CHUYÊN ĐỀ CHỌN LỌC TOÁN 6

ÔN TẬP VÀ BỔ TÚC VỀ SỐ TỰ NHIÊN

Chuyên đề 1: TẬP HỢP CÁC SỐ TỰ NHIÊN

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Tập hợp. Tập hợp con

- Tập hợp là một khái niệm cơ bản của Toán học. Để kí hiệu một tập hợp, ta dung các chữ cái in hoa A, B, … còn để viết một tập hợp, ta có thể sử dụng một trong hai cách:

- Liệt kê các phần tử của tập hợp.
- Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.

- Một tập hợp có thể có một phần tử, nhiều phần tử,vô số phần tử nhưng cũng có thể không có phần tử nào. Tập hợp không có phần tử nào gọi là *tập rỗng*, kí hiệu là $\varnothing$. Để minh họa một tập hợp cùng các phần tử của nó, người ta dùng biểu đồ Ven.

- Nếu mọi phần tử của tập hợp A đều thuộc tập hợp B thì ta nói A là *tập hợp con* của B. kí hiệu: $A \subset B$.

- Hai tập hợp A và B gọi là bằng nhau nếu mọi phần tử của tập hợp A đều thuộc tập hợp B và ngược lại. Kí hiệu: A = B.

- Một số tính chất:

- Với mọi tập hợp A, ta có: $\varnothing \subset A$ và $A \subset A$.
- Nếu $A \subset B$ và $B \subset A$ thì A = B.
- Nếu $A \subset B$ và $B \subset C$ thì $A \subset C$ (tính chất bắc cầu).

2. Tập hợp các số tự nhiên

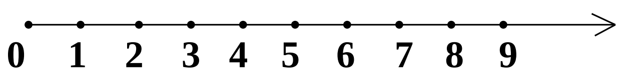
- Tập hợp các số tự nhiên được kí hiệu là N.

$$N = \{0; 1; 2; 3; 4;\dots\}$$

Tập hợp các số tự nhiên khác 0 kí hiệu là N^*.

$$N^* = \{1; 2; 3; 4;\dots\}$$

- Tia số tự nhiên:



Mỗi số tự nhiên được biểu diễn bởi một điểm trên tia số. Điểm biểu diễn số tự nhiên a trên tia số gọi là điểm *a*.

- Để ghi số tự nhiên trong hệ thập phân, ta dùng 10 chữ số là: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.

Trong hệ La Mã, ta dùng bảy kí hiệu: I, V, X, L, C, D, M với giá trị tương ứng trong hệ thập phân lần lượt là: 1; 5; 10; 50; 100; 500; 1000.

- Thứ tự trong tập hợp số tự nhiên: Với hai số tự nhiên a và b bất kì, xảy ra một trong ba khả năng sau: $a < b$; $a = b$; $a > b$.

Nếu $a < b$ thì trên tia số tự nhiên, điểm a nằm bên trái điểm *b*.

II. MỘT SỐ VÍ DỤ

Dạng 1. *Viết tập hợp, tập hợp con và sử dụng các kí hiệu* $\in$, $\notin$, $\subset$

Ví dụ 1: Cho hai tập hợp A = {1; 2; 4; 5; 7; 9} và B = {2; 3; 5; 6; 7}.

a) Viết tập hợp C gồm các phần tử thuộc tập hợp A mà không thuộc tập hợp B.

b)Viết tập hợp D gồm các phần tử thuộc tập hợp B mà không thuộc tập hợp A.

c) Viết tập hợp E gồm các phần tử thuộc cả hai tập hợp A và B.

d) Viết tập hợp G gồm các phần tử hoặc thuộc tập hợp A hoặc thuộc tập hợp B.

Giải

a) Ta thấy phần tử $1 \in A$ mà $1 \notin B$, do đó $1 \in C$. Tương tự, ta cũng có: $4; 9 \in C$

Vậy C = {1; 4; 9}

b) Làm tương tự câu a), ta có: D = {3; 6}

c) Ta thấy phần tử 2 vừa thuộc A, vừa thuộc B nên $2 \in E$. Tương tự, ta có: $5; 7 \in E$.

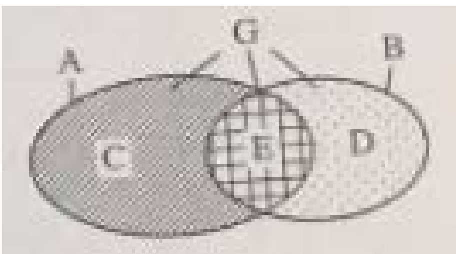
Vậy E = {2; 5; 7}.

d) Ta thấy phần tử $1 \in A$ nên $1 \in G$; $3 \in B$ nên $3 \in G$; …

Vậy G = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 9}

Nhận xét:

Tập hợp C gồm những phần tử thuộc tập hợp A, trừ những phần tử của A mà cũng thuộc B. Trên biểu đồ Ven, tập hợp C có minh họa là miền gạch chéo. Kí hiệu: C = A \ B (đọc là C là *hiệu* của A và B).



Tương tự, tập hợp D có minh họa là miền chấm D = B \ A (đọc là: D là *hiệu* của B và A).

Tập hợp E gồm những phần tử chung của hai tập hợp A và B. Trên biểu đồ Ven, E có minh họa là miền kẻ carô. Kí hiệu: E = A $\cap$ B (đọc là: E là *giao* của A và B).

Tập hợp G gồm những phần tử hoặc thuộc A, hoặc thuộc B nên có minh họa là cả hai vòng kín. Kí hiệu: G = A $\cup$ B (đọc là: G là *hợp* của A và B).

Ví dụ 2. Cho tập hợp A = {a, b, c}. Hỏi tập hợp A có tất cả bao nhiêu tập hợp con?

Giải

Tập hợp con của A không có phần tử nào là: $\varnothing$

Các tập hợp con của A có một phần tử là: {a}, {b}, {c}

Cấc tập hợp con của A có hai phần tử: {a, b}, {b, c}, {c, a}

Tập hợp con của A có ba phần tử là: {a, b, c}

Vậy A có tất cả tám tập hợp con.

Nhận xét:

Để tìm các tập hợp con của một tập hợp có n phần tử ($n \in$ N), ta lần lượt tìm các tập hợp con có 0; 1; 2; 3; …; *n* phần tử của tập hợp đó.

Tập hợp A	Các tập hợp con của A	Số tập hợp con của A
$\varnothing$ (n = 0)	$\varnothing$	1
{a} (n = 1)	$\varnothing$; {a}	2 = 2
{a, b} (n = 2)	$\varnothing$; {a}; {b}; {a, b}	4 = 2.2
{a, b, c} (n = 3	$\varnothing$; {a}; {b}; {c}; {a, b}; {b, c}; {c, a}; {a, b, c}	8 = 2.2.2
…		

Từ đó ta rút ra kết luận sau:

- Tập hợp rỗng chỉ có một tập hợp con duy nhất là chính nó.

- Tập hợp có n phần tử $(n \geq 1)$ thì có $\underbrace{2.2...2}_{n\ thua\ số\ 2}$ tập hợp con.

Dạng 2: ***Tính số phần tử của một tập hợp***

Ví dụ 3. Cho A là tập hợp các số tự nhiên lẻ có ba chữ số. Hỏi A có bao nhiêu phần tử?

Giải

Khi liệt kê các phần tử của tập hợp A theo giá trị tăng dần ta được một dãy số cách đều có khoảng cách 2:

101; 103; 105; …; 999

Từ đó, số phần tử của tập hợp A bằng số các số hạng của dãy số cách đều:

(999 – 101):2 + 1 = 898:2 + 1 = 450

Vậy tập hợp A có 450 phần tử.

Ví dụ 4. Cho A là tập hợp các số tự nhiên lẻ lớn hơn 5 và không lớn hơn 79.

a) Viết tập hợp A bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng của các phần tử.

b) Giả sử các phần tử của A được viết theo giá trị tăng dần. Tìm phần tử thứ 12 của A.

Giải

a) Số tự nhiên n lớn hơn 5 và không lớn hơn 79 là số thỏa mãn điều kiện: $5 < n \leq 79$.

Vậy ta có: $A = \{n \in N |\ n$ lẻ và $5 < n \leq 79\}$.

b) Khi giá trị của n tăng dần thì giá trị các phần tử của A tạo thành một dãy số cách đều tăng dần (bắt đầu từ số 7, khoảng cách giữa hai số lien tiếp là 2). Giả sử phần tử thứ 12 của A là x thì ta có:

$(x – 7): 2 + 1 = 12$

$\Rightarrow \quad (x – 7): 2 = 11$

$\Rightarrow \quad (x – 7) = 11.2 = 22$

$\Rightarrow \quad x = 22 + 7 = 29$

Vậy phần tử thứ 12 cần tìm của A là 29

Nhận xét:

Số phần tử của tập hợp A là: (79 – 7): 2 + 1 = 37 nên A có phần tử thứ mười hai.

Ở câu b), ta có thể viết tập hợp A dưới dạng liệt kê các phần tử cho tới phần tử thứ mười hai. Tuy nhiên cách này có nhược điểm là ta phải liệt kê được tất cả các phần tử đứng trước phần tử cần tìm. Vậy với cách làm này, bài toán yêu cầu tìm phần tử ở vị trí càng lớn thì sẽ càng khó khăn.

Dạng 3. *Đếm số chữ số*

Ví dụ 5. Cần bao nhiêu số để đánh số trang (bắt đầu từ trang 1) của một cuốn sách có 1031 trang?

Giải

Ta chia số trang của cuốn sách thành 4 nhóm:

- Nhóm các số có một chữ số (từ trang 1 đến trang 9): Số chữ số cần dùng là 9.

- Nhóm các số có hai chữ số (từ trang 10 đến trang 99): Số trang sách là:

(99 – 10) : 1 + 1 = 90 số. Số chữ số cần dùng là 90.2 = 180.

- Nhóm sốc các số có ba chữ số (từ trang 100 đến trang 999): Số trang sách là: (999-100):1+1 = 900. Số chữ số cần dùng để đánh số trang nhóm nay là: 900.3 = 2700.

- Nhóm các số có bốn chữ số (từ trang 1000 đến trang 1031): Số trang sách là: (1031 – 1000) : 1 + 1 = 32. Số chữ số cần dung là: 32.4 = 128

Vậy tổng số chữ số cần dùng để đánh số trang của cuốn sách đó là:

9 + 180 + 2700 + 128 = 3017.

Nhận xét:

Việc chia các số trang thành các nhóm giúp chúng ta dễ dàng tính được số chữ số cần dùng trong mỗi nhóm, từ đó tính được tổng số chữ số cần dùng. Một câu hỏi ngược lại là: Nếu ta biết số chữ số cần dùng để đánh số trang của một cuốn sáchthì ta có thể tìm được số trang của cuốn sách đó hay không? Ta có *bài toán ngược* của ví dụ trên.

Ví dụ 6. Tính số trang sách của một cuốn sách biết rằng để đánh số trang của cuốn sách đó (bắt đầu từ trang 1) cần dung đúng 3897 chữ số.

Giải

Để đánh các số trang có một chữ số (từ trang 1 đến trang 9), cần 9 chữ số.

Để đánh các số trang có hai chữ số (từ trang 10 đến trang 99, gồm 90 trang), cần 90.2 = 180 chữ số.

Để đánh các số trang có ba chữ số (từ trang 100 đến trang 999, gồm 900 trang), cần 900.3 = 2700 chữ số

Vì 9 + 180 + 2700 = 2889 < 3897 nên cuốn sách có nhiều hơn 999 trang, tức là số trang của cuốn sách có nhiều hơn ba chữ số. Số chữ số còn lại là: 3897 – 2889 = 1008.

Vì để đánh tất cả các số trang có bốn chữ số (từ trang 1000 đến trang 9999, gồm 9000 trang), cần 9000.4 = 36000 chữ số (vượt quá 1008 chữ số), nên số trang của cuốn sách là số có bốn chữ số.

Giả sử cuốn sách có *n* trang mà số trang có bón chữ số. Số chữ số cần dùng để đánh *n* trang này là 4.*n*. Ta có: 4.*n* = 1008, suy ra *n* = 1008 : 4 = 252. Vì các trang này bắt đầu từ trang 1000 nên trang cuối cùng sẽ là 252 + 999 = 1251.

Vậy cuốn sách có 1251 trang

Nhận xét:

Trong cách giải trên, ta xét lần lượt nhóm các số trang có một chữ số, hai chữ số, … cho đến khi dùng hết chữ số mà bài cho. Vậy làm thế nào để biết số trang của cuốn sách có bao nhiêu chữ số?

Sau đây là một số gợi ý:

Số chữ số dùng để đánh số trang	**Số trang của cuốn sách (*n*)**
Từ 1 đến 99 (kí hiệu: $1 \to 9$)	$n \le 9$
$10 \to 189$	$10 \le n \le 99$
$190 \to 2889$	$100 \le n \le 999$
$2890 \to 38889$	$1000 \le n \le 9999$
$38889 \to 488889$	$10000 \le n \le 99999$
…	

Với gợi ý trên, từ quy luật của phạm vi số các chữ số được cho ta có thể suy ra phạm vi số trang của cuốn sách. Chẳng hạn, nếu số chữ số được cho là 16789432, nằm trong phạm vi từ 5888890 đến 68888889, thì số trang cuối cùng của cuốn sách là số có bảy chữ số.

Dạng 4. *Các bài toán về cầu tạo số*

Ví dụ 7. Tìm một số có hai chữ số biết rằng khi viết thêm chữ số 0 vào giữa hai chữ số của số đó thì được số mới gấp 7 lần số đã cho.

Giải

Gọi số có hai chữ số cần tìm là $\overline{ab}$ $(0 < a \le 9; 0 \le b \le 9)$.

Khi viết thêm chữ số 0 vào giữa hai chữ số ta được số mới là $\overline{a0b}$.

Theo bài ra, ta có:

$$\begin{aligned} \overline{a0b} &= 7.\overline{ab} \\ 100.a + b &= 7.(10.a + b) \\ 100.a + b &= 70.a + 7.b \\ 30.a &= 6.b \\ 5.a &= b. \end{aligned}$$

Vì a, b là các chữ số và $a \neq 0$ nên suy ra $a = 1$; $b = 5$.

Vậy số cần tìm là 15.

Nhận xét:

Trong ví dụ trên ta đã sử dụng phương pháp *tách cấu tạo số theo các chữ số* trong hệ thập phân. Sauk khi tìm được mối quan hệ giữa các chữ số, ta xác định được cụ thể từng chữ số.

Ví dụ 8. Tím số có ba chữ số biết rằng nếu viết thêm chữ số 1 vào trước số đó thì được số mới gâó 9 lần số ban đầu.

Giải

Gọi số có ba chữ số cần tìm là $x = \overline{abc}\left(0 < a \leq 9; 0 \leq b \leq 9\right)$

Khi viết thêm số 1 trước số x ta được số mới là $\overline{1abc}$.

Theo bài ra, ta có: $\overline{1abc} = 9.\overline{abc}$

$1000 + \overline{abc} = 9.\overline{abc}$ hay $1000 + x = 9.x$

$1000 = 8.x$

Suy ra: $x = 1000 : 8 = 125$

Vậy số cần tìm là 125.

Nhận xét:

Ở ví dụ này ta không tách cấu tạo số cần tìm theo các chữ số mà *tách theo cụm chữ số.* Ta thấy số viết thêm không làm thay đổi cụm chữ số $\overline{abc}$ nên ta giữ nguyên cụm chữ số này trong quá trình tách cấu tạo số.

Ví dụ 9. Tìm tất cả các số tự nhiên khác 0, sao cho khi viết thêm chữ số 0 vào giữa chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị thì số đó được gấp lên 9 lần.

(Đề thi HSG tỉnh Yên Bái, 2005)

Nhận xét:

Ta chưa biết số phải tìm có bao nhiêu chữ số, nhưng từ đề bài ta thấy nó có ít nhất hai chữ số. Từ đó ta gọi bộ phận số đứng trước chữ số hàng chục là x (x có thể bằng 0), sử dụng phương pháp tách cấu tạo số theo các chữ số và cụm chữ số, ta có lời giải như sau:

Giải

Gọi số cần tìm là $\overline{xab}$, trong đó: a, b là các chữ số; $x \in$ **N.**

Khi viết thêm chữ số 0 vào giữa chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị ta được số mới là $\overline{xa0b}$

Theo đề bài, ta có:

$$\overline{xa0b} = 9.\overline{xab}$$
$$1000.x + 100.a + b = 9.(100.x + 10.a + b)$$
$$1000.x + 100.a + b = 900.x + 90.a + 9.b$$
$$100.x + 10.a = 8.b$$
$$50.x + 5.a = 5.b$$

Vì $b \le 9$ nên $4.b \le 4.9 = 36$, do đó: $50.x + 5.a \le 36 \Rightarrow x = 0$

Khi đó số cần tìm là $\overline{ab}$, với $5.a = 4.b$

Vì $a \ne 0$ và a, b là các chữ số nên ta có $a = 4$. Từ đó suy ra $b = 5$.

Vậy số cần tìm là 45.

III. BÀI TẬP.

1.1. Cho tập hợp A = $\{1;2;3;4\}$. Trong các cách viết sau, cách viết nào đúng? Cách viết nào sai? Nếu sai, hãy sửa lại cho đúng.

$a)\ 1 \in A$ $\quad b)\ \{1\} \in A$ $\quad c)\ 3 \subset A$ $\quad d)\ \{2;3\} \subset A$

1.2. Cho hai tập hợp: A = $\{2;3;7;8\}$, B = $\{1;3;5;7;9\}$.

a) Mỗi tập hợp trên có bao nhiêu phần tử?

b) Viết tất cả các tập hợp vừa là tập con của A , vừa là tập con của B

1.3. Viết các tập hợp sau và cho biết mỗi tập hợp có bao nhiêu phần tử?

a) Tập hợp A các số tự nhiên x mà $15 - x = 7$;

b) Tập hợp B các số tự nhiên y mà $19 - y - 21$.

1.4. Tính số phần tử của các tập hợp sau:

a) A = $\{10;12;14;...;98\}$

b) B = $\{10;13;16;19;...;70\}$

1.5. Cho dãy số 2;7;12;17;22;…

a) Nêu quy luật của dãy số trên.

b) Viết tập hợp B gồm 5 số hạng liên tiếp của dãy số đó, bắt đầu từ số hạng thứ năm.

c) Tính tổng 100 số hạng đầu tiên của dãy số.

1.6. Hãy viết lại mỗi tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử:

A = $\{x \in \mathbf{N}; x$ lẻ và $30 < x < 50\}$

B = $\{x \in \mathbb{N};\ x \vdots 5;\ x \vdots 2; x < 90\}$

1.7. Mẹ mua cho Hà một quyển sổ tay 256 trang. Để tiện theo dõi Hà đánh số trang từ 1 đến 256. Hỏi hà đã phải viết bao nhiêu chữ số để đánh số trang hết cuốn sổ ta đó?

1.8. Người ta viết liền nhau các số tự nhiên 123456…..

a) Hỏi các chữ số đơn vị của các số 53; 328; 1587 đứng ở hang thứ bao nhiêu?

b) Chữ số viết ở hang thứ 427 là chữ số nào?

1.9. Cho bốn chữ số *a, b, c, d* đôi một khác nhau và khác 0. Tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số gồm cả bốn chữ số *a, b, c, d* có bao nhiêu phần tử?

1.10. Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà:

a) Trong số đó có ít nhất một chữ số 5?

b) Trong số đó chữ số hàng chục bé hơn chữ số hàng đơn vị?

c) Trong số đó chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị?

1.11. Với hai chữ số I, V có thể viết được bao nhiêu số La mã (theo cách viết thông thường)? Số nhỏ nhất là số nào? Số lớn nhất là số nào?

1.12. Mỗi tập hợp sau đây có bao nhiêu phần tử?

a) Tập hợp các số có hai chữ số được lập nên từ hai số khác nhau.

b) Tập hợp các số có ba chữ số được lập nên từ ba chữ số đôi một khác nhau.

1.13. Tổng kết đợt thi đua lớp 6A có 45 bạn được 1 điểm 10 trở lên, 41 bạn được từ 2 điểm 10 trở lên, 15 bạn được từ 3 điểm 10 trở lên, 5 bạn được 4 điểm 10 trở lên. Biết không có ai đạt trên 4 điểm 10, hỏi trong đợt thi đua đó lớp 6A có bao nhiêu điểm 10?

1.14. Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, chữ số hàng đơn vị là 1. Nếu chuyển chữ số hàng đơn vị lên đầu thì được số mới nhỏ hơn số đã cho 2889 đơn vị.

1.15. Hiệu của hai số tự nhiên là 57. Chữ số hàng đơn vị của số bị trừ là 3. Nếu bỏ chữ số hàng đơn vị của số bị trừ ta được số trừ. Tìm hai số đó.

1.16. Tìm số có ba chữ số, biết rằng nếu viết các chữ số theo thứ tự ngược lại thì được một số mới lớn hơn số ban đầu 792 đơn vị.

1.17. Cho một số có hai chữ số. Nếu viết thêm chữ số 1 vào bên trái và bên phải số đó ta được số mới gấp 23 lần số đã cho. Tìm số đã cho.

1.18. Tìm một số có năm chữ số biết rằng nếu viết chữ số 7 đằng trước số đó thì được số lớn gấp 5 lần số có được bằng cách viết thêm chữ số 7 vào đằng sau chữ số đó.

1.19. Một số gồm ba chữ số có tận cùng là chữ số 7, nếu chuyển chữ số 7 đó lên đầu thì được một số mới mà khi chia cho số cũ thì được thương là 2 dư 21. Tìm số đó.

1.20. (*Đề thi HSG Hà Nội, 2005*)

a) Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số mà chữ số hàng đơn vị là 4?

b) Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số thỏa mãn có chữ số hàng đơn vị là 4 và chia hết cho 3?

