CÁC CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG HSG TOÁN 7

Chương I

SỐ HỮU TỈ. SỐ THỰC

Chuyên đề 1. TẬP HỢP SỐ HỮU TỈ

A. Kiến thức cần nhớ

1. *Số hữu tỉ*

- Số hữu tỉ là số viết được dưới dạng phân số $\frac{a}{b}$ với $a,b \in Z, b \neq 0$.
- Tập hợp các số hữu tỉ được kí hiệu là Q.

2. *Biểu diễn các số hữu tỉ trên trục số.*

- Mọi số hữu tỉ đều có thể biểu diễn trên trục số.
- Trên trục số, điểm biểu diễn số hữu tỉ *x* được gọi là điểm *x*.

3. *So sánh hai số hữu tỉ*

- Để so sánh hai số hữu tỉ, ta viết chúng dưới dạng phân số rồi so sánh hai phân số đó.
- Số hữu tỉ lớn hơn 0 gọi là số hữu tỉ dương;
- Số hữu tỉ nhỏ hơn 0 gọi là số hữu tỉ âm;
- Số hữu tỉ 0, không là số hữu tỉ dương cũng không là số hữu tỉ âm.
- Số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ là số hữu tỉ dương nếu a và b cùng dấu, là số hữu tỉ âm nếu a, b khác dấu, bằng 0 nếu a = 0.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Điền các kí hiệu N, Z, Q vào ô trống cho hợp nghĩa (điền tất cả các khả năng có thể):

$-9 \in \square$; $2020 \in \square$; $\frac{9}{205} \in \square$; $\frac{-21}{10} \in \square$

Giải

✓ Tìm cách giải. Khi điền vào ô trống, ta căn cứ vào định nghĩa tập hợp:

- $N = \{0;1;2;3;...\}$.
- $Z = \{...;-3;-2;-1;0;1;2;3;...\}$
- $Q = \left\{x / x = \frac{a}{b}; a,b \in Z, b \neq 0\right\}$

✓ Trình bày lời giải.

- $-9 \in Z; -9 \in Q$
- $2020 \in N; 2020 \in Z; 2020 \in Q$
- $\frac{9}{205} \in Q$

- $-\frac{21}{10} \in Q$

✓ ***Nhận xét.*** Chúng ta lưu ý rằng $N \subset Z \subset Q$, nếu không ý thứ nhất và ý thứ hai của ví dụ dễ bị sót.

Ví dụ 2: Cho số hữu tỉ $x = \frac{a-10}{2020}$. Với giá trị nào của *a* thì:

a) *x* là số dương;

b) *x* là số âm;

c) *x* không là số dương cũng không là số âm.

Giải

✓ Tìm cách giải. Khi xác định dấu của số hữu tỉ, ta lưu ý $\frac{a}{b}$ là số hữu tỉ dương nếu a và b cùng dấu, là số hữu tỉ âm nếu a, b khác dấu. Chú ý rằng $2020 > 0$, ta có lời giải sau:

✓ Trình bày lời giải.

a) $x = \frac{a-10}{2020} > 0 \Leftrightarrow a-10$ và 2020 cùng dấu.

Mà $2020 > 0$ nên $a-10 > 0$ suy ra $a > 10$. Vậy với $a > 10$ thì *x* là số hữu tỉ dương.

b) $x = \frac{a-10}{2020} > 0 \Leftrightarrow a-10$ và 2020 khác dấu.

Mà $2020 > 0$ nên $a-10 < 0$ suy ra $a < 10$. Vậy với $a < 10$ thì *x* là số hữu tỉ âm.

c) *x* không là số dương cũng không là số âm tức là $x = 0$ hay $\frac{a-10}{2020} = 0$ suy ra $a = 10$.

Vậy với $a = 10$ thì *x* không là số dương cũng không là số âm.

Ví dụ 3. So sánh các số hữu tỉ sau:

a) $x = \frac{-25}{35}$ hay $y = \frac{444}{-777}$;

b) $x = -2\frac{1}{5}$ và $y = \frac{110}{-50}$;

c) $x = \frac{17}{20}$ và $y = 0,75$.

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Trước khi so sánh hai số hữu tỉ, chúng ta thường thực hiện:

- Đưa các số hữu tỉ về dạng phân số tối giản;
- Quy đồng mẫu số, chú ý để mẫu số dương;
- Sau đó so sánh hai phân số.

✓ *Trình bày lời giải.*

Rút gọn ta có:

a) $x = \frac{-25}{35} = \frac{-5}{7}; y = \frac{444}{-777} = \frac{-4}{7}$ nên $x < y$

b) $x=-2\frac{1}{5}=\frac{-11}{5}; y=\frac{110}{-50}=\frac{-11}{5}$ nên $x=y$

c) $x=\frac{17}{20}$ và $y=0,75=\frac{75}{100}=\frac{15}{20}<\frac{17}{20}$ nên $x>y$

Ví dụ 4. Viết tập hợp các số nguyên n sao cho số hữu tỉ sau có giá trị là số nguyên.

a) $\frac{7}{n-5}$;

b) $\frac{n-2}{5}$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ (với $a,b\in Z, b\neq 0$) có giá trị là số nguyên khi và chỉ khi a chia hết cho b hay $b\in$ Ư(a). Từ đó chúng ta có lời giải sau.

✓ *Trình bày lời giải.*

a) $\frac{7}{n-5}\in Z \Leftrightarrow n-5\in$ Ư(7); mà Ư(7)$=$ $1;7;-1;-7$ suy ra bảng giá trị sau:

$n-5$	1	7	-1	-7
n	6	12	4	-2

Vậy với $n\in$ $6;12;4;-2$ thì $\frac{7}{n-5}$ có giá trị là số nguyên.

b) $\frac{n-2}{5}\in Z \Leftrightarrow n-2 \vdots 5 \Leftrightarrow n-2=5k$ (với $k\in Z$) $\Leftrightarrow n=5k+2$.

Vậy với $n=5k+2$ ($k\in Z$) thì $\frac{n-2}{5}$ có giá trị là số nguyên.

Ví dụ 5. Tìm các số nguyên n để số hữu tỉ $\frac{n-21}{n+10}$ có giá trị là số nguyên.

Giải

✓ Tìm cách giải. Đưa về ví dụ 4, bằng cách tách ra một số hạng nguyên.

✓ Trình bày lời giải.

$\frac{n-21}{n+10}\in Z \Leftrightarrow n-21 \vdots n+10 \Leftrightarrow$ $n+10$ $-31 \vdots n+10$

$\Leftrightarrow 31 \vdots n+10 \Leftrightarrow n+10\in$ Ư(31) mà Ư(31)$=$ $1;31;-1;-31$.

Suy ra ta có bảng giá trị sau:

$n+10$	1	31	-1	-31
n	-9	21	-11	-41

Với $n\in$ $-9;21;-11;-41$ thì số hữu tỉ $\frac{n-21}{n+10}$ có giá trị là một số nguyên.

Ví dụ 6. Chứng tỏ rằng số hữu tỉ $x=\frac{3n+2}{4n+3}$ là phân số tối giản, với mọi $n\in N$.

Giải

✓ *Tìm cách giải*. Để chứng minh $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản $a;b \in Z$ chúng ta chứng tỏ ƯCLN (a; b) = 1

✓ *Trình bày lời giải.*

Đặt ƯCLN $3n+2;4n+3 = d$ (với $d \in N$) suy ra:

$3n+2 \vdots d \Rightarrow 12n+8 \vdots d$

$4n+3 \vdots d \Rightarrow 12n+9 \vdots d$

$\Rightarrow 12n+9 - 12n+8 \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d=1$

Suy ra: ƯCLN $3n+2;4n+3 =1$

Vậy $x=\dfrac{3n+2}{4n+3}$ là phân số tối giản, với mọi $n \in N$.

Ví dụ 7. Tìm các số hữu tỉ.

a) Có mẫu là 15, lớn hơn $\dfrac{-7}{10}$ và nhỏ hơn $\dfrac{-9}{20}$;

b) Có tử là 4, lớn hơn $\dfrac{2}{5}$ và nhỏ hơn $\dfrac{6}{7}$.

Giải

a) Gọi số hữu tỉ cần tìm là $\dfrac{x}{15}$ với $x \in Z$.

Theo đề bài, ta có: $\dfrac{-7}{10}<\dfrac{x}{15}<\dfrac{-9}{20} \Leftrightarrow \dfrac{-42}{60}<\dfrac{4x}{60}<\dfrac{-27}{60}$

$\Leftrightarrow -42<4x<-27$

$\Leftrightarrow 4x \in -40;-36;-32;-28 \Leftrightarrow x \in -10;-9;-8;-7$

Vậy các số hữu tỉ cần tìm là: $\dfrac{-10}{15};\dfrac{-9}{15};\dfrac{-8}{15};\dfrac{-7}{15}$.

b) Gọi số hữu tỉ cần tìm là $\dfrac{4}{y}$ với $y \in Z$

Theo đề bài ta có: $\dfrac{2}{5}<\dfrac{4}{y}<\dfrac{6}{7} \Leftrightarrow \dfrac{12}{30}<\dfrac{12}{3y}<\dfrac{12}{14}$

$\Leftrightarrow 30>3y>14 \Leftrightarrow 3y \in 15;18;21;24;27 \Leftrightarrow y \in 5;6;7;8;9$

Vậy các số hữu tỉ cần tìm là $\dfrac{4}{5};\dfrac{4}{6};\dfrac{4}{7};\dfrac{4}{8};\dfrac{4}{9}$.

C. Bài tập vận dụng

1.1. Trong các phân số sau, những phân số nào biểu diễn số hữu tỉ $\dfrac{2}{-5}$?

$\frac{-4}{10};\frac{8}{-12};\frac{-10}{25};\frac{6}{-15};\frac{9}{-15}$.

1.2. Viết các số hữu tỉ sau dưới dạng phân số với mẫu số dương.

$\frac{2}{-3};\frac{8}{-11};\frac{-21}{-10}$

1.3. Cho ba số hữu tỉ $\frac{6}{5};\frac{7}{-4};\frac{2}{-3}$

a) Viết ba số hữu tỉ bằng mỗi số hữu tỉ trên và có mẫu là số dương.

b) Viết ba số hữu tỉ bằng mỗi số hữu tỉ trên và có mẫu là số dương bằng nhau.

1.4. Cho số hữu tỉ $x=\frac{m+10}{21}$. Với giá trị nào của m thì:

a) *x* là số dương. b) *x* là số âm.

c) *x* không là số dương cũng không là số âm.

1.5. Cho số hữu tỉ $x=\frac{14m+10}{-2019}$. Với giá trị nào của m thì:

a) *x* là số dương. b) *x* là số âm.

1.6. Viết tập hợp các số nguyên *n* sao cho số hữu tỉ sau có giá trị là một số nguyên.

a) $\frac{5}{n+1}$; b) $\frac{n+6}{3}$

1.7. Tìm số nguyên *a* để số hữu tỉ $x=\frac{-2019}{a+6}$ là một số nguyên.

1.8. Tìm các số nguyên *x* để số hữu tỉ $t=\frac{3x-8}{x-5}$ có giá trị là một số nguyên.

1.9. Chứng tỏ số hữu tỉ $x=\frac{2n+9}{7n+31}$ là phân số tối giản, với mọi $n\in N$.

1.10.

a) Cho hai số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ $b>0;d>0$. Chứng minh rằng $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ khi và chỉ khi $ad<bc$.

b) Áp dụng kết quả trên, so sánh các số hữu tỉ sau: $\frac{12}{13}$ và $\frac{22}{25};\frac{-6}{11}$ và $\frac{8}{-15}$.

1.11.

a) Cho hai số hữu tỉ $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ $b>0;d>0$. Chứng minh rằng nếu $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ thì $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$

b) Hãy viết ba số hữu tỉ xen giữa hai số hữu tỉ $\frac{2}{3}$ và $\frac{3}{4}$.

1.12. Cho a, b, m là các số nguyên và b > 0; m > 0.

a) So sánh $\frac{a}{b}$ và $\frac{a+1}{b+1}$. b) So sánh $\frac{a}{b}$ và $\frac{a+m}{b+m}$.

c) So sánh $\frac{2}{7}$ và $\frac{3}{8}$; $\frac{-9}{11}$ và $\frac{-7}{9}$.

1.13. Cho các số hữu tỉ a, b, c thỏa mãn $1<a<b+c<a+1$ và $b<c$. Chứng minh rằng $b<a$.

1.14. Tìm các số hữu tỉ:

a) Có mẫu số là 20, lớn hơn $\frac{-5}{14}$ và nhỏ hơn $\frac{-3}{14}$;

b) Có tử là 2, lớn hơn $-\frac{5}{8}$ và nhỏ hơn $-\frac{5}{12}$

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1.1. Những phân số biểu diễn số hữu tỉ $\frac{2}{-5}$ là $\frac{-4}{10}; \frac{-10}{25}; \frac{6}{-15}$.

1.2. $\frac{2}{-3}=\frac{-2}{3}; \frac{8}{-11}=\frac{-8}{11}; \frac{-21}{-10}=\frac{21}{10}$

1.3.

a) Ba số hữu tỉ bằng mỗi số hữu tỉ trên và có mẫu là số dương.

$\frac{6}{5}=\frac{12}{10}=\frac{18}{15}=\frac{24}{20}; \frac{7}{-4}=\frac{-7}{4}=\frac{-14}{8}=\frac{-21}{12}; \frac{2}{-3}=\frac{-2}{3}=\frac{-4}{6}=\frac{-6}{9}$

b) Ba số hữu tỉ bằng mỗi số hữu tỉ trên và có mẫu là các số dương bằng nhau.

$\frac{6}{5}=\frac{72}{60}; \frac{7}{-4}=\frac{-105}{60}; \frac{2}{-3}=\frac{-40}{60}$

1.4.

a) $x>0 \Leftrightarrow \frac{m+10}{21}>0 \Leftrightarrow m+10>0 \Leftrightarrow m>-10$

Vậy với $m>-10$ thì số hữu tỉ x là số dương.

b) $x<0 \Leftrightarrow \frac{m+10}{21}<0 \Leftrightarrow m+10<0 \Leftrightarrow m<-10$

Vậy với $m<-10$ thì số hữu tỉ x là số âm.

c) x không là số dương cũng không là số âm

$\Leftrightarrow x=0 \Leftrightarrow \frac{m-10}{21}=0 \Leftrightarrow m-10=0 \Leftrightarrow m=10$

Vậy với $m=10$ thì số hữu tỉ x không là số dương cũng không là số âm.

1.5.

a) $x>0 \Leftrightarrow \frac{14m+10}{-2019}>0 \Leftrightarrow 14m+10<0 \Leftrightarrow 14m<-10 \Leftrightarrow m<-\frac{5}{7}$

Vậy với $m<-\frac{5}{7}$ thì số hữu tỉ x là số dương.

b) $x<0 \Leftrightarrow \frac{14m+10}{-2019}<0 \Leftrightarrow 14m+10>0 \Leftrightarrow 14m>-10 \Leftrightarrow m>-\frac{5}{7}$

Vậy với $m > -\frac{5}{7}$ thì số hữu tỉ x là số âm.

1.6.

a) Ta có $\frac{5}{n+1} \in Z \Leftrightarrow n+1 \in$ Ư(5) mà Ư(5)$=\ 1;5;-1;-5$

Suy ra bảng giá trị sau:

$n+1$	1	5	-1	-5
n	0	4	-2	-6

Vậy với $n \in\ 0;4;-2;-6$ thì $\frac{5}{n+1} \in Z$

b) Ta có: $\frac{n+6}{3} \in Z \Leftrightarrow n+6 \vdots 3 \Leftrightarrow n \vdots 3 \Leftrightarrow n = 3k\ \ k \in Z$

Vậy với $n = 3k\ \ k \in Z$ thì $\frac{n+6}{3} \in Z$

1.7. $\frac{-2019}{a+6} \in Z \Leftrightarrow a+6 \in$ Ư(-2019)

Mà Ư(-2019)$=\ 1;3;673;2019;-1;-3;-673;-2019$

Suy ra bảng giá trị sau:

$a+6$	1	3	673	2019	-1	-3	-673	-2019
a	-5	-3	667	2013	-7	-9	-679	-2025

Vậy với $a \in\ -5;-3;667;2013;-7;-9;-679;-2025$ thì $\frac{-2019}{a+6}$ là một số nguyên.

1.8. $\frac{3x-8}{x-5} \in Z \Leftrightarrow 3x-8 \vdots x-5 \Leftrightarrow 3\ x-5\ +7 \vdots x-5$

$\Leftrightarrow 7 \vdots x-5 \Leftrightarrow x-5 \in$ Ư(7) mà Ư(7) $=\ 1;7;-1;-7$

Suy ra bảng giá trị sau:

$x-5$	1	7	-1	-7
x	6	12	4	-2

Vậy với $x \in\ 6;12;4;-2$ thì $t = \frac{3x-8}{x-5} \in Z$

1.9. Đặt ƯCLN $\ 2n+9;7n+31\ = d\ \ d \in N$

$\Rightarrow 2n+9 \vdots d \Rightarrow 14n+63 \vdots d$

$\Rightarrow 7n+31 \vdots d \Rightarrow 14n+62 \vdots d$

$\Rightarrow\ 14n+63\ -\ 14n+62\ \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = 1$

Suy ra: ƯCLN $2n+9;7n+31 \ =1$. Vậy $x=\dfrac{2n+9}{7n+31}$ là phân số tối giản với mọi $n\in N$.

1.10.

a) Quy đồng mẫu hai phân số, ta có: $\dfrac{a}{b}=\dfrac{ad}{bd};\dfrac{c}{d}=\dfrac{bc}{bd}$. Vì $b>0,d>0$ nên $bd>0$, do đó:

- Nếu $\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}$ thì $\dfrac{ad}{bd}<\dfrac{bc}{bd}$ suy ra $ad<bc$
- Nếu $ad<bc$ thì $\dfrac{ad}{bd}<\dfrac{bc}{bd}$ suy ra $\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}$.

b) Ta có: $\dfrac{12}{13}>\dfrac{22}{25}$ vì $12.25>13.22$

Ta có: $\dfrac{8}{-15}=\dfrac{-8}{15}$. Vì $\ -6\ .15<11.\ -8\ $, suy ra: $\dfrac{-6}{11}<\dfrac{-8}{15}\Rightarrow\dfrac{-6}{11}<\dfrac{8}{-15}$

1.11.

a) Theo bài   , ta có: $\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}$, suy ra $ad<bc$ (1).

Từ (1) ta có: $ab+ad<ab+bc\Rightarrow a\ \ b+d\ \ <\ \ a+c\ \ b$ hay $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+d}$ (2)

Mặt khác, từ (1) ta lại có: $ad+cd<bc+cd\Leftrightarrow d\ \ a+c\ \ <c\ \ b+d$ hay $\dfrac{a+c}{b+d}<\dfrac{c}{d}$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra: $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+d}<\dfrac{c}{d}$.

b) Theo câu a) ta có:

$\dfrac{2}{3}<\dfrac{3}{4}$ suy ra $\dfrac{2}{3}<\dfrac{5}{7}<\dfrac{3}{4}$;

$\dfrac{2}{3}<\dfrac{5}{7}$ suy ra $\dfrac{2}{3}<\dfrac{7}{10}<\dfrac{5}{7}$;

$\dfrac{5}{7}<\dfrac{3}{4}$ suy ra $\dfrac{5}{7}<\dfrac{8}{11}<\dfrac{3}{4}$;

Vậy ta có: $\dfrac{2}{3}<\dfrac{7}{10}<\dfrac{5}{7}<\dfrac{8}{11}<\dfrac{3}{4}$.

1.12.

a) *Trường hợp 1.* Xét $a>b\Rightarrow ab+a>ab+b$

$\Leftrightarrow a\ \ b+1\ \ >b\ \ a+1\ \ \Leftrightarrow\dfrac{a}{b}>\dfrac{a+1}{b+1}$

Trường hợp 2. Xét $a<b\Rightarrow ab+a<ab+b$

$\Leftrightarrow a\ \ b+1\ \ <b\ \ a+1\ \ \Leftrightarrow\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+1}{b+1}$

Vậy: Nếu $a > b$ thì $\frac{a}{b} > \frac{a+1}{b+1}$

Nếu $a < b$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$

b) *Trường hợp 1.* Xét $a > b \Rightarrow ab + am > ab + bm$

$\Leftrightarrow a\ \ b+m\ > b\ \ a+m\ \Leftrightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+m}{b+m}$

Trường hợp 2. Xét $a < b \Rightarrow ab + am < ab + bm$

$\Leftrightarrow a\ \ b+m\ < b\ \ a+m\ \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$

c) Áp dụng câu a), ta có $2 < 7$ nên $\frac{2}{7} < \frac{2+1}{7+1} = \frac{3}{8}$

Áp dụng câu b), $7 < 9 \Rightarrow \frac{7}{9} < \frac{7+2}{9+2}$ hay $\frac{7}{9} < \frac{9}{11}$ suy ra $\frac{-7}{9} < \frac{-9}{11}$

1.13. Ta có $b < c$ và $b + c < a + 1 \Rightarrow 2b < a + 1$

Vì $1 < a$ nên $a + 1 < 2a \Rightarrow 2b < 2a \Rightarrow b < a$.

1.14.

a) Gọi số hữu tỉ cần tìm là $\frac{x}{20}$ với $x \in Z$.

Theo đầu bài, ta có: $\frac{-5}{14} < \frac{x}{20} < \frac{-3}{14} \Leftrightarrow \frac{-50}{140} < \frac{7x}{140} < \frac{-30}{140}$

$\Leftrightarrow -50 < 7x < -30 \Leftrightarrow x \in\ \ -7; -6; -5$

Vậy các số hữu tỉ cần tìm là: $\frac{-7}{20}; \frac{-6}{20}; \frac{-5}{20}$

b) Gọi số hữu tỉ cần tìm là: $\frac{2}{y}$ với $y \in Z, y \neq 0$.

Theo đầu bài, ta có: $\frac{-5}{8} < \frac{2}{y} < \frac{-5}{12} \Leftrightarrow \frac{-5}{8} < \frac{-2}{-y} < \frac{-5}{12}$

$\Leftrightarrow \frac{-10}{16} < \frac{-10}{-5y} < \frac{-10}{24} \Leftrightarrow 16 < -5y < 24 \Leftrightarrow y = -4$

Vậy số hữu tỉ cần tìm là: $-\frac{2}{4}$

Chuyên đề 2. CỘNG, TRỪ, NHÂN, CHIA SỐ HỮU TỈ

A. Kiến thức cần nhớ

1. Với $x=\dfrac{a}{m},y=\dfrac{b}{m}\ \ a,b,m\in Z,m>0$ ta có:

$$x+y=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}=\frac{a+b}{m};x-y=\frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m}.$$

2. Với $x=\dfrac{a}{b};y=\dfrac{c}{d}$ ta có:

$$x.y=\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd};x:y=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a.d}{b.c}\ \text{(với } y\neq 0\text{)}.$$

3. Các phép toán trong Q cũng có những tính chất giao hoán, kết hợp và phân phối của phép nhân đối với phép cộng như trong tập hợp Z. Ngoài ra các quy tắc bỏ dấu ngoặc, quy tắc chuyển vế cũng như trong tập hợp Z.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Thực hiện các phép tính:

a) $\dfrac{1}{18}-\left(-\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{3}\right);$ b) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{-1}{3}+\dfrac{1}{23}+\dfrac{1}{6};$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Khi thực hiện các phép tính chỉ có phép cộng và trừ, ta có thể thực hiện trong ngoặc trước, thực hiện từ trái qua phải. Tuy nhiên nếu có nhiều dấu (-) ta có thể giảm bớt dấu (-) bằng cách bỏ ngoặc. Ngoài ra có thể dùng tính chất giao hoán và kết hợp nhằm giải bài toán được nhanh hơn.

✓ *Trình bày lời giải.*

a) $\dfrac{1}{18}-\left(-\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{18}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{18}+\dfrac{2}{18}+\dfrac{3}{18}+\dfrac{6}{18}=\dfrac{12}{18}=\dfrac{2}{3};$

b) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{-1}{3}+\dfrac{1}{23}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{23}+\dfrac{1}{6}=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\right)+\dfrac{1}{23}=1+\dfrac{1}{23}=1\dfrac{1}{23}$

Ví dụ 2. Thực hiện các phép tính

a) $\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{13}{14}\right):\dfrac{5}{7}-\left(-\dfrac{2}{21}+\dfrac{1}{7}\right):\dfrac{5}{7};$ b) $\left(-\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{13}\right):\dfrac{2}{7}-\left(2\dfrac{1}{4}-\dfrac{8}{13}\right):\dfrac{2}{7}$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Vì phép chia là phép nhân số bị chia với số nghịch đảo của số chia nên ta có thể vận dụng tính chất phân phối:

$$a:m+b:m=\ a+b\ :m$$

$$a:m-b:m=\ a-b\ :m$$

✓ *Trình bày lời giải*

a) $\left(\frac{1}{2}-\frac{13}{14}+\frac{2}{21}-\frac{1}{7}\right):\frac{5}{7}=-\frac{10}{21}.\frac{7}{5}=\frac{-2}{3}$

b) $\left(-\frac{3}{4}+\frac{5}{13}-2\frac{1}{4}+\frac{8}{13}\right):\frac{2}{7}=\ -2\ .\frac{7}{2}=-7$

Ví dụ 3. Tìm *x*.

a) $\frac{1}{2}x+\frac{3}{5}x=\frac{-3}{65}$; b) $\left(\frac{2}{9}x-\frac{4}{9}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{-4}{7}:x\right)=0$;

c) $\frac{x+5}{2015}+\frac{x+6}{2014}+\frac{x+7}{2013}+\frac{x+8}{2012}+\frac{x+9}{2011}=-5$;

d) $\frac{x+2}{338}+\frac{x+3}{337}+\frac{x+4}{336}+\frac{x+5}{335}+\frac{x+360}{5}=0$.

Giải

✓ *Tìm cách giải*. Khi tìm *x* ta có thể vận dụng các tính chất sau:

- $ax+bx=\ a+b\ x$
- $\frac{k}{a}=k.\frac{1}{a}$ nên $\frac{k}{a}+\frac{k}{b}+\frac{k}{c}=k.\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$
- $A.B=0$ thì $A=0$ hoặc $B=0$

✓ *Trình bày lời giải.*

a) $\frac{1}{2}x+\frac{3}{5}x=\frac{-3}{65}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\right).x=\frac{-3}{65}\Rightarrow\frac{11}{10}.x=\frac{-3}{65}\Rightarrow x=\frac{-3}{65}:\frac{11}{10}$

$\Rightarrow x=\frac{-6}{143}$

b) $\left(\frac{2}{9}x-\frac{4}{9}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{-4}{7}:x\right)=0\Leftrightarrow\frac{2}{9}x-\frac{4}{9}=0$ hoặc $\frac{1}{3}+\frac{-4}{7}:x=0$ suy ra

$\frac{2}{9}x=\frac{4}{9}$ hoặc $\frac{-4}{7}:x=\frac{-1}{3}\Rightarrow x=2$ hoặc $x=\frac{12}{7}$.

Vậy $x\in\left\{2;\frac{12}{7}\right\}$

c) $\frac{x+5}{2015}+1+\frac{x+6}{2014}+1+\frac{x+7}{2013}+1+\frac{x+8}{2012}+1+\frac{x+9}{2011}+1=0$

$\Leftrightarrow\frac{x+2020}{2015}+\frac{x+2020}{2014}+\frac{x+2020}{2013}+\frac{x+2020}{2012}+\frac{x+2020}{2011}=0$

$\Leftrightarrow\ x+2020\ .\left(\frac{1}{2015}+\frac{1}{2014}+\frac{1}{2013}+\frac{1}{2012}+\frac{1}{2011}\right)=0$

Vì $\frac{1}{2015}+\frac{1}{2014}+\frac{1}{2013}+\frac{1}{2012}+\frac{1}{2011}>0$ nên $x+2020=0$

$\Rightarrow x = -2020$

d) $\dfrac{x+2}{338}+1+\dfrac{x+3}{337}+1+\dfrac{x+4}{336}+1+\dfrac{x+5}{335}+1+\dfrac{x+360}{5}-4=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+340}{338}+\dfrac{x+340}{337}+\dfrac{x+340}{336}+\dfrac{x+340}{335}+\dfrac{x+340}{5}=0$

$\Leftrightarrow (x+340)\left(\dfrac{1}{338}+\dfrac{1}{337}+\dfrac{1}{336}+\dfrac{1}{335}+\dfrac{1}{5}\right)=0$

Mà $\dfrac{1}{338}+\dfrac{1}{337}+\dfrac{1}{336}+\dfrac{1}{335}+\dfrac{1}{5}\neq 0$. Suy ra $x=-340$.

Ví dụ 4. Tìm số nguyên *x, y* biết: $\dfrac{5}{x}+\dfrac{y}{4}=\dfrac{1}{8}$

Giải

✓ *Tìm cách giải*. Đối với dạng toán này, chúng ta chú ý $ab = k\ (a,b \in Z, b \neq 0)$ thì $a \in$ Ư(k), $b \in$ Ư(k).

Do vậy chúng ta quy đồng mẫu số, chuyển x, y về một vế, vế còn lại là một số nguyên.

✓ *Trình bày lời giải.*

$\dfrac{5}{x}+\dfrac{y}{4}=\dfrac{1}{8} \Leftrightarrow \dfrac{5}{x}=\dfrac{1}{8}-\dfrac{y}{4} \Leftrightarrow \dfrac{5}{x}=\dfrac{1-2y}{8} \Leftrightarrow (1-2y).x=40$

Vì $x; y \in Z \Rightarrow 1-2y$ là ước lẻ của 40 mà ước lẻ của 40 là: 1; 5; -1; -5 nên ta có bảng giá trị:

$1-2y$	1	5	-1	-5
y	40	8	-40	-8

Từ đó suy ra $(x; y) \in \{(40;0), (8;-2), (-40;1), (-8;3)\}$

Ví dụ 5. Rút gọn biểu thức:

a) $A=\dfrac{5-\dfrac{5}{13}+\dfrac{5}{19}-\dfrac{5}{27}}{11-\dfrac{11}{3}+\dfrac{11}{19}-\dfrac{11}{27}}+\dfrac{\dfrac{6}{101}+\dfrac{6}{123}-\dfrac{6}{134}}{\dfrac{11}{101}+\dfrac{11}{123}-\dfrac{11}{134}}$;

b) $B=\dfrac{\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{39}+\dfrac{1}{51}}{\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{52}+\dfrac{1}{68}}$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Những biểu thức phức tạp, nếu thực hiện theo thứ tự sẽ dài và có thể dẫn đến sai lầm. Quan sát kĩ, ta thấy có những phần giống nhau cả số và dấu vì vậy ta nên vận dụng tính chất phân phối

$\dfrac{k}{a}+\dfrac{k}{b}+\dfrac{k}{c}=k.\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$ để rút gọn.

✓ *Trình bày lời giải.*

a) Ta có: $A=\dfrac{5-\dfrac{5}{13}+\dfrac{5}{19}-\dfrac{5}{27}}{11-\dfrac{11}{3}+\dfrac{11}{19}-\dfrac{11}{27}}+\dfrac{\dfrac{6}{101}+\dfrac{6}{123}-\dfrac{6}{134}}{\dfrac{11}{101}+\dfrac{11}{123}-\dfrac{11}{134}}$

$$=\frac{5\left(1-\frac{1}{13}+\frac{1}{19}-\frac{1}{27}\right)}{11\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{19}-\frac{1}{27}\right)}+\frac{6\left(\frac{1}{101}+\frac{1}{123}-\frac{1}{134}\right)}{11\left(\frac{1}{101}+\frac{1}{123}-\frac{1}{134}\right)}$$

$\Rightarrow A=\dfrac{5}{11}+\dfrac{6}{11}=1$

b) Ta có: $B=\dfrac{\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{39}+\dfrac{1}{51}}{\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{52}+\dfrac{1}{68}}=\dfrac{\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{17}\right)}{\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{17}\right)}=\dfrac{1}{3}:\dfrac{1}{4}=\dfrac{4}{3}$

Ví dụ 6. Cho 2021 số nguyên dương $a_1;a_2;...a_{2021}$ thỏa mãn:

$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+...+\dfrac{1}{a_{2021}}=1011$. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 2 trong số 2021 số nguyên dương đã cho bằng nhau.

Giải

✓ *Tìm cách giải*. Dạng toán này chúng ta không chỉ ra được cụ thể tường minh đó là hai giá trị nào, mà chỉ cần chỉ ra tồn tại ít nhất hai số trong các số đã cho bằng nhau mà thôi. Đối với dạng toán này thông thường chúng ta dùng phương pháp phản chứng:

- *Bước 1*. Phủ định kết luận. Tức là giả sử không có hai số nguyên dương nào bằng nhau.
- *Bước 2*. Lập luận logic, chứng tỏ mâu thuẫn với đề bài đã cho hoặc một điều hiển nhiên.
- *Bước 3*. Chứng tỏ giả sử là sai. Vậy kết luận của đề bài là đúng.

✓ *Trình bày lời giải.*

Giả sử trong 2021 số nguyên dương $a_1;a_2;...a_{2021}$ thỏa mãn: không có hai số nào bằng nhau.

Khi đó $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+...+\dfrac{1}{a_{2021}}\le\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+...+\dfrac{1}{2021}$

$<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+...+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{1}+1010=1011$ mâu thuẫn với đề bài.

Vậy có ít nhất 2 trong số 2021 số nguyên dương đã cho bằng nhau

✓ **Nhận xét.** Trong lời giải bài toán trên, sau khi giả sử 2021 số nguyên dương khác nhau chúng ta đã so sánh chúng với 2021 số nguyên dương nhỏ nhất. Từ đó nhận thấy 2021 số nguyên dương nhỏ nhất cũng không thỏa mãn đầu bài. Suy ra 2021 số nào đó cũng không thỏa mãn đề bài và dẫn đến mâu thuẫn với giả thiết.

Ví dụ 7. Cho $a+b+c=2070$ và $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}=\dfrac{1}{90}$

Tính giá trị: $S=\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}$

Giải

✓ *Tìm cách giải*. Với điều kiện đề bài, chúng ta không thể tính được giá trị của a, b, c. Do vậy chúng ta cần biến đổi S nhằm xuất hiện a + b + c và $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}$. Quan sát kỹ chúng ta thấy phần kết luận $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}$, mỗi phân số đều có tổng tử và mẫu bằng nhau và bằng $a+b+c$. Do đó chúng ta cộng mỗi phân số với 1, và có lời giải sau:

✓ *Trình bày lời giải.*

Ta có $S=\dfrac{a}{b+c}+1+\dfrac{b}{c+a}+1+\dfrac{c}{a+b}+1-3$

$\Leftrightarrow S=\dfrac{a+b+c}{b+c}+\dfrac{a+b+c}{c+a}+\dfrac{a+b+c}{a+b}-3$

$\Leftrightarrow S=\ a+b+c\ \left(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{a+b}\right)-3$

$\Leftrightarrow S=2070.\dfrac{1}{90}-3=23-3=20$

Ví dụ 8. Tìm *x*, biết:

a) $x-1\ \ x-2\ >0$; b) $2x-4\ \ 9-3x\ >0$

Giải

✓ *Tìm cách giải*. Đối với dạng toán này chúng ta chú ý kiến thức sau:

- $A.B>0\Leftrightarrow A$ và B cùng dấu.
- $A.B<0\Leftrightarrow A$ và B khác dấu.

✓ *Trình bày lời giải*

a) $x-1\ \ x-2\ >0\Leftrightarrow x-1$ và $x-2$ cùng dấu.

mà $x-2<x-1$ nên suy ra: $x-2>0$ hoặc $x-1<0\Leftrightarrow x>2$ hoặc $x<1$.

Vậy với $x>2$ hoặc $x<1$ thì $x-1\ \ x-2\ >0$

b) $2x-4$ và $9-3x$ cùng dấu, nên ta có trường hợp sau:

- *Trường hợp 1:* $\begin{cases}2x-4>0\\9-3x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x>4\\3x>9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>2\\x<3\end{cases}$;

- *Trường hợp 2:* $\begin{cases} 2x-4<0 \\ 9-3x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ 3x>9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ x>3 \end{cases}$ loại.

Vậy với $2<x<3$ thì $2x-4\quad 9-3x\ >0$

✓ ***Nhận xét.*** Ngoài cách giải trên của câu b, chúng ta có thể lập luận theo cách sau:

$2x-4\quad 9-3x\ >0 \Leftrightarrow -6\ \ x-2\quad x-3\ >0 \Leftrightarrow\ \ x-2\quad x-3\ <0$

$\Leftrightarrow x-2$ và $x-3$ khác dấu.

Mà $x-3<x-2$ nên suy ra: $x-2>0$ và $x-3<0 \Leftrightarrow x>2$ và $x<3$.

Vậy với $2<x<3$ thì $2x-4\quad 9-3x\ >0$

Ví dụ 9. Chứng tỏ rằng:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{199}-\frac{1}{200}=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+...+\frac{1}{199}+\frac{1}{200}$$

Giải

Xét vế trái, ta có: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{199}-\frac{1}{200}$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{199}+\frac{1}{200}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{200}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{199}+\frac{1}{200}-1-\frac{1}{2}-...-\frac{1}{100}$$

$$=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+...+\frac{1}{199}+\frac{1}{200}.$$

Vế trái bằng vế phải; Điều phải chứng minh.

✓ **Nhận xét.** Nếu vận dụng so sánh số hữu tỷ, ta có:

$=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+...+\frac{1}{199}+\frac{1}{200}>\frac{1}{200}+\frac{1}{200}+...+\frac{1}{200}=\frac{1}{2}$. Từ đó bạn có thể giải được bài toán sau: Chứng tỏ rằng:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{199}-\frac{1}{200}>\frac{1}{2}$$

C. Bài tập vận dụng

2.1. Viết số hữu tỉ $\frac{-14}{45}$ thành:

a) tích của hai số hữu tỉ theo sáu cách khác nhau.

b) thương của hai số hữu tỉ theo sáu cách khác nhau.

2.2. Thực hiện phép tính (tính nhanh nếu có thể).

a) $\left(5+\frac{1}{5}-\frac{2}{9}\right)-\left(2-\frac{1}{23}-2\frac{3}{35}+\frac{5}{6}\right)-\left(8+\frac{2}{7}-\frac{1}{18}\right)$;

b) $\frac{1}{3}-\frac{3}{4}-\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{1}{64}-\frac{2}{9}-\frac{1}{36}+\frac{1}{15}$;

c) $-\frac{5}{7}-\left(-\frac{5}{67}\right)+\frac{13}{30}+\frac{1}{2}+\left(-1\frac{5}{6}\right)+1\frac{3}{14}-\left(-\frac{2}{5}\right)$;

d) $\frac{3}{5}:\left(\frac{-1}{15}-\frac{1}{6}\right)+\frac{3}{5}:\left(\frac{-1}{3}-1\frac{1}{15}\right)$;

e) $\frac{7}{13}.\frac{5}{9}-\frac{5}{9}.\left(-\frac{2}{13}\right)-\frac{5}{9}.\frac{18}{13}$.

2.3. Thực hiện các phép tính sau:

a) $D=\left[\frac{-54}{64}-\left(\frac{1}{9}:\frac{8}{27}\right):\frac{-1}{3}\right]:\frac{-81}{128}$;

b) $E=\left[\frac{193}{-17}\left(\frac{2}{193}-\frac{3}{386}\right)+\frac{11}{34}\right]:\left[\left(\frac{7}{1931}+\frac{11}{3862}\right)\frac{1931}{25}+\frac{9}{2}\right]$.

2.4. Rút gọn: $A=\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{5}+\frac{1}{10}\right):\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{12}\right)$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán, lớp 7, tỉnh Bắc Giang, năm học 2012 - 2013)

2.5. Tìm *x*, biết:

a) $\frac{3}{5}+x=-\frac{7}{13}$;

b) $\frac{3}{2}-\left(x-\frac{5}{6}\right)=\frac{8}{9}$;

c) $4x-9\left(2{,}5+\frac{-7}{3}x\right)=0$;

d) $\frac{x+5}{2015}+\frac{x+6}{2014}=\frac{x+7}{2013}+\frac{x+8}{2012}$.

2.6. Tính:

$$P=1+\frac{1}{2}\ 1+2\ +\frac{1}{3}\ 1+2+3\ +\frac{1}{4}\ 1+2+3+4\ +...+\frac{1}{16}\ 1+2+3+...+16$$

2.7. Tìm giá trị nguyên dương của *x* và y, sao cho: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}$

2.8. Tìm số nguyên x,y biết:

a) $\frac{1}{x}=\frac{1}{6}+\frac{y}{3}$;

b) $\frac{x}{6}-\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$;

c) $\frac{x}{4}-\frac{1}{y}=\frac{3}{4}$.

2.9. Tính tổng $M=x+y+z$, biết:

$$\frac{19}{x+y}+\frac{19}{y+z}+\frac{19}{z+x}=\frac{7x}{y+z}+\frac{7y}{z+x}+\frac{7z}{x+y}=\frac{133}{10}$$

2.10. Tìm các số hữu tỉ x,y,z thỏa mãn: $x+y=\frac{1}{2};y+z=\frac{1}{3};z+x=\frac{1}{6}$

2.11. Cho biểu thức $A=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+...+\frac{1}{99.100}$. Chứng minh rằng:

a) $A=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}+...+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}$; b) $\frac{7}{12}<A<\frac{5}{6}$

2.12. Cho 100 số hữu tỉ, trong đó tích 3 số bất kì là một số âm. Chứng minh rằng:

a) Tích của 100 số đó là một số dương.

b) Tất cả 100 số đó đều là số âm.

2.13. Cho 20 số nguyên khác 0: $a_1,a_2,a_3,...,a_{20}$ có các tính chất sau:

+ a_1 là số dương.

+ Tổng của ba số viết liền nhau bất kì là một số dương.

+ Tổng của 20 số đó là số âm.

Chứng minh rằng: $a_1.a_{14}+a_{14}a_{12}<a_1.a_{12}$

2.14. Đặt $A=\frac{1}{1011}.\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2019}\right)$ và

$$B=\frac{1}{1010}.\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{2020}\right)$$

So sánh A và B.

2.15. Cho 100 số tự nhiên $a_1;a_2;...;a_{100}$ thỏa mãn $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_{100}}=\frac{101}{2}$.

Chứng minh rằng ít nhất hai trong 100 số tự nhiên trên bằng nhau.

(Thi học sinh giỏi toán 7, huyện Yên Lạc, Vĩnh Phúc 2012 - 2013)

2.16. Cho ba số a, b, c thỏa mãn: $0\le a\le b+1\le c+2$ và $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của c.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

2.1.

a) $\frac{-17}{60}=\frac{-1}{30}+\frac{-1}{4}=\frac{-1}{20}+\frac{-7}{30}=\frac{-1}{12}+\frac{-1}{5}$

b) $\frac{-17}{60}=\frac{-1}{3}-\left(-\frac{1}{20}\right)=\frac{-11}{30}-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{-1}{2}-\left(-\frac{-13}{60}\right)$

c) $\frac{-17}{60}=\frac{-1}{3}+\frac{1}{20}=\frac{-2}{15}+\frac{7}{60}=\frac{-9}{20}+\frac{1}{6}$

d) $\frac{-17}{60}=\frac{-1}{6}-\frac{7}{60}=\frac{-2}{5}-\frac{1}{12}=\frac{-1}{4}-\frac{1}{30}$

2.2.

a) $5+\frac{1}{5}-\frac{2}{9}-2+\frac{1}{23}+2\frac{3}{35}-\frac{5}{6}-8-\frac{2}{7}+\frac{1}{18}$

$=5-2+2-8+\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{35}-\frac{2}{7}\right)+\left(\frac{1}{18}-\frac{2}{9}-\frac{5}{6}\right)+\frac{1}{23}$

$=-3+0-1+\frac{1}{23}=-3\frac{22}{23}$

b) $\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+\frac{3}{5}+\frac{1}{64}-\frac{2}{9}-\frac{1}{36}+\frac{1}{15}$

$=\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{5}+\frac{1}{15}\right)-\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{9}+\frac{1}{36}\right)+\frac{1}{64}=1-1+\frac{1}{64}=\frac{1}{64}$

c) $-\frac{5}{7}+\frac{5}{67}+\frac{13}{30}+\frac{1}{2}-1\frac{5}{6}+1\frac{3}{14}+\frac{2}{5}$

$=\left(\frac{13}{30}+\frac{1}{2}-\frac{5}{6}+\frac{2}{5}\right)+\ 1-1\ +\left(\frac{3}{14}-\frac{5}{7}\right)+\frac{5}{67}$

$=\frac{1}{2}+0+\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{67}=\frac{5}{67}$

d) $\frac{3}{5}:\frac{-7}{30}+\frac{3}{5}:\frac{-7}{5}=\frac{3}{5}.\frac{-30}{7}+\frac{3}{5}.\frac{-5}{7}=\frac{3}{5}.\left(\frac{-30}{7}+\frac{-5}{7}\right)=\frac{3}{5}.(-5)=-3$

e) $\frac{5}{9}.\left(\frac{7}{13}+\frac{2}{13}-\frac{18}{13}\right)=\frac{5}{9}.\frac{-9}{13}=\frac{-5}{13}$

2.3.

a) $D=\left[-\frac{27}{32}-\left(\frac{1}{9}.\frac{27}{8}\right):\frac{-1}{3}\right]:\frac{-81}{128}$

$D=\left[-\frac{27}{32}-\frac{3}{8}.\frac{3}{-1}\right].\frac{128}{-81}$

$D=\left[\frac{-27}{32}+\frac{9}{8}\right].\frac{128}{-81}$

$D=\left[\frac{-27+36}{32}.\frac{128}{-81}\right]=\frac{9}{32}.\frac{128}{-81}=\frac{-4}{9}$

b) $E=\left[\frac{193}{-17}\left(\frac{2}{193}-\frac{3}{386}\right)+\frac{11}{34}\right]:\left[\left(\frac{7}{1931}+\frac{11}{3862}\right)\frac{1931}{25}+\frac{9}{2}\right]$

$E=\left[\frac{-2}{17}+\frac{3}{34}+\frac{11}{34}\right]:\left[\frac{7}{25}+\frac{11}{50}+\frac{9}{2}\right]$

$E=\left[\frac{-2}{17}+\frac{7}{17}\right]:\left[\frac{14}{50}+\frac{11}{50}+\frac{9}{2}\right]$

$E=\frac{5}{17}:\left[\frac{1}{2}+\frac{9}{2}\right]=\frac{5}{17}:5=\frac{1}{17}$

2.4. $A=\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{5}+\frac{1}{10}\right):\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{12}\right)$

$$A=\left(\frac{15}{10}-\frac{4}{10}+\frac{1}{10}\right):\left(\frac{18}{12}-\frac{8}{12}+\frac{1}{12}\right)=\frac{12}{10}:\frac{11}{12}=\frac{6}{5}.\frac{12}{11}=\frac{72}{55}$$

2.5.

a) $x=\frac{-7}{13}-\frac{3}{5}\Leftrightarrow x=\frac{-35}{65}-\frac{39}{65}=\frac{-74}{65}$

b) $\frac{3}{2}-x+\frac{5}{6}=\frac{8}{9}\Leftrightarrow\frac{3}{2}+\frac{5}{6}-\frac{8}{9}=x\Leftrightarrow x=\frac{27}{18}+\frac{15}{18}-\frac{16}{18}=\frac{26}{18}=\frac{13}{9}$

c) $4x-9=0$ hoặc $2,5+\frac{-7}{3}=0$

suy ra $4x=9$ hoặc $\frac{-7}{3}x=-2,5$

$x=\frac{9}{4}$ hoặc $x=\frac{-5}{2}:\frac{-7}{3}=\frac{15}{14}$

Vậy $x\in\left\{\frac{9}{4};\frac{15}{14}\right\}$

d) $\frac{x+5}{2015}+1+\frac{x+6}{2014}+1=\frac{x+7}{2013}+1+\frac{x+8}{2012}+1$

$\Leftrightarrow\frac{x+2020}{2015}+\frac{x+2020}{2014}=\frac{x+2020}{2013}+\frac{x+2020}{2012}$

$\Leftrightarrow\frac{x+2020}{2015}+\frac{x+2020}{2014}-\frac{x+2020}{2013}-\frac{x+2020}{2012}=0$

$\Leftrightarrow\ x+2020\left(\frac{1}{2015}+\frac{1}{2014}-\frac{1}{2013}-\frac{1}{2012}\right)=0$

Mà $\frac{1}{2015}+\frac{1}{2014}-\frac{1}{2013}-\frac{1}{2012}<0$ nên $x+2020=0$ hay $x=-2020$

2.6. Theo công thức: $1+2+3+...+n=\frac{n\ \ n+1}{2}$

Suy ra: $P=1+\frac{1}{2}.\frac{2.3}{2}+\frac{1}{3}.\frac{3.4}{2}+\frac{1}{4}.\frac{4.5}{2}+...+\frac{1}{16}.\frac{16.17}{2}$

$P=1+\frac{3}{2}+\frac{4}{2}+\frac{5}{2}+...+\frac{17}{2}$

$P=\frac{1}{2}\ \ 1+2+3+...+17\ \ -\frac{1}{2}$

$P=\frac{1}{2}.\frac{17.18}{2}-\frac{1}{2}=76$

2.7. Vì x và y có vai trò như nhau, không giảm tính tổng quát, giả sử

$x\geq y\geq 1\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\leq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\Leftrightarrow\frac{1}{5}\leq\frac{2}{y}\Leftrightarrow y\leq 10$

Mặt khác $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{1}{y}<\frac{1}{5}\Leftrightarrow y>5\Rightarrow 5<y\le 10\Rightarrow y\in\ 6;7;8;9;10$

+ Với $y=6\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{6}=\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{30}\Rightarrow x=30$

+ Với $y=7\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{7}=\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{1}{5}-\frac{1}{7}=\frac{3}{35}$ loại.

+ Với $y=8\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{8}=\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{1}{5}-\frac{1}{8}=\frac{3}{40}$ loại.

+ Với $y=9\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{9}=\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{1}{5}-\frac{1}{9}=\frac{4}{45}$ loại.

+ Với $y=10\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{10}=\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\Rightarrow x=10$

Vậy cặp $x;y$ là $30;6\ ;\ 6;30\ ;\ 10;10$

2.8.

a) $\frac{1}{x}=\frac{1+2y}{6}\Leftrightarrow x\ 1+2y\ =6$

vì $x;y\in Z\Rightarrow 1+2y$ là ước lẻ của 6 mà ước lẻ của 6 là: 1; 3; -1; -3 nên ta có bảng giá trị

$1+2y$	1	3	-1	-3
x	6	2	-6	-2

Từ đó suy ra $x;y\ \in\ \ 6;0\ ,\ 2;1\ ,\ -6;-1\ ,\ -2;-2$

b) $\frac{x}{6}-\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{x}{6}-\frac{1}{2}=\frac{1}{y}\Leftrightarrow\frac{x-3}{6}=\frac{1}{y}\Leftrightarrow\ x-3\ .y=6$

$\Rightarrow x-3$ và y là ước của 6, mà Ư(6) $=\ 1;2;3;6;-1;-2;-3;-6$

Từ đó ta có bảng sau:

$x-3$	1	2	3	6	-1	-2	-3	-6
y	6	3	2	1	-6	-3	-2	-1

Từ đó suy ra $x;y\ \in\ \ 4;6\ ,\ 5;3\ ,\ 6;2\ ,\ 9;1\ ,\ 2;-6\ ,\ 1;-3\ ,\ 0;-2\ ,\ -3;-1$

c) $\frac{x}{4}-\frac{3}{4}=\frac{1}{y}\Leftrightarrow\frac{x-3}{4}=\frac{1}{y}\Leftrightarrow\ x-3\ y=4$

$\Rightarrow x-3$ và y là ước của 4, mà Ư(4) $=\ 1;2;4;-1;-2;-4$ nên ta có bảng giá trị:

$x-3$	1	2	4	-1	-2	-4
y	4	2	1	-4	-2	-1

Từ đó suy ra $x;y\ \in\ \ 4;4\ ,\ 5;2\ ,\ 7;1\ ,\ 2;-4\ ,\ 1;-2\ ,\ -1;-1$

2.9. Từ đề bài suy ra: $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}=\frac{133}{10}:19=\frac{17}{10}$

Từ đề bài, ta có: $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=\frac{133}{10}:7$

$\Rightarrow \frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=\frac{19}{10}$

$\Rightarrow \frac{x}{y+z}+1+\frac{y}{z+x}+1+\frac{z}{x+y}+1=\frac{19}{10}+3$

$\Rightarrow \frac{x+y+z}{y+z}+\frac{x+y+z}{z+x}+\frac{x+y+z}{x+y}=\frac{49}{10}$

$\Rightarrow \ x+y+z\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\right)=\frac{49}{10}$

$x+y+z\ .\frac{7}{10}=\frac{49}{10}\Rightarrow x+y+z=7$ hay $M=7$

2.10. Ta có:

$x+y\ +\ y+z\ +\ z+x\ =\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\Leftrightarrow 2\ x+y+z\ =1\Leftrightarrow x+y+z=\frac{1}{2}$

Suy ra: $\frac{1}{2}+z=\frac{1}{2}\Rightarrow z=0$ mà: $y+z=\frac{1}{3}\Rightarrow y=\frac{1}{3};z+x=\frac{1}{6}\Rightarrow x=\frac{1}{6}$

Vậy $\ x;y;z\ =\left(\frac{1}{6};\frac{1}{3};0\right)$.

2.11. a) Xét biểu thức ta có:

$A=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+...+\frac{1}{99.100}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+...+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$

$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{100}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{100}\right)$

$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{100}-1-\frac{1}{2}-...-\frac{1}{50}$

$=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}+...+\frac{1}{100}$

Vế trái bằng vế phải. Điều phải chứng minh.

b) Ta có:

$$\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}+...+\frac{1}{100}<\left(\underbrace{\frac{1}{50}+\frac{1}{50}+...+\frac{1}{50}}_{\text{25 phân số}}\right)+\left(\underbrace{\frac{1}{75}+\frac{1}{75}+...+\frac{1}{75}}_{\text{25 phân số}}\right)$$

Hay $A<\frac{25}{50}+\frac{25}{75}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}\Rightarrow A<\frac{5}{6}$ (1)

$$\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}+...+\frac{1}{100}>\left(\underbrace{\frac{1}{75}+\frac{1}{75}+...+\frac{1}{75}}_{25\text{ phân số}}\right)+\left(\underbrace{\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+...+\frac{1}{100}}_{25\text{ phân số}}\right)$$

Hay $A>\frac{25}{75}+\frac{25}{100}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}\Rightarrow A>\frac{7}{12}$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $\frac{7}{12}<A<\frac{5}{6}$. Điều phải chứng minh.

2.12. Đặt 100 số hữu tỉ đó là $a_1;a_2;a_3;...;a_{100}$

a) Theo đề bài ta có: $a_1.a_2.a_3<0\Rightarrow$ trong ba số $a_1;a_2;a_3$ tồn tại ít nhất một số âm.

Giả sử $a_1<0$

Xét $a_1;a_2;a_3;...;a_{100}=a_1\ \ a_2.a_3.a_4\ \ \ a_5.a_6.a_7\ \ ...\ \ a_{98}.a_{99}.a_{100}$

Ta có: $a_1<0$ theo đề bài: $a_2a_3a_4<0;a_5a_6a_7<0;...;a_{98}a_{99}a_{100}<0$

(có 33 nhóm) nên $a_1\ \ a_2.a_3.a_4\ \ \ a_5.a_6.a_7\ \ ...\ \ a_{98}.a_{99}.a_{100}\ \ >0$

b) Theo đề bài ta có $a_2a_3a_4<0\Rightarrow$ trong ba số $a_2;a_3;a_4$ tồn tại ít nhất một số âm.

Giả sử $a_2<0$. Xét $a_1.a_2.a_3<0$ mà $a_1a_2>0$ nên $a_3<0$

Xét $a_1.a_2.a_k<0$ với $k=\overline{4,100}$ mà $a_1a_2>0\Rightarrow a_k<0$

Vậy tất cả 100 số đó đều là số âm.

2.13. Ta có:

$$a_1+\ a_2+a_3+a_4\ \ +...+\ \ a_{11}+a_{12}+a_{13}\ \ +a_{14}+\ \ a_{15}+a_{16}+a_{17}\ \ +\ \ a_{18}+a_{19}+a_{20}\ \ <0$$

Mà $a_1>0;a_2+a_3+a_4>0;...;a_{11}+a_{12}+a_{13}>0;a_{15}+a_{16}+a_{17}>0;a_{18}+a_{19}+a_{20}>0\Rightarrow a_{14}<0$

Cũng như vậy:

$$a_1+a_2+a_3\ \ +...+\ \ a_{10}+a_{11}+a_{12}\ \ +\ \ a_{13}+a_{14}\ \ +\ \ a_{15}+a_{16}+a_{17}\ \ +\ \ a_{18}+a_{19}+a_{20}\ \ <0\Rightarrow a_{13}+a_{14}<0$$

Mặt khác. $a_{12}+a_{13}+a_{14}>0\Rightarrow a_{12}>0$

Từ các điều kiện $a_1>0;a_{12}>0;a_{14}<0\Rightarrow a_1.a_{14}+a_{14}.a_{12}<a_1.a_{12}$ (điều phải chứng minh).

2.14. Đặt $C=1011.A=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2019}$;

$$D=1010.B=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{2020}$$

Ta có $C>1+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2020}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{2020}$

$\Rightarrow C>\frac{1}{2}+D$ (1)

Mặt khác $D=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2020}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2}=\frac{1010}{2}$

$\frac{D}{1010}<\frac{1}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow C>\frac{D}{1010}+D=\frac{1011.D}{1010}\Rightarrow\frac{C}{1011}>\frac{D}{1010}$ hay $A>B$

2.15. Giả sử trong 100 số nguyên dương $a_1;a_2;...;a_{100}$ thỏa mãn: Không có hai số nào bằng nhau.

Khi đó $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_{100}}\le\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{100}$

$<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2}=\frac{1}{1}+\frac{99}{2}=\frac{101}{2}$ mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy có ít nhất 2 trong số 100 số nguyên dương đã cho bằng nhau.

2.16. Vì $0\le a\le b+1\le c+2$ nên $a+b+c\le c+2+c+1+c$

$\Leftrightarrow 1\le 3c+3$ (vì $a+b+c=1$) hay $3c\ge -2\Rightarrow c\ge -\frac{2}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của c là: $-\frac{2}{3}$ khi đó $a=\frac{4}{3};b=\frac{1}{3}$

Chuyên đề 3. GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ. CỘNG, TRỪ, NHÂN, CHIA SỐ THẬP PHÂN

A. Kiến thức cần nhớ

1. Giá trị tuyệt đối của số hữu tỉ *x*, kí hiệu $|x|$ là khoảng cách từ điểm *x* tới điểm 0 trên trục số.

- Ta có: $|x| = \begin{cases} x \ \text{ nếu } \ x \ge 0 \\ -x \ \text{ nếu } \ x < 0 \end{cases}$
- Với mọi $x \in Q$, ta luôn có: $|x| \ge 0; |x| = |-x|; |x| \ge x$.

2. Để cộng, trừ, nhân, chia các số thập phân, ta có thể viết chúng dưới dạng phân số thập phân rồi làm theo quy tắc các phép tính đã biết về phân số.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1.Tìm *x*, biết:

a) $1,74 - |3,5 - x| = 1,24$; b) $|2x - 5| - 0,12 = 1,88$;

c) $|3,54x - 2| = -1,6$; d) $\left|\left|\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}\right| - \frac{3}{4}\right| = \frac{4}{5}$.

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Khi tìm *x* chứa dấu giá trị tuyệt đối, ta lưu ý:

- $|A| = m > 0$ thì $A = m$ hoặc $A = -m$.
- $|A| = 0$ thì *A* = 0.
- $|A| = m < 0$ thì không tồn tại.

✓ *Trình bày lời giải*

a) $1,74 - |3,5 - x| = 1,24 \Leftrightarrow |3,5 - x| = 0,5$

suy ra $3,5 - x = 0,5$ hoặc $3,5 - x = -0,5$

do đó $x \in \ 3;4 \ $.

b) $|2x - 5| - 0,12 = 1,88 \Leftrightarrow |2x - 5| = 2 \Leftrightarrow 2x - 5 = 2$ hoặc $2x - 5 = -2$.

Vậy $x \in \left\{\frac{7}{2}; -\frac{3}{2}\right\}$

c) $|3,54x - 2| = -1,6 < 0$ suy ra không tồn tại *x*.

d) $\left|\left|\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}\right| - \frac{3}{4}\right| = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \left|\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}\right| - \frac{3}{4} = \frac{4}{5}$ hoặc $\left|\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}\right| - \frac{3}{4} = -\frac{4}{5}$

$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}\right| = \frac{31}{20}$ hoặc $\left|\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}\right| = \frac{1}{20}$.

- *Trường hợp 1.* $\left|\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}\right|=\frac{31}{20} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x+\frac{2}{3}=\frac{31}{20}$ hoặc $\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}=-\frac{31}{20}$

$x=\frac{53}{30}$ hoặc $x=\frac{-133}{30}$

- *Trường hợp 2.* $\left|\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}\right|=\frac{1}{20} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x+\frac{2}{3}=\frac{1}{20}$ hoặc $\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}=-\frac{1}{20}$

$x=-\frac{37}{30} x=-\frac{43}{30}$

Vậy $x \in \left\{\frac{53}{30};\frac{-133}{30};\frac{-43}{30};\frac{-37}{30}\right\}$.

Ví dụ 2. Tìm *x*; *y*; *z* thỏa mãn:

a) $|3x+9|+|5y-7|=0$; b) $\left|x-1\frac{2}{3}\right|+\left|4y+\frac{5}{6}\right|+\left|3\frac{1}{4}-\frac{1}{2}.z\right|=0$

Giải

✓ *Tìm cách giải*. Khi tìm $x;y$ mà tổng các giá trị tuyệt đối bằng 0 ta lưu ý:

$|A|+|B|=0$ thì $A=0$ và $B=0$.

✓ *Trình bày lời giải*

a) Ta có $|3x+9|\geq 0;|5y-7|\geq 0$ nên từ $|3x+9|+|5y-7|=0$

suy ra $|3x+9|=0$ và $|5y-7|=0 \Rightarrow 3x+9=0$ và $5y-7=0$

suy ra $x=-3;y=\frac{7}{5}$.

b) Ta có $\left|x-1\frac{2}{3}\right|\geq 0;\left|4y+\frac{5}{6}\right|\geq 0;\left|3\frac{1}{4}-\frac{1}{2}.z\right|\geq 0$;

nên từ $\left|x-1\frac{2}{3}\right|+\left|4y+\frac{5}{6}\right|+\left|3\frac{1}{4}-\frac{1}{2}.z\right|=0$

suy ra $\left|x-1\frac{2}{3}\right|=0;\left|4y+\frac{5}{6}\right|=0;\left|3\frac{1}{4}-\frac{1}{2}.z\right|=0$

do đó: $x=1\frac{2}{3};y=-\frac{5}{24};z=6\frac{1}{2}$.

Ví dụ 3. Tìm x, biết:

$$\left|x+\frac{1}{2021}\right|+\left|x+\frac{2}{2021}\right|+\left|x+\frac{3}{2021}\right|+...+\left|x+\frac{2020}{2021}\right|=2021x$$

Giải

✓ *Tìm cách giải*. Đối với dạng toán $\left|A\ \ x\right|+\left|B\ \ x\right|+...+\left|C\ \ x\right|=D\ \ x$ (1), chúng ta nhận thấy rằng vế trái là tổng các giá trị tuyệt đối. Do vậy có điều kiện: $D\ \ x\ \geq 0$ từ đó chúng ta bỏ dấu giá trị tuyệt đối. Khi đó (1) trở thành: $A\ \ x\ +B\ \ x\ +...+C\ \ x\ =D\ \ x$. Và lời giải trở nên đơn giản.

✓ *Trình bày lời giải.*

Điều kiện $x\geq 0$ suy ra:

$$x+\frac{1}{2021}+x+\frac{2}{2021}+x+\frac{3}{2021}+...+x+\frac{2020}{2021}=2021x$$

$$\Leftrightarrow 2020x+\frac{1+2+3+2020}{2021}=2021x$$

$$\Leftrightarrow 2020x+\frac{2020.2021}{2.2021}=2021x\Leftrightarrow x=1010$$

Ví dụ 4. Tìm x, biết:

a) $\left|\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{3}{4}x+\frac{5}{6}\right|$;

b) $\left|\frac{1}{2}x+\frac{5}{6}\right|-\left|\frac{7}{8}x-\frac{8}{9}\right|=0$

Giải

✓ Tìm cách giải. Chúng ta biết rằng hai số bằng nhau hoặc đối nhau thì có giá trị tuyệt đối bằng nhau và ngược lại. Do vậy giải dạng toán này, chúng ta lưu ý: $|A|=|B|\Leftrightarrow A=B$ hoặc $A=-B$.

✓ *Trình bày lời giải.*

a) $\left|\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{3}{4}x+\frac{5}{6}\right|\Leftrightarrow\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}=\frac{3}{4}x+\frac{5}{6}$ hoặc $\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}=-\frac{3}{4}x-\frac{5}{6}$

- *Trường hợp 1*. Giải $\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}=\frac{3}{4}x+\frac{5}{6}\Leftrightarrow\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}x=\frac{5}{6}-\frac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow\frac{-1}{4}x=\frac{1}{6}\Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$$

- *Trường hợp 2*. Giải:

$$\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}=-\frac{3}{4}x-\frac{5}{6}\Leftrightarrow\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}x=-\frac{5}{6}-\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{5}{4}x=\frac{-3}{2}\Leftrightarrow x=-\frac{6}{5}$$

Vậy $x\in\left\{-\frac{2}{3};\frac{-6}{5}\right\}$

b) $\left|\frac{1}{2}x+\frac{5}{6}\right|-\left|\frac{7}{8}x-\frac{8}{9}\right|=0\Leftrightarrow\left|\frac{1}{2}x+\frac{5}{6}\right|=\left|\frac{7}{8}x-\frac{8}{9}\right|\Leftrightarrow\frac{1}{2}x+\frac{5}{6}=\frac{7}{8}x-\frac{8}{9}$

hoặc $\frac{1}{2}x+\frac{5}{6}=-\frac{7}{8}x+\frac{8}{9}$

- *Trường hợp 1*. Giải $\frac{1}{2}x+\frac{5}{6}=\frac{7}{8}x-\frac{8}{9}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x-\frac{7}{8}x=-\frac{8}{9}-\frac{5}{6} \Leftrightarrow \frac{-3}{8}x=\frac{-31}{18} \Leftrightarrow x=\frac{124}{27}$

- *Trường hợp 2.* Giải:

$\frac{1}{2}x+\frac{5}{6}=-\frac{7}{8}x+\frac{8}{9} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x+\frac{7}{8}x=\frac{8}{9}-\frac{5}{6}$

$\Leftrightarrow \frac{11}{8}x=\frac{1}{18} \Leftrightarrow x=\frac{4}{99}$

Vậy $x \in \left\{\frac{124}{27};\frac{4}{99}\right\}$

Ví dụ 5. Tìm x biết:

a) $|3x-5|+|3x+1|=6$;

b) $|x+1|+|2x-3|=|3x-2|$;

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Để giải dạng toán tổng giá trị tuyệt đối, chúng ta có thể:

- *Hướng 1.* Xét dấu, bỏ dấu giá trị tuyệt đối.
- *Hướng 2.* Vận dụng bất đẳng thức $|A| \geq A$, dấu bằng xảy ra khi $A \geq 0$.
- *Hướng 3.* Vận dụng bất đẳng thức $|A|+|B| \geq |A+B|$, dấu bằng xảy ra khi $AB \geq 0$.

✓ *Trình bày lời giải.*

a) Ta có: $|3x-5|=|5-3x| \geq 5-3x; |3x+1| \geq 3x+1$ nên

$|3x-5|+|3x+1| \geq 5-3x+3x+1=6$

Do vậy dấu bằng chỉ xảy ra khi $5-3x \geq 0$ và $3x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{3}; x \geq -\frac{1}{3}$.

Vậy $-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{5}{3}$.

b) Ta có: $|x+1|+|2x-3| \geq |x+1+2x-3|=|3x-2|$. Dấu bằng chỉ xảy ra khi

$x+1 \quad 2x-3 \ \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ hoặc $x \geq \frac{3}{2}$.

Ví dụ 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$A=|x-2019|+|x-2020|+|y-2021|+|x-2022|+2016$

Giải

Ta có: $|x-2019| \geq x-2019, |x-2022|=|2022-x| \geq 2022-x$

Suy ra $|x-2019|+|2022-x| \geq x-2019+2022-x=3$

Mặt khác, ta có: $|x-2020| \geq 0; |y-2021| \geq 0$

Suy ra: $A \geq 2016+3=2019$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2019 khi $x = 2020; y = 2021$

Ví dụ 7. Thực hiện phép tính một cách hợp lí.

$$A = \frac{0,375 - 0,3 + \frac{3}{11} + \frac{3}{12}}{-0,625 + 0,5 - \frac{5}{11} - \frac{5}{12}} + \frac{1,5 + 1 - 0,75}{2,5 + \frac{5}{3} - 1,25};$$

$$B = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{13}}{\frac{2}{3} - \frac{2}{7} - \frac{2}{13}} \times \frac{\frac{1}{3} - 0,25 + 0,2}{1\frac{1}{6} - 0,875 + 0,7} + \frac{6}{7}$$

Giải

✓ *Tìm cách giải*. Khi thực hiện các phép tính có biểu thức chứa các số thập phân và phân số, ta nên viết chúng dưới dạng phân số rồi thực hiện các phép tính. Quan sát kĩ sau khi viết dưới dạng phân số, ta thấy có những phần giống nhau cả số và dấu vì vậy ta nên vận dụng tính chất phân phối $\frac{k}{a} + \frac{k}{b} + \frac{k}{c} = k.\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ để rút gọn.

✓ *Trình bày lời giải*

$$A = \frac{\frac{3}{8} - \frac{3}{10} + \frac{3}{11} + \frac{3}{12}}{\frac{-5}{8} + \frac{5}{10} - \frac{5}{11} - \frac{5}{12}} + \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{3} - \frac{3}{4}}{\frac{5}{2} + \frac{5}{3} - \frac{5}{4}}$$

$$A = \frac{3\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12}\right)}{-5\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12}\right)} + \frac{3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)}{5\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)}$$

$$A = \frac{-3}{5} + \frac{3}{5} = 0$$

$$B = \frac{1\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{13}\right)}{2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{13}\right)} \times \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{\frac{7}{6} - \frac{7}{8} + \frac{7}{10}} + \frac{6}{7}$$

$$B = \frac{1}{2} \times \frac{2\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10}\right)}{7\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10}\right)} + \frac{6}{7} = \frac{1}{7} + \frac{6}{7} = 1$$

Ví dụ 8. Tính bằng cách hợp lí:

a) $-4,135 + \left[\ -21,5\ +\ +4,135\ \right]$; b) $+45,13 + \left[\ +7,87\ +\ -2110\ \right]$;

Giải

✓ *Tìm cách giải*. Tính tổng các số thập phân ta có thể vận dụng tính chất giao hoán và kết hợp để tính hợp lí hơn.

✓ *Trình bày lời giải*

a) $-4{,}135 + +4{,}135 + -21{,}5 = -21{,}5$;

b) $+45{,}13 + +7{,}87 + -2110 = 53 + -2110 = -2057$

C. Bài tập vận dụng

3.1. Tìm x, biết:

a) $6{,}5-\frac{9}{4}:\left|x+\frac{1}{3}\right|=2$;

b) $\frac{11}{4}+\frac{3}{2}:\left|4x-\frac{1}{5}\right|=\frac{7}{2}$;

c) $\frac{15}{4}-2{,}5:\left|\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}\right|=3$;

d) $\frac{21}{5}+3:\left|\frac{x}{4}-\frac{2}{3}\right|=6$.

3.2. Tìm x, biết:

a) $\left|\left|2x-1\right|+\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{4}$;

b) $\left|x^2+3\left|x-\frac{1}{2}\right|\right|=x^2+3$.

3.3. Tìm x, biết:

a) $\left|\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right|=\left|4x-1\right|$;

c) $\left|\frac{5}{4}x-\frac{7}{2}\right|-\left|\frac{5}{8}x+\frac{3}{5}\right|=0$;

b) $\left|\frac{7}{5}x+\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{4}{3}x-\frac{1}{4}\right|$;

d) $\left|\frac{7}{8}x+\frac{5}{6}\right|-\left|\frac{1}{2}x+5\right|=0$.

3.4. Tìm x, y thỏa mãn:

a) $\left|5-\frac{2}{3}x\right|+\left|\frac{2}{3}y-4\right|=0$;

b) $\left|\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}x\right|+\left|1{,}5-\frac{3}{4}-\frac{3}{2}y\right|=0$

c) $\left|x-2020\right|+\left|y-2021\right|=0$

d) $\left|x-y\right|+\left|y+\frac{21}{10}\right|=0$

3.5. Tìm x, biết:

a) $\left|x+\frac{1}{1.2}\right|+\left|x+\frac{1}{2.3}\right|+\left|x+\frac{1}{3.4}\right|+...+\left|x+\frac{1}{2019.2020}\right|=2020x$;

b) $\left|x+\frac{1}{1.3}\right|+\left|x+\frac{1}{3.5}\right|+\left|x+\frac{1}{5.7}\right|+...+\left|x+\frac{1}{197.199}\right|=100x$;

c) $\left|x+\frac{1}{2}\right|+\left|x+\frac{1}{6}\right|+\left|x+\frac{1}{12}\right|+\left|x+\frac{1}{20}\right|+...+\left|x+\frac{1}{110}\right|=11x$.

3.6. Tìm cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn:

a) $\left|x+4\right|+\left|y-2\right|=3$;

b) $\left|2x+1\right|+\left|y-1\right|=4$.

c) $\left|3x\right|+\left|y+5\right|=5$;

d) $\left|5x\right|+\left|2y+3\right|=7$.

3.7. Tìm x, biết:

a) $|x+5|+|4-x|=9$;

b) $\left|x-\frac{2}{3}\right|+\left|x-\frac{3}{4}\right|=\frac{1}{12}$;

c) $2|x-3|+|2x+5|=11$;

d) $|x-3|+|5-x|+2|x-4|=2$.

3.8. Tìm cặp (x,y) thỏa mãn: $|x-1|+|x-2|+|y-3|+|x-4|=3$.

3.9. Tìm các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn:

a) $2-x \quad x+1 \ =|y+1|$;

b) $x+3 \quad 1-x \ =|y|$;

c) $x-2 \quad 5-x \ =|2y+1|+2$.

3.10. Tìm các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn:

a) $|x-5|+|1-x|=\frac{12}{|y+1|+3}$;

b) $|x-2y-1|+5=\frac{10}{|y-4|+2}$;

c) $|x+3|+|x-1|=\frac{16}{|y-2|+|y+2|}$;

d) $|x-1|+|3-x|=\frac{6}{|y+3|+3}$.

3.11. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a) $A=\frac{2}{3}+\left|\frac{3}{4}-x\right|$;

b) $B=\left|x+\frac{5}{6}\right|-\frac{21}{10}$;

c) $C=\frac{11}{12}+\left|\frac{9}{10}-x\right|$;

d) $D=\left|3x+\frac{9}{10}\right|-\frac{73}{79}$;

e) $E=|4x-3|+\left|5y+\frac{15}{16}\right|+\frac{21}{10}$

3.12. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=|x-2019|+|x-2020|+|x-2021|$

3.13. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=|2x+1000|+|2x-2020|$ với x là số nguyên.

3.14. Thực hiện phép tính: $A=\frac{\left(0{,}34-\frac{1}{25}\right):\frac{5}{2}}{0{,}8:\left(\frac{4}{5}.1{,}25\right)}- \ 1{,}2.0{,}35 \ :\left(\frac{-4}{5}\right)$.

3.15. Thực hiện phép tính

a) $7{,}3.10{,}5+7{,}3.15+2{,}7.10{,}5+15.2{,}7$;

b) $5{,}4-1{,}5- \ 7{,}2-1 \ $.

3.16. Tìm x, biết:

a) $\left(x+\frac{2}{3}\right)-\frac{3}{5}=\left|\frac{1}{2}-\frac{7}{10}\right|-\frac{3}{4}$;

b) $\frac{5}{6}-\left(\frac{3}{4}+\frac{7}{8}-x\right)=10-\left|\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right|$.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

3.1. a) $6,5-\frac{9}{4}:\left|x+\frac{1}{3}\right|=2 \Leftrightarrow \frac{9}{4}:\left|x+\frac{1}{3}\right|=4,5 \Leftrightarrow \left|x+\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{3}=\frac{1}{2} \\ x+\frac{1}{3}=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{6} \\ x=-\frac{5}{6} \end{array}\right.$

Vậy $x\in\left\{\frac{1}{6};-\frac{5}{6}\right\}$

b) $\frac{11}{4}+\frac{3}{2}:\left|4x-\frac{1}{5}\right|=\frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2}:\left|4x-\frac{1}{5}\right|=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \left|4x-\frac{1}{5}\right|=2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x-\frac{1}{5}=2 \\ 4x-\frac{1}{5}=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{11}{20} \\ x=-\frac{9}{20} \end{array}\right.$

Vậy $x\in\left\{\frac{11}{20};-\frac{9}{20}\right\}$

c) $\frac{15}{4}-2,5:\left|\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}\right|=3 \Leftrightarrow 2,5:\left|\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \left|\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}\right|=\frac{10}{3}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{3}{4}x+\frac{1}{2}=\frac{10}{3} \\ \frac{3}{4}x+\frac{1}{2}=-\frac{10}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{3}{4}x=\frac{17}{6} \\ \frac{3}{4}x=-\frac{23}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{34}{9} \\ x=-\frac{46}{9} \end{array}\right.$

Vậy $x\in\left\{\frac{34}{9};-\frac{46}{9}\right\}$

d) $3:\left|\frac{x}{4}-\frac{2}{3}\right|=\frac{9}{5} \Leftrightarrow \left|\frac{x}{4}-\frac{2}{3}\right|=\frac{5}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{4}-\frac{2}{3}=\frac{5}{3} \\ \frac{x}{4}-\frac{2}{3}=-\frac{5}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{4}=\frac{7}{3} \\ \frac{x}{4}=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{28}{3} \\ x=-4 \end{array}\right.$

Vậy $x\in\left\{\frac{28}{3};-4\right\}$

3.2.

a) $\left||2x-1|+\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{4} \Leftrightarrow |2x-1|+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$ (vì $|2x-1|+\frac{1}{2}>0$)

$$\Leftrightarrow |2x-1|=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=\frac{1}{4} \\ 2x-1=-\frac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\frac{5}{4} \\ 2x=\frac{3}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{5}{8} \\ x=\frac{3}{8} \end{array}\right.$$

Vậy $S=\left\{\frac{5}{8};\frac{3}{8}\right\}$

b) $x^2+3>0$, nên suy ra: $x^2+3\left|x-\frac{1}{2}\right|=x^2+3$

$$\Leftrightarrow 3\left|x-\frac{1}{2}\right|=3 \Leftrightarrow \left|x-\frac{1}{2}\right|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{1}{2}=1 \\ x-\frac{1}{2}=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{3}{2} \\ x=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vậy $S=\left\{\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right\}$

3.3.

a) $\left|\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right|=|4x-1|$

✓ *Trường hợp 1.* $\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}=4x-1 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x-4x=-1-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -\frac{5}{2}x=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow x=\frac{3}{5}$

✓ *Trường hợp 2.* $\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}=1-4x$

$\frac{11x}{2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{11}$. Vậy $S=\left\{\frac{1}{11};\frac{3}{5}\right\}$

b) $\left|\frac{7}{5}x+\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{4}{3}x-\frac{1}{4}\right|$

Trường hợp 1. $\frac{7}{5}x+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}x-\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{7}{5}x-\frac{2}{3}x=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{11}{5}x=-\frac{3}{4} \Leftrightarrow x=-\frac{45}{44}$

Trường hợp 2. $\frac{7}{5}x+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}-\frac{2}{3}x \Leftrightarrow \frac{7}{5}x-\frac{2}{3}x=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$

$\frac{31}{15}x=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow x=-\frac{15}{124}$

Vậy $S=\left\{-\frac{45}{44};-\frac{15}{124}\right\}$

c) $\left|\frac{5}{4}x-\frac{7}{2}\right|-\left|\frac{5}{8}x+\frac{3}{5}\right|=0 \Leftrightarrow \left|\frac{5}{4}x-\frac{7}{2}\right|=\left|\frac{5}{8}x+\frac{3}{5}\right|$

Trường hợp 1. $\frac{5}{4}x-\frac{7}{2}=\frac{5}{8}x+\frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{5}{4}x-\frac{5}{8}x=\frac{3}{5}+\frac{7}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{5}{8}x=\frac{41}{10} \Leftrightarrow x=\frac{164}{25}$

Trường hợp 2. $\frac{5}{4}x-\frac{7}{2}=-\frac{5}{8}x-\frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{5}{4}x+\frac{5}{8}x=-\frac{3}{5}+\frac{7}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{15}{8}x=\frac{29}{10} \Leftrightarrow x=\frac{116}{75}$

Vậy $S=\left\{\frac{164}{25};-\frac{116}{75}\right\}$

d) $\left|\frac{7}{8}x+\frac{5}{6}\right|-\left|\frac{1}{2}x+5\right|=0 \Leftrightarrow \left|\frac{7}{8}x+\frac{5}{6}\right|=\left|\frac{1}{2}x+5\right|$

Trường hợp 1. $\frac{7}{8}x+\frac{5}{6}=\frac{1}{2}x+5 \Leftrightarrow \frac{7}{8}x-\frac{1}{2}x=5-\frac{5}{6} \Leftrightarrow x=\frac{100}{9}$

Trường hợp 2. $\frac{7}{8}x+\frac{5}{6}=-\frac{1}{2}x-5 \Leftrightarrow \frac{7}{8}x+\frac{1}{2}x=-5-\frac{5}{6} \Leftrightarrow x=-\frac{280}{66}$

Vậy $S=\left\{\frac{100}{9};-\frac{280}{66}\right\}$

3.4.

a) Vì $\left|5-\frac{2}{3}x\right|\geq 0;\left|\frac{2}{3}y-4\right|\geq 0$ nên đẳng thức chỉ xảy ra khi:

$5-\frac{2}{3}x=0;\frac{2}{3}y-4=0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x=5,\frac{2}{3}y=4 \Leftrightarrow x=\frac{15}{2},y=6$

Vậy $x;y=\left(\frac{15}{2};6\right)$

b) $\left|\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}x\right|+\left|1{,}5-\frac{3}{4}-\frac{3}{2}y\right|=0 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{6}+\frac{3}{4}x\right|+\left|\frac{3}{4}-\frac{3}{2}y\right|=0$

Vì $\left|\frac{1}{6}+\frac{3}{4}x\right|\geq 0,\left|\frac{3}{4}-\frac{3}{2}y\right|\geq 0$ nên đẳng thức chỉ xảy ra khi:

$\frac{1}{6}+\frac{3}{4}x=0;\frac{3}{4}-\frac{3}{2}y=0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x=-\frac{1}{6},\frac{3}{2}y=\frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow x=-\frac{2}{9};y=\frac{1}{2}$. Vậy $x;y=\left(-\frac{2}{9};\frac{1}{2}\right)$

c) Vì $|x-2020|\geq 0,|y-2021|\geq 0$ nên đẳng thức chỉ xảy ra khi:

$x-2020=0;y-2021=0 \Leftrightarrow x=2020;y=2021$

Vậy $x;y = 2020;2021$

d) Vì $|x-y|\geq 0, \left|y+\frac{21}{10}\right|\geq 0$ nên đẳng thức chỉ xảy ra khi:

$$\begin{cases} x-y=0 \\ y+\frac{21}{10}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=-\frac{21}{10}$$

Vậy $x;y = \left(-\frac{21}{10};-\frac{21}{10}\right)$

3.5.

a) Điều kiện $x\geq 0$, suy ra:

$$x+\frac{1}{1.2}+x+\frac{1}{2.3}+x+\frac{1}{3.4}+...+x+\frac{1}{2019.2020}=2020x$$

$$2019x+\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{2019.2010}\right)=2020x$$

$$2019x+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}\right)=2020x$$

$$2019x+\left(1-\frac{1}{2020}\right)=2020x$$

$x=\frac{2019}{2020}$ (thỏa mãn điều kiện).

b) Điều kiện $x\geq 0$, suy ra:

$$x+\frac{1}{1.3}+x+\frac{1}{3.5}+x+\frac{1}{5.7}+...+x+\frac{1}{197.199}=100x$$

$$99x+\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+...+\frac{1}{197.199}\right)=100x$$

$$99x+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+\frac{1}{197}-\frac{1}{199}\right)=100x$$

$$99x+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{199}\right)=100x$$

$99x+\frac{99}{199}=100x\Rightarrow x=\frac{99}{199}$ (thỏa mãn điều kiện).

c) Ta có: $\left|x+\frac{1}{2}\right|\geq 0;\left|x+\frac{1}{6}\right|\geq 0;...;\left|x+\frac{1}{110}\right|\geq 0\Rightarrow 11x\geq 0\Rightarrow x\geq 0$

Từ đó suy ra: $x+\frac{1}{2}+x+\frac{1}{6}+x+\frac{1}{12}+...+x+\frac{1}{110}=11x$

$$x+x+x+...+x\ +\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+...+\frac{1}{110}\right)=11x$$

$$10x+\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{10.11}\right)=11x$$

Suy ra: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}=x\Leftrightarrow x=\frac{1}{1}-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$.

3.6.

a) $|x+4|+|y-2|=3\Rightarrow 0\le|x+4|\le 3;\ 0\le|y-2|\le 3$ suy ra bảng giá trị sau:

$\|x+4\|$	0	1	2	3
$\|y-2\|$	3	2	1	0

Từ đó suy ra:

x	4	-3; -5	-2; -6	-1; -7
y	5; -1	0; 4	3; 1	2

Vậy cặp số nguyên $x;y$ thỏa mãn là:

$4;5\ ;\ 4;-1\ ;\ -3;0\ ;\ -3;4\ ;\ -5;0\ ;\ -5;4\ ;\ -2;3\ ;\ -2;1\ ;\ -6;3\ ;\ -6;1\ ;\ -1;2\ ;\ -7;2$

b) $|2x+1|+|y-1|=4\Rightarrow 0\le|2x+1|\le 4;\ 0\le|y-1|\le 4$

Mặt khác $|2x+1|$ là số lẻ nên chúng ta có bảng sau:

suy ra bảng giá trị sau:

$\|2x+1\|$	1	3
$\|y-1\|$	3	1

Từ đó suy ra:

x	0; -1	1; -2
y	4; -2	2; 0

Vậy cặp số nguyên $x;y$ thỏa mãn là:

$0;4\ ;\ 0;-2\ ;\ -1;4\ ;\ -1;-2\ ;\ 1;2\ ;\ 1;0\ ;\ -2;0\ ;\ -2;2$

c) $|3x|+|y+5|=5\Rightarrow 0\le|3x|\le 5;\ 0\le|y+5|\le 5$

Mặt khác $|3x|$ chia hết cho 3, nên chúng ta có bảng sau:

Suy ra bảng giá trị sau:

$\|3x\|$	0	3

$\lvert y+5\rvert$	5	2

Từ đó suy ra:

x	0	1; -1
y	0; -10	-3; -7

Vậy cặp số nguyên $x;y$ thỏa mãn là:

$$0;0\ ;\ 0;-10\ ;\ 1;-3\ ;\ 1;-7\ ;\ -1;-3\ ;\ -1;-7$$

d) $|5x|+|2y+3|=7 \Rightarrow 0\le|5x|\le 7;\ 0\le|2y+3|\le 7$

Mặt khác $|5x|$ chia hết cho 5, nên chúng ta có bảng sau:

Suy ra bảng giá trị sau:

$\lvert 5x\rvert$	0	5
$\lvert 2y+3\rvert$	7	2 (loại)

Từ đó suy ra:

x	0
y	2; -5

Vậy cặp số nguyên $x;y$ thỏa mãn là: $0;2\ ;\ 0;-5$

3.7.

a) Ta có: $|x+5|\ge x+5$ và $|4-x|\ge 4-x$ nên

$|x+5|+|4-x|\ge x+5+4-x=9$

Do vậy đẳng thức chỉ xảy ra khi $x+5\ge 0$ và $4-x\ge 0$ hay $x\ge -5; x\le 4$

Vậy $-5\le x\le 4$

b) Ta có $\left|x-\frac{2}{3}\right|\ge x-\frac{2}{3}$ và $\left|x-\frac{3}{4}\right|=\left|\frac{3}{4}-x\right|\ge\frac{3}{4}-x$

Suy ra $\left|x-\frac{2}{3}\right|+\left|x-\frac{3}{4}\right|\ge x-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-x=\frac{1}{12}$

Do vậy đẳng thức chỉ xảy ra khi $x-\frac{2}{3}\ge 0$ và $\frac{3}{4}-x\ge 0$ hay $x\ge\frac{2}{3}; x\le\frac{3}{4}$

Vậy $\frac{2}{3}\le x\le\frac{3}{4}$

c) Ta có $2|x-3|=|2x-6|\ge 6-2x;\ |2x+5|\ge 2x+5$ nên

$2|x-3|+|2x+5|\ge 6-2x+2x+5=11$

Do vậy đẳng thức chỉ xảy ra khi $6-2x\ge 0$ và $2x+5\ge 0\Rightarrow x\le 3; x\ge -\frac{5}{2}$

Vậy $-\frac{5}{2} \le x \le 3$

d) $|x-3| \ge x-3; |5-x| \ge 5-x; 2|x-4| \ge 0$

$\Rightarrow |x-3|+|5-x|+2|x-4| \ge x-3+5-x+0=2$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi $x=4$

3.8.

Ta có: $|x-1|+|x-4|=|x-1|+|4-x| \ge |x-1+4-x|=3$

Mặt khác: $|x-2| \ge 0; |y-3| \ge 0$ suy ra $|x-1|+|x-2|+|y-3|+|x-4| \ge 3$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi $x=2; y=3$

3.9.

a) Xét $|y+1| = (2-x)(x+1) > 0$, suy ra $2-x$ và $x+1$ cùng dấu.

+ *Trường hợp 1.* Xét $2-x<0$ và $x+1<0$

$x>2$ và $x<-1 \Rightarrow$ không xảy ra.

+ *Trường hợp 2.* Xét $2-x>0$ và $x+1>0$

$x<2$ và $x>-1 \Rightarrow x \in \{0;1\}$

+) Với $x=0$ suy ra: $|y+1|=2 \Rightarrow y=1; y=-3$

+) Với $x=1$ suy ra $|y+1|=2 \Rightarrow y=1; y=-3$

+ *Trường hợp 3.*

$(2-x)(x+1)=0 \Rightarrow x=2; x=-1 \Rightarrow |y+1|=0 \Rightarrow y=-1$

Từ đó ta có cặp số nguyên $(x;y)$ sau thỏa mãn:

$(x;y) \in \{(0;1); (0;-3); (1;1); (1;-3); (2;-1); (-1;-1)\}$

b) Xét $|y| = (x+3)(1-x) > 0$ suy ra $x+3$ và $1-x$ cùng dấu.

+ *Trường hợp 1.*

+) Xét $x+3>0$ và $1-x>0 \Rightarrow -3<x<1$

+) Xét $x=-2$ suy ra $|y|=3 \Rightarrow y=3; y=-3$

+) Xét $x=-1$ suy ra $|y|=4 \Rightarrow y=4; y=-4$

+) Xét $x=0$ suy ra $|y|=3 \Rightarrow y=3; y=-3$

+ *Trường hợp 2.* $x+3<0$ và $1-x<0 \Rightarrow x<-3$ và $x>1$ vô lý (loại)

Xét $|y| = (x+3)(1-x)=0 \Rightarrow (x;y) \in \{(-3;0), (1;0)\}$

Từ đó, ta có cặp số nguyên $(x;y)$ sau thỏa mãn:

$(-2;3)$; $(-2;-3)$; $(-1;4)$; $(-1;-4)$; $(0;3)$; $(0;-3)$; $(-3;0)$; $(1;0)$

c) $|2y+1|+2>0 \Leftrightarrow (x-2)(5-x)>0$ suy ra $x-2$ và $5-x$ cùng dấu.

+ Trường hợp 1.

+) Xét $x-2>0$ và $5-x>0 \Rightarrow 2<x<5$

+) Xét $x=3 \Rightarrow (3-2).(5-3)=|2y+1|+2 \Rightarrow 2=|2y+1|+2$ vô lý vì $y \in Z$ (loại).

+) Xét $x=4$

$\Rightarrow (4-2)(5-4)=|2y+1|+2 \Rightarrow 2=|2y+1|+2 \Rightarrow |2y+1|=0$ vô lý vì $y \in Z$.

+ Trường hợp 2. $x-2<0$ và $5-x<0 \Rightarrow x<2$ và $x>5$ vô lý (loại).

Vậy không tồn tại cặp số nguyên thỏa mãn.

3.10.

a) Áp dụng $|a|+|b| \geq |a+b|$ dấu bằng chỉ xảy ra khi $ab \geq 0$

$\Rightarrow |x-5|+|1-x| \geq |x-5+1-x|=4$

Mặt khác: $\dfrac{12}{|y+1|+3} \leq \dfrac{12}{3}=4$ suy ra $|x-5|+|1-x| \geq 4 \geq \dfrac{12}{|y+1|+3}$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $(x-5)(1-x) \geq 0$ và $y+1=0; y=-1$ với $x \in Z \Rightarrow x \in \{5;4;3;2;1\}$.

Vậy ta có cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn:

$(x;y) \in \{(5;-1);(4;-1);(3;-1);(2;-1);(1;-1)\}$

b) $|x-2y-1|+5 \geq 5$ và $\dfrac{10}{|y-4|+2} \leq \dfrac{10}{2}=5 \Rightarrow |x-2y-1|+5 \geq \dfrac{10}{|y-4|+2}$

Đẳng thức xảy ra khi $x-2y-1=0$ và $y-4=0$ suy ra $(x;y)=(9;4)$

c) Ta có $|x+3|+|x-1|=|x+3|+|1-x| \geq |x+3+1-x|=4$

Ta có $|y-2|+|y+2|=|2-y|+|y+2| \geq |2-y+y+2|=4$

$\Rightarrow \dfrac{16}{|y-2|+|y+2|} \leq \dfrac{16}{4}=4 \Rightarrow |x+3|+|x-1| \geq \dfrac{6}{|y-2|+|y+2|}$

Dấu bằng xảy ra khi $(x+3)(1-x) \geq 0$ và $(2-y)(y+2) \geq 0$. Vì $x;y \in Z$ suy ra

$x \in \{-3;-2;-1;0;1\}; y \in \{-2;-1;0;1;2\}$. Từ đó suy ra các cặp $(x;y)$.

d) Ta có $|x-1|+|3-x| \geq |x-1+3-x|=2$

Mặt khác: $\dfrac{6}{|y+3|+3} \leq \dfrac{6}{3}=2 \Rightarrow |x-1|+|3-x| \geq \dfrac{6}{|y+3|+3}$

Dấu bằng xảy ra khi $x-1\ .\ 3-x\ \geq 0$ và $y+3=0$ vì $x,y\in Z$ nên ta có cặp số nguyên $x;y$ thỏa mãn là: $x;y\ \in\ 1;-3\ ;\ 2;-3\ ;\ 3;-3$

3.11.

a) Ta có $\left|\frac{3}{4}-x\right|\geq 0\Rightarrow A=\frac{2}{3}+\left|\frac{3}{4}-x\right|\geq\frac{2}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{2}{3}$ khi $x=\frac{3}{4}$

b) Ta có $\left|x+\frac{5}{6}\right|\geq 0\Rightarrow B=\left|x+\frac{5}{6}\right|-\frac{21}{10}\geq-\frac{21}{10}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của B là $-\frac{21}{10}$ khi $x=-\frac{5}{6}$

c) Ta có $\left|\frac{9}{10}-x\right|\geq 0\Rightarrow C=\frac{11}{12}+\left|\frac{9}{10}-x\right|\geq\frac{11}{12}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của C là $\frac{11}{12}$ khi $x=\frac{9}{10}$.

d) Ta có $\left|3x+\frac{9}{10}\right|\geq 0\Rightarrow D=\left|3x+\frac{9}{10}\right|-\frac{73}{79}\geq-\frac{73}{79}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $-\frac{73}{79}$ khi $x=-\frac{3}{10}$.

e) Ta có $E=|4x-3|+\left|5y+\frac{15}{16}\right|+\frac{21}{10}\geq\frac{21}{10}$

Dấu bằng xảy ra khi $4x-3=0$ và $5y+\frac{15}{16}=0$ hay $x=\frac{3}{4};y=-\frac{3}{16}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của E là $\frac{21}{10}$ khi $x=\frac{3}{4};y=-\frac{3}{16}$.

3.12. Ta có:

$|x-2019|+|x-2021|=|x-2019|+|2021-x|\geq|x-2019+2021-x|=2$

Và $|x-2020|\geq 0$ suy ra $A\geq 2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2 khi $x=2020$.

3.13. Ta có: $A=|2x+1000|+|2020-2x|\geq 2x+1000+2020-2x=3020$

Dấu bằng khi $2x+1000\geq 0;\ 2020-2x\geq 0\Rightarrow x\geq-500$ và $x\leq 1010$

Với $x\in Z$ suy ra $x\in\ -500;-499;-498;...;1010$

Vậy với $x\in\ -500;-499;-498;...;1010$ thì A đạt giá trị nhỏ nhất là 3020.

3.14. Ta có: $A=\dfrac{0,34-0,04\ .\frac{2}{5}}{0,8:\ 4.0,25}-0,42:\left(\frac{-4}{5}\right)$

$$A=\frac{0,3.0,4}{0,8:1}-0,42.\left(\frac{-5}{4}\right)=\frac{0,12}{0,8}+0,525=0,15+0,525=0,675$$

3.15.

a) $7,3.10,5+7,3.15+2,7.10,5+15.2,7$

$=7,3\ \ 10,5+15\ \ +2,7\ \ 10,5+15$

$=7,3.25,5+2,7.25,5=25,5\ \ 7,3+2,7\ \ =25,5.10=255$

b) $5,4-1,5-\ \ 7,2-1\ \ =5,4-1,5-6,2=3,9-6,2=-2,3$

3.16.

a) $x+\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{5}=\left|-\dfrac{1}{5}\right|-\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow x+\dfrac{1}{15}=\dfrac{1}{5}-\dfrac{3}{4}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{5}-\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{15}\Leftrightarrow x=-\dfrac{37}{60}$

b) $\dfrac{5}{6}-\left(\dfrac{13}{8}-x\right)=10-\left|-\dfrac{1}{6}\right|$

$\Leftrightarrow\dfrac{5}{6}-\dfrac{13}{8}+x=10-\dfrac{1}{6}\Leftrightarrow-\dfrac{19}{24}+x=\dfrac{59}{6}\Leftrightarrow x=\dfrac{59}{6}+\dfrac{19}{24}\Leftrightarrow x=\dfrac{85}{8}$

Chuyên đề 4. LŨY THỪA CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

A. Kiến thức cần nhớ

1. Lũy thừa với số mũ tự nhiên

$$x^n = \underbrace{x.x\ldots x}_{n \text{ thừa số}}\left(x \in Q; n \in \mathbb{N}; n > 1\right)$$

Quy ước : $x^1 = x, x^0 = 1\left(x \neq 0\right)$

2. Các phép tính về lũy thừa

$$x^m.x^n = x^{m+n}$$

$$x^m : x^n = x^{m-n}\left(x = 0; m, n \in \mathbb{N}\right)$$

$$\left(x^m\right)^n = x^{m.n}$$

$$\left(x.y\right)^n = x^n.y^n$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}\left(y \neq 0\right)$$

3. Lũy thừa với số mũ nguyên âm

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \text{ với } \left(x \neq 0, n \in \mathbb{N}\right)$$

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức : $A = \dfrac{2^{12}.3^5 - 4^6.81}{\left(2^2.3\right)^6 + 8^4.3^5}; B = \dfrac{30.4^7.3^{29} - 5.14^5.2^{12}}{54.6^{14}.9^7 - 12.8^5.7^5}$

Giải

- ✓ *Tìm cách giải.* Để thực hiện phép tính chứa nhiều lũy thừa, ta dùng các công thức biến đổi về lũy thừa của các số nguyên tố. Sau đó có thể dùng tính chất phân phối của phép nhân đối và phép cộng.
- ✓ *Trình bày lời giải.*

a) Ta có : $A = \dfrac{2^{12}.3^5 - 2^{12}.3^4}{2^{12}.3^6 + 2^{12}.3^5} = \dfrac{2^{12}.3^4\left(3-1\right)}{2^{12}.3^5\left(3+1\right)}$

$$A = \frac{2^{12}.3^4.2}{2^{12}.3^5.4} = \frac{1}{6}$$

b) Ta có :

$$B = \frac{2.3.5.2^{14}.3^{29} - 5.2^5.7^5.2^{12}}{2.3^3.2^{14}.3^{14}.3^{14} - 2^2.3.2^{15}.7^5} = \frac{2^{15}.3^{30}.5 - 2^{17}.5.7^5}{2^{15}.3^{31} - 2^{17}.3.7^5} = \frac{5\left(2^{15}.3^{30} - 2^{17}.7^5\right)}{3.\left(2^{15}.3^{30} - 2^{17}.7^5\right)} = \frac{5}{3}$$

Ví dụ 2: Tìm x

a) $\left(x+2\right)^2 = 64;$ b) $\left(x+5\right)^3 = -125$ c) $2^x + 2^{x+2} = 320;$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Khi tìm x có chứa lũy thừa ở phần cơ số ta đưa hai vế về cùng số mũ và lưu ý:

$a^n = b^n$ (với n lẻ) thì $a = b$

$a^n = b^n$ (với n chẵn) thì $a = b$ hoặc $a = -b$

Để tìm x ở phần số mũ ta đưa hai vế về cùng cơ số và sử dụng :

$a^m = a^n$ (với $a \neq 0, \pm 1$) thì $m = n$

✓ *Trình bày lời giải*

a) $(x+2)^2 = 64 \Rightarrow (x+2)^2 = 8^2 \Rightarrow x+2 = 8$ hoặc $x+2 = -8$

Suy ra $x \in \{6; -10\}$

b) $(x+5)^3 = -125 \Rightarrow (x+5)^3 = (-5)^3 \Rightarrow x+5 = -5 \Rightarrow x = -10$

c) $2^x + 2^{x+2} = 320 \Rightarrow 2^x\left(1+2^2\right) = 320$

$2^x = 64 \Rightarrow 2^x = 2^6 \Rightarrow x = 6$

Ví dụ 3:

a) Chứng minh rằng $16^5 + 2^{15}$ chia hết cho 66

b) Chứng minh rằng với số nguyên dương n thì $3^{n+2} - 2^{n+4} + 3^n + 2^n$ chia hết cho 30

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Để chứng minh $A \vdots k$ ta có thể vận dụng tính chất :

$A = b.k$ thì $A \vdots k$

$A = B + C$ mà $B \vdots k$ thì $C \vdots k$ thì $A \vdots k$

✓ *Trình bày lời giải*

a) Ta có : $16^5 + 2^5 = 2^{20} + 2^{15} = 2^{15}\left(2^5 + 1\right) = 2^{15}.33 = 2^{14}.66 \vdots 66$

b) Ta có : $3^{n+2} + 3^n - 2^{n+4} + 2^n = 3^n\left(3^2+1\right) - 2^n.\left(2^4 - 1\right)$

$= 3^n.10 - 2^n.15 = 3^{n-1}.30 - 2^{n-1}.30 \vdots 30$

Ví dụ 4: Thu gọn các biểu thức sau:

a) $A = 3^{2020} - 3^{2019} + 3^{2018} - 3^{2017} + ... + 3^2 - 3 + 1;$

b) $B = 5^{2020} + 5^{2019} + 5^{2018} + 5^{2017} + ... + 5^2 + 5 + 1$

c) $C = 7^{2021} - 7^{2019} + 7^{2017} - 7^{2015} + ... + 7^5 - 7^3 + 7$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Những bài toán tính tổng đại số về lũy thừa có cùng cơ số theo quy luật , chúng ta cần nhân hai vế với một lượng thích hợp để được biểu thức mới, mà bắt đầu từ hạng tử đối nhau thì cộng biểu thức ban đầu với biểu thức mới, bằng nhau thì trừ biểu thức mới với biểu thức ban đầu

✓ *Trình bày lời giải*

a) Xét $3.A = 3^{2021} - 3^{2020} + 3^{2019} - 3^{2018} + ... + 3^3 - 3^2 + 3$

$$\Rightarrow 3.A + A = 3^{2021} + 1 \Rightarrow A = \frac{3^{2021}+1}{4}$$

b) Xét $5.B = 5^{2021} + 5^{2020} + 5^{2019} + 5^{2018} + \ldots + 5^3 + 5^2 + 5$

$$\Rightarrow 5.B - B = 5^{2021} - 1 \Rightarrow B = \frac{5^{2021}-1}{4}$$

c) Xét $49.A = 7^{2023} - 7^{2021} + 7^{2019} - 7^{2017} + \ldots + 7^7 - 7^5 + 7^3$

$$\Rightarrow 49.C + C = 7^{2023} + 7 \Rightarrow C = \frac{7^{2023}+1}{50}$$

Ví dụ 5: Chứng minh rằng tổng:

$$S = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} - \ldots + \frac{1}{2^{4n-2}} - \frac{1}{2^{4n}} + \ldots + \frac{1}{2^{2018}} - \frac{1}{2^{2020}} < 0,2$$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Bản chất của bài toán là thu gọn tổng S. Tương tự như ví dụ trên, dễ dàng phát hiện ra nhân hai vế của tổng S với $\frac{1}{2^2}$. Sau đó cộng với biểu thức S. Cuối cùng đánh giá

✓ *Trình bày lời giải*

Xét $\frac{1}{2^2}.S = \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} - \ldots + \frac{1}{2^{2016}} - \frac{1}{2^{2018}}$

$\Rightarrow \frac{1}{2^2}.S + S = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^{2020}} \Rightarrow \frac{5}{4}S < \frac{1}{4} \Rightarrow S < \frac{1}{5}$ hay $S < 0,2$

Ví dụ 6: Đặt $A = 3^{101} + 3^{102} + 3^{103} + \ldots + 3^{200}$. Chứng minh rằng A chia hết cho 120

Giải

Biểu thức A có 100 số hạng. Kể từ số hạng đầu, cứ nhóm 4 số hạng liên tiếp với nhau được 25 nhóm

$$A = \left(3^{101} + 3^{102} + 3^{103} + 3^{104}\right) + \left(3^{105} + 3^{106} + 3^{107} + 3^{108}\right) + \ldots + \left(3^{197} + 3^{198} + 3^{199} + 3^{200}\right)$$

$$A = 3^{100}.\left(3 + 3^2 + 3^3 + 3^4\right) + 3^{104}.\left(3 + 3^2 + 3^3 + 3^4\right) + \ldots + 3^{196}.\left(3 + 3^2 + 3^3 + 3^4\right)$$

$$A = 3^{100}.120 + 3^{104}.120 + \ldots + 3^{196}.120$$

$A = 120.\left(3^{100} + 3^{104} + \ldots + 3^{196}\right) \vdots 120$. Điều phải chứng minh

C. Bài tập vận dụng

4.1. Tính:

a) $A = \dfrac{6 + 3^2.2 - 6.3^2}{3^2 + 3.3^2 - 3^4}$; b) $\dfrac{2^{12}.3^5 - 4^6.9^2}{\left(2^2.3\right)^6 + 8^4.3^5}$

4.2. Thực hiện phép tính: $A = \dfrac{5^{10}.7^3 - 25^5.49^2}{(125.7)^3 + 5^9.14^3}$

4.3. Cho $T = 2^{2020} - 2^{2019} - 2^{2018} - \ldots - 2 - 1$.Tính 2021^T

4.4. Tìm x, biết :

a) $3^{x+2}+3^{x}=810$ b) $2^{x+2}.3^{x+1}.5^{x}=10800$

4.5. Tìm số tự nhiên x, biết : $\dfrac{7^{x+2}+7^{x+1}+7^{x}}{57}=\dfrac{5^{2x}+5^{2x+1}+5^{2x+3}}{131}$

4.6. Tìm x , biết :

a) $\dfrac{1}{4}.\dfrac{2}{6}.\dfrac{3}{8}.\dfrac{4}{10}.\dfrac{5}{12}...\dfrac{30}{62}.\dfrac{31}{64}=4^{x}$;

b) $\dfrac{4^5+4^5+4^5+4^5}{3^5+3^5+3^5}.\dfrac{6^5+6^5+6^5+6^5+6^5+6^5}{2^5+2^5}=8^{x}$

4.7. Chứng minh rằng :

$\dfrac{1}{7^2}-\dfrac{1}{7^4}+...+\dfrac{1}{7^{4n-2}}-\dfrac{1}{7^{4n}}+...+\dfrac{1}{7^{98}}-\dfrac{1}{7^{100}}<\dfrac{1}{50}$

4.8. Chứng minh rằng : $B=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}+...+\dfrac{1}{3^{2020}}+\dfrac{1}{3^{2021}}<\dfrac{1}{2}$

4.9. Chứng minh rằng : $\dfrac{1}{6}<\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{6^2}+\dfrac{1}{7^2}+...+\dfrac{1}{100^2}<\dfrac{1}{4}$

4.10. Chứng minh rằng : $\dfrac{3}{1^2.2^2}+\dfrac{5}{2^2.3^2}+\dfrac{7}{3^2.4^2}+...+\dfrac{19}{9^2.10^2}<1$

4.11. Xét tổng $T=\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{4}{2^3}+...+\dfrac{2019}{2^{2018}}+\dfrac{2020}{2^{2019}}$. Hãy so sánh T với 3

4.12. Cho $S=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+...+\dfrac{1}{2011}-\dfrac{1}{2012}+\dfrac{1}{2013}$ và $P=\dfrac{1}{1007}+\dfrac{1}{1008}+...+\dfrac{1}{2012}+\dfrac{1}{2013}$.Tính $(S-P)^{2013}$

(Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán, lớp 7, tỉnh Bắc Giang, năm học 2012 - 2013)

4.13. Tìm tất cả các số tự nhiên a, b sao cho : $2^{a}+37=|b-45|+b-45$

4.14. Chứng tỏ rằng:

a) $63^{63}-37^{37}$ chia hết cho 10

b) $2^{100}+2^{101}+2^{102}$ chia hết cho 7

c) $7^{100}-7^{99}-7^{98}$ chia hết cho 41

4.15. Thu gọn biểu thức sau :

a) $A=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^4}+...+\dfrac{1}{2^{2020}}$

b) $B=\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{5^3}+\dfrac{1}{5^4}+...+\dfrac{1}{5^{2019}}-\dfrac{1}{5^{2020}}$

c) $C=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3^2}+\dfrac{3}{3^3}+\dfrac{4}{3^4}+...+\dfrac{2020}{3^{2020}}$

4.16. ***Đố.*** Bạn có thể điền các lũy thừa của 2 vào các ô vuông còn lại trong bảng bên sao cho tích các lũy thừa trong mỗi hàng, mỗi cột và mỗi đường chéo bằng nhau được không ?

	2^1	
	2^5	
	2^9	

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

4.1

a) $A=\dfrac{6.\left(1+3-3^2\right)}{3^2\left(1+3-3^2\right)}=\dfrac{6}{3^2}=\dfrac{2}{3}$

b) $B=\dfrac{2^{12}.3^5-2^{12}.3^4}{2^{12}.3^6+2^{12}.3^5}=\dfrac{2^{12}.3^4\left(3-1\right)}{2^{12}.3^5\left(3+1\right)}=\dfrac{3^4.2}{3^5.4}=\dfrac{1}{6}$

4.2. $A=\dfrac{5^{10}.7^3-5^{10}.7^4}{5^9.7^3+5^9.2^3.7^3}=\dfrac{5^{10}.7^3.\left(1-7\right)}{5^9.7^3.\left(1+2^3\right)}=\dfrac{5.\left(-6\right)}{9}=\dfrac{-10}{3}$

4.3. Xét $R=2^{2019}+2^{2018}+...+2+1\Rightarrow 2R=2^{2020}+2^{2019}+...+2^2+2$

$\Rightarrow 2R-R=2^{2020}-1\Rightarrow R=2^{2020}-1$ do đó : $T=2^{2020}-R=1$

$\Rightarrow 2021^T=2021$

4.4.

a) $3^x\left(3^2+1\right)=810\Leftrightarrow 3^x.10=810\Leftrightarrow 3^x=81\Leftrightarrow x=4$

b) Ta có $2^{x+2}.3^{x+1}.5^x=10800\Leftrightarrow 2^x.2^2.3^x.3.5^x=10800\Leftrightarrow\left(2.3.5\right)^x=900$

$\Leftrightarrow 30^x=30^2\Leftrightarrow x=2$

4.5. $\dfrac{7^{x+2}+7^{x+1}+7^x}{57}=\dfrac{5^{2x}+5^{2x+1}+5^{2x+3}}{131}\Leftrightarrow\dfrac{7^x\left(7^2+7+1\right)}{57}=\dfrac{5^{2x}\left(1+5+5^3\right)}{131}$

$7^x=5^{2x}\Leftrightarrow 7^x=25^x\Leftrightarrow\left(\dfrac{7}{25}\right)^x=1\Leftrightarrow x=0$

4.6.

a) Ta có $\dfrac{1}{2.2}.\dfrac{2}{2.3}.\dfrac{3}{2.4}.\dfrac{4}{2.5}.\dfrac{5}{2.6}...\dfrac{30}{2.31}.\dfrac{31}{64}=4^x$

$\dfrac{1}{2^{30}.64}=4^x\Leftrightarrow 4^x.2^{30}.2^6=1\Leftrightarrow 2^{2x+36}=2^0$

$\Leftrightarrow 2x+36=0\Leftrightarrow x=-18$

b) $\dfrac{4.4^5}{3.3^5}.\dfrac{6.6^5}{2.2^5}=8^x\Leftrightarrow\dfrac{4.6}{3.2}\left(\dfrac{4.6}{3.2}\right)^5=8^x$

$\Leftrightarrow 4.4^5=2^{3x}\Leftrightarrow 2^{12}=2^{3x}\Leftrightarrow 3x=12\Leftrightarrow x=4$

4.7. Đặt vế trái của bất đẳng thức là A

Xét : $49.A=1-\dfrac{1}{7^2}+...+\dfrac{1}{7^{4n-4}}-\dfrac{1}{7^{4n-2}}+...+\dfrac{1}{7^{96}}-\dfrac{1}{7^{98}}$

Suy ra : $49A+A=1-\dfrac{1}{7^{100}}$ hay: $50.A=1-\dfrac{1}{7^{100}}<1\Rightarrow A<\dfrac{1}{50}$

Điều phải chứng minh.

4.8. Xét $3.B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^{2019}} + \frac{1}{3^{2020}} \Rightarrow 3B - B = 1 - \frac{1}{3^{2021}}$

$\Rightarrow 2.B = 1 - \frac{1}{3^{2021}} < 1 \Rightarrow B < \frac{1}{2}$

4.9. Đặt $A = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + ... + \frac{1}{100^2}$

Ta có $A < \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + ... + \frac{1}{99.100}$

$\Rightarrow A < \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + ... + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$

$\Rightarrow A < \frac{1}{4} - \frac{1}{100} < \frac{1}{4} (1)$

Ta có : $A = \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + ... + \frac{1}{99.100} + \frac{1}{100.101}$

$\Rightarrow A > \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{100} - \frac{1}{101}$

$\Rightarrow A > \frac{1}{5} - \frac{1}{101} > \frac{1}{5} - \frac{1}{100} = \frac{19}{100} = \frac{57}{300} > \frac{50}{300} = \frac{1}{6} (2)$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

4.10. Ta có : $\frac{3}{1^2.2^2} + \frac{5}{2^2.3^2} + \frac{7}{3^2.4^2} + ... + \frac{19}{9^2.10^2} =$

$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{10^2} = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} < 1$

Điều phải chứng minh

4.11. Xét : $2T = 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{2^2} + ... + \frac{2020}{2^{2018}}$

mà $T = \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + ... + \frac{2019}{2^{2018}} + \frac{2020}{2^{2019}}$

Suy ra : $2T - T = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^{2018}} - \frac{2020}{2^{2019}}$

$\Rightarrow T = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^{2018}} - \frac{2020}{2^{2019}}$

$\Rightarrow 2T = 4 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{2017}} - \frac{2020}{2^{2018}}$

$\Rightarrow T = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^{2018}} - \frac{2020}{2^{2019}} \Rightarrow 2T - T = 3 - \frac{2021}{2^{2018}} + \frac{2020}{2^{2019}} < 3$

$\Rightarrow T < 3$

4.12. Ta có :

$P=\frac{1}{1007}+\frac{1}{1008}+...+\frac{1}{2012}+\frac{1}{2013}$

$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{1006}+\frac{1}{1007}+\frac{1}{1008}+...+\frac{1}{2012}+\frac{1}{2013}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{1006}\right)$

$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{1006}+\frac{1}{1007}+\frac{1}{1008}+...+\frac{1}{2012}+\frac{1}{2013}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{2012}\right)$

$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...-\frac{1}{2012}+\frac{1}{2013}=S$

Do đó $(S-P)^{2013}=0$

4.13. Xét $b\ge 45\Rightarrow |b-45|+b-45=b-45+b-45=2b-90$ là số chẵn

Xét $b<45\Rightarrow |b-45|+b-45=45-b+b-45=0$ là số chẵn

$\Rightarrow 2^a+37$ là số chẵn $\Rightarrow 2^a$ là số lẻ $\Rightarrow a=0\Rightarrow 1+37=|b-45|+b-45$

Theo nhận xét trên thì $b\ge 45$ do đó $38=2b-90\Rightarrow b=64$

Vậy $a=0;\ b=64$.

4.14.

a) $63^{63}=63^{60}.63^3=(63^4)^{15}.63^3$

Ta có 63^4 tận cùng là 1 nên $(63^4)^{15}$ tận cùng là 1 , mà 63^3 tận cùng là 7

Suy ra $(63^4)^{15}.63^3$ tận cùng là $7\Rightarrow 63^{63}$ tận cùng là 7

Ta có: $37^{37}=37^{36}.37=(37^4)^9.37$

Ta có 37^4 tận cùng là 1 nên $(37^4)^9$ tận cùng là 1

Suy ra $(37^4)^9.37$ tận cùng là 7

Do vậy 63^3-37^{37} tận cùng là 0. Vậy 63^3-37^{37} *chia hết cho 10*

b) $2^{100}(1+2+2^2)=2^{100}.7$ chia hết cho 7

c) $7^{98}(7^2-7-1)=7^{98}.41$ chia hết cho 41

4.15.

a) Xét $2.A=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{2019}}$

suy ra $2A-A=1-\frac{1}{2^{2020}}\Rightarrow A=1-\frac{1}{2^{2020}}$

b) Xét $5B=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{5^3}+...+\frac{1}{5^{2018}}-\frac{1}{5^{2019}}$

suy ra $5B + B = 1 - \dfrac{1}{5^{2020}} \Rightarrow B = \dfrac{5^{2020} - 1}{6.5^{2020}}$

c) Xét $3C = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{3^2} + \dfrac{4}{3^3} + ... + \dfrac{2020}{3^{2019}}$

suy ra $3C - C = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^3} + ... + \dfrac{1}{3^{2019}} - \dfrac{2020}{3^{2020}}$

$$2C = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^3} + ... + \dfrac{1}{3^{2019}} + \dfrac{2020}{3^{2020}}$$

Xét $6C = 3 + 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^3} + ... \dfrac{1}{3^{2018}} + \dfrac{2020}{3^{2019}}$

Suy ra : $6C - 2C = 3 + \dfrac{2019}{3^{2019}} - \dfrac{2020}{3^{2020}} \Rightarrow C = \left(3 + \dfrac{2019}{3^{2019}} - \dfrac{2020}{3^{2020}}\right) : 4$

4.16. Bạn có thể điền như sau :

2^8	2^1	2^6
2^3	2^5	2^7
2^4	2^9	2^2

Chuyên đề 5. TỈ LỆ THỨC. TÍNH CHẤT CỦA DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa. Tỉ lệ thức là đẳng thức của hai tỉ số

- Dạng tổng quát : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ hoặc $a:b=c:d$

Các số a và d gọi là ngoại tỉ ; các số b và c gọi là trung tỉ.

2. Tính chất của tỉ lệ thức

- Tính chất cơ bản : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc\ (b,d\neq 0)$
- Tính chất hoán vị: Từ một tỉ lệ thức ta có thể:

+ Đổi chỗ hai ngoại tỉ cho nhau;

+ Đổi chỗ hai trung tỉ cho nhau;

+ Vừa đổi chỗ hai ngoại tỉ, vừa đổi chỗ hai trung tỉ.

3. Từ dãy tỉ số $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ ta suy ra : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{a-c+e}{b-d+f}$

(Giả thiết các tỉ số đều có nghĩa)

4. Khi có dãy tỉ số $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{5}$, ta nói các số a, b, c tỉ lệ với các số 2; 3; 5.

Ta cũng viết $a:b:c=2:3:5$

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Tìm hai số x và y biết $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}$ và $2x+3y=36$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Để tìm x,y trong dãy tỉ số bằng nhau và biết thêm điều kiện rằng buộc. Ta có thể:

- *Cách 1.* Đặt hệ số tỉ lệ k làm ẩn phụ
- *Cách 2.* Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau
- *Cách 3.* Biểu diễn x theo y từ tỉ lệ thức (hoặc y theo x)

✓ *Trình bày lời giải*

+ **Cách 1 :** (Đặt ẩn phụ)

Đặt $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=k$ suy ra : $x=3k, y=4k$

Theo giả thiết : $2x+3y=36\Rightarrow 6k+12k=36\Rightarrow 18k=36\Rightarrow k=2$

Do đó : $x=3.2=6; y=4.2=8$

Kết luận $x=6, y=8$

+ **Cách 2:** (sử dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau):

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có : $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{2x+3y}{2.3+3.4}=\frac{36}{18}=2$

Do đó : $\frac{x}{3}=2\Rightarrow x=6$

$\frac{y}{4}=2\Rightarrow y=8$

Kết luận : $x=6, y=8$

+ **Cách 3:** (phương pháp thế)

Từ giả thiết $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}\Rightarrow x=\frac{3y}{4}$

Mà $2x+3y=36\Rightarrow\frac{3y}{2}+3y=36\Rightarrow 9y=72\Rightarrow y=8$

Do đó : $x=\frac{3.8}{4}=6$

Kết luận $x=6, y=8$

Ví dụ 2: Tìm x, y, z biết : $\frac{x}{3}=\frac{y}{4},\frac{y}{3}=\frac{z}{5}$ và $2x-3y+z=6$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Từ hai tỉ lệ thức của giả thiết ,ta cần nối lại tạo thành dãy tỉ số bằng nhau. Quan sát hai tỉ lệ thức ta thấy chúng có chung y vì vậy khi nối cần tạo thành phần chứa y giống nhau. Sau đó vẫn ý tưởng như ví dụ trên, chúng ta có 3 cách giải.

- *Cách 1.* Đặt hệ số tỉ lệ k làm ẩn phụ. Biểu thị x, y, z theo hệ số tỉ lệ k.
- *Cách 2.* Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau.
- *Cách 3.* Biểu diễn x, y theo z từ dãy tỉ số bằng nhau.

✓ *Trình bày lời giải*

+ **Cách 1.** Từ giả thiết : $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}\Rightarrow\frac{x}{9}=\frac{y}{12}(1)$

$\frac{y}{3}=\frac{z}{5}\Rightarrow\frac{y}{12}=\frac{z}{20}(2)$

Từ (1) và (2) , suy ra : $\frac{x}{9}=\frac{y}{12}=\frac{z}{20}(*)$

Ta đặt $\frac{x}{9}=\frac{y}{12}=\frac{z}{20}=k$ suy ra $x=9k; y=12k; z=20k$

Theo giả thiết : $2x-3y+z=6\Rightarrow 18k-26k+20k=6\Rightarrow 2k=6\Rightarrow k=3$

Do đó: $x=27, y=36, z=60$.

+ **Cách 2.** Chúng ta biến đổi giả thiết như cách 1 đến (*)

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$\frac{x}{9}=\frac{y}{12}=\frac{z}{20}=\frac{2x}{18}=\frac{3y}{36}=\frac{z}{20}=\frac{2x-3y+z}{18-36+20}=\frac{6}{2}=3$

Do đó: $\frac{x}{9}=3\Rightarrow x=27$

$\frac{y}{12}=3\Rightarrow y=36$

$\frac{z}{20}=3\Rightarrow z=60$

Kết luận : $x=27, y=36, z=60$.

+ **Cách 3.** (phương pháp thế : ta tính x, y theo z)

Từ giả thiết : $\frac{y}{3}=\frac{z}{5}\Rightarrow y=\frac{3z}{5};\frac{x}{3}=\frac{y}{4}\Rightarrow x=\frac{3y}{4}=\frac{3.\frac{3z}{5}}{4}=\frac{9z}{20}$

Mà $2x-3y+z=6\Rightarrow 2.\frac{9z}{20}-3.\frac{3z}{5}+z=6\Rightarrow \frac{z}{10}=60\Rightarrow z=60$

Suy ra : $y=\frac{3.60}{5}=36, x=\frac{9.60}{20}=27$

Kết luận : $x=27, y=36, z=60$

Ví dụ 3: Tìm hai số x và y biết $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$ và $xy=24$

Giải

Đặt $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=k$ suy ra : $x=2k, y=3k$

Theo giả thiết : $xy=24\Rightarrow 2k.3k=24\Rightarrow k^2=4\Rightarrow k=\pm 2$

+ Với $k=2$ thì $x=4; y=6$

+ Với $k=-2$ thì $x=-4; y=-6$

Kết luận. Vậy $(x;y)$ là $(-4;-6),(4;6)$.

✓ **Nhận xét.** Trong ví dụ này có thể chúng ta mắc sai lầm sau :

+ Thứ nhất trong lời giải trên thiếu trường hợp $k=-2$

+ Thứ hai chúng ta vận dụng tính chất : $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{xy}{2.3}=\frac{24}{6}=4!$ Chúng ta lưu ý rằng tính chất dãy tỉ số bằng nhau không cho phép nhân (hoặc chia) tử thức với nhau. Do vậy gặp điều kiện về phép nhân hoặc lũy thừa giữa các biến, chúng ta nên đặt hệ số tỉ lệ k làm ẩn phụ

Ví dụ 4:Với a, b, c, x, y, z khác 0 , biết $\frac{bz-cy}{a}=\frac{cx-az}{b}=\frac{ay-bx}{c}$

Chứng minh rằng : $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Quan sát phần kết luận ta cần biến đổi đưa về : $ay = bx, bz = cy, az = cx$ hay cần chứng minh $ay - bx = 0, bz - cy = 0, az - cx = 0$. Vì vậy từ giả thiết ta cần chứng minh $\frac{bz-cy}{a} = \frac{cx-az}{b} = \frac{ay-bx}{c} = 0$. Với suy nghĩ đó , chúng ta cần nhân mỗi tỉ số với một số thích hợp vào tử và mẫu số sao cho khi vận dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau thì được kết quả bằng 0. Quan sát tỉ số $\frac{bz-cy}{a}$ và $\frac{cx-az}{b}$ ta thấy bz và $-az$; để triệt tiêu được, chúng ta cần nhân cả tử và mẫu của tỉ số thứ nhất với a; nhân cả tử và mẫu của tỉ số thứ hai với b. Tương tự như vậy với tỉ số thứ ba.

✓ *Trình bày lời giải*

Từ đề bài ta có : $\frac{abz-acy}{a^2} = \frac{bcx-abz}{b^2} = \frac{acy-bcx}{c^2}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{abz-acy}{a^2} = \frac{bcx-abz}{b^2} = \frac{acy-bcx}{c^2} = \frac{abz-acy+bcx-abz+acy-bcx}{a^2+b^2+c^2} = 0$$

Suy ra $ay - bx = 0, bz - cy = 0, bz - cx = 0$

$$\Rightarrow ay = bx, bz = cy, bz = cx \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

Ví dụ 5: Một khu đất hình chữ nhật có chiều rộng và chiều dài tỉ lệ với 5 và 8. Diện tích bằng $1960m^2$. Tính chu vi hình chữ nhật đó.

Giải

✓ *Trình bày lời giải*

Đặt chiều rộng và chiều dài khu đất là x và y (mét; x,y > 0)

Theo đề bài , ta có : $\frac{x}{5} = \frac{y}{8}$ và $xy = 1960$

Đặt $\frac{x}{5} = \frac{y}{8} = k$ (điều kiện k > 0) , suy ra : $x = 5k, y = 8k$

Theo giả thiết : $xy = 1960 \Rightarrow 5k.8k = 1960 \Rightarrow k^2 = 49 \Rightarrow k = 7$ (vì $k > 0$)

Từ đó ta tìm được : $x = 35; y = 56$

Suy ra chu vi hình chữ nhật là : $(35+56).2 = 182(m)$

Ví dụ 6: Cho a, b, c, d khác 0 và không đối nhau từng đôi một, thỏa mãn dãy tỷ số bằng nhau :

$$\frac{2020a+b+c+d}{a} = \frac{a+2020b+c+d}{b} = \frac{a+b+2020c+d}{c} = \frac{a+b+c+2020d}{d}$$

Tính $M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$

Giải

Từ giả thiết suy ra :

$$2019+\frac{a+b+c+d}{a}=2019+\frac{a+b+c+d}{b}=2019+\frac{a+b+c+d}{c}=2019+\frac{a+b+c+d}{d}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c+d}{a}=\frac{a+b+c+d}{b}=\frac{a+b+c+d}{c}=\frac{a+b+c+d}{d}$$

+ *Trường hợp 1:* Xét $a+b+c+d=0 \Rightarrow a+b=-(c+d); b+c=-(d+a)$

Suy ra $M=\frac{-(c+d)}{c+d}+\frac{-(d+a)}{d+a}+\frac{c+d}{-(c+d)}+\frac{d+a}{-(d+a)}$

$M=(-1)+(-1)+(-1)+(-1)=-4$

+ *Trường hợp 2* :Xét $a+b+c+d\neq 0$

Suy ra $a=b=c=d \Rightarrow M=\frac{a+a}{a+a}+\frac{a+a}{a+a}+\frac{a+a}{a+a}=1+1+1+1=4$

Ví dụ 7: Cho a, b, c, d khác 0 ,thỏa mãn tỉ lệ thức $\frac{21a+10b}{a-11b}=\frac{21c+10d}{c-11d}$

Chứng minh rằng $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

Giải

Từ $\frac{21a+10b}{21c+10d}=\frac{a-11b}{c-11d}$. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau , ta có :

Từ $\frac{21a+10b}{21c+10d}=\frac{a-11b}{c-11d}=\frac{21a-231b}{21c-231d}=\frac{21a+10b-(21a-231b)}{21c+10d-(21c-231d)}=\frac{241b}{241d}=\frac{b}{d}(1)$

Từ $\frac{231a+110b}{231c+110d}=\frac{10a-110b}{10c-110d}=\frac{231a+110b+10a-110b}{231c+110d+10c-110d}=\frac{241a}{241c}=\frac{a}{c}(2)$

Từ (1) và (2) , suy ra : $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ hay $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

Ví dụ 8: Độ dài các cạnh của một tam giác tỉ lệ với nhau như thế nào, biết nếu cộng lần lượt từng độ dài hai đường cao của tam giác đó thì các tổng này tỉ lệ với 7; 6 ; 5.

Giải

Đặt độ dài ba cạnh tam giác là a, b, c. Độ dài ba đường cao tương ứng là $h_a;h_b;h_c$. Theo đề bài ta có :

$\frac{h_a+h_b}{7}=\frac{h_b+h_c}{6}=\frac{h_c+h_a}{5}$ và $ah_a=bh_b=ch_c$ (1)

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{h_a+h_b}{7}=\frac{h_b+h_c}{6}=\frac{h_c+h_a}{5}=\frac{h_a+h_b-h_b-h_c}{7-6}=h_a-h_c$$

$\Rightarrow h_c + h_a = 5h_a - 5h_c \Rightarrow 2h_a = 3h_c \Rightarrow \frac{h_a}{3} = \frac{h_c}{2}(2)$

Mặt khác $\frac{h_a + h_b}{7} = \frac{h_b + h_c}{6} \Rightarrow \frac{2h_a + 2h_b}{14} = \frac{h_b + h_c}{6} \Rightarrow \frac{3h_c + 2h_b}{14} = \frac{h_b + h_c}{6}$

$\Rightarrow 3(3h_c + 2h_b) = 7(h_b + h_c) \Rightarrow 9h_c + 6h_b = 7h_b + 7h_c \Rightarrow 2h_c = h_b \Rightarrow \frac{h_c}{2} = \frac{h_b}{4}(2)$

Từ (2),(3) suy ra : $\frac{h_a}{3} = \frac{h_b}{4} = \frac{h_c}{2}$

Đặt $\frac{h_a}{3} = \frac{h_b}{4} = \frac{h_c}{2} = k\ (k > 0) \Rightarrow h_a = 3k; h_b = 4k; h_c = 2k$

Kết hợp với (1), ta có : $3a = 4b = 2c \Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{b}{3} = \frac{c}{6}$

Vậy độ dài ba cạnh tỉ lệ với 4; 3; 6.

C. Bài tập vận dụng

5.1. Tìm x, y biết :

a) $\frac{1+2y}{18} = \frac{1+4y}{24} = \frac{1+6y}{6x}$; b) $\frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{5x} = \frac{1+7y}{4x}$

5.2. Cho x, y thỏa mãn $\frac{2x+1}{5} = \frac{3y-2}{7} = \frac{2x+3y-1}{6x}$. Tìm x, y

5.3. Tìm các số x, y, z biết rằng:

a) $x : y : z = 3 : 4 : 5$ và $5z^2 - 3x^2 - 2y^2 = 594$

b) $3(x-1) = 2(y-2); 4(y-2) = 3(z-3)$ và $2x + 3y - z = 50$

c) $\frac{2x}{3} = \frac{3y}{4} = \frac{4z}{5}$ và $x + y - z = 38$

5.4. Tìm x, y, z biết rằng:

a) $7x = 10y = 12z$ và $x + y + z = 685$;

b) $\frac{x+y}{3} = \frac{5-z}{1} = \frac{y+z}{2} = \frac{9+y}{5}$;

c) $\frac{y+z+1}{x} = \frac{z+x+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = x + y + z$

d) $\frac{x}{y+z+2} = \frac{y}{x+z+5} = \frac{z}{x+y-7} = x + y + z$;

e) $\frac{xy+1}{9} = \frac{xz+2}{15} = \frac{yz+3}{27}$ và $xy + yz + zx = 11$

5.5. Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng:

a) $(a+2c).(b+d)=(a+c).(b+2d)$;

b) $\dfrac{a^{2020}+b^{2020}}{c^{2020}+d^{2020}}=\dfrac{(a+b)^{2020}}{(c+d)^{2020}}$

5.6. Cho $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$. Các số x, y, z, t thỏa mãn $xa+yb\neq 0$ và $zc+td\neq 0$

Chứng minh $\dfrac{xa+yb}{za+tb}=\dfrac{xc+yd}{zc+td}$

5.7. Cho tỉ lệ thức $\dfrac{3x-y}{x+y}=\dfrac{3}{4}$. Tính giá trị của tỉ số $\dfrac{x}{y}$

5.8. Chứng minh rằng : Nếu $2(x+y)=5(y+z)=3(z+x)$ thì $\dfrac{x-y}{4}=\dfrac{y-z}{5}$

5.9. Cho a, b, c, d khác 0, thỏa mãn $b^2=ac;c^2=bd$. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{a^3+b^3-c^3}{b^3+c^3-d^3}=\left(\dfrac{a+b-c}{b+c-d}\right)^3$;

b) $\dfrac{a^3+8b^3+27c^3}{b^3+8c^3+27d^3}=\dfrac{a}{d}$.

5.10. Chứng minh nếu $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)$ trong đó a, b, c khác nhau và khác 0 thì ta có

$\dfrac{y-z}{a(b-c)}=\dfrac{z-x}{b(c-a)}=\dfrac{x-y}{c(a-b)}$

5.11. Cho a, b, c thỏa mãn $\dfrac{a}{2016}=\dfrac{b}{2018}=\dfrac{c}{2020}$. Chứng minh rằng :

$\dfrac{(a-c)^2}{4}=(a-b)(b-c)$

5.12. Cho $a+b+c=a^2+b^2+c^2=1$ và $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$. Chứng minh rằng :

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2$

5.13. Cho $\dfrac{x}{y+z+t}=\dfrac{y}{z+t+x}=\dfrac{z}{t+x+y}=\dfrac{t}{x+y+z}$. Chứng minh rằng biểu thức sau có giá trị nguyên $A=\dfrac{x+y}{z+t}+\dfrac{y+z}{t+x}+\dfrac{z+t}{x+y}+\dfrac{t+x}{y+z}$

5.14. Cho dãy tỉ số bằng nhau : $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{a_2}{a_3}=...=\dfrac{a_{2019}}{a_{2020}}=\dfrac{a_{2020}}{a_1}$

Tính giá trị biểu thức $B=\dfrac{(a_1+a_2+...+a_{2020})^2}{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+...+a_{2020}{}^2}$

5.15. Cho $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{a}$ và $a+b+c\neq 0$. Tính $P=\dfrac{a^{49}.b^{51}}{c^{100}}$

5.16. Cho a, b, c là ba số dương, thỏa mãn điều kiện : $\frac{a+b-c}{c}=\frac{b+c-a}{a}=\frac{c+a-b}{b}$

Hãy tính giá trị của biểu thức $B=\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)$.

5.17. Cho a, b, c thỏa mãn $\frac{a+b+c}{a+b-c}=\frac{a-b+c}{a-b-c}$ và $b\neq 0$.Chứng minh rằng : $c=0$

5.18. Cho x, y, z khác 0, thỏa mãn $\frac{x-y}{x+y}=\frac{z-x}{z+x}$. Chứng minh rằng $x^2=yz$

5.19. Cho $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}$ và $\frac{y}{5}=\frac{z}{6}$.Tính giá trị biểu thức $A=\frac{2x+3y+4z}{3x+4y+5z}$ (giả thiết A có nghĩa)

5.20. Cho các số a; b; c khác 0 thỏa mãn $\frac{ab}{a+b}=\frac{bc}{b+c}=\frac{ca}{c+a}$

Tính giá trị của biểu thức $P=\frac{ab^2+bc^2+ca^2}{a^3+b^3+c^3}$

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

5.1.

a) Vì $\frac{1+2y}{18}=\frac{1+4y}{24}\Rightarrow 24(1+2y)=18(1+4y)\Rightarrow 24+48y=18+72y$

$\Rightarrow 24y=6\Rightarrow y=\frac{1}{4}$. Thay vào đề bài ta có :

$$\frac{1+2.\frac{1}{4}}{18}=\frac{1+6.\frac{1}{4}}{6x}\Rightarrow\frac{\frac{3}{2}}{18}=\frac{\frac{5}{3}}{6x}\Rightarrow\frac{3}{2}.6x=18.\frac{5}{3}\Rightarrow 18x=90\Rightarrow x=5$$

b) Ta có : $\frac{1+3y}{12}=\frac{1+5y}{5x}=\frac{1+7y}{4x}=\frac{4+20y}{20x}=\frac{5+35y}{20x}=$

$=\frac{1+3y+4+20y-5-35y}{12+20x-20x}=\frac{-12y}{12}=-y$

$\Rightarrow 1+3y=-12y\Rightarrow y=-\frac{1}{15}$

Thay vào đề bài ,ta được : $\frac{1+5.\frac{-1}{15}}{5x}=\frac{1}{15}\Rightarrow x=2$

Vậy $x=2$ và $y=-\frac{1}{15}$

5.2. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$\frac{2x+1}{5}=\frac{3y-2}{7}=\frac{2x+1+3y-2}{5+7}=\frac{2x+3y-1}{12}$

Kết hợp với đề bài suy ra: $\frac{2x+3y-1}{12}=\frac{2x+3y-1}{6x}$

✓ *Trường hợp 1:* Xét $2x+3y-1=0$

suy ra: $\frac{2x+1}{5}=\frac{3y-2}{7}=0\Rightarrow 2x+1=0;3y-2=0\Rightarrow x=\frac{-1}{2};y=\frac{2}{3}$

✓ *Trường hợp 2:* Xét $2x+3y-1\neq 0$ suy ra $6x=12\Rightarrow x=2$

Thay vào đề bài ta có : $\frac{2.2+1}{5}=\frac{3y-2}{7}\Rightarrow\frac{3y-2}{7}=1\Leftrightarrow 3y-2=7\Leftrightarrow y=3$

Vậy $x=2;y=3$

Nhận xét. bài này dễ bỏ sót trường hợp 1

5.3.

a) Đặt $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}=k\Rightarrow x=3k;y=4k;z=5k$

Mà $5z^2-3x^2-2y^2=594\Rightarrow 5.25k^2-3.9k^2-2.16k^2=594$

$\Leftrightarrow 66k^2 = 594 \Leftrightarrow k^2 = 9 \Leftrightarrow k = \pm 3$

+ Với $k = 3$ suy ra $x = 9; y = 12; z = 15$

+ Với $k = -3$ suy ra $x = -9; y = -12; z = -15$

b) $3(x-1) = 2(y-2) \Rightarrow 6(x-1) = 4(y-2)$ suy ra $6(x-1) = 4(y-2) = 3(z-3)$

$\Rightarrow \frac{6(x-1)}{12} = \frac{4(y-2)}{12} = \frac{3(z-3)}{12} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{4}$

Đặt $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} = k \Rightarrow x = 2k+1; y = 3k+2; z = 4k+3$

Mà $2x + 3y - z = 50 \Rightarrow 2(2k+1) + 3(3k+2) - (4k+3) = 50$

$\Leftrightarrow 4k + 2 + 9k + 6 - 4k - 3 = 50 \Leftrightarrow 9k = 45 \Leftrightarrow k = 5$

Vậy $x = 2.5 + 1 = 11; y = 3.5 + 2 = 17; z = 4.5 + 3 = 23$

c) Ta có : $\frac{2x}{3}.\frac{1}{12} = \frac{3y}{4}.\frac{1}{12} = \frac{4z}{5}.\frac{1}{12} \Rightarrow \frac{x}{18} = \frac{y}{16} = \frac{z}{15}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$\frac{x}{18} = \frac{y}{16} = \frac{z}{15} = \frac{x+y-z}{18+16-15} = \frac{38}{19} = 2$

suy ra : $x = 36; y = 32; z = 30$

5.4.

a) Từ $7x = 10y = 12z \Rightarrow \frac{x}{60} = \frac{y}{42} = \frac{z}{35}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau , ta có :

$\frac{x}{60} = \frac{y}{42} = \frac{z}{35} = \frac{x+y+z}{60+42+35} = \frac{685}{137} = 5$

Từ đó suy ra : $x = 120; y = 210; z = 175$

b) Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$\frac{5-z}{1} = \frac{y+z}{2} = \frac{9+y}{5} = \frac{5-z+y+z-9-y}{1+2-5} = 2$

$\Rightarrow 5 - z = 2 \Rightarrow z = 3; 9 + y = 10 \Rightarrow y = 1; X + y = 6 \Rightarrow x = 5$

a) Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$\frac{y+z+1}{x} = \frac{z+x+2}{y} = \frac{x+y-3}{x} = \frac{x+z+1+z+x+2+x}{x+y+z} = 2$

Kết hợp với đề bài, suy ra : $x + y + z = 2$

Suy ra : $y + z + 1 = 2x \Rightarrow x + y + z + 1 = 3x \Rightarrow 1 + 2 = 3x \Rightarrow x = 1$

$z + x + 2 = 2y \Rightarrow x + y + z + 2 = 3y \Rightarrow 4 = 3y \Rightarrow y = \frac{4}{3}$

$x+y-3=2z\Rightarrow x+y=z-3=3z\Rightarrow 2-3=3z\Rightarrow z=-\dfrac{1}{2}$

b) Giải tương tự *câu c,* ta được : $x=\dfrac{5}{6};y=\dfrac{11}{6};z=\dfrac{-13}{6}$

c) Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{xy+1}{9}=\frac{zx+2}{15}=\frac{yz+3}{27}=\frac{xy+1+zx+2+yz+3}{9+15+27}=\frac{17}{51}$$

Suy ra : $xy+1=3\Rightarrow xy=2(1)$

$zx+2=5\Rightarrow zx=3(2)$

$yz+3=9\Rightarrow yz=6(3)$

Từ (1) ,(2) và (3) nhân vế với vế : $(xyz)^2=36\Rightarrow xyz=\pm 6$

+ Trường hợp $xyz=6$

Kết hợp với (1),(2) và (3) ta có : $x=1;y=2;z=3$

+ Trường hợp $xyz=-6$

Kết hợp với (1),(2) và (3) ta có: $x=-1;y=-2;z=-3$

5.5. Đặt $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k\Rightarrow a=bk,c=dk$

a) Xét $(a+2c)(b+d)=(bk+2dk)(b+d)=k.(b+2d).(b+d)(1)$

Xét $(a+c)(b+2d)=(bk+dk)(b+2d)=k(b+d)(b+2d)(2)$

Từ (1) và (2), suy ra : $(a+2c)(b+d)=(a+c)(b+2d)$

b) Đặt $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k\Rightarrow a=bk,c=dk$

Xét $\dfrac{a^{2020}+b^{2020}}{c^{2020}+d^{2020}}=\dfrac{b^{2020}.k^{2020}+b^{2020}}{d^{2020}.k^{2020}+d^{2020}}=\dfrac{b^{2020}\left(k^{2020}+1\right)}{d^{2020}\left(k^{2020}+1\right)}=\dfrac{b^{2020}}{d^{2020}}(1)$

Xét $\dfrac{(a+b)^{2020}}{(c+d)^{2020}}=\dfrac{(bk+b)^{2020}}{(dk+d)^{2020}}=\dfrac{b^{2020}(k+1)^{2020}}{d^{2020}(k+1)^{2020}}=\dfrac{b^{2020}}{d^{2020}}(2)$

Từ (1) và (2) , suy ra điều phải chứng minh

5.6. Đặt $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k\Rightarrow a=bk;c=dk$

Xét $\dfrac{xa+yb}{za+tb}=\dfrac{xbk+yb}{zbk+tb}=\dfrac{b(xk+y)}{b(zk+t)}=\dfrac{xk+y}{zk+t}(1)$

Xét $\frac{xc+yd}{zc+td}=\frac{xdk+yd}{zdk+td}=\frac{d(xk+y)}{d(zk+t)}=\frac{xk+y}{zk+t}(2)$

Từ (1) và (2) , suy ra : $\frac{xa+yb}{za+tb}=\frac{xc+yd}{zc+td}$, điều phải chứng minh

5.7. Từ $\frac{3x-y}{x+y}=\frac{3}{4}$ suy ra : $4(3x-y)=3(x+y)\Rightarrow 12x-4y=3x+3y$

$\Rightarrow 12x-3x=3y+4y\Rightarrow 9x=7y\Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{7}{9}$

5.8. Từ $2(x+y)=5(y+z)=3(z+x)$ suy ra :

$\frac{2(x+y)}{30}=\frac{5(y+z)}{30}=\frac{3(z+x)}{30}\Rightarrow \frac{x+y}{15}=\frac{x+z}{6}=\frac{z+x}{10}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$\frac{x+y}{15}=\frac{y+z}{6}=\frac{z+x}{10}=\frac{(x+y)-(z+x)}{15-10}=\frac{y-z}{5}(1)$

$\frac{x+y}{15}=\frac{y+z}{6}=\frac{z+x}{10}=\frac{(z+x)-(y+z)}{10-6}=\frac{x-y}{4}(2)$

Từ (1) và (2) , suy ra : $\frac{x-y}{4}=\frac{y-z}{5}$, điều phải chứng minh.

5.9. Từ $b^2=ac\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{b}{c};c^2=bd\Rightarrow \frac{b}{c}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$.

Đặt $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=k\Rightarrow a=bk;b=ck;c=dk$

a) Xét $\frac{a^3+b^3-c^3}{b^3+c^3-d^3}=\frac{b^3k^3+c^3k^3-d^3k^3}{b^3+c^3-d^3}=\frac{k^3(b^3+c^3-d^3)}{b^3+c^3-d^3}=k^3(1)$

Xét $\left(\frac{a+b-c}{b+c-d}\right)^3=\left(\frac{bk+ck-dk}{b+c-d}\right)^3=\left(\frac{k(b+c-d)}{b+c-d}\right)^3=k^3(2)$

Từ (1) và (2), suy ra : $\frac{a^3+b^3-c^3}{b^3+c^3-d^3}=\left(\frac{a+b-c}{b+c-d}\right)^3$ điều phải chứng minh.

b) Xét $\frac{a^3+8b^3+27c^3}{b^3+8c^3+27d^3}=\frac{b^3k^3+8c^3k^3+27d^3k^3}{b^3+8c^3+27d^3}=\frac{k^3(b^3+8c^3+27d^3)}{b^3+8c^3+27d^3}=k^3(3)$

Xét $\frac{a}{d}=\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{d}=k.k.k=k^3(4)$

Từ (3) và (4) suy ra điều phải chứng minh

5.10. Từ $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)$ suy ra

$$\frac{a(y+z)}{abc}=\frac{b(z+x)}{abc}=\frac{c(x+y)}{abc}\Rightarrow\frac{y+z}{bc}=\frac{z+x}{ac}=\frac{x+y}{ab}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{y+z}{bc}=\frac{z+x}{ac}=\frac{(z+x)-(y+z)}{ac-bc}=\frac{x-y}{c(a-b)}(1)$$

$$\frac{y+z}{bc}=\frac{x+y}{ab}=\frac{(y+z)-(x+y)}{bc-ab}=\frac{z-x}{b(c-a)}(2)$$

$$\frac{z+x}{ac}=\frac{x+y}{ab}=\frac{(x+y)-(z+x)}{ab-ac}=\frac{y-z}{a(b-c)}(3)$$

Từ (1), (2), (3) , suy ra $\frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{z-x}{b(c-a)}=\frac{x-y}{c(a-b)}$, điều phải chứng minh

5.11. Áp dụng tỉ số bằng nhau , ta có :

$$\frac{a}{2016}=\frac{b}{2018}=\frac{c}{2020}=\frac{a-b}{-2}=\frac{b-c}{-2}=\frac{a-c}{-4}$$

$$\Rightarrow\frac{(a-c)^2}{16}=\left(\frac{a-b}{-2}\right)\left(\frac{b-c}{-2}\right)=\frac{(a-b)(b-c)}{4}$$

Do đó $\frac{(a-c)^2}{4}=(a-b)(b-c)$

5.12. Áp dụng tính chất tỉ số bằng nhau , ta có :

$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{x+y+z}{a+b+c}=x+y+z$ (Vì $a+b+c=1$)

Suy ra : $(x+y+z)^2=\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=x^2+y^2+z^2$

(vì $a+b+c=1$)

Vậy $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2$

5.13. Từ $\frac{x}{y+z+t}=\frac{y}{z+t+x}=\frac{z}{t+x+y}=\frac{t}{x+y+z}$

$$\Rightarrow\frac{x}{y+z+t}+1=\frac{y}{z+t+x}+1=\frac{z}{t+x+y}+1=\frac{t}{x+y+z}+1$$

$$\frac{x+y+z+t}{y+z+t}=\frac{x+y+z+t}{z+t+x}=\frac{x+y+z+t}{t+x+y}=\frac{x+y+z+t}{x+y+z}$$

✓ *Trường hợp 1:* Xét $x+y+z+t=0$

$\Rightarrow x+y=-(z+t);y+z=-(t+x)$

Suy ra $A = \frac{-(z+t)}{z+t} + \frac{-(t+x)}{t+x} + \frac{z+t}{-(z+t)} + \frac{t+x}{-(t+x)}$

$A = (-1)+(-1)+(-1)+(-1) = -4$

✓ *Trường hợp 2:* Xét $x+y+z+t \neq 0$

Suy ra $y+z+t = z+t+x = t+x+y = x+y+z \Rightarrow x = y = z = t$

Suy ra $A = \frac{x+x}{x+x} + \frac{x+x}{x+x} + \frac{x+x}{x+x} + \frac{x+x}{x+x} = 1+1+1+1 = 4$

Vậy biểu thức A luôn có giá trị là số nguyên

5.14. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \ldots = \frac{a_{2019}}{a_{2020}} = \frac{a_{2020}}{a_1} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2019} + a_{2020}}{a_2 + a_3 + \ldots + a_{2020} + a_1}$$

Suy ra : $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2019} = a_{2020}$

Do đó $B = \frac{(a_1 + a_1 + \ldots + a_1)^2}{a_1^2 + a_1^2 + \ldots + a_1^2} = \frac{2020^2 a_1^2}{2020.a_1^2} = 2020$

5.15. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau , ta có :

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = \frac{a+b+c}{b+c+a} = 1 \Rightarrow a = b = c$ .Do đó $P = \frac{a^{49}.a^{51}}{a^{100}} = 1$

5.16. Từ đề bài suy ra :

$$\frac{a+b-c}{c} + 2 = \frac{b+c-a}{a} + 2 = \frac{c+a-b}{b} + 2 \Rightarrow \frac{a+b+c}{c} = \frac{a+b+c}{a} = \frac{a+b+c}{b}$$

Mà $a,b,c > 0$ nên $a+b+c > 0$, suy ra $a = b = c$

Từ đó , ta có : $B = \left(1+\frac{a}{a}\right)\left(1+\frac{a}{a}\right)\left(1+\frac{a}{a}\right) = 8$

5.17. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau , ta có :

$$\frac{a+b+c}{a+b-c} = \frac{a-b+c}{a-b-c} = \frac{(a+b+c)-(a-b+c)}{(a+b-c)-(a-b-c)} = \frac{2b}{2b} = 1$$

$\Rightarrow a+b+c = a+b-c \Rightarrow 2c = 0 \Rightarrow c = 0$

5.18. Từ $\frac{x-y}{x+y} = \frac{z-x}{z+x}$ suy ra $\frac{x-y}{z-x} = \frac{x+y}{z+x}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau , ta có :

$$\frac{x-y}{z-x} = \frac{x+y}{z+x} = \frac{x-y+x+y}{z-x+z+x} = \frac{2x}{2z} = \frac{x}{z} (1)$$

$$\frac{x-y}{z-x} = \frac{x+y}{z+x} = \frac{x-y-x-y}{z-x-z-x} = \frac{-2y}{-2x} = \frac{y}{x} (2)$$

Từ (1) và (2) , suy ra : $\frac{x}{z} = \frac{y}{x} \Rightarrow x^2 = yz$

5.19. Từ $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20}; \frac{y}{5} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{y}{20} = \frac{z}{24}$ suy ra $\frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{24}$

Đặt $\frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{24} = k \Rightarrow x = 15k; y = 20k; z = 24k$

Do đó $A = \frac{30k + 60k + 96k}{45k + 80k + 120k} = \frac{186k}{250k} = \frac{93}{125}$

5.20. Với $a, b, c \neq 0$ ta có : $\frac{ab}{a+b} = \frac{bc}{b+c} = \frac{ca}{c+a}$

$\Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{b+c}{bc} = \frac{c+a}{ca} \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{1}{c} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$

$\Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \Rightarrow a = b = c \Rightarrow P = 1$

Chuyên đề 6. SỐ THẬP PHÂN HỮU HẠN. SỐ THẬP PHÂN VÔ HẠN TUẦN HOÀN. LÀM TRÒN SỐ

A. Kiến thức cần nhớ

1. Xét phép chia:

$3:20=0{,}15$

$5:12=0{,}41666...$

- Số 0,15 là số thập phân hữu hạn.
- Số $0{,}41666...$ được viết gọn thành 0,14(6) là số thập phân vô hạn tuần hoàn có chu kì là 6.

2. Nếu một phân số tối giản với mẫu dương mà mẫu không có ước nguyên tố khác 2 và 5 thì phân số đó viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn.

- Nếu một phân số tối giản với mẫu dương và mẫu có ước nguyên tố khác 2 và 5 thì phân số đó viết được dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn.

3. Mỗi số hữu tỉ được biểu diễn bởi một số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn. Ngược lại, mỗi số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn biểu diễn một số hữu tỉ.

4. *Quy ước làm tròn số*

✓ *Trường hợp 1:* Nếu chữ số đầu tiên trong các chữ số bị bỏ đi nhỏ hơn 5 thì ta giữ nguyên bộ phận còn lại.Trong trường hợp số nguyên thì ta thay các chữ số bị bỏ đi bằng các chữ số 0.

✓ *Trường hợp 2:* Nếu chữ số đầu tiên trong các chữ số bị bỏ đi lớn hơn hoặc bằng 5 thì ta cộng thêm 1 vào chữ số cuối cùng của bộ phận còn lại. Trong trường hợp số nguyên thì ta thay chữ số bị bỏ đi bằng các chữ số 0

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Viết các số thập phân sau dưới dạng phân số tối giản.

$a)12{,}5$ $\quad b)-2{,}54$ $\quad c)0{,}126$ $\quad d)-0{,}0108$

$e)53{,}0263$ $\quad f)-0{,}984$

Giải

$a)12{,}5=\dfrac{25}{2};$ $\quad c)0{,}126=\dfrac{63}{500};$ $\quad e)53{,}0263=\dfrac{530263}{10000};$

$b)-2{,}54=-\dfrac{127}{50};$ $\quad d)-0{,}0108=-\dfrac{27}{2500};$ $\quad f)-0{,}984=-\dfrac{123}{125}$

Ví dụ 2: Viết các phân số sau dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn.

$\dfrac{11}{15};-\dfrac{10}{21};\dfrac{9}{7};-\dfrac{80}{11}$

Giải

$\dfrac{11}{15}=0{,}7(3);-\dfrac{10}{21}=0{,}(476190);\dfrac{9}{7}=1{,}(285714);-\dfrac{80}{11}=-7{,}(27)$

Ví dụ 3: Biểu diễn số thập phân sau dưới dạng phân số :

$a)0,(73)$ $b)0,5(18)$ $c)0,2(6)$ $d)1,12(45)$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Khi biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn dưới dạng phân số thì ta nhớ :

- Nếu 0, (a) có chu kì là a thì $0,(a)=\frac{a}{9}$.
- Nếu $0,(\overline{ab})$ có chu kì là $\overline{ab}$ thì $0,(\overline{ab})=\frac{\overline{ab}}{99}$
- Nếu $0,(\overline{a_1a_2...a_n})$ có chu kì là $\overline{a_1a_2...a_n}$ thì $0,(\overline{a_1a_2...a_n})=\frac{\overline{a_1a_2...a_n}}{\underset{n \text{ số } 9}{99...9}}$

Dựa vào kiến thức đó,ta có lời giải sau:

✓ *Trình bày lời giải*

$$a)0,(73)=\frac{73}{99}$$
$$b)0,5(18)=\frac{1}{10}.5,(18)=\frac{1}{10}.\left(5+\frac{18}{99}\right)=\frac{57}{110}$$
$$c)0,2(6)=\frac{1}{10}.2,(6)=\frac{1}{10}.\left(2+\frac{6}{9}\right)=\frac{4}{15}$$
$$d)1,12(45)=\frac{1}{100}.112,(45)=\frac{1}{100}.\left(112+\frac{45}{99}\right)=\frac{1237}{1100}$$

Ví dụ 4: Tính :

$a)0,(6)+4\frac{1}{3}+0,5(3);$ $b)\frac{2}{9}+1,2(27)-0,(54)$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Trước khi thực hiện ta nên đổi số thập phân vô hạn tuần hoàn ra dạng phân số

✓ *Trình bày lời giải*

$$a)0,(6)+4\frac{1}{3}+0,5(3)=\frac{2}{3}+4\frac{1}{3}+\frac{8}{15}=5\frac{8}{15}$$
$$b)\frac{2}{9}+1,2(27)-0.(54)=\frac{2}{9}+\frac{27}{22}-\frac{6}{11}=\frac{179}{198}$$

Ví dụ 5: Tìm số tự nhiên x biết : $\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{x}}}}}=\dfrac{229}{1015}$

Giải

Ta có : $4+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{x}}}}=\dfrac{1015}{229}=4+\dfrac{99}{229}$

Tương tự: $2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{x}}}=\dfrac{229}{99}=2+\dfrac{31}{99}\Leftrightarrow\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{x}}}=\dfrac{31}{99}\Leftrightarrow 3+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{99}{31}=3+\dfrac{6}{31}$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{6}{31}\Leftrightarrow 5+\dfrac{1}{x}=\dfrac{31}{6}=5+\dfrac{1}{6}\Leftrightarrow x=6$

Ví dụ 6: Tìm x, biết : $\dfrac{0,1(6)+0,(3)}{0,(3)+1,1(6)}.x=0,(2)$.

Giải

$$\dfrac{\dfrac{1}{10}.1\dfrac{6}{9}+\dfrac{3}{9}}{\dfrac{3}{9}+\dfrac{1}{10}.11\dfrac{6}{9}}.x=\dfrac{2}{9}\Leftrightarrow\dfrac{\dfrac{1}{10}.\dfrac{5}{3}+\dfrac{1}{3}}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{10}.\dfrac{35}{3}}.x=\dfrac{2}{9}\Leftrightarrow\dfrac{\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{7}{6}}.x=\dfrac{2}{9}\Leftrightarrow\dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{3}{2}}.x=\dfrac{2}{9}$$

$$\Rightarrow\dfrac{1}{3}.x=\dfrac{2}{9}\Rightarrow x=\dfrac{2}{9}:\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$$

Ví dụ 7: Theo thống kê dân số thế giới tính đến ngày 28/02/2016, dân số Việt Nam có 94 104 871 người

Hãy làm tròn đến:

a) Hàng nghìn; b) Hàng vạn; c) Hàng triệu

Giải

a) 94 105 000 b) 94 100 000 c) 94 000 000

C. Bài tập vận dụng

6.1. Viết các số thập phân sau dưới dạng phấn số tối giản.

$a)21,10$ $b)-4,36$ $c)0,708$ $d)-0,0907$

$e)0,978$ $f)-0,69005$

6.2. Viết các phân số sau dưới dạng số thập phân vô hạn tuần hoàn

$\dfrac{7}{12};-\dfrac{8}{7};\dfrac{1}{11};-\dfrac{123}{18}$

6.3. Biểu diễn số thập phân sau dưới dạng phân số:

$a)20,(05);$ $b)0,20(07);$ $c)0,1(80);$ $d)21,10(45)$

6.4. Tính:

$a)A=0,(37)+0,(62)$ $b)B=10,(3)+0,(4)-8,(6)$

$c) C = 0,(3) + 3\frac{1}{3} - 0,4(2)$.

6.5. Rút gọn biểu thức : $M = \dfrac{0,5 + 0,(3) - 0,1(6)}{2,5 + 1,(6) - 0,8(3)}$

6.6. Tìm x,biết:

$a) \dfrac{0,(3) + 0,(384615) + \frac{3}{13}.x}{0,0(3)} = \dfrac{50}{65}$; $\qquad b) \left[0,(37) + 0,(62)\right]x = 10$

$c) 0,(12) : 1,(6) = x : 0,(4)$.

6.7. Trong phép chia sau đây $2020 : 7$.Tổng của 2020 chữ số đầu tiên sau dấu phẩy là bao nhiêu ?

6.8. Một số tự nhiên sau khi làm tròn đến hàng nghìn thì cho kết quả 73 000. Số lớn nhất và số nhỏ nhất có thể là bao nhiêu?

6.9. Thực hiện phép tính :

$$A = \left(\dfrac{0,4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11}}{1,4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11}} - \dfrac{\frac{1}{3} - 0,25 + \frac{1}{5}}{1\frac{1}{6} - 0,875 + 0,7}\right)^3 : \dfrac{2019}{2020}$$

6.10. Tính $A = 26 : \left[\dfrac{3 : (0,2 - 0,1)}{2,5 \times (0,8 + 1,2)} + \dfrac{(34,06 - 33,81) \times 4}{6,84 : (28,57 - 25,15)}\right] + \dfrac{2}{3} : \dfrac{4}{21}$

6.11. Tìm tập hợp các số nguyên x , biết rằng :

$$4\frac{5}{9} : 2\frac{5}{18} - 7 < x < \left(3\frac{1}{5} : 3,2 + 4,5.1\frac{31}{45}\right) : \left(-21\frac{1}{2}\right)$$

6.12. Tìm x biết :

$$a) \frac{2}{3}x - 70\frac{10}{11} : \left(\frac{131313}{151515} + \frac{131313}{353535} + \frac{131313}{636363} + \frac{131313}{999999}\right) = -5$$

$$b) x - 128 = \left(4\frac{20}{21} - 5\right) : \left(\frac{4141}{4242} - 1\right) : \left(\frac{636363}{646464} - 1\right)$$

6.13. Tính : $C = \dfrac{\left(1 + \frac{2020}{1}\right).\left(1 + \frac{2020}{2}\right).\left(1 + \frac{2020}{3}\right)...\left(1 + \frac{2020}{2019}\right)}{\left(1 + \frac{2019}{1}\right).\left(1 + \frac{2019}{2}\right).\left(1 + \frac{2019}{3}\right)...\left(1 + \frac{2019}{2020}\right)}$

6.14. a) Chứng tỏ rằng $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (với $n \in \mathbb{N}$)

b) Tính giá trị biểu thức :

$$A = \frac{2 \times 2020}{1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + ... + \frac{1}{1+2+3+...+2020}}$$

6.15. Cho $M = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$ với $a,b,c > 0$. Chứng tỏ rằng M không phải là số nguyên.

6.16. Tìm số tự nhiên x , biết :

$a)\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{2}}}} = \dfrac{16}{23};$

$b)\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{6}}}} = \dfrac{130}{421}$

6.17. So sánh:

$a) 0,(12)$ với 0,12;

$b) -0,1(23)$ với -0,123

6.18. Cho $\dfrac{1}{10+\dfrac{1}{9+\dfrac{1}{9}}} + \dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{b}}}} = 1$ với a và b là các số nguyên

Tính a + b

6.19. Thay các chữ cái bởi các chữ số khác 0 thích hợp

$a) 1 : \overline{0,ab} = a+b-c$

$b) \overline{2,x(y)} - \overline{1,y(x)} = 1,2(6);$ biết $x + y = 7$

6.20. ***Đố*** **.**Đặt phép tính (*) được xác định bởi $a*b = \frac{a.b}{a+b}$

Tính giá trị biểu thức : $A = \frac{1}{1*2} - \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} - \frac{1}{4*5} + ... + \frac{1}{2019*2020}$

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

6.1. $a)\frac{211}{10}$ $b)-\frac{109}{25}$ $c)\frac{177}{250}$ $d)-\frac{907}{10000}$

$e)\frac{489}{500}$ $f)-\frac{13801}{20000}$

6.2. $\frac{7}{12}=0,58(3);-\frac{8}{7}=-1,(142857);\frac{1}{11}=0,(09);-\frac{123}{18}=-6,8(3)$

6.3. $a)\frac{1985}{99}$ $b)\frac{1987}{9900}$ $c)\frac{179}{990}$ $d)\frac{23215}{1100}$

6.4. $a)A=\frac{37}{99}+\frac{62}{99}=\frac{99}{99}=1$ $b)B=10\frac{3}{9}+\frac{4}{9}-8\frac{6}{9}=2\frac{1}{9}$

$c)C=\frac{1}{3}+3\frac{1}{3}-\frac{1}{10}.4\frac{2}{9}=3\frac{2}{3}-\frac{19}{45}=\frac{11}{3}-\frac{19}{45}=\frac{146}{45}$.

6.5. $M=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{10}.1\frac{6}{9}}{\frac{5}{2}+1\frac{6}{9}-\frac{1}{10}.8\frac{3}{9}}=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}{\frac{5}{2}+\frac{5}{3}-\frac{5}{6}}=\frac{1}{5}$

6.6.

a) $0,(3)+0,(384615)+\frac{3}{13}.x=\frac{50}{65}.0,0(3)\Leftrightarrow\frac{1}{3}+\frac{384615}{999999}+\frac{3}{13}.x=\frac{10}{13}.\frac{1}{10}.\frac{3}{9}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{3}+\frac{5}{13}+\frac{3}{13}.x=\frac{1}{39}\Leftrightarrow\frac{3}{13}.x=\frac{1}{39}-\frac{1}{3}-\frac{5}{13}$

$\Leftrightarrow\frac{3}{13}.x=-\frac{27}{39}=-\frac{9}{13}\Leftrightarrow x=-\frac{9}{13}:\frac{3}{13}=-3$

b) $\left[0,(37)+0,(62)\right]x=10\Leftrightarrow\left[\frac{37}{99}+\frac{62}{99}\right].x=10\Leftrightarrow 1.x=10\Rightarrow x=10$

c) $0,(12).0,(4)=x.1,(6)\Leftrightarrow\frac{12}{99}.\frac{4}{9}=x.1\frac{6}{9}$

$\Leftrightarrow\frac{16}{297}=x.\frac{15}{9}\Rightarrow x=\frac{16}{297}:\frac{15}{9}=\frac{16}{495}$

6.7.

