



Chuyên đề 1: CÁC DẠNG TOÁN

VÀ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH CHIA HẾT

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

Định nghĩa: Cho hai số tự nhiên a và b , trong đó $b \neq 0$. Ta nói a chia hết cho b nếu tồn tại số tự nhiên q sao cho $a = bq$. Khi đó ta còn nói: a là bội của b , hoặc b là ước của a .

Các tính chất chung

- 1) Bất cứ số nào khác 0 cũng chia hết cho chính nó
- 2) Tính chất bắc cầu: nếu a chia hết cho b và b chia hết cho c thì a chia hết cho c .
- 3) Số 0 chia hết cho mọi số b khác 0
- 4) Bất cứ số nào cũng chia hết cho 1
- 5) Tính chất chia hết của một tổng và hiệu

Nếu a và b cùng chia hết cho m thì $a + b$ chia hết cho m , $a - b$ chia hết cho m .

Hệ quả: Nếu tổng của hai số chia hết cho m và một trong hai số ấy chia hết cho m thì số còn lại cũng chia hết cho m .

6) Nếu một trong hai số a và b chia hết cho m , số kia không chia hết cho m thì $a + b$ không chia hết cho m , $a - b$ không chia hết cho m

7) Tính chất chia hết của một tích

Nếu một thừa số của tích chia hết cho m thì tích chia hết cho m

8) Nếu a chia hết cho m và b chia hết cho n thì ab chia hết cho $m.n$

Hệ quả: Nếu a chia hết cho b thì a^n chia hết cho b^n

Một số dấu hiệu chia hết

Đặt $A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ với $a_n; a_{n-1}; \dots; a_2; a_1; a_0$ là các chữ số. Khi đó ta có các dấu hiệu chia hết như sau:

- $A:2 \Leftrightarrow \overline{a_0}:2 \Leftrightarrow a_0 \in \{0;2;4;6;8\}$
- $A:3 \Leftrightarrow (a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n):3$.
- $A:4 \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0}:4$
- $A:5 \Leftrightarrow a_0:5 \Leftrightarrow a_0 \in \{0;5\}$.
- $A:8 \Leftrightarrow \overline{a_2 a_1 a_0}:8$
- $A:9 \Leftrightarrow (a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n):9$.





- $A:11 \Leftrightarrow [(a_0 + a_2 + \dots) - (a_1 + a_3 + \dots)]:11.$
- $A:25 \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0}:25$
- $A:125 \Leftrightarrow \overline{a_2 a_1 a_0}:125$

Các bài tập

Bài 1: Chứng minh rằng:

- a) $\overline{ab} + \overline{ba}:11$
- b) $\overline{ab} - \overline{ba}:9 \ (a > b)$
- c) $\overline{abcabc}:7,11,13$

Lời giải

- a) Ta có: $\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11a + 11b:11$
- b) Ta có: $\overline{ab} - \overline{ba} = (10a + b) - (10b + a) = 9a - 9b:9$
- c) Ta có: $\overline{abcabc} = \overline{abc} \cdot 1001 = \overline{abc} \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13:7,11,13$

Bài 2: Chứng minh rằng:

- a) $(n+10)(n+15):2$
- b) $n(n+1)(n+2):2,3$
- c) $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 4,2,5

Lời giải

- a) Ta có: Nếu n là số lẻ thì $n + 15:2$
 Nếu n là số chẵn thì $n + 10:2$, Như vậy với mọi n là số tự nhiên thì $(n+10)(n+15):2$
- b) Ta có: Vì $n(n+1)(n+2)$ là 3 số tự nhiên liên tiếp nên sẽ có 1 số chia hết cho 2, 1 số chia hết cho 3
- c) Ta có: $n(n+1) + 1$ là 1 số lẻ nên không chia hết cho 4,2 và có chữ số tận cùng khác 0 và 5

Bài 3: Chứng minh rằng:

- a) $(n+3)(n+6):2$
- b) $n^2 + n + 6$ không chia hết cho 5
- c) $\overline{aaabbb}:37$

Lời giải





a) Ta có: Nếu n là số chẵn thì $n + 6 : 2$

Nếu n lẻ thì $n + 3 : 2$, Như vậy với mọi n là số tự nhiên thì $(n + 3)(n + 6) : 2$

b) Ta có: $n^2 + n + 6 = n(n + 1) + 6$, vì $n(n + 1)$ là tích hai số tự nhiên liên tiếp nên chỉ có chữ số tận cùng là: 0, 2, 6, do đó $n(n + 1) + 6$ sẽ có tận cùng là 6, 8, 2 nên không chia hết cho 5.

c) Ta có: $\overline{aaabbb} = \overline{aaa000} + \overline{bbb} = a.11100 + b.111 = a.300.37 + b.3.37$ chia hết cho 37

Bài 4: Chứng minh rằng:

a) $\overline{aaa} : a$

b) $ab(a + b) : 2$

c) $\overline{abc} - \overline{cba} : 99$

Lời giải

a) Ta có : $\overline{aaa} = a.111 = a.3.37$ chia hết cho a và chia hết cho 37

b) Ta có: Vì a, b là hai số tự nhiên nên a, b có các TH sau:

TH1: a, b cùng tính chẵn lẻ thì $a + b$ là 1 số chẵn như vậy $a + b$ chia hết cho 2

TH2: $a + b$ khác tính chẵn lẻ thì 1 trong 2 số phải có 1 số chẵn khi đó số đó chia hết cho 2

c) Ta có: $\overline{abc} - \overline{cba} = 100a + 10b + c - (100c + 10b + a) = 99a - 99c = 99(a - c) : 99$

Bài 5:

Chứng minh rằng: $\overline{ab} + 8\overline{ba} : 9$

Lời giải

Ta có: $\overline{ab} + 8\overline{ba} = 10a + b + 8(10b + a) = 18a + 18b = 18(a + b) : 9$

Bài 6:

Cho $a, b \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng: $(4a + b) : 5 \Leftrightarrow (a + 4b) : 5$

Lời giải

Ta có $(4a + b) : 5 \Rightarrow 4(4a + b) : 5 \Rightarrow (16a + 4b) : 5 \Rightarrow 15a + (a + 4b) : 5 \Rightarrow (a + 4b) : 5$ (dpcm)

Bài 7:

Chứng minh rằng số có dạng \overline{abcabc} luôn chia hết cho 11

Lời giải





Ta có: $\overline{abcabc} = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + b \cdot 10 + c = a \cdot 10^2(10^3 + 1) + b \cdot 10(10^3 + 1) + c(10^3 + 1)$
 $= (10^3 + 1)(a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c) = 1001(a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c) = 11 \cdot 91 \cdot \overline{abc} : 11$

Bài 8:

Tìm n là số tự nhiên để $A = (n + 5)(n + 6) : 6n$

Lời giải

Ta có: $A = 12n + n(n - 1) + 30$, để $A : 6n \Rightarrow n(n - 1) + 30 : 6n$

Ta có: $n(n - 1) : n \Rightarrow 30 : n \Rightarrow n \in U(30) = \{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\}$

Và $n(n - 1) : 6 \Rightarrow n(n - 1) : 3 \Rightarrow n \in \{1; 3; 6; 10; 15; 30\}$

Thử vào ta thấy $n \in \{1; 3; 10; 30\}$ thỏa mãn yêu cầu đầu bài

Bài 9:

Chứng minh rằng $3a + 2b : 17$ khi và chỉ khi $10a + b : 17$ ($a, b \in \mathbb{Z}$) và ngược lại có đúng không?

Lời giải

• $3a + 2b : 17 \Rightarrow 10a + b : 17$

Ta có: $3a + 2b : 17$

$\Rightarrow 9 \cdot (3a + 2b) : 17 \Rightarrow 27a + 18b : 17 \Rightarrow (17a + 17b) + (10a + b) : 17 \Rightarrow 10a + b : 17$

• $10a + b : 17 \Rightarrow 3a + 2b : 17$

Ta có: $10a + b : 17 \Rightarrow 2(10a + b) : 17 \Rightarrow 20a + 2b : 17 \Rightarrow 17a + 3a + 2b : 17 \Rightarrow 3a + 2b : 17$

Bài 10:

Chứng minh rằng:

a) Nếu $\overline{ab} + \overline{cd} : 11$ thì $\overline{abcd} : 11$

b) Cho $\overline{abc} - \overline{deg} : 7$ chứng minh rằng $\overline{abc deg} : 7$

Lời giải

a) Thật vậy $\overline{abcd} = 100 \cdot \overline{ab} + \overline{cd} = 99 \cdot \overline{ab} + (\overline{ab} + \overline{cd})$, chia hết cho 11.

b) Ta có $\overline{abc deg} = 1000 \cdot \overline{abc} + \overline{deg} = 1001 \cdot \overline{abc} - (\overline{abc} - \overline{deg})$





mà $\overline{abc} - \overline{deg} : 7$ và $1001 : 7$ nên $\overline{abc deg} : 7$

Bài 11:

a) Chứng minh rằng nếu $\overline{ab} = 2\overline{cd}$ với a, b, c, d là các chữ số khác 0 thì \overline{abcd} chia hết cho 67.

b) Cho số \overline{abc} chia hết cho 27. Chứng minh rằng \overline{bca} chia hết cho 27

Lời giải

a) Ta có $\overline{ab} = 2\overline{cd}$ và $\overline{abcd} = \overline{ab}.100 + \overline{cd} = 2\overline{cd}.100 + \overline{cd} = \overline{cd}.201 = \overline{cd}.67.3$

Vậy \overline{abcd} chia hết cho 67.

b) Ta có $\overline{abc} : 27 \Rightarrow \overline{abc0} : 27 \Rightarrow 1000a + \overline{bc0} : 27 \Rightarrow 999a + a + \overline{bc0} : 27 \Rightarrow 27.37a + \overline{bca} : 27$

Do $27.37a : 27$ nên $\overline{bca} : 27$.

Bài 12: Chứng minh rằng

a) $\overline{abc deg} : 23, 29$ nếu $\overline{abc} = 2.\overline{deg}$

b) Nếu $(\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg}) : 11$ thì $\overline{abc deg} : 11$

Lời giải

a) Ta có : $\overline{abc deg} = 1000\overline{abc} + \overline{deg} = 1000.2\overline{deg} + \overline{deg} = 2001\overline{deg} = \overline{deg}.23.29.3$

b) Ta có : $\overline{abc deg} = 10000.\overline{ab} + 100\overline{cd} + \overline{eg} = 9999\overline{ab} + 99\overline{cd} + (\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg}) : 11$

Bài 13:

a) Cho $\overline{abc} + \overline{deg} : 37$ chứng minh rằng $\overline{abc deg} : 37$

b) Nếu $\overline{abcd} : 99$ thì $\overline{ab} + \overline{cd} : 99$

Lời giải

a) Ta có : $\overline{abc deg} = 1000\overline{abc} + \overline{deg} = 999\overline{abc} + (\overline{abc} + \overline{deg}) : 37$

b) Ta có : $\overline{abcd} = 100.\overline{ab} + \overline{cd} = 99.\overline{ab} + (\overline{ab} + \overline{cd}) : 99 \Rightarrow \overline{ab} + \overline{cd} : 9$

Bài 14:

Chứng minh rằng nếu $\overline{abcd} : 101$ thì $\overline{ab} - \overline{cd} : 101$

Lời giải





Ta có: $\overline{abcd}:101 \Rightarrow 100\overline{ab} + \overline{cd} = 101\overline{ab} - \overline{ab} + \overline{cd} = 101\overline{ab} - (\overline{ab} - \overline{cd}):101 \Rightarrow \overline{ab} - \overline{cd}:101$

Bài 15:

Chứng minh rằng nếu $a - 11b + 3c:17$ thì $2a - 5b + 6c:17$ ($a, b, c \in Z$)

Lời giải

Ta có: $a - 11b + 3c:17 \Rightarrow 2a - 22b + 6c:17 \Rightarrow (2a - 5b + 6c) - 17b:17 \Rightarrow 2a - 5b + 6c:17$

Bài 16: Chứng minh rằng

a) $\overline{abcd}:29$ thì $a + 3b + 9c + 27d:29$

b) Nếu $\overline{abc}:21$ thì $a - 2b + 4c:21$

Lời giải

a) Ta có: $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d:29 \Rightarrow 2000a + 200b + 20c + 2d:29$

$\Rightarrow 2001a - a + 203b - 3b + 29c - 9c + 29d - 27d:29$

$\Rightarrow (2001a + 203b + 29c + 29d) - (a + 3b + 9c + 27d):29$

$\Rightarrow a + 3b + 9c + 27d:29$

b) Ta có: $\overline{abc}:21 \Rightarrow 100a + 10b + c:21 \Rightarrow 4(100a + 10b + c):21$

$\Rightarrow (a - 2b + 4c) + (399a + 42b):21 \Rightarrow (a - 2b + 4c) + 21(19a + 2b):21 \Rightarrow (a - 2b + 4c):21$

Bài 17:

Chứng minh rằng nếu $\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg}$ chia hết cho 11 thì \overline{abcdeg} chia hết cho 11.

Lời giải

Ta có $\overline{abcdeg} = 10000\overline{ab} + 100\overline{cd} + \overline{eg} = 9999\overline{ab} + 99\overline{cd} + (\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg})$ chia hết cho 11

Bài 18:

Với a, b là các số nguyên, chứng tỏ rằng: $a + 4b:13$ khi và chỉ khi $10a + b:13$

Lời giải

Ta có: $a + 4b:13 \Rightarrow 10.(a + 4b):13$ (1)

Lại có: $10(a + 4b) = 10a + 40b = 10a + b + 39a$

Mà $39a:13$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 10a + b:13$.





Bài 19:

Tìm chữ số a biết rằng $\overline{20a20a20a}$ chia hết cho 7

Lời giải

$$\text{Ta có } n = \overline{20a20a20a} = \overline{20a20a} \cdot 1000 = (\overline{20a} \cdot 1000 + \overline{20a}) \cdot 1000 + \overline{20a} = 1001 \cdot \overline{20a} \cdot 1000 + \overline{20a}$$

Theo đầu bài n chia hết cho 7, mà 1001 chia hết cho 7 nên $\overline{20a}$ chia hết cho 7

Ta có $\overline{20a} = 196 + (4 + a)$ chia hết cho 7 nên $a + 4$ chia hết cho 7

Vậy $a = 3$

Bài 20: Chứng minh rằng

Cho ba chữ số khác nhau và khác 0. Lập tất cả các số tự nhiên có ba chữ số gồm cả ba chữ số ấy. Chứng minh rằng tổng của chúng chia hết cho 6 và 37

Lời giải

Gọi ba chữ số là a, b, c

Các số tự nhiên có 3 chữ số gồm 3 số ấy là $\overline{abc}, \overline{acb}, \overline{bca}, \overline{bac}, \overline{cba}, \overline{cab}$

$$\text{Tổng các số theo đề bài bằng } \overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bca} + \overline{bac} + \overline{cba} + \overline{cab} = 222(a + b + c)$$

chia hết cho 6 và 37.

Bài 21:

Có hai số tự nhiên x và y nào mà $(x + y)(x - y) = 1002$ hay không?

Lời giải

Giả sử tồn tại các số tự nhiên x và y

$$(x + y)(x - y) = 1002 \quad (1)$$

Không thể xảy ra trường hợp trong x và y có một số chẵn, một số lẻ vì nếu xảy ra thì

$x + y$ và $x - y$ đều lẻ nên tích $(x + y)(x - y)$ là số lẻ, trái với (1)

Vậy x và y phải cùng chẵn hoặc cùng lẻ.





Khi đó $x+y$ và $x-y$ đều chẵn nên tích $(x+y)(x-y)$ chia hết cho 4, trong khi đó 1002 không chia hết cho 4 nên vô lí

Vậy không tồn tại các số tự nhiên x và y mà $(x+y)(x-y) = 1002$

Bài 22:

Tìm số tự nhiên có hai chữ số, sao cho nếu viết nó tiếp sau số 1999 thì ta được một số chia hết cho 37

Lời giải

Gọi số phải tìm là \overline{ab}

$$\text{Ta có } \overline{1999ab}:37 \Rightarrow (199900 + \overline{ab}):37 \Rightarrow 5402.37 + 26 + \overline{ab}:37 \Rightarrow 26 + \overline{ab}:37$$

$$\text{Vậy } \overline{ab} \in \{11; 48; 85\}$$

Bài 23:

Cho n là số tự nhiên. Chứng minh rằng:

- a) $(n + 10)(n + 15)$ chia hết cho 2
- b) $n(n + 1)(n + 2)$ chia hết cho 2 và cho 3
- c) $n(2n + 7)(7n + 1)$ chia hết cho 6

Lời giải

- a) Nếu n là số lẻ thì $n + 15$ chia hết cho 2 nên $(n + 10)(n + 15)$ chia hết cho 2.
- b) Nếu n là số chẵn thì $n + 10$ chia hết cho 2 nên $(n + 10)(n + 15)$ chia hết cho 2.
- c) Trong 2 số n và $7n + 1$ phải có một số chẵn nên $n(2n + 1)(7n + 1):2$

Mà $(2;3) = 1$ nên ta chỉ cần chứng minh $n(2n + 1)(7n + 1):3$

Xét 3 trường hợp:

- Trường hợp 1: $n = 3k$ thì $n(2n + 1)(7n + 1) = 3k(6k + 1)(21k + 1):3$
- Trường hợp 2: $n = 3k + 1$ thì $2n + 7 = (6k + 9):3 \Rightarrow n(2n + 7)(7n + 1):3$
- Trường hợp 3: $n = 3k + 2$ thì $7n + 1 = (21k + 15):3 \Rightarrow n(2n + 7)(7n + 1):3$





Từ 3 trường hợp trên suy ra $n(2n+7)(7n+1)$ chia hết cho 6.

Bài 24:

Tìm tất cả các chữ số x, y sao cho $\overline{2019xy}$ chia hết cho cả 2, 3 và 5.

Lời giải

Tìm tất cả các chữ số x, y sao cho $\overline{2019xy}$ chia hết cho cả 2, 3 và 5.

Ta có $\overline{2019xy}$ chia hết cho cả 2 và 5 $\Rightarrow y = 0$.

Lại có $\overline{2019xy} : 3$ nên $(2+0+1+9+x+0):3 \Rightarrow (12+x):3$.

$$\Rightarrow x \in \{0; 3; 6; 9\}$$

Vậy $(x;y) \in \{(0;0); (3;0); (6;0); (9;0)\}$.

Bài 25:

Cho hai số nguyên a và b không chia hết cho 3, nhưng khi chia cho 3 thì có cùng số dư: Chứng minh rằng: $(ab-1):3$

Lời giải

Ta có: $a = 3p+r, b = 3q+r (p, q, r \in Z, r = 1, 2)$ khi đó

$$ab-1 = (3p+r)(3q+r)-1 = 3p(3q+r) + r(3p+r) - 1 = 9pq + 3pr + 3qr + r^2 - 1$$

Nếu $r = 1$ thì $r^2 - 1 = 1 - 1 = 0 : 3$

Nếu $r = 2$ thì $r^2 - 1 = 4 - 1 = 3 : 3$

Vậy $(ab-1)$ luôn chia hết cho 3.

Bài 26:

Tìm số tự nhiên có 4 chữ số, chia hết cho 5 và cho 27 biết rằng hai chữ số giữa của số đó là 97

Lời giải

Gọi n là số phải tìm, n phải tận cùng bằng 0 hoặc 5 và n phải chia hết cho 9. Xét $n = \overline{*975}$ chia hết cho 9 nên $* = 6$. Thử lại: 6975 không chia hết cho 27

Xét $n = \overline{*970}$ chia hết cho 9 nên $* = 2$. Thử lại: 2970 chia hết cho 27.





Số phải tìm là 2970

Bài 27:

Hai số tự nhiên a và $2a$ đều có tổng các chữ số bằng k . Chứng minh rằng a chia hết cho 9

Lời giải

Ta biết rằng một số và tổng các chữ số của nó có cùng số dư trong phép chia cho 9, do đó hiệu của chúng chia hết cho 9.

Như vậy $2a - k : 9$ và $a - k : 9$

Suy ra: $(2a - k) - (a - k) : 9$

Do đó $a : 9$

Bài 28:

Cho số tự nhiên \overline{ab} bằng 3 lần tích các chữ số của nó

- a) Chứng minh rằng b chia hết cho a
- b) Giả sử $b = ka$ ($k \in \mathbb{N}$), chứng minh rằng k là ước của 10
- c) Tìm các số \overline{ab} nói trên

Lời giải

a) Theo đề bài: $\overline{ab} = 3ab$

$$\Rightarrow 10a + b = 3ab \quad (1)$$

$$\Rightarrow 10a + ba : a \Rightarrow b : a$$

b) Do $b = ka$ nên $k < 10$. Thay $b = ka$ vào (1) $\Rightarrow 10a + ka = 3a.ka$ (2)
 $\Rightarrow 10 + k = 3ak$
 $\Rightarrow 10 : k$

c) Do $k < 10$ nên $k \in \{1 ; 2 ; 5\}$

Với $k = 1$, thay vào (2) : $11 = 3a$, loại

Với $k = 2$, thay vào (2) : $12 = 6a \Rightarrow a = 2$;

$b = ka = 2.2 = 4$. Ta có $\overline{ab} = 24 = 3.2.4$

Với $k = 5$, thay vào (2) : $15 = 5a \Rightarrow a = 1$;

$b = ka = 5.1 = 5$. Ta có $\overline{ab} = 15 = 3.1.5$.

Đáp số: 24 và 15





Chú ý. Cách giải câu c không thông qua câu a và b

$$\overline{ab} = 3ab \Rightarrow 10a + b = 3ab \Rightarrow 10a = 3ab - b \Rightarrow 10a = b(3a - 1)$$

Ta thấy $10a$ chia hết cho $3a - 1$, mà a và $3a - 1$ nguyên tố cùng nhau (thật vậy, nếu a và $3a - 1$ cùng chia hết cho d thì $3a - (3a - 1)$ chia hết cho d , tức là $1 : d$, vậy $d = 1$) nên $10 : 3a - 1$

$3a - 1$	1	2	5	10
$3a$	2	3	6	11
a	Loại	1	2	Loại
b		5	4	

Đáp số: 15 và 24

Bài 29:

Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng số đó chia hết cho tích các chữ số của nó

Lời giải

Gọi số phải tìm là \overline{ab} , ta có $10a + b : ab$ (1)

Suy ra $b : a$. Đặt $b = ka$ (2) thì $k < 10$ ($k \in \mathbb{N}$)

Thay $b = ka$ vào (1) ta có $10a + ka : akb$

$$\Rightarrow 10a : ka \Rightarrow 10 : k \Rightarrow k \in \{1, 2, 5\}$$

Nếu $k = 1$ thì $b = a$. Thay vào (1) ta được $11a : a^2 \Rightarrow 11 : a \Rightarrow a = 1$

Vậy $\overline{ab} = 11$

Nếu $k = 2$ thì $b = 2a$. Xét các số 12, 24, 36, 48 ta có các số 12, 24, 36 thỏa mãn đề bài

Nếu $k = 5$ thì $b = 5a \Rightarrow \overline{ab} = 15$ thỏa mãn đề bài

Kết luận: Có 5 số thỏa mãn đề bài là 11, 12, 15, 24, 36

Bài 30:

Tìm số tự nhiên nhỏ nhất biết rằng số đó chia 9 dư 5, chia 7 dư 4, chia 5 dư 3.

Lời giải

Gọi số tự nhiên nhỏ nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài là a





Vì a chia 9 dư 5 nên $a + 4 : 9 \Rightarrow a + 4 + 153 : 9 \Rightarrow a + 157 : 9$

Vì a chia 7 dư 4 nên $a + 3 : 7 \Rightarrow a + 3 + 154 : 7 \Rightarrow a + 157 : 7$

Vì a chia 5 dư 3 nên $a + 2 : 5 \Rightarrow a + 2 + 155 : 5 \Rightarrow a + 157 : 5$

Suy ra $a + 157 \in BC(9, 5, 7)$

$$BCNN(9, 5, 7) = 315$$

$$\Rightarrow a + 157 = 315k \text{ Vì } a \text{ nhỏ nhất nên } k = 1 \Rightarrow a = 158$$

Vậy số tự nhiên nhỏ nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài là 158.

Bài 31:

Một số chia cho 7 dư 3, chia cho 17 dư 12, chia cho 23 dư 7. Hỏi số đó chia cho 2737 dư bao nhiêu?

Lời giải

Gọi số đã cho là A . Theo bài ra ta có: $A = 7a + 3 = 17b + 12 = 23c + 7$

Mặt khác: $A + 39 = 7a + 3 + 39 = 17b + 12 + 39 = 23c + 7 + 39$

$$= 7(a + 6) = 17(b + 3) = 23(c + 2)$$

Như vậy $A + 39$ đồng thời chia hết cho 7, 17 và 23.

Nhưng $UCLN(7, 17, 23) = 1 \Rightarrow (A + 39) : 7, 17, 23 \Rightarrow A + 39 : 2737 \Rightarrow A = 2698$.

Do $2698 < 2737$ nên $A : 2737$ có số dư là 2698.

Bài 32:

Cho số $\overline{abc} : 37$. Chứng minh rằng $\overline{cab} : 37$

Lời giải

Vì $\overline{abc} : 37$ nên $100 \cdot \overline{abc} : 37 \Rightarrow 10000a + 1000b + 100c : 37$

$$\Rightarrow 100c + 10a + b + 9990a + 999b : 37 \Rightarrow \overline{cab} + 37 \cdot (270a + 27b) : 37$$

$$\Rightarrow \overline{cab} : 37$$

Bài 33:

Chứng tỏ rằng trong 27 số tự nhiên tùy ý luôn tồn tại hai số sao cho tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho 50.

Lời giải



TH1: Nếu 27 số tự nhiên trên có 2 số có cùng số dư khi chia cho 50 thì hiệu của chúng chia hết cho 50.

TH2: Nếu 27 số tự nhiên trên không có hai số nào có cùng số dư khi chia cho 50

Số dư khi chia cho 50 gồm: 0; 1; 2; ...; 49 chia làm 26 nhóm:

$$(0), (1; 49), (2; 48), \dots, (24; 26), (25)$$

Chia 27 số dư khác nhau vào 26 nhóm trên, tồn tại ít nhất 2 số cùng một nhóm.

Suy ra tổng của chúng chia hết cho 50.

Vậy trong 27 số tự nhiên tùy ý luôn tồn tại hai số sao cho tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho 50.

Bài 34:

Cho $n = \overline{7a5} + \overline{8b4}$. Biết $a - b = 6$. và $n:9$. Tìm a, b .

Lời giải

$$\text{Do } n:9 \Rightarrow \overline{7a5} + \overline{8b4}:9 \Rightarrow 700 + 10a + 5 + 800 + 10b + 4:9 \Rightarrow 1509 + 10a + 10b:9$$

$$\Rightarrow 1503 + 9a + 9b + 6 + a + b:9 \Rightarrow 6 + a + b:9 \Rightarrow a + b \in \{3; 12\}$$

+ Với $a + b = 3$ thì a, b khác tính chẵn lẻ và $a - b = 6$ thì a, b cùng tính chẵn lẻ.

Do đó không tồn tại a, b

+ Với $a + b = 12$ và $a - b = 6$ suy ra $a = 9; b = 3$.

Vậy $a = 9; b = 3$.

Bài 35:

Cho số tự nhiên \overline{ab} bằng ba lần tích các chữ số của nó, chứng minh rằng $b:a$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \overline{ab} = 3ab \Rightarrow 10a + b = 3ab \Rightarrow 10a + b:a \Rightarrow b:a$$

Bài 36:

Tìm số tự nhiên có ba chữ số biết rằng khi chia số đó cho các số 25; 28; 35 thì được các số dư lần lượt là 4; 7; 14

Lời giải



Ta gọi $x = \overline{abc}$ ($0 < a \leq 9; 0 \leq b, c \leq 9; a, b, c \in \mathbb{N}$) là số tự nhiên có 3 chữ số cần tìm

Theo giả thiết x khi chia cho 25; 28; 35 ta được các số dư lần lượt là 4; 7; 14

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 25m + 4 \\ x = 28n + 7 \\ x = 35p + 14 \end{cases} (m, n, p \in \mathbb{N}) \Rightarrow \begin{cases} (x + 21) : 25 \\ (x + 21) : 28 \\ (x + 21) : 35 \end{cases}$$

Như thế $x + 21$ là bội chung (25; 28; 35) mà $BCNN[25; 28; 35] = 700 \Rightarrow (x + 21) : 700$

Do $100 \leq x \leq 999 \Rightarrow 121 \leq (x + 21) \leq 1020 \Rightarrow x + 21 = 700 \Rightarrow x = 679$

Bài 37:

Cho a, b là hai số chính phương lẻ liên tiếp. Chứng minh rằng $(a - 1)(b - 1) : 192$

Lời giải

Ta có: Vì a, b là số lẻ nên $(a - 1)(b - 1) : 4$

Đặt $a = (2k - 1)^2, b = (2k + 1)^2 \Rightarrow (a - 1) = 4k(k - 1), (b - 1) = 4k(k + 1)$

Khi đó: $(a - 1)(b - 1) = 16k^2(k - 1)(k + 1)$, Mà $k(k + 1)(k + 2) : 3$

Và $k(k - 1), k(k + 1)$ đều chia hết cho 2

Nên $k^2(k - 1)(k + 1) : 12 \Rightarrow (a - 1)(b - 1) = 16k^2(k - 1)(k + 1) : 192$,

Khi a, b là số chính phương lẻ liên tiếp

Bài 38:

Cho 4 số nguyên phân biệt a, b, c, d .

Chứng minh rằng $A = (a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d) : 12$

Lời giải

Theo nguyên lý **Dirichlet** trong 3 số nguyên tùy ý luôn tồn tại hai số nguyên tùy ý có cùng số dư khi chia hết cho 3 suy ra $A : 3$

Trường hợp 1: cả 4 số đều là số chẵn nên tồn tại 6 hiệu chia hết cho 2 suy ra $A : 4$

Trường hợp 2: cả 4 số đều là số lẻ nên tồn tại 6 hiệu chia hết cho 2 suy ra $A : 4$

Trường hợp 3: 2 số chẵn và hai số lẻ nên tồn tại 4 hiệu chia hết cho 2 suy ra $A : 4$





Trường hợp 4: 3 số chẵn và một số lẻ, từ 3 số chẵn đó cho ta 3 hiệu chia hết cho 2 suy ra $A:4$

Trường hợp 5: 3 số lẻ và một số chẵn, từ 3 số lẻ đó cho ta 3 hiệu chia hết cho 2 suy ra $A:4$

Do đó A cũng chia hết cho 4 mà $(3,4) = 1$ nên A chia hết cho 12.

Bài 39:

Tìm các số nguyên dương x và y lớn hơn 1 sao cho $x + 3$ chia hết cho y và $y + 3$ chia hết cho x

Lời giải

Giả sử $2 \leq x \leq y$

a) Xét $y = 2 \Rightarrow x = 2$ không thỏa mãn $x + 3$ chia hết cho y

b) Xét $y \geq 3$. Đặt $x + 3 = ky (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow ky = x + 3 \leq y + 3 \leq y + y = 2y \Rightarrow k \leq 2$

Với $k = 1$, từ (1) ta có $x + 3 = y$, thay vào $(y + 3):x$ được $(x + 6):x$ nên lại có $x > 1 \Rightarrow x \in \{2; 3; 6\}$

x	2	3	6
y	5	6	9

Với $k = 2$, từ (1) ta có $x + 3 = 2y$, thay vào $(y + 3):x$ được $(2y + 6):x \Rightarrow x + 9:x \Rightarrow 9:x$

Do $x > 1 \Rightarrow x \in \{3; 9\}$

- khi $x = 3 \Rightarrow y = 3$, thử lại thấy đúng
- khi $x = 9 \Rightarrow y = 6$ (loại) vì trái với $x \leq y$

Các cặp số (x, y) phải tìm là $(2; 5), (5; 2), (3; 6), (6; 3), (6; 9), (9; 6), (3; 3)$

Các cặp số $x = 9 \Rightarrow y = 6$

Bài 40:

Cho 10 số tự nhiên bất kì $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{10}$. Chứng minh rằng tồn tại một số hoặc tổng một số các số liên tiếp nhau trong dãy chia hết cho 10



Lời giải

Xét 10 tổng sau: $S_1 = a_1$; $S_2 = a_1 + a_2$; $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$; :
 $S_{10} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}$

Nếu trong 10 tổng trên tồn tại 1 tổng nào đó chia hết cho 10 thì bài toán được chứng minh

Ta đi xét trường hợp : cả 10 tổng $S_1; S_2; \dots; S_{10}$ đều không chia hết cho 10

Do vậy số dư trong phép chia $S_1; S_2; S_3; \dots; S_{10}$ cho 10 chỉ có thể thuộc tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ gồm 9 phần tử do vậy theo nguyên lý Dirichlet luôn tồn tại ít nhất 2 tổng $S_i; S_j$ ($i < j; 1 \leq i < j \leq 10$) có cùng số dư khi chia cho 10

$\Rightarrow (S_j - S_i) : 10 \Rightarrow (a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_j) : 10$ ta có điều cần chứng minh.

Bài 41:

a) Cho $A = 1999 + 1999^2 + 1999^3 + \dots + 1999^{1998}$. Chứng minh rằng $A : 2000$.

b) Tìm số tự nhiên n lớn nhất có 3 chữ số thỏa mãn điều kiện: n chia cho 8 dư 7, chia cho 31 dư 28.

Lời giải

a) Có: $A = (1999 + 1999^2) + (1999^3 + 1999^4) + \dots + (1999^{1997} + \dots + 1999^{1998})$
 $= 1999 \cdot (1 + 1999) + 1999^3 \cdot (1 + 1999) + \dots + 1999^{1997} \cdot (1 + 1999)$
 $= 1999 \cdot 2000 + 1999^3 \cdot 2000 + \dots + 1999^{1997} \cdot 2000$
 $= 2000 \cdot (1999 + 1999^3 + \dots + 1999^{1997})$
 $\Rightarrow A : 2000$ (đpcm)

b) Ta có $\Rightarrow \begin{cases} n = 8x + 7 \\ n = 31y + 28 \end{cases} (x, y \in \mathbb{N}^+) \Rightarrow \begin{cases} n - 7 : 8 \\ n - 28 : 31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n - 7 + 72 : 8 \\ n - 28 + 93 : 31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n + 65 : 8 \\ n + 65 : 31 \end{cases}$
 $\Rightarrow n + 65 \in BCNN(8, 31) = \{248; 496; 744; 992\}$
 $\Rightarrow n \in \{183; 431; 679; 927\} \Rightarrow n = 927$ (vì n lớn nhất có 3 chữ số)

Vậy số cần tìm là: 927 .





Bài 42:

Tìm số tự nhiên nhỏ nhất lớn hơn 10, biết rằng số đó chia cho 5;6;7 có số dư lần lượt là 3;2;1.

Lời giải

Gọi số phải tìm là a ($a \in \mathbb{N}, a > 10$).

Theo đề bài, ta có:

$$a \text{ chia cho } 5 \text{ dư } 3 \Rightarrow (a-3):5 \Rightarrow (a-3)-5:5 \text{ hay } a-8:5$$

$$a \text{ chia cho } 6 \text{ dư } 2 \Rightarrow a-2:6 \Rightarrow (a-2)-6:6 \text{ hay } a-8:6.$$

$$a \text{ chia cho } 7 \text{ dư } 1 \Rightarrow a-1:7 \Rightarrow (a-1)-7:7 \text{ hay } a-8:7.$$

Do đó $a-8 \in BC(5,6,7)$.

Để a nhỏ nhất lớn hơn 10 thì $a-8 = BCNN(5,6,7) = 210$

$$\Rightarrow a-8 = 210 \Rightarrow a = 218.$$

Vậy số tự nhiên cần tìm là 218.

Bài 43:

Cho $a, b \in \mathbb{N}^*$, thỏa mãn số $M = (9a + 11b)(5b + 11a)$ chia hết cho 19, hãy giải thích vì sao M chia hết cho 361

Lời giải

Ta có: $M = (9a + 11b)(5b + 11a):19$ mà 19 là số nguyên tố nên $9a + 11b:19$ hoặc $5b + 11a:19$

$$\text{Xét } M = 3(9a + 11b) + (5b + 11a) = 27a + 33b + 5b + 11a = 38a + 38b = 19(2a + 2b):19$$

$$+ \text{ Nếu } 9a + 11b:19 \Rightarrow 3(9a + 11b):19 \text{ mà } N:19 \Rightarrow 5b + 11a:19 \quad (1)$$

$$+ \text{ Nếu } 5b + 11a:19, \text{ mà } N:19 \Rightarrow 3(9a + 11b):19 \Rightarrow 9a + 11b:19 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $(9a + 11b):19$ và $(5b + 11a):19 \Rightarrow M:19^2 = 361$

Bài 44:





Cho hai số tự nhiên a và b thỏa mãn $m = (16a + 17b)(17a + 16b)$ là 1 bội số của 11. Chứng minh rằng: Số m cũng là một bội số của 121

Lời giải

Vì 11 là số nguyên tố: mà $m = (16a + 17b)(17a + 16b) : 11 \Rightarrow 16a + 17b : 11$ hoặc $17a + 16b : 11$

Không mất tính tổng quát: giả sử: $16a + 17b : 11$, ta cần chứng minh $(17a + 16b) : 11$

Thật vậy: $16a + 17b : 11 \Rightarrow 2(16a + 17b) : 11 \Rightarrow 33(a + b) + b - a : 11 \Rightarrow b - a : 11 \Rightarrow a - b : 11$

Lại có: $2(17a + 16b) = 33(a + b) - a + b : 11 \Rightarrow (17a + 16b) : 11$

Vậy $(16a + 17b)(17a + 16b) : 11.11 = 121$

Bài 45:

Chứng minh rằng: $A = 75.(4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 5) + 25$ chia hết cho 4^{2019} .

Lời giải

Đặt $M = 4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 5 = 4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1$

$4M = 4.(4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) = 4^{2019} + 4^{2018} + \dots + 4^3 + 4^2 + 4$

$4M - M = (4^{2019} + 4^{2018} + \dots + 4^3 + 4^2 + 4) - (4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1)$

$3M = 4^{2019} - 1 \Rightarrow M = (4^{2019} - 1) : 3$

$A = 75.(4^{2019} - 1) : 3 + 25 = 25.(4^{2019} - 1) + 25$

$= 25.4^{2019} - 25 + 25 = 25.4^{2019}$

chia hết cho 4^{2019} .

Bài 46: HSG Lục Ngạn Bắc Giang, năm học 2020-2021

Cho ba số chính phương x, y, z . Chứng minh rằng: $A = (x - y)(y - z)(z - x) : 12$.

Lời giải

Theo đề bài $x; y; z$ là 3 số chính phương. Mà một số chính phương khi chia cho 3 hoặc cho 4 đều chỉ có thể dư 0 hoặc dư 1



Do đó trong 3 số chính phương $x; y; z$ khi chia cho 3 phải có hai số có cùng số dư, nên 3 số $x - y; y - z; z - x$ phải có ít nhất 1 số chia hết cho 3 suy ra

$$(x - y)(y - z)(z - x) : 3$$

Chúng minh tương tự ta cũng có $(x - y)(y - z)(z - x) : 4$

Mà $(3, 4) = 1$ nên $A = (x - y)(y - z)(z - x) : 12$

Bài 47: HSG Huyện Triệu Sơn, năm học 2020-2021

Cho x, y là các số nguyên thoả mãn $3x^2 - 2y^2 = 1$. Chứng minh rằng $x^2 - y^2$ chia hết cho 40.

Lời giải

Có $3x^2 - 2y^2 = 1$ mà $2y^2$ là số chẵn ; 1 là số lẻ. Nên $3x^2$ phải là số lẻ.

Mà 3 là số lẻ. Nên x^2 phải là số lẻ $\Rightarrow x$ phải là số lẻ

$$\text{Đặt } x = 2k + 1; (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x^2 = (2k + 1)^2 = (2k + 1) \cdot (2k + 1) = 4k^2 + 4k + 1 \quad (1)$$

$$\text{Có } 3x^2 - 2y^2 = 1 \Rightarrow 3x^2 = 1 + 2y^2$$

Vì $3x^2$ chia hết cho 3

Nên $1 + 2y^2$ chia hết cho 3 hay y^2 chia 2 cho dư 1 $\Rightarrow y$ phải là số lẻ

$$\text{Đặt } y = 2m + 1; (m \in \mathbb{Z}) \Rightarrow y^2 = (2m + 1)^2 = (2m + 1) \cdot (2m + 1) = 4m^2 + 4m + 1 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1;2)} \Rightarrow x^2 - y^2 = 4(k^2 + k - m^2 - m) = 4[k(k + 1) - m(m + 1)] \text{ chia hết cho } 8.$$

Do $k(k + 1); m(m + 1)$ chia hết cho 2.

Do $x; y$ là số lẻ $\Rightarrow x^2; y^2$ chia 5 dư 0 hoặc 1 hoặc 4 (3)

$$\text{Mà } 3x^2 - 2y^2 = 1 \text{ hay } 5x^2 - 2(x^2 + y^2) = 1$$

Do $5x^2$ chia hết cho 5

Nên $(x^2 + y^2)$ chia 5 dư 2 (4)

Từ (3;4) $\Rightarrow x^2; y^2$ chia 5 dư 1.

$\Rightarrow x^2 - y^2 : 5$ mà $x^2 - y^2 : 8$ và 5; 8 là hai số nguyên tố cùng nhau.



Vậy $x^2 - y^2$ chia hết cho 40 .

CÁC BÀI TOÁN TRONG ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI

Bài 1:

Tìm số có 3 chữ số biết rằng số đó chia hết cho 36 và các chữ số của nó tỉ lệ với 1;2;3

Lời giải

Gọi ba chữ số của số phải tìm là a, b, c ta có: $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta được $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{6} (*)$

Do số phải tìm chia hết cho 36 nên số đó chia hết cho 9 suy ra $a+b+c$ chia hết cho 9

Mà a, b, c là các chữ số có ít nhất một chữ số khác 0 nên $a+b+c$ chỉ có thể nhận một trong ba giá trị 9;18;27

Nếu $a+b+c = 9 \Rightarrow (*) \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{6} \Rightarrow a = \frac{9}{6} (k\text{tm})$

Nếu $a+b+c = 18 \Rightarrow (*) \Rightarrow a = 3, b = 6, c = 9$, vì số phải tìm chia hết cho 36 nên chữ số hàng đơn vị chẵn, ta có số 396 hoặc 936.

Nếu $a+b+c = 27, (*) \Rightarrow a = \frac{27}{6} (k\text{tm})$

Vậy số phải tìm là 936;396

Bài 2:





Chúng minh rằng: $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100}$ chia hết cho $120 (x \in \mathbb{N})$

Lời giải:

$$\begin{aligned} & 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100} \\ &= (3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4}) + (3^{x+5} + 3^{x+6} + 3^{x+7} + 3^{x+8}) + \dots + (3^{x+97} + 3^{x+98} + 3^{x+99} + 3^{x+100}) \\ &= 3^x (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 3^{x+4} (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + 3^{x+96} (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) \\ &= 3^x \cdot 120 + 3^{x+4} \cdot 120 + \dots + 3^{x+96} \cdot 120 \\ &= 120 \cdot (3^x + 3^{x+4} + \dots + 3^{x+96}) : 120 (dfcm) \end{aligned}$$

Bài 3:

Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Biết $f(-1); f(0); f(1)$ đều chia hết cho 3.

Chúng minh rằng a, b, c đều chia hết cho 3

Lời giải:

Ta có: $f(0) = c; f(1) = a + b + c; f(-1) = a - b + c$

$$f(0) : 3 \Rightarrow c : 3$$

$$f(1) : 3 \Rightarrow a + b + c : 3 \Rightarrow a + b : 3 \quad (1)$$

$$f(-1) : 3 \Rightarrow a - b + c : 3 \Rightarrow a - b : 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $(a + b) + (a - b) : 3 \Rightarrow 2a : 3 \Rightarrow a : 3$ vì $(2; 3) = 1 \Rightarrow b : 3$

Vậy a, b, c đều chia hết cho 3.

Bài 4:

Chúng minh rằng: Số $A = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133, với mọi $n \in \mathbb{N}$

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= 11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11^2 \cdot 11^n + 12 \cdot (12^2)^n = 121 \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n \\ &= (133 - 12) \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n = 133 \cdot 11^n - 12 \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n \\ &= 133 \cdot 11^n + 12 \cdot (144^n - 11^n) \end{aligned}$$

Ta thấy :





$$133.11^n : 133$$

$$(144^n - 11^n) : (144 - 11) = 133 \Rightarrow 12.(144^n - 11^n) : 133$$

Do đó suy ra $133.11^n + 12.(144^n - 11^n)$ chia hết cho 133

Vậy: số $A = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133, với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Bài 5:

Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương ta luôn có:

$$4^{n+3} + 4^{n+2} - 4^{n+1} - 4^n \text{ chia hết cho } 300$$

Lời giải:

Với mọi n nguyên dương, ta có:

$$\begin{aligned} 4^{n+3} + 4^{n+2} - 4^{n+1} - 4^n &= 4^n.(4^3 + 4^2 - 4 - 1) \\ &= 4^n.75 = 4^{n-1}.4.75 = 300.4^{n-1} \end{aligned}$$

Mà 300.4^{n-1} chia hết cho 300 (với mọi n nguyên dương)

Nên $4^{n+3} + 4^{n+2} - 4^{n+1} - 4^n$ chia hết cho 300.

Bài 6:

Tìm chữ số tận cùng của A biết: $A = 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$

Lời giải:

Với mọi số nguyên dương n ta có:

$$\begin{aligned} 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n &= 3^{n+2} + 3^n - 2^{n+2} - 2^n \\ &= 3^n.(3^2 + 1) - 2^{n-1}(2^3 + 2) \\ &= 10.(3^n - 2^{n-1}) : 10 \end{aligned}$$

Vậy $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n : 10$ với mọi n là số nguyên dương.

Bài 7:

Tìm một số tự nhiên có 3 chữ số, biết rằng nếu tăng chữ số hàng trăm thêm n đơn vị đồng thời giảm chữ số hàng chục và giảm chữ số hàng đơn vị đi đơn vị thì được một số có 3 chữ số gấp n lần số có 3 chữ số ban đầu.

Lời giải



Gọi số có 3 chữ số cần tìm là \overline{abc} (a, b, c là số tự nhiên có 1 chữ số và $a \neq 0$)

theo bài ra ta có: $\overline{(a+n)(b-n)(c-n)} = n \cdot \overline{abc}$

$$\Rightarrow 100 \cdot (a+n) + 10(b-n) + (c-n) = n \cdot (100a + 10b + c)$$

$$\Rightarrow 100a + 100n + 10b - 10n + c - n = 100an + 10bn + cn$$

$$\Rightarrow 100(n-1)a + 10 \cdot (n-1)b + (n-1)c = 89n$$

$$\Rightarrow (n-1)(100a + 10b + c) = 89n$$

$$\Rightarrow 89n : (n-1) \text{ mà } (89; n-1) = 1 \text{ nên } n : (n-1), \text{ tìm được } n = 2$$

Vậy số cần tìm là 178

Bài 8:

Chứng minh rằng: $3a + 2b : 17 \Leftrightarrow 10a + b : 17$ ($a, b \in \mathbb{Z}$)

Lời giải

$$* 3a + 2b : 17 \Rightarrow 10a + b : 17$$

Ta có: $3a + 2b : 17$

$$\Rightarrow 9(3a + 2b) : 17 \Rightarrow 27a + 18b : 17 \Rightarrow (17a + 17b) + (10a + b) : 17$$

$$\Rightarrow (10a + b) : 17$$

$$* 10a + b : 17 \Rightarrow 3a + 2b : 17$$

Ta có: $10a + b : 17 \Rightarrow 2(10a + b) : 17$

$$20a + 2b : 17 \Rightarrow 17a + 3a + 2b : 17 \Rightarrow 3a + 2b : 17$$

Bài 9 :

Tìm số chia và số dư biết rằng số bị chia bằng 112 và thương bằng 5

Lời giải

Gọi số chia là a và số dư là r ($a, r \in \mathbb{N}^*; a > r$)

$$\text{Ta có: } 112 = 5a + r \Rightarrow 5a < 112 \Rightarrow a \leq 22 \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } a > r \Rightarrow 5a + r < 5a + a \Rightarrow 112 < 6a \Rightarrow a \geq 19 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow a = 19; 20; 21; 22$. Lập bảng số



a	19	20	21	22
$r = 112 - 5a$	17	12	7	2

Bài 10:

Chứng minh rằng: $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ chia hết cho 31

Lời giải

Đặt $D = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ (có 100 số hạng)

$$= (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) + (2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}) + \dots$$

$$+ (2^{96} + 2^{97} + 2^{98} + 2^{99} + 2^{100}) \text{ (có 20 nhóm)}$$

$$D = 2 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + 2^6 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \dots + 2^{96} \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)$$

$$D = 2 \cdot 31 + 2^6 \cdot 31 + \dots + 2^{96} \cdot 31$$

$$D = 31 \cdot (2 + 2^6 + \dots + 2^{96}) \text{ chia hết cho 31}$$

Vậy $D = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ chia hết cho 31

Bài 11:

Chứng minh rằng: $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100}$ chia hết cho 120 (với $x \in \mathbb{N}$)

Lời giải

$$3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100}$$

$$= (3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4}) + (3^{x+5} + 3^{x+6} + 3^{x+7} + 3^{x+8}) + \dots + (3^{x+97} + 3^{x+98} + 3^{x+99} + 3^{x+100})$$

$$= 3^x (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 3^{x+4} (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + 3^{x+96} (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4)$$

$$= 3^x \cdot 120 + 3^{x+4} \cdot 120 + \dots + 3^{x+96} \cdot 120$$

$$= 120(3^x + 3^{x+4} + \dots + 3^{x+96}) : 120 \text{ (đpcm)}$$

Bài 12:

Chứng minh rằng $\sqrt{10}$ là số vô tỉ

Lời giải

Giả sử $\sqrt{10}$ là số hữu tỷ





$$\Rightarrow \sqrt{10} = \frac{a}{b} \text{ (} a, b \text{ là số tự nhiên, } b \text{ khác } 0; (a, b) = 1 \text{)}$$

$$\frac{a^2}{b^2} = 10 \Rightarrow a^2 = 10b^2$$

$$\Rightarrow a:2 \Rightarrow a^2:4 \Rightarrow 10b^2:4 \Rightarrow b^2:2 \Rightarrow b:2$$

Vậy $(a, b) \neq 1$ nên $\sqrt{10}$ là số vô tỷ.

Bài 13: Tìm $n \in \mathbb{Z}$ sao cho $2n - 3 : n + 1$

Lời giải

$$2n - 3 : n + 1 \Leftrightarrow 5 : n + 1 \Rightarrow n + 1 \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$$

$$\Rightarrow n \in \{-6; -2; 0; 4\}$$

Bài 14:

Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Biết $f(1) : 3, f(0) : 3, f(-1) : 3$. Chứng minh a, b, c đều chia hết cho 3

Lời giải

$$\text{Ta có: } f(0) = c, f(1) = a + b + c, f(-1) = a - b + c$$

$$+) f(0) : 3 \Rightarrow c : 3$$

$$+) f(1) : 3 \Rightarrow a + b + c : 3 \Rightarrow a + b : 3 \quad (1)$$

$$+) f(-1) : 3 \Rightarrow a - b + c : 3 \Rightarrow a - b : 3 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } (a + b) + (a - b) : 3 \Rightarrow 2a : 3 \Rightarrow a : 3 \Rightarrow b : 3$$

Vậy a, b, c đều chia hết cho 3.

Bài 15:

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có:

$$5^{n+2} + 3^{n+2} - 3^n - 5^n \text{ chia hết cho } 24$$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} 5^{n+2} + 3^{n+2} - 3^n - 5^n &= (5^{n+2} - 5^n) + (3^{n+2} - 3^n) \\ &= 5^n \cdot 24 + 3^n \cdot 8 \end{aligned}$$



Vì n nguyên dương nên $5^n \cdot 24$ chia hết cho 24; $3^n \cdot 8$ chia hết cho 24

Vậy $5^{n+2} + 3^{n+2} - 3^n - 5^n$ chia hết cho 24 với mọi số nguyên dương n

Bài 16:

Tìm các số nguyên tố p thỏa mãn $2^p + p^2$ là các số nguyên tố

Lời giải

Với $p=2$ thì $2^p + p^2 = 4 + 4 = 8$ không là số nguyên tố

Với $p=3$ thì $2^p + p^2 = 8 + 9 = 17$ là số nguyên tố

Với $p > 3$ thì p là số nguyên tố nên p lẻ nên $2^p = 2^{2k+1} \equiv 2 \pmod{3}$

Và $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$ nên $2^p + p^2 \equiv 3 \pmod{3}$

Mà $2^p + p^2 > 3$ nên $2^p + p^2$ là hợp số

Vậy với $p=3$ thì $2^p + p^2$ là hợp số

Vậy với $p=3$ thì $2^p + p^2$ là số nguyên tố.

Bài 17:

Tìm tất cả các số chính phương có 4 chữ số chia hết cho 153

Lời giải

Gọi số cần tìm là a ($a \in \mathbb{N}^*, 1000 \leq a \leq 9999$)

$$\Rightarrow a = 51^2 \cdot k^2 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow a = 2601 \quad a:153 \Rightarrow \begin{cases} a:5 \\ a:3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3^2 \\ y = 5^2 \end{cases} \Rightarrow a:51^2 \Rightarrow a:2601 \text{ Ta có:}$$

Bài 18:

Chứng minh rằng: Trong 45 số tự nhiên liên tiếp tồn tại 9 số có tổng chia hết cho 45.

Lời giải

Ta có 45 số tự nhiên liên tiếp chia cho 45 ta được các số dư là $0, 1, 2, 3, \dots, 44$

Do $1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$



Suy ra các số chia cho 45 theo thứ tự đư: 1,2,3,...,9 thì tổng của 9 số này chia hết cho 45

Bài 19 :

Chứng tỏ rằng: $M = 75.(4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$ chia hết cho 10^2

Lời giải

$$\begin{aligned} M &= 75.(4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25 \\ &= 25.(4 - 1)(4^{2017} + 4^{2016+\dots} + 4^2 + 4 + 1) + 25 \\ &= 25 \cdot [4(4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) - (4^{2017} + 4^{2016+\dots} + 4^2 + 4 + 1)] + 25 \\ &= 25.(4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4) - 25(4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25 \\ &= 25.4^{2018} - 25 + 25 \\ &= 25.4^{2018} = 25.4.4^{2017} = 100.4^{2017} : 100 \end{aligned}$$

Bài 20:

Cho đa thức $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với a, b, c, d là các hệ số nguyên. Biết rằng, $p(x) : 5$ với mọi x nguyên. Chứng minh rằng a, b, c, d đều chia hết cho 5.

Lời giải

Vì $p(x) : 5$ với mọi x nguyên nên $p(0) = d : 5$

$$p(1) = a + b + c + d : 5 \quad (1)$$

$$p(-1) = -a + b - c + d : 5 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $2(b + d) : 5$ và $2(a + c) : 5$

Vì $2(b + d) : 5$, mà $(2; 5) = 1$ nên $b + d : 5 \Rightarrow b : 5$

$$p(2) = 8a + 4b + 2c + d : 5 \text{ mà } d : 5; b : 5 \text{ nên } 8a + 2c : 5.$$

Kết hợp với $2(a + c) : 5 \Rightarrow 6a : 5 \Rightarrow a : 5$ vì $(6; 5) = 1$. Từ đó suy ra $c : 5$

Vậy a, b, c, d đều chia hết cho 5.



Bài 21:

Chứng minh rằng nếu m và n là các số tự nhiên thì số:

$$A = (5m + n + 1)(3m - n + 4) \text{ là số chẵn}$$

Lời giải

Ta xét hiệu $(5m + n + 1) - (3m - n + 4) = \dots = 2m + 2n - 3$

Với $m, n \in \mathbb{N}$ thì $2m + 2n - 3$ là một số lẻ. Do đó trong hai số $5m + n + 1$ và $3m - n + 4$ phải có một số chẵn. Suy ra tích của chúng là một số chẵn. Vậy A là số chẵn

Bài 22:

Cho đa thức $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với a, b, c, d là các hệ số nguyên. Biết rằng, $p(x) : 5$ với mọi x nguyên. Chứng minh rằng a, b, c, d đều chia hết cho 5

- a) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $p^2 + 2012$ là hợp số
- b) Cho n là số tự nhiên có 2 chữ số. Tìm n biết $n + 4$ và $2n$ đều là các số chính phương.

Lời giải

a) Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p có dạng $p = 3k \pm 1 (k \in \mathbb{N}, k \geq 1)$

Với $p = 3k + 1$

Suy ra $p^2 + 2012 = (3k + 1)^2 + 2012 = 9k^2 + 6k + 2013 \Rightarrow (p^2 + 2012) : 3$

Với $p = 3k - 1$

Suy ra $p^2 + 2012 = (3k - 1)^2 + 2012 = 9k^2 - 6k + 2013 \Rightarrow (p^2 + 2012) : 3$

Vậy $p^2 + 2012$ là hợp số

b) Vì n là số có hai chữ số nên $9 < n < 100 \Rightarrow 18 < 2n < 200$



Mặt khác $2n$ là số chính phương chẵn nên $2n$ có thể nhận các giá trị: 36;64;100; 144;196

Với $2n = 36 \Rightarrow n = 18 \Rightarrow n + 4 = 22$ không là số chính phương

Với $2n = 64 \Rightarrow n = 32 \Rightarrow n + 4 = 36$ là số chính phương

Với $2n = 100 \Rightarrow n = 50 \Rightarrow n + 4 = 54$ không là số chính phương

Với $2n = 144 \Rightarrow n = 72 \Rightarrow n + 4 = 76$ không là số chính phương

Với $2n = 196 \Rightarrow n = 98 \Rightarrow n + 4 = 102$ không là số chính phương

Vậy số cần tìm là $n = 32$

Bài 23:

Cho bốn số nguyên dương khác nhau thỏa mãn tổng của hai số bất kỳ chia hết cho 2 và tổng của ba số bất kỳ chia hết cho 3. Tính giá trị nhỏ nhất của tổng bốn số này

Lời giải

Nhận xét: Bốn số phải cùng số dư khi chia cho 2 và 3. Để có tổng nhỏ nhất, mỗi trong hai số dư này là 1

Từ đó ta có các số 1,7,13,19. Tổng của chúng là $1 + 7 + 13 + 19 = 40$.

Bài 24:

Tìm số tự nhiên n . Biết rằng nếu gạch bỏ đi một chữ số của n thì được số mới nhỏ hơn số n là 2012 đơn vị.

Lời giải

Gọi chữ số bị gạch đi là x , và số mới là m . Nếu x không phải là chữ số tận cùng của n thì số mx và n có cùng chữ số tận cùng. Do đó $n - mx$ tận cùng là 0



$\Rightarrow n - m$ chia hết cho 10 mà 2012 không chia hết cho 10. Vậy x là chữ số tận cùng của n

Ta có: $n = \overline{Ax} \Rightarrow \overline{Ax} - A = 2012 \Leftrightarrow 9A + x = 2012 \Rightarrow 2012 - 10 < 9A \leq 2012$

Mà A là số tự nhiên nên $A = 223 \Rightarrow x = 5$. Vậy $n = 2235$.

Bài 25:

Tìm một số tự nhiên có 3 chữ số, biết rằng nếu tăng chữ số hàng trăm thêm n đơn vị đồng thời giảm chữ số hàng chục và giảm chữ số hàng đơn vị đi n đơn vị thì được một số có 3 chữ số gấp n lần số có 3 chữ số ban đầu.

Lời giải

Gọi số có 3 chữ số cần tìm là \overline{abc} ($a, b, c \in \mathbb{N}, a \neq 0$)

Theo bài ra ta có: $\overline{(a+n)(b-n)(c-n)} = n \cdot \overline{abc}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 100(a+n) + 10(b-n) + (c-n) &= n(100a + 10b + c) \\ \Rightarrow 100a + 100n + 10b - 10n + c - n &= 100an + 10bn + cn \\ \Rightarrow 100(n-1)a + 10(n-1)b + (n-1)c &= 89n \\ \Rightarrow 89n : n-1 \end{aligned}$$

Mà $(89; n-1) = 1$ nên $n : n-1 \Rightarrow n = 2$

Số có 3 chữ số cần tìm là 178.

Bài 26:

Tìm số tự nhiên có ba chữ số. Biết rằng số đó chia hết cho 7 và tổng các chữ số đó bằng 14

Lời giải

Ta có:

$$\overline{abc} : 7 \Leftrightarrow (100a + 10b + c) : 7 \Leftrightarrow (98a + 7b + 2a + 3b + c) : 7 \Leftrightarrow (2a + 3b + c) : 7 \quad (1)$$

Mặt khác theo bài ra:

$$a + b + c = 14 \Rightarrow (a + b + c) : 7 \Rightarrow (2a + 2b + 2c) : 7 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $(b-c) : 7 \Rightarrow (b-c) \in \{-7; 0; 7\}$





$$+) b - c = 7 \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \Rightarrow b = 7, a = 7 \\ c = 1 \Rightarrow b = 8, a = 5 \\ c = 2 \Rightarrow b = 9, a = 3 \end{cases}$$

$$+) b - c = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = c = 6; a = 2 \\ b = c = 5 \Rightarrow a = 4 \\ b = c = 4 \Rightarrow a = 6 \\ b = c = 3 \Rightarrow a = 8 \end{cases}$$

$$+) b - c = -7 \Rightarrow c = b + 7 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \Rightarrow c = 7, a = 7 \\ b = 1 \Rightarrow c = 8, a = 5 \\ b = 2 \Rightarrow c = 9, a = 3 \end{cases}$$

Vậy có 10 số thỏa mãn



CHUYÊN ĐỀ 2: THỰC HIỆN PHÉP TÍNH

Kiến thức cần nhớ

1) Một số tính chất của lũy thừa:

- Nhân, chia hai lũy thừa cùng cơ số

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad (m, n \in \mathbb{N}; m \geq n)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \quad (b \neq 0)$$

- Lũy thừa của một lũy thừa: $(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad (m, n \in \mathbb{N})$
- Lũy thừa của một tích: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad (n \in \mathbb{N})$
- Lũy thừa tầng: $a^{m^n} = a^{(m^n)} \quad (m, n \in \mathbb{N})$

2) Một số công thức đặt thừa số chung

- $ab + ac + ad + \dots + ak = a \cdot (b + c + d + \dots + k)$

$$\frac{a}{x_1} + \frac{a}{x_2} + \dots + \frac{a}{x_n} = a \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)$$

B. Các dạng toán

Dạng 1: Lũy thừa, phối hợp các phép tính

Bài 1

Thực hiện phép tính

a) $1024 : (17 \cdot 2^5 + 15 \cdot 2^5)$

b) $5^3 \cdot 2 + (23 + 4^0) : 2^3$

c) $(5 \cdot 3^5 + 17 \cdot 3^4) : 6^2$

Lời giải

a) Ta có: $1024 : (17 \cdot 2^5 + 15 \cdot 2^5) = 2^{10} : [2^5 (17 + 15)] = 2^{10} : (2^5 \cdot 2^5) = 1$

b) Ta có: $5^3 \cdot 2 + (23 + 4^0) : 2^3 = 5^3 \cdot 2 + 24 : 2^3 = 250 + 3 = 253$

c) Ta có: $(5 \cdot 3^5 + 17 \cdot 3^4) : 6^2 = [3^4 (3 \cdot 5 + 17)] : 3^2 \cdot 2^2 = (3^4 \cdot 32) : 3^2 \cdot 2^2 = \frac{3^4 \cdot 2^5}{3^2 \cdot 2^2} = 9 \cdot 8 = 72$





Bài 2

Thực hiện phép tính

$$1\frac{13}{15} \cdot (0,5)^2 \cdot 3 + \left(\frac{8}{15} - 1\frac{19}{60}\right) : 1\frac{23}{24}$$

Lời giải

Ta có: $1\frac{13}{15} \cdot (0,5)^2 \cdot 3 + \left(\frac{8}{15} - 1\frac{19}{60}\right) : 1\frac{23}{24} = \frac{28}{15} \cdot \frac{1}{4} \cdot 3 + \left(\frac{8}{15} - \frac{79}{60}\right) \cdot \frac{24}{47} = \frac{7}{5} - \frac{2}{5} = 1.$

Bài 3

Thực hiện phép tính

a) $(-8)^2 : \{25 - 18 : [(5^2 + 2^3) : 11 - 2018^0]\}$ b) $(11 \cdot 3^7 \cdot 9^{11} - 9^{15}) : (2 \cdot 3^{14})^2$

Lời giải

a) Ta có: $(-8)^2 : \{25 - 18 : [(5^2 + 2^3) : 11 - 2018^0]\} = 64 : \{25 - 18 : [33 : 11 - 1]\}$
 $= 64 : \{25 - 18 : 2\} = 64 : 16 = 4$

b) Ta có: $(11 \cdot 3^7 \cdot 9^{11} - 9^{15}) : (2 \cdot 3^{14})^2 = (11 \cdot 3^7 \cdot 3^{22} - 3^{30}) : (2^2 \cdot 3^{28}) = (11 \cdot 3^{29} - 3^{30}) : (2^2 \cdot 3^{28})$
 $= 3^{29} \cdot 8 : (2^2 \cdot 3^{28}) = 3^{29} \cdot 2^3 : (2^2 \cdot 3^{28}) = 3 \cdot 2 = 6$

Bài 4

Thực hiện phép tính

$$2^4 + 8 \left[(-2)^2 : \frac{1}{2} \right]^0 - 2^{-2} \cdot 4 + (-2)^2$$

Lời giải

Ta có $2^4 + 8 \left[(-2)^2 : \frac{1}{2} \right]^0 - 2^{-2} \cdot 4 + (-2)^2 = 16 + 8 \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot 4 + 4 = 27$

Bài 5

Thực hiện phép tính

a) $[(3^{14} \cdot 69 + 3^{14} \cdot 12) : 3^{16} - 7] : 2^4$ b) $24^4 : 3^4 - 32^{12} : 16^{12}$

Lời giải

a) Ta có:

$$[(3^{14} \cdot 69 + 3^{14} \cdot 12) : 3^{16} - 7] : 2^4 = [(3^{14} \cdot 3 \cdot 23 + 3^{14} \cdot 3 \cdot 2^2) : 3^{16} - 7] : 2^4$$





$$= \left[(3^{15} \cdot 23 + 3^{15} \cdot 4) : 3^{16} - 7 \right] : 2^4 = \left[3^{15} \cdot 27 : 3^{16} - 7 \right] : 2^4 = (9 - 7) : 2^4 = \frac{1}{2^3}$$

b) Ta có: $24^4 : 3^4 - 32^{12} : 16^{12} = (24 : 3)^4 - (32 : 16)^{12} = 8^4 - 2^{12} = 2^{12} - 2^{12} = 0$

Bài 6

Thực hiện phép tính

$$A = 1000 - \left\{ (-5)^3 \cdot (-2)^3 - 11 \cdot [7^2 - 5 \cdot 2^3 + 8(11^2 - 121)] \right\}$$

Lời giải

Ta có: $A = 1000 - \left\{ (-125) \cdot (-8) - 11 \cdot [49 - 40 + 8 \cdot (121 - 121)] \right\}$
 $= 1000 - [1000 - 11 \cdot (9 + 8 \cdot 0)] = 1000 - (1000 - 11 \cdot 9) = 99$

Bài 7

Thực hiện phép tính

$$A = \left(\frac{-1}{3} \right)^7 \cdot \left(\frac{-1}{3} \right)^9 : \left(\frac{1}{27} \right)^5 - 2^2 \cdot \left(-1 \frac{1}{2} \right)^3 - \frac{2}{9} \cdot \sqrt{(-9)^2}$$

Lời giải

Ta có $A = \left(\frac{-1}{3} \right)^7 \cdot \left(\frac{-1}{3} \right)^9 : \left(\frac{1}{27} \right)^5 - 2^2 \cdot \left(-1 \frac{1}{2} \right)^3 - \frac{2}{9} \cdot \sqrt{(-9)^2}$
 $= \left(\frac{1}{3} \right)^{16} \cdot \frac{3^{15}}{1} - 2^2 \cdot \left(-\frac{3}{2} \right)^3 - \frac{2}{9} \cdot \sqrt{9^2} = \frac{1}{3} + \frac{3^3}{2} - 2 = \frac{71}{6}$

Bài 8

Thực hiện phép tính

a) $A = 1 \frac{13}{15} \cdot (0,5)^2 \cdot 3 + \left(\frac{8}{15} - 1 \frac{19}{60} \right) : 1 \frac{23}{24}$

b) $B = \frac{30 \cdot 4^7 \cdot 3^{29} - 5 \cdot 14^5 \cdot 2^{12}}{54 \cdot 6^{14} \cdot 9^7 - 12 \cdot 8^5 \cdot 7^5}$

Lời giải

a) Ta có: $A = 1 \frac{13}{15} \cdot (0,5)^2 \cdot 3 + \left(\frac{8}{15} - 1 \frac{19}{60} \right) : 1 \frac{23}{24}$
 $= \frac{28}{15} \cdot \frac{1}{4} \cdot 3 + \left(\frac{32}{60} - \frac{79}{60} \right) : \frac{47}{24}$
 $= \frac{7}{5} + \left(\frac{-47}{60} \right) \cdot \frac{24}{47} = \frac{7}{5} + \left(\frac{-2}{5} \right) = 1$

Vậy $A = 1$





$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } B &= \frac{30.4^7.3^{29} - 5.14^5.2^{12}}{54.6^{14}.9^7 - 12.8^5.7^5} = \frac{5.3.2.2^{14}.3^{29} - 5.(2.7)^5.2^{12}}{2.3^3.(2.3)^{14}.3^{14} - 2^2.3.2^{15}.7^5} \\ &= \frac{5.3^{30}.2^{15} - 5.2^{17}.7^5}{2^{15}.3^{31} - 3.2^{17}.7^5} = \frac{5.2^{15}(3^{30} - 2^2.7^5)}{3.2^{15}(3^{30} - 2^2.7^5)} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Vậy $B = \frac{5}{3}$

Bài 9

Thực hiện phép tính

a) $A = \frac{5.4^{15}.9^9 - 4.3^{20}.8^9}{5.2^9.6^{19} - 7.2^{29}.27^6}$

b) $B = \frac{8^5.(-5)^8 + (-2)^5.10^9}{2^{16}.5^7 + 20^8}$ c)

$C = \frac{4^6.9^5 + 6^9.120}{-8^4.3^{12} + 6^{11}}$

Lời giải

a) Ta có $A = \frac{5.4^{15}.9^9 - 4.3^{20}.8^9}{5.2^9.6^{19} - 7.2^{29}.27^6} = \frac{5.2^{30}.3^{18} - 4.3^{20}.2^{27}}{5.2^9.2^{19}.3^{19} - 7.2^{29}.3^{18}} = \frac{2^{29}.3^{18}(5.2.1 - 3^2)}{2^{28}.3^{18}(5.1.3 - 7.2.1)} = 2$

b) Ta có $B = \frac{8^5.(-5)^8 + (-2)^5.10^9}{2^{16}.5^7 + 20^8} = \frac{2^{15}.(-5)^8 + (-2)^5.2^9.5^9}{2^{16}.5^7 + 2^{16}.5^8}$
 $= \frac{2^{15}.5^8 - 2^{14}.5^9}{2^{16}.5^7 + 2^{16}.5^8} = \frac{2^{14}.5^8.(2 - 5)}{2^{16}.5^7.(1 + 5)} = \frac{-5}{8}$

c) Ta có $C = \frac{4^6.9^5 + 6^9.120}{-8^4.3^{12} + 6^{11}} = \frac{(2^2)^6.(3^2)^5 + 2^9.3^9.2^3.3.5}{-(2^3)^4.3^{12} + 2^{11}.3^{11}} = \frac{2^{12}.3^{10} + 2^{12}.3^{10}.5}{-2^{12}.3^{12} + 2^{11}.3^{11}}$
 $= \frac{2^{12}.3^{10}.(1 + 5)}{2^{11}.3^{11}.(1 - 2.3)} = \frac{2.6}{3.(-5)} = \frac{-4}{5}$

Bài 10

Thực hiện phép tính

a) $B = \frac{4^6.9^5 + 6^9.120}{8^4.3^{12} - 6^{11}}$

b) $B = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{-3}{4}\right)^2 \cdot (-1)^{2021}}{36 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(-\frac{5}{12}\right)^3}$



Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } A &= \frac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{8^4 \cdot 3^{12} - 6^{11}} = \frac{(4^5 \cdot 9^5) \cdot 4 + 6^9 \cdot 6 \cdot 20}{2^{12} \cdot 3^{12} - 6^{11}} = \frac{(36^5) \cdot 4 + 6^{10} \cdot 20}{2^{12} \cdot 3^{12} - 6^{11}} = \frac{6^{10} \cdot 4 + 6^{10} \cdot 20}{6^{12} - 6^{11}} \\ &= \frac{6^{10} \cdot 24}{6^{11} \cdot (6 - 1)} = \frac{6^{11} \cdot 4}{6^{11} \cdot 5} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } B &= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{-3}{4}\right)^2 \cdot (-1)^{2021}}{36 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(-\frac{5}{12}\right)^3} = \frac{\frac{2^3 \cdot 3^2}{3^3 \cdot 4^2} \cdot (-1)}{\frac{36 \cdot 2^2 \cdot 5^3}{5 \cdot 5^2 \cdot 12^3}} = \frac{\frac{2^3 \cdot 3^2}{3^3 \cdot 2^4} \cdot (-1)}{\frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2}{12^3}} = \frac{\frac{1}{12} \cdot (-1)}{\frac{1}{12}} = -1 \end{aligned}$$

Bài 11

Thực hiện phép tính

$$\text{a) } A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3}$$

$$\text{b) } B = \frac{2^{10} \cdot 3^6 - 6^5 \cdot 4^3}{12^5 + 2^7 \cdot 18^3} - \frac{3^{10} \cdot 5^9 - 15^9}{45^5 \cdot 25^2 - 15^{10}}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } A &= \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3} \\ &= \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 + 2^{12} \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 5^{10} \cdot 7^4}{5^9 \cdot 7^3 + 5^9 \cdot 2^3 \cdot 7^3} = \frac{2^{12} \cdot 3^4 (3 - 1)}{2^{12} \cdot 3^5 (3 + 1)} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 (1 - 7)}{5^9 \cdot 7^3 (1 + 8)} \\ &= \frac{2}{3 \cdot 4} - \frac{5 \cdot (-6)}{9} = \frac{1}{6} - \frac{-10}{3} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$\text{b) Ta có } B = \frac{2^{10} \cdot 3^6 - 6^5 \cdot 4^3}{12^5 + 2^7 \cdot 18^3} - \frac{3^{10} \cdot 5^9 - 15^9}{45^5 \cdot 25^2 - 15^{10}}$$

$$B = \frac{2^{10} \cdot 3^6 - 2^5 \cdot 3^5 \cdot 2^6}{3^5 \cdot 2^{10} + 2^7 \cdot 2^3 \cdot 3^6} - \frac{3^{10} \cdot 5^9 - 3^9 \cdot 5^9}{5^5 \cdot 3^{10} \cdot 5^4 - 3^{10} \cdot 5^{10}} = \frac{2^{10} \cdot 3^6 - 2^{11} \cdot 3^5}{3^5 \cdot 2^{10} + 2^{10} \cdot 3^6} - \frac{3^{10} \cdot 5^9 - 3^9 \cdot 5^9}{5^9 \cdot 3^{10} - 3^{10} \cdot 5^{10}}$$

$$B = \frac{2^{10} \cdot 3^5 (3 - 2)}{3^5 \cdot 2^{10} (1 + 3)} - \frac{3^9 \cdot 5^9 (3 - 1)}{5^9 \cdot 3^{10} (1 - 5)} = \frac{1}{4} + \frac{2}{12} = \frac{5}{12}$$

Bài 12

Thực hiện phép tính



$$A = \frac{2^{19} \cdot 27^3 \cdot 5 - 15 \cdot (-4)^9 \cdot 9^4}{6^9 \cdot 2^{10} - (-12)^{10}} - \frac{3^{15} \cdot 2^{22} + 6^{16} \cdot 4^4}{2 \cdot 9^9 \cdot 8^7 - 7 \cdot 27^5 \cdot 2^{23}}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{2^{19} \cdot 27^3 \cdot 5 - 15 \cdot (-4)^9 \cdot 9^4}{6^9 \cdot 2^{10} - (-12)^{10}} = \frac{2^{19} \cdot 3^9 \cdot 5 + 2^{18} \cdot 3^9 \cdot 5}{2^{19} \cdot 3^9 - 2^{20} \cdot 3^{10}} = \frac{5 \cdot 3^9 \cdot 2^{18} \cdot 3}{2^{19} \cdot 3^9 \cdot (-5)} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{3^{15} \cdot 2^{22} + 6^{16} \cdot 4^4}{2 \cdot 9^9 \cdot 8^7 - 7 \cdot 27^5 \cdot 2^{23}} = \frac{3^{15} \cdot 2^{22} + 2^{24} \cdot 3^{16}}{2^{22} \cdot 3^{18} - 7 \cdot 3^{15} \cdot 2^{23}} = \frac{2^{22} \cdot 3^{15} (1 + 2^2 \cdot 3)}{2^{22} \cdot 3^{15} (3^3 - 7 \cdot 2)} = \frac{13}{-5} = -\frac{13}{5}$$

$$\text{Vậy } A = -\frac{3}{2} - \frac{-13}{5} = \frac{-15 + 26}{10} = \frac{11}{10}$$

Bài 13

Thực hiện phép tính

a) $\frac{11 \cdot 3^{22} \cdot 3^7 - 9^{15}}{(2 \cdot 3^{14})^2}$

b) $\frac{2^{10} \cdot 3^{10} - 2^{10} \cdot 3^9}{2^9 \cdot 3^{10}}$

c) $\frac{4^5 \cdot 9^4 - 2 \cdot 6^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 6^8 \cdot 20}$

Lời giải

a) Ta có: $\frac{11 \cdot 3^{22} \cdot 3^7 - 9^{15}}{(2 \cdot 3^{14})^2} = \frac{11 \cdot 3^{29} - 3^{30}}{2^2 \cdot 3^{28}} = \frac{3^{29} \cdot (11 - 3)}{2^2 \cdot 3^{28}} = \frac{3 \cdot 8}{4} = 6$

b) Ta có: $\frac{2^{10} \cdot 3^{10} - 2^{10} \cdot 3^9}{2^9 \cdot 3^{10}} = \frac{2^{10} \cdot 3^9 (3 - 1)}{2^9 \cdot 3^{10}} = \frac{2 \cdot 2}{3} = \frac{4}{3}$

c) Ta có: $\frac{4^5 \cdot 9^4 - 2 \cdot 6^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 6^8 \cdot 20} = \frac{2^{10} \cdot 3^8 - 2^{10} \cdot 3^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 2^{10} \cdot 3^8 \cdot 5} = \frac{2^{10} \cdot 3^8 (1 - 3)}{2^{10} \cdot 3^8 (1 + 5)} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$

Bài 14

Thực hiện phép tính

a) $\frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3}$

b) $\frac{2^{18} \cdot 18^7 \cdot 3^3 + 3^{15} \cdot 2^{15}}{2^{10} \cdot 6^{15} + 3^{14} \cdot 15 \cdot 4^{13}}$

c) $\frac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{8^4 \cdot 3^{12} - 6^{11}}$

Lời giải

a) Ta có: $\frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3} = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - (2^2)^6 \cdot (3^2)^2}{2^{12} \cdot 3^6} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - (5^2)^5 \cdot (7^2)^2}{(5^3)^3 \cdot 7^3 + 5^9 \cdot 2^3 \cdot 7^3}$

$$= \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 5^{10} \cdot 7^4}{5^9 \cdot 7^3 + 5^9 \cdot 2^3 \cdot 7^3} = \frac{2^{12} \cdot 3^4 (3 - 1)}{2^{12} \cdot 3^6} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 (1 - 7)}{5^9 \cdot 7^3 (1 + 8)} = \frac{2}{3^2} - \frac{5 \cdot 6}{9} = -\frac{28}{9}$$





$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } \frac{2^{18} \cdot 18^7 \cdot 3^3 + 3^{15} \cdot 2^{15}}{2^{10} \cdot 6^{15} + 3^{14} \cdot 15 \cdot 4^{13}} &= \frac{2^{18} \cdot 2^7 \cdot 3^{14} \cdot 3^3 + 3^{15} \cdot 2^{15}}{2^{10} \cdot 2^{15} \cdot 3^{15} + 3^{14} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^{28}} = \frac{2^{25} \cdot 3^{17} + 3^{15} \cdot 2^{15}}{2^{25} \cdot 3^{15} + 3^{15} \cdot 2^{26} \cdot 5} \\ &= \frac{2^{15} \cdot 3^{15} (2^{10} \cdot 3^2 + 1)}{2^{25} \cdot 3^{15} (1 + 2.5)} = \frac{(2^{10} \cdot 3^2 + 1)}{2^{10} \cdot 11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) Ta có: } \frac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{8^4 \cdot 3^{12} - 6^{11}} &= \frac{(2^2)^6 \cdot (3^2)^5 + 2^9 \cdot 3^9 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 5}{(2^3)^4 \cdot 3^{12} - 2^{11} \cdot 3^{11}} = \frac{2^{12} \cdot 3^{10} + 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5}{2^{12} \cdot 3^{12} - 2^{11} \cdot 3^{11}} \\ &= \frac{2^{12} \cdot 3^{10} (1 + 5)}{2^{11} \cdot 3^{11} (2.3 - 1)} = \frac{2.6}{3.5} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Bài 15

Thực hiện phép tính

$$\text{a) } \frac{15 \cdot 4^{12} \cdot 9^7 - 4 \cdot 3^{15} \cdot 8^8}{19 \cdot 2^{24} \cdot 3^{14} - 6 \cdot 4^{12} \cdot 27^5} \quad \text{b) } \frac{3^{15} \cdot 2^{22} + 6^{16} \cdot 4^4}{2 \cdot 9^9 \cdot 8^7 - 7 \cdot 27^5 \cdot 2^{23}} \quad \text{c) } \frac{16^3 \cdot 3^{10} + 120 \cdot 6^9}{4^6 \cdot 3^{12} + 6^{11}}$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } \frac{15 \cdot 4^{12} \cdot 9^7 - 4 \cdot 3^{15} \cdot 8^8}{19 \cdot 2^{24} \cdot 3^{14} - 6 \cdot 4^{12} \cdot 27^5} = \frac{5 \cdot 2^{24} \cdot 3^{15} - 2^{26} \cdot 3^{15}}{19 \cdot 2^{24} \cdot 3^{14} - 2^{25} \cdot 3^{16}} = \frac{2^{24} \cdot 3^{15} (5 - 2^2)}{2^{24} \cdot 3^{24} (19 - 2 \cdot 3^2)} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\text{b) Ta có: } \frac{3^{15} \cdot 2^{22} + 6^{16} \cdot 4^4}{2 \cdot 9^9 \cdot 8^7 - 7 \cdot 27^5 \cdot 2^{23}} = \frac{3^{15} \cdot 2^{22} + 2^{24} \cdot 3^{16}}{2^{22} \cdot 3^{18} - 7 \cdot 3^{15} \cdot 2^{23}} = \frac{2^{22} \cdot 3^{15} (1 + 2^2 \cdot 3)}{2^{22} \cdot 3^{15} (3^3 - 7 \cdot 2)} = \frac{13}{-5} = \frac{-13}{5}$$

$$\text{c) Ta có: } \frac{(2^4)^3 \cdot 3^{10} + 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3)^9}{(2^2)^6 \cdot 3^{12} + (2 \cdot 3)^{11}} = \frac{2^{12} \cdot 3^{10} + 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5}{2^{12} \cdot 3^{12} + 2^{11} \cdot 3^{11}} = \frac{2^{12} \cdot 3^{10} (1 + 5)}{2^{11} \cdot 3^{11} (2.3 + 1)} = \frac{2.6}{3.7} = \frac{12}{21}$$

Bài 16

Thực hiện phép tính

$$\text{a) } A = \frac{3^{11} \cdot 11 + 3^{11} \cdot 21}{3^9 \cdot 2^5} \quad \text{b) } B = \frac{75 \cdot 5^4 + 175 \cdot 5^4}{20 \cdot 25 \cdot 125 - 625 \cdot 75} \quad \text{c) } C = \frac{(3 \cdot 4 \cdot 2^{16})^2}{11 \cdot 2^{13} \cdot 4^{11} - 16^9}$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } A = \frac{3^{11} \cdot 11 + 3^{11} \cdot 21}{3^9 \cdot 2^5} = \frac{3^{11} (11 + 21)}{3^9 \cdot 2^5} = \frac{3^{11} \cdot 32}{3^9 \cdot 32} = \frac{3^2}{1} = 9.$$

$$\text{b) Ta có: } B = \frac{75 \cdot 5^4 + 175 \cdot 5^4}{20 \cdot 25 \cdot 125 - 625 \cdot 75} = \frac{3 \cdot 5^2 \cdot 5^4 + 5^2 \cdot 7 \cdot 5^4}{2^2 \cdot 5 \cdot 5^2 \cdot 5^3 - 5^4 \cdot 3 \cdot 5^2} = \frac{3 \cdot 5^6 + 7 \cdot 5^6}{2^2 \cdot 5^6 - 3 \cdot 5^6} = \frac{5^6 \cdot 10}{5^6} = 10$$

$$\text{c) Ta có: } C = \frac{(3 \cdot 4 \cdot 2^{16})^2}{11 \cdot 2^{13} \cdot 4^{11} - 16^9} = \frac{3^2 \cdot 2^{36}}{11 \cdot 2^{35} - 2^{36}} = \frac{3^2 \cdot 2^{36}}{2^{35} (11 - 2)} = \frac{3^2 \cdot 2^{36}}{2^{35} \cdot 9} = 2$$





Bài 17

Thực hiện phép tính

a) $A = \frac{5.4^{15}.9^9 - 4.3^{20}.8^9}{5.2^9.6^{19} - 7.2^{29}.27^6}$

b) $B = \frac{5^{10}.7^3 - 25^5.49^2}{(125.7)^3 + 5^9.14^3}$

Lời giải

a) Ta có: $A = \frac{5.4^{15}.9^9 - 4.3^{20}.8^9}{5.2^9.6^{19} - 7.2^{29}.27^6} = \frac{5.2^{30}.3^{18} - 2^2.3^{20}.2^{27}}{5.2^{28}.3^{19} - 7.2^{29}.3^{18}} = \frac{2^{29}.3^{18}(10 - 9)}{2^{28}.3^{18}(15 - 14)} = \frac{2^{29}.3^{18}}{2^{28}.3^{18}} = 2$

b) Ta có: $B = \frac{5^{10}.7^3 - 25^5.49^2}{(125.7)^3 + 5^9.14^3} = \frac{5^{10}.7^3 - 5^{10}.7^4}{5^9.7^3 + 5^9.7^3.2^3} = \frac{5^{10}.7^3(1 - 7)}{5^9.7^3(1 + 2^3)} = \frac{5.(-6)}{9} = \frac{-10}{3}$

Bài 18

Thực hiện phép tính

a) $A = \frac{5.7^{11} + 7^{12}}{7^9.5^2 - 13.7^9}$

b) $B = \frac{5.4^{15}.9^9 - 4.3^{20}.8^9}{5.2^9.6^{19} - 7.2^{29}.27^6}$

Lời giải

a) Ta có: $A = \frac{5.7^{11} + 7^{12}}{7^9.5^2 - 13.7^9} = \frac{7^{11}(5 + 7)}{7^9(5^2 - 13)} = \frac{7^{11}.12}{7^9.12} = 7^2 = 49$

b) Ta có: $B = \frac{5.4^{15}.9^9 - 4.3^{20}.8^9}{5.2^9.6^{19} - 7.2^{29}.27^6} = \frac{5.2^{30}.3^{18} - 2^2.3^{20}.2^{27}}{5.2^9.2^{19}.3^{19} - 7.2^{29}.3^{18}} = \frac{2^{29}.3^{18}(5.2 - 3^2)}{2^{28}.3^{18}(5.3 - 7.2)} = \frac{2.1.1}{1.1.1} = 2$

Dạng 2: Tính nhanh

Bài 1

Thực hiện phép tính

a) $A = \frac{0,4 - \frac{2}{7} + \frac{2}{11}}{0,6 - \frac{3}{7} + \frac{3}{11}} - \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10}}{\frac{3}{6} - \frac{3}{8} + 0,3}$ b)

$B = \frac{-1,2 : \left(1\frac{3}{5} \cdot 1,25\right)}{0,64 - \frac{1}{25}} + \frac{\left(1,08 - \frac{2}{25}\right) : \frac{4}{7}}{\left(5\frac{5}{9} - \frac{9}{4}\right) \cdot \frac{36}{17}} + 0,6.0,5 : \frac{2}{5}$

Lời giải



$$\text{a) Ta có } A = \frac{0,4 - \frac{2}{7} + \frac{2}{11} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10}}{0,6 - \frac{3}{7} + \frac{3}{11} - \frac{3}{6} - \frac{3}{8} + 0,3} = \frac{\frac{2}{5} - \frac{2}{7} + \frac{2}{11} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10}}{\frac{3}{5} - \frac{3}{7} + \frac{3}{11} - \frac{3}{6} - \frac{3}{8} + \frac{3}{10}}$$

$$= \frac{2\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10}}{3\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10}} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{b) Ta có } B = \frac{-1,2 : \left(1\frac{3}{5} \cdot 1,25\right) + \left(1,08 - \frac{2}{25}\right) : \frac{4}{7}}{0,64 - \frac{1}{25} + \left(5\frac{5}{9} - \frac{9}{4}\right) \cdot \frac{36}{17}} + 0,6 \cdot 0,5 : \frac{2}{5}$$

$$= \frac{\frac{-6}{5} : \left(\frac{8}{5} \cdot \frac{5}{4}\right) + \left(\frac{27}{25} - \frac{2}{25}\right) : \frac{4}{7}}{\frac{16}{25} - \frac{1}{25} + \left(\frac{50}{9} - \frac{9}{4}\right) \cdot \frac{36}{17}} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} : \frac{2}{5} = \frac{-6}{5} : 2 + \frac{1 : \frac{4}{7}}{\frac{119}{36} \cdot \frac{36}{17}} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2}$$

$$= \frac{-3}{\frac{5}{3}} + \frac{7}{4} + \frac{3}{4} = -1 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 0$$

Bài 2

Thực hiện phép tính

$$A = \left(\frac{0,4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11} - \frac{1}{3} - 0,25 + \frac{1}{5}}{1,4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11} - 1\frac{1}{6} - 0,875 + 0,7} \right) : \frac{2018}{2019}$$

Lời giải

$$\text{Ta có } A = \left(\frac{0,4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11} - \frac{1}{3} - 0,25 + \frac{1}{5}}{1,4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11} - 1\frac{1}{6} - 0,875 + 0,7} \right) : \frac{2018}{2019} = \left(\frac{\frac{2}{5} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{9} + \frac{7}{11} - \frac{7}{6} - \frac{7}{8} + \frac{7}{10}} \right) : \frac{2018}{2019}$$

$$A = \left(\frac{\frac{2}{5} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{9} + \frac{7}{11} - \frac{7}{6} - \frac{7}{8} + \frac{7}{10}} \right) : \frac{2018}{2019} = \left(\frac{2\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{7\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) - \frac{7}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)} \right) : \frac{2018}{2019}$$



$$A = \left(\frac{2}{7} - \frac{2}{7}\right) : \frac{2018}{2019} = 0$$

Bài 3

Thực hiện phép tính

$$\frac{\frac{1}{2003} + \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005}}{\frac{5}{2003} + \frac{5}{2004} - \frac{5}{2005}} - \frac{\frac{2}{2002} + \frac{2}{2003} - \frac{2}{2004}}{\frac{3}{2002} + \frac{3}{2003} - \frac{3}{2004}}$$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{\frac{1}{2003} + \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005}}{\frac{5}{2003} + \frac{5}{2004} - \frac{5}{2005}} - \frac{\frac{2}{2002} + \frac{2}{2003} - \frac{2}{2004}}{\frac{3}{2002} + \frac{3}{2003} - \frac{3}{2004}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2003} + \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005}}{5 \left(\frac{1}{2003} + \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005}\right)} - \frac{2 \left(\frac{1}{2002} + \frac{1}{2003} - \frac{1}{2004}\right)}{3 \left(\frac{1}{2002} + \frac{1}{2003} - \frac{1}{2004}\right)} = \frac{1}{5} - \frac{2}{3} = \frac{-7}{15}$$

Bài 4

Thực hiện phép tính

$$\left(\frac{1,5 + 1 - 0,75}{2,5 + \frac{5}{3} - 1,25} + \frac{0,375 - 0,3 + \frac{3}{11} + \frac{3}{12}}{-0,625 + 0,5 - \frac{5}{11} - \frac{5}{12}} \right) : \frac{1890}{2005} + 115$$

Lời giải

Ta có:

$$\left(\frac{1,5 + 1 - 0,75}{2,5 + \frac{5}{3} - 1,25} + \frac{0,375 - 0,3 + \frac{3}{11} + \frac{3}{12}}{-0,625 + 0,5 - \frac{5}{11} - \frac{5}{12}} \right) : \frac{1890}{2005} + 115$$

$$= \left(\frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{3} - \frac{3}{4}}{\frac{5}{2} + \frac{5}{3} - \frac{5}{4}} + \frac{\frac{3}{8} - \frac{3}{10} + \frac{3}{11} + \frac{3}{12}}{\frac{-5}{8} + \frac{5}{10} - \frac{5}{11} - \frac{5}{12}} \right) : \frac{378}{401} + 115 =$$

$$\left(\frac{3}{5} + \frac{3}{-5} \right) : \frac{378}{401} + 115 = 0 : \frac{378}{401} + 115 = 115$$



Bài 5

Thực hiện phép tính

$$a) \frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11}}{\frac{4}{9} - \frac{4}{7} - \frac{4}{11}} + \frac{0,6 - \frac{3}{25} - \frac{3}{125} - \frac{3}{625}}{\frac{4}{5} - 0,16 - \frac{4}{125} - \frac{4}{625}} \quad b)$$

$$564. \left(\frac{12 + \frac{12}{7} - \frac{12}{25} - \frac{12}{71}}{4 + \frac{4}{7} - \frac{4}{25} - \frac{4}{71}} : \frac{3 + \frac{3}{13} + \frac{3}{19} + \frac{3}{101}}{5 + \frac{5}{13} + \frac{5}{19} + \frac{5}{101}} \right)$$

Lời giải

$$a) \text{Ta có: } \frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11}}{\frac{4}{9} - \frac{4}{7} - \frac{4}{11}} + \frac{0,6 - \frac{3}{25} - \frac{3}{125} - \frac{3}{625}}{\frac{4}{5} - 0,16 - \frac{4}{125} - \frac{4}{625}} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

$$b) \text{Ta có: } 564. \left(\frac{12 + \frac{12}{7} - \frac{12}{25} - \frac{12}{71}}{4 + \frac{4}{7} - \frac{4}{25} - \frac{4}{71}} : \frac{3 + \frac{3}{13} + \frac{3}{19} + \frac{3}{101}}{5 + \frac{5}{13} + \frac{5}{19} + \frac{5}{101}} \right) = 564. \left(\frac{12}{4} : \frac{3}{5} \right) = 564.5 = 2820$$

Bài 6

Thực hiện phép tính

$$a) \frac{\left(\frac{-5}{7} - \frac{7}{9} + \frac{9}{11} - \frac{11}{13} \right) \left(3 - \frac{3}{4} \right)}{\left(\frac{10}{21} + \frac{14}{27} - \frac{18}{11} + \frac{22}{39} \right) : \left(2 - \frac{2}{3} \right)} \quad b) \frac{3 + \frac{3}{7} - \frac{3}{11} + \frac{3}{1001} - \frac{3}{13}}{\frac{9}{1001} - \frac{9}{13} + \frac{9}{7} - \frac{9}{11} + 9}$$

Lời giải

$$a) \text{Ta có: } \frac{\left(\frac{-5}{7} - \frac{7}{9} + \frac{9}{11} - \frac{11}{13} \right) \left(3 - \frac{3}{4} \right)}{\left(\frac{10}{21} + \frac{14}{27} - \frac{6}{11} + \frac{22}{39} \right) : \left(2 - \frac{2}{3} \right)} = \frac{-\left(\frac{5}{7} + \frac{7}{9} - \frac{9}{11} + \frac{11}{13} \right) \cdot \frac{9}{4}}{\frac{2}{3} \left(\frac{5}{7} + \frac{7}{9} - \frac{9}{11} + \frac{11}{13} \right) : \frac{4}{3}} = \frac{-9}{\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}} = \frac{-9}{\frac{8}{9}} = \frac{-9}{4} : \frac{1}{2} = \frac{-9}{2}$$

$$b) \text{Ta có: } \frac{3 + \frac{3}{7} - \frac{3}{11} + \frac{3}{1001} - \frac{3}{13}}{\frac{9}{1001} - \frac{9}{13} + \frac{9}{7} - \frac{9}{11} + 9} = \frac{3 \left(1 + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{1001} - \frac{1}{13} \right)}{9 \left(1 + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{1001} - \frac{1}{13} \right)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Bài 7

Thực hiện phép tính





$$\frac{24.47 - 23}{24 + 47.23} \cdot \frac{3 + \frac{3}{7} - \frac{3}{11} + \frac{3}{1001} - \frac{3}{13}}{\frac{1001}{9} - \frac{13}{9} + \frac{9}{7} - \frac{9}{11} + 9}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{24.47 - 23}{24 + 47.23} = \frac{47(23 + 1) - 23}{47.23 + 24} = \frac{47.23 + 24}{47.23 + 24} = 1$$

$$\text{và } \frac{3 \left(1 + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{1001} - \frac{1}{13} \right)}{9 \left(1 + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{1001} - \frac{1}{13} \right)} = \frac{3}{9} \Rightarrow A = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Bài 8

Thực hiện phép tính

$$A = \frac{2 - \frac{2}{19} + \frac{2}{43} - \frac{2}{1943}}{3 - \frac{3}{19} + \frac{3}{43} - \frac{3}{1943}} : \frac{4 - \frac{4}{19} + \frac{4}{41} - \frac{4}{2941}}{5 - \frac{5}{19} + \frac{5}{41} - \frac{5}{2941}}$$

Lời giải

$$\text{Ta có } A = \frac{2 \left(1 - \frac{1}{19} + \frac{1}{43} - \frac{1}{1943} \right)}{3 \left(1 - \frac{1}{19} + \frac{1}{43} - \frac{1}{1943} \right)} : \frac{4 \left(1 - \frac{1}{19} + \frac{1}{41} - \frac{1}{2941} \right)}{5 \left(1 - \frac{1}{19} + \frac{1}{41} - \frac{1}{2941} \right)} = \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{6}$$

Bài 9

Thực hiện phép tính

$$M = \left(\frac{0,4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{1,4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - 0,25 + \frac{1}{5}}{1\frac{1}{6} - 0,875 + 0,7} \right) : \frac{2014}{2015}$$

Lời giải

$$\text{Ta có } M = \left(\frac{0,4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{1,4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - 0,25 + \frac{1}{5}}{1\frac{1}{6} - 0,875 + 0,7} \right) : \frac{2014}{2015} = \left(\frac{\frac{2}{5} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{\frac{7}{6} - \frac{7}{8} + \frac{7}{10}} \right) : \frac{2014}{2015}$$



$$\left(\frac{2 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \right) - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{7 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \right) - \frac{7}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right)} \right) : \frac{2014}{2015} = \left(\frac{2}{7} - \frac{2}{7} \right) : \frac{2014}{2015} = 0$$

Bài 10

Thực hiện phép tính

$$A = \left[\left(\frac{2}{193} - \frac{3}{386} \right) \cdot \frac{193}{17} + \frac{33}{34} \right] : \left[\left(\frac{7}{1931} + \frac{11}{3862} \right) \cdot \frac{1931}{25} + \frac{9}{2} \right]$$

Lời giải

Ta có $\left(\frac{2}{193} - \frac{3}{386} \right) \cdot \frac{193}{17} + \frac{33}{34} = \frac{2}{193} \cdot \frac{193}{17} - \frac{3}{386} \cdot \frac{193}{17} + \frac{33}{34} = \frac{2}{17} - \frac{2}{34} + \frac{33}{34} = 1$

Và $\left(\frac{7}{1931} + \frac{11}{3862} \right) \cdot \frac{1931}{25} + \frac{9}{2} = \frac{7}{1931} \cdot \frac{1931}{25} + \frac{11}{3862} \cdot \frac{1931}{25} + \frac{9}{2} = \frac{7}{25} + \frac{11}{50} + \frac{9}{2} = 5$

$$\Rightarrow A = 1 : 5 = \frac{1}{5}$$

Bài 11

Thực hiện phép tính

$$A = \frac{0,375 - 0,3 + \frac{3}{11} + \frac{3}{12}}{-0,265 + 0,5 - \frac{5}{11} - \frac{5}{12}} + \frac{1,5 + 1 - 0,75}{2,5 + \frac{5}{3} - 1,25}$$

Lời giải

Ta có $A = \frac{0,375 - 0,3 + \frac{3}{11} + \frac{3}{12}}{-0,265 + 0,5 - \frac{5}{11} - \frac{5}{12}} + \frac{1,5 + 1 - 0,75}{2,5 + \frac{5}{3} - 1,25} = \frac{\frac{3}{8} - \frac{3}{10} + \frac{3}{11} + \frac{3}{12}}{-\frac{53}{100} + \frac{5}{10} - \frac{5}{11} - \frac{5}{12}} + \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{3} - \frac{3}{4}}{\frac{5}{2} + \frac{5}{3} - \frac{5}{4}}$

$$= \frac{3 \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} \right)}{-\frac{53}{100} - 5 \left(-\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} \right)} + \frac{3 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)}{5 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)} = \frac{3 \left(\frac{165 - 132 + 120 + 110}{1320} \right)}{\frac{-53}{100} - 5 \left(\frac{-66 + 60 + 55}{660} \right)} + \frac{3}{5}$$

$$= \frac{3 \cdot \frac{263}{1320}}{\frac{-53}{100} - 5 \cdot \frac{49}{660}} + \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot \frac{263}{1320}}{\frac{-1749 - 1225}{3300}} + \frac{3}{5} = \frac{3945}{-5948} + \frac{3}{5} = \frac{-1881}{29740}$$

Bài 12

Thực hiện phép tính



$$B = \frac{0,5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{0,5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0,2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3,5}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } B = \frac{0,5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{0,5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0,2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3,5} = \frac{\frac{3}{6} - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - \frac{7}{2}}$$

$$\Rightarrow B = \frac{3 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{17} + \frac{1}{37} \right)}{5 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{17} + \frac{1}{37} \right)} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{-7 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right)} = \frac{3}{5} - \frac{1}{7} = \frac{16}{35}$$

Bài 13

Thực hiện phép tính

$$A = \frac{(1 + 2 + 3 + \dots + 100) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) (63.1,2 - 21.3,6)}{1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 99 - 100}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 63.1,2 - 21.3,6 = 0 \Rightarrow A = \frac{(1 + 2 + 3 + \dots + 100) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) (63.1,2 - 21.3,6)}{1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 99 - 100} = 0$$

Bài 14

Thực hiện phép tính

$$\frac{\frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{2}{3} - \left(\frac{5}{6} \right)^2}{\frac{7}{60} : \left(\frac{35}{31.37} + \frac{35}{37.43} + \frac{105}{43.61} + \frac{35}{61.67} \right)}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } TS = \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{2}{3} - \frac{25}{36} = \frac{8}{3} - \frac{25}{36} = \frac{71}{36}$$

$$MS = \frac{7}{60} : \left(\frac{5.7}{31.37} + \frac{5.7}{37.43} + \frac{3.5.7}{43.61} + \frac{5.7}{61.67} \right) = \frac{7}{60} : \left[\frac{35}{6} \left(\frac{6}{31.37} + \frac{6}{37.43} + \frac{18}{43.61} + \frac{6}{61.67} \right) \right]$$



$$MS = \frac{7}{60} : \left[\frac{35}{6} \left(\frac{1}{31} - \frac{1}{37} + \frac{1}{37} - \frac{1}{43} + \frac{1}{43} - \frac{1}{61} + \frac{1}{61} - \frac{1}{67} \right) \right]$$

$$MS = \frac{7}{60} : \left[\frac{35}{6} \left(\frac{1}{31} - \frac{1}{67} \right) \right] = \frac{2077}{1800} \Rightarrow B = \frac{71}{36} : \frac{2077}{1800}$$

Bài 15

Thực hiện phép tính

$$B = \left(\frac{0,4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11} - \frac{1}{3} - 0,25 + \frac{1}{5}}{1,4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11} - 1\frac{1}{6} - 0,875 + 0,7} \right) : \frac{2020}{2021}$$