Chuyên đề 2. PHÉP TOÁN TRONG TẬP HỢP CÁC SỐ TỰ NHIÊN

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Các tính chất cơ bản của phép cộng và phép nhân

- Tính chất gia hoán: $a+b=b+a;\ a.b=b.a$
- Tính chất kết hợp: $(a+b)+c=a+(b+c);\ (a.b).c=a.(b.c)$
- Cộng với số 0: $a+0=0+a=a$

  Nhân với số 1: $a.1=1.a=a$
- Tính chất phân phối: $a.(b+c)=a.b+a.c$

2. Điều kiện để thực hiện phép trừ $a-b$ là $a\ge b$

Tính chất phân phối của phép nhân đối với phép trừ:

$$a.(b-c)=a.b-a.c$$

3. Điều kiện để số a chia hết cho số $b\ne 0$ là tồn tại một số q sao cho: $a=b.q$

4. Phép chia có dư:

Chia số a cho số $b\ne 0$ ta có: $a=b.q+r$, trong đó số dư r thỏa mãn điều kiện $0\le r<b$.

$*$ ***Nhận xét:***

- $r\in\{0;1;2;...;b-1\}$, suy ra có b khả năng về số dư khi chia một số cho b.
- $a-r\ \vdots\ b$
- Nếu $a\ \vdots\ c$ và $b\ \vdots\ c$ thì $(a\pm b):c=a:c\pm b:c$
- Quan hệ chia hết có tính chất bắc cầu, tức là nếu $a\ \vdots\ b$ và $b\ \vdots\ c$ thì $a\ \vdots\ c$.

5. Lũy thừa với số mũ tự nhiên

a) ***Định nghĩa:*** $a^n=a.a.....a$ (n thừa số a) $(n\in\mathbb{N}^*)$ là một *lũy thừa* của a; a gọi là *cơ số*, n gọi là *số mũ*.

Quy ước: $a^1=a;\ a^0=1$ (với $a\ne 0$), 0^0 không có nghĩa.

b) Một số tính chất

- Nhân, chia hai lũy thừa cùng cơ số”

$a^m.a^n = a^{m+n} \quad (m, n \in \mathbb{N})$

$a^m : a^n = a^{m-n} \quad (m, n \in \mathbb{N}; m \geq n)$

- Lũy thừa của một lũy thừa: $(a^m)^n = a^{m.n} \quad (m, n \in \mathbb{N})$
- Lũy thừa của một tích: $(a.b)^n = a^n.b^n \quad (n \in \mathbb{N})$
- Lũy thừa tầng: $a^{m^n} = a^{(m^n)} \quad (m, n \in \mathbb{N})$

c) Số chính phương là số viết được dưới dạng bình phương của một số tự nhiên.

Ví dụ: $0 = 0^2; 1 = 1^2; 4 = 2^2; 25 = 5^2; 121 = 11^2; ....$ là các số chính phương.

6. Thứ tự thực hiện các phép tính

- Thứ tự thực hiện phép tính trong biểu thức không có dấu ngoặc:

Lũy thừa $\Rightarrow$ Nhân, chia $\Rightarrow$ Cộng, trừ.

- Thứ tự thực hiện phép tính trong biểu thức có dấu ngoặc:

$(\ ) \Rightarrow [\ ] \Rightarrow \{\ \}$

II. MỘT SỐ VÍ DỤ

Dạng 1. Thực hiện phép tính

Ví dụ 1. Thực hiện phép tính sau bằng cách hợp lí nhất.

a) $12.53 + 53.172 - 53.84$

b) $35.13 + 35.17 + 65.75 - 65.45$

c) $(3.4.2^{16})^2 : (11.2^{13}.4^{11} - 16^9)$

Giải

a) Ta có: $12.53 + 53.172 - 53.84 = 53.(12 + 172 - 84)$

$= 53.100 = 5300$

b) $35.13 + 35.17 + 65.75 - 65.45 = (35.13 + 35.17) + (65.75 - 65.45)$

$= 35.(13 + 17) + 65.(75 - 45)$

$= 35.30 + 65.30$

$= 30.(35 + 65)$

$$= 30.100 = 3000$$

c) Ta có: $\left(3.4.2^{16}\right)^2 = \left(3.2^2.2^{16}\right)^2 = \left(3.2^{18}\right)^2 = 3^2.\left(2^{18}\right)^2 = 3^2.2^{36}$

$$11.2^{13}.4^{11} - 16^9 = 11.2^{13}.\left(2^2\right)^{11} - \left(2^4\right)^9 = 11.2^{13}.2^{22} - 2^{36} = 11.2^{35} - 2^{36}$$

$$= 2^{35}.\left(11 - 2\right) = 2^{35}.9 = 2^{35}.3^2$$

Suy ra: $\left(3.4.2^{16}\right)^2 : \left(11.2^{13}.4^{11} - 16^9\right) = \dfrac{2^{36}.3^2}{2^{35}.3^2} = 2$

Nhận xét:

Trong câu a) và câu b), ta đã sử dụng tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng và phép trừ để tính hợp lí. Tuy nhiên, công thức thể hiện tính chất được viết lại là: $a.b + a.c - a.d = a.(b + c - d)$

Quy tắc này được gọi là quy tắc ***đặt thừa số chung.***

Dạng 2. So sánh

Ví dụ 2. So sánh:

a) 2011.2013 và 2012^2

b) $(3+4)^2$ và $3^2 + 4^2$

c) 2^{300} và 3^{200}

Giải

a) Ta có: $2013 = 2012 + 1$ và $2012 = 2011 + 1$

Suy ra: $2011.2013 = 2011.(2012 + 1) = 2011.2012 + 2011$

$$2012^2 = 2012.(2011 + 1) = 2012.2011 + 2012$$

Vì $2011 < 2012$ nên $2011.2013 < 2012^2$

b) Ta có: $(3+4)^2 = 7^2 = 49$ và $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

Vậy $(3+4)^2 > 3^2 + 4^2$

***Chú ý*:** Nói chung $(a+b)^n \neq a^n + b^n$

c) Ta có: $2^{300} = 2^{3.100} = (2^3)^{100} = 8^{100}$ và $3^{200} = 3^{2.100} = (3^2)^{100} = 9^{100}$

Vì $8^{100} < 9^{100}$ nên $2^{300} < 3^{200}$

Nhận xét:

Khi so sánh hai lũy thừa, ta thường sử dụng các quy tắc để biến đổi về hai lũy thừa hoặc cùng cơ số hoặc cùng số mũ và sử dụng quy tắc:

- Nếu $n < m$ thì $a^n < a^m$ $\left(a > 1;\ m, n \in \mathbb{N}\right)$
- Nếu $a < b$ thì $a^n < b^n$ $\left(a, b \in \mathbb{N};\ n \in \mathbb{N}^*\right)$

Dạng 3. Tìm số chưa biết

Ví dụ 3. Tìm x, biết: $165 - (35 : x + 3).19 = 13$

Giải

Ta có: $165 - (35 : x + 3).19 = 13$

$(35 : x + 3).19 = 165 - 13$

$(35 : x + 3).19 = 152$

$35 : x + 3 = 152 : 19$

$35 : x + 3 = 8$

$35 : x = 8 - 3$

$35 : x = 5$

$x = 35 : 5$

$x = 7$

Vậy $x = 7$.

Nhận xét:

Trong cách giải trên, ta thấy x nằm trong số trừ $(35 : x + 30).19$, vì vậy trước hết ta tìm số trừ này bằng cách lấy số bị trừ 165 trừ đi hiệu 13. Suy luận tương tự cho các bước sau đến khi tìm được x. Ngoài ra, ta cũng có thể áp dụng tính chất phân phối để bỏ dấu ngoặc:

$(35 : x + 3).19 = (35 : x).19 + 3.19 = 35.19 : x + 57$

$$= 665 : x + 57....$$

Ví dụ 4. Tìm x, biết:

a) $(2x + 1)^3 = 9.81$

b) $5^x + 5^{x+2} = 650$

Giải

a) Ta có: $9.81 = 9.9^2 = 9^3$

Do đó: $(2x+1)^3 = 9^3$

$2x+1=9$

$2x = 9-1$

$2x = 8$

$x = 4$

Vậy $x = 4$

b) Vì $5^{x+2} = 5^x.5^2 = 25.5^x$ nên ta có: $5^x + 25.5^x = 650$

$(1+25).5^x = 650$

$26.5^x = 650$

$5^x = 25 = 5^2$

$x = 2$

Vậy $x = 2$

Nhận xét:

Để tìm x nằm trong một lũy thừa thỏa mãn một đẳng thức, ta biến đổi để đưa về so sánh hai lũy thừa hoặc cùng cơ số (như câu a), hoặc cùng số mũ (như câu b).

Ví dụ 5. Tìm các số mũ n sao cho lũy thừa 3^n thỏa mãn điều kiện $25 < 3^n < 250$

Giải

Ta có: $3^2 = 9 < 25 < 27 = 3^3 \Rightarrow 3^3 \le 3^n$ (1)

$3^5 = 243 < 250 < 729 = 3^6 \Rightarrow 3^n \le 3^5$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $3^3 \le 3^n \le 3^5$

$3 \le n \le 5$

Vậy $n \in \{3;\ 4; 5\}$

Nhận xét:

So sánh $3^2 = 9 < 25 < 27 = 3^3$ chỉ ra rằng 3^3 là lũy thừa nhỏ nhất của 3 lớn hơn 25. Vì $25 < 3^n$ nên $3^3 \le 3^n$. Tương tự, so sánh $3^5 = 243 < 250 < 729 = 3^6$ chỉ ra rằng 3^5 là lũy thừa lớn nhất của 3 nhỏ hơn 250. Vì $3^n < 250$ nên $3^n \le 3^5$.

Ví dụ 6. Chia một số tự nhiên cho 60 ta được số dư là 31. Nếu đem chia số đó cho 12 thì được thương là 17 và còn dư. Tìm số đó.

Giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là a, thương khi chia a cho 60 là q. Theo đề ra, ta có: $a = 60.q + 31$

Suy ra: $a = 125.q + 12.2 + 7 = 12.(5.q + 2) + 7$

Tức là a chia cho 12 được thương là $5.q + 2$ và số dư là 7. Từ đó ta suy ra:

$5.q + 2 = 17 \Rightarrow 5.q = 15 \Rightarrow q = 3$

Vậy $a = 60.3 + 31 = 211$

Nhận xét: Cơ sở của cách giải trên là 60 chia hết cho 12. Ta chỉ cần chú ý thêm rằng số dư không lớn hơn số chia, vì thế từ $a = 12.(5q) + 31$ không thể suy ra a chia cho 12 được thương là 5q và dư 31.

III. BÀI TẬP

1.21. Tính hợp lí:

a) $28.(231 + 69) + 72.(231 + 69)$

b) $1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + ... - 299 - 300 + 301 + 302$

1.22. Tính hợp lí:

a) $10.\dfrac{4^6.9^5 + 6^9.120}{8^4.3^{12} - 6^{11}}$

b) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{99} + 2^{100}$

c) $5 + 5^3 + 5^5 + ... + 5^{97} + 5^{99}$

1.23. Tính giá trị của biểu thức: $P = 3a^2b - \dfrac{b^3}{c} + d$ với $a = 5; b = 2; c = 4; d = 6$

1.24. So sánh:

a) 243^5 và 3.27^8

b) 15^{12} và $81^3.125^5$

c) $78^{12} - 78^{11}$ và $78^{11} - 78^{10}$

1.25. Cho $A = 1+3+3^2+3^3+...+3^{1999}+3^{2000}$. Chứng minh rằng A chia hết cho 13.

1.26. Tìm $x \in \mathbb{N}$, biết:

a) $(4x+5):3-121:11=4$

b) $1+3+5+...+x=1600$ (x là số tự nhiên lẻ)

1.27. Tìm $x \in \mathbb{N}$, biết:

a) $(2x+1)^3 = 125$ b) $(4x-1)^2 = 25.9$

1.28. Tìm $x \in \mathbb{N}$, biết:

a) $2^x + 2^{x+3} = 144$ b) $3^{2x+2} = 9^{x+3}$

1.29. Tìm $x \in \mathbb{N}$, biết:

a) $(x-5)^4 = (x-5)^6$, (với $x \geq 5$) b) $x^{15} = x^2$

1.30. Tìm các số mũ x, biết rằng lũy thừa 5^{2x-1} thỏa mãn điều kiện: $100 < 5^{2x-1} \leq 5^6$

1.31. Cho ba số 6; 7; 8. Tìm tổng tất cả các số khác nhau viết bằng cả ba số đó, mỗi chữ số dùng một lần.

1.32. Tích của hai số là 276. Nếu thêm 19 đơn vị vào một số thì tích của hai số là 713. Tìm hai số đó.

1.33. Hiệu của hai số là 6. Nếu tăng số bị trừ lên 4 lần, giữ nguyên số trừ thì hiệu của chúng là 54. Tìm hai số đó.

1.34. Tìm hai số tự nhiên có thương bằng 29. Nếu tăng số bị chia lên 325 đơn vị thì thương của chúng bằng 54.

1.35. Trong một phép chia số bị chia bằng 59, số dư bằng 5. Tìm số chia và thương.

1.36. Tổng của ba số là 122. Nếu lấy số thứ nhất chia cho số thứ hai hoặc lấy số thứ hai chia cho số thứ ba đều được thương là 3 và dư 1. Tìm ba số đó.

1.37. Khi chia một số cho 48 thì được số dư là 41. Nếu chia số đó cho 16 thì thương thay đổi thế nào?

1.38. Tìm số bị chia và số chia nhỏ nhất để được thương là 8 và dư là 45.

1.39. Tổng của hai số bằng 38570. Chia số lớn cho số nhỏ ta được thương bằng 3 và còn dư 922. Tìm hai số đó.

1.40. Một số lớn hơn một số khác 12 đơn vị. Nếu chia số lớn cho số nhỏ thì được thương bằng 1 và còn dư. Tìm số dư.

Chuyên đề 3. TÍNH CHẤT CHIA HẾT CỦA MỘT TỔNG, HIỆU, TÍCH

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

- Tính chất 1: Nếu $a \vdots m$ và $b \vdots m$ thì $(a+b) \vdots m$, $(a-b) \vdots m$ $(a \geq b)$
- Tính chất 2: Nếu $a \vdots m$ và $b \not\vdots m$ thì $(a+b) \not\vdots m$, $(a-b) \not\vdots m$ $(a \geq b)$
- Tính chất 3: Nếu $a \vdots m$ thì $k.a \vdots m$ $(k \in \mathbb{N})$
- Tính chất 4: Nếu $a \vdots m$ và $b \vdots m$ thì $a.b \vdots m.n$

  Đặc biệt: Nếu $a \vdots m$ thì $a^n \vdots m^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

**** Mở rộng:***

- Nếu $a \vdots m$ và $b \vdots m$ thì $(k.a + l.b) \vdots m$ $(k, l \in \mathbb{N})$
- Nếu $a \vdots m$ và $(a+b) \vdots m$ thì $b \vdots m$
- Nếu $a \vdots m$ và $(a+b) \not\vdots m$ thì $b \not\vdots m$

III. MỘT SỐ VÍ DỤ

Dạng 1. *Chứng minh quan hệ chia hết*

Ví dụ 1. Xét xem tổng (hiệu) nào dưới đây chia hết cho 8.

a) $400 - 144$

b) $80 + 25 + 48$

c) $32 + 47 + 33$

Giải

a) Vì $400 \vdots 8$ và $144 \vdots 8$ nên $(400 - 144) \vdots 8$ (tính chất 1)

b) Vì $80 \vdots 8$; $48 \vdots 8$ và $25 \not\vdots 8$ nên $(80 + 25 + 48) \not\vdots 8$ (tính chất 2)

c) Ta có: $32 + 47 + 33 = 32 + (47 + 33)$

Vì $32 \vdots 8$ và $(47 + 33) \vdots 8$ nên $(32 + 47 + 33) \vdots 8$ (tính chất 1)

Nhận xét:

Một số sai lầm thường gặp ở câu c:

Vì $32 \vdots 8$; $47 \not\vdots 8$ và $33 \not\vdots 8$ nên $(32 + 47 + 33) \not\vdots 8$

Nguyên nhân sai lầm do vận dụng sai tính chất 2. Tính chất này khẳng định rằng: Nếu một tổng chỉ *có duy nhất* một số hạng không chia hết cho m (mọi số hạng khác chia hết cho m) thì tổng đó không chia hết cho m.

Ví dụ 2. Chứng tỏ rằng trong ba số tự nhiên liên tiếp có một số chia hết cho 3.

Giải

Gọi ba số tự nhiên lien tiếp là: $a;\ a+1;\ a+2$.

Ta có ba trường hợp sau:

- Nếu $a \vdots 3$ thì bài toán đã được giải.
- Nếu a chia cho 3 dư 1, tức là: $a = 3k+1$, thì $a+2=(3k+3) \vdots 3$.
- Nếu a chia cho 3 dư 2, tức là: $a = 3k+2$, thì $a+1=(3k+3) \vdots 3$.

Vậy trong ba số $a;\ a+1;\ a+2$ luôn có một số chia hết cho 3.

Nhận xét:

Kết quả trên vẫn đúng trong trường hợp tổng quát: Trong n số tự nhiên liên tiếp luôn có một số chia hết cho n.

Ví dụ 3: Chứng tỏ rằng tổng của ba số tự nhiên liên tiếp là một số chia hết cho 3.

Giải

Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là: $a;\ a+1;\ a+2$. Tổng của ba số này bằng: là một số chia hết cho 3 (tính chất 3)

Nhận xét:

Ta có kết quả tương tự đối với phép nhân: Tích của n số tự nhiên liên tiếp chia hết cho n. Từ tính chất 4 và ví dụ 2, ta có kết quả "mạnh hơn": Tích của n số tự nhiên liên tiếp chia hết cho $n!$

(Trong đó: $n! = 1.2.3...n,$ đọc là n giai thừa).

Ví dụ 4: Chứng tỏ rằng:

a) $\left(\overline{ab}-\overline{ba}\right) \vdots 9$ (với a > b).

b) Nếu $\left(\overline{ab}+\overline{cd}\right) \vdots 111$ thì $\overline{abcd} \vdots 11$.

Giải

a) Ta có: $\overline{ab}-\overline{ba} = (10a+b)-(10.b+a) = 9.a-9.b = 9.(a-b)$

Mà $9.(a-b) \vdots 9$ (tính chất 3), nên $\overline{ab}-\overline{ba} \vdots 9$.

b) Ta có: $\overline{abcd} = 100.\overline{ab}+\overline{cd} = 99.\overline{ab}+\left(\overline{ab}+\overline{cd}\right)$.

Mà $\overline{9.ab} \vdots 111$ (tính chất 3) và $\left(\overline{ab}+\overline{cd}\right) \vdots 11$ đề bài cho, nên $\overline{abcd} \vdots 11$.

Dạng 2. *Tìm điều kiện cho quan hệ chia hết.*

Ví dụ 5: Cho $A = 12 + 15 + 36 + x$, với $x \in \mathbb{N}$. Tìm điều kiện của x để:

a) $A \vdots 3$ b) $A \not\vdots 9$

Giải

a) Vì $12 \vdots 3$; $15 \vdots 3$ và $36 \vdots 3$ nên để $A \vdots 3$ thì $x \vdots 3$

b) Ta có: $A = 12 + 15 + 36 + x$.

Vì 12+15 = 27 $\vdots$ 9 và $36 \vdots 9$ nên để $A \not\vdots 9$ thì $x \not\vdots 9$.

Ví dụ 6: Tìm số tự nhiên n để:

a) $(n+3) \vdots 3$ b) $(7n+8) \vdots \text{n}$ c) $(35-12n) \vdots \text{n}$ (với n < 3)

Giải

a) Vì $n \vdots n$ nên để $(n+3) \vdots n$ thì $3 \vdots \text{n}$. Từ đó suy ra: $n \in \{1;\ 3\}$.

b) Vì $7n \vdots n$ nên để $(7n+8) \vdots n$ thì $8 \vdots \text{n}$. Từ đó suy ra: $n \in \{1;\ 2;\ 4;\ 8\}$.

c) Vì $12n \vdots n$ nên để $(35-12n) \vdots n$ thì $35 \vdots \text{n}$. Từ đó suy ra: $n \in \{1;\ 5;\ 7;\ 35\}$.

Vì n < 3 nên n=1. Vậy n = 1.

Ví dụ 7: Tìm số tự nhiên n để:

a) $(n+8) \vdots (n+3)$

b) $(7n+8) \vdots n$ (với n < 6)

c) $(5n+2) \vdots (9-2n)$ (với n < 5).

Giải

a) Vì $(n+3) \vdots (n+3)$ nên theo tính chất 1 để $(n+8) \vdots (n+3)$ thì:

$[(n+8)-(n+3)] \vdots (n+3)$ hay $5 \vdots (n+3)$

Suy ra: $n+3 \in \{1;5\}$. Vì Suy ra: $n+3 \geq 3$ nên $n+3 = 5 \Rightarrow$ n=2.

Vậy n = 2.

b) Vì $3(n+4) \vdots (n+4)$ nên theo tính chất 1 để $(16-3n) \vdots (n+4)$ thì:

$[(16n-3n)+3(n+3)] \vdots (n+4)$ hay $28 \vdots (n+4)$

Suy ra: $n+4 \in \{1;\ 2;\ 4;\ 7;\ 14;\ 28\}$. Vì Suy ra: $0 \leq n < 6$ nên $4 \leq n+4 < 10$.

Từ đó ta có: $n+4 \in \{4;\ 7\}$ hay $n \in \{0;\ 3\}$.

c) Vì $5(9-2n) \vdots (9-2n)$ nếu nên $(5n+2) \vdots (9-2n)$ thì: $2(5n+2) \vdots (9-2n)$.