Ta có : $2020:7=288,571428571428...=288,(571428)$

Ta có : $2020:6=336$ dư 4

Vậy tổng của 2020 chữ số đầu tiên sau dấy phẩy là :

$336.(5+7+1+4+2+8)+5+7+1+4=989$

6.8. Kết quả :

+ Số lớn nhất là : 73499

+ Số nhỏ nhất là : 72500

$$a)A=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{7}-\frac{1}{13}}{2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}-\frac{1}{13}\right)}.\frac{3\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}-\frac{1}{64}-\frac{1}{256}\right)}{4\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}-\frac{1}{64}-\frac{1}{256}\right)}+\frac{5}{8}\Leftrightarrow A=\frac{1}{2}.\frac{3}{4}+\frac{5}{8}=1$$

$$b)B=\frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}}{\frac{3}{8}-\frac{3}{5}+\frac{3}{7}}+\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}{\frac{3}{4}+\frac{3}{6}-\frac{3}{10}}\Leftrightarrow B=\frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}}{3\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)}+\frac{2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right)}{3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right)}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$$

$$c)C=\frac{\frac{7}{9}-\frac{7}{13}+\frac{7}{18}-\frac{7}{151}}{\frac{5}{9}-\frac{5}{13}+\frac{5}{18}-\frac{5}{151}}=\frac{7\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+\frac{1}{18}-\frac{1}{151}\right)}{5\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+\frac{1}{18}-\frac{1}{151}\right)}=\frac{7}{5}$$

6.9. Ta có : $A=\dfrac{5\left(31-\frac{2}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{23}\right)}{13\left(31-\frac{2}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{23}\right)}+\dfrac{\frac{3}{5}+\frac{3}{13}-\frac{9}{10}}{\frac{1}{13}+\frac{1}{5}-\frac{3}{10}}$

$$\Leftrightarrow A=\frac{5}{13}+\frac{3\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{13}-\frac{3}{10}\right)}{\frac{1}{5}+\frac{1}{13}-\frac{3}{10}}=\frac{5}{13}+3=3\frac{5}{13}$$

6.10.

$$a)F=\frac{\frac{25}{108}.\frac{5751}{25}+\frac{187}{4}}{\frac{142}{21}:\frac{-41}{21}}=\frac{\frac{231}{3}+\frac{187}{4}}{\frac{-142}{41}}=100:\left(-\frac{142}{41}\right)=-\frac{2050}{71}$$

$$b)G=\frac{-1\left(\frac{5}{7}+\frac{7}{9}-\frac{9}{11}+\frac{11}{13}\right)}{\frac{2}{3}\left(\frac{5}{7}+\frac{7}{9}-\frac{9}{11}+\frac{11}{13}\right)}:\frac{\frac{9}{4}}{\frac{4}{3}}\Leftrightarrow G=-\frac{3}{2}:\frac{27}{16}=-\frac{8}{9}$$

6.11.

$$a)\frac{2}{3}x-70\frac{10}{11}:\left(\frac{131313}{151515}+\frac{131313}{353535}+\frac{131313}{636363}+\frac{131313}{999999}\right)=-5$$

$$\frac{2}{3}.x-70\frac{10}{11}:\left(\frac{13}{15}+\frac{13}{35}+\frac{13}{63}+\frac{13}{99}\right)=-5$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{3}x-70\frac{10}{11}:\left[\frac{13}{2}.\left(\frac{2}{3.5}+\frac{2}{5.7}+\frac{2}{7.9}+\frac{2}{9.11}\right)\right]=-5$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{3}.x-70\frac{10}{11}:\left[\frac{13}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{11}\right)\right]=-5$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}.x-70\frac{10}{11}:\left(\frac{13}{2}.\frac{8}{11}\right)=-5 \Leftrightarrow \frac{2}{3}.x-\frac{780}{11}:\frac{52}{11}=-5$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}.x-15=-5 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x=10 \Leftrightarrow x=15$$

$$b) x-128=\left(4\frac{20}{21}-5\right):\left(\frac{4141}{4242}-1\right):\left(\frac{636363}{646464}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow x-128=\frac{-1}{21}:\left(\frac{41}{42}-1\right):\left(\frac{63}{64}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow x-128=\frac{-1}{21}:\frac{-1}{42}:\frac{-1}{64} \Leftrightarrow x-128=\frac{-1}{21}.\frac{-42}{1}.\frac{-64}{1}=-128 \Leftrightarrow x=0$$

6.12. Ta có: $E=\dfrac{0,8:\left(\frac{4}{5}\times 1,25\right)}{0,64-\frac{1}{25}}+\dfrac{\left(1,08-\frac{2}{25}\right):\frac{4}{7}}{\left(6\frac{5}{9}-3\frac{1}{4}\right)\times 2\frac{2}{17}}+(1,2\times 0,5):\frac{4}{5}$

$$E=\frac{0,8:1}{0,64-0,04}+\frac{(1,08-0,08):\frac{4}{7}}{\frac{119}{36}\times\frac{36}{17}}+0,6:\frac{4}{5}=\frac{0,8}{0,6}+\frac{1\times\frac{7}{4}}{7}+\frac{3}{4}$$

$$=\frac{8}{6}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=2\frac{1}{3}$$

6.13. Xét $M=\dfrac{1}{1.300}+\dfrac{1}{2.301}+\dfrac{1}{3.302}+...+\dfrac{1}{101.400}$

$$\Rightarrow 299.M=\frac{299}{1.300}+\frac{299}{2.301}+\frac{299}{3.302}+...+\frac{299}{101.400}$$

$$299.M=\frac{1}{1}-\frac{1}{300}+\frac{1}{2}-\frac{1}{301}+\frac{1}{3}-\frac{1}{302}+...+\frac{1}{101}-\frac{1}{400}$$

$$299.M=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{101}\right)-\left(\frac{1}{300}+\frac{1}{301}+\frac{1}{302}+...+\frac{1}{400}\right)$$

Ta có : $N=\dfrac{1}{1.102}+\dfrac{1}{2.103}+\dfrac{1}{3.104}+...+\dfrac{1}{299.400}$

$$\Rightarrow 101.N=\frac{101}{1.102}+\frac{101}{2.103}+...+\frac{101}{299.400}$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{102}+\frac{1}{2}-\frac{1}{103}+\frac{1}{3}-\frac{1}{104}+...+\frac{1}{299}-\frac{1}{400}$$

$$=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{299}\right)-\left(\frac{1}{102}+\frac{1}{103}+\frac{1}{104}+...+\frac{1}{400}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{101}\right)-\left(\frac{1}{300}+\frac{1}{301}+\frac{1}{302}+...+\frac{1}{400}\right)$$

$$\Rightarrow 299.M = 101.N \Rightarrow \frac{M}{N} = \frac{101}{299} \Rightarrow B = \frac{101}{299}$$

6.14. Vì $a,b,c>0$ nên : $\frac{a}{a+b} > \frac{a}{a+b+c}; \frac{b}{b+c} > \frac{b}{a+b+c}; \frac{c}{c+a} > \frac{c}{a+b+c}$

$\Leftrightarrow M = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$ Do đó M > 1 (1)

Mà : $\left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}\right) + \left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{a+c}\right)$

$= \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}\right) + \left(\frac{b}{b+c} + \frac{c}{b+c}\right) + \left(\frac{c}{c+a} + \frac{a}{c+a}\right) = 3$

Vì $\left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{a+c}\right) > 1$ (tương tự (1))

Suy ra : $M = \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}\right) < 2$ (2)

Từ (1) và (2) , suy ra : $1 < M < 2$ nên M không phải là số nguyên.

6.15.

a) $\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}}} = \frac{16}{23} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}} = \frac{23}{16} = 1 + \frac{7}{16}$

Tương tự : $\frac{1}{2+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}} = \frac{7}{16} \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{x+\frac{1}{2}} = \frac{16}{7} = 2 + \frac{2}{7}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x+\frac{1}{2}} = \frac{2}{7} \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 3$

b) $\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{x+\frac{1}{6}}}} = \frac{130}{421}$

$3 + \frac{1}{4+\frac{1}{x+\frac{1}{6}}} = \frac{421}{130} = 3 + \frac{31}{130}$

Tương tự : $4 + \frac{1}{x+\frac{1}{6}} = \frac{130}{31} = 4 + \frac{6}{31}$

$$\frac{1}{x+\frac{1}{6}}=\frac{6}{31}\Leftrightarrow x+\frac{1}{6}=\frac{31}{6}=5+\frac{1}{6}\Leftrightarrow x=5$$

6.16.

a) Ta có : $0,(12)=0,121212...\rangle 0,12$ nên $0,(12)>0,12$

b) Ta có: $0,1(23)=0,1232323...\rangle 0,123$ nên $0,1(23)\rangle 0,123$

$\Rightarrow 0,1(23)\langle -0,123$

6.17. $$\frac{1}{10+\frac{1}{9+\frac{1}{9}}}+\frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{b+\frac{1}{b}}}}=1\Leftrightarrow \frac{82}{829}+\frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{b+\frac{1}{b}}}}=1$$

$$\Leftrightarrow a+\frac{1}{b+\frac{1}{b+\frac{1}{b}}}=\frac{829}{747}$$

Do b nguyên và khác 0 nên $-1<\frac{1}{b+\frac{1}{b+\frac{1}{b}}}<1\Rightarrow \frac{829}{747}-1<a<\frac{829}{747}+1$

Hay là $\frac{82}{747}<a<\frac{82}{747}+2$. Do a nguyên nên $a=1$ hoặc $a=2$

Nếu $a=1$ thì $b+\frac{1}{b+\frac{1}{b}}=\frac{747}{82}\Rightarrow b=9$

$\Rightarrow b=9$ thử lại có $9+\frac{1}{9+\frac{1}{9}}=\frac{747}{82}$ đúng

Vậy $a=1$ và $b=9$ suy ra $a+b=10$

Nếu $a=2$ thì $b+\frac{1}{b+\frac{1}{b}}=-\frac{747}{665}$. Do $-\frac{747}{665}=-1-\frac{82}{665}$

Nếu $b=-1$ thử lại có $b+\frac{1}{b+\frac{1}{b}}=-\frac{3}{2}\neq -\frac{747}{665}$ vô lí

Vậy $a+b=10$

6.18.

a) $\frac{100}{\overline{ab}}=a+b-c\Rightarrow \overline{ab}$ là ước của $100\Rightarrow \overline{ab}=25$ (vì $a;b\neq 0$)

$\Rightarrow a=2;b=5$. Do đó $a+b-c=7-c=100:25\Rightarrow c=3$

Vậy $a=2;b=5;c=3$

b) $2\frac{\overline{xy}-x}{90}-1\frac{\overline{yx}-y}{90}=1\frac{26-2}{90}\Leftrightarrow \overline{xy}-x-\overline{yx}+y=24\Rightarrow x-y=3$

Kết hợp với $x+y=7$, ta có $x=5;y=2$ và đẳng thức :

$2,5(2)-1,2(5)=1,2(6)$

6.19. Ta có : $\frac{1}{a*b}=\frac{a+b}{a.b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ suy ra :

$$A=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+...+\left(\frac{1}{2019}+\frac{1}{2020}\right)$$

$$A=1+\frac{1}{2020}=\frac{2021}{2020}.$$

Chuyên đề 7. SỐ VÔ TỈ. KHÁI NIỆM VỀ CĂN BẬC HAI. SỐ THỰC

A. Kiến thức cần nhớ

1. *Số vô tỉ*. Số vô tỉ là số viết được dưới dạng số thập phân vô hạn không tuần hoàn.

Tập hợp các số vô tỉ kí hiệu là I.

2. *Khái niệm về căn bậc hai*

Căn bậc hai của một số a không âm là số x sao cho $x^2 = a$

* Số dương a có đứng hai căn bậc hai, một số dương kí hiệu là $\sqrt{a}$ và một số âm kí hiệu là $-\sqrt{a}$.

* Số 0 chỉ có một căn bậc hai là số 0, cũng biết $\sqrt{0} = 0$.

3. *Số thực*

* Số vô tỉ và số hữu tỉ gọi chung là số thực.

* Tập hợp các số thực kí hiệu là R.

* Cách so sánh hai số thực tương tự như so sánh hai số hữu tỉ viết dưới dạng số thập phân.

* Trong tập hợp các số thực cũng có các phép toán với các tính chất tương tự như các phép toán trong tập hợp các số hữu tỉ.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Tính và so sánh:

a) $\sqrt{4.9}$ và $\sqrt{4}.\sqrt{9}$;

b) $\sqrt{9.36}$ và $\sqrt{9}.\sqrt{36}$.

c) $\sqrt{25.81}$ và $\sqrt{25}.\sqrt{81}$.

d) $\sqrt{0,64.0,25}$ và $\sqrt{0,64}.\sqrt{0,25}$.

Giải

✓ *Tìm cách giải*. Để tính $\sqrt{a.b}$ ta thực hiện phép nhân a.b trước, sau đó mới khai căn kết quả. Để tính $\sqrt{a}.\sqrt{b}$ ta tính $\sqrt{a}$ và $\sqrt{b}$ sau đó nhân kết quả với nhau.

✓ *Trình bày lời giải*

a) Ta có: $\sqrt{9.4} = \sqrt{36} = 6$ và $\sqrt{9}.\sqrt{4} = 3.2 = 5$

Suy ra $\sqrt{9.4} = \sqrt{4.9}$.

b) Kết quả $\sqrt{9.36} = \sqrt{9}.\sqrt{36} = 18$.

c) Kết quả $\sqrt{25.81} = \sqrt{25}.\sqrt{81} = 45$.

d) Kết quả $\sqrt{0,64.0,25} = \sqrt{0,64}.\sqrt{0,25} = 0,4$

Từ đó ta có thể dự đoán một công thức: $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$ với $a \ge 0; b \ge 0$.

Ví dụ 2: Tính giá trị biểu thức:

a) $\sqrt{36}.\sqrt{\frac{25}{16}} + \frac{1}{4}$.

b) $\sqrt{\frac{4}{81}} : \sqrt{\frac{25}{81}} - 1\frac{2}{5}$.

c) $0,1.\sqrt{225}.\sqrt{\frac{1}{4}}$.

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Thực hiện phép tính chứa căn bậc hai và phép tính cộng, trừ, nhân, chia, chúng ta thực hiện theo thứ tự phép tính: khai căn bậc hai trước, sau đó nhân, chia cuối cùng là cộng trừ.

✓ *Trình bày lời giải*

a) $\sqrt{36}.\sqrt{\frac{25}{16}}+\frac{1}{4}=6\frac{5}{4}+\frac{1}{4}=\frac{30}{4}+\frac{1}{4}=\frac{31}{4}.$

b) $\sqrt{\frac{4}{81}}:\sqrt{\frac{25}{81}}-1\frac{2}{5}=\frac{2}{9}:\frac{5}{9}-\frac{7}{5}=\frac{2}{5}-\frac{7}{5}=-1.$

c) $0,1.\sqrt{225}.\sqrt{\frac{1}{4}}=0,1.15.\frac{1}{2}=0,75.$

Ví dụ 3: Tính giá trị của biểu thức: $A=27-7|x|-2002x,$ biết $|x|=\sqrt{(-2)^2}.$

Giải

$|x|=2\Leftrightarrow x=\pm 2.$

- Nếu $x=2$ thì $A=27-7.2-2020.2=-4027.$

- Nếu $x=-2$ thì $A=27-7.2-2020(-2)=2033.$

Ví dụ 4: Tìm x, biết:

a) $\sqrt{1,69}.\left(2\sqrt{x}+\sqrt{\frac{81}{121}}\right)=\frac{13}{10}.$

b) $\left(3x^2-2\right).\left(2x^2-\frac{1}{0,18}\right).\left(x^2+9\right)=0.$

c) $\left|\frac{3}{5}.\sqrt{x}-\frac{1}{20}\right|-\frac{2}{3}=\frac{4}{5}.$

d) $\left(x^2-5\right).\left(3x^2-\frac{4}{3}\right).\left(\sqrt{|x|}-\frac{\sqrt{5}}{4}\right)=0.$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Những bài tìm x chứa căn bậc hai, chúng ta lưu ý kiến thức sau:

- $\sqrt{x}=m\ (m\geq 0)$ thì $x=m^2.$
- $x^2=m\ (n>0)$ thì $x=\pm\sqrt{n}.$

✓ *Trình bày lời giải.*

a) $1,3.\left(2\sqrt{x}+\frac{9}{11}\right)=1,3$

$2\sqrt{x}+\frac{9}{11}=1$

$2\sqrt{x}=\frac{2}{11}\Leftrightarrow\sqrt{x}=\frac{1}{11}\Leftrightarrow x=\frac{1}{121}.$

b) $\left(3x^2-2\right).\left(2x^2-\frac{1}{0,18}\right).\left(x^2+9\right)=0.$

+ *Trường hợp 1:* Xét: $3x^2-2=0\Leftrightarrow 3x^2=2\Leftrightarrow x^2=\frac{2}{3}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}.$

+ *Trường hợp 2:* Xét: $2x^2-\frac{1}{0,18}=0 \Leftrightarrow 2x^2=\frac{1}{0,18} \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{0,36} \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{0,6}=\pm\frac{5}{3}$.

Vậy $x \in \left\{\sqrt{\frac{2}{3}};-\sqrt{\frac{2}{3}};\frac{5}{3};-\frac{5}{3}\right\}$.

c) $\left|\frac{3}{5}\sqrt{x}-\frac{1}{20}\right|=\frac{4}{5}+\frac{2}{3}=\frac{22}{15}$

+ *Trường hợp 1:* Xét: $\frac{3}{5}\sqrt{x}-\frac{1}{20}=\frac{22}{15} \Rightarrow \frac{3}{5}\sqrt{x}=\frac{91}{60} \Rightarrow \sqrt{x}=\frac{91}{36} \Rightarrow x=\frac{8281}{1296}$.

+ *Trường hợp 2:* Xét: $\frac{3}{5}\sqrt{x}-\frac{1}{20}=-\frac{22}{15} \Rightarrow \frac{3}{5}\sqrt{x}=-\frac{17}{12} \Rightarrow$ Không tồn tại x.

Vậy $x=\frac{8281}{1296}$.

d) $x^2-5=0$ hoặc $3x^2-\frac{4}{3}=0$ hoặc $\sqrt{|x|}-\frac{\sqrt{5}}{4}=0$.

Xét $x^2-5=0 \Leftrightarrow x^2=5 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{5}$.

Xét $3x^2-\frac{4}{3}=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{4}{9} \Leftrightarrow x=\pm\frac{2}{3}$.

Xét $\sqrt{|x|}-\frac{\sqrt{5}}{4}=0 \Leftrightarrow |x|=\frac{5}{16} \Leftrightarrow x=\pm\frac{5}{16}$.

Vậy $x \in \left\{\sqrt{5};-\sqrt{5};\frac{2}{3};-\frac{2}{3};\frac{5}{16};-\frac{5}{16}\right\}$.

Ví dụ 5: Không dùng bảng số hoặc máy tính, hãy so sánh:

a) $\sqrt{26}+\sqrt{17}$ với 9.

b) $\sqrt{8}-\sqrt{5}$ với 1.

c) $\sqrt{63-27}$ với $\sqrt{63}-\sqrt{27}$.

Giải

✓ *Tìm cách giải:* Khi so sánh các biểu thức chứa căn bậc hai, mà không dùng máy tính, chúng ta vận dụng tính chất:

- $a>b\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{a}>\sqrt{b}$.
- $a>b, x<y \Rightarrow a-x>b-y$.

✓ *Trình bày lời giải.*

a) Ta có: $\sqrt{26}>\sqrt{25}=5; \sqrt{17}>\sqrt{15}=4$.

$\Rightarrow \sqrt{26}+\sqrt{17}>5+4. \Rightarrow \sqrt{26}+\sqrt{17}>9$.

b) $\sqrt{8}<\sqrt{9}=3; \sqrt{5}>\sqrt{4}=2 \Rightarrow \sqrt{8}-\sqrt{5}<3-2$ hay $\sqrt{8}-\sqrt{5}<1$.

c) Ta có: $\sqrt{63-27}=\sqrt{36}=6$

$\sqrt{63}-\sqrt{27}<\sqrt{64}-\sqrt{25}=8-5=3 \Rightarrow \sqrt{63-27}>\sqrt{63}-\sqrt{27}.$

Ví dụ 6:Cho $A=2019+\sqrt{2x+3}; B=21-10\sqrt{x+2}$. Hãy tìm:

a) Giá trị nhỏ nhất của A.

b) Giá trị lớn nhất của B.

Giải

✓ *Tìm lời giải.* Chúng ta lưu ý: $\sqrt{A}\geq 0$ với mọi $A\geq 0$. Đẳng thức xảy ra khi $A=0$.

✓ *Trình bày lời giải.*

a) Ta có: $A=2019+\sqrt{2x+3}\geq 2019$.

Dấu bằng xảy ra khi $x=-1,5$

Vậy giá trị nhỏ nhất của *A* là 2019 khi $x=-1,5$.

b) Ta có: $B=21-10\sqrt{x+2}\leq 21$. Dấu bằng xảy ra khi $x=-2$.

Vậy giá trị lớn nhất của B là 21 khi $x=-2$.

Ví dụ 7: Tính tổng các chữ số của a biết rằng: $\sqrt{a}=\underbrace{99...96}_{2020 \text{ chữ số}}$.

Giải

Ta có: $a=\left(\underbrace{99...96}_{2020}\right)^2=\underbrace{99...96}_{2020}\times\underbrace{99...96}_{2020}$

$a=\left(\underbrace{100...0}_{2020}-4\right)\times\underbrace{99...96}_{2020}=\underbrace{99...96}_{2020}\underbrace{00....0}_{2021}-4\times\underbrace{99...96}_{2020}$

$a=\underbrace{99...96}_{2020}\underset{2020}{00...0}-\underbrace{399...9996}_{2020}$

$a=\underbrace{99...95}_{2020}\underbrace{60...004}_{2020}$

Vậy tổng các chữ số a là: $2020.9+5+6+4=18195$

Ví dụ 8: Chứng minh rằng $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ

Giải

✓ *Tìm lời giải.* Một số thực chỉ có thể là số hữu tỷ hoặc số vô tỉ. Do vậy để chứng minh $\sqrt{2}$ là số vô tỉ, chúng ta nên dùng phương pháp chứng minh bằng phản chứng:

- *Bước 1:* Phủ định kết luận. Giả sử $\sqrt{2}$ là số hữu tỷ.
- *Bước 2:* Lập luận logic, suy ra mâu thuẫn với một điều đã biết, một tính chất hiển nhiên.
- *Bước 3:* Vậy giả sử là sai. Suy ra kết luận là đúng.

✓ *Trình bày lời giải.*

Giả sử $\sqrt{2}$ là một số hữu tỉ, như vậy $\sqrt{2}$ có thể viết $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$. Với $m,n\in N^*$ và ƯCLN $(m,\text{n})=1$.

Khi đó $m=n.\sqrt{2}\Rightarrow m^2 2n^2$. Do đó $m^2 \vdots 2\Rightarrow m\vdots 2$ (1)

Đặt $m=2k(k\in N^*)$. Thay vào, ta có: $(2k)^2=2n^2$.

$\Rightarrow n^2=2k^2\Rightarrow n^2\vdots 2\Rightarrow n\vdots 2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra m và n cùng chia hết cho 2 trái với ƯCLN $(m,\text{n})=1$.

Vì vậy $\sqrt{2}$ không thể là số hữu tỉ, do đó $\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

C. Bài tập vận dụng

7.1 Thực hiện phép tính:

a) $A=\sqrt{64}+\sqrt{81}-\sqrt{(-7)^2}$.

b) $B=\sqrt{121}+\sqrt{(-5)^2}-\sqrt{16}$.

7.2 Thực hiện phép tính:

a) $A=\left[-\sqrt{2,25}+4\sqrt{(-2,15)^2}-\left(3.\sqrt{\dfrac{7}{6}}\right)^2\right].\sqrt{1\dfrac{9}{16}}$.

b) $B=\sqrt{\dfrac{361}{10^6}}.\left[\dfrac{3}{2}.\sqrt{(-10)^8}-30.\sqrt{\dfrac{2.10^5}{5}}\right]$.

c) $C=\left[\sqrt{64}+2.\sqrt{(-3)^2}-7.\sqrt{1,69}+3\sqrt{\dfrac{25}{16}}\right]:\left(5\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)^2$

7.3 Thực hiện phép tính: $B=\left(\dfrac{10\sqrt{1,21}}{7}+\dfrac{22\sqrt{0,25}}{3}\right):\left(\dfrac{5}{\sqrt{49}}+\dfrac{\sqrt{225}}{9}\right)$.

7.4 Thực hiện phép tính: $A=\sqrt{\dfrac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}}$

7.5 So sánh:

a) $\sqrt{0,04}+\sqrt{0,25}$ và $0,01+5\times\sqrt{0,36}$

b) $0,5x\sqrt{100}-\sqrt{\dfrac{4}{25}}$ và $\left(\sqrt{1\dfrac{9}{16}}-\sqrt{\dfrac{9}{16}}\right):5$

7.6 So sánh:

a) $\sqrt{17}$ và 4.

b) $\sqrt{63}$ và 8.

c) $\sqrt{13+17}$ và $\sqrt{13}+\sqrt{17}$.

7.7 Tính giá trị biểu thức: $B=\sqrt{x^2+y^2-x^2}$ với $x=7,y=6,z=2$.

7.8 Tìm x biết:

a) $7-x=\sqrt{(-5)^2}$.

b) $2020:x-2=\sqrt{1+2+3+2+1}$.

c) $x+\dfrac{\sqrt{22,09}}{5}=\dfrac{1}{10}\sqrt{\dfrac{9}{25}}$.

d) $x+\sqrt{81}=\sqrt{5^2-3^2}$.

e) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}x=\dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}}$.

7.9 Hãy so sánh A với B biết: $A=\sqrt{225}-\frac{1}{\sqrt{5}}-1;\quad B=\sqrt{196}-\frac{1}{\sqrt{6}}$

7.10 Cho $P=\frac{1}{2}+\sqrt{x};\ Q=7-2\sqrt{x-1}$. Hãy tìm:

a) Giá trị nhỏ nhất của P. b) Giá trị lớn nhất của Q.

7.11 Cho $M=\frac{\sqrt{x-1}}{2}$. Tìm $x\in Z$ và $x<50$ để cho M có giá trị nguyên.

7.12 Cho $N=\frac{9}{\sqrt{x}-5}$. Tìm $x\in Z$ để N có giá trị nguyên.

7.13 Chứng minh rằng: $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{9}<12+5\sqrt{5}.$

7.14 Chứng tỏ rằng: $\sqrt{3}$ là một số vô tỉ.

7.15 Tìm x, biết;

a) $x^2=4.$ b) $x^2=6.$ c) $x^2=5$ (với $x<0$).

d) $x^2=8$ (với $x>0$). e) $(x+5)^2=5.$ f) $(x-8)^2=8.$

g) $(x+3)^2=6.$ h) $(2x+5)^2=7.$

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

7.1 a) $A=8+9-7=10.$ b) $B=11+5-4=12.$

7.2 a) $A=\left[-1,5+4.2,15-9\frac{7}{6}\right].\sqrt{\frac{25}{16}}$

$A=[-1,5+8,6-10,5].\frac{5}{4}$

$A=(-3,4).\frac{5}{4}=-\frac{17}{4}.$

b) $B=\frac{19}{10^3}.\left[\frac{3}{2}.10^4-30.2.10^2\right]=\frac{19}{10^3}.10^3.\left[\frac{3}{2}.10-3.2\right]=19.(15-6)=171.$

c) $C=\left[8+2.3-7.1,3+3\frac{5}{4}\right]:\left(25.\frac{2}{3}\right)=(8+6-9,1+3,75):\frac{50}{3}$

$C=8,65.\frac{3}{50}=0.519$

7.3 $B=\left(\frac{10.1,1}{7}+\frac{22.0,5}{3}\right):\left(\frac{5}{7}+\frac{15}{9}\right)=\left(\frac{11}{7}+\frac{11}{3}\right):\left(\frac{5}{7}+\frac{5}{3}\right)$

$B=\left[11\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{3}\right)\right]:\left[5\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{3}\right)\right]=\frac{11}{5}$

7.4 $A=\sqrt{\frac{2^{30}+2^{20}}{2^{12}+2^{22}}}=\sqrt{\frac{2^{20}.(2^{10}+1)}{2^{12}(1+2^{10})}}=\sqrt{2^8}=2^4=16$

7.5 a) Ta có: $\sqrt{0,04}+\sqrt{0,25}=0,2+0,5=0,7$

$0,01+5.\sqrt{0,36}=0,01+5.0,6=3,01.$

Suy ra $\sqrt{0,04}+\sqrt{0,25}<0,01+5.\sqrt{0,36}.$

b) Ta có $0,5.\sqrt{100}-\sqrt{\frac{4}{5}}=0,5.10-\frac{2}{5}=5-\frac{2}{5}=\frac{23}{5}.$

$\left(\sqrt{1\frac{9}{16}}-\sqrt{\frac{9}{16}}\right):5=\left(\sqrt{\frac{25}{16}}-\sqrt{\frac{9}{16}}\right).\frac{1}{5}=\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{4}\right).\frac{1}{5}=\frac{1}{10}.$

Suy ra $0,5\times\sqrt{100}-\frac{4}{5}>\left(\sqrt{1\frac{9}{16}}-\sqrt{\frac{9}{16}}\right):5$

7.6 a) $\sqrt{17}>\sqrt{16}=4.$ b) $\sqrt{63}<\sqrt{64}=8.$

c) $\sqrt{13+17}=\sqrt{30}<\sqrt{36}=6.$

$\sqrt{13}+\sqrt{17}>\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$

Suy ra: $\sqrt{13+17}<\sqrt{13}+\sqrt{17}$

7.7 Thay $x=7,y=6,z=2$ vào biểu thức ta được;

$B=\sqrt{7^2+6^2-2^2}=\sqrt{49+36-4}=\sqrt{81}=9$

7.8 a) $7-x=5\Leftrightarrow x=2.$

b) $2020:x-2=3\Leftrightarrow 2020:x=5\Leftrightarrow x=404.$

c) $x-\frac{4,7}{5}=\frac{0,3}{5}\Leftrightarrow x=1.$

d) $x+9=4\Leftrightarrow x=-5.$

e) $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}.x=\frac{5}{6}\Leftrightarrow\frac{2}{3},x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{3}{4}.$

7.9 Ta có: $A=15-\frac{1}{\sqrt{5}}-1=14-\frac{1}{\sqrt{5}}$

$B=14-\frac{1}{\sqrt{6}}$ mà $\sqrt{5}<\sqrt{6}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{5}}>\frac{1}{\sqrt{6}}\Rightarrow A=14-\frac{1}{\sqrt{5}}<B=14-\frac{1}{\sqrt{6}}\Rightarrow A<B$

7.10 a) Ta có: $P=\frac{1}{2}+\sqrt{x}\geq\frac{1}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi $x=0$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{2}$ khi $x=0.$

b) Ta có: $Q=7-2\sqrt{x-1}\leq 7.$ Dấu bằng xảy ra khi $x=1.$ Vậy giá trị lớn nhất của Q là 7 khi $x=1.$

7.11 M có giá trị nguyên $\Leftrightarrow\sqrt{x-1}\,\vdots\,2$ hay $x-1$ là số chính phương chẵn. Mà $x<50$ nên $x-1<49$ suy ra $x-1\in\{0;4;16;36\}\Rightarrow x\in\{1;5;17;37\}$

Vậy với $x \in \{1;5;17;37\}$ thì M có giá trị là số nguyên.

7.12 $\sqrt{x}-5 \in$ Ư (9) mà Ư $(9)=\{1;3;9;-1;-3;-9\}$

Suy ra bảng giá trị:

$\sqrt{x}-5$	1	3	9	- 1	- 3	- 9
$\sqrt{x}$	6	8	14	4	2	-4
x	36	64	196	16	4	$\varnothing$

Vậy với $x \in \{36;64;196;16;4\}$ thì N có giá trị nguyên.

7.13 Ta có: $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}>2+2+2=6.$

$\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}+\sqrt{8}+\sqrt{9}<3+3+3+3+3=15.$

Từ đó suy ra: $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{9}<1+6+15=22.$

Mà $12+5\sqrt{5}>12+5.2=22.$ Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

7.14 Giả sử $\sqrt{3}$ là số hữu tỷ, suy ra $\sqrt{3}=\dfrac{m}{n}$ với $m,n \in N^*$ và ƯCLN $(m,n)=1$

Suy ra: $3=\dfrac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2=3.n^2 \Rightarrow m \vdots 3$. Đặt $m=3k\ (k \in N^*)$ (1)

Suy ra $9k^2=3n^2 \Rightarrow n^2=3k^2 \Rightarrow n \vdots 3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra m và n cùng chia hết cho 3 trái với ƯCLN $(m,n)=1$.

Vì vậy $\sqrt{3}$ không thể là số hữu tỷ, do đó $\sqrt{3}$ là số vô tỉ.

7.15 Đáp số:

a) $x=\pm 2.$

b) $x=\pm\sqrt{6}.$

c) $x=-\sqrt{5}.$

d) $x=\sqrt{8}.$

e) $x=\pm\sqrt{5}-5.$

f) $x=\pm\sqrt{8}+8.$

g) $x=\pm\sqrt{6}-3.$

h) $x=\dfrac{\pm\sqrt{7}-5}{2}.$

Chuyên đề 8. PHẦN NGUYÊN, PHẦN LẺ

A. Kiến thức cần nhớ

1.Định nghĩa:

Ta biết rằng mọi số thực x đều có thể viết được dưới dạng $x = n + y$ trong đó $n \in \mathbb{Z}$ và $0 \le y < 1$.

Chẳng hạn $7,3 = 7 + 0,3$: $7,3 = -8 + 0,7$.

Hơn nữa cách viết trên là duy nhất. Ta gọi số nguyên n là phần của x và kí hiệu là $[x]$; còn y được gọi là phần lẻ của x và kí hiệu là $\{x\}$.

Từ phân tích trên, ta rút ra định nghĩa.

✓ ***Định nghĩa***. Phần nguyên của x, kí hiệu là $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x; phần lẻ của x là $x - [x]$ được kí hiệu là $\{x\}$.

2. Tính chất:

- $x = [x] + \{x\};$
- $x = [x] \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z};$
- $x = \{x\} \Leftrightarrow 0 \le x \le 1;$
- $x = 1 < [x] \le x;$
- Nếu $k \in \mathbb{Z}$ thì $[x+k] = [x] + k$ và $\{x+k\} = \{x\};$
- $0 \le \{x\} < 1.$

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Tìm phần nguyên, phần lẻ của các số hữu tỉ x, biết:

a) $x = -2020;$ v) $21,12;$ c) $x = -\frac{11}{21};$ d) $x = \frac{21}{73}.$

Giải

a) $[x] = -2020; \{x\} = 0$

b) $[x] = 21; \{x\} = 0,12$

c) $[x] = -1; \{x\} = -\frac{11}{21} - (-1) = \frac{10}{21}$

d) $[x] = 0; \{x\} = \frac{21}{73}$

Ví dụ 2: Tìm $[x]$ biết: $x < 9 < x + 0,6.$

Giải

✓ *Tìm cách giải:* Nếu số hữu tỉ x bị "kẹp giữa" hai số nguyên liền nhau thì $[x]$ đúng bằng số nhỏ trong hai số nguyên đó tức là $n \le x < n+1$ với $n \in \mathbb{Z}$ thì $[x]=n.$

✓ *Trình bày lời giải*

Vì $x+0,6>0 \Rightarrow 9-0,6=8,4>8$ mà $x<9 \Rightarrow 8<x<9$ nên $[x]=8.$

Ví dụ 3: Tìm phần nguyên của số hữu tỉ x biết:

a) $12<x<12,5;$

b) $x-0,1<8<x;$

c) $-14,11<x<-14;$

d) $x<-10<x+\frac{1}{5}.$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Tương tự như ví dụ 2. Chúng ta tìm số nguyên n sao cho $n \le x < n+1$ với $n \in \mathbb{Z}$ thì $[x]=n.$

✓ *Trình bày lời giải.*

a) Ta có: $12<x<12,5 \Rightarrow 12<x<13 \Rightarrow [x]=12.$

b) Ta có: $-14,11<x<-14 \Leftrightarrow -15<x<-14 \Rightarrow [x]=-15.$

c) Ta có: $x-0.1<8 \Rightarrow x<8+0.1=8,1<9$ mà x > 8

$\Rightarrow 8<x<9 \Rightarrow [x]=8$

d) Ta có: $x+\frac{1}{5}>-10 \Rightarrow x>-10-\frac{1}{5}>-11$ mà $x<-10 \Rightarrow -11<x<-10 \Rightarrow [x]=-11.$

Ví dụ 4: Đặt $A=\dfrac{1}{\frac{1}{2015}+\frac{1}{2016}+\frac{1}{2017}+...+\frac{1}{2024}}$. Tìm $[A]$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Với ý tưởng như ví dụ trên. Chúng ta tìm số nguyên n sao cho $n \le A < n+1$ với $n \in \mathbb{Z}$ thì $[A]=n.$ Nhận thấy mẫu số của biểu thức A có 10 phân số, do vậy việc đánh giá nên dùng phương pháp so sánh cùng tử và nhóm thích hợp các phân số.

✓ *Trình bày lời giải*

Ta có: $\frac{1}{2015}+...+\frac{1}{2024}<\frac{5}{2015}+\frac{5}{2020} \Rightarrow A>\frac{403.404}{807} \Rightarrow A>201$

Mà: $\frac{1}{2015}+...+\frac{2}{2024}>\frac{2}{2016}+\frac{2}{2018}+\frac{2}{2020}+\frac{2}{2022}+\frac{2}{2024}$

$=\left(\frac{1}{1008}+\frac{1}{1012}\right)+\frac{1}{1010}+\left(\frac{1}{1009}+\frac{1}{1011}\right)>5.\frac{1}{1010}=\frac{1}{202} \Rightarrow A<202$

$\Rightarrow A<202 \Rightarrow [A]=201.$

Ví dụ 5: Tích $T=1.2.3...100$ có bao nhiêu thừa số 3 khi phân tích ra thừa số nguyên tố?

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Việc tìm có bao nhiêu thừa số 3 khi phân tích T ra thừa số nguyên tố theo cách đếm là hết sức khó khăn. Khi phân tích đề bài, chúng ta chỉ cần tìm các số chia hết cho các lũy thừa cả 3, sau đó cộng lại.

✓ *Trình bày lời giải.*

Ta có nhận xét rằng bắt đầu kê từ số 1, cứ 3 số lại có một bội của 3, cứ 9 số (3^2) lại có một bội của 9, cứ 27 số (3^3) lại có một bội của 27;… Do đó số thừa số 3 khi phân tích T ra thừa số nguyên tố bằng:

$$\left[\frac{1000}{3}\right]+\left[\frac{1000}{3^2}\right]+\left[\frac{1000}{3^3}\right]+\left[\frac{1000}{3^4}\right]+\left[\frac{1000}{3^5}\right]+\left[\frac{1000}{3^6}\right]+\left[\frac{1000}{3^7}\right]$$

$$=333+111+37+12+4+1=498.$$

(Vì số $\frac{1000}{3^7}$ có phần nguyên bằng 0 nên ta không tiếp tục tìm phần nguyên của số tiếp theo).

✓ *Tổng quát.* Số thừa số nguyên tố p khi phân tích $R=1.2.3...n$, ra thừa số nguyên tố là:

$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+...+\left[\frac{n}{p^k}\right]$ với k là số mũ lớn nhất sao cho $p^k \le n.$

Ví dụ 6: Tìm số hữu tỉ x, biết rằng:

a) $[3x-4]=x;$ b) $[x+8]=-3x;$ c) $[5x-3]=2x+1.$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Tìm số hữu tỉ x có chứa phần nguyên như đề bài, chúng ta có định hướng sau: $[A]=B$ thì B là số nguyên.

- Nếu A là số nguyên thì A = B.
- Nếu không rõ A là số nguyên thì $B \le A < B+1.$

✓ *Trình bày lời giải.*

a) Vì $[3x-4]=x \Rightarrow x \in Z.$

Ta có $[3x-4]=x \Leftrightarrow x \le 3x-4 < x+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3x-4 \ge x\\ 3x-4 < x+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \ge 2\\ x < \frac{5}{2}\end{cases} \Leftrightarrow 2 \le x < 2,5$$

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x=2.$

b) $[x+8]=-3x$ (*). Đặt $-3x=t(t\in\mathbb{Z}) \Rightarrow \text{x}=-\frac{t}{3}.$

Thay vào (*) ta được: $\left[-\frac{t}{3}+8\right]=t$

$$\begin{cases} -\dfrac{t}{3}+8\ge t \\ \dfrac{t}{3}+8<t+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\le 6 \\ t>\dfrac{21}{4}=5\dfrac{1}{4} \end{cases}.$$

$\Rightarrow 5\dfrac{1}{4}<t\le 6$ mà $t\in\mathbb{Z}\Rightarrow t=6,$ suy ra $x=-2.$

c) $[5x-3]=2x+1 \quad (**)$

Đặt $2x+1=t(t\in\mathbb{Z})\Rightarrow x=\dfrac{t-1}{2}$ thay vào (**) ta được:

$$\left[5\frac{t-1}{2}-3\right]=t\Rightarrow\left[\frac{5t-11}{2}\right]=t$$

$$\Rightarrow\begin{cases} \dfrac{5t-11}{2}\ge t \\ \dfrac{5t-11}{2}<t+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5t-11\ge 2t \\ 5t-11<2t+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t>\dfrac{11}{3}=3\dfrac{2}{3} \\ t<\dfrac{13}{3}=4\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow 3\dfrac{2}{3}<t<4\dfrac{1}{3}$ mà $t\in Z\Rightarrow t=4$ từ đó suy ra $x=\dfrac{4-1}{2}=\dfrac{3}{2}.$

Ví dụ 7: Với x là số thực. Chứng minh rằng $[x]+\left[x+\dfrac{1}{2}\right]=[2x]$

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Nhận thấy x và $x+\dfrac{1}{2}$ hơn kém nhau $\dfrac{1}{2}$ đơn vị. Do vậy chúng ta nên so sánh $\{x\}$ với $\dfrac{1}{2}$. Bởi vì nếu $\{x\}<\dfrac{1}{2}$ thì $[x]=\left[x+\dfrac{1}{2}\right]$, còn nếu $\{x\}>\dfrac{1}{2}$ thì $[x]+1=\left[x+\dfrac{1}{2}\right]$. Từ đó bài toán cần xét hai trường hợp.

✓ *Trình bày lời giải*

- *Trường hợp 1*

Xét $\{x\}<\dfrac{1}{2}\Rightarrow\left[x+\dfrac{1}{2}\right]=\left[[x]+\{x\}+\dfrac{1}{2}\right]=[x]+\left[\{x\}+\dfrac{1}{2}\right]=[x]$

Do đó $[x]+\left[x+\dfrac{1}{2}\right]=[x]+[x]=2.[x]$

Còn $[2x]=\left[2[x]+2\{x\}\right]=2[x]+\left[2\{x\}\right]=2[x]$

Từ đó suy ra $[x]+\left[x+\dfrac{1}{2}\right]=[2x]$

- *Trường hợp 2.* Xét tương tự với $\dfrac{1}{2}\le\{x\}<1.$

Ví dụ 8: Tìm x, biết:

a) $\left[\dfrac{5x+6}{8}\right]=\dfrac{15x-7}{5}$; b) $\left[\dfrac{2x-1}{3}\right]+\left[\dfrac{4x+1}{6}\right]=\dfrac{5x-4}{3}$

Giải

a) Đặt $\dfrac{15x-7}{5}=t(t\in Z)\Rightarrow x=\dfrac{5t+7}{15}$. Thay vào đề bài, ta có:

$$\left[\dfrac{5+6.\dfrac{5t+7}{15}}{8}\right]=t\Rightarrow\left[\dfrac{30t+117}{120}\right]=t\Rightarrow 0\le\dfrac{30t+117}{120}-t<1$$

$\Leftrightarrow 0\le 30t+117-120t<120\Rightarrow\dfrac{-1}{30}\le t<\dfrac{117}{90}$ do $t\in Z$ nên $t\in\{0;1\}$

Với $t=0\Rightarrow x=\dfrac{7}{15}$.

Với $t=1\Rightarrow x=\dfrac{12}{15}=\dfrac{4}{5}$.

Suy ra $x\in\left\{\dfrac{7}{15};\dfrac{4}{5}\right\}$

b) Đặt $\dfrac{2x-1}{3}=y\Rightarrow x=\dfrac{3y+1}{2}$, thay vào đề bài, ta có:

$[y]+\left[y+\dfrac{1}{2}\right]=\dfrac{5y-1}{2}$. Áp dụng ***ví dụ 7***, suy ra $[2y]=\dfrac{5y-1}{2}$ (*)

Đặt $\dfrac{5y-1}{2}=t(t\in Z)\Rightarrow \text{y}=\dfrac{2t+1}{5}$. Thay vào (*), ta có:

$$\left[\dfrac{4t+2}{5}\right]=t\Rightarrow 0\le\dfrac{4t+2}{5}-t<1\Rightarrow -3<t\le 2.$$

Vì $t\in Z$, nên $t\in\{-2;-1;0;1;2\}$ suy ra $x\in\left\{\dfrac{1}{5};-\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{7};\dfrac{7}{5};2\right\}$

C. Bài tập vận dụng

8.1 Tìm phần nguyên và phần lẻ của x, biết rằng:

a) $x=-5$; b) $x=2,45$; c) $x=-3,62$; d) $x=-\dfrac{1}{14}$.

8.2 So sánh phần nguyên của các số hữu tỉ sau:

a) $x=\dfrac{21}{10};y=\dfrac{15}{8};z=\dfrac{19}{73}$; b) $x=-3\dfrac{1}{5};y=-3\dfrac{9}{10};z=-4$.

8.3 Tìm phần nguyên của số hữu tỉ x, biết rằng:

a) $x<9<x+0,8$; b) $x-0,7<8<x$;

c) $13<x<13,8$; d) $x<-5<x+0,12$.

8.4 Tìm $[x]$ biết: $x=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}$, với n là số nguyên dương.

8.5 Tìm phần nguyên của: $S=\dfrac{1}{\frac{1}{2011}+\frac{1}{2012}+\frac{1}{2013}+...+\frac{1}{2019}+\frac{1}{2020}}$

8.6 Với mỗi số nguyên dương n, đặt $S_n=\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+...+\left[\frac{n}{n}\right]$, trong đó kí hiệu $[a]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá a. Tính $S_1;S_2;S_3;...;S_6$.

8.7 Tính tổng: $B=\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\left[\sqrt{3}\right]+...+\left[\sqrt{100}\right]$

8.8 Giả sử $a;n\in N$. Chứng minh rằng:

a) Nếu $n\,\vdots\,a$ thì $\left[\frac{n}{a}\right]=\left[\frac{n-1}{a}\right]+1$

b) Nếu n không chia hết cho a và $a>0$ thì $\left[\frac{n}{a}\right]=\left[\frac{n-1}{a}\right]$

8.9 Chứng minh rằng với mọi số thực thì $[2x]$ bằng $2[x]$ hoặc $2[x]+1$

8.10 Cho n là số nguyên dương, chứng minh: $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]=n.$

8.11 Nếu $x\ge y$. Chứng minh rằng $[x]\ge[y]$

8.12 Tìm số nguyên x biết:

a) $\left[\frac{3x+1}{5}\right]=1;$

b) $\left[\frac{7x-5}{3}\right]=-2.$

8.13 Tìm x, biết: $[x+1]+[x+2]+[x+3]=10$

8.14 a) Cho $A=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]$. Với giá trị nào của $n\in\mathbb{Z}$ thì A chia hết cho 2?

b) Cho $B=\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n+1}{3}\right]+\left[\frac{n+2}{3}\right]$. Với giá trị nào của $n\in\mathbb{Z}$ thì B chia hết cho 3?

8.15 Số 2020! Có tận cùng bằng bao nhiêu chữ số 0.

8.16 Đặt $x_n=\left[\frac{n+1}{2}\right]-\left[\frac{n}{2}\right]$, với n là số nguyên dương. Hỏi trong 2020 số: $\{x_1;x_2;x_3;...;x_{2020}\}$ có bao nhiêu số khác 0?

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

8.1 a) $[x]=-5;\{x\}=0.$ b) $[x]=2;\{x\}=0,45.$

c) $[x]=-4;\{x\}=0,38.$ d) $[x]=-1;\{x\}=\frac{13}{14}.$

8.2 a) $[x]=0;[y]=1;[z]=0$ nên $[x]=[z]<[y]$

b) $[x]=-4;[y]=-4;[x]=-4$ nên $[x]=[y]=[z]$

8.3 a) Ta có: $9<x+0,8\Rightarrow 8,2<x\Rightarrow 8,2<x<9\Rightarrow 8<x<9\Rightarrow [x]=8.$

b) $x<0,7+8\Rightarrow x<8,7\Rightarrow 8<x<8,7\Rightarrow 8<x<9\Rightarrow [x]=8.$

c) $13<x<13,8\Rightarrow 13<x<14\Leftrightarrow [x]=13.$

d) $-5-0,12<x<-5\Rightarrow -5,12<x<-5\Rightarrow -6<x<-5\Rightarrow [x]=-6$

8.4 Ta có:

$$x=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Rightarrow x=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}\Rightarrow [x]=0$$

8.5 Ta có:

$$\frac{10}{2020}<\frac{1}{2011}+\frac{1}{2012}+...+\frac{1}{2020}<\frac{10}{2011}\Rightarrow \frac{2011}{10}<S<\frac{2020}{10}\Leftrightarrow 201,1<S<202$$

Vậy phần nguyên của S là 201.

8.6 $S_1=\left[\frac{1}{1}\right]=1;S_2=\left[\frac{2}{1}\right]+\left[\frac{2}{2}\right]=2+1=3.$

$$S_3=\left[\frac{3}{1}\right]+\left[\frac{3}{2}\right]+\left[\frac{3}{3}\right]=3+1+1=5$$

$$S_4=\left[\frac{4}{1}\right]+\left[\frac{4}{2}\right]+\left[\frac{4}{3}\right]+\left[\frac{4}{4}\right]=4+2+1+1=8.$$

$$S_5=\left[\frac{5}{1}\right]+\left[\frac{5}{2}\right]+\left[\frac{5}{3}\right]+\left[\frac{5}{4}\right]+\left[\frac{5}{5}\right]=5+2+1+1+1=10$$

$$S_6=\left[\frac{6}{1}\right]+\left[\frac{6}{2}\right]+\left[\frac{6}{3}\right]+\left[\frac{6}{4}\right]+\left[\frac{6}{5}\right]+\left[\frac{6}{6}\right]=6+3+2+1+1+1=14.$$

8.7 Ta chú ý rằng: $n\le\sqrt{k}<n+1$ với $n^2\le k<(n+1)^2$ nên $\left[\sqrt{k}\right]=n$

$$\left[\sqrt{1}\right]=1;\left[\sqrt{2}\right]=1;\left[\sqrt{3}\right]=1;\left[\sqrt{4}\right]=2;\left[\sqrt{5}\right]=2;\left[\sqrt{6}\right]=2;\left[\sqrt{7}\right]=2;\left[\sqrt{8}\right]=2.$$

Làm tương tự như vậy,…., $\left[\sqrt{100}\right]=10.$

Vậy tổng $B=1.3+2.5+3.7+4.9+5.11+6.13+7.15+8.17+9.19+10=625.$

8.8 a) Nếu $n\,\vdots\,a$, đặt $n=ak$ $(k\in N)$. Ta có: $\left[\frac{n}{a}\right]=[k]=k\quad(1)$

$\left[\frac{n-1}{a}\right]=\left[\frac{ak-1}{a}\right]=\left[k-1+\frac{a-1}{a}\right]=k-1\Rightarrow\left[\frac{n-1}{a}\right]+1=k$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra điều phải chứng minh.

b) Nếu n không chia hết cho a, đặt $n=ak+r$ (với $0<r<a$)

$\Rightarrow\left[\frac{n}{a}\right]=\left[\frac{ak+r}{a}\right]=\left[k+\frac{r}{a}\right]=k$ (3)

Và $\left[\frac{n-1}{a}\right]=\left[\frac{ak+r-1}{a}\right]=\left[k+\frac{r-1}{a}\right]=k$ (4)

Vì $0\le r-1<a\Rightarrow 0\le\frac{r-1}{a}<1$

8.9 Nếu $\{x\}<0,5$

Ta có $2x-2[x]=2([x]+\{x\})-2[x]=2\{x\}<1\Rightarrow 2x<2[x]+1$

Mặt khác, hiển nhiên $2[x]\le 2x$ tức là $2[x]\le 2x<2[x]+1$

$\Rightarrow[2x]=2[x]$

- Nếu $\{x\}>0,5$

Ta có: $2x-2[x]=2\{x\}>1\Rightarrow 2[x]+1<2x.$

Mặt khác, ta có: $\{x\}<1\Rightarrow 2x-2[x]=2\{x\}<2\Rightarrow 2x<2[x]+2$

Tức là: $2[x]+1<2x<2[x]+2$ suy ra $[2x]=2[x]+1$

8.10

- Xét n là số chẵn $(n=2k,k\in N^*)$ thì: $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]=[k]+\left[k+\frac{1}{2}\right]=2k=n$

- Xét n là số lẻ $(n=2k+1,k\in N^*)$ thì: $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]=\left[k+\frac{1}{2}\right]+[k+1]=2k+1=n.$

Vậy ta luôn có: $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]=n.$

8.11 Vì $x\ge y$ nên tồn tại $\alpha\ge 0$ sao cho $x=y+\alpha$

Đặt $y=[y]+\{y\}\Rightarrow x=[y]+\{y\}+\alpha$ suy ra $[x]=[y]+[\{y\}+\alpha]$

Vì $\alpha\ge 0$ và $\{y\}\ge 0$ nên do vậy $[x]\ge[y]$

8.12 a) $1\le\frac{3x+1}{5}<2\Leftrightarrow 5\le 3x+1<10\Leftrightarrow 4\le 3x<9$

Vì $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{1;2\}$

b) $-2 \le \frac{7x-5}{3} < -1 \Leftrightarrow -6 \le 7x-5 < -3 \Rightarrow -1 \le 7x < 2$

vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x = 0$.

8.13 Áp dụng công thức: $[n+x] = n+[x]$. Ta có: $[x]+1+[x]+2+[x]+3 = 10$

$3[x] = 4 \Leftrightarrow [x] = \frac{4}{3}$. Vô lý. Vậy không có x thỏa mãn.

8.14

a) Xét $n = 2k (k \in Z) \Rightarrow A = \left[\frac{2k}{2}\right] + \left[\frac{2k+1}{2}\right] = [k] + \left[k+\frac{1}{2}\right]$

$\Rightarrow A = k + k = 2k \Rightarrow A \vdots 2$

Xét $n = 2k+1 (k \in Z) \Rightarrow A = \left[\frac{2k+1}{2}\right] + \left[\frac{2k+2}{2}\right]$

$A = \left[k+\frac{1}{2}\right] + [k+1] = k+k+1 = 2k+1 \Rightarrow A$ không chia hết cho 2.

Vậy với $n = 2k (k \in Z)$ thì A chia hết cho 2.

b) Xét $n = 3k (k \in Z) \Rightarrow B = \left[\frac{3k}{3}\right] + \left[\frac{3k+1}{3}\right] + \left[\frac{3k+2}{3}\right]$

$\Rightarrow B = [k] + \left[k+\frac{1}{3}\right] + \left[k+\frac{2}{3}\right] = k+k+k = 3k \Rightarrow B \vdots 3$

Xét $n = 3k+1 (k \in Z) \Rightarrow B = \left[\frac{3k+1}{3}\right] + \left[\frac{3k+2}{3}\right] + \left[\frac{3k+3}{3}\right]$

$\Rightarrow B = \left[k+\frac{1}{3}\right] + \left[k+\frac{2}{3}\right] + [k+1] = k+k+1+k+1 = 3k+2$ không chia hết cho 3.

Vậy với $n = 3k (n \in Z)$ thì B chia hết cho 3.

8.15 Ta có: $2.5 = 10$ có tận cùng bằng một chữ số 0. Như vậy muốn biết 2020!=1.2.3…2020 có tận cùng bằng bao nhiêu chữ số 0 thì ta chỉ cần số thừa số 2 và số thừa số 5 khi phân tích số 2020! ra thừa số nguyên tố. Mặt khác dễ thấy số thừa số 5 ít hơn thừa số 2 nên ta chỉ cần tính số thừa số nguyên tố 5. Kể từ 1 cứ 5 số lại có một bội của 5; cứ $25 = 5^2$ số lại có một bội của 5^2; cứ 125 lại có một bội của 5^3; cứ 625 lại có một số là bội của 5^4.

Ta có $5^4 < 2020 < 5^5 \Rightarrow$ số thừa số 5 khi phân tích số 2020! ra thừa số nguyên tố là:

$$\left[\frac{2020}{5}\right] + \left[\frac{2020}{5^2}\right] + \left[\frac{2020}{5^3}\right] + \left[\frac{2020}{5^4}\right] = 404 + 80 + 16 + 3 = 503$$

Vậy số 2020! Có tận cùng bằng 503 chữ số 0.

8.16 Vì $x_1; x_2; x_3; ...; x_{2020}$ chỉ nhận giá trị 0 hoặc 1 nên ta có: $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{2020}$

$$=\left[\frac{2}{2}\right]-\left[\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{3}{2}\right]-\left[\frac{2}{2}\right]+\left[\frac{4}{2}\right]-\left[\frac{3}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{2021}{2}\right]-\left[\frac{2020}{2}\right]=\left[\frac{2021}{2}\right]-\left[\frac{1}{2}\right]=1010$$

Vậy có tất cả 1010 số khác 0.

Chuyên đề 9.

SỬ DỤNG TÍNH CHẤT BẤT BIẾN ĐỂ GIẢI TOÁN SUY LUẬN LOGIC

A. Kiến thức cần nhớ

Bài toán suy luận logic thường phát biểu dưới dạng toán đố (có lời văn). Để làm được dạng toán này không nhất thiết cần nhiều kiến thức phức tạp mà thường đòi hỏi suy tư sáng tạo, nhận xét tinh tế.

Ta thường gặp bài toán cho trạng thái ban đầu cùng các thao tác thay đổi liên tục trạng thái đó và yêu cầu cần phải chỉ ra một điều gì đó về trạng thái cuối cùng của nó. Việc khảo sát toàn bộ sau tất cả các lần thay đổi như vậy rất phức tạp. Khi đó ta có thể trả lời câu hỏi mà bài toán yêu cầu nhờ tính toán một đại lượng nào đó đặc trưng cho trạng thái của bài và được đảm bảo qua tất cả các lần thay đổi. Đại lượng không đổi đó được gọi là bất biến của bài toán đã cho. Như vậy trong trạng thái cuối cùng của bài toán, giá trị của bất biến vẫn giữ nguyên như trạng thái ban đầu, tức là hệ thống không thể ở trong trạng thái với một giá trị khác với bất biến. Để tìm lời giải cho bài toán:

- Ta xác định đại lượng ở hai trạng thái: trạng thái ban đầu và trạng thái cuối cùng.
- Khảo sát sự thay đổi của nó qua một số lần thay đổi liên tiếp để phát hiện sự bất biến.

Các tính chất bất biến thường gặp là: xét tính chẵn lẻ, xét tính chia hết của một số nguyên, xét màu sắc của vật cần xét.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Trên bảng, người ta viết 2020 dấu (+) và 2021 dấu (-). Giả sử mỗi lần ta thực hiện thao tác: Hai dấu bất kì trên bảng bị xóa đi và thay bằng dấu (+) nếu chúng giống nhau, thay bằng dấu (-) nếu chúng khác nhau. Sau khi thực hiện nhiều lần đến khi trên bảng còn lại một dấu. Hỏi trên bảng còn lại dấu (+) hay dấu (-)?

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Đọc xong đề bài, chúng ta nhận thấy:

- Lúc đầu có tất cả 4041 dấu cả dấu (+) và dấu (-).

- Mỗi lần thực hiện thao tác, xóa hai dấu và viết lại một dấu nên sau mỗi thao tác số dấu trên bảng giảm đi 1.

- Do vậy sau 4040 lần thực hiện thao tác, trên bảng chỉ còn 1 dấu.

- Bài toán không thể thực hiện hết được tất cả các thao tác trong mọi trường hợp, do vậy chúng ta thử một vài khả năng xảy ra để tìm yếu tố bất biến (không đổi) trong mọi thao tác. Thật vậy:

+ ***Trường hợp 1.*** Nếu xóa hai dấu (+) thì viết lại một dấu (+).

+ ***Trường hợp 2.*** Nếu xóa hai dấu (-) thì viết lại một dấu (+).

+ ***Trường hợp 3.*** Nếu xóa một dấu (+) và một dấu (-) thì viết lại một dấu (-).

- Ta nhận thấy trong ba trường hợp thì số dấu (+) có thể giữ nguyên, có thể tăng 1, có thể giảm 1. Còn số dấu (-) chỉ giữ nguyên hoặc giảm 2. Như vậy số dấu (-) trong mọi thao tác luôn luôn là số lẻ.

✓ *Trình bày lời giải*

Mỗi lần thực hiện thao tác: Hai dấu bất kì trên bảng bị xóa đi và thay bằng dấu (+) nên chúng giống nhau, thay bằng dấu (-) nếu chúng khác nhau thì số dấu (-) giữ nguyên hoặc giảm đi hai. Vì vậy tính chẵn lẻ của dấu (-) không thay đổi qua các thao tác. Ban đầu có 2021 dấu (-), tức là số dấu trừ là một số lẻ. Vì vậy ở cuối cùng còn lại một dấu (số lẻ dấu) thì phải là dấu (-).

✓ ***Nhận xét***: Ở ví dụ 1, tính bất biến là số các dấu (-) còn lại sau mỗi lần xóa luôn là một số lẻ.

Ví dụ 2: Cho dãy số 2, 4, 6, 8,…,200 (gồm 100 số nguyên dương chẵn đầu tiên). Sau khi thêm các dấu (+) hoặc dấu (-) vào giữa các số trên một cách tùy ý rồi thực hiện phép toán. Bạn Toán tính được kết quả là 34, bạn Học tính được là – 10. Hỏi bạn nào tính sai?

Giải

✓ *Tìm cách giải*. Nhận thấy dãy số gồm toàn số chẵn nên kết quả cũng là số chẵn, mà 34 và – 10 cũng là số chẵn nên không thể vận dụng tính chẵn lẻ được.

Chúng ta thử cách khác, viết toàn bộ dấu (+) thì kết quả là 10100. Để kết quả nhỏ hơn (34 hoặc – 10) thì chúng ta đổi dấu một vài dấu (+) thành dấu (-). Chúng ta thử đổi dấu (+) trước số 6 thì thấy kết quả giảm đi 12, tức là giảm đi 2.6. Quan sát tiếp một vài số nữa chúng ta thấy giảm đi 2 lần số bị đổi dấu. Tức là kết quả còn lại luôn luôn chia hết cho 4. Còn số 34 và – 10 đều không chia hết cho 4.

✓ *Trình bày lời giải*

Tổng $S = 2+4+6+8+...+200 = 10100$.

Khi thay số a bởi số - a thì tổng S giảm đi 2a, mà a là số chẵn nên S giảm đi bội của 4. Tổng S ban đầu là số chia hết cho 4, nên kết quả cuối cùng sau khi thay dấu (+) hoặc dấu (-) thì phải là một bội số của 4.

Hai số 34 và – 10 đều không phải là bội số của 4, nên cả hai bạn đều tính sai.

✓ ***Nhận xét.*** Ở ví dụ 2, tính bất biến là kết quả của tổng các số luôn là bội số của 4.

Ví dụ 3: Trong dãy số 13576193923… bắt đầu từ chữ số thứ năm, mỗi chứ số bằng chữ số hàng đơn vị của tổng bốn chữ số đứng ngay trước nó. Hỏi trong dãy này có chứa cụm chữ số 1234 và 6789 không?

Giải

✓ *Tìm cách giải*. Các chữ số trong dãy chỉ tồn tại hai trạng thái chẵn hoặc lẻ. Quan sát những lần xuất hiện chữ số chẵn hoặc chữ số lẻ trong dãy, chúng ta có lời giải sau:

✓ *Trình bày lời giải*.

Nhận thấy tổng của 4 chữ số lẻ là một số chẵn, tổng của 3 chữ số lẻ và một chữ số chẵn là một số lẻ.

Ta cần tìm quy luật chẵn lẻ (bất biến) của các chữ số trong dãy đã cho bằng cách:

Ta thay mỗi chữ số của dãy đã cho bằng số 0 nếu nó là số chẵn và bằng số 1 nếu nó là một số lẻ. Khi đó ta nhận được dãy số 111101111011110…, trong dãy này cứ sau bốn chữ số 1 có một chữ số 0 và cứ sau một chữ số 0 là bốn chữ số 1 (tính bất biến). Nhận thấy các dãy 1234 và 6789 ứng với các dãy bốn chữ số 1010 và 0101 nên không thể có mặt trong dãy số trên.

Ví dụ 4: Cho bàn cờ kích thước 10x10 ô vuông. Hỏi có thể dùng 49 hình chữ nhật kích thước 1x2 để ghép sao cho chỉ còn 2 ô ở hai góc đối diện của bảng được hay không?

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Nhận xét, mỗi mảnh hình chữ nhật chỉ ghép được 2 ô liền nhau, nên chúng ta nghĩ tới việc tô màu hoặc đánh số chẵn lẻ.

✓ *Trình bày lời giải.*

Ta ghi các số 1 và 2 vào bảng sao cho hai ô liền nhau được ghi hai số khác nhau (chẳng hạn như hình vẽ), sẽ có 50 ô số 1 và 50 ô số 2, hai số ghi ở hai góc đối diện sẽ cùng là số 1 hoặc cùng là số 2.

1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1

Mỗi lần ghép một hình chữ nhật thì chiếm hai ô cùng hàng hoặc cùng cột liền nhau, tức là tô màu một ô ghi số 1; một ô ghi số 2. Như vậy sau mỗi lần ghép một hình chữ nhật thì số ô ghép t hình chữ nhật ghi số 1 bằng số ô chưa tô màu ghi số 2. Sau 49 lần ghép hình chữ nhật sẽ còn 2 ô: 1 ô ghi số 1, 1 ô ghi số 1. Hai ô này không thể ở hai góc đối của bảng được.

Ví dụ 5: Cho bảng ô vuông kích thước 2009 x 2010, trong mỗi ô lúc đầu đặt một viên sỏi. Gọi T là thao tác lấy 2 ô bất kì có sỏi và chuyển từ mỗi ô đó một viên sỏi đưa sang ô bên cạnh (là ô có chung cạnh với ô có chứa sỏi). Hỏi sau một số hữu hạn phép thực hiện các thao tác trên ta có thể đưa hết sỏi ở trên bảng về cùng một ô không?

(Tuyển sinh lớp 10, chuyên TP Hải Phòng, năm học 2009 – 2010)

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Tương tự như ví dụ trên, chúng ta nhận thấy mỗi thao tác chỉ dịch chuyển hai viên sỏi ở hai ô sang ô bên cạnh. Do vậy chúng ta nghĩ tới việc tô màu như bàn cờ vua. Mỗi thao tác, một viên sỏi chuyển từ ô đen sang ô trắng hoặc ngược lại. Nếu tất cả các viên sỏi vào một ô đen (hoặc ô trắng) thì số sỏi ở ô đen là số chẵn và số sỏi ở ô trắng cũng là số chẵn. Vậy ta có lời giải sau:

✓ *Trình bày lời giải.*

Ta tô màu các ô vuông của bảng bằng hai màu đen trắng như bàn cờ vua. Lúc đầu tổng số sỏi ở các ô đen bằng 1005 x 2009 là một số lẻ.

Sau mỗi phép thực hiện thao tác T, xảy ra những trường hợp sau:

- ***Trường hợp 1.*** Nếu lấy hai viên sỏi ở hai ô đen thì chuyển sang hai ô trắng $\Rightarrow$ số sỏi ở ô đen giảm 2.
- ***Trường hợp 2.*** Nếu lấy hai viên sỏi ở hai ô trắng thì chuyển sang hai ô đen $\Rightarrow$ số sỏi ở ô đen tăng 2.

- ***Trường hợp 3.*** Nếu lấy một viên sỏi ở ô đen và một viên sỏi ở ô trắng thì chuyển sang một ô trắng và một ô đen $\Rightarrow$số sỏi ở ô đen không đổi.

Như vậy mọi trường hợp số sỏi ở ô đen chỉ tăng (hoặc giảm) 2 viên hoặc không đổi suy ra tổng số sỏi ở các ô đen luôn là số lẻ. Vậy không thể chuyển tất cả các viên sỏi trên bằng ô vuông về cùng một ô sau một số hữu hạn các phép thực hiện thao tác T.

Ví dụ 6: Một bảng ô vuông gồm 2019 hàng và 2020 cột. Ký hiệu ô ở hàng thứ m và cột thứ n là (m,n). Người ta tô màu các ô của bảng theo cách sau: Lần thứ nhất tô màu 3 ô (r, s), (r+1, s+1), (r+2, s+2) với $1 \le r \le 2017; 1 \le s \le 2019$. Từ lần thứ hai, mỗi lần tô đúng 3 ô chưa được tô màu liền nhau cùng hàng hoặc cùng cột. Hỏi bằng cách này có thể tô màu được tất cả các ô vuông của bảng đã cho không?

Giải

Ta ghi vào bảng các số tự nhiên theo cách sau: Từ trái sang phải, mỗi hàng ghi lần lượt các số tự nhiên từ 1 đến 2020. Như vậy, 3 ô liền nhau trong cùng một hàng ghi 3 số tự nhiên liên tiếp, 3 ô liền nhau trong cùng một cột sẽ ghi 3 số tự nhiên giống nhau.

Ở lần tô màu thứ nhất, tổng 3 số ghi ở 3 ô được tô màu là s + s + 1+ s + 1 = 3s + 2 $(1 \le s \le 2019)$ là một số chia cho 3 dư 2.

Từ lần tô màu thứ hai trở đi, mỗi lần tô tổng 3 ô ghi ở 3 ô được tô màu là một số chia hết cho 3 (vì 3 số tự nhiên liên tiếp hoặc 3 số tự nhiên giống nhau).

Do đó, sau mỗi lần tô màu theo quy luật trên thì các ô đã được tô có tổng các số ghi trên đó là số chia cho 3 dư 2.

Tổng số các số ghi trên bảng ban đầu là $2019.(1+2+3+...+2020) = 2019.2021.1010$ chia hết cho 3. Vì vậy sau mỗi lần tô màu thì các ô còn lại (chưa tô) có tổng các số ghi trên đó là một số chia cho 3 dư 1 (tính bất biến). Vì vậy bằng mọi cách đều không thể tô màu được tất cả các ô vuông của hàng.

Ví dụ 7: Trên mặt bàn có 2005 đồng xu kích thước như nhau, mỗi đồng xu có hai mặt: một mặt màu xanh và một mặt màu đỏ, tất cả các đồng xu đều ngửa mặt xanh lên trên. Thực hiện trò chơi như sau: Mỗi lượt chơi phải đổi mặt 4 đồng xu nào đó trên mặt bàn. Hỏi sau 2006 lượt chơi, có thể nhận được tất cả 2005 đồng xu trên bàn đều ngửa mặt đỏ lên được không? Vì sao?

(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội, năm học 2005 – 2006)

Giải

✓ *Tìm cách giải*. Đọc xong đề bài, chúng ta nhận thấy:

- Bài toán không thể thực hiện hết được tất cả các thao tác trong mọi trường hợp, do vậy chúng ta thử một vài khả năng xảy ra để tìm yếu tố bất biến (không đổi) trong mọi thao tác. Thật vậy:

- ***Trường hợp 1.*** Nếu đổi 4 đồng xu mặt xanh thành 4 đồng xu mặt đỏ ngửa lên thì số đồng xu mặt xanh ngửa lên giảm 4.
- ***Trường hợp 2.*** Nếu đổi 3 đồng xu mặt xanh, 1 đồng xu mặt đỏ thành 3 đồng xu mặt đỏ, 1 đồng xu mặt xanh ngửa lên thì số đồng xu mặt xanh ngửa lên giảm 2.

- ***Trường hợp 3.*** Nếu đổi 2 đồng xu mặt xanh, 2 đồng xu mặt đỏ thành 2 đồng xu mặt đỏ, 2 đồng xu mặt xanh ngửa lên thì số đồng xu mặt xanh ngửa lên không đổi.
- ***Trường hợp 4.*** Nếu đổi 1 đồng xu mặt xanh, 3 đồng xu mặt đỏ thành 1 đồng xu mặt đỏ, 3 đồng xu mặt xanh ngửa lên thì số đồng xu mặt xanh ngửa lên tăng 2.
- ***Trường hợp 5.*** Nếu đổi 4 đồng xu mặt đỏ thành 4 đồng xu mặt xanh ngửa lên thì số đồng xu mặt xanh ngửa lên tăng 4.

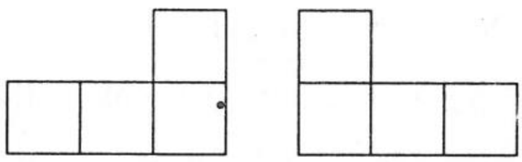
- Ta nhận thấy trong năm trường hợp thì đồng xu mặt xanh ngửa lên tăng hoặc giảm đi số chẵn lần. Như vậy số đồng xu mặt xanh ngửa lên trong mọi thao tác luôn luôn là số lẻ và số đồng xu mặt đỏ ngửa lên luôn là số chẵn.

✓ *Trình bày lời giải.*

Không thể nhận được tất cả 2005 đồng xu trên bàn đều ngửa mặt đỏ lên trên.Vì thế mỗi lần thay đổi 4 đồng xu: có x đồng xu ngửa mặt xanh lên trên và có 4 – x đồng xu ngửa mặt đỏ lên. Do đó số đồng xu ngửa mặt đỏ lên đã thay đổi là $|4x-2|$, một số chẵn đồng xu. Nghĩa là số các đồng xu ngửa mặt xanh thành mặt đỏ không thay đổi tính chẵn lẻ. Ban đầu có 0 đồng xu ngửa mặt đỏ lên là một số chẵn thì không thể biến đổi thành số lẻ là 2005 đồng xu ngửa mặt đỏ lên.

✓ ***Nhận xét.*** Vì tính chất bất biến là tính chẵn lẻ nên ta thay số 2005 thành một số lẻ bất kỳ và số 4 thành một số chẵn bất kỳ thì bài toán không thay đổi kết quả.

Ví dụ 8: Có thể phủ kín bảng 20 x 13 ô vuông bằng các miếng lát có một trong hai dạng dưới (có thể xoay và sử dụng đồng thời cả hai dạng miếng lát) sao cho các miếng lát không chờm lên nhau không?



(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên TP Hải Phòng, năm học 2013 – 2014)

Giải

Tô màu các dòng của bảng ô vuông bằng hai màu đen trắng xen kẽ: dòng 1 đen, dòng 2 trắng, dòng 3 đen, dòng 4 trắng,…

Khi đó mỗi miếng lát sẽ luôn phủ đúng 3 ô đen 1 ô trắng hoặc 3 ô trắng 1 ô đen.

Trong bảng, số ô đen bằng số o trắng nên số miếng lát phủ 3 ô đen 1 ô trắng bằng số miếng lát phủ 3 ô trắng 1 ô đen, do đó phải có chẵn miếng lát.

Tuy nhiên trong bảng có 65 miếng lát, mâu thuẫn. Vậy không thể được phủ được bảng thỏa mãn.

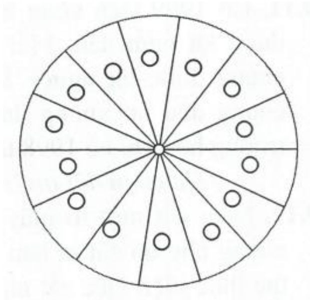
C. Bài tập vận dụng

9.1. Trên bảng ghi một dãy số gồm 2019 số 1 và 2020 số 2. Ta thực hiện xóa hai số bất kỳ và thay bằng hiệu của chúng. Quá trình cứ tiếp tục như vậy. Hỏi trên bảng có khi nào gồm toàn số 0 hay không?

9.2. Một tờ giấy được xé thành 4 mảnh, mỗi tờ giấy trong số tờ giấy nhỏ này lại được xe nhỏ thành 4 mảnh nhỏ nữa, …, tiếp tục như vậy có khi nào được 2019 mảnh giấy hay không? Vì sao?

9.3. Có 2019 tách uống trà đặt trên bàn. Lúc đầu tất cả các tách trà đều được lật ngửa lên. Giả sử mỗi lần người ta làm cho 210 tách trong chúng được lật ngược lại. Hỏi sau một số lần như vậy có thể làm cho tất cả các tách đều úp xuống được không?

9.4. Một hình tròn được chia thành 14 hình quạt bằng nhau. Trong mỗi hình quạt đặt một viên bi. Thực hiện trò chơi sau: mỗi lần lấy hai viên bi ở hai hình quạt khác nhau và chuyển mỗi viên sang hình quạt kề với hình quạt chứa nó nhưng theo hai chiều ngược nhau. Hỏi sau một số hữu hạn bước ta có thể chuyển được tất cả các viên bi vào cùng một hình quạt được không?



(Đề thi vào lớp 10 chuyên, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội, năm học 1996 – 1997)

9.5. Ở sáu đỉnh của một lục giác lồi có ghi 6 số chẵn liên tiếp theo chiều kim đồng hồ. Ta thay đổi các số như sau: mỗi lần chọn một cạnh bất kì rồi cộng mỗi số ở hai đỉnh cạnh đó với cùng một số nguyên. Hỏi sau các lần thay đổi như thế thì sáu số mới ở đỉnh lục giác có bằng nhau không? Vì sao?

9.6. Trên hòn đảo có một loài thằn lằn sinh sống, chúng có ba màu: xanh, đỏ, tím. Để lẩn trốn và săn mồi thì loài thằn lằn này biến đổi màu như sau: nếu hai con thằn lằn khác màu gặp nhau thì chúng đồng thời đổi màu sang màu thứ ba. Nếu hai còn thằn lằn cùng màu gặp nhau thì giữ nguyên màu. Có khi nào tất cả các con thằn lằn trở thành cùng màu không? Vì sao?

9.7. Trên bảng ghi các số từ 1 đến 2020. Thực hiện trò chơi sau: Mỗi lần thay đồng thời tất cả các số có ở trên bảng bởi tổng các chữ số của nó. Hỏi nếu sau một số lần ta nhận được 2020 số mà mỗi số chỉ gồm một chữ số thì có bao nhiêu số 1.

9.8. Có một bao đựng 150 hòn bi đen và 75 hòn bi trắng. Một người bốc từ bao ra mỗi lần hai hòn bi một cách ngẫu nhiên. Nếu anh ta bốc được một hòn đen và một hòn trắng, anh ta lại bỏ viên trắng vào bao, cất đi viên đen. Nếu anh ta bốc được 2 viên cùng màu, anh ta cất đi cả hai rồi bỏ lại vào bao một hòn đen (giả sử anh ta có nhiều hòn đen ở ngoài đủ để làm chuyện đó nếu cần). Quá trình lặp lại. Sau cùng còn đúng một viên bi trong bao, lý do tại sao? Viên bi đó màu gì?

9.9. Có thể lát kín một cái sân hình vuông cạnh 3,5m bằng những viên gạch hình chữ nhật kích thước 25cm x 100cm được hay không?

(Thi tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, tỉnh Hòa Bình, năm học 2013-2014)

9.10. Trong bảng ô vuông 10 x 10 . Có thể sắp đặt 25 miếng bìa hình chữ nhật kích thước 1x4 phủ kín toàn bộ bảng ô vuông hay không?

9.11. Có 1999 tách uống trà đặt trên bàn. Lúc đầu tất cả các tách trà đều được lật ngửa lên. Mỗi một nước đi, ta làm cho đúng 100 tách trong chúng được lật ngược lại. Sau một số nước đi, có thể làm cho tất cả chúng đều úp xuống được không? Tại sao? Trả lời câu hỏi này trong trường hợp chỉ có 1998 tách.

(Thi chọn đội tuyển Hồng Koong tham gia IMO, năm học 2000, vòng 1)

9.12. Nam cắt một tờ giấy ra làm 4 miếng hoặc 8 miếng, rồi lấy một số miếng nhỏ đó cắt ra làm 4 hoặc 8 miếng nhỏ hơn và Nam cứ tiếp tục thực hiện việc cắt như thế nhiều lần. Hỏi với việc cắt như vậy, Nam có thể cắt được 2016 miếng lớn nhỏ hay không? Vì sao?

(Thi tuyển sinh lớn 10, THPT chuyên TP. Hồ Chí Minh,năm học 2016-2017)

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

9.1 Ban đầu có 2019 số 1 (số 1 là số lẻ)

- Nếu xóa hai số giống nhau, thay bằng hiệu của chúng thì số 1 giữ nguyên hoặc giảm đi 2 số nên số số 1 sau lần xóa vẫn là số lẻ.

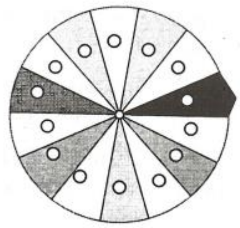
- Nếu xóa hai số khác nhau (1 và 0) thay bằng hiệu của 2 số thì số 1 không đổi.

Như vậy sau mỗi lần xóa hai số bất kì thay bằng hiệu của chúng thì số số 1 vẫn là số lẻ nên không thể trên bảng còn toàn số 0 được.

9.2 Số mảnh giấy sau mỗi lần xé tăng thêm 3. Vậy ở lần xé thứ n thì số mảnh giấy là 3n + 1. Mà 2019 : 3 dư 0. Suy ra không được.

9.3 Mỗi lần lật ngửa 210 tách: giả sử x tách ngửa và 210 – x tách úp. Do đó mỗi lần thực hiện lật ngửa thì số tách ngửa thay đổi đi $|210-2x|$, mọt số chẵn. Ban đầu có 0 tách úp xuống là một số chẵn thì không thể biến đổi thành số lẻ 2019 tách úp xuống được.

9.4 Ta tô màu như hình vẽ. Có 7 viên bi ở hình quạt đen và 7 viên bi ở hình quạt trắng.



Thực hiện trò chơi sau: mỗi lần lấy hai viên bi ở hai hình quạt khác nhau và chuyển mỗi viên sang hình quạt kề với hình quạt chứa nó nhưng theo hai chiều ngược nhau:

- Nếu lấy hai viên ở hai hình quạt khác màu, thì vẫn chuyển vào hai hình quạt khác màu. Do vậy số viên bi ở mỗi màu hình quạt là không đổi.

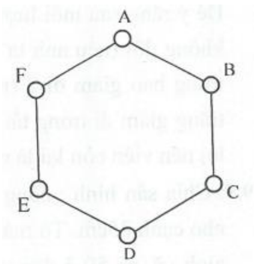
- Nếu lấy hai viên ở hai hình quạt màu trắng thì chuyển sang 2 hình quạt màu đen, suy ra số bi ở hình quạt màu đen tăng 2.

- Nếu lấy hai viên ở hình quạt màu đen thì chuyển sang 2 hình quạt màu trắng, suy ra số bi ở hình quạt màu đen giảm 2.

Do vậy sau mỗi lần thực hiện thì tổng số bi ở hình quạt màu đen vẫn là số lẻ nên không thể thực hiện được.

9.5 Kí hiệu các đỉnh theo chiều kim đồng hồ bởi các chữ cái A, B, C, D, E, F (như hình vẽ). Giả sử các số chẵn liên tiếp được ghi tương ứng với đỉnh này là a, b, c, d, e, f.

Đặt $S=(b+d+f)-(a+c+e)$



Nhận thấy hai số ghi hai đỉnh thuộc cùng một cạnh gồm một số trong các số b, d, f và một số trong các số a, c, e. Do đó khi cộng hai số này với cùng một số nguyên thì S không thay đổi.

Ban đầu a, b, c, d, e, f là các số chẵn liên tiếp nên S = 6. Vì vậy dù có thực hiện bao nhiêu lần công việc cộng với cùng một số nguyên thì S vẫn bằng 6, tức là S khác 0, chứng tỏ không thể làm cho 6 số ở 6 đỉnh bằng nhau được.

9.6 Ta chứng minh rằng sau mỗi lần gặp nhau thì số dư cho 3 có đầy đủ 3 số dư là 0, 1, 2.

Nếu hai con khác màu gặp nhau thì đổi sang màu thứ 3 nên số dư chia cho 3 của các màu giảm 1, giảm 2 và tăng 2 nên có ba số dư là 1, 2, 0 vẫn đầy đủ.

Mặt khác, nếu tất cả đều về 1 màu thì số dư sẽ là 0, 0, 0. Điều này vô lý nên không thể có trường hợp tất cả các tắc kè có cùng màu.

9.7 *Định hướng:* Xét số dư chia cho 9 dư 1.

Ta biết rằng một số tự nhiên và tổng các chữ số của nó có cùng số dư trong phép chia cho 9. Do đó nếu thay đồng thời các số có ở trên bảng bởi các chữ số của nó thì số các số chia cho 9 dư 1 vẫn không đổi.

Muốn biết sau một số lần ta nhận được 2020 số mà mỗi số chỉ có một chữ số có bao nhiêu số 1, chúng ta chỉ cần tìm xe từ 1 đến 2020 có bao nhiêu số chia cho 9 dư 1.

Các số chia cho 9 dư 1 là: 1; 10; 19; 28; 37; …; 2017.

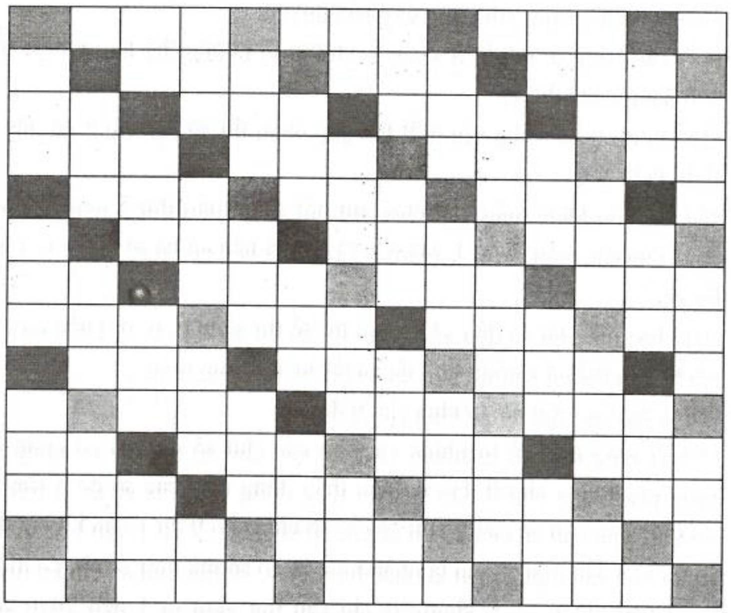
Số các số là: $(2017-1):9+1=225$ (số)

Vậy trên bảng có 225 số 1.

9.8 Cứ mỗi lần rút ra hai viên là một lần bỏ lại một viên, do đó sau mỗi lần rút thì số bi trong bao giảm đi 1. Lúc đầu có 225 hòn bi, nên sau 224 lần bốc sẽ giảm đi 224 hòn bi và cuối cùng phải còn lại một viên trong bao.

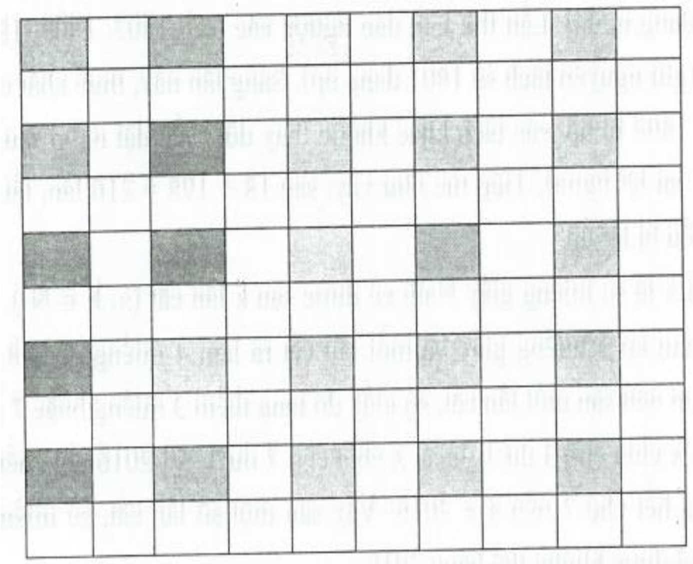
Để ý rằng sau mỗi lượt bốc ra rồi bỏ lại, thì hoặc là số bi trắng trong bao không đổi (nếu anh ta bốc được ít nhất một hòn đen) hoặc là số bi trắng trong bao giảm đi trong tất cả các lần là một số chẵn. Vì có 75 viên trắng (số lẻ) nên viên còn lại là màu trắng.

9.9 Chia sân hình vuông cạnh 3,5m thành 14 x 14 = 196 hình vuông nhỏ cạnh 25cm. Tô màu đen vào các hình vuông nhỏ của hình vuông như hình vẽ, có 50 ô đen và 146 ô trắng. Mỗi viên gạch 25cm x 100cm được lát lên 1 ô đen và 3 ô trắng.



Giả sử lát kín được sân thì số ô trắng phải gấp 3 lần số ô đen. Nhưng $146 \neq 50$ x 3 nên không thể lát kín được.

9.10 Ta tô bảng vuông bằng màu đen và trắng sau cho như hình vẽ. Ta nhận được 25 o đen và 75 ô trắng.



Ta chú ý đặt những hình chữ nhật trùng với các ô vuông thì mỗi hình chữ nhật sẽ phủ lên 2 ô vuông đen hoặc 0 ô vuông đen nào. Từ đó suy ra 25 hình chữ nhật trên bảng vuông, chúng sẽ phủ kín số chẵn ô vuông đen. Mà trên bảng có 25 ô đen không phải là số chẵn, nên không phủ kín được.

9.11 Nếu có 1999 chiếc tách (số tách là số lẻ), tất cả đều được đặt ngửa (trạng thái ngửa) thì ta không thể quay úp xuống tất cả (trạng thái úp) được.

Thật vậy, theo quy tắc chơi, tại mỗi thời điểm, giả sử có k tách đặt ngửa được làm úp xuống thì có 100-k chiếc, vậy số tách úp bị thay đổi đi một số chẵn (100-k) – k = 100 – 2k (nếu k>50 thì số tách úp giảm đi, nếu k<50 thì số tách úp tăng lên, nếu k = 50 thì số tách úp không thay đổi). Nghĩa là tính chẵn lẻ của số tách úp không thay đổi (bất biến!). Nhưng lúc đầu số tách úp ở trạng thái chẵn (bằng 0). Vì vậy không thể làm cho số tách úp bằng 1999 (trở về trạng thái lẻ) được.

Nếu số tách là 1998 thì có thể úp tất cả các tách. Một thuật toán như sau: Đánh số các tách theo thứ tự: 1, 2, 3,…, 1998. Lần lượt úp 100 tách đầu tiên, sau 18 lần úp được 1800 tách chuyển từ trạng thái ngửa sang úp. Tiếp theo úp 100 tách số 1801, 1803, 1804, …, 1901 (để nguyên tách số 1802 đang ngửa). Lần thứ hai, đảo ngược tách 1802, 1803, 1804,…, 1901 (giữ nguyên tách số 1801 đang úp). Sang lần này, thực chất chỉ tách 1801, 1802 bị úp, các tách khác không thay đổi (vẫn đặt ngửa sau khi lật úp rồi lại lật ngửa). Tiếp tục như vậy, sau 18 + 198 = 216 lần, tất cả các tách đều bị lật úp.

9.12 Gọi x là số miếng giấy Nam có được sau k lần cắt $(x, k \in N^*)$. Vì lúc đầu Nam có 1 miếng giấy và mỗi lần cắt ra làm 4 miếng hoặc 8 miếng nhỏ hơn nên sau mỗi lần cắt, số giấy đó tăng thêm 3 miếng hoặc 7 miếng. Do đó x chia cho 3 dư 1, hoặc x chia cho 7 dư 1. Vì 2016 chia hết cho 3 và chia hết cho 7 nên $x \neq 2016$. Vậy sau một số lần cắt, số miếng giấy Nam có được không thể bằng 2016.

Chuyên đề 10.

CÂU ĐỐ VÀ TRÒ CHƠI

A. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Trong một giải bóng đá, có 4 đội thi đấu vòng tròn một lượt (trong một trận đội thắng được 3 điểm, đội hòa được 1 điểm, và đội thua được 0 điểm). Khi kết thúc giải, người ta thấy có 3 đội đạt được tổng số điểm lần lượt là 6 điểm, 5 điểm và 1 điểm. Hãy cho biết đội còn lại của giải có tổng số điểm là bao nhiêu và giải thích tại sao?

(Tuyển sinh lớp 10, trường PTNK, ĐHQC TP. Hồ Chí Minh, năm học 2006-2007)

Giải

Do có 4 đội tham dự nên mỗi đội đấu 3 trận. Theo đề bài đội 6 điểm thắng 2 trận và thua 1 trận, đội 5 điểm thắng 1 trận và hòa 2 trận, đội 1 điểm hòa 1 trận và thua 2 trận. Do đó đội còn lại phải có 1 trận hòa. Vì tổng số trận thắng bằng tổng số trận thua nên đội còn lại phải thua 1 trận và thắng 1 trận. Tổng số điểm của đội còn lại là: $1 + 0 + 3 = 4$ (điểm)

Có thể diễn giải như sau: Giả sử 4 đội bóng đá là A, B, C, D

+ A thắng C và D, thua B nên được 6 điểm.

+ B thắng A, hòa C và D nên được 5 điểm.

+ C thắng D, hòa B thua A nên được 4 điểm.

+ D hòa B, thua A và C nên được 1 điểm.

Ví dụ 2: Một tháng đặc biệt có tới năm ngày thứ 3, trong đó ngày đầu tiên và ngày cuối cùng của tháng không phải là thứ 3. Hỏi ngày cuối cùng của tháng đó là ngày nào?

Giải

✓ *Tìm cách giải.* Nhận thấy một tháng nhiều nhất có 31 ngày, nên nhiều nhất chỉ có 5 ngày thứ ba, khoảng cách giữa hai thứ ba liên tiếp là 7 ngày. Do đó chúng ta có thể tìm được ngày thứ ba đầu tiên trong tháng đó.

✓ *Trình bày lời giải.*

Ngày 2 của tháng là thứ 3, suy ra năm ngày thứ ba là 2, 9, 16, 23, 30. Mà ngày cuối cùng của tháng không phải ngày thứ ba nên suy ra ngày cuối cùng của tháng là 31 ngày và là thứ tư.

Ví dụ 3: Có 2020 đồng xu được đánh số thứ tự từ 1 đến 2020, tất cả đều ngửa.

Lần 1: Lật mặt tất cả các đồng xu có số thứ tự là bội của 1.

Lần 2: Lật mặt tất cả các đồng xu có số thứ tự là bội của 2.

Lần 3: Lật mặt tất cả các đồng xu có số thứ tự là bội của 3.

…………………………………………………

Lần 2020: Lật mặt tất cả các đồng xu có số thứ tự là bội của 2020.

Hỏi có bao nhiêu đồng xu ngửa sau lần lật thứ 2020?

Giải

Tại lần lật thứ k, những đồng xu có số thứ tự là bội của k sẽ được lật. Để một đồng xu lúc đầu là ngửa, sau 2020 vòng lật nó vẫn ngửa thì số lần đồng xu đó được lật phải là một số chẵn, tức là số thứ tự của nó phải có số các ước số là chẵn.

Ta biết rằng những số chính phương mới có số các ước số là lẻ. Từ 1 đến 2020 có 44 số chính phương là: 1, 4, 9, …, 1936.

Do đó cuối cùng sau 2020 vòng lật, số đồng xu ngửa là: 2020 – 44 = 1976 (đồng xu).

Ví dụ 4: Thiện và Ác chia nhau một đống gồm 2000 đô-la bằng bạc (mỗi đồng trị giá một đô-la), dưới sự giám sát của lão Tà. Đầu tiên, lão Tà bảo Thiện chia thành hai đống, mỗi đống có ít nhất hai đồng. Sau đó Ác chia mỗi đống thành hai đống (mỗi đống có ít nhất 1 đồng), rồi lão ta chọn đống ít nhất và đống nhiều nhất trong bốn đống tạo thành, hai đống còn lại phần của Thiện. Vậy thì, bất chấp lão Ác khôn khéo và tham lam như thế nào, số tiền ớn nhất mà lão Thiện có thể kiếm được là bao nhiêu?

Giải

Nếu đồng X gồm 2000 đồng đô-la được chia thành hai đống M đồng và N đồng ($X = M + N = 2000$) sao cho $M > N$ rồi tiếp tục chia mỗi đống thành M; N thành hai đống: $M = a + b$ sao cho $a > b$ và $N = c + d$ sao cho $c > d$ thì trong mọi trường hợp, tổng của đống lớn nhất và đống nhỏ nhất trong bốn đống a, b, c, d (Kí hiệu là T) cũng không vượt quá M.

Nếu b nhỏ nhất thì hiển nhiên a lớn nhất. $T = a + b = M$

Nếu d nhỏ nhất thì: hoặc c lớn nhất $T = c + d = N < M$ hoặc a lớn nhất: $T = a + d < M$.

Vậy để nhận được số tiến lớn nhất thì đầu tiên lão Thiện phải chia 2000 đồng đô-la thành hai đống bằng nhau ($M = N$). Khi đó dù lão Ác chia thế nào thì cũng luôn nhận được 1000 đô-la, khi đó lão Thiện cũng nhận được 1000 đô-la.

Ví dụ 5: Trong một giải đấu vật có 100 người tham dự, tất cả có sức mạnh khác nhau. Người nào khỏe hơn luôn chiến thắng đối thủ yếu hơn. Mỗi đo vật đấu hai lần và người thắng cả hai trận sẽ được tặng thưởng. Hỏi số người ít nhất được tặng thưởng là bao nhiêu?

(Kỳ thi Toán quốc tế giữa các thành phố ITOT, Mùa thu 2013, THCS mở rộng)

Giải

Sắp xếp 100 đô vật theo sức mạnh tăng dần với a_1 (người yếu nhất), a_2, a_3,…, a_{100} (người khỏe nhất) hiển nhiên a_{100} luôn là người chiến thắng.

Ở lượt thứ nhất ta xếp các đồ vật thi đấu theo cặp như sau: a_{100} với a_{99}, a_{98} với a_{97};…;a_2 với a_1. Khi đó a_1; a_3;…;a_{99} là những người thua cuộc.

Ở lượt thứ hai, ta xếp các cặp a_{100} với a_1; a_{99} với a_{98};….;a_3 với a_2. Khi đó a_1; a_2; a_4; a_6;…; a_{98} là những người thua cuộc. Do đó chỉ có duy nhất a_{100} là người thắng cả hai vòng đấu.

Ví dụ 6: Nhà trường tổ chức một ngày hội chợ cho học sinh. Trong đó, có trò chơi đoán xem có bao nhiêu viên cẩm thạch đựng trong một lọ kín. Giải thưởng sẽ trao cho ai đoán gần chính xác nhất vào cuối ngày hội chợ. Kết quả là:

- Giải nhất: Đức Trọng, dự đoán 125 viên.

- Giải nhì: Minh Hạnh, dự đón 140 viên.
- Giải ba: Trọng Nhân, dự đón 142 viên.
- Giải tư: Đức Minh, dự đoán 121 viên.

Hỏi chính xác trong lọ có bao nhiêu viên cẩm thạch.

Giải

Nếu gọi số viên cẩm thạch trong lọ là x thì $125 \le x \le 140$.

Vì người dự đoán số 125 đạt giải nhất và người dự đón 140 đạt giải nhì nên suy ra

$x-125<140-x \Rightarrow 125 \le x \le 132$.

Vì người dự đoán số 142 đạt giải ba và người dự đoán số 121 đạt giải tư nên

$142-x<x-121 \Rightarrow 132 \le x \le 132 \Rightarrow x=132$.

Vậy trong lọ có chính xác 132 viên cẩm thạch.

B. Bài tập vận dụng

10.1 Bốn đội bóng A, B, C, D được xếp cùng một hàng. Mỗi đội chơi 1 trận, lần lượt với các đội còn lại. Mỗi trận thắng được 3 điểm, hòa được 1 điểm, thua 0 điểm. Sau tất cả các trận đấu, kết quả như sau:

(1). Tổng số điểm 3 trận của mỗi đội là các số lẻ liên tiếp.

(2). Đội D cao điểm nhất.

(3). Đội A hòa đúng 2 trận, trong đó hòa một trận với C. Tính điểm của mỗi đội.

10.2 Cho hình vuông 5 x 5 gồm 25 ô vuông nhỏ. Hỏi phải tô ít nhất bao nhiêu ô sao cho trong mỗi hình vuông 3x3 bất kì có đúng 4 ô được tô.

10.3 Sửu chỉ nói thật vào thứ 2, thứ 4, thứ 6 và chủ nhật. Dần chỉ nói thật vào ngày thứ 2, thứ 3, thứ 4 và thứ 5. Hãy tìm ngày mà cả hai đều nói: "Hôm qua, Tôi đã nói dối".

10.4 Trên một bàn cờ 15 x 15 ô vuông gồm các ô trắng đen xen kẽ như cờ vua, có 15 quân xe đứng ở vị trí không đối đầu nhau (không ăn được nhau). Giả sử sau đó, mỗi quân xe này bị xê dịch theo một bước đi của quân mã. Chứng minh rằng khi đó phải có một cặp quân xe rơi vào thế đối đầu nhau.

10.5 ***Ai đã lấy thanh kẹo?***

Ở trường nội trú, trong giờ ăn trưa, từ phòng cô Hằng ra, năm cậu bé ghé đến một quầy ăn trưa bên cạnh đó. Một trong năm cậu đã lấy một thanh kẹo mà không trả tiền. Khi bị thấy hiệu trưởng chất vấn, năm cậu bé trả lời như sau:

1) An : "Không phải Cường lấy, cũng không phải em"

2) Bình : "Theo em, An hoặc Chi đã lấy"

3) Chi : "Cả An và Bình đều nói dối"

4) Dũng : "Chi nói không đúng, một trong hai người kia nói dối, người còn lại nói sự thật"

5) Cường: "Tất cả những gì Dũng nói đều sai cả"

Khi thấy hiệu trưởng hỏi ý kiến cô Hằng, cô trả lời: "Trong năm cậu ấy, có 3 cậu luôn luôn trung thực, hai cậu còn lại thì luôn dối trá".

Giả sử có Hằng nói đúng, bạn hãy xác định xem ai là người đã lấy thanh kẹo?

10.6 Trong một giải bóng đá có N đội tham gia thi đấu theo thể thức vòng tròn một lượt (hai đội bất kì đều gặp nhau đúng một lần). Sau mỗi trận đấu, đội thắng được 3 điểm, đội thua không được điểm nào, còn nếu trận đấu có kết quả hòa thì mỗi đội cùng được 1 điểm. Các đội được xếp hạng dựa theo tổng điểm. Trong trường hợp một số đội có tổng điểm bằng nhau thì các đội này được xếp hạng theo các chỉ số phụ. Kết thúc giải người ta nhận thấy rằng không có trận đấu nào kết thúc với tỉ số hòa; các đội xếp tiếp theo có tổng điểm đôi một khác nhau.

a) Chứng minh rằng $N \geq 7$

b) Tìm N và tổng điểm của mỗi đội tham gia giải.

10.7 Trong một giải cờ vua có 8 kì thủ tham gia, thi đấu vòng tròn một lượt, thắng được 1 điểm, hòa được $\frac{1}{2}$ điểm, thua được 0 điểm. Biết rằng sau khi tất cả các trận đấu kết thúc thì cả 8 kì thủ nhận được các số điểm khác nhau và kì thủ xếp thứ hai có số điểm bằng tổng điểm của 4 kì thủ xếp hạng cuối cùng. Hỏi ván đấu giữa kì thủ xếp thứ tư và kì thủ xếp thứ năm đã kết thúc với kết quả như thế nào?

10.8 Một đảo nằm xa tít ngoài biển khơi có tên là đảo "Thiên mã". Trên hòn đảo này có hai bộ tộc đang sinh sống. Một bộ tộc có tên là Kị sĩ và bộ tộc kia làm nghề Ăn trộm. Tất nhiên bộ tộc Kị sĩ thì luôn nói thật và bộ tộc Ăn trộm thì luôn nói dối.

Dưới bóng cây có hai thổ dân đang ngồi nghỉ. Một du khách đi đến và hỏi một trong hai người

a) Ngài là Kị sĩ hay Ăn trộm ngựa?

A:……..

Không thể hiểu người đó nói gì, vì thế du khách quay sang hỏi người kia, xem người lúc trước nói gì?

B: Ông ta nói rằng ông ta là người Ăn trộm ngựa.

Vậy A và B là gì nhỉ?

10.9 Có 10 đồng tiền xu thật có khối lượng giống nhau, cùng một đồng tiền xu giả có khối lượng nặng hơn khối lượng đồng tiền xu thật và một đồng xu giả khác có khối lượng bé hơn khối lượng đồng xu thật. Hãy giải thích tại sao chỉ bốn lần cân đĩa bằng cân thăng bằng bạn có thể xác định được tổng khối lượng của hai đồng tiền xu giả lớn hơn, bằng hay nhỏ hơn tổng khối lượng của hai đồng xu thật.

(Thi Toán quốc tế IMC 2014. THCS Đồng Đội Canada đề nghị)

10.10 Cho bảng vuông với các số như sau: Có thể điền các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 vào các ô còn trống để tạo thành một hình vuông kì diệu hay không? (Hình vuông kì diệu có tổng các số trên mỗi hàng, cột, đường chéo bằng nhau).

(Cuộc thi của Hội toán học Xcot-len, năm 2001-2002)

4	1	4	2	4
1				2
4				2
4				5
2	3	3	5	2

10.11 Cho ba đống đá gồm 51, 49 và 5 hòn. Có hai thao tác được thực hiện là: dồn hai đống tùy ý thành một đống; chọn đống tùy ý có số chẵn hòn đá để phân làm hai đống có số lượng hòn đá bằng nhau. Có thể nào cuối cùng sẽ nhận được 105 đống mà mỗi đống chỉ có một hòn, sau một dãy các thao tác luân phiên nhau?

(Cuộc thi Toán học Quốc tế của các tỉnh thành, THCS, mùa xuân 2001)

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

10.1 Điểm của 4 đội có thể là (1, 3, 5, 7) hoặc (3, 5, 7, 9). Do không thể có hai đội có 7 điểm và 9 điểm nên bộ điểm là (1, 3, 5, 7). Đội D có điểm cao nhất nên điểm của D là 7 nên đội D thắng 2 trận, hòa 1 trận.

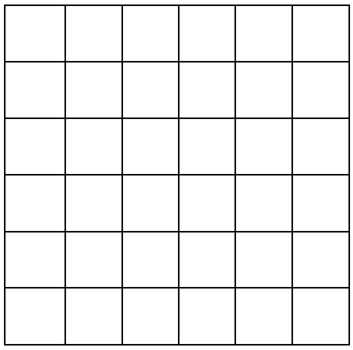
Đội A không thua trận 3, bởi nếu thua thì số điểm là số chẵn, suy ra D hòa với A và thắng đội B và đội C.

Đội A có 2 trận hòa với D và C, thắng B nên điểm của A là 5 điểm.

Đội B thắng C thua A và D nên được 3 điểm.

Đội C hòa với A, thua B và D được 1 điểm.

Vậy Đội A: 5 điểm; Đội B: 3 điểm; Đội C: 1 điểm; Đội D: 7 điểm.



10.2 Giả sử hình vuông 6x6 được tô màu một số ô sao cho trong mỗi hình vuông 3x3 bất kì có đúng 4 ô được tô.

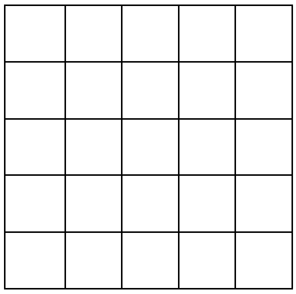
Hình vuông 6x6 được chia thành 4 hình vuông 3x3 nên trong 36 ô vuông nhỏ có đúng 16 ô được tô.

Để số ô được tô màu trong hình vuông 5x4 là ít nhất thì phải nhiều ô nhất có thể ở 11 ô vuông nhỏ phía ngoài.

Để ý rằng cột 3 và cột 6 sẽ tô màu giống nhau, hàng 3 và hàng 6 tô màu giống nhau và ô trung tâm sẽ giống ô ở góc dưới, do đó ta có thể tô màu cho nhiều nhất 9 ô trong 11 ô phía ngoài (ví dụ như hình trên).

Vậy cần tô ít nhất 16 – 9 = 7 ô.

Ví dụ 1 cách tô màu;



10.3 Nếu hôm nay Dần nói thật thì hôm qua Dần nói dối, vậy hôm nay là thứ Hai. Sửa nói thật vào thứ Hai và cả Chủ nhật do đó vào thứ Hai, Sửu sẽ phải nói "Hôm qua tôi đã nói thật". Như vậy hôm nay Dần nói dối, và hôm qua Dần nói thật. Suy ra hôm nay là thứ Sáu. Thứ Sáu là ngày Sửu nói thật và thứ Năm là ngày Sửa nói dối, vậy vào thứ Sáu, Sửu cũng sẽ nói "Hôm qua tôi đã nói dối".

10.4 Đánh số các hàng và cột của bàn cờ từ 1 đến 15, khi đó, mỗi quân xe được xác định ở vị trí hàng i, cột j bởi cặp (i, j) với $1 \le i; j \le 15$. Vì ban đầu các quân xe đứng ở vị trí không đối đầu nhau nên không thể có hai quân xe nằm cùng một hàng hoặc một cột. Nói cách khác, chỉ số hàng (cột) của các quân xe phải khác nhau. Từ 1 đến 15 có 8 số lẻ và 7 số chẵn. Mỗi khi một quân xe di chuyển theo một bước đi của quân mã, nó làm tăng (hoặc giảm) chỉ số hàng là một đơn vị và chỉ số cột là hai đơn vị (hoặc ngược lại). Như thế, 15 số trong 30 số đó bảo toàn tính chẵn lẻ. Từ đó, sau khi mỗi quân xe đều di chuyển theo một bước đi của quân mã thì không thể có 16 số lẻ và 14 số chẵn nữa. Điều này có nghĩa rằng, khi đó phải có một cặp quân xe rơi vào thế đối nhau.

10.5 Vì có 3 cậu luôn luôn trung thực nên câu trả lời của 3 cậu đó sẽ không mâu thuẫn với nhau, nói cách khác, với người nói thật thà câu trả lời sẽ không mâu thuẫn với ít nhất hai câu trả lời của người khác. Từ nhận xét trên, chúng ta suy luận ngay được An, Bình và Cường là những người luôn nói thật còn Chi và Dũng là những người luôn nói dối.

Dựa vào các câu trả lời của An và Bình, suy ra Chi là người lấy kẹo.

10.6

a) Đội xếp nhất 15 điểm nên thi đấu ít nhất với 5 đội khác nhau $\Rightarrow N \geq 5+1$

Nếu N = 6 thì đội xếp thứ nhất thắng 5 đội còn lại, đội xếp nhì 12 điểm nên thắng 4 đội trừ đội xếp nhất.

Đội xếp ba thua đội xếp nhất và nhìn nên số điểm tối đa là 3.3 = 9.

Theo đầu bài đội ba 12 điểm: vô lí

Do vậy $N \geq 7$.

b) Các đội còn lại có số điểm không lớn hơn 12. Vì không có hòa nên số điểm các đội còn lại là bội của 3.

Số điểm của các đội còn lại có thể là: 0, 3, 6, 9, 12.

Do đó $N \leq 5+3$ vì $N \geq 7$ (câu a)

Nên N = 7 hoặc N = 8

- Xét N = 8.

Có 8 đội nên số trận đấu có $\frac{8.7}{2}=28$ trận. Tổng số điểm 8 đội đạt là 28.3 là số chẵn.

Còn 0+3+6+9+12+12+12+15 là số lẻ: vô lí. Vậy nên $N \neq 8$

- Xét N = 7.

Có 7 đội nên số trận đấu có $\frac{7.6}{2}=21$ trận.

Tổng số điểm 7 đội đạt 21.3 = 63 điểm. Tổng số điêm các đội còn lại đạt được là: $63-(12+12+15)=24$ điểm.

$24=0+3+9+12$

Số 24 biểu diễn thành tổng 4 số là bội của 3 và khác nhau chỉ duy nhất theo cách biểu diễn trên.

Tổng số điểm mỗi đội còn lại đạt được lần lượt là 0, 3, 9, 12.

10.7 Sau khi giải kết thúc, số ván cờ đã thi đấu giữa 4 kỳ thủ xếp cuối cùng là: $\frac{4x3}{1x2}=6$.

Sau mỗi ván tổng số điểm của hai kỳ thủ nhận được là 1. Vì thế tổng số điểm của 4 kỳ thủ xếp cuối cùng không ít hơn 6 điểm. Nếu $s \geq 6,5$ thì tổng số điểm của kỳ thủ xếp thứ hai là $s \geq 6,5$

Do 8 kỳ thủ được các số điểm khác nhau nên dễ thấy kỳ thủ xếp thứ nhất có điểm số không ít hơn $s+0,5 \geq 7$.

Do kỳ thủ xếp thứ nhất đấu 8 trận nên điều này chỉ xảy ra khi $s+0,5=7 \Leftrightarrow s=6,5$ và kỳ thủ xếp thứ nhất thắng cả 7 ván. Suy ra kỳ thủ xếp thứ hai thắng không quá 6 ván và số điểm $\leq 6 < s$: vô lí.

Vậy ta phải có s = 6. Điều này có nghĩa là các kỳ thủ xếp từ năm đến tám chỉ giành điểm khi thi đấu với nhau thôi, ngoài ra thua tất cả các kỳ thủ khác. Do vậy, kỳ thủ xếp thứ tư đã thắng kỳ thủ xếp thứ năm trong trận đấu trực tiếp.

10.8 A chỉ có thể trả lời một cách rằng anh ta là Kị sĩ, bất kể anh ta là gì. Vì thế B đã nói dối. Suy ra B là Ăn trộm ngựa. Chúng ta không có thông tin chính xác về A.

10.9 Ta chia các đồng xu đã cho thành 4 nhóm A, B, C, D, mỗi nhóm có 3 đồng xu và đem cân từng nhóm đồng xu như sau: Cho A và B lên hai đĩa cân (lần cân thứ nhất); C và D lên hai đĩa cân (lần cân thứ hai). Ta xét 3 trường hợp.

+ *Trường hợp 1.* Cả hai lần cân đều thăng bằng. Khi đó, đồng xu giả ở cùng một nhóm và tổng khối lượng hai đồng xu bằng tổng khối lượng hai đồng xu giả.

+ *Trường hợp 2.* Một trong hai lần cân thăng bằng. Chỉ có hai nhóm đồng xu có khối lượng bằng nhau. Giả sử hai nhóm A và B có tổng khối lượng bằng nhau, tổng khối lượng các đồng xu trong nhóm C lớn hơn tổng khối lượng các đồng xu trong nhóm D. Khi đó cả hai đồng xu giả đều thuộc nhóm A và B với tổng khối lượng các đồng xu trong hai nhóm C và D. Từ đó ta sẽ có câu trả lời.

+ *Trường hợp 3.* Cả hai lần cân thứ nhất và thứ hai đều không thăng bằng.

Do đối xứng, ta có thể giả sử nhóm A có trọng lượng nặng hơn nhóm B và nhóm C có trọng lượng nặng hơn nhóm D. Khi đó đồng xu giả nặng hơn ở nhóm A và đồng xu giả nhẹ hơn ở nhóm D; hoặc đồng xu giả nặng hơn ở nhóm C và đồng xu giả nhẹ hơn ở nhóm B. Nếu nhóm A toàn đồng xu thật thì B chứa đồng xu giả nhẹ hơn, khi đó C chứa đồng xu giả nặng hơn. Nếu nhóm A chứa đồng xu giả nặng hơn thì B phải chứa hoàn toàn đồng xu thật (vì nếu B chứa đồng xu giả nhẹ hơn thì nhóm C có trọng lượng bằng nhóm D là vô lí). Khi đó D chứa đồng xu giả nhẹ hơn. Do đó nhóm A và D cùng chứa đồng xu giả hoặc cùng không chứa đồng xu giả. Nếu nhóm A có trọng lượng nhẹ hơn nhóm C thì đồng xu giả nặng hơn ở C và đồng xu giả nhẹ hơn ở B. Cuối cùng ta chỉ cần cân nhóm A và D với nhóm B và C thì được kết quả.

10.10 Giả sử ta điền được các số 1, 2, 3, 4, 5 để có hình vuông kì diệu:

4	1	4	2	4
1	a	b	c	2
4	d	e	f	2
4	g	h	i	5
2	3	3	5	2

Từ đó ta có:

$4+a+e+1+2=15 \Rightarrow a+e+1=9;$

$4+b+e+h+3=15 \Rightarrow b+e+h=8;$

$2+g+e+c+4=15 \Rightarrow g+e+c=9;$

$4+d+e+f+2=15 \Rightarrow d+e+f=9;$

Suy ra: $(a+b+c+d+e+f+g+h+i)+3e=35$

Mặt khác, cộng ba hàng ở giữa của hình vuông, ta được:

$(a+b+c+d+e+f+g+h+i)+18=45$

Vì vậy: $3e=8 \Rightarrow e \neq 1;2;3;4;5$

Kết luận: Không thể có hình vuông kì diệu thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

10.11 Do cả ba đống 51, 49 và 5 hòn đều có số lẻ các hòn đá nên thao tác đầu tiên phải là: dồn hai đống thành một.

Nếu ban đầu dồn hai đống 5 và 49 hòn thành một, ta sẽ có hai đóng 51 và 54 hòn đều có số hòn là bội của 3. Từ lúc này trở đi, khi luân phiên thực hiện các thao tác, dễ thấy mỗi đống luôn là bội của 3.

Tương tự: Nếu ban đầu dồn hai đống 49 và 51 hòn thành một rồi tiếp tục luân phiên thực hiện các thao tác thì mỗi đống luôn là bội của 5;

Nếu ban đầu dòn hai đống 5 và 51 hòn thành một rồi tiếp tục luân phiên thực hiện các thao tác thì mỗi đống luôn là bội của 7.

Vậy ta không thể thực hiện được yêu cầu của đề bài.

Chương II. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

Chuyên đề 11. ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa: Nếu đại lương y liên hệ với đại lượng x theo công thức $y = kx$ (với k là hằng số khác 0) thì ta nói y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ k.

2. Chú ý:

* Khi đại lượng y tỉ lệ thuận với đại lượng x thì x cũng tỉ lệ thuận với y và ta nói hai đại lượng đó tỷ lệ thuận với nhau.

* Nếu y tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ k (khác 0) thì x tỉ lệ thuận với y theo hệ số $\frac{1}{k}$.

* Nếu z tỉ lệ thuận với y theo hệ số tỉ lệ k_1, y tỷ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ k_2 thì z tỷ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ $k_1.k_2$.

3. Tính chất: Nếu hai đại lượng tỉ lệ thuận với nhau thì:

* Tỉ số giữa hai giá trị tương ứng của hai đại lượng luôn không đổi:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = ... = k.$$

* Tỉ số giữa hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}; \frac{x_1}{x_3} = \frac{y_1}{y_3}; ...$$

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Dưới dây là bảng giá trị tương ứng của thời gian t (giờ) và quãng đường s (km) trong một chuyển động:

Thời gian t (giờ)	0,8	1,2	1,5	2,5	4
Quãng đường s (km)	20	30	37,5	62,5	100

a) Hai đại lượng quãng đường s (km) và thời gian t (giờ) có phải là hai đại lượng tỉ lệ thuận không?

b) Tính quãng đường đi ứng với thời gian 6 giờ 30 phút?

c) Nếu quãng đường là 90 km thì thời gian đi là bao nhiêu ?

✓ *Tìm cách giải:* Dựa vào tính chất để kết luận: ta nhận thấy:

$$\frac{20}{0,8} = \frac{30}{1,2} = \frac{37,5}{1,5} = \frac{62,5}{2,5} = \frac{100}{4} = 25$$

Nghĩa là tỉ số hai giá trị tương ứng của hai đại lượng luôn không đổi. Từ đó tìm ra công thức và tính s với t = 6 giờ 30 phút = 6,5 giờ và tính t với s = 90 km.

Giải

a) Ta có: $\frac{s}{t}=\frac{20}{0,8}=\frac{30}{1,2}=\frac{37,5}{1,5}=\frac{62,5}{2,5}=\frac{100}{4}=25.$

Ta thấy tỉ số hai giá trị tương ứng của hai đại lượng luôn không đổi $\frac{s}{t}=25 \Rightarrow s=25t$ nên đại lượng s tỉ lệ thuận với đại lượng t.

b) Với t = 6,5 (giờ) thì $s=25.6,5=162,5(km)$.

c) Với $s=90(km)$ thì $t=90:25=3,6$ (giờ) = 3 giờ 36 phút.

✓ **Chú ý:** Đây chính là bài toán thể hiện quan hệ giữa ba đại lượng quãng đường (s), thời gian (t) và vận tốc (v) của một động tử mà quan hệ là $s=v.t$. Trong bài toán chuyển động đều cùng vận tốc v thì s và t là hai đại lượng tỉ lệ thuận (nếu cùng thời gian t thì s và v cũng là hai đại lượng tỉ lệ thuận).

Ví dụ 2: Các giá trị tương ứng của hai đại lượng x và y được cho trong 2 bảng sau:

Bảng I

x	1	2	3	4	6
y	2	3	5	6	10

Bảng II

x	-2	-3	-4	-6	1
y	6	9	12	18	-3

a) Trong bảng nào thì hai đại lượng y và x tỉ lệ thuận với nhau?

b) Trong trường hợp hai đại lượng tỉ lệ thuận, hãy tìm x biết $y=-18$; tìm y biết $x=15$.

✓ *Tìm cách giải:*

a) Ta tìm tất cả tỷ số giữa hai giá trị tương ứng đã cho của y nếu chúng luôn không đổi thì y tỷ lệ thuận với x. Còn nếu xét hai tỷ số giữa hai cặp giá trị tương ứng nào đó của hai đại lượng mà khác nhau ta kết luận luôn hai đại lượng không tỉ lệ thuận với nhau.

b) Ta tìm hệ số tỷ lệ k, tìm công thức $y=kx$ rồi tính ra số cần tìm.

Giải

a) Trong bảng I ta có $\frac{2}{1}\neq\frac{3}{2}$; nên y và x không tỉ lệ thuận với nhau.

b) Trong bảng II ta có $\frac{6}{-2}=\frac{9}{-3}=\frac{12}{-4}=\frac{18}{-6}=\frac{-3}{1}=-3$ nên y và x tỉ lệ thuận với nhau. Suy ra $k=-3$ và $y=-3x$.

+ Với $y=-18$ thì $-18=-3x \Rightarrow x=(-18):(-3)=6$

+ Với $x=15$ thì $y=-3.15 \Rightarrow y=-45$.

Ví dụ 3: Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận với nhau.

a) Biết hiệu hai giá trị nào đó của x là 2 và hiệu hai giá trị tương ứng của y là 12. Hỏi hai đại lượng y và x liên hệ với nhau bởi công thức nào?

b) Từ đó điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau:

x	-5	-2,5	$-\frac{1}{2}$	0				
y				0	$\frac{1}{2}$	3	6	18

✓ *Tìm cách giải:*

a) Biết hiệu hai giá trị của x giả sử $x_1 - x_2 = 2$ và hiệu hai giá trị tương ứng của y là $y_1 - y_2 = 12$ ta nghĩ đến sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau để tìm hệ số tỉ lệ $k \Rightarrow y = kx$.

b) Từ công thức $y = kx \Rightarrow x = y : k$ rồi tính ra số cần điền vào ô trống.

Giải

a) Gọi hai giá trị của x là x_1 và x_2 với $x_1 - x_2 = 2$ và hai giá trị tương ứng của y là y_1 và y_2. Theo tính chất của hai đại lượng tỉ lệ thuận và tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$k = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{12}{2} = 6.$$

Vậy công thức liên hệ là $y = 6x$.

b) Từ công thức $y = 6x \Rightarrow x = y : 6$.

Kết quả các số điền vào bảng như sau:

x	-5	-2,5	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	1	3
y	-30	-15	-3	0	$\frac{1}{2}$	3	6	18

Ví dụ 4: 15 lít dầu hỏa có khối lượng 12kg. Hỏi 1 thùng 55 lít dầu hỏa có khối lượng bao nhiêu kg? (không kể khối lượng vỏ thùng)

* *Tìm cách giải:* Đại lượng dung tích dầu hỏa (x) tỉ lệ thuận với khối lượng dầu hỏa (y). Đại lượng x có hai giá trị $x_1 = 15$ (lít); $x_2 = 55$ (lít). Đại lượng y có hai giá trị tương ứng là $y_1 = 12$ (kg) và y_2 là giá trị cần tìm. Dựa vào tính chất $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ để tính khối lượng dầu cần tìm.

Giải

Gọi khối lượng dầu cần tìm là y_2 kg; $(y_2 > 0)$. Do khối lượng dầu hỏa tỉ lệ thuận với dung tích của nó nên ta có:

$$\frac{12}{15} = \frac{y_2}{55} \Rightarrow y_2 = 55.\frac{12}{15} = 44(kg).$$

Vậy thùng 55 lít dầu hỏa có khối lượng 44 kg.

Ví dụ 5: Cho y tỉ lệ thuận với x. Biết hiệu hai lập phương của hai giá trị y_1 và y_2 là 1216 và hiệu hai lập phương của hai giá trị tương ứng x_1 và x_2 là 19.

a) Hãy viết công thức liên hệ giữa y và x.

b) Tính $y_3^3 + y_4^3$ biết $x_3 = 2$ và $x_4 = -3$

✓ *Tìm cách giải:* Ta biết nếu $\frac{y_i}{x_i} = k$ thì $\left(\frac{y_i}{x_i}\right)^3 = \frac{y_i^3}{x_i^3} = k^3$. Hiệu hai lập phương của hai giá trị y_1 và y_2 là $y_1^3 - y_2^3 = 1216$ và hiệu hai lập phương của hai giá trị tương ứng x_1 và x_2 là $x_1^3 - x_2^3 = 19$. Sử dụng tính chất của dãy tỷ số bằng nhau ta có cách giải sau:

Giải

a) Theo đầu bài vì y tỉ lệ thuận với x nên $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = k$. Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$k^3 = \frac{y_1^3}{x_1^3} = \frac{y_1^3}{x_1^3} = \frac{y_1^3 - y_2^3}{x_1^3 - x_2^3} = \frac{1216}{19} = 64 = 4^3$$

$\Rightarrow k = 4$. Do đó ta có công thức $y = 4x$.

b) Với $x_3 = 2$ thì $y_3 = 4.2 = 8$; với $x_4 = -3$ thì $y_4 = 4.(-3) = -12$

Do đó $y_3^3 + y_4^3 = 8^3 + (-12)^3 = 512 - 1728 = -1216$.

Ví dụ 6: Một ô tô chạy từ A lúc 5 giờ sáng đến B lúc 9 giờ. Một xe máy chạy từ B cũng vào lúc 5 giờ sáng và đến A lúc 13 giờ. Hỏi hai xe gặp nhau lúc mấy giờ?

✓ *Tìm cách giải:* Ta có thời gian ô tô đi hết quãng đường AB là 9 giờ - 5 giờ = 4 giờ thì 1 giờ xe ô tô đi được $\frac{1}{4}$ quãng đường AB. Xe máy đi quãng đường BA hết 13 giờ - 5 giờ = 8 giờ thì 1 giờ xe máy đi được $\frac{1}{8}$ quãng đường AB. Trong cùng một thời gian thì quãng đường và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Nên nếu gọi t là thời gian hai xe gặp nhau; s_1 là quãng đường ô tô đi từ A đến chỗ gặp xe máy; v_1 là vận tốc ô tô; s_2 là quãng đường xe máy đi từ B đến chỗ gặp ô tô; v_2 là vận tốc xe máy. Ta có $\frac{s_1}{v_1} = \frac{s_2}{v_2} = t$ và $s_1 + s_2$ chính là quãng đường AB. Từ đó có cách giải sau:

Giải

Coi quãng đường AB là đơn vị quy ước $(=1)$. Thời gian ô tô đi hết quãng đường AB là 9 – 5 = 4 (giờ) thì vận tốc xe ô tô là $v_1 = \frac{1}{4}$ (quãng đường AB/giờ). Xe máy đi quãng đường BA hết 13 – 5 = 8 (giờ) thì vận tốc xe máy là $v_2 = \frac{1}{8}$(quãng đường AB/giờ). Gọi t là thời gian hai xe phải đi để gặp nhau; s_1 là quãng đường ô tô đi từ A đến chỗ gặp xe máy; s_2 là quãng đường xe máy đi từ B đến chỗ gặp ô tô ta có $s_1 + s_2 = 1$.

Trong cùng một thời gian thì quãng đường và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Do đó:

$t = \frac{s_1}{v_1} = \frac{s_2}{v_2} = \frac{s_1 + s_2}{v_1 + v_2} = \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = \frac{1}{\frac{3}{8}} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ (giờ) = 2 giờ 40 phút.

Vậy hai xe gặp nhau lúc 7 giờ 40 phút.

✓ *Chú ý:* Ta có cách giải khác: Nếu gọi độ dài quãng đường AB là a (km) thì vận tốc của vận tốc xe ô tô là $v_1 = \frac{a}{4}$ (km/giờ); vận tốc xe máy là $v_2 = \frac{a}{8}$ (km/giờ). Gọi t là thời gian hai xe phải đi để gặp nhau; s_1 là quãng đường ô tô đi từ A đến chỗ gặp xe máy; s_2 là quãng đường xe máy đi từ B đến chỗ gặp ô tô, ta có: $s_1 + s_2 = a$.

Ta có: $t = \frac{s_1}{v_1} = \frac{s_2}{v_2} = \frac{s_1 + s_2}{v_1 + v_2} = \frac{1}{\frac{a}{4} + \frac{a}{8}} = \frac{a}{\frac{3.a}{8}} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ (giờ) = 2 giờ 40 phút.

Ví dụ 7: Cho ΔABC có số đo các góc A, B, C lần lượt tỉ lệ với $2, 3, 5$. Tính số đo các góc của ΔABC.

✓ *Tìm cách giải:* Ta có: $A + B + C = 180°$ và do số đo các góc A, B, C lần lượt tỉ lệ với $2, 3, 5$ nghĩa là $\frac{A}{2} = \frac{B}{3} = \frac{C}{5}$. Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có cách giải sau:

Giải

Ta có: $\frac{A}{2} = \frac{B}{3} = \frac{C}{5} = \frac{A + B + C}{2 + 3 + 5} = \frac{180°}{10} = 18°$

Suy ra $A = 2.18° = 36°$; $B = 3.18° = 54°$; $C = 5.18° = 90°$

✓ *Chú ý:* Bài toán trên thuộc dạng chia một số thành những phần tỉ lệ thuận với các số cho trước. Phương pháp chung để giải các bài toán dạng đó là: Giả sử phải chia một số t thành n phần $t_1, t_2, ..., t_n$ tỉ lệ thuận với các số $a_1, a_2, ..., a_n$ (khác 0) với $n \in \mathbb{N}; n > 1$ ta làm như sau:

$\frac{t_1}{a_1} = \frac{t_2}{a_2} = ... = \frac{t_n}{a_n} = \frac{t_1 + t_2 + ... + t_n}{a_1 + a_2 + ... + a_n} = \frac{t}{_1 + a_2 + ... + a_n} = k$

Từ đó có $t_1 = ka_1; t_2 = ka_2; ....; t_n = ka_n$.

Ví dụ 8: Bốn lớp 7A, 7B, 7C, 7D tham gia lao động trồng cây. Số cây mỗi lớp trồng tỉ lệ lần lượt với 5; 4; 3; 2. Biết rằng 5 lần số cây của lớp 7A trồng cộng với 4 lần số cây lớp 7B trồng nhiều hơn ba lần tổng số cây của 7C và 7D trồng là 520 cây. Tìm số cây mỗi lớp đã trồng.

✓ *Tìm cách giải:* Nếu số cây các lớp 7A, 7B, 7C, 7D trồng lần lượt là x, y, z, t ta có $5x+4y-3(z+t)=520.$

Mặt khác $\frac{x}{5}=\frac{y}{4}=\frac{z}{3}=\frac{t}{2}=\frac{5x}{25}=\frac{4z}{16}=\frac{3y}{9}=\frac{3t}{6}$

Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta tìm được hệ số tỉ lệ. Từ đó tìm được $x; y; z; t$.

Giải

Gọi số cây các lớp 7A, 7B, 7C, 7D trồng lần lượt là: $x, y, z, t \left(x, y, z, t \in N^*\right)$ thì

$\frac{x}{5}=\frac{y}{4}=\frac{z}{3}=\frac{t}{2}=\frac{5x}{25}=\frac{4z}{16}=\frac{3y}{9}=\frac{3t}{6}=k$.

Theo tính chất dãy tỷ số bằng nhau, ta có:

$$k=\frac{x}{5}=\frac{y}{4}=\frac{z}{3}=\frac{t}{2}=\frac{5x}{25}=\frac{4z}{16}=\frac{3y}{9}=\frac{3t}{6}=\frac{5x+4y-3(y+t)}{25+16-(9+6)}=\frac{520}{26}=20$$

Suy ra $x=5k=100; y=4k=80; z=3k=60; t=2k=40.$

Vậy số cây các lớp 7A, 7B, 7C, 7D trồng lần lượt là: 100 cây; 80 cây; 60 cây; 40 cây.

Ví dụ 9:

a) Một số A được chia làm 4 phần a, b, c, d biết rằng a và b tỉ lệ với 5 và 6; b và c tỉ lệ với 8 và 9; c và d tỉ lệ với 3 và 2 và c hơn d là 27. Tìm A?

b) Một số B được chia làm năm phần $x; y; z; t; u$ biết rằng $x:y:z:t:u=\frac{1}{2}:\frac{2}{3}:\frac{3}{4}:\frac{4}{5}:\frac{5}{6}$ và $\frac{x}{4}=\frac{135-z}{3}$. Tìm B?

✓ *Tìm cách giải:*

a) a và b tỉ lệ với 5 và 6 nghĩa là $\frac{a}{b}=\frac{5}{6}$; hay $\frac{a}{5}=\frac{b}{6}$;

b và c tỉ lệ với 8 và 9 nghĩa là $\frac{b}{c}=\frac{8}{9}$ hay $\frac{b}{8}=\frac{c}{9}$.

Để có thể lập được thành dãy tỉ số bằng nhau, ta nhận thấy BCNN $(6;8)=24$ do đó ta biến đổi

$\frac{a}{b}=\frac{5}{6}=\frac{20}{24} \Rightarrow \frac{a}{20}=\frac{b}{24}$;

Tương tự $\frac{b}{c}=\frac{8}{9}=\frac{24}{27} \Rightarrow \frac{b}{24}=\frac{c}{27}$ từ đó suy ra $\frac{a}{20}=\frac{b}{24}=\frac{c}{27}$.

Tiếp tục với c và d ta lập được dãy tỉ số bằng nhau.

b) Từ $x:y:z:t:u=\frac{1}{2}:\frac{2}{3}:\frac{3}{4}:\frac{4}{5}:\frac{5}{6}=\frac{30}{60}:\frac{40}{60}:\frac{45}{60}:\frac{48}{60}:\frac{50}{60}$

$=30:40:45:48:50$ và $\frac{x}{4}=\frac{135-z}{3} \Rightarrow 3x+4z=540$. Ta áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau.

Giải

a) Theo bài ra, ta có: $\frac{a}{b}=\frac{5}{6}=\frac{20}{24}\Rightarrow\frac{a}{20}=\frac{b}{24}\quad(1)$

$\frac{b}{c}=\frac{8}{9}=\frac{24}{27}\Rightarrow\frac{b}{24}=\frac{c}{27}\quad(2)$

và $\frac{c}{d}=\frac{3}{2}=\frac{27}{18}\Rightarrow\frac{c}{27}=\frac{d}{18}\quad(3)$

Từ (1); (2); (3) suy ra: $\frac{a}{20}=\frac{b}{24}=\frac{c}{27}=\frac{d}{18}=\frac{c-d}{27-18}=\frac{27}{9}=3.$

Do đó $\frac{a}{20}=\frac{b}{24}=\frac{c}{27}=\frac{d}{18}=\frac{a+b+c+d}{20+24+27+18}=\frac{A}{89}=3\Rightarrow A=267.$

b) $\frac{x}{4}=\frac{135-z}{3}\Rightarrow 3x+4z=540$.

Ta có $x:y:z:t:u=\frac{1}{2}:\frac{2}{3}:\frac{3}{4}:\frac{4}{5}:\frac{5}{6}=\frac{30}{60}:\frac{40}{60}:\frac{45}{60}:\frac{48}{60}:\frac{50}{60}$

$=30:40:45:48:50$

Do đó $\frac{x}{30}=\frac{y}{40}=\frac{z}{45}=\frac{t}{48}=\frac{z}{50}=\frac{3x}{90}=\frac{4z}{180}=\frac{3x+4z}{90+180}=\frac{540}{270}=2$

$\Rightarrow x=60; y=80; z=90; t=96; u=100$.

Vậy $B=60+80+90+96+100=426.$

C. Bài tập vận dụng

11.1. Dưới dây là bảng giá trị tương ứng của thể tích V $\left(cm^3\right)$ với khối lượng m (g) của sắt:

Thể tích V $\left(cm^3\right)$	2	2,4	4	5	6
Khối lượng m (g)	15,7	18,84	31,4	39,25	47,1

a) Chứng tỏ hai đại lượng khối lượng m (g) và thể tích V $\left(cm^3\right)$ là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Viết công thức?

b) Tính khối lượng của $3cm^3$ sắt.

c) Một khối lượng 125,6 g sắt có thể tích bao nhiêu?

11.2. Cùng năng suất lao động thì số lượng sản phẩm K (chiếc áo) và thời gian t (ngày) của một xưởng may là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Hãy điền vào ô trống các số thích hợp trong bảng sau:

Thời gian t (ngày)		4	5		15
Số lượng K (chiếc áo)	360	720		1440	

11.3. Các giá trị tương ứng của hai đại lượng x và y được cho trong 2 bảng sau:

Bảng I	x	-3	-2	2	4	5
	y	-6	-1	2,5	8	10

Bảng II	x	-3	-2	2	4	5
	y	-1,5	-1	1	2	2,5

a) Trong bảng nào thì hai đại lượng y và x tỉ lệ thuận với nhau?

b) Trong trường hợp có tương quan tỉ lệ thuận, hãy tìm x biết $y=-60$; tìm y biết $x=0,8$.

11.4. Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận với nhau.

a) Biết tổng hai giá trị nào đó của x là 673 và tổng hai giá trị tương ứng của y là 2019. Hỏi hai đại lượng x và y liên hệ với nhau bởi công thức nào?

b) Từ đó điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau (với $a \neq 0$):

x	-3			$\frac{3}{4}$		2		$\frac{a}{-3}$
y		6	$-\frac{3}{2}$		-3		-3b	

11.5. Cho x tỉ lệ thuận với y theo hệ số k_1; y tỷ lệ thuận với z theo hệ số k_2; z tỉ lệ thuận với t theo hệ số k_3. Chứng minh x tỉ lệ thuận với t. Tìm hệ số tỉ lệ của t với x.

11.6. Một đoạn dây đồng dài 2,5 m có khối lượng 8,4 kg. Hỏi 80 m dây đồng như thế nặng bao nhiêu kg?

11.7. Một thửa ruộng hình chữ nhật có 2 cạnh tỉ lệ với 5 và 8. Biết chiều dài hơn chiều rộng là 18m.

a) Tìm diện tích của thửa ruộng hình chữ nhật đó.

b) Người ta trồng lúa trên thửa ruộng đó, biết rằng cứ $25m^2$ thu hoạch được 20kg thóc. Hỏi thửa ruộng thu hoạch được bao nhiêu kg thóc?

11.8. Cho x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận; x_1 và x_2 là hai giá trị khác nhau của x và y_1 và y_2 là các giá trị tương ứng của y.

a) Tìm x_1 biết $x_2=5;\ y_1=\frac{-2}{3}$ và $y_2=\frac{5}{9}$;

b) Tính x_2 và y_2 biết $y_2-x_2=-8; x_1=-6,2; y_1=3,8.$

11.9*. Cho $x;y;z$ tỉ lệ thuận với $3;4;5$. Tính giá trị biểu thức:

$$A=2018(x-y)(y-z)-504,5\left(\frac{x+y+z}{6}\right)^2.$$

11.10*. Cho $24a-30b;\ 40c-24a;\ 30b-40c$ tỉ lệ thuận với $2018;\ 2019;\ 2020$. Biết $a+b+c=2016$. Tìm $a;b;c$.

11.11. Cho y tỉ lệ thuận với x. Biết hiệu hai bình phương của hai giá trị y_1 và y_2 là 128 và hiệu hai bình phương của hai giá trị tương ứng x_1 và x_2 là 8.

a) Hãy viết công thức liên hệ giữa y và x;

b) Tính $y_3^2-y_4^2$ biết $x_3=3$ và $x_4=-8$.

11.12*. Hai ô tô cùng khởi hành một lúc từ M và N cách nhau 55 km và đến P cùng một lúc (ba địa điểm M, N, P nằm trên một đường thẳng). Vận tốc của ô tô đi từ M là 50km/h, vận tốc ô tô đi từ N là 60km/h. Tính quãng đường mà hai ô tô đã đi.

11.13*. Cùng lúc 7 giờ sáng một ô tô chạy từ A và đến B lúc 8 giờ 30 phút, một xe đạp điện chạy từ B đến A lúc 10 giờ. Một xe đạp khởi hành từ A lúc 6 giờ và đến B lúc 12 giờ. Hỏi:

a) Xe ô tô và xe đạp điện gặp nhau lúc mấy giờ?

b) Xe ô tô gặp xe đạp lúc mấy giờ?

11.14. Lúc 6 giờ sáng trên quãng đường AB dài 93km, người đi xe máy thứ nhất đi từ A đến B có vận tốc bằng $\frac{3}{4}$ vận tốc người đi xe máy thứ hai đi từ B đến A. Đến lúc gặp nhau thời gian người đi xe máy thứ nhất bằng $\frac{5}{4}$ thời gian người đi xe máy thứ hai.

Tính quãng đường mỗi người đã đi từ lúc khởi hành đến lúc gặp nhau.

11.15. Một ca nô khi nước yên lặng có vận tốc là 30km/h. Với cùng thời gian ca nô xuôi dòng 99km thì ca nô ngược dòng được bao nhiêu km biết một cụm bèo trôi trên dòng sô ng 9km trong 3 giờ.

11.16. Một ô tô khách và một ô tô tải cùng khởi hành lúc 8 giờ sáng từ hai đầu quãng đường AB dài 100km. Ô tô khách đi từ A đến B với vận tốc 750m/phút. Ô tô tải đi từ B đến A sau 2 giờ đi được 70km. Gọi M là trung điểm của AB.

a) Hỏi đến mấy giờ thì ô tô tải cách M một khoảng gấp ba khoảng cách từ ô tô khách đến M?

b) Nếu đi tiếp với vận tốc ấy thì sau mấy giờ nữa thì ô tô khách đến B?

11.17. Ba tổ sản xuất của một xí nghiệp cùng sản xuất một loại sản phẩm với năng suất lao động của mỗi công nhân đều như sau. Tổ một có 12 người trong 9 ngày sản xuất được 540 sản phẩm. Tổ hai có 18 người trong 8 ngày; tổ ba có 10 người làm trong 4 ngày. Hỏi tổ hai và ba mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu sản phẩm?

11.18. Một số dương A được chia làm bốn phần đều dương tỉ lệ với $\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5}$ và tổng các bình phương của bốn phần ấy là 23716. Tìm số A.

11.19*. Bốn túi đường có tổng cộng 375 kg. Lần thứ nhất người ta lấy đi 1kg ở túi thứ nhất; 2kg ở túi thứ hai; 3kg ở túi thứ ba; 4kg ở túi thứ tư. Lần thứ hai người ta lấy tiếp đi $\frac{1}{5}$ số kg đường còn lại của túi thứ nhất, $\frac{1}{4}$ số kg đường còn lại của túi thứ hai; $\frac{1}{3}$ số kg đường còn lại của túi thứ ba, $\frac{1}{2}$ số kg đường còn lại của túi thứ tư thì số kg đường còn lại sau lần lấy thứ hai của bốn túi bằng nhau.Tìm số kg đường mỗi túi lúc đầu.

11.20. Cho ba số x, y, z tỉ lệ thuận lần lượt với $2009; 2010; 2011$

a) Chứng minh rằng $(x-z)^3 = 8(x-y)^2(y-z)$;

b) Cho biết $\frac{x}{26} + \frac{y}{4} = \frac{z}{2012}$. Tính x, y, z.

(Đề khảo sát chất lượng học sinh giỏi huyện Thường Tín Hà Nội, năm học 2011 -2012)

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

11.1. a) Ta nhận thấy: $\frac{m}{V} = \frac{15,7}{2} = \frac{18,84}{2,4} = \frac{31,4}{4} = \frac{39,25}{5} = \frac{47,1}{6} = 7,85\left(g/cm^3\right)$

nghĩa là tỉ số hai giá trị tương ứng của hai đại lượng luôn không đổi nên hai đại lượng tỉ lệ thuận với nhau. Từ đó $m = 7,85.V$.

b) Với $V = 3\left(cm^3\right)$ thì $m = 7,85.3 = 23,55(g)$.

c) Với $m = 125,6(g)$ thì $V = 125,6 : 7,85 = 16\left(cm^3\right)$.

11.2. Ta có $k = \frac{720}{4} = 180$ (chiếc áo/ngày) $\Rightarrow K = kt$ và $t = K : \text{k}$. Ta sẽ có

Thời gian t (ngày)	2	4	5	8	15
Số lượng K (chiếc áo)	360	720	900	1440	2700

11.3.

a) Trong bảng I hai giá trị tương ứng của hai đại lượng là $\frac{-6}{-3} \neq \frac{2,5}{2}$ ta kết luận luôn hai đại lượng không tỉ lệ thuận với nhau.

Trong bảng II tất cả tỷ số giữa hai giá trị tương ứng đã cho của y và x luôn không đổi

$\frac{-1,5}{-3} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{2,5}{5} = 0,5$ nên ta có y tỷ lệ thuận với x.

b) Trong bảng II ta suy ra $k = 0,5$ và $y = 0,5x$.

Với $y = -60$ thì $-60 = 0,5x \Rightarrow x = (-60) : 0,5 = -120$.

Với $x = 0,8$ thì $y = 0,8.0,5 \Rightarrow y = 0,4$.

11.4.

a) Biết tổng hai giá trị của x giả sử $x_1 + x_2 = -673$ và tổng hai giá trị tương ứng của y là $y_1 + y_2 = 2019$. Theo tính chất của hai đại lượng tỉ lệ thuận và tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$k = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{2019}{-673} = -3.$$

Vậy công thức liên hệ là $y = -3x.$

b) Từ công thức $y = -3x \Rightarrow x = y:(-3)$.

Kết quả điền số:

x	-3	-2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	2	b	$\frac{a}{-3}$
y	9	6	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{9}{4}$	-3	-6	-3b	a

11.5. Ta có $x = k_1y; y = k_2z; z = k_3t \Rightarrow x = k_1k_2k_3t.$

Nghĩa là x tỉ lệ thuận với t theo hệ số $k_1k_2k_3$.

Do đó t tỉ lệ thuận với x theo hệ số $\frac{1}{k_1k_2k_3}$.

11.6. Gọi khối lượng dây đồng cần tìm là y_2. Do khối lượng dây đồng tỉ lệ thuận với chiều dài của nó nên ta có:

$$\frac{8,4}{y_2} = \frac{2,5}{80} \Rightarrow y_2 = (8,4:80):2,5 = 268,8$$

Vậy 80m dây đồng nặng 268,8 kg.

11.7.

a) Gọi chiều dài hình chữ nhật là x (m), chiều rộng là y (m) $(x, y > 0)$ thì $x - y = 18$. Ta có

$$\frac{x}{8} = \frac{y}{5} = \frac{x-y}{8-5} = \frac{18}{3} = 6 \Rightarrow x = 48; y = 15.$$

Diện tích thửa ruộng là $48.15 = 720(m^2)$.

b) Số thóc thu hoạch và số m^2 ruộng là hai đại lượng tỷ lệ thuận. Do đó nếu gọi số thóc thu hoạch là x kg $(x > 0)$.

Ta có: $\frac{25}{720} = \frac{20}{x} \Rightarrow x = 720.20:25 = 576(kg)$.

11.8.

a) $\dfrac{y_1}{x_1}=\dfrac{y_2}{x_2}\Rightarrow x_1=\dfrac{y_1.x_2}{y_2}=\dfrac{-\dfrac{2}{3}.5}{\dfrac{5}{9}}=-6$.

b) $\dfrac{y_2}{y_1}=\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{y_2-x_2}{y_1-x_1}=\dfrac{-8}{3,8+6,2}=-0,8$.

Vậy: $x_2=(-0,8).(-6,2)=4,96$

$y_2=(-0,8).3,8=-3,04.$

11.9*. Do $x;y;z$ tỉ lệ thuận với $3;4;5$ nên ta đặt $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{5}=k$

$\Rightarrow x=3k;y=4k;z=5k$. Ta có:

$$A=2018(3k-4k)(4k-5k)-504,5.\left(\frac{3k+4k+5k}{6}\right)^2$$

$$=2018(-k)(-k)-504,5.\left(\frac{12k}{6}\right)^2$$

$$=2018k^2-504,5.4k^2=2018k^2-2018k^2=0$$

11.10*. $24a-30b;\ 40c-24a;\ 30b-40c$ tỉ lệ thuận với $2018;2019;2020$ nên:

$$\frac{24a-30b}{2018}=\frac{40c-24a}{2019}=\frac{30b-40c}{2020}=\frac{24a-30b+40c-24a+30b-40c}{2018+2019+2020}=0$$

Do đó $24a-30b=0\Rightarrow 4a=5b$ hay $\dfrac{a}{5}=\dfrac{b}{4}$ (1)

$40c-24a=0\Rightarrow 5c=3a$ hay $\dfrac{a}{5}=\dfrac{c}{3}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{a}{5}=\dfrac{b}{4}=\dfrac{c}{3}=\dfrac{a+b+c}{5+4+3}=\dfrac{2016}{12}=168.$

Vậy $a=840;b=672;c=504.$

11.11.

a) Ta biết nếu $\dfrac{y_i}{x_i}=k$ thì $\left(\dfrac{y_i}{x_i}\right)^2=\dfrac{y_i^2}{x_i^2}=k^2$. Ta có: $y_1^2-y_2^2=128$ và $x_1^2-x_2^2=8$. Theo đầu bài vì y tỉ lệ thuận với x nên $\dfrac{y_1}{x_1}=\dfrac{y_2}{x_2}=k$.

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$k^2=\frac{y_1^2}{x_1^2}=\frac{y_1^2}{x_1^2}=\frac{y_1^2-y_2^2}{x_1^2-x_2^2}=\frac{128}{8}=16=(\pm4)^2$$

$\Rightarrow k=-4$ hoặc $k=4$. Do đó ta có công thức $y=-4x$ hoặc $y=4x$.

b) Với $x_3 = 3$ thì $y_3 = \pm 4.3 = \pm 12;$

Với $x_4 = -8$ thì $y_4 = \pm 4.(-8) = \mp 32.$

Do đó $y_3^2 - y_4^2 = (\pm 12)^2 - (\mp 32)^2 = 144 - 1024 = -880.$

11.12*. Gọi quãng đường đi được của hai xe là S_M và S_N.

Có hai trường hợp xảy ra:

1) Địa điểm P nằm giữa M và N.

Do thời gian đi của hai xe bằng nhau nên quãng đường đi và vận tốc của hai xe là tỉ lệ thuận. Ta có:

$$\frac{S_M}{50} = \frac{S_N}{60} = \frac{S_M + S_N}{50 + 60} = \frac{55}{110} = 0,5.$$

Vậy $S_M = 0,5.50 = 25(km); S_N = 0,5.60 = 30(km)$.

2) Địa điểm P không nằm giữa M và N.

* Trường hợp N nằm giữa M và P không xảy ra vì nếu như vậy người đi từ N sẽ đến trước người đi từ M.

* Trường hợp M nằm giữa N và P. Tương tự 1) ta có:

$$\frac{S_M}{50} = \frac{S_N}{60} = \frac{S_M - S_N}{60 - 50} = \frac{55}{10} = 5,5.$$

Do đó $S_M = 5,5.50 = 275(km); S_N = 5,5.60 = 330(km)$.

11.13*.

a) Gọi quãng đường AB dài a km $(a > 0)$.

Thời gian ô tô đi hết quãng đường AB 1 giờ 30 phút = $\frac{3}{2}$ giờ thì vận tốc xe ô tô là

$$v_1 = a : \frac{3}{2} = \frac{2a}{3} \text{ (km/giờ)}.$$

Xe đạp điện đi quãng đường BA hết 3 giờ thì vận tốc xe đạp điện là: $v_2 = \frac{a}{3}$ (km/giờ).

Gọi t_1 là thời gian hai xe ô tô và xe đạp điện gặp nhau; s_1 là quãng đường ô tô đi từ A đến chỗ gặp xe đạp điện; s_2 là quãng đường xe đạp điện đi từ B đến chỗ gặp ô tô $(t_1; s_1; s_2 > 0)$ ta có: $s_1 + s_2 = a$

Trong cùng một thời gian thì quãng đường và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Do đó:

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{s_2}{v_2} = \frac{s_1 + s_2}{v_1 + v_2} = \frac{a}{\frac{2a}{3} + \frac{a}{3}} = \frac{a}{a} = 1.$$

Vậy hai xe gặp nhau lúc 8 giờ.

b) Gọi t_2 là thời gian xe ô tô khởi hành từ A đến lúc gặp xe đạp; s_3 là quãng đường ô tô đi từ A đến chỗ gặp xe đạp, vận tốc của ô tô $v_3 = v_1$; s_4 là quãng đường xe đạp đi từ A lúc 7 giờ đến chỗ gặp ô tô $(t_2; s_3; s_4 > 0)$.

Vận tốc xe đạp là $v_4 = \frac{a}{6}$ km/giờ. Lúc 7 giờ xe đạp cách xe ô tô quãng đường là $\frac{a}{6}$ km. Trong cùng một thời gian thì quãng đường và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

Do đó $t_2 = \frac{s_3}{v_3} = \frac{s_4}{v_4} = \frac{s_3 - s_4}{v_3 - v_4} = \frac{\frac{a}{6}}{\frac{2a}{3} - \frac{a}{6}} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}$ (giờ) = 20 phút.

Ô tô và xe đạp gặp nhau lúc 7 giờ 20 phút.

✓ Chú ý: Bài toán có thể giải theo cách coi đoạn đường AB là đơn vị quy ước $(=1)$

Thì $t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{s_2}{v_2} = \frac{s_1 + s_2}{v_1 + v_2} = \frac{1}{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}} = 1$ (giờ) và

$t_2 = \frac{s_3}{v_3} = \frac{s_4}{v_4} = \frac{s_3 - s_4}{v_3 - v_4} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}} = \frac{1}{3}$ (giờ) , Bạn đọc tự giải.

11.14. Gọi v_1, v_2 là vận tốc; t_1, t_2 là thời gian đi; s_1, s_2 là quãng đường đi được của xe máy thứ nhất và xe máy thứ hai từ lúc khởi hành đến lúc gặp nhau.

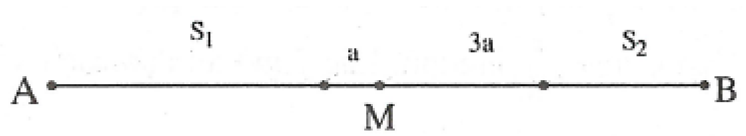
Ta có: $v_1 = \frac{3}{4} v_2$; $t_1 = \frac{5}{4} t_2$ nên $v_1 t_1 = \frac{15}{16} v_2 t_2$ hay $s_1 = \frac{15}{16} s_2$

Ta có $\frac{s_1}{15} = \frac{s_2}{16} = \frac{s_1 + s_2}{15 + 16} = \frac{93}{31} = 3$

$\Rightarrow s_1 = 45(km)$ và $s_2 = 48(km)$.

11.15. Vận tốc trôi của bèo chính là vận tốc dòng nước bằng $9 : 3 = 3$(km/giờ). Gọi x km là quãng đường ca nô ngược dòng $(x > 0)$. Vận tốc ca nô khi xuôi dòng là 30 + 3 = 33 (km/h); Vận tốc ca nô khi ngược dòng là 30 – 3 = 27 (km/h). Cùng một thời gian thì quãng đường và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Do đó ta có $\frac{33}{27} = \frac{99}{x} \Rightarrow x = \frac{99.27}{33} = 81(km)$.

11.16. Nửa quãng đường AB dài 50km; Vận tốc ô tô khách 750m/phút = 45km/giờ. Vận tốc ô tô tải là 70 : 2 = 35 (km/giờ).



a) Gọi quãng đường ô tô khách và ô tô tải đã đi là s_1 và s_2 và t là thời gian mỗi xe đã đi. Trong cùng một thời gian thì quãng đường tỉ lệ thuận với vận tốc do đó: $\frac{s_1}{v_1} = \frac{s_2}{v_2} = t$.

Ta có: $t = \frac{50-a}{45} = \frac{50-3a}{35} = \frac{150-3a}{135} = \frac{150-3a-50+3a}{135-35} = 1$.

Vậy thời điểm mà ô tô tải cách M một khoảng gấp ba khoảng cách từ ô tô khách đến M là 8 giờ + 1 giờ = 9 giờ (sáng).

b) Thời gian ô tô khách đi tiếp đến B là: $(100-45.1):45 = 1\frac{2}{9}$ (giờ)

11.17. Gọi x là số sản phẩm tổ hai làm; y là số sản phẩm tổ ba làm $(x; y \in \mathbb{N}^*)$. Tổ một có 12 người làm 9 ngày được 12.9 = 108 ngày công. Tổ hai có 18 người làm 8 ngày được 18.8 = 144 ngày công. Tổ ba có 10 người làm 4 ngày được 10.4 = 40 ngày công. Cùng năng suất lao động thì số sản phẩm làm được tỷ lệ thuận với số ngày công.

Do đó: $\frac{108}{144} = \frac{540}{x} \Rightarrow x = \frac{540.144}{108} = 720$ (sản phẩm).

$\frac{108}{40} = \frac{540}{y} \Rightarrow y = \frac{540.40}{108} = 200$ (sản phẩm).

11.18. Gọi bốn phần của A là $x; y; z; t\,(x; y; z; t > 0)$

thì $A = x + y + z + t$ và $x : y : z : t = \frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4} : \frac{4}{5} = 30 : 40 : 45 : 48$.

Vậy $\frac{x}{30} = \frac{y}{40} = \frac{z}{45} = \frac{t}{48}$

$\Rightarrow \frac{x^2}{900} = \frac{y^2}{1600} = \frac{z^2}{2025} = \frac{t^2}{2304} = \frac{x^2+y^2+z^2+t^2}{900+1600+2025+2304} = \frac{27316}{6829} = 4 = (\pm 2)^2$

$\Rightarrow x = 60; y = 80; z = 90; t = 96$ và $A = 60 + 80 + 90 + 96 = 326$.

11.19*. Gọi số kg đường bốn túi lúc đầu lần lượt là: $x+1; y+2; z+3; t+4\,(x, y, z, t > 0)$.

Sau khi lấy đi lần thứ nhất thì số kg đường mỗi túi còn lại lần lượt là $x; y; z; t$ và tổng số kg đường còn lại của 4 túi là $375 - (1+2+3+4) = 365\,(kg)$

Sau khi lấy đi lần thứ hai thì số kg đường mỗi túi còn lại lần lượt là: $\frac{4}{5}x; \frac{3}{4}y; \frac{2}{3}z; \frac{1}{2}t$.

Ta có:

$\frac{4x}{5} = \frac{3y}{4} = \frac{2z}{3} = \frac{t}{2} = \frac{12x}{15} = \frac{12y}{16} = \frac{12z}{18} = \frac{12t}{24} = \frac{12(x+y+z+t)}{73} = \frac{12.365}{73} = 60$

Suy ra $x = 75; y = 80; z = 90; t = 120$.

Số kg đường mỗi túi lúc đầu là:

+ Túi thứ nhất: $75+1=76(kg)$

+ Túi thứ hai: $80+2=82(kg)$

+ Túi thứ ba: $90+3=93(kg)$

+ Túi thứ tư: $120+4=124(kg)$

11.20.

a) Ta có: $\frac{x}{2009}=\frac{y}{2010}=\frac{z}{2011}=\frac{x-z}{-2}=\frac{x-y}{-1}=\frac{y-z}{-1}$

Với ba tỉ số bằng nhau, lập phương tỉ số thứ nhất sẽ bằng bình phương tỉ số thứ hai nhân với tỷ số thứ ba nên:

$$\left(\frac{x-z}{-2}\right)^3=\left(\frac{x-y}{-1}\right)^2.\left(\frac{y-z}{-1}\right)\Leftrightarrow\frac{(x-z)^3}{-8}=\frac{(x-y)^2(y-z)}{-1}$$

$\Leftrightarrow(x-z)^3=8(x-y)^2(y-z).$

b) $\frac{x}{26}+\frac{y}{4}=\frac{z}{2012}\Leftrightarrow\frac{2x+13y}{52}=\frac{z}{2012}\Leftrightarrow 2x+13y=\frac{52z}{2012}\quad(1)$

$$\frac{x}{2009}=\frac{y}{2010}=\frac{z}{2011}=\frac{2x}{2.2009}=\frac{13y}{13.2010}=\frac{2x+13y}{2.2009+13.2010}=\frac{z}{2011}\quad(2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\frac{52z}{2012.(2.2009+13.2010)}=\frac{z}{2011}\Rightarrow z=0.$

Ta suy ra $x=y=x=0.$

Chương II. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

Chuyên đề 12. ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa: Nếu đại lượng y liên hệ với đại lượng x theo công thức $y = \frac{a}{x}$ hay $xy = a$ (với a là hằng số khác 0) thì ta nói y tỉ lệ nghịch với x theo hệ số tỉ lệ a.

2. Tính chất: Nếu hai đại lượng tỉ lệ nghịch với nhau thì:

* Tích của một giá trị bất kì của đại lượng này với giá trị tương ứng của đại lượng kia luôn là một hằng số: $x_1y_1 = x_2y_2 = x_3y_3 = ... = a.$

* Tỉ số giữa hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng nghịch đảo của tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}; \frac{x_1}{x_3} = \frac{y_3}{y_1}, ...$

3. Chú ý:

* Khi đại lượng y tỉ lệ nghịch với đại lượng x thì x cũng tỉ lệ nghịch với y và ta nói hai đại lượng đó tỷ lệ nghịch với nhau.

* Nếu y tỉ lệ nghịch với x theo tỉ lệ a thì x cũng tỉ lệ nghịch với y theo tỉ lệ a.

* Nếu y tỉ lệ nghịch với x thì y tỉ lệ thuận với $\frac{1}{x}$.

* Nếu z tỉ lệ nghịch với y theo tỉ lệ a_1 và y tỉ lệ nghịch với x theo tỉ lệ a_2 thì z tỉ lệ thuận với x theo tỉ lệ $\frac{a_1}{a_2}$.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Các giá trị tương ứng của x và y được cho trong hai bảng:

Bảng I

x	3	-4,5	5	0,75		22,5	-7,5	
y	-15	10	-9	-60	-2,5			-8

Bảng II

x	3	-0,5	-6	0,95		0,35	$-\frac{2}{5}$	
y	15	-2,5	-30	4,75	-7,5			1975

a) Xác định xem hai đại lượng y và x trong bảng nào tỉ lệ thuận? tỉ lệ nghịch? Tìm các hệ số tỉ lệ (biết các giá trị tương ứng còn lại cũng có quan hệ tỉ lệ như các giá trị đã cho trong bảng).

b) Điền tiếp các giá trị vào ô trống.

✓*Tìm cách giải:*

- Ta tìm quan hệ tất cả các giá trị tương ứng đã cho của y và x. Nếu có $y = kx$ thì y và x tỉ lệ thuận. Nếu có $x.y = a$ thì y tỉ lệ nghịch với x.
- Dựa vào các mối tương quan điền tiếp các số vào ô trống.

Giải

Tại bảng I: Ta có $3.(-15) = -4,5.10 = 5.(-9) = -0,75.60 = -45$.

Nên y tỉ lệ nghịch với x. Hệ số tỉ lệ -45. Công thức $x.y = -45$.

Bảng I

x	3	-4,5	5	0,75	18	22,5	-7,5	5,625
y	-15	10	-9	-60	-2,5	-2	6	-8

Tại bảng II: $\frac{15}{3} = \frac{-2,5}{-0,5} = \frac{-30}{-6} = \frac{4,75}{0,95} = 5.$

Nên y tỉ lệ thuận với x. Hệ số tỉ lệ 5. Công thức $y = 5x$.

Bảng II

x	3	-0,5	-6	0,95	-1,5	0,35	$-\frac{2}{5}$	395
y	15	-2,5	-30	4,75	-7,5	1,75	-2	1975

Ví dụ 2: Cho hai đại lượng tỉ lệ nghịch x và y; x_1 và x_2 là hai giá trị của x và y_1 và y_2 là hai giá trị tương ứng của y.

Biết $y_1 = 3,5$; $y_2 = 2,5$ và $8x_2 - 5x_1 = 31$.

Tính x_1, x_2 và hệ số tỉ lệ a của hai đại lượng tỉ lệ nghịch này.

✓ *Tìm cách giải:* Ta sử dụng tính chất của đại lượng tỉ lệ nghịch: Tỉ số giữa hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng nghịch đảo của tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$, để xuất hiện $8x_2 - 5x_1$ ta biến đổi $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow \frac{y_1}{x_2} = \frac{y_2}{x_1}$ và áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau. Từ đó tìm x_1 và x_2 và hệ số tỉ lệ a.

Giải

Theo tính chất của đại lượng tỉ lệ nghịch, và áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_2}{y_1}\Rightarrow\frac{y_1}{x_2}=\frac{y_2}{x_1}=\frac{8y_1}{8x_2}=\frac{5y_2}{5x_1}=\frac{8y_1-5y_2}{8x_2-5x_1}=\frac{8.3,5-5.2,5}{31}=\frac{15,5}{31}=0,5.$$

Do đó $x_1=y_2:0,5=2,5:0,5=5$

Và $x_2=y_1:0,5=3,5:0,5=7.$

Hệ số tỉ lệ của hai đại lượng là: $a=x_1.y_1=5.3,5=17,5.$

✓ *Chú ý:* Ta có thể dùng định nghĩa của đại lượng tỉ lệ nghịch để giải:

Từ $xy=a$

Ta có $x_1=\frac{a}{y_1};x_2=\frac{a}{y_2}\Rightarrow 8x_2-5x_1=\frac{8a}{y_2}-\frac{5a}{y_1}=a\left(\frac{8}{y_2}-\frac{5}{y_1}\right)=a\left(\frac{8y_1-5y_2}{y_1.y_2}\right)$

Thay $y_1=3,5;y_2=2,5$ và $8x_2-5x_1=31$ vào ta có: $31=a\left(\frac{28-12,5}{3,5.2,5}\right)$

Hay $31=a.\frac{15,5}{8,75}\Rightarrow a=\frac{31.8,75}{15,5}=17,5$

$\Rightarrow x_1=\frac{17,5}{3,5}=5;x_2=\frac{17,5}{2,5}=7.$

Ví dụ 3: Năm máy cày cùng loại, mỗi máy làm 8 giờ một ngày thì trong 12 ngày cày xong một cánh đồng.

a) Nếu có 10 máy cày cùng loại trên, mỗi máy làm 8 giờ một ngày thì trong mấy ngày cày xong cánh đồng trên.

b) Cần bao nhiêu máy cày, mỗi máy làm 6 giờ mỗi ngày để 5 ngày cày xong cánh đồng ấy ?

✓ *Tìm cách giải:*

a) Cùng một công việc và số giờ làm việc mỗi ngày của mỗi máy, số máy cày và số ngày là hai đại lượng tỉ lệ nghịch; hoặc cùng một công việc tổng số giờ làm 1 ngày và số ngày hoàn thành công việc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

b) Cùng một khối lượng công việc (cày xong cánh đồng) số máy cày và số giờ làm là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Ta cần tìm số giờ làm của số máy cày trong mỗi trường hợp.

Giải

a) Gọi số ngày cần tìm là z ngày $(z>0)$. Cùng một công việc và số giờ làm việc một ngày của mỗi máy, số máy cày và số ngày là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

Ta có: $\frac{5}{10}=\frac{z}{12}\Rightarrow z=5.12:10=6$ (ngày).

* Có thể lý luận cách khác :

Một ngày 5 máy cày với tổng số giờ là 5.8 = 40 (giờ)

Một ngày 10 máy cày với tổng số giờ là 10.8 = 80 (giờ)

Cùng một công việc tổng số giờ làm 1 ngày và số ngày hoàn thành công việc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

Do đó $\frac{40}{80}=\frac{z}{12}\Rightarrow z=40.12:80=6$ (ngày).

b) Gọi số máy cày cần tìm là t (cái).

Số giờ năm máy cày xong cánh đồng là 8.12 = 96 (giờ).

Số giờ x máy cày xong cánh đồng là 6.5 = 30 (giờ).

Trên cùng một cánh đồng số máy cày và số giờ làm là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Do đó ta có :

$\frac{96}{30}=\frac{x}{5}\Rightarrow x=96.5:30=16.$

Vậy số máy cày cần tìm là 16 cái.

Ví dụ 4: Ba cạnh a,b,c của ΔABC có $4a+6b-5c=220cm$. Ba đường cao tương ứng là $h_a;h_b;h_c$ tỉ lệ thuận với $3;4;5$. Tính chu vi của tam giác.

