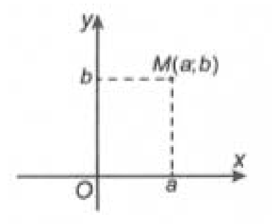
CHƯƠNG 4. SỐ PHỨC

BÀI 1&2. KHÁI NIỆM SỐ PHỨC VÀ CÁC PHÉP TOÁN CỦA SỐ PHỨC

A. LÝ THUYẾT

I. KHÁI NIỆM VỀ SỐ PHỨC

1. Số phức **Định nghĩa** Cho số phức z có dạng: $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$, trong đó a gọi là phần thực của z, b gọi là phần ảo của z, i gọi là đơn vị ảo thỏa mãn $i^2=-1$. **Đặc biệt:** Tập hợp các số phức, kí hiệu là $\mathbb{C}$. Số phức z là số thực nếu $b=0$. Số phức z là số thuần ảo nếu $a=0$. Số phức $z=0+0i=0$ vừa là số thực, vừa là số ảo (còn gọi là số thuần ảo). **Số phức liên hợp** Số phức liên hợp của số phức z, kí hiệu $\overline{z}$, là $\overline{z}=a-bi$.	***Bài tập:*** +) $z=5-\frac{2}{7}i\in\mathbb{C}$; +) $z=-\sqrt{2}+\pi i\in\mathbb{C}$; +) $z=\frac{4}{3}i, w=\cos\frac{\pi}{12}i, u=-i,\dots$ là các số thuần ảo. ***Bài tập*** *+) Số phức $z=5-\frac{2}{7}i$ có số phức liên hợp là $\overline{z}=5+\frac{2}{7}i$;* *+) Số phức $z=\frac{4}{3}i$ có số phức liên hợp là $\overline{z}=-\frac{4}{3}i$.* ***Nhận xét:*** *Mỗi số thực có số phức liên hợp là chính nó.*
Môđun của số phức Môđun của số phức z, kí hiệu là $\lvert z\rvert=\sqrt{a^2+b^2}$.	***Bài tập:*** *Số phức $z=5-\frac{2}{7}i$ có môđun* $\lvert z\rvert=\sqrt{5^2+\left(-\frac{2}{7}\right)^2}=\frac{\sqrt{1229}}{7}$
2. Hai số phức bằng nhau **Định nghĩa** Hai số phức $z_1=a_1+b_1i$ và $z_2=a_2+b_2i$ được gọi là bằng	***Bài tập:*** *Số phức $z=a+bi$ bằng 0 khi và chỉ khi* $\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}$

nhau khi và chỉ khi $\begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$. **3. Biểu diễn hình học của số phức** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, mỗi số phức $z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}$ được biểu diễn bởi điểm $M(a;b)$. Ngược lại, mỗi điểm $M(a;b)$ biểu diễn duy nhất một số phức là $z = a + bi$. 	*hay* $z = 0$. ***Nhận xét:*** *+)* $OM = \|z\|$; *+) Nếu* z_1, z_2 *có các điểm biểu diễn lần lượt là* M_1, M_2 *thì* $M_1M_2 = \|z_1 - z_2\|$.

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA

SỐ PHỨC

$z = a + bi$

$\left(a, b \in \mathbb{R}; i^2 = -1\right)$

Đại số ($\mathbb{C}$ là tập hợp số phức)

a là phần thực của số phức z

b là phần ảo của số phức z

Số phức liên hợp của z

$\overline{z} = a - bi$

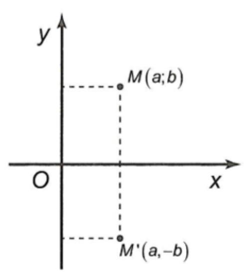
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Số phức liên hợp

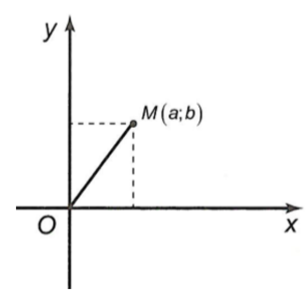
Môđun số phức

Hình học

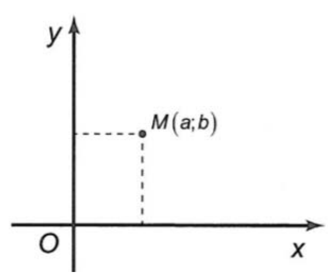
M' là điểm biểu diễn của số phức $\overline{z}$



Độ dài đoạn OM là môđun số phức z



M là điểm biểu diễn của số phức z



II. CÁC PHÉP TOÁN SỐ PHỨC

1. Phép cộng số phức

Định nghĩa

Tổng của hai số phức $z=a+bi, z'=a'+b'i\left(a,b,a',b'\in\mathbb{R}\right)$ là số phức $z+z'=a+a'+\left(b+b'\right)i.$

Tính chất

Với mọi $z,z',z''\in\mathbb{C}$ ta có:

Tính chất kết hợp: $\left(z+z'\right)+z''=z+\left(z'+z''\right);$

Tính chất giao hoán: $z+z'=z'+z;$

Cộng với 0: $z+0=0+z=z;$

$z+\left(-z\right)=\left(-z\right)+z=0.$

2. Phép trừ số phức

Hiệu của hai số phức $z=a+bi, z'=a'+b'i\left(a,b,a',b'\in\mathbb{R}\right)$:

$z-z'=z+\left(-z'\right)=\left(a-a'\right)+\left(b-b'\right)i.$

3. Phép nhân số phức

Định nghĩa

Tích của hai số phức $z=a+bi, z'=a'+b'i\left(a,b,a',b'\in\mathbb{R}\right)$ là số phức $zz'=aa'-bb'+\left(ab'+a'b\right)i.$

Tính chất

Với mọi $z,z',z''\in\mathbb{C}$ ta có:

- Tính chất giao hoán: $zz'=z'z;$
- Tính chất kết hợp: $\left(zz'\right)z''=z\left(z'z''\right);$
- Nhân với 1: $1.z=z.1=z;$
- Tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng: $z\left(z'+z''\right)=zz'+zz''.$

4. Phép chia cho số phức khác 0

Số nghịch đảo của số phức $z\neq 0$ kí hiệu là z^{-1}, là số phức thỏa mãn $zz^{-1}=1$, , hay $z^{-1}=\frac{1}{\left|z\right|^2}\bar{z}.$

Thương của phép chia số phức z' cho số phức z khác 0,

Bài tập:

$\left(5+4i\right)+\left(3-2i\right)=8+2i.$

Bài tập:

$z=5-\frac{2}{7}i$ có số đối là $-z=-5+\frac{2}{7}i.$

Bài tập:

$\left(5+4i\right)-\left(3-2i\right)=2+6i.$

Bài tập:

$\left(5+4i\right)\left(3-2i\right)=\left(15+8\right)+\left(12-10\right)i=23+2i.$

Chú ý:

• *Ta có thể thực hiện phép cộng và phép nhân các số phức theo các quy tắc như phép toán cộng và nhân các số thực.*

° *Các hằng đẳng thức của các số thực cũng đúng đối với các số phức.*

Bài tập: $z^2+4=z^2-\left(2i\right)^2=\left(z-2i\right)\left(z+2i\right).$

Bài tập:

$z=3-2i$ có số phức nghịch đảo là

$\frac{1}{z}=\frac{1}{13}.\left(3+2i\right)=\frac{3}{13}+\frac{2}{13}i.$

Bài tập:

kí hiêu là $\dfrac{z'}{z} = z'z^{-1} = \dfrac{z'\overline{z}}{|z|^2}.$

$$\frac{5+4i}{3-2i} = \frac{(5+4i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{7+22i}{13} = \frac{7}{13} + \frac{22}{13}i.$$

CÁC PHÉP TOÁN VỚI SỐ PHỨC

Phép cộng số phức

Tổng của hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i \left(a, b, a', b' \in \mathbb{R}\right)$ là số phức $z + z' = a + a' + \left(b + b'\right)i.$

Tính chất phép cộng số phức

Với mọi $z, z', z'' \in \mathbb{C}$ ta có

$\left(z + z'\right) + z'' = z + \left(z' + z''\right);$

$z + z' = z' + z;$

$z + 0 = 0 + z = z;$

$z + \left(-z\right) = \left(-z\right) + z = 0.$

ÓA

Phép trừ số phức

Hiệu của hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i \left(a, b, a', b' \in \mathbb{R}\right)$ là số phức $z - z' = \left(a - a'\right) + \left(b - b'\right)i.$

Phép nhân số phức

Tích của hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i \left(a, b, a', b' \in \mathbb{R}\right)$ là số phức $zz' = aa' - bb' + \left(ab' + a'b\right)i.$

Tính chất phép nhân số phức

Với mọi $z, z', z'' \in \mathbb{C}$ ta có

$zz' = z'z;$

$\left(zz'\right)z'' = z\left(z'z''\right);$

$1.z = z.1 = z;$

$z\left(z' + z''\right) = zz' + zz''.$

Phép chia số phức khác 0

Số nghịch đảo của số phức $z \neq 0$ kí hiệu là z^{-1} là số phức thỏa mãn $zz^{-1} = 1$ hay $z^{-1} = \dfrac{1}{|z|^2}\overline{z}.$

Thương của phép chia số phức z' cho số phức $z \neq 0$, kí hiệu là $\dfrac{z'}{z} = z'z^{-1} = \dfrac{z'\overline{z}}{\left|z^2\right|}.$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Thực hiện các phép toán của số phức, tìm phần thực phần ảo

1. Phương pháp giải

Cho hai số phức $z=a+bi$ và $z'=a'+b'i$, trong đó $a,b,a',b'\in\mathbb{R}$. Khi đó:

- $z+z'=a+a'+(b+b')i;$
- $z-z'=(a-a')+(b-b')i;$
- $zz'=aa'-bb'+(ab'+a'b)i;$
- $\dfrac{z'}{z}=\dfrac{z'\overline{z}}{|z|^2}.$

Bài tập:

Hai số phức $z_1=3-7i, z_2=4+3i$ có

$z_1+z_2=(3+4)+(-7+3)i=7-4i;$

$z_1-z_2=(3-4)+(-7-3)i=-1-10i;$

$z_1z_2=(3.4-(-7).3)+(3.3+4.(-7))i=33-19i;$

$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{(3-7i)(4-3i)}{(4+3i).(4-3i)}=-\dfrac{9}{25}-\dfrac{37}{25}i.$

2. Bài tập

Bài tập 1: Tất cả các số phức z thỏa mãn $2z-3(1+i)=iz+7-3i$ là

A. $z=\dfrac{8}{5}-\dfrac{4}{5}i.$ **B.** $z=4-2i.$ **C.** $z=\dfrac{8}{5}+\dfrac{4}{5}i.$ **D.** $z=4+2i.$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $2z-3(1+i)=iz+7-3i\Leftrightarrow(2-i)z=10\Leftrightarrow z=\dfrac{10}{2-i}\Leftrightarrow z=4+2i.$

Bài tập 2: Cho số phức $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+1+3i-|z|i=0$. Giá trị của $S=a-3b$ là

A. $S=-\dfrac{7}{3}.$ **B.** $S=3.$ **C.** $S=-3.$ **D.** $S=\dfrac{7}{3}.$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $z+1+3i-|z|i=0$

$$\Leftrightarrow a+1+\left(b+3-\sqrt{a^2+b^2}\right)i=0\Leftrightarrow\begin{cases}a+1=0\\b+3=\sqrt{a^2+b^2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\\begin{cases}b\ge-3\\(b+3)^2=1+b^2\end{cases}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-\dfrac{4}{3}\end{cases}\Rightarrow S=3.$$

Bài tập 3. Tính $\mathrm{C}=1+(1+\mathrm{i})+(1+\mathrm{i})^2+(1+\mathrm{i})^3+\ldots+(1+\mathrm{i})^{20}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức của cấp số nhân:

Ta có:

$$C = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + ... + (1+i)^{20} = u_1.\frac{1-q^{21}}{1-q}$$

$$= 1.\frac{1-(1+i)^{21}}{1-(1+i)} = \frac{1-(1+i)^{21}}{-i}.$$

Ta có:

$$(1+i)^2 = 2i$$

$$\Rightarrow (1+i)^{21} = (1+i)^{20}.(1+i) = (2i)^{10}.(1+i) = -2^{10}(1+i) = -2^{10} - i.2^{10}$$

Do đó: $C = \frac{1+2^{10}+i.2^{10}}{-i} = -2^{10} + \left(1+2^{10}\right)i.$

Bài tập 4. Tính tổng $S = i + 2i^2 + 3i^3 + ... + 2012.i^{2012}$.

A. $-1006 + 1006i$ **B.** $1006 + 1006i$ **C.** $-1006 - 1006i$ **D.** $1006 - 1006i$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Cách 1.

Ta có $iS = i^2 + 2i^3 + 3i^4 + ... + 2012i^{2013}$

$\Rightarrow S - iS = i + i^2 + i^3 + ... + i^{2012} - 2012.i^{2013}$

Dãy số $i, i^2, i^3, ..., i^{2012}$ là một cấp số nhân có công bội $q = i$ và có 2012 số hạng, suy ra:

$$i + i^2 + i^3 + ... + i^{2012} = i.\frac{1-i^{2012}}{1-i} = 0$$

Do đó: $S - iS = -2012.i^{2013} = -2012i \Rightarrow S = \frac{-2012i}{1-i} = 1006 - 1006i$

Cách 2. Dãy số $1, x, x^2, ..., x^{2012}$ là một cấp số nhân gồm 2013 số hạng và có công bội bằng x.

Xét $x \neq 1, x \neq 0$ ta có: $1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{2012} = \frac{1-x^{2013}}{1-x}$ (1)

Lấy đạo hàm hai vế của (1) ta được:

$$1 + 2x + 3x^2 + ... + 2012x^{2011} = \frac{2012.x^{2013} - 2013x^{2012} + 1}{(1-x)^2} \quad (2)$$

Nhân hai vế của (2) cho x ta được:

$$x + 2x^2 + 3x^3 + ... + 2012x^{2012} = \frac{2012.x^{2014} - 2013x^{2013} + x}{(1-x)^2} \quad (3)$$

Thay $x = i$ vào (3) ta được:

$$S = i + 2i^2 + 3i^2 + ... + 2012i^{2012} = \frac{2012i^{2014} - 2013i^{2013} + i}{(1-i)^2}$$

Với $i^{2014} = -1,\ i^{2013} = i$

Vậy $S = \dfrac{-2012 - 2012i}{-2i} = 1006 - 1006i.$

Bài tập 5. Cho α, β hai số phức liên hiệp thỏa mãn $\dfrac{\alpha}{\beta^2} \in R$ và $|\alpha - \beta| = 2\sqrt{3}$. Tính $|\alpha|$.

A. $\sqrt{3}$ **B.** 3 **C.** 2 **D.** $\sqrt{5}$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $\alpha = x + iy \Rightarrow \beta = x - iy$ với $x, y \in R$.

