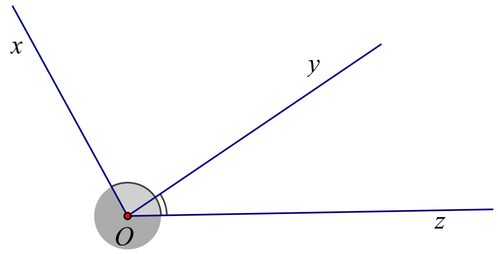
CHUYÊN ĐỀ: GÓC Ở VỊ TRÍ ĐẶC BIỆT. TIA PHÂN GIÁC CỦA MỘT GÓC

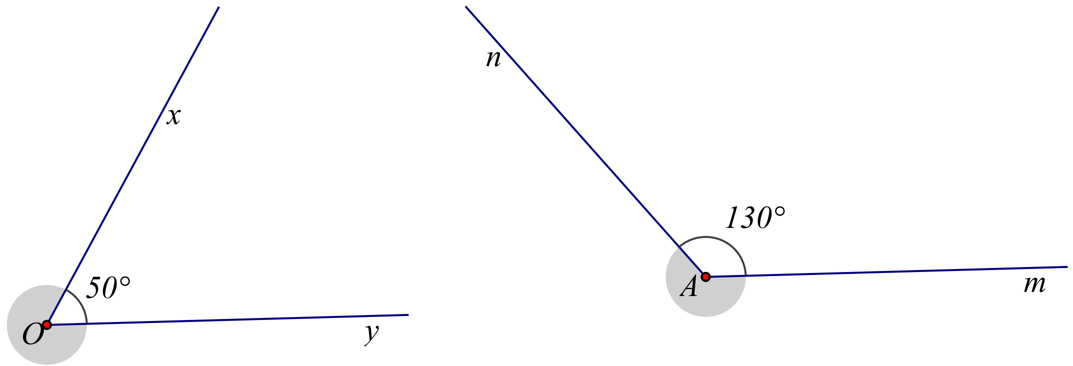
A. Lý thuyết

1. Góc ở vị trí đặc biệt

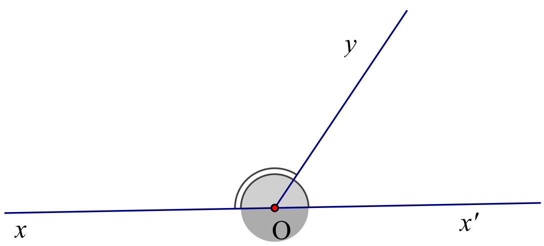
a) Hai góc kề nhau: Hai góc kề nhau là hai góc có chung đỉnh và chung 1 cạnh, hai cạnh còn lại nằm về 2 phía của đường thẳng chứa cạnh chung đó.



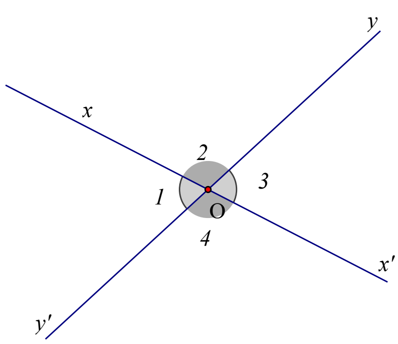
b) Hai góc bù nhau: Hai góc bù nhau là hai góc có tổng số đo của hai góc là $180°$



c) Hai góc kề bù: hai góc vừa kề vừa bù gọi là hai góc kề bù



d) Hai góc đối đỉnh: Hai góc đối đỉnh là hai góc mà mỗi cạnh của góc này là tia đối của một cạnh góc kia.

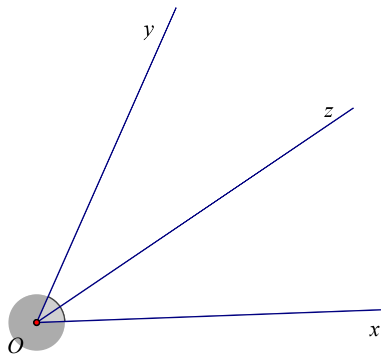


*) Tính chất: Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau. Mỗi góc chỉ có duy nhất một góc đối đỉnh với nó.

2. Tia phân giác của một góc

a) Tia phân giác của một góc: Là tia nằm giữa hai cạnh của góc và tạo với hai cạnh ấy hai góc bằng nhau.

b) Cách vẽ:



Để vẽ tia phân giác Oz của $\widehat{xOy} = 64°$. Ta thực hiện theo 2 bước.

Bước 1: Vẽ $\widehat{xOy} = 64°$.

Bước 2: Vẽ tia Oz nằm giữa hai tia Ox, Oy sao cho $\widehat{xOz} = 64° : 2 = 32°$ hoặc $\widehat{yOz} = 64° : 2 = 32°$.

Đường thẳng chứa tia phân giác của một góc được gọi là *đường phân giác* của góc đó.

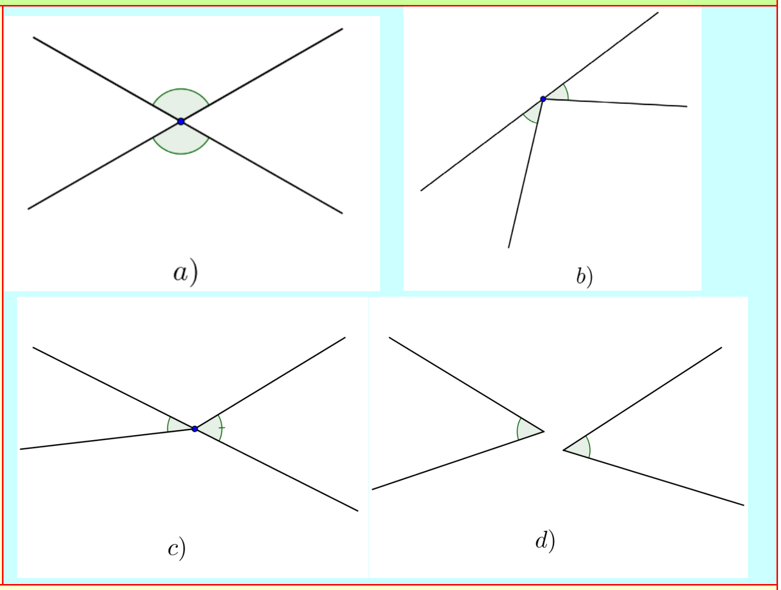
B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Góc ở vị trí đặc biệt

***) Phương pháp giải:** Nhận biết và tính được một số góc kề bù, đối đỉnh

Bài 1:

Trong các hình $a), b), c), d)$ cặp góc nào đối đỉnh, cặp góc nào không đối đỉnh? Vì sao?



Lời giải

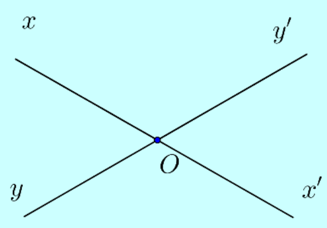
Vì hai góc đối đỉnh là hai góc mà mỗi cạnh của góc này là tia đối của một cạnh góc kia nên chỉ có hình a) là cặp góc đối đỉnh.

Bài 2:

Hai đường thẳng xx' và yy' cắt nhau tại O như hình vẽ. Hãy điền vào chỗ trống (…) trong các phát biểu sau:

1. Góc xOy và góc … là hai góc đối đỉnh vì cạnh Ox là tia đối của cạnh Ox' và cạnh Oy là … của cạnh Oy'.

2. Góc $x'Oy$ và góc xOy' là … vì cạnh Ox là tia đối của cạnh … và cạnh …



Lời giải

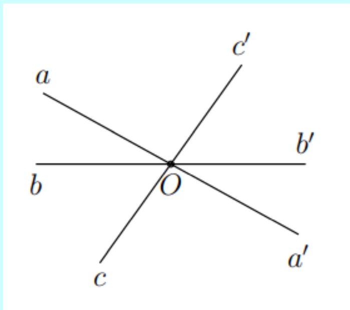
1. $\widehat{xOy}$ và $\widehat{x'Oy'}$ là hai góc đối đỉnh vì cạnh Ox là tia đối của cạnh Ox' và cạnh Oy là tia đối của cạnh Oy'.

2. $\widehat{x'Oy}$ và $\widehat{xOy'}$ là hai góc đối đỉnh vì cạnh Ox là tia đối của cạnh Ox' và cạnh Oy là tia đối của cạnh Oy'.

Bài 3:

Vẽ ba đường thẳng cùng đi qua một điểm. Đặt tên cho các góc tạo thành.

1. Viết tên các cặp góc đối đỉnh. Chỉ ra các cặp góc bằng nhau
2. Viết tên các 3 cặp góc kề bù.



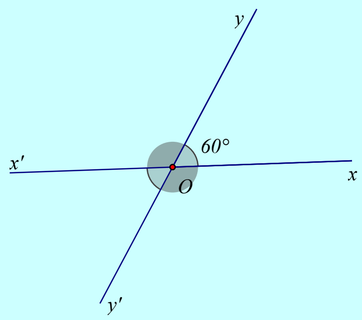
Lời giải

1. Các cặp góc đối đỉnh là $\widehat{aOb}$ và $\widehat{a'Ob'}$; $\widehat{aOc}$ và $\widehat{a'Oc'}$; $\widehat{bOc}$ và $\widehat{b'Oc'}$; $\widehat{aOc'}$ và $\widehat{a'Oc}$; $\widehat{aOb'}$ và $\widehat{a'Ob}$; $\widehat{cOb'}$ và $\widehat{c'Ob}$. Các cặp góc đối đỉnh thì bằng nhau.

2. Các cặp góc kề bù là: $\widehat{aOb}$ và $\widehat{aOb'}$; $\widehat{aOc'}$ và $\widehat{a'Oc'}$; $\widehat{bOc}$ và $\widehat{c'Ob}$

Bài 4:

Cho $\widehat{xBy}$ có số đo bằng $60°$. Vẽ góc đối đỉnh với $\widehat{xBy}$. Hỏi góc này có số đo bằng bao nhiêu độ ?



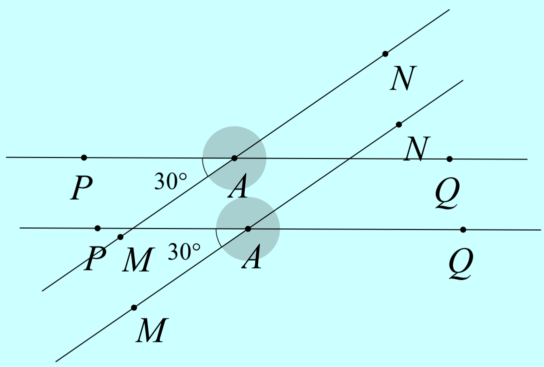
Lời giải

Vì hai góc đối đỉnh có số đo bằng nhau nên góc đối đỉnh với $\widehat{x'By'}$ cũng có số đo bằng $60°$.

Bài 5:

Hai đường thẳng MN và PQ cắt nhau tại A tạo thành $\widehat{MAP}$ có số đo bằng $30°$.

1. Tính số đo góc $\widehat{NAQ}$.
2. Tính số đo góc $\widehat{MAQ}$.
3. Viết tên các cặp góc đối đỉnh.
4. Viết tên các cặp góc kề bù.



Lời giải

1. Vì $\widehat{MAP}$ và $\widehat{NAQ}$ là hai góc đối đỉnh nên $\widehat{MAP} = \widehat{NAQ} = 30°$.

2. Vì $\widehat{MAQ}$ kề bù với $\widehat{MAP}$ nên $\widehat{MAQ} = 180° - \widehat{MAP} = 150°$.

3. Các cặp góc đối đỉnh: $\widehat{MAP}$ và $\widehat{NAQ}$; $\widehat{MAQ}$ và $\widehat{PAN}$.

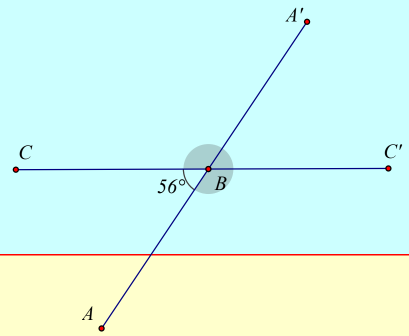
4. Các cặp góc bù nhau: $\widehat{MAP}$ và $\widehat{MAQ}$; $\widehat{MAP}$ và $\widehat{PAN}$; $\widehat{NAQ}$ và $\widehat{MAQ}$; $\widehat{NAQ}$ và $\widehat{PAN}$.

Bài 6:

1. Vẽ $\widehat{ABC}$ có số đo bằng $56°$.

2. Vẽ $\widehat{ABC'}$ kề bù với $\widehat{ABC}$. Hỏi số đo của $\widehat{ABC'}$?

3. Vẽ $\widehat{C'BA'}$ kề bù với $\widehat{ABC'}$. Tính số đo $\widehat{C'BA'}$?



Lời giải

1. Xem hình vẽ.

2. Vì $\widehat{ABC'}$ kề bù với $\widehat{ABC}$ nên $\widehat{ABC'} = 180^o - \widehat{ABC} = 180° - 56° = 124°$.

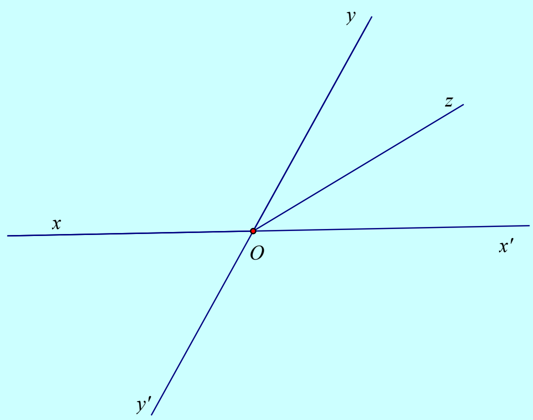
3. Vì $\widehat{C'BA'}$ kề bù với $\widehat{ABC'}$ nên $\widehat{C'BA'} = 180° - \widehat{ABC'} = 180° - 124° = 56°$.

Bài 7:

Cho hai góc kề nhau $\widehat{xOy}$ và $\widehat{yOz}$ có tổng số đo bằng $150°$ và $\widehat{xOy} - \widehat{yOz} = 90°$.

1. Tính số đo các góc $\widehat{xOy}$ và $\widehat{yOz}$.

2. Vẽ các tia Ox', Oy' lần lượt là các tia đối của các tia Ox, Oy. Tính số đo các $\widehat{x'Oy'}$, . , $\widehat{xOy'}$
.



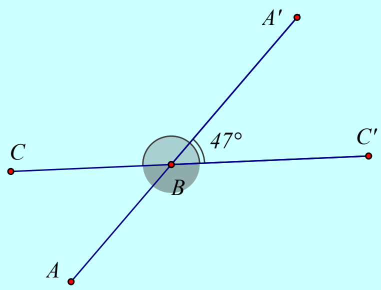
Lời giải

1. Ta có $\widehat{xOy} = 90° + \widehat{yOz}$. Thay vào $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = 150°$ tìm được $\widehat{yOz} = 30°$ và $\widehat{xOy} = 120°$.

2. $\widehat{x'Oy'} = \widehat{xOy} = 120°$, $\widehat{y'Oz} = 180° - \widehat{yOz} = 150°$. Tương tự, ta tìm được $\widehat{x'Oy} = 60°$.

Bài 8:

Vẽ hai đoạn thẳng cắt nhau sao cho trong số các góc tạo thành có một góc bằng $47°$. Tính số đo các góc còn lại.



Lời giải

Vì $\widehat{A'BC'}$ và $\widehat{CBA}$ là hai góc đối đỉnh nên $\widehat{A'BC'} = \widehat{CBA} = 47°$.

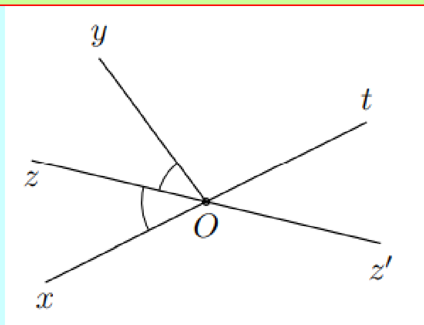
Vì $\widehat{CBA'}$ kề bù $\widehat{A'BC'}$ nên $\widehat{CBA'} + \widehat{CBA} = 180°$ suy ra

$\widehat{CBA'} = 180° - \widehat{A'BC'} = 133°$.

Do $\widehat{CBA'}$ và $\widehat{ABC'}$ là hai góc đối đỉnh nên $\widehat{CBA'} = \widehat{ABC'} = 133°$.

Bài 9:

Cho $\widehat{xOy}$. Vẽ tia Oz là phân giác $\widehat{xOy}$. Vẽ Oz' là tia đối của tia Oz. Vẽ góc kề bù $\widehat{yOt}$ với $\widehat{xOy}$. Khi đó hai $\widehat{z'Ot}$ và $\widehat{xOz}$ có phải là hai góc đối đỉnh không?



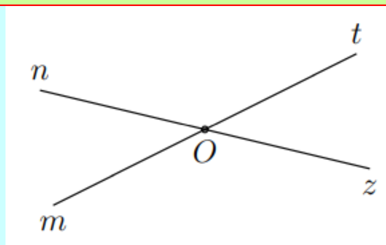
Lời giải

Vì $\widehat{yOt}$ kề bù với $\widehat{xOy}$ nên Ox, Ot là hai tia đối nhau.

Theo đề bài Oz' là tia đối của tia Oz nên $\widehat{z'Ot}$ và $\widehat{xOz}$ là hai góc đối đỉnh.

Bài 10:

Cho $\widehat{mOn}$. Vẽ góc kề bù $\widehat{nOt}$ với $\widehat{mOn}$. Vẽ $\widehat{mOz}$ kề bù với $\widehat{mOn}$. Khi đó $\widehat{mOn}$ và $\widehat{tOz}$ có phải là hai góc đối đỉnh không?



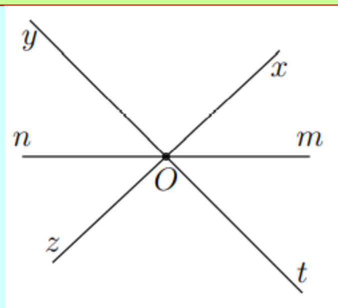
Lời giải

Vì $\widehat{nOt}$ kề bù với $\widehat{mOn}$ nên Om và Ot là hai tia đối nhau; $\widehat{mOz}$ kề bù với $\widehat{mOn}$ nên On và Oz là hai tia đối nhau.

Do đó $\widehat{mOn}$ và $\widehat{tOz}$ là hai góc đối đỉnh.

Bài 11:

Cho $\widehat{xOy}$. Vẽ $\widehat{yOz}$ kề bù với $\widehat{xOy}$. Vẽ $\widehat{xOt}$ kề bù với $\widehat{xOy}$. Vẽ On là phân giác $\widehat{yOz}$. Vẽ Om là phân giác $\widehat{xOt}$. Khi đó $\widehat{zOn}$ và $\widehat{xOm}$ có phải là hai góc đối đỉnh hay không?



Lời giải

Vì $\widehat{yOz}$ kề bù với $\widehat{xOy}$ nên Ox và Oz là hai tia đối nhau, vì $\widehat{xOy}$ kề bù với $\widehat{xOt}$ nên Oy và Ot là hai tia đối . Ta có $\widehat{yOz} = \widehat{xOt}$ (đối đỉnh).

Do On và Om lần lượt là phân giác $\widehat{yOz}$ và $\widehat{xOt}$ nên $\widehat{yOn} = \widehat{nOz}$

$\Rightarrow \widehat{xOm} = \widehat{mOt}$. Lại có: $\widehat{xOy} + \widehat{xOt} = 180°$

$\Rightarrow \widehat{xOy} + \widehat{xOm} + \widehat{mOt} = 180°$

$\Rightarrow \widehat{xOy} + \widehat{yOn} + \widehat{xOm} = 180°$

$\Rightarrow \widehat{xOn} + \widehat{xOm} = 180°$

hay $\widehat{xOn}$ và $\widehat{xOm}$ kề bù.

Từ đó suy ra Om và On là hai tia đối nhau nên $\widehat{zOn}$ và $\widehat{xOm}$ là hai góc đối đỉnh.

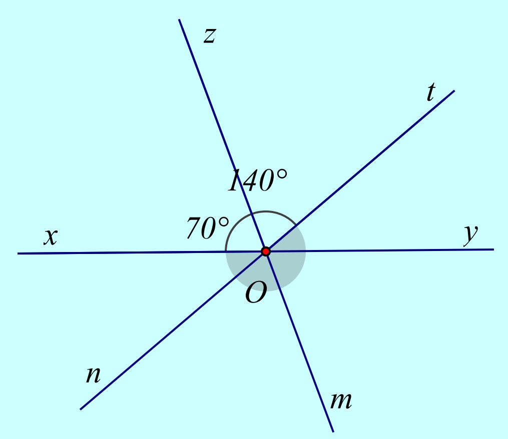
Bài 12:

Cho góc bẹt $\widehat{xOy}$. Vẽ tia Oz sao cho góc $\widehat{xOz} = 70^0$

a) Tính góc $\widehat{zOy}$

b) Trên nửa mặt phẳng bờ Ox chứa Oz vẽ tia Ot sao cho $\widehat{xOt} = 140^0$. Chứng tỏ Oz là tia phân giác của $\widehat{xOt}$

c) Vẽ tia Om là tia đối của tia Oz, tia On là tia đối của tia Ot. Tính góc $\widehat{yOm}$ và so sánh với $\widehat{xOn}$



Lời giải

a) Vì $\widehat{xOy}$ là góc bẹt và $\widehat{xOz} = 70° \Rightarrow \widehat{xOz} + \widehat{zOy} = 180° \Rightarrow \widehat{zOy} = 110°$.

b) Vì ba tia Ox, Oz, Ot cùng nằm trên một nửa mặt phẳng có bờ là Ox và $\widehat{xOz} < \widehat{xOt}$ nên tia Oz nằm giữa hai tia Ox, Ot.

Lại có $\widehat{xOz} = \frac{1}{2}\widehat{xOt}$ nên tia Oz là tia phân giác của góc xOt.

c) Vì Vẽ tia Om là tia đối của tia Oz và $\widehat{zOy} = 110°$. Vậy $\widehat{yOm} = \widehat{zOm} - \widehat{zOy} = 70°$;

Vì tia On là tia đối của tia Ot và $\widehat{xOt} = 140°$. Vậy $\widehat{xOn} = \widehat{nOt} - \widehat{xOt} = 40°$

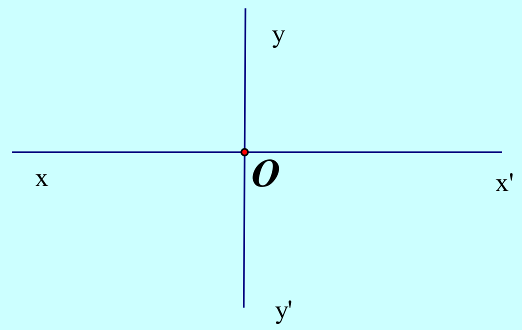
Suy ra $\widehat{yOm} < \widehat{xOn}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1:

Hai đường thẳng xx' và yy' cắt nhau tại O tạo thành $\widehat{xOy}$ có số đo bằng 90° .

1. Tính số đo $\widehat{x'Oy'}$.
2. Tính số đo $\widehat{xOy'}$.
3. Viết tên các cặp góc đối đỉnh.



Lời giải

1. Vì $\widehat{xOy}$ đối đỉnh $\widehat{x'Oy'}$ nên $\widehat{x'Oy'} = 90^\circ$.

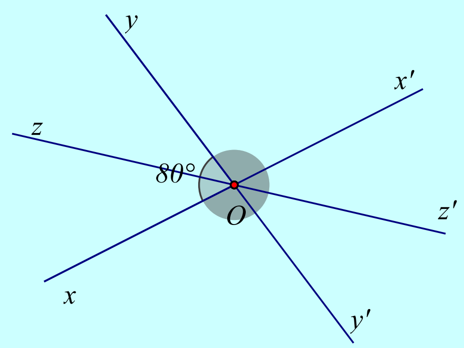
2. Vì $\widehat{xOy}$ và $\widehat{xOy'}$ là hai góc kề bù

nên $\widehat{xOy'} = 180^\circ - \widehat{xOy} = 90^\circ$.

3. $\widehat{xOy}$ đối đỉnh $\widehat{x'Oy'}$ và $\widehat{xOy'}$ đối đỉnh $\widehat{x'Oy}$.

Bài 2:

1. Vẽ $\widehat{xOy}$ có số đo bằng 80°.
2. Vẽ $\widehat{x'Oy'}$ đối đỉnh với góc $\widehat{xOy}$.
3. Vẽ tia phân giác Oz của $\widehat{xOy}$. Vẽ tia đối Oz' của tia Oz. Kể tên các cặp góc đối đỉnh.



Lời giải

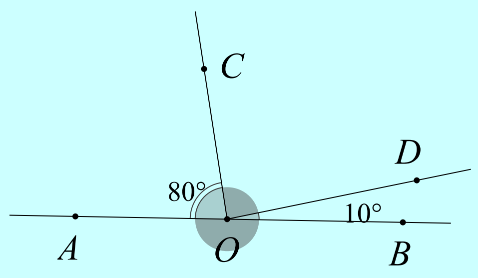
1. Vẽ tia Ox.

Đặt thước đo góc sao cho tâm của thước trùng với đỉnh O , tia Ox đi qua vạch O^0.

Vẽ tia Oy đi qua vạch 80° của thước. Ta vẽ được $\widehat{yOx} = 80^\circ$. Hình vẽ

2. Vẽ tia Ox' là tia đối của tia Ox. Vẽ tia Oy' là tia đối tia Oy ta được $\widehat{x'Oy'}$ đối đỉnh với $\widehat{xOy}$. Hình vẽ

3. Các cặp góc đối đỉnh là $\widehat{zOy}$ và $\widehat{z'Oy'}$; $\widehat{xOz}$ và $\widehat{x'Oz'}$; $\widehat{xOy}$ và $\widehat{x'Oy'}$; $\widehat{zOx'}$ và $\widehat{z'Ox}$; $\widehat{yOz'}$ và $\widehat{y'Oz}$; $\widehat{xOz'}$ và $\widehat{x'Oz}$.

Bài 3:	
Cho góc bẹt AOB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ các tia OC, OD sao cho $\widehat{AOC} = 80°$, $\widehat{BOD} = 10°$. Tia OC và OD có vuông góc với nhau không? Tại sao ?	

Lời giải

Vì $\widehat{AOC}$ kề bù với $\widehat{COB}$ suy ra $\widehat{COB} = 180° - \widehat{COA} = 100°$.

Vì OD nằm giữa hai tia OC và OB suy ra

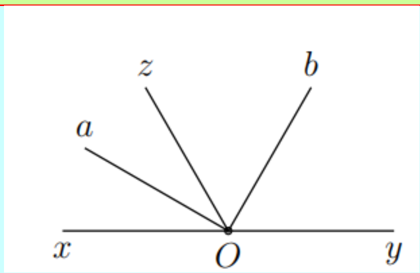
$$\widehat{COD} + \widehat{DOB} = \widehat{COB}$$

$$\widehat{COD} = \widehat{COB} - \widehat{DOB}$$

$$\widehat{COD} = 100° - 10°$$

$$\widehat{COD} = 90°$$

Hay đường thẳng chứa tia OC vuông góc với đường thẳng chứa tia OD

Bài 4:	
Cho $\widehat{xOy}$ là góc bẹt . Trên cùng một mặt phẳng bờ xy , vẽ tia Oz . Vẽ tia phân giác Oa của $\widehat{xOz}$, tia phân giác Ob của $\widehat{zOy}$. Tia Oa và Ob có vuông góc với nhau không? Vì sao?	

Lời giải

Tia Oa là tia phân giác của $\widehat{xOz}$ nên $\widehat{xOa} = \widehat{aOz} = \dfrac{\widehat{xOz}}{2}$.

Tương tự $\widehat{zOb} = \widehat{bOy} = \dfrac{\widehat{zOy}}{2}$

Vì Oz nằm giữa Oa và Ob nên

$\widehat{aOb} = \widehat{aOz} + \widehat{zOb} = \dfrac{\widehat{xOy}}{2} + \dfrac{\widehat{zOy}}{2} = \dfrac{180°}{2} = 90°$.

Dạng 2: Vẽ tia phân giác của một góc và áp dụng tính chất tia phân giác

***) Phương pháp giải:**

+ Bước 1: biết vẽ góc với một số đo cho trước

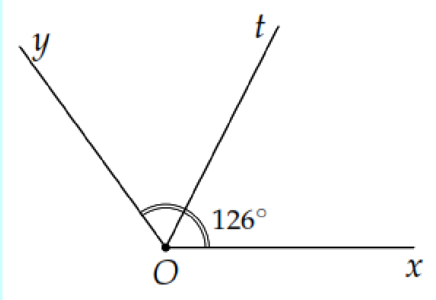
+ Bước 2: biết áp dụng vẽ tia phân giác của góc theo số đo hoặc theo cách vẽ bằng thước hai lề.

***) Bài toán:**

Bài 1:

a) Vẽ góc xOy có số đo $126°$.

b) Vẽ tia phân giác Ot của góc xOy ở ý trên.



Lời giải

Cách vẽ

Vẽ tia Ox.

Đặt thước đo góc sao cho tâm của thước trùng với gốc O của tia Ox và tia Ox đi qua vạch $0°$.

Vẽ tia Oy đi qua vạch $126°$ của thước. Ta vẽ được $\widehat{yOx} = 126°$.

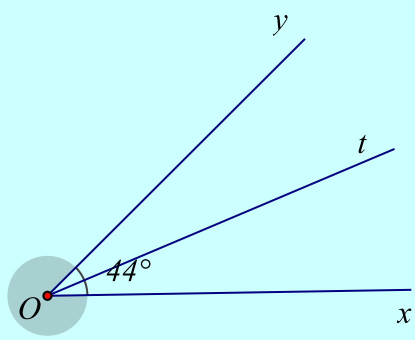
Vì tia Ot là tia phân giác của $\widehat{xOy}$ nên ta có $\widehat{xOt} = \widehat{tOy} = \dfrac{\widehat{xOy}}{2} = 63°$

Đặt thước đo góc sao cho tâm của thước trùng với điểm O của tia Ox và tia Ox đi qua vạch $0°$. Vẽ tia Ot đi qua vạch $63°$ và tia Ot nằm giữa hai tia Ox và Oy, ta được tia phân giác Ot của $\widehat{xOy}$.

Bài 2:

a) Vẽ góc xOy có số đo $44°$.

b) Vẽ tia phân giác Ot của góc xOy ở ý trên.



Lời giải

Cách vẽ:

a) Vẽ tia Ox.

Đặt thước đo góc sao cho tâm của thước trùng với điểm O của tia Ox và tia Ox đi qua vạch $0°$.

Vẽ tia Oy đi qua vạch $44°$ của thước. Ta vẽ được $\widehat{yOx} = 44°$.

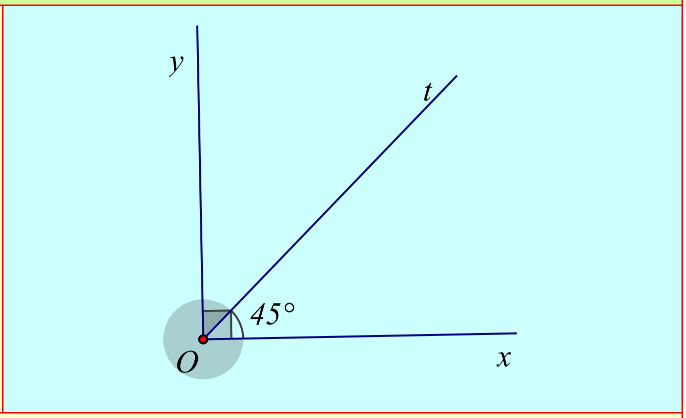
b) Vì tia Ot là tia phân giác của $\widehat{xOy}$ nên ta có $\widehat{xOt} = \widehat{tOy} = \frac{\widehat{xOy}}{2} = 22°$

Đặt thước đo góc sao cho tâm của thước trùng với điểm O của tia Ox và tia Ox đi qua vạch $O°$. Vẽ tia Ot đi qua vạch $22°$ và tia Ot nằm giữa hai tia Ox và Oy, ta được tia phân giác Ot của $\widehat{xOy}$.

Bài 3:

a) Vẽ $\widehat{xOy}$ có số đo $90°$.

b) Vẽ tia phân giác Ot của $\widehat{xOy}$ ở ý trên.



Lời giải

Cách vẽ

Vẽ tia Ox.

Đặt thước đo góc sao cho tâm của thước trùng với điểm O của tia Ox và tia Ox đi qua vạch $0°$.

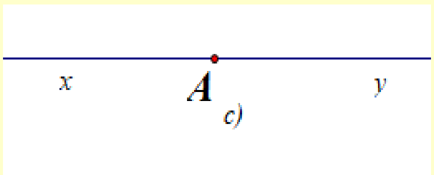
Vẽ tia Oy đi qua vạch $90°$ của thước. Ta vẽ được $\widehat{yOx} = 90°$.

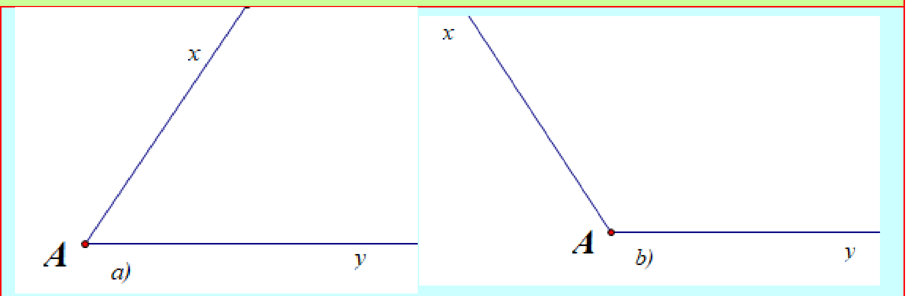
Vì tia Ot là tia phân giác của $\widehat{xOy}$ nên ta có $\widehat{xOt} = \widehat{tOy} = \frac{\widehat{xOy}}{2} = 45°$

Đặt thước đo góc sao cho tâm của thước trùng với điểm O của tia Ox và tia Ox đi qua vạch $0°$. Vẽ tia Ot đi qua vạch $45°$ và tia Ot nằm giữa hai tia Ox và Oy, ta được tia phân giác Ot của $\widehat{xOy}$.

Bài 4:

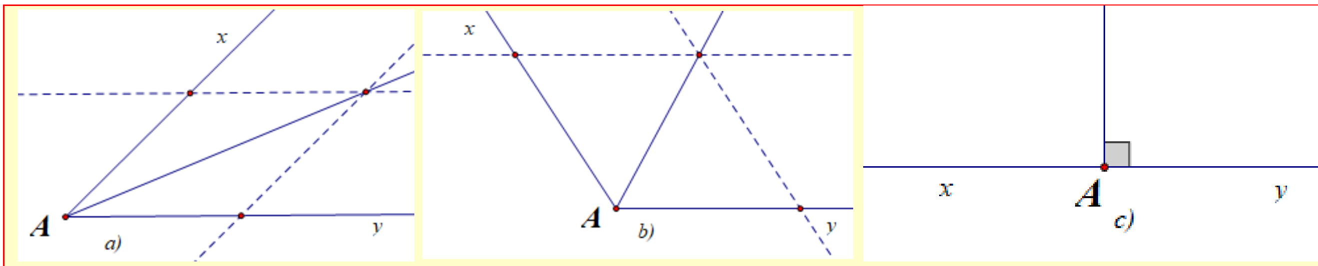
Vẽ tia phân giác của các góc được cho dưới đây:





Lời giải

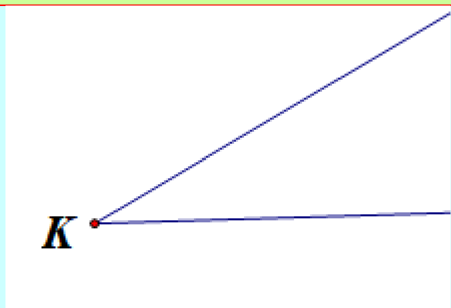
Cách 1: Dùng thước kẻ hai lề vẽ tia phân giác dựa theo tính chất hình thoi có hai đường chéo là hai đường phân giác. Ta có các tia phân giác cần vẽ, riêng ý c) là góc bẹt vì vậy kẻ vuông góc ta có tia phân giác



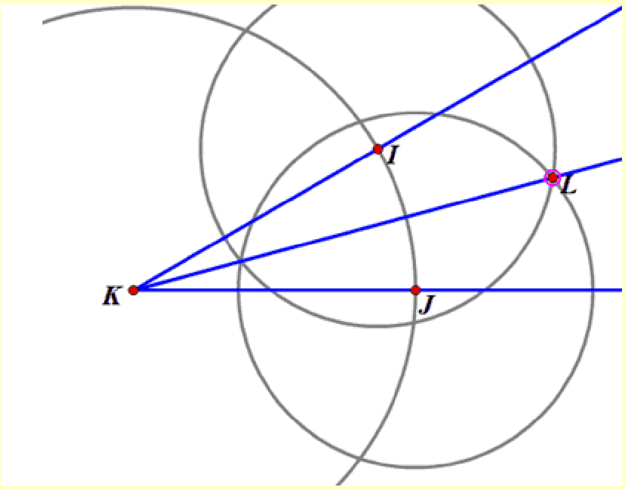
Cách 2: Dùng thước đo góc ta tiến hành đo góc cần dựng tia phân giác áp dụng tính chất chia đôi góc ta vẽ góc nhỏ có số đo bằng một nửa góc đã cho có chung 1 cạnh, riêng ý c) là góc bẹt vì vậy kẻ vuông góc ta có tia phân giác

Bài 5:

Vẽ tia phân giác của $\widehat{K}$ được cho dưới đây:



Lời giải



Vẽ đường tròn tâm K bán kính R cắt hai cạnh của $\widehat{K}$ tại I, J

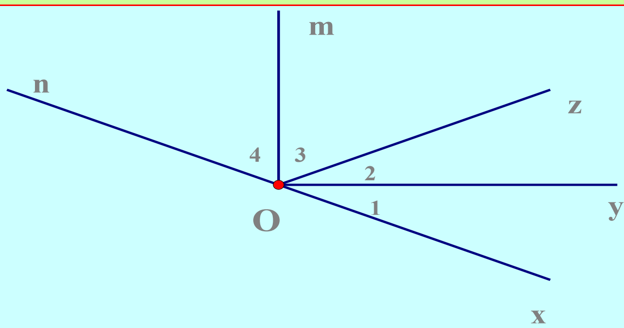
Vẽ các đường tròn Tâm $I; J$ có cùng bán kính r cắt nhau tại L

Vẽ tia KL

Khi đó tia phân giác của $\widehat{K}$ là tia KL.

Bài 6:

Cho hình vẽ. Biết $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}; \widehat{O_3} = \widehat{O_4}$ và hai tia Ox, On đối nhau. Chỉ ra các tia phân giác trên hình bên; Tính số đo của $\widehat{mOy}$.



Lời giải

Vì $\widehat{O_1} = \widehat{O_2} \Rightarrow Oy$ là tia phân giác của $\widehat{xOz}$

$\widehat{O_3} = \widehat{O_4} \Rightarrow Om$ là tia phân giác của $\widehat{nOz}$

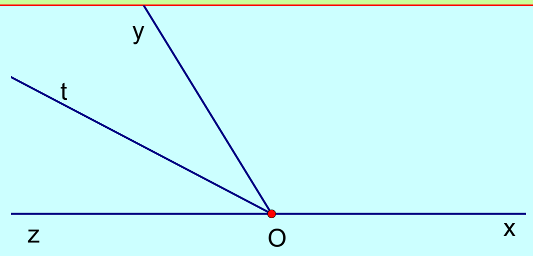
Ta có $\widehat{mOz} + \widehat{zOy} = \widehat{mOy} = \frac{1}{2}180° = 90°$.

Bài 7:

Cho hai góc kề bù $\widehat{xOy}$, $\widehat{yOz}$ sao cho $\widehat{xOy} = 120°$.

a) Tính $\widehat{yOz}$

b) Gọi Ot là tia phân giác của $\widehat{yOz}$. Chứng tỏ $\widehat{tOy} = \frac{1}{4}\widehat{xOy}$



Lời giải

a) Vì hai $\widehat{xOy}$, $\widehat{yOz}$ là hai góc kề bù $\widehat{yOz} = 180° - 120° = 60°$

Vậy $\widehat{yOz} = 60°$

b) Vì Ot là tia phân giác của $\widehat{yOz}$ có:

$\widehat{tOy} = \widehat{tOz} = \frac{1}{2}\widehat{yOz} = \frac{1}{2}60° = 30°$

mà $\widehat{xOy} = 120°$ vậy $\widehat{tOy} = \frac{1}{4}\widehat{xOy}$

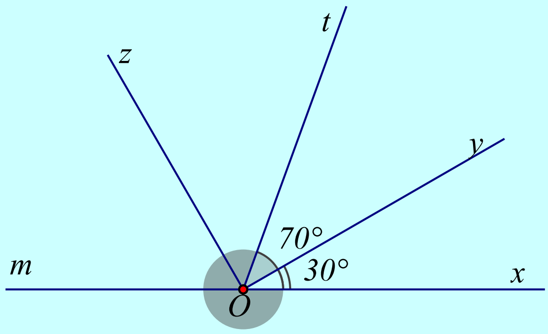
Bài 8:

Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ chứa tia Ox, vẽ hai tia Oy và Ot sao cho $\widehat{xOy} = 30°$; $\widehat{xOt} = 70°$

a) Tính $\widehat{yOt}$? Tia Oy có là tia phân giác của $\widehat{xOt}$ không? Vì sao?

b) Gọi tia Om là tia đối của tia Ox. Tính số đo của $\widehat{mOt}$?

c) Gọi Oz là tia phân giác của $\widehat{mOt}$. Tính số đo của $\widehat{yOz}$?



Lời giải

a) Vì $\widehat{xOy} < \widehat{xOt}$ $(30° < 70°)$ $\Rightarrow$ Tia Oy nằm giữa hai tia Ox và Ot

$\Rightarrow \widehat{xOy} + \widehat{yOt} = \widehat{xOt}$ $\Rightarrow$ $\widehat{yOt} = 70° - 30° = 40°$

Vậy $\widehat{yOt} = 40°$

Oy không là tia phân giác của $\widehat{xOt}$ vì:

$\widehat{xOy} \neq \widehat{yOt}$ $(30° \neq 40°)$

b) Vì tia Om là tia đối của tia Ox nên tia Ot nằm giữa hai tia Om và Ox

suy ra: $\widehat{xOt} + \widehat{tOm} = \widehat{xOm}$ $\Rightarrow \widehat{tOm} = 180° - 70° = 110°$

Vậy $\widehat{tOm} = 110°$

c) Vì Oz là tia phân giác của $\widehat{tOm}$ nên $\widehat{tOz} = 110° : 2 = 55°$

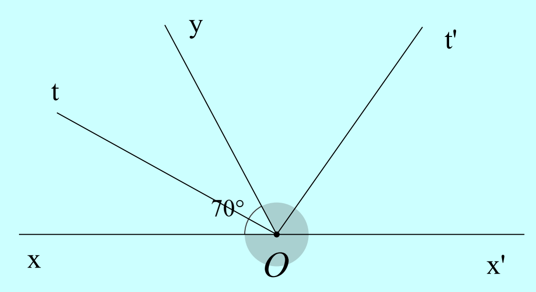
Mà tia Ot nằm giữa hai tia Oz và Oy nên ta có:

$\widehat{yOz} = \widehat{yOt} + \widehat{tOz} = 40° + 55° = 95°$.

Vậy $\widehat{yOz} = 95°$

Bài 9:

Vẽ 2 góc kề bù $\widehat{xOy}$ và $\widehat{yOx'}$, biết $\widehat{xOy} = 70°$. Gọi Ot là tia phân giác của $\widehat{xOy}$, Ot' là tia phân giác của $\widehat{x'Oy}$. Tính $\widehat{yOx'}; \widehat{tOt'}; \widehat{xOt'}$



Lời giải

Ta có $\widehat{xOy}$ và $\widehat{yOx'}$ là 2 góc kề bù $\widehat{xOy} + \widehat{yOx'} = 180°$ $\Rightarrow \widehat{yOx'} = 180° - 70° = 110°$

Vì Ot' là tia phân giác của $\widehat{yOx'} \Rightarrow \widehat{t'Ox'} = \widehat{tOy} = \frac{1}{2}\widehat{yOx'} = \frac{1}{2}.110° = 55°$

Vì Ot là tia phân giác của $\widehat{xOy} \Rightarrow \widehat{xOt} = \widehat{tOy} = \frac{1}{2}\widehat{xOy} = \frac{1}{2}70° = 35°$

Vì Ox và Ox' đối nhau $\Rightarrow Ot$ và Ot' nằm giữa Ox và $Ox' \Rightarrow \widehat{xOt} + \widehat{tOt'} + \widehat{t'Ox'} = 180°$

$\Rightarrow \widehat{xOt} + \widehat{tOt} + \widehat{t'Ox'} = 180° \Rightarrow \widehat{tOt'} = 180° - 35° - 55° = 90°$

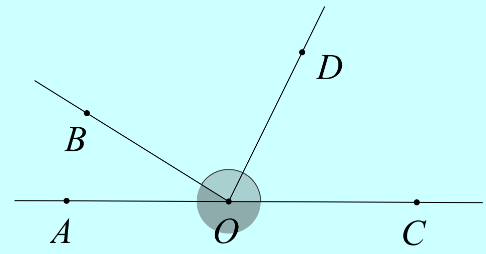
Có $\widehat{xOt'}$ và $\widehat{t'Ox'}$ là 2 góc kề bù $\Rightarrow \widehat{xOt'} + \widehat{t'Ox} = 180° \Rightarrow \widehat{xOt'} = 180° - 55° = 125°$

Bài 10:

Cho $\widehat{AOB}$ và $\widehat{BOC}$ là hai góc kề bù. Biết $\widehat{BOC} = 5.\widehat{AOB}$

a) Tính số đo mỗi góc.

b) Gọi OD là tia phân giác của $\widehat{BOC}$. Tính số đo $\widehat{AOD}$.



Lời giải

a) Vì $\widehat{AOB}$ và $\widehat{BOC}$ là hai góc kề bù nên:

$\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = 180°$

mà $\widehat{BOC} = 5\widehat{AOB} \Rightarrow 6\widehat{AOB} = 180°$

Do đó: $\widehat{AOB} = 180° : 6 = 30°$; $\widehat{BOC} = 5.30° = 150°$

b) Vì OD là tia phân giác của $\widehat{BOC}$ nên $\widehat{BOD} = \widehat{DOC} = \dfrac{1}{2}\widehat{BOC} = 75°$

Vì $\widehat{DOA}$ và $\widehat{DOC}$ là hai góc kề bù nên: $\widehat{DOA} + \widehat{DOC} = 180°$

Do đó $\widehat{DOA} = 180° - \widehat{DOC} = 180° - 75° = 105°$

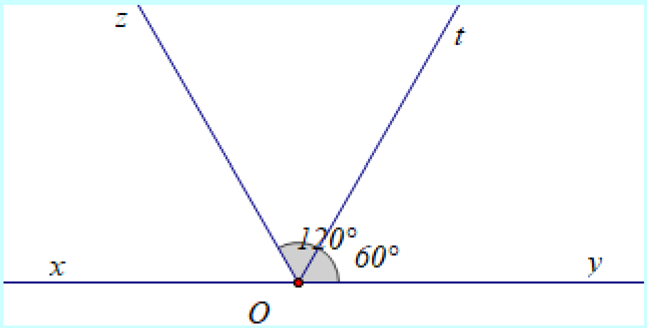
Bài 11:

Cho điểm O thuộc đường thẳng xy. Trên nửa mặt phẳng bờ xy, vẽ các tia Oz và Ot sao cho $\widehat{yOt} = 60°; \widehat{yOz} = 120°$.

a) Tính số đo $\widehat{zOt}$. Từ đó suy ra Ot là tia phân giác của $\widehat{yOz}$.

b) Tính số đo $\widehat{xOz}$ và $\widehat{xOt}$.

c) Tia Oz có phải tia phân giác của $\widehat{xOt}$ không ? Vì sao ?



Lời giải

a) Ta có tia Oz và tia Ot cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng xy.

Mà $\widehat{yOt} = 60° < \widehat{yOz} = 120°$

Suy ra tia Ot nằm giữa hai tia Oy và Oz (1)

$\Rightarrow \widehat{yOz} = \widehat{yOt} + \widehat{zOt} \Rightarrow \widehat{zOt} = \widehat{yOz} - \widehat{yOt} = 120° - 60° = 60°$

$\Rightarrow \widehat{zOt} = \widehat{yOt} = \dfrac{\widehat{yOz}}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow Ot$ là tia phân giác của $\widehat{yOz}$.

b) Ta có $\widehat{xOz}$ và $\widehat{yOz}$ là hai góc có chung cạnh Oz, hai cạnh còn lại Ox và Oy là hai tia đối nhau

$\Rightarrow \widehat{xOz}$ và $\widehat{yOz}$ là hai góc kề bù .

Ta có : $\widehat{yOz}+\widehat{zOx}=180^\circ \Rightarrow \widehat{xOz}=180^\circ-\widehat{zOy}=60^\circ$

Ta có $\widehat{xOt}$ và $\widehat{yOt}$ là hai góc có chung cạnh Ot, hai cạnh còn lại Ox và Oy là hai tia đối nhau

$\Rightarrow \widehat{xOt}$ và $\widehat{yOt}$ là hai góc kề bù: $\widehat{xOt}+\widehat{yOt}=180^\circ \Rightarrow \widehat{xOt}=180^\circ-\widehat{yOt}=120^\circ$

c) Ta có tia Oz và tia Ot cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng xy

mà $\widehat{xOz}=60^\circ<\widehat{xOt}=120^\circ$

Suy ra tia Oz nằm giữa hai tia Ox và Ot

$\Rightarrow \widehat{xOt}=\widehat{xOz}+\widehat{zOt} \Rightarrow \widehat{zOt}=\widehat{xOt}-\widehat{xOz}=120^\circ-60^\circ=60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{zOt}=\widehat{xOz}=\dfrac{\widehat{xOt}}{2}$ (4)

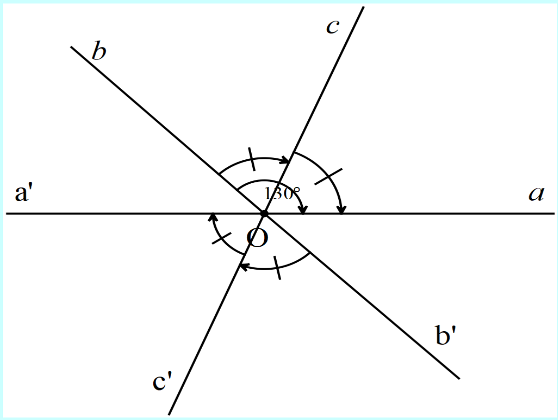
Từ (3) và (4) $\Rightarrow Oz$ là tia phân giác của $\widehat{xOt}$.

Bài 12:

Cho hai đường thẳng aa' và bb' cắt nhau tại O. Biết $\widehat{aOb}=130^\circ$.

a) Tính các góc $\widehat{a'Ob'}$; $\widehat{aOb'}$; $\widehat{a'Ob}$

b) Vẽ tia phân giác Oc của góc aOb và tia phân giác Oc' của góc $a'Ob'$. Hai tia Oc và Oc' có phải là hai tia đối nhau không?



Lời giải

a) Ta có: $\widehat{a'Ob'}=\widehat{aOb}=130^0$ (đối đỉnh)

Mặt khác ta cũng có:

$\widehat{aOb}+\widehat{aOb'}=180^0$ (bù nhau), do đó: $\widehat{aOb'}=180^0-\widehat{aOb}=180^0-130^0=50^0 \Rightarrow \widehat{a'Ob}=\widehat{aOb'}=50^0$ (đối đỉnh)

b) *Oc, Oc'* theo thứ tự là các tia phân giác của hai góc *aOb* và *a'Ob'* nên

$\widehat{aOc}=\widehat{cOb}=\dfrac{1}{2}\widehat{aOb}$ và $\widehat{a'Oc'}=\widehat{c'Ob'}=\dfrac{1}{2}\widehat{a'Ob'}$

mà $\widehat{aOb}=\widehat{a'Ob'}$. Do đó: $\widehat{aOc}=\widehat{cOb}=\widehat{a'Oc'}=\widehat{c'Ob'}=\dfrac{1}{2}\widehat{aOb}$

$\Rightarrow \widehat{c'Oc}=\widehat{c'Ob'}+\widehat{b'Oa}+\widehat{aOc}=\widehat{cOb'}+\widehat{b'Oa}+\widehat{aOc}$

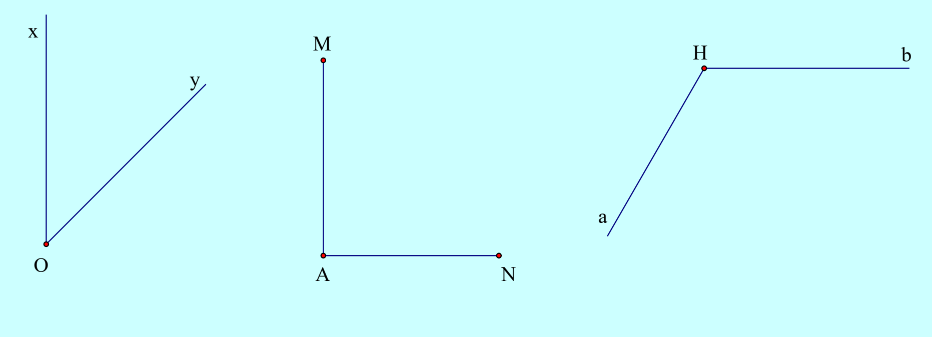
$=\widehat{b'Oa}+\widehat{aOc}+\widehat{cOb}=\widehat{b'Oa}+\widehat{aOb}=180^0$

Suy ra: góc $\widehat{c'Oc}$ là góc bẹt hay hai tia Oc và Oc' là hai tia đối nhau.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

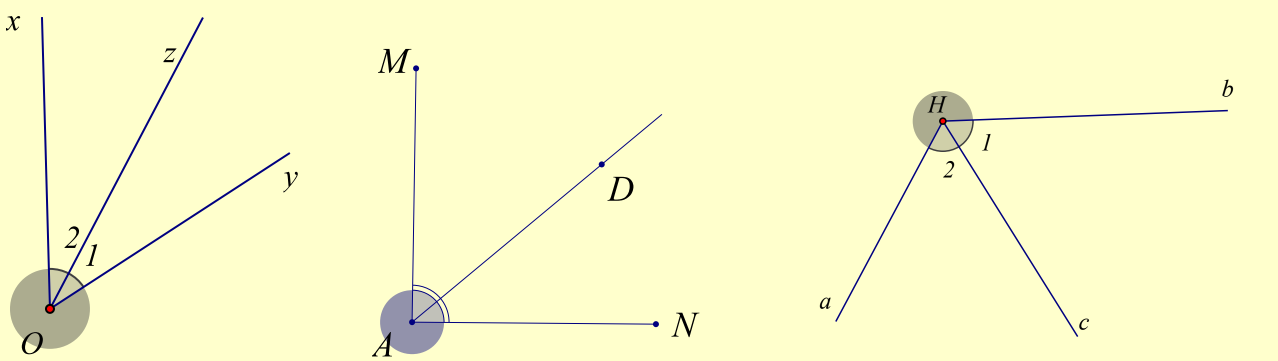
Bài 1:

Vẽ tia phân giác của các góc được cho dưới đây:



Lời giải

Áp dụng cách vẽ ta có các tia phân giác là:



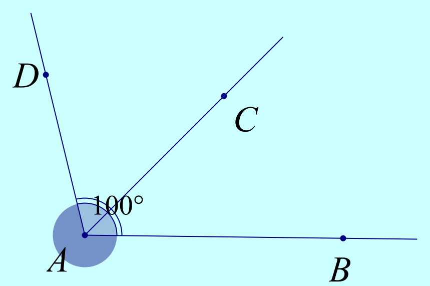
Bài 2:

Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ chứa tia AB, vẽ tia AC, AD sao cho $\widehat{BAC}=50^\circ$, $\widehat{BAD}=100^\circ$.

a) Trong ba tia AB, AC, AD thì tia nào nằm giữa hai tia còn lại? Vì sao?

b) So sánh góc BAC và góc CAD.

c) Tia AC có phải là tia phân giác của góc BAD không? Vì sao?



Lời giải

a) Vì AC, AD nằm trên một nửa mặt phẳng bờ chứa tia AB, mà $\widehat{BAC}<\widehat{BAD}$ (do $50^\circ<100^\circ$) nên tia AC nằm giữa hai tia AB và AD.

b) Theo tính chất cộng góc ta có

$\widehat{BAD}=\widehat{BAC}+\widehat{CAD}\Rightarrow\widehat{CAD}=\widehat{BAD}-\widehat{BAC}=100^\circ-50^\circ=50^\circ.$

Suy ra $\widehat{BAC}=\widehat{CAD}=50^\circ$.

c) Do tia AC nằm giữa hai tia AB và AD lại có $\widehat{BAC}=\widehat{CAD}=50^\circ$ nên AC là phân giác của $\widehat{BAD}$.

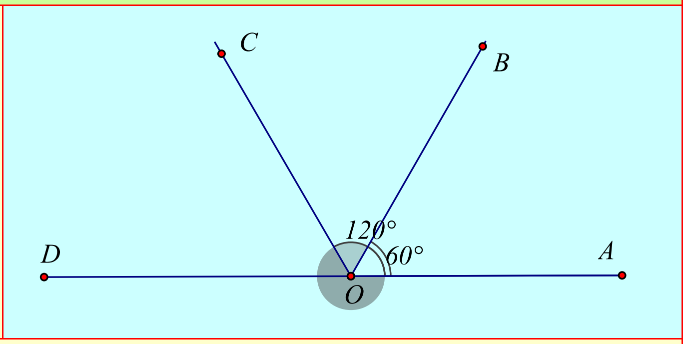
Bài 3:

Trên cùng nửa mặt phẳng bờ chứa tia OA, vẽ $\widehat{AOB}=60°$; $\widehat{AOC}=120°$.

a) Tính $\widehat{BOC}$

b) Chứng tỏ tia OB là tia phân giác $\widehat{AOC}$.

c) Vẽ tia OD là tia đối của tia OA. Tính $\widehat{DOC}$



Lời giải

Trên cùng nửa mặt phẳng bờ chứa tia OA ta có : $\widehat{AOB}<\widehat{AOC}$ $(60°< 120°)$

Suy ra tia OB nằm giữa hai tia OA và OC. $\widehat{AOB}+\widehat{BOC}=\widehat{AOC}$

Hay $60°+\widehat{BOC}=120° \Rightarrow \widehat{BOC}=60°$

Ta có: tia OB nằm giữa hai tia OA, OC và $\widehat{AOB}=\widehat{BOC}=60°$

Suy ra tia OB là tia phân giác $\widehat{AOC}$.

Vẽ tia OD là tia đối của tia OA (gt) $\Rightarrow \widehat{AOC};\widehat{COD}$ là hai góc kề bù.

$\Rightarrow \widehat{AOC}+\widehat{COD}=180°$ hay $120°+\widehat{DOC}=180° \Rightarrow \widehat{DOC}=60°$

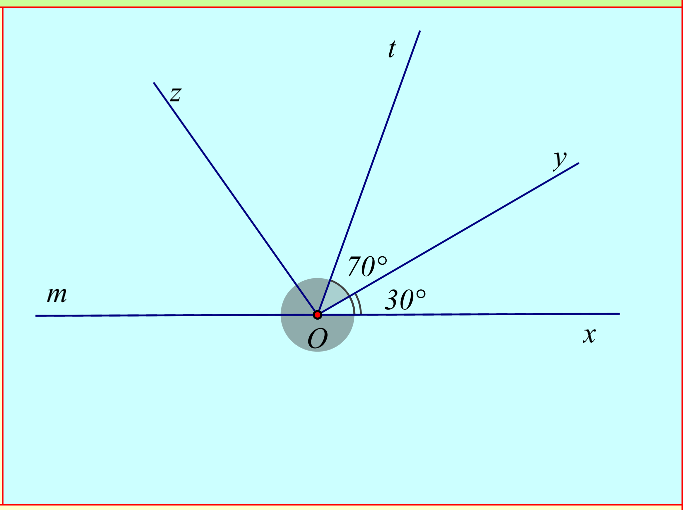
Bài 4:

Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ chứa tia Ox, vẽ hai tia Oy và Ot sao cho $\widehat{xOy}=30°;\widehat{xOt}=70°$

a) Tính $\widehat{yOt}$? Tia Oy có là tia phân giác của $\widehat{xOt}$ không? Vì sao?

b) Gọi tia Om là tia đối của tia Ox .Tính số đo của $\widehat{mOt}$

c) Gọi Oz là tia phân giác của $\widehat{mOt}$. Tính số đo của $\widehat{yOz}$



Lời giải

a) Vì $\widehat{xOy}<\widehat{xOt}$ $(30°<70°)$ $\Rightarrow$ Tia Oy nằm giữa hai tia Ox và Ot

$\Rightarrow \widehat{xOy}+\widehat{yOt}=\widehat{xOt} \Rightarrow \widehat{yOt}=70°-30°=40°$

Vậy $\widehat{yOt}=40°$ $\Rightarrow Oy$ không là tia phân giác của $\widehat{xOt}$ vì: $\widehat{xOy}\neq\widehat{yOt}$ $(30°\neq 40°)$

b) Vì tia Om là tia đối của tia Ox nên tia Ot nằm giữa hai tia Om và Ox

suy ra: $\widehat{xOt}+\widehat{tOm}=\widehat{xOm} \Rightarrow \widehat{tOm}=180°-70°=110°$

Vậy $\widehat{tOm}=110°$

c) Vì Oz là tia phân giác của $\widehat{tOm}$ nên $\widehat{tOz} = 110^\circ : 2 = 55^\circ$ mà tia Ot nằm giữa hai tia Oz và Oy nên ta có: $\widehat{yOz} = \widehat{yOt} + \widehat{tOz} = 40^\circ + 55^\circ = 95^\circ$.

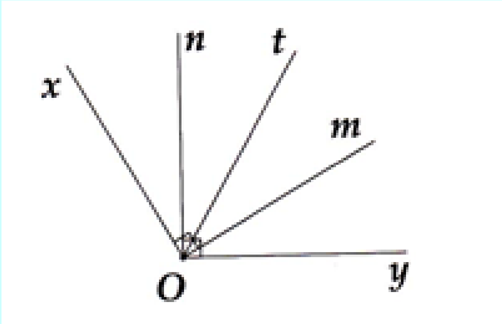
Vậy $\widehat{yOz} = 95^\circ$

Bài 5:

Cho $\widehat{xOy} = 120^\circ$. Bên trong $\widehat{xOy}$, vẽ tia Om sao cho $\widehat{yOm} = 30^\circ$ và vẽ tia On sao cho $\widehat{yOn} = 90^\circ$.

a) So sánh số đo các $\widehat{xOn}$ và $\widehat{yOm}$.

b) Gọi Ot là tia phân giác của $\widehat{xOy}$. Chứng tỏ Ot cũng là tia phân giác của $\widehat{mOn}$.



Lời giải

a) Theo tính chất cộng góc, ta có:

$$\widehat{xOn} = \widehat{xOy} - \widehat{yOm} = 30^\circ$$
$$\widehat{yOm} = \widehat{xOy} - \widehat{xOm} = 30^\circ$$

Vậy $\widehat{xOn} = \widehat{yOm}$

b) Vì Ot là tia phân giác của $\widehat{xOy}$

nên: $\widehat{xOt} = \widehat{yOt} = \dfrac{\widehat{xOy}}{2} = 60^\circ$

Từ đó, ta có $\widehat{nOt} = \widehat{xOt} - \widehat{xOn} = 30^\circ; \widehat{mOt} = \widehat{yOt} - \widehat{yOm} = 30^\circ$

Mặt khác, $\widehat{mOn} = \widehat{yOn} - \widehat{yOm} = 60^\circ$

Do đó, $\widehat{nOt} = \widehat{mOt} = \dfrac{\widehat{mOn}}{2}$ (cùng bằng 30°).

Vậy Ot cũng là tia phân giác của $\widehat{mOn}$.

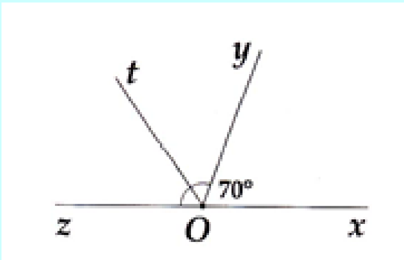
Bài 6:

Vẽ hai góc kề bù $\widehat{xOy}$ và $\widehat{yOz}$, biết $\widehat{xOy} = 70^\circ$.

Vẽ Ot là tia phân giác của $\widehat{yOz}$.

a) Tính số đo $\widehat{yOz}$ và $\widehat{yOt}$.

b) Tính số đo $\widehat{xOt}$.



Lời giải

a) Sử dụng tính chất hai góc kề bù, suy ra $\widehat{yOz} = 110^\circ$.

Vì Ot là tia phân giác của $\widehat{yOz}$ nên $\widehat{yOt} = \dfrac{\widehat{yOz}}{2} = 55^\circ$.

b) Ta có $\widehat{zOt} = \widehat{yOt} = 55°$. Từ đó, suy ra $\widehat{xOt} = 125°$.