✓ *Tìm cách giải:* Cùng diện tích 1 tam giác thì độ dài cạnh và đường cao tương ứng tỉ lệ nghịch với nhau. Áp dụng tính chất tỉ lệ nghịch và tính chất dãy tỉ số bằng nhau để tìm độ dài các cạnh của tam giác.

Giải

Gọi diện tích của ΔABC là S. Ta biết rằng $2S=ah_a=bh_b=ch_c$ nên trong một tam giác cạnh và đường cao tương ứng tỉ lệ nghịch với nhau.

Biết $h_a:h_b:h_c=3:4:5$ nên $a:b:c=\frac{1}{3}:\frac{1}{4}:\frac{1}{5}=20:15:12.$

Tức là $\frac{a}{20}=\frac{b}{15}=\frac{c}{12}=\frac{4a}{80}=\frac{6b}{90}=\frac{5c}{60}=\frac{4a+6b-5c}{80+90-60}=\frac{220}{110}=2.$

Vậy chu vi tam giác là $20.2+15.2+12.2=94\left(cm\right)$.

Ví dụ 5: Một ô tô dự định chạy từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu xe chạy với vận tốc 40km/h thì đến B muộn hơn so với dự định là 30 phút. Nếu xe chạy với vận tốc 60km/h thì đến B sớm hơn so với dự định là 45 phút. Tính thời gian dự định đi và quãng đường AB.

✓ *Tìm cách giải:* Cùng một quãng đường thì vận tốc và thời gian đi tương ứng tỉ lệ nghịch với nhau.

Áp dụng tính chất tỉ lệ nghịch và tính chất dãy tỉ số bằng nhau để tìm độ dài quãng đường và thời gian dự định.

Giải

Ta có 45 phút = 0,75 giờ; 30 phút = 0,5 giờ.

Gọi thời gian dự định là t (giờ); $\left(t>0\right)$; Thời gian xe chạy quãng đường AB với vận tốc 40km/h là $t_1=\left(t+0,5\right)$ (giờ). Thời gian xe chạy quãng đường AB với vận tốc 60km/h là $t_2=\left(t-0,75\right)$.

Cùng một quãng đường thì vận tốc và thời gian đi tương ứng tỉ lệ nghịch với nhau. Do đó theo tính chất của tương quan tỉ lệ nghịch, ta có:

$$\frac{40}{60}=\frac{t_2}{t_1}\Rightarrow\frac{t_1}{60}=\frac{t_2}{40}=\frac{t_1-t_2}{60-40}=\frac{t+0,5-t+0,75}{20}=\frac{1,25}{20}=\frac{1}{16}.$$

$\frac{t_1}{60}=\frac{1}{16}\Rightarrow t_1=3,75$ (giờ).

Thời gian dự định là: 3,75 – 0,5 = 3,25 (giờ) = 3 giờ 15 phút.

Quãng đường AB dài là: 3,75.40 = 150(km).

Ví dụ 6: Bốn người mua cùng một số mét vuông vải để may quần áo lần lượt theo bốn loại khổ rộng 1,5m; 1,2m; 1,0m; 0,8m. Tổng số vải bốn người đã mua là 22,5m. Tính số mét vải và diện tích vải mỗi người đã mua.

✓ *Tìm cách giải:* Cùng một diện tích, số mét vải tỉ lệ nghịch với khổ rộng của nó. Từ định nghĩa và sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có cách giải:

Giải

Cùng một diện tích, số m vải tỉ lệ nghịch với khổ rộng của nó. Gọi số mét vải mỗi người mua lần lượt là $x,y,z,t\left(x,y,z,t>0\right)$ ta có:

$1,5x=1,2=z=0,8t$ hay $15x=12y=10z=8t$

$$\Rightarrow\frac{15x}{120}=\frac{12y}{120}=\frac{10z}{120}=\frac{8t}{120}\Rightarrow\frac{x}{8}=\frac{y}{10}=\frac{z}{12}=\frac{t}{5}=\frac{x+y+z+t}{8+10+12+15}=\frac{22,5}{45}=0,5$$

Vậy: $x=8.0,5=4\left(m\right);y=10.0,5=5\left(m\right);$

$z=12.0,5=6\left(m\right);t=15.0,5=7,5\left(m\right).$

Diện tích vải mỗi người mua là: $4.1,5=6m^2$.

Ví dụ 7*: Tại một bến xe có 610 xe ô tô chở khách gồm 4 loại: Xe chở 50 khách; xe chở 45 khách; xe chở 30 khách và xe chở 25 khách. Biết rằng $\frac{2}{3}$ số xe chở khách 50 khách bằng $\frac{3}{4}$ xe chở 45 khách, bằng $\frac{4}{5}$ số xe chở 30 khách và bằng $\frac{5}{6}$ xe chở 25 khách. Hỏi bến xe có bao nhiêu xe mỗi loại

✓ *Tìm cách giải:* Đây là bài toán chia số 610 thành bốn phần tỉ lệ nghịch với $\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\frac{5}{6}$ tức là tỉ lệ thuận với $\frac{3}{2};\frac{4}{3};\frac{5}{4};\frac{6}{5}$.

Giải

Gọi số xe các loại chở 50 khách; chở 45 khách; chở 30 khách và chở 25 khách lần lượt là $x;y;z;t\left(x;y;z;t\in N\right)$ ta có:

$x+y+z+t=610$ và $\frac{2x}{3}=\frac{3y}{4}=\frac{4z}{5}=\frac{5t}{6}$

$\Rightarrow x:y:z:t=\frac{3}{2}:\frac{4}{3}:\frac{5}{4}:\frac{6}{5}=90:80:75:60$.

Hay $\frac{x}{90}=\frac{y}{80}=\frac{z}{75}=\frac{t}{60}=\frac{x+y+z+t}{90+80+75+60}=\frac{610}{305}=2$.

Suy ra $x=180; y=160; z=150; t=120.$

Ví dụ 8*: Một bộ máy truyền chuyển động có ba bánh xe răng được khớp vào nhau: bánh xe thứ nhất khớp với bánh xe thứ hai; bánh xe thứ hai khớp với bánh xe thứ ba.

a) Nếu bánh xe thứ nhất có 90 răng và quay 36 vòng/phút thì bánh xe thứ hai có 72 răng sẽ quay được bao nhiêu vòng/phút?

b) Muốn bánh xe thứ ba quay 180 vòng/phút thì bánh xe thứ ba cần thiết kế có bao nhiêu răng?

✓ *Tìm cách giải:* Do hai bánh xe khớp vào nhau trong quá trình chuyển động nên số răng và số vòng quay của bánh xe là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

Giải

Ta có hai bánh xe khớp vào nhau trong quá trình chuyển động nên số răng và số vòng quay của bánh xe là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Vì thế:

a) Gọi số vòng quay của bánh xe thứ hai là x $(x>0)$ thì $\frac{90}{72}=\frac{x}{36}$

Suy ra $x=90.36:72=45$ (vòng).

b) Gọi số răng của bánh xe thứ ba là y $(y\in\mathbb{N})$ thì $\frac{45}{180}=\frac{y}{72}$

Suy ra $y=45.72:180=18$ (răng).

Ví dụ 9*: Để làm xong một công việc 48 công nhân cần làm trong 30 ngày (năng suất lao động mỗi người như nhau). Nếu số công nhân tăng thêm 25% và năng suất lao động mỗi người đều tăng thêm 20% thì cần làm bao lâu để xong công việc đó?

✓ *Tìm cách giải:* Thực chất bài toán trên được chia thành hai bài toán nhỏ:

Bài toán 1: Trước hết giữ nguyên năng suất lao động cũ. Cùng một công việc, cùng năng suất lao động thì số công nhân tỉ lệ nghịch với số ngày làm. Ta tìm được số ngày làm của số công nhân mới theo năng suất cũ.

Bài toán 2: Giữ nguyên số công nhân mới. Cùng một công việc, cùng số công nhân thì số ngày làm tỉ lệ nghịch với năng suất lao động. Ta tìm được số ngày cần tìm.

Giải

Số công nhân sau khi tăng có 48 + 48.25% = 48 + 12 = 60 (người)

Giữ nguyên năng suất lao động cũ. Cùng một công việc, cùng năng suất lao động thì số công nhân tỉ lệ nghịch với số ngày làm. Gọi số ngày làm của số 60 công nhân theo năng suất cũ là x ta có:

$\frac{60}{48}=\frac{30}{x}\Rightarrow x=48.30:60=24$ (ngày).

Năng suất lao động mới là: 100% + 20% = 120%.

Cùng một công việc, cùng số công nhân thì số ngày làm tỉ lệ nghịch với năng suất lao động. Gọi số ngày 60 công nhân làm theo năng suất mới là y thì ta có $\frac{100\%}{120\%}=\frac{y}{24}\Rightarrow y=100.24:120=20$ (ngày).

C. Bài tập vận dụng

12.1. Cho biết hai đại lượng x và y tỷ lệ nghịch với nhau. Tìm công thức liên hệ giữa y và x. Điền số thích hợp vào ô trống trong bảng sau;

x	-40		-8	-0,5		16		6,4
y		4		-160	20		-3,2	

12.2. Cho hai đại lượng tỉ lệ nghịch z và t; z_1 và z_2 là hai giá trị của z, t_1 và t_2 là hai giá trị tương ứng của t.

Biết $z_2=8;\ 2z_1-3t_2=10$ **và** $t_1=4$. Tính z_1,t_2.

12.3. Tìm hai số dương biết tổng, hiệu, tích của chúng tỉ lệ nghịch với 50; 125 và 25.

12.4. Một số dương M được chia làm bốn phần đều là các số dương tỷ lệ nghịch với $2;3;4;5$. Biết hiệu giữa tổng các bình phương của phần thứ nhất và phần thứ hai với tổng các bình phương của phần thứ ba và thứ tư là 3724. Tìm số M.

12.5.

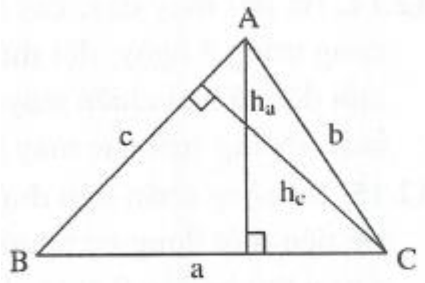
a) Tìm ba số a,b,c tỷ lệ nghịch với $2;3;5$. Biết $a^3-2b^3-3c^3=-5816$;

b) Cho ba số a,b,c tỷ lệ nghịch với $\frac{1}{2017};\frac{1}{2018};\frac{1}{2019}$.

Tính giá trị biểu thức $A=\frac{2020(a-b)(b-c)}{(c-a)^2}$.

12.6.

Một tam giác ABC có chu vi 105cm. Các đường cao trong tam giác ABC ứng với cạnh là $BC=a$ là $h_a=28cm$ ứng với cạnh $AB=c$ là $h_c=32cm$. Biết $\frac{a+c}{b}=\frac{5}{2}$ với $AC=b$.



Tính độ dài mỗi cạnh của tam giác nói trên.

12.7. Một ô tô và một xe máy cùng khởi hành một lúc từ A đến B. Vận tốc của ô tô là 60km/h. Vận tốc của xe máy là 45km/h. Ô tô đến B trước xe máy là 30 phút. Tính quãng đường AB.

12.8. Một ô tô chạy trên đoạn đường AB gồm bốn chặng đường dài bằng nhau với tốc độ lần lượt là 50km/h; 40km/h; 60km/h và 30km/h. Biết tổng thời gian đi cả bốn chặng là 19 giờ. Tính quãng đường AB.

12.9. Hai ô tô cùng khởi hành từ A đến B. Biết tỷ số vận tốc ô tô thứ hai và ô tô thứ nhất là 3: 5. Ô tô thứ nhất đến B sớm hơn 1 giờ 30 phút so với ô tô thứ hai. Tính thời gian mỗi xe đi từ A đến B.

12.10*. Trên đoạn đường AB lúc 7 giờ sáng một xe tải đi từ A với vận tốc 45km/h đến B lúc 11 giờ. Cùng lúc 7 giờ một ô tô khởi hành từ A đi đến B và một xe máy khởi hành từ B đi đến A. Ô tô và xe máy gặp nhau tại C trên AB. Tính độ dài đoạn AC. Biết rằng thời gian xe ô tô đi hết quãng đường AB và thời gian xe máy đi hết đoạn đường BA tỉ lệ thuận với 3 và 5.

12.11. Một động tử (vật chuyển động) chạy trên 3 cạnh của một tam giác đều (có ba cạnh bằng nhau) với vận tốc lần lượt là 6m/s; 5m/s; 4m/s. Tính chu vi tam giác biết tổng số thời gian động tử chuyển động trên ba cạnh là 111 giây.

12.12. Để làm xong một công việc 42 công nhân dự định làm trong 14 ngày (năng suất lao động mỗi người như nhau). Khi tiến hành công việc $\frac{1}{3}$ số công nhân được điều đi làm việc khác. Số công nhân còn lại năng suất lao động mỗi người đều tăng thêm 50%. Hỏi đội công nhân có hoàn thành đúng thời gian dự định?

12.13. Ba đội công nhân đào ba con mương như nhau với năng suất lao động mỗi người như nhau. Đội I hoàn thành trong 5 ngày; đội II hoàn thành trong 6 ngày; đội III hoàn thành trong 8 ngày. Số người của đội I nhiều hơn số người của đội III là 18 người. Hỏi mỗi đội có bao nhiêu người?

12.14. Ba đội máy cày, cày ba cánh đồng cùng diện tích. Đội thứ nhất cày xong trong 3 ngày, đội thứ hai trong 5 ngày, đội thứ ba trong 6 ngày; Hỏi mỗi đội có bao nhiêu máy, biết rằng đội thứ hai có nhiều hơn đội thứ ba 1 máy. (Năng suất các máy như nhau).

12.15. Ba công nhân tiện được tất cả 860 dụng cụ trong cùng một thời gian. Để tiện một dụng cụ người thứ nhất cần 5 phút, người thứ hai cần 6 phút, người thứ ba cần 9 phút. Tính số dụng cụ mỗi người tiện được?

(Đề khảo sát chất lượng học sinh giỏi lớp 7 huyện Thường Tín Hà Nội, năm học 2009 – 2010)

12.16. Ba đội máy san đất làm ba khối lượng công việc như nhau. Đội thứ nhất hoàn thành công việc trong 4 ngày, đội thứ hai trong 6 ngày. Hỏi đội thứ ba hoàn thành trong mấy ngày, biết rằng tổng số máy của đội một và đội hai gấp 10 lần số máy đội ba (giả thiết năng suất của các máy như nhau)?

(Đề khảo sát chất lượng học sinh giỏi lớp 7 huyện Thường Tín Hà Nội, năm học 2011 – 2012)

12.17.

a) Tìm ba số a,b,c biết rằng $\frac{a}{12}=\frac{b}{9}=\frac{c}{5}$ và $abc=20$;

b) Tìm ba số có tổng 420, biết rằng $\frac{6}{7}$ số thứ nhất bằng $\frac{9}{11}$ số thứ hai bằng $\frac{2}{3}$ số thứ ba.

(Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán lớp 7, quận 9, TP Hồ Chí Minh, năm học 2014 - 2015)

12.18. Tìm x,y,z biết rằng x và y tỉ lệ nghịch với 3 và 2; y và z tỉ lệ nghịch với 4 và 5 và $3x^2-y^2+z^2=1971$.

Đề thi chọn học sinh giỏi Toán lớp 7, quận 9, TP Hồ Chí Minh, năm học 2015 – 2016)

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

12.1. Công thức $x.y=80$ hay $y=\frac{80}{x}$

x	-40	20	-8	-0,5	4	16	-25	6,4
y	-2	4	-10	-160	20	5	-3,2	12,5

12.2. $\frac{z_1}{z_2}=\frac{2z_1}{2z_2}=\frac{3t_2}{3t_1}=\frac{2z_1-3t_2}{2z_2-3t_1}\Rightarrow\frac{z_1}{8}=\frac{10}{16-12}\Rightarrow z_1=\frac{10.8}{4}=20$.

Và từ $\frac{z_1}{z_2}=\frac{t_2}{t_1}\Rightarrow t_2=\frac{z_1t_1}{z_2}=\frac{20.4}{8}=10$.

12.3. Gọi hai số phải tìm là $x;y\left(x>0;y>0\right)$. Tổng, hiệu, tích của chúng tỉ lệ nghịch với 50; 125 và 25 nghĩa là tỉ lệ thuận với $\frac{1}{50};\frac{1}{125};\frac{1}{25}$.

$\left(x+y\right):\left(x-y\right):xy=\frac{1}{50}:\frac{1}{125}:\frac{1}{25}=5:2:10$. Hay $\frac{x+y}{5}=\frac{x-y}{2}=\frac{xy}{10}$

Từ $\frac{x+y}{5}=\frac{x-y}{2}=\frac{x+y+x-y}{5+2}=\frac{2x}{7}$

Và $\frac{x+y}{5}=\frac{x-y}{2}=\frac{x+y-x+y}{5-2}=\frac{2y}{3}$

Ta có $\frac{2xy}{20}=\frac{2x}{7}=\frac{2y}{3}=\frac{2xy}{7y}=\frac{2xy}{3x}$.

Suy ra $7y=20\Rightarrow y=\frac{20}{7}$ và $3x=20\Rightarrow x=\frac{20}{3}$.

12.4. Gọi bốn phần của M là $x;y;z;t\left(x;y;z;t>0\right)$

Ta có: $x:y:z:t=\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}:\frac{1}{5}=30:20:15:12$

Hay $\frac{x}{30}=\frac{y}{20}=\frac{z}{15}=\frac{t}{12}=k$

$\Rightarrow k^2=\frac{x^2}{900}=\frac{y^2}{400}=\frac{z^2}{225}=\frac{t^2}{144}=\frac{x^2+y^2-z^2-t^2}{900+400-225-144}=\frac{3724}{931}=4=(\pm 2)^2$

Do các phần đều dương nên $k=2$

$\Rightarrow x=60; y=40; z=30; t=24$ và $M=154$.

12.5.

a) $a:b:c=\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{5}=15:10:6.$

Hay $\frac{a}{15}=\frac{b}{10}=\frac{c}{6}=k$

$\Rightarrow k^3=\frac{a^3}{3375}=\frac{2b^3}{2000}=\frac{3c^3}{648}=\frac{a^3-2b^3-3c^3}{3375-2000-648}=\frac{-5816}{727}=-8=(-2)^3$

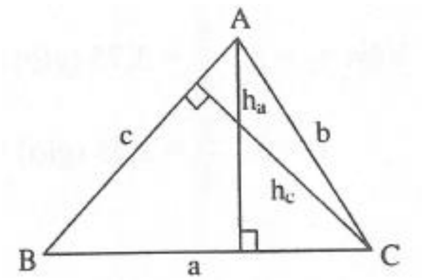
Vậy $k=-2\Rightarrow a=-30; b=-20; c=-12.$

b) Ta có $\frac{a}{2017}=\frac{b}{2018}=\frac{c}{2019}=k$

$\Rightarrow a=2017k; b=2018k; c=2019k.$

Do đó $A=\frac{2020(2017k-2018k)(2018k-2019k)}{(2019k-2017k)^2}=\frac{2020(-k)(-k)}{(2k)^2}=505.$

12.6. Do đó $\frac{a+c}{b}=\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{a+c+b}{b}=\frac{5+2}{2}$



$\Rightarrow\frac{105}{b}=\frac{7}{2}\Rightarrow b=\frac{105\times 2}{7}=30(cm)$

và $a+c=105-30=75cm$.

Cùng một diện tích, thì cạnh đáy tỉ lệ nghịch với chiều cao tương ứng

Do đó ta có: $\frac{a}{c}=\frac{h_c}{h_a}\Rightarrow\frac{a}{32}=\frac{c}{28}=\frac{a+c}{32+28}=\frac{75}{60}=\frac{5}{4}.$

Vậy $BC=a=32.\frac{5}{4}=40(cm); AB=c=28.\frac{5}{4}=35(cm).$

12.7. Ta có 30 phút = 0,5 giờ. Cùng một quãng đường AB thì vận tốc và thời gian đi tương ứng tỉ lệ nghịch với nhau. Gọi t_1 là thời gian xe ô tô đi hết quãng đường AB, t_2 là thời gian xe máy đi hết quãng đường AB,

Theo tính chất của hai đại lượng tỉ lệ nghịch ta có: $\frac{60}{45}=\frac{t_2}{t_1}$

$\Rightarrow\frac{t_2}{60}=\frac{t_1}{45}=\frac{t_2-t_1}{60-45}=\frac{0,5}{15}=\frac{1}{30}$. Ta có: $\frac{t_2}{60}=\frac{1}{30}\Rightarrow t_2=2$ (giờ).

Quãng đường AB dài là: 2.45 = 90(km).

12.8. Với quãng đường như nhau thì vận tốc tỉ lệ nghịch với thời gian. Gọi thời gian đi trên bốn đoạn đường lần lượt là $x;y;z;t$ (giờ) $(x;y;z;t>0)$.

Ta có: $50x=40y=60z=30t=s\Rightarrow\dfrac{50x}{600}=\dfrac{40y}{600}=\dfrac{60z}{600}=\dfrac{30t}{600}$

$\Rightarrow\dfrac{x}{12}=\dfrac{y}{15}=\dfrac{z}{10}=\dfrac{t}{20}=\dfrac{x+y+z+t}{57}=\dfrac{19}{57}=\dfrac{1}{3}.$

$x=12.\dfrac{1}{3}=4$ (giờ). Mỗi chặng dài $4.50=200(km)$.

Quãng đường AB dài $4.200=800(km)$.

12.9. Gọi v_1 là vận tốc ô tô thứ nhất, v_2 là vận tốc ô tô thứ hai $(v_1;v_2>0)$ ta có $\dfrac{v_2}{v_1}=\dfrac{3}{5}$. Cùng quãng đường thì vận tốc và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Gọi t_1 là thời gian ô tô thứ nhất đi hết quãng đường AB; t_2 là thời gian ô tô thứ hai đi hết quãng đường AB $(t_1;t_2>0)$ ta có:

$\dfrac{t_1}{t_2}=\dfrac{v_2}{v_1}=\dfrac{3}{5}\Rightarrow\dfrac{t_2}{5}=\dfrac{t_1}{3}=\dfrac{t_2-t_1}{5-3}=\dfrac{1,5}{2}=\dfrac{3}{4}$

Vậy: $t_2=5.\dfrac{3}{4}=3,75$ (giờ) = 3 giờ 45 phút;

$t_1=3.\dfrac{3}{4}=2,25$ (giờ) = 2 giờ 15 phút.

12.10*. Quãng đường AB dài: $45.(11-7)=180km$. Gọi $s_1=AC,s_2=BC$; và v_1 km/h là vận tốc của xe ô tô; v_2 km/h là vận tốc của xe máy $(s_1;s_2;v_1;v_2>0)$.

Cùng một quãng đường thì thời gian và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Do thời gian xe ô tô đi hết quãng đường AB và thời gian xe máy đi hết đoạn đường BA tỉ lệ thuận với 3 và 5 nên $\dfrac{v_1}{v_2}=\dfrac{5}{3}$. Từ lúc khởi hành đến lúc gặp nhau hai xe đi trong cùng một thời gian nên quãng đường đi được và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

Do đó $\dfrac{s_1}{s_2}=\dfrac{v_1}{v_2}=\dfrac{5}{3}$. Từ $\dfrac{s_1}{s_2}=\dfrac{5}{3}\Rightarrow\dfrac{s_1}{5}=\dfrac{s_2}{3}=\dfrac{s_1+s_2}{5+3}=\dfrac{140}{8}=22,5$

$\Rightarrow s_1=5.22,5=112,5(km)$.

12.11. Ba cạnh tam giác bằng nhau. Cùng đoạn đường vận tốc và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Gọi thời gian động tử trên 3 cạnh lần lượt là $t_1;t_2;t_3$ (giây); $(t_1;t_2;t_3>0)$.

Ta có: $t_1:t_2:t_3=\dfrac{1}{6}:\dfrac{1}{5}:\dfrac{1}{4}=10:12:15$

Hay $\frac{t_1}{10}=\frac{t_2}{12}=\frac{t_3}{15}=\frac{t_1+t_2+t_3}{10+12+15}=\frac{111}{37}=3$.

Ta có $t_1=30$ giây và cạnh tam giác dài là $30.6=180(m)$.

Chu vi tam giác là: $180.3=540(m)$.

12.12. Số người còn lại làm công việc là $42-42:3=28$(công nhân). Năng suất lao động mới là: $100\%+50\%=150\%$

Giữ nguyên năng suất lao động cũ. Cùng một công việc, cùng năng suất lao động thì số công nhân tỉ lệ nghịch với số ngày làm. Gọi số ngày làm của số 28 công nhân theo năng suất cũ là x $(x>0)$ ta có:

$\frac{28}{42}=\frac{14}{x}\Rightarrow x=42.14:28=21$ (ngày)

Cùng một công việc, cùng số công nhân thì số ngày làm tỉ lệ nghịch với năng suất lao động. Gọi số ngày 28 công nhân làm theo năng suất mới là y $(y>0)$

Thì ta có: $\frac{100\%}{150\%}=\frac{y}{21}\Rightarrow y=100.21:150=14$ (ngày).

Đáp số: Đúng dự định 14 ngày.

12.13. Cùng khối lượng công việc (ba con mương như nhau), năng suất lao động mỗi người như nhau thì số người làm và thời gian hoàn thành công việc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Gọi x,y,z là số công nhân của mỗi đội $(x,y,z\in\mathbb{N})$. Ta có: $x:y:z=\frac{1}{5}:\frac{1}{6}:\frac{1}{8}=24:20:15$

$\frac{x}{24}=\frac{y}{20}=\frac{z}{15}=\frac{x-y}{24-15}=\frac{18}{9}=2.$

Vậy $x=48$ (người); $y=40$ (người); $z=30$ (người).

12.14. Gọi số máy của ba đội theo thứ tự là $x,y,z;\ (x,y,z\in\mathbb{N}^*)$. Vì cùng diện tích cày, số máy và số ngày cày xong cánh đồng là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên $x:y:z=\frac{1}{3}:\frac{1}{5}:\frac{1}{6}=10:6:5$

$\Rightarrow\frac{x}{10}=\frac{y}{6}=\frac{z}{5}=\frac{y-z}{6-5}=1$

$\Rightarrow x=10$ (máy); $y=6$ (máy); $z=5$ (máy).

12.15. Gọi số dụng cụ của ba công nhân tiện được theo thứ tự là $x,y,z\left(x,y,z\in N^*\right)$.

Vì cùng thời gian số dụng cụ tiện được của mỗi người và thời gian tiện xong một dụng cụ là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên

$x:y:z=\frac{1}{5}:\frac{1}{6}:\frac{1}{9}=18:15:10$

$\Rightarrow \frac{x}{18}=\frac{y}{15}=\frac{z}{10}=\frac{x+y+z}{18+15+10}=\frac{860}{43}=20$

$\Rightarrow x=360$ (dụng cụ); $y=300$ (dụng cụ); $z=200$ (dụng cụ).

12.16. Gọi số máy của ba đội theo thứ tự là x,y,z và t là số ngày đội thứ ba cần dùng để hoàn thành công việc $\left(x,y,z\in N^*;t>0\right)$.

Vì cùng công việc số máy và số ngày là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên

$x:y:z=\frac{1}{4}:\frac{1}{6}:\frac{1}{t}\Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{4}}=\frac{y}{\frac{1}{6}}=\frac{z}{\frac{1}{t}}=\frac{x+y}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}=\frac{10z}{\frac{5}{12}}=24z$

$\Rightarrow zt=24z\Rightarrow t=24$ (ngày).

12.17.

a) Đặt $\frac{a}{12}=\frac{b}{9}=\frac{c}{5}=k\Rightarrow k^3=\frac{a.b.c}{12.9.5}=\frac{20}{540}=\frac{1}{27}\Rightarrow k=\frac{1}{3}.$

Từ đó tìm được $a=4;b=3;c=\frac{5}{3}.$

b) Gọi x,y,z là ba số cần tìm thì $x+y+z=420.$

Ta có $\frac{6}{7}x=\frac{9}{11}y=\frac{2}{3}z=\frac{x}{\frac{7}{6}}=\frac{y}{\frac{11}{9}}=\frac{z}{\frac{3}{2}}=\frac{x+y+z}{\frac{7}{6}+\frac{11}{9}+\frac{3}{2}}=108$

$\Rightarrow x=126;y=132;z=162.$

12.18. Ta có: $3x=2y$ và $4y=5z\Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{y}{3}$ và $\frac{y}{5}=\frac{z}{4}\Rightarrow \frac{x}{10}=\frac{y}{15}=\frac{z}{12}=k$

$\Rightarrow x=10k;y=15k;z=12k$. Thay vào $3x^2-y^2+z^2=1971$

$\Rightarrow 300k^2-225k^2+144k^2=1971\Rightarrow k^2=9$ vậy $k=\pm 3.$

+ Với $k=3\Rightarrow x=30;y=45;z=36.$

+ Với $k=-3\Rightarrow x=-30;y=-45;z=-36.$

Chương II. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

Chuyên đề 13. HÀM SỐ - ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

A. Kiến thức cần nhớ

1. Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là hàm số của x và x gọi là biến số.

2. Khi y là hàm số của x ta có thể viết $y = f(x), y = g(x)...$

Tập xác định của hàm số là tập hợp tất cả các giá trị của biến số.

Hàm số có thể được cho bằng bảng, bằng công thức, bằng sơ đồ mũi tên, bằng đồ thị.

Khi x thay đổi mà y luôn nhận một giá trị thì y được gọi là hàm hằng.

3. Mặt phẳng tọa độ Oxy được xác định bởi hai trục số vuông góc với nhau: trục hoành Ox và trục tung Oy; giao điểm hai trục O là gốc tọa độ.

Trên mặt phẳng tọa độ, mỗi điểm M xác định một cặp số $(x_0; y_0)$; ngược lại mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ xác định một điểm M. Cặp số $(x_0; y_0)$ gọi là tọa độ của điểm M; x_0 là hoành độ, y_0 là tung độ của điểm M. Ta viết $M(x_0; y_0)$.

4. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng $(x; y)$ trên mặt phẳng tọa độ.

5. Đồ thị của hàm số $y = ax(a \neq 0)$ là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ.

6. Đồ thị hàm số $y = \frac{a}{x}(a; x \neq 0)$ là hai nhánh (hai đường cong), một nhánh nằm ở góc phần tư thứ I và một nhánh nằm ở góc phần tư thứ III khi $a > 0$ và một nhánh nằm ở góc phần tư thứ II và một nhánh nằm ở góc phần tư thứ IV khi $a < 0$.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho các cặp số $(x; y)$ sau:

$$(-2;-3);(-1,5;-4);(1,2;5);\left(\frac{5}{7};8\frac{2}{5}\right);\left(18;\frac{1}{3}\right);(-3;-2).$$

a) Lập bảng giá trị các cặp số.

b) Vẽ sơ đồ mũi tên.

c) Giải thích tại sao bảng vừa lập xác định y là một hàm số của x?

d) Hàm số đó có thể được cho bởi công thức nào?

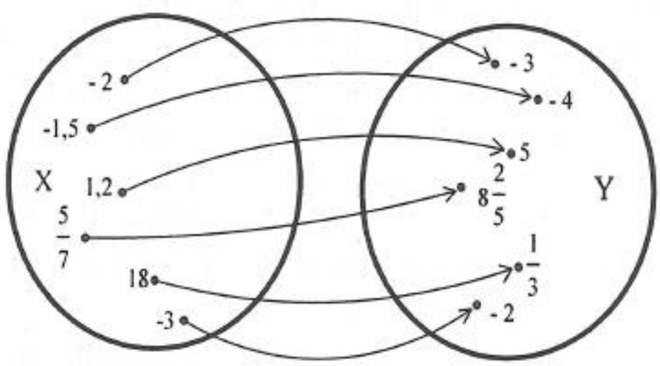
✓ *Tìm cách giải:* Ta cần kiểm tra xem mỗi giá trị của đại lượng x có được tương ứng với một và chỉ một giá trị của đại lương y. Từ quan hệ của x và y viết công thức của hàm số.

Giải

a) Bảng giá trị các cặp số:

x	-2	-1,5	1,2	$\frac{5}{7}$	18	-3
y	-3	-4	5	$8\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	-2

b) Sơ đồ mũi tên:



c) Trong bảng trên ta thấy mỗi giá trị của x đều được tương ứng với một và chỉ một giá trị của y là hàm số của x (việc lập bảng và sơ đồ mũi tên cũng đã chứng tỏ điều ấy).

d) Hàm số có thể được cho bởi công thức $y = \frac{6}{x}$ với

$x \in \left\{-2; -1,5; 1,2; \frac{5}{7}; 18; -3\right\}$

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = f(x)$ được xác định bởi công thức $f(x) = -5x^2 + 6$

a) Tính $f(3); f(-3); f\left(-\frac{1}{3}\right);$

b) Tìm x để $f(x) = -74; f(x) = 1;$

c) Chứng tỏ với $x \in R$ thì $f(x) = f(-x)$.

✓ *Tìm cách giải:* Để tính $f(a)$ ta thay $x = a$ vào công thức, từ đó tìm được giá trị. Để tìm x biết $f(x) = m$ ta thay $y = m$ và từ đó tìm được x. Ta thay vai trò của x là $-x$ và so sánh kết quả để kết luận.

Giải

a) $f(3) = -5.3^2 + 6 = -39; f(-3) = -5.(-3)^2 + 6 = -39$

$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -5.\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 6 = -\frac{5}{9} + 6 = 5\frac{4}{9}.$

b) $f(x) = -74$ nghĩa là $-5x^2 + 6 = -74 \Leftrightarrow 5x^2 = 80 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4.$

$f(x) = 1$ nghĩa là $-5x^2 + 6 = 1 \Leftrightarrow 5x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$

c) Với $(-x)$ thì $f(-x) = -5.(-x)^2 + 6 = -5x^2 + 6 = f(x)$.

Ví dụ 3: Một hàm số được xác định như sau: $y = \begin{cases} x-5 & \text{nếu } x \ge 0 \\ -x-5 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

a) Đặt $y = f(x)$. Tính $f(5); f(-8); f(0);$

b) Hãy viết gọn công thức trên.

✓ *Tìm cách giải:*

a) Thay $x = 5; x = -8$ và $x = 0$ vào $f(x)$ để ý rằng $5 > 0; -8 < 0$.

b) Lưu ý định nghĩa về giá trị tuyệt đối $|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \ge 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$.

Giải

a) $f(5) = 5 - 5 = 0$ (vì $5 > 0$)

$f(-8) = -(-8) - 5 = 3$ (vì $-8 < 0$)

$f(0) = 0 - 5 = -5$.

b) Công thức trên được viết gọn là $y = f(x) = |x| - 5$ vì theo định nghĩa $|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \ge 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$.

Ví dụ 4: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = -5x + 3;$

b) $y = \dfrac{2}{4x-9} + \dfrac{x}{x+1};$

c) $y = \dfrac{-5}{4x^2-9};$

d) $y = \dfrac{2x}{|x|-9};$

e) $y = \dfrac{2}{|3x-12|} + \dfrac{x}{x+5};$

f) $y = \dfrac{-3x}{x^2+2}$.

✓ *Tìm cách giải:* Để tìm tập xác định của các hàm số được cho bằng công thức, ta chỉ cần tìm tất cả các giá trị của biến làm cho công thức có nghĩa.

Giải

a) Tập xác định của hàm số $y = -5x + 3$ là R;

b) $\dfrac{2}{4x-9} + \dfrac{x}{x+1}$ không có nghĩa khi $4x - 9 = 0$ và $x + 1 = 0$ tức là $x = \dfrac{9}{4}$ và $x = -1$. Vậy tập xác định của hàm số $y = \dfrac{2}{4x-9} + \dfrac{x}{x+1}$ là tập hợp số thực khác $\dfrac{9}{4}$ và khác -1: $\left\{ x \in R \middle| x \ne \dfrac{9}{4}; x \ne -1 \right\}$

c) $\dfrac{-5}{4x^2-9}$ không có nghĩa khi $4x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{3}{2}$. Vậy tập xác định của hàm số $y = \dfrac{-5}{4x^2-9}$ là tập hợp số thực khác $\dfrac{3}{2}$ và khác $-\dfrac{3}{2}$: $\left\{ x \in R \middle| x \ne \pm\dfrac{3}{2} \right\}$

d) $\frac{2x}{|x|-9}$ không có nghĩa khi $|x|-9=0 \Leftrightarrow |x|=9 \Leftrightarrow x=\pm 9$. Vậy tập xác định của hàm số $y=\frac{2x}{|x|-9}$ là tập hợp số thực khác 9 và khác $-9:\{x \in R | x \neq \pm 9\}$

e) $\frac{2}{|3x-12|}+\frac{x}{x+5}$ không có nghĩa khi $|3x-12|=0 \Leftrightarrow x=4$ và $x+5=0 \Leftrightarrow x=-5$. Vậy tập xác định của hàm số $y=\frac{2}{|3x-12|}+\frac{x}{x+5}$ là tập hợp số thực khác 4 và khác $-5:\{x \in R | x \neq 4; x \neq -5\}$

f) $x^2+2 \neq 0$ với mọi x nên tập xác định của hàm số $y=\frac{-3x}{x^2+2}$ là R.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y=f(x)=(m^3-2)x+2m^3-5$. Tìm m nếu $f(3)=-51$.

✓ *Tìm cách giải:* Thay $x=3$ vào được

$f(x)=(m^3-2).3+2m^3-5=-51$. Giải ra tìm được m.

Giải

Ta có $f(3)=(m^3-2).3+2m^3-5=51 \Leftrightarrow 5m^3-6-5=-51$

$\Leftrightarrow 5m^3=-40 \Leftrightarrow m^3=-8 \Leftrightarrow m=-2.$

Ví dụ 6: Cho các điểm $A(0;6); B(5;6); C(5;0); D(2;2); M(-4;0); N(0;2)$. Tìm diện tích hình tam giác AMN và hình tứ giác ABCD.

✓ *Tìm cách giải:* Biểu diễn các điểm A, B, C, D, M, N trên mặt phẳng tọa độ nối lại được ΔAMN và tứ giác ABCD.

Mỗi đơn vị trên trục tọa độ là một đơn vị độ dài. Tam giác AMN có độ dài đáy AN là 8 (đvđd), chiều cao MO là 4 (đvđd).

Ta có ABCO là hình chữ nhật. Để tính được diện tích tứ giác ABCD từ D ta hạ các đường vuông góc DK và DH xuống hai trục tọa độ Ox và Oy tạo thành hình vuông OHDK và các tam giác vuông AHD và DKC.

Giải

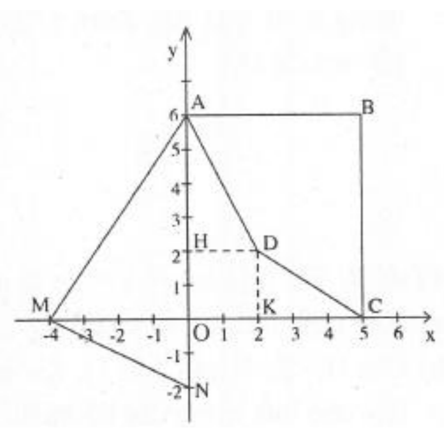
Ta có tam giác AMN có độ dài đáy AN là 8 (đvđd), chiều cao MO là 4 (đvđd). Nên:

$$S_{AMN}=\frac{1}{2}AN.MO=\frac{1}{2}.8.4=16\,(\text{đvdt})$$

Từ D ta hạ các đường vuông góc DK và DH xuống hai trục tọa độ Ox và Oy.

Ta có: $OA=6\,(\text{đvđd})$

$OC=5\,(\text{đvđd});\ HA=4\,(\text{đvđd});\ CK=3\,(\text{đvđd})$



$HD = DK = OK = OH = 2$ (đvđd).

Ta có: $S_{ABCD} = S_{AOCB} - \left(S_{AHD} + S_{DKC} + S_{OHDK}\right)$

$S_{ABCD} = AO.OC - \frac{1}{2}AH.HD - \frac{1}{2}DK.KC - OH.OK$

$= 6.5 - 0,5.4.2 - 0,5.3.2 - 2.2 = 19$ (đvdt).

✓ *Chú ý:* Ta có thể tìm S_{ABCD} bằng cách khác: Nối O với D ta có: $S_{ABCD} = S_{AOCB} - \left(S_{AOD} + S_{DOC}\right)$.

Bạn đọc tự giải.

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = -2x$

a) Viết 5 cặp số $(x; y)$ với $x = -2; -1; 0; 1; 2$.

b) Biểu diễn các cặp số đó trên mặt phẳng tọa độ.

c) Vẽ đường thẳng đi qua điểm $(-2; 4)$ và gốc tọa độ O. Kiểm tra bằng thước xem các điểm còn lại có nằm trên đường thẳng đó không.

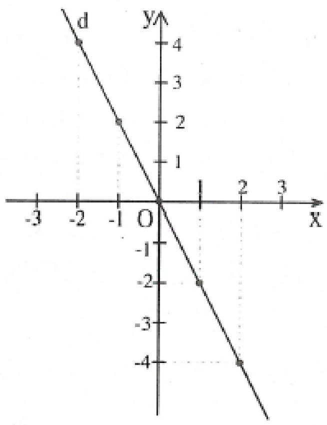
✓ *Tìm cách giải:* Để xác định cặp số ta thay giá trị của x vào công thức, sau đó tính giá trị của y. Khi biểu diễn $(-2; 4)$ trên mặt phẳng tọa độ thì từ điểm -2 trên trục hoành ta vẽ một đường thẳng vuông góc với trục hoành; từ điểm 4 trên trục tung ta vẽ một đường thẳng vuông góc với trục tung; giao điểm của hai đường vuông góc trên là điểm cần biểu diễn.

Giải

a) Năm cặp số cần xác định là $(-2; 4); (-1; 2); (0; 0); (1; -2); (2; -4)$.

b) Biểu diễn các cặp số đó trên mặt phẳng tọa độ như hình bên.

c) Các điểm còn lại đều thuộc đường thẳng d đi qua hai điểm $(-2; 4)$ và gốc tọa độ O.



Ví dụ 8: Đồ thị hàm số $y = ax$ đi qua điểm $A(-4; -2)$.

a) Xác định hệ số a và vẽ đồ thị của hàm số đó;

b) Cho $B(-2; 4)$ và $C(2; 1)$. Không cần biểu diễn B, C trên mặt phẳng tọa độ hãy cho biết trong các bộ ba điểm sau, ba điểm nào thẳng hàng: $(A, B, C); (A, O, B); (A, O, C); (B; O; C)$;

c) Vẽ trên cùng mặt phẳng tọa độ đồ thị hàm số $y = 2x$.

✓ *Tìm cách giải:* Thay tọa độ điểm A vào $y = ax$ ta sẽ tìm được a. Đồ thị hàm số $y = ax$ là một đường thẳng qua gốc tọa độ nên chỉ cần xác định 2 điểm của đường thẳng.

Thông thường để vẽ đồ thị hàm số $y=ax$ chỉ cần xác định 1 điểm rồi vẽ đường thẳng qua điểm đó và gốc tọa độ.

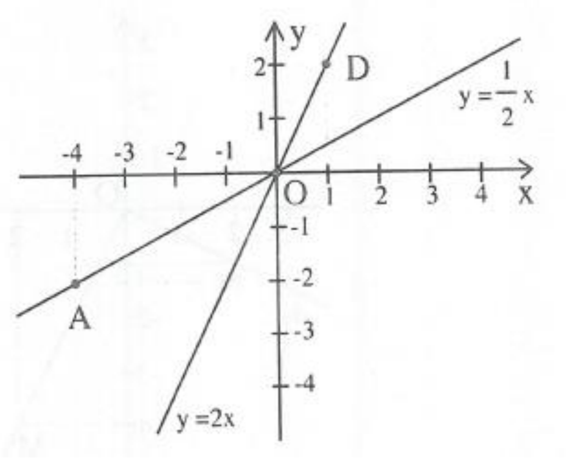
Một điểm thuộc đồ thị hàm số khi và chỉ khi tọa độ của nó thỏa mãn hàm số đã cho.

Giải

a) Đồ thị hàm số $y=ax$ đi qua điểm $A(-4;-2)$ nên cặp số $(-4;-2)$ phải thỏa mãn hàm số, tức là $a.(-4)=-2$ suy ra $a=\frac{1}{2}$.

Hàm số đã cho là $y=\frac{1}{2}x$.

Để vẽ đồ thị hàm số, ta cho $x=-4$ thì $y=-2$ vẽ điểm $A(-4;-2)$. Đường thẳng OA là đồ thị của hàm số $y=\frac{1}{2}x$.



b) Thay tọa độ của $B(-2;4)$ vào $y=\frac{1}{2}x$ ta thấy không thỏa mãn vì $2\neq\frac{1}{2}.(-4)$

Vậy điểm B không thuộc đồ thị của hàm số $y=\frac{1}{2}x$.

Thay tọa độ của $C(2;1)$ vào $y=\frac{1}{2}x$ ta thấy thỏa mãn vì $1=\frac{1}{2}.2$.

Vậy điểm C thuộc đồ thị của hàm số $y=\frac{1}{2}x$.

Do đó chỉ có bộ ba điểm (A,O,C) thẳng hàng.

c) Cho $x=1$ thì $y=2$. Vẽ điểm $D(1;2)$.

Đường thẳng DO là đồ thị hàm số $y=2x$ (hình vẽ trên).

Ví dụ 9: Vẽ đồ thị của hàm số $y=\begin{cases}-2x & \text{nếu } x\geq 0\\ \frac{1}{2}x & \text{nếu } x<0\end{cases}$

✓ *Tìm cách giải:*

Vẽ hai đồ thị $y=-2x$ khi $x\geq 0$ và $y=\frac{1}{2}x$ khi $x<0$.

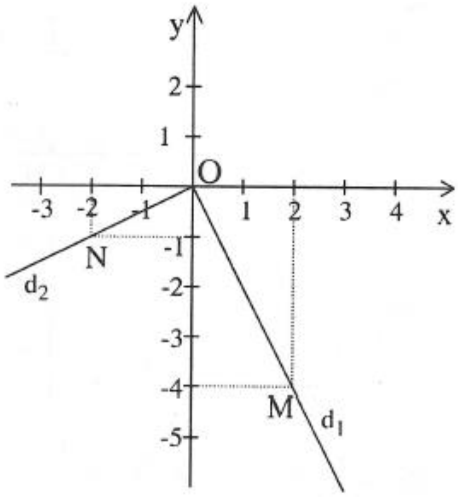
Hai đồ thị kết hợp thành đồ thị cần vẽ.

Giải

Đồ thị (d_1) của hàm số $y=-2x$ khi $x\geq 0$ là tia OM với $M(2;-4)$

Đồ thị (d_2) của hàm số $y=\frac{1}{2}x$ khi $x<0$ là tia ON với $N(-2;-1)$.

(d_1) và (d_2) kết hợp thành đồ thị hàm số $y=\begin{cases}-2x & \text{nếu } x\ge 0\\ \frac{1}{2}x & \text{nếu } x<0\end{cases}$.



Ví dụ 10: Vẽ đồ thị hàm số $y=|3x|+x$.

✓ *Tìm cách giải:* Theo định nghĩa về giá trị tuyệt đối của một số thực x:

$|x|=\begin{cases}x & \text{nếu } x\ge 0\\ -x & \text{nếu } x<0\end{cases}$

Xét hàm số trên với hai trường hợp $x\ge 0$ và $x<0$.

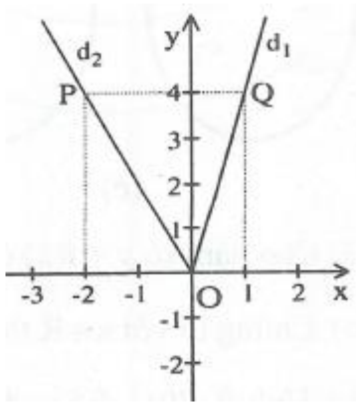
Giải

Do $|x|=\begin{cases}x & \text{nếu } x\ge 0\\ -x & \text{nếu } x<0\end{cases}$ nên hàm số trên trở thành $y=\begin{cases}4x & \text{nếu } x\ge 0\\ -2x & \text{nếu } x<0\end{cases}$

Đồ thị (d_1) của hàm số $y=4x$ khi $x\ge 0$ là tia OQ gốc O đi qua điểm $Q(1;4)$.

Đồ thị (d_2) của hàm số $y=-2x$ khi $x<0$ là tia OP gốc O đi qua $P(-2;4)$.

(d_1) và (d_2) kết hợp thành đồ thị hàm số $y=|3x|+x$.



C. Bài tập vận dụng

13.1. Cho các cặp số (x,y) sau đây:

x	0,5	$-\frac{1}{6}$	3	-1	$\frac{1}{15}$	-6
y	$-\frac{2}{3}$	2	$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	-5	$\frac{1}{18}$

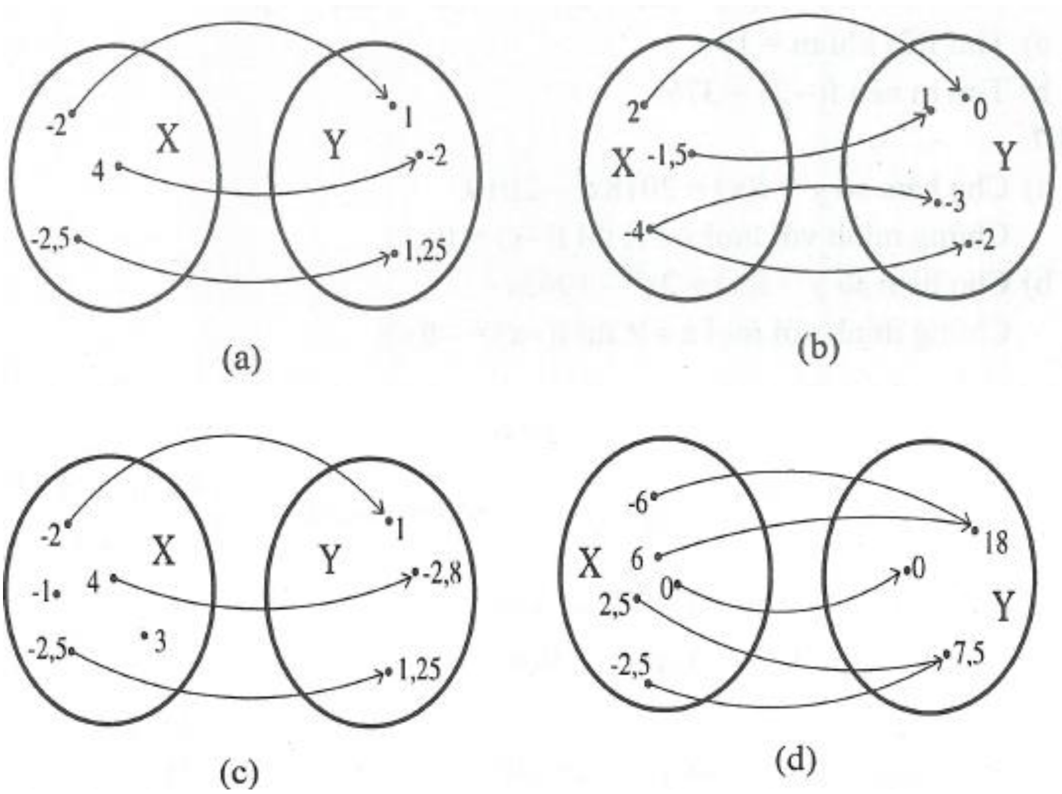
a) Hãy lập các cặp số (x, y).

b) Vẽ sơ đồ mũi tên.

c) Các cặp số này xác định một hàm số. Tại sao?

d) Hàm số đó có thể được cho bởi công thức nào?

13.2. Trong các sơ đồ sau, sơ đồ nào xác định một hàm số? Tại sao. Hàm số nào được biểu thị bằng công thức?



13.3. Cho hàm số $y = f(x)$ được xác định bởi công thức $f(x) = -\frac{3}{4}x$

a) Chứng tỏ với $x \in R$ thì $f(x) = -f(-x)$.

b) Tính $f(-20) - f(5) + f(-8) - f\left(-\frac{1}{2}\right)$;

c) Tìm x để $f(x) = 6; f(x) = -1,2$.

13.4. Hàm số $y = f(x)$ được xác định như sau:

$$y = f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{nếu } x \geq 2,5 \\ -2x + 5 & \text{nếu } x < 2,5 \end{cases}$$

a) Tính $f(5); -f(2018); f(0); f(-3)$;

b) Hãy viết gọn công thức trên;

c) Tính nhanh tích $P = f(0,5).f(1,5).f(2,5)....f(99,5)$;

d) Đại lượng x có là hàm số của đại lượng y không?

13.5. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y=\sqrt{-3x}$;

b) $y=\dfrac{2x-18}{(2x-10)(x+8)}$;

c) $y=\dfrac{-2016}{27x^3+1}$;

d) $y=\dfrac{1975x}{30x^2+4}$;

13.6. Cho hàm số $y=f(x)=(m^2-5)x^2-4(m^2+2m+1)$.

a) Tìm $f(2)$ khi $m=1$;

b) Tìm m nếu $f(-2)=376$.

13.7.

a) Cho hàm số $y=f(x)=2018x^2-2019$.

Chứng minh với mọi $x\in R$ thì $f(-x)=f(x)$.

b) Cho hàm số $y=f(x)=2x^9-1945x$.

Chứng minh với mọi $x\in R$ thì $f(-x)=-f(x)$.

13.8. Cho hình chữ nhật có chiều rộng 25cm và chiều dài 28cm. Người ta tăng mỗi chiều $(15-x)$ cm.

a) Tính chu vi y của hình chữ nhật mới theo x. Chứng minh đại lượng y là hàm số của đại lượng x;

b) Tập xác định của hàm số y.

13.9. Đồ thị hàm số $y=ax$ đi qua điểm $C(1;2)$.

a) Xác định hệ số a và vẽ đồ thị của hàm số đó;

b) Vẽ trên cùng mặt phẳng tọa độ đồ thị hàm số $y=0,5|x|$.

13.10. Vẽ đồ thị của 2 hàm số $y=|3x|$ và đồ thị hàm số $y=\begin{cases}2 & \text{nếu } x>0\\ -2 & \text{nếu } x<0\end{cases}$ trên cùng một hệ trục tọa độ. Xác định giao điểm hai đồ thị. Kiểm tra lại kết quả bằng tính toán.

13.11. Cho hàm số $y=|2bx|-x$.

a) Vẽ đồ thị hàm số khi $b=2$;

b) Vẽ đồ thị hàm số khi $b=0,5$ (cùng trên hệ trục tọa độ của câu a).

13.12. Biết đồ thị hàm số $y=\dfrac{a}{x}(a\neq 0)$ đi qua điểm $A(-2;0,5)$.

a) Xác định hệ số a, và vẽ đồ thị (H) của hàm số với a vừa tìm;

b) $P\left(x_P; y_P\right)$ là một điểm trên (H) biết $2x_P + 8y_P = 0$, xác định tọa độ của P;

c) Tìm giao điểm đồ thị hàm số trên với đồ thị (D) của hàm số $y = |x|$.

13.13. Gọi f là hàm xác định trên tập hợp các số nguyên và thỏa mãn các điều kiện sau đây:

1) $f(0) \neq 0$;

2) $f(1) = 3$;

3) $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$, với mọi $x, y \in Z$.

Tính $f(7)$.

(Cuộc thi Olimpic Toán học thành phố Leningrat, LB Nga năm 1987)

13.14. Cho $f(x)$ là hàm số thỏa mãn $f(2x+1) = (x-12)(x+13)$, với mọi số thực. Hãy xác định giá trị của $f(31)$.

(Cuộc thi Toán Canada mở rộng 2006)

13.15. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2x+1) = (x-2013)(x+2014)$. Tính $f(4207)$

(Đề thi Olimpic Toán tuổi thơ cấp THCS, Đăk Lăk năm học 2013 – 2014)

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

13.1. a); b) Bạn đọc tự lập các cặp số và vẽ sơ đồ.

c) Trong các cặp số trên ta thấy mỗi giá trị của x đều được tương ứng với một và chỉ một giá trị của y nên y là hàm số của x (Việc lập cặp số và sơ đồ mũi tên cũng sẽ chứng tỏ điều ấy).

d) Hàm số có thể được cho bởi công thức $y = -\dfrac{1}{3x}$ với $x \in \left\{-0,5; -\dfrac{1}{6}; 3; -1; \dfrac{1}{15}; -6\right\}$.

13.2. Theo khái niệm hàm số:

- Quy tắc trong sơ đồ (a) biểu thị một hàm số. Công thức $y = -0,5x$.

- Quy tắc trong sơ đồ (b) không biểu thị một hàm số vì với $x = -4$ có hai giá trị tương ứng thuộc Y.

- Quy tắc trong sơ đồ (c) không biểu thị một hàm số vì có phần tử chẳng hạn 3 của tập X không có giá trị tương ứng thuộc tập Y.

- Quy tắc trong sơ đồ (d) biểu thị một hàm số. Công thức $y = |3x|$.

13.3.

a) Với $x \in R$ thì $f(-x) = -\dfrac{3}{4}(x) = \dfrac{3}{4}x = -\left(-\dfrac{3}{4}\right)x = -f(x)$.

Từ $f(-x) = -f(x) \Rightarrow -f(-x) = f(x)$.

Vậy với $x \in R$ thì $f(x) = -f(-x)$.

b) $f(-20)-f(5)+f(-8)-f\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=\left(-\frac{3}{4}\right).(-20)-\left(-\frac{3}{4}\right).5+\left(-\frac{3}{4}\right).(-8)-\left(-\frac{3}{4}\right).\left(-\frac{1}{2}\right)=24\frac{3}{8}.$

c) $f(x)=6$ nghĩa là $-\frac{3}{4}x=6 \Leftrightarrow x=-8.$

$f(x)=-1,2$ nghĩa là $-\frac{3}{4}x=-1,2 \Leftrightarrow x=1,6.$

13.4.

a) $f(5)=10-5=5;$

$-f(2018)=-(2018.2)+5=-4031;$

$f(0)=0+5=5;$

$f(-3)=-2.(-3)+5=11.$

b) Công thức được viết gọn là $y=f(x)=|2x-5|$ vì theo định nghĩa

$|x|=\begin{cases} x & \text{nếu } x\ge 0\\ -x & \text{nếu } x<0\end{cases}$ nên $y=f(x)=\begin{cases} 2x-5 & \text{nếu } 2x-5\ge 0 \text{ hay } x\ge 2,5\\ -2x+5 & \text{nếu } 2x-5<0 \text{ hay } x<2,5\end{cases}$.

c) $P=0$ vì $f(2,5)=0$.

d) Đại lượng x không là hàm số của đại lượng y vì ứng với một giá trị của y ta có hai giá trị tương ứng của x (chẳng hạn $y=9$ thì $x=7$ và $x=-2$) nên theo định nghĩa hàm số đại lượng x không là hàm số của đại lượng y.

13.5.

a) $\{x | x\in R \text{ và } x\le 0\}$;

b) $\{x | x\in R; x\ne 5 \text{ và } x\ne 8\}$;

c) $\left\{x \middle| x\in R; x\ne -\frac{1}{3}\right\}$;

d) $\{x | x\in R\}$.

13.6. a) Khi $m=1$ thì $f(x)=(-4)x^2-16$ nên $f(2)=(-4)2^2-16=-32.$

b) $f(-2)=(m^2-5)(-2)^2-4(m^2+2m+1)=376 \Leftrightarrow m=-50.$

13.7.

a) Ta có: $f(-x)=2018(-x)^2-2019=2018x^2-2019=f(x)$

$\Rightarrow f(-x)=f(x)$.

b) $f(-x)=2(-x)^9-1945(-x)=-2x^9+1945x=-(2x^9-1945x)=-f(x)$

$\Rightarrow f(-x)=-f(x)$.

13.8.

a) Chiều rộng mới là $25+(15-x)$; chiều dài mới là $28+(15-x)$. Chu vi hình chữ nhật mới là $y=2(25+15-x+28+15-x)=-4x+166$.

$y=-4x+166$ là hàm số vì ứng với mỗi giá trị của x ta có một giá trị tương ứng duy nhất của y.

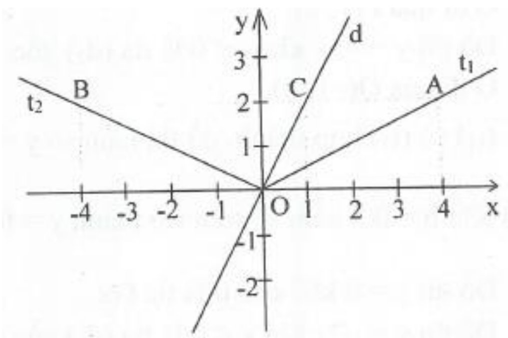
b) Tập xác định của hàm số $y=-4x+166$ là $D=\{x|x\in R; x\le 15\}$.

13.9.

a) Đồ thị hàm số $y=ax$ đi qua điểm $C(1;2)$ nên cặp số $(1;2)$ phải thỏa mãn hàm số, tức là $a.1=2$ suy ra $a=2$. Hàm số đã cho là $y=2x$. Vẽ điểm $C(1;2)$. Đường thẳng OC là đồ thị của hàm số $y=2x$.

b) $y=f(x)$

$=0,5|x|=\begin{cases}0,5x & \text{nếu } x\ge 0\\ -0,5x & \text{nếu } x<0\end{cases}$

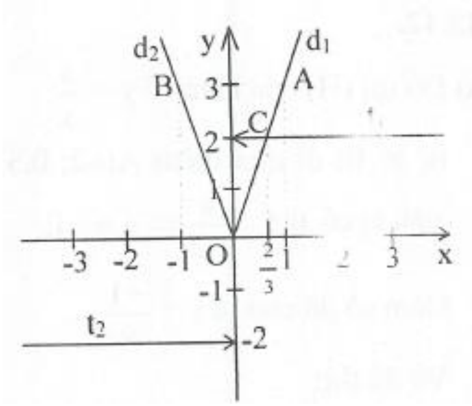


* Đồ thị (t_1) của hàm số $y=0,5x$ khi $x\ge 0$ là tia OA với $A(4;2)$.

* Đồ thị (t_2) của hàm số $y=-0,5x$ khi $x<0$ là tia OB với $B(-4;2)$.

Hợp của t_1 và t_2 là đồ thị hàm số $y=0,5|x|$.

13.10. $y=f(x)=|3x|=\begin{cases}3x & \text{nếu } x\ge 0\\ -3x & \text{nếu } x<0\end{cases}$



Đồ thị (d_1) của hàm số $y=3x$ khi $x\ge 0$ là tia OA với $A(1;3)$

Đồ thị (d_2) của hàm số $y=-3x$ khi $x<0$ là tia OB với $B(-1;3)$,

(d_1) và (d_2) kết hợp thành đồ thị hàm số

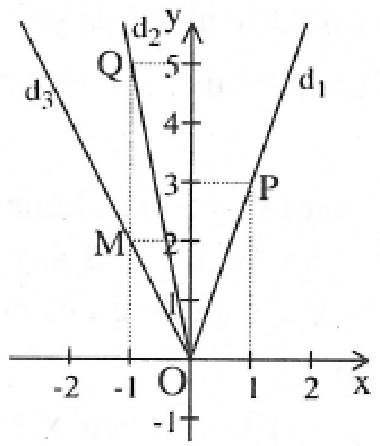
$y=\begin{cases}3x & \text{nếu } x\ge 0\\ -3x & \text{nếu } x<0\end{cases}$

Đồ thị hàm số $y=\begin{cases}2 & \text{nếu } x>0\\ -2 & \text{nếu } x<0\end{cases}$ là phần đường thẳng t_1 với $x>0$ kết hợp với phần đường thẳng t_2 với $x<0$.

Giao điểm của hai đồ thị là $C\left(\frac{2}{3};2\right)$.

Kiểm tra với $y = 2$ thì $2 = 3x$ nên $x = \frac{2}{3}$.

13.11. Do $|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \ge 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ nên



a) Khi $b = 2$ hàm số trên trở thành

$$y = \begin{cases} 3x & \text{nếu } x \ge 0 \\ -5x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Đồ thị $y = 3x$ khi $x \ge 0$ là tia (d_1) gốc O đi qua $P(1;3)$.

Đồ thị $y = -5x$ khi $x < 0$ là tia (d_2) gốc O đi qua $Q(-1;5)$.

(t_1) và (t_2) hợp thành đồ thị hàm số $y = |3x| - x.$.

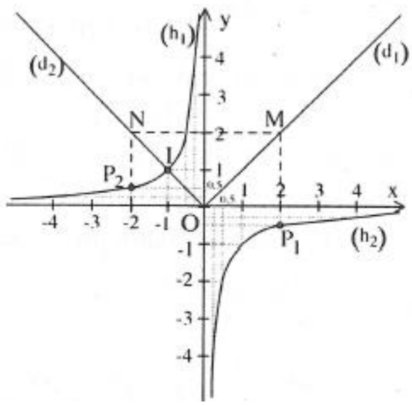
b) Khi $b = 0{,}5$ hàm số trên trở thành $y = f(x) = |x| - x = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \ge 0 \\ -2x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

Đồ thị $y = 0$ khi $x \ge 0$ là tia Ox.

Đồ thị $y = -2x$ khi $x < 0$ là tia (d_3) gốc O đi qua $M(-1;2)$.

Tia Ox và (d_3) hợp thành đồ thị hàm số $y = |x| - x$.

13.12.



a) Đồ thị (H) của hàm số $y = \frac{a}{x}\ (a \ne 0)$ đi qua điểm $A(-2;0{,}5)$ nên ta có $0{,}5 = \frac{a}{-2} \Rightarrow a = -1$.

Hàm số đã cho là $y = \frac{-1}{x}$.

Vẽ đồ thị:

x	-4	-2	-1	-0,25	0,25	0,5	1	2	4
y	0,25	0,5	1	4	-4	-2	-1	-0,5	-0,25

Vẽ các điểm $(x;y)$ và nối lại được: Đồ thị hàm số $y = \frac{-1}{x}$ là hai nhánh đường cong (h_1) nằm ở góc phần tư thứ II và (h_2) nằm ở góc phần tư thứ IV.

b) P nằm trên đồ thị hàm số $y = \frac{-1}{x}$ nên y_P và x_P thỏa mãn biểu thức trên nghĩa là $y_P = \frac{-1}{x_P}$. Do

$2x_P + 8y_P$ nên $2x_P + 8.\frac{-1}{x_P} = 0 \Leftrightarrow x_P^2 = 4x_P = \pm 2$

Với $x_P = 2$ thì $y_P = -0.5; x_P = -2$ thì $y_P = 0.5.$

Ta có hai điểm $P_1(2;-0.5)$ và $P_2(-2;0.5)$.

c) Đồ thị (D) của hàm số $y = f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ gồm 2 tia OM và ON với $M(2;2); N(-2;2)$. Hai đồ thị (D) và (H) cắt nhau tại $I(-1;1)$.

13.13. Áp dụng lần lượt các tính chất đã cho ta có:

$f(1)f(0) = f(1+0) + f(1-0) = 2f(1) = 6 \Rightarrow f(0) = 2.$

$f(1)f(1) = f(1+1) + f(1-1) = f(2) + f(0) \Rightarrow f(2) = 7.$

$f(2)f(1) = f(2+1) + f(2-1) = f(3) + f(1) \Rightarrow f(3) = 18.$

$f(3)f(1) = f(4) + f(2) \Rightarrow f(4) = 47.$

$f(4)f(3) = f(7) + f(1) \Rightarrow f(7) = 843.$

Vậy $f(7) = 843.$

13.14. Ta có: $31 = 2x + 1 \Leftrightarrow x = 15$. Vậy $f(31) = (15-12)(15+13) = 84.$

13.15. Ta có: $4027 = 2x + 1 \Leftrightarrow x = 2013$. Vậy $f(4027) = 0$.

CHUYÊN ĐỀ 14. THỐNG KÊ

Phần 1. THU THẬP SỐ LIỆU THỐNG KÊ , TẦN SỐ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Vấn đề hay hiện tượng mà người điều tra quan tâm tìm hiểu gọi là dấu hiệu (thường được kí hiệu bằng các chữ in hoa X,Y,...).

- Các số liệu thu thập được khi điều tra về một dấu hiệu nào đó gọi là số liệu thống kê.

Mỗi số liệu là một giá trị của dấu hiệu:

- Số tất cả các giá trị (không nhất thiết khác nhau) của dấu hiệu bằng số đơn vị điều tra. Kí hiệu là N.

- Số lần xuất hiện của một giá trị trong dãy giá trị của dấu hiệu là tần số của giá trị đó. Giá trị của dấu hiệu thường dược kí hiệu là x và tần số của giá trị thường kí hiệu là n.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Lập bảng số liệu thống kê ban đầu

Phương pháp giải:

Khi lập bảng số liệu thống kê ban đầu cho một cuộc điều tra, ta thường phải xác định: dấu hiệu (các vấn đề hay hiện tượng mà ta quan tâm tìm hiểu), đơn vị điều tra, các giá trị của dấu hiệu.

1A. Lập bảng số liệu thông kê ban đầu cho cuộc điều tra về điểm kiểm tra 1 tiết môn môn Toán gần đây nhất của các bạn trong tổ em.

1B. Lập bảng số liệu thống kê ban đầu cho cuộc điều tra về điểm kiểm tra 1 tiết môn môn Văn gần đây nhất của các bạn trong tổ em.

Dạng 2. Khai thác các thông tin từ bảng số liệu thống kê ban đầu

Phương pháp giải:

Từ bảng số liệu thống kê ban đầu ta có thể khai thác các thông tin sau:

+ Dấu hiệu cần tìm hiểu và các giá trị của dấu hiệu đó;

+ Đơn vị điều tra;

+ Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu;

+ Tần số các giá trị khác nhau của dấu hiệu.

2A. Điểm thi học kì I môn Toán của học sinh lớp 7A được cho trong bảng dưới đây.

8	7	4	4	6	9	6	9
10	7	8,5	5	10	8	7	9
10	9	8,5	7	7,5	5	8	7,5
9	9,5	4	5	8	7	9,5	7

a) Dấu hiệu cần tìm hiểu ở đây là gì? Đơn vị điều tra là gì?

b) Dấu hiệu có tất cả bao nhiêu giá trị?

c) Tính số các giá trị khác nhau của dấu hiệu?

d) Viết các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tính tần số?

2B. Điểm thi học kì I môn Toán của học sinh lớp 7B được cho trong bảng dưới đây.

6	8	5	8,5	7,5	8,5	9,5	5
7	6	7,5	9,5	4,5	8	7	7
8	6	9	8	8,5	10	7	8
7	8,5	4,5	7	7	6	5	8

a) Dấu hiệu cần tìm hiểu ở đây là gì? Đơn vị điều tra là gì?

b) Dấu hiệu có tất cả bao nhiêu giá trị?

c) Tính số các giá trị khác nhau của dấu hiệu?

d) Viết các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tính tần số

3A. Hàng ngày, bạn Dũng thử ghi lại thời gian cần thiết để đi từ nhà đến trường và thực hiện điều đó trong 10 ngày. Kết quả thu được trong bảng sau:

Ngày	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Thời gian (phút)	25	27	26	25	26	28	25	25	26	28

a) Dấu hiệu mà bạn Dũng quan tâm là gì

b) Dấu hiệu có tất cả bao nhiêu giá trị

c) Có bao nhiêu giá trị khác nhau của dấu hiệu

d) Viết các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tính tần số

3B. Hàng tháng, bác An ghi lại mức độ tiêu thụ điện năng (tính theo Kw/h) của gia đình mình trong 10 tháng. Kết quả thu được trong bảng sau

Ngày	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Mức độ tiêu thụ (Kw/h)	90	95	95	110	115	115	120	95	110	90

a) Dấu hiệu mà bác An quan tâm là gì?
b) Dấu hiệu có tất cả bao nhiêu giá trị?
c) Có bao nhiêu giá trị khác nhau của dấu hiệu?
d) Viết các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tính tần số của chúng.

4A. Màu sắc ưa thích của các bạn nữ trong lớp 7A được bạn lớp trưởng ghi lại trong bảng sau

Số thứ tự	Tên học sinh	Màu sắc ưa thích
1	Quỳnh	Màu hồng
2	Ngân	Màu đỏ
3	Hoa	Màu vàng
4	Lan	Màu tím
5	Thương	Màu đỏ
6	Huệ	Màu hồng
7	Trang	Màu vàng
8	Huyền	Màu trắng
9	Phượng	Màu tím
10	Hương	Màu đỏ

a) Dấu hiệu mà bạn lớp trưởng quan tâm là gì?

b) Dấu hiệu có tất cả bao nhiêu giá trị?
c) Có bao nhiêu giá trị khác nhau của dấu hiệu?
d) Viết các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tính tần số của chúng.

4B. Môn học yêu thích nhất của các bạn trong tổ 1 lớp 7A được bạn tổ trưởng ghi lại trong bảng sau:

Số thứ tự	Tên học sinh	Môn học ưa thích
1	Lê Bảo Thanh	Toán học
2	Mai Văn Tuấn	Toán học
3	Đặng Trung Dũng	Văn học
4	Trần Văn Huy	Tiếng anh
5	Dương Hữu Mạnh	Văn học
6	Lê Hải Vân	Lịch sử
7	Trần Kiều Trang	Toán học
8	Nguyễn Thu Hồng	Sinh học
9	Lê Huy An	Toán học
10	Trần Ngọc Minh	Tiếng anh

a) Dấu hiệu mà bạn tổ trưởng quan tâm là gì?

b) Dấu hiệu có tất cả bao nhiêu giá trị?

c) Có bao nhiêu giá trị khác nhau của dấu hiệu?

d) Viết các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tính tần số của chúng.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

5. Lập bảng số liệu thống kê ban đầu cho cuộc điều tra về số học sinh trong khối 7 trường em

6. Điểm thi họ kì I môn Toán của học sinh lớp 7C được cho trong bảng dưới đây

5,5	6	7	7,5	6,5	9,5	7,5	8
6,5	6,5	6	4	9,5	6,5	8	9,5
4	7,5	6	9	7,5	5,5	10	7
9	6	7	7,5	6	4	6	8

a) Dấu hiệu cần tìm hiểu ở đây là gì?

b) Dấu hiệu có tất cả bao nhiêu giá trị?

c) Tính số các giá trị khác nhau của dấu hiệu?

d) Viết các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tính tần số của chúng.

7. Số lượt khách đến thăm quan cuộc triển lãm tranh 10 ngày vừa qua được ghi lại trong bảng sau:

Ngày	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Số lượng	400	450	450	390	380	380	420	400	400	420

a) Dấu hiệu quan tâm ở đây là gì?

b) Dấu hiệu có tất cả bao nhiêu giá trị?

c) Có bao nhiêu giá trị khác nhau của dấu hiệu?

d) Viết các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tính tần số của chúng.

8. Số học sinh đi học muộn trong tuần qua của khối 7 được bạn Cờ đỏ ghi lại trong bảng sau:

Số thứ tự	Lớp	Số học sinh đi muộn
1	7A	3
2	7B	2
3	7C	4
4	7D	3
5	7E	3
6	7F	4
7	7G	5

a) Dấu hiệu mà bạn cờ đỏ quan tâm là gì?

b) Dấu hiệu có tất cả bao nhiêu giá trị?

c) Có bao nhiêu giá trị khác nhau của dấu hiệu?

d) Viết các giá trị khác nhau của dấu hiệu và tính tần số.

HƯỚNG DẪN

1A. HS tự lập bảng.

Số thứ tự	Họ tên học sinh	Điểm kiểm tra 1 tiết môn Toán
1	Nguyễn Thúy An	8
2	Trần Quốc Anh	10
3	Nguyễn Quốc Cường	7
4	Đỗ Việt Dũng	10
5	Trần Thị Hà	9
6	Trịnh Lê Huy	6
7	Ngô Khánh Phương	8
8	Nguyễn Minh Thúy	8,5
9	Nguyễn Mạnh Trường	9

10	Lê Văn Tuân	7,5

1B. HS tự làm.

2A. a) Dấu hiệu cần tìm hiểu là: Điểm thi học kì I môn Toán của học sinh lớp 7A. Đơn vị điều tra là học sinh lớp 7A.

b) Dấu hiệu có tất cả 32 giá trị.

c) Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu là 10.

d) Các giá trị khác nhau: 4; 5; 6; 7; 7,5; 8; 8,5; 9; 9,5; 10.

Giá trị	4	5	6	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10
Tần số	3	3	2	6	2	4	2	5	2	3

2B. Tương tự **2A.**

a) Dấu hiệu cần tìm hiểu là : Điểm thi học kì I môn Toán của học sinh lớp 7B . Đơn vị điều tra là học sinh lớp 7B .

b) Dấu hiệu có tất cả 32 giá trị.

c) Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu là 10.

d) Ta có bảng giá trị và tần số của dấu hiệu như sau:

Giá trị	4,5	5	6	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10
Tần số	2	3	4	7	2	8	4	1	2	1

3A. a) Dấu hiệu mà bạn Dũng quan tâm là: Thời gian cần thiết để đi từ nhà đến trường.

b) Dấu hiệu có 10 giá trị.

c) Có 4 giá trị khác nhau của dấu hiệu.

d) Các giá trị khác nhau của dấu hiệu: 25; 26; 27; 28.

Tần số của chúng lần lượt là: 4; 3; 1; 2.

3B. Tương tự **3A.**

a) Dấu hiệu mà bác An quan tâm là: mức độ tiêu thụ điện năng (tính theo Kw/h) của gia đình mình.

b) Dấu hiệu có 10 giá trị.

c) Có 5 giá trị khác nhau của dấu hiệu.

d) Các giá trị khác nhau của dấu hiệu: 90; 95; 110; 115; 120.

Tần số của chúng lần lượt là: 2; 3; 2; 2; 1.

4A. a) Dấu hiệu bạn lớp trưởng quan tâm là: Màu sắc ưa thích của các bạn nữ trong lớp 7A.

b) Dấu hiệu có 10 giá trị.

c) Có 5 giá trị khác nhau của dấu hiệu.

d) Các giá trị khác nhau của dấu hiệu: Màu hồng, màu đỏ, màu vàng, màu trắng, màu tím.

Tần số của chúng lần lượt là: 2; 3; 2; 1; 2.

4B. Tương tự **4A.**

a) Dấu hiệu bạn tổ trưởng quan tâm là: Môn học yêu thích nhất của các bạn trong tổ 1 lớp 7 A

b) Dấu hiệu có 10 giá trị.

c) Có 5 giá trị khác nhau của dấu hiệu.

d) Các giá trị khác nhau của dấu hiệu: Toán học, Văn học, Tiếng anh, Lịch sử, Sinh học.

Tần số của chúng lần lượt là: 4; 2; 2; 1; 1,

5. Tương tự 1A.

Số thứ tự	Lớp	Số học sinh
1	7A	30
2	7B	32
3	7C	35
4	7D	36
5	7E	34
6	7F	32
7	7G	36

6. Tương tự **2A.**

a) Dấu hiệu cần tìm hiểu là: Điểm thi học kì I môn Toán của học sinh lớp 7C.

b) Dấu hiệu có tất cả 32 giá trị.

c) Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu là 10.

d) Các giá trị khác nhau: 4; 5,5; 6; 6,5; 7; 7,5; 3; 9; 9,5; 1.0.

Tần số của chúng lần lượt là: 3; 2; 6; 4; 3; 5; 3; 2; 3; 1.

7. Tương tự **3A.**

a) Dấu hiệu quan tâm là: Số lượt khách đến thăm quan cuộc triển lãm tranh.

b) Dấu hiệu có 10 giá trị.

c) Có 5 giá trị khác nhau của dấu hiệu.

Các giá trị khác nhau của dấu hiệu là: 380; 390; 400; 420; 450.

Tần số của chúng lần lượt là: 2; 1; 3; 2; 2.

8. Tương tự **4A.**

a) Dấu hiệu bạn Cờ đỏ quan tâm là: Số học sinh đi học muộn trong tuần qua của khối 7.

b) Dấu hiệu có 7 giá trị.

c) Có 4 giá trị khác nhau của dấu hiệu.

d) Các giá trị khác nhau của dấu hiệu: 2; 3; 4; 5.

Tần số của chúng lần lượt là: 1; 3; 2; 1

....

....

....

....

....

....

....

....

Phần 2. BẢNG TẦN SỐ CÁC GIÁ TRỊ CỦA DẤU HIỆU

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Từ bảng số liệu thống kê ban đầu có thể lập được bảng "tần số" (bảng phân phối thực nghiệm của dấu hiệu).

- Bảng tần số thường được lập như sau:

+ Vẽ một khung hình chữ nhật gồm hai dòng.

+ Dòng trên ghi các giá trị khác nhau của dấu hiệu theo thứ tự tăng dần.

+ Dòng dưới ghi các tần số tương ứng với mỗi giá trị đó.

- Bảng tần số giúp người điều tra dễ có những nhận xét chung về sự phân phối các giá trị của dấu hiệu và tiện lợi cho việc tính toán sau này.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Lập bảng "tần số" và rút ra nhận xét

Phương pháp giải:

Từ bảng số liệu thống kê ban đầu lập bảng "tần số" (theo dạng "ngang" hay "dọc") trong đó nêu rõ các giá trị khác nhau của dấu hiệu và các tần số tương ứng của giá trị đó.

- Rút ra nhận xét về:

+ Số các giá trị của dấu hiệu;

+ Số các giá trị khác nhau;

+ Giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất giá trị có tần số lớn nhất;

+ Các giá trị thuộc vào khoảng nào là chủ yếu.

1A. Kết quả điều tra về số con của 20 gia đình trong khu dân cư được cho trong bảng sau đây:

0	1	2	3	4	2	1	3	2	1	2	3	1	2	3	4	1	5	1	3

a) Dấu hiệu cần tìm hiểu ở đây là gì?

b) Lập bảng "tần số"

c) Hãy nêu một số nhận xét từ bảng trên về số con của 20 gia đình trong khu dân cư (số con của các gia đình trong khu dân cư chủ yếu thuộc vào khoảng nào? Số gia đình đông con, tức có 3 con trở lên chỉ chiếm một tỉ lệ bao nhiêu)

1B. Số buổi đi học muộn trong học kì I của 20 bạn học sinh lớp 7A được ghi lại ở bảng sau đây:

5 1 2 3 1 0 1 2 4 2 3 2 1 5 3 6 4 5 1 4

a) Dấu hiệu cần tìm hiểu ở đây là gì?

b) Lập bảng "tần số"

c) Hãy nêu một số nhận xét từ bảng trên (số các giá trị của dấu hiệu, số các giá trị khác nhau, giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất, giá trị có tần số lớn nhất).

2A. Tuổi nghề (năm) của một số công nhân trong một phân xưởng được ghi lại ở bảng sau đây:

5	2	5	9	7
2	5	4	5	6
5	2	2	4	8
5	6	2	10	4
7	8	2	2	1

a) Dấu hiệu ở đây là gì?

b) Lập bảng "tần số"

c) Rút ra một nhận xét (số các giá trị của dấu hiệu, số các giá trị khác nhau, giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất, giá trị có tần số lớn nhất, các giá trị thuộc vào khoảng nào là chủ yếu).

2B. Thời gian giải một bài toán (tính theo phút) của một số học sinh lớp 7 được ghi lại trong bảng sau

4	9	8	9	10
7	4	10	10	9
9	10	9	10	6
10	8	10	8	4
11	7	5	6	8

a) Dấu hiệu ở đây là gì?

b) Lập bảng "tần số"

c) Rút ra một nhận xét (số các giá trị của dấu hiệu, số các giá trị khác nhau, giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất, giá trị có tần số lớn nhất, các giá trị thuộc vào khoảng nào là chủ yếu).

3A. Một cung thủ thi bắn cung, số điểm đạt được trong mỗi lần bắn được ghi lại ở bảng sau đây:

8	9	8	8	9	10	8	8	9
10	7	10	9	10	7	8	10	7
8	9	9	9	9	8	8	8	7

a) Dấu hiệu ở đây là gì? Cung thủ đã bắn bao nhiêu phát ?

b) Lập bảng " tần số".

c) Rút ra một số nhận xét.

3B. Một vận động viên thi chạy về đích. Số điểm đạt được mỗi lần chạy về đích được ghi dưới bảng sau đây :

5	4	2	4	1	4	6	1	1	1
3	5	1	4	2	5	4	1	1	1
2	6	6	2	3	6	1	3	4	1

a) Dấu hiệu ở đây là gì? Vận động viên đã chạy về đích bao nhiêu lần ?

b) Lập bảng "tần số".

c) Rút ra một số nhận xét.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

4. a) Khi điều tra về môn học yêu thích nhất của các bạn lớp 7A. Bạn lớp trưởng đã ghi lại bằng bảng điều tra ban đầu như sau:

Toán học	Toán học	Tiếng Anh
Tiếng Anh	Toán học	Văn học
Vật lí	Văn học	Vật lí
Tiếng Anh	Tiếng Anh	Sinh học
Văn học	Sinh học	Địa lí
Toán học	Địa lí	Toán học
Văn học	Sinh học	Toán học
Tiếng Anh	Vật lí	Văn học
Lịch sử	Toán học	Toán học
Sinh học	Tiếng Anh	Tiếng Anh

a) Dấu hiệu ở đây là gì? Có bao nhiêu giá trị của dấu hiệu?

b) Lập bảng "tần số".

c) Rút ra một số nhận xét.

5. Điểm thi học kì I môn Toán của học sinh lớp 7C được cho trong bảng dưới đây.

5,5	6	7	7,5	6,5	9,5	7,5	8
6,5	6,5	6	4	9,5	6,5	8	9,5
4	7,5	6	9	7,5	5,5	10	7
9	6	7	7,5	6	4	6	8

a) Dấu hiệu ở đây là gì? Có bao nhiêu giá trị của dấu hiệu?

b) Lập bảng "tần số".

c) Rút ra một số nhận xét.

6. Số suất cơm từ thiện cho người vô gia cư khu phố cổ Hà Nội được thực hiện bởi một nhóm tình nguyện viên trong 7 ngày vừa qua như sau:

STT ngày	1	2	3	4	5	6	7
Số suất cơm	30	35	35	40	38	35	30

a) Dấu hiệu ở đây là gì? Có bao nhiêu giá trị của dấu hiệu?

b) Lập bảng " tần số".

c) Rút ra một số nhận xét.

HƯỚNG DẪN

1A. a.) Dấu hiệu: Số con của mỗi gia đình trong khu dân cư.

b) Bảng "tần số":

Số con của một gia đình (x)	0	1	2	3	4	5	
Tần số (n)	1	6	5	5	2	1	N= 20

c) Nhận xét:

- Số con của các gia đình trong khu dân cư là từ 0 đến 5;
- Số gia đình trong khu dân cư có 1 con chiếm tỉ lệ cao nhất chiếm tỉ lệ (6/20).
- Số gia đình có từ 3 con trở lên chỉ chiếm: 40%.

1B. Tương tự **1A.**

a) Dấu hiệu: Số buổi đi học muộn trong học kì I của học sinh lớp 7A.

b) Bảng "tần số"

Số buổi đi học	0	1	2	3	4	5	6	

muộn (x)								
Tần số (n)	1	5	4	3	3	3	1	N = 20

c) Nhận xét:

- Có 20 giá trị trong đó có 7 giá trị khác nhau (từ 0 buổi đi học muộn cho đến 6 buổi đi học muộn).
- Số buổi đi học muộn thấp nhất là 0 (buổi).
- Số buổi đi học muộn cao nhất là 6 (buổi).
- Giá trị có tần số lớn nhất: 1.

2A. a) Dấu hiệu: Tuổi nghề (năm) của mỗi công nhân.

b) Bảng "tần số"

Tuổi nghề của công nhân (x)	1	2	4	5	6	7	8	9	10	
Tần sô (n)	1	7	0	6	2	2	2	1	1	N = 25

c) Nhận xét:

- Có 25 giá trị trong đó có 9 giá trị khác nhau (tuổi nghề từ 1; 2; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10 năm).
- Tuổi nghề thấp nhất là 1 (năm).
- Tuổi nghề cao nhất là 10 (năm).
- Giá trị có tần số lớn nhất: 2.
- Chưa kết luận được tuổi nghề của số đông công nhân "chụm" vào một khoảng nào.

2B. Tương tự **2A.**

a) Dấu hiệu: Thời gian giải một bài toán của một số học sinh lớp 7.

b) Bảng "tần số"

Thời gian giải toán (x)	4	5	6	7	8	9	10	11	
Tần số (n)	3	1	2	2	4	5	7	1	N = 25

c) Nhận xét:

- Có 25 giá trị trong đó có 8 giá trị khác nhau (thời gian giải từ 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11 (phút).
- Thời gian giải toán nhanh nhất là 4 (phút).

- Thời gian giải toán chậm nhất là 11 (phút).
- Giá trị có tần số lớn nhất: 7.
- Số học sinh giải toán từ 8 đến 10 phút chiếm tỉ lệ cao.

3A. a) Dấu hiệu: Số điểm số đạt được của mỗi lần bắn. Cung thủ đã bắn 27 phát

b) Bảng tần số:

Điểm số (x)	7	8	9	10	
Tần số (n)	4	10	8	5	N = 27

c) Nhận xét:
- Điểm thấp nhất là: 7.
- Điểm cao nhất là: 10.
- Số điểm 8 và 9 chiếm tỉ lệ cao.

3B. Tương tự **3A.**

a) Dấu hiệu ở đây là: Số điểm đạt được mỗi lần chạy về đích. Vận động viên chạy về đích 30 lần

b) Bảng tần số:

Điểm số (x)	1	2	3	4	5	6	
Tần số (n)	10	4	3	6	3	4	N = 30

c) Nhận xét:
- Điểm tháp nhất: 1.
- Điểm cao nhất: 6.
- Số điểm 1 và 4 chiếm tỉ lệ cao.

4. a) Dấu hiệu: Môn học yêu thích nhất của các bạn lớp 7 A.

b) Bảng tần số:

Số thứ tự	Môn học yêu thích nhất	Tần số (n)
1	Toán học	8
2	Văn học	5
3	Tiếng Anh	7
4	Vật lí	3
5	Sinh học	4

6	Lịch sử	1
7	Địa lí	2
		N = 30

Nhận xét: Có 7 môn được các bạn lớp 7A chọn là môn yêu thích nhất. Có nhiều bạn yêu thích môn Toán nhất. Có ít bạn yêu thích môn Lịch sử và Địa lí nhất.

5. a) Dấu hiệu cần tìm hiểu là: Điểm thi học kì I môn Toán của học sinh lớp 7C. Dấu hiệu có tất cả 32 giá trị.

b) Bảng tần số:

Giá trị (x)	4	5,5	6	6,5	7	7,5	8	9	9,5	10
Tần số (n)	3	2 1	6	4	3	5	3	2	3	1

c) Nhận xét: Điểm số từ 4 đến 10. Số bạn được 6 điểm chiếm tỉ lệ nhiều nhất. Số bạn được 10 điểm chiếm tỉ lệ ít nhất.

6. a) Dấu hiệu cần tìm hiểu là: Số suất cơm từ thiện cho người vô gia cư khu phố cổ Hà Nội. Dấu hiệu có tất cả 7 giá trị.

b) Bảng tần số:

Giá trị (x)	30	35	38	40
Tần số (n)	2	3	1	1

c) Nhận xét: số suất ăn nhóm từ thiện đưa đến người vô gia cư trong 1 ngày từ 30 suất đến 40 suất. Số ngày phát được 35 suất ăn chiếm tỉ lệ cao nhất.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Phần 3. BIỂU ĐỒ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Người ta thường dùng biểu đồ để biểu diễn một hình ảnh cụ thể về giá trị của dấu hiệu và tần số.

Thường có các dạng biểu đồ sau:

1. Biểu đồ đoạn thẳng

- Dựng hệ trục tọa độ, trục hoành biểu diễn các giá trị x, trục tung biểu diễn tần số n.
- Xác định các điểm có tọa độ là cặp số gồm giá trị và tần số của nó (giá trị viết trước, tần số viết sau).
- Nối mỗi điểm đó với điểm trên trục hoành có cùng hoành độ.

2. Biểu đồ hình chữ nhật

Các đoạn thẳng trong biểu đồ đoạn thẳng được thay bằng hình chữ nhật.

3. Biểu đồ hình quạt

Là một hình tròn được chia thành các hình quạt mà góc ở tâm của các hình quạt tỉ lệ với tần suất.

(Tần suất f của một giá trị được tính theo công thức: $f=\frac{n}{N}$ trong đó N là số các giá trị, n là tần số của một giá trị, f là tần suất của giá trị đó. Người ta thường biểu diễn tần suất dưới dạng tỉ số phần trăm).

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Dựng biểu đồ đoạn thẳng, hình chữ nhật.

Phương pháp giải: Để dựng biểu đồ đoạn thẳng ta thường thực hiện như sau:

Lập bảng "tần số" từ bảng số liệu thống kê ban đầu hoặc bảng ghi dãy số biến thiên theo thời gian;
- Dựng các trục tọa độ: trục hoành biểu diễn các giá trị x, trục tung biểu diễn tần số n;
- Vẽ các điểm có tọa độ đã cho trong bảng;
- Vẽ các đoạn thẳng nối mỗi điểm đó với các điểm trên trục hoành có cùng hoành độ.

Để vẽ biểu đồ hình chữ nhật ta thay các đoạn thẳng trong biểu đồ đoạn thẳng bằng hình chữ nhật

1A. Điểm kiểm tra 1 tiết môn Toán của 10 bạn như sau:

5	4	8	6	6	8	7	10	9	6

Lập bảng "tần số" rồi biểu diễn bằng biểu đồ đoạn thẳng

1B. Số con trong 1 gia đình của 10 hộ trong tổ dân phố như sau:

2	2	1	1	3	4	2	1	1	1

Lập bảng "tần số" rồi biểu diễn bằng biểu đồ đoạn thẳng

2A. Năm 2017, dân số của năm nước đông dân hàng đầu thế giới gồm: Trung Quốc: 1380 triệu người; Ấn Độ: 1340 triệu người; Mỹ: 326 triệu người; Indonesia: 263 triệu người; Braxin: 211 triệu người. Hãy vẽ biểu đồ hình chữ nhật biểu thị dân số các nước trên.

2B. Dân số Việt Nam qua tổng điều tra trong thế kỉ XX là:

Năm 1921: 16 triệu người; năm 1960: 30 triệu người; năm 1980: 54 triệu người; năm 1990: 66 triệu người; năm 1999: 76 triệu người. Hãy vẽ biểu đồ hình chữ nhật biểu thị dân số Việt Nam qua các năm trên.

3A. Học sinh khối 7 một trường gồm 200 bạn được phân loại học lực như sau: 20 bạn xếp loại giỏi; 60 bạn xếp loại khá; 90 bạn xếp loại trung bình; 30 bạn xếp loại yếu. Hãy lập bảng tần số, tính tần suất và vẽ biểu đồ hình quạt biểu diễn học lực của học sinh

3B. Khảo sát việc sử dụng các phương tiện đến trường của 200 học sinh khối 7 của một trường được kết quả như sau: Đi bộ: 90 bạn, xe đạp: 50 bạn, xe máy: 40 bạn, Ô tô: 20 bạn. Hãy lập bảng tần số tính tần suất và vẽ biểu đồ hình quạt biểu diễn tỉ lệ các phương tiện được sử dụng đến trường học.

Dạng 2. Đọc biểu đồ đơn giản

Phương pháp giải:

Khi đọc biểu đồ cần trả lời các câu hỏi sau:

+ Biểu đồ biểu diễn cái gì?

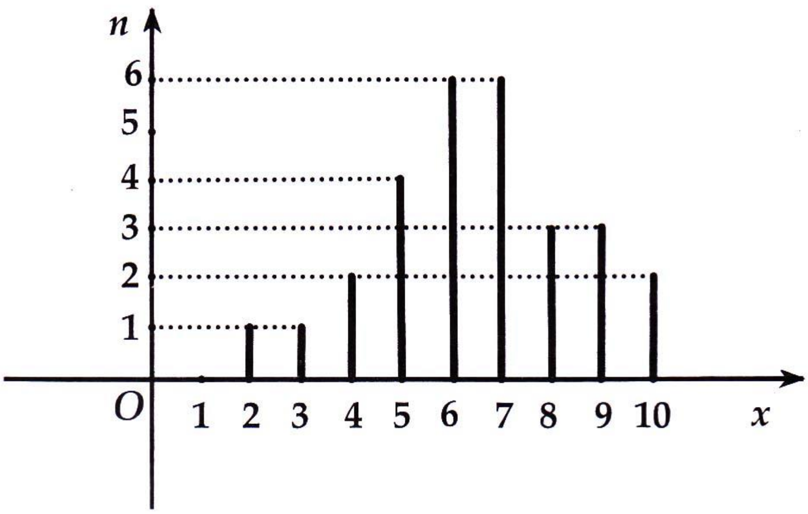
+ Từng trục biểu diễn cho đại lượng nào?

+ Sự biến thiên của từng giá trị như thế nào?

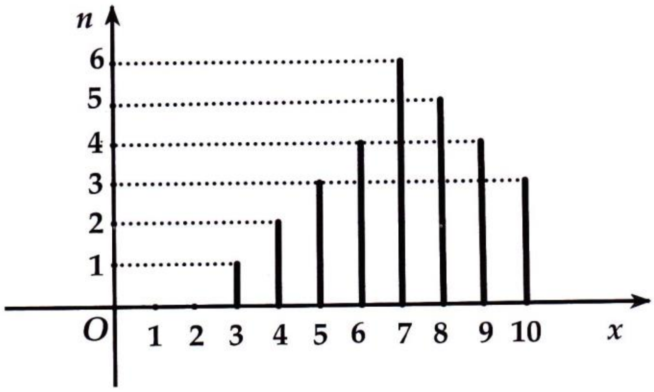
- Đối với biểu đồ biểu diễn, trực tiếp mối quan hệ giữa giá trị của dấu hiệu và tần số thì tập trung nhận xét về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất, giá trị có tần số lớn nhất, nhóm giá trị có tần số tương đối lớn...

- Đối với biểu đổ biểu diễn sự thay đổi giá trị theo thời gian thì nhận xét thêm về sự tăng giảm trên toàn bộ thời gian hoặc theo từng giai đoạn.

4A. Biểu đồ biểu diễn kết quả học tập bài kiểm tra của học sinh lớp 7A như hình vẽ. Hãy lập bảng tần số từ biểu đồ này và rút ra nhận xét



4B. Biểu đồ biểu diễn kết quả học tập bài kiểm tra của học sinh lớp 7B như hình vẽ. Hãy lập bảng tần số từ biểu đồ này và rút ra nhận xét



III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

5. Nhiệt độ trung bình hàng tháng trong một năm của một địa phương được ghi lại trong bảng sau:

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nhiệt độ	20	21	25	30	32	33	32	27	25	20	20	17

Lập bảng "tần số" rồi biểu diễn bằng biểu đồ đoạn thẳng.

6. Số cơn bão trong 1 năm đổ bộ vào lãnh thổ Việt Nam trong 20 năm cuối cùng của thế kỉ XX được ghi lại trong bảng sau:

3	3	6	6	3	5	4	3	9	8
2	4	3	4	3	4	3	5	2	2

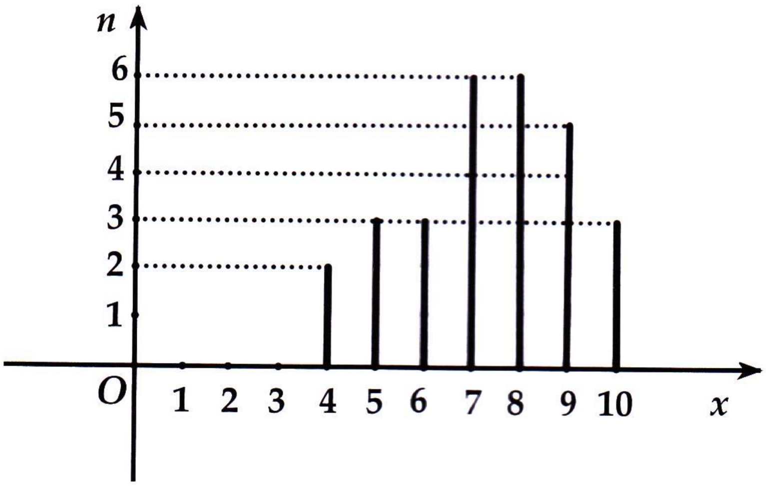
a) Dấu hiệu ở đây là gì?

b) Lập bảng "tần số" .

c) Biểu diễn bằng biểu đồ đoạn thẳng và rút ra nhận xét.

7. Lớp 7A có 40 bạn, tổng kết học kì I có 8 bạn xếp loại giỏi 20 bạn xếp loại khá, 10 bạn xếp loại trung bình và 2 bạn xếp loại yếu. Hãy lập bảng tần số tính tần suất và vẽ biểu đồ hình quạt biểu diễn học lực của học sinh

8. Biểu đồ biểu diễn kết quả học tập bài kiểm tra của học sinh lớp 7C như hình vẽ. Hãy lập bảng "tần số" từ biểu đồ này và rút ra nhận xét

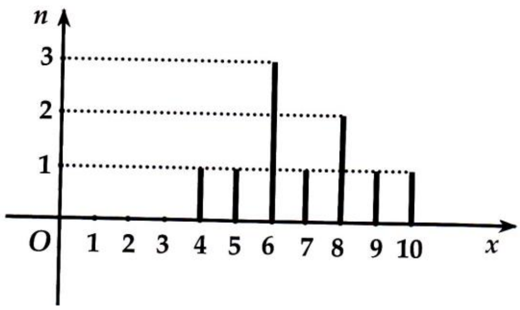


HƯỚNG DẪN

1A. Ta có bảng "tần số" như sau:

Điểm (x)	4	5	6	7	8	9	10	
Tần số (n)	1	1	3	1	2	1	1	N = 10

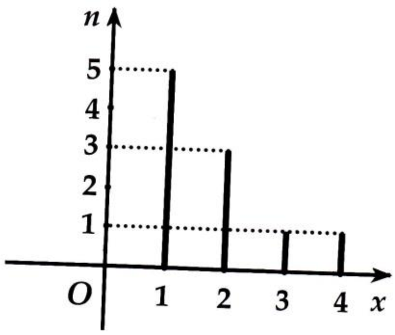
Biểu đồ đoạn thẳng:



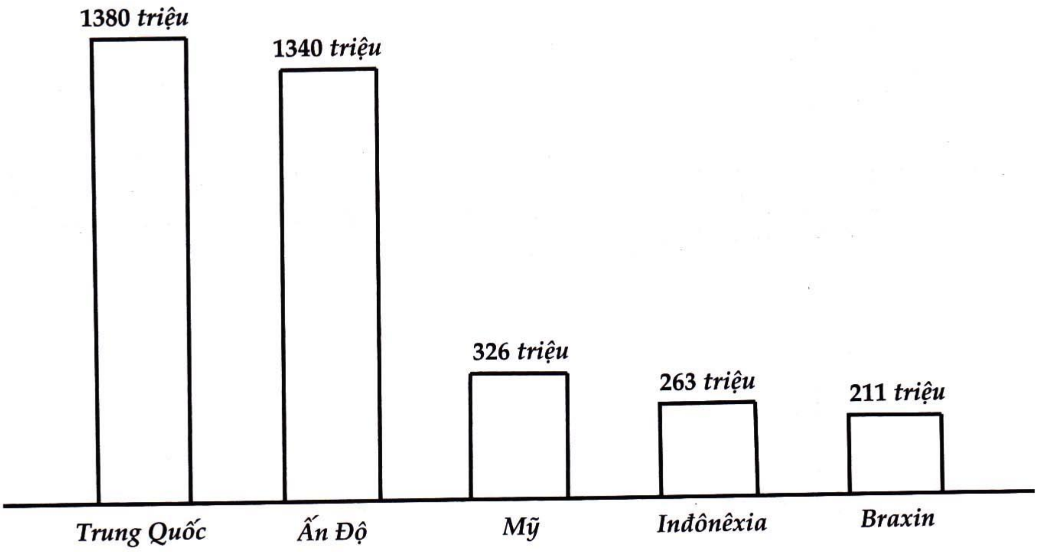
1B. Tương tự **1A.** Ta có bảng "tần số" như sau

Số con (x)	1	2	3	4	
Tần số (n)	5	3	1	1	N = 10

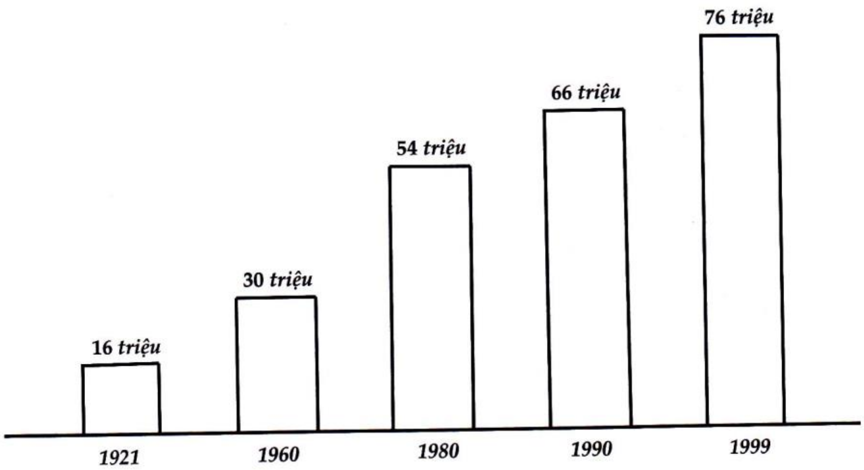
Biểu đồ đoạn thẳng:



2A. Biểu đồ hình chữ nhật biểu thị dân số các nước:



2B. Tương tự **2A**. Biểu đồ hình chữ nhật biểu thị dân số Việt Nam qua các năm:

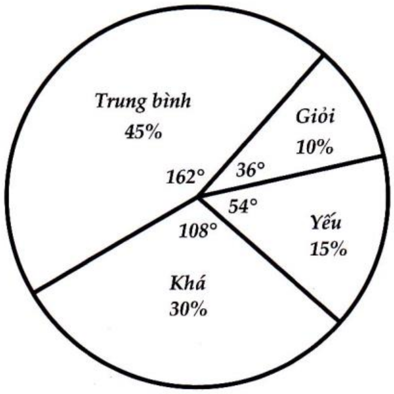


3A. Ta có bảng "tần số" như sau:

Học lực	Giỏi	Khá	Trung bình	Yếu	
Tần số (n)	20	60	90	30	N = 200
Tần suất (f)	10%	30%	45%	15%	100%

Ta có 10% ứng với góc ở tâm là 3,6° x 10 = 36°; 15% ứng với góc ở tâm 3,6°x 15 = 54°; 30% ứng với góc ở tâm 3, 6° x 30 = 108°; 45% ứng với góc ở tâm 3, 6° x 45 = 162°.

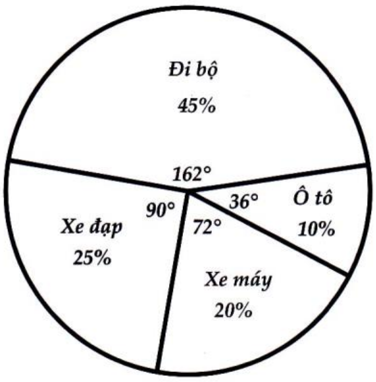
Ta có biểu đồ như hình vẽ sau



3B. Tương tự **3A**. Ta có bảng "tần số" như sau:

Phương tiện đến trường	Đi bộ	Xe đạp	Xe máy	Ôtô	
Tần số (n)	90	50	40	20	N = 200
Tần suất (f)	45%	25%	20%	10%	100%

Ta có biểu đồ như hình vẽ sau:



4A. Ta có bảng "tần số" như sau:

Điểm (x)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Tần số (n)	1	1	2	4	6	6	3	3	2	N = 28

Nhận xét: Có tất cả 28 bài kiểm tra. Kết quả học tập của lớp ở mức khá. Không có bạn nào bị 1 điểm. Điểm thấp nhất là 2, có 1bạn được 2 điểm. Điểm cao nhất là 10 có 1 bạn được 10 điểm.

Có 4 bạn bị điểm dưới trung bình. Tỉ lệ đạt điêm 6 và 7 khá cao.

Tỉ lệ điểm từ 7 trở lên đạt $\frac{14}{28} = 50\%$.

4B. Tương tự **4A**. Ta có bảng "tần số" như sau:

Điểm (x)	3	4	5	6	7	8	9	10	

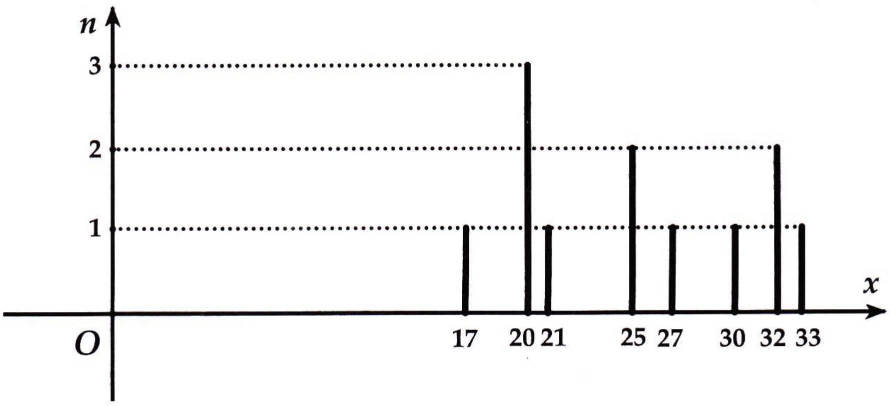
Tần số (n)	1	2	3	4	6	5	4	3	N = 28

Nhận xét: Học sinh tự làm.

5. Tương tự **1A**. Ta có bảng "tần số" như sau:

Nhiệt độ	17	20	21	25	27	30	32	33	
Tần số (n)	1	3	1	2	1	1	2	1	N = 12

Biểu đồ đoạn thẳng:

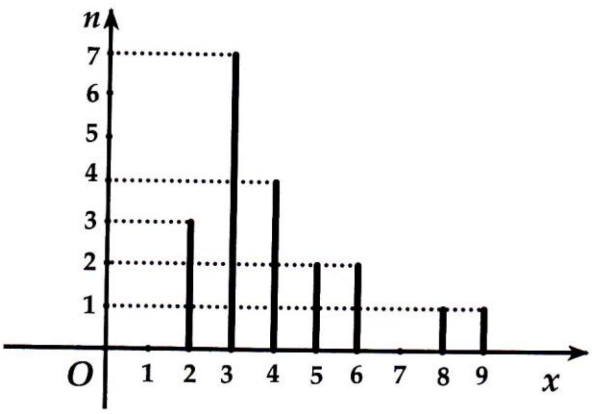


6. a) Dấu hiệu ở đây là ; Số cơn bão trong 1 năm đổ bộ vào lãnh thổ Việt Nam trong 20 năm cuối cùng của thế kỉ XX

b) Ta có bảng "tần số"

Số cơn bão trong 1 năm	2	3	4	5	6	8	9	
Tần số (n)	3	7	4	2	2	1	1	N = 20

c) Ta có bảng biểu đồ đoạn thẳng như sau:



Nhận xét: Trong 20 năm trên, số cơn bão trong 1 năm là từ 2 đến 9 cơn bão. Đa số các năm số cơn bão trong năm từ 2 đến 4. Có 7 năm có 3 cơn bão trong năm, số cơn bão trong năm là 8 và 9 chiếm tỉ lệ ít nhất (1 năm có 8 cơn bão và 1 năm có 9 cơn bão).

7. Tương tự **3A.** Học sinh tự làm.

8. Tương tự **4A**. Ta có bảng "tần số" như sau:

Điểm (x)	4	5	6	7	8	9	10	
Tần số (n)	2	3	3	6	6	5	3	N = 28

Nhận xét: Có tất cả 28 bài kiểm tra. Kết quả học tập của lớp ở mức khá, Không có bạn nào bị dưới 4 điểm. Điểm thấp nhất là 4, có 1 bạn được 4 điểm. Điểm cao nhất là 10 có 3 bạn được 10 điểm. Có 2 bạn bị điểm dưới trung bình. Tỉ lệ đạt điểm 7, 8, 9 khá cao. Tỉ lệ điểm từ 7 trở lên đạt $\frac{20}{28} \approx 71{,}43\%$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Phần 4. SỐ TRUNG BÌNH CỘNG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Số trung bình cộng của dấu hiệu

Dựa vào bảng "tần số" ta có thể tính được số trung bình cộng của một số (kí hiệu $\overline{X}$) như sau:

+ Nhân từng giá trị với tần số tương ứng;

+ Cộng tất cả các tích vừa tìm được;

+ Chia tổng đó cho số các giá trị (tổng các tần số).

Công thức tính:

$$\overline{X} = \frac{x_1n_1 + x_2n_2 + x_3n_3 + \ldots + x_kn_k}{N}$$

trong đó: $x_1, x_2, x_3, \ldots x_k$ là k giá trị khác nhau của dấu hiệu X.

$n_1, n_2, n_3, \ldots n_k$ là tần số tương ứng, N là số các giá trị.

2. Ý nghĩa của số trung bình cộng

- Số trung bình cộng dùng làm "đại diện" cho dấu hiệu, đặc biệt là khi muốn so sánh các dấu hiệu cùng loại.

- Khi các giá trị của dấu hiệu, có khoảng cách chênh lệch rất lớn đối với nhau, thì không nên lấy số trung bình cộng làm "đại diện" cho dấu hiệu đó.

- Số trung bình cộng có thể không thuộc dãy giá trị dấu hiệu.

3. Mốt của dấu hiệu

- Mốt của dấu hiệu là giá trị có tần số lớn nhất trong bảng "tần số". Kí hiệu M_0.

- Có những dấu hiệu có hai mốt hoặc nhiều hơn.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính số trung bình cộng của dấu hiệu.

Phương pháp giải: Để tính số trung bình cộng của dấu hiệu, ta căn cứ vào bảng "tần số", sử dụng công thức:

$$\overline{X} = \frac{x_1n_1 + x_2n_2 + x_3n_3 + \ldots + x_kn_k}{N}$$

Lưu ý: *Không nên dùng số trung bình cộng làm "đại điện" cho dấu hiệu khi giá trị của dấu hiệu có khoảng cách chênh lệch lớn*

1A. Điểm thi các môn học kì I của bạn An như sau:

Toán	10	Lịch sử	7
Văn	7	Địa lí	6
Anh	9	Công dân	8
Vật lí	8	Công nghệ	9
Sinh học	9	Tin học	10

a) Dấu hiệu ở đây là gì?

b) Lập bảng "tần số" các giá trị khác nhau của dấu hiệu.

c) Tính điểm trung bình học kì I của bạn An.

1B. Cân nặng của 10 bạn trong tổ I lớp 7A như sau:

Tên	Cân nặng (kg)	Tên	Cân nặng (kg)
An	30	Dũng	27
Vân	28	Lê	30
Hồng	25	Hiếu	35
Huệ	35	Mai	28
Tuấn	27	Ngọc	27

a) Dấu hiệu ở đây là gì? Có bao nhiêu giá trị của dấu hiệu?

b) Lập bảng "tần số" các giá trị khác nhau của dấu hiệu.

c) Tính cân nặng trung bình 10 bạn tổ I.

2A. Quan sát bảng "tần số" dưới đây và tính số trung bình cộng. Cho biết có nên dùng số trung bình cộng làm "đại diện" cho dấu hiệu không? Vì sao

Giá trị (x)	1	2	3	4	60	70	
Tần số (n)	3	1	3	4	3	1	N = 15

2B. Quan sát bảng "tần số" dưới đây và số tính trung bình cộng. Cho biết có nên dùng số trung bình cộng làm "đại diện" cho dấu hiệu không? Vì sao?

Giá trị (x)	1	2	3	4	90	70	
Tần số (n)	3	1	2	4	2	3	N = 15

3A. Đo chiều cao của 30 học sinh lớp 7 được kết quả theo bảng dưới đây (đơn vị cm):

Chiều cao (sắp xếp theo khoảng)	Tần số (n)
105	3
110-120	7
121-131	5
132-142	6
143-153	7
155	2
	N= 30

a) Bảng này có gì khác so với những bảng tần số đã biết ?

b) Tính số trung bình cộng trong những trường hợp này

3B. Cân nặng của một nhóm học sinh, thu được kết quả trong bảng sau (đơn vị: kg):

Cân nặng (sắp xếp theo khoảng)	Tần số (n)
28	2
31 - 35	8
36 - 40	5
41 - 45	7
46 - 50	5
53	3
	N= 30

Bảng này có gì khác so với những bảng tần số đã biết?

Tính số trung bình cộng trong những trường hợp này

4A. Trung bình cộng của sáu số là 20. Do thêm số thứ bảy nên trung bình cộng của bảy số là 25. Tìm số thứ bảy.

4B. Trung bình cộng của bốn số là 15. Do thêm số thứ năm nên trung bình cộng của năm số là 18. Tìm số thứ năm

Dạng 2. Mốt của dấu hiệu

Phương pháp giải: Để tìm mốt của dấu hiệu ta dựa vào bảng bảng "tần số". Mốt của dấu hiệu là giá trị có tần số lớn nhất trong bảng.

5A. Theo dõi thời gian làm một bài toán bài của 30 học sinh, thầy giáo lập được bảng như sau (tính bằng phút):

Thời gian (x)	3	4	5	6	7	8	9	10	
Tần số (n)	1	3	3	6	8	5	3	1	N = 30

a) Thời gian trung bình để học sinh làm xong một bài toán là bao lâu?

b) Tìm mốt của dấu hiệu

5B. Số cơn bão trong 1 năm đổ bộ vào lãnh thổ Việt Nam trong 20 năm. Cuối cùng của thế kỉ XX được ghi lại trong bảng sau:

Số cơn bão	2	3	4	5	6	8	9	
Tần số (n)	3	7	4	2	2	1	1	N = 20

a) Số cơn bão trung bình trong 1 năm là bao nhiêu?

b) Tìm mốt của dấu hiệu.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

6. Khối lượng của 20 gói kẹo (tính theo gam) được ghi lại trong bảng như sau:

200	198	199	199	201	202	199	198	200	200
198	199	200	200	199	200	201	201	200	199

a) Dấu hiệu ở đây là gì?

b) Lập bảng "tần số" các giá trị khác nhau của dấu hiệu.

c) Tính khối lượng trung bình của mỗi gói kẹo.

7. Điều tra về số tiền điện phải trả hàng tháng của mỗi gia đình trong một khu phố (đơn vị: nghìn đồng/ tháng), người ta ghi được bảng tần số ghép lớp sau đây

Lớp	Tần số (n)
100 - 190	15
200 - 290	25
300 - 390	28

400 - 490	35
500 - 590	20
600 - 690	20
700 - 790	7
	N = 150

a) Dấu hiệu ở đây là gì

b) Tính tiền điện trung bình hàng tháng của mỗi gia đình

8. Điều tra số con của một gia đình trong 60 gia đình của khu vực dân cư người ta thu được kết quả trong bảng sau:

Số con (x)	1	2	3	4	5	6	
Tần số (n)	15	18	14	7	4	2	N = 60

a) Dấu hiệu ở đây là gì

b) Tính số con trung bình của mỗi gia đình

c) Tìm mốt của dấu hiệu

9. Trung bình cộng của năm số là 28. Do thêm số thứ sáu nên trung bình cộng của sáu số là 32. Tìm số thứ sáu.

HƯỚNG DẪN

1A. a) Dấu hiệu ở đây là: Điểm thi các môn học kì I của bạn An.

b) Ta có bảng "tần số" như sau:

Điểm thi	6	7	8	9	10	
Tần số (n)	1	2	2	3	2	N = 10

c) Điểm trung bình học kì I của bạn An là:

$$\overline{X} = \frac{6.1 + 7.2 + 8.2 + 9.3 + 10.2}{10} = 8,3$$

1B. a) Dấu hiệu ở đây là: Cân nặng của 10 bạn trong tổ 1 lớp 7A.

b) Ta có bảng "tần số" như sau:

Cân nặng	25	27	28	30	35	
Tần số (n)	1	3	2	2	2	N = 10

c) Cân nặng trung bình 10 bạn tổ I trên là:

$$\overline{X} = \frac{25.1+27.3+28.2+30.2+35.2}{10} = 29,2(kg)$$

2A. Số trung bình cộng là:

$$\overline{X} = \frac{1.3+2.1+3.3+4.4+60.3+70.1}{15} = 18,76$$

Không nên dùng trung bình cộng làm đại diện cho dấu hiệu vì các giá trị có khoảng chênh lệnh lớn.

2B. Tương tự **1A.** Số trung bình cộng là:

$$\overline{X} = \frac{1.3+2.1+3.3+4.4+90.2+70.3}{15} = 28$$

Không nên dùng trung bình cộng làm đại diện cho dấu hiệu vì các giá trị có khoảng chênh lệnh lớn.

3A. a) Bảng cho giá trị của dấu hiệu dưới dạng khoảng.

b) Trước hết ta tính só trung bình cộng của từng khoảng. Số đó chính là trung bình cộng của các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của khoảng. Ví dụ: trung bình cộng của khoảng 110 - 120 là 115.

- Nhân các số trung bình vừa tìm được với các tần số tương ứng.

- Thực hiện tiếp các bước theo quy tắc đã học.

Để tiện việc tính toán ta kẻ thêm vào cột chiều cao là cột số trung bình cộng của từng lớp; sau cột tần số là cột tích giữa trung bình cộng

.

Chiều cao	Trung bình cộng của mỗi lớp	Tần số	Tích của trung bình cộng mỗi lớp với tần số
105	105	3	315
110 - 120	115	7	805
121 - 131	126	5	630
132 - 142	137	6	822
143 - 153	148	7	1036
155	155	2	310
		N = 30	3918

Số trung bình cộng là: $\overline{X} = \frac{3918}{30}$ = 130,6 (cm).

3B. Tương tự **3A.**

Ta tính được số trung bình cộng là: $\overline{X}$ = 40,33 (kg).

4A. Gọi các số là x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6; x_7.

Trung bình cộng sáu số là: $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6}{6} = 20$

nên ta có: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 120$. Trung bình cộng bảy số là $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7}{7} = 25$ suy ra:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 175$. Từ đó tìm được $x_7 = 55$.

4B. Tương tự **4A**. Ta tìm được $x_5 = 30$

5A. a) Thời gian trung bình để học sinh làm xong một bài toán là: X -

$\overline{X} = \frac{3.1+4.3+5.3+6.6+7.8+8.5+9.3+10.1}{30}$ = 6,63 (phút).

b) Mốt của dấu hiệu là $M_0 = 7$.

5B. Tương tự **5A.**

a) Số cơn bão trung bình trong 1 năm là:

$\overline{X} = \frac{2.3+3.7+4.4+5.2+6.2+8.1+9.1}{20}$ = 4,1 (con bão/năm).

b) Mốt của dấu hiệu là $M_0 = 3$.

6. Tương tự **1A.**

a) Dấu hiệu là: Khối lượng của 20 gói kẹo.

b) Ta có bảng "tần số" như sau:

Khối lượng (x)	198	199	200	201	202	
Tần số (n)	3	6	7	3	1	N= 20

c) Khối lượng trung bình mỗi gói kẹo là: $\overline{X}$ = 199,65 (gam).

7. a) Dấu hiệu ở đây là: Số tiền điện phải trả hàng tháng của mỗi gia đình.

b) Tiền điện trung bình mỗi gia đình là: $\overline{X}$ = 417 (nghìn).

8. a) Dấu hiệu ở đây là: Số con của một gia đình.

b) Số con trung bình của mỗi gia đình là: $\overline{X}$ = 2,55 (con).

c) Mốt của dấu hiệu là $M_0 = 2$.

9. Tương tự **4A**. Ta tìm được $x_6 = 52$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ÔN TẬP CHUYÊN ĐỀ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Xem lại phần *Tóm tắt lý thuyết* từ Bài 1 đến Bài. 4.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

1A. Tổng số điểm thi học kì I ba môn thi Toán, Văn, Tiếng Anh của 10 bạn học sinh giỏi nhất lớp 7A như sau:

30	27	28	28	27	29	28	29	28	29

a) Dấu hiệu cần tìm hiểu ở đây là gì?

b) Dấu hiệu có tất cả bao nhiêu giá trị?

c) Tính số các giá trị khác nhau của dấu hiệu

d) Lập bảng "tần số".

e) Tính số trung bình cộng của dấu hiệu.

f) Tìm mốt của dấu hiệu.

1B. Tổng số điểm thi học kì I ba thi môn Toán, Văn, Tiếng Anh của 10 bạn học sinh giỏi nhất lớp 7B như sau:

28	29	27	28	26	26	28	27	28	29

a) Dấu hiệu cần tìm hiểu ở đây là gì?
b) Dấu hiệu có tất cả bao nhiêu giá trị?
c) Tính số các giá trị khác nhau của dấu hiệu.
d) Lập bảng "tần số".
e) Tính số trung bình cộng của dấu hiệu.
f) Tìm mốt của dấu hiệu.

2A. Tính trung bình cộng của năm gói hàng trong đó có hai gói khối lượng 2,7kg, một gói có khối lượng 2,4kg và hai gói khối lượng 2,5kg.

2B. Tính trung bình cộng của năm quả dưa hấu trong đó có hai quả khối lượng 2,8 kg, một quả có khối lượng 3kg và hai quả có khối lượng 3,5 kg.

3A. Sản lượng lúa của Đồng bằng sông Cửu Long một số năm, từ năm 2011 đến năm 2015 (tính theo triệu tấn) được cho trong bảng sau:

Năm	2011	2012	2013	2014	2015
Sản lượng lúa	23,27	24,32	25	25,25	25,6

a) Dấu hiệu ở đây là gì?

b) Năm 2014 sản lượng lúa của Đồng bằng sông Cửu Long là bao nhiêu?

c) Biểu diễn bằng biểu đồ hình chữ nhật.

d) Nhận xét về sản lượng lúa của Đồng Bằng sông Cửu Long trong thời gian từ 2011 đến 2015.

e) Tính sản lượng lúa trung bình trong thời gian từ năm 2011 đến năm 2015.

3B. Diện tích trồng lúa của Việt Nam từ năm 2011 đến năm 2015 (tính theo triệu ha) được cho trong bảng sau:

Năm	2011	2012	2013	2014	2015
Diện tích lúa	7,66	7,76	7,9	7,82	7,83

a) Dấu hiệu ở đây là gì?

b) Năm 2014 diện tích trồng lúa của Việt Nam là bao nhiêu?

c) Biểu diễn bằng biểu đồ hình chữ nhật.

d) Nhận xét về diện tích trồng lúa của Việt Nam trong thời gian từ 2011 đến 2015.

e) Tính diện tích trồng lúa trung bình trong thời gian từ năm 2011 đến năm 2015.

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

4. Tổng số điểm thi học kì I ba thi môn Toán, Văn, Tiếng Anh của 10 bạn học sinh giỏi nhất lớp 7C như sau:

26	27	27	28	26	29	28	27	28	27

a) Dấu hiệu cần tìm hiểu ở đây là gì?

b) Dấu hiệu có tất cả bao nhiêu giá trị.

c) Tính số các giá trị khác nhau của dấu hiệu.

d) Lập bảng "tần số".

e) Tính số trung bình cộng của dấu hiệu.

f) Tìm mốt của dấu hiệu.

5. Hàng ngày, bạn Dũng thử ghi lại thời gian cần thiết để đi xe đạp từ nhà đến trường và thực hiện điều đó trong 15 ngày. Kết quả thu được ở bảng sau thời gian tính theo phút?

Thời gian (x)	25	26	27	28	29	
Tần số (n)	2	4	16	2	1	N = 15

a) Dấu hiệu bạn Dũng quan tâm là gì?

b) Tính thời gian trung bình Dũng đi từ nhà đến trường.

c) Tìm một của dấu hiệu.

6. Một cửa hàng bán giày ghi lại số giày đã bán cho nam giới trong một tháng theo các cỡ khác nháu như sau:

Cỡ giày (x)	38	39	40	41	42	43	
Số giày bán(n)	7	16	28	36	15	8	N = 110

a) Dấu hiệu ở đây là gì?

b) Số nào có thể là "đại diện" cho dấu hiệu? Vì sao?

c) Có thể rút ra nhận xét gì?

7. Cho bảng "tần số" các giá trị của dấu hiệu $M_0 = 2$.

Giá trị(x)	x_1	x_2	x_3	….	x_n
Tần số (n)	n_1	n_2	n_3	….	n_k

a) Tính số trung bình cộng.

b) Nếu mỗi giá trị của dấu hiệu đều tăng lên 2 lần thì số trung bình cộng thay đổi thế nào?

c) Nếu mỗi giá trị của dấu hiệu giảm đi 5 lần thì số trung bình cộng thay đổi thế nào?

HƯỚNG DẪN

1A. a) Dấu hiệu: Tổng số điểm thi học kì I ba thi môn Toán, Văn, Tiếng Anh của 10 bạn học sinh giỏi nhất lớp 7A.

b) Dấu hiệu có tất cả 10 giá trị.

c) Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu là 4.

d) Ta có bảng "tần số" như sau:

Tổng điểm	27	28	29	30	
Tần số (n)	2	4	3	1	N = 10

e) Điểm trung bình: $\overline{X} = 28,3$.

f) Mốt của dấu hiệu là $M_0 = 28$.

1B. Tương tự **2A.**

a) Dấu hiệu: Tổng số điểm thi học kì I ba thi môn Toán, Văn, Tiếng Anh của 10 bạn học sinh giỏi nhất lớp 7B.

b) Dấu hiệu có tất cả 10 giá trị.

c) Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu là 4.

d) Ta có bảng "tần số" như sau:

Tổng điểm (x)	26	27	28	29	

Tần số (n)	2	2	4	2	N = 10

e) Điểm trung bình: $\overline{X} = 27,6$.

f) Mốt của dấu hiệu là $M_0 = 28$.

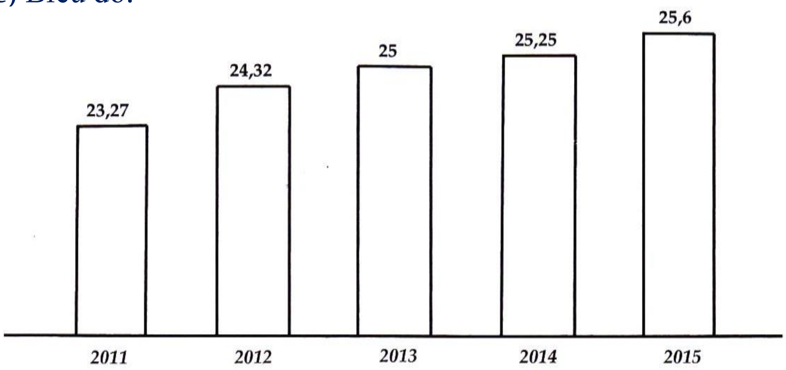
2A. Khối lượng trung bình: $\overline{X} = \dfrac{2,7.2 + 2,4.1 + 2,5.2}{5} = 2,56$ (kg)

2B. Tương tự **2A.** Khối lượng trung bình: $\overline{X} = 3,12$ (kg).

3A. a) Dấu hiệu ở đây là: Sản lượng lúa của Đồng bằng sông Cửu Long từ năm 2011 đến năm 2015.

b) Năm 2014 sản lượng lúa của Đồng bằng sông Cửu Long là 25,25 triệu tấn.

c) Biểu đồ:



d) Sản lượng lúa của Đồng Bằng sông Cửu Long từ 2011 đến 2015 liên tục tăng. Từ năm 2011 đến 2012 tăng mạnh (1,05 triệu tấn), các năm về sau tăng chậm hơn, năm sau cao hơn năm trước khoảng 0,25 - 0,68 triệu, tấn)

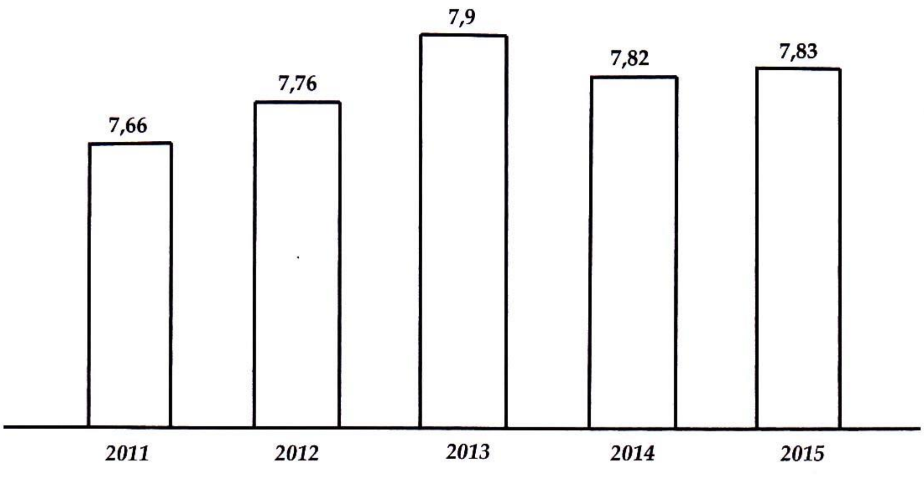
$\overline{X} = \dfrac{23,27 + 24,32 + 25 + 25,25 + 25,6}{5} = 24,688$ (triệu tấn).

3B. Tương tự **2A.**

a) Dấu hiệu ở đây là: Diện tích trồng lúa của Việt Nam từ năm 2011 đến năm 2015.

b) Năm 2014 diện tích trồng lúa Việt Nam là 7,82 triệu ha.

c) Biểu đồ



d) Diện tích trồng lúa của Việt Nam từ 2011 đến 2015 tăng dần. Từ năm 2012 đến 2013 tăng mạnh nhất (0,14 triệu ha), từ năm 2013 đến năm 2014 bị giảm 0,08 triệu ha, sau đó lại tăng thêm 0,01 triệu ha vào năm 2015.

$$\overline{X} = \frac{7,66+7,76+7,9+7,82+7,83}{5} = 7,794 \text{ triệu ha.}$$

4. a.) Dấu hiệu: Tổng số điểm thi học kì I ba thi môn Toán, Văn, Tiếng Anh của 10 bạn học sinh giỏi nhất lớp 7C.

b) Dấu hiệu có tất cả 10 giá trị.

c) Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu là 4.

d) Ta có bảng "tần số" như sau:

Tổng điểm (x)	26	27	28	29	
Tần số (n)	2	4	3	1	N= 10

e) Điểm trung bình: $\overline{X} = 27,3$.

f) Mốt của dấu hiệu là $M_0 = 27$.

5. a) Dấu hiệu bạn Dũng quan tâm. là thời gian cần thiết để đi xe đạp từ nhà đến trường.

b) Thời gian trung bình để bạn Dũng đi từ nhà đến trường là

$$\overline{X} = \frac{25.2+26.4+27.6+28.2+29.1}{15} = 26,73 \text{ (phút).}$$

c) Mốt của dấu hiệu là $M_0 = 27$.

6. a) Dấu hiệu: Số giày đã bán cho nam giới trong một tháng theo các cỡ.

b) Mốt của dấu hiệu là: $M_0 = 41$ nên số 41 là đại diện cho dấu hiệu vì đó là điều cửa hàng quan tâm: cỡ giày nào bán được nhiều nhất.

c) Nhận xét: Cỡ giày phù hợp với nam giới là từ 38 đến 43, trong đó cỡ 41 phù hợp với nhiều nam giới nhất.

7. Ta có $\overline{X} = \dfrac{x_1n_1 + x_2n_2 + x_3n_3 + \ldots + x_kn_k}{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k}$

b) Nếu mỗi giá trị của dấu hiệu đều tăng lên 2 lần thì số trung bình cộng cũng tăng lên 2 lần.

c) Nếu mỗi giá trị của dấu hiệu giảm đi 5 lần thì số trung bình cộng cũng giảm đi 5 lần.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Chuyên đề 15.

BIỂU THỨC ĐẠI SỐ
GIÁ TRỊ CỦA MỘT BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

A. Kiến thức cần nhớ

1. Biểu thức mà trong đó ngoài các số, các ký hiệu phép tính cộng, trừ, nhân, chia, nâng lên lũy thừa còn có các chữ (đại diện cho các số) được gọi là biểu thức đại số.

2. Trong biểu thức đại số, các chữ có thể đại diện cho những số tùy ý nào đó. Những chữ như vậy gọi là biến số (gọi tắt là biến). Khi thực hiện các phép toán trên các biến, ta có thể áp dụng những tính chất, quy tắc phép toán như trên các số.

3. Để tính giá trị của một biểu thức đại số tại những giá trị cho trước của các biến, ta thay các giá trị cho trước đó vào biểu thức rồi thực hiện các phép tính.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Hãy viết các biểu thức đại số biểu thị:

a) Tổng của hai lần x và năm lần y bình phương;

b) Bình phương của hiệu x và y;

c) Tổng các lập phương của x và y;

d) Tích của hiệu a và b với tổng các bình phương của a và b.

✓ *Tìm cách giải:* Dựa vào quy ước: Trong một biểu thức, phép tính nào làm trước thì đọc sau, phép tính nào làm sau thì đọc trước.

Giải

a) $2x+5y^2$;

b) $(x-y)^2$;

c) x^3+y^3;

d) $(a-b)(a^2+b^2)$.

Ví dụ 2: Cho biểu thức $5x^2-4x+3$. Tính giá trị của biểu thức tại:

a) $x=-2$;

b) $x=0,5$;

c) $x=0$;

d) $x=\frac{2}{5}$.

✓ *Tìm cách giải:* Thay biến x trong biểu thức đại số trên bằng các số đã cho ta được các biểu thức số. Kết quả nhận được khi thực hiện các phép tính trong biểu thức số đó chính là giá trị của biểu thức đại số tại các giá trị cho trước của biến

Giải

a) Thay $x=-2$ vào biểu thức trên ta có:

$$5.(-2)^2-4.(-2)+3=5.4+8+3=31.$$

Vậy giá trị của biểu thức: $5x^2-4x+3$ tại $x=-2$ là 31.

b) Thay $x=0,5$ vào biểu thức trên ta có:

$$5.(0,5)^2-4(0,5)+3=5.(0,25)-2+3=2,25$$

Vậy giá trị của biểu thức: $5x^2-4x+3$ tại $x=0,5$ là 2,25

c) Thay $x=0$ vào biểu thức trên ta có:

$$5.0^2-4.0+3=3$$

Vậy giá trị của biểu thức: $5x^2-4x+3$ tại $x=0$ là 3.

d) Thay $x=\dfrac{2}{5}$ vào biểu thức trên, ta có:

$$5.\left(\frac{2}{5}\right)^2-4.\frac{2}{5}+3=\frac{4}{5}-\frac{8}{5}+3=\frac{11}{5}=2\frac{1}{5}$$

Vậy giá trị của biểu thức $5x^2-4x+3$ tại $x=\dfrac{2}{5}$ là $2\dfrac{1}{5}$.

Ví dụ 3:

a) Hãy viết biểu thức đại số P biểu thị: Hiệu diện tích hình tam giác đáy là a, đường cao h_a với diện tích hình chữ nhật có kích trước là b và c (a, h_a, b, c có cùng đơn vị đo).

Tính P biết $a=25cm;\ h_a=10cm;\ b=5cm;\ c=4cm$

b) Hình tròn có chu vi là C thì diện tích Q của $\dfrac{1}{4}$ hình tròn được biểu thị bằng công thức nào. Tính Q biết

$C=3,2m;\ \pi\approx 3,14$

Giải

a) $P=\dfrac{a.h_a}{2}b.c$

Thay $a=25cm;\ h_a=10cm;\ b=5cm;\ c=4cm$ ta được:

$$P=\frac{25.10}{2}-5.4=105\left(cm^2\right)$$

b) Ta biết nếu hình tròn bán kính là r, thì $C=2\pi r\Rightarrow r=\dfrac{C}{2\pi}$.

Diện tích hình tròn bán kính r được cho bởi công thức: $S=\pi r^2$

Do đó $Q=\dfrac{1}{4}\pi.\left(\dfrac{C}{2\pi}\right)^2=\dfrac{C^2}{16\pi}$.

Thay $C = 3,2m$ ta có: $Q = \dfrac{(3,2)^2}{16\pi} \approx 0,2\left(m^2\right)$.

Ví dụ 4: Tính giá trị của biểu thức $A = x^2 - 2xy + 3y^3$ tại:

a) $x = 2y = -4$

b) $x + y = 10$ và $3x = 2y$

c) $|x| = 0,5$ và $y = 4$

d) $5|x-2| + |y+3| = 0$.

✓ *Tìm cách giải:* Biểu thức A có hai biến x và y .

a) Đã cho biết giá trị của biến x ; suy ra y rồi thay giá trị của hai biến vào biểu thức A.

b) Từ quan hệ giữa hai biến $x + y = 5$. (1) và $3x = 2y$. (2) ta biểu diễn x theo y từ (1) rồi thay vào (2) để tìm giá trị của y. Từ đó tìm tiếp giá trị của x.

c) Lưu ý $|x| = 0,5 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0,5 \\ x = -0,5 \end{array}\right.$ nên phải xét cả hai cặp giá trị $(x = 0,5;\, y = 4)$ và $(x = -0,5;\, y = 4)$.

d) Lưu ý $|M| + |N| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} M = 0 \\ N = 0 \end{cases}$.

Giải

a) Với $x = 2y = -4$ ta có $x = -4$ và $y = -2$

Ta có $A = (-4)^2 - 2(-4)(-2) + 3(-2)^3 = 16 - 16 - 24 = -24$

b) Từ $x + y = 10 \Rightarrow x = 10 - y$ và $3x = 2y \Rightarrow 3(10 - y) = 2y$

$\Leftrightarrow 30 - 3y = 2y \Leftrightarrow 30 = 5y \Leftrightarrow y = 6$

Từ đó có $x = 4$. Thay vào biểu thức $A = 4^2 - 2.4.6 + 3.6^3 = 616$.

c) $|x| = 0,5 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0,5 \\ x = -0,5 \end{array}\right.$

Với $x = 0,5$ và $y = 4$ thì $A = (0,5)^2 - 2.(0,5).4 + 3.4^3 = 188,25$

Với $x = -0,5$ và $y = 4$ thì $A = (-0,5)^2 - 2.(-0,5).4 + 3.4^3 = 196,25$.

d) $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ và $y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = -3$

Do đó $A = 2^2 - 2.2.(-3) + 3.(-3)^3 = -65$.

Ví dụ 5: Tính giá trị của biểu thức sau: $A = \dfrac{3a - 4b}{4a - 3b}$ biết $\dfrac{a}{b} = \dfrac{5}{9}$.

✓ *Tìm cách giải:* Do $\frac{a}{b}=\frac{5}{9}$ chứng tỏ $a\neq 0$ và $b\neq 0$ nên hướng giải là làm xuất hiện $\frac{a}{b}$ hoặc $\frac{b}{a}$ trong biểu thức bằng cách chia cả tử và mẫu cho a hoặc cho b. Hoặc có thể biểu diễn a theo b (hoặc b theo a). Cũng có thể biểu diễn a và b theo biến phụ k từ tỉ số $\frac{5}{9}$.

Từ đó có một số cách giải sau:

Giải

Do $\frac{a}{b}=\frac{5}{9}$ nên $a\neq 0$ và $b\neq 0$.

- Cách 1: Chia cả tử và mẫu cho b, ta có:

$$A=\frac{3.\frac{a}{b}-4}{4.\frac{a}{b}-3}=\frac{3.\frac{5}{9}-4}{4.\frac{5}{9}-3}=\frac{\frac{15}{9}-4}{\frac{20}{9}-3}=\frac{-\frac{21}{9}}{-\frac{7}{9}}=3.$$

- Cách 2: Chia cả tử và mẫu cho a. Do $\frac{a}{b}=\frac{5}{9}$ nên $\frac{b}{a}=\frac{9}{5}$. Nên:

$$A=\frac{3-4.\frac{b}{a}}{4-3.\frac{b}{a}}=\frac{3-4.\frac{9}{5}}{4-3.\frac{9}{5}}=\frac{-\frac{21}{5}}{-\frac{7}{5}}=3$$

- Cách 3: $\frac{a}{b}=\frac{5}{9}$ nên $9a=5b$. Do đó:

$$A=\frac{(3a-4b).9}{(4a-3b).9}=\frac{3.9a-36b}{4.9a-27b}=\frac{15b-36b}{20b-27b}=\frac{-21b}{-7b}=3$$

- Cách 4: $\frac{a}{b}=\frac{5}{9}\Rightarrow a=5k;\, b=9k$ nên $A=\frac{3.5k-4.9k}{4.5k-3.9k}=\frac{-21k}{-7k}=3$

- Cách 5: $\frac{a}{b}=\frac{5}{9}\Rightarrow a=\frac{5}{9}b\Rightarrow A=\frac{3.\frac{5}{9}b-4b}{4.\frac{5}{9}b-3b}=\frac{\frac{15}{9}b-4b}{\frac{20}{9}b-3b}=\frac{-\frac{21}{9}b}{-\frac{7}{9}b}=3$

- Cách 6: $\frac{a}{b}=\frac{5}{9}\Rightarrow b=\frac{9}{5}a\Rightarrow A=\frac{3a-4.\frac{9}{5}a}{4a-3.\frac{9}{5}a}=\frac{-\frac{21}{5}a}{-\frac{7}{5}a}=3$

Ví dụ 6: Tính giá trị của biểu thức sau: $B=\frac{4a+b}{5a-2018}+\frac{4a+2018}{5a-b}$

biết $a-b=2018;\, b\neq -4a;\, a\neq -504,5;\, a\neq 403,6;\, b\neq 5a$

✓ *Tìm cách giải:* Do $b \neq -4a; a \neq -504,5; a \neq 403,6; b \neq 5a$ nên các mẫu số trong B trước và sau khi biến đổi đều khác 0. Mặt khác, $a-b=2018$ nên ta có thể thay $2018=a-b$ trong biểu thức hoặc biểu diễn a theo b; b theo a từ $a-b=2018$. Từ đó có một số cách giải sau:

Giải

➢ Cách 1: Thay $2018=a-b$ vào B, ta có:

$$B=\frac{4a+b}{5a-(a-b)}+\frac{4a+(a-b)}{5a-b}=\frac{4a+b}{4a+b}+\frac{5a-b}{5a-b}=1+1=2.$$

➢ Cách 2: Biến đổi $B=\frac{5a-a+b}{5a-2018}+\frac{4a+2018}{4a+a-b}=\frac{5a-(a-b)}{5a-2018}+\frac{4a+2018}{4a+(a-b)}$

Thay $x-y=8$ ta có $B=\frac{5a-2018}{5a-2018}+\frac{4a+2018}{4a+2018}=1+1=2$

➢ Cách 3: Từ $a-b=2018 \Rightarrow a=2018+b$ và thay vào B, ta có:

$$B=\frac{4(2018+b)+b}{5(2018+b)-2018}+\frac{4(2018+b)+2018}{5(2018+b)-b}=\frac{8072+5b}{8072+5b}+\frac{10090+4b}{10090+4b}=1+1=2$$

➢ Cách 4: Từ $a-b=2018 \Rightarrow b=a-2018$ và thay vào B, ta có:

$$B=\frac{4a+(a-2018)}{5a-2018}+\frac{4a+2018}{5a-(a-2018)}=\frac{5a-2018}{5a-2018}+\frac{4a+2018}{4a+2018}=1+1=2$$

Ví dụ 7: Tìm giá trị các biến để:

a) Biểu thức $\frac{2016}{3x-2019}$ có giá trị bằng 1;

b) $(t^4+4)(x^3-1)(y^2-9)(z+6)$ có giá trị bằng 0;

c) $z^2-8z+10$ có giá trị lớn hơn 10.

✓ Tìm cách giải:

a) $\frac{2016}{3x-2019}$ có giá trị bằng 1 có nghĩa là $\frac{2016}{3x-2019}=1$ (hoặc là $2016=3x-2019$).

b) Một tích bằng 0 khi ít nhất 1 thừa số bằng 0.

c) $z^2-8z+10$ có giá trị lớn hơn 10 nghĩa là $z^2-8z>0$.

Giải

a) $3x-2016=2019 \Leftrightarrow 3x=4035 \Leftrightarrow x=1345$.

b) Do $t^4+4>0$ với mọi giá trị của t nên $(t^4+4)(x^3-1)(y^2-9)(z+6)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-1=0 \\ y^2-9=0 \\ z+6=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ y^2=9 \\ z=-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ y=\pm 3 \\ z=-6 \end{array}\right.$$

c) $z^2-8z+10>10 \Leftrightarrow z^2-8z>0 \Leftrightarrow z(z-8)>0$

Suy ra z và $z-8$ phải cùng dấu nghĩa là $\begin{cases} z>0 \\ z-8>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z>0 \\ z>8 \end{cases} \Rightarrow z>8$

hoặc $\begin{cases} z<0 \\ z-8<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z<0 \\ z<8 \end{cases} \Rightarrow z<0$

Vậy để $z^2-8z+10$ có giá trị lớn hơn 10 thì $\left[\begin{array}{l} z>8 \\ z<0 \end{array}\right.$.

Ví dụ 8: Cho $a.b.c.d \neq 0;\ a-b-c=0$ và $c=-3d$.

Tính giá trị của biểu thức $M=\left(1-\dfrac{a}{b}\right)\left(1+\dfrac{b}{c}\right)\left(1-\dfrac{c}{a}\right)\left(1+\dfrac{c}{d}\right)$

✓ *Tìm cách giải:* Do $a.b.c.d \neq 0$ nên a, b, c, d đều khác 0.

Ta có: $1-\dfrac{a}{b}=\dfrac{b-a}{b};1+\dfrac{b}{c}=\dfrac{c+b}{c};1-\dfrac{c}{a}=\dfrac{a-c}{a}$

Với $c=-3d$ và từ $a-b-c=0 \Rightarrow -c=b-a;\ a-c=b;\ c+b=a$ thay vào biểu thức ta có cách giải sau:

Giải

$$M=\frac{b-a}{b}.\frac{c+b}{c}.\frac{a-c}{a}.\left(1+\frac{-3d}{d}\right)=\frac{-c}{b}.\frac{a}{b}.\frac{b}{a}.(-2)=(-1).(-2)=2$$

C. Bài tập áp dụng

15.1. Tìm các cặp giữa biểu thức đại số a), b)…. với các diễn đạt tương ứng 1); 2);…

$5a-(5b)^2$	a)
$3+3p^3$	b)
$(3x^2)^3$	c)
$(x-y)(x+y)$	d)
$(a^2-b^2)^2$	e)
$(2a-b)^2$	g)

1)	Bình phương hiệu các bình phương của a và b
2)	Lập phương tích của 3 và x bình phương
3)	Hiệu của 5a và bình phương của 5b
4)	Bình phương của hiệu hai số 2a và b
5)	Tổng của 3 với 3 lần lập phương của p
6)	Tích của hiệu hai số x và y với tổng của chúng

15.2. Viết các biểu thức đại số biểu thị:

a) Hiệu giữa bình phương của a với 2 lần tích của b và c;

b) Bình phương hiệu các lập phương của x và y;

c) Hiệu giữa lập phương của tổng các bình phương của a và b với hiệu các lập phương của chúng;

d) Tích của tổng hai số x và y với hiệu các bình phương của chúng.

15.3. Tính giá trị của biểu thức $P = 6x^2 - 4,5xy + 3$ tại:

a) $x = -2;\ y = 5$;

b) $|x| = 3;\ |y| = 2$;

c) $|x-5| + |y+2| = 0$.

15.4. Viết các biểu thức đại số biểu thị:

a) Tổng A chu vi hình vuông cạnh a với chu vi tam giác đều cạnh b. Tính giá trị của A với $a = 8cm;\ b = 9cm$;

b) Hiệu B diện tích hình vuông cạnh c với diện tích hình chữ nhật cạnh c và d. Tính giá trị của B với $c = \frac{8}{9}dm;\ d = \frac{1}{3}dm$;

c) Hiệu C giữa diện tích hình thang hai đáy e, g đường cao h với diện tích tam giác cạnh đáy e, đương cao tương ứng h. Tính giá trị của C với $e = 18,4m;\ g = 16,5m;\ h = 6,8m$;

d) Tổng D diện tích hai hình tròn bán kính r_1 và r_2. Tính giá trị của D với $r_1 = \frac{3}{4}m$ và $r_2 = 0,5m;\ \pi \approx 3,14$.

15.5*. Với n là số tự nhiên:

a) Viết biểu thức biểu diễn: Tổng P của 100 số tự nhiên liên tiếp bắt đầu từ n. Tính giá trị của P khi $n = 10$;

b) Viết biểu thức biểu diễn: Tổng Q của 10 số tự nhiên lẻ liên tiếp. Tìm 10 số lẻ đó biết $Q = 200$;

c) Biết tổng ba số tự nhiên chẵn liên tiếp là 36. Tính giá trị của H là hiệu các bình phương của số lớn nhất và số nhỏ nhất trong ba số đó.

15.6. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $E = 2x - 3y + 5z$ tại $x = \frac{2}{5};\ y = -\frac{1}{3};\ z = \frac{1}{2}$

b) $F = 2x^2 - 4|y| + 3z$ tại $x = 2;\ y = -3;\ |z| = 4$

c) $G = 2|x-5| - 2xy^2 + 3z^3$ tại $|x| = 3;\ y = -2;\ z = -1$.

15.7. Giữa một cái sân hình vuông cạnh a (mét) người ta xây một vườn hoa hình vuông có cạnh b (mét) ($a > b$),

a) Viết biểu thức đại số biểu thị diện tích S còn lại của sân.

b) Viết biểu thức đại số biểu diễn số viên gạch cần mua N để lát kín sân nếu gạch hình hộp chữ nhật, mặt hình chữ nhật của viên gạch để lát trên sân có kích thước dài c(m); rộng d(m);

c) Tính N nếu $a = 40m;\ b = 12m;\ c = 0,2m;\ d = 0,1m$.

15.8. Một bể nước có ba vòi chảy vào và một vòi chảy ra. Vòi thứ nhất mỗi phút chảy vào x lít nước. Vòi thứ hai cứ hai phút chảy vào y lít nước. Vòi thứ ba cứ ba phút chảy vào z lít nước. Vòi thứ tư chảy ra cứ bốn phút chảy mất t lít nước.

a) Viết biểu thức đại số biểu thị lượng nước V có thêm trong bể sau khi mở cả 4 vòi trong thời gian a phút;

b) Tính giá trị của V nếu $x = 20;\ y = 60;\ z = 45;\ t = 40$ và $a = 15$.

15.9. Tính giá trị của các biểu thức đại số sau:

a) $A = \dfrac{9a - 8b}{8a - 9b}$ biết $\dfrac{a}{b} = \dfrac{5}{6}$;

b) $B = \dfrac{3a - b}{5a - 2018} - \dfrac{6a + 2b - 2018}{4a + b}$ với $2a + b = 2018;\ a \neq \dfrac{2018}{5};\ a \neq -4b$;

c) $C = \dfrac{6a - 2b}{2a + 2018} - \dfrac{3b - a}{2b - 2018}$ với $a - b = 2018$ và $a \neq -1009;\ b \neq 1009$.

15.10. Tính giá trị của biểu thức $M = \dfrac{9x^2 + 5y^2}{18x^2 - 5y^2}$

a) Với $\dfrac{x^2}{5} = \dfrac{y^2}{9}$ và $x \neq 0;\ y \neq 0$;

b) Với $\dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{3}$.

15.11. Tìm giá trị các biến để:

a) Biểu thức $A = (x - 5)(y^2 - 16)(z^3 + 1)$ có giá trị bằng 0;

b) Biểu thức $B = (x^2 + 2) - (2xy - 2016)$ có giá trị bằng 2018;

c) Biểu thức $C = \dfrac{x^2 - 3x + 14}{2}$ có giá trị nhỏ hơn giá trị của $x + 7$;

15.12. Cho biểu thức đại số $D = \dfrac{x - 6}{x + 3}$.

Tìm giá trị nguyên của x để D có giá trị nguyên.

15.13. Cho $a.b.c.d \neq 0;\ a+b+c=0$ và $c=3d$.

Tính giá trị của biểu thức: $E=\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{a+b}{d}-5\right)$

15.14. Tính giá trị của biểu thức $G=(x+y)(x-6)(y-6)$ biết rằng:

$x+y-6=0$ và $xy=8$

15.15*. Tính giá trị biểu thức

$E=\left(a-b^2\right)\left(a^2-2b^3\right)\left(a^3-3b^4\right)...\left(a^{2017}-2018b^{2019}\right)$ tại:

a) $a=4;\ b=2$;

b) $a=-1;\ b=0$.

15.16. Cho $a=3+\frac{2}{3}+\frac{2}{1+\frac{1}{2}}$ và $b=4-\frac{3}{1-\frac{1}{2}}$

Tính giá trị các biểu thức:

a) $M=\frac{b+\frac{2}{b}}{a-\frac{2}{a}}$;

b) $P=a-b+\frac{a+b}{a+\frac{a+b}{a+\frac{a+b}{a}}}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

15.1. Các cặp là:

a) với 3); b) với 5); c) với 2);

d) với 6); e) với 1); g) với 4).

15.2.

a) $a^2 - 2bc$

b) $\left(x^3 - y^3\right)^2$

c) $\left(a^2 + b^2\right)^3 - \left(a^3 - b^3\right)$

d) $\left(x + y\right)\left(x^2 - y^2\right)$

15.3.

a) $P = 72$;

b) Xét 4 trường hợp:

Với $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ thì $P = 30$; với $\begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$ thì $P = 84$;

với $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$ thì $P = 84$; với $\begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases}$ thì $P = 30$;

c) $|x-5| + |y+2| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 = 0 \\ y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases}$

Do đó $P = 198$

15.4.

a) $A = 4a + 3b$; Giá trị của A là 59 (cm).

b) $B = c^2 - cd$; Giá trị của B là $\frac{40}{81}$ (dm^2)

c) $C = \frac{\left(e+g\right)h}{2} - \frac{eh}{2}$; Giá trị của C là 56,1 (m^2)

d) $D = \pi r_1^2 + \pi r_2^2$; Giá trị của D là $\frac{\pi.13}{16} \approx 2,55$ (m^2)

15.5. Với $n \in N$

a) $P = n + \left(n+1\right) + \left(n+2\right) + ... + \left(n+98\right) + \left(n+99\right)$

$P = 100n + \left(1+99\right).99:2$ hay $P = 100n + 4950$;

Tại $n=10$ thì $P=1000+4950=5950$.

b) Số tự nhiên lẻ có dạng 2n+1; hai số tự nhiên lẻ liên tiếp hơn kém nhau 2 đơn vị nên:

$$Q=(2n+1)+(2n+3)+...+(2n+17)+(2n+19)$$

$$Q=20n+100$$

Ta có: $Q=20n+100=200 \Leftrightarrow n=5$.

Vậy 10 số lẻ liên tiếp đó là 11; 13; 15; 17; 19; 21; 23; 25; 27; 29.

c) Gọi số tự nhiên chẵn nhỏ nhất trong ba số chẵn liên tiếp là 2n, hai số tự nhiên chẵn liên tiếp hơn kém nhau 2 đơn vị nên tổng ba số là:

$$2n+(2n+2)+(2n+4)=36$$

$\Leftrightarrow n=5$ số chẵn nhỏ nhất trong ba số là $2n=10 \Rightarrow H=14^2-10^2=96$.

(Chú ý: Ở câu c) ta có thể gọi số tự nhiên chẵn nhỏ nhất trong ba số chẵn liên tiếp là a. Ta có $a+(a+2)+(a+4)=36 \Leftrightarrow a=10 \Rightarrow H=14^2-10^2=96$).

15.6.

a) $E=4,3$;

b) Do $|z|=4$ nên $z=\pm 4$.

Tại $x=2;\ y=-3;\ z=4$ thì $F=8$;

Tại $x=2;\ y=-3;\ z=-4$ thì $F=-16$.

c) Do $|x|=3$ nên $x=\pm 3$;

Tại $x=3;\ y=-2;\ z=-1$ thì $G=2.|3-5|-2.3.(-2)^2+3(-1)^3=-23$;

Tại $x=-3;\ y=-2;\ z=-1$ thì $G=2.|-3-5|-2.(-3).(-2)^2+3(-1)^3=37$.

15.7.

a) $S=a^2-b^2$.

b) $N=\dfrac{a^2-b^2}{c.d}$.

c) Với $a=40m;\ b=12m;\ c=0,2m;\ d=0,1m$ thì $N=\dfrac{40^2-12^2}{0,2\times 0,1}=72800$ (viên gạch).

15.8.

a) $V=a\left(x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}-\dfrac{t}{4}\right)$

b) $V = 15.\left(20 + \frac{60}{2} + \frac{45}{3} - \frac{40}{4}\right) = 825$ (lít nước).

15.9.

a) $A = \frac{3}{14}$ (cách giải như ví dụ 5).

b) Thay $2018 = 2a + b$ vào biểu thức B ta có $B = 2$

c) Lưu ý $2a + 2018 = 2a + a - b = 3a - b$ và $6a - 2b = 2(3a - b)$.

Mặt khác: $3b - a = 3b - (2018 + b) = 2b - 2018$. Do đó $C = 2 - 1 = 1$.

✓ *Chú ý:* Bài có nhiều cách giải

15.10. Bài có nhiều cách giải. Sau đây là một cách:

a) Từ $\frac{x^2}{5} = \frac{y^2}{9} \Rightarrow 9x^2 = 5y^2$. Do đó $M = \frac{5y^2 + 5y^2}{10y^2 - 5y^2} = \frac{10y^2}{5y^2} = 2$.

b) Từ $\frac{x}{y} = \frac{1}{3} \Rightarrow y^2 = 9x^2$. Do đó $M = \frac{y^2 + 5y^2}{2y^2 - 5y^2} = \frac{6y^2}{-3y^2} = -2$.

15.11.

a) $A = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 5 = 0 \\ y^2 - 16 = 0 \\ z^3 + 1 = 0 \end{array}\right.$. Đáp số: $(x;\ y;\ z) = (5;\ 4;\ -1)$; $(x;\ y;\ z) = (5;\ -4;\ -1)$

b) $(x^2 + 2) - (2xy - 2016) = 2018 \Leftrightarrow x^2 - 2xy = 0 \Leftrightarrow x(x - 2y) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2y \end{array}\right.$.

c) $C < x + 7 \Leftrightarrow x(x - 5) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 5$.

15.12. $D = 1 - \frac{9}{x + 3}$; $D \in Z$ khi $x + 3$ là ước số của 9 $\Rightarrow x \in \{-12;\ -6;\ -4;\ -2;\ 0;\ 6\}$.

15.13. $E = \frac{b + a}{b}.\frac{c + b}{c}.\frac{a + c}{a}.\left(\frac{-c}{d} - 5\right) = \frac{-c}{b}.\frac{-a}{c}.\frac{-b}{a}.(-3 - 5) = 8$.

15.14. Từ $x + y - 6 = 0$ suy ra $x + y = 6;\ x - 6 = -y;\ y - 6 = -x$. Vậy $G = 48$.

15.15*.

a) $E = 0$ vì tại $a = 4;\ b = 2$ thì $a^2 - 2b^3 = 4^2 - 2.2^3 = 0$.

b) $E = (-1)(-1)^2.(-1)^3.....(-1)^{2016}.(-1)^{2017} = -1$.

vì có $\frac{2017-1}{2} + 1 = 1009$ thừa số (-1) và $\frac{2016-2}{2} + 1 = 1008$ thừa số (+1).

15.16. Tính được $a = 5;\ b = -2$.

Thay vào a) $M = -\frac{15}{23}$; b) $P = \frac{1169}{155}$.

Chuyên đề 16

ĐƠN THỨC – ĐƠN THỨC ĐỒNG DẠNG

A. Kiến thức cần nhớ

1. Đơn thức là biểu thức đại số chỉ gồm một số, hoặc một biến, hoặc một tích giữa các số và các biến.

2. Đơn thức thu gọn là đơn thức chỉ gồm tích của một số với các biến, mà mỗi biến đã được nâng lên lũy thừa với số mũ nguyên dương. Số nói trên gọi là hệ số, phần còn lại gọi là phần biến của đơn thức thu gọn.

* Một số cũng được coi là một đơn thức thu gọn

* Trong đơn thức thu gọn, mỗi biến chỉ được viết một lần. Thông thường ta viết hệ số trước, các biến được viết tiếp theo thứ tự bảng chữ cái.

3. Bậc của đơn thức có hệ số khác 0 là tổng số mũ của tất cả các biến có trong đơn thức đó. Số thực khác 0 là đơn thức bậc 0. Số 0 được coi là đơn thức không có bậc.

4. Để nhân hai đơn thức ta nhân các hệ số với nhau và nhân các phần biến với nhau.

5. Hai đơn thức đồng dạng là hai đơn thức có hệ số khác 0 và có cùng phần biến. Các số khác 0 cũng được coi là các đơn thức đồng dạng.

6. Để cộng (hay trừ) các đơn thức đồng dạng, ta cộng (hay trừ) các hệ số với nhau và giữ nguyên phần biến.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Trong các biểu thức sau, biểu thức nào là đơn thức. Thu gọn các đơn thức. Những đơn thức nào đồng dạng?

a) $15x^2 - 3x^3y^3$;

b) $5,3x^3.(-3)x^5y^2$;

c) $25x^2 + 3x^4y^3$;

d) $25\left(x^2 + 3x^4y^3\right)$;

e) $-\dfrac{5bc}{6a}$;

f) $-\dfrac{5bc}{6a}x^5y^2z^3.1,2bxy^3$;

g) $-\dfrac{5bc}{6a}x^5y^2z^3 + 1,2bxy^3$;

h) $-25ax^3y^2.\left(-3bx^4y^3\right).0,4cx^5y^4$;

i) $-25ax^3y^2 - 3bx^4y^3.0,4cx^5y^4$;

k) $\left(-25ax^3y^2 - 3bx^4y^3\right).0,4\text{cx}^5y^4k$;

l) $-\dfrac{2a}{3c}$;

m) $-\dfrac{2a}{3c}x^8$;

n) $-\dfrac{2a}{3c}x^8\left(-y^2\right)$

p) $-\dfrac{2a}{3c}x^8-y^2$.

✓ *Tìm cách giải:* Đơn thức thu gọn là đơn thức chỉ gồm tích của một số với các biến, mà mỗi biến đã được nâng lên lũy thừa với số mũ nguyên dương. Do đó muốn thu gọn đơn thức ta thực hiện nhân các số với nhau nhân các lũy thừa của cùng một biến (cơ số) với nhau.

Giải

Đơn thức:

b) $5,3x^3.(-3)x^5y^2=-15,9x^8y^2$;

e) $-\dfrac{5bc}{6a}$;

f) $-\dfrac{5bc}{6a}x^5y^2z^3.1,2bxy^3=-\dfrac{b^2c}{a}x^6y^5z^3$;

h) $-25ax^3y^2\left(-3bx^4y^3\right).0,4\text{c}x^5\ y^4=30abcx^{12}y^9$;

l) $-\dfrac{2a}{3c}$;

m) $-\dfrac{2a}{3c}x^8$;

n) $-\dfrac{2a}{3c}x^8\left(-y^2\right)=\dfrac{2a}{3c}x^8y^2$

Hai đơn thức $15,9x^8y^2$ và $\dfrac{2a}{3c}x^8y^2$ đồng dạng. Bậc của đơn thức là 10.

Hai đơn thức $-\dfrac{2a}{3c}$ và $-\dfrac{5bc}{6a}$ đồng dạng. Bậc của đơn thức: bậc 0.

Ví dụ 2: Tính tích của các đơn thức và tìm bậc của các đơn thức, sau đó tính tổng các đơn thức đồng dạng:

a) $\left(\dfrac{25}{36}x^6y^5z^3\right)$ và $\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2x^3y^4z^5$;

b) $-0,5x^3y^2z^4t$ và $\left(2yz^3\right)^3$;

c) $-2,5x^5y^6z^3$ và $-8,4x^4y^3z^5$;

d) $\left(3xy^2z^3\right)^2$ và $-8xyz^4t$.

✓ *Tìm cách giải:*

Để nhân hai đơn thức ta nhân các hệ số với nhau và nhân các phần biến với nhau.

Lưu ý các phép tính về lũy thừa $a^m.a^n = a^{m+n}$ và $\left(a^m\right)^n = a^{m.n}$.

Để cộng các đơn thức đồng dạng, ta cộng các hệ số với nhau và giữ nguyên phần biến.

Giải

a) $\left(\frac{25}{36}x^6y^5z^3\right).\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^2x^3y^4z^5\right] = \frac{1}{4}x^9y^9z^8 = 0,25x^9y^9z^8$. Bậc 26.

b) $\left(-0,5x^3y^2z^4t\right).\left(2yz^3\right)^3 = \left(-0,5x^3y^2z^4t\right).8y^3z^9 = -4x^3y^5z^{13}t$. Bậc 22.

c) $\left(-2,5x^5y^6z^3\right)\left(-8,4x^4y^3z^5\right) = 21x^9y^9z^8$. Bậc 26.

d) $\left(2xy^2z^3\right)^2.\left(-8xyz^7t\right) == 4x^2y^4z^6.\left(-8xyz^7t\right) = -32x^3y^5z^{13}t$. Bậc 22.

Tổng các đơn thức đồng dạng:

$0,25x^9y^9z^8 + 21x^9y^9z^8 = 21,25x^9y^9z^8$.

$-4x^3y^5z^{13}t - 32x^3y^5z^{13}t = -36x^3y^5z^{13}t$.