Không giảm tính tổng quát, ta coi $y \geq 0$.

Vì $|\alpha - \beta| = 2\sqrt{3}$ nên $|2iy| = 2\sqrt{3} \Rightarrow y = \sqrt{3}$.

Do α, β hai số phức liên hợp nên $\alpha.\beta \in \mathbb{R}$, mà $\dfrac{\alpha}{\beta^2} = \dfrac{\alpha^3}{(\alpha\beta)^2} \in \mathbb{R}$ do đó $\alpha^3 \in \mathbb{R}$. Nhưng ta có $\alpha^3 = x^3 - 3xy^2 + \left(3x^2y - y^3\right)i$ nên $\alpha^3 \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $3x^2y - y^3 = 0 \Leftrightarrow y\left(3x^2 - y^2\right) = 0 \Rightarrow x^2 = 1$.

Vậy $|\alpha| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+3} = 2$.

Bài tập 6. Tìm c biết a,b và c các số nguyên dương thỏa mãn: $c = (a + bi)^3 - 107i$.

A. 400 **B.** 312 **C.** 198 **D.** 123

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $c = (a + bi)^3 - 107i = a^3 - 3ab^2 + i\left(3a^2b - b^3 - 107\right)$. Nên c là số nguyên dương thì $3a^2b - b^3 - 107 = 0$. Hay $b\left(3a^2 - b^2\right) = 107$.

Vì $a, b \in Z^+$ và 107 là số nguyên tố nên xảy ra:

- $b = 107; 3a^2 - b^2 = 1 \Rightarrow a^2 = \dfrac{11450}{3} \notin Z$ (loại).
- $b = 1; 3a^2 - b^2 = 107 \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$ (thỏa mãn). Vậy nên $c = a^3 - 3ab^2 = 6^3 - 3.6.1^2 = 198$.

Bài tập 7. Cho số phức z có phần ảo bằng 164 và với số nguyên dương n thỏa mãn $\dfrac{z}{z+n} = 4i$. Tìm n.

A. $n=14$ **B.** $n=149$ **C.** 697 **D.** 789

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $z=x+164i$ ta có:

$$\frac{z}{z+n}=4i\Leftrightarrow\frac{x+164i}{x+164i+n}=4i\Leftrightarrow x+164i=-656+4\left(x+n\right)i$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x=-656\\x+n=41\end{cases}\Rightarrow n=697.$$

Vậy giá trị cần tìm của n là 697.

Bài tập 8. Cho số phức z thỏa mãn $\overline{z}=\frac{\left(1-\sqrt{3}i\right)}{1-i}$ .Tìm mô đun của số phức $\overline{z}+iz$

A. $\sqrt{2}$ **B.** $\sqrt{3}$ **C.** 5 **D.** $\sqrt{7}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

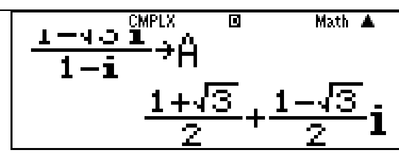
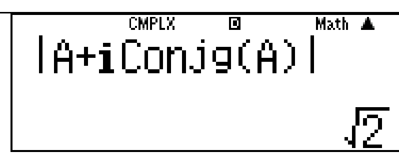
Từ $\overline{z}$ ta phải suy ra được z và thay vào biểu thức $\overline{z}+iz$ rồi tìm môđun:

$$\overline{z}=\frac{\left(1-\sqrt{3}i\right)}{1-i}=\frac{\left(1-\sqrt{3}i\right)\left(1+i\right)}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}i$$

Suy ra: $z=\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{1-\sqrt{3}}{2}i\Rightarrow i.z=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$

Do đó: $\overline{z}+iz=1+i\Rightarrow\left|\overline{z}+iz\right|=\sqrt{2}$.

Dùng MTCT:

Bước 1: Lưu $\frac{\left(1-\sqrt{3}i\right)}{1-i}\rightarrow A$	
Bước 2: Tính $\left|A+i\overline{A}\right|$	

Lời bình: Nhận thấy rằng với số phức $z=a+bi$ bất kì ta đều có $z+i\overline{z}=\left(1+i\right)\left(a+b\right)$ hay $\frac{z+i\overline{z}}{1+i}=a+b\in\mathbb{R},\forall z\in\mathbb{C}$. Về phương diện hình học thì $\frac{z+i\overline{z}}{1+i}$ luôn nằm trên trục Ox khi biểu diễn trong mặt phẳng phức.

Bài tập 9. Tìm số thực m biết: $z=\frac{i-m}{1-m\left(m-2i\right)}$ và $z\overline{z}=\frac{2-m}{2}$ (trong đó i là đơn vị ảo)

A. $\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=1\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-1\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}m=0\\m=1\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}m=2\\m=1\end{array}\right.$

Định hướng: Quan sát thấy z cho ở dạng thương hai số phức. Vì Vậy cần phải đơn giản z bằng cách nhân liên hiện ở mẫu. Từ $z\Rightarrow\bar{z}$. Thay z và $\bar{z}$ vào $z\bar{z}=\frac{2-m}{2}$ ta tìm được m

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có:

$$z=\frac{i-m}{1-m(m-2i)}=\frac{(i-m)\left(1-m^2-2mi\right)}{\left(1-m^2\right)^2+4m^2}=\frac{-m\left(1-m^2\right)+2m+i\left(1-m^2+2m^2\right)}{\left(1+m^2\right)^2}$$

$$=\frac{m\left(1+m^2\right)+i\left(1+m^2\right)}{\left(1+m^2\right)^2}=\frac{m}{1+m^2}+\frac{i}{1+m^2}\Rightarrow\bar{z}=\frac{m}{1+m^2}+\frac{i}{1+m^2}$$

Như vậy:

$$z\bar{z}=\frac{2-m}{2}\Rightarrow\frac{m^2+1}{\left(m^2+1\right)^2}=-\frac{1}{2}(m-2)\Leftrightarrow\frac{1}{1+m^2}=-\frac{1}{2}(m-2)\Leftrightarrow m^3-2m^2+m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=1\end{array}\right.$$

Bài tập 10. Tìm phần thực của số phức: $z=(1+i)^n, n\in\mathbb{N}$ thỏa mãn phương trình: $\log_4(n-3)+\log_4(n+9)=3$.

A. 6 **B.** -8 **C.** 8 **D.** 9

Hướng dẫn giải

Chọn C

Điều kiện: $n>3, n\in\mathbb{N}$

Phương trình $\log_4(n-3)+\log_4(n+9)=3\Leftrightarrow\log_4(n-3)(n+9)=3$

$(n-3)(n+9)=4^3\Leftrightarrow n^2+6n-9=0\Leftrightarrow n=7(\text{do}: n>3)$

$$z=(1+i)^7=(1+i).\left[(1+i)^2\right]^3=(1+i).(2i)^3=(1+i).(-8i)=8-8i$$

Vậy phần thực của số phức z là 8.

Bài tập 11. Cho số phức $z=\frac{m+3i}{1-i}(m\in\mathbb{R})$. Tìm m, biết số phức $w=z^2$ có môđun bằng 9.

A. $\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=1\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}m=3\\m=-1\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}m=3\\m=1\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}m=3\\m=-3\end{array}\right.$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có:

$$w=z^2=\frac{m^2-9+6mi}{-2i}=-3m+\left(\frac{m^2-9}{2}\right)i\left|w\right|=9\Leftrightarrow\sqrt{9m^2+\left(\frac{m^2-9}{2}\right)^2}=9$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sqrt{m^4+18m^2+81}=9\Leftrightarrow m^2-9=18\Leftrightarrow m^2=9\Leftrightarrow m=\pm3$$

Vậy giá trị cần tìm là $m=\pm3$

Bài tập 12. Cho số phức $z=\dfrac{i-m}{1-m\left(m-2i\right)},m\in\mathbb{R}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của số thực k sao cho tồn tại m để $\left|z-1\right|\ge k$

A. $k=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ **B.** $k=\dfrac{\sqrt{5}+2}{2}$ **C.** $k=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ **D.** $k=\dfrac{\sqrt{5}-2}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $z=\dfrac{i-m}{-i^2+mi-m^2}=\dfrac{-1}{i-m}\Rightarrow z-1=\dfrac{1-m+i}{m-i}$

$$\left|z-1\right|=\frac{\left|1-m+i\right|}{\left|m-i\right|}=\sqrt{\frac{m^2-2m+2}{m^2+1}}\Rightarrow\left|z-1\right|\ge k\Leftrightarrow\begin{cases}k\ge0\\ \dfrac{m^2-2m+2}{m^2+1}\ge k^2\end{cases}$$

Xét hàm số $f\left(m\right)=\dfrac{m^2-2m+2}{m^2+1}$

Ta có: $f'\left(m\right)=\dfrac{2\left(m^2-m+1\right)}{\left(m^2+1\right)^2}\Rightarrow f'\left(m\right)=0\Leftrightarrow m=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Lập bảng biến thiên ta có min $f\left(m\right)=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow$ Yêu cầu bài toán $k^2\ge\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow k\ge\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

Vậy $k=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ là giá trị phải tìm.

Dạng 2. Tìm số phức liên hợp, tính môđun số phức

1. Phương pháp giải

- Số phức $z=a+bi$ có $\overline{z}=a-bi$ và $\left|z\right|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Chú ý: Nếu $z=a+bi$ thì

Bài tập: Số phức liên hợp của số phức $z=\left(2-3i\right)\left(3+2i\right)$ là

A. $\overline{z}=12-5i$. **B.** $\overline{z}=-12+5i$.

$z+\overline{z}=2a; z.\overline{z}=a^2+b^2.$

C. $\overline{z}=-12-5i.$ **D.** $\overline{z}=12+5i.$

Hướng dẫn giải

Ta có $z=(2-3i)(3+2i)=6-5i-6i^2=12-5i$

$\Rightarrow \overline{z}=12+5i.$

Chọn D.

2. **Bài tập mẫu**

Bài tập 1: Cho số phức $z=a+bi,$ với a,b là các số thực thỏa mãn

$a+bi+2i(a-bi)+4=i,$ với i là đơn vị ảo. Môđun của $\omega=1+z+z^2$ là

A. $|\omega|=\sqrt{229}.$ **B.** $|\omega|=\sqrt{13}.$ **C.** $|\omega|=229.$ **D.** $|\omega|=13.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $a+bi+2i(a-bi)+4=i \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=-4 \\ b+2a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases}.$ Suy ra $z=2-3i.$

Do đó $\omega=1+z+z^2=-2-15i.$ Vậy $|\omega|=\sqrt{(-2)^2+(-15)^2}=\sqrt{229}$

Bài tập 2: Cho số phức z thỏa mãn $\overline{z}=\dfrac{1+3i}{1-i}.$ Môđun của số phức $w=i.\overline{z}+z$ là

A. $|w|=4\sqrt{2}.$ **B.** $|w|=\sqrt{2}.$ **C.** $|w|=3\sqrt{2}.$ **D.** $|w|=2\sqrt{2}.$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $\overline{z}=\dfrac{1+3i}{1-i}=-1+2i.$

$\Rightarrow z=-1-2i \Rightarrow w=i.(-1+2i)+(-1-2i)=-3-3i.$

$\Rightarrow |w|=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}.$

Bài tập 3: Cho z_1,z_2 là các số phức thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=1$ và $|z_1-2z_2|=\sqrt{6}.$

Giá trị của biểu thức $P=|2z_1+z_2|$ là

A. $P=2.$ **B.** $P=\sqrt{3}.$ **C.** $P=3.$ **D.** $P=1.$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $z_1=a_1+b_1i; a_1,b_1\in\mathbb{R},\ z_2=a_2+b_2i; a_2,b_2\in\mathbb{R}.$

Suy ra $a_1^2+b_1^2=a_2^2+b_2^2=1$ và $|z_1-2z_2|=\sqrt{6}\Leftrightarrow a_1.a_2+b_1.b_2=\dfrac{-1}{4}.$

Ta có: $2z_1+z_2=2a_1+a_2+\left(2b_1+b_2\right)i$

$\Rightarrow \left|2z_1+z_2\right|=\sqrt{\left(2a_1+a_2\right)^2+\left(2b_1+b_2\right)^2}=2\sqrt{\left(a_1^2+b_1^2\right)+\frac{1}{4}.\left(a_2^2+b_2^2\right)+\left(a_1a_2+b_1b_2\right)}$

Suy ra $P=\left|2z_1+z_2\right|=2.$

Dạng 3. Bài toán liên quan đến điểm biểu diễn số phức

Bài tập 1: Cho A,B,C lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $4-3i,\left(1+2i\right)i,\frac{1}{i}.$ Số phức có điểm biểu diễn D sao cho $ABCD$ là hình bình hành là

A. $z=-6-4i.$ **B.** $z=-6+3i.$ **C.** $z=6-5i.$ **D.** $z=4-2i.$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có

A là điểm biểu diễn của số phức $4-3i$ nên $A\left(4;-3\right).$

B là điểm biểu diễn của số phức $\left(1+2i\right)i=-2+i$ nên $B\left(-2;1\right).$

C là điểm biểu diễn của số phức $\frac{1}{i}=-i$ nên $C\left(0;-1\right).$

Điều kiện để $ABCD$ là hình bình hành là $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D-x_A=x_C-x_B \\ y_D-y_A=y_C-y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D=x_C+x_A-x_B=6 \\ y_D=y_C+y_A-y_B=-5 \end{cases} \Rightarrow D\left(6;-5\right)\Rightarrow z=6-5i.$$

Bài tập 2: Cho tam giác ABC có ba đỉnh A,B,C lần lượt là điểm biểu diễn hình học của các số phức $z_1=2-i,z_2=-1+6i,z_3=8+i.$ Số phức z_4 có điểm biểu diễn hình học là trọng tâm của tam giác ABC. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $z_4=3-2i.$ **B.** $\left|z_4\right|=5.$

C. $\left(z_4\right)^2=13+12i.$ **D.** $\overline{z_4}=3-2i.$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $A\left(2;-1\right),B\left(-1;6\right),C\left(8;1\right).$

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC.$

$\Rightarrow G\left(3;2\right)\Leftrightarrow z_4=3+2i\Rightarrow \overline{z_4}=3-2i.$

Bài tập 3: Cho các số phức z_1,z_2 thoả mãn $\left|z_1\right|=3,\left|z_2\right|=4,\left|z_1-z_2\right|=5$. Gọi A,B lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1,z_2 trên mặt phẳng toạ độ. Diện tích S của ΔOAB (với O là gốc toạ độ) là

A. $S=5\sqrt{2}.$ **B.** $S=6.$ **C.** $S=\dfrac{25}{2}.$ **D.** $S=12.$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $|z_1|=OA=3,\ |z_2|=OB=4,\ |z_1-z_2|=AB=5$

$\Rightarrow \Delta OAB$ vuông tại O (vì $OA^2+OB^2=AB^2$)

$\Rightarrow S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}OA.OB=\dfrac{1}{2}.3.4=6.$

Dạng 4. Tìm số phức thỏa mãn điều kiện cho trước

Bài tập 1: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $\begin{cases}|z-i|=|z-1|\\|z-2i|=|z|\end{cases}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+(y-1)^2=(x-1)^2+y^2\\x^2+(y-2)^2=x^2+y^2\end{cases}\Rightarrow x=y=1.$

Do đó $z=1+i$ nên có một số phức thỏa mãn.