Suy ra: $[5(9-2n)+2(5n+2)] \vdots (9-2n)$ hay $49 \vdots (9-2n)$

$\Rightarrow 9-2n \in \{1;\ 7;\ 49\}$. Vì $9-2n \leq 9$ nên $9-2n \in \{1;\ 7\}$

Từ đó ta có: $\text{n} \in \{4;\ 1\}$. Thì lại ta thấy $n = 4$ hoặc $n = 1$ đều thỏa mãn. Vậy $n \in \{1;\ 4\}$.

Chú ý:

Trong câu c, sau khi tìm được n ta phải thử lại, vì từ $\left[5(9-2n)+2(5n+2)\right] \vdots (9-2n)$ ta chỉ suy ra được $2(5n+2) \vdots (9-2n)$, nên chưa chắc đã có $(5n+2) \vdots (9-2n)$.

III. BÀI TẬP

1.41. Cho A = 2, 5, 7, 9, 13 + 78. Hỏi A có chia hết cho 3, cho 6, cho 9, cho 13 không? Vì sao?

1.42. Chứng tỏ rằng tổng bốn số tự nhiên liên tiếp là một số một số không chia hết cho 4.

1.43. Khi chia số số tự nhiên a cho 24 được số dư là 10. Hỏi số a có chia hết cho 2, cho 4 không? Vì sao?

1.44. Chứng tỏ rằng mọi số tự nhiên có ba chữ số giống nhau đều chia hết cho 37.

1.45. Chứng tỏ rằng:

a) $1+4+4^2+4^3+...+4^{2012}$ chia hết cho 21.

b) $1+7+7^2+7^3+...+7^{101}$ chia hết cho 8.

c) $2+2^2+2^3+...+2^{100}$ vừa chia hết cho 31, vừa chia hết cho 5.

1.46. Chứng tỏ rằng:

a) Nếu $\left(\overline{abc}-\overline{\deg}\right) \vdots 13$ thì $\overline{abc\deg} \vdots 13$.

b) Nếu $\overline{abc} \vdots 7$ thì $(2a+3b+c) \vdots 7$.

1.47. Tìm chữ số a, biết rằng: $\overline{20a20a20a} \vdots 7$.

1.48. Tìm số tự nhiên n sao cho:

a) $(n+12) \vdots n$.

b) $(15-4n) \vdots n$ (với n < 4).

c) $(6n-9) \vdots n$ (với $n \geq 4$).

1.49. Tìm số tự nhiên n sao cho:

a) $(n+13) \vdots (n-5)$ (với n > 5).

b) $(15-2n) \vdots (n+1)$ (với $n \leq 4$).

c) $(6n+9) \vdots (4n-1)$ (với $n \geq 1$).

1.50. Cho $a,\ b \in \mathbb{N}$. Chứng tỏ rằng nếu $5a+3b$ và $13a+8b$ cùng chia hết cho 2012 thì a và b cũng chia hết cho 2012.

Chuyên đề 4. DẤU HIỆU CHIA HẾT

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Kiến thức cơ bản

- $a \,\vdots\, 2$ khi và chỉ khi a có chữ số tận cùng là $0;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8.$
- $a \,\vdots\, 5$ khi và chỉ khi a có chữ số tận cùng là $0;\ 5.$
- $a \,\vdots\, 3$ khi và chỉ khi tổng các chữ số của a chia hết cho 3.
- $a \,\vdots\, 9$ khi và chỉ khi tổng các chữ số của a chia hết cho 9.

2. Nâng cao

- $a \,\vdots\, 4$ (hoặc $a \,\vdots\, 25$) khi và chỉ khi hai chữ số tận cùng của a tạo thành một số chia hết cho 4 (hoặc 25).
- $a \,\vdots\, 8$ (hoặc $a \,\vdots\, 125$) khi và chỉ khi ba chữ số tận cùng của a tạo thành một số chia hết cho 8 (hoặc 125).
- $a \,\vdots\, 11$ khi và chỉ khi tổng các chữ số hàng lẻ của a trừ đi tổng các chữ số hàng chẵn của a (hoặc ngược lại) chia hết cho 11.

Ví dụ: Số $908347 \,\vdots\, 11$, vì $(9+8+4)-(0+3+7)=11 \,\vdots\, 11.$

II. MỘT SỐ VÍ DỤ

Dạng 1. *Chứng minh quan hệ chia hết*

Ví dụ 1. Chứng tỏ rằng với mọi số tự nhiên n ta đều có:

$$\left(n+2012^{2013}\right)\left(n+2013^{2012}\right) \,\vdots\, 2.$$

Giải

Ta có 2012 là số chẵn nên 2012^{2013} cũng là số chẵn. Tương tự, ta có 2013^{2012} là số lẻ. Từ đó: $2012^{2012}+2013^{2012}$ là số lẻ.

Ta có: $\left(n+2012^{2013}\right)+\left(n+2013^{2012}\right)=2n+\left(2012^{2013}+2013^{2012}\right)$ là số lẻ, vì 2n là số chẵn. Suy ra trong hai số $\left(n+2012^{2013}\right)$ và $\left(n+2013^{2012}\right)$ phải có một số chẵn. Do vậy tích của chúng $\left(n+2012^{2013}\right)\left(n+2013^{2012}\right)$ là một số chẵn.

Vậy $\left(n+2012^{2013}\right)\left(n+2013^{2012}\right) \,\vdots\, 2.$

Nhận xét:

Trong cách giải trên ta đã sử dụng tính chất: Nếu $a+b$ là số lẻ thì trong hai số a và $b,$ phải có một số chẵn, một số lẻ.

Thật vậy, nếu a và $b,$ cùng là số chẵn hoặc cùng là số lẻ thì $a+b$ là số chẵn: Trái với giả thiết $a+b$ là số lẻ.

Ta cũng có thể chứng minh qua việc xét hai trường hợp: n chẵn và n lẻ.

Ví dụ 2. Chứng tỏ rằng hiệu của một số và tổng các chữ số của nó chia hết cho 9.

Giải

Ký hiệu $s(n)$ là tổng các chữ số tự nhiên n. Bài toán trở thành: Chứng tỏ rằng $n-s(n) \,\vdots\, 9$

Thật vậy, giả sử $n=\overline{a_m a_{m-1}...a_1 a_0}$ (n có $m+1$ chữ số), khi đó

$$s(n)=a_m+a_{m-1}+...+a_1+a_0.$$

Ta có: $n = a_m.10^m + a_{m-1}.10^{m-1} + ... + a_1.10 + a_0$

$$= \underbrace{99...9}_{m\text{ so }9}.a_m + \underbrace{99...9}_{m-1 so\ 9}{}_{m-1} + ... + 9.a_1 + (a_m + a_{m-1} + ... + a_1 + a_0).$$

Vì $= \underbrace{99...9}_{m\text{ so }9}.a_m + \underbrace{99...9}_{m-1 so\ 9}{}_{m-1} + ... + 9.a_1 \vdots 9$ nên ta đặt bằng $9k$ $(k \in \mathrm{N})$.

Suy ra: $n = 9k + s(n) \Rightarrow$ n $- s(n) = 9k \vdots 9$.

Nhận xét:

Từ kết quả bài toán trên ta thấy rằng n và $s(n)$ luôn có cùng số dư khi chia cho 9. Ta cũng có kết quả tương tự khi thay 9 bằng 3.

Ví dụ 3. Hãy thay dấu phép toán cộng $(+)$ hoặc trừ $(-)$ vào những chỗ đánh dấu $(*)$ trong dãy tính sau để được kết quả là một số chia hết cho 2:

$$10*9*8*7*6*5*4*3*2*1$$

Giải

Bước 1: Thay tất cả dấu "*" bằng dấu "+" ta được:

$$10+9+8+7+6+5+4+3+2+1=55 \text{ (là số lẻ)}$$

Bước 1: Thay tất cả dấu "+" bằng dấu "-"

Khi thay dấu "+" trong $a+b$ bằng dấu "-", ta được $a-b$. Giá trị của biểu thức giảm đi $(a+b)-(a-b)=2b$ (là số chẵn).

Do đó, sau mỗi lần thay một dấu "+" bằng một dấu "-" thì kết quả giảm đi một số chẵn nên kết quả tính luôn là một số lẻ.

Vậy không có cách thay thế nào để kết quả tính chia hết cho 2.

Nhận xét:

Trong cách giải trên ta đã sử dụng phương pháp *giả thiết tạm*: Thay tất cả dấu "*" bằng dấu "+", rồi thay dần dấu "+" bằng dấu "-". Kết hợp với tính bất biến (Kết quả phép tính luôn là số lẻ), ta có lời giả bài toán.

Ta cũng có thể giải thích như sau: Vì trong dãy tính có 5 số lẻ nên không thể điền dấu "+" hay dấu "-" vào những chỗ có dấu "*" để được một số chẵn.

Ví dụ 4: Viết các số tự nhiên liên tiếp từ 10 đến 99 ta được số A. Hỏi A có chia hết cho 9 không? Vì sao?

Giải

Ta có: $A = 10111213...9899$.

Xét 90 số tự nhiên liền tiếp: $10,11,12,...,98,99$.

- Tổng các chữ số hàng chục: $(1+2+...+8+9).10 = 45.10 = 450$.

- Tổng các chữ số hàng đơn vị: $(0+1+2+...+8+9).9=45.9=405.$

Tổng các chữ số của A là: $450+405=855.$

Mà $855 \vdots 9$ nên $A \vdots 9.$

Dạng 2. ***Tìm điều kiện cho quan hệ chia hết, chia dư.***

Ví dụ 5: Biết rằng số tự nhiên n chia hết cho 2 và $(n^2-n) \vdots 5$. Tìm chữ số tận cùng của n

Giải

Vì $n \vdots 2$ chia hết cho 2 nên chữ số tận cùng của n là một số chẵn.

Vì $n^2-n=n(n-1) \vdots 5$ nên $n \vdots 5$ hoặc $(n-1) \vdots 5$. Do đó n có chữ số tận cùng là 0,5 hoặc $n-1$ có chữ số tận cùng là 0,5. Tức là n có chữ số tận cùng là $0,5,1,6$.

Kết hợp hai kết quả trên suy ra n có chữ số tận cùng là 0 hoặc 6.

Ví dụ 6: Tìm các chữ số x, y biết rằng:

a) $\overline{23x5y} \vdots 2;\ 5$ và 9 b) $\overline{144xy} \vdots 3$ và 5

Giải

a) Vì $\overline{23x5y}$ chia hết cho cả 2 và 5 nên $y=0$.

Ta có: $\overline{23x50} \vdots 9$ nên $(2+3+5+0) \vdots 9$ hay $(10+) \vdots 9 \Rightarrow x=8.$

Vậy $x=8;\ y=0.$

b) Vì $\overline{144xy} \vdots 5$ nên $y \in \{0;\ 5\}.$

- Nếu $y=0$ thì ta có $\overline{144x5} \vdots 3$

$\Rightarrow (1+4+4+x+0) \vdots 3$ hay $(9+x) \vdots 3 \Rightarrow x \in \{0;\ 3;\ 6;\ 9\}.$

- Nếu $y=5$ thì ta có $\overline{144x5} \vdots 3$

$\Rightarrow (1+4+4+x+5) \vdots 3$ hay $(14+x) \vdots 3 \Rightarrow x \in \{1;\ 4;\ 7\}.$

Vậy có bảy cặp số (x, y) thỏa mãn:

x	0	3	6	9	1	4	7
y	0	0	0	0	5	5	5

Ví dụ 7: Tìm các chữ số x, y biết $\overline{2x3y}$ chia hết cho 2, cho 5 và chia cho 9 dư 1.

Giải

Vì $\overline{2x3y}$ chia hết cho cả 2 và 5 nên $y = 0$.

Ta có: $\overline{2x30}$ chia hết cho 9 dư 1 khi và chỉ khi $2 + x + 3 + 0$ chi hết cho 9 dư 1 (xem ví dụ 2) hay $x + 5$ chia hết cho 9 dư 1.

$\Rightarrow x + 5 = 10 \Rightarrow x = 5.$

Vậy $x = 5;\ y = 0.$

Ví dụ 8: Tìm các chữ số a và b biết rằng:

a) $\overline{25a2b} \vdots 36$ b) $\overline{a378b} \vdots 72$ và 5

Giải

a) Vì $\overline{25acb} \vdots 36$ nên $25a2b \vdots 4$ và 9.

Vì $25a2b \vdots 4$ nên $2b \vdots 4 \Rightarrow b \in \{0;\ 4;\ 8\}$.

- Nếu $b = 0$ thì ta có $\overline{25a20} \vdots 9$

$\Rightarrow (2+5+a+2+0) \vdots 9$ hay $(a+9) \vdots 9 \Rightarrow a \in \{0;\ 9\}$.

- Nếu $b = 4$ thì ta có $\overline{25a24} \vdots 9$

$\Rightarrow (2+5+a+2+4) \vdots 9$ hay $(a+13) \vdots 9 \Rightarrow a = 5.$

- Nếu $b = 8$ thì ta có $\overline{25a28} \vdots 9$

$\Rightarrow (2+5+a+2+8) \vdots 9$ hay $(a+17) \vdots 9 \Rightarrow a = 1.$

Thử lại, ta có 4 cặp số $(a;b)$ thỏa mãn:

a	0	9	5	1
b	0	0	4	8

b) Vì $\overline{a378b} \vdots 72$ nên $\overline{a378b} \vdots 8$ và 9.

- Vì $\overline{a378b} \vdots 8$ nên $\overline{78b} \vdots 8 \Rightarrow b = 4.$
- Vì $\overline{a3784} \vdots 9$ nên $(a+3+7+8+4) \vdots 9$ hay $(a+22) \vdots 9 \Rightarrow a = 5$

Vậy $a = 5$ và $b = 4$.

Ví dụ 9: Tìm chữ số a sao cho $\overline{76a23} \vdots 11$.

Giải

Vì $\overline{76a23} \vdots 11$ nên $\left[(7+a+3)-(6+2)\right] \vdots 11$ hay $(a+22) \vdots 44 \Rightarrow a = 9$..

Vậy $a=9$.

Nhận xét:

Để giải bài toán tìm các chữ số chưa biết của một số, biết số đó chia hết (hoặc chia dư) cho một vài số cho trước, ta sử dụng các dấu hiệu chia hết, ưu tiên các dấu hiệu cho biết 1 (hoặc 2, 3) chữ số tận cùng (dấu hiệu chia hết cho 2, 5, 4, 25, 8, 125)

III. BÀI TẬP

1.51. Từ ba trong bốn chữ số 5, 6, 3, 0, hãy ghép thành số có ba chữ số khác nhau thỏa mãn một trong các điều kiện:

a) là số lớn nhất chia hết cho 2.

b) là số nhỏ nhất chia hết cho 5.

c) là số nhỏ nhất chia hết cho 9.

d) là số lớn nhất chia hết cho 3.

1.52. Dùng ba trong bốn số 5, 4, 3, 2 hãy viết tất cả các số tự nhiên có ba chữ số chia hết cho cả ba số 2, 3 và 9.

1.53. Chứng tỏ rằng:

a) $10^{33}+8$ chia hết cho 18.

b) $10^{10}+14$ chia hết cho 9.

1.54. Chứng tỏ rằng với mọi số tự nhiên n, tích $(n+7)(n+8)$ luôn chia hết cho 2.

1.55. Chứng tỏ rằng tích của ba số tự nhiên chẵn liên tiếp chia hết cho 48.

1.56. Cho $n\in N*$ Chứng tỏ rằng:

a) $(5^n-1)\ \vdots\ 4$.

b) $(10^n+18n-1)\ \vdots\ 27$.

1.57. Tìm số tự nhiên có năm chữ số, các chữ số giống nhau, biết rằng số đó chia cho 5 dư 1 và chia hết cho 2.

1.58. Tìm các chữ số x, y biết rằng:

a) $\overline{1x85y}$ chia hết cho 2; 3; 5.

b) $\overline{10xy5}\ \vdots\ 45$.

c) $\overline{26x3y}\ \vdots\ 5$.và 18

1.59. Tìm các chữ số a,b sao cho:

a) $\overline{52ab}$ chia hết cho 9, chia hết cho 2 và chia cho 5 dư 4.

b) $\overline{12a5b}$ chia hết cho 2, chia hết cho 9 và chia cho 5 dư 2.

1.60. Tìm hai số tự nhiên liên tiếp có hai chữ số biết rằng một số chia hết cho 4, số kia chia hết cho 25.

1.61. Tìm chữ số a để $\overline{aaaaa96}$ chia hết cho cả 3 và 8.

1.62. Tìm chữ số a để $\overline{1aaa1}$ chia hết cho 11.

1.63. Biết rằng $1978a+2012b$ và $78a+10b$ cùng chia hết cho 11. Chứng minh rằng a và b cũng chia hết cho 11.

1.64. Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, sao cho khi nhân số đó với 9 ta được số mới gồm chính các các chữ số của số ấy nhưng viết theo thứ tự ngược lại.

1.65. Tìm số tự nhiên có ba chữ số $\overline{abc}$ sao cho: $\overline{abc}=n^2-1$ và $\overline{cba}=\left(n-2\right)^2$, với $n\in\mathbb{N}, n>2$.

(Đề thi HSG Vũng Tàu, 2009)

1.66. Kí hiệu $s\left(n\right)$ là tổng các chữ số tự nhiên n. Tìm n biết rằng: $n+s\left(n\right)=94$.

Chuyên đề 5. SỐ NGUYÊN TỐ VÀ HỢP SỐ

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Kiến thức cơ bản

- Ước và bội $a \vdots b \Leftrightarrow a$ là bội của $b \Leftrightarrow b$ là ước của a.
- Tập hợp các ước của số tự nhiên a kí hiệu là $\text{Ư}(a)$. Tập hợp các bội của số tự nhiên a kí hiệu là $\text{B}(a)$.

  Ví dụ. $\text{Ư}(6) = \{1;2;3;6\}$, $\text{B}(6) = \{0;6;12;18;\ldots\}$
- Số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1, chỉ có hai ước là 1 và chính nó.
- Hợp số là số tự nhiên lớn hơn 1, có nhiều hơn hai ước.
- Phân tích một số ra thừa số nguyên tố là viết số đó dưới dạng một tích các thừa số nguyên tố với số mũ của nó. Thông thường, các ước nguyên tố được viết theo thứ tự từ nhỏ đến lớn.

  Ví dụ. $72 = 2^3.3^2$

2. Nâng cao

- Để kiểm tra số a có là số nguyên tố hay không, ta có thể chia a lần lượt cho các số nguyên tố $2;3;\ldots;p$, với p là số nguyên tố lớn nhất thỏa mãn $p^2 \le a$. Nếu không có phép chia hết nào thì a là số nguyên tố, trái lại a là hợp số.

  Ví dụ. Để xét số 103 có là số nguyên tố hay không ta xác định 7 là số nguyên tố lớn nhất thỏa mãn $7^2 \le 103$ (vì số nguyên tố tiếp theo là 11 có $11^2 = 121 > 103$). Ta chia 103 lần lượt cho $2;3;5;7$ và thấy không có phép chia hết nào. Vậy 103 là số nguyên tố.
- Tập hợp các số nguyên tố có vô hạn phần tử. Do vậy, không có số nguyên tố lớn nhất.
- Nếu số tự nhiên a phân tích ra thừa số nguyên tố được:

  $a = p_1^{n_1}.p_2^{n_2}\ldots p_k^{n_k}$, trong đó $p_1, p_2, \ldots, p_k$ là các số nguyên tố khác nhau, thì số ước của a là $(n_1+1).(n_2+1)\ldots(n_k+1)$.
- Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với số mũ chẵn. Từ đó ta cũng suy ra số chính phương có số ước là số lẻ.
- Nếu p là số nguyên tố và $a.b \vdots p$ thì hoặc $a \vdots p$ hoặc $b \vdots p$.

- Nếu p,q là hai số nguyên tố mà $a\vdots p$ và $a\vdots q$ thì $a\vdots p.q$.

II. MỘT SỐ VÍ DỤ

Dạng 1. *Các bài toán về ước và bội.*

Ví dụ 1. Cho một phép chia có số bị chia bằng 200 và số dư bằng 13. Tìm số chia và thương.

Giải

Gọi số chia là b, thương là q. Vì số dư luôn nhỏ hơn số chia nên $b>13$.

Khi đó ta có phép chia: $200=b.q+13$

$\Rightarrow b.q=200-13=187$

$\Rightarrow b\in Ư(187)$

Vì $187=11.17$ và $b>13$ nên hoặc $b=17$ hoặc $b=187$.

- Nếu $b=17$ thì $q=11$ và ta có phép chia $200=17.11+13$.
- Nếu $b=187$ thì $q=1$ và ta có phép chia $200=187.1+13$.

Ví dụ 2. Biết rằng số tự nhiên $\overline{aaa}$ chỉ có đúng ba ước khác 1, tìm chữ số a.

Giải

Ta có $\overline{aaa}=111.a=3.37.a$

$\Rightarrow 3;37;3.37$ là các ước (khác 1) của $\overline{aaa}$.

Để $\overline{aaa}$ có đúng ba ước khác 1 (như trên) thì $a=1$.

Vậy số phải tìm là 111.

Nhận xét:

Một số có đúng ba ước khác 1 thì số ước của nó bằng 4 (vì tính thêm ước 1). Sử dụng công thức tính số ước, số đó khi phân tích ra thừa số nguyên tố phải có dạng p^3 hoặc $p.q$, với p và q là các số nguyên tố khác nhau. Vì $\overline{aaa}=111.a=3.37.a$ và $3;37$ là các số nguyên tố khác nhau nên suy ra $\overline{aaa}$ có dạng 2 và vì thế $a=1$.

Ví dụ 3. Tìm số tự nhiên x sao cho $14\vdots(2x+3)$.

Giải

Vì $2x+3$ là ước của 14 nên $2x+3 \in \{1;2;7;14\}$.

Vì $2x+3$ là số lẻ, lớn hơn hoặc bằng 3 nên $2x+3=7$ hay $2x=7-3=4$

$\Rightarrow x=4:2=2$

Vậy $x=2$.