Ví dụ 3: Cho 3 đơn thức: $3a^2x^my^{n-1};\ \frac{2}{15}b^2\left(x^ny^m\right)^3;\ -2,5c^2x^{m+2n}y^3$ với a; b; c là các hằng số, m; n là các số tự nhiên.

a) Tìm tích P của ba đơn thức trên.

b) Tính giá trị của tích P với $a = -1;\ b = -\frac{1}{2};\ c = 2;\ m = 2;\ n = 3;\ x = -1;\ y = 1$.

Giải

a) $P = 3a^2x^my^{n-1}.\frac{2}{15}b^2\left(x^ny^m\right)^3.\left(-2,5c^2x^{m+2n}y^3\right)$

$= 3a^2.\frac{2}{15}b^2.\left(-\frac{5}{2}\right)c^2.x^m.x^{3n}.x^{m+2n}.y^{n-1}.y^{3m}.y^3$

$= -a^2b^2c^2\,x^{2m+5n}y^{n+3m+2}$.

Thay $a = -1;\ b = -\frac{1}{2};\ c = 2;\ m = 2;\ n = 3;\ x = -1;\ y = 1$

$P = -a^2b^2c^2\,x^{2m+5n}y^{n+3m+2} = -(-1)^2.\left(-\frac{1}{2}\right)^2.2^2\,(-1)^{19}.1^{11} = 1$.

Ví dụ 4*: Tìm tích B của các đơn thức $B_1;\ B_2;\ B_3;\ ...;\ B_{2018}$ với

$B_1=\left(1-\frac{1}{2}\right)x;\ B_2=\left(1-\frac{1}{3}\right)x^2;\ B_3=\left(1-\frac{1}{4}\right)x^3;\ ...;B_{2018}=\left(1-\frac{1}{2019}\right)x^{2018}$.

✓ *Tìm cách giải:* Lưu ý nhân nhiều lũy thừa của cùng cơ số: $a^m.a^n....a^p=a^{m+n+...+p}$

Và tổng $1+2+3+...+n=(1+n).n:2$

Với $n=2018$ thì $1+2+3+...+2018=2019.2018:2=2037171$.

Giải

$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2};1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3};1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4};\ ...;1-\frac{1}{2019}=\frac{2018}{2019}$

Do đó: $B=\frac{1}{2}x.\frac{2}{3}x^2.\frac{3}{4}x^3....\frac{2018}{2019}x^{2018}=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}.....\frac{2018}{2019}.x.x^2.x^3.....x^{2018}$

Ta có: $\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}.....\frac{2018}{2019}=\frac{1}{2019}$

$x.x^2.x^3.....x^{2018}=x^{1+2+3+...+2018}=x^{\frac{(1+2018)2018}{2}}=x^{2037171}$

Vậy $B=\frac{1}{2019}x^{1+2+3+...+2018}=\frac{1}{2019}x^{2037171}$.

Ví dụ 5: Viết các đơn thức sau dưới dạng tích của hai đơn thức trong đó một đơn thức bằng $2,5x^3y^2$.

a) $-25x^6y^4$;

b) $15x^3y^{6+n}z^3\quad(n\in N)$.

✓ *Tìm cách giải:*

a) Gọi đơn thức nhân với $2,5x^3y^2$ để được đơn thức $-25x^6y^4$ là B.

Ta có $-25x^6y^4=2,5x^3y^2.B$ và $B=ax^my^n$, trong đó:

$a.2,5=-25;\ x^3.x^m=x^6;\ y^2.y^n=y^4$

Suy ra $a=(-25):2,5=-10;\ 3+m=6\Rightarrow m=3;\ 2+n=4\Rightarrow n=2$

b) Ta có: $15x^3y^{6+n}z^3=2,5x^3y^2.bx^dy^ez^g$

Suy ra $b=15:2,5=6;\ 3+d=3\Rightarrow d=0$;

$2+e=6+n\Rightarrow e=4+n$ và $g=3$. Lại có $x^0=1$.

Giải

a) Ta có $-25x^6y^4=2,5x^3y^2.\left(-10x^3y^2\right)$;

b) $15x^3y^{6+n}z^3=2,5x^3y^2.6y^{4+n}z^3$.

Ví dụ 6: Xác định hằng số a và b để tổng các đơn thức sau đây bằng $1975x^{32}y^{23}z^{54}$

a) $68ax^{32}y^{23}z^{54}$; $-8ax^{32}y^{23}z^{54}$; $86ax^{32}y^{23}z^{54}$; $-67ax^{32}y^{23}z^{54}$.

b) $ax^{32}z^{50}.2y^{23}z^{4}+(a-b)x^{32}y^{23}z^{54}+\left(-7bx^{23}y^{23}z^{51}.4x^{9}z^{3}\right)$ với $a=2b$.

✓ *Tìm cách giải:* Để cộng các đơn thức đồng dạng, ta cộng các hệ số với nhau và giữ nguyên phần biến. Các đơn thức ở câu a) và đơn thức ở câu b) sau khi thu gọn đều là đơn thức đồng dạng. Do đó 1975 chính là tổng các hệ số của các đơn thức.

Giải

a) $68ax^{32}y^{23}z^{54}+\left(-8ax^{32}y^{23}z^{54}\right)+86ax^{32}y^{23}z^{54}+\left(-67ax^{32}y^{23}z^{54}\right)=1975x^{32}y^{23}z^{54}$

Do đó: $68a+(-8a)+86a+(-67a)=1975$ hay $79a=1975\Rightarrow a=25$

b) $ax^{32}z^{50}.2y^{23}z^{4}+(a-b)x^{32}y^{23}z^{54}+\left(-7bx^{23}y^{23}z^{51}.4x^{9}z^{3}\right)=1975x^{32}y^{23}z^{54}$

Hay $ax^{32}y^{23}z^{54}+(a-b)x^{32}y^{23}z^{54}+\left(-28bx^{32}y^{23}z^{54}\right)=1975x^{32}y^{23}z^{54}$

Ta có: $a+a-b-28b=1975$ hay $2b+2b-b-28b=-25b=1975$

$\Rightarrow b=-79;\ a=-158$

C. Bài tập áp dụng

16.1. Thu gọn các đơn thức sau và chỉ ra phần hệ số, phần biến và bậc của đơn thức thu gọn: (a; b; c là các hằng số)

a) $2xy.\left(-0,5x^{2}y\right)^{2}.3x^{3}yz$;

b) $2,5ax^{2}.6a^{2}xy^{2}$;

c) $\frac{2c}{3}\left(ax^{3}y^{2}\right)^{2}.\left(-6a^{2}bx^{2}y\right)$

d) $-\frac{2(a-b)}{3}x^{2}yz.\left(-2cx^{3}y^{2}\right)^{3}$.

16.2. Hãy xếp các đơn thức sau thành nhóm các đơn thức đồng dạng với nhau sau đó tìm tổng các đơn thức đồng dạng đó. (với a, b là các hằng số)

$3x^{2}yz;\ 5axyz^{2};\ 7,5axy^{2}z;\ -\frac{2}{5}bxyz^{2};\ -18x^{2}yz;\ 2,5xy^{2}z;\ -\frac{3}{5}bxyz^{2};\ 2,5axy^{2}z$

16.3. Tìm các đơn thức A, B, C, D thích hợp trong các trường hợp sau:

a) $-75x^{3}y^{2}+A=25x(xy)^{2}$;

b) $B-\frac{1}{2}ax^{3}y^{4}z^{2}=\frac{1}{6}ax^{3}y^{4}z^{2}-\frac{2}{3}ax^{3}y^{4}z^{2}$ (a là hằng số);

c) $C-4000b^{2}x^{3}y^{4}+D=34b^{2}x^{3}y^{4}$ và $C-98b^{2}x^{3}y^{4}-D=-96b^{2}x^{3}y^{4}$

16.4. 1) Tính tích của các đơn thức, tìm bậc của các đơn thức tích vừa tìm (a, b là các hằng số khác 0):

a) $\frac{14}{15}x^5y^2$ và $\frac{5}{7}x^3y^2z^4t$;

b) $-0,2ax^3y^2t$ và $4,5abx^3yzt^2$;

c) $-5ax^2y^3$ và $\frac{1}{6a}x^4zt^6$;

d) $-\frac{a+1}{5}\left(x^2y^4t^2\right)^3$ và $\left(\frac{1}{2b}x^3y\right)^2$.

16.5. Cho a, b, c là những số khác 0:

a) Hai đơn thức $-5a^6b^2$ và $4a^2b^5$ có thể có cùng giá trị dương không. Tại sao? Khi nào chúng có cùng giá trị âm?

b) Hai đơn thức $4a^5b^2$ và $-5a^4b^6$ cùng dấu. Tìm dấu của a.

c) Xác định dấu của c biết $3a^2b^5c$ và $-12a^4b^5c^2$ trái dấu nhau.

16.6. Cho ba đơn thức $\frac{2}{3}x^3y^2z^5$; $-\frac{3}{4}x^2yz^3$; $\frac{4}{5}xy^5z^2$. Chứng minh rằng khi x, y, z lấy những giá trị bất kỳ khác 0 thì trong ba đơn thức đã cho có ít nhất một đơn thức có giá trị âm.

16.7. Cho $M=-10^n-10^{n+1}-10^{n+2}-10^{n+3}+10^{n+4}$

$P=2^{n+4}-2^{n+3}+2^{n+2}-2^{n+1}-2^n$ với $n\in N^*$

a) Tính $M+P$;

b) Tính $M.P$.

16.8*. Tìm tích A của các đơn thức $A_1; A_2; A_3; ...; A_{100}$ với

$$A_1=\left(\frac{1}{2}-1\right)x;\ A_2=\left(\frac{1}{3}-1\right)x^2;\ A_3=\left(\frac{1}{4}-1\right)x^3;\ ...:\ A_{100}=\left(\frac{1}{101}-1\right)x^{100}.$$

Sau đó tính giá trị của A với $x=\frac{-2015.2016-2}{2014.2016+2018}$.

16.9. Cho $C=\left(\frac{1}{2^2}-1\right).\left(\frac{1}{3^2}-1\right).\left(\frac{1}{4^2}-1\right).....\left(\frac{1}{10^2}-1\right)x^3y^4z^5t^6$

$$D=\left(\frac{7}{2.5}-\frac{13}{5.8}+\frac{19}{8.11}-\frac{25}{11.14}+\frac{31}{14.17}-\frac{37}{17.20}\right)x^6y^5z^4t^3$$

Tính tích $E=-\frac{20^2}{11}CD$.

16.10*. Cho $Q_1=\frac{5}{10.15}x^8y^9z^{10}$; $Q_2=\frac{6}{15.21}x^8y^9z^{10}$; $Q_3=\frac{7}{21.28}x^8y^9z^{10}$;

$Q_4=\frac{8}{28.36}x^8y^9z^{10}$; $Q_5=\frac{14}{36.50}x^8y^9z^{10}$

Tính $T=Q_1+Q_2+Q_3+Q_4+Q_5$

16.11*. Cho $G=\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{10}\right)\left(1-\frac{1}{15}\right)x^{m+1}y^{m+2}z^{m+3}$;

$H=\left(1-\frac{1}{21}\right)\left(1-\frac{1}{28}\right)\left(1-\frac{1}{36}\right)\left(1-\frac{1}{45}\right)x^{n-1}y^{n-2}z^{m-3}$ với $m,n\in N;\ n\geq 2;\ m\geq 3$;

Tính $G.H$.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

16.1.

a) $2xy.\left(-0,5x^2y\right)^2.3x^3yz=-3x^8y^4z$.

Hệ số: -3; phần biến: x^8y^4z; bậc: 13.

b) $2,5ax^2.6a^2xy^2=15a^3x^3y^2$.

Hệ số: $15a^3$; phần biến: x^3y^2; bậc: 5.

c) $\frac{2c}{3}\left(ax^3y^3\right)^2.\left(-6a^2bx^2y^5\right)=-4a^4bcx^8y^{11}$.

Hệ số: $-4a^4bc$; phần biến: x^8y^{11}; bậc: 19;

d) $-\frac{2(a-b)^2}{3}x^2y^2z.\left(-2cx^3y^2\right)^3=\frac{4c(a-b)^2}{3}x^{11}y^8z$

Hệ số: $\frac{4c(a-b)^2}{3}$; phần biến: $x^{11}y^8z$; bậc: 20.

16.2.

Nhóm 1: $3x^2yz+\left(-18x^2yz\right)=-15x^2yz$.

Nhóm 2: $5axyz^2+\left(-\frac{2}{5}bxyz^2\right)+\left(-\frac{3}{5}bxyz^2\right)=(5a-b)xyz^2$.

Nhóm 3: $7,5axy^2z+2,5xy^2z+2,5axy^2z=(10a+2,5)xy^2z$

16.3.

a) $A=25x^3y^2+75x^3y^2=100x^3y^2$;

b) $B=\frac{1}{2}ax^3y^4z^2-\frac{1}{6}ax^3y^4z^2+\frac{2}{3}ax^3y^4z^2=ax^3y^4z^2$

c) $C+D=4034b^2x^3y^4$ và $C-D=2b^2x^3y^4$

Tìm được $C=2018b^2x^3y^4$ và $D=2016b^2x^3y^4$.

16.4.

a) $\frac{14}{15}x^5y^2.\frac{5}{7}x^3y^2z^4t^{10}=\frac{2}{3}x^8y^4z^4t^{10}$. Bậc 26.

b) $-0,2ax^3y^2t.4,5abx^3yzt^2=-0,9a^2bx^6y^3zt^3$. Bậc 13.

c) $-5ax^2y^3.\frac{1}{6a}x^4zt^6=-\frac{5}{6}x^6y^3zt^6$. Bậc 16.

d) $-\frac{a+1}{5}\left(x^2y^4t^2\right)^3.\left(\frac{1}{2b}x^3y\right)^2=-\frac{a+1}{20b^2}x^{12}y^{14}t^6$. Bậc 32.

16.5.

a) $-5a^6b^2<0$ với mọi giá trị của a và b nên không thể có giá trị dương. Do đó hai đơn thức $-5a^6b^2$ và $4a^2b^5$ không thể có cùng giá trị dương.

Xét $4a^2b^5$ nhận giá trị âm khi $b<0$ nên hai đơn thức $-5a^6b^2$ và $4a^2b^5$ có cùng giá trị âm khi $b<0$.

b) Hai đơn thức cùng dấu nên $4a^3b^2.\left(-5a^4b^6\right)=-20a^9b^8>0$

$b^8>0$; do đó $a^9<0$. Khi ấy $a<0$.

c) $3a^2b^5c$ và $-12a^4b^5c^2$ trái dấu nhau nên

$3a^2b^5c.\left(-12a^4b^5c^2\right)=-36a^6b^{10}c^3<0$ mà $a^6b^{10}>0\Rightarrow c^3>0\Rightarrow c>0$.

16.6.

Xét tích ba đơn thức $\frac{2}{3}x^3y^2z^5.\left(-\frac{3}{4}x^2yz^3\right).\frac{4}{5}xy^5z^2=-\frac{2}{5}x^6y^8z^{10}<0$ với mọi giá trị khác 0 của x, y, z.

Do đó có ít nhất một đơn thức có giá trị âm.

16.7.

$M=10000.10^n-1000.10^n-100.10^n-10.10^n-10^n=8889.10^n$

$P=2^{n+4}-2^{n+3}+2^{n+2}-2^{n+1}-2^n=16.2^n-8.2^n+4.2^n-2.2^n-2^n=9.2^n$

a) $M+P=8889.10^n+9.2^n$;

b) $M.P=80001.20^n$.

16.8*.

Lưu ý: $a^m.a^n.....a^p=a^{m+n+...+p}$;

Ta có $1+2+3+...+100=(1+100).100:2=5050$;

và $\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$; $\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}$; ...; $\frac{1}{101}-1=-\frac{100}{101}$.

Do đó $A=\left(-\frac{1}{2}\right).\left(-\frac{2}{3}\right).\left(-\frac{3}{4}\right).....\left(-\frac{100}{101}\right)x.x^2.x^3.....x^{100}$.

Tích có 100 thừa số âm nên tích dương và

$A=\frac{1}{101}x^{1+2+3+...+100}=\frac{1}{101}x^{5050}$.

$$x=\frac{-2015.2016-2}{2014.2016+2018}=-\frac{(2014+1).2016+2}{2014.2016+2018}=-\frac{2014.2016+2018}{2014.2016+2018}=-1$$

Vậy $A=\frac{1}{101}(-1)^{5050}=\frac{1}{101}$.

16.9. Ta thấy tích $P=\left(\frac{1}{2^2}-1\right).\left(\frac{1}{3^2}-1\right).\left(\frac{1}{4^2}-1\right).....\left(\frac{1}{10^2}-1\right)$ có 9 thừa số âm nên tích âm. Do đó:

$$P=-\frac{3}{4}.\frac{8}{9}.\frac{15}{16}.....\frac{80}{81}.\frac{99}{100}=-\frac{1.3}{2.2}.\frac{2.4}{3.3}.\frac{3.5}{4.4}.....\frac{8.10}{9.9}.\frac{9.11}{10.10}$$

$$=-\frac{1.2.3.....8.9}{2.3.4.....9.10}.\frac{3.4.5.....10.11}{2.3.4.....9.10}=-\frac{11}{20}$$

Xét $Q=\frac{7}{2.5}-\frac{13}{5.8}+\frac{19}{8.11}-\frac{25}{11.14}+\frac{31}{14.17}-\frac{37}{17.20}$

mỗi số hạng đều có dạng $\frac{a+b}{a.b}=\frac{1}{b}+\frac{1}{a}$ do đó

$$Q=\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{5}+\frac{1}{11}+\frac{1}{8}-\frac{1}{14}-\frac{1}{11}+\frac{1}{14}+\frac{1}{17}-\frac{1}{20}-\frac{1}{17}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{20}=\frac{9}{20}$$

Do đó $E=9x^9y^9z^9t^9$

16.10*.

$$T=\left(\frac{5}{10.15}+\frac{6}{15.21}+\frac{7}{21.28}+\frac{8}{28.36}+\frac{14}{36.50}\right)x^8y^9z^{10}$$

$$=\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{15}+\frac{1}{15}-\frac{1}{21}+\frac{1}{21}-\frac{1}{28}+\frac{1}{28}-\frac{1}{36}+\frac{1}{36}-\frac{1}{50}\right)x^8y^9z^{10}$$

$$=\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{50}\right)x^8y^9z^{10}=\frac{2}{25}x^8y^9z^{10}$$

16.11*. Ta có:

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{10}\right)\left(1-\frac{1}{15}\right)\left(1-\frac{1}{21}\right)\left(1-\frac{1}{28}\right)\left(1-\frac{1}{36}\right)\left(1-\frac{1}{45}\right)$$

$$=\left(1-\frac{2}{2.3}\right)\left(1-\frac{2}{3.4}\right)\left(1-\frac{2}{4.5}\right)\left(1-\frac{2}{5.6}\right)\left(1-\frac{2}{6.7}\right)\left(1-\frac{2}{7.8}\right)\left(1-\frac{2}{8.9}\right)\left(1-\frac{2}{9.10}\right)$$

$$=\frac{1.4}{2.3}.\frac{2.5}{3.4}.\frac{3.6}{4.5}.\frac{4.7}{5.6}.\frac{5.8}{6.7}.\frac{6.9}{7.8}.\frac{7.10}{8.9}.\frac{8.11}{9.10}=\frac{11}{27}.$$

Vậy $G.H = \frac{11}{27}x^{m+n}y^{m+n}z^{2m}$.

Chuyên đề 17

ĐA THỨC – ĐA THỨC MỘT BIẾN
- CỘNG TRỪ ĐA THỨC MỘT BIẾN
NGHIỆM CỦA ĐA THỨC MỘT BIẾN

A. Kiến thức cần nhớ

1. Đa thức là một tổng của những đơn thức. Mỗi đơn thức trong tổng gọi là một hạng tử của đa thức đó.

* Mỗi đơn thức được coi là một đa thức.

* Bậc của đa thức là bậc của hạng tử có bậc cao nhất trong dạng thu gọn của đa thức đó.

2. Để cộng (hay trừ) các đa thức ta dựa vào quy tắc "dấu ngoặc" và tính chất của các phép tính.

3. Phép cộng các đa thức có tính chất giao hoán và kết hợp.

4. Đa thức một biến là tổng của những đơn thức của cùng một biến.

* Đa thức một biến x được ký hiệu $f(x)$; $g(x)\dots$ hoặc $A(x)$; $B(x)\dots$.

* Mỗi số được coi là một đa thức một biến.

* Giá trị của đa thức một biến $f(x)$ tại $x=a$ được ký hiệu $f(a)$

* Đa thức một biến (sau khi rút gọn) thường được sắp theo lũy thừa giảm dần hay tăng dần của biến.

* Bậc của đa thức một biến (khác với đa thức không) là số mũ cao nhất của biến.

5. Đa thức một biến bậc n có dạng thu gọn:

$f(x)=a_n.x^n+a_{n-1}.x^{n-1}+a_{n-2}.x^{n-2}+\dots+a_2.x^2+a_1.x^1+a_0$ (với $a_n\neq 0$)

Trong đó a_1; a_2; a_3; ...; a_{n-1}; a_n là các hệ số; a_0 là số hạng độc lập hay hệ số tự do.

* $f(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$ là nhị thức bậc nhất.

* $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ là tam thức bậc hai.

6. Để cộng hay trừ hai đa thức một biến, ta có hai cách:

a) Dựa vào quy tắc "dấu ngoặc" và tính chất của các phép tính.

b) Sắp xếp các hạng tử của hai đa thức cùng theo lũy thừa giảm (hoặc tăng) của biến, rồi đặt phép tính theo cột dọc tương tự như các số (chú ý đặt các đơn thức đồng dạng ở cùng một cột).

7. Nếu tại $x=a$, đa thức $P(x)$ có giá trị bằng 0 thì ta nói a (hoặc $x=a$) là một nghiệm của đa thức đó.

* a là nghiệm của $P(x)\Leftrightarrow P(a)=0$.

* Một đa thức (khác đa thức không) có thể có một nghiệm, hai nghiệm, … hoặc không có nghiệm.

* Số nghiệm số của một đa thức không vượt quá bậc của nó.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Thu gọn các đa thức sau và cho biết bậc của mỗi đa thúc:

a) $A=15x^2y^3-3xy^3+16x^2y^3-16xy^3-15x^2y^3+18xy^3-3,75x^3y^4$

b) $B=\frac{3}{5}xy-0,25x^2yz-13xy+6,75x^2yz+6xy-2,5x^2yz+\frac{2}{5}xy$

✓ *Tìm cách giải:* Để thu gọn đa thức ta xem trong đa thức có những đơn thức nào đồng dạng rồi thực hiện phép cộng các đơn thức đồng dạng.

a) $A=\left(15x^2y^3-15x^2y^3+16x^2y^3\right)+\left(-3xy^3-16xy^3+18xy^3\right)-3,75x^3y^4$;

b) $B=\left(\frac{3}{5}xy+\frac{2}{5}xy-13xy+6xy\right)+\left(-0,25x^2yz+6,75x^2yz-2,5x^2yz\right)$.

Giải

a) $A=16x^2y^3-xy^3-3,75x^3y^4$ Bậc của đa thức là 7.

b) $B=-6xy+4x^2yz$. Bậc của đa thức là 4.

Ví dụ 2: Cho hai đa thức: $C=9,5x^2-5xy+3,2y^2$ và $D=-3,5x^2+4xy-1,8y^2$.

a) Tính $C+D$ sau đó tìm giá trị của tổng tại $x=1$ và $y=-2$;

b) Tính $C-D$;

c) Tìm đa thức E sao cho $E+C=D$;

d) Tìm đa thức M biết: $M+2\left(x^2-4y^2\right)+D=16x^2-4xy+5y^2+C$.

✓ *Tìm cách giải:* Thực hiện các phép toán cộng trừ hai đa thức ta làm tương tự như việc dựa vào quy tắc "dấu ngoặc" và tính chất của các phép tính trên số để cộng trừ các biểu thức số.

Giải

a) $C+D=\left(9,5x^2-5xy+3,2y^2\right)+\left(-3,5x^2+4xy-1,8y^2\right)$

$=9,5x^2-5xy+3,2y^2-3,5x^2+4xy-1,8y^2$

$=\left(9,5x^2-3,5x^2\right)+\left(-5xy+4xy\right)+\left(3,2y^2-1,8y^2\right)$

$=6x^2-xy+1,4y^2$.

Tại $x=1;\ y=-2$ thì $C+D=6.1^2-1.(-2)+1,4.(-2)^2=13,6$.

b) $C-D=\left(9,5x^2-5xy+3,2y^2\right)-\left(-3,5x^2+4xy-1,8y^2\right)$

$=9,5x^2-5xy+3,2y^2+3,5x^2-4xy+1,8y^2$

$=\left(9,5x^2+3,5x^2\right)+\left(-5xy-4xy\right)+\left(3.2y^2+1,8y^2\right)$

$=13x^2-9xy+5y^2$.

c) $E+C=D\Leftrightarrow E=D-C=-(C-D)=-13x^2+9xy-5y^2$.

d) $M+2\left(x^2-4y^2\right)+D=16x^2-4xy+5y^2+C$

$$M=\left(16x^2-4xy+4y^2\right)-2\left(x^2-4y^2\right)+C-D$$
$$=16x^2-4xy+5y^2-2x^2+8y^2+13x^2-9xy+5y^2$$
$$=\left(16x^2+13x^2-2x^2\right)+\left(-4xy-9xy\right)+\left(5y^2+8y^2+5y^2\right)$$
$$=27x^2-13xy+18y^2$$

Ví dụ 3: Cho đa thức

$$A(x)=bx+(b-2)x^5-(a-12)x^6+0,5ax^3-5x^2-bx^3+4cx^4-10+11x^5+6x^6+ax-c(x-1)$$

a) Viết đa thức dưới dạng thu gọn với các hệ số bằng số, biết rằng $A(x)$ có bậc là 5; hệ số cao nhất là 19 và hệ số tự do là -15;

b) Tính $3A(1)-2A(-1)$.

✓ *Tìm lời giải:* a) Bậc của đa thức một biến (khác với đa thức không) là số mũ cao nhất của biến. $A(x)$ có bậc là 5 nên hệ số của x^6 trong đa thức rút gọn phải là 0. Hệ số cao nhất chính là hệ số của x^5 và hệ số tự do chính là $(c-10)$ của đa thức rút gọn. Từ đó tìm ra a, b, c.

b) $A(m)$ là giá trị của $A(x)$ khi thay $x=m$.

Giải

a) $A(x)=6x^6-(a-12)x^6+11x^5+(b-2)x^5+4cx^4+0,5ax^3-bx^3-5x^2+(a-c)x+bx+c-10$

$$=(-a+18)x^6+(b+9)x^5+4cx^4+(0,5a-b)x^3-5x^2+(a-c+b)x+(c-10)$$

Ta có $\begin{cases}-a+18=0\\ b+9=19\\ c-10=-15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=18\\ b=10\\ c=-5\end{cases}$

$$A(x)=19x^5-20x^4-x^3-5x^2+33x-15$$

b) $A(1)=19-20-1-5+33-15=11$

$$A(-1)=19(-1)^5-20(-1)^4-(-1)^3-5(-1)^2+33(-1)-15$$
$$=-19-20+1-5-33-15=-91$$

Nên $3A(1)-2A(-1)=3.11-2.(-91)=33+182=215$.

Ví dụ 4: Cho $f(x)=2x+10\left(x^3-1\right)+20x^6-5\left(x^7+x^5\right)+1,5x^4-10+6x$

và $g(x)=2\left(x^3+x^5\right)-5x^7-7x^2-11x^3+2,5x^4-9+4,2x^2+1,5x^4+13x^8$.

a) Thu gọn và sắp xếp theo lũy thừa giảm dần của các đa thức;

b) Tính $g(x)+f(x)$ theo cách bỏ dấu ngoặc;

c) Tính $g(x)-f(x)$ theo cách đặt các đơn thức đồng dạng ở cùng một cột.

Giải

a) $f(x)=2x+10x^3-10+20x^6-5x^7-5x^5+1,5x^4-10+6x$

$=-5x^7+20x^6-5x^5+1,5x^4+10x^3+8x-10$.

và $g(x)=2x^3+2x^5-5x^7-7x^2-11x^3+2,5x^4-9+4,2x^2+1,5x^4+13x^8$

$=13x^8-5x^7+2x^5+4x^4-9x^3-2,8x^2-9$.

b)

$g(x)+f(x)=(13x^8-5x^7+2x^5+4x^4-9x^3-2,8x^2-9)+(-5x^7+20x^6-5x^5+1,5x^4+10x^3+8x-10)$

$=13x^8+(-5x^7-5x^7)+20x^6+(2x^5-5x^5)+(4x^4+1,5x^4)+(-9x^3+10x^3)-2,8x^2+8x+(-9-10)$

$=13x^8-10x^7+20x^6-3x^5+5,5x^4+x^3-2,8x^2+8x-19$

c)

$$\begin{array}{l} g(x)=13x^8-5x^7 \qquad\quad +2x^5 \;\; +4x^4 \;\; -9x^3-2,8x^2 \qquad -9 \\ f(x)= \qquad\; -5x^7+20x^6-5x^5+1,5x^4+10x^3 \qquad\quad +8x-10 \\ \hline g(x)-f(x)=13x^8-20x^6+7x^5+2,5x^4-19x^3-2,8x^2-8x+1 \end{array}$$

Ví dụ 5:

a) Tìm đa thức $A(x)=ax+b$ biết rằng $A(-1)=-15$ và $A(2)=-9$.

b) Tìm các hệ số a, b, c của đa thức

$B(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ biết rằng $B(0)=2$; $B(-1)=2$; $B(1)=8$ và $a=2c$

✓ *Tìm cách giải:*

a) $A(-1)=-15$ có nghĩa là -15 là giá trị của $A(x)$ tại $x=-1$.

Thay $x=-1$ vào đa thức sẽ tìm được $-a+b=-15$. Tương tự thay $x=2$ vào đa thức ta sẽ tìm được $2a+b=-9$. Từ hai đẳng thức trên ta tìm được a và b.

b) $B(0)=2$ ta thấy ngay $d=2$. Tìm a, b và c tương tự như câu a) lưu ý là $a=2c$.

Giải

a) Ta có $A(-1)=a(-1)+b=-a+b=-15 \Rightarrow b=a-15$

$A(2)=a.2+b=-9$ hay $2a+b=-5$

Thay $b=a-15$ vào ta có $2a+a-15=-9 \Rightarrow 3a=6$

$\Rightarrow a=2; b=2-15=-13$.

Vậy $A(x)=2x-13$.

b) $B(0)=a.0^2+b.0+c.0+d=2$ nên $d=2$ và do $a=2c$ nên

$B(1)=a.1^3+b.1^2+c.1+2=8\Rightarrow a+b+c=6\Rightarrow 3c+b=6$ (1)

$B(-1)=a(-1)^3+b(-1)^2+c(-1)+2=2\Rightarrow -a+b-c=0$

$\Rightarrow -3c+b=0$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 2b=6\Rightarrow b=3$

Thay $b=3$ vào (1) ta có: $3c+3=6\Rightarrow c=1$. Do $a=2c$ nên $a=2$.

Vậy đa thức là $B(x)=2x^3+3x^2+x+2$.

Ví dụ 6: Cho đa thức $C(x)=2015x^2+mx+n$ (m và n là các hằng số)

Biết $C(-1)=2018$ và $C(2)=8069$. Tính $\dfrac{C(-2)-C(1)}{671}$.

✓ *Tìm cách giải:* Từ $C(-1)=2018$ và $C(2)=8069$ ta tìm được các hệ số m và n của đa thức. Từ đó tính $C(1); C(-2)$ và giá trị biểu thức cần tìm.

Giải

Ta có $C(-1)=2015(-1)^2+m(-1)+n=2018\Rightarrow n=3+m$

và $C(2)=2015.2^2+m.2+n=8069\Rightarrow 2m+n=9$ thay $n=3+m$ vào ta có

$2m+(3+m)=9\Leftrightarrow 3m=6\Leftrightarrow m=2; n=5$.

Vậy $C(x)=2015\text{x}^2+2x+5$.

$C(1)=2015.1^2+2.1+5=2022$.

$C(-2)=2015.(-2)^2+2.(-2)+5=8061$.

$\dfrac{C(-2)-C(1)}{671}=\dfrac{8061-2022}{671}=9$.

Ví dụ 7: Hai đa thức đồng nhất (ký hiệu $\equiv$) là hai đa thức có giá trị bằng nhau với mọi giá trị của biến. hãy xác định a, b, c để hai đa thức sau là hai đa thức đồng nhất:

$f(x)=ax^2+10(x+x^2)-76x-(36x^2+2x)+2019$

$g(x)=15x^2+(3-b)x+8x-9x^2+c+2018$.

✓ *Tìm lời giải:* Để hai đa thức đồng nhất (tức là hai đa thức có giá trị bằng nhau với mọi giá trị của biến) thì các hệ số tương ứng với mỗi lũy thừa cùng bậc của biến phải bằng nhau. Do đó trước hết rút gọn từng đa thức và tìm a, b, c để hệ số tương ứng của mỗi lũy thừa cùng bậc của biến của hai đa thức bằng nhau.

Giải

Ta có: $f\left(x\right)=ax^2+10\left(x+x^2\right)-76x-\left(36x^2+2x\right)+2019$

$=ax^2+10x^2-36x^2-66x-2x+2019$

$=\left(a-26\right)x^2-68x+2019$

$g\left(x\right)=15x^2+\left(3-b\right)x+8x-9x^2+c+2018$

$=6x^2+\left(11-b\right)x+c+2018$

Để $f\left(x\right)\equiv g\left(x\right)$ ta phải có $\begin{cases}a-26=6\\11-b=-68\\2019=c+2018\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=32\\b=79\\c=1\end{cases}$.

Ví dụ 8: Dạng tổng quát của đa thức một biến là:

$f\left(x\right)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$.

(a_n; a_{n-1}; ...; a_2; a_1; a_0 là các hằng số)

a) Chứng minh rằng tổng các hệ số của đa thức $f\left(x\right)$ chính là giá trị của đa thức đó tại $x=1$;

b) Chứng minh rằng giá trị của đa thức $f\left(x\right)$ tại $x=-1$ bằng tổng các hệ số của các lũy thừa bậc chẵn của biến trừ đi tổng các hệ số của các lũy thừa bậc lẻ của biến.

✓ *Tìm lời giải:*

a) Tìm giá trị của đa thức đó tại $x=1$; nhận xét kết quả rồi rút ra kết luận.

b) Tìm giá trị của đa thức đó tại $x=-1$; lưu ý lũy thừa bậc chẵn của (-1) là số (+1) và lũy thừa bậc lẻ của (-1) là (-1). Xét hai trường hợp: n chẵn và n lẻ; nhận xét kết quả rồi rút ra kết luận.

Giải

a) Ta có : $f\left(1\right)=a_n.1^n+a_{n-1}.1^{n-1}+a_{n-2}.1^{n-2}+...+a_3.1^3+a_2.1^2+a_1.1+a_0$

$=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+...+a_3+a_2+a_1+a_0$.

Vậy tổng các hệ số của đa thức $f\left(x\right)$ chính là giá trị của đa thức đó tại $x=1$.

b) Với n chẵn ta có:

$f\left(-1\right)=a_n.\left(-1\right)^n+a_{n-1}.\left(-1\right)^{n-1}+a_{n-2}.\left(-1\right)^{n-2}+...+a_3.\left(-1\right)^3+a_2.\left(-1\right)^2+a_1.\left(-1\right)+a_0$

$=a_n-a_{n-1}+a_{n-2}-...-a_3+a_2-a_1+a_0$

$=\left(a_0+a_2+a_4+...+a_{n-2}+a_n\right)-\left(a_1+a_3+...+a_{n-3}+a_{n-1}\right)$

Với n lẻ ta có:

$$f(-1) = a_n.(-1)^n + a_{n-1}.(-1)^{n-1} + a_{n-2}.(-1)^{n-2} + ... + a_3.(-1)^3 + a_2.(-1)^2 + a_1.(-1) + a_0$$
$$= -a_n + a_{n-1} - a_{n-2} + ... - a_3 + a_2 - a_1 + a_0$$
$$= (a_0 + a_2 + a_4 + ... + a_{n-3} + a_{n-1}) - (a_1 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_n)$$

Vậy giá trị của đa thức $f(x)$ tại $x=-1$ bằng tổng các hệ số của các lũy thừa bậc chẵn của biến trừ đi tổng các hệ số của các lũy thừa bậc lẻ của biến.

C. Bài tập áp dụng

17.1. Cho hai đa thức: $E = 2{,}5x^2 - \frac{1}{6}y^5 + 6xy - \frac{1}{3}y^5$ và $F = 7{,}5x^2 - 2xy - 1{,}5y^5$.

a) Tính $E+F$ sau đó tìm giá trị của tổng tại $|x| = 2;\ y=-1$;

b) Tính $E-F$ sau đó tìm giá trị của hiệu tại $x = y-1; |y-2| = 1$,

17.2*.

a) Thu gọn đa thức sau:

$$D = (x^2 - 2x^2y) + (2x^2 - 4x^2y) + (3x^2 - 6x^2y) + ... + (10x^2 - 20x^2y)$$

b) Cho $g(x-1) = 2x + 2017$ với mọi x

Tính tổng $g(x) + g(x+1) + g(x+2) + ... + g(x+99)$.

17.3. Tìm các đa thức M và N biết:

a) $M + (15x^2 - 22y^2) = 16x^2 - 25xy - 32y^2$;

b) $(47{,}5x^2y - 6{,}8xy^2 + 1{,}2xy) - N = 1{,}2xy + 22{,}5x^2y - 1{,}8xy^2$.

17.4. Cho các đa thức: $T = 2x^2 - y^2 + 2xy + 2x - 5y + 3$;

$$U = 2x^2 - 2y^2 + 4xy - 2x + 4y - 3$$

Tìm đa thức R; S và V sao cho:

a) $S - U = T$;

b) $T + V = U$;

c) $R - (T - U) = 5x^2 - 4xy - y^2$.

17.5. Cho đa thức $P(x) = 12{,}5 - 3{,}5x^5 - 28x^3 + 15x^6 + 8x^3 - 16x - 5x^4 + 4{,}5x^5 - 4x^2 + 19x^8$

a) Thu gọn và sắp xếp đa thức sau theo lũy thừa giảm dần của biến.

b) Tìm hệ số cao nhất, hệ số tự do, hệ số của x^5, hệ số của x^7 trong $P(x)$ với

$P(x)=12,5-3,5x^5-28x^3+15x^6+8x^3-16x-5x^4+4,5x^5-4x^2+19x^8$.

17.6. Cho các đa thức:

$Q(x)=15,4x^3-2,4x^7+1,2x^4+6x^8+2,8x^4+7,2x^2-6x+(5+b)-1\frac{2}{3}x^5$

$G(x)=x^2-3,7x^4+ax^8-2,3x^4+7,5x^6-5,6x^7-2x-(3+a-4b)-2\frac{1}{3}x^5$.

a) Với a, b là hằng số, thu gọn rồi sắp xếp Q(x), G(x) theo lũy thừa giảm dần của biến số.

Tính Q(x) + G(x) rồi sắp xếp tổng theo lũy thừa tăng dần của biến số.

b) Tìm a và b biết hệ số cao nhất và hệ số tự do đều là 2018.

17.7*. Tính giá trị các đa thức sau tại $|x|=1$:

a) $f(x)=x+2x^2+3x^3+...+2018x^{2018}+2019x^{2019}$

b) $g(x)=2x+4x^2+6x^3+8x^4+...+200x^{100}+202x^{101}$

17.8. Cho $A(x)=2x^6+12x^5-2,5x^3+3x^4-7,5x^3-2x^2-6x+5x^2+5$

$B(x)=3x^6+3x-2,8x^2-6x^3+2x^5+0,8x^2+15$.

a) Tính $2A(x)+3B(x)$;

b) Tính $A(x)-B(x)$;

c) Tính $B(x)-A(x)$;

d) Nhận xét về các hệ số của $A(x)-B(x)$ với $B(x)-A(x)$.

17.9. Cho $C(x)=5x^4-4,8x^3+2,5x^2-16x+25$.

Tìm đa thức $D(x)$; $E(x)$; $F(x)$ sao cho:

a) $C(x)+D(x)=2x^5-4,8x^3+4x+20$;

b) $C(x)-E(x)=4x^3-5,5x^2+6x$;

c) $F(x)-C(x)+12x^5-4,5x^3=-6,5x^2+4,5x+18$.

17.10. Cho $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{2018}x^{2018}+a_{2019}x^{2019}$;

$g(x)=b_0+2b_1x+3b_2x^2+...+2019b_{2018}x^{2018}+2020b_{2019}x^{2019}$

với $a_0, a_1, ..., a_{2018}, a_{2019}, b_0, b_1, ..., \text{b}_{2018}, b_{2019}$ là các hằng số

a) Tính $2f(1)+g(1)$;

b) $f(-1)-g(-1)$;

c) Tính $f(n)+g(n)$ với n là hằng số.

17.11. Tìm nghiệm của các đa thức sau:

a) $(x-1)+(x-2)+(x-3)+...+(x-99)+(x-100)$;

b) $3x^2-\sqrt{8}x$.

17.12. Chứng minh các đa thức $f(x)=2x^2+5,2$ và $g(x)=-(x-3)^2-8$ không có nghiệm.

17.13. Tìm nghiệm các đa thức sau:

a) $h(x)=(x-2,5)(x+2,5)$;

b) $k(x)=(2x+1)(x-7)(x-5)(2x-9)(4x-30)$

c) $p(x)=\left(x+2\sqrt{5}\right)\left(x^2+9\right)$

d) $q(x)=x^2-8$.

17.14. Chứng minh:

a) Nếu $x=1$ là một nghiệm của đa thức

$A(x)=a_{10}x^{10}+a_9x^9+...+a_2x^2+a_1x+a_0$ thì $a_{10}+a_9+...+a_2+a_1+a_0=0$;

b) Nếu đa thức $B(y)=b_{10}y^{10}+b_9y^9+...+b_3y^3+b_2y^2+b_1y+b_0$

có $b_{10}+b_8+b_6+b_4+b_2+b_0=b_9+b_7+b_5+b_3+b_1$ thì $y=-1$ là một nghiệm của đa thức.

17.15. Tìm giá trị của m biết đa thức:

$f(y)=14y^4-5my^3+6my^2+8m(y+1)$ có một nghiệm là $y=-2$.

17.16*. Cho đa thức $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+4a\ (a\neq 0)$.

a) Tìm quan hệ giữa các hệ số a và c; b và d của đa thức $f(x)$ để $f(x)$ có hai nghiệm là $x=2$ và $x=-2$.

Thử lại với $a=3; b=4$;

b) Với $a=1; b=1$. Hãy cho biết $x=1$ và $x=-1$ có phải là nghiệm của đa thức vừa tìm?

17.17. Hãy xác định a, b, c, d để hai đa thức sau là hai đa thức đồng nhất:

$f(x) = 16x^3 + 2bx^2 + 8x - 5bx - 10(x^2 - 2x) + 24$;

$g(x) = (a-6)x^3 - 15x^2 + (2-3b)x + 3cx + x^2 + 6.(c-d)$.

17.18. Cho số $\overline{abc}$. Ta gọi số có ba chữ số mà vị trí các chữ số a; b; c đổi chỗ cho nhau (chẳng hạn $\overline{bac}$) là một hoán vị của nó. Tìm số $\overline{abc}$ có ba chữ số đều khác nhau và khác 0 có $a < b < c$. Biết tổng của số ấy với tất cả các hoán vị của nó là 1998.

17.19. Tìm tổng tất cả các nghiệm của đa thức:

$$F(x) = \left(x^2 - \frac{1}{100^2}\right)...\left(x^2 - \frac{1}{3^2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{2^2}\right)(x^2 - 1)(x^2 - 2^2)(x^2 - 3^2)...(x^2 - 100^2).$$

17.20. Tìm tổng các hệ số của đa thức sau khi bỏ dấu ngoặc biết:

a) $f(x) = (-3x^4 + 4x^3 - 9x^2 + 6x + 1)^{2019}$;

b) $g(x) = (19x^2 - 8x - 10)^{1945}.(30x^3 + 4x^2 + 1975x - 2010)^{2018}$.

c) $h(x) = 81 + 77x + 73x^2 + 69x^3 + 65x^4 + ... + 9x^{18} + 5x^{19} + x^{20}$.

17.21*. Cho đa thức $f(x) = ax + b$ với $a, b \in R$ và $a \neq 0$.

a) Chứng minh rằng nếu đa thức có nghiệm là $x = x_0$ thì $f(x) = a(x - x_0)$;

b) Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in R$ và $a \neq 0$ nếu có nghiệm -1 thì $b = a + c$.

17.22. Cho đa thức $Q(x) = ax^2 + bx + c$ với $(a, b, c) \in R$.

Biết $Q(0), Q(1), Q(2)$ là các số nguyên;

a) Chứng minh rằng c, a+b, 2a là các số nguyên;

b) Chứng minh rằng với mọi x là số nguyên thì $Q(x)$ luôn là một số nguyên.

(Đề thi vào trường THPT chuyên tỉnh Hà Tây năm học 2006-2007)

17.23. Cho hai đa thức:

$P(x) = 2x^5 - 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 5x - 1$

$Q(x) = -x^5 - 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 5x - 2007$.

Tính giá trị của $P(x)-Q(x)$ biết rằng $\dfrac{2008\times 2010-1}{2007+2008\times 2009}(x+1)=2$.

(Đề khảo sát chất lượng học sinh giỏi lớp 7 huyện Thường Tín Hà Nội, năm học 2008-2009)

17.24. Cho hai đa thức: $f(x)=4x^2+3x+1$ và $g(x)=3x^2-2x+1$

a) Tính $h(x)=f(x)-g(x)$;

b) Tìm nghiệm của đa thức $h(x)$;

c) Tính giá trị của đa thức $h(x)$

với $\left(x^2-9\right)^{2011}=\left(\dfrac{3}{4}-81\right)\left(\dfrac{3^2}{5}-81\right)^2\left(\dfrac{3^3}{6}-81\right)^3\ldots\left(\dfrac{3^{2010}}{2013}-81\right)^{2010}$.

17.25. Cho đa thức $f(x)=ax^2+bx+c$

a) Tính $f(1)$; $f(-2)$;

b) Cho biết $5a-b+2c=0$. Chứng minh rằng $f(1)\times f(2)\le 0$;

c) Cho $a=1; b=2; c=3$. Chứng minh rằng khi đó đa thức $f(x)$ không có nghiệm.

17.26. Cho đa thức $P(x)$ thỏa mãn $P(x)+3P(2)=5x^2$ với mọi giá trị của x. Tính P(3).

(Đề thi Olympic Toán Tuổi Thơ 2012)

17.27. Cho đa thức $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ với a là số nguyên dương, biết: $f(5)-f(4)=2012$. Chứng minh $f(7)-f(2)$ là hợp số.

(Đề thi tuyển sinh vào THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP Hồ Chí Minh, năm học 2012-2013).

17.28. Tìm nghiệm của đa thức $f(x)=\left|3-|x-1|\right|-2x$.

(Đề thi học sinh giỏi Toán lớp 7 huyện Yên Lạc, Vĩnh Phúc, năm học 2012-2013)

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

17.1.

a) $E+F=10x^2+4xy-2y^5$;

Nếu $|x|=2$ ta có $x=\pm 2$.

+ Với $x=2$ và $y=-1$.

Ta có: $E+F=10.2^2+4.2.(-1)-2(-1)^5=34$.

+ Với $x=-2$ và $y=-1$.

Ta có: $E+F=10.(-2)^2+4.(-2).(-1)-2.(-1)^5=50$.

b) $E-F=-5x^2+8xy+y^5$;

Nếu $|y-2|=1$ ta có $y-2=\pm 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=3 \\ y=1 \end{array}\right.$

+ Với $y=3$ thì $x=2$.

Ta có: $E-F=-5.2^2+8.2.3+3^5=271$.

+ Với $y=1$ thì $x=0$.

Ta có: $E-F=1^5=1$.

17.2*.

a) *Cách 1:*

$$D=(1+2+3+...+10)x^2-(2+4+6+...+20)x^2y=55x^2-110x^2y$$

Cách 2:

$$D=\left(x^2-2x^2y\right)+2\left(x^2-2x^2y\right)+3\left(x^2-2x^2y\right)+...+10\left(x^2-2x^2y\right)$$

$$=(1+2+3+...+10)\left(x^2-2x^2y\right)$$

$$=55\left(x^2-2x^2y\right)=55x^2-110x^2y.$$

b) Do $g(x-1)=2x+2017$ với mọi x nên:

Đặt $y=x-1$ thì $y+1=x$ khi đó $g(y)=2(y+1)+2017=2y+2019$.

Vậy $g(x)=2x+2019$.

Ta có: $g(x)+g(x+1)+g(x+2)+...+.g(x+99)$

$$=2x+2019+\left[2(x+1)+2019\right]+\left[2(x+2)+2019\right]+...+\left[2(x+99)+2019\right]$$

$$=2x.100+(2+4+6+...+198)+2019.100$$

$$=200x+(2+198).99:2+201900=200x+9900+201900$$

$=200x+211800$

17.3.

a) $M=\left(16x^2-25xy-22y^2\right)-\left(15x^2-22y^2\right)=x^2-25xy$

b) $N=\left(47,5x^2y-6,8xy^2+1,2xy\right)-\left(1,2xy+22,5x^2y-1,8xy^2\right)$

$=25x^2y-5xy^2$

17.4.

a) $S=T+U=4x^2-3y^2+6xy-y$.

b) $V=U-T=-y^2+2xy-4x+9y-6$.

c) $R=5x^2-4xy-y^2-\left(U-T\right)=5x^2-4xy-y^2-V$

$=5x^2-6xy+4x-9y+6$

17.5.

a) $P(x)=19x^8+15x^6+x^5-5x^4-20x^3-4x^2-16x+12,5;$

b) Hệ số cao nhất là 19; hệ số tự do là 12,5; hệ số của x^5 là 1; hệ số của x^7 là 0

17.6.

a) $Q(x)=6x^8-2,4x^7-\frac{5}{3}x^5+4x^4+15,4x^3+7,2x^2-6x+(5+b)$

$G(x)=ax^8-5,6x^7+7,5x^6-\frac{7}{3}x^5-6x^4+x^2-2x-(3+a-4b)$

$Q(x)+G(x)=(2-a+5b)-8x+8,2x^2+15,4x^3-2x^4-4x^5+7,5x^6-8x^7+(a+6)x^8$.

b) Ta có: $a+6=2018 \Leftrightarrow a=2012$.

$2-a+5b=2018 \Leftrightarrow 5b=2018+2012-2 \Leftrightarrow b=805,6$.

17.7. $|x|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$

a) $f(1)=1+2+3+...+2018+2019=(1+2019).2019=2039190$.

$f(-1)=-1+2-3+4-...-2017+2018-2019=1009-2019=-1010$

b) $g(1)=2+4+6+...+200+202=\frac{(2+202).101}{2}=10302$

$g(-1) = (-2+4)+(-6+8)+...+(-198+200)-202$

Có 50 cặp mỗi cặp có kết quả bằng 2 vậy $g(-1) = 100 - 202 = -102$.

17.8. $A(x) = 2x^6 + 12x^5 + 3x^4 - 10x^3 + 3x^2 - 6x + 5$

$B(x) = 3x^6 + 2x^5 \qquad -6x^3 - 2x^2 + 3x + 15$

a) $2A(x) + 3B(x) = 13x^6 + 30x^5 + 6x^4 - 38x^3 - 3x + 55$.

b) $A(x) - B(x) = -x^6 + 10x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 9x - 10$.

c) $B(x) - A(x) = x^6 - 10x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 9x + 10$

d) Dấu các hệ số của các lũy thừa tương ứng của biến ngược dấu nhau.

17.9.

a) $D(x) = 2x^5 - 5x^4 - 2,5x^2 + 20x - 5$.

b) $E(x) = 5x^4 - 8,8x^3 + 8x^2 - 22x + 25$.

c) $F(x) = -6,5x^2 + 4,5x + 18 - 12x^5 + 4,5x^3 + 5x^4 - 4,8x^3 + 2,5x^2 - 16x + 25$

$= -12x^5 + 5x^4 - 0,3x^3 - 4x^2 - 11,5x + 43$.

17.10.

a) $2f(1) + g(1) = (2a_0 + b_0) + (2a_1 + 2b_1) + (2a_2 + 3b_2) + ... + (2a_{2018} + 2019b_{2018}) + (a_{2019} + 2020b_{2019})$;

b)

$f(-1) - g(-1) = (a_0 - b_0) + (2b_1 - a_1) + (a_2 - 3b_2) + (4b_3 - a_3) + ... + (a_{2018} - 2019b_{2018}) + (2020b_{2019} - a_{2019})$

c)

$f(n) + g(n) = (a_0 + b_0) + (a_1 + 2b_1)n + (a_2 + 3b_2)n^2 + ... + (a_{2018} + 2019b_{2018})n^{2018} + (a_{2019} + 2020b_{2019})n^{2019}$

17.11.

a) $x = 50,5$

b) $x = 0$ và $x = \dfrac{\sqrt{8}}{3}$.

17.12.

Do $x^2 \geq 0$ với mọi giá trị của x (ký hiệu: $\forall x$) nên $2x^2 + 5,2 \geq 5,2$ hay $2x^2 + 5,2 \neq 0 \; \forall x$ nên đa thức $f(x) = 2x^2 + 5,2$ không có nghiệm.

Tương tự: $-(x-3)^2-8\neq 0\ \forall x$ nên $g(x)$ không có nghiệm

17.13.

a) $x=2,5$ và $x=-2,5$ là hai nghiệm của $h(x)$;

b) $x=-0,5;\ x=7;\ x=5;\ x=-4,5$ và $x=7,5$ là năm nghiệm của $k(x)$;

c) $x=-2\sqrt{5}$ là nghiệm của $p(x)$.

d) $x^2-8=0\Leftrightarrow x^2=8\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{8} \\ x=-\sqrt{8}\end{array}\right.$.

17.14.

a) $x=1$ là nghiệm của đa thức $A(x)$ nên $A(1)=0$

hay $a_{10}.1^{10}+a_9.1^9+...+a_3.1^3+a_2.1^2+a_1.1+a_0=0$

hay $a_{10}+a_9+...+a_2+a_1+a_0=0$

b) Theo đầu bài: $b_{10}+b_8+b_6+b_4+b_2+b_0=b_9+b_7+b_5+b_3+b_1$

Hay $b_{10}-b_9+b_8-b_7+b_6-b_5+b_4-b_3+b_2-b_1+b_0=0$

Xét $B(-1)=b_{10}.(-1)^{10}+b_9.(-1)^9+b_8.(-1)^8+b_7.(-1)^7+b_6.(-1)^6+b_5.(-1)^5$

$+b_4.(-1)^4+b_3.(-1)^3+b_2.(-1)^2+b_1.(-1)+b_0$

$=b_{10}-b_9+b_8-b_7+b_6-b_5+b_4-b_3+b_2-b_1+b_0=0$

Chứng tỏ (-1) là một nghiệm của $B(y)$.

17.15.

$y=-2$ là nghiệm thì $f(-2)=0$

Nghĩa là: $14.(-2)^4-5m(-2)^3+6m(-2)^2+8m(-2+1)=0$

Hay $224+40m+24m-8m=0\Leftrightarrow 224+56m=0\Leftrightarrow m=-4$

17.16*.

a) $f(2)=16a+8b+4c+2d+4a=0$ (1)

và $f(-2)=16a-8b+4c-2d+4a=0$ (2)

Cộng (1) và (2) $\Rightarrow 40a+8c=0$ hay $c=-5a$

Trừ (1) và (2) $\Rightarrow 16b+4d=0$ hay $d=-4b$

Ta có: $f(x) = ax^4 + bx^3 - 5ax^2 - 4bx + 4a$.

Thử lại với $a = 3; b = 4$ thì $c = -15; d = -16$.

Ta có: $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 15x^2 - 16x + 12$

$f(2) = 48 + 32 - 60 - 32 + 12 = 0$ chứng tỏ $x = 2$ là nghiệm của đa thức.

$f(-2) = 48 - 32 - 60 + 32 + 12 = 0$ chứng tỏ $x = -2$ là nghiệm của đa thức.

b) $a = 1; b = 1$ ta có: $f(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 - 4x + 4 = 0$.

$f(1) = -3$ nên $x = 1$ không phải là nghiệm của $f(x)$.

$f(-1) = 3$ nên $x = -1$ không phải là nghiệm của $f(x)$.

17.17.

$f(x) = 16x^3 + (2b - 10)x^2 + (28 - 5b)x + 24$

$g(x) = (a - 6)x^3 - 14x^2 + (2 - 3b + 3c)x + 6.(c - d)$

Để $f(x) \equiv g(x)$ ta phải có $\begin{cases} a - 6 = 16 \\ 2b - 10 = -14 \\ 28 - 5b = 2 - 3b + 3c \\ 6.(c - d) = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 22 \\ b = -2 \\ c = 10 \\ d = 6 \end{cases}$

17.18. $(a, b, c \in N; 0 < a, b, c < 9)$

Ta có: $\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} = 222(a + b + c) = 1998$

$\Rightarrow a + b + c = 9$

$\Rightarrow a = 1; b = 2; c = 6.\quad \overline{abc} = 126$

$\Rightarrow a = 1; b = 3; c = 5.\quad \overline{abc} = 135$

$\Rightarrow a = 2; b = 3; c = 4.\quad \overline{abc} = 234$.

17.19. Nghiệm: $x \in \left\{\pm\frac{1}{100};...;\pm\frac{1}{3};\pm\frac{1}{2};\pm1;\pm2;\pm3;...;\pm100\right\}$

Tổng tất cả các nghiệm là 0

17.20. Tổng các hệ số của đa thức bằng giá trị của đa thức đó tại $x = 1$.

a) $f(1) = \left(-3.1^4 + 4.1^3 - 9.1^2 + 6.1 + 1\right)^{2019} = (-1)^{2019} = -1$.

b) $g(1)=\left(19.1^2-8.1-10\right)^{1945}.\left(30.1^3+4.1^2+1975.1-2010\right)^{2018}$

$=1^{1945}.(-1)^{2018}=1$.

c) $h(1)=81+77+73+69+65...+9+5+1=\dfrac{(81+1).21}{2}=861$.

17.21.

a) Đa thức có nghiệm là $x=x_0$ nghĩa là $f\left(x_0\right)=ax_0+b=0$

hay $x_0=-\dfrac{b}{a}$. Mà $f\left(x\right)=ax+b=a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)=a\left(x-x_0\right)$ (đpcm).

b) $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ với $a,\, b,\, c\in R$ và $a\neq 0$ có nghiệm -1 có nghĩa là:

$f\left(-1\right)=a\left(-1\right)^2+b\left(-1\right)+c=0$ hay $a-b+c=0$

Suy ra $b=a+c$ (đpcm)

17.22.

a) Ta có $Q(0)\in Z$ nên $c\in Z;\, Q(1)=a+b+c\in Z\Rightarrow a+b\in Z$.

$Q(2)=4a+2b+c\in Z$ mà $2(a+b+c)\in Z\Rightarrow(4a+2b+c)-2(a+b+c)\in Z$

hay $2a-c\in Z\Rightarrow 2a\in Z\Rightarrow a\in Z$ và $b\in Z$.

b) Với $x\in Z$ thì $x^2-x\in Z$, mà $a\in Z$ nên $a\left(x^2-x\right)\in Z;\, a+b\in Z$ nên $(a+b)x\in Z$.

Do đó $Q(x)=a\left(x^2-x\right)+(a+b)x+c=ax^2+bx+c\in Z,\ \forall x\in Z$

17.23. $P(x)-Q(x)=3x^5+2006$

$$\frac{2008\times 2010-1}{2007+2008\times 2009}=\frac{2008\times(2009+1)-1}{2007+2008\times 2009}=\frac{2008\times 2009+2007}{2007+2008\times 2009}=1$$

Nên $x+1=2\Rightarrow x=1$ và $P(x)-Q(x)=3x^5+2006=2009$.

17.24.

a) $h(x)=x^2+5x$.

b) $h(x)=x(x+5)=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=5$.

c) Do $\left(\dfrac{3^6}{9}-81\right)^6=0$ nên $\left(x^2-9\right)^{2011}=0$

$\Leftrightarrow x^2-9=0\Leftrightarrow x^2=9\Leftrightarrow x=\pm 3$

Từ đó $h(3)=24;\ h(-3)=-6$.

17.25.

a) $f(1)=a+b+c;\ f(-2)=4a-2b+c$.

b) $f(1)+f(-2)=5a-b+2c=0 \Rightarrow f(1)=-f(-2)$

$f(1)\times f(2)=-\left[f(1)\right]^2 \le 0$

c) Với $a=1;\ b=2;\ c=3$

$f(x)=x^2+2x+3=(x^2+x)+(x+1)+2=x(x+1)+(x+1)+2$

$=(x+1)(x+1)+2=(x+1)^2+2>0\ \forall x \Rightarrow f(x)$ không có nghiệm.

17.26.

Từ $P(x)+3P(2)=5x^2 \Rightarrow P(2)+3P(2)=20 \Rightarrow 4P(2)=20 \Rightarrow P(2)=5$.

Như vậy $P(x)=5x^2-15 \Rightarrow P(3)=5.9-15=30$.

17.27.

$f(5)-f(4)=(125a+25b+5c+d)-(64a+16b+4c+d)=2012$

$\Leftrightarrow 61a+9b+c=2012$.

$f(7)-f(2)=(343a+49b+7c+d)-(8a+4b+2c+d)$

$=335a+45b+5c=305a+45b+5c+30a$

$=5(61a+9b+c)+30a=5.2012+30a$

$=10(1006+3a)$.

Vì a nguyên dương nên $10(1006+3a) \vdots 10$

Vậy $f(7)-f(2)$ là hợp số.

17.28. Nếu $x<0$ thì $f(x)>0$ đa thức vô nghiệm.

+ Với $0\le x<1$ thì $f(x)=|2+x|-2x=2-x=0 \Leftrightarrow x=2$ (loại)

+ Với $x\ge 1$ thì $f(x)=|4-x|-2x$

* Với $1\le x\le 4;\ f(x)=4-3x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{4}{3}$ (thỏa mãn)

* Với $x>4;\ f(x)=-x-4=0 \Leftrightarrow x=-4$ (loại)

Vậy nghiệm của $f\left(x\right)$ là $x=\dfrac{4}{3}$.

Chuyên đề 18

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT
CỦA MỘT BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

A. Kiến thức cần nhớ

1. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập hợp D:

a) Nếu $f(x) \ge m$ mà m là một hằng số và $f(x) = m$ tại $x = x_0 \in D$ thì giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là m, đạt được tại $x = x_0$.

Ta viết $\min(f(x)) = m$ tại $x = x_0$.

b) Nếu $f(x) \le n$ mà n là một hằng số và $f(x) = n$ tại $x = x_0 \in D$ thì giá trị lớn nhất của $f(x)$ là n, đạt được tại $x = x_0$. Ta viết $\max(f(x)) = n$ tại $x = x_0$.

B. Một số ví dụ

1. Dạng bài đưa biểu thức về dạng $f(x) \ge m$ hoặc $f(x) \le n$

Ví dụ 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $A(x) = (19x - 5)^2 + 1890$;

b) $B(x) = 3x + \sqrt{15x} - 10$;

c) $C(x) = \sqrt{30 - 4x} + \sqrt{1975}$;

d) $D(x) = \left(x^{2018} + x^{2020} + 2019\right)^{2019}$.

✓ *Tìm cách giải:* Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ ta tìm hằng số m trong tập xác định D của $f(x)$ mà $f(x) \ge m$. Sau đó tìm $x = x_0 \in D$ để $f(x_0) = m$.

a) $(19x - 5)^2$ là bình phương của một biểu thức nên giá trị của nó luôn không âm $\forall x$. Do đó tìm được $(19x - 5)^2 + 1890 \ge ?$. Dấu "=" xảy ra khi nào? tại $x = ?$

b), c) Điều kiện để biểu thức có nghĩa?

Lưu ý: Căn bậc hai không âm của a được kí hiệu là $\sqrt{a}$. Khi viết $\sqrt{a}$ phải có $a \ge 0$.

d) Nhận xét về bậc của các lũy thừa của x và giá trị của cả biểu thức.

Giải

a) Do $(19x - 5)^2 \ge 0, \forall x$ nên $(19x - 5)^2 + 1890 \ge 1890, \forall x$.

$$A(x) = 1890 \Leftrightarrow (19x - 5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{19}.$$

Ta có $A(x) \ge 1890, \forall x$; dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{5}{19}$.

Vậy $\min A(x)=1890$ tại $x=\dfrac{5}{19}$.

b) Điều kiện để $\sqrt{15x}$ có nghĩa: $x\ge 0$.

Ta có: $B(x)=3x+\sqrt{15x}-10\ge -10$ do $x\ge 0$ và $\sqrt{15x}\ge 0$ nên

$B(x)\ge -10$ với $x\ge 0$; dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=0$.

Vậy min $B(x)=-10$ tại $x=0$.

c) Điều kiện để $\sqrt{30-4x}$ có nghĩa: $30-4x\ge 0\Leftrightarrow x\le 7,5$

Ta có: $C(x)=\sqrt{30-4x}+\sqrt{1975}\ge\sqrt{1975}$ do $\sqrt{30-4x}\ge 0$ nên

$C(x)\ge\sqrt{1975}$. Lại có $C(7,5)=\sqrt{1975}$

Do đó $C(x)\ge\sqrt{1975}$ với $x\le 7,5$; dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=7,5$.

Vậy min $C(x)=\sqrt{1975}$ tại $x=7,5$.

d) Ta có $x^{2018}\ge 0; x^{2020}\ge 0,\forall x$ nên $\left(x^{2018}+x^{2020}+2019\right)^{2019}\ge 2019^{2019},\forall x$. Lại có $D(0)=2019^{2019}$.

Do đó $D(x)\ge 2019^{2019}\,\forall x$; dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=0$.

Vậy min $D(x)=2019^{2019}$ tại $x=0$.

Ví dụ 2: Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $E(y)=1945-(2y+9)^2$;

b) $F(y)=\dfrac{2016}{(y-5)^2+9}$.

✔ *Tìm cách giải:* Tìm giá trị lớn nhất của *f(y)* ta tìm hằng số *n* trong tập xác định *D* của *f(y)* mà $f(y)\le n$. Sau đó tìm $y=y_0\in D$ để $f(y_0)=n$.

a) $(2y+9)^2$ là bình phương của một biểu thức nên giá trị của nó luôn không âm $\forall y$. Do đó $1945-(2y+9)^2$ sẽ như thế nào? Dấu "=" xảy ra khi nào?

Lưu ý $2y+9=0\Leftrightarrow 2y=-9\Leftrightarrow y=-4,5$.

b) Trước hết xét $F(y)=\dfrac{2016}{(y-5)^2+9}$.

Ta có: $(y-5)^2+9\ge 9\ \forall x\Rightarrow\dfrac{1}{(y-5)^2+9}\le\dfrac{1}{9}$

(theo tính chất lấy nghịch đảo: Cho hai số dương *a* và *b*, nếu $a \ge b$ thì $\frac{1}{a} \le \frac{1}{b}$). Từ đó suy ra $\frac{2016}{(y-5)^2+9} \le \frac{2016}{9} = 224$.

Giải

a) $E(y) = 1945 - (2y+9)^2$

Ta có $(2y+9)^2 \ge 0, \forall y$ nên $1945 - (2y+9)^2 \le 1945, \forall y$.

Do đó $E(y) \le 1945, \forall y$. Mặt khác, $E(-4,5) = 1945$ nên $E(y) \le 1945, \forall y$; dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow y = -4,5$.

Vậy max $E(y) = 1945$ tại $y = -4,5$.

b) $F(y) = \frac{2016}{(y-5)^2+9}, \forall$ y, ta có: $(y-5)^2 \ge 0 \Rightarrow (y-5)^2 + 9 \ge 9$

$\Rightarrow \frac{1}{(y-5)^2+9} \le \frac{1}{9}$.

Từ đó suy ra: $\frac{2016}{(y-5)^2+9} \le \frac{2016}{9}$. Mặt khác, $F(5) = \frac{2016}{(5-5)^2+9} = \frac{2016}{9} = 224$

Nên $F(y) \le 224 \forall y$; dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow y = 5$.

Vậy max $F(y) = 224$ tại $y = 5$.

2. Dạng bài mà biến số có giá trị nguyên (hoặc tự nhiên)

Ví dụ 3: Tìm số nguyên x để:

a) Biểu thức *A* đạt giá trị lớn nhất với $A = \frac{2015}{2019-x}$;

b) Biểu thức *B* đạt giá trị nhỏ nhất với $B = \frac{1930}{x-5}$.

✓ *Tìm cách giải:* Với $x \in Z$ thì A và B là những phân số.

Với các phân số dương có tử số dương không đổi thì phân số có giá trị lớn nhất khi mẫu số dương nhỏ nhất.

Với các phân số âm có tử số dương không đổi thì phân số có giá trị nhỏ nhất khi đối của phân số đó có giá trị lớn nhất.

Giải

a) Điều kiện $x \ne 2019$. Ta xét hai trường hợp sau:

* Nếu $x < 2019$ thì $2019 - x > 0$, mà $2015 > 0$ nên $A > 0$.

* Nếu $x > 2019$ thì $2019 - x < 0$, mà $2015 > 0$ nên $A < 0$.

Do đó muốn A_{max} thì phải chọn x sao cho $A > 0$, tức là chọn $x < 2019$.

Khi đó A_{max} khi và chỉ khi $(2019-x)_{min}$ do 2015 là hằng số dương. Ta có $2019-x>0$ mà $x\in Z$ nên $(2019-x)_{min} \Leftrightarrow 2019-x=1$ hay $x=2018$.

Vậy $A=\dfrac{2015}{2019-x}$ đạt giá trị lớn nhất là $2015 \Leftrightarrow x=2018$.

b) Điều kiện $x\neq 5$. Ta xét hai trường hợp sau:

* Nếu $x<5$ thì $x-5<0$, mà $1930>0$ nên $B<0$.

* Nếu $x>5$ thì $x-5>0$, mà $1930>0$ nên $B>0$.

Do đó muốn B_{min} phải chọn x sao cho $B<0$, tức là chọn $x<5$.

Khi đó B_{min} khi số đối của B_{max} hay $\left(\dfrac{1930}{5-x}\right)_{max} \Leftrightarrow (5-x)_{min}$ do 1930 là hằng số dương.

Ta có $5-x>0$ mà $x\in Z$ nên $(5-x)_{min} \Leftrightarrow 5-x=1$ hay $x=4$.

Vậy $B=\dfrac{1930}{x-5}$ đạt giá trị nhỏ nhất là $-1930 \Leftrightarrow x=4$.

Ví dụ 4: Tìm số nguyên y để:

a) Biểu thức C đạt giá trị lớn nhất với $C=\dfrac{58-3y}{19-y}$;

b) Biểu thức D đạt giá trị nhỏ nhất với $D=\dfrac{59-2y}{y-25}$.

✓ *Tìm cách giải:* Với $y\in Z$ thì C và D là những phân số. Ta biến đổi

$$C=\frac{57-3y+1}{19-y}=\frac{3(19-y)+1}{19-y}=3+\frac{1}{19-y}=3+E$$

$$D=\frac{9+50-2y}{y-25}=\frac{9-2(y-25)}{y-25}=\frac{9}{y-25}-2=F-2$$

và lý luận tương tự ví dụ 3.

Giải

a) Điều kiện $y\neq 19$ ta có:

$$C=\frac{57-3y+1}{19-y}=\frac{3(19-y)+1}{19-y}=3+\frac{1}{19-y}=3+E \text{ với } E=\frac{1}{19-y}.$$

* Nếu $y<19$ thì $19-y>0$ mà $1>0$ nên $E>0$.

* Nếu $y>19$ thì $19-y<0$ mà $1>0$ nên $E<0$.

Ta có $C_{max} \Leftrightarrow E_{max}$. Muốn E_{max} thì phải chọn y sao cho $E>0$ tức là chọn $y<19$. Khi đó $E_{max} \Leftrightarrow (19-y)_{min}$ (do 1 là hằng số dương).

Ta có $19-y>0; y\in Z$ nên $(19-y)_{min} \Leftrightarrow 19-y=1 \Leftrightarrow y=18$.

Ta có $\max C = 4$ khi và chỉ khi $y = 18$.

b) Điều kiện $y \neq 25$, ta có:

$$D = \frac{9+50-2y}{y-25} = \frac{9-2(y-25)}{y-25} = \frac{9}{y-25} - 2 = F - 2.$$

Ta xét hai trường hợp sau:

* Nếu $y > 25$ thì $y - 25 > 0$ mà $9 > 0$ nên $F > 0$.

* Nếu $y < 25$ thì $y - 25 < 0$ mà $9 > 0$ nên $F < 0$.

Do đó muốn $F_{\min}$ phải chọn *y* sao cho $F < 0$, tức là chọn $y < 25$.

Khi đó $F_{\min}$ khi số đối của $F_{\max}$ hay $\left(\frac{9}{25-y}\right)_{\max} \Leftrightarrow (25-y)_{\min}$ do 9 là hằng số dương.

Ta có $25 - y > 0$ mà $y \in Z$ nên $(25-y)_{\min} \Leftrightarrow 25 - y = 1$ hay $y = 24$.

Vậy $D = \frac{59-2y}{y-25}$ đạt giá trị nhỏ nhất là $-11 \Leftrightarrow y = 24$.

3. Dạng tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của một biểu thức chứa nhiều biến.

Ví dụ 5:

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$M(x,y,z) = (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 + 4$;

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$P(x,y) = \frac{2016}{(x+2018)^2 + (y-2019)^2 + 224}$;

c) Tìm giá trị lớn nhất của $Q(x,y) = xy$ biết rằng $3(x-y)^2 + 5xy = 180$.

✓ *Tìm cách giải:*

a) Biểu thức có ba biến, xác định với mọi giá trị của *x*,*y* và *z*.

Lưu ý: $(x-1)^2 \geq 0, \forall x \in R; (y+2)^2 \geq 0, \forall y \in R$

và $(z-3)^2 \geq 0 \, \forall z \in R$.

b) Lưu ý tính chất nghịch đảo của số dương. Với *a* và *b* là hai số dương:

Nếu $a \geq b$ thì $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$.

c) Từ $3(x-y)^2 + 5xy = 180$ tìm hệ thức $Q(x,y)$ nhỏ hơn hoặc bằng một hằng số.

Giải

a) $M(x,y,z) = (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 + 4$.

Do $(x-1)^2 \geq 0, \forall x \in R; (y+2)^2 \geq 0, \forall y \in R; (z-3)^2 \geq 0, \forall z \in R$.

Nên $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2+4\ge 4,\forall x\in R,\forall y\in R,\forall z\in R$.

$M(1;-2;3)=(1-1)^2+(-2+2)^2+(3-3)^2+4=4$.

Do đó $M(x,y,z)\ge 4,\forall x\in R,\forall y\in R,\forall z\in R$ dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=1; y=-2; z=3$.

Vậy $\min M(x,y,z)=4$ tại $x=1; y=-2; z=3$.

b) $\forall x\in R,\forall y\in R$ ta có $(x+2018)^2+(y-2019)^2+224\ge 224$

do đó $P(x,y)=\dfrac{2016}{(x+2018)^2+(y-2019)^2+224}\le\dfrac{2016}{224}$.

Mặt khác

$P(-2018;2019)=\dfrac{2016}{(-2018+2018)^2+(2019+2019)^2+224}=\dfrac{2016}{224}=9$.

Ta có $P(x,y)\le\dfrac{2016}{224}=9\,\forall x\in R,\forall y\in R$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=-2018; y=2019$.

c) Do $3(x-y)^2+5xy=180$ nên $Q(x,y)=xy=36-\dfrac{3}{5}(x-y)^2$

Do $\forall x\in R,\forall y\in R$ ta có $\dfrac{3}{5}(x-y)^2\ge 0$ nên $Q(x,y)=36-\dfrac{3}{5}(x-y)^2\le 36$

Và $Q(x,y)=xy=36$ khi và chỉ khi $x=y=6$ hoặc $x=y=-6$.

Vậy $\max Q(x,y)=36$ tại $x=y=6$ hoặc $x=y=-6$.

Ví dụ 6: Cho *a,b* là các số tự nhiên khác 0. Biết $1>\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{7}{10}$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=\dfrac{2020}{a+b}$.

✓ *Tìm cách giải:* *A* là phân số dương có tử số là 2020 không đổi. Vì vậy muốn *A* đạt giá trị lớn nhất thì $(a+b)$ phải đạt giá trị nhỏ nhất. Để tìm $(a+b)_{\min}$ ta phải tìm các giá trị có thể có của *a* và *b* rồi tìm các giá trị nhỏ nhất của *a* và *b*. Ta thấy ngay từ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<1\Rightarrow a;b>1$. Chú ý tính chất nghịch đảo của hai số tự nhiên *m,n* khác 0: $m>n$ thì $\dfrac{1}{m}<\dfrac{1}{n}$

Giải

Do $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<1\Rightarrow a;b>1$ không mất tổng quát giả sử $1<a\le b$

$\Rightarrow 1>\dfrac{1}{a}\ge\dfrac{1}{b}$. Ta có $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\le\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a}$ hay $\dfrac{7}{10}\le\dfrac{2}{a}\Rightarrow a\le 2\dfrac{6}{7}$

Do $a \in N$ và $a > 1$ nên $a = 2$ (1)

Với $a = 2$ ta có $\frac{7}{10} < \frac{1}{2} + \frac{1}{b} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{5} < \frac{1}{b} < \frac{1}{2} \Rightarrow b = \in \{3;4\}$ (2)

Từ (1) và (2), ta có: $\min(a+b) = 2+3 = 5$

Vậy $\max A = \frac{2020}{5} = 404$.

C. Bài tập vận dụng

1. Dạng bài đưa biểu thức về dạng $f(x) \geq m$ hoặc $f(x) \leq n$

18.1. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $f(x) = (1,5x - 4,5)^2 - 12$;

b) $g(x) = 2x + 3\sqrt{3x-6} + 16$;

c) $h(x) = \sqrt{64+2x} - \sqrt{23}$;

d) $p(x) = \left(x^2 + x^4 + x^6 + ... + x^{98} + x^{100} + 2\right)^{2015} + 2^{2015}$.

18.2. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $A(y) = 15 - (30+2y)^2$;

b) $B(y) = \frac{2015}{(4-5y)^2 + 2018}$;

c) $C(y) = \frac{2+4+6+...+198+200}{(10y-5)^2 + (1+3+5+...+17+19)^2 + 100}$;

d) $D(y) = \sqrt{5} - \left(\sqrt{2y-4} - \sqrt{6}\right)^2$.

18.3.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = \frac{5x^2 + 4x^2 + 10}{x^4 + 2}$;

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $T = \frac{2x^4 - 4x^2 + 8}{x^4 + 4}$;

c) Cho *a* là hằng số và $a > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{8y^8 + 2a(y-3)^2 + 2a^2}{4y^8 + a^2}.$$

2. Dạng bài mà biến số có giá trị nguyên (hoặc tự nhiên)

18.4. Tìm số nguyên *x* để:

a) Biểu thức A đạt giá trị lớn nhất với $A = \frac{16}{6-x}$;

b) Biểu thức B đạt giá trị nhỏ nhất với $B=\dfrac{1945}{x-1930}$.

18.5. Tìm số nguyên *y* để:

a) Biểu thức C đạt giá trị lớn nhất với $C=\dfrac{36-3y}{11-y}$;

b) Biểu thức D đạt giá trị nhỏ nhất với $D=\dfrac{21-y}{y-2}$;

18.6. Tìm giá trị của số tự nhiên *n* để phân số $P=\dfrac{11n-47}{2n-9}$ có giá trị lớn nhất.

3. Dạng tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của một biểu thức chứa nhiều biến.

18.7. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $f(x,y)=(x-2)^2+(2y+1)^2-25$;

b) $g(x,y)=(x+y-1)^2+(y-3)^2+4$;

c) $h(x,y)=\dfrac{-2}{6+(2x-y)^2+(x+1)^2}$;

d) $k(x,y,z)=(x+y-2z)^2+(x-y-3)^4+(y-1)^6+5$.

18.8. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $A(x,y)=2017-(11y-7)^2-(x-100)^2$;

b) $B(x,y)=16-(x+y+2)^2-(y^2-9)^2$;

c) $C(x,y)=\dfrac{24}{3+(2x^3-y-1)^2+(x^2-4)^2}$;

d) $D(x,y)=\dfrac{2(x-1)^2+2(y-2)^2+100}{(x-1)^2+(y-2)^2+2}$.

18.9.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$M(x,y,z)=(x+1)^2+2(y-2)^2+3(2z-3)+4$;

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$N(x,y,z)=\dfrac{15}{(2x-4)^2+(y+3)^2+10}+\dfrac{5}{(4z-2016)^2+2}$;

c) Tìm giá trị lớn nhất của $P(x,y)=2xy$ biết rằng $(x-y)^2+0{,}1xy=10$.

18.10. Cho *a*, *b*, *c* là các số nguyên. Biết $a<5b;b<5c$ và $c<25$. Tìm giá trị lớn nhất của tổng $(a+b+c)$.

18.11. Tìm giá trị lớn nhất của tỷ số giữa một số có ba chữ số với tổng các chữ số của nó.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

18.1.

a) $\min f(x) = -12 \Leftrightarrow x = 3$.

b) Điều kiện để căn thức có nghĩa: $x \ge 2$

Ta có: $g(x) = 2x + 3\sqrt{3x-6} + 16 \ge 20$ do $x \ge 2$ và $3\sqrt{3x-6} \ge 0$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 2$. Vậy $\min g(x) = 20 \Leftrightarrow x = 2$.

c) Điều kiện để căn thức có nghĩa: $64 + 2x \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -32$

với $x \ge -32$ thì $\sqrt{64+2x} \ge 0$. Ta có $h(x) = \sqrt{64+2x} - \sqrt{23} \ge -\sqrt{23}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = -32$. Vậy $\min \mathrm{h}(x) = -\sqrt{23} \Leftrightarrow x = -32$.

d) Ta có $\forall x$ thì $x^2 \ge 0; x^4 \ge 0; x^6 \ge 0; ...; x^{98} \ge 0; x^{100} \ge 0;$

nên $p(x) = \left(x^2 + x^4 + x^6 + ... + x^{98} + x^{100} + 2\right)^{2015} + 2^{2015} \ge 2^{2015} + 2^{2015} = 2^{2016}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$.

Vậy $\min p(x) = 2^{2016} \Leftrightarrow x = 0$

18.2.

a) $\max A(y) = 15$ tại $y = -15$.

b) $\forall y$ ta có $(4-5y)^2 \ge 0 \Rightarrow (4-5y)^2 + 2018 \ge 2018$.

Từ đó suy ra $B(y) = \dfrac{2015}{(4-5y)^2 + 2018} \le \dfrac{2015}{2018}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow y = 0,8$

Vậy $\max B(y) = \dfrac{2015}{2018} \Leftrightarrow y = 0,8$.

c) Ta có $2 + 4 + 6 + ... + 198 + 200 = (2 + 200).100 : 2 = 10100$

$(1+3+5+...+17+19)^2 + 100 = \left[(1+19).10:2\right]^2 + 100 = 10100$

$\max C(y) = 1 \Leftrightarrow y = 0,5$;

d) Điều kiện để $\sqrt{2y-4}$ có nghĩa là $2y - 4 \ge 0 \Leftrightarrow y \ge 2$.

Ta có với $y \ge 2$ thì $\left(\sqrt{2y-4} - \sqrt{6}\right)^2 \ge 0$

Do đó $\sqrt{5} - \left(\sqrt{2y-4} - \sqrt{6}\right)^2 \le \sqrt{5}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow y = 5$.

Vậy $\max D = \sqrt{5}$ tại $y = 5$.

18.3.

a) $S=\dfrac{5x^4+4x^2+10}{x^4+2}=\dfrac{5\left(x^4+2\right)+4x^2}{x^4+2}=5+\dfrac{4x^2}{x^4+2}\geq 5$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=0$.

Vậy $\min S=5\Leftrightarrow x=0$.

b) $T=\dfrac{2x^4-4x^2+8}{x^4+4}=\dfrac{2\left(x^4+4\right)-4x^2}{x^4+4}=2-\dfrac{4x^2}{x^4+4}\leq 2$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=0$.

Vậy $\max T=2\Leftrightarrow x=0$.

c) $M=\dfrac{8y^8+2a(y-3)^2+2a^2}{4y^8+a^2}=\dfrac{2\left(4y^8+a^2\right)+2a(y-3)^2}{4y^8+a^2}=2+\dfrac{2a(y-3)^2}{4y^8+a^2}$

Ta có $a>0$ và $4y^8+a^2>0;\forall y$ nên $\dfrac{2a(y-3)^2}{4y^8+a^2}\geq 0\ \forall y\Rightarrow M\geq 2\forall y$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow y=3$

Vậy $\min M=2\Leftrightarrow y=3$.

18.4.

a) Điều kiện $x\neq 6$. Nếu $x<6$ thì $6-x>0$, mà $16>0$ nên $A>0$. Nếu $x>6$ thì $6-x<0$, mà $16>0$ nên $A<0$. Do đó muốn $A_{\max}$ thì phải chọn $x<6$ để $A>0$. Khi đó $A_{\max}$ khi và chỉ khi $(6-x)_{\min}$ mà $x\in Z$ nên $(6-x)_{\min}\Leftrightarrow 6-x=1$ hay $x=5$. Vậy $\max A=16\Leftrightarrow x=5$.

b) Điều kiện $x\neq 1930$. Nếu $x<1930$ thì $x-1930<0\Rightarrow B<0$.

Nếu $x>1930$ thì $x-2019>0\Rightarrow B>0$. Do đó muốn $B_{\min}$ thì phải chọn x sao cho $B<0$, tức là chọn $x<1930$. Khi đó $B_{\min}$ khi số đối của $B_{\max}$ hay $\left(\dfrac{1945}{1930-x}\right)_{\max}\Leftrightarrow(1930-x)_{\min}\Leftrightarrow 1930-x=1$ hay $x=1929$.

Ta có B đạt giá trị nhỏ nhất là $-1945\Leftrightarrow x=1929$.

18.5.

a) Với $y\in Z; y\neq 11$ thì C là một phân số và

$C=\dfrac{36-3y}{11-y}=\dfrac{3(11-y)+3}{11-y}=3+\dfrac{3}{11-y}$

Đáp số: $\max C=6\Leftrightarrow y=10$

b) Điều kiện $y\neq 2$, ta có: $D=\dfrac{21-y}{y-2}=\dfrac{19-(y-2)}{y-2}=\dfrac{19}{y-2}-1$

Đáp số: $\min D=-20\Leftrightarrow y=1$.

18.6.

$P=\dfrac{2(11n-47)}{2(2n-9)}=\dfrac{22n-94}{2(2n-9)}=\dfrac{11(2n-9)+5}{2(2n-9)}=\dfrac{11}{2}+\dfrac{5}{2(2n-9)}$

Đáp số: $\max P=8 \Leftrightarrow n=5$.

18.7.

a) $f(x,y)=(x-2)^2+(2y+1)^2-25\geq -25$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ 2y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-0,5 \end{cases}$.

Vậy $\min f(x,y)=-25 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-0,5 \end{cases}$

b) $g(x,y)=(x+y-1)^2+(y-3)^2+4\geq 4$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} y-3=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ x=-2 \end{cases}$.

Vậy $\min f(x,y)=4 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$

c) $h(x,y)=\dfrac{-2}{6+(2x-y)^2+(x+1)^2}$

Ta có: $\forall x;y$ thì $6+\left[(2x-y)^2+(x+1)^2\right]\geq 6$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$

Do đó: $0\leq \dfrac{1}{6+(2x-y)^2+(x+1)^2}\leq \dfrac{1}{6}$

$\Leftrightarrow 0\geq \dfrac{-2}{6+(2x-y)^2+(x+1)^2}\geq -\dfrac{1}{3}$

Vậy $\min h(x,y)=-\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$.

d) $\forall x;y;z$ thì $k(x,y,z)=(x+y-2z)^2+(x-y-3)^4+(y-1)^6+5\geq 5$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z=0 \\ x-y-3=0 \\ y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \\ z=2,5 \end{cases}$.

Vậy $\min k(x,y,z)=5 \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \\ z=2,5 \end{cases}$.

18.8.

a) $A(x,y)=2017-\left[(11y-7)^2+(x-100)^2\right]\leq 2017$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 11x-7=0$ và $x-100=0 \Leftrightarrow y=\dfrac{7}{11}$ và $x=100$.

Vậy $\max A(x,y)=2017 \Leftrightarrow \begin{cases} x=100 \\ y=\dfrac{7}{11} \end{cases}$.

b) $\forall x; y$ thì $B(x,y)=16-\left[(x+y+2)^2+(y^2-9)^2\right]\le 16$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2=0 \\ y^2-9=0 \end{cases}$.

Ta tìm được $\begin{cases} x=-5 \\ y=3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$

Do đó $\max B(x,y)=16 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$.

c) $\forall x; y$ thì $C(x,y)=\dfrac{24}{3+(2x^3-y-1)^2+(x^2-4)^2}\le 8$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3-y-1=0 \\ x^2-4=0 \end{cases}$.

Ta tìm được $\begin{cases} x=2 \\ y=15 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-2 \\ y=-17 \end{cases}$

Do đó $\max C(x,y)=8 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=15 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-2 \\ y=-17 \end{cases}$

d) $D(x,y)=\dfrac{2\left[(x-1)^2+(y-2)^2+2\right]+96}{(x-1)^2+(y-2)^2+2}=2+\dfrac{96}{(x-1)^2+(y-2)^2+2}$

Do $\forall x; y$ ta có $(x-1)^2+(y-2)^2+2\ge 2$ nên $\dfrac{96}{(x-1)^2+(y-2)^2+2}\le\dfrac{96}{2}=48$

Và $2+\dfrac{96}{(x-1)^2+(y-2)^2+2}\le 50$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$. Vậy $\max D(x,y)=50 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$.

18.9.

a) $\min M(x,y,z)=4 \Leftrightarrow (x=-1; y=2; z=1{,}5)$

b) $\max N(x,y)=4 \Leftrightarrow (x=2; y=-3; z=504)$

c) Do $(x-y)^2+0{,}1xy=10$ nên $P(x,y)=2xy=200-20(x-y)^2$

Do $\forall x \in R, \forall y \in R$ ta có $20(x-y)^2 \geq 0$

Nên $P(x,y) = 200 - 20(x-y)^2 \leq 200$

Và $P(x,y) = 2xy = 200$ khi và chỉ khi $x = y = 10$ hoặc $x = y = -10$.

Vậy $\max P(x,y) = 200 \Leftrightarrow x = y = 10$ hoặc $x = y = -10$.

18.10. Ta có $c \in Z$, mà $c < 25$ nên $\max(c) = 24$

$b < 5c$ mà $\max(c) = 24$ nên $b < 120$ và $b \in Z \Rightarrow \max(b) = 119$

$a < 5b$ mà $\max(b) = 119$ nên $a < 595$ và $a \in Z \Rightarrow \max(a) = 594$

Vậy $\max(a+b+c) = 594 + 119 + 24 = 737$.

18.11. Gọi số có ba chữ số là $\overline{abc}$ với $a,b,c \in N; 1 \leq a \leq 9;\ 0 \leq b,c \leq 9$.

Ta phải tìm $\max A$ với $A = \dfrac{\overline{abc}}{a+b+c}$.

Ta có $A = \dfrac{\overline{abc}}{a+b+c} = \dfrac{100a+10b+c}{a+b+c} = \dfrac{(a+b+c)+99a+9b}{a+b+c}$

$= 1 + \dfrac{99a+9b}{a+b+c} \leq 1 + \dfrac{99a+9b}{a+b}$ (1)

Mặt khác, ta lại có: $\dfrac{99a+9b}{a+b} = \dfrac{9(10a+a+b)}{a+b} = \dfrac{9(a+b)}{a+b} + \dfrac{90a}{a+b}$

$= 9 + \dfrac{90a}{a+b} \leq 9 + \dfrac{90a}{a}$ (2)

Từ (1) và (2), ta suy ra: $A \leq 1 + 9 + \dfrac{90a}{a} = 10 + 90 = 100$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a \in \{1;2;3;...;8;9\}; \mathrm{b} = 0$ và $c = 0$.

Vậy $\max A = 100 \Leftrightarrow a \in \{1;2;3;...;8;9\}; \mathrm{b} = 0$ và $c = 0$.

Chuyên đề 19. NGUYÊN LÝ DIRICHLET

A. Kiến thức cần nhớ

1. Nội dung: Dirichlet (Điriklê) là tên của một nhà toán học người Đức (Pôngutáp Lêgien Điriklê) ông sinh năm 1805 và mất năm 1859. Trong quá trình nghiên cứu và giảng dạy toán ở các trường phổ thông ông đã đưa ra được một nguyên tắc giải toán rất hữu hiệu và được sử dụng nhiều trong lĩnh vực số học, hình học và đại số. Ngày nay người ta thường gọi nguyên tắc này là nguyên tắc Dirichlet hay nguyên lý Dirichlet (hay còn gọi là nguyên tắc "nhốt thỏ vào lồng")

* Cụ thể: *Nếu nhốt 7 con thỏ vào 3 cái lồng thì tồn tại ít nhất một lồng có từ 3 con thỏ trở lên.* (Hay: *Không thể nhốt 7 con thỏ vào 3 cái lồng lại không có cái lồng nào nhốt nhiều hơn 2 con thỏ).*

* Tổng quát:

a. Nếu ta nhốt n chú thỏ vào $n-1$ cái lồng thì tồn tại một lồng có từ hai chú thỏ trở lên.

b. Khi nhốt n con thỏ vào k cái lồng:

+ Nếu $n=kp+r\left(0<r\le k-1\right)$ thì tồn tại ít nhất một lồng chứa không ít hơn $p+1$ con thỏ.

+ Nếu $n=kp$ thì tồn tại ít nhất một lồng chứa không ít hơn p con thỏ và tồn tại ít nhất một lồng chứa không nhiều hơn p con thỏ.

2. Chú ý:

+ Nguyên lý Dirichlet thường được sử dụng để giải các bài toán chứng minh sự tồn tại của sự vật, sự việc mà không cần chỉ ra một cách tường minh sự vật, sự việc đó.

+ Khi giải bài toán vận dụng nguyên lý Dirichlet, điều quan trọng là phải nhận ra (hay tạo ra) các yếu tố "thỏ"; "lồng"; "nhốt thỏ vào lồng". Khi giải diễn đạt theo ngôn ngữ toán học.

+ Nhiều bài toán sau một số bước trung gian mới sử dụng được nguyên lý Dirichlet.

+ Thường kết hợp với phương pháp chứng minh phản chứng.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Chứng minh nguyên lý Dirichlet.

✓ *Tìm cách giải:* Chứng minh trực tiếp hoặc sử dụng phản chứng.

Giải

* Chứng minh: *Nếu nhốt 7 con thỏ vào 3 cái lồng thì tồn tại ít nhất một lồng có từ 3 con thỏ trở lên.* (Hay: *Không thể nhốt 7 con thỏ vào 3 cái lồng mà lại không có lồng nào nhốt nhiều hơn 2 con thỏ*). Thật vậy, nếu mỗi lồng chứa không quá 2 con thỏ thì 3 lồng chứa không quá $2.3=6$ con thỏ, vô lý. Vậy không thể nhốt 7 con thỏ vào 3 cái lồng mà không có lồng nào nhốt nhiều hơn 2 con thỏ.

* Chứng minh tổng quát:

a. Nếu ta nhốt n con thỏ vào $n-1$ cái lồng thì tồn tại một lồng có từ hai con thỏ trở lên.

Thật vậy giả sử không có lồng nào chứa từ hai con thỏ trở lên thì nhiều nhất mỗi lồng chỉ chứa một con thỏ. $\left(n-1\right)$ cái lồng chứa nhiều nhất $\left(n-1\right)$ con thỏ. Vô lý.

Vậy nếu ta nhốt n con thỏ vào $n-1$ cái lồng thì tồn tại một lồng có từ hai con thỏ trở lên.

b. Khi nhốt n con thỏ vào k cái lồng:

+ Nếu $n = kp + r\left(0 < r \le k - 1\right)$ *thì tồn tại ít nhất một lồng chứa không ít hơn* $p + 1$ *con thỏ.*

Thật vậy: Giả sử lồng nào cũng có không quá p con thỏ thì k lồng không có kp con thỏ, ít hơn số n con thỏ, vô lý.

+ Nếu $n = kp$ *thì tồn tại ít nhất một lồng chứa không ít hơn p con thỏ và tồn tại ít nhất một lồng chứa không nhiều hơn p con thỏ.*

Thật vậy giả sử lồng nào cũng chứa ít hơn p con thỏ thì k lồng không có quá $k\left(p-1\right)$ thỏ, vô lý. Giả sử lồng nào cũng chứa nhiều hơn p con thỏ thì k lồng có ít nhất là $k\left(p+1\right)$ thỏ, vô lý.

Ví dụ 2: Thả 257 viên bi nhỏ vào bàn cờ Quốc tế 64 ô vuông. Chứng minh tồn tại một ô chứa ít nhất 5 viên bi (kể cả trường hợp viên bi nằm trên cạnh ô vuông).

✓ *Tìm cách giải:* Coi 64 ô vuông như 64 cái lồng. 257 viên bi là 257 con thỏ. Ta thấy $257 = 64.4 + 1$. Thả 257 con thỏ vào 64 cái lồng, theo nguyên lý Đi-rich-lê tồn tại một lồng chứa ít nhất 5 con thỏ.

Giải

Giải trực tiếp như trên. Tuy nhiên có thể dùng phản chứng:

Giả sử không tồn tại một ô nào chứa ít nhất 5 viên bi, thì nhiều nhất mỗi ô chỉ chứa 4 viên. 64 ô chứa nhiều nhất $64.4 = 256$ viên bi. Vô lý.

Ví dụ 3: Một lớp học có 41 học sinh làm bài kiểm tra Toán, không có ai bị điểm dưới 3. Có bốn học sinh đạt điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên từ 0 đến 10).

✓ *Tìm cách giải:* Trong bài toán này số "thỏ" là $41 - 4 = 37$ điểm từ 3 đến 9. "Lồng" là 7 loại điểm nói trên. Phép chia 37 cho 7 được 5 còn dư. Tồn tại $5 + 1 = 6$ học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau.

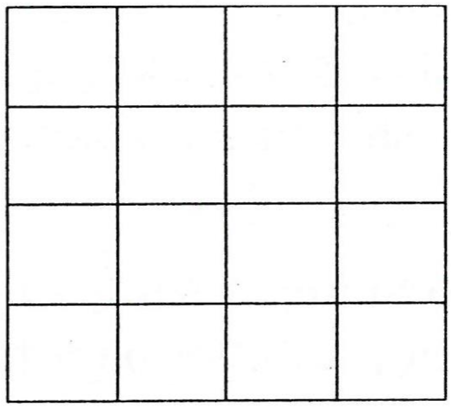
Giải

Có $41 - 4 = 37$ học sinh phân chia vào 7 loại điểm từ 3 đến 9. Giả sử không tồn tại một loại điểm nào có ít nhất 6 bạn đạt, thì nhiều nhất mỗi loại điểm chỉ có 5 bạn đạt; 7 loại điểm có nhiều nhất $7.5 = 35$ bạn đạt. Lớp học ít hơn 41 học sinh. Vô lý. Vậy tồn tại ít nhất 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau.

Ví dụ 4: Người ta chia một hình vuông thành 16 hình vuông nhỏ bằng cách chia mỗi cạnh thành 4 phần bằng nhau. Người ta viết vào mỗi ô của bảng một trong các số $-a$; 0; a sau đó tính tổng các số theo từng cột, từng hàng và từng đường chéo. Chứng minh rằng trong tất cả các tổng đó luôn tồn tại 2 tổng có giá trị bằng nhau.

✓ *Tìm cách giải:* Có bao nhiêu tổng theo cột, theo hàng, theo đường chéo đó chính là "số thỏ". Mỗi tổng có thể có giá trị bao nhiêu. Số giá trị của tổng sẽ là số "lồng".

Giải



Số hàng: 4; Số cột: 4; Số đường chéo: 2. Như vậy sẽ có 10 tổng.

Các giá trị có thể có khi cộng các số trong mỗi hàng, cột hoặc đường chéo là $-4a; -3a; -2a; -a; 0; a; 2a; 3a; 4a$.

Có 10 tổng, mỗi tổng nhận 1 trong 9 giá trị mà $10 = 9.1 + 1$. Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

Ví dụ 5: Chứng minh rằng: Trong $n+1$ số tự nhiên bất kỳ $a_1; a_2; ...; a_n; a_{n+1}$ luôn tìm được hai số sao cho hiệu của chúng chia hết cho n.

✓ *Tìm cách giải:* Trong bài toán "thỏ" là các số tự nhiên bất kỳ, "lồng" là số số dư trong phép chia một số cho n. Chia một số bất kỳ cho n có thể nhận được một trong n số dư $0; 1; 2; ...; n-2; n-1$. Có $n+1$ con thỏ, có n cái lồng

Giải

Chia một số bất kỳ cho n có thể nhận được một trong n số dư $0; 1; 2; ...; n-2; n-1$. Có $n+1$ số, có n số dư. Do đó theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho n. Không mất tổng quát giả sử hai số đó là a_p và a_q $\left(p; q \in \{1; 2; ....; n; n+1\}\right)$ và $a_p > a_q$. Ta có:

$$a_p = n.k_p + r\left(r \in N; 0 \le r \le n-1\right)$$

$$a_q = n.k_q + r$$

Khi đó $a_p - a_q = n.\left(k_p - k_q\right) \vdots n.$

Đây chính là hai số có hiệu của chúng chia hết cho n. Bài toán được chứng minh.

Ví dụ 6: Trong 2016 số tự nhiên bất kỳ $a_1; a_2; ...; a_{2016}$ luôn tìm được một số chia hết cho 2016 hoặc hai số có hiệu chia hết cho 2016.

✓ *Tìm cách giải:* Trong bài toán số "thỏ" là số 2016 số tự nhiên bất kỳ, "Lồng" là số số dư trong phép chia một số cho 2016. Có hai khả năng xảy ra: hoặc có số chia hết cho 2016, hoặc tất cả các số đều không chia hết cho 2016.

Giải

Nếu một trong n số chia hết cho 2016, bài toán được chứng minh.

Nếu tất cả 2016 số không có số nào chia hết cho 2016 thì mỗi số khi chia cho 2016 sẽ nhận một trong 2015 số dư 1; 2; 3; ....; 2014; 2015.

Có 2016 số mà có 2015 số dư nên tồn tại 2 số có cùng số dư khi chia cho 2016 $\Rightarrow$ hiệu của hai số chia hết cho 2016. (đpcm).

Ví dụ 7:

a) Cho một dãy số gồm 100 số tự nhiên bất kỳ $a_1; a_2; ...; a_{100}$. Chứng minh rằng tồn tại một số chia hết cho 100 hoặc tổng một số số chia hết cho 100.

b) Hãy tổng quát hóa bài toán.

✓ *Tìm cách giải:* Trong bài toán số "thỏ" là số 100 số tự nhiên bất kỳ, "Lồng" là số số dư trong phép chia một số cho 100.

Có hai khả năng xảy ra: hoặc có số bằng 0, hoặc tất cả các số đều khác không.

Giải

a) Trường hợp có số bằng 0 ta chọn số này thỏa mãn đầu bài.

Trường hợp tất cả các số đều khác 0 ta lập 100 tổng sau:

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

………………

$S_{100} = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{100}$

Nếu một trong 100 tổng này chia hết cho 100, bài toán được chứng minh.

Nếu tất cả 100 tổng này không chia hết cho 100, thì khi chia cho 100 chúng nhận 99 số dư 1; 2; 3; ...; 99.

Có 100 tổng và có 99 số dư khi chia cho 100, theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai tổng có số dư bằng nhau khi chia cho 100. Giả sử là hai tổng là

$S_k = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k$ và $S_h = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_h$ $(100 \ge k > h \ge 1)$

Thì $S_k - S_h = (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k) - (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_h) =$

$= (a_{h+1} + a_{h+2} + a_{h+3} + ... + a_k) \vdots 100.$

b) Tổng quát hóa:

Cho một dãy số gồm n số tự nhiên bất kỳ $a_1; a_2; ...; a_n$. Chứng minh rằng tồn tại một số chia hết cho n hoặc tổng một số số chia hết cho n.

Ví dụ 8: Chứng minh tồn tại lũy thừa của 79 mà các chữ số tận cùng của nó là 00001.

✓ *Tìm cách giải:* Nhận xét 79^n. Nếu n chẵn thì chữ số tận cùng là 1. Nếu n lẻ thì chữ số tận cùng là 9. Do đó ta xét 10^5 lũy thừa của 79 với các số mũ chẵn khác nhau.

Giải

➢ *Cách 1.*

- Xét 10^5 lũy thừa của 79 với các số mũ chẵn khác nhau. Nếu một trong các lũy thừa đó có tận cùng là 00001 thì bài toán được chứng minh.

- Nếu không có lũy thừa nào có tận cùng là 00001 thì số các số có 5 chữ số tận cùng khác nhau kể từ số $00002; 00003; ...;$ đến $99998; 99999$ nhỏ hơn 10^5. Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai lũy thừa nào đó có 5 chữ số tận cùng giống nhau. Nếu n chẵn thì số 79^{2k} chữ số tận cùng là 1. Giả sử đó là hai số:

$A_1 = 79^{2k_1} = B_1.10^5 + \overline{abcd1}.$

$A_2 = 79^{2k_2} = B_2.10^5 + \overline{abcd1}$ với $A_1 > A_2$.

$A_1 - A_2 = 79^{2k_1} - 79^{2k_2} = 79^{2k_2}\left[79^{2(k_1-k_2)} - 1\right] = 10^5\left(B_1 - B_2\right).$

Do 79^{2k_2} có tận cùng là 1 và $10^5\left(B_1 - B_2\right)$ có tận cùng không ít hơn 5 số 0 nên $\left[79^{2(k_1-k_2)} - 1\right]$ có tận cùng không ít hơn 5 số 0 suy ra $79^{2(k_1-k_2)}$ có tận cùng là 00001. Vậy tìm được số $k = 2\left(k_1 - k_2\right)$ thỏa mãn yêu cầu của bài.

➢ *Cách 2.* Ta cần chứng minh tồn tại $k \in N$ sao cho $79^k - 1$ chia hết cho 10^5.

Xét $10^5 + 1$ số: $79; 79^2; 79^3; 79^4; ...; 79^{10^5+1}$. Tất cả các số này đều không chia hết cho 10^5 nên nếu lấy $10^5 + 1$ số này chia cho số 10^5 thì theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số có cùng số dư trong phép chia cho 10^5. Khi đó hiệu của chúng chia hết cho 10^5. Giả sử hai số đó là 79^m và 79^n $\left(m, n \in N; 1 \le n < m \le 10^5 - 1\right)$.

Ta có $79^m - 79^n \vdots 10^5$ hay $79^n\left(79^{m-n} - 1\right) \vdots 10^5$.

Vì $\left(79^n; 10^5\right) = 1$ nên $\left(79^{m-n} - 1\right) \vdots 10^5$

Ta chọn $m - n = k$ lúc đó 79^k chia cho 10^5 dư 1 tức là 79^k có chữ số tận cùng là 00001 (đpcm).

Ví dụ 9: Để chuẩn bị cho buổi sinh hoạt câu lạc bộ toán của khối 7 của một trường THCS, 6 bạn học sinh giỏi toán của 6 lớp 7A, 7B, 7C, 7D, 7E, 7G viết thư trao đổi với nhau về hai nội dung: (I): “Thống kê” và (II): “Biểu thức đại số”. Biết rằng mỗi bạn đều viết thư cho 5 bạn còn lại (trong các bạn nói trên) về một trong hai nội dung trên.

Chứng minh rằng có ít nhất 3 bạn cùng trao đổi với nhau về một nội dung.

✓ *Tìm cách giải:* Ta gọi 6 học sinh giỏi toán (ta coi là 6 “thỏ”) của 6 lớp lần lượt là A, B, C, D, E, G. Giả sử một bạn nào đó A chẳng hạn viết thư cho 5 bạn còn lại về mỗi bạn một trong hai nội dung “Thống kê” và “Biểu thức đại số”.

Ta thành lập các “lồng” bằng cách sau đây:

- “Lồng I” nhốt những ai trao đổi với A về nội dung (I).
- “Lồng II” nhốt những ai trao đổi với A về nội dung (II).

Như vậy sẽ có 5 thỏ nhốt vào "2 lồng". Theo nguyên lí Dirichlet phải có một lồng nhốt không ít hơn 3 "thỏ", nghĩa là phải có ít nhất 3 bạn nào đó trong số 5 bạn (không kể A) cùng trao đổi với A về một trong hai nội dung trên. Không mất tổng quát ta có thể giả sử 3 bạn cùng trao đổi với A về nội dung (I).

+ Trong ba bạn đó nếu có hai bạn nào đó trao đổi với nhau về nội dung (I) thì hai bạn đó với A tạo thành 3 bạn cùng trao đổi với nhau về một nội dung.

+ Nếu trong ba bạn đó nếu có không có hai bạn nào trao đổi với nhau về nội dung (I) thì ba bạn đó chỉ có thể trao đổi với nhau về nội dung (II). Bài toán cũng được chứng minh.

Ta trình bày lời giải như sau:

Giải

Ta gọi 6 học sinh giỏi toán của 6 lớp lần lượt là A, B, C, D, E, G. Giả sử một bạn nào đó A chẳng hạn viết thư cho 5 bạn còn lại về hai nội dung (I) và (II). Ta có $5 = 2.2 + 1$. Theo nguyên lí Dirichlet A phải viết cho ít nhất 3 bạn về một nội dung, không mất tổng quát ta giả sử 3 bạn đó là B, C, D và nội dung trao đổi là (I).

+ Trong ba bạn B, C, D nếu có hai bạn nào đó trao đổi với nhau về nội dung (I) chẳng hạn B và C thì hai bạn B và C với A tạo thành 3 bạn cùng trao đổi với nhau về một nội dung.

+ Nếu trong ba bạn B, C, D đó nếu có không có hai bạn nào trao đổi với nhau về nội dung (I) thì ba bạn đó chỉ có thể trao đổi với nhau về nội dung (II) tạo thành 3 bạn cùng trao đổi với nhau về một nội dung. Bài toán cũng được chứng minh.

Tóm lại dù khả năng nào xảy ra ta luôn có ít nhất 3 bạn cùng trao đổi với nhau về một nội dung.

C. Bài tập vận dụng

19.1. Một tổ có 12 học sinh, trong một giờ kiểm tra Toán ngoài 2 bạn An và Bình đạt điểm 10 còn lại các bạn khác đạt số điểm thấp hơn nhưng không bạn nào bị điểm 0; 1; 2 (điểm số của các bạn đều là số tự nhiên). Chứng minh ngoài hai bạn đạt điểm 10 còn ít nhất có hai bạn có điểm số như nhau.

19.2. Một lớp học có 37 học sinh cùng tuổi. Chứng minh rằng trong năm có một tháng ít nhất 4 học sinh cùng tổ chức sinh nhật.

19.3. Một vòng chung kết bóng bàn có 8 đấu thủ tham gia thi đấu vòng tròn nghĩa là mỗi đấu thủ đều phải gặp 7 đấu thủ còn lại. Chứng minh trong mọi thời điểm giữa các cuộc đấu bao giờ cũng có hai đấu thủ đã đấu một số trận như nhau.

19.4. Chứng minh rằng trong 5 người bất kỳ ít ra cũng có 2 người có cùng số người quen như nhau trong 5 người đó. Hãy tổng quát hóa bài toán!

19.5.

a) Trên một bảng ô vuông kích thước 6×6 ta viết vào mỗi ô của bảng một trong các số $-1; 0; 1$ sau đó tính tổng của các số theo từng cột, theo từng dòng và theo từng đường chéo. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

b) Trên bảng ô vuông kích thước 6×6 ấy ta viết các số tự nhiên từ 1 đến 36, mỗi số viết vào một ô một cách tùy ý. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai ô vuông chung cạnh mà hiệu các số ghi trong chúng không nhỏ hơn 4.

19.6. Chứng minh rằng trong 2016 số tự nhiên bất kỳ tồn tại hai số có hiệu chia hết cho 2015.

19.7. Chứng minh rằng trong *n* số tự nhiên liên tiếp luôn tìm được một số chia hết cho *n*.

19.8. Trong *n* số tự nhiên bất kỳ $a_1; a_2; ...; a_n$ luôn tìm được một số chia hết cho n hoặc hai số có hiệu chia hết cho *n*.

19.9. Chứng minh rằng trong ba số lẻ bất kỳ bao giờ cũng tìm được hai số có tổng hoặc hiệu chia hết cho 8.

19.10. Chứng minh rằng luôn tìm được số có dạng

$\overline{19741974...19740000...0000}$ chia hết cho 1975.

19.11. Tồn tại hay không một số có dạng $\overline{20162016...20162016}$ chia hết cho 2017.

19.12. Chứng minh rằng trong 20 số tự nhiên liên tiếp bất kỳ ta luôn tìm được một số mà tổng các chữ số của nó chia hết cho 10.

19.13.

a) Cho 1001 số nguyên dương khác nhau nhỏ hơn 2000. Chứng minh rằng ta có thể chọn ra 3 số mà một số bằng tổng của hai số còn lại.

b) Hãy tổng quát hóa bài toán và chứng minh.

19.14. Chứng minh rằng trong 52 số tự nhiên tùy ý luôn tồn tại hai số sao cho tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho 100.

19.15. Có 17 nhà khoa học viết thư cho nhau trao đổi về ba đề tài: *"Biến đổi khí hậu"; "Môi trường"; "Dân số".* Mỗi người viết thư cho một người về một đề tài. Chứng minh rằng ít nhất cũng có 3 nhà khoa học trao đổi với nhau về cùng một đề tài.

(***Chú ý:*** Bài toán trên có thể diễn đạt cách khác theo ngôn ngữ hình học như sau: *"Cho 17 điểm phân biệt nằm trên một đường tròn.. Hai điểm bất kì trong 17 điểm này đều được nối bằng một đoạn màu xanh, màu đỏ hoặc màu vàng. Chứng minh luôn tồn tại ít nhất một tam giác có ba cạnh cùng màu").*

19.16. Cho dãy số $10^1; 10^2; 10^3; 10^4; ...; 10^{20}$. Chứng minh rằng có một số trong dãy số ấy chia cho 19 thì dư 1.

(Thi chọn học sinh giỏi lớp 9. Quận 10. TP Hồ Chí Minh, năm học 2005 – 2006)

19.17. Cho X là một tập hợp gồm 700 số nguyên dương đôi một khác nhau mỗi số không lớn hơn 2006. Chứng minh rằng trong tập hợp X luôn tìm được hai phần tử x, y sao cho $x-y$ thuộc tập hợp $E=\{3;6;9\}$.

(Đề thi vào khối THPT Chuyên, Đại học Sư phạm Hà Nội,

năm học 2006 – 2007)

19.18. Cho lưới ô vuông 5×5. Người ta điền vào mỗi ô một trong các số $-1;\,0;\,1$. Xét tổng các số được tính theo hàng, theo cột và theo từng đường chéo. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

(Thi vào lớp 10 THPT chuyên Toán Thành phố Hà Nội, năm học 2007 – 2008)

19.19. Trên một đường tròn cho 6 điểm phân biệt. Hai điểm bất kỳ trong 6 điểm này đều được nối bằng một đoạn màu xanh hoặc màu đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có ba cạnh cùng màu.

(Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9, Thanh Hóa, năm học 2009 -2010)

19.20. Mỗi ô vuông của bảng kích thước 10×10 (10 dòng, 10 cột) được ghi một số nguyên dương không vượt quá 10 sao cho bất kỳ hai số nào ghi trong hai ô chung một cạnh hoặc hai ô chung một đỉnh của bảng là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng có số được ghi ít nhất 17 lần.

(Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9, Vĩnh Phúc, năm học 2009 – 2010)

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

19.1. Trừ hai bạn đạt điểm 10 còn lại 10 bạn đạt 7 loại điểm 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. Giả sử trong số đó không có ít nhất hai bạn nào có số điểm giống nhau thì mỗi loại điểm chỉ nhiều nhất có một bạn đạt nên tổ còn lại nhiều nhất 7 bạn. Vô lý.

19.2. Một năm có 12 tháng. Giả sử trong năm không có một tháng nào có ít nhất 4 học sinh cùng tổ chức sinh nhật, thì một tháng nhiều nhất có 3 học sinh tổ chức sinh nhật. Số học sinh của lớp nhiều nhất là $21.3 = 36 < 37$. Vô lý.

19.3. Số trận đấu của mỗi đấu thủ với các đấu thủ khác gồm 8 loại là 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Các số 0 và 7 không đồng thời tồn tại vì nếu có 1 ai chưa đấu trận nào thì không ai đấu đủ 7 trận. Nếu đã có một người đấu đủ 7 trận thì không ai chưa đấu trận nào. Có 8 đấu thủ, có 7 loại số trận đấu do đó phải tồn tại ít nhất hai đấu thủ có số trận đấu như nhau ở mọi thời điểm giữa các cuộc đấu.

19.4. Giả sử trong số 5 người có một người không quen với tất cả những người còn lại thì mỗi người còn lại không ai có thể có số người quen quá 3 người. Số người quen chỉ có thể có các loại 0; 1; 2; 3. Có 5 người (5 thỏ) mà chỉ có 4 loại số người quen (4 lồng). Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai người có số người quen như nhau trong 5 người đó.

Giả sử trong số 5 người có một người quen với tất cả những người còn lại thì mỗi người còn lại có số người quen chỉ có thể là 1; 2; 3; 4. Có 5 người (5 thỏ) mà chỉ có 4 loại số người quen (4 lồng). Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai người có số người quen như nhau trong 5 người đó.

Tổng quát: Một phòng họp có n người, bao giờ cũng có ít nhất 2 người có số người quen như nhau trong số n người đó.

19.5.

a) Bảng ô vuông kích thước 6×6 có 6 dòng, 6 cột và 2 đường chéo nên sẽ có 14 tổng của các số được tính theo dòng, theo cột và theo đường chéo. Mỗi dòng, mỗi cột và đường chéo đều ghi 6 số thuộc tập $\left\{-1;0;1\right\}$. Vì vậy giá trị mỗi tổng thuộc tập hợp $\left\{-6;-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;5;6\right\}$ có 13 phần tử. Có 14 tổng nhận trong tập 13 giá trị khác nhau nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai tổng có cùng một giá trị.

b) Xét hàng có ô ghi số 1 và cột có ô ghi số 36. Hiệu giữa hai số này là 35 (coi như là 35 thỏ). Số cặp ô kề nhau từ ô ghi số 1 đến ô ghi số 36 nhiều nhất là 10 (gồm 5 cặp ô chung cạnh tính theo hàng và 5 cặp ô chung cạnh tính theo cột) (coi như có 10 lồng). Ta có: $35 = 10.3 + 5$.

Vậy theo nguyên lý Dirichlet luôn tồn tại hai ô vuông chung cạnh mà hiệu các số ghi trong chúng không nhỏ hơn 4.

19.6. Chia một số cho 2015 ta nhận được một trong 2015 số dư: 0; 1; 2; …; 2013; 2014. Có 2016 số tự nhiên bất kỳ nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại 2 số có cùng số dư khi chia cho 2015 $\Rightarrow$ hiệu của hai số chia hết cho 2015.

19.7. Giả sử không tìm được số nào trong *n* số tự nhiên liên tiếp đã cho mà chia hết cho *n*. Khi đó *n* số này chia cho *n* chỉ nhận được nhiều nhất là $n-1$ số dư khác nhau $\left(1;\ 2;\ 3;\ 4;\ ...;\ n-1\right)$, theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số chia cho *n* có cùng số dư, chẳng hạn là *a* và *b* với $a>b$, khi đó số $a-b$ chia hết cho *n*. Điều này mâu thuẫn với $0<a-b<n$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

19.8. Nếu một trong *n* số chia hết cho *n*, bài toán được chứng minh.

Nếu tất cả *n* số không có số nào chia hết cho *n* thì khi chia cho *n* chúng nhận $n-1$ số dư $1;\ 2;\ 3;\ ...;\ n-2;\ n-1$. Có *n* số, có $n-1$ số dư nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại 2 số có cùng số dư khi chia cho $n \Rightarrow$ hiệu của hai số chia hết cho *n*.

19.9. Một số lẻ khi chia cho 8 sẽ có số dư là 1; 3; 5 hoặc 7. Ta chia các số dư này thành hai nhóm: Nhóm 1 là (1; 7) nhóm 2 là (3; 5). Có ba số lẻ chia cho 8 mà có hai nhóm số dư, theo nguyên lý Diriclet tồn tại hai số có số dư khi chia cho 8 vào cùng một nhóm.

Nếu hai số dư giống nhau thì hiệu của hai số chia hết cho 8.

Nếu hai số dư khác nhau thì tổng của chúng chia hết cho 8.

Vậy trong ba số lẻ bất kỳ bao giờ cũng tìm được hai số có tổng hoặc hiệu chia hết cho 8.

19.10. Xét 1975 số có dạng sau:

$A_1 = 1974$

$A_2 = 19741974$

$A_3 = 197419741974$

……………………

$A_{1974} = \underbrace{\overline{19741974...1974}}_{1974\ số\ 1974}$

$A_{1975} = \underbrace{\overline{19741974...19741974}}_{1975\ số\ 1974}$

Tất cả 1975 số này đều không chia hết cho 5 nên không chia hết cho 1975. Do đó mỗi số khi chia cho 1975 nhận một trong 1974 số dư 1; 2; 3;…; 1974. Do đó theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho 1975 nghĩa là hiệu của chúng chia hết cho 1975.

Giả sử đó là $A_i = \underbrace{\overline{19741974...19741974}}_{i\ số\ 1974}$ và $A_k = \underbrace{\overline{19741974...19741974}}_{k\ số\ 1974}$

$\left(i>k;\ i,k \in \left\{1;2;...;1975\right\}\right)$ hiệu của chúng sẽ là:

$$A_i - A_k = \underbrace{\overline{19741974...19741974}}_{i\ số\ 1974} - \underbrace{\overline{19741974...19741974}}_{k\ số\ 1974}$$

$$= \underbrace{\overline{19741974...19740000...0000}}_{i-k\ số\ 1974;\ 4k\ số\ 0} \vdots 1975.\ \text{(đpcm)}$$

19.11. Xét 2017 số có dạng

$B_1 = 2016$

$B_2 = 20162016$

$B_3 = 20162016$

……………………..

$B_{2017} = \underbrace{\overline{20162016...20162016}}_{2017 \text{ số } 2016}$

Nếu một trong số 2017 số này chia hết cho 2017 ta có số cần tìm.

Nếu 2017 số này đều không chia hết cho 2017 thì tương tự bài trên ta có số

$B_i - B_k = \underbrace{\overline{20162016...20160000...0000}}_{i-k \text{ số } 2016;\, 4k \text{ số } 0} \left(i > k;\, i,k \in \{1;2;...;2017\}\right)$

$= \underbrace{\overline{20162016...2016}}_{i-k \text{ số } 2016}.10^{4k} \vdots 2017$. Do $10^{4k} \not\vdots 2017$

Nên $\underbrace{\overline{20162016...2016}}_{i-k \text{ số } 2016} \vdots 2017.$

Vậy tồn tại một số có dạng $\overline{20162016...20162016}$ chia hết cho 2017.

19.12. Trong 20 số tự nhiên liên tiếp bất kỳ bao giờ cũng tìm được 10 số tự nhiên liên tiếp có chữ số hàng chục giống nhau còn chữ số hàng đơn vị là 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. Viết các số đó dưới dạng: $\overline{ab...c0}$; $\overline{ab...c1}$; $\overline{ab...c2}$;....; $\overline{ab...c9}$. Gọi tổng các chữ số là $S = a + b + ... + c$ thì các số vừa viết có tổng các chữ số $S; S+1; S+2 : ... : S+9$ là 10 số tự nhiên liên tiếp do đó có 1 số chia hết cho 10.

19.13.

a) Gọi 1001 số nguyên dương khác nhau đã cho là $a_1; a_2; a_3; ...; a_{1001}$ với $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_{1001} < 2000$.

Đặt $A = \{a_2; a_3; ...; a_{1001}\}$ gồm 1000 phần tử có dạng a_m với $m \in \{2;3;...;1001\}$ và $B = \{a_2 - a_1; a_3 - a_1; ...; a_{1001} - a_1\}$ gồm 1000 phần tử có dạng $a_n - a_1$ với $n \in \{2;3;...;1001\}$.

Ta thấy các phần tử của hai tập hợp A và B đều thuộc tập hợp gồm 1999 phần tử $\{1;2;3;...;1998;1999\}$ trong khi tổng số các phần tử của tập A và B là $1000 + 1000 = 2000$ phần tử. Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số bằng nhau mà chúng không thể thuộc cùng một tập hợp, nên có một số thuộc tập hợp A, một số thuộc tập hợp B tức là $a_m = a_n - a_1$ do đó $a_n = a_m + a_1$. Ba số $a_m; a_n; a_1$ đôi một khác nhau. Thật vậy $a_m \neq a_1; a_n \neq a_1$ theo cách đặt các tập hợp A và B, còn $a_m \neq a_n$ vì nếu $a_m = a_n$ thì $a_1 = 0$, trái với giả thiết của bài toán.

Vậy tồn tại ba số $a_n; a_m; a_1$ trong các số đã cho mà $a_n = a_m + a_1$.

b) Tổng quát hóa: Cho $n+1$ số nguyên dương khác nhau nhỏ hơn 2n. Chứng minh rằng ta có thể chọn ra 3 số mà một số bằng tổng của hai số còn lại. (Chứng minh tương tự như câu a). (Bạn đọc tự chứng minh).

19.14. Một số tự nhiên chia cho 100 có 1 trong các số dư 0; 1; 2; …; 98; 99. Tất cả các số dư trong phép chia cho 100 được chia thành 51 nhóm sau: (0); (1;99); (2; 98); (3; 97);…; (49; 51); (50)

Đem 52 số tự nhiên chia cho 100 nhận được 52 số dư; 52 số dư này thuộc 51 nhóm trên. Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai số dư thuộc vào một nhóm, tức là tồn tại hai số có tổng số dư trong phép chia cho 100 bằng 100 hoặc hiệu số dư trong phép chia cho 100 bằng 0. Hai số này có tổng hoặc hiệu chia hết cho 100.

19.15. Giả sử A là 1 trong 17 nhà khoa học. A phải trao đổi với 16 nhà khoa học còn lại về 3 đề tại. Theo nguyên lý Dirichlet thì A phải trao đổi với ít nhất 6 nhà khoa học khác về cùng một đề tài chẳng hạn *"Dân số"*.

Gọi 6 nhà khoa học khác cùng một đề tài chẳng hạn *"Dân số"* với A là B; C; D; E; F; G.

+ Nếu 2 trong 6 nhà khoa học trao đổi với nhau về đề tài *"Dân số"* thì bài toán được chứng minh vì khi ấy 2 trong 6 nhà khoa học cùng với A trao đổi với nhau về cùng một đề tài *"Dân số"*.

+ Nếu tất cả 6 nhà khoa học B; C; D; E; F; G. không ai trao đổi với nhau về đề tài *"Dân số"* thì họ chỉ còn trao đổi với nhau về hai đề tài *"Biến đổi khí hậu"; "Môi trường"*. Xét nhà khoa học B trong 6 nhà khoa học trên. B phải trao đổi với 5 người còn lại về hai đề tài *"Biến đổi khí hậu"; "Môi trường"*. Theo nguyên lý Dirichlet B phải trao đổi với ít nhất 3 nhà khoa học khác chẳng hạn C; D; E về cùng một đề tài chẳng hạn *"Môi trường"*.

Nếu C; D; E có hai người chẳng hạn D và E trao đổi với nhau về cùng đề tài *"Môi trường"* thì B; E; D chính là ba người cùng trao đổi với nhau về một đề tài.

Nếu C; D; E không có ai trao đổi với nhau về cùng đề tài *"Môi trường"* thì C; D; E chỉ còn một đề tài duy nhất là *"Biến đổi khí hậu";* để trao đổi. Vậy ta có ba người cùng trao đổi với nhau về một đề tài.

Vậy trong mọi trường hợp ta luôn có ít nhất 3 nhà khoa học trao đổi với nhau về cùng một đề tài.

19.16. Xét dãy số $10^1; 10^2; 10^3; 10^4; ...;10^{20}$ có 20 số nên khi chia mỗi số trong dãy cho 19 ta nhận được 1 trong 19 số dư $r \in \{0; 1; 2; 3;...; 17; 18\}$.

Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho 19. Không mất tổng quát giả sử hai số đó là 10^a và 10^b ($a,b \in N^*$ và $b < a \le 20$) khi đó $10^a - 10^b = 10^b.\left(10^{a-b} - 1\right) \vdots 19$. Mà $\left(10^b;19\right) = 1$ nên $\left(10^{a-b} - 1\right) \vdots 19$ hay $10^{a-b} \vdots 19$ dư 1 và $1 \le a - b \le 19$. Ta có điều phải chứng minh.

19.17. Gọi 700 số nguyên dương đôi một khác nhau đã cho là $a_1; a_2; a_3;...;a_{700}$. Như vậy $X = \{a_1; a_2; a_3;...; a_{700}\}$. Xét $700.4 = 2800$ số sau đây: $a_1; a_2; a_3;...;a_{700}; a_1 + 3; a_2 + 3; a_3 + 3;$ $...; a_{700} + 3; a_1 + 6; a_2 + 6; a_3 + 6; ...; a_{700} + 6; a_1 + 9; a_2 + 9; a_3 + 9; ...; a_{700} + 9;$

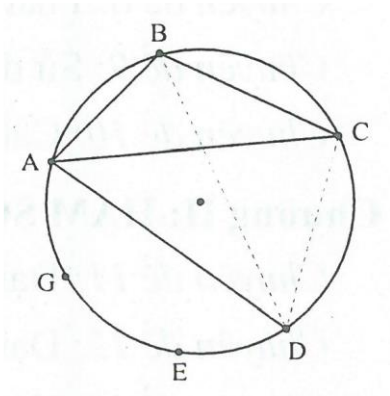
Do mỗi số không lớn hơn 2006 nên mỗi số trên đều không lớn hơn: $2006 + 9 = 2015$. Có 2800 số mà mỗi số nhận giá trị từ 1 đến không quá 2015. Theo theo nguyên lý Dirichlet phải tồn tại ít nhất hai số bằng nhau. Giả sử đó là 2 số $a_i + 9 = a_k + 3$ với $(i;k \in \{1;2;3;...;700\}$.

Khi ấy $a_k - a_i = x - y = 9 - 3 = 6$.

(Tương tự nếu có số $a_i + 6 = a_k + 3$ ta có $x - y = 3$; $a_i + 9 = a_k$ ta có $x - y = 9$ …). Suy ra tồn tại hai phần tử $x, y \in X$ sao cho $x - y$ thuộc tập hợp $E = \{3;6;9\}$.

19.18. Tổng số có 12 tổng đó là: 5 tổng theo hàng; 5 tổng theo cột và 2 tổng theo đường chéo. Vì mỗi tổng có 5 số hạng chỉ gồm 3 số là $-1;0;1$ nên mỗi tổng chỉ nhận không quá 11 giá trị $\{-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;5\}$. Do đó theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất hai tổng có giá trị bằng nhau.

19.19. Giả sử 6 điểm phân biệt trên đường tròn là A, B, C, D, E, G. Từ 1 điểm nối với 5 điểm còn lại được 5 đoạn thẳng với 2 màu xanh hoặc đỏ. Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất ba đoạn thẳng cùng màu. Không mất tổng quát, giả sử ba đoạn thẳng AB, AC, AD cùng màu đỏ (nếu màu xanh lập luận tương tự).



Xét ΔBCD nếu có một cạnh chẳng hạn BC màu đỏ thì ΔABC có ba cạnh màu đỏ. Trái lại thì ΔBCD sẽ có ba cạnh màu xanh. Vậy luôn tồn tại một tam giác có ba cạnh cùng màu.

19.20. Trên mỗi hình vuông con kích thước 2×2 có không quá 1 số chia hết cho 2, không quá 1 số chia hết cho 3.

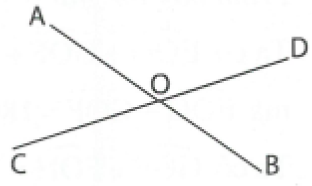
Lát kín bảng bởi 25 hình vuông, kích thước 2×2, có nhiều nhất 25 số chia hết cho 2, có nhiều nhất 25 số chia hết cho 3. Do đó, có ít nhất 50 số còn lại không chia hết cho 2 và cũng không chia hết cho 3. Vì vậy chúng phải là một trong ba số 1; 5; 7. Ta có $50 = 3.16 + 2$. Từ đó theo nguyên lý Dirichlet có một số xuất hiện ít nhất 17 lần.

Chương I. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Chuyên đề 1. HAI GÓC ĐỐI ĐỈNH

A. Kiến thức cần nhớ

1. Hai góc đối đỉnh là hai góc mà mỗi cạnh của góc này là tia đối của một cạnh của góc kia (h.1.1).



Hình 1.1

2. Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau: $AOC = BOD; AOD = BOC$.

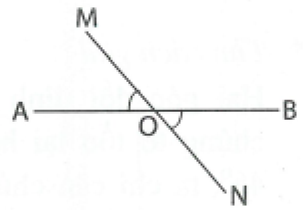
B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho góc bẹt *AOB*. Trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ *AB* vẽ hai tia *OM* và *ON* sao cho $AOM = BON$. Chứng minh rằng hai góc *AON* và *BOM* là hai góc đối đỉnh.

Giải (h.1.2)

** Tìm cách giải*

Để chứng tỏ hai góc *AON* và *BOM* là hai góc đối đỉnh, ta cần chứng tỏ mỗi cạnh của góc này là tia đối một cạnh của góc kia. Vì đã có hai tia *OA, OB* đối nhau nên chỉ còn phải chứng tỏ hai tia *OM, ON* đối nhau bằng cách chứng tỏ *MON* là góc bẹt.



Hình 1.2

** Trình bày lời giải*

Góc *AOB* là góc bẹt nên hai tia *OA, OB* đối nhau. Hai góc *AOM* và *BOM* kề bù nên $AOM + BOM = 180°$.

Mặt khác $AOM = BON$ (đề bài cho) nên $BON + BOM = 180°$.

Suy ra $MON = 180°$. Vậy hai tia *OM, ON* đối nhau.

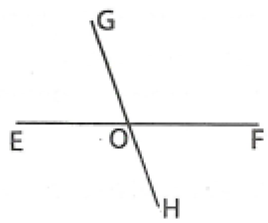
Hai góc *AON* và *BOM* có mỗi cạnh của góc này là tia đối một cạnh của góc kia nên chúng là hai góc đối đỉnh.

Ví dụ 2: Cho hai đường thẳng *EF* và *GH* cắt nhau tại *O* tạo thành bốn góc không kể góc bẹt. Biết tổng $EOG + GOF + FOH = 250°$. Tính số đo của bốn góc tạo thành.

Giải (h.1.3)

** Tìm cách giải*

Để tính được số đo của bốn góc tạo thành, trước tiên cần tính được số đo của một trong bốn góc đó.



Hình 1.3

** Trình bày lời giải*

Ta có $EOG + GOF + FOH = 250°$ (đề bài cho), mà $EOG + GOF = 180°$ (hai góc kề bù) nên $FOH = 250° - 180° = 70°$.

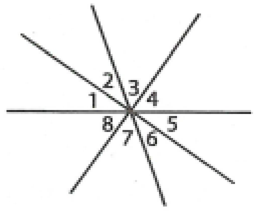
Ta có $GOF + FOH = 180°$ (hai góc kề bù) $\Rightarrow GOF = 180° - 70° = 110°$.

Vậy $EOG = FOH = 70°$ (hai góc đối đỉnh); $HOE = GOF = 110°$ (hai góc đối đỉnh).

** Nhận xét:* Sau khi tính được số đo của một góc, ta tính được số đo của ba góc còn lại nhờ vận dụng tính chất của hai góc kề bù, hai góc đối đỉnh.

Ví dụ 3: Cho bốn đường thẳng cắt nhau tại một điểm. Xét các góc không có điểm trong chung, chứng tỏ rằng tồn tại hai góc nhỏ hơn hoặc bằng $45°$.

Giải (h.1.4)



Hình 1.4

** Tìm cách giải*

Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau. Do đó để chứng tỏ tồn tại hai góc nhỏ hơn hoặc bằng $45°$, ta chỉ cần chứng tỏ tồn tại một góc nhỏ hơn hoặc bằng $45°$.

** Trình bày lời giải*

Bốn đường thẳng cắt nhau tại một điểm tạo ra 8 góc không có điểm trong chung.

Nếu tất cả các góc này đều lớn hơn $45°$ thì tổng của chúng lớn hơn $45°.8 = 360°$. Điều này vô lí, vì tổng của 8 góc này đúng bằng $360°$.

Vậy phải tồn tại một góc nhỏ hơn hoặc bằng $45°$. Góc này và góc đối đỉnh với nó bằng nhau. Do đó tồn tại hai góc nhỏ hơn hoặc bằng $45°$.

Ví dụ 4: Trong hình 1.5, hai góc *AOC* và *BOD* là hai góc đối đỉnh. Hai tia *OE, OF* là hai tia đối nhau. Cho biết tia *OE* là tia phân giác của góc *AOC*, chứng tỏ rằng tia *OF* là tia phân giác của góc *BOD*.

Giải (h.1.5)

** Tìm cách giải*

Ta cần chứng tỏ $O_3 = O_4$. Muốn vậy phải sử dụng tính chất của hai góc đối đỉnh.

** Trình bày lời giải*

Hai góc *AOC* và *BOD* là hai góc đối đỉnh nên các tia *OA, OB* đối nhau, các tia *OC, OD* đối nhau. Ngoài ra, hai tia *OE, OF* cũng đối nhau nên ta có $O_1 = O_3; O_2 = O_4$ (hai góc đối đỉnh). Vì $O_1 = O_2$ (đề bài cho) nên $O_3 = O_4$. (1)

Mặt khác, tia *OF* nằm giữa hai tia *OB, OD.* (2)

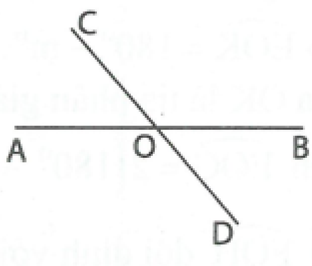
nên từ (1) và (2) suy ra tia *OF* là tia phân giác của góc *BOD.*

C. Bài tập vận dụng

• Tính số đo góc

1.1. Hai đường thẳng *AB, CD* cắt nhau tại *O* tạo thành bốn góc không kể góc bẹt. Biết $AOC + BOD = 100°$. Tính số đo của mỗi góc tạo thành.

Hướng dẫn giải (h.1.6)



Hình 1.6

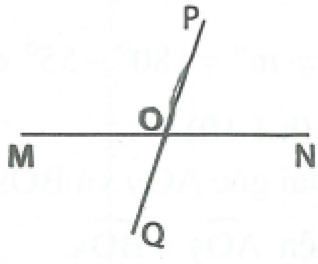
Ta có: $AOC = BOD$ (hai góc đối đỉnh) mà $AOC + BOD = 100°$ nên $AOC = BOD = 100° : 2 = 50°$.

Hai góc *AOC* và *BOC* kề bù nên $BOC = 180° - 50° = 130°$.

Do đó $AOD = BOC = 130^\circ$ (hai góc đối đỉnh).

1.2. Cho hai đường thẳng *MN*, *PQ* cắt nhau tại *O* tạo thành bốn góc khác góc bẹt. Biết $NOP = \frac{2}{3}MOP$. Tính số đo của mỗi góc tạo thành.

Hướng dẫn giải (h.1.7)



Hình 1.7

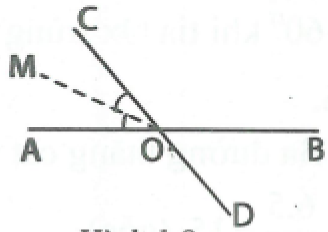
Hai góc *NOP* và *MOP* kề bù nên $NOP + MOP = 180^\circ$ mà $NOP = \frac{2}{3}MOP$

nên $NOP = \frac{180^\circ.2}{2+3} = 72^\circ$; $MOP = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$.

Suy ra $MOQ = NOP = 72^\circ$ (hai góc đối đỉnh); $NOQ = MOP = 108^\circ$ (hai góc đối đỉnh).

1.3. Cho hai đường thẳng *AB, CD* cắt nhau tại *O*. Vẽ tia *OM* là tia phân giác của góc *AOC*. Biết $BOD = a^\circ (0 < a < 180)$. Tìm giá trị của *a* để $BOM = 155^\circ$.

Hướng dẫn giải (h.1.8)



Hình 1.8

Ta có $AOC = BOD = a^\circ$ (hai góc đối đỉnh).

Tia *OM* là tia phân giác của góc *AOC* nên $AOM = MOC = \frac{a^\circ}{2}$.

Hai góc *AOM* và *BOM* kề bù nên $AOM + BOM = 180^\circ$ suy ra $BOM = 180^\circ - \frac{a^\circ}{2}$.

Ta có $BOM = 155^\circ \Leftrightarrow 180^\circ - \frac{a^\circ}{2} = 155^\circ \Leftrightarrow \frac{a^\circ}{2} = 180^\circ - 155^\circ \Leftrightarrow \frac{a^\circ}{2} = 25^\circ \Leftrightarrow a^\circ = 50^\circ$.

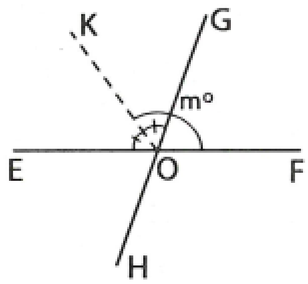
Vậy $a = 50$.

Lưu ý: Kí hiệu $\Leftrightarrow$ đọc là "khi và chỉ khi".

Khi viết $A \Leftrightarrow B$ ta hiểu từ *A* suy được ra *B* và ngược lại, từ *B* suy được ra *A*.

1.4. Cho hai đường thẳng *EF, GH* cắt nhau tại *O*. Vẽ tia phân giác *OK* của góc *EOG*. Biết $FOK = m^\circ (0 < m < 180)$. Tìm giá trị của *m* để $FOH = 110^\circ$.

Hướng dẫn giải (h.1.9)



Hình 1.9

Hai góc *EOK* và *FOK* kề bù nên $EOK + FOK = 180^\circ$

$\Rightarrow EOK = 180^\circ - m^\circ$.

Tia *OK* là tia phân giác của góc *EOG* nên $EOG = 2(180^\circ - m^\circ)$.

Vì FOH đối đỉnh với EOG nên $FOH = EOG = 2(180^\circ - m^\circ)$.

Ta có $FOH = 110^\circ \Leftrightarrow 2(180^\circ - m^\circ) = 110^\circ \Leftrightarrow 180^\circ - m^\circ = 55^\circ$

$\Leftrightarrow m^\circ = 180^\circ - 55^\circ \Leftrightarrow m^\circ = 125^\circ$. Vậy $m = 125$.

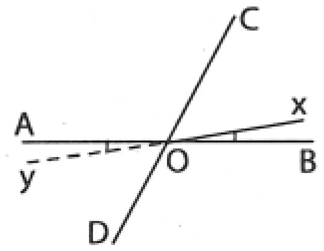
1.5. Cho hai đường thẳng *AB*, *CD* cắt nhau tại *O*, $BOC = 60^\circ$. Một tia *Ox* có thể trùng với tia *OB* hoặc *OC* hoặc nằm giữa hai tia này. Vẽ tia *Oy* là tia đối của tia *Ox*. Tìm số đo lớn nhất của góc *AOy*.

Hướng dẫn giải (h.1.10)

Hai góc *AOy* và *BOx* là hai góc đối đỉnh nên $AOy = BOx$.

Ta có $BOx \le BOC$ nên $AOy \le 60^\circ$; dấu "=" xảy ra khi tia *Ox* trùng với tia *OC*.

Vậy số đo lớn nhất của góc *AOy* là bằng 60° khi tia *Ox* trùng với tia *OC*.



Hình 1.10

1.6. Cho ba đường thẳng *AB*, *CD* và *MN* cắt nhau tại *O*.

a) Trong hình vẽ có tất cả bao nhiêu góc?

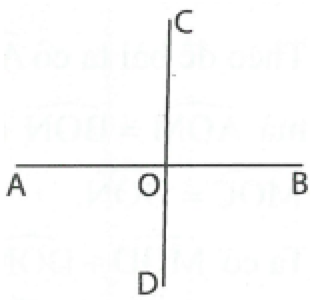
b) Chứng tỏ rằng trong các góc nói trên tồn tại hai góc tù.

Hướng dẫn giải

a) Ba đường thẳng cắt nhau tại *O* tạo thành 6 tia. Số góc do 6 tia tạo ra là: $\frac{6.5}{2} = 15$ (góc).

b) Xét hai đường thẳng *AB* và *CD* trong ba đường thẳng đã cho (h.1.11). Hai đường thẳng này tạo thành bốn góc không có điểm trong chung. Tổng của bốn góc này bằng 360° nên trong bốn góc đó phải tồn tại một góc lớn hơn hoặc bằng 90°.

Thật vậy, nếu mỗi góc đó đều nhỏ hơn 90° thì tổng của chúng nhỏ hơn $90^\circ.4 = 360^\circ$: vô lí.



Hình 1.11

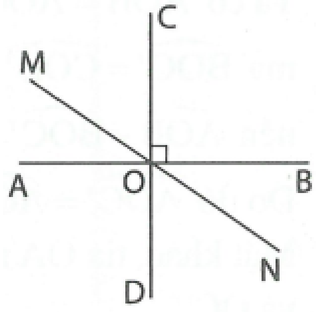
Giả sử góc tồn tại nói trên là góc *BOD*.

- Nếu $BOD > 90^\circ$ thì $AOC = BOD > 90^\circ$, bài toán đã giải xong.

- Nếu $BOD = 90^\circ$ thì ta xét tiếp đường thẳng thứ ba *MN* đi qua *O* (h.1.12).

Giả sử tia *ON* nằm trong góc *BOD*. Khi đó góc *BON* là góc nhọn do đó AON là góc tù (vì BON và AON là hai góc kề bù). Góc *AON* là góc tù thì góc *BOM* là góc tù (vì $BOM = AON$).

Vậy luôn tồn tại hai góc tù trong số 15 góc được tạo thành.



Hình 1.12

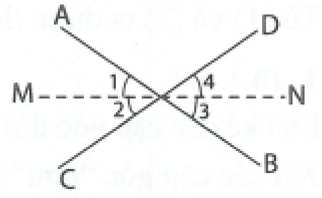
• *Chứng tỏ hai tia đối nhau*

1.7. Chứng tỏ rằng hai tia phân giác của hai góc đối đỉnh là hai tia đối nhau.

Hướng dẫn giải (h.1.13)

Xét hai góc đối đỉnh *AOC* và *BOD*. Gọi tia *OM* là tia phân giác của góc *AOC*; tia *ON* là tia phân giác của góc *BOD*. Ta phải chứng tỏ hai tia *OM*, *ON* đối nhau.

Ta có $AOC = BOD$ (hai góc đối đỉnh) mà $O_1 = O_2; O_3 = O_4$ nên $O_1 = O_3$ (một nửa của hai góc bằng nhau).



Hình 1.13

Vì $AOB = 180°$ nên $AOD + DOB = 180°$

$\Rightarrow AOD + O_4 + O_3 = 180°$

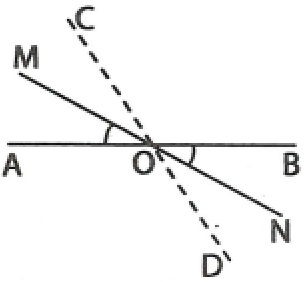
$\Rightarrow AOD + O_4 + O_1 = 180°$ (vì $O_1 = O_3$).

Do đó $MON = 180°$.

Suy ra hai tia *OM, ON* đối nhau.

1.8. Cho hai đường thẳng *AB* và *MN* cắt nhau tại *O* sao cho $AOM < 90°$. Trên nửa mặt phẳng bờ *AB* có chứa tia *OM*, vẽ tia *OC* sao cho tia *OM* là tia phân giác của góc *AOC*. Trên nửa mặt phẳng bờ *AB* có chứa tia *ON* vẽ tia *OD* sao cho tia *ON* là tia phân giác của góc *BOD*. Chứng tỏ rằng hai tia *OC, OD* là hai tia đối nhau.

Hướng dẫn giải (h.1.14)



Hình 1.14

Theo đề bài ta có $AOM = MOC, BON = DON$ mà $AOM = BON$ (hai góc đối đỉnh) nên $MOC = DON$.

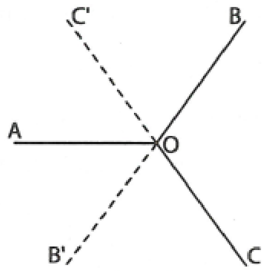
Ta có $MOD + DON = 180°$ (hai góc kề bù), suy ra $MOD + MOC = 180°$.

Hai góc *MOD* và *MOC* là hai góc kề, có tổng bằng $180°$ nên hai tia *OC, OD* đối nhau.

• Chứng tỏ một tia là tia phân giác

1.9. Cho hai góc *AOB* và *AOC* là hai góc kề bằng nhau, mỗi góc đều là góc tù. Vẽ tia OB' là tia đối của tia *OB*, tia OC' là tia đối của tia *OC*. Chứng tỏ rằng tia *OA* là tia phân giác của góc $B'OC'$.

Hướng dẫn giải (h.1.15)



Hình 1.15

Ta có $AOB = AOC$ (đề bài cho) mà $BOC' = COB'$ (hai góc đối đỉnh) nên $AOB - BOC' = AOC - COB'$.

Do đó $AOC' = AOB'$. (1)

Mặt khác, tia *OA* nằm giữa hai tia OB' và OC'. (2)

Nếu từ (1) và (2) ta được tia *OA* là tia phân giác của góc $B'OC'$.

1.10. Cho góc bẹt *AOB*. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ *AB* vẽ các tia *OC* và *OD* sao cho $AOC = BOD = 150°$. Vẽ tia *OE* là tia đối của tia *OD*. Chứng tỏ rằng tia *OB* là tia phân giác của góc *COE*.

Hướng dẫn giải (h.1.16)

Hai góc *AOC* và *BOC* kề bù nên $AOC + BOC = 180°$

$\Rightarrow BOC = 180° - 150° = 30°$.

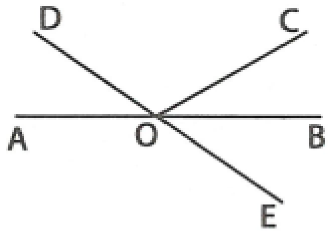
Tương tự, ta tính được $AOD = 30°$.

Ta có $BOE = AOD = 30^\circ$ (hai góc đối đỉnh).

Suy ra $BOC = BOE = 30^\circ$. (1)

Tia OB nằm giữa hai tia OC và OE. (2)

Từ (1) và (2) ta được tia OB là tia phân giác của góc COE.



Hình 1.16

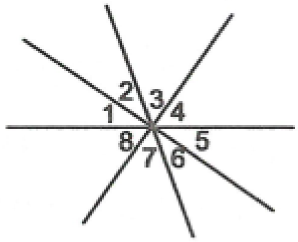
• Đếm góc, đếm tia

1.11. Cho bốn đường thẳng cắt nhau tại một điểm. Tìm số cặp góc đối đỉnh được tạo thành (không kể góc bẹt).

a) Bằng cách liệt kê;

b) Bằng cách tính toán.

Hướng dẫn giải (h.1.17)



Hình 1.17

a) Liệt kê các cặp góc đối đỉnh

• Xét các cặp góc "đơn":

Góc 1 đối đỉnh với góc 5; Góc 2 đối đỉnh với góc 6; Góc 3 đối đỉnh với góc 7; Góc 4 đối đỉnh với góc 8. Có tất cả 4 góc "đơn" đối đỉnh.

• Xét các cặp góc "ghép đôi" (ghép hai góc đơn kề nhau thành một góc "ghép đôi"):

Góc 12 đối đỉnh với góc 56; Góc 23 đối đỉnh với góc 67; Góc 34 đối đỉnh với góc 78; Góc 45 đối đỉnh với góc 81. Có tất cả 4 cặp góc "ghép đôi" đối đỉnh.

• Xét các cặp góc "ghép ba" (ghép ba góc đơn kề nhau thành một góc "ghép ba"):

Góc 123 đối đỉnh với góc 567; Góc 234 đối đỉnh với góc 678; Góc 345 đối đỉnh với góc 781; Góc 456 đối đỉnh với góc 812. Có tất cả 4 cặp góc "ghép ba" đối đỉnh.

Vậy tổng cộng có $4.3 = 12$ cặp góc đối đỉnh.

b) Xây dựng công thức tính số cặp góc đối đỉnh.

Có 4 đường thẳng cắt nhau tại một điểm nên có: $4.2 = 8$ (tia).

Số góc do 8 tia tạo ra là $\frac{8.7}{2} = 28$ (góc).

Không kể góc bẹt thì số góc còn lại là: $28 - 4 = 24$ (góc).

Mỗi góc trong 24 góc này đều có một góc đối đỉnh với nó nên số cặp góc đối đỉnh được tạo thành là $24 : 2 = 12$ (cặp).

** Nhận xét:* Nếu có n đường thẳng cắt nhau tại một điểm thì số cặp góc đối đỉnh (không kể góc bẹt) được tạo thành là $n(n-1)$.

Thật vậy, số tia do n đường thẳng cắt nhau tại một điểm tạo ra là $2n$ (tia).

Số góc do $2n$ tia tạo ra là: $\frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1)$.

Không kể n góc bẹt thì số góc còn lại là: $n(2n-1) - n = 2n^2 - n - n = 2n^2 - 2n = 2n(n-1)$.

Số cặp góc đối đỉnh là: $\dfrac{2n(n-1)}{2}=n(n-1)$.

1.12. Cho *n* đường thẳng cắt nhau tại một điểm, chúng tạo thành:

a) 20 cặp góc đối đỉnh (không kể góc bẹt);

b) 90 cặp góc đối đỉnh (không kể góc bẹt).

Tính giá trị của *n* trong mỗi trường hợp.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $n(n-1)=20$

$n(n-1)=5.4 \Rightarrow n=5$.

Vậy $n=5$.

b) Ta có: $n(n-1)=90$

$n(n-1)=10.9 \Rightarrow n=10$

Vậy $n=10$.

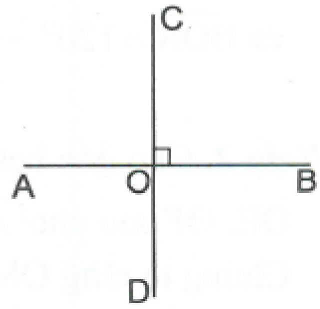
Chương I. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG.

Chuyên đề 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A. Kiến thức cần nhớ

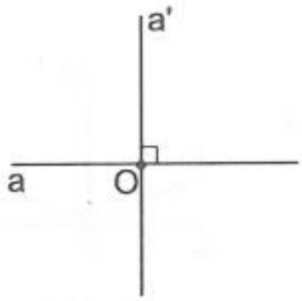
1. Hai đường thẳng *AB, CD* cắt nhau và trong các góc tạo thành có một góc vuông được gọi là hai đường thẳng vuông góc.

Trong hình 2.1 ta có $AB \perp CD$.

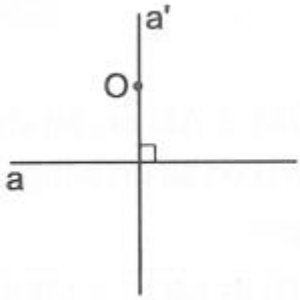


Hình2.1

2. Có một và chỉ một đường thẳng a' đi qua *O* và vuông góc với đường thẳng a cho trước (h.2.2).



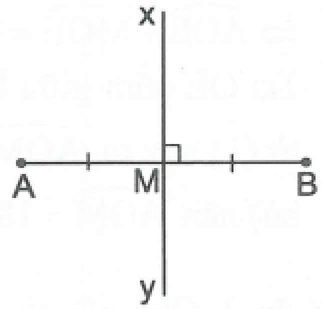
Hình 2.2a



Hình 2.2b

3. Đường thẳng vuông góc với một đoạn thẳng tại trung điểm của nó được gọi là đường trung trực của đoạn thẳng ấy.

Trong hình 2.3, đường thẳng xy là đường trung trực của *AB*.



Hình2.3

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho góc bẹt *AOB* và tia *OM* sao cho $AOM = 60°$. Vẽ tia *ON* nằm trong góc *BOM* sao cho $ON \perp OM$. Chứng tỏ rằng $BON = \frac{1}{2} AOM$.

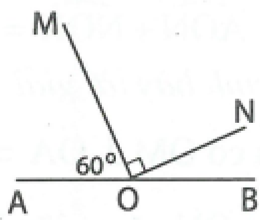
Giải (h.2.4)

** Tìm cách giải*

Muốn so sánh hai góc *BON* và *AOM* ta cần tính số đo của chúng.

Đã biết số đo của góc *AOM* nên chỉ cần tính số đo của góc *BON*.

** Trình bày lời giải*



Hình2.4

Hai góc *AOM* và *BOM* kề bù nên $AOM + BOM = 180°$

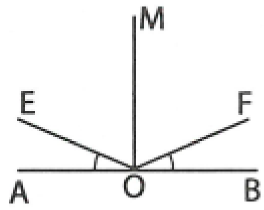
$\Rightarrow BOM = 180° - 60° = 120°$. Vì $OM \perp ON$ nên $MON = 90°$.

Tia *ON* nằm trong góc *BOM* nên $BON + MON = BOM$

$\Rightarrow BON = 120° - 90° = 30°$. Vì $30° = \frac{1}{2}.60°$ nên $BON = \frac{1}{2} AOM$.

Ví dụ 2: Cho góc bẹt *AOB*. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ *AB* vẽ các tia *OE*, *OF* sao cho $AOE = BOF < 90°$. Vẽ tia phân giác *OM* của góc *EOF*. Chứng tỏ rằng $OM \perp AB$.

Giải (h.2.5)



Hình2.5

** Tìm cách giải*

Để chứng tỏ $OM \perp AB$ ta cần chứng tỏ góc *AOM* (hoặc góc *BOM*) có số đo bằng $90°$.

** Trình bày lời giải*

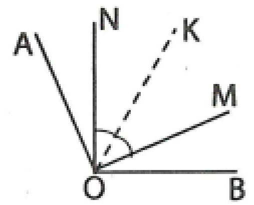
Ta có $AOE = BOF; MOE = MOF$ (đề bài cho)

$\Rightarrow AOE + MOE = BOF + MOF$. (1)

Tia *OE* nằm giữa hai tia *OA, OM*; tia *OF* nằm giữa hai tia *OB, OM* nên từ (1) suy ra $AOM = BOM$. Mặt khác, $AOM + BOM = 180°$ (hai góc kề bù) nên $AOM = 180° : 2 = 90°$, suy ra $OM \perp OA$. Do đó $OM \perp AB$.

Ví dụ 3: Cho góc tù *AOB*. Vẽ vào trong góc này các tia *OM, ON* sao cho $OM \perp OA, ON \perp OB$. Vẽ tia *OK* là tia phân giác của góc *MON*. Chứng tỏ rằng tia *OK* cũng là tia phân giác của góc *AOB*.

Giải (h.2.6)



Hình2.6

** Tìm cách giải*

Muốn chứng tỏ tia *OK* là tia phân giác của góc *AOB* ta cần chứng tỏ $AOK = BOK$. Muốn vậy cần chứng tỏ $AON + NOK = BOM + MOK$.

** Trình bày lời giải*

Ta có $OM \perp OA \Rightarrow AOM = 90°; ON \perp OB \Rightarrow BON = 90°$.

Tia *ON* nằm giữa hai tia *OA, OM* nên $AON + NOM = AOM = 90°$;

Tia *OM* nằm giữa hai tia *OB, ON* nên $BOM + MON = BON = 90°$.

Suy ra $AON = BOM$ (cùng phụ với MON).

Tia *OK* là tia phân giác của góc *MON* nên $NOK = MOK$.

Do đó $AON + NOK = BOM + MOK$. (1)

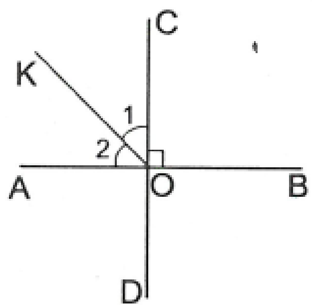
Vì tia *ON* nằm giữa hai tia *OA, OK* và tia *OM* nằm giữa hai tia *OB, OK* nên từ (1) suy ra $AOK = BOK$. Mặt khác, tia *OK* nằm giữa hai tia *OA, OB* nên tia *OK* cũng là tia phân giác của góc *AOB*.

C. Bài tập vận dụng

• Tính số đo góc

2.1. Cho hai đường thẳng *AB* và *CD* vuông góc với nhau tại *O*. Vẽ tia *OK* là tia phân giác của góc *AOC*. Tính số đo góc *KOD* và *KOB*.

Hướng dẫn giải (h.2.9)



Hình 2.9

Vì $AB \perp CD$ nên $AOC = 90°$.

Vì tia *OK* là tia phân giác của góc *AOC* nên $O_1 = O_2 = 45°$.

Ta có $KOD + O_1 = 180°$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow KOD = 180° - 45° = 135°$.

$KOB + O_2 = 180°$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow KOB = 180° - 45° = 135°$.

2.2. Cho góc *AOB* và tia *OC* nằm trong góc đó sao cho $AOC = 4BOC$. Vẽ tia phân giác *OM* của góc *AOC*. Tính số đo của góc *AOB* nếu $OM \perp OB$.

Hướng dẫn giải (h.2.10)

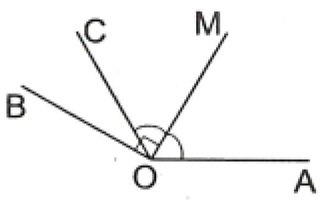
Tia *OM* là tia phân giác của góc *AOC* nên $MOC = \frac{1}{2}AOC$ mà

$AOC = 4BOC$ nên $MOC = 2BOC$.

Nếu $OM \perp OB$ thì $MOB = 90°$.

Ta có $MOC + BOC = 90°$ do đó $2BOC + BOC = 90° \Rightarrow BOC = 30°$.

Vậy $AOC = 4.30° = 120°$.



Hình 2.10

2.3. Cho góc tù *AOB*, $AOB = m°$. Vẽ vào trong góc này các tia *OC, OD* sao cho $OC \perp OA; OD \perp OB$.

a) Chứng tỏ rằng $AOD = BOC$.

b) Tìm giá trị của *m* để $AOD = DOC = COB$.

Hướng dẫn giải (h.2.11)

a) Ta có $OC \perp OA$ nên $AOC = 90°$; $OD \perp OB$ nên $BOD = 90°$.

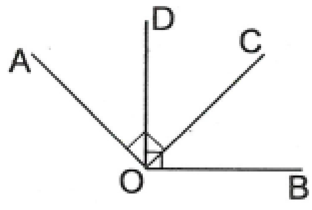
Tia *OD* nằm trong góc *AOB* nên $AOD + BOD = AOB$.

$\Rightarrow AOD = AOB - BOD = m° - 90°$ (1)

Tia *OC* nằm trong góc *AOB* nên $AOC + BOC = AOB$

$\Rightarrow BOC = AOB - AOC = m° - 90°$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $AOD = BOC\left(= m° - 90°\right)$.



Hình 2.11

b) Tia *OC* nằm giữa hai tia *OB* và *OD*. Suy ra $BOC + DOC = BOD = 90°$.

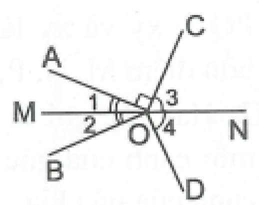
Nếu $BOC = DOC$ thì $DOC = 90° : 2 = 45°$.

Do đó $AOD = DOC = COD \Leftrightarrow AOB = 3.DOC = 3.45° = 135° \Leftrightarrow m = 135$.

• *Chứng tỏ hai đường thẳng vuông góc*

2.4. Trong hình 2.7 có góc *MON* là góc bẹt, góc *AOC* là góc vuông. Các tia *OM, ON* lần lượt là các tia phân giác của các góc *AOB* và *COD*. Chứng tỏ rằng $OB \perp OD$.

Hướng dẫn giải (h.2.7)



Hình2.7

Vì MON là góc bẹt nên $O_1 + O_3 + AOC = 180°$ (1)

$O_2 + O_4 + BOD = 180°$ (2)

Mặt khác, $O_1 = O_2; O_3 = O_4$ (đề bài cho) nên từ (1) và (2) suy ra $AOC = BOD$.

Vì $AOC = 90°$ nên $BOD = 90° \Rightarrow OB \perp OD$.

2.5. Cho góc nhọn *AOB*. Trên nửa mặt phẳng bờ *OA* có chứa tia *OB*, vẽ tia $OC \perp OA$. Trên nửa mặt phẳng bờ *OB* có chứa tia *OA* vẽ tia $OD \perp OB$. Gọi *OM* và *ON* lần lượt là các tia phân giác của các góc *AOD* và *BOC*. Chứng tỏ rằng $OM \perp ON$.

Hướng dẫn giải (h.2.12)

Ta có $OC \perp OA \Rightarrow AOC = 90°$. $OD \perp OB \Rightarrow BOD = 90°$.

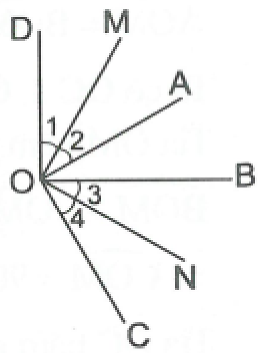
Tia *OB* nằm giữa hai tia *OA, OC*.

Do đó $AOB + BOC = 90°$. (1)

Tương tự, ta có $AOB + AOD = 90°$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BOC = AOD$ (cùng phụ với AOB).

Tia *OM* là tia phân giác của góc *AOD* $\Rightarrow O_1 = O_2 = \dfrac{AOD}{2}$.



Hình 2.12

Tia *ON* là tia phân giác của góc *BOC* $\Rightarrow O_3 = O_4 = \dfrac{BOC}{2}$.

Vì $AOD = BOC$ nên $O_1 = O_2 = O_3 = O_4$.

Ta có $AOB + BOC = 90° \Rightarrow AOB + O_3 + O_4 = 90° \Rightarrow AOB + O_3 + O_2 = 90°$.

Do đó $MON = 90° \Rightarrow OM \perp ON$.

2.6. Cho góc bẹt *AOB*. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ *AB* vẽ các tia *OM* và *ON* sao cho $AOM = BON = m°(90 < m < 180)$. Vẽ tia phân giác *OC* của góc *MON*.

a) Chứng tỏ rằng $OC \perp AB$.

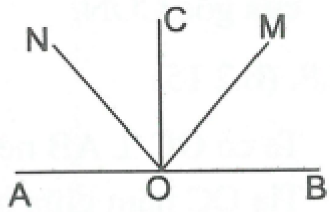
b) Xác định giá trị của *m* để $OM \perp ON$.

Hướng dẫn giải (h.2.13)

a) Ta có $AON + BON = 180°; BOM + AOM = 180°$ (hai góc kề bù) mà $AOM = BON$ (đề bài cho) nên $AON = BOM$.

Mặt khác, tia *OC* là tia phân giác của góc *MON* nên $CON = COM$.

Do đó $AON + CON = BOM + COM$ (1)



Hình 2.13

Ta có tia *ON* nằm giữa hai tia *OA*, *OC*; tia *OM* nằm giữa hai tia *OB*, *OC* nên từ (1) suy ra $AOC = BOC = 180^\circ : 2 = 90^\circ$. Vậy $OC \perp AB$.

b) Tia *OM* nằm giữa hai tia *OB* và *ON* nên $BOM + MON = BON = m^\circ$ (1).

Mặt khác $BOM = 180^\circ - AOM = 180^\circ - m^\circ$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $\left(180^\circ - m^\circ\right) + 90^\circ = m^\circ \Rightarrow 2m^\circ = 270^\circ \Rightarrow m^\circ = 135^\circ$.

Vậy $m = 135$.

• *Chứng minh một tia là tia phân giác, là tia đối*

2.7. Cho góc *AOB* có số đo bằng 120°. Vẽ tia phân giác *OM* của góc đó. Trên nửa mặt phẳng bờ *OM* có chứa tia *OA*, vẽ tia $ON \perp OM$. Trong góc *AOB* vẽ tia $OC \perp OB$. Chứng tỏ rằng:

a) Tia *OC* là tia phân giác của góc *AOM*;

b) Tia *OA* là tia phân giác của góc *CON*.

Hướng dẫn giải (h.2.14)

a) Tia *OM* là tia phân giác của góc *AOB* nên $AOM = BOM = 120^\circ : 2 = 60^\circ$.

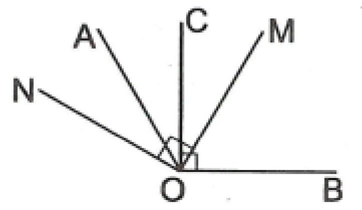
Ta có $OC \perp OB \Rightarrow BOC = 90^\circ$.

Tia *OM* nằm giữa hai tia *OB*, *OC* nên $BOM + COM = BOC$

$\Rightarrow COM = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Tia *OC* nằm giữa hai tia *OA*, *OB* nên $AOC + BOC = AOB$

$\Rightarrow AOC = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$.