Bài tập 2: Có bao nhiêu số phức z thỏa điều kiện $|z.\overline{z}+z|=2$ và $|z|=2$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $|z.\overline{z}+z|=2\Leftrightarrow \left||z|^2+z\right|=2\Leftrightarrow|z+4|=2.$

Suy ra điểm M biểu diễn số phức z là giao của hai đường tròn $(C_1):x^2+y^2=4$

và $(C_2):(x+4)^2+y^2=4.$

Vì $I_1I_2=R_1+R_2$ (I_1,I_2 là tâm của các đường tròn $(C_1),(C_2)$) nên (C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau).

Suy ra: Có một số phức z thỏa mãn yêu cầu.

Bài tập 3: Có bao nhiêu số phức thỏa mãn $|z|(z-6-i)+2i=(7-i)z$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Nhận xét: Từ giả thiết, ứng với mỗi $|z|$ cho ta duy nhất một số phức z.

Đặt $|z| = a \geq 0, a \in \mathbb{R}$, khi đó ta có

$|z|(z-6-i)+2i=(7-i)z$

$\Leftrightarrow a(z-6-i)+2i=(7-i)z$

$\Leftrightarrow (a-7+i)z = 6\text{a} + ai - 2i$

$\Leftrightarrow (a-7+i)z = 6\text{a} + (a-2)i$

$\Leftrightarrow |(a-7+i)||z| = |6\text{a} + (a-2)i|$

$\Leftrightarrow \left[(a-7)^2+1\right]a^2 = 36\text{a}^2 + (a-2)^3$

$\Leftrightarrow a^4 - 14\text{a}^3 + 13\text{a}^2 + 4\text{a} - 4 = 0 \Leftrightarrow (a-1)(a^3 - 13\text{a}^2 + 4) = 0.$

Hàm số $f(a) = a^3 - 13\text{a}^2 \, (a \geq 0)$ có bảng biến thiên:

a	0		$\frac{26}{3}$		$+\infty$
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	0	$\searrow$	$-\frac{8788}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

Đường thẳng $y=-4$ cắt đồ thị hàm số $f(a)$ tại hai điểm nên phương trình $a^3 - 13\text{a}^2 + 4 = 0$ có hai nghiệm khác 1 (do $f(1) \neq 0$). Thay giá trị môđun của z vào giả thiết ta được 3 số phức thỏa mãn điều kiện.

Bài tập 4: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để có đúng hai số phức z thỏa mãn $|z-(2m-1)-i| = 10$ và $|z-1+i| = |\overline{z}-2+3i|$?

A. 40. **B.** 41. **C.** 165. **D.** 164.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Giả sử $z = x + yi \, (x, y \in \mathbb{R})$ và $M(x,y)$ là điểm biểu diễn số phức z.

Ta có: $|z-(2m-1)-i| = 10 \Leftrightarrow |z-(2m-1)-i|^2 = 100$

$\Leftrightarrow \left[x-(2m-1)\right]^2 + (y-1)^2 = 100.$

Khi đó điểm biểu diễn số phức z nằm trên đường tròn (C) có tâm $I(2m-1;1)$, bán kính $R=10$.

Lại có $|z-1+i| = |\overline{z}-2+3i| \Leftrightarrow |(x-1)+(y+1)i|^2 = |(x-2)+(3-y)i|^2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = (x-2)^2 + (3-y)^2 \Leftrightarrow 2\text{x} + 8y - 11 = 0.$

Khi đó điểm biểu diễn số phức z cũng nằm trên đường thẳng $\Delta: 2x + 8y - 11 = 0$

Có đúng hai số phức z thỏa mãn nếu đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại 2 điểm phân biệt.

Tức là $d\left(I,\Delta\right)<10\Leftrightarrow\dfrac{\left|2\left(2m-1\right)+8-11\right|}{\sqrt{2^2+8^2}}<10\Leftrightarrow\dfrac{5-20\sqrt{17}}{4}<m<\dfrac{5+20\sqrt{17}}{4}.$

Vậy có 41 giá trị nguyên của m để có đúng hai số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 5: Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $\left|z_1\right|=3,\left|z_2\right|=4,\left|z_1-z_2\right|=\sqrt{37}.$ Hỏi có bao nhiêu số z mà $z=\dfrac{z_1}{z_2}=a+bi$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $z_1=x+yi,z_2=c+di\left(x,y,c,d\in\mathbb{R}\right)$. Ta có:

$\left|z_1\right|=3\Rightarrow x^2+y^2=9;$

$\left|z_2\right|=4\Rightarrow c^2+d^2=16;$

$\left|z_1-z_2\right|=\sqrt{37}\Rightarrow x^2+y^2+c^2+d^2-2xc-2yd=37\Leftrightarrow xc+yd=-6.$

Lại có:

$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x+yi}{c+di}=\dfrac{xc+yd}{c^2+d^2}+\dfrac{yc-xd}{c^2+d^2}i=-\dfrac{3}{8}+bi.$ Suy ra $a=-\dfrac{3}{8}.$

Mà $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{\left|z_1\right|}{\left|z_2\right|}=\dfrac{3}{4}=\sqrt{a^2+b^2}\Leftrightarrow a^2+b^2=\dfrac{9}{16}\Rightarrow b^2=\dfrac{9}{16}-a^2=\dfrac{27}{64}\Rightarrow b=\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

Vậy có hai số phức z thỏa mãn.

Bài tập 6: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn $z.\overline{z}=1$ và $\left|z-\sqrt{3}+i\right|=m$. Số phần tử của S là

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Dễ thấy $m>0$.

Đặt $z=a+bi;a,b\in\mathbb{R}$ ta có hệ phương trình.

$$\begin{cases}a^2+b^2=1\\\left(a-\sqrt{3}\right)^2+\left(b+1\right)^2=m^2\end{cases}$$

Phương trình $a^2+b^2=1$ là đường tròn tâm $O,$ bán kính $R=1$.

Phương trình $\left(a-\sqrt{3}\right)^2+\left(b+1\right)^2=m^2$ là đường tròn tâm $I\left(\sqrt{3};-1\right)$, bán kính $R=m$.

Có duy nhất số phức thỏa mãn đề bài

$\Leftrightarrow$ Hệ phương trình $\begin{cases}a^2+b^2=1\\\left(a-\sqrt{3}\right)^2+\left(b+1\right)^2=m^2\end{cases}$ có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ Hai đường tròn này tiếp túc với nhau

$\Leftrightarrow OI=|m\pm 1|\Leftrightarrow |m\pm 1|=2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=3 \end{array}\right.$ (thỏa mãn $m>0$).

Vậy, có hai số thực thỏa mãn.

Bài tập 7: Có tất cả bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|=1$ và $\left|\frac{z}{\overline{z}}+\frac{\overline{z}}{z}\right|=1$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đặt $z=a+bi,(a,b\in\mathbb{R})$. Ta có

$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=1\Rightarrow a^2+b^2=1$.

$\left|\frac{z}{\overline{z}}+\frac{\overline{z}}{z}\right|=\left|\frac{z^2+\overline{z}^2}{z.\overline{z}}\right|=\frac{\left|(a+bi)^2+(a-bi)^2\right|}{|z|^2}=\left|2a^2-2b^2\right|=1.$

Ta có hệ: $\begin{cases} a^2+b^2=1 \\ \left|2a^2-2b^2\right|=1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ a^2-b^2=\frac{1}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a^2+b^2=1 \\ a^2-b^2=-\frac{1}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2=\frac{3}{4} \\ b^2=\frac{1}{4} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a^2=\frac{1}{4} \\ b^2=\frac{3}{4} \end{cases}$.

Suy ra $(a;b)\in\left\{\left(\frac{1}{2};\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right);\left(-\frac{1}{2};\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right);\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\pm\frac{1}{2}\right);\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\pm\frac{1}{2}\right)\right\}$.

Vậy có 8 cặp số $(a;b)$ do đó có 8 số phức thỏa mãn.

Dạng 5: Bài toán tập hợp điểm biểu diễn số phức

1. Phương pháp giải

Sử dụng các định nghĩa, tính chất hình học đã biết.

Cho trước các điểm cố định $I,F_1,F_2;F_1F_2=2c\,(c>0)$

Tập hợp các điểm M thoả mãn $MI=R\,(R>0)$ là đường tròn tâm I bán kính R.

Tập hợp các điểm M thoả mãn $MF_1+MF_2=2a\,(a>c)$ là elip có hai tiêu điểm là F_1,F_2.

Tập hợp các điểm M thoả mãn $MF_1=MF_2$ là đường

Bài tập:

Trên mặt phẳng Oxy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thoả mãn $|z+2-5i|=4$ là đường tròn tâm $I(-2;5)$, bán kính $R=2$.

trung trực của đoạn thẳng F_1F_2.

2. Bài tập

Bài tập 1: Xét các số phức z thỏa mãn $(z-6)(8+\overline{z}.i)$ là số thực. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn, có tâm $I(a;b)$ và bán kính R. Giá trị $a+b+R$ bằng

A. 6. **B.** 4. **C.** 12. **D.** 24.

Chú ý:

Trong mặt phẳng Oxy, $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ là phương trình đường tròn có tâm $I(a;b)$ và bán kính $R>0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$.

Vì $(z-6)(8+\overline{z}.i)=\left[(x-6)+yi\right]\left[(y+8)+xi\right]$ là số thực nên

$$x(x-6)+y(y+8)=0\Leftrightarrow(x-3)^2+(y+4)^2=25.$$

Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là đường tròn có tâm $I(3;-4)$, bán kính $R=5$.

Vậy $a+b+R=4$.

Bài tập 2: Cho số phức z thỏa mãn $|z-3|+|z+3|=10$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là

A. Một parabol.

B. Một đường tròn.

C. Một elip.

D. Một hypebol.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$ thì $|z-3|+|z+3|=10\Leftrightarrow|(x-3)+yi|+|(x+3)+yi|=10(*)$

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z và các điểm $F_1(3;0),F_2(-3;0)$. Dễ thấy $F_1F_2=6=2c$

Khi đó: $|z-3|+|z+3|=10\Leftrightarrow MF_1+MF_2=10=2a.$

Vậy tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là elip có hai tiêu điểm F_1,F_2, độ dài trục lớn là $2a=10$

Bài tập 3: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=10$ và $w=(6+8i)\overline{z}+(1-2i)^2$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm là

A. $I(-3;-4)$. **B.** $I(3;4)$. **C.** $I(1;-2)$. **D.** $I(6;8)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có

$w=(6+8i)\overline{z}+(1-2i)^2$

$\Leftrightarrow w-(-3-4i)=(6+8i)\overline{z}$

$\Leftrightarrow |w-(-3-4i)|=\sqrt{6^2+8^2}|\overline{z}|$

$\Leftrightarrow |w-(-3-4i)|=10.10 \Leftrightarrow |w-(-3-4i)|=100$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn (C) có tâm $I(-3;-4)$.

Bài tập 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu biễn các số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=|\overline{z}+1+2i|$ là đường thẳng có phương trình

A. $x-2y+1=0.$ **B.** $x+2y=0.$

C. $x-2y=0.$ **D.** $x+2y+1=0.$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})\Rightarrow \overline{z}=x-yi.$

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức z.

Ta có: $|z-1+2i|=|\overline{z}+1+2i|$

$\Leftrightarrow |x+yi-1+2i|=|z-yi+1+2i|$

$\Leftrightarrow |(x-1)+(y+2)i|=|(x+1)+(2-y)i|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(2-y)^2}$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+4y+4=x^2+2x+1+y^2-4y+4$

$\Leftrightarrow x-2y=0.$

Vậy tập hợp các điểm biểu biễn các số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán là đường thẳng có phương trình là $x-2y=0.$

Bài tập 5. Giả sử M(z) là điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z. Tập hợp những điểm M(z) thỏa mãn điều $|2+z|=|i-z|$ là

A. Đường thẳng $4x+2y+3=0$ **B.** Đường thẳng $4x-2y+3=0$

A. Đường thẳng $x+2y-3=0$ **D.** Đường thẳng $x+9y-3=0$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Cách 1. Đặt $z=x+yi;(x,y\in\mathbb{R})$.là số phức đã cho và $M(x;y)$là điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng phức

Ta có $\left|z+2\right|=\left|i-z\right|\Leftrightarrow\left|\left(x+2\right)+yi\right|=\left|x+\left(y-1\right)i\right|\Leftrightarrow\sqrt{\left(x+2\right)^2+y^2}=\sqrt{x^2+\left(y-1\right)^2}$

$\Leftrightarrow 4x+2y+3=0$. Vậy tập hợp điểm M cần tìm là đường thẳng $4x+2y+3=0$

Cách 2. $\left|z+2\right|=\left|i-z\right|\Leftrightarrow\left|z-\left(-2\right)\right|=\left|i-z\right|$ $(*)$

Đặt $z=x+yi;\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.là số phức đã cho và $M\left(x;y\right)$là điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng phức, Điểm A biểu diễn số -2 tức $A\left(-2;0\right)$và điểm B biểu diễn số phức i tức $B\left(0;1\right)$

Khi đó $(*)\Leftrightarrow MA=MB$. Vậy tập hợp điểm M cần tìm là đường trung tực của AB: $4x+2y+3=0$.

Bài tập 6. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z+2i\right|=\left|\bar{z}+1-i\right|$ là

A. Đường thẳng $x+y+3=0$

B. Đường thẳng $x-2y+3=0$

A. Đường thẳng $x+2y+3=0$

D. Đường thẳng $x-y-1=0$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Giả sử $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$, điểm $M\left(x;y\right)$ biểu diễn z. Theo bài ra ta có:

$$\left|x+\left(y+2\right)i\right|=\left|\left(x+1\right)-\left(y+1\right)i\right|\Leftrightarrow\sqrt{x^2+\left(y+2\right)^2}=\sqrt{\left(x+1\right)^2+\left(y+1\right)^2}$$
$$\Leftrightarrow 4y+4=2x+2y+2\Leftrightarrow x-y-1=0$$

Suy ra M thuộc đường thẳng có phương trình $x-y-1=0$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức z là đường thẳng có phương trình $x-y-1=0$.