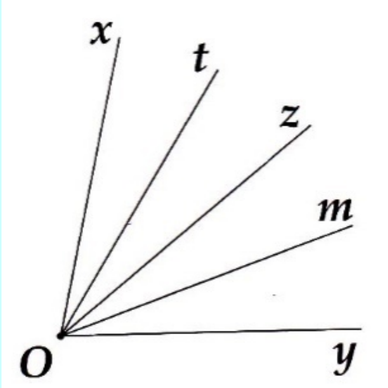
Bài 7:

Cho góc $\widehat{xOy}$. Vẽ tia Oz là tia phân giác của $\widehat{xOy}$. Vẽ tia Ot là tia phân giác của $\widehat{xOz}$. Vẽ tia Om là tia phân giác của $\widehat{yOz}$.

a) Chứng tỏ tia Oz là tia phân giác của $\widehat{tOm}$.

b) Chứng tỏ $\widehat{xOy} = 4\widehat{tOz}$.

c) Tính giá trị lớn nhất của góc $\widehat{tOm}$.



Lời giải

a) Theo tính chất tia phân giác của một góc, ta có:

$$\widehat{xOz} = \widehat{yOz} = \frac{1}{2}\widehat{xOy}$$

$$\widehat{xOt} = \widehat{tOz} = \frac{1}{2}\widehat{xOz} \qquad (1)$$

$$\widehat{zOm} = \widehat{yOm} = \frac{1}{2}\widehat{yOz}$$

Từ đó, suy ra $\widehat{tOz} = \widehat{mOz}$ Mặt khác, Ox và Ot cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ chứa tia $Oz; Oy; Om$ cùng thuộc nửa mặt phẳng còn lại.

Do đó, tia Oz nằm giữa hai tia Ot và Om. Vậy tia Oz là tia phân giác của $\widehat{tOm}$.

b) Từ (1), ta suy ra $\widehat{tOz} = \frac{1}{2}\widehat{xOz} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\widehat{xOy} = \frac{1}{4}\widehat{xOy}$ Do đó, $\widehat{xOy} = 4\widehat{tOz}$

c) Từ ý a), suy ra $\widehat{tOm} = 2\widehat{tOz}$

Kết hợp với ý b), ta có $\widehat{tOm} = \frac{1}{2}\widehat{xOy}$

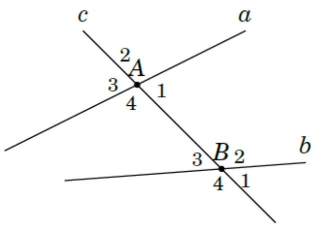
Mà góc $\widehat{xOy}$ có số đo lớn nhất bằng $180°$ (góc bẹt) nên góc $\widehat{tOm}$ có số đo lớn nhất bằng $90°$.

Nên $\widehat{tOm} = 180° - (45° + 45°) = 90°$.

CHUYÊN ĐỀ: HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VÀ DẤU HIỆU NHẬN BIẾT.

A. Lý thuyết

1. Góc tạo bởi một đường thẳng cắt hai đường thẳng.



+ Cho đường thẳng c cắt hai đường thẳng a và b tại hai điểm A, B như hình vẽ bên

+ Có hai cặp góc so le trong là $\widehat{A_1}$ và $\widehat{B_3}$; $\widehat{A_4}$ và $\widehat{B_2}$.

+ Có bốn cặp góc đồng vị là: $\widehat{A_1}$ và $\widehat{B_1}$; $\widehat{A_2}$ và $\widehat{B_2}$; $\widehat{A_3}$ và $\widehat{B_3}$; $\widehat{A_4}$ và $\widehat{B_4}$.

+ Có hai cặp góc trong cùng phía là $\widehat{A_1}$ và $\widehat{B_2}$; $\widehat{A_4}$ và $\widehat{B_3}$.

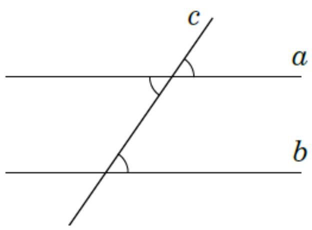
+ Có hai cặp góc so le ngoài là $\widehat{A_2}$ và $\widehat{B_4}$; $\widehat{A_3}$ và $\widehat{B_1}$.

2. Nhắc lại

+ Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng không có điểm chung.

+ Hai đường thẳng phân biệt hoặc cắt nhau hoặc song song.

3. Dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song



*) Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng a,b và trong các góc tạo thành có một cặp góc so le trong bằng nhau (hoặc một cặp góc đồng vị bằng nhau) thì a và b song song với nhau.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Xác định cặp góc so le trong, cặp góc đồng vị, cặp góc trong cùng phía, cặp góc so le ngoài trên hình vẽ cho trước. Vẽ hai đường thẳng song song hoặc kiểm tra xem hai đường thẳng có song song với nhau không? Tính số đo góc .

I) Phương pháp giải:

+) Dựa vào vị trí của các cặp góc xác định đúng cặp góc so le trong, cặp góc đồng vị, cặp góc trong cùng phía, cặp góc so le ngoài trên hình vẽ cho trước.

+) Dùng góc nhọn của ê-ke (Áp dụng thực hành 1 hoặc thực hành 2) để vẽ hai góc so le trong hoặc hai góc đồng vị bằng nhau.

+) Dùng thước đo góc để kiểm tra xem hai góc so le trong hoặc hai góc đồng vị (các góc tạo bởi một đường thẳng cắt hai đường thẳng cần kiểm tra có song song hay không) có bằng nhau hay không.

II) Bài toán:

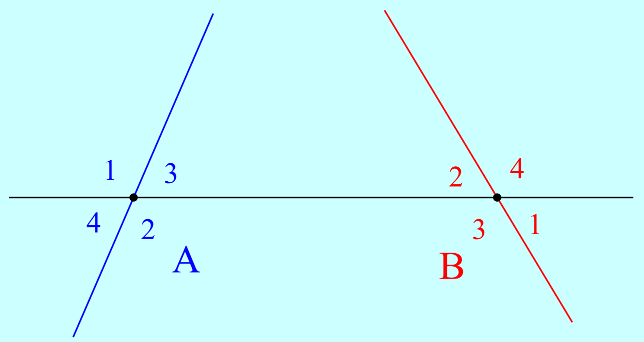
Bài 1:

Cho hình sau:

a) Kể tên các góc so le trong.

b) Kể tên các góc đồng vị.

c) Kể tên các góc trong cùng phía.



Lời giải

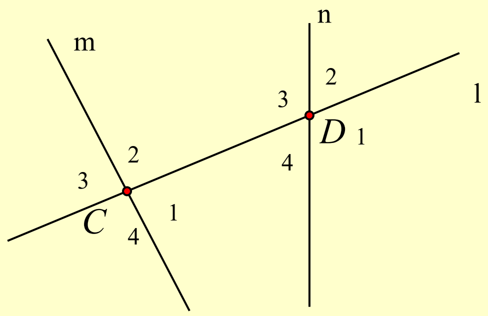
+ Các góc so le trong là: $\widehat{A_2}$ và $\widehat{B_2}$; $\widehat{A_3}$ và $\widehat{B_3}$

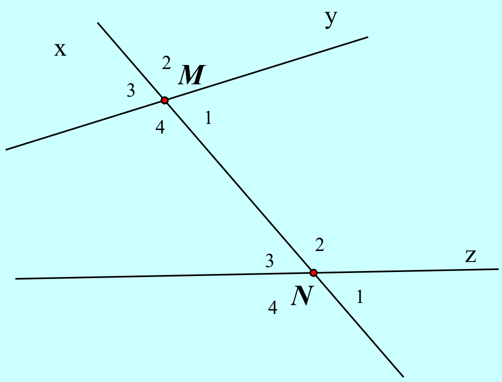
+ Các góc đồng vị là: $\widehat{A_1}$ và $\widehat{B_2}$; $\widehat{A_3}$ và $\widehat{B_4}$; $\widehat{A_4}$ và $\widehat{B_3}$; $\widehat{A_2}$ và $\widehat{B_1}$

+ Các góc trong cùng phía là: $\widehat{A_3}$ và $\widehat{B_2}$; $\widehat{A_2}$ và $\widehat{B_3}$

Bài 2:

Chỉ ra các cặp góc so le trong, cặp góc đồng vị, cặp góc trong cùng phía, cặp góc so le ngoài trong các hình vẽ sau:





Lời giải

Hình 2a:

- Cặp góc so le trong: $\widehat{M_1}$ và $\widehat{N_3}$; $\widehat{M_4}$ và $\widehat{N_2}$.

- Cặp góc so le ngoài: $\widehat{M_2}$ và $\widehat{N_4}$; $\widehat{M_3}$ và $\widehat{N_1}$.

- Cặp góc đồng vị: $\widehat{M_4}$ và $\widehat{N_4}$; $\widehat{M_1}$ và $\widehat{N_1}$; $\widehat{M_2}$ và $\widehat{N_2}$ $\widehat{M_3}$ và $\widehat{N_3}$.

- Cặp góc trong cùng phía: $\widehat{M_4}$ và $\widehat{N_3}$; $\widehat{M_1}$ và $\widehat{N_2}$.

Hình 2b:

- Cặp góc so le trong: $\widehat{C_2}$ và $\widehat{D_4}$, $\widehat{C_1}$ và $\widehat{D_3}$

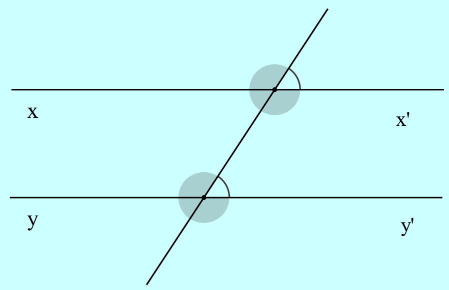
- Cặp góc so le ngoài: $\widehat{C_3}$ và $\widehat{D_1}$, $\widehat{C_4}$ và $\widehat{D_2}$

- Cặp góc đồng vị: $\widehat{C_1}$ và $\widehat{D_1}$, $\widehat{C_2}$ và $\widehat{D_2}$, $\widehat{C_3}$ và $\widehat{D_3}$, $\widehat{C_4}$ và $\widehat{D_4}$.

- Cặp góc trong cùng phía: $\widehat{C_2}$ và $\widehat{D_3}$, $\widehat{C_1}$ và $\widehat{D_4}$

Bài 3:

Vẽ hai đường thẳng xx' , yy' sao cho xx' song song yy' .



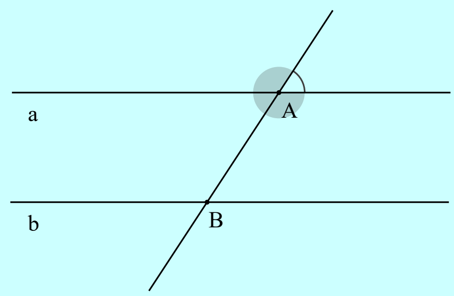
Hình vẽ tham khảo

Lời giải

Sử dụng eke và thước vẽ như các bước ở thực hành 1 hoặc 2 ta được hình vẽ

Bài 4:

Cho hai điểm A và B. Hãy vẽ một đường thẳng a đi qua A và đường thẳng b đi qua B sao cho b song song với a .



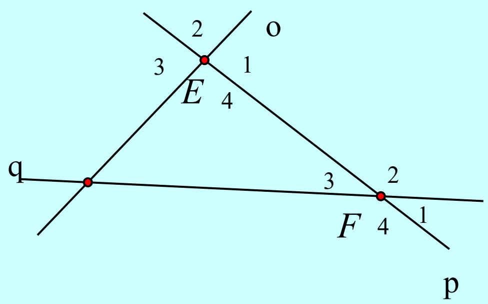
Hình vẽ tham khảo

Lời giải

Sử dụng eke và thước vẽ như các bước ở thực hành 1 hoặc 2 ta được hình vẽ

Bài 5:

Chỉ ra các cặp góc so le trong, cặp góc đồng vị trong các hình vẽ bên.



Lời giải

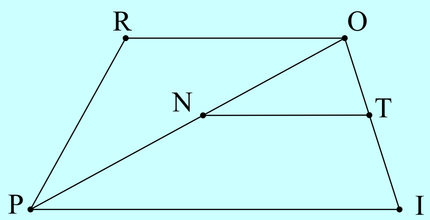
ta có: - Cặp góc so le trong: $\widehat{E_1}$ và $\widehat{F_3}$, $\widehat{E_4}$ và $\widehat{F_2}$

- Cặp góc đồng vị: $\widehat{E_4}$ và $\widehat{F_4}$, $\widehat{E_1}$ và $\widehat{F_1}$, $\widehat{E_2}$ và $\widehat{F_2}$, $\widehat{E_3}$ và $\widehat{F_3}$.

Bài 6:

Xem hình bên rồi điền vào chỗ trống (...) trong các câu sau:

1. $\widehat{IPO}$ và $\widehat{POR}$ là một cặp góc …
2. $\widehat{OPI}$ và $\widehat{TNO}$ là một cặp góc ...
3. $\widehat{PIO}$ và $\widehat{NTO}$ là một cặp góc …
4. $\widehat{OPR}$ và $\widehat{POI}$ là một cặp góc …



Lời giải

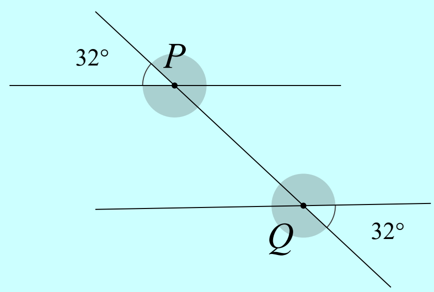
1. $\widehat{IPO}$ và $\widehat{POR}$ là một cặp góc so le trong.
2. $\widehat{OPI}$ và $\widehat{TNO}$ là một cặp góc đồng vị.
3. $\widehat{PIO}$ và $\widehat{NTO}$ là một cặp góc đồng vị.
4. $\widehat{OPR}$ và $\widehat{POI}$ là một cặp góc so le trong

Bài 7:

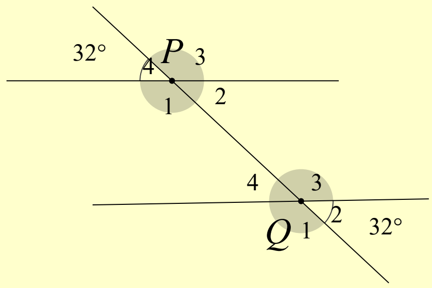
Cho hình sau:

a, Đặt tên cho các góc trong hình.

b, Kể tên các góc bằng nhau có trong hình.



Lời giải



Vì $\widehat{P_3}$ và $\widehat{P_4}$ là 2 góc kề bù nên $\widehat{P_3}+\widehat{P_4}=180°$ Ta tính được $\widehat{P_3}=180°-32°=148°$

Vì $\widehat{P_4}$ và $\widehat{P_2}$ là 2 góc đối đỉnh nên $\widehat{P_4}=\widehat{P_2}=32°$

Vì $\widehat{P_3}$ và $\widehat{P_1}$ là 2 góc đối đỉnh nên $\widehat{P_3}=\widehat{P_1}=148°$

Tương tự ta có các góc tại đỉnh Q

$\widehat{Q_1}=\widehat{Q_3}=148°$; $\widehat{Q_2}=\widehat{Q_4}=32°$

Vậy các góc bằng nhau có trong hình là:

$\widehat{P_4}=\widehat{P_2}=\widehat{Q_2}=\widehat{Q_4}=32°$

$\widehat{P_3}=\widehat{P_1}=\widehat{Q_1}=\widehat{Q_3}=148°$

Bài 8:

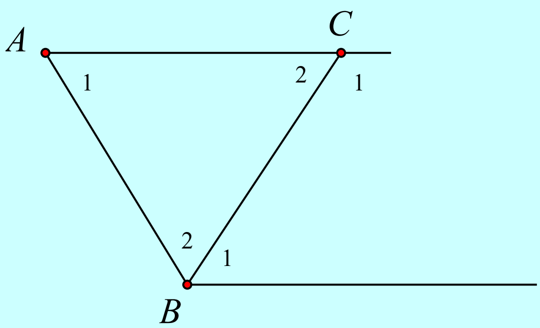
Cho hình sau.

a) Viết tên hai góc trong cùng phía tại A và B

b) Viết tên các góc so le trong tại B và C.

c) Hai góc $\widehat{C_1}$ và $\widehat{A_1}$ là hai góc gì?

d) Hai góc $\widehat{B_2}$ và $\widehat{C_2}$ là hai góc gì?



Lời giải

a) Hai góc trong cùng phía tại A và B: $\widehat{A_1}$ và $\widehat{B_2}$

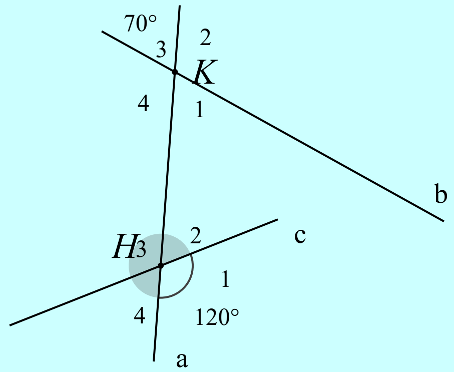
b) Các góc so le trong tại B và C: $\widehat{C_2}$ và $\widehat{B_1}$, $\widehat{C_1}$ và $\widehat{B_2}$.

c) Hai góc $\widehat{C_1}$ và $\widehat{A_1}$ là hai góc đồng vị.

d) Hai góc $\widehat{B_2}$ và $\widehat{C_2}$ là hai góc trong cùng phía.

Bài 9:

Vẽ lại các hình sau và tính số đo các góc còn lại.



Lời giải

Ta có: $\widehat{K_2}+\widehat{K_3}=180^\circ$ (2 góc kề bù).

Thay số $\widehat{K_2}+70^\circ=180^\circ$. Suy ra $\widehat{K_2}=180^\circ-70^\circ=110^\circ$

Ta có: $\widehat{K_1}=\widehat{K_3}=70^\circ$ (2 góc đối đỉnh) , $\widehat{K_2}=\widehat{K_4}=110^\circ$ (2 góc đối đỉnh).

- Tương tự: $\widehat{H_3}=\widehat{H_1}=120^\circ$ (2 góc đối đỉnh)

$\widehat{H_1}+\widehat{H_2}=180^\circ$ (2 góc kề bù)

Thay số: $120^\circ+\widehat{H_2}=180^\circ$. Suy ra $\widehat{H_2}=180^\circ-120^\circ=60^\circ$

Suy ra $\widehat{H_4}=\widehat{H_2}=60^\circ$

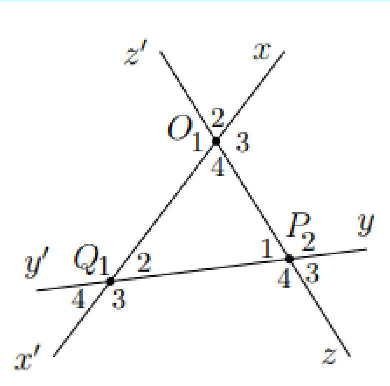
Bài 10:

Cho hình vẽ bên:

1. Kể tên các cặp góc so le trong, các cặp góc đồng vị và các cặp góc trong cùng phía.

2.Tính số đo các cặp góc còn lại, biết:

$\widehat{O_1}=100^\circ, \widehat{P_1}=60^\circ$, $\widehat{Q_2}=40^\circ$



Lời giải

1. Các cặp góc so le trong: $\widehat{O_1}$ và $\widehat{Q_2}$; $\widehat{O_4}$ và $\widehat{Q_1}$; $\widehat{O_3}$ và $\widehat{P_1}$; $\widehat{O_4}$ và $\widehat{P_2}$, $\widehat{Q_2}$ và $\widehat{P_4}$, $\widehat{Q_3}$ và $\widehat{P_1}$

Các cặp góc đồng vị: $\widehat{O_1}$ và $\widehat{Q_4}$; $\widehat{O_2}$ và $\widehat{Q_1}$; $\widehat{O_3}$ và $\widehat{Q_2}$; $\widehat{O_4}$ và $\widehat{Q_3}$; $\widehat{O_1}$ và $\widehat{P_1}$; $\widehat{O_2}$ và $\widehat{P_2}$;

$\widehat{O_3}$ và $\widehat{P_3}$; $\widehat{O_4}$ và $\widehat{P_4}$; $\widehat{Q_1}$ và $\widehat{P_1}$; $\widehat{Q_2}$ và $\widehat{P_2}$; $\widehat{Q_3}$ và $\widehat{P_3}$; $\widehat{Q_4}$ và $\widehat{P_4}$

Các cặp góc trong cùng phía: $\widehat{O_1}$ và $\widehat{Q_1}$; $\widehat{O_4}$ và $\widehat{Q_2}$; $\widehat{O_4}$ và $\widehat{P_1}$; $\widehat{O_3}$ và $\widehat{P_2}$; $\widehat{Q_2}$ và $\widehat{P_1}$; $\widehat{Q_3}$ và $\widehat{P_4}$

2. Từ $\widehat{O_1} = 100°$, suy ra: $\widehat{O_3} = 100°$, $\widehat{O_2} = \widehat{O_4} = 80°$.

Từ $\widehat{P_1} = 60°$, suy ra: $\widehat{P_3} = 60°$, $\widehat{P_2} = \widehat{P_4} = 120°$.

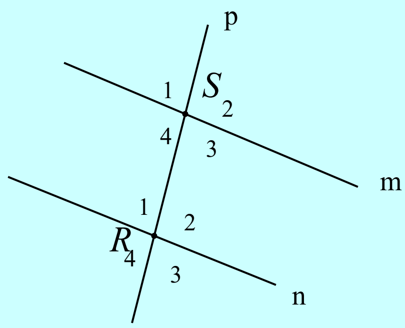
Từ $\widehat{Q_2} = 40°$ suy ra $\widehat{Q_4} = 40°$, $\widehat{Q_1} = \widehat{Q_3} = 140°$

Bài 11:

Cho hình vẽ bên

a) Kể tên các cặp góc so le trong, các cặp góc đồng vị và các cặp góc trong cùng phía.

b) Tính số đo các cặp góc còn lại, biết: $\widehat{R_4} = \widehat{S_2} = 120°$.



Lời giải

a) - Cặp góc so le trong: $\widehat{S_4}$ và $\widehat{R_2}$; $\widehat{S_3}$ và $\widehat{R_1}$.

- Cặp góc đồng vị: $\widehat{S_1}$ và $\widehat{R_1}$; $\widehat{S_4}$ và $\widehat{R_4}$, $\widehat{S_3}$ và $\widehat{R_3}$, $\widehat{S_1}$ và $\widehat{R_1}$.

- Cặp góc trong cùng phía: $\widehat{S_4}$ và $\widehat{R_1}$; $\widehat{S_3}$ và $\widehat{R_2}$.

b) - Ta có: $\widehat{S_4} = \widehat{S_2} = 120°$ (2 góc đối đỉnh).

$\hat{S}_2 + \widehat{S_3} = 180°$ (2 góc kề bù).

Thay số $120° + \widehat{S_3} = 180°$. Suy ra $\widehat{S_3} = 180° - 120° = 60°$

Suy ra $\widehat{S_3} = \widehat{S_1} = 60°$ (2 góc đối đỉnh).

- Tương tự: $\widehat{R_2} = \widehat{R_4} = 120°$ (2 góc đối đỉnh)

$\widehat{R_1} + \widehat{R_2} = 180°$ (2 góc kề bù)

Thay số: $\widehat{R_1} + 120° = 180°$. Suy ra $\widehat{R_1} = 180° - 120° = 60°$

Suy ra $\widehat{R_3} = \widehat{R_1} = 60°$

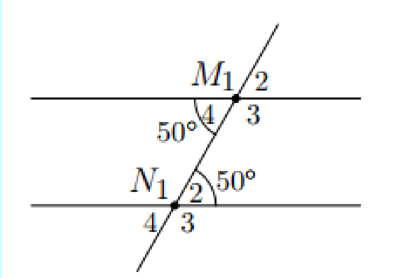
Bài 12:

Cho hình vẽ bên.

a) Kể tên các cặp góc so le trong, các cặp góc đồng vị và các cặp góc trong cùng phía.

b) Ghi tiếp số đo ứng với các góc còn lại.

c) Tính $\widehat{M_3}+\widehat{N_2}$; $\widehat{M_4}+\widehat{N_1}$.



Lời giải

a) Cặp góc so le trong: $\widehat{M_4}$ và $\widehat{N_2}$; $\widehat{M_3}$ và $\widehat{N_1}$.

Cặp góc đồng vị: $\widehat{M_1}$ và $\widehat{N_1}$; $\widehat{M_4}$ và $\widehat{N_4}$, $\widehat{M_3}$ và $\widehat{N_3}$, $\widehat{M_1}$ và $\widehat{N_1}$.

Cặp góc trong cùng phía: $\widehat{M_4}$ và $\widehat{N_1}$, $\widehat{M_3}$ và $\widehat{N_2}$

b) $\widehat{M_2}=\widehat{M_4}=50°$ (2 góc đối đỉnh) ;

$\widehat{M_1}+\widehat{M_2}=180°$ (2 góc kề bù). Suy ra $\widehat{M_1}=180°-50°=130°$

Suy ra $\widehat{M_3}=\widehat{M_1}=130°$ (2 góc đối đỉnh)

- Tương tự: $\widehat{N_4}=\widehat{N_2}=50°$ (2 góc đối đỉnh) ;

$\widehat{N_1}+\widehat{N_2}=180°$ (2 góc kề bù). Suy ra $\widehat{N_1}=180°-50°=130°$

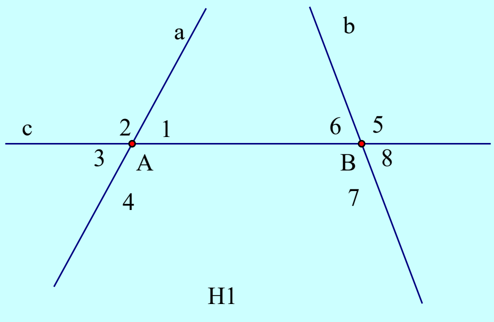
Suy ra $\widehat{N_3}=\widehat{N_1}=130°$ (2 góc đối đỉnh)

c) Từ kết quả đã tính ở ý b), ta có $\widehat{M_3}+\widehat{N_2}=180°$; $\widehat{M_4}+\widehat{N_1}=180°$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1:

Tìm các cặp góc so le trong (ngoài), đồng vị, góc trong (ngoài) cùng phía trên hình (H_1).



Lời giải

- Các cặp góc so le trong: $\widehat{A_1}$ và $\widehat{B_7}$; $\widehat{A_4}$ và $\widehat{B_6}$.

- Các cặp góc so le ngoài: $\widehat{A_2}$ và $\widehat{B_8}$; $\widehat{A_3}$ và $\widehat{B_5}$.

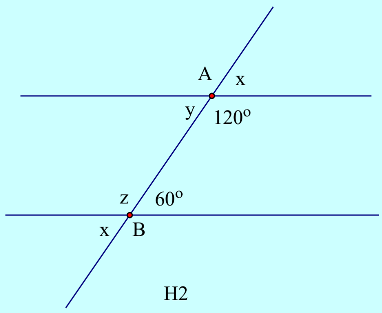
- Các cặp góc đồng vị: $\widehat{A_1}$ và $\widehat{B_5}$; $\widehat{A_4}$ và $\widehat{B_8}$; $\widehat{A_3}$ và $\widehat{B_7}$; $\widehat{A_2}$ và $\widehat{B_6}$.

- Các cặp góc trong cùng phía: $\widehat{A_1}$ và $\widehat{A_6}$; $\widehat{A_4}$ và $\widehat{B_7}$.

- Các cặp góc ngoài cùng phía: $\widehat{A_2}$ và $\widehat{B_5}$; $\widehat{A_3}$ và $\widehat{B_8}$.

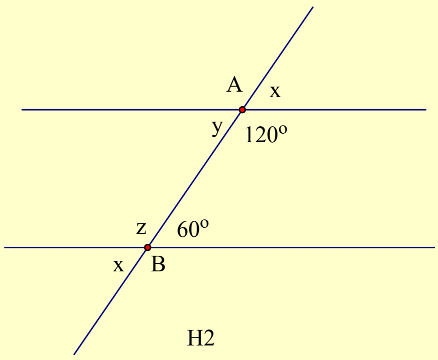
Bài 2:

Tính các giá trị x, y, z, t trên hình sau (H2)



Lời giải

+ Tính các giá trị x, y, z, t trên hình 2 (H2)



$x = 60°$ (x đối đỉnh với góc $60°$)

$y + 120° = 180°$ (y kề bù với góc $120°$)

$y = 180° - 120°$

$y = 60°$

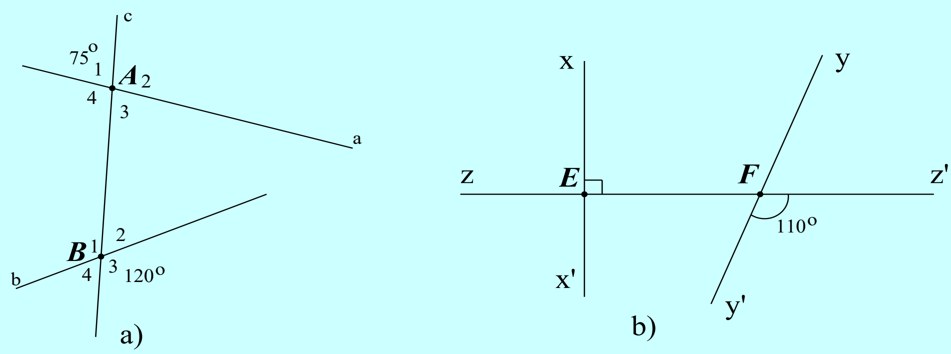
$z + 60° = 180°$ (z kề bù với góc $60°$)

$z = 180° - 60°$

$z = 120°$

Bài 3:

Vẽ lại hình và tính các góc còn lại



Lời giải

Hình 3a. $\widehat{A_2}$ kề bù với $\widehat{A_1}$ nên tìm được $\widehat{A_2} = 180° - \widehat{A_1} = 105°$.

$\widehat{A_3} = \widehat{A_1} = 75°$ (đối đỉnh) ; $\widehat{A_4} = \widehat{A_2} = 105°$ (đối đỉnh).

Tương tự ta tìm được: $\widehat{B_4} = 180° - \widehat{B_3} = 60°$; $\widehat{B_1} = \widehat{B_3} = 120°$; $\widehat{B_2} = \widehat{B_4} = 60°$.

Hình 3b . Tương tự ý a) ta tìm được:

$\widehat{zEx} = \widehat{xEz'} = \widehat{z'Ex'} = \widehat{x'Ez} = 90°$; $\widehat{zFy} = \widehat{y'Fz'} = 110°$ và $\widehat{zFy'} = \widehat{yFz'} = 70°$

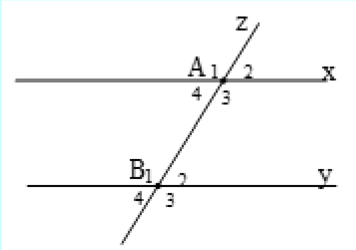
Bài 4:

Cho hình vẽ bên:

1. Kể tên các cặp góc so le trong, các cặp góc đồng vị

và các cặp góc trong cùng phía.

2. Tính số đo các cặp góc còn lại, biết $\widehat{A_2} = \widehat{B_2} = 60°$.



Lời giải

1. Các cặp góc so le trong: $\widehat{A_4}$ và $\widehat{B_2}$; $\widehat{A_3}$ và $\widehat{B_1}$.

Các cặp góc đồng vị: $\widehat{A_1}$ và $\widehat{B_1}$; $\widehat{A_2}$ và $\widehat{B_2}$; $\widehat{A_3}$ và $\widehat{B_3}$; $\widehat{A_4}$ và $\widehat{B_4}$.

Các cặp góc trong cùng phía: $\widehat{A_4}$ và $\widehat{B_1}$; $\widehat{A_3}$ và $\widehat{B_2}$.

2. $\widehat{A_2}$ kề bù với $\widehat{A_1}$ nên tìm được $\widehat{A_1} = 180° - \widehat{A_2} = 120°$.

$\widehat{A_3} = \widehat{A_1} = 120°$ (đối đỉnh); $\widehat{A_4} = \widehat{A_2} = 60°$ (đối đỉnh).

Vì $\widehat{A_2} = \widehat{B_2} = 60°$ nên $\widehat{A_4} = \widehat{B_2} = 60°$ mà hai góc này ở vị trí so le trong nên theo tính chất ta có hai góc đồng vị bằng nhau. Từ đó, $\widehat{B_1} = \widehat{A_1} = 120°$; $\widehat{B_3} = \widehat{A_3} = 120°$ và $\widehat{B_4} = \widehat{A_4} = 60°$.

Dạng 2: Nhận biết hai đường thẳng song song. Vận dụng tính số đo góc.

I. Phương pháp giải:

+) Dựa vào tính chất hai góc kề bù, đối đỉnh để chỉ ra hai góc so le trong hoặc hai góc đồng vị bằng nhau hoặc hai góc trong cùng phía bù nhau.

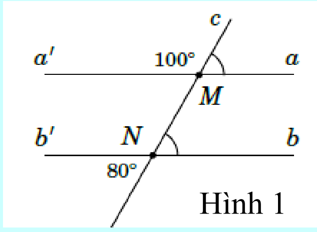
+) Áp dụng tính chất hai góc kề bù, đối đỉnh để lý luận và biến đổi tính góc.

II. Bài toán.

Bài 1:

Cho hình vẽ bên. (Hình 1)

Hai đường thẳng aa' và bb' có song song với nhau không? Vì sao?



Hình 1

Lời giải

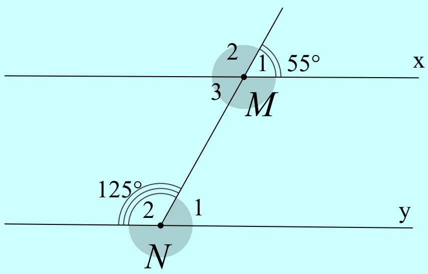
Từ hình 1, ta có: $\widehat{cMa} = \widehat{MNb}$

Mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên hai đường thẳng aa' và bb' song song với nhau (dhnb)

Bài 2:

Cho hình vẽ bên. (Hình 2)

Đường thẳng x, y có song song với nhau không? Tại sao?



Lời giải

Ta có: $\widehat{M_1} = \widehat{M_3} = 55°$ (2 góc đối đỉnh).

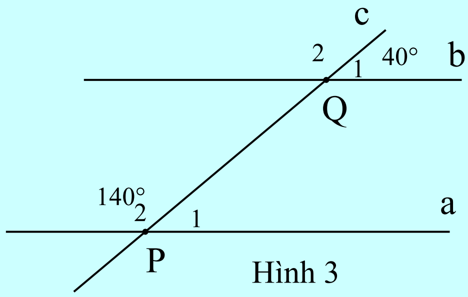
Suy ra $\widehat{M_3} + \widehat{N_2} = 55° + 125° = 180°$

Mà hai góc này ở vị trí hai góc trong cùng phía nên $x // y$ (dhnb)

Bài 3:

Cho hình vẽ bên. (Hình 3)

Đường thẳng a, b có song song với nhau không? Tại sao?



Hình 3

Lời giải

Ta có: $\widehat{P_1}+\widehat{P_2}=180°$ (2 góc kề bù).

$\Rightarrow \widehat{P_1}=180°-\widehat{P_2}=180°-40°=40°$

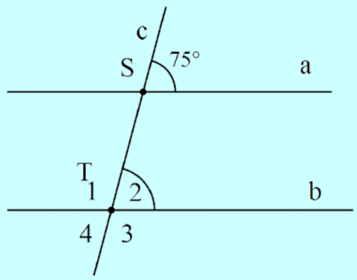
$\Rightarrow \widehat{P_1}=\widehat{Q_1}=40^0$

Mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $a \,//\, b$ (dhnb)

Bài 4:

Cho hình vẽ bên, biết hai đường thẳng a và b song song

với nhau. Tính số đo các góc T_1,T_2,T_3,T_4.



Lời giải

Ta có $\widehat{T_2}=\widehat{cSa}=75°$ (hai góc đồng vị).

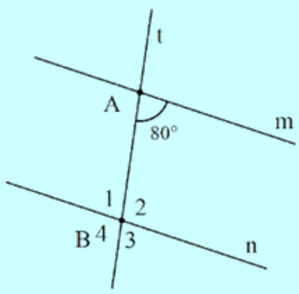
Lại có $\widehat{T_1}$ kề bù với $\widehat{T_2} \Rightarrow \widehat{T_1}=180°-\widehat{T_2}=105°$.

$\widehat{T_4}=\widehat{T_2}=75°$ (đối đỉnh) và $\widehat{T_3}=\widehat{T_1}=75°$ (đối đỉnh)

Bài 5:

Cho hình vẽ bên, biết hai đường thẳng m và n song song

với nhau. Tính số đo các góc B_1,B_2,B_3,B_4.



Lời giải

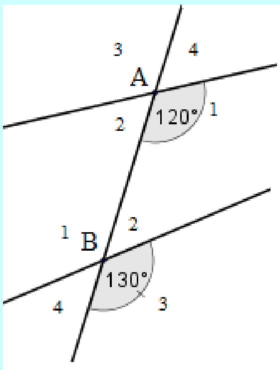
Ta có $\widehat{B_1} = \widehat{BAm} = 80°$ (hai góc so le trong).

Lại có $\widehat{B_1}$ kề bù với $\widehat{B_2} \Rightarrow \widehat{B_1} = 180° - \widehat{B_1} = 120°$.

$\widehat{B_4} = \widehat{B_2} = 120°$ (đối đỉnh) và $\widehat{B_3} = \widehat{B_1} = 80°$ (đối đỉnh)

Bài 6:

Cho hình vẽ, biết $\widehat{A_1} = 120°$; $\widehat{B_3} = 130°$ thì hai đường thẳng a và b có song song với nhau không? Muốn $a \,//\, b$ thì góc $\widehat{A_1}$ hay $\widehat{B_3}$ phải thay đổi thế nào?



Lời giải

Có $\widehat{A_1}$, $\widehat{B_3}$ là hai góc đồng vị

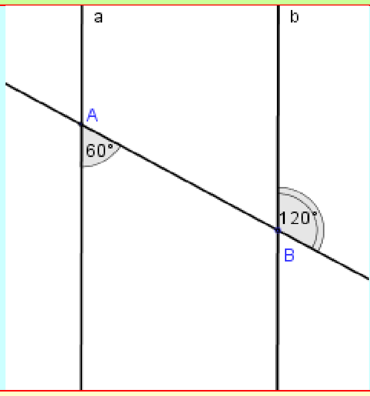
Và $\widehat{A_1} \neq \widehat{B_3}$ (do $120^\circ \neq 130^\circ$)

Vậy hai đường thẳng a và b không song song với nhau

Muốn $a \,//\, b$ thì góc $\widehat{A_1} = 130^\circ$ hoặc $\widehat{B_3} = 120^\circ$

Bài 7:

Cho hình vẽ. Hãy chứng tỏ $a \,//\, b$ bằng nhiều cách.



Lời giải

Có $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 180^\circ$ (2 góc kề bù)

Hay $60^\circ + \widehat{A_2} = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{A_2} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

Tương tự ta có $\widehat{B_3}+\widehat{B_2}=180^\circ$ (2 góc kề bù)

Hay $\widehat{B_3}+120^\circ=180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{B_3}=180^\circ-120^\circ=60^\circ$

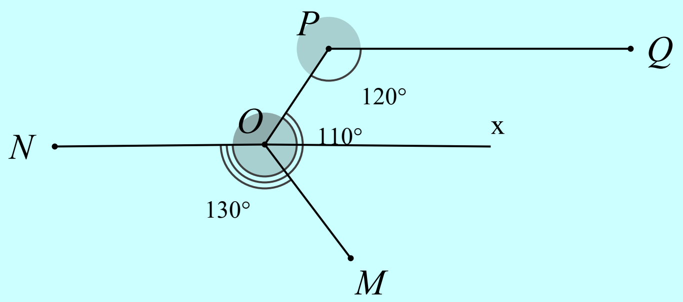
Cách 1: Có $\widehat{A_1}=\widehat{B_3}=60^\circ$. Và $\widehat{A_1}$; $\widehat{B_3}$ ở vị trí so le trong. Vậy $a // b$.

Cách 2: Có $\widehat{A_2}=\widehat{B_2}=120^\circ$. Và $\widehat{A_2}$; $\widehat{B_2}$ ở vị trí đồng vị. Vậy $a // b$.

Cách 3: Có $\widehat{A_2}+\widehat{B_3}=120^\circ+60^\circ=180^\circ$. Và $\widehat{A_2}$; $\widehat{B_3}$ ở vị trí trong cùng phía. Vậy $a // b$

Bài 8:

Cho hình vẽ bên. Đường thẳng PQ và NO có song song với nhau không? Tại sao?



Lời giải

Kẻ tia Ox là tia đối của tia ON

Ta có : $\widehat{NOM}+\widehat{MOx}=180^\circ$ (2 góc kề bù)

Thay số : $130^\circ+\widehat{MOx}=180^\circ$. Suy ra $\widehat{MOx}=180^\circ-130^\circ=50^\circ$

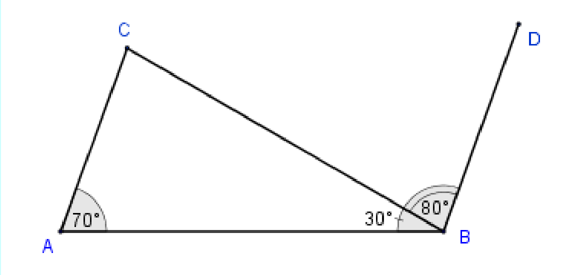
Lại có : $\widehat{MOx}+\widehat{xOP}=\widehat{MOP}=110^\circ$.

Suy ra $\widehat{xOP}=110^\circ-50^\circ=60^\circ$

Khi đó : $\widehat{xOP}+\widehat{OPQ}=60^\circ+120^\circ=180^\circ$

Mà hai góc này ở vị trí trong cùng phía nên PQ // Ox hay PQ // NO (dhnb)

Bài 9:

Cho hình vẽ. Hãy chứng tỏ $AC // BD$.	

Lời giải

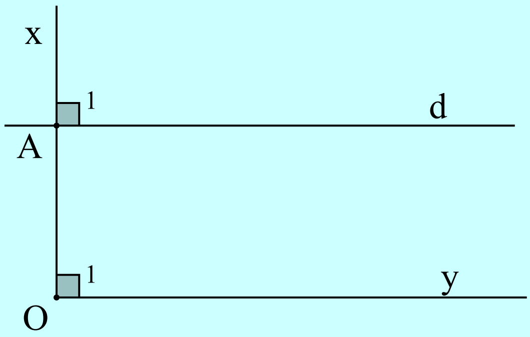
Có $\widehat{ABD} = \widehat{ABC} + \widehat{CBD} = 30^\circ + 80^\circ = 110^\circ$

Lại có $\widehat{CAB} + \widehat{ABD} = 70^\circ + 110^\circ = 180^\circ$

Và $\widehat{CAB}$; $\widehat{ABD}$ là hai góc trong cùng phía.

Vậy $AC // BC$ (dhnb).

Bài 10:

Cho $\widehat{xOy} = 90^\circ$, A là điểm nằm trên tia Ox. Vẽ đường thẳng d vuông góc với Ox tại A.	

Lời giải

Ta có $\widehat{xOy} = 90^\circ$

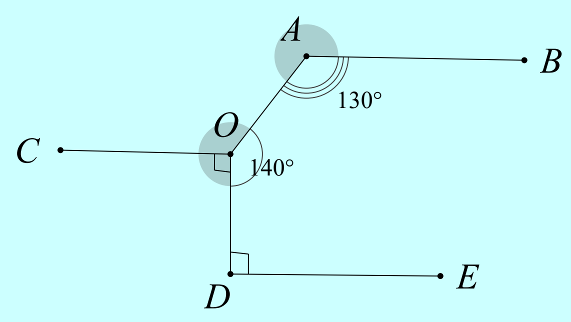
Mà $d \perp Ox$ tại A. Suy ra $\widehat{A_1} = 90^\circ$

Suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{xOy}$

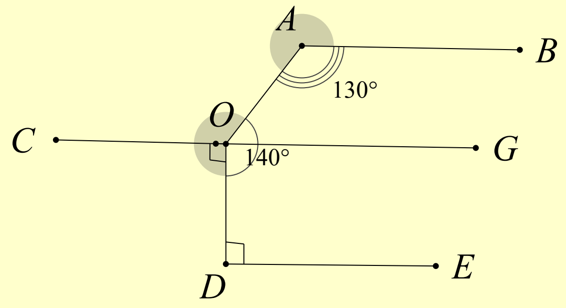
Mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $d // Oy$ (dhnb)

Bài 11:

Cho hình vẽ. Tìm trên hình các đường thẳng song song với OC. Vì sao?



Lời giải



Có $\widehat{COD} = \widehat{EDO} = 90^{\circ}$. Và $\widehat{COD}$; $\widehat{EDO}$ là hai góc so le trong.

Suy ra $OC \,//\, DE$ (dhnb)

Vẽ $OG \,//\, DE$

Ta có $\widehat{COD}$; $\widehat{DOG}$ là hai góc kề bù nên $\widehat{DOG} = 180^{\circ} - \widehat{COD} = 180^{\circ} - 90^{\circ} = 90^{\circ}$

Lại có $\widehat{DOG} + \widehat{GOA} = \widehat{DOA}$

Hay $90^{\circ} + \widehat{GOA} = 140^{\circ}$

$\Rightarrow \widehat{GOA} = 140^{\circ} - 90^{\circ} = 50^{\circ}$

Nên $\widehat{OAB} + \widehat{GOA} = 50^{\circ} + 130^{\circ} = 180^{\circ}$

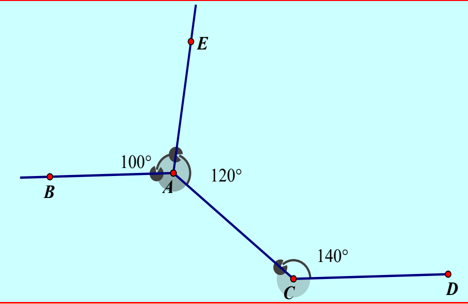
Mà $\widehat{OAB}$; $\widehat{GOA}$ là hai góc trong cùng phía.

Nên $AB \,//\, OG$ (dhnb)

Suy ra $AB \,//\, OC$

Vậy $OC \,//\, DE$ và $OC \,//\, AB$

Bài 12:

Cho hình vẽ. Chứng tỏ rằng $AB // CD$.	

Lời giải

Có $\widehat{BAC}+\widehat{BAE}+\widehat{EAC}=360^\circ$

Hay $\widehat{BAC}+100^\circ+120^\circ=360^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BAC}=360^\circ-\left(100^\circ+120^\circ\right)=360^\circ-220^\circ=140^\circ$

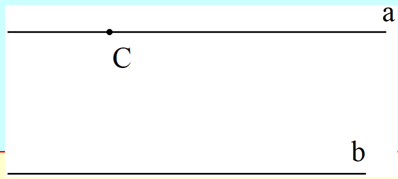
Do đó $\widehat{BAC}=\widehat{ACD}=140^\circ$

Và $\widehat{BAC}$; $\widehat{ACD}$ là hai góc so le trong.

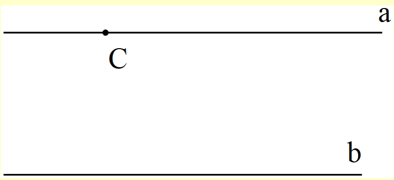
Vậy $AB // CD$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

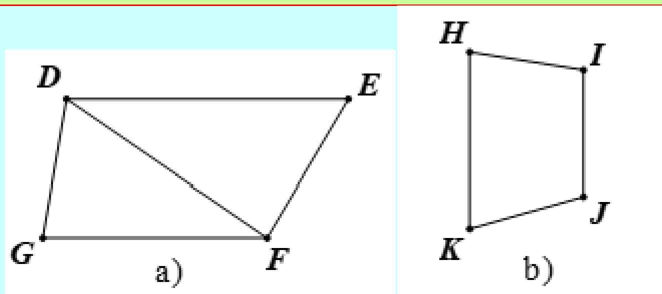
Bài 1:

Cho điểm C nằm ngoài đường thẳng b. Vẽ đường thẳng a đi qua C sao cho a song song với b.	

Lời giải



Bài 2:

Kể tên các đoạn thẳng song song trong các hình vẽ sau:	

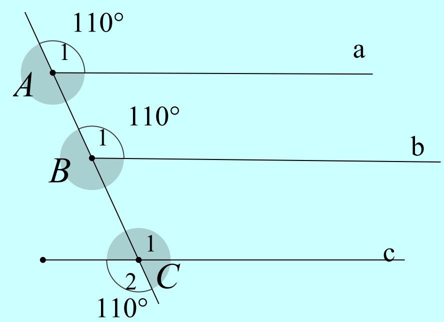
Lời giải

a) $DE \parallel GF$.

b) $HK \parallel IJ$.

Bài 3:

Cho hình vẽ. Tìm trên hình các đường thẳng song song. Vì sao?



Lời giải

Có $\widehat{C_1} = \widehat{C_2} = 110^\circ$ (đối đỉnh)

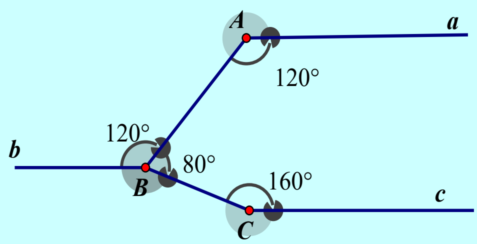
Có $\widehat{A_1} = \widehat{B_1} = 110^\circ$. Và $\widehat{A_1}$; $\widehat{B_1}$ là 2 góc đồng vị. Suy ra $a \parallel b$

Có $\widehat{A_1} = \widehat{C_1} = 110^\circ$. Và $\widehat{A_1}$; $\widehat{C_1}$ là 2 góc đồng vị. Suy ra $a \parallel c$

Có $\widehat{B_1} = \widehat{C_1} = 110^\circ$. Và $\widehat{B_1}$; $\widehat{C_1}$ là 2 góc đồng vị. Suy ra $b \parallel c$

Bài 4:

Cho hình vẽ. Chứng minh: $a \parallel b \parallel c$.



Lời giải

Có $\widehat{bBA} = \widehat{BAa} = 120^\circ$. Và $\widehat{bBA}$; $\widehat{BAa}$ là hai góc so le trong. Vậy $a \parallel b$ (1)

Lại có $\widehat{bBC} + \widehat{bBA} + \widehat{ABC} = 360^\circ$

Hay $\widehat{bBC} + 120^\circ + 80^\circ = 360^\circ$

$\Rightarrow \widehat{bBC} = 360^\circ - (120^\circ + 80^\circ) = 360^\circ - 200^\circ = 160^\circ$

Do đó $\widehat{bBC} = \widehat{BCc} = 160^\circ$

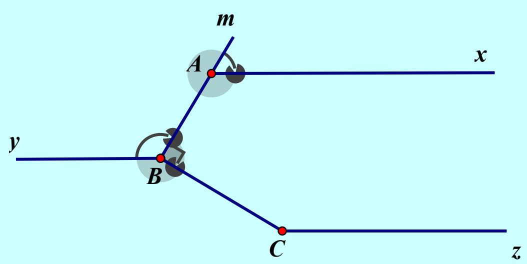
Và $\widehat{bBC}$; $\widehat{BCc}$ là hai góc so le trong.

Vậy $b // c$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a // b // c$

Bài 5:

Cho hình vẽ. Biết $\widehat{mAx} = 60^\circ$; $\widehat{mBy} = 120^\circ$; $\widehat{BCz} = 150^\circ$. Chứng minh: $Ax // By // Cz$.



Lời giải

Có $\widehat{mAx}$; $\widehat{BAx}$ là hai góc kề bù. Nên $\widehat{BAx} = 180^\circ - \widehat{mAx} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

Suy ra $\widehat{yBA} = \widehat{BAx} = 120^\circ$. Và $\widehat{bBA}$; $\widehat{BAa}$ là hai góc so le trong. Suy ra $Ax // By$ (1)

Lại có $\widehat{yBC} + \widehat{yBA} + \widehat{ABC} = 360^\circ$

Hay $\widehat{yBC} + 120^\circ + 90^\circ = 360^\circ$

$\Rightarrow \widehat{yBC} = 360^\circ - (120^\circ + 90^\circ) = 360^\circ - 210^\circ = 150^\circ$

Do đó $\widehat{yBC} = \widehat{BCz} = 150^\circ$

Và $\widehat{yBC}$; $\widehat{BCz}$ là hai góc so le trong.

Suy ra $By // Cz$ (2)

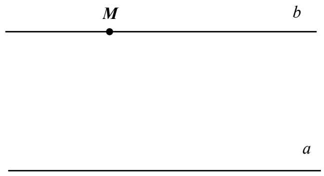
Từ (1) và (2) suy ra $Ax // By // Cz$

CHUYÊN ĐỀ: TIÊN ĐỀ CLÍT

A. Lý thuyết

+ Tiên đề Euclid:

Qua một điểm ở ngoài một đường thẳng, chỉ có một đường thẳng song song với đường thẳng đó.



Hình 1. Cho điểm M nằm ngoài đường thẳng a.

Ta vẽ đường thẳng b đi qua M sao cho $a // b$.

+ Từ tiên đề Euclid ta suy ra được: Nếu một đường thẳng cắt một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng cắt đường thẳng còn lại.

+ Tính chất hai đường thẳng song song:

Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì:

* Hai góc so le trong bằng nhau.

* Hai góc đồng vị trong bằng nhau.

+ Nhận xét:

* Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng vuông góc với đường thẳng kia.

* Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

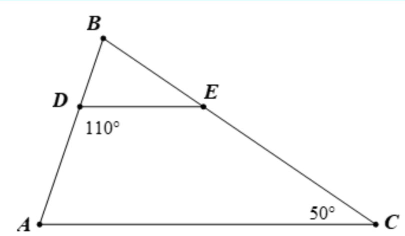
II) CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Tính số đo góc

I. Phương pháp giải:

+ Dựa vào tính chất hai đường thẳng song song. Nếu biết số đo của một góc thì tính được số đo của góc kia.

II. Bài toán.

Bài 1:	
Cho Hình 1, biết $DE // AC$, $\widehat{ADE} = 110°$, $\widehat{ACE} = 50°$. Hãy tính số đo các góc BDE và DEB.	 Hình 1
Lời giải	

Ta có: $\widehat{ADE}+\widehat{BDE}=180°$ (hai góc kề bù)

$110°+\widehat{BDE}=180°$

$\widehat{BDE}=180°-110°$

$\widehat{BDE}=70°$.

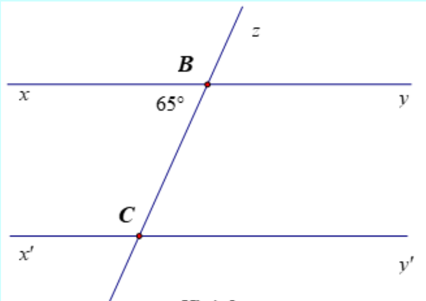
Ta có $DE//AC$ suy ra $\widehat{BED}=\widehat{ECA}$ (hai góc đồng vị)

Nên $\widehat{BED}=50°$.

Vậy $\widehat{BDE}=70°$, $\widehat{BED}=50°$.

Bài 2:

Cho Hình 2, biết $xy//x'y'$, $\widehat{xBC}=65°$. Hãy tính số đo các góc BCy' và $x'Cz'$.



Hình 2

Lời giải

Ta có $xy//x'y'$ suy ra $\widehat{xBC}=\widehat{BCy'}$ (hai góc so le trong)

Nên $\widehat{BCy'}=65°$.

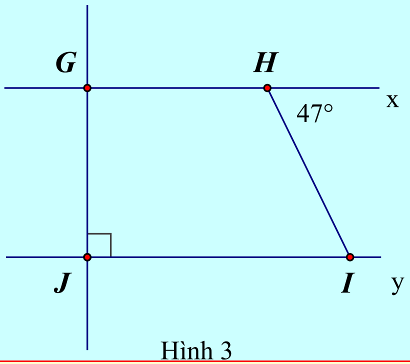
Ta lại có: $\widehat{x'Cz'}=\widehat{BCy'}$ (hai góc đối đỉnh)

Nên $\widehat{x'Cz'}=65°$.

Vậy $\widehat{BCy'}=65°$, $\widehat{x'Cz'}=65°$.

Bài 3:

Cho Hình 3, biết $Gx//Jy$, $\hat{J}=90°$, $\widehat{IHx}=47°$. Hãy tính số đo các góc JGH và HIJ



Hình 3

Lời giải

Ta có: $Gx//Jy$ và $Jy\perp GJ$

Nên $Gx \perp GJ$

Nên $\widehat{JGH} = 90^\circ$.

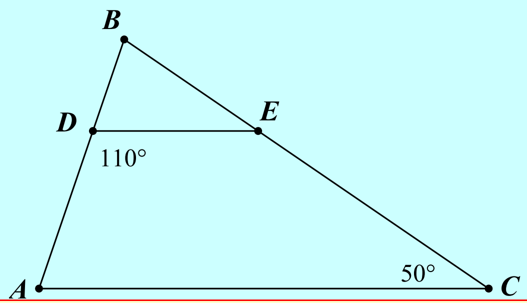
Ta có $Gx // Jy$ suy ra $\widehat{IHx} = \widehat{HIJ}$ (hai góc so le trong)

Nên $\widehat{HIJ} = 47^\circ$.

Vậy $\widehat{JGH} = 90^\circ$, $\widehat{HIJ} = 47^\circ$.

Bài 4:

Cho Hình 4, biết $DE // AC$, $\widehat{ADE} = 110^\circ$, $\widehat{ACE} = 50^\circ$. Hãy tính số đo các góc DAC và DEC.



Lời giải

Ta có: $\widehat{ADE} + \widehat{BDE} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$110^\circ + \widehat{BDE} = 180^\circ$

$\widehat{BDE} = 180^\circ - 110^\circ$

$\widehat{BDE} = 70^\circ$.

Ta có $DE // AC$ suy ra $\widehat{BDE} = \widehat{DAC}$ (hai góc đồng vị)

Nên $\widehat{DAC} = 70^\circ$.

Ta có $DE // AC$ suy ra $\widehat{BED} = \widehat{ECA}$ (hai góc đồng vị)

Nên $\widehat{BED} = 50^\circ$.

Ta có: $\widehat{BED} + \widehat{DEC} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$50^\circ + \widehat{DEC} = 180^\circ$

$\widehat{DEC} = 180^\circ - 50^\circ$

$\widehat{DEC} = 130^\circ$.

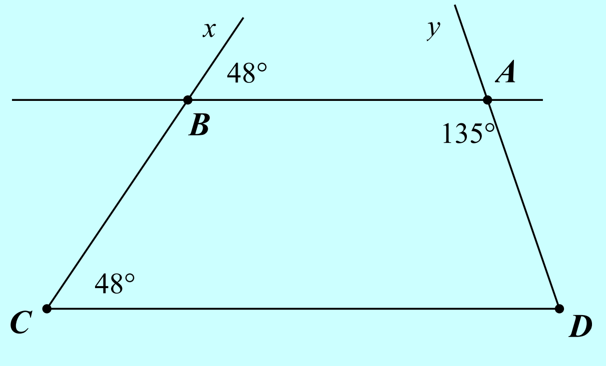
Vậy $\widehat{DAC} = 70^\circ$, $\widehat{DEC} = 130^\circ$.

Bài 5:

Cho Hình 5, biết $\widehat{xBA} = 48°$, $\widehat{BCD} = 48°$, $\widehat{BCD} = 135°$.

a) Vì sao $AB // CD$?

b) Hãy tính số đo góc ADC.



Hình 5

Lời giải

a) Ta có $\widehat{xBA} = 48°$, $\widehat{BCD} = 48°$

Suy ra $\widehat{xBA} = \widehat{BCD}$

Mà $\widehat{xBA}$; $\widehat{BCD}$ là hai góc đồng vị.

Nên $AB // CD$.

b) Ta có: $\widehat{yAB} + \widehat{BAD} = 180°$ (hai góc kề bù)

$\widehat{yAB} + 135° = 180°$

$\widehat{yAB} = 180° - 135°$

$\widehat{yAB} = 45°$.

Ta có $AB // CD$ suy ra $\widehat{yAB} = \widehat{ADC}$ (hai góc đồng vị)

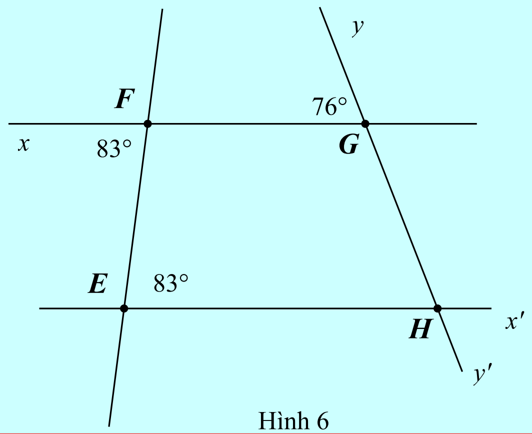
Nên $\widehat{ADC} = 45°$.

Bài 6:

Cho Hình 6, biết $\widehat{xFE} = 83°$, $\widehat{FEH} = 83°$, $\widehat{FGy} = 76°$.

a) Vì sao $FG // EH$?

b) Hãy tính số đo góc $x'Hy'$.



Hình 6

Lời giải

a) Ta có $\widehat{xFE} = 83°$, $\widehat{FEH} = 83°$

Suy ra $\widehat{xFE} = \widehat{FEH}$

Mà $\widehat{xFE}; \widehat{FEH}$ là hai góc so le trong.

Nên $FG // EH$.

b) Ta có: $FG // EH$ nên $\widehat{FGy} = \widehat{EHG}$ (hai góc đồng vị)

Nên $\widehat{EHG} = 76°$.

Ta có $\widehat{EHG} = \widehat{x'Hy'}$ (hai góc đối đỉnh)

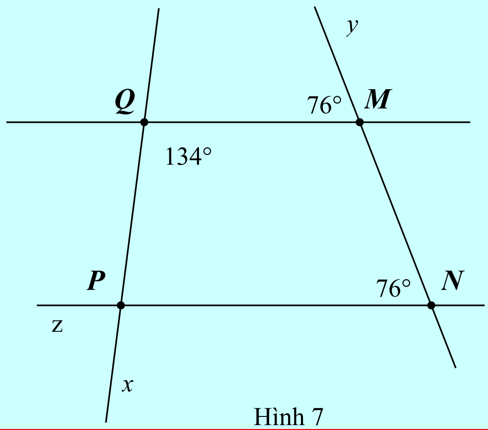
Nên $\widehat{x'Hy'} = 76°$.

Bài 7:

Cho Hình 7, biết $\widehat{PQM} = 134°, \widehat{QMy} = 76°$, $\widehat{PNM} = 76°$.

a) Vì sao $QM // PN$?

b) Hãy tính số đo góc xPz



Hình 7

Lời giải

a) Ta có $\widehat{QMy} = 76°$, $\widehat{PNM} = 76°$

Suy ra $\widehat{QMy} = \widehat{PNM}$

Mà $\widehat{QMy}; \widehat{PNM}$ là hai góc đồng vị.

Nên $QM // PN$.

b) Ta có: $QM // PN$ nên $\widehat{PQM} = \widehat{xPN}$ (hai góc đồng vị)

Nên $\widehat{xPN} = 134°$.

Ta có $\widehat{xPN} + \widehat{xPz} = 180°$ (hai góc kề bù)

$134° + \widehat{xPz} = 180°$

$\widehat{xPz} = 180° - 134°$

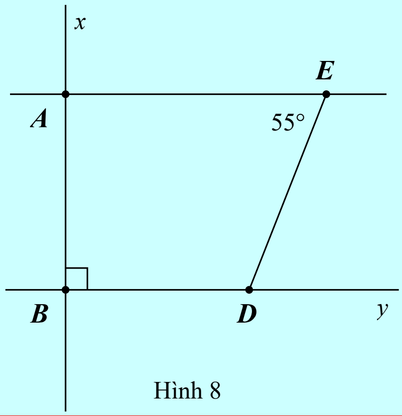
$\widehat{xPz} = 46°$

Nên $\widehat{xPz} = 46°$.

Bài 8:

Cho Hình 8, biết $AE // BD$, $\widehat{ABD} = 90°$, $\widehat{AED} = 55°$.

Hãy tính số đo các góc BAE và BDE.



Hình 8

Lời giải

+ Ta có $\widehat{ABD} = 90°$

Suy ra $DB \perp AB$ tại B.

Mà $AE // BD$

Nên $EA \perp AB$ tại A.

Suy ra $\widehat{BAE} = 90°$

+ Ta có: $AE // BD$ nên $\widehat{ADE} = \widehat{EDy}$ (hai góc đồng vị)

Nên $\widehat{EDy} = 55°$.

Ta có $\widehat{EDy} + \widehat{EDB} = 180°$ (hai góc kề bù)

$55° + \widehat{EDB} = 180°$

$\widehat{EDB} = 180° - 55°$

$\widehat{EDB} = 125°$

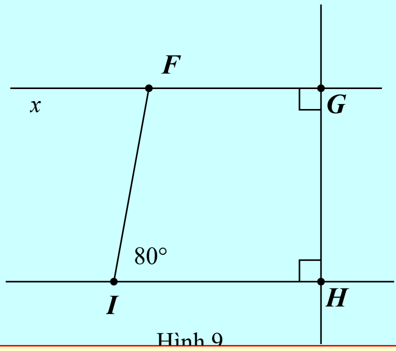
Nên $\widehat{EDB} = 125°$.