Hình 2.14

Vậy $AOC = COM\left(= 30^\circ\right)$. (1)

Tia *OC* nằm giữa hai tia *OA*, *OM* nên từ (1) suy ra tia *OC* là tia phân giác của góc *AOM*.

b) Ta có $OM \perp ON \Rightarrow MON = 90^\circ$.

Tia *OA* nằm giữa hai tia *ON*, *OM* nên $AON + AOM = MON$.

Suy ra $AON = MON - AOM = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Vậy $AON = AOC\left(= 30^\circ\right)$ (2)

Tia *OA* nằm giữa hai tia *ON*, *OC* nên từ (2) suy ra tia *OA* là tia phân giác của góc *CON*.

2.8. Cho góc bẹt *AOB*, tia $OC \perp AB$. Vẽ tia *OM* và *ON* ở trong góc *BOC* sao cho $BOM = CON = \frac{1}{3}BOC$. Tìm trong hình vẽ các tia là tia phân giác của một góc.

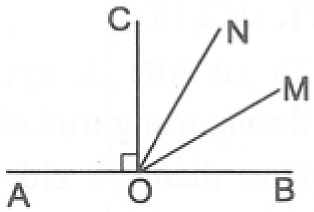
Hướng dẫn giải (h.2.15)

Ta có $OC \perp AB$ nên $AOC = BOC = 90^\circ$ (1)

Tia *OC* nằm giữa hai tia *OA*, *OB*. (2)

Từ (1) và (2) suy ra tia *OC* là tia phân giác của góc *AOB*.

Ta có $BOM = CON = \frac{1}{3}BOC = 30°$.



Hình 2.15

Tia *ON* nằm trong góc *BOC* nên $BON + CON = BOC$.

Suy ra $BON = 90° - 30° = 60°$.

Tia *OM* nằm giữa hai tia *OB, ON*. (3)

Do đó $BOM + MON = BON \Rightarrow MON = 60° - 30° = 30°$.

Vậy $BOM = MON = CON = 30°$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra tia *OM* là tia phân giác của góc *BON*.

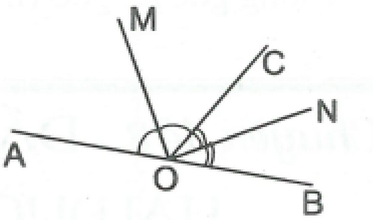
Tia *ON* nằm giữa hai tia *OM* và *OC* (5)

Từ (4) và (5) suy ra tia *ON* là tia phân giác của góc *COM*.

Tóm lại, các tia *OC, OM, ON* lần lượt là các tia phân giác của các góc *AOB, BON* và *COM*.

2.9. Cho hai tia *OM* và *ON* vuông góc với nhau, tia *OC* nằm giữa hai tia đó. Vẽ các tia *OA* và *OB* sao cho tia *OM* là tia phân giác của góc *AOC*, tia *ON* là tia phân giác của góc *BOC*. Chứng tỏ rằng hai tia *OA, OB* đối nhau.

Hướng dẫn giải (h.2.16)



Hình 2.16

Ta có $OM \perp ON \Rightarrow MON = 90°$.

Tia *OM* là tia phân giác của góc *AOC* nên $AOM = MOC$.

Tia *ON* là tia phân giác của góc *BOC* nên $BON = NOC$.

Xét tổng

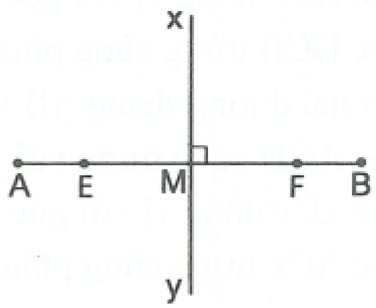
$$AOC + BOC = 2MOC + 2NOC = 2\left(MOC + NOC\right) = 2MON = 2.90° = 180°.$$

Hai góc kề *AOC* và *BOC* có tổng bằng $180°$ nên hai tia *OA, OB* đối nhau.

• Đường trung trực – Hai góc có cạnh tương ứng vuông góc

2.10. Cho đoạn thẳng $AB = 2a$. Lấy các điểm *E* và *F* nằm giữa *A* và *B* sao cho $AE = BF$. Chứng tỏ rằng hai đoạn thẳng *AB* và *EF* cùng có chung một đường trung trực.

Hướng dẫn giải (h.2.17)



Hình 2.17

• Trường hợp $AE = BF < a$:

Gọi *M* là trung điểm của *AB*. Khi đó $MA = MB = a$.

Điểm *E* nằm giữa hai điểm *A* và *M*, điểm *F* nằm giữa hai điểm *B* và *M*.

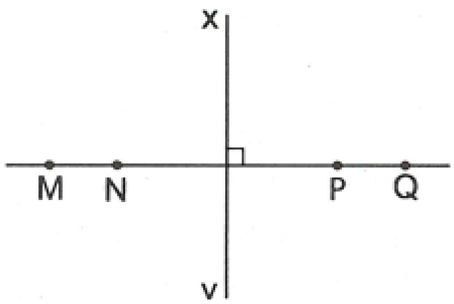
Do đó $ME = MA - AE = a - AE$; $MF = MB - BF = a - BF$.

Vì $AE = BF$ nên $ME = MF$. Vậy *M* là trung điểm chung của hai đoạn thẳng *AB* và *EF*. Qua *M* vẽ $xy \perp AB$ thì *xy* là đường trung trực chung của *AB* và *EF*.

• Trường hợp $AE = BF > a$: Chứng minh tương tự.

2.11. Cho bốn điểm *M, N, P, Q* nằm ngoài đường thẳng *xy*. Biết $MN \perp xy$; $PQ \perp xy$ và *xy* là đường trung trực của đoạn thẳng *NP*. Chứng tỏ rằng bốn điểm *M, N, P, Q* thẳng hàng.

Hướng dẫn giải (h.2.18)

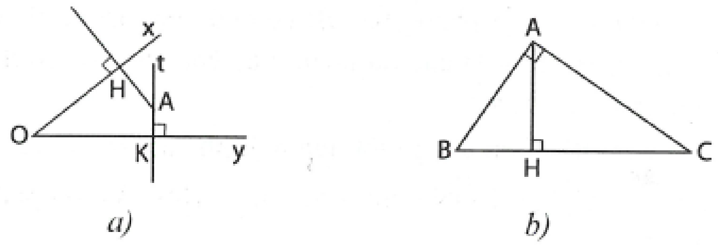


Ta có $MN \perp xy; NP \perp xy$ (vì *xy* là đường trung trực của *NP*). Qua điểm *N* chỉ vẽ được một đường thẳng vuông góc với *xy*, suy ra ba điểm *M, N, P* thẳng hàng. (1)

Ta có $NP \perp xy; PQ \perp xy$. Qua điểm *P* chỉ vẽ được một đường thẳng vuông góc với *xy*, suy ra ba điểm *N, P, Q* thẳng hàng. (2)

Từ (1) và (2) suy ra các điểm *M, N, P, Q* thẳng hàng vì chúng cùng thuộc đường thẳng *NP*.

2.12. Hai góc gọi là có cạnh tương ứng vuông góc nếu đường thẳng chứa mỗi cạnh của góc này tương ứng vuông góc với đường thẳng chứa một cạnh của góc kia.



Hình 2.8

Xem hình 2.8 (a, b) rồi kể tên các góc nhọn (hoặc tù) có cạnh tương ứng vuông góc.

Hướng dẫn giải

Trên hình 2.8a) có $AH \perp Ox, AK \perp Oy$ nên các góc có cạnh tương ứng vuông góc là: góc *HAK* và góc *xOy*; góc *HAt* và góc *xOy*.

Trên hình 2.8b) có $AB \perp AC$ và $AH \perp BC$ nên các góc có cạnh tương ứng vuông góc là: góc *BAH* và góc *C*; góc *CAH* và góc *B*.

Chương 1. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Chuyên đề 3. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa

• Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng không có điểm chung.

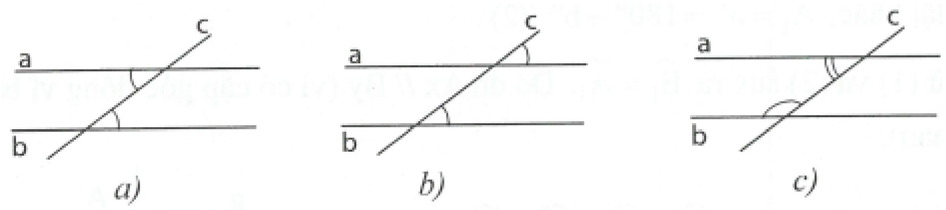
• Hai đường thẳng phân biệt thì hoặc cắt nhau hoặc song song.

2. Dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song

• Nếu đường thẳng *c* cắt hai đường thẳng *a, b* và trong các góc tạo thành có một cặp góc so le trong bằng nhau thì $a//b$ (h.3.1.a).

• Nếu đường thẳng *c* cắt hai đường thẳng *a, b* và trong các góc tạo thành có một cặp góc đồng vị bằng nhau thì $a//b$ (h.3.1.b).

• Nếu đường thẳng *c* cắt hai đường thẳng *a, b* và trong các góc tạo thành có một cặp góc trong cùng phía bù nhau thì $a//b$ (h.3.1.c).



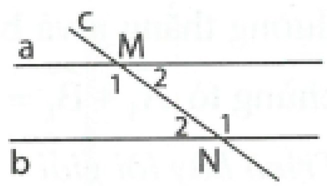
Hình 3.1

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Hình 3.2 có $M_1 = 3M_2; N_1 = 3N_2$. Chứng tỏ rằng $a//b$.

Giải

** Tìm cách giải*



Hình3.2

Hai đường thẳng a và b tạo với cát tuyến c một cặp góc so le trong là M_1 và N_1 hoặc M_2 và N_2. Do đó chỉ cần chứng tỏ $M_1 = N_1$ hoặc $M_2 = N_2$.

** Trình bày lời giải*

Ta có $M_1 + M_2 = 180°$ (hai góc kề bù).

Mặt khác, $M_1 = 3M_2$ nên $M_2 = 180° : 4 = 45°$.

Tương tự $N_1 + N_2 = 180°$ và $N_1 = 3N_2 \Rightarrow N_2 = 45°$.

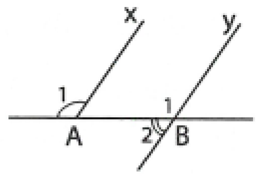
Vậy $M_2 = N_2 (= 45°)$. Suy ra $a//b$ (vì có cặp góc so le trong bằng nhau).

Ví dụ 2: Hình 3.3 có: $A_1 = a°; B_2 = b°$. Biết $a° + b° = 180°$, chứng tỏ rằng $Ax//By$.

Giải

** Tìm cách giải*

Hai tia *Ax* và *By* tạo với cát tuyến là đường thẳng *AB* cặp góc A_1 và B_1 ở vị trí đồng vị. Muốn chứng tỏ $Ax//By$, chỉ cần chứng tỏ $A_1 = B_1$.



Hình3.3

** Trình bày lời giải*

Ta có $B_1 + B_2 = 180°$ (hai góc kề bù). Suy ra $B_1 = 180° - B_2 = 180° - b°$. (1)

Mặt khác, $A_1 = a° = 180° - b°$. (2)

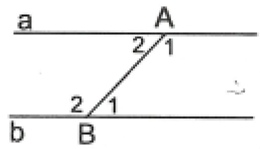
Từ (1) và (2) suy ra $B_1 = A_1$. Do đó $Ax//By$ (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau).

Ví dụ 3: Hình 3.4 có $A_1 + B_1 = A_2 + B_2$. Chứng tỏ rằng $a//b$.

Giải

** Tìm cách giải*

Các góc A_1 và B_1 hoặc A_2 và B_2 là cặp góc trong cùng phía của hai đường thẳng a và b (đối với cát tuyến *AB*). Muốn chứng tỏ $a//b$ chỉ cần chứng tỏ $A_1 + B_1 = 180°$ (hoặc $A_2 + B_2 = 180°$).



Hình3.4

** Trình bày lời giải*

Ta có $\left(A_1 + B_1\right) + \left(A_2 + B_2\right) = \left(A_1 + A_2\right) + \left(B_1 + B_2\right) = 360°$.

Mà $A_1 + B_1 = A_2 + B_2$ (đề bài cho) nên $A_1 + B_1 = 360° : 2 = 180°$.

Suy ra $a//b$ (vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau).

C. Bài tập vận dụng

• Xác định các cặp góc so le trong, đồng vị, trong cùng phía

3.1. Xem hình 3.5 rồi cho biết góc nào so le trong, đồng vị, trong cùng phía:

a) Với góc *ADC*;

b) Với góc *BAC*.

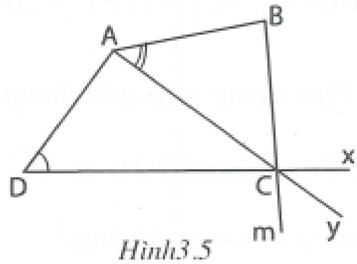
Hướng dẫn giải (h.3.5)

a) Xét hai đường thẳng *AD* và *Bm*, đối với cát tuyến *Dx* thì:

- Góc *DCm* so le trong với góc *ADC*;
- Góc *BCx* đồng vị với góc *ADC*;
- Góc *DCB* trong cùng phía với góc *ADC*.

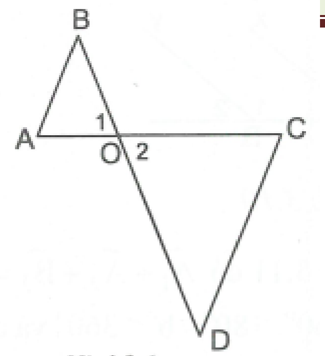
b) Xét hai đường thẳng *AB* và *Dx*, đối với cát tuyến *Ay* thì:

- Góc *ACD* so le trong với góc *BAC*;
- Góc *xCy* đồng vị với góc *BAC*;
- Góc *Acx* trong cùng phía với góc *BAC*.



Hình3.5

• Vận dụng cặp góc so le trong



Hình3.6

3.2. Hình 3.6 có $A = O_1; C = O_2$. Chứng tỏ rằng $AB//CD$.

Hướng dẫn giải (h.3.6)

• *Tìm cách giải*

Để chứng tỏ $AB//CD$ ta chứng tỏ một cặp góc so le trong bằng nhau. Ta nghĩ đến việc chứng tỏ $A = C$ vì có thể dùng các góc O_1, O_2 làm trung gian.

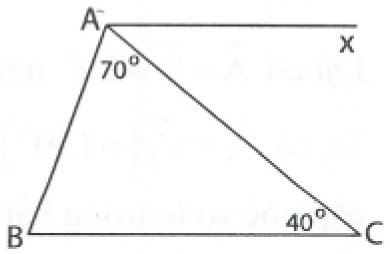
• Trình bày lời giải

Ta có $A = O_1; C = O_2$ (đề bài cho) mà $O_1 = O_2$ (đối đỉnh) nên $A = C$.

Suy ra $AB//CD$ vì có cặp góc so le trong bằng nhau.

3.3. Cho tam giác *ABC*, $A = 70°, C = 40°$. Trên nửa mặt phẳng bờ *AB* có chứa *C* vẽ tia *Ax* sao cho $BAx = 110°$. Chứng tỏ rằng tia $Ax//BC$.

Hướng dẫn giải (h.3.16)



Hình 3.16

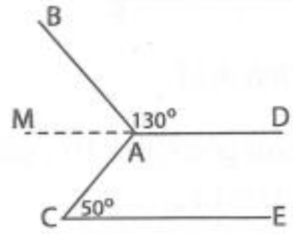
Tia *AC* nằm giữa hai tia *AB* và *Ax* nên $BAC + CAx = BAx$

$\Rightarrow CAx = 110° - 70° = 40°$.

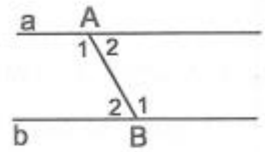
Do đó $CAx = C(= 40°)$.

Suy ra $Ax//BC$ vì có cặp góc so le trong bằng nhau.

3.4. Hình 3.7 có $BAD = 130°, C = 50°$. Vẽ tia *AM* là tia đối của tia *AD*. Biết tia *AM* là tia phân giác của góc *BAC*. Chứng tỏ rằng $AD//CE$.



Hình 3.7



Hình 3.8

Hướng dẫn giải (h.3.7)

• Tìm cách giải

Đề bài có cho hai tia đối nhau nên ta vận dụng tính chất của hai góc kề bù. Ngoài ra đề bài còn có tia phân giác nên trong hình vẽ có hai góc bằng nhau.

• Trình bày lời giải

Hai góc *MAB* và *BAD* kề bù nên $MAB = 180° - 130° = 50°$.

Tia *AM* là tia phân giác của góc *BAC* nên $MAC = MAB = 50°$.

Do đó $MAC = C\left(=50^\circ\right) \Rightarrow AD//CE$ vì có cặp góc so le trong bằng nhau.

3.5. Hình 3.8 có $A_1 - 2A_2 = B_1 - 2B_2$. Chứng tỏ rằng $a//b$.

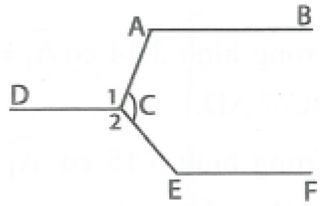
Hướng dẫn giải (h.3.8)

Ta có $A_1 + A_2 = B_1 + B_2\left(=180^\circ\right) \Rightarrow 2A_1 + 2A_2 = 2B_1 + 2B_2$ (1)

Mặt khác: $A_1 - 2A_2 = B_1 - 2B_2$ (2)

Cộng từng vế các đẳng thức (1) và (2) được $3A_1 = 3B_1 \Rightarrow A_1 = B_1$

$\Rightarrow a//b$ vì có cặp góc so le trong bằng nhau.



Hình3.9

3.6. Trong hình 3.9, góc *ACE* bằng trung bình cộng của hai góc C_1 và C_2, đồng thời cũng bằng trung bình cộng của hai góc *A* và *E*.

Biết $C_1 - C_2 = A - E = 20^\circ$. Chứng tỏ rằng $AB//CD$ và $CD//EF$.

Hướng dẫn giải (h.3.9)

• *Tìm cách giải*

Trong hình vẽ đã có các cặp góc so le trong là A và C_1; E và C_2. Muốn chứng tỏ $AB//CD$ và $CD//EF$ chỉ cần chứng tỏ $A = C_1$ và $E = C_2$.

• *Trình bày lời giải*

Ta có $ACE = \dfrac{C_1 + C_2}{2} \Rightarrow C_1 + C_2 = 2ACE$.

Mặt khác $C_1 + C_2 + ACE = 360^\circ$ nên $2ACE + ACE = 360^\circ \Rightarrow ACE = 120^\circ$.

Do đó $C_1 + C_2 = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$ mà $C_1 - C_2 = 20^\circ$ nên $C_1 = 130^\circ; C_2 = 110^\circ$.

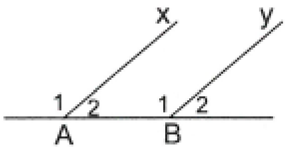
Ta có $ACE = \dfrac{A + E}{2} \Rightarrow A + E = 2ACE = 240^\circ$.

Lại có $A - E = 20^\circ$ nên $A = 130^\circ; E = 110^\circ$.

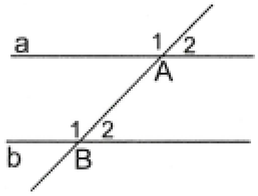
Ta có $A = C_1\left(=130^\circ\right) \Rightarrow AB//CD; E = C_2\left(=110^\circ\right) \Rightarrow CD//EF$ vì có cặp góc so le trong bằng nhau.

• *Vận dụng cặp góc đồng vị*

3.7. Trong hình 3.10 có $A_2 = \dfrac{2}{7}A_1; B_1 - B_2 = 100^\circ$. Hỏi *Ax* và *By* có song song với nhau không?



Hình 3.10



Hình 3.11

Hướng dẫn giải (h.3.10)

Ta có $A_1 + A_2 = 180°$ mà $A_2 = \frac{2}{7}A_1$ nên $A_2 = \frac{180°.2}{9} = 40°$.

$B_1 + B_2 = 180°$ mà $B_1 - B_2 = 100°$ nên $B_2 = 40°$.

Vậy $A_2 = B_2 = 40° \Rightarrow Ax//By$ vì có cặp góc đồng vị bằng nhau.

3.8. Trong hình 3.11 có $A_1 + A_2 + B_2 = a°; B_1 + B_2 + A_1 = b°$, trong đó $180° < a° < 360°$; $180° < b° < 360°$ và $a° + b° = 540°$. Chứng tỏ rằng $a//b$.

Hướng dẫn giải (h.3.11)

Ta có $A_1 + A_2 + B_2 = a° \Rightarrow B_2 = a° - 180°$ (1)

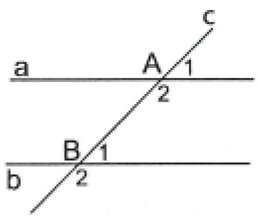
$B_1 + B_2 + A_1 = b° \Rightarrow A_1 = b° - 180°$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $B_2 + A_1 = (a° + b°) - 360° = 540° - 360° = 180°$.

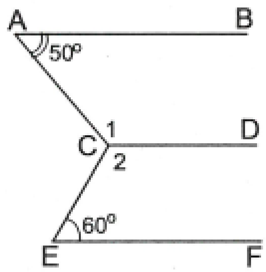
Mặt khác $A_2 + A_1 = 180°$ (kề bù) nên $B_2 + A_1 = A_2 + A_1 (= 180°)$.

Suy ra $B_2 = A_2$. Do đó $a//b$ vì có cặp góc đồng vị bằng nhau.

3.9. Hình 3.12 có $A_2 - A_1 = B_2 - B_1$. Chứng tỏ rằng $a//b$.



Hình 3.12



Hình 3.13

Hướng dẫn giải (h.3.12)

• *Tìm cách giải*

Trong hình vẽ đã có những cặp góc đồng vị, cặp góc trong cùng phía. Từ điều kiện trong đề bài, ta có thể suy ra được tổng của hai góc trong cùng phía bù nhau, từ đó suy ra được hai đường thẳng song song.

• *Trình bày lời giải*

Ta có $A_2 - A_1 = B_2 - B_1$, suy ra $A_2 + B_1 = B_2 + A_1$.

Mặt khác $A_2 + B_1 + B_2 + A_1 = 360°$ nên $A_2 + B_1 = 180°$.

Suy ra $a//b$ vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau.

3.10. Hình 3.13 có $A = 50°, E = 60°$, góc C_1 hơn góc C_2 là $10°$, góc C_2 hơn góc ACE là $10°$. Chứng tỏ rằng $AB//CD; CD//EF$.

Hướng dẫn giải (h.3.13)

Đặt $ACE = m°$ thì $C_2 = m° + 10°$ và $C_1 = m° + 20°$.

Ta có $ACE + C_1 + C_2 = 360°$ do đó

$m° + (m° + 10°) + (m° + 20°) = 360° \Rightarrow 3m° + 30° = 360° \Rightarrow m° = 110°$.

Vậy $C_2 = 120°; C_1 = 130°$.

Ta có $A + C_1 = 50° + 130° = 180° \Rightarrow AB//CD; E + C_2 = 60° + 120° = 180° \Rightarrow CD//EF$; vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau.

• *Vận dụng nhiều dấu hiệu song song*

3.11. Trong hình 3.14 có $A_1 = D_1 = 105°; C_1 = 75°$. Chứng tỏ rằng $AB//CD$ và $BC//AD$.

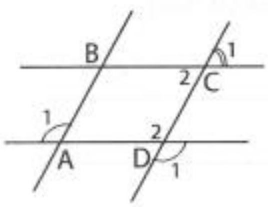
Hướng dẫn giải (h.3.14)

Ta có $D_2 = D_1 = 105°$ (đối đỉnh); $C_2 = C_1 = 75°$ (đối đỉnh).

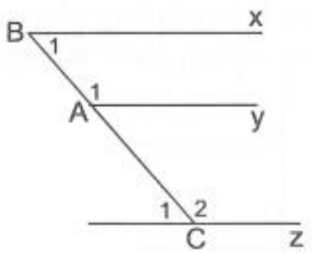
Vậy $A_1 = D_2 (= 105°) \Rightarrow AB//CD$ vì có cặp góc đồng vị bằng nhau.

$C_2 + D_2 = 75° + 105° = 180° \Rightarrow BC//AD$ vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau.

3.12. Trong hình 3.15 có $A_1 = 3B_1; A_1 = 3C_1$ và $C_1 = 45°$. Hãy kể tên các cặp đường thẳng song song.



Hình 3.14



Hình 3.15

Hướng dẫn giải (h.3.15)

• Ta có $B_1 = C_1 = \frac{1}{3}A_1$. Suy ra $Bx//Cz$ vì có cặp góc so le trong bằng nhau.

• Ta có $B_1 = C_1 = 45° \Rightarrow A_1 = 135°$. Vậy $B_1 + A_1 = 45° + 135° = 180°$.

Suy ra $Bx//Ay$ vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau.

• Ta có C_1 và C_2 kề bù $\Rightarrow C_2 = 180° - C_1 = 135°$. Vậy $C_2 = A_1 = 135°$.

$\Rightarrow Ay//Cz$ vì có cặp góc đồng vị bằng nhau.

3.13. Cho tam giác *ABC*, $A = 70°; B = 55°$. Trên tia đối của tia *AB* lấy điểm *M*. Vẽ tia *Mx* trên nửa mặt phẳng bờ *MB* không chứa *C* sao cho $BMx = 55°$. Vẽ tia *Ay* là tia phân giác của góc *CAM*. Chứng tỏ rằng $Mx//\text{BC}$ và $Ay//BC$.

Hướng dẫn giải (h.3.17)

• Ta có $BMx = B = 55°$. Suy ra $Mx//BC$ vì có cặp góc so le trong bằng nhau.

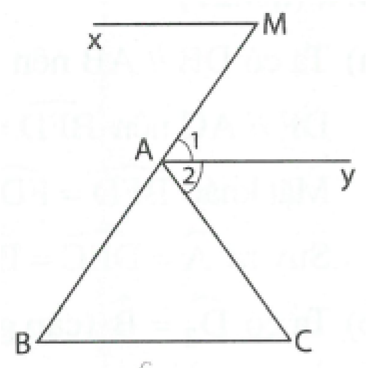
• Ta có $CAM + CAB = 180°$ (hai góc kề bù)

$CAM = 180° - 70° = 110°$.

Tia *Ay* là tia phân giác của góc *CAM*

$\Rightarrow A_1 = A_2 = 55°$, do đó $A_1 = B = 55°$.

Suy ra $Ay//BC$ vì có cặp góc đồng vị bằng nhau.



Hình 3.17

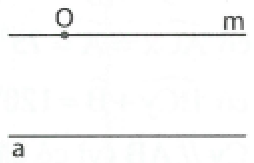
Chương I. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG.

Chuyên đề 4. TIÊN ĐỀ Ơ-CLÍT. TÍNH CHẤT CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG.

A. Kiến thức cần nhớ

1. Tiên đề Ơ-clít: Qua một điểm ở ngoài một đường thẳng chỉ có một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

Trong hình 4.1, đường thẳng m đi qua O và song song với a là duy nhất.



Hình4.1

2. Tính chất của hai đường thẳng song song

Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì:

a) Hai góc so le trong bằng nhau;

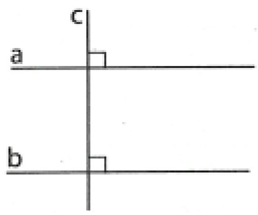
b) Hai góc đồng vị bằng nhau;

c) Hai góc trong cùng phía bù nhau.

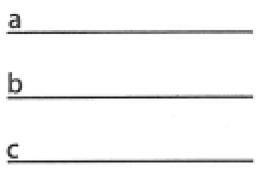
3. Quan hệ giữa tính vuông góc với tính song song

a) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau (h.4.2);

b) Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng vuông góc với đường thẳng kia (h.4.2);



Hình 4.2



Hình 4.3

c) Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau (h.4.3).

B. Một số ví dụ

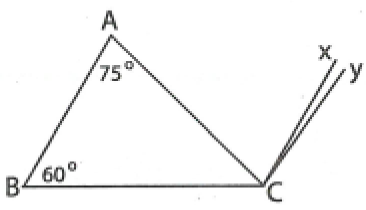
Ví dụ 1: Cho tam giác ABC, $A = 75°; B = 60°$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC có chứa A vẽ các tia Cx và Cy sao cho $ACx = 75°; BCy = 120°$. Chứng tỏ rằng các tia Cx và Cy trùng nhau.

Giải (h.4.4)

** Tìm cách giải*

Để chứng tỏ hai tia Cx và Cy trùng nhau ta chứng tỏ hai đường thẳng chứa hai tia đó trùng nhau, đồng thời hai tia này cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ BC.

** Trình bày lời giải*



Hình4.4

Ta có $ACx = A = 75° \Rightarrow Cx // AB$ (vì có cặp góc so le trong bằng nhau). (1)

Ta có $BCy + B = 120° + 60° = 180°$

$\Rightarrow Cy // AB$ (vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau). (2)

Từ (1) và (2), theo tiên đề Ơ-clít, ta có hai đường thẳng *Cx* và *Cy* trùng nhau. Mặt khác, hai tia *Cx* và *Cy* cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ *BC* có chứa *A* nên hai tia này trùng nhau.

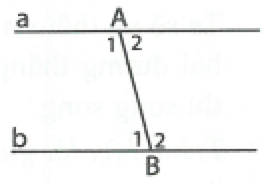
Ví dụ 2: Hình 4.5 có $a // b$ và $A_1 - B_1 = 30°$. Tính số đo các góc A_2 và B_2.

Giải

** Tìm cách giải*

Vì $a // b$ và A_2, B_2 so le trong với các góc A_1, B_1 nên chỉ cần tính A_1, B_1 là có thể suy ra A_2 và B_2.

** Trình bày lời giải*



Hình 4.5

Ta có $a // b$ nên $A_1 + B_1 = 180°$ (cặp góc trong cùng phía).

Mặt khác, $A_1 - B_1 = 30°$ (đề bài) nên $A_1 = (180° + 30°) : 2 = 105°$ và

$B_1 = 180° - 105° = 75°$.

Suy ra $A_2 = B_1 = 75°$ (cặp góc so le trong); $B_2 = A_1 = 105°$ (cặp góc so le trong).

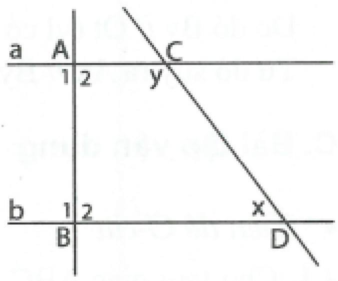
Ví dụ 3: Tính các số đo *x, y* trong hình 4.6, biết $A_1 = A_2; B_1 = B_2$ và $x = \frac{3}{7}y$.

Giải

** Tìm cách giải*

Nếu chứng minh được $a // b$ thì sẽ tìm được *x* và *y* (đây là bài toán tìm hai số khi biết tổng và tỉ số).

** Trình bày lời giải*



Hình 4.6

Ta có $A_1 + A_2 = 180°$ (kề bù) mà $A_1 = A_2$ (đề bài) nên

$A_1 = 180° : 2 = 90°$.

Suy ra $AB \perp a$.

Tương tự $AB \perp b$.

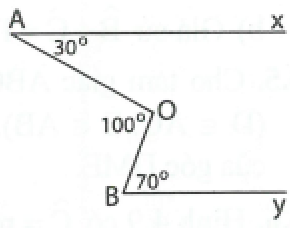
Do đó $a // b$ (cùng vuông góc với *AB*).

Ta có $x + y = 180°$ (cặp góc trong cùng phía) mà $x = \frac{3}{7}y$ nên $x = \frac{180 \times 3}{10} = 54°; y = 126°$.

Ví dụ 4: Hình 4.7 có $A = 30°; B = 70°; AOB = 100°$. Chứng tỏ rằng $Ax // By$.

Giải

** Tìm cách giải*



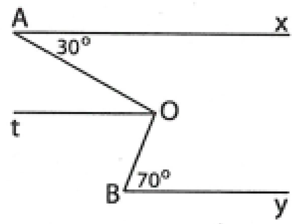
Hình 4.7

Ta phải chứng minh hai đường thẳng *Ax* và *By* song song. Giữa hai đường thẳng này chưa có một đường thẳng thứ ba cắt chúng nên chưa thể vận dụng dấu hiệu nhận biết nào để chứng minh chúng song song.

Ta sẽ vẽ thêm một đường thẳng thứ ba làm trung gian rồi dùng dấu hiệu: hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song.

** Trình bày lời giải* (h.4.8)

Ở trong góc *AOB*, vẽ tia $Ot//Ax$. Khi đó $AOt = A = 30°$ (cặp góc so le trong).



Hình 4.8

Suy ra $BOt = 100° - 30° = 70°$.

Vậy $B = BOt (= 70°)$.

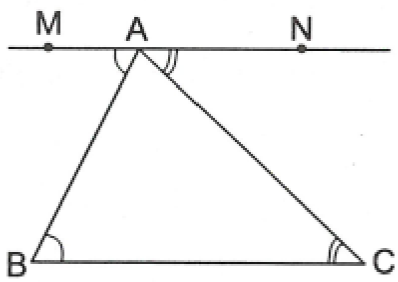
Do đó $By//Ot$ (vì có cặp so le trong bằng nhau).

Từ đó suy ra $Ax//By$ (vì cùng song song với *Ot*).

C. Bài tập vận dụng

• Tiên đề Ơ-clít

4.1. Cho tam giác *ABC*. Vẽ điểm *M* sao cho góc *BAM* bằng và so le trong với góc *B*. Vẽ điểm *N* sao góc *CAN* bằng và so le trong với góc *C*. Chứng tỏ rằng ba điểm *M, A, N* thẳng hàng.



Hình 4.19

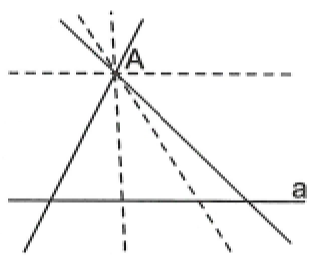
Hướng dẫn giải (h.4.19)

Ta có $BAM = B$ suy ra $AM//BC$ (vì có cặp góc so le trong bằng nhau).

$CAN = C$ suy ra $AN//BC$ (vì có cặp góc so le trong bằng nhau).

Theo tiên đề Ơ-clít qua điểm *A* chỉ có một đường thẳng song song với *BC*, do đó ba điểm *M, A, N* thẳng hàng.

4.2. Qua điểm *A* ở ngoài đường thẳng *a* vẽ 101 đường thẳng. Chứng tỏ rằng ít nhất cũng có 100 đường thẳng cắt *a*.



Hình 4.20

Hướng dẫn giải (h.4.20)

Giả sử trong số 101 đường thẳng vẽ qua *A* có chưa đến 100 đường thẳng cắt *a*. Suy ra ít nhất cũng còn hai đường thẳng không cắt *a*. Hai đường thẳng này cùng đi qua *A* và cùng song song với *a*. Điều này vô lí vì nó trái với tiên đề Ơ-clít. Vậy điều giả sử là sai, do đó qua *A* có ít nhất 100 đường thẳng cắt *a*.

4.3. Cho điểm *O* ở ngoài đường thẳng *xy*. Qua *O* vẽ *n* đường thẳng. Xác định giá trị nhỏ nhất của *n* để trong số các đường thẳng đã vẽ, ít nhất cũng có 10 đường thẳng cắt *xy*.

Hướng dẫn giải

Trong số n đường thẳng đã vẽ, nhiều nhất là có một và chỉ một đường thẳng song song với *xy*. Do đó muốn có ít nhất 10 đường thẳng cắt *xy* thì số đường thẳng phải vẽ ít nhất là 11. Vậy $n = 11$.

• *Tính chất hai đường thẳng song song*

4.4. Cho tam giác *ABC*. Từ điểm *D* trên cạnh *BC* vẽ $DE // AB, DF // AC \left(E \in AC, F \in AB\right)$.

a) Kể tên những góc ở trong hình vẽ bằng góc *A*;

b) Giả sử $B + C = 110°$, tính số đo góc *A*.

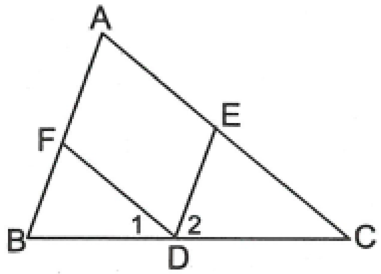
Hướng dẫn giải (h.4.21)

a) Ta có $DE // AB$ nên $DEC = A$ (cặp góc đồng vị); $DF // AC$ nên $BFD = A$ (cặp góc đồng vị).

Mặt khác $BFD = FDE$ (so le trong của $DE // AB$)

Suy ra $A = DEC = BFD = FDE$.

b) Ta có $D_2 = B$ (cặp góc đồng vị của $DE // AB$); $D_1 = C$ (cặp góc so le trong của $DF // AC$);



Hình 4.21

Do đó $D_1 + D_2 = B + C = 110°$. Suy ra $FDE = 180° - 110° = 70°$.

Vậy $A = 70°$ (vì $A = FDE$).

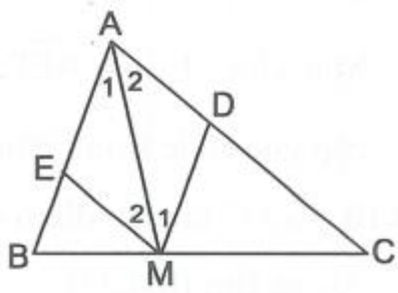
4.5. Cho tam giác *ABC*. Từ điểm *M* trên cạnh *BC* vẽ $MD // AB, ME // AC \left(D \in AC, E \in AB\right)$. Xác định vị trí của điểm *M* để tia *MA* là tia phân giác của góc *DME*.

Hướng dẫn giải (h.4.22)

Ta có $MD // AB$ suy ra $A_1 = M_1$ (cặp góc so le trong); $ME // AC$ suy ra $A_2 = M_2$ (cặp góc so le trong).

Tia *MA* nằm giữa hai tia *MD* và *ME*. Do đó tia *MA* là tia phân giác của góc *DME*.

$\Leftrightarrow M_1 = M_2 \Leftrightarrow A_1 = A_2 \Leftrightarrow$ *M* là giao điểm của *BC* với tia phân giác của góc *A*.



Hình 4.22

4.6. Hình 4.9 có $C = m° \left(m < 90\right)$; $ABC = 180° - 2m°$ và $Bx // AC$. Chứng minh rằng tia *Bx* là tia phân giác của góc *Aby*.

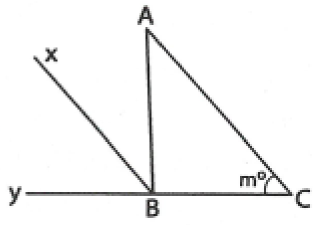
Hướng dẫn giải (h.4.9)

Ta có $ABC = 180° - 2m°$ nên $ABy = 180° - \left(180° - 2m°\right) = 2m°$.

Mặt khác $Bx // AC$ nên $xBy = C = m°$ (cặp góc đồng vị); suy ra

$ABx = 2m° - m° = m°$. Vậy $ABx = xBy = m°$. (1)

Tia *Bx* nằm giữa hai tia *BA* và *By*. (2)

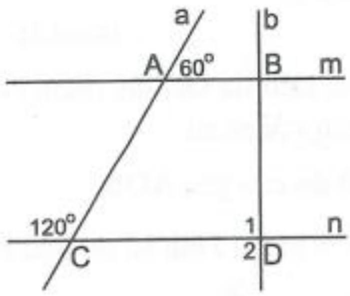


Hình 4.9

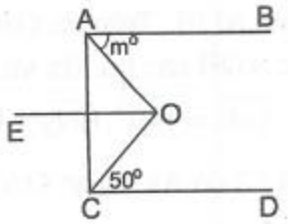
Từ (1) và (2) suy ra tia *Bx* là tia phân giác của góc *ABy*.

• *Vận dụng dấu hiệu nhận biết và tính chất của hai đường thẳng song song*

4.7. Hình 4.10, ngoài những số đo đã ghi còn biết $D_1 = D_2$. Chứng tỏ rằng $b \perp m$.



Hình 4.10



Hình 4.11

Hướng dẫn giải (h.4.10)

Ta có $ACD = 180° - 120° = 60°$. Vậy $ACD = BAa = 60°$.

Suy ra $m//n$ (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau).

Ta có $D_1 + D_2 = 180°$ mà $D_1 = D_2$ nên $D_1 = 90°$.

Suy ra $b \perp n$ do đó $b \perp m$ (vì $m//n$).

4.8. Hình 4.11 có $AB \perp AC, CD \perp AC$ và $OE \perp AC$. Biết $OAB = m°; OCD = 50°$. Tìm giá trị *m* để tia *OE* là tia phân giác của góc *AOC*.

Hướng dẫn giải (h.4.11)

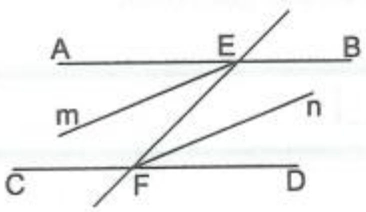
Ta có $AB \perp AC; CD \perp AC; OE \perp AC$ (đề bài).

Suy ra $AB//CD//OE$ (cùng vuông góc với *AC*).

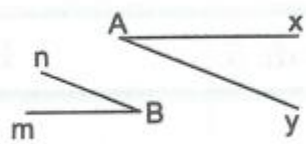
Do đó $AOE = OAB = m°$ (cặp góc so le trong); $EOC = OCD = 50°$ (cặp góc so le trong).

Tia *OE* nằm giữa hai tia *OA* và *OC* nên tia *OE* là tia phân giác của góc *AOC* $\Leftrightarrow AOE = EOC \Leftrightarrow m = 50$.

4.9. Hình 4.12 có $AEF = 45°, EFC = 3.AEF$. Các tia *Em* và *Fn* lần lượt là các tia phân giác của các góc *AEF* và *EFD*. Chứng tỏ rằng $Em//Fn$.



Hình 4.12



Hình 4.13

Hướng dẫn giải (h.4.12)

Ta có $AEF + EFC = 45° + 45°.3 = 180°$.

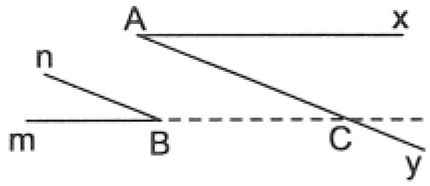
Suy ra $AB//CD$ (vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau).

Do đó $AEF = EFD$ (cặp góc so le trong).

Mặt khác $E_1 = \frac{1}{2}AEF; F_1 = \frac{1}{2}EFD$ nên $E_1 = F_1$, dẫn tới $Em//Fn$ (vì có cặp góc so le trong bằng nhau).

4.10. Hình 4.13 có $A = B$ và $Ax//Bm$. Chứng tỏ rằng $Ay//Bn$.

Hướng dẫn giải (h.4.23)



Hình 4.23

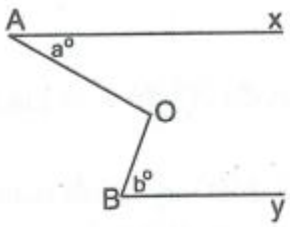
Gọi *C* là giao điểm của hai đường thẳng *Ay* và *Bm*.

Ta có $Ax//Bm$ nên $A = ACm$ (cặp góc so le trong).

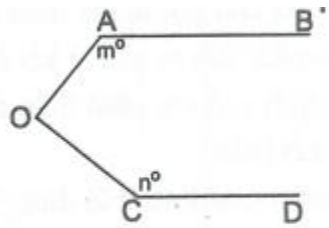
Mặt khác, $A = mBn$ nên $ACm = mBn\left(=A\right)$.

Do đó $Ay//Bn$ (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau).

4.11. Hình 4.14 có $A = a°; B = b°\left(a, b < 90\right)$ và $AOB = a° + b°$. Chứng tỏ rằng $Ax//By$.

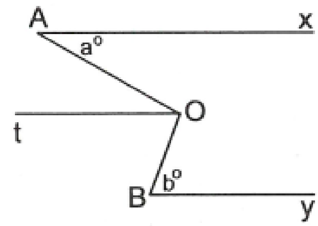


Hình 4.14



Hình 4.15

Hướng dẫn giải (h.4.24)



Hình 4.24

Ở trong góc *AOB* vẽ tia $Ot//Ax$. Khi đó $AOt = A = a°$ (cặp góc so le trong).

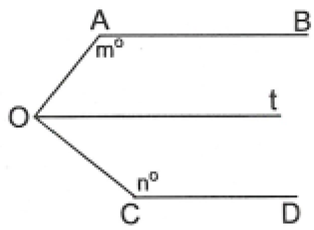
Suy ra $BOt = b°$. Vậy $BOt = B\left(=b°\right)$.

Do đó $By//Ot$ (vì có cặp góc so le trong bằng nhau).

Vậy $Ax//By$ (vì cùng song song với *Ot*).

4.12. Hình 4.15 có $A = m°; C = n°\left(90 < m, n < 180\right)$; $AOC = 360° - \left(m° + n°\right)$. Chứng tỏ rằng $AB//CD$.

Hướng dẫn giải (h.4.25)



Hình 4.25

Trong góc *AOC* vẽ tia *Ot* sao cho $Ot//AB$.

Khi đó $A + AOt = 180°$ (cặp góc trong cùng phía).

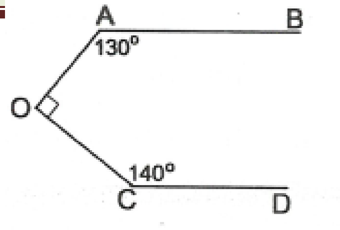
Suy ra $AOt = 180° - m°$.

Do đó $COt = AOC - AOt = 360° - \left(m° + n°\right) - \left(180° - m°\right) = 180° - n°$

Vậy $C + COt = n° + \left(180° - n°\right) = 180°$.

Suy ra $CD//Ot$ (vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau).

Do đó $AB//CD$ (vì cùng song song với *Ot*).



Hình4.16

4.13. Hình 4.16 có $A = 130°, C = 140°$ và $OA \perp OB$. Chứng tỏ rằng $AB//CD$.

Hướng dẫn giải (h.4.26)

Vì $OA \perp OC$ nên $AOC = 90°$. Trong góc *AOC* vẽ tia *Ot* sao cho $Ot//AB$.

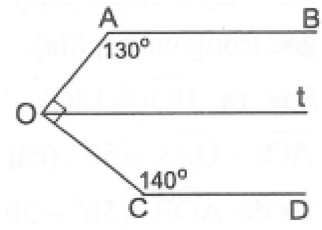
Khi đó $A + AOt = 180°$ (cặp góc trong cùng phía).

Suy ra $AOt = 180° - 130° = 50°$.

Vì $AOC = 90°$ nên $COt = 40°$.

Ta có $C + COt = 140° + 40° = 180°$.

Do đó $CD//Ot$ (vì có cặp góc trong cùng phía bù nhau).



Hình 4.26

Suy ra $AB//CD$ (vì cùng song song với *Ot*).

4.14. Cho góc *AOB*. Trên tia *OA* lấy điểm *M*, trên tia *OB* lấy điểm *N*. Vẽ ra ngoài góc *AOB* các tia *Mx* và *Ny* song song với nhau. Cho biết $AMx = 140°, BNy = 150°$, tính số đo của góc *AOB*.

Hướng dẫn giải (h.4.27)

Vì $AMx = 140°$ nên $M_1 = 40°$.

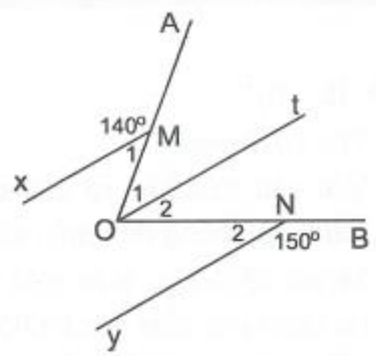
Vì $BNy = 150°$ nên $N_2 = 30°$.

Ở trong góc *AOB* vẽ tia $Ot//Mx$, khi đó $Ot//Ny$ (vì $Mx//Ny$).

Ta có $O_1 = M_1 = 40°$ (cặp góc so le trong).

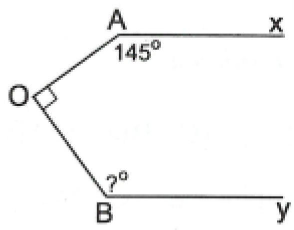
$O_2 = N_2 = 30°$ (cặp góc so le trong).

Suy ra $AOB = O_1 + O_2 = 40° + 30° = 70°$.

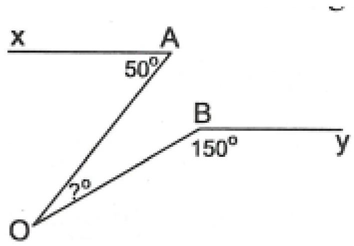


Hình 4.27

4.15. Hình 4.17 có $Ax//By; OA \perp OB$ và $A = 145°$. Tính số đo góc *B*.



Hình 4.17

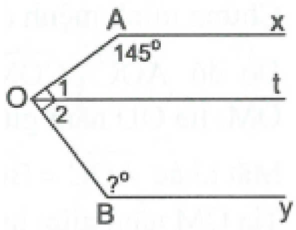


Hình 4.18

Hướng dẫn giải (h.4.28)

Ở trong góc *AOB* vẽ tia $Ot//Ax$.

Khi đó $Ot//By$ (vì $Ax//By$).



Hình 4.28

Ta có $OA \perp OB$ nên $AOB = 90°$.

Mặt khác $A + O_1 = 180°$ (cặp góc trong cùng phía) nên $O_1 = 180° - 145° = 35°$.

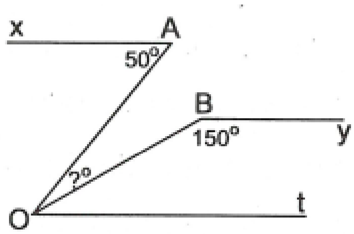
Suy ra $O_2 = 90° - 35° = 55°$.

Ta có $O_2 + B = 180°$ (cặp góc trong cùng phía của $Ot//By$).

Do đó $B = 180° - 55° = 125°$.

4.16. Trong hình 4.18 có $Ax//By$. Tính số đo của góc *AOB*.

Hướng dẫn giải (h.4.29)



Hình 4.29

Trên nửa mặt phẳng bờ *OB* có chứa tia *By* vẽ tia $Ot//By$. Khi đó $Ot//Ax$ (vì $Ax//By$).

Ta có $OBy + BOt = 180°$ (cặp góc trong cùng phía).

Suy ra $BOt = 180° - 150° = 30°$.

Ta có $AOt = OAx = 50°$ (cặp góc so le trong).

Từ đó $AOB = 50° - 30° = 20°$.

Chương I. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG.

Chuyên đề 5. ĐỊNH LÍ

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định lí

• Định lí là một khẳng định suy ra từ những khẳng định được coi là đúng.

• Mỗi định lí đều có hai phần:

- Phần đã cho gọi là giả thiết của định lí.
- Phần phải suy ra gọi là kết luận của định lí.

Khi định lí được phát biểu dưới dạng "Nếu A thì B" thì A là giả thiết; B là kết luận.

2. Chứng minh định lí là dùng lập luận để từ giả thiết suy ra kết luận.

3. Hệ quả là một định lí được suy ra trực tiếp từ một định lí hoặc từ một tính chất được thừa nhận.

4. Định lí thuận, định lí đảo

Xét định lí "Nếu A thì B" có *mệnh đề đảo* là "Nếu B thì A". Nếu mệnh đề đảo này đúng thì mệnh đề đảo được gọi là *định lí đảo* của định lí đã cho và định lí đã cho gọi là *định lí thuận*.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Định lí "Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau" có định lí đảo không?

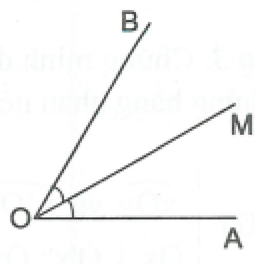
Giải

Định lí "Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau" có mệnh đề đảo là "Hai góc bằng nhau thì đối đỉnh". Mệnh đề đảo này sai.

Ví dụ, xét góc *AOB*, tia phân giác *OM* (h.5.1).

Rõ ràng hai góc *AOM* và *BOM* bằng nhau nhưng không đối đỉnh vì mỗi cạnh của góc này không là tia đối một cạnh của góc kia.

Vậy định lí "Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau" không có định lí đảo.



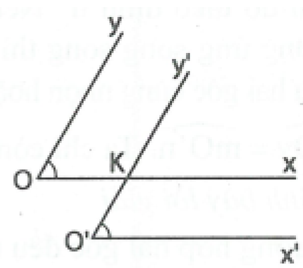
Hình 5.1

Nhận xét: Một ví dụ chứng tỏ một mệnh đề nào đó là sai gọi là một *phản ví dụ*. Như vậy ta đã dùng phương pháp đưa ra một phản ví dụ để chứng tỏ mệnh đề "Hai góc bằng nhau thì đối đỉnh" là sai.

Ví dụ 2: Chứng minh định lí: "Nếu hai góc có cạnh tương ứng song song thì bằng nhau nếu hai góc cùng nhọn hoặc cùng tù".

Giải (h.5.2)

GT	xOy và $x'O'y'$ cùng nhọn (tù) $Ox//O'x'; Oy//O'y'$
KL	$xOy = x'O'y'$



Hình5.2

** Tìm cách giải*

Để chứng minh $O = O'$ ta chứng minh chúng cùng bằng một góc thứ ba.

Dựa vào giả thiết có các cặp đường thẳng song song, ta nghĩ đến việc vận dụng tính chất của hai đường thẳng song song để tìm ra các cặp góc bằng nhau.

** Trình bày lời giải*

Gọi K là giao điểm của các đường thẳng Ox và $O'y'$.

Vì $O'y'//Oy$ nên $O = xKy'$ (cặp góc đồng vị);

Vì $O'x'//Ox$ nên $O' = xKy'$ (cặp góc đồng vị).

Do đó $O = O'$ (cùng bằng xKy').

Nhận xét: Người ta cũng chứng minh được rằng:

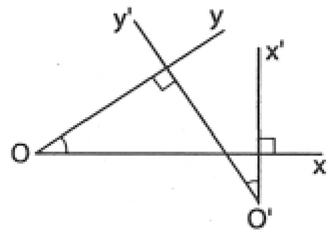
Nếu hai góc có cạnh tương ứng song song thì:

- Chúng bù nhau nếu góc này nhọn, góc kia tù;
- Góc này vuông thì góc kia vuông.

Ví dụ 3: Chứng minh định lí: “Nếu hai góc có cạnh tương ứng vuông góc thì chúng bằng nhau nếu hai góc cùng nhọn hoặc cùng tù”.

Giải (h.5.3)

GT	xOy và $x'O'y'$ cùng nhọn (tù) $Ox \perp O'x'; Oy \perp O'y'$
KL	$xOy = x'O'y'$

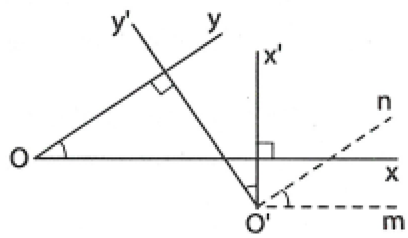


Hình5.3

** Tìm cách giải*

Để chứng minh $xOy = x'O'y'$ ta chứng minh chúng cùng bằng một góc thứ ba. Để tạo ra góc thứ ba này ta vẽ $O'm//Ox$ và $O'n//Oy$, hai tia này cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ $O'x'$ (h.5.4).

Khi đó theo định lí “Nếu hai góc có cạnh tương ứng song song thì chúng bằng nhau nếu hai góc cùng nhọn hoặc cùng tù” ta được $xOy = mO'n$. Ta chỉ còn phải chứng minh $x'O'y' = mO'n$.



Hình5.4

** Trình bày lời giải*

• Trường hợp hai góc đều nhọn

Vẽ $O'm//Ox$ và $O'n//Oy$. Vì $O'x' \perp Ox$ nên $O'x' \perp O'm$ do đó $mO'x' = 90°$. (1)

Vì $O'y' \perp Oy$ nên $O'y' \perp O'n$ do đó $nO'y' = 90°$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $x'O'y' = mO'n$ (cùng phụ với $x'O'n$). (3)

Mặt khác, $xOy = mO'n$ (hai góc có cạnh tương ứng song song cùng nhọn). (4)

Từ (3) và (4), suy ra: $xOy = x'O'y'\left(= mO'n\right)$.

• Trường hợp hai góc đều tù: Chứng minh tương tự.

Nhận xét: Người ta cũng chứng minh được rằng:

Nếu hai góc có cạnh tương ứng vuông góc thì:

- Chúng bù nhau nếu góc này nhọn, góc kia tù;
- Góc này vuông thì góc kia vuông.

C. Bài tập vận dụng

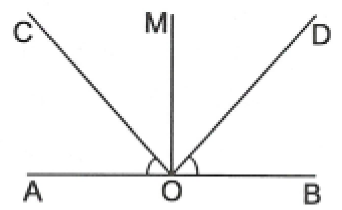
5.1. Cho góc bẹt *AOB*. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ *AB*, vẽ các tia *OC* và *OD* sao cho $AOC = BOD < 90°$. Vẽ tia *OM* ở trong góc *COD*. Chứng minh rằng $OM \perp AB$ *khi và chỉ khi OM* là tia phân giác của góc *COD*.

Hướng dẫn giải (h.5.6)

• *Tìm cách giải*

Với cấu trúc *khi và chỉ khi* ta phải chứng minh hai mệnh đề thuận và đảo sau:

- Mệnh đề thuận: Nếu $OM \perp AB$ thì *OM* là tia phân giác của góc *COD*.
- Mệnh đề đảo: Nếu *OM* là tia phân giác của góc *COD* thì $OM \perp AB$.



Hình 5.6

• *Trình bày lời giải*

- Chứng minh mệnh đề thuận: $OM \perp AB$ (gt) suy ra $AOM = BOM = 90°$.

Do đó $AOC + COM = BOD + DOM$ (vì tia *OC* nằm giữa hai tia *OA*, *OM*; tia *OD* nằm giữa hai tia *OB* và *OM*).

Mặt khác $AOC = BOD$ (gt) nên $COM = DOM$. (1)

Tia *OM* nằm giữa hai tia *OC* và *OD*. (2)

Từ (1) và (2) suy ra tia *OM* là tia phân giác của góc *COD*.

- Chứng minh mệnh đề đảo:

OM là tia phân giác của góc *COD* (gt). Suy ra $COM = DOM$.

Mặt khác $AOC = BOD$ (gt) nên $AOC + COM = BOD + DOM$.

Do đó $AOM = BOM$ (vì tia *OC* nằm giữa hai tia *OA, OM*; tia *OD* nằm giữa hai tia *OB, OM*).

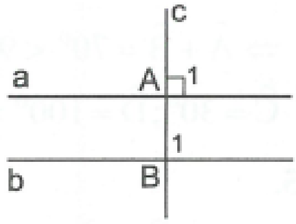
Lại có $AOM + BOM = 180°$ (hai góc kề bù) nên $AOM = 180° : 2 = 90°$.

Suy ra $OM \perp AB$.

5.2. Cho định lí: "Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau". Hãy phát biểu định lí đảo và chứng minh.

Hướng dẫn giải (h.5.7)

Phát biểu định lí đảo: Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường song song thì nó cũng vuông góc với đường thẳng kia.



Hình 5.7

GT	$a//b$ $c\perp a$
KL	$c\perp b$

Chứng minh

Ta có $a//b$ (gt) suy ra $A_1 = B_1$ (cặp góc đồng vị).

Mặt khác, $c\perp a$ (gt) nên $A_1 = 90°$. Do đó $B_1 = 90°$. Suy ra $c\perp b$.

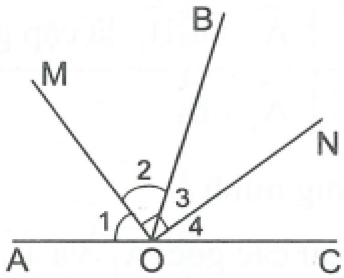
* *Nhận xét:* Ta có thể viết gộp cả định lí thuận và định lí đảo của định lí trên như sau:

$$\boxed{\begin{array}{l} a\perp c \\ b\perp c \Leftrightarrow a//b \end{array}}$$

Kí hiệu $\Leftrightarrow$ đọc là “khi và chỉ khi”. Kí hiệu này có nghĩa là mệnh đề ở bên trái suy ra được mệnh đề ở bên phải và ngược lại.

5.3. Cho định lí: “Hai tia phân giác của hai góc kề thì vuông góc với nhau”. Hãy viết giả thiết, kết luận của định lí đảo của định lí này rồi chứng minh.

Hướng dẫn giải (h.5.8)



Hình 5.8

GT	AOB và BOC kề bù OM là tia phân giác của AOB ON nằm trong góc BOC $OM\perp ON$.
KL	ON là tia phân giác của BOC.

Chứng minh

Ta có $OM\perp ON$ (gt) nên $MON = 90°$.

Tia *OB* nằm giữa hai tia *OM* và *ON* nên $O_2 + O_3 = MON = 90°$.

Vì AOB và BOC kề bù nên $AOB + BOC = 180°$.

Do đó $O_1 + O_2 + O_3 + O_4 = 180°$.

Mặt khác, $O_2 + O_3 = 90°$ (chứng minh trên) nên $O_1 + O_4 = 90°$.

Suy ra $O_2 + O_3 = O_1 + O_4$ mà $O_1 = O_2$ (gt) nên $O_3 = O_4$. (1)

Tia *ON* nằm giữa hai tia *OB* và *OC*. (2)

Từ (1) và (2) suy ra tia *ON* là tia phân giác của góc *BOC*.

5.4. Bác bỏ các mệnh đề sau bằng cách đưa ra phản ví dụ:

a) Tổng số đo của hai góc nhọn bằng số đo của một góc tù;

b) Tổng số đo của một góc nhọn và một góc tù bằng số đo của góc bẹt.

Hướng dẫn giải

a) $A = 30°; B = 40°$

$\Rightarrow A + B = 70° < 90°$ (không phải là số đo của một góc tù).

b) $C = 30°; D = 100° \Rightarrow C + D = 130° \neq 180°$.

5.5. Điền vào các chỗ trống:

a) Cho $A + O = 90°$ và $B + O = 90°$. Suy ra……………. (vì…………………………..).

b) Cho $A = A'$ và $B = B'$. Suy ra $A = B \Leftrightarrow$…………… (vì…………………………..).

Hướng dẫn giải

a) Suy ra $A = B$ (vì cùng *phụ* với góc *O*).

b) $A' = B'$ (vì cùng *bằng* hai góc bằng nhau).

5.6. Điền vào các chỗ trống:

a) Cho $AB = CD$. Suy ra $3AB$………$3CD$ (vì………………………..).

b) Cho $AB = CD$ và $MN = PQ$. Suy ra $AB + MN$ ………..$CD + PQ$ (vì…………………………..).

Hướng dẫn giải

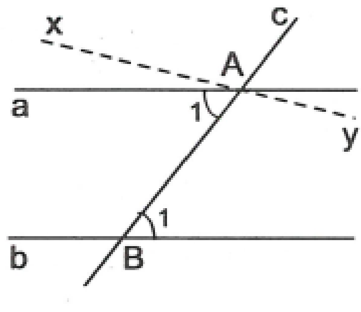
a) "=" (vì gấp ba lần hai đoạn thẳng bằng nhau thì được hai đoạn thẳng bằng nhau).

b) "=" (vì thêm những đoạn thẳng bằng nhau vào những đoạn thẳng bằng nhau thì tổng bằng nhau).

5.7. Chứng minh định lí: "Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì hai góc so le trong bằng nhau".

Hướng dẫn giải (h.5.9)

GT	$a // b$ A_1 và B_1 là cặp góc so le trong.
KL	$A_1 = B_1$.



Hình 5.9

Chứng minh

Giả sử các góc A_1 và B_1 không bằng nhau.

Qua *A* vẽ đường thẳng *xy* tạo với đường thẳng *c* góc $xAB = B_1$.

Khi đó theo dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song ta được $xy // b$.

Mặt khác, $a // b$ (gt) nên qua *A* có hai đường thẳng song song với *b* trái với tiên đề Ơ-clít. Do đó *xy* phải trùng với đường thẳng *a*.

Suy ra $xAB = B_1$ hay $A_1 = B_1$.

5.8. Cho A và B là hai góc có cạnh tương ứng song song. Tính số đo các góc *A* và *B*, biết:

a) $A+B=130°$; b) $A-B=100°$.

Hướng dẫn giải

a) Nếu $A+B=130° \neq 180°$ thì hai góc *A* và *B* phải bằng nhau.

Vậy $A=B=130°:2=65°$.

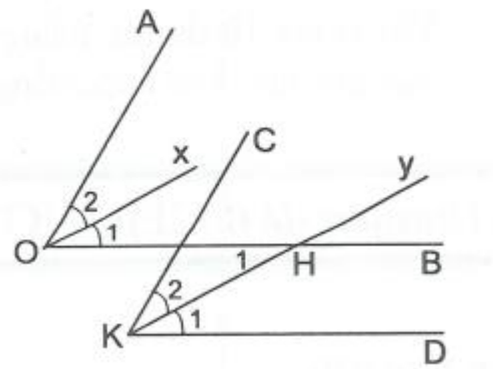
b) Nếu $A-B=100°$ thì $A \neq B$, do đó $A+B=180°$.

Suy ra $A=(180°+100°):2=140°; B=180°-140°=40°$.

5.9. Cho hai góc có cạnh tương ứng song song cùng nhọn hoặc cùng tù. Biết hai tia phân giác của chúng không cùng nằm trên một đường thẳng. Chứng minh rằng hai tia phân giác này song song với nhau.

Hướng dẫn giải (h.5.10)

GT	AOB và CKD cùng nhọn (tù) $OA//KC; OB//KD$ $O_1 = O_2; K_1 = K_2$
KL	$Ox//Ky$.



Hình 5.10

Chứng minh

Hai góc *AOB* và *CKD* là hai góc có cạnh tương ứng song song cùng nhọn hoặc cùng tù nên $AOB = CKD$.

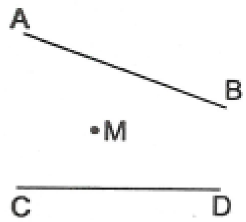
Tia *Ox* là tia phân giác của góc *AOB*; tia *Ky* là tia phân giác của góc *CKD* nên

$O_1 = \frac{1}{2}AOB; K_1 = \frac{1}{2}COD$.

Suy ra $O_1 = K_1$ (một nửa của hai góc bằng nhau).

Mặt khác, $H_1 = K_1$ (cặp góc so le trong của $OB//KD$) nên $O_1 = H_1\left(=K_1\right)$.

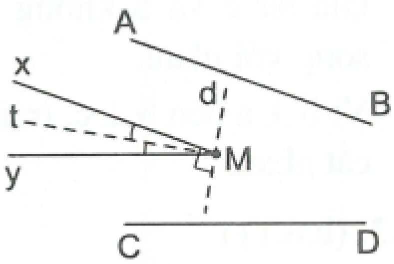
Do đó $Ox//Ky$ (vì có cặp góc so le trong bằng nhau).



Hình5.5

5.10. Cho điểm *M* và hai đường thẳng *AB*, *CD* cắt nhau tại một điểm *O* ở ngoài phạm vi tờ giấy (h.5.5). Hãy nêu cách vẽ một đường thẳng qua *M* và vuông góc với tia phân giác của góc *AOC*.

Hướng dẫn giải (h.5.11)



Hình 5.11

Từ *M* vẽ các tia $Mx//AB, My//CD$ và tia *Mt* là tia phân giác của góc *xMy*.

Qua *M* vẽ đường thẳng $d \perp Mt$, khi đó $d \perp$ tia phân giác của góc *AOC*.

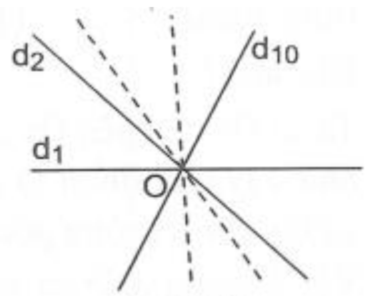
Thật vậy, các góc *xMy* và *AOC* là các góc có cạnh tương ứng song song, cùng nhọn nên các tia phân giác của chúng song song với nhau (xem bài 5.9).

Mặt khác, $d \perp Mt$ trên $d \perp$ tia phân giác của góc *AOC*.

5.11. Cho 10 đường thẳng trong đó không có hai đường thẳng nào song song. Chứng minh rằng tồn tại hai đường thẳng tạo với nhau một góc nhỏ hơn hoặc bằng $18°$.

Hướng dẫn giải (h.5.12)

Gọi 10 đường thẳng đã cho là $a_1, a_2, ..., a_{10}$.



Hình 5.12

Từ một điểm *O* bất kì vẽ 10 đường thẳng $d_1, d_2, ..., d_{10}$ tương ứng song song với 10 đường thẳng đã cho. Vì trong 10 đường thẳng đã cho không có hai đường thẳng nào song song nên 10 đường thẳng $d_1, d_2, ..., d_{10}$ cũng không có hai đường thẳng nào trùng nhau. 10 đường thẳng này cắt nhau tại *O* tạo thành 20 góc không có điểm trong chung nên tồn tại một góc nhỏ hơn hoặc bằng $360° : 20 = 18°$. Góc này bằng góc có cạnh tương ứng song song với nó.

Vậy trong 10 đường thẳng đã cho, tồn tại hai đường thẳng tạo với nhau một góc nhỏ hơn hoặc bằng $18°$.

Chương I. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG.

Chuyên đề 6. CHỨNG MINH BẰNG PHẢN CHỨNG

A. Kiến thức cần nhớ

Khi giải bài 5.7 trong chuyên đề 5 ta đã dùng phương pháp chứng minh bằng phản chứng. Phương pháp này thuộc loại chứng minh gián tiếp. Để chứng minh mệnh đề A là đúng ta chứng minh phủ định của A là sai.

Nội dung chứng minh bằng phản chứng gồm ba bước:

- *Bước 1* (phủ định kết luận): Giả sử điều trái với kết luận của bài toán.
- *Bước 2* (đi đến mâu thuẫn): Từ điều giả sử ở trên và từ các điều đã biết (giả thiết, tiên đề, định lí,…) ta suy ra một điều vô lí (trái với giả thiết, trái với các kiến thức đã biết hoặc hai điều mâu thuẫn nhau).
- *Bước 3* (khẳng định kết luận): Vậy điều giả sử là sai, điều phải chứng minh là đúng.

Chú ý:

• Trong bước 1 ta phải phủ định điều phải chứng minh.

Phủ định của "có A" là "không có A".

Phủ định của "không có B" là "có B".

Ví dụ: Phủ định của "ba điểm A, B, C thẳng hàng" là "ba điểm A, B, C không thẳng hàng".

Phủ định của $m > n$ là $m \le n$ (tức là $m < n$ hoặc $m = n$).

• Trong bước 2, nhất thiết phải suy ra được một điều mâu thuẫn với điều đã cho, đã biết. Nếu không thì chưa thể khẳng định được điều giả sử ở bước 1 là sai.

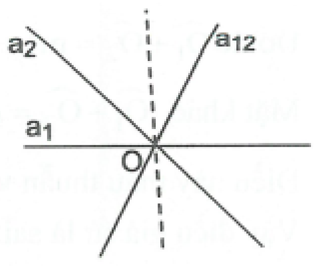
B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho 12 đường thẳng cắt nhau tại *O* tạo thành một số góc không có điểm trong chung. Chứng minh rằng trong các góc đó có ít nhất hai góc có số đo không vượt quá $15°$.

Giải (h.6.1)

** Tìm cách giải*

Dễ thấy tổng số đo các góc không có điểm trong chung đúng bằng $360°$. Vì vậy ta chỉ cần biết có bao nhiêu góc không có điểm trong chung được tạo thành.



Hình6.1

** Trình bày lời giải*

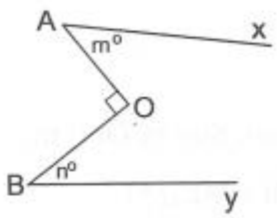
12 đường thẳng cắt nhau tại *O* tạo thành 24 góc đỉnh *O* không có điểm trong chung. Tổng số đo các góc bằng $360°$ nên phải tồn tại một góc nhỏ hơn hoặc bằng $360° : 24 = 15°$.

Ta chứng minh điều này bằng phản chứng.

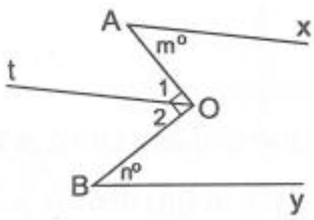
Giả sử mỗi góc đó đều lớn hơn $15°$ thì tổng của chúng lớn hơn: $15°.24 = 360°$ (vô lí).

Vậy trong số các góc đó tồn tại một góc không vượt quá $15°$. Góc này bằng góc đối đỉnh với nó nên tồn tại hai góc không vượt quá $15°$.

Ví dụ 2: Hình 6.2 có $OA \perp OB, A = m°, B = n°$, với $m + n < 90$. Chứng minh rằng *Ax* và *By* không song song.



Hình 6.2



Hình 6.3

Giải (h.6.3)

** Tìm cách giải*

Bài toán yêu cầu chứng minh *Ax* và *By* không song song. Nếu ta dùng phương pháp phản chứng, giả sử $Ax // By$ thì có thể vận dụng định lí về tính chất của hai đường thẳng song song để giải. Tuy nhiên, giữa *Ax* và *By* chưa có một cát tuyến nào nên ta vẽ tia *Ot* ở trong góc *AOB* sao cho $Ot // Ax$ thì $Ot // By$. Khi đó các góc *A*, góc *B* lần lượt bằng O_1 và O_2 rất thuận lợi trong việc liên hệ với góc *AOB* cho trước.

** Trình bày lời giải*

Giả sử $Ax // By$. Trong góc *AOB* vẽ tia $Ot // Ax$ thì $Ot // By$ (vì $Ax // By$).

Ta có $O_1 = A = m°$ (hai góc so le trong); $O_2 = B = n°$ (hai góc so le trong).

Do đó $O_1 + O_2 = m° + n°$.

Mặt khác, $O_1 + O_2 = AOB; m + n < 90$ nên $AOB < 90°$.

Điều này mâu thuẫn với $AOB = 90°$ (vì $OA \perp OB$).

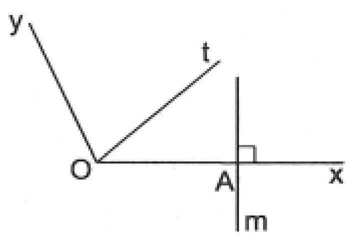
Vậy điều giả sử là sai, suy ra *Ax* và *By* không song song.

Ví dụ 3: Cho góc tù *xOy*, tia *Ot* ở trong góc đó sao cho $xOt < yOt$. Trên tia *Ox* lấy điểm *A*. Qua *A* vẽ đường thẳng $m \perp Ox$. Chứng minh rằng các đường thẳng *Ot* và *m* cắt nhau.

Giải (h.6.4)

** Tìm cách giải*

Điều phải chứng minh là các đường thẳng *Ot* và *m* cắt nhau. Muốn chứng minh bằng phản cứng ta giả sử $Ot // m$, từ đó suy ra $Ot \perp Ox$ do đó $xOt = 90°$.



Hình 6.4

Để đưa đến mâu thuẫn ta chỉ cần chứng minh $xOt < 90°$.

** Trình bày lời giải*

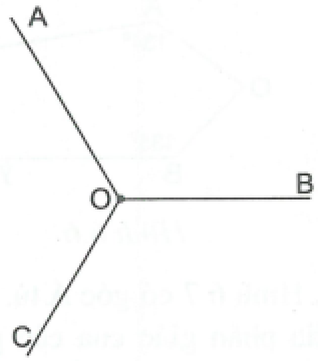
Giả sử các đường thẳng *Ot* và *m* không cắt nhau. Suy ra $Ot // m$.

Mặt khác, $Ox \perp m$ (gt) nên $Ox \perp Ot$ do đó $xOt = 90°$. (*)

Ta có $xOt + yOt = xOy < 180°$ mà $xOt < yOt$ nên $xOt < 90°$, mâu thuẫn với (*).

Vậy điều giả sử là sai, do đó các đường thẳng *Ot* và *m* phải cắt nhau.

Ví dụ 4: Cho ba tia phân biệt *OA, OB, OC* sao cho $AOB = BOC = COA$. Chứng minh rằng trong ba tia đã cho không có tia nào nằm giữa hai tia còn lại.



Hình 6.5

Giải (h.6.5)

** Tìm cách giải*

Để giải ví dụ này bằng phương pháp phản chứng, ta giả sử trong ba tia đã cho có một tia nằm giữa hai tia còn lại rồi dùng tính chất cộng số đo các góc dẫn đến kết quả có hai tia trùng nhau, trái giả thiết.

** Trình bày lời giải*

Giả sử trong ba tia *OA, OB, OC* có một tia nằm giữa hai tia còn lại.

Không làm giảm tính tổng quát, ta sử giả tia *OB* nằm giữa hai tia *OA, OC*.

Khi đó ta có $AOB + BOC = AOC$.

Nhưng do $AOB = BOC = AOC$ nên $AOB + AOB = AOB$ do đó $AOB = 0°$, suy ra hai tia *OA, OB* trùng nhau, trái giả thiết.

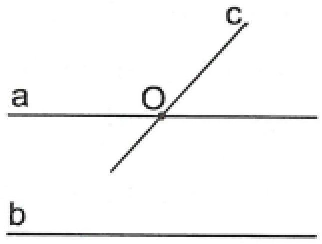
Vậy điều giả sử là sai, suy ra trong ba tia đã cho không có tia nào nằm giữa hai tia còn lại.

C. Bài tập vận dụng

• Chứng minh hai đường thẳng cắt nhau

6.1. Chứng minh định lí: Nếu một đường thẳng cắt một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng cắt đường thẳng kia.

Hướng dẫn giải (h.6.9)



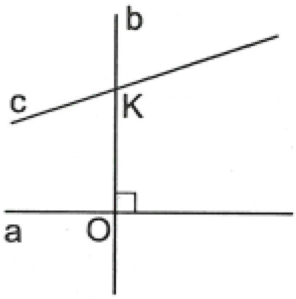
Hình 6.9

Cho $a//b$, *c* cắt *a* tại *O*. Ta phải chứng minh *c* cắt *b*.

Giả sử *c* không cắt *b* thì $c//b$. Như vậy qua điểm *O* có hai đường thẳng là *a* và *c* cùng song song với *b*, trái với tiên đề Ơ-clít. Vậy điều giả sử là sai, suy ra *c* cắt *b*.

6.2. Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau tại O. Chứng minh rằng nếu đường thẳng c không vuông góc với b thì hai đường thẳng a và c cắt nhau.

Hướng dẫn giải (h.6.10)



Hình 6.10

• Trường hợp đường thẳng *c* đi qua *O* thì *c* và *a* cắt nhau tại *O*.

• Trường hợp đường thẳng *c* cắt *b* tại $K \neq O$:

Giả sử *c* và *a* không cắt nhau thì chúng song song với nhau.

Vì $b \perp a$ nên $b \perp c$, trái giả thiết. Vậy *c* và *a* phải cắt nhau.

6.3. Cho góc *xOy* khác góc bẹt. Trên tia *Ox* lấy điểm *A*, trên tia *Oy* lấy điểm *B*. Từ *A* vẽ đường thẳng $a \perp Ox$, từ *B* vẽ đường thẳng $b \perp Oy$. Chứng minh rằng hai đường thẳng *a* và *b* cắt nhau.

Hướng dẫn giải (h.6.11)

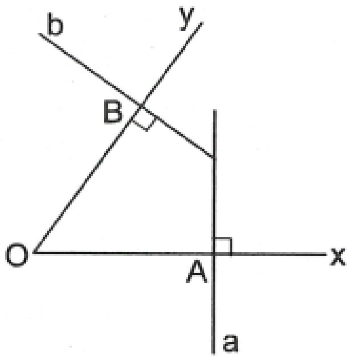
• Giả sử *a* và *b* trùng nhau. Như vậy, qua *O* có hai đường thẳng là *Ox* và *Oy* cùng vuông góc với đường thẳng *a* (hoặc *b*), vô lí. Vậy *a* và *b* không trùng nhau. (1)

• Giả sử $a//b$

Ta có $Ox \perp a$ nên $Ox \perp b$. Mặt khác $Oy \perp b$ (gt), như vậy qua điểm *O* có hai đường thẳng là *Ox* và *Oy* cùng vuông góc với đường thẳng *b*, vô lí.

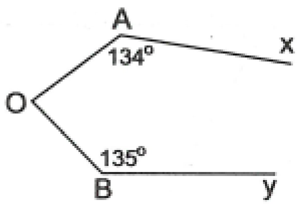
Vậy điều giả sử là sai, suy ra *a* và *b* không song song. (2)

Từ (1) và (2) suy ra *a* cắt *b*.

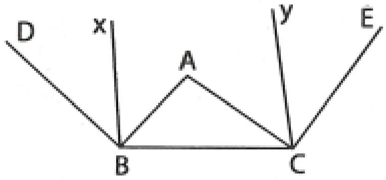


Hình 6.11

6.4. Hình 6.6 có góc *AOB* nhọn, $A = 134°; B = 135°$. Chứng minh rằng *Ax* và *By* không song song.



Hình 6.6



Hình 6.7

Hướng dẫn giải (h.6.12)

Giả sử $Ax//By$. Trong góc *AOB* vẽ tia $Ot//Ax$ thì $Ot//By$ (vì $Ax//By$).

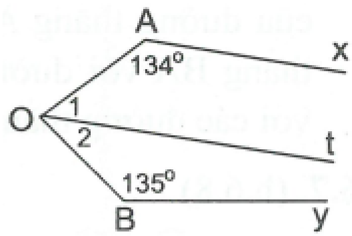
Ta có $O_1 + A = 180° \Rightarrow O_1 = 180° - 134° = 46°$.

$O_2 + B = 180° \Rightarrow O_2 = 180° - 135° = 45°$.

Do đó $O_1 + O_2 = 46° + 45°$ hay $AOB = 91° > 90°$.

Điều này mâu thuẫn với giả thiết là góc *AOB* nhọn.

Vậy điều giả sử là sai, suy ra *Ax* và *By* không song song.



Hình 6.12

6.5. Hình 6.7 có góc *A* tù, $AB \perp BD, AC \perp CE$. Vẽ tia *Bx* và *Cy* lần lượt là tia phân giác của các góc *ABD* và *ACE*. Chứng minh rằng các đường thẳng *Bx* và *Cy* cắt nhau.

Hướng dẫn giải (h.6.13)

Ta có $AB \perp BD, AC \perp CE \Rightarrow ABD = ACE = 90°$.

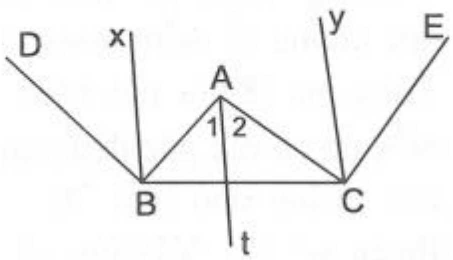
Do đó $ABx = ACy = 45°$.

Ta chứng minh *Bx* và *Cy* cắt nhau bằng phương pháp phản chứng.

Giả sử $Bx//Cy$. Ở trong góc *A* ta vẽ $At//Bx$ thì $At//Cy$ (vì $Bx//Cy$).

Ta có $A_1 = ABx = 45°$ (cặp góc so le trong); $A_2 = ACy = 45°$ (cặp góc so le trong).

Do đó $A_1 + A_2 = 90°$ hay $BAC = 90°$ trái giả thiết là góc *A* tù.



Hình 6.13

Vậy điều giả sử là sai, suy ra hai đường thẳng *Bx* và *Cy* cắt nhau.

6.6. Cho hai điểm *A* và *B* nằm ngoài đường thẳng *m*. Qua *A* vẽ 50 đường thẳng trong đó có đường thẳng qua *B*. Qua *B* vẽ 50 đường thẳng trong đó có đường thẳng qua *A*. Hỏi ít nhất cũng có bao nhiêu giao điểm của đường thẳng *m* với các đường thẳng đã vẽ?

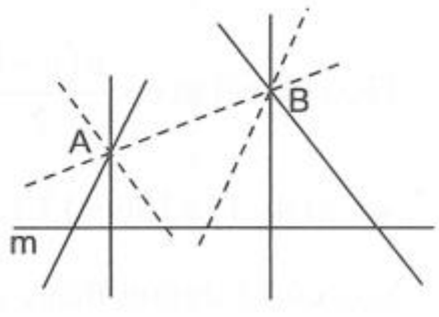
Hướng dẫn giải (h.6.14)

Trong số 50 đường thẳng vẽ qua *A* ít nhất cũng có 49 đường thẳng cắt *m*.

Ta chứng minh điều này bằng phản chứng.

Giả sử có chưa đến 49 đường thẳng cắt *m*, suy ra ít nhất cũng còn 2 đường thẳng không cắt *m*. Hai đường thẳng này cùng đi qua *A* và cùng song song với *m*. Điều này vô lí vì nó trái với tiên đề Ơ-clít.

Vậy điều giả sử là sai, do đó ít nhất cũng có 49 đường thẳng cắt *m*.



Hình 6.14

• Nếu đường thẳng $AB//m$ thì số giao điểm của đường thẳng *m* với các đường thẳng đã vẽ ít nhất cũng là $49+49=98$ (điểm).

• Nếu đường thẳng *AB* và đường thẳng *m* không song song thì giao điểm của đường thẳng *AB* với đường thẳng *m* cũng là giao điểm của đường thẳng *BA* với đường thẳng *m*. Do đó số giao điểm của đường thẳng *m* với các đường thẳng đã vẽ ít nhất cũng là $49+49-1=97$ (điểm).

• Chứng minh hai góc không bằng nhau. Tính số đo góc

6.7. Trong hình 6.8, cho biết $A_1 \neq B_1$. Chứng minh rằng $C_1 \neq D_1$.

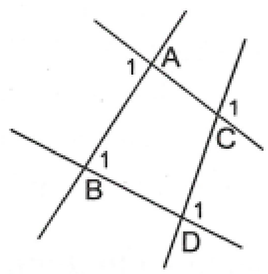
Hướng dẫn giải (h.6.8)

Giả sử $C_1 = D_1$, suy ra $AC//BD$ (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau).

Do đó $A_1 = B_1$ (cặp góc so le trong).

Điều này trái giả thiết.

Vậy điều giả sử là sai, do đó $C_1 \neq D_1$.



Hình 6.8

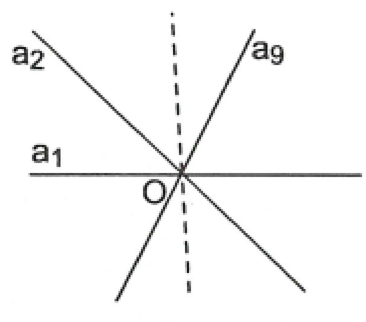
6.8. Cho 9 đường thẳng cắt nhau tại *O* tạo thành một số góc không có điểm trong chung. Chứng minh rằng trong các góc đó tồn tại một góc lớn hơn hoặc bằng $20°$ và tồn tại một góc nhỏ hơn hoặc bằng $20°$.

Hướng dẫn giải (h.6.15)

9 đường thẳng cắt nhau tại *O* tạo thành 18 góc không có điểm trong chung.

Tổng của 18 góc này bằng $360°$ (*)

• Nếu tatá cả các góc đều nhỏ hơn $20°$ thì tổng của chúng nhỏ hơn $20°.18=360°$, mâu thuẫn với (*). Vậy tồn tại một góc lớn hơn hoặc bằng $20°$.



Hình 6.15

• Nếu tất cả các góc đều lớn hơn $20°$ thì tổng của chúng lớn hơn $20°.18 = 360°$, mâu thuẫn với (*). Vậy tồn tại một góc nhỏ hơn hoặc bằng $20°$.

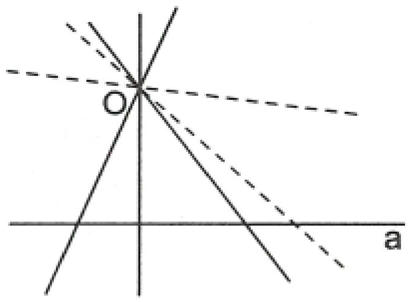
6.9. Qua điểm *O* ở ngoài đường thẳng *a* vẽ một số đường thẳng không phải tất cả đều cắt *a*. Những đường thẳng cắt *a* thì tạo với đường thẳng *a* được 78 tam giác chung đỉnh *O*. Chứng minh rằng trong số những đường thẳng đã vẽ qua *O* ít nhất cũng có hai đường thẳng cắt nhau theo một góc nhỏ hơn $13°$.

Hướng dẫn giải (h.6.16)

Gọi số đường thẳng vẽ qua *O* và cắt đường thẳng *a* là *n*. Số tam giác đỉnh *O* có cạnh đối diện nằm trên đường thẳng *a* được tính theo công thức $\frac{n(n-1)}{2}$.

Theo đề bài ta có $\frac{n(n-1)}{2} = 78$

$\Leftrightarrow n(n-1) = 156 = 13.12 \Rightarrow n = 13$.



Hình 6.16

Vậy có 13 đường thẳng đi qua *O* và cắt đường thẳng *a*. Theo đề bài, qua *O* còn có đường thẳng không cắt *a*. Theo tiên đề Ơ-clít chỉ có một đường thẳng như thế. Vậy số đường thẳng đã vẽ qua *O* là 14.

14 đường thẳng này tạo nên 28 góc đỉnh *O* không có điểm trong chung và có tổng số đo bằng $360°$. (*)

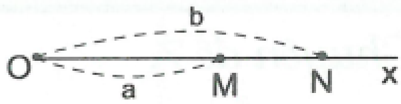
Vậy ít nhất phải có một góc nhỏ hơn hoặc bằng $360° : 28 \approx 12°51' < 13°$ vì nếu không có góc nào nhỏ hơn $13°$ thì tổng của 28 góc này sẽ lớn hơn hoặc bằng $13°.28 = 364°$, mâu thuẫn với (*).

• *Các dạng khác*

6.10. Chứng minh định lí: Trên tia *Ox* có $OM = a, ON = b$. Nếu $a < b$ thì điểm *M* nằm giữa hai điểm *O* và *N*.

Hướng dẫn giải (h.6.17)

• Điểm *O* không nằm giữa hai điểm *M* và *N* (1) vì *M* và *N* nằm trên tia *Ox*.



Hình 6.17

• Giả sử điểm *N* nằm giữa hai điểm *O* và *M* thì $ON + NM = OM$ do đó $b + NM = a$.

Suy ra $NM = a - b < 0$ (vì $a < b$). Điều này vô lí vì $NM > 0$.

Vậy điều giả sử là sai, do đó điểm *N* không nằm giữa hai điểm *O* và *M*. (2)

Trong ba điểm *O, M, N* thẳng hàng phải có một điểm nằm giữa hai điểm còn lại nên từ (1) và (2) suy ra điểm *M* nằm giữa *O* và *N*.

6.11. Chứng minh rằng nếu hai tia *Ox* và *Oy* thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ chứa tia *Oz* sao cho $zOx + zOy = 180°$ thì hai tia *Ox, Oy* đối nhau.

Hướng dẫn giải (h.6.18)

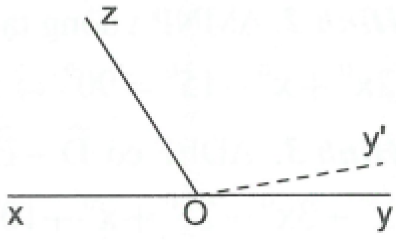
Giả sử hai tia *Ox, Oy* không đối nhau.

Ta vẽ tia Oy' là tia đối của tia Ox.

Khi đó $zOx + zOy' = 180°$ (hai góc kề bù).

Mặt khác, $zOx + zOy = 180°$ (gt).

Suy ra $zOy' = zOy$ (cùng bù với zOx). Điều này vô lí vì trên cùng một nửa mặt phẳng bờ chứa tia Oz bao giờ cũng có một và chỉ một tia Oy sao cho $zOy = m°$.



Hình 6.18

Vậy điều giả sử là sai, do đó hai tia Ox, Oy đối nhau.

6.12. Vẽ 9 đoạn thẳng trên mặt phẳng. Hỏi có thể xảy ra trường hợp mỗi đoạn thẳng cắt đúng 5 đoạn thẳng khác không?

Hướng dẫn giải

Không thể xảy ra trường hợp mỗi đoạn thẳng cắt đúng 5 đoạn thẳng khác. Ta chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử mỗi đoạn thẳng cắt đúng 5 đoạn thẳng khác.

Như vậy với cả 9 đoạn thẳng ta được $9.5 = 45$ trường hợp hai đoạn thẳng cắt nhau. Nhưng như thế thì mỗi trường hợp đã được tính hai lần (vì đoạn thẳng AB cắt đoạn thẳng CD thì ngược lại, đoạn thẳng CD cắt đoạn thẳng AB) do đó thực sự chỉ có $\frac{45}{2}$ trường hợp hai đoạn thẳng cắt nhau. Vì $\frac{45}{2} \notin \mathbb{N}$ nên điều giả sử là sai.

Do đó không thể xảy ra trường hợp mỗi đoạn thẳng cắt đúng 5 đoạn thẳng khác.

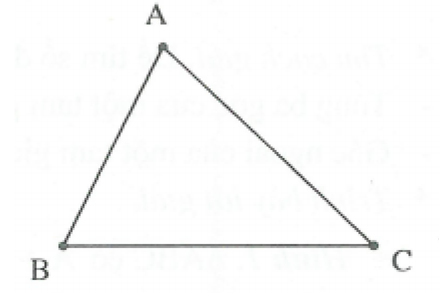
Chương II

TAM GIÁC

Chuyên đề 7. TỔNG BA GÓC CỦA MỘT TAM GIÁC

A. Kiến thức cần nhớ

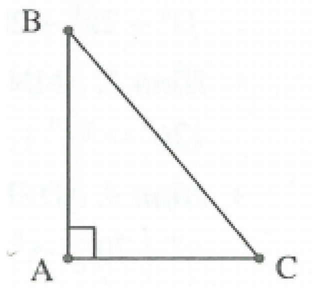
1. Tổng ba góc của một tam giác.



Tổng ba góc của một tam giác bằng $180°$.

$\Delta ABC \Rightarrow A + B + C = 180°$.

2. Áp dụng vào tam giác vuông

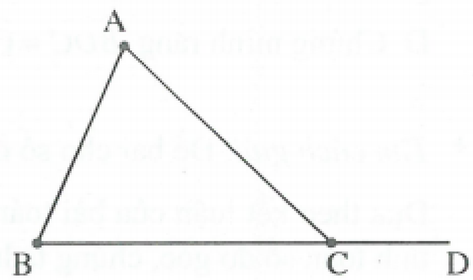


a) Định nghĩa: Tam giác vuông là tam giác có một góc vuông.

b) Tính chất: Trong tam giác vuông, hai góc nhọn phụ nhau.

$\begin{cases} \Delta ABC \\ A = 90° \end{cases} \Rightarrow B + C = 90°$.

3. Góc ngoài của tam giác



a) Định nghĩa: Góc ngoài của tam giác là góc kề bù với một góc của tam giác.

b) Tính chất:

* Mỗi góc ngoài của một tam giác bằng tổng của hai góc trong không kề với nó.

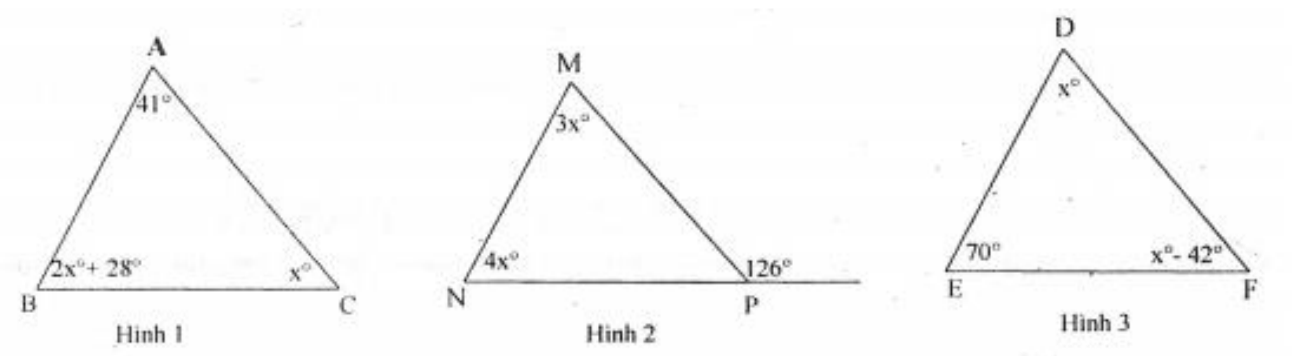
$ACD = A + B$

* Góc ngoài của tam giác lớn hơn mỗi góc trong không kề với nó.

$ACD > A, \ ACD > B$

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Tìm *x*, trong hình vẽ bên:



Giải

* *Tìm cách giải.* Để tìm số đo *x*, chúng ta vận dụng:

- Tổng ba góc của một tam giác bằng $180°$.

- Góc ngoài của một tam giác bằng tổng hai góc trong không kề với nó.

** Trình bày lời giải.*

+ ***Hình 1.*** ΔABC có $A+B+C=180°$ (tính chất)

$41°+2x°+28°=180° \Leftrightarrow x°=37°$.

+ ***Hình 2.*** ΔMNP có $MPx=M+N$ (góc ngoài tam giác)

$126°=3x°+4x° \Leftrightarrow x°=18°$.

+ ***Hình 3.*** ΔDEF có $D+E+F=180°$ (tính chất)

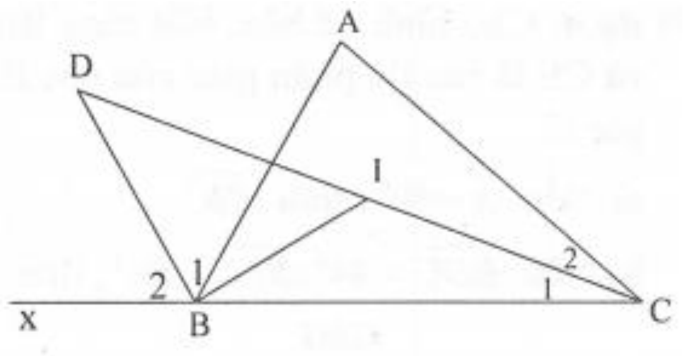
$x°+70°+x°-42°=180° \Leftrightarrow x°=76°$.

Ví dụ 2: Cho tam giác *ABC* có $A=80°$, $B=60°$. Hai tia phân giác của góc *B* và *C* cắt nhau tại *I*. Vẽ tia phân giác ngoài tại đỉnh *B* cắt tia *CI* tại *D*. Chứng minh rằng $BCD=C$.

Giải

** Tìm cách giải.* Đề bài cho số đo A; B nên hiển nhiên tính được số đo C. Dựa theo kết luận của bài toán thì chúng ta chỉ cần tính số đo BDC. Khi tính toán số đo góc, chúng ta lưu ý giả thiết có yếu tố tia phân giác.

** Trình bày lời giải.*



ΔABC có $A+B+C=180°$ (tính chất)

$80°+60°+C=180°$; $C=40°$.

ΔABC có $ABx=A+C=120°$

$\Rightarrow B_1=B_2=\frac{1}{2}ABx=60°$

Ta có: $C_1=C_2=\frac{1}{2}C=20°$.

ΔBCD có:

$BDC+C_1+CBD=180°$

$BDC+20°+60°+60°=180° \Rightarrow BDC=40°$

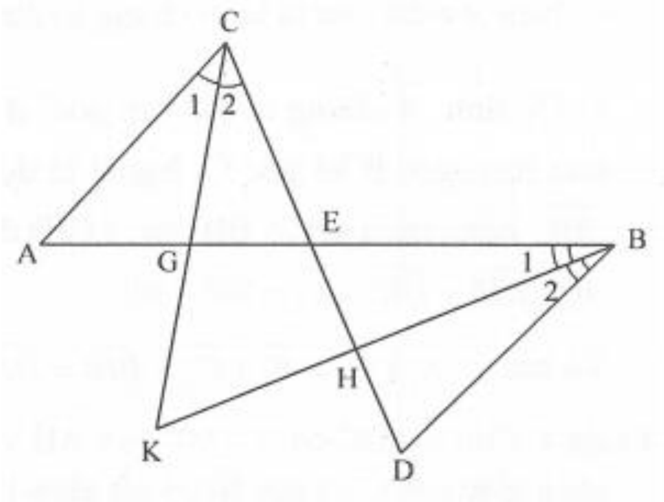
Do đó $BDC=C$.

Ví dụ 3: Cho hai đoạn thẳng *AB* và *CD* cắt nhau tại *E*. Các tia phân giác ACE; DBE cắt nhau ở *K*. Chứng minh: $BKC=\frac{BAC+BDC}{2}$.

Giải

** Tìm cách giải.* Chúng ta nhận thấy BKC là góc của tam giác *BKG*; *CKH* nên cần phải ghép vào hai tam giác ấy. Khai thác yêu cầu của bài toán (liên quan tới góc A; C) đồng thời để vận dụng yếu tố tia phân giác của giả thiết, chúng ta cần xét các cặp tam giác $\Delta KGB, \Delta AGC$ và cặp tam giác $\Delta KHC, \Delta DHB$.

** Trình bày lời giải.*



Gọi G là giao điểm CK và AE và H là giao điểm BK và DE.

Xét ΔKGB và ΔAGC có:

$KGB = AGC$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow K + B_1 = A + C_1 \quad (1)$

Xét ΔKHC và ΔDHB có:

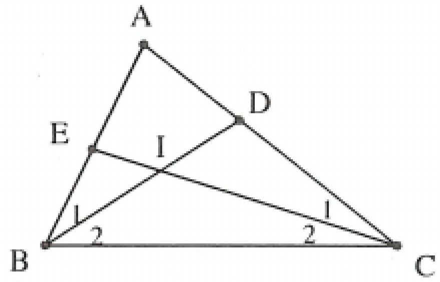
$KHC = BHD$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow K + C_2 = D + B_2 \quad (2)$

Từ (1) và (2), kết hợp với $B_1 = B_2$; $C_1 = C_2 \Rightarrow 2K = A + D$

$\Rightarrow K = \dfrac{A + D}{2}$.

Ví dụ 4: Cho hình vẽ bên, biết rằng BD và CE là các tia phân giác của góc B, góc C.



a) Nếu $A = 80°$, tính BIC.

b) Nếu $BDC = 84°$; $BEC = 96°$, tính A.

Giải

a) ΔABC có $A + B + C = 180°$ nên $B + C = 100°$.

$B_2 + C_2 = \dfrac{1}{2}.B + \dfrac{1}{2}.C$

$B_2 + C_2 = 50°$. ΔBIC có $B_2 + C_2 + BIC = 180°$ nên $BIC = 130°$.

b) ΔBDC có $BDC + B_2 + C = 180°$ mà $BDC = 84°$ nên $B_2 + C = 96°$.

ΔBEC có $BEC + B + C_2 = 180°$ mà $BEC = 96°$ nên $B + C_2 = 84°$.

Suy ra $B_2 + B + C_2 + C = 96° + 84°$

Do đó $\dfrac{3}{2}.\left(B + C\right) = 180°$

$B + C = 120°$ nên $A = 60°$.

Nhận xét:

- Nếu $A \neq 80°$ thì ta luôn chứng tỏ được $BIC = 90° + \dfrac{A}{2} \quad (*)$.

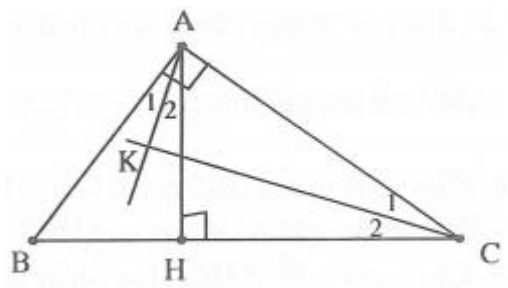
- Để tính A chúng ta cần tìm góc $B+C$ hoặc B_2+C_2 mà không cần tính từng góc B và góc C. Ngoài ra dựa vào công thức (*) ta có thể tính BIC bằng cách xét ΔBIE và ΔCID để tìm được:

$B_1+EIB+DIC+C_1=84^\circ+96^\circ$

Và lưu ý: $B_1+C_1=B_2+C_2=EIB=DIC$ ta tính EIB.

Ví dụ 4: Cho ΔABC có $A=90^\circ$. Kẻ AH vuông góc với $BC\left(H\in BC\right)$. Các tia phân giác góc C và góc BAH cắt nhau tại K. Chứng minh rằng $AK\perp CK$.

Giải



$\Delta ABH;\ \Delta ABC$ vuông nên $BAH=HCA$ (cùng phụ với ABC).

Mặt khác $A_1=\frac{1}{2}.BAH$; $C_1=\frac{1}{2}HAC$ do đó $A_1=C_1$.

Ta có: $A_1+KAC=90^\circ$

$\Rightarrow C_1+KAC=90^\circ$

Suy ra ΔKAC vuông tại K.

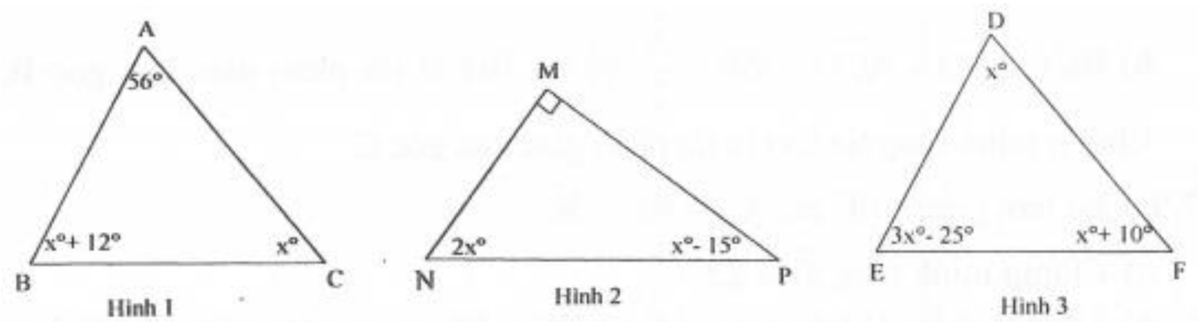
Vậy $AK\perp KC$.

**** Nhận xét:***

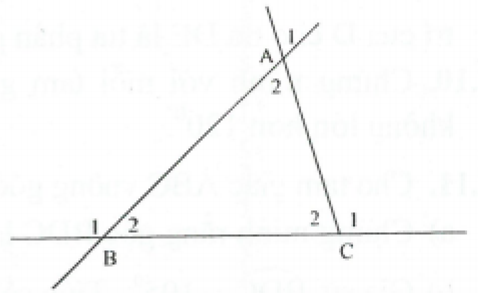
Qua bài ta nhận thấy có thêm một dấu hiệu nhận biết tam giác vuông là chứng minh tam giác có tổng hai góc bằng 90°.

C. Bài tập vận dụng

7.1. Tìm x, trong các hình vẽ sau:



7.2. Cho hình vẽ bên. Biết rằng $A_1=45^\circ$; $B_1=130^\circ$. Tính C_1.



7.3. Các góc ngoài đỉnh *A*, *B*, *C* tỉ lệ với 2; 3; 4. Tính tỉ lệ ba góc trong của tam giác đó.

7.4. Cho tam giác *ABC* có $A = 2.B$ và $B = 3.C$.

a) Tính các góc *A*; *B*; *C*?

b) Gọi *E* là giao điểm của đường thẳng *AB* với tia phân giác của góc ngoài tại đỉnh *C*. Tính góc *AEC*?

7.5. Tam giác *ABC* có $B > C$. Tia phân giác BAC cắt *BC* tại *D*.

a) Chứng minh $ADC - ADB = B - C$.

b) Đường thẳng chứa tia phân giác góc ngoài ở đỉnh *A* của tam giác *ABC* cắt đường thẳng *BC* tại *E*. Chứng minh rằng $AEB = \dfrac{B - C}{2}$.

7.6. Cho tam giác *ABC* có $B - C = 18°$. Tia phân giác góc *A* cắt *BC* tại *D*. Tính số đo góc *ADC*? Góc *ADB*?

7.7. Cho tam giác *ABC*. Tia phân giác của góc *A* cắt cạnh *BC* tại *D*. Biết $ADB = 85°$.

a) Tính $B - C$.

b) Tính các góc của tam giác *ABC* nếu $4.B = 5.C$.

7.8. Cho tam giác *ABC*, *O* là điểm nằm trong tam giác.

a) Chứng minh rằng $BOC = A + ABO + ACO$.

b) Biết $ABO + ACO = 90° - \dfrac{A}{2}$ và tia *BO* là tia phân giác của góc *B*. Chứng minh rằng tia *CO* là tia phân giác của góc *C*.

7.9. Cho tam giác *ABC* có $A = 180° - 3C$.

a) Chứng minh rằng $B = 2.C$.

b) Từ một điểm *D* trên cạnh *AC* vẽ $DE // BC \left(E \in AB\right)$. Hãy xác định vị trí của *D* cho tia *DE* là tia phân giác của góc ADB.

7.10. Chứng minh với mỗi tam giác bao giờ cũng tồn tại một góc ngoài không lớn hơn $120°$.

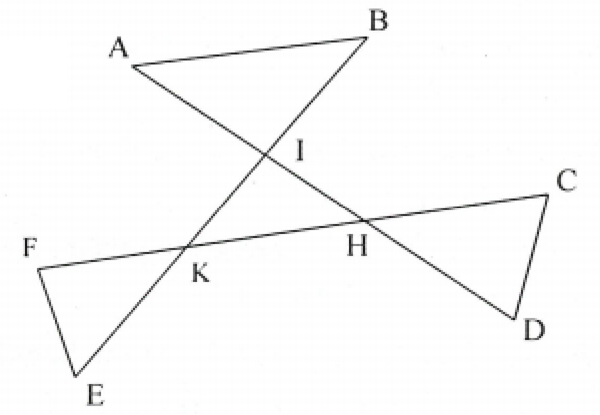
7.11. Cho tam giác *ABC* vuông góc tại *A*. Tia phân giác của C cắt *AB* tại *D*.

a) Chứng minh rằng góc *BDC* là góc tù.

b) Giả sự $BDC = 105°$. Tính số đo góc *B*.

7.12. Cho hình vẽ bên.

Tính tổng $A + B + C + D + E + F$

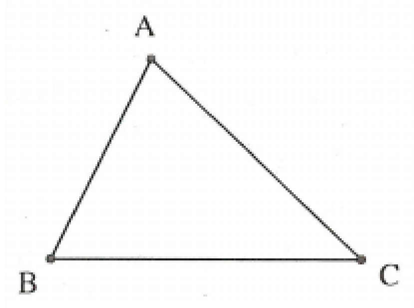


Hướng dẫn giải

7.1.

- ***Hình 1.*** ΔABC có $A+B+C=180°$

$56°+x°+12°+x°=180° \Leftrightarrow x°=56°$.



- ***Hình 2.*** ΔMNP vuông tại $M \Rightarrow N+P=90°$

$2x°+x°-15°=90° \Leftrightarrow x°=35°$.

- ***Hình 3.*** ΔDEF có $D+E+F=180°$

$x°+3x°-25°+x°+10°=180° \Leftrightarrow x°=39°$.

7.2. Ta có: $A_2=A_1=45°$ (đối đỉnh).

Ta có $B_2+B_1=180° \Rightarrow B_2=50°$.

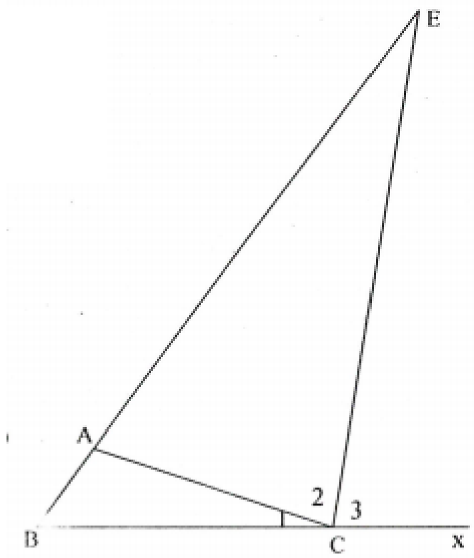
ΔABC có $C_1=A_2+B_2$ (góc ngoài của tam giác) suy ra: $C_2=95°$.

7.3. Đặt số đo góc ngoài đỉnh *A*; *B*; *C* lần lượt là *x*; *y*; *z*. Theo đầu bài, ta có: $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$ và $x+y+z=360°$.

Giải ra, ta được: $x=80°$; $y=120°$; $z=160°$.

Từ đó suy ra các góc trong đỉnh *A*; *B*; *C* tương ứng là $100°, 60°, 20°$.

Do đó tỉ lệ ba góc trong là: $5:3:1$.



7.4.

a) Ta có $A=2.B$; $B=3.C \Rightarrow A=6C$.

ΔABC có $A+B+C=180° \Rightarrow 6.C+3C+C=180°$

$\Rightarrow C=18°$; $B=54°$; $A=108°$.

b) Ta có $ACx+C_1=180°$ (hai góc kề bù)

$ACx+18°=180° \Rightarrow ACx=162°$

Ta có: $C_2=C_3=\frac{1}{2}ACx=81°$.

ΔBCE có $E+B+BCE=180°$; $E+54°+18°+81°=180° \Rightarrow E=27°$ hay $AEC=27°$.

7.5.

a) ΔABD có $A_1+B+ADB=180°$;

ΔACD có $A_2+C+ADC=180°$;

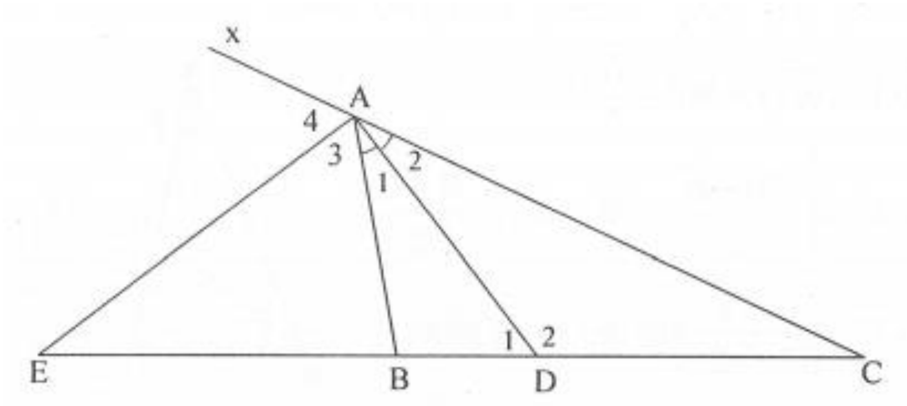
Mà $A_1=A_2$ nên $C+ADC=B+ADB \Rightarrow ADC-ADB=B-C$.

b) ΔABC có $BAx = B + C$ (góc ngoài tam giác)

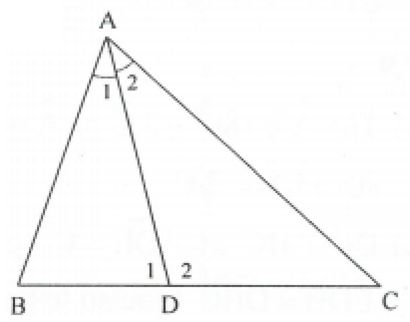
$\Rightarrow A_3 = A_4 = \frac{1}{2}BAX = \frac{B+C}{2}$

ΔACE có: $A_4 = E + C$ (góc ngoài)

$\Rightarrow E = A_4 - C \Rightarrow AEB = \frac{B+C}{2} - C$ hay $AEB = \frac{B-C}{2}$.



7.6. ΔACD có $D_2 = B + A_1$ (góc ngoài tam giác)



ΔABD có $D_1 = C + A_2$ (góc ngoài tam giác) mà $A_1 = A_2$

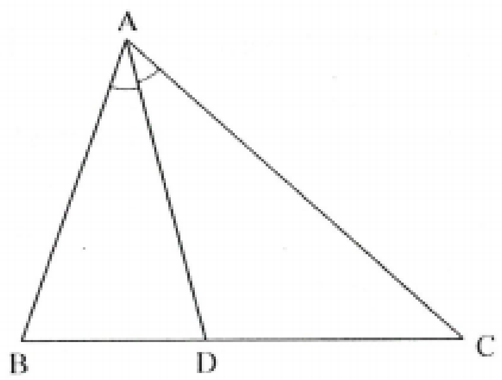
nên $D_2 - D_1 = B - C$

$\Rightarrow D_2 - D_1 = 18°$ mà $D_2 + D_1 = 180°$

nên $D_2 = \frac{180° + 18°}{2} = 99°$; $D_1 = \frac{180° - 18°}{2} = 81°$.

7.7.

a) Ta có $ADB = 85° \Rightarrow ADC = 95°$.



ΔABD có $A_1 + B + ADB = 180°$;

ΔACD có $A_2 + C + ADC = 180°$;

Mà $A_1 = A_2$ nên $C + ADC = B + ADB$

$\Rightarrow ADC - ADB = B - C$.

Vậy $B - C = 95° - 85° = 10°$.

b) $4.B = 5.C \Rightarrow \frac{B}{5} = \frac{C}{4}$.

Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau, ta có: $\frac{B}{5} = \frac{C}{4} = \frac{B-C}{5-4} = \frac{10°}{1} = 10°$.

Suy ra: $B = 50°$; $C = 40°$.

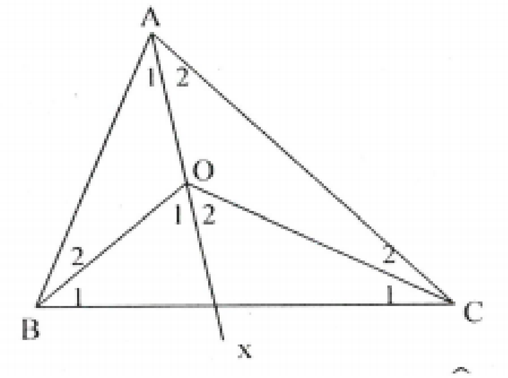
7.8.

a) ΔABO có $O_1 = A_1 + ABO$ (góc ngoài tam giác).

ΔACO có $O_2 = A_2 + ACO$ (góc ngoài tam giác).

$\Rightarrow O_1 + O_2 = A_1 + A_2 + ABO + ACO$

Hay $BOC = A + ABO + ACO$.



b) Từ $ABO + ACO = 90° - \dfrac{A}{2}$

$\Rightarrow B_2 + C_2 = \dfrac{180° - A}{2} \Rightarrow B_2 + C_2 = \dfrac{B+C}{2}$

$\Rightarrow B_2 + C_2 = \dfrac{B}{2} + \dfrac{C}{2}$ mà BO là tia phân giác của B nên $B_1 = \dfrac{B}{2}$

suy ra $C_2 = \dfrac{C}{2}$; hay CO là tia phân giác của góc C.

7.9.

a) Từ: $A = 180° - 3.C \Rightarrow A = A + B + C - 3.C$ suy ra $B = 2.C$

b) $DE \,//\, BC \Rightarrow ADE = C$ (góc đồng vị) và $EDB = DBC$ (góc so le trong).

Tia DE là tia phân giác của $ADB \Leftrightarrow ADE = EDB \Leftrightarrow C = DBC$ mà $C = \dfrac{1}{2}B$ nên $DBC = \dfrac{1}{2}B$

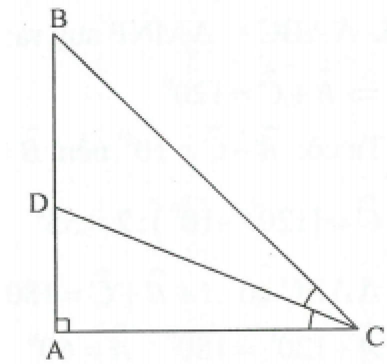
$\Leftrightarrow BD$ là tia phân giác của ABC.

Vậy khi D là giao điểm của tia phân giác B và AC thì DE là tia phân giác của ADB.

7.10. Giả sử cả ba góc ngoài ở ba đỉnh đều lớn hơn $120°$ suy ra mỗi góc trong đều nhỏ hơn $60°$

Vậy tổng ba góc trong của tam giác nhỏ hơn $180°$, vô lí. Do đó tồn tại một góc ngoài có số đo không lớn hơn $120°$.

7.11.



a) Góc BDC là góc ngoài tại đỉnh D của tam giác ACD nên $BDC > A = 90°$; $90° < BDC < 180° \Rightarrow BDC$ là góc tù.

b) $BDC = A + ACD$ (góc ngoài tam giác)

$\Rightarrow ACD = 15° \;\Rightarrow ACB = 30° \Rightarrow B = 60°$.

7.12. Xét ΔABI có $A + B = 180° - AIB$.

Xét ΔCDH có $C + D = 180° - CHD$.

Xét ΔEFK có $E + F = 180° - EKF$.

Suy ra: $A+B+C+D+E+F=540^\circ-\left(AIB+CHD+EKF\right)$

$=540^\circ-\left(KIH+IHK+IKH\right)=540^\circ-180^\circ=360^\circ$.

Chương II

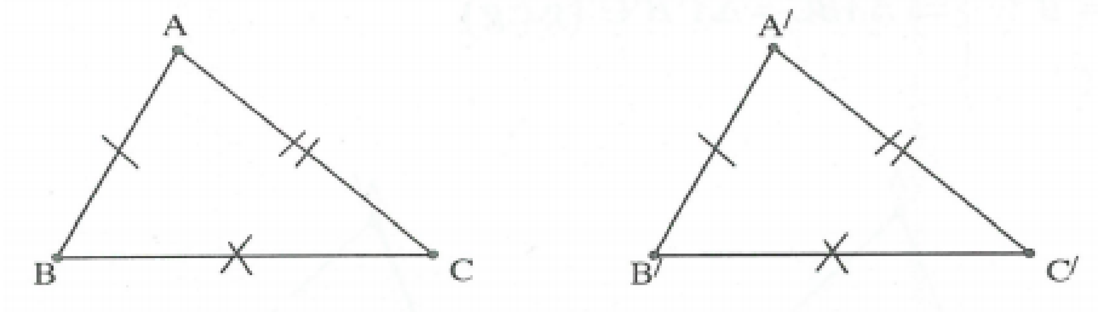
TAM GIÁC

Chuyên đề 8. HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU.
CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA HAI TAM GIÁC

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa. Hai tam giác bằng nhau là hai tam giác có các cạnh tương ứng bằng nhau, các góc tương ứng bằng nhau.

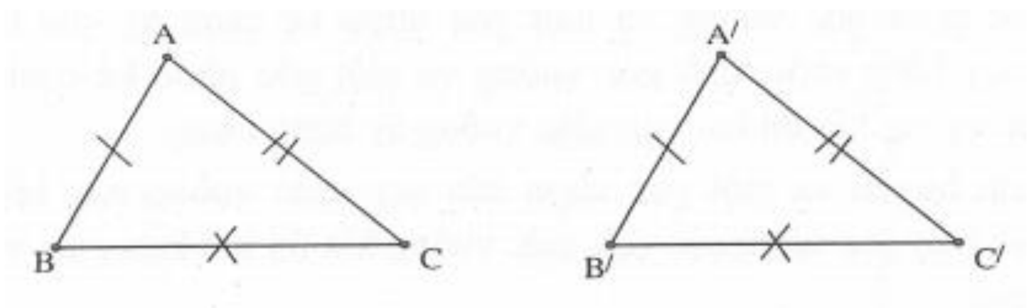
$$\Delta ABC = \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} A = A' \\ B = B' \\ C = C' \\ AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{cases}$$



2. Các trường hợp bằng nhau của hai tam giác

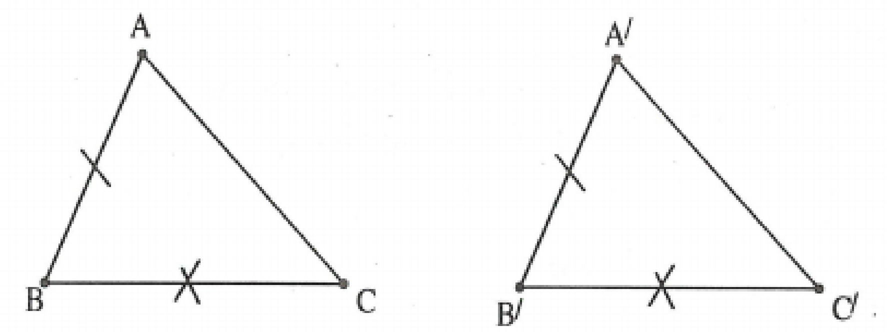
• Nếu ba cạnh của tam giác này bằng ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

$$\left.\begin{matrix} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' \,(\text{c.c.c})$$



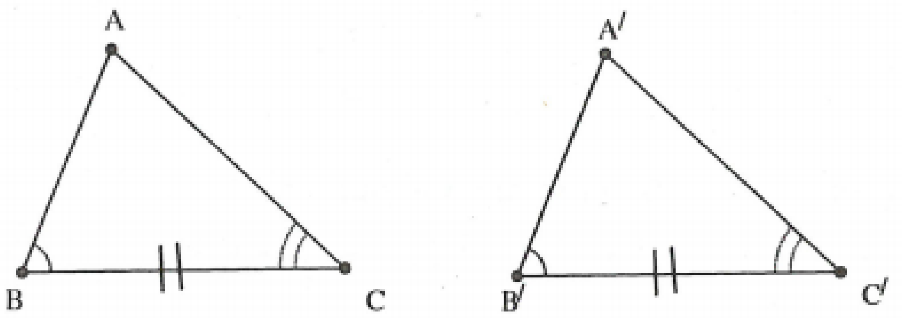
• Nếu hai cạnh và góc xen giữa của tam giác này bằng hai cạnh và góc xen giữa của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

$$\left.\begin{matrix} AB = A'B' \\ B = B' \\ BC = B'C' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' \,(\text{c.g.c})$$



• Nếu một cạnh và hai góc kề của tam giác này bằng một cạnh và hai góc kề của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

$$\left.\begin{array}{l} B = B' \\ BC = B'C' \\ C = C' \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' \left(\text{g.c.g}\right)$$



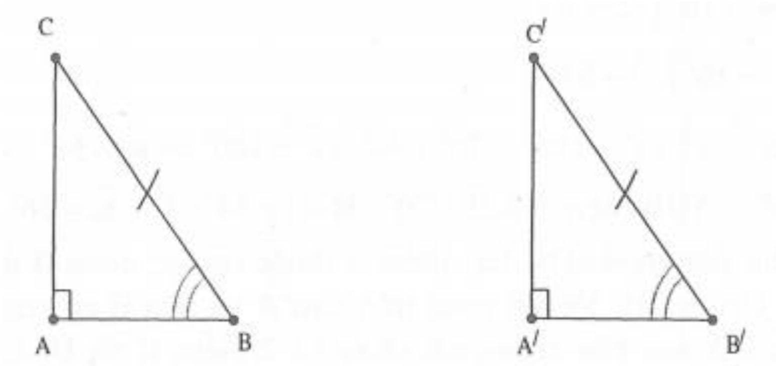
2. Hệ quả.

• Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

• Nếu một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông ấy bằng nhau.

• Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau.

$$\left.\begin{array}{l} A = A' = 90^\circ \\ BC = B'C' \\ B = B' \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' \ \text{(cạnh huyền – góc nhọn)}$$



B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$.

a) Viết kí hiệu về sự bằng nhau của hai tam giác đó với ba cách khác.

b) Cho $AB = 5\text{cm}$; $AC = 6\text{cm}$; $NP = 7\text{cm}$. Tính chu vi mỗi tam giác? Hãy nêu nhận xét?

Giải

** Tìm cách giải.* Khi viết hai tam giác bằng nhau thì các đỉnh tương ứng phải viết theo cùng một thứ tự. Viết như vậy, thì việc suy ra các cặp cạnh tương ứng bằng nhau mới chính xác.

** Trình bày lời giải.*

a) $\Delta ACB = \Delta MPN$; $\Delta CBA = \Delta PNM$; $\Delta BAC = \Delta NMP$.

b) $\Delta ABC = \Delta MNP$ suy ra $AB = MN = 5\text{cm}$; $AC = MP = 6\text{cm}$; $BC = NP = 7\text{cm}$.

Chu vị ΔABC bằng: $AB + AC + BC = 5 + 6 + 7 = 18(\text{cm})$.

Chu vi ΔMNP bằng: $MN + MP + NP = 5 + 6 + 7 = 18(\text{cm})$.

** Nhận xét.* Hai tam giác bằng nhau thì có chu vi bằng nhau.

Ví dụ 2: Cho $\Delta ABC = \Delta HIK$, biết $A + B = 124°$; $H - \hat{I} = 16°$. Tính các góc của mỗi tam giác.

Giải

** Tìm cách giải.* Bài toán yêu cầu tính số đo góc của tam giác nên từ $\Delta ABC = \Delta HIK$, chúng ta chỉ quan tâm tới cặp góc tương ứng bằng nhau.

** Trình bày lời giải.*

$\Delta ABC = \Delta HIK \Rightarrow A = H;\ B = \hat{I};\ C = K$ (cặp góc tương ứng).

Vì $A + B = 124° \Rightarrow H + \hat{I} = 124°$; mà $H - \hat{I} = 16°$, nên

$H = (124° + 16°) : 2 = 70°$;

$\hat{I} = (124° - 16°) : 2 = 54°$.

ΔHIK có $H + \hat{I} + K = 180°$; $70° + 54° + K = 180° \Rightarrow K = 56°$.

Vì $\Delta ABC = \Delta HIK$ nên $A = H = 70°;\ B = \hat{I} = 54°;\ C = K = 56°$.

Ví dụ 3: Cho góc nhọn xOy. Lấy điểm A thuộc tia Ox, điểm B thuộc tia Oy sao cho $OA = OB$. Vẽ hai cung tròn tâm A và tâm B có cùng bán kính nhỏ hơn OA sao cho chúng cắt nhau tại 2 điểm C và D. Chứng minh rằng:

a) $\Delta AOC = \Delta BOC$.

b) Ba điểm O, C, D thẳng hàng.

Giải

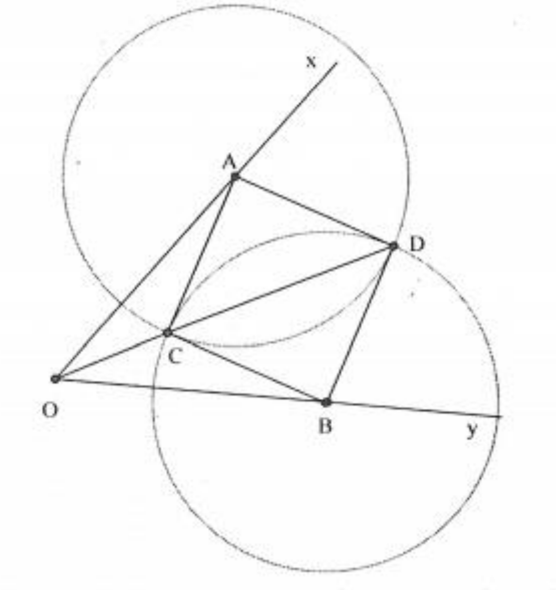
a) Xét ΔOAC và ΔOBC có: $OA = OB$ (giả thiết), $AC = BC$ (bán kính bằng nhau), OC cạnh chung.

$\Rightarrow \Delta OAC = \Delta OBC(\text{c.c.c})$.

b) $\Delta OAC = \Delta OBC(\text{c.c.c})$ nên $AOC = BOC$

tương tự: $\Delta OAD = \Delta OBD(\text{c.c.c})$ nên $AOD = BOD$.

Nên *C, D* cùng thuộc tia phân giác góc xOy hay *O, C, D* thẳng hàng.



**** Nhận xét.***

• Khi chứng minh hai tam giác bằng nhau bạn nên chú ý cạnh chung.

• Muốn chứng minh ba điểm thẳng hàng, ta có thể chứng minh ba điểm đó cùng nằm trên tia phân giác của một góc.

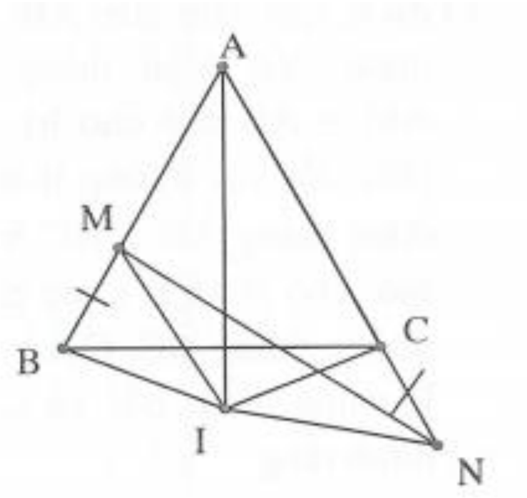
Ví dụ 4: Cho ΔABC có $AB = AC$. Lấy *M* thuộc cạnh *AB*; lấy *N* thuộc tia đối của tia *CA* sao cho $CN = BM$. Gọi *I* là một điểm sao cho $IB = IC$; $IM = IN$. Chứng minh rằng: $IC \perp AN$.

Giải

Ta có $\Delta ABI = \Delta ACI\,(\text{c.c.c}) \Rightarrow ACI = ABI$.

$\Delta MBI = \Delta NCI\,(\text{c.c.c}) \Rightarrow NCI = ABI$.

Suy ra $ACI = NCI$, mà đó là hai góc kề bù nên $ACI = NCI = 90°$, hay $IC \perp AN$.



**** Nhận xét.***

Đây là bài toán khó. Để chứng minh $IC \perp AN$ chúng ta suy nghĩ và chứng minh $ICA = ICN$ là điều cần thiết. Sau đó, chúng ta hãy tìm các cặp tam giác bằng nhau mà trong các tam giác ấy có chứa ICA hoặc ICN.

Ví dụ 5: Cho tam giác *ABC* có $A = 90°$. Kẻ tia phân giác góc B cắt *AC* tại *D*. Trên cạnh *BC* lấy điểm *M* sao cho $BM = BA$.

a) Chứng minh rằng $DM \perp BC$.

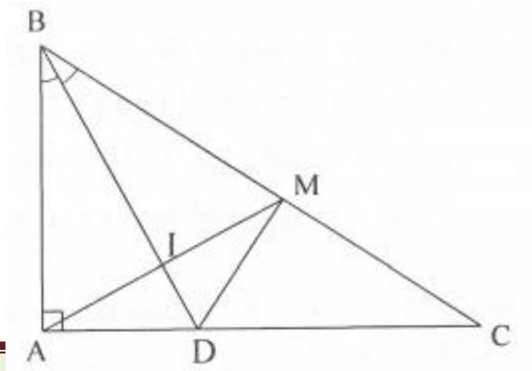
b) Chứng minh rằng $AM \perp BD$.

c) Nếu biết $AMD = 36°$. Tính số đo B; C của ΔABC.

Giải

a) ΔABD và ΔMBD có $BA = BM$; $ABD = MBD$; *BD* là cạnh chung $\Rightarrow \Delta ABD = \Delta MBD(\text{c.g.c})$.

$\Rightarrow BAD = BMD \Rightarrow BMD = 90°$



$\Rightarrow DM \perp BC$.

b) Gọi I là giao điểm của AM và BD.

Xét ΔABI và ΔMBI có $AB = MB$; $ABI = MBI$; BI là cạnh chung

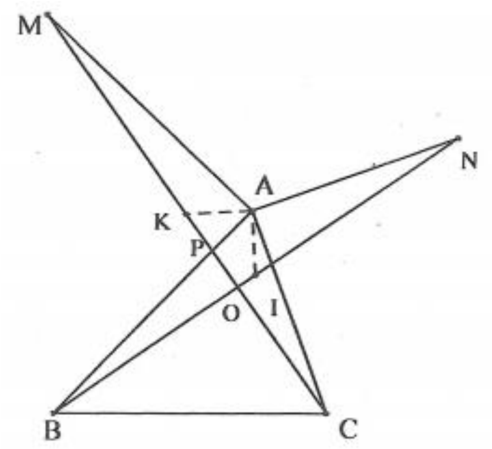
$\Rightarrow \Delta ABI = \Delta MBI\,(\text{c.g.c})$

$\Rightarrow AIB = MIB$ mà $AIB + MIB = 180°$ nên $AIB = MIB = 90°$, suy ra: $AM \perp BD$.

c) $AMD = 36°$ nên $IMB = 90° - 36° = 54°$;

ΔBIM vuông nên $IBM = 90° - 54° = 36°$.

Suy ra $B = 36°.2 = 72°$ do đó $C = 90° - 72° = 18°$.



Ví dụ 6: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Vẽ đoạn thẳng $AM \perp AB$; $AM = AB$ sao cho M và C khác phía đối với đường thẳng AB. Vẽ đoạn thẳng $AN \perp AC$ và $AN = AC$ sao cho N và B khác phía đối với đường thẳng AC. Gọi I, K lần lượt là trung điểm BN và CM. Chứng minh rằng:

a) $\Delta AMC = \Delta ABN$;

b) $MC = BN$ và $MC \perp BN$;

c) $AI = AK$ và $AI \perp AK$.

Giải

a) $MAC = BAN\,(= 90° + BAC)$ nên $\Delta MAC = \Delta BAN\,(\text{c.g.c})$.

b) $\Delta MAC = \Delta BAN \Rightarrow BN = CM$. Và $AMC = ABN$.

Gọi P là giao điểm của AB và CM

Ta có: $AMC + APM = 90°$ (vì ΔAMP vuông)

$\Rightarrow ABN + BPO = 90° \Rightarrow BN \perp CM$.

c) $CM = BN \Rightarrow MK = BI$, mà $AMK = ABN$; $AM = AB$

nên $\Delta AMK = \Delta ABI\,(\text{c.g.c}) \Rightarrow AK = AI$.

$\Rightarrow MAK = BAI$; mà $MAK + KAB = 90°$

$\Rightarrow BAI + KAB = 90°$ hay $AI \perp AK$.

Ví dụ 7: Cho ΔABC vuông tại A có $BC = 2.AB$. Tia phân giác của góc B cắt AC tại D.

a) Chứng minh rằng $BD = CD$.

b) Tính góc B và C của tam giác ABC.

Giải

a) Gọi E là trung điểm của BC. Suy ra $BE = CE = AB\left(= \frac{1}{2}BC\right)$

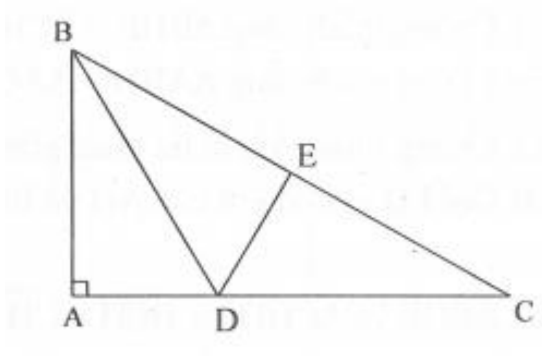
ΔABD và ΔEBD có $BA = BE$; $ABD = EBD$ (giả thiết); BD là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta EBD(\text{c.g.c}) \Rightarrow BAD = BED \Rightarrow BED = 90°$.

Xét ΔBDE và ΔCDE có: $BED = CED = 90°$; $BE = CE$; DE chung

$\Rightarrow \Delta BDE = \Delta CDE(\text{c.g.c})$

$\Rightarrow BD = CD$



b) $\Delta BDE = \Delta CDE(\text{c.g.c}) \Rightarrow C = DBE$

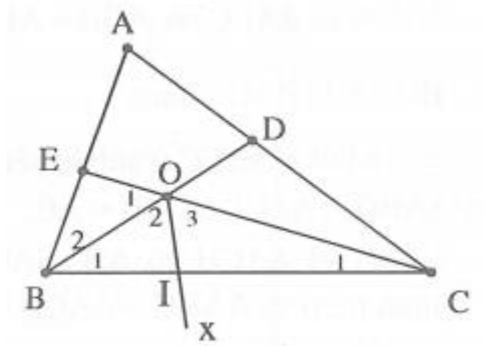
$\Rightarrow B = 2.C$

Mặt khác: $B + C = 90°$ (Vì ΔABC vuông tại A)

$\Rightarrow 2C + C = 90° \Rightarrow C = 30°;\ B = 60°$.

Ví dụ 8: Cho tam giác ABC có $A = 60°$. Các tia phân giác góc B, góc C cắt nhau tại O và cắt AC; AB theo thứ tự D; E. Chứng minh rằng: $OD = OE$.

Giải



ΔABC có $A + B + C = 180°$

Mà $A = 60°$ nên $B + C = 120°$.

Ta có $B_1 + C_1 = \frac{1}{2}.B + \frac{1}{2}.C = 60°$.

ΔBOC có $BOC + B_1 + C_1 = 180°$

Nên $BOC = 120°;\ O_1 = 60°$.

- Kẻ Ox là tia phân giác góc BOC, cắt BC tại I nên $O_2 = O_3 = 60°$.

Xét ΔBEO và ΔBIO có $B_1 = B_2$ (giả thiết); $O_1 = O_2 (= 60°)$; BO là cạnh chung

do đó $\Delta BEO = \Delta BIO(\text{g.c.g})$. Suy ra $OE = OI$.

- Chứng minh tương tự ta có $\Delta COD = \Delta COI$ nên $OD = OI$.

Vậy $OE = OD (= OI)$.

**** Nhận xét.***

- Để chứng minh $OE = OD$, ta chưa thể ghép chúng vào hai tam giác nào bằng nhau được. Do vậy, ta nghĩ đến cách kẻ đường phụ. Cho số đo góc A ta liên hệ với bài đã biết nên tính được số đo góc BOC và góc BOE nên dựng được điểm I.

- Bài toán còn có cách khác, là lấy điểm I trên BC sao cho $BI = BE$, sau đó chứng minh $\Delta BOE = \Delta BOI$ rồi chứng minh $\Delta COD = \Delta COI$.

- Từ cách trên ta còn suy ra kết quả đẹp là $BE + CD = BC$.

Ví dụ 9: Cho tam giác *ABC*. Từ *B* kẻ $BD \perp AC$; $CE \perp AB$. Gọi *H* là giao điểm của *BD* và *CE*. Biết rằng $HD = HE$.

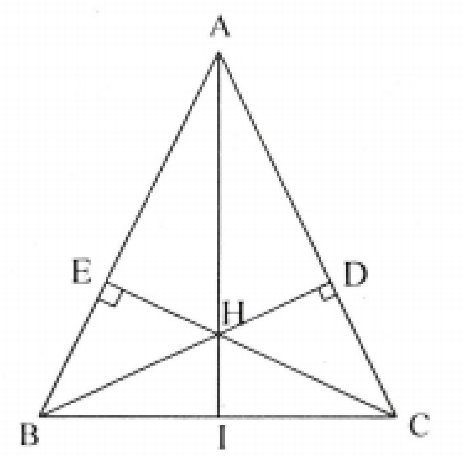
a) Chứng minh rằng $\Delta BHE = \Delta CHD$;

b) Chứng minh rằng $\Delta ABD = \Delta ACE$;

c) Chứng minh *AH* là tia phân giác của BAC.

d) Gọi *I* là giao điểm của *AH* và *BC*. Chứng minh rằng $AI \perp BC$.

Giải



a) ΔBHE và ΔCHD có $BEH = CDH\left(=90°\right)$; $HD = HE$;

$BHE = CHD$

$\Rightarrow \Delta BHE = \Delta CHD\left(\text{g.c.g}\right)$.

b) $\Delta BHE = \Delta CHD \Rightarrow BH = CH$; mà $HD = HE$

$\Rightarrow BD = CE$.

ΔADB và ΔAEC có $ADB = AEC\left(=90°\right)$; $BD = CE$; BAC chung

$\Rightarrow \Delta ADB = \Delta AEC$ (cạnh huyền – góc nhọn).

c) $\Delta ABD = \Delta ACE \Rightarrow AB = AC$.

ΔABH và ΔACH có $AB = AC$; *AH* là cạnh chung; $BH = CH$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta ABH = \Delta ACH\left(\text{c.c.c}\right)$

$\Rightarrow BAH = CAH \Rightarrow AH$ là tia phân giác của BAC.

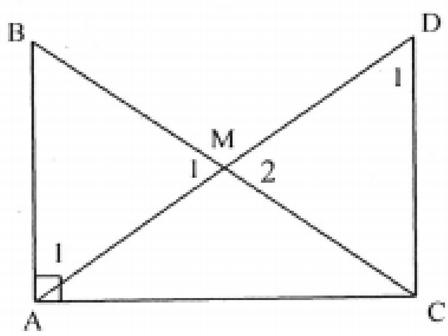
d) ΔABI và ΔACI có $AB = AC$; $BAI = CAI$; *AI* là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta ABI = \Delta ACI\left(\text{c.g.c}\right)$

$\Rightarrow AIB = AIC$; mà $AIB + AIC = 180° \Rightarrow AIB = AIC = 90°$ hay $AI \perp BC$.

Ví dụ 10: Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*. Gọi *M* là trung điểm của *BC*. Chứng minh rằng $AM = \frac{1}{2}BC$.

Giải



** Tìm cách giải.* Để chứng minh $AM = \frac{1}{2}BC$ ta cần chứng minh $BC = 2.AM$. Về mặt suy luận, ta cần dựng một đoạn thẳng bằng $2.AM$ rồi chứng minh đoạn thẳng đó bằng *BC*.

** Trình bày lời giải.*

Trên tia đối của tia *MA* lấy điểm *D* sao cho $MD = MA$. Suy ra $AD = 2.AM$

ΔAMB và ΔDMC có $AM = MD$; $M_1 = M_2$; $MB = MC$ nên $\Delta AMB = \Delta DMC$.

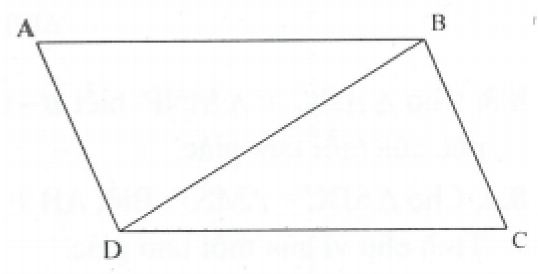
Suy ra $AB = DC$; $A_1 = D_1$ nên $AB // CD \Rightarrow DC \perp AC$.

ΔABC và ΔCDA có $AB = DC$; $BAC = DCA = (90°)$, AC chung suy ra $\Delta ABC = \Delta CDA(\text{c.g.c})$

$\Rightarrow BC = DA \Rightarrow BC = 2.AM$ hay $AM = \dfrac{1}{2}BC$.

** Nhận xét.* Bài này là một tính chất thú vị của tam giác vuông, thường được sử dụng trong những bài nối trung điểm của cạnh huyền với đỉnh góc vuông.

Ví dụ 11: Cho hình vẽ bên.



Biết rằng $AB // CD$; $AD // BC$.

Chứng minh rằng: $AB = CD$, $AD = BC$.

Giải

$AB // CD \Rightarrow ABD = CDB$ (cặp so le trong)

$AD // BC \Rightarrow ADB = CBD$ (cặp so le trong)

ΔABD và ΔCDB có $ABD = CDB$, BD là cạnh chung, $ADB = CBD$.

Suy ra $\Delta ABD = \Delta CDB(\text{g.c.g}) \Rightarrow AB = CD,\ AD = BC$.

**** Nhận xét.*** Đây là một tính chất thú vị, gọi là tính chất đoạn chắn song song. Tính chất này được vận dụng trong nhiều bài tập, đem lại hiệu quả cao.

C. Bài tập vận dụng

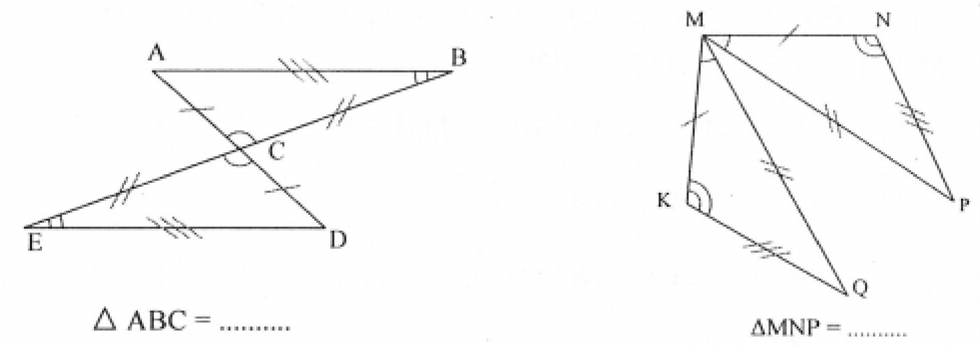
• Định nghĩa tam giác bằng nhau

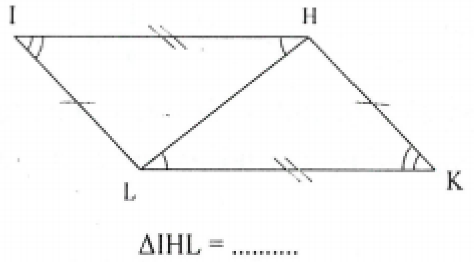
8.1. Điền vào chỗ trống (……) trong các phát biểu sau:

a) Nếu $\Delta ABC = \Delta MNP$ thì $AB = ...$; $...... = MP$; $BC = ...$

b) Nếu $\Delta IHK = \Delta DEF$ thì $\hat{I} = ...$; $...... = F$; $H = ...$

8.2. Điền vào ô trống:





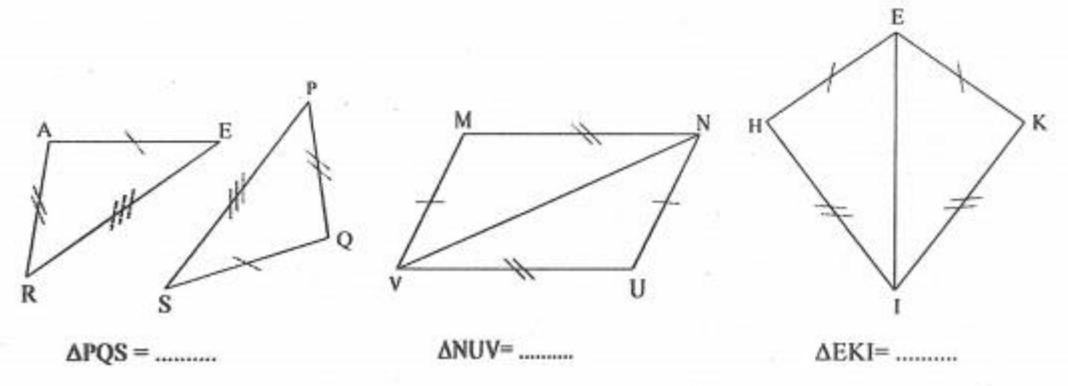
8.3. Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$ biết $B - C = 10°$; $N + P = 120°$. Tính số đo các góc của mỗi tam giác.

8.4. Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$. Biết $AB + AC = 9\text{cm}$; $MN - NP = 3\text{cm}$; $NP = 5\text{cm}$. Tính chu vi của mỗi tam giác.

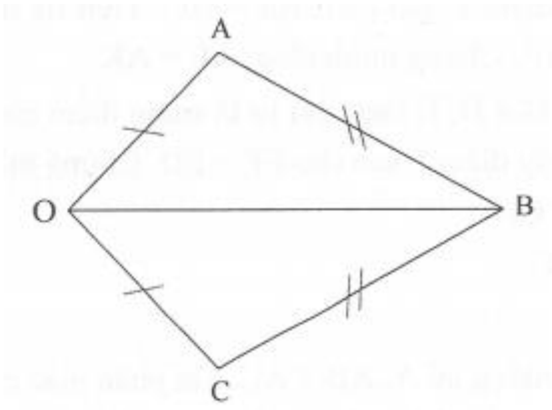
8.5. Cho $\Delta ABC = \Delta RST$, biết $\dfrac{BC}{5} = \dfrac{AB}{3}$ và $ST - RS = 8\text{cm}$; $AC = 18\text{cm}$. Tính mỗi cạnh của mỗi tam giác.

• ***Trường hợp c.c.c***

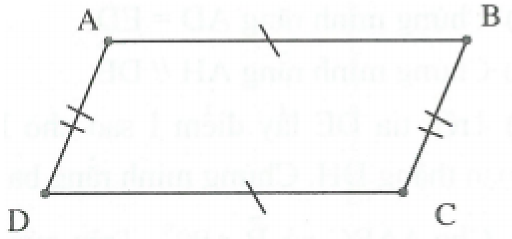
8.6. Điền vào ô trống:



8.7. Cho hình vẽ bên. Chứng minh rằng *OB* là tia phân giác của AOC.



8.8. Trong hình vẽ bên biết $AB = CD$, $AD = BC$. Chứng minh: $AB \,//\, CD$, $AD \,//\, BC$.



8.9. Cho ΔABC có $A = 50°$; $AB = AC$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính các góc của ΔABM, ΔACM.

• ***Trường hợp c.g.c***

8.10. Cho ΔABC vuông tại A. Tia phân giác của ABC cắt AC ở D; E là một điểm trên cạnh BC sao cho $BE = BA$.

a) Chứng minh rằng: $\Delta ABD = \Delta EBD$.

b) Chứng minh rằng: $DE \perp BC$.

c) Gọi F là giao điểm của DE và AB. Chứng minh rằng $DC = DF$.

8.11. Cho tam giác ABC nhọn. Kẻ $BD \perp AC\,(D \in AC)$, $CE \perp AB\,(E \in AB)$. Trên tia đối của tia BD lấy điểm H sao cho $BH = AC$. Trên tia đối của tia CE lấy điểm K sao cho $CK = AB$. Chứng minh:

a) $ABH = ACK$;

b) $AH = AK$.

8.12. Cho tam giác ABC có $B = 2.C$. Tia phân giác góc B cắt AC ở D. Trên tia đối BD lấy điểm E sao cho $BE = AC$. Trên tia đối CB lấy điểm K sao cho $CK = AB$. Chứng minh rằng: $AE = AK$.

8.13. Cho ΔABC. Gọi D; E theo thứ tự là trung điểm của AB, AC. Trên tia đối của tia ED lấy điểm F sao cho $EF = ED$. Chứng minh:

a) $BD = CF$; $AB \,//\, CF$.

b) $\Delta BCD = \Delta FDC$.

c) $DE \,//\, BC$.

8.14. Cho ΔABC vuông tại *A*, $AB < AC$. Tia phân giác của ABC cắt *AC* tại *D*. Trên cạnh *BC* lấy điểm *E* sao cho $BE = BA$. Vẽ *AH* vuông góc với *BC* tại *H*.

a) Chứng minh rằng $AD = ED$.

b) Chứng minh rằng $AH // DE$.

c) Trên tia *DE* lấy điểm *I* sao cho $DI = AH$. Gọi *O* là trung điểm của đoạn thẳng *DH*. Chứng minh rằng ba điểm *A*, *O*, *I* thẳng hàng.

8.15. Cho ΔABC có $B < 90°$. Trên nửa mặt phẳng bờ *BC* chứa điểm *A*. Vẽ tia *Bx* vuông góc với *BC*. Trên tia *Bx* lấy điểm *D* sao cho $BD = BC$. Trên nửa mặt phẳng bờ *AB* chứa điểm *C* vẽ tia *By* vuông góc với *BA*. Trên tia *By* lấy điểm *E* sao cho $BE = BA$. Chứng minh rằng:

a) $AD = CE$.

b) $AD \perp CE$.

8.16. Cho ΔABC có $A < 90°$. Gọi *M* là trung điểm cạnh *BC*. Trên nửa mặt phẳng bờ *AB* không chứa điểm *C* kẻ tia *Ax* vuông góc với *AB*, trên tia *Ax* lấy điểm *D* sao cho $AD = AB$. Trên nửa mặt phẳng bờ *AC* không chứa điểm *B* kẻ *Ay* vuông góc với *AC*. Trên tia *Ay* lấy điểm *E* sao cho $AE = AC$. Trên tia đối tia *MA* lấy $MN = MA$. Chứng minh rằng:

a) $BN = AE$;

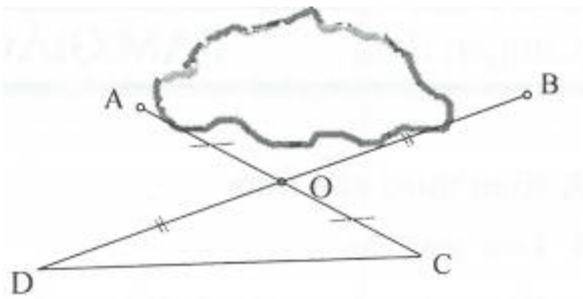
b) $AM = \dfrac{DE}{2}$;

c) $AM \perp DE$.

8.17. Để đo khoảng cách *AB* mà không đo trực tiếp, người ta đã thực hiện như sau:

- Chọn vị trí điểm *O*.
- Lấy điểm *C* trên tia đối tia *OA* sao cho $OC = OA$.
- Lấy điểm *D* trên tia đối tia *OB* sao cho $OD = OB$.
- Đo độ dài đoạn thẳng *CD*, đó chính là khoảng cách *AB*.

Hãy giải thích tại sao?



● ***Trường hợp g.c.g***

8.18. Cho tam giác *ABC* có $A = 120°$. Các tia phân giác của *BE*; *CF* của ABC và ACB cắt nhau tại *I* (*E*, *F* lần lượt thuộc cạnh *AC*, *AB*). Trên cạnh *BC* lấy hai điểm *M*, *N* sao cho $BIM = CIN = 30°$.

a) Tính số đo của MIN.

b) Chứng minh $CE + BF < BC$.

8.19. Cho tam giác *ABC* có $B + C = 60°$, tia phân giác của BAC cắt *BC* tại *D*. Trên *AD* lấy điểm *O*, trên tia đối của tia *AC* lấy điểm *M* sao cho $ABM = ABO$. Trên tia đối của tia *AB* lấy điểm *N* sao cho $ACN = ACO$. Chứng minh rằng $AM = AN$.

8.20. Cho tam giác ABC có $BC = 5\text{cm}$. Trên tia AB lấy điểm K và D sao cho $AK = BD$.

Vẽ $KI//BC$; $DE//BC\left(I;E \in AC\right)$.

a) Chứng minh $AI = CE$.

b) Tính độ dài $DE + KI$.

8.21. Cho ΔABC vuông tại A có $AB = AC$. Lấy M thuộc $BC\left(BM > MC\right)$. Kẻ BD và CE vuông góc với đường thẳng AM. Chứng minh rằng:

a) $\Delta ABD = \Delta CAE$.

b) $BD - CE = DE$.

Hướng dẫn giải

• Định nghĩa tam giác bằng nhau

8.1. Đáp số:

a) $AB = MN$; $AC = MP$; $BC = NP$.

b) $\hat{I} = D$; $K = F$; $H = E$.

8.2. Đáp số: $\Delta ABC = \Delta DEC$; $\Delta MNP = \Delta MKQ$; $\Delta IHL = \Delta KLH$.

8.3. $\Delta ABC = \Delta MNP$ suy ra: $B = N$; $C = P$ mà $N + P = 120°$

$\Rightarrow B + C = 120°$

Ta có: $B - C = 10°$ nên $B = (120° + 10°) : 2 = 65°$

$C = (120° - 10°) : 2 = 55°$

ΔABC có $A + B + C = 180°$

$A + 120° = 180°$; $A = 60°$

Vậy $M = A = 60°$; $N = B = 65°$; $P = C = 55°$.

8.4. $\Delta ABC = \Delta MNP \Rightarrow AB = MN$; $BC = NP$; $AC = MP$ (cặp cạnh tương ứng).

Vì $AB + AC = 9\text{cm} \Rightarrow MN + MP = 9\text{cm}$, mà $MN - NP = 3\text{cm}$, nên

$MN = (9+3) : 2 = 6(\text{cm})$

$MP = (9-3) : 2 = 3(\text{cm})$

Do đó chu vi ΔMNP là: $MN + NP + MP = 6 + 5 + 3 = 14\text{cm}$.

Vì $\Delta ABC = \Delta MNP$ nên chu vi ΔABC bằng chu vi ΔMNP và bằng 14cm.

8.5. $\Delta ABC = \Delta RST \Rightarrow AB = RS$; $BC = ST$; $AC = RT$ (cặp cạnh tương ứng).

Vì $ST - RS = 8\text{cm} \Rightarrow BC - AB = 8\text{cm}$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau:

$\frac{BC}{5} = \frac{AB}{3} = \frac{BC - AB}{5-3} = \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow BC = 4.5 = 20\text{cm}$; $AB = 3.4 = 12\text{cm}$.

Vậy: $AB = RS = 12\text{cm}$; $AC = RT = 18\text{cm}$; $BC = ST = 20\text{cm}$.

• Trường hợp c.c.c

8.6. Đáp số: $\Delta PQS = \Delta RAE$; $\Delta NUV = \Delta VMN$; $\Delta EKI = \Delta EHI$.

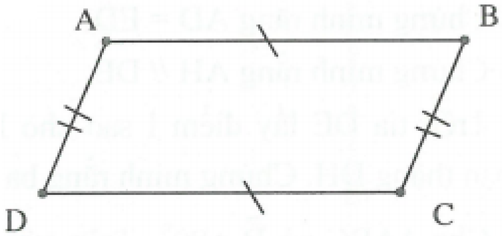
8.7. ΔOAB và ΔOCB có $OA = OC$; $AB = CB$; OB chung

$\Rightarrow \Delta OAB = \Delta OCB(\text{c.c.c})$

$\Rightarrow AOB = COB$ (cặp góc tương ứng), hay OB là tia phân giác của AOC.

8.8. Nối AC.

Xét ΔABC và ΔCDA có:



$AB = CD$; $AD = BC$; AC cạnh chung

Nên $\Delta ABC = \Delta CDA$(c.c.c)

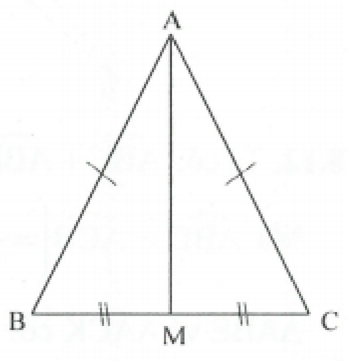
Suy ra $DAC = BCA$.

Mà hai góc ở vị trí so le trong $\Rightarrow AD // CD$.

$BAC = DCA$ mà hai góc ở vị trí so le trong $\Rightarrow AB // CD$.

8.9. ΔAMB và ΔAMC có AM chung; $AB = AC$; $BM = CM$

$\Rightarrow \Delta AMB = \Delta AMC$(c.c.c)



$\Rightarrow BAM = CAM$ (góc tương ứng)

$\Rightarrow BAM = CAM = \frac{1}{2} BAC = \frac{1}{2}.50° = 25°$.

$\Rightarrow AMB = AMC$ (góc tương ứng).

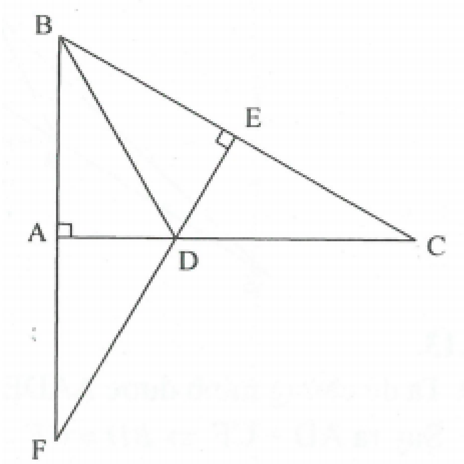
Mà $AMB + AMC = 180°$ nên $AMB = AMC = 90°$.

ΔAMB có $ABM + BAM + AMB = 180°$.

$ABM + 25° + 90° = 180° \Rightarrow ABM = 65°$ suy ra $ACM = 65°$.

• ***Trường hợp c.g.c***

8.10.



a) ΔABD và ΔEBD có $AB = BE$; $ABD = EBD$; BD chung

$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta EBD$(c.g.c).

b) $\Delta ABD = \Delta EBD \Rightarrow BED = BAD$

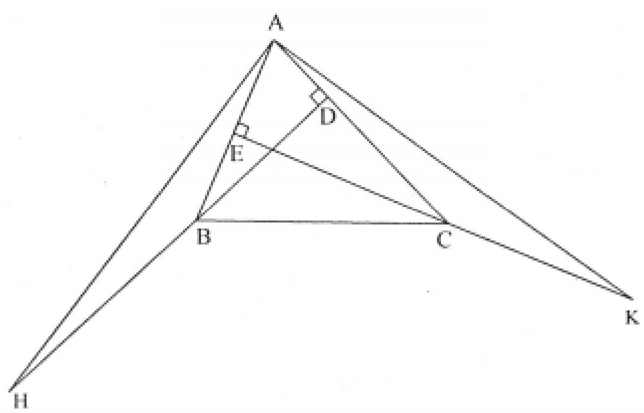
$\Rightarrow BED = 90° \Rightarrow DE \perp AB$.

c) $\Delta ABD = \Delta EBD \Rightarrow AD = ED$.

ΔADF và ΔEDC có $ADF = EDC$; $AD = ED$; $FAD = DEC = (90°)$

$\Rightarrow \Delta ADF = \Delta EDC(g.c.g) \Rightarrow DC = DF$.

8.11.



a) ΔABD có $ADB = 90° \Rightarrow ABD + BAC = 90°$ (1)

ΔACE có $AEC = 90° \Rightarrow ACE + BAC = 90°$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $ABD = ACE$ do đó $ABH = ACK$.

b) ΔABH và ΔKCA có $AB = CK$; $ABD = ACE$; $BH = AC$

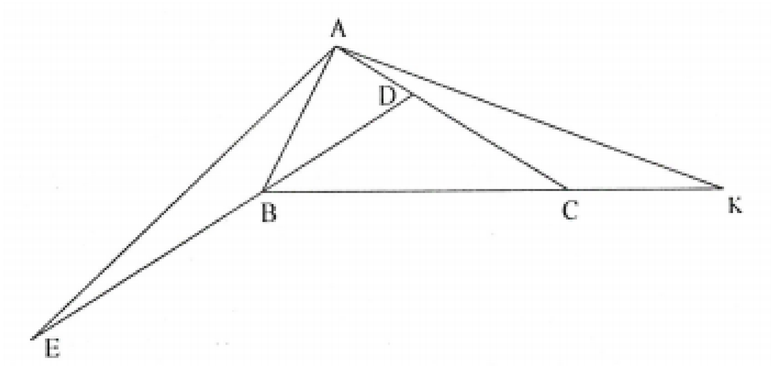
$\Rightarrow \Delta ABH = \Delta KCA(\text{c.g.c}) \Rightarrow AH = AK$.

8.12. Ta có: $ABE + ABD = 180°$; $ACK + ACB = 180°$ (cặp góc kề bù)

Mà $ABD = ACB = \left(\frac{1}{2}ABC\right) \Rightarrow ABE = ACK$.

ΔABE và ΔACK có: $AB = CK$; $ABD = ACK$; $BE = AC$

$\Rightarrow \Delta ABE = \Delta KCA(c.g.c) \Rightarrow AE = KA$.



8.13.

a) Ta dễ chứng minh được $\Delta ADE = \Delta CFE(\text{c.g.c})$

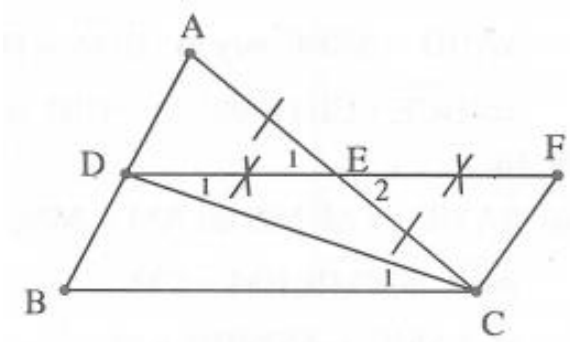
Suy ra $AD = CF \Rightarrow BD = CF$

Và $A = FCE$, mà hai góc ở vị trí so le trong nên $CF // AB$.

b) Xét ΔBDC và ΔFCD có $BD = FC$ (chứng minh trên);

$BDC = FCD$ (so le trong $AB // CF$); CD là cạnh chung

do đó: $\Delta BDC = \Delta FCD(\text{c.g.c})$.



c) $\Delta BDC = \Delta FCD$ (chứng minh trên) nên $D_1 = C_1$, mà hai góc ở vị trí so le trong suy ra $DE // BC$.

* *Nhận xét.* Từ kết luận $\Delta BDC = \Delta FCD$, chúng ta còn suy ra được: $DE = \frac{1}{2}.BC$.

8.14.

a) ΔABD và ΔEBD có $ABD = EBD$ (giả thiết); $BE = BA$; BD là cạnh chung

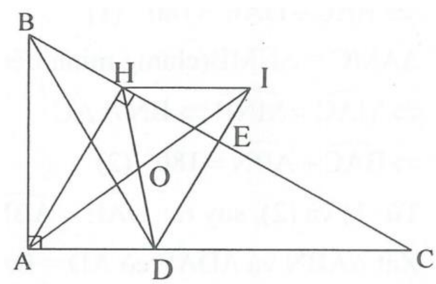
$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta EBD(\text{c.g.c})$

$\Rightarrow AD = ED$.

b) $\Delta ABD = \Delta EBD \Rightarrow BAD = BED$

$\Rightarrow BED = 90° \Rightarrow DE \perp BC$,

Mà $AH \perp BC \Rightarrow AH // DE$.



c) $AH//DE \Rightarrow AHO = IDO$ (cặp góc so le trong).