Bài tập 7. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $5\left|\left(1-i\right)z+3-2i\right|=\left|\left(1-7i\right)z+i\right|$ là

A. Đường thẳng

B. Đường tròn

A. Đường elip

D. Đường Parabol

Hướng dẫn giải

Chọn A

Nhận thấy $5\left|1+i\right|=5\sqrt{2}=\left|1-7i\right|$

Ta có $5\left|\left(1-i\right)z+3-2i\right|=\left|\left(1-7i\right)z+i\right|$

$\Leftrightarrow \left|5\left(1-i\right)\right|.\left|z+\frac{3-2i}{5+5i}\right|=\left|1-7i\right|.\left|z+\frac{i}{1-7i}\right|$

$\Leftrightarrow \left|z+\frac{3-2i}{5+5i}\right|=\left|z+\frac{i}{1-7i}\right| \Leftrightarrow \left|z+\frac{1}{10}-\frac{1}{2}i\right|=\left|z-\frac{7}{50}+\frac{1}{50}i\right|$

Vậy tập hợp M là đường trung trực AB, với $A\left(-\frac{1}{10};\frac{1}{2}\right), B\left(\frac{7}{50};\frac{1}{50}\right)$.

Bài tập 8. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z+\bar{z}+3\right|=4$ là

A. Hai đuờng thẳng $x=\frac{1}{2}$, $x=-\frac{7}{2}$

B. Hai đuờng thẳng $x=-\frac{1}{2}$, $x=-\frac{7}{2}$

A. Hai đuờng thẳng $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{7}{2}$

D. Hai đuờng thẳng $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{7}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $z=x+yi,\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$

Lúc đó:

$\left|z+\bar{z}+3\right|=4 \Leftrightarrow \left|x+yi+x-yi+3\right|=4 \Leftrightarrow \left|2x+3\right|=4 \Leftrightarrow 4x^2+12x+9=16$

$\Leftrightarrow 4x^2+12x-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x=-\frac{7}{2} \end{array}\right.$

Vậy tập hợp điểm M là hai đường thẳng $x=\frac{1}{2}; x=-\frac{7}{2}$ song song với trục tung.

Bài tập 9. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z-\bar{z}+1-i\right|=2$ là

A. Hai đuờng thẳng $y=\frac{1+\sqrt{3}}{2}; y=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

B. Hai đuờng thẳng $y=\frac{1+\sqrt{3}}{2}; y=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

A. Hai đuờng thẳng $y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}; y=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

D. Hai đuờng thẳng $y=\frac{1-\sqrt{5}}{2}; y=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $z=x+yi,\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$

Lúc đó:

$\left|z-\overline{z}+1-i\right|=2\Leftrightarrow\left|x+yi-x+yi+1-i\right|=2\Leftrightarrow\left|1-(2y-1)i\right|=2$

$\Leftrightarrow\sqrt{1+(2y-1)^2}=2\Leftrightarrow 1+4y^2-4y+1=4\Leftrightarrow 4y^2-4y-2=0$

$\Leftrightarrow 2y^2-2y-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\\ y=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$

Vậy tập hợp điểm M là hai đường thẳng $y=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2};y=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ song song với trục hoành.

Bài tập 10. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $2\left|z+1\right|=\left|z-\overline{z}-2\right|$ là

A. Hai đuờng thẳng $x=0$, $y=0$.

B. Hai đuờng thẳng $x=0$, $y=-2$.

C. Hai đuờng thẳng $x=0$, $x=-2$.

D. Hai đuờng thẳng $x=2$, $y=-2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$, $(x,y\in\mathbb{R})$ thỏa $2\left|z+1\right|=\left|z-\overline{z}-2\right|$

$\Leftrightarrow 2\left|x+yi+1\right|=\left|x+yi-(x-yi)-2\right|\Leftrightarrow 2\left|x+1+yi\right|=\left|-2+2yi\right|$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{(-2)^2+(2y)^2}\Leftrightarrow x^2+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-2\end{array}\right.$

Vậy tập hợp các điểm M cần tìm là hai đường thẳng $x=0$, $x=-2$.

Bài tập 11. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z-1+i\right|=2$ là

A. Đường thẳng $x-y-2=0$

B. Đường tròn $(x+1)^2+(y+1)^2=4$

C. Đường thẳng $x+y-2=0$

D. Đường tròn tâm $I(1;-1)$ và bán kính $R=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Xét hệ thức: $\left|z-1+i\right|=2$ Đặt $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$.

Khi đó: $(1)\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=2\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+1)^2=4$

Vậy, tập hợp những điểm M(z) thỏa mãn hệ thức (1) là đường tròn tâm $I(1;-1)$ và bán kính $R=2.$

Bài tập 12. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|\frac{z}{z-1}\right|=3$ là

A. Đường tròn $x^2+y^2-\frac{18}{8}y-\frac{9}{8}=0$

B. Đường tròn $x^2+y^2-\frac{18}{8}y+\frac{9}{8}=0$

C. Đường tròn $x^2+y^2+\frac{18}{8}y+\frac{9}{8}=0$

D. Đường tròn tâm $I\left(0;\frac{9}{8}\right)$ và bán kính $R=\frac{1}{8}.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $z=x+yi,\left(x,y\in\mathbb{Z}\right)$. Ta có

$\left|\frac{z}{z-1}\right|=3\Leftrightarrow|z|=3|z-1|\Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{18}{8}y+\frac{9}{8}=0$

Vậy, tập hợp những điểm M(z) thỏa mãn hệ thức (1) là đường tròn tâm $I\left(0;\frac{9}{8}\right)$ và bán kính $R=\frac{3}{8}.$

Bài tập 13. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+3-2i|=|2z+1-2i|$ là

A. Đường tròn $x^2+y^2-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}y+\frac{8}{3}=0$

B. Đường tròn $x^2+y^2+\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}y-\frac{8}{3}=0$

C. Đường tròn $x^2+y^2-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}y-\frac{8}{3}=0$

D. $x^2+y^2-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}y-\frac{8}{3}=0$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $z=x+yi;\left(x,y\in\mathbb{R}\right).$

Ta có: $|z+3-2i|=|2z+1-2i|$

$\Leftrightarrow\left|(x+3)+(y-2)i\right|=\left|(2x+1)+(2y-2)i\right|\Leftrightarrow(x+3)^2+(y-2)^2=(2x+1)+(2y-2)^2$

$\Leftrightarrow 3x^2+3y^2-2x-4y-8=0$

Suy ra: Tập hợp các điểm biểu diễn z là phương trình đường tròn (C): $x^2+y^2-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}y-\frac{8}{3}=0$.

Bài tập 14. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-i|=|(1+i)z|$ là

A. Đường tròn $x^2+(y+1)^2=2$

B. Đường tròn $x^2+(y-1)^2=2$

C. Đường tròn $(x-1)^2+(y+1)^2=2$

D. $(x+1)^2+(y+1)^2=2$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z=x+yi;(x,y\in\mathbb{R})$.

Suy ra $|z-i|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}\Leftrightarrow|(1+i)z|=|(1+i)(x+yi)|=\sqrt{(x-y)^2+(x+y)^2}$

Nên $|z-i|=|(1+i)z|\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=(x-y)^2+(x+y)^2\Leftrightarrow x^2+(y+1)^2=2$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn $x^2+(y+1)^2=2$.

Bài tập 15. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-4i|+|z+4i|=10$ là

A. Đường elip $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

B. Đường elip $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

C. Đường elip $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

D. Đường elip $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Xét hệ thức: $|z-4i|+|z+4i|=10$

Đặt $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$. Lúc đó

$$(4)\Leftrightarrow\sqrt{x^2+(y-4)^2}+\sqrt{x^2+(y+4)^2}=10\Leftrightarrow\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$$

Vậy tập hợp điểm M là đường elip có hai tiêu điểm là $F_1(0;4);F_2(0;-4)$ và độ dài trục lớn là 16.

Bài tập 16. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2|+|z+2|=5$ là

A. Đường tròn

B. Đường elip

C. Đường parabol

D. Đường thẳng

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $z=x+yi;(x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có: $|z-2|+|z+2|=5$

$\Leftrightarrow |(x-2)+yi|+|(x+2)+yi|=5 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x+2)^2+y^2}=5\ (1)$

Xét $A(2;0);B(-2;0);I(x;y)\Rightarrow IA+IB=5$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z chính là tập hợp các điểm I thỏa mãn $IA+IB=5$, đó chính là một elip có tiêu cự $c=\frac{AB}{2}=2;a=\frac{IA+IB}{2}=\frac{5}{2}$

Bài tập 17. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|2+z|>|z-2|$ là

A. Tập hợp các điểm là nửa mặt phẳng ở bên phải trục tung

B. Tập hợp các điểm là nửa mặt phẳng ở bên trái trục tung

C. Tập hợp các điểm là nửa mặt phẳng phía trên trục hoành

D. Tập hợp các điểm là nửa mặt phẳng phía dưới trục hoành

Hướng dẫn giải

Chọn A

Xét hệ thực: $|2+z|>|z-2|\ (1)$. Đặt $z=x+yi,\ (x,y\in\mathbb{R})$.

Khi đó: $(3)\Leftrightarrow 8x>0$

Tập hợp những điểm M(z) thỏa mãn điều kiện (1) là nửa mặt phẳng ở bên phải trục tung, tức các điểm (x,y) mà $x>0$

Bài tập 18. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $1\le|z+1-i|\le 2$ là

A. Tập hợp các điểm là hình tròn có tâm $I(1;-1)$, bán kính 2

B. Tập hợp các điểm là hình vành khăn có tâm tại $A\left(-1;1\right)$ và các bán kính lớn và nhỏ lần lượt là $2;1$

C. Tập hợp các điểm là hình tròn có tâm $I\left(1;-1\right)$, bán kính 1

D. Tập hợp các điểm là hình vành khăn có tâm tại $I\left(1;-1\right)$ và các bán kính lớn và nhỏ lần lượt là $2;1$

Hướng dẫn giải

Chọn 18 B

Xét hệ thực: $1 \le \left|z+1-i\right| \le 2\ (2)$. Đặt $z = x+yi, \left(x,y \in \mathbb{R}\right)$.

Khi đó: $\left(2\right) \Leftrightarrow 1 \le \left(x+1\right)^2 + \left(y-1\right)^2 \le 4$

Vậy tập hợp những điểm M(z) thỏa mãn điều kiện (2) là hình vành khăn có tâm tại $A\left(-1;1\right)$ và các bán kính lớn và nhỏ lần lượt là $2;1$

Bài tập 19. Tìm tất cả các điểm của mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z sao cho $\frac{z+i}{\bar{z}+i}$ là số thực.

A. Tập hợp điểm gồm hai trục tọa độ

B. Tập hợp điểm là trục hoành

C. Tập hợp điểm gồm hai trục tọa độ bỏ đi điểm $A(0;1)$

D. Tập hợp điểm là trục tung, bỏ đi $A(0;1)$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $z = x+yi, \left(x,y \in \mathbb{R}\right)$.

Ta có: $\frac{z+i}{\bar{z}+i} = \frac{x+\left(y+1\right)\left(1-y\right)+\left[x\left(y+1\right)-x\left(1-y\right)\right]i}{x^2+\left(1-y\right)^2}$

$\frac{z+i}{\bar{z}+i}$ là số thực $\Leftrightarrow x\left(y+1\right)-x\left(1-y\right)=0 \Leftrightarrow xy=0.$

Mặt khác: $x^2+\left(y-1\right)^2 \ne 0 \Leftrightarrow$ cả mặt phẳng phức bỏ đi điểm $\left(0;1\right)$

Tóm lại: $ycbt \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right. \\ (x,y)\ne(0;1) \end{cases}$. Vậy các điểm của mặt phẳng phức cần tìm gồm hai trục tọa độ bỏ đi điểm $A(0;1)$

Bài tập 14. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z sao cho $u=\frac{z+2+3i}{z-i}$ là một số thuần ảo.

A. Đường tròn tâm $I(-1;-1)$ bán kính $R=\sqrt{5}$

B. Đường tròn tâm $I(-1;-1)$ bán kính $R=\sqrt{5}$ trừ đi hai điểm $A(0;1); B(-2;-3)$.

C. Đường tròn tâm $I(1;1)$ bán kính $R=5$

D. Đường tròn tâm $I(1;1)$ bán kính $R=5$ trừ đi hai điểm $A(0;1); B(-2;-3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$

Ta có:

$$u=\frac{z+2+3i}{z-i}=\frac{\left[x+2+(y+3)i\right]\left[x-(y-1)i\right]}{x^2+(y-1)^2}=\frac{x^2+y^2+2x+2y-3+2(2x-y+1)i}{x^2+(y-1)^2}$$

u là số thuần ảo $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+2x+2y-3=0 \\ 2x-y+1\ne0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2+(y+1)^2=5 \\ \begin{cases} (x,y)\ne(0;1) \\ (x,y)\ne(-2;-3) \end{cases} \end{cases}$

Vậy tập hợp điểm z là đường tròn tâm $I(-1;-1)$ bán kính $R=\sqrt{5}$ trừ đi hai điểm $A(0;1); B(-2;-3)$.

Bài tập 21. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$ thỏa mãn điều kiện $|x|+|y|=1$ là

A. Ba cạnh của tam giác

B. Bốn cạnh của hình vuông

C. Bốn cạnh của hình chữ nhật

D. Bốn cạnh của hình thoi

Hướng dẫn giải

Chọn B

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z.

Ta có: $|x|+|y|=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 & \text{khi } x\ge 0, y\ge 0 \\ x-y=1 & \text{khi } x\ge 0, y\le 0 \\ -x+y=1 & \text{khi } x\le 0, y\ge 0 \\ -x-y=1 & \text{khi } x\le 0, y\le 0 \end{cases}$

Vậy tập hợp điểm M là 4 cạnh của hình vuông.

Bài tập 22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $\dfrac{z+i}{z+1}+\dfrac{\overline{z}+i}{\overline{z}+1}$ là số thuần ảo.

A. Đường tròn tâm $I\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$ bán kính $R=\dfrac{1}{2}$

B. Đường tròn tâm $I\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$ bán kính $R=\dfrac{1}{2}$ trừ đi hai điểm $(-1;0)$.

C. Đường tròn tâm $I\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$ bán kính $R=\dfrac{1}{4}$

D. Đường tròn tâm $I\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$ bán kính $R=\dfrac{1}{4}$ trừ đi hai điểm $(0;1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Giả sử $z=x+yi$ và điểm biểu diễn số phức z là $M(x;y)$.

Ta có: $\dfrac{z+i}{z+1}+\dfrac{\overline{z}+i}{\overline{z}+1}=\dfrac{2|z|^2+z+\overline{z}+i\left(z+\overline{z}\right)+2i}{|z|^2+z+\overline{z}+1}=\dfrac{2\left(x^2+y^2\right)+2x+2(x+1)i}{(x+1)^2+y^2}$

$\dfrac{z+i}{z+1}+\dfrac{\overline{z}+i}{\overline{z}+1}$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(x^2+y^2\right)+2x=0 \\ (x+1)^2+y^2\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4} \\ (x;y)\ne(-1;0) \end{cases}$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$ bỏ đi điểm $(-1;0)$.

Bài tập 23. Tìm quỹ tích các điểm trên mặt phẳng phức biểu diễn cho số phức $w=iz+1$, biết z là số phức thỏa mãn: $\left|\left(\overline{z}-2i+1\right)^3\right|=8$.

