... = SA_n = 1$ suy ra hình vuông góc H của S lên đáy cách đều các đỉnh của đáy. Đa giác $A_1A_2...A_n$ có các cạnh bằng nhau và nội tiếp trong một đường tròn nên là đa giác đều.

a) Tìm SH lớn nhất, nhỏ nhất.

b) Chứng minh $n < 6$ .Ta có các mặt bên của hònh chóp là các tam giác đều cạnh 1.

Ngoài ra: $60^0 = A_1SA_2 < A_1HA_2$; $60^0 = A_2SA_3 < A_2HA_3$; ...; $60^0 = A_nSA_1 < A_nHA_1$.

Do đó: $n.60^0 < 360^0 \Leftrightarrow n < 6 \quad (n > 2)$.

- Tính SH và tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của SH :

Xét tam giác vuông SHA_1: $SH^2 = SA_1^2 - HA_1^2 . SA_1 = 1; HA_1 = \dfrac{1}{2\sin\dfrac{\pi}{n}}$.

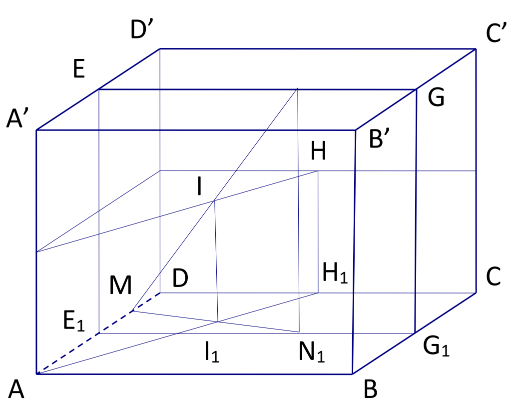
$$SH^2 = 1 - \frac{1}{4\sin^2\dfrac{\pi}{n}} = 1 - \frac{1}{4}\left(1 + \cot g^2\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(3 - \cot g^2\frac{\pi}{4}\right),\ SH = \frac{1}{2}\sqrt{3 - \cot g^2\frac{\pi}{4}}\ \ n = 3; 4; 5.$$

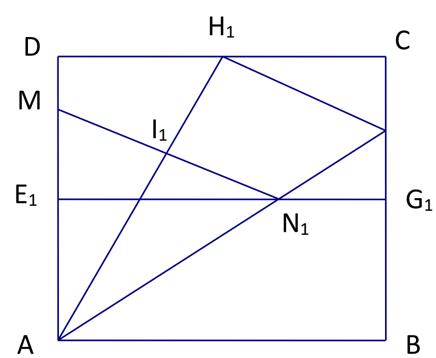
$n = 3:\ SH = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$; $\quad n = 4:\ SH = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\quad n = 5:\ SH = \sqrt{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{5}}}$.

- Do đó giá trị lớn nhất của SH là $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, giá trị nhỏ nhất của SH là $\sqrt{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{5}}}$.

Bài 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a .Gọi $E,\ G,\ K$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'D',\ B'C'$ và AA'. H là tâm của hình vuông $DCDC'$. $M,\ N$ là hai điểm lần lượt ở trên hai đường thẳng AD và EG sao cho MN vuông góc với KH và cắt KH .Tính độ dài đoạn MN theo a.

Hướng dẫn giải





<u>Xác định đoạn MN</u>

Gọi $E_1,\ N_1,\ G_1,\ H_1$ là hình chiếu vuông góc của $E,\ N,\ G,\ H$ trên mặt phẳng $(ABCD)$.
Do $KH \perp MN$ (gt) và K $KH \perp NN_1$ suy ra $KH \perp MN_1$, suy ra $AH_1 \perp MN_1$ tại I_1.
Mà theo giả thiết MN cắt KH tại I suy ra $II_1 \,//\, NN_1$ mà I là trung điểm của đoạn MN nên I_1 phải là trung điểm của MN_1.
Từ đó suy ra cách dựng hai điểm M, N.
<u>Tính độ dài </u>MN

Đặt $\alpha = DAH_1 \Rightarrow H_1AN_1 = E_1N_1M = \alpha$.
Xét tam giác vuông DAH, ta có: $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow tg\alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \cos 2\alpha = \dfrac{3}{5} \Rightarrow AN_1 = \dfrac{AE_1}{\cos 2\alpha} = \dfrac{5}{6}a$.
Xét tam giác vuông AIN_1, ta có: $IN_1 = AN_1.\sin\alpha = \dfrac{5}{6}a.\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{6} \Rightarrow MN_1 = \dfrac{a\sqrt{5}}{3}$.

(Cách khác: Gọi P là trung điểm của CG_1, suy ra được N_1 ở trên AP, suy ra $E_1N_1 = \dfrac{2}{3}a$.)

$$MN_1 = \frac{E_1N_1}{\cos\alpha} = \frac{a\sqrt{5}}{3} \Rightarrow MN^2 = NN_1^2 + MN_1^2 = a^2 + \frac{5}{9}a^2 = \frac{14}{9}a^2 \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{14}}{3}.$$

<u>**Cách khác:**</u> Dùng phương pháp tọa độ trong không gian....

Bài 3. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy $a = 12,54\,(cm)$,các cạnh bên nghiên với đáy một góc $\alpha = 72^0$. Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình chóp $S.ABCD$.