ΔAHO và ΔIDO có $AHO = IDO$; $OH = OD$; $AH = ID$

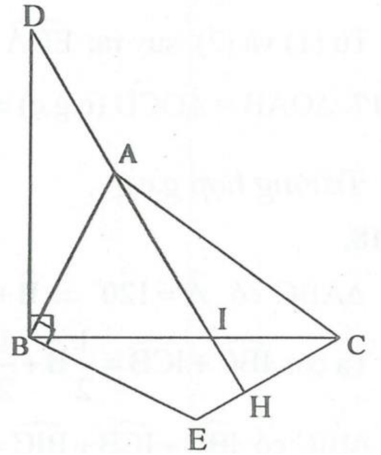
$\Rightarrow \Delta AHO = \Delta IDO(\text{c.g.c}) \Rightarrow AOH = IOD.$

Mà $AOH + AOD = 180°$ (kề bù) $\Rightarrow IOD + AOD = 180°$.

Suy ra *A*, *O*, *I* thẳng hàng.

8.15.

a) $CBD = ABE\,(= 90°)$



$\Rightarrow CBA + ABD = CBA + CBE$

$\Rightarrow ABD = CBE$

Xét ΔABD và ΔEBC có $AB = EB$; $ABD = CBE$

(cùng phụ với góc *ABC*); $BD = BC$

$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta EBC(\text{c.g.c})$

$\Rightarrow AD = CE$.

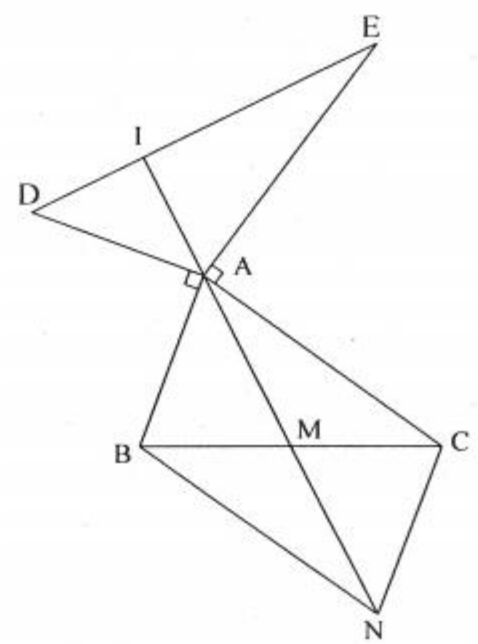
b) Gọi *H*, *I* là giao điểm của đường thẳng *AD* với *CE* và *BC*. $\Delta ABD = \Delta EBC$ suy ra: $BDA = BCE$

mà $BDA + BIA = 90°$

$\Rightarrow BCE + CIH = 90° \Rightarrow \Delta CIH$ vuông, hay $AD \perp CE$.

8.16.

a) ΔAMC và ΔNMB có $AM = MN$; $AMC = NMB$; $BM = CM$



$\Rightarrow \Delta AMC = \Delta NMB(c.g.c)$

$\Rightarrow AC = BN$ mà $AC = AE$

$\Rightarrow BN = AE$.

b) Ta có $BAD = 90°$; $CAE = 90°$

$\Rightarrow BAC + DAE = 180° \quad (1)$

$\Delta AMC = \Delta NMB$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow MAC = MNB \Rightarrow BN//AC$

$\Rightarrow BAC + ABN = 180° \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $DAE = ABN$.

Xét ΔABN và ΔDAE có $AD = BA$; $DAE = ABN$; $AE = BN$

$\Rightarrow \Delta ABN = \Delta DAE(\text{c.g.c})$

$\Rightarrow AN = DE$; mà $AN = 2.AM \Rightarrow AM = \dfrac{DE}{2}$.

c) Gọi I là giao điểm của đường thẳng AM và DE.

$\Delta ABN = \Delta DAE$ (chứng minh trên) $\Rightarrow EDA = NAB \quad (1)$

Mà $DAB = 90° \Rightarrow DAI + NAB = 90° \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $EDA + DAI = 90°$ hay $AM \perp DE$.

8.17. $\Delta OAB = \Delta OCD(\text{c.g.c}) \Rightarrow AB = CD$.

• ***Trường hợp g.c.g***

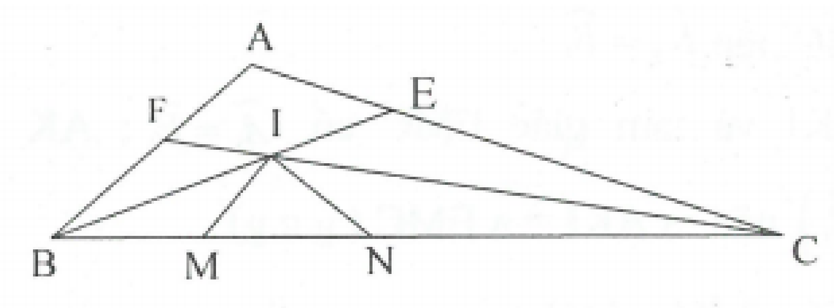
8.18.

a) ΔABC có $A = 120° \Rightarrow B + C = 60°$.

Ta có: $IBC + ICB = \dfrac{1}{2}B + \dfrac{1}{2}C = \dfrac{1}{2}.60° = 30°$.

ΔBIC có $IBC + ICB + BIC = 180° \Rightarrow 30° + BIC = 180° \Rightarrow BIC = 150°$.

Từ đó $MIN = BIC - BIM - CIN \Rightarrow MIN = 150° - 30° - 30° = 90°$.



b) $BIC = 150° \Rightarrow BIF = CIE = 30°$.

ΔCIN và ΔCIE có $ECI = NCI$; CI là cạnh chung; $EIC = NIC\,(= 30°)$

$\Rightarrow \Delta CIN = \Delta CIE(\text{g.c.g}) \Rightarrow CE = CN \quad (1)$

Chứng minh tương tự ta có: $\Delta BFI = \Delta BMI(\text{g.c.g}) \Rightarrow BM = BF \quad (2)$

Từ (1) và (2), ta có: $CE + BF = CN + BM < BC$.

8.19. ΔABC có $B + C = 60° \Rightarrow BAC = 120°$.

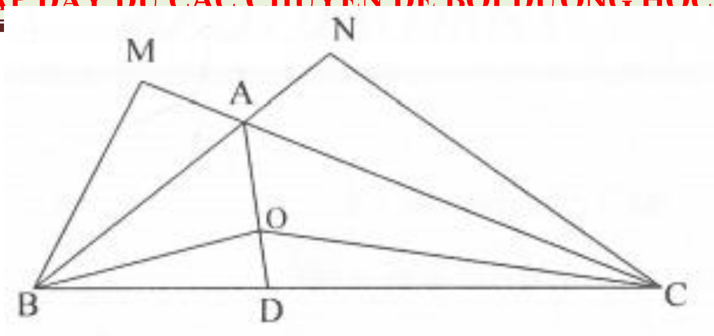
Ta có AD là tia phân giác $BAC \Rightarrow BAD = CAD = \dfrac{1}{2}BAC = 60°$.

ΔABO và ΔABM có $BAO = BAM\,(= 60°)$; AB chung; $ABM = ABO$

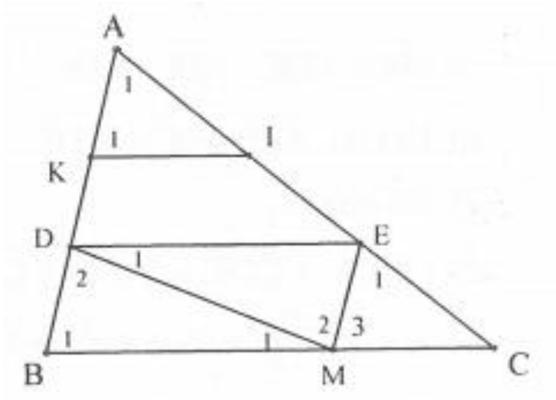
$\Rightarrow \Delta ABO = \Delta ABM(\text{g.c.g}) \Rightarrow AM = AO \quad (1)$

Chứng minh tương tự, ta có: $\Delta ACO = \Delta ACN(\text{g.c.g}) \Rightarrow AN = AO \quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra: $AM = AN$.



8.20.



a) Kẻ $EM//AB\left(M\in BC\right)$

Tam giác DEM và tam giác MBD có $D_1=M_1$; DM chung;

$D_2=M_2$

nên $\Delta DEM=\Delta MBD\left(\text{g.c.g}\right)$ suy ra $BD=ME$; $DE=BM$.

Ta có $AB//EM$ nên $A_1=E_1$; $B_1=M_3$

Lại có $KI//BC$ nên $K_1=B_1$.

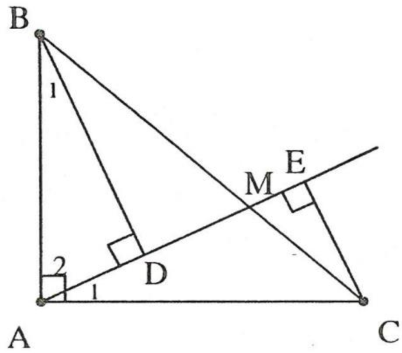
- Tam giac AKI và tam giác EMC có $A_1=E_1$; $AK=EM\left(=BD\right)$; $M_3=K_1\left(=B_1\right)$

Nên $\Delta AKI=\Delta EMC\left(\text{g.c.g}\right)$

Suy ra $AI=EC$ và $KI=MC$.

b) Ta có $KI=MC$; $DE=BM$ suy ra $KI+DE=MC+BM=BC=5\text{cm}$.

8.21.



a) Xét ΔABD và ΔCAE có $BDA=AEC=90°$; $AB=AC$ (giả thiết); $B_1=C_1$ (cùng phụ với A_2)

do đó $\Delta ABD=\Delta CAE$ (cạnh huyền – góc nhọn).

b) $\Delta ABD=\Delta CAE$ nên $BD=AE$; $AD=CE$ do đó $BD-CE=AE-AD$. Vậy $BD-CE=DE$.

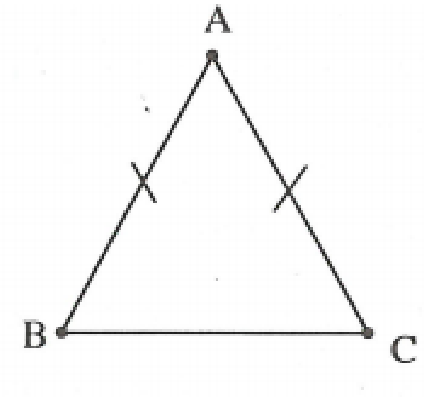
**** Nhận xét.*** Để chứng minh một đoạn thẳng bằng tổng hay một hiệu hai đoạn thẳng ta thường biến đổi đoạn thẳng đó thành hai đoạn cùng nằm trên một đường thẳng và sử dụng cộng, trừ đoạn thẳng.

Chương II
TAM GIÁC
Chuyên đề 9. TAM GIÁC CÂN

A. Kiến thức cần nhớ

1. Tam giác cân

a) Định nghĩa. Tam giác cân là tam giác có hai cạnh bằng nhau.



ΔABC cân tại $A \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta ABC \\ AB = AC \end{cases}$

b) Tính chất. Trong tam giác cân, hai góc ở đáy bằng nhau.

ΔABC cân tại $A \Rightarrow B = C$.

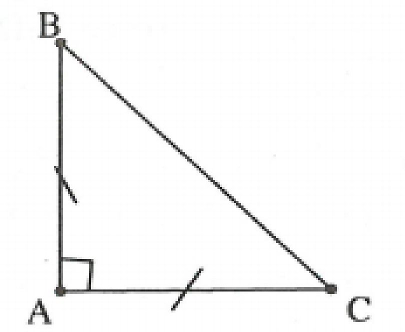
c) Dấu hiệu nhận biết

• Theo định nghĩa.

• Nếu một tam giác có hai góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

2. Tam giác vuông cân

a) Định nghĩa. Tam giác vuông cân là tam giác vuông có hai cạnh góc vuông bằng nhau.



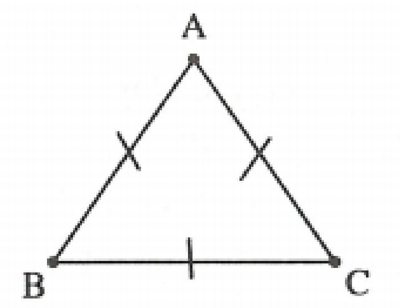
ΔABC vuông cân tại $A \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta ABC \\ A = 90^\circ \\ AB = AC \end{cases}$

b) Tính chất. Mỗi góc nhọn của tam giác vuông cân bằng 45°.

$B = C = 45^\circ$.

3. Tam giác đều

a) Định nghĩa. Tam giác đều là tam giác có ba cạnh bằng nhau.



ΔABC đều $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta ABC \\ AB = BC = CA \end{cases}$

b) Tính chất. Trong tam giác đều, mỗi góc bằng 60°.

$A = B = C = 60^\circ$.

c) Dấu hiệu nhận biết

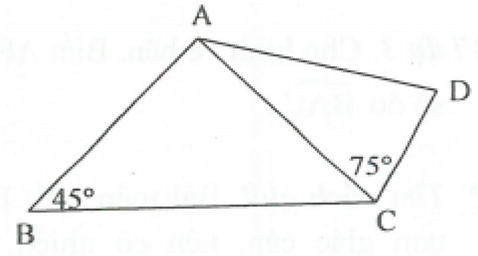
• Theo định nghĩa.

• Nếu một tam giác có ba góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác đều.

• Nếu một tam giác cân có một góc bằng 60° thì tam giác đó là tam giác đều.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình vẽ bên. Biết rằng $AB = AC = AD$; $ABC = 45^\circ$; $ACD = 75^\circ$. Tính số đo góc BAD.



Giải

* *Tìm cách giải.* Chúng ta lưu ý rằng: trong một tam giác cân, nếu biết một góc thì tính được hai góc còn lại. Chẳng hạn: nếu ΔABC cân tại A thì $A = 180° - 2.B = 180° - 2.C$ hoặc $B = C = \dfrac{180° - A}{2}$.

* *Trình bày lời giải.*

ΔABC cân tại A nên $BAC = 180° - 2ABC = 90°$.

ΔACD cân tại A nên $CAD = 180° - 2ACD = 30°$.

Ta có $BAD = BAC + CAD = 120°$.

Ví dụ 2:

a) Một tam giác cân có một góc là $80°$. Số đo của hai góc còn lại là bao nhiêu?

b) Một tam giác cân có một góc là $100°$. Số đo của hai góc còn lại là bao nhiêu?

Giải

a) Nếu góc ở đỉnh tam giác cân là $80°$, thì mỗi góc ở đáy tam giác cân là $\dfrac{180° - 80°}{2} = 50°$.

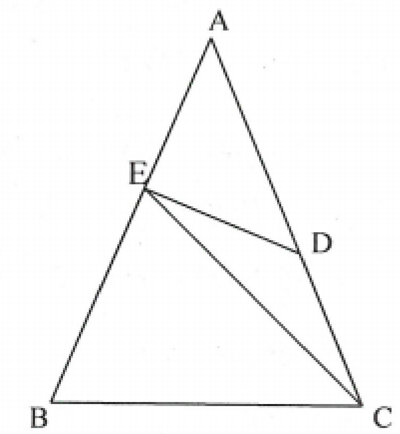
- Nếu mỗi góc ở đáy tam giác cân là $80°$, thì góc ở đỉnh tam giác cân là $180° - 80° - 80° = 20°$.

b) Nếu góc ở đáy tam giác cân là $100°$, thì tổng hai góc ở đáy là $100° + 100° = 200° > 180°$ (không xảy ra).

Do đó góc ở đỉnh tam giác cân là $100°$, thì mỗi góc ở đáy tam giác cân là $\dfrac{180° - 100°}{2} = 40°$.

**** Nhận xét.*** Bài toán này dễ bỏ sót các trường hợp. Khi đề bài chưa cho cụ thể số đo đó là số đo góc ở đỉnh hay ở đáy, ta cần xét hai trường hợp.

Ví dụ 3: Cho hình vẽ bên. Biết $AB = AC$; $AE = DE = CD$ và $BC = CE$. Tính số đo BAC.



Giải

* *Tìm cách giải.* Bài toán xuất hiện nhiều tam giác cân, nên có nhiều góc bằng nhau. Để lời giải giản đơn, không bị nhầm lẫn, chúng ta nên đặt góc nhỏ nhất trong hình vẽ là *x*. Sau đó biểu diễn các góc khác theo *x*. Trong quá trình giải, lưu ý tính chất góc của tam giác cân và tính chất góc ngoài của tam giác.

* *Trình bày lời giải.*

ΔDEC cân tại D. Đặt $DCE = DEC = x$.

ΔDEC có $ADE = DCE + DEC = 2x$ (góc ngoài tam giác).

ΔAED cân tại E nên $EAD = ADE = 2x$.

ΔAEC có: $BEC = CAE + ECA = 3x$ (góc ngoài tam giác)

ΔBCE cân tại C nên $B = BEC = 3x$.

ΔABC cân tại A nên $BCA = B = 3x$.

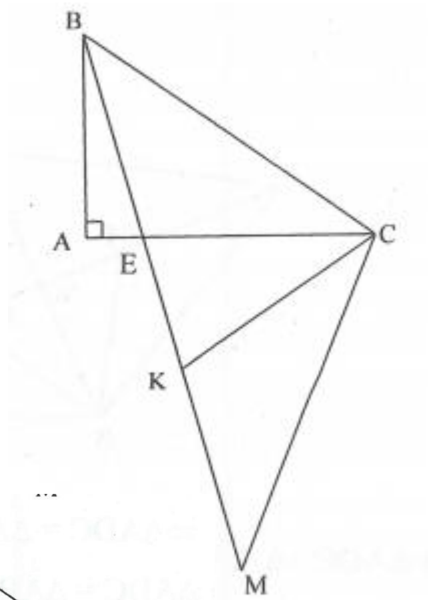
ΔABC có $A + B + C = 180°$.

Suy ra $2x + 3x + 3x = 180° \Leftrightarrow x = 22,5°$.

Do đó: $BAC = 2.22,5° = 45°$.

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên AC lấy điểm E sao cho $EBC = 2.ABE$. Trên tia BE lấy điểm M sao cho $EM = BC$. So sánh MBC và BMC.

Giải



*** *Cách 1.*** Trên tia BE lấy điểm K sao cho $BK = BC \Rightarrow \Delta BKC$ cân tại B

$$\Rightarrow BCK = BKC = \frac{180° - KBC}{2} = 90° - ABE = AEB$$

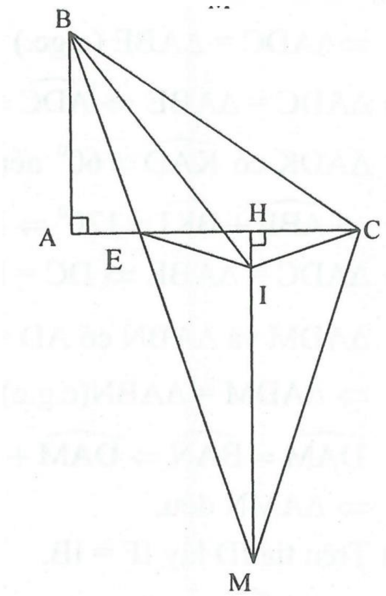
$\Rightarrow \Delta CEK$ cân tại C $\Rightarrow CE = CK$;

$CEK = CKE \Rightarrow CEB = CKM$

Mà $BK = EM \Rightarrow BE = KM$

$\Rightarrow \Delta CEB = \Delta CKM\,(\text{c.g.c})$, suy ra $MBC = BMC$.

*** *Cách 2.*** Kẻ $MH \perp AC\,(H \in AC)$



Gọi MH cắt tia phân giác CBE tại I.

Ta có: $ABE = EBI = IBC\left(= \frac{1}{2}EBC\right)$

mà $ABE = EMI$ (so le trong) $\Rightarrow EMI = CBI\,(= ABE)$.

ΔBIM có $IBM = IMB \Rightarrow \Delta BIM$ cân $\Rightarrow IB = IM$.

Từ đó suy ra $\Delta IBC = \Delta IME\,(\text{c.g.c})$

$\Rightarrow IE = IC \Rightarrow \Delta IEC$ cân tại I, mà $IH \perp EC$

nên dễ có $\Delta EMH = \Delta CMH\,(\text{c.g.c})$

$\Rightarrow EM = CM \Rightarrow BC = CM$

$\Rightarrow \Delta BCM$ cân tại C suy ra $MBC = BMC$.

Ví dụ 5: Cho tam giác *ABC* có ba góc nhọn $(AB < AC)$. Vẽ về phía ngoài tam giác *ABC* các tam giác đều *ABD* và *ACE*. Gọi *I* là giao điểm của *CD* và *BE*, *K* là giao điểm của *AB* và *DC*.

a) Chứng minh rằng: $\Delta ADC = \Delta ABE$.

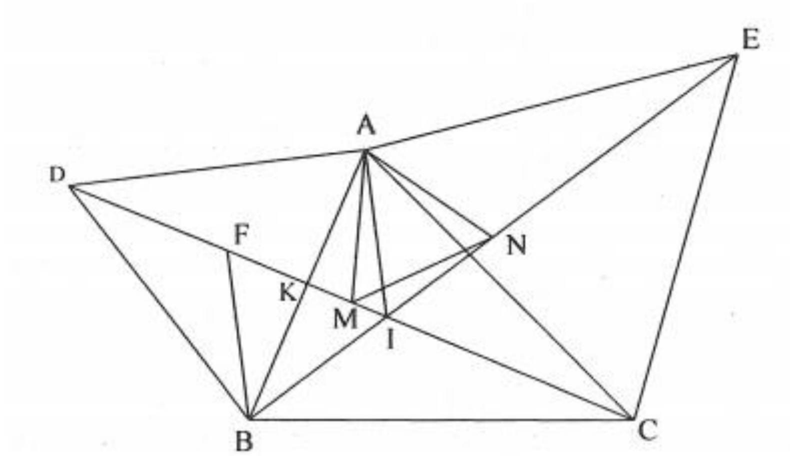
b) Chứng minh rằng: $DIB = 60°$.

c) Gọi *M* và *N* lần lượt là trung điểm của *CD* và *BE*. Chứng minh rằng ΔAMN đều.

d) Chứng minh rằng $IA + IB = ID$.

e) Chứng minh rằng *IA* là tia phân giác của góc *DIE*.

Giải



a) ΔADC và ΔABE có $AD = AB$; $DAC = BAE = \left(= 60° + BAC\right)$; $AC = AE$

$\Rightarrow \Delta ADC = \Delta ABE\,(\text{c.g.c})$.

b) $\Delta ADC = \Delta ABE \Rightarrow ADC = ABE$.

ΔADK có $KAD = 60°$ nên $ADC + AKD = 120°$

$\Rightarrow ABE + BKI = 120° \Rightarrow BIK = 60°$ hay $DIB = 60°$.

c) $\Delta ADC = \Delta ABE \Rightarrow DC = BE \Rightarrow DM = BN$.

ΔADM và ΔABN có $AD = AB$; $ADK = ABN$; $DM = BN$

$\Rightarrow \Delta ADM = \Delta ABN\,(\text{c.g.c}) \Rightarrow AM = AN \Rightarrow \Delta AMN$ cân.

$DAM = BAN \Rightarrow DAM + MAB = MAB + BAN \Rightarrow MAN = 60°$

$\Rightarrow \Delta AMN$ đều.

d) Trên tia *ID* lấy $IF = IB$.

Ta có $BIF = 60°$ nên ΔBIF là tam giác đều.

Xét ΔBFD và ΔBIA có $BD = BA$; $DBF = ABI\left(= 60° - FBA\right)$; $BF = BI$

Suy ra $\Delta BFD = \Delta BIA(\text{c.g.c}) \Rightarrow DF = IA$.

Do đó $IA + IB = DF + FI = ID$.

e) ΔBIF đều nên $BFI = 60° \Rightarrow BFD = 120° \Rightarrow BIA = 120°$.

Mà $BID = 60°$ nên $DIA = 60° \Rightarrow AIE = 60°$. Do đó $AID = AIE\left(= 60°\right)$

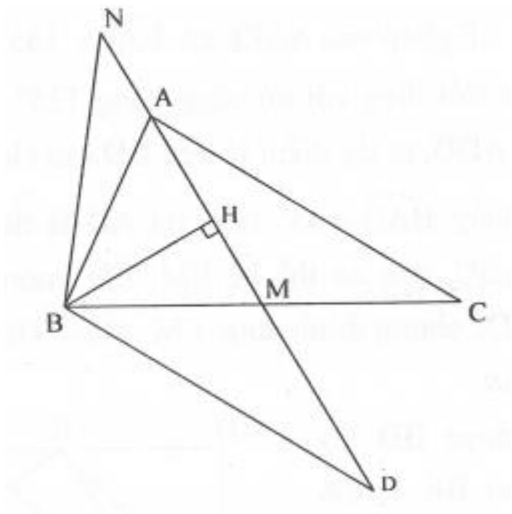
hay *IA* là tia phân giác của góc *DIE*.

Ví dụ 6: Cho tam giác *ABC* nhọn $\left(AB < AC\right)$. Gọi *M* là trung điểm của đoạn thẳng *BC*. Gọi *H* là hình chiếu vuông góc của *B* trên đoạn thẳng *AM*. Trên tia đối tia *AM* lấy điểm *N* sao cho $AN = 2.MH$. Chứng minh $BN = AC$.

(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên ĐHKHTN Hà Nội, năm 2015)

Giải

* *Tìm cách giải.* Bài toán chưa thể ghép *BN* và *AC* vào hai tam giác bằng nhau trực tiếp được. Mặt khác $MB = MC$, do vậy rất tự nhiên chúng ta nghĩ tới việc trên tia đối của tia *MA* lấy $MD = MA$ bởi đây là giả thiết quen thuộc, để suy ra $AC = BD$. Sau đó chỉ việc chứng minh $BD = BN$.



* *Trình bày lời giải.*

Trên tia đối của tia *MA* lấy $MD = MA$.

ΔACM và ΔDBM có $MA = MD$; $AMC = DMB$; $BM = CM$

Suy ra $\Delta ACM = \Delta DBM\,(\text{c.g.c})$

$\Rightarrow AC = BD$.

Ta có: $HN = HA + AN = HA + 2.HM = AM + HM$

$HD = MD + HM = AM + HM \Rightarrow HN = HD$.

ΔBDN có $BH \perp DN$; $HD = HN \Rightarrow \Delta BDN$ cân tại *B* $\Rightarrow BN = BD$.

Vậy $BN = AC$.

Ví dụ 7: Cho tam giác *ABC* vuông cân tại *A*. Lấy điểm *D* thuộc nửa mặt phẳng bờ *AB* không chứa *C* sao cho tam giác *DAB* vuông cân tại *D*; điểm *E* (khác *A*) không thuộc đoạn *AD*. Đường thẳng qua *E*, vuông góc với *BE* cắt *AC* tại *F*. Chứng minh rằng $EF = EB$.

Giải

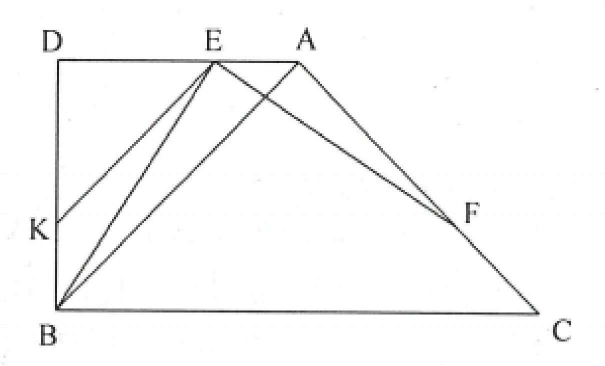
* *Tìm cách giải.* Để chứng minh $EF = EB$, thông thường chúng ta nghĩ tới việc ghép vào hai tam giác, sau đó chứng minh hai tam giác bằng nhau. Tuy nhiên, với hình vẽ chúng ta chưa thể ghép được. Phân tích đề bài, chúng ta có nhiều góc vuông, góc $45°$ cũng như cặp cạnh bằng nhau $DA = DB$, $AB = AC$. Với sự phân tích trên, chúng ta nghĩ tới việc kẻ thêm đường phụ nhằm kết hợp được giả thiết với nhau cũng như ghép *EF* và *EB* là hai cạnh tương ứng của hai tam giác bằng nhau. Từ đó chúng ta có hai hướng giải sau:

• *Cách 1.* Có thể *EF* ghép vào ΔAEF có $EAF = 135°$ nên cần ghép *EB* vào tam giác có góc đối diện với nó cũng bằng $135°$. Khai thác yếu tố tam giác vuông cân *ADB*, ta lấy điểm *K* trên *BD* sao cho ΔDEK vuông cân.

• *Cách 2.* Nhận thấy $BAD = 45°$, tia *AD* là tia phân giác góc ngoài đỉnh *A* của ΔABC, nên có thể kẻ *EM*, *EN* vuông góc với các đường thẳng *AC*, *AB*. Dễ chứng minh được $EM = EN$. Từ đó cũng có lời giải.

* *Trình bày lời giải.*

- *Cách 1.* Trên đoạn *BD* lấy điểm *K* sao cho $BK = EA$ (1).



Vì tam giác *DAB* vuông cân tại *D* nên ΔDKE vuông cân tại *D*, suy ra $DKE = 45°$, do đó: $BKE = 180° - 45° = 135°$;

Mà $EAF = 45° + 90° = 135°$,

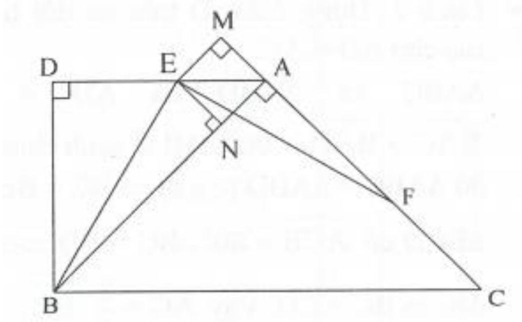
Nên $BKE = EAF$ (2)

Mặt khác, $KBE = 90° - DEB = AEF$ (3) (do $BEF = 90°$)

Từ (1), (2), (3) suy ra: $\Delta BKE = \Delta EAF$ (g.c.g)

Từ đó $EF = EB$.

- *Cách 2.* Vẽ *EM*, *EN* vuông góc với các đường thẳng *AC*, *AB*.



ΔAME và ΔANE có: $AME = ANE\,(= 90°)$; $MAE = NAE\,(= 45°)$;

AE là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta AME = \Delta ANE$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow EM = EN$.

Mặt khác, ΔAME và ΔANE là tam giác vuông cân, suy ra $MEN = 90°$.

ΔBNE và ΔFME có: $ENB = EMF\,(= 90°)$; $BEN = FEM\,(= 90° - FEN)$; $EN = EM$

$\Rightarrow \Delta BNE = \Delta FME$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow EF = EB$.

Ví dụ 8: Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*, có $ABC = 30°$. Chứng minh rằng $AC = \dfrac{1}{2}BC$.

Giải

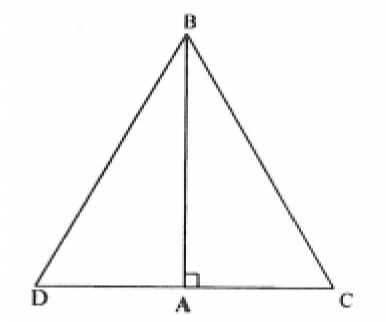
* *Tìm cách giải*. Từ đề bài, suy ra được. Gợi cho chúng ta liên tưởng tới góc của tam giác đều. Phân tích kết luận $AC = \frac{1}{2}BC$, dễ dàng cho chúng ta hai hướng suy luận:

• *Hướng 1*. Tạo ra một đoạn thẳng bằng $2.AC$, sau đó chứng minh đoạn thẳng ấy bằng *BC*. Chú ý $ACB = 60°$, nên chúng ta dựng điểm *D* trên tia *CA* sao cho $CD = 2.AC$, sau đó chứng minh $BC = CD$. Bài toán được giải quyết.

• Hướng 2. Tạo ra một đoạn thẳng bằng $\frac{1}{2}.BC$, sau đó chứng minh đoạn thẳng ấy bằng *AC*. Chú ý $ACB = 60°$, nên chúng ta gọi trung điểm *M* của *BC*. Sau đó chứng minh $CM = AC$. Bài toán được giải quyết.

* *Trình bày lời giải.*

• *Cách 1*. Dựng điểm *D* trên tia đối tia *AC* sao cho $AD = AC$.

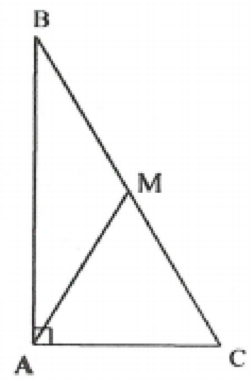


ΔABC và ΔABD có $AD = AC$; $BAC = BAD = 90°$; *AB* là cạnh chung,

do đó $\Delta ABC = \Delta ABD(\text{c.g.c}) \Rightarrow BC = BD$.

ΔBCD có $ACB = 60°$, $BC = BD \Rightarrow \Delta BCD$ đều $\Rightarrow BC = CD$. Vậy $AC = \frac{1}{2}.BC$.

• Cách 2. Gọi *M* trung điểm của *BC*.



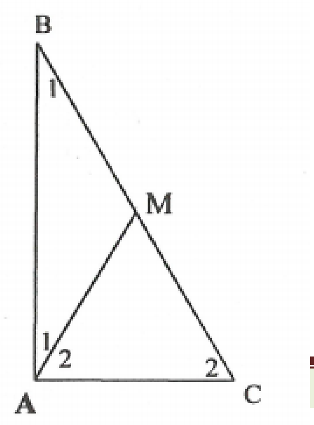
ΔABC vuông tại *A* có *M* là trung điểm của *BC*, suy ra: $MA = MB = MC$ (theo ***ví dụ 10***, chuyên đề 8).

ΔMAC có $MA = MC$, $ACB = 60°$ nên ΔMAC là tam giác đều, suy ra $AC = MC$. Vậy $AC = \frac{1}{2}BC$.

**** Nhận xét.*** Đây là một tính chất thú vị về một tam giác vuông đặc biệt. Tính chất được phát biểu như sau: Trong một tam giác vuông có một góc bằng $30°$, thì cạnh đối diện với góc $30°$ bằng nửa cạnh huyền.

Ví dụ 9: Cho tam giác *ABC* có *M* là trung điểm cạnh *BC*. Biết rằng $AM = \frac{1}{2}.BC$, chứng minh rằng tam giác *ABC* vuông tại *A*.

Giải



ΔAMC có $AM = CM$, nên ΔAMC cân tại *M* $\Rightarrow A_2 = C_2$.

ΔAMB có $AM = BM$, nên ΔAMB cân tại *M* $\Rightarrow A_1 = B_1$.

ΔABC có $A + B_2 + C_1 = 180°$

$\Rightarrow A + A_2 + A_1 = 180^\circ \Rightarrow 2A = 180^\circ$

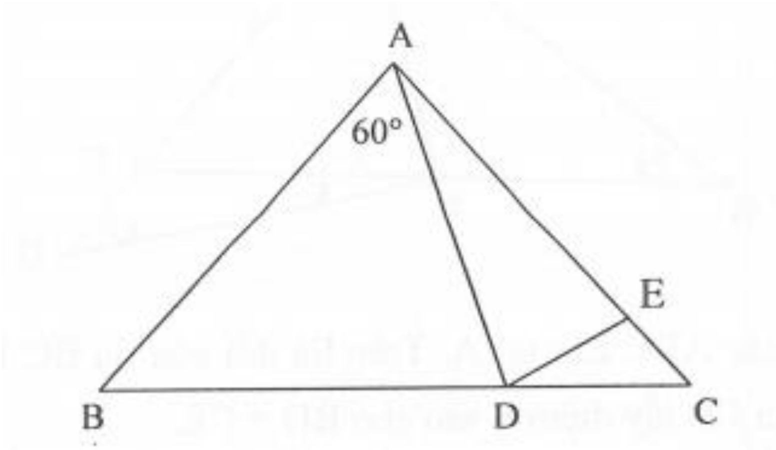
$\Rightarrow A = 90^\circ$.

Vậy tam giác *ABC* vuông tại *A*.

**** Nhận xét.*** Đây là một tính chất thú vị để nhận biết tam giác vuông.

C. Bài tập vận dụng

9.1. Cho hình vẽ bên. Biết rằng $AB = AC$; $AD = AE$ và $BAD = 60^\circ$. Tính số đo góc CDE.



9.2. Tam giác *ABC* có $B = 80^\circ$ và điểm *D* trên cạnh *AC*. Lấy *E* thuộc *AB*, *F* thuộc *BC* sao cho $AE = AD$ và $CF = CD$. Tính số đo góc EDF.

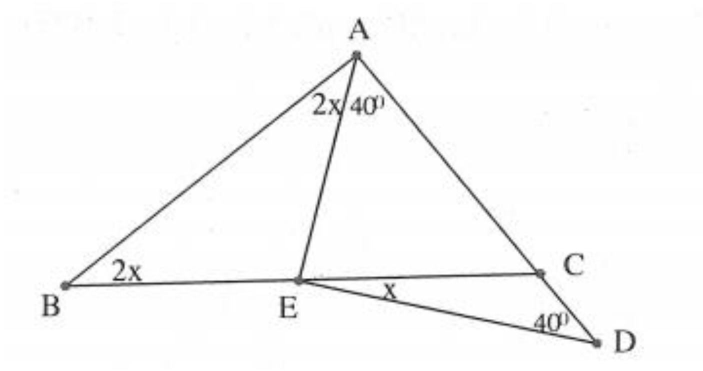
9.3. Cho tam giác *ABC* vuông tại $B(AB > BC)$. Đường trung trực của đoạn thẳng *AC* cắt *AC* và *AB* lần lượt tại *D* và *E*. Biết rằng $\dfrac{DCE}{5} = \dfrac{BCE}{2}$. Tính số đo ACB.

9.4. Cho tam giác *ABC* có đường phân giác góc *A* cắt *BC* tại *D*. Biết rằng $BAC = 114^\circ$; $AB + BD = AC$. Tính số đo góc ACB.

9.5. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*. Trên cạnh *BC* lấy hai điểm *M* và *N* sao cho $BM = BA$; $CN = CA$. Tính góc *MAN*.

9.6. Cho tam giác *ABC* nhọn. Lấy *D* thuộc *AC* sao cho $AB = BD$, lấy điểm *E* thuộc *AB* sao cho $AC = CE$. Gọi *F* là giao điểm của *BD* và *CE*. Biết $BFC = 150^\circ$. Tính số đo góc BAC.

9.7. Tìm *x* trong hình vẽ sau:



9.8. Cho tam giác *ABC* cân tại *A*. Trên tia đối của tia *BC* lấy điểm *D*, trên tia đối của tia *CB* lấy điểm *E* sao cho $BD = CE$.

a) Chứng minh rằng tam giác *ADE* là tam giác cân.

b) Kẻ $BH \perp AD\left(H \in AD\right)$, kẻ $CK \perp AE\left(K \in AE\right)$. Chứng minh rằng $BH = CK$.

c) Gọi *O* là giao điểm của *BH* và *CK*. Tam giác *OBC* là tam giác gì? Vì sao?

9.9. Cho tam giác *ABC* có $B = 2.C$. Kẻ *AH* vuông góc *BC* (*H* thuộc *BC*). Trên tia đối *BA* lấy $BE = BH$. Đường thẳng *EH* cắt *AC* tại *F*. Chứng minh:

a) $FH = FA = FC$.

b) $AE = HC$.

9.10. Cho tam giác $ABC\left(BAC < 90°\right)$, đường cao *AH*. Kẻ *HI* vuông góc với *AB*, kẻ *HK* vuông góc với *AC*. Gọi *E*; *F* lần lượt là điểm sao cho *I*; *K* lần lượt là trung điểm của *HE* và *HF*. Đường thẳng *EF* cắt *AB*; *AC* lần lượt tại *M* và *N*. Chứng minh rằng:

a) $AE = AF$;

b) *HA* là phân giác của MHN.

9.11. Cho đoạn thẳng *AB* và điểm *C* nằm giữa *A* và *B*. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ *AB* vẽ hai tam giác đều *ACD* và *BCE*. Gọi *M* và *N* lần lượt là trung điểm của *AE* và *BD*. Chứng minh rằng:

a) $AE = BD$.

b) $\Delta CME = \Delta CNB$.

c) Tam giác *MNC* là tam giác đều.

9.12. Cho tam giác *LMN* có 3 góc đều nhọn. Dựng ra phía ngoài tam giác ấy ba tam giác đều *LMA*; *MNB* và *NLC*. Chứng minh rằng: $LB = MC = NA$.

9.13. Cho góc $xOz = 120°$. *Oy* là tia phân giác xOz; *Ot* là tia phân giác của xOy. *M* là điểm miền trong góc *yOz*. Vẽ *MA* vuông góc *Ox*, *MB* vuông góc *Oy*, *MC* vuông góc *Ot*. Chứng minh rằng: $OC = MA - MB$.

9.14. Cho tam giác *ABC* vuông cân tại *A*. Trên cạnh *AB* lấy điểm *D*. Trên cạnh *AC* lấy điểm *E* sao cho $AD = AE$. Các đường thẳng vuông góc kẻ từ *A* và *E* với *CD* cắt *BC* ở *G* và *H*. Đường thẳng *EH* và đường thẳng *AB* cắt nhau ở *M*. Đường thẳng kẻ từ *A* song song với *BC* cắt *MH* ở *I*. Chứng minh rằng:

a) $\Delta ACD = \Delta AME$;

b) $\Delta AGB = \Delta MIA$;

c) $BG = GH$.

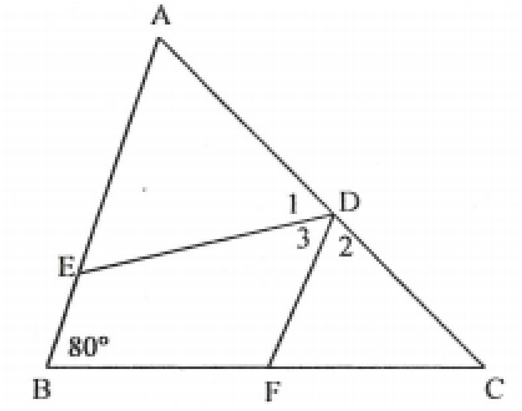
9.15. Cho tam giác *ABC* với $ABC = ACB = 36°$. Trên tia phân giác của góc *ABC* lấy điểm *N* sao cho $BCN = 12°$. Hãy so sánh độ dài của *CN* và *CA*.

9.16. Cho ΔABC có các tia phân giác trong của góc *B* và *C* cắt nhau tại *I*. Qua *I* kẻ đường thẳng song song với *BC* cắt *AB*, *AC* tại *D* và *E*. Chứng minh $BD + CE = DE$.

9.17. Cho ΔABC có *M* là trung điểm *BC*. Biết rằng *AM* là phân giác góc *BAC*. Chứng minh rằng: ΔABC cân.

9.18. Cho *M* là một điểm bất kỳ nằm trong tam giác đều *ABC*. Chứng minh rằng từ ba đoạn *MA, MB, MC* ta có thể dựng được một tam giác.

Hướng dẫn giải



9.1. $\Delta ABC\left(AB = AC\right)$ cân. Đặt $B = C = \alpha$

ΔABD có $ADC = B + BAD = \alpha + 60°$.

$\Delta ADE\left(AD = AE\right)$ cân nên $ADE = AED$

$\Rightarrow AED + CDE = ADE + CDE = ADC = \alpha + 60°$

ΔCED có $AED = C + CDE$.

Từ đó suy ra:

$C + CDE + CDE = AED + CDE = ADC = \alpha + 60°$

$\Rightarrow \alpha + 2.CDE = \alpha + 60° \Rightarrow CDE = 30°$.

9.2. ΔABC có $A + B + C = 180°$ mà $B = 80° \Rightarrow A + C = 100°$.

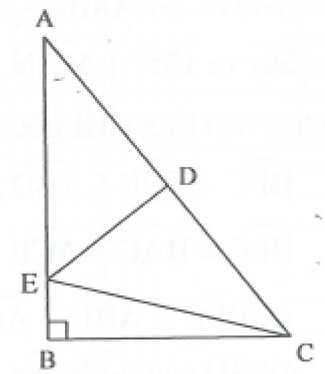
ΔAED cân tại $A \Rightarrow D_1 = \dfrac{180° - A}{2}$.

ΔCDF cân tại $C \Rightarrow D_2 = \dfrac{180° - C}{2}$.

Suy ra: $D_1 + D_2 = \dfrac{360° - A - C}{2} = 130°$.

Do vậy $D_3 = 50° \Rightarrow EDF = 50°$.

9.3. ΔAEC có ED là đường trung trực của AC nên dễ dàng chứng minh được ΔAEC cân tại E



$\Rightarrow DCE = BAC$ mà $BAC + ACB = 90° \Rightarrow DCE + ACB = 90°$

Đặt $\dfrac{DCE}{5} = \dfrac{BCE}{2} = x°$

$\Rightarrow DCE = 5x°$; $BCE = 2x°$

Suy ra: $5x° + 5x° + 2x° = 90° \Rightarrow x° = 7,5°$

Do vậy $DCE = 5.7,5° = 37,5°$; $BCE = 2.7,5° = 15°$

$\Rightarrow ACB = 37,5° + 15° = 52,5°$.

9.4. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $AM = AB$

Từ giả thiết suy ra $MC = BD$ (1)

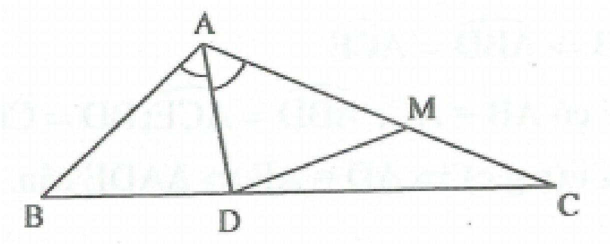
ΔABD và ΔAMD có $AB = AM$; $BAD = CAD$; AD là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta AMD(\text{c.g.c}) \Rightarrow BD = MD$; $ABD = AMD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MD = MC \Rightarrow \Delta MCD$ cân

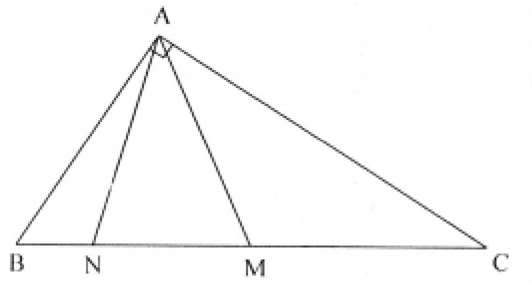
$\Rightarrow AMD = 2.ACB$ (góc ngoài của tam giác) $\Rightarrow ABC = 2.ACB$

Mà $ABC+ACB=180°-114°=66°$ nên $ACB=66°:3=22°$.



9.5. $\Delta ABM\left(BA=BM\right)$ cân tại B $\Rightarrow AMB=\dfrac{180°-B}{2}$.

$\Delta CAN\left(CA=CN\right)$ cân tại C $\Rightarrow ANC=\dfrac{180°-C}{2}$. Suy ra:

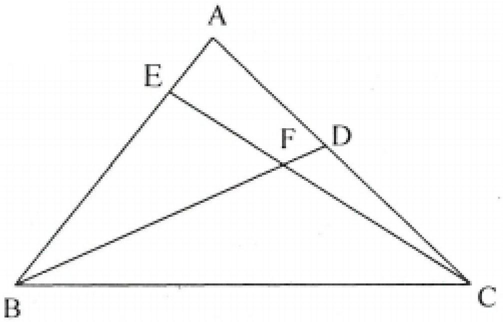


$AMB+ANC=\dfrac{180°-B+180°-C}{2}=\dfrac{360°-90°}{2}=135°$.

ΔAMN có $AMB+ANC+MAN=180°$.

Suy ra $135°+MAN=180°\Rightarrow MAN=45°$.

9.6. Theo tính chất góc ngoài tam giác ta có:



$BFC=BEF+ABD$;

$BEF=BAC+ACE$

$\Rightarrow BFC=ABD+ACE+BAC$ (1)

ΔABD cân tại B nên $ABD=180°-2.BAC$.

ΔACE cân tại C nên $ACE=180°-2.BAC$

Thay vào (1) ta có: $BFC=180°-2BAC+180°-2BAC+BAC$

Suy ra: $BAC=70°$.

9.7. ΔAED có $EAD=EDA=40°$, nên nó là tam giác cân.

Suy ra $AED=180°-2.40°=100°$.

ΔAEB cân tại E, theo tính chất góc ngoài tam giác: $AEC=2.B=4x$.

Suy ra $4x+x=100°$, do đó $x=20°$.

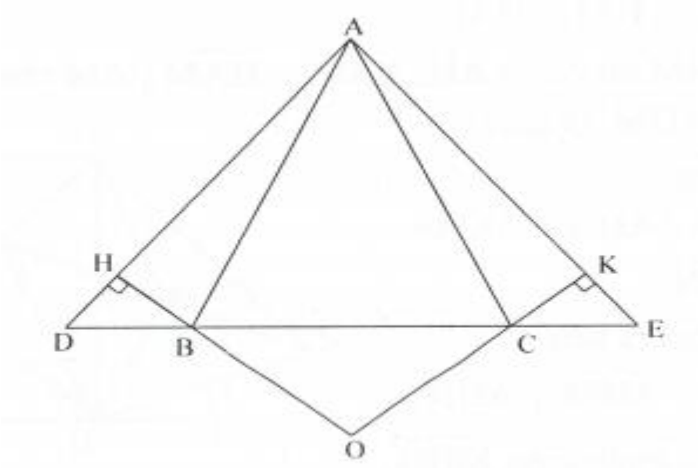
9.8.

a) $ABD+ABC=180°$; $ACE+ACB=180°$ (cặp góc kề bù)

mà $ABC=ACB\Rightarrow ABD=ACE$

ΔABD và ΔACE có $AB=AC$; $ABD=ACE$; $BD=CE$

$\Rightarrow \Delta ABD=\Delta ACE\left(\text{c.g.c}\right)\Rightarrow AD=AE\Rightarrow \Delta ADE$ cân.

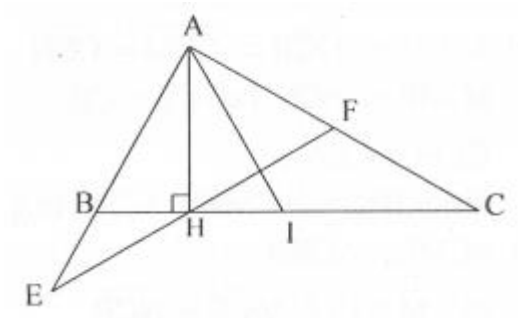


b) ΔBHD và ΔCKE có $BHD = CKE$; $ADB = AEC$; $BD = CE$

$\Rightarrow \Delta BHD = \Delta CKE \Rightarrow BH = CK$

c) $\Delta BHD = \Delta CKE \Rightarrow HBD = KCE \Rightarrow OBC = OCB \Rightarrow \Delta OBC$ cân tại O.

9.9.



a) $\Delta BHE\left(BH = BE\right)$ cân tại $B \Rightarrow ABC = 2.BHE$.

Mà $ABC = 2.C \Rightarrow C = BHE$

$\Rightarrow C = FHC \Rightarrow \Delta CHF$ cân tại F

$\Rightarrow FH = FC \ (1)$

Ta có $FHC + FHA = 90°$; $CAH + C = 90°$ mà $FHC = C \Rightarrow FHA = CAH$

$\Rightarrow \Delta FHA$ cân tại $F \Rightarrow FA = FH \ (2)$

Từ (1) và (2), suy ra: $FH = FA = FC$.

b) Trên tia HC lấy $HI = HB \Rightarrow \Delta AHB = \Delta AHI\,(\text{c.g.c})$

$\Rightarrow AB = AI$ và $ABH = AIH \Rightarrow AIH = 2.C \ (1)$

Mà ΔAIC có $AIH = C + IAC \ (2)$

Từ (1) và (2), suy ra: $C + IAC = 2C \Rightarrow IAC = C$

$\Rightarrow \Delta IAC$ cân tại $I \Rightarrow AI = IC$.

Từ đó suy ra $AB = IC$ mặt khác $BE = HI\,(= BH)$

$\Rightarrow AB + BE = IC + HI$ hay $AE = HC$.

9.10. a) ΔAIE và ΔAIH có: $AIH = AIE\,(= 90°)$; $IE = IH$; AI chung

$\Rightarrow \Delta AIE = \Delta AIH\,(c.g.c) \Rightarrow AE = AH$.

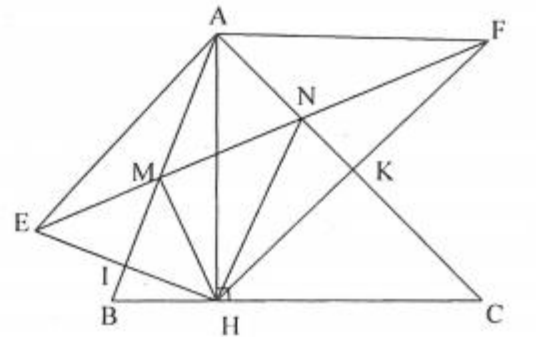
Tương tự, ta có: $\Delta AKF = \Delta AKH \Rightarrow AF = AH \Rightarrow AE = AF$.

b) $\Delta AIE = \Delta AIH \Rightarrow EAI = HAI$

ΔAEM và ΔAHM có $AE = AH$; $EAM = HAM$; AM chung

$\Rightarrow \Delta AEM = \Delta AHM\,(c.g.c)$

$\Rightarrow AEM = AHM$.



Tương tự, ta có $\Delta AHN = \Delta AFN$

$\Rightarrow AHN = AFN$.

Mà ΔAEF cân tại A nên $AEM = AFN \Rightarrow AHM = AHN$.

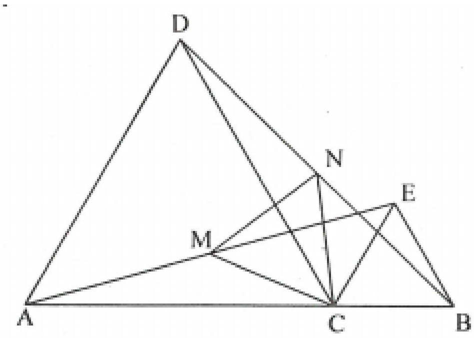
Suy ra HA là tia phân giác MHN .

9.11.

a) ΔACE và ΔDCB có $AC = DC$; $ACE = DBC\,(=120^\circ)$;

$EC = BC$

$\Rightarrow \Delta ACE = \Delta DCB(\text{c.g.c}) \Rightarrow AE = BD$.



b) $\Delta ACE = \Delta DCB \Rightarrow CEM = CBN$

ΔCME và ΔCNB có $CE = CB$; $CEM = CBN$; $EM = BN$

$\Rightarrow \Delta CME = \Delta CNB(\text{c.g.c})$.

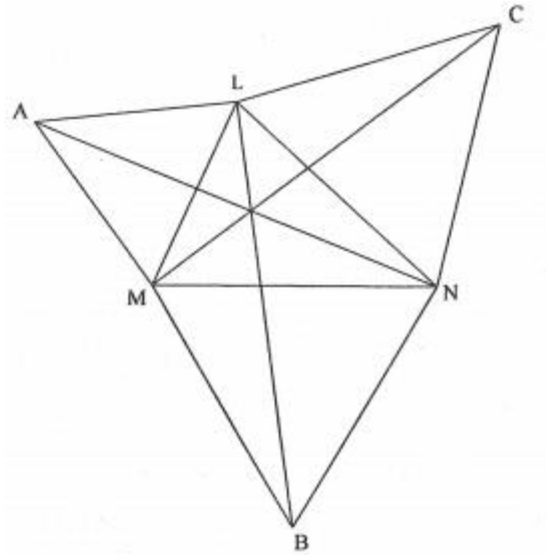
c) $\Delta CME = \Delta CNB$

$\Rightarrow CM = CN$; $MCE = NCB$

$\Rightarrow MCE - NCE = NCB - NCE = 60^\circ$

$\Rightarrow MCN = 60^\circ \Rightarrow \Delta MNC$ là tam giác đều.

9.12. ΔMLC và ΔALN có $AL = LM$;



$ALN = MLC\left(= 60^\circ + MLN\right)$;

$LN = LC \;\Rightarrow \Delta MLC = \Delta ALN\,(\text{c.g.c})$

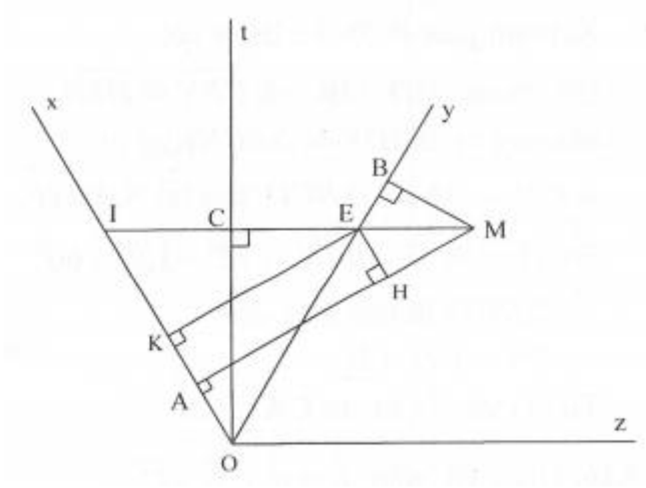
$\Rightarrow MC = AN$.

Chứng minh tương tự, ta có: $\Delta MAN = \Delta MLB(\text{c.g.c})$

$\Rightarrow AN = BL$

Từ đó suy ra: $LB = MC = NA$.

9.13.



Gọi *E*, *I* là giao điểm của *MC* với *Oy*; *Ox*.

$\Rightarrow \Delta EOI$ đều. Từ đó dễ dàng chứng minh được $\Delta OCE = \Delta EKO$

$\Rightarrow OC = EK$.

Vẽ $EH \perp MA$; $EK \perp OI$.

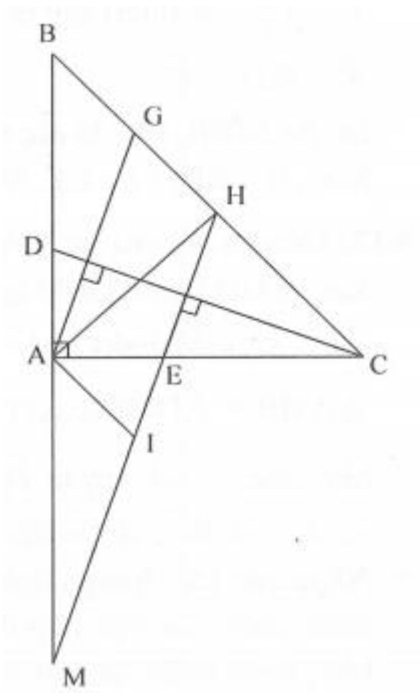
Dễ dàng chứng minh được: $\Delta MBE = \Delta MHE$

$\Rightarrow MH = MB$

$\Delta OCE = \Delta EKO \Rightarrow EK = OC$

$MA - MB = MA - MH = HA = EK = OC$.

9.14.



a) Ta có $ACD = AME\left(= 90° - ADC\right)$; $CAD = MAE$; $AD = AE$

$\Rightarrow \Delta ACD = \Delta AME\,(\text{g.c.g})$.

b) $\Delta ACD = \Delta AME \Rightarrow AC = AM \Rightarrow AB = AM$

ΔAGB và ΔMIA có: $ABG = MAI$ (đồng vị);

$AB = AM$; $BAG = AMI$ (đồng vị)

$\Rightarrow \Delta AGB = \Delta MIA\,(g.\text{c.g})$.

c) $AG // MH$ (cùng vuông góc với *CD*)

$\Rightarrow GAH = IHA$ (cặp góc so le trong).

$AI // GH \Rightarrow GHA = IAH$ (so le trong);

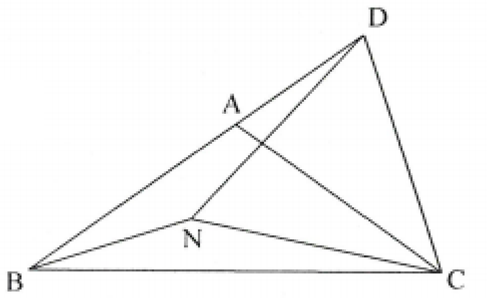
AH chung, suy ra $\Delta AGH = \Delta HIA\,(\text{g.c.g})$

$\Rightarrow HG = AI$ mặt khác $\Delta AGB = \Delta MIA$

$\Rightarrow AI = BG$. Từ đó suy ra $BG = HG$.

9.15. Trên tia *BA* lấy điểm *D* sao cho $BD = BC$.

Ta có tam giác *BCD* cân tại *B*.



Vì $\widehat{ABC}=36°$ nên $\widehat{BCD}=\widehat{BDC}=\dfrac{180°-36°}{2}=72°$.

Ta lại có $\widehat{DAC}=\widehat{ABC}+\widehat{ACB}=36°+36°=72°$ (tính chất của góc ngoài).

$\Rightarrow \widehat{BDC}=\widehat{DAC}\left(=72°\right)$.

Suy ra tam giác ACD cân tại C do đó $CA=CD$ (1).

Xét tam giác BDN và BCN có:

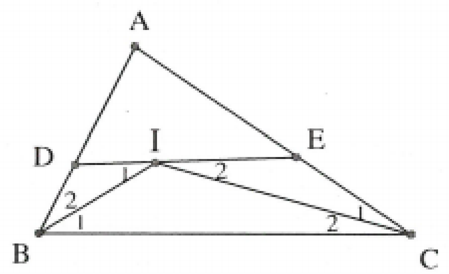
BN chung, $BD=BC$ và $\widehat{CBN}=\widehat{DBN}$ nên suy ra $\Delta BDN=\Delta BCN\left(c.g.c\right)$

$\Rightarrow CN=DN \Rightarrow \Delta NCD$ cân tại N, lại có: $\widehat{NCD}=\widehat{BCD}-\widehat{BCN}=72°-12°=60°$

$\Rightarrow \Delta NCD$ là tam giác đều

$\Rightarrow CN=CD$ (2)

Từ (1) và (2), ta có: $CA=CN$.



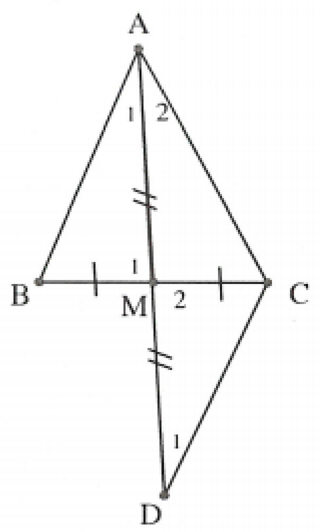
9.16. $DE//BC$ nên $\widehat{I_1}=\widehat{B_1}$; $\widehat{I_2}=\widehat{C_2}$.

Mà $\widehat{B_1}=\widehat{B_2}$ (giả thiết)

$\widehat{C_1}=\widehat{C_2}$ (giả thiết) suy ra: $\widehat{I_1}=\widehat{B_2}$; $\widehat{I_2}=\widehat{C_1}$.

Do đó ΔDIB; ΔEIC là các tam giác cân đỉnh D và E.

Nên $DI=BD$; $EI=CE$. Vậy $DE=DI+IE=BD+CE$.



9.17. Trên tia đối của tia MA lấy D sao cho $MD=MA$.

- Xét ΔABM và ΔDCM có: $MB=MC$ (giả thiết);

$\widehat{M_1}=\widehat{M_2}$ (đối đỉnh); $AM=MD$

do đó $\Delta AMB=\Delta DMC\left(\text{c.g.c}\right)$ nên $AB=DC$; $\widehat{A_1}=\widehat{D_1}$.

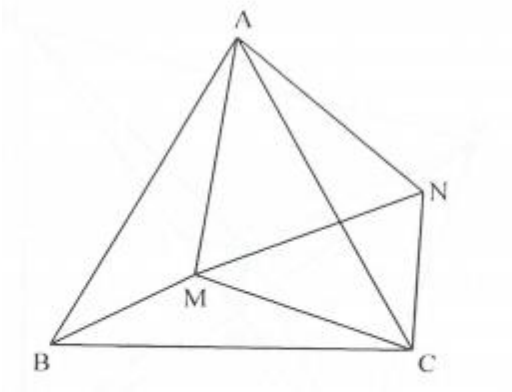
Mặt khác $\widehat{A_1}=\widehat{A_2}$ suy ra $\widehat{D_1}=\widehat{A_2}$ hay ΔACD cân tại C

$\Rightarrow AC=CD \Rightarrow AC=AB$. Vậy ΔABC cân.

**** Nhận xét.*** Để chứng minh ΔABC cân ta chưa tìm được cách nào trực tiếp để chứng minh cặp cạnh bằng nhau hoặc cặp góc bằng nhau, cũng như vận dụng $BM=CM$. Vì vậy, việc kẻ thêm đường phụ là điều cần thiết.

9.18.

Dựng tam giác đều AMN (N và B khác phía đối với AC). Ta có $MA=MN$. Mặt khác, $\widehat{CAN}=\widehat{BAM}=60°-\widehat{MAC}$. Suy ra $\Delta MAB=\Delta NAC\left(\text{c.g.c}\right)$ dẫn đến $MB=NC$. Rõ ràng tam giác MCN có các cạnh tương ứng bằng MA, MB, MC.


A
N
M
B
C

Chương II

TAM GIÁC

Chuyên đề 10. ĐỊNH LÝ PY-TA-GO

A. Kiến thức cần nhớ

Trong toán học, **định lý Py-ta-go** là một liên hệ trong hình học phẳng giữa ba cạnh tam giác của một tam giác vuông.

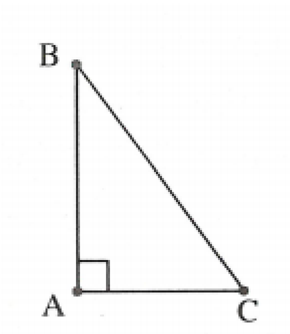
- **Pythagoras** (tiếng Hy Lạp: Πυθαγόρας; sinh khoảng năm 580 đến 572 TCN - mất khoảng năm 500 đến 490 TCN) là một nhà triết học người Hy Lạp và là người sáng lập ra phong trào tín ngưỡng có tên học thuyết Pythagoras. Ông thường được biết đến như một nhà khoa học và toán học vĩ đại. Trong tiếng Việt, tên của ông thường được phiên âm từ tiếng Pháp (*Pythagore*) thành **Py-ta-go**.

- Pythagoras đã thành công trong việc chứng minh tổng 3 góc của một tam giác bằng 180° và nổi tiếng nhất nhờ định lý toán học mang tên ông. Ông cũng được biết đến là "cha đẻ của số học". Ông đã có nhiều đóng góp quan trọng cho triết học và tín ngưỡng vào cuối thế kỷ 7 TCN. Về cuộc đời và sự nghiệp của ông, có quá nhiều các huyền thoại khiến việc tìm lại sự thật lịch sử không dễ dàng. Pythagoras và các học trò của ông tin rằng mọi sự vật đều liên hệ đến toán học, và mọi sự việc đều có thể tiên đoán trước qua các chu kỳ.

1) Định lí Py-ta-go

Trong một tam giác vuông, bình phương của cạnh huyền bằng tổng các bình phương của hai cạnh góc vuông.

ΔABC vuông tại $A \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$.



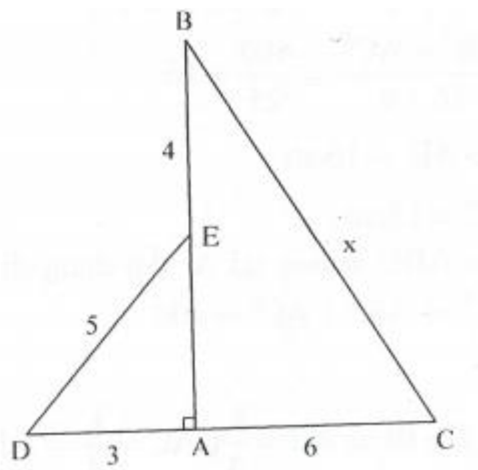
2) Định lí Py-ta-go đảo

Nếu một tam giác có bình phương của một cạnh bằng tổng các bình phương của hai cạnh kia thì tam giác đó là tam giác vuông.

$\Delta ABC: BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BAC = 90°$.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình vẽ sau. Tìm *x*:



Giải

** Tìm cách giải.* Trong một tam giác vuông nếu biết độ dài hai cạnh thì tìm được độ dài cạnh thứ ba.

Xét ΔADE ta tính được *AE* từ đó xét ΔABC, tính được *BC*.

** Trình bày lời giải.*

Tam giác *ADE* vuông tại *A*. Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

$AD^2 + AE^2 = DE^2 \Rightarrow 3^2 + AE^2 = 5^2 \Rightarrow AE = 4$.

Từ đó suy ra $AB = 8$.

Tam giác *ABC* vuông tại *A*. Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow 8^2 + 6^2 = BC^2 \Rightarrow BC = 10$.

Ví dụ 2: Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*. Biết $3AB = 4AC$ và $BC = 20\text{cm}$.

Tính độ dài các cạnh *AB* và *AC*.

Giải

** Tìm cách giải.* Bài toán biết độ dài cạnh huyền tam giác vuông, tính độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác ấy, tất yếu suy nghĩ tới việc dùng định lý Py-ta-go.

Bài toán cho $3AB = 4AC$. Khai thác yếu tố này, chúng ta có thể giải bài toán theo ba cách:

** Trình bày lời giải.*

- Cách 1. Tam giác *ABC* vuông tại *A*. Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow AB^2 + AC^2 = 400$

Từ đề bài: $3AB = 4AC \Rightarrow \dfrac{AB}{4} = \dfrac{AC}{3} \Rightarrow \dfrac{AB^2}{16} = \dfrac{AC^2}{9}$

Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{AB^2}{16} = \frac{AC^2}{9} = \frac{AB^2 + AC^2}{16+9} = \frac{400}{25} = 16$$

$\Rightarrow AB^2 = 16.16 \Rightarrow AB = 16\text{cm}$

$AC^2 = 9.16 \Rightarrow AC = 12\text{cm}$.

- Cách 2. Tam giác *ABC* vuông tại *A*. Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow AB^2 + AC^2 = 400$

Từ đề bài, đặt:

$$3AB = 4AC = k\left(k > 0\right) \Rightarrow AB = \frac{k}{3}; AC = \frac{k}{4} \Rightarrow AB^2 = \frac{k^2}{9}; AC^2 = \frac{k^2}{16}$$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow \frac{k^2}{9} + \frac{k^2}{16} = 400 \Rightarrow 25k^2 = 57600 \Rightarrow k^2 = 2304$$

Với $k > 0 \Rightarrow k = 48$. Từ đó suy ra $AB = 16\text{cm}$, $AC = 12\text{cm}$.

- Cách 3. Tam giác *ABC* vuông tại *A*. Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

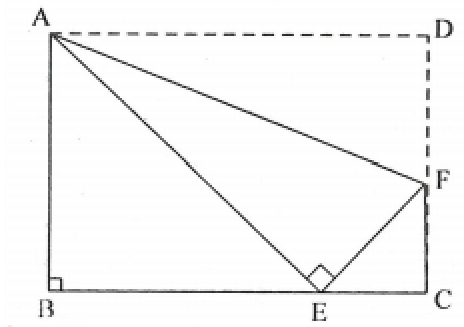
$AB^2+AC^2=BC^2 \Rightarrow AB^2+AC^2=400$

Từ đề bài, đặt: $3AB=4AC \Rightarrow AB=\dfrac{4.AC}{3} \Rightarrow AB^2=\dfrac{16.AC^2}{9}$

$AB^2+AC^2=BC^2 \Rightarrow \dfrac{16.AC^2}{9}+AC^2=400 \Rightarrow \dfrac{25.AC^2}{9}=400 \Rightarrow AC^2=144$

Từ đó suy ra $AC=12\text{cm}$, $AB=16\text{cm}$.

Ví dụ 3: Gấp mảnh giấy hình chữ nhật như hình dưới đây sao cho điểm *D* trùng với điểm *E*, là một điểm nằm trên cạnh *BC*. Biết rằng $AD=10\text{cm}$, $AB=8\text{cm}$. Tính độ dài của *CE*.



Giải

** Tìm cách giải.* Khi gấp hình, chúng ta lưu ý các yếu tố bằng nhau. Suy ra được $AE=AD$

Để tính *CE*, chúng ta chỉ cần tính *BE*. Từ đó chúng ta có lời giải sau:

** Trình bày lời giải.*

Ta có $AEF=ADF=90°$; $AD=AE=10\text{cm}$.

Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông *ABE*, ta có:

$BE^2=AE^2-AB^2 \Rightarrow BE^2=10^2-8^2=36 \Rightarrow BE=6\text{cm}$.

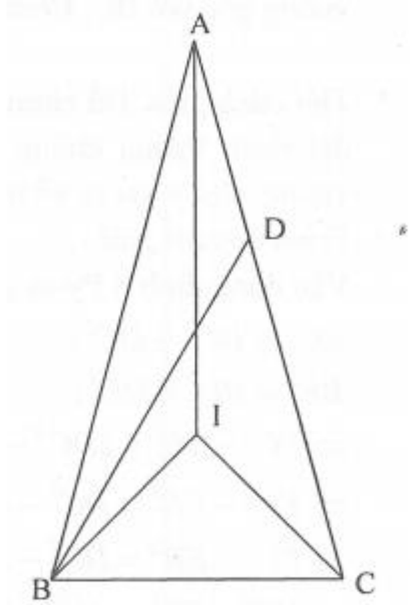
Suy ra $CE=10-6=4\text{cm}$.

Ví dụ 4: Cho tam giác *ABC* cân tại *A*, $A=30°$; $BC=a$. Lấy điểm *D* trên cạnh *AC* sao cho $CBD=60°$. Tính độ dài *AD* theo *a*.

Giải

- Cách 1. Tam giác *ABC* cân tại *A*; $A=30°$ nên $ABC=ACB=75°$.

Trên nửa mặt phẳng bờ *BC*, chứa điểm *A*, vẽ ΔBIC vuông cân tại *I* thì *I* nằm trong ΔABC.



Ta có: $CBI=45°$; $IBA=30° \Rightarrow IBD=15° \Rightarrow ABD=15°$.

ΔIAB và ΔIAC có $AB=AC$; $IB=IC$; *AI* là cạnh chung.

Do đó $\Delta IAB=\Delta IAC(\text{c.c.c}) \Rightarrow IAB=IAC=15°$.

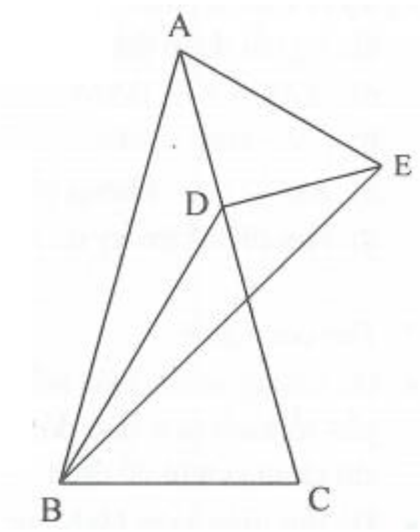
ΔIAB và ΔDBA có $IBA=DBA(=15°)$; *AB* là cạnh chung; $ABI=BAD(=30°)$. Do đó $\Delta IAB=\Delta DBA(\text{g.c.g}) \Rightarrow IB=AD$.

ΔIBC vuông cân tại *I*, theo định lý Py-ta-go, ta có:

$BI^2+IC^2=BC^2=a^2 \Rightarrow 2.BI^2=a^2 \Rightarrow BI=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

Suy ra $AD = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

- ***Cách 2.*** Trên nửa mặt phẳng bờ *AC* không chứa điểm *B*, dựng tia *Ax* sao cho $CAx = 45°$. Trên *Ax* lấy điểm *E* sao cho $AE = BC$. Suy ra $BAE = 75°$.



ΔABC và ΔBAE có *AB* là cạnh chung; $ABC = BAE\left(=75°\right)$; $AE = BC$. Do đó $\Delta ABC = \Delta BAE\left(\text{c.g.c}\right)$.

$\Rightarrow AC = BE$; $ABE = BAC \Rightarrow ABE = 30° \Rightarrow DBE = 15°$.

ΔABD và ΔEBD có $AB = EB\left(=AC\right)$; $ABD = EBD\left(=15°\right)$; *BD* là cạnh chung.

Do đó $\Delta ABD = \Delta EBD\left(\text{c.g.c}\right) \Rightarrow AD = ED \Rightarrow \Delta AED$ vuông cân tại *D*.

ΔADE vuông cân tại *D*, theo định lý Py-ta-go, ta có:

$$AD^2 + ED^2 = AE^2 = a^2 \Rightarrow 2.AD^2 = a^2 \Rightarrow AD = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

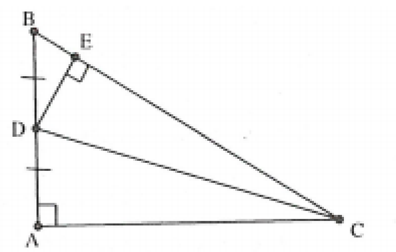
Ví dụ 5: Cho ΔABC vuông tại *A*. Lấy *D* là trung điểm của *AB*. Từ *D* vẽ *DE* vuông góc với *BC*. Chứng minh rằng: $EC^2 - EB^2 = AC^2$.

Giải

* *Tìm cách giải.* Để chứng minh đẳng thức, chỉ chứa các bình phương độ dài đoạn thẳng, chúng ta sử dụng định lý Py-ta-go vào các tam giác vuông, chú ý tạo ra vế trái, rồi biến đổi đại số tạo ra vế phải.

* *Trình bày lời giải.*

Vận dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông, ta có:



$EC^2 = DC^2 - DE^2$;

$BE^2 = BD^2 - DE^2$;

$\Rightarrow EC^2 - BE^2 = \left(DC^2 - DE^2\right) - \left(BD^2 - DE^2\right)$

$\Rightarrow EC^2 - EB^2 = DC^2 - BD^2$

$\Rightarrow EC^2 - EB^2 = DC^2 - AD^2$ (vì $BD = AD$)

$\Rightarrow EC^2 - EB^2 = AC^2$.

Ví dụ 6: Cho ΔABC vuông cân tại đỉnh *A*. Qua *A* kẻ đường thẳng xy bất kỳ không cắt đoạn thẳng *BC*. Kẻ *BM* và *CN* vuông góc với xy. Chứng minh:

a) $\Delta ACN = \Delta BAM$.

b) $CN + BM = MN$.

c) $BM^2 + CN^2$ không phụ thuộc vào vị trí xy.

d) Tìm điều kiện xy để A là trung điểm MN.

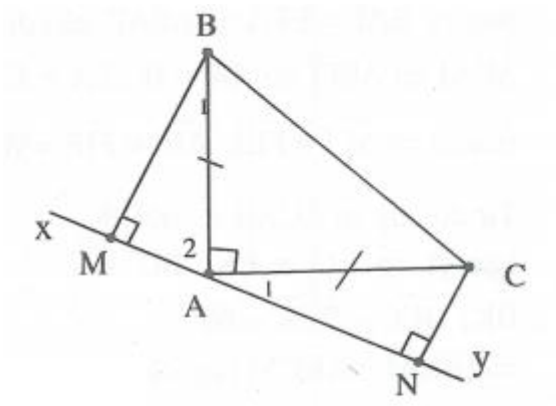
Giải

** Tìm cách giải.*

• Để chứng minh một biểu thức hình học không phụ thuộc vào vị trí của yếu tố hình học nào đó, ta biến đổi chứng tỏ biểu thức đó bằng kết quả chỉ chứa yếu tố cố định.

• Để tìm điều kiện hình học thỏa mãn yêu cầu nào đó, ta coi yêu cầu đó là giả thiết từ đó suy ra điều kiện cần tìm.

** Trình bày lời giải.*



a) Ta có: $B_1 + A_2 = 90°$; $A_1 + A_2 = 90°$ nên $B_1 = A_1$.

- ΔBAM và ΔACN có $M = N\left(=90°\right)$; $B_1 = A_1$;

$AB = AC$ nên $\Delta BAM = \Delta ACN$ (cạnh huyền – góc nhọn)

b) $\Delta BAM = \Delta ACN$ nên $BM = AN$; $AM = CN$

Suy ra: $BM + CN = AN + AM = MN$.

c) Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác vuông BAM:

$BM^2 + AM^2 = AB^2$ hay $BM^2 + CN^2 = AB^2$

Suy ra $BM^2 + CN^2$ không phụ thuộc vào vị trí xy.

d) $\Delta BAM = \Delta ACN$ nên $AM = CN$

$AM = AN \Leftrightarrow AN = CN$ hay ΔACN vuông cân tại N

$\Leftrightarrow A_1 = 45° \Leftrightarrow xy // BC$.

**** Nhận xét.***

• Nếu gọi I là trung điểm của BC ta còn có kết quả đẹp: ΔIMN vuông cân.

Ví dụ 7: Cho tam giác ABC có $A = 50°$; $B = 20°$. Trên đường phân giác BE của góc ABC lấy điểm F sao cho $FAB = 20°$. Gọi I là trung điểm của AF, K là giao điểm của tia EI với AB; M là giao điểm của CK với EB. Chứng minh rằng: $AI^2 + EI^2 = AF.\left(MF + \frac{1}{2}KE\right)$.

Giải

** Tìm cách giải.* Phân tích kết luận $AI^2 + EI^2$ gợi cho chúng ta dùng định lý Py-ta-go.

Dựa vào hình vẽ, chúng ta phán đoán tam giác AIE vuông tại I. Sau đó chứng minh dự đoán này.

Phân tích từ giả thiết, với các yếu tố về góc, chúng ta tính được C; $FAE = 30°$; $ABE = CBE = 10°$.

Từ đó tính được $BEC = 60°$. Từ phân tích đó, chúng ta có lời giải sau:

** Trình bày lời giải.*

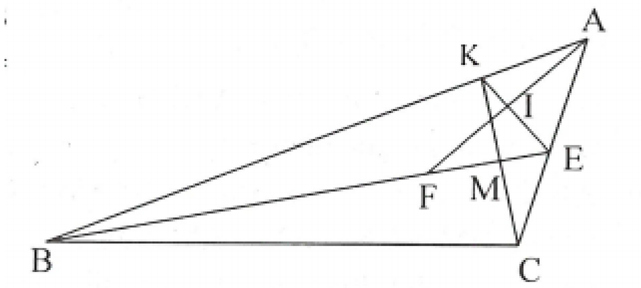
ΔABF có $AFE = BAF + ABF = 30°$ (tính chất góc ngoài của tam giác).

Suy ra $EAF = EFA \Rightarrow \Delta EAF$ cân đỉnh $E \Rightarrow EA = EF$.

ΔEAI và ΔEFI có $IA = IF$; $EA = EF$; EI là cạnh chung $\Rightarrow \Delta EAI = \Delta EFI$ (c.c.c)

$\Rightarrow AEI = FEI;\ AIE = FIE = 90° \Rightarrow AEI = FEI = \frac{1}{2}AEF = 60°$.

Từ đó suy ra $\Delta CEB = \Delta KEB$ (g.c.g) $\Rightarrow EC = EK$;



$BC = BK$; $BEC = BEK = 60°$

$\Rightarrow \Delta EKM = \Delta ECM$ (c.g.c)

$\Rightarrow EMK = EMC = 90°$

$\Rightarrow EM = \frac{1}{2}EK$ (theo ***ví dụ 8***, chuyên đề 9)

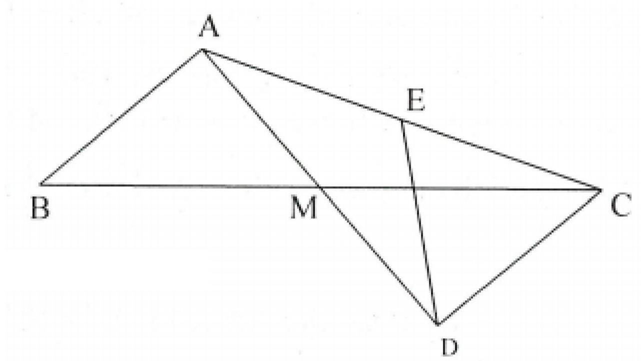
ΔAIE vuông tại I suy ra:

$$AI^2 + EI^2 = AE^2 = AE.EF = AE(MF + EM) = AE\left(MF + \frac{1}{2}EK\right).$$

Ví dụ 8: Cho tam giác ABC có M là trung điểm của cạnh BC. Biết $AB = 2\text{cm}$; $AC = 4\text{cm}$ và $AM = \sqrt{3}\text{cm}$. Hãy tính số đo góc BAC và độ dài BC.

Giải

Trên tia AM lấy điểm D sao cho M là trung điểm của $AD \Rightarrow AD = 2\sqrt{3}\text{cm}$



ΔAMB và ΔDMC có $MB = MC$; $AMB = DMC$; $MA = MD$

$\Rightarrow \Delta AMB = \Delta DMC$ (c.g.c)

$\Rightarrow AB = DC = 2\text{cm}$.

ΔADC có $DC^2 + AD^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2 = 16$;

$AC^2 = 16 \Rightarrow DC^2 + AD^2 = AC^2$

$\Rightarrow \Delta ADC$ vuông tại D (định lý đảo Py-ta-go)

$\Rightarrow MDC = 90° \Rightarrow MAB = 90°$

Gọi E là trung điểm $AC \Rightarrow DE = 2\text{cm} = CE = DC$ (theo ***ví dụ 10***, chuyên đề 8) $\Rightarrow \Delta DCE$ là tam giác đều

$\Rightarrow DCE = 60° \Rightarrow MAC = 30° \Rightarrow BAC = 120°$.

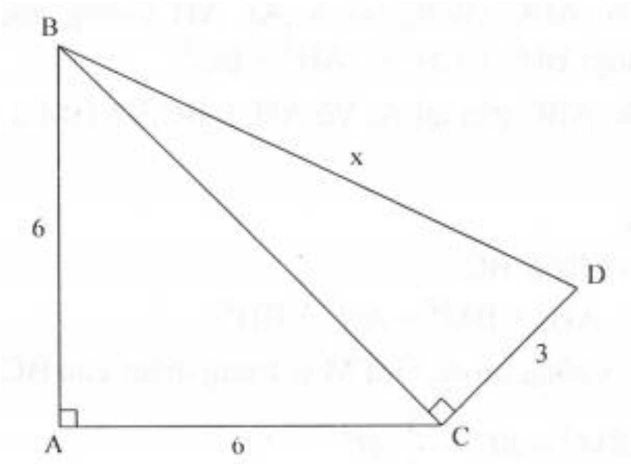
ΔABM vuông tại A nên $MB^2 = AB^2 + AM^2 = 2^2 + (\sqrt{3})^2 = 7$

$\Rightarrow MB = \sqrt{7}\text{cm} \Rightarrow BC = 2\sqrt{7}\text{cm}$.

C. Bài tập vận dụng

10.1. Cho tam giác *ABC* nhọn, kẻ *AH* vuông góc với *BC* tại *H*. Biết $AB = 10\text{cm}$; $AH = 8\text{cm}$; $HC = 15\text{cm}$. Tính chu vi tam giác *ABC*.

10.2. Tìm *x* trong hình vẽ sau:



10.3. Cho tam giác *ABC* có góc *A* nhọn. Vẽ ra phía ngoài tam giác đó các tam giác *ABM*, *ACN* vuông cân tại *A*. *BN* và *MC* cắt nhau tại *D*.

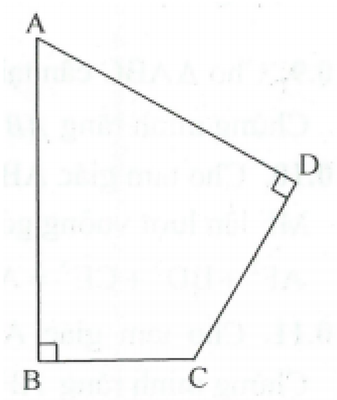
a) Chứng minh: $\Delta AMC = \Delta ABN$.

b) Chứng minh: $BN \perp CM$.

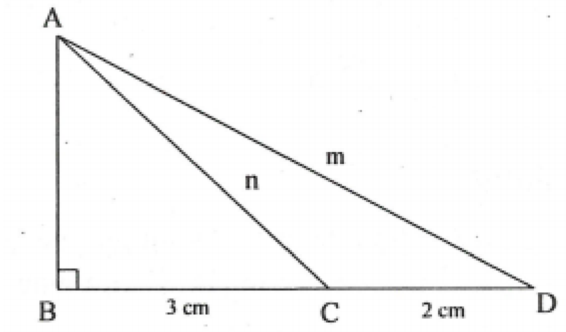
c) Cho $MB = 3\text{cm}$; $BC = 2\text{cm}$; $CN = 4\text{cm}$. Tính *MN*.

d) Chứng minh rằng *DA* là phân giác của góc *MDN*.

10.4. Cho hình vẽ sau. Biết rằng $A = 60°$; $B = D = 90°$, $BC = 4\text{cm}$; $CD = 6\text{cm}$. Tính độ dài đoạn thẳng *AB*?



10.5. Trong tam giác vuông dưới đây, biết $BC = 3\text{cm}$; *CD=2cm;* $AC = n$ và $AD = m$. Tính giá trị của $m^2 - n^2$.



10.6. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*. Kẻ *AH* vuông góc với *BC* tại *H*. Chứng minh rằng: $BH^2 + CH^2 + 2AH^2 = BC^2$.

10.7. Cho tam giác *ABC* cân tại *A*. Vẽ $AH \perp BC$. Vẽ $HM \perp AB$, $HN \perp AC$. Chứng minh:

a) ΔAMN cân;

b) Chứng minh $MN // BC$.

c) Chứng minh $AH^2 + BM^2 = AN^2 + BH^2$.

10.8. Cho ΔABC vuông tại *A*. Gọi *M* là trung điểm của *BC*. Chứng minh: $BM^2 = BC^2 - \frac{3}{4}.AC^2$.

10.9. Cho ΔABC cân tại *A* có $\hat{A} < 90°$. Kẻ *BH* vuông góc với *AC*.

Chứng minh rằng $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 2.BH^2 + 2.AH^2 + CH^2$.

10.10. Cho tam giác *ABC*. Từ điểm *M* nằm bên trong tam giác kẻ *MD*, *ME*, *MF* lần lượt vuông góc với *BC*, *CA*, *AB*. Chứng minh rằng: $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + BF^2 + CD^2$.

10.11. Cho tam giác *ABC* nhọn có đường cao *AD*; *BE* cắt nhau tại *H*.

Chứng minh rằng: $AH^2 + BC^2 = CH^2 + AB^2$.

10.12. Cho đoạn thẳng *BC* cố định, *M* là trung điểm của đoạn thẳng *BC*. Vẽ góc CBx sao cho $\widehat{CBx} = 45°$, trên tia *Bx* lấy điểm *A* sao cho độ dài đoạn thẳng *BM* và *BA* tỉ lệ với 1 và $\sqrt{2}$. Lấy điểm *D* bất kì thuộc đoạn thẳng *BM*. Vẽ *BH* và *CI* vuông góc đường thẳng *AD*. Đường thẳng *AM* cắt *CI* tại *N*. Chứng minh rằng:

a) $BH^2 + CI^2$ có giá trị không đổi khi *D* di chuyển trên đoạn thẳng *BM*.

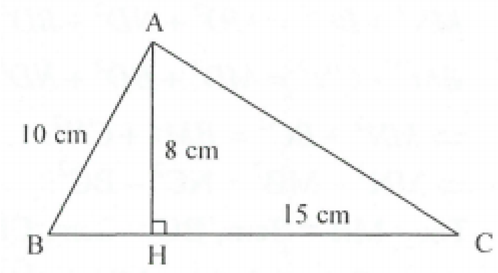
b) Tia phân giác của góc *HIC* luôn đi qua một điểm cố định.

10.13. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*. Đường cao *AH*, trên đó lấy điểm *D*. Trên tia đối *HA* lấy *E* sao cho $HE = AD$. Đường vuông góc với *AH* tại *D* cắt *AC* tại *F*. Chứng minh *EB* vuông góc với *EF*.

10.14. Cho tam giác *ABC* có góc $\hat{A} = 30°$. Dựng bên ngoài tam giác *ABC* tam giác đều *BCD*. Chứng minh rằng $AD^2 = AB^2 + AC^2$.

Hướng dẫn giải

10.1. Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:



ΔABH vuông, nên $AH^2 + BH^2 = AB^2$

$64 + BH^2 = 100 \Rightarrow BH = 6(\text{cm})$.

ΔACH vuông, nên $AC^2 = AH^2 + HC^2$

$AC^2 = 64 + 225 \Rightarrow AC = 17(\text{cm})$.

Chu vi ΔABC là: $AB + AC + BC = 10 + 17 + 6 + 15 = 48(\text{cm})$.

10.2. Tam giác *ABC* vuông tại *A*. Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

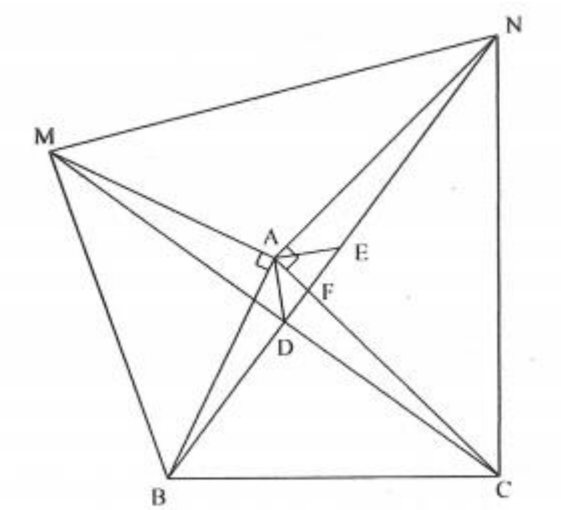
$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow 6^2 + 6^2 = BC^2 \Rightarrow BC^2 = 72$.

Tam giác *BCD* vuông tại *C*. Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

$BC^2 + CD^2 = BD^2 \Rightarrow 72 + 3^2 = BD^2 \Rightarrow BD^2 = 81 \Rightarrow BD = 9$.

Từ đó suy ra $x = 9$.

10.3.



a) Ta có $MAC = BAN$ (cùng bằng $90° + BAC$).

$MA = AB$ (ΔMAB vuông cân tại *A*)

$AC = AN$ (tam giác *NAC* vuông cân tại *A*)

$\Rightarrow \Delta AMC = \Delta ABN(\text{c.g.c})$.

b) Gọi giao điểm của *BN* với *AC* là *F*.

$ANF = FCD$ (vì $\Delta AMC = \Delta ABN$), $AFN = CFD$ (đối đỉnh)

Từ đó suy ra $FDC = FAN$. Do đó $BN \perp CM$.

c) Áp dụng định lý Py-ta-go vào các tam giác vuông *MDN*, *BDC*, *MDB*, *NDC*, ta có:

$MN^2 + BC^2 = MD^2 + ND^2 + BD^2 + CD^2$

$BM^2 + CN^2 = MD^2 + BD^2 + ND^2 + CD^2$

$\Rightarrow MN^2 + BC^2 = BM^2 + CN^2$

$\Rightarrow MN^2 = MB^2 + NC^2 - BC^2$.

Thay $MB = 3\text{cm}$, $BC = 2\text{cm}$, $CN = 4\text{cm}$, vào đẳng thức $MN^2 = MB^2 + NC^2 - BC^2$, tính được $MN = \sqrt{21}\text{cm}$.

d) Trên tia *BN* lấy điểm *E*, sao cho $BE = MD$.

$\Delta AMD = \Delta ABE(\text{c.g.c})$

Suy ra $AD = AE \Rightarrow \Delta ADE$ cân tại *A* (1)

$\Delta AMD = \Delta ABE \Rightarrow MAD = BAE \Rightarrow DAE = MAB = 90°$

$\Rightarrow \Delta ADE$ vuông tại A (2).

Từ (1) và (2) $ADE = 45° \Rightarrow ADE = \frac{1}{2} MDN$.

$\Rightarrow DA$ là phân giác của MDN.

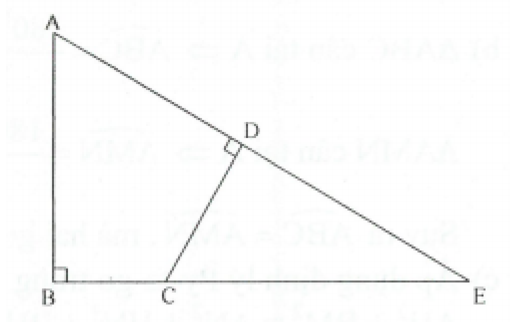
10.4. Ta kéo dài AD và BC sao cho chúng cắt nhau tại E. Suy ra $E = 30°$.

ΔCDE vuông tại D có $E = 30°$ nên $CE = 2.CD = 12\text{cm}$ (theo ***ví dụ 8***, chuyên đề 9)

$\Rightarrow BE = 4 + 12 = 16\text{cm}$.

Đặt $AB = x$, ΔABE vuông tại B có $E = 30°$ nên $AE = 2.AB = 2x$ (theo ***ví dụ 8***, chuyên đề 9).

Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:



$BE^2 + AB^2 = AE^2$

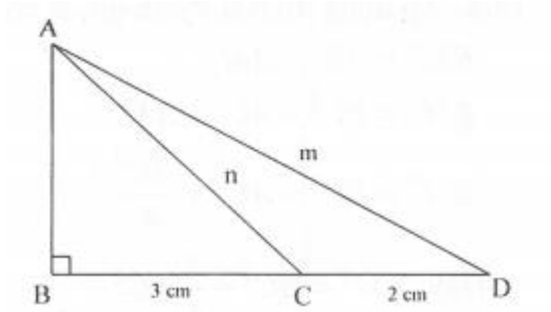
$BE^2 = 16^2 = 256$

Ta có $AB^2 = x^2$; $AE^2 = 4x^2$.

Nên $256 + x^2 = 4x^2 \Leftrightarrow 256 = 3x^2$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{256}{3} \Rightarrow x = \frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{3}\text{cm}$.

10.5. ΔABC vuông suy ra: $AB^2 = AC^2 - BC^2$



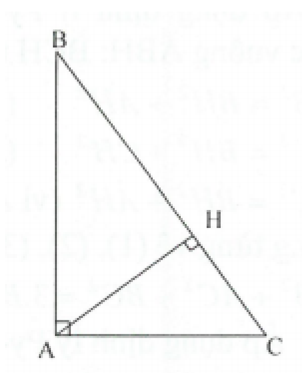
ΔABD vuông suy ra: $AB^2 = AD^2 - BD^2$

Do đó: $AD^2 - BD^2 = AC^2 - BC^2$

$\Rightarrow AD^2 - AC^2 = BD^2 - BC^2$

$\Rightarrow m^2 - n^2 = 5^2 - 3^2 = 16$.

10.6. Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông *ABC, AHB, AHC,* ta có:



$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$\Rightarrow BC^2 = AH^2 + BH^2 + AH^2 + HC^2$

$\Rightarrow BC^2 = BH^2 + CH^2 + 2.AH^2$ (điều phải chứng minh).

10.7.

a) ΔAHB và ΔAHC có $AB = AC$; $AHB = AHC\,(= 90°)$; $B = C$

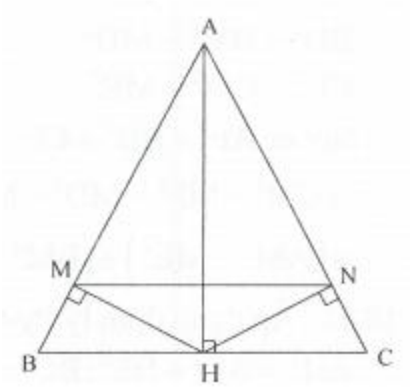
$\Rightarrow \Delta AHB = \Delta AHC$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow BH = CH$; $BAH = CAH$.

ΔAMH và ΔANH có $AMH = CAH\left(=90°\right)$; $MAH = NAH$; AH chung

$\Rightarrow \Delta AMH = \Delta ANH$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow AM = AN \Rightarrow \Delta AMN$ cân.



b) ΔABC cân tại $A \Rightarrow ABC = \dfrac{180° - A}{2}$.

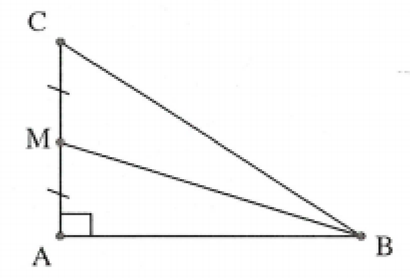
ΔAMN cân tại $A \Rightarrow AMN = \dfrac{180° - A}{2}$.

Suy ra $ABC = AMN$, mà hai góc ở vị trí đồng vị nên $MN // BC$.

c) Áp dụng định lý Py-ta-go trong các tam giác vuông, ta có:

$AH^2 + BM^2 = AN^2 + HN^2 + BH^2 - HM^2 = AN^2 + BH^2$ (vì $HM = HN$).

10.8. Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:



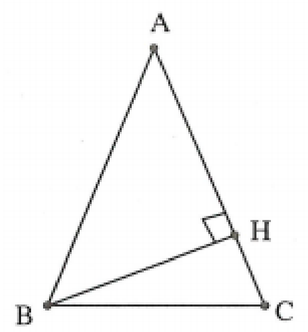
$BM^2 = AB^2 + AM^2$

$BM^2 = BC^2 - AC^2 + AM^2$

$BM^2 = BC^2 - AC^2 + \dfrac{AC^2}{4}$

Hay $BM^2 = BC^2 - \dfrac{3}{4}.AC^2$.

10.9. Áp dụng định lý Py-ta-go cho các tam giác vuông ABH; BCH ta có:



$AB^2 = BH^2 + AH^2$ (1)

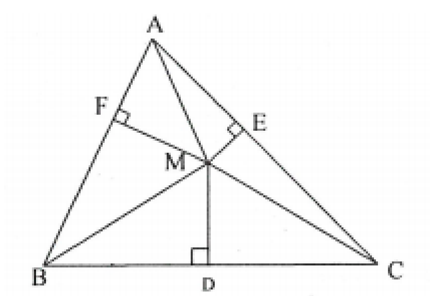
$BC^2 = BH^2 + CH^2$ (2)

$AC^2 = BH^2 + AH^2$ (vì $AB = AC$) (3).

Cộng từng vế (1), (2), (3), ta có:

$AB^2 + AC^2 + BC^2 = 3.BH^2 + 2.AH^2 + CH^2$.

10.10. Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:



$AF^2 = AM^2 - MF^2$

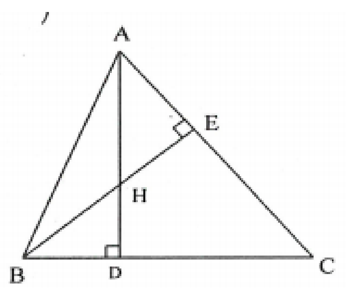
$BD^2 = BM^2 - MD^2$

$CE^2 = CM^2 - ME^2$

Suy ra $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AM^2 + BM^2 + CM^2 - MF^2 - MD^2 - ME^2$

$= \left(AM^2 - ME^2\right) + \left(BM^2 - MF^2\right) + \left(CM^2 - MD^2\right) = AE^2 + BF^2 + CD^2$.

10.11. Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

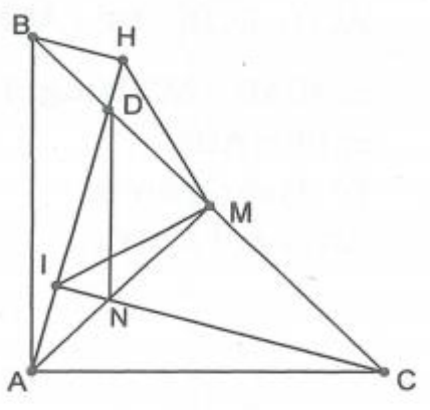


$AH^2 = AE^2 + HE^2$; $BC^2 = BE^2 + CE^2$

$\Rightarrow AH^2 + BC^2 = AE^2 + BE^2 + HE^2 + CE^2$.

$= AB^2 + CH^2$.

10.12. a) Từ *M* kẻ tia *My* vuông góc với *BC* và cắt tia *Bx* tại A'.



Tam giác BMA' vuông cân tại *M* nên $MB : BA' = 1 : \sqrt{2}$

Suy ra $A \equiv A'$ nên *AM* vuông góc với *BC*

Ta có $\Delta AMB = \Delta AMC\left(\text{c.g.c}\right)$ nên $AB = AC$ và góc $ACB = 45^\circ$

Tam giác *ABC* vuông cân tại *A* và có $BAH = ACI = 90^\circ - CAH$

H, *I* là hình chiếu của *B* và *C* trên *AD* nên $H = I = 90^\circ$

Suy ra $\Delta AIC = \Delta BHA\left(\text{c.h} - \text{g.n}\right)$

$\Rightarrow CI = AH$.

Ta có $BH^2 + CI^2 = BH^2 + AH^2 = AB^2$ (không đổi).

b) $\Delta BHM = \Delta AIM\left(\text{c.g.c}\right) \Rightarrow HM = MI$ và $BMH = IMA$

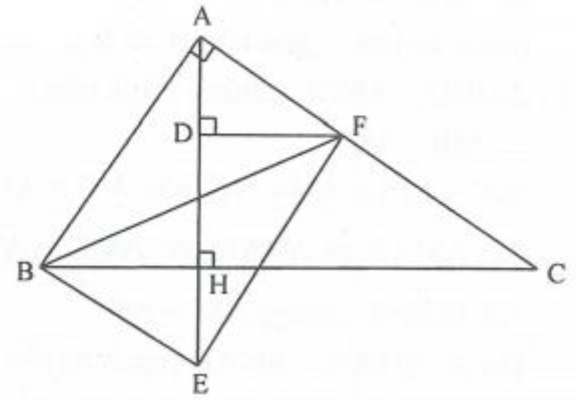
mà $IMA + BMI = 90^\circ \Rightarrow BMH + BMI = 90^\circ$.

$\Rightarrow \Delta HMI$ vuông cân $\Rightarrow HIM = 45^\circ$ mà $HIC = 90^\circ \Rightarrow HIM = MIC = 45^\circ$

$\Rightarrow IM$ là tia phân giác của góc HIC.

Vậy tia phân giác của góc HIC luôn đi qua điểm cố định *M*.

10.13. Vì $AD = HE\left(\text{gt}\right)$ nên $AH = DE$.



Áp dụng định lý Py-ta-go trong các tam giác vuông *ABF*; *ABH*; *ADF*; *BHE*; *DEF* ta được:

$BF^2 = AB^2 + AF^2$

$= \left(BH^2 + AH^2\right) + \left(AD^2 + DF^2\right)$

$= BH^2 + DE^2 + HE^2 + DF^2$

(vì $AH^2 = DE^2$; $AD^2 = HE^2$)

$= \left(BH^2 + HE^2\right) + \left(DE^2 + DF^2\right)$

$\Rightarrow BF^2 = BE^2 + EF^2$

Suy ra tam giác *BEF* vuông tại *E* (định lý Py-ta-go đảo) $\Rightarrow BE \perp EF$.

10.14.

Dựng ra phía ngoài ΔABC tam giác đều *ACE*.

$\Rightarrow BAE = BAC + CAE = 90^\circ$ và $AC = AE = CE$.

ΔABE có $BAE = 90^\circ$ theo định lý Py-ta-go, ta có: $AB^2 + AE^2 = BE^2$

$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = BE^2$ (1)

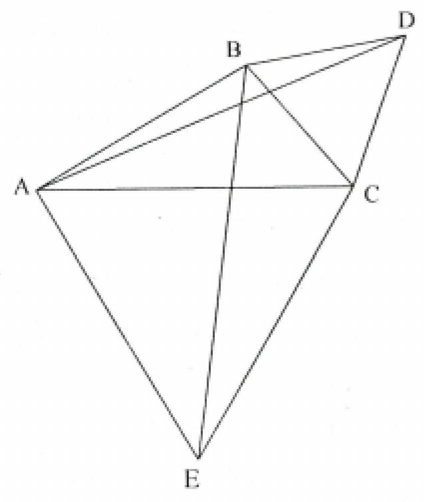
ΔCAD và ΔCEB có $CA = CE$; $ACD = ECB\left(= 60° + ACB\right)$;

$CD = CB$

$\Rightarrow \Delta CAD = \Delta CEB\left(\text{c.g.c}\right)$

$\Rightarrow BE = AD\ \left(2\right)$

Từ (1) và (2) suy ra: $AB^2 + AC^2 = AD^2$.



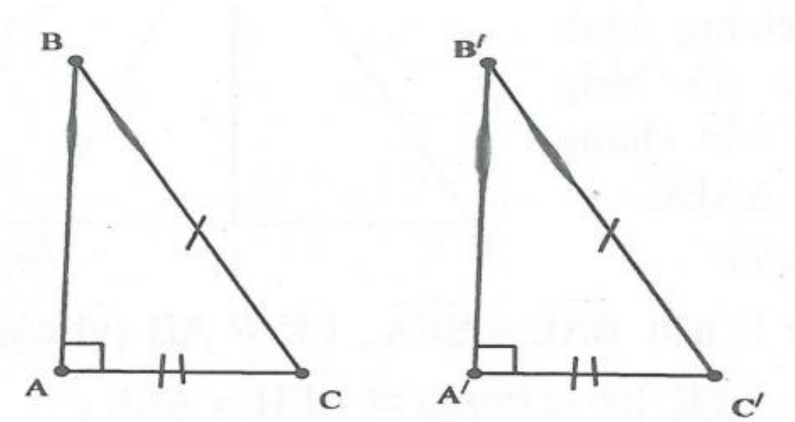
Chuyên đề 11. CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA TAM GIÁC VUÔNG

A. Kiến thức cần nhớ

Ngoài các trường hợp bằng nhau đã biết của hai tam giác vuông, còn có trường hợp bằng nhau theo cạnh huyền – cạnh góc vuông.

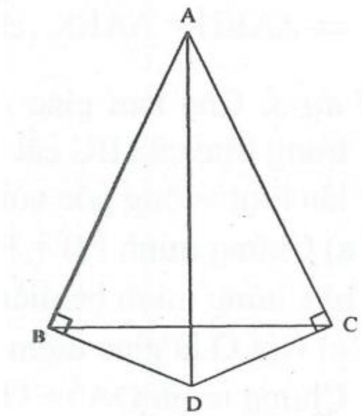
- Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

$$\left.\begin{array}{l} A = A' = 90^\circ \\ BC = B'C' \\ AC = A'C' \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C'$$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông).



B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho tam giác cân tại A. Đường thẳng vuông góc với AB tại B cắt đường thẳng vuông góc với AC tại C ở D. Chứng minh rằng AD là tia phân giác của góc BAC.



Giải

* *Tìm cách giải.* Để chứng minh AD là tia phân giác của góc BAC, chúng ta cần chứng minh $BAD = CAD$. Do đó hiển nhiên cần chứng minh $\Delta BAD = \Delta CAD$.

* *Trình bày lời giải.*

Xét ΔBAD và ΔCAD có: $ABD = ACD = 90^\circ$; AD là cạnh chung; $AB = AC$ (ΔABC cân tại A).

Do đó $\Delta BAD = \Delta CAD$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông)

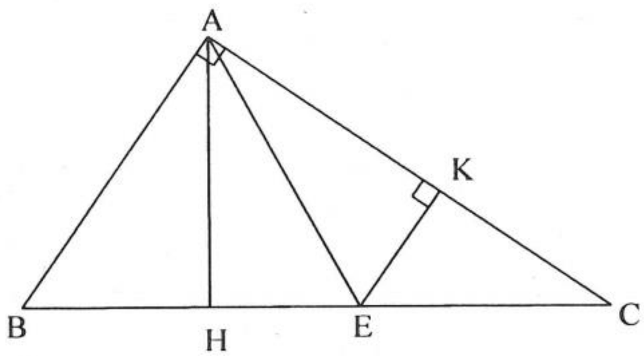
$\Rightarrow BAD = CAD$ (cặp góc tương ứng).

Vậy AD là tia phân giác góc BAC.

* *Nhận xét.* Chúng ta còn có DA là tia phân giác của góc BDC, tam giác DBC cân tại D.
AD vuông góc với BC.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC vuông tại A, vẽ AH vuông góc với BC. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = BA$. Kẻ $EK \perp AC \;\; K \in AC$. Chứng minh rằng $AK = AH$.

Giải



* *Tìm cách giải.* Để chứng minh $AK = AH$, chúng ta cần ghép chúng vào hai tam giác và chứng minh hai tam giác đó bằng nhau. Do vậy cần chứng minh $\Delta AEH = \Delta AEK$.

* *Trình bày lời giải.*

ΔABE cân tại B nên $BAE = BEA, EK // AB$ (vì cùng vuông góc với AC) $\Rightarrow EAB = AEK$ (so le trong) $\Rightarrow AEH = AEK$

$\Rightarrow \Delta AEH = \Delta AEK$ (cạnh huyền - góc nhọn), suy ra $AK = AH$.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC (AB < AC), M là trung điểm của BC. Đường trung trực của BC cắt tia phân giác của góc BAC tại điểm P. Vẽ PH và PK lần lượt vuông góc với đường thẳng AB và đường thẳng AC.

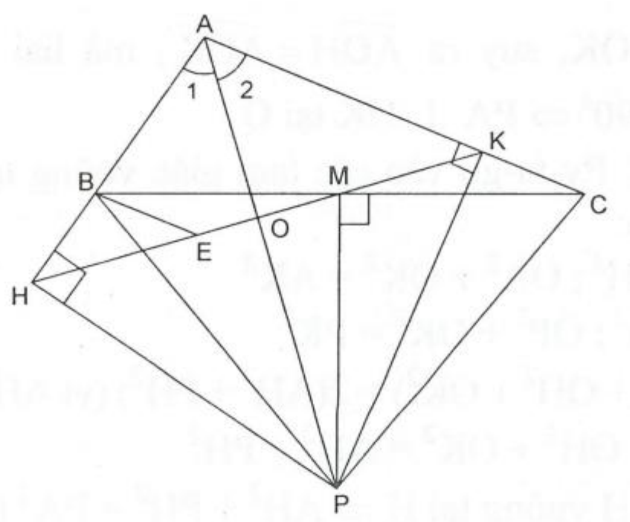
a) Chứng minh PB = PC và BH = CK.

b) Chứng minh ba điểm H, M, K thẳng hàng.

c) Gọi O là giao điểm của PA và HK.

Chứng minh $OA^2 + OP^2 + OH^2 + OK^2 = PA^2$

Giải



a) ΔPMB và ΔPMC có $PMB = PMC \;\; = 90^\circ$ $, MB = MC$, MP là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta PMB = \Delta PMC \;\;\; c.g.c \;\; \Rightarrow PB = PC$ (hai cạnh tương ứng)

b) ΔPHA và ΔPKA có $PHA = PKA = 90^\circ$,$PAH = PAK$, AP là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta PHA = \Delta PKA$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$\Rightarrow PH = PK$ (hai cạnh tương ứng)

ΔPHB và ΔPKC có $PHB = PKC = 90^\circ, PB = PC,\ PH = PK$

$\Rightarrow \Delta PHB = \Delta PKC$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông)

$\Rightarrow BH = CK$ (hai cạnh tương ứng)

b) Kẻ $BE // AC$ $E \in HK$ $\Rightarrow BEH = AKH$ (hai góc đồng vị) (1)

Mà $\Delta PHA = \Delta PKA$ (chứng minh trên) $\Rightarrow AH = AK$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow \Delta AHK$ cân tại A $\Rightarrow AHK = AKH$ (tính chất tam giác cân) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BEH = AHK$ hay $BEH = BHE$

$\Rightarrow \Delta BEH$ cân tại $B \Rightarrow BH = BE.$

Mà $BH = CK$ (chứng minh trên) $\Rightarrow BE = CK$

ΔBEM và ΔCKM có $MB = MC, EBM = KCM,\ BE = CK$

$\Rightarrow \Delta BEM = \Delta CKM$ (c.g.c)

$\Rightarrow BME = CMK$ (hai góc tương ứng)

Mà $BME + EMC = 180^\circ$(hai góc kề bù)

$\Rightarrow CMK + EMC = 180^\circ \Rightarrow EMK = 180^\circ \Rightarrow E, M, K$ thẳng hàng.

Mà $E \in HK \Rightarrow H, M, K$ thẳng hàng.

c) ΔAOH và ΔAOK có $AH = AK, OAH = OAK,\ AO$ là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta AOH = \Delta AOK$, suy ra $AOH = AOK$, mà hai góc này kề bù nên

$AOH = AOK = 90^\circ \Rightarrow PA \perp HK$ tại O.

Áp dụng định lý Py-ta-go vào các tam giác vuông tại O là OAH, OAK, OPH, OPK ta có:

$OA^2 + OH^2 = AH^2; OA^2 + OK^2 = AK^2$

$OP^2 + OH^2 = PH^2; OP^2 + OK^2 = PK^2$

$\Rightarrow 2\ OA^2 + OP^2 + OH^2 + OK^2\ = 2\ AH^2 + PH^2$ (vì $AH = AK$ và $PH = PK$)

$\Rightarrow OA^2 + OP^2 + OH^2 + OK^2 = AH^2 + PH^2$

Mà tam giác PAH vuông tại H $\Rightarrow AH^2 + PH^2 = PA^2$ (định lý Py-ta-go)

$\Rightarrow OA^2 + OP^2 + OH^2 + OK^2 = PA^2$

C. Bài tập vận dụng

11.1. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh BC lấy D, E (D nằm giữa B và E) sao cho $BD = CE$. Vẽ $DM \perp AB$ tại M, $EN \perp AC$ tại N. Gọi K là giao điểm của MD và NE. Chứng minh rằng:

a) $\Delta MBD = \Delta NCE$;

b) $\Delta MAK = \Delta NAK$.

11.2. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Kẻ $BH \perp AD$ tại H, kẻ $CK \perp AE$ tại K.

Chứng minh rằng:

a) $\Delta BHD = \Delta CKE$;

b) $\Delta AHB = \Delta AKC$;

c) $BC // HK$.

11.3. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC, AM là tia phân giác góc A. Kẻ MH vuông góc với AB; MK vuông góc với AC. Chứng minh rằng:

a) $MH = MK$;

b) ΔABC cân.

11.4. Cho tam giác ABC vuông tại A có $C = 30°$, đường cao AH. Trên đoạn HC lấy điểm D sao cho $HD = HB$. Từ C kẻ $CE \perp AD$. Chứng minh rằng:

a) Tam giác ABD là tam giác đều.

b) EH song song với AC.

11.5. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD = BA$. Qua D vẽ đường thẳng vuông góc với BC cắt AC tại E.

a) Chứng minh rằng: $AE = DE$.

b) Đường phân giác góc ngoài tại C cắt đường thẳng BE tại K. Tính BAK.

11.6. Cho tam giác ABC có $AB = AC$; $BAC = 90°$ và M là trung điểm của BC. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D. Kẻ BK vuông góc với đường thẳng AD tại K. Chứng minh rằng KM là tia phân giác của BKD.

11.7. Cho tam giác DEF vuông tại D và $DF > DE$. Kẻ DH vuông góc với EF (H thuộc cạnh EF). Gọi M là trung điểm của EF. Chứng minh rằng $MDH = E - F$.

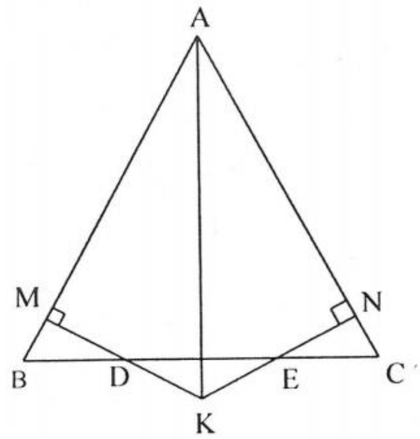
11.8. Cho tam giác ABC vuông cân đáy BC. Gọi M, N là trung điểm của AB, AC. Kẻ $NH \perp CM$ tại H, kẻ $HE \perp AB$ tại E. Chứng minh rằng:

a) Tam giác ABH cân.

b) HM là tia phân giác góc BHE.

HƯỚNG DẪN GIẢI

11.1.



a) Xét ΔMBD và ΔNCE có: $BMD = CNE = 90^\circ$;

$B = C; BD = CE$. Do đó $\Delta MBD = \Delta NCE$

(cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow MB = NC$.

b) $\Delta MBD = \Delta NCE$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow MB = NC$

$AM + MB = AN + NC$ nên $AM = AN$

Xét ΔMAK và ΔNAK có: $AMK = ANK = 90^\circ$;

AK là cạnh chung; AM = AN.

Do đó $\Delta MAK = \Delta NAK$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông).

11.2.

a) Ta có $ABD + ABC = 180^\circ; ACE + ACB = 180^\circ$ mà

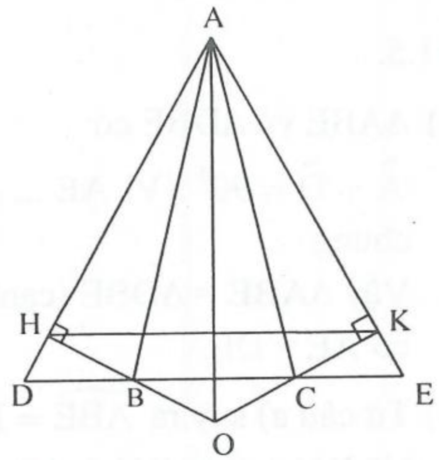
$ABC = ACB \Rightarrow ACE = ABD$

ΔABD và ΔACE có $AB = AC; ABD = ACE; BD = CE$

$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta ACE$ (c.g.c) $\Rightarrow ADB = AEC$

ΔBHD và ΔCKE có $BHD = CKE = 90^\circ$; $HDB = KEC$;

$BD = CE \Rightarrow \Delta BHD = \Delta CKE$ (cạnh huyền – góc nhọn).



b) Ta có ΔAHB và ΔAKC có $AHB = AKC = 90^\circ$;

$AB = AC; BH = CK$ $\Delta BHD = \Delta CKE$

$\Rightarrow \Delta AHB = \Delta AKC$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông).

c) $\Delta AHB = \Delta AKC \Rightarrow AH = AK$

$\Rightarrow \Delta AHK$ cân tại A $\Rightarrow AHK = \dfrac{180^\circ - HAK}{2}$

ΔADE cân tại A $\Rightarrow ADE = \dfrac{180^\circ - DAE}{2}$

$\Rightarrow AHK = ADE \Rightarrow HK // DE$. Vậy BC // HK.

11.3.

a) ΔAHM và ΔAKM có: $AHM = AKM = 90^\circ$;

AM chung; $HAM = KAM$

$\Rightarrow \Delta AHM = \Delta AKM$ (cạnh huyền góc nhọn)

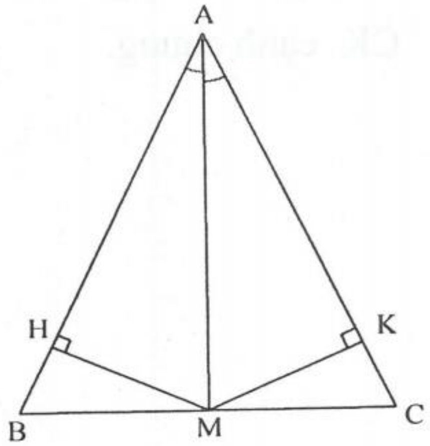
$\Rightarrow MH = MK$.

b) ΔBHM và ΔCKM có $BHM = CKM = 90°$;

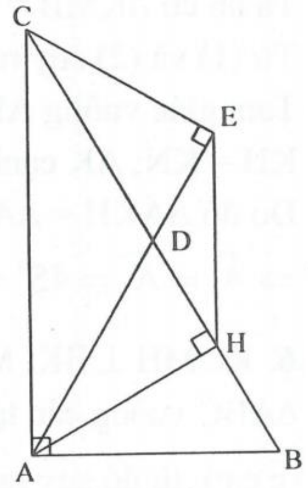
$BM = MC; MH = MK$

$\Rightarrow \Delta BHM = \Delta CKM$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông)

$\Rightarrow B = C \Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A.



11.4.



a) $\Delta AHB = \Delta AHD$ (c.g.c), suy ra AB = AD.

ΔABC vuông tại A, có $C = 30°$ nên $B = 60°$.

Tam giác ABD cân, có $B = 60°$ nên ΔABD là tam giác đều.

b) $EAC = BAC - BAE = 90° - 60° = 30°$

$\Rightarrow EAC = ACB$

$\Rightarrow \Delta AHC = \Delta CEA$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Suy ra CH = AE.

ΔADC cân tại vì $DAC = DCA$ nên DA = DC.

Suy ra $AE - AD = CH - CD$ hay $DE = DH$. Do đó ΔDEH cân tại D, hai tam giác cân DAC và DEH có góc ở đỉnh $ADC = EHD \Rightarrow EAC = AEH$

$\Rightarrow EH // AC$.

11.5.

a) ΔABE và ΔDBE có:

$A = D = 90°$ (Vì $AE \perp AB, AD \perp BC$) $AB = AD$ (giả thiết), BE: cạnh chung

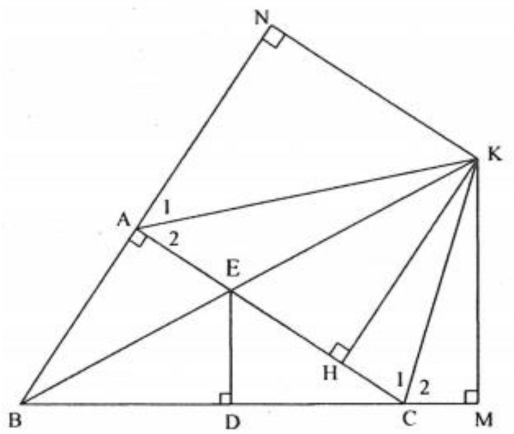
Vậy $\Delta ABE = \Delta DBE$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow AE = DE$.

b) Từ câu a) suy ra $ABE = DBE$, do đó BK là phân giác của góc ABC.

Vẽ $KN \perp BA, KH \perp AC, KM \perp BC$.

Tam giác vuông KMC và tam giác vuông KHC có: $C_2 = C_1$ (giả thiết); CK cạnh chung.



Do đó $\Delta KMC = \Delta KHC$ (cạnh huyền – góc nhọn), suy ra $KM = KH$ (1)

Ta lại có $\Delta KMB = \Delta KNB$ (cạnh huyền – góc nhọn) nên $KM = KN$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $KH = KN$

Tam giác vuông AKH và tam giác vuông AKN có:

$KH = KN; AK$ cạnh chung.

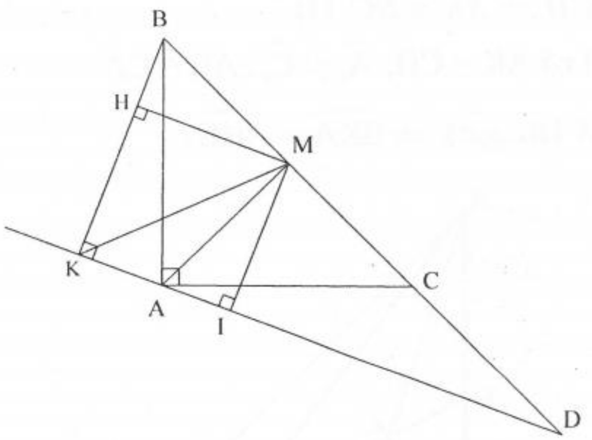
Do đó $\Delta AKH = \Delta AKN$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow A_1 = A_2 = 45^\circ \Rightarrow BAK = 135^\circ$

11.6. Kẻ $MH \perp BK, MI \perp KD$

ΔABC vuông cân tại A có $MB = MC$ nên dễ dàng suy ra $\Delta AMB = \Delta AMC$ (c.c.c), từ đó suy ra $AM \perp BC, BMA = CAM$

$\Rightarrow AM = MB; MAC = 45^\circ$



Ta có: $KBA = CAD = 90^\circ - BAK \Rightarrow KBC = MAI$

ΔBMH và ΔAMI có $AIM = BHM = 90^\circ; BM = AM$

$MBH = MAI \Rightarrow \Delta BMH = \Delta AMI$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow MH = MI$.

ΔMHK và ΔMIK có $MHK = MIK = 90^\circ$, MK chung; MH = MI

$\Rightarrow \Delta MHK = \Delta MIK$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông) $\Rightarrow HKM = IKM$

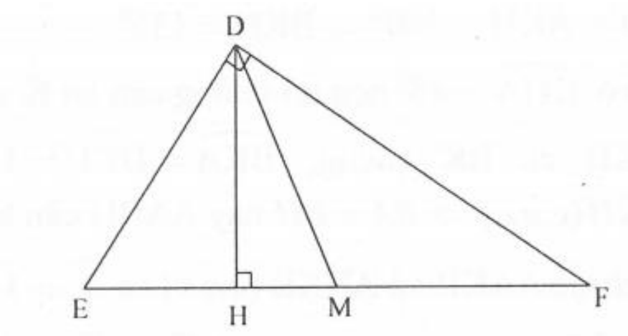
Vậy KM là tia phân giác BKD

11.7. Áp dụng ***ví dụ 10*** chuyên đề 8, ta có: ME = MD

$\Rightarrow \Delta MDE$ cân tại M $\Rightarrow MDE = E$

Mặt khác, ta có: $HDE = F$ (cùng phụ với góc HDF)

Ta có: $MDH = MDE - HDE = E - F$



11.8.

a) Từ A kẻ $AK \perp MC$ tại K và $AQ \perp HN$ tại Q.

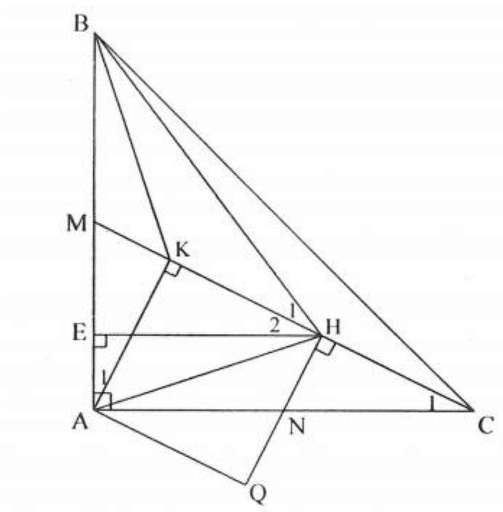
Hai tam giác vuông MAK và NCH có

$MA = NC\left(= \dfrac{1}{2}AB\right), A_1 = C_1$ (cùng phụ với góc AMC)

$\Rightarrow \Delta MAK = \Delta NCH \Rightarrow AK = HC$ (1)

ΔBAK và ΔACH có AK = CH, $A_1 = C_1$, AB = CA

$\Rightarrow \Delta BAK = \Delta ACH$ $c.g.c$ $\Rightarrow BKA = AHC$



ΔAQN và ΔCHN có AN = NC,

$ANQ = CNH \Rightarrow \Delta ANQ = \Delta CNH$ $ch - gn$ $\Rightarrow AQ = CH$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: AK = AQ.

ΔAKH và ΔAQH có $AKH = AQH = 90°, AK = AQ, AH$ chung

$\Rightarrow \Delta AKH = \Delta AQH$ $ch - cgv$ $KHA = QHA \Rightarrow HA$ là tia phân giác của góc KHQ

$\Rightarrow AHQ = 45° \Rightarrow AHC = 135° \Rightarrow BKA = 135°$

Từ $BKA + BKH + AKH = 360° \Rightarrow BKH = 135°$

Tam giác AKH có $KHA = 45°$ nên nó vuông cân tại K suy ra KA = KH.

$\Rightarrow \Delta BKA = \Delta BKH$ $c.g.c$ $\Rightarrow BA = BH$ hay ΔABH cân tại B.

b) Dễ chứng minh được ΔAKB và ΔHKB $c.c.c$ $\Rightarrow A_1 = H_1$

Mà $HE // CA \Rightarrow H_2 = C_1$ (góc đồng vị) vì $A_1 = C_1 \Rightarrow H_1 = H_2$.

Hay HM là tia phân giác góc BHE.

Chuyên đề 12. VẼ HÌNH PHỤ ĐỂ GIẢI TOÁN

A. Kiến thức cần nhớ

Trong một số bài toán ở các chuyên đề trước, chúng ta đã phải vẽ thêm hình phụ thì mới giải được. Trong chuyên đề này, chúng ta hệ thống một vài kỹ thuật về hình phụ để giải toán.

1. Mục đích của việc vẽ thêm hình phụ

Khi vẽ thêm đường phụ, chúng ta thường nhằm các mục đích sau đây:

- Đem những điều kiện đã cho của bài toán và những hình có liên quan đến chứng minh tập hợp (ở một hình mới) làm cho chúng có liên quan đến nhau.
- Tạo nên đoạn thẳng thứ ba (hoặc góc thứ ba) làm cho hai đoạn thẳng (hoặc hai góc) cần chứng mình trở lên có mối quan hệ với nhau.
- Tạo nên đoạn thẳng (hay góc) bằng tổng, hiệu gấp đôi hay bằng $\frac{1}{2}$ đoạn thẳng (hay góc) cho trước để đạt được chứng minh của bài tập hình học.
- Tạo nên những đại lượng mới (đoạn thẳng hay góc) bằng nhau, thêm vào những đại lượng bằng nhau mà đề bài đã cho để giúp cho việc chứng minh.
- Tạo nên một hình mới, để có thể áp dụng một định lý nào đó.
- Biến đổi kết luận, hình vẽ làm cho bài toán trở lên dễ chứng minh hơn.

2. Các loại đường phụ thường vẽ

- Kéo dài một đoạn thẳng cho trước với một độ dài tùy ý hoặc cắt một đường thẳng khác.
- Nối hai điểm cho trước hoặc cố định
- Từ một điểm cho trước dựng đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước.
- Dựng đường phân giác của một góc cho trước.
- Dựng đường thẳng đi qua một điểm cho trước hợp thành với đường thẳng khác một góc bằng một góc cho trước.

** Chú ý:* Khi vẽ đường phụ phải có mục đích không vẽ tùy tiện.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC cân tại A có $A = 100°$. Tia phân giác của góc B cắt AC tại D.

Chứng minh $BC = AD + BD.$

Giải

* ***Tìm cách giải.*** Đây là bài toán khó tuy nhiên nếu bạn biết lưu tâm đến giả thiết của bài toán và phương pháp kẻ đường phụ thì bài toàn trở nên đơn giản. Phân tích kết luận, chúng ta có hai hướng vẽ đường phụ cho bài toán này.

- Vì A, D, B không thẳng hàng, mà kết luận $AD + BD = BC$, do vậy chúng ta vẽ thêm hình phụ sao cho $AD + BD$ bằng một đoạn thẳng. Sau đó chứng minh đoạn thẳng đó bằng BC.

- Phân tích kết luận, chúng ta cũng có thể nghĩ tới việc tách BC thành tổng hai đoạn thẳng mà trong đó có một đoạn thẳng bằng BD (hoặc AD) và chứng minh đoạn thẳng còn lại bằng AD (hoặc BD).

Trong hai hướng suy nghĩ trên, chúng ta lưu ý đến giả thiết là tam giác cân và biết số đo góc để tính tất cả các góc có thể.

*** Trình bày lời giải**

- *Cách vẽ 1.* Trên tia đối của tia DB lấy điểm K sao cho $DA = DK$. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = BA$.

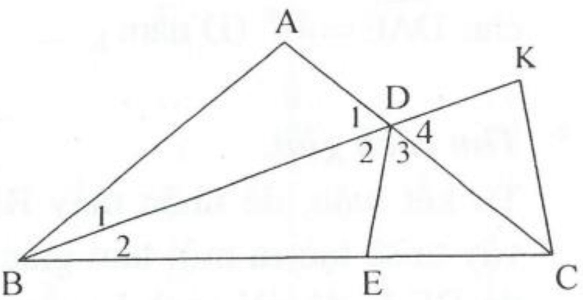
ΔABC cân tại A có $A = 100^\circ$ nên $B = C = 40^\circ$.

Ta có: $\Delta ABD = \Delta EBD$ (c.g.c) $\Rightarrow AD = DE$,

$BED = BAD = 100^\circ \Rightarrow D_1 = D_2 = D_3 = 60^\circ$

Mà BD là tia phân giác của góc B nên $B_1 = B_2 = 20^\circ$

Mặt khác: $BDC = 120^\circ \Rightarrow D_4 = 60^\circ$. Từ đó ta có:



$\Delta KDC = \Delta EDC$ (c.g.c) $\Rightarrow DKC = DEC = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

$\Rightarrow KCB = 80^\circ \Rightarrow \Delta BKC$ cân tại B $\Rightarrow BC = BK = BD + DK = BD + AD$

Vậy $BC = BD + AD.$

- *Cách vẽ 2.* Trên tia BC lấy điểm M sao cho $BM = BA$, lấy điểm N sao cho $BN = BD$.

Ta có: $\Delta ABD = \Delta MBD$ (c.g.c) $\Rightarrow AD = DM\ *\ , A = BMD = 100^\circ$.

Do $BMD = 100^\circ \Rightarrow DNM = 80^\circ$ (1)

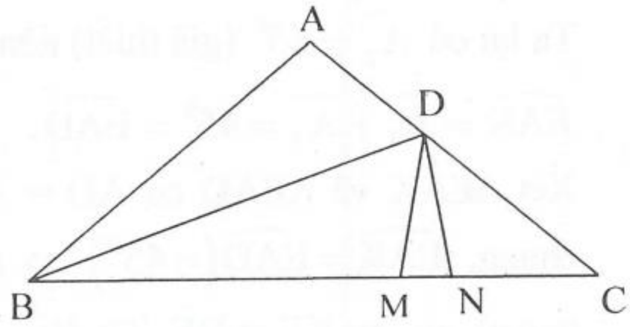
Mặt khác ΔBDN cân tại B nên

$BDN = BND = 80^\circ \quad 2$

Từ (1) (2) ta có: ΔMDN cân tại D

nên $DM = DN$ (**)

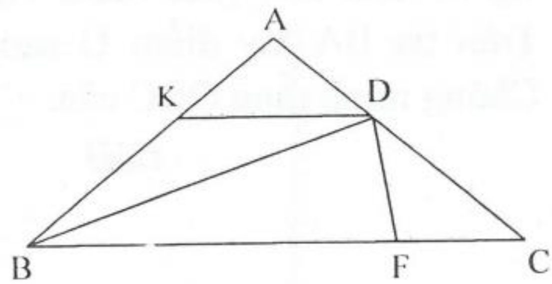
Ta có: $NDC = NCD = 40^\circ$



$\Rightarrow \Delta DNC$ cân tại N, nên $NC = ND$ (***)

Từ (*)(**)(***) $\Rightarrow AD = NC \Rightarrow BC = BN + NC \Rightarrow BC = BD + AD.$

- *Cách vẽ 3.* Trên cạnh BC lấy điểm F sao cho $BF = BD$, trên cạnh AB lấy điểm K sao cho $AK = AD$. Ta sẽ chứng minh được tam giác BKD cân tại K nên $KB = KD$, mà $KB = DC$ nên $KD = DC$ do đó $\Delta AKD = \Delta FDC \quad g.c.g \Rightarrow AD = FC$



$\Rightarrow BC = BF + FC = BD + AD.$

Vậy $BC = BD + AD.$

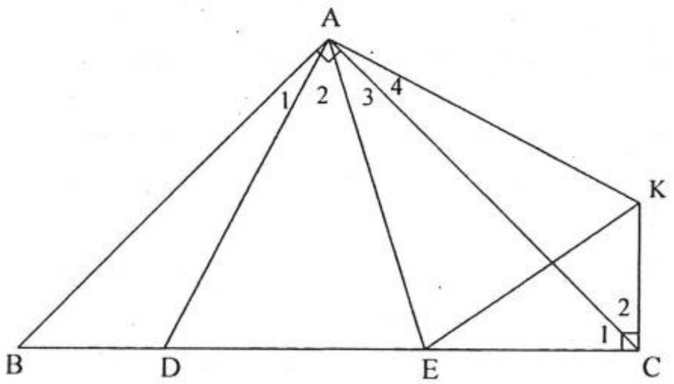
Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, các điểm D và E thuộc BC sao cho $DAE = 45°$ (D nằm giữa B và E). Chứng minh rằng $BD^2 + CE^2 = DE^2$.

Giải

**** Tìm cách giải.***

Từ kết luận, để nhận thấy BD, CE, DE thỏa mãn định lý Py-ta-go. Do vậy ta sẽ tạo ra một tam giác vuông có ba cạnh bằng BD, CE, DE trong đó DE là độ dài cạnh huyền. Do BD, CE, DE cùng nằm trên một đường thẳng. Do vậy cần kẻ thêm đường phụ. Từ C kẻ $CK \perp BC$ và lấy $CK = BD$ (K và A cùng phía đối với BC). Chỉ cần chứng minh $KE = DE.$

**** Trình bày lời giải.***



Từ C kẻ $CK \perp BC$ và lấy $CK = BD$ (K và A cùng phía đối với BC). Ta có $C_2 = 90° - C_1 = 90° - 45° = B,$

$CK = BD$ (theo cách dựng)

$AC = AB$ (giả thiết)

Do đó $\Delta ACK = \Delta ABD$ $(c.g.c)$,

suy ra $AK = AD, A_4 = A_1$

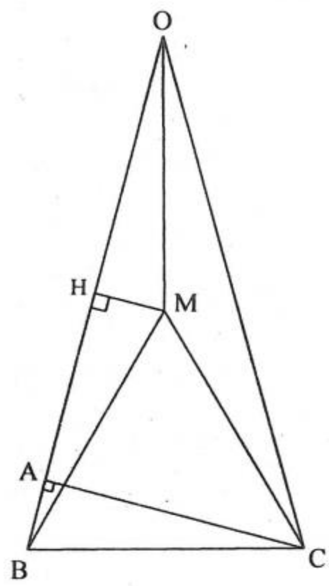
Ta lại có $A_2 = 45°$ (giả thiết) nên $A_1 + A_3 = 45°$ suy ra:

$EAK = A_4 + A_3 = 45° = EAD$

Xét ΔEAK và ΔEAD có $AD = AK$, AE là cạnh chung, $EAK = EAD = 45° \Rightarrow \Delta EAK = \Delta EAD$ (c.g.c), suy ra $KE = DE$. Từ đây, hiển nhiên ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, $C = 15°.$ Trên tia BA lấy điểm O sao cho $BO = 2AC$. Chứng minh rằng OBC cân.

Giải



**** Tìm cách giải.*** Trong bài toán trên, vì phát hiện thấy $C = 15°$ suy ra $B = 75°$, mà $75° - 15° = 60°$ là số đo của mỗi góc trong tam giác đều.

Điều này gợi ý cho chúng ta vẽ tam giác đều BCM như hình vẽ. Nhờ các cạnh của tam giác đều bằng nhau, các góc của tam giác đều là $60°$, chúng ta chứng minh được $\Delta HMB = \Delta ABC \quad c.g.c$; $\Delta MOB = \Delta MOC \quad c.g.c$ dẫn tới ΔOBC cân tại O. Do đó nên nghĩ tới việc vận dụng vẽ thêm tam giác đều vào giải toán.

*** Trình bày lời giải***

Ta có: $\Delta ABC;\ A = \ 90°;\ C = 15° \ gt \ \Rightarrow B = 75°.$

Vẽ tam giác đều BCM.

(M và A cũng thuộc nửa mặt phẳng bờ BC)

Ta có: $OBM = ABC - MBC = 75° - 60° = 15°$

Gọi H là trung điểm của OB $\Rightarrow HO = HB = \frac{1}{2}OB$

Mặt khác $BO = 2AC$ (gt) nên $AC = \frac{1}{2}OB$ từ đó ta có $AC = BH$

Xét ΔHMB và ΔABC có: $BH = AC$ (cmt) $HBM = ACB \quad = 15°$;

$MB = BC$ (cạnh Δ đều BMC)

Do đó $\Delta HMB = \Delta ABC$ (c.g.c) $\Rightarrow H = A = 90° \Rightarrow MH \perp OB$

ΔMBH và ΔMOH có $MHB = MHO = 90°$, $BH = HO$, MH chung

$\Rightarrow \Delta MBH = \Delta MOH \ \Rightarrow OBM = BOM \Rightarrow OBM = BOM = 15°$.

$\Rightarrow BMO = 180° - 2.15° = 150°$

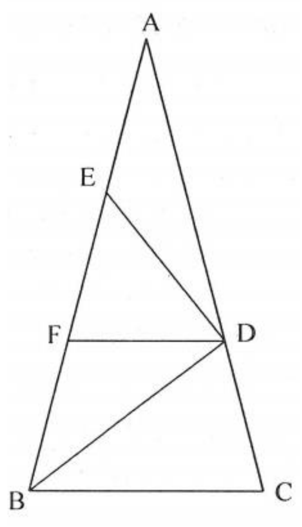
Từ đó MB = MC, $CMO = BMO \ = 150°$, OM là cạnh chung

Do đó $\Delta MOB = \Delta MOC \quad c - g - c \ \Rightarrow OB = OC.$

Vậy ΔOBC cân tại O. (điều phải chứng minh)

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC cân tại A, đường phân giác BD. Trên tia BA lấy điểm E sao cho BE = 2CD. Chứng minh rằng $EDB = 90°.$

Giải



*** Tìm cách giải.*** Từ giả thiết BE = 2CD, gợi ý cho chúng ta vẽ trung điểm F của BE. Muốn chứng minh $EDB = 90°$ mà FB = FE, nên chúng ta chỉ cần chứng minh BF = FD = FE.

*** Trình bày lời giải***

- ***Cách 1.*** Gọi F là trung điểm của BE thì FB = CD (cùng bằng $\frac{1}{2}BE$). Mà AB = AC (tam giác ABC cân tại A) nên AF = AD. Suy ra tam giác AFD cân tại A.

Từ đó $AFD = ABC$ (cùng bằng $\frac{180° - BAC}{2}$).

Suy ra DF // BC (hai góc đồng vị bằng nhau),

nên $FBD = FDB$ (cùng bằng DBC). Điều này dẫn đến tam giác FBD cân tại F, hay

$FD = FB = \frac{1}{2}BE.$

Tam giác BDE có F là trung điểm cạnh BE và $DF = \frac{1}{2}BE$ nên tam giác BDE vuông tại D hay

$EDB = 90°$ (điều phải chứng minh).

- ***Cách 2.*** Từ D kẻ $DF//BC$ $F \in AB$. Suy ra $FDB = CBD$ (so le trong)

$\Rightarrow FDB = FBD \Rightarrow \Delta FBD$ cân tại $F \Rightarrow BF = FD$

Mặt khác, ΔAFD và ΔABC cân tại A, suy ra AF = AD, AB = AC

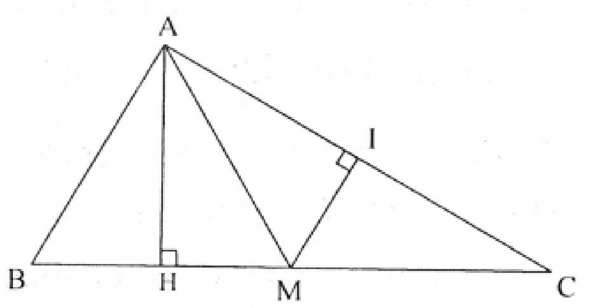
$\Rightarrow$ BF = CD.

Từ đó suy ra BF = FD = FE $\Rightarrow$ tam giác BDE vuông tại D hay $EDB = 90°$ (điều phải chứng minh).

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC (AB < AC), kẻ AH vuông góc với BC tại H. Gọi M là trung điểm của BC. Biết rằng AH và AM chia góc A thành 3 góc bằng nhau. Chứng minh rằng:

a) Tam giác ABC vuông.

b) Tam giác ABM là tam giác đều.



Giải

* ***Tìm cách giải***. Muốn chứng minh tam giác ABC vuông tại A ta cần kẻ thêm đường thẳng vuông góc với AC và chứng minh đường thẳng đó song song với AB, từ đó suy ra $AB \perp AC$ và suy ra $A = 90°$.

* ***Trình bày lời giải.***

a) Vẽ MI vuông góc với AC.

ΔAHM và ΔAIM có $AHM = AIM = 90°$, AM là cạnh chung, $HAM = IAM$

$\Rightarrow \Delta MAI = \Delta MAH(\text{c.h} - \text{g.n}) \Rightarrow \text{MI} = \text{MH}$

ΔAHM và ΔAHB có $AHM = AHB = 90°$, AH là cạnh chung,

$HAM = HAB \Rightarrow \Delta AHM = \Delta AHB$ $g.c.g$ $\Rightarrow BH = MH$

$\Rightarrow BH = MH = \frac{1}{2}BM \Rightarrow MI = \frac{1}{2}MC \Rightarrow C = 30°; HAC = 60°$

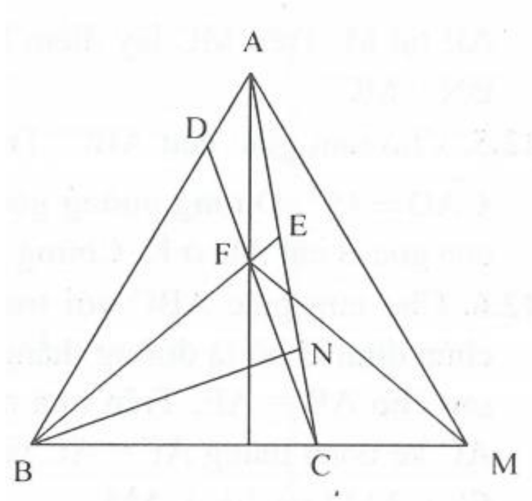
Vậy $BAC = 60^\circ.3 : 2 = 90^\circ \Rightarrow$ Tam giác ABC vuông tại A.

b) Ta có $C = 30^\circ \Rightarrow B = 60^\circ; AM = BM = \frac{1}{2}BC \Rightarrow$ tam giác ABM cân có một góc bằng $60^\circ \Rightarrow$ tam giác ABM đều.

* *Nhận xét:* Trong bài toán trên nếu chỉ có các yếu tố bài ra thì tưởng chừng như rất khó giải, tuy nhiên, chỉ bằng một đường vẽ thêm ($MI \perp AC$) thì bài toán lại trở nên rất dễ dàng, qua đó càng thấy rõ vai trò của việc vẽ thêm yếu tố phụ trong giải toán hình học.

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC với $BAC = 40^\circ$ và $ABC = 60^\circ$. Gọi D và E theo thứ tự là các điểm nằm trên cạnh AB và AC sao cho $DCB = 70^\circ$ và $EBC = 40^\circ$; F là giao điểm của DC và EB. Chứng minh rằng AF vuông góc với BC.

Giải



Trên AC lấy điểm N sao cho $ABN = 40^\circ$.

Ta có $ABN = BAN = 40^\circ$ nên ΔABN cân tại N, suy ra $BNC = 80^\circ$ (tính chất góc ngoài của tam giác). Do đó $BNC = BCN = 80^\circ$ suy ra ΔBCN cân tại B $\Rightarrow BN = BC$ (1)

ΔBFC có $FBC = 40^\circ, FCB = 70^\circ$ nên $BFC = 70^\circ$

Vậy ΔBFC cân tại B $\Rightarrow$ $BC = BF$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra BN = BF (3). Kéo dài BC lấy điểm M sao cho BM = BA

$\Rightarrow \Delta ABM$ đều.

Xét ΔABN và ΔMBF có AB = MB, BN = BF (do (3)), $ABN = FBM = 40^\circ$, do đó $\Delta ABN = \Delta MBF$ (c.g.c). Mà ΔABN cân tại N, suy ra ΔMBF cân tại F. Từ AB = AM (do ΔABM đều), $FB = FM \Rightarrow \Delta ABF = \Delta AMF$ $c.c.c$, suy ra $BAF = MAF$.

Mặt khác, ΔABM đều nên AF vuông góc với BC.

* *Nhận xét:*

- Bài toán này tương đối khó vì phải vẽ thêm nhiều đường phụ.
- Ngoài cách giải trên đây, có thể dựng thêm tam giác đều BCK hoặc tam giác đều AFH, cũng đi đến kết luận của bài toán.

C. Bài tập vận dụng

12.1. Cho ΔABC (AB = AC), trên cạnh AB lấy điểm D, trên phần kéo dài của cạnh AC lấy điểm E sao Cho BD = CE. Gọi F là giao điểm của DE và BC. Chứng minh DF = FE

12.2. Cho ΔABC có $B = 45°; A = 15°$. Trên tia đối của tia CB lấy D sao cho CD = 2.CB. Tính ADB

12.3. Ở trong góc nhọn xOy vẽ Oz sao cho $xOz = \frac{1}{2} yOz$. Qua điểm A thuộc Oy vẽ AH vuông góc Ox cắt Oz ở B. Trên tia Bz lấy D sao cho BD = OA. Chứng minh tam giác AOD cân.

12.4. Cho ΔABC có $ABC = 50°; BAC = 70°$. Tia phân giác góc ACB cắt AB tại M. Trên MC lấy điểm N sao cho $MBN = 40°$. Chứng minh rằng: $BN = MC$

12.5. Cho tam giác đều ABC. Trên tia đối của tia CB, lấy điểm D sao cho $CAD = 15°$. Đường vuông góc với BC tại C cắt AD ở E. Tia phân giác của góc B cắt AD ở K. Chứng minh rằng AK = ED.

12.6. Cho tam giác ABC với trung điểm M của BC. Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh C bờ là đường thẳng AB kẻ đoạn thẳng AE vuông góc với AB sao cho AB = AE. Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh B bờ là đường thẳng AC kẻ đoạn thẳng AF = AC và AF vuông góc với AC. Chứng minh rằng $EF = 2AM$ và $EF \perp AM$.

12.7. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi E là trung điểm của cạnh AC. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với BE cắt BC tại D. Chứng minh rằng AD = 2ED.

12.8. Về phía ngoài của tam giác ABC, dựng tam giác XBC cân tại X có góc BXC bằng $120°$ và các tam giác YCA, ZAB đều. Chứng minh XA vuông góc với YZ.

12.9. Cho tam giác ABC vuông tại A và $ABC = 54°$.Gọi M là trung điểm của BC. Đường thẳng AM và đường phân giác trong CD của tam giác cắt nhau tại E. Chứng minh rằng CE = AB.

12.10. Cho ΔABC vuông tại A, AB < AC. Vẽ AH vuông góc với BC. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho AD = AB. Gọi I là trung điểm của BD. Chứng minh rằng $BIH = ACB$

HƯỚNG DẪN GIẢI

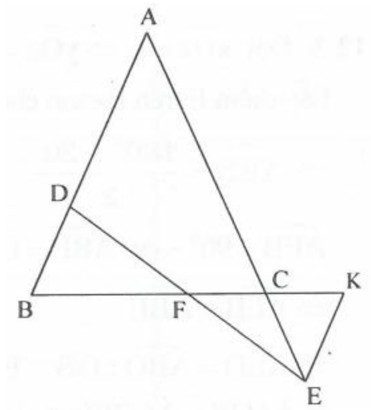
12.1. *Cách 1.* Từ D kẻ $DH // AC \quad H \in BC$ suy ra $DHB = ACB$, mà

$ABC = ACB \Rightarrow DHB = ABC \Rightarrow \Delta DHB$ cân tại D $\Rightarrow DH = DB$

$\Rightarrow DH = CE$

ΔDHF và ΔECF có $DHF = ECF, DH = CE, HDF = CEF$

Suy ra $\Delta DHE = \Delta ECF \;\; g.c.g \;\; \Rightarrow DF = FE$



- *Cách 2.* Từ E kẻ $EK // AB \;\; K \in BC$

$\Rightarrow ABC = CKE$, mà $ABC = ACB$

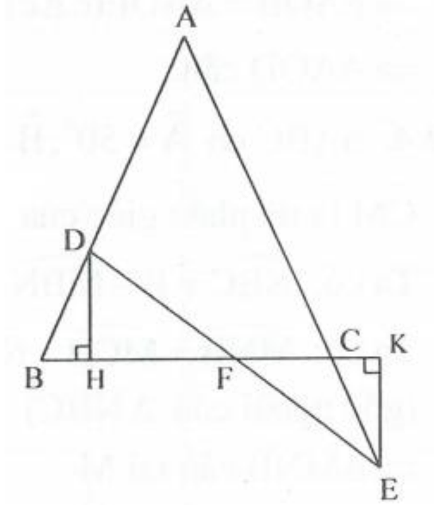
$\Rightarrow ACB = CKE \Rightarrow ECK = CKE$

$\Rightarrow \Delta ECK$ cân tại E $\Rightarrow CE = KE \Rightarrow BD = KE$

ΔBDF và ΔKEF có $DBF = EKF, BD = KE$,

$BDF = KEF$

Suy ra $\Delta BDF = \Delta KEF \;\; g.c.g \;\; \Rightarrow DF = FE$



- *Cách 3.* Hạ $DH \perp BC, EK \perp BC \quad H, K \in BC$

ΔBDH và ΔCEK có $BHD = CKE = 90^\circ$,

BD = CE, $DBH = KCE$

Suy ra $\Delta DBH = \Delta ECK$ (cạnh huyền, góc nhọn)

$\Rightarrow$ DH = EK.

ΔHDF và ΔKEF có $DHF = EKF = 90^\circ$,

DH = KE, $DFH = KFE$

Suy ra $\Delta DHF = \Delta EKF \quad g.c.g \;\; \Rightarrow DF = FE.$

Tóm lại: Chứng minh DF = EF dựa vào cặp tam giác bằng nhau, do đó cần tạo ra cặp tam giác bằng nhau.

12.2. *Tìm cách giải.* Dễ thấy $DCA = 60^\circ$ mà CD = 2.BC nên ta nghĩ tới tam giác vuông có góc nhọn 60°.

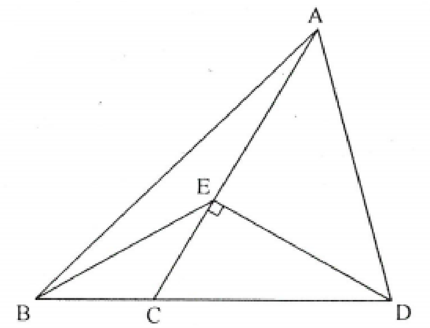
Ta hạ $DE \perp AC \Rightarrow CD = 2.CE \Rightarrow CE = CB.$

Dễ thấy ΔBED và ΔBEA cân tại E

$\Rightarrow \Delta EAD$ cân tại E.

Từ đó tính được:

$ADE = 45^\circ, EDB = 30^\circ \Rightarrow ADB = 75^\circ$



12.3. Đặt $xOz = \alpha \Rightarrow yOz = 2\alpha$

Lấy điểm E trên Bz sao cho OE = OA ΔAEO cân tại O

$\Rightarrow AEB = \dfrac{180^\circ - 2\alpha}{2}$

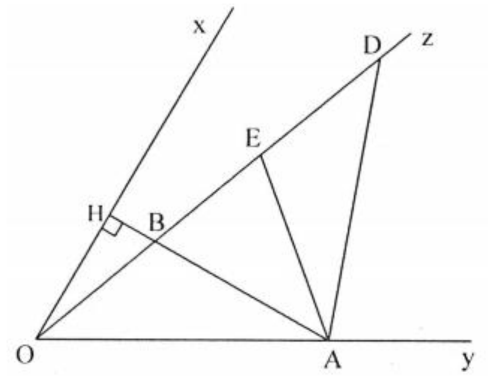
$AEB = 90^\circ - \alpha; ABE = OBH = 90^\circ - \alpha$

$\Rightarrow AEB = ABE$

$\Rightarrow AED = ABO; OB = ED; AE = AB$

$\Rightarrow \Delta AOB = \Delta ADE\ \ c.g.c\ \ \Rightarrow AO = AD$

$\Rightarrow \Delta AOD$ cân.



12.4. ΔABC có $A = 50^\circ; B = 70^\circ \Rightarrow C = 60^\circ.$

CM là tia phân giác của C nên $MCA = MCB = 30^\circ$.

Ta có: $NBC = B - MBN = 50^\circ - 40^\circ = 10^\circ.$

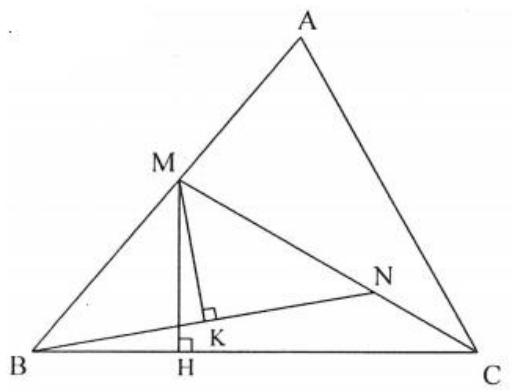
Ta có: $MNB = MCB + NBC = 30^\circ + 10^\circ = 40^\circ$

(góc ngoài của ΔNBC)

$\Rightarrow \Delta MNB$ cân tại M

Từ M vẽ $MH \perp BC$ ta có $MH = \dfrac{1}{2}MC$ (1)

Từ M vẽ $MK \perp BN \Rightarrow BK = KN = \dfrac{1}{2}BN$ (2)



Xét ΔMKB và ΔBHM có $BHM = BKM\ = 90^\circ$, BM là cạnh chung,

$MBK = BMH = 40^\circ \Rightarrow \Delta MKB = \Delta BHM$ (cạnh huyền, góc nhọn)

$\Rightarrow MH = KB$ (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow BN = MC$ (điều phải chứng minh).

12.5. Kẻ $BH \perp AD;\ CI \perp AD$.

ΔBDK có $AKB = KBD + KDB = 30^\circ + 45^\circ$

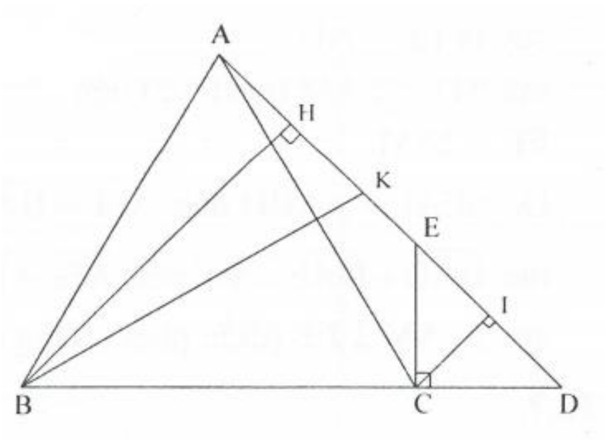
$\Rightarrow AKB = 75^\circ$

ΔABK có $BAK = AKB\ = 75^\circ$,

$BH \perp AK$ nên AH = KH

BH là tia phân giác của ABK nên

$ABH = \dfrac{1}{2}ABK = 15^\circ$



ΔCDE có $ECD = 90^\circ; CDE = 45^\circ$ nên ΔCDE vuông cân tại C.

Kẻ $CI \perp ED$ suy ra EI = ID = CI suy ra ED = 2.CI.

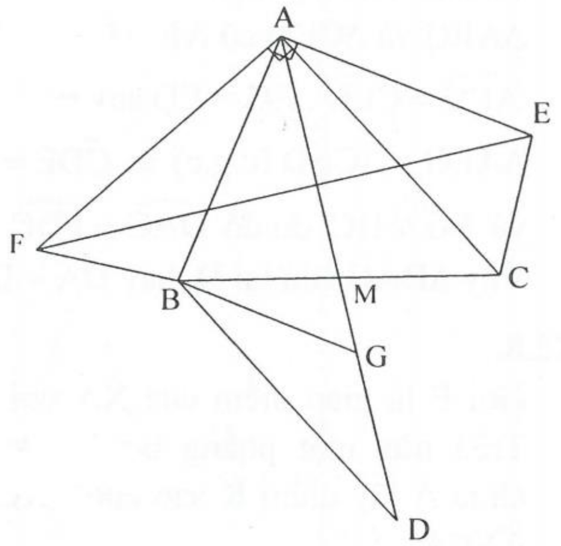
ΔAHB và ΔCIA có $AHB = CIA\ = 90^\circ$; $AB = AC; ABH = CAI\ = 15^\circ$

nên $\Delta AHB = \Delta CIA$ (cạnh huyền - góc nhọn) suy ra AH = CI. Từ đó suy ra AK = ED.

12.6. Trường hợp $BAC = 90^\circ$, kết quả là hiển nhiên.

Ta chứng minh cho trường hợp $BAC < 90^\circ$.

Trường hợp $BAC > 90^\circ$, cách chứng minh hoàn toàn tương tự.



Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho MA = MD.

Nối B với D. Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt AD tại G.

Xét hai tam giác AMC và DMB có AM = MD;

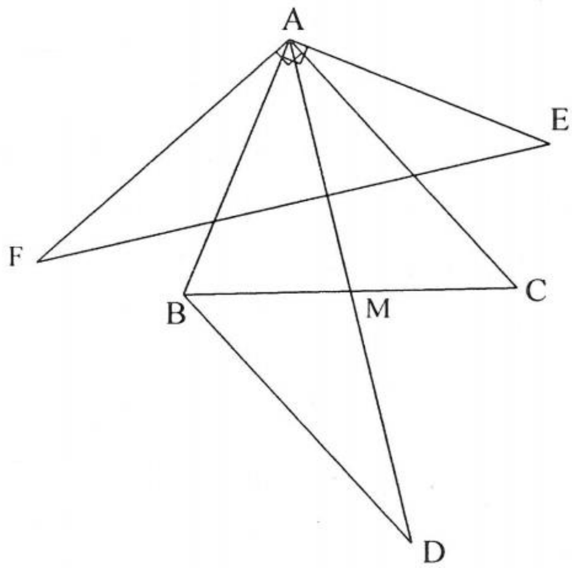
$AMC = DMB; BM = MC$

Nên $\Delta AMC = \Delta DMB$ (c.g.c), suy ra $CAM = BDM$ (1) và BD = AC.

Ta có $AE \perp AB; BG \perp AB$ nên BG // AE suy ra $EAM = BGA$ (so le trong) (2)

Mà $BGA = GBD + BDM$ và $EAM = EAC + CAM$ (3)

Nên từ (1) và (2), (3) suy ra $EAC = GBD$.



Ta có AE = AB; $EAF = ABD = 180^\circ - BAC$;

BD = AF (=AC).

Do đó $\Delta EAF = \Delta ABD$ (c.g.c)

Suy ra EF = AD,

Mà AD = 2.AM (cách vẽ) nên EF = 2AM.

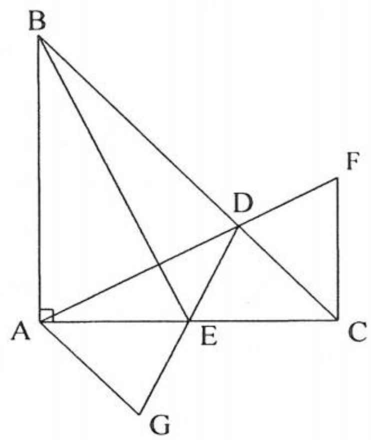
Do $\Delta EAF = \Delta ABD$ nên $AEF = BAD$

Mà $BAD + DAE = 90^\circ$ nên $AEF + DAE = 90^\circ$

Suy ra $AM \perp EF$ (điều phải chứng minh).

12.7.

Qua C vẽ đường thẳng vuông góc với AC cắt tia AD ở F.



Do AB = AC, $ABE = CAF$ (cùng phụ với góc AEB);

$BAE = ACF = 90^\circ$ nên

$\Delta BAE = \Delta ACF\ g.c.g \Rightarrow AE = CF$

$\Rightarrow CE = CF.$

Suy ra $\Delta CED = \Delta CFD\ c.g.c$

Trên tia DE lấy điểm G sao cho EG = ED,

ΔAEG và ΔCED có AE = CE,

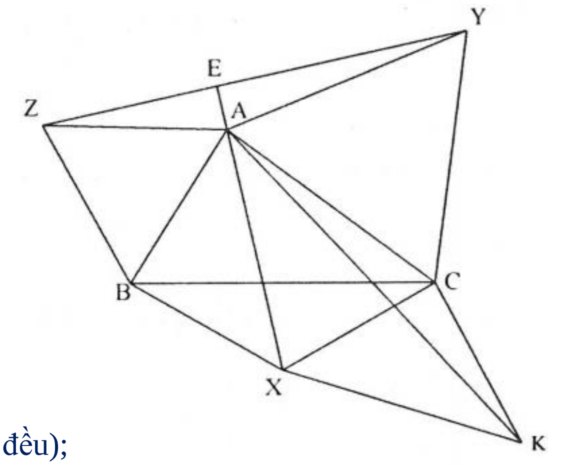
$AEG = CED, EG = ED$ suy ra

$\Delta AEG = \Delta CED \quad c.g.c \;\Rightarrow CDE = AGE$

và AG // DC, do đó $DAG = FDC$ (đồng vị) suy ra $DAG = DGA$.

Vậy ΔDAG cân tại D, hay DA = DG = 2DE (điều phải chứng minh).

12.8.



Gọi E là giao điểm của XA với YZ.

Trên nửa mặt phẳng bờ XC không chứa A lấy điểm K sao cho $\Delta XCK = \Delta XBA$.