Nhận xét:

Khi giải bài toán về ước và bội, ta thường xét tính chẵn - lẻ và phạm vi giá trị của các số. Trong ví dụ trên, $2x+3$ là số lẻ, và vì $x \geq 0$ nên $2x+3 \geq 3$. Việc đó giúp số trường hợp của bài toán được giảm đi đáng kể.

Dạng 2. ***Các bài toán về số nguyên, hợp số.***

Ví dụ 4. Tìm số nguyên tố p, sao cho $p+2$ và $p+4$ cũng là các số nguyên tố.

Giải

– Nếu $p=2$ thì $p+2=4$ và $p+4=6$ đều không phải là số nguyên tố.

– Nếu $p=3$ thì $p+2=5$ và $p+4=7$ đều là số nguyên tố.

– Nếu $p>3$ thì số nguyên tố p có một trong hai dạng: $3k+1, 3k+2$ với $k \in \mathbb{N}^*$.

+ Nếu $p=3k+1$ thì $p+2=3k+3=3(k+1)$

$\Rightarrow (p+2)\vdots 3$, mà $p+2>3$ nên $p+2$ là hợp số.

+ Nếu $p=3k+2$ thì $p+4=3k+6=3(k+2)$

$\Rightarrow (p+4)\vdots 3$, mà $p+4>3$ nên $p+4$ là hợp số

Vậy chỉ có duy nhất một số nguyên tố p thỏa mãn là $p=3$.

Nhận xét:

Trong cách giải trên ta đã sử dụng tính chất sau đây:

"Nếu $a>m>1$ và $a \vdots m$ thì a là hợp số".

Đây là một tính chất thường dùng trong các bài toán về số nguyên.

Ví dụ 5. Cho p và $2p+1$ là các số nguyên tố $(p>5)$. Hỏi $4p+1$ là số nguyên tố hay hợp số?

Giải

Do p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p \not\vdots 3 \Rightarrow 4p \not\vdots 3$.

Do $2p+1$ là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $2p+1 \not\vdots 3$

$\Rightarrow 2(2p+1) \not\vdots 3$ hay $4p+2 \not\vdots 3$.

Mặt khác, trong ba số tự nhiên liên tiếp $4p; 4p+1; 4p+2$ luôn có một số chia hết cho 3, do đó $4p+1 \vdots 3$. Mà $4p+1 > 3$, nên $4p+1$ là hợp số.

Ví dụ 6. Tìm số nguyên tố biết rằng số đó bằng tổng của hai số nguyên tố và cũng bằng hiệu của hai số nguyên tố khác.

Giải

Gọi p là số nguyên tố cần tìm và $p = a+b = c-d$, với a,b,c là các số nguyên tố, $c > d$.

Vì $p = a+b > 2$ nên p là số lẻ.

$\Rightarrow a+b$ và $c-d$ là các số lẻ.

- Vì $a+b$ là số lẻ nên một trong hai số a,b là số chẵn, giả sử b chẵn. Vì b là số nguyên tố nên $b=2$.
- Vì $c-d$ là số lẻ nên một trong hai số c,d là số chẵn. Vì c,d là các số nguyên tố và $c > d$ nên d là số chẵn $\Rightarrow d = 2$.

Do vậy $p = a+2 = c-2 \Rightarrow c = a+4$

Ta cần tìm số nguyên tố a để $p = a+2$ và $c = a+4$ cũng là số nguyên tố. Theo ví dụ 4, ta có $a = 3$.

Vậy số nguyên tố cần tìm là 5, với 5 = 3 + 2 = 7 – 2.

Dạng 3. ***Các bài toán về phân tích một số ra thừa số nguyên tố***

Ví dụ 7. Phân tích các số sau ra thừa số nguyên tố:

a) 2001^{2012} b) 2.9.2012

Giải

a) Phân tích số 2001 ra thừa số nguyên tố ta được: 2001 = 3.23.29

Từ đó suy ra: $2001^{2012} = (3.23.29)^{2012} = 3^{2012}.23^{2012}.29^{2012}$

b) Phân tích số 2012 ra thừa số nguyên tố ta được: 2012 = $2^2.503$

Từ đó suy ra: $2.9.2012 = 2.3^2.2^2.503 = 2^3.3^2.503$

Ví dụ 8. Tìm $n \in N^*$ biết: 2 + 4 + 6 + … + *(2n)* = 756.

Giải

Số số hạng trong vế trái là: $(2n-2):2+1 = (n-1)+1 = n$

Khi đó: 2 + 4 + 6 + … + *(2n)* = $(2n+2)n:2 = n.(n+1)$

Phân tích số 756 thành tích của hai số tự nhiên liên tiếp:

$756 = 2^2.3^3.7 = 27.28$

Theo đề ra, ta có: $n(n+1) = 27.28 \Rightarrow n = 27$

Vậy $n = 27$

Ví dụ 9. Tìm số tự nhiên n sao cho $p = (n-2)(n^2+n-5)$ là số nguyên tố.

Giải

Từ $p = (n-2)(n^2+n-5)$ suy ra $n-2$ và n^2+n-5 là ước của *p*.

Vì p là số nguyên tố nên $n-2=1$ hoặc $n^2+n-5=1$

Nếu n – 2 = 1 thì n = 3

Khi đó $p = 1.(3^2+3-5) = 7$ là số nguyên tố (thỏa mãn).

Nếu $n^2+n-5=1 \Leftrightarrow n^2+n=6 \Leftrightarrow n(n+1)=2.3 \Rightarrow n=2$

Khi đó $p=(2-2).1=0$ không là số nguyên tố.

Vậy n = 3.

III. BÀI TẬP

1.67. Tìm tập hợp các số tự nhiên vừa là bội của 4, vừa là ước của 60.

1.68. Tìm các số tự nhiên x, y sao cho $(2x-1)(y+3)=12$.

1.69. Chứng tỏ rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $(p-1)(p+1)$ chia hết cho 24.

(Đề HSG tỉnh Phú Thọ, 2004)

1.70. Tìm chữ số *a* để $\overline{23a}$ là số nguyên tố.

1.71. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất có 12 ước số.

1.72. Chứng tỏ rằng: Nếu một số tự nhiên có ba chữ số tận cùng là 104 thì số đó có ít nhất 4 ước số.

1.73. Tìm hai số nguyên tố có tổng bằng 309.

1.74. Tìm số nguyên tố p, sao cho $p+4; p+8$ cũng là các số nguyên tố.

(Đề HSG Hà Nội, 2008)

1.75. Tìm số nguyên tố p, sao cho $p+6; p+8; p+12; p+14$ cũng là các số nguyên tố.

1.76. Cho p và $p+4$ là các số nguyên tố $(p>3)$. Chứng tỏ rằng: $p+8$ là hợp số.

1.77. Số $3^2+3^4+3^6+...+3^{2012}$ là số nguyên tố hay hợp số.

1.78. Hai số nguyên tố gọi là *sinh đôi* nếu chúng là hai số nguyên tố và là hai số lẻ liên tiếp (chẳng hạn như: 3 và 5, 11 và 13,…). Chứng minh rằng số tự nhiên lớn hơn 4 và nằm giữa hai số nguyên tố sinh đôi thì chia hết cho 6.

1.79. Tìm ba số tự nhiên lẻ liên tiếp đều là số nguyên tố.

1.80. Tìm $n \in N*$, biết: $1+3+5+...+(2n+1)=144$.

1.81. Tìm số $\overline{abc}$ khi phân tích ra thừa số nguyên tố có thừa số 3 và thừa số 7. Chứng tỏ rằng số $a+19b+4c$ có tính chất đó.

1.82. Tìm chữ số *a* sao cho số $\overline{aaa}$ là tổng của các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến số n nào đó.

Chuyên đề 6. ƯỚC CHUNG LỚN NHẤT

VÀ BỘI CHUNG NHỎ NHẤT

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Kiến thức cơ bản

a) Ước chung và ước chung lớn nhất

• Ước chung của hai hay nhiều số là ước của tất cả các số đó.

Tập hợp các ước chung của hai số a và b kí hiệu là ƯC(a, b) và được xác định bởi:

ƯC(a, b) = Ư(a) $\cap$ Ư(b).

• Ước chung lớn nhất của *a* và *b* là số lớn nhất trong tập hợp ước chung của *a* và *b*. Kí hiệu là ƯCLN(*a, b)* hoặc gọn hơn *(a, b).*

Cách tìm ƯCLN của các số cho trước:

Bước 1. Phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố.

Bước 2. Chọn ra các thừa số nguyên tố chung.

Bước 3. Lập tích các thừa số nguyên tố đã chọn, mỗi thừa số lấy với số mũ nhỏ nhất của nó. Tích đó là ƯCLN cần tìm.

• **Chú ý**:

+ Nếu $a \vdots b$ thì $(a,b)=b$.

+ *a* và *b* nguyên tố cùng nhau $\Leftrightarrow (a;\, b)=1$

+ Ba số *a, b, c* gọi là đôi một nguyên tố cùng nhau nếu $(a,b)=(b,c)=(c,a)=1$

+ Muốn tìm ước chung của các số đã cho, ta tìm ước của ƯCLN của tất cả các số đó.

b) Bội chung và bội chung nhỏ nhất

• Bội chung của hai hay nhiều số (khác 0) là bội của tất cả các số đó.

Tập hợp các bội chung của hia số *a* và *b* kí hiệu là BC(a,b) và được xác định là $BC(a,b)=B(a)\cap B(b)$.

• Bội chung nhỏ nhất của a và b là số nhỏ nhất khác 0 trong tập hợp các bội chung của a và b, kí hiệu $BCNN(a;b)$ hoặc rút gọn hơn $[a,b]$

Cách tìm BCNN của các số cho trước:

Bước 1. Phân tích các số ra thừa số nguyên tố.

Bước 2. Chọn ra các thừa số nguyên tố chung và riêng.

Bước 3. Lập tích các thừa số đã chọn, mỗi thừa số lấy với số mũ lớn nhất của nó, tích đó là BCNN phải tìm.

• ***Chú ý:***

+ Nếu $a \vdots b$ với $(a \ne 0)$ thì $[a,b]=a$.

+ $(a,b)=1$ thì $[a,b]=a.b$

+ Muốn tìm bội chung của các số đã cho, ta tìm bội của BCNN của các số đó.

2. Nâng cao

• Cho $a,b \in N$ và $(a,b)=d$. Nếu $a=dm$ và $b=dn$ thì suy ra: $(m,n)=1$

• Cho $a,b \in N$ và $[a,b]=c$. Nếu $c=am$ và $c=bn$ thì suy ra $(m,n)=1$.

• $(ma,mb)=m(a,b)$ và $[ma,mb]=m[a,b]$

- Nếu $ab \vdots m$ và $(a,m)=1$ thì $b \vdots m$
- Nếu $a \vdots m$ và $a \vdots n$ thì $a.b \vdots [m,n]$ đặc biệt nếu $a \vdots m$ và $a \vdots n$ mà $(m,n)=1$ thì $a \vdots mn$

Tích hai số bằng tích của BCNN và ƯCLN của chúng: $a.b=(a,b).[a,b]$

II. MỘT SỐ VÍ DỤ

Dạng 1. ***Các bài toán về ước chung và bội chung.***

Ví dụ 1. Tìm ƯC(28, 70); BC(4; 14).

Giải

+ Ta có Ư(28) = {1; 2; 4; 7; 14; 28}

Ư(70) = {1; 2; 5; 7; 10; 14; 35; 70}

Từ đó suy ra ƯC(28; 70) = Ư(28) $\cap$ Ư(70) = {1; 2; 7; 14}

+ Ta có: B(4) = {0; 4; 8; 12; 16; 20; 24; 28;....}

B(14) = {0; 14; 28; 42; 56;....}.

Từ đó suy ra: BC(4, 14) = B(4) $\cap$ B(14) = {0; 28; 56; ...}

Nhận xét:

Dựa vào các chú ý trong phần I, ta có thể giải bài toán trên theo cách khác sau đây:

+ Ta có: $28=2^2.7$; $70=2.5.7$ $\Rightarrow$ ƯCLN(28,70) = 2.7 = 14.

Vậy ƯC(28,70) = Ư(ƯCLN(28,70)) = Ư(14) = {1; 2; 7; 14}

+ Ta có: 4 = 2^2 và 14 = 2.7 $\Rightarrow$ BCNN(4,14) = 2^2. 7 = 28.

Vậy BC(4,14) = B(BCNN(4,14)) = B(28) = {0; 28; 58;...}.

Ví dụ 2: Tìm số tự nhiên a, biết rằng 332 chia cho a thì dư 17, còn khi chia 555 cho a thì được dư là 15.

Giải:

Vì 332 chia cho a dư 17 nên 332 – 17 = 315 $\vdots$ a và a > 17.

Vì 555 chia cho a dư 15 nên 555 – 15 = 540 $\vdots$ a và a > 15.

$\Rightarrow$ $a \in$ ƯC(315,540)và a > 17.

Ta có: 315 = 3^2 . 5.7 và 540 = 2^2 . 3^3 . 5

$\Rightarrow$ ƯCLN(315,540) = 3^2 . 5 = 45.

Do đó : $a \in$ ƯC(315, 540) = Ư(45) = {1; 3; 5; 9; 15; 45}.

Vì a > 17 nên a = 45.

Vậy a = 45

Ví dụ 3: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất có bốn chữ số, biết rằng khi chia số đó cho 18; 24 ; 30 có số dư lần lượt là 13; 19; 25.

Giải:

Gọi số cần tìm là a, $1000 \le a \le 9999$.

Vì a chia cho 18 dư 13 nên ta có a = 18 . q + 13.

$\Rightarrow$ a + 5 = (18.q + 18) $\vdots$ 18.

Tương tự, ta cũng có : a + 5 chia hết cho 24 và 30.

Do vậy a + 5 $\in$ BC(18,24, 30) $\Rightarrow$ (a + 5) $\vdots$ BCNN(18, 24, 30).

Ta có: BCNN(18, 24, 30) = BCNN(2.3^2, 2^3.3, 2.3.5) = 2^3. 3^2.5 = 360

$\Rightarrow$ a + 5 $\vdots$ 360 hay a + 5 = 360.k với k $\in$N*.

$\Rightarrow$ a = 360.k – 5.

Ta thấy k càng lớn thì a càng lớn,vì vậy để a là số nhỏ nhất thì k phải nhỏ nhất.

Với k =1 thì a = 355 < 1000: không thỏa mãn.

Với k =2 thì a = 715 < 1000: không thỏa mãn.

Với k = 3 thì a = 1075 < 1000: thỏa mãn.

Vậy số cần tìm là 1075.

Nhận xét: Ta có thể dùng cách suy luận khác như sau:

Vì $1000 \le a \le 9999$ nên ta có $1000 \le 360.k - 5 \le 9999$

Cộng ba số với 5 ta được: $10005 \le 360.k \le 10004$.

Chia ba số cho 360, ta được: $\frac{1005}{360} \le k \le \frac{10004}{360} \Leftrightarrow \frac{67}{24} \le k \le \frac{2501}{90}$

Vì $k \in N^*$ nên $3 \le k \le 27$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của k là 3. Tương ứng sẽ cho giá trị nhỏ nhất của a là 1075. Ngoài ra, giá trị lớn nhất của k là 27. Tương ứng sẽ cho giá trị nhỏ nhất của a là 360. 27 – 5 = 9715

Ví dụ 4: Tìm hai số tự nhiên a, b biết rằng a + b = 128 và (a, b) = 16.

Giải:

Vì (a, b) = 16 nên a = 16.m ; b = 16. n và (m, n) = 1.

Vì a + b = 128 nên 16m + 16 n = 128 $\Rightarrow m+n=8$

Vì (m, n) = 1 và m + n = 8 nên ta có bốn trường hợp sau:

- m = 1 và n = 7 $\Rightarrow$ a = 16 . 1 = 16 và b = 16 . 7 = 112.
- m = 3 và n = 5 $\Rightarrow$ a = 16 . 3 = 48 và b = 16 . 5 = 80.
- $m=5$ và $n=3$ $\Rightarrow a=16.5=80$ và $b=16.3=48$.
- $m=7$ và $n=1$ $\Rightarrow a=16.7=112$ và $b=16.1=16$.

Vậy bài toán có 4 đáp số là:

a	16	48	80	112
b	112	80	48	16

Nhận xét:

Trong ví dụ trên ta thấy rằng: bài toán có đáp số là $a=48$; $b=80$ thì cũng có đáp số là $a=80$; $b=48$. Điều đó có được là do vai trò của a và b trong đó đề bài là như nhau. Với những bài toán như vậy, ta thường giửa sử $a \le b$ để làm giảm số trường hợp phải xét. Khi giải xong ta chỉ cần đổi vai trò của a và b để có các đáp số còn lại.

Ví dụ 5. Tìm hai số tự nhiên a, b biết rằng: $(a,b)=6$ và $[a,b]=36$.

Giải

Vì vai trò của a và b là như nhau, nên không mất tính tổng quát, ta giả sử $a \le b$.

Áp dụng công thức: $a.b=[a,b].(a,b)$, ta có: $a.b=36.6=216$.

Vì $(a,b)=6$ nên $a=6.m$ và $b=6.n$, với $m \le n$ và $(m,n)=1$

Thay vào $a.b=216$ ta được: $6m.6n=216$

$$36mn=216$$

$$mn=216:36=6.$$

Vì $m \le n$; $mn=6$ và $(m,n)=1$ nên ta có hai trường hợp sau:

- $m=1$ và $n=6$ $\Rightarrow a=6.1=6$ và $b=6.6=36$.
- $m=2$ và $n=3$ $\Rightarrow a=6.2=12$ vaf $b=6.3=18$.

Đổi vai trò của a và b, ta có hai đáp số khác là: $a=36$ và $b=6$; $a=18$ và $b=12$.

Vậy bài toán có 4 đáp số:

a	6	12	18	6
b	36	18	12	36

Dạng 2. *Các bài toán chứng minh*

Ví dụ 6. Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng tỏ rằng: $(2n+3;3n+4)=1$.

Giải

Đặt $d=(2n+3;3n+4)$, ta có: $(2n+3) \vdots d$ và $(3n+4) \vdots d$

$\Rightarrow 3(2n+3)\vdots d$ và $2(3n+4)\vdots d$ hay $(6n+8)\vdots d$

$\Rightarrow [(6n+9)-(6n+8)]\vdots d$ hay $1\vdots d$

$\Rightarrow d = 1$

Vậy $(2n+3;3n+4)=1$

Ví dụ 7. Cho a, $b \in \mathbb{N}^*$; $a > b$ và $(a,b)=1$.

Chứng tỏ rằng $(a+b,a-b)$ hoặc bằng 1, hoặc bằng 2.

Giải

Đặt $d=(a+b,a-b)$ thế thì: $(a+b)\vdots d$ và $(a-b)\vdots d$

Tức là: $a+b=d.m$; $a-b=d.n$ (với $m,n\in\mathbb{N}$; $m>n$)

Suy ra: $2a=d.m+d.n \Rightarrow 2a\vdots d$

Và: $2b=d.m-d.n \Rightarrow 2b\vdots d$

Do đó $d \in$ ƯC$(2a,2b)$ $\Rightarrow (2a,2b)\vdots d$

Mà $(2a,2b)=2(a,b)=2$ nên $2\vdots d \Rightarrow d=1$ hoặc $d=2$.

Vậy $(a+b,a-b)$ hoặc bằng 1 hoặc bằng 2.

Nhận xét:

Trong lời giải trên ta dùng kết quả của một bài toán quen thuộc: "tìm hai số biết tổng và hiệu". Khi đó, 2 lần số lớn bằng tổng cộng hiệu, 2 lần số nhỏ bằng tổng trừ hiệu.

Dạng 3. *Các bài toán thực tế*

Ví dụ 8. Một khu đất hình chữ nhật dài 54 m, rộng 48 m. Người ta muốn chia khu đất ấy thành những mảnh hình vuông bằng nhau để trồng các loại rau. Hỏi có thể chia được bằng bao nhiêu cách? Với cách chia nào thì cạnh của mảnh đất hình vuông là lớn nhất và bằng bao nhiêu?

Giải

Gọi n là độ dài một cạnh của mảnh đất hình vuông được chia ra. Ta có: $54\vdots n$ và $48\vdots n$ $\Rightarrow n\in$ ƯC$(54,48)$.

Lại có: $54=2.3^3$ và $48=2^4.3$

Nên suy ra: ƯCLN$(54,48)=$ Ư$(6)=\{1;2;3;6\}$.

Vậy ta có thể chia khu đất theo 4 cách và cạnh của mảnh đất hình vuông lớn nhất có thể là 6 m.

Nhận xét:

Ta có thể tính được số mảnh đất hình vuông tạo thành của mỗi cách chia như sau:

Cách	Độ dài một cạnh của mảnh đất hình vuông	Số mảnh đất hình vuông tạo thành
1	1 m	$54.48=2592$
2	2 m	$27.24=648$
3	3 m	$18.16=288$
4	4 m	$9.8=72$

Ví dụ 9. Một trường tổ chức cho 64 học sinh đi thi đấu thể thao bằng một số xe ô tô thuộc hai loại: loại xe 12 chỗ ngồi và loại xe 7 chỗ ngồi (không kể người lái xe). Biết rằng số học sinh đó xếp vừa đủ số ghế ngồi trên các xe. Hỏi mỗi loại xe có mấy chiếc?

Giải

Gọi x là số xe 12 chỗ và y là số xe 7 chỗ ngồi ($x, y \in \mathbb{N}^*$).

Số học sinh đi xe loại 12 chỗ ngồi là $12x$.

Số học sinh đi xe loại 7 chỗ ngồi là $7y$.

Theo đề ra ta có: $12x + 7y = 64$ (*)

Ta có: $12x \vdots 4$ và $64 \vdots 4$ nên $7y \vdots 4$.

Vì ƯCLN$(7,4) = 1$ nên $y \vdots 4$.

Từ (*) ta suy ra: $7y < 64 \Rightarrow y \leq 9$.

Mà $y \vdots 4$ nên $y \in \{4;8\}$.