Vậy $\widehat{BAE} = 90°$, $\widehat{EDB} = 125°$.

Bài 9:

Cho Hình 9, biết $\widehat{IHG}=90^\circ$, $\widehat{FGH}=90^\circ$, $\widehat{FIH}=80^\circ$.

Hãy tính số đo góc IFG.



Hình 9

Lời giải

+ Ta có $\widehat{FGH}=90^\circ$

Suy ra $FG\perp GH$ tại G. (1)

+ Ta có $\widehat{IHG}=90^\circ$

Suy ra $IH\perp GH$ tại H. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $FG // HI$

+ Ta có: $FG // HI$ nên $\widehat{FIH}=\widehat{IFx}$ (hai góc so le trong)

Nên $\widehat{IFx}=80^\circ$.

Ta có $\widehat{IFx}+\widehat{IFG}=180^\circ$ (hai góc kề bù)

$80^\circ+\widehat{IFG}=180^\circ$

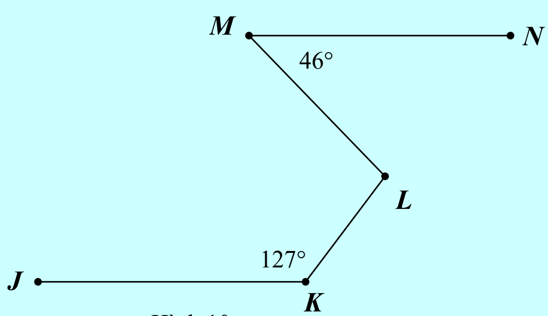
$\widehat{IFG}=100^\circ$

Vậy $\widehat{IFG}=100^\circ$.

Bài 10:

Cho Hình 10, biết $MN // KJ$, $\widehat{NML}=46^\circ$, $\widehat{JKL}=127^\circ$.

Hãy tính số đo góc MLK.



Hình 10

Lời giải

+ Qua L vẽ xy sao cho $xy // MN$

Suy ra $\widehat{LMN}=\widehat{MLx}$ (hai góc so le trong)

Nên $\widehat{MLx}=46^\circ$.

+ Ta có $xy // MN$ (cách vẽ)

Mà $KJ // MN$

Nên $xy // KJ$

Suy ra $\widehat{JKL} = \widehat{KLy}$ (hai góc so le trong)

Nên $\widehat{KLy} = 127^\circ$.

+ Ta có $\widehat{KLx} + \widehat{KLy} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

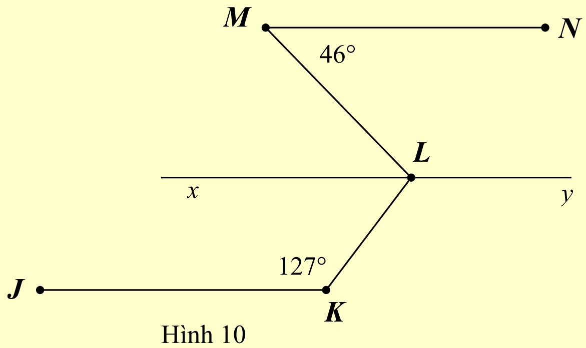
$\widehat{KLx} + 127^\circ = 180^\circ$

$\widehat{KLx} = 53^\circ$

+ Ta có $\widehat{MLK} = \widehat{KLx} + \widehat{MLx}$

$\widehat{MLK} = 53^\circ + 46^\circ$

$\widehat{MLK} = 99^\circ$



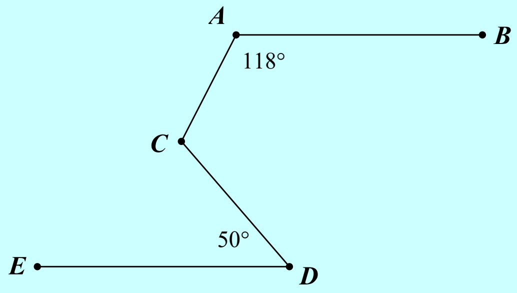
Hình 10

Bài 11:

Cho Hình 11, biết $AB // ED$,

$\widehat{BAC} = 118^\circ$, $\widehat{CDE} = 50^\circ$.

Hãy tính số đo góc ACD.



Hình 11

Lời giải

+ Qua C vẽ xy sao cho $xy // AB$

Suy ra $\widehat{BAC} = \widehat{ACx}$ (hai góc so le trong)

Nên $\widehat{ACx} = 118^\circ$.

+ Ta có $\widehat{ACx} + \widehat{ACy} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$118^\circ + \widehat{ACy} = 180^\circ$

$\widehat{ACy} = 62^\circ$

+ Ta có $xy // AB$

Mà $AB // ED$

Nên $xy // ED$

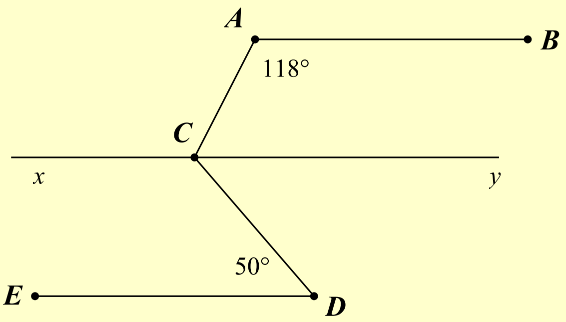
Suy ra $\widehat{EDC} = \widehat{DCy}$ (hai góc so le trong)

Nên $\widehat{DCy} = 50°$.

+ Ta có $\widehat{ACD} = \widehat{ACy} + \widehat{DCy}$

$\widehat{ACD} = 62° + 50°$

$\widehat{ACD} = 112°$.



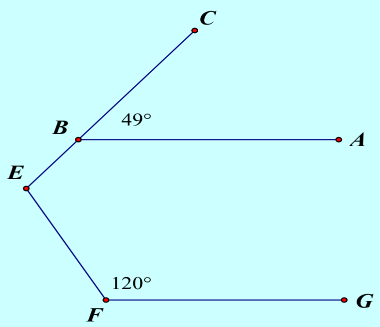
Hình 11

Bài 12:

Cho Hình 12, biết $AB // FG$,

$\widehat{ABC} = 49°$, $\widehat{EFG} = 120°$.

Hãy tính số đo góc CEF.



Hình 12

Lời giải

+ Qua E vẽ tia Ex sao cho $Ex // AB$

Suy ra $\widehat{CBA} = \widehat{CEx}$ (hai góc đồng vị)

Nên $\widehat{CEx} = 49°$.

+ Vẽ tia Fy là tia đối của tia FG

Suy ra $\widehat{EFG} + \widehat{EFy} = 180°$ (hai góc kề bù)

$120° + \widehat{EFy} = 180°$

$\widehat{EFy} = 60°$

+ Ta có $Ex // AB$

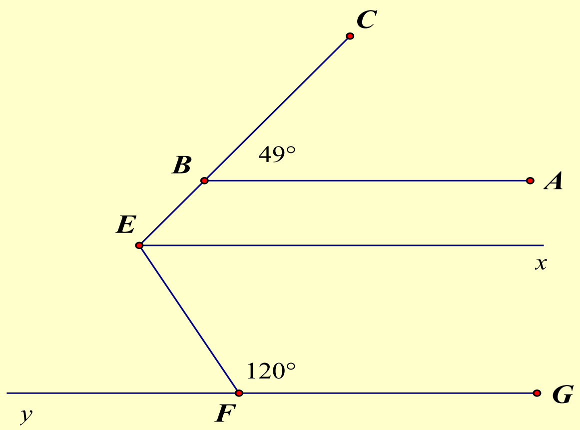
Mà $AB // FG$

Nên $Ex // FG$

Suy ra $\widehat{EFy} = \widehat{FEx}$ (hai góc so le trong)

Nên $\widehat{FEx} = 60°$.

+ Ta có $\widehat{CEF} = \widehat{CEx} + \widehat{FEx}$



Hình 12

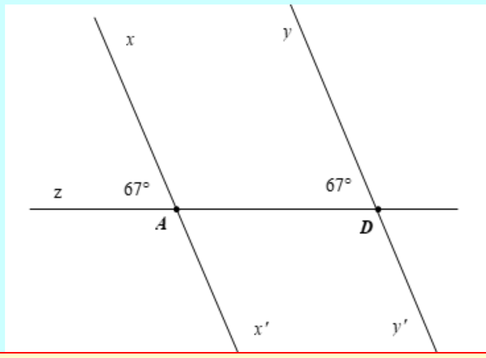
$\widehat{CEF} = 49° + 60°$

$\widehat{CEF} = 109°$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1:

Cho Hình vẽ, biết $\widehat{zAx} = 67°$, $\widehat{zDy} = 71°$. Vì sao $xx' // yy'$?



Lời giải

a) Ta có $\widehat{zAx} = 67°, \widehat{zDy} = 71°$

Suy ra $\widehat{zAx} = \widehat{zDy}$

Mà $\widehat{zAx}; \widehat{zDy}$ là hai góc đồng vị.

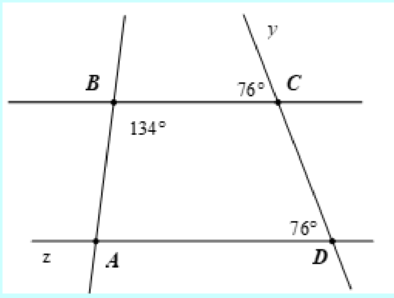
Nên $xx' // yy'$.

Bài 2:

Cho Hình 1, biết $\widehat{ABC} = 134°$, $\widehat{BCy} = 76°$, $\widehat{ADC} = 76°$.

a) Vì sao $BC // AD$?

b) Hãy tính số đo góc xAz.



Lời giải

a) Ta có $\widehat{BCy} = 76°$, $\widehat{ADC} = 76°$

Suy ra $\widehat{BCy} = \widehat{ADC}$

Mà $\widehat{BCy}; \widehat{ADC}$ là hai góc đồng vị.

Nên $BC // AD$.

b) Ta có: $BC // AD$ nên $\widehat{ABC} = \widehat{xAD}$ (hai góc đồng vị)

Nên $\widehat{xAD} = 134°$.

Ta có $\widehat{xAD}+\widehat{xAz}=180^\circ$ (hai góc kề bù)

$134^\circ+\widehat{xAz}=180^\circ$

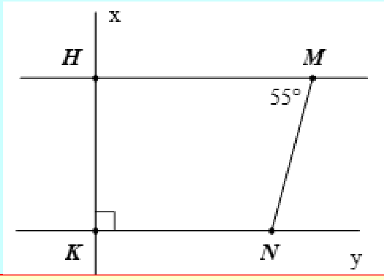
$\widehat{xAz}=180^\circ-134^\circ$

$\widehat{xAz}=46^\circ$

Nên $\widehat{xAz}=46^\circ$.

Bài 3:

Cho Hình 2, biết $HM\,//\,KN$, $\widehat{HKN}=90^\circ$, $\widehat{HMN}=55^\circ$. Hãy tính số đo các góc KHM và KNM.



Lời giải

+ Ta có $\widehat{HKN}=90^\circ$

Suy ra $KN\perp KH$ tại K.

Mà $HM\,//\,KN$

Nên $MH\perp HK$ tại H.

Suy ra $\widehat{KHM}=90^\circ$

+ Ta có: $HM\,//\,KN$ nên $\widehat{HMN}=\widehat{MNy}$ (hai góc đồng vị)

Nên $\widehat{MNy}=55^\circ$.

Ta có $\widehat{MNy}+\widehat{MNK}=180^\circ$ (hai góc kề bù)

$55^\circ+\widehat{MNK}=180^\circ$

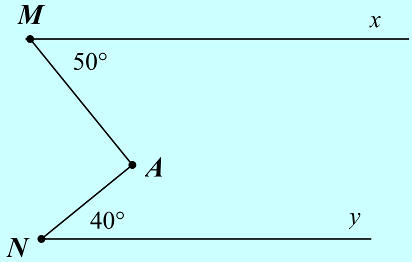
$\widehat{MNK}=180^\circ-55^\circ$

$\widehat{MNK}=125^\circ$

Vậy $\widehat{KHM}=90^\circ$, $\widehat{MNK}=125^\circ$.

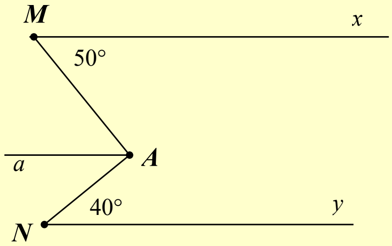
Bài 4:

Cho Hình 4, biết $Mx // Ny$, $\widehat{AMx} = 50^\circ$, $\widehat{ANy} = 40^\circ$. Hãy tính số đo góc MAN.



Hình 4

Lời giải



Hình 4

+ Qua A vẽ tia Aa sao cho $Aa // Mx$

Suy ra $\widehat{xMA} = \widehat{aAM}$ (hai góc so le trong)

Nên $\widehat{aAM} = 50^\circ$.

+ Ta có $Aa // Mx$ (cách vẽ)

Mà $Mx // Ny$

Nên $Aa // Ny$

+ Ta có $Aa // Ny$

Suy ra $\widehat{aAN} = \widehat{ANy}$ (hai góc so le trong)

Nên $\widehat{aAM} = 40^\circ$.

+ Ta có $\widehat{MAN} = \widehat{MAa} + \widehat{NAa}$

$\widehat{MAN} = 50^\circ + 40^\circ$

$\widehat{MAN} = 90^\circ$.

Dạng 2: Chứng minh hai đường thẳng song song, vuông góc.

I. Phương pháp giải:

** Chứng minh hai đường thẳng song song*

+ Dựa vào dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song.

+ Dựa vào tiên đề Euclid.

+ Dựa vào dấu hiệu: cùng vuông góc, cùng song song với đường thẳng thứ ba.

** Chứng minh hai đường thẳng vuông góc*

+ Dựa vào dấu hiệu: Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng vuông góc với đường thẳng kia.

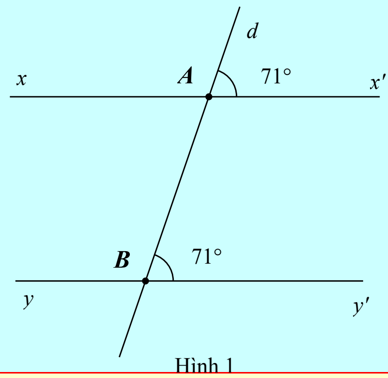
+ Dựa vào dấu hiệu: Hai đường thẳng cắt nhau trong bốn góc tạo thành có một góc vuông.

II. Bài toán.

Bài 1:

Cho Hình 1, biết $\widehat{dAx'} = 71°$, $\widehat{ABy'} = 71°$.

Vì sao $xx' // yy'$?



Hình 1

Lời giải

+ Ta có $\widehat{dAx'} = 71°$, $\widehat{ABy'} = 71°$

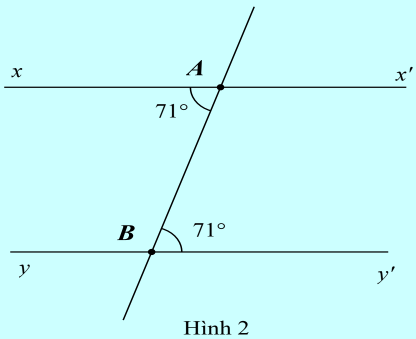
Suy ra $\widehat{dAx'} = \widehat{ABy'}$

Mà $\widehat{dAx'}; \widehat{ABy'}$ là hai góc đồng vị.

Nên $xx' // yy'$.

Bài 2:

Cho Hình 2, biết $\widehat{xAB} = 71°$, $\widehat{ABy'} = 71°$. Vì sao $xx' // yy'$?



Hình 2

Lời giải

+ Ta có $\widehat{xAB} = 71°$, $\widehat{ABy'} = 71°$

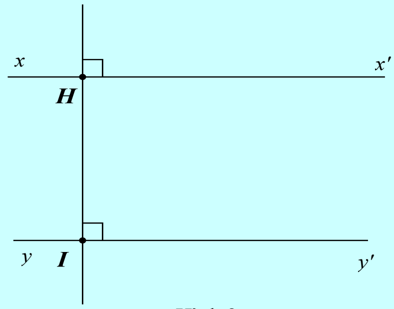
Suy ra $\widehat{xAB} = \widehat{ABy'}$

Mà $\widehat{xAB}$; $\widehat{ABy'}$ là hai góc so le trong.

Nên $xx' // yy'$.

Bài 3:

Cho Hình 3, biết $xx' \perp HI$, $yy' \perp HI$. Vì sao $xx' // yy'$?



Hình 3

Lời giải

+ Ta có $xx' \perp HI$, $yy' \perp HI$.

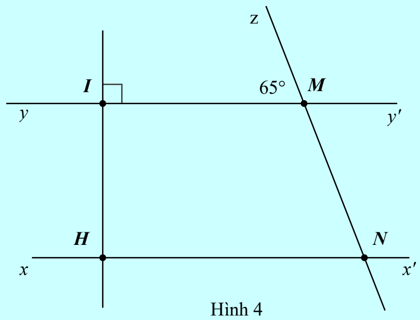
Nên $xx' // yy'$.

Bài 4:

Cho Hình 4, biết $xx' // yy'$, $yy' \perp HI$, $\widehat{yMz} = 65°$

a) Vì sao $xx' \perp HI$

b) Tính số đo của góc xNz.



Hình 4

Lời giải

a) Ta có $xx' // yy'$, $yy' \perp HI$.

Nên $xx' \perp HI$.

b) Ta có: $xx' // yy'$ nên $\widehat{yMz} = \widehat{xNz}$ (hai góc đồng vị)

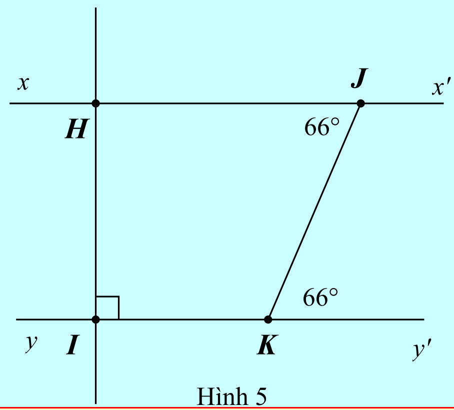
Nên $\widehat{xNz} = 65°$.

Bài 5:

Cho Hình 5, biết $yy' \perp HI$, $\widehat{HJK} = 66^\circ$, $\widehat{JKy'} = 66^\circ$.

a) Vì sao $xx' // yy'$?

b) Vì sao $xx' \perp HI$?



Hình 5

Lời giải

a) Ta có $\widehat{HJK} = 66^\circ$, $\widehat{JKy'} = 66^\circ$

Suy ra $\widehat{HJK} = \widehat{JKy'}$.

Mà $\widehat{HJK}; \widehat{JKy'}$ là hai góc so le trong.

Nên $xx' // yy'$.

b) + Ta có $xx' // yy'$, $yy' \perp HI$.

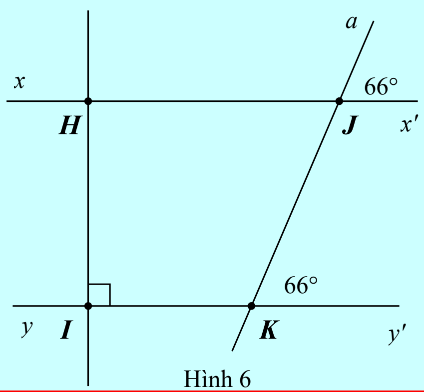
Nên $xx' \perp HI$.

Bài 6:

Cho Hình 6, biết $yy' \perp HI$, $\widehat{aJx'} = 66^\circ$, $\widehat{JKy'} = 66^\circ$.

a) Vì sao $xx' // yy'$?

b) Vì sao $xx' \perp HI$?



Hình 6

Lời giải

a) Ta có $\widehat{aJx'} = 66^\circ$, $\widehat{JKy'} = 66^\circ$

Suy ra $\widehat{aJx'} = \widehat{JKy'}$.

Mà $\widehat{aJx'}; \widehat{JKy'}$ là hai góc đồng vị.

Nên $xx' // yy'$.

b) + Ta có $xx' // yy'$, $yy' \perp HI$.

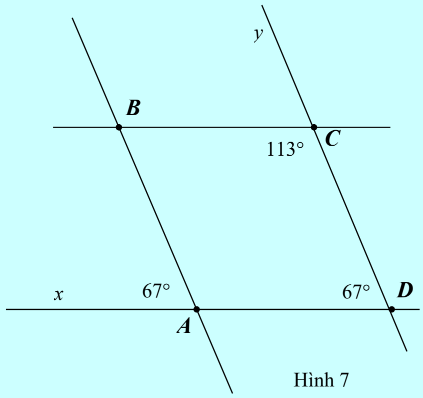
Nên $xx' \perp HI$.

Bài 7:

Cho Hình 7, biết $\widehat{xAB} = 67°$, $\widehat{ADC} = 67°$, $\widehat{BCD} = 113°$.

a) Vì sao $BC // AD$?

b) Vì sao $AB // DC$?



Hình 7

Lời giải

a)Ta có $\widehat{BCD} + \widehat{BCy} = 180°$ (hai góc kề bù)

$113° + \widehat{BCy} = 180°$

$\widehat{BCy} = 67°$

+ Ta có $\widehat{BCy} = 67°$, $\widehat{ADC} = 67°$

Suy ra $\widehat{ADC} = \widehat{BCy}$.

Mà $\widehat{ADC}; \widehat{BCy}$ là hai góc đồng vị.

Nên $BC // AD$.

b) Ta có $\widehat{xAB} = 67°$, $\widehat{ADC} = 67°$

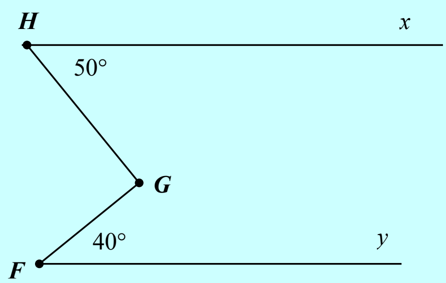
Suy ra $\widehat{ADC} = \widehat{xAB}$.

Mà $\widehat{ADC}$; $\widehat{xAB}$ là hai góc đồng vị.

Nên $AB // DC$.

Bài 8:

Cho Hình 8, biết $\widehat{xHG} = 50°$, $\widehat{GFy} = 40°$, $\widehat{HGF} = 90°$. Vì sao $Hx // Fy$?



Hình 8

Lời giải

+ Vẽ tia Ga sao cho $Ga // Hx$.

Suy ra $\widehat{xHG} = \widehat{HGa}$ (hai góc so le trong).

Nên $\widehat{HGa} = 50°$.

+Ta có $\widehat{HGF} = \widehat{HGa} + \widehat{FGa}$

$90° = 50° + \widehat{FGa}$

Nên $\widehat{FGa} = 40°$.

+ Ta có $\widehat{FGa} = 40°$, $\widehat{GFy} = 40°$

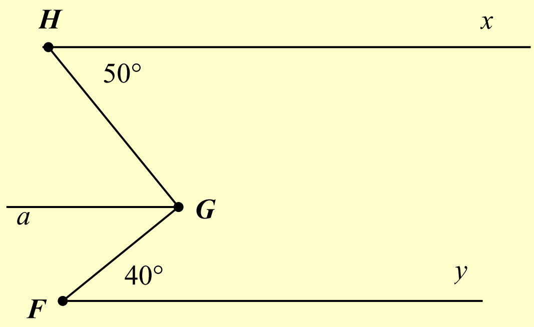
Suy ra $\widehat{FGa} = \widehat{GFy}$.

Mà $\widehat{FGa}; \widehat{GFy}$ là hai góc so le trong.

Nên $Ga // Fy$.

+ Ta có: $Ga // Fy$; $Ga // Hx$

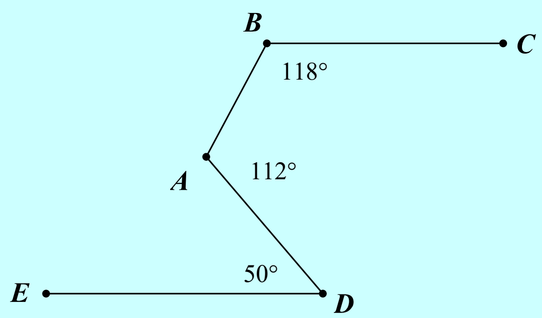
Nên $Hx // Fy$.



Hình 8

Bài 9:

Cho Hình 9, biết $\widehat{ABC} = 118°$, $\widehat{BAD} = 112°$, $\widehat{ADE} = 50°$. Vì sao $BC // DE$?



Hình 9

Lời giải

+ Qua A vẽ đường thẳng xy sao cho $xy // BC$.

Suy ra $\widehat{xAB} = \widehat{CBA}$ (hai góc so le trong).

Nên $\widehat{ABx} = 118°$.

+ Ta có $\widehat{BAx} + \widehat{BAy} = 180°$ (hai góc kề bù)

$118° + \widehat{BAy} = 180°$

Nên $\widehat{BAy} = 62°$

+Ta có $\widehat{BAD} = \widehat{BAy} + \widehat{DAy}$

$112° = 62° + \widehat{DAy}$

Nên $\widehat{DAy} = 50°$.

+ Ta có $\widehat{ADE} = 50°$, $\widehat{DAy} = 50°$

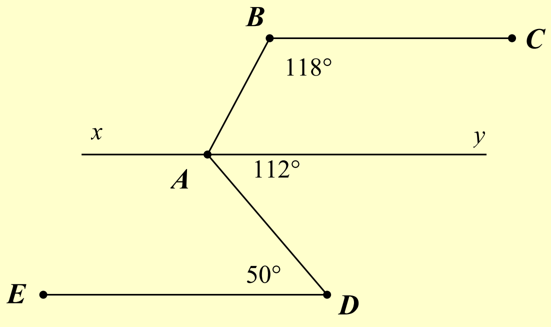
Suy ra $\widehat{ADE} = \widehat{DAy}$.

Mà $\widehat{ADE}; \widehat{DAy}$ là hai góc so le trong.

Nên $xy // DE$.

+ Ta có: $xy // DE$; $xy // BC$

Nên $BC // DE$.

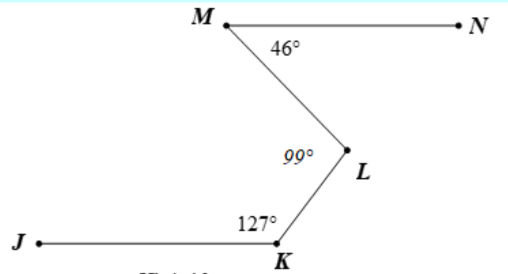


Hình 9

Bài 10:

Cho Hình 10, biết $\widehat{MLK} = 99°$, $\widehat{NML} = 46°$, $\widehat{JKL} = 127°$.

Vì sao $MN // KJ$?



Hình 10

Lời giải

+ Qua L vẽ xy sao cho $xy // MN$

Suy ra $\widehat{LMN} = \widehat{MLx}$ (hai góc so le trong)

Nên $\widehat{MLx} = 46°$.

+Ta có $\widehat{MLK} = \widehat{MLx} + \widehat{KLx}$

$99° = 46° + \widehat{KLx}$

Nên $\widehat{KLx} = 53°$.

+ Ta có $\widehat{KLx} + \widehat{KLy} = 180°$ (hai góc kề bù)

$53° + \widehat{KLy} = 180°$

$\widehat{KLy} = 127°$

+ Ta có $\widehat{KLy} = 127°$, $\widehat{JKL} = 127°$

Suy ra $\widehat{JKL} = \widehat{KLy}$

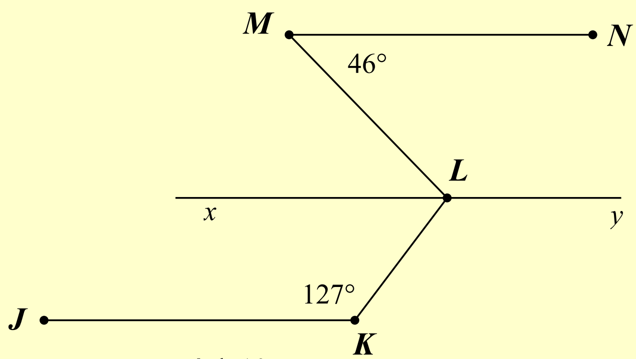
Mà $\widehat{JKL}; \widehat{KLy}$ là hai góc so le trong.

Nên $xy // KJ$.

+ Ta có $xy // MN$ (cách vẽ)

Mà $xy // KJ$

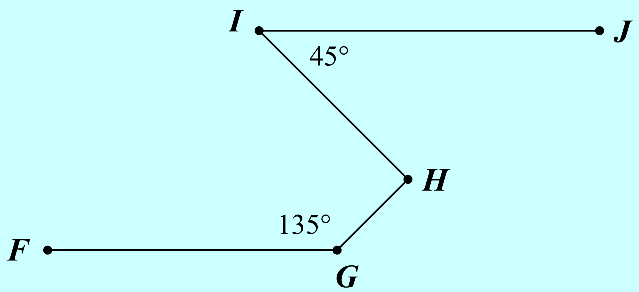
Nên $MN // KJ$



Hình 10

Bài 11:

Cho Hình 11, biết $IJ // FG$, $\widehat{JIH} = 45°$, $\widehat{HGF} = 135°$. Chứng tỏ $IH \perp HG$.



Hình 11

Lời giải

+ Qua H vẽ xy sao cho $xy // IJ$

Suy ra $\widehat{JIH} = \widehat{IHx}$ (hai góc so le trong)

Nên $\widehat{IHx} = 45°$

+ Ta có $xy // FG$

Suy ra $\widehat{FGH} = \widehat{GHy}$ (hai góc so le trong)

Nên $\widehat{GHy} = 135°$.

+ Ta có $\widehat{GHx} + \widehat{GHy} = 180°$ (hai góc kề bù)

$\widehat{GHx} + 135° = 180°$

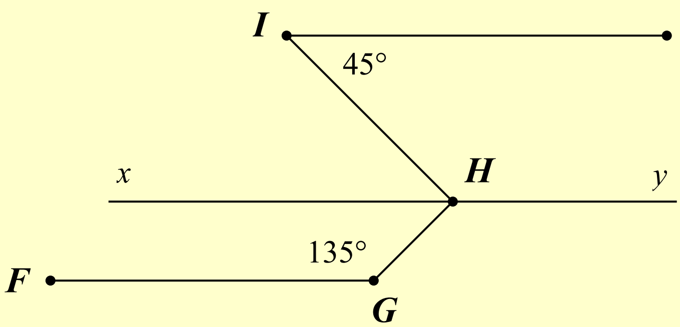
$\widehat{GHx} = 45°$

+ Ta có $\widehat{IHG} = \widehat{IHx} + \widehat{GHx}$

$\widehat{IHG} = 45° + 45°$

$\widehat{IHG} = 90°$

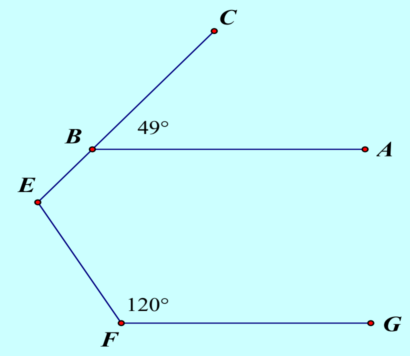
Nên. $IH \perp HG$



Hình 11

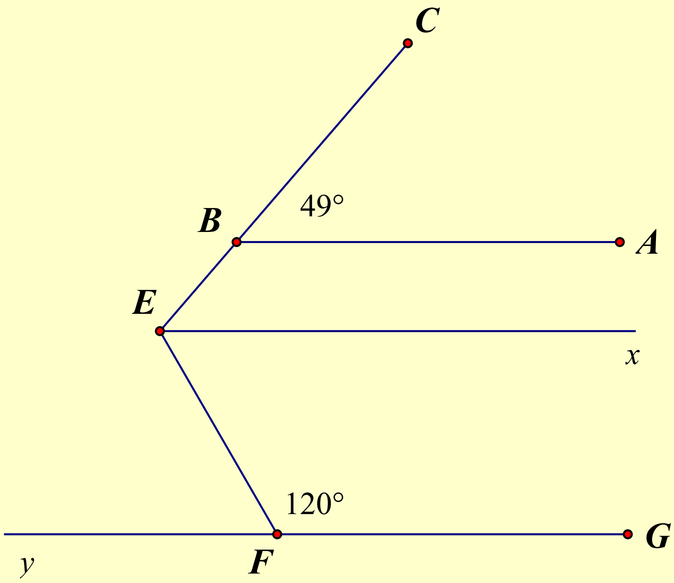
Bài 12:

Cho Hình 12, biết $\widehat{CEF}=109^\circ$, $\widehat{ABC}=49^\circ$, $\widehat{EFG}=120^\circ$. Chứng tỏ $AB//FG$.



Hình 12

Lời giải



Hình 12

+ Qua E vẽ tia Ex sao cho $Ex//AB$

Suy ra $\widehat{CBA}=\widehat{CEx}$ (hai góc đồng vị)

Nên $\widehat{CEx}=49^\circ$.

+ Ta có $\widehat{CEF}=\widehat{CEx}+\widehat{FEx}$

$109^\circ=49^\circ+\widehat{FEx}$

$\widehat{FEx}=60^\circ$

+ Vẽ tia Fy là tia đối của tia FG

Suy ra $\widehat{EFG}+\widehat{EFy}=180^\circ$ (hai góc kề bù)

$120^\circ+\widehat{EFy}=180^\circ$

$\widehat{EFy}=60^\circ$

Suy ra $\widehat{EFy}=\widehat{FEx}$

Mà $\widehat{EFy}$; $\widehat{FEx}$ là hai góc so le trong.

Nên $Ex//FG$

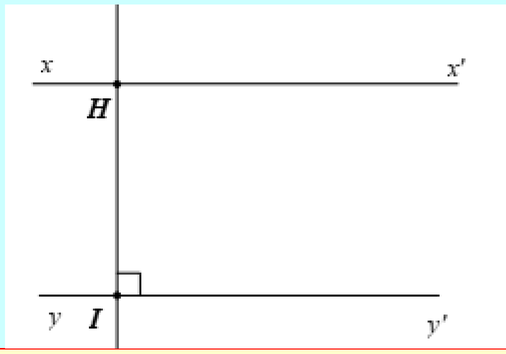
Mà $Ex//AB$

Do đó $AB//FG$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1:

Cho Hình 4, biết $xx'//yy'$, $yy'\perp HI$. Vì sao $xx'\perp HI$.



Lời giải

Ta có $xx'//yy'$

Mà $yy'\perp HI$

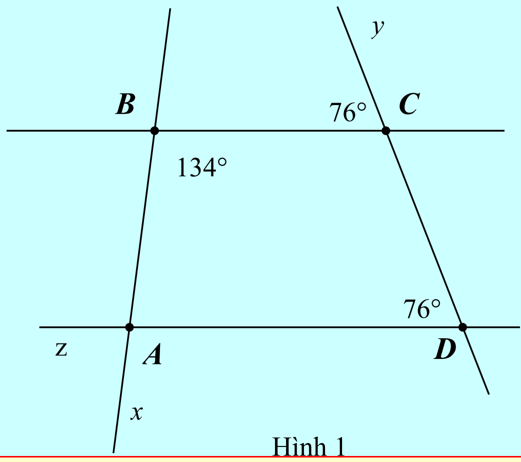
Nên $xx'\perp HI$.

Bài 2:

Cho Hình 1, biết $\widehat{ABC}=134^\circ$, $\widehat{BCy}=76^\circ$, $\widehat{ADC}=76^\circ$.

a) Vì sao $BC//AD$?

b) Hãy tính số đo góc xAz.



Hình 1

Lời giải

a) Ta có $\widehat{BCy}=76^\circ$, $\widehat{ADC}=76^\circ$

Suy ra $\widehat{BCy}=\widehat{ADC}$

Mà $\widehat{BCy};\widehat{ADC}$ là hai góc đồng vị.

Nên $BC//AD$.

b) Ta có: $BC//AD$ nên $\widehat{ABC}=\widehat{xAD}$ (hai góc đồng vị)

Nên $\widehat{xAD}=134^\circ$.

Ta có $\widehat{xAD}+\widehat{xAz}=180^\circ$ (hai góc kề bù)

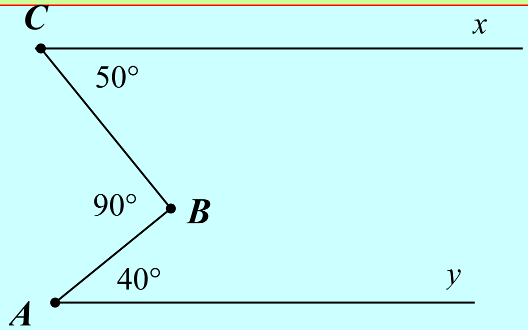
$134° + \widehat{xAz} = 180°$

$\widehat{xAz} = 180° - 134°$

$\widehat{xAz} = 46°$

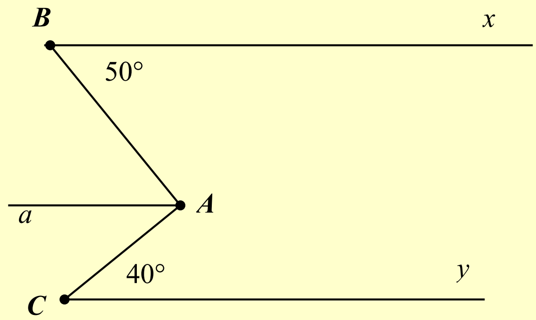
Nên $\widehat{xAz} = 46°$.

Bài 3:

Cho Hình 2, biết $\widehat{xCB} = 50°$, $\widehat{BAy} = 40°$, $\widehat{CBA} = 90°$. Vì sao $Cx // Ay$?	

Hình 3

Lời giải



Hình 3

+ Qua A vẽ tia Aa sao cho $Aa // Bx$

Suy ra $\widehat{aAB} = \widehat{xBA}$ (hai góc so le trong)

Nên $\widehat{aAB} = 50°$.

+ Ta có $\widehat{BAC} = \widehat{BAa} + \widehat{CAa}$

$90° = 50° + \widehat{CAa}$

$\widehat{CAa} = 40°$

+ Ta có $\widehat{CAa} = 40°$, $\widehat{BAy} = 40°$

Suy ra $\widehat{CAa} = \widehat{BAy}$

Mà $\widehat{CAa}$; $\widehat{BAy}$ là hai góc so le trong.

Nên $Cy // Aa$.

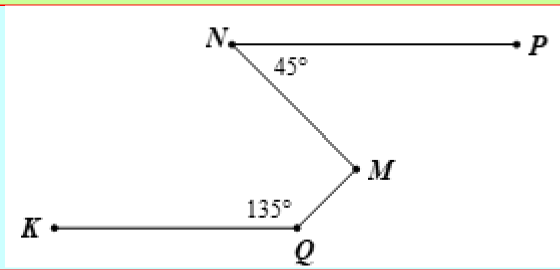
+ Ta có: $Aa // Bx$ (cách vẽ)

Mà $Cy // Aa$

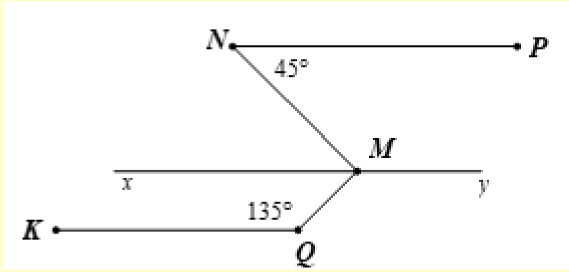
Nên $Cx // Ay$

Bài 4:

Cho Hình 11, biết $NP // KQ$, $\widehat{NPM} = 45°$, $\widehat{KQM} = 135°$. Chứng tỏ $NM \perp MQ$.



Lời giải



+ Qua M vẽ xy sao cho $xy // NP$

Suy ra $\widehat{PNM} = \widehat{NMx}$ (hai góc so le trong)

Nên $\widehat{NMx} = 45°$.

+ Ta có $xy // NP$

Mà $KQ // NP$

Nên $xy // KQ$

Suy ra $\widehat{KQM} = \widehat{QMy}$ (hai góc so le trong)

Nên $\widehat{QMy} = 135°$.

+ Ta có $\widehat{QMx} + \widehat{QMy} = 180°$ (hai góc kề bù)

$\widehat{QMx} + 135° = 180°$

$\widehat{QMx} = 45°$

+ Ta có $\widehat{NMQ} = \widehat{NMx} + \widehat{QMx}$

$\widehat{NMQ} = 50° + 40°$

$\widehat{NMQ} = 90°$

Nên $NM \perp MQ$.

CHUYÊN ĐỀ: ĐỊNH LÍ. CHỨNG MINH ĐỊNH LÍ

A. Lý thuyết

1. Định lí: Giả thiết và kết luận của định lí:

Định lí là một khẳng định được suy ra từ những khẳng định đúng đã biết. Mỗi định lí thường được phát biểu dưới dạng: “ Nếu … thì …”

Phần giữa từ “nếu” và từ “thì” là giả thiết của định lí.

Phần sau từ “thì” là kết luận của định lí.

2. Thế nào là chứng minh định lí

Chứng minh một định lí là dùng lập luận để từ giả thiết và những khẳng định đúng đã biết để suy ra kết luận của định lí.

B) Các dạng toán

Dạng 1: Xác định giả thiết và kết luận của định lí

I. Phương pháp giải:

Mỗi định lí thường được phát biểu dưới dạng: “ Nếu … thì …”

Phần giữa từ “nếu” và từ “thì” là giả thiết của định lí.

Phần sau từ “thì” là kết luận của định lí.

II. Bài toán.

Bài 1:
Hãy nêu giả thiết và kết luận của định lí sau: “ Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau”
Lời giải   Giải thiết là: Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba   Kết luận là: chúng song song với nhau.

Bài 2:
Hãy phát biểu phần còn thiếu của giả thiết trong định lí sau: “ Hai góc ... thì bằng nhau”
Lời giải   Phần thiếu là: đối đỉnh

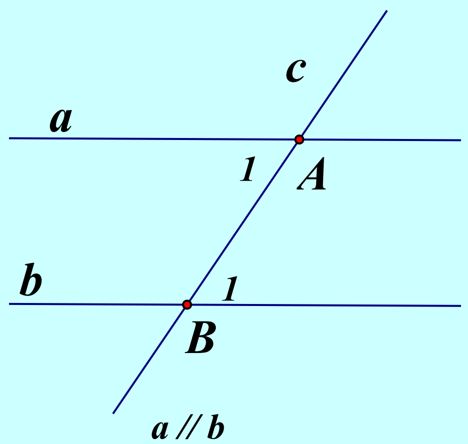
Bài 3:
Hãy phát biểu phần còn thiếu của kết luận trong định lí sau: “ Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì ...”

Lời giải

Phần thiếu là: chúng song song với nhau.

Bài 4:

Vẽ hình, ghi giả thiết và kết luận của định lí : " Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì hai góc so le trong bằng nhau"

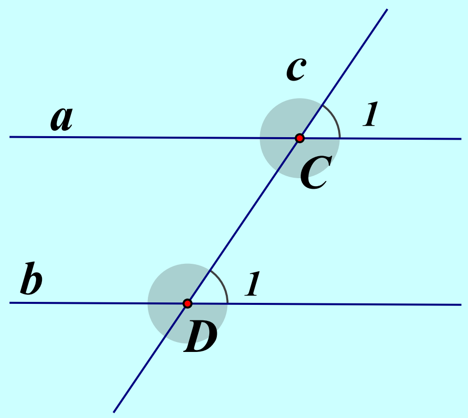


Lời giải

GT	c cắt a và b ; $a//b$
KL	$\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$

Bài 5:

Hãy phát biểu định lí được diễn tả bằng hình vẽ sau:

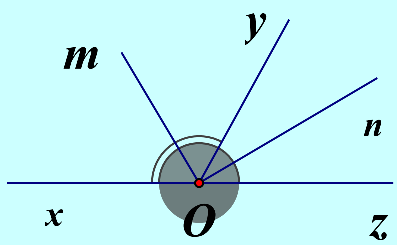


Lời giải

Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng phân biệt $a;b$. Và trong các góc tạo thành có một cặp góc đồng vị bằng nhau thì a và b song song với nhau.

Bài 6:

Vẽ hình, ghi giả thiết và kết luận của định lí : “ Góc tạo bởi hai tia phân giác của hai góc kề bù là một góc vuông ”



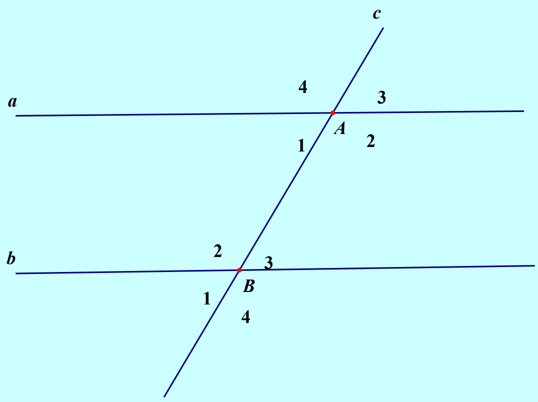
Lời giải

GT	$\widehat{xOy}$ và $\widehat{yOz}$ kề bù Om là tia phân giác của $\widehat{xOy}$ On là tia phân giác của $\widehat{yOz}$
KL	$\widehat{mOn} = 90^0$

Bài 7:

Phần giả thiết: $c \cap a = \{A\}; c \cap b = \{B\}$

$, \widehat{A_1} + \widehat{B_2} = 180°$ (tham khảo hình vẽ) là của định lý nào ?

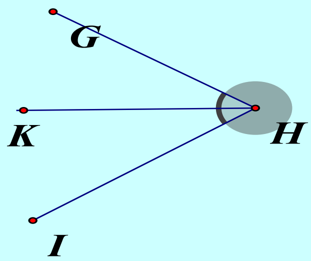


Lời giải

Nếu hai đường thẳng cắt một đường thẳng thứ ba tạo thành hai góc trong cùng phía bù nhau thì hai đường thẳng đó song song.

Bài 8:

Định lí “ Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau” có định lí đảo không ? Vẽ hình minh họa.



Lời giải

Định lí “ Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau” không có định lí đảo .

Hai góc bằng nhau nhưng không đối đỉnh.

Bài 9:

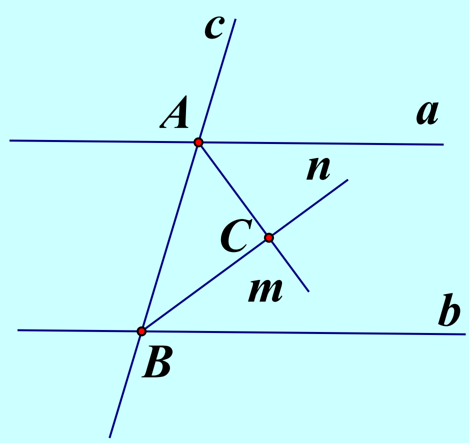
Phát biểu định lí đảo của định lí sau: “ Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song nhau”

Lời giải

Định lí đảo “ Hai đường thẳng phân biệt song song nhau thì chúng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba”

Bài 10:

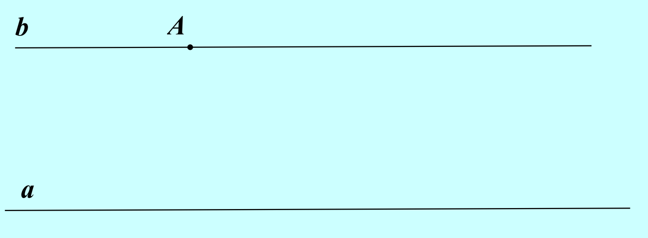
Cho hình vẽ với GT và LK sau. Có thể rút ra định lí nào.

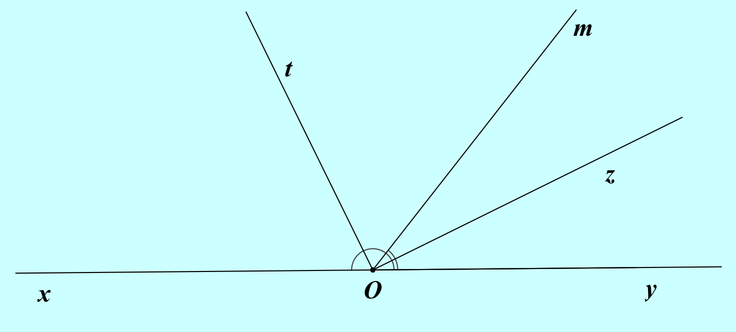


Lời giải

GT	$a // b$, $c \cap a = \{A\}; c \cap b = \{B\}$ Am là phân giác của $\widehat{BAa}$ Bn là phân giác của $\widehat{ABb}$
KL	$Am \perp Bn$

Định lí: Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì góc tạo bỡi hai tia phân giác của hai góc trong cùng phía là một góc vuông.

Bài 11:	
Cho định lí: "Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng chỉ có một đường thẳng song song với đường thẳng đó", kết luận của định lí ứng với hình vẽ dưới đây là:	
Lời giải	
Kết luận là: b đi qua A	

Bài 12:	
Cho định lí: "Nếu một góc có hai cạnh là hai tia phân giác của hai góc kề bù thì đó là góc vuông", kết luận của định lí ứng với hình vẽ dưới đây là:	
Lời giải	
Kết luận là: $\widehat{zOt} = 90°$	

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1:
Hãy chỉ ra giả thiết và kết luận của định lí sau: " Nếu M là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $AM = MB = \dfrac{AB}{2}$
Lời giải
Giải thiết là: M là trung điểm của đoạn thẳng AB Kết luận là: $AM = MB = \dfrac{AB}{2}$.

Bài 2:
Điền vào chỗ trống để được định lí đúng: Nếu Ot là tia phân giác của $\widehat{xOy}$ thì...
Lời giải
Nếu Ot là tia phân giác của $\widehat{xOy}$ thì $\widehat{xOt} = \widehat{yOt}$

Bài 1:

Xác định giả thiết và kết luận của định lý sau:

“ Nếu hai góc $\widehat{xOy}$ và $\widehat{x'Oy'}$ có một góc nhọn, một góc tù và $Ox//O'x'$,$Oy//O'y'$ thì $\widehat{xOy}+\widehat{x'Oy'}=180^o$ ”

Lời giải

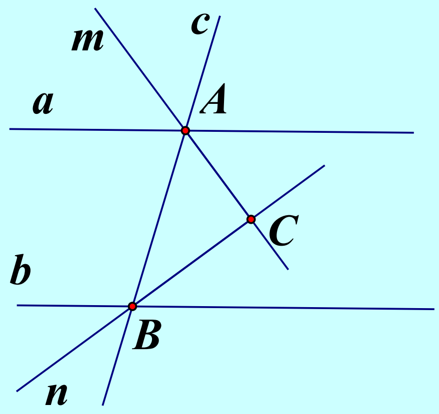
Giả thiết: hai góc $\widehat{xOy}$ và $\widehat{x'Oy'}$ có một góc nhọn, một góc tù và $Ox//O'x'$,$Oy//O'y'$

Kết luận: $\widehat{xOy}+\widehat{x'Oy'}=180^o$

Bài 3:

Cho hình vẽ với GT và LK sau. Có thể rút ra định lí nào.

GT	$a//b$, $c\cap a=\{A\};c\cap b=\{B\}$ Am là phân giác của $\widehat{cAa}$ Bn là phân giác của $\widehat{nBb}$
KL	$Am\perp Bn$



Lời giải

Định lí: Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì góc tạo bỡi hai đường phân giác của hai góc ngoài cùng phía là một góc vuông.

Dạng 2: Chứng minh định lí

I. Phương pháp giải:

Chứng minh một định lí là dùng lập luận để từ giả thiết và những khẳng định đúng đã biết để suy ra kết luận của định lí.

II. Bài toán.

Bài 1:

Chứng minh định lí là gì ?

Lời giải

Chứng minh một định lí là dùng lập luận để từ giả thiết và những khẳng định đúng đã biết để suy ra kết luận của định lí.

Bài 2:

Chọn đáp án đúng nhất trong các phát biểu sau:

Khi chứng minh một định lí người ta cần:

a) Chứng minh định lí đó đúng trong một trường hợp cụ thể của giả thiết.

b) Chứng minh định lí đó đúng trong hai trường hợp cụ thể của giả thiết.

c) Chứng minh định lí đó đúng trong mọi trường hợp có thể xảy ra của giả thiết.

d) Chứng minh định lí đó đúng trong vài trường hợp cụ thể của giả thiết.

Lời giải

c) Chứng minh định lí đó đúng trong mọi trường hợp có thể xảy ra của giả thiết.

Bài 3:

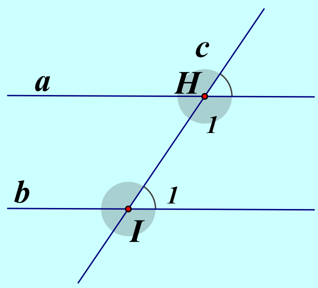
Phát biểu sau có phải là một định lí . “Đường thẳng nào vuông góc với một trong hai đường thẳng cắt nhau thì song song với đường thẳng kia”

Lời giải

Không

Bài 4:

Diễn đạt bằng lời định lí sau:



Lời giải

Nếu hai đường thẳng bị một đường thẳng thứ ba cắt và chúng tạo thanh một cặp góc trong cùng phai bù nhau thì hai đường thẳng đó song song với nhau

Bài 5:

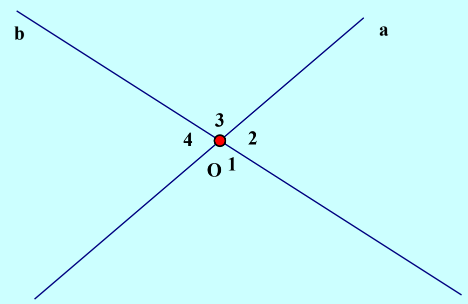
Hãy sắp xếp các ý sau để hoàn thiện bài toán chứng minh định lí “ Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau.

1/ Và $\widehat{O_3}+\widehat{O_2}=180^o$ (vì kề bù)

2/ Vậy $\widehat{O_1}=\widehat{O_3}$

3/ Có: $\widehat{O_1}+\widehat{O_2}=180^o$ (vì kề bù)

4/ Suy ra : $\widehat{O_1}+\widehat{O_2}=\widehat{O_3}+\widehat{O_2}$



Lời giải

3/ Có: $\widehat{O_1}+\widehat{O_2}=180^o$ (vì kề bù)

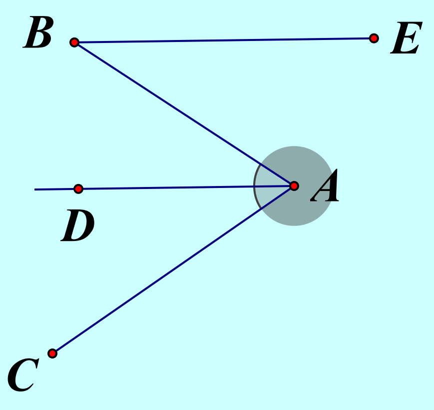
1/ Và $\widehat{O_3}+\widehat{O_2}=180^o$ (vì kề bù)

4/ Suy ra : $\widehat{O_1}+\widehat{O_2}=\widehat{O_3}+\widehat{O_2}$

2/ Vậy $\widehat{O_1}=\widehat{O_3}$

Bài 6:

Cho AD là tia phân giác của $\widehat{BAC}$. Vẽ BE song song với AD, $\widehat{EBA}$ và $\widehat{BAD}$ là hai góc so le trong. Chứng minh rằng $\widehat{EBA}=\widehat{DAC}$



Lời giải

Chứng minh:

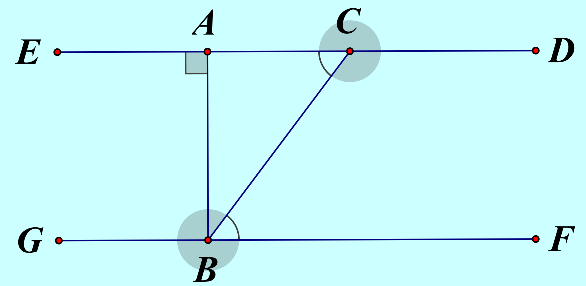
Có: $\widehat{DAC}=\widehat{BAD}(1)$ (vì AD là tia phân giác của $\widehat{BAC}$)

$\widehat{EBA}=\widehat{BAD}(2)$ (vì hai góc so le trong, $BE//AD$)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{EBA} = \widehat{DAC}$

Bài 7:

Cho hình vẽ biết $AB \perp ED$ và $\widehat{ACB} = \widehat{CBF}$. Chứng minh rằng $AB \perp GF$



Lời giải

Có $\widehat{ACB} = \widehat{CBF}$

Và $\widehat{ACB}; \widehat{CBF}$ có vị trí so le trong.

Do đó: $ED // GF$

Lại có $AB \perp ED$

Vậy $AB \perp GF$

Bài 8:

Ghi giả thiết kết luận và chứng minh định lý " Hai góc cùng phụ với một góc thứ ba thì bằng nhau"

Lưu ý hai góc phụ nhau có tổng số đo bằng 90^0

Lời giải

GT	$\widehat{A} + \widehat{C} = 90^0$, $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^0$
KL	$\widehat{A} = \widehat{B}$

Chứng minh:

Ta có $\widehat{A} + \widehat{C} = 90^o$

$\widehat{B} + \widehat{C} = 90^o$

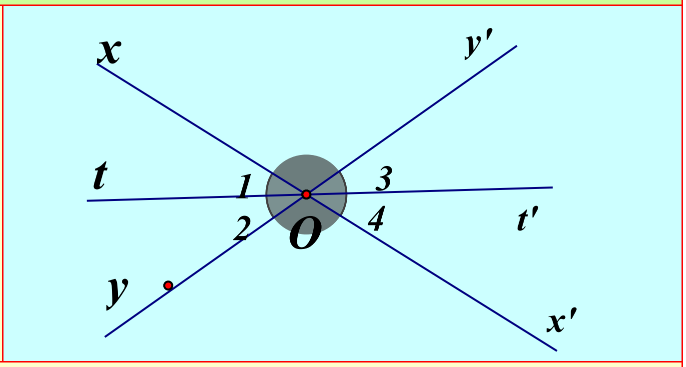
Suy ra $\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{B} + \widehat{C}$

Do đó $\widehat{A} = \widehat{B}$

Vậy "Hai góc cùng phụ với một góc thứ ba thì bằng nhau"

Bài 9:

Chứng minh định lí sau: " Hai tia phân giác của hai góc đối đỉnh là hai tia đối nhau"



Lời giải

Ta có: $\widehat{tOt'} = \widehat{O_1} + \widehat{xOy'} + \widehat{O_4} = \frac{1}{2}\widehat{xOy} + \widehat{xOy'} + \frac{1}{2}\widehat{x'Oy'}$

$= \frac{1}{2}\widehat{xOy} + \frac{1}{2}\left(\widehat{xOy'} + \widehat{x'Oy}\right) + \frac{1}{2}\widehat{x'Oy'}$ ($\widehat{xOy'} = \widehat{x'Oy}$ vì đối đỉnh)

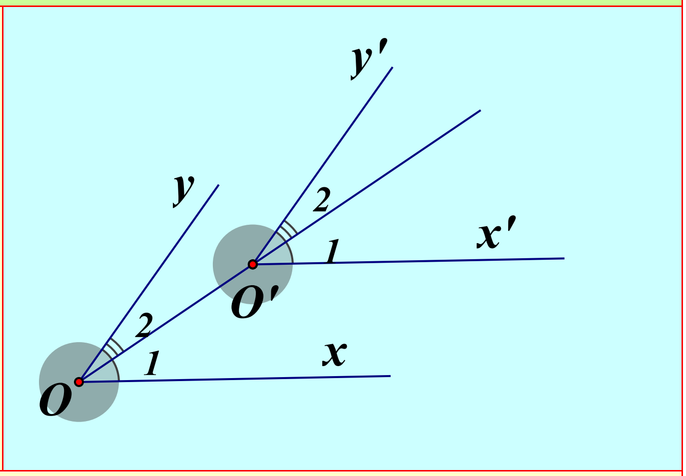
$= \frac{1}{2}\left(\widehat{xOy} + \widehat{xOy'} + \widehat{x'Oy} + \widehat{x'Oy'}\right)$

$= \frac{1}{2}.360^0 = 180^0$

Vậy Ot và Ot' là hai tia đối nhau

Bài 10:

Chứng minh rằng nêu hai góc nhọn $\widehat{xOy}, \widehat{x'O'y'}$ có $Ox // O'x'$ và $Oy // O'y'$ thì $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$



Lời giải

GT	$\widehat{xOy}, \widehat{x'O'y'}$ nhọn $Ox // O'x'$ $Oy // O'y'$
KL	$\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$

Chứng minh:

Vẽ tia OO', ta có:

$\widehat{O_1} = \widehat{O'_1}$ (vì $\widehat{O_1}, \widehat{O'_1}$ đồng vị , $Ox // O'x'$)

$\widehat{O_2} = \widehat{O'_2}$ (vì $\widehat{O_2}, \widehat{O'_2}$ đồng vị , $Oy // O'y'$)

Suy ra $\widehat{O_1} + \widehat{O_2} = \widehat{O'_1} + \widehat{O'_2}$

Vậy $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$

Bài 11:

Chứng minh rằng: Nếu ba điểm A,B,C thẳng hàng và A không nằm giữa B và C thì khoảng cách từ điểm A đến trung điểm M của đoạn thẳng BC bằng nửa tổng của hai đoạn thẳng AB và AC, tức là

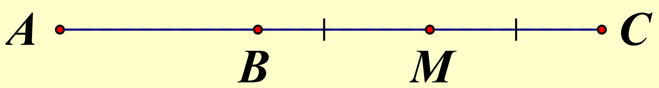
$$AM = \frac{AB + AC}{2}$$

Lời giải

GT	Ba điểm A,B,C thẳng hàng và A không nằm giữa B và C M là trung điểm của đoạn thẳng BC
KL	$AM = \frac{AB + AC}{2}$

Vì điểm A không nằm giữa hai điểm B và C nên có hai trường hợp:

Trường hợp 1: điểm B nằm giữa hai điểm A và C



Khi đó $BC = AC - AB$

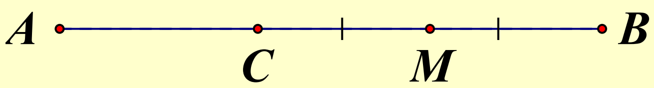
Và $AM = AB + BM$

$AM = AB + \frac{BC}{2}$ (Vì M là trung điểm của BC)

$AM = AB + \frac{AC - AB}{2}$

$AM = \frac{AB + AC}{2}$

Trường hợp 2: điểm C nằm giữa hai điểm A và B



Khi đó $BC = AB - AC$

Và $AM = AC + CM$

$AM = AC + \frac{BC}{2}$ (Vì M là trung điểm của BC)

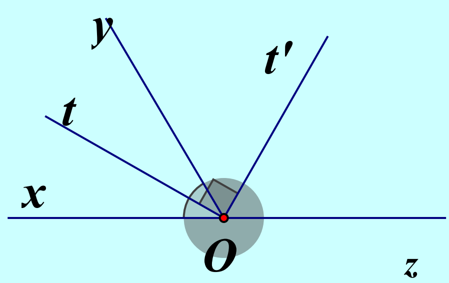
$AM = AC + \frac{AB - AC}{2}$

$AM = \frac{AB + AC}{2}$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 12:

Cho hai góc kề bù $\widehat{xOy}$ và $\widehat{yOz}$. Gọi Ot là tia phân giác của $\widehat{xOy}$. Trong góc $\widehat{yOz}$ vẽ tia Ot' vuông góc với tia Ot. Chứng minh rằng Ot' là tia phân giác của $\widehat{yOz}$



Lời giải

GT	$\widehat{xOy}$ và $\widehat{yOz}$ kề bù. Ot là tia phân giác của $\widehat{xOy}$ Trong góc $\widehat{yOz}$ vẽ tia Ot' vuông góc với tia Ot.
KL	Chứng minh rằng Ot' là tia phân giác của $\widehat{yOz}$

Có $\widehat{xOt} + \widehat{t'Oz} = 90^o$

$\widehat{tOy} + \widehat{yOt'} = 90^o$

Và $\widehat{xOt} = \widehat{tOy}$ (vì Ot là tia phân giác của $\widehat{xOy}$)

Suy ra $\widehat{t'Oz} = \widehat{yOt'}$

Vậy Ot' là tia phân giác của $\widehat{yOz}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1:

Phát biểu định lí đảo của định lí: " Góc tạo bởi hai tia phân giác của hai góc kề bù là một góc vuông"

Lời giải

Góc tạo bỡi hai tia phân giác của hai góc kề nhau là góc vuông thì hai góc đó là hai góc kề bù.