Ta có XK = XA và $KXC = AXB$ suy ra

$AXK = BXC = 120°$

Do đó $XAK = 30°$. Mặt khác, ta có CK = BA = AZ

(vì $\Delta XCK = \Delta XBA$ và ΔABZ đều) ; CA = AY (vì ΔYCA đều);

$ACK = ACB + BCX + XCK = C + 30° + XBA$

$= C + 30° + 30° + B = 60° + \; 180° - A$

$= 240° - \; 360° - YAC - ZAB - YAZ \; = YAZ$**;**

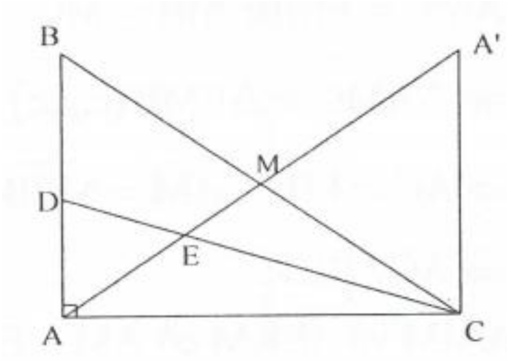
suy ra $\Delta CAK = \Delta AYZ$ (c.g.c)

do đó $CAK = AYZ = EYA$

Ta có: $EAY + CAK = 180° - \; YAC + XAK \; = 180° - \; 60° + 30° \; = 90°$

ΔEAY có $EAY + EYA = 90°$, suy ra $AEY = 90°$. Vậy $XA \perp YZ$.

12.9.



* Trên tia đối của tia MA lấy A’ sao cho MA’ = MA.

Khi đó $\Delta MCA' = \Delta MBA$ (c.g.c),

suy ra CA' = AB (1);

$MCA' = MBA = 54°$

Do đó $ACA' = ACB + BCA' = 36° + 54° = 90°$

Từ $\Delta ABC = \Delta CA'A \quad c.g.c \;\Rightarrow AA' = BC;\; MC = MA = \frac{1}{2}BC, MAC = MCA = 36°$.

Mặt khác, CD là phân giác ACB nên $ECA = 18°$, $A'EC$ là góc ngoài của tam giác AEC nên

$A'EC = EAC + ECA = 36° + 18° = 54° = EA'C$,

suy ra tam giác ECA’ cân tại C, nên CE = CA’(2)

Từ (1) và (2) suy ra CE = AB.

12.10.

Kẻ $DE \perp BC$ tại E, $DF \perp AH$ tại F.

Xét các tam giác vuông ABD và EBD

Có IB = ID nên $AI = EI = \frac{BD}{2}$.

Ta có $\Delta ABH = \Delta DAF$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow AH = DF$ (1).

$\Delta HED = \Delta DFH$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow HE = DF$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra: AH = HE. Từ đó $\Delta IHA = \Delta IHE$ (c.c.c)

$\Rightarrow IHA = IHE = 90° : 2 = 45°$. Ta có $BIH + IBH = IHE = 45°$

Mà $IBH = FDI$ (so le trong) $\Rightarrow BIH = ADF$. Lại có $ADF = ACB$ (đồng vị), suy ra $BIH = ACB$ (điều phải chứng minh).

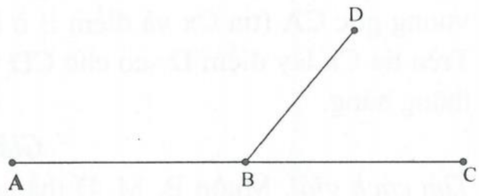
Chuyên đề 13. CHỨNG MINH
BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

A. Kiến thức cần nhớ

Ba điểm cùng thuộc một đường thẳng gọi là ba điểm thẳng hàng. Để chứng minh ba điểm thẳng hàng, chúng ta có thể sử dụng một số phương pháp sau đây:

1. Phương pháp 1.

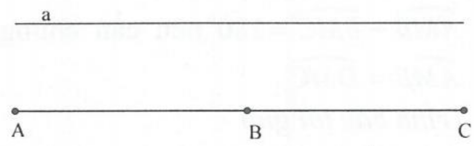
Nếu $ABD + DBC = 180^\circ$ thì ba Điểm A; B; C thẳng hàng.



2. Phương pháp 2.

Nếu AB // a và AC // a thì ba điểm A; B; C thẳng hàng.

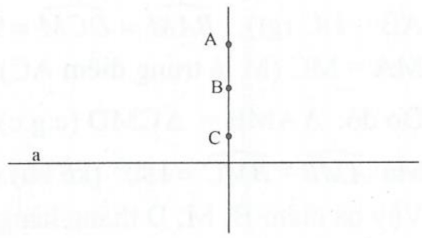
(Cơ sở của phương pháp này là: tiên đề Ơ-Clit)



3. Phương pháp 3.

Nếu $AB \perp a; AC \perp a$ thì ba điểm A; B; C thẳng hàng.

(Cơ sở của phương pháp này là: ***Có một và chỉ một đường thẳng a' đi qua điểm O và vuông góc với đường thẳng a cho trước)***



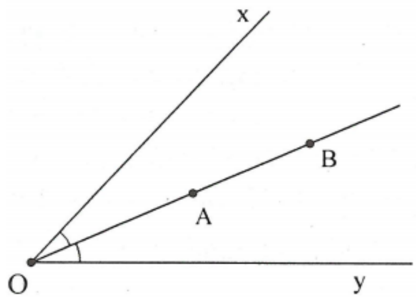
Hoặc A; B; C cùng thuộc một đường trung trực của một đoạn thẳng.

4. Phương pháp 4.

Nếu tia OA và tia OB là hai tia phân giác của góc xOy thì ba điểm O; A; B thẳng hàng.

(Cơ sở của phương pháp này là: ***Mỗi góc khác góc bẹt có một và chỉ một tia phân giác).***

*** Hoặc:** Hai tia OA và OB cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ chứa tia Ox, $xOA = xOB$ thì ba điểm O, A, B thẳng hàng.



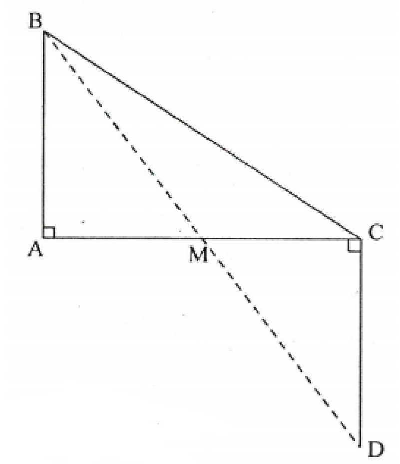
5. Nếu K là trung điểm BD, K' là giao điểm của BD và AC. Nếu K' là trung điểm BD thì $K' \equiv K$ và A, K, C thẳng hàng.

(Cơ sở của phương pháp này là: Mỗi đoạn thẳng chỉ có một trung điểm).

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông ở A, M là trung điểm AC. Kẻ tia Cx vuông góc CA (tia Cx và điểm B ở hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AC).Trên tia Cx lấy điểm D sao cho CD = AB. Chứng minh ba điểm B, M, D thẳng hàng.

Giải



* *Tìm cách giải.* Muốn B, M, D thẳng hàng cần chứng minh $BMC+CMD=180°$. Do $AMB+BMC=180°$ nên cần chứng minh $AMB=DMC$

* *Trình bày lời giải*

ΔAMB và ΔCMD có:

AB = DC (gt), $BAM=DCM=90°$,

MA = MC (M là trung điểm AC)

Do đó: $\Delta AMB=\Delta CMD$ (c.g.c), suy ra: $AMB=DMC$

Mà $AMB+BMC=180°$ (kề bù) nên $BMC+CMD=180°$

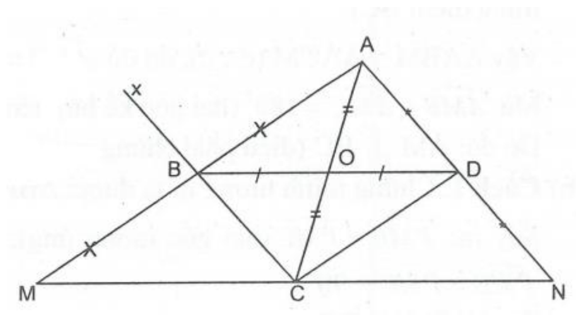
Vậy ba điểm B; M; D thẳng hàng.

Ví dụ 2. Cho hai đoạn thẳng AC và BD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đoạn. Trên tia AB lấy điểm M sao cho B là trung điểm AM, trên tia AD lấy điểm N sao cho D là trung điểm AN. Chứng minh ba điểm M, C, N thẳng hàng.

Giải

* ***Tìm cách giải.*** Chứng minh: CM // BD và CN // BD từ đó suy ra M, C, N thẳng hàng.

* ***Trình bày lời giải***



ΔAOD và ΔCOB có OA = OC

(vì O là trung điểm AC)

$AOD=COB$ (hai góc đối đỉnh)

OD = OB

(vì O là trung điểm BD)

Do đó $\Delta AOD=\Delta COB$ (c.g.c)

Suy ra: $DAO=OCB$. Mà hai góc ở vị tri so le trong,

do do: AD // BC, nên $DAB=CBM$ (ở vị trí đồng vị)

ΔDAB và ΔCBM có: AD = BC (do $\Delta AOD=\Delta COB$), $DAB=CBM$, AB = BM (B là trung điểm AM).

Vậy $\Delta DAB=\Delta CBM$ (c.g.c). Suy ra $ABD=BMC$.Do đó BD // CM. (1)

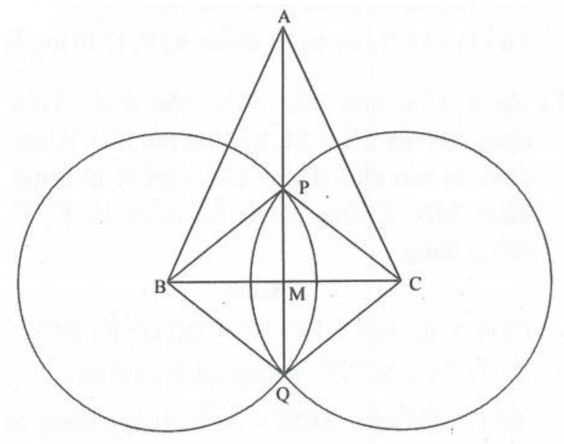
Lập luận tương tự ta được BD // CN. (2)

Từ (1) và (2), theo tiên đề Ơ-Clit suy ra ba điểm M, C, N thẳng hàng.

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có AB = AC. Gọi M là trung điểm BC.

a) Chứng minh $AM \perp BC$.

b) Vẽ hai đường tròn tâm B và tâm C có cùng bán kính sao cho chúng cắt nhau tại hai điểm P và Q. Chứng minh ba điểm A, P, Q thẳng hàng.



Giải

* *Tìm cách giải*. Chứng minh ba điểm A, P, Q thẳng hàng, chúng ta có thể:

- Chứng minh AM, PM, QM cùng vuông góc BC

- Hoặc AP, AQ là tia phân giác của góc BAC.

* *Trình bày lời giải*

a) ΔABM và ΔACM có: AB =AC (giả thiết), AM chung, MB = MC (M là trung điểm BC)

Vậy $\Delta ABM = \Delta ACM$ (c.c.c), do đó $AMB = AMC$ (hai góc tương ứng).

Mà $AMB + AMC = 180^\circ$ (hai góc kề bù) nên $AMB = AMC = 90^\circ$

Do đó: $AM \perp BC$ (điều phải chứng minh).

b) **Cách 1.** Chứng minh tương tự ta được: $\Delta BPM = \Delta CPM$ (c.c.c).

Suy ra: $PMB = PMC$ (hai góc tương ứng), mà $PMB + PMC = 180^\circ$ nên $PMB = PMC = 90^\circ$

Do đó: $PM \perp BC$.

Lập luận tương tự $QM \perp BC$.

Từ điểm M trên BC có $AM \perp BC$, $PM \perp BC$, $QM \perp BC$ nên ba điểm A, P, Q thẳng hàng (điều phải chứng minh).

- **Cách 2.** ΔBPA và ΔCPA có AB = AC, AP là cạnh chung, BP = CP (cùng bán kính) $\Rightarrow \Delta BPA = \Delta CPA$ (c.c.c) $\Rightarrow BAP = CAP$. Vậy AP là tia phân giác của BAC. (1)

ΔABQ và ΔACQ có AB = AC, AQ là cạnh chung, BQ = CQ (cùng bán kính) $\Rightarrow \Delta ABQ = \Delta ACQ$ (c.c.c) $\Rightarrow BAQ = CAQ$.

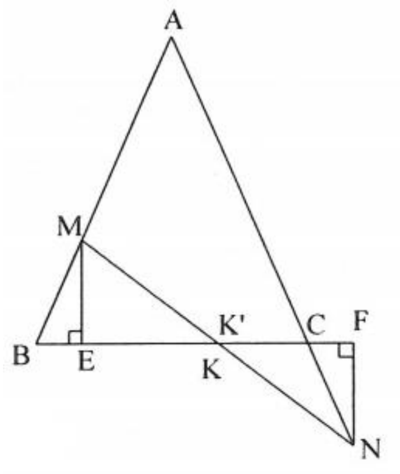
Vậy AQ là tia phân giác của BAC. (2)

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm A; P; Q thẳng hàng.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC cân ở A. Trên cạnh AB lấy điểm M, trên tia đối tia CA lấy điểm N sao cho BM = CN. Gọi K là trung điểm MN. Chứng minh ba điểm B, K, C thẳng hàng.

Giải

- Cách 1. Kẻ $ME \perp BC; NF \perp BC\ \ E; F \in BC$



ΔBME và ΔCNF vuông tại E và F có:

BM = CN (gt), $MBE = NCF$ (cùng bằng ACB)

Do đó: $\Delta BME = \Delta CNF$ (cạnh huyền-góc nhọn)

Suy ra: ME = NF.

Gọi K' là giao điểm của BC và MN.

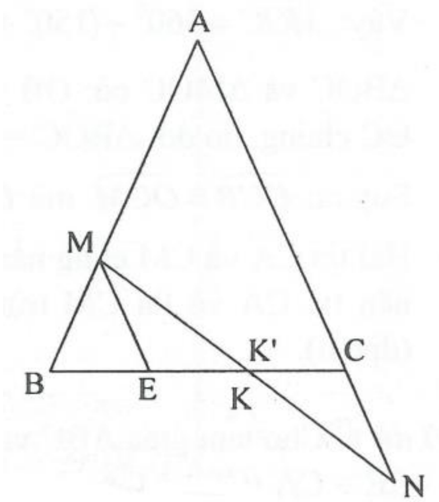
$\Delta MEK'$ và $\Delta NFK'$ vuông ở E và F có: ME = NF (cmt), $EMK' = FNK'$ (so le trong của ME // FN). Vậy $\Delta MEK' = \Delta NFK'$ (g-c-g).

Do đó: $MK' = NK'$.

Vậy K' là trung điểm MN, mà K là trung điểm MN nên $K = K'$

Do đó ba điểm B, K, C thẳng hàng.

- *Cách 2.* Kẻ ME // AC ($E \in BC$)



$\Rightarrow ACB = MEB$ (hai góc đồng vị)

Mà $ACB = ABC$ nên $MBE = MEB$

Vậy ΔMBE cân ở M.

Do đó: MB = ME, kết hợp với giả thiết MB = NC ta được ME = CN.

Gọi K' là giao điểm của BC và MN.

$\Delta MEK'$ và $\Delta NCK'$ có: $K'ME = K'NC$ (so le trong của ME //AC)

ME = CN (chứng minh trên), $MEK' = NCK'$ (so le trong của ME //AC).

Do đó: $\Delta MEK' = \Delta NCK'$ (g.c.g) $\Rightarrow MK' = NK'$

Vậy K' là trung điểm MN, mà K là trung điểm MN nên $K \equiv K'$.

Do đó ba điểm B, K, C thẳng hàng.

- *Lưu ý.* Cả hai cách giải trên, có nhiều bạn chứng minh $\Delta MEK = \Delta NCK$ vô tình thừa nhận B, K, C thẳng hàng, việc chứng minh nghe có lý lắm nhưng không biết là chưa chính xác.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC cân ở A, $BAC = 108°$. Gọi O là một điểm nằm trên tia phân giác của góc C sao cho $CBO = 12°$. Vẽ tam giác đều BOM (M và A cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ BO). Chứng minh ba điểm C, A, M thẳng hàng.

Giải

* *Tìm cách giải.* Chứng minh $OCA = OCM$ từ đó suy ra tia CA và tia CM trùng nhau.

* *Trình bày lời giải*

Tam giác ABC cân ở A nên

$ABC = ACB = \dfrac{180° - 108°}{2} = 36°$

(tính chất của tam giác cân).

Mà CO là tia phân giác của ACB ,

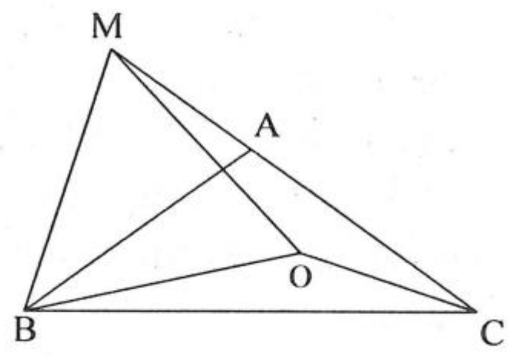
nên $ACO = BCO = 18°$. Do đó $BOC = 150°$

ΔBOM đều nên $BOM = 60°$.

Vậy: $MOC = 360° - 150° + 60° = 150°$

ΔBOC và ΔMOC có: OB = OM (vì ΔBOM đều);

$BOC = MOC = 150°$;



OC chung, do đó: $\Delta BOC = \Delta MOC$ (c.g.c)

Suy ra: $OCB = OCM$ mà $OCB = OCA$ (gt) nên $OCA = OCM$

Hai tia CA và CM cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ CO và $OCA = OCM$

nên tia CA và tia CM trùng nhau. Vậy ba điểm C, A, M thẳng hàng. (đpcm).

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC vuông tại A và $B = 60°$. Vẽ tia $Cx \perp BC$ và lấy CE = CA (CE và CA cùng phía với BC). Trên tia đối tia BC và lấy F sao cho BF = BA. Chứng minh rằng:

a) ΔACE đều;

b) E, A, F thẳng hàng.

Giải

* ***Tìm cách giải.*** Nhận thấy tam giác

ABC vuông tại A và $B = 60°$ nên

$ACB = 30° \Rightarrow ACE = 60°$

ΔCAE đều.

Do đó muốn chứng tỏ B, A, F

thẳng hàng thì chúng ta chỉ cần

chứng tỏ $BAF = 30°$.

* ***Trình bày lời giải.***

a) ABC vuông tại A và $B = 60°$ nên $ACB = 30°$

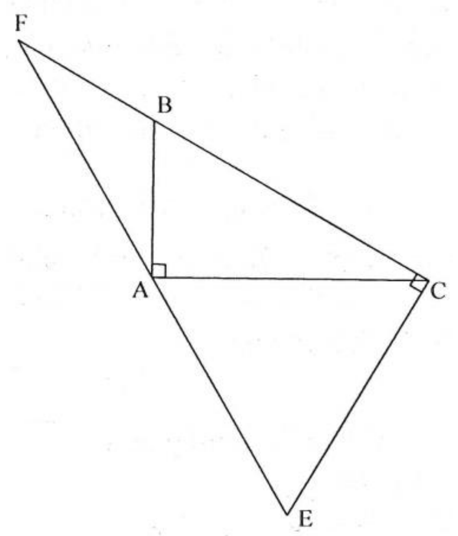
$\Rightarrow ACE = 60°$ mà CA = CB nên ΔCAE đều.

b) Ta có: BA = BF (gt) $\Rightarrow \Delta BFA$ cân $\Rightarrow ABC = 2.BAF$.

Suy ra: $BAF = 30°$.

Vậy: $FAB + BAC + CAE = 30° + 90° + 60° = 180°$

Ta suy ra ba điểm F; A; E thẳng hàng.



C. Bài Tập vận dụng

13.1. Cho tam giác ABC, M là trung điểm của BC. Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$.

a) Chứng minh rằng AC = EB và AC // BE.

b) Gọi I là một điểm trên AC; K là một điểm trên EB sao cho AI = EK.

Chứng minh ba điểm I, M, K thẳng hàng.

13.2. Cho ΔABC cân tại A, có góc $A < 90°$. Kẻ BD vuông góc với AC, kẻ CE vuông góc với AB. Gọi K là giao điểm của BD và CE. Chứng minh rằng:

a) $\Delta BCE = \Delta CBD$;

b) $\Delta BEK = \Delta CDK$;

c) AK là phân giác góc BAC.

d) Ba điểm A, K, I thẳng hàng (với I là trung điểm BC).

13.3. Cho ΔABC có AB < AC. Kẻ tia phân giác AD của BAC (D thuộc BC). Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho AE = AB, trên tia AB lấy điểm F sao cho AF = AC. Chứng minh rằng:

a) $\Delta BDF = \Delta EDC$;

b) F, D E thẳng hàng;

c) $AD \perp FC$

13. 4. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Vẽ ra phía ngoài tam giác ABC tam giác BCM cân tại M có góc ở đáy là $15°$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm C, vẽ tam giác đều ABN. Chứng minh ba điểm B, M, N thẳng hàng.

13.5. Cho tam giác ABC. Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác vuông tại A là $\Delta ADB; \Delta ACE$ có AB = AD, AC= AE. Kẻ AH vuông góc BC; DM vuông góc AH và EN vuông góc AH. Chứng minh rằng:

a) DM= AH.

b) Gọi I là trung điểm của MN. Chứng minh rằng D, I, E thẳng hàng.

13.6. Cho góc xOy. Trên hai cạnh Ox và Oy lấy lần lượt hai điểm B và C sao cho OB = OC. Vẽ đường tròn tâm B và tâm C có cùng bán kính sao cho chúng cắt nhau tại hai điểm A và D nằm trong góc xOy. Chứng minh ba điểm O, A, D thẳng hàng.

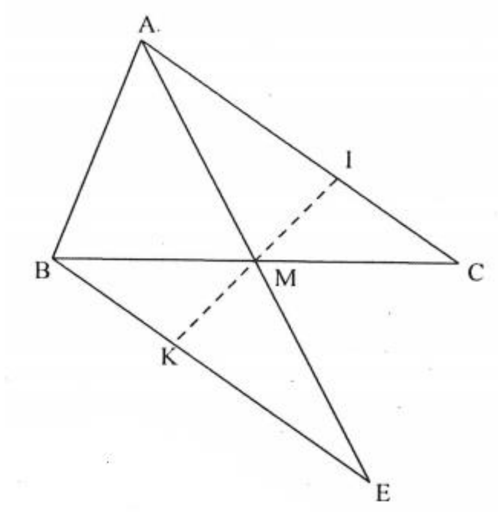
13.7. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A, vẽ các điểm D, E sao cho BD vuông góc và bằng BA, BE vuông góc và bằng BC. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng CE. Chứng minh A, D, M thẳng hàng.

13.8. Cho ΔABC vuông tại A, BC = 2AB. Gọi D là điểm trên cạnh AC sao cho $ABD = \frac{1}{3}ABC$. Lấy E là một điểm trên cạnh AB sao cho $ACE = \frac{1}{3}ACB$. BD và CE cắt nhau tại F; I và K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ F đến BC và AC. Vẽ các điểm G và H sao cho I là trung điểm của FG, K là trung điểm của FH. Chứng minh rằng ba điểm H, D, G thẳng hàng.

13.9. Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ AH vuông góc với BC tại H; $ACB = 30°$. Dựng tam giác ACD đều (D và B nằm khác phía đối với AC). Kẻ HK vuông góc với AC tại K. Đường thẳng qua H và song song với AD cắt AB kéo dài tại M. Chứng minh rằng ba điểm M, K, D thẳng hàng.

HƯỚNG DẪN GIẢI

13.1.



a) ΔAMC và ΔEMB có MA = ME,

$AMC = EMB; MB = MC$

$\Rightarrow \Delta AMC = \Delta EMB$ (c.g.c)

$\Rightarrow AC = EB; CAM = MEB$

$\Rightarrow AC // BD$.

b) ΔAIM và ΔEKM có AM = EM;

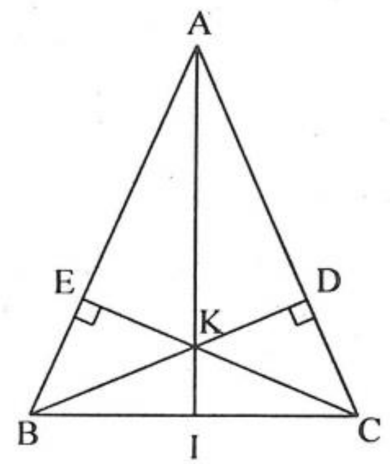
$CAM = MEB; AI = EK \Rightarrow \Delta AIM = \Delta EKM$ (c.g.c)

$\Rightarrow AMI = EMK$ mà $AMI + IME = 180° \Rightarrow EMK + IME = 180°$

$\Rightarrow$ I, M, K thẳng hàng.

13.2.

a) ΔBCE và ΔCBD có $BEC = CDB = 90°; EBC = DCB$; BC là cạnh chung



$\Rightarrow \Delta BCE = \Delta CBD$ (cạnh huyền, góc nhọn)

b) $\Delta BCE = \Delta CBD \Rightarrow BE = CD.$

ΔBKE và ΔCDK có

$BEK = CDK = 90°; BE = CD; BKE = CKD$

$\Rightarrow \Delta BKE = \Delta CKD$ (góc nhọn, cạnh góc vuông)

c) $\Delta BKE = \Delta CKD \Rightarrow KE = KD.$

ΔAEK và ΔADK có $AEK = ADK = 90°$;

AI chung; KE = KD $\Rightarrow \Delta AEK = \Delta ADK \Rightarrow EAK = DAK$

Hay AK là tia phân giác BAC (1).

d) ΔABI và ΔACI có AB = AC; AI là cạnh chung; BI = CI

$\Rightarrow \Delta ABI = \Delta ACI$ (c.c.c)

$\Rightarrow BAI = CAI$ hay AI là tia phân giác của BAC (2)

Từ (1) và (2) suy ra A; K; I thẳng hàng.

13.3.

a) ΔABD và ΔAED có AB = AE; $BAD = EAD$; AD là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta AED$ (c.g.c) $\Rightarrow BD = ED; ABD = AED$.

Mặt khác $ABD + DBF = 180°; AED + DEC = 180°$ nên $DBF = DEC$.

Ta có $AF = AC; AB = AE \Rightarrow BF = EC$.

ΔBDF và ΔEDC có BF = CF;

$DBF = DEC; DB = DE$

$\Rightarrow \Delta BDF = \Delta EDC$ (c.g.c)

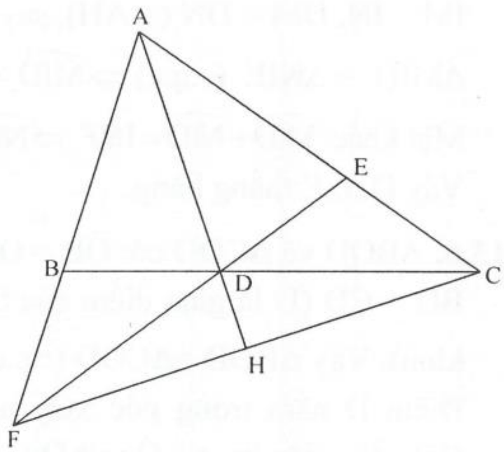
b) $\Delta BDF = \Delta EDC$

$\Rightarrow BDF = EDC$ mà

$BDF + FDC = 180°$

$\Rightarrow EDC + FDC = 180°$

$\Rightarrow F, D, E$ thẳng hàng.



c) Gọi H là giao điểm của AD và CF

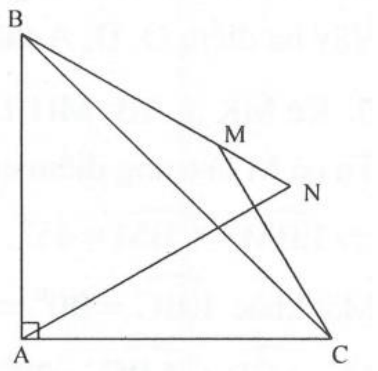
ΔAHF và ΔAHC có AF = AC; $FAH = CAH$; AH chung

$\Delta AHF = \Delta AHC$ (c.g.c) $\Rightarrow AHF = AHC$ mà $AHF + AHC = 180°$

$\Rightarrow AHF = AHC = 90°$

Vậy $AH \perp FC$ hay $AD \perp FC$.

13.4.



Gợi ý: Tính góc $ABN = 60°$

$\Rightarrow ABM = ABC + CBM = 60°$ mà BN;

BM thuộc cùng một nửa mặt phẳng

bờ AB nên tia BM trùng với tia BN.

Vậy B, M, N thẳng hàng.

13.5.

a) Ta có ΔDMA vuông tại M nên $MDA + MAD = 90°$ mà $BAH + MAD = 90°$ (vì $BAD = 90°$)

$\Rightarrow MDA = BAH$

Xét ΔDMA và ΔAHB có $DMA = AHB = 90°$;

$MDA = BAH; AD = AB$ nên $\Delta DMA = \Delta AHB$

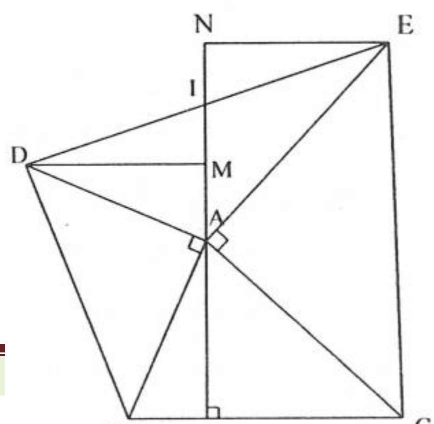
(cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow DM = AH$.

b) Chứng minh tương tự câu a, ta có:

$\Delta ANE = \Delta CHA$, suy ra AH = EN.

Xét ΔMID và ΔNIE có $IMD = INE = 90°$,

IM = IN, DM = DN (= AH), suy ra



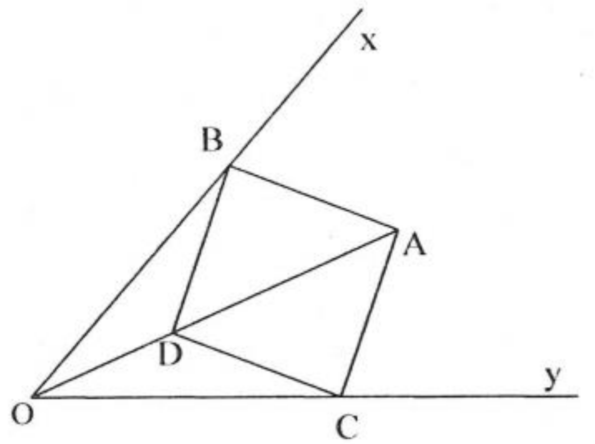
$\Delta MID = \Delta NIE$ (c.g.c) $\Rightarrow MID = NIE$.

Mặt khác $MID + NID = 180^\circ \Rightarrow NIE + NID = 180^\circ$

Vậy D, I, E thẳng hàng.

13.6. ΔBOD và ΔCOD có: OB = OC (gt); OD cạnh chung;

BD = CD (D là giao điểm của hai đường tròn tâm B và tâm C cùng bán kính). Vậy $\Delta BOD = \Delta COD$ (c.c.c), suy ra: $BOD = COD$.



Điểm D nằm trong góc xOy nên tia OD nằm giữa hai tia Ox và Oy.

Do đó OD là tia phân giác của xOy.

Chứng minh tương tự ta được OA là tia phân giác của xOy.

Góc xOy chỉ có một tia phân giác nên hai tia OD và OA trùng nhau.

Vậy ba điểm O, D, A thẳng hàng.

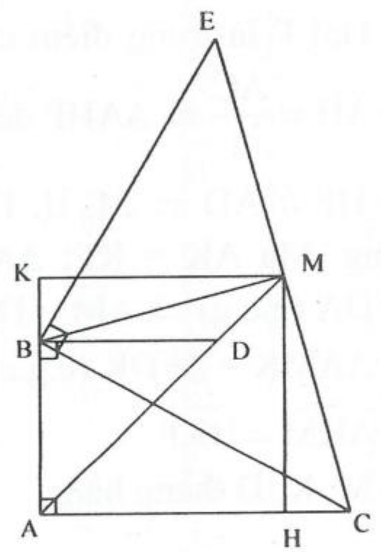
13.7. Kẻ $MK \perp AB$; $MH \perp AC$,

Ta có M là trung điểm của CE nên $\Delta BME = \Delta BMC$ (c.c.c)

$\Rightarrow EBM = CBM = 45^\circ$

Mặt khác $EBC = 90^\circ \Rightarrow KBE + ABC = 90^\circ$

Mà $ACB + ABC = 90^\circ$,suy ra: $KBE = ACB \Rightarrow KBM = HCM$.



Lại có BM = MC $\Rightarrow \Delta KBM = \Delta HCM$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow$ MK = MH

$\Rightarrow \Delta AKM = \Delta AHM$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông) $\Rightarrow KAM = HAM \Rightarrow AM$ là tia phân giác của góc A.

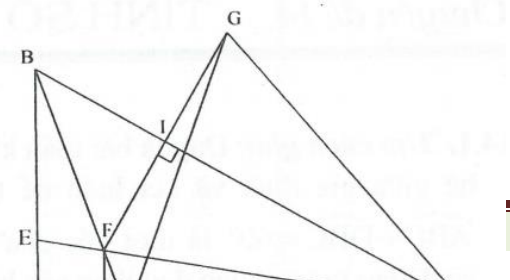
Mặt khác, ΔBAD vuông cân tại A

$\Rightarrow BAD = 45^\circ \Rightarrow$ AD là tia phân giác của góc A

$\Rightarrow$ A; D; M thẳng hàng (vì A; D; M cùng thuộc tia phân giác của góc A).

13.8. Theo đề bài ΔABC vuông tại A có BC = 2AB nên $ABC = 60^\circ; ACB = 30^\circ$.

$ABD = \frac{1}{3}ABC = 20^\circ \Rightarrow DBC = 40^\circ$



$ABD = \frac{1}{3}ABC = 10^\circ \Rightarrow BCE = 20^\circ$

ΔCIF và ΔCIG có IF = IG (gt)

$CIF = CIG = 90^\circ$; IC: cạnh chung

$\Rightarrow \Delta CIF = \Delta CIG$ (c.g.c)

$\Rightarrow CG = CF$ và $ICG = ICF = 20^\circ$

Tương tự $\Delta CKF = \Delta CKH$ (c.g.c)

$\Rightarrow CF = CH$ và $KCH = KCF = 10^\circ$

Từ đó suy ra CG = CH và $GCF + FCH = 2ACB = 60^\circ$, do đó $CHG = 60^\circ$ (1)

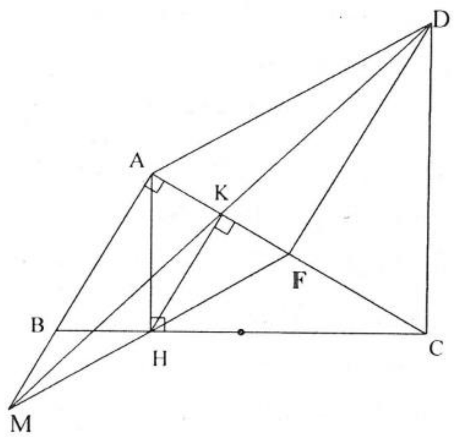
$\Delta DKF = \Delta DKH$ vì có KF = KH (giả thiết), $DKF = DKH = 90^\circ$, KD: cạnh chung, do đó DF = DH, vì thế $\Delta CDF = \Delta CDH$ (c.c.c) suy ra $CHD = CFD$.

ΔABD vuông tại A có $ABD = 20^\circ \Rightarrow ADB = 70^\circ \Rightarrow CDF = 110^\circ$

$\Rightarrow CFD = 180^\circ - CDF - FCD = 180^\circ - 110^\circ - 10^\circ = 60^\circ$ vì thế $CHD = 60^\circ$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $CHD = 60^\circ = CHG$. Mà hai tia HD, HG cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng HC nên HD trùng với HG, nghĩa là ba điểm H, D, G thẳng hàng.

13.9. Gọi F là trung điểm của AC



$\Rightarrow AH = \frac{AC}{2} \Rightarrow \Delta AHF$ đều

$\Rightarrow HF // AD \Rightarrow$ M, H, F thẳng hàng.

Mà AK = KF; $\Delta AMF = \Delta FDA$ $g.c.g$ $\Rightarrow AM = DF$

$\Rightarrow \Delta AMK = \Delta FDK$(c.g.c)

$\Rightarrow AKM = DKF$

$\Rightarrow$ M, K, D thẳng hàng.

Chuyên đề 14. TÍNH SỐ ĐO GÓC

A. Kiến thức cần nhớ

Để giải tốt bài toán tính số đo góc thì chúng ta phải nắm vững kiến thức cơ bản sau:

*** Trong tam giác:**

+ Tổng ba góc trong bằng $180°$.

+ Biết hai góc chúng ta xác định được góc còn lại.

*** Trong tam giác cân:** Biết một góc chúng ta xác định được hai góc còn lại.

*** Trong tam giác vuông:**

+ Biết một góc nhọn, chúng ta xác định được góc nhọn còn lại.

+ Cạnh góc vuông bằng nửa cạnh huyền thì góc đối diện với cạnh góc vuông đó có số đo bằng $30°$.

*** Trong tam giác vuông cân:** Mỗi góc nhọn có số đo bằng $45°$.

*** Trong tam giác đều:** Mỗi góc có số đo bằng $60°$.

***** Đường phân giác của một góc chia góc đó ra hai góc có số đo bằng nhau.

***** Hai đường phân giác của hai góc kề bù thì vuông góc với nhau.

* Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau.

* Tính chất về góc so le trong, đồng vị, trong cùng phía, của một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song.

Trong thực tế, để giải bài toán tính số đo góc, ta thường xét các góc đó nằm trong mối liên hệ với các góc ở các hình đặc biệt đã nêu ở trên hoặc xét các góc tương ứng bằng nhau,. .. rồi suy ra kết quả.

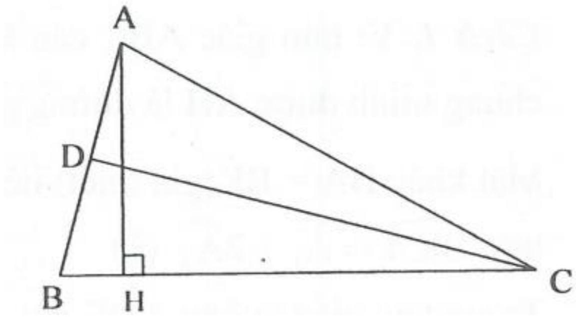
B. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Cho ΔABC, $C = 30°$. Kẻ AH vuông góc với BC tại H, biết rằng $AH = \frac{1}{2}BC$. Gọi D là trung điểm của AB. Tính số đo góc ACD?

Giải

**** Tìm cách giải.*** Xuất phát từ ΔAHC vuông có $C = 30°$ và $AH = \frac{1}{2}BC$. Với hai yếu tố này giúp chúng ta nghĩ tới tam giác vuông có một góc bằng $30°$. Với lập luận đó, chúng ta nghĩ tới việc chứng minh tam giác ABC cân. Chúng ta có thể giải theo hướng suy nghĩ đó.

**** Trình bày lời giải.***



Xét ΔAHC có $C = 30°, AHC = 90°$

$\Rightarrow AH = \frac{1}{2}AC$

Mà $AH = \frac{1}{2}BC$ (gt) $\Rightarrow AC = BC$

$\Rightarrow \Delta ACB$ cân tại $C \Rightarrow CD$ là đường phân giác của góc $C \Rightarrow ACD = 15°$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có tia phân giác góc B và góc C cắt nhau tại I. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Biết rằng BI = 2.IM và $BIM = 90°$. Tính số đo A .

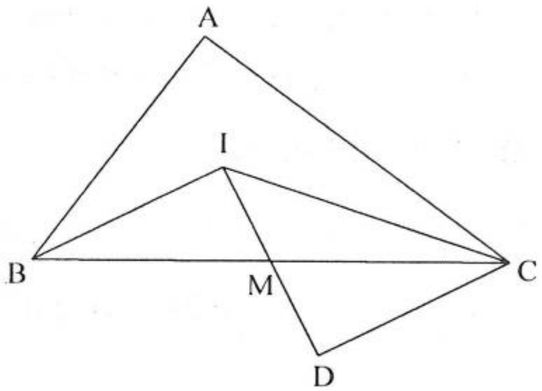
Giải

**** Tìm cách giải.*** Dựa vào **ví dụ 4, chuyên đề 7**, chúng ta biết rằng $BIC = 90° + \frac{A}{2}$. Do vậy chúng ta chỉ cần tính BIC . Mặt khác, theo giả thiết $BIM = 90°$ nên chúng ta chỉ cần tính MIC . Do MB = MC và BI = 2.IM nên dễ dàng suy luận được tạo ra điểm D sao cho M là trung điểm của ID. Từ đó chúng ta có lời giải sau:

**** Trình bày lời giải.***

Trên tia đối của tia MI lấy MD = MI. $BMI = CMD; IM = DM$

Suy ra $\Delta BIM = \Delta CDM \quad c.g.c \Rightarrow BI = CD; BIM = CDM \Rightarrow CDI = 90°$



Từ $BI = 2.IM \Rightarrow BI = ID = 2.\text{IM}$

$\Rightarrow CD = ID \Rightarrow \Delta CDI$ vuông cân tại D

$\Rightarrow CID = 45° \Rightarrow BIC = 135°$

ΔBIC có $BIC = 135°$ nên

$IBC + ICB = 45°$

BI; CI là tia phân giác B và C nên

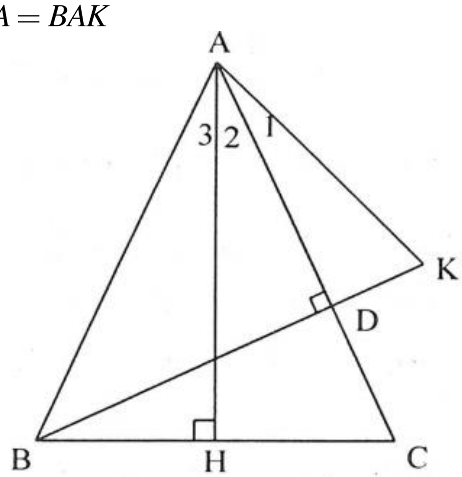
$ABC + ACB = 2.\ IBC + ICB = 90°$, suy ra $A = 90°$

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC cân ở tại A với $BAC < 90°$ và kẻ BD, AH lần lượt vuông góc với AC; BC. Trên tia BD lấy điểm K sao cho BK = BA. Tính số đo của góc HAK.

Giải

- Cách 1. Vì tam giác ABC cân tại A có AH vuông góc với BC, dễ dàng chứng minh được AH là đường phân giác của góc BAC suy ra $A_2 = A_3$.

Mặt khác BA = BK (giả thiết) nên ΔABK cân tại B, suy ra $BKA = BAK$



hay $BKA = A_1 + 2A_2$ (1)

Trong tam giác vuông ADK có:

$K + A_1 = 90°$ (2)

Thay (1) vào (2) ta được:

$2A_1 + 2A_2 = 90°$,

Suy ra $A_1 + A_2 = 45°$

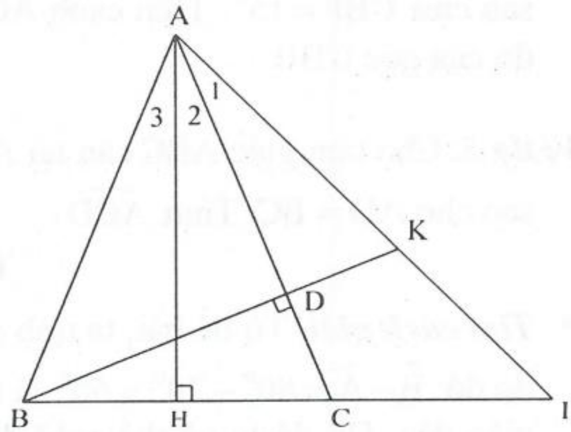
Vậy $HAK = 45°$

- Cách 2. Gọi I là giao điểm của AK và BC.

ΔBIK có $AKB = \hat{I} + CBD$ (góc ngoài tam giác)

Mà $CBD = A_2 = 90° - ACB$ nên $AKB = \hat{I} + A_2$ (1)

Ta có $KAB = IAH + A_3$ (2)



Mặt khác: $AKB = KAB$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra:

$IAH + A_3 = \hat{I} + A_2$

Lại có $A_2 = A_3 \Rightarrow IAH = \hat{I}$

suy ra ΔAHI cân tại H

$\Rightarrow HAK = 45°$

**** Nhận xét:***

- Bài toán này có nhiều cách giải. Ngoài hai cách tính trên đây, chúng ta có thể hạ $KJ \perp AH$ $J \in AH$ rồi chứng minh ΔAJK vuông cân tại J.
- Nếu $BAC > 90°$ ta có kết quả $HAK = 135°$ (bạn đọc tự chứng minh theo ý tưởng trên)

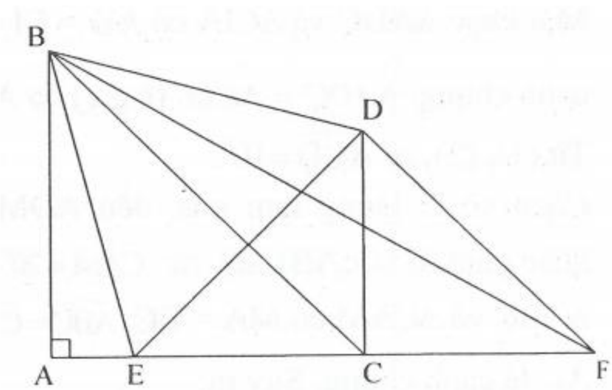
Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên tia AC lấy hai điểm E và F sao cho $ABE = 15°$ và CE = CF. Tính số đo của góc CBF.

Giải

Trên nửa mặt phẳng bờ BE chứa điểm F, dựng tam giác đều BED. Ta có $EBC = ABC - ABE = 45° - 15° = 30° \Rightarrow CBD = 30°$

Khi đó BC là tia phân giác góc EBD nên

$\Delta BCD = \Delta BCE$ (c.c.c) $\Rightarrow CD = CE = CF,$



Suy ra tam giác DEF vuông tại D. Ta có:

$DEF = 180° - AEB - BED$

$= 180° - 75° - 60° = 45°$

Vậy DEF vuông cân tại D.

Lại có.

$DFE = 45°; ACB = 45° \Rightarrow DFE = ACB$, do đó BC // DF.

Ta lại có tam giác DBF cân tại D (vì DB = DF = DE) và $BDF = BDE + EDF + 60° + 90° = 150°$ nên $DFB = DBF = 15°$, suy ra $CBF = DFB = 15°$. Vậy $CBF = 15°$

**** Nhận xét.*** Dựa vào kỹ thuật trên, chúng ta có thể giải được bài toán đảo: Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên tia đối của tia CA lấy điểm F sao cho $CBF = 15°$. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho CE = CF. Tính số đo của góc CBE.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC cân tại A có $A = 20°$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho AD = BC. Tính ACD.

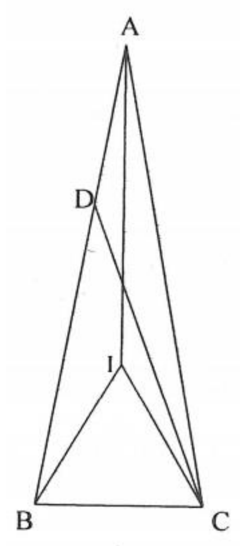
Giải

**** Tìm cách giải.*** Từ đề bài, ta tính được $B = C = 80°$ do đó $B - A = 80° - 20° = 60°$ là một góc của tam giác đều. Do đó ta có thể nghĩ đến phương pháp để vẽ đường phụ là tam giác đều.

Khi vẽ đường phụ chúng ta chú ý vẽ xuất phát điểm luôn luôn xuất hiện mối liên hệ giữa $20°; 60°; 80°$.

Sau đây là một vài cách:

**** Trình bày lời giải***



- **Cách vẽ 1.** Dựng điểm I nằm trong tam giác sao cho tam giác BIC là tam giác đều.

Ta có ΔABI và ΔACI có AB = AC, IB = IC, AI là cạnh chung

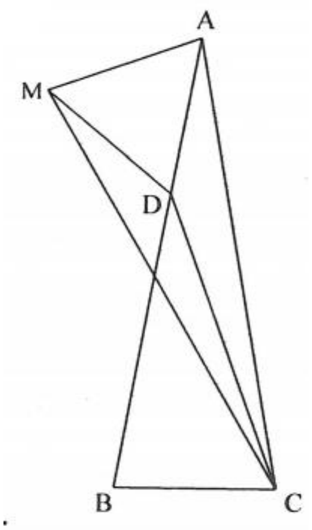
$\Rightarrow \Delta ABI = \Delta ACI$ (c.c.c)

$\Rightarrow BAI = CAI = 10°$ (1)

Mặt khác ΔADC và ΔCIA có AD = CI (= BC), $DAC = ICA = 20°$, AC là cạnh chung $\Delta ADC = \Delta CIA$ (c.g.c)

$\Rightarrow ACD = CAI$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow ACD = 10°$



- **Cách vẽ 2.** Dựng tam giác đều ADM (M và C khác phía so với AB). suy ra: $CAM = 20° + 60° = 80°$.

ΔABC và ΔCAM có MA = BC, $ABC = CAM = 80°$,

AC là cạnh chung. Suy ra:

$\Delta ABC = \Delta CMA$ $c.g.c$ $\Rightarrow ACM = 20°$ và CM = AC.

ΔADC và ΔMDC có AD = MD, AC = MC, CD là cạnh chung. Suy ra:

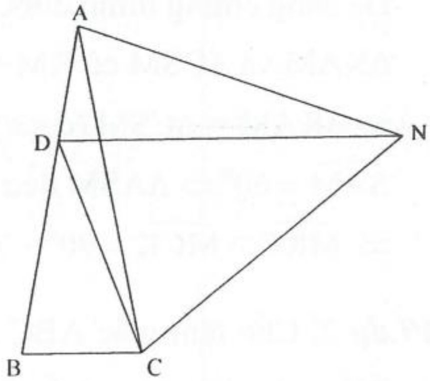
$$\Delta ADC = \Delta MDC \quad c.c.c \Rightarrow ACD = MCD = \frac{20°}{2} = 10°$$

- **Cách vẽ 3.** Dựng tam giác đều CAN (B; N khác phía so với AC) suy ra: $DAN = 20° + 60° = 80°$.

ΔABC và ΔNAD có AD = BC,

$ABC = NAD = 80°$, $AB = AN = AC$

Suy ra $\Delta ABC = \Delta NAD$ $c.g.c$



$\Rightarrow AC = ND$ và $AND = 20^\circ$

Xét ΔDNC ta có ND = NC (cùng bằng AC)

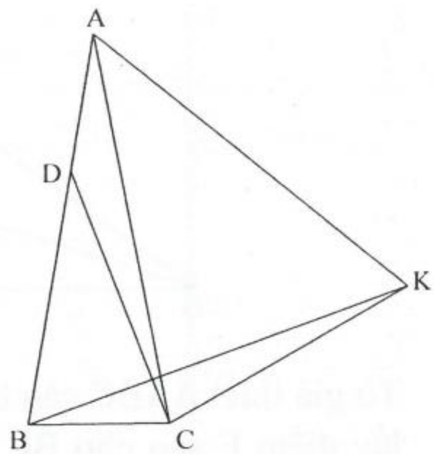
$\Rightarrow \Delta CND$ cân tại N mà

$CND = 60^\circ - AND = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$

$\Rightarrow NCD = \dfrac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ \Rightarrow ACD = 70^\circ - 60^\circ = 10^\circ$

- Cách vẽ 4. Dựng tam giác đều ABK (K; C cùng phía so với AB).

Ta có ΔACK cân tại A mà



$CAK = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$

$\Rightarrow AKC = \dfrac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$

Mặt khác: ADC và ΔBCK có AD = BC,

$DAC = CBK = 20^\circ$, $AC = AK = AB$.

Suy ra $\Delta ADC = \Delta BCK$ $c.g.c$

$\Rightarrow ACD = BKC = 70^\circ - 60^\circ = 10^\circ$

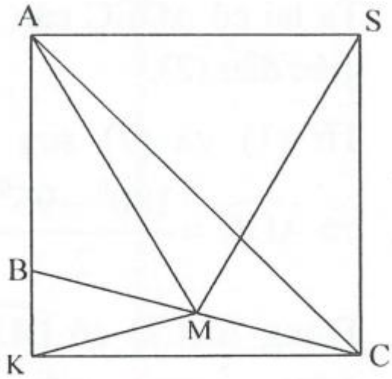
Ví dụ 6. Cho ΔABC, M là trung điểm của BC, $BAM = 30^\circ, MAC = 15^\circ$. Tính số đo góc BCA?

Giải

* ***Tìm cách giải.*** Do $BAC = 45^\circ$ nên chúng ta nghĩ tới việc dựng tam giác vuông cân. Do vậy chúng ta có thể giải như sau:

* ***Trình bày lời giải***

Kẻ $CK \perp AB$. Ta có ΔAKC vuông cân tại K



(vì $BAC = 45^\circ$)

$\Rightarrow KA = KC$. Vẽ ΔASC vuông cân tại S (K, S khác phía so với AC).

Do ΔBKC vuông tại K $\Rightarrow KM = \dfrac{1}{2}BC = MC$

$\Rightarrow \Delta KMC$ cân tại M $MKC = MCK \Rightarrow AKM = SCM$

Dễ dàng chứng minh được $\Delta KAC = \Delta SAC \Rightarrow AK = CK = CS = SA$.

ΔKAM và ΔCSM có $KM = CM, AKM = SCM,\ KA = CS$

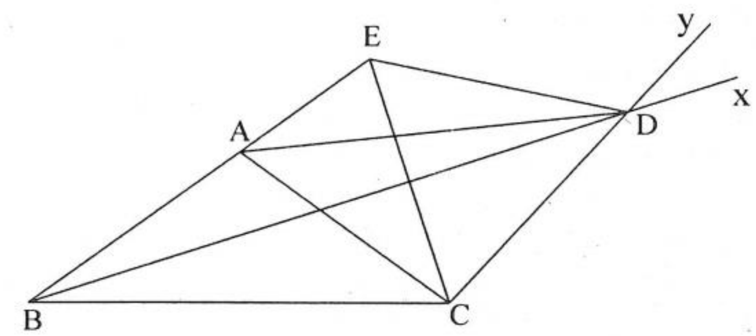
$\Rightarrow \Delta KAM = \Delta CSM$ $c.g.c$ $\Rightarrow CSM = 30^\circ \Rightarrow ASM = 60^\circ$ và

$SAM = 60^\circ \Rightarrow \Delta ASM$ đều $\Rightarrow AS = SM = AK \Rightarrow \Delta AKM$ cân tại A

$\Rightarrow MKC = MCK = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ \Rightarrow BCA = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC cân tại A có $A = 3.B$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC, chứa điểm A, vẽ tia Cy sao cho $BCy = 132°$. Tia Cy cắt tia phân giác Bx của góc B tại D. Tính số đo góc ADB.

Giải



Từ giả thiết ΔABC cân tại A và $A = 3.B$, suy ra $B = C = 36°$. Trên tia BA lấy điểm E sao cho BE = BC (E nằm ngoài đoạn AB), khi đó Bx là tia phân giác của ABC từ đó dễ dàng chứng minh được BD vuông góc với CE.

Tam giác EBC cân tại B có; $EAC = ABC + ACB = 72°$

$AEC = \dfrac{180° - 36°}{2} = 72°$. Do đó $AEC = CAE \Rightarrow \Delta ACE$ cân tại C nên CA = CE (1).

Ta lại có ΔDEC cân tại D, và $ECD = 132° - 72° = 60°$ nên ΔDEC là tam giác đều (2).

Từ (1) và (2) suy ra ΔCAD cân tại C, có $ACD = 132° - 36° = 96°$

$\Rightarrow ADC = \dfrac{180° - 96°}{2} = 42°$.

Trong ΔBCD có $BDC = 180° - 132° - 18° = 30°$, suy ra:

$ADB = ADC - BDC = 42° - 30° = 12°$. Vậy $ADB = 12°$

C. Bài tập vận dụng

14.1. Cho tam giác ABC cân tại A, $A = 80°$. Điểm D thuộc miền trong tam giác sao cho $DBC = 10°; DCB = 30°$. Tính số đo ADB .

14.2. Cho tam giác vuông ABC vuông cân tại A. Điểm D thuộc miền trong tam giác sao cho $ADC = 150°$ và tam giác DAC cân tại D. Tính số đo ADB

14.3. Cho $\Delta ABC, B = 45°; A = 15°$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho CD = 2BC. Vẽ $DE \perp AC$ $E \in AC$.

a) Chứng minh rằng: EB = ED.

b) Tính số đo ADB .

14.4. Cho tam giác ABC cân tại A có $A = 100^\circ$. Qua B dựng tia Bx sao cho $CBx = 30^\circ$. Tia phân giác của góc ACB cắt tia Bx tại D.

a) So sánh CD với CA.

b) Tính số đo của góc BDA.

14.5. Cho tam giác ABC cân tại A có $A = 40^\circ$. Trên tia phân giác AD của góc A lấy điểm E sao cho $ABE = 30^\circ$; trên cạnh AC lấy điểm F sao cho $CBF = 30^\circ$

a) Chứng minh rằng: AE = AF.

b) Tính số đo của BEF.

14.6. Cho tam giác cân ABC (AB = AC) với $BAC = 20^\circ$. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $CBD = 50^\circ$, trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $BCE = 60^\circ$. Tính số đo góc CED.

14.7. Cho tam giác ABC cân có $BAC = 100^\circ$. Điểm M nằm trong tam giác sao cho $MAC = MCA = 20^\circ$. Tính số đo góc AMB.

14.8. Cho tam giác ABC với $BAC = 55^\circ, ABC = 115^\circ$. Trên tia phân giác của góc ACB lấy điểm M sao cho $MAC = 25^\circ$. Tính số đo góc BMC.

14.9. Cho tam giác ABC cân tại A có $BAC = 80^\circ$. Điểm M nằm trong tam giác sao cho $MAC = MCA = 10^\circ$. Tính số đo góc AMB.

14.10. Cho tam giác ABC cân tại A có $BAC = 80^\circ$. Gọi M là điểm nằm ngoài tam giác sao cho $MBC = 10^\circ, MCB = 30^\circ$. Tính số đo các góc $AMB; AMC$.

14.11. Cho tam giác đều ABC, điểm D nằm giữa A và B. Đường thẳng vẽ từ D vuông góc với AC cắt đường thẳng vẽ từ B vuông góc với BC tại điểm M. Gọi N là trung điểm của AD. Tính số đo góc MCN?

HƯỚNG DẪN GIẢI

14.1. ***Tìm cách giải.*** Đây là bài toán khó bởi chúng ta khó nhận ra mối quan hệ giữa giả thiết và kết luận để tìm cách giải quyết bài toán. Ta có: $ABC + DBC = 60^\circ$ là một góc của tam giác đều. Từ đó chúng ta có thể vẽ để tạo ra tam giác đều theo các hướng sau:

- *Cách 1.* Dựng tam giác đều BCM (A; M cùng phía so với BC).

ΔABM và ΔACM có AB = AC, MB = MC, MA là cạnh chung.

Suy ra $\Delta ABM = \Delta ACM$ (c.c.c)

$\Rightarrow AMB = AMC = 30^\circ$

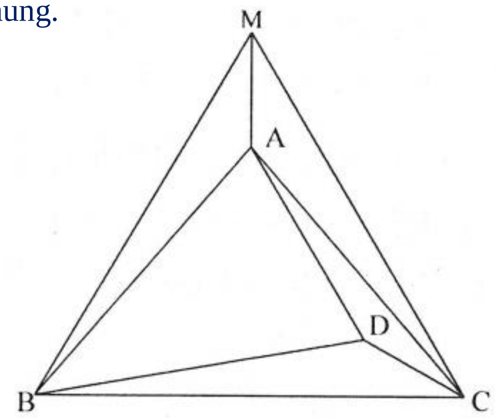
Xét ΔABM và ΔDBC có BM = BC,

$AMB = DCB = 30^\circ; ABM = DBC = 10^\circ$

$\Rightarrow \Delta ABM = \Delta DBC \;\; g.c.g \;\; \Rightarrow AB = DB$

$\Rightarrow \Delta ABD$ cân tại B

$\Rightarrow ADB = \dfrac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$



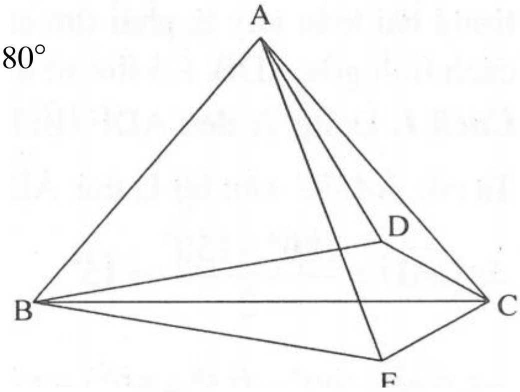
- Cách 2. Dựng tam giác đều ABE (C và E cùng phía so với AB)

Ta có: ΔACE cân tại A, mà $CAE = 20° \Rightarrow ACE = \dfrac{180° - 20°}{2} = 80°$

$\Rightarrow BCE = 80° - 50° = 30° \Rightarrow \Delta BDC = \Delta BEC$ $g.c.g$

$\Rightarrow BD = BE = BA \Rightarrow \Delta BAD$ cân tại B

$\Rightarrow ADB = \dfrac{180° - 40°}{2} = 70°$.



- Cách 3. Dựng tam giác đều ACK (B; K cùng phía so với AC)

Ta có ΔABK cân lại K, mà

$BAK = 20° \Rightarrow ABK = 80°$

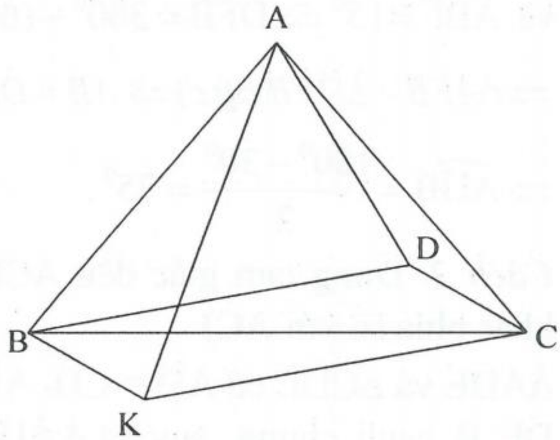
$\Rightarrow CBK = 80° - 50° = 30°$

$\Rightarrow \Delta BDC = \Delta CKB$ (g.c.g)

$\Rightarrow BD = CK \Rightarrow \Delta ABD$ cân tại B

Mà $ABD = 40°$

$\Rightarrow ADB = \dfrac{180° - 40°}{2} = 70°$



- Cách 4.

Kẻ tia phân giác của góc ABD cắt CD kéo dài tại M.

Ta có: $MBC = MCB = 30° \Rightarrow \Delta BMC$ cân tại M $\Rightarrow BMC = 120°$

Mặt khác $\Delta AMB = \Delta AMC$ c.c.c

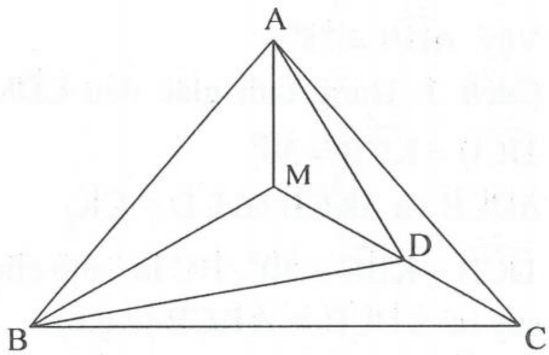
$\Rightarrow AMB = AMC = \dfrac{360° - 120°}{2} = 120°$

$\Rightarrow \Delta ABM = \Delta DBM$(c.g.c)

$\Rightarrow AB = DB \Rightarrow \Delta ABD$ cân tại B,

Mà $ABD = 40°$

$\Rightarrow ADB = \dfrac{180° - 40°}{2} = 70°$



14.2. Nhận xét. Để tính được góc ADB ta cần chứng minh tam giác ABD cân tại B. Ta có $150° - 90° = 60°$ là một góc của tam giác đều. Do vậy trong bài toán này ta phải tìm cách vẽ kẻ để tạo ra tam giác đều từ đó tìm cách tính góc ADB. Có thể vẽ đường phụ theo các cách sau:

- Cách 1. Dựng Δ đều ADF (B; F cùng phía so với AC).

Ta có: ΔADC cân tại D mà $ADC = 150°$

$\Rightarrow CAD = \dfrac{180° - 150°}{2} = 15°$

$\Rightarrow BAF = 90^\circ - 15^\circ + 60^\circ = 15^\circ$

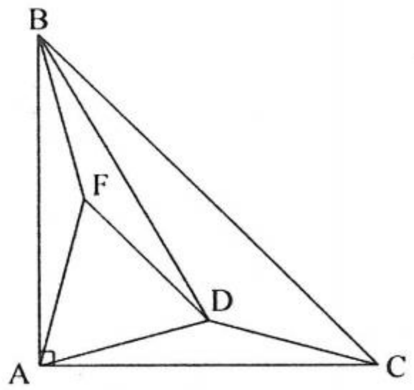
$\Rightarrow \Delta ADC = \Delta AFB \ c.g.c \ \Rightarrow AFB = 150^\circ$

Và $ABF = 15^\circ \Rightarrow DFB = 360^\circ - 60^\circ + 150^\circ = 150^\circ$

$\Rightarrow \Delta AFB = \Delta DFB \ c.g.c \ \Rightarrow AB = DB \Rightarrow \Delta ABD$ cân tại B

mà $ABD = 30^\circ$

$\Rightarrow ADB = \dfrac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$



- ***Cách 2.*** Dựng tam giác đều ACE (E; B khác phía so với AC)

ΔADE và ΔCDE có AD = CD, AB = CE,

DE là cạnh chung, suy ra

$\Delta ADE = \Delta CDE \ c.c.c \ \Rightarrow ADE = CDE = 75^\circ$

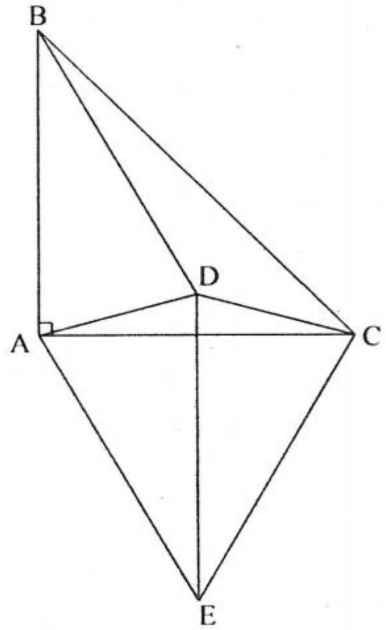
ΔADE và ΔADB có AB = AE,

$BAD = EAD = 75^\circ$, AD là cạnh chung,

suy ra $\Delta ADE = \Delta ADB$ (c.g.c)

$\Rightarrow ADE = ADB = 75^\circ$

Vậy $ADB = 75^\circ$



- ***Cách 3.*** Dựng tam giác đều CDK (K; B cùng phía so với AC) suy ra

$DCB = KCB = 30^\circ$

ΔDCB và ΔKCB có CD = CK,

$DCB = KBC = 30^\circ$, BC là cạnh chung,

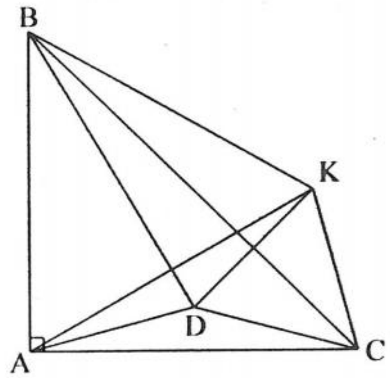
suy ra $\Delta DCB = \Delta KCB$ (c.g.c)

$\Rightarrow$ DB = KB (*)

ΔADK và ΔADC có DK = DC,

$ADK = ADC = 150^\circ$, AD là cạnh chung,

suy ra $\Delta ADC = \Delta ADK \quad c.g.c \ \Rightarrow AC = AK;\ AC = AB \Rightarrow AK = AB \quad 1$



Mặt khác: $CAD = KAD = 15^\circ \Rightarrow KAB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ \ 2$

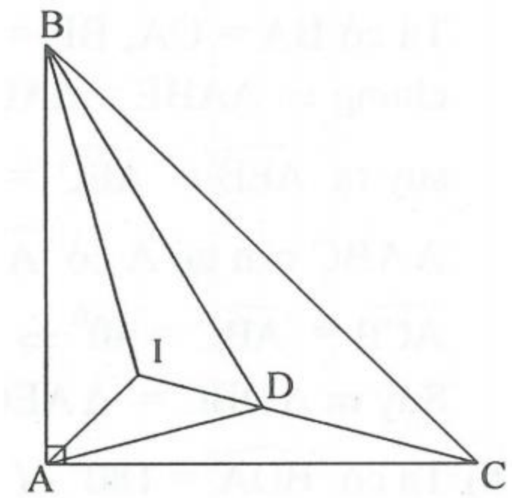
Từ (1), (2) $\Rightarrow \Delta ABK$ là tam giác đều $\Rightarrow$ BK = BA(**)

Từ (*) (**)$\Rightarrow DB = BA \Rightarrow \Delta ABD$ cân tại B

$\Rightarrow BAD = BDA = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ.$

Vậy $ADB = 75^\circ.$

- ***Cách 4.*** Dựng tia Bx sao cho $ABx = 15^\circ$ (Bx và C cùng phía so với AB).



Tia Bx cắt tia CD tại I.

Ta có ΔBIC cân tại I ($IBC = ICB = 30°$)

$\Rightarrow BI = CI \Rightarrow \Delta ABI = \Delta ACI$ (c.c.c)

$\Rightarrow BAI = CAI = 45°$ do ΔBIC cân tại I

$\Rightarrow BIC = 150° - \ 30° + 30° \ = 120°.$

Mặt khác, ΔACI có:

$ACI = 15°; CAI = 45° \Rightarrow AIC = 180° - \ 15° + 45° \ = 120°.$

Từ đó ta có: $AIB = 360° - \ 120° + 120° \ = 120°.$

Vậy $AIB = DIB = 120°$.(*)

Xét tam giác: AID có $ADI = ACD + CAD = 30°$ (Góc ngoài tam giác)

$DAI = 45° - 15° = 30° \Rightarrow \Delta AID$ cân tại $I \Rightarrow IA = ID$ (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow \Delta AIB = \Delta DIB \quad c.g.c \ \Rightarrow AB = DB$ và $ABI = DBI = 15°$

$\Rightarrow \Delta ABD$ cân tại B.

$\Rightarrow ABI = \dfrac{180° - 30°}{2} = 75°$

14.3.

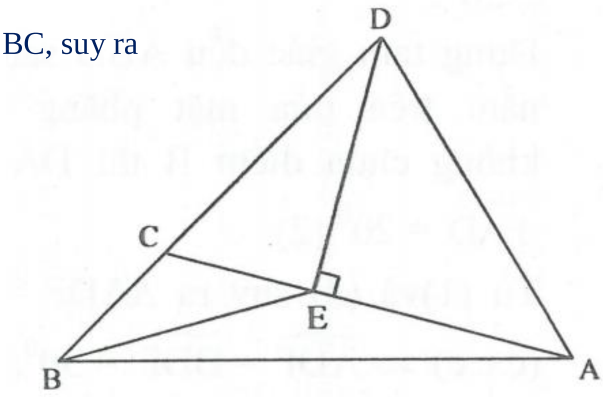
a) Ta có $ACD = ABC + BAC = 45° + 15° = 60°$

Từ đó trong tam giác ECD vuông tại E, có $CDE = 30°$ nên CD = 2CE

(theo ***ví dụ 8***, chuyên đề 9), ta lại có CD= 2BC nên CE = BC, suy ra

$CBE = 30° = CDE$

ΔEBD cân tại E suy ra EB = ED.



b) Ta có $ABE = ABC - CBE = 45° - 30° = 15° = EAB \Rightarrow \Delta EAB$ cân tại E,

ta lại có EA = EB = ED $\Rightarrow \Delta EAD$ vuông cân tại E $\Rightarrow EDA = 45°.$

Vậy $ADB = ADE + EDB = 45° + 30° = 75°$

14.4.

a) Dựng tam giác đều BEC sao cho E và

A cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC.

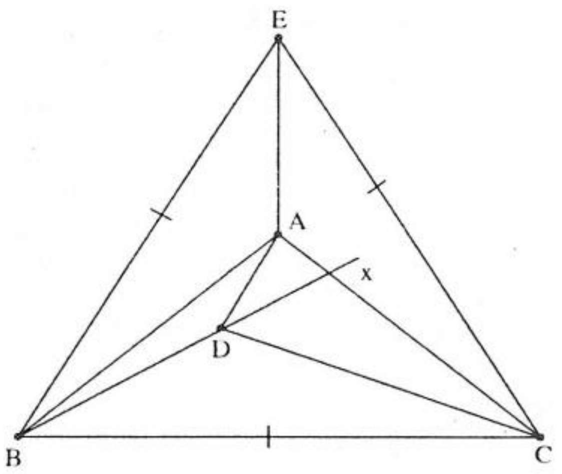
Ta có BA = CA, BE = CE, AE là một cạnh chung $\Rightarrow \Delta ABE = \Delta ACE$ (c.c.c)

suy ra $AEB = AEC = 30°$

ΔABC cân tại A có $A = 100°$ nên suy ra

$ACB = ABC = 40° \Rightarrow ECA = ACD = DCB = 20°$

Suy ra $\Delta DBC = \Delta AEC \;\; g-c-g \;\; \Rightarrow CD = CA$



b) Ta có $BDA = 180° - \;\; ABD + BAD$ (1).

Mà $ABD = ABC - DBC = 10° \;\; 2$.

$$BAD = BAC - DAC = BAC - \left(\frac{180° - ACD}{2}\right) = 100° - \left(\frac{180° - 20°}{2}\right) = 20° \;\; (3).$$

Từ (l), (2) và (3) suy ra:

$BDA = 180° - \;\; ABD + BAD \;\; = 180° - \;\; 10° + 20° \;\; = 150°.$

**** Mở rộng bài toán:*** Có thể thay kết luận bằng yêu cầu: Tính số đo các góc ADC; BAD.

14.5.

a) Ta có $FBA = 40° = BAC \Rightarrow \Delta BFA$ cân tại $F \Rightarrow FA = FB$ (1)

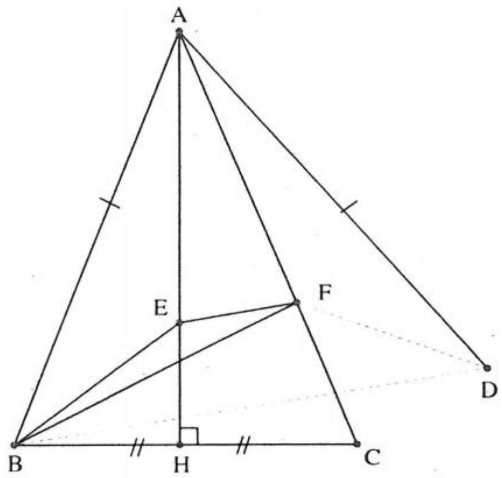
AH là phân giác của BAC nên $BAE = 20°$.

Dựng tam giác đều ABD sao cho D nằm trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B thì DA = DB,

$FAD = 20°$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta ADF = \Delta BDF$ (c.c.c) $\Rightarrow ADF = BDF = 30°.$

Từ đó dễ dàng suy ra $\Delta FAD = \Delta EAB \;\; g-c-g \;\; \Rightarrow AE = AF.$



b) Ta có $DFA = 180° - ADF - DAF = 180° - 30° - 20° = 130°$

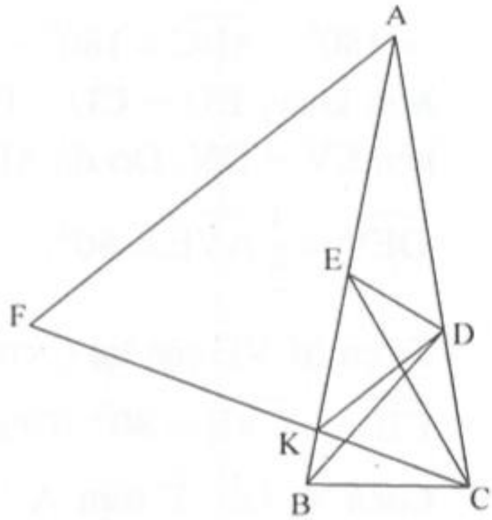
Ta có $DFA = DFB = 130°; EFA = 80°$ nên suy ra $EFB = 20°,\; EBF = 10°$

Trong ΔBFE thì $BEF = 180° - \;\; EBF + EFB \;\; = 150°.$

14.6.

- *Cách 1.* Vẽ tam giác đều ACF sao cho F nằm trên nửa mặt bờ AB không chứa điểm C

Gọi giao điểm của CF và AB là K



Ta có $BCK = 20°; ECK = 40°$;

$BKC = 180° - (CBK + BCK) = 80°$

$\Rightarrow \Delta CBK$ cân tại C $\Rightarrow CK = BC$ (1).

$BDC = 180° - (CBD + BCD) = 50°$

$\Rightarrow \Delta CBD$ cân tại C $\Rightarrow CD = BC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra CD = CK

$\Rightarrow \Delta KCD$ cân tại C và $DCK = 60°$

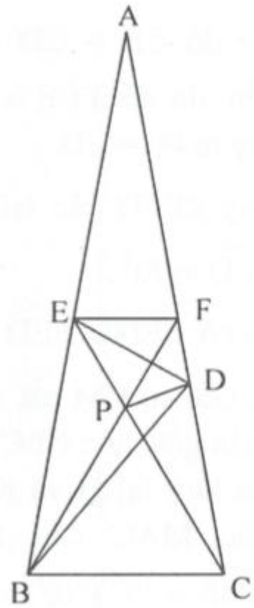
$\Rightarrow \Delta KCD$ là tam giác đều $\Rightarrow CK = DK$ (3).

ΔCKE có $KCE = KEC = 40°$ nên ΔCKE cân tại K $\Rightarrow CK = EK$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $EK = DK \Rightarrow \Delta EKD$ cân tại K và có

$EKD = 180° - (CKD + BKC) = 40°$ nên $KED = 70°$ mà $BEC = 40°$

$\Rightarrow CED = 30°$



- ***Cách 2.*** Vẽ EF // BC (F thuộc AC). Gọi P là giao điểm của BF và CE, do $BCE = 60°$ nên ΔBPC đều $\Rightarrow CP = CB$ (1).

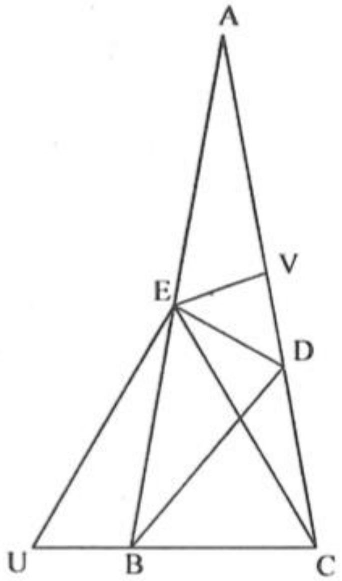
Do $CBD = CDB = 50°$ nên ΔBCD cân tại C, dẫn đễn CD = CB (2).

Từ (1) và (2) suy ra ΔDCP cân tại C nên

$CPD = 80°; DPF = 40°$. Mà $DFP = 40°$ nên ΔDPF cân DP = DF.

Từ đó $\Delta DPF = \Delta DFE$ (c.c.c)

Suy ra $PED = FED = 30°$. Hay $CED = 30°$



- ***Cách 3.*** Trên tia CA; CB lấy V và U sao cho CV = CU = CE.

Ta có CE = CU và $BCE = 60°$ nên ΔCEU đều, do đó EU = EC

và $CEU = 60°$. Vì $CEB = 40°$ nên $BEU = 20°$.

Lại có ΔACE cân nên AE = CE, do đó AE = EU.

Có $\Delta AEV = \Delta EUB (AE = EU), EAV = UEB$

$= 20°, AV = AC - CV = AB - EC = AC - AE = EB$

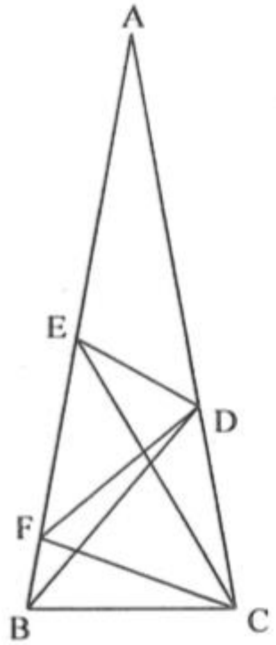
Nên EV = BU và $AVE = EBU$

$= 180° - ABC = 180° - 80° = 100°$.

Mặt khác, $BU = CU - BC = CV - CD = DV$

Nên EV = DV. Do đó ΔEVD cân tại V, suy ra

$DEV = \frac{1}{2} AVE = 50°$.



Ta có ΔCVE cân tại C có $ECV = 20°$, suy ra

$CEV = CVE = 80°$. Từ đó $CED = CEV - DEV = 80° - 50° = 30°$

- *Cách 4.* Lấy F trên AB sao cho $DCF = 60°$

$\Rightarrow FCB = 20° \Rightarrow \Delta BCF$ cân $\left(CFB = CBF = 80°\right)$,

Nên CF = CB. Ta có ΔBCD cân $\left(CBD = CDB = 50°\right)$

Suy ra CB = CD

Từ đó CF = CD mà $DCF = 60°$ nên ΔCDF đều, do đó

$FCE = 40° = FEC$ nên FE = FC, suy ra FE = FD.

Vậy ΔFED cân tại F. Vì $EFD = 40°$, suy ra $FED = 70°$.

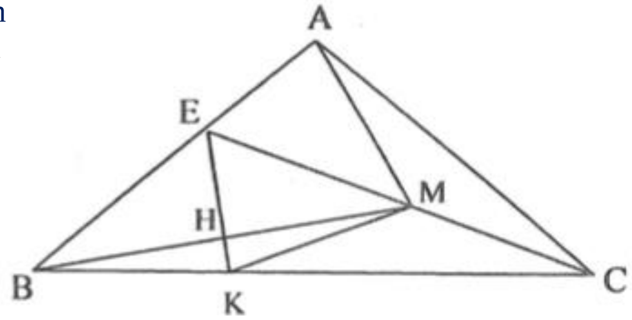
Ta có $CED = FED - FEC = 70° - 40° = 30°$.

14.7. Giả sử CM cắt AB tại E, tia phân giác góc BEC cắt BM, BC lần lượt tại H và K. Ta có tam giác MAC cân tại M, nên $AME = 20° + 20° = 40°$

Lại có $CEA = CEK = BEK = 60°$, suy ra $\Delta CEA = \Delta CEK$ (g.c.g)

$\Rightarrow \Delta MEA = \Delta MEK$ (c.g.c)

Suy ra $AME = KME = 40°$. Vì $EBK = 40°$ nên $\Delta EKB = \Delta EKM$ (g.c.g), suy ra $\Delta EHB = \Delta EHM$ (c.g.c), do đó $EHM = 90°$.



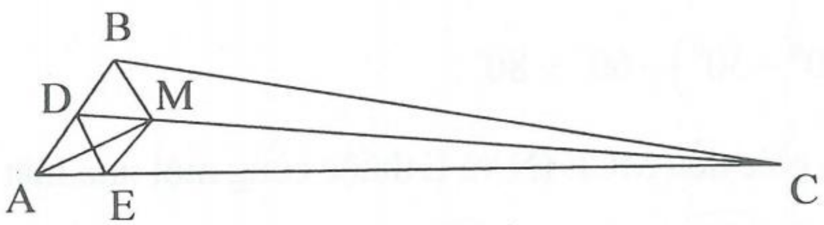
Xét tam giác HEM có $EHM = 90°, HEM = 60°$,

nên $EMH = 30°$. Do đó

$AMB = BME + EMA = 30° + 40° = 70°$.

14.8. Ta có $C = 180° - (55° + 115°) = 10°$

Kẻ $DE \perp AM \;\; E \in AC$.



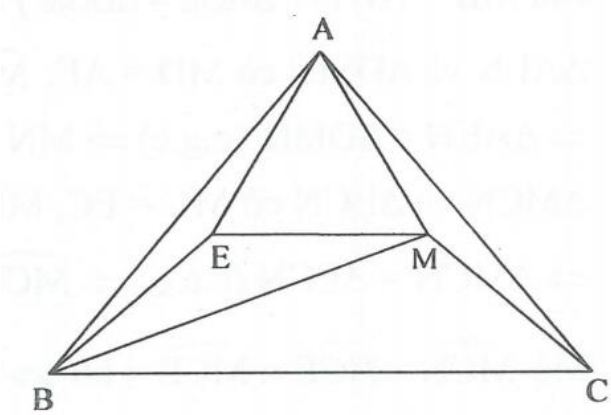
Ta có $DAM = DMA = 30° \Rightarrow \Delta DAM$ cân tại D từ đó suy ra $ADM = 120°$, và DE là đường phân giác của góc ADM nên $EDM = BDM = 60°$. Do đó $\Delta EDC = \Delta BDC$ $g.c.g$ $\Rightarrow BC = EC$.

Xét ΔBMC và ΔEMC có $BC = EC; MCB = MCE = 5°$, MC chung.

Do đó $\Delta BMC = \Delta EMC$ (c.g.c)

$\Rightarrow BMC = EMC = 180° - DME = 180° - DAE = 180° - 55° = 125°$

14.9. Vẽ tam giác AEM đều với E và B cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ AM.



Ta có $BAE = 80° - 10° - 60° = 10°$

ΔBAE và ΔCAM có AB = AC,

$BAE = MAC = 10°$, $AE = AM$

Suy ra $\Delta BAE = \Delta CAM$ (c.g.c)

$ABE = ACM = 10°$. Do đó

$EAB = EBA = 10° \Rightarrow AEB = 160°$

$\Rightarrow BEM = 360° - 60° - 160° = 140°$.

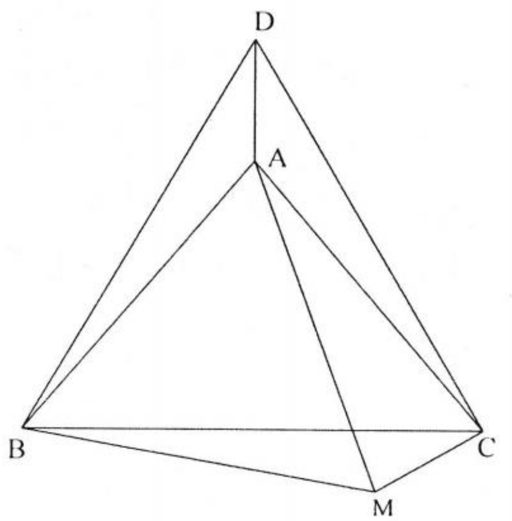
Xét tam giác BEM có BE = AE = EM nên $EBM = EMB = (180^0 - 140^{0)} : 2 = 20^0$. Do đó $AMB = 20^0 + 60^0 = 80^0$.

14.10. Dựng tam giác BCD đều với A, D cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC. Ta có $ABC = ACB = 50°$, suy ra $ABD = 10°$.

Từ $\Delta ADB = \Delta ADC$ (c.c.c)

$\Rightarrow ADB = ADC = 30°$

Từ đó $\Delta BAD = \Delta BMC$ (g.c.g), suy ra BA = BM, dẫn đến tam giác BAM đều, suy ra $AMB = 60°$ và $AMC = 180° - 10° - 30° - 60° = 80°$.



14.11. Vẽ tam giác đều MCE (N và E thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ CM).

Ta có $ACE = BCM$ (cùng + $MCA = 60°$)

ΔACE và ΔBCM có BC = AC,

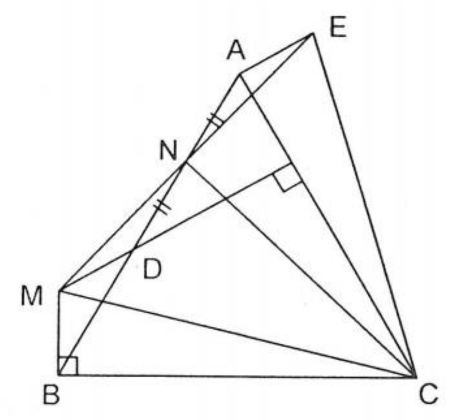
$ACE = BCM, MC = EC$

$\Rightarrow \Delta ACE = \Delta BCM$ (c.g.c)

$\Rightarrow CAE = CBM = 90°$

$\Rightarrow AE // DM$ (cùng $\perp AC$)

$\Rightarrow EAN = MDN$ (so le trong).



Ta có $MBD = MDB = 30° \Rightarrow \Delta MBD$ cân tại $M \Rightarrow MB = MD$

Mà $MB = AE$ (vì $\Delta ACE = \Delta BCM$) $\Rightarrow MD = AE$.

ΔAEN và ΔDMN có $MD = AE, MDN = EAN = 150°$

$\Rightarrow \Delta AEN = \Delta DMN$ $c.g.c$ $\Rightarrow MN = NE$

ΔMCN và ΔECN có $MC = EC, MN = EN, CN$ là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta MCN = \Delta ECN$ $c.c.c$ $\Rightarrow MCN = NCE$

Mà $MCN + NCE = MCE = 60° \Rightarrow MCN = \frac{1}{2} MCE = 30°$.

Chương III

QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC.

CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY CỦA TAM GIÁC

Chuyên đề 15. QUAN HỆ GIỮA GÓC VÀ CẠNH ĐỐI DIỆN TRONG MỘT TAM GIÁC

A. Kiến thức cần nhớ

- ***Định lí 1.*** Trong một tam giác:

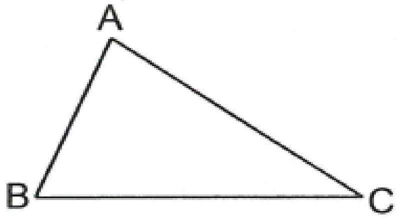
– Góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.

– Đảo lại, cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

Trong hình 15.1:

ΔABC

$AC > AB \Leftrightarrow B > C.$



Hình 15.1

Suy ra, trong một tam giác:

– Góc đối diện với cạnh nhỏ nhất là góc nhọn;

– Cạnh đối diện với góc tù (hoặc góc vuông) là cạnh lớn nhất.

- ***Định lí 2.*** Hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau

– Nếu cạnh thứ ba không bằng nhau thì góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.

– Đảo lại, nếu hai góc xen giữa không bằng nhau thì cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Chứng minh rằng nếu một tam giác vuông có một góc nhọn lớn hơn 30^o thì cạnh đối diện với góc ấy lớn hơn một nửa cạnh huyền.

Giải (h.15.2)

** Tìm cách giải.*

Giả sử tam giác ABC vuông tại A, $ABC > 30^o$,ta phải chứng minh $AC > \frac{1}{2}BC.$ Muốn vậy, phải chứng minh $2AC > BC.$

Ta tạo ra đoạn thẳng 2AC bằng cách lấy điểm D trên tia đối của tia AC sao cho $AD = AC.$ Khi đó, xét ΔBDC chỉ cần chứng minh $DC > BC$.

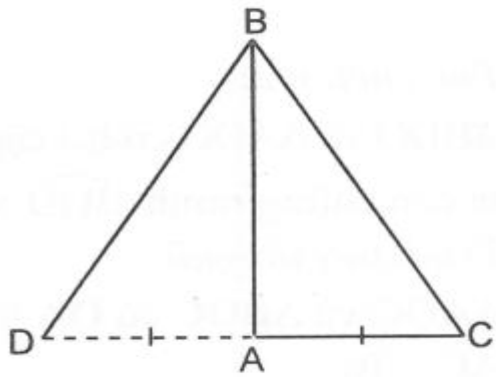
** Trình bày lời giải.*

Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho $AD = AC.$

$\Delta ABD = \Delta ABC\ (c.g.c) \Rightarrow BD = BC$ và

$ABD = ABC > 30^o.$ Suy ra $DBC > 60^o.$

ΔBCD cân có góc ở đỉnh lớn hơn 60^o nên các góc ở đáy nhỏ hơn $60^o.$



Hình 15.2

Xét ΔDBC có $DBC > D$ nên $CD > BC$ (quan hệ giữa cạnh và góc đối diện).

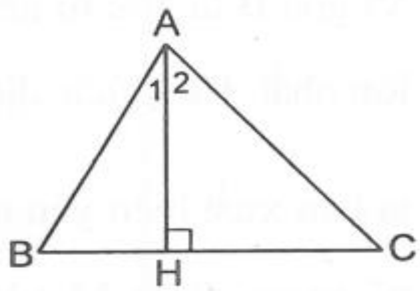
Do đó $2AC > BC$ hay $AC > \frac{1}{2}BC$.

Ví dụ 2: Tam giác ABC có góc B, góc C là những góc nhọn, $B > 45^o$; $C < 45^o$. Vẽ đường cao AH. Hãy so sánh HA, HB, HC.

Giải (h.15.3)

** Tìm cách giải.*

Ta thấy HA, HB, HC không phải là ba cạnh của một tam giác. HA và HB là hai cạnh của tam giác HAB còn HA và HC là hai cạnh của tam giác HAC. Vì vậy ta dùng HA làm trung gian để so sánh HA, HB, HC.



Hình 15.3

** Trình bày lời giải.*

Xét ΔABH có $H = 90^o; B > 45^o$ nên $A_1 < 45^o$.

Vậy $A_1 < B \Rightarrow HB < HA(1)$ (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện).

Xét ΔACH có $H = 90^o; C < 45^o$ nên $A_2 > 45^o$.

Vậy $C < A_2 \Rightarrow HA < HC(2)$ (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện).

Từ (1) và (2) suy ra $HB < HA < HC$.

Ví dụ 3: Cho hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại trung điểm O của AB. Chứng minh rằng nếu $AC > BC$ thì $BD > AD$.

Giải (h.15.4)

** Tìm cách giải.*

ΔBDO và ΔADO có hai cặp cạnh bằng nhau, do đó để chứng minh $BD > AD$ ta cần chứng minh $BOD > AOD$.

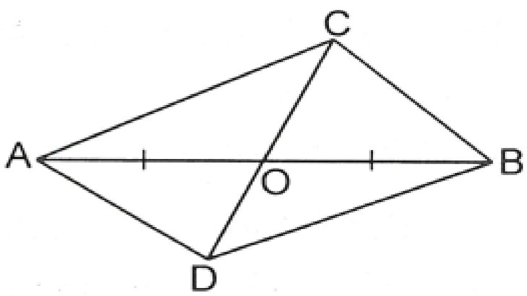
** Trình bày lời giải.*

ΔAOC và ΔBOC có OA=OB; OC chung; $AC > BC$

suy ra $AOC > BOC$ (định lí 2).

Do đó $BOD > AOD$.

ΔBOD và ΔAOD có $OB = OA$, OD chung, $BOD > AOD$. suy ra $BD > AD$ (định lí 2).



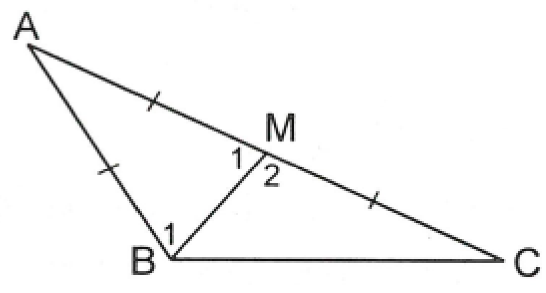
Hình 15.4

Ví dụ 4: Tam giác ABC có $B > 90^o$ và $AB = \frac{1}{2}AC$. Hãy sắp xếp ba cạnh của tam giác theo thứ tự tăng dần.

Giải (h.15.5)

** Tìm cách giải.*

Vì góc B là góc tù nên cạnh AC là cạnh lớn nhất. Khai thác điều kiện $AB = \frac{1}{2}AC$ ta làm xuất hiện yếu tố $\frac{1}{2}AC$ bằng cách vẽ trung điểm M của AC. Khi đó AB và BC là hai cạnh của hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau, do đó ta có thể dùng định lí 2.



Hình 15.5

** Trình bày lời giải.*

Xét ΔABC có $B > 90^o$ nên cạnh AC là cạnh lớn nhất, do đó $BC < AC\,(1)$

Gọi M là trung điểm của AC. Xét ΔABM có $AB = AM\left(=\frac{1}{2}AC\right)$ nên ΔABM cân $\Rightarrow B_1 = M_1 < 90^o$, do đó $M_2 > 90^o$. Vậy $M_1 < M_2$.

ΔAMB và ΔCMB có: $MA = MC$, MB chung và $M_1 < M_2$ nên $AB < BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AB < BC < CA$.

C. Bài tập vận dụng

- *Quan hệ giữa cạnh và góc đối diện trong một tam giác*

15.1. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi M là một điểm trên đường thẳng BC. Hãy so sánh AM với AB.

15.2. Cho tam giác ABC, tia phân giác của góc A cắt BC tại D. Cho biết góc ADB là góc nhọn, hãy so sánh AB và AC.

15.3. Tam giác ABC có $AB < AC$. Trên cạnh AB lấy điểm M $(M \neq B)$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa C vẽ tia Mx//AC và trên tia này lấy điểm N sao cho $MN = MB$. Chứng minh rằng $BC < NC$.

15.4. Cho tam giác ABC, $A = 60^o; B = 75^o$. Trong tam giác lấy điểm O sao cho $OAC = OCA = 15^o$. Chứng minh rằng $OA \perp OB$.

15.5. Cho tam giác ABC. Vẽ $AH \perp BC\,(H \in BC)$ và $BK \perp AC\,(K \in AC)$. Biết rằng $AH \geq BC; BK \geq AC$. Tính số đo các góc của tam giác ABC.

15.6. Trong tam giác ABC có $AB < AC$. Tia phân giác của góc A cắt BC tại D. Gọi M là một điểm trên đoạn thẳng AD. Hãy so sánh MB với MC.

15.7. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên BC lấy E và F sao cho $BAE = EAF = FAC$. Chứng minh rằng đoạn thẳng EF có độ dài nhỏ nhất trong ba đoạn thẳng BE, EF và FC.

15.8. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên BC lấy M và N sao cho $BM = MN = NC$.Chứng minh rằng góc MAN là góc lớn nhất trong ba góc BAM,MAN và NAC.

15.9. Chứng minh rằng nếu một tam giác có một góc lớn hơn 60^o thì cạnh đối diện với góc ấy lớn hơn trung bình cộng của hai cạnh còn lại.

15.10. Cho tam giác ABC vuông cân tại B. Gọi M là một điểm nằm trong tam giác sao cho $BMC > 105^o$. Chứng minh rằng $MA > \dfrac{MB + MC}{2}$.

- *Hai tam giác có hai cạnh bằng nhau*

15.11. Tam giác ABC có $AB < AC$.Trên tia đối của tia BA lấy điểm E $(E \neq B)$,trên tia đối của tia CA lấy điểm F $(F \neq C)$ sao cho $BE = CF$. Gọi D là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $DEF > DFE$.

15.12. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi M là một điểm nằm trong tam giác sao cho $ABM < ACM$. Hãy so sánh các góc AMB và AMC.

15.13. Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy điểm M nằm giữa A và B. Gọi O là trung điểm của CM. Tia AO cắt BC tại D. Chứng minh rằng $BD > CD$.

15.14. Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy điểm M nằm trong tam giác sao cho $AMB > AMC$. Tia AM cắt BC tại D. Chứng minh rằng $BD < CD$.

15.15. Cho tam giác ABC, $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của BC. Lấy điểm D nằm giữa A và C sao cho $AMD \geq 90^o$. Chứng minh rằng $MD < MB$.

15.16. Cho tam giác ABC, $A = 60^o$,tổng $AB + AC = 10cm$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

15.1.

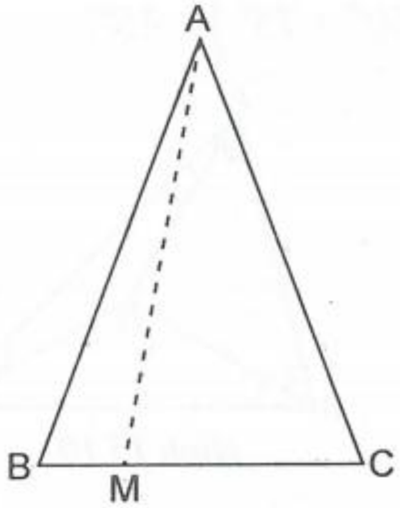
- *Trường hợp* $M \equiv B$ hoặc $M \equiv C$: Khi đó $AM = AB$.
- *Trường hợp* M *nằm giữa* B *và* C (h.15.6)

  Ta có $AMB > ACB$ (tính chất góc ngoài của tam giác).

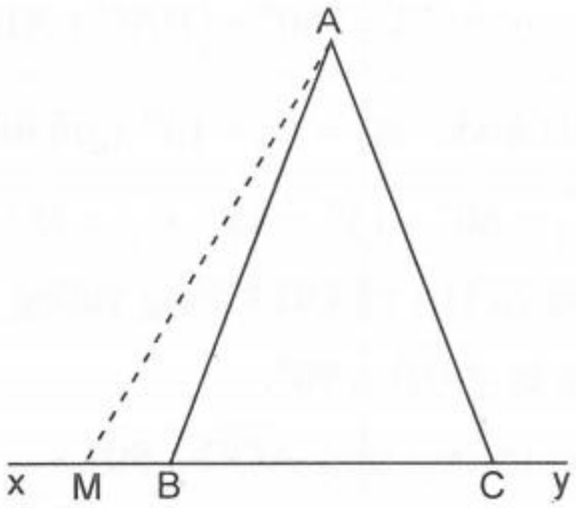
  Do đó $AMB > ABC$ (vì $ACB = ABC$).

  Xét ΔABM có $ABM < AMB$.

  Suy ra $AM < AB$ (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện).



Hình 15.6



Hình 15.7

- *Trường hợp* $M \in$ tia Bx *là tia đối của tia* BC *và* $M \neq B$ (h.15.7)

  Ta có $ABC = ACB < 90^o$ (tính chất của tam giác cân). Do đó $ABM > 90^o$.

  Xét ΔABM có ABM là góc tù nên AM là cạnh lớn nhất.

  Vậy $AM > AB$.

  Chứng minh tương tự, nếu $M \in$ tia Cy là tia đối của tia CB và $M \neq C$ thì $AM > AB$.

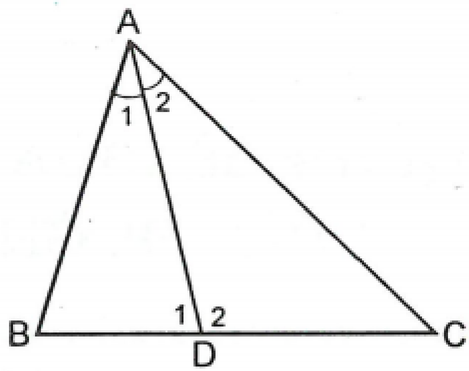
15.2. (h.15.8)

Góc ADB là góc nhọn nên góc ADC là góc tù.

ΔABD và ΔACD có $A_1 = A_2; D_1 < D_2$

nên $B > C$.

ΔABC có $B > C \Rightarrow AC > AB$ (định lí 1).



Hình 15.8

15.3. (h.15.9)

Ta có $MN // AC \Rightarrow MNC = ACN$ (so le trong).

Mặt khác, $ACN < ACB$ nên $MNC < ACB$.

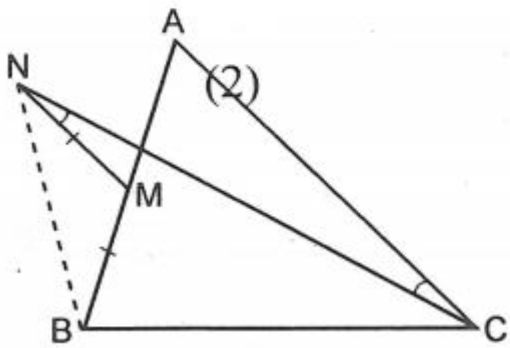
ΔABC có $AB < AC$ nên $ACB < ABC$.

Từ (1) và (2), suy ra $MNC < ABC$. (3)

Tam giác MNB cân $\Rightarrow MNB = MBN. (4)$

Từ (3) và (4), suy ra $MNC + MNB < ABC + MBN$.

Do đó $BNC < NBC \Rightarrow BC < NC$ (định lí 1).



Hình 15.9

15.4. (h.15.10)

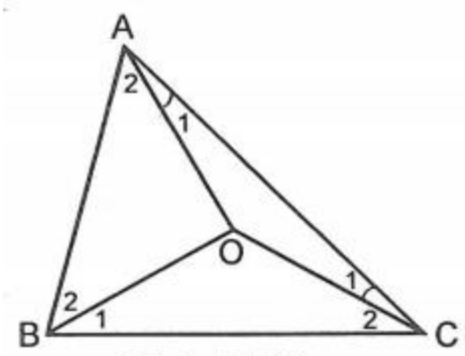
Ta có $ACB = 180^o - (BAC + ABC) = 180^o - (60^o + 75^o) = 45^o$.

Mặt khác, $A_1 = C_1 = 15^o$ (giả thiết) nên

$A_2 = 60^o - 15^o = 45^o, C_2 = 45^o - 15^o = 30^o$.

Giả sử OA và OB không vuông góc với nhau,

Tức là $AOB \neq 90^o$.



Hình 15.10

- Xét trường hợp $AOB < 90^o$

  Ta có

  $B_2 = 180^o - (AOB + A_2) = 180^o - (AOB + 45^o) > 45^o$.

  Vậy $B_2 > A_2 \Rightarrow OA > OB$ (định lí 1).

  Mặt khác, ΔAOC cân nên $OA = OC$ suy ra $OC > OB \Rightarrow B_1 > C_2$ (định lí 1).

  Từ đó ta được $B_2 + B_1 > A_2 + C_2 = 45^o + 30^o$ hay $ABC > 75^o$ (trái giả thiết).

- Xét trường hợp $AOB > 90^o$, chứng minh tương tự ta được $ABC < 75^o$ (trái giả thiết).

  Vậy $AOB = 90^o \Rightarrow OA \perp OB$.

15.5. (h.15.11)

Xét ΔAHC vuông tại H, ΔBKC vuông tại K,

Ta có: $AH \leq AC; BK \leq BC$ (1)

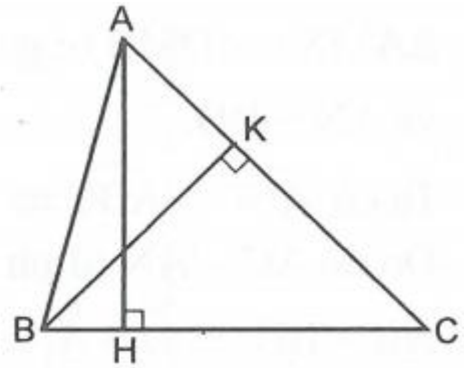
Mặt khác $BC \leq AH; AC \leq BK$ (giả thiết). (2)

Từ (1) và (2), suy ra $BC \leq AH \leq AC \leq BK \leq BC$.

Do đó $BC = AH = AC = BK$.

Vậy ΔABC phải là tam giác vuông cân tại C.

Suy ra $C = 90^o, A = B = 45^o$.



Hình 15.11

15.6. (h.15.12)

Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$.

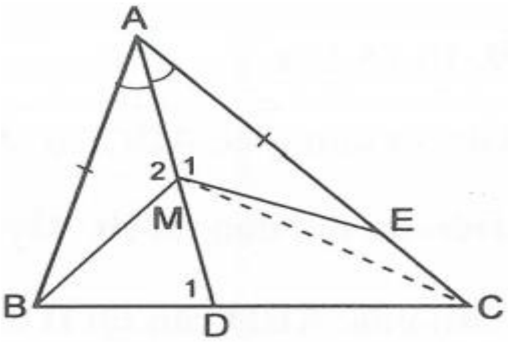
Vì $AE < AC$ nên điểm E nằm giữa A và C.

$\Delta ABM = \Delta AEM$ (c.g.c)

$\Rightarrow MB = ME$ và $M_2 = M_1$.

Xét ΔAME có MEC là góc ngoài nên $MEC > M_1$

Do đó $MEC > M_2; M_2 > D_1; D_1 > ACD; ACD > ECM$.



Hình 15.12

Xét ΔMEC có $MEC > ECM \Rightarrow MC > ME$ (định lí 1).

Do đó $MC > MB$ (vì $MB = ME$).

15.7. (h.15.13)

$\Delta ABE = \Delta ACF$ (c.g.c)

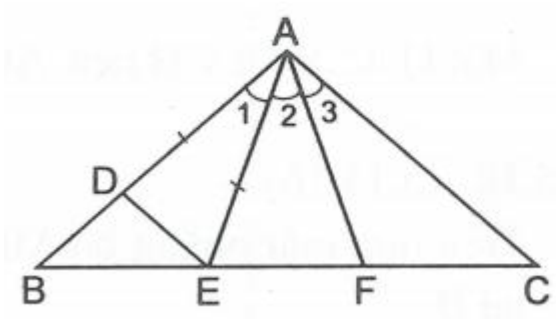
$\Rightarrow AE = AF$ và $BE = CF$. (1)

ΔAEF cân $\Rightarrow AEF < 90^o \Rightarrow AEB = 90^o$.

Xét ΔAEB có $AEB > 90^o$ nên $AB > AE$.

Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD = AE$.

$\Delta ADE = \Delta AFE$ (c.g.c) $\Rightarrow ED = EF$.



Hình 15.13

ΔADE cân $\Rightarrow ADE$ là góc nhọn $\Rightarrow BDE$ là góc tù.

Xét ΔBDE có BDE là góc tù $\Rightarrow$ BE là cạnh lớn nhất.

Do đó $BE > DE \Rightarrow BE > EF$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra EF có độ dài nhỏ nhất trong ba đoạn thẳng BE, EF và FC.

15.8. (h.15.14)

Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MA$.

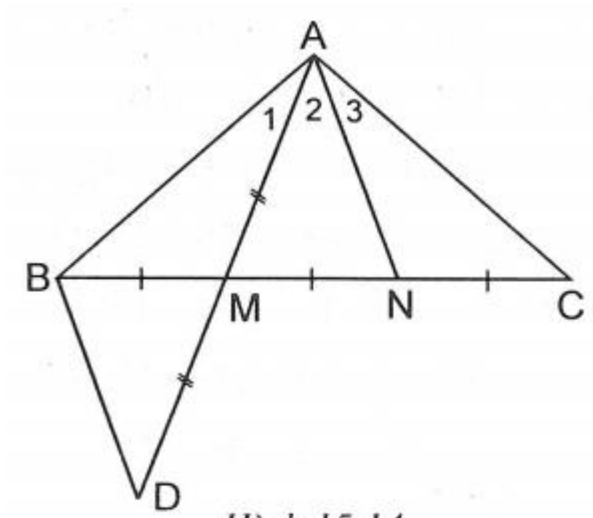
$\Delta AMN = \Delta DMB$ (c.g.c) $\Rightarrow A_2 = D$ và $AN = BD$.

Ta có $ANC > ABC \Rightarrow ANC > C$.

Do đó $AC > AN$ (định lí 1). Suy ra

$AB > BD \Rightarrow D > A_1 \Rightarrow A_2 > A_1$.

Dễ thấy $A_1 = A_3$ do đó A_2 là góc lớn nhất trong ba góc A_1, A_2, A_3.



Hình 15.14

15.9. (h.15.15)

Giả sử tam giác ABC có $ABC > 60^o$, ta phải chứng minh $AC > \frac{AB + BC}{2}$.

Trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho $BD = BA$. Vẽ $CH \perp AD$.

Tam giác ABD cân tại B $\Rightarrow ABC = 2D \Rightarrow D = \frac{ABC}{2}$.

Vì $ABC > 60^o$ nên $D > 30^o$.

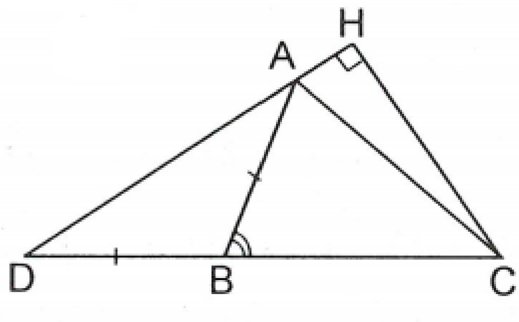
Xét ΔHCD vuông tại H,

có $D > 30^o$ nên $CH > \frac{1}{2}CD$

(xem ví dụ 1).

Mặt khác $AC \geq CH$ nên

$AC > \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}(DB + BC) = \frac{1}{2}(AB + BC)$.



Hình 15.15

15.10. (h.15.16)

Trên nửa mặt phẳng bờ MB không chứa C, vẽ tam giác BDM vuông cân tại B.

$\Delta ABD = \Delta CBM$ (c.g.c)

$\Rightarrow AD = CM$ và $ADB = BMC > 105^o$.

ΔBDM vuông cân tại B $\Rightarrow BDM = 45^o$

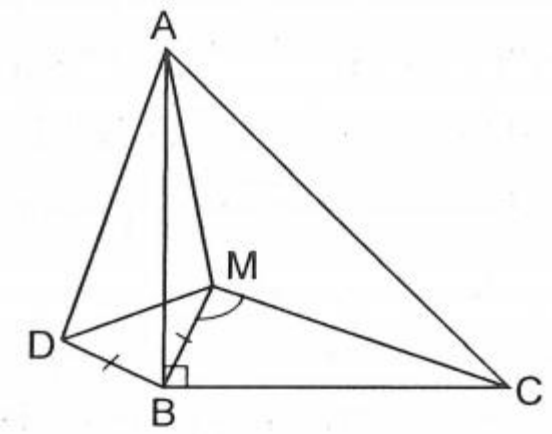
$\Rightarrow ADM > 60^o$.

Xét ΔADM có $ADM > 60^o$ nên

$MA > \frac{AD + DM}{2}$ (xem bài 15.9).

Mặt khác, $DM > MB$ (vì ΔBDM vuông) suy ra

$MA > \frac{MC + MB}{2}$.



Hình 15.16

15.11. (h.15.17)

ΔABC có $AB < AC \Rightarrow ACB < ABC$.

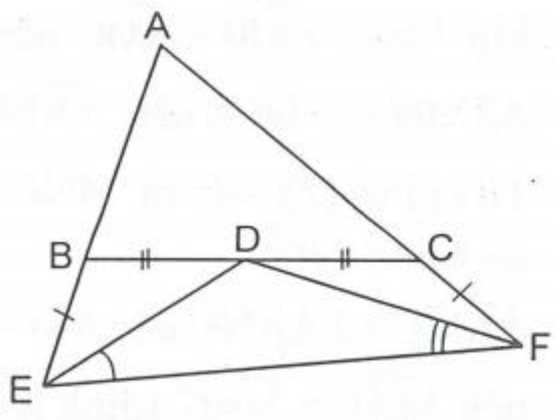
Do đó $FCB > EBC$.

ΔFCD và ΔEBD có:

$CF = BE, CD = BD$ và $FCB > EBC$

nên $DF > DE$ (định lí 2).

Xét ΔDEF có $DF > DE$ nên $DEF > DFE$ (định lí 1).



Hình 15.17

15.12. (h.15.18)

Tam giác ABC cân tại A $\Rightarrow ABC = ACB.$

Ta có $B_1 < C_1$ (giả thiết) $\Rightarrow B_2 > C_2$

$\Rightarrow MC > MB$ (định lí 1).

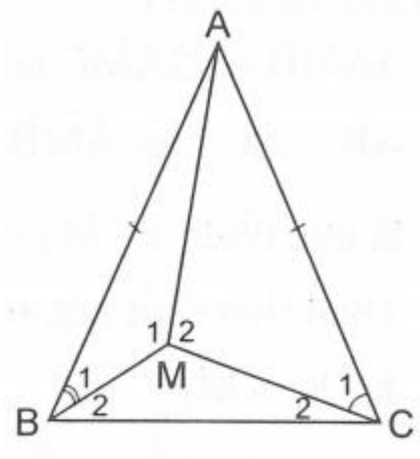
Xét ΔABM và ΔACM có: $AB = AC;$

AM chung; $MB < MC$

$\Rightarrow MAB < MAC$ (định lí 2).

Mặt khác $B_1 < C_1$ nên $MAB + B_1 < MAC + C_1.$

Do đó $M_1 > M_2.$



Hình 15.18

15.13. (h.15.19)

Trên tia đối của tia OA lấy điểm N sao cho $ON = OA.$

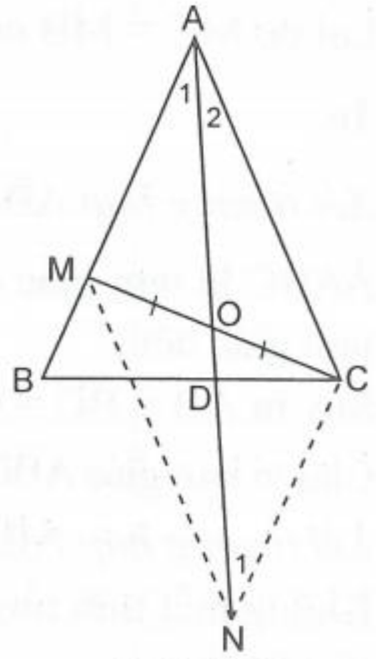
$\Delta AMO = \Delta NCO$ (c.g.c) $\Rightarrow AM = NC$ và $A_1 = N_1.$

Ta có $AB > AM \Rightarrow AC > NC.$

Xét ΔACN có $AC > NC \Rightarrow N_1 > A_2 \Rightarrow A_1 > A_2.$

ΔABD và ΔACD có: $AB = AC;$ AD chung và $A_1 > A_2$

nên $BD > CD$ (định lí 2).



Hình 15.19

15.14. (h.15.20)

Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa B, vẽ tia Ax sao cho $CAx = BAM$.

Trên tia Ax lấy điểm N sao cho $AN = AM$.

$\Delta AMB = \Delta ANC$ (c.g.c) $\Rightarrow BM = CN$ và $AMB = ANC.$

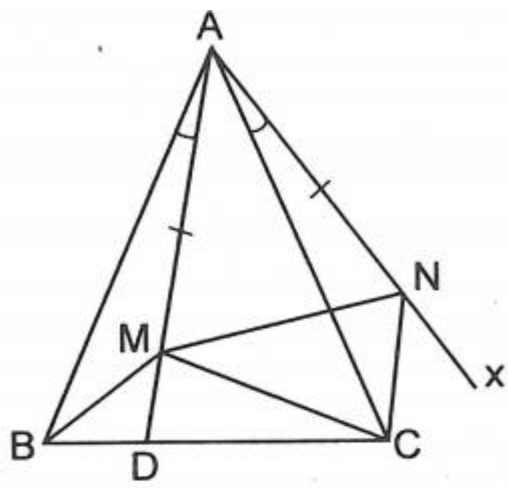
Mặt khác, $AMB > AMC$ nên $ANC > AMC.$ (1)

ΔAMN cân tại A nên $ANM = AMN.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $MNC > NMC$

$\Rightarrow MC > NC.$

ΔAMC và ΔANC có: $AM = AN$, AC chung và $MC > NC$



Hình 15.20

nên $MAC > NAC$ (định lí 2) do đó $MAC > MAB.$

ΔDAC và ΔDAB có $AC = AB,$ AD chung, $DAC > DAB$ nên $DC > DB$ (định lí 2).

15.15. (h.15.21)

ΔAMB và ΔAMC có: $MB = MC;$ MA chung và $AB < AC$

nên $AMB < AMC$ (định lí 2) $\Rightarrow M_2$ là góc nhọn

$\Rightarrow M_2 < AMD.$

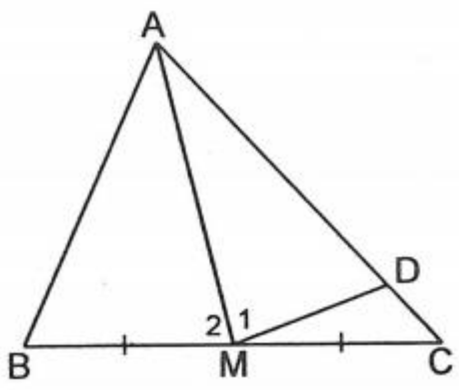
Theo tính chất góc ngoài của tam giác ta có:

$MDC > M_1.$

Mặt khác, $M_1 > M_2; M_2 > C$ nên $MDC > C.$

Xét ΔMDC có $MDC > C \Rightarrow MC > MD$ (định lí 1).

Lại do $MC = MB$ nên $MB > MD$ hay $MD < MB.$



Hình 15.21

15.16.

- *Xét trường hợp* $AB = AC$

  ΔABC là tam giác cân, có $A = 60^o$ nên là tam giác đều.

  Suy ra $AB = BC = CA = 5cm.$

  Chu vi tam giác ABC là $5 \times 3 = 15$ (cm). (1)

- *Xét trường hợp* $AB \neq AC$

  Không mất tính tổng quát, giả sử $AB < AC$ (h.15.22).

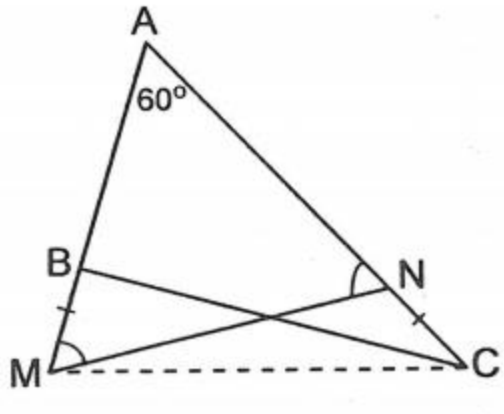
  Trên các tia AB, AC lần lượt lấy các điểm

  M và N sao cho $AM = AN = 5cm.$

  Khi đó ΔAMN là tam giác đều $\Rightarrow MN = 5cm.$

  Vì $AM + AN = AB + AC$ (= 10 cm) nên

  $AB + BM + AN = AB + AN + CN \Rightarrow BM = CN.$



Hình 15.22

  Ta có $BMC > BMN; BMN = ANM; ANM > NCM$ (tính chất góc ngoài của tam giác) suy ra $BMC > NCM.$

  ΔBMC và ΔNCM có: $BM = CN,$ MC chung và $BMC > NCM$ suy ra $BC > MN$ (định lí 2).

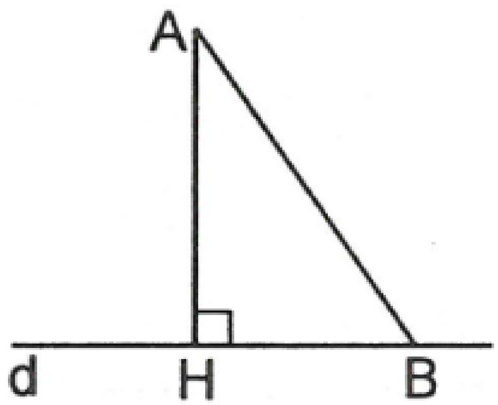
  Chu vi $\Delta ABC = AB + BC + CA = 10 + BC > 10 + MN = 15$ (cm). (2)

  Từ (1) và (2), suy ra chu vi ΔABC nhỏ nhất là 15cm, khi $AB = AC = 5cm.$

Chuyên đề 16. QUAN HỆ GIỮA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN, ĐƯỜNG XIÊN VÀ HÌNH CHIẾU

A. Kiến thức cần nhớ

- ***Khái niệm:*** Trong hình 16.1
- Điểm H gọi là hình chiếu của A trên đường thẳng d.
- Đoạn thẳng AH gọi là đường vuông góc, đoạn thẳng AB gọi là đường xiên.
- Đoạn thẳng HB gọi là hình chiếu của đường xiên AB trên đường thẳng d.



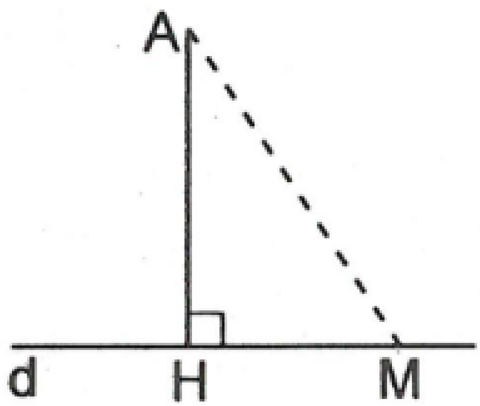
Hình 16.1

- ***Định lí 1.*** Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm ở ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó, đường vuông góc là đường ngắn nhất.

  Trong hình 16.1 ta có $AH < AB$.

  Bổ sung: Trong hình 16.2: $A \notin d; M \in d; AH \perp d$.

  Ta có $AM \geq AH$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv H$).



Hình 16.2

- Định lí 2. Trong hai đường xiên kẻ từ một điểm nằm ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó:
- Đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn;
- Đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn;
- Nếu hai đường xiên bằng nhau thì hai hình chiếu bằng nhau. Ngược lại, nếu hai hình chiếu bằng nhau thì hai đường xiên bằng nhau.

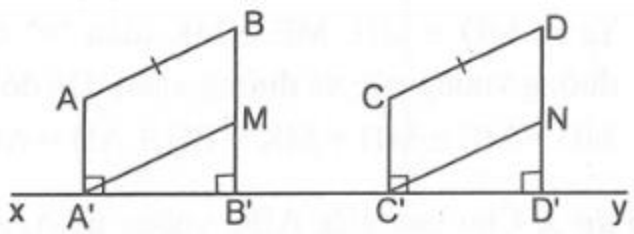
B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho hai đoạn thẳng AB và CD song song và bằng nhau. Một đường thẳng xy không song song, không vuông góc với hai đoạn thẳng đó. Hãy so sánh các hình chiếu của AB và CD trên đường thẳng xy.

Giải (h.16.3)

* Tìm cách giải.

Muốn có hình chiếu của AB và CD trên xy, ta vẽ AA', BB', CC', DD' cùng vuông góc với xy. Ta phải chứng minh $A'B' = C'D'$. Muốn vậy ta tạo ra hai tam giác bằng nhau bằng cách vẽ đường phụ.



Hình 16.3

* *Trình bày lời giải.*

Vẽ $AA' \perp$ xy, $BB' \perp$ xy, $CC' \perp$ xy, $DD' \perp$ xy. Khi đó $A'B'$ và $C'D'$ lần lượt là hình chiếu của AB và CD trên xy.

Vẽ $A'M//AB, C'N//CD$ theo tính chất đoạn chắn song song ta có $A'M = AB; C'N = CD$. Mặt khác do $AB = CD$ nên $A'M = C'N$.

$\Delta MA'B'$ và $\Delta NC'D'$ có: $B' = D'\left(=90^o\right); A'M = C'N$ và $M = N$ (hai góc có cạnh tương ứng song song cùng nhọn).

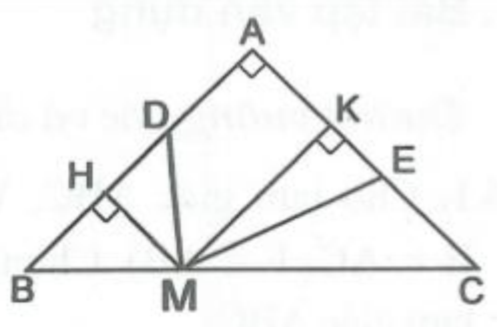
Do đó $\Delta MA'B' = \Delta NC'D'$ (cạnh huyền, góc nhọn). Suy ra $A'B' = C'D'$.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC vuông cân tại A, $BC = a\sqrt{2}$. Trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt lấy các điểm D, M, E. Chứng minh rằng $MD + ME \geq a$.

Giải (h.16.4)

* Tìm cách giải.

Ta thấy giữa các độ dài a và $a\sqrt{2}$ có sự liên hệ với nhau: $a\sqrt{2}$ là độ dài cạnh huyền của một tam giác vuông cân còn a là độ dài của cạnh góc vuông. Ta phải chứng minh $MD + ME \geq AB$.



Hình 16.4

Vì MD, ME là các đường xiên vẽ từ M đến các cạnh góc vuông AB, AC nên ta vẽ thêm các đường vuông góc từ M đến AB, AC để có thể dùng định lí về mối quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên.

* Trình bày lời giải.

Ta có: $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow 2AB^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow AB = a$.

Vẽ $MH \perp AB; MK \perp AC$, khi đó $MH \parallel AC; MK \parallel AB$ suy ra $MK = AH$ (tính chất đoạn chắn song song).

ΔHBM vuông cân $\Rightarrow MH = BH$.

Ta có $MD \geq MH; ME \geq MK$ (dấu "=" $\Leftrightarrow D \equiv H; E \equiv K$) (quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên). Do đó:

$MD + ME \geq MH + MK = BH + AH = AB = a$.

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB < AC$. Đường trung trực của BC cắt BC tại M, cắt AC tại N. Lấy điểm K trên đoạn thẳng CN. Hãy so sánh BK và CN.

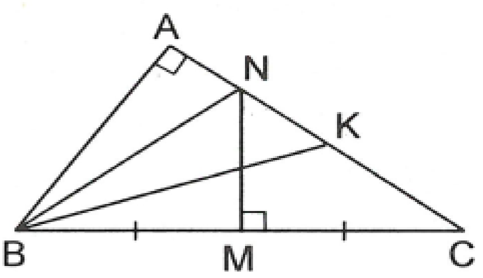
Giải (h.16.5)

* Tìm cách giải.

Ta có thể dễ dàng so sánh các đường xiên BK và BN nhờ so sánh các hình chiếu của chúng. Vậy chỉ còn phải so sánh BN với CN mà thôi.

* Trình bày lời giải.

Ta có BK và BN là các đường xiên vẽ từ B tới đường thẳng



Hình 16.5

AC, còn AK và AN là các hình chiếu

của chúng trên AC.

Vì $AK > AN$ nên $BK > BN$ (quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu) (1)

Mặt khác, $MN \perp BC$ và $MB = MC$ nên $NB = NC.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $BK > NC.$

C. Bài tập vận dụng

- *Đường vuông góc và đường xiên*

16.1. Cho tam giác ABC. Vẽ $AD \perp BC, BE \perp AC, CF \perp AB\left(D \in BC, E \in AC, F \in AB\right)$. Chứng minh rằng tổng $AD + BE + CF$ nhỏ hơn chu vi tam giác ABC.

16.2. Cho tam giác ABC, góc A tù. Qua A vẽ đường thẳng d cắt cạnh BC tại O. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ B và từ C đến đường thẳng d luôn nhỏ hơn hoặc bằng BC.

16.3. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi M là trung điểm của AC. Chứng minh rằng trung bình cộng các hình chiếu của AB và BC trên đường thẳng BM thì lớn hơn AB.

16.4. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Qua A vẽ đường thẳng xy không cắt cạnh BC. Gọi D và E thứ tự là hình chiếu của B và C trên xy.

Xác định vị trí của xy để $BD + CE = BC.$

16.5. Cho tam giác ABC và một điểm M ở trong tam giác. Biết đường trung trực của CM đi qua A. Hãy so sánh AB và AC.

16.6. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên các tia đối của BA và CA lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $BM = CN$. Chứng minh rằng:

a) $BN > \dfrac{MN + BC}{2}$;

b) $BM > \dfrac{MN - BC}{2}$.

16.7. Cho đoạn thẳng $BC = 5cm$ và trung điểm M của nó. Vẽ điểm A sao cho $BAC = 90^o$. Qua M vẽ một đường thẳng vuông góc với AM cắt các tia AB, AC lần lượt tại E và F. Xác định vị trí của điểm A để EF có độ dài ngắn nhất. Tính độ dài ngắn nhất đó.

- *Đường xiên và hình chiếu*

16.8. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ $AH \perp BC\left(H \in BC\right)$.

Cho biết $BAH < CAH$. Hãy so sánh HB với HC.

16.9. Cho tam giác ABC, $B < C < 90^o$. Chứng minh rằng với mọi vị trí của điểm M nằm giữa B và C ta luôn có $AM < AB.$

16.10. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 5, AC = 12$. Vẽ $AH \perp BC$. Gọi M là một điểm trên đoạn thẳng AH. Chứng minh rằng: $13 \le MB + MC \le 17$.

16.11. Cho tam giác ABC. Vẽ $AH \perp BC$ (H nằm giữa B và C). Lấy điểm M nằm trên AH. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của M trên AB và AC. Chứng minh rằng nếu $BD = CE$ thì tam giác ABC là tam giác cân.

Hướng dẫn giải

16.1. (h.16.6)

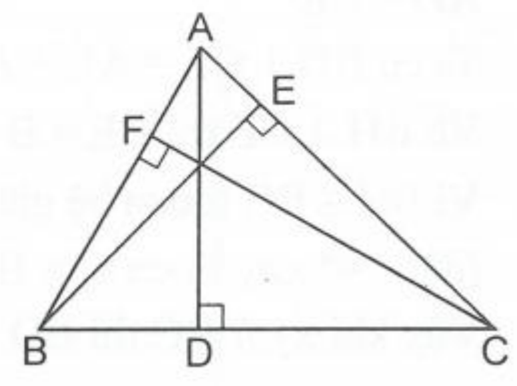
Vì $AD \perp BC$ nên $AD \leq AB$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ABC = 90^o$).

Vì $BE \perp AC$ nên $BE \leq BC$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ACB = 90^o$).

Vì $CF \perp AB$ nên $CF \leq CA$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow BAC = 90^o$).

Do các dấu "=" không thể xảy ra đồng thời nên

$AD + BE + CF < AB + BC + CA =$ chu vi ΔABC.



Hình 16.6

16.2. (h.16.7)

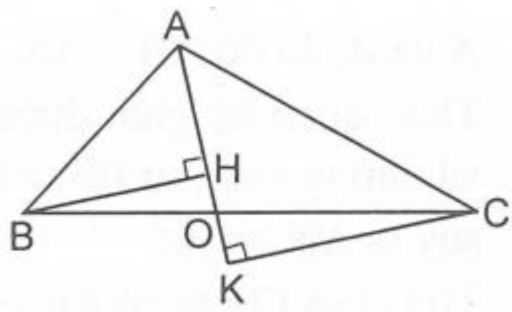
Vẽ $BH \perp d; CK \perp d$.

Theo quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên ta có $BH \leq BO; CK \leq CO$.

Do đó $BH + CK \leq BO + CO = BC$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow H \equiv O$ và $K \equiv O \Leftrightarrow d \perp BC$.

Vì góc A tù nên d luôn cắt BC.



Hình 16.7

16.3. (h.16.8)

Vẽ $AH \perp BM, CK \perp BM$ thì BH và CK lần lượt là hình chiếu của AB và BC trên đường thẳng BM.

Ta có $\Delta HAM = \Delta KCM$ (cạnh huyền, góc nhọn)

$\Rightarrow MH = MK$.

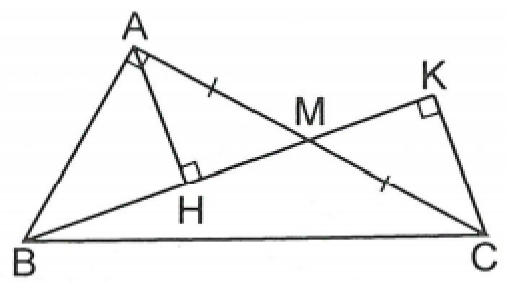
Ta có $AB < BM$ (quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên).

Do đó $AB < BH + HM$. (1)

Mặt khác cũng do $AB < BM$ nên $AB < BK - MK$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $2AB < (BH + HM) + (BK - MK)$.

Lại do $MH = MK$ nên $2AB < BH + BK$ hay $AB < \frac{BH + BK}{2}$.



Hình 16.8

16.4. (h.16.9)

ΔABD và ΔCAE có: $D = E\left(=90^o\right), AB = AC, ABD = CAE$ (cùng phụ với góc BAD).

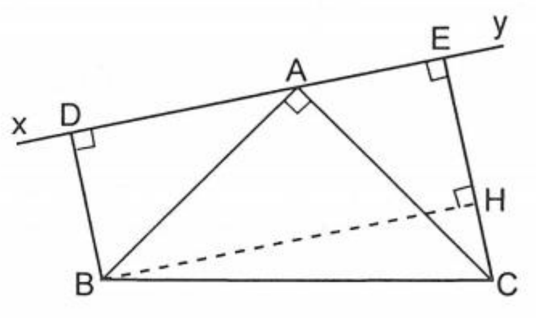
Do đó $\Delta ABD = \Delta CAE$ (cạnh huyền, góc nhọn). Suy ra $BD = AE$ và $AD = CE$.

Ta có $BD + CE = AE + AD = DE$.

Vẽ $BH \perp CE$ thì $DE = BH$ (tính chất đoạn chắn song song).

Vì $BH \le BC$ (quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên) nên $DE \le BC$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow C \equiv H$ hay xy $//BC$).

Vậy khi xy $//BC$ thì $BD + CE = BC$.



Hình 16.9

16.5. (h.16.10)

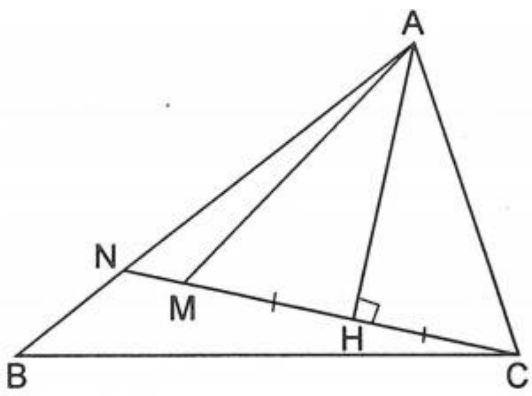
Gọi N là giao điểm của AB và tia CM.

Vì M nằm trong tam giác ABC nên tia CM cắt cạnh AB tại điểm N nằm giữa A và B, do đó $AB > AN$. (1)

Theo quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, từ $HN > HM$ suy ra $AN > AM$. (2)

Từ (1) và (2), ta có $AB > AM$.

Mặt khác $AM = AC$ (vì $HM = HC$) nên $AB > AC$.



Hình 16.10

16.6. (h.16.11)

a) Ta có $AB = AC, BM = CN \Rightarrow AM = AN$.

ΔABC và ΔAMN cân tại A

$$\Rightarrow ABC = AMN = \frac{180^o - A}{2}$$

$\Rightarrow BC \,//\, MN$ (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau).

Vẽ $AH \perp BC$ thì $AH \perp MN$ (tại K).

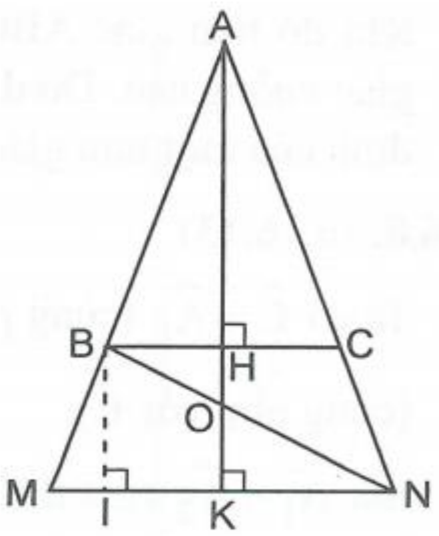
Ta có $BH = \frac{1}{2}BC; KN = \frac{1}{2}MN.$

Gọi O là giao điểm của BN với AK. Theo quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên ta có:

$$BO > BH = \frac{1}{2}BC; ON > KN = \frac{1}{2}MN.$$

Do $BN = BO + ON$ nên $BN > \frac{BC}{2} + \frac{MN}{2} = \frac{MN + BC}{2}$.

b) Vẽ $BI \perp MN \Rightarrow BI \,//\, HK$. Do đó $IK = BH$ (tính chất đoạn chắn song song).

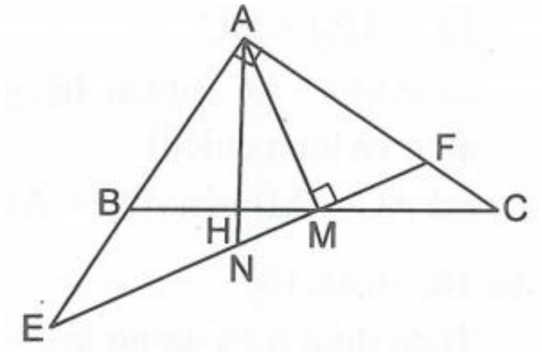


Hình 16.11

Ta có $MI = MK - IK = \frac{1}{2}MN - \frac{1}{2}BC = \frac{MN - BC}{2}$.

Mặt khác $BM > MI$ nên $BM > \frac{MN - BC}{2}$.

16.7. (h.16.12)



Hình 16.12

Gọi N là trung điểm của EF. Các tam giác ABC và AEF là những tam giác vuông, M và N là trung điểm của cạnh huyền nên $AM = \frac{1}{2}BC, AN = \frac{1}{2}EF$. (1)

Suy ra $BC = 2AM; EF = 2AN$.

Theo quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên ta có $AN \geq AM$. (2)

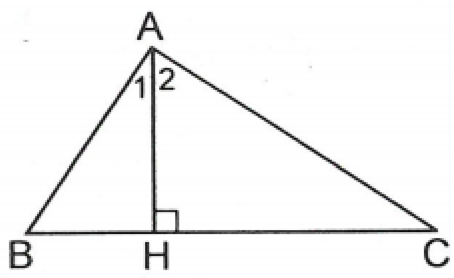
Từ (1) và (2), suy ra $EF \geq BC = 5cm$.

Để xác định khi nào dấu "=" xảy ra, ta gọi H là giao điểm của AN với BC. Ta có $AH \perp BC$ (bạn đọc tự chứng minh).

Ta có $EF = BC \Leftrightarrow AN = AM \Leftrightarrow N \equiv M \Leftrightarrow H \equiv M$.

Khi đó tam giác ABC có $MB = MC, AM \perp BC$ (vì $M \equiv H$) nên là tam giác vuông cân. Do đó độ dài ngắn nhất của EF là 5cm khi và chỉ khi A là đỉnh của một tam giác vuông cân có cạnh huyền là BC.

16.8. (h.16.13)

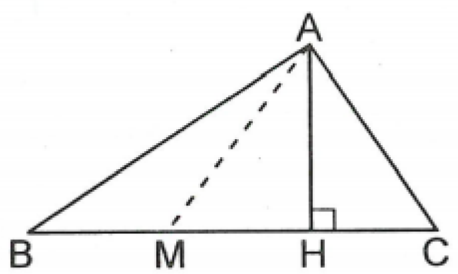


Hình 16.15

Ta có $C = A_1$ (cùng phụ với B); $B = A_2$ (cùng phụ với C) mà $A_1 < A_2$ (giả thiết) nên $C < B$.

Xét ΔABC có $C < B$ nên $AB < AC$ (quan hệ giữa cạnh và góc đối diện trong tam giác). Suy ra $HB < HC$ (quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu).

16.9. (h.16.14)



Hình 16.14

Vẽ $AH \perp BC$.

Vì các góc B và C nhọn nên H nằm giữa B và C.

Ta có $B < C \Rightarrow AC < AB$ (quan hệ giữa cạnh và góc đối diện trong tam giác).

- Nếu $M \equiv H$ thì $AM < AB$ (quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên).
- Nếu M nằm giữa B và H thì $HM < HB$

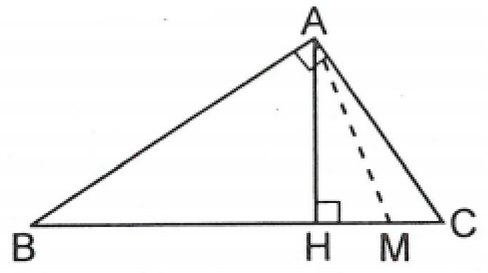
$\Rightarrow AM < AB$ (quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu).

- Nếu M nằm giữa H và C (h.16.15)

  Ta có $HM < HC$

  $\Rightarrow AM < AC$ (quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu)

  mà $AC < AB$ nên $AM < AB.$



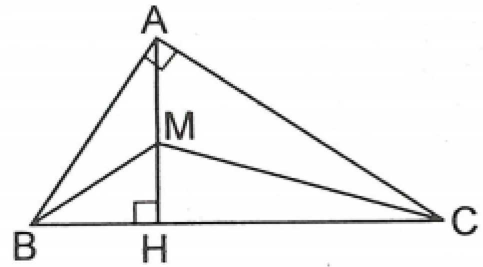
Hình 16.15

16.10. (h.16.16)

Theo định lí Py-ta-go ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2 = 169$

$\Rightarrow BC = 13.$



Hình 16.16

Ta có $BM \geq BH$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv H$);

$CM \geq CH$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv H$).

Do đó $BM + CM \geq BH + CH = 13$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv H$). (1)

Ta có $HM \leq HA$ nên $BM \leq BA$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv A$).

Tương tự $CM \leq CA$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv A$).

Do đó $BM + CM \leq BA + CA = 5 + 12 = 17$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv A$). (2)

Từ (1) và (2), suy ra $13 \leq MB + MC \leq 17.$

16.11. (h.16.17)

- Giả sử $AB < AC$, theo quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu ta có $HB < HC$, do đó $MB < MC.$

  Từ điều kiện $AB < AC$ và $BD = CE$ suy ra $AD < AE.$

  Theo định lí Py-ta-go, ta có:

  $MD^2 = AM^2 - AD^2; ME^2 = AM^2 - AE^2$

  do đó $MD^2 > ME^2.$

  Ta có $MB^2 = MD^2 + BD^2; MC^2 = ME^2 + CE^2.$

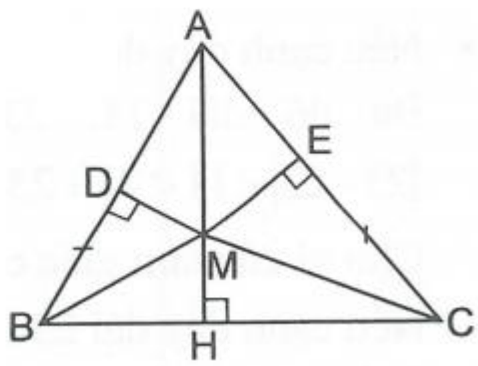
  Vì $MD^2 > ME^2$ và $BD^2 = CE^2$ nên $MB^2 > MC^2$

  suy ra $MB > MC.$

  Theo quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu ta suy ra $HB > HC$, do đó $AB > AC$ (trái giả thiết).

  Chứng minh tương tự, nếu $AB > AC$ thì cũng suy ra mâu thuẫn.

  Vậy $AB = AC$ hay tam giác ABC là tam giác cân.



Hình 16.17

Chuyên đề 17. QUAN HỆ GIỮA BA CẠNH CỦA MỘT TAM GIÁC

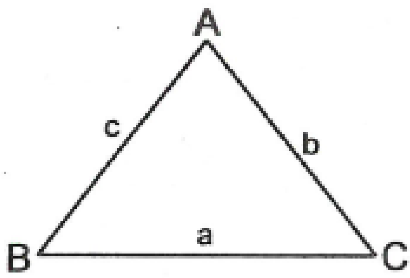
A. Kiến thức cần nhớ

1. Bất đẳng thức tam giác

Trong một tam giác, độ dài một cạnh bao giờ cũng lớn hơn hiệu và nhỏ hơn tổng các độ dài của hai cạnh còn lại.

Trong hình 17.1 ta có: $|b-c|<a<b+c$.

Đảo lại, nếu $|b-c|<a<b+c$ thì a, b, c có thể là độ dài ba cạnh của một tam giác.



Hình 17.1

2. Bất đẳng thức tam giác mở rộng

Với ba điểm M, A, B bất kì ta luôn có: $MA+MB\ge AB$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ M thuộc đoạn thẳng AB.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại điểm O nằm giữa hai đầu mỗi đoạn thẳng. Biết $AB=3cm, CD=5cm$. Chứng minh rằng trong hai đoạn thẳng AC và BD ít nhất cũng có một đoạn thẳng có độ dài nhỏ hơn 4cm.

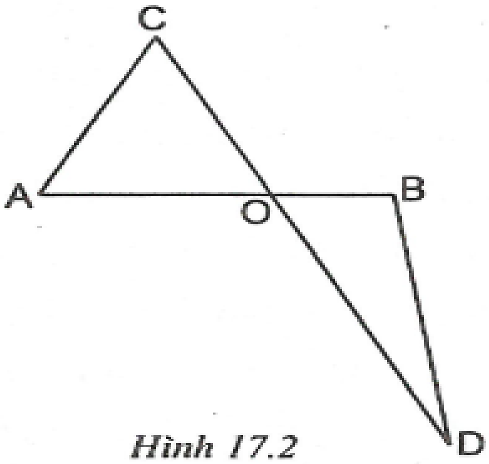
Giải (h.17.2)

* *Tìm cách giải.*

Muốn chứng minh trong hai đoạn thẳng AC và BD ít nhất cũng có một đoạn thẳng có độ dài nhỏ hơn 4cm, ta chứng minh tổng:

$AC+BD<8cm$.

Ta thấy AC là một cạnh của tam giác AOC, BD là một cạnh của tam giác BOD. Vậy cần vận dụng quan hệ giữa ba cạnh của tam giác để đánh giá AC và BD. *Hình 17.2*



Hình 17.2

* *Trình bày lời giải.*

Xét ΔAOC có $AC<OA+OC$. Xét ΔBOD có $BD<OB+OD$.

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta được: $AC+BD<OA+OB+OC+OD$ dẫn tới $AC+BD<AB+CD$. Do đó $AC+BD<3+5=8$ (cm).

Suy ra trong hai đoạn thẳng AC và BD ít nhất cũng có một đoạn thẳng nhỏ hơn 4cm.

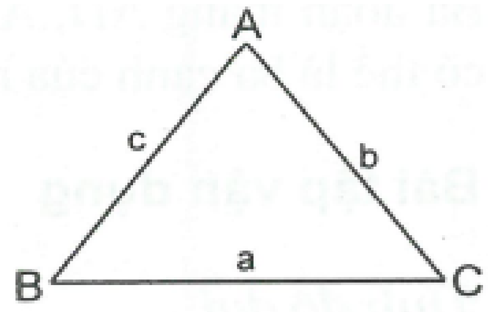
* *Nhận xét:* Trong lời giải trên ta đã dung một tính chất của hai bất đẳng thức cùng chiều: Nếu $a<b$ và $c<d$ thì $a+c<b+d$.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng trong một tam giác, mỗi cạnh bao giờ cũng nhỏ hơn nửa chu vi của tam giác ấy.

Giải (h.17.3)

** Tìm cách giải.*

Ta phải chứng minh $a<\dfrac{a+b+c}{2}$. Muốn vậy ta chứng minh $2a<a+b+c$. Trừ a vào hai vế của bất đẳng thức ta được $2a-a<a+b+c-a$, dẫn tới $a<b+c$. Bất đẳng thức này đúng nên ta có thể xuất phát từ đây rồi chứng minh "ngược" lên.



Hình 17.3

** Trình bày lời giải.*

Gọi a là độ dài của một cạnh bất kì của tam giác. Gọi b và c là độ dài hai cạnh còn lại. Theo quan hệ giữa ba cạnh còn lại của tam giác ta có: $a<b+c$.

Cộng a vào hai vế của bất đẳng thức này ta được: $a+a<a+b+c$ dẫn tới $2a<a+b+c$. Suy ra $a<\dfrac{a+b+c}{2}$.

** Nhận xét:* Trong lời giải trên ta đã dùng các tính chất sau của bất đẳng thức:

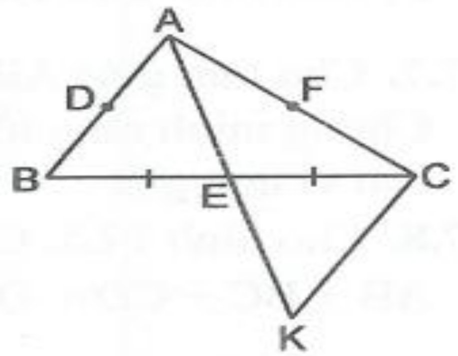
- Cộng cùng một số vào hai vế của một bất đẳng thức thì được một bất đẳng thức cùng chiều.
- Nhân (hay chia) cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số dương thì được một bất đẳng thức cùng chiều.

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Chứng minh rằng ba đoạn thẳng AD, AE và AF có thể là ba cạnh của một tam giác.

Giải (h.17.4)

** Tìm cách giải.*

Muốn chứng minh ba đoạn thẳng AD, BE, CF có thể là ba cạnh của một tam giác, ta chứng minh ba đoạn thẳng đó thỏa mãn bất đẳng thức tam giác hoặc chứng minh chúng lần lượt bằng ba cạnh của một tam giác nào đó.



Hình 17.4

** Trình bày lời giải.*

Trên tia đối của tia EA lấy điểm K sao cho $EK=EA$.

$\Delta ABE=\Delta KCE$ (c.g.c) $\Rightarrow AB=CK$.

Xét ΔACK, theo bất đẳng thức tam giác ta có: $|CA-CK|<AK<CA+CK$.

Do đó $|2AF-2AD|<2AE<2AF+2AD$ (vì $AC=2AF, AB=2AD$).

Suy ra $|AF-AD|<AE<AF+AD$.

Ba đoạn thẳng AD, AE, AF thỏa mãn bất đẳng thức tam giác nên chúng có thể là ba cạnh của một tam giác.

C. Bài tập vận dụng

- *Tính độ dài*

17.1. Một tam giác cân có chu vi là 40cm và một cạnh có độ dài 10cm. Tính độ dài của hai cạnh còn lại.

17.2. Tính chu vi của một tam giác cân biết độ dài hai cạnh của nó bằng:

a) 11cm và 20cm; b) 11cm và 23 cm.

17.3. Ba cạnh của một tam giác có số đo là ba số chẵn liên tiếp (tính bằng xen-ti-mét). Tam giác đó có chu vi nhỏ nhất là bao nhiêu?

17.4. Một đoạn dây thép có độ dài 25cm.

Hỏi có thể uốn nó thành một hình tam giác có một cạnh là:

a) 13cm; b) 12cm?

- *So sánh một độ dài với chu vi của tam giác*

17.5. Cho tam giác ABC. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC.

Hãy so sánh độ dài BC với chu vi tam giác AMN.

17.6. Chứng minh rằng cạnh lớn nhất của một tam giác thì:

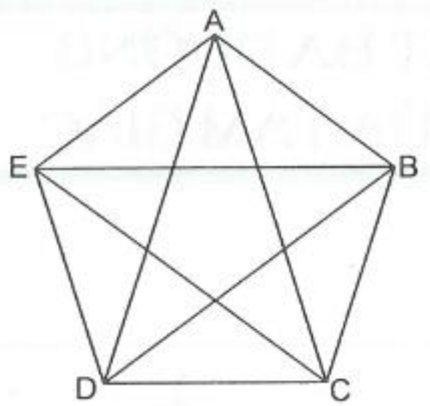
a) Nhỏ hơn nửa chu vi của tam giác;

b) Lớn hơn hoặc bằng $\frac{1}{3}$ chu vi của tam giác.

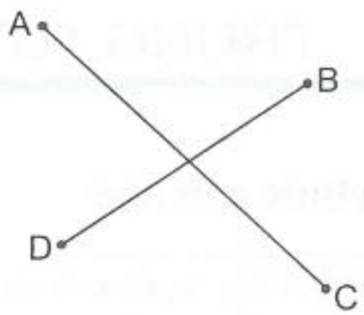
17.7. Cho tam giác ABC. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm BC, CA và AB. Chứng minh rằng tổng $AD+BE+CF$ lớn hơn nửa chu vi nhưng nhỏ hơn chu vi tam giác.

17.8. Cho hình 17.5. Chứng minh rằng:

$AB+BC+CD+DE+EA<AD+DB+BE+EC+CA.$



Hình 17.5



Hình 17.6

17.9. Cho hình 17.6.

a) Tìm điểm O sao cho tổng các khoảng cách từ O đến A, B, C, D có độ dài nhỏ nhất.

b) Chứng minh rằng $AC+BD>\frac{AB+BC+CD+DA}{2}$.

17.10. Cho tam giác ABC có chu vi là 2p. Lấy điểm M bất kì nằm trong tam giác.

Chứng minh rằng $p<MA+MB+MC<2p$.

- *Chứng minh bất đẳng thức hình học*

17.11. Cho tam giác ABC. Vẽ đường thẳng xy chứa tia phân giác góc ngoài tại đỉnh A. Trên xy lấy điểm M khác A. Chứng minh rằng: $AB+AC<MB+MC.$

17.12. Cho tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Chứng minh rằng không thể xảy ra đồng thời $BN<\frac{1}{2}AC$ và $CM<\frac{1}{2}AB.$

17.13. Cho đoạn thẳng AB và ba điểm M, N, P không có điểm nào nằm trên đường thẳng AB. Cho biết $MA+NA+PA=MB+NB+PB=s.$ Chứng minh rằng tồn tại một điểm O thỏa mãn $MO+NO+PO<s.$

17.14. Cho tam giác đều ABC. Trên các cạnh AB, AC, BC lần lượt lấy các điểm M, N, K không trùng với các đỉnh của tam giác sao cho $AM=AN.$

Chứng minh rằng $KM+KN\geq KA.$

17.15. Tam giác ABC không có hai cạnh nào bằng nhau. Độ dài mỗi cạnh có số đo là một số nguyên (tính bằng xen-ti-mét). Biết $AB=2cm, BC=3cm.$ Vẽ đường trung trực xy của BC, trên đó lấy một điểm M. Xác định vị trí của điểm M để tổng $MA+MB$ có giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

Hướng dẫn giải

17.1.

- Nếu cạnh đáy dài 10cm thì mỗi cạnh bên dài là : $(40-10):2=15(\text{cm}).$

  Ba độ dài 10, 15,15 thỏa mãn bất đẳng thức tam giác vì $|15-15|<10<15+15.$

  Vậy độ dài hai cạnh còn lại là: 15cm; 15cm.

- Nếu cạnh bên dài 10cm thì cạnh đáy dài là: $40-2.10=20(\text{cm}).$

  Ba độ dài 10, 20, 20 không thỏa mãn bất đẳng thức tam giác. Vậy trường hợp này bị loại.

17.2.

a)

- Nếu cạnh đáy dài 11cm thì cạnh bên dài 20cm.

  Ba độ dài 11, 20 ,20 thỏa mãn bất đẳng thức tam giác vì $|20-20|<11<20+20.$

  Chu vi của tam giác cân là: $11+20+20=51(\text{cm}).$

- Nếu cạnh đáy dài 20cm thì cạnh bên dài 11cm.

  Ba độ dài 20, 11, 11 thỏa mãn bất đẳng thức tam giác vì $|11-11|<20<11+11.$

  Chu vi của tam giác cân là: $20+11+11=42(\text{cm}).$

b)

- Nếu cạnh đáy dài 11cm thì cạnh bên dài 23cm.

  Ba độ dài 11, 23, 23 thỏa mãn bất đẳng thức tam giác vì $|23-23|<11<23+23.$

Chu vi tam giác cân là: $11+23+23=57(\text{cm})$.

- Nếu cạnh đáy dài 23cm thì cạnh bên dài 11cm.

  Ba độ dài 23, 11, 11 không thỏa mãn bất đẳng thức tam giác. Vậy trường hợp này bị loại.

17.3. Gọi độ dài ba cạnh của tam giác là n, n + 2 và n + 4 (n là số tự nhiên chẵn).

Theo quan hệ giữa ba cạnh của tam giác ta có: $n+(n+2)>n+4 \Rightarrow n>2$.

Số chẵn nhỏ nhất lớn hơn 2 là 4.

Vậy độ dài ba cạnh của tam giác đó là 4, 6, 8 (cm).

Chu vi nhỏ nhất của tam giác là $4+6+8=18(\text{cm})$.

17.4.

a) Nếu một cạnh dài 13cm thì tổng hai cạnh còn lại là: $25-13=12(\text{cm})$.

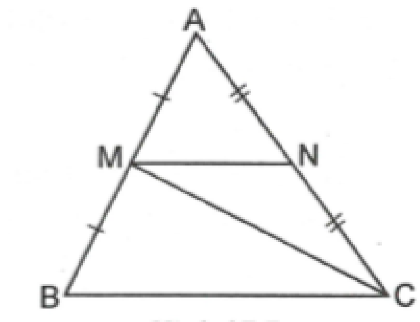
   Ta thấy một cạnh lớn hơn tổng của hai cạnh còn lại, không thỏa mãn bất đẳng thức tam giác. Vậy không thể uốn đoạn dây thép trên thành một hình tam giác có một cạnh là 13cm.

b) Nếu một cạnh dài 12cm thì tổng hai cạnh còn lại là: $25-12=13(\text{cm})$.

   Đoạn dây thép 13cm này có thể uốn thành hai đoạn chẳng hạn 8cm và 5cm. Rõ ràng $8-5<12<8+5$ thỏa mãn bất đẳng thức tam giác.

   Vậy có thể uốn đoạn dây théo 25cm thành một tam giác có một cạnh 12cm.

17.5. (h.17.7)



Hình 17.7

Xét ΔMBC ta có: $BC<MB+MC$. (1)

Xét ΔMNC ta có: $MC<MN+NC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BC<MB+MN+NC$.

Do đó $BC<MA+MN+NA$ (vì $MA=MB$ và $NA=NC$).

Suy ra $BC<$ chu vi ΔAMN.

17.6. Gọi a, b, c là ba cạnh của tam giác ABC.

Giả sử a là cạnh lớn nhất: $a \ge b; a \ge c$.

a) Theo quan hệ giữa ba cạnh của tam giác ta có $a<b+c$.

   Cộng a vào hai vế của bất đẳng thức này ta được $a+a<a+b<c$, do đó $2a<a+b+c$, suy ra $a=\dfrac{a+b+c}{2}$.

b) Vì $a \ge b; a \ge c$ nên $2a \ge b+c$.

   Cộng a vào hai vế ta được $3a \ge a+b+c$. Suy ra $a \ge \dfrac{a+b+c}{3}$.

17.7. (h.17.8)

- Xét ΔABD và ΔACD, ta có: $AD+BD>AB; AD+CD>AC$.

Suy ra $2AD + BC > AB + AC \Rightarrow 2AD > AB + AC - BC.$ (1)

Tương tự, $2BE > BC + BA - AC.$ (2)

$2CF > CA + CB - AB.$ (3)

Cộng từng vế các bất đẳng thức (1), (2), (3) ta được:

$2(AD + BE + CF) > (AB + AC - BC) + (BC + BA - AC) + (CA + CB - AB) = AB + BC + CA.$

Do đó $AD + BE + CF > \dfrac{AB + BC + CA}{2}.$ $(*)$

- Trên tia đối của tia DA lấy điểm K sao cho $DK = DA.$

$\Delta ABD = \Delta KCD$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = CK.$

Xét ΔACK có $AK < AC + CK = AC + AB$

$\Rightarrow 2AD < AB + AC.$

Chứng minh tương tự ta được

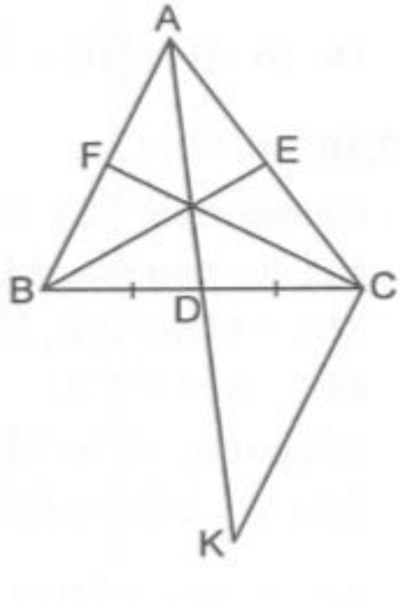
$2BE < BA + BC; 2CF < CB + CA.$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta được

$2(AD + BE + CF) < 2(AB + BC + CA).$

Do đó

$AD + BE + CF < AB + BC + CA =$ chu vi $\Delta ABC.$ $(**)$



Hình 17.8

Từ (*) và (**), suy ra điều phải chứng minh.

17.8. (h.17.9)

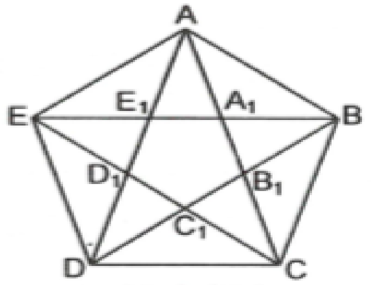
Gọi các điểm A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 là các điểm như trong hình 17.9. Theo quan hệ giữa ba cạnh của tam giác ta có $AB < A_1A + A_1B; BC < B_1B + B_1C; CD < C_1C + C_1D; DE < D_1D + D_1E; EA < E_1E + E_1A.$

Cộng từng vế các bất đẳng thức ta được:

$AB + BC + CD + DE + EA < (A_1A + B_1C) + (A_1B + E_1E) +$

$(B_1B + C_1D) + (C_1C + D_1E) + (D_1D + E_1A) <$

$AC + BE + BD + CE + DA.$



Hình 17.9

17.9. (h.17.10)

a) Gọi M là điểm bất kì, ta có: $MA + MC \ge AC$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \in [AC]$).

$MB + MD \ge BD$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \in [BD]$).

Suy ra $MA + MC + MB + MD \ge AC + BD$ (không đổi).

Do đó tổng $MA+MB+MC+MD$ nhỏ nhất bằng $AC+BD$ khi và chỉ khi M là giao điểm O của AC và BD.

b) Xét các tam giác AOB, BOC, COD, DOA ta có:

$OA+OB>AB; OB+OC>BC;$

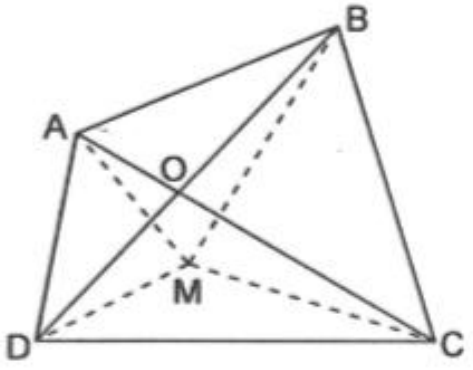
$OC+OD>CD; OD+OA>DA.$

Cộng từng vế bốn đẳng thức trên ta được:

$2(OA+OB+OC+OD)>AB+BC+CD+DA.$

Suy ra $2(AC+BD)>AB+BC+CD+DA.$

Do đó $AC+BD>\dfrac{AB+BC+CD+DA}{2}.$



Hình 17.10

17.10. (h.17.11)

- *Chứng minh* $MA+MB+MC>p$

Xét các tam giác MAB, MBC và MCA ta có:

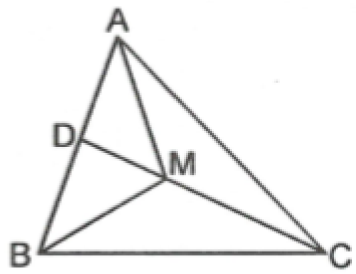
$MA+MB>AB; MB+MC>BC;$

$MC+MA>CA.$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$2(MA+MB+MC)>AB+BC+CA.$

Suy ra $MA+MB+MC>\dfrac{AB+BC+CA}{2}=\dfrac{2p}{2}=p.\quad (*)$



Hình 17.11

- *Chứng minh* $MA+MB+MC<2p$

Gọi D là giao điểm của tia CM với cạnh AB. Xét ΔMDB có $MB<MD+DB.$

Cộng thêm MC vào hai vế ta được $MB+MC<MC+MD+DB.$

Suy ra $MB+MC<CD+DB.\ (1)$

Xét ΔADC có $CD<AD+AC.$

Cộng thêm DB vào hai vế ta được $CD+DB<DB+AD+AC.$

Suy ra $CD+DB<AB+AC.\qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $MB+MC<AB+AC.$

Chứng minh tương tự ta được: $MC+MA<BC+BA;$

$$MA+MB<CA+CB.$$

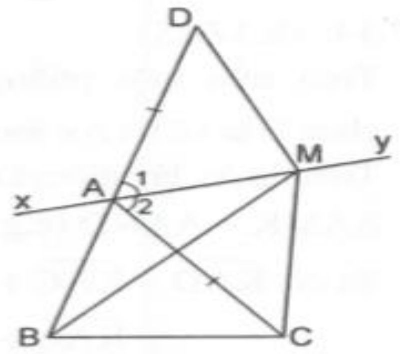
Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$2(MA+MB+MC)<2(AB+BC+CA).$

Suy ra $MA+MB+MC<AB+BC+CA=2p.\quad (**)$

Từ (*) và (**) suy ra $p<MA+MB+MC<2p.$

17.11. (h.17.12)



Hình 17.12

Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = AC.$

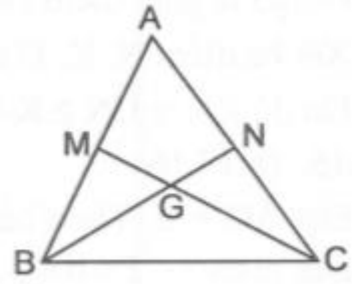
$\Delta AMD = \Delta AMC$ (c.g.c). Suy ra $MD = MC.$

Ta có $AB + AC = AB + AD = BD.\quad (1)$

$MB + MC = MB + MD > BD.\,(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $AB + AC < MB + MC.$

17.12. (h.17.13)



Hình 17.13

Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng

Giả sử đồng thời xảy ra $BN < \frac{1}{2}AC$ và

$CM < \frac{1}{2}AB.$

Khi đó $BN + CM < \frac{1}{2}(AB + AC).\quad (1)$

Gọi G là giao điểm của BN và CM.