+ nếu $y = 4$ thì thay vào (*) ta được: $12x + 7.4 = 64$

$12x = 64 - 28 = 36$

Suy ra $x = 36:12 = 3$

+ nếu $y = 8$ thì thay vào (*) ta được $12x + 7.8 = 64$

Suy ra $12x = 64 - 7.8 = 8$

Suy ra $x \notin \mathbb{N}^*$.

Vậy có 3 xe 12 chỗ ngồi và 4 xe 7 chỗ ngồi.

III. BÀI TẬP

1.83. Tìm ƯC$(48,120,150)$; BC$(26,78)$.

1.84. Cho a, b là hai số tự nhiên không nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn: $a = 4n + 3$; $b = 5n + 1$ ($n \in \mathbb{N}$). Tìm (a,b).

1.85. Tìm hai số tự nhiên a, b biết:

a) $7a = 11b$ và $(a,b) = 45$.

b) $[a,b] = 300$ và $a.b = 4500$.

c) $a + b = 30$ và $[a,b] = 6.(a,b)$.

1.86. Tìm hai số tự nhiên a, b biết: $a + 2b = 48$ và $(a,b) + 3[a,b] = 114$.

1.87. Tìm hai số tự nhiên a, b biết: ƯCLN(a,b) + BCNN(a,b) =15.

1.88. Một số chia cho 21 dư 2 và chia cho 12 dư 5. Hỏi số đó chia cho 84 thì dư bao nhiêu?

1.89. Cho một số tự nhiên a thỏa mãn: $a \vdots 7$ và a chia cho 4 hoặc 6 đều dư 1. Tìm a biết rằng $a < 400$.

1.90. Tìm số tự nhiên lớn nhất có ba chữ số sao cho chia nó cho 2, cho 3, cho 4, cho 5,cho 6 ta được các số dư theo thứ tự là 1, 2, 3, 4, 5.

1.91. Cho $(a,b) = 1$, chứng tỏ rằng:

a) $(a, a - b) = 1$ (với $a > b$)

b) $(ab, a + b) = 1$.

1.92. Cho $n \in \mathbb{N}$. Chứng tỏ rằng:

a) $(2n+1, 2n+3) = 1$ b) $(2n+5, 3n+7) = 1$

1.93. Cho hai số nguyên tố cùng nhau a và b. Chứng tỏ rằng hai số $11a+2b$ và $18a+5b$ hoặc nguyên tố cùng nhau hoặc có môt ước chung là 19.

1.94. Một lớp học có 24 học sinh nam và 18 học sinh nữ. Có bao nhiêu cách chia lớp đó thành các tổ sao cho số học sinh nam và số học sinh nữ được chia đều vào các tổ? Biết rằng số tổ lớn hơn 1.

1.95. Một đơn vị bộ đội khi xếp hàng, mỗi hàng có 20 người, hoặc 25 người, hoặc 30 người đều thừa 15 người. Nếu xếp mỗi hàng 41 người thì vừa đủ (không có hàng nào thiếu, không có ai ở ngoài hàng). Hỏi đơn vị có bao nhiêu người, biết rằng số người của đơn vị chưa đến 1000?

1.96. Tổng số học sinh khối 6 của một trường có khoảng 235 đến 250 em, khi chia cho 3 dư 2, chia cho 4 thì dư 3, chia cho 5 thì dư 4, chia cho 6 thì dư 5, chia 10 dư 9. Tìm số học sinh của khối 6.

1.97. Một trường tôt chức cho học sinh đi tham quan bằng ô tô. Nếu xếp 35 hay 40 học sinh lên một ô tô thì đều thấy thừa ra 5 chỗ trống. Tính số học sinh đi tham quan, biết rằng số học sinh đó có khoảng từ 200 đến 300 em.

1.98. Cho $a = 123456789$ và $b = 987654321$. Tìm (a,b).

1.99. Hãy tìm các chữ số a, b, c, d sao cho các số a, $\overline{ad}$, $\overline{cd}$, $\overline{abcd}$ là các số chính phương. *(Đề thi HSG Thừa Thiên Huế, 2007)*

Chuyên đề nâng cao 1. SỐ CHÍNH PHƯƠNG

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Số chính phương là bình phương của một số tự nhiên.

Tức là, nếu A là số chính phương thì $A = k^2$ ($k \in \mathbb{N}$).

2. Tính chất

- Số chính phương có chữ số tận cùng là một trong các số $0;\ 1;\ 4;\ 5;\ 6;\ 9$, không có chữ số tận cùng là $2;\ 3;\ 7;\ 8$.
- Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với số mũ chẵn, không chứa các thừa số nguyên tố với số mũ lẻ.

Chứng minh

Giả sử $A = k^2$ với $k \in \mathbb{N}$.

Phân tích k ra thừa số nguyên tố ta có: $k = a^x.b^y.c^z...$ (trong đó: a, b, c,... là các số nguyên tố đôi một khác nhau và $x,\ y,\ z,\ ... \in \mathbb{N}^*$)

Khi đó: $A = \left(a^x.b^y.c^z\right)^2 = a^{2x}.b^{2y}.c^{2z}...$ (*đpcm*).

Từ tính chất 2 ta có các hệ quả:

a) Nếu A là một số chính phương, p là số nguyên tố và $A \vdots p$ thì $A \vdots p^2$.

b) Tích của các số chính phương là một số chính phương.

c) $A = a.b$ là số chính phương thì $a = m.p^2$, $b = m.q^2$. Đặc biệt, nếu a là số chính phương thì b cũng là số chính phương.

- Số các ước của một số chính phương (khác 0) là số lẻ. Ngược lại, một số có số các ước là lẻ thì số đó là số chính phương.

Chứng minh

Gọi A là số tự nhiên khác 0.

- Nếu $A = 1$ thì A là số chính phương có một ước.
- Nếu $A > 1$ thì A có dạng phân tích ra thừa số nguyên tố là:

$A = a^x.b^y.c^z...$ (a, b, c, ... là các số nguyên tố đôi một khác nhau)

$\Rightarrow$ Số lượng các ước của A là $S = (x+1)(y+1)(z+1)$ ...

a) Nếu A là số chính phương thì $x,\ y,\ z$, ... là các số chẵn, nên $x+1,\ y+1,\ z+1$, ... là các số lẻ, do đó S là số lẻ.

b) Đảo lại, nếu S là số lẻ thì $(x+1)(y+1)(z+1)$ ... là số lẻ $\Rightarrow$ các thừa số $x+1$, $y+1,\ z+1$, ... đều là số lẻ $\Rightarrow$ x, y, z, ... là các số chẵn.

Đặt $x = 2x',\ y = 2y',\ z = 2z'$, ... ($x',\ y',\ z',\ ... \in \mathbb{N}$) thì $A = \left(a^{x'}.b^{y'}.c^{z'}\right)^2$ nên A là số chính phương (*đpcm*).

- Nếu số A nằm giữa bình phương của hai số tự nhiên liên tiếp thì A không thể là số chính phương. Nghĩa là: nếu $n^2 < A < (n+1)^2$ thì A không là số chính phương.
- Hai đẳng thức thường dùng: $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ (1)

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2 \quad (2)$$

Chứng minh

Chứng minh đẳng thức (1). Ta có:

$$a^2+2ab+b^2=(a^2+ab)+(ab+b^2)=a(a+b)+b(a+b)=(a+b)(a+b)=(a+b)^2$$

Chứng minh tương tự ta cũng có đẳng thức (2).

II. MỘT SỐ DẠNG TOÁN ỨNG DỤNG

Dạng 1. *Kiểm tra một số có phải là số chính phương hay không*

Ví dụ 1. Các số sau có phải là số chính phương hay không? Vì sao?

a) $A=3+3^2+3^3+...+3^{20}$

b) $B=10^{10}+8$

c) $C=100!+7$

d) $D=10^{10}+5$

e) $E=10^{100}+10^{50}+1$.

Giải

a) Ta có $3^n \vdots 9$ với mọi $n \geq 2$ nên $(3^2+3^3+...+3^{20}) \vdots 9$

$\Rightarrow A=3+3^2+3^3+...+3^{20}$ chia hết cho 3 và chia cho 9 dư 3.
Vì A chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 nên A không phải là số chính phương.

b) Ta có $10^{10}+8$ có chữ số tận cùng là 8 nên B không phải là số chính phương.

c) Ta có $100!+7$ có chữ số tận cùng là 7 nên C không phải là số chính phương.

d) Ta có $10^{10}+5$ có chữ số tận cùng là 5 chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 25 (vì có hai chữ số tận cùng là 05) nên D không phải là số chính phương.

e) Ta có $10^{100}+10^{50}+1$ có tổng các chữ số là 3 chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 nên E không phải là số chính phương.

Ví dụ 2. Cho $F=3^1+3^2+3^3+...+3^{100}$. Chứng minh rằng $2F+3$ không là số chính phương

Giải

Ta có: $F=3^1+3^2+3^3+...+3^{100}$

Nên $3F=3^2+3^3+3^4+...+3^{101} \Rightarrow 3F-F=3^{101}-3$.

Do đó $2F+3=3^{101}-3+3=3^{101}=3^{100}.3=(3^{50})^2.3$ không là số chính phương, vì 3 không phải là số chính phương.

Ví dụ 3. Viết liên tiếp từ 1 đến 12 được số $H=1234...1112$. Số H có thể có 81 ước được không?

Giải

Giả sử H có 81 ước.

Vì số lượng các ước của H là 81 (là số lẻ) nên H là số chính phương (1)
mặt khác, tổng của các chữ số của H là:
$1+2+3+...+9+(1+0)+(1+1)+(1+2)=51$.

Vì $51 \vdots 3$; $5 \not\vdots 9$ nên H chia hết cho 3 nhưng không hica hết cho 9, do đó H không là số chính phương: mâu thuẫn với (1) !
Vậy H không thể có 81 ước.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng không tồn tại hai số tự nhiên x và y khác 0 sao cho x^2+y và $x+y^2$ là số chính phương.

Giải

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $x \geq y$.

Khi đó, ta có: $x^2 < x^2+y \leq x^2+x = x(x+1) < (x+1)^2$

$\Rightarrow x^2+y$ không thể là số chính phương.

(nếu $x \leq y$ thì chứng minh tương tự ta có $x+y^2$ không là số chính phương).

Vậy không tồn tại hai số tự nhiên x và y sao cho x^2+y và $x+y^2$ là số chính phương.

Nhận xét: để chứng minh số A không là số chính phương ta thường sử dụng một trong các cách sau:

Cách 1: chứng minh chữ số tận cùng của A là một trong các số 2; 3; 7; 8.

Cách 2: chứng minh $A \vdots p$ (với p là số nguyên tố) nhưng $A \not\vdots p^2$

Cách 3: chứng minh $n^2 < A < (n+1)^2$.

Dạng 2. *Lập số chính phương từ các chữ số đã cho*

Ví dụ 5. Tìm số chính phương có bốn chữ số là 3, 6, 8, 8.

Giải

Gọi A là số chính phương phải tìm.

Vì số chính phương không tận cùng bằng 3, 8 nên do đó A phải tận cùng bằng 6.

$\Rightarrow$ hai chữ số tận cùng của A là 86 hoặc 36.

- Nếu A có hai chữ số tận cùng là 86 thì A chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 nên A không phải là số chính phương (loại).
- Nếu A có hai chữ số tận cùng là 36 thì $A = 8836$.
  Thử lại, ta có: $8836 = 94^2$ là số chính phương.

Vậy số cần tìm là 8836.

Ví dụ 6. Một số tự nhiên gồm một chữ số 0 và sáu chữ số 6 có thể là một số chính phương không?

Giải

Gọi A là số gồm một chữ số 0 và sáu chữ số 6.

- Nếu A có chữ số tận cùng là 0 thì A có hai chữ số tận cùng là 60

  $\Rightarrow A$ chia hết cho 5 nhưng A không chia hết cho $5^2 = 25$ (vì $60 \not\vdots\, 25$)

  $\Rightarrow A$ không là số chính phương.
- Nếu A có chữ số tận cùng là 6 $\Rightarrow A$ có hai chữ số tận cùng là 06 hoặc 66

  $\Rightarrow A$ chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4, do vậy A không phải là số chính phương.

  Vậy A không phải là số chính phương.

Ví dụ 7. Tìm số có hai chữ số, biết rằng nếu nhân nó với 135 thì được một số chính phương.

Giải

Gọi số phải tìm là n, ta có $135n = a^2$ ($a \in \mathbb{N}$) hay $3^3.5.n = a^2$.

Vì số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với số mũ chẵn nên $n = 3.5.k^2$ ($k \in \mathbb{N}$).

Vì n là số có hai chữ số nên $10 \le 3.5.k^2 \Rightarrow k^2 \in \{1;4\}$.

- Nếu $k^2 = 1$ thì $n = 15$
- Nếu $k^2 = 4$ thì $n = 60$.

  Vậy số cần tìm là 15 hoặc 60.

Ví dụ 8. Tìm số chính phương có bốn chữ số sao cho hai chữ số đầu giống nhau, hai chữ số cuối giống nhau.

Giải

Gọi số chính phương cần tìm là $n^2 = \overline{aabb}$ ($a, b \in \mathbb{N}$ và $1 \le a \le 9$, $0 \le b \le 9$).

Ta có $n^2 = \overline{aabb} = 1100a + 11b = 11(100a + b) = 11(99a + a + b)$ (1)

$\Rightarrow (99a + a + b) \vdots 11 \Rightarrow (a + b) \vdots 11 \Rightarrow a + b = 11$.

Thay $a + b = 11$ vào (1) ta được $n^2 = 11(99a + 11) = 11^2(9a + 1)$.

$\Rightarrow 9a + 1$ phải là số chính phương

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$9a+1$	10	19	28	37	46	55	64	73	82

Ta thấy chỉ có $a = 7$ thì $9a + 1 = 64 = 8^2$ là số chính phương.

Vậy $a = 7 \Rightarrow b = 4$ và số cần tìm là: $7744 = 11^2.8^2 = 88^2$.

Dạng 3. *Toán chứng minh*

Ví dụ 9. Chứng minh rằng tích của bốn chữ số tự nhiên liên tiếp cộng 1 là một số chính phương.

Chứng minh

Gọi bốn số tự nhiên liên tiếp là a, $a+1$, $a+2$, $a+3$ ($a \in \mathbb{N}$)

Xét $T = a(a+1)(a+2)(a+3) + 1$

$= [a(a+3)][(a+1)(a+2)] + 1$

$= (a^2 + 3a)(a^2 + 3a + 2) + 1$

Đặt $x = a^2 + 3a$, ta có:

$T = x\left(x+2\right)+1 = x^2+2x+1 = \left(x+1\right)^2$ hay $T = \left(a^2+3a+1\right)^2$.

Vậy T là số chính phương (*đpcm*)

Nhận xét:

- Trong ví dụ trên ta không chỉ biết được T là một số chính phương mà còn biết được nó còn là bình phương của số nào.

  Chẳng hạn:

  a) $1.2.3.4+1 = 25 = 5^2$

  b) $2.3.4.5+1 = 121 = 11^2$

  c) $3.4.5.6+1 = 361 = 19^2$

  d) $4.5.6.7+1 = 841 = 29^2$

Thay $a+b=11$ vào (1) ta được $n^2 = 11(99a+11) = 11^2(9a+1)$.

$\Rightarrow 9a+1$ là số chính phương .

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9a+1	10	19	28	37	46	55	64	73	82

Ta thấy chỉ có $a=7$ thì $9a+1 = 64 = 8^2$ là số chính phương.

Vậy $a = 7 \Rightarrow b = 4$ và số cần tìm là : $7744 = 11^2.8^2 = 88^2$.

Dạng 3.*Toán chứng minh*

Ví dụ 9. Chứng minh rằng tích của bốn số tự nhiên liên tiếp cộng 1 là một số chính phương.

Chứng minh

Gọi bốn số tự nhiên liên tiếp là $a, a+1, a+2, a+3$ $(a \in \mathbb{N})$.

Xét $T = a(a+1)(a+2)(a+3)+1$

$= [a(a+3)][(a+1)(a+2)]+1$

$= (a^2+3a)(a^2+3a+2)+1$

Đặt $x = a^2+3a$, ta có :

$T = x(x+2)+1 = x^2+2x+1 = (x+1)^2$ *hay* $T = (a^2+3a+1)^2$.

Vậy T là số chính phương (đpcm).

Nhận xét :

- Trong ví dụ trên ta không chỉ biết được T là một số chính phương mà còn biết được nó còn là bình phương của số nào .

Chẳng hạn :

a) $1.2.3.4+1=25=5^2$

$2.3.4.5+1=121=11^2$

$3.4.5.6+1=361=19^2$

$4.5.6.7+1=841=29^2$

b) Biểu thức sau đây là bình phương của số tự nhiên nào?

- $10.11.12.13+1=?$

Vì $a=10$ nên $a^2+3a+1=10^2+3.10+1=131.$

Do vậy $10.11.12.13+1=131^2$

- $15.16.17.18+1=?$

Vì $a=15$ nên $a^2+3a+1=15^2+3.15+1=271.$

Do vậy $10.11.12.13+1=271^2$.

- Cũng từ ví dụ trên ta còn suy ra hai kết quả sau:
  1) Tích của bốn số tự nhiên chẵn liên tiếp cộng 16 là một số chính phương .
  2) Tích của bốn số tự nhiên lẻ liên tiếp cộng 16 là một số chính phương .

Ví dụ 10. Chứng minh rằng tổng của bốn số tự nhiên liên tiếp không là số chính phương

Giải

Gọi bốn số tự nhiên liên tiếp là $a; a+1; a+2; a+3$ (với $a \in \mathbb{N}$)

Ta xét : $S=a+(a+1)+(a+2)+(a+3)=4a+6$

Vì $4a \vdots 2$ và $6 \vdots 2$ nên $S \vdots 2$ .Mặt khác vì $4a \vdots 4$ và 6 không chia hết cho 4 nên S không chia hết cho 4

$\rightarrow$S chia hết cho 2 nhưng S không chia hết cho 4 , do vậy S không là số chính phương .

?Có thể em chưa biết ?

1.Sự tuần hoàn của một số chính phương

Quan sát các chữ số tận cùng của bình phương các số từ 1 đến 9 ta thấy xuất hiện dãy số 1,4,9,6 ,5,6,9,4,1 .Bình phương của 10 là 100, có chữ số tận cùng là 0.Bình phương của các số tiếp theo cũng có các chữ số tận cùng lập thành dãy số 1,4,9,6,5,6,9,4,1 (gọi là vòng tuần hoàn). Tất cả bình phương của các số tự nhiên có chữ số tận cùng lặp đi lặp lại trong vòng tuần hoàn này (ranh giới lặp lại là số 0).

Người ta còn phát hiện " số gốc "của các số chính phương chỉ có thể là 1,4,7,9 mà không thể là các chữ số khác .Người ta gọi " số gốc " của một số là chỉ số thu được khi cộng dần các chữ số có trong con số,nếu tổng lớn hơn 9 thì lại tính tổng các chữ số của tổng và lặp lại cho đến khi tổng có được nhỏ hơn 9.Chữ số còn lại này gọi là “số gốc “ của số đã xét (hiểu theo cách khác là lấy tổng các chữ số của số đó đem chia cho 9,số dư của phép chia đó gọi là số gốc).Như vậy “số gốc”chính

là kết quả phép tính cộng dồn các chữ số có trong một con số , lấy số 9 làm điểm dừng .

Ví dụ : “số gốc “ của 135 là 9 , “ số gốc “ của 246 là 3…..

Ứng dụng tính chất vừa nêu trên ta có thể nhận biết một số có phải là số chính phương hay không.

Ví dụ : Xét xem số 98765432123456789 có phải là một số chính phương hay không ?

Ta tìm số gốc của con số trên:

Cách 1 :

$$\begin{aligned}&9+8+7+6+5+4+3+2+1+2+3+4+5+6+7+8+9\\&=9+9+(8+1)+2(7+2)+2(6+3)+2(5+4)+8\end{aligned}$$

$\Rightarrow$số gốc là 8 .

Cách 2 :

$$\begin{aligned}&9+8+7+6+5+4+3+2+1+2+3+4+5+6+7+8+9\\&=(9+8+7+6+5+4+3+2+1)+(2+3+4+5+6+7+8+9)\\&=45+44=89\end{aligned}$$

Vì $8+9=17$; $1+7=8$ $\Rightarrow$số gốc là 8

(Hoặc 89 chia cho 9 dư 8 $\Rightarrow$số gốc là 8)

Vì số gốc là 8 khác 1,4,7,9 nên số A không là số chính phương .

Số gốc của các số chính phương còn lập thành một dãy số tuần hoàn 1,4,9,7,7,9,4,1. Ở đây chữ số ranh giới là chữ số 9 chứ không phải là chữ số 0 như tính chất ở trên .

Ví dụ : 100 (bình phương của 10) có số gốc là 1

121 (bình phương của 11) có số gốc là 4

144 (bình phương của 12) có số gốc là 9

169 (bình phương của 13) có số gốc là 7

196 (bình phương của 14) có số gốc là 7

225(bình phương của 15) có số gốc là 9

256 (bình phương của 16) có số gốc là 4

289 (bình phương của 17) có số gốc là 1

324(bình phương của 18) có số gốc là 9 (ranh giới của chu kì)

361(bình phương của 19) có số gốc là 1 (bắt đầu lặp lại)

………………

2.Sự kì lạ của số lẻ

Ta có : $1+3=4=2^2$

$1+3+5=9=3^2$

$1+3+5+7=16=4^2$

$1+3+5+7+9=25=5^2$

$1+3+5+7+9+11=26=6^2$

$1+3+5+7+9+11+13=49=7^2$

…………………………

$\Rightarrow$ Tổng n số lẻ đầu tiên là một số chính phương:

$1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2$.

3.Tổng lập phương lại là số chính phương

Khẳng định sau đúng hay sai : “ Tổng lập phương các số tự nhiên liên tiếp từ 1 là một số chính phương “?