Hướng dẫn giải

Chiều cao của hình chóp: $SH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}tg72^0 \approx 27,29018628$

Thể tích của hình chóp: $V = \dfrac{1}{3}a^2h \approx 1430,475152\left(cm^3\right)$
Trung đoạn của hình chóp
$d = \sqrt{SH^2 + \dfrac{a^2}{4}} \approx 28,00119939$

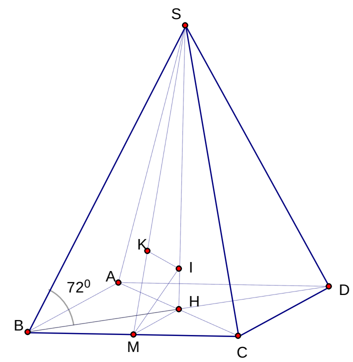
Diện tích xung quanh của hình chóp: $S_{xq} = \dfrac{1}{2}.4a.d \approx 702,2700807\left(cm^2\right)$

Bài 4. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy $a = 12,54\,(cm)$, $a = 12,54\,(cm)$,các cạnh bên nghiên với đáy một góc $\alpha = 72^0$.
a) Tính thể tích hình cầu (S_1) nội tiếp hình chóp $S.ABCD$.

b) Tính diện tích của hình tròn thiết diện của hình cầu (S_1) cắt bởi mặt phẳng đi qua các tiếp điểm của mặt cầu (S_2) với các mặt bên của hình chóp $S.ABCD$.

Hướng dẫn giải

$SH = 27.29018628;\ IH = \dfrac{SH.MH}{MH+MS} = 4.992806526 = R$ (bán kính mặt cầu nội tiếp)

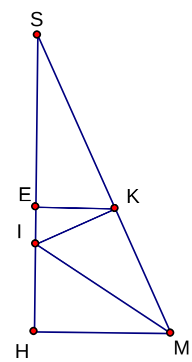


Thể tích hình chóp (S_1) : $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \approx 521.342129\,(cm^3)$

$SM \approx 28,00119939$

$MH = 6,27;\ IK = IH$

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng đi qua các tiếp điểm của (S_1) với các mặt bên của hình chóp:



$d = EI = \dfrac{IH^2}{SH - IH} = 4.866027997$

Bán kính đường tròn giao tuyến: $r = EK = \sqrt{R^2 - d^2} \approx 1,117984141$

Diện tích hình tròn giao tuyến: $S \approx 74,38733486\,(cm^2)$

Bài 5. Một thùng hình trụ có đường kính đáy (bên trong) bằng $12,24(cm)$ đựng nước cao lên $4,56(cm)$ so với mặt trong của đáy. Một viên bi hình cầu được thả vào trong thùng thì mực nước dâng lên sát với điểm cao nhất của viên bi (nghĩa là mặt nước là tiếp diện của mặt cầu). Hãy tính bán kính của viên bi.

Hướng dẫn giải

Ta có phương trình : $\pi R^2 h + \dfrac{4}{3}\pi x^3 = \pi R^2.2x \Leftrightarrow 4x^3 - 6R^2x + 3R^2h = 0 \quad (0 < x < R)$

Với $R,\ x,\ h$ lần lượt là bán kính đáy của hình trụ, hình cầu và chiều cao ban đầu của cột nước.

Bấm máy giải phương trình: $4x^3 - 224,7264x + 512,376192 = 0\,(0 < x \le 6,12)$

Ta có: $x_1 \approx 2,588826692;\quad x_2 \approx 5,857864771$

$(AB): 5x - 3y + 8 = 0;\ (AC): 3x - 8y + 42 = 0;$

$(BC): 2x + 5y - 3 = 0$

B. Xét hai độ dài khác nhau $a,\ b$. Tìm điều kiện của $a,\ b$ để tồn tại tứ diện (T) có một cạnh bằng a và các cạnh còn lại đều bằng b .Với tứ diện (T) này, hãy xác định mặt phẳng (α) sao cho thiết diện của mặt phẳng (α) và tứ diện (T) là một hình vuông (V) .Tính diện tích của hình vuông (V) theo a và b.

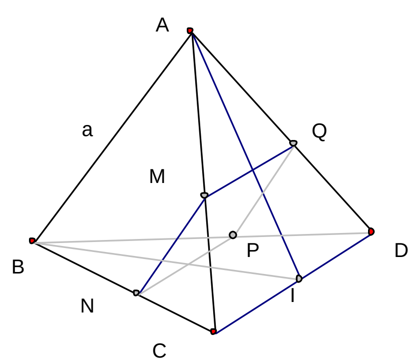
Điều kiện độ dài $\underline{a,\ b}$:

+ Giả sử tứ diện (T) tồn tại. Gọi AB là cạnh bằng a, các cạnh $AC,\ AD,\ BC,\ BD,\ CD$ đều cùng bằng b .
Gọi I là trung điểm cạnh CD .Tam giác AIB là tam giác cân:

$AB = a;\ AI = BI = \dfrac{b\sqrt{3}}{2}$. Từ $AB < AI + BI$ Suy ra: $0 < a < b\sqrt{3}$

+Ngược lại với: $0 < a < b\sqrt{3}$ .Dựng tam giác đều BCD cạnh b với chiều cao BI .

Dựng tam giác cân AIB có $AB = a$, nằm trong mặt phẳng chứa BI và vuông góc với mặt phẳng (BCD).Ta có: $A \notin \text{ mp}(BCD)$. Tứ diện $ABCD$ thỏa điều kiện bài toán.



Xác định mặt phẳng (α):

+ Giả sử thiết diện $MNPQ$ là hình vuông . Các mặt của tứ diện (T) lần lượt chứa các đoạn giao tuyến $MN,\ NP,\ PQ,\ QM$ được gọi tên là mặt (I) , mặt (II), mặt (III), mặt (IV).