Bài 2:

Hãy sắp xếp các ý sau để hoàn thiện bài toán chứng minh định lí " Góc tạo bỡi hai tia phân giác của hai góc kề bù là một góc vuông"

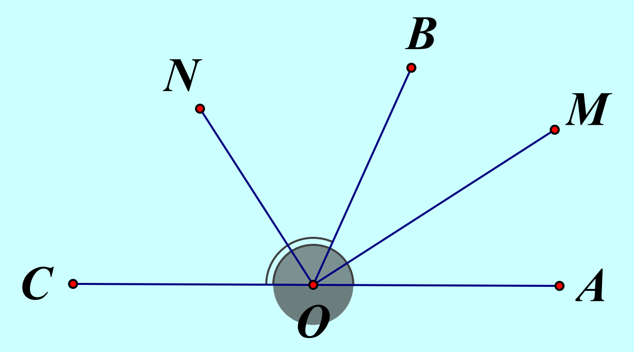
1/ Do đó $\widehat{MON}=90^o$

2/ $\widehat{BOM}=\frac{\widehat{AOB}}{2}$ (vì OM là tia phân giác của $\widehat{AOB}$)

3/ $\widehat{BON}=\frac{\widehat{BOC}}{2}$ (Vì ON là tia phân giác của $\widehat{BOC}$)

4/ $\widehat{BOM}+\widehat{BON}=\frac{\widehat{AOB}}{2}+\frac{\widehat{BOC}}{2}=\frac{\widehat{AOB}+\widehat{BOC}}{2}$

$=\frac{180^o}{2}=90^o$



Lời giải

Sắp xếp

2/ $\widehat{BOM}=\frac{\widehat{AOB}}{2}$ (vì OM là tia phân giác của $\widehat{AOB}$)

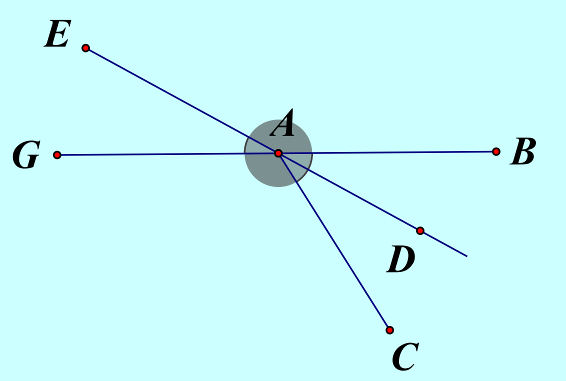
3/ $\widehat{BON}=\frac{\widehat{BOC}}{2}$ (vì ON là tia phân giác của $\widehat{BOC}$)

4/ $\widehat{BOM}+\widehat{BON}=\frac{\widehat{AOB}}{2}+\frac{\widehat{BOC}}{2}=\frac{\widehat{AOB}+\widehat{BOC}}{2}=\frac{180^o}{2}=90^o$

1/ Do đó $\widehat{MON}=90^o$

Bài 3:

Hãy vẽ hình nêu giả thiết và kết luận và chứng minh bài toán sau: " Cho AD là tia phân giác của $\widehat{BAC}$. Gọi $\widehat{EAG}$ là góc đối đỉnh của $\widehat{BAD}$. Chứng minh rằng $\widehat{DAC} = \widehat{EAG}$"



Lời giải

GT	AD là tia phân giác của $\widehat{BAC}$. $\widehat{EAG}$ đối đỉnh với $\widehat{BAD}$
KL	$\widehat{DAC} = \widehat{EAG}$

Chứng minh:

Có: $\widehat{DAC} = \widehat{BAD}(1)$ (vì AD là tia phân giác của $\widehat{BAC}$)

$\widehat{EAG} = \widehat{BAD}(2)$ (vì hai góc đối đỉnh)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{DAC} = \widehat{EAG}$

Bài 4:

Chứng minh rằng nếu hai góc tù $\widehat{xOy}, \widehat{x'O'y'}$ có $Ox // O'x'$ và $Oy // O'y'$ thì $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$

Lời giải

GT	$\widehat{xOy}, \widehat{x'O'y'}$ tù $Ox // O'x'$ $Oy // O'y'$
KL	$\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$

Vẽ tia OO', ta có:

$\widehat{O_1} = \widehat{O'_1}$ (vì $\widehat{O_1}, \widehat{O'_1}$ đồng vị , $Ox // O'x'$)

$\widehat{O_2} = \widehat{O'_2}$ (vì $\widehat{O_2}, \widehat{O'_2}$ đồng vị , $Oy // O'y'$)

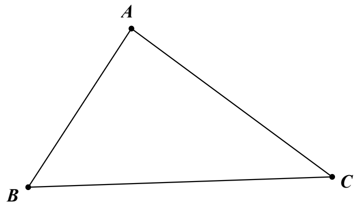
Suy ra $\widehat{O_1} + \widehat{O_2} = \widehat{O'_1} + \widehat{O'_2}$

Vậy $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$

Chuyên đề: TỔNG CÁC GÓC TRONG MỘT TAM GIÁC

I. LÍ THUYẾT TRỌNG TÂM

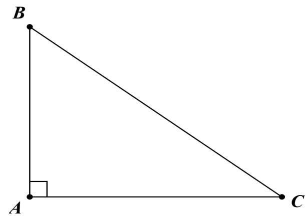
1. Định lí tổng ba góc của một tam giác



Tổng ba góc của một tam giác bằng 180º.

ΔABC có $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ$

2. Áp dụng vào tam giác vuông

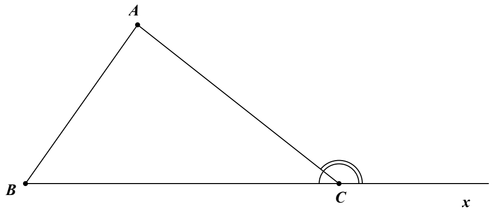


Định nghĩa: Tam giác vuông là tam giác có một góc vuông.

Định lý: Trong một tam giác vuông, hai góc nhọn phụ nhau. Tam giác ABC vuông tại A nên $\widehat{B}+\widehat{C}=90^\circ$. Khi đó, hai góc nhọn được gọi là phụ nhau.

ΔABC vuông tại $A \Rightarrow \widehat{B}+\widehat{C}=90^\circ$

3. Góc ngoài của tam giác



Định nghĩa: Góc ngoài của tam giác là góc kề bù với một góc của tam giác ấy.

Tính chất: Mỗi góc ngoài của một tam giác bằng tổng hai góc trong không kề với nó.

ΔABC có $\widehat{ACx}$ là góc ngoài đỉnh C $\Rightarrow \widehat{ACx}=\widehat{A}+\widehat{B}$

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Tính số đo của một góc, so sánh các góc

I. Phương pháp giải:

* Lập các đẳng thức thể hiện:

+ Tổng ba góc của tam giác bằng 180°.

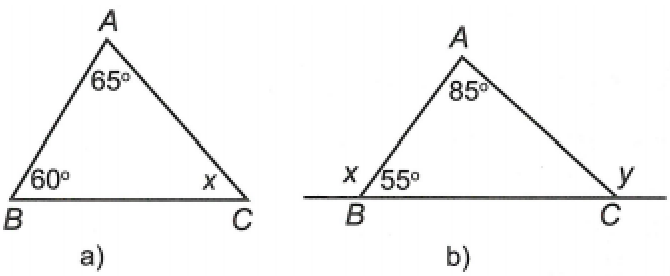
+ Trong tam giác vuông, hai góc nhọn phụ nhau.

+ Góc ngoài của tam giác bằng tổng hai góc trong không kề với nó.

* Sau đó tính số đo góc phải tìm.

II. Bài toán.

Ví dụ: Tính số đo x, y trong các hình vẽ sau:



Hướng dẫn giải

a) Xét ΔABC có $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180°$

$65°+60°+\widehat{C}=180°$

$\Rightarrow \widehat{C}=180°-65°-60°=55°$

b) Xét ΔABC có y là góc ngoài tại đỉnh C.

Suy ra $y=\widehat{A}+\widehat{B}=85°+55°=140°$.

Lại có $x+\widehat{B}=180°$ (hai góc kề bù).

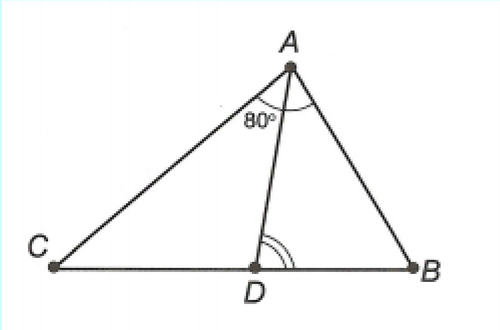
Suy ra $x=180°-\widehat{B}=180°-55°=125°$.

Bài 1:

Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=80°$ và $\widehat{B}-\widehat{C}=20°$.

a) Tính số đo các góc *B, C* của ΔABC.

b) Gọi *AD* là tia phân giác của $\widehat{A}$. Tính số đo của $\widehat{ADB}$.



Lời giải

a) Xét ΔABC có $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180°$.

Theo giả thiết $\widehat{A}=80°$ nên $\widehat{B}+\widehat{C}=100°$.

Mặt khác $\widehat{B}-\widehat{C}=20°$ (giả thiết).

Suy ra: $\widehat{B}=\dfrac{100°+20°}{2}=60°$.

$\Rightarrow \widehat{C}=\widehat{B}-20°=60°-20°=40°$.

b) Do *AD* là tia phân giác góc $\widehat{A}$ nên $\widehat{BAD}=\widehat{DAC}=\dfrac{1}{2}\widehat{A}=\dfrac{1}{2}.80°=40°$.

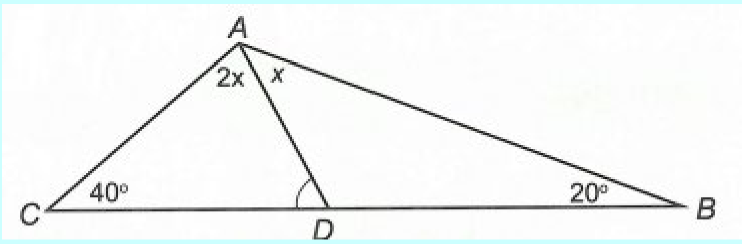
Xét ΔACD có $\widehat{ADB}$ là góc ngoài đỉnh *D* nên $\widehat{ADB}=\widehat{DAC}+\widehat{ACD}=40°+40°=80°$.

Bài 2:

Cho ΔABC có $\widehat{B}=20°,\widehat{C}=40°$.

a) Tam giác ABC là tam giác gì?

b) Gọi *AD* là tia nằm giữa hai tia *AB* và *AC*. Biết $\widehat{CAD}=2.\widehat{BAD}$.



Tính số đo của $\widehat{CDA}$.	

Lời giải

a) Xét ΔABC có $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{A}=180^\circ-\left(\widehat{B}+\widehat{C}\right)=180^\circ-\left(20^\circ+40^\circ\right)=120^\circ$.

Do $\widehat{A}>90^\circ$ nên tam giác ABC là tam giác có một góc tù.

b) Theo giả thiết, ta có $\widehat{CAD}=2.\widehat{BAD}$

$\Rightarrow \dfrac{\widehat{BAD}}{\widehat{CAD}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \dfrac{\widehat{BAD}}{\widehat{BAD}+\widehat{CAD}}=\dfrac{1}{1+2}\Rightarrow \dfrac{\widehat{BAD}}{\widehat{A}}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow \widehat{BAD}=\dfrac{1}{3}\widehat{A}=\dfrac{1}{3}.120^\circ=40^\circ$.

Xét ΔADB có $\widehat{ADC}$ là góc ngoài đỉnh D nên $\widehat{ADC}=\widehat{BAD}+\widehat{ABD}\Rightarrow \widehat{ADC}=40^\circ+20^\circ=60^\circ$.

Bài 3:

Tam giác ABC có số đo $\widehat{A}=75^\circ, \widehat{B}=45^\circ$. Góc C có số đo bằng

A. $\widehat{C}=90^\circ$.	B. $\widehat{C}=60^\circ$.

C. $\widehat{C}=45^\circ$.	D. $\widehat{C}=75^\circ$.

Lời giải

Xét ΔABC có $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ\Rightarrow \widehat{C}=180^\circ-\left(\widehat{A}+\widehat{B}\right)=180^\circ-\left(75^\circ+45^\circ\right)=60^\circ$.

Bài 4:

Cho tam giác ABC vuông tại B. Kết luận nào sau đây là sai?

A. $\widehat{ABC}=90^\circ$.	B. $\widehat{A}+\widehat{C}=90^\circ$.

C. $\widehat{B}-\widehat{C}=90^\circ$.	D. $\widehat{C}=90^\circ-\widehat{A}$.

Lời giải

Vì tam giác ABC vuông tại B nên $\widehat{B}=90^\circ$ (A đúng); $\widehat{A}+\widehat{C}=90^\circ$ (B và D đúng).

C. $\widehat{B}-\widehat{C}=90^\circ$ sai vì $\widehat{B}=90^\circ$ nên $\widehat{B}-\widehat{C}<90^\circ$.

Bài 5:

Cho tam giác MNP có $\widehat{M}=80^\circ$. Biết $\widehat{N}-\widehat{P}=40^\circ$. Số đo của $\widehat{N}$ bằng

A. $\widehat{N}=75^\circ$.	B. $\widehat{N}=45^\circ$.

C. $\widehat{N}=70^\circ$.	D. $\widehat{N}=60^\circ$.

Lời giải

Xét ΔMNP có $\widehat{M}+\widehat{N}+\widehat{P}=180^\circ \Rightarrow \widehat{N}+\widehat{P}=180^\circ-\widehat{M}=180^\circ-80^\circ=100^\circ$.

Mặt khác $\widehat{N}-\widehat{P}=40^\circ$. Suy ra $\widehat{N}=\dfrac{100^\circ+40^\circ}{2}=70^\circ$.

Bài 6:

Kết luận nào sau đây là đúng?

A. Một tam giác chỉ có tối đa hai góc nhọn.

B. Một tam giác chỉ có nhiều nhất một góc tù.

C. Trong một tam giác, có ít nhất hai góc có số đo nhỏ hơn 60°.

D. Trong một tam giác, số đo của mỗi góc luôn nhỏ hơn tổng số đo các góc còn lại.

Lời giải

A. Sai vì luôn tồn tại tam giác có ba góc nhọn. Ví dụ tam giác có ba góc bằng 60°.

B. Đúng. Giả sử tam giác có nhiều hơn 1 góc tù. Khi đó tổng ba góc trong tam giác lớn hơn 180° (mâu thuẫn với định lí tổng 3 góc trong tam giác).Vậy trong tam giác có nhiều nhất một góc tù.

C. Sai. Thật vậy xét tam giác ABC có $\widehat{A}<60^\circ, \widehat{B}<60^\circ, \widehat{C}<60^\circ$. Khi đó $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}<180^\circ$ (mâu thuẫn với định lí tổng 3 góc trong tam giác).

D. Sai. Thậy vậy, xét ΔABC có $\widehat{A}$ tù. Khi đó góc ngoài A_1 tại A là góc nhọn. Ta có $\widehat{A}<\widehat{B}+\widehat{C}=\widehat{A_1}$ (mâu thuẫn vì góc tù luôn lớn hơn góc nhọn).

Bài 7:

Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=75^\circ$ và $\widehat{B}=2.\widehat{C}$. Số đo của góc C bằng

A. $\widehat{C}=70^\circ$.

B. $\widehat{C}=35^\circ$.

C. $\widehat{C}=40^\circ$.

D. $\widehat{C}=50^\circ$.

Lời giải

ΔABC có $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ \Rightarrow \widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ-\widehat{A}=180^\circ-75^\circ=105^\circ$.

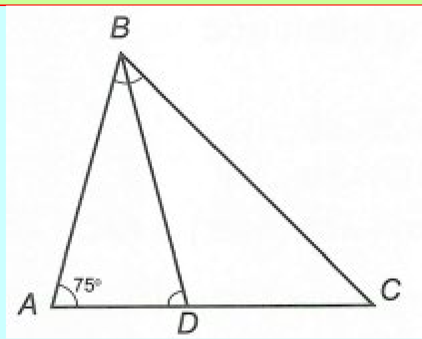
Mặt khác $\widehat{B}=2.\widehat{C}$ nên $2\widehat{C}+\widehat{C}=105^\circ \Rightarrow 3\widehat{C}=105^\circ \Rightarrow \widehat{C}=35^\circ$.

Bài 8:

Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=75^\circ$. Biết góc B có số đo lớn hơn số đo góc C là 15°.

a) Tính số đo các góc B và C của tam giác ABC.

b) Gọi BD là tia phân giác của $\widehat{ABC}$ với $D\in AC$. Tính số đo của $\widehat{ADB}$.



Lời giải

a) Xét ΔABC có $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ \Rightarrow \widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ-\widehat{A}=180^\circ-75^\circ=105^\circ$.

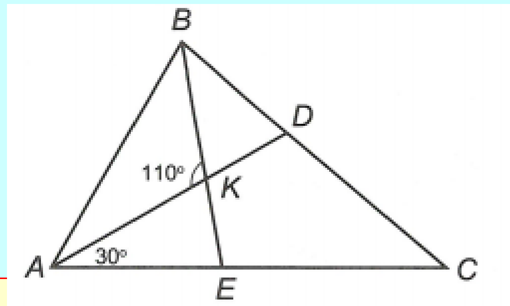
Mà $\widehat{B}-\widehat{C}=15^\circ$ (giả thiết) nên $\widehat{B}=\dfrac{105^\circ+15^\circ}{2}=60^\circ,\ \widehat{C}=105^\circ-60^\circ=45^\circ$.

b) Do BD là tia phân giác góc ABC nên $\widehat{ABD}=\widehat{DBC}=\dfrac{1}{2}\widehat{ABC}=\dfrac{1}{2}.60^\circ=30^\circ$.

Xét ΔBCD có $\widehat{ADB}$ là góc ngoài đỉnh D nên $\widehat{ADB}=\widehat{DBC}+\widehat{DCB}=30^\circ+45^\circ=75^\circ$.

Bài 9:

Cho tam giác ABC có AD, BE lần lượt là tia phân giác trong các góc A, B $(D\in BC;\ E\in CA)$ Biết AD cắt BE tại K và $\widehat{AKB}=110^\circ,\ \widehat{KAC}=30^\circ$. Tính số đo các góc A, B, C của tam giác ABC.



Lời giải

Ta có $\widehat{KAC}=30^\circ$

Do AK là phân giác của $\widehat{BAC}$ nên $\widehat{KAB}=\widehat{KAC}=30^\circ$ và $\widehat{BAC}=2.\widehat{KAC}=2.30^\circ=60^\circ$.

Xét ΔABK có

$\widehat{KAB}+\widehat{KBA}+\widehat{AKB}=180^\circ \Rightarrow 30^\circ+\widehat{KBA}+110^\circ=180^\circ \Rightarrow \widehat{KBA}=180^\circ-(30^\circ+110^\circ)=40^\circ$

Mà BK là phân giác của $\widehat{ABC}$ nên $\widehat{ABC}=2.\widehat{ABK}=2.40^\circ=80^\circ$.

Xét ΔABC có $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ \Rightarrow 60^\circ+80^\circ+\widehat{C}=180^\circ \Rightarrow \widehat{C}=180^\circ-(60^\circ+80^\circ)=40^\circ$.

Vậy ΔABC có $\widehat{A}=60^\circ,\ \widehat{B}=80^\circ,\ \widehat{C}=40^\circ$.

Bài 10:

Cho tam giác *ABC*. Tính số đo các góc còn lại của tam giác biết

A. $\widehat{A}=96^\circ$ và $\widehat{C}=32^\circ$.

B. $\widehat{A}:\widehat{B}:\widehat{C}=2:7:1$.

C. $\widehat{B}=75^\circ$ và $\widehat{A}:\widehat{C}=3:2$

Lời giải

Xét ΔABC có $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ$.

a) Có $\widehat{A}=96^\circ, \widehat{C}=32^\circ$ nên $\widehat{B}=180^\circ-\left(\widehat{A}+\widehat{C}\right)=180^\circ-\left(96^\circ+32^\circ\right)=52^\circ$.

b) Theo giả thiết $\widehat{A}:\widehat{B}:\widehat{C}=2:7:1 \Rightarrow \frac{\widehat{A}}{2}=\frac{\widehat{B}}{7}=\frac{\widehat{C}}{1}$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{\widehat{A}}{2}=\frac{\widehat{B}}{7}=\frac{\widehat{C}}{1}=\frac{\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}}{2+7+1}=\frac{180^\circ}{10}=18^\circ$

Suy ra $\widehat{A}=2.18^\circ=36^\circ; \widehat{B}=7.18^\circ=126^\circ; \widehat{C}=1.18^\circ=18^\circ$.

c) Do $\widehat{B}=75^\circ$ nên ta có $\widehat{A}+\widehat{C}=180^\circ-75^\circ=105^\circ$.

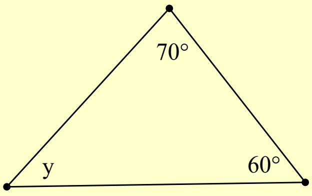
Từ giả thiết $\widehat{A}:\widehat{C}=3:2 \Rightarrow \frac{\widehat{A}}{3}=\frac{\widehat{C}}{2}$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{\widehat{A}}{3}=\frac{\widehat{C}}{2}=\frac{\widehat{A}+\widehat{C}}{3+2}=\frac{105^\circ}{5}=21^\circ$

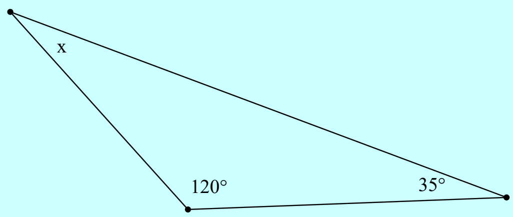
Suy ra $\widehat{A}=3.21^\circ=63^\circ; \widehat{C}=2.21^\circ=42^\circ$.

Bài 11:

Tính số đo x, y trong hình vẽ dưới đây



Hình 2



Hình 1

Lời giải

Hình 1:

Ta có: $x+120^\circ+35^\circ=180^\circ$ (định lý tổng ba góc trong một tam giác)

$\Rightarrow x=180^\circ-120^\circ-35^\circ \Rightarrow x=25^\circ$. Vậy $x=25^\circ$

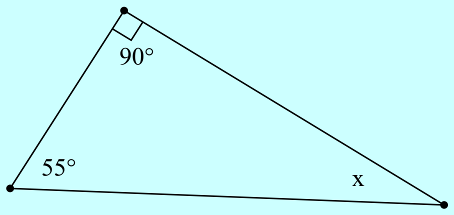
Hình 2:

Ta có: $y+70^\circ+60^\circ=180^\circ$ (định lý tổng ba góc trong một tam giác)

$\Rightarrow y=180^\circ-70^\circ-60^\circ \Rightarrow y=50^\circ$. Vậy $y=50^\circ$

Bài 12:

Tính số đo x trong hình vẽ dưới đây



Lời giải

Cách 1:

Ta có: $x+90^\circ+55^\circ=180^\circ$ (định lý tổng ba góc trong một tam giác)

$\Rightarrow x=180^\circ-90^\circ-55^\circ \Rightarrow x=35^\circ$. Vậy $x=35^\circ$

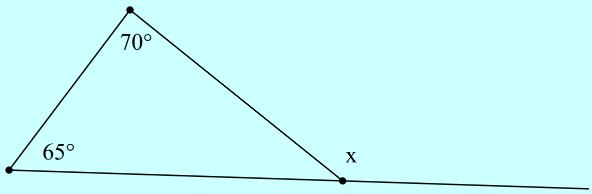
Cách 2:

Ta có $x+55^\circ=90^\circ$ (trong tam giác vuông hai góc nhọn phụ nhau)

$\Rightarrow x=90^\circ-55^\circ \Rightarrow x=35^\circ$. Vậy $x=35^\circ$

Bài 13:

Tính số đo x trong hình vẽ dưới đây



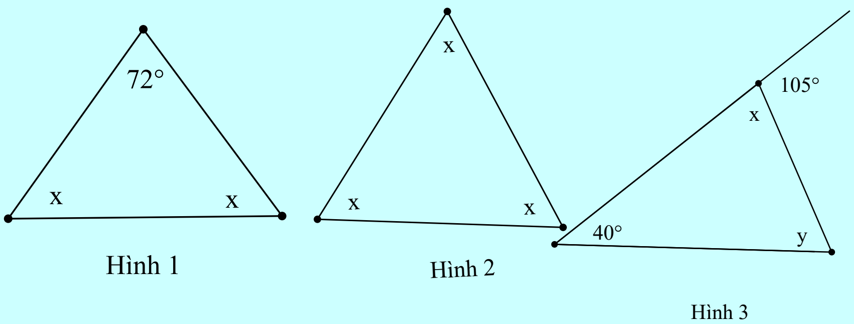
Lời giải

Ta có: $x=70^\circ+65^\circ$ (góc ngoài của tam giác bằng tổng hai góc trong không kề với nó)

$\Rightarrow x=135^\circ$. Vậy $x=135^\circ$

Bài 14:

Tính số đo x,y trong hình vẽ dưới đây



Lời giải

Hình 1:

Ta có: $x + x + 72° = 180°$ (định lý tổng ba góc trong một tam giác)

$\Rightarrow 2x = 180° - 72° \Rightarrow 2x = 108° \Rightarrow x = 54°$. Vậy $x = 54°$

Hình 2:

Ta có: $x + x + x = 180°$ (định lý tổng ba góc trong một tam giác)

$\Rightarrow 3x = 180° \Rightarrow x = 60°$. Vậy $x = 60°$

Hình 3:

Ta có: $x = 180° - 105°$ (hai góc kề bù)

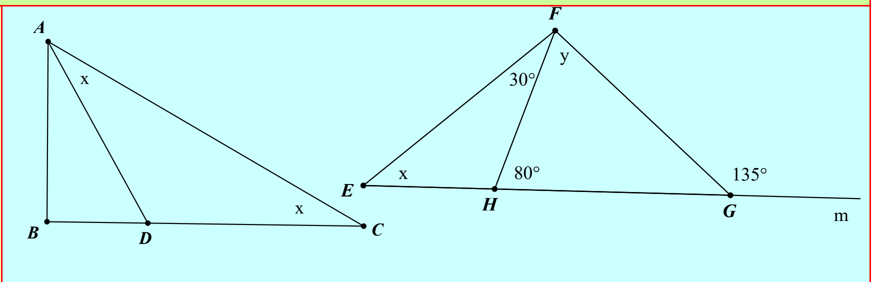
$\Rightarrow x = 75°$. Vậy $x = 75°$

Ta có: $y + 40° + 72° = 180°$ (định lý tổng ba góc trong một tam giác)

$\Rightarrow y = 180° - 70° - 40° \Rightarrow y = 65°$. Vậy $y = 65°$

Bài 15:

Tính số đo x, y trong hình vẽ sau: Biết $\widehat{BAD} = 22°$ và $\widehat{ABD} = 90°$,



Lời giải

Hình 1

Xét ΔABD có $\widehat{ABD} = 90°$, $\widehat{BAD} + \widehat{ADB} = 90°$ (tính chất tam giác vuông)

$22° + \widehat{ADB} = 90° \Rightarrow \widehat{ADB} = 90° - 22° \Rightarrow \widehat{ADB} = 68°$

Ta lại có $\widehat{ADC} + \widehat{ADB} = 180° \Rightarrow \widehat{ADC} = 112°$.

Trong ΔADC ta có $\widehat{ADC} + \widehat{DAC} + \widehat{ACD} = 180°$.

Mà $\widehat{DAC} = \widehat{ACD} = x \Rightarrow 112° + 2x = 180° \Rightarrow x = 34°$.

Hình 2

Ta có $\widehat{EHF} + \widehat{FHG} = 180°$ (hai góc kề bù).

$\widehat{EHF} + 80° = 180° \Rightarrow \widehat{EHF} = 180° - 80° \Rightarrow \widehat{EHF} = 100°$

Xét ΔEHF có:

$\widehat{EHF} + \widehat{FEH} + \widehat{EFH} = 180°$ (định lý tổng ba góc trong một tam giác)

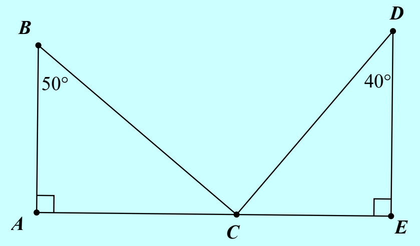
$100° + \widehat{FEH} + 30° = 180° \Rightarrow \widehat{FEH} = 50° \Rightarrow x = 50°$

Ta lại có $y + 80° = \widehat{FGm}$ (góc ngoài của tam giác).

$y+80^\circ=135^\circ \Rightarrow y=135^\circ-80^\circ \Rightarrow y=55^\circ$

Bài 16:

Cho hình vẽ. Chứng minh rằng: $BC \perp CD$



Lời giải

Xét ΔABC có $\widehat{BAC}=90^\circ$,

$\widehat{ABC}+\widehat{ACB}=90^\circ$ (tính chất tam giác vuông)

$50^\circ+\widehat{ACB}=90^\circ \Rightarrow \widehat{ACB}=90^\circ-50^\circ \Rightarrow \widehat{ACB}=40^\circ$

Xét ΔDEC có $\widehat{DEC}=90^\circ$.

$\widehat{CDE}+\widehat{DCE}=90^\circ$ (tính chất tam giác vuông)

$40^\circ+\widehat{DCE}=90^\circ \Rightarrow \widehat{DCE}=90^\circ-40^\circ \Rightarrow \widehat{DCE}=50^\circ$

Lại có $\widehat{ACE}=\widehat{ACB}+\widehat{BCD}+\widehat{DCE}$

Mặt khác $\widehat{ACE}=180^o \Rightarrow 180^o=40^o+50^o+\widehat{BCD} \Rightarrow \widehat{BCD}=90^o$

Hay $BC \perp CD$

Bài 17:

Tính các góc của ΔABC, biết: $\widehat{A}-\widehat{B}=18^\circ$ và $\widehat{B}-\widehat{C}=18^\circ$

Lời giải

Xét ΔABC có $\widehat{B}-\widehat{C}=18^\circ \Rightarrow \widehat{B}=18^\circ+\widehat{C}$.

Mà $\widehat{A}-\widehat{B}=18^\circ \Rightarrow \widehat{A}-\left(18^\circ+\widehat{C}\right)=18^\circ \Rightarrow \widehat{A}-\widehat{C}=36^\circ \Rightarrow \widehat{A}=36^\circ+\widehat{C}$

Lại có: $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ \Rightarrow 36^\circ+\widehat{C}+18^\circ+\widehat{C}+\widehat{C}=180^\circ \Rightarrow 3\widehat{C}=126^\circ \Rightarrow \widehat{C}=42^\circ$

$\Rightarrow \widehat{B}=18^\circ+42^\circ \Rightarrow \widehat{B}=60^\circ \Rightarrow \widehat{A}=78^\circ$

Bài 18:

Tính các góc của tam giác ABC biết:

a) $\dfrac{\widehat{A}}{3}=\dfrac{\widehat{B}}{4}=\dfrac{\widehat{C}}{5}$. b) $\widehat{A}=2\widehat{B}=6\widehat{C}$.

Lời giải

a) $\dfrac{\widehat{A}}{3}=\dfrac{\widehat{B}}{4}=\dfrac{\widehat{C}}{5}$.

Ta có $\dfrac{\widehat{A}}{3}=\dfrac{\widehat{B}}{4}=\dfrac{\widehat{C}}{5}\Leftrightarrow \widehat{A}=\dfrac{3}{4}\widehat{B},\ \widehat{C}=\dfrac{5}{4}\widehat{B}$.

Mà $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ \Leftrightarrow \dfrac{3}{4}\widehat{B}+\widehat{B}+\dfrac{5}{4}\widehat{B}=180^\circ \Leftrightarrow \widehat{B}=60^\circ \Rightarrow \widehat{A}=45^\circ,\ \widehat{C}=75^\circ$.

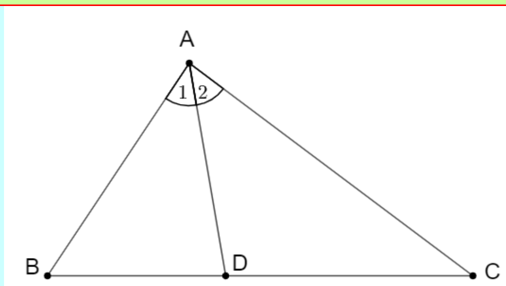
b) $\widehat{A}=2\widehat{B}=6\widehat{C}$.

Ta có $\widehat{A}=2\widehat{B}=6\widehat{C}\Rightarrow \widehat{A}=6\widehat{C},\ \widehat{B}=3\widehat{C}$

Mà $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ \Leftrightarrow 6\widehat{C}+3\widehat{C}+\widehat{C}=180^\circ \Leftrightarrow \widehat{C}=18^\circ \Rightarrow \widehat{A}=108^\circ,\ \widehat{B}=54^\circ$.

Bài 19:

Cho tam giác ABC, tia phân giác AD của góc A cắt BC tại D. Tính góc ADB biết $\widehat{B}-\widehat{C}=40^0$.



Lời giải

Ta có $\widehat{BAC}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^0$ (định lý tổng 3 góc của một tam giác)

$\Rightarrow \widehat{BAC}=180^0-\widehat{B}-\widehat{C}$

Vì AD là tia phân giác của góc BAC nên $\widehat{A_1}=\widehat{A_2}=\dfrac{1}{2}\widehat{A}=\dfrac{1}{2}\left(180^0-\widehat{B}-\widehat{C}\right)=90^0-\dfrac{1}{2}\widehat{B}-\dfrac{1}{2}\widehat{C}$.

Ta lại có $\widehat{A_1}+\widehat{B}+\widehat{ADB}=180^0$ (định lý tổng 3 góc của một tam giác)

$\Rightarrow \widehat{ADB}=180^0-\widehat{A_1}-\widehat{B}=180^0-\left(90^0-\dfrac{1}{2}\widehat{B}-\dfrac{1}{2}\widehat{C}\right)-\widehat{B}=90^0-\dfrac{1}{2}\left(\widehat{B}-\widehat{C}\right)=90^0-\dfrac{1}{2}.40^0=70^0$.

Bài 20:

Cho ΔMNP. Tính các góc của tam giác biết

a) $\dfrac{\widehat{M}}{3}=\dfrac{\widehat{N}}{2}=\dfrac{\widehat{P}}{4}$.

b) $\widehat{N}=2\widehat{M};\widehat{P}-\widehat{M}=36^\circ$.

Lời giải

a) Áp dụng định lí tổng 3 góc trong một tam giác ta có:

$\widehat{M}+\widehat{N}+\widehat{P}=180^\circ$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta được:

$\frac{\widehat{M}}{3}=\frac{\widehat{N}}{2}=\frac{\widehat{P}}{4}=\frac{\widehat{M}+\widehat{N}+\widehat{P}}{3+2+4}=\frac{180^\circ}{9}=20^\circ$

$\frac{\widehat{M}}{3}=20^\circ \Rightarrow \widehat{M}=60^\circ;$

$\frac{\widehat{N}}{2}=20^\circ \Rightarrow \widehat{N}=40^\circ;$

$\frac{\widehat{P}}{4}=20^\circ \Rightarrow \widehat{P}=80^\circ.$

b) Ta có $\widehat{N}=2\widehat{M};\widehat{P}-\widehat{M}=36^\circ$

$\widehat{N}=2\widehat{M};\widehat{P}=\widehat{M}+36^\circ$

Áp dụng định lí tổng 3 góc trong một tam giác ta có:

$\widehat{M}+\widehat{N}+\widehat{P}=180^\circ$

$\Leftrightarrow \widehat{M}+2\widehat{M}+\widehat{M}+36^\circ=180^\circ$

$\Leftrightarrow 4\widehat{M}+36^\circ=180^\circ$

$\Leftrightarrow 4\widehat{M}=144^\circ$

$\Leftrightarrow \widehat{M}=36^\circ$

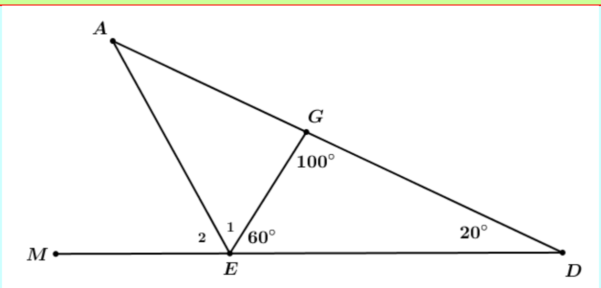
$\Rightarrow \widehat{N}=2\widehat{M}=2.36^\circ=72^\circ;\widehat{P}=36^\circ+36^\circ=72^\circ$

Bài 21:

Cho ΔDEG biết $\widehat{D}:\widehat{E}:\widehat{G}=1:3:5$.

a) Tính các góc của tam giác ΔDEG.

b) Tia phân giác ngoài tại E cắt DG tại A. Tính $\widehat{DAE}$.



Lời giải

a) Từ $\widehat{D}:\widehat{E}:\widehat{G}=1:3:5$ suy ra:

$\frac{\widehat{D}}{1}=\frac{\widehat{E}}{3}=\frac{\widehat{G}}{5}$ mà $\widehat{D}+\widehat{E}+\widehat{G}=180^\circ$ (tổng 3 góc trong một tam giác)

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta được:

$\frac{\widehat{D}}{1}=\frac{\widehat{E}}{3}=\frac{\widehat{G}}{5}=\frac{\widehat{D}+\widehat{E}+\widehat{G}}{1+3+5}=\frac{180^\circ}{9}=20^\circ$

$\dfrac{\widehat{D}}{1} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{D} = 20^\circ$

$\dfrac{\widehat{E}}{3} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{E} = 60^\circ$

$\dfrac{\widehat{G}}{5} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{G} = 100^\circ$.

b) Ta có $\widehat{MEG} + \widehat{GED} = 180^\circ$

$\Leftrightarrow \widehat{MEG} + 60^\circ = 180^\circ$

$\Leftrightarrow \widehat{MEG} = 120^\circ$

$\Leftrightarrow \widehat{E_1} + \widehat{E_2} = 120^\circ$ (mà EA là phân giác ngoài tại E nên $\widehat{E_1} = \widehat{E_2}$)

$\Leftrightarrow 2\widehat{E_1} = 120^\circ$

$\Leftrightarrow \widehat{E_1} = \widehat{E_2} = 60^\circ$

Ta có $\widehat{E_2} = \widehat{A} + \widehat{D}$

$60^\circ = \widehat{A} + 20^\circ$

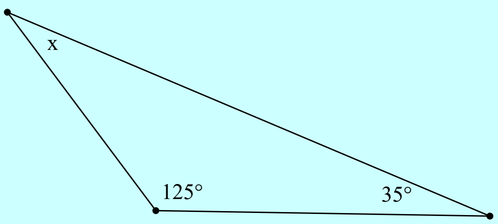
$\widehat{A} = 60^\circ - 20^\circ$

$\widehat{A} = 40^\circ$

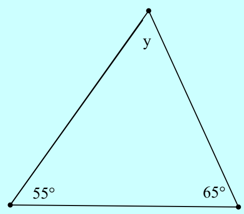
BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1:

Tính số đo x, y trong hình vẽ dưới đây



Hình 1



Hình 2

Lời giải

Xét H1:

Ta có: $x + 125^\circ + 35^\circ = 180^\circ$ (định lý tổng ba góc trong một tam giác)

$\Rightarrow x = 180^\circ - 125^\circ - 35^\circ \Rightarrow x = 20^\circ$. Vậy $x = 20^\circ$

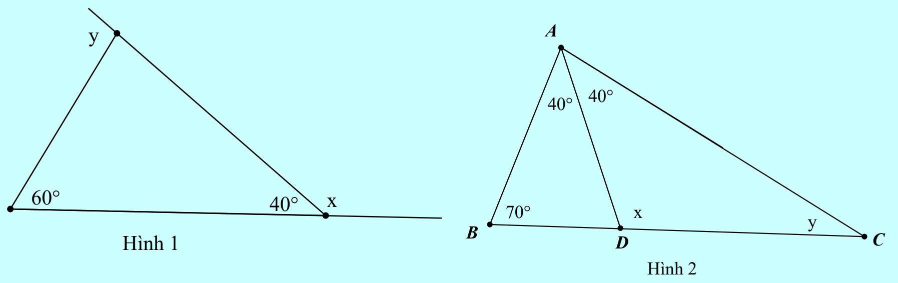
Xét H2:

Ta có: $y + 55^\circ + 65^\circ = 180^\circ$ (định lý tổng ba góc trong một tam giác)

$\Rightarrow y = 180^\circ - 55^\circ - 65^\circ \Rightarrow y = 60^\circ$. Vậy $y = 60^\circ$

Bài 2:

Tính số đo x, y trong hình vẽ dưới đây



Lời giải

Hình 1:

Ta có: $x = 180 - 40°$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow x = 140°$.

Vậy $x = 140°$

Ta có: $y = 60° + 40°$ (góc ngoài của tam giác bằng tổng hai góc trong không kề với nó)

$\Rightarrow y = 100°$.

Vậy $y = 100°$

Hình 2:

Ta có: $x = 70° + 40°$ (góc ngoài của tam giác bằng tổng hai góc trong không kề với nó)

$\Rightarrow x = 110°$.

Vậy $x = 110°$

Ta có: $y + 110° + 40° = 180°$ (định lý tổng ba góc trong một tam giác)

$\Rightarrow y = 180° - 110° - 40° \Rightarrow y = 30°$.

Vậy $y = 30°$

Bài 3:

Cho ΔMNP. Tính các góc của tam giác biết

a) $5\widehat{M} = 3\widehat{N}; 7\widehat{M} - 4\widehat{N} = 15°$.

b) $\widehat{M} + \widehat{N} = \widehat{P}; 2\widehat{M} = 3\widehat{N}$

Lời giải

a) $5\widehat{M} = 3\widehat{N} \Rightarrow \dfrac{\widehat{M}}{3} = \dfrac{\widehat{N}}{5} \Rightarrow \dfrac{7\widehat{M}}{21} = \dfrac{4\widehat{N}}{20}$, áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta được:

$$\frac{7\widehat{M}}{21} = \frac{4\widehat{N}}{20} = \frac{7\widehat{M} - 4\widehat{N}}{21 - 20} = \frac{15°}{1} = 15°$$

$$\frac{7\widehat{M}}{21} = 15° \Rightarrow \widehat{M} = 45°$$

$$\frac{4\widehat{N}}{20} = 15° \Rightarrow \widehat{N} = 75°$$

- Xét ΔMNP, áp dụng định lý tổng 3 góc trong một tam giác ta được :

$\widehat{M}+\widehat{N}+\widehat{P}=180^\circ$

$\Leftrightarrow 45^\circ+75^\circ+\widehat{P}=180^\circ$

$\Leftrightarrow 120^\circ+\widehat{P}=180^\circ$

$\widehat{P}=60^\circ$

b) $\widehat{M}+\widehat{N}=\widehat{P}; 2\widehat{M}=3\widehat{N}$

- Xét ΔMNP, áp dụng định lý tổng 3 góc trong một tam giác ta được:

$\widehat{M}+\widehat{N}+\widehat{P}=180^\circ$

$\Leftrightarrow \widehat{P}+\widehat{P}=180^\circ$

$\Leftrightarrow 2\widehat{P}=180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{P}=90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{M}+\widehat{N}=90^\circ$

Ta có: $2\widehat{M}=3\widehat{N} \Rightarrow \frac{\widehat{M}}{3}=\frac{\widehat{N}}{2}$, áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta được:

$\frac{\widehat{M}}{3}=\frac{\widehat{N}}{2}=\frac{\widehat{M}+\widehat{N}}{3+2}=\frac{90^\circ}{5}=18^\circ$

$\frac{\widehat{M}}{3}=18^\circ \Rightarrow \widehat{M}=54^\circ$

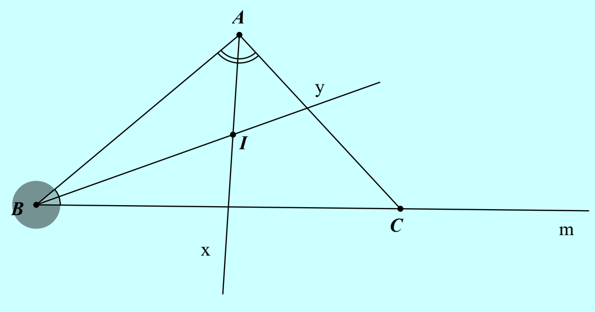
$\frac{\widehat{N}}{2}=18^\circ \Rightarrow \widehat{N}=36^\circ$

Bài 4:

Cho tam giác ABC có góc ngoài tại đỉnh C có số đo bằng 120° và $2\widehat{A}=3\widehat{B}$.

a) Tính các góc A, B, C.

b) Hai tia phân giác của góc A và B cắt nhau tại I. Tính góc $\widehat{BIA}$.



Lời giải

a) Tính các góc A, B, C.

Ta có góc ngoài tại đỉnh C có số đo bằng 120° nên $\widehat{ACm}=120^\circ \Rightarrow \widehat{ACB}=60^\circ \Rightarrow \widehat{C}=60^\circ$.

Ta lại có $2\widehat{A}=3\widehat{B} \Rightarrow \widehat{A}=\frac{3}{2}\widehat{B}$.

Mà $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ \Rightarrow \frac{3}{2}\widehat{B}+\widehat{B}+60^\circ=180^\circ \Rightarrow \widehat{B}=48^\circ \Rightarrow \widehat{A}=72^\circ$.

b) Hai tia phân giác của góc A và B cắt nhau tại I. Tính góc $\widehat{BIA}$.

Do tia Ax là tia phân giác của góc $\widehat{A}$ $\Rightarrow \widehat{BAx}=\frac{1}{2}\widehat{A}=36^\circ \Rightarrow \widehat{BAI}=36^\circ$

Do tia By là tia phân giác của góc $\widehat{B}$ $\Rightarrow \widehat{ABx}=\frac{1}{2}\widehat{B}=24^\circ \Rightarrow \widehat{ABI}=24^\circ$.

Ta lại có $\widehat{ABI}+\widehat{BAI}+\widehat{AIB}=180^\circ \Rightarrow \widehat{AIB}=180^\circ-36^\circ-24^\circ=120^\circ$.

Dạng 2: Các bài toán chứng minh góc

Phương pháp giải:

Sử dụng linh hoạt các tính chất về góc của một tam giác, góc ngoài tại một đỉnh hay tính chất tia phân giác của góc

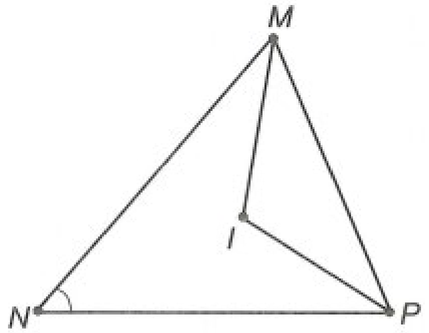
Bước 1. Áp dụng tính chất tổng ba góc trong tam giác, tính góc trong yêu cầu của bài toán.

Bước 2. Kết hợp tính chất đường phân giác để chứng minh hệ thức.

Ví dụ: Cho tam giác MNP. Các đường phân giác trong các góc M, P cắt nhau tại I.

Chứng minh rằng: $\widehat{MIP} = 90° + \frac{\widehat{MNP}}{2}$

Hướng dẫn giải



Xét ΔMIP có $\widehat{MIP} + \widehat{IMP} + \widehat{IPM} = 180°$

$\Rightarrow \widehat{MIP} = 180° - \left(\widehat{IMP} + \widehat{IPM}\right)$

Lại có:

$\widehat{IMP} = \frac{1}{2}\widehat{NMP}$ (do MI là phân giác của $\widehat{NMP}$).

$\widehat{IPM} = \frac{1}{2}\widehat{NPM}$ (do PI là phân giác của $\widehat{NPM}$).

Suy ra $\widehat{MIP} = 180° - \frac{1}{2}.\left(\widehat{NMP} + \widehat{NPM}\right)$. (1)

Mặt khác, xét ΔMNP có

$\widehat{MNP} + \widehat{NMP} + \widehat{NPM} = 180°$

$\Rightarrow \widehat{NMP} + \widehat{NPM} = 180° - \widehat{MNP}$ (2)

Thế (2) vào (1), ta được

$\widehat{MIP} = 180° - \frac{1}{2}.\left(180° - \widehat{MNP}\right)$

$\Rightarrow \widehat{MIP} = 180° - 90 + \frac{1}{2}.\widehat{MNP}$

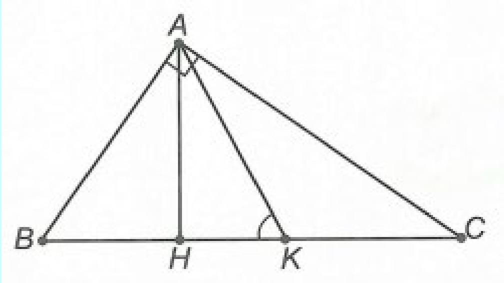
$\Rightarrow \widehat{MIP} = 90° + \frac{\widehat{MNP}}{2}$ (điều phải chứng minh)

Bài 1:

Cho tam giác ABC vuông tại A và $AH \perp BC\left(H \in BC\right)$.

a) Chứng minh $\widehat{BAH} = \widehat{BCA}$.

b) Tia phân giác của $\widehat{CAH}$ cắt CH tại K. Chứng minh $\widehat{AKB} = \widehat{BAK}$



Lời giải

a) Xét ΔABC có $\widehat{BAC} = 90° \Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90°$.

Xét ΔABH có $\widehat{AHB} = 90° \Rightarrow \widehat{ABH} + \widehat{BAH} = 90°$.

Suy ra $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = \widehat{ABH} + \widehat{BAH}\left(= 90°\right)$

$\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{BAH}$ (điều phải chứng minh).

b) Ta có AK là tia phân giác của $\widehat{CAH}$ nên $\widehat{CAK} = \widehat{KAH} = \frac{1}{2}\widehat{CAH}$.

Mà $\widehat{ACB} = \widehat{BAH}$ (chứng minh câu a) nên suy ra

$\widehat{ACB} + \widehat{CAK} = \widehat{BAH} + \widehat{KAH}$

$\Rightarrow \widehat{ACB} + \widehat{CAK} = \widehat{BAK}$ (1).

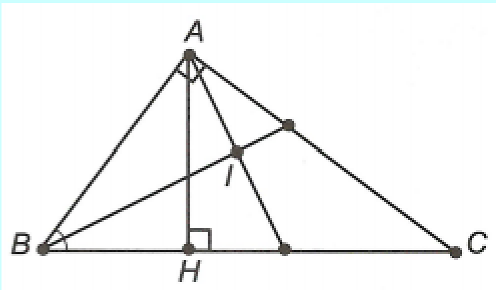
Mặt khác $\widehat{AKB}$ là góc ngoài đỉnh K của ΔAKC nên

$\widehat{AKB} = \widehat{ACK} + \widehat{CAK}$ hay $\widehat{AKB} = \widehat{ACB} + \widehat{CAK}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{AKB} = \widehat{BAK}$ (điều phải chứng minh)

Bài 2:

Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ AH vuông góc với BC $\left(H \in BC\right)$. Các tia phân giác góc ABC và góc HAC cắt nhau tại I. Chứng minh rằng $\widehat{AIB} = 90°$.



Lời giải

Xét ΔABC vuông tại A có $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90°$. (1)

Xét ΔAHC vuông tại H có $\widehat{HAC} + \widehat{ACH} = 90°$. (2)

Từ (1) và (2), ta có $\widehat{HAC} + \widehat{ACH} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB}\left(= 90°\right) \Rightarrow \widehat{HAC} = \widehat{ABC}$.

Lại có $\widehat{ABI}=\frac{1}{2}\widehat{ABC}$ (do BI là phân giác của $\widehat{ABC}$); $\widehat{HAI}=\frac{1}{2}\widehat{HAC}$ (do AI là phân giác của $\widehat{HAC}$

Suy ra $\widehat{ABI}+\widehat{HAI}=\frac{1}{2}\widehat{ABC}+\frac{1}{2}\widehat{HAC}=\widehat{HAC}$ (do $\widehat{HAC}=\widehat{ABC}$).

Xét ΔABI có: $\widehat{ABI}+\widehat{IAB}=\widehat{ABI}+\widehat{IAH}+\widehat{HAB}=\widehat{HAC}+\widehat{HAB}=\widehat{BAC}=90°$.

Mà $\widehat{ABI}+\widehat{IAB}+\widehat{AIB}=180°$.

Suy ra $\widehat{AIB}=180°-\left(\widehat{ABI}+\widehat{IAB}\right)=180°-90°=90°$ (điều phải chứng minh).

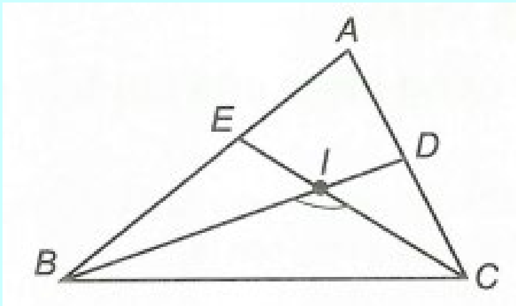
Bài 3:

Cho tam giác ABC có BD, CE lần lượt là tia phân giác các góc B, C. Gọi I là giao điểm của BD và CE.

a) Chứng minh rằng $\widehat{BIC}=90°+\frac{\widehat{A}}{2}$.

b) Biết $\widehat{BAC}=60°$. Tính số đo của $\widehat{BIE}$.

c) Tính số đo của $\widehat{BIC}$ biết số đo góc $\widehat{BAC}$ là trung bình cộng của hai góc $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$.



Lời giải

a) Ta có $\widehat{IBA}=\widehat{IBC}=\frac{1}{2}\widehat{B}$ (do BI là tia phân giác $\widehat{B}$), $\widehat{ICA}=\widehat{ICB}=\frac{1}{2}\widehat{C}$ (do CI là tia phân giác $\widehat{C}$).

Xét ΔIBC có $\widehat{BIC}+\widehat{IBC}+\widehat{ICB}=180°$.

Suy ra $\widehat{BIC}=180°-\left(\widehat{IBC}+\widehat{ICB}\right)=180°-\left(\frac{1}{2}\widehat{B}+\frac{1}{2}\widehat{C}\right)=180°-\frac{1}{2}\left(\widehat{B}+\widehat{C}\right)$ (1)

Xét ΔABC có $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180° \Rightarrow \widehat{B}+\widehat{C}=180°-\widehat{A}$ (2)

Thế (2) vào (1) ta có:

$\widehat{BIC}=180-\frac{1}{2}\left(180°-\widehat{A}\right)=180°-90°+\frac{1}{2}\widehat{A}=90°+\frac{1}{2}\widehat{A}$ (điều phải chứng minh).

b) Từ chứng minh câu a, ta có: $\widehat{BIC}=90°+\frac{1}{2}\widehat{BAC}=90°+\frac{1}{2}.60°=120°$.

Mà ta có $\widehat{BIE}+\widehat{BIC}=180°$ (hai góc kề bù). Suy ra $\widehat{BIE}=180°-\widehat{BIC}=180°-120°=60°$.

c) Do $\widehat{BAC}$ có số đo là trung bình cộng số đo của $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACB}$ nên

$\widehat{BAC}=\frac{1}{2}\left(\widehat{ABC}+\widehat{ACB}\right)$ hay $\widehat{B}+\widehat{C}=2.\widehat{A}$

Mà $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ$ nên $3.\widehat{A}=180^\circ \Rightarrow \widehat{A}=\frac{180^\circ}{3}=60^\circ$.

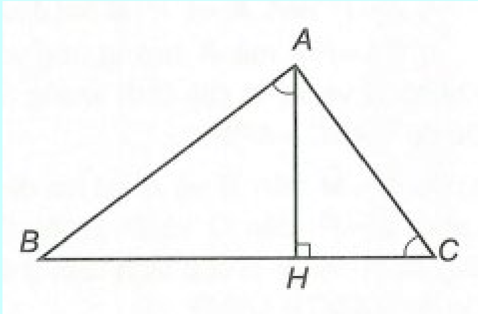
Áp dụng chứng minh ở ý a ta có: $\widehat{BIC}=90^\circ+\frac{\widehat{A}}{2}=90^\circ+\frac{60^\circ}{2}=120^\circ$.

Bài 4:

Cho tam giác ABC và đường cao AH $\left(H\in BC\right)$. Biết rằng $\widehat{BAH}=\widehat{BCA}$.

a) Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác vuông.

b) Biết rằng số đo góc $\widehat{ABC}$ bằng trung bình cộng của hai góc $\widehat{BAC}$, $\widehat{ACB}$. Tính số đo các góc của tam giác ABC.



Lời giải

a) Xét ΔAHC vuông tại H có $\widehat{HAC}+\widehat{HCA}=90^\circ$ (1)

Theo giả thiết, ta có $\widehat{BAH}=\widehat{BCA}$ hya $\widehat{HAB}=\widehat{HCA}$

Theo (1), ta có: $\widehat{HAC}+\widehat{HAB}=90^\circ \Rightarrow \widehat{BAC}=90^\circ \Rightarrow AB\perp AC$.

Vậy tam giác ABC vuông tại A.

b) Do số đo góc $\widehat{ABC}$ bằng trung bình cộng của hai góc $\widehat{BAC}$, $\widehat{ACB}$ nên ta có

$\widehat{ABC}=\frac{\widehat{A}+\widehat{C}}{2}=\frac{90^\circ+\widehat{C}}{2}$. (2)

Tam giác ABC vuông tại A nên $\widehat{B}+\widehat{C}=90^\circ \Rightarrow \widehat{B}=90^\circ-\widehat{C}$. (3)

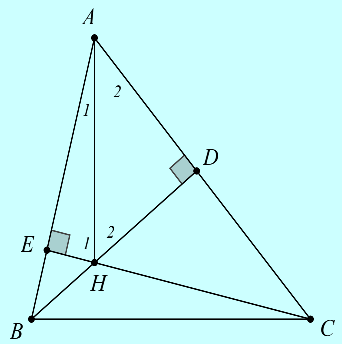
Từ (2) và (3) ta có: $\frac{90^\circ+\widehat{C}}{2}=90^\circ-\widehat{C}$.

Giải phương trình ta tìm được $\widehat{C}=30^\circ$. Khi đó, ta có $\widehat{B}=90^\circ-\widehat{C}=90^\circ-30^\circ=60^\circ$.

Vậy ΔABC có $\widehat{A}=90^\circ;\ \widehat{B}=60^\circ;\ \widehat{C}=30^\circ$.

Bài 5:

Cho ΔABC có $\widehat{B},\ \widehat{C} < 90°$. Kẻ BD vuông góc với AC ($D \in AC$). Kẻ CE vuông góc với AB $(E \in AB)$. Gọi H là giao điểm của BD và CE. Chứng minh: $\widehat{A} + \widehat{DHE} = 180^o$.



Lời giải

Trong ΔAEH vuông tại E, ta có: $\widehat{A_1} + \widehat{H_1} = 90°$ (hai góc phụ nhau) (1)

Trong ΔADH vuông tại D, ta có: $\widehat{A_2} + \widehat{H_2} = 90°$ (hai góc phụ nhau) (2)

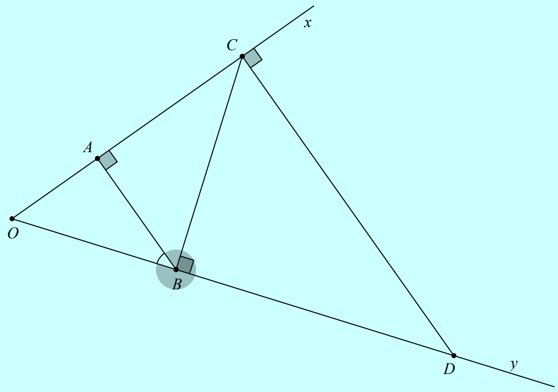
Cộng (1) với (2) vế theo vế, ta có: $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{H_1} + \widehat{H_2} = 90° + 90°$

Suy ra $\widehat{A} + \widehat{EHD} = 180°$

Bài 6:

Cho góc xOy, điểm A thuộc tia Ox. Kẻ AB vuông góc với Ox ($B \in Oy$), kẻ BC vuông góc với Oy ($C \in Ox$), kẻ CD vuông góc với Ox ($D \in Oy$).

Chứng minh: $\widehat{ABO} = \widehat{ACB}$ và $\widehat{ABO} = \widehat{CDO}$.



Lời giải

+ Ta có: $\widehat{ABO} = \widehat{ACB}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$)

+ Ta có: $\begin{cases} BA \perp Ox \\ DC \perp Ox \end{cases}$ (gt)

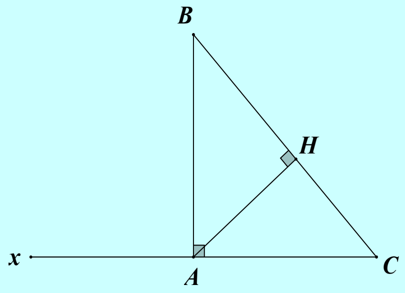
Suy ra $AB // CD$

Suy ra $\widehat{ABO} = \widehat{CDO}$ (đồng vị)

Bài 7:

Cho ΔABC vuông tại A. Vẽ AH vuông góc với BC tại H. Vẽ Ax là tia đối của tia AC. Chứng minh:

1. $\widehat{BAH} = \widehat{C}$
2. $\widehat{xAH}$ và $\widehat{B}$ bù nhau



Lời giải

1. Xét ΔABH, ta có $\widehat{BAH} + \widehat{ABH} = 90^{\circ}$.

Xét ΔABC, ta có $\widehat{BCA} + \widehat{ABC} = 90^{\circ}$.

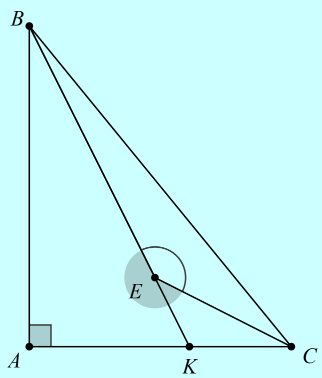
Mà $\widehat{ABH} = \widehat{ABC}$ nên $\widehat{BAH} = \widehat{BCA}$.

2. Tương tự câu a, ta có $\widehat{ABH} = \widehat{HAC}$

Mà $\widehat{xAH}$ kề bù với $\widehat{HAC}$ nên $\widehat{xAH}$ bù với $\widehat{ABH}$

Bài 8:

Cho ΔABC vuông tại A, điểm E nằm trong tam giác đó. Chứng minh $\widehat{BEC}$ là góc tù.



Lời giải

Gọi K là giao điểm của BE và AC

Xét ΔABK ta có: $\widehat{BKC} = \widehat{BAC} + \widehat{ABK}$ (1)

Xét ΔKEC ta có: $\widehat{BEC} = \widehat{BKC} + \widehat{KCE}$ (2)

Từ $(1);(2)$ suy ra: $\widehat{BEC} = \widehat{BKC} + \widehat{KCE} = \widehat{BAC} + \widehat{ABK} + \widehat{KCE}$

$\Rightarrow \widehat{BEC} > \widehat{BAC} = 90^{\circ} \Rightarrow \widehat{BEC}$ là góc tù.

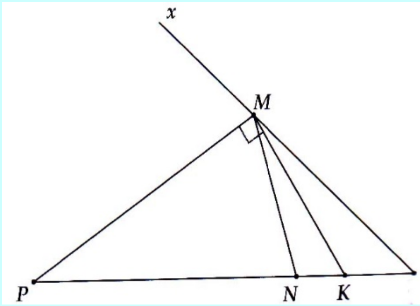
Bài 9:

Cho tam giác MNP có $\widehat{N} > \widehat{P}$ .Vẽ phân giác MK .

a) Chứng minh $\widehat{MKP} - \widehat{MKN} = \widehat{N} - \widehat{P}$

b) Đường thẳng chứa tia phân giác góc ngoài đỉnh M của tam giác MNP, cắt đường thẳng NP tại E.

Chứng minh rằng: $\widehat{MEP} = \dfrac{\widehat{N} - \widehat{P}}{2}$



Lời giải

a) Sử dụng tính chất góc ngoài.

Ta được:

$$\widehat{MKN} = \widehat{P} + \frac{\widehat{M}}{2}.\widehat{MKP} = \widehat{N} + \frac{\widehat{M}}{2}$$

$$\widehat{MKP} - \widehat{MKN} = \widehat{N} - \widehat{P}$$

b) Ta có

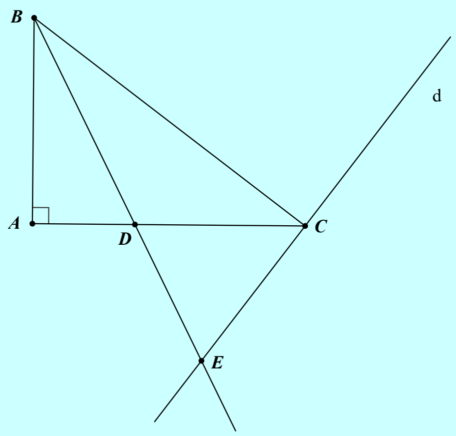
$$\widehat{MEP} = \widehat{MEx} - \widehat{MPE} = \frac{\widehat{NMx}}{2} - \widehat{P}$$

Mà $\widehat{NMx} = \widehat{N} + \widehat{P}$. Từ đó suy $\widehat{MEP} = \dfrac{\widehat{N} - \widehat{P}}{2}$

Bài 10:

Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi d là đườn thẳng vuông góc với BC tại C. Tia phân giác củ góc B cắt AC ở D và cắt d ở E.

Chứng minh rằng $\widehat{EDC} = \widehat{DEC}$



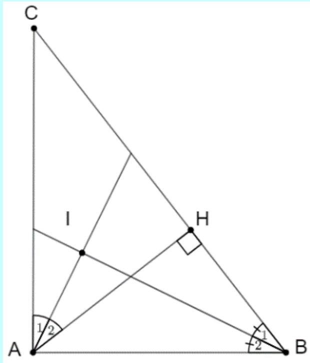
Lời giải

Ta có: $\widehat{CEB} = 90° - \dfrac{\widehat{B}}{2}; \widehat{EDC} = \widehat{ADB} = 90° - \dfrac{\widehat{B}}{2}$

Suy ra $\widehat{EDC} = \widehat{DEC}$.