Ta dễ dàng kiểm tra bằng máy tính như sau :

$1^3+2^3 = 9 = 3^2$

$1^3+2^3+3^3 = 36 = 6^2$

$1^3+2^3+3^3+4^3 = 100 = 10^2$

$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3 = 225 = 15^2$

$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3 = 441 = 21^2$

$1^3+2^2+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3 = 784 = 28^2$

Mặt khác ta lại có :

$1+2=3$

$1+2+3=6$

$1+2+3+4=10$

$1+2+3+4+5=15$

$1+2+3+4+5+6=21$

$1+2+3+4+5+6+7=28$

…………………

Đến đây ta tìm ra được quy luật : $1^3+2^3+.....+n^3=(1+2+.....+n)^2$

III.BÀI TẬP

1.100. Chứng tỏ rằng các số sau không là số chính phương :

a) $\overline{abab}$ b) $\overline{abcabc}$

1.101. Cho $A=2^2+2^3+2^4+....+2^{20}$ .Chứng minh rằng A+4 không là số chính phương.

1.102. Chứng tỏ rằng tổng sau không là số chính phương : $S=\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$.

1.103. Cho bốn chữ số 0,2,3,4.Tìm số chính phương có bốn chữ số gồm cả bốn số trên.

1.104.a) Cho một số tự nhiên gồm 15 chữ số 2 .Có cách nào viết thêm các chữ số 0 vào vị trí tùy ý để số mới tạo thành là một số chính phương hay không?

b)Một số tự nhiên gồm một chữ số1, hai chữ số 2, ba chữ số 3, bốn chữ số 4 , có thể là một số chính phương hay không ?

1.105. Viết liên tiếp các số tự nhiên từ 1 đến 101 thành một số A .

a) A có là hợp số hay không ?

b) A có là số chính phương hay không ?

c) A có thể có 35 ước hay không ?

1.106.Từ năm chữ số 1,2,3,4,5, hãy lập tất cả các số có năm chữ số gồm cả năm chữ số trên.

Trong các số lập được , có số nào là số chính phương hay không ?

1.107.Tìm số tự nhiên n có hai chữ số ,biết rằng $2n+1$ và $3n+1$ là các số chính phương.

1.108.Tìm số tự nhiên n có hai chữ số , biết rằng nếu nhân nó với 45 thì ta được một số chính phương.

1.109.Tìm số nguyên tố $\overline{ab}(a>b>0)$ sao cho $\overline{ab}-\overline{ba}$ là số chính phương.

1.110.a) Các số tự nhiên n và $2n$ có tổng các chữ số bằng nhau.Chứng minh rằng n chia hết cho 9

b) Tìm số chính phương n có ba chữ số , biết rằng n chia hết cho 5 và nếu nhân n với 2 thì tổng các chữ số của nó không đổi.

1.111. Tìm số tự nhiên có hai chữ số ,sao cho nếu cộng nó với số có hai chữ số ấy viết theo chiều ngược lại thì ta được một số chính phương.

1.112.Tìm số chính phương có bốn chữ số,biết rằng :các chữ số hàng trăm ,hàng nghìn, hàng chục, hàng đơn vị theo thứ tự đó làm thành bốn số tự nhiên liên tiếp tăng dần.

1.113. Tìm số chính phương có bốn chữ số , biết rằng chữ số hàng nghìn bằng chữ số hàng đơn vị và số chính phương đó được viết dưới dạng $(5n+4)^2$, với $n \in \mathbb{N}$.

1.114. Cho số tự nhiên Agồm 100 chữ số 1 , số tự nhiên B gồm 50 chữ số 2.Chứng minh rằng A-B là một số chính phương.

1.115.Có hay không có một số chính phương mà số đó gồm 1995 chữ số 1 và các chữ số còn lại là chữ số 0?

1.116.Tìm số tự nhiên n sao cho tổng sau là một số chính phương :

$$S = 1! + 2! + 3! + ... + n!$$

Chuyên đề nâng cao 2. NGUYÊN LÍ DIRICHLET

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1.Nội dung nguyên lí

Nếu nhốt $n.m+r$ (trong đó $m,n,r \in \mathbb{N}^*$) con thỏ vào n cái chuồng thì phải có ít nhất một chuồng chứa không ít hơn $m+1$ con thỏ.

Chứng minh

Giả sử ngược lại mỗi chuồng chứa không quá m con thỏ thì tổng số thỏ nhốt trong n chuồng sẽ không quá $m.n$ con thỏ :Mâu thuẫn với giả thiết là số thỏ bằng $m.n+r$. Vậy phải có í t nhất một chuồng chứa không ít hơn $m+1$ con thỏ.

2.Nhận xét

Bản thân nguyên li Dirichlet khá đơn giản và dễ hiểu , tuy nhiên việc ứng dụng nguyên lí này lại không hề đơn giản . Vấn đề ở đây là phát hiện ra "***chất Dirichlet*** **"** trong các bài toán , dạng toán của mình và sau đó xác định trong đó đâu là chuồng và đâu là thỏ . Có những trường hợp chuồng và thỏ gần như đã có sẵn, nhưng có những trường hợp chúng ta phải "***xây chuồng, tạo thỏ*"**.

II.MỘT SỐ DẠNG TOÁN ỨNG DỤNG

1.Toán chia hết

Khi chia số a cho số $m \neq 0$ luôn có m khả năng về số dư là 0,1,….,m - 1 ("m chuồng ") . Do vậy , khi chia $m+1$ số khác nhau $a_1, a_2, ..., a_{m+1}$ *cho* m ta sẽ có $m+1$ số dư ("$m+1$ thỏ") và do đó luôn có hai phép chia có cùng số dư . Giả sử hai số bị chia trong hai phép chia đó là a_i và a_j (với $1 \leq j < i \leq m+1$).Ta có ($a_i - a_j) \vdots m$.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng có thể tìm đượcmột số có dạng19781978.....197800...0chia hết cho 2012.

Giải

Xét dãy số : $1978, 19781978, ..., \underbrace{19781978...1978}_{2013\ so\ 1978}$ .Khi chia các số hạng của dãy này cho 2012 sẽ có hai phép chia có cùng số dư .Giả sử hai số hạng của dãy trong hai phép chia đó là $a = \underbrace{19781978...1978}_{m\ so\ 1978}$ và $b = \underbrace{19781978...1978}_{n\ so\ 1978}$ (với $1 \leq n < m \leq 2013$) .

$\Rightarrow$ Hiệu của a và b chia hết cho 2012 hay

$$a-b=\underbrace{19781978....1978}_{m-n\ so\ 1978}\ \underbrace{00...0}_{4n\ so\ 0}\ \vdots 2012\ (đpcm)$$

Nhận xét : Phương pháp để giải dạng toán này là tạo ra dãy số (theo cấu tạo số) từ yêu cầu của bài toán ("tạo thỏ") . Sau đó áp dụng nguyên lí Dirichlet cho các số hạng của dãy số mới (mỗi số hạng thay cho một "thỏ", 2012 là số "chuồng ").

Ví dụ 2. Cho dãy m số tự nhiên bất kì $a_1, a_2, ..., a_m$. Chứng minh rằng tồn tại một số hạng chia hết cho m hoặc tổng của một số hạng liên tiếp trong dãy chia hết cho $m (m \in \mathbb{N}^*)$.

Giải

Xét dãy số $b_1 = a_1, b_2 = a_1 + a_2, ..., b_m = a_1 + a_2 + ... + a_m$

Khi chia các số hạng của dãy này cho m thì xảy ra một trong hai trường hợp sau :

- Có một phép chia hết , chẳng hạn : $b_k \vdots m$, thì ta có điều phải chứng minh : $(a_1 + a_2 + ... + a_k) \vdots m$
- Không có phép chia hết nào. Khi đó tồn tại hai phép chia có cùng số dư,chẳng hạn là b_i, b_j chia cho m (vơi $1 \le j < i \le m$)

$\Rightarrow (b_i - b_j) \vdots m\ \ hay\ \ (a_{j+1} + a_{j+2} + ... + a_i) \vdots m$, ta có điều phải chứng minh .

Nhận xét : Phương pháp "tạo thỏ " trong ví dụ này là dựa vào phép toán cộng và yêu cầu về tính liên tiếp của các số hạng trong dãy ban đầu của đề bài .

Ví dụ 3. Cho bốn số tự nhiên phân biệt $a > b > c > d$.

Chứng minh rằng : $P = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d) \vdots 12$

Giải

Chia bốn số phân biệt a, b, c, d cho 3 luôn có hai phép chia có cùng số dư

$\Rightarrow$ Hiệu hai số bị chia đó chia hết cho 3 $\Rightarrow$ tồn tại hiệu hai số trong bốn số a, b, c, d chia hết cho 3.

Do vậy P chia hết cho 3. (1)

Trong bốn số a, b, c, d nếu có hai số có cùng số dư khi chia cho 4 thì P chia hết cho 4;trái lại, khi chia bốn số đó cho 4 có đủ bốn trường hợp về số dư là 0,1,2,3 $\Rightarrow$ trong bốn số a, b, c, d có hai số chẵn , hai số lẻ , giả sử a, c chẵn và b, d lẻ$\Rightarrow$ $(a-c) \vdots 2$ và $(b-d) \vdots 2$

Do vậy P chia hết cho 4 (2)

Từ (1),(2) và (3,4)=1 suy ra $P \vdots 3,4\ \ hay\ \ P \vdots 12$ (đpcm)

Ví dụ 4. Chứng minh rằng trong19 số tự nhiên liên tiếp bất kì ta luôn tìm được một số có tổng các chữ số chia hết cho 10.

Giải

Trong 19 số tự nhiên liên tiếp luôn tồn tại 10 số tự nhiên liên tiếp có chữ số hàng chục giống nhau kí hiệu chữ số hàng chục đó là a (các chữ số hàng trăm ,hàng nghìn , ….(nếu có)cũng giống nhau) còn các chữ số hàng đơn vị là dãy 0;1;2;3;…;9.Do đó tổng các chữ số của mỗi số cũng là một dãy 10 số tự nhiên liên tiếp , vì thế tồn tại số có tổng các chữ số chia hết cho 10.

2.Toán suy luận

Ví dụ 5.Có 10 đội bóng thi đấu với nhau vòng tròn một lượt , mỗi đội phải đấu đúng một trận với mỗi đội khác . Chứng minh rằng vào bất cứ lúc nào cũng có hai đội đã đấu số trận như nhau.

Giải

Rõ ràng nếu trong 10 đội bóng có 1 đội chưa đấu một trận nào thì trong các đội còn lại không có đội nào đã thi đấu 9 trận . Như vậy mỗi đội chỉ có số trận đấu hoặc từ 0 đến 8 hoặc từ 1 đến 9 .Vậy theo nguyên lí Dirichlet phải có ít nhất hai đội có số trận đã đấu như nhau.

Ví dụ 6. Trong 45 học sinh làm bài kiểm tra không có ai bị điểm dưới 2 và chỉ có 2 học sinh được điểm 10 . Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên từ 0 đến 10).

Giải

Số học sinh có điểm kiểm tra từ 2 đến 9 là : 45 – 2 =43

Ta có : 43 = 8.5 + 3

Như vậy , khi phân chia 43 học sinh vào 8 loại điểm kiểm tra (từ 2 đến 9) thì theo nguyên lí Dirichlet luôn tồn tại ít nhất 5 + 1 = 6 học sinh có điểm kiểm tra giống nhau (*đpcm)*

Ví dụ 7. Có 17 nhà Toán học viết thư cho nhau trao đổi về 3 vấn đề khoa học , mỗi người đều trao đổi với 16 người còn lại và mỗi cặp 2 người chỉ trao đổi với nhau một vấn đề .Chứng minh rằng có ít nhất 3 nhà Toán học trao đổi với nhau về cùng một vấn đề.

Giải

Gọi A là một nhà Toán học nào đó trong 17 nhà Toán học thì A phải trao đổi với 16 người còn lại về 3 vấn đề khoa học (kí hiệu là vấn đề I,II,III).

Vì 16 = 3.5 + 1 nên A phải trao đổi với ít nhất 5 + 1 = 6 nhà Toán học khác về cùng một vấn đề (theo nguyên lí Dirichlet) .

Gọi 6 nhà Toán học cùng trao đổi với A về một vấn đề (chẳng hạn là vấn đề 1) là $A_1, A_2, ..., A_6$ .Ta thấy 6 nhà Toán học này lại trao đổi với nhau về 3 vấn đề nên có hai khả năng xảy ra:

1) Nếu có 2 nhà Toán học nào đó cùng trao đổi với nhau về vấn đề I thì cùng với A sẽ có 3 nhà Toán học cùng trao đổi về vấn đề I.

2) Nếu không có 2 nhà Toán học nào cùng trao đổi với nhau về vấn đề I , thì 6 nhà Toán học này chỉ trao đổi với nhau về 2 vấn đề II và III.Theo nguyên lí Dirichlet , có ít nhất 3 nhà Toán học cùng trao đổi với nhau về một vấn đề (II hoặc III).

Vậy luôn có ít nhất 3 nhà Toán học trao đổi với nhau về cùng một vấn đề .

Nhận xét : Trong ví dụ trên ta đã phải phân chia bài toán thành hai lớp và sử dụng hai lần nguyên lí Dirichlet : Lần thứ nhất với 16 thỏ và 3 chuồng ; lần thứ hai với 6 thỏ và 2 chuồng.

III.BÀI TẬP

1.117. Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên gồm toàn chữ số 1 chia hết cho 2013.

1.118. Cho 5 số tự nhiên phân biệt $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5$ .Xét tích :

$$P = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4)(a_2 - a_5)(a_3 - a_4)(a_3 - a_5)(a_4 - a_5)$$

Chứng minh rằng $P \vdots 228$

1.119. Chứng minh rằng trong $n+1$ số bất kì thuộc tập hợp $\{1; 2; 3; ....; 2n\}$ luôn tìm được hai số mà Số này là bội của số kia .

1.120. Xét 100 số tự nhiên $0 < a_1, a_2, ..., a_{100} \le 100$ và có tổng bằng 200 .Chứng minh rằng trong 100 số đó luôn tồn tại một vài số có tổng bằng 100.

1.121. Cho 69 số tự nhiên khác 0 phân biệt và không vượt quá 100 .Chứng minh rằng có thể chọn được 4 số trong 69 số đó thỏa mãn tổng của ba số bằng số còn lại

1.122. Chứng minh rằng trong 39 số tự nhiên liên tiếp bất kì luôn có ít nhất một số có tổng các chữ số chia hết cho 11.

1.123. Cho 15 số tự nhiên phân biệt, khác 0, không lớn hơn 28. Chứng minh rằng trong 15 số đó luôn tìm được ít nhất một bộ 3 số mà số này bằng tổng của hai số còn lại hoặc một cặp 2 số mà số này gấp đôi số kia.

1.124. Chọn bất kì n + 1 số trong 2n số tự nhiên từ 1 đến $2n$ $(n > 1)$. Chứng minh rằng trong các số được chọn có ít nhất một số bằng tổng của 2 số được chọn (kể cả các trường hợp 2 số hạng của tổng bằng nhau).

1.125. Chọn 5 người bất kì. Chứng minh rằng có ít nhất 2 người có cùng số người quen trong 5 người đó.

1.126. Chứng minh rằng trong n người bất kì ($n \geq 2$), tồn tại hai người có số người quen như nhau (kể cả trường hợp quen 0 người).

1.127. Có 6 đội bóng thi đấu với nhau vòng tròn một lượt, mỗi đội đấu đúng một trận với mỗi đội khác. Chứng minh rằng vào bất cứ thời điểm nào cũng có ba đội trong đó từng cặp đã đấu với nhau hoặc chưa đấu với nhau trận nào.

--------- CHÚC CÁC EM HỌC TỐT ---------

THCS.TOANMATH.com

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

CHUYÊN ĐỀ CHỌN LỌC TOÁN 6

ÔN TẬP VÀ BỔ TÚC VỀ SỐ TỰ NHIÊN

Chuyên đề 1

1.1. Tập hợp $A=\{1;2;3\}$

Các cách viết đúng là: a) $I\in A$ d) $\{2;3\}\subset A$

Các cách viết sai là: b) $\{I\}\in$ A c) $3\subset A$

Sửa lại là: b) $\{I\}\subset A$ c) $3\in$ A

1.2. $A=\{2;3;7;8\},B=\{1;3;5;7;9\}$

a) Tập hợp A có 4 phần tử, tập hợp B có 5 phần tử

b) $\varnothing,\{3;7\},\{3\},\{7\}$

1.3. a) $A=\{8\}\Rightarrow A$ có một phần tử

b) $B=\varnothing\Rightarrow B$ không có phần tử nào

1.4. a) Số phần tử của A là: $(98-10):2+1=45$

b) Số phần tử của B là: $(70-10):3+1=21$

1.5. Xét dãy số $2;7;12;17;22;...$

a) Quy luật: Dãy số cách đều với khoảng cách 5

b) $22;27;32;37;42$

c) Gọi số hạng thứ 100 của dãy là x, ta có: $(x-2):5+1=100$

$\Rightarrow x=497$. Do vậy tổng 100 số hạng đầu của dãy là:

$(2+497).100:2=24950$

1.6. $A=\{31;33;35;37;39;41;43;45;47;49\}$

$B=\{0;10;20;30;40;50;60;70;80\}$

1.7. 660 chữ số

1.8. Viết liền nhau các số tự nhiên 123456…

a) 9 chữ số đầu tiên: 1, 2, …, 9

44 số có hai chữ số tiếp theo: 10, 11, …, 53.

$\Rightarrow$ Chữ số hàng đơn vị của số 53 ở hàng số: $9+44.2=97$

Tương tự, chữ số hàng đơn vị của số 328 ở hàng số 876; chữ số hàng đơn vị của số 1587 ở hàng số 5241.

b) Chữ số viết ở hàng thứ 427 là chữ số 1 (chữ số hàng trăm của số 179)

1.9. Có 24 phần tử

Các số có chữ số a ở vị trí hàng nghìn là:

$\overline{abcd},\overline{abdc},\overline{acbd},\overline{acdb},\overline{adbc},\overline{adcb}$ (có 6 số)

Vì vai trò của a,b,c,d như nhau nên khi đặt b,c,d lần lượt là chữ số hàng nghìn ta được các kết quả tương tự. Vậy số các số tạo thành là: $6.4=24$

1.10. a) 17 số. Trong đó:

- Có 16 số với một chữ số 5: $15;25;35;45;65;75;85;95$

$51;52;53;54;56;57;58;59$

- Có một số với hai chữ số: 55

b) 36 số

- Từ số 12 đến số 19: có 8 số

- Từ số 23 đến số 29: có 7 số

…

- Từ số 78 đến số 79: có 2 số

- Số 89: có một số

Vậy có tất cả $1+2+...+7+8=\left(1+8\right).8:2=36$ số thoả mãn

c) 45 số

Có 90 số có hai chữ số, 9 số có hai chữ số bằng nhau $\left(11,22,...,99\right)$, 36 số có chữ số hàng chục nhỏ hơn hàng đơn vị. Suy ra số các số có chữ số hàng chục lớn hơn hàng đơn vị là: $90-9-36=45$

Chú ý: Có thể giải thích tương tự như câu b.

1.11. 8 số: $I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII$

- Số nhỏ nhất là số I (có giá trị là 1)

- Số lớn nhất là số $VIII$ (có giá trị 8)

1.12. a) 81 phần tử

Có 90 số có hai chữ số, 9 số có hai chữ số giống nhau.

$\Rightarrow$ có $90-9=81$ số thoả mãn

b) 648 phần tử

1.13. 106 điểm 10

- 5 bạn được 4 điểm 10 $\Rightarrow$ có $5.4=20$ (điểm 10)
- $15-5=10$ bạn được 3 điểm 10 $\Rightarrow$ có $10.3=30$ (điểm 10)
- $41-15=26$ bạn được 2 điểm 10 $\Rightarrow$ có $26.2=52$ (điểm 10)
- $45-41=4$ bạn được 1 điểm 10 $\Rightarrow$ có $4.1=4$ (điểm 10)

Vậy tất cả có : $20+30+52+4=106$ (điểm 10)

1.14. 4321

Gọi số cần tìm là $\overline{abc1}\left(0<a,b,c\le 9;a\ne 0\right)$

Theo đề ra ta có: $\overline{abc1}=\overline{1abc}+2889$

$\Rightarrow 10.\overline{abc}+1=1000+\overline{abc}+2889$

$\Rightarrow 9.\overline{abc}=3888\Rightarrow \overline{abc}=432$

Vậy số cần tìm là 4321.

1.15. 63 và 6

Gọi số trừ là $x\left(x\in N*\right)$

Theo đề ra ta có : $\overline{x3}-x=57$

$\Rightarrow 10.x+3-x=57$

$\Rightarrow 9.x=54\Rightarrow x=6$

Vậy hai số cần tìm là 63 và 6

1.16. Có 10 đáp số: 109; 119; 129; …; 199

Gọi số cần tìm là $\overline{abc}\left(0<a,c\le 9;0\le b\le 9\right)$

Theo đề ra ta có: $\overline{cba}=792+\overline{abc}$

$\Rightarrow 100c+10b+a=792+100a+10b+c$
$\Rightarrow c-a=8\Rightarrow c=9;a=1$

Vậy số cần tìm là $\overline{1b9}$ với $b=0;1;2;...;9$

1.17. 77

Gọi số cần tìm là $\overline{ab}\left(0\le a,b\le 9;a\ne 0\right)$

Theo đề ra ta có: $\overline{1ab1}=23.\overline{ab}$

$\Rightarrow 1000+10.\overline{ab}+1=23.\overline{ab}$
$\Rightarrow 13.\overline{ab}=1001\Rightarrow \overline{ab}=77$

Vậy số cần tìm là 77

1.18. 14285

Gọi số cần tìm là $x=\overline{abcde}\left(0\le a,b,c,d,e\le 9;a\ne 0\right)$

Theo đề ra ta có: $\overline{7abcde}=5.\overline{abcde7}$

$\Rightarrow 700000+\overline{abcde}=5.\left(10.\overline{abcde}+7\right)$

Hay $700000+x=5.\left(10.x+7\right)$

$\Rightarrow 49.x=699965\Rightarrow x=14285$

Vậy số cần tìm là 14285

1.19. 35

Gọi số cần tìm là $\overline{ab}\left(0\le a,b\le 9;a\ne 0\right)$

Theo đề ra ta có: $\overline{7ab}=\overline{ab7}.2+21$

$\Rightarrow 700+\overline{ab}=2.\left(10.\overline{ab}+7\right)+21$
$\Rightarrow 700+\overline{ab}=20.\overline{ab}+14+21$
$\Rightarrow 19.\overline{ab}=665\Rightarrow \overline{ab}=35$

Vậy số cần tìm là 35

1.20. a) 9000 số b) 3000 số

Chú ý : Trong ba số tự nhiên có chữ số tận cùng là 4 liên tiếp nhau (chẳng hạn: 14, 24, 34), có duy nhất một số chia hết cho 3.