A. Đường tròn $(C):(x-3)^2+(y-1)^2=4$

B. Đường tròn $(C):(x+3)^2+(y+1)^2=2$

C. Đường tròn $(C):(x-3)^2+(y+1)^2=4$

D. Đường tròn $(C):(x-3)^2+(y-1)^2=4$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $|z^3|=|z|^3$ nên $\left|(\bar{z}-2i+1)^3\right|=2^3 \Leftrightarrow \left|(\bar{z}-2i+1)\right|=2 \qquad (*)$

Đặt $w=x+yi$

Ta lại có $w=iz+1 \Leftrightarrow z=i-iw \Rightarrow \bar{z}=-i+i.\overline{w}$. (*) trở thành:

$\left|i\overline{w}-3i+1\right|=2 \Leftrightarrow \sqrt{(y+1)^2+(x-3)^2}=2 \Leftrightarrow (y+1)^2+(x-3)^2=4$

Vậy quỹ tích các điểm biểu diễn w trên mặt phẳng phức là đường tròn $(C):(x-3)^2+(y+1)^2=4$.

Bài tập 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức w thỏa mãn: $w=\bar{z}+2+i$, biết z là số phức thỏa $|z-1+2i|=1$.

A. Đường tròn tâm $I(1;2)$ bán kính $R=\sqrt{2}$

B. Đường tròn tâm $I(2;1)$ bán kính $R=2$

C. Đường tròn tâm $I(1;1)$ bán kính $R=1$

D. Đường tròn tâm $I(3;3)$, bán kính $R=1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Gọi $w=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R}) \Rightarrow M(x;y)$ là điểm biểu diễn cho số w trên hệ trục Oxy.

$\bar{z}=w-2-i=x-2+(y-1)i \Rightarrow z=x-2+(1-y)i$

$|z-1+2i|=1 \Leftrightarrow |x-3+(3-y)i|=1 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-3)^2=1$

Vây tập hợp điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn tâm $I(3;3)$, bán kính $R=1$.

Bài tập 25. Trong mặt phẳng phức Oxy, tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức $w=(1-2i)z+3$ biết z là số phức thỏa mãn: $|z+2|=5$.

A. Đường tròn tâm $I(1;2)$ bán kính $R=\sqrt{5}$

B. Đường tròn tâm $I(2;1)$ bán kính $R=5$

C. Đường tròn tâm $I(1;4)$ bán kính $R=5\sqrt{5}$.

D. Đường tròn tâm $I(1;3)$, bán kính $R=5$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Theo giả thiết: $|z+2|=5\Leftrightarrow\left|\dfrac{a-1+(b-4)i}{1-2i}\right|=5\Leftrightarrow|a-1+(b-4)i|=5|1-2i|$

$\Leftrightarrow\sqrt{(a-1)^2+(b-4)^2}=5\sqrt{5}\Leftrightarrow(a-1)^2+(b-4)^2=125$

Vậy tập hợp điểm M thỏa mãn đề bài là đường tròn tâm $I(1;4)$ bán kính $R=5\sqrt{5}$.

Bài tập 26. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z'=\left(1-i\sqrt{3}\right)z-2$ với $|z+1|\le 2$.

A. Hình tròn tâm $I\left(-3;\sqrt{3}\right)$, $R=4$.

B. Đường tròn tâm $I\left(-3;\sqrt{3}\right)$, $R=4$.

C. Hình tròn tâm $I(1;-4)$ bán kính $R=5$.

D. Đường tròn tâm $I(1;3)$, bán kính $R=5$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Giả sử ta có $\begin{cases}z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})\\ z'=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})\end{cases}$

Khi đó:

$z'=\left(1-i\sqrt{3}\right)z-2\Leftrightarrow x+yi=\left(1-i\sqrt{3}\right)(a+bi)-2\Leftrightarrow x+yi=a+b\sqrt{3}-2+\left(b-a\sqrt{3}\right)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=a+b\sqrt{3}-2\\ y=b-a\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{x-y\sqrt{3}+2}{4}\\ b=\dfrac{\sqrt{3}x+y+2\sqrt{3}}{4}\end{cases}$

Theo bài ra ta có:

$\left|z+1\right|\le 2 \Leftrightarrow \left(a+1\right)^2+b^2\le 4 \Leftrightarrow \left(\frac{x-y\sqrt{3}+2}{4}+1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}x+y+2\sqrt{3}}{4}\right)^2\le 4$

$\Leftrightarrow \left(x-y\sqrt{3}+6\right)^2+\left(\sqrt{3}x+y+2\sqrt{3}\right)^2\le 64 \Leftrightarrow 4x^2+4y^2+24x-8\sqrt{3}y-16\le 0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+6x-2\sqrt{3}y-4\le 0 \Leftrightarrow \left(x+3\right)^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2\le 16$

Vậy quỹ tích các điểm biểu diễn số phức z′ là hình tròn tâm $I\left(-3;\sqrt{3}\right)$, $R=4$.

Bài tập 27. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn trong mặt phẳng phức $w=\left(1+i\sqrt{3}\right)z+2$ biết rằng số phức z thỏa mãn $\left|z-1\right|\le 2$.

A. Hình tròn tâm $I\left(-3;\sqrt{3}\right)$, $R=4$.

B. Đường tròn tâm $I\left(3;3\right)$ bán kính $R=4$

C. Đường tròn tâm $I\left(3;\sqrt{3}\right)$ bán kính $R=4$.

D. Hình tròn tâm $I\left(3;\sqrt{3}\right)$ bán kính $R=4$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $z=a+bi,\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ và $w=x+yi,\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$

Ta có: $\left|z-1\right|\le 2\Leftrightarrow\left(a-1\right)^2+b^2\le 4\ (*)$

Từ

$w=\left(1+i\sqrt{3}\right)z+2\Rightarrow x+yi=\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(a+bi\right)+2$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=a-b\sqrt{3}+2\\ y=\sqrt{3}a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-3=a-1-b\sqrt{3}\\ y-\sqrt{3}=\sqrt{3}\left(a-1\right)+b\end{cases}$

$\Rightarrow\left(x-3\right)^2+\left(y-3\right)^2=4\left[\left(a-1\right)^2+b^2\right]\le 16\ (\text{Do }(*))$

Vậy tập hợp các điểm cần tìm là hình tròn tâm $I\left(3;\sqrt{3}\right)$ bán kính $R=4$.

Bài tập 28. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z'=2z+3-i$ với $\left|3z+i\right|^2\le z\bar{z}+9$.

A. Hình tròn tâm $I\left(-3;\sqrt{3}\right)$, $R=4$.

B. Đường tròn tâm $I\left(3;3\right)$ bán kính $R=4$

C. Đường tròn tâm $I\left(3;\sqrt{3}\right)$ bán kính $R=4$.

D. Hình tròn tâm $I\left(3;-\dfrac{7}{4}\right)$, $R=\dfrac{\sqrt{73}}{4}$

Giải

Chọn D

Giả sử ta có $\begin{cases} z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R}\right) \\ z'=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)\end{cases}$

Khi đó $z'=2x+3-i \Leftrightarrow x+yi=\left(2a+3\right)+\left(2b-1\right)i \Leftrightarrow \begin{cases} x=2a+3 \\ y=2b-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{x-3}{2} \\ b=\dfrac{y+1}{2}\end{cases}$

Theo bài ra ta có:

$$\left|3z+i\right|^2 \le z\overline{z}+9 \Leftrightarrow 9a^2+\left(3b+1\right)^2 \le a^2+b^2+9 \Leftrightarrow 4a^2+4b^2+3b-4\le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-3\right)^2+\left(y+1\right)^2+\frac{3}{2}\left(y+1\right)-4\le 0 \Leftrightarrow \left(x-3\right)^2+\left(y+\frac{7}{4}\right)^2 \le \frac{73}{16}$$

Vậy quỹ tích các điểm biểu diễn số phức z' là hình tròn tâm $I\left(3;-\dfrac{7}{4}\right)$, $R=\dfrac{\sqrt{73}}{4}$

Bài tập 29. Cho các số phức z thỏa mãn $|z|=4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=(3+4i)z+i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=4$. **B.** $r=5$. **C.** $r=20$. **D.** $r=22$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi $w=a+bi$, ta có $w=a+bi=(3+4i)z+i \Leftrightarrow z=\dfrac{a+(b-1)i}{3+4i}=\dfrac{\left[a+(b-1)i\right](3-4i)}{9-16i^2}$

$$=\frac{3a+4b-4}{25}+\frac{(3b-4a-3)}{25}.i \Rightarrow |z|=\frac{\sqrt{(3a+4b-4)^2+(3b-4a-3)^2}}{25}$$

Mà $|z|=4$ nên $\Leftrightarrow (3a+4b-4)^2+(3b-4a-3)^2=100^2 \Leftrightarrow a^2+b^2-2b=399$

Theo giả thiết, tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=(3+4i)z+i$ là một đường tròn nên ta có $a^2+b^2-2b=399 \Leftrightarrow a^2+(b-1)^2=400 \Rightarrow r=\sqrt{400}=20$

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC

A. LÍ THUYẾT

1. Căn bậc hai của một phức

Định nghĩa

Cho số phức *w*. Mỗi số phức *z* thỏa mãn $z^2 = w$ được gọi là một căn bậc hai của *w*

Tìm căn bậc hai của số phức *w*

- *w* là số thực.

  + Nếu $w < 0$ thì *w* có hai căn bậc hai là $i\sqrt{-w}$ và $-i\sqrt{-w}$

  + Nếu $w \geq 0$ thì *w* có hai căn bậc hai là $\sqrt{w}$ và $-\sqrt{w}$

- $w = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R}),\ b \neq 0$

  Nếu $z = x + iy$ là căn bậc hai của *w* thì $(x+iy)^2 = a + bi$

  Do đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2\text{x}y = b \end{cases}$

  Mỗi nghiệm của hệ phương trình cho ta một căn bậc hai của *w*

Nhận xét:

+) Số 0 có đúng một căn bậc hai là 0

+) Mỗi số phức khác 0 có hai căn bậc hai là hai số đối nhau (khác 0)

2. Giải phương trình bậc hai với hệ số thực

Xét phương trình $az^2 + bz + c = 0 \ (a, b, \text{c} \in \mathbb{R}; a \neq 0)$

Ta có $\Delta = b^2 - 4ac$

- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm thực $x = -\dfrac{b}{2a}$

- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm thực phân biệt:

  $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình có hai nghiệm thực phân biệt:

  $x_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

Chú ý:

Mọi phương trình bậc n:

$A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots + A_{n-1} z + A_n = 0$

luôn có n nghiệm phức (không nhất thiết phân biệt) với n nguyên dương.

Hệ thức Vi-ét đối với phương trình bậc hai với hệ số thực

Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 (thực hoặc phức) thì

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Giải phương trình. Tính toán biểu thức nghiệm

1. Phương pháp giải

Cho phương trình:

$$az^2 + bz + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0)$$

- Giải pương trình bậc hai với hệ số thực
- Áp dụng các phép toán trên tập số phức để biến đổi biểu thức

Ví dụ: Xét phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$

a) Giải phương trình trên tập số phức

b) Tính $|z_1| + |z_2|$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\Delta' = 1 - 5 = -4 = (2i)^2$

Phương trình có hai nghiệm là:

$z_1 = 2 + 2i$; $z_2 = 2 - 2i$

b) Ta có $|z_1| = |z_2| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

Suy ra $|z_1| + |z_2| = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

2. Bài tậ

Bài tập 1. Trong các số sau, số nào là nghiệm của phương trình $z^2 + 1 = z \quad (z \in \mathbb{C})$?

A. $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ **B.** $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\dfrac{1+\sqrt{2}i}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $z^2 + 1 = z \quad (z \in \mathbb{C}) \Leftrightarrow z^2 - 2.z.\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = -\dfrac{3}{4} \Leftrightarrow \left(z - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3i^2}{4}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}i}{2} \\ z - \dfrac{1}{2} = \dfrac{-\sqrt{3}i}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2} \\ z = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2} \end{array}\right.$$

Bài tập 2. Phương trình $z^2 + az + b = 0 \quad (a, b \in \mathbb{R})$ có nghiệm phức là $3 + 4i$. Giá trị của $a + b$ bằng

A. 31 **B.** 5 **C.** 19 **D.** 29

Hướng dẫn giải

Chọn C

Chú ý: *Nếu* z_0 là

Cách 1: Do $z=3+4i$ là nghiệm của phương trình $z^2+az+b=0$ nên ta có:

$$(3+4i)^2+a(3+4i)+b=0 \Leftrightarrow (3a+b-7)+(4a+24)i=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3a+b-7=0\\4a+24=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-6\\b=25\end{cases}$$

Do đó $a+b=19$

nghiệm của phương trình bậc hai với hệ số thực thì $\overline{z_0}$ cũng là nghiệm của phương trình

Cách 2: Vì $z_1=3+4i$ là nghiệm của phương trình $z^2+az+b=0$ nên $z_2=3-4i$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho

Áp dụng hệ thức Vi-ét vào phương trình trên ta có $\begin{cases}z_1+z_2=-a\\z_1.z_2=b\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(3+4i)+(3-4i)=-a\\(3+4i)(3-4i)=b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-6\\b=25\end{cases} \Rightarrow a+b=19$$

Bài tập 3. Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2+6z+34=0$. Giá trị của $|z_0+2-i|$ là

A. $\sqrt{17}$ **B.** 17 **C.** $2\sqrt{17}$ **D.** $\sqrt{37}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

ra có $\Delta'=-25=(5i)^2$. Phương trình có hai nghiệm là $z=-3+5i$; $z=-3-5i$

Do đó $z_0=-3+5i \Rightarrow |z_0+2-i|=|-1+4i|=\sqrt{17}$

Bài tập 4. Gọi z_1 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2-2z+5=0$

Tọa độ điểm biểu diễn số phức $\dfrac{7-4i}{z_1}$ trên mặt phẳng phức là

A. $P(3;2)$ **B.** $N(1;-2)$ **C.** $Q(3;-2)$ **D.** $M(1;2)$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $z^2-2z+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z=1+2i\\z=1-2i\end{array}\right.$

Theo yêu cầu của bài toán ta chọn $z_1=1-2i$. Khi đó:

$$\frac{7-4i}{z_1}=\frac{7-4i}{1-2i}=\frac{(7-4i)(1+2i)}{1^2+2^2}=3+2i$$

Vậy điểm biểu diễn của số phức là $P(3;2)$

Bài tập 5. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-4z+5=0$. Giá trị của biểu thức $(z_1-1)^{2019}+(z_2-1)^{2019}$ bằng

A. 2^{1009} **B.** 2^{1010} **C.** 0 **D.** -2^{1010}

Hướng dẫn giải

Chọn D

Xét phương trình $z^2-4z+5=0 \Leftrightarrow (z-2)^2=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=2+i \\ z_2=2-i \end{array}\right.$

Khi đó ta có: $(z_1-1)^{2019}+(z_2-1)^{2019}=(1+i)^{2019}+(1-i)^{2019}$

$=(1+i).\left((1+i)^2\right)^{1009}+(1-i).\left((1-i)^2\right)^{1009}$

$=(1+i).(2i)^{1009}+(1-i).(-2i)^{1009}$

$=(2i)^{1009}\left((1+i)-(1-i)\right)=(2i)^{1010}=\left(i^2\right)^{505}.2^{1010}=-2^{1010}$

Dạng 2: Định lí Vi-ét và ứng dụng

1. Phương pháp giải

Định lí Vi-ét: Cho phương trình:

$$az^2+bz+c=0;\ a,b,c\in\mathbb{R};\ a\neq 0$$

có hai nghiệm phức z_1, z_2 thì $\begin{cases} z_1+z_2=-\dfrac{b}{a} \\ z_1.z_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$

Ví dụ: Phương trình $z^2-4z+24=0$ có hai nghiệm phức z_1, z_2 nên

$z_1+z_2=4$; $z_1.z_2=24$

Chú ý: *Học sinh hay nhầm lẫn:* $z_1+z_2=\dfrac{b}{a}$

2. Bài tập

Bài tập 1: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-2z+5=0$. Giá trị của biểu thức $z_1^2+z_2^2$ bằng

A. 14 **B.** -9 **C.** -6 **D.** 7

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $z^2-2z+5=0$

Theo định lí Vi-ét ta có: $\begin{cases} z_1+z_2=2 \\ z_1.z_2=5 \end{cases}$

Suy ra $z_1^2+z_2^2=(z_1+z_2)^2-2z_1z_2=2^2-2.5=-6$

Bài tập 2: Phương trình bậc hai nào sau đây có nghiệm là $1+2i$?