Bài 11:

Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ AH vuông góc với BC tại H. Các tia phân giác của $\widehat{B}$ và $\widehat{HAC}$ cắt nhau tại I. Chứng minh rằng $\widehat{AIB} = 90^0$.



Lời giải

Ta có BI, AI lần lượt là tia phân giác của $\widehat{B}$ và $\widehat{HAC}$

Nên $\widehat{B_1} = \widehat{B_2} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$ và $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = \frac{1}{2}\widehat{HAC}$

Mà $\widehat{ABC} = \widehat{HAC}$ (cùng phụ với $\widehat{C}$) nên $\widehat{B_2} = \widehat{A_1}$

Xét tam giác AIB có:

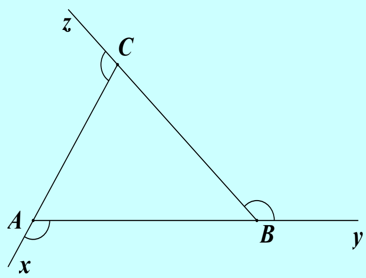
$\widehat{AIB} + \widehat{IAB} + \widehat{B_2} = 180°$ (định lý tổng 3 góc của một tam giác)

$\Rightarrow \widehat{AIB} = 180° - \left(\widehat{IAB} + \widehat{B_2}\right) = 180° - \left(\widehat{A_2} + \widehat{HAB} + \widehat{B_2}\right) = 180° - \left(\widehat{A_2} + \widehat{A_1} + \widehat{HAB}\right)$

$= 180^0 - \left(\widehat{HAC} + \widehat{HAB}\right) = 180° - \widehat{BAC} = 180° - 90° = 90°$.

Bài 12:

Chứng minh rằng: Tổng ba góc ngoài ở ba đỉnh của một tam giác bằng $360°$.



Lời giải

Giả sử : Xét ΔABC, cần chứng minh $\widehat{BAx} + \widehat{CBy} + \widehat{ACz} = 360°$

Ta có: $\widehat{BAx} = 180° - \widehat{BAC}$

$\widehat{CBy} = 180° - \widehat{ABC}$

$\widehat{ACz} = 180° - \widehat{BCA}$

Cộng vế theo vế ta có

$\widehat{BAx}+\widehat{CBy}+\widehat{ACz}=3.180^\circ-\left(\widehat{BAC}+\widehat{ABC}+\widehat{BCA}\right)$

Mà $\widehat{BAC}+\widehat{ABC}+\widehat{BCA}=180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BAx}+\widehat{CBy}+\widehat{ACz}=3.180^\circ-180^\circ=360^\circ$

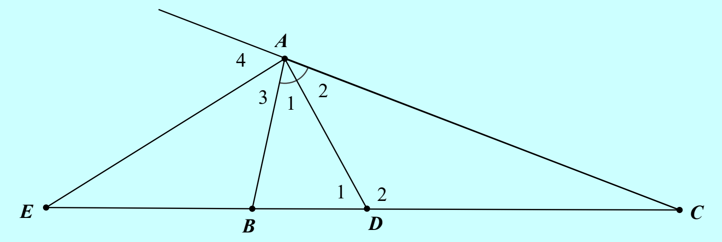
Cách khác: Dựa vào tính chất góc ngoài tam giác, tính số đo từng góc ngoài ΔABC và thực hiện tương tự.

Bài 13:

Tam giác ABC có $\widehat{B}>\widehat{C}$. Tia phân giác $\widehat{BAC}$ cắt BC tại D.

a) Chứng minh $\widehat{ADC}-\widehat{ADB}=\widehat{B}-\widehat{C}$.

b) Đường thẳng chứa tia phân giác góc ngoài ở đỉnh A của tam giác ABC cắt đường thẳng BC tại E. Chứng minh rằng $\widehat{AEB}=\dfrac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}$.



Lời giải

a) ΔABD có $\widehat{A_1}+\widehat{ABC}+\widehat{ADB}=180^\circ$;

ΔACD có $\widehat{A_2}+\widehat{C}+\widehat{ADC}=180^\circ$;

Mà $\widehat{A_1}=\widehat{A_2}$ nên $\widehat{C}+\widehat{ADC}=\widehat{B}+\widehat{ADB}\Rightarrow \widehat{ADC}-\widehat{ADB}=\widehat{B}-\widehat{C}$.

b) ΔABC có $\widehat{BAx}=\widehat{ABC}+\widehat{C}$ (góc ngoài tam giác)

$\Rightarrow \widehat{A_3}=\widehat{A_4}=\dfrac{1}{2}\widehat{BAx}=\dfrac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}$

ΔACE có: $\widehat{A_4}=\widehat{E}+\widehat{C}$ (góc ngoài)

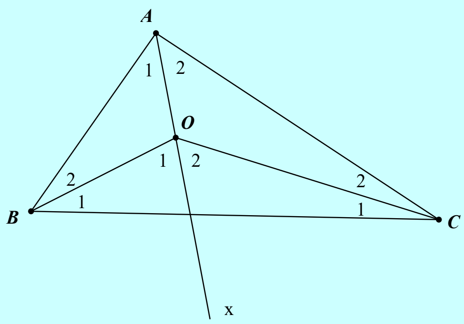
$\Rightarrow \widehat{E}=\widehat{A_4}-\widehat{C}\Rightarrow \widehat{AEB}=\dfrac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}-\widehat{C}$ hay $\widehat{AEB}=\dfrac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}$.

Bài 14:

Cho tam giác ABC, O là điểm nằm trong tam giác.

a) Chứng minh rằng $\widehat{BOC}=\widehat{A}+\widehat{ABO}+\widehat{ACO}$.

b) Biết $\widehat{ABO}+\widehat{ACO}=90^\circ-\dfrac{\widehat{A}}{2}$ và tia BO là tia phân giác của góc B. Chứng minh rằng tia CO là tia phân giác của góc C.



Lời giải

a) ΔABO có $\widehat{O_1} = \widehat{A_1} + \widehat{ABO}$ (góc ngoài tam giác).

ΔACO có $\widehat{O_2} = \widehat{A_2} + \widehat{ACO}$ (góc ngoài tam giác).

$\Rightarrow \widehat{O_1} + \widehat{O_2} = \widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{ABO} + \widehat{ACO}$ Hay $\widehat{BOC} = \widehat{A} + \widehat{ABO} + \widehat{ACO}$.

b) Từ $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 90° - \dfrac{\widehat{BAC}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{B_2} + \widehat{C_2} = \dfrac{180° - \widehat{A}}{2} \Rightarrow \widehat{B_2} + \widehat{C_2} = \dfrac{\widehat{ABC} + \widehat{ACB}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{B_2} + \widehat{C_2} = \dfrac{\widehat{ABC}}{2} + \dfrac{\widehat{ACB}}{2}$

mà BO là tia phân giác của $\widehat{ABC}$

nên $\widehat{B_1} = \dfrac{\widehat{ABC}}{2}$

suy ra $\widehat{C_2} = \dfrac{\widehat{ACB}}{2}$

Hay CO là tia phân giác của góc $\widehat{ACB}$.

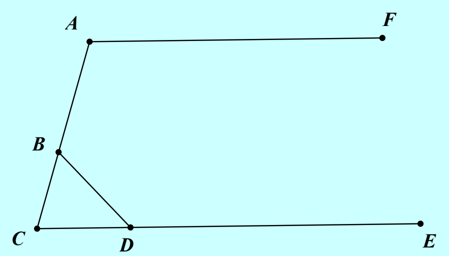
BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1:

Cho hình vẽ dưới đây.

Chứng minh $FA // CE$ biết rằng:

$\widehat{BAF} = 120°;\ \widehat{ABD} = 140°;\ \widehat{BDE} = 100°.$



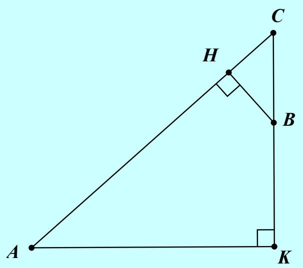
Lời giải

Ta có: $\widehat{ABD}$ là góc ngoài của $\Delta BCD \Rightarrow \widehat{BCD} = 60°$

Hai góc trong cùng phía $\widehat{BCD};\ \widehat{FAC}$ có tổng bằng $180° \Rightarrow FA // CE$

Bài 2:

Cho hình vẽ sau. Chứng minh rằng: $\widehat{A}=\widehat{HBC}$



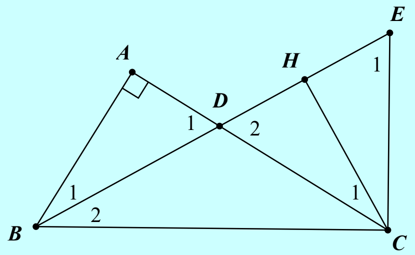
Lời giải

ΔACK có $\widehat{A}+\widehat{C}=90^\circ$; ΔBHC có $\widehat{HBC}+\widehat{C}=90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{A}=\widehat{BHC}$ (cùng phụ $\widehat{C}$)

Bài 3:

Cho tam giác ABC có $\hat{A}=90^\circ$. Gọi d là đường thẳng đi qua C và vuông góc với BC. Tia phân giác của góc B cắt AC ở D và cắt d ở E. Kẻ CH vuông góc với DE. Chứng minh rằng CH là tia phân giác của góc DCE.



Lời giải

Ta có: $\widehat{B_1}+\widehat{D_1}=90^\circ$; $\widehat{C_1}+\widehat{D_2}=90^\circ$

mà $\widehat{D_1}=\widehat{D_2} \Rightarrow \widehat{B_1}=\widehat{C_1}$

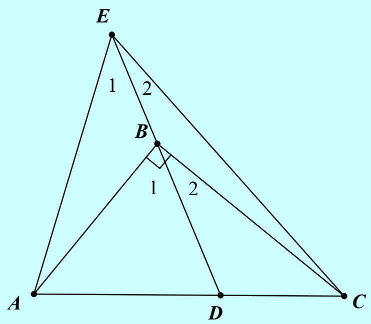
CMTT $\Rightarrow \widehat{B_2}=\widehat{C_2}$

Mà $\widehat{B_1}=\widehat{B_2} \Rightarrow \widehat{C_1}=\widehat{C_2}$

$\Rightarrow CH$ là phân giác của $\widehat{DCE}$.

Bài 4:

Cho tam giác ABC có $\hat{B}=90^\circ$, gọi D là một điểm nằm giữa A và C. Lấy điểm E thuộc tia đối của tia BD. Chứng minh rằng góc AEC là góc nhọn.



Lời giải

Chứng minh $\widehat{E_1} < \widehat{B}_1; \widehat{E_2} < \widehat{B}_2$ (tính chất góc ngoài của tam giác)

$\Rightarrow \widehat{AEC} < \widehat{ABC} = 90^\circ$.

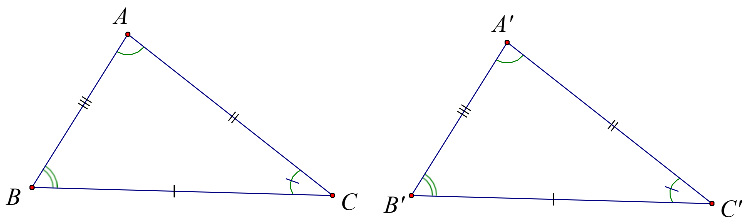
CHUYÊN ĐỀ 13. HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU

TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ NHẤT CỦA TAM GIÁC

PHẦN I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Hai tam giác bằng nhau

+ Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ bằng nhau nếu chúng có các cạnh tương ứng bằng nhau và các góc tương ứng bằng nhau.



+ Tức là: $\Delta ABC = \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} AB = A'B',\, BC = B'C',\, AC = A'C' \\ A = A',\ B = B',\ C = C' \end{cases}$.

Ở đây hai đỉnh A và A' (B và B', C và C') là hai đỉnh tương ứng; hai góc A và A' (B và B', C và C') là hai góc tương ứng; hai cạnh AB và $A'B'$ (BC và $B'C'$, AC và $A'C'$) là hai cạnh tương ứng.

2. Trường hợp bằng nhau thứ nhất của hai tam giác

*** Trường hợp bằng nhau cạnh – cạnh – cạnh (c.c.c):** Nếu ba cạnh của tam giác này bằng ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

+ Tức là: ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có $AB = A'B', BC = B'C', AC = A'C'$ thì $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$.

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI

Dạng 1. Bài tập lí thuyết: Viết kí hiệu về sự bằng nhau của hai tam giác, từ kí hiệu bằng nhau của hai tam giác suy ra các cạnh – góc bằng nhau.

I. Phương pháp giải:

+ Từ kí hiệu tam giác bằng nhau suy ra các cạnh và các góc bằng nhau đúng thứ tự tương ứng.

Ví dụ: $\Delta ABC = \Delta A'B'C' \Rightarrow \begin{cases} AB = A'B',\, BC = B'C',\, AC = A'C' \\ A = A',\ B = B',\ C = C' \end{cases}$.

+ Ngược lại, khi viết kí hiệu tam giác bằng nhau lưu ý kiểm tra lại xem các góc hay cạnh tương ứng đã bằng nhau thỏa mãn yêu cầu đề bài chưa.

II. Bài tập

[1] **Bài 1.** Cho biết $\Delta ABC = \Delta HIK$. Hãy viết đẳng thức trên dưới một vài dạng khác.

Lời giải:

Viết đẳng thức $\Delta ABC = \Delta HIK$ dưới một vài dạng khác: $\Delta ACB = \Delta KHI$, $\Delta CAB = \Delta KHI$, ...

[1] **Bài 2.** Cho $\Delta ABC = \Delta DEF$. Hãy chỉ ra các góc, các cạnh tương ứng bằng nhau.

Lời giải:

$$\Delta ABC = \Delta DEF \Rightarrow \begin{cases} AB = DE, BC = EF, AC = DF \\ A = D, B = E, C = F \end{cases}.$$

[1] **Bài 3.** Cho $\Delta MNP = \Delta IHG$. Hãy chỉ ra các góc, các cạnh tương ứng bằng nhau.

Lời giải:

$$\Delta MNP = \Delta IHG \Rightarrow \begin{cases} MN = IH, MP = IG, NP = HG \\ M = I, N = H, P = G \end{cases}.$$

[2] **Bài 4.** Cho hai tam giác bằng nhau: ΔABC và ΔHIK. Viết kí hiệu về sự bằng nhau của 2 tam giác theo thứ tự đỉnh tương ứng, biết rằng: $A = H$ và $B = \hat{I}$.

Lời giải:

Hai tam giác ΔABC và ΔHIK bằng nhau và $A = H$; $B = \hat{I}$ thì kí hiệu bằng nhau của hai tam giác là: $\Delta ABC = \Delta HIK$.

[2] **Bài 5.** Cho hai tam giác bằng nhau: ΔABC và ΔHIK. Viết kí hiệu về sự bằng nhau của 2 tam giác theo thứ tự đỉnh tương ứng, biết rằng: $AB = KI$; $\text{BC} = \text{KH}$.

Lời giải:

Hai tam giác ΔABC và ΔHIK bằng nhau và $AB = KI$; $\text{BC} = \text{KH}$ thì kí hiệu bằng nhau của hai tam giác là: $\Delta ABC = \Delta IKH$.

[2] **Bài 6.** Cho hai tam giác bằng nhau: ΔABC và ΔHIK. Viết kí hiệu về sự bằng nhau của 2 tam giác theo thứ tự đỉnh tương ứng, biết rằng: $A = K$; $AB = IK$.

Lời giải:

Hai tam giác ΔABC và ΔHIK bằng nhau và $A = K$; $AB = IK$ thì kí hiệu bằng nhau của hai tam giác là: $\Delta ABC = \Delta KIH$.

Dạng 2. Biết hai tam giác bằng nhau và một số điều kiện, tính số đo góc, độ dài cạnh của tam giác

I. Phương pháp giải:

+ Từ kí hiệu tam giác bằng nhau suy ra các cạnh và các góc tương ứng bằng nhau.

+ Lưu ý các bài toán: tổng - hiệu, tổng - tỉ, hiệu – tỉ.

+ Sử dụng định lí tổng ba góc trong một tam giác.

II. Bài tập

[1] **Bài 1.** Cho $\Delta ABC = DEF$ với $AB = 7\text{cm}, BC = 5\text{cm}, DF = 6\text{cm}$. Tính các cạnh còn lại của mỗi tam giác.

Lời giải:

Vì $\Delta ABC = DEF$ nên $AB = DE, BC = EF, AC = DF$ (các cạnh tương ứng).

Mà $AB = 7\text{cm}, BC = 5\text{cm}, DF = 6\text{cm}$ suy ra $DE = 7\text{cm}, EF = 5\text{cm}, AC = 6\text{cm}$.

[1] **Bài 2.** Cho $\Delta ABC = DEF$ với $BC = 6\text{cm}, AB = 8\text{cm}, DF = 10\text{cm}$.

a) Tính các cạnh còn lại của mỗi tam giác.

b) Tính chu vi của mỗi tam giác.

Lời giải:

a) Vì $\Delta ABC = DEF$ nên $AB = DE, BC = EF, AC = DF$ (các cạnh tương ứng).

Mà $BC = 6\text{cm}, AB = 8\text{cm}, DF = 10\text{cm}$ suy ra $EF = 6\text{cm}, DE = 8\text{cm}, AC = 6\text{cm}$.

b) Chu vi ΔABC là: $AB + BC + AC = 8\text{ cm} + 6\text{ cm} + 10\text{ cm} = 24\text{ cm}$.

Chu vi ΔDEF là: $DE + EF + DF = 8\text{ cm} + 6\text{ cm} + 10\text{ cm} = 24\text{ cm}$.

[1] **Bài 3.** Cho $\Delta ABC = \Delta IHK$. Tính chu vi của mỗi tam giác, biết rằng $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$, $HK = 12\text{cm}$.

Lời giải:

Vì $\Delta ABC = IHK$ nên $AB = IH, BC = HK, AC = IK$ (các cạnh tương ứng).

Mà $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$, $HK = 12\text{cm}$ suy ra $IH = 6\text{cm}, IK = 8\text{cm}, BC = 12\text{cm}$.

Chu vi ΔABC là: $AB + BC + AC = 6\text{ cm} + 12\text{ cm} + 8\text{ cm} = 26\text{ cm}$.

Chu vi ΔDEF là: $DE + EF + DF = 8\text{ cm} + 6\text{ cm} + 10\text{ cm} = 24\text{ cm}$.

[2] **Bài 4.** Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$, biết $A = 65°, P = 30°$.

a) Tìm các góc tương ứng bằng nhau.

b) Tính các góc còn lại của hai tam giác.

Lời giải:

a) Vì $\Delta ABC = \Delta MNP \Rightarrow A = M, B = N, C = P$ (các góc tương ứng).

b) Vì $A = M$ mà $A = 65°$ nên $M = 65°$.

Vì $C = P$ mà $P = 30°$ nên $C = 30°$.

Xét ΔABC có: $A + B + C = 180°$ (định lí tổng ba góc trong một tam giác)

$\Rightarrow B = 180° - A - C = 180° - 65° - 30° = 85°$.

Mà $B = N$ nên $N = 85°$.

Vậy $B = 85°$, $C = 30°$, $M = 65°$ và $N = 85°$.

[2] **Bài 5.** Cho $\Delta ABC = \Delta DEF$ biết $B = 50°, D = 70°$. Tính số đo góc C.

Lời giải:

Vì $\Delta ABC = \Delta DEF \Rightarrow A = D$ (các góc tương ứng) mà $D = 70°$ nên $A = 70°$.

Vậy $C = 60°$.

[2] **Bài 6.** Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$. Biết $AB + BC = 7\text{cm}, MN - NP = 3\text{cm}, MP = 4\text{cm}$. Tính độ dài các cạnh mỗi tam giác.

Lời giải:

Vì $\Delta ABC = \Delta MNP$ nên $AB = MN, BC = NP, AC = MP$ (các cạnh tương ứng).

Mà $MP = 4\text{cm} \Rightarrow AC = 4\text{cm}$, $MN - NP = 3\text{cm} \Rightarrow AB - BC = 3\text{cm}$.

Lại có: $AB + BC = 7\text{cm}$ suy ra: $AB = (7+3):2 = 5\,(\text{cm})$, $BC = (7-3):2 = 2\,(\text{cm})$.

$\Rightarrow NP = BC = 2\text{cm},\ MN = AB = 5\text{cm}$.

Vậy ΔABC có: $AB = 5\text{cm},\ BC = 2\text{cm},\ AC = 4\text{cm}$;

ΔMNP có: $MN = 5\text{cm},\ NP = 2\text{cm},\ MP = 4\text{cm}$.

[2] **Bài 7.** Cho $\Delta ABC = \Delta IJK$. Biết $AB + BC = 9\text{cm}, IJ = 2JK,\ AC = 5\text{cm}$. Tính chu vi mỗi tam giác.

Lời giải:

Vì $\Delta ABC = \Delta IJK$ nên $AB = IJ,\ BC = JK,\ AC = IK$ (các cạnh tương ứng).

Mà $AC = 5\text{cm} \Rightarrow IK = 5\text{cm}$, $IJ = 2JK \Rightarrow AB = 2BC$.

Lại có: $AB + BC = 9\text{cm}$ $\Rightarrow BC = 9:(1+2) = 3(\text{cm}),\ AB = 2BC = 6\,(\text{cm})$.

$\Rightarrow IJ = AB = 6\text{ cm},\ IK = BC = 3\text{ cm}$.

Chu vi ΔABC là: $AB + BC + AC = 6 + 3 + 5 = 14\,(\text{cm})$.

Chu vi ΔIJK là: $IJ + JK + IK = 6 + 3 + 5 = 14\,(\text{cm})$.

[2] **Bài 8.** Cho $\Delta ABC = \Delta IJK$. Biết $AB - BC = 10\text{cm}, 3IJ = 5JK,\ AC = 20\text{cm}$. Tính chu vi mỗi tam giác.

Lời giải:

Vì $\Delta ABC = \Delta IJK$ nên $AB = IJ,\ BC = JK,\ AC = IK$ (các cạnh tương ứng).

Mà $AC = 20\text{cm} \Rightarrow IK = 20\text{cm},\ 3IJ = 5JK \Rightarrow 3AB = 5BC \Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{5}{3}$.

Lại có: $AB - BC = 10\text{cm}$ $\Rightarrow AB = 10:(5-3).5 = 25(\text{cm}),\ BC = 10:(5-3).3 = 15\,(\text{cm})$.

$\Rightarrow IJ = AB = 25\text{ cm},\ IK = BC = 15\text{ cm}$.

Chu vi ΔABC là: $AB + BC + AC = 25 + 15 + 20 = 60\,(\text{cm})$.

Chu vi ΔIJK là: $IJ + JK + IK = 25 + 15 + 20 = 60\,(\text{cm})$.

[3] **Bài 9.** Cho Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$, biết $A = 60°,\ P = 3N$. Tính số đo các góc còn lại của mỗi tam giác.

Lời giải:

Vì $\Delta ABC = \Delta MNP$ nên $\Rightarrow A = M,\ B = N,\ C = P$ (các góc tương ứng).

Vì $A = M$ mà $A = 60°$ nên $M = 60°$.

Xét ΔMNP có: $M + N + P = 180°$ (định lí tổng ba góc trong một tam giác)

$\Rightarrow N + P = 180° - M = 180° - 60° = 120°$.

Mà $P = 3N$ nên $N = 120°:(1+3) = 120°:4 = 30°$ $\Rightarrow P = 3N = 3.30° = 90°$.

Suy ra: $B = N = 30°,\ C = P = 90°$.

Vậy: $B = 30°$, $C = 90°$, $M = 60°$, $M = 30°$, $N = 90°$.

[3] **Bài 10.** Cho $\Delta ABC = DEF$ với $D = 30°, 2B = 3C$. Tính số đo các góc của ΔABC.

Lời giải:

Vì $\Delta ABC = DEF$ nên $A = D, B = E, C = F$ (các góc tương ứng).

Mà $D = 30°$ nên $A = 30°$.

Xét ΔABC có: $A + B + C = 180°$ (định lí tổng ba góc trong một tam giác)

$\Rightarrow B + C = 180° - A = 180° - 30° = 150°$.

Mà $2B = 3C$ $\Rightarrow B = 150° : (2+3).2 = 60°$ và $C = 150° : (2+3).3 = 90°$.

Vậy $A = 30°, B = 60°, C = 90°$.

[3] **Bài 11.** Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$, biết $A = 40°, P - N = 10°$. Tính số đo các góc còn lại của ΔMNP.

Lời giải:

Vì $\Delta ABC = \Delta MNP$ nên $A = M$ (hai góc tương ứng). Mà $A = 40°$ nên $M = 40°$.

Xét ΔMNP có: $M + N + P = 180°$ (định lí tổng ba góc trong một tam giác)

$\Rightarrow N + P = 180° - M = 180° - 40° = 140°$.

Mặt khác $P - N = 10°$ $\Rightarrow P = (140 + 10) : 2 = 75°$ và $N = (140° - 10°) : 2 = 65°$.

Vậy $M = 40°, N = 65°, P = 75°$.

[4] **Bài 12.** Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$ biết $A : B : C = 3 : 4 : 5$. Tính các góc của ΔMNP.

Lời giải:

Vì $A : B : C = 3 : 4 : 5$ $\Rightarrow \frac{A}{3} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5} = k \Rightarrow A = 3.k, B = 4.k, C = 5.k$.

Xét ΔABC có: $A + B + C = 180°$ (định lí tổng ba góc trong một tam giác)

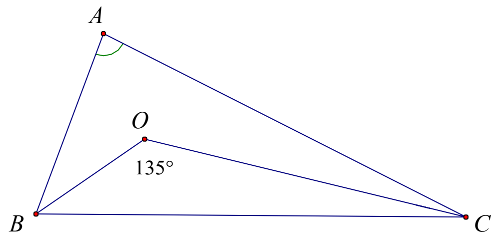
$\Rightarrow 3.k + 4.k + 5.k = 180° \Rightarrow (3+4+5).k = 180° \Rightarrow 12.k = 180° \Rightarrow k = 180° : 12 = 15°$

$\Rightarrow A = 3.15° = 45°, B = 4.15° = 60°, C = 5.15° = 75°$.

Vậy $A = 45°, B = 60°, C = 75°$.

[4] **Bài 13.** Cho $\Delta ABC = \Delta DEF$. Biết 2 tia phân giác trong của góc B và C cắt nhau tại O, tạo $BOC = 135°$; $E = 2F$. Tính các góc của ΔDEF.

Lời giải:



Ta có: $BOC = 180° - OBC - OCB$ (tổng ba góc trong ΔBOC bằng $180°$)

$= 180° - \frac{1}{2}ABC - \frac{1}{2}ACB$ (tính chất phân giác)

$= 180° - \frac{1}{2}(ABC + ACB) = 180° - \frac{1}{2}(180° - BAC)$ (tổng ba góc trong ΔABC bằng $180°$)

$= 90° + \frac{1}{2}BAC$.

$\Rightarrow 135° = 90° + \frac{1}{2}BAC \Rightarrow BAC = (135° - 90°).2 = 90°$.

Do $\Delta ABC = \Delta DEF$ nên $BAC = D$ (hai góc tương ứng) $\Rightarrow D = 90°$.

Xét ΔDEF có $E + F = 180° - D = 180° - 90° = 90°$ (tổng ba góc trong ΔDEF bằng $180°$).

Mà $E = 2F$ nên $F = 90° : (1+2) = 30°$ $\Rightarrow E = 2F = 2.30° = 60°$.

Vậy ΔDEF có: $D = 90°, E = 60°, F = 30°$.

[4] **Bài 14.** Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$ biết $AB : BC : AC = 5 : 6 : 8$. Tính các cạnh của ΔMNP biết tam giác này có chu vi là 57 cm.

Lời giải:

Vì $\Delta ABC = \Delta MNP$ nên $AB = MN, BC = NP, AC = MP$ (các cạnh tương ứng).

Suy chu vi hai tam giác bằng nhau: $AB + BC + AC = MN + NP + MP = 57$ (cm).

Vì $AB : BC : AC = 5 : 6 : 8$ $\Rightarrow \frac{AB}{5} = \frac{BC}{6} = \frac{AC}{8} = k \Rightarrow AB = 5.k, BC = 6.k, AC = 8.k$.

Ta có: $AB + BC + AC = 57 \Rightarrow 5k + 6k + 8k = 57 \Rightarrow 19k = 57 \Rightarrow k = 3$.

$\Rightarrow AB = 5k = 5.3 = 15$ (cm), $BC = 6k = 6.3 = 18$ (km), $AC = 8k = 8.3 = 24$ (km).

$\Rightarrow MN = AB = 15$ (cm), $NP = BC = 18$ (cm), $MP = AC = 24$ (cm).

Vậy các cạnh của ΔMNP là: $MN = 15$cm, $NP = 18$cm, $MP = 24$cm.

Dạng 3. Chứng minh hai tam giác bằng nhau theo trường hợp bằng nhau thứ nhất. Từ đó chứng minh các bài toán liên quan: hai đoạn thẳng bằng nhau, hai góc bằng nhau, hai đường thẳng song song - vuông góc, đường phân giác, ba điểm thẳng hàng, ...

I. Phương pháp giải:

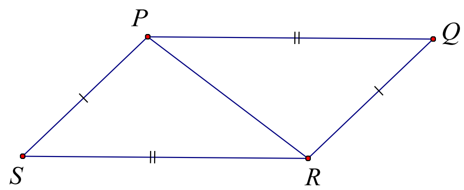
+ Chỉ ra các tam giác có ba cạnh bằng nhau để suy ra tam giác bằng nhau.

+ Từ tam giác bằng nhau suy ra các cặp cạnh tương ứng bằng nhau, cặp góc tương ứng bằng nhau.

+ Nắm vững các khái niệm: tia phân giác của góc, đường cao của tam giác, đường trung trực của đoạn thẳng, hai đường thẳng song song, hai đường thẳng vuông góc; nắm vững định lí tổng ba góc trong một tam giác, tiên đề Ơ clit để giải các bài toán chứng minh.

II. Bài toán.

[1] **Bài 1.** Tìm các tam giác bằng nhau trên hình vẽ, giải thích vì sao?

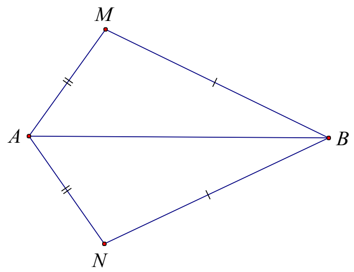


Lời giải:

Xét ΔPSR và ΔRQP có: PR là cạnh chung, $PS = QR$, $SR = PQ$ (theo giả thiết)

$\Rightarrow \Delta PSR = \Delta RQP$ (c.c.c).

[1] **Bài 2.** Tìm các tam giác bằng nhau trên hình vẽ, giải thích vì sao?

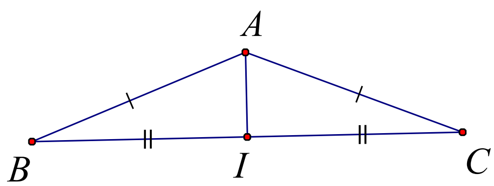


Lời giải:

Xét ΔAMB và ΔANB có: AB là cạnh chung, $AM = AN$, $BM = BN$ (theo giả thiết)

$\Rightarrow \Delta AMB = \Delta ANB$ (c.c.c).

[1] **Bài 3.** Tìm các tam giác bằng nhau trên hình vẽ, giải thích vì sao?



Lời giải:

Xét ΔABI và ΔACI có: AI là cạnh chung, $AB = AC$, $BI = CI$ (theo giả thiết)

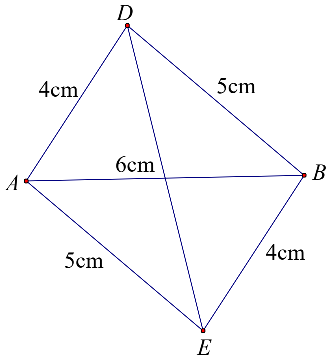
$\Rightarrow \Delta ABI = \Delta ACI$ (c.c.c).

[2] **Bài 4.** Cho đoạn thẳng $AB = 6\text{cm}$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ ΔABD sao cho $AD = 4\text{cm}$, $BD = 5\text{cm}$. Trên nửa mặt phẳng còn lại vẽ ΔABE sao cho $BE = 4\text{cm}$, $AE = 5\text{cm}$. Chứng minh:

a) $\Delta ABD = \Delta BAE$.

b) $\Delta ADE = \Delta BED$.

Lời giải:



a) Xét ΔABD và ΔBAE có: AB là cạnh chung, $AD = BE\ (= 4\text{cm})$, $BD = AE\ (= 5\text{cm})$

$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta BAE$ (c.c.c).

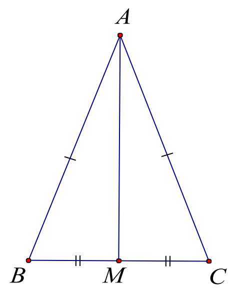
b) Xét ΔADE và ΔBED có: DE là cạnh chung, $AD = BE\ (= 4\text{cm})$, $BD = AE\ (= 5\text{cm})$

$\Rightarrow \Delta ADE = \Delta BED$ (c.c.c).

[2] **Bài 5.** Cho ΔABC có $AB = AC$. Lấy M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng:

a) $\Delta AMB = \Delta AMC$. b) $BAM = CAM$. c) $AM \perp BC$.

Lời giải:



a) Xét ΔAMB và ΔAMC có:

AM là cạnh chung,

$AB = AC$ (theo giả thiết),

$BM = CM$ (vì M là trung điểm BC)

$\Rightarrow \Delta AMB = \Delta AMC$ (c.c.c)

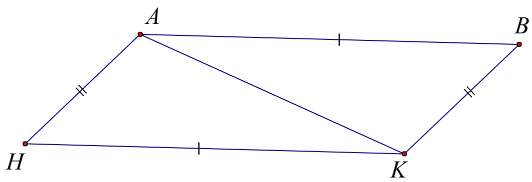
b) Vì $\Delta AMB = \Delta AMC$ (chứng minh trên) $\Rightarrow BAM = CAM$ (hai góc tương ứng).

c) Vì $\Delta AMB = \Delta AMC$ (chứng minh trên) $\Rightarrow BMA = CMA$ (hai góc tương ứng).

Mà $BMA + CMA = 180^\circ$ (kề bù) $\Rightarrow BMA = CMA = 90^\circ \Rightarrow AM \perp BC$.

[2] **Bài 6.** Cho hình vẽ dưới đây. Chứng minh rằng:

a) $\Delta ABK = \Delta KHA$. b) $AB\ //\ HK$. c) $AH\ //\ BK$.



Lời giải:

a) Xét ΔABK và ΔKHA có: AK là cạnh chung, $AB = HK$, $BK = AH$ (theo giả thiết),

$\Rightarrow \Delta ABK = \Delta KHA$ (c.c.c)

b) Vì $\Delta ABK = \Delta KHA$ (chứng minh trên) $\Rightarrow BAK = HKA$ (hai góc tương ứng).
Mà hai góc này ở vị trí so le trong so với AB và HK nên $AB \,//\, HK$.

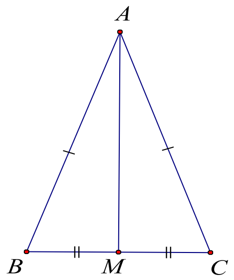
c) Vì $\Delta ABK = \Delta KHA$ (chứng minh trên) $\Rightarrow HAK = BKA$ (hai góc tương ứng).
Mà hai góc này ở vị trí so le trong so với AH và BK nên $AH \,//\, BK$.

[3] **Bài 7.** Cho ΔABC có $AB = AC$. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng:

a) AM là phân giác của góc BAC.

b) AM là trung trực của BC.

Lời giải:



a) Xét ΔAMB và ΔAMC có:

AM là cạnh chung,

$AB = AC$ (theo giả thiết),

$BM = CM$ (vì M là trung điểm BC)

$\Rightarrow \Delta AMB = \Delta AMC$ (c.c.c) $\Rightarrow BAM = CAM$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow AM$ là phân giác của góc BAC..

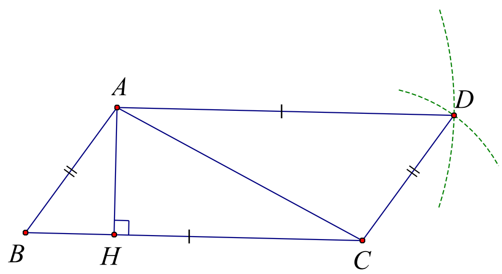
b) Vì $\Delta AMB = \Delta AMC$ (chứng minh trên) $\Rightarrow BMA = CMA$ (hai góc tương ứng).

Mà $BMA + CMA = 180^\circ$ (kề bù) $\Rightarrow BMA = CMA = 90^\circ \Rightarrow AM \perp BC$.

Mặt khác M là trung điểm của BC $\Rightarrow$ AM là trung trực của BC.

[3] **Bài 8.** Cho ΔABC, đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa B vẽ ΔACD sao cho $AD = BC$; $CD = AB$. CMR: $AB \,//\, CD$ và $AH \perp AD$.

Lời giải:



Xét ΔADC và ΔCBA có: AC là cạnh chung, $AD = BC$, $CD = AB$ (theo giả thiết)

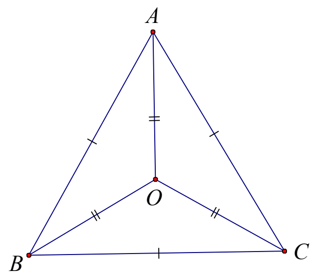
$\Rightarrow \Delta ADC = \Delta CBA$ (c.c.c) $\Rightarrow DAC = CBA$ (hai góc tương ứng).

Mà hai góc này ở vị trí so le trong so với AD và BC nên $AD \,//\, BC$.

Lại có: $AH \perp BC$ (AH là đường cao trong ΔABC) $\Rightarrow AH \perp AD$ (từ vuông góc tới song song).

[3] **Bài 9.** Cho ΔABC có $AB = AC = BC$. Giả sử O là một điểm nằm trong tam giác sao cho $OA = OB = OC$. Chứng minh rằng: O là giao điểm của 3 tia phân giác của $A;B;C$.

Lời giải:



Xét ΔAOB và ΔAOC có: chung cạnh AO, $OB = OC$, $AB = AC$ (giả thiết)

$\Rightarrow BAO = CAO$ (hai góc tương ứng) $\Rightarrow AO$ là tia phân giác BAC.

Chứng minh tương tự ta cũng có: BO là tia phân giác ABC, CO là tia phân giác ACB.

Suy ra O là giao điểm của 3 tia phân giác của $A;B;C$.

[4] **Bài 10.** Cho ΔABC có $AB = AC$. Gọi D là trung điểm của BC. Chứng minh rằng:

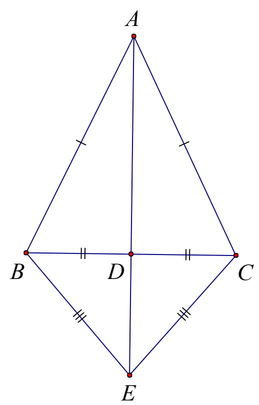
a) $\Delta ADB = \Delta ADC$

b) AD là phân giác của BAC, $AD \perp BC$.

c) Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa A lấy điểm E sao cho $EB = EC$.

Chứng minh rằng: A, E, D thẳng hàng.

Lời giải:



a) Xét ΔADB và ΔADC có:

AD là cạnh chung,

$AB = AC$ (theo giả thiết),

$BD = CD$ (vì D là trung điểm BC)

$\Rightarrow \Delta ADB = \Delta ADC$ (c.c.c)

b) Vì $\Delta ADB = \Delta ADC$ (chứng minh trên) $\Rightarrow BAD = CAD$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow AD$ là phân giác của BAC.

Vì $\Delta ADB = \Delta ADC$ (chứng minh trên) $\Rightarrow BDA = CDA$ (hai góc tương ứng).

Mà $BDA + CDA = 180^\circ$ (kề bù) $\Rightarrow BDA = CDA = 90^\circ \Rightarrow AD \perp BC$.

c) Xét ΔEDB và ΔEDC có:

ED là cạnh chung,

$EB = EC$ (theo giả thiết),

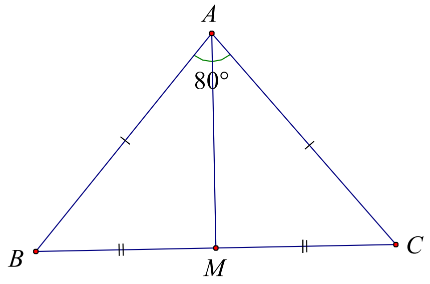
$BD = CD$ (vì D là trung điểm BC)

$\Rightarrow \Delta EDB = \Delta EDC$ (c.c.c) $\Rightarrow BDE = CDE$ (hai góc tương ứng).

Mà $BDE + CDE = 180°$ (kề bù) $\Rightarrow BDE = CDE = 90° \Rightarrow ED \perp BC$.

Vì qua điểm D chỉ có duy nhất một đường thẳng vuông góc với BC mà $ED \perp BC, AD \perp BC$ nên hai đường thẳng ED, AD trùng nhau hay A, E, D thẳng hàng.

[4] **Bài 11.** Cho ΔABC có $AB = AC$ và $BAC = 80°$. Tính số đo các góc còn lại của ΔABC.



Lấy M là trung điểm của BC.

Xét ΔAMB và ΔAMC có:

AM là cạnh chung,

$AB = AC$ (theo giả thiết),

$BM = CM$ (vì M là trung điểm BC)

$\Rightarrow \Delta AMB = \Delta AMC$ (c.c.c) $\Rightarrow ABM = ACM$ (hai góc tương ứng) $\Rightarrow ACB = ABC$.

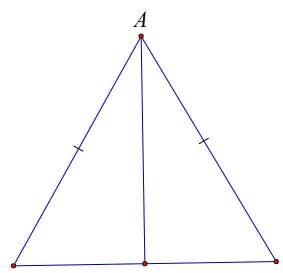
Xét ΔABC có: $BAC + ABC + ACB = 180°$ (tính chất tổng ba góc trong một tam giác)

$\Rightarrow ABC + ACB = 180° - BAC = 180° - 80° = 100°$.

Mà $ACB = ABC$ nên $ACB = ABC = 100° : 2 = 50°$.

[4] **Bài 12.** Cho ΔABC có $AB = AC = BC$. Tính số đo các góc của ΔABC.

Lời giải:



Lấy M là trung điểm của BC.

Xét ΔAMB và ΔAMC có:

AM là cạnh chung,

$AB = AC$ (theo giả thiết),

$BM = CM$ (vì M là trung điểm BC)

$\Rightarrow \Delta AMB = \Delta AMC$ (c.c.c) $\Rightarrow ABM = ACM$ (hai góc tương ứng) $\Rightarrow ACB = ABC$.

Tương tự lấy N là trung điểm AC ta cũng chứng minh được $\Delta \mathrm{ABN} = \Delta \mathrm{CBN}$ (c.c.c)

$\Rightarrow BAN = BCN$ (hai góc tương ứng) $\Rightarrow BAC = BCA$.

Như vậy ΔABC có ba góc bằng nhau. Mà tổng ba góc trong tam giác bằng $180°$ nên các góc của ΔABC có số đo $60°$.

Phần III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Bài tập lí thuyết: Viết kí hiệu về sự bằng nhau của hai tam giác, từ kí hiệu bằng nhau của hai tam giác suy ra các cạnh – góc bằng nhau.

[1] **Bài 1.** Cho biết $\Delta ABC = \Delta MNP$. Hãy viết đẳng thức trên dưới một vài dạng khác.

[1] **Bài 2.** Cho $\Delta MNP = \Delta OPQ$. Hãy chỉ ra các góc, các cạnh tương ứng bằng nhau.

[2] **Bài 3.** Cho hai tam giác bằng nhau: ΔABC và ΔHIK. Viết kí hiệu về sự bằng nhau của 2 tam giác theo thứ tự đỉnh tương ứng, biết rằng: $A = \hat{I}$ và $B = K$.

[2] **Bài 4.** Cho hai tam giác bằng nhau: ΔABC và ΔPQR. Viết kí hiệu về sự bằng nhau của 2 tam giác theo thứ tự đỉnh tương ứng, biết rằng: $AB = PQ$; $\mathrm{BC} = \mathrm{PR}$.

[2] **Bài 5.** Cho hai tam giác bằng nhau: ΔMNP và ΔHIK. Viết kí hiệu về sự bằng nhau của 2 tam giác theo thứ tự đỉnh tương ứng, biết rằng: $N = K$; $MN = IK$.

[3] **Bài 6.** Chứng minh rằng nếu: $\Delta MNP = \Delta NPM$ thì ΔMNP có 3 cạnh bằng nhau.

Dạng 2. Biết hai tam giác bằng nhau và một số điều kiện, tính số đo góc, độ dài cạnh của tam giác

[1] **Bài 1.** Cho $\Delta ABC = \Delta IJK$ với $AB = 7\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$, $JK = 6\text{cm}$. Tính các cạnh còn lại của mỗi tam giác.

[1] **Bài 2.** Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$ với $BC = 5\text{cm}$, $MN = 5\text{cm}$, $AC = 7\text{cm}$.

a) Tính các cạnh còn lại của mỗi tam giác.

b) Tính chu vi của mỗi tam giác.

[2] **Bài 3.** Cho $\Delta ABC = \Delta OPQ$, biết $A = 55°$, $P = 47°$.

a) Tìm các góc tương ứng bằng nhau.

b) Tính các góc còn lại của hai tam giác.

[2] **Bài 4.** Cho $\Delta ABC = \Delta PQR$, biết $B = 40°$, $R = 30°$. Tính các góc còn lại của mỗi tam giác.

[2] **Bài 5.** Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$ biết $BC = 10$ cm, $MN : MP = 4 : 3$ và $AB + \mathrm{AC} = 14$ cm. Tính các cạnh của ΔMNP.

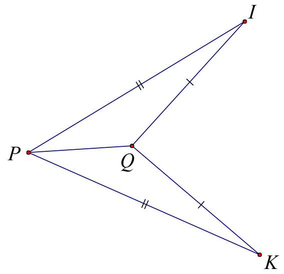
[3] **Bài 6.** Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$ với $M = 40°$, $3B = 4C$. Tính số đo các góc của ΔABC.

[3] **Bài 7.** Cho $\Delta HIK = \Delta MNP$, biết $H = 40°$, $P - N = 30°$. Tính số đo các góc còn lại của ΔMNP .

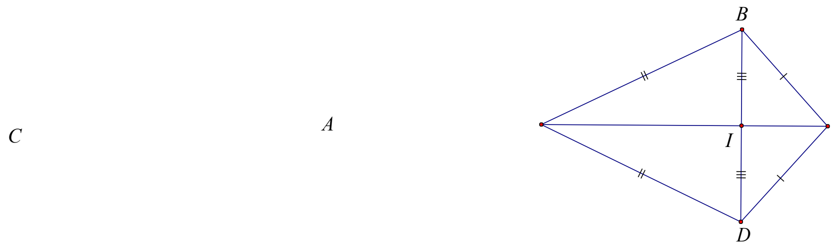
[4] **Bài 8.** Cho $\Delta MNP = \Delta IJK$. Biết 2 tia phân giác trong của góc M và góc N cắt nhau tại O, tạo $MON = 120°$. Tính các góc của ΔIJK biết $I = 3J$.

Dạng 3. Chứng minh hai tam giác bằng nhau theo trường hợp bằng nhau thứ nhất. Từ đó chứng minh các bài toán liên quan: hai đoạn thẳng bằng nhau, hai góc bằng nhau, hai đường thẳng song song - vuông góc, đường phân giác, ba điểm thẳng hàng, ...

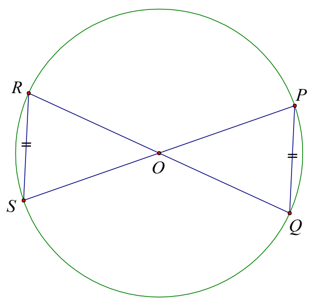
[1] **Bài 1.** Tìm các tam giác bằng nhau trên hình vẽ, giải thích vì sao?



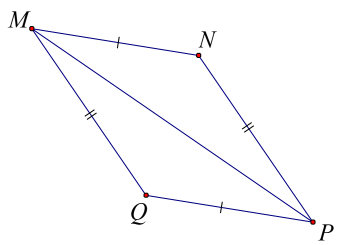
[1] **Bài 2.** Tìm các tam giác bằng nhau trên hình vẽ, giải thích vì sao?



[1] **Bài 3.** Tìm các tam giác bằng nhau trên hình vẽ, giải thích vì sao?



[2] **Bài 4.** Cho hình vẽ:



a) Chứng minh rằng $\Delta MNP = \Delta PQM$.

b) Biết $MPN = 20°$, tính số đo góc PMQ .

[2] **Bài 5.** Cho ΔABC có $A = 80°$. Vẽ cung tròn tâm B có bán kính bằng độ dài đoạn AC. Vẽ cung tròn tâm C có bán kính bằng độ dài đoạn AB. Hai cung tròn này cắt nhau tại D nằm khác phía của A đối với BC.

a) Chứng minh $\Delta ABC = \Delta DCB$. Từ đó suy ra số đo góc BDC.

b) Chứng minh $AB // CD$.

[3] **Bài 6.** Cho ΔABC có $AB < AC$. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $CE = AB$. Gọi I là một điểm sao cho $IA = IC$, $IB = IE$. Chứng minh rằng:

a) $\Delta AIB = \Delta CIE$

b) So sánh IAB và ACI.

[4] **Bài 7.** Cho ΔABC có $AB = AC$. Gọi M là trung điểm của BC.

a) Chứng minh rằng: AM là phân giác của BAC

b) Chứng minh rằng: AM là đường trung trực của đoạn thẳng BC.

c) Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa A lấy điểm E sao cho $EB = EC$.

Chứng minh rằng: A, E, M thẳng hàng.

[4] **Bài 8.** Cho ΔABC có $AB = AC$ và $BAC = 60°$. Tính số đo các góc còn lại của ΔABC.

[4] **Bài 9.** Cho tam giác nhọn ABC. Giả sử O là một điểm nằm trong tam giác sao cho $\mathrm{OA} = \mathrm{O}B = OC$. Chứng minh rằng: O là giao điểm của ba đường trung trực của ba cạnh ΔABC.

ĐÁP SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Bài tập lí thuyết: Viết kí hiệu về sự bằng nhau của hai tam giác, từ kí hiệu bằng nhau của hai tam giác suy ra các cạnh – góc bằng nhau.

[1] **Bài 1.** Cho biết $\Delta ABC = \Delta MNP$. Hãy viết đẳng thức trên dưới một vài dạng khác.

Lời giải:

Viết đẳng thức $\Delta ABC = \Delta MNP$ dưới một vài dạng khác: $\Delta ACB = \Delta MPN$, $\Delta CBA = \Delta PNM$, ...

[1] **Bài 2.** Cho $\Delta MNP = \Delta OPQ$. Hãy chỉ ra các góc, các cạnh tương ứng bằng nhau.

Lời giải:

$$\Delta MNP = \Delta OPQ \Rightarrow \begin{cases} MN = OP, NP = PQ, MP = OQ \\ NMP = POQ,\ MNP = OPQ,\ MPN = OQP \end{cases}.$$

[2] **Bài 3.** Cho hai tam giác bằng nhau: ΔABC và ΔHIK. Viết kí hiệu về sự bằng nhau của 2 tam giác theo thứ tự đỉnh tương ứng, biết rằng: $A = \hat{I}$ và $B = K$.

Lời giải:

Hai tam giác ΔABC và ΔHIK bằng nhau và $A = \hat{I}$; $B = K$ thì kí hiệu bằng nhau của hai tam giác là: $\Delta ABC = \Delta IKH$.

[2] **Bài 4.** Cho hai tam giác bằng nhau: ΔABC và ΔPQR. Viết kí hiệu về sự bằng nhau của 2 tam giác theo thứ tự đỉnh tương ứng, biết rằng: $AB = PQ;\ \mathrm{BC} = \mathrm{PR}$.

Lời giải:

Hai tam giác ΔABC và ΔPQR bằng nhau và $AB = PQ;\ \mathrm{BC} = \mathrm{PR}$ thì kí hiệu bằng nhau của hai tam giác là: $\Delta ABC = \Delta QPR$.

[2] **Bài 5.** Cho hai tam giác bằng nhau: ΔMNP và ΔHIK. Viết kí hiệu về sự bằng nhau của 2 tam giác theo thứ tự đỉnh tương ứng, biết rằng: $N = K$; $MN = IK$.

Lời giải:

Hai tam giác ΔMNP và ΔHIK bằng nhau và $N = K$; $MN = IK$ thì kí hiệu bằng nhau của hai tam giác là: $\Delta MNP = \Delta IKH$.

[3] **Bài 6.** Chứng minh rằng nếu: $\Delta MNP = \Delta NPM$ thì ΔMNP có 3 cạnh bằng nhau.

Lời giải:

Vì $\Delta MNP = \Delta NPM$ nên $MN = NP,\ NP = PM$ (các cạnh tương ứng) $\Rightarrow MN = NP = PM \Rightarrow \Delta MNP$ có 3 cạnh bằng nhau.

Dạng 2. Biết hai tam giác bằng nhau và một số điều kiện, tính số đo góc, độ dài cạnh của tam giác

[1] **Bài 1.** Cho $\Delta ABC = \Delta IJK$ với $AB = 7\text{cm},\ AC = 8\text{cm},\ JK = 6\text{cm}$. Tính các cạnh còn lại của mỗi tam giác.

Lời giải:

Vì $\Delta ABC = \Delta IJK$ nên $AB = IJ,\ BC = JK,\ AC = IK$ (các cạnh tương ứng).

Mà $AB = 7\text{cm},\ AC = 8\text{cm},\ JK = 6\text{cm}$ suy ra $IJ = 7\text{cm},\ IK = 5\text{cm},\ BC = 6\text{cm}$.

[1] **Bài 2.** Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$ với $BC = 5\text{cm},\ MN = 5\text{cm},\ AC = 7\text{cm}$.

a) Tính các cạnh còn lại của mỗi tam giác.

b) Tính chu vi của mỗi tam giác.

Lời giải:

c) Vì $\Delta ABC = \Delta MNP$ nên $AB = MN,\ BC = NP,\ AC = MP$ (các cạnh tương ứng).
Mà $BC = 5\text{cm},\ MN = 5\text{cm},\ AC = 7\text{cm}$ suy ra $NP = 5\text{cm},\ AB = 5\text{cm},\ MP = 7\text{cm}$.

d) Chu vi ΔABC là: $AB + BC + AC = 5\text{ cm} + 5\text{ cm} + 7\text{ cm} = 17\text{ cm}$.
Chu vi ΔMNP là: $MN + NP + MP = 5\text{ cm} + 5\text{ cm} + 7\text{ cm} = 17\text{ cm}$.

[2] **Bài 3.** Cho $\Delta ABC = \Delta OPQ$, biết $A = 55°,\ P = 47°$.

a) Tìm các góc tương ứng bằng nhau.

b) Tính các góc còn lại của hai tam giác.

Lời giải:

c) Vì $\Delta ABC = \Delta OPQ \Rightarrow A = O,\ B = P,\ C = Q$ (các góc tương ứng).

d) Vì $A = O$ mà $A = 55°$ nên $O = 55°$.

Vì $B = P$ mà $P = 47°$ nên $B = 47°$.

Xét ΔABC có: $A + B + C = 180°$ (định lí tổng ba góc trong một tam giác)

$$\Rightarrow C = 180° - A - B = 180° - 55° - 47° = 78°.$$

Mà $C = Q$ nên $Q = 78°$.

Vậy $B = 47°$, $C = 78°$, $O = 55°$ và $Q = 78°$.

[2] **Bài 4.** Cho $\Delta ABC = \Delta PQR$, biết $B = 40°, R = 30°$. Tính các góc còn lại của mỗi tam giác.

Lời giải:

Vì $\Delta ABC = \Delta PQR \Rightarrow A = P, B = Q, C = R$ (các góc tương ứng).

Vì $B = Q$ mà $B = 40°$ nên $Q = 40°$.

Vì $C = R$ mà $R = 30°$ nên $C = 30°$.

Xét ΔABC có: $A + B + C = 180°$ (định lí tổng ba góc trong một tam giác)

$$\Rightarrow A = 180° - B - C = 180° - 40° - 30° = 110°.$$

Mà $A = P$ nên $P = 110°$.

Vậy $A = 110°, C = 30°$, $P = 110°$, $Q = 40°$.

[2] **Bài 5.** Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$ biết $BC = 10$ cm, $MN : MP = 4 : 3$ và $AB + AC = 14$ cm. Tính các cạnh của ΔMNP.

Lời giải:

Vì $\Delta ABC = \Delta MNP$ nên $AB = MN, BC = NP, AC = MP$ (các cạnh tương ứng).

Mà $BC = 10$ cm $\Rightarrow NP = 10$ cm, $MN : MP = 4 : 3 \Rightarrow AB : AC = 4 : 3$.

Lại có: $AB + AC = 14$ cm $\Rightarrow AB = 14 : (4 + 3).4 = 8$ (cm), $AC = 14 : (4 + 3).3 = 6$ (cm).

$\Rightarrow MN = AB = 8$cm, $MP = AC = 6$cm.

Vậy ΔMNP có: $MN = 8$cm, $NP = 10$cm, $MP = 6$cm.

[3] **Bài 6.** Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$ với $M = 40°, 3B = 4C$. Tính số đo các góc của ΔABC.

Lời giải:

Vì $\Delta ABC = \Delta MNP$ nên $A = M$, $B = N$, $C = P$ (các góc tương ứng).

Mà $M = 40°$ nên $A = 40°$.

Xét ΔABC có: $A + B + C = 180°$ (định lí tổng ba góc trong một tam giác)

$\Rightarrow B + C = 180° - A = 180° - 40° = 140°$.

Mà $3B = 4C \Rightarrow \frac{B}{4} = \frac{C}{3} \Rightarrow B = 140° : (4 + 3).4 = 80°$ và $C = 140° : (4 + 3).3 = 60°$.

Vậy $A = 40°, B = 80°, C = 60°$.

[3] **Bài 7.** Cho $\Delta HIK = \Delta MNP$, biết $H = 40°, P - N = 30°$. Tính số đo các góc còn lại của ΔMNP

Lời giải:

Vì $\Delta HIK = \Delta MNP$ nên $H = M$ (hai góc tương ứng). Mà $H = 40°$ nên $M = 40°$.

Xét ΔMNP có: $M + N + P = 180°$ (định lí tổng ba góc trong một tam giác)

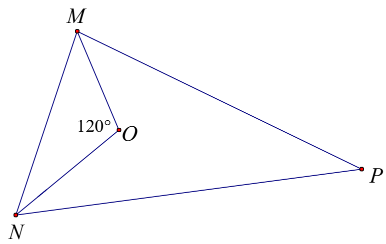
$\Rightarrow N + P = 180° - M = 180° - 40° = 140°$.

Mặt khác $P - N = 30°$ $\Rightarrow P = \left(140 + 30\right) : 2 = 85°$ và $N = \left(140° - 30°\right) : 2 = 55°$.

Vậy $M = 40°, N = 55°, P = 85°$.

[4] **Bài 8.** Cho $\Delta MNP = \Delta IJK$. Biết 2 tia phân giác trong của góc M và góc N cắt nhau tại O, tạo $MON = 120°$. Tính các góc của ΔIJK biết $I = 3J$.

Lời giải:



Ta có: $MON = 180° - OMN - ONM$ (tổng ba góc trong ΔMON bằng $180°$)

$$= 180° - \frac{1}{2}PMN - \frac{1}{2}PNM \text{ (tính chất phân giác)}$$

$$= 180° - \frac{1}{2}\left(PMN + PNM\right)$$

$$= 180° - \frac{1}{2}\left(180° - MPN\right) \text{ (tổng ba góc trong } \Delta MNP \text{ bằng } 180°)$$

$$= 90° + \frac{1}{2}MPN.$$

$$\Rightarrow 120° = 90° + \frac{1}{2}MPN \Rightarrow MPN = \left(120° - 90°\right).2 = 60°.$$

Do $\Delta MNP = \Delta IJK$ nên $MPN = K$ (hai góc tương ứng) $\Rightarrow K = 60°$.

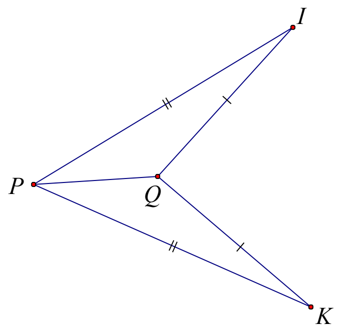
Xét ΔIJK có $I + J = 180° - K = 180° - 60° = 120°$ (tổng ba góc trong ΔIJK bằng $180°$).

Mà $I = 3J$ nên $J = 120° : \left(1 + 3\right) = 30°$ $\Rightarrow$ $I = 3J = 3.30° = 90°$.

Vậy ΔIJK có: $I = 90°, J = 30°, K = 60°$.

Dạng 3. Chứng minh hai tam giác bằng nhau theo trường hợp bằng nhau thứ nhất. Từ đó chứng minh các bài toán liên quan: hai đoạn thẳng bằng nhau, hai góc bằng nhau, hai đường thẳng song song - vuông góc, đường phân giác, ba điểm thẳng hàng, ...

[1] **Bài 1.** Tìm các tam giác bằng nhau trên hình vẽ, giải thích vì sao?

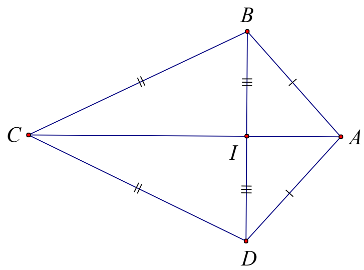


Lời giải:

Xét ΔPQI và ΔPQK có: PQ là cạnh chung, $PI = PK$, $QI = QK$ (theo giả thiết)

$\Rightarrow \Delta PQI = \Delta PQK$ (c.c.c).

[1] **Bài 2.** Tìm các tam giác bằng nhau trên hình vẽ, giải thích vì sao?



Lời giải:

+ Xét ΔABC và ΔADC có: AC là cạnh chung, $AB = AC$, $BC = DC$ (theo giả thiết)

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta ADC$ (c.c.c).

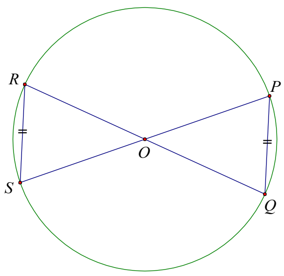
+ Xét ΔABI và ΔADI có: AI là cạnh chung, $AB = AC$, $BI = DI$ (theo giả thiết)

$\Rightarrow \Delta ABI = \Delta ADI$ (c.c.c).

+ Xét ΔIBC và ΔIDC có: IC là cạnh chung, $IB = IC$, $BC = DC$ (theo giả thiết)

$\Rightarrow \Delta IBC = \Delta IDC$ (c.c.c).

[1] **Bài 3.** Tìm các tam giác bằng nhau trên hình vẽ, giải thích vì sao?



Lời giải:

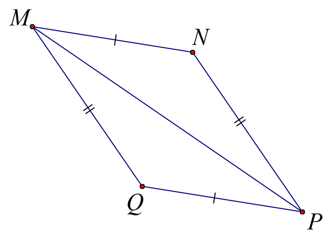
Xét ΔORS và ΔOPQ có:

$OR = OP$, $OS = OQ$ (cùng là bán kính của đường tròn (O)),

$RS = PQ$ (theo giả thiết)

$\Rightarrow \Delta ORS = \Delta OPQ$ (c.c.c).

[2] **Bài 4.** Cho hình vẽ:



a) Chứng minh rằng $\Delta MNP = \Delta PQM$.

b) Biết $MPN = 20°$, tính số đo góc PMQ.

Lời giải:

a) Xét ΔMNP và ΔPQM có: MN là cạnh chung, $MN = PQ$, $NP = MQ$ (theo giả thiết),

$\Rightarrow \Delta MNP = \Delta PQM$ (c.c.c)

b) Vì $\Delta MNP = \Delta PQM$ (chứng minh trên) $\Rightarrow PMQ = MPN$ (hai góc tương ứng).

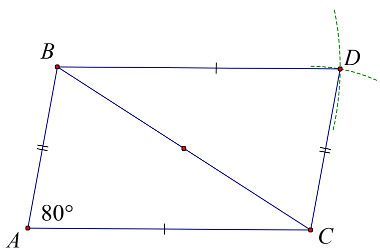
Mà $MPN = 20° \Rightarrow PMQ = 20°$.

[2] **Bài 5.** Cho ΔABC có $A = 80°$. Vẽ cung tròn tâm B có bán kính bằng độ dài đoạn AC. Vẽ cung tròn tâm C có bán kính bằng độ dài đoạn AB. Hai cung tròn này cắt nhau tại D nằm khác phía của A đối với BC.

a) Chứng minh $\Delta ABC = \Delta DCB$. Từ đó suy ra số đo góc BDC.

b) Chứng minh $AB \,//\, CD$.