Lời giải

$$\text{Ta có } B = \left(\frac{0,4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11} - \frac{1}{3} - 0,25 + \frac{1}{5}}{1,4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11} - 1\frac{1}{6} - 0,875 + 0,7} \right) : \frac{2020}{2021}$$

$$B = \left(\frac{\frac{2}{5} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{9} + \frac{7}{11} - \frac{7}{6} - \frac{7}{8} + \frac{7}{10}} \right) : \frac{2020}{2021} = \left(\frac{2 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \right) - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{7 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \right) - \frac{7}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right)} \right) : \frac{2020}{2021}$$

$$B = \left(\frac{2}{7} - \frac{2}{7} \right) : \frac{2020}{2021} = 0$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1

Tính giá trị của biểu thức sau $B = \frac{8^5 \cdot (-5)^8 + (-2)^5 \cdot 10^9}{2^{16} \cdot 5^7 + 20^8}$

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \frac{8^5 \cdot (-5)^8 + (-2)^5 \cdot 10^9}{2^{16} \cdot 5^7 + 20^8} = \frac{2^{15} \cdot 5^8 + (-1 \cdot 2)^5 \cdot 2^9 \cdot 5^9}{2^{16} \cdot 5^7 + 2^{16} \cdot 5^8} = \frac{2^{15} \cdot 5^8 - 2^{14} \cdot 5^9}{2^{16} \cdot 5^7 + 2^{16} \cdot 5^8} \\ &= \frac{2^{14} \cdot 5^8 (2 - 5)}{2^{16} \cdot 5^7 (1 + 5)} = \frac{5 \cdot (-3)}{2^2 \cdot (1 + 5)} = \frac{-5}{8} \end{aligned}$$



Bài 2

Tính giá trị của biểu thức sau $A = \frac{16^3 \cdot 3^{10} + 120 \cdot 6^9}{4^6 \cdot 3^{12} + 6^{12}}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } A &= \frac{16^3 \cdot 3^{10} + 120 \cdot 6^9}{4^6 \cdot 3^{12} + 6^{12}} = \frac{(2^4)^3 \cdot 3^{10} + 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3)^9}{(2^2)^6 \cdot 3^{12} + (2 \cdot 3)^{12}} \\ &= \frac{2^{12} \cdot 3^{10} + 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5}{2^{12} \cdot 3^{12} + 2^{12} \cdot 3^{12}} = \frac{2^{12} \cdot 3^{10} (1 + 5)}{2^{12} \cdot 3^{12} \cdot 2} = \frac{2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 6}{2^{12} \cdot 3^{12} \cdot 2} = \frac{2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 2}{2^{12} \cdot 3^{12} \cdot 2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Bài 3

Thực hiện phép tính

$$\text{a) } C = \left[6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{-1}{3}\right) + 1 \right] : \left(-1 - \frac{1}{3}\right) \qquad \text{b) } D = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2 \cdot (-1)^{2020}}{36 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(-\frac{5}{12}\right)^3}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } C &= \left[6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{-1}{3}\right) + 1 \right] : \left(-1 - \frac{1}{3}\right) \\ &= \left[6 \cdot \frac{1}{9} - 3 \cdot \left(\frac{-1}{3}\right) + 1 \right] : \left(-1 - \frac{1}{3}\right) = \left[\frac{2}{3} + 1 + 1 \right] : \left(-1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3} : \left(\frac{-4}{3}\right) = \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{-3}{4}\right) = -2 \\ \text{b) } D &= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2 \cdot (-1)^{2020}}{36 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(-\frac{5}{12}\right)^3} = \frac{\frac{2^3}{3^3} \cdot \frac{3^2}{2^4} \cdot 1}{2^2 \cdot 3^2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2^2}{5^2} \cdot \left(-\frac{5}{2^6 \cdot 3^3}\right)^3} = \frac{\frac{1}{2 \cdot 3}}{-\frac{1}{2^2 \cdot 3}} = \frac{1}{-2 \cdot 3} \cdot \frac{2^2 \cdot 3}{1} = -2 \end{aligned}$$

Bài 4

Thực hiện phép tính

$$\text{a) } \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} + \frac{3}{13}}{\frac{11}{4} - \frac{11}{5} + \frac{11}{7} + \frac{11}{13}} : \frac{\frac{3}{5} - \frac{3}{9} + \frac{3}{11}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} \qquad \text{b) } \left[\frac{4}{13} \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^0 + \frac{9}{26} \cdot 2 \right]^{2000} - \left(\frac{-1}{2^2} : \frac{8^2}{4^4}\right)^{2021}$$

Lời giải



a) Ta có
$$\frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} + \frac{3}{13}}{\frac{11}{4} - \frac{11}{5} + \frac{11}{7} + \frac{11}{13}} : \frac{\frac{3}{5} - \frac{3}{9} + \frac{3}{11}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{9} + \frac{3}{11}} = \frac{3 \cdot (\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13})}{11 \cdot (\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13})} : \frac{3 \cdot (\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11})}{7 \cdot (\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11})}$$

$$= \frac{3}{11} : \frac{3}{7} = \frac{3}{11} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7}{11}$$

b) Ta có
$$\left[\frac{4}{13} \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^0 + \frac{9}{26} \cdot 2 \right]^{2020} - \left(\frac{-1}{2^2} : \frac{8^2}{4^4} \right)^{2021} = \left[\frac{4}{13} + \frac{9}{13} \right]^{2020} - \left(\frac{-1}{2^2} \cdot \frac{4^4}{8^2} \right)^{2021}$$

$$= 1^{2020} - \left(\frac{-1}{2^2} \cdot \frac{2^8}{2^6} \right)^{2021} = 1 - (-1)^{2021} = 1 + 1 = 2$$

Bài 5

Thực hiện phép tính

a) $A = \frac{4^5 \cdot 9^4 - 2 \cdot 6^9}{2^{10} 3^8 + 6^8 \cdot 20}$

b) $B = \frac{3}{14} : \frac{1}{28} - \frac{13}{21} : \frac{1}{28} + \frac{29}{42} : \frac{1}{28} - 8$

Lời giải

a) Ta có: $A = \frac{4^5 \cdot 9^4 - 2 \cdot 6^9}{2^{10} 3^8 + 6^8 \cdot 20} = \frac{2^{10} \cdot 3^8 - 2 \cdot (2 \cdot 3)^9}{2^{10} 3^8 + (2 \cdot 3)^8 \cdot 2^2 \cdot 5}$

$$= \frac{2^{10} \cdot 3^8 - 2^{10} \cdot 3^9}{2^{10} 3^8 + 2^{10} \cdot 3^8 \cdot 5} = \frac{2^{10} 3^8 (1 - 3)}{2^{10} 3^8 (1 + 5)} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$$

b) Ta có: $B = \frac{3}{14} : \frac{1}{28} - \frac{13}{21} : \frac{1}{28} + \frac{29}{42} : \frac{1}{28} - 8 = \left(\frac{3}{14} - \frac{13}{21} + \frac{29}{42} \right) : \frac{1}{28} - 8 = \frac{2}{7} \cdot 28 - 8 = 0$

Bài 6

Thực hiện phép tính

a) $A = \frac{0,25 + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}}{0,5 + \frac{2}{5} - \frac{1}{3}} - \frac{0,2 - \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}{0,4 - \frac{1}{3} + \frac{2}{7}}$

b) $B = \frac{8^2 \cdot 125 \cdot 9^2 - 32 \cdot 5^3 \cdot 81}{20^3 \cdot 3^4 - 6^6 \cdot 5^4}$

Lời giải

a) $A = \frac{0,25 + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}}{0,5 + \frac{2}{5} - \frac{1}{3}} - \frac{0,2 - \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}{0,4 - \frac{1}{3} + \frac{2}{7}} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}}{\frac{2}{4} + \frac{2}{5} - \frac{2}{6}} - \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}{\frac{2}{5} + \frac{2}{6} - \frac{2}{7}}$



$$= \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}}{2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right)} - \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}{2\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \frac{8^2 \cdot 125 \cdot 9^2 - 32 \cdot 5^3 \cdot 81}{20^3 \cdot 3^4 - 6^6 \cdot 5^4} = \frac{2^6 \cdot 5^3 \cdot 3^4 - 2^5 \cdot 5^3 \cdot 3^4}{5^3 \cdot 2^6 \cdot 3^4 - 2^6 \cdot 3^6 \cdot 5^4} \\ &= \frac{2^5 \cdot 5^3 \cdot 3^4 (2-1)}{5^3 \cdot 2^6 \cdot 3^4 (1-3^2 \cdot 5)} = \frac{1}{2(-44)} = \frac{-1}{88} \end{aligned}$$

Bài 7

Thực hiện phép tính

$$A = \frac{0,4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{6} - 0,875 + 0,7}{1,4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11} \cdot \frac{1}{6} - 0,125 + 0,1}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \frac{0,4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{6} - 0,875 + 0,7}{1,4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11} \cdot \frac{1}{6} - 0,125 + 0,1} = \frac{\frac{2}{5} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11} \cdot \frac{7}{6} - \frac{7}{8} + \frac{7}{10}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{9} + \frac{7}{11} \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10}} \\ &= \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) \cdot 7 \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10}\right)}{7 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10}\right)} = \frac{2}{7} \cdot \frac{7}{1} = 2 \end{aligned}$$

Bài 8

Thực hiện phép tính

$$A = \frac{12^5 - 4^3 \cdot 6^4}{2^{11} \cdot 3^4 + 24^4} - \frac{25^4 \cdot 7^3 - 5^8 \cdot 49^2}{5^7 \cdot 7^3 + 35^3 \cdot 75^2}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{12^5 - 4^3 \cdot 6^4}{2^{11} \cdot 3^4 + 24^4} - \frac{25^4 \cdot 7^3 - 5^8 \cdot 49^2}{5^7 \cdot 7^3 + 35^3 \cdot 75^2} \\ &= \frac{(2^2 \cdot 3)^5 - (2^2)^3 \cdot (2 \cdot 3)^4}{2^{11} \cdot 3^4 + (2^3 \cdot 3)^4} - \frac{(5^2)^4 \cdot 7^3 - 5^8 \cdot (7^2)^2}{5^7 \cdot 7^3 + (5 \cdot 7)^3 \cdot (5^2 \cdot 3)^2} = \frac{2^{10} \cdot 3^5 - 2^6 \cdot 2^4 \cdot 3^4}{2^{11} \cdot 3^4 + 2^{12} \cdot 3^4} - \frac{5^8 \cdot 7^3 - 5^8 \cdot 7^4}{5^7 \cdot 7^3 + 5^3 \cdot 7^3 \cdot 5^4 \cdot 3^2} \end{aligned}$$



$$= \frac{2^{10} \cdot 3^4 (3-1)}{2^{10} \cdot 3^4 (2+2^2)} - \frac{5^8 \cdot 7^3 (1-7)}{5^7 \cdot 7^3 (1+3^2)} = \frac{2}{6} - \frac{5 \cdot (-6)}{10} = \frac{2}{6} - \frac{-6}{2} = \frac{10}{3}$$

Bài 9

Thực hiện phép tính

$$a) A = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^7 \cdot 5^7 + \left(\frac{9}{4}\right)^3 : \left(\frac{3}{16}\right)^3}{2^7 \cdot 5^2 + 512}$$

$$b) B = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(-\frac{3}{4}\right)^2 (-1)^{2017}}{\left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{-5}{12}\right)^3} - \frac{71}{5}$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } A = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^7 \cdot 5^7 + \left(\frac{9}{4}\right)^3 : \left(\frac{3}{16}\right)^3}{2^7 \cdot 5^2 + 512} = \frac{2^7 \cdot 5^7 + \frac{9^3}{4^3} : \frac{3^3}{16^3}}{2^7 \cdot 5^2 + 2^9}$$

$$A = \frac{2^7 + \frac{3^6}{2^6} \cdot \frac{2^{12}}{3^3}}{2^7 \cdot (5^2 + 2^2)} = \frac{2^7 + 3^3 \cdot 2^6}{2^7 \cdot (25 + 4)} = \frac{2^6 \cdot (2 + 3^3)}{2^7 \cdot 29} = \frac{2^6 \cdot 29}{2^7 \cdot 29} = \frac{1}{2}$$

$$b) \text{ Ta có } B = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(-\frac{3}{4}\right)^2 (-1)^{2017}}{\left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{-5}{12}\right)^3} - \frac{71}{5} = \frac{\frac{2^3}{3^3} \cdot \frac{3^2}{2^4} (-1)}{\frac{2^2}{5^2} \cdot \frac{(-5)^3}{3^3 \cdot 2^6}} - \frac{71}{5} = \frac{-1}{\frac{3 \cdot 2}{5^2 \cdot 3^3 \cdot 2^6}} - \frac{71}{5} = \frac{-1}{\frac{-5}{3^3 \cdot 2^4}} - \frac{71}{5}$$

$$= \frac{-1}{3 \cdot 2} \cdot \frac{3^3 \cdot 2^4}{-5} - \frac{71}{5} = \frac{3^2 \cdot 2^3}{5} - \frac{71}{5} = \frac{72}{5} - \frac{71}{5} = \frac{1}{5}$$

Bài 10

Thực hiện phép tính

$$B = \frac{51.125 - 51.42 - 17.150}{3 + 6 + 9 + \dots + 99}$$

Lời giải

Đặt: $A = 51.125 - 51.42 - 17.150$; $C = 3 + 6 + 9 + \dots + 99$.

$$A = 51.125 - 51.42 - 17.150 = 51.125 - 51.42 - 17.3.50$$

$$= 51.125 - 51.42 - 51.50 = 51 \cdot (125 - 42 - 50) = 51 \cdot 33$$

$$C = 3 + 6 + 9 + \dots + 99$$



Số các hạng tử của C : $(99 - 3) : 3 + 1 = 33$.

$$\text{Do đó: } C = 3 + 6 + 9 + \dots + 99 = 33 \cdot \left(\frac{99 + 3}{2} \right) = 33 \cdot 51.$$

$$\text{Vậy } B = \frac{51.125 - 51.42 - 17.150}{3 + 6 + 9 + \dots + 99} = \frac{A}{C} = \frac{51.33}{33.51} = 1.$$

Bài 11

Thực hiện phép tính

$$\text{a) } \frac{1.2.3 + 2.4.6 + 4.8.12 + 7.14.21}{1.3.5 + 2.6.10 + 4.12.20 + 7.21.35} \quad \text{b) } \frac{1.7.9 + 3.21.27 + 5.35.45 + 7.49.63}{1.3.5 + 3.9.15 + 5.15.25 + 7.21.35}$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } \frac{1.2.3 + 2.4.6 + 4.8.12 + 7.14.21}{1.3.5 + 2.6.10 + 4.12.20 + 7.21.35} = \frac{1.2.3(1 + 2.2.2 + 4.4.4 + 7.7.7)}{1.3.5(1 + 2.2.2 + 4.4.4 + 7.7.7)} = \frac{1.2.3}{1.3.5} = \frac{2}{5}$$

$$\text{b) Ta có: } \frac{1.7.9 + 3.21.27 + 5.35.45 + 7.49.63}{1.3.5 + 3.9.15 + 5.15.25 + 7.21.35} = \frac{1.7.9(1 + 3.3.3 + 5.5.5 + 7.7.7)}{1.3.5(1 + 3.3.3 + 5.5.5 + 7.7.7)} = \frac{1.7.9}{1.3.5} = \frac{21}{5}$$

Bài 12

Thực hiện phép tính

$$\frac{1.2 + 2.4 + 3.6 + 4.8 + 5.10}{3.4 + 6.8 + 9.12 + 12.16 + 15.20}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{1.2 + 2.4 + 3.6 + 4.8 + 5.10}{3.4 + 6.8 + 9.12 + 12.16 + 15.20} = \frac{1.2(1 + 2.2 + 3.3 + 4.4 + 5.5)}{3.4(1 + 2.2 + 3.3 + 4.4 + 5.5)} = \frac{1.2}{3.4} = \frac{1}{6}$$

$$B = \frac{2.3 + 4.6 + 6.9 + 8.12}{3.4 + 6.8 + 9.12 + 12.16}$$

Bài 13

Tính giá trị của biểu thức

$$B = \frac{a^2m - a^2n - b^2n + b^2m}{a^2 + b^2}$$



Lời giải

Ta có:
$$B = \frac{a^2(m-n) + b^2(m-n)}{a^2 + b^2} = \frac{(a^2 + b^2)(m-n)}{(a^2 + b^2)} = m - n$$

Bài 14

Thực hiện phép tính

$$\frac{(ab + bc + cd + da)abcd}{(c + d)(a + b) + (b - c)(a - d)}$$

Lời giải

Ta có: $MS = ca + cb + da + bd + ab - bd - ca + cd = (ab + bc + cd + da)$

Khi đó:
$$\frac{TS}{MS} = \frac{(ab + bc + cd + da)abcd}{(ab + bc + cd + da)} = abcd$$

Bài 15

Thực hiện phép tính

a)
$$A = \frac{2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2004}}{1 + 2^5 + 2^{10} + \dots + 2^{2000}}$$

b)
$$B = \frac{1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{100}}{1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{100}}$$

Lời giải

$$A = \frac{(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + (2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9) + \dots + (2^{2000} + 2^{2001} + 2^{2002} + 2^{2003} + 2^{2004})}{1 + 2^5 + 2^{10} + 2^{15} + \dots + 2^{2000}}$$

$$A = \frac{(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + 2^5(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \dots + 2^{2000}(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)}{1 + 2^5 + 2^{10} + 2^{15} + \dots + 2^{2000}}$$

$$A = \frac{(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)(1 + 2^5 + 2^{10} + \dots + 2^{2000})}{(1 + 2^5 + 2^{10} + \dots + 2^{2000})} = (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)$$

b) Ta có: $M = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{100}$

$$\Rightarrow 5M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{100} + 5^{101} \Rightarrow 5M - M = 4M = 5^{101} - 1 \Rightarrow M = \frac{5^{101} - 1}{4}$$

và $N = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{100}$

$$\Rightarrow 4N = 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + \dots + 4^{101} \Rightarrow 4N - N = 3N = 4^{101} - 1 \Rightarrow N = \frac{4^{101} - 1}{3}$$



Khi đó: $B = \frac{M}{N}$

Bài 15

Thực hiện phép tính

$$A = \frac{101 + 100 + 99 + \dots + 2 + 1}{101 - 100 + 99 - 98 + \dots - 2 + 1}$$

Lời giải

Ta có: $TS = \frac{(1 + 101) \cdot 101}{2} = 101 \cdot 51 = 5151$

$MS = (101 - 100) + (99 - 98) + \dots + (3 - 2) + 1 = 1 + 1 + \dots + 1 = 51.$

Khi đó: $A = \frac{TS}{MS} = \frac{51 \cdot 101}{51} = 101$

Bài 16

Tính giá trị của biểu thức sau $B = \frac{2a}{5b} + \frac{5b}{6c} + \frac{6c}{7d} + \frac{7d}{2a}$,

biết $\frac{2a}{5b} = \frac{5b}{6c} = \frac{6c}{7d} = \frac{7d}{2a}$ và $a, b, c, d \neq 0$.

Lời giải

Đặt $B = \frac{2a}{5b} = \frac{5b}{6c} = \frac{6c}{7d} = \frac{7d}{2a} = k \Rightarrow \frac{2a}{5b} \cdot \frac{5b}{6c} \cdot \frac{6c}{7d} \cdot \frac{7d}{2a} = k^4 = 1 \Rightarrow k = \pm 1 \Rightarrow B = \pm 4..1$

$\Rightarrow B = \pm 4$

Dạng 3: Tính tổng các số tự nhiên được lập từ một chữ số

Ví dụ 1

Tính tổng: $S = a + \overline{aa} + \overline{aaa} + \dots + \overline{aaa\dots a}_n$



Phương pháp:

Ta có:

$$S = a + \overline{aa} + \overline{aaa} + \dots + \overline{\underbrace{aaa\dots a}_n} = a \left(1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111\dots 1}_n \right)$$

$$\Rightarrow 9S = a \left(9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots 9}_n \right)$$

Đặt $A = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots 9}_n$

Ta có: $A = (10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \dots + (10^n - 1)$

$$= (10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n) - n = \underbrace{111\dots 10}_n - n$$

$$\Rightarrow S = \frac{a \left(\underbrace{111\dots 10}_n - n \right)}{9}.$$

Bài 1

Tính tổng tự nhiên

a) $A = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots 9}_{10}$ b)

$$B = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111\dots 1}_{10}$$

Lời giải

a) Ta có: $A = (10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \dots + (10^{10} - 1)$
 $= (10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{10}) - 10 = \underbrace{111\dots 10}_{10} - 10 = \underbrace{111\dots 100}_9.$

b) Ta có: $9B = 9 + 99 + 999 + \dots + 9999\dots 99$ (10 số 9).

$$A = (10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \dots + (10^{10} - 1)$$

$$= (10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{10}) - 10 = \underbrace{111\dots 10}_{10} - 10 = \underbrace{111\dots 100}_9.$$

$$\Rightarrow B = \frac{A}{9} = \frac{\underbrace{111\dots 100}_9}{9}.$$



Bài 2

Tính tổng tự nhiên

$$C = 5 + 55 + 555 + \dots + \underbrace{555\dots5}_{10}$$

Lời giải

Ta có: $C = 5 \left(1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111\dots1}_{10} \right)$ (10 số 1)

$$9C = 5 \left(9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots9}_{10} \right)$$

Ta có: $A = (10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \dots + (10^{10} - 1)$
 $= (10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{10}) - 10 = \underbrace{111\dots1}_9 \cdot 10 - 10 = \underbrace{111\dots1}_8 \cdot 100$

$$\Rightarrow C = \frac{5 \cdot \underbrace{111\dots1}_8 \cdot 100}{9} = \frac{555\dots500}{9}$$

Bài 3

Tính tổng tự nhiên

a) $C = 4 + 44 + 444 + \dots + 444\dots4$ (10 số 4)

b) $D = 2 + 22 + 222 + \dots + 222\dots2$ (10 số 2)

Lời giải

a) Ta có: $C = 4 \left(1 + 11 + 111 + \dots + 111\dots11 \right)$ (10 số 1)

$9C = 4 \left(9 + 99 + 999 + \dots + 999\dots99 \right)$ (10 số 9). Tính như tính ở trên

b) Ta có :

$D = 2 \left(1 + 11 + 111 + \dots + 111\dots11 \right)$ (10 số 1)

$9D = 2 \left(9 + 99 + 999 + \dots + 999\dots99 \right)$ (10 số 9).



Dạng 4: Tính tổng dãy phân số có quy luật

Ví dụ 1

Tính tổng $S = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n}$

Với $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = a_n - a_{n-1} = 1$

Phương pháp:

Ta có:

$$\frac{1}{a_1 a_2} = \frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2};$$

$$\frac{1}{a_2 a_3} = \frac{a_3 - a_2}{a_2 a_3} = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3};$$

.....

$$\frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1} a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}.$$

Do đó: $S = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n}$

Bài 1

Tính tổng

$$S = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2004.2005}$$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \dots \dots \dots \frac{1}{2004.2005} = \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005}$

Cộng vế với vế của các đẳng thức trên ta được

$$S = 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2004} - \frac{1}{2004}\right) - \frac{1}{2005} = 1 - \frac{1}{2005} = \frac{2004}{2005}$$

Bài 2

Tính tổng

$$S = \frac{1}{9.10} + \frac{1}{10.11} + \dots + \frac{1}{2004.2005}$$

Lời giải



Ta thấy tổng này giống hệt như tổng ở bài 1 ta dùng cách tách các số hạng như ở bài 1:

$$S = \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005} = \frac{1}{9} - \frac{1}{2005} = \frac{1996}{18045}$$

Nhận xét: Nếu số hạng tổng quát có dạng $\frac{1}{n(n+1)}$

Thì ta tách như sau: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

Từ đó ta có công thức tổng quát để tính tổng như sau:

$$S = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Bài 3

Tính tổng

$$A = \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{24.25}$$

Lời giải

Ta có: $A = \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{25}\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{25} = \frac{4}{25}$

Vậy $A = \frac{4}{25}$

Ví dụ 2

Tính tổng $S = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n}$

Với $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = a_n - a_{n-1} = k > 1$

Phương pháp:

Ta có:

$$\frac{k}{a_1 a_2} = \frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2};$$

$$\frac{k}{a_2 a_3} = \frac{a_3 - a_2}{a_2 a_3} = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3};$$



$$\frac{k}{a_{n-1}a_n} = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}.$$

$$\text{Do đó } S = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} \right) = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} \right)$$

Bài 4

Tính

$$B = \frac{1}{99.97} - \frac{1}{97.95} - \frac{1}{95.93} - \dots - \frac{1}{5.3} - \frac{1}{3.1}$$

Lời giải

$$\text{Ta có } B = \frac{1}{99.97} - \frac{1}{97.95} - \frac{1}{95.93} - \dots - \frac{1}{5.3} - \frac{1}{3.1}$$

$$B = - \left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{93.95} + \frac{1}{95.97} + \frac{1}{97.99} \right)$$

$$B = - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \dots + \frac{2}{93.95} + \frac{2}{95.97} + \frac{2}{97.99} \right)$$

$$B = - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{93} - \frac{1}{95} + \frac{1}{95} - \frac{1}{97} + \frac{1}{97} - \frac{1}{99} \right)$$

$$B = - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{99} \right) = - \frac{1}{2} \cdot \frac{98}{99} = - \frac{49}{99}$$

Bài 5

Tính tỉ số $\frac{A}{B}$, biết

$$A = \frac{34}{7.13} + \frac{51}{13.22} + \frac{85}{22.37} + \frac{68}{37.49} \quad \text{và} \quad B = \frac{39}{7.16} + \frac{65}{16.31} + \frac{52}{31.43} + \frac{26}{43.49}$$

Lời giải



$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \frac{34}{7.13} + \frac{51}{13.22} + \frac{85}{22.37} + \frac{68}{37.49} = \frac{17.2}{7.13} + \frac{17.3}{13.22} + \frac{17.5}{22.37} + \frac{17.4}{37.49} \\ &= 17 \cdot \left(\frac{2}{7.13} + \frac{3}{13.22} + \frac{5}{22.37} + \frac{4}{37.49} \right) = \frac{17}{3} \cdot \left(\frac{6}{7.13} + \frac{9}{13.22} + \frac{15}{22.37} + \frac{12}{37.49} \right) \\ &= \frac{17}{3} \cdot \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{22} + \frac{1}{22} - \frac{1}{37} + \frac{1}{37} - \frac{1}{49} \right) = \frac{17}{3} \cdot \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{49} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{39}{7.16} + \frac{65}{16.31} + \frac{52}{31.43} + \frac{26}{43.49} = \frac{13.3}{7.16} + \frac{13.5}{16.31} + \frac{13.4}{31.43} + \frac{13.2}{43.49} \\ &= 13 \cdot \left(\frac{3}{7.16} + \frac{5}{16.31} + \frac{4}{31.43} + \frac{2}{43.49} \right) = \frac{13}{3} \cdot \left(\frac{9}{7.16} + \frac{15}{16.31} + \frac{12}{31.43} + \frac{6}{43.49} \right) \\ &= \frac{13}{3} \cdot \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{31} + \frac{1}{31} - \frac{1}{43} + \frac{1}{43} - \frac{1}{49} \right) = \frac{13}{3} \cdot \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{49} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{17}{3} \cdot \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{49} \right)}{\frac{13}{3} \cdot \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{49} \right)} = \frac{17}{3} \cdot \frac{3}{13} = \frac{17}{13}$$

Bài 6

Tính

$$A = \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \dots + \frac{1}{9999}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \dots + \frac{1}{9999} = \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{95.97} + \frac{1}{99.101} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{95} - \frac{1}{97} + \frac{1}{99} - \frac{1}{101} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{101} \right) = \frac{50}{101} \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{50}{101}$

Bài 7

Tìm x biết

$$\frac{2}{2.3} + \frac{2}{3.4} + \frac{2}{4.5} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2013}{2015}$$

Lời giải

Ta có $\frac{2}{2.3} + \frac{2}{3.4} + \frac{2}{4.5} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2013}{2015}$



$$\Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{x(x+1)} \right) = \frac{2013}{2015}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{2013}{2015}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{2013}{2015} \Rightarrow 1 - \frac{2}{x+1} = \frac{2013}{2015}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x+1} = 1 - \frac{2013}{2015} \Rightarrow \frac{2}{x+1} = \frac{2}{2015}$$

$$\Rightarrow x+1 = 2015 \Rightarrow x = 2014.$$

Vậy $x = 2014$.

Bài 8

Cho $A = \frac{\frac{1}{3.8} + \frac{1}{8.13} + \frac{1}{13.18} + \dots + \frac{1}{33.38}}{\frac{21}{3.10} + \frac{15}{10.15} + \frac{27}{15.24} + \frac{9}{24.27} + \frac{33}{27.38}}$

a) Tính giá trị của A

b) Tìm x , biết $(2^{26} + 11.4^{12}).A = 8^8(x^2 - 3)$

Lời giải

Xét tử số, ta có:

$$T = \frac{1}{3.8} + \frac{1}{8.13} + \dots + \frac{1}{33.38}$$

$$5T = \frac{5}{3.8} + \frac{5}{8.13} + \dots + \frac{5}{33.38} = \frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{33} - \frac{1}{38} = \frac{1}{3} - \frac{1}{38}$$

$$T = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{38} \right)$$

Xét mẫu số, ta có:

$$M = \frac{21}{3.10} + \frac{15}{10.15} + \frac{27}{15.24} + \frac{9}{24.27} + \frac{33}{27.38}$$

$$M = \frac{3.7}{3.10} + \frac{3.5}{10.15} + \frac{3.9}{15.24} + \frac{3.3}{24.27} + \frac{3.11}{27.38}$$



$$M = 3 \left(\frac{7}{3.10} + \frac{5}{10.15} + \frac{9}{15.24} + \frac{3}{24.27} + \frac{11}{27.38} \right)$$

$$M = 3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{27} - \frac{1}{38} \right)$$

$$M = 3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{38} \right)$$

Từ đó, ta suy ra $A = \frac{\frac{1}{5} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{38} \right)}{3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{38} \right)} = \frac{1}{15}$.

b) $(2^{26} + 11.4^{12}).A = 8^8(x^2 - 3)$

Thay $A = \frac{3}{5}$, ta được:

$$(2^{26} + 11.4^{12}) \frac{1}{15} = 8^8(x^2 - 3)$$

$$(2^{24}.4 + 11.2^{24}) \frac{1}{15} = 2^{24}(x^2 - 3)$$

$$\frac{2^{24}(4 + 11)}{15} = 2^{24}(x^2 - 3)$$

$$x^2 - 3 = 1$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

Bài 9

Tìm x biết

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{49}{99}$$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{49}{99}$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} \right) = 2 \cdot \frac{49}{99}$$



$$\Leftrightarrow \frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \dots + \frac{2}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{98}{99}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{(2x-1)} - \frac{1}{(2x+1)} = \frac{98}{99}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2x+1} = \frac{98}{99}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2x+1} = 1 - \frac{98}{99}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2x+1} = \frac{1}{99} \text{ vì } 1 \neq 0 \text{ nên } 2x+1 = 99 \Leftrightarrow x = 49$$

Vậy $x = 49$.

Bài 10

Tính

$$S = \frac{1}{2.6} + \frac{1}{6.10} + \frac{1}{10.14} + \dots + \frac{1}{98.102}$$

Lời giải

Ta có

$$S = \frac{1}{2.6} + \frac{1}{6.10} + \frac{1}{10.14} + \dots + \frac{1}{98.102}$$

$$4S = \frac{4}{2.6} + \frac{4}{6.10} + \frac{4}{10.14} + \dots + \frac{4}{98.102}$$

$$4S = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{98} - \frac{1}{102} = \frac{1}{2} - \frac{1}{102} = \frac{25}{51}$$

$$S = \frac{25}{51} : 4 = \frac{25}{204}$$

Bài 11

Tính

$$A = \frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \dots + \frac{2}{99.101}$$

Lời giải

Ta có :





$$\frac{2}{1.3} = \frac{3-1}{1.3} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3.5} = \frac{5-3}{3.5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$$

.....

$$\frac{2}{99.101} = \frac{101-99}{99.101} = \frac{1}{99} - \frac{1}{101}$$

Do đó: $B = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{101}\right) = 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}$

Bài 12

Tính

$$S = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{2003.2005}$$

Lời giải

Cách 1:

Học sinh phải nhận dạng được các số hạng đều có dạng

- Tử số của các số hạng đó là 1
- Mẫu là tích của hai số tự nhiên hơn kém nhau hai đơn vị.

Ta có thể tách như sau: $\frac{1}{1.3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1.3} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3-1}{1.3}\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3}\right)$

Tương tự: $\frac{1}{3.5} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)$

.....

$$\frac{1}{2003.2005} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2003} - \frac{1}{2005}\right)$$

Cộng vế với vế của các đẳng thức trên ta được:

$$S = \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2003} - \frac{1}{2005}\right) \right\} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2005}\right) = \frac{1002}{2005}$$

Nhận xét kết quả:

- Thừa số nhỏ nhất, lớn nhất của mẫu các số hạng là 1; 2005



- Kết quả bằng tích của hiệu các nghịch đảo thừa số nhỏ nhất và thừa số lớn nhất của mẫu với nghịch đảo đơn vị kém hơn.

Cách 2: Ta có: $S = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{2003.2005}$

Ta thấy: $\frac{a-b}{b.a} = \frac{a}{b.a} - \frac{b}{b.a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \quad (a, b \in N, a > b)$

Ta phải biến đổi sao cho tử số của tất cả các số hạng phải là khoảng cách hai thừa số dưới mẫu thì tất cả các hạng tử đều tách ra được:

$$\frac{2}{1.3} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3.5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$$

.....

$$\frac{2}{2003.2005} = \frac{1}{2003} - \frac{1}{2005}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \dots + \frac{2}{2003.2005} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2003} - \frac{1}{2005}\right) = 1 - \frac{1}{2005} = \frac{2004}{2005}$$

Mặt $S = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{2003.2005} \Rightarrow 2S = \frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \dots + \frac{2}{2003.2005} = \frac{2004}{2005}$
 $\Rightarrow S = \frac{2004}{2005} : 2 = \frac{1002}{2005}$

Chú ý: Thông qua ví dụ trên cần phải khắc phục cho học sinh sai hay gặp

$\frac{1}{3.5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$ là sai

Chú ý:

Nhận xét tổng quát: $\frac{m}{b.a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$ với $a - b = m$

Bài toán tổng quát:

$$S_n = \frac{1}{a(a+m)} + \frac{1}{(a+m)(a+2m)} + \dots + \frac{1}{\{a+(n-1)m\}\{a+nm\}} \quad \text{với } m = 1; 2; 3; \dots;$$

$n = 1; 2; 3.$



$$S_n = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+nm} \right)$$

Bài 13

Tính nhanh

a) $A = \frac{5^2}{1.6} + \frac{5^2}{6.11} + \dots + \frac{5^2}{26.31}$

b) $B = \frac{4}{11.16} + \frac{4}{16.21} + \frac{4}{21.26} + \dots + \frac{4}{61.66}$

c) $C = \frac{3^2}{2.5} + \frac{3^2}{5.8} + \frac{3^2}{8.11} + \frac{3^2}{11.14} + \frac{3^2}{14.17}$

Lời giải

a) Ta có:

$$A = 5 \left(\frac{5}{1.6} + \frac{5}{6.11} + \frac{5}{11.16} + \dots + \frac{5}{26.31} \right) = 5 \left(1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{26} - \frac{1}{31} \right)$$

$$A = 5 \left(1 - \frac{1}{31} \right) = 5 \cdot \frac{30}{31} = \frac{150}{31}$$

b) Ta có:

$$B = 4 \left(\frac{1}{11.16} + \frac{1}{16.21} + \frac{1}{21.26} + \dots + \frac{1}{61.66} \right) \Rightarrow 5B = 4 \left(\frac{5}{11.16} + \frac{5}{16.21} + \frac{5}{21.26} + \dots + \frac{5}{61.66} \right)$$

$$5B = 4 \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{61} - \frac{1}{66} \right) = 4 \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{66} \right) \Rightarrow 5B = 4 \cdot \frac{55}{11.66} \Rightarrow B = \frac{4}{66} = \frac{2}{33}$$

c) Ta có: $C = \frac{3^2}{2.5} + \frac{3^2}{5.8} + \frac{3^2}{8.11} + \frac{3^2}{11.14} + \frac{3^2}{14.17}$

$$= 3 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{14} - \frac{1}{17} \right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{17} \right) = 3 \cdot \frac{15}{34} = \frac{45}{34}$$

Vậy $C = \frac{45}{34}$.

Bài 14

Tính

$$A = \left(\frac{3}{1.8} + \frac{3}{8.15} + \frac{3}{15.22} + \dots + \frac{3}{106.113} \right) - \left(\frac{25}{50.55} + \frac{25}{55.60} + \dots + \frac{25}{95.100} \right)$$



Lời giải

Ta có $B = \frac{3}{1.8} + \frac{3}{8.15} + \frac{3}{15.22} + \dots + \frac{3}{106.113}$

$$\Rightarrow 7B = 3 \left(\frac{7}{1.8} + \frac{7}{8.15} + \frac{7}{15.22} + \dots + \frac{7}{106.113} \right)$$

$$\Rightarrow 7B = 3 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{15} + \frac{1}{15} - \frac{1}{22} + \dots + \frac{1}{106} - \frac{1}{113} \right) = 3 \left(1 - \frac{1}{113} \right) = 3 \cdot \frac{112}{113} \Rightarrow B = \frac{3.112}{7.113} = \frac{48}{113}$$

và $C = \frac{25}{50.55} + \frac{25}{55.60} + \dots + \frac{25}{95.100} \Rightarrow \frac{1}{5}C = \frac{5}{50.55} + \frac{5}{55.60} + \dots + \frac{5}{95.100}$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}C = \frac{1}{50} - \frac{1}{100} = \frac{1}{100} \Rightarrow C = \frac{1}{20}$$

Khi đó : $A = B - C = \frac{48}{113} - \frac{1}{20} = \frac{847}{2260}$

Bài 15

Tính

$$\frac{1}{19} + \frac{9}{19.29} + \frac{9}{29.39} + \dots + \frac{9}{1999.2009}$$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{19} + \frac{9}{19.29} + \frac{9}{29.39} + \dots + \frac{9}{1999.2009} = A$

$$\Rightarrow A = \frac{9}{9.19} + \frac{9}{19.29} + \frac{9}{29.39} + \dots + \frac{9}{1999.2009}$$

$$\Rightarrow 10A = 9 \left(\frac{10}{9.19} + \frac{10}{19.29} + \frac{10}{29.39} + \dots + \frac{10}{1999.2009} \right) = 9 \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{2009} \right)$$

$$10A = 9 \cdot \frac{2000}{9.2009} = \frac{2000}{2009} \Rightarrow A = \frac{200}{2009}$$

Bài 16

Tính

$$A = 3 \cdot \frac{1}{1.2} - 5 \cdot \frac{1}{2.3} + 7 \cdot \frac{1}{3.4} - \dots + 15 \cdot \frac{1}{7.8} - 17 \cdot \frac{1}{8.9}$$

Lời giải

Ta có : $A = 3 \cdot \frac{1}{1.2} - 5 \cdot \frac{1}{2.3} + 7 \cdot \frac{1}{3.4} - \dots + 15 \cdot \frac{1}{7.8} - 17 \cdot \frac{1}{8.9} = \frac{3}{1.2} - \frac{5}{2.3} + \frac{7}{3.4} - \dots + \frac{15}{7.8} - \frac{17}{8.9}$



$$= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \dots + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

Bài 17

Tính nhanh

a) $A = \frac{1}{7} + \frac{1}{91} + \frac{1}{247} + \frac{1}{475} + \frac{1}{755} + \frac{1}{1147}$

b) $B = \frac{2}{15} + \frac{2}{35} + \frac{2}{63} + \frac{2}{99} + \frac{2}{143}$

Lời giải

a) Ta có:

$$A = \frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 19} + \dots + \frac{1}{31 \cdot 37} = 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{31} - \frac{1}{37} = 1 - \frac{1}{37} = \frac{36}{37}$$

b) Ta có: $B = \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 9} + \frac{2}{9 \cdot 11} + \frac{2}{11 \cdot 13} = \frac{1}{3} - \frac{1}{11} = \frac{8}{33}$

Bài 18

Tính nhanh

a) $F = \frac{2}{6} + \frac{2}{66} + \frac{2}{176} + \dots + \frac{2}{(5n-4)(5n+1)}$

b) $G = 1 + \frac{9}{45} + \frac{9}{105} + \frac{9}{189} + \dots + \frac{9}{29997}$

Lời giải

a) Ta có:

$$F = 2 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{66} + \frac{1}{176} + \dots + \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} \right) = 2 \left(\frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 16} + \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} \right)$$

$$5F = 2 \left(\frac{5}{1 \cdot 6} + \frac{5}{6 \cdot 11} + \frac{5}{11 \cdot 16} + \dots + \frac{5}{(5n-4)(5n+1)} \right) = 2 \left(1 - \frac{1}{5n+1} \right) = 2 \cdot \frac{5n}{5n+1} \Rightarrow$$

$$F = \frac{2n}{5n+1}$$

b) Ta có: $G = 1 + \frac{3}{15} + \frac{3}{35} + \frac{3}{63} + \dots + \frac{3}{9999} = 1 + \frac{3}{3 \cdot 5} + \frac{3}{5 \cdot 7} + \frac{3}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{3}{99 \cdot 101}$

$$G = 1 + 3 \left(\frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 101} \right) \Rightarrow 2G = 2 + 3 \left(\frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{2}{99 \cdot 101} \right)$$



$$2G = 2 + 3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{101}\right) = 2 + 3 \cdot \frac{98}{3 \cdot 101} = 2 + \frac{98}{101} = \frac{300}{101} \Rightarrow G = \frac{150}{101}$$

Bài 19

Tính nhanh

$$\frac{1}{2.15} + \frac{1}{15.3} + \frac{1}{3.21} + \dots + \frac{6}{87.90}$$

Lời giải

$$\text{Ta có } M = \frac{6}{12.15} + \frac{6}{15.18} + \frac{6}{18.21} + \dots + \frac{6}{87.90}$$

$$\begin{aligned} M &= 2\left(\frac{3}{12.15} + \frac{3}{15.18} + \dots + \frac{3}{87.90}\right) = 2\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{15} + \frac{1}{15} - \frac{1}{18} + \dots + \frac{1}{87} - \frac{1}{90}\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{90}\right) \end{aligned}$$

Bài 20

Tính nhanh

$$\text{a) } H = \frac{38}{25} + \frac{9}{10} - \frac{11}{15} + \frac{13}{21} - \frac{15}{28} + \frac{17}{36} - \dots + \frac{197}{4851} - \frac{199}{4950}$$

$$\text{b) } I = \frac{3}{1.2} - \frac{5}{2.3} + \frac{7}{3.4} - \dots - \frac{201}{100.101}$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } \frac{H}{2} = \frac{38}{50} + \frac{9}{20} - \frac{11}{30} + \frac{13}{42} - \frac{15}{56} + \dots + \frac{197}{9702} - \frac{199}{9900}$$

$$\frac{H}{2} = \frac{38}{50} + \frac{9}{4.5} - \frac{11}{5.6} + \frac{13}{6.7} - \frac{15}{7.8} + \dots + \frac{197}{98.99} - \frac{199}{99.100}$$

$$\frac{H}{2} = \frac{38}{50} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) - \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{98} + \frac{1}{99}\right) - \left(\frac{1}{99} + \frac{1}{100}\right)$$

$$\frac{H}{2} = \frac{38}{50} + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} = \frac{76 + 25 - 1}{100} = 1 \Rightarrow H = 2$$

$$\text{b) Ta có: } I = \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \dots - \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{101}\right) = 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}$$

Bài 21

Không quy đồng, hãy tính



$$B = \frac{5}{2.1} + \frac{4}{1.11} + \frac{3}{11.2} + \frac{1}{2.15} + \frac{13}{15.4}$$

Lời giải

Ta có: $B = \frac{5}{2.1} + \frac{4}{1.11} + \frac{3}{11.2} + \frac{1}{2.15} + \frac{13}{15.4}$

$$\Rightarrow \frac{B}{7} = \frac{5}{2.7} + \frac{4}{7.11} + \frac{3}{11.14} + \frac{1}{14.15} + \frac{13}{15.28}$$

$$\Rightarrow \frac{B}{7} = \frac{1}{2} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{14} + \frac{1}{14} - \frac{1}{15} + \frac{1}{15} - \frac{1}{28} = \frac{1}{2} - \frac{1}{28} = \frac{13}{28}$$

$$\Rightarrow B = \frac{7.13}{28} = \frac{13}{4}$$

Bài 22

Tính

$$A = \frac{4}{7.31} + \frac{6}{7.41} + \frac{9}{10.41} + \frac{7}{10.57} \text{ và } B = \frac{7}{19.31} + \frac{5}{19.43} + \frac{3}{23.43} + \frac{11}{23.57}$$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{A}{5} = \frac{4}{31.35} + \frac{6}{35.41} + \frac{9}{41.50} + \frac{7}{50.57} = \left(\frac{1}{31} - \frac{1}{35}\right) + \left(\frac{1}{35} - \frac{1}{41}\right) + \left(\frac{1}{41} - \frac{1}{50}\right) + \left(\frac{1}{50} - \frac{1}{57}\right) = \frac{1}{31} - \frac{1}{57}$$

$$\frac{B}{2} = \frac{7}{31.38} + \frac{5}{38.43} + \frac{3}{43.46} + \frac{11}{46.57} = \left(\frac{1}{31} - \frac{1}{38}\right) + \left(\frac{1}{38} - \frac{1}{43}\right) + \left(\frac{1}{43} - \frac{1}{46}\right) + \left(\frac{1}{46} - \frac{1}{57}\right) = \frac{1}{31} - \frac{1}{57}$$

Khi đó: $\frac{A}{5} = \frac{B}{2} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{5}{2}$

Bài 23

Tính tỉ số $\frac{A}{B}$, biết

$$A = \frac{1}{1.300} + \frac{1}{2.301} + \frac{1}{3.302} + \dots + \frac{1}{101.400}$$

và $B = \frac{1}{1.102} + \frac{1}{2.103} + \frac{1}{3.104} + \dots + \frac{1}{299.400}$

Lời giải



Ta có:

$$299A = \frac{299}{1.300} + \frac{299}{2.301} + \dots + \frac{299}{101.400} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{300}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{301}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{302}\right) + \dots + \left(\frac{1}{101} - \frac{1}{400}\right)$$

$$\Rightarrow 299A = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{101}\right) - \left(\frac{1}{300} + \frac{1}{301} + \dots + \frac{1}{400}\right)$$

$$101B = \frac{101}{1.102} + \frac{101}{2.103} + \frac{101}{3.104} + \dots + \frac{101}{299.400}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{102}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{103}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{104}\right) + \dots + \left(\frac{1}{299} - \frac{1}{400}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{299}\right) - \left(\frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{400}\right) = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{101}\right) - \left(\frac{1}{300} + \frac{1}{301} + \dots + \frac{1}{400}\right)$$

Khi đó: $299A = 101B \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{101}{299}$

Bài 24

Tính

$$A = \frac{1}{100} - \frac{1}{100.99} - \frac{1}{99.98} - \frac{1}{98.97} - \dots - \frac{1}{3.2} - \frac{1}{2.1}$$

Lời giải

Ta có $A = \frac{1}{100} - \frac{1}{100.99} - \frac{1}{99.98} - \frac{1}{98.97} - \dots - \frac{1}{3.2} - \frac{1}{2.1}$

$$= \frac{1}{100} - \left(\frac{1}{100.99} + \frac{1}{99.98} + \frac{1}{98.97} + \dots + \frac{1}{3.2} + \frac{1}{2.1}\right)$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{100} - \left(\frac{1}{2.1} + \frac{1}{3.2} + \dots + \frac{1}{98.97} + \frac{1}{99.98} + \frac{1}{100.99}\right)$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{100} - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{98} + \frac{1}{98} - \frac{1}{99} + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right)$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{100} - \left(1 - \frac{1}{100}\right) = \frac{-49}{50}$$



Ví dụ 3 Mẫu là các số tự nhiên liên tiếp

a) Tính tổng sau $S_n = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Phương pháp:

Nhận xét đề bài:

- Tử các số đều là 1
- Mẫu các số hạng đều là 3 tích số tự nhiên liên tiếp.
- Số hạng tổng quát có dạng $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Ta

có:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \frac{(k+2) - k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right]$$

Do đó:

$$\frac{1}{1.2.3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} \right)$$

$$\frac{1}{2.3.4} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} \right)$$

.....

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$$

Cộng vế với vế các đẳng thức trên ta được.

$$S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$$

Nhận xét kết quả: Nếu mẫu có 3 số tự nhiên liên tiếp thì tổng bằng tích nghịch đảo của (3; -1) với hiệu nghịch đảo của tích 2 thừa số có giá trị nhỏ nhất và tích

2 thừa số có giá trị lớn nhất: $S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$



Bài 25

Tính

$$B = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{37.38.39}.$$

Lời giải

Ta xét $\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} = \frac{2}{1.2.3}$; $\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} = \frac{2}{2.3.4}$; ...; $\frac{1}{37.38} - \frac{1}{38.39} = \frac{2}{37.38.39}$.

Tổng quát $\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n.(n+1)(n+2)}$.

Do đó $2B = \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \frac{2}{3.4.5} + \dots + \frac{2}{37.38.39}$
 $= \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3}\right) + \left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{37.38} - \frac{1}{38.39}\right) = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{38.39} = \frac{740}{38.39} = \frac{370}{741}$.

Suy ra $B = \frac{185}{741}$.

Bài 26

Tính

$$A = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{10.11.12}$$

Lời giải

Ta có:

$$2A = \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \frac{2}{3.4.5} + \dots + \frac{2}{10.11.12} = \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3}\right) + \left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{10.11} - \frac{1}{11.12}\right)$$

$$2A = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{11.12} = \frac{65}{132} \Rightarrow A = \frac{65}{264}$$

Tổng quát: $A = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) : 2$.

b) Tính tổng sau: $S_n = \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

Nhận xét đề bài

- Tử các số hạng là 1



- Mẫu các số hạng đều là 4 tích số tự nhiên liên tiếp.

- Số hạng tổng quát có dạng $\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{k(k+1)(k+2)(k+3)} \\ &= \frac{1}{3} \frac{(k+3) - k}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} \right] \end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1.2.3.4} &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{2.3.4} \right) \\ \frac{1}{2.3.4.5} &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{3.4.5} \right) \end{aligned}$$

.....

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right)$$

Cộng vế với vế các đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right) \end{aligned}$$

Bài 27

Tính

$$\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{3.4.5.6} + \dots + \frac{1}{27.28.29.30}$$

Lời giải

Nhận xét: $\frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{2.3.4} = \frac{3}{1.2.3.4}, \frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{3.4.5} = \frac{3}{2.3.4.5}, \dots$

$$\frac{1}{27.28.29} - \frac{1}{28.29.30} = \frac{3}{27.28.29.30}$$



Gọi biểu thức phải tính bằng A , ta được:

$$3A = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{28 \cdot 29 \cdot 30} = \frac{4059}{28 \cdot 29 \cdot 30}.$$

Vậy $A = \frac{1353}{8120}.$

Bài toán tổng quát

$$S_n = \frac{1}{1.2.3\dots m} + \frac{1}{2.3.4\dots(m+1)} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)\dots(n+m-1)}$$

Ta có ngay $S_n = \frac{1}{m-1} \left(\frac{1}{1.2.3\dots(m-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)\dots(n+m-1)} \right)$

Với $m = 2; 3; 4; \dots; n = 1; 2; 3; \dots$

Chú ý:

Có thể khai thác cho học sinh thấy trong tổng

$$S_n = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Thì $3 - 1 = 4 - 2 = \dots = n + 2 - n = 2$

$$\Rightarrow 2S_n = \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \dots + \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$$

$$2S_n = \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} \right) + \left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$$

$$= \frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$$

Như vậy:

$$* \frac{2m}{a(a+m)(a+2m)} = \frac{1}{a(a+m)} - \frac{1}{(a+m)(a+2m)}$$

$$* \frac{3m}{a(a+m)(a+2m)(a+3m)} = \frac{1}{a(a+m)(a+2m)} - \frac{1}{(a+m)(a+2m)(a+3m)}$$



Dạng 5: Tính tổng tự nhiên dạng tích

Bài 1

- a) Tính tổng $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99$
 b) Sử dụng kết quả của câu a, hãy tính: $B = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 97^2 + 98^2$
 c) Sử dụng kết quả của câu a, hãy tính: $C = 1.99 + 2.98 + 3.97 + \dots + 98.2 + 99.1$

Lời giải

a) Để tách mỗi số hạng thành hiệu của hai số nhằm triệt tiêu từng cặp hai số, ta nhân mỗi số hạng của A với 3. Thừa số 3 này được viết dưới dạng $3 - 0$ ở số hạng thứ nhất, $4 - 1$ ở số hạng thứ hai, $5 - 2$ ở số hạng thứ ba, ..., $100 - 97$ ở số hạng cuối cùng. Ta có:

$$\begin{aligned} 3A &= 1.2(3 - 0) + 2.3(4 - 1) + 3.4(5 - 2) + \dots + 97.98.(99 - 96) + 98.99(100 - 97) \\ &= (1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + 97.98.99 + 98.99.100) - (0.1.2 + 1.2.3 + 2.3.4 + \dots + 96.97.98 + 97.98.99) \\ &= 98.99.100 \end{aligned}$$

Suy ra $A = 323400$.

Tổng quát ta có: $1.2 + 2.3 + \dots + n(n+1) = \frac{n.(n+1)(n+2)}{3}$.

b) $B = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 97^2 + 98^2$
 $= 1(2 - 1) + 2(3 - 1) + 3(4 - 1) + \dots + 97(98 - 1) + 98(99 - 1)$
 $= (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 97.98 + 98.99) - (1 + 2 + 3 + \dots + 97.98)$
 $= A - \frac{98.99}{2} = 323400 - 4851 = 318549$.

Tổng quát: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 97^2 + 98^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $C = 1.99 + 2.98 + 3.97 + \dots + 98.2 + 99.1$
 $= 1.99 + 2.(99 - 1) + 3.(99 - 2) + \dots + 98.(99 - 97) + 99.(99 - 98)$
 $= (1.99 + 2.99 + 3.99 + \dots + 98.99 + 99.99) - (1.2 + 2.3 + \dots + 97.98 + 98.99)$
 $= 99.(1 + 2 + 3 + \dots + 99) - A$



$$= 99 \cdot \frac{99 \cdot 100}{2} - \frac{98 \cdot 99 \cdot 100}{3} = \frac{99 \cdot 100 \cdot 101}{6} = 166650.$$

Tổng quát: $1 \cdot n + 2(n-1) + 3(n-2) + \dots + (n-1)2 + n \cdot 1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$

Bài 2

Tính

$$B = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + 17.18.19$$

Lời giải

Ta có: $4B = 1.2.3.4 + 2.3.4.(5-1) + 3.4.5.(6-2) + \dots + 17.18.19.(20-16)$

$$4B = 1.2.3.4 + 2.3.4.5 - 1.2.3.4 + 3.4.5.6 - 2.3.4.5 + \dots + 17.18.19.20 - 16.17.18.19$$

$$4B = 17.18.19.20$$

$$B = 17.18.19.5 = 29070.$$

Bài 3

Tính tổng

a) $D = 1.4 + 2.5 + 3.6 + \dots + 100.103$

b) $E = 1.3 + 2.4 + 3.5 + \dots + 97.99 + 98.100$

Lời giải

a) Ta có:

$$D = 1.(1+3) + 2.(2+3) + 3(3+3) + \dots + 100.(100+3)$$

$$D = (1.1 + 1.3) + (2.2 + 2.3) + (3.3 + 3.3) + \dots + (100.100 + 100.3)$$

$$D = (1.1 + 2.2 + 3.3 + \dots + 100.100) + 3(1 + 2 + 3 + \dots + 100)$$

Đặt $A = 1.1 + 2.2 + 3.3 + \dots + 100.100$ và $B = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100$

Ta có : $A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 100^2$

$$\Rightarrow A = 1(2-1) + 2(3-1) + 3(4-1) + \dots + 100(101-1).$$

$$\Rightarrow A = (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 100.101) - (1 + 2 + 3 + \dots + 100)$$

$$\Rightarrow D = (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 100.101) + 2(1 + 2 + 3 + \dots + 100)$$

Đặt $C = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 100.101$, Tính tổng C ta được :



$$3C = 1.2(3 - 0) + 2.3(4 - 1) + 3.4(5 - 2) + \dots + 100.101.(102 - 99)$$

$$3C = (1.2.3 - 0.1.2) + (2.3.4 - 1.2.3) + (3.4.5 - 2.3.4) + \dots + (100.101.102 - 99.100.101)$$

$$3C = 100.101.102 - 0.1.2 = 100.101.102 \Rightarrow C = 100.101.34$$

$$B = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100 = (100 + 1) \cdot \frac{100}{2} = 101.50 = 5050.$$

Vậy $D = C + B = 100.101.34 + 5050 = 348450.$

b) Ta có:

$$E = 1(1 + 2) + 2(2 + 2) + 3(3 + 2) + \dots + 97(97 + 2) + 98(98 + 2)$$

$$E = (1.1 + 1.2) + (2.2 + 2.2) + (3.3 + 3.2) + \dots + (97.97 + 97.2) + (98.98 + 98.2)$$

$$E = (1.1 + 2.2 + 3.3 + \dots + 97.97 + 98.98) + 2(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 97 + 98)$$

Đặt $A = 1.1 + 2.2 + 3.3 + \dots + 98.98$ và $B = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 97 + 98$

Tính rồi tương tự câu a rồi thay vào E .

Bài 4

Tính nhanh

a) $F = 1.3 + 5.7 + 9.11 + \dots + 97.101$

b) $G = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + 98.99.100$

Lời giải

a) $F = 1.(1 + 2) + 5(5 + 2) + 9(9 + 2) + \dots + 97(97 + 2)$

$$F = (1.1 + 1.2) + (5.5 + 5.2) + (9.9 + 9.2) + \dots + (97.97 + 97.2)$$

$$F = (1.1 + 5.5 + 9.9 + \dots + 97.97) + 2(1 + 5 + 9 + \dots + 97)$$

Đặt $A = 1.1 + 5.5 + 9.9 + \dots + 97.97, B = 1 + 5 + 9 + \dots + 97$, tính rồi thay vào F

b) $4G = 1.2.3(4 - 0) + 2.3.4(5 - 1) + 3.4.5(6 - 2) + \dots + 98.99.100(101 - 97)$

$$4G = (1.2.3.4 - 0.1.2.3) + (2.3.4.5 - 1.2.3.4) + (3.4.5.6 - 2.3.4.5) + \dots + (98.99.100.101 - 97.98.99.100)$$

$$4G = 98.99.100.101 \Rightarrow G = \frac{98.99.100.101}{4}$$



Bài 5

Tính nhanh

a) $H = 1.99 + 2.98 + 3.97 + \dots + 50.50$

b) $K = 1.99 + 3.97 + 5.95 + \dots + 49.51$

Lời giải

a) $H = 1.99 + 2.(99 - 1) + 3.(99 - 2) + \dots + 50(99 - 49)$

$H = 1.99 + (2.99 - 1.2) + (3.99 - 2.3) + \dots + (50.99 - 49.50)$

$H = (1.99 + 2.99 + 3.99 + \dots + 50.99) - (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 49.50)$

Đặt $A = 99(1 + 2 + 3 + \dots + 50)$, $B = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 49.50$

Tính A và B rồi thay vào H

b) $K = 1.99 + 3(99 - 2) + 5.(99 - 4) + \dots + 49(99 - 48)$

$K = 1.99 + (3.99 - 2.3) + (5.99 - 4.5) + \dots + (49.99 - 48.49)$

$K = (1.99 + 3.99 + 5.99 + \dots + 49.99) - (2.3 + 4.5 + \dots + 48.49)$

Đặt $A = 99(1 + 3 + 5 + \dots + 49)$, $B = (2.3 + 4.5 + 6.7 + \dots + 48.49)$

Tính A và B rồi thay vào K

Bài 6

Tính

$C = 1.3 + 3.5 + 5.7 + \dots + 97.99$

Lời giải

$C = 1.(1 + 2) + 3.(3 + 2) + 5(5 + 2) + \dots + 97.(97 + 2)$

$C = (1.1 + 1.2) + (3.3 + 3.2) + (5.5 + 5.2) + \dots + (97.97 + 97.2)$

$C = (1.1 + 3.3 + \dots + 97.97) + 2(1 + 3 + 5 + \dots + 97)$

Đặt $A = 1.1 + 3.3 + 5.5 + \dots + 97.97$, $B = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 97$

Tính A và B rồi thay vào C

Bài 7

Tính



$$\frac{1.2 + 2.4 + 3.6 + 4.8 + 5.10}{3.4 + 6.8 + 9.12 + 12.16 + 15.20}$$

Lời giải

Ta có $3.4 + 6.8 + 9.12 + 12.16 + 15.20 = 6.1.2 + 6.2.4 + 6.3.6 + 6.4.8 + 6.5.10$

$$= 6(1.2 + 2.4 + 3.6 + 4.8 + 5.10)$$

$$\frac{1.2 + 2.4 + 3.6 + 4.8 + 5.10}{3.4 + 6.8 + 9.12 + 12.16 + 15.20} = \frac{1.2 + 2.4 + 3.6 + 4.8 + 5.10}{6(1.2 + 2.4 + 3.6 + 4.8 + 5.10)} = \frac{1}{6}$$

Bài 8

Biết rằng $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 = 385$.

Tính tổng $S = 2^2 + 4^2 + \dots + 20^2$

Lời giải

Ta có: $S = (2.1)^2 + (2.2)^2 + \dots + (2.10)^2$

$$= 2^2.1^2 + 2^2.2^2 + \dots + 2^2.10^2 = 2^2.(1^2 + 2^2 + \dots + 10^2) = 2^2.385 = 1540$$

Bài 9

Không sử dụng máy tính hãy so sánh

$A = 2.1 + 2.3 + 2.5 + \dots + 2.99$ và $B = 2.2 + 2.4 + 2.6 + \dots + 2.98 + 100$

Lời giải

Ta có:

$$B = 2.2 + 2.4 + 2.6 + \dots + 2.98 + 100$$

$$A = 2.1 + 2.3 + 2.5 + \dots + 2.99$$

$$\Rightarrow B - A = 2 + 2 + 2 + \dots + 2 + 2(50 - 99) = 2.49 + 2.(-49) = 0$$

$$\Rightarrow A = B$$

Dạng 6: Tính tổng tự nhiên dạng tổng

Bài 1

Tính

$$A = 1 + \frac{1}{2}(1 + 2) + \frac{1}{3}(1 + 2 + 3) + \dots + \frac{1}{16}(1 + 2 + \dots + 16)$$



$$B = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \dots + \frac{1}{20}(1+2+\dots+20)$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } A &= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} + \dots + \frac{1}{16} \cdot \frac{16 \cdot 17}{2} = \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \dots + \frac{17}{2} \\ &= \frac{1}{2}(1+2+3+4+\dots+17-1) = \frac{1}{2} \left(\frac{17 \cdot 18}{2} - 1 \right) = 76. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } B &= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} + \dots + \frac{1}{20} \cdot \frac{20 \cdot 21}{2} = 1 + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \dots + \frac{21}{2} \\ &= \frac{1}{2}(2+3+4+\dots+20+21) = \frac{1}{2} \cdot 230 = 115 \end{aligned}$$

Bài 2

Tính

$$A = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{2012}(1+2+3+\dots+2012)$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{2012}(1+2+3+\dots+2012) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} + \dots + \frac{1}{2012} \cdot \frac{2012 \cdot 2013}{2} \\ &= \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \dots + \frac{2013}{2} = \frac{1}{2}(2+3+4+\dots+2013) \\ &= \frac{1}{2}(1+2+3+4+\dots+2013-1) = \frac{1}{2} \left(\frac{2012 \cdot 2013}{2} - 1 \right) = \frac{2025077}{2} \end{aligned}$$

Bài 3

Tính

$$F = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \dots + \frac{1}{2016}(1+2+\dots+2016)$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } F = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} + \dots + \frac{1}{2016} \cdot \frac{2016 \cdot 2017}{2}$$



$$F = 1 + \frac{2+1}{2} + \frac{3+1}{2} + \frac{4+1}{2} + \dots + \frac{2016+1}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{2+3+4+\dots+2016}{2}$$

$$F = 1 + \frac{1}{2} \cdot 2015 + \frac{2018 \cdot 2015}{2} = 1 + \frac{2015 \cdot 2019}{2}$$

Bài 4

Tính

$$\frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+59}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & \frac{1}{\frac{(1+3) \cdot 3}{2}} + \frac{1}{\frac{(1+4) \cdot 4}{2}} + \frac{1}{\frac{(1+5) \cdot 5}{2}} + \dots + \frac{1}{\frac{(1+59) \cdot 59}{2}} \\ &= \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{2}{4 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{2}{59 \cdot 60} = 2 \left(\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{59 \cdot 60} \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{60} \right) = 2 \left(\frac{19}{60} \right) = \frac{19}{30} \end{aligned}$$

Bài 5

Tính

$$50 + \frac{50}{3} + \frac{25}{3} + \frac{20}{4} + \frac{10}{3} + \frac{100}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{100}{98 \cdot 99} + \frac{1}{99}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \left(50 + \frac{50}{3} + \frac{25}{3} + \frac{20}{4} + \frac{10}{3} \right) + \left(\frac{100}{6 \cdot 7} + \frac{100}{7 \cdot 8} + \dots + \frac{100}{98 \cdot 99} + \frac{100}{99 \cdot 100} \right) \\ A &= 100 \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} \right) + 100 \left(\frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} \right) \\ A &= 100 \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} \right) = 100 \cdot \left(1 - \frac{1}{100} \right) = 99 \end{aligned}$$



Bài 6

Tính

$$C = -\frac{1}{3}(1+2+3) - \frac{1}{4}(1+2+3+4) - \dots - \frac{1}{50}(1+2+3+\dots+50)$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } C &= -\frac{1}{3}(1+2+3) - \frac{1}{4}(1+2+3+4) - \dots - \frac{1}{50}(1+2+3+\dots+50) \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{(1+3) \cdot 3}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{(1+4) \cdot 4}{2} - \dots - \frac{1}{50} \cdot \frac{(1+50) \cdot 50}{2} \\ &= -\frac{1+3+1+4+\dots+1+50}{2} = -\frac{\left(\frac{1+1+\dots+1}{48 \text{ chu số } 1}\right) + (3+4+\dots+50)}{2} \\ &= -\frac{48 + \frac{(3+50) \cdot 48}{2}}{2} = -24 + 53 \cdot 12 = 612. \end{aligned}$$

Dạng 7: Dạng toán tính tích

Bài 1

Tính tích

$$\text{a) } A = \frac{2^2}{1.3} \cdot \frac{3^2}{2.4} \cdot \frac{4^2}{3.5} \dots \frac{20^2}{19.21}$$

$$\text{b) } B = \frac{1^2}{1.2} \cdot \frac{2^2}{2.3} \cdot \frac{3^2}{3.4} \dots \frac{10^2}{10.11}$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } A = \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{3.3}{2.4} \cdot \frac{4.4}{3.5} \dots \frac{20.20}{19.21} = \frac{(2.3.4 \dots 20)(2.3.4 \dots 20)}{(1.2.3 \dots 19)(3.4.5 \dots 21)} = \frac{20.2}{21} = \frac{40}{21}$$

$$\text{b) Ta có: } B = \frac{1.1}{1.2} \cdot \frac{2.2}{2.3} \cdot \frac{3.3}{3.4} \dots \frac{10.10}{10.11} = \frac{(1.2.3 \dots 10)(1.2.3 \dots 10)}{(1.2.3 \dots 10)(2.3.4 \dots 11)} = \frac{1}{11}$$

Bài 2

Tính tích

$$C = \left(1 - \frac{1}{1+2}\right) \left(1 - \frac{1}{1+2+3}\right) \left(1 - \frac{1}{1+2+3+4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{1+2+3+\dots+2016}\right)$$

Lời giải



$$\begin{aligned} \text{Ta có: } C &= \left(1 - \frac{1}{\frac{(1+2) \cdot 2}{2}}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{\frac{(1+3) \cdot 3}{2}}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{\frac{(1+4) \cdot 4}{2}}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{\frac{(1+2016) \cdot 2016}{2}}\right) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{10} \cdots \frac{2017 \cdot 2016 - 2}{2016 \cdot 2017} = \frac{4}{6} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{18}{20} \cdots \frac{2016 \cdot 2017 - 2}{2016 \cdot 2017} \\ C &= \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} \cdot \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} \cdot \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} \cdots \frac{2015 \cdot 2018}{2016 \cdot 2017} = \frac{1004}{3009} \end{aligned}$$

Bài 3

Tính tích

$$A = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7}\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{99}\right)$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{3}{2 \cdot 5} \cdot \frac{5}{2 \cdot 7} \cdots \frac{97}{2 \cdot 99} = \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 97)}{2^{49} \cdot (3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots 99)} = \frac{1}{2^{49} \cdot 99}$$

Bài 4

Tính tích

$$\frac{\left(1 + \frac{1999}{1}\right) \left(1 + \frac{1999}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1999}{1000}\right)}{\left(1 + \frac{1000}{1}\right) \left(1 + \frac{1000}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1000}{1999}\right)}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \left(\frac{2000}{1} \cdot \frac{2001}{2} \cdot \frac{2002}{3} \cdots \frac{2999}{1000}\right) : \left(\frac{1001}{1} \cdot \frac{1002}{2} \cdot \frac{1003}{3} \cdots \frac{2999}{1999}\right)$$

$$A = \left(\frac{2000 \cdot 2001 \cdot 2002 \cdots 2999}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 1000}\right) \cdot \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 1999}{1001 \cdot 1002 \cdots 2999}\right) = \frac{1001 \cdot 1002 \cdots 1999}{1001 \cdot 1002 \cdots 1999} = 1$$

Bài 5

Tính tích

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{400}\right)$$



Lời giải

$$\text{Ta có: } = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} \cdots \frac{399}{400} = \frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{3.5}{4.4} \cdots \frac{19.21}{20.20} = \frac{(1.2.3 \dots 19)(3.4.5 \dots 21)}{(2.3.4 \dots 20)(2.3.4.5 \dots 20)} = \frac{21}{20.2} = \frac{21}{40}$$

Bài 6

Tính tích

$$\left(1 - \frac{1}{1+2}\right) \left(1 - \frac{1}{1+2+3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{1+2+3+\dots+n}\right)$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \left(1 - \frac{1}{\frac{(1+2) \cdot 2}{2}}\right) \left(1 - \frac{1}{\frac{(1+3) \cdot 3}{2}}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{\frac{(1+n) \cdot n}{2}}\right) \\ &= \left(1 - \frac{2}{2 \cdot 3}\right) \left(1 - \frac{2}{3 \cdot 4}\right) \left(1 - \frac{2}{4 \cdot 5}\right) \cdots \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{4}{2 \cdot 3} \cdot \frac{10}{3 \cdot 4} \cdot \frac{18}{4 \cdot 5} \cdots \frac{n(n+1)-2}{n(n+1)} \\ &= \frac{1.4}{2.3} \cdot \frac{2.5}{3.4} \cdot \frac{3.6}{4.5} \cdots \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} = \frac{(1.2.3 \dots (n-1))(4.5 \dots (n+2))}{(2.3 \dots n)(3.4.5 \dots (n+1))} = \frac{n+2}{n \cdot 3} = \frac{n+2}{3n} \end{aligned}$$

Bài 7

Tính tích

$$\text{a) } A = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2018 \cdot 2020}\right)$$

$$\text{b) } B = \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{100}\right)$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } A &= \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2018 \cdot 2020}\right) = \frac{2^2}{1.3} \cdot \frac{3^2}{2.4} \cdot \frac{4^2}{3.5} \cdots \frac{2019^2}{2018 \cdot 2019} \\ &= \frac{(2.3.4 \dots 2019) \cdot (2.3.4 \dots 2019)}{(2.3.4 \dots 2019) \cdot (3.4.5 \dots 2018)} = 2 \cdot 2019 = 4038 \end{aligned}$$

$$\text{b) Ta có } B = \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{100}\right) = \left(\frac{5-1}{5}\right) \left(\frac{6-1}{6}\right) \cdots \left(\frac{99-1}{99}\right) \left(\frac{100-1}{100}\right)$$



$$= \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{98}{99} \cdot \frac{99}{100} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$$

Bài 8

Tính tích

a) $A = \frac{2^2}{3} \cdot \frac{3^2}{8} \cdot \frac{4^2}{15} \cdot \frac{5^2}{24} \cdot \frac{6^2}{35} \cdot \frac{7^2}{48} \cdot \frac{8^2}{63} \cdot \frac{9^2}{80}$

b) $B = \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{24}{25} \cdots \frac{2499}{2500}$

Lời giải

a) Ta có $D = \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{3.3}{2.4} \cdot \frac{4.4}{3.5} \cdots \frac{8.8}{7.9} \cdot \frac{9.9}{8.10} = \frac{(2.3.4 \dots 8.9)(2.3.4 \dots 8.9)}{(1.2.3 \dots 7.8)(3.4.5 \dots 9.10)} = \frac{9.2}{10} = \frac{9}{5}$

b) Ta có $E = \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{3.5}{4.4} \cdot \frac{4.6}{5.5} \cdots \frac{49.51}{50.50} = \frac{(2.3.4 \dots 49)(4.5.6 \dots 51)}{(3.4.5 \dots 50)(3.4.5 \dots 50)} = \frac{2.51}{50.3} = \frac{17}{25}$

Bài 9

Tính tích

a) $A = \left(\frac{1}{4} - 1\right) \left(\frac{1}{9} - 1\right) \left(\frac{1}{16} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{100} - 1\right) \left(\frac{1}{121} - 1\right)$

b) $B = \left(\frac{1}{2} + 1\right) \left(\frac{1}{3} + 1\right) \left(\frac{1}{4} + 1\right) \cdots \left(\frac{1}{999} + 1\right)$

Lời giải

a) Ta có: $A = \frac{-3}{4} \cdot \frac{-8}{9} \cdot \frac{-15}{16} \cdots \frac{-99}{100} \cdot \frac{-120}{121} = \frac{1.3}{2^2} \cdot \frac{2.4}{3^2} \cdot \frac{3.5}{4^2} \cdots \frac{9.11}{10^2} \cdot \frac{10.12}{11^2}$
 $= \frac{1.2.3.4 \dots 10.3.4.5.6 \dots 11.12}{2^2.3^2 \dots 11^2} = \frac{1.2.11.12}{2^2.11^2} = \frac{12}{22}$

b) Ta có: $M = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{1000}{999} = \frac{1000}{2} = 500$

Bài 10

Tính tích

a) $A = \frac{3}{2^2} \cdot \frac{8}{3^2} \cdot \frac{15}{4^2} \cdots \frac{99}{10^2}$

b) $B = \left(\frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{3} - 1\right) \left(\frac{1}{4} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{1000} - 1\right)$

Lời giải



$$\text{a) Ta có: } F = \frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{3.5}{4.4} \cdots \frac{9.11}{10.10} = \frac{(1.2.3 \dots 9)(3.4.5 \dots 11)}{(2.3.4 \dots 10)(2.3.4 \dots 10)} = \frac{1.11}{10.2}$$

$$\text{b) Ta có: } N = \frac{-1}{2} \cdot \frac{-2}{3} \cdot \frac{-3}{4} \cdots \frac{-999}{1000} = -\frac{1}{1000}$$

Bài 11

Tính tích

$$\text{a) } A = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} \cdots \frac{9999}{10000} \qquad \text{b)}$$

$$B = \left(\frac{1-2^2}{2^2} \right) \left(\frac{1-3^2}{3^2} \right) \left(\frac{1-4^2}{4^2} \right) \cdots \left(\frac{1-2012^2}{2012^2} \right)$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } A = \frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{3.5}{4.4} \cdots \frac{99.101}{100.100} = \frac{(1.2.3 \dots 99)(3.4.5 \dots 101)}{(2.3.4 \dots 100)(2.3.4 \dots 100)} = \frac{1.101}{100.2}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } B &= \frac{-3}{2.2} \cdot \frac{-8}{3.3} \cdot \frac{-15}{4.4} \cdots \frac{1-2012^2}{2012.2012} = \frac{-1.3}{2.2} \cdot \frac{-2.4}{3.3} \cdot \frac{-3.5}{4.4} \cdots \frac{-2011.2013}{2012.2012} \\ &= -\frac{(1.2.3 \dots 2011)(3.4.5 \dots 2013)}{(2.3.4 \dots 2012)(2.3.4 \dots 2012)} = -\frac{2013}{2012.2} \end{aligned}$$

Bài 12

$$E = \left(1 - \frac{1}{1+2} \right) \left(1 - \frac{1}{1+2+3} \right) \cdots \left(1 - \frac{1}{1+2+3+\dots+n} \right) \text{ và } F = \frac{n+2}{n}. \text{ So sánh } E \text{ và } F$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } E &= \left(1 - \frac{1}{(1+2).2} \right) \left(1 - \frac{1}{(1+3).3} \right) \cdots \left(1 - \frac{1}{(1+n).n} \right) \\ &= \left(1 - \frac{2}{2.3} \right) \left(1 - \frac{2}{3.4} \right) \left(1 - \frac{2}{4.5} \right) \cdots \left(1 - \frac{2}{n(n+1)} \right) = \frac{4}{2.3} \cdot \frac{10}{3.4} \cdot \frac{18}{4.5} \cdots \frac{n(n+1)-2}{n(n+1)} \end{aligned}$$



$$= \frac{1.4}{2.3} \cdot \frac{2.5}{3.4} \cdot \frac{3.6}{4.5} \cdots \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} = \frac{(1.2.3 \dots (n-1))(4.5 \dots (n+2))}{(2.3 \dots n)(3.4.5 \dots (n+1))} = \frac{n+2}{n.3} = \frac{n+2}{3n}$$

Mà $\frac{n+2}{n} > \frac{n+2}{3n} \Rightarrow F > E$

Bài 13

So sánh $V = \frac{1}{2^{20} - 1}$ và $U = \frac{1.3.5 \dots 39}{21.22.23 \dots 40}$

Lời giải

Ta có: $U = \frac{1.3.5 \dots 37.39}{(21.23.25 \dots 39)(22.24.26 \dots 40)} = \frac{1.3.5.7 \dots 37.39}{(21.23.25 \dots 39)2^{10}(11.12.13 \dots 20)}$

$$U = \frac{1.3.5 \dots 39}{2^{10}(21.23 \dots 39)(11.13 \dots 19)(12.14.16.18.20)} = \frac{1.3.5 \dots 39}{2^{10} \cdot (11.13 \dots 39)2^5(6.7.8.9.10)}$$

$$U = \frac{1.3.5 \dots 39}{2^{15}(7.9.11 \dots 39) \cdot (6.8.10)} = \frac{1.3.5 \dots 39}{2^{15} \cdot (7.9 \dots 39) \cdot 2^5 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{1.3.5 \dots 39}{2^{20} \cdot 3.5.7 \dots 39} = \frac{1}{2^{20}}$$

Mà $\frac{1}{2^{20}} < \frac{1}{2^{20} - 1} \Rightarrow U < V$

Bài 14

Tính tích

$$A = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2016.2018}\right) \left(1 + \frac{1}{2017.2019}\right) \left(1,08 - \frac{2}{25}\right)$$

Lời giải

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có $1 + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$

Từ đó ta có $A = \frac{2^2}{1.3} \cdot \frac{3^2}{2.4} \cdot \frac{4^2}{3.5} \cdot \frac{5^2}{4.6} \cdots \frac{2018^2}{2017.2019} \cdot \left(\frac{27}{25} - \frac{2}{25}\right) = \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdots 2018^2}{1.2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdots 2017^2 \cdot 2018 \cdot 2019}$

$\Rightarrow A = \frac{2}{2019}$



Bài 15

Cho $M = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \dots \frac{631}{632}$. Chứng minh rằng $M < 0,04$

Lời giải

$$\text{Đặt } N = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \dots \frac{632}{633}$$

$$\Rightarrow M \cdot N = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \dots \frac{631}{632} \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \dots \frac{632}{633} \right) = \frac{1}{633}$$

Mà $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$; $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$; ...; $\frac{631}{632} < \frac{633}{632}$ nên $M^2 < M \cdot N \Rightarrow M < 0,39$

Vậy $M < 0,04$ (đpcm).

Bài 16

Tính

$$\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 15} + \frac{1}{15 \cdot 22} + \dots + \frac{1}{43 \cdot 50} \right) \cdot \frac{4 - 3 - 5 - 7 - \dots - 49}{217}$$

Lời giải

$$\text{Ta có } \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 15} + \frac{1}{15 \cdot 22} + \dots + \frac{1}{43 \cdot 50} \right) \cdot \frac{4 - 3 - 5 - 7 - \dots - 49}{217}$$

$$= \frac{1}{7} \left(1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{15} + \frac{1}{15} - \frac{1}{22} + \dots + \frac{1}{43} - \frac{1}{50} \right)$$

$$\cdot \frac{5 - (1 + 3 + 5 + \dots + 49)}{217} = \frac{1}{7} \left(1 - \frac{1}{50} \right) \cdot \frac{5 - (12 \cdot 50 + 25)}{217} = \frac{1}{7} \cdot \frac{49}{50} \cdot \frac{5 - 625}{7 \cdot 31} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 31}{7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 31} = \frac{2}{5}$$

Dạng 8: Tính tổng cùng số mũ

Bài 1

Tính

a) $A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 98^2$

b)



$$B = -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \dots - 19^2 + 20^2$$

Lời giải

a) Ta có $A = 1.1 + 2.2 + 3.3 + \dots + 98.98$

$$\Rightarrow A = 1(2 - 1) + 2(3 - 1) + 3(4 - 1) + \dots + 98(99 - 1)$$

$$\Rightarrow A = (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99) - (1 + 2 + 3 + \dots + 98)$$

Đặt $B = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99$, tính tổng B ta được:

$$3B = 1.2(3 - 0) + 2.3(4 - 1) + 3.4(5 - 2) + \dots + 98.99(100 - 97)$$

$$3B = (1.2.3 - 0.1.2) + (2.3.4 - 1.2.3) + (3.4.5 - 2.3.4) + \dots + (98.99.100 - 97.98.99)$$

$$3B = 98.99.100 - 0.1.2 = 98.99.100 \Rightarrow B = \frac{98.99.100}{3}$$

Thay vào A ta được $A = B + \frac{98.99}{2} = \frac{98.99.100}{3} + \frac{98.99}{2}$

b) Ta có $B = -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \dots - 19^2 + 20^2$

$$\Rightarrow B = -(1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 19^2 - 20^2)$$

$$B = -\left[(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 19^2 + 20^2) - 2(2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 20^2)\right]$$

$$B = -\left[\left(\frac{20.21.22}{3} + \frac{20.21}{2}\right) - 2.2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2)\right]$$

$$B = -20.22.7 - 20.7 - 8\left(\frac{10.11.12}{3} + \frac{10.11}{2}\right) = -20.7.23 - 8(10.11.4 + 5.11)$$

Bài 2

Tính

a) $D = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 99^2$

b)

$E = 11^2 + 13^2 + 15^2 + \dots + 199^2$

Lời giải

a) Ta có $D = (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 99^2 + 100^2) - (2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 100^2)$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{100.101.102}{3} + \frac{100.101}{2}\right) - 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 50^2)$$



Đặt $A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 50^2 \Rightarrow A = \frac{50.51.52}{3} + \frac{50.51}{2}$, thay vào D ta được :

$$D = 100.101.34 + 50.101 - 4(50.52.17 + 25.51)$$

b) Ta có : $E = 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2 + 15^2 + \dots + 199^2 + 200^2 - (12^2 + 14^2 + \dots + 200^2)$

Đặt $A = 11^2 + 12^2 + 13^2 + \dots + 200^2, B = 12^2 + 14^2 + \dots + 200^2$

Tính ta được:

$$A = 11.11 + 12.12 + 13.13 + \dots + 200.200 = 11.(12 - 1) + 12.(13 - 1) + \dots + 200.(201 - 1)$$

$$\Rightarrow A = (11.12 - 11) + (12.13 - 12) + (13.14 - 13) + \dots + (200.201 - 200)$$

$$A = (11.12 + 12.13 + 13.14 + \dots + 200.201) - (11 + 12 + 13 + \dots + 200)$$

$$A = \left(\frac{200.201.202}{3} - \frac{10.11.12}{2} \right) - \left(\frac{211.190}{2} \right)$$

$$\text{Và } B = 2^2(6^2 + 7^2 + 8^2 + \dots + 100^2) = 4 \left(\frac{100.101.102}{3} - \frac{5.6.7}{2} \right) - \left(\frac{106.95}{2} \right)$$

Vậy $E = A - B$

Bài 3

Tính

a) $C = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 20^2$

b)

$$F = 1^2 + 4^2 + 7^2 + \dots + 100^2$$

Lời giải

a) Ta có $C = 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2)$

Đặt $A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 = 1.1 + 2.2 + 3.3 + \dots + 10.10$

$$A = 1.(2 - 1) + 2.(3 - 1) + 3.(4 - 1) + \dots + 10.(11 - 1)$$

$$A = (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 10.11) - (1 + 2 + 3 + \dots + 10) = \frac{10.11.12}{3} - \frac{10.11}{2}$$

b) Ta có $F = 1.1 + 4.4 + 7.7 + 10.10 + \dots + 100.100$

$$F = 1(4 - 3) + 4(7 - 3) + 7(10 - 3) + 10(13 - 3) + \dots + 100(103 - 3)$$

$$F = (1.4 - 1.3) + (4.7 - 3.4) + (7.10 - 3.7) + (10.13 - 10.3) + \dots + (100.103 - 100.3)$$



$$F = (1.4 + 4.7 + 7.10 + 10.13 + \dots + 100.103) - 3(1 + 4 + 7 + 10 + \dots + 100)$$

Đặt $A = 1.4 + 4.7 + 7.10 + \dots + 100.103, B = 1 + 4 + 7 + 10 + \dots + 100$

Tính $9A = 1.4(9 - 0) + 4.7(10 - 1) + 7.10(13 - 4) + \dots + 100.103(106 - 97)$

$$9A = (1.4.9 - 0.1.4) + (4.7.10 - 1.4.7) + (7.10.13 - 4.7.10) + \dots + (100.103.106 - 97.100.103)$$

$$9A = 1.4.9 + (100.103.106 - 1.4.7) \Rightarrow A = \frac{100.103.106 + 8}{9}$$

Tính B rồi thay vào F ta được $F = A - 3B$

Bài 4

Tính

Cho biết $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 12^2 = 650$. Tính nhanh tổng sau $2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 24^2$

Lời giải

Ta có $2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 24^2 = 2^2(1^2 + 2^2 + \dots + 12^2) = 4.650$

Bài 5

Tính

$$K = 1.2^2 + 2.3^2 + 3.4^2 + \dots + 99.100^2$$

Lời giải

Ta có:

$$K = 1.2.2 + 2.3.3 + 3.4.4 + \dots + 99.100.100$$

$$K = 1.2(3 - 1) + 2.3(4 - 1) + 3.4(5 - 1) + \dots + 99.100(101 - 1)$$

$$K = (1.2.3 - 1.2) + (2.3.4 - 2.3) + (3.4.5 - 3.4) + \dots + (99.100.101 - 99.100)$$

$$K = (1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + 99.100.101) - (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100)$$

Đặt $A = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + 99.100.101, B = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100$

Tính $A \Rightarrow 4A = 1.2.3(4 - 0) + 2.3.4(5 - 1) + 3.4.5(6 - 2) + \dots + 99.100.101(102 - 98)$



$$4A = (1.2.3.4 - 0.1.2.3) + (2.3.4.5 - 1.2.3.4) + (3.4.5.6 - 2.3.4.5) + \dots + (99.100.101.102 - 98.99.100.101)$$

$$4A = 99.100.101.102 \Rightarrow A = \frac{99.100.101.102}{4}$$

Tính B tương tự rồi thay vào K .

Bài 6

Tính

a) $H = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 100^2$

b) $I = 1.3^2 + 3.5^2 + 5.7^2 + \dots + 97.99^2$

Lời giải

a) Ta có :

$$H = 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 50^2) = 4.A$$

$$A = 1.1 + 2.2 + 3.3 + 4.4 + \dots + 50.50$$

$$A = 1.(2 - 1) + 2.(3 - 1) + 3.(4 - 1) + 4.(5 - 1) + \dots + 50.(51 - 1)$$

$$A = (1.2 - 1) + (2.3 - 2) + (3.4 - 3) + \dots + (50.51 - 50)$$

$$A = (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 50.51) - (1 + 2 + 3 + \dots + 50)$$

Tính tổng A ta được $A = \frac{50.51.51}{3} - \frac{50.51}{2}$, thay vào H

b) Ta có $I = 1.3^2 + 3.5^2 + 5.7^2 + \dots + 97.99^2 \Rightarrow I = 1.3.3 + 3.5.5 + 5.7.7 + \dots + 97.99.99$

$$I = 1.3(5 - 2) + 3.5.(7 - 2) + 5.7.(9 - 2) + \dots + 97.99.(101 - 2)$$

$$I = (1.3.5 - 1.3.2) + (3.5.7 - 3.5.2) + (5.7.9 - 5.7.2) + \dots + (97.99.101 - 97.99.2)$$

$$I = (1.3.5 + 3.5.7 + 5.7.9 + \dots + 97.99.101) - 2(1.3 + 3.5 + 5.7 + \dots + 97.99)$$

Đặt $A = 1.3.5 + 3.5.7 + 5.7.9 + \dots + 97.99.101$, $B = 1.3 + 3.5 + 5.7 + \dots + 97.99$

Ta có: $8A = 1.3.5.8 + 3.5.7(9 - 1) + 5.7.9(11 - 3) + \dots + 97.99.101(103 - 95)$

$$8A = 1.3.5.8 + (3.5.7.9 - 1.3.5.7) + (5.7.9.11 - 3.5.7.9) + \dots + (97.99.101.103 - 95.97.99.101)$$

$$8A = 1.3.5.8 + 97.99.101.103 - 1.3.5.7 = 97.99.101.103 - 15 \Rightarrow A = \frac{97.99.101.103 - 15}{8}$$

Tương tự tính B rồi thay vào I







Dạng 9: Tính tổng cùng cơ số

Cách giải: Để giải các bài toán thuộc dạng này chúng ta dùng phương pháp giải phương trình (làm trội)

Tính tổng dạng: $S = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n$ (1)

Phương pháp:

Bước 1: Nhân vào hai vế của đẳng thức với số a ta được.

$$aS = a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^{n+1} \quad (2)$$

Bước 2: Lấy (2) trừ (1) vế theo vế được:

$$aS - S = a^{n+1} - 1 \Rightarrow S = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

A) Tính tổng dãy có cơ số lớn hơn 1.

Bài 1: Tính tổng

a) $A = 3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{100}$

b) $B = 2 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + \dots + 2^{2009}$

Lời giải

a) Ta thấy mỗi số hạng sau gấp số hạng liền trước nó “3” lần .

Ta có $3S = 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{100} + 3^{101}$

$$\Rightarrow 3A - A = 2A = (3 - 3) + (3^2 - 3^2) + \dots + (3^{2000} - 3^{2000}) + (3^{2001} - 1)$$

$$\Rightarrow 2S = 3^{101} - 1 \Rightarrow S = \frac{3^{101} - 1}{2}$$

b) Ta có $2^2 B = 2^3 + 2^5 + 2^7 + \dots + 2^{2009} + 2^{2011}$

$$\Rightarrow 4B - B = 3B = (2^3 - 2^3) + (2^5 - 2^5) + \dots + (2^{2009} - 2^{2009}) + (2^{2011} - 2)$$

$$\Rightarrow 3B = 2^{2011} - 2 \Rightarrow B = \frac{2^{2011} - 2}{3}$$

Bài 2: Tính tổng



a) $A = 5^0 + 5^1 + 5^2 + \dots + 5^{2018} + 5^{2019}$

b) $B = 5 + 5^3 + 5^5 + 5^7 + \dots + 5^{101}$

Lời giải

a) Ta có $A = 5^0 + 5^1 + 5^2 + \dots + 5^{2018} + 5^{2019} \Rightarrow 5A = 5^1 + 5^2 + \dots + 5^{2018} + 5^{2020}$

$\Rightarrow 5A - A = (5^1 + 5^2 + \dots + 5^{2018} + 5^{2020}) - (5^0 + 5^1 + 5^2 + \dots + 5^{2018} + 5^{2019})$

$\Rightarrow 4A = 5^{2020} - 1 \Rightarrow A = \frac{5^{2020} - 1}{4}$

b) Ta có $5^2 B = 5^3 + 5^5 + 5^7 + \dots + 5^{103} \Rightarrow 25B - B = 24B = 5^{103} - 5$

$\Rightarrow B = \frac{5^{103} - 5}{24}$

Bài 3:

Thực hiện phép tính $A = 2^{100} - 2^{99} - 2^{98} - \dots - 2^2 - 2 - 1$

Lời giải

Ta có $A = 2^{100} - (2^{99} + 2^{98} + \dots + 2^2 + 2 + 1)$

Đặt $B = 2^{99} + 2^{98} + \dots + 2^2 + 2 + 1 \Rightarrow 2B = 2^{100} + 2^{99} + \dots + 2^2 + 2$

$\Rightarrow 2B - B = B = 2^{100} - 1$

Vậy $A = 2^{100} - B = 2^{100} - (2^{100} - 1) = 1$

Vậy $A = 1$

Bài 4:

Tính tổng $G = 1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + \dots + 2^{2016}$

Lời giải

Ta có: $2^2 G = 2^2 + 2^4 + 2^6 + \dots + 2^{2016} + 2^{2018}$

$4G - G = 3G = (2^2 - 2^2) + (2^4 - 2^4) + \dots + (2^{2016} - 2^{2016}) + (2^{2018} - 1)$

$\Rightarrow 3G = 2^{2018} - 1 \Rightarrow G = \frac{2^{2018} - 1}{3}$

Bài 5: Tính tổng



a) $M = 2^{50} - 2^{49} - 2^{48} - \dots - 2^2 - 2$ b)

$N = 3^{100} - 3^{99} + 3^{98} - 3^{97} + \dots + 3^2 - 3^1 + 1$

Lời giải

a) Ta có $M = 2^{50} - (2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{48} + 2^{49})$

Đặt $A = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{48} + 2^{49}$, tính A ta được $A = 2^{50} - 2$,

Thay vào M ta được $M = 2^{50} - A = 2^{50} - (2^{50} - 2) = 2$

b) Ta có $N = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots + 9^{98} - 9^{99} + 3^{100}$

$\Rightarrow 3N = 3 - 3^2 + 3^3 - 3^4 + \dots + 3^{99} - 3^{100} + 3^{101}$

$\Rightarrow N + 3N = (3 - 3) + (3^2 - 3^2) + (3^3 - 3^3) + \dots + (3^{100} - 3^{100}) + 3^{101} + 1$

$4N = 3^{101} + 1 \Rightarrow N = \frac{3^{101} + 1}{4}$

Bài 6:

Tính giá trị của biểu thức $B = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \dots + 2^{2008}$

Lời giải

Ta có $B = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \dots + 2^{2008} \Rightarrow 2B = 2 - 2^2 + 2^3 - 2^4 + \dots + 2^{2009}$

$\Rightarrow 2B + B = 3B = 1 + 2^{2009} \Rightarrow B = \frac{2^{2009} + 1}{3}$

Bài 7:

Tính giá trị của biểu thức $A = 2000(2001^9 + 2001^8 + \dots + 2001^2 + 2001) + 1$

Lời giải

Đặt $B = 2001 + 2001^2 + 2001^3 + \dots + 2001^9 \Rightarrow 2001B = 2001^2 + 2001^3 + \dots + 2001^{10}$

$\Rightarrow 2001B - B = 2000B = 2001^{10} - 2001$

Khi đó $A = 2000B + 1 = 2001^{10} - 2001 + 1 = 2001^{10} - 2000$

Bài 8:

Cho $H = 2^{2010} - 2^{2009} - 2^{2008} - \dots - 2 - 1$. Tính 2010^H

Lời giải

Ta có $H = 2^{2010} - (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2008} + 2^{2009})$





Đặt $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2009}$

Tính tổng A ta được $A = 2^{2010} - 1$, thay vào H ta được:

$$H = 2^{2010} - (2^{2010} - 1) = 1 \Rightarrow 2010^H = 2010$$

Bài 9:

Tính $H = 1 + 2.6 + 3.6^2 + 4.6^3 + \dots + 100.6^{99}$

Lời giải

Ta có: $6H = 6 + 2.6^2 + 3.6^3 + 4.6^4 + \dots + 100.6^{100}$

$$H - 6H = -5H = (2.6 - 6) + (3.6^2 - 2.6^2) + (4.6^3 - 3.6^3) + \dots + (100.6^{99} - 99.6^{99}) + (1 - 100.6^{100})$$

$$-5H = 6 + 6^2 + 6^3 + \dots + 6^{99} + (1 - 100.6^{100})$$

Đặt $A = 6 + 6^2 + 6^3 + \dots + 6^{99}$, Tính A ta được $A = \frac{6^{100} - 6}{5}$, Thay vào H ta được:

$$-5H = A + (1 - 100.6^{100}) = \frac{6^{100} - 6}{5} + 1 - 100.6^{100} = \frac{6^{100} - 6 + 5 - 500.6^{100}}{5} = -\frac{499.6^{100} + 1}{5}$$

$$\Rightarrow H = \frac{499.6^{100} + 1}{25}$$

B) Tính tổng dãy có cơ số bé hơn 1.

Bài 1:

Tính tổng sau $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2005}}$ (1)

Lời giải

Cách 1: Ta thấy mỗi số hạng liền sau của tổng đều kém số hạng liền trước của nó "2" lần

$$2S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2004}} \quad (2)$$

Trừ vế với vế của (2) cho (1) ta được: $S = 1 - \frac{1}{2^{2005}} = \frac{2^{2005} - 1}{2^{2005}}$



Cách 2: Ta có: $\frac{1}{2}S = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2006}}$ (3)

Trừ vế với vế của (1) cho (3) ta được:

$$S - \frac{1}{2}S = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2006}} = \frac{2^{2005} - 1}{2^{2006}} \Rightarrow \frac{1}{2}S = \frac{2^{2005} - 1}{2^{2006}} \Rightarrow S = \frac{2^{2005} - 1}{2^{2005}}.$$

Bài 2:

Tính nhanh $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^8}$.

Lời giải

Ta có $3A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^7}$ (1)

$A = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^7}$. (2)

Lấy (1) trừ (2) được $2A = 1 - \frac{1}{3^8} = 1 - \frac{1}{6561} = \frac{6560}{6561}$.

Do đó $A = \frac{3280}{6561}$.

Bài 3:

Tính tổng $A = \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{7^{100}}$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{7}A = \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{100}} + \frac{1}{7^{101}}$

$$A - \frac{1}{7}A = \left(\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^2}\right) + \left(\frac{1}{7^3} - \frac{1}{7^3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{7^{100}} - \frac{1}{7^{100}}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{7^{101}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{6}{7}A = \frac{7^{100} - 1}{7^{101}} \Rightarrow A = \frac{7^{100} - 1}{6 \cdot 7^{100}}$$

Bài 4:

Tính tổng $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{20}}$

Lời giải



Ta có: $\frac{1}{3}B = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{20}} + \frac{1}{3^{21}}$

$$B - \frac{1}{3}B = \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{3^{20}} - \frac{1}{3^{20}}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3^{21}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}B = \frac{3^{20} - 1}{3^{21}} \Rightarrow B = \frac{3^{20} - 1}{2 \cdot 3^{20}}$$

Bài 5: Tính tổng

a) $D = \left(-\frac{1}{7}\right)^0 + \left(-\frac{1}{7}\right)^1 + \left(-\frac{1}{7}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{7}\right)^{2017}$

b) $E = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \dots + \frac{1}{3^{50}} - \frac{1}{3^{51}}$

Lời giải

a) Ta có: $D = 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{7^{2016}} - \frac{1}{7^{2017}}$

$$\frac{1}{7}D = \frac{1}{7} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} - \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{2017}} - \frac{1}{7^{2018}}$$

$$D + \frac{1}{7}D = \left(\frac{-1}{7} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7^2} + \frac{-1}{7^2}\right) + \dots + \left(\frac{-1}{7^{2017}} + \frac{1}{7^{2017}}\right) + \left(1 - \frac{1}{7^{2018}}\right)$$

$$\frac{8}{7}D = \frac{7^{2018} - 1}{7^{2018}} \Rightarrow D = \frac{7^{2018} - 1}{8 \cdot 7^{2018}}$$

b) Ta có: $\frac{1}{3}E = \frac{-1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{51}} - \frac{1}{3^{52}}$

$$E + \frac{1}{3}E = \left(\frac{1}{3^2} + \frac{-1}{3^2}\right) + \left(\frac{-1}{3^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \dots + \left(\frac{-1}{3^{51}} + \frac{1}{3^{51}}\right) + \left(\frac{-1}{3} + \frac{-1}{3^{52}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}E = -\frac{3^{51} + 1}{3^{52}} \Rightarrow E = -\frac{3^{51} + 1}{4 \cdot 3^{51}}$$

Bài 6:

Tính tổng $A = \frac{3}{5} + \frac{3}{5^4} + \frac{3}{5^7} + \dots + \frac{3}{5^{100}}$

Lời giải

Ta có: $A = \frac{3}{5} + \frac{3}{5^4} + \frac{3}{5^7} + \dots + \frac{3}{5^{100}} \Rightarrow A = 3\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^7} + \dots + \frac{1}{5^{100}}\right)$



$$\text{Đặt } B = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^7} + \dots + \frac{1}{5^{100}} \Rightarrow \frac{1}{5^3} B = \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^7} + \frac{1}{5^{10}} + \dots + \frac{1}{5^{103}}$$

$$B - \frac{1}{125} B = \left(\frac{1}{5^4} - \frac{1}{5^4} \right) + \left(\frac{1}{5^7} - \frac{1}{5^7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{5^{100}} - \frac{1}{5^{100}} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5^{103}} \right)$$

$$\frac{124.B}{125} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5^{103}} = \frac{5^{102} - 1}{5^{103}} \Rightarrow A = \frac{5^{102} - 1}{5^{100} \cdot 124}$$

Bài 7: Tính tổng

$$\text{a) } K = \frac{200 - \left(3 + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \dots + \frac{2}{100} \right)}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{99}{100}} = 2 \quad \text{b)}$$

$$I = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2} \right)^{100}$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } TS = \left(2 - \frac{2}{3} \right) + \left(2 - \frac{2}{4} \right) + \left(2 - \frac{2}{5} \right) + \dots + \left(2 - \frac{2}{100} \right) + 1$$

$$TS = \frac{4}{3} + \frac{6}{4} + \frac{8}{5} + \dots + \frac{198}{100} + \frac{2}{2} = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{99}{100} \right) = 2.MS \Rightarrow K = \frac{TS}{MS} = \frac{2MS}{MS} = 2$$

$$\text{b) Ta có: } I = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{100}} \Rightarrow \frac{1}{2} I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{100}} + \frac{1}{2^{101}}$$

$$\Rightarrow I - \frac{1}{2} I = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^2} \right) + \left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{100}} - \frac{1}{2^{100}} \right) + \left(1 - \frac{1}{2^{101}} \right)$$

$$\frac{1}{2} I = \frac{2^{101} - 1}{2^{101}} \Rightarrow I = \frac{2^{101} - 1}{2^{100}}$$

Bài 8:

$$\text{Tính tổng } C = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1}{2^{99}}$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } \frac{1}{2} C = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \dots + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{101}}$$



$$C - \frac{1}{4}C = \frac{3}{4}C = \left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^3}\right) + \left(\frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{98}} - \frac{1}{2^{98}}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{101}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}C = \frac{2^{100} - 1}{2^{101}} \Rightarrow C = \frac{2^{100} - 1}{3 \cdot 2^{99}}$$

Bài 9:

Tính tổng $H = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2017}{3^{2017}}$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{3}H = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{3^4} + \frac{4}{3^5} + \dots + \frac{2016}{3^{2017}} + \frac{2017}{3^{2018}}$

$$H - \frac{1}{3}H = \left(\frac{2}{3^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{3}{3^3} - \frac{2}{3^3}\right) + \left(\frac{4}{3^4} - \frac{3}{3^4}\right) + \dots + \left(\frac{2017}{3^{2017}} - \frac{2016}{3^{2017}}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{2017}{3^{2018}}\right)$$

$$\frac{2}{3}H = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2017}} + \frac{1}{3} - \frac{2017}{3^{2018}}$$

Đặt $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2017}}$. Tính A rồi thay vào H

Bài 10:

Tính tổng $F = 1 + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \dots + \frac{100}{2^{100}}$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{2}F = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^4} + \frac{4}{2^5} + \frac{5}{2^6} + \dots + \frac{99}{2^{100}} + \frac{100}{2^{101}}$

$$F - \frac{1}{2}F = \left(\frac{4}{2^4} - \frac{3}{2^4}\right) + \left(\frac{5}{2^5} - \frac{4}{2^5}\right) + \dots + \left(\frac{100}{2^{100}} - \frac{99}{2^{100}}\right) + \left(1 + \frac{3}{2^3} - \frac{1}{2} - \frac{100}{2^{101}}\right)$$

$$\frac{1}{2}F = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \dots + \frac{1}{2^{100}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8} - \frac{100}{2^{101}}\right)$$

Đặt $A = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \dots + \frac{1}{2^{100}}$. Tính A rồi thay vào F

Dạng 10: Tính tỉ số của hai tổng

Bài 1:





Thực hiện phép tính

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{1.2.3 + 2.4.6 + 4.8.12 + 7.14.21}{1.3.5 + 2.6.10 + 4.12.20 + 7.21.35} & \text{b)} \\ & \frac{1.7.9 + 3.21.27 + 5.35.45 + 7.49.63}{1.3.5 + 3.9.15 + 5.15.25 + 7.21.35} \end{aligned}$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } \frac{1.2.3 + 2.4.6 + 4.8.12 + 7.14.21}{1.3.5 + 2.6.10 + 4.12.20 + 7.21.35} = \frac{1.2.3(1 + 2.2.2 + 4.4.4 + 7.7.7)}{1.3.5(1 + 2.2.2 + 4.4.4 + 7.7.7)} = \frac{1.2.3}{1.3.5} = \frac{2}{5}$$

$$\text{b) Ta có: } \frac{1.7.9 + 3.21.27 + 5.35.45 + 7.49.63}{1.3.5 + 3.9.15 + 5.15.25 + 7.21.35} = \frac{1.7.9(1 + 3.3.3 + 5.5.5 + 7.7.7)}{1.3.5(1 + 3.3.3 + 5.5.5 + 7.7.7)} = \frac{1.7.9}{1.3.5} = \frac{21}{5}$$

Bài 2:

Thực hiện phép tính $\frac{1.2 + 2.4 + 3.6 + 4.8 + 5.10}{3.4 + 6.8 + 9.12 + 12.16 + 15.20}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{1.2 + 2.4 + 3.6 + 4.8 + 5.10}{3.4 + 6.8 + 9.12 + 12.16 + 15.20} = \frac{1.2(1 + 2.2 + 3.3 + 4.4 + 5.5)}{3.4(1 + 2.2 + 3.3 + 4.4 + 5.5)} = \frac{1.2}{3.4} = \frac{1}{6}$$

Bài 3:

Tính giá trị các biểu thức sau

$$\text{a) } A = \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{97} + \frac{1}{99}}{\frac{1}{1.99} + \frac{1}{3.97} + \frac{1}{5.95} + \dots + \frac{1}{97.3} + \frac{1}{99.1}} \quad \text{b)}$$

$$B = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}}{\frac{99}{1} + \frac{98}{2} + \frac{97}{3} + \dots + \frac{1}{99}}$$

Lời giải

a) Ghép các phân số ở số bị chia thành từng cặp để MC giống mẫu của các phần số tương ứng ở số chia. Biến đổi số bị chia : cộng từng cặp các phân số cách đều hai đầu ta được :

$$\left(1 + \frac{1}{99}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{97}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{95}\right) + \dots + \left(\frac{1}{49} + \frac{1}{51}\right) = \frac{100}{1.99} + \frac{100}{3.97} + \frac{100}{5.95} + \dots + \frac{100}{49.51}$$





Biểu thức này gấp 50 lần số chia. Vậy $A = 50$.

b) Biến đổi số chia : viết các phần tử thành hiệu : $100 - 1, 100 - 2, \dots, 100 - 99$.

$$\text{số chia bằng : } \frac{100-1}{1} + \frac{100-2}{2} + \frac{100-3}{3} + \dots + \frac{100-99}{99}$$

$$= \left(\frac{100}{1} + \frac{100}{2} + \frac{100}{3} + \dots + \frac{100}{99} \right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \dots + \frac{99}{99} \right)$$

$$= 100 + 100 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} \right) - 99$$

$$1 + 100 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} \right) = 100 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} \right).$$

Biểu thức này bằng 100 lần số bị chia. Vậy $B = \frac{1}{100}$.