Chúng ta có thể giải từng

A. $z^2-2z+3=0$ **B.** $z^2+2z+5=0$

C. $z^2-2z+5=0$ **D.** $z^2+2z+3=0$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Phương trình bậc hai có hai nghiệm phức là liên hợp của nhau nên phương trình bậc hai có nghiệm $1+2i$ thì nghiệm còn lại là $1-2i$

Khi đó tổng và tích của hai nghiệm lần lượt là 2; 5

Vậy số phức $1+2i$ là nghiệm của phương trình $z^2-2z+5=0$

phương trình:

+) $z^2-2z+3=0$

$\Leftrightarrow (z-1)^2=2i^2$

$\Leftrightarrow z-1=\pm i\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow z=1\pm i\sqrt{2}$

+) $z^2+2z+5=0$

$\Leftrightarrow (z+1)^2=4i^2$

$\Leftrightarrow z+1=\pm 2i$

$\Leftrightarrow z=-1\pm 2i$

+) $z^2-2z+5=0$

$\Leftrightarrow (z-1)^2=4i^2$

$\Leftrightarrow z-1=\pm 2i$

$\Leftrightarrow z=1\pm 2i$

+) $z^2+2z+3=0$

$\Leftrightarrow (z+1)^2=2i^2$

$\Leftrightarrow z+1=\pm i\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow z=-1\pm i\sqrt{2}$

Bài tập 3: Kí hiệu z_1, z_2 là nghiệm phức của phương trình $2z^2+4z+3=0$. Tính giá trị biểu thức $P=\left|z_1z_2+i\left(z_1+z_2\right)\right|$

A. $P=1$ **B.** $P=\dfrac{7}{2}$ **C.** $P=\sqrt{3}$ **D.** $P=\dfrac{5}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $2z^2+4z+3=0$

Theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases} z_1+z_2=-2 \\ z_1.z_2=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Ta có $P=\left|z_1z_2+i\left(z_1+z_2\right)\right|=\left|\dfrac{3}{2}+i(-2)\right|=\left|\dfrac{3}{2}-2i\right|=\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+(-2)^2}=\dfrac{5}{2}$

Bài tập 4: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình

Cách khác:

Ta có:

$z^2-4z+7=0$. Giá tị của $P=z_1^3+z_2^3$ bằng

A. -20 **B.** 20

C. $14\sqrt{7}$ **D.** $28\sqrt{7}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases} z_1+z_2=4 \\ z_1.z_2=7 \end{cases}$

Suy ra $z_1^3+z_2^3=(z_1+z_2)(z_1^2-z_1z_2+z_2^2)$

$=(z_1+z_2)\left((z_1+z_2)^2-3z_1z_2\right)$

$=4.\left(4^2-3.7\right)=-20$

$z^2-4z+7=0$

$\Leftrightarrow (z-2)^2=3i^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=2-\sqrt{3}i \\ z_2=2+\sqrt{3}i \end{array}\right.$

Do đó:

$z_1^3+z_2^3$

$=\left(2-\sqrt{3}i\right)^3+\left(2+\sqrt{3}i\right)^3$

$=-20$

Bài tập 5: Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2-2z+27=0$. Giá trị của $z_1|z_2|+z_2|z_1|$ bằng

A. 2 **B.** 6 **C.** $3\sqrt{6}$ **D.** $\sqrt{6}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Áp dụng định lý Vi-ét, ta có $z_1+z_2=\dfrac{2}{3}$ và $z_1.z_2=9$

Mà $|z_1|=|z_2|=\sqrt{|z_1||z_2|}=\sqrt{|z_1.z_2|}=\sqrt{9}=3$

Do đó $z_1|z_2|+z_2|z_1|=z_1.3+z_2.3=3(z_1+z_2)=3.\dfrac{2}{3}=2$

Bài tập 6: Cho số thực $a>2$ và gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-2z+a=0$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. z_1+z_2 là số thực **B.** z_1-z_2 là số ảo

C. $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}$ là số ảo **D.** $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}$ là số thực

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}=2$. Đáp án **A** đúng

Phương trình bậc hai với hệ số thực có hai nghiệm là số phức liên hợp. Gọi $z_1=x+yi$; $x,y\in\mathbb{R}$ là một nghiệm, nghiệm còn lại là $z_2=x-yi$

Suy ra $z_1-z_2=2yi$ là số ảo. Đáp án B đúng

$$\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_1^2+z_2^2}{z_1.z_2}=\frac{\left(z_1+z_2\right)^2-2z_1z_2}{z_1.z_2}=\frac{4-2a}{a}\in\mathbb{R}$$

Vậy C là đáp án sai và D đúng

Dạng 3: Phương trình quy về phương trình bậc hai

1. Phương pháp giải

- Nắm vững cách giải phương trình bậc hai với hệ số thực trên tập số phức
- Nắm vững cách giải một số phương trình quy về bậc hai, hệ phương trình đại số bậc cao;…

Ví dụ: Giải phương trình: $z^4 - z^2 - 6 = 0$ trên tập số phức.

Hướng dẫn giải

Đặt $z^2 = t$, ta có phương trình:

$$t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -2 \end{array}\right.$$

Với $t = 3$ ta có $z^2 = 3 \Rightarrow z = \pm\sqrt{3}$

Với $t = -2$ ta có $z^2 = -2 \Rightarrow z = \pm i\sqrt{2}$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm $z = \pm\sqrt{3}$; $z = \pm i\sqrt{2}$

2. Bài tậpmẫu

Bài tập 1: Tổng môđun bốn nghiệm phức của phương trình $2z^4 - 3z^2 - 2 = 0$ là

A. $3\sqrt{2}$ **B.** $5\sqrt{2}$ **C.** $2\sqrt{5}$ **D.** $2\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $$2z^4 - 3z^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = 2 \\ z^2 = -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.i^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \sqrt{2} \\ z = -\sqrt{2} \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ z = -\frac{\sqrt{2}}{2}i \end{array}\right.$$

Khi đó, tổng môđun bốn nghiệm phức của phương trình đã cho bằng $\left|\sqrt{2}\right| + \left|-\sqrt{2}\right| + \left|\frac{\sqrt{2}}{2}i\right| + \left|-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right| = 3\sqrt{2}$

Bài tập 2: Kí hiệu z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4 + 4z^2 - 5 = 0$. Giá trị của $|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2$ bằng

A. $2 + 2\sqrt{5}$ **B.** 12 **C.** 0 **D.** $2 + \sqrt{5}$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $$z^4 + 4z^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = 1 \\ z^2 = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1 \\ z = -1 \\ z = \sqrt{5}i \\ z = -\sqrt{5}i \end{array}\right.$$

Phương trình có bốn nghiệm lần lượt là: $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, $z_3 = -i\sqrt{5}$, $z_4 = i\sqrt{5}$

Do đó: $|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 = 1^2 + 1^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2 = 12$

Bài tập 3: Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là các nghiệm phức của phương trình $\left(z^2+z\right)^2 + 4\left(z^2+z\right) - 12 = 0$. Giá trị của biểu thức $S = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2$ là

A. $S = 18$ **B.** $S = 16$ **C.** $S = 17$ **D.** $S = 15$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $\left(z^2+z\right)^2 + 4\left(z^2+z\right) - 12 = 0$

Đặt $t = z^2 + z$, ta có $t^2 + 4t - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -6 \end{array}\right.$

Suy ra: $\left[\begin{array}{l} z^2 + z - 2 = 0 \\ z^2 + z + 6 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = 1 \\ z_2 = -2 \\ z_3 = \dfrac{-1 + i\sqrt{23}}{2} \\ z_4 = \dfrac{-1 - i\sqrt{23}}{2} \end{array}\right.$

Suy ra $S = 1^2 + (-2)^2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{23}}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{\sqrt{23}}{2}\right)^2 = 17$

Bài tập 4: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $\dfrac{|z|^4}{z^2} + \overline{z} = -4$. Khi đó $|z_1 + z_2|$ bằng

A. 1 **B.** 4 **C.** 8 **D.** 2

Hướng dẫn giải

Chọn A

Điều kiện: $z \neq 0$

Ta có: $\dfrac{|z|^4}{z^2} + \overline{z} = -4 \Leftrightarrow \left(\dfrac{|z|^2}{z}\right)^2 + \overline{z} = -4 \Leftrightarrow \left(\dfrac{z.\overline{z}}{z}\right)^2 + \overline{z} = -4$

$\Leftrightarrow \overline{z}^2 + \overline{z} + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \overline{z} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{15}}{2}i \\ \overline{z} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{15}}{2}i \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{15}}{2}i \\ z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{15}}{2}i \end{array}\right.$

Vậy $|z_1 + z_2| = \left|-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{15}}{2}i - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{15}}{2}i\right| = |-1| = 1$

Bài tập 5: Cho số thực *a*, biết rằng phương trình $z^4 + az^2 + 1 = 0$ có bốn nghiệm z_1, z_2, z_3, z_4 thỏa mãn $\left(z_1^2 + 4\right)\left(z_2^2 + 4\right)\left(z_3^2 + 4\right)\left(z_4^2 + 4\right) = 441$. Tìm *a*

A. $\left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-\dfrac{19}{2} \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=\dfrac{19}{2} \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=-\dfrac{19}{2} \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=\dfrac{19}{2} \end{array}\right.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Nhận xét: $z^2+4=z^2-(2i)^2=(z+2i)(z-2i)$

Đặt $f(x)=z^4+az^2+1$, ta có:

$(z_1^2+4)(z_2^2+4)(z_3^2+4)(z_4^2+4)=\prod\limits_{k=1}^{4}(z_k+2i).\prod\limits_{k=1}^{4}(z_k-2i)=f(-2i).f(2i)$

$=(16i^4+4ai^2+1)(16i^4+4ai^2+1)=(17-4a)^2$

Theo giả thiết, ta có $(17-4a)^2=441 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=\dfrac{19}{2} \end{array}\right.$

Bài tập 6: Cho số phức *z* thỏa mãn $11z^{2018}+10iz^{2017}+10iz-11=0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2 \le |z| < 3$ **B.** $0 \le |z| < 1$ **C.** $1 < |z| < 2$ **D.** $\dfrac{1}{2} \le |z| < \dfrac{3}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $z^{2017}(11z+10i)=11-10iz \Leftrightarrow z^{2017}=\dfrac{11-10iz}{11z+10i} \Rightarrow |z|^{2017}=\left|\dfrac{11-10iz}{11z+10i}\right|$

Đặt $z=a+bi$ có

$\left|\dfrac{11-10iz}{11z+10i}\right|=\left|\dfrac{11-10i(a+bi)}{11(a+bi)+10i}\right|=\sqrt{\dfrac{(10b+11)^2+100a^2}{121a^2+(11b+10)^2}}=\sqrt{\dfrac{100(a^2+b^2)+220b+121}{121(a^2+b^2)+220b+100}}$

Đặt $t=|z|\ (t \ge 0)$ ta có phương trình $t^{2017}=\sqrt{\dfrac{100t^2+220b+121}{121t^2+220b+100}}$

Nếu $t \ge 1 \Rightarrow VT \ge 1$; $VP \le 1$

Nếu $t \le 1 \Rightarrow VT \le 1$; $VP \ge 1$

Nếu $t=1 \Rightarrow |z|=1$

BÀI 4. CỰC TRỊ SỐ PHỨC

A. LÍ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Các bất đẳng thức thường dùng

a. Cho các số phức z_1, z_2 ta có:

+) $|z_1| + |z_2| \ge |z_1 + z_2|$ (1).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} z_1 = 0 \\ z_1 \ne 0, \exists k \in \mathbb{R}, k \ge 0, z_2 = kz_1 \end{array}\right.$.

+) $|z_1 + z_2| \ge \left||z_1| - |z_2|\right|$ (2).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} z_1 = 0 \\ z_1 \ne 0, \exists k \in \mathbb{R}, k \le 0, z_2 = kz_1 \end{array}\right.$.

b. Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz

Cho các số thực a, b, x, y ta có: $ax + by \le \sqrt{\left(a^2 + b^2\right)\left(x^2 + y^2\right)}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ay = bx$.

2. Một số kết quả đã biết

a. Cho hai điểm A, B cố định. Với điểm M bất kỳ luôn có bất đẳng thức tam giác:

+) $MA + MB \ge AB$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M$ nằm giữa hai điểm A, B.

+) $|MA - MB| \le AB$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow B$ nằm giữa hai điểm A, M.

b. Cho hai điểm A, B nằm cùng phía đối với đường thẳng d và M là điểm di động trên d. Ta có:

+) $|MA - MB| \le AB$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ Ba điểm A, M, B thẳng hàng.

+) Gọi A' là điểm đối xứng với A qua d, khi đó ta có

$MA + MB = MA' + MB \ge A'B$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ Ba điểm A', M, B thẳng hàng.

c. Cho hai điểm A, B nằm khác phía đối với đường thẳng d và M là điểm di động trên d. Ta có:

+) $MA + MB \ge AB$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M$ nằm giữa hai điểm A, B.