Lời giải:

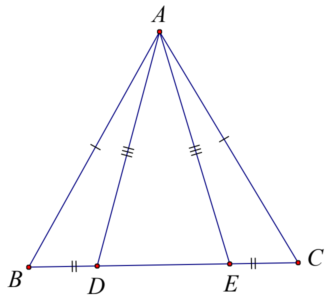


a) Xét ΔABC và ΔDCB có: BC là cạnh chung, $AB = CD$, $AC = BD$ (theo giả thiết)

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta DCB$ (c.c.c) $\Rightarrow BDC = CAB$ (hai góc tương ứng) $\Rightarrow BDC = 80°$.

b) Vì $\Delta ABC = \Delta DCB$ (chứng minh trên) $\Rightarrow ABC = DCB$ (hai góc tương ứng).

Mà hai góc này ở vị trí so le trong so với AB và CD nên $AB \,//\, CD$.

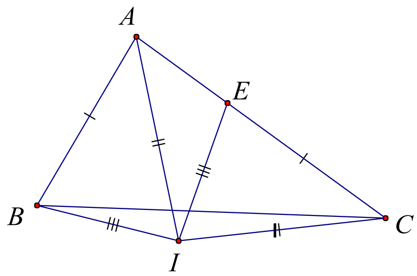


[3] **Bài 6.** Cho ΔABC có $AB < AC$. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $CE = AB$. Gọi I là một điểm sao cho $IA = IC$, $IB = IE$. Chứng minh rằng:

a) $\Delta AIB = \Delta CIE$

b) So sánh IAB và ACI.

Lời giải:



c) Xét ΔAIB và ΔCIE có: $IA = IC$, $IB = IE$, $AB = CE$ (theo giả thiết)

$\Rightarrow \Delta AIB = \Delta CIE$ (c.c.c) $\Rightarrow IAB = ICE$ (hai góc tương ứng).

Mà E thuộc AC nên $ICE = ACI$. Vậy $IAB = ACI$.

[4] **Bài 7.** Cho ΔABC có $AB = AC$. Gọi M là trung điểm của BC.

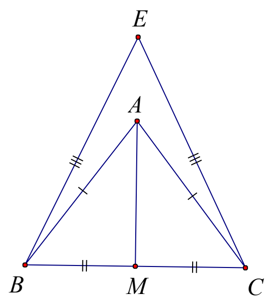
a) Chứng minh rằng: AM là phân giác của BAC

b) Chứng minh rằng: AM là đường trung trực của đoạn thẳng BC.

c) Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa A lấy điểm E sao cho $EB = EC$.

Chứng minh rằng: A, E, M thẳng hàng.

Lời giải:



a) Xét ΔAMB và ΔAMC có:

AM là cạnh chung,

$AB = AC$ (theo giả thiết),

$BM = CM$ (vì M là trung điểm BC)

$\Rightarrow \Delta AMB = \Delta AMC$ (c.c.c)

$\Rightarrow BAM = CAM$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow AM$ là phân giác của BAC.

b) Vì $\Delta AMB = \Delta AMC$ (chứng minh trên) $\Rightarrow BMA = CMA$ (hai góc tương ứng).

Mà $BMA + CMA = 180°$ (kề bù) $\Rightarrow BMA = CMA = 90° \Rightarrow AM \perp BC$.

Mà M là trung điểm của BC nên AM là đường trung trực của đoạn thẳng BC.

c) Xét ΔEMB và ΔEMC có:

EM là cạnh chung,

$EB = EC$ (theo giả thiết),

$BM = CM$ (vì D là trung điểm BC)

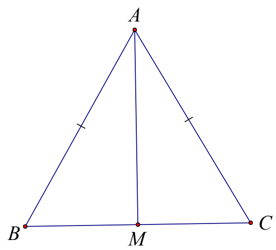
$\Rightarrow \Delta EMB = \Delta EMC$ (c.c.c) $\Rightarrow BME = CME$ (hai góc tương ứng).

Mà $BME + CME = 180°$ (kề bù) $\Rightarrow BME = CME = 90° \Rightarrow EM \perp BC$.

Vì qua điểm M chỉ có duy nhất một đường thẳng vuông góc với BC mà $EM \perp BC, AM \perp BC$ nên hai đường thẳng EM, AM trùng nhau hay A, E, M thẳng hàng.

[4] **Bài 8.** Cho ΔABC có $AB = AC$ và $BAC = 60°$. Tính số đo các góc còn lại của ΔABC.

Lời giải:



Lấy M là trung điểm của BC.

Xét ΔAMB và ΔAMC có:

AM là cạnh chung,

$AB = AC$ (theo giả thiết),

$BM = CM$ (vì M là trung điểm BC)

$\Rightarrow \Delta AMB = \Delta AMC$ (c.c.c) $\Rightarrow ABM = ACM$ (hai góc tương ứng) $\Rightarrow ACB = ABC$.

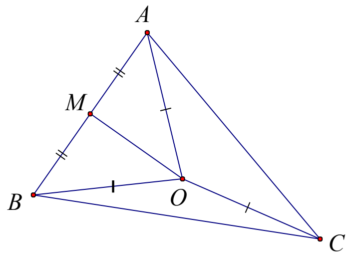
Xét ΔABC có: $BAC + ABC + ACB = 180°$ (tính chất tổng ba góc trong một tam giác)

$\Rightarrow ABC + ACB = 180° - BAC = 180° - 60° = 120°$.

Mà $ACB = ABC$ nên $ACB = ABC = 120° : 2 = 60°$.

[4] **Bài 9.** Cho tam giác nhọn ABC. Giả sử O là một điểm nằm trong tam giác sao cho $OA = OB = OC$. Chứng minh rằng: O là giao điểm của ba đường trung trực của ba cạnh ΔABC.

Lời giải:



Lấy M là trung điểm AB .

Xét ΔAMO và ΔBMO có:

MO là cạnh chung,
$OA = OB$ (theo giả thiết),
$MA = MB$ (vì M là trung điểm AB)

$\Rightarrow \Delta AMO = \Delta BMO$ (c.c.c) $\Rightarrow AMO = BMO$ (hai góc tương ứng).

Mà $AMO + BMO = 180^\circ$ (kề bù) $\Rightarrow AMO = BMO = 90^\circ \Rightarrow OM \perp AB$.

Mà M là trung điểm của AB nên OM là đường trung trực của đoạn thẳng AB .

Hay O thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AB .

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta cũng có O thuộc đường trung trực của đoạn thẳng BC và AC .

Vậy O là giao điểm của ba đường trung trực của ba cạnh ΔABC .

-HẾT-

CHUYÊN ĐỀ 14.

CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU THỨ HAI VÀ THỨ BA CỦA TAM GIÁC

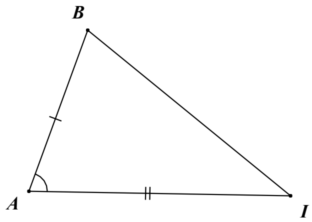
PHẦN I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

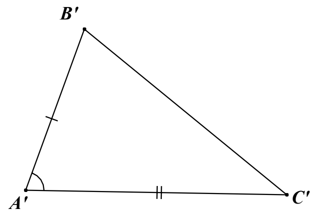
1. Trường hợp bằng nhau: cạnh - góc - cạnh

Nếu hai cạnh và góc xen giữa của tam giác này bằng hai cạnh và góc xen giữa của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

Xét ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có:

$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ A = A' \\ AC = A'C' \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' \text{ (c.g.c)}$$



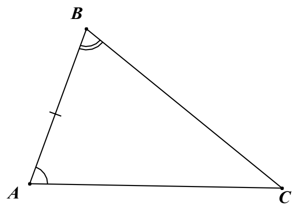


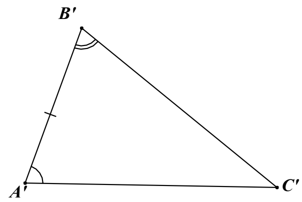
2. Trường hợp bằng nhau: cạnh - góc - cạnh

Nếu một cạnh và hai góc kề của tam giác này bằng một cạnh và hai góc kề của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

Xét ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có:

$$\left.\begin{array}{l} B = B' \\ AB = A'B' \\ A = A' \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C' \text{(g.c.g)}$$





PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI.

Dạng 1. Tìm hoặc chứng minh hai tam giác bằng nhau

I. Phương pháp giải:

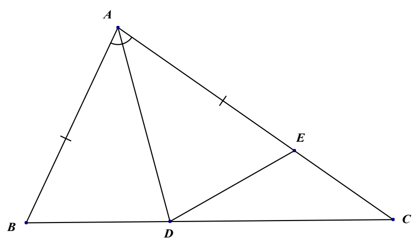
+ Xét hai tam giác.

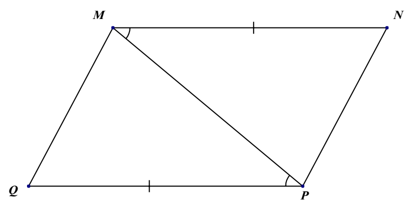
+ Kiểm tra ba điều kiện bằng nhau cạnh - góc - cạnh, góc – cạnh - góc.

+ Kết luận hai tam giác bằng nhau.

II. Bài toán.

Bài 1. MĐ1 Trong các hình vẽ sau, có các tam giác nào bằng nhau? Vì sao?





Lời giải:

Các tam giác bằng nhau: $\Delta ABD = \Delta AED$; $\Delta QMP = \Delta NPM$. Vì:

+ Xét ΔABD và ΔAED có :

$AB = AE$ (giả thiết); $BAD = EAD$ (giả thiết); AD là cạnh chung

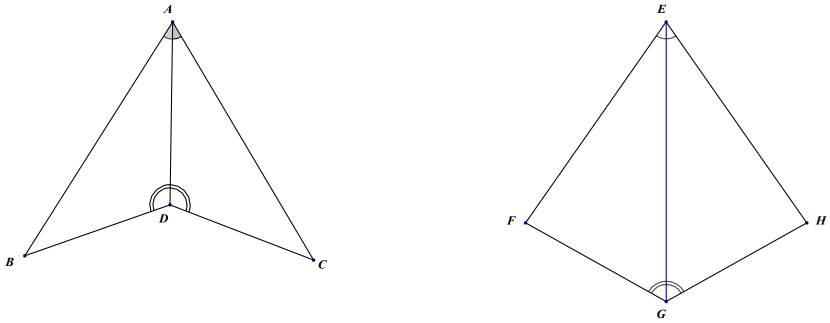
$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta AED$ (c.g.c).

+ Xét ΔQMP và ΔNPM có:

$MN = PQ$ (giả thiết); $NMP = QPM$ (giả thiết); MP là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta QMP = \Delta NPM$ (c.g.c).

Bài 2. MĐ1. Trong các hình vẽ sau, có hai tam giác nào bằng nhau? Vì sao?



Lời giải:

Các tam giác bằng nhau: $\Delta ADB = \Delta ADC$; $\Delta EFG = \Delta EHG$.

Thật vậy:

+ Xét ΔADB và ΔADC có:

$ADB = ADC$ (giả thiết); AD là cạnh chung; $BAD = CAD$ (giả thiết)

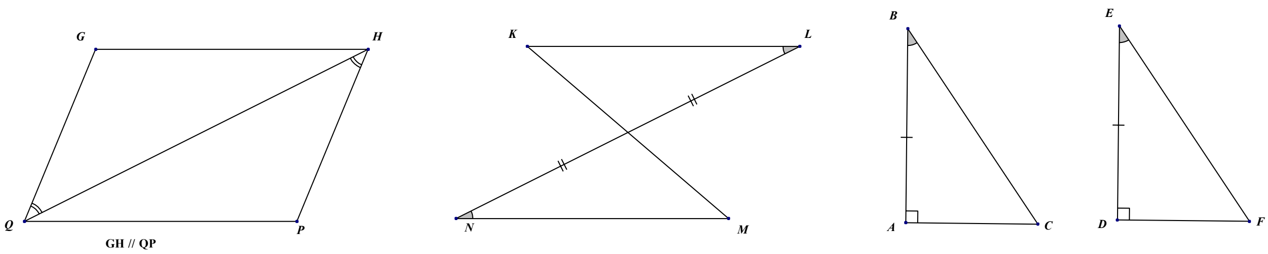
$\Rightarrow \Delta ADB = \Delta ADC$ (g.c.g).

+ Xét ΔEFG và ΔEHG có:

$FEG = HEG$ (giả thiết); EG là cạnh chung; $EGF = EGH$ (giả thiết)

$\Rightarrow \Delta EFG = \Delta EHG$ (g.c.g)

Bài 3. MĐ1 Trong các hình vẽ sau, có hai tam giác nào bằng nhau? Vì sao?



Lời giải:

Các tam giác bằng nhau: $\Delta GQH = \Delta PHQ$; $\Delta IKL = \Delta IMN$; $\Delta ABC = \Delta DEF$.

Thật vậy:

+ Xét ΔGQH và ΔPHQ có:

$GQH = PHQ$ (theo giả thiết)

$GHQ = PQH$ (hai góc so le trong, $GH \parallel QP$)

QH là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta GQH = \Delta PHQ$ (g.c.g).

+ Xét ΔIKL và ΔIMN có:

$IL = IK$ (theo giả thiết);

$KIL = MIN$ (hai góc đối đỉnh);

$KLI = MNI$ (theo giả thiết)

$\Rightarrow \Delta IKL = \Delta IMN$ (g.c.g)

Xét ΔABC và ΔDEF có:

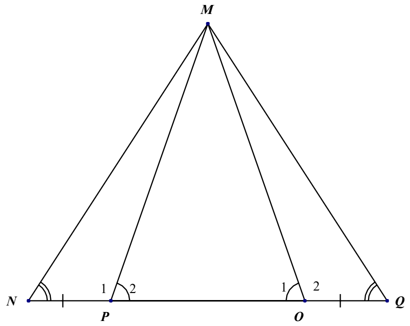
$A = D$ (theo giả thiết);

$B = E$ (theo giả thiết);

$AB = DE$ (theo giả thiết)

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta DEF$ (g.c.g)

Bài 4. MĐ1 Trong các hình vẽ sau, có các tam giác nào bằng nhau? Vì sao?



Lời giải:

Các tam giác bằng nhau: $\Delta MNP = \Delta MQO$; $\Delta MNO = \Delta MQP$.

Thật vậy:

+) Ta có: $P_1 + P_2 = 180°$ (hai góc kề bù); $O_1 + O_2 = 180°$ (hai góc kề bù)

Lại có : $P_2 = O_1 \Rightarrow P_1 = O_2$

Xét ΔMNP và ΔMQO có:

$P_1 = O_2$ (chứng minh trên) ; $NP = QO$ (theo giả thiết); $N = Q$ (theo giả thiết)

$\Rightarrow \Delta MNP = \Delta MQO$ (g.c.g)

+) Ta có: $NO = NP + PO$; $QP = QO + OP$. Mà $NP = QO \Rightarrow NO = QP$.

+ Xét ΔMNO và ΔMQP có:

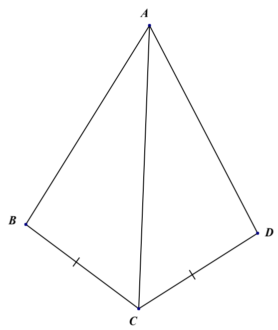
$MN = MQ$ (vì $\Delta MNP = \Delta MQO$ - theo chứng minh trên),

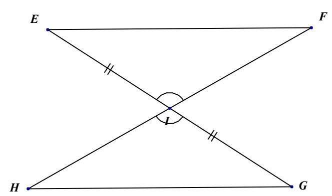
$N = Q$ (theo giả thiết),

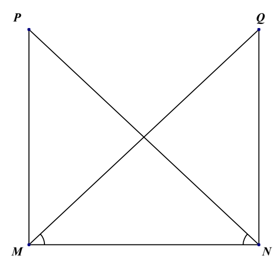
$NO = QP$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta MNO = \Delta MQP$ (c.g.c).

Bài 5. MĐ2 Nêu thêm một điều kiện để mỗi hình dưới đây là hai tam giác bằng nhau theo trường hợp cạnh - góc - cạnh.







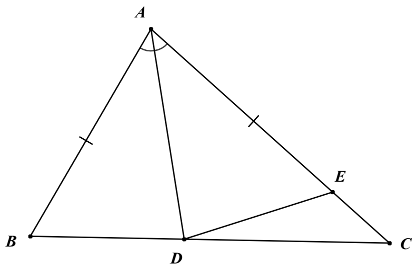
Lời giải:

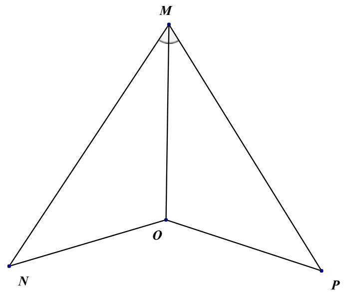
Để $\Delta ABC = \Delta ADC$ theo trường hợp cạnh - góc - cạnh thì thêm điều kiện : $ACB = ACD$.

Để $\Delta EFI = \Delta GHI$ theo trường hợp cạnh - góc - cạnh thì thêm điều kiện: $IF = IH$.

Để $\Delta MNP = \Delta NMQ$ theo trường hợp cạnh - góc - cạnh thì thêm điều kiện: $NP = MQ$.

Bài 6. MĐ2 Nêu thêm một điều kiện để mỗi hình dưới đây là hai tam giác bằng nhau theo trường hợp góc - cạnh - góc.





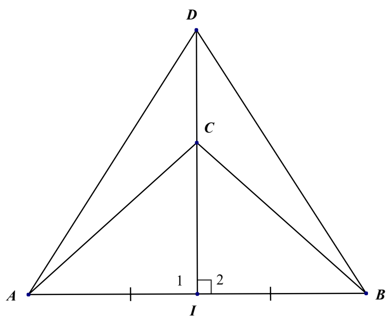
Lời giải:

Để $\Delta ABD = \Delta AED$ theo trường hợp góc - cạnh - góc thì thêm điều kiện: $ADB = ADE$.

Để $\Delta MNO = \Delta MPO$ theo trường hợp góc - cạnh - góc thì thêm điều kiện: $MON = MOP$

Bài 7. MĐ2 Qua trung điểm I của đoạn thẳng AB, kẻ đường thẳng vuông góc với AB, trên đường thẳng vuông góc đó lấy hai điểm C và D. Nối CA, CB, DA, DB. Tìm các cặp tam giác bằng nhau.

Lời giải:



Xét ΔACI và ΔBCI có:

$AI = BI$ (I là trung điểm của AB),

CI là cạnh chung,

$AIC = BIC = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta ACI = \Delta BCI$ (c.g.c).

Xét ΔADI và ΔBDI có:

$AI = BI$ (I là trung điểm của AB),

DI là cạnh chung,

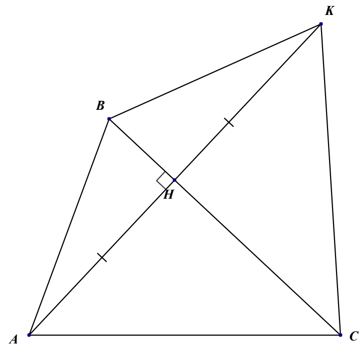
$AID = BID = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta ADI = \Delta BDI$ (c.g.c).

Vậy các cặp tam giác bằng nhau là: $\Delta ACI = \Delta BCI$; $\Delta ADI = \Delta BDI$.

Bài 8. MĐ2 Cho tam giác ABC, kẻ AH vuông góc với $BC, (H \in BC)$. Trên. tia đối của tia HA lấy điểm K sao cho $HK = HA$, nối KB, KC. Tìm các cặp tam giác bằng nhau.

Lời giải:



+ Xét ΔABH và ΔKBH có: BH là cạnh chung; $AH = KH$ (giả thiết); $AHB = KHB = 90°$

$\Rightarrow \Delta ABH = \Delta KBH$ (c.g.c).

+ Xét ΔCAH và ΔCKH có: CH là cạnh chung; $AH = KH$ (giả thiết); $AHC = KHC = 90°$

$\Rightarrow \Delta CAH = \Delta CKH$ (c.g.c)

+ Xét ΔABC và ΔKBC có:

BC là cạnh chung,

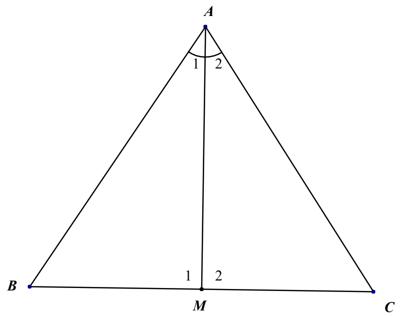
$AC = KC$ (vì $\Delta CAH = \Delta CKH$),

$AB = KB$ (vì $\Delta ABH = \Delta KBH$)

$\Rightarrow \Delta CAH = \Delta CKH$ (c. c. c).

Vậy các cặp tam giác bằng nhau: $\Delta ABH = \Delta KBH$, $\Delta CAH = \Delta CKH$, $\Delta ABC = \Delta KBC$.

Bài 9. MĐ2 Cho tam giác ABC có $AB = AC$. Gọi AM là tia phân giác góc A . Chứng minh $\Delta ABM = \Delta ACM$.



Lời giải:

Xét tam giác ABM và tam giác ACM có :

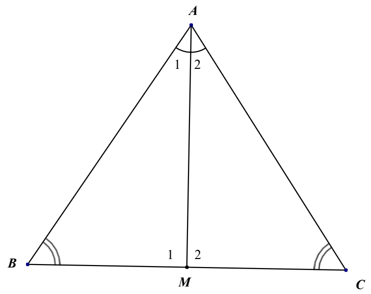
$AB = AC$ (giả thiết),

$BAM = CAM$ (AM là tia phân giác góc A),

AM là cạnh chung.

Suy ra $\Delta ABM = \Delta ACM$ (c.g.c).

Bài 10. MĐ2 Cho tam giác ABC có $B = C$. Gọi AM là tia phân giác góc A . Chứng minh $\Delta ABM = \Delta ACM$.



Lời giải:

Xét ΔABM có: $M_2 = 180° - \left(A + B\right)$ (tổng ba góc trong một tam giác bằng $180°$).

Xét ΔACM có: $M_2 = 180° - \left(A + C\right)$ (tổng ba góc trong một tam giác bằng $180°$).

Mà: $B = C$; $A_1 = A_2$ suy ra $M_1 = M_2$.

Xét tam giác ABM và tam giác ACM có :

$M_1 = M_2$ (chứng minh trên),

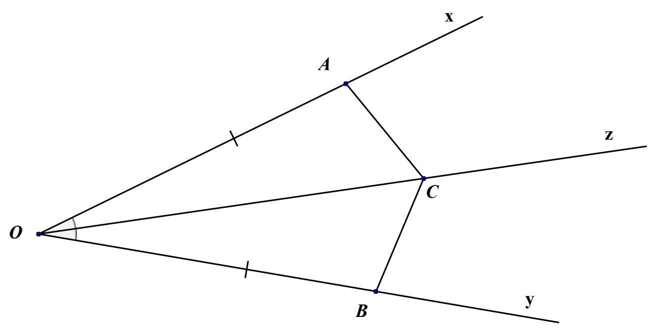
AM là cạnh chung,

$A_1 = A_2$ (AM là tia phân giác góc A).

Suy ra $\Delta ABM = \Delta ACM$ (c.g.c).

Bài 11. MĐ2 Cho Oz là tia phân giác góc xOy . Trên các tia Ox, Oy, Oz lần lượt lấy các điểm A, B, C (khác O) sao cho $OA = OB$. Chứng minh $\Delta OAC = \Delta OBC$.

Lời giải:



Xét ΔOAC và ΔOBC có:

$OA = OB$ (giả thiết)

$AOC = BOC$ (giả thiết)

OC là cạnh chung

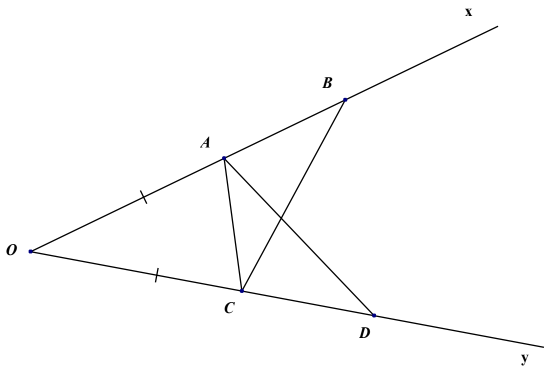
$\Rightarrow \Delta OAC = \Delta OBC$ (c.g.c).

Bài 12. MĐ3 Cho góc xOy khác góc bẹt. Trên cạnh Ox lấy hai điểm A và B , trên cạnh Oy lấy hai điểm C và D , sao cho $OA = OC; OB = OD$.

a) Chứng minh $\Delta OAD = \Delta OCB$.

b) Chứng minh $\Delta ACD = \Delta CAB$.

Lời giải:



a) Xét tam giác OAD và tam giác OCB, ta có: $OA = OC$ (giả thiết), AOC chung, $OD = OB$ (giả thiết)

$\Rightarrow$ $\Delta OAD = \Delta OCB$ (c.g.c).

b) Ta có : $OB = OA + AB$, $OD = OC + CD$. Mà $OA = OC; OB = OD$ nên $AB = CD$.

Lại có: $\Delta OAD = \Delta OCB$ (chứng minh trên) suy ra $AD = CB; D = B$ (tương ứng).

Xét tam giác ACD và tam giác CAB có: $AB = CD$, $D = B$, $AD = CB$ (chứng minh trên)

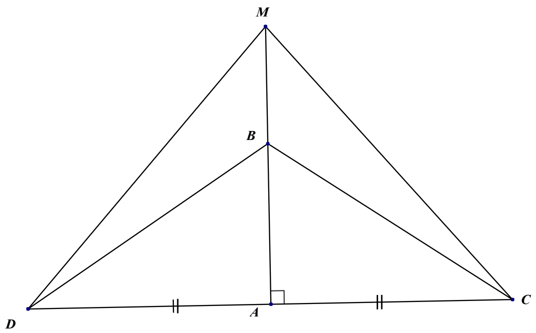
$\Rightarrow \Delta ACD = \Delta CAB$ (c.g.c).

Bài 13. MĐ3 Cho ΔABC vuông ở A. Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho $AD = AC$.

a) Chứng minh $\Delta ABC = \Delta ABD$.

b) Trên tia đối của tia AB lấy điểm M. Chứng minh $\Delta MBD = \Delta MBC$.

Lời giải:



a) Xét ΔABC và ΔABD có: $AD = AC$ (giả thiết), $BAD = BAC = 90°$, AB là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta ABD$ (c.g.c).

b) Xét ΔMBD và ΔMBC có: $AD = AC$ (giả thiết), $MAD = MAC = 90°$, AM là cạnh chung

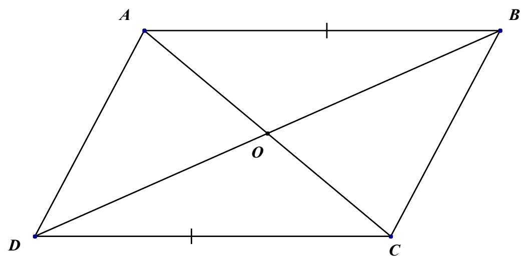
$\Rightarrow \Delta MBD = \Delta MBC$ (c.g.c).

Bài 14. MĐ3 Cho hình vẽ sau, trong đó $AB // CD$, $AB = CD$. Chứng minh rằng:

a) $\Delta OAB = \Delta ODC$.

b) $\Delta OAC = \Delta ODB$.

Lời giải:



a) Xét ΔOAB và ΔODC có:

$OAB = ODC$ (hai góc so le trong),

$AB = CD$ (giả thiết),

$OBA = OCD$ (hai góc so le trong)

$\Rightarrow \Delta OAB = \Delta ODC$ (g.c.g).

b) Vì $\Delta OAB = \Delta ODC$ (chứng minh trên) $\Rightarrow OA = OD; OB = OC$ (các cạnh tương ứng).

Xét ΔOAC và ΔODB có: $OA = OD$, $OB = OC$ (chứng minh trên), $AOB = DOC$ (hai góc đối đỉnh)

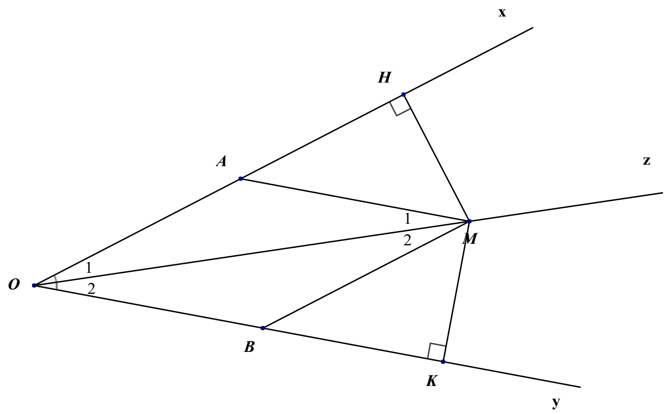
$\Rightarrow \Delta OAC = \Delta ODB$ (c.g.c),

Bài 15. CĐ4 Cho góc nhọn xOy có tia Oz là tia phân giác. Qua điểm A thuộc tia Ox, vẽ đường thẳng song song với Oy cắt Oz tại M. Qua M kẻ đường thẳng song song với Ox cắt Oy tại B.

a) Chứng minh $\Delta OAM = \Delta MBO$.

b) Từ M vẽ $MH \perp Ox$; $MK \perp Oy$. Chứng minh $\Delta MHO = \Delta MKO$.

Lời giải:



a) Xét ΔOAM và ΔMBO, ta có :

$O_1 = M_1$ (hai góc so le trong),

OM là cạnh chung,

$M_2 = O_2$ (hai góc so le trong)

$\Rightarrow \Delta OAM = \Delta MBO$ (g.c.g).

b) Ta có: $O_1 + OMH = 90^\circ$ (hai góc nhọn phụ nhau),

$O_2 + OMK = 90^\circ$ (hai góc nhọn phụ nhau).

Lại có : $O_1 = O_2$ (Oz là tia phân giác xOy) $\Rightarrow OMH = OMK$.

Xét ΔOMH và ΔOMK, ta có:

$O_1 = O_2$ (chứng minh trên),

OM chung,

$OMH = OMK$ (chứng minh trên)

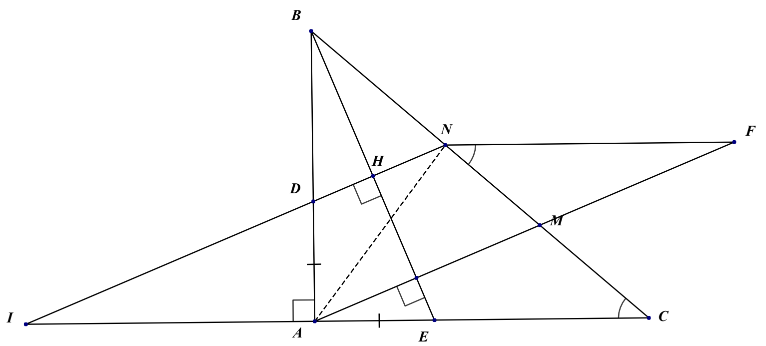
$\Rightarrow \Delta OMH = \Delta OMK$ (g.c.g).

Bài 16. MĐ4 Cho tam giác ABC có $A = 90°$ và $AB = AC$. Trên các cạnh AB và AC lần lượt lấy điểm D và E sao cho $AD = AE$. Qua A và D kẻ đường vuông góc với BE cắt BC lần lượt tại M và N. Tia ND cắt tia CA tại I. Chứng minh rằng:

a) $\Delta AID = \Delta ABE$.

b) Chứng minh $CM = MN$.

Lời giải:



a) Gọi H là giao điểm của BE và IN.

Ta có: ΔAEB vuông tại A nên $ABE + AEB = 90°$; ΔDHB vuông tại H nên $DBH + HDB = 90°$.

Suy ra $HDB = AEB$.

Mà $HDB = ADI$ (hai góc đối đỉnh) suy ra $ADI = AEB$.

Xét ΔADI và ΔABE có: $DAI = EAB = 90°$, $AE = AD$ (giả thiết), $ADI = AEB$ (chứng minh trên).

Do đó $\Delta AID = \Delta ABE$ (g.c.g).

b) Ta có $AM \perp BE$, $IN \perp BE$ suy ra $AM \,//\, IN$.

Qua N kẻ đường thẳng song song với AC cắt AM tại $F \Rightarrow AC \,//\, NF \Rightarrow AI \,//\, NF$.

Xét ΔAIN và ΔNFA có:

$IAN = FNA$ (so le trong, $AI \,//\, NF$),

$ANI = NAF$ (so le trong, $AM \,//\, IN$),

AN là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta AIN = \Delta NFA$ (g.c.g) $\Rightarrow NF = AI$ (hai cạnh tương ứng).

Mà $\Delta AID = \Delta ABE$ (chứng minh trên) $\Rightarrow AI = AB$ (hai cạnh tương ứng).

Lại có $AB = AC$ (giả thiết) $\Rightarrow NF = AC$.

Lại có: $AC \,//\, NF \Rightarrow CAM = MFN$, $ACM = MNF$ (hai góc so le trong).

Xét ΔMAC và ΔMFN ta có:

$CAM = MFN$ (chứng minh trên),

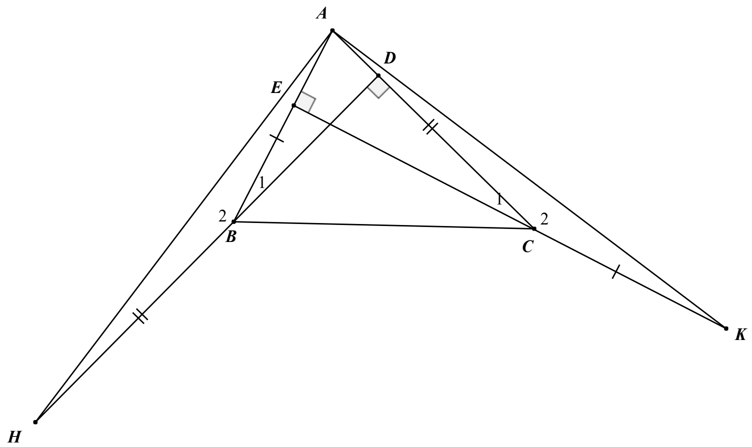
$ACM = MNF$ (chứng minh trên),

$NF = AC$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta MAC = \Delta MFN$ (g.c.g).

Bài 17. MĐ4 Cho ΔABC, kẻ BD vuông góc với AC, CE vuông góc với AB. Trên tia đối của tia BD, lấy điểm H sao cho $BH = AC$. Trên tia đối của tia CE lấy điểm K sao cho $CK = AB$. Chứng minh $AH = AK$.

Lời giải:



Xét ΔABD vuông tại B (vì $BD \perp AC$) $\Rightarrow B_1 + A = 90°$. (1)

Xét ΔACE vuông tại E (vì $CE \perp AB$) $\Rightarrow C_1 + A = 90°$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $B_1 = C_1$.

Mà $B_1 + B_2 = 180°$, $C_1 + C_2 = 180° \Rightarrow B_2 = C_2$.

Xét ΔABH và ΔKCA có: $AB = CK$ (giả thiết), $B_2 = C_2$ (chứng minh trên), $BH = AC$ (giả thiết)

$\Rightarrow \Delta ABH = \Delta KAC$ (c.g.c) $\Rightarrow$ $AH = AK$ (hai cạnh tương ứng).

Dạng 2. Sử dụng trường hợp bằng nhau của tam giác để chứng minh một tính chất khác

I. Phương pháp giải:

+ Chọn hai tam giác có cạnh (góc) là hai đoạn thẳng (góc) cần chứng minh bằng nhau.

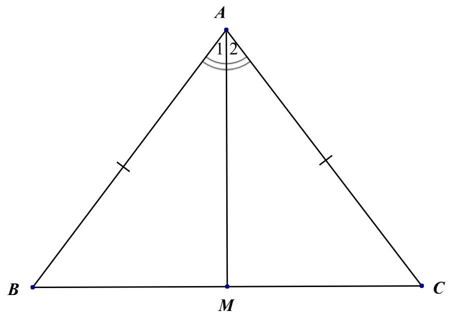
+ Chứng minh hai tam giác ấy bằng nhau theo một trong hai trường hợp cạnh - góc - cạnh, góc - cạnh - góc rồi suy ra hai cạnh (góc) tương ứng bằng nhau.Kiểm tra ba điều kiện bằng nhau cạnh - góc - cạnh, góc - cạnh - góc .

+ Kết hợp với các tính chất đã học về tia phân giác, đường thẳng song song, đường trung trực, tổng ba góc trong một tam giác, ... để chứng minh một tính chất khác.

II. Bài toán.

Bài 1. MĐ1 Cho tam giác ABC có $AB = AC$, tia phân giác của góc A cắt BC tại M. Chứng minh: $BM = CM$.

Lời giải:



Xét tam giác ABM và tam giác ACM có:

$AB = AC$ (giả thiết),

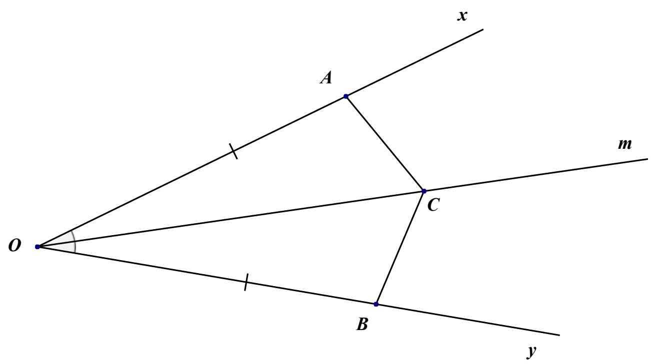
$BAM = CAM$ (AM là tia phân giác góc A),

AM là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta ABM = \Delta ACM$ (c.g.c) $\Rightarrow BM = CM$ (hai cạnh tương ứng).

Bài 2. MĐ1 Cho góc nhọn xOy có Om là tia phân giác, $C \in Om$ $(C \neq O)$. Trên tia Ox lấy điểm A, trên tia Oy lấy điểm B sao cho $OA = OB$. Chứng minh: $CA = CB$.

Lời giải:

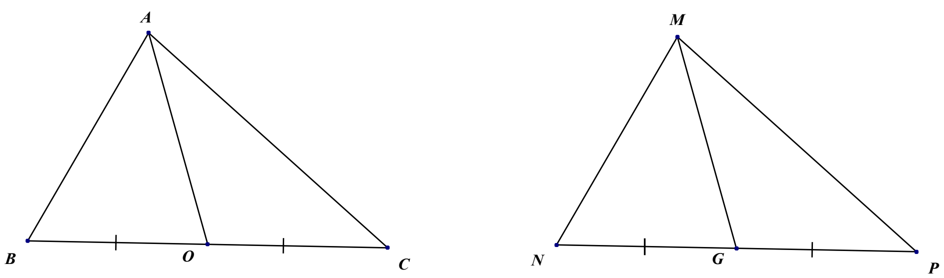


Xét ΔOAC và ΔOBC có: $OA = OB$ (giả thiết), $AOC = BOC$ (giả thiết), OC là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta OAC = \Delta OBC$ (c.g.c) $\Rightarrow CA = CB$ (hai cạnh tương ứng).

Bài 3. MĐ1 Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$. Gọi O và G lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và NP. Chứng minh $AO = MG$.

Lời giải:



Ta có: $\Delta ABC = \Delta MNP$ $\Rightarrow AB = MN$, $B = N, BC = NP$ (tương ứng).

Mà O là trung điểm BC nên $BO = \frac{1}{2}BC$, G là trung điểm NP nên $NG = \frac{1}{2}NP$.

Từ đó suy ra $BO = NG$.

Xét ΔABO và ΔMNG, ta có: $AB = MN$ $B = N$, $BO = NG$ (chứng minh trên)

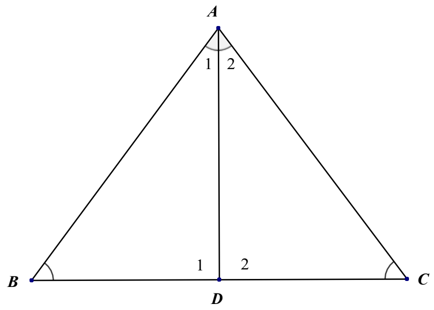
$\Rightarrow \ \Delta ABO = \Delta MNG$ (c.g.c) $\Rightarrow AO = MG$ (hai cạnh tương ứng).

Bài 4. MĐ2 Cho tam giác ABC có $B = C$. Tia phân giác của góc A cắt BC tại D.

a) Chứng minh $AB = AC$.

b) Chứng minh $AD \perp BC$.

Lời giải:



a) Xét ΔADB có: $A + B + D_1 = 180°$ (tổng ba góc trong tam giác).

Xét ΔADC có: $C + B + D_2 = 180°$ (tổng ba góc trong tam giác).

Mà: $A_1 = A_2$ (vì AD là phân giác của BAC), $B = C$ (giả thiết) $\Rightarrow D_1 = D_2$.

Xét ΔADB và ΔADC có:

$A_1 = A_2$ (AD là tia phân giác của góc BAC),

AD là cạnh chung,

$D_1 = D_2$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta ADB = \Delta ADC$ (g.c.g) $\Rightarrow AB = AC$ (hai cạnh tương ứng).

b) Ta có: $D_1 = D_2$ (chứng minh trên), mà $D_1 + D_2 = 180°$ (hai góc kề bù)$\Rightarrow D_1 = D_2 = 90°$

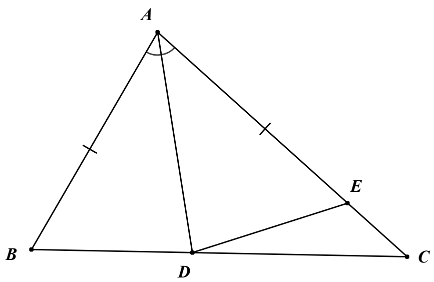
$\Rightarrow AD \perp BC$.

Bài 5. MĐ2 Cho ΔABC có $AB < AC$. Phân giác của góc A cắt cạnh BC tại điểm D. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$. Chứng minh:

a) $BD = ED$.

b) DA là tia phân giác của góc BDE.

Lời giải:



a) Xét ΔADB và ΔADE có:

$AE = AB$ (giả thiết),

$BAD = EAD$ (AD là tia phân giác góc A),

AD là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta ADB = \Delta ADE$ (c.g.c) $\Rightarrow BD = CE$ (hai cạnh tương ứng).

b) Ta có: $\Delta ADB = \Delta ADE$ (chứng minh trên) $\Rightarrow ADB = ADE$ (hai cạnh tương ứng)

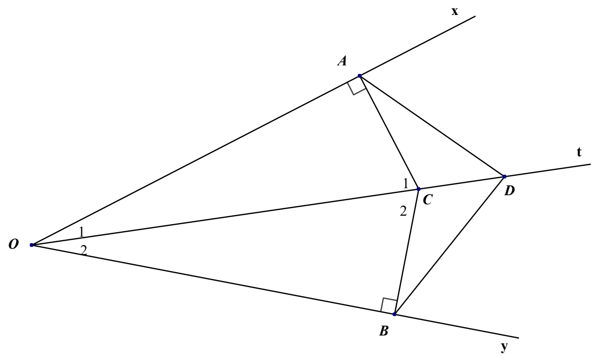
$\Rightarrow DA$ là tia phân giác của góc BDE.

Bài 6. MĐ2 Cho góc xOy khác góc bẹt và có Ot là tia phân giác. Lấy điểm C thuộc Ot $(C \neq O)$. Qua C kẻ đường vuông góc với Ot, cắt Ox, Oy theo thứ tự ở A, B.

a) Chứng minh: $OA = OB$.

b) Lấy điểm D thuộc Ct $(D \neq C)$. Chứng minh: $DA = DB$ và $OAD = OBD$.

Lời giải:



a) Xét ΔOAC có: $O_1 + A + C_1 = 180°$ (tổng ba góc trong một tam giác).

Xét ΔOBC có: $O_2 + B + C_2 = 180°$ (tổng ba góc trong một tam giác).

Mà $O_1 = O_2$ (vì Ot là phân giác xOy), $A = B\ (= 90°)$ nên $C_1 = C_2$.

Xét ΔOAC và ΔOBC có:

$O_1 = O_2$ (Ot là tia phân giác xOy),

OC là cạnh chung,

$C_1 = C_2$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta OAC = \Delta OBC$ (g.c.g)

$\Rightarrow OA = OB$ (hai cạnh tương ứng).

b) Xét ΔOAD và ΔOBD có:

$O_1 = O_2$ (Ot là tia phân giác xOy),

OD là cạnh chung,

$OA = OB$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta OAD = \Delta OBD$ (c.g.c)

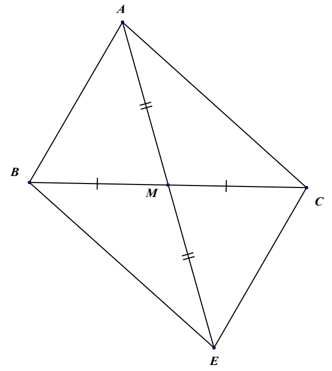
$\Rightarrow AD = BD$ (hai cạnh tương ứng), $OAD = OBD$ (hai góc tương ứng).

Bài 7. MĐ2 Cho ΔABC, M là trung điểm của BC. Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Chứng minh:

a) $\Delta ABM = \Delta ECM$.

b) $AB = CE$ và $AC \,//\, BE$.

Lời giải:



a) Xét ΔABM và ΔECM có:

$AM = EM$ (giả thiết),

$BM = CM$ (M là trung điểm của BC),

$AMB = EMC$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta ABM = \Delta ECM$ (c.g.c).

b) Ta có: $\Delta ABM = \Delta ECM$ (chứng minh trên) $\Rightarrow AB = CE$ (hai cạnh tương ứng).

Xét ΔAMC và ΔEMB có:

$AM = EM$ (giả thiết),

$BM = CM$ (M là trung điểm của BC),

$AMC = EMB$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta AMC = \Delta EMB$ (c.g.c)

$\Rightarrow ACM = EBM$ (hai góc tương ứng).

Mà hai góc này ở vị trí so le trong $\Rightarrow AC \mathbin{//} BE$.

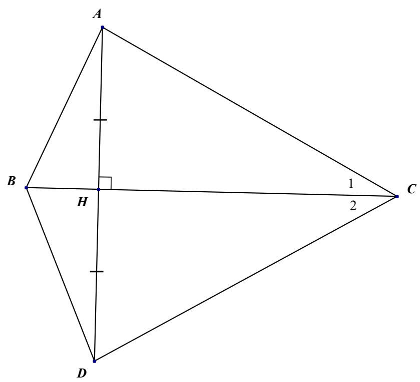
Bài 8. MĐ3 Cho tam giác ABC có $A = 80°$. Dựng AH vuông góc với BC ($H \in BC$). Trên tia đối tia HA lấy điểm D sao cho $HD = HA$.

a) Chứng minh: $AC = DC$.

b) Chứng minh: $\Delta ABC = \Delta DBC$.

c) Xác định số đo góc BDC.

Lời giải:



a) Xét ΔAHC và ΔDHC có:

$AH = AD$ (giả thiết),

HC là cạnh chung,

$AHD = DHC = 90°$

$\Rightarrow \Delta AHC = \Delta DHC$ (c.g.c)

$\Rightarrow AC = DC$ (hai cạnh tương ứng).

b) Vì $\Delta AHC = \Delta DHC$ (chứng minh trên) $\Rightarrow C_1 = C_2$ (hai góc tương ứng).

Xét ΔABC và ΔDBC có:

$AC = DC$ (chứng minh trên),

BC là cạnh chung,

$C_1 = C_2$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta DBC$ (c.g.c)

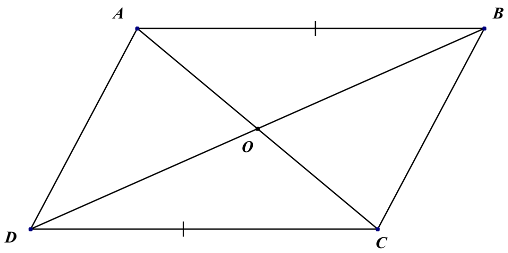
c) Vì $\Delta ABC = \Delta DBC$ (chứng minh trên) $\Rightarrow BDC = BAC$ (hai góc tương ứng) $\Rightarrow BDC = 80°$.

Bài 9. MĐ3 Cho ΔABC trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B, lấy điểm D sao cho $AD \,//\, BC$ và $AD = BC$. Chứng minh:

a) $AB = CD$.

b) $AB \,//\, CD$ và $\Delta ABD = \Delta CDB$.

Lời giải:



a) Xét ΔABC và ΔCDA có:

$AD = BC$ (giả thiết),

AC là cạnh chung,

$ACB = DAC$ (hai góc so le trong)

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta CDA$ (c.g.c)

$\Rightarrow AB = CD$ (hai cạnh tương ứng).

b) Vì $\Delta ABC = \Delta CDA$ (chứng minh trên) $\Rightarrow BAC = DCA$ (hai góc tương ứng).

Mà hai góc này ở vị trí so le trong $\Rightarrow AB \,//\, DC$.

Xét ΔABD và ΔCBD có:

$AD = BC$ (giả thiết),

BD là cạnh chung,

$ABD = CBD$ (hai góc so le trong)

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta CDA$ (c.g.c).

Bài 10. MĐ3 Cho ΔABC có $A = 90°$, trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BA = BE$. Tia phân giác góc B cắt AC ở D.

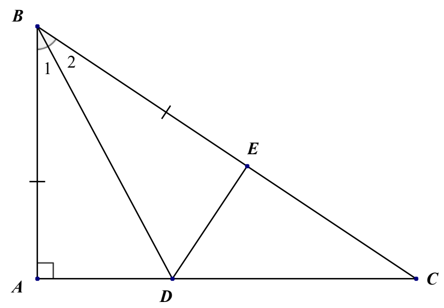
a) Chứng minh: $\Delta ABD = \Delta EBD$.

b) Chứng minh: $DA = DE$.

c) Tính số đo BED.

d) Xác định độ lớn góc B để $EDB = EDC$.

Lời giải:



a) Xét ΔABD và ΔEBD có:

$BA = BE$ (giả thiết),

$B_1 = B_2$ (BD là tia phân giác góc B),

BD là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta EBD$ (c.g.c).

b) Vì $\Delta ABD = \Delta EBD$ (chứng minh trên) $\Rightarrow DA = DE$ (hai cạnh tương ứng).

c) Vì $\Delta ABD = \Delta EBD$ (chứng minh trên) $\Rightarrow BAD = BED$ (hai cạnh tương ứng) $\Rightarrow BED = 90°$.

d) Để $EDB = EDC$ thì $\Delta EDB = \Delta EDC \Rightarrow B_2 = C \Rightarrow B = 2C$.

Mà $B + C = 90° \Rightarrow B = 60°$.

Vậy $B = 60°$ thì $EDB = EDC$.

Bài 11. MĐ3 Cho ΔABC có $AB < AC$. Kẻ tia phân giác AD của BAC $(D \in BC)$. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$, trên tia AB lấy điểm F sao cho $AF = AC$. Chứng minh:

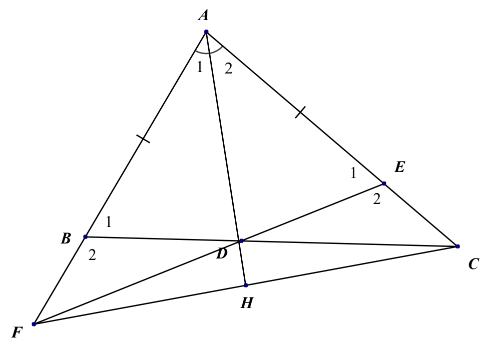
a) $BD = ED$.

b) $BF = EC$

c) $\Delta BDF = \Delta EDC$.

d) $AD \perp FC$.

Lời giải:



a) Xét ΔABD và ΔAED có:

AD là cạnh chung,

$A_1 = A_2$ (AD là tia phân giác của BAC),

$AB = AE$ (giả thiết)

$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta AED$ (c.g.c) $\Rightarrow BD = ED$ (hai cạnh tương ứng).

b) Ta có: $AF = AB + BF$, $AC = AE + EC$. Mà $AC = AF$, $AB = AE$ (giả thiết) $\Rightarrow BF = EC$.

c) Vì $\Delta ABD = \Delta AED$ (chứng minh trên) $\Rightarrow B_1 = E_1$ (hai góc tương ứng).

Ta có: $B_1 + B_2 = 180°$, $E_1 + E_2 = 180°$ (kề bù). Mà $B_1 = E_1$ (chứng minh trên) $\Rightarrow B_2 = E_2$.

Xét ΔBDF và ΔEDC có: $BD = ED$, $B_2 = E_2$, $BF = EC$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta BDF = \Delta EDC$ (c.g.c)

d) Gọi H là giao điểm của AD và FC.

Xét ΔAFH và ΔACH có:

AH là cạnh chung,

$A_1 = A_2$ (AD là tia phân giác của BAC),

$AF = AC$ (giả thiết)

$\Rightarrow \Delta AFH = \Delta ACH$ (c.g.c)

$\Rightarrow AHF = AHC$ (hai góc tương ứng).

Lại có : $AHF + AHC = 180°$ (kề bù) $\Rightarrow AHF = AHC = 90° \Rightarrow AD \perp FC$.

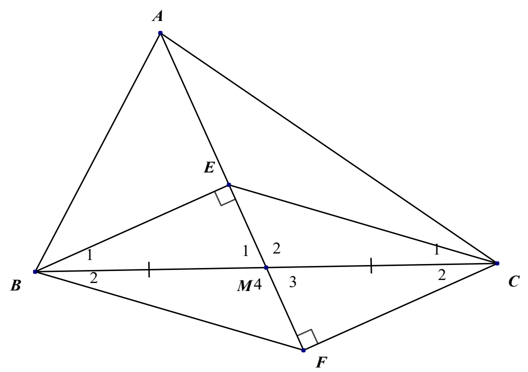
Bài 12. MĐ4 Cho tam giác $ABC\left(AB < AC\right)$, tia Ax đi qua trung điểm M của BC. Kẻ BE và CF vuông góc với Ax $(E, F \in Ax)$.

a) Chứng minh: $BE \parallel CF$.

b) So sánh BE và FC; CE và BF.

c) Tìm điều kiện về ΔABC để có $BE = CE$.

Lời giải:



a) Ta có: $BE \perp Ax$, $CF \perp Ax$ (giả thiết) $\Rightarrow BE \parallel CF$ (từ vuông góc đến song song).

b) Xét ΔMBE và ΔMCF có:

$B_1 = C_2$ (hai góc so le trong),

$BM = CM$ (M là trung điểm của BC),

$M_1 = M_3$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta MBE = \Delta MCF$ (g.c.g) $\Rightarrow BE = CF$ (hai cạnh tương ứng).

Xét ΔMBF và ΔMCE có:

$B_2 = C_1$ (hai góc so le trong),

$BM = CM$ (M là trung điểm của BC),

$M_2 = M_4$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta MBF = \Delta MCE$ (g.c.g) $\Rightarrow BF = CE$ (hai cạnh tương ứng).

d)

Giả sử $BE = CE$

Xét ΔBEM và ΔCEM có: $BE = CE$; $BM = CM$ (cmt); EM là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta BEM = \Delta CEM$ (c. c. c)

$\Rightarrow BME = CME$ (hai góc tương ứng)

Mặt khác, $BME + CME = 180°$ (hai góc kề bù) nên $BME = CME = 90°$

Suy ra $EM \perp BC$ hay $AM \perp BC$

Xét ΔBAM và ΔCAM có: $BAM = CAM = 90°$; $BM = CM$ (cmt); AM là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta BAM = \Delta CAM$ (c. g. c)

$\Rightarrow BA = CA$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A.

Vậy ΔABC cân tại A thì $BE = CE$.

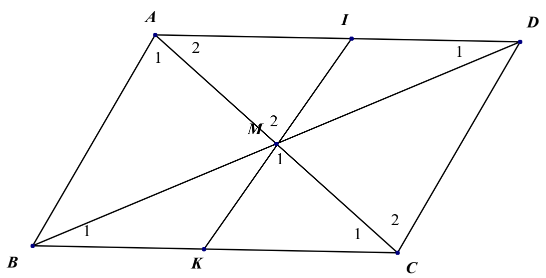
Bài 13. MĐ4 Cho tam giác ABC. Đường thẳng qua A song song với BC cắt đường thẳng qua C song song với AB ở D. Gọi M là giao điểm của BD và AC.

a) Chứng minh $\Delta ABC = \Delta CDA$.

b) Chứng minh M là trung điểm của AC.

c) Đường thẳng d qua M cắt các đoạn thẳng AD, BC lần lượt ở I, K. Chứng minh M là trung điểm của IK.

Lời giải:



a) Xét ΔABC và ΔCDA có:

$A_2 = C_1$ ($AD // BC$;hai góc so le trong),

AC là cạnh chung,

$A_1 = C_2$ ($AB // DC$; hai góc so le trong),

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta CDA$ (g.c.g).

b) Vì $\Delta ABC = \Delta CDA$ (chứng minh trên) $\Rightarrow AD = BC$ (hai cạnh tương ứng).

Xét ΔAMD và ΔCMB có:

$A_2 = C_1$ ($AD // BC$, hai góc so le trong),

AC là cạnh chung,

$B_1 = D_1$ (AD // BC , hai góc so le trong)

$\Rightarrow \Delta AMD = \Delta CMB$ (g.c.g) $\Rightarrow AM = CM$ (hai cạnh tương ứng) $\Rightarrow M$ là trung điểm của AC .

c) Xét ΔAMI và ΔCMK có:

$A_2 = C_1$ (AD // BC , hai góc so le trong),

$AM = CM$ (chứng minh trên),

$M_2 = M_1$ (hai góc đối đỉnh)

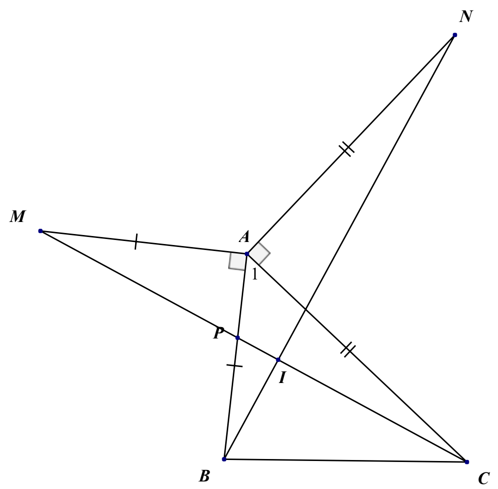
$\Rightarrow \Delta AMI = \Delta CMK$ (g.c.g) $\Rightarrow MI = MK$ (hai cạnh tương ứng) $\Rightarrow M$ là trung điểm của IK .

Bài 14. MĐ4 Cho tam giác ABC nhọn. Vẽ đoạn thẳng AD vuông góc với AB và $AD = AB$ (D, C khác phía so với AB). Vẽ đoạn thẳng AE vuông góc với AC và $AE = AC$ (E, B khác phía so với AC). Chứng minh:

a) $BE = DC$.

b) $BE \perp DC$.

Lời giải:



a) Vì $AD \perp AB$ (giả thiết) nên $BAD = 90°$; $AE \perp AC$ (giả thiết) nên $CAE = 90°$.

Ta có: $DAC = BAD + A_1 = 90° + A_1$ và $BAE = CAE + A_1 = 90° + A_1$ $\Rightarrow$ $DAC = BAE$.

Xét ΔDAC và ΔBAE : $AD = AB$, $AC = AE$ (giả thiết), $DAC = BAE$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta DAC = \Delta BAE$ (c.g.c).

Vì $\Delta DAC = \Delta BAE$ (chứng minh trên) nên $DC = BE$, $C_1 = E$ (tương ứng).

b) Gọi P là giao điểm AB và CD ; I là giao điểm BE và CD .

Ta có $ADC + APD = 90°$ (vì ΔADP vuông).

Lại có: $\Delta DAC = \Delta BAE$ (chứng minh trên) $\Rightarrow ADC = ABE$ hay $ADP = PBI$.

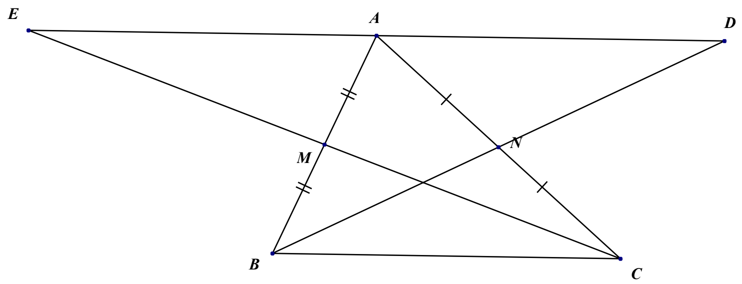
$\Rightarrow ABE + BPI = 90° \Rightarrow BE \perp CD$.

Bài 15. MĐ4 Cho tam giác ABC nhọn. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Lấy điểm E, D sao cho M, N là trung điểm của CE, BD .

a) Chứng minh: AD // BC .

b) Chứng minh: A, E, D thẳng hàng.

Lời giải:



a) Xét ΔAND và ΔCNB:

$NA = NC$ (vì N là trung điểm của AC),

$ND = NB$ (vì N là trung điểm của BD),

$AND = BNC$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta AND = \Delta CNB$ (c.g.c) $\Rightarrow DAN = NCB$ (2 góc tương ứng).

Mà DAN và NCB là 2 góc so le trong nên $DA // BC$.

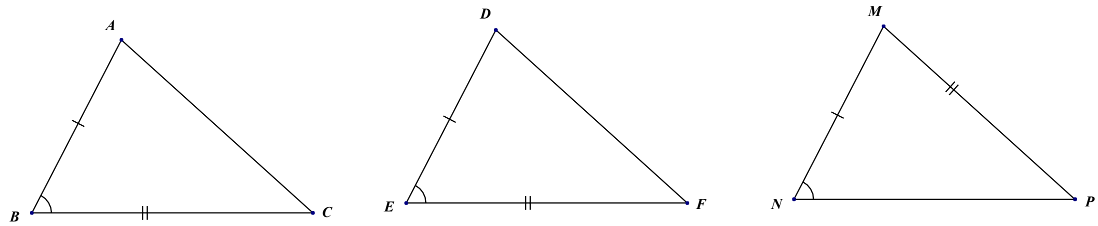
b) Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được: $AE // BC$.

Như vậy: $AE // BC$, $DA // BC$ nên A, D, E thẳng hàng (tiên đề Ơclít về đường thẳng song song).

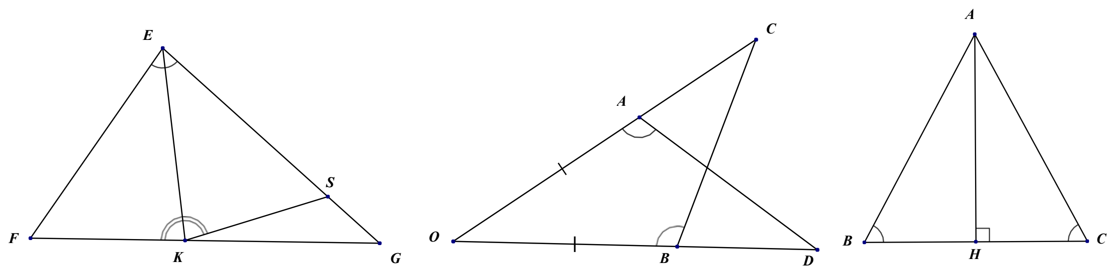
Phần III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1.

Bài 1. MĐ1 Trong các hình vẽ sau, có các tam giác nào bằng nhau? Vì sao?

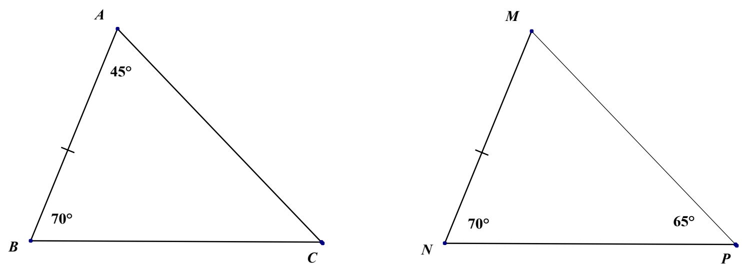


Bài 2. MĐ1 Trên mỗi hình 1, hình 2, hình 3 có các tam giác nào bằng nhau? Vì sao?



Hình 1 Hình 2 Hình 3

Bài 3. MĐ1 Cho hình vẽ, chứng minh $\Delta ABC = \Delta MNP$.



Bài 4. MĐ2 Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$. Gọi AD là đường phân giác góc A của tam giác ABC. Gọi ME là đường phân giác góc M của tam giác MNP. Chứng $\Delta ABD = \Delta MNE$.

Bài 5. MĐ3 Cho góc xAy . Lấy điểm B trên Ax , điểm D trên Ay sao cho $AB = AD$. Trên tia Bx lấy điểm E , trên tia Dy lấy điểm C sao cho $BE = DC$. Chứng minh $\Delta ABC = \Delta ADE$.

Bài 6. MĐ4 Cho ΔABC có D là trung điểm của BC. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A, vẽ tia $Bx // AC$, Bx cắt tia AD ở E.

a) Chứng minh $\Delta ADC = \Delta EDB$.

b) Trên tia đối của tia AC, lấy điểm F sao cho $AF = AC$. Gọi I là giao điểm của AB và EF. Chứng minh $\Delta AIF = \Delta BIE$.

Dạng 2.

Bài 1. MĐ1 Cho ΔABC có $AB = AC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, AB. Chứng minh rằng : $BM = CN$.

Bài 2. MĐ2 Cho ΔABC có $AB = AC$, phân giác $AM\ (M \in BC)$. Chứng minh:

a) $\Delta ABM = \Delta ACM$.

b) M là trung điểm của BC và $AM \perp BC$.