Xét ΔMBG và $\Delta NCG,$ theo quan hệ giữa ba cạnh của tam giác ta có:

$BM < GB + GM; GN < GC + GN.$

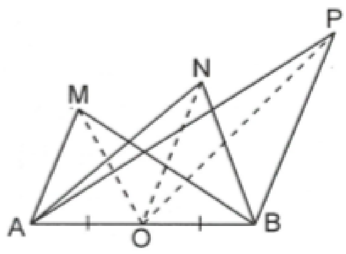
Suy ra $BM + CN < GB + GM + GC + GN$ hay $BM + CN < BN + CM$

Do đó $BN + CM > BM + CN = \frac{1}{2}(AB + AC).\qquad (2)$

(1) và (2) mâu thuẫn. Vậy điều giả sử là sai.

Do đó không thể xảy ra đồng thời $BN < \frac{1}{2}AC$ và $CM < \frac{1}{2}AB.$

17.13. (h.17.14)



Hình 17.14

Gọi O là trung điểm của AB.

Ta chứng minh được (xem bài 17.7):

$MO < \frac{1}{2}(MA + MB);$

$NO < \frac{1}{2}(NA + NB); PO < \frac{1}{2}(PA + PB).$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$$MO + NO + PO < \frac{1}{2}(MA + NA + PA) + \frac{1}{2}(MB + NP + PB) = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s = s.$$

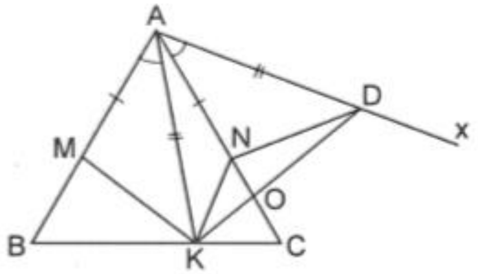
17.14. (h.17.15)

Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa B ta vẽ tia Ax sao cho $CAx = BAK$.

Trên tia Ax lấy điểm D sao cho $AD = AK$.

$\Delta AMK = \Delta AND$ (c.g.c) $\Rightarrow KM = DN$.

Ta có $KAD = KAC + CAD = KAC + BAK = 60^o$.



Hình 17.15

ΔAKD có $AK = AD$ và $KAD = 60^o$ nên là tam giác đều $\Rightarrow KA = KD$.

Gọi O là giao điểm của AC với KD.

Xét ba điểm N, K, D ta có $KN + DN \geq KD$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow N \equiv O$).

Do đó $KN + DN \geq KA$ (vì $KA = KD$).

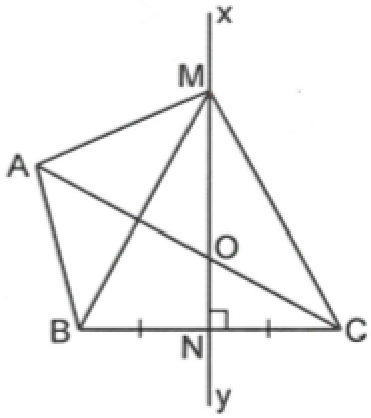
17.15. (h.17.16)

Đặt $AC = b$. Theo bất đẳng thức tam giác ta có $3-2 < b < 3+2$ hay $1 < b < 5$.

Vì b nguyên nên $b \in \{2;3;4\}$.

Mặt khác, tam giác ABC không có hai cạnh nào bằng nhau nên $b = 4cm$.

Vì $M \in$ xy nên ta chứng minh được $MB = MC$.



Hình 17.16

Ta có $MA + MB = MA + MC$.

Xét ba điểm M, A, C ta có $MA + MC \geq AC = 4cm$.

(Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv O$ với O là giao điểm của xy với AC).

Suy ra $MA + MB \geq 4cm$. Do đó tổng $MA + MB$ có giá trị nhỏ nhất là 4cm khi và chỉ khi M là giao điểm của xy với AC.

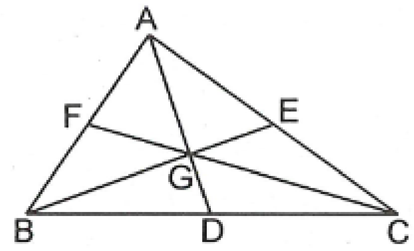
Chuyên đề 18. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC

A. Kiến thức cần nhớ

1. Đường trung tuyến của tam giác là đoạn thẳng nối một đỉnh của tam giác với trung điểm của cạnh đối diện.

2. Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm (điểm này gọi là trọng tâm của tam giác).

Trọng tâm cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua điểm đó (h.18.1).



Hình 18.1

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC, hai đường trung tuyến BM và CN cắt nhau tại G. Trên tia GB và GC lấy các điểm F và E sao cho G là trung điểm của FM đồng thời là trung điểm của EN. Chứng minh rằng ba đường thẳng AG, BE và CF đồng quy.

Giải (h.18.2)

** Tìm cách giải.*

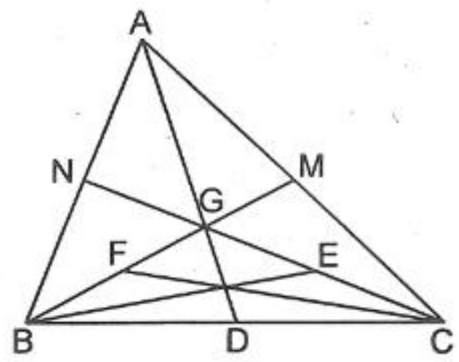
Để chứng minh ba đường thẳng AG, BE và CF đồng quy ta có thể chứng minh chúng là ba đường trung tuyến của tam giác GBC.

** Trình bày lời giải.*

Gọi D là giao điểm của AG và BC. Vì G là trọng tâm của ΔABC nên AD là đường trung tuyến, suy ra $DB = DC$.

Ta có $GF = GM = \frac{1}{3}BM; GE = GN = \frac{1}{3}CN$.

Do đó $GF = FB\left(= \frac{1}{3}BM\right); GE = EC\left(= \frac{1}{3}CN\right)$.



Hình 18.2

Xét ΔGBC có GD, BE, CF là ba đường trung tuyến nên chúng đồng quy suy ra ba đường thẳng AD, BE, CF đồng quy.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa C vẽ tia $Bx // AC$. Lấy điểm $D \in Bx$ và điểm E thuộc tia đối của tia CA sao cho BD = CE. Chứng minh rằng ΔABC và ΔADE có cùng một trọng tâm.

Giải (h.18.3)

** Tìm cách giải*

Tam giác ABC và ADE có chung đỉnh A nên muốn chứng minh chúng có cùng một trọng tâm, chỉ cần chứng minh chúng có chung một đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A.

** Trình bày lời giải.*

Vì $Bx // AC$ nên $CBx = BCE$ (so le trong).

Gọi M là trung điểm của BC.

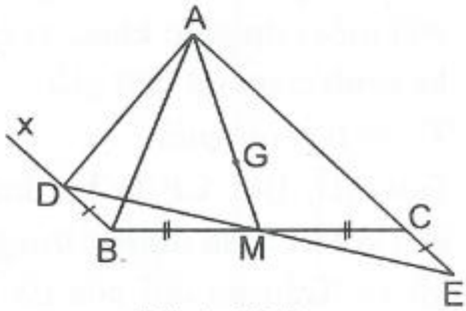
Ta có $\Delta BMD = \Delta CME$ (c.g.c).

Suy ra $MD = ME$ (1) và $BMD = CME.$

Ta có $BME + CME = 180^o$ (kề bù).

Do đó $BME + BMD = 180^o \Rightarrow$ D, M, E thẳng hàng. (2)

Từ (1) và (2) suy ra M là trung điểm của DE.



Hình 18.3

ΔABC và ΔADE chung đỉnh A, chung đường trung tuyến AM nên trọng tâm G của hai tam giác này trùng nhau.

* *Nhận xét:* Để chứng minh hai tam giác có cùng trọng tâm ta có thể chứng minh chúng có chung một đỉnh và chung đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy.

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AD. Trên tia đối của tia DA lấy điểm K sao cho $DK = \frac{1}{3}AD.$ Qua B vẽ một đường thẳng song song với CK cắt AC tại M. Chứng minh rằng M là trung điểm của AC.

Giải (h.18.4)

* *Tìm cách giải.*

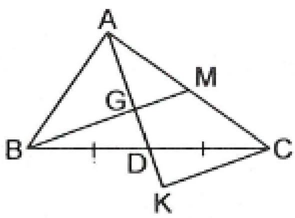
Để chứng minh M là trung điểm của AC ta chứng minh BM là đường trung tuyến. Muốn vậy, chỉ cần chứng minh BM đi qua trọng tâm G.

* *Trình bày lời giải.*

Gọi G là giao điểm của BM và AD.

Ta có $\Delta BDG = \Delta CDK$ (g.c.g).

Suy ra $DG = DK = \frac{1}{3}AD.$



Hình 18.4

Xét ΔABC có điểm G nằm trên đường trung tuyến AD mà $GD = \frac{1}{3}AD$ nên G là trọng tâm. Suy ra BM là đường trung tuyến do đó $MA = MC.$

Ví dụ 4: Chứng minh rằng ba đường trung tuyến của một tam giác có thể là ba cạnh của một tam giác khác.

Giải (h.18.5)

* *Tìm cách giải.*

Để chứng minh ba đường trung tuyến của tam giác này có thể là ba cạnh của một tam giác khác, ta chứng minh ba đường trung tuyến đó tỉ lệ với ba cạnh của một tam giác.

* *Trình bày lời giải.*

Gọi AD, BE, CF là ba đường trung tuyến của ΔABC. Ba đường trung tuyến cắt nhau tại G. Trên tia đối của tia DG lấy điểm H sao cho $DH = DG.$

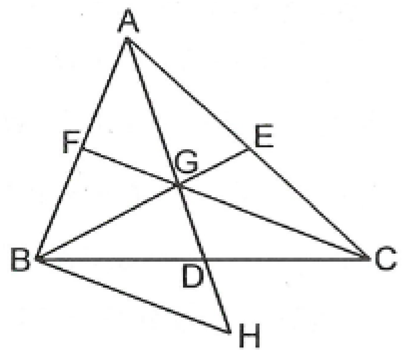
Ta có $\Delta CDG = \Delta BDH$ (c.g.c) $\Rightarrow GC = HB.$

Theo tính chất ba đường trung tuyến của ΔABC ta có:

$AD = \frac{3}{2}GA = \frac{3}{2}GH; BE = \frac{3}{2}GB; CF = \frac{3}{2}GC = \frac{3}{2}BH.$

Suy ra $\frac{AD}{GH} = \frac{BE}{GB} = \frac{CF}{BH} = \frac{3}{2}.$

Vậy ba đường trung tuyến AD, BE, CF tỉ lệ với ba cạnh của tam giác GHB, do đó ba đường trung tuyến này có thể là ba cạnh của một tam giác.



Hình 18.5

C. Bài tập vận dụng

- *Chứng minh đồng quy, thẳng hàng*

18.1. Chứng minh rằng trong một tam giác có hai cạnh không bằng nhau thì đường trung tuyến ứng với cạnh lớn hơn sẽ nhỏ hơn đường trung tuyến ứng với cạnh bé.

18.2. Cho tam giác nhọn ABC. Vẽ $AH \perp BC.$ Cho biết $AB = \sqrt{10}cm,\ AC = \sqrt{13}cm,$ và $AH = 3cm.$ Gọi O là một điểm trên AH sao cho $AO = 2cm.$ Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và HC.

Chứng minh ba điểm M, O, N thẳng hàng.

- *Chứng minh trọng tâm*

18.3. Cho tam giác ABC. Gọi D và E là hai điểm trên cạnh BC sao cho $BD = DE = EC.$ Vẽ đường trung tuyến AO của tam giác ABC. Trên tia đối của tia OA lấy điểm F sao cho $OF = OA.$

a) Chứng minh rằng D là trọng tâm của tam giác BAF; E là trọng tâm của tam giác CAF.

b) Tia AD cắt BF tại N, tia FE cắt AC tại M. Chứng minh rằng tam giác ABC và tam giác AMN có cùng trọng tâm.

18.4. Cho tam giác ABC. Qua A vẽ đường thẳng $a \,//\, BC.$ Qua B vẽ đường thẳng $b \,//\, AC$ và qua C vẽ đường thẳng $c \,//\, AB.$ Các đường thẳng b và c cắt nhau tại A’ và cắt đường thẳng a lần lượt tại C’ và B’.

Chứng minh rằng ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có cùng một trọng tâm.

18.5. Cho góc xOy và một điểm G ở trong góc đó. Hãy xác định điểm $A \in Ox; B \in Oy$ sao cho G là trọng tâm của tam giác AOB.

- *Tính độ dài các đường trung tuyến*

18.6. Cho tam giác ABC cân tại A, $AB = 3\sqrt{41}cm, BC = 24cm.$

Tính độ dài đường trung tuyến BM.

18.7. Cho tam giác ABC vuông tại A. Các đường trung tuyến BE, CF cắt nhau tại G. Biết $GB = 4\sqrt{61}cm, GC = 2\sqrt{601}cm.$ Tính chu vi tam giác ABC.

18.8. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB^2 = 2AC^2.$

Chứng minh rằng các đường trung tuyến AM và CN vuông góc với nhau.

18.9. Chứng minh rằng tổng ba đường trung tuyến của một tam giác thì lớn hơn $\frac{3}{4}$ chu vi của tam giác đó.

- *Chứng minh trung tuyến, trung điểm*

18.10. Tam giác ABC có hai đường trung tuyến BE và CF bằng nhau. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng $AG \perp BC$.

18.11. Cho tam giác ABC. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $AD = \frac{2}{3}AC.$ Trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $CE = CB.$ Tia BD cắt AE tại điểm M. Trên tia CM lấy điểm N sao cho M là trung điểm của NC. Chứng minh rằng $AN = BC.$

18.12. Cho tam giác ABC và trọng tâm G của nó. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác cân khi và chỉ khi $AB + GB = AC + GC.$

18.13. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM.

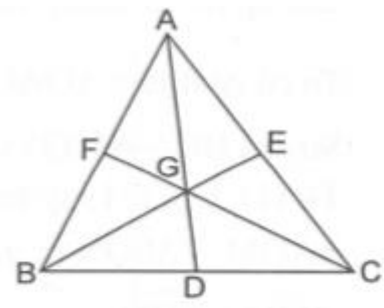
Chứng minh rằng $AM > \frac{1}{2}BC$ khi và chỉ khi $A < 90^o.$

18.14. Cho tam giác ABC trọng tâm G.

Chứng minh rằng nếu $BGC < 90^o$ thì $AB + AC > 3BC.$

Hướng dẫn giải

18.1. (h.18.6)



Hình 18.6

Xét tam giác ABC có BE và CF là hai đường trung tuyến cắt nhau tại G.

Giả sử $AC > AB,$ ta phải chứng minh $BE < CF.$

Ta vẽ thêm đường trung tuyến AD, theo tính chất ba đường trung tuyến ta có AD đi qua G.

- Xét ΔADB và ΔADC có:

  $DB = DC,$ AD chung và $AB < AC$ nên $ADB < ADC$ (định lí hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau).

- Xét ΔGDB và ΔGDC có: $DB = DC,$ GD chung và $ADB < ADC$ (chứng minh trên) nên $GB < GC,$ suy ra $\frac{2}{3}BE < \frac{2}{3}CF,$ do đó $BE < CF.$

18.2. (h.18.7)

Áp dụng định lí Py-ta-go vào các tam giác vuông ABH và ACH ta tính được HB = 1cm, HC = 2cm.

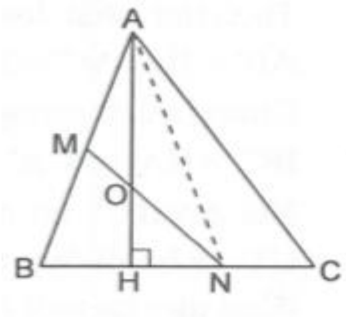
Vì N là trung điểm của HC nên $HN = NC = 1\text{cm}.$

Do đó $HN = HB = 1\text{cm}.$

Vậy AH là đường trung tuyến của ΔABN.

Mặt khác $AH = 3cm, AO = 2cm$ nên $AO = \frac{2}{3}AH$, suy ra O là trọng tâm của ΔABN.

Ta có NM là một đường trung tuyến của ΔNAB, do đó NM phải đi qua trọng tâm O. Vậy ba điểm M, N, O thẳng hàng.



Hình 18.7

18.3. (h18.8)

a) Xét ΔBAF có $OA = OF$ nên BO là đường trung tuyến.

Điểm D nằm trên đường trung tuyến BO mà $BD = \frac{1}{3}BC = \frac{2}{3}BO$ (vì $BC = 2BO$) nên D là trọng tâm của ΔBAF.

Chứng minh tương tự ta được E là trọng tâm của ΔCAF.

b) Vì D là trọng tâm của ΔBAF nên đường thẳng AD là một đường trung tuyến.

Vì AD cắt BF tại N nên $FN = BN = \frac{1}{2}BF$. (1)

Chứng minh tương tự ta được $AM = MC = \frac{1}{2}AC$. (2)

Ta có $\Delta OFB = \Delta OAC$ (c.g.c).

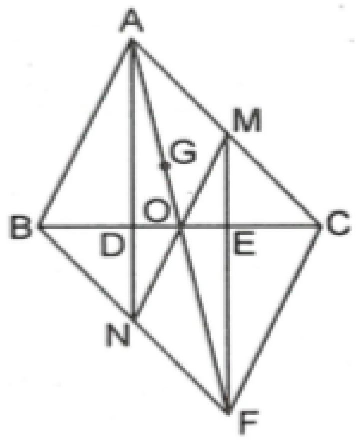
Suy ra $BF = AC (3)$ và $OFB = OAC$.

Từ (1), (2), (3) suy ra $AM = FN$.

$\Delta AOM = \Delta FON$ (c.g.c), suy ra $OM = ON (4)$ và $AOM = FON$.

Ta có $AOM + FOM = 180^o$ (kề bù).

Suy ra $FON + FOM = 180^o$, do đó ba điểm M, O, N thẳng hàng. (5)



Hình 18.8

Từ (4) và (5) suy ra O là trung điểm của MN do đó AO là đường trung tuyến của ΔAMN.

ΔABC và ΔAMN có chung đỉnh A, chung đường trung tuyến AO nên có cùng trọng tâm G.

18.4. (h.18.9)

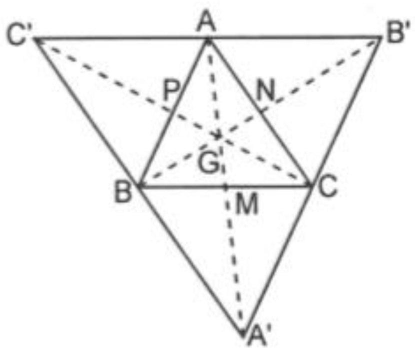
Theo tính chất đoạn chắn song song ta có $AB' = BC, AC' = BC$ suy ra $AB' = AC'$.

Chứng minh tương tự ta được $BC' = BA'$ và $CA' = CB'$.

Xét $\Delta A'B'C'$, ba đường thẳng $A'A, B'B, C'C$ là ba đường trung tuyến nên chúng đồng quy tại một điểm G.

Gọi M là giao điểm của AA' với BC; N là giao điểm của BB' với AC; P là giao điểm của CC' với AB.

Ta có $\Delta AMC = \Delta A'MB (\text{c.g.c})$ suy ra $MC = MB$.



Hình 18.9

Vậy AM là đường trung tuyến ứng với cạnh BC của ΔABC.

Chứng minh tương tự ta được BN, CP là đường trung tuyến tương ứng với cạnh AC, AB của ΔABC.

Ba đường trung tuyến AM, BN, CP của ΔABC gặp nhau tại một điểm. Mặt khác ba đường thẳng AM, BN, CP cũng là ba đường thẳng $A'A, B'B, C'C$. Do đó trọng tâm G của $\Delta A'B'C'$ cũng là trọng tâm của ΔABC.

18.5. (h.18.10)

- *Tìm cách giải*

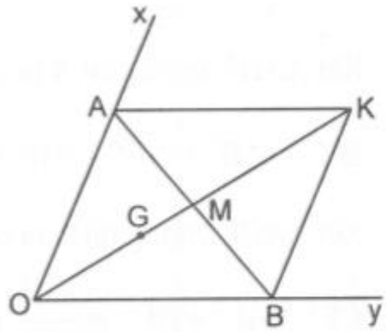
  Giả sử đã vẽ được tam giác AOB sao cho G là trọng tâm của nó. Tia OG cắt AB tại trung điểm M. Trên tia OG lấy điểm K sao cho $OK = 3OG$. Ta chứng minh được

  $\Delta AMK = \Delta BMO(\text{c.g.c}); \Delta AMO = \Delta BMK(\text{c.g.c})$.

  Suy ra $KA \,//\, Oy; KB \,//\, Ox$. Do đó xác định được A và B.

- *Trình bày lời giải.*

- Vẽ tia OG, trên đó lấy điểm K sao cho $OK = 3OG$.
- Từ K vẽ $KA \,//\, Oy\,(A \in Ox)$ và $KB \,//\, Ox\,(B \in Oy)$
- Vẽ đoạn thẳng AB cắt OK tại M. Khi đó G là trọng tâm của ΔAOB.



Hình 18.10

  Thực vậy, ta có $AK = OB$ (tính chất đoạn chắn song song).

  $\Delta AMK = \Delta BMO(\text{g.c.g})$, suy ra $MA = MB\,(1)$ và $MK = MO$.

  Vì $OK = 3OG$ nên $OM = \frac{3}{2}OG$ hay $OG = \frac{2}{3}OM$. $\quad (2)$

  Từ (1) và (2) suy ra G là trọng tâm của ΔAOB.

18.6. (h.18.11)

Vẽ các đường trung tuyến AD, BM cắt nhau tại G.

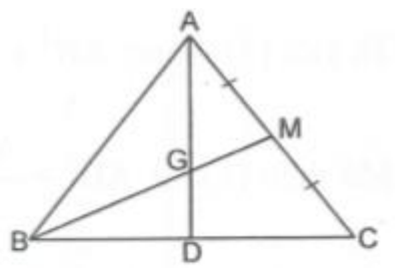
Ta có $\Delta ADB = \Delta ADC(\text{c.c.c})$. Suy ra $DB = DC = 12cm; ADB = ADC = 180^o : 2 = 90^o$.

Áp dụng định lí Py-ta-go vào ΔABD vuông tại D ta được

$AD^2 = AB^2 - BD^2 = (3\sqrt{41})^2 - 12^2 = 225 \Rightarrow AD = 15(cm)$

Vì G là trọng tâm của ΔABC nên $GD = \frac{1}{3}AD = 5cm$.

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác GBD vuông tại D ta được



Hình 18.11

$GB^2 = GD^2 + BD^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow GB = 13(cm)$.

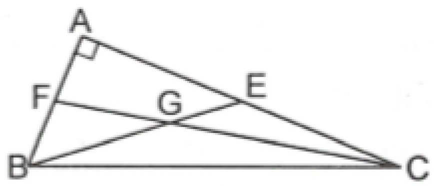
Suy ra $BM = \frac{3}{2}BG = \frac{3}{2}.13 = 19,5(cm)$.

18.7. (h.18.12)

Vì G là trọng tâm của ΔABC nên

$BE=\frac{3}{2}BG=\frac{3}{2}.4\sqrt{61}=6\sqrt{61}\left(cm\right).$

$CF=\frac{3}{2}CG=\frac{3}{2}.2\sqrt{601}=3\sqrt{601}\left(cm\right).$



Hình 18.12

- Xét ΔABE vuông tại A ta có:

$$BE^2=AB^2+AE^2=AB^2+\frac{AC^2}{4}=\left(6\sqrt{61}\right)^2=2196. \quad (1)$$

- Xét ΔACF vuông tại A ta có:

$$CF^2=AF^2+AC^2=\frac{AB^2}{4}+AC^2=\left(3\sqrt{601}\right)^2=5409. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $\frac{5}{4}\left(AB^2+AC^2\right)=7605.$

Mặt khác $AB^2+AC^2=BC^2. \quad (3)$

Suy ra $\frac{5}{4}BC^2=7605\Rightarrow BC^2=6084\Rightarrow BC=78\left(cm\right).$

Ta viết (3) thành $AB^2+\frac{AC^2}{4}+\frac{3AC^2}{4}=6084. \qquad (*)$

Mà theo (1) thì $AB^2+\frac{AC^2}{4}=2196. \qquad (**)$

So sánh (*) và (**) ta được $\frac{3}{4}AC^2=6084-2196=3888$

$\Rightarrow AC^2=5184\Rightarrow AC=72\left(cm\right).$

Từ đó ta tính được $AB^2=BC^2-AC^2=6084-5184=900$

$\Rightarrow AB=30cm.$

Vậy chu vi ΔABC là: $78+72+30=180\left(cm\right).$

18.8. (h.18.13)

Đặt $AC=b.$ Áp dụng định lí Py-ta-go cho ΔABC vuông tại A ta có:

$$BC^2=AB^2+AC^2=2AC^2+AC^2=3AC^2=3b^2=\left(\sqrt{3}b\right)^2$$

$$\Rightarrow BC=\sqrt{3}b\Rightarrow AM=\frac{1}{2}BC=\frac{\sqrt{3}}{2}b.$$

Áp dụng định lí Py-ta-go cho ΔACN vuông tại A ta có:

$$CN^2=AC^2+AN^2=AC^2+\frac{AB^2}{4}=AC^2+\frac{2AC^2}{4}=\frac{6b^2}{4}=\left(\frac{\sqrt{6}}{2}b\right)^2\Rightarrow CN=\frac{\sqrt{6}}{2}b.$$

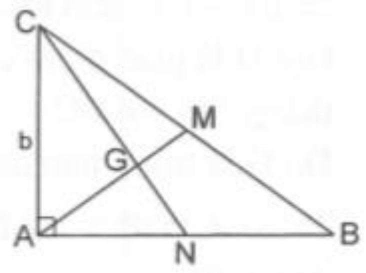
Gọi G là trọng tâm của ΔABC, ta có

$CG = \frac{2}{3}CN = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{6}}{2}.b = \frac{\sqrt{6}}{3}b \Rightarrow CG^2 = \frac{2}{3}b^2.$

$AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}.b = \frac{\sqrt{3}}{3}b \Rightarrow AG^2 = \frac{1}{3}b^2.$

Xét ΔGAC có $CG^2 + AG^2 = \frac{2}{3}b^2 + \frac{1}{3}b^2 = b^2$ mà

$AC^2 = b^2$ nên $AC^2 = CG^2 + AG^2.$



Hình 18.13

Do đó theo định lí Py-ta-go đảo ta được ΔGAC vuông tại G. Suy ra $AM \perp CN.$

18.9. (h.18.14)

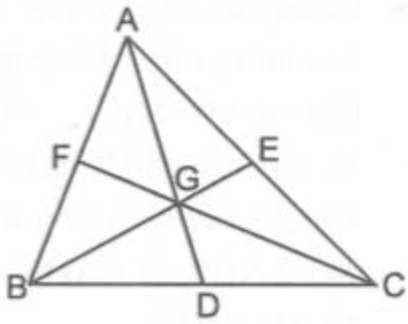
Xét ΔABC có các đường trung tuyến AD, BE, CF cắt nhau tại G.

Xét ΔGBC ta có $GB + GC > BC \Rightarrow \frac{2}{3}(BE + CF) > BC$

$\Rightarrow BE + CF > \frac{3}{2}BC.(1)$

Tương tự, ta có $CF + AD > \frac{3}{2}CA;\quad (2)$

$AD + BE > \frac{3}{2}AB.\qquad (3)$



Hình 18.14

Cộng từng vế các bất đẳng thức (1) (2) (3) ta được:

$2(BE + CF + AD) > \frac{3}{2}(BC + CA + AB).$

Suy ra $BE + CF + AD > \frac{3}{4}(BC + CA + AB).$

Nhận xét: Trong bài 17.7 ta đã chứng minh được AD + BE + CF lớn hơn nửa chu vi tam giác. Như vậy kết quả bài này "mạnh" hơn kết quả ở bài 17.7.

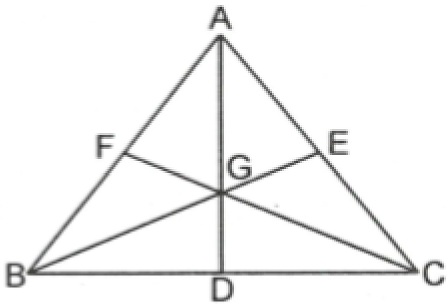
18.10. (h.18.15)

Xét ΔABC có BE và CF là hai đường trung tuyến và $BE = CF.$

Vì G là trọng tâm nên $GB = \frac{2}{3}BE, GC = \frac{2}{3}CF$ do đó $GB = GC; GE = GF.$

Ta có $\Delta GBF = \Delta GCE$ (c.g.c)

$\Rightarrow BF = CE,$ dẫn tới $AB = AC.$



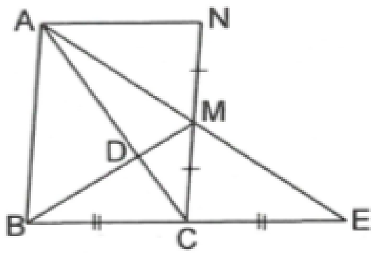
Hình 18.15

Gọi D là giao điểm của đường thẳng AG với BC.

Do G là trọng tâm nên AG là đường trung tuyến. Suy ra $DB = DC.$

Ta có $\Delta ADB = \Delta ADC$ (c.c.c), do đó $ADB = ADC = 180^o : 2 = 90^o.$ Vậy $AG \perp BC.$

18.11. (h.18.16)



Hình 18.16

Xét ΔABE có AC là đường trung tuyến. Mặt khác $D \in AC$ và $AD = \frac{2}{3}AC$ nên D là trọng tâm của $\Delta ABE.$

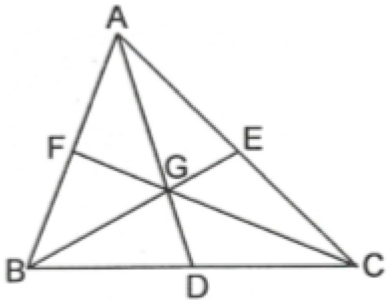
Suy ra đường thẳng BD chứa đường trung tuyến ứng với cạnh AE, do đó $MA = ME.$

Ta có $\Delta AMN = \Delta EMC\,(\text{c.g.c}) \Rightarrow AN = EC.$ Do đó $AN = BC$ (vì $BC = EC$).

18.12. (h.18.17)

- *Chứng minh mệnh đề nếu* $AB + GB = AC + GC$ thì ΔABC *cân tại* A.

  Ta chứng minh bằng phản chứng.



Hình 18.17

  Giả sử $AB < AC.\quad (1)$

  Vẽ tia AG cắt BC tại D.

  Khi đó AD là đường trung tuyến nên $DB = DC.$

  Xét ΔADB và ΔADC có: AD chung; $DB = DC$ và $AB < AC$ nên $ADB < ADC$ (định lí hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau).

  Xét ΔGDB và ΔGDC có: GD chung; $DB = DC$ và $GDB < GDC$ (chứng minh trên) nên $GB < GC.\quad (2)$

  Từ (1) và (2) suy ra $AB + GB < AC + GC$ (trái giả thiết).

  Vậy điều giả sử $AB < AC$ là sai. (*)

  Nếu $AB > AC$ ta cũng đi đến mâu thuẫn vậy $AB > AC$ là sai (**)

  Từ (*) và (**) suy ra $AB = AC$ do đó ΔABC cân tại A.

- *Chứng minh mệnh đề nếu* ΔABC cân tại A thì $AB + GB = AC + GC.$

  Gọi E là giao điểm của BG vơi AC; F là giao điểm của CG với AB.

  Khi đó $EA = EC; FA = FB.$

  $\Delta ABE = \Delta ACF\,(\text{c.g.c}) \Rightarrow BE = CF$, do đó $\frac{2}{3}BE = \frac{2}{3}CF$, dẫn tới $GB = GC.$

  Suy ra $AB + GB = AC + GC.$

18.13. (h.18.18)

- *Chứng minh mệnh đề nếu* $A < 90^o$ thì $AM > \frac{1}{2}BC.$

  Ta chứng minh bằng phản chứng.

  Giả sử $AM = \frac{1}{2}BC$, khi đó $A = 90^o$, trái giả thiết.

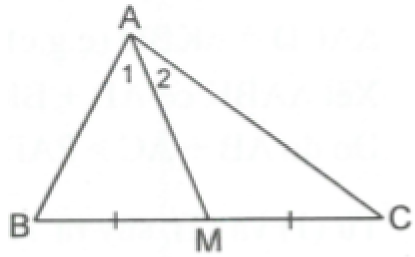
Giả sử $AM < \frac{1}{2}BC$, tức là $AM < BM$ và $AM < MC.$

Xét ΔABM có $AM < BM \Rightarrow B < A_1$. Xét ΔACM có $AM < CM \Rightarrow C < A_2.$

Do đó $B + C < A_1 + A_2 = BAC.$

Suy ra $A + B + C < 2A \Rightarrow A > \frac{180^o}{2} = 90^o$ trái giả thiết.

Vậy nếu $A < 90^o$ thì $AM > \frac{1}{2}BC.$



Hình 18.18

- *Chứng minh mệnh đề nếu* $AM > \frac{1}{2}BC$ thì $A < 90^o.$

Ta có $AM > \frac{1}{2}BC$ tức là $AM > BM$ và $AM > CM$.

Xét ΔABM có $AM > BM \Rightarrow B > A_1$. Xét ΔACM có $AM > CM \Rightarrow C > A_2.$

Do đó $B + C > A_1 + A_2 = BAC.$ Suy ra $A + B + C > 2A \Rightarrow A < \frac{180^o}{2} = 90^o.$

18.14. (h.18.19)

Gọi D là giao điểm của tia AG với BC.

Ta có $DB = DC$ do đó GD là đường trung tuyến của tam giác GBC.

Xét ΔGBC có $BGC < 90^o$ (giả thiết) suy ra $GD > \frac{1}{2}BC$ (xem bài 17.13) do đó $AD > \frac{3}{2}BC.$ (1)

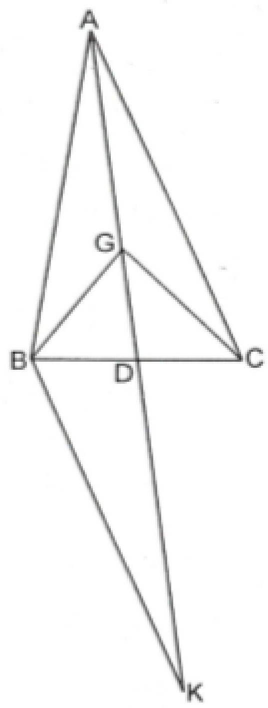
Trên tia AD lấy điểm sao cho $DK = DA.$.

$\Delta ACD = \Delta KBD(\text{c.g.c})$. Suy ra $AC = BK.$

Xét ΔABK có $AB + BK > AK.$

Do đó $AB + AC > 2AD.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $AB + AC > 2.\frac{3}{2}.BC = 3BC.$



Hình 18.19

Chương

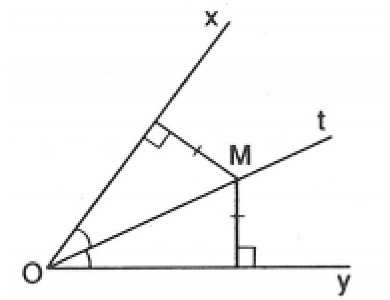
Chuyên đề 19. TÍNH CHẤT TIA PHÂN GIÁC CỦA MỘT GÓC. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

A. Kiến thức cần nhớ

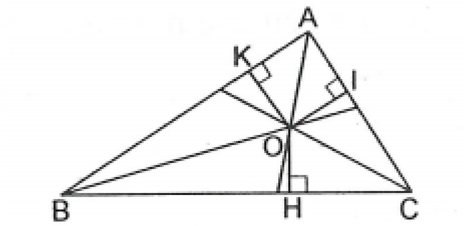
1. Điểm nằm trên tia phân giác của một góc thì cách đều hai cạnh của góc đó (h.19.1).

2. Đảo lại, điểm nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc thì nằm trên tia phân giác của góc đó.

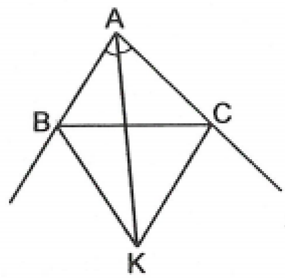
3. Ba đường phân giác của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba cạnh của tam giác đó (h.19.2).



Hình 19.1



Hình 19.2



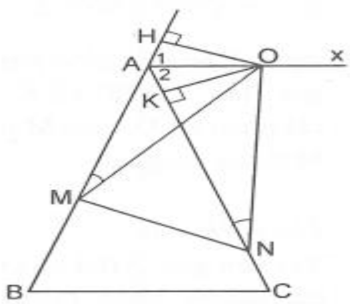
Hình 19.3

4. Trong một tam giác, hai đường phân giác của hai góc ngoài và đường phân giác của góc trong không kề cùng đi qua một điểm (h.19.3).

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác *ABC* cân tại *A*. Trên nửa mặt phẳng bờ *AC* không chứa *B* vẽ tia $Ax//BC$. Lấy điểm *O* trên tia *Ax*, điểm *M* trên *AB* và điểm *N* trên *AC* sao cho $AMO = ANO$. Chứng minh rằng ΔOMN là tam giác cân.

Giải (h.19.4)



Hình 19.4

**** Tìm cách giải.***

Ta có $Ax//BC$ nên dễ thấy *Ax* là tia phân giác của góc ngoài tại đỉnh *A* của tam giác *ABC*. Vì điểm *O* nằm trên tia phân giác này nên ta vẽ $OH \perp AB$, $OK \perp AC$ để vận dụng tính chất cách đều hai cạnh của điểm *O*. Từ đó dùng phương pháp tam giác bằng nhau để chứng minh $OM = ON$.

*** Trình bày lời giải.**

Ta có $Ax//BC$ nên $A_1 = B$ (cặp góc đồng vị); $A_2 = C$ (cặp góc so le trong).

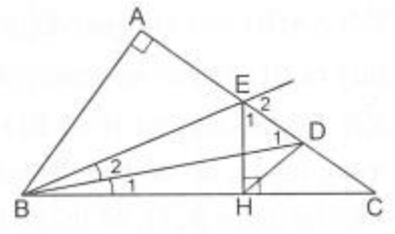
Mặt khác, $B = C$ (hai góc ở đáy của tam giác cân) nên $A_1 = A_2$.

Vẽ $OH \perp AB$, $OK \perp AC$ ta được $OH = OK$ (tính chất điểm nằm trên tia phân giác).

Ta chứng minh được $\Delta HOM = \Delta KON$ (g.c.g). Suy ra $OM = ON$, do đó ΔOMN cân.

Ví dụ 2. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*, $AB < AC$. Trên cạnh *AC* lấy điểm *D* sao cho $AD = AB$. Gọi *E* là một điểm nằm giữa *A* và *D* sao cho tia *BD* là tia phân giác của góc *CBE*. Vẽ $EH \perp BC$. Tính số đo của góc *CHD*.

Giải (h.19.5)



Hình 19.5

**** Tìm cách giải.***

Vẽ hình chính xác, ta dự đoán $CHD = 45°$. Do đó cần chứng minh *HD* là đường phân giác của góc *CHE*. Muốn vậy phải chứng minh *EC* là đường phân giác ngoài tại đỉnh *E* của tam giác *EBH*.

*** Trình bày lời giải.**

Ta có $E_1 = ABC$ (cùng phụ với góc *C*). Do đó $E_1 = ABD + B_1$. (1)

Lại có $E_2 = D_1 + B_2$ (2) (tính chất góc ngoài của ΔEBD).

Mặt khác, $ABD = D_1 (= 45°)$ và $B_1 = B_2$ nên $E_1 = E_2$.

Xét ΔEBH có *D* là giao điểm của đường phân giác góc *B* với đường phân giác góc ngoài tại đỉnh *E* nên *HD* là đường phân giác góc ngoài tại đỉnh *H*.

Suy ra $CHD = 90° : 2 = 45°$.

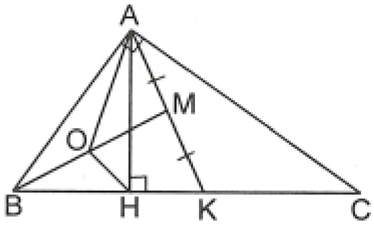
Vi dụ 3. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*. Vẽ $AH \perp BC$. Tia phân giác của góc *HAC* cắt *BC* tại *K*. Các đường phân giác của góc *BAH* và góc *BHA* cắt nhau tại *O*. Gọi *M* là trung điểm của *AK*. Chứng minh ba điểm *B, O, M* thẳng hàng.

Giải (h.19.6)

**** Tìm cách giải.***

Xét tam giác *ABH* có *O* là giao điểm của hai đường phân giác nên *O* nằm trên đường phân giác của góc B. Để chứng minh ba điểm *B, O, M* thẳng hàng ta chỉ cần chứng minh *M* cũng nằm trên đường phân giác của góc *B*. Muốn thế ta phải chứng minh tam giác *BAK* cân tại *B*.

*** Trình bày lời giải.**



Hình 19.6

Ta có: $\widehat{BAK}+\widehat{KAC}=90^\circ$ (vì $\widehat{BAC}=90^\circ$) ;

$\widehat{BKA}+\widehat{KAH}=90^\circ$ (vì $\widehat{AHK}=90^\circ$).

Mặt khác, $\widehat{KAC}=\widehat{KAH}$ nên $\widehat{BAK}=\widehat{BKA}$, suy ra ΔBAK cân tại *B*.

Xét ΔABH có *O* là giao điểm của hai đường phân giác của góc *A* và góc *H*. Suy ra *BO* là đường phân giác của góc *B*.

Xét ΔBAK cân tại B có *BO* là đường phân giác nên đồng thời là đường trung tuyến, do đó *BO* đi qua trung điểm *M* của *AK*.

Vậy ba điểm *B, O, M* thẳng hàng.

C. Bài tập vận dụng

• Tính góc đo, tính độ dài

19.1. Cho tam giác *ABC*. Gọi *K* là giao điểm của đường phân giác góc *B* với đường phân giác góc ngoài tại đỉnh *C*.

Cho biết $\widehat{AKC}=65^\circ$, tính số đo của góc *ABC*.

19.2. Cho tam giác *ABC*. Ba đường phân giác *AD, BE, CF* cắt nhau tại *O*. Cho biết $\widehat{BOC}=150^\circ$, tính số đo của góc *EDF*.

19.3. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*. Các tia phân giác của góc *B*, góc *C* cắt nhau Tại *O*. Cho biết $OA=\sqrt{8}cm$.

Tính khoảng cách từ *O* đến ba cạnh của tam giác.

19.4. Cho tam giác *ABC*, $AB=3cm$, $AC=5cm$, $BC=6cm$. Gọi *O* là giao điểm các đường phân giác của góc *B*, góc *C*. Vẽ $OH\perp BC$.

Tính các độ dài *HB* và *HC*.

• Chứng minh tia phân giác

19.5. Cho tam giác *ABC* vuông cân tại *A*. Vẽ tam giác *OBC* vuông tại *O* sao cho *O* và *A* thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ *BC*.

Chứng minh rằng tia *OA* là tia phân giác của góc *BOC*.

19.6. Cho tam giác *ABC* vuông cân tại *A*. Gọi *M* là trung điểm của *BC*. Lấy điểm *N* nằm giữa *M* và *C*. Vẽ $BH\perp AN$. Chứng minh rằng khi điểm *N* di động thì tia phân giác của góc *BHN* luôn đi qua một điểm cố định.

19.7. Cho tam giác *ABC*. Trên tia đối của tia *BC* lấy điểm *M*, trên tia đối của tia *CB* lấy điểm *N* sao cho $BM = BA$ và $CN = CA$. Vẽ $BH \perp AM$, $CK \perp AN$. Hai đường thẳng *BH* và *CK* cắt nhau tại *O*.

Chứng minh rằng tia *AO* là tia phân giác của góc *BAC*.

19.8. Cho tam giác *ABC*, $A = 120°$. Các đường phân giác của góc *B*, góc *C* cắt nhau tại *O*. Vẽ tia *Bx* sao cho *BA* là tia phân giác của góc *OBx*. Vẽ tia *Cy* sao cho *CA* là tia phân giác của góc *OCy*. Hai tia *Bx* và *CA* cắt nhau tại *E;* hai tia *Cy* và *BA* cắt nhau tại *D*. Chứng minh rằng:

a) Tam giác *ODE* là tam giác đều;

b) Tia *OA* là tia phân giác của góc *DOE*.

19.9. Cho tam giác *ABC*. Nếu cách vẽ đoạn thẳng $\mathrm{MN}//\mathrm{BC}\ (\mathrm{M} \in \mathrm{AB},\ \mathrm{N} \in \mathrm{AC})$ sao cho $BM + CN = BC$.

19.10. Cho tam giác *ABC*, $A = 105°$, $B = 40°$. Vẽ điểm *D*, điểm *M* trên cạnh *BC* sao cho $AD \perp AC$ và *AD* là đường phân giác của góc *BAM*.

Chứng minh rằng $AB + AM = BC$.

• Chứng minh thẳng hàng, đồng quy

19.11. Cho tam giác *ABC*. Gọi *D, E, F* lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh *BC, CA* và *AB* sao cho $BF = BD$ và $CE = CD$. Đường thẳng qua *B* và vuông góc với *DF* cắt đường thẳng qua *C* và vuông góc với *DE* tại *I*. Đường thẳng qua *B* và song song với *DF* cắt đường thẳng qua *C* và song song với *DE* tại *K*. Chứng minh rằng ba điểm *A, I, K* thẳng hàng.

19.12. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*, tam giác *DBC* vuông tại *D* trong đó *A* và *D* thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ *BC*. Vẽ tia *Ax* sao cho *AC* là tia phân giác của góc *DAx*. Vẽ tia *Dy* sao cho *DB* là tia phân giác của góc *ADy*. Hai tia *Ax* và *Dy* cắt nhau tại *K*.

Chứng minh rằng ba điểm *B, K, C* thẳng hàng.

19.13. Hãy nếu cách vẽ một đường thẳng chứa tia phân giác của một góc có đỉnh nằm ngoài tờ giấy

19.14. Cho tam giác *ABC* cân tại *A*. Qua *A* vẽ đường thẳng $xy//BC$. Các đường phân giác của góc *B*, góc *C* cắt nhau tại *O* và cắt *xy* lần lượt tại *D* và *E*.

Chứng minh rằng các đường thẳng *BE, CD* và *AO* cùng đi qua một điểm.

Hướng dẫn giải

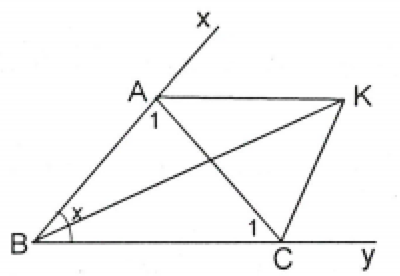
19.1. (h.19.7)

Xét ΔABC có đường phân giác của góc *B* và đường phân giác ngoài tại đỉnh *C* cắt nhau tại *K*. Suy ra *AK* là đường phân giác ngoài tại đỉnh *A*.

Ta đặt $ABC = x$ (độ) thì $CAx = x + C_1$;

$ACy = x + A_1$.

Do đó $CAx + ACy = x + C_1 + x + A_1 = x + 180°$.



Hình 19.7

Suy ra $\frac{CAx + ACy}{2} = 90° + \frac{x}{2}$

Xét ΔAKC có $AKC = 180° - \frac{CAx + ACy}{2} = 180° - \left(90° + \frac{x}{2}\right) = 90° - \frac{x}{2}$

Vì $AKC = 65°$ nên $90° - \frac{x}{2} = 65° \Rightarrow x = 50°.$

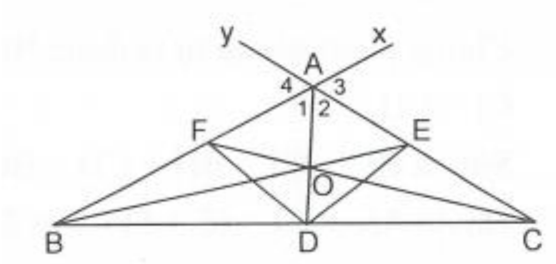
19.2. (h.19.8)

Xét ΔBOC có $BOC = 180° - \frac{B+C}{2}$

$= 180° - \frac{180° - BAC}{2} = 90° + \frac{BAC}{2}$

Mà $BOC = 150°$ nên $90° + \frac{BAC}{2} = 150°$

$\Rightarrow BAC = 120°$



Hình 19.8

Vẽ các tia *Ax, Ay* lần lượt là tia đối của các tia *AB, AC.*

Dễ thấy $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 60°.$

Xét ΔABD có *AC* là đường phân giác ngoài tại đỉnh *A; BO* là đường phân giác trong không kề. Hai đường phân giác này cắt nhau tại *E*, suy ra *DE* là đường phân giác góc ngoài tại đỉnh *D* của ΔABD

Chứng minh tương tự ta được *DF* là đường phân giác góc ngoài tại đỉnh *D* của ΔACD.

Suy ra $DE \perp DF$ (hai đường phân giác của hai góc kề bù), do đó $EDF = 90°.$

19.3. (h.19.9)

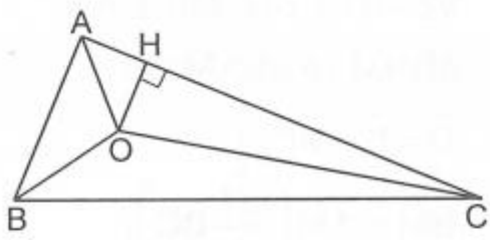
Vì *O* là giao điểm các đường phân giác của góc *B*, góc *C* nên *AO* là đường phân giác góc *A*, do đó

$OAB = OAC = 45°.$

Vẽ $OH \perp AC$ thì ΔHAO vuông cân tại *H*, suy ra $AH = OH$.

Áp dụng định lí Py-ta-go, ta có:

$AH^2 + OH^2 = OA^2 \Rightarrow 2OH^2 = \left(\sqrt{8}\right)^2 = 8 \Rightarrow OH^2 = 4 \Rightarrow OH = 2.$



Hình 19.9

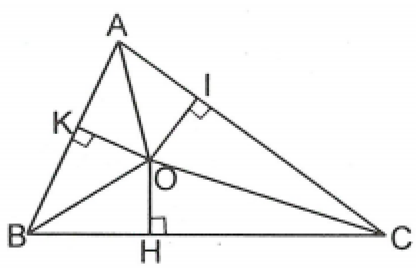
Vậy khoảng cách từ *O* tới mỗi cạnh của tam giác là 2*cm.*

19.4. (h.19.10)

Vẽ thêm $OK \perp AB$; $OI \perp AC$.

$\Delta AOK = \Delta AOI$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow AK = AI$.

Chứng minh tương tự ta được $BK = BH$; $CI = CH$.



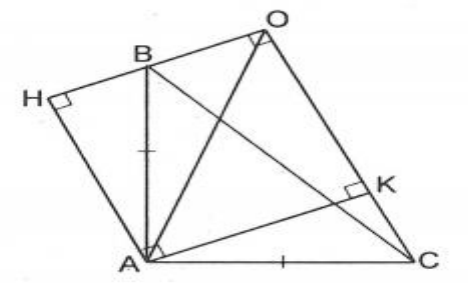
Hình 19.10

Suy ra $BK+CI=BH+CH=BC=6cm.$

Do đó $AK+AI=(3+5)-6=2cm$ mà $AK=AI$ nên $AK=AI=1\ cm.$ Vậy $BK=3-1=2cm \Rightarrow BH=2cm$ và $CH=6-2=\ 4cm.$

19.5. (h.19.11)

Vẽ $AH\perp OB,\ AK\perp OC,$ ta được



Hình 19.11

$ABH=ACK$ (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc).

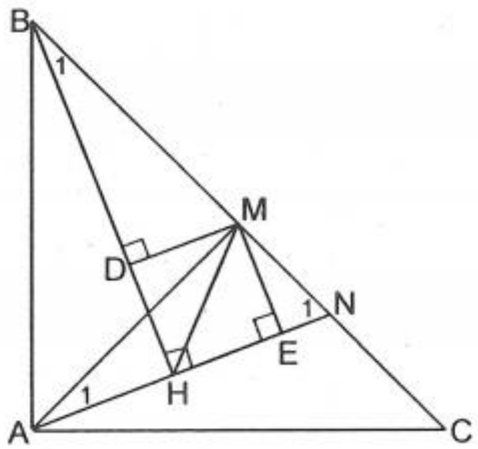
$\Delta ABH=\Delta ACK$ (cạnh huyền, góc nhọn).

Suy ra $AH=AK.$

Điểm A ở trong góc BOC và cách đều hai cạnh của góc này nên A nằm trên tia phân giác của góc đó. Như vậy tia OA là tia phân giác của góc $BOC.$

19.6. (h.19.12)

Vẽ $MD\perp BH,\ ME\perp AN.$



Hình 19.12

ΔDBM và ΔEAM có:

$D=E=90°;$

$BM=AM\left(=\frac{1}{2}BC\right);$

$B_1=A_1$ (cùng phụ với N_1).

Do đó $\Delta DBM=\Delta EAM$ (cạnh huyền, góc nhọn).

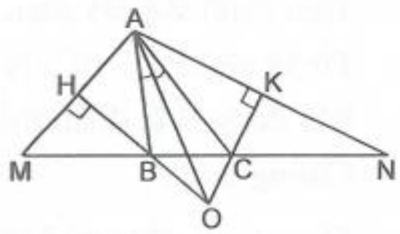
Suy ra $MD=ME.$

Điểm M cách đều hai cạnh của góc BHN nên HM là tia phân giác của góc $BHN.$

Nói cách khác tia phân giác của góc BHN luôn đi qua một điểm cố định là điểm $M.$

19.7. (h. 19.13)

$\Delta ABH=\Delta MBH$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông).



Hình 19.13

Suy ra $ABH=MBH.$

Chứng minh tương tự ta được $ACK=NCK.$

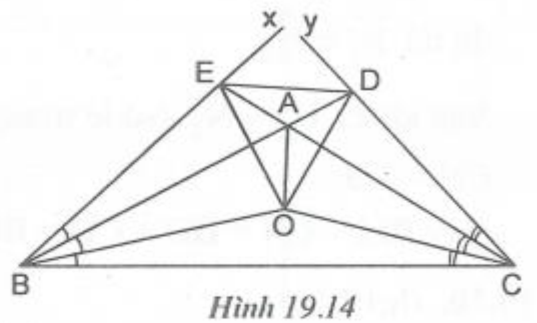
Xét ΔABC có BH và CK là hai đường phân giác ngoài tại đỉnh B và đỉnh C cắt nhau tại O nên AO là đường phân giác của góc $BAC.$

19.8. (h.19.14)

a) Xét ΔABC có hai đường phân giác góc *B*, góc *C* cắt nhau tại *O*. Suy ra tia *AO* là đường phân giác thứ ba.

Từ đó ta được $BAO = CAO = CAD$

$$= BAE = 60°.$$



Hình 19.14

$\Delta BAE = \Delta BAO\ (g.c.g) \Rightarrow BE = BO.$

$\Delta CAD = \Delta CAO\ (g.c.g) \Rightarrow CD = CO.$

Do đó $\Delta BDE = \Delta BDO$ (c.g.c)

$\Rightarrow DE = DO.$ (1)

$\Delta CED = \Delta CEO$ (c.g.c) $\Rightarrow DE = OE.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OD = OE = DE$ nên ΔODE đều.

b) Ta có $BDE = BDO$ (hai góc tương ứng của hai tam giác bằng nhau).

$CED = CEO$ (hai góc tương ứng của hai tam giác bằng nhau).

Xét ΔODE có hai đường phân giác của góc *D*, góc *E* cắt nhau tại *A*, suy ra *OA* là đường phân giác của góc *DOE*.

19.9. (h.19.15)

• *Tìm cách giải*

Giả sử đã vẽ được $MN // BC$ sao cho $BM + CN = BC$.

Lấy điểm $D \in BC$ sao cho $BD = BM$, khi đó $CD = CN$.

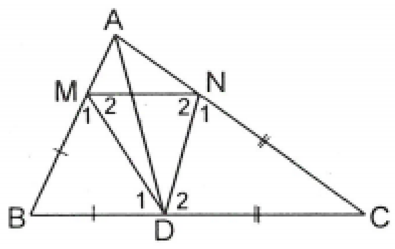
ΔBMD cân tại $B \Rightarrow M_1 = D_1$ mà $M_2 = D_1$ (cặp góc so le trong) nên $M_1 = M_2$

Chứng minh tương tự ta được $N_1 = N_2$.

Xét ΔAMN có *D* là giao điểm của hai đường phân giác góc ngoài tại đỉnh *M* và *N*, suy ra *AD* là đường phân giác của góc *A*.

• *Cách vẽ MN*

- Vẽ đường phân giác *AD* của ΔABC
- Trên cạnh *BA* lấy điểm *M* sao cho $BM = BD$;
- Từ *M* vẽ $MN // BC$ $(N \in AC)$.



Hình 19.15

Khi đó *MN* là đoạn thẳng cần vẽ.

• *Chứng minh*

Theo cách vẽ ta có $MN // BC$, do đó $M_2 = D_1$ (so le trong) mà $M_1 = D_1$ (hai góc ở đáy của tam giác cân) nên $M_2 = M_1$

Xét ΔAMN có *D* là giao điểm của đường phân giác góc *A* và đường phân giác góc ngoài tại đỉnh *M* nên *ND* là đường phân giác ngoài tại đỉnh *N*,do đó $N_1 = N_2$.

Mặt khác, $D_2 = N_2$ (so le trong) nên $N_1 = D_2$, suy ra ΔCND cân, dẫn tới $CN = CD$.

Vậy $BM + CN = BD + CD = BC$.

19.10. (h.19.16)

Trên tia đối của tia *AB* lấy điểm *N* sao cho $AN = AM$.

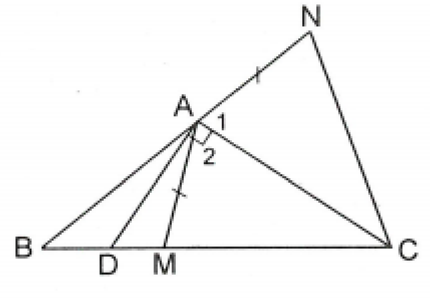
Xét ΔABM có $AD \perp AC$ mà *AD* là đường phân giác trong của góc *A* nên *AC* là đường phân giác ngoài tại đỉnh *A*.

Từ đó suy ra $\Delta ANC = \Delta AMC$ (c.g.c)

$\Rightarrow ANC = AMC$.

Ta có $BAD = 105° - 90° = 15°$, do đó $BAM = 30°$.

Xét ΔABM có góc AMC là góc ngoài nên $AMC = BAM + B = 70°$ suy ra $N = 70°$.



Hình 19.16

Xét ΔBCN có $BCN = 180° - \left(B + N\right) = 180° - \left(40° + 70°\right) = 70°$.

Vậy $BCN = N\left(= 70°\right)$, suy ra ΔBCN cân tại *B*.

Do đó $BN = BC$, dẫn tới $AB + AN = BC$ hay $AB + AM = BC$.

19.11. (h.19.17)

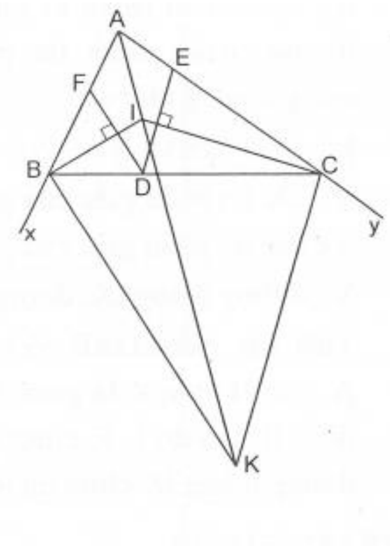
ΔBDF và ΔCDE là những tam giác cân. Mặt khác, $BI \perp DF$, $CI \perp DE$ nên ta có *BI* và *CI* lần lượt là các đường phân giác của góc *B* và góc *C*. Suy ra *I* nằm trên đường phân giác của góc *A*. (1)

Ta có $BK // DF$ mà $BI \perp DF$ nên $BI \perp BK$, do đó *BK* là đường phân giác ngoài tại đỉnh *B* của ΔABC

Chứng minh tương tự ta được *CK* là đường phân giác ngoài tại đỉnh *C* của ΔABC.

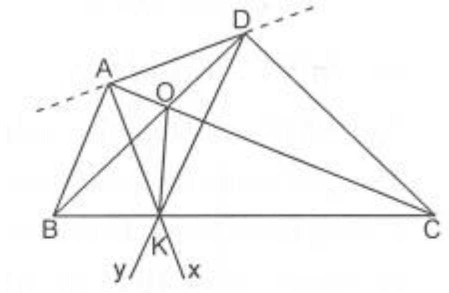
Do đó *K* nằm trên đường phân giác của góc *A*. (2)

Từ (1) và (2), suy ra ba điểm *A, I, K* thẳng hàng



Hình 19.17

19.12. (h.19.18)



Hình 19.18

Xét ΔADK có *AC* là đường phân giác của góc trong tại đỉnh *A*.

Mặt khác, $AB \perp AC$ nên *AB* là đường phân giác góc ngoài tại đỉnh *A*.

Xét ΔADK có *B* là giao điểm của một đường phân giác góc trong và đường phân giác góc ngoài không kề nên tia KB là đường phân giác góc ngoài tại đỉnh *K*.

Gọi *O* là giao điểm của *AC* và *BD*.

Xét ΔADK có *O* là giao điểm của hai đường phân giác nên *KO* là đường phân giác của góc *K*.

Suy ra $KO \perp KB$ (tính chất hai tia phân giác của hai góc kề bù). (1)

Chứng minh tương tự ta được $KO \perp KC$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra ba điểm *B*, *K*, *C* thẳng hàng.

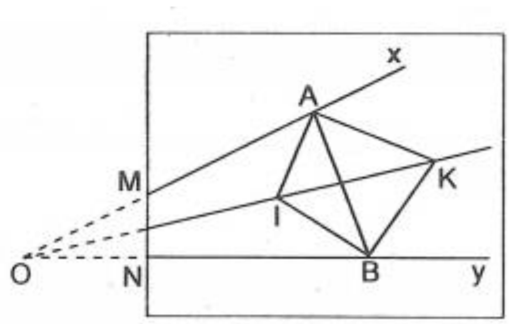
19.13. (H.19.19)

Giả sử góc *xOy* có đỉnh *O* nằm ngoài tờ giấy, còn lại một phần của hai cạnh nằm trong tờ giấy. Ta vẽ đường thẳng chứa tia phân giác của góc *xOy* như sau:

- Lấy $A \in Mx$ và $B \in Ny$;

- Vẽ các tia phân giác của góc *MAB* và *NBA*, chúng cắt nhau tại *I;*

- Vẽ các tia phân giác của góc *BAx* và *ABy*, chúng cắt nhau tại *K;*

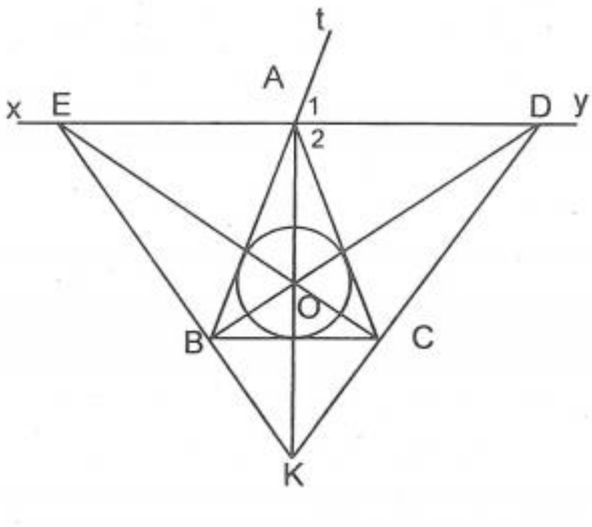


Hình 19.19

- Vẽ đường thẳng *IK*, đường thẳng này chứa tia phân giác của góc *xOy*. Thật vậy, xét ΔOAB có *I* là giao điểm của các đường phân giác của góc *A*, góc *B*. còn *K* là giao điểm của các đường phân giác ngoài tại đỉnh *A*, đỉnh *B*. Do đó *I*, *K* cùng nằm trên đường phân giác của góc *xOy*, tức là đường thẳng *IK* chứa tia phân giác cúa góc *xOy*.

19.14. (h.19.20)

Điểm *O* là giao điểm hai đường phân giác của góc *B* và góc *C* nên *AO* là đường phân giác của góc *A*. Vẽ tia *At* là tia đối của tia *AB*.



Hình 19.20

Vì $xy//BC$ nên $A_1 = ABC$ (cặp góc đồng vị);

$A_2 = ACB$ (cặp góc so le trong)

mà $ABC = ACB$ nên $A_1 = A_2$.

Xét ΔABC có *D* là giao điểm của đường phân giác góc *B* và đường phân giác góc ngoài tại đỉnh *A* nên *CD* là đường phân giác góc ngoài tại đỉnh *C*. Chứng minh tương tự ta được *BE* là đường phân giác góc ngoài tại đỉnh *B*. Ba đường thẳng *BE*, *CD*, *AO* là hai đường phân giác góc ngoài và đường phân giác của góc trong không kề nên chúng cùng đi qua một điểm.

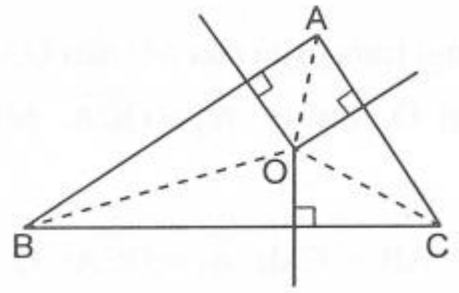
Chuyên đề 20. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC, BA ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC

A. Kiến thức cần nhớ

1. Điểm nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều hai mút của đoạn thẳng đó.

2. Điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng thì nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng đó.

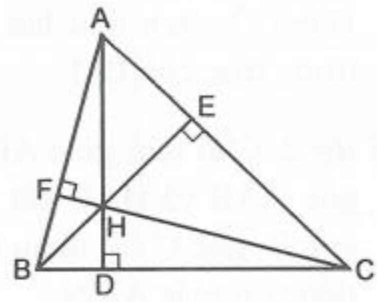
3. Ba đường trung trực của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba đỉnh của tam giác đó và là tâm của đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác (gọi là đường tròn ngoại tiếp tam giác) (h.20.1).



Hình 20.1

4. Trong một tam giác, đoạn vuông góc vẽ từ một đỉnh đến đường thẳng chứa cạnh đối diện gọi là đường cao của tam giác đó.

5. Ba đường cao của một tam giác cùng đi qua một điểm (h.20.2). Điểm này gọi là trực tâm của tam giác.



Hình 20.2

6. *Bổ sung tính chất của tam giác cân*

- Trong một tam giác cân, đường trung trực ứng với cạnh đáy, đồng thời là đường phân giác, đường trung tuyến và đường cao cùng xuất phát từ đỉnh đối diện với cạnh đó.
- Trong một tam giác, nếu hai trong bốn loại đường trùng nhau thì tam giác đó là một tam giác cân.

B. Một số ví dụ

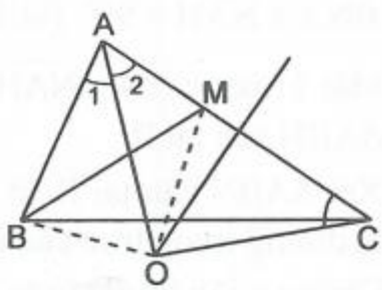
Ví dụ 1: Cho tam giác ABC, $AB < AC$. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $CM = AB$. Vẽ đường trung trực của AC, cắt đường phân giác của góc A tại điểm O. Chứng minh rằng O nằm trên đường trung trực của BM.

Giải (h.20.3)

**** Tìm cách giải.***

Muốn chứng minh điểm O nằm trên đường trung trực của BM ta cần chứng minh điểm O cách đều hai đầu của đoạn thẳng BM, nghĩa là phải chứng minh $OB = OM$. Muốn vậy phải chứng minh $\Delta ABO = \Delta CMO$.

Dễ thấy hai tam giác này có hai cặp cạnh bằng nhau nên chỉ cần chứng minh cặp góc xen giữa bằng nhau là đủ



Hình 20.3

*** Trình bày lời giải**

Điểm O nằm trên đường trung trực của AC nên $OA = OC$.

Do đó ΔOAC cân tại *O*, suy ra $A_2 = OCA$.

Mặt khác $A_2 = A_1$ nên $A_1 = OCA$.

ΔABO và ΔCMO có: $AB = CM$; $A_1 = OCA$; $OA = OC$ nên $\Delta ABO = \Delta CMO$ (c.g.c). Suy ra $OB = OM$.

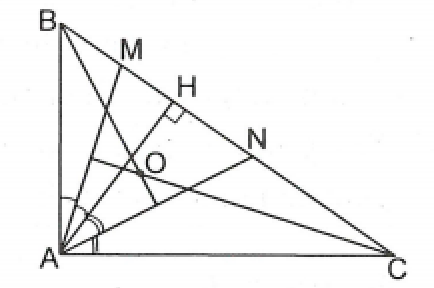
Điểm *O* cách đều hai đầu của đoạn thẳng *BM* nên *O* nằm trên đường trung trực của *BM*.

Ví dụ 2: Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*, đường cao *AH*. Tia phân giác của góc *HAB* và *HAC* cắt *BC* lần lượt tại *M* và *N*. Các đường phân giác của góc *B*, góc *C* cắt nhau tại *O*. Chứng minh rằng *O* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *AMN*.

Giải (h.20.4)

**** Tìm cách giải.***

Muốn chứng minh *O* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *AMN*, ta phải chứng minh *O* là giao điểm các đường trung trực của các cạnh *AM* và *AN*.



Hình 20.4

Xét ΔABN có *BO* là đường phân giác góc *B* nên để chứng minh *BO* là đường trung trực của *AN* thì chỉ cần chứng minh ΔABN là tam giác cân tại *B*.

*** Trình bày lời giải.**

Ta có $BAN + CAN = 90°$ (vì $BAC = 90°$). (1)

$BNA + NAH = 90°$ (vì $H = 90°$). (2)

Mặt khác, $CAN = NAH$ nên từ (1) và (2) suy ra $BAN = BNA$ do đó ΔABN cân tại *B*.

Xét ΔABN cân tại B có *BO* là đường phân giác của góc B nên *BO* cũng là đường trung trực của cạnh AN.

Chứng minh tương tự ta được *CO* là đường trung trực của cạnh *AM*.

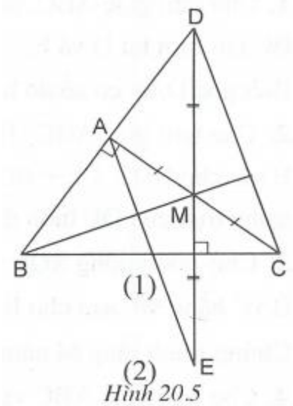
Xét ΔAMN có *O* là giao điểm của hai đường trung trực của hai cạnh *AN* và *AM* nên *O* là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAMN

Ví dụ 3. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*, đường trung tuyến *BM*. Qua *M* vẽ một đường thẳng vuông góc với *BC* cắt đường thẳng *AB* tại *D*. Vẽ điểm *E* sao cho *M* là trung điểm của *DE*. Chứng minh rằng $AE \perp BM$.

Giải (h.20.5)

**** Tìm cách giải.***

Xét ΔDBC, dễ thấy *M* là trực tâm, suy ra $BM \perp CD$. Do đó muốn chứng minh $BM \perp AE$ ta chỉ cần chứng minh $CD // AE$.



Hình 20.5

*** Trình bày lời giải.**

Xét ΔDBC có CA và DM là hai đường cao cắt nhau tại M nên M là trực tâm. Suy ra BM là đường cao thứ ba, do đó $BM \perp CD.$ Ta có $\Delta MEA = \Delta MDC$ (c.g.c).

Suy ra $MEA = MDC.$ Do đó $AE//CD.$

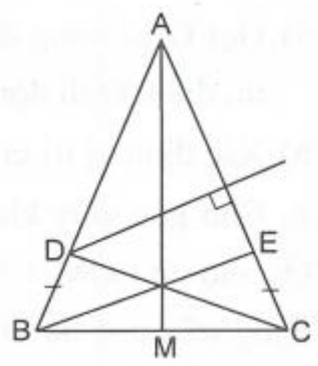
Từ (1) và (2) ta được $AE \perp BM.$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC cân tại $A,$ $A = 45°.$ Vẽ đường trung tuyến $AM.$ Đường trung trực của cạnh AC cắt AB tại $D.$ Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $CE = BD.$ Chứng minh rằng ba đường thẳng AM, BE, CD đồng quy.

Giải (h.20.6)

**** Tìm cách giải.***

Vẽ hình chính xác ta dự đoán ba đường thẳng AM, BE, CD là ba đường cao của tam giác ABC nên chúng đồng quy. Do đó ta cần chứng minh $AM \perp BC,$ $CD \perp AB$ và $BE \perp AC.$



Hình 20.6

*** Trình bày lời giải.**

Điểm D nằm trên đường trung trực của AC nên $DA = DC.$

Do đó ΔDAC cân suy ra $ACD = CAD = 45°.$

Xét ΔDAC có $ADC = 180° - (45° + 45°) = 90°.$ Vậy $CD \perp AB.$

Ta lại có $\Delta BCD = \Delta CEB$ (c.g.c) $\Rightarrow E = D = 90°.$ Do đó $BE \perp AC.$

Mặt khác, AM là đường trung tuyến ứng với cạnh đáy của tam giác cân nên $AM \perp BC.$

Xét ΔABC có AM, BE và CD là ba đường cao nên chúng đồng quy.

C. Bài tập vận dụng

• Tính chất đường trung trực

20.1. Cho tam giác $ABC,$ góc A tù. Các đường trung trực của AB và AC cắt BC lần lượt tại D và $E.$ Biết góc DAE có số đo bằng $30°,$ tính số đo của góc $BAC.$

20.2. Cho tam giác $ABC.$ Trên các tia BA và CA lần lượt lấy các điểm D và E sao cho $BD + CE = BC.$ Chứng minh rằng khi D và E di động thì đường trung trực của DE luôn đi qua một điểm cố định ở trong tam giác $ABC.$

20.3. Cho góc vuông xOy và một điểm A cố định ở trong góc đó. Vẽ góc BAC bằng $90°$ sao cho $B \in Ox,$ $C \in Oy.$ Gọi M là trung điểm của $BC.$ Chứng minh rằng M nằm trên một đường thẳng cố định.

20.4. Cho tam giác ABC vuông tại $A.$ Trên cạnh BC lấy điểm M bất kì. Vẽ các điểm D và E sao cho AB là đường trung trực của $MD,$ AC là đường trung trực của $ME.$

Xác định vị trí của điểm M để cho đoạn thẳng DE có độ dài ngắn nhất.

20.5. Cho tam giác ABC vuông tại $A,$ đường cao $AH.$ Trên cạnh AB lấy điểm $M,$ trên cạnh AC lấy điểm N sao cho $MHN = 90°.$

a) Gọi O là trung điểm của MN. Chứng minh rằng khi M và N di động thì điểm O di động trên một đường thẳng cố định.

b) Xác định vị trí của M và N để MN có độ dài nhỏ nhất.

20.6. Cho góc xOy khác góc bẹt. Lấy điểm M trên tia Ox, điểm N trên tia Oy sao cho $OM + ON = a$ không đổi. Chứng minh rằng khi M và N di động trên các tia Ox, Oy thì đường trung trực của MN luôn đi qua một điểm cố định.

20.7. Cho tam giác ABC sao cho $B < 90°$ và $C > \frac{1}{2}B.$. Hãy tìm điểm M trên cạnh AB, điểm N trên cạnh BC sao cho $BM = MN = NC.$

• Chứng minh đồng quy thẳng hàng

20.8. Cho tam giác $ABC, AB < AC.$ Trên các tia BA và CA lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $BM = CN.$ Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $CD = AB.$ Chứng minh rằng các đường trung trực của AD, BC và MN cùng đi qua một điểm.

20.9. Cho các tam giác ABC vuông tại A, tam giác DBC vuông tại D trong đó A và D cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ BC. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Vẽ $AE \perp DN$; $DF \perp AN$.

Chứng minh rằng ba đường thẳng AE, DF, MN cùng đi qua một điểm.

20.10. Cho tam giác nhọn ABC, đường cao AD. Trên tia DA lấy điểm H sao cho $DH = DB.$ Trên tia DC lấy điểm K sao cho $DK = DA.$

Chứng minh rằng $KH \perp AB.$

20.11. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên cạnh AB lấy điểm H, trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $AHD + ACD = 180°.$ Đường thẳng DH cắt đường thẳng AC tại O.

Chứng minh rằng hai đường thẳng OB và CH vuông góc với nhau.

20.12. Cho tam giác nhọn $ABC,\ A = 60°.$ Hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Đường trung trực của HB cắt AB tại M, đường trung trực của HC cắt AC tại N. Chứng minh rằng ba điểm M, H, N thẳng hàng.

20.13. Cho tam giác nhọn ABC. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác và H là trực tâm của tam giác.

Chứng minh rằng $BOC + 2BHC = 360°.$

• Tam giác cân

20.14. Cho tam giác ABC, đường phân giác AD. Một đường thẳng song song với AD cắt các đường thẳng AB và AC lần lượt tại E và F.

Chứng minh rằng đường trung trực của EF luôn đi qua một điểm cố định.

20.15. Cho tam giác nhọn ABC, đường cao AH, đường trung tuyến BM và đường phân giác CD cắt nhau tại ba điểm phân biệt E, F, G.

Hỏi tam giác EFG có thể là tam giác đều không?

Hướng dẫn giải

20.1. (h.20.7)

Điểm D nằm trên đường trung trực của AB nên $DA = DB$.

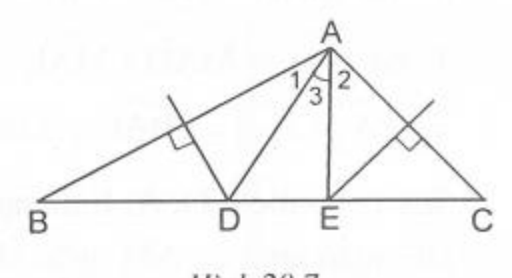
Suy ra ΔDAB cân, do đó $A_1 = B$.

Chứng minh tương tự, ta được $A_2 = C$.

Ta có $A_1 + A_2 = B + C = 180° - BAC$.

Mặt khác, $A_3 = BAC - \left(A_1 + A_2\right)$ nên

$30° = BAC - \left(180° - BAC\right)$.



Hình 20.7

Suy ra $2BAC - 180° = 30° \Rightarrow BAC = 105°$.

20.2. (h.20.8)

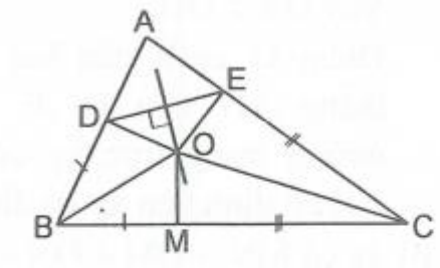
Vẽ tia phân giác của góc B, góc C, chúng cắt nhau tại điểm O ở trong tam giác ABC. Đó là một điểm cố định.

Trên cạnh BC lấy một điểm M sao cho $BM = BD$, khi đó $CM = CE$.

$\Delta BOD = \Delta BOM \; \left(c.g.c\right) \Rightarrow OD = OM$. (1)

$\Delta COE = \Delta COM \; \left(c.g.c\right) \Rightarrow OE = OM$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OD = OE$.



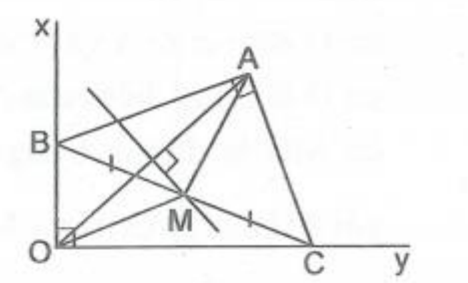
Hình 20.8

Điểm O cách đều hai đầu đoạn thẳng DE nên O nằm trên đường trung trực của DE. Nói cách khác, đường trung trực của DE luôn đi qua một điểm cố định là điểm O.

20.3. (h.20.9)

Tam giác ABC vuông tại A, tam giác OBC vuông ở O có AM, OM là các đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $MA = MO = \frac{1}{2}BC$.

Điểm M cách đều hai đầu đoạn thẳng OA cố định nên M nằm trên đường trung trực của OA. Do đó M nằm trên một đường thẳng cố định.



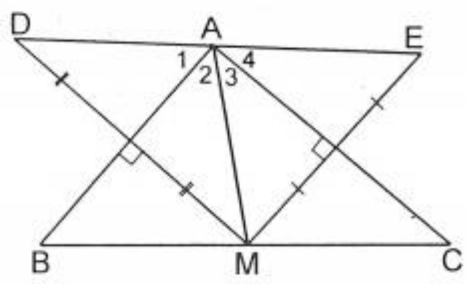
Hình 20.9

20.4. (h.20.10)

Vì AB, AC là đường trung trực của MD, ME nên $AD = AM$ và $AE = AM$.

ΔAMD và ΔAME cân tại A, suy ra

$A_1 = A_2$, $A_3 = A_4$.



Hình 20.10

Do đó $MAD = 2A_2; MAE = 2A_3$

Ta có $DAE = MAD + MAE$

$= 2\left(A_2 + A_3\right) = 2BAC = 2.90° = 180°.$

Suy ra ba điểm *D, A, E* thẳng hàng và $DE = AD + AE = 2AM$.

DE ngắn nhất $\Leftrightarrow AM$ ngắn nhất $\Leftrightarrow AM \perp BC$.

Vậy khi *M* là hình chiếu của *A* trên *BC* thì *DE* ngắn nhất hay khi *AM* là đường cao xuất phát từ đỉnh *A* của ΔABC thì *DE* ngắn nhất.

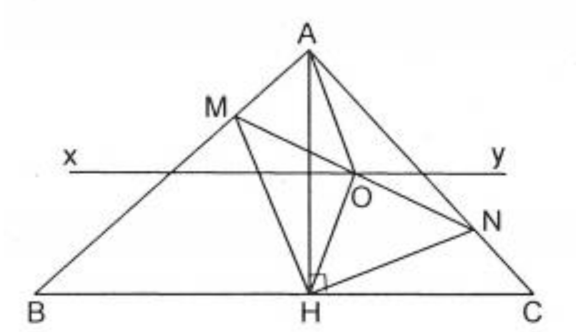
20.5. (h.20.11)

a) Theo tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông ta có

$OA = \frac{1}{2}MN; OH = \frac{1}{2}MN.$

Vậy $OA = OH$.

Điểm *O* cách đều hai đầu đoạn thẳng *AH* nên *O* di động trên đường trung trực *xy* của *AH*. Vì *AH* cố định nên *xy* cố định.



Hình 20.11

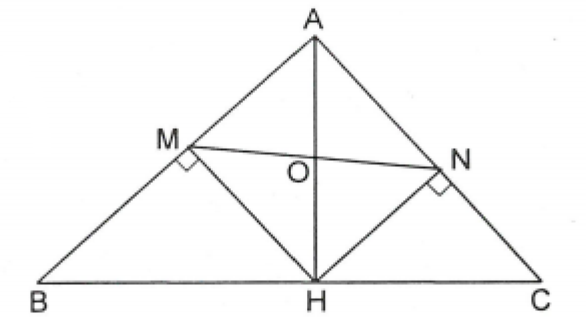
b) Ta có $MN = OM + ON = OA + OH$

$\geq AH$ (bất đẳng thức tam giác mở rộng) Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow O$ nằm giữa *A* và *H* và $OA = OH \Leftrightarrow O$ là trung điểm của *AH*

MO là đường trung tuyến ứng

với *AH* của ΔAMH và $MO = \frac{1}{2}AH$.

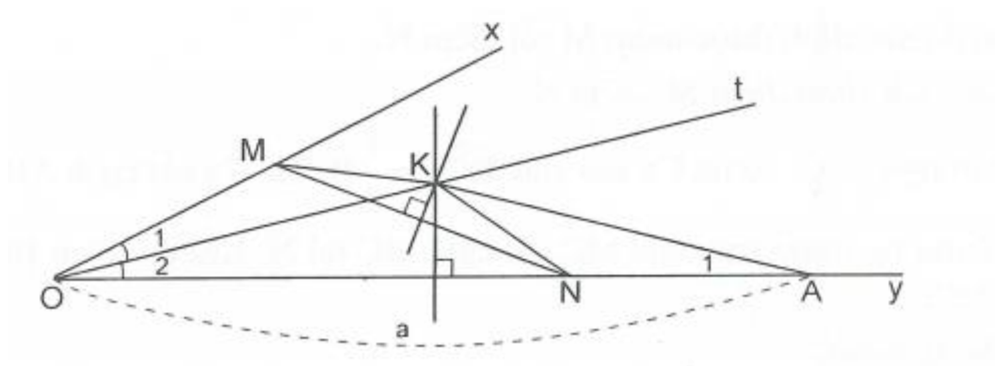
$\Leftrightarrow HM \perp AB; HN \perp AC$.



Hình 20.12

Vậy *MN* có độ dài nhỏ nhất là bằng *AH* khi *M* và *N* lần lượt là hình chiếu của *H* trên *AB, AC* (hình 20.12).

20.6. (h.20.13)



Hình 20.13

Trên tia *Oy* lấy điểm *A* sao cho $OA = a$. Vì $OM + ON = a$ nên $OM = NA$. Vẽ đường phân giác *Ot* của góc *xOy* và vẽ đường trung trực của *OA* chúng cắt nhau tại *K*. Ta phải chứng minh *K* là một điểm cố định và đường trung trực của *MN* đi qua *K*.

Ta có *OA* trên tia *Oy* mà $OA = a$ không đổi nên *A* là một điểm cố định, do đó đường trung trực của *OA* cũng cố định. Tia *Ot* là tia phân giác của góc *xOy* nên *Ot* cũng cố định. Điểm *K* là giao điểm của hai đường thẳng cố định nên *K* cố định.

Điểm *K* nằm trên đường trung trực của *OA* nên $KO = KA$, do đó ΔKOA cân $\Rightarrow A_1 = O_2$. Mặt khác, $O_1 = O_2$ nên $A_1 = O_1$

ΔKMO và ΔKNA có: $OM = NA$; $O_1 = A_1$ và $KO = KA$. Do đó $\Delta KMO = \Delta KNA$

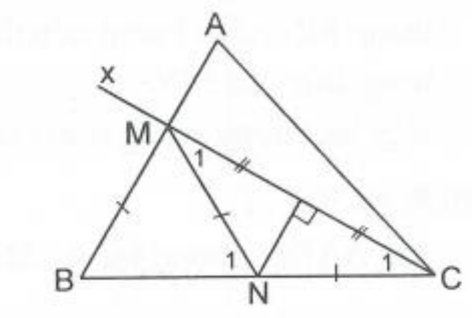
$\Rightarrow KM = KN$.

Vậy *K* nằm trên đường trung trực của *MN*, nói cách khác, đường trung trực của *MN* đi qua điểm cố định là điểm *K*.

20.7. (h.20.14)

• *Tìm cách giải*

Giả sử đã xác định được điểm $M \in AB$, điểm $N \in BC$ sao cho $BM = MN = NC$.



Hình 20.14

Ta có ΔMBN cân tại *M* nên $B = N_1$.

ΔMNC cân tại *N* nên $M_1 = C_1$.

Xét ΔMNC có N_1 là góc ngoài nên $N_1 = C_1 + M_1 = 2C_1$.

Suy ra $C_1 = \frac{1}{2}N_1 = \frac{1}{2}B$.

Do đó xác định được điểm *M* rồi điểm *N*.

• *Cách xác định điểm M, điểm N*

- Ở trong góc *C*, vẽ tia *Cx* sao cho $BCx = \frac{1}{2}B$. Tia *Cx* cắt cạnh *AB* tại *M*.

- Vẽ đường trung trực của *MC* cắt cạnh *BC* tại *N*. Khi đó ta có $BM = MN = NC$.

• *Chứng minh*

Điểm *N* nằm trên đường trung trực của *MC* nên $NM = NC$. (1)

ΔMNC cân tại $N \Rightarrow M_1 = C_1$. Do đó $N_1 = 2C_1 = 2.\frac{1}{2}.B = B$.

Suy ra Δ MBN là tam giác cân $\Rightarrow$MB=*MN*. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $MB = MN = NC$.

20.8. (h.20.15)

Vẽ các đường trung trực của *AD* và *BC*, chúng cắt nhau tại *O*. Điểm *O* nằm trên đường trung trực của *AD* nên $OA = OD$.

Điểm *O* nằm trên đường trung trực của *BC* nên $OB = OC$.

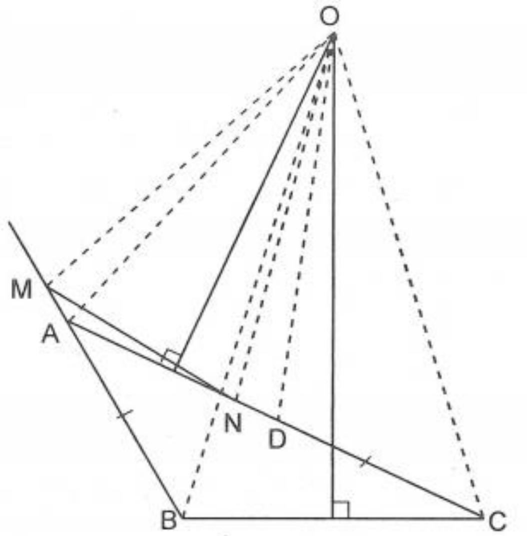
Ta có $\Delta OBA = \Delta OCD$ (c.c.c).

Suy ra $OBA = OCD$.

Do đó $\Delta OBM = \Delta OCN$ (c.g.c)

$\Rightarrow OM = ON$. Điểm *O* cách đều hai đầu đoạn thẳng *MN* nên *O* nằm trên đường trung trực của *MN*.

Vậy ba đường trung trực của *AD*, *BC* và *MN* cùng đi qua điểm *O*.



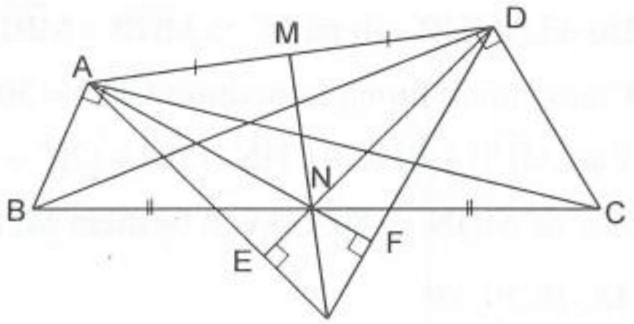
Hình 20.15

20.9. (h.20.16)

Xét ΔABC vuông tại $A, \Delta DBC$ vuông tại *D* có *AN* và *DN* là các đường trung tuyến ứng với cạnh huyền *BC* nên $AN = DN = \frac{1}{2}BC$.

Suy ra ΔNAD cân tại *N*, do đó đường trung tuyến *NM* cũng là đường cao.

Ba đường thẳng *AE*, *DF*, *MN* là ba đường cao của ΔNAD nên chúng cùng đi qua một điểm.



Hình 20.16

20.10. (h.20.17)

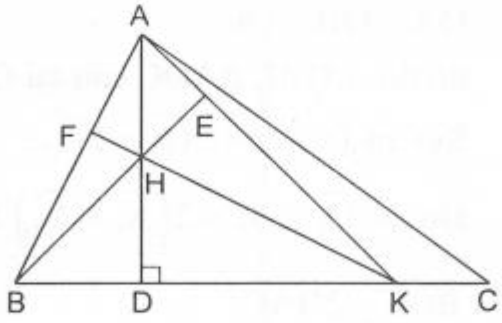
Gọi *E* là giao điểm của *BH* và *AK*. ΔDBH vuông cân tại *D* nên $DBH = 45°$. ΔDKA vuông cân tại *D* nên $DAK = 45°$.

Xét ΔEBK có $DBE + BKE = 45° + 45° = 90°$

suy ra $BEK = 90°$, do đó $BE \perp AK$.

Xét ΔABK có *AD* và *BE* là hai đường cao cắt nhau tại *H*

Suy ra *HK* là đường cao thứ ba, do đó $KH \perp AB$



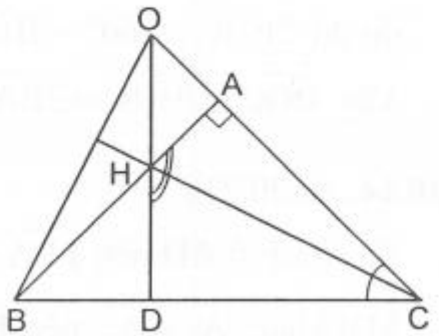
Hình 20.17

20.11. (h.20.18)

Ta có $AHD + ACD = 180°$ (giả thiết) (1)

và $AHD + BHD = 180°$ (kề bù). (2)

Từ (1) và (2), suy ra $ACD = BHD$.



Hình 20.18

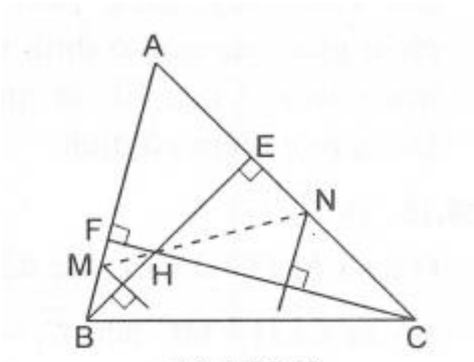
Xét ΔABC vuông tại A có $ABC + ACB = 90°$.

Do đó $ABC + BHD = 90°$. Suy ra $BDH = 90°$. Vậy $HD \perp BC$.

Xét ΔOBC có OD và BA là hai đường cao cắt nhau tại H, suy ra CH là đường cao thứ ba. Do đó $CH \perp OB$.

20.12. (h.20.19)

Hai góc BAC và BHC là hai góc có cạnh tương ứng vuông góc, một góc nhọn, một góc tù nên chúng bù nhau:



Hình 20.19

$A + BHC = 180° \Rightarrow BHC = 180° - 60° = 120°$.

Điểm M nằm trên đường trung trực của HB nên $MH = MB$.

Do đó ΔMHB cân tại $M \Rightarrow MHB = MBH = 30°$.

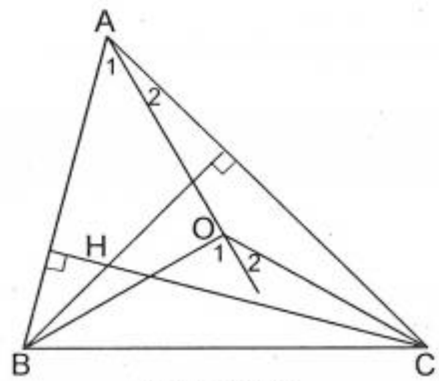
Chứng minh tương tự ta được $CHN = 30°$.

Vậy $MHB + BHC + CHN = 30° + 120° + 30° = 180°$.

Suy ra $MHN = 180°$, do đó ba điểm M, H, N thẳng hàng.

20.13. (h.20.20)

Vì ΔABC nhọn nên O và H nằm trong tam giác.



Hình 20.20

Điểm O cách đều ba đỉnh của ΔABC nên

$OA = OB = OC$,

do đó ΔAOB, ΔAOC cân tại O.

Suy ra $O_1 = 2A_1; O_2 = 2A_2$.

Do đó $O_1 + O_2 = 2\left(A_1 + A_2\right)$ hay $BOC = 2BAC$.

Điểm H là trực tâm của ΔABC nên $BH \perp AC$, $CH \perp AB$.

Hai góc BAC và BHC là hai góc có cạnh tương ứng vuông góc, một góc nhọn, một góc tù nên

$BHC + BAC = 180° \Rightarrow BHC = 180° - BAC$, do đó $2BHC = 360° - 2BAC$.

Vậy $BOC + 2BHC = 2BAC + \left(360° - 2BAC\right) = 360°$

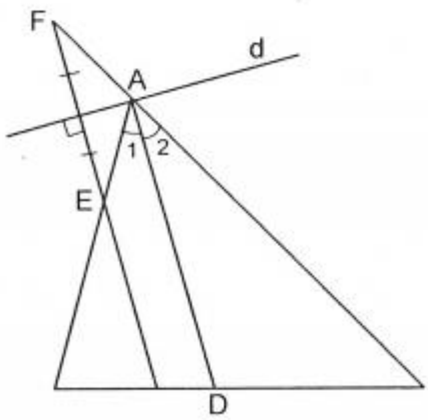
20.14. (h.20.21)

Ta có $EF // AD$ nên $FEA = A_1; F = A_2$.

Mặt khác, $A_1 = A_2$ nên $FEA = F$.

Suy ra ΔAEF cân tại A.

Trong tam giác cân, đường trung trực của cạnh đáy đồng thời là đường phân giác của góc ở đỉnh nên đường trung trực d của EF đi qua đỉnh A. Đó là một điểm cố định.



Hình 20.21

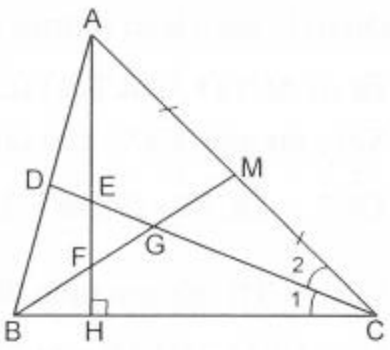
20.15. (h.20.22)

Giả sử ΔEFG là tam giác đều, suy ra $CEH = 60°$ nên $C_1 = 30°, C_2 = 30°$.

Ta còn có $CGM = EGF = 60°$.

Do đó $CMG = 180° - (30° + 60°) = 90°$. Suy ra $BM \perp AC$.

Xét ΔABC có đường trung tuyến *BM* đồng thời là đường cao nên ΔABC cân.



Hình 20.22

Mặt khác, $ACB = 30° + 30° = 60°$ nên ΔABC là tam giác đều.

Do đó ba đường *AH*, *BM*, *CD* phải đồng quy, tức là ba điểm *E*, *F*, *G* trùng nhau, trái giả thiết. Vậy ΔEFG không thể là tam giác đều.

Chuyên đề 21. CHỨNG MINH BA ĐƯỜNG THẲNG CÙNG ĐI QUA MỘT ĐIỂM (ĐỒNG QUY)

A. Kiến thức cần nhớ

Trong các chuyên đề trước ta gặp một số bài toán về chứng minh ba đường thẳng *a, b, c* đồng quy.

Phương pháp giải các bài toán này là vận dụng định lí về các đường đồng quy của tam giác:

- Ba đường trung tuyến của một tam giác đồng quy;
- Ba đường phân giác của một tam giác đồng quy;
- Ba đường trung trực của một tam giác đồng quy;
- Ba đường cao của một tam giác đồng quy.

Nếu ba đường thẳng *a, b, c* đã cho không phải là các đường chủ yếu của tam giác thì để chứng minh *a, b, c* đồng quy, ta có thể gọi giao điểm của *a* và *b* là *O* rồi chứng minh đường thẳng *c* đi qua *O* hay chứng minh *O* nằm trên đường thẳng *c.*

Một số trường hợp có thể đưa bài toán chứng minh ba đường đồng quy về chứng minh ba điểm thẳng hàng.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho tam giác *ABC*, góc *A* tù. Vẽ các đường thẳng *m* và *n* lần lượt là đường trung trực của *AB* và *AC*, cắt *BC* theo thứ tự tại *E* và *F*. Vẽ tia phân giác *Ax* của góc *EAF*. Chứng minh rằng các đường thẳng *m*, *n* và *Ax* đồng quy

Giải (h.21.1)

**** Tìm cách giải.***

Gọi *O* là giao điểm của *m* và *n*. Ta phải chứng minh tia *Ax* đi qua *O*. Muốn vậy phải chứng minh $OAE = OAF$.

*** Trình bày lời giải.**

Gọi *O* là giao điểm của hai đường thẳng *m* và *n*.

Ta có: $OB = OC = OA.$

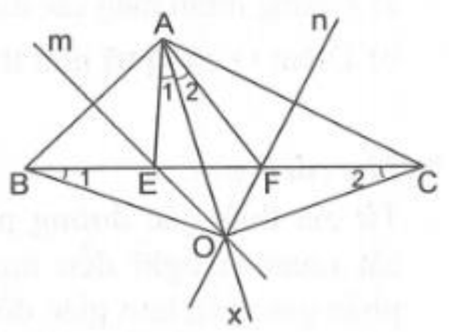
$\Delta AOE = \Delta BOE$ (c.c.c). Suy ra $A_1 = B_1$.

$\Delta AOF = \Delta COF$ (c.c.c). Suy ra $A_2 = C_2$.

Mặt khác, $B_1 = C_2$ (vì ΔBOC cân tại *O*) nên $A_1 = A_2$

Do đó tia *AO* là tia phân giác của góc *EAF*.

Suy ra ba đường thẳng *m, n* và *Ax* đồng quy tại *O*.



Hình 21.1

Ví dụ 2: Cho tam giác *ABC* cân tại *A*. Trên các cạnh *AB, AC* lần lượt lấy các điểm *D* và *E* sao cho $AD = AE$. Gọi *M* là trung điểm của *BC*. Chứng minh rằng ba đường thẳng *AM, BE* và *CD* đồng quy

Giải (h.21.2)

**** Tìm cách giải.***

Gọi *O* là giao điểm của *BE* và *CD*. Ta phải chứng minh *AM* đi qua *O* tức là phải chứng minh ba điểm *A*, *O*, *M* thẳng hàng.

*** Trình bày lời giải.**

Ta có $AB = AC,\ AD = AE,$ suy ra $BD = CE.$

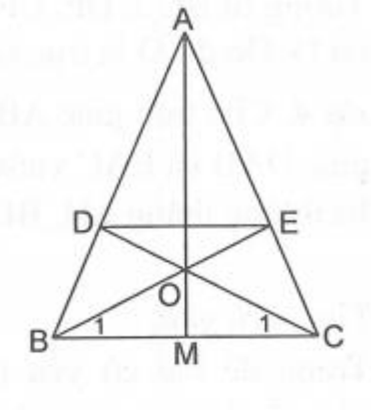
$\Delta EBC = \Delta DCB$ (c.g.c) $\Rightarrow B_1 = C_1.$

Gọi *O* là giao điểm của *BE* và *CD.*

Vì ΔOBC cân tại *O* nên $OB = OC.$ (1)

Mặt khác, $AB = AC$ (giả thiết) (2) và $MB = MC$ (giả thiết) (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra ba điểm *A, O, M* thẳng hàng (vì cùng nằm trên đường trung trực của *BC*). Do đó ba đường thẳng *AM, BE, CD* đồng quy.



Hình 21.2

Ví dụ 3. Cho tam giác *ABC*. Các đường phân giác các góc ngoài của tam giác cắt nhau tại *D, E, F (D* nằm trong góc *A, E* nằm trong góc *B, F* nằm trong góc *C).*

a) Chứng minh rằng các đường thẳng *AD, BE, CF* đồng quy tại một điểm *O.*

b) Điểm *O* có vị trí như thế nào đối với tam giác *DEF?*

Giải (h.21.3)

**** Tìm cách giải.***

Từ giả thiết các đường phân giác ngoài cắt nhau ta nghĩ đến định lí ba đường phân giác của tam giác đồng quy. Vì vậy để chứng minh *AD, BE, CF* đồng quy ta chỉ cần chứng minh *AD, BE, CF* là ba đường phân giác của tam giác *ABC.*

*** Trình bày lời giải.**

a) Xét tam giác *ABC*, các đường phân giác ngoài tại đỉnh *B* và đỉnh *C* cắt nhau tại *D*. Suy ra *AD* là đường phân giác trong tại đỉnh *A.*

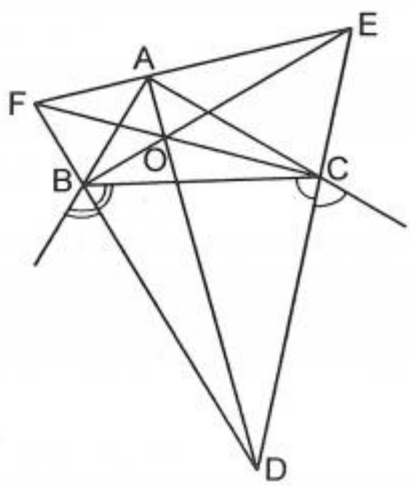
Chứng minh tương tự ta được *BE, CF* lần lượt là các đường phân giác trong tại đỉnh *B,* đỉnh *C* của tam giác *ABC.*

Do đó ba đường thẳng *AD, BE, CF* đồng quy tại *O.*

b) Ba điểm *F, B, D* thẳng hàng; ba điểm *E, C, D* thẳng hàng; ba điểm *F, A, E* thẳng hàng.

Xét ΔDEF có $AD \perp EF$ (hai đường phân giác của hai góc kề bù).

Tương tự $BE \perp DF,\ CF \perp DE$ nên *AD, BE, CF* là ba đường cao gặp nhau tại *O*. Do đó *O* là trực tâm của tam giác *DEF.*



Hình 21.3

Ví dụ 4. Cho tam giác *ABC* có $A = 135°.$ Vẽ ra ngoài tam giác này các tam giác *DAB* và *EAC* vuông cân tại *D* và *E*. Vẽ $AH \perp BC.$ Chứng minh rằng ba đường thẳng *AH, BD, CE* đồng quy.

Giải (h.21.4)

**** Tìm cách giải.***

Trong đề bài có yếu tố góc vuông, có yếu tố đường cao nên ta có thể dùng định lí ba đường cao của tam giác đồng quy.

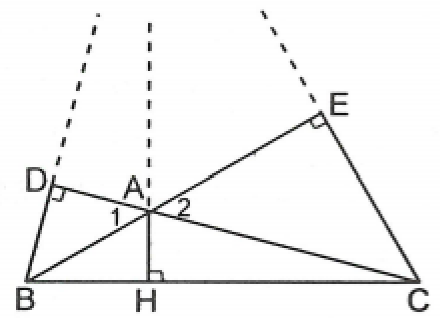
*** Trình bày lời giải.**

Tam giác *DAB* vuông cân tại $D \Rightarrow A_1 = 45°$.

Tam giác *EAC* vuông cân tại $E \Rightarrow A_2 = 45°$.

Ta có $BAD + BAC = 45° + 135° = 180°$, suy ra ba điểm *D, A, C* thẳng hàng. Chứng minh tương tự ta được ba điểm *B, A, E* thẳng hàng.

Xét ΔABC có *AH, BD, CE* là ba đường cao nên chúng đồng quy.



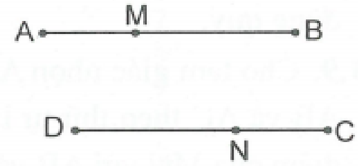
Hình 21.4

*** Lưu ý:** Trực tâm của tam giác tù nằm ngoài tam giác.

C. Bài tập vận dụng

• Đưa chứng minh đồng quy về chứng minh thẳng hàng

21.1. Trong hình 21.5 có: $AB // CD,\ AB = CD,\ AM = CN$. Chứng minh rằng ba đường thẳng *AC, BD* và *MN* đồng quy.



Hình 21.5

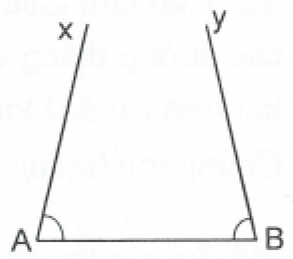
21.2. Cho tam giác *ABC* vuông tại $A,\ B = 60°$. Gọi *M* là một điểm ở trong tam giác sao cho $MBC = 40°, MCB = 20°$. Vẽ điểm *D* và *E* sao cho đường thẳng *BC* là đường trung trực của *MD* và đường thẳng *AC* là đường trung trực của *ME*. Chứng minh rằng ba đường thẳng *BM, AC* và *DE* đồng quy.

21.3. Cho tam giác nhọn *ABC* và điểm *M* nằm trong tam giác sao cho $AMB = AMC = 120°$. Trên nửa mặt phẳng bờ *BC* không chứa *A* vẽ các tia *Bx* và *Cy* sao cho $CBx = BCy = 60°$.

Chứng minh rằng ba đường thẳng *AM, Bx, Cy* đồng quy.

21.4. Hình 21.6 có $BAx = ABy < 90°$. Gọi *d* là đường trung trực của *AB*.

Chứng minh rằng các đường thẳng *Ax, By* và *d* đồng quy.



Hình 21.6

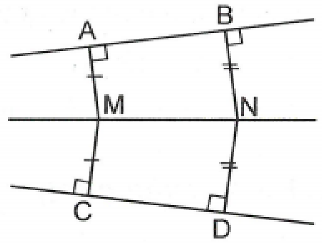
21.5. Cho tam giác *ABC* và một điểm *O* ở trong tam giác.

21.6. Gọi *F* và *G* lần lượt là trọng tâm của các tam giác *AOB* và *AOC*.

Chứng minh rằng ba đường thẳng *AO, BF, CG* đồng quy.

• Ba đường phân giác đồng quy

21.7. Trong hình 21.7, hai đường thẳng *AB* và *CD* không song song. Chứng minh rằng ba đường thẳng *AB, CD, MN* đồng quy.



Hình 21.7

21.8. Cho tam giác *ABC*, $\widehat{A} = 120°$. Vẽ các đường phân giác *AD* và *CE* cắt nhau tại *O*. Từ B vẽ đường thẳng $xy \perp BO$. Chứng minh rằng ba đường thẳng *xy, DE* và *AC* đồng quy.

21.9. Cho tam giác nhọn *ABC*, đường cao *AD*. Vẽ các điểm *M* và *N* sao cho *AB* và *AC* theo thứ tự là các đường trung trực của *DM* và *DN*. Gọi giao điểm của *MN* với *AB* và *AC* theo thứ tự là *F* và *E*.

Chứng minh rằng ba đường thẳng *AD, BE, CF* đồng quy.

• Ba đường cao đồng quy

21.10. Cho tam giác *ABC* vuông ở *A*, đường cao *AH*. Gọi *O* và *K* lần lượt là giao điểm các đường phân giác của tam giác *ABH* và tam giác *ACH*. Vẽ $AD \perp OK$.

Chứng minh rằng các đường thẳng *AD, BO, CK* đồng quy.

21.11. Cho tam giác *ABC*, đường cao *AD*. Trên nửa mặt phẳng bờ *AB* không chứa *C* vẽ đoạn thẳng $BF \perp BA$ và $BF = BA$. Trên nửa mặt phẳng bờ *AC* không chứa *B* vẽ đoạn thẳng *CE* sao cho $CE \perp CA$ và $CE = CA$. Chứng minh rằng ba đường thẳng *AD, BE, CF* đồng quy.

21.12. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*, đường phân giác *AD*. Từ *A, B, C* vẽ các đường thẳng d_1, d_2, d_3 vuông góc với *AD*. Các đường thẳng d_2 và d_3 lần lượt cắt *AD* tại *E* và *F*.

Chứng minh rằng các đường thẳng d_1, BF, CE đồng quy.

• (Ba đường trung trực đồng quy, ba đường trung tuyến đồng quy

21.13. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*, đường cao *AH*. Vẽ các đường phân giác của góc *BAH* và góc *CAH* cắt *BC* tại *E* và *F*. Gọi *M* là trung điểm của *EF*. Qua *M* vẽ đường thẳng $d\,//\,AH$. Chứng minh rằng các đường phân giác của góc *B*, góc *C* và đường thẳng *d* đồng quy.

21.14. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*, $AB = 4cm$; $AC = 6cm$. Trên cạnh *BC* lấy điểm *D* sao cho $\widehat{CAD} = \widehat{ACD}$. Trên cạnh *AC* lấy điểm *E*, trên cạnh *AB* lấy điểm *F* sao cho $BE = 5cm$ và $CF = \sqrt{40}cm$. Chứng minh rằng ba đường thẳng *AD, BE, CF* đồng quy.

21.15. Cho tam giác nhọn *ABC*, đường cao *AH*, đường phân giác *BD* và đường trung tuyến *CM*. Cho biết tam giác *HDM* là tam giác đều, chứng minh rằng ba đường thẳng *AH, BD, CM* đồng quy.

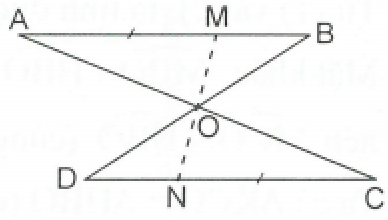
Hướng dẫn giải

21.1. (h.21.8)

Gọi *O* là giao điểm của *AC* và *BD*, ta phải chứng minh *MN* đi qua *O*, tức là phải chứng minh ba điểm *M, O, N* thẳng hàng.

Ta có $\Delta AOB = \Delta COD$ (g.c.g) $\Rightarrow OA = OC$ và $\widehat{A} = \widehat{C}$.

$\Delta MOA = \Delta NOC\ (c.g.c) \Rightarrow MOA = NOC.$



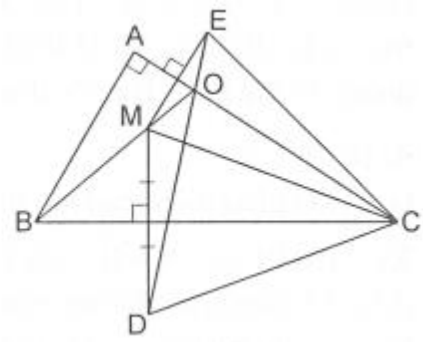
Hình 21.8

Ta có $MOA + MOC = 180°$ (kề bù)

$\Rightarrow NOC + MOC = 180° \Rightarrow MON$ là góc bẹt.

Do đó ba điểm *M, O, N* thẳng hàng, dẫn tới ba đường thẳng AC, *BD* và *MN* đồng quy.

21.2. (h.21.9)



Hình 21.9

Gọi *O* là giao điểm của hai đường thẳng *BM* và *AC.*

Ta phải chứng minh *DE* đi qua *O.*

Xét ΔABC vuông tại $A,\ B = 60° \Rightarrow C = 30°$

Ta có $BOC = 180° - (40° + 30°) = 110°.$

Do đó $CMO = 180° - (110° + 10°) = 60°.$

Điểm *C* nằm trên đường trung trực của *MD* và *ME* nên $CD = CM = CE.$

Ta có $\Delta CEO = \Delta CMO$ (c.c.c) $\Rightarrow CEO = CMO = 60°.$

Xét tam giác *CDE* cân tại *C* có

$DCE = DCM + ECM = 2(BCM + ACM) = 2.ACB = 60°.$

Vậy ΔCDE là tam giác đều $\Rightarrow CED = 60°.$

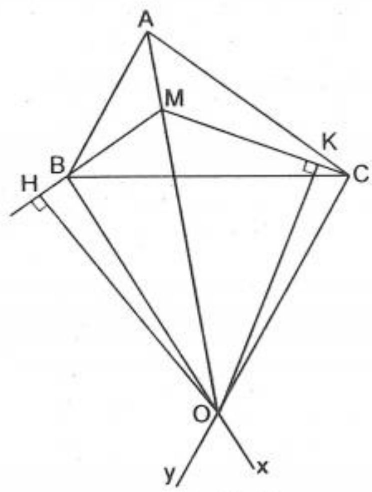
Vậy $CED = CEO (= 60°)$, hai tia *ED* và *EO* trùng nhau dẫn tới ba điểm *D, O, E* thẳng hàng. Do đó ba đường thẳng *BM, AC* và *DE* đồng quy.

21.3. (h.21.10)

Gọi *O* là giao điểm của các tia *Bx* và *Cy.*

Ta phải chứng minh đường thẳng *AM* đi qua *O.* Vẽ $OH \perp MB;\ OK \perp MC.$

Tam giác *BOC* là tam giác đều nên $BOC = 60°.$ (1)



Hình 21.10

Ta có tổng $AMB + AMC + BMC = 360°$

$\Rightarrow BMC = 360° - (120° + 120°) = 120°.$ (2)

Từ (1) và (2), ta tính được $MBO + MCO = 180°.$

Mặt khác, $MBO + HBO = 180°$ nên $MCO = HBO$ (cùng bù với MBO).

Ta có $\Delta KCO = \Delta HBO$ (cạnh huyền, góc nhọn)

$\Rightarrow OK = OH.$

$\Delta MOK = \Delta MOH$ (cạnh huyền, cạnh góc vuông)

$\Rightarrow KMO = HMO = 120° : 2 = 60°.$

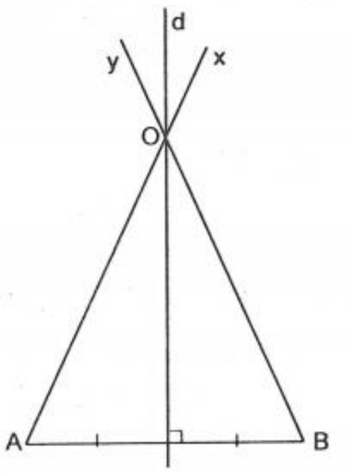
Do đó $AMC + KMO = 120° + 60° = 180°.$

Suy ra ba điểm *A*, *M*, *O* thẳng hàng, dẫn tới ba đường thẳng *AM*, *Bx*, *Cy* đồng quy.

21.4. (h.21.11)

Gọi *O* là giao điểm của hai tia *Ax* và *By*.

Xét ΔAOB có $A = B$ nên $OA = OB$, suy ra điểm *O* nằm trên đường trung trực *d* của *AB*. Vậy các đường thẳng *Ax*, *By* và *d* đồng quy.



Hình 21.11

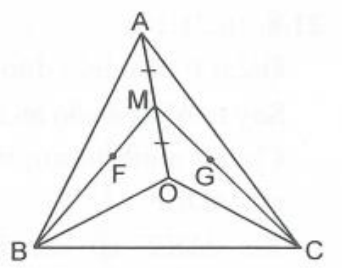
21.5. (h.21.12)

Gọi *M* là trung điểm của *OA*.

Xét ΔAOB có *F* là trọng tâm nên đường thẳng *BF* đi qua trung điểm *M* của *AO*.

Xét ΔAOC có *G* là trọng tâm nên đường thẳng *CG* đi qua trung điểm *M* của *AO*.

Do đó ba đường thẳng *AO*, *BF*, *CG* đồng quy tại trung điểm *M* của *AO*.



Hình 21.12

21.6. (h.21.7)

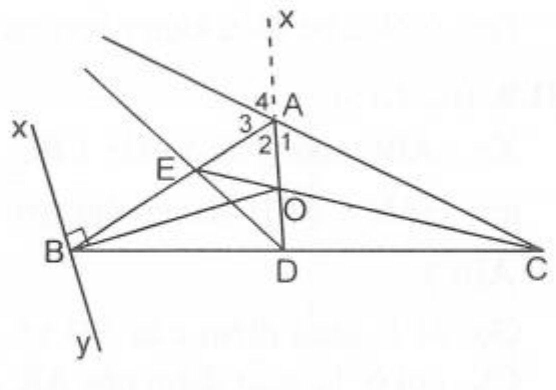
Hai đường thẳng *AB* và *CD* không song song nên chúng cắt nhau tạo thành một góc. Hai điểm *M* và *N* nằm trong góc đó, cùng cách đều hai đường thẳng này nên chúng nằm trên tia phân giác của góc này. Suy ra ba đường thẳng *AB*, *CD* và *MN* đồng quy tại đỉnh của góc.

21.7. (h.21.13)

Xét tam giác *ABC* có hai đường phân giác *AD*, *CE* cắt nhau tại *O* nên *BO* là đường phân giác của góc *ABC*.

Đường thẳng *xy* đi qua *B* và vuông góc với *BO* nên *xy* là đường phân giác ngoài tại đỉnh *B* của góc *ABD*.

Gọi *Ax* là tia đối của tia *AD*.



Hình 21.13

Vì $BAC = 120°$ nên dễ thấy $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 60^0$.

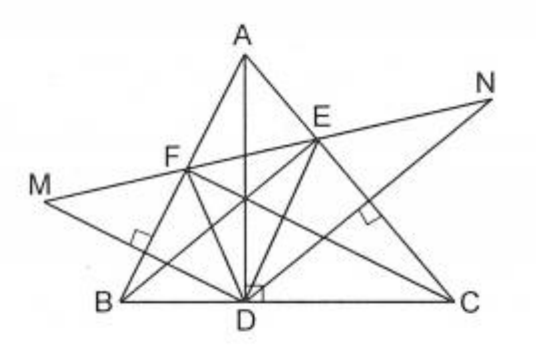
Xét ΔADC có *AE* là đường phân giác ngoài tại đỉnh *A*, *CE* là đường phân giác trong tại đỉnh *C* nên *DE* là đường phân giác ngoài tại đỉnh *D*.

Xét ΔABD có đường thẳng *AC* là đường phân giác ngoài tại đỉnh *A*, đường thẳng *xy* là đường phân giác ngoài tại đỉnh *B*, đường thẳng *DE* là đường phân giác trong tại đỉnh *D*. Do đó ba đường thẳng *xy*, *DE* và *AC* đồng quy.

21.8. (h.21.14)

Điểm *F* nằm trên đường trung trực của *DM* nên $FD = FM$.

Suy ra ΔFDM cân tại *F* do đó *FB* là đường phân giác tại đỉnh F của ΔDEF. Chứng minh tương tự ta được *EC* là đường phân giác ngoài tại đỉnh *E* của ΔDEF.



Hình 21.14

Xét ΔDEF có hai đường phân giác ngoài cắt nhau tại *A* nên *DA* là đường phân giác của góc *EDF*. (1)

Mặt khác, $DB \perp DA$ nên *DB* là đường phân giác ngoài tại *D*.

Điểm *B* là giao điểm của hai đường phân giác ngoài tại đỉnh *F* và *D* của ΔDEF nên *EB* là đường phân giác của góc *DEF*. (2)

Chứng minh tương tự ta được *FC* là đường phân giác của góc *DF*E. (3)

Từ (1), (2), (3), suy ra *AD*, *BE*, *CF* đồng quy.

* *Lưu ý:* Nếu bỏ điều kiện nhọn của tam giác *ABC* thì bài toán vẫn đúng.

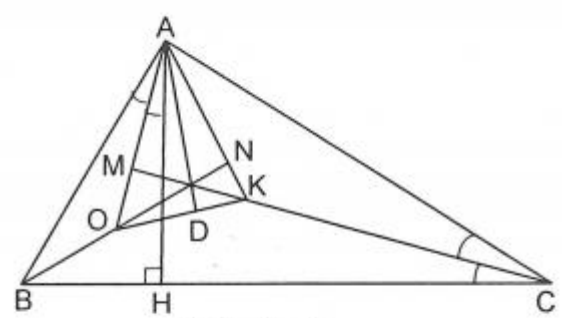
21.9. (h.21.15)

Xét ΔABC vuông tại $A, AH \perp BC$ nên $BAH = ACB$

(cùng phụ với ABC).

Gọi *M* là giao điểm của *AO* và *CK*, gọi *N* là giao điểm của *AK* và *BO*.

Vì *O* là giao điểm của các đường phân giác của ΔABH nên $BAO = HAO$.



Hình 21.15

Vì *K* là giao điểm của các đường phân giác của ΔACH nên $ACK = BCK$

Xét ΔAMC có $MAC + MCA = MAC + \dfrac{ACB}{2} = MAC + \dfrac{BAH}{2} = MAC + MAB = BAC = 90^0$.

Suy ra $AMC = 90^0 \Rightarrow CM \perp AO$.

Chứng minh tương tự ta được $BN \perp AK$.

Xét ΔAOK có *AD*, *BO* và *CK* là ba đường cao nên đồng quy.

21.10. (h.21.16)

Trên tia đối của tia *AD* lấy điểm *K* sao cho $AK = BC$.

Xét ΔADC có góc KAC là góc ngoài nên $KAC = D + ACB = 90° + ACB$.

Mặt khác, $BCE = 90° + ACB$ nên $KAC = BCE$.

Ta có $\Delta KAC = \Delta BCE$ (c.g.c) $\Rightarrow C_1 = E$.

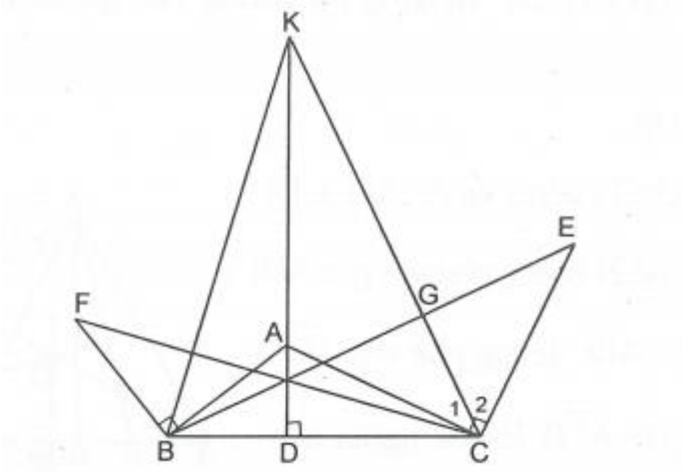
Vì $C_1 + C_2 = 90°$ nên $E + C_2 = 90°$.

Gọi G là giao điểm của BE với KC.

Xét ΔGCE có $E + C_2 = 90°$ nên $G = 90° \Rightarrow BE \perp KC$.

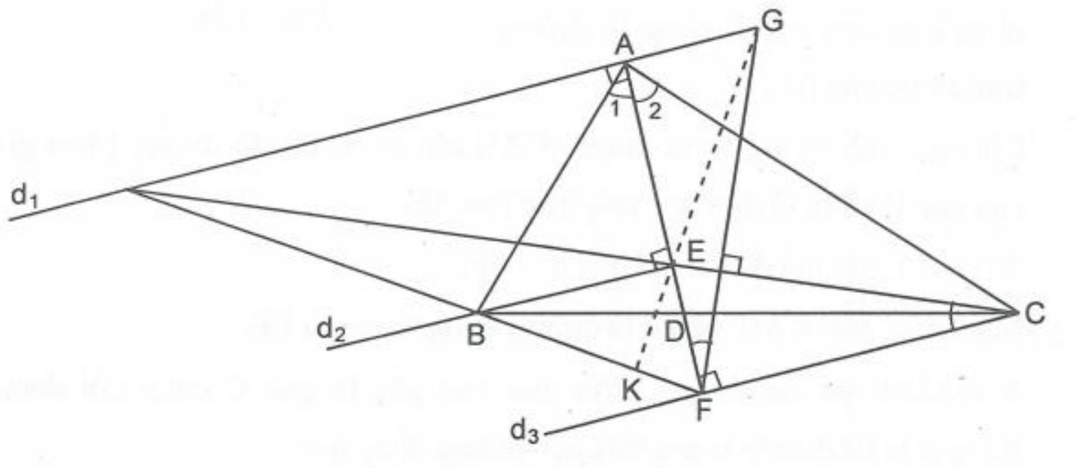
Chứng minh tương tự, ta có $CF \perp AB$.

Xét ΔKBC có AD, BE, CF là ba đường cao nên chúng đồng quy.



Hình 21.16

21.11. (h.21.17)



Hình 21.17

Tam giác EAB vuông tại E, $A_1 = 45°$ nên là tam giác vuông cân.

Suy ra $EA = EB$. Tương tự, ta có: $FA = FC$.

Từ F vẽ một đường thẳng vuông góc với CE cắt d_1 tại G.

Gọi K là giao điểm của đường thẳng EG với BF.

Ta có $AFG = FCE$ (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc).

$\Delta AFG = \Delta FCE$ (g.c.g) $\Rightarrow AG = FE.$

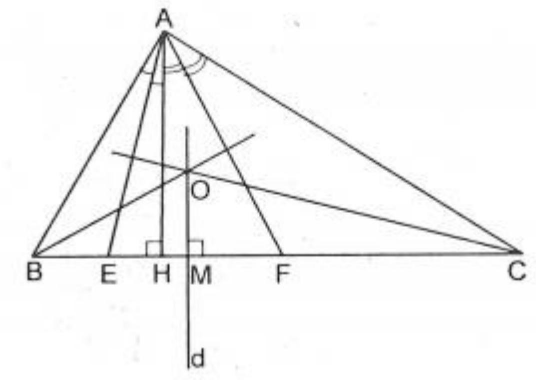
$\Delta AGE = \Delta EFB$ (c.g.c) $\Rightarrow AGE = EFB.$

Ta có $AGE + AEG = 90° \Rightarrow EFB + KEF = 90° \Rightarrow EK \perp BF.$

Xét ΔEFG có CE, BF và d_1 là ba đường cao do đó ba đường thẳng này đồng quy.

21.12. (h.21.18)

Tam giác ABC vuông tại $A, AH \perp BC$ nên $BAH = ACB$ (cùng phụ với góc ABC)



Hình 21.18

Ta có $CAH = ABC$ (cùng phụ với ACB).

Xét ΔAFC có AFB là góc ngoài nên

$AFB = FAC + FCA = FAH + BAH = FAB.$

Suy ra ΔBAF cân tại B do đó đường phân giác của góc B cũng là đường trung trực của AF.

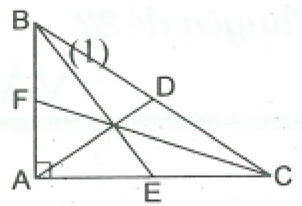
Chứng minh tương tự ta được ΔCAE cân tại C do đó đường phân giác của góc C cũng là đường trung trực của AE.

Ta có $d // AH$ mà $AH \perp EF$ nên $d \perp EF$.

Mặt khác, $ME = MF$ nên d là đường trung trực của EF.

Xét ΔAEF có các đường phân giác của góc B, góc C cùng với đường thẳng d là ba đường trung trực nên chúng đồng quy.

21.13. (h.21.19)



Hình 21.19

Ta có $CAD = ACD \Rightarrow \Delta DAC$ cân $\Rightarrow DC = DA.$ (1)

Tam giác ABC vuông tại $A \Rightarrow ABC + ACB = 90°.$

Mặt khác, $BAD + CAD = 90°$ mà $ACB = CAD$ nên $ABC = BAD.$

Do đó ΔDAB cân $\Rightarrow DB = DA.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $DC = DB.$ Vậy D là trung điểm của BC.

Xét ΔABE vuông tại A có $AE^2 = BE^2 - AB^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow AE = 3(cm) \Rightarrow E$ là trung điểm của AC.

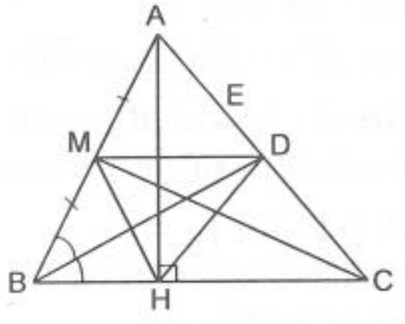
Xét ΔAFC vuông tại A có $AF^2 = CF^2 - AC^2 = \left(\sqrt{40}\right)^2 - 6^2 = 4$

$\Rightarrow AF = 2(cm)$

$\Rightarrow F$ là trung điểm của AB.

Xét ΔABC có AD, BE, CF là ba đường trung tuyến nên chúng đồng quy.

21.14. (h.21.20)



Hình 21.20

Tam giác ABH vuông tại H, có HM là đường trung tuyến nên $HM = \frac{1}{2}AB$

Suy ra $DM = \frac{1}{2}AB$ (vì $HM = DM$).

Do đó ΔDAB vuông tại D.

Tam giác ABC có BD vừa là đường phân giác vừa là đường cao nên là tam giác cân tại B

$\Rightarrow BA = BC$ (1) dẫn tới $DA = DC$.

Xét ΔHAC và ΔHAB vuông tại H có $HD = \frac{1}{2}AC$; $HM = \frac{1}{2}AB$ mà $HD = HM$ nên $AC = AB$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AB = BC = CA$ do đó ΔABC đều.

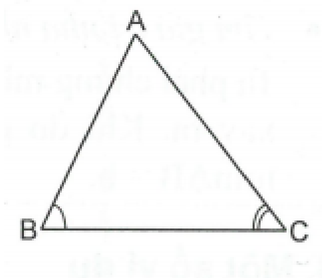
Trong tam giác đều ABC, đường cao AH, đường trung tuyến CM cũng là đường phân giác. Suy ra AH, BD, CM đồng quy.

Chuyên đề 22. BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ HÌNH HỌC

A. Kiến thức cần nhớ

• *Để chứng minh hai đoạn thẳng hai góc không bằng nhau ta có thể:*

1. Dùng quan hệ giữa góc và cạnh đối trong một tam giác (h.22.1)

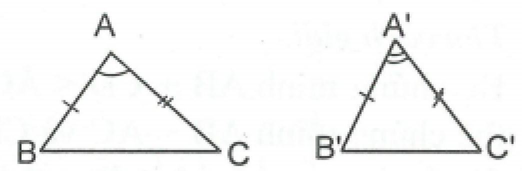


Hình 22.1

$$\Delta ABC:$$
$$AC > AB \Leftrightarrow B = C.$$

Suy ra trong tam giác tù (hoặc tam giác vuông) thì cạnh đối với góc tù (hoặc góc vuông) là cạnh lớn nhất.

2. Dùng quan hệ giữa góc và cạnh đối trong hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau (h.22.2)



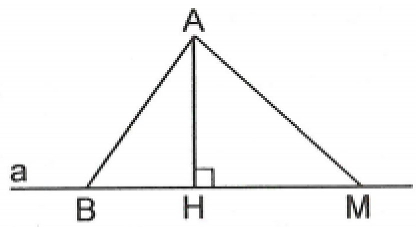
Hình 22.2

ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có:

$AB = A'B'$; $AC = A'C'$.

Khi đó: $BC > B'C' \Leftrightarrow A > A'$

3. Dùng quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên, giữa đường xiên và hình chiếu

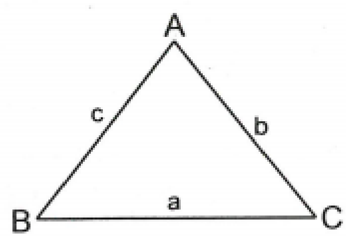


Hình 22.3

$AH \perp a, B, M \in a$ (h.22.3). Khi đó:

- $AM \geq AH$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv H$)
- $AM \geq AB \Leftrightarrow HM \geq HB$

4. Dùng bất đẳng thức tam giác (h.22.4)



Hình 22.4

$$\Delta ABC:$$
$$|b-c| < a < b+c$$

Mở rộng: Với ba điểm *A, B, C* bất kì bao giờ ta cũng có: $AB \leq AC + CB$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow C$ thuộc đoạn thẳng *AB*).

• *Tìm giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng AB thay đổi*

Ta phải chứng minh $AB \leq a$ (số *a* không đổi) và chỉ rõ khi nào dấu "=" xảy ra. Khi đó giá trị lớn nhất của độ dài *AB* là bằng *a*. Ta viết $maxAB = a$.

• *Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng AB thay đổi*

Ta phải chứng minh $AB \geq b$ (số *b* không đổi) và chỉ rõ khi nào dấu "=" xảy ra. Khi đó giá trị nhỏ nhất của độ dài *AB* là bằng *b*. Ta viết $minAB = b$.

B. Một số ví dụ

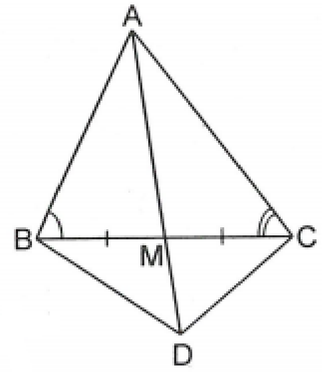
Ví dụ 1. Tam giác *ABC* có $C < B.$ Vẽ đường trung tuyến *AM*. Trên tia đối của tia *MA* lấy điểm *D*. Chứng minh rằng $AB + CD < AC + BD.$

Giải (h.22.5)

**** Tìm cách giải.***

Để chứng minh $AB + CD < AC + BD$ ta có thể chứng minh $AB < AC$ và $CD < BD.$ Sau đó cộng từng vế hai bất đẳng thức.

*** Trình bày lời giải.**



Hình 22.5

Tam giác *ABC* có $ACB < ABC$ suy ra $AB < AC.$ (1)

Xét ΔAMB và ΔAMC có: $MB = MC;$

AM chung; $AB < AC$ nên $AMB < AMC.$

Suy ra $CMD < BMD.$

Xét ΔCMD và ΔBMD có: $MC = MB;$ MD chung;

$CMD < BMD$ nên $CD < BD.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $AB + CD < AC + BD.$

*** Nhận xét:** Nếu $a < b$ và $c < d$ thì $a + c < b + d.$

Ví dụ 2. Cho tam giác *ABC* có $B \geq 90°.$ Gọi *O* là trung điểm của *BC*. Vẽ $BD \perp AO;$ $CE \perp AO$ (*D*, *E* thuộc đường thẳng *AO*). Chứng minh rằng $AB < \dfrac{AD + AE}{2}$

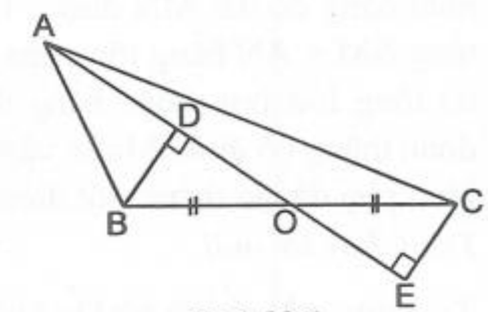
Giải (h.22.6)

**** Tìm cách giải.***

Ta có $AB < \dfrac{AD + AE}{2} \Leftrightarrow 2AB < AD + AE.$

Để chứng minh $2AB < AD + AE$ ta biểu diễn *AB* theo hai cách khác nhau rồi dùng tính chất cộng từng vế của hai bất đẳng thức cùng chiều sẽ có được 2*AB*.

*** Trình bày lời giải.**



Hình 22.6

Ta có $\Delta BOD = \Delta COE$ (cạnh huyền-góc nhọn) $\Rightarrow OD = OE.$

Xét ΔAOB có $B \geq 90°$ nên *OA* là cạnh lớn nhất, do đó $AB < AO.$ (*)

Suy ra $AB < AD + OD.$ (1)

Từ (*) ta được: $AB < AE - OE.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $2AB < AD + OD + AE - OE.$

Do đó $2AB < AD + AE$ (vì $OD = OE$).

Vậy $AB < \dfrac{AD + AE}{2}$

Ví dụ 3. Cho đoạn thẳng AB và trung điểm O của nó. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các tia Ax và By cùng vuông góc với AB. Lấy điểm $E \in Ax,$ điểm $F \in By$ sao cho $EOF = 90°$. Đặt $AOE = m°$. Xác định giá trị của m để EF có độ dài ngắn nhất.

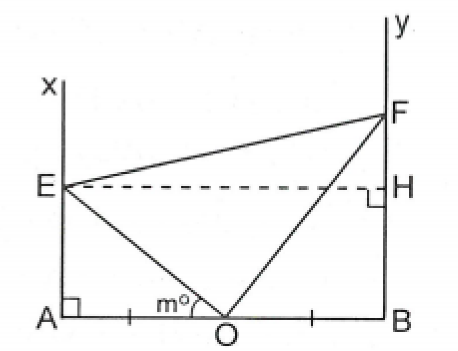
Giải (h.22.7)

**** Tìm cách giải.***

Vẽ $EH \perp By$. Dễ thấy $EF \geq EH = AB$ (không đổi).

Ta cần tìm giá trị của m để dấu $"="$ xảy ra.

Khi đó $minEF = AB.$



*** Trình bày lời giải.**

Vẽ $EH \perp By$. Theo tính chất đoạn chắn song song ta được $EH = AB$ và $AE = BH$.

Theo quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên ta có $EF \geq EH$, do đó $EF \geq AB.$ Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow F \equiv H \Leftrightarrow AE = BF \Leftrightarrow \Delta AOE = \Delta BOF$

$\Leftrightarrow AOE = BOF = 45°$ (vì $AOE + BOF = 90°$).

Vậy EF có độ dài ngắn nhất (bằng độ dài AB) khi và chỉ khi $AOE = 45°$, tức là khi và chỉ khi $m = 45.$

Ví dụ 4. Cho góc nhọn xOy và một điểm A ở trong góc đó. Xác định điểm M trên tia Ox, điểm N trên tia Oy sao cho $OM = ON$ và tổng $AM + AN$ nhỏ nhất.

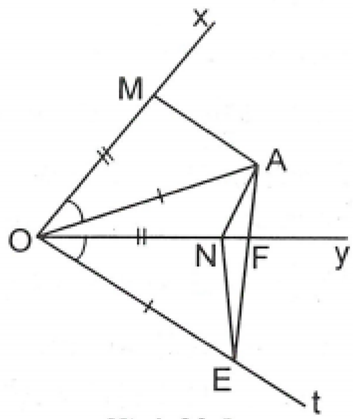
Giải (h.22.8)

**** Tìm cách giải.***

Xét ba điểm A, M, N ta có $AM + AN \geq MN$ nhưng độ dài MN lại thay đổi. Do đó không thể kết luận tổng $AM + AN$ có giá trị nhỏ nhất bằng độ dài MN được. Ta phải thay thế tổng $AM + AN$ bằng tổng của hai đoạn thẳng có tổng lớn hơn hoặc bằng độ dài của một đoạn thẳng cố định. Muốn vậy ta cần vẽ thêm hình phụ để tạo thêm một điểm E cố định.

*** Trình bày lời giải.**

Trên nửa mặt phẳng bờ Oy không chứa A vẽ tia Ot sao cho $yOt = AOx.$



Hình 22.8

Trên tia Ot lấy điểm E sao cho $OE = OA.$ Như vậy hai điểm A và E cố định, đoạn thẳng AE có độ dài không đổi.

Ta có $\Delta AOM = \Delta EON$ (c.g.c) $\Rightarrow AM = EN.$ Do đó $AM + AN = EN + AN.$ Gọi F là giao điểm của AE với tia Oy.

Xét ba điểm N, A, E ta có: $EN + AN \geq AE$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow N \equiv F$).

Vậy min $AM + AN = AE$ khi $N \equiv F$. Điểm $M \in Ox$ sao cho $OM = ON$.

C. Bài tập vận dụng

• Quan hệ giữa cạnh và góc đối trong tam giác

22.1. Cho tam giác ABC, $A = 60°$. Chứng minh rằng $BC^3 < AB^3 + AC^3$.

22.2. Cho tam giác $ABC, AB < AC$. Vẽ ra ngoài tam giác này các tam giác vuông cân tại A là ABE và ACF. Gọi D là trung điểm của BC.

Chứng minh rằng $DE < DF$.

22.3. Cho tam giác ABC, $A > 90°$ và $AB = \frac{1}{2}BC$. Chứng minh rằng $C > \frac{B}{2}$

22.4. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM.

Chứng minh rằng $AM > \frac{BC}{2}$ khi và chỉ khi góc A nhọn.

22.5. Cho tam giác ABC và một điểm D nằm trong tam giác. Chứng minh rằng trong bốn điểm A, B, C, D tồn tại ba điểm là ba đỉnh của một tam giác có một góc lớn hơn $29°$.

• Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên

22.6. Cho điểm A nằm ngoài đường thẳng a. Lấy điểm $B \in a$. Qua A vẽ một đường thẳng vuông góc với AB cắt đường thẳng a tại C.

Xác định vị trí của điểm B để BC có độ dài nhỏ nhất.

22.7. Cho tam giác ABC cân tại $A, BC = a$. Gọi O là một điểm trên đáy BC. Qua O vẽ các đường thẳng song song với hai cạnh bên, cắt AB và AC lần lượt tại M và N. Tìm độ dài nhỏ nhất của MN.

22.8. Cho tam giác đều ABC cạnh dài $4cm$. Trên các cạnh AB và AC lần lượt lấy các điểm D và E sao cho $AD = CE$. Tính độ dài nhỏ nhất của DE.

22.9. Cho tam giác ABC, $B = 45°; C = 30°$ và $AC = 52cm$. Điểm M nằm giữa B và C. Tính giá trị lớn nhất của tổng các khoảng cách từ B và C đến đường thẳng AM.

22.10. Chứng minh rằng trong các tam giác có một góc bằng α và tổng hai cạnh kề góc ấy bằng 2a thì tam giác cân có góc ở đỉnh bằng α là tam giác có chu vi nhỏ nhất.

• Bất đẳng thức tam giác

22.11. Cho tam giác ABC. Gọi xy là đường phân giác góc ngoài tại đỉnh C. Tìm trên xy một điểm M sao cho tổng $MA + MB$ ngắn nhất.

22.12. Cho tam giác ABC có $AB = 12$; $AC = 16$. Gọi M là một điểm trong mặt phẳng. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 7MA + 3MB + 4MC$.

22.13. Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H. Chứng minh rằng tổng $HA + HB + HC$ nhỏ hơn $\frac{2}{3}$ chu vi của tam giác ABC.

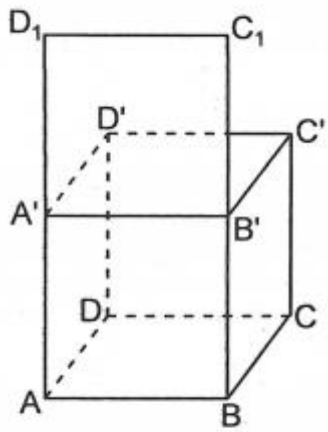
22.14. Cho tam giác ABC vuông cân tại $A, AB = a$. Tìm một điểm M sao cho tam giác MAC cân tại M, đồng thời tổng $MA + MB$ nhỏ nhất.

Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

22.15. Cho đường thẳng xy và tam giác ABC có cạnh AB nằm trên một nửa mặt phẳng bờ xy còn đỉnh C di động trên xy. Biết $AB = 13cm$, khoảng cách từ A và B đến xy lần lượt bằng $2cm$ và $7cm$.

Tính giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác ABC.

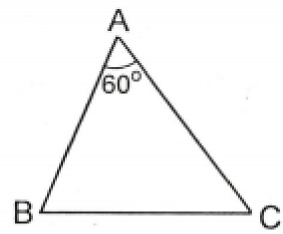
22.16. Một hộp gỗ hình lập phương mỗi cạnh dài $20cm$. Đáy $ABCD$ đặt áp sát mặt bàn. Nắp hộp $A'B'C'D'$ có thể mở dựng đứng lên trên (h.22.9). Một con kiến ở đỉnh A muốn bò tới đỉnh C' bằng cách vượt qua cạnh $A'B'$ thì phải bò một quãng đường ngắn nhất là bao nhiêu?



Hình 22.9

Hướng dẫn giải

22.1. (h.22.10)



Hình 22.10

• Nếu $B = C$ thì ΔABC cân, $A = 60°$ nên ΔABC đều.

Do đó $AB = BC = CA$.

Suy ra $AB^3 = BC^3 = CA^3$. Vậy $BC^3 < AB^3 + CA^3$.

• Nếu $B > C$ thì $B > 60°$ (vì $B + C = 120°$).

Do đó $A < B \Rightarrow BC < AC$.

Suy ra $BC^3 < AB^3 + CA^3$.

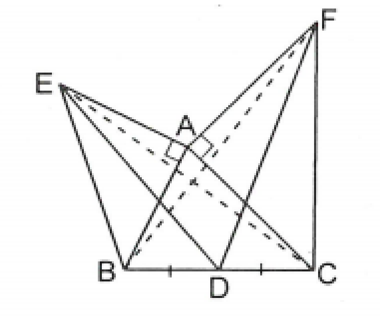
• Nếu $B < C$, cũng chứng minh tương tự, ta được: $BC^3 < AB^3 + CA^3$.

22.2. (h.22.11)

Theo định lí Py-ta-go ta có $BE^2 = 2AB^2, CF^2 = 2AC^2$ mà $AB < AC$ nên $BE < CF$.

Dễ thấy $\Delta ABF = \Delta AEC$ (c.g.c).

Suy ra $BF = CE$.



Hình 22.11

Xét ΔCBE và ΔBCF có: BC chung,

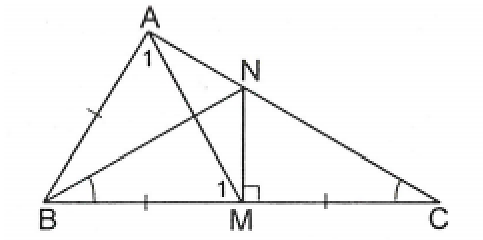
$CE = BF, BE < CF$ nên $ECB < FBC$ hay $ECD < FBD$.

Xét ΔECD và ΔFBD có: $CE = BF$, $DC = DB$ và $ECD < FBD$.

Do đó $DE < DF$ (định lí hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau).

22.3. (h.22.12)

Vẽ đường trung trực của BC cắt BC tại M, cắt AC tại N.



Hình 22.12

Ta có $NB = NC$; ΔNBC cân $\Rightarrow C = NBC$.

ΔBAM có $BA = BM\left(=\frac{1}{2}BC\right)$ nên là tam giác cân.

Suy ra $A_1 = M_1$, mà $BAN > 90°, BMN = 90°$ nên $MAN > AMN$

$\Rightarrow MN > AN$ (quan hệ giữa cạnh đối trong một tam giác).

ΔMBN và ΔABN có $BM = BA$, BN chung và $MN > AN$.

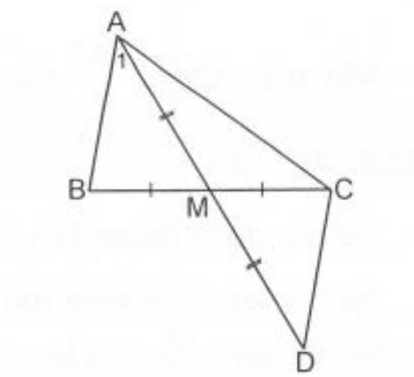
Do đó $MBN > ABN$ (định lí hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau).

Suy ra $MBN + MBN > ABN + MBN$.

Do đó $2MBN > ABC \Rightarrow 2C > B$ (vì $C = MBN$) $\Rightarrow C > \frac{B}{2}$

22.4. (h.22.13)

Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MA$.



Hình 22.13

$\Delta ABM = \Delta DCM$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = CD$ và $A_1 = D$.

Do đó $AB // CD$

$\Rightarrow BAC + DCA = 180°$ (cặp góc trong cùng phía). (*)

• Chứng minh mệnh đề: "Nếu góc A nhọn thì $AM > \frac{BC}{2}$"

Nếu $AM = \frac{BC}{2}$ thì $2AM = BC$ do đó $AD = BC$.

$\Delta BAC = \Delta DCA$ (c.c.c) $\Rightarrow BAC = DCA = 180° : 2 = 90°$, trái giả thiết.

Nếu $AM < \frac{BC}{2}$ thì $2AM < BC$ do đó $AD < BC$.

ΔBAC và ΔDCA có: $AB = CD$; AC chung và $BC > AD$.

Do đó $BAC > DCA$

Từ (*) suy ra $BAC > 90°$, trái giả thiết.

Vậy nếu A nhọn thì $AM > \frac{BC}{2}$

• Chứng minh mệnh đề: "Nếu $AM > \frac{BC}{2}$ thì góc A nhọn."

Nếu $A = 90°$ thì từ (*) suy ra $DCA = 90°$.

$\Delta BAC = \Delta DCA$ (c.g.c) $\Rightarrow BC = AD$ hay $AM = \frac{BC}{2}$, trái giả thiết.

Nếu $A > 90°$ thì từ (*) suy ra $DCA < 90°$. Vậy $BAC > DCA$.

ΔBAC và ΔDCA có: $AB = CD$; AC chung và $BAC > DCA$.

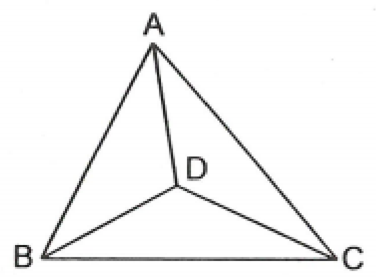
Do đó $BC > AD$ hay $BC > 2AM$ tức là $AM < \frac{BC}{2}$, trái giả thiết.

Vậy nếu $AM > \frac{BC}{2}$ thì góc A nhọn.

22.5. (h.22.14)

Vẽ các đoạn thẳng *DA, DB, DC*. Ta có $ADB + BDC + CDA = 360°$.

Suy ra tồn tại ít nhất một góc có số đo nhỏ hơn hoặc bằng $120°$ (vì nếu cả ba góc này đều lớn hơn $120°$ thì tổng của chúng lớn hơn $360°$, vô lí).



Hình 22.14

Giả sử góc đó là góc *BDC*.

Xét ΔBDC có $BDC \le 120°$, suy ra

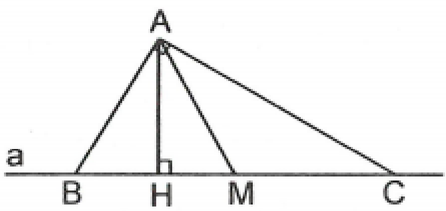
$DBC + DCB \ge 60°$.

Do đó tồn tại ít nhất một góc lớn hơn hoặc bằng $30° > 29°$.

Vậy ba điểm cần tìm là *B, C, D*.

22.6. (h.22.15)

Gọi M là trung điểm của BC và H là hình chiếu của A trên đường thẳng *a*.



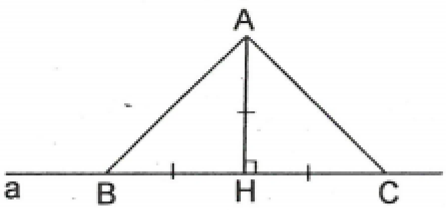
Hình 22.15

Khi đó *AH* có độ dài không đổi.

Ta có ΔABC vuông tại A nên $AM = \frac{1}{2}BC$

hay $BC = 2AM \ge 2AH$ (quan hệ giữa đường vuông góc với đường xiên)

Do đó BC có độ dài nhỏ nhất là $2AH \Leftrightarrow M \equiv H \Leftrightarrow \Delta ABH$ vuông cân.



Hình 22.16

Ta xác định điểm B như sau:

- Dựng $AH \perp BC$;

- Trên đường thẳng *a* đặt $HB = HA$ (h.22.16)

22.7. (h.22.17)

Vẽ $MH \perp BC,\ NK \perp BC,\ NI \perp MH.$

Khi đó $IN = HK$ và $IH = NK$ (tính chất đoạn chắn song song).

Ta có $OM // AC \Rightarrow BOM = C = B.$

Do đó ΔMBO cân tại *M*, từ đó ta được $HB = HO.$

Tương tự ta có $KC = KO.$ Suy ra $HK = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$

Theo quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên ta có

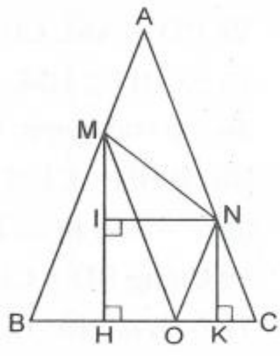
$$MN \geq IN = HK = \frac{a}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv I$ (h.21.18)

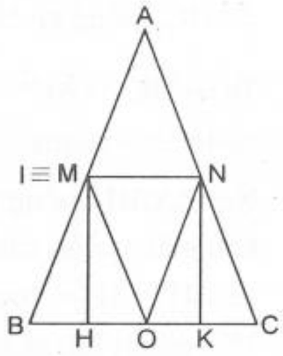
$\Leftrightarrow MH = NK \Leftrightarrow \Delta MHB = \Delta NKC \Leftrightarrow BH = CK$

$\Leftrightarrow OH = OK \Leftrightarrow OB = OC \Leftrightarrow O$ là trung điểm của *BC*.

Vậy min $MN = \frac{a}{2}$ khi *O* là trung điểm của *BC*.



Hình 22.17



Hình 22.18

22.8. (h.22.19)

Vẽ $DH \perp BC,\ EK \perp BC, DF \perp EK.$

Ta có $DF = HK$ (tính chất đoạn chắn song song). Các tam giác vuông *HBD* và *KCE* có

$$D = E = 30^\circ \text{ nên } BH = \frac{1}{2}BD; CK = \frac{1}{2}CE.$$

Do đó $BH + CK = \frac{1}{2}(BD + CE) = \frac{1}{2}(BD + AD) = \frac{1}{2}AB = 2cm.$

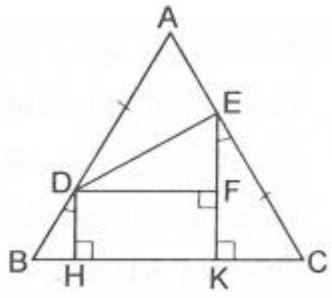
Suy ra $HK = 2cm.$

Ta có $DE \geq DF = HK = 2cm.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow E \equiv F \Leftrightarrow DH = EK \Leftrightarrow \Delta HBD = \Delta KCE \Leftrightarrow BD = CE$

$\Leftrightarrow BD = AD \Leftrightarrow D$ là trung điểm của *AB* (khi đó *E* là trung điểm của *AC*).

Vậy độ dài nhỏ nhất của *DE* là 2*cm* khi *D* và *E* lần lượt là trung điểm của *AB* và *AC*.

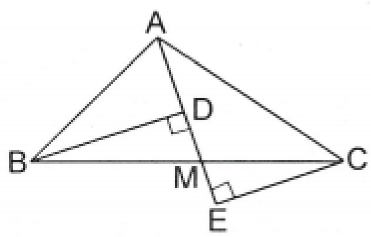


Hình 22.19

22.9. (h.22.20)

Vẽ $BD \perp AM,\ CE \perp AM\ (D,\ E \in AM).$

Ta có $BD \leq BM,\ CE \leq CM$ (quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên).



Hình 22.20

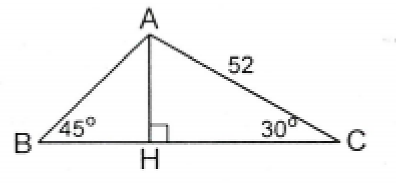
Do đó $BD+CE \le BM+CM=BC$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow D$ và E trùng với $M \Leftrightarrow AM \perp BC$).

Vậy tổng $BD+CE$ có giá trị lớn nhất là bằng độ dài BC

• *Tính độ dài BC* (h.22.21)

Vẽ $AH \perp BC$.

ΔAHC vuông tại H có $C=30°$ nên $AH=\dfrac{1}{2}AC=52:2=26(cm)$.



Hình 22.21

Ta có $HC^2=AC^2-AH^2=52^2-26^2=2028$

$\Rightarrow HC \approx 45(cm)$.

Xét ΔABH vuông tại H, có $B=45°$ nên là tam giác vuông cân

$\Rightarrow BH=AH=26cm$. Do đó $BC=26+45=71(cm)$.

Vậy giá trị lớn nhất của tổng $BD+CE$ là $71cm$ khi M là hình chiếu của A trên BC.

22.10. (h.22.22)

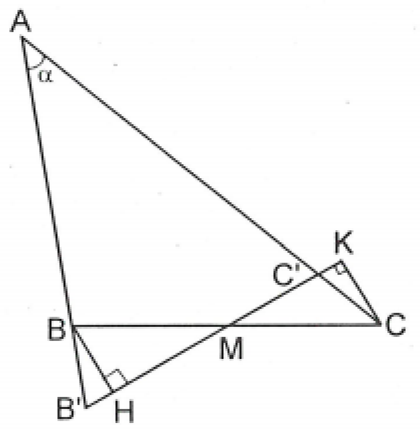
Xét ΔABC có $A=\alpha$ và $AB+AC=2a$.

Ta phải chứng minh rằng khi $AB=AC=a$

thì chu vi ΔABC sẽ nhỏ nhất.

Thật vậy, giả sử $AB<AC$.

Trên tia AB lấy điểm B', trên tia AC lấy điểm C' sao cho $AB'=AC'=a$.



Hình 22.22

Khi đó B' và C' là các điểm cố định và $B'C'$ có độ dài không đổi.

Ta có $AB+AC=AB'+AC'=2a$.

Do đó $AB+(AC'+C'C)=(AB+BB')+AC' \Rightarrow CC'=BB'$.

Vẽ $BH \perp B'C'$ và $CK \perp B'C'$.

$\Delta BB'H=\Delta CC'H$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow HB'=KC'$ do đó $HK=B'C'$. (1)

Gọi M là giao điểm của BC và $B'C'$.

Ta có $MH \le MB$; $MK \le MC \Rightarrow MH+MK \le MB+MC$ hay $HK \le BC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BC \ge B'C'$.

Ta có chu vi $\Delta ABC=AB+BC+CA \ge 2a+B'C'$ (không đổi).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow B' \equiv B$ và $C' \equiv C$.

Vậy chu vi ΔABC nhỏ nhất khi $AB=AC=a$, tức là khi ΔABC cân tại A.

22.11. (h.22.23)

Vẽ $AH \perp xy$, tia AH cắt đường thẳng BC tại D. Khi đó BD không đổi.

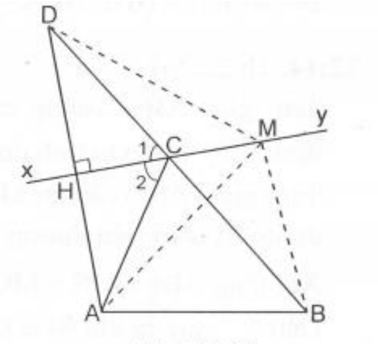
$\Delta CHA=\Delta CHD$ (g.c.g) $\Rightarrow HA=HD \Rightarrow xy$ là đường trung trực của AD.

Gọi M là một điểm bất kì trên xy.

Ta có $MA = MD$ (tính chất điểm nằm trên đường trung trực).

Do đó $MA + MB = MD + MB \geq BD$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv C$).

Vậy tổng $MA + MB$ ngắn nhất là bằng BD khi và chỉ khi $M \equiv C$



Hình 22.23

22.12. (h.22.24)

Ta có $S = 7MA + 3MB + 4MC$

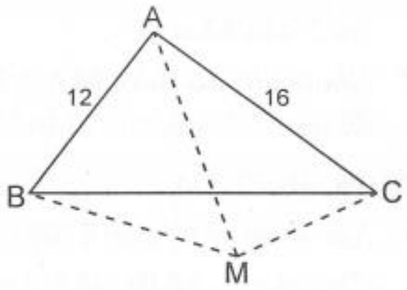
$= 3(MA + MB) + 4(MA + MC)$

$\geq 3AB + 4AC = 3.12 + 4.16 = 100.$

Dấu "=" xảy ra

$\Leftrightarrow M$ thuộc đoạn thẳng AB và $AC \Leftrightarrow M \equiv A.$

Vậy $minS = 100$ khi $M \equiv A.$



Hình 22.24

22.13. (h.22.25)

Từ H vẽ đường thẳng song song với AB cắt AC tại D; đường thẳng song song với AC cắt AB tại E. Theo tính chất đoạn thẳng song song ta có

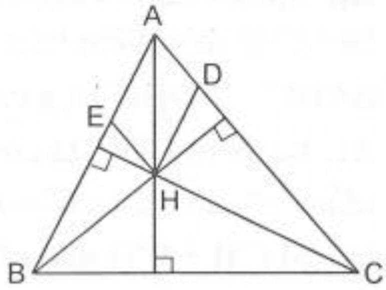
$AD = HE, AE = HD.$

Vì $HB \perp AC$ nên $HB \perp HE$

$\Rightarrow HB < BE$ (quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên).

Chứng minh tương tự ta được $HC < CD.$

Xét ΔAHD có $HA < AD + DH$ (bất đẳng thức tam giác). Suy ra



Hình 22.25

$HA + HB + HC < (AD + DH) + BE + CD = (AD + AE) + BE + CD$

$= (AD + CD) + (AE + BE) = AC + AB.$ (1)

Chứng minh tương tự, ta được:

$HA + HB + HC < AB + BC.$ (2)

$HA + HB + HC < BC + CA.$ (3)

Cộng từng vế các bất đẳng thức (1), (2), (3) ta được:

$3(HA + HB + HC) < 2(AB + BC + CA).$

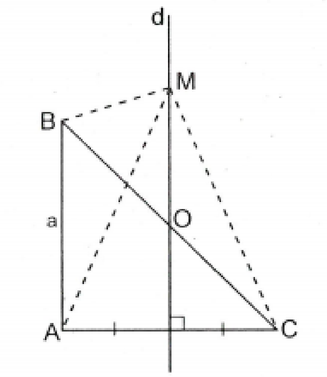
Do đó $HA + HB + HC < \dfrac{2}{3}(AB + BC + CA).$

22.14. (h.22.26)

Tam giác ABC vuông cân tại A nên theo định lí Py-ta-go ta tính được $BC = a\sqrt{2}.$

Tam giác MAC cân tại $M \Rightarrow MA = MC$ do đó M nằm trên đường trung trực d của $AC.$

Xét tổng $MA + MB = MC + MB \geq BC = a\sqrt{2}$



Hình 22.26

Dấu "=" xảy ra khi $M \equiv O$ với O là giao điểm của d với cạnh BC.

Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng $MA + MB$ là $a\sqrt{2}$ khi $M \equiv O$

** Nhận xét:* Ta thấy $MA + MB \geq AB = a$, nhưng không có vị trí nào của M để dấu "=" xảy ra. Vì thế không thể kết luận $min(MA + MB) = a$.

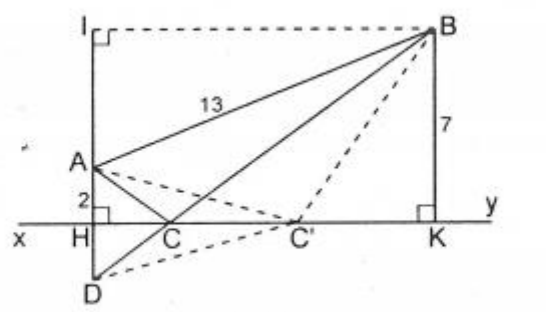
22.15. (h.22.27)

• *Xác định vị trí của C để chu vi tam giác ABC nhỏ nhất*

Chu vi của ΔABC là $CA + CB + AB$. Do AB cố định nên chu vi ΔABC nhỏ nhất $\Leftrightarrow CA + CB$ nhỏ nhất.

Vẽ $AH \perp xy$. Trên tia đối của tia HA lấy điểm D sao cho $HD = HA$.

Khi đó BD là một đoạn thẳng cố định. Gọi C' là một điểm trên xy.



Hình 22.27

$\Delta AHC' = \Delta DHC'$ (c.g.c) $\Rightarrow C'A = C'D$.

Xét ba điểm *BDC'* ta có $C'B + C'D \geq BD$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow C' \equiv C$ với C là giao điểm của BD với xy).

Do đó $C'B + C'D$ nhỏ nhất là bằng BD khi $C' \equiv C$

Suy ra khi C là giao điểm của BD với xy thì chu vi ΔABC nhỏ nhất.

• *Tính giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác ABC*

Vẽ $BK \perp xy$, $BI \perp AH$ ta tính được $IH = 7cm$; $IA = 5cm$ và $ID = 9cm$.

Áp dụng định lí Py-ta-go vào ΔIAB vuông tại I ta có:

$BI^2 = AB^2 - IA^2 = 13^2 - 5^2 = 144$.

Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác vuông IDB, ta được

$BD^2 = IB^2 + ID^2 = 144 + 9^2 = 225 \Rightarrow BD = 15(cm)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác ABC là $CA + CB + AB = BD + AB = 15 + 13 = 28(cm)$.

22.16. (h.22.28)

Gọi M là điểm trên cạnh $A'B'$ mà con kiến phải qua khi bò từ A đến C'

Mở nắp hộp $A'B'C'D'$ đứng lên đến vị trí $A'B'C_1D_1$.

Xét ba điểm A, M, C_1 ta có $MA + MC_1 \geq AC_1$.

Dấu "=" xảy ra

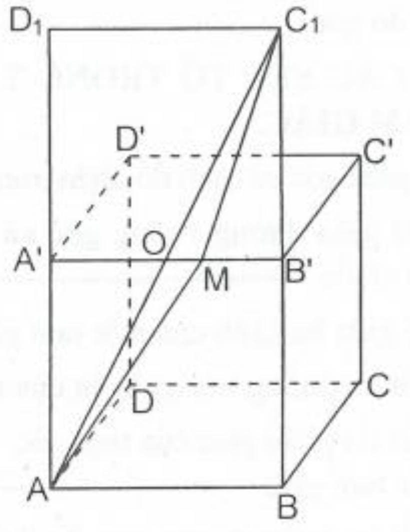
$\Leftrightarrow M$ trùng với giao điểm O của AC_1 với cạnh $A'B'$.

$\Leftrightarrow \Delta A'AM = \Delta B'C_1M$ (g.c.g) $\Leftrightarrow MA' = MB'$

$\Leftrightarrow M$ là trung điểm của $A'B'$.

Ta có $AC_1^2 = AB^2 + BC_1^2 = 20^2 + 40^2 = 2000 \Rightarrow AC_1 = \sqrt{2000} \approx 44,7(cm)$.

Vậy quãng đường ngắn nhất mà kiến phải bò là 44,7cm khi kiến bò qua trung điểm M của cạnh $A'B'$ theo hành trình: đoạn thẳng AM rồi đoạn thẳng MC'.



Hình 22.28