Bài 4:

a) Tính $D = \frac{1 + (1+2) + (1+2+3) + \dots + (1+2+3+\dots+98)}{1.98 + 2.97 + 3.96 + \dots + 98.1}$

b) Chứng minh rằng biểu thức E có giá trị bằng $\frac{1}{2}$.

$$E = \frac{1.98 + 2.97 + 3.96 + \dots + 98.1}{1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99}$$

Lời giải

a) Số bị chia gồm 98 tổng, số 1 có mặt ở 98 tổng, số 2 có mặt ở 97 tổng, số 3 có mặt ở 96 tổng..., số 97 có mặt ở 2 tổng, số 98 có mặt ở 1 tổng.

Như vậy số bị chia bằng $1.98 + 2.97 + 3.96 + \dots + 97.2 + 98.1$, bằng số chia. Vậy $D = 1$.

b) Theo câu a, số bị chia bằng:

$$1 + (1+2) + (1+2+3) + \dots + (1+2+3+\dots+98).$$

Theo công thức tính tổng các số tự nhiên liên tiếp, biểu thức này bằng:

$$\frac{1.2}{2} + \frac{2.3}{2} + \dots + \frac{98.99}{2}, \text{ bằng } \frac{1}{2} \text{ số chia. Vậy } E = \frac{1}{2}.$$

Bài 5:



Tính giá trị của biểu thức sau một cách hợp lí

$$A = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{9120} + \frac{1}{9506} + \frac{1}{9900}}{50 - \frac{50}{51} - \frac{51}{52} - \frac{52}{53} - \dots - \frac{97}{98} - \frac{98}{99} - \frac{99}{100}}$$

Lời giải

Xét tử: $T = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{9120} + \frac{1}{9506} + \frac{1}{9900}$

$$T = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{95.96} + \frac{1}{97.98} + \frac{1}{99.100}$$

$$T = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{98} + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

$$T = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{97} + \frac{1}{98} + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}\right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{98} + \frac{1}{100}\right)$$

$$T = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{49} + \frac{1}{50}\right)$$

$$T = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} \quad (1)$$

Xét mẫu:

$$M = 50 - \frac{50}{51} - \frac{51}{52} - \frac{52}{53} - \dots - \frac{97}{98} - \frac{98}{99} - \frac{99}{100}$$

$$M = \left(1 - \frac{50}{51}\right) + \left(1 - \frac{51}{52}\right) + \dots + \left(1 - \frac{98}{99}\right) + \left(1 - \frac{99}{100}\right)$$

$$M = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: tử bằng mẫu. Do đó: $A = 1$

Bài 6:

Tính $A = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2019}}\right) : \left(1 - \frac{1}{2^{2019}}\right)$.

Lời giải



Ta

CÓ

$$A = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2019}} \right) : \left(1 - \frac{1}{2^{2019}} \right) \Rightarrow 2.A = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2019}} \right) : \left(1 - \frac{1}{2^{2019}} \right)$$

$$2.A = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2018}} \right) : \left(1 - \frac{1}{2^{2019}} \right)$$

Xét hiệu:

$$2.A - A = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2018}} \right) : \left(1 - \frac{1}{2^{2019}} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2019}} \right) : \left(1 - \frac{1}{2^{2019}} \right)$$

$$A = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2018}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} - \dots - \frac{1}{2^{2019}} \right) : \left(1 - \frac{1}{2^{2019}} \right)$$

$$A = \left(1 - \frac{1}{2^{2019}} \right) : \left(1 - \frac{1}{2^{2019}} \right) = 1$$

Vậy $A = 1$

Bài 7:

Tính tỉ số $\frac{A}{B}$ biết $A = \frac{2012}{51} + \frac{2012}{52} + \frac{2012}{53} + \dots + \frac{2012}{100}$ và

$$B = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100}$$

Lời giải

Ta có: $A = 2012 \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{100} \right)$

$$B = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} \right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{100} \right)$$

$$B = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100} \right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{50} \right) = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{100}$$

Khi đó: $\frac{A}{B} = \frac{2012}{1} = 2012$

Bài 8:





Tính tỉ số $\frac{A}{B}$ biết $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{199.200}$ và

$$B = \frac{1}{101.200} + \frac{1}{102.199} + \dots + \frac{1}{200.101}$$

Lời giải

Ta có:

$$A = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{199} - \frac{1}{200}\right) = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{200}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200}\right)$$

$$A = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{200}\right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}\right) = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{200}$$

$$A = \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{200}\right) + \left(\frac{1}{102} + \frac{1}{199}\right) + \dots + \left(\frac{1}{150} + \frac{1}{151}\right) = \frac{301}{101.200} + \frac{301}{102.199} + \dots + \frac{301}{150.151}$$

Và $B = \left(\frac{1}{101.200} + \frac{1}{200.101}\right) + \left(\frac{1}{102.199} + \frac{1}{199.102}\right) + \dots + \left(\frac{1}{150.151} + \frac{1}{151.150}\right)$

$$B = \frac{2}{101.200} + \frac{2}{102.199} + \dots + \frac{2}{150.151}$$

Khi đó: $\frac{A}{B} = \frac{301}{2}$

Bài 9:

Tính tỉ số $\frac{A}{B}$ biết $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{101.102}$

và $B = \frac{1}{52.102} + \frac{1}{53.101} + \frac{1}{54.100} + \dots + \frac{1}{102.52} + \frac{2}{77.154}$

Lời giải

Ta có: $A = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \frac{1}{101} - \frac{1}{102} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{101} - \frac{1}{102}\right)$

$$A = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{101} + \frac{1}{102}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{102}\right)$$

$$A = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{102}\right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{51}\right) = \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{101} + \frac{1}{102}$$



$$A = \left(\frac{1}{52} + \frac{1}{102}\right) + \left(\frac{1}{53} + \frac{1}{101}\right) + \dots + \left(\frac{1}{76} + \frac{1}{78}\right) + \frac{1}{77} = \frac{154}{52 \cdot 102} + \frac{154}{53 \cdot 101} + \dots + \frac{154}{76 \cdot 78} + \frac{154}{77 \cdot 154}$$

$$\text{và } B = \left(\frac{1}{52 \cdot 102} + \frac{1}{102 \cdot 52}\right) + \left(\frac{1}{53 \cdot 101} + \frac{1}{101 \cdot 53}\right) + \dots + \left(\frac{1}{76 \cdot 78} + \frac{1}{78 \cdot 76}\right) + \frac{2}{77 \cdot 154}$$

$$B = \frac{2}{52 \cdot 102} + \frac{2}{53 \cdot 101} + \dots + \frac{2}{76 \cdot 78} + \frac{2}{77 \cdot 154} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{154}{2} = 77$$

Bài 10:

$$\text{Chứng minh rằng } \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{99}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{100}\right) = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } VT = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{100}\right)$$

$$VT = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{50}\right) = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100} = VP$$

Bài 11:

$$\text{Chứng minh rằng } 100 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{99}{100}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } VT = (1-1) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{100}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{99}{100} = VP$$

(đpcm)

Bài 12:

$$\text{Tính tỉ số } \frac{A}{B}, \text{ biết } A = 92 - \frac{1}{9} - \frac{2}{10} - \frac{3}{11} - \dots - \frac{92}{100} \text{ và } B = \frac{1}{45} + \frac{1}{50} + \frac{1}{55} + \dots + \frac{1}{500}$$

Lời giải

Ta có :



$$A = \left(1 - \frac{1}{9}\right) + \left(1 - \frac{2}{10}\right) + \left(1 - \frac{3}{11}\right) + \dots + \left(1 - \frac{92}{100}\right)$$

$$= \frac{8}{9} + \frac{8}{10} + \dots + \frac{8}{100} = 8 \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{100}\right)$$

$$B = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{100}\right). \text{ Khi đó: } \frac{A}{B} = \frac{8}{\frac{1}{5}} = 40$$

Dạng 11: Tính giá trị biểu thức

Bài 1:

Tính giá trị của biểu thức sau $B = \frac{2a}{5b} + \frac{5b}{6c} + \frac{6c}{7d} + \frac{7d}{2a}$ biết $\frac{2a}{5b} = \frac{5b}{6c} = \frac{6c}{7d} = \frac{7d}{2a}$ và $a, b, c, d \neq 0$

Lời giải

$$\text{Đặt } B = \frac{2a}{5b} = \frac{5b}{6c} = \frac{6c}{7d} = \frac{7d}{2a} = k$$

$$\Rightarrow \frac{2a}{5b} \cdot \frac{5b}{6c} \cdot \frac{6c}{7d} \cdot \frac{7d}{2a} = k^4 = 1 \Rightarrow k = \pm 1 \Rightarrow B = \pm 4$$

Bài 2:

Tính giá trị của biểu thức sau $\frac{2a}{3b} + \frac{3b}{4c} + \frac{4c}{5d} + \frac{5d}{2a}$ biết $\frac{2a}{3b} = \frac{3b}{4c} = \frac{4c}{5d} = \frac{5d}{2a}$

Lời giải

$$\text{Đặt: } \frac{2a}{3b} = \frac{3b}{4c} = \frac{4c}{5d} = \frac{5d}{2a} = k \Rightarrow k^4 = \frac{2a}{3b} \cdot \frac{3b}{4c} \cdot \frac{4c}{5d} \cdot \frac{5d}{2a} = 1 \Rightarrow k = \pm 1$$

$$\text{Khi đó: } \frac{2a}{3b} + \frac{3b}{4c} + \frac{4c}{5d} + \frac{5d}{2a} = 1 \text{ hoặc } \frac{2a}{3b} + \frac{3b}{4c} + \frac{4c}{5d} + \frac{5d}{2a} = -1$$

Bài 3:

Tính giá trị của biểu thức $B = \frac{a^2m - a^2n - b^2n + b^2m}{a^2 + b^2}$

Lời giải



Ta có:
$$B = \frac{a^2(m-n) + b^2(m-n)}{a^2 + b^2} = \frac{(a^2 + b^2)(m-n)}{(a^2 + b^2)} = m - n$$

Bài 4:

Thực hiện phép tính
$$\frac{(ab + bc + cd + da)abcd}{(c+d)(a+b) + (b-c)(a-d)}$$

Lời giải

Ta có:
$$MS = ca + cb + da + bd + ab - bd - ca + cd = (ab + bc + cd + da)$$

Khi đó:
$$\frac{TS}{MS} = \frac{(ab + bc + cd + da)abcd}{(ab + bc + cd + da)} = abcd$$

Bài 5:

Tính giá trị của biểu thức sau
$$A = \frac{(a+b)(-x-y) - (a-y)(b-x)}{abxy(xy + ay + ab + bx)}$$

Lời giải

Ta có:
$$TS = -ax - ay - bx - by - ab + ax + yb - xy = -(ay + ab + bx + xy)$$

Khi đó:
$$A = \frac{-(ay + ab + bx + xy)}{abxy(ay + ab + bx + xy)} = \frac{-1}{abxy}$$

Bài 6:

Cho a, b, c là ba số thực khác 0, thỏa mãn điều kiện:
$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$$

Hãy tính giá trị biểu thức
$$B = \left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{a}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right)$$

Lời giải

+ Nếu $a + b + c \neq 0$, theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 1$$

Mà
$$\frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 2 \Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 2$$

Vậy
$$B = \left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{a}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+a}{a}\right)\left(\frac{c+a}{c}\right)\left(\frac{b+c}{b}\right) = 8$$

+ Nếu $a + b + c = 0$, theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:



$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 0$$

$$\text{Mà } \frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 1 \Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 1$$

$$\text{Vậy } B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+a}{a}\right) \cdot \left(\frac{c+a}{c}\right) \cdot \left(\frac{b+c}{b}\right) = 1$$

Bài 7:

Cho $(a+3)(b-4) - (a-3)(b+4) = 0$. Chứng minh $\frac{a}{3} = \frac{b}{4}$

Lời giải

Ta có:

$$(a+3)(b-4) - (a-3)(b+4) = 0 \Rightarrow ab - 4a + 3b - 12 - ab - 4a + 3b + 12 = 0$$

$$\text{Tính được } 6a = 8b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{4}$$

Bài 8:

Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $xyz = 1$.

$$\text{Chứng minh rằng } P = \frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = 1$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{1}{1+y+yz} = \frac{x}{x+xy+xyz} = \frac{x}{1+x+xy};$$

$$\text{Mặt khác: } \frac{1}{1+z+zx} = \frac{xy}{xy+xyz+x^2.yz} = \frac{xy}{1+x+xy}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } P &= \frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} \\ &= \frac{1}{1+x+xy} + \frac{x}{1+x+xy} + \frac{xy}{1+x+xy} = \frac{1+x+xy}{1+x+xy} = 1 \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

Bài 9:

Cho $abc = 2$. Tính $B = \frac{a}{ab+a+2} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{2c}{ac+2c+2}$

Lời giải





$$B = \frac{a}{ab + a + abc} + \frac{b}{bc + b + 1} + \frac{abc^2}{ac + abc^2 + abc} = \frac{a}{a(b + 1 + bc)} + \frac{b}{bc + b + 1} + \frac{abc^2}{ac(1 + bc + b)} = 1$$

Bài 10:

Cho $xyz = 2010$. Chứng minh rằng $\frac{2010x}{xy + 2010x + 2010} + \frac{y}{yz + y + 2010} + \frac{z}{xz + z + 1} = 1$

Lời giải

Ta có VT = $\frac{x^2yz}{xy + x^2yz + xyz} + \frac{y}{yz + y + xyz} + \frac{z}{xz + z + 1} = 1$

Bài 11:

Tính giá trị của biểu thức $A = 10a + 16b + 4a - 2b$ với $a + b = 50$

Lời giải

Ta có : $A = (10a + 4a) + (16b - 2b) = 14a + 14b = 14(a + b) = 14.50 = 700$

Bài 12:

Tính giá trị của biểu thức $5x^2 + 6x - 2$ với $|x - 1| = 2$

Lời giải

Ta có: Khi $|x - 1| = 2 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 2 \\ x - 2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 0 \end{cases}$

Khi $x = 3 \Rightarrow A = 5x^2 + 6x - 2 = 5.9 + 6.3 - 2 = 61$.

Khi $x = 0 \Rightarrow A = 5x^2 + 6x - 2 = -2$

Bài 13:

Tính giá trị của biểu thức $P = x^{2020} + y^{2020}$ khi $|x - 1| + (x + y - 2)^{2020} = 0$

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} |x - 1| \geq 0 \\ (x + y - 2)^{2020} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow |x - 1| + (x + y - 2)^{2020} \geq 0$

Do đó để $|x - 1| + (x + y - 2)^{2020} = 0$ thì $\begin{cases} |x - 1| = 0 \\ (x + y - 2)^{2020} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$.



Vậy: $P = x^{2020} + y^{2020} = 1^{2020} + 1^{2020} = 2$.

Bài 14:

Tính giá trị của biểu thức $x^4 - 5y^3 + 4$, biết $(x - 1)^{2020} + (y + 2)^{2022} = 0$

Lời giải

Ta có: Vì $\begin{cases} (x - 1)^{2020} \geq 0 \\ (y + 2)^{2022} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (x - 1)^{2020} + (y + 2)^{2022} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$

Thay vào ta được: $A = 1^4 - 5 \cdot (-2)^3 + 4 = 1 + 40 + 4 = 45$.

Bài 15:

Cho a, b, c khác 0 và đôi một khác nhau thỏa mãn $a^2(b + c) = b^2(a + c) = 2013$

Tính giá trị biểu thức $A = c^2(a + b)$

Lời giải

Ta có: $a^2(b + c) = b^2(a + c) = 2013$

$\Rightarrow a^2b + a^2c - b^2a - b^2c = 0 \Leftrightarrow ab(a - b) + c(a - b)(a + b) = 0$

$(a - b)(ab + bc + ca) = 0 \Rightarrow ab + bc + ca = 0$ vì $a \neq b$

Khi đó: $(ab + bc + ca)b = 0 \Rightarrow b^2(a + c) = -abc \Rightarrow -abc = 2013$

tương tự: $(ab + bc + ca)c = 0 \Rightarrow c^2(a + b) = -abc = 2013$

Bài 16:

Cho $A = \frac{1,11 + 0,19 - 1,32}{2,06 + 0,54} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) : 2$ và $B = \left(5\frac{7}{8} - 2\frac{1}{4} - 0,5\right) : 2\frac{23}{26}$

a) Rút gọn A và B

b) Tìm x nguyên sao cho $A < x < B$

Lời giải

a) Ta có: $A = \frac{-1}{2} - \left(\frac{5}{6}\right) : 2 = \frac{-1}{2} - \frac{5}{12} = \frac{-11}{12}$, và $B = \frac{25}{8} : \frac{75}{26} = \frac{13}{12}$



b) Ta có: $A < x < B \Rightarrow \frac{-11}{12} < x < \frac{13}{12} \Rightarrow \frac{-11}{12} < \frac{12x}{12} < \frac{13}{12} \Rightarrow -11 < 12x < 13 \Rightarrow \begin{cases} 12x = 0 \\ 12x = 12 \end{cases}$

Bài 17:

Cho $P = |2a - 1| - (a - 5)$

a) Rút gọn P

b) Có giá trị nào của a để $P = 4$ không

Lời giải

Ta có:

a) $P = \begin{cases} 2a - 1 - a + 5, & \text{vs } \left(a \geq \frac{1}{2}\right) \\ 1 - 2a - a + 5, & \left(a < \frac{1}{2}\right) \end{cases} = \begin{cases} a + 4 & \left(a \geq \frac{1}{2}\right) \\ 6 - 3a & \left(a < \frac{1}{2}\right) \end{cases}$

b) Để $P = 4 \Rightarrow \begin{cases} a + 4 = 4 & \left(a \geq \frac{1}{2}\right) \\ 6 - 3a = 4 & \left(a < \frac{1}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 & (KTM) \\ a = \frac{2}{3} & (KTM) \end{cases}$

Vậy không có giá trị nào của a để $P = 4$

Bài 18:

Cho biểu thức $C = \frac{2(x-1)^2 + 1}{(x-1)^2 + 2}$

a) Chứng tỏ rằng với mọi x , biểu thức C luôn có giá trị là một số dương

b) Tìm tất cả các số nguyên x để C có giá trị là một số nguyên

c) Với giá trị nào của x thì biểu thức C có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đấy

Lời giải

a) Ta thấy $2(x-1)^2 + 1 > 0$ và $(x-1)^2 + 2 > 0$ với mọi x

Vậy biểu thức C luôn dương



$$\text{b) Ta có } C = \frac{2[(x-1)^2 + 2] - 3}{(x-1)^2 + 2} = 2 - \frac{3}{(x-1)^2 + 2}$$

Để C nguyên ta phải có $(x-1)^2 + 2$ là ước dương của 3

$$\text{Vì } (x-1)^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow (x-1)^2 + 2 = 3 \Rightarrow (x-1)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

c) C nhỏ nhất khi $\frac{3}{(x-1)^2 + 2}$ lớn nhất

$$\text{Vì } (x-1)^2 + 2 \geq 2 \text{ nên } \frac{3}{(x-1)^2 + 2} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow 2 - \frac{3}{(x-1)^2 + 2} \geq 2 - \frac{2}{3} \text{ hay } C \geq \frac{1}{3}$$

$$\text{Vậy } C_{\min} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 1$$

Bài 19:

Cho hai biểu thức $A = \frac{4x-7}{x-2}$ và $B = \frac{3x^2-9x+2}{x-3}$

a) Tìm giá trị nguyên của x để mỗi biểu thức có giá trị nguyên

b) Tìm giá trị nguyên của x để cả hai biểu thức cùng có giá trị nguyên

Lời giải

$$\text{a) Ta có } A = \frac{4x-7}{x-2} = \frac{4(x-2)+1}{x-2} = 4 + \frac{1}{x-2}$$

Với $x \in \mathbb{Z}$ thì $x-2 \in \mathbb{Z}$

$$\text{Để } A \text{ nguyên thì } \frac{1}{x-2} \text{ nguyên} \Rightarrow x-2 \in U(1) \Rightarrow \begin{cases} x-2=1 \\ x-2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=1 \end{cases}$$

$$\text{b) Ta có } B = \frac{3x^2-9x+2}{x-3} = \frac{3x(x-3)+2}{x-3} = 3 + \frac{2}{x-3}$$

Với $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-3 \in \mathbb{Z}$

$$\text{Để } B \text{ nguyên thì } \frac{2}{x-3} \text{ nguyên} \Rightarrow x-3 \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$$

Do đó $x = 5; x = 1; x = 4; x = 2$



Vậy để B nguyên thì $x \in \{1; 2; 4; 5\}$

Từ Bài a suy ra để A, B cùng nguyên thì $x = 1$.

Bài 20:

Cho $abc = 2015$. Tính $A = \frac{2015a}{ab + 2015a + 2015} + \frac{b}{bc + b + 2015} + \frac{c}{ac + c + 1}$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^2bc}{ab + a^2bc + abc} + \frac{b}{bc + b + abc} + \frac{c}{ac + c + 1} \\ &= \frac{a^2bc}{ab(1 + ac + c)} + \frac{b}{b(c + 1 + ac)} + \frac{c}{ac + c + 1} = \frac{ac + c + 1}{ac + c + 1} = 1 \end{aligned}$$

Bài 21:

Cho $abc = 2$. Tính $B = \frac{a}{ab + a + 2} + \frac{b}{bc + b + 1} + \frac{2c}{ac + 2c + 2}$

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \frac{a}{ab + a + abc} + \frac{b}{bc + b + 1} + \frac{abc^2}{ac + abc^2 + abc} \\ &= \frac{a}{a(b + 1 + bc)} + \frac{b}{bc + b + 1} + \frac{abc^2}{ac(1 + bc + b)} = 1 \end{aligned}$$

Bài 22:

Cho $abc = 1$. Tính $A = \frac{a}{ab + a + 1} + \frac{b}{bc + b + 1} + \frac{c}{ac + c + 1}$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^2bc}{ab + a^2bc + abc} + \frac{b}{bc + b + abc} + \frac{c}{ac + c + 1} \\ &= \frac{a^2bc}{ab(1 + ac + c)} + \frac{b}{b(c + 1 + ac)} + \frac{c}{ac + c + 1} = 1 \end{aligned}$$

Bài 23:

Cho $abc = -2012$. Tính $B = \frac{a}{ab + a - 2012} + \frac{b}{bc + b + 1} - \frac{2012c}{ac - 2012c - 2012}$

Lời giải



$$B = \frac{a}{ab + a + abc} + \frac{b}{bc + b + 1} + \frac{abc^2}{ac + abc^2 + abc}$$

$$= \frac{a}{a(b + 1 + bc)} + \frac{b}{bc + b + 1} + \frac{abc^2}{ac(1 + bc + b)} = 1$$

Bài 24:

Chứng minh rằng nếu $xyz = 1$ thì $\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = 1$

Lời giải

$$VT = \frac{xyz}{xyz + x^2yz + xy} + \frac{xyz}{xyz + y + yz} + \frac{1}{1 + z + zx}$$

$$= \frac{xyz}{xy(z + xz + 1)} + \frac{xyz}{y(xz + 1 + z)} + \frac{1}{1 + z + zx} = 1 = VP$$

Bài 25:

Cho $xyz = 2010$, CMR: $\frac{2010x}{xy + 2010x + 2010} + \frac{y}{yz + y + 2010} + \frac{z}{xz + z + 1} = 1$

Lời giải

$$VT = \frac{x^2yz}{xy + x^2yz + xyz} + \frac{y}{yz + y + xyz} + \frac{z}{xz + z + 1} = 1$$

Bài 26:

Tính giá trị của biểu thức: $A = 13a + 19b + 4a - 2b$ với $a + b = 10$

Lời giải

Ta có: $A = (13a + 4a) + (19b - 2b) = 17a + 17b = 17(a + b) = 17 \cdot 10 = 1700$

Bài 27:

Tính giá trị của biểu thức: $5x^2 + 6x - 2$ khi $|x - 1| = 2$

Lời giải

Ta có: Khi $|x - 1| = 2 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 2 \\ x - 2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 0 \end{cases}$

Khi $x = 3 \Rightarrow A = 5x^2 + 6x - 2 = 5 \cdot 9 + 6 \cdot 3 - 2 = 61$. Khi $x = 0 \Rightarrow A = 5x^2 + 6x - 2 = -2$

Bài 28:





Tính giá trị của biểu thức: $2x^5 - 5y^3 + 4$, biết $(x - 1)^{20} + (y + 2)^{30} = 0$

Lời giải

Ta có: Vì
$$\begin{cases} (x - 1)^{20} \geq 0 \\ (y + 2)^{30} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (x - 1)^{20} + (y + 2)^{30} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Thay vào ta được: $A = 2.1^5 - 5.(-2)^3 + 4 = 2 + 40 + 4 = 46$

Bài 29:

Cho a, b, c khác 0 và đôi 1 khác nhau thỏa mãn: $a^2(b + c) = b^2(a + c) = 2013$. Tính $A = c^2(a + b)$

Lời giải

Ta có: $a^2(b + c) = b^2(a + c) = 2013$

$$\Rightarrow a^2b + a^2c - b^2a - b^2c = 0 \Leftrightarrow ab(a - b) + c(a - b)(a + b) = 0$$

$$(a - b)(ab + bc + ca) = 0 \Rightarrow ab + bc + ca = 0 \text{ vì } a \neq b$$

$$\text{Khi đó: } (ab + bc + ca)b = 0 \Rightarrow b^2(a + c) = -abc \Rightarrow -abc = 2013$$

$$\text{tương tự: } (ab + bc + ca)c = 0 \Rightarrow c^2(a + b) = -abc = 2013$$

Bài 30:

Cho $A = \frac{1,11 + 0,19 - 1,3.2}{2,06 + 0,54} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) : 2$ và $B = \left(5\frac{7}{8} - 2\frac{1}{4} - 0,5\right) : 2\frac{23}{26}$

a) Rút gọn A và B

b) Tìm x nguyên sao cho: $A < x < B$

Lời giải

a) Ta có: $A = \frac{-1}{2} - \left(\frac{5}{6}\right) : 2 = \frac{-1}{2} - \frac{5}{12} = \frac{-11}{12}$, và $B = \frac{25}{8} : \frac{75}{26} = \frac{13}{12}$

b) Ta có: $A < x < B \Rightarrow \frac{-11}{12} < x < \frac{13}{12} \Rightarrow \frac{-11}{12} < \frac{12x}{12} < \frac{13}{12} \Rightarrow -11 < 12x < 13 \Rightarrow \begin{cases} 12x = 0 \\ 12x = 12 \end{cases}$

Bài 31:

Cho $P = |2a - 1| - (a - 5)$



a) Rút gọn P

b) Có giá trị nào của a để $P = 4$ không?

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } P = \begin{cases} 2a - 1 - a + 5, & \left(a \geq \frac{1}{2} \right) \\ 1 - 2a - a + 5, & \left(a < \frac{1}{2} \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 4 & \left(a \geq \frac{1}{2} \right) \\ 6 - 3a & \left(a < \frac{1}{2} \right) \end{cases}$$

$$\text{b) Để } P = 4 \Rightarrow \begin{cases} a + 4 = 4 & \left(a \geq \frac{1}{2} \right) \\ 6 - 3a = 4 & \left(a < \frac{1}{2} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 & (KTM) \\ a = \frac{2}{3} & (KTM) \end{cases}$$

Vậy không có giá trị nào của a để $P = 4$.



Chuyên đề 3: CÁC PHÉP TOÁN VỀ LŨY THỪA

Kiến thức cần nhớ

1. Lũy thừa với số mũ tự nhiên: $a^n = a.a.a.a...a$ (n thừa số a với $a \in \mathbb{Q}$)

Qui ước: $a^0 = 1$ ($a \neq 0$) và $a^1 = a$

2. Các phép tính lũy thừa:

- Nhân hai lũy thừa cùng cơ số: $a^m.a^n = a^{m+n}$.

- Chia hai lũy thừa cùng cơ số: $a^m : a^n = a^{m-n}$ ($a \neq 0$; $m \geq n$)

- Lũy thừa của một tích: $(a.b)^n = a^n.b^n$

- Lũy thừa của một thương: $(a : b)^n = a^n : b^n$ ($b \neq 0$)

- Lũy thừa của lũy thừa: $(a^m)^n = a^{m.n}$

- Lũy thừa tăng: $a^{m^n} = a^{(m^n)}$

- Lũy thừa với số mũ âm: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ($a \neq 0$)

Ví dụ: $10^{-3} = \frac{1}{10^3}$.

Phương pháp 1: Đưa về cùng cơ số hoặc số mũ

1. Cơ sở phương pháp: Để so sánh hai lũy thừa ta thường đưa về so sánh hai lũy thừa cùng cơ số hoặc cùng số mũ.

- Nếu 2 lũy thừa cùng cơ số (lớn hơn 1) thì lũy thừa nào có số mũ lớn hơn sẽ lớn hơn. $a^m > a^n$ ($a > 1$) $\Leftrightarrow m > n$

- Nếu 2 lũy thừa cùng số mũ (lớn hơn 0) thì lũy thừa nào có cơ số lớn hơn sẽ lớn hơn. $a^n > b^n$ ($n > 0$) $\Leftrightarrow a > b$

Bài 1

So sánh các lũy thừa sau:

a) 128^7 và 4^{24}

b) 81^8 và 27^{11}



Lời giải

Phân tích: Nhận thấy, ở câu a) thì 128 và 4 là các cơ số liên quan tới lũy thừa cơ số 2, ở câu b) thì 81 và 27 liên quan tới lũy thừa cơ số 3. Do đó để so sánh, ta biến đổi các lũy thừa về các lũy thừa có cùng cơ số, rồi dựa vào so sánh số mũ để so sánh chúng với nhau.

$$\text{a) Có: } \left. \begin{array}{l} 128^7 = (2^7)^7 = 2^{49} \\ 4^{24} = (2^2)^{24} = 2^{48} \end{array} \right\} \Rightarrow 128^7 > 4^{24}$$

$$\text{b) Có } \left. \begin{array}{l} 81^8 = 3^{32} \\ 27^{11} = 3^{33} \end{array} \right\} \Rightarrow 81^8 < 27^{11}$$

Bài 2

So sánh các lũy thừa sau:

a) 5^{36} và 11^{24}

b) 32^{60} và 81^{50}

c) 3^{500} và 7^{300}

Lời giải

Phân tích: Nhận thấy, ở câu a) thì các lũy thừa có thể đưa về cùng số mũ 12, ở câu b) và c) các lũy thừa có thể đưa về cùng số mũ 100. Do đó để so sánh, ta biến đổi các lũy thừa về các lũy thừa có cùng số mũ, rồi dựa vào so sánh cơ số để so sánh chúng với nhau.

Hướng dẫn giải

$$\text{a) Có } \left. \begin{array}{l} 5^{36} = 125^{12} \\ 11^{24} = 121^{12} \end{array} \right\} \Rightarrow 5^{36} > 11^{24}.$$

$$\text{b) Có } \left. \begin{array}{l} 32^{60} = 2^{300} = 8^{100} \\ 81^{50} = 3^{200} = 9^{100} \end{array} \right\} \Rightarrow 32^{60} < 81^{50}$$

$$\text{c) Có } \left. \begin{array}{l} 3^{500} = 243^{100} \\ 7^{300} = 343^{100} \end{array} \right\} \Rightarrow 3^{500} < 7^{300}$$

Bài 3

So sánh các lũy thừa sau:

a) 3^{2n} và 2^{3n} ($n \in \mathbb{N}^*$).

b) 2^{100} và 3^{200} .

c) 5^{100} và 3^{500} .

Lời giải

a) $3^{2n} = (3^2)^n = 9^n; 2^{3n} = (2^3)^n = 8^n$. Vì $9 > 8 \Rightarrow 3^2 > 2^3 \Rightarrow (3^2)^n > (2^3)^n$

b) $2^{100} = (2^3)^{100} = 8^{100}$ và $3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100}$. Vì $8^{100} < 9^{100} \Rightarrow 2^{300} < 3^{200}$.





c) $5^{300} = (5^3)^{100} = 125^{100}$ và $3^{500} = (3^3)^{100} = 243^{100}$. Vì $125^{100} < 243^{100} \Rightarrow 5^{300} < 3^{500}$.

Lời bình: Qua ba ví dụ trên ta thấy rằng, trước khi so sánh hai lũy thừa với nhau trước hết ta cần làm hai việc sau:

- + Kiểm tra cơ số xem các cơ số có biến đổi được về cùng cơ số không.
- + Kiểm tra số mũ của các lũy thừa xem có ước chung lớn nhất không.

Việc làm này sẽ giúp chúng ta lựa chọn đúng phương pháp so sánh.

Phương pháp 2:

Dùng tính chất bắc cầu, tính chất đơn điệu của phép nhân

Cơ sở phương pháp:

Nếu $A > B$ và $B > C$ thì $A > C$

Nếu $AC < BC$ ($C > 0$) $\Leftrightarrow A < B$

Dạng 1: So sánh các lũy thừa

Bài 1

So sánh các lũy thừa sau:

a) 107^{50} và 73^{75} .

b) 2^{91} và 5^{35} .

Lời giải

Phân tích: Trong câu a) mặc dù số mũ của hai lũy thừa có ước chung là 25, tuy nhiên khi đó cơ số sẽ là 73^3 và 107^2 , các cơ số này khi tính ra sẽ rất lớn, do đó việc đưa về so sánh hai lũy thừa cùng số mũ sẽ không khả quan. Còn trong câu b) cả số mũ và cơ số đều không có ước chung nên cũng không thể áp dụng các phương pháp trong các ví dụ trên. Như vậy chúng ta chỉ còn cách lựa chọn dùng tính chất bắc cầu (so sánh qua lũy thừa trung gian).

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $107^{50} < 108^{50} = (4 \cdot 27)^{50} = 2^{100} \cdot 3^{150}$; $73^{75} > 72^{75} = (8 \cdot 9)^{75} = 2^{225} \cdot 3^{150}$

Vì $2^{100} < 2^{225} \Rightarrow 2^{100} \cdot 3^{150} < 2^{225} \cdot 3^{150} \Rightarrow 107^{50} < 73^{75}$.

b) Ta có: $2^{91} > 2^{90} = (2^5)^{18} = 32^{18}$; $5^{35} < 5^{36} = (5^2)^{18} = 25^{18}$



Vì $32^{18} > 25^{18} \Rightarrow 2^{91} > 5^{35}$

Bài 2

So sánh các lũy thừa sau:

- a) 107^{50} và 73^{75} b) 2^{91} và 5^{35} c) 54^4 và 21^{12} d) 9^8 và 8^9

Lời giải

a) Ta có $107^{50} < 108^{50} = 2^{100} \cdot 3^{150}$ và $73^{75} > 72^{75} = 2^{225} \cdot 3^{150}$ nên $107^{50} < 73^{75}$

b) Ta có $2^{91} = (2^{13})^7 = 8192^7$ và $5^{35} = (5^5)^7 = 3125^7$ nên $2^{91} > 5^{35}$

c) Ta có $54^4 = (2 \cdot 27)^4 = 2^4 \cdot 3^{12}$ và $21^{12} = 3^{12} \cdot 7^{12}$ nên $54^4 < 21^{12}$

d) Ta có $9^8 < 10^8 = 100^4 = 100 \cdot 100^3$

Và $8^9 = 512^3 > 500^3 = 5^3 \cdot 100^3 = 125 \cdot 100^3$ nên $9^8 < 8^9$

✎ **Lời bình:** Việc phân tích lũy thừa thành tích các lũy thừa sẽ giúp ta nhìn ra thừa số chung của các lũy thừa, từ đó việc so sánh hai lũy thừa chỉ còn dựa vào việc so sánh các thừa số riêng.

Dạng 2: So sánh biểu thức lũy thừa với một số (so sánh hai biểu thức lũy thừa)

Cách giải

- Thu gọn biểu thức lũy thừa bằng cách vận dụng các phép tính lũy thừa, cộng trừ các số theo quy luật
- Vận dụng phương pháp so sánh hai lũy thừa ở phần B.
- Nếu biểu thức lũy thừa là dạng phân thức: Đối với từng trường hợp bậc của lũy thừa ở tử lớn hơn hay bé hơn bậc của lũy thừa ở mẫu mà ta nhân với hệ số thích hợp nhằm tách phần nguyên rồi so sánh từng phần tương ứng.

Với $a, n, m, K \in \mathbb{N}^*$. Ta có:

- Nếu $m > n$ thì $K - \frac{a}{m} > K - \frac{a}{n}$ và $K + \frac{a}{m} < K + \frac{a}{n}$

- Nếu $m < n$ thì $K - \frac{a}{m} < K - \frac{a}{n}$ và $K + \frac{a}{m} > K + \frac{a}{n}$

(còn gọi là phương pháp so sánh phần bù)





* Với biểu thức là tổng các số $\frac{1}{a^2}$ (với $a \in \mathbb{N}^*$) ta có vận dụng so sánh sau:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} < \frac{1}{a^2} < \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a}$$

Bài 1

So sánh các lũy thừa sau:

Cho $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9$. So sánh S với $5 \cdot 2^8$.

Lời giải

Phân tích: Trước khi so sánh biểu thức S với $5 \cdot 2^8$ ta cần dùng phương pháp tính tổng theo quy luật để tính S . Để làm việc này ta cần nhân 2 vào hai vế của biểu thức S , sau đó tính hiệu $2S - S$ thì sẽ triệt tiêu được các số hạng giống nhau và tính được S .

Hướng dẫn giải

Ta có: $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9$

$2.S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^9 + 2^{10}$

$\Rightarrow 2.S - S = S = 2^{10} - 1$

Mà $2^{10} - 1 < 2^{10} = 2^8 \cdot 2^2 = 4 \cdot 2^8$

$\Rightarrow S < 5 \cdot 2^8$.

🐞 **Lời bình:** Để tính tổng S ta cần dùng phương pháp tính tổng của biểu thức tổng quát sau: $S = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n$ ($a \in \mathbb{N}^*$).

Bài 2

So sánh 2 biểu thức

a) $A = \frac{10^{15} + 1}{10^{16} + 1}$ và $B = \frac{10^{16} + 1}{10^{17} + 1}$.

b) $C = \frac{2^{2008} - 3}{2^{2007} - 1}$ và $D = \frac{2^{2007} - 3}{2^{2006} - 1}$.

Lời giải

Phân tích:

- Ở câu a, biểu thức A và B có chứa lũy thừa cơ số 10, nên ta so sánh $10A$ và $10B$.

- Ở câu b, biểu thức C và D có chứa lũy thừa cơ số 2 nên ta so sánh $\frac{1}{2}C$ và $\frac{1}{2}D$.





Hướng dẫn giải

a) Ta có:

$$A = \frac{10^{15} + 1}{10^{16} + 1} \Rightarrow 10A = 10 \cdot \left(\frac{10^{15} + 1}{10^{16} + 1} \right) = \frac{10^{16} + 10}{10^{16} + 1} = \frac{10^{16} + 1 + 9}{10^{16} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{16} + 1}.$$

$$B = \frac{10^{16} + 1}{10^{17} + 1} \Rightarrow 10B = 10 \cdot \left(\frac{10^{16} + 1}{10^{17} + 1} \right) = \frac{10^{17} + 10}{10^{17} + 1} = \frac{10^{17} + 1 + 9}{10^{17} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{17} + 1}.$$

Vì $10^{16} + 1 < 10^{17} + 1$ nên $\frac{9}{10^{16} + 1} > \frac{9}{10^{17} + 1}$

$$\Rightarrow 1 + \frac{9}{10^{16} + 1} > 1 + \frac{9}{10^{17} + 1} \Rightarrow 10A > 10B \Leftrightarrow A > B$$

b) Ta có: $C = \frac{2^{2008} - 3}{2^{2007} - 1} \Rightarrow \frac{1}{2}C = \frac{1}{2} \left(\frac{2^{2008} - 3}{2^{2007} - 1} \right) = \frac{2^{2008} - 3}{2^{2008} - 2} = \frac{2^{2008} - 2 - 1}{2^{2008} - 2} = 1 - \frac{1}{2^{2008} - 2}.$

$$D = \frac{2^{2007} - 3}{2^{2006} - 1} \Rightarrow \frac{1}{2}D = \frac{1}{2} \left(\frac{2^{2007} - 3}{2^{2006} - 1} \right) = \frac{2^{2007} - 3}{2^{2007} - 2} = \frac{2^{2007} - 2 - 1}{2^{2007} - 2} = 1 - \frac{1}{2^{2007} - 2}.$$

Vì $2^{2008} - 2 > 2^{2007} - 2$ nên $\frac{1}{2^{2008} - 2} < \frac{1}{2^{2007} - 2}$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{2^{2008} - 2} > 1 - \frac{1}{2^{2007} - 2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}C > \frac{1}{2}D \text{ hay } C > D$$

Lời bình: Đôi khi để so sánh hai biểu thức với nhau, ta cần biến đổi hai biểu thức về dạng tổng hai số hạng, trong đó có một số hạng chung và khi đó ta chỉ cần so sánh số hạng riêng.

Dạng 3: Từ việc so sánh lũy thừa, tìm cơ số (số mũ) chưa biết.

Cách giải

* Với các số tự nhiên m, x, p và số dương a .

+ Nếu $a > 1$ thì: $a^m < a^x < a^p \Rightarrow m < x < p$.





+ Nếu $a < 1$ thì: $a^m < a^x < a^p \Rightarrow m > x > p$.

* Với các số dương a, b và số tự nhiên m , ta có: $a^m < b^m \Rightarrow a < b$.

Bài 1

Tìm các số nguyên n thỏa mãn:

$$3^{64} < n^{48} < 5^{72}.$$

Lời giải

Ta giải từng bất đẳng thức $3^{64} < n^{48}$ và $n^{48} < 5^{72}$.

$$\text{Ta có: } n^{48} > 3^{64} \Rightarrow (n^3)^{16} > (3^4)^{16} \Rightarrow (n^3)^{16} > 81^{16} \Rightarrow n^3 > 81$$

$$\Rightarrow n > 4 \text{ (với } n \in \mathbb{Z}) \quad (1).$$

$$\text{Mặt khác } n^{48} < 5^{72} \Rightarrow (n^2)^{24} < (5^3)^{24} \Rightarrow (n^2)^{24} < 125^{24} \Rightarrow n^2 < 125$$

$$\Rightarrow -11 \leq n \leq 11 \text{ (với } n \in \mathbb{Z}) \quad (2).$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 4 < n \leq 11$.

Vậy n nhận các giá trị nguyên là: 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11.

Lời bình: Từ bài toán trên có thể thay đổi câu hỏi để được các bài toán sau:

Bài 2

Tìm x thuộc \mathbb{N} . Biết:

$$\text{a) } 16^x < 128^4$$

$$\text{b) } 5^x \cdot 5^{x+1} \cdot 5^{x+2} \leq \underbrace{100 \dots \dots \dots 0}_{18 \text{ chu số } 0} : 2^{18}$$

Lời giải

$$\text{a) } 16^x < 128^4 \Rightarrow (2^4)^x < (2^7)^4 \Rightarrow 2^{4x} < 2^{28} \Rightarrow 4x < 28 \Rightarrow x < 7 \Rightarrow x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

$$\text{b) } 5^x \cdot 5^{x+1} \cdot 5^{x+2} \leq \underbrace{100 \dots \dots \dots 0}_{18 \text{ chu số } 0} : 2^{18}$$

$$\Rightarrow 5^{3x+3} \leq 10^{18} : 2^{18} \Rightarrow 5^{3x+3} \leq 5^{18} \Rightarrow 3x + 3 \leq 18 \Rightarrow x \leq 5 \Rightarrow x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$





Dạng 4: Một số bài toán khác

Bài 1

Hãy viết số lớn nhất bằng cách dùng ba chữ số 1;2;3 với điều kiện mỗi chữ số dùng một lần và chỉ một lần ?

Lời giải

Bài toán xảy ra các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Không dùng lũy thừa thì số lớn nhất viết được là 321.

Trường hợp 2: Dùng lũy thừa để viết: (Bỏ qua trường hợp cơ số hoặc số mũ bằng 1 và các lũy thừa tăng vì các giá trị này quá nhỏ so với 321)

* Xét các lũy thừa có số mũ là một chữ số cho ta số tự nhiên có 4 chữ số là: $13^2, 31^2, 12^3, 21^3$, trong các số này số lớn nhất là 21^3 .

* Xét các lũy thừa mà số mũ có hai chữ số cho ta số tự nhiên có 4 chữ số là: $2^{13}, 3^{21}, 3^{12}, 2^{31}$, nhận xét các số này như sau:

$$3^{21} = 3 \cdot 3^{20} = 3 \cdot (3^2)^{10} = 3 \cdot 9^{10},$$

$$2^{31} = 2 \cdot 2^{30} = 2(2^3)^{10} = 2 \cdot 8^{10},$$

do đó trong các số này thì số lớn nhất là 3^{21} .

So sánh 3^{21} và 21^3 :

$$3^{21} > 3^9 = (3^3)^3 = 27^3 > 21^3$$

Vậy số lớn nhất viết được là số 3^{21} .

Bài 2

a) Số 5^8 có bao nhiêu chữ số ?

b) Hai số 2^{2003} và 5^{2003} viết liền nhau được số có bao nhiêu chữ số?

Lời giải

Phân tích: So sánh lũy thừa với một số lũy thừa của 10, từ đó lập luận tìm số chữ số của số đó.





a) Ta có:

$$5^8 = (5^4)^2 = 625^2 > 600^2 = 360000$$

$$5^8 = \frac{10^8}{2^8} = \frac{100000000}{256} < \frac{100000000}{250} = 400000$$

$$\Rightarrow 360000 < 5^8 < 400000.$$

Do đó 5^8 có 6 chữ số.

b) Giả sử 2^{2003} có a chữ số và 5^{2003} có b chữ số thì khi viết 2 số này liền nhau ta được $(a + b)$ chữ số.

$$\text{Vì } 10^{a-1} < 2^{2003} < 10^a \text{ và } 10^{b-1} < 5^{2003} < 10^b$$

$$\Rightarrow 10^{a-1} \cdot 10^{b-1} < 2^{2003} \cdot 5^{2003} < 10^a \cdot 10^b$$

$$\Rightarrow 10^{a+b-2} < 10^{2003} < 10^{a+b}.$$

$$\text{Do đó: } 2003 = a + b - 1 \Rightarrow a + b = 2004.$$

Vậy số đó có 2004 chữ số.

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1: So sánh:

a) 243^5 và $3 \cdot 27^5$.

c) 625^5 và 125^7 .

Lời giải

Định hướng tư duy: Nhận thấy, ở câu a) thì 243 và 27 là các cơ số liên quan tới lũy thừa cơ số 3, ở câu b) thì 625 và 125 liên quan tới lũy thừa cơ số 5. Do đó để so sánh, ta biến đổi các lũy thừa về các lũy thừa có cùng cơ số, rồi dựa vào so sánh số mũ để so sánh chúng với nhau.

Lời giải:

a) Ta có: $243^5 = (3^5)^5 = 3^{25}$; $3 \cdot 27^5 = 3 \cdot (3^3)^5 = 3 \cdot 3^{15} = 3^{16}$

Vì $3^{16} < 3^{25} \Rightarrow 3 \cdot 27^5 < 243^5$.

b) $625^5 = (5^4)^5 = 5^{20}$; $125^7 = (5^3)^7 = 5^{21}$

Vì $5^{21} > 5^{20} \Rightarrow 125^7 > 625^5$.





Bài 2: So sánh:

a) 99^{20} và 9999^{10} .

b) 3^{500} và 7^{300} .

c) 202^{303} và 303^{202} .

d) 11^{1979} và 37^{1320} .

Lời giải

Phân tích: Nhận thấy, ở câu a) thì các lũy thừa có chung số mũ 10, ở câu b) thì các lũy thừa có chung số mũ 100, ở câu c) thì các lũy thừa có chung số mũ 101, ở câu d) các lũy thừa có chung số mũ 660. Do đó để so sánh, ta biến đổi các lũy thừa về các lũy thừa có cùng số mũ, rồi dựa vào so sánh cơ số để so sánh chúng với nhau.

Lời giải:

a) Ta thấy: $99^{20} = (99^2)^{10} = (99.99)^{10}$; $9999^{10} = (99.101)^{10}$

Vì $(99.99)^{10} < (99.101)^{10} \Rightarrow 99^{20} < 9999^{10}$.

b) Ta có : $3^{500} = (3^5)^{100} = 243^{100}$, $7^{300} = (7^3)^{100} = 343^{100}$.

Vì $243^{100} < 343^{100}$ nên $3^{500} < 7^{300}$.

c) Ta có: $202^{303} = (2.101)^{3.101} = (2^3.101^3)^{101} = (8.101.101^2)^{101} = (808.101)^{101}$

$303^{202} = (3.101)^{2.101} = (3^2.101^2)^{101} = (9.101^2)^{101}$

Vì $808.101^2 > 9.101^2$ nên $202^{303} > 303^{202}$.

d) Ta có:

$$11^{1979} < 11^{1980} = (11^3)^{660} = 1331^{660} \quad (1)$$

$$37^{1320} = (37^2)^{660} = 1369^{660} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $11^{1979} < 37^{1320}$.

Bài 3: So sánh:

a) 8^5 và 3.4^7 .

b) 10^{10} và 48.50^5 .

c) $2^{30} + 3^{30} + 4^{30}$ và 3.24^{10} .

d) $1990^{10} + 1990^9$ và 1991^{10} .

Lời giải



a) Ta có: $8^5 = 2^{15} = 2.2^{14}$, $3.4^7 = 3.2^{14}$

Vì $2 < 3 \Rightarrow 2.2^{14} < 3.2^{14} \Rightarrow 8^5 < 3.4^7$.

b) Ta có :

$10^{10} = 2^{10} \cdot 5^{10} = 2 \cdot 2^9 \cdot 5^{10}$, $48 \cdot 50^5 = (3 \cdot 2^4) \cdot (2^5 \cdot 5^{10}) = 3 \cdot 2^9 \cdot 5^{10}$

Vì $2 < 3 \Rightarrow 2 \cdot 2^9 \cdot 5^{10} < 3 \cdot 2^9 \cdot 5^{10} \Rightarrow 10^{10} < 48 \cdot 50^5$.

c) Ta có: $4^{30} = (2^2)^{30} = (2.2)^{30} = 2^{30} \cdot 2^{30} = (2^3)^{10} \cdot (2^2)^{15} = 8^{10} \cdot 4^{15}$,

$24^{10} \cdot 3 = (8.3)^{10} \cdot 3 = 8^{10} \cdot 3^{10} \cdot 3 = 8^{10} \cdot 3^{11}$

Vì $3^{11} < 4^{15} \Rightarrow 8^{10} \cdot 3^{11} < 8^{10} \cdot 4^{15} \Rightarrow 4^{30} > 3.24^{10}$

$\Rightarrow 2^{30} + 3^{30} + 4^{30} > 3.24^{10}$.

d) Ta có :

$1990^{10} + 1990^9 = 1990^9 \cdot (1990 + 1) = 1991 \cdot 1990^9$

$1991^{10} = 1991 \cdot 1991^9$

Vì $1990^9 < 1991^9$ nên $1990^{10} + 1990^9 < 1991^{10}$.

Bài 4: So sánh:

a) 199^{20} và 2003^{15} .

b) 3^{39} và 11^{21} .

Lời giải

a) Biến đổi a^n về dạng: $c.d^k$, biến đổi b^m về dạng: $e.d^k$ rồi so sánh hai số c và e . Từ đó so sánh được hai số a^n và b^m .

$199^{20} < 200^{20} = (8.25)^{20} = (2^3 \cdot 5^2)^{20} = (2^3 \cdot 5^2)^{20} = 2^{60} \cdot 5^{40}$

$2003^{15} > 2000^{15} = (16.125)^{15} = (2^4 \cdot 5^3)^{15} = (2^4 \cdot 5^3)^{15} = 2^{60} \cdot 5^{45}$

Vì $5^{45} > 5^{40} \Rightarrow 2^{60} \cdot 5^{45} > 2^{60} \cdot 5^{40} \Rightarrow 2003^{15} > 199^{20}$.

b) Dùng tính chất bắc cầu: So sánh hai số với số lũy thừa 10.

Ta có: $3^{39} < 3^{40} = (3^4)^{10} = 81^{10}$

$11^{20} = (11^2)^{10} = 121^{10} < 11^{21}$

Vì $81^{10} < 121^{10} \Rightarrow 3^{39} < 11^{21}$.

Bài 5: So sánh:



a) $78^{12} - 78^{11}$ và $78^{11} - 78^{10}$.

b) $A = 72^{45} - 72^{44}$ và $B = 72^{44} - 72^{43}$.

Lời giải

Biến đổi a^n về dạng $c.d^k$, biến đổi b^m về dạng $e.d^k$ rồi so sánh hai số c và e .

Từ đó so sánh được hai số a^n và b^m .

a) Ta có: $78^{12} - 78^{11} = 78^{11} \cdot (78 - 1) = 78^{11} \cdot 77$

$78^{11} - 78^{10} = 78^{10} \cdot (78 - 1) = 78^{10} \cdot 77$

Vì $78^{11} > 78^{10} \Rightarrow 78^{11} \cdot 77 > 78^{10} \cdot 77 \Rightarrow 78^{12} - 78^{11} > 78^{11} - 78^{10}$.

b) Ta có

$A = 72^{44} (72 - 1) = 72^{44} \cdot 71$ và $B = 72^{43} (72 - 1) = 72^{43} \cdot 71$

$72^{44} > 72^{43} \Rightarrow 72^{44} \cdot 71 > 72^{43} \cdot 71 \Rightarrow A > B$.

Bài 6: Chứng tỏ rằng: .

a) $5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$

b) $2^{1995} < 5^{863}$

Lời giải

a) Với bài này, giáo viên có thể gợi ý học sinh so sánh: $2^{63} > 5^{27}$ và $2^{63} < 5^{28}$.

Ta có: $2^{63} = (2^7)^9 = 128^9$, $5^{27} = (5^3)^9 = 125^9 \Rightarrow 2^{63} > 5^{27}$ (1)

Lại có: $2^{63} = (2^9)^7 = 512^7$, $5^{28} = (5^4)^7 = 625^7 \Rightarrow 2^{63} < 5^{28}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$.

b) Xét: a^n biến đổi được về dạng: $c^q \cdot d^k$

b^m biến đổi được về dạng: $e^p \cdot g^h$

Nếu $c^q < e^p$ và $d^k < g^h$ thì $c^q \cdot d^k < e^p \cdot g^h$.

Ta có: $2^{1995} = 2^{1990} \cdot 2^5$; $5^{863} = 5^{860} \cdot 5^3$

Nhận xét: $2^5 = 32 < 5^3 = 125$ nên cần so sánh 2^{1990} và 5^{860} .

Có: $2^{10} = 1024$, $5^5 = 3025 \Rightarrow 2^{10} \cdot 3 < 5^5 \Rightarrow 2^{1720} \cdot 3^{172} < 5^{860}$.

Có: $2^{1990} = 2^{1720} \cdot 2^{270}$, cần so sánh $2^{1720} \cdot 2^{270}$ với số $2^{1720} \cdot 3^{172}$ như sau:

$3^7 = 2187$; $2^{11} = 2048 \Rightarrow 3^7 > 2^{11}$.



$$3^{172} = (3^7)^{24} \cdot 3^4 > (2^{11})2^4 > (2^{11}) \cdot 2^6 = 2^{270}.$$

Do đó: $2^{1720} \cdot 2^{270} < 2^{1720} \cdot 3^{172} < 5^{860} \Rightarrow 2^{1990} < 5^{860}$

Mà $2^5 < 5^3 \Rightarrow 2^{1995} < 5^{863}$.

Bài 7: Chứng tỏ rằng:

a) $2^{1999} < 7^{714}$

Lời giải

Ta có: $2^{10} = 1025 ; 7^3 = 343$

$$\Rightarrow 2^{10} < 3 \cdot 7^3 \Rightarrow (2^{10})^{238} < 3^{238} \cdot (7^3)^{238}$$

$$\Rightarrow 2^{2380} < 3^{238} \cdot 7^{714} \quad (1)$$

Xét: $3^{238} = 3^3 \cdot 3^{235} = 3^3 \cdot (3^5)^{47} < 3^3 (2^8)^{47} < 2^5 \cdot 2^{376} = 2^{381}$ (vì $3^5 < 2^8$)

$$\Rightarrow 3^{238} < 2^{381} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có: $2^{2380} < 2^{381} \cdot 7^{714} \Rightarrow 2^{1999} < 7^{714}$

Bài 8: So sánh

a) 3^{200} và 2^{300} .

b) 71^{50} và 37^{75} .

Lời giải

a) Đưa về so sánh hai lũy thừa cùng số mũ.

Ta có: $3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100}; 2^{300} = (2^3)^{100} = 8^{100}$ mà $8^{100} < 9^{100} \Rightarrow 2^{300} < 3^{200}$.

b) Biến đổi a^n về dạng: $c \cdot d^k$, biến đổi b^m về dạng: $e \cdot d^k$ rồi so sánh hai số c và e . Từ đó so sánh được hai số a^n và b^m .

Ta có: $71^{50} < 72^{50} = (8 \cdot 9)^{50} = 2^{150} \cdot 3^{100} \quad (1)$

$$37^{75} > 36^{75} = (4 \cdot 9)^{75} = 2^{150} \cdot 3^{150} \quad (2)$$

Mà $2^{150} \cdot 3^{150} > 2^{150} \cdot 3^{100} \quad (3)$

Từ (1), (2), và (3) suy ra: $37^{75} > 71^{50}$.



Bài 9: So sánh các số:

a) 50^{20} và 2550^{10} .

b) 999^{10} và 999999^5 .

Lời giải

a) Ta có: $50^{20} = \left[(50)^2 \right]^{10} = 2500^{10} < 2550^{10} \Rightarrow 5^{20} < 2550^{10}$.

b) Ta có: $999^{10} = \left[(999)^2 \right]^5 < 998001^5 < 999999^5 \Rightarrow 999^{10} < 999999^5$.

Bài 10: Viết theo từ nhỏ đến lớn: 2^{100} , 3^{75} và 5^{50} .

Lời giải

$2^{100} = (2^2)^{50} = 4^{50} < 5^{50}$ (1).

$3^{75} = (3^3)^{25} = 27^{25} = 3^{75} > 5^{50}$ (2).

$5^{50} = (5^5)^{10} = 25^{10}$ (3).

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow 2^{100} < 5^{50} < 3^{75}$.

Bài 11: So sánh các số:

a) 1234^{56789} và 56789^{1234}

Lời giải

Ta có: $A = 1234^{56789} > 1000^{50000} = (10^3)^{50000} = 10^{150000}$

$B = 56789^{1234} < 100000^{2000} = (10^5)^{2000} = 10^{10000}$

Vì $10^{10000} < 10^{150000} \Rightarrow 56789^{1234} < 1234^{56789}$.

Bài 12: So sánh

$A = 1 + 2012 + 2012^2 + 2012^3 + 2012^4 + \dots + 2012^{71} + 2012^{72}$ và $B = 2012^{73} - 1$.

Lời giải

Ta có: $A = 1 + 2012 + 2012^2 + 2012^3 + 2012^4 + \dots + 2012^{71} + 2012^{72}$

$2012.A = 2012 + 2012^2 + 2012^3 + 2012^4 + \dots + 2012^{71} + 2012^{73}$

$\Rightarrow 2012.A - A = 2011A = 2012^{73} - 1$

$\Rightarrow A = (2012^{73} - 1) : 2011 < 2012^{73} - 1$.





Vậy $A < B$.

Bài 13: So sánh

$$B = \frac{3^{10} \cdot 11 + 3^{10} \cdot 5}{3^9 \cdot 2^4} \text{ và } C = \frac{2^{10} \cdot 13 + 2^{10} \cdot 65}{2^8 \cdot 104}.$$

Lời giải

$$B = \frac{3^{10} \cdot 11 + 3^{10} \cdot 5}{3^9 \cdot 2^4} = \frac{3^{10}(11 + 5)}{3^9 \cdot 16} = 3.$$

$$C = \frac{2^{10} \cdot 13 + 2^{10} \cdot 65}{2^8 \cdot 104} = \frac{2^{10}(13 + 65)}{2^8 \cdot 104} = \frac{2^2 \cdot 78}{104} = 3.$$

Vậy $B = C$.

Bài 14: So sánh

$$M = \frac{3}{8^3} + \frac{7}{8^4} \text{ và } N = \frac{7}{8^3} + \frac{3}{8^4}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{3}{8^3} + \frac{7}{8^4} = \frac{3}{8^3} + \frac{3}{8^4} + \frac{4}{8^4} = \left(\frac{3}{8^3} + \frac{3}{8^4} \right) + \frac{4}{8^4}.$$

$$\frac{7}{8^3} + \frac{3}{8^4} = \frac{3}{8^3} + \frac{4}{8^3} + \frac{3}{8^4} = \left(\frac{3}{8^3} + \frac{3}{8^4} \right) + \frac{4}{8^3}.$$

$$\text{Vì } \frac{4}{8^4} < \frac{4}{8^3} \Rightarrow \left(\frac{3}{8^3} + \frac{3}{8^4} \right) + \frac{4}{8^4} < \left(\frac{3}{8^3} + \frac{3}{8^4} \right) + \frac{4}{8^3}$$

$$\Rightarrow M < N$$

Bài 14: So sánh

$$M = \frac{19^{30} + 5}{19^{31} + 5} \text{ và } N = \frac{19^{31} + 5}{19^{32} + 5}.$$

Lời giải

$$M = \frac{19^{30} + 5}{19^{31} + 5} \text{ nên } 19M = \frac{19 \cdot (19^{30} + 5)}{19^{31} + 5} = \frac{19^{31} + 95}{19^{31} + 5} = 1 + \frac{90}{19^{31} + 5}$$

$$N = \frac{19^{31} + 5}{19^{32} + 5} \text{ nên } 19N = \frac{19 \cdot (19^{31} + 5)}{19^{32} + 5} = \frac{19^{32} + 95}{19^{32} + 5} = 1 + \frac{90}{19^{32} + 5}$$



$$\forall i \frac{90}{19^{31} + 5} > \frac{90}{19^{32} + 5}$$

$$1 + \frac{90}{19^{31} + 5} > 1 + \frac{90}{19^{32} + 5} \text{ hay } 19M > 19N \Rightarrow M > N.$$

Bài 15: So sánh

$$\frac{1}{101^2} + \frac{1}{102^2} + \frac{1}{103^2} + \frac{1}{104^2} + \frac{1}{105^2} \text{ và } \frac{1}{2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7}.$$

Lời giải

Nếu n là số tự nhiên lớn hơn 1 thì ta có:

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{n - (n-1)}{(n-1) \cdot n} = \frac{n - n + 1}{(n-1) \cdot n} = \frac{1}{(n-1)n} > \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Áp dụng vào bài toán ta được:

$$\frac{1}{101^2} < \frac{1}{100} - \frac{1}{101}$$

$$\frac{1}{102^2} < \frac{1}{101} - \frac{1}{102}$$

.....

$$\frac{1}{105^2} < \frac{1}{104} - \frac{1}{103}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{101^2} + \frac{1}{102^2} + \dots + \frac{1}{105^2} < \frac{1}{100} - \frac{1}{105}$$

$$= \frac{105 - 100}{100 \cdot 105} = \frac{5}{2^2 \cdot 5^2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{1}{2^2 \cdot 5^2 \cdot 3 \cdot 7}.$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{102^2} + \dots + \frac{1}{105^2} < \frac{1}{2^2 \cdot 5^2 \cdot 3 \cdot 7}.$$

Bài 16: So sánh

$$A = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{3^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{100^2} - 1\right) \text{ và } -\frac{1}{2}.$$

Lời giải

A là tích của 99 số âm. Do đó:



$$\begin{aligned}
 -A &= \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \dots \left(1 - \frac{1}{100^2}\right) \\
 &= \frac{3}{2^2} \cdot \frac{8}{3^2} \cdot \frac{15}{4^2} \dots \dots \frac{9999}{100^2} \\
 &= \frac{1.3}{2^2} \cdot \frac{2.4}{3^2} \cdot \frac{3.5}{4^2} \dots \dots \frac{99.101}{100^2}.
 \end{aligned}$$

Để dễ rút gọn ta viết tử dưới dạng tích các số tự nhiên liên tiếp như sau:

$$-A = \frac{1.2.3.4.5.6 \dots \dots 98.99}{2.3.4.5 \dots \dots 99.100} \cdot \frac{3.4.5 \dots \dots 100.101}{2.3.4 \dots \dots 99.100} = \frac{1}{100} \cdot \frac{101}{2} = \frac{101}{200} > \frac{1}{2}$$

Vậy $A < -\frac{1}{2}$.

Bài 17: Tìm các số tự nhiên n sao cho:

a) $3 < 3^n \leq 234$. b) $8.16 \geq 2^n \geq 4$.

Lời giải

Đưa các số về các lũy thừa có cùng cơ số.

a) $3 < 3^n \leq 234 \Rightarrow 3^1 < 3^n \leq 3^5 \Rightarrow 1 < n \leq 5$

$\Rightarrow n$ nhận các giá trị là: 2, 3, 4, 5.

b) $8.16 \geq 2^n \geq 4 \Rightarrow 2^3.2^4 \geq 2^n \geq 2^2 \Rightarrow 2^7 \geq 2^n \geq 2^2 \Rightarrow 7 \geq n \geq 2$

$\Rightarrow n$ nhận các giá trị là: 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Bài 18: Tìm các số tự nhiên n sao cho:

$4^{15} \cdot 9^{15} < 2^n \cdot 3^n < 18^{16} \cdot 2^{16}$.

Lời giải

$$4^{15} \cdot 9^{15} < 2^n \cdot 3^n < 18^{16} \cdot 2^{16} \Rightarrow (4.9)^{15} < (2.3)^n < (18.2)^{16}$$

$$\Rightarrow 36^{15} < 6^n < 36^{16}$$

$$\Rightarrow (6^2)^{15} < 6^n < (6^2)^{16}$$

$$\Rightarrow 6^{30} < 6^n < 6^{32}$$

$$\Rightarrow 30 < n < 32$$



$\Rightarrow n = 31$.

Bài 19:

Cho $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100}$. Tìm số tự nhiên n , biết $2A + 3 = 3^n$.

Lời giải

Có $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100}$

$\Rightarrow 3A = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{101}$

$\Rightarrow 3A - A = 2A = 3^{101} - 3$

$\Rightarrow 2A + 3 = 3^{101}$

Mà theo đề bài ta có $2A + 3 = 3^n \Rightarrow 3^{101} = 3^n \Rightarrow n = 101$.

Bài 20:

Tìm các số nguyên dương m và n sao cho: $2^m - 2^n = 256$.

Lời giải

Ta có: $2^m - 2^n = 256 = 2^8 \Rightarrow 2^n(2^{m-n} - 1) = 2^8$ (1).

Để thấy $m \neq n$, ta xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $m - n = 1$ thì từ (1) ta có:

$2^n \cdot (2 - 1) = 2^8 \Rightarrow 2^n = 2^8 \Rightarrow n = 8$ và $m = 9$.

Trường hợp 2: Nếu $m - n \geq 2$

$\Rightarrow 2^{m-n} - 1$ là một số lẻ lớn hơn 1 nên vế trái của (1) chứa thừa số nguyên tố lẻ khi phân tích ra thừa số nguyên tố, còn vế phải của (1) chỉ chứa thừa số nguyên tố 2, do đó hai vế của (1) mâu thuẫn nhau.

Vậy $n = 8$ và $m = 9$ là đáp số duy nhất.

Bài 21: Tìm số nguyên dương n biết:

a) $64 < 2^n < 256$.

b) $243 > 3^n \geq 9$.

Lời giải

a) Ta có: $64 < 2^n < 256 \Rightarrow 2^6 < 2^n < 2^8 \Rightarrow 6 < n < 8$, mà n nguyên dương, nên $n = 7$.



b) Ta có: $243 > 3^n \geq 9 \Rightarrow 3^5 > 3^n \geq 3^2 \Rightarrow 5 > n \geq 2$, mà n nguyên dương nên n nhận các giá trị là: 4; 3; 2.

Bài 22: Tìm $n \in \mathbb{N}$ biết:

a) $32 < 2^n < 512$.

b*) $3^{18} < n^{12} \leq 20^8$.

Lời giải

a) Với $n \in \mathbb{N}$, ta xét:

$$32 < 2^n \Leftrightarrow 2^5 < 2^n \Rightarrow 5 < n$$

$$2^n < 512 \Leftrightarrow 2^n < 2^9 \Rightarrow n < 9$$

Do đó: $5 < n < 9 \Rightarrow n \in \{6; 7; 8\}$.

b) Với $n \in \mathbb{N}$, ta xét:

$$3^{18} < n^{12} \Leftrightarrow (3^3)^6 < (n^2)^6 \Leftrightarrow 3^3 < n^2 \Leftrightarrow 27 < n^2$$

Nhận thấy: $5^2 < 27 < 6^2$, nên $6^2 \leq n^2 \Rightarrow 6 \leq n$.

$$n^{12} \leq 20^8 \Leftrightarrow (n^3)^4 < (20^2)^4 \Leftrightarrow n^3 < 20^2 \Leftrightarrow n^3 < 400$$

Nhận thấy: $7^3 < 400 < 8^3$, nên $n^3 \leq 7^3 \Rightarrow n \leq 7$

Do đó: $6 \leq n \leq 7 \Rightarrow n \in \{6; 7\}$.

Bài 23:

Tìm số nguyên n lớn nhất sao cho: $n^{200} < 6^{300}$.

Lời giải

Ta có: $n^{200} = (n^2)^{100}$; $6^{300} = (6^3)^{100} = 216^{100}$

$$n^{200} < 6^{300} \Rightarrow (n^2)^{100} < 216^{100} \Rightarrow n^2 < 216 \quad (*)$$

\Rightarrow Số nguyên lớn nhất thỏa mãn (*) là $n = 14$.

PHẦN II. CÁC BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG VÀ TOÁN CHUYÊN

Dạng 1: Các phép toán về lũy thừa



Bài 1

Tính

a) $(6^9 \cdot 2^{10} + 12^{10}) : (2^{19} \cdot 27^3 + 15 \cdot 4^9 \cdot 9^4)$

b) $2^4 + 8 \left[(-2)^2 : \frac{1}{2} \right]^0 - 2^{-2} \cdot 4 + (-2)^2$

c) $\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^7 \cdot 5^7 + \left(\frac{9}{4}\right)^3 : \left(\frac{3}{16}\right)^3}{2^7 \cdot 5^2 + 512}$

Lời giải

a) $(69 \cdot 2^{10} + 12^{10}) : (2^{19} \cdot 27^3 + 15 \cdot 4^9 \cdot 9^4) = (3^9 \cdot 2^9 \cdot 2^{10} + 2^{20} \cdot 3^{10}) : (2^{19} \cdot 3^9 + 3 \cdot 5 \cdot 2^{18} \cdot 3^8)$
 $= [2^{19} \cdot 3^9 (1 + 2 \cdot 3)] : [2^{18} \cdot 3^9 \cdot (2 + 5)] = (2 \cdot 7) : 7 = 2$

b) $2^4 + 8 \left[(-2)^2 : \frac{1}{2} \right]^0 - 2^{-2} \cdot 4 + (-2)^2 = 16 + 8 \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot 4 + 4 = 27$

c) $\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^7 \cdot 5^7 + \left(\frac{9}{4}\right)^3 : \left(\frac{3}{16}\right)^3}{2^7 \cdot 5^2 + 512} = \frac{\left(\frac{2}{5} \cdot 5\right)^7 + \left(\frac{9}{4} : \frac{3}{16}\right)^3}{2^7 \cdot 5^2 + 2^7 \cdot 2^2} = \frac{2^7 + 12^3}{2^7 \cdot 5^2 + 2^7 \cdot 2^2} = \frac{2^6 (2 + 3^3)}{2^7 (5^2 + 2^2)} = \frac{1}{2}$

Bài 2

1. Tính

a) $A = \left(\frac{3}{4} - 81\right) \left(\frac{3^2}{5} - 81\right) \left(\frac{3^3}{6} - 81\right) \dots \left(\frac{3^{2000}}{2003} - 81\right)$

2. b) $B = \frac{2016^{10} + 2016^{11}}{2016^{10} - 2016^{11}}$

c) $C = \frac{2^2 \cdot 10 + 2^3 \cdot 6}{2^2 \cdot 15 - 2^4}$

Lời giải:



a) Nhận xét, trong ngoặc, mẫu số lớn hơn số mũ ở tử 3 đơn vị, trong dãy có

$$\frac{3^6}{9} - 81 = 0 \Rightarrow \text{tích bằng } 0$$

b) Ta có $B = \frac{2016^{10} \cdot (1 + 2016)}{2016^{10} \cdot (1 - 2016)} = \frac{-2017}{2015}$

c) $C = \frac{2^2 \cdot 10 + 2^3 \cdot 6}{2^2 \cdot 15 - 2^4} = \frac{2^2 \cdot (10 + 2 \cdot 6)}{2^2 \cdot (15 - 4)} = \frac{22}{11} = 2$

Bài 3

Tính giá trị của biểu thức:

a, $A = \frac{6^3 + 3 \cdot 6^2 + 3^3}{-13}$ b, $B = \frac{2 \cdot 8^4 \cdot 27^2 + 4 \cdot 6^9}{2^7 \cdot 6^7 + 2^7 \cdot 40 \cdot 9^4}$ c, $C = \frac{5 \cdot 4^{15} \cdot 9^9 - 4 \cdot 3^{20} \cdot 8^9}{5 \cdot 2^{10} \cdot 6^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 27^6}$

Lời giải

a) $A = \frac{6^3 + 3 \cdot 6^2 + 3^3}{-13} = \frac{2^3 \cdot 3^3 + 2^2 \cdot 3^3 + 3^3}{-13} = \frac{3^3 \cdot (2^3 + 2^2 + 1)}{-13} = -27$

b) $B = \frac{2 \cdot 8^4 \cdot 27^2 + 4 \cdot 6^9}{2^7 \cdot 6^7 + 2^7 \cdot 40 \cdot 9^4} = \frac{2^{13} \cdot 3^6 + 2^{11} \cdot 3^9}{2^{14} \cdot 3^7 + 2^{10} \cdot 3^8 \cdot 5} = \frac{2^{11} \cdot 3^6 \cdot (2^2 + 3^3)}{2^{10} \cdot 3^7 \cdot (2^4 + 3 \cdot 5)} = \frac{2}{3}$

c) $C = \frac{5 \cdot 4^{15} \cdot 9^9 - 4 \cdot 3^{20} \cdot 8^9}{5 \cdot 2^{10} \cdot 6^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 27^6} = \frac{5 \cdot 2^{2 \cdot 15} \cdot 3^{2 \cdot 9} - 2^2 \cdot 3^{20} \cdot 2^{3 \cdot 9}}{5 \cdot 2^{10} \cdot 2^{19} \cdot 3^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 3^{3 \cdot 6}} = \frac{2^{29} \cdot 3^{18} \cdot (5 \cdot 2 - 3^2)}{2^{29} \cdot 3^{18} \cdot (5 \cdot 3 - 7)} = \frac{10 - 9}{15 - 7} = \frac{1}{8}$

Bài 4

Rút gọn biểu thức

a) $A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 81}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5}$ b) $C = \frac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{-8^4 \cdot 3^{12} + 6^{11}}$

Lời giải:

a) Ta có $A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 81}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 - 2^{12} \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^4 \cdot (3 - 1)}{2^{12} \cdot 3^5 \cdot (3 - 1)} = \frac{1}{3}$



$$\begin{aligned} \text{b) } C &= \frac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{-8^4 \cdot 3^{12} + 6^{11}} = \frac{(2^2)^6 \cdot (3^2)^5 + 2^9 \cdot 3^9 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 5}{-(2^3)^4 \cdot 3^{12} + 2^{11} \cdot 3^{11}} \\ &= \frac{2^{12} \cdot 3^{10} + 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5}{-2^{12} \cdot 3^{12} + 2^{11} \cdot 3^{11}} = \frac{2^{12} \cdot 3^{10} \cdot (1 + 5)}{2^{11} \cdot 3^{11} \cdot (1 - 2 \cdot 3)} = \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot (-5)} = \frac{-4}{5} \end{aligned}$$

Bài 5

Rút gọn biểu thức

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{2^{19} \cdot 27^3 + 15 \cdot 4^9 \cdot 9^4}{6^9 \cdot 2^{10} + 12^{10}} & \text{b) } B &= \frac{2^{12} \cdot 13 + 2^{12} \cdot 65}{2^{10} \cdot 104} + \frac{3^{10} \cdot 11 + 3^{10} \cdot 5}{3^9 \cdot 2^4} \\ \text{c) } C &= \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3} \end{aligned}$$

Lời giải:

$$\text{a) } A = \frac{2^{19} \cdot (3^3)^3 + 3 \cdot 5 \cdot (2^2)^9 \cdot (3^2)^4}{(2 \cdot 3)^9 \cdot 2^{10} + (3 \cdot 2^2)^{10}} = \frac{2^{19} \cdot 3^9 + 3 \cdot 5 \cdot 2^{18} \cdot 3^8}{2^9 \cdot 3^9 \cdot 2^{10} + 3^{10} \cdot 2^{20}} = \frac{2^{18} \cdot 3^2 \cdot (2 + 5)}{3^9 \cdot 2^{19} \cdot (1 + 3 \cdot 2)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } B = \frac{2^{12} \cdot 13 + 2^{12} \cdot 65}{2^{10} \cdot 104} + \frac{3^{10} \cdot 11 + 3^{10} \cdot 5}{3^9 \cdot 2^4} = \frac{2^{12} \cdot 78}{2^{10} \cdot 104} + \frac{3^{10} \cdot 16}{3^9 \cdot 16} = 3 + 3 = 6$$

$$\text{c) } C = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3} = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 + 2^{12} \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 5^{10} \cdot 7^4}{5^9 \cdot 7^3 + 5^9 \cdot 2^3 \cdot 7^3}$$

$$C = \frac{2^{12} \cdot 3^4 \cdot (3 - 1)}{2^{12} \cdot 3^5 \cdot (3 + 1)} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 \cdot (1 - 7)}{5^9 \cdot 7^3 \cdot (1 + 2^3)} = \frac{2}{3 \cdot 4} - \frac{5 \cdot (-6)}{9} = \frac{1}{6} - \frac{-10}{3} = \frac{7}{2}$$

Bài 6

Rút gọn biểu thức

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot 5^2 - \left(2\frac{1}{4}\right)^3 : \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \frac{1}{2} & \text{b) } B &= \left[\frac{4}{11} \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^0 + \frac{7}{22} \cdot 2\right]^{2010} - \left(\frac{1}{2^2} : \frac{8^2}{4^4}\right)^{2009} \end{aligned}$$

Lời giải

$$\text{a) } A = 3^2 - \left(\frac{9}{4}\right)^3 : \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \frac{1}{2} = 3^2 - \left(\frac{9}{4} \cdot \frac{4}{3}\right)^3 + \frac{1}{2} = 9 - 27 + \frac{1}{2} = \frac{-35}{2}$$



$$b) B = \left(\frac{4}{11} + \frac{7}{11}\right)^{2010} - \left(\frac{1}{2^2} \cdot \frac{2^8}{2^6}\right)^{2009} = 1 - 1 = 0$$

Bài 7

Rút gọn biểu thức

$$A = \frac{5.4^{15}.9^9 - 4.3^{20}.8^9}{5.2^{10}.6^{19} - 7.2^{29}.27^6}; \quad B = \left[(0,1)^2\right]^0 + \left[\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}\right]^2 \cdot \frac{1}{49} \cdot \left[(2^2)^3 : 2^5\right]$$

Lời giải

$$A = \frac{5.4^{15}.9^9 - 4.3^{20}.8^9}{5.2^{10}.6^{19} - 7.2^{29}.27^6} = \frac{5.2^{2.15}.3^{2.9} - 2^2.3^{20}.2^{3.9}}{5.2^{10}.2^{19}.3^{19} - 7.2^{29}.3^{3.6}} = \frac{2^{29}.3^{18} \cdot (5.2 - 3^2)}{2^{29}.3^{18} \cdot (5.3 - 7)} = \frac{10 - 9}{15 - 7} = \frac{1}{8}$$

$$B = 1 + 49 \cdot \frac{1}{49} \cdot (2^6 : 2^5) = 1 + 2 = 3$$

Bài 7

Rút gọn biểu thức

$$A = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^7 \cdot 5^7 + \left(\frac{9}{4}\right)^3 : \left(\frac{3}{16}\right)^3}{2^7 \cdot 5^2 + 512}$$

Lời giải

$$A = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^7 \cdot 5^7 + \left(\frac{9}{4}\right)^3 : \left(\frac{3}{16}\right)^3}{2^7 \cdot 5^2 + 512} = \frac{\left(\frac{2}{5} \cdot 5\right)^7 + \left(\frac{9}{4} : \frac{3}{16}\right)^3}{2^7 \cdot 5^2 + 2^7 \cdot 2^2} = \frac{2^7 + 12^3}{2^7 \cdot 5^2 + 2^7 \cdot 2^2} = \frac{2^6 \cdot (2 + 3^3)}{2^7 \cdot (5^2 + 2^2)} = \frac{1}{2}$$

Bài 8

Tính

$$A = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{49} + 5^{50}; \quad B = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{2011}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{49} + 5^{50} \\ \Rightarrow 5A &= 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{50} + 5^{51} \\ \Rightarrow 5A - A &= 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{50} + 5^{51} - 1 - 5 - 5^2 - 5^3 - \dots - 5^{49} - 5^{50} \\ \Rightarrow 4A &= 5^{51} - 1 \Rightarrow A = \frac{5^{51} - 1}{4} \\ B &= 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{2011} \\ 5B &= 5 + 5^2 + \dots + 5^{2012} \\ 5B - B &= 4B = (5 - 1)B = 5^{2012} - 1 \Rightarrow B = \frac{5^{2012} - 1}{4} \end{aligned}$$



Bài 9

Rút gọn biểu thức

$$B = (-5)^0 + (-5)^1 + (-5)^2 + (-5)^3 + \dots + (-5)^{2016} + (-5)^{2017} + (-5)^{2018}$$

Lời giải

$$(-5)B = (-5)^1 + (-5)^2 + (-5)^3 + \dots + (-5)^{2016} + (-5)^{2017} + (-5)^{2018}$$

$$B = (-5)^0 + (-5)^1 + (-5)^2 + (-5)^3 + \dots + (-5)^{2016} + (-5)^{2017} + (-5)^{2018}$$

$$\text{Đặt } (-5)B - B = -6B = (-5)^{2018} - 1 \Rightarrow B = \frac{1 - 5^{2018}}{6}$$

Bài 10

Cho $H = 2^{2010} - 2^{2009} - 2^{2008} - \dots - 2 - 1$. Tính 2010^H

Lời giải

Ta có: $2H = 2^{2011} - 2^{2010} - 2^{2009} - \dots - 2^2 - 2$

$$2H - H = 2^{2011} - 2^{2010} - 2^{2010} - 2^{2009} + 2^{2009} + \dots - 2^2 + 2^2 - 2 + 2 - 1$$

$$H = 2^{2011} - 2 \cdot 2^{2010} + 1 = 1 \Rightarrow 2010^H = 2010$$

Bài 11

a) Biết rằng $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 = 385$. Tính tổng $S = 2^2 + 4^2 + \dots + 20^2$

b) Biết $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 = 3025$. Tính $S = 2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + 20^3$

Lời giải:

a) Ta có: $S = (2.1)^2 + (2.2)^2 + \dots + (2.10)^2$

$$= 2^2.1^2 + 2^2.2^2 + \dots + 2^2.10^2 = 2^2.(1^2 + 2^2 + \dots + 10^2) = 2^2.385 = 1540$$

b) Có $2^3 = (2.1)^3 = 2^3.1^3$; $4^3 = (2.2)^3 = 2^3.2^3$; $6^3 = (2.3)^3 = 2^3.3^3$

$$\dots; 20^3 = (2.10)^3 = 2^3.10^3$$

$$\Rightarrow S = 2^3.(1^3 + 2^3 + \dots + 10^3) = 8.3025 = 24200$$

Bài 12

Tính $B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{50}} - \frac{1}{2^{51}}$

Lời giải:



$$B = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{50}} - \frac{1}{3^{51}} = \frac{1}{(-3)} + \frac{1}{(-3)^2} + \frac{1}{(-3)^3} + \dots + \frac{1}{(-3)^{50}} + \frac{1}{(-3)^{51}}$$

$$-\frac{1}{3}B = \frac{1}{(-3)^2} + \frac{1}{(-3)^3} + \dots + \frac{1}{(-3)^{51}} + \frac{1}{(-3)^{52}}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}B = \frac{1}{-3} - \frac{1}{(-3)^{52}} = \frac{-3^{51} - 1}{3^{52}} \Rightarrow B = \frac{-3^{51} - 1}{4 \cdot 3^{51}}$$

Bài 13

Chứng minh rằng số $A = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133, với mọi $n \in \mathbb{N}$

Lời giải

Ta có: $A = 11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11^2 \cdot 11^n + 12 \cdot (12^2)^n = 121 \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n$

$$= (133 - 12) \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n = 133 \cdot 11^n - 12 \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n = 133 \cdot 11^n + 12 \cdot (144^n - 11^n)$$

Ta thấy: $133 \cdot 11^n : 133$

$$(144^n - 11^n) : (144 - 11) = 133 \Rightarrow 12 \cdot (144^n - 11^n) : 133$$

Do đó suy ra : $133 \cdot 11^n + 12 \cdot (144^n - 11^n)$ chia hết cho 133

Vậy số $A = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133, với mọi $n \in \mathbb{N}$

Dạng 2: So sánh

Bài 1

So sánh hợp lý



a) $\left(\frac{1}{16}\right)^{200}$ và $\left(\frac{1}{2}\right)^{1000}$

b) $(-32)^{27}$ và $(-18)^{39}$

Lời giải

a) $\left(\frac{1}{16}\right)^{200} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4 \cdot 200} = \left(\frac{1}{2}\right)^{800} > \left(\frac{1}{2}\right)^{1000}$

b) $32^{27} = (2^5)^{27} = 2^{135} < 2^{156} = 2^{4 \cdot 39} = 16^{39} < 18^{39}$

$\Rightarrow -32^{27} > -18^{39} \Rightarrow (-32)^{27} > (-18)^{39}$

Bài 2

So sánh

a) $(-5)^{39}$ và $(-2)^{91}$;

b) 222^{333} và 333^{222}

Lời giải :

a) Ta có: $(-5)^{39} = -5^{39} = -(5^3)^{13} = -125^{13}$; $(-2)^{91} = -2^{91} = -(2^7)^{13} = -128^{13}$

Ta thấy: $125^{13} < 128^{13} \Rightarrow -125^{13} > -128^{13} \Rightarrow (-5)^{39} > (-2)^{91}$

b) Ta có: $222^{333} = (222^3)^{111}$; $333^{222} = (333^2)^{111}$

$222^3 = (2.111)^3 = 8.111^3 = 8.111.111^2 = 888.111^2$

$333^2 = (3.111)^2 = 9.111^2$

Vì $888 > 9 \Rightarrow 888.111^2 > 9.111^2 \Rightarrow 222^3 > 333^2 \Rightarrow (222^3)^{111} > (333^2)^{111} \Rightarrow 222^{333} > 333^{222}$

Vậy $222^{333} > 333^{222}$

Bài 3

Không dùng máy tính

So sánh $A = \frac{2006}{2007} + \frac{2007}{2008} + \frac{2008}{2009} + \frac{2009}{2006}$ với 4

Lời giải :



$$\begin{aligned} A &= \frac{2007-1}{2007} + \frac{2008-1}{2008} + \frac{2009-1}{2009} + \frac{2006+3}{2006} \\ &= 1 - \frac{1}{2007} + 1 - \frac{1}{2008} + 1 - \frac{1}{2009} + 1 + \frac{3}{2006} \\ &= 4 + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2007} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2008} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2009} \end{aligned}$$

Do $\frac{1}{2006} > \frac{1}{2007}, \frac{1}{2006} > \frac{1}{2008}, \frac{1}{2006} > \frac{1}{2009} \Rightarrow A > 4$

Bài 4

Tính $B = 1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{100}$. So sánh B với 2^{102}

Lời giải :

Ta có: $4B = 2^2 + 2^4 + 2^6 + \dots + 2^{102}$

$$4B - B = (2^2 + 2^4 + 2^6 + \dots + 2^{102}) - (1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{100})$$

$$3B = 2^{102} - 1 \Rightarrow B = \frac{2^{102} - 1}{3} \Rightarrow B < 2^{102}$$

Bài 5

So sánh A và B trong mỗi trường hợp sau:

a) $A = \frac{-2012}{4025}; B = \frac{-1999}{3997}$

b) $A = 3^{21}; B = 2^{31}$

c) $A = \frac{2011}{1.2} + \frac{2011}{3.4} + \frac{2011}{5.6} + \dots + \frac{2011}{1999.2000}; B = \frac{2012}{1001} + \frac{2012}{1002} + \frac{2012}{1003} + \dots + \frac{2012}{2000}$

Lời giải

a) $\frac{2012}{4025} < \frac{2012}{4024} = \frac{1}{2}; \frac{1}{2} = \frac{1999}{3998} < \frac{1999}{3997} \Rightarrow \frac{2012}{4025} < \frac{1999}{3997} \Rightarrow \frac{-2012}{4025} > \frac{-1999}{3997}$. Vậy $A > B$

b) $A = 3^{21} = 3 \cdot (3^2)^{10} = 3 \cdot 9^{10}; B = 2^{31} = 2 \cdot (2^3)^{10} = 2 \cdot 8^{10}$. Suy ra $A > B$

c) $A = \frac{2011}{1.2} + \frac{2011}{3.4} + \frac{2011}{5.6} + \dots + \frac{2011}{1999.2000}$



$$\begin{aligned}
 &= 2011 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{1999} - \frac{1}{2000} \right) \\
 &= 2011 \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{1999} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2000} \right) \right] \\
 &= 2011 \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{1999} + \frac{1}{2000} \right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2000} \right) \right] \\
 &= 2011 \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1999} + \frac{1}{2000} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{999} + \frac{1}{1000} \right) \right] \\
 &= 2011 \cdot \left(\frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \frac{1}{1003} + \dots + \frac{1}{1999} + \frac{1}{2000} \right) \\
 B &= 2012 \cdot \left(\frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \frac{1}{1003} + \dots + \frac{1}{2000} \right)
 \end{aligned}$$

Suy ra $A < B$

Bài 6

Cho biểu thức : $C = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$. Chứng minh rằng: $C < \frac{3}{16}$

Lời giải :

$$\text{Biến đổi : } 3C = 3 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}} \right) = 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{99}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}}$$

Ta có:

$$3C + C = \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{99}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}} \right)$$

$$4C = 1 + \left(\frac{-2}{3} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{3}{3^2} - \frac{2}{3^2} \right) + \left(\frac{-4}{3^3} + \frac{3}{3^2} \right) + \dots + \left(\frac{-100}{3^{99}} + \frac{99}{3^{99}} \right) - \frac{100}{3^{100}}$$

$$4C = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots - \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$



$$\text{Đặt } D = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots - \frac{1}{3^{99}}$$

$$\text{Ta có: } 3D = 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots - \frac{1}{3^{99}} \right) = 3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \dots - \frac{1}{3^{98}}$$

$$\text{Khi đó: } 3D + D = \left(3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \dots - \frac{1}{3^{98}} \right) + \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots - \frac{1}{3^{99}} \right)$$

$$4D = 3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \dots - \frac{1}{3^{98}} + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots - \frac{1}{3^{99}}$$

$$4D = 3 + (-1 + 1) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) + \left(-\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} \right) + \dots + \left(-\frac{1}{3^{98}} + \frac{1}{3^{98}} \right) - \frac{1}{3^{99}}$$

$$4D = 3 - \frac{1}{3^{99}} \Rightarrow D = \frac{3}{4} - \frac{1}{4 \cdot 3^{99}}$$

$$\text{Nên ta có: } 4C = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4 \cdot 3^{99}} \right) - \frac{100}{3^{100}} \Rightarrow 4C = \frac{3}{4} - \frac{1}{4 \cdot 3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4 \cdot 3^{99}} - \frac{100}{3^{100}} \right) = \frac{3}{16} - \frac{1}{4^2 \cdot 3^{99}} - \frac{25}{3^{100}}$$

$$C = \frac{3}{16} - \left(\frac{1}{4^2 \cdot 3^{99}} + \frac{25}{3^{100}} \right)$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{4^2 \cdot 3^{99}} + \frac{25}{3^{100}} > 0 \text{ nên } \frac{3}{16} - \left(\frac{1}{4^2 \cdot 3^{99}} + \frac{25}{3^{100}} \right) < \frac{3}{16}. \text{ Vậy } C < \frac{3}{16}$$

Bài 7

$$\text{Chứng minh: } \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < 1$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{1}{2^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}; \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \dots$$

$$\frac{1}{2005^2} < \frac{1}{2004 \cdot 2005} = \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005}$$



$$\Leftrightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < 1 - \frac{1}{2005} \Leftrightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < 1$$

Bài 8

Chứng minh $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}} + \frac{1}{3^{2013}} < \frac{1}{2}$

$$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}} + \frac{1}{3^{2013}} \quad \text{Lời giải}$$

$$3B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}}$$

$$3B - B = 2B = 1 - \frac{1}{3^{2013}} \Rightarrow B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{2013}} < \frac{1}{2}$$

Bài 9

Chứng minh: $\frac{1}{4} < \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} < \frac{1}{4}$

Lời giải

Đặt $A = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$, ta có:

$$*A < \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{100} < \frac{1}{4}$$

$$*A > \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100} + \frac{1}{100.101} = \frac{1}{5} - \frac{1}{101} > \frac{1}{6}$$

Bài 10

$$A = \left(\frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{3} - 1\right) \left(\frac{1}{4} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{2015} - 1\right) \left(\frac{1}{2016} - 1\right). \text{ So sánh } A \text{ với } \frac{-1}{2015}$$

Lời giải:

$$A = \frac{-1}{2} \cdot \frac{-2}{3} \cdot \frac{-3}{4} \dots \frac{-2014}{2015} \cdot \frac{-2015}{2016} = \frac{-1}{2016} > \frac{-1}{2015}.$$

Bài 11



Cho bốn số dương a, b, c, d thỏa điều kiện $a + c = 2b$ và $c(b + d) = 2bd$.