Chuyên đề 2

1.21. a) 30000 b) 303

1.22. a) 8

b) $2^{101}-1$

Đặt $A=1+2+2^2+2^3+2^4+...+2^{99}+2^{100}$

$\Rightarrow 2.A=2+2^2+2^3+2^4+...+2^{99}+2^{100}+2^{101}$
$\Rightarrow 2.A-A=2^{101}-1$

Vậy $A=2^{101}-1$

c) $\left(5^{101}-5\right):24$

Đặt $B=5+5^3+5^5+...+5^{97}+5^{99}$

$\Rightarrow 5^2.B=5^3+5^5+...+5^{97}+5^{99}+5^{101}$
$\Rightarrow 25.B-B=5^{101}-5$

Vậy $B=\left(5^{101}-5\right):24$

1.23. 154

1.24. a) $243^5=3.27^8$

b) $15^{12}<81^3.125^5$

c) $78^{12}-78^{11}>78^{11}-78^{10}$

1.25. $A=\left(1+3+3^2\right)+\left(3^3+3^4+3^5\right)+...+\left(3^{1998}+3^{1999}+3^{2000}\right)$

$=1.13+3^3.13+...+3^{1998}.13\,\vdots\,13$

1.26. a) $x=10$ b) $x=79$

1.27. a) $x=2$ b) $x=4$

1.28. a) $x = 4$ b) $x = \varnothing$

1.29. a) $x \in \{5;6\}$ b) $x \in \{0;1\}$

1.30. $x \in \{2;3\}$

1.31. 4662

Chú ý: Mỗi chữ số xuất hiện ở hàng trăm, hàng chục, hàng đơn vị hai lần, nên tổng các số tạo thành là: $2.(666 + 777 + 888) = 4662$

1.32. 23 và 12

Thêm 19 đơn vị vào số thứ nhất thì tích tăng thêm 19 lần số thứ hai, ứng với $713 - 276 = 437$

Số thứ hai là $437 : 19 = 23 \Rightarrow$ số thứ nhất là $276 : 23 = 12$

Chú ý: Có thể giải bằng cách gọi hai số là a và b

1.33. Số bị trừ là 16; số trừ là 10

1.34. Số bị chia là 377; số chia là 13.

1.35. Có 5 đáp số

Số chia	54	27	18	9	6
Thương	1	2	3	6	9

Chú ý: Số chia lớn hơn số dư

1.36. 85; 28; 9

1.37. Thương mới bằng 3 lần thương cũ cộng 2

Gọi số bị chia là x và thương của phép chia x cho 48 là q

Theo đề ra ta có: $x = 48.q + 41 = 16.(3q) + 16.2 + 9 = 16.(3q + 2) + 9$

$\Rightarrow x$ chia cho 16 được thương là $3q + 2$ và dư 9

1.38. Số bị chia nhỏ nhất là 413, số chia nhỏ nhất là 46

1.39. 29158 và 9412

1.40. 12

Chuyên đề 3

1.41. A chia hết cho 3, cho 6, cho 13 và A không chia hết cho 9

1.42. Gọi bốn số tự nhiên liên tiếp là $a; a+1; a+2; a+3$. Tổng của bốn số đó bằng $4a+6$, không chia hết cho 4 vì $4a \vdots 4$ và $6 \not\vdots 4$

1.43. a chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4

1.44. $\overline{aaa} = a.111 = 3.37.a \vdots 37$

1.45. a) $1+4+4^2+4^3+...+4^{2012} = 21.\left(1+4^3+...+4^{2010}\right) \vdots 21$

b) $1+7+7^2+7^3+...+7^{101} = 8.\left(1+7^2+7^4+...+7^{100}\right) \vdots 8$

c) $2+2^2+2^3+...+2^{100} = 2.\left(1+2+2^2+2^3+2^4\right)+2^6.\left(1+2+2^2+2^3+2^4\right)$

$$+...+2^{96}.\left(1+2+2^2+2^3+2^4\right) = 31.\left(2+2^6+...+2^{96}\right) \vdots 31$$

Mặt khác $2+2^2+2^3+...+2^{100} = \left(2+2^3\right)+\left(2^2+2^4\right)+...+\left(2^{97}+2^{99}\right)+\left(2^{98}+2^{100}\right)$

$$= \left(2.5+2^2.5+2^5.5+2^6.5+...+2^{97}.5+2^{98}.5\right) \vdots 5$$

1.46. a) Vì $\overline{abc} - \overline{\deg} \vdots 13 \Rightarrow \overline{abc} - \overline{\deg} = 13k \Rightarrow \overline{abc} = \overline{\deg} + 13k$ (với $k \in N$)

Do vậy: $\overline{abc\deg} = 1000.\overline{abc} + \overline{\deg} = 1000.\left(\overline{\deg}+13k\right)+\overline{\deg}$

$$= \left(1001.\overline{\deg} + 1000.13.k\right) \vdots 13$$

b) $\overline{abc} = 100a + 10b + c = 98a + 7b + \left(2a+3b+c\right)$

Vậy nếu $\overline{abc} \vdots 7$ thì $\left(2a+3b+c\right) \vdots 7$

1.47. $a = 3$

$\overline{20a20a20a} = \overline{20a}.1000000 + \overline{20a}.1000 + \overline{20a} = \overline{20a}.1001001 \vdots 7$

$\Rightarrow \overline{20a} \vdots 7$ (vì $1001001 \not\vdots 7$)

$\Rightarrow \left(200+a\right) \vdots 7 \Rightarrow 196 + \left(a+4\right) \vdots 7 \Rightarrow \left(a+4\right) \vdots 7$, vì $196 \vdots 7$

$\Rightarrow a = 3$

1.48. a) $n \in \left\{1;2;3;4;6;12\right\}$

b) $n \in \{1;3\}$

c) $n \in \{3;9\}$

1.49. a) $n \in \{6;7;8;11;14;23\}$ b) $n = 0$ c) $n = 2$

1.50. $5.(13a+8b)-13.(5a+3b)=b\vdots 2012$

Tương tự: $8.(5a+3b)-3.(13a+8b)=a\vdots 2012$

Chuyên đề 4

1.51. a) 650 b) 305 c) 306 d) 630

1.52. 324; 234; 342; 432.

1.53. a) $(10^{33}+8)\vdots 2$ vì $10^{33}\vdots 2$ và $8\vdots 2$

Mặt khác $10^{33}=10...00$ có tổng các chữ số bằng 1

$\Rightarrow 10^{33}+8=100..08$ có tổng các chữ số bằng 9 $\Rightarrow (10^{33}+8)\vdots 9$

Vậy $10^{33}+8$ là số chẵn chia hết cho 9 nên cũng chia hết cho 18

b) Tương tự câu a), ta có: $(10^{10}+14)\vdots 2$ và 3

1.54. Dù n là số chẵn hay số lẻ thì trong hai số tự nhiên liên tiếp $n+7$ và $n+8$ luôn có một số là số chẵn nên tích của $(n+7)(n+8)$ là một số chẵn.

$\Rightarrow (n+7)(n+8)$ luôn chia hết cho 2.

1.55. Gọi ba số chẵn liên tiếp là $2a-2;2a;2a+2$ (với $a \in N^*$)

Tích ba số: $(2a-2).2a.(2a+2)=8(a-1)a(a+1)$

Vì $(a-1)a(a+1)\vdots 3! \Leftrightarrow (a-1)a(a+1)\vdots 6$ nên

$(2a-2).2a.(2a+2)=8(a-1)a(a+1)\vdots 8.6$

Vậy $(2a-2).2a.(2a+2)\vdots 48$

1.56. Với $n \in N$

a) Nếu $n>1$ thì 5^n có hai chữ số tận cùng là $25 \Rightarrow 5^n - 1$ có hai chữ số tận cùng là 24, chia hết cho 4. Vậy $\left(5^n - 1\right) \vdots 4$

b) Ta có: $10^n - 1 = 99...9$ (n chữ số 9)

$\Rightarrow 10^n + 18n - 1 = 99...9 + 18n = 9\left(11...1 + 2n\right)$ (n chữ số 1)

Ta có: $\left(11...1 + 2n\right) \vdots 3$ (vì $11...1 + 2n$ có tổng các chữ số bằng $3n \vdots 3$)

$\Rightarrow \left(10^n + 18n - 1\right) \vdots 9.3$ hay $\left(10^n + 18n - 1\right) \vdots 27$

1.57. 66666.

1.58. a) $\overline{1x85y}$ chia hết cho 2 và 5 nên $y = 0$.

Vì $\overline{1x85y} \vdots 3$ nên $\left(1 + x + 8 + 5\right) \vdots 3$ hay $\left(x + 14\right) \vdots 3 \Rightarrow x = 4$.

Vậy $x = 4$; $y = 0$.

b) có 11 đáp số:

x	0	1	2	3	3	4	5	6	7	8	9
y	3	2	1	0	9	8	7	6	5	4	3

c) $x = 7$ và $y = 0$.

1.59. a) $\overline{52ab}$ chia cho 5 dư 4 $\Rightarrow b \in \{4;\ 9\}$.

Lại vì $\overline{52ab} \vdots 2$ nên $b = 4$.

Vì $\overline{52ab} \vdots 9$ nên $a + 11 \vdots 9 \Rightarrow a = 7$.

Vậy $a = 7; b = 4$.

b) $a = 8$ và $b = 2$.

1.60. 24.

1.61. $a = 6$.

Vì $\overline{aaaaa96} \vdots 8$ và 3 nên $\overline{a96} \vdots 8$ và $\left(5a + 15\right) \vdots 3$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a \vdots 3 \\ \overline{a96} \vdots 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in \{3;6;9\} \\ \overline{a96} \vdots 8 \end{cases} \Rightarrow a = 6.$$

1.62. $a = 2$.

Vì $\overline{1aaa1}\,\vdots\,11$ nên $\left[(a+a)-(1+a+1)\right]\vdots\,11$ hay $(a-2)\,\vdots\,11 \Rightarrow a=2.$

1.63. Ta có: $(1978a+2012b)-(78a+10b)=(1900a+2002b)\,\vdots\,11.$

Mà $2002\,\vdots\,11$ nên $2002b\,\vdots\,11 \Rightarrow 1900a\,\vdots\,11 \Rightarrow a\,\vdots\,11.$

Vì $78a+10b\,\vdots\,11$ và $78a\,\vdots\,11 \Rightarrow 10b\,\vdots\,11 \Rightarrow b\,\vdots\,11.$

1.64. 1089.

Gọi số cần tìm là $\overline{abcd}$, ta có: $9.\overline{abcd}=\overline{dcba}$

Suy ra: $\begin{cases} a=1 \\ d=9 \end{cases}$ và $(b+c+1)\,\vdots\,9 \Rightarrow b+c \in \{8;\ 17\}.$

Vì $9.\overline{1bc9}=\overline{9cb1}$ nên $9b<10 \Rightarrow b\in\{0;\ 1\}.$

- Nếu $b=1$ và $c=7.$ Thử lại ta thấy $9.\overline{1179}\neq\overline{9711}$: loại.
- Nếu $b=0$ và $c=8.$ Thử lại ta thấy $9.\overline{1089}=\overline{9801}$: thỏa mãn.

Vậy số cần tìm là 1089.

1.65. 675.

Ta có: $\overline{abc}-\overline{cba}=(n^2-1)-(n-2)^2$

$\Leftrightarrow 99(a-c)=4n-5$

$\Rightarrow (4n-5)\,\vdots\,99 \qquad (1)$

Vì $n^2=\overline{abc}+1 \Rightarrow 101<n^2<1000 \Rightarrow 10<n<32$

$\Rightarrow 35<4n-5<123 \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $4n-5=99 \Rightarrow 4n=104 \Rightarrow n=26.$

Do vậy: $\overline{abc}=675.$ Thử lại, ta có $\overline{cba}=567=(26-2)^2$ là đúng.

Vậy $\overline{abc}=675.$

1.66. $n=83.$

Vì $n+s(n)=94 \Rightarrow n$ là số có hai chữ số.

Giả sử $n=\overline{ab}$ (với $a,b\in\mathbb{N},\ a\neq 0$), ta có:

$n+s(n)=\overline{ab}+(a+b)=11a+2b=94$

$\Rightarrow \begin{cases} a \vdots 2 \\ 76 \le 11a \le 94 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \vdots 2 \\ a \in \{7;\ 8;\ 9\} \end{cases} \Rightarrow a=8.$

Từ đó: $11.8+2b=94 \Rightarrow b=3.$

Vậy $n=83.$

Chuyên đề 5

1.67. $\{4;\ 12;\ 20;\ 60\}$.

1.68. Vì $(2x-1).(y+3)=12$ nên $2x-1;\ y+3 \in Ư(12)$.

Lại vì $2x-1$ là số lẻ nên ta có:

$2x-1$	1	3
$y+3$	12	4
x	1	2
y	9	1

1.69.

- Vì trong ba số tự nhiên liên tiếp $p-1;\ p;\ p+1$ luôn có một số chia hết cho 3, mà p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên trong hai số $p-1;\ p+1$ có một số chia hết cho 3 $\Rightarrow (p-1)(p+1) \vdots 3$ (1)

- Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ $\Rightarrow p-1$ và $p+1$ là hai số chẵn liên tiếp $\Rightarrow (p-1)(p+1) \vdots 8$ (2)

Từ (1), (2) và $(3,8)=1$ nên $(p-1)(p+1) \vdots 3.8$ hay $(p-1)(p+1) \vdots 24$.

1.70. $a \in \{3;\ 9\}$.

Vì $\overline{23a} \le 239$ và $15^2 < 239 < 16^2$ nên để $\overline{23a}$ là số nguyên tố thì nó phải không chia hết cho các số nguyên tố $2;\ 3;\ 5;\ 7;\ 11;\ 13$.

Vì $\overline{23a} \not\vdots\, 2$ nên $a \in \{1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9\}$.

Vì $\overline{23a} \not\vdots\, 5$ nên $a \in \{1;\ 3;\ 7;\ 9\}$.

Vì $\overline{23a} \not\vdots\, 3$ nên $a \in \{3;\ 9\}$.

Thử lại ta có 233 và 239 thỏa mãn.

1.71. 60.

Ta có: $12 = 12.1 = 6.2 = 4.3 = 3.2.2$

Do vậy, ta chỉ cần tìm số nhỏ nhất trong các số: 2^{11}; $2^5.3$; $2^3.3^2$; $2^2.3.5$

Đáp số: $2^2.3.5 = 60$.

1.72. Số có ba chữ số tận cùng là 104 chia hết cho 8, vì $104 \vdots 8$

$\Rightarrow$ Số đó có ước là $2^3 \Rightarrow$ có ít nhất 4 ước là $1; 2; 4; 8$.

1.73. 2 và 307.

Vì tổng hai số bằng 309 nên trong hai số có một số chẵn, một số lẻ. Vì hai số đều là số nguyên tố nên số chẵn là 2, suy ra số lẻ là 307. Kiểm tra lại ta có 307 là số nguyên tố.

1.74. $p = 3$.

1.75. $p = 5$.

1.76. Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p chia 3 dư 1 hoặc dư 2.

- Nếu $p = 3k + 2$ thì $p + 4 = 3k + 6 \vdots 3 \Rightarrow$ loại.
- Nếu $p = 3k + 1$ thì $p + 7 = 3k + 8 \not\vdots 3$

$\Rightarrow 2(p+7) \not\vdots 3$ hay $2p + 14 \not\vdots 3$.

Trong ba số tự nhiên liên tiếp $2p+14; 2p+15; 2p+16$ luôn có một số chia hết cho 3, mà $2p+14 \not\vdots 3$ và $2p+15 \not\vdots 3$ nên $(2p+16) \vdots 3$ hay $2(p+8) \vdots 3$

$\Rightarrow (p+8) \vdots 3$, vì $(2,3) = 1 \Rightarrow p + 8$ là hợp số.

1.77. Số $3^2 + 3^4 + 3^6 + ... + 3^{2012}$ là hợp số, vì nó lớn hơn 3 và chia hết cho 3.

1.78. Giả sử a là số tự nhiên lớn hơn 4 nằm giữa hai số nguyên tố sinh đôi $\Rightarrow a$ là số chẵn $\Rightarrow a \vdots 2$.

Mặt khác, vì trong ba số tự nhiên liên tiếp luôn có một số chia hết cho 3 nên $a \vdots 3$ (vì số liền trước và liền sau là các số nguyên tố lớn hơn 3 nên không chia hết cho 3).

Vậy $a \vdots 2.3$ hay $a \vdots 6$.

1.79. $3; 5; 7$.

Giả sử ba số lẻ liên tiếp đều là số nguyên tố là p; $p+2$; $p+4$.

- Nếu $p = 3$ thì $p + 2 = 5$ và $p + 4 = 7$ đều là số nguyên tố (thỏa mãn).

- Nếu $p>3$ thì p chia 3 dư 1 hoặc dư 2.

- Nếu $p=3k+1\left(k\in\mathbb{N}^*\right)$ thì $p+2=3k+3\,\vdots\,3\Rightarrow$ loại.
- Nếu $p=3k+2\left(k\in\mathbb{N}^*\right)$ thì $p+4=3k+6\,\vdots\,3\Rightarrow$ loại.

Vậy chỉ có duy nhất một bộ ba số nguyên tố là lẻ liên tiếp đó là 3; 5; 7.

1.80. $n=11.$

1.81. Theo đề ra: $\overline{abc}$ chia hết cho 3 và 7.

$\overline{abc}=100a+10b+c=\left[\left(99a-9b-3c\right)+\left(a+19b+4c\right)\right]\vdots\,3$

$\Rightarrow\left(a+19b+4c\right)\vdots\,3.$

$\overline{abc}=100a+10b+c=\left[\left(98a-28b-7c\right)+2\left(a+19b+4c\right)\right]\vdots\,7$

$\Rightarrow\left(a+19b+4c\right)\vdots\,7.$

1.82. $a=6.$

Ta có: $1+2+...+n=\overline{aaa}\Leftrightarrow\dfrac{n\left(n+1\right)}{2}=3.37.a\Leftrightarrow n\left(n+1\right)=2.3.a.37.$

Vì $6\le 2.3.a\le 54$ nên để $2.3.a.37$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp thì $2.3.a=38$ (loại) hoặc $2.3.a=36\Rightarrow a=6.$ Khi đó $n=36.$

Thử lại, ta có: $1+2+...+36=666$ là đúng.

Vậy $a=6.$

Chuyên đề 6

1.83. ƯC$\left(48,\ 120,\ 150\right)=$ ƯC$\left(2^4.3,\ 2^3.3.5,\ 2.3.5^3\right)=$ ƯC$\left(6\right)=\left\{1;\ 2;\ 3;\ 6\right\}.$

BC$\left(26,\ 78\right)=$ BC$\left(2.13,\ 2.3.13\right)=$ B$\left(78\right)=\left\{0;\ 78;\ 156;...\right\}=\left\{78k\,|\,k\in\mathbb{N}\right\}.$

1.84. Gọi $d=\left(a,\ b\right)\Rightarrow a\,\vdots\,d$ và $b\,\vdots\,d\Rightarrow\left(5a-4b\right)\vdots\,d$

$\Leftrightarrow 5\left(4n+3\right)-4\left(5n+1\right)=\left(20n+15\right)-\left(20n+4\right)=11\,\vdots\,d$

$\Rightarrow d=11$ (vì $d\ne 1$).

1.85. a) $a=495;\ b=315.$

Vì $(a,b)=45$ nên $\begin{cases} a=45m \\ b=45n \end{cases}$, với $(m,n)=1$.

Thay vào $7a=11b$, ta có: $7.45m=11.45n \Leftrightarrow 7m=11n$.

Vì $(m,n)=1$ nên $m=11$ và $n=7$.

Vậy $a=45.11=495$ và $b=45.7=315$.

b) Vì $[a,b]=300$ và $[a,b].(a,b)=ab \Rightarrow (a,b)=15$

$\Rightarrow \begin{cases} a=15m \\ b=15n \end{cases}$, với $(m,n)=1$.

Thay vào $ab=4500$, ta được: $15^2mn=4500 \Rightarrow mn=20$.

Vì $(m,n)=1$ nên ta có:

m	20	1	5	4
n	1	20	4	5
a	300	15	75	60
b	15	300	60	75

c) Gọi $d=(a,b) \Rightarrow \begin{cases} a=dm \\ b=dn \end{cases}$, với $(m,n)=1$. Khi đó $[a,b]=\dfrac{ab}{d}=mnd$.

Vì $[a,b]=6(a,b)$ và $a+b=30$ nên $\begin{cases} mnd=6d \\ md+nd=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mn=6 \\ d(m+n)=30 \end{cases}$

Vì $(m,n)=1$ và $m+n \in$ Ư(30), nên ta có:

m	3	2
n	2	3
d	6	6
a	18	12
b	12	18

1.86. Gọi $d=(a,b) \Rightarrow \begin{cases} a=dm \\ b=dn \end{cases}$, với $(m,n)=1$. Khi đó $[a,b]=\dfrac{ab}{d}=mnd$.

Ta có: $\begin{cases} a+2b=48 \\ (a,b)+3[a,b]=114 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d(m+2n)=48 \\ d(1+3mn)=114 \end{cases}$

$\Rightarrow \in$ ƯC$(48,\ 114)=\{1;\ 2;\ 3;\ 6\}$.