+) Gọi A' là điểm đối xứng với A qua d, khi đó ta có

$|MA - MB| = |MA' - MB| \le A'B$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ Ba điểm A', M, B thẳng hàng.

d. Cho đoạn thẳng PQ và điểm A không thuộc PQ, M là điểm di động trên đoạn thẳng PQ, khi đó $\max AM = \max\left\{AP, AQ\right\}$. Để tìm giá trị nhỏ nhất của AM ta xét các trường hợp sau:

+) Nếu hình chiếu vuông góc H của A trên đường thẳng PQ nằm trên đoạn PQ thì $\min AM = AH$.

+) Nếu hình chiếu vuông góc H của A trên đường thẳng PQ không nằm trên đoạn PQ thì $\min AM = \min\left\{AP; AQ\right\}$.

e. Cho đường thẳng Δ và điểm A không nằm trên Δ. Điểm M trên Δ có khoảng cách đến A nhỏ nhất chính là hình chiếu vuông góc của A trên Δ.

f. Cho x, y là các tọa độ của các điểm thuộc miền đa giác $A_1A_2...A_n$. Khi đó giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của biểu thức $F = ax + by$ (a, b là hai số thực đã cho không đồng thời bằng 0) đạt được tại một trong các đỉnh của miền đa giác.

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA

Các bất đẳng thức thường dùng

Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz

Với các số thực a, b, x, y ta có

$$|ax+by| \le \sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

Bất đẳng thức tam giác

$|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$. Dấu "=" xảy ra khi $z_1 = kz_2\,(k \ge 0)$.

$|z_1-z_2| \le |z_1|+|z_2|$. Dấu. "=" xảy ra khi $z_1 = kz_2\,(k \le 0)$.

$|z_1+z_2| \ge \big||z_1|-|z_2|\big|$. Dấu. "=" xảy ra khi $z_1 = kz_2\,(k \le 0)$.

$|z_1 \quad z_2| \quad |z_1| \quad |z_2|$ Dấu "=" xảy ra khi $z_1 = kz_2\,(k \ge 0)$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Phương pháp hình học

1. Phương pháp giải

Ví dụ: Cho số phức z thỏa mãn $2(z-\overline{z}) = i(z+\overline{z})^2$. Giá trị nhỏ nhất của $|z+3i|$ bằng

A. 3. **B.** $\sqrt{3}$.

C. $2\sqrt{3}$. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

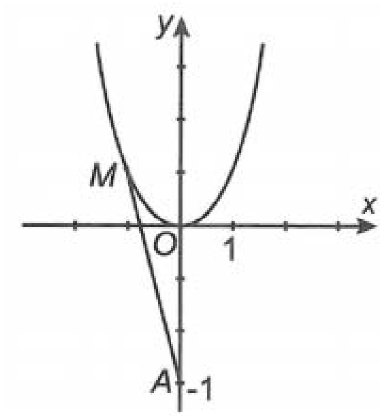
Bước 1: Chuyển đổi ngôn ngữ bài toán số phức

Giả sử $z = x + yi\,(x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z} = x - yi$. Khi đó sang ngôn ngữ hình học.

$2\left(z-\overline{z}\right)=i\left(z+\overline{z}\right)^2 \Leftrightarrow 2\left(2yi\right)=4x^2i \Leftrightarrow y=x^2$.

Gọi $M\left(x;y\right);A\left(0;-3\right)$ lần lượt là điểm biểu diễn cho số phức $z;-3i$ thì $\left|z+3i\right|=MA$.

Bước 2: Sử dụng một số kết quả đã biết để giải bài toán hình học.



Parabol $y=x^2$ có đỉnh tại điểm $O\left(0;0\right)$, trục đối xứng là đường thẳng $x=0$. Hơn nữa, điểm A thuộc trục đối xứng của parabol, nên ta có: $MA \ge OA=3$. Suy ra, $\min MA=3$ khi $M \equiv O$.

Bước 3: Kết luận cho bài toán số phức.

Vậy $\min\left|z+3i\right|=3$, khi $z=0$. **Chọn A.**

2. Bài tập mẫu

Bài tập 1: Cho số phức z thỏa mãn $\left|z-3-4i\right|=1$. Môđun lớn nhất của số phức z bằng

A. 7. **B.** 6.

C. 5. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B

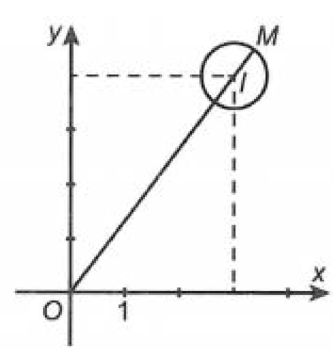
Gọi $M\left(x;y\right),I\left(3;4\right)$ là các điểm biểu diễn lần lượt cho các số phức $z;3+4i$. Từ giả thiết $\left|z-3-4i\right|=1 \Rightarrow MI=1$.

Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn giả thiết là đường tròn tâm $I\left(3;4\right)$, bán kính $r=1$.

Mặt khác $\left|z\right|=OM$. Mà OM đạt giá trị lớn nhất bằng $OI+r$, khi M là giao điểm của đường thẳng OM với đường tròn tâm $I\left(3;4\right)$, bán

Nhận xét:

$OI-r \le OM=\left|z\right| \le OI+r$



kính $r=1$. Hay $M\left(\frac{18}{5};\frac{24}{5}\right)$.

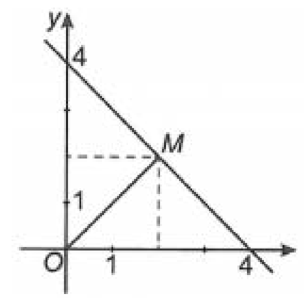
Do đó, $\max|z| = OI + r = 5+1=6$, khi $z=\frac{18}{5}+\frac{24}{5}i$.

Bài tập 2: Trong các số phức z thỏa mãn $|z-2-4i|=|z-2i|$, số phức z có môđun nhỏ nhất là

A. $z=2-2i$. **B.** $z=1+i$.

C. $z=2+2i$. **D.** $z=1-i$.

Nhận xét: Trong tất cả các đoạn thẳng kẻ từ điểm O đến đường thẳng d, đoạn vuông góc OM ngắn nhất.



Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$. Khi đó $|z-2-4i|=|z-2i| \Leftrightarrow x+y-4=0$ $\left(d\right)$.

Vậy tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là đường thẳng d.

Do đó $|z|=OM$ nhỏ nhất khi M là hình chiếu của O trên d.

Suy ra $M\left(2;2\right)$ hay $z=2+2i$.

Bài tập 3: Cho số phức z thỏa mãn $|z+3|+|z-3|=10$. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là

A. 3. **B.** 4.

C. 5. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Cách 1:

Gọi $F_1\left(-3;0\right), F_2\left(3;0\right)$, có trung điểm là $O\left(0;0\right)$. Điểm M biểu diễn số phức z.

Theo công thức trung tuyến thì $|z|^2 = OM^2 = \frac{MF_1^2+MF_2^2}{2}-\frac{F_1F_2^2}{4}$.

Với mọi số thực a,b ta có bất đẳng thức: $a^2+b^2\geq\frac{\left(a+b\right)^2}{2}$

Ta có $MF_1^2+MF_2^2\geq\frac{\left(MF_1^2+MF_2^2\right)^2}{2}=50$.

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases}MF_1=MF_2\\MF_1+MF_2=10\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}M\left(-4;0\right)\\M\left(4;0\right)\end{array}\right.\Rightarrow\min|z|=\sqrt{\frac{50}{2}-\frac{36}{4}}=4,$$

Khi $z=4i$ hoặc $z=-4i$.

Cách 2:.

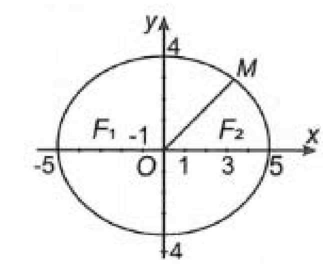
Gọi $F_1(-3;0), F_2(3;0)$, $M(x;y);(x,y\in\mathbb{R})$ lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $-3;3;z$.

Ta có $F_1F_2 = 2c = 6 \Rightarrow c = 3$. Theo giả thiết ta có $MF_1 + MF_2 = 10$, tập hợp điểm M là đường elip có trục lớn $2a = 10 \Rightarrow a = 5$; trục bé $2b = 2\sqrt{a^2 - c^2} = 2\sqrt{25-9} = 8$.

Mặt khác $OM = |z|$ nhỏ nhất bằng 4 khi $z = 4i$ hoặc $z = -4i$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z|$ bằng 4.

Với mọi điểm M nằm trên elip, đoạn OM ngắn nhất là đoạn nối O với giao điểm của trục bé với elip.



Bài tập 4: Xét số phức z thỏa mãn $4|z+i| + 3|z-i| = 10$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là

A. $\dfrac{60}{49}$. **B.** $\dfrac{58}{49}$.

C. $\dfrac{18}{7}$. **D.** $\dfrac{16}{7}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Gọi $A(0;-1), B(0;1)$, đoạn thẳng AB có trung điểm $O(0;0)$. Điểm M biểu diễn số phức z.

Theo công thức trung tuyến $|z|^2 = OM^2 = \dfrac{MA^2 + MB^2}{2} - \dfrac{AB^2}{4}$.

Theo giả thiết $4MA + 3MB = 10$. Đặt $MA = a \Rightarrow MB = \dfrac{10-4a}{3}$.

Khi đó

$|MA - MB| = \dfrac{|10-7a|}{3} \le AB = 2 \Rightarrow -6 \le 10 - 7a \le 6 \Leftrightarrow \dfrac{4}{7} \le a \le \dfrac{16}{7}$.

Ta có $MA^2 + MB^2 = a^2 + \left(\dfrac{10-4a}{3}\right)^2 = \dfrac{(5a-8)^2 + 36}{9}$.

Do $-\dfrac{36}{7} \le 5a - 8 \le \dfrac{24}{7} \Rightarrow 0 \le (5a-8)^2 \le \dfrac{576}{49}$ nên

$$\begin{cases} MA^2+MB^2\ge 4 \\ MA^2+MB^2\le \dfrac{260}{49} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z|\ge 1 \\ |z|^2\le \dfrac{81}{49}\Rightarrow |z|\le \dfrac{9}{7} \end{cases}.$$

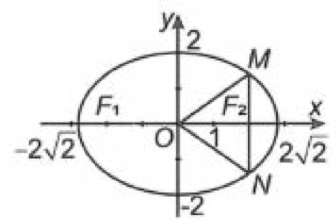
Đẳng thức $|z|=1$ khi $z=\pm\dfrac{24}{25}+\dfrac{7}{25}i$. Đẳng thức $|z|=\dfrac{9}{7}$ khi $z=\dfrac{9}{7}i$.

Vậy tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là $\dfrac{16}{7}$.

Bài tập 5: Cho z là số phức thay đổi thỏa mãn $|z-2|+|z+2|=4\sqrt{2}$.

Trong mặt phẳng tọa độ gọi M,N là điểm biểu diễn số phức z và $\overline{z}$.

Giá trị lớn nhất của diện tích tam giác OMN là



A. 1. **B.** $\sqrt{2}$.

C. $4\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})\Rightarrow \overline{z}=x-yi$.

Gọi $F_1(-2;0),F_2(2;0)$, $M(x;y),N(x;-y)$ lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $-2;2;z;\overline{z}$.

Do M,N là điểm biểu diễn số phức z và $\overline{z}$ nên suy ra M,N đối xứng nhau qua Ox.

Khi đó $S_{\Delta OMN}=|xy|$.

Ta có $F_1F_2=2c=4\Rightarrow c=2$. Theo giả thiết ta có $MF_1+MF_2=4\sqrt{2}$, tập hợp điểm M thỏa điều kiện trên là elip có trục lớn

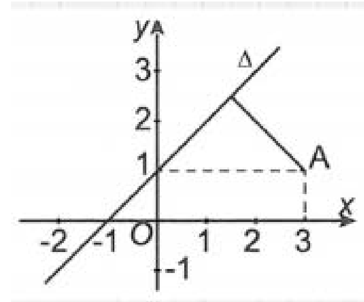
$2a=4\sqrt{2}\Rightarrow a=2\sqrt{2}$; trục bé $2b=2\sqrt{a^2-c^2}=2\sqrt{8-4}=4\Rightarrow b=2$.

Nên elip có phương trình $(E):\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

Do đó $1=\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}\ge 2\sqrt{\dfrac{x^2}{8}.\dfrac{y^2}{4}}=\dfrac{|xy|}{2\sqrt{2}}\Rightarrow S_{\Delta OMN}=|xy|\le 2\sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x=2 \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$.

Bài tập 6: Cho số phức z thỏa mãn $|z+i|=|\bar{z}+2+i|$. Giá trị nhỏ nhất của $P=|(i-1)z+4-2i|$ là



A. 1. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. 3. **D.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$; $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z.

Ta có $|z+i|=|\bar{z}+2+i| \Leftrightarrow |x+(y+1)i|=|x+2-(y-1)i|$

$\Leftrightarrow x^2+(y+1)^2=(x+2)^2+(y-1)^2 \Leftrightarrow x-y+1=0\ (\Delta)$.

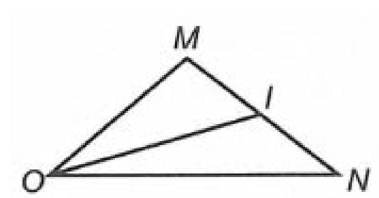
Ta có $P=|(i-1)z+4-2i|=|(i-1)|\left|z+\frac{4-2i}{(i-1)}\right|=\sqrt{2}|z-3-i|$

$=\sqrt{2}\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=\sqrt{2}MA$, với $A=(3;1)$.

$\Rightarrow P_{\min}=\sqrt{2}MA_{\min}=\sqrt{2}d(A,\Delta)=\sqrt{2}\frac{|3-1+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3$.

Đẳng thức xảy ra khi M là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng Δ hay $M\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)\Rightarrow z=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i$.

Bài tập 7: Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1+z_2|=6$ và $|z_1-z_2|=2$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z_1|+|z_2|$. Khi đó môđun của số phức $M+mi$ là



A. $\sqrt{76}$. **B.** 76.

C. $2\sqrt{10}$. **D.** $2\sqrt{11}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta gọi A,B lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức z_1,z_2.

Từ giả thiết $|z_1+z_2|=6\Rightarrow|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=6\Leftrightarrow|\overrightarrow{OI}|=3$ với I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

$|z_1-z_2|=2\Rightarrow|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|=2\Leftrightarrow AB=2$.

Ta có $OA^2 + OB^2 = 2OI^2 + \dfrac{AB^2}{2} = 20$.

$P = |z_1| + |z_2| = OA + OB \Rightarrow P^2 \le (1^2 + 1^2)(OA^2 + OB^2) = 40$.

Vậy $\max P = 2\sqrt{10} = M$.

Mặt khác, $P = |z_1| + |z_2| = |\overrightarrow{OA}| + |\overrightarrow{OB}| \ge |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = 6$.

Vậy $\min P = 6 = m$.

Suy ra $|M + mi| = \sqrt{40 + 36} = \sqrt{76}$.