Chứng minh $\left(\frac{a+c}{b+d}\right)^8 = \frac{a^8+b^8}{b^8+d^8}$

Lời giải:

Từ $c(b + d) = 2bd \Rightarrow b + d = \frac{2bd}{c}$

Viết $\frac{a+c}{b+d} = \frac{2bc}{2bd} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \Rightarrow \left(\frac{a+c}{b+d}\right)^8 = \frac{a^8+b^8}{b^8+d^8}$

Dạng 3: Tìm x

Bài 1

Tìm giá trị n nguyên dương

a) $\frac{1}{27} \cdot 81^n = 3^n$

b) $8 < 2^n < 64$

Lời giải

a) $\frac{1}{27} \cdot 81^n = 3^n \Rightarrow 3^{4n-3} = 3^n \Rightarrow 4n - 3 = n \Rightarrow n = 1$

b) $8 < 2^n < 64 \Rightarrow 2^3 < 2^n < 2^6 \Rightarrow n = 4, n = 5$

Bài 2

Tìm giá trị n nguyên dương

a) $\frac{1}{8} \cdot 16^n = 2^n$

b) $27 < 3^n < 243$

Lời giải

$\frac{1}{8} \cdot 16^n = 2^n \Rightarrow 2^{4n-3} = 2^n \Rightarrow 4n - 3 = n \Rightarrow n = 1$

$27 < 3^n < 243 \Rightarrow 3^3 < 3^n < 3^5 \Rightarrow n = 4$

Bài 3

Tìm x biết:



a) $\frac{1}{2} - x : \frac{3}{5} = 2$

b) $2^{x+\frac{1}{2}} = 8$

Lời giải:

a) $\frac{1}{2} - x : \frac{3}{5} = 2 \Rightarrow x : \frac{3}{5} = \frac{1}{2} - 2 \Rightarrow x : \frac{3}{5} = \frac{-3}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} \Rightarrow x = -\frac{9}{10}$

b) $2^{x+\frac{1}{2}} = 8 \Rightarrow 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^3 \Rightarrow x + \frac{1}{2} = 3 \Rightarrow x = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

Bài 4

Tìm x biết

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{5x+\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$

b) $(x-3)^{x+2} - (x-3)^{x+8} = 0$

c) $3^{x+2} + 4 \cdot 3^{x+1} + 3^{x-1} = 6^6$

d) $3^{x+2} + 3^x = 810$

e) $(x-1)^5 = -243$

Lời giải

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{5x+\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow 5x + \frac{1}{2} = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

b) $(x-3)^{x+2} - (x-3)^{x+8} = 0 \Leftrightarrow (x-3)^{x+2} [1 - (x-3)^6] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ (x-3)^6=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=4 \\ x=2 \end{cases}$

c) $3^{x+2} + 4 \cdot 3^{x+1} + 3^{x-1} = 6^6 \Rightarrow 3^{x-1} \cdot (3^3 + 4 \cdot 3^2 + 1) = 2^6 \cdot 3^6$

$\Rightarrow 3^{x-1} \cdot 64 = 2^6 \cdot 3^6 \Rightarrow 3^{x-1} = 3^6 \Rightarrow x = 7$

d) $3^x \cdot (3^2 + 1) = 810 \Leftrightarrow 3^x = 81 \Rightarrow x = 4$

e) $(x-1)^5 = (-3)^5 \Rightarrow x-1 = -3 \Leftrightarrow x = -2$

Bài 5

Tìm x, biết:

a) $(2x-1)^4 = 16$

b) $(2x+1)^4 = (2x+1)^6$

c) $(2x-1)^7 = (2x-1)^5$

d) $5^x + 5^{x+2} = 650$



e) $3^x + 3^{x+2} = 2430$

f) $(x - 5)^{x+1} - (x - 5)^{x+13} = 0$

Lời giải

a) $(2x - 1)^4 = 16 = (\pm 2)^4 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 2 \\ 2x - 1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1,5 \\ x = -0,5 \end{cases}$

b) $(2x + 1)^4 = (2x + 1)^6 \Rightarrow \begin{cases} x = -0,5 \\ x = 0 \\ x = -15 \end{cases}$

c) Ta có: $(2x - 1)^7 = (2x - 1)^5 \Rightarrow (2x - 1)^5 \cdot [(2x - 1)^2 - 1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ 2x - 1 = 1 \\ 2x - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

Vậy $x \in \left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}$

d) Ta có: $5^x + 5^{x+2} = 650 \Rightarrow 5^x(1 + 5^2) = 650 \Leftrightarrow 5^x \cdot 26 = 650 \Rightarrow 5^x = 25 \Rightarrow x = 2$

Vậy $x \in \{2\}$

e) Chuyển vế: $3^x + 3^{x+2} = 2430$

$\Rightarrow 3^x \cdot (1 + 3^2) = 2430 \Leftrightarrow 3^x \cdot 10 = 2430 \Rightarrow 3^x = 243 = 3^5 \Rightarrow x = 5$

f) $(x - 5)^{x+1} - (x - 5)^{x+13} = 0 \Leftrightarrow (x - 5)^{x+1} \cdot [1 - (x - 5)^{12}] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 5)^{x+1} = 0 \\ 1 - (x - 5)^{12} = 0 \end{cases}$

$(x - 5)^{x+1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 = 0 \\ x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$

Bài 6

Tìm x sao cho:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} = 17$

b) $5^{2x-1} = 5^{2x-3} + 125 \cdot 24$



Lời giải

$$a) \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} = \frac{1}{17} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{17} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{16} + 1\right) = \frac{1}{17}$$

$$\Leftrightarrow \frac{17}{16} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{17} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{16} \Leftrightarrow 2^{-x} = 2^4 \Rightarrow x = -4$$

b) Ta có: $5^{2x-1} - 5^{2x-3} = 5^3 \cdot 24$

$$\Rightarrow 5^{2x-3} (5^2 - 1) = 5^3 \cdot 24 \Rightarrow 5^{2x-3} = 5^3 \Rightarrow 2x - 3 = 3 \Leftrightarrow x = 3$$

Bài 7

Tìm x thỏa mãn

$$\frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \cdot \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = 2^x$$

Lời giải:

$$\frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \cdot \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = \frac{4 \cdot 4^5}{3 \cdot 3^5} \cdot \frac{6 \cdot 6^5}{2 \cdot 2^5} = \frac{4^6}{3^6} \cdot \frac{6^6}{2^6}$$

$$= \left(\frac{6}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{4}{2}\right)^6 = 2^{12} \Rightarrow 2^x = 2^{12} \Rightarrow x = 12$$

Bài 8

Tìm x, y biết:

a) $|x + 5| + (3y - 4)^{2016} = 0$

b) $2^{x-1} + 5 \cdot 2^{x-2} = \frac{7}{32}$

Lời giải

a) $|x + 5| + (3y - 4)^{2016} = 0$. Vì $|x + 5| \geq 0; (3y - 4)^{2016} \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x + 5| = 0 \\ (3y - 4)^{2016} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5 = 0 \\ 3y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = \frac{4}{3} \end{cases}$$

b) $2^{x-1} + 5 \cdot 2^{x-2} = \frac{7}{32} \Leftrightarrow 2^{x-1} \left(1 + \frac{5}{2}\right) = \frac{7}{32} \Leftrightarrow 2^{x-1} \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{32}$
 $\Leftrightarrow 2^{x-1} = \frac{7}{32} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{32} = 2^{-4} \Rightarrow x - 1 = -4 \Rightarrow x = -3$

Bài 9

Tìm các số x, y, z biết:

$$(3x - 5)^{2006} + (y^2 - 1)^{2008} + (x - z)^{2100} = 0$$

Lời giải



$$(3x - 5)^{2006} + (y^2 - 1)^{2008} + (x - z)^{2010} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - 5 = 0 \\ y^2 - 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z = \frac{5}{3} \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

Bài 10

Tìm số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện:

a) $2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n = 2^{n+11}$

b) $2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + (n-1)2^{n-1} + n.2^n = 2^{n+34}$

Lời giải

a) Đặt $S = 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n$

$$S = 2S - S = (2.2^3 + 3.2^4 + 4.2^5 + \dots + n.2^{n+1}) - (2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n)$$

$$S = n.2^{n+1} - 2^3 - (2^3 + 2^4 + \dots + 2^{n-1} + 2^n)$$

Đặt $T = 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{n-1} + 2^n$. Tính được $T = 2T - T = 2^{n-1} - 2^3$

$$\Rightarrow S = n.2^{n+1} - 2^3 - 2^{n-1} + 2^3 = (n-1).2^{n+1}$$

$$(n-1).2^{n+1} = 2^{n+11} \Rightarrow n-1 = 2^{10} \Rightarrow n = 1025$$

b) $2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + (n-1)2^{n-1} + n.2^n = 2^{n+34}$

$$2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + (n-1)2^{n-1} + n.2^n = 2^{n+34} \quad (1)$$

Đặt $B = 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + (n-1).2^{n-1} + n.2^n$

$$\Rightarrow 2B = 2.(2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + (n-1).2^{n-1} + n.2^n)$$

$$2B = 2.2^3 + 3.2^4 + 4.2^5 + \dots + (n-1)2^n + n.2^{n+1}$$

$$2B - B = (2.2^3 + 3.2^4 + 4.2^5 + \dots + (n-1)2^n + n.2^{n+1})$$

$$- (2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + (n-1).2^{n-1} + n.2^n)$$

$$B = -2^3 - 2^4 - 2^5 - \dots - 2^n + n.2^{n+1} - 2.2^2 = - (2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n) + n.2^{n+1} - 2^3$$

Đặt $C = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n$

$$\Rightarrow 2C = 2.(2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n) = 2^4 + 2^5 + 2^6 + \dots + 2^{n+1}$$

$$2C - C = (2^4 + 2^5 + 2^6 + \dots + 2^{n+1}) - (2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n)$$

$$C = 2^{n+1} - 2^3$$

Khi đó $B = - (2^{n+1} - 2^3) + n.2^{n+1} - 2^3$

$$= -2^{n+1} + 2^3 + n.2^{n+1} - 2^3 = -2^{n+1} + n.2^{n+1} = (n-1).2^{n+1}$$

Vậy từ (1) ta có: $(n-1)2^{n+1} = 2^{n+34}$



$$2^{n+34} - (n-1) \cdot 2^{n+1} = 0$$

$$2^{n+1} \cdot [2^{33} - (n-1)] = 0 \Rightarrow 2^{33} - n + 1 = 0 \Rightarrow n = 2^{33} + 1$$

Vậy $n = 2^{33} + 1$

Bài 11

Tìm x biết:

$$a) \frac{1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4}{2 \cdot 5} \cdot \frac{5}{2 \cdot 6} \cdots \frac{30}{2 \cdot 31} \cdot \frac{31}{2 \cdot 2^6} = 8^x$$

Lời giải

$$a) \frac{1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4}{2 \cdot 5} \cdot \frac{5}{2 \cdot 6} \cdots \frac{30}{2 \cdot 31} \cdot \frac{31}{2 \cdot 2^6} = 4^x$$

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 30 \cdot 31}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 30 \cdot 31 \cdot 2^{30} \cdot 2^6} = 2^{2x} \Rightarrow \frac{1}{2^{36}} = 2^{2x} \Rightarrow x = -18$$

$$b) \frac{4 \cdot 4^5}{3 \cdot 3^5} \cdot \frac{6 \cdot 6^5}{2 \cdot 2^5} = 8^x \Rightarrow \frac{4^6}{3^6} \cdot \frac{6^6}{2^6} = 2^{3x} \Leftrightarrow \left(\frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 2}\right)^6 = 2^{3x} \Rightarrow 2^{3x} = 4^6 \Rightarrow 2^{3x} = 2^{12} \Rightarrow x = 4$$

Bài 12

Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ biết:

$$a) 25 - y^2 = 8 \cdot (x - 2009)^2$$

$$b) 36 - y^2 = 8(x - 2010)^2$$

Lời giải

$$a) \text{Ta có: } 8(x - 2009)^2 = 25 - y^2 \Rightarrow \begin{cases} 8(x - 2009)^2 + y^2 = 25(*) \\ (x - 2009)^2 = 1 \\ y^2 = 17(ktm) \end{cases}$$

Vì $y^2 \geq 0 \Rightarrow (x - 2009)^2 \leq \frac{25}{8} \Rightarrow \begin{cases} (x - 2009)^2 = 0 \\ y^2 = 25 \Rightarrow y = 5 \end{cases}$

Vậy $(x; y) = (2009; 5)$

$$b) \text{Ta có: } 36 - y^2 = 8(x - 2010)^2 \Rightarrow y^2 + 8(x - 2010) = 36$$

$$\text{Vì } y^2 \geq 0 \Rightarrow 8(x - 2010)^2 \leq 36 \Rightarrow (x - 2010)^2 \leq \frac{36}{8}$$

Vì $0 \leq (x - 2010)^2$ và $x \in \mathbb{N}$, $(x - 2010)^2$ là số chính phương nên



$$\Rightarrow \begin{cases} (x-2010)^2 = 4 \\ (x-2010)^2 = 1 \\ (x-2010)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x-2010| = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2012 \\ x = 2008 \end{cases} \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -2(ktm) \end{cases} \\ x-2010 = \pm 1 \Rightarrow y^2 = 28(ktm) \\ x-2010 = 0 \Rightarrow x = 2010 \Rightarrow y^2 = 36 \Rightarrow \begin{cases} y = 6 \\ y = -6(ktm) \end{cases} \end{cases}$$

Vậy $(x; y) = (2012; 2); (2008; 2); (2016; 6)$

Bài 13

Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ biết :

a) $5^x + 5^y = 3250 (x < y)$

b) $3^x + 4^x = 5^x$

Lời giải

a) Biến đổi $5^x \cdot (5^{y-x} + 1) = 5^3 \cdot 26 \Rightarrow \begin{cases} 5^x = 5^3 \\ 5^{y-x} + 1 = 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$

b) Với $x = 0, x = 1$ thay vào không thỏa mãn

+) $x = 2$ thay vào ta được $3^2 + 4^2 = 5^2$ (luôn đúng), vậy $x = 2$ thỏa mãn

+) $x > 2$, ta có: $3^x + 4^x = 5^x \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1 (*)$

Với $x > 2$ ta có: $\left(\frac{3}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2; \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow x > 2$ (không

t.m). Vậy $x = 2$

Bài 14

Tìm x , biết $(x+2)^{n+1} = (x+2)^{n+11}$ với n là số tự nhiên

Lời giải

$$\begin{aligned} (x+2)^{n+1} &= (x+2)^{n+11} \\ (x+2)^{n+1} - (x+2)^{n+11} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+2)^{n+1} [1 - (x+2)^{10}] &= 0 \end{aligned}$$



$$\text{TH1: } (x + 2)^{n+1} = 0 \Rightarrow x = -2.$$

$$\text{TH2: } 1 - (x + 2)^{10} \Rightarrow (x + 2)^{10} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 1 \\ x + 2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$$

Vậy $x = -2; x = -1; x = -3$.



Chuyên đề 4: GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

A. Hệ thống kiến thức về GTTĐ

1. Định nghĩa: Giá trị tuyệt đối của số a ($a \in \mathbb{R}$) là khoảng cách từ a đến điểm O trên trục số

Kí hiệu: $|a|$ là giá trị tuyệt đối của a

- Giá trị tuyệt đối của số không âm là chính nó, giá trị tuyệt đối của số âm là số đối của nó.

Tổng quát:

+ Nếu $a \geq 0 \Rightarrow |a| = a$

+ Nếu $a < 0 \Rightarrow |a| = -a$

+ Nếu $x - a \geq 0 \Rightarrow |x - a| = x - a$

+ Nếu $x - a < 0 \Rightarrow |x - a| = a - x$

2. Tính chất

+ $|a| \geq 0, \forall a$

+ $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

+ $|a|^{2n} = a^{2n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

+ $|a| + |b| \geq |a + b|$

+ $|a| - |b| \leq |a - b|$

- Hai số bằng nhau hoặc đối nhau thì có giá trị tuyệt đối bằng nhau, và ngược lại hai số có giá trị tuyệt đối bằng nhau thì chúng là hai số bằng nhau hoặc đối nhau

$$|a| = |b| \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -b \end{cases}$$

- Mọi số đều lớn hơn hoặc bằng đối của giá trị tuyệt đối của nó và đồng thời nhỏ hơn hoặc bằng giá trị tuyệt đối của nó: $-|a| \leq a \leq |a|$ và

$$-|a| = a \Leftrightarrow a \leq 0; a = |a| \Leftrightarrow a \geq 0$$

- Trong hai số âm số nào nhỏ hơn thì có giá trị tuyệt đối lớn hơn: Nếu $a < b < 0 \Rightarrow |a| > |b|$

- Trong hai số dương số nào nhỏ hơn thì có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn: Nếu $0 < a < b \Rightarrow |a| < |b|$

- Giá trị tuyệt đối của một tích bằng tích các giá trị tuyệt đối: $|a.b| = |a|.|b|$

- Giá trị tuyệt đối của một thương bằng thương hai giá trị tuyệt đối: $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$





- Bình phương của giá trị tuyệt đối của một số bằng bình phương số đó: $|a|^2 = a^2$
- Tổng hai giá trị tuyệt đối của hai số luôn lớn hơn hoặc bằng giá trị tuyệt đối của hai số, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi hai số cùng dấu: $|a| + |b| \geq |a + b|$ và $|a| + |b| = |a + b| \Leftrightarrow ab \geq 0$

B. Các dạng bài tập

Dạng 1: Phá giá trị tuyệt đối

Phương pháp: Áp dụng công thức sau $|a| = \begin{cases} a, (a \geq 0) \\ -a, (a < 0) \end{cases}$

Bài 1: Phá giá trị tuyệt đối

- a. $|2x + 3|$ b. $|4x - 2|$ c. $|3x - 5|$ d. $|2 - x|$

Lời giải

a) Ta có: $|2x + 3| = \begin{cases} 2x + 3 & \left(x \geq \frac{-3}{2} \right) \\ -2x - 3 & \left(x < \frac{-3}{2} \right) \end{cases}$

b) Ta có: $|4x - 2| = \begin{cases} 4x - 2 & \left(x \geq \frac{1}{2} \right) \\ 2 - 4x & \left(x < \frac{1}{2} \right) \end{cases}$

c) Ta có: $|3x - 5| = \begin{cases} 3x - 5 & \left(x \geq \frac{5}{3} \right) \\ 5 - 3x & \left(x < \frac{5}{3} \right) \end{cases}$

d) Ta có: $|2 - x| = \begin{cases} 2 - x & \left(x \leq 2 \right) \\ x - 2 & \left(x > 2 \right) \end{cases}$

Bài 2: Phá giá trị tuyệt đối

- a. $|2x - 4| + |x - 3|$ b. $|x - 5| + |x + 6|$

Lời giải

a) Ta có bảng sau:

x		2		3	
$2x - 4$	-	0	+		+
$x - 3$	-		-	0	+

Khi đó ta có:

- Nếu $x < 2 \Rightarrow |2x - 4| + |x - 3| = (4 - 2x) + (3 - x) = -3x + 7$

- Nếu $2 \leq x < 3 \Rightarrow |2x - 4| + |x - 3| = 2x - 4 + 3 - x = x - 1$





- Nếu $x \geq 3 \Rightarrow |2x - 4| + |x - 3| = 2x - 4 + x - 3 = 3x - 7$

b) Ta có bảng sau:

x	-6	5
$x - 5$	$-$	0
$x + 6$	0	$+$

Khi đó ta có :

- Nếu $x < -6 \Rightarrow |x - 5| + |x + 6| = 5 - x - x - 6 = -2x - 1$

- Nếu $-6 \leq x < 5 \Rightarrow |x - 5| + |x + 6| = 5 - x + x + 6 = 11$

- Nếu $x \geq 5 \Rightarrow |x - 5| + |x + 6| = x - 5 + x + 6 = 2x + 1$

Bài 3:

Rút gọn các biểu thức sau:

a. $3(2x - 1) - |x - 5|$

b. $|2x + 3| + x + 2$

Lời giải

a) Nếu $x \geq 5 \Rightarrow 3(2x - 1) - |x - 5| = 6x - 3 - (x - 5) = 5x + 2$

Nếu $x < 5 \Rightarrow 3(2x - 1) - |x - 5| = 6x - 3 - (5 - x) = 7x - 8$

b) Nếu $x \geq \frac{-3}{2} \Rightarrow |2x + 3| + x + 2 = 2x + 3 + x + 2 = 3x + 5$

Nếu $x < \frac{-3}{2} \Rightarrow |2x + 3| + x + 2 = -2x - 3 + x + 2 = -x - 1$

Bài 4:

Rút gọn các biểu thức sau:

a. $3x - 1 + |1 - 3x|$

b. $3(x - 1) - 2|x + 3|$

Lời giải

a) Nếu $x \leq \frac{1}{3} \Rightarrow 3x - 1 + |1 - 3x| = 3x - 1 + 1 - 3x = 0$

Nếu $x > \frac{1}{3} \Rightarrow 3x - 1 + |1 - 3x| = 3x - 1 + (3x - 1) = 6x - 2$

b) Nếu $x \geq -3 \Rightarrow 3(x - 1) - 2|x + 3| = 3x - 3 - 2(x + 3) = x - 9$





Nếu $x < -3 \Rightarrow 3(x - 1) - 2|x + 3| = 3x - 3 + 2(x + 3) = 5x + 3$

Bài 5:

Tính giá trị của biểu thức:

a. $A = 3x^2 - 2x + 1$ với $|x| = 0,5$

b. $B = |3x - 1| + x - 3$ với $|x| = \frac{1}{3}$

Lời giải

a) Vì $|x| = 0,5 \Rightarrow \begin{cases} x = 0,5 \\ x = -0,5 \end{cases}$

Trường hợp 1: $x = 0,5 \Rightarrow A = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}$

Trường hợp 2: $x = -0,5 \Rightarrow A = 3 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{-1}{2} + 1 = \frac{3}{4} + 2 = \frac{11}{4}$

b) Vì $|x| = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = \frac{-1}{3} \end{cases}$

Trường hợp 1: $x = \frac{1}{3} \Rightarrow B = \left|3 \cdot \frac{1}{3} - 1\right| + \frac{1}{3} - 3 = \frac{-8}{3}$

Trường hợp 2: $x = \frac{-1}{3} \Rightarrow B = \left|3 \cdot \frac{-1}{3}\right| + \frac{-1}{3} - 3 = 1 + \frac{-10}{3} = \frac{-7}{3}$

Bài 6:

Tính giá trị của biểu thức:

a. $A = 6x^3 - 3x^2 + 2|x| + 4$ với $x = \frac{-2}{3}$

b. $2|x| - 3|y|$ với $x = \frac{1}{2}; y = -3$

Lời giải

a) Với $x = \frac{-2}{3} \Rightarrow |x| = \left|\frac{-2}{3}\right| = \frac{2}{3} \Rightarrow A = 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 \cdot \frac{2}{3} + 4 = \frac{52}{9}$

b) Với $x = \frac{1}{2} \Rightarrow |x| = \frac{1}{2}, y = -3 \Rightarrow |y| = 3 \Rightarrow B = 2|x| - 3|y| = 2 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot 3 = 1 - 9 = -8$

Bài 7:

Tính giá trị của biểu thức:





a. $2|x - 2| - 3|1 - x|$ với $x = 4$

b. $D = \frac{5x^2 - 7x + 1}{3x - 1}$ với $|x| = \frac{1}{2}$

Lời giải

a) Với $x = 4 \Rightarrow A = 2|x - 2| - 3|1 - x| = 2 \cdot |2| - 3 \cdot |-3| = 4 - 9 = -5$

b) Với $|x| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Trường hợp 1: $x = \frac{1}{2} \Rightarrow D = \frac{5 \cdot \frac{1}{4} - 7 \cdot \frac{1}{2} + 1}{3 \cdot \frac{1}{2} - 1} = \frac{-5}{\frac{1}{2}}$

Trường hợp 2: $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow D = \frac{5 \cdot \frac{1}{4} + 7 \cdot \frac{1}{2} + 1}{3 \cdot \frac{-1}{2} - 1} = \frac{-23}{10}$

Bài 8:

Cho $A = |2x^4 + 3x^2 + 1| - |-2x^4 - x^2 - 1|$. Chứng tỏ rằng giá trị biểu thức A luôn không âm với mọi giá trị của x

Lời giải

Vì $2x^4 \geq 0, 3x^2 \geq 0 \Rightarrow 2x^4 + 3x^2 + 1 > 0$

Từ đó $|-2x^4 - x^2 - 1| = 2x^4 + x^2 + 1$

$\Rightarrow A = 2x^4 + 3x^2 + 1 - 2x^4 - x^2 - 1 = 2x^2 \geq 0$ với mọi x

Vậy giá trị của A luôn không âm với mọi x



Dạng 2: Tìm giá trị của x thỏa mãn đẳng thức $|f(x)| = a$

Trong đó $f(x)$ là các biểu thức chứa x, a là hằng số

Ví dụ: Tìm x , sao cho $|2x - 1| = 1$

Cách giải:

+) Nếu $a < 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm do $|f(x)| \geq 0$

+) Nếu $a = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

+) Nếu $a > 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = a \\ f(x) = -a \end{cases}$

Bài 1: HSG Huyện Hoằng Hoá, năm học 2020 - 2021

Tìm x , thỏa mãn: $\frac{1}{3} : |x - 1| - 0,25 = \frac{5}{12}$

Lời giải

Tìm x biết $\frac{1}{3} : |x - 1| - 0,25 = \frac{5}{12}$

$$\frac{1}{3} : |x - 1| - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{1}{3} : |x - 1| = \frac{5}{12} + \frac{1}{4}$$

$$|x - 1| = \frac{1}{2} \quad x \in \left\{ \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right\}$$

Bài 2: HSG Huyện Gia Viên, năm học 2020 - 2021

Tìm x , thỏa mãn: $\left| \frac{39}{2} - 3x^2 \right| = \frac{15}{2}$

Lời giải

Ta có: $\left| \frac{39}{2} - 3x^2 \right| = \frac{15}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{39}{2} - 3x^2 = \frac{15}{2} \\ \frac{39}{2} - 3x^2 = -\frac{15}{2} \end{cases}$

Nếu $\frac{39}{2} - 3x^2 = \frac{15}{2} \Rightarrow 3x^2 = \frac{39}{2} - \frac{15}{2} \Rightarrow 3x^2 = 12$

$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$





Nếu $\frac{39}{2} - 3x^2 = -\frac{15}{2} \Rightarrow 3x^2 = \frac{39}{2} + \frac{15}{2} \Rightarrow 3x^2 = 27$

$\Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

Vậy $x \in \{\pm 2; \pm 3\}$

Bài 3: HSG Huyện Tam Dương, năm học 2020 - 2021

Tìm x , thỏa mãn: $\left| 3x - \frac{7}{3} - 2 \right| = 7$

Lời giải

Ta có: $\left| 3x - \frac{7}{3} - 2 \right| = 7 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{7}{3} - 2 = 7 \\ 3x - \frac{7}{3} - 2 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{7}{3} = 9 \\ 3x - \frac{7}{3} = -5 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{34}{9} \\ x = \frac{-20}{9} \end{cases}$

Vậy $x \in \left\{ \frac{34}{9}; \frac{-20}{9} \right\}$

Bài 4: HSG Huyện Lý Nhân, năm học 2020 - 2021

Tìm x , thỏa mãn: $\frac{7}{2} - \left| \frac{1}{2} - 2x \right| = \frac{2}{3}$

Lời giải

Ta có: $\frac{7}{2} - \left| \frac{1}{2} - 2x \right| = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \left| \frac{1}{2} - 2x \right| = \frac{7}{2} - \frac{2}{3} \Rightarrow \left| \frac{1}{2} - 2x \right| = \frac{17}{6} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} - 2x = \frac{17}{6} \\ \frac{1}{2} - 2x = \frac{-17}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{-7}{3} \\ 2x = \frac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-7}{6} \\ x = \frac{5}{3} \end{cases}$

Vậy $x \in \left\{ \frac{-7}{6}; \frac{5}{3} \right\}$

Bài 5:

Tìm x , thỏa mãn:

a. $|x^2 - 2| = 7$

b. $||x - 5| - 4| = 3$

Lời giải





a) Ta có: $|x^2 - 2| = 7 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2 = 7 \\ x^2 - 2 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ x^2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 3$

b) Ta có: $||x - 5| - 4| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} |x - 5| = 7 \\ |x - 5| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-2; 4; 6; 12\}$

Bài 6:

Tìm x biết:

a. $2|3x - 1| + 1 = 5$

b. $\left|3x - \frac{2}{5}\right| = \frac{1}{35} + 2\frac{4}{7}$

c. $||x + 5| - 4| = 3$

Lời giải

a, $2|3x - 1| + 1 = 5 \Rightarrow 2|3x - 1| = 4 \Rightarrow |3x - 1| = 2 \Rightarrow \begin{cases} 3x - 1 = 2 \\ 3x - 1 = -2 \end{cases}$

b, $\left|3x - \frac{2}{5}\right| = \frac{1}{35} + 2\frac{4}{7} \Rightarrow \left|3x - \frac{2}{5}\right| = \frac{13}{5} \Rightarrow \begin{cases} 3x - \frac{2}{5} = \frac{13}{5} \\ 3x - \frac{2}{5} = -\frac{13}{5} \end{cases}$

c, $||x + 5| - 4| = 3 \Rightarrow \begin{cases} |x + 5| - 4 = 3 \\ |x + 5| - 4 = -3 \end{cases}$

Bài 7:

Tìm x biết:

a) $||3x + 1| - 11| = 3$

b) $||x + 3| - 8| = 20$

Lời giải

a, Ta có: $||3x + 1| - 11| = 3 \Rightarrow \begin{cases} |3x + 1| - 11 = 3 \\ |3x + 1| - 11 = -3 \end{cases}$

b, Ta có: $||x + 3| - 8| = 20 \Leftrightarrow \begin{cases} |x + 3| - 8 = 20 \\ |x + 3| - 8 = -20 \end{cases}$

Bài 8:

Tìm biết: $\left|x - \frac{1}{3}\right| + \frac{4}{5} = \left|(-3, 2) + \frac{2}{5}\right|$





Lời giải

$$\text{Ta có } \left| x - \frac{1}{3} \right| + \frac{4}{5} = \left| (-3,2) + \frac{2}{5} \right| \Leftrightarrow \left| x - \frac{1}{3} \right| + \frac{4}{5} = \frac{14}{5}$$

$$\Leftrightarrow \left| x - \frac{1}{3} \right| = 2 \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{3} = 2 \\ x - \frac{1}{3} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ x = \frac{-5}{3} \end{cases}. \text{ Vậy } x \in \left\{ \frac{7}{3}; \frac{-5}{3} \right\}.$$

Bài 9:

$$\text{Tìm biết: } 3|2x - 1| + 1 = (-2)^2 - 3 \cdot (-2)^3$$

Lời giải

$$\text{Ta có } 3|2x - 1| + 1 = (-2)^2 - 3 \cdot (-2)^3 \Rightarrow |2x - 1| = 9 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 9 \\ 2x - 1 = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -4 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x \in \{5; -4\}.$$

Bài 10:

$$\text{Tìm biết: } 3\frac{1}{2} : |2x - 1| = \frac{21}{22}$$

Lời giải

Ta xét các trường hợp sau:

$$\text{Trường hợp 1: Nếu } x > \frac{1}{2}, \text{ ta được } 3\frac{1}{2} : |2x - 1| = \frac{21}{22} \Rightarrow \frac{7}{2} : (2x - 1) = \frac{21}{22} \Rightarrow x = \frac{7}{3} (tm)$$

$$\text{Trường hợp 2: Nếu } x < \frac{1}{2}, \text{ ta được } 3\frac{1}{2} : |2x - 1| = \frac{21}{22} \Rightarrow \frac{7}{2} : (1 - 2x) = \frac{21}{22} \Rightarrow x = -\frac{4}{3} (tm)$$

$$\text{Vậy } x = \frac{7}{3} \text{ hoặc } x = -\frac{4}{3}.$$

Bài 11:

$$\text{Tìm biết: } 5 \cdot \left| \frac{3}{4} - \frac{2}{3}x \right| - 3,25 = -2 \left[(1,25)^2 - 2,5 \cdot 0,25 + (-0,25)^2 \right]$$

Lời giải

$$\text{Ta có } \left| \frac{3}{4} - \frac{2}{3}x \right| = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$





Vậy $x = \frac{3}{2}$ hoặc $x = \frac{3}{4}$.

Bài 12:

Tìm biết $\left(3 - \frac{9}{10} - |x + 2|\right) : \left(\frac{9}{10} - 1 - \frac{2}{5}\right) + \frac{4}{5} = 1$

Lời giải

Ta có: $\left(3 - \frac{9}{10} - |x + 2|\right) : \left(\frac{9}{10} - 1 - \frac{2}{5}\right) + \frac{4}{5} = 1$

$$\Leftrightarrow \left(3 - \frac{9}{10} - |x + 2|\right) : \frac{5}{10} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \left(\frac{21}{10} - |x + 2|\right) : \frac{5}{10} = \frac{1}{5}$$

Vậy $x = 0$ hoặc $x = -4$

Bài 13:

Tìm x nguyên biết: $|5(2x + 3)| + |2(2x + 3)| + |2x + 3| = 16$

Lời giải

Ta có: $5|2x + 3| + 2|2x + 3| + |2x + 3| = 16 \Rightarrow 8|2x + 3| = 16$

$$\Rightarrow |2x + 3| = 2 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3 = 2 \\ 2x + 3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{2} \\ x = \frac{-5}{2} \end{cases}$$

Vậy $x = \frac{-5}{2}$ hoặc $x = \frac{-1}{2}$.



Dạng 3: Tìm giá trị của x thỏa mãn đẳng thức $|f(x)| = g(x)$ (*)

Cách giải:

Cách 1: Tìm điều kiện sao cho $g(x) \geq 0$

Khi đó: (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases} \Rightarrow x = \dots\dots$

Cách 2:

+) Nếu $g(x) \geq 0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

+) Nếu $g(x) < 0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow -f(x) = g(x)$

Bài 1: HSG Huyện Thanh Oai, năm học 2016 - 2017

Tìm x, biết $|x(x - 10)| = x$

Lời giải

+ Nếu $x \leq 0$ thì $x(x - 10) \geq 0 \Rightarrow |x(x - 10)| = x(x - 10)$.

Do đó $\Leftrightarrow x(x - 10) = x \Leftrightarrow x(x - 11) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ (nhận) hoặc $x = 11$ (loại)

+ Nếu $0 < x < 10 \Rightarrow x(x - 10) < 0 \Rightarrow |x(x - 10)| = -x(x - 10)$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow -x(x - 10) = x \Leftrightarrow x(x - 9) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (loại) hoặc $x = 9$ (nhận)

+ Nếu $x \geq 10 \Rightarrow x(x - 10) \geq 0 \Rightarrow |x(x - 10)| = x(x - 10)$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow x(x - 10) = x \Leftrightarrow x(x - 11) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 11$ (nhận)

Vậy: $x = 0$ hoặc $x = 9$ hoặc $x = 11$.

Bài 2: HSG Huyện Kỳ Anh, năm học 2020 - 2021

Tìm x, biết $|2x - 1| + 3x = 5$

Lời giải

Ta có: $|2x - 1| + 3x = 5 \Leftrightarrow |2x - 1| = 5 - 3x$ (điều kiện: $5 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{3}$)



$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 5 - 3x \\ 2x - 1 = 3x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 6 \\ -x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{5} (tm) \\ x = 4 (k\text{otm}) \end{cases} \cdot \text{Vậy } x = \frac{6}{5}.$$

Bài 3: HSG Huyện Cẩm Giang, năm học 2019 - 2020

Tìm x , biết $|x + 20| + |x + 5| + |x + 2018| = 2019x$

Lời giải

$$|x + 20| + |x + 5| + |x + 2018| = 2019x (*)$$

Từ (*) ta thấy để tìm được giá trị của x thỏa mãn thì $x \geq 0$ (vì VT (*) luôn lớn hơn hoặc bằng 0)

Với $x \geq 0$, từ

$$|x + 20| + |x + 5| + |x + 2018| = 2019x \Rightarrow x + 20 + x + 5 + x + 2018 = 2019x$$

$$\Rightarrow 2016x = 2043 \Rightarrow x = \frac{2043}{2016} \text{ (thỏa mãn)}$$

Bài 4: HSG Huyện Tiền Hải, năm học 2020 - 2021

Tìm x , biết $\left| \frac{1}{3} + 2020x \right| + \left| \frac{2}{3} + 2021x \right| = 4042x$ (1)

Lời giải

Cách 1:

Vì $\left| \frac{1}{3} + 2020x \right| + \left| \frac{2}{3} + 2021x \right| \geq 0$ với mọi $x \in R$ nên

Với $x \geq 0$ ta có: (1) $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3} + 2020x \right) + \left(\frac{2}{3} + 2021x \right) = 4042x$

$$(1) \Leftrightarrow 1 + 4041x = 4042x \Leftrightarrow 4041x = 4041 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (TMĐK)}$$

Cách 2:

* Trường hợp 1: $x < \frac{-2}{6063}$

$$(1) \Leftrightarrow -\frac{1}{3} - 2020x - \frac{2}{3} - 2021x = 4042x \Leftrightarrow 8083x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{8083} \text{ (ktm)}$$

* Trường hợp 2: $\frac{-2}{6063} \leq x \leq \frac{-1}{6060}$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{3} + 2020x - \frac{2}{3} - 2021x = 4042x \Leftrightarrow 4043x = \frac{-1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{-1}{12129} \text{ (ktm)}$$



* Trường hợp 3: $x > \frac{-1}{6060}$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{3} + 2020x + \frac{2}{3} + 2021x = 4042x \Leftrightarrow x = 1(tm)$$

Vậy $x = 1$

Bài 5: HSG Huyện Thiệu Hoá, năm học 2020 - 2021

Tìm x , biết $|x - 2| + |3 - 2x| = 2x + 1$

Lời giải

Điều kiện $x \geq \frac{-1}{2}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$		2	$+\infty$
$ x - 2 $	$-x + 2$	$ $	$-x + 2$	0	$x - 2$
$ 3 - 2x $	$-3 + 2x$	0	$3 - 2x$	$ $	$3 - 2x$

Xét $x \geq 2$, ta có $|x - 2| + |3 - 2x| = 2x + 1 \Leftrightarrow x - 2 + 3 - 2x = 2x + 1$

Hay $3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (loại)

Xét $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$. ta có $|x - 2| + |3 - 2x| = 2x + 1 \Leftrightarrow -x + 2 + 3 - 2x = 2x + 1$

Hay $-5x = -4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{5}$ (loại)

Xét $x \leq \frac{3}{2}$, ta có $|x - 2| + |3 - 2x| = 2x + 1 \Leftrightarrow -x + 2 - 3 + 2x = 2x + 1$

Hay $-x = 2 \Leftrightarrow x = -2$ (nhận)

Với $x = -2$ ta có $|x - 2| + |3 - 2x| = 2x + 1 \Leftrightarrow |-2 - 2| + |3 - 2 \cdot (-2)| = 2 \cdot (-2) + 1$

$\Leftrightarrow |-4| + |12| = -4 + 1 \Leftrightarrow 4 + 12 = -3 \Leftrightarrow 16 = -3$ (vô lý)



Vậy phương trình vô nghiệm. Không có giá trị nào của x thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 6: HSG Huyện Gia Viên, năm học 2020 - 2021

Tìm x , biết $\left|3x - 3\right| + 2x + (-1)^{2016} = 3x + 2021^0$

Lời giải

Ta có: $\left|3x - 3\right| + 2x + (-1)^{2016} = 3x + 2021^0$

$$\left|3x - 3\right| + 2x + 1 = 3x + 1 \quad (*)$$

Điều kiện để x thỏa mãn bài toán là $3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{-1}{3}$

Khi đó $x > \frac{-1}{2} \Rightarrow 2x + 1 > 0$, nên (*) trở thành

$$\left|3x - 3\right| + 2x + 1 = 3x + 1 \Leftrightarrow \left|3x - 3\right| = x \quad (\text{điều kiện } x \geq 0)$$

Nếu $x \geq 1$ ta có $3x - 3 = x$ nên $x = \frac{3}{2}$ (thỏa mãn)

Nếu $0 \leq x < 1$ ta có $3 - 3x = x$ nên $x = \frac{3}{4}$ (thỏa mãn)

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{3}{2}, \frac{3}{4} \right\}$$

Bài 7: Tìm x , thỏa mãn

a. $\left|7 - 2x\right| + 7 = 2x$

b. $\left|1 - x\right| = 4x + 1$

Lời giải

a) $\left|7 - 2x\right| + 7 = 2x \Leftrightarrow \left|7 - 2x\right| = 2x - 7 \quad (1)$

Nhận thấy điều kiện: $2x - 7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{7}{2} \Rightarrow 7 - 2x \leq 0 \Rightarrow \left|7 - 2x\right| = -(7 - 2x) = 2x - 7$

(1) $\Leftrightarrow 2x - 7 = 2x - 7 \Rightarrow$ phương trình vô số nghiệm với mọi $x \geq \frac{7}{2}$

Vậy các giá trị x thỏa mãn là: $x \geq \frac{7}{2}$

b) $\left|1 - x\right| = 4x + 1$

+) Nếu $1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \Rightarrow 1 - x = 4x + 1 \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa mãn)



+) Nếu $1 - x < 0 \Leftrightarrow x > 1 \Rightarrow x - 1 = 4x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{-2}{3}$ (loại)

Vậy $x = 0$ là giá trị cần tìm.

Bài 8:

Tìm x , thỏa mãn $|x^2 - 5x + 5| = -2x^2 + 10x - 11$

Ta có: $|x^2 - 5x + 5| = -2(x^2 - 5x + 5)(1)$

Đặt $t = x^2 - 5x + 5 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow |t| = -2t - 1(2)$

Điều kiện: $-2t - 1 \geq 0 \Leftrightarrow t \leq \frac{-1}{2} \Rightarrow |t| = -t \Rightarrow (2): -t = -2t - 1 \Leftrightarrow t = -1$ (thỏa mãn)

Từ đó: $x^2 - 5x + 5 = -1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$

Bài 9:

Tìm x , sao cho: $|x^2 - 1| = x^2 - 2|x| + 2018(*)$

Lời giải

Có: $|x|^2 = x^2 \forall x$

Đặt $t = |x| \Rightarrow t^2 = |x|^2 = x^2 (t \geq 0)$

(*) $\Leftrightarrow |t - 1| = t^2 - 2t + 2018(1)$

Nhận thấy

$$t^2 - 2t + 2018 = (t - 1)^2 + 2017 > 0 \forall t \Rightarrow \begin{cases} t^2 - 1 = t^2 - 2t + 2018 \\ t^2 - 1 = -(t^2 - 2t + 2018) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2019}{2} (tm) \\ 2t^2 - 2t + 2017 = 0(2) \end{cases}$$

Gải (2) $\Leftrightarrow t^2 + (t - 1)^2 + 2016 = 0 \Rightarrow x \in \emptyset$

Vậy $t = \frac{2019}{2} \Rightarrow x = \frac{\pm 2019}{2}$

Bài 10:

Tìm x, y nguyên thỏa mãn: $42 - 3|y - 4| = 4(2018 - x)^4$



Lời giải

$$\text{Từ đề bài} \Rightarrow 0 \leq 4(2018 - x)^4 \leq 42 \Rightarrow 0 \leq (2018 - x)^4 \leq \frac{42}{4} < 11 \Rightarrow \begin{cases} (2018 - x)^4 = 0 \\ (2018 - x)^4 = 1 \end{cases}$$

$$+) (2018 - x)^4 = 1 \Rightarrow 42 - 3|y - 4| = 4.1 \Rightarrow |y - 4| = \frac{38}{3} \notin Z \text{ (loại)}$$

$$+) (2018 - x)^4 = 0 \Rightarrow x = 2018 \Rightarrow |y - 4| = 14 \Rightarrow \begin{cases} y = -10 \\ y = 18 \end{cases}$$

Vậy có hai cặp $(x; y)$ thỏa mãn bài toán: $(2018, 18); (2018, -10)$

Bài 11: Tìm x biết:

a. $|2x + 3| = x + 2$

b. $\left|x - \frac{1}{3}\right| + \frac{4}{5} = \left|(-3, 2) + \frac{2}{5}\right|$

Lời giải

a) Trường hợp 1: $x \geq \frac{-3}{2} \Rightarrow 2x + 3 = x + 2 \Rightarrow x = -1$ (thỏa mãn)

Trường hợp 1: $x < \frac{-3}{2} \Rightarrow -2x - 3 = x + 2 \Rightarrow x = \frac{-5}{3}$ (thỏa mãn)

$$b) \left|x - \frac{1}{3}\right| + \frac{4}{5} = \frac{14}{5} \Rightarrow \left|x - \frac{1}{3}\right| = \frac{14}{5} - \frac{4}{5} = 2 \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{3} = 2 \\ x - \frac{1}{3} = -2 \end{cases}$$

Bài 12: Tìm x biết:

a. $|4 - x| + 2x = 3$

b. $|x - 7| + 2x + 5 = 6$

c. $3x - |2x + 1| = 2$

Lời giải

a) Trường hợp 1: $x \leq 4 \Rightarrow (4 - x) + 2x = 3 \Rightarrow x = -1$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2: $x > 4 \Rightarrow (x - 4) + 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{7}{3}$ (loại)

b) Trường hợp 1: $x \geq 7 \Rightarrow x - 7 + 2x + 5 = 6 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$ (loại)

Trường hợp 2: $x < 7 \Rightarrow 7 - x + 2x + 5 = 6 \Rightarrow x = -6$ (thỏa mãn)

c) Trường hợp 1: $x \geq \frac{-1}{2} \Rightarrow 3x - (2x + 1) = 2 \Rightarrow x = 3$ (thỏa mãn)



Trường hợp 2: $x < \frac{-1}{2} \Rightarrow 3x + (2x + 1) = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$ (Loại)

Bài 13: Tìm x biết

a. $|2x - 3| = x - 3$

b. $|5x - 3| - x = 7$

c. $|3x - 2| = x + 7$

Lời giải

a) *Trường hợp 1:* $x \geq \frac{3}{2} \Rightarrow 2x - 3 = x - 3 \Rightarrow x = 0$ (Loại)

Trường hợp 2: $x < \frac{3}{2} \Rightarrow 3 - 2x = x - 3 \Rightarrow x = 2$ (Loại)

b) *Trường hợp 1:* $x \geq \frac{3}{5} \Rightarrow 5x - 3 - x = 7 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2: $x < \frac{3}{5} \Rightarrow 3 - 5x - x = 7 \Rightarrow x = \frac{-2}{3}$ (thỏa mãn)

c) *Trường hợp 1:* $x \geq \frac{2}{3} \Rightarrow 3x - 2 = x + 7 \Rightarrow x = \frac{9}{2}$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2: $x < \frac{2}{3} \Rightarrow 2 - 3x = x + 7 \Rightarrow x = \frac{-5}{4}$ (thỏa mãn)

Bài 14: Tìm x biết

a. $|4x + 3| - x = 15$

b. $2|5x - 3| - 2x = 14$

c. $|3x - 2| + 5x = 4x - 10$

Lời giải

a) *Trường hợp 1:* $x \geq \frac{-3}{4} \Rightarrow 4x + 3 - x = 15 \Rightarrow x = 4$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2: $x < \frac{-3}{4} \Rightarrow -4x - 3 - x = 15 \Rightarrow x = \frac{-18}{5}$ (thỏa mãn)

b) *Trường hợp 1:* $x \geq \frac{3}{5} \Rightarrow 2(5x - 3) - 2x = 14 \Rightarrow 10x - 6 - 2x = 14 \Leftrightarrow 8x = 20 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$
(thỏa mãn)

Trường hợp 2: $x < \frac{3}{5} \Rightarrow 2(3 - 5x) - 2x = 14 \Leftrightarrow 6 - 10x - 2x = 14 \Leftrightarrow -12x = 8 \Leftrightarrow x = \frac{-2}{3}$
(thỏa mãn)

c) *Trường hợp 1:* $x \geq \frac{2}{3} \Rightarrow 3x - 2 + 5x = 4x - 10 \Rightarrow x = -2$ (Loại)

Bài 15: Tìm x biết





a. $|2x + 3| = x + 2$

b. $|x - 7| + 2x + 5 = 6$

Lời giải

a) Ta có $|2x + 3| = x + 2 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3 = x + 2 & \left(x \geq \frac{-3}{2} \right) \\ -2x - 3 = x + 2 & \left(x < \frac{-3}{2} \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 & (tm) \\ x = \frac{-5}{3} & (loại) \end{cases}$

Vậy $x = -1$ là giá trị cần tìm.

b) Ta có $|x - 7| + 2x + 5 = 6 \Rightarrow \begin{cases} x - 7 + 2x + 5 = 6 & (x \geq 7) \\ 7 - x + 2x + 5 = 6 & (x < 7) \end{cases}$

Bài 16:

Tìm x thỏa mãn $|x - 10|^{10} + |x - 11|^{11} = 1$

Lời giải

- Nếu $x > 11$ hoặc $x < 10$ thì $x - 10 > 1$ hoặc $x - 11 < -1$

Suy ra $|x - 10| > 1; |x - 11| > 1$ (loại)

- Nếu $10 < x < 11$ thì $0 < x - 10 < 1; 0 < 11 - x < 1 \Rightarrow |x - 10| < 1; |x - 11| < 1$.

Do đó $|x - 10|^{10} < |x - 10| = x - 10; |x - 11|^{11} < |11 - x| = 11 - x$

$|x - 10|^{10} < |x - 10| = x - 10; |x - 11|^{11} = |11 - x|^{11} < |11 - x| = 11 - x$

Suy ra $|x - 10|^{10} + |x - 11|^{11} < x - 10 + 11 - x = 1$ (loại)

- Nếu $x = 10$ hoặc $x = 11$ (thỏa mãn)

Vậy $x = 10; x = 11$ là các giá trị cần tìm.

Bài 17:

Tìm x thỏa mãn $|x - 10|^{10} + |x - 11|^{11} = 1$

Lời giải

Vì $x^2 + |x - 1| > 0$ nên (1) $\Rightarrow x^2 + |x - 1| = x^2 + 2$ hay $|x - 1| = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$

Bài 18:





Tìm x thỏa mãn $\left|3x - 3\right| + 2x + (-1)^{2016} = 3x + 2017^0$

Lời giải

Ta có $\left|3x - 3\right| + 2x + (-1)^{2016} = 3x + 2017^0 \Rightarrow \left|3x - 3\right| + 2x + 1 = 3x + 1 (*)$

Điều kiện để x thỏa mãn bài toán là $3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{-1}{3}$

Khi đó $x \geq \frac{-1}{2} \Rightarrow 2x + 1 \geq 0$ nên (*) trở thành

$$\left|3x - 3\right| + 2x + 1 = 3x + 1 \Leftrightarrow \left|3x - 3\right| = x \text{ (điều kiện } x \geq 0)$$

Nếu $x \geq 1$ ta có $3x - 3 = x$ nên $x = \frac{3}{2}$ (thỏa mãn)

Nếu $0 \leq x < 1$ ta có $3 - 3x = x$ nên $x = \frac{3}{4}$ (thỏa mãn)

Vậy $x \in \left\{\frac{3}{2}; \frac{3}{4}\right\}$

Dạng 4:

$$\begin{aligned} |f(x)| = |g(x)| &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases} \text{ hoặc } |f(x)|^2 = |g(x)|^2 \Leftrightarrow (f(x))^2 = (g(x))^2 \\ &\Leftrightarrow [f(x) - g(x)][f(x) + g(x)] = 0 \end{aligned}$$

Chú ý: Ta có thể lập bảng xét dấu dạng toán này

Bài 1: HSG Thị Xã SaPa, năm học 2020-2021

Tìm x biết: $|x + 2| = |2012x^2 + 4024x|$

Lời giải

Ta có: $|x + 2| = |2012x^2 + 4024x| \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 2012x^2 + 4024x \\ -x - 2 = 2012x^2 + 4024x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2012x(x + 2) - (x + 2) = 0 \\ 2012x(x + 2) + (x + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 2)(2012x - 1) = 0 \\ (x + 2)(2012x + 1) = 0 \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \\ 2012x - 1 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{1}{2012} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \\ 2012x + 1 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = -2 \\ x = -\frac{1}{2012} \end{cases}$$

Vậy $x \in \left\{ -2 ; \frac{1}{2012} ; -\frac{1}{2012} \right\}$

Bài 2: HSG Huyện Kiến Xương, năm học 2021-2022

Tìm x biết: $1\frac{1}{2} \cdot \left| x - \frac{1}{2} \right| + \frac{3}{4} = \left| -1,6 + \frac{3}{5} \right|$

Lời giải

$$1\frac{1}{2} \cdot \left| x - \frac{1}{2} \right| + \frac{3}{4} = \left| -1,6 + \frac{3}{5} \right| \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot \left| x - \frac{1}{2} \right| + \frac{3}{4} = \left| -\frac{8}{5} + \frac{3}{5} \right|$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \cdot \left| x - \frac{1}{2} \right| + \frac{3}{4} = 1$$

$$\frac{3}{2} \cdot \left| x - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{4} \Rightarrow \left| x - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow \left| x - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3} \quad \text{hoặc} \quad x = \frac{1}{3}$$

Vậy $x = \frac{2}{3} ; x = \frac{1}{3}$

Bài 3: Tìm x , biết

a. $|5x + 4| = |x + 2|$

b. $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = |x - 2|$

Lời giải

a) Ta có $|5x + 4| = |x + 2| \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 4 = x + 2 \\ 5x + 4 = -x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{2} \\ x = -1 \end{cases}$

Vậy $x = \frac{-1}{2}$ hoặc $x = -1$

b) Điều kiện: $x^2 - 6x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 \geq 0$ đúng với mọi x

Vì $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x - 3)^2} = |x - 3|$



$$\Leftrightarrow |x - 3| = |x - 2| \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = x - 2 \\ x - 3 = -(x - 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 0 \text{ (vô lý)} \\ x = \frac{5}{2} \text{ (tm)} \end{cases}$$

Vậy $x = \frac{5}{2}$

Bài 4: Tìm x biết:

a. $|2x - 3| - x = |2 - x|$

b. $2|x - 3| - |4x - 1| = 0$

Lời giải

a) Ta có bảng xét dấu:

x		$\frac{3}{2}$		2	
2x - 3	-	0	+		+
2 - x	+		+	0	-

Khi đó ta có :

Trường hợp 1: $x < \frac{3}{2} \Rightarrow (3 - 2x) - x = 2 - x$

Trường hợp 2: $\frac{3}{2} \leq x < 2 \Rightarrow (2x - 3) - x = (2 - x)$

Trường hợp 3: $x \geq 2 \Rightarrow (2x - 3) - x = x - 2$

b) Ta có: $2|x - 3| - |4x - 1| = 0 \Rightarrow 2|x - 3| = |4x - 1| \Rightarrow \begin{cases} 2(x - 3) = 4x - 1 \\ 2(x - 3) = 1 - 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-5}{2} \\ x = 1 \end{cases}$

Vậy $x = 1$ hoặc $x = \frac{-5}{2}$.

Bài 5:

Tìm x biết: $|4x + 3| - |x - 1| = 7$

Lời giải

Ta xét các trường hợp sau

Trường hợp 1: Nếu $x < -\frac{3}{4} \Rightarrow -(4x + 3) - (1 - x) = 7 \Leftrightarrow x = -\frac{11}{3}$ (thỏa mãn)



Trường hợp 2: Nếu $-\frac{3}{4} \leq x < 1 \Rightarrow 4x + 3 - (1 - x) = 7 \Rightarrow x = 1$ (không thỏa mãn)

Trường hợp 3: Nếu $x \geq 1 \Rightarrow 4x + 3 - (x - 1) = 7 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn)

Dạng 5: Tìm x trong biểu thức có dạng $|f(x)| + |g(x)| = 0$ (*)

Cách giải:

$$\text{Với } \forall x : \begin{cases} |f(x)| \geq 0 \\ |g(x)| \geq 0 \end{cases} \Rightarrow |f(x)| + |g(x)| \geq 0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow \begin{cases} |f(x)| = 0 \\ |g(x)| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

Bài 1: Tìm x, y thỏa mãn:

a. $|x - 4y|^{2017} + |y + 4|^{2018} = 0$

b. $|x - y - 5| + 2017(y - 3)^8 = 0$

Lời giải

a) Ta có $|x - 4y|^{2017} + |y + 4|^{2018} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x - 4y| = 0 \\ |y + 4| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -16 \\ y = -4 \end{cases}$

Vậy $(x; y) = (-16; -4)$

b) $|x - y - 5| + 2017(y - 3)^8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x - y - 5| = 0 \\ y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 3 \end{cases}$

Vậy $(x; y) = (8; 3)$

Bài 2:

Tìm x, y, z thỏa mãn: $\sqrt{(x - \sqrt{5})^2} + \sqrt{(y + \sqrt{5})^2} + |x + y + 2z| = 0$ (*)

Lời giải

Ta có: $\sqrt{(x - \sqrt{5})^2} = |x - \sqrt{5}| \geq 0; \sqrt{(y + \sqrt{5})^2} = |y + \sqrt{5}| \geq 0; |x + y + 2z| \geq 0$

$$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{5} = 0 \\ y + \sqrt{5} = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5} \\ y = -\sqrt{5} \\ z = 0 \end{cases}$$

Vậy $(x; y) = (\sqrt{5}; -\sqrt{5}; 0)$

Bài 3:





Tìm x, y thỏa mãn: $|x + 2y - 8|^3 + |2x - y - 1|^3 = 0$ (*)

Lời giải

$$\text{Ta có (*)} \Leftrightarrow \begin{cases} |x + 2y - 8| = 0 \\ |2x - y - 1| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 8 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 8 = 0 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy $(x; y) = (2; 3)$

Bài 4:

Tìm x, y thỏa mãn: $|x - 4x + 3| + |y^2 - 5xy + 23x - 19| = 0$ (*)

Lời giải

Ta có

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ y^2 - 5xy + 23x - 19 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \Rightarrow y \in \{5; 10\} \\ x = 1 \Rightarrow y \in \{1; 4\} \end{cases} \Rightarrow (x; y) = (3; 5); (3; 10); (1; 1); (1; 4)$$



Dạng 6: Biểu thức chứa nhiều dấu GTTĐ

Dạng 1: Tìm x, biết rằng: $|A(x)| + |B(x)| + |C(x)| = m (m : \text{hang.so})$

- Lập bảng xét dấu của $A(x), B(x), C(x)$ để loại bỏ dấu giá trị tuyệt đối
- Tìm x sao cho $A(x), B(x), C(x) \geq 0$
- Từ đó chia các khoảng x để xét dấu $A(x), B(x), C(x)$
- So sánh giá trị tìm được với khoảng đang xét

Dạng 2: Tìm x, biết: $|A(x)| + |B(x)| + |C(x)| = |D(x)|$

- Lập bảng xét dấu để loại bỏ dấu giá trị tuyệt đối

Thông thường $D(x) \geq 0$ kéo theo $A(x) \geq 0, B(x) \geq 0, C(x) \geq 0$ và khi đó tìm được x đồng thời kiểm tra điều kiện $D(x) \geq 0$

Bài 1: Tìm x, thỏa mãn:

a. $|x| + |x + 2| = 3$

b. $|x - 1| + |x - 3| = 2x - 6$

Lời giải

a) Ta có: $x \geq 0; x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$

Ta có bảng xét dấu sau:

x		-2		0	
x	-	-2	-	0	+
x + 2	-	0	+	2	+

+) TH1: Nếu

$x < -2 \Rightarrow |x| = -x; |x + 2| = -(x + 2) \Rightarrow (1) \Leftrightarrow -x - (x + 2) = 3 \Leftrightarrow x = \frac{-5}{2} (tm)$

+) TH2: Nếu $-2 \leq x < 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow -x + (x + 2) = 3 \Leftrightarrow 2 = 3$ (vô lý)

+) TH3: Nếu $x \geq 0 \Rightarrow x + x + 2 = 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} > 0 (tm)$

Vậy $x \in \left\{ \frac{-5}{2}; \frac{1}{2} \right\}$

b. Nhận thấy:





$2x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3 \Rightarrow x - 1 \geq 2 > 0; x - 3 \geq 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x - 1 + x - 3 = 2x - 6 \Leftrightarrow 0 = 5$ (vô nghiệm)

Vậy không có giá trị nào của x thỏa mãn bài toán.

Bài 1: HSG Huyện Thanh Oai, năm học 2017-2018

Tìm x biết: $\left|x + \frac{10}{23}\right| + \left|x + \frac{8}{23}\right| + \left|x + \frac{5}{23}\right| = 4x$

Lời giải

Cách 1: $\left|x + \frac{10}{23}\right| + \left|x + \frac{8}{23}\right| + \left|x + \frac{5}{23}\right| = 4x \quad (1)$

Ta có: $\left|x + \frac{10}{23}\right| \geq 0; \left|x + \frac{8}{23}\right| \geq 0; \left|x + \frac{5}{23}\right| \geq 0$

$\Rightarrow \left|x + \frac{10}{23}\right| + \left|x + \frac{8}{23}\right| + \left|x + \frac{5}{23}\right| \geq 0$

$\Rightarrow 4x \geq 0$

$\Rightarrow x \geq 0$

$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow x + \frac{10}{23} + x + \frac{8}{23} + x + \frac{5}{23} = 4x$

$\Rightarrow 3x + 1 = 4x$

$\Rightarrow x = 1$ (tmđk)

Vậy $x = 1$

Cách 2: Lập bảng xét dấu giá trị tuyệt đối rồi chia các trường hợp

x	$\frac{-10}{23}$	$\frac{-8}{23}$	$\frac{-5}{23}$
$\left x = \frac{10}{23}\right $	$-x - \frac{10}{23}$	$0 \quad x + \frac{10}{23}$	$x + \frac{10}{23}$
$\left x = \frac{8}{23}\right $	$-x - \frac{8}{23}$	$-x - \frac{8}{23} \quad 0 \quad x + \frac{8}{23}$	$x + \frac{8}{23}$



$ x = \frac{5}{23} $	$-x - \frac{5}{23}$	$-x - \frac{5}{23}$	$-x - \frac{5}{23}$	0	$x + \frac{5}{23}$
----------------------	---------------------	---------------------	---------------------	---	--------------------

Trường hợp 1: $x \leq \frac{-10}{23}$ vô nghiệm

Trường hợp 2: $\frac{-10}{23} \leq x \leq \frac{-8}{23}$ vô nghiệm

Trường hợp 3: $\frac{-8}{23} \leq x \leq \frac{-5}{23}$ vô nghiệm

Trường hợp 4: $x \geq \frac{-5}{23}$. Tìm được $x = 1$ thỏa mãn.

Bài 2:

Tìm x, y biết rằng: $\begin{cases} |x - y| = 2 \\ |2x + 1| + |2y + 1| = 4 \end{cases}$

Lời giải

Ta có: $|x - y| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ x - y = -2 \end{cases}$

Trường hợp 1:

$$x - y = 2 \Rightarrow y = x - 2 \Rightarrow |2x + 1| + |2(x - 2) + 1| = 4 \Leftrightarrow |2x + 1| + |2x - 3| = 4(1)$$

$$\text{Có: } 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{-1}{2}; 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$$

$$\text{+) Nếu } x < \frac{-1}{2} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow -(2x - 1) - (2x - 3) = 4 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2} \text{ (loại)}$$

$$\text{+) Nếu } \frac{-1}{2} \leq x < \frac{3}{2} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 2x + 1 - (2x - 3) = 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \text{ (đúng với mọi } \frac{-1}{2} \leq x < \frac{3}{2})$$

$$\text{+) Nếu } x \geq \frac{3}{2} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 2x + 1 + (2x - 3) = 4 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy: $\frac{-1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ và $y = x - 2$

Trường hợp 2: $x - y = 2 \Rightarrow y = x + 2 \Rightarrow$ làm tương tự trường hợp 1

Bài 3:

Tìm x , biết rằng: $|x|^2 + |x - 1| = |x|(1)$



Lời giải

Ta có: $|x|^2 = x^2; x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

- Nếu $x < 0 \Rightarrow |x| = -x; |x - 1| = 1 - x \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x^2 + 1 - x = -x \Leftrightarrow x^2 = -1$ (vô lý)

- Nếu $0 \leq x < 1 \Rightarrow |x| = x; |x - 1| = 1 - x \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x^2 + 1 - x = x \Leftrightarrow x = 1$

- Nếu $x \geq 1 \Rightarrow |x| = x; |x - 1| = x - 1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = x \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Vậy $x = 1$ là giá trị cần tìm.

Bài 4:

Tìm x, sao cho: $\left|x + \frac{1}{101}\right| + \left|x + \frac{2}{101}\right| + \dots + \left|x + \frac{100}{101}\right| = 101x(1)$

Lời giải

Nhận thấy: $VT(1) \geq 0$ với mọi x.

Nên $VP(1) \geq 0 \Rightarrow 101x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0(*) \Rightarrow x + \frac{1}{101} > 0; \dots; x + \frac{100}{101} > 0$

Do vậy

$$(1) : x + \frac{1}{101} + x + \frac{2}{101} + \dots + x + \frac{100}{101} = 101x$$

$$\Leftrightarrow 100x + \frac{1+2+\dots+100}{101} = 101x \Leftrightarrow x = (1+100) \cdot 100 : 2 = 50$$

Vậy $x = 50$ là giá trị cần tìm.

Bài 5:

Tìm số nguyên x, thỏa mãn: $|x - 8| + |x - 20| + \dots + |x + 990| + |x + 1000| = 2017(1)$

Lời giải

Cách 1: Áp dụng tính chất: $|A| + |B| \geq |A + B|$

Ta có:

$$|x - 8| + |x + 990| = |8 - x| + |x + 990| \geq |8 + 990| = 998;$$

$$|x - 20| + |x + 1000| = |20 - x| + |x + 1000| \geq 1020$$

Từ đó: $VT(1) \geq 998 + 1020 = 2018 > 2017 \Rightarrow$ không tồn tại x thỏa mãn bài toán



Cách 2: Nếu $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - 8; x - 20; x + 990; x + 1000$ cùng tính chất chẵn lẻ

$\Rightarrow |x - 8|; |x - 20|; |x + 990|; |x + 1000|$ cùng tính chẵn lẻ $\Rightarrow \left. \begin{array}{l} VT(1) : \text{chẵn} \\ 2017 : \text{lẻ} \end{array} \right\} \Rightarrow$ không tồn tại

x .

Dạng 7: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức chứa dấu GTTĐ

A. Lý thuyết

1. Bài toán tìm GTNN, GTLN

Cho biểu thức (hàm số) $f(x)$ xác định trên tập D

Ví dụ: $f(x) = x^2$ xác định trên tập \mathbb{R} với $\forall x$

$f(x) = \frac{1}{x}$ xác định với mọi $x \neq 0 \Leftrightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

- Nếu M là GTLN của $f(x)$ trên tập hợp D thì: $\left\{ \begin{array}{l} f(x) \leq M \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D / f(x_0) = M \end{array} \right.$

Ví dụ: $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ xác định với $\forall x \in \mathbb{R}; \left. \begin{array}{l} f(x) \leq \frac{1}{0 + 1} \leq 1 \\ x = 0 : f(x) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow GTLN = 1$

- Nếu m là GTNN của $f(x)$ trên tập hợp D thì: $\left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq m \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D / f(x_0) = m \end{array} \right.$

Ví dụ: $f(x) = x^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow \min_A = 2 \Leftrightarrow x = 0$

2. Các kiến thức thường dùng

- So sánh: So sánh các lũy thừa hoặc so sánh phân số

- Các bất đẳng thức cơ bản:

$$x^2 \geq 0 \forall x; |x| \geq 0 \forall x; x^2 + y^2 \geq 2xy; (f(x))^{2k} \geq 0 \forall x \in TXD (k \in \mathbb{N}^+)$$

- Bất đẳng thức liên quan đến GTTĐ

+) $|x| + |y| \geq |x + y| \forall x, y \Leftrightarrow x, y$ cùng dấu

+) $|x - y| \geq |x| - |y| \forall x, y \Leftrightarrow x - y$ và y cùng dấu



*) Lưu ý:

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|; \sqrt{x^2} = |x|; \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} (y \neq 0); |x|^2 = x^2; |x| = |-x|$$

B. Bài tập

Bài 1: HSG Huyện Thanh Oai, năm học 2013-2014

Tìm GTNN của biểu thức $A = |x - 2013| + |x - 2014| + |x - 2015|$

Lời giải

Ta có: $A = (|x - 2013| + |2015 - x|) + |x - 2014|$

$$A \geq (|x - 2013 + 2015 - x|) + 0$$

$$A \geq 2$$

Vậy $\text{Min}A = 2 \Leftrightarrow x = 2014$

Bài 2: HSG Huyện Việt Yên, năm học 2020-2021

Tìm GTNN của biểu thức $P = |7x - 5y| + |2z - 3x| + |xy + yz + xz - 2000|$

Lời giải

Vì $|7x - 5y| \geq 0$ với $\forall x, y$

$$|2z - 3x| \geq 0 \text{ với } \forall x, z$$

$$|xy + yz + xz - 2000| \geq 0 \text{ với } \forall x, y, z$$

$$\Rightarrow |7x - 5y| + |2z - 3x| + |xy + yz + xz - 2000| \geq 0 \text{ với } \forall x, y, z$$

$$\Rightarrow P \geq 0 \Rightarrow \text{Min}P = 0. \text{ Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi:}$$

$$\begin{cases} |7x - 5y| = 0 \\ |2z - 3x| = 0 \\ |xy + yz + xz - 2000| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 5y = 0 \\ 2z - 3x = 0 \\ xy + yz + xz = 2000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 5y \\ 2z = 3x \\ xy + yz + xz = 2000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{5} = \frac{y}{7} \\ \frac{x}{2} = \frac{z}{3} \\ xy + yz + xz = 2000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{10} = \frac{y}{14} = \frac{z}{15} = k \\ xy + yz + xz = 2000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10k \\ y = 14k \\ z = 15k \\ xy + yz + xz = 2000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10k \\ y = 14k \\ z = 15k \\ 140k^2 + 210k^2 + 150k^2 = 2000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10k \\ y = 14k \\ z = 15k \\ k^2 = 4 \Leftrightarrow k = \pm 2 \end{cases}$$



+) Với $k = 2$ thì $x = 20, y = 28, z = 30$

+) Với $k = -2$ thì $x = -20, y = -28, z = -30$

Kết luận: Vậy Min $P = 0$ khi và chỉ khi $x = 20, y = 28, z = 30$ hoặc

$x = -20, y = -28, z = -30$

Bài 3: HSG Huyện Triệu Sơn, năm học 2020-2021

Tìm GTNN của biểu thức:

$$A = |x - 2019| + |x - 2017| + |x - 2015| + \dots + |x - 1| + |x + 1| + |x + 3| + \dots + |x + 2019| + |x + 2021|$$

Lời giải

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$A = |x - 2019| + |x - 2017| + |x - 2015| + \dots + |x - 1| + |x + 1| + |x + 3| + \dots + |x + 2019| + |x + 2021|$$

Sử dụng BĐT giá trị tuyệt đối: $|a| + |b| \geq |a + b|$, dấu bằng xảy ra khi $ab \geq 0$

ta có

$$A = |x - 2019| + |x - 2017| + |x - 2015| + \dots + |x - 1| + |x + 1| + |x + 3| + \dots + |x + 2019| + |x + 2021|$$

$$A \geq |x + 2021 + 2019 - x| + |x + 2019 + 2017 - x| + \dots + |x + 3 + 1 - x| + |x + 1|$$

$$A \geq 4040 + 4036 + 4032 + \dots + 8 + 4 + 0$$

$$A \geq (4040 + 4) \cdot 1010 : 2 = 2042220$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} (x + 2021) \cdot (2019 - x) \geq 0 \\ (x + 2019) \cdot (2017 - x) \geq 0 \\ \dots \\ (x + 3) \cdot (1 - x) \geq 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2021 \leq x \leq 2019 \\ -2019 \leq x \leq 2017 \\ \dots \\ -3 \leq x \leq 1 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 2042220$ tại $x = -1$

Bài 4: HSG Huyện Chương Mỹ, năm học 2020-2021

Tìm GTNN của biểu thức: $A = \frac{|x - 2019| + 2020}{|x - 2019| + 2021}$

Lời giải



$$\text{Ta có } A = \frac{|x - 2019| + 2020}{|x - 2019| + 2021} = 1 + \frac{-1}{|x - 2019| + 2021}$$

Với mọi giá trị của x ta có: $|x - 2019| \geq 0$

$$|x - 2019| + 2021 \geq 2021 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x - 2019| + 2021} \leq \frac{1}{2021}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{|x - 2019| + 2021} \geq \frac{-1}{2021}$$

$$1 + \frac{-1}{|x - 2019| + 2021} \geq 1 + \frac{-1}{2021}$$

Hay $A \geq \frac{2020}{2021}$ dấu bằng xảy ra khi $|x - 2019| = 0 \Rightarrow x = 2019$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{2020}{2021}$ khi $x = 2019$.

Bài 5: HSG Cửa Lò, năm học 2021-2022

Tìm GTNN của biểu thức: $C = \frac{|x - 2017| + 2018}{|x - 2017| + 2019}$

Lời giải

$$\text{Ta có } C = \frac{|x - 2017| + 2018}{|x - 2017| + 2019} = \frac{(|x - 2017| + 2019) - 1}{|x - 2017| + 2019} = 1 - \frac{1}{|x - 2017| + 2019}$$

Biểu thức C đạt giá trị nhỏ nhất khi $|x - 2017| + 2019$ có giá trị nhỏ nhất

Mà $|x - 2017| \geq 0$ nên $|x - 2017| + 2019 \geq 2019$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } x = 2017 \Rightarrow C = \frac{2018}{2019}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của C là $\frac{2018}{2019}$ khi $x = 2017$

Bài 6: HSG Huyện Yên Thành, năm học 2020-2021

Tìm GTNN của biểu thức: $A = |2021 - x| + \frac{1}{\sqrt{(-2)^2}} \cdot |4040 - 2x|$

Lời giải



$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= |2021 - x| + \frac{1}{\sqrt{(-2)^2}} \cdot |4040 - 2x| \\ &= |2021 - x| + \frac{1}{2} \cdot 2|2020 - x| \\ &= |2021 - x| + |x - 2020| \geq |2021 - x + x - 2020| = |1| \\ &\Rightarrow A \geq 1 \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $(2021 - x)(x - 2020) \geq 0$

$$\Rightarrow 2020 \leq x \leq 2021$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng 1 khi $2020 \leq x \leq 2021$

Bài 7: HSG Huyện Việt Yên, năm học 2020-2021

Tìm GTNN của biểu thức: $P = |7x - 5y| + |2z - 3x| + |xy + yz + xz - 2000|$

Lời giải

Vì $|7x - 5y| \geq 0$ với $\forall x, y$

$|2z - 3x| \geq 0$ với $\forall x, z$

$|xy + yz + xz - 2000| \geq 0$ với $\forall x, y, z$

$\Rightarrow |7x - 5y| + |2z - 3x| + |xy + yz + xz - 2000| \geq 0$ với $\forall x, y, z$

$\Rightarrow P \geq 0 \Rightarrow \text{Min } P = 0$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} |7x - 5y| = 0 \\ |2z - 3x| = 0 \\ |xy + yz + xz - 2000| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 5y = 0 \\ 2z - 3x = 0 \\ xy + yz + xz - 2000 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 5y \\ 2z = 3x \\ xy + yz + xz = 2000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{5} = \frac{y}{7} \\ \frac{x}{2} = \frac{z}{3} \\ xy + yz + xz = 2000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{10} = \frac{y}{14} = \frac{z}{15} = k \\ xy + yz + xz = 2000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10k \\ y = 14k \\ z = 15k \\ xy + yz + xz = 2000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10k \\ y = 14k \\ z = 15k \\ 140k^2 + 210k^2 + 150k^2 = 2000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10k \\ y = 14k \\ z = 15k \\ k^2 = 4 \Leftrightarrow k = \pm 2 \end{cases}$$

+) Với $k = 2$ thì $x = 20, y = 28, z = 30$

+) Với $k = -2$ thì $x = -20, y = -28, z = -30$

Kết luận: Vậy Min P = 0 khi và chỉ khi $x = 20, y = 28, z = 30$



hoặc $x = -20, y = -28, z = -30$

Bài 8: HSG Huyện Tân Kỳ, năm học 2020-2021

Tìm GTNN của biểu thức: $|2x - 4| + |2x - 8| + |x - 3| - 2021$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & |2x - 4| + |2x - 8| + |x - 3| - 2021 = |2x - 4| + |8 - 2x| + |x - 3| - 2021 \\ & \geq |2x - 4 + 8 - 2x| + |x - 3| - 2021 = |x - 3| - 2017 \geq -2017 \end{aligned}$$

$$P_{\min} = -2017$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi: } \begin{cases} x - 3 = 0 \\ (2x - 4)(8 - 2x) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 2 \leq x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow x = 3$$

Bài 9: HSG Sông Lô, năm học 2018 - 2019

Cho $a < b < c < d$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$C = |x - a| + |x - b| + |x - c| + |x - d|$$

Lời giải

Với $a < b < c < d$ ta có: $|x - a| \geq x - a$

$$|x - b| \geq x - b$$

$$|x - c| \geq c - x$$

$$|x - d| \geq d - x$$

$$\Rightarrow |x - a| + |x - b| + |x - c| + |x - d| \geq x - a + x - b + c - x + d - x$$

$$\Rightarrow C \geq c + d - a - b$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra ta } \Leftrightarrow \begin{cases} x - a \geq 0 \\ x - b \geq 0 \\ x - c \leq 0 \\ x - d \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a \\ x \geq b \\ x \leq c \\ x \leq d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq b \\ x \leq c \end{cases} \Leftrightarrow b \leq x \leq c$$

Vậy GTNN của C là $c + d - a - b \Leftrightarrow b \leq x \leq c$

Bài 10: Tìm GTNN của

a. $A = |x - 3| + |x - 5|$

b. $B = |x - a| + |x - b| (a < b)$



$$c. C = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + |x - 4|$$

Lời giải

a. Ta có

$$A = |x - 3| + |x - 5| = |x - 3| + |5 - x| \geq |(x - 3) + (5 - x)| = 2 \Leftrightarrow (x - 3)(5 - x) \geq 0 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 5$$

Vậy $A_{\min} = 2 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 5$

b. $B = |x - a| + |x - b| (a < b) \Rightarrow B = |x - a| + |b - x| \geq |b - a| = b - a$

$\Rightarrow \min_B = b - a \Leftrightarrow (x - a)(b - x) \geq 0 \Leftrightarrow a \leq x \leq b$

c. $C = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + |x - 4| = \underbrace{|x - 1| + |4 - x|}_{\geq 3} + \underbrace{|x - 2| + |3 - x|}_{\geq 2}$

$\Rightarrow C \geq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ 2 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$

Bài 11: Tìm GTNN của

a. $A = |x + 5| - |x - 2|$

b. $B = |x + a| - |x + b| (a > b)$

Lời giải

a. Ta có: $A = |x + 5| - |x - 2| \leq |x + 5 - (x - 2)| = 7$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (x - 2)$ và 7 cùng dấu $\Leftrightarrow x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

b. Ta có:

$$B = |x + a| - |x + b| \leq |x + a - (x + b)| = |a - b| = a - b \Leftrightarrow (x + b)(a - b) \geq 0 \Leftrightarrow x + b \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -b$$

Bài 12:

Tìm GTNN của: $A = |x - 16| + |x - 17| + |y - 18| + |x - 19| + 20$

Lời giải

Ta có:

$$A = |x - 16| + |x - 17| + |y - 18| + |x - 19| + 20 = |x - 16| + |x - 17| + |x - 19| + |y - 18| + 20$$

Lại có: $|x - 16| + |x - 19| \geq |x - 16 + (19 - x)| = 3 \Leftrightarrow 6 \leq x \leq 19$



$$- |x - 17| \geq 0 \Leftrightarrow x = 17; |y - 18| \geq 0 \Leftrightarrow y = 18 \Rightarrow A \geq 3 + 0 + 0 + 20 = 23 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 17 \\ y = 18 \end{cases}$$

Bài 13:

Tìm GTLN của: $A = \frac{x+3}{|x+1|}$ ($x \in \mathbb{Z}; x \neq -1$)

Lời giải

- TH1: Nếu $x \leq -3 \Rightarrow x + 3 \leq 0; |x + 1| > 0 \Rightarrow A \leq 0$

- TH2: Nếu $x = -2 \Rightarrow A = \frac{-2+3}{|-2+1|} = 1$

- TH3: Nếu $x \geq 0 \Rightarrow |x + 1| = x + 1 \Rightarrow A = \frac{x+3}{x+1} = 1 + \frac{2}{x+1}$

Vì $x \geq 0 \Rightarrow x + 1 \geq 1 \Rightarrow \frac{2}{x+1} \leq 2 \Rightarrow A \leq 1 + 2 = 3 \Leftrightarrow x = 0$

Vậy GTLN của $A = 3$ khi $x = 0$

Bài 14:

Tìm GTNN hoặc GTLN của $C = (x + 1)^2 + |2x - 3 - y| + 30$

Lời giải

Ta có: $C = (x + 1)^2 + |2x - 3 - y| + 30 \geq 30 \Rightarrow \text{Min}C = 30$

Dấu bằng khi $\begin{cases} x + 1 = 0 \\ 2x - 3 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 2 \cdot (-1) - 3 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -5 \end{cases}$

Bài 15:

Tìm GTNN hoặc GTLN của: $B = \frac{4}{|x+4|+2}$

Lời giải

Ta có: $|x + 4| + 2 \geq 2 \Rightarrow \frac{4}{|x+4|+2} \leq \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow B \leq 2 \Rightarrow \text{Max}B = 2$

Dấu bằng khi $x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$



Bài 16: Tìm GTNN của

a. $A = \frac{6}{|x| - 3}$

b. $A = \frac{1}{|x - 2| + 3}$

c. $B = \frac{5,8}{|2,5 - x| + 5,8}$

Lời giải

a) Ta có: $|x| - 3 \geq -3 \Rightarrow \frac{6}{|x| - 3} \leq \frac{6}{-3} = -2 \Rightarrow A \leq -2 \Rightarrow \text{Max}A = -2$, dấu bằng khi $x = 0$

b) Ta có: $|x - 2| + 3 \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{|x - 2| + 3} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow A \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \text{Max}A = \frac{1}{3}$, dấu bằng khi $x = 2$

c) Ta có: $|2,5 - x| + 5,8 \geq 5,8 \Rightarrow \frac{5,8}{|2,5 - x| + 5,8} \leq 1 \Rightarrow B \leq 1 \Rightarrow \text{Max}B = 1$, dấu "=" xảy ra

khi $x = 2,5$

Bài 17: Tìm GTNN của

a. $C = 2 + \frac{12}{3|x + 5| + 4}$

b. $D = \frac{3|x| + 2}{4|x| - 5}$

c. $E = \frac{2|x| + 3}{3|x| - 1}$

Lời giải

a) Ta có: $3|x + 5| + 4 \geq 4 \Rightarrow \frac{12}{3|x + 5| + 4} \leq \frac{12}{4} = 3 \Rightarrow C \leq 2 + 3 = 5 \Rightarrow \text{Max}C = 5$,

Dấu "=" xảy ra khi $x = -5$

b) Ta có: $4D = \frac{12|x| + 8}{4|x| - 5} = \frac{12|x| - 15 + 23}{4|x| - 5} = 3 + \frac{23}{4|x| - 5}$

Để D đạt min thì $\begin{cases} 4|x| - 5 < 0 \\ (4|x| - 5)_{min} \end{cases} \Rightarrow 4|x| < 5 \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow |x| = 1$

Để D đạt max thì $\begin{cases} 4|x| - 5 > 0 \\ (4|x| - 5)_{min} \end{cases} \Rightarrow 4|x| > 5 \Rightarrow |x| > 1 \Rightarrow |x| = 2$

Bài 18: Tìm GTNN của



$$a. F = \frac{2|7x+5|+11}{|7x+5|+4}$$

$$b. G = \frac{|2y+7|+13}{2|2y+7|+6}$$

$$b. A = \frac{15|x+1|+32}{6|x+1|+8}$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có: } F = \frac{2|7x+5|+8+3}{|7x+5|+4} = 2 + \frac{3}{|7x+5|+4}, \text{ mà}$$

$$|7x+5|+4 \geq 4 \Rightarrow \frac{3}{|7x+5|+4} \leq \frac{3}{4} \Rightarrow F \leq 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

$$\Rightarrow \text{Max}F = \frac{11}{4}, \text{ dấu '=' xảy ra khi } 7x+5=0 \Leftrightarrow x = \frac{-5}{7}$$

$$b) \text{ Ta có } 2G = \frac{2|2y+7|+26}{2|2y+7|+6} = 1 + \frac{20}{2|2y+7|+6}$$

$$\text{Mà } 2|2y+7|+6 \geq 6 \Rightarrow \frac{20}{2|2y+7|+6} \leq \frac{20}{6} = \frac{10}{3} \Rightarrow 2G \leq 1 + \frac{10}{3}$$

$$\text{Max}G = \frac{13}{2}, \text{ dấu '=' xảy ra khi } 2y+7=0 \Leftrightarrow y = \frac{-7}{2}$$

$$c) \text{ Ta có } 2A = \frac{30|x+1|+32}{6|x+1|+8} = \frac{30|x+1|+40-8}{6|x+1|+8} = 5 - \frac{8}{6|x+1|+8}$$

$$\text{Mà } 6|x+1|+8 \geq 8 \Rightarrow \frac{8}{6|x+1|+8} \leq 1 \Rightarrow 5 - \frac{8}{6|x+1|+8} \geq 5-1=4 \Rightarrow 2A \geq 4 \Rightarrow A \geq 2$$

$$\Rightarrow \text{Min}A = 2, \text{ khi } x+1=0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Bài 19: Tìm GTNN của

$$a. B = 5 + \frac{-8}{4|5x+7|+24}$$

$$b. C = \frac{6}{5} - \frac{14}{5|6y-8|+35}$$

$$c. D = \frac{21|4x+6|+33}{3|4x+6|+5}$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có: } 4|5x+7|+24 \geq 24 \Rightarrow \frac{-8}{4|5x+7|+24} \geq \frac{-8}{24} = \frac{-1}{3} \Rightarrow B \geq 5 + \frac{-1}{3} = \frac{14}{3}$$

$$\text{Khi đó } \text{Min}B = \frac{14}{3}, \text{ dấu '=' xảy ra khi } 5x+7=0 \Leftrightarrow x = \frac{-7}{5}$$



$$\text{b) Ta có } 5|6y - 8| + 35 \geq 35 \Rightarrow -\frac{14}{5|6y - 8| + 35} \geq \frac{14}{35} = \frac{2}{5} \Rightarrow C \geq \frac{6}{5} + \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$$

Khi đó $\text{Min}C = \frac{8}{5}$, dấu "=" xảy ra khi $6y - 8 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$$\text{d) Ta có } D = \frac{21|4x + 6| + 35 - 2}{3|4x + 6| + 5} = 7 + \frac{-2}{3|4x + 6| + 5}$$

$$\text{mà } 3|4x + 6| + 5 \geq 5 \Rightarrow \frac{-2}{3|4x + 6| + 5} \geq \frac{-2}{5} \Rightarrow D \geq 7 + \frac{-2}{5} = \frac{33}{5}$$

Hay $\text{Min}D = \frac{33}{5}$, dấu "=" xảy ra khi $4x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$.

Bài 20: Tìm GTNN của

$$\text{a. } E = \frac{6|y + 5| + 14}{2|y + 5| + 14}$$

$$\text{b. } F = \frac{-15|x + 7| - 68}{3|x + 7| + 12}$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } E = \frac{6|y + 5| + 42 - 28}{2|y + 5| + 14} = 3 + \frac{-28}{2|y + 5| + 14}$$

$$\text{Mà } 2|y + 5| + 14 \geq 14 \Rightarrow \frac{-28}{2|y + 5| + 14} \geq \frac{-28}{14} = -2 \Rightarrow E \geq 3 + (-2) = 1$$

Hay $\text{Min}E = 1$, dấu "=" xảy ra $y + 5 = 0 \Leftrightarrow y = -5$

$$\text{b) Ta có: } F = \frac{-15|x + 7| - 60 - 8}{3|x + 7| + 12} = -5 + \frac{-8}{3|x + 7| + 12}$$

$$\text{Mà } 3|x + 7| + 12 \geq 12 \Rightarrow \frac{-8}{3|x + 7| + 12} \geq \frac{-8}{12} \Rightarrow F \geq -5 + \frac{-2}{3} = \frac{-17}{3}$$

Hay $\text{Min}F = \frac{-17}{3}$, dấu "=" xảy ra khi $x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = -7$

Bài 21: Tìm GTNN của

$$\text{a. } C = \frac{15}{12} - \frac{28}{3|x - 3y| + |2x + 1| + 35}$$

$$\text{b. } H = \frac{-3}{(x + 2)^2 + 4}$$

Lời giải





a) Ta có:

$$3|x - 3y| + |2x + 1| + 35 \geq 35 \Rightarrow \frac{-28}{3|x - 3y| + |2x + 1| + 35} \geq \frac{-28}{35} = \frac{-4}{5} \Rightarrow C \geq \frac{15}{12} + \frac{-4}{5} = \frac{9}{20}$$

Hay $MinC = \frac{9}{20}$, dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{2} \\ y = \frac{-3}{2} \end{cases}$

b, Ta có: $(x + 2)^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow \frac{-3}{(x + 2)^2 + 4} \geq \frac{-3}{4} \Rightarrow H \geq \frac{-3}{4}$ hay $MinH = \frac{-3}{4}$, dấu "=" xảy

ra khi $x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x = -2.$$

Bài 22: Tìm GTNN của

a. $A = 5 + \frac{15}{4|3x + 7| + 3}$

b. $B = \frac{-1}{3} + \frac{21}{8|15x - 21| + 7}$

Lời giải

a) Ta có $4|3x + 7| + 3 \geq 3 \Rightarrow \frac{15}{4|3x + 7| + 3} \leq \frac{15}{3} = 5 \Rightarrow A \leq 5 + 5 = 10$

Hay $MaxA = 10$, dấu "=" xảy ra khi $3x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-7}{3}$

b) Ta có $8|15x - 21| + 7 \geq 7 \Rightarrow \frac{21}{8|15x - 21| + 7} \leq \frac{21}{7} = 3 \Rightarrow B \leq \frac{-1}{3} + 3 = \frac{5}{3}$

Hay $MaxB = \frac{5}{3}$, dấu "=" xảy ra khi $15x - 21 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{5}$.

Bài 23: Tìm GTNN của

a. $C = \frac{4}{5} + \frac{20}{|3x + 5| + |4y + 5| + 8}$

b. $D = -6 + \frac{24}{2|x - 2y| + 3|2x + 1| + 6}$

Lời giải

a) Ta có: $|3x + 5| + |4y + 5| + 8 \geq 8 \Rightarrow \frac{20}{|3x + 5| + |4y + 5| + 8} \leq \frac{20}{8} = \frac{5}{2} \Rightarrow C \leq \frac{4}{5} + \frac{5}{2} = \frac{33}{10}$



Hay $MaxC = \frac{33}{10}$, dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} 3x + 5 = 0 \\ 4y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{3} \\ y = -\frac{5}{4} \end{cases}$

b) Ta có

$$2|x - 2y| + 3|2x + 1| + 6 \geq 6 \Rightarrow \frac{24}{2|x - 2y| + 3|2x + 1| + 6} \leq \frac{24}{6} = 4 \Rightarrow D \leq -6 + 4 = -2$$

Hay $MaxD = -2$, dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{4} \end{cases}$

Bài 24: Tìm GTLN của

a. $E = \frac{2}{3} + \frac{21}{(x + 3y)^2 + 5|x + 5| + 14}$

b. $F = \frac{1}{|x - 1| + 3}$

Lời giải

a) Ta có:

$$(x + 3y)^2 + 5|x + 5| + 14 \geq 14 \Rightarrow \frac{21}{(x + 3y)^2 + 5|x + 5| + 14} \leq \frac{21}{14} = \frac{3}{2} \Rightarrow E \leq \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{13}{6}$$

Hay $MaxE = \frac{13}{6}$, dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = \frac{5}{3} \end{cases}$

b) Ta có: $|x - 1| + 3 \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{|x - 1| + 3} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow F \leq \frac{1}{3}$. Hay $MaxF = \frac{1}{3}$, dấu "=" xảy ra khi

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Bài 25:

Số giá trị của x thỏa mãn: $|x + 1| + |x - 1012| + |x + 3| + |x + 1003| = 2013$

Lời giải

Ta có:

$$VT = |x + 1| + |1012 - x| + |x + 3| + |-1003 - x| \geq |x + 1 + 1012 - x| + |x + 3 - 1003 - x|$$



$= 1013 + 1000 = 2013$, dấu “=” xây ra khi

$$\begin{cases} (x+1)(1012-x) \geq 0 \\ (x+3)(-1003-x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1012 \\ -1003 \leq x \leq -3 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$$

Vậy không có giá trị nào của x .

Bài 26:

Tìm GTNN của: $A = |x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-100|$

Lời giải

Ta có $A = (|x-1| + |100-x|) + (|x-2| + |99-x|) + \dots + (|x-50| + |51-x|)$

$\Rightarrow A \geq 99 + 97 + \dots + 3 + 1 = 2500 \Rightarrow A \geq 2500$, dấu “=” xây ra khi

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 100 \\ 2 \leq x \leq 99 \\ \dots \\ 50 \leq x \leq 51 \end{cases} \Rightarrow 50 \leq x \leq 51$$

Bài 27:

Tìm GTNN của: $A = |7x-5y| + |2z-3x| + |xy+yz+zx-2000|$

Lời giải

Ta có $A = |7x-5y| \geq 0, |2z-3x| \geq 0$ và $|xy+yz+zx-2000| \geq 0$

$\Rightarrow A = |7x-5y| + |2z-3x| + |xy+yz+zx-2000| \geq 0$

Mà $A = 0 \Leftrightarrow |7x-5y| = |2z-3x| = |xy+yz+zx-2000| = 0$

Có $|7x-5y| = 0 \Leftrightarrow 7x = 5y \Leftrightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{7}; |2z-3x| = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3};$

$|xy+yz+zx-2000| = 0 \Leftrightarrow xy+yz+zx = 2000$

Từ đó tìm được $\begin{cases} x = 20; y = 28; z = 30 \\ x = -20; y = -28; z = -30 \end{cases}$

$A = 0 \Leftrightarrow (x; y; z) = (20; 28; 30)$ hoặc $(x; y; z) = (-20; -28; -30)$

Vậy $\min A = 0 \Leftrightarrow (x; y; z) = (20; 28; 30)$ hoặc $(x; y; z) = (-20; -28; -30)$





Bài 28:

Tìm GTLN của biểu thức: $P = (2x - 5y)^2 - (15y - 6x)^2 - |xy - 90|$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= (2x - 5y)^2 - (15y - 6x)^2 - |xy - 90| \\ &= (2x - 5y)^2 - (6x - 15y)^2 - |xy - 90| = (2x - 5y)^2 - 9 \cdot (2x - 5y)^2 - |xy - 90| \\ &= -\left[8 \cdot (2x - 5y)^2 + |xy - 90|\right] \end{aligned}$$

Ta thấy $(2x - 5y)^2 \geq 0$ với mọi x, y nên $8 \cdot (2x - 5y)^2 \geq 0$ với mọi x, y
 $|xy - 90| \geq 0$ với mọi x, y

Khi đó $8 \cdot (2x - 5y)^2 + |xy - 90| \geq 0$ với mọi x, y

Suy ra $-\left[8 \cdot (2x - 5y)^2 + |xy - 90|\right] \leq 0$ với mọi x, y

Hãy $P \leq 0$ với mọi x, y .

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} (2x - 5y)^2 = 0 \\ |xy - 90| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{5} = \frac{y}{2} \\ xy = 90 \end{cases}$

Đặt $\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = k \Rightarrow x = 5k; y = 2k$

Mà $xy = 90 \Rightarrow 5k \cdot 2k = 90 \Leftrightarrow k^2 = 9 \Leftrightarrow k = \pm 3$

Nếu $k = 3 \Rightarrow x = 15; y = 6$

Nếu $k = -3 \Rightarrow x = 15; y = -6$

Vậy $\max P = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15; y = 6 \\ x = -15; y = -6 \end{cases}$

Bài 29:

Tìm GTLN của biểu thức: $H = (3x - 2y)^2 - (4y - 6x)^2 - |xy - 24|$

Lời giải

Ta có:

$$H = (3x - 2y)^2 - (4y - 6x)^2 - |xy - 24|$$



$$H = (3x - 2y)^2 - 4(2y - 3x)^2 - |xy - 24| = -3(3x - 2y)^2 - |xy - 24|$$

$$= -\left|(3x - 2y)^2 + |xy - 24|\right|$$

Ta có: $3 \cdot (3x - 2y)^2 \geq 0 \forall x, y; |xy - 24| \geq 0 \forall x, y$

Do đó: $3 \cdot (3x - 2y)^2 + |xy - 24| \geq 0, \forall x, y$

Nên $-\left[3 \cdot (3x - 2y)^2 + |xy - 24|\right] \leq 0, \forall x, y$

Hay $H \leq 0$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $3x - 2y = 0$ và $xy - 24 = 0$ (1)

Với $3x - 2y = 0 \Rightarrow 3x = 2y \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3}$

Đặt $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = k \Rightarrow x = 2k; y = 3k$

Thay $x = 2k, y = 3k$ vào (1) ta được: $2k \cdot 3k - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = -2 \end{cases}$

Với $k = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \cdot 2 = 4 \\ y = 3 \cdot 2 = 6 \end{cases}$

với $k = -2 \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -6 \end{cases}$

Vậy giá trị lớn nhất của H là $0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4; y = 6 \\ x = -4; y = -6 \end{cases}$

Dạng 8: Giải bất phương trình liên quan đến giá trị tuyệt đối có dạng $|A(x)| < a$

hoặc $|A(x)| > a$

Phương pháp:

Với $|A(x)| < a \Rightarrow -a < A(x) < a$



Với $|A(x)| > a \Rightarrow \begin{cases} A(x) > a \\ A(x) < -a \end{cases}$

Bài 1: Tìm x, biết rằng:

a. $|x - 2| < 4$

b. $|5x - 3| < 2$

c. $|3x + 1| > 4$

Lời giải

a) Ta có $|x - 2| < 4 \Rightarrow -4 < x - 2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 6$

b) Ta có $|5x - 3| < 2 \Rightarrow -2 < 5x - 3 < 2 \Leftrightarrow 1 < 5x < 5 \Leftrightarrow \frac{1}{5} < x < 1$

c) Ta có $|3x + 1| > 4 \Rightarrow \begin{cases} 3x + 1 > 4 \\ 3x + 1 < -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x > 3 \\ 3x < -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -\frac{5}{3} \end{cases}$

Bài 2: Tìm x, biết rằng:

a) $|3x - 2| - x > 1$

b) $|3x - 2| > x + 1$

c) $|2x + 3| \leq 5$

Lời giải

a) Trường hợp 1: Với $x \geq \frac{2}{3} \Rightarrow 3x - 2 - x > 1 \Leftrightarrow 2x > 3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$

Trường hợp 2: Với $x < \frac{2}{3} \Rightarrow 2 - 3x - x > 1 \Leftrightarrow -4x > -1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{4}$

b) Trường hợp 1: Với $x \geq \frac{2}{3} \Rightarrow 3x - 2 > x + 1 \Leftrightarrow 3x - x > 3 \Leftrightarrow 2x > 3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$

Trường hợp 2: Với $|2x + 3| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq 2x + 3 \leq 5 \Leftrightarrow -8 \leq 2x \leq 2 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 1$

Bài 3: Tìm x, biết rằng:

a) $|2x - 3| > 5$

b) $|3x - 1| \leq 7$

c) $3 + |2x + 5| > 13$

Lời giải

a) Ta có $|2x - 3| > 5 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3 > 5 \\ 2x - 3 < -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > 8 \\ 2x < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x < -1 \end{cases}$

b) $|3x - 1| \leq 7 \Rightarrow -7 \leq 3x - 1 \leq 7 \Leftrightarrow -6 \leq 3x \leq 8 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq \frac{8}{3}$



$$c, 3 + |2x + 5| > 13 \Rightarrow |2x + 5| > 10 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 5 > 10 \\ 2x + 5 < -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > 5 \\ 2x < -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{2} \\ x < \frac{-15}{2} \end{cases}$$

Bài 4:

Tìm x biết: $|2x + 3| - 4x < 9$

Lời giải

Trường hợp 1: Với $x \geq \frac{-3}{2} \Rightarrow (2x + 3) - 4x < 9 \Leftrightarrow 2x + 3 - 4x < 9 \Leftrightarrow -2x < 6 \Leftrightarrow x > -3$

Trường hợp 2: Với $x < \frac{-3}{2} \Rightarrow -2x - 3 - 4x < 9 \Leftrightarrow -6x < 12 \Leftrightarrow x > -2$

Dạng 9: Sử dụng tính chất $|A| + |B| \geq |A + B|$

Bài 1: Tìm x nguyên biết:

a. $|x - 1| + |x - 3| + |x - 5| + |x - 7| = 8$ b. $|x - 2010| + |x - 2012| + |x - 2014| = 2$

Lời giải

a) Ta có :

$$\begin{aligned} &|x - 1| + |x - 3| + |x - 5| + |x - 7| = 8 \\ \Rightarrow &(|x - 1| + |x - 7|) + (|x - 3| + |x - 5|) = |x - 1| + |7 - x| + |x - 3| + |5 - x| \\ \geq &|x - 1 + 7 - x| + |x - 3 + 5 - x| = |6| + |2| = 8 \end{aligned}$$

dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)(7 - x) \geq 0 \\ (x - 3)(5 - x) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 3 \leq x \leq 5$

b) Ta có:

$$\forall T = |x - 1010| + |2014 - x| + |x - 2012| \geq |x - 2010 + 2014 - x| + |x - 2012| = 2 + |x - 2012| \geq 2$$

Vì $|x - 2012| \geq 0$, dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} (x - 2010)(1014 - x) \geq 0 \\ x - 2012 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2012$

Bài 2:



Tìm x nguyên biết: $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + \dots + |x - 100| = 2500$

Lời giải

Ta có: $VT = (|x - 1| + |100 - x|) + (|x - 2| + |99 - x|) + \dots + (|x - 50| + |51 - x|)$

$$VT \geq (x - 1 + 100 - x) + (x - 2 + 99 - x) + \dots + (x - 50 + 51 - x) \\ = 99 + 97 + 95 + \dots + 1 = 2500$$

dấu "=" xảy ra khi $(x - 1)(100 - x) \geq 0, (x - 2)(99 - x) \geq 0, \dots, (x - 50)(51 - x) \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 50 \\ x = 51 \end{cases}$$

Bài 3:

Tìm x nguyên biết: $|x - 1| + |x - 2| + |y - 3| + |x - 4| = 3$

Lời giải

a) Đặt $A = |x - 1| + |x - 2| + |y - 3| + |x - 4|$

Ta có $|x - 1| + |x - 4| = |x - 1| + |4 - x| \geq 3$, nên $A = 3$ khi và chỉ khi $|x - 2| = |y - 3| = 0$

và $(x - 1)(4 - x) \geq 0 \Rightarrow x = 2, y = 3$

Bài 4:

Tìm x nguyên biết: $2004 = |x - 4| + |x - 10| + |x + 101| + |x + 990| + |x + 1000|$

Lời giải

Ta có $VP = |4 - x| + |x + 1000| + |10 - x| + |x + 990| + |x + 101|$

$$VP \geq 1004 + 1000 + |x + 101| \geq 2004$$

$$\text{Dấu bằng khi } \begin{cases} (4 - x)(x + 1000) \geq 0 \\ (10 - x)(x + 990) \geq 0 \\ x + 101 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -101$$

Bài 5:

Tìm x nguyên biết: $|x - 2005| + |x - 2006| + |y - 2007| + |x - 2008| = 3$

Lời giải





$$\text{Đặt } A = |x - 2005| + |x - 2006| + |y - 2007| + |x - 2008|$$

Khi đó ta có :

$$A = |x - 2005| + |2008 - x| + |x - 2006| + |y - 2007| \geq 3 + |x - 2006| + |y - 2007|$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi : } \begin{cases} (x - 2005)(2008 - x) \geq 0 \\ |x - 2006| = |y - 2007| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2006 \\ y = 2007 \end{cases}$$

Bài 6:

Tìm x biết: $|2x - 3| + |2x + 4| = 7$

Lời giải

Ta có: $|3 - 2x| + |2x + 4| \geq 3 - 2x + 2x + 4 = 7$ dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases} 3 - 2x \geq 0 \\ 2x + 4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ x \geq -2 \end{cases}$$

Bài 7:

Tìm x biết: $|x + 2,5| + |x + 6,5| + |x + 9,5| = 7$

Lời giải

$$|x + 2,5| \geq -x - 2,5, |x + 6,5| \geq 0 \text{ và } |x + 9,5| \geq x + 9,5$$

Nên: $VT \geq -x - 2,5 + x + 9,5 = 7$, dấu bằng xảy ra khi $x = -6,5$

Bài 8:

Tìm x nguyên biết: $|x + 1| + |x + 2| + |x + 3| + \dots + |x + 100| = 605x$

Lời giải

$$\text{Vì } |x + 1| \geq 0, |x + 2| \geq 0, \dots, |x + 100| \geq 0 \Rightarrow VT \geq 0 \Rightarrow 605x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

$$\text{Với } x \geq 0 \Rightarrow VT = (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + \dots + (x + 100) = 605x$$

$$\Rightarrow 100x + 5050 = 605x \Leftrightarrow 505x = 5050 \Leftrightarrow x = 10$$

Bài 9:

Tìm biết: $|x + 3| + |x + 1| = 3x$

Lời giải





$$\text{Vì } |x + 3| \geq 0, |x + 1| \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

$$\text{Với } x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} |x + 3| = x + 3 \\ |x + 1| = x + 1 \end{cases} \Rightarrow (x + 3) + (x + 1) = 3x \Leftrightarrow 2x + 4 = 3x \Leftrightarrow x = 4$$

Bài 10:

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } \left| x + \frac{11}{17} \right| + \left| x + \frac{2}{17} \right| + \left| x + \frac{4}{17} \right| = 4x$$

Lời giải

$$\text{Vì } \left| x + \frac{11}{17} \right| \geq 0, \left| x + \frac{2}{17} \right| \geq 0, \left| x + \frac{4}{17} \right| \geq 0 \Rightarrow VT \geq 0 \Rightarrow 4x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

$$\text{Khi đó } \left(x + \frac{11}{17} \right) + \left(x + \frac{2}{17} \right) + \left(x + \frac{4}{17} \right) = 4x \Leftrightarrow 3x + 1 = 4x \Leftrightarrow x = 1$$

Bài 11:

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } |x + 0,8| + |x + 5,2| + |x + 9,7| = 4x$$

Lời giải

$$\text{a) Vì } |x + 0,8| \geq 0, |x + 5,2| \geq 0, |x + 9,7| \geq 0 \Rightarrow 4x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

$$\text{Khi đó: } (x + 0,8) + (x + 5,2) + (x + 9,7) = 4x \Leftrightarrow 3x + 15,7 = 4x \Leftrightarrow x = 15,7$$

Vậy $x = 15,7$



Dạng 10: Tìm x, y nguyên thỏa mãn đẳng thức: $|A| + |B| = m$

Phương pháp:

+ Nếu $m = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

+ Nếu $m > 0$Do $|A| > 0 \Rightarrow 0 \leq |B| \leq m \Rightarrow$ tìm B rồi suy ra tìm A

Bài 1: HSG Huyện Kim Long, năm học 2020 - 2021

Tìm x thỏa mãn $|x - 10|^{10} + |x - 11|^{11} = 1$

Lời giải

+ Nếu $x > 11$ thì $\begin{cases} x - 10 > 1 \\ x - 11 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x - 10| > 1 \\ |x - 11| > 0 \end{cases} \Rightarrow |x - 10|^{10} + |x - 11|^{11} > 1$ (trái với đề

bài)

+ Nếu $x < 10$ thì

$$\begin{cases} x - 10 < 0 \\ x - 11 < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x - 10| > 0 \\ |x - 11| > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x - 10|^{10} > 0 \\ |x - 11|^{11} > 1 \end{cases} \Rightarrow |x - 10|^{10} + |x - 11|^{11} > 1 \text{ (loại)}$$

+ Nếu $10 < x < 11$ thì $\begin{cases} 0 < x - 10 < 1 \\ -1 < x - 11 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < |x - 10| < 1 \\ 0 < |x - 11| < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x - 10|^{10} < |x - 10| \\ |x - 11|^{11} < |x - 11| \end{cases}$

Do đó $|x - 10|^{10} + |x - 11|^{11} < |x - 10| + |x - 11|$

Suy ra $|x - 10|^{10} + |x - 11|^{11} < x - 10 + 11 - x = 1$ (loại)

+ Nếu $x = 10$ hoặc $x = 11$ thay vào thấy thỏa mãn

Vậy $x \in \{10; 11\}$

Bài 2: Tìm x biết:

a) $|3x - 5| + |2x + 3| = 7$

b) $|x| + |x + 2| = 3$

Lời giải

a) Ta có bảng xét dấu:

x	$\frac{-3}{2}$	$\frac{5}{3}$
$3x - 5$	-	+
$2x + 3$	-	+



Khi đó ta có:

Trường hợp 1: Nếu $x < \frac{-3}{2} \Rightarrow (5 - 3x) + (-2x + 3) = 7 \Leftrightarrow -5x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$ (loại)

Trường hợp 2: Nếu $-\frac{3}{2} \leq x < \frac{5}{3} \Rightarrow (5 - 3x) + (2x + 3) = 7 \Leftrightarrow -x = -1 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn)

Trường hợp 3: Nếu $x \geq \frac{5}{3} \Rightarrow 3x - 5 + 2x + 3 = 7 \Leftrightarrow 5x - 2 = 7 \Leftrightarrow 5x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{5}$ (thỏa mãn)

Vậy $x \in \left\{1; \frac{9}{5}\right\}$ là các giá trị cần tìm.

b) Ta có bảng xét dấu:

x		-2		0	
x	-	/	-	0	+
$x + 2$	-	0	+	/	+

Khi đó ta có :

Trường hợp 1: Nếu $x < -2 \Rightarrow (-x) + (-x - 2) = 3 \Leftrightarrow -2x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{-5}{2}$ (loại)

Trường hợp 2: Nếu $-2 \leq x < 0 \Rightarrow (-x) + (x + 2) = 3 \Leftrightarrow 2 = 3$ (loại)

Trường hợp 3: Nếu $2 \leq x \Rightarrow x + (x + 2) = 3 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ (loại)

Vậy không có giá trị nào của x thỏa mãn bài toán.