Bài 3. MĐ2 Cho tam giác ABC có : $AB = AC$ và M là trung điểm của BC .

a) Chứng minh AM là tia phân giác của góc BAC .

b) Chứng minh $AM \perp BC$.

c) Qua C kẻ đường thẳng d song song với AB cắt tia AM tại N. Chứng minh M là trung điểm của AN.

Bài 4. MĐ2 Cho ΔABC, có $B = C$ và $AB = AC$. Tia phân giác của góc B cắt AC ở D. Tia phân giác của góc C cắt AB ở E .

a) So sánh độ dài các đoạn thẳng BD và CE.

b) Gọi I là giao điểm BD và EC. Chứng minh $BI = IC$, $IE = ID$.

Bài 5. MĐ3 Cho ΔABC có $AB = AC$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A, vẽ tia Bx, Cy lần lượt cắt hai cạnh AC, AB tại D, E sao cho $ABD = ACE$.

a) Chứng minh $AD = AE$.

b) Gọi I là giao điểm của BD và CE. Chứng minh $\Delta EBI = \Delta DCI$.

c) Chứng minh $AI \perp BC$.

Bài 6. MĐ4 Cho tam giác ABC có M và N lần lượt là trung điểm của cạnh AB và AC . Trên tia đối của tia NB lấy điểm D sao cho $ND = NB$. Trên tia đối của tia MC lấy điểm E sao cho $ME = MC$. Chứng minh :

a) $AD = BC$.

b) $AE // BC$.

c) A là trung điểm của DE .

Bài 7. MĐ4 Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Vẽ đoạn thẳng $AM \perp AB$; $AM = AB$ sao cho M và C khác phía đối với đường thẳng AB. Vẽ đoạn thẳng $AN \perp AC$ và $AN = AC$ sao cho N và B khác phía đối với đường thẳng AC. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BN và CM. Chứng minh :

a) $\Delta AMC = \Delta ABN$.

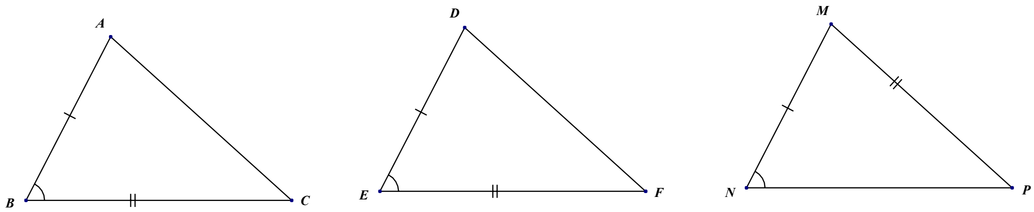
b) $MC = BN$ và $MC \perp BN$.

c) $AI = AK$ và $AI \perp AI$.

ĐÁP SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Tìm hoặc chứng minh hai tam giác bằng nhau

Bài 1. MĐ1 Trong các hình vẽ sau, có các tam giác nào bằng nhau? Vì sao?

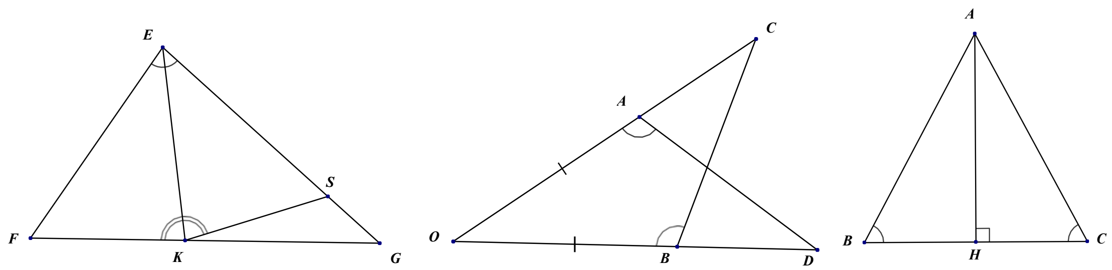


Lời giải:

Xét ΔABC và ΔDEF có: $AB = DE$; $B = E$; $BC = EF$ (theo giả thiết)

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta DEF$ (c.g.c).

Bài 2. MĐ1 Trên mỗi hình 1, hình 2, hình 3 có các tam giác nào bằng nhau? Vì sao?



Hình 1 Hình 2 Hình 3

Lời giải:

- Hình 1.

Xét ΔFEK và ΔSEK có:

$FEK = SEK$ (giả thiết),

EK là cạnh chung,

$FKE = SKE$ (giả thiết).

Vậy $\Delta FEK = \Delta SEK$ (g.c.g).

- Hình 2.

Xét ΔOAD và ΔOBC có:

$OAD = OBC$ (giả thiết),

$OA = OB$ (giả thiết),

O là góc chung.

Vậy $\Delta OAD = \Delta OBC$ (g.c.g).

- Hình 3.

Xét ΔAHB và ΔAHC có:

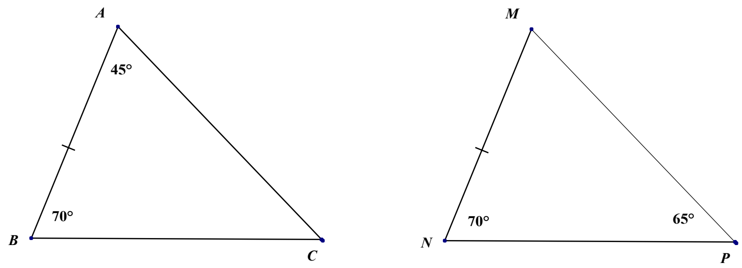
$AHB = AHC = 90°$ (giả thiết),

$HB = HC$ (giả thiết),

$B = C$ (giả thiết).

Vậy $\Delta AHB = \Delta AHC$ (g.c.g).

Bài 3. MĐ1 Cho hình vẽ, chứng minh $\Delta ABC = \Delta MNP$.



Lời giải:

ΔMNP có: $M + N + P = 180°$ (tổng ba góc trong một tam giác).

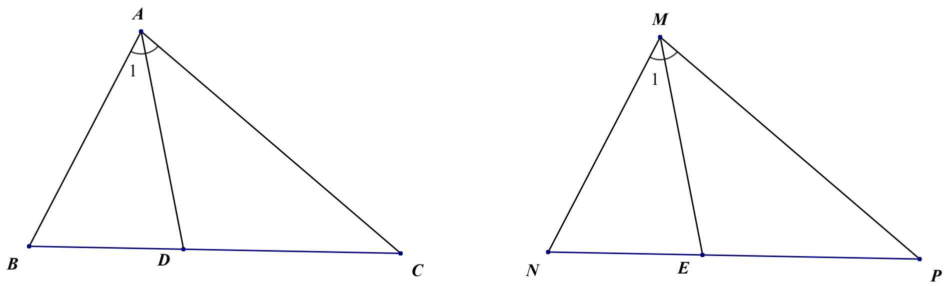
Suy ra $M = 180° - \left(N + P\right) = 180° - \left(75° + 65°\right) = 45°$.

Xét ΔABC và ΔMNP có: $A = M\ (= 45°)$, $AB = MN$ (giả thiết), $B = N\ (= 70°)$.

Vậy $\Delta ABC = \Delta MNP$ (g.c.g).

Bài 4. MĐ2 Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$. Gọi AD là đường phân giác góc A của tam giác ABC. Gọi ME là đường phân giác góc M của tam giác MNP. Chứng $\Delta ABD = \Delta MNE$.

Lời giải:



Ta có: $\Delta ABC = \Delta MNP$ suy ra $B = N; A = M; AB = MN$ (tương ứng).

Mặt khác: AD là đường phân giác của A nên $A_1 = \frac{1}{2}.A$,

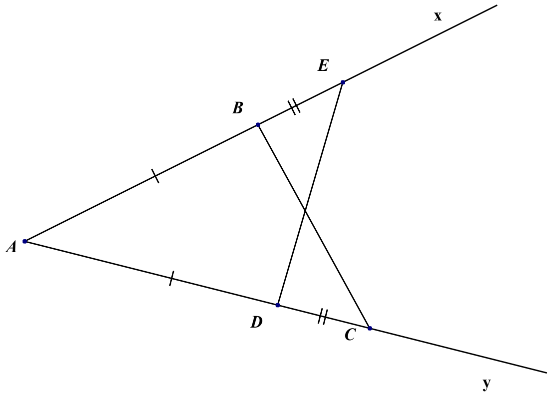
ME là đường phân giác của M nên $M_1 = \frac{1}{2}.M$.

Do đó $A_1 = M_1$.

Xét tam giác ABD và tam giác MNE có: $B = N, AB = MN, A_1 = M_1$ (chứng minh trên).

Suy ra $\Delta ABD = \Delta MNE$ (g.c.g).

Bài 5. MĐ3 Cho góc xAy. Lấy điểm B trên Ax, điểm D trên Ay sao cho $AB = AD$. Trên tia Bx lấy điểm E, trên tia Dy lấy điểm C sao cho $BE = DC$. Chứng minh $\Delta ABC = \Delta ADE$.



Lời giải:

Ta có: $AE = AB + BE$; $AC = AD + DC$. Mà: $AB = AD$; $BE = DC$ (giả thiết) nên $AE = AC$.

Xét ΔABC và ΔADE có: $AE = AC$ (chứng minh trên); A là góc chung; $AB = AD$ (giả thiết)

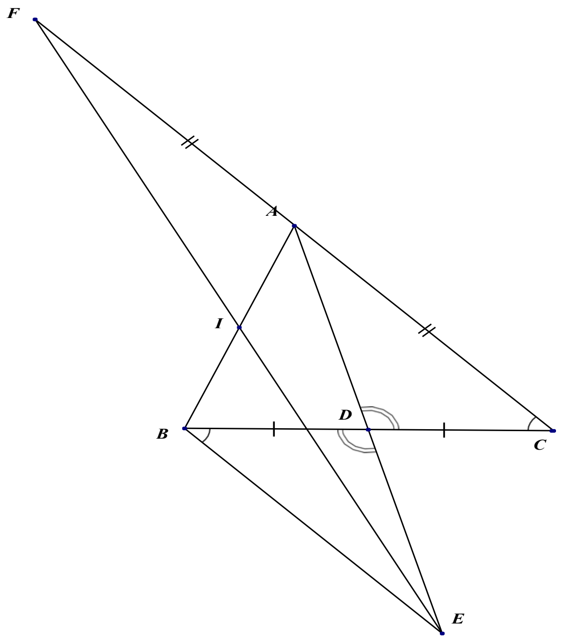
$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta ADE$ (c.g.c).

Bài 6. MĐ4 Cho ΔABC có D là trung điểm của BC. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A, vẽ tia $Bx // AC$, Bx cắt tia AD ở E.

a) Chứng minh $\Delta ADC = \Delta EDB$.

b) Trên tia đối của tia AC, lấy điểm F sao cho $AF = AC$. Gọi I là giao điểm của AB và EF. Chứng minh $\Delta AIF = \Delta BIE$.

Lời giải:



a) Ta có $AC // BE \Rightarrow ACD = DBE$ (2 góc so le trong).

Xét ΔADC và ΔEDB có:

$ACD = DBE$ (chứng minh trên),

$CD = BD$ (giả thiết),

$ADC = EDB$ (hai góc đối đỉnh).

Vậy $\Delta ADC = \Delta EDB$ (g.c.g).

b) Vì $\Delta ADC = \Delta EDB$ (chứng minh trên) $\Rightarrow AC = EB$ (hai cạnh tương ứng).

Mà $AF = AC$ (giả thiết) $\Rightarrow AF = BE$.

Vì $AC // BE$ (giả thiết), $F \in AC \Rightarrow AF // BE$ $\Rightarrow FAI = IBE$, $AFI = BEI$ (góc so le trong).

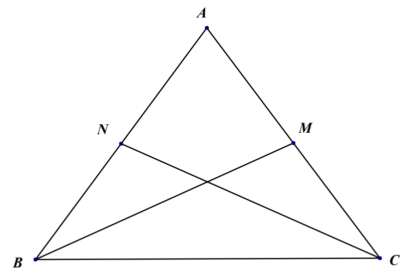
Xét ΔAIF và ΔBIE có: $FAI = IBE$, $AF = BE$, $AFI = BEI$ (chứng minh trên).

Do đó $\Delta AIF = \Delta BIE$ (g.c.g).

Dạng 2. Sử dụng trường hợp bằng nhau của tam giác để chứng minh một tính chất khác

Bài 1. MĐ1 Cho ΔABC có $AB = AC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, AB. Chứng minh rằng : $BM = CN$.

Lời giải:



Ta có: M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, AB $\Rightarrow AM = \frac{1}{2}AC; AN = \frac{1}{2}AB$.

Lại có: $AB = AC$ (giả thiết) $\Rightarrow AM = AN$.

Xét ΔABM và ΔACN có:

$AB = AC$ (giả thiết),

A là góc chung,

$AM = AN$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta ABM = \Delta ACN$ (c.g.c)

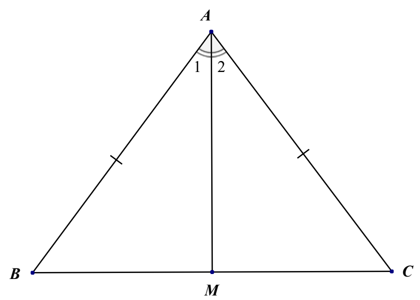
$\Rightarrow BM = CN$ (hai cạnh tương ứng).

Bài 2. Cho ΔABC có $AB = AC$, phân giác $AM\ (M \in BC)$. Chứng minh:

a) M là trung điểm của BC.

b) $AM \perp BC$.

Lời giải:



a) Xét ΔABM và ΔACM có:

$AB = AC$ (giả thiết),

AM là cạnh chung,

$A_1 = A_2$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta ABM = \Delta ACM$ (c.g.c)

$\Rightarrow BM = CM$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow M$ là trung điểm của BC.

b) Vì $\Delta ABM = \Delta ACM$ (chứng minh trên) $\Rightarrow AMB = AMC$ (hai góc tương ứng).

Lại có: $AMB + AMC = 180°$ (kề bù) $\Rightarrow AMB = AMC = 90°$ $\Rightarrow AM \perp BC$.

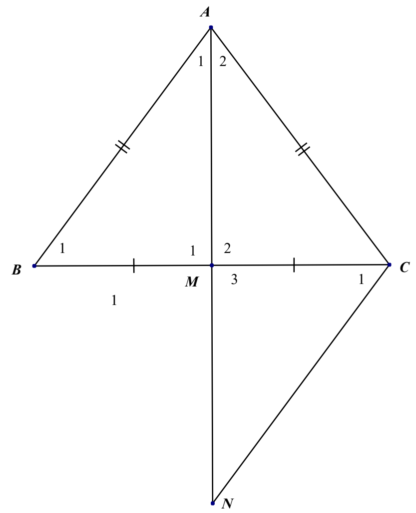
Bài 3. MĐ2 Cho tam giác ABC có : $AB = AC$ và M là trung điểm của BC.

a) Chứng minh AM là tia phân giác của góc BAC.

b) Chứng minh $AM \perp BC$.

c) Qua C kẻ đường thẳng d song song với AB cắt tia AM tại N. Chứng minh M là trung điểm của AN.

Lời giải:



a) Xét tam giác ABM và tam giác ACM, ta có:

$AB = AC$ (giả thiết),

$BM = MC$ (M là trung điểm của BC),

AM là cạnh chung

Suy ra $\Delta ABM = \Delta ACM$ (c.c.c)

$\Rightarrow A_1 = A_2$ (hai góc tương ứng) hay AM là tia phân giác của góc BAC.

b) Ta có $\Delta ABM = \Delta ACM$ nên $M_1 = M_2$ (hai góc tương ứng).

Mà $M_1 + M_2 = 180°$ (kề bù) nên $M_1 = M_2 = 90°$. Hay $AM \perp BC$.

c) Ta có $CN // AB$ suy ra $B_1 = C_1$ (hai góc so le trong).

Xét ΔABM và NCM, ta có:

$M_1 = M_3$ (hai góc đối đỉnh),

$MB = MC$ (M là trung điểm của BC),

$B_1 = C_1$ (chứng minh trên)

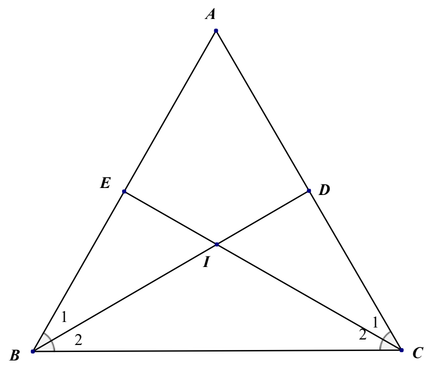
Suy ra $\Delta ABM = \Delta NCM$ (g.c.g) $\Rightarrow AM = MN$ (hai cạnh tương ứng).

Bài 4. MĐ2 Cho ΔABC, có $B = C$ và $AB = AC$. Tia phân giác của góc B cắt AC ở D. Tia phân giác của góc C cắt AB ở E.

a) So sánh độ dài các đoạn thẳng BD và CE.

b) Gọi I là giao điểm BD và EC. Chứng minh $BI = IC$, $IE = ID$.

Lời giải:



a) So sánh độ dài các đoạn thẳng BD và CE.

Ta có:

$B_1 = B_2 = \dfrac{ABC}{2}$ (vì BD là tia phân giác của ABC), (1)

$C_1 = C_2 = \dfrac{ACB}{2}$ (vì CE là tia phân giác của ACB), (2)

$ABC = ACB$ (giả thiết). (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $B_1 = B_2 = C_1 = C_2$.

Xét ΔABD và ΔACE có

$AB = AC$ (giả thiết),

BAC là góc chung,

$B_1 = C_1$ (chứng minh trên).

Do đó $\Delta ABD = \Delta ACE$ (g.c.g).

Suy ra $BD = CE$ (hai cạnh tương ứng).

b) Ta có $AB = AC$ (giả thiết), $AD = AE$ (vì $\Delta ABD = \Delta ACE$).

Nên $AB - AE = AC - AD \Rightarrow BE = CD$.

Ta lại có $\Delta ABD = \Delta ACE$ (cm câu a) $\Rightarrow$ $ADB = AEC$ (hai góc tương ứng).

Mặt khác: $ADB + IDC = 180^\circ$ (hai góc kề bù); $AEC + IEB = 180^\circ$ (hai góc kề bù) nên $IDC = IEB$.

Xét ΔEBI và ΔDCI có:

$B_1 = C_1$ (chứng minh ở câu a),

$BE = CD$ (chứng minh trên),

$IDC = IEB$ (chứng minh trên).

Do đó $\Delta EBI = \Delta DCI$ (g.c.g).

Suy ra $BI = IC$, $IE = ID$ (hai cạnh tương ứng).

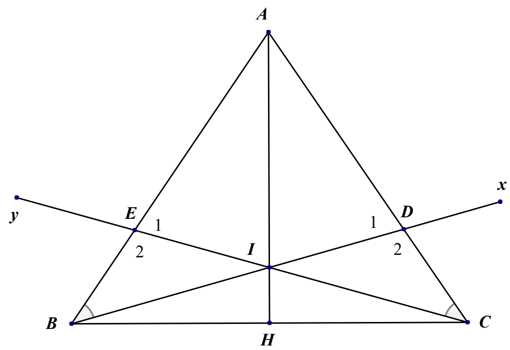
Bài 5. MĐ3 Cho ΔABC có $AB = AC$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A, vẽ tia Bx, Cy lần lượt cắt hai cạnh AC, AB tại D, E sao cho $ABD = ACE$.

a) Chứng minh $AD = AE$.

b) Gọi I là giao điểm của BD và CE. Chứng minh $\Delta EBI = \Delta DCI$.

c) Chứng minh $AI \perp BC$.

Lời giải:



a) Xét ΔABD và ΔACE có:

BAC là góc chung,

$AB = AC$ (giả thiết),

$ABD = ACE$ (giả thiết)

$\Rightarrow$ $\Delta ABD = \Delta ACE$ (g – c – g) $\Rightarrow AD = AE$ (hai cạnh tương ứng).

b) Ta có $AB = AC$ (giả thiết), $AD = AE$ (cm câu a).

Nên $AB - AE = AC - AD \Rightarrow BE = CD$.

Ta lại có $\Delta ABD = \Delta ACE$ (cm câu a) $\Rightarrow$ $E_1 = D_1$ (hai góc tương ứng).

Mặt khác: $E_1 + E_2 = 180°$; $D_1 + D_2 = 180°$ (hai góc kề bù) $\Rightarrow$ $E_2 = D_2$.

Xét ΔEBI và ΔDCI có

$EBI = DCI$ (giả thiết),

$BE = CD$ (chứng minh trên),

$E_2 = D_2$ (chứng minh trên),

$\Rightarrow \Delta EBI = \Delta DCI$ (g.c.g).

c) Gọi H là giao điểm của AI và BC.

Xét ΔAEI và ΔADI có:

AI là cạnh chung,

$AE = AD$ (chứng minh trên câu a),

$EI = DI$ (vì $\Delta EBI = \Delta DCI$).

$\Rightarrow \Delta AEI = \Delta ADI$ (c.c.c) $\Rightarrow EAI = DAI$ (hai góc tương ứng) hay $BAH = CAH$.

Xét ΔABH và ΔACH có:

AI là cạnh chung,

$\widehat{BAH}=\widehat{CAH}$ (chứng minh trên),

$AB=AC$ (giả thiết).

$\Rightarrow \Delta ABH=\Delta ACH$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AHB}=\widehat{AHC}$ (hai góc tương ứng).

Mà $\widehat{AHB}+\widehat{AHC}=180^\circ$ (hai góc kề bù) $\Rightarrow \widehat{AHB}=\widehat{AHC}=\dfrac{180^\circ}{2}=90^\circ$.

Vậy $AH\perp BC$ hay $AI\perp BC$.

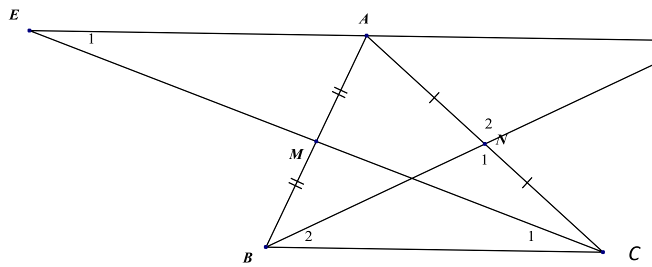
Bài 6. MĐ4 Cho tam giác ABC có M và N lần lượt là trung điểm của cạnh AB và AC. Trên tia đối của tia NB lấy điểm D sao cho $ND=NB$. Trên tia đối của tia MC lấy điểm E sao cho $ME=MC$. Chứng minh :

a) $AD=BC$.

b) $AE\ //\ BC$.

c) A là trung điểm của DE.

Lời giải:



a) Xét ΔAND và ΔCNB, ta có :

$AN=NC$ (N là trung điểm của cạnh AC),

$\widehat{N_2}=\widehat{N_1}$ (đối đỉnh),

$ND=NB$ (giả thiết)

$\Rightarrow \Delta AND=\Delta CNB$ (c.g.c) $\Rightarrow AD=BC$ (hai cạnh tương ứng).

b) Chứng minh tương tự ta có: $\Delta AME=\Delta BMC$ (c.g.c), nên $\widehat{E_1}=\widehat{C_1}$ (hai góc tương ứng).

Mà $\widehat{E_1}$ và $\widehat{C_1}$ ở vị trí so le trong nên $AE\ //\ BC$.

c) Vì $\Delta AND=\Delta CNB$ nên $\widehat{D_1}=\widehat{B_2}$ (hai góc tương ứng).

Mà $\widehat{D_1}$ và $\widehat{B_2}$ ở vị trí so le trong nên $AD\ //\ BC$.

Ta có: $AD\ //\ BC$ và $AE//\ BC$ suy ra D,A,E thẳng hàng (theo tiên đề Ơclit).

Vì $\Delta AME=\Delta BMC\Rightarrow AE=BC$ (hai cạnh tương ứng).

Mà $AD=BC$ (chứng minh trên) $\Rightarrow AE=AD$. Suy ra A là trung điểm của ED.

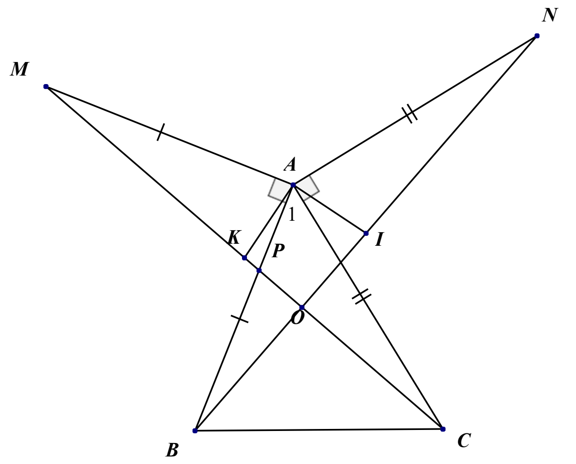
Bài 7. MĐ4 Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Vẽ đoạn thẳng $AM\perp AB$; $AM=AB$ sao cho M và C khác phía đối với đường thẳng AB. Vẽ đoạn thẳng $AN\perp AC$ và $AN=AC$ sao cho N và B khác phía đối với đường thẳng AC. Gọi I,K lần lượt là trung điểm của BN và CM. Chứng minh :

a) $\Delta AMC=\Delta ABN$.

b) $MC=BN$ và $MC\perp BN$

c) $AI=AK$ và $AI\perp AK$.

Lời giải:



a) Vì $AM \perp AB$ (giả thiết) nên $BAM = 90°$; $AN \perp AC$ (giả thiết) nên $CAN = 90°$.

Ta có: $MAC = BAM + A_1 = 90° + A_1$ và $BAN = CAN + A_1 = 90° + A_1$ $\Rightarrow$ $MAC = BAN$.

Xét ΔMAC và ΔBAN:

$AM = AB$ (giả thiết),

$AC = AN$ (giả thiết),

$MAC = BAN$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta MAC = \Delta BAN$ (c.g.c).

b) Gọi P là giao điểm AB và CM; O là giao điểm BN và CM.

Ta có: $AMC + APM = 90°$ (vì ΔAMP vuông tại A).

Lại có: $\Delta MAC = \Delta BAN$ (chứng minh trên) $\Rightarrow AMC = ABN$ (hai góc tương ứng) hay $AMP = PBO$

$\Rightarrow ABN + BPO = 90° \Rightarrow BN \perp CM$.

c) Ta có K, I lần lượt là trung điểm của CM, BN.

Mà $CM = BN$ (chứng minh trên) $\Rightarrow MK = BI$.

Xét ΔAMK và ΔABI có:

$AMK = ABN$ (chứng minh trên),

$AM = AB$ (chứng minh trên),

$MK = BI$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta AMK = \Delta ABI$ (c.g.c)

$\Rightarrow AK = AI$ (hai cạnh tương ứng) và $MAK = BAI$ (hai góc tương ứng).

Mà $MAK + KAB = 90° \Rightarrow BAI + KAB = 90°$ hay $AI \perp AK$.

PHIẾU BÀI TẬP

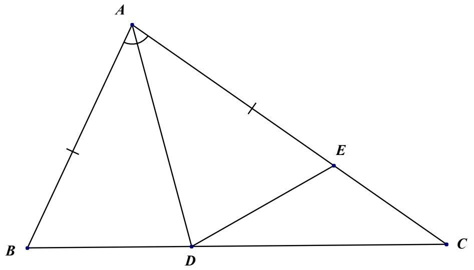
Dạng 1. Tìm hoặc chứng minh hai tam giác bằng nhau

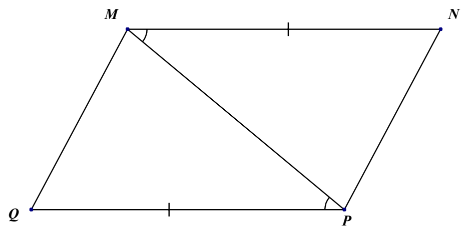
I. Phương pháp giải:

+ Xét hai tam giác.
+ Kiểm tra ba điều kiện bằng nhau cạnh - góc - cạnh, góc – cạnh - góc.
+ Kết luận hai tam giác bằng nhau.

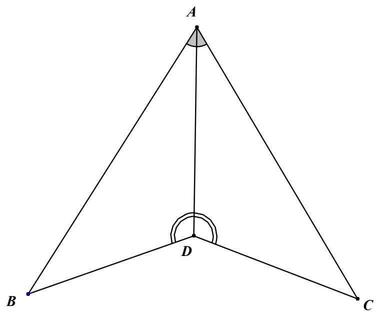
II. Bài toán.

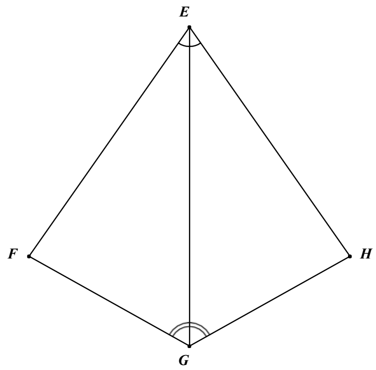
Bài 1. MĐ1 Trong các hình vẽ sau, có các tam giác nào bằng nhau? Vì sao?



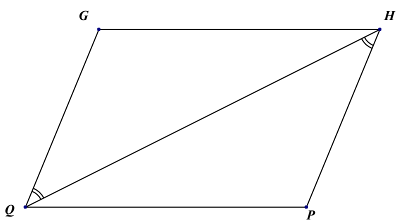


Bài 2. MĐ1 Trong các hình vẽ sau, có các tam giác nào bằng nhau? Vì sao?

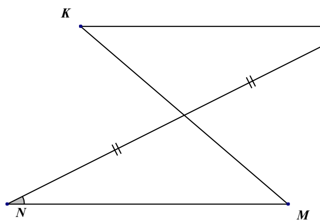


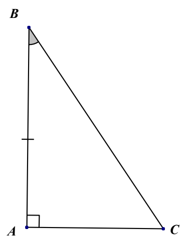


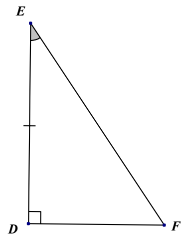
Bài 3. MĐ1 Trong các hình vẽ sau, có hai tam giác nào bằng nhau? Vì sao?



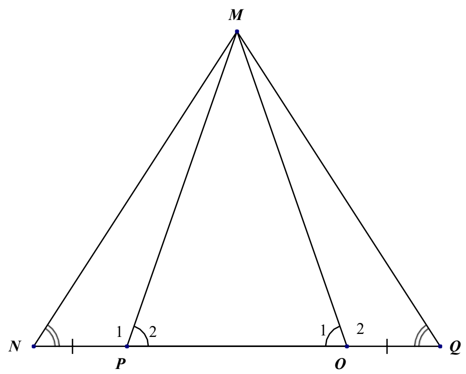
GH // QP



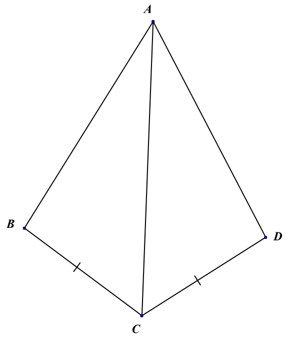


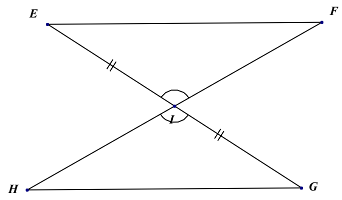


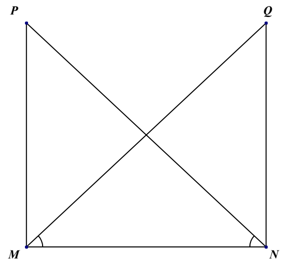
Bài 4. MĐ1 Trong các hình vẽ sau, có các tam giác nào bằng nhau? Vì sao?



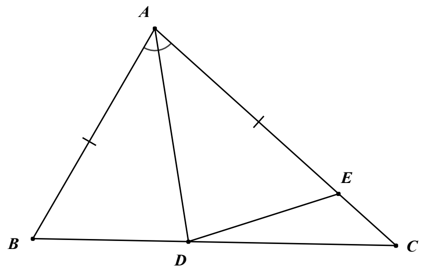
Bài 5. MĐ2 Nêu thêm một điều kiện để mỗi hình dưới đây là hai tam giác bằng nhau theo trường hợp cạnh - góc - cạnh.

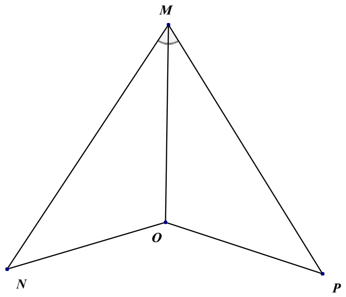






Bài 6. MĐ2 Nêu thêm một điều kiện để mỗi hình dưới đây là hai tam giác bằng nhau theo trường hợp góc - cạnh - góc.





Bài 7. MĐ2 Qua trung điểm I của đoạn thẳng AB , kẻ đường thẳng vuông góc với AB, trên đường thẳng vuông góc đó lấy hai điểm C và D . Nối CA, CB, DA, DB. Tìm các cặp tam giác bằng nhau.

Bài 8. MĐ2 Cho tam giác ABC, kẻ AH vuông góc với $BC, (H \in BC)$. Trên. tia đối của tia HA lấy điểm K sao cho $HK = HA$, nối KB, KC KB, KC. Tìm các cặp tam giác bằng nhau.

Bài 9. MĐ2 Cho tam giác ABC có $AB = AC$. Gọi AM là tia phân giác góc A. Chứng minh $\Delta ABM = \Delta ACM$.

Bài 10. MĐ2 Cho tam giác ABC có $B = C$. Gọi AM là tia phân giác góc A. Chứng minh $\Delta ABM = \Delta ACM$.

Bài 11. MĐ2 Cho Oz là tia phân giác góc xOy . Trên các tia Ox, Oy, Oz lần lượt lấy các điểm A, B, C (khác O) sao cho $OA = OB$. Chứng minh $\Delta OAC = \Delta OBC$.

Bài 12. MĐ3 Cho góc xOy khác góc bẹt. Trên cạnh Ox lấy hai điểm A và B, trên cạnh Oy lấy hai điểm C và D, sao cho $OA = OC; OB = OD$.

a) Chứng minh $\Delta OAD = \Delta OCB$.

b) Chứng minh $\Delta ACD = \Delta CAB$.

Bài 13. MĐ3 Cho ΔABC vuông ở A. Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho $AD = AC$.

a) Chứng minh $\Delta ABC = \Delta ABD$.

b) Trên tia đối của tia AB lấy điểm M . Chứng minh $\Delta MBD = \Delta MBC$.

Bài 14. MĐ3 Cho hình vẽ sau, trong đó $AB \,//\, CD, AB = CD$. Chứng minh rằng:

a) $\Delta OAB = \Delta ODC$.

b) $\Delta OAC = \Delta ODB$.

Bài 15. MĐ4 Cho góc nhọn xOy có tia Oz là tia phân giác. Qua điểm A thuộc tia Ox, vẽ đường thẳng song song với Oy cắt Oz tại M. Qua M kẻ đường thẳng song song với Ox cắt Oy tại B.

a) Chứng minh $\Delta OAM = \Delta MBO$.

b) Từ M vẽ $MH \perp Ox$; $MK \perp Oy$. Chứng minh $\Delta MHO = \Delta MKO$.

Bài 16. MĐ4 Cho tam giác ABC có $A = 90^\circ$ và $AB = AC$. Trên các cạnh AB và AC lần lượt lấy điểm D và E sao cho $AD = AE$. Qua A và D kẻ đường vuông góc với BE cắt BC lần lượt tại M và N. Tia ND cắt tia CA tại I. Chứng minh rằng:

a) $\Delta AID = \Delta ABE$.

b) Chứng minh $CM = MN$.

Bài 17. MĐ4 Cho ΔABC, kẻ BD vuông góc với AC, CE vuông góc với AB. Trên tia đối của tia BD, lấy điểm H sao cho $BH = AC$. Trên tia đối của tia CE lấy điểm K sao cho $CK = AB$. Chứng minh $AH = AK$.

Dạng 2. Sử dụng trường hợp bằng nhau của tam giác để chứng minh một tính chất khác

I. Phương pháp giải:

+ Chọn hai tam giác có cạnh (góc) là hai đoạn thẳng (góc) cần chứng minh bằng nhau.

+ Chứng minh hai tam giác ấy bằng nhau theo một trong hai trường hợp cạnh - góc - cạnh, góc - cạnh - góc rồi suy ra hai cạnh (góc) tương ứng bằng nhau.Kiểm tra ba điều kiện bằng nhau cạnh - góc - cạnh, góc - cạnh - góc .

+ Kết hợp với các tính chất đã học về tia phân giác, đường thẳng song song, đường trung trực, tổng ba góc trong một tam giác, ... để chứng minh một tính chất khác.

II. Bài toán.

Bài 1. MĐ1 Cho tam giác ABC có $AB = AC$, tia phân giác của góc A cắt BC tại M. Chứng minh: $BM = CM$.

Bài 2. MĐ1 Cho góc nhọn xOy có Om là tia phân giác, $C \in Om$ $(C \neq O)$. Trên tia Ox lấy điểm A, trên tia Oy lấy điểm B sao cho $OA = OB$. Chứng minh: $CA = CB$.

Bài 3. MĐ1 Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$. Gọi O và G lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và NP. Chứng minh $AO = MG$.

Bài 4. MĐ2 Cho tam giác ABC có $B = C$. Tia phân giác của góc A cắt BC tại D.

a) Chứng minh $AB = AC$.

b) Chứng minh $AD \perp BC$.

Bài 5. MĐ2 Cho ΔABC có $AB < AC$. Phân giác của góc A cắt cạnh BC tại điểm D. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$. Chứng minh:

a) $BD = ED$.

b) DA là tia phân giác của góc BDE.

Bài 6. MĐ2 Cho góc xOy khác góc bẹt và có Ot là tia phân giác. Lấy điểm C thuộc Ot $(C \neq O)$. Qua C kẻ đường vuông góc với Ot, cắt Ox, Oy theo thứ tự ở A, B.

a) Chứng minh: $OA = OB$.

b) Lấy điểm D thuộc Ct $(D \neq C)$. Chứng minh: $DA = DB$ và $OAD = OBD$.

Bài 7. MĐ2 Cho ΔABC, M là trung điểm của BC. Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Chứng minh:

a) $\Delta ABM = \Delta ECM$.

b) $AB = CE$ và $AC \,//\, BE$.

Bài 8. MĐ3 Cho tam giác ABC có $A = 80^\circ$. Dựng AH vuông góc với BC ($H \in BC$). Trên tia đối tia HA lấy điểm D sao cho $HD = HA$.

a) Chứng minh: $AC = DC$.

b) Chứng minh: $\Delta ABC = \Delta DBC$.

c) Xác định số đo góc BDC.

Bài 9. MĐ3 Cho ΔABC trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B, lấy điểm D sao cho $AD \,//\, BC$ và $AD = BC$. Chứng minh:

a) $AB = CD$.

b) $AB \,//\, CD$ và $\Delta ABD = \Delta CDB$.

Bài 10. MĐ3 Cho ΔABC có $A = 90^\circ$, trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BA = BE$. Tia phân giác góc B cắt AC ở D.

a) Chứng minh: $\Delta ABD = \Delta EBD$.

b) Chứng minh: $DA = DE$.

c) Tính số đo $\widehat{BED}$.

d) Xác định độ lớn góc B để $\widehat{EDB} = \widehat{EDC}$.

Bài 11. MĐ3 Cho ΔABC có $AB < AC$. Kẻ tia phân giác AD của $\widehat{BAC}$ $\left(D \in BC\right)$. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$, trên tia AB lấy điểm F sao cho $AF = AC$. Chứng minh:

a) $BD = ED$.

b) $BF = EC$

c) $\Delta BDF = \Delta EDC$.

d) $AD \perp FC$.

Bài 12. MĐ4 Cho tam giác $ABC\left(AB < AC\right)$, tia Ax đi qua trung điểm M của BC. Kẻ BE và CF vuông góc với Ax $(E, F \in Ax)$.

a) Chứng minh: $BE \,//\, CF$.

b) So sánh BE và FC; CE và BF.

c) Tìm điều kiện về ΔABC để có $BE = CE$.

Bài 13. MĐ4 Cho tam giác ABC. Đường thẳng qua A song song với BC cắt đường thẳng qua C song song với AB ở D. Gọi M là giao điểm của BD và AC.

a) Chứng minh $\Delta ABC = \Delta CDA$.

b) Chứng minh M là trung điểm của AC.

c) Đường thẳng d qua M cắt các đoạn thẳng AD, BC lần lượt ở I, K. Chứng minh M là trung điểm của IK.

Bài 14. MĐ4 Cho tam giác ABC nhọn. Vẽ đoạn thẳng AD vuông góc với AB và $AD = AB$ (D, C khác phía so với AB). Vẽ đoạn thẳng AE vuông góc với AC và $AE = AC$ (E, B khác phía so với AC). Chứng minh:

a) $BE = DC$.

b) $BE \perp DC$.

Bài 15. MĐ4 Cho tam giác ABC nhọn. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Lấy điểm E, D sao cho M, N là trung điểm của CE, BD.

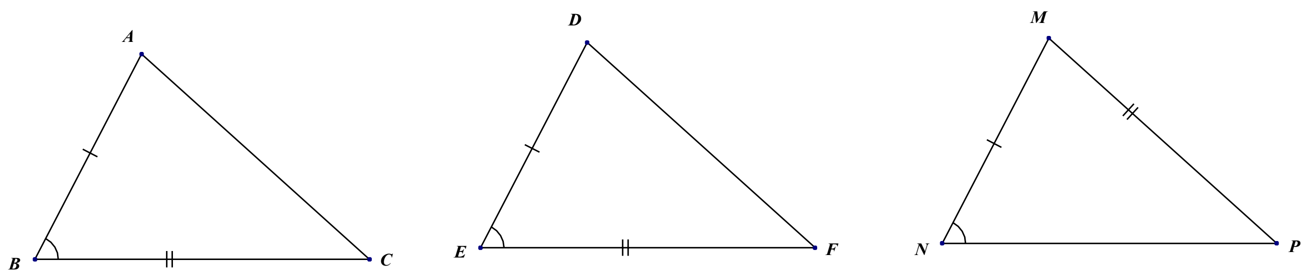
a) Chứng minh: $AD \,//\, BC$.

b) Chứng minh: A, E, D thẳng hàng.

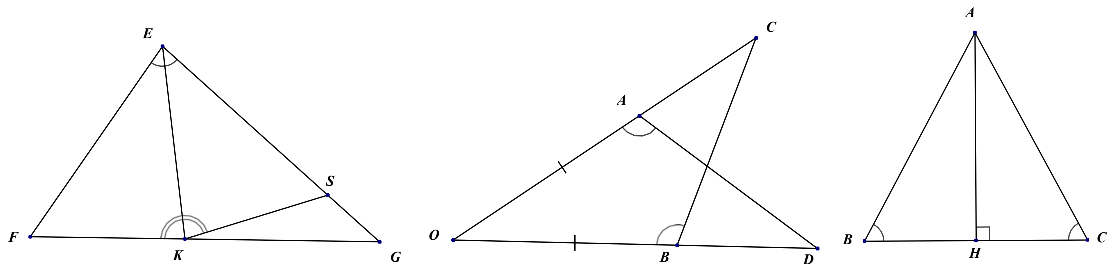
Phần III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Tìm hoặc chứng minh hai tam giác bằng nhau

Bài 1. MĐ1 Trong các hình vẽ sau, có các tam giác nào bằng nhau? Vì sao?

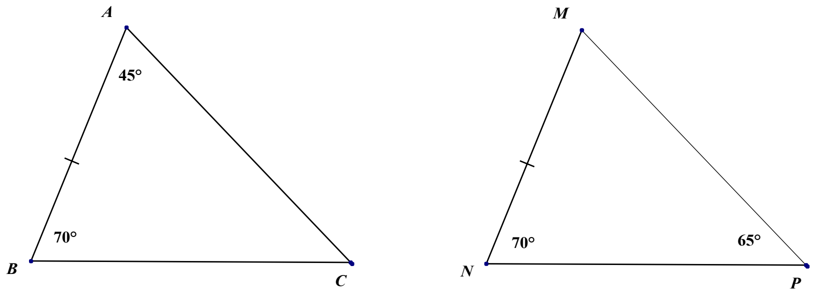


Bài 2. MĐ1 Trên mỗi hình 1, hình 2, hình 3 có các tam giác nào bằng nhau? Vì sao?



Hình 1 Hình 2 Hình 3

Bài 3. MĐ1 Cho hình vẽ, chứng minh $\Delta ABC = \Delta MNP$.



Bài 4. MĐ2 Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$. Gọi AD là đường phân giác góc A của tam giác ABC. Gọi ME là đường phân giác góc M của tam giác MNP. Chứng $\Delta ABD = \Delta MNE$.

Bài 5. MĐ3 Cho góc xAy. Lấy điểm B trên Ax, điểm D trên Ay sao cho $AB = AD$. Trên tia Bx lấy điểm E, trên tia Dy lấy điểm C sao cho $BE = DC$. Chứng minh $\Delta ABC = \Delta ADE$.

Bài 6. MĐ4 Cho ΔABC có D là trung điểm của BC. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A, vẽ tia $Bx // AC$, Bx cắt tia AD ở E.

a) Chứng minh $\Delta ADC = \Delta EDB$.

b) Trên tia đối của tia AC, lấy điểm F sao cho $AF = AC$. Gọi I là giao điểm của AB và EF. Chứng minh $\Delta AIF = \Delta BIE$.

Dạng 2. Sử dụng trường hợp bằng nhau của tam giác để chứng minh một tính chất khác

Bài 1. MĐ1 Cho ΔABC có $AB = AC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, AB. Chứng minh rằng: $BM = CN$.

Bài 2. MĐ2 Cho ΔABC có $AB = AC$, phân giác AM $(M \in BC)$. Chứng minh:

a) $\Delta ABM = \Delta ACM$.

b) M là trung điểm của BC và $AM \perp BC$.

Bài 3. MĐ2 Cho tam giác ABC có: $AB = AC$ và M là trung điểm của BC.

a) Chứng minh AM là tia phân giác của góc BAC.

b) Chứng minh $AM \perp BC$.

c) Qua C kẻ đường thẳng d song song với AB cắt tia AM tại N. Chứng minh M là trung điểm của AN.

Bài 4. MĐ2 Cho ΔABC, có $B = C$ và $AB = AC$. Tia phân giác của góc B cắt AC ở D. Tia phân giác của góc C cắt AB ở E.

a) So sánh độ dài các đoạn thẳng BD và CE.

b) Gọi I là giao điểm BD và EC. Chứng minh $BI = IC$, $IE = ID$.

Bài 5. MĐ3 Cho ΔABC có $AB = AC$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A, vẽ tia Bx, Cy lần lượt cắt hai cạnh AC, AB tại D, E sao cho $ABD = ACE$.

a) Chứng minh $AD = AE$.

b) Gọi I là giao điểm của BD và CE. Chứng minh $\Delta EBI = \Delta DCI$.

c) Chứng minh $AI \perp BC$.

Bài 6. MĐ4 Cho tam giác ABC có M và N lần lượt là trung điểm của cạnh AB và AC. Trên tia đối của tia NB lấy điểm D sao cho $ND = NB$. Trên tia đối của tia MC lấy điểm E sao cho $ME = MC$ Chứng minh:

a) $AD = BC$.

b) $AE // BC$.

c) A là trung điểm của DE.

Bài 7. MĐ4 Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Vẽ đoạn thẳng $AM \perp AB$; $AM = AB$ sao cho M và C khác phía đối với đường thẳng AB. Vẽ đoạn thẳng $AN \perp AC$ và $AN = AC$ sao cho N và B khác phía đối với đường thẳng AC. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BN và CM. Chứng minh:

a) $\Delta AMC = \Delta ABN$.

b) $MC = BN$ và $MC \perp BN$.

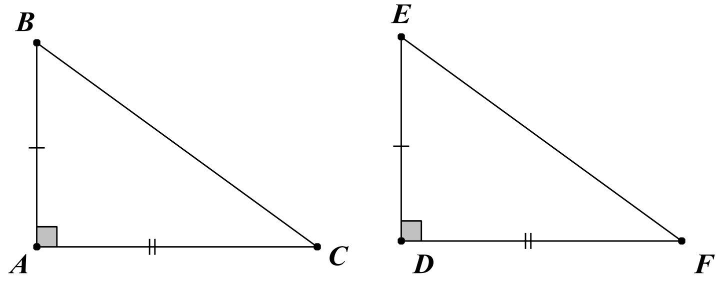
c) $AI = AK$ và $AI \perp AI$.

CHUYÊN ĐỀ 15. CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA HAI TAM GIÁC VUÔNG

PHẦN I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT.

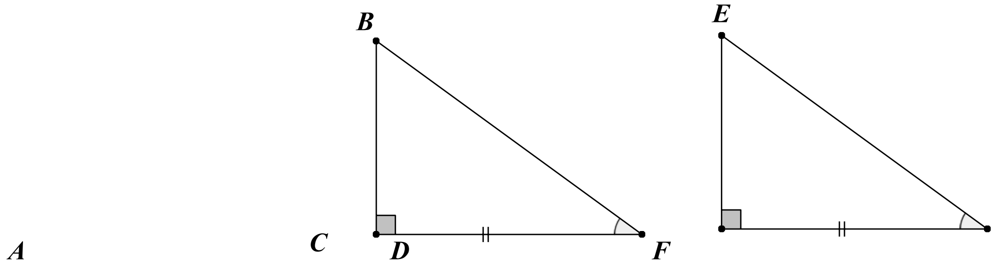
1. Trường hợp hai cạnh góc vuông

Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này lần lượt bằng hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau (theo trường hợp cạnh – góc – cạnh).



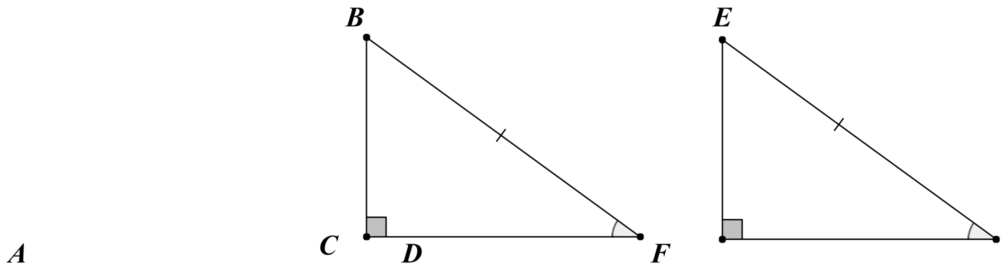
2. Trường hợp một cạnh góc vuông và một góc nhọn

Nếu một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông này bằng một cạnh góc vuông và một góc nhọn kề cạnh ấy của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau (theo trường hợp góc – cạnh – góc).



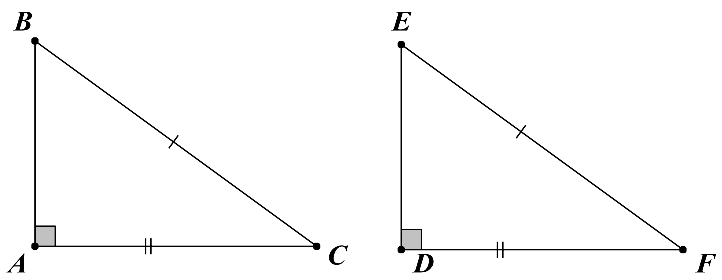
3. Trường hợp cạnh huyền và một góc nhọn

Nếu cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó bằng nhau (theo trường hợp g-c-g)



4. Trường hợp cạnh huyền và cạnh góc vuông

Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này bằng cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác đó bằng nhau.



PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI.

Dạng 1. Tìm hoặc chứng minh hai tam giác vuông bằng nhau

I. Phương pháp giải:

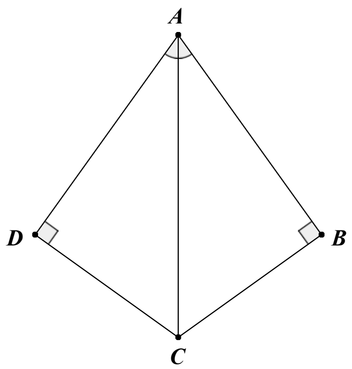
+) Xét hai tam giác vuông.

+) Kiểm tra các điều kiện bằng nhau cạnh – góc – cạnh, góc – cạnh – góc, cạnh huyền – góc nhọn, cạnh huyền – cạnh góc vuông.

+) Kết luận hai tam giác bằng nhau.

II. Bài toán.

Bài 1. Tìm các tam giác vuông bằng nhau trên hình dưới đây?



Lời giải:

+) Xét ΔABC và ΔADC có:

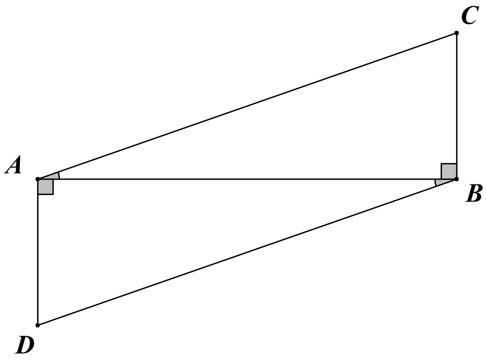
$D = B = 90^\circ$

$DAC = BAC$ (gt)

AC chung

Do đó $\Delta ABC = \Delta ADC$ (cạnh huyền - góc nhọn)

Bài 2. Tìm các tam giác vuông bằng nhau trên hình sau:



Lời giải:

+) Xét ΔABC và ΔBAD có:

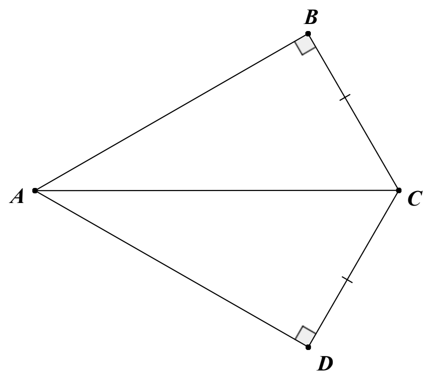
$ABC = BAD = 90°$

AB chung

$BAC = ABD$ (gt)

Do đó $\Delta ABC = \Delta BAD$ (cạnh góc vuông - góc nhọn)

Bài 3. Tìm các tam giác vuông bằng nhau trên hình dưới đây?



Lời giải:

+) Xét ΔABC và ΔADC có:

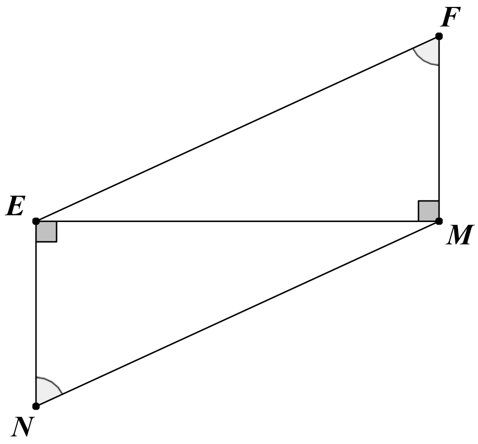
$B = D = 90°$

$BC = DC$ (gt)

AC chung

Do đó $\Delta ABC = \Delta ADC$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

Bài 4. Tìm các tam giác vuông bằng nhau trên hình sau:



Lời giải:

+) Xét ΔMEF vuông tại M nên: $F + MEF = 90°$

+) Xét ΔEMN vuông tại E nên: $N + EMN = 90°$

Mà $F = N$ (gt)

Nên $MEF = EMN$

+) Xét ΔMEF và ΔEMN có:

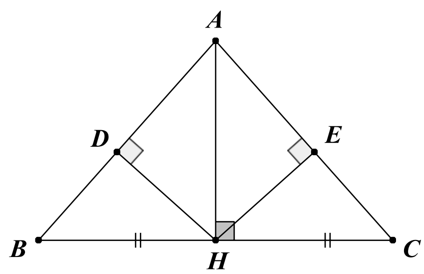
$EMF = MEN = 90°$

$MEF = EMN$ (chứng minh trên)

ME là cạnh chung

Do đó $\Delta MEF = \Delta EMN$ (g-c-g).

Bài 5. Cho hình vẽ sau:



Chứng minh rằng:

a) $\Delta ABH = \Delta ACH$;

b) $\Delta ADH = \Delta AEH$;

c) $\Delta DBH = \Delta ECH$.

Lời giải:

a) Xét ΔABH vuông tại H và ΔACH vuông tại H có:

$BH = CH$ (gt)
AH là cạnh chung

Do đó $\Delta ABH = \Delta ACH$ (2 cạnh góc vuông)

b) Xét ΔADH vuông tại D và ΔAEH vuông tại E có:

AH là cạnh chung

$DAH = EAH$ (do $\Delta ABH = \Delta ACH$)

Do đó $\Delta ADH = \Delta AEH$ (cạnh huyền- góc nhọn)

c) Xét ΔDBH vuông tại D và ΔECH vuông tại E có:

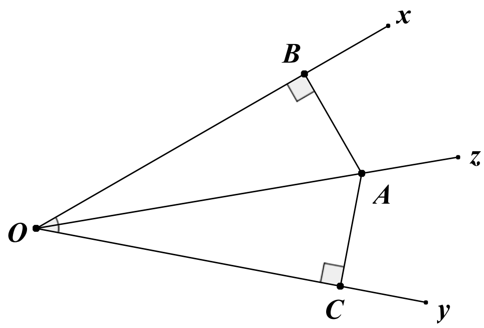
$B = C$ (do $\Delta ABH = \Delta ACH$)

$BH = CH$ (gt)

Do đó $\Delta DBH = \Delta ECH$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Bài 6. Cho xOy. Tia Oz là tia phân giác xOy. Lấy điểm A thuộc tia Oz $(A \neq O)$. Kẻ AB vuông góc với Ox, AC vuông góc với Oy $(B \in Ox,\ C \in Oy)$. Chứng minh $\Delta OAB = \Delta OAC$.

Lời giải:



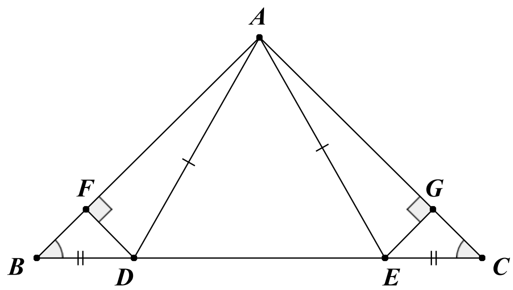
+) Xét ΔOAB vuông tại B và ΔOAC vuông tại C có:

OA là cạnh chung

$AOB = AOC$ (do Oz là tia phân giác xOy)

Do đó $\Delta OAB = \Delta OAC$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Bài 7. Cho hình vẽ sau. Tìm các tam giác vuông bằng nhau trên hình?



Lời giải:

+) Xét ΔBFD vuông tại F và ΔCGE vuông tại G ta có:

$BD = CE$ (gt)

$B = C$ (gt)

Do đó $\Delta BFD = \Delta CGE$ (cạnh huyền – góc nhọn)

+) Xét ΔAFD vuông tại F và ΔAGE vuông tại G ta có:

$AD = AE$ (gt)

$FD = GE$ (do $\Delta BFD = \Delta CGE$)

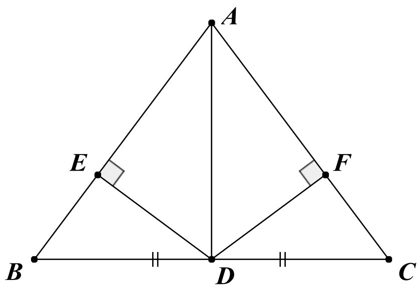
Do đó $\Delta AFD = \Delta AGE$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

Bài 8. Cho tam giác ABC có $AB = AC$. Gọi D là trung điểm của cạnh BC. Kẻ $DE \perp AB$, $DF \perp AC$. Chứng minh:

a) $\Delta DEB = \Delta DFC$;

b) $\Delta DEA = \Delta DFA$.

Lời giải:



a) Xét ΔABD và ΔACD có:

$AB = AC$ (gt)

AD là cạnh chung

$DB = DC$ (D là trung điểm của cạnh BC)

Do đó $\Delta ABD = \Delta ACD$ (c-c-c)

Nên $B = C$ và $DAB = DAC$

+) Xét ΔDEB vuông tại E và ΔDFC vuông tại F ta có:

AD chung

$B = C$ (chứng minh trên)

Do đó $\Delta DEB = \Delta DFC$ (cạnh huyền – góc nhọn)

b) Xét ΔDEA vuông tại E và ΔDFA vuông tại F ta có:

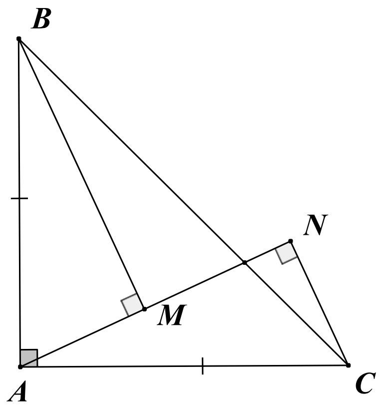
AD là cạnh chung

$DAB = DAC$ (chứng minh trên)

Do đó $\Delta DEA = \Delta DFA$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A và $AB = AC$. Qua A kẻ đường thẳng d cắt BC. Vẽ BM, CN vuông góc với d. Chứng minh rằng : $\Delta BAM = \Delta ACN$.

Lời giải:



Vì ΔABC vuông tại A nên $BAC = BAM + CAM = 90°$

Và ΔANC vuông tại N nên $ACN + CAM = 90°$

Do đó $BAM = ACN$

+) Xét ΔBAM vuông tại M và ΔACN vuông tại N có:

$BAM = ACN$ (cmt)

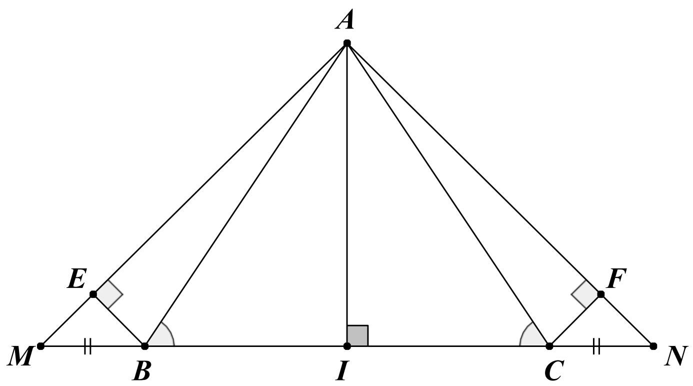
$AB = AC$ (gt)

Nên $\Delta BAM = \Delta ACN$ (cạnh huyền – góc nhọn).

Bài 10. Cho ΔABC có $B = C$. Trên tia đối của tia BC lấy điểm M, trên tia đối tia của tia CB lấy điểm N sao cho $BM = CN$. Kẻ $BE \perp AM$ $(E \in AM)$, $CF \perp AN$ $(F \in AN)$.

Chứng minh rằng $\Delta BME = \Delta CNF$.

Lời giải:



Ta có: $ABC + ABM = 180°; ACB + ACN = 180°$ (kề bù)

Mà $ABC = ACB(gt)$

$\Rightarrow ABM = ACN$

+) Kẻ $AI \perp BC$ tại I.

+) Xét ΔABI vuông tại I nên ta có: $BAI + IBA = 90°$

+) Xét ΔACI vuông tại I nên ta có: $CAI + ICA = 90°$

Mà $IBA = IAB(gt)$

Nên $IAB = IAC$

+) Xét ΔABI và ΔACI ta có:

$AIB = AIC = 90°$

AI chung

$IAB = IAC$ (chứng minh trên)

Do đó $\Delta ABI = \Delta ACI$ (g-c-g)

Nên $AB = AC$

Xét ΔABM và ΔACN có:

$BM = CN$ (gt)

$ABM = ACN$ (cmt)

$AB = AC$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta ABM = \Delta ACN$ (c-g-c)

Nên $M = N$

+) Xét ΔBME vuông tại E và ΔCNF vuông tại F ta có:

$BM = CN(gt)$

$M = N$ (cmt)

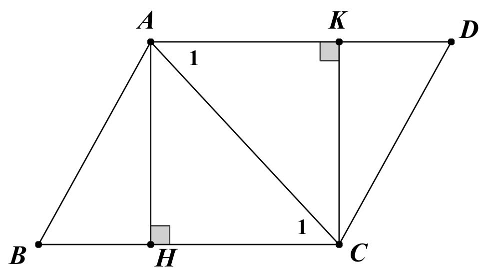
Do đó $\Delta BME = \Delta CNF$ (cạnh huyền – góc nhọn).

Bài 11. Cho ΔABC. Từ A vẽ cung tròn có bán kính bằng BC, từ C vẽ cung tròn có bán kính bằng AB. Hai cung tròn này cắt nhau tại D (D nằm khác phía của B đối với AC). Kẻ $AH \perp BC$ $(H \in BC)$ và $CK \perp AD (K \in AD)$.

a) Chứng minh $\Delta AHC = \Delta CKA$;

b) Chứng minh $\Delta AHB = \Delta CKD$.