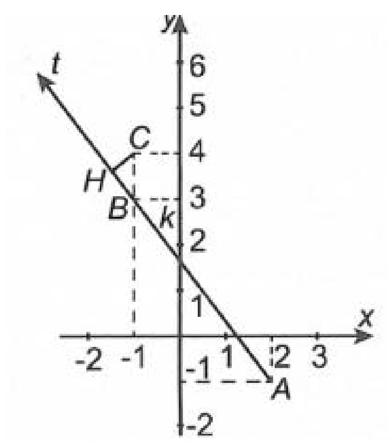
Bài tập 8: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 + i| - |z + 1 - 3i| = 5$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 1 - 4i|$ bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{3}{5}$.

C. $\dfrac{1}{5}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z; gọi $A(2; -1), B(-1; 3)$ là điểm biểu diễn số phức $2 - i; -1 + 3i$. Ta có $AB = 5$.

Từ giả thiết $|z - 2 + i| - |z + 1 - 3i| = 5$

$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} - \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} = 5$

$\Rightarrow MA - MB = 5 \Rightarrow MA - MB = AB \Rightarrow MA = MB + AB$.

Suy ra M, A, B thẳng hàng (B nằm giữa M và A). Do đó quỹ tích điểm M là tia Bt ngược hướng với tia BA.

$P = |z + 1 - 4i| = \sqrt{(x+1)^2 + (y-4)^2}$, với $C(-1; 4) \Rightarrow P = MC$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3; 4)$ phương trình đường thẳng $AB: 4x + 3y - 5 = 0$.

$CH = d(C, AB) = \dfrac{|4(-1) + 3.4 - 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \dfrac{3}{5}$, $CB = \sqrt{(-1+1)^2 + (3-4)^2} = 1$.

Do đó $\min P = CH = \dfrac{3}{5}$ khi H là giao điểm của đường thẳng AB và đường thẳng đi qua điểm C và vuông góc với AB.

Dạng 2: Phương pháp đại số

1. Phương pháp giải

Các bất đẳng thức thường dùng:

1. Cho các số phức z_1, z_2 ta có:

a. $|z_1|+|z_2| \geq |z_1+z_2|$ (1)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} z_1=0 \\ z_1 \neq 0, \exists k \in \mathbb{R}, k \geq 0, z_2=kz_1 \end{array}\right.$

b. $|z_1+z_2| \geq \left||z_1|-|z_2|\right|$.(2)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} z_1=0 \\ z_1 \neq 0, \exists k \in \mathbb{R}, k \leq 0, z_2=kz_1 \end{array}\right.$

2. Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz

Cho các số thực a,b,x,y ta có $ax+by \leq \sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ay=bx$.

2. Bài tập

Bài tập 1: Cho số phức $z=a+(a-3)i,(a \in \mathbb{R})$. Giá trị của a để khoảng cách từ điểm biểu diễn số phức z đến gốc tọa độ là nhỏ nhất bằng

A. $a=\frac{3}{2}$. **B.** $a=\frac{1}{2}$.

C. $a=1$. **D.** $a=2$.

Nhận xét: Lời giải có sử dụng đánh giá

$x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

$|z|=\sqrt{a^2+(a-3)^2}=\sqrt{2\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=\frac{3}{2}$. Hay $z=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i$.

Bài tập 2: Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i|=|z-2i|$, số phức z có môđun nhỏ nhất là

A. $z=1+2i$. **B.** $z=-1-i$.

C. $z=2+2i$. **D.** $z=-1+i$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi $z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$.

$|z-2-4i|=|z-2i|\Leftrightarrow\left|(a-2)+(b-4)i\right|=\left|a+(b-2)i\right|\Leftrightarrow -a-b+4=0$.

$\Rightarrow z=(4-b)+bi\Rightarrow|z|=\sqrt{(4-b)^2+b^2}=\sqrt{2(b-2)^2+8}\geq 2\sqrt{2}$.

Suy ra $\min|z|=2\sqrt{2}\Leftrightarrow b=2\Rightarrow a=2\Rightarrow z=2+2i$.

Bài tập 3: Cho số phức z thỏa mãn $\left|\dfrac{z-1}{z-2i}\right|=1$, biết $\left|z+\dfrac{3}{2}-5i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của $|z|$ bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi $z=a+bi\left(z\neq 2i\right)\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$.

$\left|\dfrac{z-1}{z-2i}\right|=1\Leftrightarrow|z-1|=|z-2i|\Leftrightarrow 2a-4b+3=0\Rightarrow 2a+3=4b$

$\Rightarrow\left|z+\dfrac{3}{2}-5i\right|=\sqrt{(2b)^2+(b-5)^2}=\sqrt{5(b-1)^2+20}\geq 2\sqrt{5}$

Suy ra $\min\left|z+\dfrac{3}{2}-5i\right|=2\sqrt{5}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\ b=1\end{cases}\Rightarrow z=\dfrac{1}{2}+i$

Vậy $|z|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Bài tập 4: Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $z_1-z_2=3+4i$ và $|z_1+z_2|=5$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $|z_1|+|z_2|$ là

A. 5. **B.** $5\sqrt{3}$.

C. $12\sqrt{5}$. **D.** $5\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)=|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=5^2+3^2+4^2=50$.

Nhận xét: Lời giải sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có

$|z_1|+|z_2|\le\sqrt{2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

Gọi $z_1=x+yi,z_2=a+bi;a,b,x,y\in\mathbb{R}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}z_1-z_2=3+4i\\|z_1+z_2|=5\\|z_1|^2+|z_2|^2=25\\|z_1|=|z_2|\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{7}{2}\\y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ và $\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\b=-\dfrac{7}{2}\end{cases}$. Hay $z_1=\dfrac{7}{2}+\dfrac{1}{2}i;z_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{7}{2}i$.

Thay z_1,z_2 vào giả thiết thỏa mãn.

Vậy, giá trị lớn nhất của biểu thức $|z_1|+|z_2|$ bằng $5\sqrt{2}$.

Bài tập 5: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|1+z|+3|1-z|$ bằng

A. $2\sqrt{10}$. **B.** $6\sqrt{5}$.

C. $3\sqrt{15}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Nhận xét: Lời giải sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $P\le\sqrt{\left(1^2+3^2\right)\left(|1+z|^2+|1-z|^2\right)}=\sqrt{20\left(|1|^2+|z|^2\right)}=2\sqrt{10}$

Đẳng thức xảy ra khi

$\begin{cases}|z|=1\\|1+z|=\dfrac{|1-z|}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=1\\x^2+y^2+1+\dfrac{5x}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{4}{5}\\y=\pm\dfrac{3}{5}\end{cases}\Rightarrow z=-\dfrac{4}{5}\pm\dfrac{3}{5}i$.

Vậy $\max P=2\sqrt{10}$.

Bài tập 6: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=2$. Giá trị lớn nhất của $|z+3-i|$ bằng

A. 6. **B.** 7.

C. 8. **D.** 9.

Nhận xét: Lời giải sử dụng bất đẳng thức $|z_1|+|z_2|\ge|z_1+z_2|$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $\left|z+3-i\right|=\left|\left(z-1+2i\right)+\left(4-3i\right)\right|\le\left|z-1+2i\right|+\left|4-3i\right|=7$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} z-1+2i=k\left(4-3i\right), k>0 \\ \left|z-1+2i\right|=2 \end{cases}\Rightarrow z=\dfrac{13}{5}-\dfrac{16}{5}i$.

Vậy giá trị lớn nhất của $\left|z+3-i\right|$ bằng 7.

Bài tập 7: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z-3+4i\right|=4$. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của môđun số phức z. Giá trị của $M.m$ bằng

A. 9. **B.** 10.

C. 11. **D.** 12.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $\left|z\right|=\left|\left(z-3+4i\right)+\left(3-4i\right)\right|\le\left|z-3+4i\right|+\left|3-4i\right|=4+5=9=M$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} z-3+4i=k\left(3-4i\right),\left(k>0\right) \\ \left|z-3+4i\right|=4 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} k=\dfrac{4}{5} \\ z=\dfrac{27}{5}-\dfrac{36}{5}i \end{cases}$.

Mặt khác

$\left|z\right|=\left|\left(z-3+4i\right)+\left(3-4i\right)\right|\ge\left|\left|z-3+4i\right|-\left|3-4i\right|\right|=\left|4-5\right|=1=m$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} z-3+4i=k\left(3-4i\right),\left(k<0\right) \\ \left|z-3+4i\right|=4 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} k=-\dfrac{4}{5} \\ z=\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i \end{cases}$

Nhận xét: Lời giải sử dụng bất đẳng thức $\left|z_1\right|+\left|z_2\right|\ge\left|z_1+z_2\right|$ và $\left|\left|z_1\right|-\left|z_2\right|\right|\le\left|z_1-z_2\right|$.

Bài tập 8: Cho số phức z thỏa mãn $\left|z^2+4\right|=\left|z\left(z+2i\right)\right|$. Giá trị nhỏ nhất của $\left|z+i\right|$ bằng

A. 2. **B.** $\sqrt{2}$.

C. 1. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $\left|z^2+4\right|=\left|z\left(z+2i\right)\right|\Leftrightarrow\left|\left(z+2i\right)\left(z-2i\right)\right|=\left|z\left(z+2i\right)\right|$

Chú ý: Với mọi số phức z_1, z_2 : $\left|z_1.z_2\right|=\left|z_1\right|.\left|z_2\right|$.

$\Leftrightarrow |z+2i|.|z-2i| = |z|.|z+2i|$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |z+2i| = 0 \\ |z| = |z-2i| \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -2i \\ |z| = |z-2i| \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -2i \\ z = a+i, a \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

Do đó $\left[\begin{array}{l} |z+i| = |-2i+i| = 1 \\ |z+i| = |(a+i)+i| = \sqrt{a^2+4} \geq 2 \end{array}\right. \Rightarrow \min|z+1| = 1$.

Bài tập 9: Tìm số phức z thỏa mãn $(z-1)(\overline{z}+2i)$ là số thực và $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $z = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$. **B.** $z = -\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$.

C. $z = -\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$. **D.** $z = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi $z = a+bi; a,b \in \mathbb{R}$.

Ta có $(z-1)(\overline{z}+2i) = [(a-1)a - b(2-b)] + (2a+b-2)i$

Do đó $(z-1)(\overline{z}+2i)$ là số thực $\Leftrightarrow 2a+b-2 = 0 \Leftrightarrow b = 2-2a$

Khi đó $|z| = \sqrt{a^2+(2-2a)^2} = \sqrt{5\left(a-\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}} \geq \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a = \frac{4}{5} \\ b = \frac{2}{5} \end{cases}$

$\min|z| = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{5} \\ b = \frac{2}{5} \end{cases}$. Vậy $z = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$.

Bài tập 10: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-1| = \sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |z+i| + |z-2-i|$.

A. $\max T = 8\sqrt{2}$. **B.** $\max T = 4$.

C. $\max T = 4\sqrt{2}$. **D.** $\max T = 8$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $z = x + yi\left(x, y \in \mathbb{R}\right)$, ta có

$\left|z-1\right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left|x-1+yi\right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{\left(x-1\right)^2 + y^2} = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \left(x-1\right)^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2x + 1$ (*).

Lại có

$T = \left|z+i\right| + \left|z-2-i\right| = \left|x + \left(y+1\right)i\right| + \left|x-2+\left(y-1\right)i\right|$

$= \sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 1} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5}$

Kết hợp với (*) ta được

$T = \sqrt{2x+2y+2} + \sqrt{6-2x-2y} = \sqrt{2\left(x+y\right)+2} + \sqrt{6-2\left(x+y\right)}$

Đặt $T = x + y$, khi đó $T = f\left(t\right) = \sqrt{2t+2} + \sqrt{6-2t}$ với $t \in \left[-1;3\right]$.

Cách 1: Sử dụng phương pháp hàm số

Ta có $f'\left(t\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2t+2}} - \dfrac{1}{\sqrt{6-2t}}$; $f'\left(t\right) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Mà $f\left(1\right) = 4, f\left(-1\right) = 2\sqrt{2}, f\left(3\right) = 2\sqrt{2}$. Vậy $\max f\left(t\right) = f\left(1\right) = 4$.

Cách 2: Sử dụng phương pháp đại số

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$T = \sqrt{2t+2} + \sqrt{6-2t} \le \sqrt{\left(1+1\right).8} = 4$.

Đẳng thức xảy ra khi $t = 1$.

Bài tập 11: Cho số phức z thỏa mãn $\left|z\right| = 1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $\left|z+1\right| + \left|z^2 + z + 1\right|$. Khi đó giá trị của $M + m$ bằng

A. 5. **B.** 6.

C. $\dfrac{5}{4}$. **D.** $\dfrac{9}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $z = a + bi\left(a, b \in \mathbb{R}\right)$ và $t = \left|z+1\right|$. Khi đó

$t^2 = \left(z+1\right)\left(\overline{z}+1\right) = \left|z\right|^2 + 1 + z + \overline{z} = 2 + 2a \Rightarrow a = \dfrac{t^2-2}{2}$.

Ta có

$\left|z^2+z+1\right|=\left|a^2-b^2+2abi+a+bi+1\right|=\left|a^2+\left(1-b^2\right)+a+b\left(2a+1\right)i\right|$

$=\sqrt{\left(2a^2+a\right)^2+b^2\left(2a+1\right)^2}=\sqrt{a^2\left(2a+1\right)^2+\left(1-a^2\right)\left(2a+1\right)^2}$

$=\left|2a+1\right|=\left|t^2-1\right|$

$\Rightarrow\left|z+1\right|+\left|z^2+z+1\right|=t+\left|t^2-1\right|$ (với $0\le t\le 2$, do $a^2\le 1$).

Xét hàm số $f\left(t\right)=t+\left|t^2-1\right|$ với $t\in\left[0;2\right]$.

Trường hợp 1: $t\in\left[0;1\right]\Rightarrow f\left(t\right)=t+1-t^2=-t^2+t+1\le f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}$

và có $f\left(0\right)=f\left(1\right)=1$ nên $\begin{cases}\max\limits_{[0;1]} f\left(t\right)=\frac{5}{4}\\ \min\limits_{[0;1]} f\left(t\right)=1\end{cases}$.

Trường hợp 2:

$t\in\left[1;2\right]\Rightarrow f\left(t\right)=t+t^2-1=t^2+t-1, f'\left(t\right)=2t+1>0,\forall t\in\left[1;2\right]$

Do đó hàm số luôn đồng biến trên $\left[1;2\right]\Rightarrow$ $\begin{cases}\max\limits_{[1;2]} f\left(t\right)=f\left(2\right)=5\\ \min\limits_{[1;2]} f\left(t\right)=f\left(1\right)=1\end{cases}$.

Vậy $\begin{cases}M=\max\limits_{[0;2]} f\left(t\right)=5\\ m=\min\limits_{[0;2]} f\left(t\right)=1\end{cases}\Rightarrow M+m=6$.