Bài 3: Tìm x biết:

a) $|x - 1| + |x + 3| = 4$

b) $|2x + 3| - 2|4 - x| = 5$

Lời giải

a) Ta có bảng sau:

x		-3		1	
$x - 1$	-		-	0	+



$x + 3$	-	0	+		+
---------	---	---	---	--	---

Khi đó ta có:

Trường hợp 1: Nếu $x < -3 \Rightarrow (1 - x) + (-x - 3) = 4 \Leftrightarrow -2x = 6 \Leftrightarrow x = -3$ (loại)

Trường hợp 2: Nếu $-3 \leq x < 1 \Rightarrow (1 - x) + x + 3 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4$ (luôn đúng)

Trường hợp 3: Nếu $x \geq 1 \Rightarrow (x - 1) + (x + 3) = 4 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn)

b) Ta có bảng sau:

x		$\frac{-3}{2}$		4	
$2x + 3$	-	0	+	/	+
$4 - x$	-	/	-	0	+

Khi đó ta có:

Trường hợp 1: Nếu $x < \frac{-3}{2} \Rightarrow (-2x - 3) - 2(x - 4) = 5 \Leftrightarrow -4x = 16 \Leftrightarrow x = -4$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2: Nếu $\frac{-3}{2} \leq x < 4 \Rightarrow (2x + 3) - 2(x - 4) = 5 \Leftrightarrow 11 = 5$ (loại)

Trường hợp 3: Nếu $x \geq 4 \Rightarrow (2x + 3) - 2(4 - x) = 5 \Leftrightarrow 4x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$ (loại)

Bài 4: Tìm x biết:

a) $|x| + |8 - x| = 0$

b) $|x| + |-x| = 3 - x$

c) $|2x - 3| - x = |2 - x|$

Lời giải

a) Ta có bảng xét dấu:

x		0		8	
x	-	0	+		+
$8 - x$	+		+	0	-

Khi đó ta có:

Trường hợp 1: Nếu $x < 0 \Rightarrow (-x) + (8 - x) = 0 \Leftrightarrow -2x = -8 \Leftrightarrow x = 4$ (loại)

Trường hợp 2: Nếu $0 \leq x < 8 \Rightarrow x + 8 - x = 0 \Leftrightarrow 8 = 0$ (loại)



Trường hợp 3: Nếu $x \geq 8 \Rightarrow x + (x - 8) = 0 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$ (loại)

b) Ta có $|-x| = |x| \Rightarrow |x| + |-x| = 3 - x \Rightarrow 2|x| = 3 - x$

Trường hợp 1: Nếu $x \geq 0 \Rightarrow 2x = 3 - x \Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2: Nếu $x < 0 \Rightarrow 2(-x) = 3 - x \Leftrightarrow -2x = 3 - x \Leftrightarrow x = -3$ (thỏa mãn)

c) Ta có bảng xét dấu ta có:

x		$\frac{3}{2}$		2	
$2x - 3$	-	0	+		+
$2 - x$	+		+	0	-

Khi đó ta có:

Trường hợp 1: Nếu

$$x < \frac{3}{2} \Rightarrow (3 - 2x) - x = 2 - x \Leftrightarrow -3x + 3 = 2 - x \Leftrightarrow -2x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn)}$$

Trường hợp 2: Nếu

$$\frac{3}{2} \leq x < 2 \Rightarrow (2x - 3) - x = (2 - x) \Leftrightarrow x - 3 = 2 - x \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \text{ (thỏa mãn)}$$

Trường hợp 3: Nếu $x \geq 2 \Rightarrow (2x - 3) - x = x - 2 \Leftrightarrow x - 3 = x - 2 \Leftrightarrow -3 = -2$ (loại).

Bài 5:

Tìm x biết: $|x - 2011| + |x - 2010| = 2012$

Lời giải

Ta có bảng xét dấu:

x		2010		2011	
$x - 2011$	-	/	-	0	+
$x - 2010$	-	0	+	/	+

Khi đó ta có:

Trường hợp 1: Nếu

$$x < 2010 \Rightarrow (2011 - x) + (2010 - x) = 2012 \Leftrightarrow -2x = -2009 \Leftrightarrow x = \frac{2009}{2} \text{ (t/m)}$$



Trường hợp 2: Nếu $2010 \leq x < 2011 \Rightarrow (2011 - x) + (x - 2010) = 2012 \Leftrightarrow 4021 = 2012$

(loại)

Bài 6:

Tìm x biết: $|x| + |x - 1| = 1$

Lời giải

Ta có bảng xét dấu:

x	0	1
x	- 0 +	+
x - 1	- -	0 +

Khi đó ta có :

Trường hợp 1: Nếu $x < 0 \Rightarrow (-x) + (1 - x) = 1 \Leftrightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (loại)

Trường hợp 2: Nếu $0 \leq x < 1 \Rightarrow x + (1 - x) = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$ (luôn đúng)

Trường hợp 3: Nếu $x \geq 1 \Rightarrow x + (x - 1) = 1 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn)

Bài 7:

Tìm x, y biết: $|4x + 3| - |x - 1| = 7$

Lời giải

a) Ta có bảng xét dấu:

x	$\frac{-3}{4}$	1
4x + 3	- 0 +	+
x - 1	- -	0 +

Khi đó ta có :

Trường hợp 1: Nếu $x < \frac{-3}{4} \Rightarrow (-4x - 3) - (1 - x) = 7 \Leftrightarrow -3x = 11 \Leftrightarrow x = \frac{-11}{3}$ (loại)

Trường hợp 2: Nếu $\frac{-3}{4} \leq x < 1 \Rightarrow (4x + 3) - (1 - x) = 7 \Leftrightarrow 5x = 5 \Leftrightarrow x = 1$ (loại)

Trường hợp 3: Nếu $x \geq 1 \Rightarrow (4x + 3) - (x - 1) = 7 \Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn).



Bài 8:

Tìm x, y biết:

a) $|x - 1006y| + |x - 2012| \leq 0$

b) $|x + 5| + (3y - 4)^{2012} = 0$

Lời giải

a) Ta có: $|x - 1006y| + |x - 2012| \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1006y = 0 \\ x - 2012 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2012 \\ y = 2 \end{cases}$

b) Vì $\begin{cases} |x + 5| \geq 0 \\ (3y - 4)^{2012} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow |x + 5| + (3y - 4)^{2012} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5 = 0 \\ 3y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = \frac{4}{3} \end{cases}$

Bài 9:

Tìm x nguyên biết:

a) $(2x - 1)^2 + |2y - x| - 8 = 12 - 5 \cdot 2^2$

b) $|x - 2011y| + (y - 1)^{2012} = 0$

Lời giải

a) Ta có $(2x - 1)^2 + |2y - x| = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 0 \\ 2y - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$ (loại)

b) $|x - 2011y| + (y - 1)^{2012} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2011y \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2011 \\ y = 1 \end{cases}$ (thỏa mãn).



Chuyên đề 5: TỶ LỆ THỨC - DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU

Bài 1: TỶ LỆ THỨC. DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU

Kiến thức cần nhớ

1. Tỷ lệ thức: Là đẳng thức của hai tỉ số $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ($b, d \neq 0$) hoặc $a : b = c : d$

Trong đó: a, b, c, d là các số hạng của tỷ lệ thức

- a và d là các số hạng ngoài hay ngoại tỉ

- b và c là các số hạng trong hay trung tỉ

Các số a và d được gọi là ngoại tỉ; các số b và c được gọi là trung tỉ

2. Tính chất của tỉ lệ thức

a) Tính chất 1: Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$

b) Tính chất 2: Nếu $ad = bc \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \frac{d}{c} = \frac{b}{a}; \frac{d}{a} = \frac{c}{b}; \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

3. Tính chất của dãy tỉ số bằng nhau

- Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$ (giả thiết các phân số đều có nghĩa)

- Mở rộng: Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a-c+e}{b-d+f}$ (giả thiết các phân số đều có nghĩa)

Ví dụ: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{2+4+6}{3+6+9} = \frac{4}{6}; \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{2+4-6}{3+6-9} = \frac{0}{0}$ (do $\frac{0}{0}$ không có nghĩa)

nên tính chất không còn đúng

4. Chú ý: Khi có dãy tỉ số $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, ta nói các số x, y, z tỉ lệ với các số a, b, c

Ví dụ: Khi có dãy tỉ số $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$, ta nói các số a, b, c tỉ lệ với các số 2, 3, 5

Ta cũng viết $a : b : c = 2 : 3 : 5$

+) Vì tỉ lệ thức là một đẳng thức nên nó có tính chất của đẳng thức, từ tỉ lệ thức

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ suy ra } \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{c}{d}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}; k \cdot \frac{a}{b} = k \cdot \frac{c}{d} (k \neq 0); \frac{k_1 a}{k_1 b} = \frac{k_2 c}{k_2 d} (k_1, k_2 \neq 0)$$

$$\text{Từ } \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \Rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^3 = \left(\frac{y}{b}\right)^3 = \left(\frac{z}{c}\right)^3 = \frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} \cdot \frac{z}{c}; \left(\frac{x}{a}\right)^2 = \frac{y}{b} \cdot \frac{z}{c}$$



Dạng 1. Bài tập về tỉ lệ thức

Bài 1

Chứng minh rằng nếu $\frac{a+b}{b+c} = \frac{c+d}{d+a}$ ($c+d \neq 0$) thì $\begin{cases} a=c \\ a+b+c+d=0 \end{cases}$

Lời giải

Chú ý: Trong bài toán có chữ nếu thì không cần đặt điều kiện mẫu khác 0 nữa

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{b+c} = \frac{c+d}{d+a} &\Rightarrow \frac{a+b}{c+d} = \frac{b+c}{d+a} \Leftrightarrow \frac{a+b}{c+d} + 1 = \frac{b+c}{d+a} + 1 \Leftrightarrow \frac{a+b+c+d}{c+d} = \frac{a+b+c+d}{d+a} \\ &\Leftrightarrow (a+b+c+d) \left(\frac{1}{c+d} - \frac{1}{d+a} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+d=0 \\ \frac{1}{c+d} = \frac{1}{d+a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+d=0 \\ a=c \end{cases} \Rightarrow \text{đpcm} \end{aligned}$$

Bài 2

Cho $(x-y) : (x+y) : xy = 1 : 9 : 30$. Với $x, y \neq 0$ hãy tính xy ?

Lời giải

Theo giả thiết ta có: $(x-y) : (x+y) : xy = 1 : 9 : 30 \Rightarrow \frac{x-y}{1} = \frac{x+y}{9} = \frac{xy}{30}$ ($x, y \neq 0$) (1)

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow \frac{xy}{30} = \frac{x-y}{1} = \frac{x+y}{9} = \frac{x-y+x+y}{10} = \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{xy}{30} = \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{y}{6} = 1 \Rightarrow y = 6$$

Lại có: $\frac{xy}{30} = \frac{x-y}{1} = \frac{x}{5}$ (*), thay $y = 6$ vào (*) ta được:

$$\frac{xy}{30} = \frac{x-6}{1} = \frac{x}{5} = \frac{x-(x-6)}{5-1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{xy}{30} = \frac{3}{2} \Rightarrow xy = 45$$

Vậy $xy = 45$

Bài 3

Tìm các số $a_1; a_2; \dots; a_{100}$, biết $\frac{a_1-1}{100} = \frac{a_2-2}{99} = \dots = \frac{a_{99}-99}{2} = \frac{a_{100}-100}{1}$ và





$$a_1 + a_2 + \dots + a_{100} = 10100$$

Lời giải

Theo bài ra ta có:

$$\frac{a_1 - 1}{100} = \frac{a_2 - 2}{99} = \dots = \frac{a_{99} - 99}{2} = \frac{a_{100} - 100}{1} = \frac{(a_1 + \dots + a_{100}) - (1 + 2 + \dots + 100)}{100 + 99 + \dots + 1}$$

(tính chất của dãy tỉ số bằng nhau)

$$= \frac{10100 - \frac{(1 + 100) \cdot 100}{2}}{(1 + 100) \cdot 100 : 2} = 1 \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_{100} = 101$$

Vậy $a_1 = a_2 = \dots = a_{100} = 101$.

Bài 4

Cho các số $a, b, c, d \neq 0$ và thỏa mãn $b^2 = ac; c^2 = bd; b^3 + c^3 + d^3 \neq 0$.

Chứng minh rằng $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3} = \frac{a}{d}$

Lời giải

Theo giả thiết $b^2 = ac \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c}; c^2 = bd \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a^3}{b^3} = \frac{b^3}{c^3} = \frac{c^3}{d^3} (*)$

Từ (*) $\Rightarrow \frac{a^3}{b^3} = \frac{b^3}{c^3} = \frac{c^3}{d^3} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3} (1)$. Lại có: $\frac{a^3}{b^3} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{d} (2)$

Từ (1)(2) $\Rightarrow \frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3} = \frac{a}{d}$ (đpcm)

Bài 5

Cho $(a + b) : (b + c) : (c + a) = 6 : 7 : 8; a + b + c = 42$. Hãy tìm c ?

Lời giải

Cách 1: Đặt $\frac{a+b}{6} = \frac{b+c}{7} = \frac{c+a}{8} = k \Rightarrow a+b = 6k; b+c = 7k; c+a = 8k$

$$\Rightarrow 2(a + b + c) = 21k \Rightarrow k = 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 24 \\ a + b + c = 42 \end{cases} \Rightarrow c = 18$$





Cách 2:

$$\frac{a+b}{6} = \frac{b+c}{7} = \frac{c+a}{8} = \frac{2(a+b+c)}{21} = \frac{84}{21} = 4 \Rightarrow \frac{a+b}{6} = 4 \Rightarrow a+b = 24 \Rightarrow c = 18$$

Bài 6

Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng:

a) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

b) $\frac{a-c}{c} = \frac{b-d}{d}$

c) $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$

Lời giải

a) Ta có: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

b) Ta có: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} - 1 = \frac{b}{d} - 1 \Rightarrow \frac{a-c}{c} = \frac{b-d}{d}$

c) Ta có: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Rightarrow 1 - \frac{b}{a} = 1 - \frac{d}{c} \Rightarrow \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$

Bài 7

Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng:

a) $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$

b) $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

c) Với $a^2 = bc$ thì $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+a}{c-a}$

Lời giải

a) Ta có $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ (tính chất dãy tỉ số bằng nhau)

b) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ (đpcm)

c) Từ giả thiết $\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{a} = \frac{a+b}{c+a} = \frac{a-b}{c-a} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+a}{c-a}$ (đpcm)

Bài 8

Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng:

a) $\frac{7a^2 + 3ab}{11a^2 - 8b^2} = \frac{7c^2 + 3cd}{11c^2 - 8d^2}$

b) Với $b^2 = ac$ thì $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$

c) $\frac{a}{b} = \frac{3a+2c}{3b+2d}$



Lời giải

a) Ta có $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{d^2} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d} = \frac{7a^2 + 3ab}{7c^2 + 3cd} = \frac{11a^2 - 8b^2}{11c^2 - 8d^2}$ (đpcm)

b) Ta có $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2}{c^2} = \frac{a \cdot b}{b \cdot c} = \frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$ (đpcm)

c) Theo giả thiết $\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{3a}{3b} = \frac{2c}{2d} = \frac{3a + 2c}{3b + 2d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3a + 2c}{3b + 2d}$ (đpcm)

Bài 9

Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

a) Chứng minh rằng $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2} = \frac{ac}{bd}$

b) Chứng minh rằng $\frac{5a + 3b}{5a - 3b} = \frac{5c + 3d}{5c - 3d}$

Lời giải

a) Ta có: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$ (1)

Lại có: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = \frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2}$ (2)

Từ (1)(2) $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2} = \frac{ac}{bd}$ (đpcm)

b) Ta có: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{5a}{5b} = \frac{3c}{3d} = \frac{5a + 3b}{5c + 3d} = \frac{5a - 3b}{5c - 3d} \Rightarrow \frac{5a + 3b}{5a - 3b} = \frac{5c + 3d}{5c - 3d}$

Bài 10

Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, các số x, y, z, t thỏa mãn $xa + yb \neq 0, zc + td \neq 0$.

Chứng minh: $\frac{xa + yb}{za + tb} = \frac{xc + yd}{zc + td}$

Lời giải



Từ giả thiết $\Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{ax}{cx} = \frac{by}{dy} = \frac{ax+by}{cx+dy} = \frac{az}{cz} = \frac{tb}{td} = \frac{az+tb}{cz+td}$ (1)

Lại có $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{az}{cz} = \frac{bt}{dt} = \frac{az+tb}{cz+td}$ (2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow \frac{xa+yb}{za+tb} = \frac{xc+yd}{zc+td}$ (đpcm)

Bài 11

Cho tỉ lệ thức: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Chứng minh rằng: $\frac{a.d}{c.d} = \frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}$ và $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$

Lời giải

Từ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a.b}{c.d} = \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{d^2} = \frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}$

và $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d} \Rightarrow \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{d^2} = \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$

Bài 12

Cho 4 số a_1, a_2, a_3, a_4 thỏa mãn: $a_2^2 = a_1.a_3, a_3^2 = a_2.a_4$.

Chứng minh rằng: $\frac{a_1^3+a_2^3+a_3^3}{a_2^3+a_3^3+a_4^3} = \frac{a_1}{a_4}$

Lời giải

Từ giả thiết $\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3}, \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4} \Rightarrow \frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{a_2^3}{a_3^3} = \frac{a_3^3}{a_4^3}$

$= \frac{a_1^3+a_2^3+a_3^3}{a_2^3+a_3^3+a_4^3} = \frac{a_1}{a_4} \cdot \frac{a_2}{a_3} \cdot \frac{a_3}{a_4} = \frac{a_1}{a_4}$ (đpcm)

Bài 13

Cho $\frac{a}{c} = \frac{c}{d} = \frac{b}{d}$. Chứng minh rằng: $\frac{a^3+c^3-b^3}{c^3+b^3-d^3} = \frac{a}{d}$





Lời giải

Ta có: $\frac{a}{c} = \frac{c}{b} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a^3}{c^3} = \frac{c^3}{b^3} = \frac{b^3}{d^3} = \frac{a}{d}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta được: $\frac{a^3}{c^3} = \frac{c^3}{b^3} = \frac{b^3}{d^3} = \frac{a}{d} = \frac{a^3 + c^3 - b^3}{c^3 + b^3 - d^3}$
(đpcm)

Bài 14

Cho tỉ lệ thức: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Chứng minh: $\frac{2a^2 - 3ab + 5b^2}{2b^2 + 3ab} = \frac{2c^2 - 3cd + 5d^2}{2d^2 + 3cd}$ (với điều kiện mẫu thức xác định)

Lời giải

Đặt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow \begin{cases} a = kb \\ c = kd \end{cases}$, thay vào biểu thức ta được:

$$\frac{2a^2 - 3ab + 5b^2}{2b^2 + 3ab} = \frac{k^2 - 3k + 5}{2 + 3k} \quad (1) \quad \text{và} \quad \frac{2c^2 - 3cd + 5d^2}{2d^2 + 3cd} = \frac{k^2 - 3k + 5}{2 + 3k} \quad (2)$$

Từ (1)(2) $\Rightarrow \frac{2a^2 - 3ab + 5b^2}{2b^2 + 3ab} = \frac{2c^2 - 3cd + 5d^2}{2d^2 + 3cd}$ (đpcm)

Bài 15

Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng: $\frac{ac}{bd} = \frac{2009a^2 + 2010c^2}{2009b^2 + 2010d^2}$

Lời giải

Từ giả thiết ta có: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{c}{d}\right)^2 \Rightarrow \frac{a.c}{b.d} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}$

$$\Rightarrow \frac{a.c}{b.d} = \frac{2010c^2}{2010d^2} = \frac{2009a^2}{2009b^2}$$

Bài 16

Chứng minh rằng: Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì $\left(\frac{a-b}{c-d}\right)^4 = \frac{a^4 + b^4}{c^4 + d^4}$





Lời giải

Ta có: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a-b}{c-d} \Rightarrow \frac{a^4}{c^4} = \frac{b^4}{d^4} = \left(\frac{a-b}{c-d}\right)^4 = \frac{a^4 + b^4}{c^4 + d^4}$ (đpcm)

Bài 17

Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ($b, c, d, c + d \neq 0$). Chứng minh rằng: $\frac{ab}{cd} = \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$

Lời giải

Ta có: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d} \Rightarrow \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d} \cdot \frac{a+b}{c+d} = \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$ (đpcm)

Bài 18

Chứng minh rằng: Nếu $2(x+y) = 5(y+z) = 3(z+x)$ thì $\frac{x-y}{4} = \frac{y-z}{5}$

Lời giải

Ta có: $\frac{x+y}{3} = \frac{z+x}{2} = \frac{x+y-z-x}{3-2} = y-z$; $\frac{y+z}{3} = \frac{z+x}{5} = \frac{-y-z+z+x}{-3+5} = \frac{x-y}{5}$

$\frac{x-y}{2} = \frac{z+x}{5} \Rightarrow x-y = \frac{2(z+x)}{5} \Rightarrow \frac{x-y}{4} = \frac{z+x}{10}$ (1) và

$\frac{z+x}{2} = y-z \Rightarrow \frac{y-z}{5} = \frac{z+x}{10}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{x-y}{4} = \frac{y-z}{5}$

Bài 19

Chứng minh rằng: Nếu có a, b, c, d thỏa mãn $[ab(ab-2cd) + c^2d^2][ab(ab-2) + 2(ab+1)] = 0$ thì chúng lập thành một tỉ lệ thức.

Lời giải

Từ giả thiết ta xét 2 trường hợp:



+) TH1: $ab(ab - 2cd) + c^2d^2 = 0 \Rightarrow (ab - cd)^2 = 0 \Rightarrow ab = cd \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (đpcm)

+) TH2: $[ab(ab - 2) + 2(ab + 1)] = 0 \Rightarrow a^2b^2 - 2ab + 2ab + 2 = 0 \Leftrightarrow a^2b^2 = -2$ (vô lý)

Bài 20

Cho dãy $\frac{a}{2009} = \frac{b}{2011} = \frac{c}{2013}$. Chứng minh rằng: $\frac{(a-c)^2}{4} = (a-b)(b-c)$.

Lời giải

Ta có: $\frac{a}{2009} = \frac{b}{2011} = \frac{c}{2013} = \frac{a-c}{-4} = \frac{a-b}{-2} = \frac{b-c}{-2} = k$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-c = -4k \\ a-b = -2k \\ b-c = -2k \end{cases} \Rightarrow \frac{(a-c)^2}{4} = \frac{(-4k)^2}{4} = 4k^2 \text{ và } (a-b)(b-c) = 4k^2$$

$\Rightarrow VT = VP \Rightarrow$ (đpcm)

Bài 21

Cho a, b dương thỏa mãn: $a^{2006} + b^{2006} = a^{2004} + b^{2004}$. Chứng minh $\frac{a^2 + b^2}{32} \leq 2^{-4}$

Lời giải

Giả sử $a = 1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{32} = 2^{-4}$

Nếu $a \neq 1 \Rightarrow b \neq 1$, giả sử $a \geq b \Rightarrow a^{2004}(a^2 - 1) = b^{2004}(1 - b^2)$

$\Rightarrow \frac{a^{2004}}{b^{2004}} = \frac{1 - b^2}{1 - a^2}$, Vì $a \geq b \Rightarrow 1 - b^2 \geq a^2 - 1 \Rightarrow a^2 + b^2 \leq 2$

$\Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{32} \leq \frac{2}{32} = 2^{-4}$ (đpcm)

Bài 22

Cho $a, b, c \neq 0$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. Chứng minh rằng $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \leq 0$





Lời giải

$$\text{Từ giả thiết} \Rightarrow \frac{1}{a} = -\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \Rightarrow \frac{1}{a}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} \leq 0$$

$$\text{Tương tự: } \frac{1}{bc} + \frac{1}{ab} \leq 0, \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} \leq 0$$

$$\text{Cộng theo vế ta được: } 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) \leq 0 \text{ (đpcm)}$$

Bài 23

Chứng minh rằng nếu $x = \frac{a-b}{a+b}, y = \frac{b-c}{b+c}, z = \frac{c-a}{c+a}$ thì ta có

$$(1+x)(1+y)(1+z) = (1-x)(1-y)(1-z)$$

Lời giải

$$\text{Xét } x+1 = \frac{a-b}{a+b} + 1 = \frac{2a}{a+b}. \text{ Tương tự: } y+1 = \frac{2b}{b+c}; z+1 = \frac{2c}{c+a}$$

$$\text{Khi đó } VT = \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$\text{Tương tự: } 1-x = 1 - \frac{a-b}{a+b} = \frac{2b}{a+b}, 1-y = \frac{2c}{b+c}, 1-z = \frac{2a}{c+a}$$

$$\text{Khi đó: } VP = \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} = VT \text{ (đpcm)}$$

Bài 24

Biết $a^2 + ab + \frac{b^2}{3} = 15; c^2 + \frac{b^2}{3} = 6$ và $a^2 + ac + c^2 = 9 (a, c \neq 0; a \neq -c)$.

Chứng minh rằng $\frac{2c}{a} = \frac{b+c}{a+c}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } a^2 + ab + \frac{b^2}{3} = 15 = 6 + 9 = \left(a^2 + ac + c^2\right) + \left(c^2 + \frac{b^2}{3}\right)$$



$$\Rightarrow 2c^2 = ab - ac \Rightarrow 2c^2 = ab + ac - 2ac \Rightarrow 2c^2 + 2ac = ab + ac$$

$$\Rightarrow 2c(c + a) = a(b + c) \Rightarrow \frac{2c}{a} = \frac{b + c}{a + c}$$

Bài 25

Cho $3^x = 9^{y-1}$ và $8^y - 2^{x+8} = 0$. Chứng minh rằng: $\frac{x}{y} = \frac{5}{3}$

Lời giải

$$\text{Từ } 8^y = 2^{x+8} \Leftrightarrow 2^{3y} = 2^{x+8} \Rightarrow 3y = x + 8 \quad (1)$$

$$\text{Và } 3^x = 9^{y-1} = 3^{2(y-1)} \Rightarrow x = 2y - 2$$

Thay $x = 2y - 2$ vào (1) ta được: $3y = 2y - 2 + 8 \Leftrightarrow y = 6 \Rightarrow x = 10$.

Bài 26

Cho 3 số a, b, c đôi một khác nhau. Chứng minh rằng:

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{2}{a-b} = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{a-b} = \frac{1}{a-b} + \frac{-1}{b-a}$$

$$\text{Tính tương tự ta có: } \frac{2}{b-c} = \frac{1}{b-c} + \frac{-1}{c-b}, \text{ và } \frac{2}{c-a} = \frac{1}{c-a} + \frac{-1}{a-c}$$

Cộng theo vế:

$$\frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a} = \left(\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a-c} \right) + \left(\frac{1}{b-c} + \frac{-1}{b-a} \right) + \left(\frac{1}{c-a} + \frac{-1}{c-b} \right) = VT$$

Bài 27

Cho tỷ lệ thức $\frac{3a+2b+c}{a+2b-c} = \frac{3a-2b+c}{a-2b-c}$ ($b \neq 0$). Chứng minh rằng $a+c=0$

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{3a+2b+c}{a+2b-c} = \frac{3a-2b+c}{a-2b-c} = \frac{(3a+2b+c) - (3a-2b+c)}{(a+2b-c) - (a-2b-c)} = \frac{4b}{4b} = 1 (b \neq 0)$$





$$\Rightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = a + 2b - c \\ 3a - 2b + c = a - 2b - c \end{cases} \Rightarrow a + c = 0 \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Dạng 2. Chứng minh dãy tỉ số bằng nhau

Phương pháp giải

Cách 1: Sử dụng định nghĩa

Ví dụ: Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Ta sẽ đặt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow a = bk; c = dk$ rồi thay a, c vào biểu thức cần chứng minh

Cách 2: Sử dụng phương pháp nhân chéo

Để chứng minh $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ta đi chứng minh $ad = bc$

Cách 3: Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau

Ví dụ: Ta có $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{x}{y}$ thì $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{x}{y} = \frac{a+c+x}{b+d+y} = \frac{a-c+x}{b-d+y}$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{c}{d}\right)^m = \left(\frac{x}{y}\right)^m \quad (m \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow \frac{a^m}{b^m} = \frac{c^m}{d^m} = \frac{x^m}{y^m} = \frac{a^m + c^m + x^m}{b^m + d^m + y^m}$$

Bài tập

Bài 1

Cho a, b, c là các số nguyên khác 0 thỏa mãn: $\frac{ab+ac}{2} = \frac{bc+ba}{3} = \frac{ca+cb}{4}$. Chứng

minh rằng: $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{15}$

Lời giải

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{ab+ac}{2} = \frac{bc+ba}{3} = \frac{ca+cb}{4} = \frac{(ab+ac) + (bc+ba) - (ca+cb)}{2+3-4} = 2ab$$



$$\frac{ab+ac}{2} = \frac{bc+ba}{3} = \frac{ca+cb}{4} = \frac{(ab+ac) + (ca+cb) - (bc+ba)}{2+4-3} = \frac{2ac}{3}$$

$$\frac{ab+ac}{2} = \frac{bc+ba}{3} = \frac{ca+cb}{4} = \frac{(bc+ba) + (ca+cb) - (ab+ac)}{3+4-2} = \frac{2bc}{5}$$

$$\Rightarrow ab = \frac{ac}{3} = \frac{bc}{5}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{3} = \frac{b}{5} \\ \frac{b}{5} = \frac{c}{15} \\ \frac{a}{3} = \frac{b}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{15}$$

Bài 2

Biết $\frac{5z-3y}{2} = \frac{3x-2z}{5} = \frac{2y-5x}{3}$. Chứng minh: $\frac{2}{x} = \frac{5}{y} = \frac{3}{z}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \frac{5z-3y}{2} = \frac{3x-2z}{5} = \frac{2y-5x}{3} &= \frac{10z-6y}{4} = \frac{15x-10z}{25} = \frac{6y-15x}{9} \\ &= \frac{10z-6y+15x-10z+6y-15x}{4+25+9} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 5z-3y=0 \\ 3x-2z=0 \\ 2y-5x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5z=3y \\ 3x=2z \\ 2y=5x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{5} = \frac{z}{3} \\ \frac{x}{2} = \frac{z}{3} \\ \frac{y}{5} = \frac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{3}$$

Bài 3

Cho tỉ lệ thức $\frac{10a+b}{a+b} = \frac{10b+c}{b+c}$. Chứng minh rằng $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ với $a, b, c > 0$

Lời giải

$$\text{Từ } \frac{10a+b}{a+b} = \frac{10b+c}{b+c} \Rightarrow (10a+b)(b+c) = (10b+c)(a+b)$$



$$\Rightarrow 10ab + 10ac + b^2 + bc = 10ab + 10b^2 + ac + bc \Rightarrow 9b^2 = 9ac$$

$$\Rightarrow b^2 = ac \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

Bài 4

Cho các số dương a, b, c, d thỏa mãn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ và $c \neq d$.

Chứng minh rằng: $\frac{(a^{20} + b^{20})^{21}}{(c^{20} + d^{20})^{21}} = \frac{(a^{21} - b^{21})^{20}}{(c^{21} - d^{21})^{20}}$

Lời giải

Vì a, b, c, d là các số dương và $c \neq d$, mà $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ nên $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

$$\Rightarrow \frac{a^{20}}{c^{20}} = \frac{b^{20}}{d^{20}} = \frac{a^{20} + b^{20}}{c^{20} + d^{20}} \Rightarrow \left(\frac{a^{20}}{c^{20}}\right)^{21} = \left(\frac{a^{20} + b^{20}}{c^{20} + d^{20}}\right)^{21} \Rightarrow \frac{a^{20 \cdot 21}}{c^{20 \cdot 21}} = \frac{(a^{20} + b^{20})^{21}}{(c^{20} + d^{20})^{21}} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{a^{21}}{c^{21}} = \frac{b^{21}}{d^{21}} = \frac{a^{21} - b^{21}}{c^{21} - d^{21}} \Rightarrow \left(\frac{a^{21}}{c^{21}}\right)^{20} = \left(\frac{a^{21} - b^{21}}{c^{21} - d^{21}}\right)^{20} \Rightarrow \frac{a^{21 \cdot 20}}{c^{21 \cdot 20}} = \frac{(a^{21} - b^{21})^{20}}{(c^{21} - d^{21})^{20}} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{(a^{20} + b^{20})^{21}}{(c^{20} + d^{20})^{21}} = \frac{(a^{21} - b^{21})^{20}}{(c^{21} - d^{21})^{20}}$$

$$\text{Vậy } \frac{(a^{20} + b^{20})^{21}}{(c^{20} + d^{20})^{21}} = \frac{(a^{21} - b^{21})^{20}}{(c^{21} - d^{21})^{20}}$$

Bài 5

Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ với $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0, a \neq \pm b, c \neq \pm d$.

Chứng minh $\left(\frac{a-b}{c-d}\right)^{2013} = \frac{a^{2013} + b^{2013}}{c^{2013} + d^{2013}}$

Lời giải



Với $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0, a \neq \pm b, c \neq \pm d$, ta có

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a-b}{c-d} \Rightarrow \left(\frac{a-b}{c-d}\right)^{2013} = \left(\frac{a}{c}\right)^{2013} = \left(\frac{b}{d}\right)^{2013} = \frac{a^{2013} + b^{2013}}{c^{2013} + d^{2013}} \quad (\text{Tính chất dãy tỉ số}$$

bằng nhau)

$$\text{Vậy } \left(\frac{a-b}{c-d}\right)^{2013} = \frac{a^{2013} + b^{2013}}{c^{2013} + d^{2013}}$$

Bài 6

Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh $\frac{ac}{bd} = \frac{2009a^2 + 2010b^2}{2009c^2 + 2010d^2}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad (1)$$

$$\text{Mà } \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = \frac{2009a^2}{2009b^2} = \frac{2010c^2}{2010d^2} = \frac{2009a^2 + 2010c^2}{2009b^2 + 2010d^2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta suy ra: } \frac{ac}{bd} = \frac{2009a^2 + 2010b^2}{2009c^2 + 2010d^2} \quad (\text{đpcm})$$

Bài 7

Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh $\frac{7a^2 + 3ab}{11a^2 - 8b^2} = \frac{7c^2 + 3cd}{11c^2 - 8d^2}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{d^2} = \frac{7a^2}{7c^2} = \frac{b}{d} \cdot \frac{b}{d} = \frac{b}{d} \cdot \frac{a}{c} = \frac{ab}{dc} = \frac{3ab}{3cd} = \frac{7a^2 + 3ab}{7c^2 + 3cd} \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } \Rightarrow \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{d^2} = \frac{11a^2}{11c^2} = \frac{8b^2}{8d^2} = \frac{11a^2 - 8b^2}{11c^2 - 8d^2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow \frac{7a^2 + 3ab}{7c^2 + 3cd} = \frac{11a^2 - 8b^2}{11c^2 - 8d^2} \Rightarrow \frac{7a^2 + 3ab}{11a^2 - 8b^2} = \frac{7c^2 + 3cd}{11c^2 - 8d^2} \quad (\text{đpcm})$$



Bài 8

Cho 4 số khác 0 là a, b, c, d và $b + c + d$ khác 0 thỏa mãn $b^2 = ac; c^2 = bd$.

Chứng minh $\frac{a}{d} = \left(\frac{a+b+c}{b+c+d}\right)^3$

Lời giải

Vì $b^2 = ac \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ và $c^2 = bd \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ nên suy ra $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$

Đặt $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow a = bk; b = ck; c = dk$

Ta có $\frac{a}{d} = \frac{bk}{d} = \frac{ckk}{d} = k^3; \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{a+b+c}{b+c+d} = \frac{bk+ck+dk}{b+c+d} = k$

$\Rightarrow \left(\frac{bk+ck+dk}{b+c+d}\right)^3 = k^3 = \frac{a}{d}$

Vậy $\frac{a}{d} = \left(\frac{a+b+c}{b+c+d}\right)^3$

Bài 9

Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ($b, d \neq 0, c \neq d, c + 2d \neq 0$). Chứng minh rằng $\frac{a^{2017} - b^{2017}}{c^{2017} - d^{2017}} = \left(\frac{a+2b}{c+2d}\right)^{2017}$

Lời giải

Cách 1: Từ giả thiết $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

- Nếu $c = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow VT = VP = \frac{b^{2017}}{d^{2017}}$

- Nếu $c \neq 0 \Leftarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = k \Rightarrow a = kc; b = kd \Rightarrow a^{2017} - b^{2017} = k^{2017}(c^{2017} - d^{2017}) \Rightarrow VT = k^{2017}$

Ta lại có: $a + 2b = k(c + 2d) \Rightarrow \frac{a+2b}{c+2d} = k \Rightarrow VP = k^{2017} = VT$

Cách 2: - Xét với $c = 0$

- Xét với $c \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{d} = \frac{2b}{2d} = \frac{a+2b}{c+2d} \Rightarrow \frac{a^{2017}}{c^{2017}} = \frac{b^{2017}}{d^{2017}} = \frac{(a+2b)^{2017}}{(c+2d)^{2017}} = \frac{a^{2017} - b^{2017}}{c^{2017} - d^{2017}} \Rightarrow$

(đpcm)



Bài 10

Cho $\frac{bz - cy}{a} = \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c}$. Chứng minh rằng $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

Lời giải

*) Phân tích: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \Rightarrow ay - bx = 0; bz - yc = 0$

Ta có: $\frac{bz - cy}{a} = \frac{a(bz - cy)}{a^2} = \frac{abz - acy}{a^2}; \frac{cx - az}{b} = \frac{cxb - azb}{b^2}; \frac{ay - bx}{c} = \frac{acy - bcx}{c^2}$

$\Rightarrow \frac{bz - cy}{a} = \frac{(abz - acy) + (bcx - abz) + (acy - bcx)}{a^2 + b^2 + c^2} = 0 \Rightarrow bz - cy = 0 \Rightarrow \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

Tương tự $\Rightarrow cx - az = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{z}{c} \Rightarrow \frac{y}{b} = \frac{x}{a} = \frac{z}{c}$.

Bài 11

Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ($a, b, c, d \neq 0; b \neq d$). Chứng minh rằng $\frac{a^2 + ac}{c^2 - ca} = \frac{b^2 + bd}{d^2 - bd}$

Lời giải

Từ giả thiết $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (1); $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d} = \frac{c-a}{d-b} = \frac{a+c}{b+d} \Rightarrow \frac{a+c}{c-a} = \frac{b+d}{d-b}$ (2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow \frac{a}{c} \cdot \frac{a+c}{c-a} = \frac{b}{d} \cdot \frac{b+d}{d-b} \Rightarrow \frac{a^2 + ac}{c^2 - ac} = \frac{b^2 + bd}{d^2 - bd}$ (đpcm).

Bài 12

Chứng minh rằng với a, b, c là các số thực khác 0 và: $\frac{ab + ac}{4} = \frac{bc + ab}{6} = \frac{ca + cb}{6}$ thì

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{15}$$

Lời giải

Ta có: $\frac{ab + ac}{4} = \frac{bc + ab}{6} = \frac{ca + cb}{6} = \frac{2(ab + bc + ca)}{18} = \frac{ab + bc + ca}{9}$

$= \frac{(ab + bc + ca) - (ab + ca)}{9 - 4} = \frac{bc}{5} = \frac{(ab + bc + ca) - (bc + ab)}{9 - 6} = \frac{ac}{3} = \frac{ab}{1}$



$$\Rightarrow \frac{bc}{5} = \frac{ac}{3} = \frac{ab}{1} \Rightarrow \frac{abc}{5a} = \frac{abc}{3b} = \frac{abc}{c} \Rightarrow 5a = 3b = c \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{15}$$

Bài 13

Cho $\frac{x}{a+2b+c} = \frac{y}{2a+b-c} = \frac{z}{4a-4b+c}$. Chứng minh rằng $\frac{a}{x+2y+z} = \frac{b}{2x+y-z}$
 $= \frac{c}{4x-4y+z}$. Với các mẫu số khác 0 và $a, b, c \neq 0$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{x}{a+2b+c} &= \frac{y}{2a+b-c} = \frac{z}{4a-4b+c} \\ &= \frac{x+2y+z}{(a+2b+c) + 2(2a+b-c) + (4a-4b+c)} = \frac{x+2y+z}{9a} \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự } = \frac{2x+y-z}{9b} = \frac{4x-4y+z}{9c} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Bài 14

Cho các số a, b, c, x, y, z thỏa mãn $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{bz - cy}{a} = \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c}$$

Lời giải

$$\text{Đặt: } \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k \Rightarrow x = ak; y = bk; z = ck$$

$$\Rightarrow \frac{bz - cy}{a} = \frac{bck - bck}{a} = 0, \text{ và } \frac{cx - az}{b} = 0, \frac{ay - bx}{c} = 0 \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Bài 15

Cho dãy tỉ số $\frac{bz - cy}{a} = \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c}$. Chứng minh rằng $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

Lời giải



Từ giả thiết

$$\Rightarrow \frac{bxz - cxy}{ax} = \frac{cxy - ayz}{by} = \frac{ayz - bxz}{cz} = \frac{(bxz - cxy) + (cxy - ayz) + (ayz - bxz)}{ax + by + cz} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} bz = cy \\ cx = az \\ ay = bx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \\ \frac{x}{a} = \frac{z}{c} \\ \frac{x}{a} = \frac{y}{b} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \text{ (đpcm)}$$

Bài 16

Cho dãy tỉ số bằng nhau $\frac{2bz - 3cy}{a} = \frac{3cx - az}{2b} = \frac{ay - 2bx}{3c}$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{3c}$$

Lời giải

Từ giả thiết ta có :

$$\frac{2abz - 3acy}{a^2} = \frac{6bcx - 2abz}{4b^2} = \frac{3acy - 6bcx}{9c^2} = \frac{2abz - 3acy + 6bcx - 2abz + 3acy - 6bcx}{a^2 + 4b^2 + 9c^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2bz - 3cy = 0 \Rightarrow \frac{z}{3c} = \frac{y}{2b} \text{ và } 3cx - az = 0 \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{z}{3c} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c}.$$

Bài 17

Cho $\frac{x}{a+2b+c} = \frac{y}{2a+b-c} = \frac{z}{4a-4b+c}$.

Chứng minh : $\frac{a}{x+2y+z} = \frac{b}{2x+y-z} = \frac{c}{4x-4y+z}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{a}{x+2y+z} = \frac{b}{2x+y-z} = \frac{c}{4x-4y+z} \Rightarrow \frac{a+2b+c}{x} = \frac{2a+b-c}{y} = \frac{4a-4b+c}{z}$$

$$= \frac{(a+2b+c) + 2(2a+b-c) + (4a-4b+c)}{x+2y+z} = \frac{a}{x+2y+z}$$

$$= \frac{2(a+2b+c) + (2a+b-c) - (4a-4b+c)}{2x+y-z} = \frac{b}{2x+y-z}$$



$$= \frac{4(a + 2b + c) - 4(2a + b - c) + (4a - 4b + c)}{4x - 4y + z} = \frac{c}{4x - 4y + z}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{x + 2y + z} = \frac{b}{2x + y - z} = \frac{c}{4x - 4y + z} \quad (\text{đpcm})$$

Bài 18

Cho $\frac{x}{a + 2b + c} = \frac{y}{2a + b - c} = \frac{z}{4a - 4b + c}$.

Chúng minh: $\frac{a}{x + 2y + z} = \frac{b}{2x + y - z} = \frac{c}{4x - 4y + z}$

Lời giải

Từ giả thiết $\Rightarrow \frac{a + 2b + c}{x} = \frac{2a + b - c}{y} = \frac{4a - 4b + c}{z}$

$$= \frac{(a + 2b + c) + 2(2a + b - c) + (4a - 4b + c)}{x + 2y + z} = \frac{9a}{x + 2y + z}$$

$$= \frac{2(a + 2b + c) + (2a + b - c) - (4a - 4b + c)}{2x + y - z} = \frac{9b}{2x + y - z}$$

$$= \frac{4(a + 2b + c) - 4(2a + b - c) + (4a - 4b + c)}{4x - 4y + z} = \frac{9c}{4x - 4y + z}$$

Bài 19

Cho $\frac{x}{a - 2b + c} = \frac{y}{2a - b - c} = \frac{z}{4a + 4b + c}$.

Chúng minh: $\frac{a}{x + 2y + z} = \frac{b}{z - y - 2x} = \frac{c}{4x - 4y + z}$

Lời giải

Nghịch đảo giả thiết ta được: $\frac{a - 2b + c}{x} = \frac{2a - b - c}{y} = \frac{4a + 4b + c}{z}$

$$= \frac{(a - 2b + c) + 2(2a - b - c) + (4a + 4b + c)}{x + 2y + z} = \frac{9a}{x + 2y + z} \quad (1)$$



$$= \frac{(4a + 4b + c) - (2a - b - c) - 2(a - 2b + c)}{z - y - 2x} = \frac{9b}{z - y - 2x} \quad (2)$$

$$= \frac{4(a - 2b + c) - 4(2a - b - c) + (4a + 4b + c)}{4x - 4y + z} = \frac{9c}{4x - 4y + z} \quad (3)$$

Từ (1)(2)(3)

$$\Rightarrow \frac{9a}{x + 2y + z} = \frac{9b}{z - y - 2x} = \frac{9c}{4x - 4y + z} \Rightarrow \frac{a}{x + 2y + z} = \frac{b}{z - y - 2x} = \frac{c}{4x - 4y + z}$$

(đpcm)

BÀI TẬP TỰ LUYỆN DẠNG TOÁN

Bài 1:

Cho $\frac{x^2 - yz}{a} = \frac{y^2 - zx}{b} = \frac{z^2 - xy}{c}$. Chứng minh: $\frac{a^2 - bc}{x} = \frac{b^2 - ca}{y} = \frac{c^2 - ab}{z}$

Lời giải

Đặt $\frac{x^2 - yz}{a} = \frac{y^2 - zx}{b} = \frac{z^2 - xy}{c} = k \Rightarrow a = \frac{x^2 - yz}{k}; b = \frac{y^2 - zx}{k}; c = \frac{z^2 - xy}{k}$

$$\Rightarrow a^2 - bc = \frac{(x^4 - 2x^2yz + y^2z^2)}{k^2} - \frac{y^2z^2 - xy^3 - xz^3 + x^2yz}{k^2} \Rightarrow \frac{a^2 - bc}{x} = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

Chứng minh tương tự: $\frac{b^2 - ca}{y} = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ và $\frac{c^2 - ab}{z} = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

(đpcm)

Bài 2:

Cho $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$. Chứng minh rằng $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{b}; \frac{b^2 - a^2}{a^2 + c^2} = \frac{b - a}{a}$

Lời giải

Từ $\frac{a}{c} = \frac{c}{b} \Rightarrow c^2 = ab$, thay vào các biểu thức ta được

$$a) \frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a^2 + ab}{b^2 + ab} = \frac{a(a + b)}{b(a + b)} = \frac{a}{b}$$

$$b) \frac{b^2 - a^2}{a^2 + c^2} = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + ab} = \frac{(b - a)(b + a)}{a(a + b)} = \frac{b - a}{a}$$



Bài 3:

Chứng minh rằng nếu $a + 2c = 3b; 3bd = c(b + 2d)$ thì $\frac{a}{c} = \frac{c}{b} (b, d \neq 0)$

Lời giải

Ta có $\begin{cases} 3bd = c(b + 2d) \\ a + 2c = 3b \end{cases} \Rightarrow (a + 2c)d = c(b + 2d) \Leftrightarrow ad = bc \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ (đpcm)}$

Bài 4:

Cho $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$. Chứng minh rằng $\frac{5a^5 + c^5}{5b^5 + d^5} = \frac{(a + c)^5}{(b + d)^5} (b + d \neq 0)$

Lời giải

Ta có: $\frac{a}{c} = \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b + d} \rightarrow \frac{a^5}{b^5} = \frac{c^5}{d^5} = \frac{(a + c)^5}{(b + d)^5}$.

Do vậy $\Rightarrow \frac{(a + c)^5}{(b + d)^5} = \frac{5a^5}{5b^5} = \frac{c^5}{d^5} = \frac{5a^5 + c^5}{5b^5 + d^5}$

Bài 5:

Cho tỷ lệ thức $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$. Chứng minh rằng: $\frac{7a^2 - 4ab + 2b^2}{b^2 + 3ab} = \frac{7c^2 - 4cd + 2d^2}{d^2 + 3cd}$ (với các mẫu khác 0)

Lời giải

Đặt $\frac{a}{c} = \frac{c}{b} = k \Rightarrow a = bk; c = dk \Rightarrow \frac{7a^2 - 4ab + 2b^2}{b^2 + 3ab} = \frac{7k^2b^2 - 4kb^2 + 2b^2}{b^2 + 3kb^2} = \frac{7k^2 - 4k + 2}{1 + 3k} \text{ (1)}$

Tương tự: $\frac{7c^2 - 4cd + 2d^2}{d^2 + 3cd} = \frac{7k^2d^2 - 4kd^2 + 2d^2}{d^2 + 3kd^2} = \frac{7k^2 - 4k + 2}{1 + 3k} \text{ (2)}$

Từ (1)(2) ta có đpcm

Bài 6:

Cho bốn số a, b, c, d thỏa mãn: $b^2 = ac; c^2 = bd$. Chứng minh rằng $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3} = \frac{a}{d}$

Lời giải

Từ $b^2 = ac \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c}; c^2 = bd \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}; \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{d}$



Do vậy $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3} = \frac{a}{d}$

Bài 7:

Cho $\frac{3bz - 5cy}{a} = \frac{5cx - az}{3b} = \frac{ay - 3bx}{5c}$. Chứng minh rằng $\frac{x}{a} = \frac{y}{3b} = \frac{z}{5c}$

Lời giải

Từ $\frac{3bz - 5cy}{a} = \frac{5cx - az}{3b} = \frac{ay - 3bx}{5c}$, nhân cả tử và mẫu với $a, 3b, 5c$ ta được:

$$\frac{3abz - 5acy}{a^2} = \frac{15bcx - 3abz}{9b^2} = \frac{5acy - 15bcx}{25c^2} = \frac{3abz - 5acy + 15bcx - 3abz + 5acy - 15bcx}{a^2 + 9b^2 + 25c^2} = 0$$

Từ đó ta có:
$$\left. \begin{array}{l} 3bz - 5cy = 0 \Rightarrow \frac{y}{3b} = \frac{z}{5c} \\ 5cx - az = 0 \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{z}{5c} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{3b} = \frac{z}{5c} \text{ (đpcm).}$$

Bài 8:

Cho $\frac{3x - 2y}{4} = \frac{2z - 4x}{3} = \frac{4y - 3z}{2}$. Chứng minh rằng: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$

Lời giải

$$\frac{3x - 2y}{4} = \frac{2z - 4x}{3} = \frac{4y - 3z}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{4(3x - 2y)}{16} = \frac{3(2z - 4x)}{9} = \frac{2(4y - 3z)}{4} = \frac{12x - 8y + 6z - 12x + 8y - 6z}{29} = 0$$

Vậy $\frac{3x - 2y}{4} = 0 \Rightarrow 3x = 2y \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \text{ (1)}$

$\frac{2z - 4x}{3} = 0 \Rightarrow 2z = 4x \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{z}{4} \text{ (2)}$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$

Bài 9:

Cho x, y, z thỏa mãn $x^2 = yz, y^2 = xz, z^2 = xy$. Chứng minh rằng: $x = y = z$

Lời giải

TH 1: Nếu $x = 0$ thì $y = z = 0 \Rightarrow x = y = z$. Tương tự với y, z

TH 2: x, y, z là các số khác 0 từ $x^2 = yz, y^2 = xz, z^2 = xy$



$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{z}{x}; \frac{y}{z} = \frac{x}{y}; \frac{z}{x} = \frac{y}{z} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau:

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x} = \frac{x+y+z}{y+z+x} = 1 \Rightarrow x = y = z$$

Vậy $x = y = z$ (đpcm).

Bài 10:

Cho $\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z}$. Chứng minh rằng biểu thức sau có

giá trị nguyên: $A = \frac{x+y}{z+t} + \frac{y+z}{t+x} + \frac{z+t}{x+y} + \frac{t+z}{y+z}$

Lời giải

Ta có: $\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z} = \frac{x+y+z+t}{2(x+y+z+t)} = \frac{1}{2}$

Suy ra $2x = y+z+t; 2y = z+t+x; 2z = t+x+y; 2t = x+y+z$

Từ đó học sinh suy ra được: $x+y = z+t; y+z = t+x; z+t = x+y; t+x = y+z$

Khi đó tính được $A = 4$. Vậy A có giá trị nguyên.

Bài 11:

Cho các số dương $a, b, c, d; c \neq d$ và $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh

$$\frac{(a^{2016} + b^{2016})^{2017}}{(c^{2016} + d^{2016})^{2017}} = \frac{(a^{2017} - b^{2017})^{2016}}{(c^{2017} - d^{2017})^{2016}}$$

Lời giải

Vì a, b, c, d là các số dương và $c \neq d$, mà $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ nên $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

$$\Rightarrow \frac{a^{2016}}{c^{2016}} = \frac{b^{2016}}{d^{2016}} = \frac{a^{2016} + b^{2016}}{c^{2016} + d^{2016}} \Rightarrow \left(\frac{a^{2016}}{c^{2016}}\right)^{2017} = \left(\frac{a^{2016} + b^{2016}}{c^{2016} + d^{2016}}\right)^{2017} \Rightarrow \frac{a^{2016 \cdot 2017}}{c^{2016 \cdot 2017}} = \frac{(a^{2016} + b^{2016})^{2017}}{(c^{2016} + d^{2016})^{2017}} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{a^{2017}}{c^{2017}} = \frac{b^{2017}}{d^{2017}} = \frac{a^{2017} - b^{2017}}{c^{2017} - d^{2017}} \Rightarrow \left(\frac{a^{2017}}{c^{2017}}\right)^{2016} = \left(\frac{a^{2017} - b^{2017}}{c^{2017} - d^{2017}}\right)^{2016} \Rightarrow \frac{a^{2017 \cdot 2016}}{c^{2017 \cdot 2016}} = \frac{(a^{2017} - b^{2017})^{2016}}{(c^{2017} - d^{2017})^{2016}} \quad (2)$$



Dạng 3. Tìm đại lượng chưa biết trong tỷ lệ thức

Kiến thức cần nhớ

1. Phương pháp giải theo định nghĩa

Có: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow a = bk; c = dk$. Thay vào biểu thức đã cho để tìm k

2. Phương pháp sử dụng các tính chất của dãy tỷ số bằng nhau

Ví dụ: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{x}{y} = \frac{a - 2c + 3x}{b - 2d + 3y} = k \Rightarrow$ các đại lượng chưa biết

B. Bài tập

Bài 1

Tìm x, y, z biết: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}; \frac{y}{5} = \frac{z}{4}$ và $x - y + z = -49$

Lời giải

Từ $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}; \frac{y}{5} = \frac{z}{4}$ suy ra $\frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{12}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{12} = \frac{x - y + z}{10 - 15 + 12} = \frac{-49}{7} = -7$$

Suy ra $x = -7.10 = -70; y = -7.15 = -105; z = -7.12 = -84$

Bài 2

Tìm $x; y; z$ biết: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-4}$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 116$

Lời giải

Ta có $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-4} \Rightarrow \frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{16}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:



$$\frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{16} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{4 + 9 + 16} = \frac{116}{29} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{4} = 4 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$$

$$\frac{y^2}{9} = 4 \Rightarrow y^2 = 36 \Rightarrow y = \pm 6$$

$$\frac{z^2}{16} = 4 \Rightarrow z^2 = 64 \Rightarrow z = \pm 8$$

Mà $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-4} \Rightarrow x, y$ cùng dấu và x, z trái dấu

$$\Rightarrow (x; y; z) \in \{(4; 6; -8); (-4; -6; 8)\}$$

Bài 3

Tìm x, y, z biết: $\frac{y+z+2}{x} = \frac{x+z+3}{y} = \frac{x+y-5}{z} = \frac{1}{x+y+z}$

Lời giải

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{y+z+2}{x} = \frac{x+z+3}{y} = \frac{x+y-5}{z} = \frac{2x+2y+2z}{x+y+z} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2$$

Do đó: $\frac{1}{x+y+z} = 2 \Rightarrow x+y+z = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y = \frac{1}{2} - z \\ y+z = \frac{1}{2} - x \\ z+x = \frac{1}{2} - y \end{cases}$$

Ta có: $\frac{y+z+2}{x} = 2 \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2} - x + 2}{x} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - x + 2 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{5}{6}$

$\frac{x+z+3}{y} = 2 \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2} - y + 3}{y} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - y + 3 = 2y \Leftrightarrow y = \frac{7}{6}$



$$\frac{x+y-5}{z} = 2 \Leftrightarrow \frac{1-z-5}{2} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - z - 5 = 2z \Leftrightarrow z = \frac{-3}{2}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{5}{6}, y = \frac{7}{6}, z = -\frac{3}{2}$$

Bài 4

Tìm x, y biết rằng: $\frac{2x+3}{3} = \frac{3y-2}{6} = \frac{2x+6y-1}{5x}$

Lời giải

Đặt $\frac{2x+3}{3} = \frac{3y-2}{6} = \frac{2x+6y-1}{5x} = k$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+3=3k \\ 3y-2=6k \\ 2x+6y-1=5xk \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3k-3}{2} \\ y = \frac{6k+2}{3} \\ 2 \cdot \frac{3k-3}{2} + 6 \cdot \frac{6k+2}{3} - 1 = 5 \cdot \frac{3k-3}{2} \cdot k \quad (*) \end{cases}$$

Giải(*) ta có $2 \cdot \frac{3k-3}{2} + 6 \cdot \frac{6k+2}{3} - 1 = 5 \cdot \frac{3k-3}{2} \cdot k$

$$\Leftrightarrow 3k - 3 + 12k + 4 - 1 = \frac{15k^2 - 15k}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{15k^2 - 15k}{2} - 15k = 0 \Leftrightarrow 15k^2 - 15k - 30k = 0 \Leftrightarrow 15k^2 - 45k = 0 \Leftrightarrow 15k(k-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = 3 \end{cases}$$

Trường hợp 1: $k = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-3}{2} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$. Trường hợp 2: $k = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{20}{3} \end{cases}$

Bài 5

Tìm x, y, z biết: $x+y+z = \frac{x}{y+z-2} = \frac{y}{z+x-3} = \frac{z}{x+y+5}$

Lời giải



TH: $x + y + z = 0$ suy ra: $x = 0; y = 0; z = 0$

TH: $x + y + z \neq 0$

Từ

$$x + y + z = \frac{x}{y + z - 2} = \frac{y}{z + x - 3} = \frac{z}{x + y + 5} \Rightarrow \frac{1}{x + y + z} = \frac{y + z - 2}{x} = \frac{z + x - 3}{y} = \frac{x + y + 5}{z}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{y + z + 1}{x} = \frac{x + z + 2}{y} = \frac{x + y - 3}{z} = \frac{1}{x + y + z} = 2$$

$$\Rightarrow x + y + z = 0,5 \Rightarrow \frac{0,5 - x + 1}{x} = \frac{0,5 - y + 2}{y} = \frac{0,5 - z - 3}{z} = 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}; y = \frac{5}{6}; z = \frac{-5}{6}$$

Bài 6

Tìm ba số $a; b; c$ biết $a; b$ tỉ lệ thuận với $3; 5$ và $b; c$ tỉ lệ nghịch với $5; 4$ và $2a - 3b + c = -22$.

Lời giải

$$\text{Vì } a, b \text{ tỉ lệ thuận với } 3; 5 \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{5} \Rightarrow \frac{a}{12} = \frac{b}{20}$$

$$\text{Vì } b; c \text{ tỉ lệ nghịch với } 5; 4 \Rightarrow 5b = 4c \Rightarrow \frac{b}{4} = \frac{c}{5} \Rightarrow \frac{b}{20} = \frac{c}{25}$$

$$\frac{a}{12} = \frac{b}{20} = \frac{c}{25} = \frac{2a - 3b + c}{24 - 60 + 25} = \frac{-22}{-11} = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 24 \\ b = 40 \\ c = 50 \end{cases}$$

Vậy $a = 24; b = 40; c = 50$.

Bài 7

Tìm ba số x, y, z thoả mãn $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ và $2x^2 + 2y^2 - 3z^2 = -100$

Lời giải

$$\text{Từ } \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$$

$$\text{ta suy ra: } \frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{16} = \frac{z^2}{25} = \frac{2x^2}{18} = \frac{2y^2}{32} = \frac{3z^2}{75} = \frac{2x^2 + 2y^2 - 3z^2}{-25} = \frac{-100}{-25} = 4$$



$$\text{Suy ra } \begin{cases} x^2 = 36 \\ y^2 = 64 \\ z^2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \\ x = 10 \\ x = -6 \\ y = -8 \\ z = -10 \end{cases} \quad (\text{Vì } x, y, z \text{ cùng dấu})$$

KL: Có hai bộ $(x; y; z)$ thoả mãn là: $(6; 8; 10)$ và $(-6; -8; -10)$

Bài 8

Tìm các số x, y, z biết $2x = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ và $x + y - \frac{z}{2} = -20$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2x = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} \Leftrightarrow \frac{x}{0,5} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2,5}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{0,5} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2,5} = \frac{x + y - \frac{z}{2}}{0,5 + 3 - 2,5} = \frac{-20}{1} = -20$$

$$\text{Suy ra: } x = 0,5 \cdot (-20) = -10$$

$$y = 3 \cdot (-20) = -60$$

$$z = 2,5 \cdot (-20) = -50$$

Bài 9

Tìm x, y biết: $\frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{5x} = \frac{1+7y}{4x}$

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{5x} = \frac{1+7y}{4x} = \frac{1+7y-1-5y}{4x-5x} = \frac{2y}{-x} = \frac{1+5y-1-3y}{5x-12} = \frac{2y}{5x-12}$$

$$\Rightarrow \frac{2y}{-x} = \frac{2y}{5x-12} \Rightarrow 5x-12 = -x \Rightarrow 6x = 12 \Rightarrow x = 2$$

Thay $x = 2$ vào tỉ lệ thức $\frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{5x}$ ta có



$$\frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{10} \Rightarrow 10+30y = 12+60y \Rightarrow y = -\frac{1}{15}$$

Vậy $x = 2; y = \frac{-1}{15}$

Bài 10

Tìm x, y, z , biết $\frac{2x-1}{3} = \frac{3y-2}{5} = \frac{2x+3y-3}{4x}$

Lời giải

Tìm x, y, z biết: $\frac{2x-1}{3} = \frac{3y-2}{5} = \frac{2x+3y-3}{4x}$

điều kiện $x \neq 0$

Từ $\frac{2x-1}{3} = \frac{3y-2}{5} = \frac{2x+3y-3}{4x} = \frac{2x+3y-3}{4x}$ (1)

Trường hợp 1: nếu $2x+3y-3 \neq 0$

Nên $4x = 8 \Rightarrow x = 2$ (thỏa mãn)

Mà $\frac{2x-1}{3} = \frac{3y-2}{5} \Rightarrow \frac{2.2-1}{3} = \frac{3y-2}{5} \Rightarrow y = \frac{7}{3}$

Vậy $x = 2; y = \frac{7}{3}$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2: nếu $2x+3y-3 = 0$

Nên $x = \frac{1}{2}; y = \frac{2}{3}$ (thỏa mãn)

Vậy $x = 2; y = \frac{7}{3}$ hoặc $x = \frac{1}{2}; y = \frac{2}{3}$

Bài 11

Tìm các số a, b, c biết rằng: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}; a + 2b - 3c = -40$

Lời giải

Cách 1: Đặt $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k \Rightarrow k = 10 \Rightarrow a = 20; b = 30; c = 40$





Cách 2: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{a+2b-3c}{2+6-12} = 10 \rightarrow a = 20; b = 30; c = 40$

Bài 12

Cho tỷ lệ thức $\frac{5x-2y}{3x+4y} = \frac{3}{4}; y^2 - 5y + 4 = 0$. Tìm x, y

Lời giải

Theo giả thiết $\frac{5x-2y}{3x+4y} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4(5x-2y) = 3(3x+4y) \Leftrightarrow x = \frac{20}{11}y^{(*)}$

Từ $y^2 - 5y + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{20}{11} \\ x = \frac{80}{11} \end{cases}$

- Nếu $x = \frac{20}{11} \Rightarrow y = \frac{20}{11} : \frac{20}{11} = 1$

- Nếu $x = \frac{80}{11} \Rightarrow y = \frac{80}{11} : \frac{20}{11} = 4$

Bài 13

Tìm x, y, z biết rằng: $x + y + z = \frac{x}{y+z-3} = \frac{y}{x+z-4} = \frac{z}{x+y+7}$

Lời giải

Trường hợp 1: Có ít nhất 1 trong ba số x, y, z bằng 0

$\Rightarrow x + y + z = 0$ và hai số còn lại cũng bằng 0. Vậy ta có $(x; y; z) = (0; 0; 0)$

Trường hợp 2: $x, y, z \neq 0 \Rightarrow x + y + z \neq 0$

Theo giả thiết ta có:

$$x + y + z = \frac{x}{y+z-3} = \frac{y}{x+z-4} = \frac{z}{x+y+7} = \frac{x+y+z}{2(x+y+z)} = \frac{1}{2}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = \frac{1}{2} \\ y + z - 3 = 2x \\ x + z - 4 = 2y \\ x + y + z = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - 3 = 3x \\ \frac{1}{2} - 4 = 3y \\ \frac{1}{2} + 7 = 3z \end{cases} \quad (\text{cộng hai vế với } x \text{ ta được } \frac{1}{2} - 3 = 3x)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5}{6}; y = \frac{-7}{6}; z = \frac{5}{2}.$$

Vậy có hai cặp số thỏa mãn bài toán $(x; y; z) = (0; 0; 0); \left(\frac{-5}{6}; \frac{-7}{6}; \frac{5}{2}\right)$

Bài 14

Cho a, b, c đôi một khác nhau và khác 0, biết \overline{ab} là số nguyên tố và $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{b}{c}$. Tìm số \overline{abc}

Lời giải

Ta có: $1 \leq a, b, c \leq 9; a, b, c \in \mathbb{N}$. Theo giả thiết: $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow \frac{10a + b}{10b + c} = \frac{b}{c}$

$$\text{Để thấy } \frac{b}{c} = \frac{10a + b}{10b + c} = \frac{10a}{10b} = \frac{a}{b} \Rightarrow ac = b^2 \quad (1)$$

Vì \overline{ab} là số nguyên tố nên $\Rightarrow b \in \{1; 3; 7; 9\}$

+) Nếu $b = 1 \Rightarrow ac = 1 \Rightarrow a = c = 1$ (loại)

+) Nếu $b = 3 \Rightarrow ac = 9 = 1.9 = 9.1 \Rightarrow a = c = 1$ (loại)

Vì \overline{ab} là số nguyên tố nên $\Rightarrow a \neq 9 \Rightarrow a = 1; c = 9$. Thử lại thấy thỏa mãn

+) Nếu $b = 7 \Rightarrow ac = 49 \Rightarrow a = c = 7 \Rightarrow$ (loại)

+) Nếu $b = 9 \Rightarrow ac = 81 \Rightarrow a = c = 9 \Rightarrow$ (loại)

Vậy $a = 1; b = 3; c = 9 \Rightarrow \overline{abc} = 139$

Bài 15

Số A là tổng của ba số, biết rằng ba số này tỷ lệ với $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$ và tổng bình phương của chúng là 24309. Hãy tìm số A



Lời giải

Giải sử $A = a + b + c$ và $\begin{cases} a : b : c = \frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6} & (1) \\ a^2 + b^2 + c^2 = 24309 & (2) \end{cases}$

Từ (1) $\Rightarrow \frac{a}{\frac{2}{5}} = \frac{b}{\frac{3}{4}} = \frac{c}{\frac{1}{6}} = k \Rightarrow a = \frac{2}{5}k; b = \frac{3}{4}k; c = \frac{1}{6}k \Rightarrow (2) \Leftrightarrow k^2 \left(\frac{4}{25} + \frac{9}{16} + \frac{1}{36} \right) = 24309$

$\Leftrightarrow k^2 = 32400 \Leftrightarrow k = \pm 180$

+) $k = 180 \Rightarrow A = \frac{2}{5} \cdot 180 + \frac{3}{4} \cdot 180 + \frac{1}{6} \cdot 180 = 237$

+) $k = -180 \Rightarrow A = -237$

Bài 16

Tìm x, y, z biết :

a) $\frac{15}{x-9} = \frac{20}{y-12} = \frac{40}{z-24}$ và $xy = 1200$

b) $\frac{40}{x-30} = \frac{20}{y-15} = \frac{28}{z-21}$ và $xyz = 22400$

Lời giải

a) Từ giả thiết $\Rightarrow \frac{x-9}{15} = \frac{y-12}{20} = \frac{z-24}{40} = \frac{x}{15} - \frac{3}{5} = \frac{y}{20} - \frac{3}{5} = \frac{z}{40} - \frac{3}{5}$

$\Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{40}$, đặt $\frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{40} = k \Rightarrow \begin{cases} x = 15k \\ y = 20k \end{cases}$

Mà $x, y = 1200 \Rightarrow 15k \cdot 20k = 1200 \Rightarrow k = \pm 2$

- Với $k = 2 \Rightarrow x = 30; y = 40; z = 80$

- Với $k = -2 \Rightarrow x = -30; y = -40; z = -80$

b) Từ giả thiết $\Rightarrow \frac{x-30}{40} = \frac{y-15}{20} = \frac{z-21}{28} \Rightarrow \frac{x}{40} = \frac{y}{20} = \frac{z}{28} = k,$



$$\text{đặt } \frac{x}{40} = \frac{y}{20} = \frac{z}{28} = k \Rightarrow \begin{cases} x = 40k \\ y = 20k \\ z = 28k \end{cases}$$

$$\text{Mà: } x.y.z = 22400 \Rightarrow 40k.20k.28k = 224000 \Rightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 20 \\ z = 28 \end{cases}$$

Bài 17

Tìm x, y, z biết :

a) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ và $2x + 3y - z = 50$

b) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ và $x - 2y + 3z = 14$

Lời giải

a) Ta có $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} = \frac{2(x-1) + 3(y-2) - (z-3)}{4 + 9 - 4} = \frac{(2x + 3y - z) - 5}{9} = 5$

+ $\frac{x-1}{2} = 5 \Rightarrow x - 1 = 10 \Rightarrow x = 11$

+ $\frac{y-2}{3} = 5 \Rightarrow y - 2 = 10 \Rightarrow y = 12$

+ $\frac{z-3}{4} = 5 \Rightarrow z - 3 = 20 \Rightarrow z = 23$

b) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} = \frac{(x-1) - 2(y-2) + 3(z-3)}{2 - 6 + 12} = \frac{(x - 2y + 3z) - 6}{8} = 1$

+ $\frac{x-1}{2} = 1 \Rightarrow x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3$

+ $\frac{y-2}{3} = 1 \Rightarrow y - 2 = 3 \Rightarrow y = 5$

+ $\frac{z-3}{4} = 1 \Rightarrow z - 3 = 4 \Rightarrow z = 7$



Bài 18

Tìm x, y, z biết :

a) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{6}$ và $5z - 3x - 4y = 50$

b) $\frac{4}{3x-2y} = \frac{3}{2z-4x} = \frac{2}{4y-3z}$ và $x + y - z = -10$

Lời giải

a) Ta có $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{6} =$

$$\frac{5(z-5) - 3(x-1) - 4(y+3)}{30 - 6 - 16} = \frac{(5z - 3x - 4y) - 34}{8} = \frac{50 - 34}{8} = 2$$

$$+ \frac{x-1}{2} = 2 \Rightarrow x-1 = 4 \Rightarrow x = 5$$

$$+ \frac{y+3}{4} = 2 \Rightarrow y+3 = 8 \Rightarrow y = 5$$

$$+ \frac{z-5}{6} = 2 \Rightarrow z-5 = 12 \Rightarrow z = 17$$

b) Từ $\frac{4}{3x-2y} = \frac{3}{2z-4x} = \frac{2}{4y-3z} \Rightarrow \frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$

$$= \frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{2} = \frac{(12x-8y) + (6z-12x) + (8y-6z)}{27} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2y \\ 2z = 4x \\ 4y = 3z \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y-z}{2+3-4} = -10.$$

Bài 19

Tìm các số x, y, z biết chúng thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau $3x + 2y + z = 169$

và $\frac{3x+25}{144} = \frac{2y-169}{25} = \frac{z+144}{169}$

Lời giải

Ta có: $\frac{3x+25}{144} = \frac{2y-169}{25} = \frac{z+144}{169} = \frac{(3x+2y+z) + (25-169+144)}{338} = \frac{169}{338} = \frac{1}{2}$



$$\Rightarrow 3x + 25 = \frac{144}{2} = 72 \Rightarrow x = \frac{47}{3}$$

Tương tự ta sẽ tìm được y và z .

Bài 20

Tìm các số x, y, z biết

a) $\frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z}{3}$ và $x^2 + y^2 - z^2 = 585$

b) $x : y : z = 3 : 4 : 5$ và $2x^2 + 2y^2 - 3z^2 = -100$

Lời giải

a) ta có $\frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z}{3} \Rightarrow \frac{x^2}{25} = \frac{y^2}{49} = \frac{z^2}{9} = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{25 + 49 - 9} = 9 \Rightarrow (x; y; z) = (45; 63; 27)$

b) $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{16} = \frac{z^2}{25} = \frac{2x^2 + 2y^2 - 3z^2}{18 + 32 - 75} = \frac{-100}{-25} = 4 \Rightarrow (x; y; z) = (12; 16; 20)$

Bài 21

Tìm các số x, y, z biết

a) $\frac{x^3}{8} = \frac{y^3}{64} = \frac{z^3}{216}$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 14$

b) $\frac{x^3}{8} = \frac{y^3}{27} = \frac{z^3}{64}$ và $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = -650$

Lời giải

a) Từ giả thiết ta có $\left(\frac{x}{2}\right)^3 = \left(\frac{y}{4}\right)^3 = \left(\frac{z}{6}\right)^3$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{16} = \frac{z^2}{36} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{4 + 16 + 36} = \frac{14}{56} = \frac{1}{4} \Rightarrow (x; y; z)$$

b) Ta có $\frac{x^3}{8} = \frac{y^3}{27} = \frac{z^3}{64} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{16} = \frac{x^2 + 2y^2 - 3z^2}{-26} = \frac{-650}{-26} = 25$
 $\Rightarrow (x; y; z)$

Bài 22

Tìm các số x, y biết $\frac{x^3 + y^3}{6} = \frac{x^3 - 2y^3}{4}$ và $x^6 \cdot y^6 = 64$

Lời giải



$$\text{Ta có } \frac{x^3 + y^3}{6} = \frac{x^3 - 2y^3}{4} = \frac{(x^3 + y^3) - (x^3 - 2y^3)}{6 - 4} = \frac{2(x^3 + y^3) + (x^3 - 2y^3)}{12 + 4} = \frac{3y^3}{2} = \frac{3x^3}{16}$$

$$\Rightarrow y^3 = \frac{x^3}{8} \Leftrightarrow \frac{x^6}{64} = y^6 \Rightarrow \begin{cases} x^6 = 64k \\ y^6 = k \end{cases} \Rightarrow k = \pm 1$$

Bài 23

Tìm các số x, y, z biết

a) $2x = 3y = 5z$ và $|x + y - z| = 95$

b) $\frac{6}{11}x = \frac{9}{2}y = \frac{18}{5}z$ và $-x + z = -196$

Lời giải

a) Ta có: $|x + y - z = 95| \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 95 \\ x + y - z = -95 \end{cases}$

Nên $2x = 3y = 5z \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{6} = \frac{x + y - z}{15 + 10 - 6} = \frac{\pm 95}{19} \Rightarrow (x; y; z)$

b) Ta có: $\frac{6}{11}x = \frac{9}{2}y = \frac{18}{5}z \Rightarrow \frac{x}{33} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = \frac{-x + z}{-33 + 5} = \frac{-196}{-28} \Rightarrow (x; y; z)$

Bài 24

Tìm các số x, y, z biết

$$\frac{x}{y + z + 1} = \frac{y}{x + z + 2} = \frac{z}{x + y - 3} = x + y + z$$

Lời giải

Ta có: $\frac{x}{y + z + 1} = \frac{y}{x + z + 2} = \frac{z}{x + y - 3} \Rightarrow \frac{y + z + 1}{x} = \frac{x + z + 2}{y} = \frac{x + y - 3}{z}$

$$= \frac{(y + z + 1) + (x + z + 2) + (x + y - 3)}{x + y + z} = \frac{2(x + y + z)}{x + y + z} = 2 = x + y + z$$

$$\Rightarrow y + z + 1 = 2x \Rightarrow x + y + z = 3x - 1 = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$x + z + 2 = 2y \Rightarrow x + y + z = 3y - 2 = 2 \Rightarrow y = \frac{4}{3}$$

$$x + y - 3 = 2z \Rightarrow x + y + z = 3z + 3 = 2 \Rightarrow z = \frac{-1}{3}$$



Bài 25

Tìm các số x, y, z biết

$$\frac{y+x+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{z+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$$

Lời giải

Ta có

$$\frac{y+x+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{z+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2 = \frac{1}{x+y+z} \Rightarrow x+y+z = \frac{1}{2}$$

$$\text{Khi đó: } x+z+2 = 2y \Rightarrow x+y+z = 3y-2 = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{6}$$

$$\text{Và } z+y-3 = 2z \Rightarrow z = y-3 = \frac{5}{6} - 3 = \frac{-13}{6} \Rightarrow x$$

Bài 26

Tìm a, b, c , biết $\begin{cases} a+b+c = 260 \\ a = 3b = 0,3(b+c) \end{cases}$

Lời giải

Từ $a = 3b \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{1}$, và

$$\frac{a}{0,3} = \frac{b+c}{1} = \frac{a+b+c}{1,3} = \frac{260}{1,3} = 200 \Rightarrow a = 60, b = \frac{60}{3} = 20 \Rightarrow c = 180$$

Bài 27

Tìm các số $a, b, c \in \mathbb{Z}$ biết $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} = a+b+c = 3$

Lời giải

$$\text{Từ giả thiết } \Rightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right) = 6 \Rightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{b}{a}\right) = 6$$



$$\Rightarrow \left(\frac{a+b+c}{a}\right) + \left(\frac{a+b+c}{b}\right) + \left(\frac{a+b+c}{c}\right) = 9, \text{ Vì } a+b+c = 3 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$$

Do a, b, c nguyên nên $\frac{1}{a} \leq 1, \frac{1}{b} \leq 1, \frac{1}{c} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3 \Rightarrow a = b = c = 1$

Vậy $a = b = c = 1$.

Bài 28

Tìm x, y biết $\frac{x-y}{3} = \frac{x+y}{13} = \frac{xy}{200}$

Lời giải

Ta có $\frac{x-y}{3} = \frac{x+y}{13} = \frac{(x-y) + (x+y)}{16} = \frac{x}{8} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{xy}{200}$

$$\Rightarrow 8xy - 200x = 0 \Leftrightarrow x(8y - 200) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 25 \end{cases}$$

TH1: $x = 0 \Rightarrow y = 0$

TH2: $y = 25 \Rightarrow x = 40$

Vậy cặp số x, y cần tìm là: $(x; y) = (0; 0); (40; 25)$

Bài 29

Tìm ba số a, b, c biết: $\frac{3a-2b}{5} = \frac{2c-5a}{3} = \frac{5b-3c}{2}$ và $a+b+c = -50$

Lời giải

Ta có: $GT = \frac{5(3a-2b)}{25} = \frac{3(2c-5a)}{9} = \frac{6c-10b}{34} = \frac{-5b+3c}{17} = \frac{5b-3c}{2} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a = 2b \\ 2c = 5a \\ 5b = 3c \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{10} = -5 \Rightarrow (a; b; c) = (-10; -15; -25)$$

Bài 30





Tìm x, y, z biết: $\frac{4z - 10y}{3} = \frac{10x - 3z}{4} = \frac{3y - 4x}{10}$ và $2x + 3y - z = 40$

Lời giải

Ta có: $\frac{4z - 10y}{3} = \frac{10x - 3z}{4} = \frac{3(4z - 10y)}{9} = \frac{4(10x - 3z)}{16}$

$$\Rightarrow \frac{40x - 30y}{13} = \frac{30y - 40x}{100} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4z = 10y \\ 10x = 3z \\ 3y = 4x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{10} = \frac{2x + 3y - z}{6 + 12 - 10} = \frac{40}{8} = 5 \Rightarrow (x; y; z) = (15; 20; 50)$$

Bài 31

Tìm x, y, z biết $xy = z; yz = 9x; xz = 16y$

Lời giải

Ta có: $yz = 9x \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{z}{9}$ và $\frac{x}{y} = \frac{16}{z} \Rightarrow \frac{z}{9} = \frac{16}{z} \Rightarrow z^2 = 9 \cdot 16 = 144 \Rightarrow z = \pm 12$

TH1: $z = 12 \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ 1 đặt $\frac{x}{y} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} = k \Rightarrow \begin{cases} x = 4k \\ y = 3k \end{cases} \Rightarrow 4k \cdot 3k = 12 \Rightarrow k = \pm 1$

TH2: $z = -12$ làm tương tự.

Bài 32

Tìm số tự nhiên M nhỏ nhất có 4 chữ số thỏa mãn điều kiện:

$M = a + b = c + d = e + f$ biết: $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}^*$; $\frac{a}{b} = \frac{14}{22}$; $\frac{c}{d} = \frac{11}{13}$; $\frac{e}{f} = \frac{13}{17}$

Lời giải

Từ giả thiết $\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{7}{11}$; $\frac{c}{d} = \frac{11}{13}$; $\frac{e}{f} = \frac{13}{17} \Rightarrow \frac{a}{7} = \frac{b}{11} = \frac{a+b}{7+11} = \frac{M}{18}$

Tương tự ta có: $\frac{c}{11} = \frac{d}{13} = \frac{c+d}{24} = \frac{M}{24}$ và $\frac{e}{13} = \frac{f}{17} = \frac{e+f}{30} = \frac{M}{30}$ khi đó

$M \in BC(18; 24; 30)$, và M là số tự nhiên nhỏ nhất có 4 chữ số nên $M = 1080$.

Bài 33





Tìm x, y, z biết $15x = 10y = 8z; |x - y - z| = 57$

Lời giải

Ta có: $15x = 10y = 8z \Leftrightarrow \frac{15x}{120} = \frac{10y}{120} = \frac{8z}{120}$, đặt

$$\frac{x}{8} = \frac{y}{12} = \frac{z}{15} = k \Rightarrow x = 8k; y = 12k; z = 15k$$

Khi đó: $|x - y - z| = 57 \Leftrightarrow |-19k| = 57 \Leftrightarrow k = \pm 3$

Vậy $(x; y; z) = (24; 36; 45); (-24; -36; -45)$

Bài 34

Tìm x, y, z là các số dương, biết $\frac{x}{y+z+2} = \frac{y}{x+z+3} = \frac{z}{x+y+5} = x+y+z$

Lời giải

+) Nếu $x + y + z \neq 0$, có

$$\frac{x}{y+z+2} = \frac{y}{x+z+3} = \frac{z}{x+y+5} = \frac{x+y+z}{2(x+y+z)} = \frac{1}{2} \Rightarrow x+y+z = \frac{1}{2}(x, y, z \neq 0)$$

Lấy nghịch đảo đẳng thức trong bài ta được:

$$\frac{y+z+2}{x} = \frac{x+z+3}{y} = \frac{x+y+5}{z} = \frac{1}{x+y+z} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{y+z+2}{x} + 1 = \frac{x+z+3}{y} + 1 = \frac{x+y+5}{z} + 1 = 3$$

$$\text{Thay } x+y+z = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}+2}{x} = \frac{\frac{1}{2}+3}{y} = \frac{\frac{1}{2}+5}{z} = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{x} = \frac{7}{y} = \frac{-9}{z} = 3 \Rightarrow x = \frac{5}{6}; y = \frac{7}{6}; z = \frac{-3}{2}$$

+) Nếu $x + y + z = 0 \Rightarrow x = 0; y = 0; z = 0$

Vậy có hai bộ số thỏa mãn bài toán.

Bài 35



Tìm hai số khác 0, biết tổng, hiệu, tích của hai số đó tỉ lệ với $3, \frac{1}{3}, \frac{200}{3}$

Lời giải

Gọi 2 số khác 0 cần tìm là x và y .

$$\text{Ta có: } \frac{x+y}{3} = \frac{x-y}{\frac{1}{3}} = \frac{xy}{\frac{200}{3}} = \frac{x+y+x-y}{3+\frac{1}{3}} = \frac{2x}{\frac{10}{3}} = \frac{3x}{5} = k \neq 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{5k}{3} \quad (1); x+y = 3k \quad (2); xy = \frac{200k}{3} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow y = 3k - \frac{5k}{3} = \frac{4k}{3} \Rightarrow xy = \frac{5k}{3} \cdot \frac{4k}{3} = \frac{20k^2}{9} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4)} \Rightarrow \frac{200k}{3} = \frac{20k^2}{9} \Leftrightarrow k = 30 (k \neq 0) \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 30}{3} = 50; y = \frac{4 \cdot 30}{3} = 40$$

Vậy hai số cần tìm là 50 và 40.

Bài 36

Tìm các số x, y, z biết $\frac{xy}{2y+4x} = \frac{yz}{4z+6y} = \frac{zx}{6z+2x} = \frac{x^2+y^2+z^2}{2^2+4^2+6^2}$

Lời giải

Xét $x = 0 \Rightarrow y = 0, z = 0 \Rightarrow 2y + 4z = 0$ (vô lý)

Suy ra $x \neq 0; y \neq 0; z \neq 0$

$$\text{Khi đó từ đề suy ra: } \frac{2y+4x}{xy} = \frac{4z+6y}{yz} = \frac{6x+2z}{zx} = \frac{2^2+4^2+6^2}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x} + \frac{4}{y} = \frac{4}{y} + \frac{6}{z} = \frac{6}{z} + \frac{2}{x} = \frac{2^2+4^2+6^2}{x^2+y^2+z^2} = 2 \cdot \frac{2}{x}$$

$$\text{Đặt } \frac{2}{x} = \frac{4}{y} = \frac{6}{z} = \frac{1}{k} (k \neq 0) \text{ thì } \frac{2^2+4^2+6^2}{x^2+y^2+z^2} = \frac{2}{k} \Rightarrow x = 2k; y = 4k; z = 6k \text{ và}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 28k \quad (3)$$

Thay $x = 2k, y = 4k, z = 6k$ vào (3) ta được:

$$(2k)^2 + (4k)^2 + (6k)^2 = 28k \Rightarrow 56k^2 - 28k = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 (ktm) \\ k = \frac{1}{2} (tm) \end{cases}$$

$$\text{Với } k = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 1; y = 2; z = 3$$



Vậy $x = 1, y = 2, z = 3$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1:

Tìm x, y, z biết $\frac{3x - 2y}{4} = \frac{2z - 4x}{3} = \frac{4y - 3z}{2}$ và $x + y + z = 18$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{3x - 2y}{4} = \frac{2z - 4x}{3} = \frac{4y - 3z}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{4(3x - 2y)}{16} = \frac{3(2z - 4x)}{9} = \frac{2(4y - 3z)}{4} = \frac{12x - 8y + 6z - 12x + 8y - 6z}{29} = 0$$

Do đó:

$$\frac{3x - 2y}{4} = 0 \Rightarrow 3x = 2y \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \quad (1)$$

$$\frac{2z - 4x}{3} = 0 \Rightarrow 2z = 4x \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{z}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x + y + z}{2 + 3 + 4} = \frac{18}{9} = 2 \Rightarrow x = 4; y = 6; z = 8.$$

Bài 2:

Cho hai đại lượng x và y . x_1, x_2 là hai giá trị bất kỳ của x ; y_1, y_2 là hai giá trị tương ứng của y . Tính y_1, y_2 biết $y_1^2 + y_2^2 = 52$ và $x_1 = 2; x_2 = 3$.

Lời giải

Vì x, y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow \frac{y_2}{y_1} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{y_2}{2} = \frac{y_1}{3} \Rightarrow \left(\frac{y_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{y_1}{3}\right)^2 \Rightarrow \frac{y_2^2}{9} = \frac{y_1^2}{4} = \frac{y_1^2 + y_2^2}{9 + 4} = \frac{52}{13} = 4$$

$$\text{Ta có } y_1^2 = 36 \Rightarrow y = \pm 6$$

$$\text{Với } y_1 = -6 \Rightarrow y_2 = -4$$

$$\text{Với } y_1 = 6 \Rightarrow y_2 = 4$$



Bài 3:

Tìm hai số dương khác nhau x, y biết rằng: Tổng, hiệu và tích của chúng lần lượt tỉ lệ nghịch với 35; 210 và 12.

Lời giải

Gọi hai số phải tìm là x và y ($x > 0; y > 0; x \neq y$)

Theo đề bài ta có: $35(x + y) = 210(x - y) = 12xy$

Chia các tích trên cho BCNN của 35, 210, 12 là 420 ta được:

$$\frac{35(x + y)}{420} = \frac{210(x - y)}{420} = \frac{12xy}{420}$$

$$\text{Hay } \frac{x + y}{12} = \frac{x - y}{2} = \frac{xy}{35} \quad (1)$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x + y}{12} = \frac{x - y}{2} = \frac{(x + y) + (x - y)}{12 + 2} = \frac{(x + y) - (x - y)}{12 - 2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x + y}{12} = \frac{x - y}{2} = \frac{x}{7} = \frac{y}{5} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } \frac{xy}{35} = \frac{x}{7} = \frac{y}{5} = \frac{xy}{7y} = \frac{xy}{5x}$$

$$\text{Vì } x > 0; y > 0 \text{ nên } 7y = 35 \Leftrightarrow y = 5; 5x = 35 \Leftrightarrow x = 7$$

Vậy hai số phải tìm là 7 và 5.

Bài 4:

Tìm số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng số đó là bội của 18 và các chữ số của nó tỷ lệ với 1; 2; 3

Lời giải

Gọi a, b, c là các chữ số của số có ba chữ số cần tìm. Không mất tính tổng quát, giả sử

$$a \leq b \leq c \leq 9$$

$$\text{Ta có } 1 \leq a + b + c \leq 27$$

Mặt khác số cần tìm là bội của 18 nên là bội của 9,

do đó $a + b + c = 9$ hoặc $a + b + c = 18$ hoặc $a + b + c = 27$.



Theo đề bài ta có: $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{6}$

Như vậy $a+b+c$ chia hết cho 6, nên $a+b+c = 18$.

Từ đó suy ra $a = 3, b = 6, c = 9$.

Do số phải tìm là bội của 18 nên chữ số hàng đơn vị chẵn, vì vậy hai số cần tìm là: 396; 936.

Bài 5:

Tìm các số x, y, z biết $\frac{xy}{2y+4x} = \frac{yz}{4z+6y} = \frac{zx}{6z+2x} = \frac{x^2+y^2+z^2}{2^2+4^2+6^2}$

Lời giải

Xét $x = 0 \Rightarrow y = 0, z = 0 \Rightarrow 2y + 4z = 0$ (vô lý)

Suy ra $x \neq 0; y \neq 0; z \neq 0$

Khi đó từ đề suy ra $\frac{2y+4x}{xy} = \frac{4z+6y}{yz} = \frac{6x+2z}{zx} = \frac{2^2+4^2+6^2}{x^2+y^2+z^2}$

$\Rightarrow \frac{2}{x} + \frac{4}{y} = \frac{4}{y} + \frac{6}{z} = \frac{6}{z} + \frac{2}{x} = \frac{2^2+4^2+6^2}{x^2+y^2+z^2} = 2 \cdot \frac{2}{x}$

Đặt $\frac{2}{x} = \frac{4}{y} = \frac{6}{z} = \frac{1}{k} (k \neq 0)$ thì $\frac{2^2+4^2+6^2}{x^2+y^2+z^2} = \frac{2}{k}$

Suy ra: $x = 2k; y = 4k; z = 6k$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 28k(3)$

Thay $x = 2k, y = 4k, z = 6k$ vào (3) ta được: $(2k)^2 + (4k)^2 + (6k)^2 = 28k \Rightarrow 56k^2 - 28k = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = 0(ktm) \\ k = \frac{1}{2}(tm) \end{cases}$$

Với $k = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 1; y = 2; z = 3$

Vậy $x = 1, y = 2, z = 3$.

Bài 6:

Số A được chia thành 3 số tỉ lệ theo $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$. Biết rằng tổng các bình phương của ba số đó bằng 24309. Tìm số A.

Lời giải

Gọi a, b, c là ba số được chia ra từ số A

Theo đề bài ta có: $a : b : c = \frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$ (1) và $a^2 + b^2 + c^2 = 24309$ (2)





$$\text{Từ (1)} \Rightarrow \frac{a}{\frac{2}{5}} = \frac{b}{\frac{3}{4}} = \frac{c}{\frac{1}{6}} = k \Rightarrow a = \frac{2}{5}k; b = \frac{3}{4}k; c = \frac{k}{6}$$

$$\text{Do đó, (2)} \Leftrightarrow k^2 \cdot \left(\frac{4}{25} + \frac{9}{16} + \frac{1}{36} \right) = 24309 \Rightarrow \begin{cases} k = 180 \\ k = -180 \end{cases}$$

$$\text{Với } k = 180 \Rightarrow a = 72, b = 135, c = 30 \Rightarrow A = a + b + c = 237$$

$$\text{Với } k = -180 \Rightarrow A = -72 + (-135) + (-30) = -237$$

Dạng 4. Tính giá trị của biểu thức

Phương pháp

Cho a, b, c, d thỏa mãn một điều kiện nào đó của đầu bài

Yêu cầu: Tính giá trị của một biểu thức

Cách giải: Vận dụng kiến thức về tỷ lệ thức để tìm mối quan hệ giữa a, b, c, d để tìm ra giá trị của biểu thức cần tìm

Bài 1

Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$.

Tính giá trị của biểu thức $A = 2016 \cdot x + y^{2017} + z^{2017}$

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z} = 2$$

$$\Rightarrow x+y+z = 0,5 \Rightarrow \frac{0,5-x+1}{x} = \frac{0,5-y+2}{y} = \frac{0,5-z-3}{z} = 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}; y = \frac{5}{6}; z = -\frac{5}{6}$$



Khi đó ta có $2016.x + y^{2017} + z^{2017} = 2016.\frac{1}{2} + 0 = 1008$

Vậy với x, y, z là các số thực thỏa mãn $\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$

thì giá trị của biểu thức $A = 2016.x + y^{2017} + z^{2017}$ là 1008

Bài 2

Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $\frac{2y+z-x}{x} = \frac{2z-y+x}{y} = \frac{2x+y-z}{z}$.

Tính $P = \frac{(3x-2y)(3y-2z)(3z-2x)}{(3x-z)(3y-x)(3z-y)}$

Lời giải

Áp dụng tính chất của dãy tỷ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{2y+z-x}{x} = \frac{2z-y+x}{y} = \frac{2x+y-z}{z} = \frac{2y+z-x+2z-y+x+2x+y-z}{x+y+z} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2y+z-x}{x} = 2 \\ \frac{2z-y+x}{y} = 2 \\ \frac{2x+y-z}{z} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2y+z \\ 3y = 2z+x \\ 3z = 2x+y \end{cases}$$

Ta có :

$$P = \frac{(3x-2y)(3y-2z)(3z-2x)}{(3x-z)(3y-x)(3z-y)} = \frac{(2y+z-2y)(2z+x-2z)(2x+y-2x)}{(2y+z-z)(2z+x-x)(2x+y-y)} = \frac{z.x.y}{2y.2z.2x} = \frac{1}{8}$$

Vậy $P = \frac{1}{8}$

Bài 3

Cho $\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{16} = \frac{z+9}{25}$ và $2x^3 - 5 = 11$. Tính $B = x - y + z + 2021$.

Lời giải

Ta có: $2x^3 - 5 = 11 \Rightarrow 2x^3 = 16 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$. Khi đó: $\frac{x+16}{9} = \frac{2+16}{9} = \frac{18}{9} = 2$.



Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{16} = \frac{z+9}{25} = \frac{x+16-y+25+z+9}{9-16+25}$$

$$\Rightarrow \frac{x-y+z+50}{18} = 2 \Rightarrow x-y+z+50 = 36 \Rightarrow x-y+z = -14 \Rightarrow x-y+z+2021 = 2007$$

Vậy $x-y+z+2021 = 2007$.

Bài 4

Cho các số x, y, z thỏa mãn $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ và $x+2y-3z = -20$. Tính $B = \sqrt{x+6y+z+1}$

Lời giải

$$\text{Vì } \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \text{ nên } \frac{x}{2} = \frac{2y}{6} = \frac{3z}{12} = \frac{x+2y-3z}{2+6-12} = \frac{-20}{-4} = 5$$

$$\Rightarrow x = 10; y = 15; z = 20$$

Thay $x = 10; y = 15; z = 20$ vào B , ta có:

$$B = \sqrt{10 + 6 \cdot 15 + 20 + 1} = \sqrt{121} = 11$$

Bài 5

Cho ba số x, y, z thỏa mãn $\frac{101}{x+y} + \frac{101}{y+z} + \frac{101}{z+x} = \frac{20x}{y+z} + \frac{20y}{z+x} + \frac{20z}{x+y} = \frac{2020}{2021}$. Tính giá trị biểu thức $M = x + y + z$

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{101}{x+y} + \frac{101}{y+z} + \frac{101}{z+x} = \frac{2020}{2021} \Leftrightarrow \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} = \frac{20}{2021} \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \frac{20x}{y+z} + \frac{20y}{z+x} + \frac{20z}{x+y} = \frac{2020}{2021}$$

$$\Rightarrow \frac{20(x+y+z)}{y+z} + \frac{20(y+z+x)}{z+x} + \frac{20(z+y+x)}{x+y} = \frac{2020}{2021} + 60$$

$$\Rightarrow \frac{20M}{y+z} + \frac{20M}{z+x} + \frac{20M}{x+y} = \frac{2020}{2021} + 60$$



$$\Rightarrow 20M \left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y} \right) = \frac{2020}{2021} + 60 \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow 400.M = 123280 \Rightarrow M = 308,2$

Bài 6

Cho x, y, z tỉ lệ với $5; 4; 3$. Tính giá trị biểu thức: $P = \frac{x + 2y - 3z}{x - 2y + 3z}$

Lời giải

Vì x, y, z tỉ lệ với $5; 4; 3$. nên $\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$

Đặt: $\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = k \Rightarrow x = 5k; y = 4k; z = 3k$

$$P = \frac{x + 2y - 3z}{x - 2y + 3z} = \frac{5k + 2.4k - 3.3k}{5k - 2.4k + 3.3k} = \frac{4k}{6k} = \frac{2}{3}$$

Bài 7

a) Cho các số a, b, c thỏa mãn $\frac{3}{a+b} = \frac{2}{b+c} = \frac{1}{c+a}$ (giả thiết các tỉ số đều có nghĩa).

Tính giá trị biểu thức $P = \frac{a+b-2019c}{a+b+2018c}$.

b) Cho $\overline{ab}, \overline{bc}$ ($c \neq 0$) là các số có hai chữ số thỏa mãn điều kiện: $\frac{\overline{ab}}{a+b} = \frac{\overline{bc}}{b+c}$.

Chứng minh $b^2 = ac$

Lời giải

a) +) TH1: Nếu $a + b + c = 0$ thì $a + b = -c$. Khi đó:

$$P = \frac{a+b-2019c}{a+b+2018c} = \frac{-2020c}{2017c} = \frac{-2020}{2017}$$

+) TH2: Nếu $a + b + c \neq 0$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{3}{a+b} = \frac{2}{b+c} = \frac{1}{c+a} = \frac{6}{2(a+b+c)} = \frac{3}{a+b+c} \quad (*)$$



Khi đó ta có: $\frac{3}{a+b} = \frac{3}{a+b+c}$ suy ra $a+b = a+b+c \Rightarrow c=0$

Do đó: $P = \frac{a+b-2019c}{a+b+2018c} = \frac{a+b}{a+b} = 1$

b) Ta có: $\frac{\overline{ab}}{a+b} = \frac{\overline{bc}}{b+c} \Leftrightarrow \frac{10a+b}{a+b} = \frac{10b+c}{b+c} \Leftrightarrow \frac{9a+(a+b)}{a+b} = \frac{9b+(b+c)}{b+c}$

Từ đó suy ra: $\frac{9a}{a+b} + 1 = \frac{9b}{b+c} + 1 \Leftrightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{b}{b+c}$

Từ $\frac{a}{a+b} = \frac{b}{b+c} \Rightarrow a(b+c) = b(a+b) \Rightarrow ab+ac = ab+b^2 \Rightarrow b^2 = ac$



Bài 8

Cho $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$ và $\frac{y}{5} = \frac{z}{6}$. Tính $M = \frac{2x + 3y + 4z}{3x + 4y + 5z}$

Lời giải

Ta có $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20}$; $\frac{y}{5} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{y}{20} = \frac{z}{24}$

Suy ra $\frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{24}$ (1)

Từ (1) $\Rightarrow \frac{2x}{30} = \frac{3y}{60} = \frac{4z}{96} = \frac{2x + 3y + 4z}{186}$ và $\frac{3x}{45} = \frac{4y}{80} = \frac{5z}{120} = \frac{3x + 4y + 5z}{245}$

$$\Rightarrow \frac{2x + 3y + 4z}{186} : \frac{3x + 4y + 5z}{245} = \frac{2x}{30} : \frac{3x}{45} = \frac{2x}{30} \cdot \frac{45}{3x} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2x + 3y + 4z}{186} \cdot \frac{245}{3x + 4y + 5z} = \frac{2x + 3y + 4z}{3x + 4y + 5z} \cdot \frac{245}{186} = 1$$

$$\Rightarrow M \cdot \frac{245}{186} = 1$$

$$\Rightarrow M = \frac{186}{245}$$

Bài 9

Cho $a, b, c, d > 0$ và $\frac{a}{2b} = \frac{b}{2c} = \frac{c}{2d} = \frac{d}{2a}$.

Tính $A = \frac{2017a - 2016b}{c + d} + \frac{2017b - 2016c}{d + a} + \frac{2017c - 2016d}{a + b} + \frac{2017d - 2016a}{b + c}$

Lời giải

Theo giả thiết: $\frac{a}{2b} = \frac{b}{2c} = \frac{c}{2d} = \frac{d}{2a} = \frac{a + b + c + d}{2(a + b + c + d)} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = b = c = d$

Ta có: $\frac{2017a - 2016b}{c + d} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$

Vậy $A = 2$.

Bài 10



Tính giá trị của biểu thức A , biết $A = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$

Lời giải

+) Nếu $a + b + c = 0 \Rightarrow b + c = -a \Rightarrow A = \frac{a}{b+c} = \frac{-a}{a} = -1$

+) Nếu $a + b + c \neq 0 \Rightarrow A = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{2(a+b+c)} = \frac{1}{2}$

Bài 11

Cho ba số x, y, z khác 0 và thỏa mãn $\frac{x+y-z}{z} = \frac{x+z-y}{y} = \frac{y+z-x}{x}$

Tính $M = \left(1 + \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{y}{z}\right)\left(1 + \frac{z}{x}\right) = \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$

Lời giải

Ta có $\frac{x+y-z}{z} + 2 = \frac{x+z-y}{y} + 2 = \frac{y+z-x}{x} + 2 \Leftrightarrow \frac{x+y+z}{z} = \frac{x+y+z}{y} = \frac{x+y+z}{x}$

+) Nếu $x + y + z = 0 \Rightarrow x + y = -z; y + z = -x; x + z = -y \Rightarrow M = -1$

+) Nếu $x + y + z \neq 0 \Rightarrow x = y = z \Rightarrow M = \left(1 + \frac{x}{x}\right)\left(1 + \frac{x}{x}\right)\left(1 + \frac{x}{x}\right) = 8$

Kết luận: Nếu $x + y + z = 0 \Rightarrow M = -1; x + y + z \neq 0 \Rightarrow M = 8$

Bài 12

Cho $x, y, z \neq 0; \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$. Tính $P = \frac{y+2z-x}{x-y+z}$

Lời giải

Cách 1: Đặt

$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = k \Rightarrow x = 2k; y = 3k; z = 4k (k \neq 0) \Rightarrow P = \frac{y+2z-x}{x-y+z} = \frac{3k+8k-2k}{2k-3k+4k} = 3$

Cách 2: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{2z}{8} = \frac{y+2z-x}{3+8-2} = \frac{y+2z-x}{9} \Rightarrow y+2z-x = \frac{9}{2}x(1)$

Tương tự: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x-y+z}{2-3+4} = \frac{x-y+z}{3} \Rightarrow x-y+z = \frac{3x}{2}(2)$



Từ (1)(2) $\Rightarrow P = 3$

Bài 13

Cho các số $a, b, c \neq 0$ và thỏa mãn $\frac{ab}{a+b} = \frac{bc}{b+c} = \frac{ca}{c+a}$.

Tính $Q = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c)}{a^3 + b^3 + c^3}$

Lời giải

Thông thường ta sẽ chứng minh $a = b = c$

Theo giả thiết

$$\frac{abc}{(a+b)c} = \frac{abc}{a(b+c)} = \frac{abc}{b(a+c)} \Rightarrow ac + bc = ab + ac = bc + ba \Rightarrow bc = ab \Rightarrow a = c$$

Tương tự $a = b; b = c \Rightarrow a = b = c \Rightarrow Q = \frac{3a^2 \cdot 3a}{3a^3} = 3$ (do $a \neq 0$)

Bài 14

Cho dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{2a + b + c + d}{a} = \frac{a + 2b + c + d}{b} = \frac{a + b + 2c + d}{c} = \frac{a + b + c + 2d}{d}$$

Tính giá trị biểu thức $M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$

Lời giải

Từ giả thiết trừ đi 1 vào mỗi vế của tỉ số ta có:

$$\frac{a+b+c+d}{a} = \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d}$$

TH1: Nếu $a + b + c + d \neq 0 \Rightarrow a = b = c = d \Rightarrow M = 4$

TH2: Nếu $a + b + c + d = 0 \Rightarrow a + b = -(c + d) \Rightarrow M = -4$

Bài 15

Cho 3 số x, y, z khác 0 thỏa mãn: $\frac{y+z-x}{x} = \frac{z+x-y}{y} = \frac{x+y-z}{z}$.