- Nếu $d=1$ thì $\begin{cases} m+2n=48 \\ 3mn+1=114 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m+2n=48 \\ 3mn=113 \end{cases}$: loại.
- Nếu $d=2$ thì $\begin{cases} m+2n=24 \\ 3mn+1=57 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m+2n=24 \\ 3mn=56 \end{cases}$: loại
- Nếu $d=3$ thì $\begin{cases} m+2n=16 \\ 3mn+1=38 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m+2n=16 \\ 3mn=37 \end{cases}$: loại
- Nếu $d=6$ thì $\begin{cases} m+2n=8 \\ 3mn+1=19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m+2n=8 \\ mn=6 \end{cases}$.

Vì $(m,n)=1$ nên ta có:

m	6	2
n	1	3
a	36	12
b	6	18

1.87. 8 đáp số.

Gọi $d=(a,b) \Rightarrow \begin{cases} a=dm \\ b=dn \end{cases}$, với $(m,n)=1$. Khi đó $[a,b]=\dfrac{ab}{d}=mnd$.

Ta có: ƯCLN(a,b) + BCNN$(a,b)=15 \Leftrightarrow d+mnd=15$

$\Leftrightarrow d(mn+1)=15 \Rightarrow d \in$ Ư$(15)=\{1;\ 3;\ 5;\ 15\}$.

- Nếu $d=1$ thì $mn=14$. Vì $(m,n)=1$ nên ta có:

m	14	1	7	2
n	1	14	2	7
a	14	1	7	2
b	1	14	2	7

- Nếu $d=3$ thì $mn=4$. Vì $(m,n)=1$ nên ta có:

m	4	1
n	1	4
a	12	3
b	3	12

- Nếu $d=5$ thì $mn=2$. Vì $(m,n)=1$ nên ta có:

m	2	1
n	1	2
a	10	5
b	5	10

- Nếu $d = 15$ thì $mn = 0$: loại.

1.88. 65.

Gọi số đã cho là a. Vì a chia cho 21 dư 2 nên $(a+19) \vdots 21$ (1)

Vì a chia cho 12 dư 5 nên $(a+19) \vdots 12$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $(a+19) \vdots [21,12]$ hay $(a+19) \vdots 84$.

Vậy a chia cho 84 dư $84-19=65$.

1.89. $a \in \{49;\ 133;\ 217;\ 301;\ 385\}$.

1.90. 959.

Gọi số cần tìm là a $(5 \le a < 1000)$. Theo đề ra ta có: $a+1$ chia hết cho 2; 3; 4; 5; 6

$\Rightarrow a+1 = 60k$, với $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a = 60k - 1$.

Vì $a < 1000$ nên $60k - 1 < 1000 \Rightarrow 60k < 1001 \Rightarrow k$ lớn nhất bằng 16.

$\Rightarrow$ Giá trị lớn nhất của a là $60.16 - 1 = 959$.

1.91. a) Gọi $d = (a, a-b) \Rightarrow a \vdots d$ và $(a-b) \vdots d \Rightarrow b \vdots d$.

$\Rightarrow (a,b) \vdots d$ hay $1 \vdots d \Rightarrow d = 1$.

b) Chứng minh tương tự câu a.

1.92. a) Gọi $d = (2n+1, 2n+3) \Rightarrow (2n+1) \vdots d$ và $(2n+3) \vdots d$

$\Rightarrow [(2n+3)-(2n+1)] \vdots d$ hay $2 \vdots d \Rightarrow d \in \{1;\ 2\}$.

Mà $2n+1$ là số lẻ nên d lẻ. Vậy $d = 1$.

b) Gọi $d = (2n+5, 3n+7) \Rightarrow \begin{cases} (2n+5) \vdots d \\ (3n+7) \vdots d \end{cases}$

$\Rightarrow [3(2n+5) - 2(3n+7)] \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = 1$.

1.93. Gọi $d = (11a+2b, 18a+5b) \Rightarrow \begin{cases} 11a+2b \vdots d \\ 18a+5b \vdots d \end{cases}$

$\Rightarrow [11(18a+5b) - 18(11a+2b)] \vdots d$ hay $19b \vdots d$

và $\left[5(11a+2b)-2(18a+5b)\right] \vdots d$ hay $19a \vdots d$.

$\Rightarrow (19a, 19b) \vdots d$ hay $19(a,b) \vdots d \Rightarrow 19 \vdots d$.

Vậy $d=1$ hoặc $d=19$, tương ứng hai số $11a+2b$ và $18a+5b$ hoặc nguyên tố cùng nhau hoặc có một ước chung là 19.

1.94. Có 3 cách chia lớp thành $2; 3$ hoặc 6 tổ.

1.95. 615 người.

1.96. 239 học sinh.

1.97 $275.$

Gọi số học sinh của trường đi tham quan là $a(200<a<300)$.

Theo đề ra ta có: Nếu thêm 5 học sinh nữa thì xếp vừa đủ 35 hoặc 40 học sinh lên một xe, tức là $a+5$ chia hết cho 35 và 40.

$\Rightarrow a+5 \in \text{BC}(35,\ 40) \Rightarrow (a+5) \vdots \text{BCNN}(35, 40)$

Ta có: $\text{BCNN}(35,\ 40)=\text{BCNN}(5.7,\ 5.8)=5.7.8=280.$

Do đó: $(a+5) \vdots 280$ hay $a+5=280.k,$ với $k \in \mathbb{N}^*$.

$\Rightarrow a=280k-5.$

Vì $200<a<300$ nên $200<280k-5<300 \Leftrightarrow 205<280k<305$

$\Rightarrow 1 \le k<2 \Rightarrow k=1.$

Do vậy $a=275.$

1..98. $(a,\ b)=9$. Đặt $d=(a,\ b)$.

Vì a và b đều chia hết cho 9 nên $d \vdots 9$ $\qquad (1)$

Ta có: $a+b=1111111110=\dfrac{10^{10}-10}{9} \Rightarrow 9a+9b=10^{10}-10.$

Mặt khác: $10b+a=9999999999=10^{10}-1.$

Suy ra: $(10b+a)-(9a+9b)=(10^{10}-1)-(10^{10}-10)$

$\Leftrightarrow b-8a=9 \Rightarrow 9 \vdots d$ $\qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $d = 9$.

1.99. Vì a là số chính phương khác 0 nên $a \in \{1;\ 4;\ 9\}$.

Vì $\overline{9b}$ không là số chính phương, với mọi b nên $a \in \{1;\ 4\}$.

Mặt khác, vì $\overline{ad}$ là số chính phương nên $\overline{ad} \in \{16;\ 49\} \Rightarrow d \in \{6;\ 9\}$

Vì $\overline{cd}$ là số chính phương và $d \in \{6;\ 9\}$ nên $\overline{cd} \in \{16;\ 36;\ 49\}$

$\Rightarrow c \in \{1;\ 3;\ 4\}$.

- Nếu $a = 1$ thì $d = 6 \ \Rightarrow c \in \{1;\ 3\}$. Khi đó $\overline{abcd}$ là $\overline{1b16}$ hoặc $\overline{1b36}$, nên $\overline{abcd}$ là $\overline{x4}^2$ hoặc $\overline{x6}^2$. Thử lại ta thấy duy nhất $1936 = 44^2$ thỏa mãn.

- Nếu $a = 4$ thì $d = 9 \Rightarrow c = 4$. Khi đó $\overline{abcd} = \overline{4b49}$ là $\overline{x3}^2$ hoặc $\overline{x7}^2$. Thử lại ta thấy không có số nào thỏa mãn.

Vậy các chữ số cần tìm là: $a = 1, b = 9, c = 3, d = 6$.

Chuyên đề nâng cao 1

1.100.a) Giả sử $\overline{abab}$ là số chính phương, tức là: $n^2 = \overline{abab} = 101.\overline{ab}$

=> $\overline{ab} \vdots 101$: vô lí. Vậy $\overline{abab}$ không là số chính phương.

b). Giả sử $\overline{abcabc}$ là số chính phương, tức là: $n^2 = \overline{abcabc}$

=> $n^2 = 1001.\overline{abc} = 7.143.\overline{abc}$ => $\overline{abc} \vdots 1001$: vô lí

1.101. Ta có $A = 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{20}$

Nên $2A = 2^3 + 2^4 + 2^5 + ... + 2^{21}$

=> $2A - A = 2^{21} - 2^2$

Do đó $A + 4 = 2^{21} - 2^2 + 4 = 2^{21} = (2^{10})^2.2$ không là số chính phương vì 2 không phải là số chính phương.

1.102 $S = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 111a + 111b + 111c = 3.37(a + b + c)$

Để S là số chính phương thì $a + b + c = 3.37.\lambda^2 (\lambda \in \mathrm{N})$. Điều này vô lí vì $a + b + c \le 27$.

Vậy S không là số chính phương

1.103. $2304 = 48^2$

1.104. a) Không phải là số chính phương vì số mới tạo thành chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9.

b) Không phải là số chính phương vì số mới tạo thành chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9

1.105. a) Tổng các chữa số của A là 903 nên A:3, do đó là hợp số

b) A chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 nên A không là số chính phương. (Hoặc A có số gốc là 3 nên không phải là số chính phương)

c) A không là số chính phương nến số các ước không thể là lẻ. Vì vậy A không thể có 35 ước.

1.106. Tổng các chữ số của các số lập được là 15 chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 nên mỗi số lập được không phải là số chính phương:

1.107. Vì n có hai chữ số nên $10 \le n \le 99 \Rightarrow 21 \le 2n+1 \le 199$. Các số chính phương lẻ trong khoảng trên là: 25, 49, 81, 121, 169.

2*n*+1	25	49	81	121	169
n	12	24	40	60	84
3*n*+1	37	73	121	181	253

Ta thấy chỉ có trường hợp 3*n*+1 =121 là số chính phương.

Vậy *n=40*

1.108. 20;45;80

1.109. Ta có $\overline{ab} - \overline{ba} = (10a+b) - (10b+a) = 9a - 9b = 9(a-b) = 3^2(a-b)$

=> Để $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương thì *a-b* phải là số chính phương.

Ta thấy $1 \le a-b \le 8$ nên $a-b \in \{1:4\}$

1. Nếu $a-b=1$ thì $\overline{ab} \in \{21;32;43;54;65;76;87;98\}$.

Loại các hợp số 21;32;54;65;76;87;98, còn lại 43 là số nguyên tố.

2. Nếu $a-b=4$ thì $\overline{ab} \in \{51;62;73;84;95\}$. Loại các hợp số 51;62;84;95, còn lại 73 là số nguyên tố.

Vậy $\overline{ab}$ bằng 43 hoặc 73

1.110. a) Gọi tổng các chữ số của n và của số 2n là k => ta có $(n-k)\vdots 9$ và $(2n-k)\vdots 9$; do đó $\left[(2n-k)-(n-k)\right]\vdots 9$ hay $n\vdots 9$

b) Số chính phương phải tìm $\vdots 5$; $\vdots 9$ và có ba chữ số nên có đáp số là 225 và 900

1.111. $n^2=\overline{ab}+\overline{ba}$; có 8 đáp số 29; 38;47;56;65;74;83;92

1.112.

$A=\underbrace{11...1}_{50}\ \underbrace{00...0}_{50}+\underbrace{11...1}_{50}$

$C=\underbrace{11...1}_{50}$

chữ số tận cùng của số chính phương là a+3 chỉ có thể bằng 4;5;6;9

Tương ứng ta có n^2 bằng 2134;3245;4356;7689.

Chỉ có $4356=66^2$ còn các trường hợp còn lại loại

1.113, Số 5*n*+4 tận cùng là 4 hoặc 9. Ta xét hai trường hợp

Trường hợp 1: Số 5n+4 tận cùng là 4 thì $(5n+4)^2$ tận cùng là 6. Cần tìm các số có dạng $\overline{6**6}$ là bình phương của một số tận cùng bằng 4. Không có số nào thỏa mãn vì $74^2=5476<\overline{6**6}<7056=84^2$

Trường hợp 2: Số 5n+4 tận cùng là 9 thì $(5n+4)^2$ tận cùng là 1. Cần tìm các số dạng $\overline{1**1}$ là bình phương của một số tận cùng bằng 9.

Ta thấy $29^2=841<\overline{1**1}<2401=49^2$ còn $39^2=1521$

Vậy số cần tìm là 1521

1.114. Ta có A = $\underbrace{11...1}_{50\text{ chữ số }1}\ \underbrace{00...0}_{50\text{ chữ số }0}+\underbrace{11...1}_{50\text{ chữ số }1}$

Đặt C= $\underbrace{11...1}_{50\text{ chữ số }1}$ thì B=2C

Suy ra $A=C.10^{50}+C$

Do đó $A-B=C.10^{50}+C-2C=C(10^{50}-1)$

Ta có $10^{50}-1=\underbrace{99...9}_{50}=9C$

Vậy $A-B=C.9C=9C^2=(3C)^2=\underbrace{99...9}_{50}$ là số chính phương

1.115. Giả sử $A=\underbrace{11...1}_{1995}00...0$

Tổng các chữ số của A bằng:

$\underbrace{1+1+...+1}_{50}+0+0+...+0=1995$ là một số chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 nên A không là số chính phương.

1.116. Với n=1 thì $1!=1=1^2$

Với n=2 thì $1!+2!=3$ không là số chính phương

Với n=3 thì $1!+2!+3!=9=3^2$ là số chính phương

Với $n\geq 4$ thì $1!+2!+...+n!$ tận cùng bằng 3 nên không là số chính phương. (Thật vậy $1!+2!+3!+4!=33$, còn $5!+6!...$ đều tận cùng bằng 0.

Vậy n=1 hay n=3

Chuyên đề nâng cao 2

1.117. Xét 2014 có dạng 1,11,111,…., $\underbrace{11...1}_{2014\text{ số }1}$. Theo nguyên lý Dirichlet thì tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho 2013. Giả sử hai số đó là $a=\underbrace{11...1}_{n\text{ số }1}$, $b=\underbrace{11...1}_{k\text{ số }1}$ với n>k.

Khi đó $a-b=\underbrace{11...1}_{n-k\text{ số }1}.10^k \vdots 2013$.

Vì $(2007,10^k)=1$ nên số $c=\underbrace{11...1}_{n-k\text{ số }1}$ chia hết cho 2013

1.118. Ta có $288=3^2.2^5$

1. Chứng minh $P\vdots 3^2$

Xét 4 số $a_1,a_2,a_3,a_4,$: Ta thấy tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho 3, giả sử a_1 và a_2 => $(a_1-a_2)\vdots 3$

Lại xét a_2,a_3,a_4,a_5 trong 4 số này lại tồn tại 2 số có cùng số dư khi chia cho 3, giả sử a_4 và a_5 => $(a_4-a_5)\vdots 3$

Do vậy $P\vdots 9$ (1)

2. Chứng minh $P\vdots 2^5$

Trong 5 số đã cho có 3 số cùng tính chẵn lẻ.

- Nếu có 3 số chẵn, 2 số lẻ, chẳng hạn là : $a_1=2k_1$, $a_2=2k_2$, $a_3=2k_3$, $a_4=2k_4+1$, $a_5=2k_5+1$

Khi đó: $P=16(k_1-k_2)(k_1-k_3)(k_2-k_3)(k_4-k_5).M$

Trong đó 3 số k_1,k_2,k_3 có 2 số cùng tính chẵn lẻ, chẳng hạn k_1 và k_2, thì $(k_1-k_2)\vdots 2$. Vậy $P\vdots 32$

- Nếu có 3 số lẻ, 2 số chẵn thì chứng minh tương tự ta cũng có $P\vdots 32$

Vậy trong mọi trường hợp ta đều có $P\vdots 32$ (2)

Từ (1), (2) và (9,32)=1 suy ra $P\vdots 9,32$ hay $P\vdots 288$ (đpcm).

1.119. Viết n+1 số lấy ra dưới dạng

$a_1=2^{k_1}b_1, a_2=2^{k_2}b_2,....,a_{n+1}=2^{k_{n+1}}b_{n+1}$ trong đó $b_1,b_2,....,b_{n+1}$ là các số lẻ,

Ta có: $1\le b_1,b_2,....,b_{n+1}\le 2n-1.$. Mặt khác trong khoảng từ 1 đến 2n-1 có đúng n số lẻ nên tồn tại hai số m, n sao cho $b_n=b_m$. Khi đó, trong hai số a_n và a_m có một số là bội của số kia (đpcm)

1.120.

1. Nếu $a_1=a_2=...=a_{100}=2$ thì ta chọn 50 số bất kì đều có tổng bằng 100.

2. Nếu $a_1\ne a_2$ thì ta lập dãy sau

$a_1,a_2,a_1+a_2,a_1+a_2+a_3+...+a_1+a_2+...+a_{99}$ (các số hạng này có giá trị từ 1 đến 199).

- Nếu tồn tại một số hang nào trong dãy chia hết cho 100 thì số hạng đó bằng 100
- Nếu không có số hạng nào chia hết cho 100 thì trong 100 số này khi chia cho 100 sẽ có hai số hạng có cùng số dư . Hiệu của chúng cho ta tổng cần tìm.

1.121. Giả sử 69 số đã cho là $1\le a_1+a_3<a_1+a_4<...<a_1+a_{69}\le 100$. Khi đó $a_1\le 32$. Xét hai dãy sau:

$1<a_1+a_3<a_1+a_3<...<a_1+a_{69}\le 132(1)$

$1\le a_3-a_2<a_4-a_2<...<a_{69}-a_2\le 132(2)$

Từ (1) và (2) ta có 134 số hạng có giá trị từ 1 đến 132, suy ra có 2 số bằng nhau mỗi số thuộc một dãy, chẳng hạn: $a_1+a_m=a_n-a_2$ (với $3\le m<n\le 69$) tức là ta tìm được 4 số $a_1;a_2;a_n;a_m$ với $a_1<a_2<a_m$ mà $a_1+a_2+a_m=a_n$ (đpcm)

1.122. Giả sử 39 số tự nhiên liên tiếp đó là $a_1<a_2<...<a_{39}$.

Trong 20 số hạng đầu tiên của dãy này sẽ có hai số tận cùng là 0 và có một số (trong hai số này) có chữ số đứng trước số tận cùng khác 9. Gọi số này là N.

Xét các số $N+1,N+2,...,N+19$ thuộc 39 số đã cho. Khi đó:

$S(N+i) = S(N) + i$ với $i = 1, 2, ..., 9$ và $S(N+19) = S(N) + 10$.

(kí hiệu S(a) là tổng các chữ số của a).

Trong 11 số tự nhiên liên tiếp $S(N), S(N)+1, ..., S(N)+9, S(N)+10$ luôn có một số chia hết cho 11, chẳng hạn: $S(N+m) \vdots 11$ với $m \in \{1; 2; ...; 9; 19\}$

Vậy $N+m$ là số thỏa mãn.

1.123. Gọi 15 số tự nhiên sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn là : $a_1, a_2, ..., a_{15}$.

Xét dãy số: $b_1 = a_2 - a_1, b_2 = a_3 - a_1, ..., b_{14} = a_{15} - a_1$. Các số hạng của dãy số này có giá trị từ 1 đến 27 và đôi một khác nhau.

$\Rightarrow$ Dãy số $a_1, a_2, ..., a_{15}; b_1, b_2, ..., b_{14}$ có 29 số hạng nhưng chỉ nhận 28 giá trị khác nhau (từ 1 đến 28). Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại hai số bằng nhau, chẳng hạn: $b_m = a_n (1 \le m \le 14, 1 \le n \le 15)$

Hay $a_{m+1} - a_1 = a_n \Leftrightarrow a_{m+1} = a_1 + a_n$.

- Nếu n = 1 thì $a_{m+1} = 2a_1$

- Nếu $n \ne 1$ thì 3 số a_1, a_n, a_{m+1} phân biệt và $a_{m+1} = a_1 + a_n$.

Vậy ta chỉ việc chọn 3 số a_1, a_n, a_{m+1} hoặc 2 số a_1, a_{m+1} sẽ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

1.124. Là bài tổng quát của bài 1.123.

1.125. Mỗi người trong số 5 người có khả năng về số người quen (từ 0 đến 4). Ta xét hai trường hợp sau:

1. Nếu có một người không quen ai trong số 4 người còn lại thì rõ ràng không có ai quen cả 4 người. Như vậy, 5 người mà chỉ có 4 khả năng về số người quen (từ 0 đến 3) nên theo nguyên lí Dirichlet có ít nhất hai người có cùng số người quen.

2. Nếu mỗi người đều có ít nhất một người quen. Khi đó 5 người mà chỉ có 4 khả năng về số người quen (từ 1 đến 4), theo nguyên lí Dirichlet có ít nhất hai người có cùng số người quen.

1.126. Là bài toán tổng quát của bài 1.125

1.127. Giả sử 6 đội bóng đá là A, B, C, D, E, F. Xét đội A, Vì A phải đấu từ 0 đến 5 trận nên theo nguyên lí Dirichlet ta suy ra. Hoặc A đã đấu hoặc A chưa đấu với ít nhất 3 đội khác. Không mất tính tổng quát, giả sử A đã đấu với B, C, D.

- Nếu B, C, D từng cặp chưa đấu với nhau thì bài toán được chứng minh.

- Nếu B, C, D có 2 đội đã đấu với nhau, ví dụ là C thì 3 đội A, B, C từng cặp đã đấu với nhau

Như vậy bất cứ lúc nào cũng có 3 đội trong đó từng cặp đã đấu với nhau hoặc chưa đấu với nhau trận nào.

--------- CHÚC CÁC EM HỌC TỐT ---------

THCS.TOANMATH.com