Tính $B = \left(1 + \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{y}{z}\right)\left(1 + \frac{z}{x}\right)$

Lời giải

Từ giả thiết cộng thêm 2 vào mỗi vế của của tỉ số ta được:

$$\left(\frac{y+z-x}{x} + 2\right) = \left(\frac{z+x-y}{y} + 2\right) = \left(\frac{x+y-z}{z} + 2\right) \Rightarrow \frac{x+y+z}{x} = \frac{x+y+z}{y} = \frac{x+y+z}{z}$$

TH1: $x + y + z \neq 0 \Rightarrow x = y = z \Rightarrow B = 8$

TH2: $x + y + z = 0 \Rightarrow x + y = -z, y + z = -x, x + z = -y \Rightarrow B = -1$

Bài 16

Cho dãy tỉ số

$$\frac{2012a + b + c + d}{a} = \frac{a + 2012b + c + d}{b} = \frac{a + b + 2012c + d}{c} = \frac{a + b + c + 2012d}{d}$$

Tính giá trị biểu thức $M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$

Lời giải

Trừ 2011 vào mỗi vế của tỉ số trong tỉ lệ thức ta được:

$$\frac{a+b+c+d}{a} = \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d}$$

TH1: $a + b + c + d \neq 0 \Rightarrow a = b = c = d \Rightarrow M = 8$

TH2: $a + b + c + d = 0 \Rightarrow a + b = -(c + d) \Rightarrow M = -4$

Bài 17

Cho a, b, c thỏa mãn $\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$

Tính giá trị của biểu thức $A = \left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right)\left(1 + \frac{a}{c}\right)$

Lời giải

Từ giả thiết ta cộng thêm 2 vào mỗi tỉ số trong dãy tỉ số bằng nhau có:

$$\frac{a+b+c}{c} = \frac{a+b+c}{a} = \frac{a+b+c}{b}$$

TH1: $a + b + c \neq 0 \Rightarrow a = b = c \Rightarrow A = 8$



TH2: $a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = -c, b + c = -a, a + c = -b \Rightarrow A = -1$

Bài 18

Cho $a + b + c + d \neq 0$ và $\frac{a}{b+c+d} = \frac{b}{a+c+d} = \frac{c}{a+b+d} = \frac{d}{a+b+c}$

Tính giá trị biểu thức $A = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{a+d} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$

Lời giải

Từ giả thiết nghịch đảo các phân thức ta có:

$$\frac{b+c+d}{a} = \frac{a+c+d}{b} = \frac{a+b+d}{c} = \frac{a+b+c}{d}$$

Cộng 1 vào các tỉ số ta được:

$$\frac{a+b+c+d}{a} = \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d} \text{ vì } a+b+c+d \neq 0$$

nên $a = b = c = d \Rightarrow A = 4$

Bài 19

Cho $a, b, c \neq 0$ và $a + b + c = \frac{a + 2b - c}{c} = \frac{b + 2c - a}{a} = \frac{c + 2a - b}{b}$.

Tính giá trị biểu thức $P = \left(2 + \frac{a}{b}\right)\left(2 + \frac{b}{c}\right)\left(2 + \frac{c}{a}\right)$

Lời giải

Từ giả thiết ta có: $\frac{(a + 2b - c) + (b + 2c - a) + (c + 2a - b)}{a + b + c} = \frac{2(a + b + c)}{a + b + c}$

$$\text{TH1: } a + b + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} a + 2b - c = 0 \\ b + 2c - a = 0 \\ c + 2a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = c \\ b + 2c = a \\ c + 2a = b \end{cases} \Rightarrow P = 1$$

TH2: $a + b + c \neq 0 \Rightarrow \frac{a + 2b - c}{c} = \frac{b + 2c - a}{a} = \frac{c + 2a - b}{b} = 2$



$$\Rightarrow \begin{cases} a + 2b - c = 2c \\ b + 2c - a = 2a \\ c + 2a - b = 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 3c \\ b + 2c = 3a \\ c + 2a = 3b \end{cases} \Rightarrow P = 27$$

Bài 20

Cho $a, b, c \neq 0$ và khác nhau, thỏa mãn $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b}$.

Tính giá trị biểu thức $A = \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c}$

Lời giải

Từ giả thiết ta nghịch đảo các phân thức $\Rightarrow \frac{b+c}{a} = \frac{a+c}{b} = \frac{a+b}{c}$

Cộng 1 vào các tỉ số ta được: $\frac{a+b+c}{a} = \frac{a+b+c}{b} = \frac{a+b+c}{c}$

TH1: $a+b+c \neq 0 \Rightarrow a=b=c \Rightarrow A=6$

TH2: $a+b+c=0 \Rightarrow b+c=-a, a+c=-b, a+b=-c \Rightarrow A=-3$

Bài 21

Cho 4 số x, y, z, t thỏa mãn

$$\frac{y+z+t-nx}{x} = \frac{z+t+x-ny}{y} = \frac{t+x+y-nz}{z} = \frac{x+y+z-nt}{t}$$

Và $x+y+z+t=2012$. Tính giá trị biểu thức $P = x + 2y - 3z + t$.

Lời giải

Từ giả thiết ta cộng $n+1$ vào mỗi tỉ số trong dãy tỉ số bằng nhau ta được:

$$\frac{x+y+z+t}{x} = \frac{x+y+z+t}{y} = \frac{x+y+z+t}{z} = \frac{x+y+z+t}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{2012}{x} = \frac{2012}{y} = \frac{2012}{z} = \frac{2012}{t} \Rightarrow x = y = z = t = \frac{2012}{4} = 503$$

Thay vào ta tính được $P = x + 2x - 3x + x = x = 503$

Bài 22





Cho $\frac{a}{2b} = \frac{b}{2c} = \frac{c}{2d} = \frac{d}{2a}$ ($a, b, c, d > 0$)

Tính $A = \frac{2011a - 2010b}{c + d} + \frac{2011b - 2010c}{a + d} + \frac{2011c - 2010d}{a + b} + \frac{2011d - 2010a}{b + c}$

Lời giải

Từ giả thiết ta có $\frac{a}{2b} = \frac{b}{2c} = \frac{c}{2d} = \frac{d}{2a} = \frac{a + b + c + d}{2a + 2b + 2c + 2d} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = b = c = d$

Thay vào A ta được $A = 2$.

Bài 23

Cho $\frac{x}{y + z + t} = \frac{y}{z + t + x} = \frac{z}{t + x + y} = \frac{t}{x + y + z}$.

Tính $M = \frac{x + y}{z + t} + \frac{y + z}{t + x} + \frac{z + t}{x + y} + \frac{t + x}{y + z}$

Lời giải

Từ giả thiết nghịch đảo ta được: $\frac{y + z + t}{x} = \frac{z + t + x}{y} = \frac{t + x + y}{z} = \frac{x + y + z}{t}$

Cộng thêm 1 vào các tỉ số ta được:

$$\frac{y + z + t}{x} + 1 = \frac{z + t + x}{y} + 1 = \frac{t + x + y}{z} + 1 = \frac{x + y + z}{t} + 1$$

$$= \frac{x + y + z + t}{x} = \frac{x + y + z + t}{y} = \frac{x + y + z + t}{z} = \frac{x + y + z + t}{t}$$

TH 1: $x + y + z + t \neq 0 \Rightarrow x = y = z = t \Rightarrow M = 8$

$$\text{TH 2: } x + y + z + t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + y = -(z + t) \\ y + z = -(t + x) \\ z + t = -(x + y) \\ t + x = -(y + z) \end{cases} \Rightarrow M = -4$$

Bài 24



Cho a, b, c khác 0 và thỏa mãn $\frac{ab}{a+b} = \frac{bc}{b+c} = \frac{ca}{c+a}$. Tính $P = \frac{ab^2 + bc^2 + ca^2}{a^3 + b^3 + c^3}$

Lời giải

Với a, b, c khác 0, nghịch đảo giả thiết ta được:

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{b+c}{bc} = \frac{c+a}{ca} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{c} + \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \Rightarrow a = b = c$$

khi đó: $P = \frac{a^3 + a^3 + a^3}{3a^3} = 1$

Bài 25

Cho $x : y : z = 5 : 4 : 3$. Tính $P = \frac{x + 2y - 3z}{x - 2y + 3z}$

Lời giải

Từ giả thiết ta có :

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x + 2y - 3z}{5 + 8 - 9} = \frac{(x + 2y - 3z)}{4} = \frac{x - 2y + 3z}{5 - 8 + 9} = \frac{(x - 2y + 3z)}{6}$$

Khi đó: $\frac{x + 2y - 3z}{x - 2y + 3z} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = P$

Bài 26

Cho $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}; \frac{y}{5} = \frac{z}{6}$. Tính $M = \frac{2x + 3y + 4z}{3x + 4y + 5z}$

Lời giải

Từ giả thiết $\Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{24}$ (1)

Từ (1) $\Rightarrow \frac{2x}{30} = \frac{3y}{60} = \frac{4z}{96} = \frac{2x + 3y + 4z}{30 + 60 + 96}$ và (1) $\Rightarrow \frac{3x}{45} = \frac{4y}{80} = \frac{5z}{120} = \frac{3x + 4y + 5z}{45 + 80 + 120}$



Nên $\frac{2x + 3y + 4z}{30 + 60 + 96} : \frac{3x + 4y + 5z}{45 + 80 + 120} = \frac{2x}{30} : \frac{3x}{45} = 1 \Rightarrow$

$$\frac{2x + 3y + 4z}{186} \cdot \frac{245}{3x + 4y + 5z} = 1 \Rightarrow M = \frac{186}{245}$$

Bài 27

Tính $A = \frac{abc}{a+b+c}$, biết a, b, c có quan hệ: $(a+b) : (8-c) : (b+c) : (10+c) = 2 : 5 : 3 : 4$

Lời giải

Từ giả thiết ta có: $\frac{a+b}{2} = \frac{8-c}{5} = \frac{b+c}{3} = \frac{10+c}{4} = t \Rightarrow \begin{cases} a+b=2t \\ 8-c=5t \\ b+c=3t \\ 10+c=4t \end{cases} \Rightarrow t=2 \Rightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=8 \\ c=-2 \end{cases}$

Bài 28

Cho $x = by + cz; y = ax + cz; z = ax + by; x + y + z \neq 0$.

Tính giá trị: $Q = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}$

Lời giải

Cộng theo vế của giả thiết ta được: $x + y + z = 2(ax + by + cz)$, thay x, y, z trở lại ta có:

$$x + y + z = 2(z + cz) = 2z(1+c) \Rightarrow \frac{1}{c+1} = \frac{2z}{x+y+z}$$

Tương tự ta có: $\frac{1}{a+1} = \frac{2x}{x+y+z}, \frac{1}{b+1} = \frac{2y}{x+y+z}$. Khi đó ta được: $Q = 2$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1:

Cho $a + b + c = 2015$ và $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{1}{5}$. Tính $Q = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$

Hướng dẫn giải

Ta có $Q = \left(\frac{a}{b+c} + 1\right) + \left(\frac{b}{c+a} + 1\right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1\right) - 3$



$$Q = (a + b + c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) - 3 = 2015 \cdot \frac{1}{5} - 3$$

Bài 2:

Cho $\frac{x+13}{8} = \frac{y-5}{-6} = \frac{z+9}{5}; 3x^3 - 9 = 7$. Tính $2x + y + 3z$

Lời giải

Từ $3x^3 - 9 = 7 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \frac{y-5}{-6} = \frac{z+9}{5} = \frac{x+13}{8} = \frac{3+13}{8} = 2 \Rightarrow y = -7; z = 1 \Rightarrow A = 2$

Bài 3:

Cho x, y, z là các số khác 0 và $x + y + z \neq 0$ đồng thời thỏa mãn

$$\frac{3x + 2y - z}{z} = \frac{2x - y + 3z}{y} = \frac{-x + 3y + 2z}{x}. \text{ Tính } M = \frac{(x + 2y)(y + 2z)(z + 2x)}{xyz}$$

Lời giải

Ta có $\frac{3x + 2y - z}{z} = \frac{2x - y + 3z}{y} = \frac{-x + 3y + 2z}{x} = \frac{4(x + y + z)}{x + y + z} = 4$

$$\Rightarrow 3x + 2y - z = 4z \Rightarrow 3x + 2y = 5z \quad (1)$$

Tương tự: $3y + 2z = 5x \quad (2);$

$$3z + 2x = 5y \quad (3)$$

Từ (1)(2)(3) $\Rightarrow x = y = z \Rightarrow M = \frac{3x \cdot 3y \cdot 3z}{xyz} = 27$

Bài 4:

Cho $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$ và $\frac{y}{5} = \frac{z}{6}$. Tính $M = \frac{2x + 3y + 4z}{3x + 4y + 5z}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20}; \frac{y}{5} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{y}{20} = \frac{z}{24} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{24} \quad (1)$

và $\frac{3x}{45} = \frac{4y}{80} = \frac{5z}{120} = \frac{3x + 4y + 5z}{45 + 80 + 120}$

$$\Rightarrow \frac{2x + 3y + 4z}{30 + 60 + 96} : \frac{3x + 4y + 5z}{45 + 80 + 120} = \frac{2x}{30} : \frac{3x}{45} = 1 \Rightarrow \frac{2x + 3y + 4z}{30 + 60 + 96} : \frac{3x + 4y + 5z}{45 + 80 + 120} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2x + 3y + 4z}{186} \cdot \frac{245}{3x + 4y + 5z} = 1 \Rightarrow M = \frac{2x + 3y + 4z}{3x + 4y + 5z} = \frac{186}{245}$$



Bài 5:

Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$. Tính giá trị của biểu thức $A = 2016.x + y^{2017} + z^{2017}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z} = 2$$

$$\Rightarrow x+y+z = 0,5 \Rightarrow \frac{0,5-x+1}{x} = \frac{0,5-y+2}{y} = \frac{0,5-z-3}{z} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}; y = \frac{5}{6}; z = \frac{-5}{6}$$

Khi đó ta có $2016.x + y^{2017} + z^{2017} = 2016.\frac{1}{2} + 0 = 1008$

Khi đó ta có $2016.\frac{1}{2} + 0 = 1008$

Vậy với x, y, z là các số thực thỏa mãn $\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$

Thì giá trị của biểu thức $2016.x + y^{2017} + z^{2017}$ là 1008.

Dạng 5. Áp dụng tỷ lệ thức để giải các bài toán thực tế

Phương pháp giải bài tập

Bước 1: Sử dụng chữ (biến số) để đặt các đại lượng chưa biết

Bước 2: Lập dãy tỷ số bằng nhau và tìm điều kiện

Bước 3: Tìm đại lượng chưa biết (giải phương trình)

Bước 4: So sánh với điều kiện và kết luận bài toán

Bài tập

Bài 1

Tìm các số có ba chữ số, biết rằng số đó là bội của 72 và 3 chữ số xếp theo thứ tự tăng dần tỷ lệ với 1,2,3

Lời giải

Gọi ba chữ số xếp theo thứ tự tăng dần là a, b, c ($a, b, c \in \mathbb{N}, 0 < a, b, c \leq 9$)





Theo bài ra ta có $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}$

Ta có số phải tìm chia hết cho 72 $\Rightarrow a + b + c : 9$ (1)

Vậy $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{6} \Rightarrow a + b + c : 6$ (vì $\frac{a}{1} = a$). (2)

Từ (1);(2) $\Rightarrow a + b + c = 18 \Rightarrow a = 3; b = 6; c = 9$

Lại có số phải tìm chia hết cho 72 nên là số chẵn nên ta có các số 396 hoặc 936

Có 369 không chia hết cho 27 và $936 : 72 \Rightarrow$ số phải tìm là 936.

Bài 2

Độ dài ba cạnh của một tam giác tỷ lệ với 2, 3, 4. Hỏi rằng ba chiều cao tương ứng với ba cạnh đó tỷ lệ với số nào?

Lời giải

Gọi a, b, c là ba cạnh của tam giác và h_a, h_b, h_c tương ứng là ba đường cao của tam giác đó

Từ giả thiết: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k(1) \Rightarrow a = 2k; b = 3k; c = 4k$

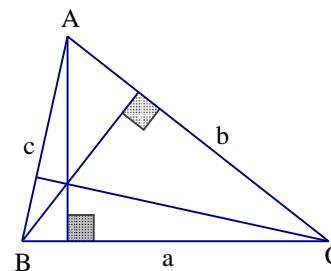
Diện tích tam giác là: $a.h_a = b.h_b = c.h_c = 2.S$ (2)

Thay $a = 2k; b = 3k; c = 4k$ vào (2) ta được:

$$2k.h_a = 3k.h_b = 4k.h_c \Rightarrow 2h_a = 3h_b = 4h_c$$

$$\Rightarrow \frac{2h_a}{12} = \frac{3h_b}{12} = \frac{4h_c}{12} \Rightarrow \frac{h_a}{6} = \frac{h_b}{4} = \frac{h_c}{3}$$

Vậy ba đường cao tỷ lệ với 6; 4; 3.

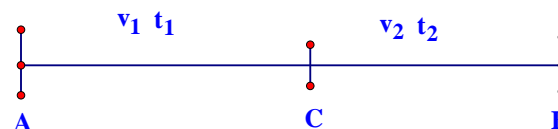


Bài 3

Một ô tô đi từ A đến B. Sau khi đi được nửa quãng đường ô tô tăng vận tốc thêm 20%. Do đó ô tô đến B sớm hơn dự định 10 phút. Tính thời gian ô tô đi từ A đến B

Lời giải

Gọi v_1, t_1 là vận tốc và thời gian ô tô đi trên nửa quãng đầu



$$t_1 + t_2 = ?$$

Chuyên đề 5: Tỷ lệ thức



Gọi v_2, t_2 là vận tốc và thời gian ô tô đi trên nửa quãng sau

Ta có:

$$v_1 t_1 = v_2 t_2; \frac{v_2}{v_1} = \frac{120}{100} = \frac{6}{5}; t_1 - t_2 = 10 \Rightarrow \frac{t_1}{v_2} = \frac{t_2}{v_1} \Leftrightarrow \frac{t_1}{\frac{6}{5}v_1} = \frac{t_2}{v_1} \Leftrightarrow \frac{t_1}{6} = \frac{t_2}{5} = \frac{t_1 - t_2}{6 - 5} = 10 \Rightarrow t_1 = 60; t_2 = 50$$

Bài 4

Ba đường cao của một tam giác là $4, 12, x$. Tìm x , biết x là một số nguyên dương

Lời giải

Gọi a, b, c là ba cạnh của tam giác có 3 đường cao tương ứng là $4, 12, x$

Gọi S là diện tích của tam giác

Rõ ràng: $2S = 4a = 12b = cx \Rightarrow a = \frac{2S}{4} = \frac{S}{2}; b = \frac{S}{6}; c = \frac{2S}{x}$

Ta có: $|a - b| < c < a + b \Rightarrow \frac{S}{2} - \frac{S}{6} < \frac{2S}{x} < a + b \Leftrightarrow \frac{1}{3} < \frac{2}{x} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3 < x < 6 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 5 \end{cases}$

Bài 5

Ba máy xay xay được 359 tấn thóc. Số ngày làm việc của các máy tỷ lệ với $3, 4, 5$. Số giờ làm việc của các máy trong một ngày tỷ lệ với $6, 7, 8$. Công suất của các máy tỷ lệ nghịch với $5, 4, 3$. Hỏi mỗi máy đã xay được bao nhiêu tấn thóc

Lời giải

Gọi số ngày là: x_1, x_2, x_3 . Số giờ là: y_1, y_2, y_3 . Công suất là: z_1, z_2, z_3

Ta có:

$$\frac{x_1}{3} = \frac{x_2}{4} = \frac{x_3}{5}; \frac{y_1}{6} = \frac{y_2}{7} = \frac{y_3}{8}; 5z_1 = 4z_2 = 3z_3 \Rightarrow \frac{z_1}{\frac{1}{5}} = \frac{z_2}{\frac{1}{4}} = \frac{z_3}{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{x_1 y_1 z_1}{\frac{18}{5}} = \frac{x_2 y_2 z_2}{7} = \frac{x_3 y_3 z_3}{\frac{40}{3}}$$

$$= \frac{x_1 y_1 z_1 + x_2 y_2 z_2 + x_3 y_3 z_3}{\frac{18}{5} + 7 + \frac{40}{3}} = 15 \Rightarrow x_1 y_1 z_1 = 54; x_2 y_2 z_2 = 105; x_3 y_3 z_3 = 200$$

Bài 6



Lớp 7B có 51 học sinh được chia làm 3 tổ. Nếu tổ 1 thêm 1 học sinh, tổ 2 bớt đi 5 học sinh, tổ 3 thêm 1 học sinh thì số học sinh tổ 1, 2, 3 tỷ lệ nghịch với 15, 20, 12. Tìm số học sinh của mỗi tổ?

Lời giải

Gọi số học sinh tổ 1, 2, 3 lần lượt là: x, y, z ($x, y, z \in \mathbb{N}^+; x, y, z < 51$)

Lớp 7B có 51 học sinh $\Rightarrow x + y + z = 51$

Khi tổ 1 thêm 1 học sinh, tổ 2 bớt đi 5 học sinh, tổ 3 thêm 1 học sinh thì số học sinh tổ 1, 2, 3 tỷ lệ nghịch với 15, 20, 12 nên ta có:

$$15(x + 1) = 20(y - 5) = 12(z + 1) \Rightarrow \frac{15(x + 1)}{60} = \frac{20(y - 5)}{60} = \frac{12(z + 1)}{60}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x + 1}{4} = \frac{y - 5}{3} = \frac{z + 1}{5} = \frac{x + y + z - 3}{12} = 4 \Rightarrow x = 15; y = 17; z = 19$$

Bài 7

Một cửa hàng có ba bao gạo, tổng khối lượng của ba bao gạo là 186 kg, giá tiền mỗi kg gạo trong ba bao gạo là như nhau. Sau một ngày bán hàng thì cửa hàng còn lại $\frac{2}{3}$ bao thứ nhất, $\frac{1}{3}$ bao thứ hai và $\frac{3}{5}$ bao thứ ba. Số tiền bán được của ba bao thứ nhất, thứ hai, thứ ba tỷ lệ với 2, 3, 2. Tính xem trong ngày đó cửa hàng đã bán được bao nhiêu kg gạo ở mỗi bao?

Lời giải

Gọi số kg gạo ở bao thứ nhất, hai, ba là x, y, z (kg) ($0 < x, y, z < 186$)

Tổng khối lượng 3 bao gạo là 186 nên ta có: $x + y + z = 186$

Trong ngày đó cửa hàng bán được số kg gạo ở mỗi bao lần lượt là: $\frac{x}{3}; \frac{2y}{3}; \frac{2z}{5}$

Số tiền bán được của ba bao gạo tỷ lệ với 2, 3, 2 và giá tiền mỗi kg gạo của ba bao gạo là như nhau nên số kg gạo bán được của ba bao gạo tỷ lệ với 2, 3, 2

$$\Rightarrow \frac{x}{3} : \frac{2y}{3} : \frac{2z}{5} = 2 : 3 : 2 \Leftrightarrow \frac{2x}{12} = \frac{2y}{9} = \frac{2z}{10} \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{y}{9} = \frac{z}{10} = \frac{186}{31} = 6 \Rightarrow x = 72; y = 54; z = 60$$



Bài 8

Ba bể nước có tất cả 1206 lít nước, sau khi rút bớt đi $\frac{1}{11}$ lượng nước ở bể 1, $\frac{1}{21}$ lượng nước ở bể 2 và $\frac{1}{6}$ lượng nước ở bể 3 thì lượng nước còn lại trong 3 bể là như nhau. Hỏi lúc đầu mỗi bể chứa bao nhiêu lít nước?

Lời giải

Gọi lượng nước của ba bể lúc ban đầu là a, b, c (lít) ($0 < a, b, c < 1206$)

Lượng nước còn lại của ba bể 1, 2, 3 sau khi rút nước là: $\frac{10a}{11}; \frac{20b}{21}; \frac{5c}{6}$

Theo bài ra ta có:

$$\frac{10a}{11} = \frac{20b}{21} = \frac{5c}{6}; a + b + c = 1206 \Rightarrow \frac{a}{22} = \frac{b}{21} = \frac{c}{24} = \frac{a + b + c}{67} = 18 \Rightarrow a = 396; b = 378; c = 432$$

Bài 9

Tìm ba số tự nhiên, biết rằng tỷ số của số thứ nhất với số thứ hai là $3 : 4$, tỷ số giữa số thứ nhất và thứ ba là $6 : 13$ và BCNN của ba số đó bằng 7176

Lời giải

Gọi a, b, c theo thứ tự là ba số cần tìm, ta có:

$$a : b = 3 : 4; a : c = 6 : 13 \Rightarrow a : b : c = 6 : 18 : 13$$

$$\text{Đặt } \frac{a}{6} = \frac{b}{18} = \frac{c}{13} = k \Rightarrow a = 6k; b = 18k; c = 13k$$

$$BCNN(a, b, c) = BCNN(6k, 18k, 13k) = k \cdot BCNN(6, 18, 13)$$

$$= k \cdot BCNN(6, 18, 13) = k \cdot 312 \Rightarrow 312k = 7176 \Rightarrow k = 23 \Rightarrow a = 138; b = 414; c = 299$$

Bài 10

Một vật chuyển động trên các cạnh của hình vuông. Trên hai cạnh đầu vật chuyển động với vận tốc 5m/s, trên cạnh thứ ba vật chuyển động với vận tốc 4m/s, trên cạnh thứ tư vật chuyển động với vận tốc 3m/s. Hỏi độ dài cạnh hình vuông là bao nhiêu m, biết rằng tổng thời gian vật chuyển động trên bốn cạnh bằng 118 giây.



Lời giải

Gọi x, y, z lần lượt là thời gian vật chuyển động trên 1 cạnh tương ứng với vận tốc $5, 4, 3 (m/s)$

Do bốn cạnh của hình vuông là bằng nhau nên $5x = 4y = 3z$

Từ giả thiết ta có: $x + x + y + z = 118 \Leftrightarrow 2x + y + z = 118$ (hai cạnh đầu vật chuyển động với vận tốc $5 (m/s)$)

Ta có $5x = 4y = 3z \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{y}{15} = \frac{z}{20} = \frac{2x}{24} = 2 \Rightarrow x = 24; y = 30; z = 40$

Bài 11

Hãy tìm tất cả các số có hai chữ số biết rằng tổng, hiệu, tích của các chữ số của số đó là ba số nguyên dương và tỉ lệ với $35 : 210 : 12$

Lời giải

Gọi số cần tìm là: $\overline{ab} (a \neq 0, a, b \in \{0; 1; 2; \dots; 9\})$, Giả sử $a > b$

Theo bài ra ta có: $\frac{a+b}{35} = \frac{a-b}{210} = \frac{ab}{12} \Rightarrow \frac{(a+b)6}{35 \cdot 6} = \frac{a-b}{6 \cdot 35} = \frac{ab}{12}$

$\Rightarrow 6a + 6b = a - b \Rightarrow 5a = -7b$ (vô lý vì a, b cùng dấu).

Vậy không có giá trị nào thoả mãn.

Bài 12

Tìm hai số hữu tỉ a, b biết hiệu a và b bằng thương của a và b và bằng 2 lần tổng của a và b

Lời giải

Theo bài ra ta có: $a - b = \frac{a}{b} = 2(a + b) \Rightarrow a - b = 2(a + b) \Rightarrow \frac{a}{b} = -3$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b = -3 \\ a + b = \frac{-3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-9}{4} \\ b = \frac{-3}{4} \end{cases}$$

Vậy hai số cần tìm là: $\frac{-9}{4}$ và $\frac{-3}{4}$



Bài 13

Tìm 3 phân số có tổng của chúng bằng $1\frac{1}{70}$, các tử của chúng tỉ lệ với 3; 4; 5 và các mẫu số tương ứng của chúng tỉ lệ với 5; 1; 2

Lời giải

Gọi 3 phân số cần tìm là $\frac{a}{x}; \frac{b}{y}; \frac{c}{z}$ thì ta có: $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1\frac{1}{70}, \frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$ và $\frac{x}{5} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$

$$\Rightarrow \frac{a}{3} : \frac{x}{5} = \frac{b}{4} : \frac{y}{1} = \frac{c}{5} : \frac{z}{2} \Rightarrow \frac{\frac{a}{3}}{\frac{x}{5}} = \frac{\frac{b}{4}}{\frac{y}{1}} = \frac{\frac{c}{5}}{\frac{z}{2}} \Rightarrow \frac{a}{3} \cdot \frac{5}{x} = \frac{b}{4} \cdot \frac{1}{y} = \frac{c}{5} \cdot \frac{2}{z} \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = \frac{\frac{a}{3} + \frac{b}{4} + \frac{c}{5}}{\frac{x}{5} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2}} = \frac{1\frac{1}{70}}{\frac{71}{10}} = \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{3}{35}; \frac{b}{y} = \frac{4}{7}; \frac{c}{z} = \frac{5}{14} \text{ đó là ba phân số cần tìm}$$

Bài 14

Số M được chia làm 3 số tỉ lệ với $0,5; 1\frac{2}{3}; 2\frac{1}{4}$, tìm số M biết rằng tổng bình phương của ba số đó bằng 4660

Lời giải

$$\text{Ta có: } 0,5 : 1\frac{2}{3} = \frac{5}{3} : 2\frac{1}{4} = \frac{9}{4} \text{ nên ta có } \frac{1}{2} : \frac{5}{3} : \frac{9}{4} = \frac{6}{12} : \frac{20}{12} : \frac{27}{12} = 6 : 20 : 27$$

Giả sử M được chia thành 3 số là x, y, z

Theo bài ra ta có:

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{20} = \frac{z}{27} \Leftrightarrow \frac{x^2}{6^2} = \frac{y^2}{20^2} = \frac{z^2}{27^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{6^2 + 20^2 + 27^2} = \frac{4660}{1165} = 4 = 2^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 12^2 \Rightarrow x = \pm 12, y^2 = 40^2 \Rightarrow y = \pm 40, z^2 = 54^2 \Rightarrow z = \pm 54$$

Vậy $M = 12 + 40 + 54 = 106$ hoặc $M = -106$.

Bài 15

Ba lớp 7A, 7B, 7C cùng mua một số gói tăm từ thiện, lúc đầu số gói tăm dự định chia cho ba lớp với tỉ lệ 5 : 6 : 7 nhưng sau đó chia theo tỉ lệ 4 : 5 : 6 nên có một lớp



nhận nhiều hơn 4 gói. Tính tổng số gói tăm mà ba lớp đã mua.

Lời giải

Gọi tổng số gói tăm 3 lớp cùng mua là $x (x \in \mathbb{N}^*)$

Số gói tăm dự định chia cho 3 lớp 7A, 7B, 7C lúc đầu lần lượt là a, b, c

$$\text{Ta có: } \frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{5x}{18}; b = \frac{6x}{18}; c = \frac{7x}{18} \quad (1)$$

Số gói tăm sau đó chia cho 3 lớp lần lượt là a', b', c' , ta có:

$$\frac{a'}{4} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{6} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{15} \Rightarrow a' = \frac{4x}{15}; b' = \frac{5x}{15}; c' = \frac{6x}{15} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có: $a > a'; b = b'; c < c'$ nên lớp 7C nhận nhiều hơn lúc đầu

$$\text{Vậy } c' - c = 4 \Rightarrow \frac{6x}{15} - \frac{7x}{18} = 4 \Rightarrow x = 360(tm)$$

Vậy số gói tăm 3 lớp đã mua là 360 gói.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1:

Cho $\triangle ABC$ có các góc A, B, C tỉ lệ với 7, 5, 3. Các góc ngoài tương ứng tỉ lệ với các số nào

Lời giải

Gọi ba góc trong và ngoài của $\triangle ABC$ lần lượt là $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ và $\widehat{A}_1, \widehat{B}_1, \widehat{C}_1$ ($0^\circ < \widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C} < 180^\circ$)

$$\text{Theo bài ra ta có } \frac{\widehat{A}}{7} = \frac{\widehat{B}}{5} = \frac{\widehat{C}}{3} \text{ và } \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{\widehat{A}}{7} = \frac{\widehat{B}}{5} = \frac{\widehat{C}}{3} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}}{7 + 5 + 3} = \frac{180^\circ}{15} = 12^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 7 \cdot 12^\circ = 84^\circ; \widehat{B} = 60^\circ; \widehat{C} = 36^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{A}_1 = 180^\circ - 84^\circ = 96^\circ; \widehat{B}_1 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ; \widehat{C}_1 = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$$

Vậy các góc ngoài tương ứng tỉ lệ với 4 : 5 : 6

Bài 2:

Nhà trường thành lập 3 nhóm học sinh khối 7 tham gia chăm sóc di tích lịch sử.

Trong đó, $\frac{2}{3}$ số học sinh của nhóm I bằng $\frac{8}{11}$ số học sinh của nhóm II và bằng $\frac{4}{5}$ số



học sinh nhóm III. Biết rằng số học sinh của nhóm I ít hơn tổng số học sinh của nhóm II và nhóm III là 18 học sinh. Tính số học sinh của mỗi nhóm.

Lời giải

Gọi số học sinh của nhóm I, II, III lần lượt là x, y, z (em) (x, y, z nguyên dương)

Theo đề bài, ta có : $y + z - x = 18$

$$\frac{2}{3}x = \frac{8}{11}y = \frac{4}{5}z$$

Vì $\frac{2}{3}x = \frac{8}{11}y = \frac{4}{5}z$ chia các tỉ số trên cho $BCNN(2, 4, 8) = 8$ ta được

$$\frac{2.x}{3.8} = \frac{8.y}{11.8} = \frac{4.z}{5.8} \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{y}{11} = \frac{z}{10}$$

Mặt khác: $y + z - x = 18$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau $\frac{x}{12} = \frac{y}{11} = \frac{z}{10} = \frac{y + z - x}{11 + 10 - 12} = \frac{18}{9} = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 12.2 = 24 \\ y = 11.2 = 22 \\ z = 10.2 = 20 \end{cases}$$

Vậy số học sinh: Nhóm I là 24 em; nhóm II là 22 em, nhóm III là 20 em.

Bài 3:

Tổng các lũy thừa bậc 3 của ba số hữu tỉ là -1071 . Biết tỉ số giữa số thứ nhất và số thứ hai là $\frac{3}{4}$, tỉ số giữa số thứ nhất và số thứ ba là $\frac{6}{7}$. Tìm các số đó

Lời giải

Gọi số thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là m, n, p ta có: $\frac{m}{3} = \frac{n}{4}$ và $\frac{m}{6} = \frac{p}{7}$.

Ta có $\frac{m}{6} = \frac{n}{8} = \frac{p}{7} = k$

Do đó $m = 6k, n = 8k, p = 7k$

Và $m^3 + n^3 + p^3 = (6k)^3 + (8k)^3 + (7k)^3 = 1071k^3 = -1071$

$\Rightarrow k^3 = -1 \Rightarrow k = -1$

Vậy $m = -6, n = -8, p = -7$

Bài 4:





Tìm hai số dương khác nhau x, y biết rằng: Tổng, hiệu và tích của chúng lần lượt tỉ lệ nghịch với 35 ; 210 và 12 .

Lời giải

Gọi hai số phải tìm là x và y ($x > 0, y > 0$ và $x \neq y$)

Theo đề bài ta có: $35.(x + y) = 210.(x - y) = 12x.y$

Chia các tích trên cho BCNN (35, 210, 12) là 420 ta được:

$$\frac{35.(x + y)}{420} = \frac{210(x - y)}{420} = \frac{12xy}{420} \text{ hay } \frac{x + y}{12} = \frac{x - y}{2} = \frac{xy}{35} \quad (1)$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x + y}{12} = \frac{x - y}{2} = \frac{(x + y) + (x - y)}{12 + 2} = \frac{(x + y) - (x - y)}{12 - 2} \Leftrightarrow \frac{x + y}{12} = \frac{x - y}{2} = \frac{x}{7} = \frac{y}{5} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{xy}{35} = \frac{x}{7} = \frac{y}{5} = \frac{xy}{7y} = \frac{xy}{5x}$

Vì $x > 0; y > 0$ nên $7y = 35 \Rightarrow y = 5 ; 5x = 35 \Rightarrow x = 7$

Vậy hai số phải tìm là 7 và 5

Bài 5:

Một ô tô phải đi từ A đến B trong một thời gian dự định. Sau khi đi được nửa quãng đường thì ô tô tăng vận tốc lên 20% do đó đến B sớm hơn 10 phút. Tính thời gian ô tô đi từ A đến B.

Lời giải

Gọi vận tốc và thời gian dự định của ô tô là v_1 (km/h), t_1 (h); vận tốc và thời gian của ô tô trên nửa quãng đường sau là v_2 (km/h), t_2 (h). (ĐK: $v_2 > v_1 > 0$)

Theo bài ra: Sau khi đi được nửa quãng đường thì ô tô tăng vận tốc lên 20% do đó đến B sớm hơn $10' = \frac{1}{6}h$ nên $v_2 = v_1 + 20\%.v_1 = 1,2.v_1 ; t_1 - t_2 = \frac{1}{6}$

Vì quãng đường như nhau nên vận tốc và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ nghịch, suy ra

$$v_1.t_1 = v_2.t_2 \Rightarrow \frac{t_1}{1,2v_1} = \frac{t_2}{v_1} = \frac{t_1 - t_2}{1,2v_1 - v_1} = \frac{\frac{1}{6}}{0,2v_1} = \frac{5}{6v_1}$$

$$\Rightarrow \frac{t_1}{1,2v_1} = \frac{5}{6v_1} \Rightarrow t_1 = 1 \Rightarrow t_2 = \frac{5}{6} \text{ (h)}$$



Vậy thời gian ô tô đi từ A đến B là $t = t_1 + t_2 = 1 + \frac{5}{6} = \frac{11}{6} = 1h50ph$.

Bài 6:

Số A được chia thành 3 số tỉ lệ theo $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$. Biết rằng tổng các bình phương của 3 số đó bằng 24309. Tính số A.

Lời giải

Gọi ba số cần tìm tỉ lệ với $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$ lần lượt là x, y, z

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 = 24309$ và $\frac{x}{\frac{2}{5}} = \frac{y}{\frac{3}{4}} = \frac{z}{\frac{1}{6}} \Rightarrow \frac{x}{24} = \frac{y}{45} = \frac{z}{10}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{x}{24} = \frac{y}{45} = \frac{z}{10} \Rightarrow \frac{x^2}{24^2} = \frac{y^2}{45^2} = \frac{z^2}{10^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{24^2 + 45^2 + 10^2} = 3^2$$

Từ $\frac{x}{24} = \frac{y}{45} = \frac{z}{10}$ suy ra x, y, z cùng dấu, do vậy

x	72	-72
y	135	-135
z	30	-30

Bài 7:

Tìm hai số khác 0 biết rằng tổng, hiệu và tích của chúng tỉ lệ với 4;1;45

Lời giải

Gọi 2 số cần tìm là x và y ($x, y \neq 0$ và $x > y$).

Theo bài ra ta có $\frac{x+y}{4} = \frac{x-y}{1} = \frac{xy}{45}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{x+y}{4} = \frac{x-y}{1} = \frac{x+y+x-y}{5} = \frac{2x}{5} \quad (2)$$

$$\frac{x+y}{4} = \frac{x-y}{1} = \frac{x+y-x+y}{4} = \frac{2y}{3} \quad (3)$$



Từ (1); (2) và (3) suy ra $\frac{2x}{5} = \frac{2y}{3} = \frac{xy}{45} \Rightarrow \frac{18x}{45} = \frac{30y}{45} = \frac{xy}{45}$

$\Rightarrow 18x = 30y = xy \Rightarrow x = 30; y = 18 (x; y \neq 0)$

Bài 8:

Tìm 3 phân số tối giản biết rằng tổng của ba phân số bằng $15\frac{83}{120}$, tử số của chúng tỉ lệ thuận với 5;7;11, còn mẫu số của chúng tỉ lệ nghịch với $\frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}$

Lời giải

Gọi tử số của phân số thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là x, y, z .

Và mẫu số của phân số thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là a, b, c .

Vì tử số của chúng tỉ lệ thuận với 5;7;11, còn mẫu số của chúng tỉ lệ nghịch với

$$\frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6} \text{ nên: } \begin{cases} \frac{x}{5} = \frac{7}{7} = \frac{z}{11} \\ \frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6} \end{cases} \text{ ta đặt } \begin{cases} \frac{x}{5} = \frac{7}{7} = \frac{z}{11} = m \\ \frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6} = n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{5}{4} \cdot \frac{m}{n} \\ \frac{y}{b} = \frac{7}{5} \cdot \frac{m}{n} \\ \frac{z}{c} = \frac{11}{6} \cdot \frac{m}{n} \end{cases}$$

Vì tổng của ba phân số bằng $15\frac{83}{120}$ nên ta có:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 15\frac{83}{120} \text{ hay } \frac{5}{4} \cdot \frac{m}{n} + \frac{7}{5} \cdot \frac{m}{n} + \frac{11}{6} \cdot \frac{m}{n} = 15\frac{83}{120}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{7}{2}$$

Khi đó $\frac{x}{a} = \frac{35}{8}, \frac{y}{b} = \frac{49}{10}, \frac{z}{c} = \frac{77}{12}$

Vậy ba phân số đó là $\frac{35}{8}, \frac{49}{10}, \frac{77}{12}$.

Bài 9:

Một công trường san lấp mặt bằng dự định chia số đất cho ba đội I, II, III tỉ lệ với 7; 6;5. Nhưng sau đó vì số người của các đội thay đổi nên đã phân chia lại số đất cho ba đội I, II, III tỉ lệ 6;5;4. Như vậy có một đội làm nhiều việc hơn so với ban dự định là $6m^3$ đất. Tính tổng số đất đã phân chia cho các đội.



Lời giải

Gọi tổng số đất đã phân cho các đội là $x(m^3)$ điều kiện $x > 0$

Số đất dự định chia cho ba đội I, II, III lần lượt là a, b, c . Điều kiện $a, b, c > 0$

$$\text{Ta có } \frac{a}{7} = \frac{b}{6} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{7x}{18}; b = \frac{6x}{18}; c = \frac{5x}{18} \quad (1)$$

Số đất sau đó chia đại cho ba đội I, II, III lần lượt là $a'; b'; c'$. Điều kiện $a', b', c' > 0$

$$\text{Ta có } \frac{a'}{6} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{4} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{15} \Rightarrow a' = \frac{6x}{15}; b' = \frac{5x}{15}; c' = \frac{4x}{15} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có $a < a'; b = b'; c > c'$ nên đội I nhận nhiều hơn lúc đầu.

$$\text{Vì } a - a' = 6 \text{ hay } \frac{7x}{18} - \frac{6x}{15} = 6 \Rightarrow \frac{x}{90} = 4 \Rightarrow x = 360$$

Vậy tổng số đất đã phân chia cho các đội là $360m^3$ đất.

Bài 10:

Một con ốc sên bò lên một thân cây thẳng đứng. Giờ thứ nhất nó bò được $\frac{1}{5}$ độ dài thân cây, giờ thứ hai nó bò được bằng $\frac{1}{2}$ đoạn đã bò, giờ thứ ba nó bò được bằng $\frac{1}{3}$ đoạn đã bò, giờ thứ tư nó bò được bằng $\frac{1}{4}$ đoạn đã bò, ... và giờ thứ chín nó bò được bằng $\frac{1}{9}$ đoạn đã bò. Hỏi sau 9 giờ con ốc sên bò được bao nhiêu phần độ dài của thân cây?

Lời giải

Gọi i_n là quãng đường con ốc sên bò theo giờ, l là tổng độ dài thân cây con ốc sên đã bò.

Ta có:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{1}{5} & \Rightarrow l &= \frac{1}{5} \\ i_2 &= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10} & \Rightarrow l &= \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10} \\ i_3 &= \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10} & \Rightarrow l &= \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} \\ i_4 &= \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10} & \Rightarrow l &= \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{5}{10} \\ & \dots & & \\ i_9 &= \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{10} & \Rightarrow l &= \frac{9}{10} + \frac{1}{10} = 1 \end{aligned}$$



Vậy sau 9 giờ, con ố sên đã bò được hết thân cây.

Bài 11:

Ba lớp 7 ở trường K có tổng 147 học sinh. Nếu đưa $\frac{1}{3}$ số học sinh lớp 7A, $\frac{1}{4}$ số học sinh lớp 7B, $\frac{1}{5}$ số học sinh lớp 7C đi thi học sinh giỏi cấp huyện, thì số học sinh còn lại của ba lớp bằng nhau. Tính số học sinh của mỗi lớp 7 ở trường K.

Lời giải

Gọi x là số học sinh lớp 7A; y là số học sinh lớp 7B; z là số học sinh lớp 7C
($0 < x; y; z < 147$)

Vì đưa $\frac{1}{3}$ số học sinh lớp 7A, $\frac{1}{4}$ số học sinh lớp 7B, $\frac{1}{5}$ số học sinh lớp 7C đi thi học sinh giỏi cấp huyện, thì số học sinh còn lại của ba lớp bằng nhau nên:

$$x - \frac{1}{3}x = y - \frac{1}{4}y = z - \frac{1}{5}z \Leftrightarrow \frac{2}{3}x = \frac{3}{4}y = \frac{4}{5}z \Leftrightarrow \frac{x}{\frac{3}{2}} = \frac{y}{\frac{4}{3}} = \frac{z}{\frac{5}{4}} = \frac{x+y+z}{\frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4}} = \frac{147}{\frac{49}{12}} = 36$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}x = 36 \Leftrightarrow x = 54 \\ \frac{3}{4}y = 36 \Leftrightarrow y = 48 \\ \frac{4}{5}z = 36 \Leftrightarrow z = 45 \end{cases}$$

Vậy số học sinh lớp 7A là 54 ; học sinh lớp 7B là 48 học sinh lớp 7C là 45

Bài 12:

Ba lớp 7A, 7B, 7C của một trường mua ủng hộ 420 gói tăm từ thiện. Biết số gói tăm của lớp 7A, 7B tỉ lệ với 2; 3, số gói tăm của lớp 7B, 7C tỉ lệ với 4; 5. Tính số gói tăm mà mỗi lớp 7A, 7B, 7C đã mua ủng hộ?

Lời giải

Gọi số gói tăm mà mỗi lớp 7A, 7B, 7C đã mua ủng hộ là a, b, c (đơn vị: gói tăm, điều kiện $x \in \mathbb{N}^*$)

Ba lớp 7A, 7B, 7C của trường mua ủng hộ 420 gói tăm từ thiện nên ta có $a + b + c = 420$.



Biết số gói tăm của lớp 7A, 7B tỉ lệ với 2; 3 nên $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} \Rightarrow \frac{a}{8} = \frac{b}{12}$, số gói tăm của lớp

7B, 7C tỉ lệ với 4; 5 nên $\frac{b}{4} = \frac{c}{5} \Rightarrow \frac{b}{12} = \frac{c}{15}$. Suy ra $\frac{a}{8} = \frac{b}{12} = \frac{c}{15}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{8} = \frac{b}{12} = \frac{c}{15} = \frac{a+b+c}{8+12+15} = \frac{420}{35} = 12$$

Suy ra $a = 8.12 = 96, b = 12.12 = 144, c = 15.12 = 180$

Đối chiếu điều kiện ta tìm được số gói tăm mà mỗi lớp 7A, 7B, 7C đã mua ủng hộ lần lượt là 96; 144; 180 gói.

Bài 13:

Trong đợt phòng chống dịch viêm đường hô hấp cấp do virus Covid- 19 gây ra, học sinh ba khối 6; 7; 8 của một trường THCS đã quyên góp được tổng cộng 1580 khẩu trang y tế. Biết rằng số khẩu trang y tế của khối 6 và khối 7 tỉ lệ nghịch với $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{5}$; số khẩu trang y tế của khối 7 và khối 8 tỉ lệ thuận với 7 và 6. Tính số khẩu trang y tế quyên góp được của mỗi khối.

Lời giải

Gọi số khẩu trang y tế quyên góp được của khối 6; 7; 8 lần lượt là $x; y; z$

$$(x; y; z \in \mathbb{N}^*; x; y; z < 1580)$$

Theo đề bài ta có:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x = \frac{1}{5}y \\ \frac{y}{7} = \frac{z}{6} \\ x + y + z = 1580 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{14} = \frac{y}{35} = \frac{z}{30}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{14} = \frac{y}{35} = \frac{z}{30} = \frac{x+y+z}{14+35+30} = \frac{1580}{79} = 20$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 280 \\ y = 700 \\ z = 600 \end{cases}$$

Vậy số khẩu trang y tế quyên góp được của khối 6; 7; 8 lần lượt là 280; 700; 600 chiếc.



CHUYÊN ĐỀ 5: TÌM GIÁ TRỊ CHƯA BIẾT

A. Kiến thức

Toán tìm x là một trong các chủ đề thường gặp trong các kì thi HSG. Để giải toán tìm x học sinh phải có kĩ năng cộng, trừ, nhân, chia các phân số, lũy thừa để giúp cho việc biến đổi đưa đẳng thức chứa x về dạng $Ax = B$ từ đó suy ra được $x = B : A$

Bài toán tìm x đôi khi còn kết hợp phép tính tổng các số, tổng các phân số, tổng các tích, tổng các lũy thừa theo quy luật nên học sinh cần nắm vững và luyện thật chắc các bài toán tính tổng theo quy luật.

B. Bài tập và các dạng toán

Dạng 1: Tìm x thông thường

Bài 1: Tìm x , biết

a) $\left(x - \frac{2}{3}\right) : 1\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

b) $\left|2x - \frac{1}{6}\right| + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$

Lời giải

a) Ta có $\left(x - \frac{2}{3}\right) : 1\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \left(x - \frac{2}{3}\right) : 1\frac{1}{3} = 1 \Rightarrow x - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = 2$

Vậy $x = 2$

b) Ta có $\left|2x - \frac{1}{6}\right| + \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \left|2x - \frac{1}{6}\right| = \frac{1}{6}$

- TH1: $2x - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

- TH2: $2x - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6} \Rightarrow x = 0$

Vậy $x \in \left\{0; \frac{1}{3}\right\}$

Bài 2: Tìm x , biết

Tìm x , biết $7 - 5.(x - 2) = 3 + 2.(4 - x)$

Lời giải





$$\text{Ta có: } 7 - 5.(x - 2) = 3 + 2.(4 - x) \Rightarrow 7 - 5.2 - 5.(-2) = 3 + 2.4 + 2.(-x) \Rightarrow 7 - 5x + 10 = 3 + 8 - 2x$$

$$-5x + 2x = 3 + 8 - 7 - 10 \Rightarrow -3x = -6 \Rightarrow x = 2$$

Vậy $x = 2$.

Bài 3: Tìm x , biết

$$\text{a) } \frac{2x - 3}{3} + \frac{-3}{2} = \frac{5 - 3x}{6} - \frac{1}{3}$$

$$\text{b) } \frac{2}{3x} - \frac{3}{12} = \frac{4}{5} - \left(\frac{7}{x} - 2\right)$$

Lời giải

$$\text{a) } \frac{2x - 3}{3} + \frac{-3}{2} = \frac{5 - 3x}{6} - \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{4x - 6 + (-9)}{6} = \frac{5 - 3x - 2}{6}$$

$$\Rightarrow 4x - 15 = 3 - 3x \Rightarrow 7x = 18 \Rightarrow x = \frac{18}{7}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{18}{7}$$

$$\text{b) } \frac{2}{3x} - \frac{3}{12} = \frac{4}{5} - \left(\frac{7}{x} - 2\right) \Rightarrow \frac{2}{3x} - \frac{1}{4} = \frac{4}{5} - \frac{7}{x} + 2 \Rightarrow \frac{2}{3x} + \frac{7}{x} = \frac{4}{5} + \frac{1}{4} + 2 \Rightarrow \frac{23}{3x} = \frac{61}{20}$$

$$\Rightarrow 3x = \frac{460}{61} \Rightarrow x = \frac{460}{183}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{460}{183}$$

Bài 4: Tìm x , biết

$$\text{a) } \frac{1}{x - 1} + \frac{-2}{3} \left(\frac{3}{4} - \frac{6}{5}\right) = \frac{5}{2 - 2x}$$

$$\text{b) } \frac{9}{17}x + 15\frac{13}{17}x - 20\frac{5}{17}x = 16$$

Lời giải

$$\text{a) } \frac{1}{x - 1} + \frac{3}{10} = \frac{5}{2 - 2x} \Rightarrow \frac{1}{x - 1} + \frac{5}{2(x - 1)} = \frac{-3}{10} \Rightarrow \frac{7}{2(x - 1)} = \frac{-3}{10}$$

$$\Rightarrow 2(x - 1) = -\frac{70}{3} \Rightarrow x - 1 = \frac{-35}{3} \Rightarrow x = \frac{-32}{3}$$

$$\text{b) } \frac{9}{17}x + 15\frac{13}{17}x - 20\frac{5}{17}x = 16 \Rightarrow \left(\frac{9}{17} + 15\frac{13}{17} - 20\frac{5}{17}\right)x = 16 \Rightarrow -4x = 16 \Rightarrow x = -4$$



Bài 5: Tìm số tự nhiên x biết: $(19x + 22.3^2) : 14 = (11 - 6)^2$

Lời giải

$$(19x + 22.3^2) : 14 = (11 - 6)^2 \Rightarrow 19x + 198 = 350$$

$$\Rightarrow 19x = 152 \Rightarrow x = 8$$

Vậy $x = 8$

Bài 6: Tìm x biết: $\frac{2}{3}.x - 70\frac{10}{11} : \left(\frac{131313}{151515} + \frac{131313}{353535} + \frac{131313}{636363} + \frac{131313}{999999} \right) = -5.$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{2}{3}.x - 70\frac{10}{11} : \left(\frac{131313}{151515} + \frac{131313}{353535} + \frac{131313}{636363} + \frac{131313}{999999} \right) = -5$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}.x - \frac{780}{11} : \left(\frac{13}{15} + \frac{13}{35} + \frac{13}{63} + \frac{13}{99} \right) = -5. \Leftrightarrow \frac{2}{3}.x - \frac{780}{11} : \left[\frac{13}{2} \left(\frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \frac{2}{7.9} + \frac{2}{9.11} \right) \right] = -5.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}.x - \frac{780}{11} : \left[\frac{13}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{11} \right) \right] = -5. \Leftrightarrow \frac{2}{3}.x - \frac{780}{11} : \left(\frac{13}{2} \cdot \frac{8}{33} \right) = -5 \Leftrightarrow \frac{2}{3}.x - 45 = -5.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}.x = 40.$$

$$\Leftrightarrow x = 60.$$

Vậy $x = 60.$

Bài 7: Tìm x , biết

a) $(7x - 11)^3 = 2^5.5^2 + 200$

b) $\frac{x-1}{12} + \frac{x-1}{20} + \frac{x-1}{30} + \frac{x-1}{42} + \frac{x-1}{56} + \frac{x-1}{72} = \frac{16}{9}$

Lời giải

a) Ta có: $(7x - 11)^3 = 2^5.5^2 + 200 \Rightarrow (7x - 11)^3 = 32.25 + 200 = 1000 = 10^3$

$$\Rightarrow 7x - 11 = 10 \Rightarrow 7x = 21 \Rightarrow x = 3$$

b) Ta chú ý: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{(n+1)n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$

Ta đi xét tổng sau





$$\begin{aligned} \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} &= \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{8.9} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72}\right) = \frac{16}{9} \Leftrightarrow (x-1) \cdot \frac{2}{9} = \frac{16}{9}$

$$\Leftrightarrow x-1 = 8 \Leftrightarrow x = 9$$

Vậy $x = 9$

Dạng 2: Đưa bài toán về dạng tích bằng 0

Bài 1: Tìm x , biết

Tìm x , biết $\frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003}$

Lời giải

Ta có: $\frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{2008} + 1\right) + \left(\frac{x+2}{2007} + 1\right) + \left(\frac{x+3}{2006} + 1\right) = \left(\frac{x+4}{2005} + 1\right) + \left(\frac{x+5}{2004} + 1\right) + \left(\frac{x+6}{2003} + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2009}{2008} + \frac{x+2009}{2007} + \frac{x+2009}{2006} - \frac{x+2009}{2005} - \frac{x+2009}{2004} - \frac{x+2009}{2003} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2009)\left(\frac{1}{2008} + \frac{1}{2007} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2005} - \frac{1}{2004} - \frac{1}{2003}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2009$$

Bài 2: Tìm x , biết

a) $\frac{29-x}{21} + \frac{27-x}{23} + \frac{25-x}{25} + \frac{23-x}{27} + \frac{21-x}{29} = -5$

b) $\frac{x-10}{30} + \frac{x-14}{43} + \frac{x-5}{95} + \frac{x-148}{8} = 0$

Lời giải

a) $\frac{29-x}{21} + \frac{27-x}{23} + \frac{25-x}{25} + \frac{23-x}{27} + \frac{21-x}{29} = -5$





$$\Rightarrow \left(\frac{29-x}{21} + 1 \right) + \left(\frac{27-x}{23} + 1 \right) + \left(\frac{25-x}{25} + 1 \right) + \left(\frac{23-x}{27} + 1 \right) + \left(\frac{21-x}{29} + 1 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{50-x}{21} + \frac{50-x}{23} + \frac{50-x}{25} + \frac{50-x}{27} + \frac{50-x}{29} = 0$$

$$\Rightarrow (50-x) \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{23} + \frac{1}{25} + \frac{1}{27} + \frac{1}{29} \right) = 0$$

$$\Rightarrow x = 50$$

Vậy $x = 50$

$$b) \frac{x-10}{30} + \frac{x-14}{43} + \frac{x-5}{95} + \frac{x-148}{8} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x-10}{30} - 3 \right) + \left(\frac{x-14}{43} - 2 \right) + \left(\frac{x-5}{95} - 1 \right) + \left(\frac{x-148}{8} + 6 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x-100}{30} + \frac{x-100}{43} + \frac{x-100}{95} + \frac{x-100}{8} = 0$$

$$\Rightarrow (x-100) \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{43} + \frac{1}{95} + \frac{1}{8} \right) = 0 \Rightarrow x = 100.$$

Bài 3: Tìm x , biết

$$a) \frac{x-5}{100} + \frac{x-4}{101} + \frac{x-3}{102} = \frac{x-100}{5} + \frac{x-101}{4} + \frac{x-102}{3}$$

$$b) \frac{x-2}{7} + \frac{x-1}{8} = \frac{x-4}{5} + \frac{x-3}{6}$$

Lời giải

$$a) \frac{x-5}{100} + \frac{x-4}{101} + \frac{x-3}{102} = \frac{x-100}{5} + \frac{x-101}{4} + \frac{x-102}{3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x-5}{100} - 1 \right) + \left(\frac{x-4}{101} - 1 \right) + \left(\frac{x-3}{102} - 1 \right) = \left(\frac{x-100}{5} - 1 \right) + \left(\frac{x-101}{4} - 1 \right) + \left(\frac{x-102}{3} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{x-105}{100} + \frac{x-105}{101} + \frac{x-105}{102} = \frac{x-105}{5} + \frac{x-105}{4} + \frac{x-105}{3}$$

$$\Rightarrow x - 105 = 0 \Rightarrow x = 105$$

$$b) \frac{x-2}{7} + \frac{x-1}{8} = \frac{x-4}{5} + \frac{x-3}{6}$$



$$\Rightarrow \left(\frac{x-2}{7} - 1\right) + \left(\frac{x-1}{8} - 1\right) = \left(\frac{x-4}{5} - 1\right) + \left(\frac{x-3}{6} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{x-9}{7} + \frac{x-9}{8} = \frac{x-9}{5} + \frac{x-9}{6}$$

$$\Rightarrow x - 9 = 0 \Rightarrow x = 9$$

Bài 4: Tìm x , biết

a) $\frac{x+1}{94} + \frac{x+2}{93} + \frac{x+3}{92} = \frac{x+4}{91} + \frac{x+5}{90} + \frac{x+6}{89}$

b) $\frac{2x+19}{21} - \frac{2x+17}{23} = \frac{2x+7}{33} - \frac{2x+5}{35}$

Lời giải

a) $\frac{x+1}{94} + \frac{x+2}{93} + \frac{x+3}{92} = \frac{x+4}{91} + \frac{x+5}{90} + \frac{x+6}{89}$

$$\Rightarrow \left(\frac{x+1}{94} + 1\right) + \left(\frac{x+2}{93} + 1\right) + \left(\frac{x+3}{92} + 1\right) = \left(\frac{x+4}{91} + 1\right) + \left(\frac{x+5}{90} + 1\right) + \left(\frac{x+6}{89} + 1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{x+95}{94} + \frac{x+95}{93} + \frac{x+95}{92} = \frac{x+95}{91} + \frac{x+95}{90} + \frac{x+95}{89}$$

$$\Rightarrow x + 95 = 0 \Rightarrow x = -95$$

b) $\frac{2x+19}{21} - \frac{2x+17}{23} = \frac{2x+7}{33} - \frac{2x+5}{35}$

$$\Rightarrow \left(\frac{2x+19}{21} + 1\right) - \left(\frac{2x+17}{23} + 1\right) = \left(\frac{2x+7}{33} + 1\right) - \left(\frac{2x+5}{35} + 1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2x+40}{21} + \frac{2x+40}{35} = \frac{2x+40}{33} + \frac{2x+40}{23} \Rightarrow 2x + 40 = 0 \Rightarrow x = -20$$

Vậy $x = -20$

Bài 5: Tìm x , biết

a) $\frac{x-1}{59} + \frac{x-2}{58} + \frac{x-3}{57} = \frac{x-4}{56} + \frac{x-5}{55} + \frac{x-6}{54}$

b) $\frac{x+1}{15} + \frac{x+2}{14} = \frac{x+3}{13} + \frac{x+4}{12}$

Lời giải





$$a) \frac{x-1}{59} + \frac{x-2}{58} + \frac{x-3}{57} = \frac{x-4}{56} + \frac{x-5}{55} + \frac{x-6}{54}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x-1}{59} - 1 \right) + \left(\frac{x-2}{58} - 1 \right) + \left(\frac{x-3}{57} - 1 \right) = \left(\frac{x-4}{56} - 1 \right) + \left(\frac{x-5}{55} - 1 \right) + \left(\frac{x-6}{54} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{x-60}{59} + \frac{x-60}{58} + \frac{x-60}{57} = \frac{x-60}{56} + \frac{x-60}{55} + \frac{x-60}{54}$$

$$\Rightarrow x - 60 = 0 \Rightarrow x = 60$$

$$b) \frac{x+1}{15} + \frac{x+2}{14} = \frac{x+3}{13} + \frac{x+4}{12}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x+1}{15} + 1 \right) + \left(\frac{x+2}{14} + 1 \right) = \left(\frac{x+3}{13} + 1 \right) + \left(\frac{x+4}{12} + 1 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{x+16}{15} + \frac{x+16}{14} = \frac{x+16}{13} + \frac{x+16}{12}$$

$$\Rightarrow x + 16 = 0 \Rightarrow x = -16$$

Vậy $x = -16$

Bài 6: Tìm x , biết

$$a) \frac{x-5}{1990} + \frac{x-15}{1980} = \frac{x-1990}{5} + \frac{x-1980}{15}$$

$$b) \frac{x-1}{2015} + \frac{x-3}{2013} = \frac{x-5}{2011} + \frac{x-7}{2009}$$

Lời giải

$$a) \frac{x-5}{1990} + \frac{x-15}{1980} = \frac{x-1990}{5} + \frac{x-1980}{15}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x-5}{1990} - 1 \right) + \left(\frac{x-15}{1980} - 1 \right) = \left(\frac{x-1990}{5} - 1 \right) + \left(\frac{x-1980}{15} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{x-1995}{1990} + \frac{x-1995}{1980} = \frac{x-1995}{5} + \frac{x-1995}{15}$$

$$\Rightarrow x - 1995 = 0 \Rightarrow x = 1995$$

$$b) \frac{x-1}{2015} + \frac{x-3}{2013} = \frac{x-5}{2011} + \frac{x-7}{2009}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x-1}{2015} - 1 \right) + \left(\frac{x-3}{2013} - 1 \right) = \left(\frac{x-5}{2011} - 1 \right) + \left(\frac{x-7}{2009} - 1 \right)$$



$$\Rightarrow \frac{x-2016}{2015} + \frac{x-2016}{2013} = \frac{x-2016}{2011} + \frac{x-2016}{2009} \Rightarrow x-2016=0 \Rightarrow x=2016$$

Vậy $x = 2016$

Bài 7: Tìm x , biết

a) $\frac{x+1}{10} + \frac{x+1}{11} + \frac{x+1}{12} = \frac{x+1}{13} + \frac{x+1}{14}$

b) $\frac{315-x}{101} + \frac{313-x}{103} + \frac{311-x}{105} + \frac{309-x}{107} = -4$

Lời giải

a) $\frac{x+1}{10} + \frac{x+1}{11} + \frac{x+1}{12} = \frac{x+1}{13} + \frac{x+1}{14}$

$$\Rightarrow (x+1) \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} - \frac{1}{13} - \frac{1}{14} \right) = 0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

b) $\frac{315-x}{101} + \frac{313-x}{103} + \frac{311-x}{105} + \frac{309-x}{107} = -4$

$$\Rightarrow \left(\frac{315-x}{101} + 1 \right) + \left(\frac{313-x}{103} + 1 \right) + \left(\frac{311-x}{105} + 1 \right) + \left(\frac{309-x}{107} + 1 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{416-x}{101} + \frac{416-x}{103} + \frac{416-x}{105} + \frac{416-x}{107} = 0 \Rightarrow 416-x=0 \Rightarrow x=416$$

Vậy $x = 416$

Bài 8: Tìm x , biết

a) $\frac{x-1}{2009} + \frac{x-2}{2008} = \frac{x-3}{2007} + \frac{x-4}{2006}$

b) $\frac{59-x}{41} + \frac{57-x}{43} + \frac{55-x}{45} + \frac{53-x}{47} + \frac{51-x}{49} = -5$

Lời giải

a) $\frac{x-1}{2009} + \frac{x-2}{2008} = \frac{x-3}{2007} + \frac{x-4}{2006}$

$$\Rightarrow \left(\frac{x-1}{2009} - 1 \right) + \left(\frac{x-2}{2008} - 1 \right) = \left(\frac{x-3}{2007} - 1 \right) + \left(\frac{x-4}{2006} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{x-2010}{2009} + \frac{x-2010}{2008} = \frac{x-2010}{2007} + \frac{x-2010}{2006}$$





$$\Rightarrow x - 2010 = 0 \Rightarrow x = 2010$$

$$b) \frac{59-x}{41} + \frac{57-x}{43} + \frac{55-x}{45} + \frac{53-x}{47} + \frac{51-x}{49} = -5$$

$$\Rightarrow \left(\frac{59-x}{41} + 1 \right) + \left(\frac{57-x}{43} + 1 \right) + \left(\frac{55-x}{45} + 1 \right) + \left(\frac{53-x}{47} + 1 \right) + \left(\frac{51-x}{49} + 1 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{100-x}{41} + \frac{100-x}{43} + \frac{100-x}{45} + \frac{100-x}{47} + \frac{100-x}{49} = 0 \Rightarrow 100-x = 0 \Rightarrow x = 100$$

Vậy $x = 100$

Bài 9: Tìm x biết: $\frac{148-x}{25} + \frac{169-x}{23} + \frac{186-x}{21} + \frac{199-x}{19} = 10$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{148-x}{25} + \frac{169-x}{23} + \frac{186-x}{21} + \frac{199-x}{19} = 10$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{148-x}{25} - 1 \right) + \left(\frac{169-x}{23} - 2 \right) + \left(\frac{186-x}{21} - 3 \right) + \left(\frac{199-x}{19} - 4 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (123-x) \left(\frac{1}{25} + \frac{1}{23} + \frac{1}{21} + \frac{1}{19} \right) = 0 \Leftrightarrow 123-x = 0 \Leftrightarrow x = 123 \Rightarrow S = \{123\}$$

Bài 10:

Tìm x biết $\frac{x-1}{2013} + \frac{x-2}{2012} - \frac{x-3}{2011} = \frac{x-4}{2010}$

Lời giải

Ta có $\Leftrightarrow \frac{x-1}{2013} - 1 + \frac{x-2}{2012} - 1 = \frac{x-4}{2010} - 1 + \frac{x-3}{2011} - 1$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2014}{2013} + \frac{x-2014}{2012} = \frac{x-2014}{2010} + \frac{x-2014}{2011}$$

$$\Leftrightarrow (x-2014) \left(\frac{1}{2013} + \frac{1}{2012} - \frac{1}{2010} - \frac{1}{2011} \right) = 0 \Leftrightarrow x = 2014$$

Vậy $x = 2014$

Bài 11:





Tìm x biết $\frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18}$

Lời giải

Điều kiện: $x \neq -4; x \neq -5; x \neq -6; x \neq -7$

Ta có: $\frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18} \Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$

$\Leftrightarrow 18(x+7) - 18(x+4) = (x+7)(x+4) \Leftrightarrow (x+13)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -13 \\ x = 2 \end{cases}$

Vậy $x \in \{-13; 2\}$

Bài 12:

Tìm x biết: $\frac{2}{(x+2)(x+4)} + \frac{4}{(x+4)(x+8)} + \frac{6}{(x+8)(x+14)} = \frac{x}{(x+2)(x+14)}$

Lời giải

Ta có: $\frac{2}{(x+2)(x+4)} + \frac{4}{(x+4)(x+8)} + \frac{6}{(x+8)(x+14)} = \frac{x}{(x+2)(x+14)}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) + \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+8} \right) + \left(\frac{1}{x+8} - \frac{1}{x+14} \right) = \frac{x}{(x+2)(x+14)}$

$\Rightarrow \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+14} = \frac{x}{(x+2)(x+14)} \Rightarrow \frac{12}{(x+2)(x+14)} = \frac{x}{(x+2)(x+14)} \Rightarrow x = 12$

Vậy $x = 12$

Bài 13:

Tìm x biết: $\frac{x-241}{17} + \frac{x-220}{19} + \frac{x-195}{21} + \frac{x-166}{23} = 10$

Lời giải

Ta có:

$\frac{x-241}{17} + \frac{x-220}{19} + \frac{x-195}{21} + \frac{x-166}{23} = 10$





$$\Leftrightarrow \frac{x-241}{17} - 1 + \frac{x-220}{19} - 2 + \frac{x-195}{21} - 3 + \frac{x-166}{23} - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-258}{17} + \frac{x-258}{19} + \frac{x-258}{21} + \frac{x-258}{23} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-258) \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} \right) = 0 \Leftrightarrow x = 258$$

Vậy $x = 258$

Bài 14: Tìm x biết: $\frac{x-1}{2012} + \frac{x-2}{2011} + \frac{x-3}{2010} + \dots + \frac{x-2012}{1} = 2012$

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{x-1}{2012} - 1 + \frac{x-2012}{2011} - 1 + \frac{x-3}{2010} - 1 + \dots + \frac{x-2012}{1} - 1 + 2012 = 2012$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2013}{2012} + \frac{x-2013}{2011} + \frac{x-2013}{2010} + \dots + \frac{x-2013}{1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2013) \left(\frac{1}{2012} + \frac{1}{2011} + \frac{1}{2010} + \dots + \frac{1}{1} \right) = 0 \Leftrightarrow x = 2013$$

Vậy $x = 2013$



Dạng 3: Sử dụng tính chất về lũy thừa

Bài 1: HSG Cẩm Giàng, năm học 2018 - 2019

Tìm x , biết $2^{x-1} + 5 \cdot 2^{x-2} = \frac{7}{32}$

Lời giải

Ta có: $2^{x-1} + 5 \cdot 2^{x-2} = \frac{7}{32}$ (với $x \in \mathbb{Z}$)

$$2^{x-1} + 5 \cdot 2^{x-2} = \frac{7}{32} \Rightarrow \frac{2^x}{2} + 5 \cdot \frac{2^x}{2^2} = \frac{7}{2^5} \Rightarrow 2^x \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2^2} \right) = \frac{7}{2^5} \Rightarrow 2^x = \frac{7}{2^5} \cdot \frac{2^2}{7} \Rightarrow 2^x = 2^{-3} \Rightarrow x = -3$$

Vậy $x = -3$.

Bài 2: HSG Nghi Lộc, năm học 2020 - 2021

Tìm các số nguyên x , biết $5^{x+1} + 5^{x-2} = 126$

Lời giải

$$\text{Ta có } 5^{x+1} + 5^{x-2} = 126 \Leftrightarrow 5 \cdot 5^x + \frac{5^x}{5^2} = 126 \Leftrightarrow 5^x \cdot \left(5 + \frac{1}{25} \right) = 126$$

$$\Leftrightarrow 5^x \cdot \frac{126}{25} = 126 \Leftrightarrow 5^x = 25 \Leftrightarrow 5^x = 5^2 \Leftrightarrow x = 2$$

Vậy $x = 2$.

Bài 3: Tìm x biết

a) $(3x - 1)^{10} = (3x - 1)^{20}$

b) $x(6 - x)^{2003} = (6 - x)^{2003}$

c) $5^x + 5^{x+2} = 650$

Lời giải

a) $(3x - 1)^{10} = (3x - 1)^{20} \Rightarrow (3x - 1)^{20} - (3x - 1)^{10} = 0$

$$\Rightarrow (3x - 1)^{10} \left[(3x - 1)^{10} - 1 \right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x - 1 = 0 \\ (3x - 1)^{10} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ 3x - 1 = \pm 1 \end{cases}$$



Vậy $x \in \left\{-1; \frac{1}{3}; 1\right\}$

b) $x(6-x)^{2003} = (6-x)^{2003} \Rightarrow x(6-x)^{2003} - (6-x)^{2003} = 0$

$\Rightarrow (6-x)^{2003}(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 6-x=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=1 \end{cases}$

Vậy $x \in \{1; 6\}$

c) $5^x + 5^x \cdot 5^2 = 650 \Rightarrow 5^x(1+25) = 650 \Rightarrow 5^x = 25 \Rightarrow 5^x = 5^2 \Rightarrow x = 2$

Vậy $x = 2$

Bài 4: Tìm x biết $3^{3x+3} - 2 \cdot 3^{3x+1} = 567$

Lời giải

Ta có $3^{3x+3} - 2 \cdot 3^{3x+1} = 567 \Rightarrow 3^{3x} \cdot 27 - 2 \cdot 3^{3x} \cdot 3 = 567 \Rightarrow 3^{3x} \cdot (27 - 6) = 567$

$\Rightarrow 3^{3x} \cdot 21 = 567 \Rightarrow 3^{3x} = 567 : 21 \Rightarrow 3^{3x} = 3^3$

Vậy $3x = 3 \Rightarrow x = 1$.

Bài 5: Tìm x biết $5^{2x-3} - 2 \cdot 5^2 = 5^2 \cdot 3$.

Lời giải

Ta có $5^{2x-3} - 2 \cdot 5^2 = 5^2 \cdot 3 \Rightarrow 5^{2x-3} = 5^2 \cdot 3 + 2 \cdot 5^2 \Rightarrow 5^{2x-3} = 5^2 \cdot (3 + 2) \Rightarrow 5^{2x-3} = 5^3 \Rightarrow 2x - 3 = 3$

$\Rightarrow 2x = 3 + 3 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$

Vậy $x = 3$

Bài 6: Tìm x biết $2^{x-1} + 5 \cdot 2^{x-2} = \frac{7}{32}$

Lời giải

Ta có $2^{x-1} + 5 \cdot 2^{x-2} = \frac{7}{32} \Rightarrow 2^{x-1} \left(1 + \frac{5}{2}\right) = \frac{7}{32} \Rightarrow 2^{x-1} \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{32} \Rightarrow 2^{x-1} = \frac{1}{16} = 2^{-4} \Rightarrow x = -3$

Vậy $x = -3$

Bài 7: Tìm x biết

a) $(x-7)^{x+1} - (x-7)^{x+11} = 0$

b) $2^{x+2} \cdot 3^{x+1} \cdot 5^x = 10800$



$$c) (2x - 15)^5 = (2x - 15)^3$$

Lời giải

a, Ta có:

$$(x - 7)^{x+1} - (x - 7)^{x+11} = 0 \Rightarrow (x - 7)^{x+1} [1 - (x - 7)^{10}] = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 7 = 0 \\ (x - 7)^{10} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x - 7 = \pm 1 \end{cases}$$

$$b) 2^{x+2} \cdot 3^{x+1} \cdot 5^x = 10800 \Rightarrow 2^x \cdot 4 \cdot 3^x \cdot 3 \cdot 5^x = 10800 \Rightarrow 2^x \cdot 3^x \cdot 5^x = \frac{10800}{12} = 900$$

$$\Rightarrow (2 \cdot 3 \cdot 5)^x = 900 \Rightarrow 30^x = 900 = 30^2 \Rightarrow x = 2$$

$$c) (2x - 15)^5 = (2x - 15)^3 \Rightarrow (2x - 15)^5 - (2x - 15)^3 = 0$$

$$\Rightarrow (2x - 15)^3 [(2x - 15)^2 - 1] = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 15 = 0 \\ 2x - 15 = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{15}{2} \\ x \in \{7; 8\} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{15}{2}; 7; 8 \right\}$$

Bài 8: Tìm x, n biết

$$a) (x - 5)^2 = (1 - 3x)^2$$

$$b) x^2 + x = 0$$

$$c) 3^4 \cdot 3^n = 3^7$$

Lời giải

$$a) (x - 5)^2 = (1 - 3x)^2 \Rightarrow \begin{cases} x - 5 = 1 - 3x \\ x - 5 = 3x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 6 \\ 2x = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -2 \end{cases}$$

$$b) x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$c) 3^4 \cdot 3^n = 3^7 \Rightarrow 3^n = 3^7 : 3^4 = 3^3 \Rightarrow n = 3$$

Bài 9: Tìm x biết

$$a) (4x - 3)^4 = (4x - 3)^2$$

$$b) (x - 1)^3 = 125$$

$$c) 2^{x+2} - 2^x = 96$$

Lời giải

$$a) (4x - 3)^4 = (4x - 3)^2 \Rightarrow (4x - 3)^4 - (4x - 3)^2 = 0$$





$$\Rightarrow (4x - 3)^2 \left[(4x - 3)^2 - 1 \right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x - 3 = 0 \\ 4x - 3 = \pm 1 \end{cases}$$

b) $(x - 1)^3 = 125 \Rightarrow (x - 1)^3 = 5^3 \Rightarrow x - 1 = 5 \Rightarrow x = 6$

c) $2^{x+2} - 2^x = 96 \Rightarrow 2^{x+2} - 2^x = 96 \Rightarrow 2^x (4 - 1) = 96 \Rightarrow 2^x = 32 = 2^5 \Rightarrow x = 5$

Vậy $x = 5$

Bài 10: Tìm x, n biết

a) $(9x^2 - 1)^2 + \left| x - \frac{1}{3} \right| = 0$

b) $\frac{1}{9} \cdot 3^4 \cdot 3^n = 3^7$

c) $\frac{1}{9} \cdot 27^n = 3^n$

Lời giải

a) Vì $(9x^2 - 1) \geq 0, \left| x - \frac{1}{3} \right| \geq 0$, để $(9x^2 - 1)^2 + \left| x - \frac{1}{3} \right| = 0 \Rightarrow \begin{cases} 9x^2 - 1 = 0 \\ \left| x - \frac{1}{3} \right| = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{3} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

b) $\frac{1}{9} \cdot 3^4 \cdot 3^n = 3^7 \Rightarrow 3^n \cdot \frac{1}{9} = 3^7 : 3^4 = 3^3 \Rightarrow 3^n = 3^3 \cdot 3^2 = 3^5$

c) $\frac{1}{9} \cdot 27^n = 3^n \Rightarrow \frac{3^n}{27^n} = \frac{1}{9} \Rightarrow \left(\frac{1}{3} \right)^n = \frac{1}{3^2} \Rightarrow n = 2$

Bài 11: Tìm x, n biết

a) $3^{x-1} + 5 \cdot 3^{x-1} = 486$

b) $x^{200} = x$

c) $(2^2 : 4) \cdot 2^n = 4$

Lời giải

a) $3^{x-1} + 5 \cdot 3^{x-1} = 486 \Rightarrow 3^{x-1} (1 + 5) = 486 \Rightarrow 3^{x-1} = 81 = 3^4 \Rightarrow x - 1 = 4 \Rightarrow x = 5$

b) $x^{200} = x \Rightarrow x(x^{199} - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

c) $(2^2 : 4) \cdot 2^n = 4 \Rightarrow 2^n = 4 = 2^2 \Rightarrow n = 2$



Bài 12: Tìm x, n biết

a) $(x - 1)^{x+2} = (x - 1)^{x+4}$

b) $5^n + 5^{n+2} = 650$;

c) $2008^n = 1$

Lời giải

a) $(x - 1)^{x+2} = (x - 1)^{x+4} \Rightarrow (x - 1)^{x+2} \left[(x - 1)^{x+2} - 1 \right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x - 1)^{x+2} = 0 \\ (x - 1)^{x+2} = 1 \end{cases}$

b) $5^n + 5^{n+2} = 650 \Rightarrow 5^n (1 + 5^2) = 650 \Rightarrow 5^n = 25 = 5^2 \Rightarrow n = 2$

c) $2008^n = 1 \Rightarrow 2008^n = 1 = 2008^0 \Rightarrow n = 0$

Bài 13: Tìm x, n biết

a) $\frac{1}{2} \cdot 2^n + 4 \cdot 2^n = 9 \cdot 5^n$

b) $\left(\frac{y}{3} - 5\right)^{2000} = \left(\frac{y}{x} - 5\right)^{2008}$

Lời giải

a) $\frac{1}{2} \cdot 2^n + 4 \cdot 2^n = 9 \cdot 5^n \Rightarrow 2^n \left(\frac{1}{2} + 4\right) = 9 \cdot 5^n \Rightarrow 2^n \cdot \frac{9}{2} = 9 \cdot 5^n \Rightarrow 2^{n-1} \cdot 9 = 9 \cdot 5^n \Rightarrow 2^{n-1} = 5^n$ (vô lý)

b) $\left(\frac{y}{3} - 5\right)^{2000} = \left(\frac{y}{x} - 5\right)^{2008} \Rightarrow \left(\frac{y}{3} - 5\right)^{2000} \left[\left(\frac{y}{3} - 5\right)^8 - 1 \right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{3} - 5 = 0 \\ \frac{y}{3} - 5 = \pm 1 \end{cases}$

Bài 14: Tìm x, n biết

a) $32^{-n} \cdot 16^n = 1024$

b) $3^{-1} \cdot 3^n + 5 \cdot 3^{n-1} = 162$;

c) $2^{n+3} \cdot 2^n = 128$

Lời giải

a) $32^{-n} \cdot 16^n = 1024 \Rightarrow 2^{-5n} \cdot 2^{4n} = 1024 \Rightarrow 2^{-n} = 2^{10} \Rightarrow n = -10$

b) $3^{-1} \cdot 3^n + 5 \cdot 3^{n-1} = 162 \Rightarrow 3^{n-1} + 5 \cdot 3^{n-1} = 162$

$\Rightarrow 3^{n-1} \cdot 6 = 162 \Rightarrow 3^{n-1} = 27 = 3^3 \Rightarrow n - 1 = 3 \Rightarrow n = 4$

c) $2^{n+3} \cdot 2^n = 128 \Rightarrow 2^{2n+3} = 128 = 2^7 \Rightarrow 2n + 3 = 7 \Rightarrow n = 2$

Bài 15: Tìm x, n biết

a) $4^{x-2} + 4^{x+1} = 1040$

b) $(2x - 1)^3 = -8$;

c) $(x - 1)^{x+2} = (x - 1)^{x+4}$



Lời giải

a) $4^{x-2} + 4^{x+1} = 1040 \Rightarrow 4^{x-2} + 4^{x-2} \cdot 4^3 = 1040$

$\Rightarrow 4^{x-2} \cdot 65 = 1040 \Rightarrow 4^{x-2} = 16 = 4^2 \Rightarrow x - 2 = 2 \Rightarrow x = 4$

b) $(2x - 1)^3 = -8 \Rightarrow (2x - 1)^3 = (-2)^3 \Rightarrow 2x - 1 = -2 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$.

c) $(x - 1)^{x+2} = (x - 1)^{x+4} \Rightarrow (x - 1)^{x+2} [(x - 1)^2 - 1] = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x - 1)^{x+2} = 0 \\ (x - 1)^{x+2} = \pm 1 \end{cases}$

Bài 16: Tìm x, n biết

a) $2^{-1} \cdot 2^n + 4 \cdot 2^n = 9 \cdot 2^5$

b) $3^{n-1} + 5 \cdot 3^{n-1} = 162$

Lời giải

a) $2^{-1} \cdot 2^n + 4 \cdot 2^n = 9 \cdot 2^5 \Rightarrow 2^n \left(\frac{1}{2} + 4 \right) = 9 \cdot 2^5 \Rightarrow 2^n \cdot \frac{9}{2} = 9 \cdot 2^5 \Rightarrow 2^{n-1} = 2^5 \Rightarrow n = 6$

b) $3^{n-1} + 5 \cdot 3^{n-1} = 162 \Rightarrow 3^{n-1} \cdot 6 = 162 \Rightarrow 3^{n-1} = 27 = 3^3 \Rightarrow n = 4$

Bài 17: Tìm x, y biết

a) $10^x : 5^y = 20^y$

b) $|x - 5| + x - 8 = 6 (x > 5)$

c) $2^{x+1} \cdot 3^y = 12^x$

Lời giải

a) $10^x : 5^y = 20^y \Rightarrow 10^x = 20^y \cdot 5^y = 100^y = 10^{2y} \Rightarrow x = 2y$

b) Vì $x > 5 \Rightarrow |x - 5| = x - 5$. Khi đó ta có: $x - 5 + x - 8 = 6 \Rightarrow 2x = 19 \Rightarrow x = \frac{19}{2}$

c) $2^{x+1} \cdot 3^y = 2^{2x} \cdot 3^x \Rightarrow 2^{2x} : 2^{x+1} = 3^y : 3^x \Rightarrow 2^{x-1} = 3^{y-x} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 1$

Bài 18: Tìm x , biết

a) $(x - 2)^6 = (x - 2)^8$

b) $\frac{7}{3}x + \left(\frac{-11}{12}\right)^2 = \left(\frac{29}{12}\right)^2 - x = y^2$

Lời giải



$$a) (x-2)^6 = (x-2)^8 \Rightarrow (x-2)^6 [(x-2)^2 - 1] = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2 = 0 \\ x-2 = \pm 1 \end{cases}$$

$$b) \frac{7}{3}x + \left(\frac{-11}{12}\right)^2 = \left(\frac{29}{12}\right)^2 - x = y^2 \Rightarrow \frac{7}{3}x + x = \left(\frac{29}{12}\right)^2 - \left(\frac{11}{12}\right)^2 \Rightarrow \frac{10}{3}x = 5 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\text{Thay vào ta được } y^2 = \frac{7}{3} \cdot \frac{3}{2} + \frac{121}{144} = \frac{7}{2} + \frac{121}{144} = \frac{625}{144} \Rightarrow y = \pm \frac{25}{12}.$$

Bài 19:

$$\text{Tìm } x, y, z \text{ biết } \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{5}$$

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{5} \Rightarrow \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{5}\right) + \left(\frac{y^2}{3} - \frac{y^2}{5}\right) + \left(\frac{z^2}{4} - \frac{z^2}{5}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{10}x^2 + \frac{2}{15}y^2 + \frac{1}{20}z^2 = 0 \Rightarrow x = y = z = 0.$$

Vậy $x = y = z = 0$.

Bài 20:

$$\text{Tìm } x \text{ biết } \frac{7^{x+2} + 7^{x+1} + 7^x}{57} = \frac{5^{2x} + 5^{2x+1} + 5^{2x+3}}{131}$$

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{7^{x+2} + 7^{x+1} + 7^x}{57} = \frac{5^{2x} + 5^{2x+1} + 5^{2x+3}}{131}$$

$$\Rightarrow \frac{7^x(49 + 7 + 1)}{57} = \frac{5^{2x}(1 + 5 + 125)}{131} \Rightarrow 7^x = 25^x \Rightarrow x = 0$$

Vậy $x = 0$.

Bài 21:

$$\text{Tìm } x \text{ biết } (2^3)^{1205} \cdot x + 2005^0 \cdot x = 994 - 15 : 3 + 1^{2005}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } (2^3)^{1205} \cdot x + 2005^0 \cdot x = 994 - 15 : 3 + 1^{2005} \Rightarrow 8x + x = 990 \Rightarrow 9x = 990 \Rightarrow x = 110$$

Vậy $x = 110$.





Bài 22:

Tìm số nguyên x biết: $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + \dots + 2^{x+2015} = 2^{2019} - 8$.

Lời giải

Ta có: $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + \dots + 2^{x+2015} = 2^{2019} - 8$

$$\Leftrightarrow 2^x (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2015}) = 2^{2019} - 2^3$$

$$\Leftrightarrow 2^x \cdot (2^{2016} - 1) = 2^3 (2^{2016} - 1) \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy $x = 3$.

Bài 23: Tìm x biết $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} = 17$

Lời giải

Ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} = 17 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 17 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{16} + 1\right) = 17$

$$\Leftrightarrow \frac{17}{16} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 17 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 16 \Leftrightarrow 2^{-x} = 2^4 \Leftrightarrow x = -4$$

Vậy $x = -4$

Bài 24: Tìm m, n thỏa mãn $(-7x^4y^m) \cdot (-5x^n y^4) = 35x^9y^{15}$

Lời giải

Ta có $(-7x^4y^m) \cdot (-5x^n y^4) = 35x^9y^{15} \Rightarrow 35x^{n+4} \cdot y^{m+4} = 35x^9y^{15} \Rightarrow \begin{cases} n + 4 = 9 \\ m + 4 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 11 \\ n = 5 \end{cases}$

Bài 25: Tìm x, y nguyên, biết $2012^{|x-1|+y^2-1} \cdot 3^{2012} = 9^{1006}$

Lời giải

Ta có $2012^{|x-1|+y^2-1} \cdot 3^{2012} = 9^{1006}$

$$\Rightarrow 2012^{|x-1|+y^2-1} \cdot 3^{2012} = 3^{2012} \Rightarrow 2012^{|x-1|+y^2-1} = 1 \Rightarrow |x-1| + y^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow |x-1| + y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} |x-1| = 0 \\ y^2 = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} |x-1| = 1 \\ y^2 = 0 \end{cases}$$



Bài 26:

Tìm x , biết $\frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \cdot \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = 8^x$

Lời giải

Ta có $\frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \cdot \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = 8^x \Rightarrow \frac{4 \cdot 4^5}{3 \cdot 3^5} \cdot \frac{6^5 \cdot 6}{2 \cdot 2^5} = 2^{3x}$

$\Rightarrow \left(\frac{24}{6}\right)^5 \cdot \frac{24}{6} = 2^{3x} \Rightarrow 4^5 \cdot 4 = 2^{3x} \Rightarrow 4^6 = 2^{3x} \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$

Vậy $x = 2$

Bài 27: Tìm x , biết $|3x - 2^4| \cdot 7^{2018} = 2 \cdot 7^{2019} \cdot \frac{1}{2019^0}$

Lời giải

Ta có $|3x - 2^4| \cdot 7^{2018} = 2 \cdot 7^{2019} \cdot \frac{1}{2019^0}$

$|3x - 2^4| \cdot 7^{2018} = 2 \cdot 7^{2019} \cdot \frac{1}{2019^0} \Leftrightarrow |3x - 2^4| \cdot 7^{2018} = 2 \cdot 7^{2019} \Leftrightarrow |3x - 16| = 14$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 16 = 14 \\ 3x - 16 = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 30 \\ 3x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$

Vậy $x \in \left\{10; \frac{2}{3}\right\}$.

Bài 28:

Trong ba số a, b, c có 1 số dương, 1 số âm, và 1 số bằng 0, Tìm 3 số đó biết

$$|a| = b^2(b - c)$$

Lời giải

Xét $a = 0 \Rightarrow b^2(b - c) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = c \end{cases} (VL)$

Xét $a \neq 0 \Rightarrow |a| = b^2(b - c) > 0 \Rightarrow \begin{cases} b > c \\ b > 0 \end{cases} \Rightarrow c = 0, b > 0, a < 0$



Bài 29: Tìm x, y biết: $x(x - y) = \frac{3}{10}$ và $y(x - y) = \frac{-3}{50}$

Lời giải

Trừ theo vế ta được: $(x - y)(x - y) = \frac{9}{25} \Rightarrow (x - y)^2 = \left(\pm \frac{3}{5}\right)^2 \Rightarrow x - y = \pm \frac{3}{5}$

$x = \frac{3}{10} : \left(\pm \frac{3}{5}\right) = \pm \frac{1}{2}; \quad y = \frac{-3}{50} : \left(\pm \frac{3}{5}\right) = \mp \frac{1}{10}.$

Bài 30:

Tìm các số nguyên dương a, b, c biết rằng: $a^3 - b^3 - c^3 = 3abc$ và $a^2 = 2(b + c)$

Lời giải

Vì $a^2 = 2(b + c)$ nên a^2 là 1 số chẵn suy ra a, b, c chẵn, mà a, b, c nguyên dương nên từ

$a^3 - b^3 - c^3 = 3abc \Rightarrow a > b$ và $a > c \Rightarrow 2a > b + c \Rightarrow 4a > 2(b + c) \Rightarrow 4a > a^2 \Rightarrow a < 4$

Suy ra $a = 2$ và $b = c = 1$

Bài 31: Tìm $x \in \mathbb{N}$ biết: $3 \cdot (5^x - 1) - 2 = 70$

Lời giải

Ta có: $3 \cdot (5^x - 1) - 2 = 70 \Rightarrow 3 \cdot (5^x - 1) = 72 \Rightarrow 5^x - 1 = 24 \Rightarrow 5^x = 25 \Rightarrow x = 5.$

Vậy $x = 5.$

Bài 32:

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $x^2 + x = 3^{2020y} + 1$

Lời giải

Xét trường hợp $y = 0$ khi đó $x^2 + x = 2 \Rightarrow x(x + 1) = 2 \Rightarrow x = 1; x = -2$ vậy cặp $(x; y)$ thỏa mãn bài toán là $(1; 0); (-2; 0)$

Xét trường hợp $y > 0$ khi đó

$3^{2020y} + 1$ chia 3 dư 1 còn $x(x + 1)$ là tích của hai số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 3 hoặc chia 3 dư 2 nên không xảy ra

Vậy cặp $(x; y)$ thỏa là: $(1; 0); (-2; 0)$



Bài 33: HSG Thanh Oai, năm học 2016 - 2017

Tìm x , biết $32^{-x} \cdot 16^x = 2048$ ($x \in \mathbb{Z}$)

Lời giải

Ta có: $32^{-x} \cdot 16^x = 2048$ ($x \in \mathbb{Z}$)

$$\Rightarrow \frac{1}{32^x} \cdot 16^x = 2^{11} \Rightarrow \left(\frac{16}{32}\right)^x = 2^{11} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-11} \Rightarrow x = -11$$

Vậy $x = -11$

Bài 34: HSG Thái Thụy, năm học 2019 - 2020

Tìm số tự nhiên n , biết rằng: $2^{2n-1} + 4^{n+2} = 264$

Lời giải

Ta có: $2^{2n-1} + 4^{n+2} = 264$

$$\Rightarrow 2^{2n-1} + 2^{2(n+2)} = 264$$

$$\Rightarrow 2^{2n-1} + 2^{2n-1+5} = 264$$

$$\Rightarrow 2^{2n-1} \cdot 1 + 2^{2n-1} \cdot 2^5 = 264$$

$$\Rightarrow 2^{2n-1} \cdot (1 + 32) = 264$$

$$\Rightarrow 2^{2n-1} = 8$$

$$\Rightarrow 2^{2n-1} = 2^3$$

$$\Rightarrow 2n - 1 = 3$$

$$\Rightarrow 2n = 4$$

$$\Rightarrow n = 2$$

Vậy $n = 2$



Dạng 4: Tìm ẩn dạng phân thức

Bài 1: HSG Quảng Yên, năm học 2020-2021

Tìm x, y biết rằng: $\frac{2x+3}{3} = \frac{3y-2}{6} = \frac{2x+6y-1}{5x}$

Lời giải

Đặt $\frac{2x+3}{3} = \frac{3y-2}{6} = \frac{2x+6y-1}{5x} = k$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+3=3k \\ 3y-2=6k \\ 2x+6y-1=5xk \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3k-3}{2} \\ y = \frac{6k+2}{3} \\ 2 \cdot \frac{3k-3}{2} + 6 \cdot \frac{6k+2}{3} - 1 = 5 \cdot \frac{3k-3}{2} \cdot k \quad (*) \end{cases}$$

Giải(*) ta có $2 \cdot \frac{3k-3}{2} + 6 \cdot \frac{6k+2}{3} - 1 = 5 \cdot \frac{3k-3}{2} \cdot k$

$$\Leftrightarrow 3k - 3 + 12k + 4 - 1 = \frac{15k^2 - 15k}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{15k^2 - 15k}{2} - 15k = 0$$

$$\Leftrightarrow 15k^2 - 15k - 30k = 0$$

$$\Leftrightarrow 15k^2 - 45k = 0$$

$$\Leftrightarrow 15k(k-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = 3 \end{cases}$$

Trường hợp 1: $k = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-3}{2} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$



$$\text{Trường hợp 2: } k = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{20}{3} \end{cases}$$

Bài 2: HSG Tam Đảo, năm học 2021-2022

Tìm x, y biết: $\frac{x+y}{2019} = \frac{xy}{2020} = \frac{x-y}{2021}$

Lời giải

Ta có: $\frac{x+y}{2019} = \frac{xy}{2020} = \frac{x-y}{2021}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, có:

$$\frac{x+y}{2019} = \frac{x-y}{2021} = \frac{x+y+x-y}{2019+2021} = \frac{x}{2020}$$

Lại có: $\frac{xy}{2020} = \frac{x}{2020} \Leftrightarrow xy = x \Leftrightarrow y = 1$

Do đó: $\frac{x+y}{2019} = \frac{x-y}{2021} = \frac{x+y-x+y}{2019-2021} = \frac{2y}{-2} = \frac{y}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$ (theo t/c của dãy tỉ số bằng nhau)

$$\Rightarrow \frac{x}{2020} = -1 \Leftrightarrow x = -2020$$

Vậy $x = -2020; y = 1$

Bài 3: HSG Huyện Ý Yên, năm học 2014-2015

Tìm x, y biết: $\frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{5x} = \frac{1+7y}{4x}$

Lời giải

Ta có: $\frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{5x} = \frac{1+7y}{4x} = \frac{1+7y-1-5y}{4x-5x} = \frac{2y}{-x} = \frac{1+5y-1-3y}{5x-12} = \frac{2y}{5x-12}$

$$\Rightarrow \frac{2y}{-x} = \frac{2y}{5x-12} \Rightarrow 5x-12 = -x \Rightarrow 6x = 12 \Rightarrow x = 2$$

Thay $x = 2$ vào tỉ lệ thức $\frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{5x}$ ta có



$$\frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{10} \Rightarrow 10+30y = 12+60y \Rightarrow y = -\frac{1}{15}$$

Vậy $x = 2; y = \frac{-1}{15}$

Bài 4: HSG Huyện Triệu Sơn, năm học 2020-2021

Tìm x, y, z biết: $\frac{2x-1}{3} = \frac{3y-2}{5} = \frac{2x+3y-3}{4x}$

Lời giải

Điều kiện $x \neq 0$

Từ $\frac{2x-1}{3} = \frac{3y-2}{5} = \frac{2x+3y-3}{8} = \frac{2x+3y-3}{4x}$ (1)

Trường hợp 1: nếu $2x+3y-3 \neq 0$

Nên $4x = 8 \Rightarrow x = 2$ (thỏa mãn)

Mà $\frac{2x-1}{3} = \frac{3y-2}{5} \Rightarrow \frac{2.2-1}{3} = \frac{3y-2}{5} \Rightarrow y = \frac{7}{3}$

Vậy $x = 2; y = \frac{7}{3}$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2: nếu $2x+3y-3 = 0$

Nên $x = \frac{1}{2}; y = \frac{2}{3}$ (thỏa mãn)

Vậy $x = 2; y = \frac{7}{3}$ hoặc $x = \frac{1}{2}; y = \frac{2}{3}$

Bài 5: HSG Huyện Ý Yên, năm học 2018-2019

Tìm x, y biết: $\frac{x-1}{2019} + \frac{x-2}{2018} + \frac{x-3}{2017} = \frac{x-4}{2016} + \frac{x-5}{2015} + \frac{x-6}{2014}$

Lời giải

Ta có: $\frac{x-1}{2019} + \frac{x-2}{2018} + \frac{x-3}{2017} = \frac{x-4}{2016} + \frac{x-5}{2015} + \frac{x-6}{2014}$



$$\begin{aligned} &\Rightarrow \left(\frac{x-1}{2019} - 1\right) + \left(\frac{x-2}{2018} - 1\right) + \left(\frac{x-3}{2017} - 1\right) = \left(\frac{x-4}{2016} - 1\right) + \left(\frac{x-5}{2015} - 1\right) + \left(\frac{x-6}{2014} - 1\right) \\ &\Rightarrow \frac{x-2020}{2019} + \frac{x-2020}{2018} + \frac{x-2020}{2017} = \frac{x-2020}{2016} + \frac{x-2020}{2015} + \frac{x-2020}{2014} \\ &\Rightarrow (x-2020) \left(\frac{1}{2019} + \frac{1}{2018} + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2016} - \frac{1}{2015} - \frac{1}{2014}\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \frac{1}{2019} + \frac{1}{2018} + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2016} - \frac{1}{2015} - \frac{1}{2014} \neq 0 \Rightarrow x - 2020 = 0 \Rightarrow x = 2020$$

Vậy $x = 2020$

Bài 6:

Tìm cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn: $\frac{x}{4} - \frac{5}{y} = \frac{3}{2}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{x}{4} - \frac{5}{y} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{xy - 20}{4y} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2xy - 40 = 12y \Rightarrow xy - 6y = 20 \Rightarrow y \cdot (x - 6) = 20$$

$$\text{TH1: } y = 1 \Rightarrow x - 6 = 20 \Rightarrow x = 26$$

Vậy: $y = 1, x = 26$ (thỏa mãn).

$$\text{TH2: } y = 20 \Rightarrow x - 6 = 1 \Rightarrow x = 7$$

Vậy: $y = 20, x = 7$ (thỏa mãn).

$$\text{TH3: } y = 2 \Rightarrow x - 6 = 10 \Rightarrow x = 16$$

Vậy: $y = 2, x = 16$ (thỏa mãn).

$$\text{Th4: } y = 10 \Rightarrow x - 6 = 2 \Rightarrow x = 8$$

Vậy: $y = 10, x = 8$ (thỏa mãn).

$$\text{TH5: } y = 4 \Rightarrow x - 6 = 5 \Rightarrow x = 11$$

Vậy: $y = 4, x = 11$ (thỏa mãn).

$$\text{TH6: } y = 5 \Rightarrow x - 6 = 4 \Rightarrow x = 10$$

Vậy: $y = 5, x = 10$ (thỏa mãn).

Bài 7:

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{617}$



Lời giải

Ta có

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{617} \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{617} \Leftrightarrow xy - 617(x+y) = 0 \Leftrightarrow xy - 617x - 617y + 617^2 = 617^2$$

$$\Leftrightarrow (x - 617)(y - 617) = 617^2$$

Vì x, y nguyên dương nên $x - 617$ và $y - 617$ là ước lớn hơn -617 của $(617)^2$

Do 617 là số nguyên tố nên xảy ra 3 trường hợp:

$$\begin{cases} x - 617 = 617 \\ y - 617 = 617 \\ x - 617 = 1 \\ y - 617 = 617^2 \\ x - 617 = 617^2 \\ y - 617 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1234 \\ x = 618; y = 381306 \\ x = 381306; y = 618 \end{cases}$$

Vậy tất cả các cặp $(x; y)$ nguyên dương cần tìm là:

$(1234; 1234)$, $(618; 381306)$, $(381306; 618)$

Bài 8:

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{6xy} = \frac{1}{6}$

Lời giải

Ta có: $(1) \Leftrightarrow 6x + 6y + 1 = xy \Leftrightarrow x(y - 6) - 6(y - 6) = 37 \Leftrightarrow (x - 6)(y - 6) = 37$

Do vai trò của x, y bình đẳng nên ta giả sử $x \geq y \geq 1 \Rightarrow x - 6 \geq y - 6 \geq -5$

Chỉ có một trường hợp là $\begin{cases} x - 6 = 37 \\ y - 6 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 43 \\ y = 7 \end{cases}$

Bài 9: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $\frac{2x}{3} - \frac{2}{y} = \frac{1}{3}$

Lời giải

Ta có $\frac{2x}{3} - \frac{2}{y} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{2x-1}{3} = \frac{2}{y} \Rightarrow (2x-1).y = 6$





Ta lại có $2x - 1$ và y là các số nguyên, mà $2x - 1$ là số nguyên lẻ

Mà $U(6) = \{-6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6\}$ nên ta có bảng sau

$2x - 1$	1	3	-1	-3
y	6	2	-6	-2
x	1	2	0	-1

Vậy $(x; y) = \{(1; 6), (0; -6), (-1; -2)\}$

Dạng 5: Phương pháp chặn giá trị

Bài 1:

Tìm số tự nhiên x, y biết: $7(x - 2004)^2 = 23 - y^2$

Lời giải

Từ giả thiết ta thấy $7(x - 2004)^2 \geq 0$ nên $23 - y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq 23 \Rightarrow y \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$

Mà 7 là số nguyên tố nên $23 - y^2 : 7 \Rightarrow y \in \{3; 4\}$. Thay y vào ta tìm được x

Bài 2:

Tìm các số nguyên $a, b, c \neq 0$, biết: $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} = a + b + c = 3$

Lời giải

Ta có $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} = a + b + c = 3 \Rightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right) + 3 = 9$

$\Rightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{b} + 1\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{a}{c} + 1\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{b}{a} + 1\right) = 9$

$\Rightarrow \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} + \frac{a+b+c}{a} = 9 \Rightarrow (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 9$

$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$, do $a, b, c \in \mathbb{Z}$ nên $\frac{1}{a} \leq 1, \frac{1}{b} \leq 1, \frac{1}{c} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3 \Rightarrow a = b = c = 1$

Bài 3:





Tìm số nguyên x, y biết: $42 - 3|y - 3| = 4(2012 - x)^4$

Lời giải

$$\Rightarrow 42 = 3|y - 3| + 4(2012 - x)^4, \text{ Do } 3|y - 3| \geq 0, \forall y \in \mathbb{Z} \text{ nên } 4(2012 - x)^4 \leq 42$$

$\Rightarrow (2012 - x)^4 \leq 11 < 2^4 \Rightarrow 2012 - x = 0$ hoặc $2012 - x = \pm 1$, Vì $2012 - x$ là số nguyên nên

+ Nếu $2012 - x = \pm 1$ suy ra $x = 2011$ hoặc $x = 2013$ thì $38 = 3|y - 3| \Rightarrow |y - 3| = \frac{38}{3}$

(loại)

+ Nếu: $2012 - x = 0$ suy ra $x = 2012$ và $42 = 3|y - 3| \Rightarrow |y - 3| = 14$ nên $y = 17$ hoặc $y = -11$

Bài 4:

Chứng minh rằng không tìm được hai số x, y nguyên dương sao khác nhau sao cho

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{x - y}$$

Lời giải

Quy đồng chéo ta được : $(y - x)(x - y) = xy$. Vì $x - y$ và $y - x$ là hai số đối nhau nên $VT < 0$,

Và nếu x, y nguyên dương thì $VP > 0$ suy ra mâu thuẫn

Vậy không tồn tại hai số x, y nguyên dương

Bài 5:

Tìm bộ ba số tự nhiên khác 0 sao cho: $\frac{1}{a} + \frac{1}{a + b} + \frac{1}{a + b + c} = 1$

Lời giải

$$\text{Vì } 1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{a + b} + \frac{1}{a + b + c} < \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} = \frac{3}{a} \Rightarrow a < 3 \Rightarrow a \in \{1; 2\}$$

TH1: Với $a = 1 \Rightarrow \frac{1}{b + 1} + \frac{1}{b + c + 1} + 1 = 1 \Rightarrow \frac{1}{b + 1} + \frac{1}{b + c + 1} = 0$ (loại)

TH2: Với $a = 2 \Rightarrow \frac{1}{b + 2} + \frac{1}{b + c + 2} + \frac{1}{2} = 1$



$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{b+2} + \frac{1}{b+c+2} < \frac{1}{b+2} + \frac{1}{b+2} = \frac{2}{b+2}$$

$$\Rightarrow b+2 < 4 \Rightarrow b < 2 \Rightarrow b = 1$$

$$\text{Với } b = 1 \text{ thì } \frac{1}{3} + \frac{1}{c+3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{c+3} = \frac{1}{6} \Rightarrow c = 3$$

$$\text{Vậy } (a, b, c) = (2, 1, 3)$$

Bài 6: Tìm số tự nhiên x thỏa mãn $3^x + 4^x = 5^x$

Lời giải

Với $x = 0, x = 1$ thay vào không thỏa mãn

+) $x = 2$ thay vào ta được $3^2 + 4^2 = 5^2$ (luôn đúng). Vậy $x = 2$ thỏa mãn

$$\text{+) } x > 2, \text{ ta có: } 3^x + 4^x = 5^x \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1(*)$$

Với $x > 2$ ta có:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2; \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow x > 2 \text{ (không thỏa mãn)}$$

Vậy $x = 2$

Bài 7:

Tìm tất cả các số tự nhiên a, b sao cho $2^a + 7 = |b - 5| + b - 5$

Lời giải

Nhận xét: với $x \geq 0$ thì $|x| + x = 2x$

Với $x < 0$ thì $|x| + x = 0$. Do đó $|x| + x$ luôn là số chẵn với mọi $x \in \mathbb{Z}$

Áp dụng nhận xét trên thì $|b - 5| + b - 5$ là số chẵn với $b - 5 \in \mathbb{Z}$

Suy ra $2^a + 7$ là số chẵn $\Rightarrow 2^a$ lẻ $\Leftrightarrow a = 0$

$$\text{Khi đó } |b - 5| + b - 5 = 8$$

$$\text{Nếu } b < 5 \Rightarrow -(b - 5) + b - 5 = 8 \Leftrightarrow 0 = 8(\text{ktm})$$

$$\text{Nếu } b \geq 5 \Rightarrow 2(b - 5) = 8 \Leftrightarrow b = 9(\text{tm})$$

$$\text{Vậy } (a, b) = (0, 9)$$

Bài 8:





Cho $A = \frac{5}{17} + \frac{-4}{9} - \frac{20}{31} + \frac{12}{17} - \frac{11}{31}$ và $B = \frac{-3}{7} + \frac{7}{15} + \frac{-4}{7} + \frac{8}{15} - \frac{-2}{3}$. Tìm số nguyên x sao cho $A < \frac{x}{9} \leq B$

Lời giải

Tính A ta có: $A = \frac{-4}{9}$ và $B = \frac{2}{3}$

Theo bài ra ta có: $\frac{-4}{9} < \frac{x}{9} \leq \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{-4}{9} < \frac{x}{9} \leq \frac{6}{9}$

$\Rightarrow -4 < x \leq 6 \Rightarrow x \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Bài 9:

Tìm số nguyên x sao cho: $(x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 7)(x^2 - 10) < 0$

Lời giải

Vì tích của 4 số $(x^2 - 1), (x^2 - 4), (x^2 - 7), (x^2 - 10)$ là 1 số âm, nên phải có 1 số âm hoặc 3 số âm

Ta có: $x^2 - 10 < x^2 - 7 < x^2 - 4 < x^2 - 1$, ta xét 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1:

Có 1 số âm suy ra

$$x^2 - 10 < x^2 - 7 \Rightarrow x^2 - 10 < 0 < x^2 - 7 \Rightarrow 7 < x^2 < 10 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

Trường hợp 2: Có 3 số âm và 1 số dương:

$$\Rightarrow x^2 - 4 < 0 < x^2 - 1 \Rightarrow 1 < x^2 < 4, \text{ do } x \text{ là số nguyên nên không tồn tại } x$$

Vậy $x = \pm 3$ là số cần tìm

Bài 10:

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $6x^2 + 5y^2 = 74$

Lời giải

$$\text{Từ } 6x^2 + 5y^2 = 74 \Rightarrow 6x^2 \leq 74 \Rightarrow x^2 \leq \frac{74}{6}$$

$$\text{mà } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 \in \{0; 1; 4; 9\}$$

Mặt khác ta lại có $x^2 + 1 = 75 - 5x^2 - 5y^2 : 5 \Rightarrow x^2 = 4$ hoặc $x^2 = 9$



Với $x^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 10$ (loại) vì y không là số nguyên

Với $x^2 = 9 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow (x; y) \in \{(3; 2); (3; -2); (-3; 2); (-3; -2)\}$

Dạng 6: Sử dụng công thức tính tổng

Bài 1: HSG Yên Định, năm học 2021 - 2022

Tìm x biết: $\frac{2}{2.3} + \frac{2}{3.4} + \frac{2}{4.5} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2013}{2015}$

Lời giải

Ta có: $\frac{2}{2.3} + \frac{2}{3.4} + \frac{2}{4.5} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2013}{2015}$

$$\Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{x(x+1)} \right) = \frac{2013}{2015}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{2013}{2015}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{2013}{2015} \Rightarrow 1 - \frac{2}{x+1} = \frac{2013}{2015}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x+1} = 1 - \frac{2013}{2015} \Rightarrow \frac{2}{x+1} = \frac{2}{2015}$$

$$\Rightarrow x+1 = 2015 \Rightarrow x = 2014.$$

Vậy $x = 2014$.

Bài 2: HSG Việt Yên, năm học 2020 - 2021

Tìm x biết: $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{49}{99}$.

Lời giải



$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{49}{99}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \dots + \frac{2}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{98}{99}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{(2x-1)} - \frac{1}{(2x+1)} = \frac{98}{99}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2x+1} = \frac{98}{99}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2x+1} = 1 - \frac{98}{99}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2x+1} = \frac{1}{99} \text{ vì } 1 \neq 0 \text{ nên } 2x+1 = 99 \Leftrightarrow x = 49$$

Vậy $x = 49$

Bài 3:

Tìm x biết: $1 + 5 + 9 + 13 + 17 + \dots + x = 501501$

Lời giải

Ta có $5 = 2 + 3$; $9 = 4 + 5$; $13 = 6 + 7$; $17 = 8 + 9 \dots$

Do vậy $x = a + (a + 1)$ ($a \in \mathbb{N}$)

Nên $1 + 5 + 9 + 13 + 17 + \dots + x = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \dots + a + (a + 1) = 501501$

Hay $(a + 1)(a + 1 + 1) : 2 = 501501$

$(a + 1)(a + 2) = 1003002 = 1001.1002 \Rightarrow a = 1000$

Do đó $x = 1000 + (1000 + 1) = 2001$.

Bài 4:

Tìm x , biết: $x + 2x + 3x + \dots + 2011x = 2012.2013$

Lời giải

Ta có: $x(1 + 2 + 3 + \dots + 2011) = 2012.2013 \Rightarrow x \cdot \frac{(1 + 2011) \cdot 2011}{2} = 2012.2013$

$\Rightarrow x \cdot 2012 \cdot 2011 = 2 \cdot 2012 \cdot 2013 \Rightarrow x = \frac{4026}{2011}$.



Bài 5:

Tìm x , biết $x + (x + 1) + (x + 2) + \dots + (x + 30) = 1240$

Lời giải

Ta có: $x + (x + 1) + (x + 2) + \dots + (x + 30) = 1240$

$$x + 30.x + \frac{(30 + 1).30}{2} = 1240 \Leftrightarrow 31.x + 465 = 1240 \Leftrightarrow 31.x = 775 \Leftrightarrow x = 25$$

Vậy $x = 25$

Bài 6:

Tìm x , biết $(x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + \dots + (x + 100) = 5070$

Lời giải

Ta có: $(x + x + x + \dots + x) + (1 + 2 + 3 + \dots + 100) = 5070$

$$\Rightarrow 100x + 5050 = 5070 \Rightarrow 100x = 20 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

Bài 7:

Tìm x , biết $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{10}\right)x = \frac{1}{9} + \frac{2}{8} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{9}{1}$

Lời giải

Ta có: Tách $\frac{9}{1}$ thành 9 số 1 suy ra:

$$\begin{aligned} \frac{1}{9} + \frac{2}{8} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{9}{1} &= \left(\frac{1}{9} + 1\right) + \left(\frac{2}{8} + 1\right) + \left(\frac{3}{7} + 1\right) + \dots + \left(\frac{8}{2} + 1\right) + 1 \\ &= \frac{10}{9} + \frac{10}{8} + \frac{10}{7} + \dots + \frac{10}{2} + \frac{10}{10} = 10\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{10}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{10}\right)x = 10\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{10}\right) \Rightarrow x = 10$$

Bài 8:

Tìm x , biết: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 = (x + 1)^2$

Lời giải





Ta có: $1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9 = (1 + 2)^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 = 9 + 27 = 36 = (1 + 2 + 3)^2$

....

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + 10)^2 = (x + 1)^2 = 45^2 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 45 \\ x + 1 = -45 \end{cases}$

Bài 9:

Tìm x , biết: $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 99 = (x + 1)^2$

Lời giải

Ta có: $\left[\frac{99 - 1}{2} + 1\right] \left[\frac{1 + 99}{2}\right] = 50^2 = (x + 1)^2 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 50 \\ x + 1 = -50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 49 \\ x = -51 \end{cases}$

Vậy $x \in \{-51; 49\}$

Bài 10:

Tìm x , biết $x - 3x + 5x - 7x + \dots + 2013x - 2015x = 3024$

Lời giải

Ta có:

$x - 3x + 5x - 7x + \dots + 2013x - 2015x = 3024$

$\Rightarrow (x - 3x) + (5x - 7x) + \dots + (2013x - 2015x) = 3024$

$\Rightarrow (-2x) + (-2x) + \dots + (-2x) = 3024 \Rightarrow (-2x) \cdot 504 = 3024 \Rightarrow -2x = 6 \Rightarrow x = -3$

Vậy $x = -3$

Bài 11:

Tìm x , biết $\frac{2}{1^2} \cdot \frac{6}{2^2} \cdot \frac{12}{3^2} \cdot \frac{20}{4^2} \dots \frac{110}{10^2} \cdot x = -20$

Lời giải

Ta có: $\frac{1.2}{1.1} \cdot \frac{2.3}{2.2} \cdot \frac{3.4}{3.3} \cdot \frac{4.5}{4.4} \dots \frac{10.11}{10.10} \cdot x = -20 \Rightarrow \frac{(1.2.3 \dots 10)(2.3 \dots 11)}{(1.2 \dots 10)(1.2 \dots 10)} \cdot x = -20$

$\Rightarrow 11x = -20 \Rightarrow x = \frac{-20}{11}$. Vậy $x = -\frac{20}{11}$





Bài 12:

Tìm x , biết $\frac{3}{35} + \frac{3}{63} + \frac{3}{99} + \dots + \frac{3}{x(x+2)} = \frac{24}{35}$

Lời giải

Ta có: $\frac{3}{35} + \frac{3}{63} + \frac{3}{99} + \dots + \frac{3}{x(x+2)} = \frac{24}{35} \Rightarrow \frac{3}{5.7} + \frac{3}{7.9} + \frac{3}{9.11} + \dots + \frac{3}{x(x+2)} = \frac{24}{35}$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5.7} + \frac{2}{7.9} + \frac{2}{9.11} + \dots + \frac{2}{x(x+2)} \right) = \frac{24}{35}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{x+2} \right) = \frac{24}{35} \Rightarrow \frac{1}{5} - \frac{1}{x+2} = \frac{24}{35} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{35}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} - \frac{16}{35} = \frac{1}{x+2} = \frac{-9}{35} \Rightarrow x+2 = \frac{-35}{9} \Rightarrow x = \frac{-35}{9} - 2 = \frac{-53}{9}$$

Vậy $x = -\frac{53}{9}$

Bài 13:

Tìm x , biết $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = 1\frac{1989}{1991}$

Lời giải

Ta có: $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = 1\frac{1989}{1991}$

$$\Rightarrow 2 + \frac{2}{6} + \frac{2}{12} + \frac{2}{20} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = 1\frac{1989}{1991}$$

$$\Rightarrow 2 + 2 \left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{x(x+1)} \right) = 1\frac{1989}{1991}$$

$$\Rightarrow 2 + 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} \right) = 1\frac{1989}{1991} \Rightarrow 2 \left(\frac{x-1}{2(x+1)} \right) = \frac{-2}{1991}$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2}{1991} \Rightarrow 1991(x-1) = -2(x+1) \Rightarrow 1991x - 1991 = -2x - 2$$

$$\Rightarrow 1991x + 2x = -2 + 1991 \Rightarrow 1993x = 1989 \Rightarrow x = \frac{1989}{1993}$$



Bài 14:

Tìm x , biết $1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots + (-3)^x = \frac{9^{1006} + 1}{4}$

Lời giải

Đặt $A = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots + (-3)^x$. Khi đó: $3A = 3 - 3^2 + 3^3 - 3^4 + \dots + (-3)^{x+1}$

$$\Rightarrow 3A + A = 4A = 1 + (-3)^{x+1} \Rightarrow A = \frac{(-3)^{x+1} + 1}{4}$$

Theo giả thiết ta có: $\frac{(-3)^{x+1} + 1}{4} = \frac{3^{2012} + 1}{4}$

$$\Rightarrow x + 1 = 2012 \Rightarrow x = 2011. \text{ Vậy } x = 2011$$

Bài 15:

Tìm x , biết $3 + |x - 3|^{12} = 2^{17} - 2^{16} - 2^{15} - \dots - 2^2$

Lời giải

Đặt: $A = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{16}$. Tính A ta có: $2A = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{17}$

$$\Rightarrow 2A - A = 2^{17} - 2^2 = A$$

Theo giả thiết ta có: $3 + |x - 3|^{12} = 2^{17} - A = 2^{17} - (2^{17} - 2^2) = 4$

$$\Rightarrow |x - 3|^{12} = 1^{12} \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 1 \\ x - 3 = -1 \end{cases}$$

Bài 16:

Tìm x , biết: $(x - 20) \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200}}{\frac{1}{199} + \frac{2}{198} + \dots + \frac{1}{1}} = \frac{1}{2000}$

Lời giải

Đặt $A = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200}}{\frac{1}{199} + \frac{2}{198} + \dots + \frac{1}{1}}$. Ta có mẫu của



$$A = \left(\frac{1}{199} + 1\right) + \left(\frac{2}{198} + 1\right) + \dots + \left(\frac{198}{2} + 1\right) + 1 = \frac{200}{199} + \frac{200}{198} + \dots + \frac{200}{2} + \frac{200}{200}$$

$$\text{Khi đó } A = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200}}{200\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{200}\right)} = \frac{1}{200}$$

$$\text{Như vậy ta có: } (x - 20) \cdot \frac{1}{200} = \frac{1}{2000} \Rightarrow x - 20 = \frac{1}{10} \Rightarrow x = \frac{1}{10} - 20 = \frac{-199}{10}$$

Bài 17:

$$\text{Tìm } n, \text{ biết: } \frac{4}{3.5} + \frac{8}{5.9} + \frac{12}{9.15} + \dots + \frac{32}{n(n+16)} = \frac{16}{25}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{4}{3.5} + \frac{8}{5.9} + \frac{12}{9.15} + \dots + \frac{32}{n(n+16)} = \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow 2 \left(\frac{2}{3.4} + \frac{4}{5.9} + \frac{6}{9.15} + \dots + \frac{16}{n(n+16)} \right) = \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+16} \right) = \frac{16}{25} \Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{n+16} = \frac{8}{25} \Rightarrow \frac{1}{n+16} = \frac{1}{3} - \frac{8}{25} = \frac{1}{75} \Rightarrow n+16 = 75 \Rightarrow n = 59$$

Bài 18:

$$\text{Tìm } x, \text{ biết } x : \frac{1}{2} + x : \frac{1}{4} + x : \frac{1}{8} + \dots + x : \frac{1}{512} = 511$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } x : \frac{1}{2} + x : \frac{1}{4} + x : \frac{1}{8} + \dots + x : \frac{1}{512} = 511$$

$$\Rightarrow 2x + 4x + 8x + \dots + 512x = 511 \Rightarrow x(2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 512) = 511$$

$$\text{Đặt } A = 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 512$$

$$\Rightarrow 2A = 4 + 8 + 16 + \dots + 1024 \Rightarrow 2A - A = 1024 - 2 = 1022$$

$$\text{Khi đó ta có: } xA = 511 \Rightarrow x \cdot 1022 = 511 \Rightarrow x = \frac{511}{1022} = \frac{1}{2}$$



Bài 19:

Tìm x , biết: $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} + \dots + 2^{x-49} = 2^{49} - 1$

Lời giải

Đặt: $A = 2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} + \dots + 2^{x-49}$

$$\Rightarrow 2A = 2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + \dots + 2^{x-48} \Rightarrow 2A - A = A = 2^x - 2^{x-49}$$

Theo bài ra ta có: $2^x - 2^{x-49} = 2^{49} - 1 \Rightarrow 2^x \left(1 - \frac{1}{2^{49}}\right) = 2^{49} - 1 \Rightarrow 2^x \cdot \frac{2^{49} - 1}{2^{49}} - (2^{49} - 1) = 0$

$$\Rightarrow \frac{2^x}{2^{49}} - 1 = 0 \Rightarrow 2^{x-49} = 1 = 2^0 \Rightarrow x - 49 = 0 \Rightarrow x = 49$$

Bài 20:

Tìm x , biết: $x + x - 1 + x - 2 + x - 3 + \dots + x - 50 = 255$

Lời giải

Ta có: $x + x - 1 + x - 2 + x - 3 + \dots + x - 50 = 255$

$$\Rightarrow (x + x + x + \dots + x) - (1 + 2 + 3 + \dots + 50) = 255$$

$$\Rightarrow 51x - 1275 = 255 \Rightarrow 51x = 1530 \Rightarrow x = 30$$

Vậy $x = 30$

Bài 21:

Tìm x , biết: $x + (x + 1) + (x + 2) + \dots + (x + 30) = 1240$

Lời giải

Ta có: $x + (x + 1) + (x + 2) + \dots + (x + 30) = 1240$

$$x + 30x + \frac{(30 + 1) \cdot 30}{2} = 1240 \Leftrightarrow 31x + 465 = 1240 \Leftrightarrow 31x = 775 \Leftrightarrow x = 25$$

Vậy $x = 25$

Bài 22:

Tìm x , biết: $2 + 4 + 6 + \dots + 2x = 210$

Lời giải

Ta có: $x + (x + 1) + (x + 2) + \dots + (x + 30) = 1240$





$$\Rightarrow 2(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + x) = 210 \Rightarrow 2 \cdot \frac{(x+1) \cdot x}{2} = 210 \Rightarrow x(x+1) = 210 = 14 \cdot 15$$

Bài 23:

Tìm x , biết $\frac{1}{14} + \frac{1}{35} + \frac{1}{65} + \dots + \frac{2}{x^2 + 3x} = \frac{1}{9}$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{14} + \frac{1}{35} + \frac{1}{65} + \dots + \frac{2}{x^2 + 3x} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{2}{28} + \frac{2}{70} + \frac{2}{130} + \dots + \frac{2}{x(x+3)} = \frac{1}{9}$

$$\Rightarrow \frac{2}{4 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 10} + \frac{2}{10 \cdot 13} + \dots + \frac{2}{x(x+3)} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{2}{3} \left(\frac{3}{4 \cdot 7} + \frac{3}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{3}{x(x+3)} \right) = \frac{1}{9}$$

$$= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{x+3} \right) = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{x+3} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{x+3} \Rightarrow \frac{1}{12} = \frac{1}{x+3} \Rightarrow x = 9$$

Vậy $x = 9$

Bài 24:

Tìm x , biết: $\frac{3}{35} + \frac{3}{63} + \frac{3}{99} + \dots + \frac{3}{x(x+2)} = \frac{24}{35}$

Lời giải

Ta có: $\frac{3}{5 \cdot 7} + \frac{3}{7 \cdot 9} + \frac{3}{9 \cdot 11} + \dots + \frac{3}{x(x+2)} = \frac{24}{35} \Rightarrow \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 9} + \frac{2}{9 \cdot 11} + \dots + \frac{2}{x(x+2)} \right) = \frac{24}{35}$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{x+2} \right) = \frac{24}{35} \Rightarrow \frac{1}{5} - \frac{1}{x+2} = \frac{24}{35} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{35}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} - \frac{16}{35} = \frac{1}{x+2} = \frac{-9}{35} \Rightarrow x+2 = \frac{-35}{9} \Rightarrow x = \frac{-35}{9} - 2 = \frac{-53}{9}$$

Vậy $x = \frac{-53}{9}$

Bài 25:

Tìm x , biết: $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 99 = (x-2)^2$

Lời giải





Ta có: $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 99 = (x - 2)^2$

$$\Rightarrow \frac{(1 + 99)50}{2} = 50^2 = (x - 2)^2 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 50 \\ x - 2 = -50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 52 \\ x = -48 \end{cases}$$

Vậy $x \in \{-48; 52\}$

Bài 26:

Tìm x , biết: $\frac{(1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99).x}{26950} = 12\frac{6}{7} : \frac{3}{2}$

Lời giải

Đặt: $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99$

Tính A ta được: $3A = 1.2(3 - 0) + 2.3(4 - 1) + 3.4(5 - 2) + \dots + 98.99(100 - 97)$

$3A = (1.2.3 - 0.1.2) + (2.3.4 - 1.2.3) + \dots + (98.99.100 - 97.98.99) = 98.99.100$

$$A = \frac{98.99.100}{3}$$

Thay vào ta có: $\frac{98.99.100.x}{3.26950} = 12\frac{6}{7} : \frac{3}{2} \Rightarrow 12x = \frac{60}{7} \Rightarrow x = \frac{5}{7}$

Bài 27:

Tìm x , biết: $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{10}\right)x = \frac{1}{9} + \frac{2}{8} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{9}{1}$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{9} + \frac{2}{8} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{9}{1} = \left(\frac{1}{9} + 1\right) + \left(\frac{2}{8} + 1\right) + \left(\frac{3}{7} + 1\right) + \dots + \left(\frac{8}{2} + 1\right) + 1$

$$\Rightarrow \frac{10}{9} + \frac{10}{8} + \frac{10}{7} + \dots + \frac{10}{2} + \frac{10}{10} = 10\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right)$$

Khi đó: $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{10}\right).x = 10\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{10}\right) \Rightarrow x = 10$

Bài 28:

Tìm x , biết: $2x + \frac{7}{6} + \frac{13}{12} + \frac{21}{20} + \frac{31}{31} + \frac{43}{42} + \frac{57}{56} + \frac{73}{72} + \frac{91}{90} = 10$

Lời giải





$$\text{Ta có: } 2x + \left(1 + \frac{1}{6}\right) + \left(1 + \frac{1}{12}\right) + \left(1 + \frac{1}{20}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{90}\right) = 10$$

$$\Rightarrow 2x + 8 + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{9.10} = 10$$

$$\Rightarrow 2x + 8 + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = 10 \Rightarrow 2x = \frac{8}{5} \Rightarrow x = \frac{4}{5}$$

Bài 29:

$$\text{Tìm } x, \text{ biết: } \left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{8.9.10}\right).x = \frac{22}{45}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{8.9.10}\right).x = \frac{22}{45}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} - \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{8.9} - \frac{1}{9.10} \right) x = \frac{22}{45} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{9.10} \right) x = \frac{22}{45}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{22}{45} \cdot x = \frac{22}{45} \Leftrightarrow x = 2$$

Vậy $x = 2$.

Bài 30:

$$\text{Tìm } x, \text{ biết: } \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100}\right)x = \frac{2012}{51} + \frac{2012}{52} + \dots + \frac{2012}{100}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

$$= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}\right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{100}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}\right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{50}\right) = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{100}$$

$$\text{Khi đó: } \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100}\right).x = 2012 \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{100}\right) \Rightarrow x = 2012$$

Bài 31:





Tìm x , biết: $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2013}\right)x + 2013 = \frac{2014}{1} + \frac{2015}{2} + \dots + \frac{4025}{2012} + \frac{4026}{2013}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & \frac{2014}{1} + \frac{2015}{2} + \dots + \frac{4025}{2012} + \frac{4026}{2013} - 2013 \\ &= \left(\frac{2014}{1} - 1\right) + \left(\frac{2015}{2} - 1\right) + \dots + \left(\frac{4025}{2012} - 1\right) + \left(\frac{4026}{2013} - 1\right) \\ &= \frac{2013}{1} + \frac{2013}{2} + \frac{2013}{3} + \dots + \frac{2013}{2012} + \frac{2013}{2013} = 2013 \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2013}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó: } \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2013}\right) \cdot x = 2013 \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2013}\right) \Rightarrow x = 2013$$

Bài 32:

Cho $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{50} + x_{51} = 1$ và $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = \dots = x_{49} + x_{50} = 1$. Tính x_{51}

Lời giải

$$\text{Thay vào ta có: } (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) + \dots + (x_{49} + x_{50}) + x_{51} = 1$$

$$\Rightarrow 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + x_{51} = 1 \Rightarrow 25 + x_{51} = 1 \Rightarrow x_{51} = -24$$

Vậy $x_{51} = -24$

Bài 33:

Cho $x = 2^{2012} - 2^{2011} - 2^{2010} - \dots - 2 - 1$. Tính 2010^x

Lời giải

$$\text{Đặt: } A = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2010} + 2^{2011}$$

$$\text{Tính } A \text{ ta có: } 2A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2012} \Rightarrow 2A - A = 2^{2012} - 1 = A$$

$$\text{Khi đó ta có: } x = 2^{2012} - A = 2^{2012} - (2^{2012} - 1) = 1$$

Vậy $2010^x = 2010^1 = 2010$

Bài 34:

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } \frac{2}{(x+2)(x+4)} + \frac{4}{(x+4)(x+8)} + \frac{6}{(x+8)(x+14)} = \frac{x}{(x+2)(x+14)}$$

Lời giải





$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & \frac{2}{(x+2)(x+4)} + \frac{4}{(x+4)(x+8)} + \frac{6}{(x+8)(x+14)} = \frac{x}{(x+2)(x+14)} \\ \Rightarrow & \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) + \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+8} \right) + \left(\frac{1}{x+8} - \frac{1}{x+14} \right) = \frac{x}{(x+2)(x+14)} \\ \Rightarrow & \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+14} = \frac{x}{(x+2)(x+14)} \Rightarrow \frac{12}{(x+2)(x+14)} = \frac{x}{(x+2)(x+14)} \Rightarrow 12 = x \end{aligned}$$

Dạng 7: Tổng các biểu thức không âm bằng 0

Bài 1: HSG Hoàng Hoá, năm học 2020 - 2021

Tìm x, y, z biết $(2x - 3)^{2020} + \left(y - \frac{2}{5}\right)^{2022} + |x + y - z| \leq 0$

Lời giải

Vì $(2x - 3)^{2020} \geq 0; \left(y - \frac{2}{5}\right)^{2022} \geq 0; |x + y - z| \geq 0$ với mọi x, y, z

Nên $(2x - 3)^{2020} + \left(y - \frac{2}{5}\right)^{2022} + |x + y - z| \geq 0$ với mọi x, y, z

Do đó (1) xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} (2x - 3)^{2020} = 0 \\ \left(y - \frac{2}{5}\right)^{2022} = 0 \\ |x + y - z| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{2}{5} \\ z = \frac{19}{10} \end{cases}$$

Bài 2:





Tìm tất cả các cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $(2x - y + 7)^{2012} + |x - 3|^{2013} \leq 0$

Lời giải

Ta có 2012 là số tự nhiên chẵn $\Rightarrow (2x - y + 7)^{2012} \geq 0$

Và $|x - 3| \geq 0 \Rightarrow |x - 3|^{2013} \geq 0$

Do đó, từ $(2x - y + 7)^{2012} + |x - 3|^{2013} \leq 0$ suy ra $(2x - y + 7)^{2012} = 0$ & $|x - 3|^{2013} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 7 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 13 \end{cases}$$

Bài 3:

Tìm x, y, z biết: $\sqrt{(x - 3\sqrt{5})^2} + \sqrt{(y + 3\sqrt{5})^2} + |x + y + z| = 0$

Lời giải

Vì $\sqrt{(x - 3\sqrt{5})^2} \geq 0, \sqrt{(y + 3\sqrt{5})^2} \geq 0, |x + y + z| \geq 0$ nên để

$$\sqrt{(x - 3\sqrt{5})^2} + \sqrt{(y + 3\sqrt{5})^2} + |x + y + z| = 0 \text{ thì: } \begin{cases} x - 3\sqrt{5} = 0 \\ y + 3\sqrt{5} = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3\sqrt{5} \\ y = -3\sqrt{5} \\ z = 0 \end{cases}$$

Bài 4:

Tìm a, b, c biết $(x - 13 + y)^2 + (x - 6 - y)^2 = 0$

Lời giải

Vì $(x - 13 + y)^2 \geq 0, (x - 6 - y)^2 \geq 0$ Nên để: $(x - 13 + y)^2 + (x - 6 - y)^2 = 0$

$$\text{Thì } \begin{cases} x - 13 + y = 0 \\ x - 6 - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 13 \\ x - y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{19}{2} \\ y = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Bài 5:

Tìm x, y biết: $42 - 3|y - 3| = 4(2012 - x)^4$

Lời giải



Từ giả thiết ta có: $42 = 3|y - 3| + 4(2012 - x)^4$,

Do $3|y - 3| \geq 0 \Rightarrow 4(2012 - x)^4 \leq 42 \Rightarrow (2012 - x)^4 \leq 11 < 2^4 \Rightarrow 2012 - x = 0$ hoặc $2012 - x = \pm 1$

Bài 6:

Tìm x thỏa mãn: $(9x^2 - 1)^2 + \left|x - \frac{1}{3}\right| = 0$

Lời giải

Vì $(9x^2 - 1)^2 \geq 0, \left|x - \frac{1}{3}\right| \geq 0$ nên để: $(9x^2 - 1)^2 + \left|x - \frac{1}{3}\right| = 0 \Rightarrow \begin{cases} 9x^2 - 1 = 0 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

Bài 7:

Tìm a, b, c thỏa mãn: $(7b - 3)^4 + (21a - 6)^4 + (18c + 5)^6 \leq 0$

Lời giải

Vì $\begin{cases} (7b - 3)^4 \geq 0 \\ (21a - 6)^4 \geq 0 \\ (18c + 5)^6 \geq 0 \end{cases}$ Nên để $(7b - 3)^4 + (21a - 6)^4 + (18c + 5)^6 \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} 7b - 3 = 0 \\ 21a - 6 = 0 \\ 18c + 5 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow a = \frac{6}{21}, b = \frac{3}{7}, c = -\frac{5}{18}$.

Bài 8: Tìm x, y biết $y^2 - 2y + 3 = \frac{6}{x^2 + 2x + 4}$

Lời giải

Ta có $y^2 - 2y + 3 = \frac{6}{x^2 + 2x + 4} \Leftrightarrow (y^2 - 2y + 3)(x^2 + 2x + 4) = 6$

$\Leftrightarrow [(y - 1)^2 + 2] \cdot [(x + 1)^2 + 3] = 6 \Leftrightarrow (x + 1)^2 \cdot (y - 1)^2 + 3(y - 1)^2 + 2(x + 1)^2 + 6 = 6$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2 \cdot (y - 1)^2 + 3(y - 1)^2 + 2(x + 1)^2 = 0$

Vì $(x + 1)^2 \geq 0; (y - 1)^2 \geq 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$



Bài 9 :

Tìm x, y thỏa mãn $(x + 2)^2 + 2(y - 3)^2 < 4$

Lời giải

Vì $\begin{cases} (x + 2)^2 \geq 0 \\ (y - 3)^2 \geq 0 \end{cases}$ nên ta có các trường hợp sau

$$\text{TH1: } \begin{cases} (x + 2)^2 = 0 \\ (y - 3)^2 = 0 \end{cases} \qquad \text{TH2: } \begin{cases} (x + 2)^2 = 0 \\ (y - 3)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{TH3: } \begin{cases} (x + 2)^2 = 1 \\ (y - 3)^2 = 0 \end{cases} \qquad \text{TH4: } \begin{cases} (x + 2)^2 = 1 \\ (y - 3)^2 = 1 \end{cases}$$

Bài 10:

Tìm x, y, z thỏa mãn: $(2x - 1)^{2008} + \left(y - \frac{2}{5}\right)^{2008} + |x + y - z| = 0$

Lời giải

Vì: $(2x - 1)^{2008} \geq 0$, và $\left(y - \frac{2}{5}\right)^{2008} \geq 0$ và $|x + y - z| \geq 0$

nên để: $(2x - 1)^{2008} + \left(y - \frac{2}{5}\right)^{2008} + |x + y - z| = 0$ thì $\begin{cases} (2x - 1) = 0 \\ y - \frac{2}{5} = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

Bài 11:

Tìm x thỏa mãn $(4x - 7)^2 - 5|7 - 4x| = 0$

Lời giải

Đặt: $|4x - 7| = t \Rightarrow t^2 - 5t = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |4x - 7| = 0 \\ |4x - 7| = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{7}{4}, x = 3, x = \frac{1}{2}.$

Bài 12:

Tìm x, y thỏa mãn $2.x^{2k} + \left(y - \frac{2}{3}\right)^{4k} = 0 (k \in \mathbb{N})$





Lời giải

Vì: $2^{2k} \geq 0$ và $\left(y - \frac{2}{3}\right)^{4k} \geq 0$ nên để $2x^{2k} + \left(y - \frac{2}{3}\right)^{4k} = 0$ thì $\begin{cases} x^{2k} = 0 \\ y - \frac{2}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = \frac{2}{3}$.

Bài 13:

Tìm x, y thỏa mãn $(2x + 3)^2 + (3y - 2)^4 = 0$

Lời giải

Vì $\begin{cases} (2x + 3)^2 \geq 0 \\ (3y - 2)^4 \geq 0 \end{cases}$ nên để: $(2x + 3)^2 + (3y - 2)^4 = 0$ thì $\begin{cases} 2x + 3 = 0 \\ 3y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$

Bài 14:

Tìm x, y thỏa mãn $|x + 5| + (3y - 4)^{2010} = 0$

Lời giải

Vì $|x + 5| \geq 0$ và $(3y - 4)^{2010} \geq 0$ nên để $|x + 5| + (3y - 4)^{2010} = 0$ thì

$$\begin{cases} x + 5 = 0 \\ 3y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Bài 15:

Tìm x, y thỏa mãn $42 - 3|y - 3| = 4(2012 - x)^4$

Lời giải

Ta có $42 - 3|y - 3| = 4(2012 - x)^4$

$\Rightarrow 42 = 3|y - 3| + 4(2012 - x)^4$. Do $3|y - 3| \geq 0 \Rightarrow 4(2012 - x)^4 \leq 42$

$\Rightarrow (2012 - x)^4 \leq 11 \leq 2^4 \Rightarrow 2012 - x = 0$ hoặc $2012 - x = \pm 1$

Bài 16:

Tìm x, y, z thỏa mãn $(3x - 5)^{2006} + (y^2 - 1)^{2008} + (x - z)^{2010} = 0$

Lời giải





$$\text{Vì } \begin{cases} (3x-5)^{2006} \geq 0 \\ (y^2-1)^{2008} \geq 0 \\ (x-z)^{2010} \geq 0 \end{cases} \text{ nên để } (3x-5)^{2006} + (y^2-1)^{2008} + (x-z)^{2010} = 0 \text{ thì } \begin{cases} 3x-5=0 \\ y^2-1=0 \\ x-z=0 \end{cases}$$

Giải ra tìm được x, y, z

Bài 17:

Tìm x thỏa mãn $(2x-1)^2 + |2y-x| - 8 = 12 - 5.2^2$

Lời giải

Ta có: $(2x-1)^2 + |2y-x| = 0$

$$\text{Vì } \begin{cases} (2x-1)^2 \geq 0 \\ |2y-x| \geq 0 \end{cases} \text{ nên để } (2x-1)^2 + |2y-x| = 0 \text{ thì } \begin{cases} 2x-1=0 \\ 2y-x=0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{4}.$$

Bài 18:

Tìm x thỏa mãn $(|x+2|-2)(x^2-4) = 0$

Lời giải

$$\text{Ta có } (|x+2|-2)(x^2-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |x+2|-2=0 \\ (x^2-4)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x+2|=2 \\ x^2=4 \end{cases}$$

Bài 19:

Tìm x, y thỏa mãn $(x+1)^{2016} + (y-1)^2 \leq 0$

Lời giải

$$\text{Vì } \begin{cases} (x+1)^{2016} \geq 0 \\ (y-1)^2 \geq 0 \end{cases} \text{ nên để } (x+1)^{2016} + (y-1)^2 \leq 0 \text{ thì } \begin{cases} x+1=0 \\ y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$$

Bài 20:

Tìm x, y thỏa mãn $(x-2)^{10} + |y-x| + 3 \leq 3$

Lời giải

Từ giả thiết ta có : $(x-2)^{10} + |y-x| = 0$,



$$\text{Vì } \begin{cases} (x-2)^{10} \geq 0 \\ |y-x| \geq 0 \end{cases} \text{ nên để } (x-2)^{10} + |y-x| = 0 \text{ thì } \begin{cases} x-2=0 \\ y-x=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=2$$

Bài 21:

Tìm x, y, z thỏa mãn $|x+1| + \sqrt{(y-2)^2} + (z+3)^2 = 0$

Lời giải

$$\text{Vì } \begin{cases} |x+1| \geq 0 \\ \sqrt{(y-2)^2} \geq 0 \\ (z+3)^2 \geq 0 \end{cases} \text{ nên để } |x+1| + \sqrt{(y-2)^2} + (z+3)^2 = 0 \text{ thì}$$

$$\begin{cases} |x+1| = 0 \\ \sqrt{(y-2)^2} = 0 \\ (z+3)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1, y = 2, z = -3.$$

Bài 22:

Tìm x thỏa mãn $\left|x + \frac{11}{17}\right| + \left|x + \frac{2}{17}\right| + \left|x + \frac{4}{17}\right| = 4x$

Lời giải

$$\text{Vì } \left|x + \frac{11}{17}\right| \geq 0, \left|x + \frac{2}{17}\right| \geq 0, \left|x + \frac{4}{17}\right| \geq 0 \Rightarrow 4x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

$$\text{Khi } x \geq 0 \Rightarrow \left(x + \frac{11}{17}\right) + \left(x + \frac{2}{17}\right) + \left(x + \frac{4}{17}\right) = 4x \Rightarrow x = 1$$

Bài 23:

Tìm x, y, z thỏa mãn $\sqrt{(x-3\sqrt{5})^2} + \sqrt{(y+3\sqrt{5})^2} + |x+y+z| = 0$

Lời giải

$$\text{Vì } \sqrt{(x-3\sqrt{5})^2} \geq 0, \text{ và } \sqrt{(y+3\sqrt{5})^2} \geq 0 \text{ và } |x+y+z| \geq 0$$



nên để $\sqrt{(x - 3\sqrt{5})^2} + \sqrt{(y + 3\sqrt{5})^2} + |x + y + z| = 0$ thì
$$\begin{cases} x - 3\sqrt{5} = 0 \\ y + 3\sqrt{5} = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Bài 24:

Tìm x, y, z thỏa mãn $(3x - 5)^{2006} + (y^2 - 1)^{2008} + (x - z)^{2100} = 0$

Lời giải

$$\begin{aligned} & (3x - 5)^{2006} + (y^2 - 1)^{2008} + (x - z)^{2100} = 0 \\ \Rightarrow & \begin{cases} (3x - 5)^{2006} = 0 \\ (y^2 - 1)^{2008} = 0 \\ (x - z)^{2100} = 0 \end{cases} \Rightarrow x = z = \frac{5}{3}; \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Dạng 8: Tìm ẩn dạng lũy thừa

Bài 1:

Tìm số tự nhiên m, n biết: $2^m + 2^n = 2^{m+n}$

Lời giải

Từ giả thiết ta có :

$$2^m \cdot 2^n - 2^m - 2^n = 0 \Rightarrow 2^m(2^n - 1) - 2^n + 1 = 1 \Rightarrow 2^m(2^n - 1) - (2^n - 1) = 1$$

$$\Rightarrow (2^m - 1)(2^n - 1) = 1 = 1 \cdot 1 \quad (\text{do } m, n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \begin{cases} 2^m - 1 = 1 \\ 2^n - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^m = 2 = 2^1 \\ 2^n = 2 = 2^1 \end{cases} \Rightarrow m = n = 1$$

Bài 2:

Tìm m, n nguyên dương biết: $2^m - 2^n = 256$

Lời giải

Từ giả thiết ta có $m > n$: $2^m - 2^n = 256 \Rightarrow 2^{m+n-n} - 2^n = 256 \Rightarrow 2^n(2^{m-n} - 1) = 2^8$



Vì m, n là số tự nhiên và $m > n$ nên $m - n \geq 1 \Rightarrow 2^{m-n} - 1$ là 1 số lẻ lớn hơn hoặc bằng 1, vế phải chỉ chứa thừa số nguyên tố 2 nên $\begin{cases} 2^{m-n} - 1 = 1 \\ 2^n = 2^8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 8 \\ m = 9 \end{cases}$

Bài 3:

Tìm a, b, c nguyên dương biết $a^3 + 3a^2 + 5 = 5^b$ và $a + 3 = 5^c$

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $a^2(a + 3) + 5 = 5^b \Rightarrow a^2 \cdot 5^c = 5^b - 5 = 5(5^{b-1} - 1) \Rightarrow a^2 = \frac{5^{b-1} - 1}{5^{c-1}}$

Vì a, b, c là các số nguyên nên $5^{c-1} = 1 = 5^0 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow a = 2, b = 2$

Bài 4:

Tìm hai số tự nhiên x, y biết $2^{x+1} \cdot 3^y = 12^x$

Lời giải

Ta có: $2^{x+1} \cdot 3^y = 12^x \Rightarrow 2^{x+1} \cdot 3^y = 2^{2x} \cdot 3^x \Rightarrow \frac{2^{2x}}{2^{x+1}} = \frac{3^y}{3^x} \Rightarrow 2^{x-1} = 3^{y-x}$

Vì $(2; 3) = 1 \Rightarrow x - 1$ và $y - x = 0 \Rightarrow y = 1$

Bài 5: Tìm a, b biết $2^a + 124 = 5^b$

Lời giải

Xét $a = 0 \Rightarrow VT = 2^0 + 124 = 125 = 5^3 \Rightarrow b = 3$

Xét $a \geq 1$ thì vế trái là 1 số chẵn, vế phải là 1 số lẻ suy ra vô lý.

Vậy $a = 0; b = 3$

Bài 6: Tìm hai số tự nhiên a, b biết $10^a + 168 = b^2$

Lời giải

Xét $a = 0 \Rightarrow b = 13$

Xét $a \geq 1 \Rightarrow 10^a + 168$ có chữ số tận cùng là 8 suy ra b^2 cũng có tận cùng là 8 (vô lý)

Vậy $a = 0; b = 13$

Bài 7: Tìm hai số tự nhiên x, y biết $35^x + 9 = 2 \cdot 5^y$

Lời giải



Xét $x = 0 \Rightarrow 10 = 2.5^y \Rightarrow y = 1$

Với $x > 0 \Rightarrow VT$ có tận cùng là 4, còn vế phải có chữ số tận cùng là 2 hoặc 0
mâu thuẫn nên $x = 0; y = 1$

Bài 8: Tìm hai số tự nhiên a, b biết $2^a + 342 = 7^b$

Lời giải

Xét $a = 0 \Rightarrow VT = 343 = 7^3 = 7^b \Rightarrow b = 3$

Với $a > 0$ thì VT là 1 số chẵn, còn vế phải là 1 số lẻ (mâu thuẫn)

Bài 9: Tìm hai số tự nhiên a, b biết $3^a + 9b = 183$

Lời giải

Vì $183:3$ nhưng $183 \not\div 9$ Nên $3^a + 9b:3$ và $3^a + 9b \not\div 9$, mà $9b:9 \Rightarrow 3^a \not\div 9 \Rightarrow a = 1$

Khi $a = 1$ suy ra $b = 20$

Bài 10: Tìm hai số tự nhiên a, b biết $5^a + 323 = b^2$

Lời giải

Xét $a = 0 \Rightarrow VT = 1 + 323 = 324 = 8^2 = b^2 \Rightarrow b = 8$

Với $a > 0 \Rightarrow VT$ có chữ số tận cùng là 8

Vế phải là 1 số chính phương nên không có tận cùng là 8 (mâu thuẫn).

Bài 11:

Tìm hai số tự nhiên a, b biết $2^a + 80 = 3^b$

Lời giải

Xét $a = 0 \Rightarrow VT = 1 + 80 = 81 = 3^4 = 3^b \Rightarrow b = 4$

Nếu $a > 0 \Rightarrow VT$ là 1 số chẵn, còn VP là 1 số lẻ (mâu thuẫn)

Bài 12:

Tìm hai số tự nhiên x, y biết $2x^2 + 3y^2 = 77$

Lời giải

Do $0 \leq 3y^2 \leq 77 \Rightarrow 0 \leq y^2 \leq 25$, mà $2x^2$ là 1 số chẵn nên $3y^2$ là số lẻ suy ra y^2 lẻ

Suy ra $y^2 \in \{1; 9; 25\} \Rightarrow (x, y) = (1; 5), (5; 3)$.



Bài 13:

Tìm hai số nguyên tố x, y biết $x^2 - 2y^2 = 1$

Lời giải

Vì $x^2 - 1 = 2y^2$, nếu $x:3$ vì x là nguyên tố nên $x = 3; y = 2$

Nếu $x \not: 3 \Rightarrow x^2 - 1:3 \Rightarrow 2y^2:3 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow x^2 = 19$ (loại)

Bài 14:

Tìm hai số nguyên tố x, y biết $51x + 26y = 2000$

Lời giải

Vì $17.3x = 2(1000 - 13y)$, do 17, 3 là số nguyên tố nên $x:2$, mà x là số nguyên tố nên $x = 2$

Lại có $1000 - 13y:51 \Rightarrow 1000 - 13y > 0$ và y nguyên tố suy ra tìm y

Bài 15:

Tìm hai số tự nhiên p, q biết $5^{2p} + 2013 = (5^{2p})^2 + q^2$

Lời giải

Ta có: $2013 - q^2 = 25^{p^2} - 25^p = 25^p(25^p - 1)$

Do p là số nguyên tố suy ra $2013 - q^2:25^2$ và $2013 - q^2 > 0$ từ đó tìm được q

Bài 16:

Tìm hai số tự nhiên a, b biết $(2008a + 3b + 1)(2008^a + 2008a + b) = 225$

Lời giải

Do a, b là số tự nhiên :

Nếu $a \geq 1 \Rightarrow 2008^a + 2008a + b > 225$ (loại)

$$\Rightarrow a = 0 \Rightarrow (3b + 1)(b + 1) = 225 = 3.75 = 5.45 = 9.25$$

$$\text{Vì } 3b + 1 \not: 3 \Rightarrow 3b + 1 > b + 1 \Rightarrow \begin{cases} 3b + 1 = 25 \\ b + 1 = 9 \end{cases} \Rightarrow b = 8$$

Bài 17:

Tìm hai số nguyên x, y biết $2x^2 + 3y^2 = 77$





Lời giải

Từ $2x^2 + 3y^2 = 77 \Rightarrow 0 \leq 3y^2 \leq 77 \Rightarrow 0 \leq y^2 \leq 25$ kết hợp với $2x^2$ là số chẵn suy ra $3y^2$ là số lẻ suy ra y^2 là số lẻ nên $y^2 \in \{1; 9; 25\}$

Với $y^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 = 77 - 3 = 74 \Rightarrow x^2 = 37$ (loại)

Với $y^2 = 9 \Rightarrow 2x^2 = 77 - 27 = 50 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$

Với $y^2 = 25 \Rightarrow 2x^2 = 77 - 75 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

Bài 18:

Tìm hai số nguyên dương x, y biết $2^x - 2^y = 1024$

Lời giải

Ta có: $2^x > 2^y \Rightarrow x > y \Rightarrow 2^y(2^{x-y} - 1) = 2^{10}$, mà $2^{x-y} - 1$ là số lẻ, $2^{x-y} - 1 > 0$, và là ước của 2^{10}

Nên $2^{x-y} - 1 = 1 \Rightarrow 2^y = 2^{10} \Rightarrow y = 10$ suy ra $x = 11$

Bài 19:

Tìm mọi số nguyên tố thỏa mãn $x^2 - 2y^2 = 1$

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $x^2 - 1 = 2y^2$, Nếu x chia hết cho 3, vì x nguyên tố nên $x = 3$ lúc đó $y = 2$, (thỏa mãn)

Nếu x không chia hết cho 3 thì $x^2 - 1$ chia hết cho 3, do đó $2y^2$ chia hết cho 3 mà $(2; 3) = 1$

Nên y chia hết cho 3, do đó: $x^2 = 19$ (l) Vậy cặp số $(x; y)$ duy nhất tìm được là $(2; 3)$

Bài 20:

Tìm tất cả các số tự nhiên m, n sao cho $2^m + 2015 = |n - 2016| + n - 2016$

Lời giải

Nhận xét:

Với $x \geq 0 \Rightarrow |x| + x = 2x$

Với $x < 0 \Rightarrow |x| + x = 0$, do đó $|x| + x$ luôn là 1 số chẵn với mọi x



Áp dụng nhận xét trên ta thấy $|n - 2016| + n - 2016$ là số chẵn suy ra $2^m + 2015$ là số chẵn suy ra $m = 0$

Khi đó $|n - 2016| + n - 2016 = 2016$

Nếu $n < 2016 \Rightarrow -(n - 2016) + n - 2016 = 2016 \Rightarrow 0 = 2016$ (loại)

Nếu $n \geq 2016 \Rightarrow 2(n - 2016) = 2016 \Rightarrow n = 3024$ (thỏa mãn)

Vậy $(m, n) = (0; 3024)$

Bài 21:

Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn: $2^x + 2^y = 72$

Lời giải

Giả sử $x > y$ thế thì ta có: $2^x + 2^y = 2^y(1 + 2^{x-y}) = 9 \cdot 2^3$

Do $1 + 2^{x-y}$ là số lẻ nên $1 + 2^{x-y} = 1; 3; 9$

Ta có bảng giá trị sau:

$1 + 2^{x-y} = 1$	$2^y = 9 \cdot 2^3$ (loại)
$1 + 2^{x-y} = 3$	$2^y = 3 \cdot 2^3$ (loại)
$1 + 2^{x-y} = 9$	$2^y = 2^3$

Ta thấy $2^y = 2^3 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow x = 6$

Bài 21:

Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $2^n - 1 : 7$

Lời giải

Với $n < 3 \Rightarrow 2^n - 1 \not\vdots 7$

Với $n \geq 3 \Rightarrow n = 3k$ hoặc $n = 3k + 1$ hoặc $n = 3k + 2$

Xét $n = 3k \Rightarrow 2^{3k} - 1 = 8^k - 1 = (7 + 1)^k - 1 = 7A + 1 - 1 : 7$

Xét $n = 3k + 1 \Rightarrow 2^{3k+1} - 1 = 2 \cdot 8^k - 1 = 2(7A + 1) - 1 = 7A + 1 \not\vdots 7$

Xét $n = 3k + 2 \Rightarrow 2^{3k+2} - 1 = 4(7A + 1) = 7A + 4 \not\vdots 7$

Vậy $n = 3k$ với $k \in \mathbb{N}$



Dạng 9: Tìm ẩn dựa trên tính chất về dấu

Bài 1: HSG Thái Thụy, năm học 2019 - 2020

Tìm x nguyên biết: $(x - 1) \cdot (x - 3) < 0$

Lời giải

Ta có: $(x - 1) \cdot (x - 3) < 0$

Nhận xét: có $(x - 1) > (x - 3), \forall x$

mà $(x - 1) \cdot (x - 3) < 0$

$\Leftrightarrow (x - 1) > 0, (x - 3) > 0$

$\Leftrightarrow x > 1, x < 3$

$\Rightarrow 1 < x < 3$

Mà x nguyên nên $x = 2$

Bài 2:

Tìm x , biết:

- a) $(x - 1)(x - 2) > 0;$ b) $2x - 3 < 0;$ c) $(2x - 4)(9 - 3x) > 0$

Lời giải

a) Để $(x - 1)(x - 2) > 0$ thì ta có hai trường hợp :

$$\text{TH1: } \begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 2$$



$$\text{TH2: } \begin{cases} x - 1 < 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow x < 1$$

Vậy $x > 2$ hoặc $x < 1$

$$\text{b) Để: } 2x - 3 < 0 \Rightarrow 2x < 3 \Rightarrow x < \frac{3}{2}$$

c) Để $(2x - 4)(9 - 3x) > 0$ thì ta có các trường hợp sau :

$$\text{TH1: } \begin{cases} 2x - 4 > 0 \\ 9 - 3x > 0 \end{cases} \Rightarrow 2 < x < 3 \quad \text{hoặc} \quad \text{TH2: } \begin{cases} 2x - 4 < 0 \\ 9 - 3x < 0 \end{cases} \quad (\text{vô lý})$$

Vậy $2 < x < 3$

Bài 2:

Tìm x , biết:

$$\text{a) } \frac{2x}{3} - \frac{3}{4} > 0;$$

$$\text{b) } \left(\frac{2}{3x} - 4 \right) \frac{5}{3} > \frac{15}{6}$$

Lời giải

$$\text{a) } \frac{2x}{3} - \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow \frac{2x}{3} > \frac{3}{4} \Rightarrow x > \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$$

$$\text{b) } \left(\frac{2}{3x} - 4 \right) \frac{5}{3} > \frac{15}{6} \Rightarrow \left(\frac{2}{3x} - 4 \right) > \frac{15}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{2}{3x} > \frac{11}{2} \Rightarrow 3x \cdot 11 < 4 \Rightarrow x < \frac{4}{33}$$

Bài 3:

Tìm x , biết:

$$\text{a) } (x - 6)(x + 5) \leq 0$$

$$\text{b) } (x - 6)(x + 5) \geq 0;$$

$$\text{c) } 2x - 3 < 0$$

Lời giải

a) Để $(x - 6)(x + 5) \leq 0$ thì :

$$\text{TH1: } \begin{cases} x - 6 \geq 0 \\ x + 5 \leq 0 \end{cases} \quad (\text{vô lý})$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} x - 6 \leq 0 \\ x + 5 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow -5 \leq x \leq 6$$



b) Để: $(x - 6)(x + 5) \geq 0$ Thì:

$$\text{TH1: } \begin{cases} x - 6 \geq 0 \\ x + 5 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 6$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} x - 6 \leq 0 \\ x + 5 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x \leq -5$$

c) $2x - 3 < 0 \Rightarrow 2x < 3 \Rightarrow x < \frac{3}{2}$

Bài 4:

Tìm x , biết:

a) $(2x - 4)(9 - 3x) > 0$ b) $(x^2 - 5)(x^2 - 25) < 0$; c) $(x + 5)(9 + x^2) < 0$

Lời giải

a) Để: $(2x - 4)(9 - 3x) > 0$ thì :

$$\text{TH1: } \begin{cases} 2x - 4 > 0 \\ 9 - 3x > 0 \end{cases} \Rightarrow 2 < x < 3$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} 2x - 4 < 0 \\ 9 - 3x < 0 \end{cases} \text{ (vô lý)}$$

b) Để: $(x^2 - 5)(x^2 - 25) < 0$ thì:

$$\text{TH1: } \begin{cases} x^2 - 5 > 0 \\ x^2 - 25 < 0 \end{cases}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} x^2 - 5 < 0 \\ x^2 - 25 > 0 \end{cases}$$

c) Để: $(x + 5)(9 + x^2) < 0$, Vì $x^2 + 9 > 0 \Rightarrow x + 5 < 0 \Rightarrow x < -5$

Bài 5:

Tìm x , biết:

a) $(x + 3)(x - 4) > 0$; b) $(x^2 + 7)(x^2 - 49) < 0$; c) $(x^2 + 2)(x + 3) > 0$

Lời giải



a) Để: $(x + 3)(x - 4) > 0$ thì:

$$\text{TH1: } \begin{cases} x + 3 > 0 \\ x - 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 4 \qquad \text{Hoặc: } \begin{cases} x + 3 < 0 \\ x - 4 < 0 \end{cases} \Rightarrow x < -3$$

b) Để $(x^2 + 7)(x^2 - 49) < 0 \Rightarrow (x^2 + 7)(x + 7)(x - 7) < 0$

Vì $x^2 + 7 > 0 \Rightarrow (x + 7)(x - 7) < 0$

$$\text{TH1: } \begin{cases} x + 7 > 0 \\ x - 7 < 0 \end{cases} \Rightarrow -7 < x < 7 \qquad \text{TH2: } \begin{cases} x + 7 < 0 \\ x - 7 > 0 \end{cases} \text{ (vô lý)}$$

c) Để: $(x^2 + 2)(x + 3) > 0$ thì $x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3$

Bài 6: Tìm $n \in \mathbb{N}$ biết:

a) $3 < 3^n \leq 234$; b) $8 \cdot 16 \geq 2^n \geq 4$; c) $4^{15} \cdot 9^{15} < 2^n \cdot 3^n < 18^{16} \cdot 2^{16}$

Lời giải

a) Ta có: $3 < 3^n \leq 234 < 243 = 3^5 \Rightarrow n \in \{2; 3; 4\}$

b) Ta có: $8 \cdot 16 \geq 2^n \geq 4 \Rightarrow 2^7 \geq 2^n \geq 2^2 \Rightarrow n \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

c) $4^{15} \cdot 9^{15} < 2^n \cdot 3^n < 18^{16} \cdot 2^{16} \Rightarrow 36^{15} < 6^n < 36^{16} \Rightarrow 6^{30} < 6^n < 6^{32} \Rightarrow n = 31$

Bài 7:

Giải bất phương trình $\frac{1}{x^2 - 5x + 6} + \frac{1}{x^2 - 7x + 12} + \frac{1}{x^2 - 9x + 20} + \frac{1}{x^2 - 11x + 30} \geq 0$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{x^2 - 5x + 6} + \frac{1}{x^2 - 7x + 12} + \frac{1}{x^2 - 9x + 20} + \frac{1}{x^2 - 11x + 30} \geq 0$



$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{1}{(x-3)(x-4)} + \frac{1}{(x-4)(x-5)} + \frac{1}{(x-5)(x-6)} \geq 0 \quad (x \neq 1; 2; 3; 4; 5; 6)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-6} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-6} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-4}{(x-2)(x-6)} \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-6) < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 0 \\ x-6 < 0 \\ x-2 < 0 \\ x-6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 6 \\ x \in \emptyset \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta có $2 < x < 6$ và $x \neq 3; 4; 5$

Dạng 10: Tìm các ẩn với điều kiện nguyên.

Bài 1:

Tìm tất cả các số nguyên n để phân số $\frac{n+1}{n-2}$ có giá trị là một số nguyên.

Lời giải

Xét phân số $\frac{n+1}{n-2} = \frac{n-2+3}{n-2} = 1 + \frac{3}{n-2}$

Để $\frac{n+1}{n-2}$ là một số nguyên $\Leftrightarrow 3 : n-2 \Leftrightarrow n-2 \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$

Từ đó ta có:

$n-2$	-3	-1	1	3
n	-1	1	3	5

Vậy $n \in U(3) = \{-1; 1; 3; 5\}$ thì $\frac{n+1}{n-2}$ là một số nguyên

Bài 2:

Cho $A = \frac{2n+3}{n-2}$ ($n \neq 2$). Tìm số nguyên n để A là một số nguyên.

Lời giải

Ta có $A = \frac{2n+3}{n-2} = \frac{2(n-2)+7}{n-2} = 2 + \frac{7}{n-2}$



Để A là một số nguyên thì $\frac{7}{n-2}$ phải là số nguyên

Do đó $(n-2) \in U(7) = \{\pm 1; \pm 7\}$, nên ta có bảng sau:

$n-2$	-7	-1	1	7
n	-5	1	3	9
	TM $n \in \mathbb{Z}$	TM $n \in \mathbb{Z}$	TM $n \in \mathbb{Z}$	TM $n \in \mathbb{Z}$

Vậy $n \in \{-5; 1; 3; 9\}$ thì A là một số nguyên.

Bài 3:

Tìm các giá trị nguyên của x để $\frac{x+3}{x-2}$ nhận giá trị nguyên.

Lời giải

Ta có $\frac{x+3}{x-2} = \frac{x-2+5}{x-2} = 1 + \frac{5}{x-2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$

$\Rightarrow x \in \{-3; 1; 3; 7\}$

Vậy $x \in \{-3; 1; 3; 7\}$

Bài 4:

Tìm số nguyên n để $4n+5$ chia hết cho $2n+1$.

Lời giải

Ta có: $4n+5 = 2 \cdot (2n+1) + 3$

Vì $2(2n+1) : 2n+1$ với $\forall n \in \mathbb{Z}$

Nên để $4n+5 : 2n+1$ thì $3 : 2n+1$

$\Rightarrow 2n+1 \in U(3) = \{-3; -1; 1; 3\}$

Ta có bảng giá trị sau:

$2n+1$	-3	-1	1	3
n	-2	-1	0	1

Vậy $n \in \{-2; -1; 0; 1\}$ thì $4n+5 : 2n+1$



Bài 5:

Tìm số tự nhiên n sao cho $2n + 7 : n + 1$

Lời giải

Ta có: $2n + 7 : n + 1 \Leftrightarrow 2(n + 1) + 5 : (n + 1) \Leftrightarrow 5 : (n + 1) \Leftrightarrow n + 1 \in U(5) = \{1; 5\} (n \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow n \in \{0; 4\}$

Bài 6:

Tìm số nguyên n để phân số $\frac{2n + 1}{n + 2}$ có giá trị là số nguyên.

Lời giải

Để $\frac{2n + 1}{n + 2}$ có giá trị là số nguyên thì $2n + 1 : n + 2$ (1)

Vì $n + 2 : n + 2$ nên $2(n + 2) : n + 2$ (2)

Từ (1) và (2) $[2(n + 2) - (2n + 1)] : n + 2$

$\Rightarrow 3 : n + 2$

Vì $n + 2$ nguyên nên $n + 2 \in \{-1; -3; 1; 3\} \Rightarrow n \in \{-3; -5; -1; 1\}$

Vậy với $\Rightarrow n \in \{-3; -5; -1; 1\}$ thì phân số $\frac{2n + 1}{n + 2}$ là số nguyên.

Bài 7:

Tìm số tự nhiên n để biểu thức sau là số tự nhiên: $B = \frac{2n + 2}{n + 2} + \frac{5n + 17}{n + 2} - \frac{3n}{n + 2}$

Lời giải

Ta có: $B = \frac{2n + 2}{n + 2} + \frac{5n + 17}{n + 2} - \frac{3n}{n + 2} = \frac{2n + 2 + 5n + 17 - 3n}{n + 2} = \frac{4n + 19}{n + 2}$ là số nguyên.

$= \frac{4(n + 2) + 11}{n + 2} = 4 + \frac{11}{n + 2}$

Để B là số tự nhiên thì $\frac{11}{n + 2}$ là số tự nhiên

$\Rightarrow 11 : (n + 2) \Rightarrow n + 2 \in U(11) = \{\pm 1; \pm 11\}$

Do $n + 2 > 2$ nên $n + 2 = 11 \Rightarrow n = 9$



Vậy $n = 9$ thì $B \in N$

Bài 8:

Tìm n để $n^3 - n^2 + n + 7 : n^2 + 1$

Lời giải

Ta có: $n^3 - n^2 + n + 7 : n^2 + 1 \Rightarrow n^3 + n - (n^2 + 1) + 8 : n^2 + 1$

$\Rightarrow n(n^2 + 1) - (n^2 + 1) + 8 : n^2 + 1 \Rightarrow n^2 + 1 \in U(8)$

$\Rightarrow x(x + 2) + (x + 2) - 3 : x + 2 \Rightarrow x + 2 \in U(3)$

Bài 9:

Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ để biểu thức sau có giá trị nguyên:

$$K = \frac{3x(x + y) - 6(x + y) + 1}{x - 2}$$

Lời giải

Để $K = \frac{3x(x + y) - 6(x + y) + 1}{x - 2}$ có giá trị nguyên thì:

$$\frac{(3x - 6)(x + y) + 1}{x - 2} = \frac{3(x - 2)(x + y) + 1}{x - 2}$$

Phải có giá trị nguyên hay $1 : x - 2 \Rightarrow x - 2 \in U(1) \Rightarrow x - 2 \in \{-1; 1\} \Rightarrow x = 3, x = 1$

Vậy $x \in \{1; 3\}$

Bài 10:

Tìm số nguyên n để $B = \frac{2n + 3}{3n + 2}$ có giá trị nguyên.

Lời giải

Để $B = \frac{2n + 3}{3n + 2}$ có giá trị nguyên thì $(2n + 3) : (3n + 2) \Rightarrow 3(2n + 3) : (3n + 2)$

$\Rightarrow 3(2n + 3) - 2(3n + 2) : (3n + 2) \Rightarrow 5 : (3n + 2) \Rightarrow 3n + 2 \in \{\pm 1; \pm 5\}$

$\Rightarrow n \in \{-1; 1\}$ (vì $n \in \mathbb{Z}$)

Bài 11:





Tìm tất cả các số nguyên n để phân số $\frac{n+1}{n-2}$ có giá trị là một số nguyên.

Lời giải

$\frac{n+1}{n-2}$ là số nguyên khi $(n+1) : (n-2)$

Ta có $n+1 = [(n-2) + 3]$

Vậy $(n+1) : (n-2)$ khi $3 : (n-2)$

$$(n-2) \in U(3) = \{-3; -1; 1; 3\} \Rightarrow n \in \{-1; 1; 3; 5\}.$$

Bài 12:

Cho $Q = \frac{27-2x}{12-x}$. Tìm các số nguyên x để Q có giá trị nguyên ?

Lời giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{Z}, x \neq 12$

$$\text{Biến đổi: } Q = \frac{27-2x}{12-x} = \frac{2 \cdot (12-x) + 3}{12-x} = 2 + \frac{3}{12-x}$$

Ta có: $2 \in \mathbb{Z}; x \in \mathbb{Z}; x \neq 12$ nên Q có giá trị nguyên khi và chỉ khi $\frac{3}{12-x} \in \mathbb{Z}$

$$\text{Mà } \frac{3}{12-x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 12-x \in U(3) = \{-3; -1; 1; 3\} \Rightarrow x \in \{15; 13; 11; 9\}$$

Vậy Q nguyên khi và chỉ khi $x \in \{15; 13; 11; 9\}$

Bài 13:

Tìm x, y nguyên biết $xy + 3x - y = 6$

Lời giải

$$\text{Ta có } xy + 3x - y = 6 \Leftrightarrow x(y+3) - (y+3) = 3$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(y+3) = 3 \cdot 1 = 1 \cdot 3 = (-1) \cdot (-3) = (-3) \cdot (-1)$$

Ta có bảng sau:

$x-1$	1	3	-1	-3
$y+3$	3	1	-3	-1
x	2	4	0	-2



y	0	-2	-6	-4
-----	---	----	----	----

Vậy $(x; y) = \{(2; 0); (4; -2); (0; 6); (-2; -4)\}$

Bài 1:

Tìm các số nguyên x, y biết $x - 2xy + y - 3 = 0$

Lời giải

Ta có: $x - 2xy + y - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x - 4xy + 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x(1 - 2y) - (1 - 2y) = 5$

$\Leftrightarrow (2x - 1)(1 - 2y) = 5$

Ta có bảng sau

$2x - 1$	1	5	-1	-5
$1 - 2y$	5	1	-5	-1
x	1	3	0	-2
y	-2	0	3	1
	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Bài 14:

Cho 2 biểu thức: $A = \frac{4x - 7}{x - 2}; B = \frac{3x^2 - 9x + 2}{x - 3}$

a) Tìm giá trị nguyên của x để mỗi biểu thức có giá trị nguyên

b) Tìm giá trị nguyên của x để cả hai biểu thức cùng có giá trị nguyên

Lời giải

a) Ta có: $A = \frac{4x - 7}{x - 2} = \frac{4(x - 2) + 1}{x - 2} = 4 + \frac{1}{x - 2}$

Với $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - 2 \in \mathbb{Z}$



Để A nguyên thì $\frac{1}{x-2}$ nguyên $\Rightarrow x-2 \in \{-1; 1\} \Rightarrow x \in \{1; 3\}$

$$B = \frac{3x^2 - 9x + 2}{x-3} = \frac{3x(x-3) + 2}{x-3} = 3x + \frac{2}{x-3}$$

Với $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-3 \in \mathbb{Z}$

Để B nguyên thì $\frac{2}{x-3}$ nguyên $\Rightarrow x-3 \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\} \Rightarrow x \in \{1; 2; 4; 5\}$

b) Từ câu a) và b) suy ra A, B cùng nguyên thì $x = 1$.

Bài 15:

Tìm các số nguyên x và y biết: $2xy - 6y + x = 9$.

Lời giải

Ta có: $2xy - 6y + x = 9$

$$2y(x-3) + (x-3) = 6$$

$$(x-3)(2y+1) = 6$$

Vì x, y là các số nguyên nên $(x-3)$ và $(2y+1)$ là các ước của 6 và $(2y+1)$ là số lẻ nên:

$$+ \begin{cases} x-3=6 \\ 2y+1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=0 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} x-3=-6 \\ 2y+1=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} x-3=2 \\ 2y+1=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} x-3=-2 \\ 2y+1=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$$

Bài 16:

Tìm tất cả các cặp số nguyên x, y sao cho $x - xy + y = 0$

Lời giải

$$\text{Ta có } x - xy + y = 0 \Rightarrow x(1-y) + y = 0 \Rightarrow (1-y) - x(1-y) = 1 \Leftrightarrow (1-x)(1-y) = 1$$



$1-x$	1	-1
$1-y$	1	-1
x	0	2
y	0	2

Vậy $(x;y) = \{(0;0);(2;2)\}$

Bài 17:

Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn $\frac{x}{5} + 1 = \frac{1}{y-1}$

Lời giải

Ta có: $\frac{x}{5} + 1 = \frac{1}{y-1} \Rightarrow \frac{x+5}{5} = \frac{1}{y-1} \Rightarrow (x+5)(y-1) = 5$

Do $x,y \in \mathbb{Z}$ nên $x+5$ và $y-1$ là ước của 5, $U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$

Ta có bảng giá trị tương ứng sau:

$x+5$	-5	-1	1	5
$y-1$	-1	-5	5	1
x	-10	-6	-4	0
y	0	-4	6	2

Vậy các cặp số nguyên cần tìm là: $(x;y) = \{(-4;6);(0;2);(-6;4);(-10;0)\}$

Bài 18:

Tìm số nguyên n để phân số $M = \frac{2n-7}{n-5}$ có giá trị là số nguyên.

Lời giải

Ta có: $M = \frac{2n-7}{n-5} = \frac{2n-10+3}{n-5} = \frac{2(n-5)+3}{n-5} = 2 + \frac{3}{n-5}$

Vì $2 \in \mathbb{Z}$ nên để $M \in \mathbb{Z}$ thì $\frac{3}{n-5} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n-5$ là ước của 3.

Lập bảng:

$n-5$	1	-1	5	-5
-------	---	----	---	----



n	6 (tm)	4 (tm)	10 (tm)	0 (tm)
-----	--------	--------	---------	--------

Vậy với $n \in \{0; 4; 6; 10\}$ thì M có giá trị là số nguyên.

Bài 1:

Tìm các số tự nhiên x, y biết $2xy - 5x + 2y = 148$

Lời giải

Ta có $2xy - 5x + 2y = 148 \Rightarrow (2xy + 2y) - 5x - 5 = 148 - 5 \Rightarrow (x + 1)(2y - 5) = 143$

Do $143 = 1.143 = 11.13$ nên ta có bảng sau

	1	143	11	13
$2y - 5$	143	1	13	11
x	0	142	10	12
y	74	3	9	8

Bài 19: Cho $A = 2xy - 10x + 3y$. Tìm các số nguyên x, y để $A = 28$

Lời giải

Ta có: $A = 2xy - 10x + 3y$

$$\Rightarrow 2xy - 10x + 3y = 28$$

$$\Rightarrow 2x(y - 5) + 3y - 15 = 13$$

$$\Rightarrow 2x(y - 5) + 3(y - 5) = 13$$

$$\Rightarrow (2x + 3)(y - 5) = 13 = 1.13 = 13.1 = -1. -13 = -13. -1$$

Từ đó ta có các cặp $(x; y)$ là $(1; 18); (5; 6); (-2; -8); (-8; 4)$

Bài 20:

Tìm số nguyên x và y biết $xy - x + 2y = 3$

Lời giải

$$\text{Ta có: } xy - x + 2y = 3 \Rightarrow xy - x + 2y - 2 = 5 \Rightarrow (y - 1)(x + 2) = 5$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $y - 1 \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$

Ta có bảng giá trị sau :



$y - 1$	-5	-1	1	5
y	-4	0	2	6
$x + 2$	-1	-5	5	1
x	-3	-7	3	-1

Vậy các cặp số nguyên $x; y$ thỏa mãn là $(x; y) \in \{(-3; -4), (-7; 0), (3; 2), (-1; 6)\}$

Bài 21:

Tìm $x; y$ nguyên biết $3x + xy + 2y = 17$

Lời giải

Ta có $3x + xy + 2y = 17 \Rightarrow x(y + 3) + 2(3 + y) = 23 \Rightarrow (x + 2)(3 + y) = 23$

Ta có bảng:

$x + 2$	-1	1	-23	23
$y + 3$	-23	23	-1	1
x	-3	-1	-25	21
y	-26	20	-4	-2

Vậy $(x; y) \in \{(-3; -26); (-1; 20); (-25; -4); (21; -2)\}$

Bài 22:

Tìm x, y nguyên biết: $x + y + xy = 40$.

Lời giải

Ta có $x + y + xy = 40 \Rightarrow x + y + xy + 1 = 41$

$\Rightarrow x(y + 1) + (y + 1) = 41 \Rightarrow (x + 1)(y + 1) = 41$

Mà 41 chỉ có các cách phân tích thành tích của các cặp số nguyên như sau

$$41 = (-1) \cdot (-41) = 1 \cdot 41 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 1; y + 1 = 41 \\ x + 1 = 41; y + 1 = 1 \\ x + 1 = -1; y + 1 = -41 \\ x + 1 = -41; y + 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0; y = 40 \\ x = 40; y = 0 \\ x = -2; y = -42 \\ x = -42; y = -2 \end{cases}$$

Vậy $(x, y) \in \{(40; 0); (0; 40); (-2; -42); (-42; -2)\}$



Bài 23:

Tìm số nguyên x, y biết: $xy + 4x = 25 + 5y$.

Lời giải

Ta có: $xy + 4x = 25 + 5y \Leftrightarrow x(y + 4) = 25 + 5y$ (1)

+) Nếu $y = -4$ thì phương trình (1) vô nghiệm

+) Nếu $y \neq -4$ thì phương trình (1) trở thành: $x = \frac{5y + 25}{y + 4} = \frac{5(y + 4) + 5}{y + 4} = 5 + \frac{5}{y + 4}$

Để x, y nguyên thì $y + 4 \in \{\pm 1; \pm 5\}$

Lập bảng

$y + 4$	-5	-1	1	5
y	-9	-5	-3	1
x	4	0	10	6

Vậy $(x, y) = (4; -9), (0; -5), (10; -3), (6; 1)$.

Bài 24:

Cho các số nguyên a, b, c, d thỏa mãn: $a + b = c + d$ và $ab + 1 = cd$. Chứng minh rằng: $c = d$

Lời giải

Từ $a + b = c + d \Rightarrow a = c + d - b$, thay vào $ab + 1 = cd$ ta được:

$$(c + d - b).b + 1 = cd \Rightarrow cb + db - cd + 1 - b^2 = 0 \Rightarrow b(c - b) - d(c - b) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (b - d)(c - b) = -1$$

Vì a, b, c, d là các số nguyên nên $(b - d), (c - b)$ là các số nguyên, ta có các TH sau:

$$+ \text{ TH1: } \begin{cases} b - d = -1 \\ c - b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = b + 1 \\ c = b + 1 \end{cases} \Rightarrow c = d$$

$$+ \text{ TH2: } \begin{cases} b - d = 1 \\ c - b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = b - 1 \\ c = b - 1 \end{cases} \Rightarrow c = d$$

Bài 25:





Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $x^2 + x = 3^{2019y} + 1$

Lời giải

+ TH1: Với $y < 0$, ta có: $VP = 3^{2019y} + 1$ không là số nguyên

$VT = x^2 + x$ là số nguyên (loại)

+ TH2: Với $y = 0$, ta có $x^2 + x = 3^{2019y} + 1 \Rightarrow x^2 + x = 2 \Rightarrow x(x + 1) = 2 \Rightarrow x = 1$ hoặc $x = -2$

+ Với $y \geq 1$, ta có: $VP = 3^{2019y} + 1$ chia 3 dư 1

Vì x nguyên nên x có dạng $3k; 3k + 1; 3k + 2$

Với $x = 3k$ và $x = 3k + 2$ thì $VT = x(x + 1) : 3$

Với $x = 3k + 1$ thì $VT = x(x + 1)$ chia 3 dư 2 (loại)

Vậy cặp số nguyên $(x; y)$ cần tìm là: $(1; 0); (-2; 0)$

Bài 26:

Tìm tập hợp các số nguyên x biết rằng:

$$4\frac{5}{9} : 2\frac{5}{18} - 7 < x < \left(3\frac{1}{5} : 3,2 + 4,5 \cdot 1\frac{31}{45}\right) : \left(-21\frac{1}{2}\right)$$

Lời giải

Ta có: $4\frac{5}{9} : 2\frac{5}{18} - 7 = \frac{41}{9} \cdot \frac{18}{41} - 7 = 2 - 7 = -5$

Lại có $\left(3\frac{1}{5} : 3,2 + 4,5 \cdot 1\frac{31}{45}\right) : \left(-21\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{16}{5} \cdot \frac{5}{16} + \frac{9}{2} \cdot \frac{76}{45}\right) : \frac{43}{2} = \left(1 + \frac{38}{5}\right) \cdot \frac{-2}{43} = \frac{-2}{5}$

Do đó $-5 < x < \frac{-2}{5}$, mà $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-4; -3; -2; -1\}$.

Bài 27: HSG Huyện Gia Viên, năm học 2020-2021

Tìm x, y nguyên biết $xy + 3x - y = 6$

Lời giải

Ta có: $xy + 3x - y = 6 \Rightarrow x(y + 3) - (y + 3) = 6 - 3$

$\Rightarrow (x - 1)(y + 3) = 3$

Mà $x; y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - 1 \in \mathbb{Z}; y + 3 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow (x - 1)(y + 3) = 3 = 1 \cdot 3 = 3 \cdot 1 = (-1)(-3) = (-3)(-1)$



Ta có bảng giá trị:

$x - 1$	1	3	-1	-3
$y + 3$	3	1	-3	-1
x	2	4	0	-2
y	0	-2	-6	-4

Vậy $(x; y) = \{(2; 0); (4; -2); (0; 6); (-2; -4)\}$

Bài 28: HSG Lục Ngạn, năm học 2020-2021

Tìm các số nguyên không âm x, y sao cho $x^2 = 3^y + 35$.

Lời giải

+ Với $y = 0 \Rightarrow x^2 = 1 + 35 = 36 = 6^2$ vậy $x = 6$ vì $x \in \mathbb{Z}, x \geq 0$.

+ Với $y > 0$ thì $x^2 + 1 = 3^y + 36 : 3$ mà $3^y + 35 \geq 36 \Rightarrow x^2 \geq 36 \Rightarrow x \geq 6$

$x \in \mathbb{Z}, x \geq 0$ nên $x = 3k; x = 3k + 1; x = 3k + 2, k \in \mathbb{N}^*$

Với $x = 3k \Rightarrow x^2 + 1 = 9k^2 + 1$ chia cho 3 dư 1, vậy không có giá trị nào thỏa mãn.

Với $x = 3k + 1 \Rightarrow x^2 + 1 = 9k^2 + 6k + 2$ chia cho 3 dư 2, vậy không có giá trị nào thỏa mãn.

Với $x = 3k + 2 \Rightarrow x^2 + 1 = 9k^2 + 12k + 3 + 2$ chia cho 3 dư 2, vậy không có giá trị nào thỏa mãn.

Vậy $x = 6; y = 0$.

Bài 29: HSG Bá Thước, năm học 2020-2021

Tìm các số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $x + 2y = 3xy + 3$

Lời giải

Ta có: $x + 2y = 3xy + 3$

$\Rightarrow 3xy - x - 2y + 3 = 0$

$\Rightarrow 9xy - 3x - 6y + 9 = 0$

$\Rightarrow 3x(3y - 1) - 2(3y - 1) + 7 = 0$

$\Rightarrow (3y - 1)(3x - 2) = -7$ mà $x, y \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow (3y - 1), (3x - 2)$ là ước của -7 .

Ta có $-7 = -1.7 = -7.1$.

Từ đó ta tìm được các giá trị của x, y như bảng sau :



$3y - 1$	-7	-1	1	7
$3x - 2$	1	7	-7	-1
y	-2	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$
x	1	3	$\frac{-5}{3}$	$\frac{1}{3}$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $(x; y) = (1; -2)$ hoặc $(x; y) = (3; 0)$

Bài 30: HSG Việt Yên, năm học 2020 - 2021

Tìm x, y nguyên, biết $xy + 2x - y = 5$

Lời giải

Ta có:

$$xy + 2x - y = 5$$

$$\Leftrightarrow x(y + 2) - y - 2 = 3$$

$$\Leftrightarrow x(y + 2) - (y + 2) = 3$$

$$\Leftrightarrow (y + 2)(x - 1) = 3$$

Vì x, y là số nguyên nên $(y + 2)$ và $(x - 1)$ là số nguyên

$$\Rightarrow (y + 2) \text{ và } (x - 1) \text{ là ước của } 3; \mathcal{U}(3) = \{1; -1; 3; -3\}$$

Ta có bảng sau:

$(y + 2)$	1	-1	3	-3
$(x - 1)$	3	-3	1	-1
y	-1	-3	1	-5
x	4	-2	2	0

Vậy $x = 4$ và $y = -1$ hoặc $x = -2$ và $y = -3$ hoặc $x = 2$ và $y = 1$ hoặc $x = 0$ và $y = -5$

Bài 31: HSG Triệu Hoá, năm học 2020 - 2021



Tìm x, y nguyên, biết $100 - y^2 = 8(x - 2021)^2$

Lời giải

Ta có $100 - y^2 = 8(x - 2021)^2$. Do $8(x - 2021)^2 \geq 0$ với mọi x

suy ra $100 - y^2 \geq 0 \Rightarrow 100 \geq y^2$

$$\Rightarrow y^2 \in \{0; 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; 100\}$$

Với $y^2 = 0 \Rightarrow 100 - y^2 = 100 = 8(x - 2021)^2$

$$\Rightarrow \frac{100}{8} = (x - 2021)^2 \text{ (loại vì } x \in \mathbb{Z} \text{)}$$

Với $y^2 = 1 \Rightarrow 100 - y^2 = 99 = 8(x - 2021)^2$

$$\Rightarrow \frac{99}{8} = (x - 2021)^2 \text{ (loại vì } x \in \mathbb{Z} \text{)}$$

Với $y^2 = 4 \Rightarrow 100 - y^2 = 96 = 8(x - 2021)^2$

$$\Rightarrow \frac{96}{8} = 12 = (x - 2021)^2 \text{ (loại vì } x \in \mathbb{Z} \text{)}$$

Với $y^2 = 9 \Rightarrow 100 - y^2 = 91 = 8(x - 2021)^2$

$$\Rightarrow \frac{91}{8} = (x - 2021)^2 \text{ (loại vì } x \in \mathbb{Z} \text{)}$$

Với $y^2 = 16 \Rightarrow 100 - y^2 = 84 = 8(x - 2021)^2$

$$\Rightarrow \frac{84}{8} = (x - 2021)^2 \text{ (loại vì } x \in \mathbb{Z} \text{)}$$

Với $y^2 = 25 \Rightarrow 100 - y^2 = 75 = 8(x - 2021)^2$

$$\Rightarrow \frac{75}{8} = (x - 2021)^2 \text{ (loại vì } x \in \mathbb{Z} \text{)}$$

Với $y^2 = 36 \Rightarrow 100 - y^2 = 64 = 8(x - 2021)^2$

$$\Rightarrow \frac{64}{8} = 8 = (x - 2021)^2 \text{ (loại vì } x \in \mathbb{Z} \text{)}$$

Với $y^2 = 49 \Rightarrow 100 - y^2 = 51 = 8(x - 2021)^2$



$$\Rightarrow \frac{51}{8} = (x - 2021)^2 \text{ (loại vì } x \in \mathbb{Z} \text{)}$$

$$\text{Với } y^2 = 64 \Rightarrow 100 - y^2 = 36 = 8(x - 2021)^2$$

$$\Rightarrow \frac{36}{8} = (x - 2021)^2 \text{ (loại vì } x \in \mathbb{Z} \text{)}$$

$$\text{Với } y^2 = 81 \Rightarrow 100 - y^2 = 19 = 8(x - 2021)^2$$

$$\Rightarrow \frac{19}{8} = (x - 2021)^2 \text{ (loại vì } x \in \mathbb{Z} \text{)}$$

$$\text{Với } y^2 = 100 \Rightarrow 100 - y^2 = 0 = 8(x - 2021)^2$$

$$\Rightarrow 0 = (x - 2021)^2 \Rightarrow x = 2021$$

Vậy $y = 10; y = -10$

Do đó $(x; y) = (2021; 10)$ và $(x; y) = (2021; -10)$

Bài 32: HSG Chương Mỹ, năm học 2020 - 2021

Tìm các số nguyên a, b thỏa mãn: $(3a + 1)b = 3(a + 2)$.

Lời giải

Ta có $(3a + 1)b = 3(a + 2)$

$$(3a + 1)b = 3a + 1 + 5$$

$$(3a + 1)b - (3a + 1) = 5$$

$$(3a + 1)(b - 1) = 5$$

Vì a, b là các số nguyên nên ta có các trường hợp sau:

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} 3a + 1 = 1 \\ b - 1 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 6 \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 2: } \begin{cases} 3a + 1 = -1 \\ b - 1 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-2}{3} \\ b = -4 \end{cases} \text{ (không thỏa mãn vì } a \text{ không là số nguyên)}$$

$$\text{Trường hợp 3: } \begin{cases} 3a + 1 = 5 \\ b - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ b = 2 \end{cases} \text{ (không thỏa mãn vì } a \text{ không là số nguyên)}$$



Trường hợp 4: $\begin{cases} 3a + 1 = -5 \\ b - 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \end{cases}$

Vậy các cặp số nguyên (a, b) thỏa mãn là: $(0, 6); (-2, 0)$

Bài 33: HSG Yên Thành, năm học 2020 - 2021

Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ biết $25 - y^2 = 8(x - 2009)^2$

Lời giải

Ta có: $25 - y^2 = 8(x - 2009)^2$ (*)

Vì $8 \cdot (x - 2009)^2 \geq 0 \Rightarrow 25 - y^2 \geq 0$

$\Rightarrow y^2 \leq 25$ mà $y \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow 0 \leq y \leq 5$

Vì $8:2 \Rightarrow (25 - y^2):2 \Rightarrow y$ là số lẻ

$\Rightarrow y \in \{1; 3; 5\}$

Khi $y = 1$ thay vào (*) ta có: $25 - 1^2 = 8 \cdot (x - 2009)^2 \Rightarrow 24 = 8 \cdot (x - 2009)^2$

$\Rightarrow 3 = (x - 2009)^2$ loại vì $x \in \mathbb{N}$

Khi $y = 3$, thay vào (*) ta có: $25 - 3^2 = 8(x - 2009)^2$

$\Rightarrow 16 = 8(x - 2009)^2 \Rightarrow 2 = (x - 2009)^2$ loại vì $x \in \mathbb{N}$

Khi $y = 5$ thay vào (*) ta có: $25 - 5^2 = 8 \cdot (x - 2009)^2$

$\Rightarrow 0 = 8(x - 2009)^2 \Rightarrow 0 = (x - 2009)^2 \Rightarrow x = 2009$ (thỏa mãn điều kiện của đề bài)

Vậy $x = 2009; y = 0$.

Bài 34: HSG Thanh Trì, năm học 2020 - 2021

Tìm các số nguyên x, y để $x^2 + x = 3^{2020 \cdot y} + 1$

Lời giải

+) Trường hợp $y < 0$, ta có:

$VP = x^2 + x = x(x + 1)$ là số nguyên

$VT = 3^{2020 \cdot y} + 1$ không là số nguyên (vì $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ với $a \neq 0, n$ nguyên dương)

\Rightarrow Trường hợp này loại



+) Với $y = 0$, ta có $x^2 + x = 3^{2020 \cdot 0} + 1 \Rightarrow x(x + 1) = 2 = 1 \cdot 2 = (-2)(-1)$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x < x + 1 \Rightarrow x = 1$ hoặc $x = -2$

Khi $x = 1$ thì $y = 0$; khi $x = -2$ thì $y = 0$

+) Với $y > 0$, ta có:

$VP = x^2 + x = x(x + 1)$ là tích hai số nguyên liên tiếp nên $x^2 + x$ chia hết cho 3 hoặc chia cho 3 dư 2

$VT = 3^{2020 \cdot y} + 1$ chia cho 3 dư 1

\Rightarrow Trường hợp này loại

Vậy, cặp số nguyên $(x; y)$ cần tìm là: $(1; 0); (-2; 0)$.

Bài 35: HSG Thanh Ba, năm học 2019 - 2020

Tìm các số nguyên x, y biết rằng $\frac{x}{8} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$.

Lời giải

ĐK: $y \neq 0$.

Ta có (1) $\Rightarrow \frac{xy - 8}{8y} = \frac{1}{4} \Rightarrow xy - 8 = 2y \Rightarrow (x - 2)y = 8$

$\Rightarrow x - 2; y$ là các ước của 8.

Ta có bảng tính sau:

$x - 2$	-1	1	-2	2	-4	4	-8	8
y	-8	8	-4	4	-2	2	-1	1
x	1	3	0	4	-2	6	-6	10

Vậy, ta tìm được các cặp số nguyên $(x; y)$ là:

$(1; -8); (3; 8); (0; -4); (4; 4); (-2; -2); (6; 2); (-6; -1); (10; 1)$.

Bài 36: HSG Cửa Lò, năm học 2021 - 2022

Tìm các số nguyên x, y biết: $\frac{5}{x} + \frac{y}{4} = \frac{1}{8}$

Lời giải

Ta có $\frac{5}{x} + \frac{y}{4} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{1}{8} - \frac{y}{4} = \frac{1 - 2y}{8} \Rightarrow x(1 - 2y) = 40$



Vì $x, y \in Z$ và $x(1 - 2y) = 40$

$\Rightarrow 1 - 2y$ là ước lẻ của 40 tức là $-5; -1; 1; 5$

Từ đó ta tìm được các giá trị của x, y như bảng sau :

$1 - 2y$	-5	-1	1	5
y	3	1	0	-2
x	-8	-40	40	8

Bài 37: HSG Kỳ Anh, năm học 2020 - 2021

Tìm các số tự nhiên a, b sao cho: $(2020 \cdot a + b + 5) \cdot (2020^a + 2020 \cdot a + b) = 2021$.

Lời giải

+) Vì $a, b \in N$ nên $(2020 \cdot a + b + 5) \in N, (2020^a + 2020 \cdot a + b) \in N$

Lại có $(2020 \cdot a + b + 5) \cdot (2020^a + 2020 \cdot a + b) = 2021$ mà $2021 = 43 \cdot 47$

+) Trường hợp 1: $\begin{cases} 2020 \cdot a + b + 5 = 43 \\ 2020^a + 2020 \cdot a + b = 47 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2020 \cdot a + b = 38 \\ 2020^a = 9 \end{cases} \Rightarrow a, b \in \emptyset$

+) Trường hợp 2: $\begin{cases} 2020 \cdot a + b + 5 = 47 \\ 2020^a + 2020 \cdot a + b = 43 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2020 \cdot a + b = 42 \\ 2020^a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 42 \\ a = 0 \end{cases}$

Vậy $a = 0; b = 42$.

Bài 38: HSG Việt Yên, năm học 2020 - 2021

Tìm các số tự nhiên a, b sao cho: $(2020a + 3b + 1)(2020^a + 2020a + b) = 225$ (*).

Lời giải

Nếu $a \neq 0$

Vì 225 là số lẻ nên $(2020a + 3b + 1)$ và $(2020^a + 2020a + b)$ đều là số lẻ

Vì $a \neq 0$ nên $2020a$ và 2020^a đều là số chẵn

+) Để $(2020a + 3b + 1)$ là số lẻ thì $3b + 1$ phải là số lẻ suy ra b phải là số chẵn

+) Để $(2020^a + 2020a + b)$ là số lẻ thì b phải là số lẻ (vô lý)

$\Rightarrow a = 0 \in N$ thay vào (*) ta được $(3b + 1)(b + 1) = 225 \Leftrightarrow (3b + 1)(b + 1) = 25 \cdot 9$

$\Leftrightarrow (3b + 1)(b + 1) = (3 \cdot 8 + 1)(8 + 1) \Rightarrow b = 8 \in N$

Vậy $a = 0$ và $b = 8$.



Bài 39: HSG Việt Yên, năm học 2020 - 2021

Tìm các số nguyên x, y biết $9x^2 - 21x - 15xy + 35y + 11 = 0$

Lời giải

Ta có: $9x^2 - 21x - 15xy + 35y + 11 = 0 \Rightarrow (3x - 7)(3x - 5y) = -11 = -1 \cdot 11 = 1 \cdot (-11)$.

$$\text{TH1: } \begin{cases} 3x - 7 = 1 \\ 3x - 5y = -11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ y = \frac{11}{8} \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} 3x - 7 = -1 \\ 3x - 5y = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{TH3: } \begin{cases} 3x - 7 = 11 \\ 3x - 5y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = \frac{19}{5} \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$\text{TH4: } \begin{cases} 3x - 7 = -11 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ y = -1 \end{cases} \text{ (loại)}$$

Vậy: $(x; y) = (2; -1)$



Chuyên đề 7: ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN, TỈ LỆ NGHỊCH

(Các bài toán thực tế)

I. Kiến thức cần nhớ

A. Đại lượng tỉ lệ thuận

1. Định nghĩa: Nếu đại lượng y liên hệ với đại lượng x theo công thức $y = kx$ (với k là hằng số khác 0) thì ta nói y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ k

2. Chú ý:

* Khi đại lượng y tỉ lệ thuận với đại lượng x thì x cũng tỉ lệ thuận với y và ta nói hai đại lượng đó tỷ lệ thuận với nhau.

* Nếu y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ k (khác 0) thì x tỉ lệ thuận với y theo hệ số $\frac{1}{k}$.

* Nếu z tỉ lệ thuận với y theo hệ số tỉ lệ k_1 , y tỷ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ k_2 thì z tỷ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ $k_1.k_2$.

3. Tính chất: Nếu hai đại lượng tỉ lệ thuận với nhau thì:

* Tỉ số giữa hai giá trị tương ứng của hai đại lượng luôn không đổi:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \dots = k.$$

* Tỉ số giữa hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}; \frac{x_1}{x_3} = \frac{y_1}{y_3}; \dots$$

B. Đại lượng tỉ lệ nghịch

1. Định nghĩa: Nếu đại lượng y liên hệ với đại lượng x theo công thức $y = \frac{a}{x}$ hay

$xy = a$ (với a là hằng số khác 0) thì ta nói y tỉ lệ nghịch với x theo hệ số tỉ lệ a

2. Tính chất: Nếu hai đại lượng tỉ lệ nghịch với nhau thì:





* Tích của một giá trị bất kì của đại lượng này với giá trị tương ứng của đại lượng kia luôn là một hằng số: $x_1y_1 = x_2y_2 = x_3y_3 = \dots = a$.

* Tỉ số giữa hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng nghịch đảo của tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}; \frac{x_1}{x_3} = \frac{y_3}{y_1}, \dots$

3. Chú ý:

* Khi đại lượng y tỉ lệ nghịch với đại lượng x thì x cũng tỉ lệ nghịch với y và ta nói hai đại lượng đó tỷ lệ nghịch với nhau.

* Nếu y tỉ lệ nghịch với x theo tỉ lệ a thì x cũng tỉ lệ nghịch với y theo tỉ lệ a

* Nếu y tỉ lệ nghịch với x thì y tỉ lệ thuận với $\frac{1}{x}$.

* Nếu z tỉ lệ nghịch với y theo tỉ lệ a_1 và y tỉ lệ nghịch với x theo tỉ lệ a_2 thì z tỉ lệ thuận với x theo tỉ lệ $\frac{a_1}{a_2}$.

B. Một số ví dụ

Bài 1:

Có 3 mảnh đất hình chữ nhật A, B và C . Các diện tích của A và B tỉ lệ với 4 và 5, các diện tích của B và C tỉ lệ với 7 và 8; A và B có cùng chiều dài và tổng các chiều rộng của chúng là 27m. B và C có cùng chiều rộng. Chiều dài của mảnh đất C là 24m. Hãy tính diện tích của mỗi mảnh đất.

Lời giải

Gọi diện tích, chiều dài, chiều rộng của các mảnh đất A, B, C theo thứ tự là

$$S_A, d_A, r_A; S_B, d_B, r_B; S_C, d_C, r_C$$

Theo bài ra ta có:

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{4}{5}; \frac{S_B}{S_C} = \frac{7}{8}; d_A = d_B; r_A + r_B = 27(m); r_B = r_C; d_C = 24(m)$$





Hai hình chữ nhật A và B có cùng chiều dài nên các diện tích của chúng tỉ lệ thuận với các chiều rộng. Ta có:

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{4}{5} = \frac{r_A}{r_B} \Rightarrow \frac{r_A}{4} = \frac{r_B}{5} = \frac{r_A + r_B}{4 + 5} = \frac{27}{9} = 3 \Rightarrow \begin{cases} r_A = 12m \\ r_B = 15m = r_C \end{cases}$$

Hai hình chữ nhật B và C có cùng chiều rộng nên các diện tích của chúng tỉ lệ thuận với các chiều dài. Ta có:

$$\frac{S_B}{S_C} = \frac{7}{8} = \frac{d_B}{d_C} \Rightarrow d_B = \frac{7d_C}{8} = \frac{7 \cdot 24}{8} = 21(m) = d_A$$

$$\text{Do đó: } S_A = d_A \cdot r_A = 21 \cdot 12 = 252(m^2)$$

$$S_B = d_B \cdot r_B = 21 \cdot 15 = 315(m^2)$$

$$S_C = d_C \cdot r_C = 24 \cdot 15 = 360(m^2)$$

Bài 2:

Một bản thảo cuốn sách dày 555 trang được giao cho 3 người đánh máy. Để đánh máy 1 trang người thứ nhất cần 5 phút, người thứ hai cần 4 phút, người thứ 3 cần 6 phút. Hỏi mỗi người đánh máy được bao nhiêu trang bản thảo, biết rằng cả 3 người cùng nhau làm từ đầu đến khi đánh máy xong.

Lời giải

Gọi số trang người thứ nhất, thứ 2, thứ 3 đánh máy được theo thứ tự x, y, z

Trong cùng một thời gian, số trang sách mỗi người đánh được tỉ lệ nghịch với thời gian cần thiết để đánh xong 1 trang; tức là số trang 3 người đánh tỉ lệ nghịch với 5; 4; 6

$$\text{Do đó ta có: } x : y : z = \frac{1}{5} : \frac{1}{4} : \frac{1}{6} = 12 : 15 : 10$$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{12} = \frac{y}{15} = \frac{z}{10} = \frac{x + y + z}{12 + 15 + 10} = \frac{555}{35} = 15$$

$$\Rightarrow x = 180; y = 225; z = 150$$

Vậy số trang sách của người thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là: 180, 225, 150





Bài 3:

Ba lớp 7 ở trường K có tất cả 147 học sinh. Nếu đưa $\frac{1}{3}$ số học sinh của lớp $7A_1$, $\frac{1}{4}$ số học sinh của lớp $7A_2$ và $\frac{1}{5}$ số học sinh của lớp $7A_3$ đi thi học sinh giỏi cấp huyện thì số học sinh còn lại của ba lớp bằng nhau. Tính tổng số học sinh của mỗi lớp 7 ở trường K

Lời giải

Gọi tổng số học sinh của $7A_1, 7A_2, 7A_3$ lần lượt là a, b, c ($a, b, c \in \mathbb{N}^*$)

Theo bài ra ta có: $a - \frac{1}{3}a = b - \frac{1}{4}b = c - \frac{1}{5}c$ (*) và $a + b + c = 147$

Từ (*) $\Rightarrow \frac{2a}{3} = \frac{3b}{4} = \frac{4c}{5} \Rightarrow \frac{12a}{18} = \frac{12b}{16} = \frac{12c}{15} \Rightarrow \frac{a}{18} = \frac{b}{16} = \frac{c}{15}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{18} = \frac{b}{16} = \frac{c}{15} = \frac{a+b+c}{18+16+15} = \frac{147}{49} = 3 \Rightarrow a = 54, b = 48, c = 45$$

Vậy tổng số học sinh của $7A_1, 7A_2, 7A_3$ lần lượt là 54; 48; 45

Bài 4:

Ba đội cùng chuyên một khối lượng gạch như nhau. Thời gian để đội thứ nhất, đội thứ hai và đội thứ ba làm xong công việc lần lượt là 2 giờ, 3 giờ, 4 giờ. Tính số người tham gia làm việc của mỗi đội, biết rằng số người của đội thứ ba ít hơn số người của đội thứ hai là 5 người.

Lời giải

Gọi số người tham gia làm việc của đội 1, đội 2, đội 3 lần lượt là x, y, z (giờ)

ĐK: $x, y, z > 0$

Cùng một khối lượng công việc, số người tham gia và thời gian làm việc tỉ lệ nghịch.

Theo bài ra ta có: $2x = 3y = 4z$ và $y - z = 5$





$$\frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{4}} = \frac{y-z}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} = \frac{5}{\frac{1}{12}} = 60 \Rightarrow y = 20, z = 15, x = 30$$

Vậy số người tham gia làm việc của đội thứ nhất, đội thứ hai, đội thứ ba lần lượt là 30 người, 20 người, 15 người.

Bài 5:

Ba lớp 7A, 7B, 7C cùng mua một số gói tăm từ thiện, lúc đầu số gói tăm dự định chia cho ba lớp tỉ lệ với 5, 6, 7, nhưng sau đó chia theo tỉ lệ 4, 5, 6 nên có một lớp nhận nhiều hơn 4 gói. Tính tổng số gói tăm mà ba lớp đã mua.

Lời giải

Gọi tổng số gói tăm 3 lớp cùng mua là x (x là số tự nhiên khác 0)

Số gói tăm dự định chia cho 3 lớp lúc đầu là a, b, c

Ta có $\frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{5x}{18}; b = \frac{6x}{18} = \frac{x}{3}; c = \frac{7x}{18}$ (1)

Số gói tăm sau đó chia cho 3 lớp lần lượt là a', b', c' , ta có:

$\frac{a'}{4} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{6} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{15} \Rightarrow a' = \frac{4x}{15}; b' = \frac{5x}{15}; c' = \frac{6x}{15}$ (2)

So sánh (1) và (2) ta có $a > a'; b = b'; c < c'$ nên lớp 7C nhận nhiều hơn lúc đầu

Vậy $c - c' = 4$ hay $\frac{6x}{15} - \frac{7x}{18} = 4 \Rightarrow \frac{x}{90} = 4 \Rightarrow x = 360$

nên lớp 7C nhận nhiều hơn lúc đầu

Vậy số gói tăm 3 lớp đã mua là 360 gói.

Bài 6:

Bốn con ngựa ăn hết 1 xe cỏ trong 1 ngày, một con Dê ăn hết một xe cỏ trong 6 ngày, hai con cừu trong 24 ngày ăn hết 2 xe cỏ. Hỏi chỉ ba con (Ngựa, Dê và Cừu) ăn hết hai xe cỏ trong mấy ngày ?

Lời giải

Vì bốn con ngựa cùng ăn hết xe cỏ trong 1 ngày, do đó một con ngựa ăn hết 1 xe cỏ trong 4 ngày

Một con dê ăn hết một xe cỏ trong 6 ngày. Hai con cừu ăn hết hai xe cỏ trong 24 ngày nên một con cừu ăn hết một xe cỏ trong 12 ngày.





Trong một ngày:

Một con ngựa ăn hết $\frac{1}{4}$ (xe cỏ), một con dê ăn hết $\frac{1}{6}$ (xe cỏ), một con cừu ăn hết $\frac{1}{12}$ (xe cỏ)

Cả ba con ăn hết: $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$ (xe cỏ)

Cả ba con ăn hết 1 xe cỏ trong 2 ngày nên ăn hết 2 xe cỏ trong 4 ngày.

Bài 7:

Một vật chuyển động trên các cạnh hình vuông. Trên hai cạnh đầu vật chuyển động với vận tốc $5m/s$, trên cạnh thứ ba với vận tốc $4m/s$, trên cạnh thứ tư với vận tốc $3m/s$. Hỏi độ dài cạnh hình vuông biết rằng tổng thời gian vật chuyển động trên 4 cạnh là 59 giây

Lời giải

Cùng một đoạn đường, vận tốc và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ nghịch

Gọi x, y, z là thời gian chuyển động lần lượt với các vận tốc $5m/s, 4m/s, 3m/s$

Ta có: $5x = 4y = 3z$ và $x + y + z = 59$

$$\text{Hay } \frac{x}{\frac{1}{5}} = \frac{y}{\frac{1}{4}} = \frac{z}{\frac{1}{3}} = \frac{x + y + z}{\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}} = \frac{59}{\frac{47}{60}} = 60$$

$$\text{Do đó: } x = 60 \cdot \frac{1}{5} = 12; y = 60 \cdot \frac{1}{4} = 15; \quad z = 60 \cdot \frac{1}{3} = 20$$

Vậy cạnh hình vuông là $5 \cdot 12 = 60m$

Bài 8 :

Hiện nay hai kim đồng hồ chỉ 10 giờ. Sau ít nhất bao lâu thì 2 kim đồng hồ nằm đối diện nhau trên một đường thẳng.

Lời giải

Gọi x, y là số vòng quay của kim phút và kim giờ khi 10 giờ đến lúc 2 kim đối nhau trên một đường thẳng, ta có:

$$x - y = \frac{1}{3} \text{ (ứng với từ số 12 đến số 4 trên đồng hồ)}$$





Và $x : y = 12$ (do kim phút quay nhanh gấp 12 lần kim giờ)

$$\text{Do đó } \frac{x}{y} = \frac{12}{1} \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{y}{1} = \frac{x-y}{11} = \frac{1}{3} : 11 = \frac{1}{33} \Rightarrow x = \frac{12}{33} (\text{vòng}) \Rightarrow x = \frac{4}{11} (\text{giờ})$$

Vậy thời gian ít nhất để 2 kim đồng hồ từ lúc khi 10 giờ đến lúc nằm đối diện nhau trên một đường thẳng là $\frac{4}{11}$ giờ

Bài 9:

Ba đội san đất làm ba khối công việc như nhau. Đội thứ nhất hoàn thành công việc trong 4 ngày, đội thứ hai hoàn thành công việc trong 6 ngày và đội thứ ba hoàn thành công việc trong 8 ngày. Hỏi mỗi đội có bao nhiêu máy (có cùng năng suất), biết rằng đội thứ nhất có nhiều hơn đội thứ hai 2 máy.

Lời giải

Gọi số máy của ba đội theo thứ tự là a, b, c (các máy có cùng năng suất)

Vì số máy và số ngày là hai đại lượng tỉ lệ nghịch, do đó ta có:

$$4a = 6b = 8c \text{ hay } \frac{a}{1} = \frac{b}{1} = \frac{c}{1}, \text{ theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:}$$

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{6} = \frac{c}{8}$$

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{6} = \frac{c}{8} = \frac{a-b}{4-6} = \frac{2}{12} = 24 \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 4 \\ c = 3 \end{cases}$$

Vậy số máy của ba đội theo thứ tự là 6; 4; 3 máy

Bài 10:

Tìm độ dài 3 cạnh của tam giác có chu vi bằng 13cm. Biết độ dài 3 đường cao tương ứng lần lượt là 2cm, 3cm, 4cm.

Lời giải

Gọi độ dài ba cạnh của tam giác là x, y, z (cm) ($x, y, z > 0$)

Theo bài ra ta có: $x + y + z = 13$

$$\text{Và } 2x = 3y = 4z = 2S_{ABC} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:





$$\frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{6+4+3} = \frac{13}{13} = 1 \Rightarrow x = 6, y = 4, z = 3$$

Bài 11:

Trên bảng có ghi các số tự nhiên từ 1 đến 2008, người ta làm như sau: lấy ra hai số bất kỳ và thay vào bằng hiệu của chúng, cứ làm như vậy đến khi còn một số trên bảng thì dừng lại. Hỏi có thể làm để trên bảng chỉ còn lại số 1 được không? Giải thích?

Lời giải

Gọi S là tổng tất cả các số được ghi trên bảng

Ta có $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 2008 = \frac{2008 \cdot 2009}{2} = 1004 \cdot 2009$ là một số chẵn. Khi lấy ra hai

số a, b và thay vào bằng hiệu của hai số thì tổng S bớt đi $(a + b) - (a - b) = 2b$ là số chẵn.

Nên tổng mới phải là một số chẵn

Vậy trên bảng không thể còn lại số 1

Bài 12:

Số A được chia thành 3 số tỉ lệ theo $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$. Biết tổng các bình phương của ba số đó bằng 24309. Tìm số A .

Lời giải

Ta có: $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6} = \frac{24}{60} : \frac{45}{60} : \frac{10}{60} = 24 : 45 : 10$

Giả sử số A được chia thành 3 phần x, y, z

Theo đề bài ta có: $\frac{x}{24} = \frac{y}{45} = \frac{z}{10} \Rightarrow x, y, z$ cùng dấu

$$\text{Và } \frac{x^2}{24^2} = \frac{y^2}{45^2} = \frac{z^2}{10^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{24^2 + 45^2 + 10^2} = \frac{24309}{2701} = 9 = 3^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 24^2 \cdot 3^2 = 72^2 \Rightarrow x = \pm 72$$

Học sinh tính tương tự: $y = \pm 135; z = \pm 30$

Vậy $A = 237$ hoặc $A = -237$

Bài 13:





Tổng ba phân số tối giản bằng $5\frac{25}{63}$ các tử của chúng tỉ lệ nghịch với 20; 4; 5. Các mẫu của chúng tỉ lệ thuận với 1; 3; 7. Tìm ba phân số đó.

Lời giải

Gọi ba phân số cần tìm là a, b, c

Theo bài ra ta có: $a + b + c = 5\frac{25}{63}$

$$a : b : c = \frac{1}{20} = \frac{1}{4} = \frac{1}{5} = \frac{1}{20} = \frac{1}{12} = \frac{1}{35} = 21 : 35 : 12$$

$$\Rightarrow \frac{a}{21} = \frac{b}{35} = \frac{c}{12} = \frac{a + b + c}{21 + 35 + 12} = \frac{5\frac{25}{63}}{68} = \frac{5}{63}$$

$$\Rightarrow a = 21 \cdot \frac{5}{63} = \frac{5}{3}; b = 35 \cdot \frac{5}{63} = \frac{25}{9}; c = 12 \cdot \frac{5}{63} = \frac{20}{21}$$

Vậy ba phân số cần tìm là $\frac{5}{3}; \frac{25}{9}; \frac{20}{21}$

Bài 14:

Ba phân số có tổng bằng $\frac{213}{70}$, các tử của chúng tỉ lệ với 3, 4, 5, các mẫu của chúng tỉ lệ với 5; 1; 2. Tìm ba phân số đó.

Lời giải

Các phân số cần tìm là a, b, c ta có: $a + b + c = \frac{213}{70}$ và $a : b : c = \frac{3}{5} : \frac{4}{1} : \frac{5}{2} = 6 : 40 : 25$

$$\Rightarrow a = \frac{9}{35}, b = \frac{12}{7}, c = \frac{15}{14}$$

Bài 15:

Tìm số đo các góc của $\triangle ABC$, biết rằng số đo các góc này tỉ lệ với 2, 3, 4

Lời giải

Trong $\triangle ABC$ ta có: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$

$$\text{Theo giả thiết ta có: } \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{\widehat{B}}{3} = \frac{\widehat{C}}{4}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:





$$\frac{\widehat{A}}{2} = \frac{\widehat{B}}{3} = \frac{\widehat{C}}{4} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}}{2 + 3 + 4} = \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ \Rightarrow \begin{cases} \frac{\widehat{A}}{2} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 40^\circ \\ \frac{\widehat{B}}{3} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 60^\circ \\ \frac{\widehat{C}}{4} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 80^\circ \end{cases}$$

Vậy $\widehat{A} = 40^\circ, \widehat{B} = 60^\circ, \widehat{C} = 80^\circ$

Bài 16

Hai xe máy khởi hành cùng một lúc từ A và B, cách nhau 11km để đi đến C (ba địa điểm A, B, C ở cùng trên một đường thẳng). Vận tốc của người đi từ A là 20km/h. Vận tốc của người đi từ B là 24km/h. Tính quãng đường mỗi người đã đi. Biết họ đến C cùng một lúc

Lời giải

Gọi quãng đường đi được của 2 người lần lượt là a, b

+TH1: C nằm giữa hai điểm A và B

$$\text{Lập luận được: } \frac{a}{20} = \frac{b}{24} = \frac{a+b}{20+24} = \frac{11}{44} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = 5; b = 6$$

+TH2: C không nằm giữa hai điểm A và B

Lập luận được B không nằm giữa A và C

$$\frac{a}{20} = \frac{b}{24} = \frac{b-a}{24-20} = \frac{11}{4} \Rightarrow a = 55; b = 66$$

Bài 17:

Ba lớp 7A, 7B, 7C có tất cả 114 học sinh. Biết số học sinh lớp 7A bằng $\frac{5}{6}$ số học sinh

lớp 7B, số học sinh lớp 7B bằng $\frac{3}{4}$ số học sinh lớp 7C. Tính số học sinh của mỗi lớp.

Lời giải

Gọi số học sinh của ba lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là a, b, c

Theo đề bài ta có: $a = \frac{5}{6}b, b = \frac{3}{4}c$ và $a + b + c = 114$



$$a = \frac{5}{6}b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{a}{5} = \frac{b}{6}$$

$$b = \frac{3}{4}c \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{b}{3} = \frac{c}{4} \Rightarrow \frac{b}{6} = \frac{c}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{8}$$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau : $\frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{8} = \frac{a+b+c}{5+6+8} = \frac{114}{19} = 6$

Do đó $a = 5.6 = 30$; $b = 6.6 = 36$; $c = 8.6 = 48$

Vậy số học sinh của ba lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là 30, 36, 48 học sinh

Bài 18

Tìm một số có ba chữ số, biết rằng số đó là bội của 18 và các chữ số của nó tỉ lệ theo 1,2,3?

Lời giải

Gọi a, b, c là các chữ số của số có 3 chữ số cần tìm

Vì mỗi chữ số không vượt quá 9 và không thể đồng thời bằng 0 nên

$$1 \leq a + b + c \leq 27. \text{ Mặt khác, số đó là bội của 18 nên } \begin{cases} a + b + c = 9 \\ a + b + c = 18 \\ a + b + c = 27 \end{cases}$$

Theo giả thiết ta có: $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{6}$, do đó: $(a+b+c):6$

$$\text{Nên } a + b + c = 18 \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{18}{6} = 3 \Rightarrow a = 3, b = 6, c = 9$$

Vì số phải tìm chia hết cho 18 nên chữ số hàng đơn vị phải là chữ số chẵn

Vậy các số phải tìm là 396; 936

Bài 19

Một xe tải chạy từ thành phố A đến hải cảng B gồm ba chặng đường dài bằng nhau, nhưng chất lượng mặt đường xấu tốt khác nhau nên vận tốc trên mỗi chặng lần lượt bằng 40; 24 và 60 (km/h). Biết tổng thời gian đi từ A đến B là 5 giờ, tính độ dài quãng đường AB?

Lời giải



Gọi vận tốc và thời gian xe tải đi trên ba chặng đường lần lượt là $v_1, v_2, v_3; t_1, t_2, t_3$.

$$\text{Khi đó: } t_1 + t_2 + t_3 = 5$$

Vì ba chặng đường dài bằng nhau, vận tốc và thời gian là hai đại lượng tỷ lệ

$$\text{nghịch, do đó: } t_1 : t_2 : t_3 = \frac{1}{v_1} : \frac{1}{v_2} : \frac{1}{v_3} = \frac{1}{40} : \frac{1}{24} : \frac{1}{60} = 3 : 5 : 2$$

$$\text{Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau, ta có: } \frac{t_1}{3} = \frac{t_2}{5} = \frac{t_3}{2} = \frac{t_1 + t_2 + t_3}{10} = \frac{5}{10} = 0,5$$

$$\text{Suy ra: } t_1 = 3 \cdot 0,5 = 1,5(h);$$

$$\text{Quãng đường AB là: } 3 \cdot (40 \cdot 1,5) = 180 \text{ (km)}$$

Bài 20

Ba thửa ruộng hình chữ nhật A, B, C có cùng diện tích. Chiều rộng của 3 thửa ruộng A, B, C lần lượt tỉ lệ với $3; 4; 5$. Chiều dài của thửa ruộng A nhỏ hơn tổng chiều dài của 2 thửa ruộng B và C là 35 mét. Tính chiều dài mỗi thửa ruộng.

Lời giải

Gọi chiều dài của 3 thửa ruộng là A, B, C lần lượt là $x, y, t(m)$ ($x, y, t > 0$)

$$\text{Và } y + t - x = 35$$

Gọi chiều rộng của 3 thửa ruộng A, B, C lần lượt là $a, b, c(m)$ ($a, b, c > 0$)

Ta có: $ax = by = ct(1)$ (do diện tích bằng nhau) và $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{4}$

Đặt $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{4} = k \Rightarrow a = 3k; b = 5k; c = 4k$, thay vào (1) ta được

$$2kx = 5ky = 4kt \Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{y}{12} = \frac{t}{15} = \frac{y + t - x}{12 + 15 - 20} = \frac{35}{7} = 5$$

Từ đó tính được: $x = 100; y = 60; t = 75$

Bài 21

Ba đội cùng chuyển một khối gạch như nhau. Thời gian để đội thứ nhất, đội thứ hai và đội thứ ba làm xong công việc lần lượt là 2 giờ, 3 giờ, 4 giờ. Tính số người tham



gia làm việc của mỗi đội, biết rằng số người của đội thứ ba ít hơn số người của đội thứ hai là 5 người.

Lời giải

Gọi số người tham gia làm việc của đội thứ nhất, đội thứ hai, đội thứ ba lần lượt là x, y, z (giờ), ĐK: $x, y, z > 0$

Cùng một khối lượng công việc, số người tham gia và thời gian làm việc tỉ lệ nghịch

Theo bài ra ta có: $2x = 3y = 4z$ và $y - z = 5$

$$\frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{4}} = \frac{y-z}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} = \frac{5}{\frac{1}{12}} = 60$$

$\Rightarrow y = 20, z = 15, x = 30$ (thỏa mãn điều kiện bài toán)

Vậy số người tham gia làm việc của đội thứ nhất, đội thứ hai, đội thứ ba lần lượt là 30 người, 20 người, 15 người.

Bài 22:

Tìm hai số dương, biết rằng tổng, hiệu, tích của chúng lần lượt tỉ lệ nghịch với 15; 60 và 8

Lời giải

Gọi hai số phải tìm là $a, b (a > b > 0)$, theo đầu bài ta có:

$$15(a + b) = 60(a - b) = 8ab \text{ hay } \frac{a + b}{8} = \frac{a - b}{2} = \frac{ab}{15} = k \Rightarrow k = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases}$$

Bài 23

Tìm một số có ba chữ số, biết rằng số đó là bội của 18 và các chữ số của nó tỉ lệ theo 1, 2, 3?

Lời giải

Gọi a, b, c là các chữ số của số có 3 chữ số cần tìm

Vì mỗi chữ số không vượt quá 9 và không thể đồng thời bằng 0 nên

$$1 \leq a + b + c \leq 27. \text{ Mặt khác, số đó là bội của 18 nên } \begin{cases} a + b + c = 9 \\ a + b + c = 18 \\ a + b + c = 27 \end{cases}$$

Theo giả thiết ta có: $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{a + b + c}{6}$, do đó: $(a + b + c) : 6$



Nên $a + b + c = 18 \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{18}{6} = 3 \Rightarrow a = 3, b = 6, c = 9$

Vì số phải tìm chia hết cho 18 nên chữ số hàng đơn vị phải là chữ số chẵn
 Vậy các số phải tìm là 396; 936

Bài 24

Tìm độ dài 3 cạnh của tam giác có chu vi bằng 13cm. Biết độ dài 3 đường cao tương ứng lần lượt là 2cm, 3cm, 4cm

Lời giải

Gọi độ dài ba cạnh của tam giác là x, y, z (cm) ($x, y, z > 0$)

Theo bài ra ta có : $x + y + z = 13$

và $2x = 3y = 4z = 2S_{ABC}$

Suy ra $\frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$

Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{6+4+3} = \frac{13}{13} = 1$$

suy ra $x = 6; y = 4; z = 3$

Vậy 3 cạnh của tam giác có độ dài là 6cm; 4cm; 3 cm

Bài 25

Tìm hai số nguyên dương x và y biết rằng tổng, hiệu và tích của chúng lần lượt tỉ lệ với 35; 210; 12

Lời giải

Do tổng, hiệu và tích của x và y lần lượt tỉ lệ nghịch với 35, 210, 12

Ta có: $(x + y).35 = (x - y).210 = 12.xy$

Từ $(x + y).35 = (x - y).210 \Rightarrow \frac{x + y}{210} = \frac{x - y}{35} \Rightarrow \frac{x + y}{210} = \frac{x - y}{35} = \frac{2x}{245} = \frac{2y}{175}$

$\Rightarrow \frac{x}{7} = \frac{y}{5} \Rightarrow x = \frac{7y}{5}$ thay vào đẳng thức $(x + y).35 = 12xy$ ta được

$\Rightarrow y^2 - 5y = 0 \Rightarrow y(y - 5) = 0 \Rightarrow y \in \{0; 5\}$ mà $y > 0 \Rightarrow y = 5$

Với $y = 5$ thì $x = 7$

Bài 26





Số A được chia thành 3 số theo tỉ lệ $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$. Biết rằng tổng các bình phương của ba số đó bằng 24309. Tìm số A .

Lời giải

Gọi a, b, c là ba số được chia ra từ số A .

Theo đề bài ta có: $a : b : c = \frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$ (1) và $a^2 + b^2 + c^2 = 24309$ (2)

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow \frac{a}{\frac{2}{5}} = \frac{b}{\frac{3}{4}} = \frac{c}{\frac{1}{6}} = k \Rightarrow a = \frac{2}{5}k; b = \frac{3}{4}k; c = \frac{1}{6}k$$

$$(2) \Leftrightarrow k^2 \cdot \left(\frac{4}{25} + \frac{9}{16} + \frac{1}{36} \right) = 24309$$

Do đó $\Rightarrow k = 180$; $k = -180$

$$+) k = 180 \Rightarrow a = 72; b = 135; c = 30 \Rightarrow A = a + b + c = 237$$

$$+) k = -180 \Rightarrow a = -72; b = -135; c = -30 \Rightarrow A = a + b + c = -237$$

a) Từ $\frac{a}{c} = \frac{c}{b} \Rightarrow c^2 = ab$, khi đó: $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a^2 + ab}{b^2 + ab} = \frac{a(a+b)}{b(b+a)} = \frac{a}{b}$

Bài 27

Ba phân số có tổng bằng $\frac{213}{70}$, các tử của chúng tỉ lệ với 3;4;5, các mẫu của chúng tỉ lệ với 5;1;2. Tìm ba phân số đó.

Lời giải

Gọi các phân số phải tìm là: a, b, c , ta có: $a + b + c = \frac{213}{70}$

$$\text{Và } a : b : c = \frac{3}{5} : \frac{4}{1} : \frac{5}{2} = 6 : 40 : 25 \Rightarrow a = \frac{9}{35}; b = \frac{12}{7}; c = \frac{15}{14}$$

Bài 28

Ba bạn An, Bình, Cường có tổng số viên bi là 74. Biết rằng số viên bi của An và Bình tỉ lệ với 5 và 6; số viên bi của Bình và Cường tỉ lệ với 4 và 5. Tính số viên bi của mỗi bạn

Lời giải

Gọi số viên bi của An, Bình, Cường lần lượt là a, b, c . Vì tổng số viên bi của ba bạn là 74 nên $a + b + c = 74$





Vì số viên bi của An và Bình tỉ lệ với 5 và 6 nên $\frac{a}{5} = \frac{b}{6} \Rightarrow \frac{a}{10} = \frac{b}{12}$

Vì số viên bi của Bình và Cường tỉ lệ với 4 và 5 nên $\frac{b}{4} = \frac{c}{5} \Rightarrow \frac{b}{12} = \frac{c}{15}$

Từ đó ta có: $\frac{a}{10} = \frac{b}{12} = \frac{c}{15} = \frac{a+b+c}{10+12+15} = \frac{74}{37} = 2$

Suy ra $a = 20; b = 24; c = 30$

Bài 29

Một công trường dự định phân chia số đất cho ba đội I, II, III tỉ lệ với 7; 6; 5. Nhưng sau đó vì số người của các đội thay đổi nên đã chia lại tỉ lệ 6; 5; 4. Như vậy có một đội làm nhiều hơn so với dự định là $6m^3$. Tính tổng số đất đã phân chia cho các đội.

Lời giải

Gọi tổng số đất đã phân chia cho các đội là $x(m^3)$, DK : $x > 0$

Số đất dự định chia cho 3 đội I, II, III lần lượt là $a, b, c(m^3)$, DK : $a, b, c > 0$

Ta có $\frac{a}{7} = \frac{b}{6} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{7x}{18}; b = \frac{6x}{18}; c = \frac{5x}{18}$ (1)

Số đất sau đó chia cho 3 đội I, II, III lần lượt là $a', b', c'(m^3)$. ĐK: $a', b', c' > 0$

Ta có $\frac{a'}{6} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{4} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{15} \Rightarrow a' = \frac{6x}{15}; b' = \frac{5x}{15}; c' = \frac{4x}{15}$ (2)

So sánh (1) và (2) ta có: $a < a', b = b', c > c'$ nên đội I nhận nhiều hơn lúc đầu

Vì $a - a' = 6$ hay $\frac{7x}{18} - \frac{6x}{15} = 6 \Rightarrow \frac{x}{90} = 4 \Rightarrow x = 360$

Vậy tổng số đất đã phân chia cho các đội là $360m^3$ đất.

Bài 30

Số M được chia thành ba số tỉ lệ với $0,5; 1\frac{2}{3}; 2\frac{1}{4}$. Tìm số M biết rằng tổng bình phương của ba số đó là 4660

Lời giải

Ta có: $0,5 : 1\frac{2}{3} : 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2} : \frac{5}{3} : \frac{9}{4} = \frac{6}{12} : \frac{20}{12} : \frac{27}{12} = 6 : 10 : 27$

Giả sử M được chia ra thành 3 số x, y, z . Theo bài ra ta có:

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{10} = \frac{z}{27} \Leftrightarrow \frac{x^2}{6^2} = \frac{y^2}{10^2} = \frac{z^2}{27^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{6^2 + 10^2 + 27^2} = \frac{4660}{1165} = 4 = 2^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 12^2 \Rightarrow x = \pm 12; y^2 = 40^2 \Rightarrow y = \pm 40; z^2 = 54^2 \Rightarrow z = \pm 54$$



Vậy $M = 12 + 40 + 54 = 106$ hoặc $M = -12 - 40 - 54 = -106$

Bài 31:

Ba đội máy ủi đất làm ba khối lượng công việc như nhau. Đội thứ nhất hoàn thành công việc trong 4 ngày, đội thứ hai hoàn thành trong 6 ngày, đội thứ ba hoàn thành trong 8 ngày. Hỏi mỗi đội có bao nhiêu máy (cùng năng suất), biết rằng đội thứ nhất nhiều hơn đội thứ hai 2 máy.

Lời giải

Gọi x, y, z theo thứ tự là số máy ủi của đội 1, 2, 3.

Do các máy có cùng công suất, khối lượng công việc của ba đội như nhau

Số máy và thời gian hoàn thành công việc là tỉ lệ nghịch với nhau.

Ta có $\frac{x}{\frac{1}{4}} = \frac{y}{\frac{1}{6}} = \frac{z}{\frac{1}{8}}$ và $x - y = 2$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{x - y}{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}} = \frac{z}{\frac{1}{12}} = 24 \Rightarrow x = 6; y = 4; z = 3$

Bài 32:

Ba lớp 7 ở trường K có tất cả 147 học sinh. Nếu đưa $\frac{1}{3}$ số học sinh của lớp 7A₁, $\frac{1}{4}$ số học sinh của lớp 7A₂ và $\frac{1}{5}$ số học sinh của lớp 7A₃ đi thi học sinh giỏi cấp huyện thì số học sinh còn lại của ba lớp bằng nhau. Tính tổng số học sinh của mỗi lớp 7 ở trường K.

Lời giải

+ Gọi tổng số học sinh của 7A₁, 7A₂, 7A₃ lần lượt là a, b, c ($a, b, c \in \mathbb{N}^*$)

Theo bài ra ta có : $a - \frac{1}{3}a = b - \frac{1}{4}b = c - \frac{1}{5}c$ (*) và $a + b + c = 147$

Từ (*) $\Rightarrow \frac{2a}{3} = \frac{3b}{4} = \frac{4c}{5} \Rightarrow \frac{12a}{18} = \frac{12b}{16} = \frac{12c}{15} \Rightarrow \frac{a}{18} = \frac{b}{16} = \frac{c}{15}$

Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau ta có :



$$\frac{a}{18} = \frac{b}{16} = \frac{c}{15} = \frac{a+b+c}{18+16+15} = \frac{147}{49} = 3.$$

Suy ra : $a = 54, b = 48, c = 45$

Vậy tổng số học sinh của $7A_1, 7A_2, 7A_3$ lần lượt là 54, 48 và 45 .



Chuyên đề 8: ĐA THỨC

1. BIỂU THỨC ĐẠI SỐ VÀ ĐƠN THỨC

A. Lý thuyết

1) Biểu thức đại số và tính giá trị của biểu thức

Ví dụ: $x + 1; x^2 + y^2 - z^2; \dots$

+) Trong biểu thức đại số các chữ đại diện cho các số thay đổi thì gọi là biến số

+) Các chữ đại diện cho 1 số không đổi gọi là các hằng số

Ví dụ: $ax^2 + bx + c$ (a, b, c là các hằng số)

+) Tính giá trị của biểu thức: Thay chữ bởi số

+) Giá trị của biến số để biểu thức có nghĩa

- Nếu biểu thức chứa biến số ở mẫu số thì giá trị của biến số làm cho biểu thức có nghĩa là giá trị của biến số làm cho mẫu số khác 0

- Nếu biểu thức không chứa biến số ở mẫu thì biểu thức có nghĩa với mọi biến số

Ví dụ: $\frac{x+1}{2x+1}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 2x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{-1}{2}$; $x^3 + x^2 + 1$ có nghĩa với $\forall x \in R$

2. Đơn thức và đơn thức đồng dạng

+) Đơn thức là biểu thức của tích các số và các biến: $2x; 4xyz^2; \dots$

+) Đơn thức thu gọn là đơn thức với các biến được thu gọn và có lũy thừa với số mũ là số nguyên dương: $4xyx^2z = 4x^3yz$

+) Bậc của đơn thức

- Đơn thức 1 biến: bậc của đơn thức là số mũ của biến số trong đơn thức thu gọn

Ví dụ: $2x$ có bậc 1

- Đơn thức có nhiều biến: Bậc của đơn thức là tổng số mũ của tất cả các biến trong đơn thức thu gọn

Ví dụ: $2x^2y^3$ có bậc 5

- Các số là một đơn thức bậc 0: $10 = 10.x^0$ (phải là các số khác 0)

- Số 0 không có bậc





+) Đơn thức đồng dạng: Hai đơn thức đồng dạng nếu có hệ số khác 0 và các biến giống nhau (số biến, số mũ của mỗi biến)

Ví dụ: $2x^2y^3$ và $5x^2y^3$

+) Cộng, trừ các đơn thức đồng dạng: Cộng, trừ các hệ số và giữ nguyên phần biến

$$x + 3x = 4x$$

B. Bài tập

Bài 1: Tính giá trị biểu thức

a) $A = \frac{(xy + x^2 + y^2)(8x - y^3)(x - y)}{x^{2017} - y^{2017}}$ với $x = 8; y = 4$

b) $B = \frac{x - 2y}{2x - y}$ với $\frac{x}{y} = \frac{1}{2} (y \neq 0)$

Lời giải

a) Nhận thấy với $x = 8; y = 4$ thì $\frac{(xy + x^2 + y^2)(8x - y^3)(x - y)}{(x^{2017} - y^{2017}) \neq 0} \Rightarrow A = 0$

b) $\frac{x}{y} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}y \Rightarrow B = \frac{\frac{1}{2}y - 2y}{2 \cdot \frac{1}{2}y - y} = \frac{-\frac{3}{2}y}{0}$: Không xác định vì mẫu bằng 0

Ta có thể thay điều kiện $B = \frac{x - 2y}{3x - y}$

Bài 2:

Tìm giá trị của biểu thức $P = \frac{a - 100}{b - 99} + \frac{2a - b + 1}{a + 2}$ với $a - b = 1; a \neq -2; b \neq 99$

Lời giải

Ta có $P = \frac{a - 100}{b - 99} + \frac{2a - b + 1}{a + 2} \Rightarrow P = 0$

Bài 3:

Tìm các cặp số nguyên dương $(x; y)$ sao cho biểu thức $A = \frac{2x^2 + 2y^2 + 25}{x^2 + y^2}$ nhận các

giá trị nguyên?





Lời giải

Ta nhận thấy A luôn có nghĩa vì $x^2 + y^2 > 0$

$$A = \frac{2x^2 + 2y^2 + 25}{x^2 + y^2} = 2 + \frac{25}{x^2 + y^2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{25}{x^2 + y^2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 + y^2 \in U(25) = \{1; 5; 25\}$$

+) Nếu $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ (loại)

+) Nếu $x^2 + y^2 = 5 = 1^2 + 2^2 = 2^2 + 1^1 \Rightarrow (x; y) = (1; 2); (2; 1)$

+) Nếu $x^2 + y^2 = 25 = 3^2 + 4^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow (x; y) = (3; 4); (4; 3)$



2: ĐA THỨC, ĐA THỨC MỘT BIẾN

A. Kiến thức cần nhớ

1. Đa thức: Là tổng của các đơn thức, mỗi đơn thức gọi là một hạng tử của đa thức
 - Đa thức thu gọn: Trong đa thức thu gọn các đơn thức không đồng dạng với nhau

2. Cộng, trừ đa thức

3. Đa thức một biến: Là tổng của các đơn thức của cùng một biến

+) Ký hiệu: $A(x), B(y), \dots$ để chỉ đa thức của một biến nào đó

+) Tổng quát: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

+) Bậc của đa thức: Là số mũ lớn nhất của biến số

Lưu ý: Đa thức 0 không có bậc

$a_n (a_n \neq 0)$: Gọi là hệ số bậc cao nhất

a_0 : Gọi là hệ số tự do

+) Tổng của các hệ số: $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 = P(1)$

B. Bài tập

Bài 1:

Cho đa thức bậc ba $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a, b, c, d \in Z, a \neq 0)$, biết $P(x) : 3, \forall x \in Z$

Chứng minh rằng $a + c; b; d : 3$

Lời giải

Với $x = 0 \Rightarrow P(0) = d : 3$

Với $x = 1 \Rightarrow P(1) = a + b + c + d : 3 \Rightarrow a + b + c : 3(1)$

Với $x = -1 \Rightarrow P(-1) = -a + b - c + d : 3 \Rightarrow -a + b - c : 3(2)$

Lấy (1) + (2) $\Rightarrow 2b : 3 \Rightarrow b : 3 \Rightarrow a + c : 3(do.1)$

Bài 2:

Tính giá trị của đa thức sau: $M = x^3 + 2x^2y + xy^2 - x^2 - xy + xz + yz - z + 2$ với $x + y = 1$

Lời giải





Ta có $M = x^2(x + y - 1) + xy(x + y - 1) + z(x + y - 1) + 2 \Rightarrow M = 2$

Bài 3:

Xác định a, b, c để hai đa thức sau đồng nhất (bằng nhau)

$$P(x) = ax^2 - 7x + 4x^2 - (x + x^2); Q(x) = 2x^2 - 3bx + c - ax^2 - 1$$

Lời giải

Ta có $P(x) = (a + 3)x^2 - 8x + 0; Q(x) = (2 - a)x^2 - 3bx + c - 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 3 = 2 - a \\ -8 = -3b \\ c - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{-1}{2}; b = \frac{8}{3}; c = 1$$

Bài 4:

Tìm tổng các hệ số của đa thức sau $P(x) = (x^2 - 2x + 2)^{2017} + (x^2 - 3x + 4)^{2018}$

Lời giải

Tổng tất cả các hệ số của $P(x)$ là: $P(1) = (1^2 - 2 + 2)^{2017} + (1^2 - 3 + 4)^{2018} = 1 + 2^{2018}$

Bài 5:

Cho $P(x)$ là một đa thức bậc 4. $x_1, x_2 \in R$ sao cho $x_1 \neq 0; x_2 \neq 0; x_1 \neq \pm x_2$.

Biết $P(x_1) = P(-x_1); P(x_2) = P(-x_2)$. Chứng minh rằng: $P(x) = P(-x) \forall x \in R$

Lời giải

Giả sử $P(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 (a_4 \neq 0); P(x_1) = P(-x_1)$

$$\Leftrightarrow 2x_1(a_3x_1^2 + a_1) = 0 \Leftrightarrow a_3x_1^2 + a_1 = 0(1)$$

$$P(x_2) = P(-x_2) \Leftrightarrow a_3x_2^2 + a_1 = 0(2)$$

Lấy (1) - (2) $\Rightarrow a_3(x_1^2 - x_2^2) = 0$ (do: $x_1^2 - x_2^2 \neq 0$) $\Rightarrow a_3 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} P(x) &= a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 \\ P(-x) &= a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(x) = P(-x)$$

Bài 6:

Cho đa thức $A = 11x^4y^3z^2 + 20x^2yz - (4xy^2z - 10x^2yz + 3x^4y^3z^2) - (2008xyz^2 + 8x^4y^{3z^2})$

a) Tìm bậc của A





b) Tính A nếu $15x - 2y = 1004z$

Lời giải

Thu gọn $A = 30x^2yz - 4xy^2z - 2008xyz^2 = 2xyz(15x - 2y - 1004z)$

Bài 7:

Cho đa thức $A(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{100}$,

a) Chứng minh rằng $x = -1$ là nghiệm của $A(x)$

b) Tính giá trị của $A(x)$ tại $x = \frac{1}{2}$

Lời giải

a) Ta có $A(-1) = -1 + 1 - 1 + 1 - \dots - 1 + 1 = 0$ nên -1 là nghiệm của A hoặc

$$A(x) = x(x+1) + x^2(x+1) + \dots + x^{99}(x+1)$$

b) Với $x = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{100}}$

Bài 8:

Tính giá trị của đa thức $N = xy^2z^3 + x^2y^3z^4 + x^3y^4z^5 + \dots + x^{2014}y^{2015}z^{2016}$ tại $x = -1; y = -1; z = -1$

Lời giải

Ta có: $N = xyz.yz^2 + x^2y^2z^2.yz^2 + x^3y^3z^3.yz^2 + \dots + x^{2014}y^{2014}z^{2014}.yz^2$

Thay $y = -1; z = -1$ vào ta được $N = -xyz - x^2y^2z^2 - x^3y^3z^3 - \dots - x^{2014}y^{2014}z^{2014}$

Thay $xyz = -1 \Rightarrow N = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1 = 0$

Bài 9:

Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ cho biết $f(0) = 2010, f(1) = 2011, f(-1) = 2012$.

Tính $f(-2)$

Lời giải

Theo giả thiết ta có: $f(0) = 2010 \Rightarrow c = 2010$,





$$f(1) = 2011 \Rightarrow a + b + c = 2011 \Rightarrow a + b = 1$$

và $f(-1) = 2012 \Rightarrow a - b + c = 2012 \Rightarrow a - b = 2 \Rightarrow a = \frac{3}{2}; b = \frac{-1}{2}$ khi đó hàm số có dạng

$$y = f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 2010 \Rightarrow f(2) = 2017$$

Bài 10:

Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ cho biết $f(0) = 2014, f(1) = 2015, f(-1) = 2017$.

Tính $f(-2)$

Lời giải

Ta có: $f(0) = 2014 \Rightarrow c = 2014$

$$f(1) = 2015 \Rightarrow a + b + c = 2015 \Rightarrow a + b = 1$$

$$f(-1) = 2017 \Rightarrow a - b + c = 2017 \Rightarrow a - b = 3$$

$$\Rightarrow a = 2, b = -1, \text{ khi đó } f(x) = 2x^2 - x + 2014 \Rightarrow f(-2) = 2 \cdot (-2)^2 - (-2) + 2014 = 2024$$

Bài 11: Cho $f(x) = a.x^3 + 4x(x^2 - 1) + 8$ và $g(x) = x^3 + 4x(bx + 1) + c - 3$, trong đó

a, b, c là các hằng số, xác định a, b, c để $f(x) = g(x)$

Lời giải

Ta có: $f(x) = a.x^3 + 4x(x^2 - 1) + 8 = a.x^3 + 4x^3 - 4x + 8 = (a + 4)x^3 - 4x + 8$

Và $g(x) = x^3 - 4x(bx + 1) + c - 3 = x^3 - 4bx^2 - 4x + c - 3$

Do $f(x) = g(x)$ nên ta có:
$$\begin{cases} a + 4 = 1 \\ -4b = 0 \\ c - 3 = 8 \end{cases} \Rightarrow a = -3; b = 0; c = 11$$

Bài 12:

Tìm đa thức bậc hai sao cho $f(x) - f(x-1) = x$. Áp dụng tính

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$$

Lời giải

Vì đa thức là bậc hai nên có dạng $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$





Ta có : $f(x-1) = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$

$$\text{Và } f(x) - f(x-1) = 2ax - a + b = x \Rightarrow \begin{cases} 2a = \frac{1}{2} \\ b - a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy đa thức cần tìm là $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + c$, c là hằng số

Áp dụng:

$$\text{Với } x = 1 \Rightarrow f(1) - f(0) = 1$$

$$\text{Với } x = 2 \Rightarrow f(2) - f(1) = 2$$

...

$$\text{Với } x = n \Rightarrow f(n) - f(n-1) = n$$

$$\Rightarrow S = 1 + 2 + 3 + \dots + n = f(n) - f(0) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + c - c = \frac{n(n+1)}{2}$$

Bài 13:

Cho đa thức $P(x)$ xác định với mọi x thuộc R , Biết rằng với mọi x ta đều có

$$f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2. \text{ Tính } f(2)$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } f(2) + 3f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \quad (1) \text{ và } f\left(\frac{1}{2}\right) + 3f(2) = \frac{1}{4} \Rightarrow 9f(2) + 3f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\text{Trừ từng vế của (2) cho (1) ta có: } 8f(2) = \frac{-13}{4}, \text{ do đó } f(2) = \frac{-13}{24}$$

Bài 14:

Tính giá trị của biểu thức $N = xyz^2z^3 + x^2y^3z^4 + x^3y^4z^5 + \dots + x^{2014}y^{2015}z^{2016}$, tại $x = y = z = -1$

Lời giải

$$\text{Ta có } N = xyz.yz^2 + x^2y^2z^2.yz^2 + x^3y^3z^3.yz^2 + \dots + x^{2014}y^{2014}z^{2014}.yz^2$$

$$\text{Thay } y = z = -1 \text{ vào ta được } N = -xyz - x^2y^2z^2 - x^3y^3z^3 - \dots - x^{2014}y^{2014}z^{2014}$$





$$= -(xyz) - (xyz)^2 - (xyz)^3 - \dots - (xyz)^{2014}$$

Thay $xyz = -1$ vào ta được: $N = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1 = 0$

Bài 15:

Cho $P(x) = ax^2 + bx + c$. Chứng minh rằng nếu $5a + b + 2c = 0$ thì $P(2) \cdot P(-1) \leq 0$

Lời giải

Ta có: $P(2) + P(-1) = 5a + b + 2c = 0 \Rightarrow P(2) = -P(-1)$

Vậy $P(2) \cdot P(-1) \leq 0$

Bài 16:

Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$. Chứng minh rằng nếu $5x - b + 2c = 0$ thì $P(-2) \cdot P(1) \leq 0$

Lời giải

Ta có: $P(1) + P(-2) = a + b + c + 4a - 2b + c = 5a - b + 2c = 0$ nên $P(1) = -P(-2)$

Bài 17:

Cho hàm số: $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in Z$). Biết $f(1)$ chia hết cho 3, $f(0)$ chia hết cho 3 và $f(-1)$ cũng chia hết cho 3. Chứng minh rằng a, b, c đều chia hết cho 3

Lời giải

Ta có $f(0) = c, f(1) = a + b + c, f(-1) = a - b + c$

Vì $f(0) : 3$ nên $c : 3$. Vì $f(-1) : 3$ nên $a + b + c : 3 \Rightarrow a + b = 3$ (1)

Vì $f(-1) : 3$ nên $a - b + c : 3 \Rightarrow (a - b) : 3$ (2).

Từ (1)(2) $\Rightarrow [(a + b) + (a - b)] : 3 \Rightarrow 2a : 3 \Rightarrow a : 3 \Rightarrow b : 3$

Bài 18:

Cho đa thức $ax^2 + bx + c = 0$ với mọi giá trị của x . Chứng minh rằng $a = b = c = 0$

Lời giải





Vì đa thức $ax^2 + bx + c = 0$ với mọi x , ta cho x nhận các giá trị $x = 0; x = 1; x = -1$

Ta có $c = 0, a + b + c = 0, a - b + c = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$

Bài 19:

Cho đa thức: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ nhận 1 và -1 là nghiệm thì a và c là hai số trái dấu

Lời giải

Ta có 1 là nghiệm của $f(x)$ nên $f(1) = 0$ hay $a + b + c = 0$, và -1 là nghiệm nên $a - b + c = 0$

Cộng theo vế ta được $2a + 2c = 0 \Rightarrow a = -c$

Vậy a và c là hai số đối nhau

Bài 20:

Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ nhận giá trị nguyên với mọi giá trị nguyên của x . Chứng minh rằng $2a, a + b$ và c là các số nguyên

Lời giải

Ta có: $f(0) = a.0^2 + b.0 + c = c \in Z$ và $f(1) = a + b + c \in Z \Rightarrow a + b \in Z$

$f(2) = 4a + 2b + c \in Z \Rightarrow 2a + 2(a + b) + c \in Z \Rightarrow 2a \in Z$

Bài 21:

Cho đa thức $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $P(0)$ và $P(1)$ là 1 số lẻ. Chứng minh rằng $P(x)$ không thể có nghiệm là 1 số nguyên

Lời giải

Ta có $P(0) = d$ lẻ và $P(1) = a + b + c + d$ lẻ, do đó $-P(1)$ là 1 số lẻ

Giả sử $P(x)$ có 1 nghiệm nguyên là m ta có

$$P(m) = 0 \Rightarrow (am^3 + bm^2 + cm + d) - (a + b + c + d) \text{ lẻ}$$

$$\Rightarrow a(m^3 - 1) + b(m^2 - 1) + c(m - 1) \text{ lẻ} \Rightarrow m \text{ chẵn} \Rightarrow P(m) \text{ lẻ (điều này mâu thuẫn).}$$



Bài 22:

Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ có tính chất $f(1), f(4), f(9)$ là các số hữu tỉ. Chứng minh rằng khi đó a, b, c là các số hữu tỉ

Lời giải

$$f(1) = a + b + c \in Q, f(4) = 16a + 4b + c \in Q \text{ và } f(9) = 81a + 9b + c \in Q$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow (16a + 4b + c) - (a + b + c) = 15a + 3b = 3(5a + b) \in Q \text{ do đó } 5a + b \in Q$$

$$\text{Từ (2) và (3)} \Rightarrow (81a + 9b + c) - (16a + 4b + c) = 65a + 5b = 5(13a + b) \in Q \Rightarrow 13a + b \in Q$$

$$\text{Nên } (13a + 5b) - (5a + b) \in Q \Rightarrow 8a \in Q \Rightarrow a \in Q$$

Khi $a \in Q$ thì $b \in Q$ và $c \in Q$

Bài 23:

Cho đa thức bậc hai thỏa mãn: $P(1) = P(-1)$. Chứng minh rằng $P(x) = P(-x)$ với mọi x

Lời giải

$$\text{Giải sử } P(x) = ax^2 + bx + c,$$

$$\text{Ta có: } P(1) = P(-1) \Leftrightarrow a + b + c = a - b + c \Leftrightarrow 2b = 0 \Leftrightarrow b = 0$$

$$\text{Vậy } P(x) = ax^2 + c$$

$$\text{Do vậy } P(-x) = a(-x)^2 + c = ax^2 + c = P(x)$$



3: NGHIỆM CỦA ĐA THỨC MỘT BIẾN

A. Kiến thức cần nhớ

1. Khái niệm: Cho đa thức $P(x)$, x_0 gọi là nghiệm của đa thức $P(x) \Leftrightarrow P(x_0) = 0$

Ví dụ: $P(x) = x - 1$ có $x = 1$ làm cho $P(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ là nghiệm của $P(x)$

2. Lưu ý:

- Muốn tìm nghiệm của đa thức, ta phân tích đa thức thành tích của các đa thức khác có bậc nhỏ hơn
- Đa thức bậc n có tối đa (nhiều nhất) n nghiệm
- Đa thức bậc 0 không ó nghiệm: $P(x) = a(a \neq 0)$
- Đa thức 0 thì có vô số nghiệm: $P(x) = 0$
- Nếu đa thức có các hệ số là số nguyên và có nghiệm nguyên thì nghiệm đó là ước số của hệ số tự do
- Nếu tổng các hệ số của hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của hạng tử bậc lẻ thì đa thức có nghiệm $x = -1$

B. Bài tập

Bài 1: Tìm nghiệm của các đa thức sau

a) $A(x) = x^3 - 7x$

b) $B(x) = x^2 + 2x + 2$

c) $C(x) = x^2 - 4x + 3$

d) $D(x) = x^2 + 6x + 5$

Lời giải

a) Ta có $A(x) = x^3 - 7x = x(x^2 - 7) \Rightarrow x \in \{0; \pm\sqrt{7}\}$

b) Ta có $B(x) = x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 > 0, \forall x$

c) Nhận thấy $1 + (-4) + 3 = 0$ nên $x = 1$ là nghiệm của $C(x)$

$$x^2 - 4x + 3 = x^2 - x - 3x + 3 = (x - 1)(x - 3) \Rightarrow x \in \{1; 3\}$$

d) Nhận thấy $1 + 5 = 6 \Rightarrow x = -1$ là 1 nghiệm



$$x^2 + 6x + 5 = (x + 1)(x + 5) \Rightarrow x \in \{-1; -5\}$$

***) Tổng quát:** $x = a$ là nghiệm của $P(x) \rightarrow P(x) = (x - a).Q(x)$ với bậc $Q(x)$ nhỏ hơn bậc $P(x)$

Bài 2: Tìm m, a, b, c, d để

a) Đa thức $mx^2 + 2mx + 7$ có nghiệm $x = -1$

b) Đa thức $x^4 - 2x^2 + m$ có nghiệm $x = 2$

c) Đa thức $ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$ có nghiệm $x = \pm 1$

Lời giải

a) Ta có $x = -1$ là nghiệm $\Rightarrow m(-1)^2 + 2m(-1) + 7 = 0 \Leftrightarrow m - 2m + 7 = 0 \Leftrightarrow m = 7$

b) Ta có $x = 2$ là nghiệm $\Rightarrow 2^4 - 2.2^2 + m = 0 \Leftrightarrow m = -8$

c) Ta có

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ -a + b - c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ b + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -a \\ d = -b \end{cases} \Rightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - 1)(x + 1).P(x)$$

Bài 3:

Chứng minh rằng đa thức $P(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ không có nghiệm nguyên

Lời giải

Nếu x_0 là nghiệm của $P(x)$ thì $x_0 \in Z$ và $P(x_0) = 0$

Khi đó x_0 là ước số của 2 $\Rightarrow x_0 = \pm 1; \pm 2$

Thay $x_0 = \pm 1; \pm 2$ vào $P(x) \neq 0 \Rightarrow$ đpcm

Bài 4:

Chứng minh rằng đa thức $P(x) = ax^3 + 2x + 1 (a > 0)$ có không quá 1 nghiệm

Lời giải

Giả sử x_1, x_2 là nghiệm của $P(x)$

$$\text{Do } P(0) = 1 \Rightarrow x_1 \neq 0; x_2 \neq 0; P(x_1) = P(x_2) = 0 \Leftrightarrow ax_1^3 + 2x_1 + 1 = ax_2^3 + 2x_2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow a(x_1^3 - x_2^3) + 2(x_1 - x_2) + 2 = 0$$



$$\Leftrightarrow a(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + 2(x_1 - x_2) = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)[a(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + 2] = 0(*)$$

Ta có: $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + 2\frac{x_1x_2}{2} + \frac{x_2^2}{4} + \frac{3x_2^2}{4} = (x_1 + \frac{x_2}{2})^2 + \frac{3x_2^2}{4} \geq 0 \forall x_1, x_2$

$$\Rightarrow a(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + 2 > 0$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow P(x) \text{ có không quá 1 nghiệm do } x_1 = x_2$$

Bài 5:

Chứng minh rằng đa thức $P(x)$ có ít nhất hai nghiệm, biết:

$$(x - 6)P(x) = (x + 1)P(x - 4)$$

Lời giải

Vì $(x - 6)P(x) = (x + 1)P(x - 4)$ với mọi x nên

$$\text{Khi } x = 6 \text{ thì } (6 - 6)P(6) = (6 + 1)P(6 - 4) \Rightarrow 0 = 7P(2) \Rightarrow P(2) = 0$$

Suy ra 2 là nghiệm của $P(x)$

$$\text{Khi } x = -1 \text{ thì } (-1 - 6)P(-1) = (-1 + 1)P(-1 - 4) \Rightarrow -7P(-1) = 0 \Rightarrow P(-1) = 0$$

Suy ra -1 là nghiệm của $P(x)$

Bài 6:

Xét hai đa thức $P(x) = x^2 + ax + b, Q(x) = x^2 + cx + d$ và $x_1; x_2$ là hai số khác nhau.

Chứng minh rằng nếu $P(x)$ và $Q(x)$ cùng nhận $x_1; x_2$ làm nghiệm thì $P(x) = Q(x)$

Lời giải

$$\text{Ta có : } x_1^2 + ax_1 + b = x_1^2 + cx_1 + d = 0$$

$$x_2^2 + ax_2 + b = x_2^2 + cx_2 + d = 0 \text{ nên } a(x_1 - x_2) = c(x_1 - x_2) \Rightarrow a = c$$

$$\text{Do đó: } ax_1 + b = cx_1 + d \text{ và } ax_2 + b = cx_2 + d \Rightarrow b = d$$

$$\text{Vậy } P(x) = Q(x)$$

Bài 7:



Cho hàm số $f(x)$ xác định với mọi x thuộc R , biết rằng với mọi x ta đều có

$$f(x) + 3f\left(\frac{1}{3}\right) = x^2. \text{ Tính } f(2)$$

Lời giải

Ta có: $x = 2 \Rightarrow f(2) + 3.f\left(\frac{1}{2}\right) = 4$

Và $x = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) + 3f(2) = \frac{1}{4} \Rightarrow f(2) = \frac{47}{32}$

Bài 8:

Cho hai đa thức $P(x) = x^2 + 3mx + m^2; Q(x) = x^2 + (3m + 2)x + m^2$. Tìm m để $P(1) = Q(-1)$

Lời giải

Ta có: $P(1) = m^2 + 3m + 1; Q(-1) = m^2 - 3m - 2 + 1 \Rightarrow P(1) = Q(-1) \Leftrightarrow m = \frac{-1}{3}$

Bài 9:

Cho đa thức $Q(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số nguyên, cho p là số nguyên tố lẻ.

Chứng minh rằng nếu $Q(x) : p \forall x$ nguyên thì a, b, c đều chia hết cho p

Lời giải

Với $x = 0 \Rightarrow Q(0) = 0 : p(1); x = 1 \Rightarrow a + b + c : p(2); x = -1 \Rightarrow a - b + c : p(2)$

Từ (1)(2) $\Rightarrow a + b : p$ (4); (1)(3) $\Rightarrow a - b : p$ (5); (4)(5) $\Rightarrow \begin{cases} 2a : p \\ (2; p) = 1 \end{cases} \Rightarrow a : p \Rightarrow b : p \Rightarrow a, b, c : p$

Bài 10:

Cho đa thức $P(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2018}$. Tìm giá trị của $P(x)$ khi $x = \frac{1}{3}$

Lời giải

$P(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2018} \Rightarrow x.P(x) = x^2 + x^3 + \dots + x^{2019} \Rightarrow x.P(x) - P(x) = x^{2019} - x \Leftrightarrow P(x).(x -$

\Rightarrow) Với $x \neq 1 \Rightarrow P(x) = \frac{x^{2019} - x}{x - 1}$



+) Với $x = 0 \Rightarrow P(0) = 0$

+) Với $x = 1 \Rightarrow P(1) = \frac{1+1+\dots+1}{2018} = 2018$

+) Với $x = \frac{1}{3} \Rightarrow P\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2019} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - 1}$

Bài 11:

Tìm đa thức bậc hai $P(x)$ sao cho $P(x) - P(x-1) = x$. Áp dụng tính tổng

$$S = 1 + 2 + \dots + n (n \in \mathbb{N}^+)$$

Lời giải

Giả sử $P(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0) \Rightarrow P(x-1) = a(x-1)^2 + b(x-1) + c \Rightarrow P(x) - P(x-1)$

$$= a[x^2 - (x-1)^2] + b[x - (x-1)] = x$$

$$\Leftrightarrow a[x^2 - (x^2 - 2x + 1)] + b = x \Leftrightarrow 2ax - a + b = x (\forall x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ -a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2} \Rightarrow P(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + c (c \in \mathbb{R})$$

Áp dụng: $P(1) - P(0) = 1; P(2) - P(1) = 2; \dots; P(n) - P(n-1) = n$

$$\Rightarrow P(n) - P(0) = 1 + 2 + \dots + n = S$$

$$\Rightarrow S = P_n - P_0 = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + c - c = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Bài 12:

Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c; Q(x) = cx^2 + bx + a (a, c \neq 0)$. Chứng minh rằng nếu x_0

là nghiệm của $P(x)$ thì $\frac{1}{x_0}$ là nghiệm của $Q(x)$

Lời giải

Theo giả thiết $P(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c = 0 (*)$, do $a, c \neq 0 \Rightarrow x_0 \neq 0$



Chia cả hai vế của (*) cho

$$x_0^2 \Rightarrow a + \frac{bx_0}{x_0^2} + \frac{c}{x_0^2} = 0 \Rightarrow c \cdot \left(\frac{1}{x_0}\right)^2 + b \cdot \frac{1}{x_0} + a = 0 \Leftrightarrow Q\left(\frac{1}{x_0}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x_0} \text{ là nghiệm } Q(x)$$

Bài 13:

Cho đơn thức $\left(19t + \frac{5}{t}\right)x^{1890}y^{2010}$, Tìm t thỏa mãn

a) Đơn thức dương với mọi x, y khác 0

b) Âm với mọi x, y khác 0

Lời giải

a) Ta có $\left(19t + \frac{5}{t}\right)x^{1890}y^{2010} = \frac{19t^2 + 5}{t} \cdot x^{1890}y^{2010}$ mà $19t^2 + 5 > 0$ và $x^{1890}y^{2010} > 0$

Bài 14:

Cho đã thức: $P = 9x^2 - 7xy + 11y^2$ và $Q = -4x^2 + 7xy - 6y^2$. Chứng minh rằng P và Q không thể cùng có giá trị âm

Lời giải

Ta có $P(x) + Q(x) > 0, \forall x \Rightarrow \text{đpcm}$

Bài 15:

Cho đã thức $P(x) = ax^2 + bx + c$ Cho biết $9a - b = -3c$. Chứng minh rằng trong ba số $P(-1), P(-2), P(2)$ có ít nhất 1 số âm, ít nhất 1 số không dương

Lời giải

Ta có: $P(-1) + P(-2) + P(2) = 9a - b + 3c = 0$ do đó trong ít nhất ba số trên có 1 số không âm, ít nhất 1 số không dương

Bài 16:

Tính tổng các hệ số của đa thức sau khi bỏ dấu ngoặc:

$$P(x) = (8x^2 + 3x - 10)^{2008} (8x^2 + x - 10)^{2009}$$

Lời giải



Sau khi bỏ ngoặc ta được: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ với $n = 2.2008 + 2.2009$

Thay $x = 1$, thì giá trị của $P(1)$ bằng tổng các hệ số của $P(x)$

$$\text{Ta có } P(1) = (8.1^2 + 3.1 - 10)^{2008} (8.1^2 + 1 - 10)^{2009} = -1$$

Bài 17 :

Cho hàm số $f(x) = \frac{100^x}{100^x + 10}$. Chứng minh rằng nếu a, b là hai số thỏa

mãn $a + b = 1$ thì $f(a) + f(b) = 1$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } f(a) + f(b) &= \frac{100^a}{100^a + 10} + \frac{100^b}{100^b + 10} = \frac{100^a(100^b + 10) + 100^b(100^a + 10)}{(100^a + 10)(100^b + 10)} \\ &= \frac{2.100^{a+b} + 10(100^a + 100^b)}{100^{a+b} + 10(100^a + 100^b) + 100} = \frac{200 + 10(100^a + 100^b)}{200 + 10(100^a + 100^b)} = 1 \end{aligned}$$

Bài 18:

Cho đa thức bậc 4 đối với biến x và $P(1) = P(-1), P(2) = P(-2)$. Chứng minh rằng

$P(x) = P(-x)$ với mọi x

Lời giải

$P(x)$ là đa thức bậc 4 nên có dạng: $P(x) = a.x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Ta có $P(1) = P(-1), P(2) = P(-2)$ nên

$$d + b = -b - d \Leftrightarrow 2d + 8b = -2d - 8b \Rightarrow b = d = 0$$

Vậy $P(x) = a.x^4 + cx^2 + d$ và $P(-x) = a.x^4 + cx^2 + d = P(x)$.



4: BÀI TOÁN VỀ XÁC ĐỊNH ĐA THỨC

A. Kiến thức

1. Định lý Bodu:

Phần dư của phép chia đa thức $f(x)$ cho nhị thức $x - a$ bằng giá trị của đa thức tại

$$x = a$$

$$\text{Tức là: } f(x) = (x - a).g(x) + f(a)$$

Chúng minh: Gọi $g(x)$ là đa thức thương và R là số dư thì $f(x) = (x - a).g(x) + R$

$$f(x) = (a - a).g(x) + R = R$$

2. phương pháp hệ số bất định:

$$\text{Giả sử: } f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0; \quad g(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

Nếu $f(x) = g(x)$ với ít nhất 4 giá trị phân biệt của x thì: $a_3 = b_3; a_2 = b_2; a_1 = b_1; a_0 = b_0$

Chúng minh:

$$\text{Giả sử 4 giá trị phân biệt } x_1; x_2; x_3; x_4 \text{ có:} \quad f(x_1) = g(x_1) \quad (1)$$

$$f(x_2) = g(x_2) \quad (2)$$

$$f(x_3) = g(x_3) \quad (3)$$

$$f(x_4) = g(x_4) \quad (4)$$

$$\text{Đặt } c_3 = a_3 - b_3; c_2 = a_2 - b_2; c_1 = a_1 - b_1; c_0 = a_0 - b_0$$

$$\text{Trừ từng vế của (1) và (2) được: } c_3(x_1^3 - x_2^3) + c_2(x_1^2 - x_2^2) + c_1(x_1 - x_2) = 0$$

$$\text{Vì } x_1 - x_2 \neq 0 \text{ nên } c_3(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + c_2(x_1 + x_2) + c_1 = 0 \quad (5)$$

Tương tự từ (1) và (3) có :

$$c_3(x_1^2 + x_1x_3 + x_3^2) + c_2(x_1 + x_3) + c_1 = 0 \quad (6)$$

Trừ theo từng vế của (5) và (6) rồi chia cho $x_2 - x_3 \neq 0$ được:

$$c_2 + c_3(x_1 + x_2 + x_3) = 0 \quad (7)$$

Tương tự từ (1), (2), (4) có:

$$c_2 + c_3(x_1 + x_2 + x_4) = 0 \quad (8)$$



Trừ theo từng vế của (7) và (8) được:

$$c_3(x_3 - x_4) = 0 \Rightarrow c_0 = 0 \text{ vì } x_3 \neq x_4$$

Thay $c_3 = 0$ vào $c_2 = 0$. Từ đó và (6) ta được $c_1 = 0$

Thay vào (1) được $a_0 = b_0$ suy ra đpcm.

B. Bài tập và các dạng toán

Dạng 1: Xác định đa thức bậc n ($n = 2, 3, \dots$)

Bài 1:

Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$, xác định các hệ số a, b, c biết

$$f(0) = 2; f(1) = 7; f(-2) = -14$$

Lời giải

Theo bài ra ta có: $f(x) = 0 \Rightarrow 0 + c = 2 \Rightarrow c = 2$

$$f(0) = 2 \Rightarrow 0 + c = 2 \Rightarrow c = 2$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow a + b + 2 = 7 \Rightarrow a + b = 5 \quad (1)$$

$$f(-2) = -14 \Rightarrow 4a - 2b + 2 = -14 \Rightarrow 2a - b = -8 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a = -1$ và $b = 6$

Vậy đa thức cần tìm là $f(x) = -x^2 + 6x + 2$

Bài 2:

Xác định đa thức bậc 3 biết $f(0) = 1; f(1) = 0; f(2) = 5; f(3) = 22$

Lời giải

Gọi đa thức cần tìm là: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Theo bài ra ta có: $f(0) = 1 \Rightarrow d = 1$

$$f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = -1 \quad (1)$$

$$f(2) = 5 \Rightarrow 4a + 2b + c = 2 \quad (2)$$

$$f(3) = 22 \Rightarrow 9a + 3b + c = 7 \quad (3)$$



Từ (1), (2), (3) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 2 \\ 9a + 3b + c = 7 \end{cases}$$

Giải ra ta được $a = 1; b = 0; c = -2$

Vậy đa thức cần tìm là $f(x) = x^3 - 2x + 1$

Bài 3:

Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, cho biết $f(0) = 2010, f(1) = 2011, f(-1) = 2012$.

Tính $f(-2)$

Lời giải

Theo giả thiết ta có: $f(0) = 2010 \Rightarrow c = 2010$,

$$f(1) = 2011 \Rightarrow a + b + c = 2011 \Rightarrow a + b = 1$$

$$\text{và } f(-1) = 2012 \Rightarrow a - b + c = 2012 \Rightarrow a - b = 2 \Rightarrow a = \frac{3}{2}; b = \frac{-1}{2}$$

$$\text{khi đó hàm số có dạng } y = f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 2010 \Rightarrow f(2) = 2017$$

* **Chú ý:** Để xác định được đa thức bậc n thì cần biết $n + 1$ giá trị của đa thức, còn nếu chỉ biết n giá trị thì đa thức tìm được có hệ số phụ thuộc một tham số.



Dạng 2: Xác định đa thức dư khi biết một số phép tính khác

Bài 1:

Đa thức $f(x)$ nếu chia cho $x - 1$ được số dư bằng 4, nếu chia cho $x - 3$ được số dư bằng 14. Tìm đa thức dư của phép chia $f(x)$ cho $(x - 1)(x - 3)$

Lời giải

Cách 1: Gọi thương của phép chia $f(x)$ cho $x - 1$ và cho $x - 3$ theo thứ tự là $A(x)$ và $B(x)$

$$\text{Ta có: } f(x) = (x - 1).A(x) + 4 \text{ với mọi } x \quad (1)$$

$$f(x) = (x - 3).B(x) + 14 \text{ với mọi } x \quad (2)$$

Gọi thương của phép chia $f(x)$ cho $(x - 1)(x - 3)$ là $C(x)$ và dư là $R(x)$. Vì bậc của $R(x)$ nhỏ hơn bậc của số chia nên bậc của nó nhỏ hơn bậc 2 nên $R(x)$ có dạng $ax + b$

$$\text{Ta có: } f(x) = (x - 1)(x - 3).C(x) + (ax + b) \text{ với mọi } x \quad (3)$$

$$\text{Thay } x = 1 \text{ vào (1) và (3) ta được } f(1) = 4; f(1) = a + b$$

$$\text{Thay } x = 3 \text{ vào (2) và (3) ta được } f(3) = 14; f(3) = 3a + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 4 \\ 3a + b = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -1 \end{cases}$$

Vậy đa thức dư của phép chia $f(x)$ cho $(x - 1)(x - 3)$ là $5x - 1$

$$\text{Cách 2: } f(x) = (x - 1).A(x) + 4 \text{ nên } (x - 3).f(x) = (x - 3)(x - 1).A(x) + 4(x - 3) \quad (1)$$

$$\text{Lại có } f(x) = (x - 3).B(x) + 14 \text{ nên } (x - 1).f(x) = (x - 3)(x - 1).B(x) + 14(x - 1) \quad (2)$$

Lấy (2) - (1) ta được:

$$[(x - 1) - (x - 3)].f(x) = (x - 1)(x - 3)[A(x) - B(x)] + 14(x - 1) - (x - 3)$$

$$\text{Nên } 2f(x) = (x - 1)(x - 3)[A(x) - B(x)] + 10x - 2$$



$$\Rightarrow f(x) = (x-1)(x-3) \cdot \frac{A(x) \cdot B(x)}{2} + 5x - 1$$

Ta thấy $5x - 1$ có bậc bé hơn bậc số chia vậy số dư cần tìm là $5x - 1$

Bài 2:

Đa thức $f(x)$ khi chia cho $x + 1$ dư 4 khi chia $x^2 + 1$ dư $2x + 3$. Tìm đa thức dư khi chia $f(x)$ cho $(x + 1)(x^2 + 1)$

Lời giải

Theo định lý Bơ du ta có $f(-1) = 4$

Do bậc của đa thức chia $(x + 1)(x^2 + 1)$ là 3 nên đa thức dư có dạng $ax^2 + bx + c$

$$\Rightarrow f(x) = (x + 1)(x^2 + 1) \cdot q(x) + ax^2 + bx + c = [(x + 1) \cdot q(x) + a](x^2 + 1) + bx + c - a \quad (2)$$

Mà $f(x)$ chia cho $x^2 + 1$ dư là $2x + 3$ (3)

Từ (1)(2)(3) ta có $b = 2$ (4); $c - a = 3$ (5)

Mà $f(-1) = 4$ nên $a - b + c = 4 \Leftrightarrow a - 2 + c = 4$ (6)

$$\text{Từ (5)(6)} \Rightarrow a = \frac{3}{2}; c = \frac{9}{2}$$

Ta được đa thức cần tìm là $\frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{9}{2}$

Bài 3:

Tìm đa thức dư của phép chia $x^7 + x^5 + x^3 + 1$ cho $x^2 - 1$

Lời giải

Cách1:

Tách đa thức bị chia thành những đa thức chia hết cho đa thức chia.

Ta thấy $x^n - 1$ chia hết cho $x - 1$ với mọi số tự nhiên n nên $x^{2n} - 1$ chia hết cho $x^2 - 1$; $x^6 - 1, \dots$ chia hết cho $x^2 - 1$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } x^7 + x^5 + x^3 + 1 &= x^7 - x + x^5 - x + x^3 - x + 3x + 1 \\ &= x(x^6 - 1) + x(x^4 - 1) + x(x^2 - 1) + 3x + 1 \end{aligned}$$



\Rightarrow dư của phép chia $x^7 + x^5 + x^3 + 1$ cho $x^2 - 1$ là $3x + 1$

Cách 2: Xét giá trị riêng

Gọi thương của phép chia là $Q(x)$ dư là $ax + b$

Ta có: $x^7 + x^5 + x^3 + 1 = (x - 1)(x + 1).Q(x) + ax + b$ với mọi x

Đẳng thức đúng với $\forall x$ nên với $x = 1$ ta được $4 = a + b$ (1)

Với $x = -1 \Rightarrow -2 = -a + b$ (2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow a = 3; b = 1$

Vậy dư của phép chia là $3x + 1$

Dạng 3: Xác định đa thức khi biết điều kiện của các hệ số

Bài 1:

Tìm các đa thức $f(x)$ có tất cả các hệ số là số nguyên không âm nhỏ hơn 8 và thoả mãn $f(8) = 2003$

Lời giải

Xét đa thức $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ với a_0, a_1, \dots, a_n đều là các số nguyên không âm và nhỏ hơn 8.

Do $f(8) = 2003 \Rightarrow a_n \cdot 8^n + a_{n-1} \cdot 8^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 8 + a_0 = 2003$

Ở đây $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ là các chữ số của 2003 được viết trong hệ ghi số cơ số 8. Thực hiện việc chia 2003 cho 8 được dư $a_0 = 3$ lại lấy thương chia cho 8, liên tiếp như vậy ta được đa thức cần tìm là: $f(x) = 3x^3 + 7x^2 + 2x + 3$



Dạng 4: Xác định đa thức $f(x)$ thỏa mãn một hệ thức đối với $f(x)$

Bài 1:

Tìm đa thức $f(x)$ bậc 4 thỏa mãn các điều kiện sau:

$$P(-1) = 0 \text{ và } P(x) - P(x-1) = x(x+1)(2x+1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải

Với $x = 0$ thì $P(0) = P(-1) = 0$

Với $x = -1$ thì $P(-1) = P(-2) = 0$

Do đó $P(x)$ nhận $-2; -1; 0$ là nghiệm.

Đặt $P(x) = x(x+1)(x+2)(ax+b)$ với $a \neq 0$

Với $x = 1$ thì $P(1) = P(0) + 6 = 6 \Rightarrow a + b = 6$ (1)

Với $x = 2$ thì $P(2) = P(1) + 30 = 36 \Rightarrow 2a + b = \frac{3}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $a = b = \frac{1}{2}$

Vậy $P = \frac{1}{2}x(x+1)^2(x+2)$



Dạng 5: Dùng đa thức phụ để giải bài toán tìm đa thức hoặc tính giá trị của đa thức

Giới thiệu phương pháp: Các nhiều phương pháp để giải bài toán xác định đa thức chủ yếu là dùng đa thức thuần nhất; hai đa thức đồng nhất; định lý Bơ du; hệ số bất định khi xác định đa thức bậc n mà đã biết $n + 1$ giá trị của nó. Song có nhiều bài toán không thể tìm được đa thức bằng cách trực tiếp mà phải dùng phương pháp dùng đa thức phụ để xác định đa thức hoặc tính giá trị riêng của đa thức.

Bài 1:

Cho đa thức $f(x)$ bậc 4 với hệ số bậc cao nhất là 1 và thoả mãn $f(1) = 10, f(2) = 20, f(3) = 30$. Tính $\frac{f(12) + f(-8)}{10} + 15$

Lời giải

Phân tích bài toán:

- Đa thức bậc 4 mà mới biết ba giá trị của đa thức nên phải dùng đa thức phụ $g(x) + f(x) = h(x)$
- Bậc của $f(x)$ là 4 nên bậc của $g(x)$ là 4 và bậc của $h(x)$ nhỏ hơn số giá trị của $f(x)$

Thuật toán tìm đa thức phụ.

Bước 1:

Đặt $g(x) + f(x) = h(x)$ ở đó $h(x)$ là một đa thức có bậc nhỏ hơn bậc của $f(x)$ đồng thời bậc của $h(x)$ nhỏ hơn số giá trị đã biết của $f(x)$

Trong đề bài bậc của $h(x)$ nhỏ hơn 3 nghĩa là: $g(x) + f(x) = ax^2 + bx + c$

Bước 2:

Tìm a, b, c để $g(1) = g(2) = g(3) = 0$

$$\text{Tức là: } \begin{cases} 0 = 1 + a + b + c \\ 0 = 20 + 4a + 2b + c \\ 0 = 30 + 9a + 3b + c \end{cases}$$

Giải hệ phương trình được: $a = 0, b = -10, c = 0$

Theo phương pháp hệ số bất định:

Suy ra: $h(x) = -10x$ hay $g(x) = f(x) - 10x$



Lời giải

Đặt đa thức phụ $g(x) = f(x) - 10x \Rightarrow g(1) = g(2) = g(3) = 0$

Do bậc $f(x)$ là bậc 4 nên bậc của $g(x)$ là 4 và $g(x)$ chia hết cho $x - 1, x - 2, x - 3$ suy ra:

$$g(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - x_0) \Rightarrow f(x) = g(x) + 10x = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - x_0) + 10x$$

Ta có $f(12) = (12 - 1)(12 - 2)(12 - 3)(12 - x_0) + 10.12$

$$= 11.10.9.(12 - x_0) + 10.12 = 10[99(12 - x_0) + 12]$$

$$f(-8) = (-8 - 1)(-8 - 2)(-8 - 3)(-8 - x_0) + 10.(-8)$$

$$= (-11).(-10).(-9).(-8 - x_0) + 10.(-8) = -10.[99(-8 - x_0) + 8]$$

Suy ra:

$$f(12) + f(-8) = 10[99(12 - x_0) + 12] + (-10)[99(-8 - x_0) + 8]$$

$$= 10(1200 - 99x_0 + 784 + 99x_0) = 10.1984$$

Ta tính được: $\frac{f(12) + f(-8)}{10} + 15 = 1984 + 15 = 1999$

Bài 2:

Cho đa thức $f(x)$ bậc 4 với hệ số bậc cao nhất là 1 và thoả mãn $f(1) = 3, f(3) = 11, f(5) = 27$. Tính giá trị của $f(-2) + 7f(6)$

Lời giải

Phân tích bài toán:

- Đa thức bậc 4 mà mới biết ba giá trị của đa thức nên phải dùng đa thức phụ $g(x) + f(x) = h(x)$
- Bậc của $f(x)$ là 4 nên bậc của $g(x)$ là 4 và bậc của $h(x)$ nhỏ hơn số giá trị của $f(x)$

Lời giải

+ Tìm đa thức phụ:

Đặt $g(x) = ax^2 + bx + c$. Tìm a, b, c để $g(1) = g(3) = g(5) = 0$



$$\Leftrightarrow a, b, c \text{ là nghiệm của hệ phương trình } \begin{cases} 0 = 3 + a + b + c \\ 0 = 11 + 9a + 3b + c \\ 0 = 27 + 25a + 5b + c \end{cases}$$

Giải hệ ta được: $a = -1, b = 0, c = -2$ nên đặt $g(x) = f(x) - x^2 - 2$

+ Tính giá trị $f(x)$

Bậc $f(x)$ là bậc 4 nên $g(x)$ là bậc 4 và $g(x)$ chia hết cho $(x-1), (x-3), (x-5)$ nên

$$g(x) = (x-1)(x-3)(x-5)(x-x_0)$$

$$\Rightarrow f(x) = g(x) - (-x^2 - 2) = (x-1)(x-3)(x-5)(x-x_0) + x^2 + 2$$

$$\text{Tính được: } f(-2) + 7f(6) = 1112$$

Bài 3:

Cho đa thức $f(x)$ bậc 3 với hệ số của x^3 là số nguyên thỏa mãn $f(1999) = 2000$ và $f(2000) = 2001$. Chứng minh rằng $f(2001) - f(1998)$ là hợp số

Lời giải

Phân tích bài toán:

- Đa thức bậc 3 mà mới biết hai giá trị của đa thức nên phải dùng đa thức phụ $g(x) = f(x) + h(x)$

- Bậc của $f(x)$ là 3 nên bậc của $g(x)$ là 3 và bậc của $f(x)$ nhỏ hơn số giá trị của $f(x)$

Lời giải

+ Tìm đa thức phụ.

Đặt $g(x) = f(x) + ax + b$. Tìm a, b để $g(1999) = g(2000) = 0$ tương đương với a, b là

$$\text{nghiệm của hệ } \begin{cases} 0 = 2000 + 1999a + b \\ 0 = 2001 + 2000a + b \end{cases}$$

Giải hệ ta được $a = b = -1$

Nên đặt $g(x) = f(x) - x - 1$

+ Tính giá trị của $f(x)$

Giả sử $k \in \mathbb{Z}$ là hệ số của x^3 của đa thức $f(x)$. Do bậc của $f(x)$ bằng 3 nên bậc $g(x)$ bằng 3 và $g(x)$ chia hết cho $(x-1999); (x-2000)$ nên



$$g(x) = k(x - 1999)(x - 2000)(x - x_0); f(x) = g(x) - (-x - 1) \Rightarrow f(x) = k(x - 1999)(x - 2000)(x - x_0) +$$

Ta có $f(2001) = k.2.1.2001 + 2002 = 2k.2001 + 2002$

$$f(1998) = k.(-1).(-2).1998 + 1999 = 2k.1998 + 1999$$

Tính được $f(2001) - f(1998) = 3(2k + 1)$

Vì $3(2k + 1)$ là hợp số. Vậy $f(2001) - f(1998)$ là hợp số

Bài 4:

Tìm đa thức bậc ba biết rằng khi cho $f(x)$ chia cho $x - 1, x - 2, x - 3$ đều dư 6 và

$$f(-1) = -18$$

Lời giải

- Đa thức cho $f(x)$ chia cho $x - 1, x - 2, x - 3$ đều dư 6, theo định lý Bơ du ta có $f(1) = f(2) = f(3) = 6$. Tìm đa thức phụ $g(x) = f(x) + h(x)$ với $h(x)$ có bậc là 2.

- Bậc của $f(x)$ là 3, có ba giá trị của đa thức nên hệ số của $f(x)$ phụ thuộc vào tham số.

Lời giải

+ Tìm đa thức phụ:

Theo định lý Bơ du ta có $f(1) = f(2) = f(3) = 6$

Đặt $g(x) = f(x) + ax^2 + bx + c$. Tìm a, b, c để $g(1) = g(2) = g(3) = 0$

$$\Leftrightarrow a, b, c \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} 0 = 6 + a + b + c \\ 0 = 6 + 4a + 2b + c \\ 0 = 6 + 9a + 3b + c \end{cases}$$

Giải ra ta được $a = b = 0; c = -6$ nên đặt $g(x) = f(x) - 6$ với $g(1) = g(2) = g(3) = 0$

+ Xác định $f(x)$

Do bậc $f(x)$ là 3 nên bậc $g(x)$ là 3 và $g(x)$ chia hết cho $(x - 1), (x - 2), (x - 3)$

$$\Rightarrow g(x) = n(x - 1)(x - 2)(x - 3) \text{ (n là hệ số của } x^3 \text{ trong đa thức } f(x))$$

$$\Rightarrow f(x) = n(x - 1)(x - 2)(x - 3) + 6$$

Mặt khác $f(-1) = -18 \Rightarrow n = 1 \Rightarrow f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x$

Bài 5:





Tìm đa thức bậc 3 biết $f(0) = 10, f(1) = 12, f(2) = 4, f(3) = 1$

Lời giải

Cách 1: Đã giải ở dạng 1

Cách 2: + Tìm đa thức phụ: Đặt $g(x) = f(x) + ax^2 + bx + c$

Tìm a, b, c để $g(0) = g(1) = g(2) = 0 \Leftrightarrow a, b, c$ là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} 0 = 10 + c \\ 0 = 12 + a + b + c \\ 0 = 4 + 4a + 4b + c \end{cases}$$

Hệ ta được $a = 5, b = -7, c = -10$

Nên đặt $g(x) = f(x) + 5x^2 - 7x - 10$ với $g(x) = g(1) = g(2) = 0$

+ Xác định $f(x)$

Do bậc $f(x)$ là 3 và bậc của $g(x)$ là 3 và $g(x)$ chia hết cho $x, x - 1, x - 2$

Gọi m là hệ số của x^3 của đa thức $f(x)$ thì $g(x) = mx(x - 1)(x - 2)$

$$\Rightarrow f(x) - mx(x - 1)(x - 2) - 5x^2 + 7x + 10 = 0$$

Mặt khác $f(3) = 1 \Rightarrow m = \frac{5}{2}$

Vậy đa thức cần tìm là $f(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{25}{2}x^2 + 12x + 10$



MỘT SỐ BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ THI HSG

Bài 1:

Cho đa thức $f(x) = ax^5 + bx^3 + 2014x + 1$, biết $f(2015) = 2$. Tính $f(-2015)$

Lời giải

Ta có: $f(x) = ax^5 + bx^3 + 2014x + 1$

$$\Rightarrow f(-x) = a(-x)^5 + b(-x)^3 + 2014(-x) + 1 = -ax^5 - bx^3 - 2014x + 1$$

$$\Rightarrow f(x) + f(-x) = 2 \Rightarrow f(2015) + f(-2015) = 2$$

$$\Rightarrow f(-2015) = 2 - f(2015) = 2 - 2 = 0$$

Vậy $f(-2015) = 0$

Bài 2:

Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn: $x.f(x - 2011) = (x - 2012).f(x)$

Chứng minh rằng đa thức $f(x)$ có ít nhất hai nghiệm khác nhau.

Lời giải

* Với $x = 0$ ta có: $-2012.f(0) = 0.f(-2011) = 0$ hay $f(0) = 0$, vậy đa thức có một nghiệm $x = 0$

* Với $x = 2011$ ta có: $2011.f(2011 - 2011) = (2011 - 2012).f(2011)$

Như vậy $-1.f(2011) = 2011.f(0) = 0$, nên $f(2011) = 0$

Vậy đa thức có 1 nghiệm $x = 2011$

Từ đây suy ra điều cần chứng minh.

Bài 3:

Cho đa thức $B(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{99} + x^{100}$. Tính giá trị của đa thức $B(x)$ tại

$$x = \frac{1}{2}$$

Lời giải

Với $x = \frac{1}{2}$ thì giá trị của đa thức





$$\begin{aligned}
 B &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \\
 2B &= 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \right) \\
 &= 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} \\
 \Rightarrow 2B &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \right) + 2 - \frac{1}{2^{100}} \\
 \Rightarrow 2B &= B + 2 - \frac{1}{2^{100}} \Rightarrow B = 2 - \frac{1}{2^{100}}
 \end{aligned}$$

Vậy $B = 2 - \frac{1}{2^{100}}$

Bài 4:

Cho đa thức $f(x)$ xác định với mọi x thỏa mãn: $x \cdot f(x+2) = (x^2 - 9) f(x)$

- a) Tính $f(5)$
- b) Chứng minh rằng $f(x)$ có ít nhất 3 nghiệm

Lời giải

- a) Ta có: $x = 3 \Rightarrow f(5) = 0$
- b) $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow x = 0$ là một nghiệm
- $x = 3 \Rightarrow f(5) = 0 \Rightarrow x = 5$ là một nghiệm
- $x = -3 \Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow x = -1$ là một nghiệm

Vậy $f(x)$ có ít nhất là 3 nghiệm

Bài 5:

Cho đa thức $f(x) = x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \dots - 101x + 101$. Tính $f(100)$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \dots - 101x + 101 \\
 &= x^{10} - 100x^9 - x^9 + 100x^8 + x^8 - 100x^7 - x^7 + \dots - 101x + 101 \\
 &= x^9(x - 100) - x^8(x - 100) + x^7(x - 100) - x^6(x - 100) + \dots + x(x - 100) - (x - 101) \\
 \Rightarrow f(100) &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) f(-a) &= -4 \cdot (-a)^3 - a = 4a^3 - a \\
 -f(a) &= -[-4a^3 + a] = 4a^3 - a \\
 \Rightarrow f(-a) &= -f(a)
 \end{aligned}$$



Bài 6:

- a) Tìm giá trị của m để đa thức sau là đa thức bậc 3 theo biến x
 b) Tìm giá trị nhỏ nhất của đa thức $g(x) = 16x^4 - 72x^2 + 90$

Lời giải

a) $f(x) = (m^2 - 25)x^4 + (20 + 4m)x^3 + 7x^2 - 9$ là đa thức bậc 3 biến x khi:

$$\begin{cases} m^2 - 25 = 0 \\ 20 + 4m \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \pm 5 \\ m \neq -5 \end{cases} \Rightarrow m = 5$$

Vậy $m = 5$ thì $f(x)$ là đa thức bậc 3 biến x

b) $g(x) = 16x^4 - 72x^2 + 90 = (4x^2)^2 - 2 \cdot 4x^2 \cdot 9 + 9^2 + 9 = (4x^2 - 9)^2 + 9$

Với mọi giá trị của x ta có:

$$(4x^2 - 9)^2 \geq 0 \Rightarrow g(x) = (4x^2 - 9)^2 + 9 \geq 9$$

$$\text{Min}_{g(x)} = 9 \Leftrightarrow 4x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{3}{2}$$

Bài 7:

- a) Tìm nghiệm của đa thức $7x^2 - 35x + 42 = 0$
 b) Đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ có a, b, c là các số nguyên, và $a \neq 0$. Biết với mọi giá trị nguyên của x thì $f(x)$ chia hết cho 7. Chứng minh a, b, c cũng chia hết cho 7

Lời giải

a) Viết được $7x^2 - 35x + 42 = 7(x - 3)(x - 2) \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$

b) Từ giả thiết $\Rightarrow f(0) = c$ chia hết cho 7

$f(1)$ và $f(-1)$ chia hết cho 7, tức là $a + b + c$ và $a - b + c$ chia hết cho 7

Suy ra $2a + 2c$ chia hết cho 7 để có $a:7 \Rightarrow b:7$

Bài 8:

Tìm đa thức M biết rằng: $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$

Tính giá trị của M khi x, y thỏa mãn $(2x - 5)^{2012} + (3y + 4)^{2014} \leq 0$

Lời giải

Ta có: $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2 - (5x^2 - 2xy)$

$$\Rightarrow M = 6x^2 + 9xy - y^2 - 5x^2 + 2xy = x^2 + 11xy - y^2$$



Lại có: $(2x - 5)^{2012} + (3y + 4)^{2014} \leq 0$

Ta có:
$$\begin{cases} (2x - 5)^{2012} \geq 0 \\ (3y + 4)^{2014} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (2x - 5)^{2012} + (3y + 4)^{2014} \geq 0$$

Mà $(2x - 5)^{2012} + (3y + 4)^{2014} \leq 0 \Rightarrow (2x - 5)^{2012} + (3y + 4)^{2014} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2x - 5)^{2012} = 0 \\ (3y + 4)^{2014} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\frac{1}{2} \\ y = -1\frac{1}{3} \end{cases} \cdot \text{Vậy} \begin{cases} x = 2\frac{1}{2} \\ y = -1\frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy $M = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 11 \cdot \frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{25}{4} - \frac{110}{3} - \frac{16}{9} = \frac{-1159}{36}$

Bài 9:

Tính giá trị biểu thức $P = \left|a - \frac{1}{2014}\right| + \left|a - \frac{1}{2016}\right|$, với $a = \frac{1}{2015}$

Lời giải

Thay $a = \frac{1}{2015}$ vào biểu thức $P = \left|\frac{1}{2015} - \frac{1}{2014}\right| + \left|\frac{1}{2015} - \frac{1}{2016}\right|$

Ta có: $P = \frac{1}{2014} - \frac{1}{2015} + \frac{1}{2015} - \frac{1}{2016} \Rightarrow P = \frac{1}{2014} - \frac{1}{2016} = \frac{2016 - 2014}{2014 \cdot 2016}$

$$\Rightarrow P = \frac{2}{2014 \cdot 2016} = \frac{1}{1007 \cdot 2016} = \frac{1}{2030112}$$

Bài 10:

Cho đa thức $A(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{99} + x^{100}$

a) Chứng minh rằng $x = -1$ là nghiệm của $A(x)$

b) Tính giá trị của đa thức $A(x)$ tại $x = \frac{1}{2}$

Lời giải

a) $A(-1) = (-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^{99} + (-1)^{100}$
 $= -1 + 1 - 1 + 1 + \dots - 1 + 1 = 0$ (vì có 50 số 1 và 50 số -1)

Suy ra $x = -1$ là nghiệm của đa thức $A(x)$

b) Với $x = \frac{1}{2}$ thì giá trị của đa thức $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}}$

$$\Rightarrow 2A = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}}$$



$$\Rightarrow 2A = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \right) + 1 - \frac{1}{2^{100}} \Rightarrow 2A = A + 1 - \frac{1}{2^{100}}$$

$$\Rightarrow A = 1 - \frac{1}{2^{100}}$$

Bài 11:

Cho đa thức $f(x) = 2016x^4 - 32(25k + 2)x^2 + k^2 - 100$ (với k là số thực dương cho trước). Biết đa thức $f(x)$ có đúng ba nghiệm phân biệt a, b, c với $(a < b < c)$. Tính hiệu $a - c$

Lời giải

Ta thấy đa thức $f(x)$ nếu có nghiệm $x = a$ (a khác 0) thì $x = -a$ cũng là một nghiệm của $f(x)$ nên $f(x)$ có 2m nghiệm

Mà đa thức $f(x)$ có đúng ba nghiệm phân biệt nên một trong ba nghiệm sẽ bằng 0.

Thay $x = 0$ vào đa thức đã cho ta được: $k^2 - 100 = 0$ nên $k = 10$ (vì k dương)

Với $k = 10$ ta có $f(x) = 2016x^4 - 8064x^2 = 2016x^2(x^2 - 4) = 0$

Từ đó $f(x)$ sẽ có 3 nghiệm phân biệt là $a = -2; b = 0; c = 2$ nên $a - c = -4$

Bài 12:

Cho đa thức $f(x) = (m - 2)x + 2m - 3$

a) Tìm nghiệm của $f(x)$ khi $m = 1$

b) Tìm giá trị của m khi $f(x)$ có nghiệm là -4

c) Tìm giá trị của m khi $f(x)$ có nghiệm nguyên, tìm nghiệm nguyên đó.

Lời giải

a) khi $m = 1$

$$f(x) = (1 - 2)x + 2 \cdot 1 - 3 = -x - 1$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

Vậy nghiệm của $f(x)$ là -1 khi $m = 1$.

b) Khi $f(x)$ có nghiệm là -4 , ta có:

$$(m - 2)(-4) + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow -2m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}$$

$$\text{Vậy } m = \frac{5}{2}$$



c) $f(x)$ có nghiệm khi $f(x) = 0$

$$\Rightarrow (m-2)x + 2m - 3 = 0 \Rightarrow (m-2)x + 2m - 3 = 0 \Rightarrow (m-2)x = -2m + 3$$

Nếu $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$, ta được $0x = -1 < 0$ (kTM)

$$\text{Nếu } m - 2 \neq 0 \Rightarrow m \neq 2 \Rightarrow x = \frac{-2m + 3}{m - 2} = -2 - \frac{1}{m - 2}$$

x nguyên khi $m - 2 \in U(1) = \{-1; 1\}$

$$*) m - 2 = -1 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow x = -1$$

$$*) m - 2 = 1 \Rightarrow m = 3 \Rightarrow x = -3$$

Vậy $m = 1$ thì $x = -1$; $m = 3$ thì $x = -3$

Bài 13:

a) Cho đa thức $f(x) = x^{2015} - 2000x^{2014} + 2000x^{2013} - 2000x^{2012} + \dots + 2000x - 1$. Tính giá trị của đa thức tại $x = 1999$

b) Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$. Chứng tỏ rằng $f(-2) \cdot f(3) \leq 0$ nếu $13a + b + 2c = 0$

Lời giải

$$\text{a) } f(x) = x^{2015} - (1999 + 1)x^{2014} + (1999 + 1)x^{2013} - (1999 + 1)x^{2012} + \dots + (1999 + 1)x - 1$$

Thay $1999 = x$, ta được: $f(x) = x^{2015} - x^{2015} + x^{2014} - x^{2014} + x^{2013} - x^{2013} + \dots - x^2 + x - 1$

Tính được kết quả và kết luận $f(1999) = 1998$

$$\text{b) } f(-2) + f(3) = 13 + b + 2c \Rightarrow f(-2) = -f(3) \Rightarrow f(-2) \cdot f(3) = -f(3) \cdot f(3) = -[f(3)]^2 \leq 0$$

Bài 14:

Cho 2 đa thức $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^{2009} + x^{2010}$

và $Q(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots - x^{2009} + x^{2010}$.

Giá trị của biểu thức $P\left(\frac{1}{2}\right) + Q\left(\frac{1}{2}\right)$ có dạng biểu thức hữu tỉ là $\frac{a}{b}$; $a, b \in \mathbb{N}$; a, b là 2 số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh $a : 5$

Lời giải

$$\text{Đặt } A = P\left(\frac{1}{2}\right) + Q\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2009} \quad (1)$$

$$\text{Suy ra } 4A = 10 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2007} \quad (2)$$



Từ (1) và (2) suy ra $3A = 8 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2009} \Rightarrow A = \frac{8 - \frac{1}{2^{2009}}}{3} = \frac{2^{2012} - 1}{3 \cdot 2^{2009}} = \frac{a}{b}$

Ta thấy: $2^{2012} - 1 = 4^{1006} - 1$; $2^{2012} - 1$ và 2^{2009} là hai số nguyên tố cùng nhau nên $2^{2012} - 1 = 3a$.

$3a = 2^{2012} - 1 = 16^{503} - 1$. Vì 16^{503} có chữ số tận cùng là 6 nên $3a$ có chữ số tận cùng là 5, suy ra số này chia hết cho 5. 3 và 5 nguyên tố cùng nhau nên $a : 5$

Bài 15:

Cho $f(x) = x(x^{19} - x^5 - x^{2018})$; $g(x) = x^{2019} - x^{20} + 9 + x^2(x^4 + x^2 + 2)$

a) Tính $k(x) = f(x) + g(x)$

b) Tính giá trị của $k(x)$ tại $x = \left(2 - \frac{5}{3} + \frac{7}{6} - \frac{9}{10} + \frac{11}{15} - \frac{13}{21} + \frac{15}{28} - \frac{17}{36} + \frac{19}{45}\right) \cdot \frac{5}{6}$

c) Chứng minh rằng: đa thức $k(x)$ không nhận giá trị 2019 với mọi giá trị của x nguyên ?

Lời giải

a) Tính được $k(x) = x^4 + 2x^2 + 9$

b) Xét $2 - \frac{5}{3} + \frac{7}{6} - \frac{9}{10} + \frac{11}{15} - \frac{13}{21} + \frac{15}{28} - \frac{17}{36} + \frac{19}{45}$

$$= 2 \left(1 - \frac{5}{6} + \frac{7}{12} - \frac{9}{20} + \frac{11}{30} - \frac{13}{42} + \frac{15}{56} - \frac{17}{72} + \frac{19}{90} \right)$$

$$= 2 \cdot \left(1 - \frac{2+3}{6} + \frac{3+4}{12} - \frac{4+5}{20} + \frac{5+6}{30} - \frac{6+7}{42} + \frac{7+8}{56} - \frac{8+9}{72} + \frac{9+10}{90} \right)$$

$$= 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \right)$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{10} \right) = 2 \cdot \frac{6}{10} = \frac{6}{5}$$

Vậy $x = \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{6} = 1 \Rightarrow k_x = 12$

c) Xét $k_{(x)} = x^4 + 2x^2 + 9 = x^2(x^2 + 2) + 9$

Giả sử $k_{(x)} = 2019 \Leftrightarrow x^2(x^2 + 2) = 2010$



Vì x nguyên nên 2010 chẵn và $x^2; (x^2 + 2)$ cùng tính chẵn (hoặc lẻ) $\Rightarrow x^2; x^2 + 2$ là hai số chẵn liên tiếp nên $x^2(x^2 + 2) : 4$, còn 2010 không chia hết cho 4

Vậy giả sử là sai hay $k_{(x)}$ không nhận giá trị 2019 với mọi x nguyên.

Bài 16: Tìm đa thức bậc hai biết $f(x) - f(x - 1) = x$. Từ đó áp dụng tính tổng

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

Lời giải

Đa thức bậc hai cần tìm có dạng: $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$

Ta có: $f(x - 1) = a(x - 1)^2 + b(x - 1) + c$

$$f(x) - f(x - 1) = 2ax - a + b = x \Rightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ b - a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy đa thức cần tìm là $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + c$ (c là hằng số tùy ý)

Áp dụng:

Với $x = 1$, ta có: $1 = f(1) - f(0)$

Với $x = 2$ ta có: $1 = f(2) - f(1)$

.....

Với $x = n$ ta có: $n = f(n) - f(n - 1)$

$$\Rightarrow S = 1 + 2 + 3 + \dots + n = f(n) - f(0) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + c - c = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Bài 17:

Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$

a) Biết $f(0) = 0, f(1) = 2013$ và $f(-1) = 2012$. Tính a, b, c

b) Chứng minh rằng nếu $f(1) = 2012, f(-2) = f(3) = 2036$ thì đa thức $f(x)$ vô nghiệm

Lời giải

a) Tính được $0 = f(0) = c; 2013 = f(1) = a + b + c$ và $2012 = f(-1) = a - b + c$

Tính được : $a + b = 2013$ và $a - b = 2012 \Rightarrow a = \frac{4025}{2}; b = \frac{1}{2}$

Vậy $a = \frac{4025}{2}; b = \frac{1}{2}; c = 0$



b) Tính được:

$$2012 = f(1) = a + b + c \quad (1)$$

$$2036 = f(-2) = 4a - 2b + c \quad (2)$$

$$2036 = f(3) = 9a + 3b + c \quad (3)$$

Từ (1), (2) có $a - b = 8$

Từ (2), (3) có $a + b = 0 \Rightarrow a = 4, b = 4$

Như vậy $f(x) = 4x^2 - 4x + 2012 = (2x - 1)^2 + 2011 > 0 (\forall x)$

Vậy đa thức vô nghiệm.

Bài 18:

Tìm đa thức M biết rằng: $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$. Tính giá trị của M khi x, y thỏa mãn $(2x - 5)^{2018} + (3y + 4)^{2020} \leq 0$

Lời giải

Ta có $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2 \Rightarrow M = 6x^2 + 9xy - y^2 - (5x^2 - 2xy)$

$$\Rightarrow M = 6x^2 + 9xy - y^2 - 5x^2 + 2xy = x^2 + 11xy - y^2$$

Ta có:
$$\begin{cases} (2x - 5)^{2018} \geq 0 \\ (3y + 4)^{2020} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (2x - 5)^{2018} + (3y + 4)^{2020} \geq 0$$

Mà $(2x - 5)^{2018} + (3y + 4)^{2020} \leq 0 \Rightarrow (2x - 5)^{2018} + (3y + 4)^{2020} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2x - 5)^{2018} = 0 \\ (3y + 4)^{2020} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases}, \text{ thay vào ta được:}$$

$$M = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 11 \cdot \frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{25}{4} - \frac{110}{3} - \frac{16}{9} = \frac{-1159}{36}$$

Bài 19:

Cho các đa thức $A(x) = 2x^5 - 4x^3 + x^2 - 2x + 2; B(x) = x^5 - 2x^4 + x^2 - 5x + 3$

Và $C(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 8x + 4\frac{3}{16}$

a) Tính $M(x) = A(x) - 2B(x) + C(x)$

b) Tính giá trị của $M(x)$ khi $x = -\sqrt{0,25}$

c) Có giá trị nào của x để $M(x) = 0$ không?

Lời giải

a) Ta có $M(x) = A(x) - 2B(x) + C(x)$



$$\begin{aligned}
 &= 2x^5 - 4x^3 + x^2 - 2x + 2 - 2(x^5 - 2x^4 + x^2 - 5x + 3) + x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 8x + 4 \frac{3}{16} \\
 &= 5x^4 + 2x^2 + \frac{3}{16}
 \end{aligned}$$

b) Thay $x = -\sqrt{0,25}$ vào biểu thức $M(x)$ ta được:

$$\begin{aligned}
 &5 \cdot (-\sqrt{0,25})^4 + 2 \cdot (-\sqrt{0,25})^2 + \frac{3}{16} \\
 &= 0,3125 + 0,5 + \frac{3}{16} = 1
 \end{aligned}$$

c) Ta có:

$$\begin{aligned}
 M(x) &= 5x^4 + 2x^2 + \frac{3}{16} = 5 \left(x^4 + 2 \frac{1}{5} x^2 + \frac{1}{25} \right) + \frac{3}{16} - \frac{1}{5} \\
 &= 5 \left(x^2 + \frac{1}{5} \right)^2 - \frac{1}{80}
 \end{aligned}$$

$$M(x) = 0 \Rightarrow 5 \left(x^2 + \frac{1}{5} \right)^2 - \frac{1}{80} = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{3}{20} \text{ (vô lý)}$$

Vậy không có giá trị nào của x để $M(x) = 0$.

Bài 20:

a) Xác định đa thức $P(x)$ có bậc 2 với hệ số cao nhất bằng 1 và nhận hai số 0; -3 làm nghiệm

b) Cho đa thức $f(x)$, biết với mọi x ta có : $x.f(x+1) = (x+2)f(x)$. Chứng minh rằng đa thức $f(x)$ luôn có ít nhất hai nghiệm.

Lời giải

a) Ta có $P(x) = x^2 + ax + b$

Vì 0 là một nghiệm của đa thức, nên $f(0) = b = 0$

-3 là một nghiệm của đa thức, nên: $9 - 3a + 0 = 0 \Rightarrow a = 3$

Đa thức $P(x) = x^2 + 3x$ là đa thức cần tìm

b) Với $x = 0$, ta có: $0.f(1) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow 0$ là một nghiệm của $f(x)$

Với $x = -2$, ta có: $-2f(-1) = 0f(-2) \Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow -1$ cũng là một nghiệm của $f(x)$

Vậy đa thức $f(x)$ luôn có ít nhất hai nghiệm.

Bài 21:



Tìm đa thức M biết rằng : $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$. Tính giá trị của M khi x, y thỏa mãn điều kiện $(2x - 5)^{2018} + (3y + 4)^{2020} \leq 0$

Lời giải

$$M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2 \Rightarrow M = 6x^2 + 9xy - y^2 - (5x^2 - 2xy)$$

$$\Rightarrow M = 6x^2 + 9xy - y^2 - 5x^2 + 2xy = x^2 + 11xy - y^2$$

Ta có :
$$\begin{cases} (2x - 5)^{2018} \geq 0 \\ (3y + 4)^{2020} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (2x - 5)^{2018} + (3y + 4)^{2020} \geq 0$$

Mà $(2x - 5)^{2018} + (3y + 4)^{2020} \leq 0 \Rightarrow (2x - 5)^{2018} + (3y + 4)^{2020} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2x - 5)^{2018} = 0 \\ (3y + 4)^{2020} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases}. \text{ Thay vào ta được:}$$

$$M = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 11 \cdot \frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{25}{4} - \frac{110}{3} - \frac{16}{9} = \frac{-1159}{36}$$