Lời giải:



a) Vì cung tròn tâm A bán kính bằng BC cắt cung tròn tâm C có bán kính bằng AB tại D

Nên $AD = BC; CD = AB$

+) Xét ΔABC và ΔCDA có:

AC cạnh chung

$AD = BC$ (cmt)

$CD = AB$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta CDA$ (c-c-c)

$\Rightarrow C_1 = A_1$

+) Xét ΔAHC vuông tại H và ΔCKA vuông tại K có:

$C_1 = A_1$ (cmt)

AC cạnh chung

Suy ra $\Delta AHC = \Delta CKA$ (cạnh huyền- góc nhọn)

b) Xét ΔAHB vuông tại H và ΔCKD vuông tại K có:

$AH = CK$ (do $\Delta AHC = \Delta CKA$)

$AB = CD$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta AHB = \Delta CKD$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

Dạng 2. Sử dụng các trường hợp bằng nhau của tam giác vuông để chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau, hai góc bằng nhau. Tính độ dài đoạn thẳng, số đo góc.

I. Phương pháp giải:

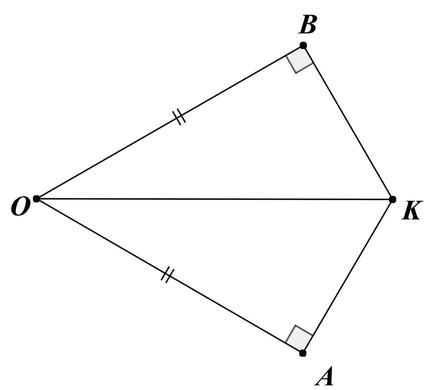
+ Chọn hai tam giác vuông có cạnh (góc) là đoạn thẳng (góc) cần tính hoặc chứng minh bằng nhau.

+ Tìm thêm hai điều kiện bằng nhau, trong đó có một điều kiện về cạnh, để kết luận hai tam giác bằng nhau.

+ Suy ra các cạnh (góc) tương ứng bằng nhau và kết luận.

II. Bài toán.

Bài 1. Cho hình vẽ sau. Chứng minh OK là phân giác của góc BOA.



Lời giải:

+) Xét ΔOBK vuông tại B và ΔOAK vuông tại A có:

OK chung

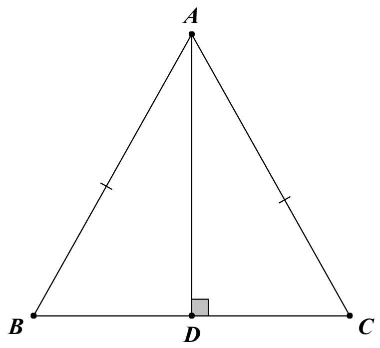
$OB = OA$ (gt)

Do đó $\Delta OBK = \Delta OAK$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Suy ra $BOK = AOK$ (cặp góc tương ứng).

Vậy OK là phân giác của góc BOA

Bài 2. Cho ΔABC có $AB = AC$. Kẻ $AD \perp BC$. Chứng minh AD là tia phân giác của BAC.



Lời giải:

+) Xét ΔABD vuông tại D và ΔACD vuông tại D có:

OD chung

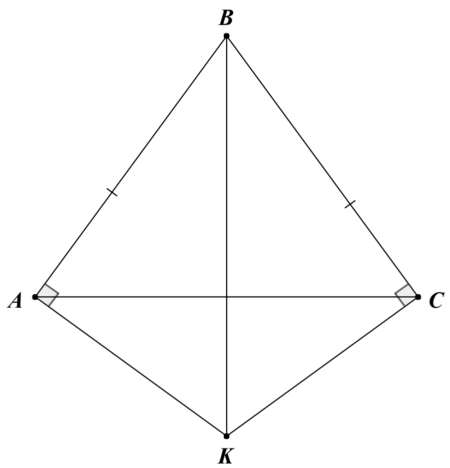
$AB = AC$ (gt)

Do đó $\Delta ABD = \Delta ACD$(cạnh huyền – góc nhọn)

Suy ra $BAD = CAD$ (cặp góc tương ứng).

Vậy AD là phân giác của góc BAC

Bài 3. Cho ΔABC có $BA = BC$. Qua A kẻ đường vuông góc với AB, Qua C kẻ đường vuông góc với CB, chúng cắt nhau ở K. Chứng minh BK là phân giác của góc B.



+) Xét ΔABK vuông tại A và ΔCBK vuông tại C ta có:

$AB = AC(gt)$

BK chung

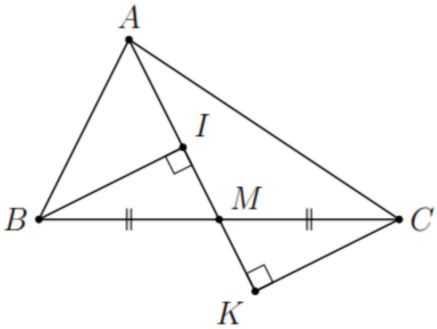
Do đó $\Delta ABK = \Delta CBK$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

Nên $ABK = CBK$ (hai góc tương ứng)

Hay BK là phân giác của góc B .

Bài 4. Cho tam giác ABC, M là trung điểm cạnh BC. Vẽ BI , CK vuông góc với AM . Chứng minh $BI = CK$.

Lời giải:



+) Xét ΔBIM và ΔCKM có:

$MB = MC$ (M là trung điểm của BC)

$BIM = CKM = 90^\circ$

$IMB = KMC$ (đối đỉnh)

Do đó $\Delta BIM = \Delta CKM$ (cạnh huyền – góc nhọn).

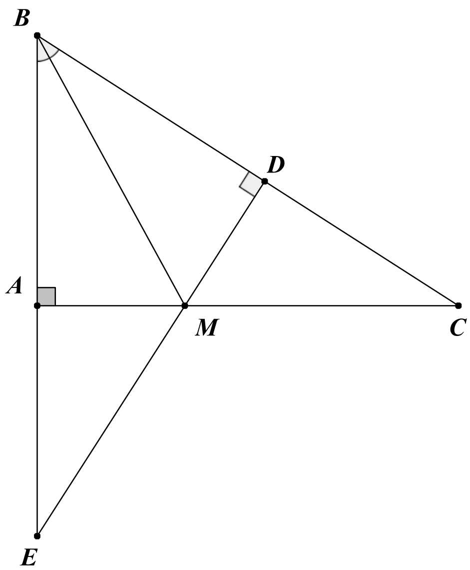
Từ đó suy ra $BI = CK$ (cặp cạnh tương ứng).

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A. Tia phân giác góc B cắt cạnh AC tại điểm M. Kẻ $MD \perp BC$ $(D \in BC)$.

a) Chứng minh $BA = BD$;

b) Gọi E là giao điểm của hai đường thẳng DM và BA. Chứng minh $\Delta ABC = \Delta DBE$.

Lời giải:



a) Xét ΔBMA vuông tại A và ΔBMD vuông tại D ta có:

BM cạnh chung

$ABM = DBM$ (do BM là phân giác của góc B)

Do đó $\Delta BMA = \Delta BMD$ (cạnh huyền - góc nhọn)

Suy ra $BA = BD$.

b) Xét ΔABC và ΔDBE ta có:

$BAC = BDE = 90°$

$BA = BD$.(chứng minh trên)

B là góc chung

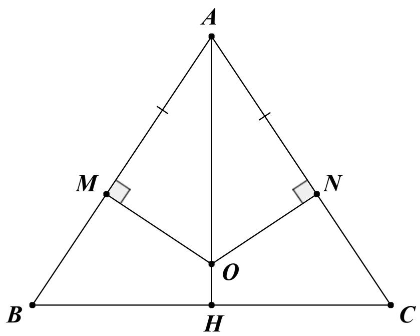
Do đó $\Delta ABC = \Delta DBE$ (g-c-g).

Bài 6. Cho tam giác ABC có $AB = AC$. Trên cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = AN$. Các đường thẳng vuông góc với AB, AC tại M, N cắt nhau ở O. AO cắt BC tại H. Chứng minh:

a) $\Delta AMO = \Delta ANO$;

b) $HB = HC$ và $AH \perp BC$.

Lời giải:



a) Xét ΔAMO vuông tại M và ΔANO vuông tại N ta có:

AO là cạnh chung

$AM = AN$ (gt)

$\Rightarrow \Delta AMO = \Delta ANO$ (cạnh huyền- góc nhọn)

b) Xét ΔAHB và ΔAHC có:

$AB = AC$ (gt)

$BAH = CAH$ (do $\Delta AMO = \Delta ANO$)

AH là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta AHB = \Delta AHC$ (c-g-c)

$\Rightarrow HB = HC$ (hai cạnh tương ứng)

Và $AHB = AHC$ (hai góc tương ứng), mà hai góc này ở vị trí kề bù

$$\Rightarrow AHC = AHB = \frac{180°}{2} = 90°$$

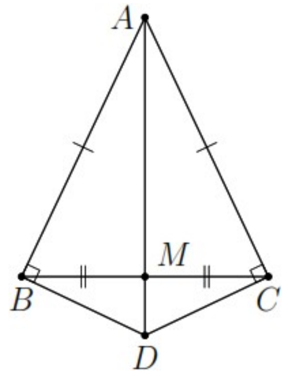
Vậy $AH \perp BC$

Bài 7. Cho tam giác ABC có $AB = AC$. Đường thẳng vuông góc với AB tại B cắt đường thẳng vuông góc với AC tại C ở D. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Chứng minh:

a) $\Delta DAB = \Delta DAC$;

b) A, M, D thẳng hàng.

Lời giải:



a) Xét ΔDAB và ΔDAC có:

$DBA = ACD = 90^\circ$

$AB = AC$ (gt)

AD là cạnh chung

Do đó $\Delta DAB = \Delta DAC$ (cạnh huyền -canh góc vuông).

b) Xét ΔABM và ΔACM ta có:

$AB = AC$ (gt)

$MB = MC$ (M là trung điểm cạnh BC)

AM là cạnh chung

Nên $\Delta ABM = \Delta ACM$ (c-c-c)

Do đó $AMB = AMC$, mà hai góc này ở vị trí kề bù nên $AMB = AMC = \dfrac{180^\circ}{2}$.

Hay $AM \perp BC$ tại M (1)

+) Xét ΔABM và ΔACM, ta có:

$DB = DC$ ($\Delta DAB = \Delta DAC$)

$MB = MC$ (M là trung điểm cạnh BC)

DM cạnh chung

Do đó $\Delta DBM = \Delta DCM$ (c-c-c)

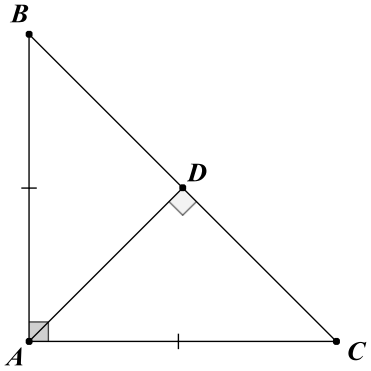
$\Rightarrow BMD = CMD$, mà hai góc này ở vị trí kề bù nên $\Rightarrow BMD = CMD = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

Hay $DM \perp BC$ tại M (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra AM và DM cùng vuông góc với BC nên A, M, D thẳng hàng.

Bài 8. Cho ΔABC vuông tại A và $AB = AC$. Tính số đo góc B, C ?

Lời giải:



Kẻ $AD \perp BC (D \in BC)$

+) Xét ΔABD vuông tại D và ΔACD vuông tại D, ta có:

$AB = AC (gt)$

AD chung

Suy ra $\Delta ABD = \Delta ACD$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

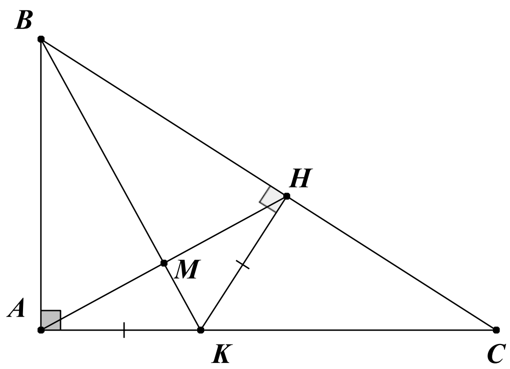
Do đó $B = C$ (hai góc tương ứng) (1)

Vì ΔABC vuông tại A nên $B + C = 90°$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $B = C = 45°$

Bài 9. Cho ΔABC vuông tại A. Từ điểm K trên cạnh AC, vẽ $KH \perp BC$, biết $KH = KA$. Chứng minh rằng $BK \perp AH$.

Lời giải:



+) Xét ΔABK vuông tại A và ΔHBK vuông tại H, ta có:

BK chung

$KA = KH$ (gt)

$\Rightarrow \Delta ABK = \Delta HBK$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow AB = HB; ABK = HBK$

+) Gọi M là giao điểm của BK và AH.

+) Xét ΔABM và ΔHBM, ta có:

$AB = BH$ (chứng minh trên)

$ABM = HBM$ (do $ABK = HBK$)

AM cạnh chung

$\Rightarrow \Delta ABM = \Delta HBM (c.g.c)$

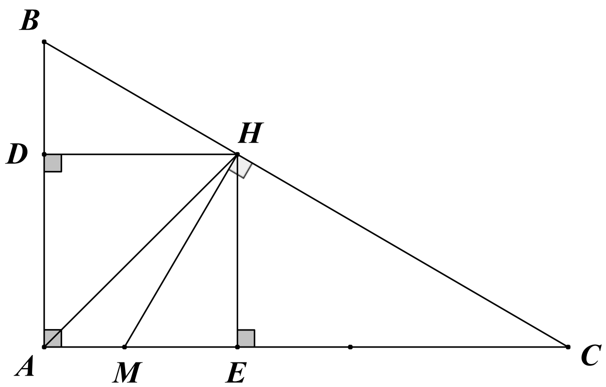
$\Rightarrow AMB = HMB$ (hai góc tương ứng), mà hai góc này ở vị trí kề bù

$\Rightarrow AMB = HMB = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^0$

Vậy $BK \perp AH$

Bài 10. Cho ΔABC vuông tại A $(AB < AC)$ và các điểm M thuộc cạnh AC, H thuộc cạnh BC sao cho $MH \perp BC$ và $MH = HB$. Chứng minh rằng AH là tia phân giác của góc A.

Lời giải:



+) Kẻ $HD \perp AB$ $(D \in AB)$ và $HE \perp AC$ $(E \in AC)$

+) Xét ΔDBH và ΔEMH có:

$HDB = HEM = 90^\circ$

$HB = HM$ (gt)

$HBD = HME$ (cùng phụ ACB)

$\Rightarrow \Delta DBH = \Delta EMH$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$\Rightarrow HE = HD$ (hai cạnh tương ứng)

+) Xét ΔDAH và ΔEAH có :

$HDA = HEA = 90^\circ$

$HD = HE$ (chứng minh trên)

AH là cạnh chung

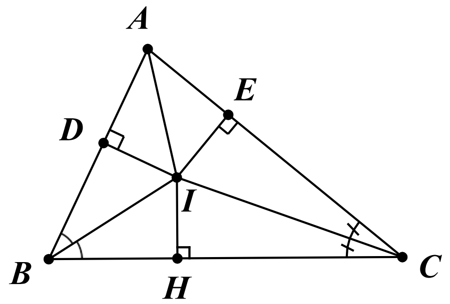
$\Rightarrow \Delta DAH = \Delta EAH$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông)

$\Rightarrow DAH = EAH$ (hai góc tương ứng)

Vậy AH là tia phân giác của góc BAC.

Bài 11. Cho tam giác ABC. Các tia phân giác của góc B và C cắt nhau ở I. Kẻ $ID \perp AB; IE \perp AC\left(D \in AB; E \in AC\right)$. Chứng minh rằng $AD = AE$.

Lời giải:



+) Kẻ $HI \perp BC$

+) Xét ΔBID vuông tại D và ΔBIH vuông tại H, ta có:

$IBD = IBH$ (IB là phân giác của góc B)

IB là cạnh chung

Nên $\Delta BID = \Delta BIH$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Suy ra $ID = IH$ (hai cạnh tương ứng)(1)

+) Xét ΔCIE vuông tại E và ΔCIH vuông tại H, ta có:

$ICE = ICH$ (IC là phân giác của góc C)

IC chung

Do đó $\Delta CIE = \Delta CIH$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Suy ra $IE = IH$ (hai cạnh tương ứng) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $ID = IE.$

+) Xét ΔIAD vuông tại D và ΔIAE vuông tại E ta có:

$ID = IE$ (chứng minh trên)

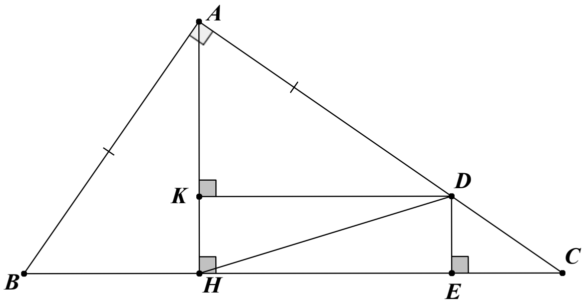
IA là cạnh chung

Do đó $\Delta IAD = \Delta IAE$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

Suy ra $AD = AE$ (hai cạnh tương ứng)

Bài 12. Cho ΔABC vuông tại A có $AB < AC$. Vẽ $AH \perp BC(H \in BC)$. D là điểm trên cạnh AC sao cho $AD = AB$. Vẽ $DE \perp BC(E \in BC)$. Chứng minh $HA = HE$.

Lời giải:



+) Kẻ $DK \perp AH (K \in AH)$

+) Xét ΔHAB vuông tại H và ΔKDA vuông tại K có:

$AD = AB$ (gt)

$BAH = ADK$ (cùng phụ với KAD)

Do đó $\Delta HAB = \Delta KDA$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow HA = KD$ (hai cạnh tương ứng)

Ta có $KD \perp AH$ (cách vẽ)

Và $EH \perp AH$ (do $BC \perp AH$)

$\Rightarrow KD // EH$

$\Rightarrow KDH = EHD$ (hai góc so le trong)

+) Xét ΔKDH vuông tại K và ΔEHD vuông tại E ta có:

DH cạnh chung

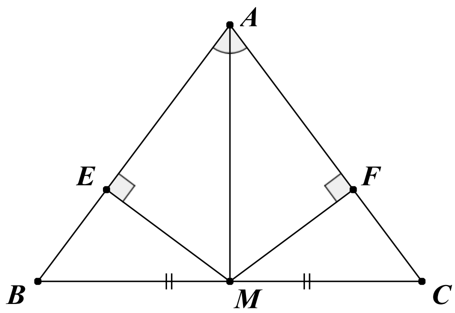
$KDH = EHD$ (cmt)

Do đó $\Delta KDH = \Delta EHD$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Suy ra $HA = HE$ (hai cạnh tương ứng)

Bài 13 . Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC và AM là tia phân giác của góc A . Chứng minh $AB = AC$.

Lời giải:



+) Từ M kẻ $ME \perp AB, MF \perp AC$.

+) Xét ΔMEA vuông tại E và ΔMFA vuông tại F , ta có:

MA là cạnh chung

$\widehat{MAE} = \widehat{MAF}$ (vì AM là tia phân giác của góc A)

Do đó $\Delta MEA = \Delta MFA$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Nên $AE = AF$ (1) và $ME = MF$

+) Xét ΔMEB vuông tại E và ΔMFC vuông tại F, ta có

$MB = MC$ (vì M là trung điểm của BC)

$ME = MF$ (chứng minh trên)

Nên $\Delta MEB = \Delta MFC$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

Do đó $BE = CF$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $AE + BE = AF + CF$ hay $AB = AC$

Phần III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Tìm hoặc chứng minh hai tam giác vuông bằng nhau

Bài 1. Cho tam giác ABC nhọn có $AB = AC$, vẽ $BD \perp AC$ tại D, $CE \perp AB$ tại E. Gọi M là giao điểm của BD và CE. Chứng minh:

a) $\Delta DBA = \Delta ECA$;

b) $\Delta EBC = \Delta DCB$;

c) $\Delta EAM = \Delta DAM$.

Bài 2. Cho ΔABC có $AB = AC$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa A lần lượt vẽ các tia Bx, Cy sao cho $Bx \perp BA$ và $Cy \perp CA$. Gọi D là giao điểm của các tia Bx, Cy.

Chứng minh $\Delta ABD = \Delta ACD.$

Dạng 2. Sử dụng các trường hợp bằng nhau của tam giác vuông để chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau, hai góc bằng nhau. Tính độ dài đoạn thẳng, số đo góc.

Bài 1. Cho ΔABC nhọn có $AB = AC$. Vẽ $BH \perp AC$ $(H \in AC)$, $CK \perp AB$ $(K \in AB)$.

a) Chứng minh: $AH = AK$.

b) Gọi I là giao điểm của BH và CK. Chứng minh AI là tia phân giác của $\widehat{A}$.

Bài 2. Cho ΔABC có $AB = AC$. D là một điểm trên cạnh AB, E là một điểm trên cạnh AC sao cho $AD = AE$. Từ D và E hạ các đường DM, EN cùng vuông góc với BC. Chứng minh rằng:

a) $\widehat{B} = \widehat{C}$;

b) $BM = CN$.

Bài 3. Cho $\widehat{xOy}$. Trên tia Ox lấy điểm A, trên tia Oy lấy điểm B. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB. Từ A và B kẻ các đường thẳng AE, BF cùng vuông góc với tia OM .

Chứng minh : $AE = BF$.

Bài 4. Cho góc xOy. Trên tia phân giác của góc đó lấy một điểm M, từ M hạ các đường thẳng vuông góc MA, MB xuống cạnh Ox, Oy .Chứng minh :

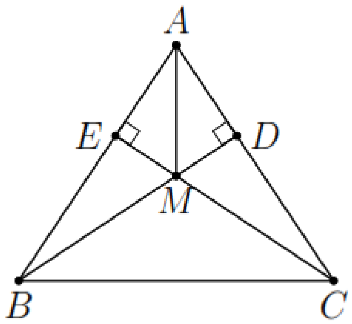
a) $\Delta MAO = \Delta MBO$;

b) AB vuông góc với OM .

ĐÁP SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Tìm hoặc chứng minh hai tam giác vuông bằng nhau

Bài 1.



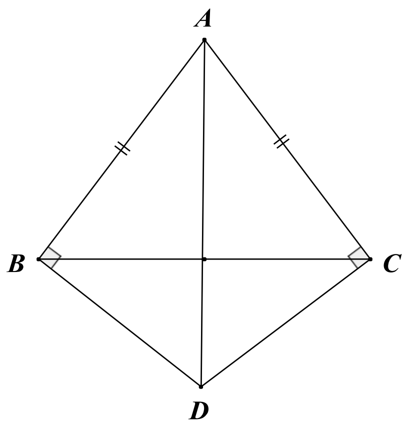
a) $\Delta DBA = \Delta ECA$ (cạnh huyền – góc nhọn).

b) $\Delta EBC = \Delta DCB$ (cạnh huyền – góc nhọn).

c) Từ $\Delta DBA = \Delta ECA$ suy ra $AE = AD$

$\Delta EAM = \Delta DAM$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông).

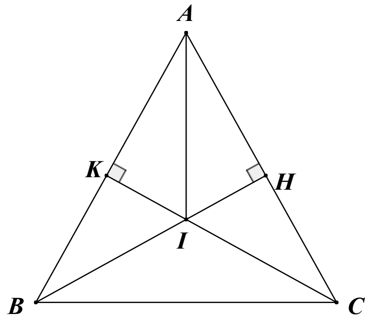
Bài 2.



Chứng minh được : $\Delta ABD = \Delta ACD$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông)

Dạng 2. Sử dụng các trường hợp bằng nhau của tam giác vuông để chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau, hai góc bằng nhau. Tính độ dài đoạn thẳng, số đo góc.

Bài 1 .



a) Chứng minh được $\Delta AHB = \Delta AKC$ (cạnh huyền - góc nhọn)

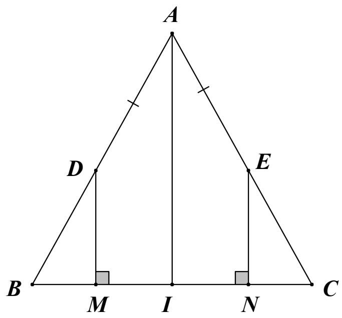
$\Rightarrow AH = AK$

b) Chứng minh được $\Delta AHI = \Delta AKI$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông)

$\Rightarrow KAI = HAI$

$\Rightarrow AI$ là tia phân giác của BAC .

Bài 2 .



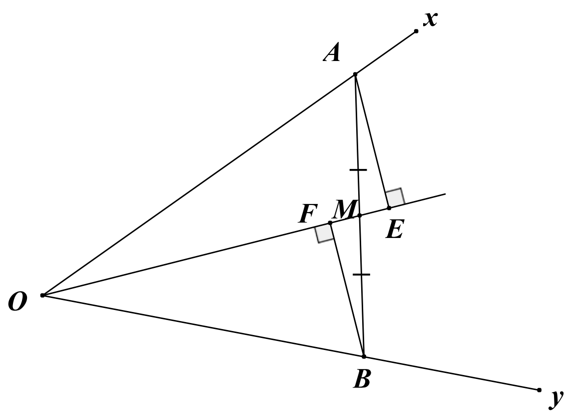
a) Gọi I là trung điểm của BC, khi đó ta chứng minh được $\Delta ABI = \Delta ACI(c-c-c)$

Suy ra $B = C$

b) Chứng minh $BD = CE$ sau đó chứng minh $\Delta BDM = \Delta CEN$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Nên $BM = CN$.

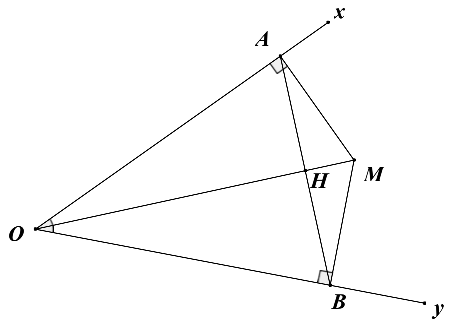
Bài 3 .



Chứng minh $\Delta MAE = \Delta MBF$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Từ đó suy ra $AE = BF$

Bài 4 .



a) $\Delta MAO = \Delta MBO$ (cạnh huyền – góc nhọn)

b) Gọi H là giao điểm của AB và OM . Ta có: $\Delta BHO = \Delta AHO$ (c-g-c)

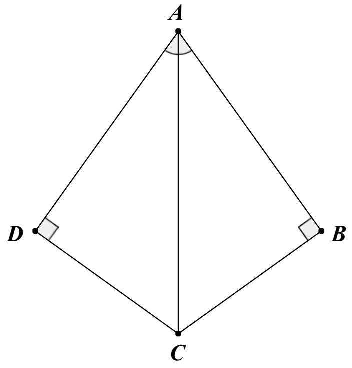
Từ đó suy ra $OHA = OHB$, mà hai góc này ở vị trí kề bù nên $OHA = OHB = 90^\circ$

Nên AB vuông góc với OM tại H .

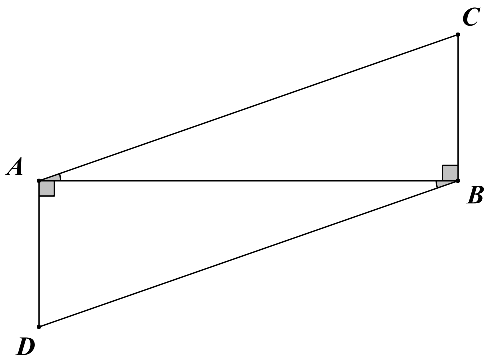
PHIẾU BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm hoặc chứng minh hai tam giác vuông bằng nhau

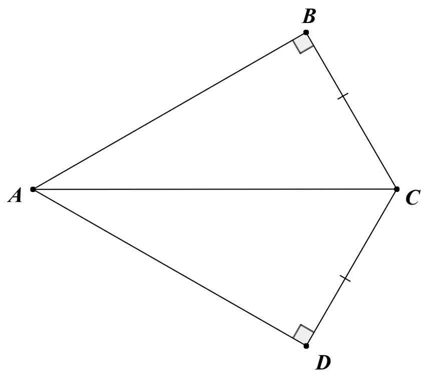
Bài 1. Tìm các tam giác vuông bằng nhau trên hình sau:



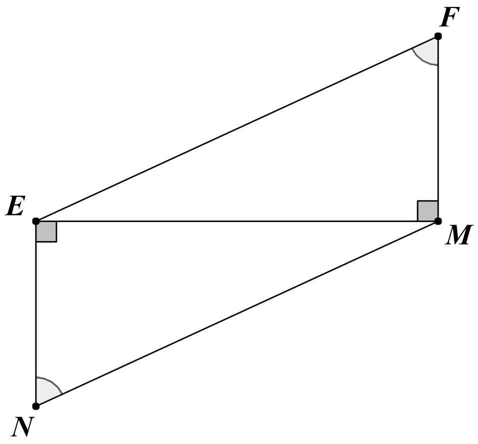
Bài 2. Tìm các tam giác vuông bằng nhau trên hình sau:



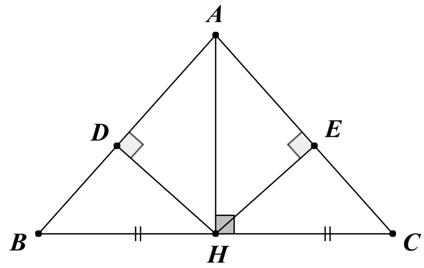
Bài 3. Tìm các tam giác vuông bằng nhau trên hình sau:



Bài 4. Tìm các tam giác vuông bằng nhau trên hình sau:



Bài 5. Cho hình vẽ sau:



Chứng minh rằng :

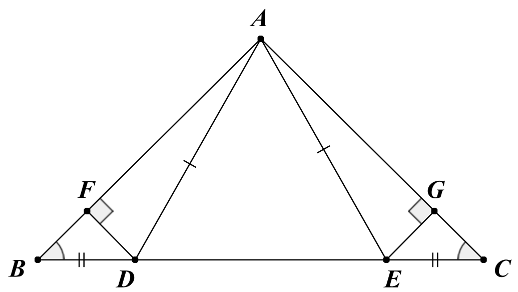
a) $\Delta ABH = \Delta ACH$

b) $\Delta ADH = \Delta AEH$

c) $\Delta DBH = \Delta ECH$

Bài 6. Cho xOy. Tia Oz là tia phân giác xOy. Lấy điểm A thuộc tia Oz $(A \neq O)$. Kẻ AB vuông góc với Ox, AC vuông góc với Oy $(B \in Ox,\ C \in Oy)$. Chứng minh $\Delta OAB = \Delta OAC$.

Bài 7. Cho hình vẽ sau. Tìm các tam giác vuông bằng nhau trên hình?



Bài 8.MD3. Cho tam giác ABC có $AB = AC$. Gọi D là trung điểm của cạnh BC. Kẻ $DE \perp AB, DF \perp AC$. Chứng minh:

a) $\Delta DEB = \Delta DFC$

b) $\Delta DEA = \Delta DFA$

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A và $AB = AC$. Qua A kẻ đường thẳng d cắt BC. Vẽ BM, CN vuông góc với d. Chứng minh rằng : $\Delta BAM = \Delta ACN$.

Bài 10. Cho ΔABC có $B = C$. Trên tia đối của tia BC lấy điểm M, trên tia đối tia của tia CB lấy điểm N sao cho $BM = CN$. Kẻ $BE \perp AM$ $(E \in AM)$, $CF \perp AN$ $(F \in AN)$, $AI \perp BC (I \in BC)$.

Chứng minh rằng $\Delta BME = \Delta CNF$.

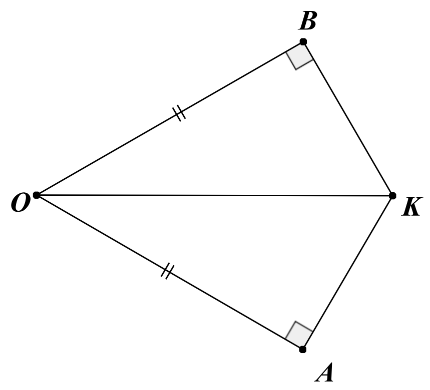
Bài 11. Cho ΔABC. Từ A vẽ cung tròn có bán kính bằng BC, từ C vẽ cung tròn có bán kính bằng AB. Hai cung tròn này cắt nhau tại D(D nằm khác phía của B đối với AC). Kẻ $AH \perp BC (H \in BC)$ và $CK \perp AD (K \in AD)$.

a) Chứng minh $\Delta AHC = \Delta CKA$

b) Chứng minh $\Delta AHB = \Delta CKD$

Dạng 2. Sử dụng các trường hợp bằng nhau của tam giác vuông để chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau, hai góc bằng nhau. Tính độ dài đoạn thẳng, số đo góc.

Bài 1. Cho hình vẽ sau. Chứng minh OK là phân giác của góc BOA



Bài 2. Cho ΔABC có $AB = AC$. Kẻ $AD \perp BC$. Chứng minh AD là tia phân giác của BAC.

Bài 3. Cho ΔABC có $BA = BC$. Qua A kẻ đường vuông góc với AB, Qua C kẻ đường vuông góc với CB, chúng cắt nhau ở K. Chứng minh BK là phân giác của góc B?

Bài 4. Cho tam giác ABC, M là trung điểm cạnh BC. Vẽ BI, CK vuông góc với AM.

Chứng minh $BI = CK$.

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A. Tia phân giác góc B cắt cạnh AC tại điểm M. Kẻ $MD \perp BC$ $(D \in BC)$.

a) Chứng minh $BA = BD$;

b) Gọi E là giao điểm của hai đường thẳng DM và BA. Chứng minh $\Delta ABC = \Delta DBE$.

Bài 6. Cho tam giác ABC có $AB = AC$. Trên cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = AN$. Các đường thẳng vuông góc với AB, AC tại M, N cắt nhau ở O. AO cắt BC tại H. Chứng minh

a) $\Delta AMO = \Delta ANO$

b) $HB = HC$ và $AH \perp BC$.

Bài 7. Cho tam giác ABC có $AB = AC$. Đường thẳng vuông góc với AB tại B cắt đường thẳng vuông góc với AC tại C ở D. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Chứng minh:

a) $\Delta DAB = \Delta DAC$;

b) A, M, D thẳng hàng.

Bài 8. Cho ΔABC vuông tại A và $AB = AC$. Tính số đo góc B, C ?

Bài 9. Cho ΔABC vuông tại A. Từ điểm K trên cạnh AC, vẽ $KH \perp BC$, biết $KH = KA$.

Chứng minh rằng $BK \perp AH$.

Bài 10. Cho ΔABC vuông tại A $(AB < AC)$ và các điểm M thuộc cạnh AC, H thuộc cạnh BC sao cho $MH \perp BC$ và $MH = HB$. Chứng minh rằng AH là tia phân giác của góc A.

Bài 11. Cho tam giác ABC. Các tia phân giác của góc B và C cắt nhau ở I. Kẻ $ID \perp AB; IE \perp AC \left(D \in AB; E \in AC\right)$. Chứng minh rằng $AD = AE$.

Bài 12. Cho ΔABC vuông tại A có $AB < AC$. Vẽ $AH \perp BC(H \in BC)$. D là điểm trên cạnh AC sao cho $AD = AB$. Vẽ $DE \perp BC(E \in BC)$. Chứng minh $HA = HE$

Bài 13 . Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC và AM là tia phân giác của góc A.

Chứng minh $AB = AC$

Phần III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Tìm hoặc chứng minh hai tam giác vuông bằng nhau

Bài 1. Cho tam giác ABC nhọn có $AB = AC$, vẽ $BD \perp AC$ tại D, $CE \perp AB$ tại E. Gọi M là giao điểm của BD và CE. Chứng minh:

a) $\Delta DBA = \Delta ECA$;

b) $\Delta EBC = \Delta DCB$;

c) $\Delta EAM = \Delta DAM$.

Bài 2. Cho ΔABC có $AB = AC$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa A lần lượt vẽ các tia Bx, Cy sao cho $Bx \perp BA$ và $Cy \perp CA$. Gọi D là giao điểm của các tia Bx, Cy.

Chứng minh $\Delta ABD = \Delta ACD.$

Dạng 2. Sử dụng các trường hợp bằng nhau của tam giác vuông để chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau, hai góc bằng nhau. Tính độ dài đoạn thẳng, số đo góc.

Bài 1. Cho ΔABC nhọn có $AB = AC$. Vẽ $BH \perp AC$ $\left(H \in AC\right)$, $CK \perp AB$ $\left(K \in AB\right)$.

a) Chứng minh: $AH = AK$.

b) Gọi I là giao điểm của BH và CK. Chứng minh AI là tia phân giác của A.

Bài 2. Cho ΔABC có $AB = AC$. D là một điểm trên cạnh AB, E là một điểm trên cạnh AC sao cho $AD = AE$. Từ D và E hạ các đường DM, EN cùng vuông góc với BC. Chứng minh rằng:

$a) B = C$

b) $BM = CN$.

Bài 3. Cho xOy. Trên tia Ox lấy điểm A, trên tia Oy lấy điểm B. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB. Từ A và B kẻ các đường thẳng AE, BF cùng vuông góc với tia OM.

Chứng minh : $AE = BF$

Bài 4. Cho góc xOy. Trên tia phân giác của góc đó lấy một điểm M, từ M hạ các đường thẳng vuông góc MA, MB xuống cạnh Ox, Oy.Chứng minh:

a) $\Delta MAO = \Delta MBO$.

b) AB vuông góc với OM.

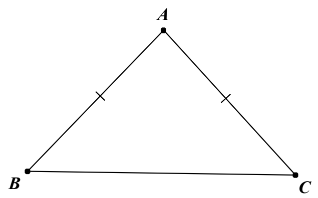
CHUYÊN ĐỀ 16: TAM GIÁC CÂN

ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA ĐOẠN THẲNG

PHẦN I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT.

1. Tam giác cân

a. Định nghĩa: Tam giác cân là tam giác có hai cạnh bằng nhau.



$\triangle ABC$ cân tại $A \Leftrightarrow \begin{cases} \triangle ABC \\ AB = AC \end{cases}$

b. Tính chất: Trong tam giác cân, hai góc ở đáy bằng nhau. Ngược lại một tam giác có hai góc ở đáy bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

$\triangle ABC$ cân tại $A \Rightarrow B = C$

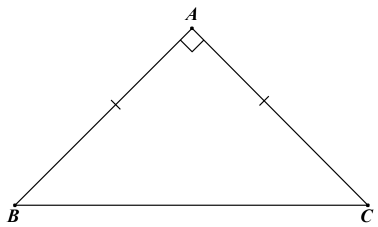
c. Dấu hiệu nhận biết:

- Tam giác có hai cạnh bằng nhau thì đó là tam giác cân.

- Nếu một tam giác có hai góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

2. Tam giác vuông cân

a. Định nghĩa: Tam giác vuông cân là tam giác vuông có hai cạnh góc vuông bằng nhau.



$\triangle ABC$ vuông cân tại $A \Leftrightarrow \begin{cases} \triangle ABC \\ A = 90^\circ \\ AB = AC \end{cases}$

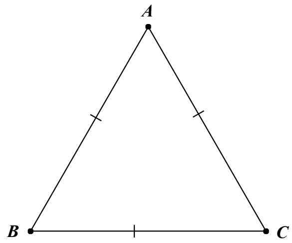
b. Tính chất: Mỗi góc nhọn của tam giác vuông cân bằng 45^o

$\triangle ABC$ vuông cân tại $A \Leftrightarrow B = C = 45^o$

3. Tam giác đều

a. Định nghĩa: Tam giác đều là tam giác có ba cạnh bằng nhau

$\triangle$ ABC đều $\Leftrightarrow \begin{cases} \triangle ABC \\ AB = BC = CA \end{cases}$



b. Tính chất: Trong tam giác đều mỗi góc bằng $60°$.

c. Dấu hiệu nhận biết

- Tam giác có 3 cạnh bằng nhau thì tam giác đó là tam giác đều.

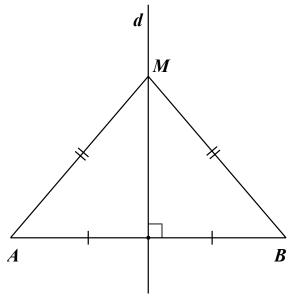
- Nếu một tam giác có ba góc bằng nhau thì tam giác đó là tam giác đều.

- Nếu một tam giác cân có một góc bằng $60°$ thì tam giác đó là tam giác đều.

4. Đường trung trực của đoạn thẳng

a. Định nghĩa đường trung trực:

Đường trung trực của một đoạn thẳng là đường thẳng vuông góc với đoạn thẳng ấy tại trung điểm của nó.



Trên hình vẽ bên, d là đường trung trực của đoạn thẳng AB .

Ta cũng nói: A đối xứng B qua d .

b. Tính chất: Điểm nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều hai mút của đoạn thẳng đó.

c. Nhận xét: Điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng thì nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng đó.

$MA = MB \Rightarrow M$ thuộc đường trung trực của AB .

d. Tập hợp các điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng là đường trung trực của đoạn thẳng đó.

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI.

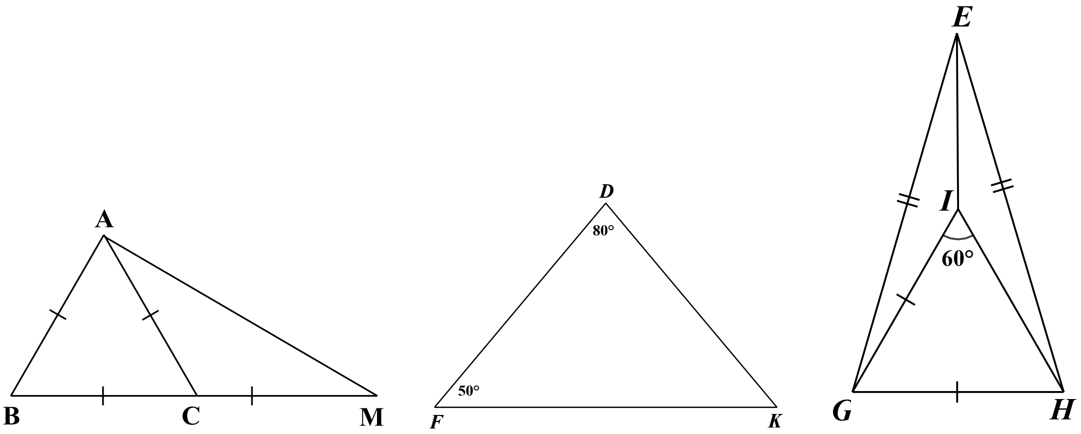
Dạng 1. Chứng minh tam giác cân, tam giác đều và sử dụng tính chất của tam giác cân, tam giác đều để giải quyết bài toán.

I. Phương pháp giải:

Dựa và dấu hiệu nhận biết của tam giác cân, tam giác đều. Dựa vào tính chất của tam giác cân, tam giác đều để tính số đo góc hoặc chứng minh các góc bằng nhau, các cạnh bằng nhau.

II. Bài toán.

Bài 1. Trong các hình sau, hình nào là tam giác cân, hình nào là tam giác đều? Giải thích tại sao?



Lời giải:

a) Xét ΔABC có: $AB = AC = BC$ nên ΔABC đều

Xét ΔACM có: $AC = CM$ nên ΔACM cân tại C

b) Trong ΔDFK có $K + D + F = 180°$

Ta có $K = 180° - F - D = 50°$

$\Rightarrow K = F$

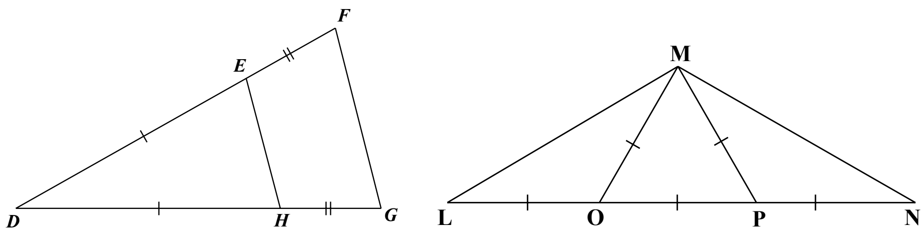
$\Rightarrow \Delta DFK$ cân tại D.

c) Xét ΔIGH có: $IG = GH$ nên ΔIGH cân tại G

Mà $GIH = 60°$ nên ΔIGH đều

Xét ΔEGH có: $EG = EH$ nên ΔEGH cân tại E

Bài 2. Trong các hình sau, hình nào là tam giác cân, hình nào là tam giác đều? Giải thích tại sao?



Lời giải:

a) Trong ΔDEH có $DE = DH \Rightarrow \Delta DEH$ cân tại D.

Ta có $DE = DH;\ EF = HG$

$\Rightarrow DE + EF = DH + HG$

$\Rightarrow DF = DG$

$\Rightarrow \Delta DFG$ cân tại D.

b) Ta có $MO = MP = PO \Rightarrow \Delta MPO$ đều.

Lại có $LO = MO \Rightarrow \Delta LOM$ cân tại O

$MP = PN \Rightarrow \Delta MPN$ cân tại P.

Vì ΔMOP đều nên $POM = MPO = 60^\circ$

Mà $MOP + MOL = 180^\circ$ (hai góc kề bù); $MPO + MPN = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow MOL = MPN$

Xét ΔMOL và ΔMPN ta có:

$MOL = MPN$ (cmt), $OL = PN$ (gt), $MO = MP$ (gt)

Suy ra $\Delta MOL = \Delta MPN$ (c.g.c)

Do đó $ML = MN \Leftrightarrow \Delta LMN$ cân tại M.

Bài 3. Cho tam giác ABC cân tại A. Tính số đo các góc còn lại của tam giác ABC nếu biết:

a) $A = 40^\circ$; b) $B = 50^\circ$; c) $C = 60^\circ$.

Lời giải:

a) Trong ΔABC có $A + B + C = 180^\circ$

$\Rightarrow B + C = 180^\circ - A = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$

Mà $B = C$ (Vì ΔABC cân tại A)

$\Rightarrow B = C = \dfrac{140^\circ}{2} = 70^\circ$

b) Trong ΔABC có $A + B + C = 180^\circ$

Mà ΔABC cân tại $A \Rightarrow B = C = 50^\circ$

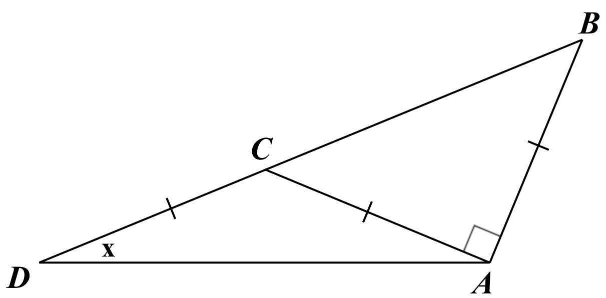
$\Rightarrow A = 180^\circ - 2.B = 108^\circ - 2.50^\circ = 80^\circ$

c) Trong ΔABC có $A + B + C = 180^\circ$

Mà ΔABC cân tại $A \Rightarrow B = C = 60^\circ$

$\Rightarrow A = 180^\circ - 2.C = 180^\circ - 2.60^\circ = 60^\circ$

Bài 4. Tìm số đo x trong hình vẽ sau:



Lời giải:

Trong ΔABC vuông tại A có $AB = AC$ nên ΔABC vuông cân tại A

$\Rightarrow ABC = ACB = 45°$

Xét ΔADC có $AC = DC$ nên ΔADC cân tại C

$\Rightarrow CDA = CAD = x$

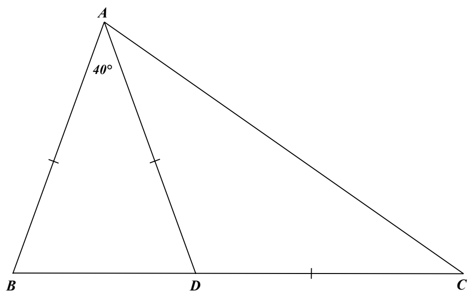
Ta lại có BCA là góc ngoài của ΔADC

$\Rightarrow BCA = CDA + CAB = x + x = 2x$

Do đó $2x = 45° \Rightarrow x = 22{,}5°$

Bài 5. Cho tam giác ABD cân tại A có $A = 40°$. Trên tia đối của tia DB lấy điểm C sao cho $DC = DA$. Tính số đo góc ACB.

Lời giải:



Trong ΔABC có $BAD + B + ADB = 180°$

$\Rightarrow B + ADB = 180° - BAD = 140°$

Mà $B = ADB$ (ΔABD cân tại A)

$\Rightarrow B = ADB = \dfrac{140°}{2} = 70°$

Ta có $ADB + ADC = 180°$ (hai góc kề bù)

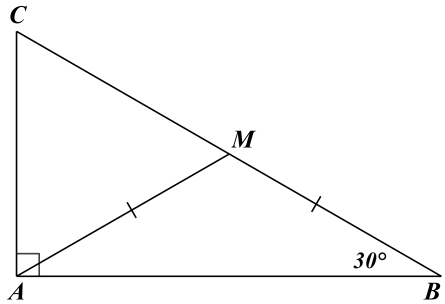
$\Rightarrow ADC = 110°$

ΔADC có $DC = DA$ (gt) $\Rightarrow$ ΔADC cân tại D

$ACB = \dfrac{180° - ADC}{2} = \dfrac{180° - 110°}{2} = 35°$

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, $B = 30°$. Trên cạnh BC lấy M sao cho $AM = BM$. Chứng minh ΔAMC đều.

Lời giải:



Ta có $AM = BM$ (gt) $\Rightarrow \Delta AMB$ cân tại M

$\Rightarrow BAM = B$.

Vì ΔABC vuông tại $A \Rightarrow B + C = 90°$

Mà $BAM + CAM = 90°$; $BAM = B$ (cmt)

Nên $CAM = C$

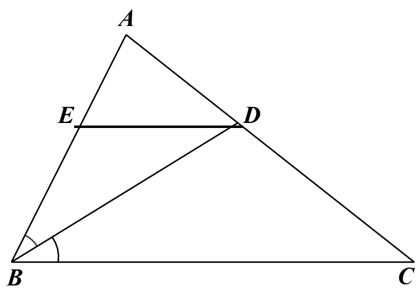
$\Rightarrow \Delta AMC$ cân tại M.

Ta lại có $C = 90° - B = 60°$.

Suy ra ΔAMC đều.

Bài 7. Cho tam giác ABC. Tia phân giác góc B cắt cạnh AC tại D. Qua D kẻ đường thẳng song song với BC, nó cắt cạnh AB tại E. Chứng minh tam giác EBD cân.

Lời giải:



Vì $DE \,//\, BC$ nên $DBC = EDB$ (vì hai góc so le trong)

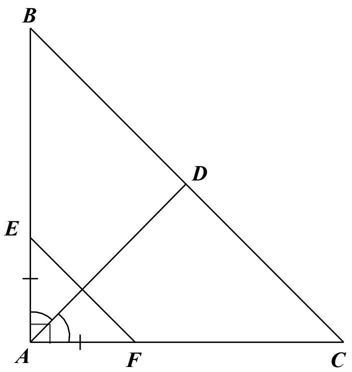
Mà $DBC = DBE$ (vì BD là tia phân giác của ABC)

$\Rightarrow EBD = EDB$

$\Rightarrow \Delta EDB$ cân tại E

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Tia phân giác góc A cắt cạnh BC tại D. Trên cạnh AB và AC lần lượt lấy các điểm E và F sao cho $AE = CF$. Chứng minh ΔABD, ΔADC, ΔAEF vuông cân.

Lời giải:



Xét ΔAEF vuông tại A có $AE = AF$ $\Rightarrow \Delta AEF$ vuông cân tại A

Vì ΔABC vuông cân tại A $\Rightarrow B = C = 45°$

Ta lại có: AD là phân giác BAC $\Rightarrow BAD = CAD = \dfrac{BAC}{2} = 45°$

Xét ΔABD có $BDA = 180° - \left(B + BAD\right) = 90°$

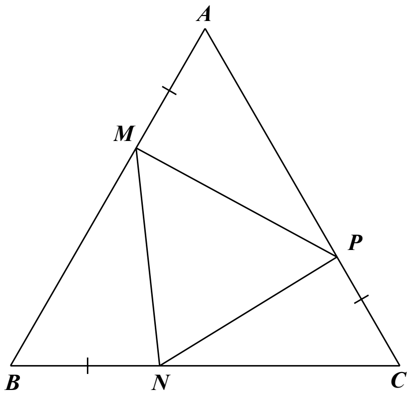
$\Rightarrow AD \perp BC \Rightarrow ADC = 90°$

Xét ΔADB vuông tại D có $B = DAB = 45°$ $\Rightarrow \Delta ADB$ vuông cân tại D

Xét ΔADC vuông tại D có $C = DAC = 45° \Rightarrow \Delta ADC$ vuông cân tại D

Bài 9. Cho tam giác ABC đều. Trên cạnh $AB,\ BC,\ CA$ lần lượt lấy các điểm $M,\ N,\ P$ sao cho $AM = BN = CP$. Chứng minh tam giác MNP đều.

Lời giải:



Ta có $AB = BC = CA$ và $AM = BN = CP$

$\Rightarrow AB - AM = BC - BN = CA - CP$

$\Rightarrow MB = NC = PA$.

Xét ΔMBN và ΔNCP ta có:

$B = C\left(= 60°\right)$ (vì ΔABC đều), $BM = CN$ (cmt), $BN = CP$ (gt)

Suy ra $\Delta MBN = \Delta NCP$ (c.g.c)

$\Rightarrow MN = NP$ (1)

Chứng minh tương tự ta có $\Delta PAM = \Delta NCP(c.g.c)$

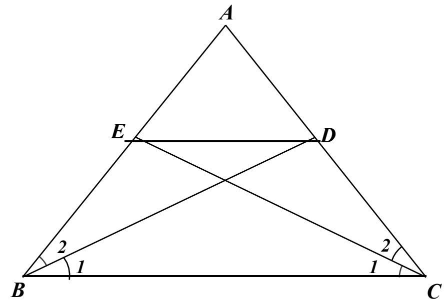
$\Rightarrow PM = NP$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow PM = NP = MN$

Suy ra ΔMNP đều.

Bài 10. Cho tam giác ABC cân tại A. Tia phân giác góc B cắt cạnh AC tại D, tia phân giác góc C cắt cạnh AB tại E. Chứng minh tam giác ADE cân.

Lời giải:



Vì BD, CE lần lượt là tia phân giác của ABC, ACB

Nên $B_1 = B_2 = \dfrac{ABC}{2}$, $C_1 = C_2 = \dfrac{ACB}{2}$

Mà $ABC = ACB$ (do tam giác ABC cân tại A)

Suy ra: $B_2 = C_2$

Xét ΔABD và ΔACE ta có:

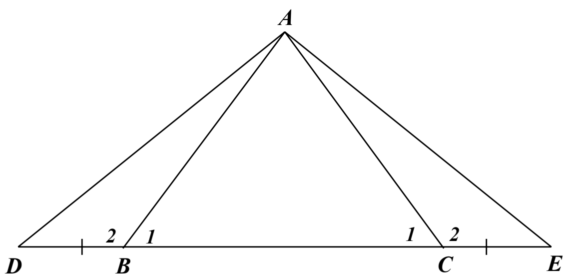
$B_2 = C_2$, A là góc chung, $AB = AC$ (ΔABC cân tại A)

Suy ra $\Delta ABD = \Delta ACE$ (g.c.g)

$\Rightarrow AD = AE \Rightarrow \Delta ADE$ cân tại A.

Bài 11. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Chứng minh tam giác ADE cân.

Lời giải:



Ta có: $B_1 + B_2 = 180°$, $C_1 + C_2 = 180°$ (kề bù)

$B_1 = C_1$ (ΔABC cân tại A)

Nên $\widehat{B_2} = \widehat{C_2}$

Xét ΔABD và ΔACE ta có:

$\widehat{B_2} = \widehat{C_2}$ (cmt)

$AB = AC$ (ΔABC cân tại A)

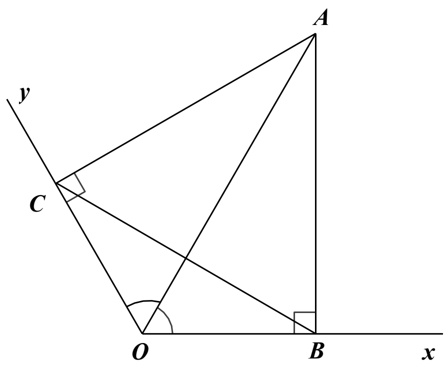
$DB = CE$ (gt)

Suy ra $\Delta ABD = \Delta ACE$ (g.c.g)

$\Rightarrow AD = AE \Rightarrow \Delta ADE$ cân tại A.

Bài 12. Cho $\widehat{xOy} = 120°$, điểm A thuộc tia phân giác của $\widehat{xOy}$. Kẻ $AB \perp Ox$ ($B \in Ox$) và $AC \perp Oy$ ($C \in Oy$). Tam giác ABC là tam giác gì? Tại sao?

Lời giải:



Xét ΔABO và ΔACO ta có:

$\widehat{AOB} = \widehat{AOC}\left(= \frac{1}{2}\widehat{xOy} = 60°\right)$ (vì OA là tia phân giác của $\widehat{xOy}$)

$\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90°$

OA là cạnh chung

Suy ra $\Delta ABO = \Delta ACO$ (ch.gn)

$\Rightarrow AB = AC \Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A.

Vì ΔABO vuông tại B $\Rightarrow \widehat{AOB} + \widehat{BAO} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{BAO} = 90° - 60° = 30°$

Mà $\widehat{BAO} = \widehat{CAO}$ (do $\Delta ABO = \Delta ACO$)

$\Rightarrow \widehat{BAC} = 60°$

Xét ΔABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 60° \Rightarrow \Delta ABC$ đều.

Bài 13. Cho tam giác ABC cân tại A ($\widehat{A} < 90°$). Kẻ BD vuông góc với AC tại D, kẻ CE vuông góc với AB tại E.

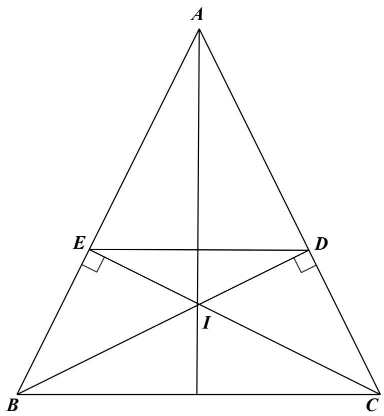
a) Chứng minh tam giác ADE cân.

b) Chứng minh $DE // BC$.

c) Gọi I là giao điểm của BD và CE. Chứng minh $IB = IC$.

d) Chứng minh $AI \perp BC$.

Lời giải:



Xét ΔABD và ΔACE ta có:

$ADB = AEC = 90°$

BAC là góc chung

$AB = AC$ (ΔABC cân tại A)

Suy ra $\Delta ABD = \Delta ACE$ (ch.gn)

$\Rightarrow AD = AE \Rightarrow \Delta ADE$ cân tại A.

b) ΔABC cân tại $A \Rightarrow ACB = \dfrac{180° - BAC}{2}$ (1)

ΔADE cân tại $A \Rightarrow ADE = \dfrac{180° - BAC}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow ADE = ACB$, mà hai góc này vị trí đồng vị

$\Rightarrow DE // BC$

c) Ta có $ABC = ABI + IBC$; $ACB = ACI + ICB$

Mà $ABC = ACB$ (ΔABC cân tại A) ; $ABI = ACI$ (vì $\Delta ABD = \Delta ACE$)

Nên $IBC = ICB$ $\Rightarrow \Delta IBC$ cân tại I $\Rightarrow IB = IC$

d) Ta có $AB = AC$ (ΔABC cân tại A) $\Rightarrow A$ nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng BC

$IB = IC$ (cmt) $\Rightarrow I$ nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng BC

Do đó AI là đường trung trực của đoạn thẳng BC

$\Rightarrow AI \perp BC$.

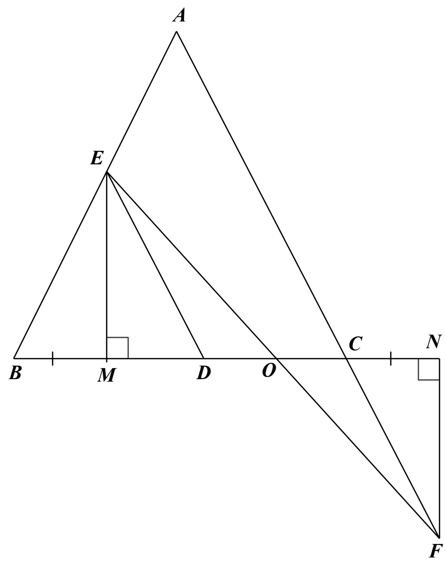
Bài 14. Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy điểm M trên cạnh BC $(MB < MC)$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm N sao cho $BM = CN$. Đường thẳng qua M vuông góc với BC cắt AB tại E. Đường thẳng qua N vuông góc BC cắt AC tại F.

a) Chứng minh: $EM = FN$

b) Qua E kẻ $ED // AC$ ($D \in BC$). Chứng minh $MB = MD$.

c) EF cắt BC tại O. Chứng minh $OE = OF$.

Lời giải:



a) Ta có $EBM = ACB$ (ΔABC cân)

mà $FCN = ACB$ (đối đỉnh) nên $EBM = FCN$.

Xét ΔBEM và ΔCFN ta có:

$EBM = FCN$ (cmt)

$BM = CN$ (gt)

$EMB = FNC$ $(= 90°)$

Vậy $\Delta BEM = \Delta CFN$ (g.c.g)

$\Rightarrow EM = FN$

b) Ta có $ED // AC \Rightarrow EDM = ACB$ (đồng vị)

mà $EBM = ACB$ nên $EDM = EBM$

Suy ra ΔEBD cân tại E, do đó $EB = ED$.

Xét ΔBME vuông tại M và ΔDME vuông tại M, ta có

$EB = ED$ (cmt);

$EDM = EBM$ (cmt)

Suy ra $\Delta BME = \Delta DME$ (ch.gn)

$\Rightarrow BM = MD$.

c) Ta có $EM \;//\; FN$ (cùng vuông góc với BC) $\Rightarrow MEO = NFO$ (so le trong).

Xét ΔMEO và ΔNFO, ta có:

$MEO = NFO$ (cmt)

$EM = FN$ (câu a)

$EMO = FNO$ $(= 90°)$

Suy ra $\Delta MEO = \Delta NFO$ (g.c.g)

$\Rightarrow OE = OF$.

Dạng 2. Vận dụng tính chất của đường trung trực để giải quyết bài toán

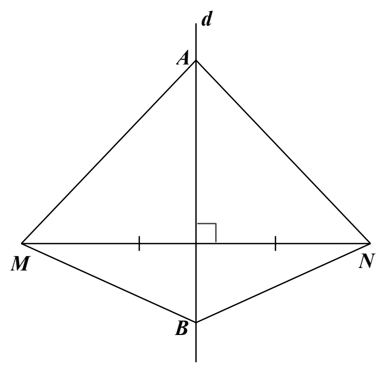
I. Phương pháp giải:

Sử dụng tính chất: Điểm nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều hai mút của đoạn thẳng đó.

II. Bài toán.

Bài 1. Cho hai điểm A, B nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng MN. Chứng minh $\triangle MAB = \triangle NAB$.

Lời giải:



Do A, B nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng MN nên $AM = AN$, $BM = BN$

Xét $\triangle MAB$ và $\triangle NAB$ có:

$AM = AN$ (cmt)

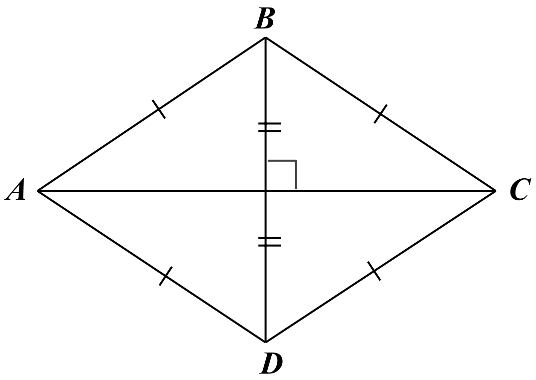
$BM = BN$ (cmt)

AB là cạnh chung

Do đó $\triangle MAB = \triangle NAB$ (c.c.c).

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ cân tại B. Lấy điểm D đối xứng với điểm B qua AC. Chứng minh $\triangle ABD = \triangle CBD$.

Lời giải:



Vì D đối xứng với điểm B qua AC nên AC là đường trung trực của BD

Do A, C nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng BD nên $AB = AD$, $BC = DC$

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle CBD$ có:

$AB = AD$ (cmt)

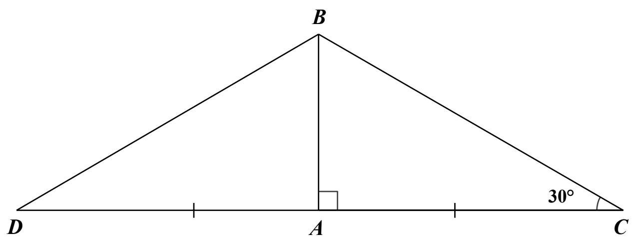
$BC = DC$ (cmt)

AC là cạnh chung

Do đó $\triangle ABD = \triangle CBD$ (c.c.c).

Bài 3. Tam giác ABC vuông tại A có $\hat{C} = 30°$. Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho $AD = AC$. Tính số đo góc $\widehat{BDA}$.

Lời giải:



Vì $AB \perp DC$ và $AD = AC$ nên AB là đường trung trực của DC

$\Rightarrow BD = BC$

Suy ra ΔDBC cân tại B

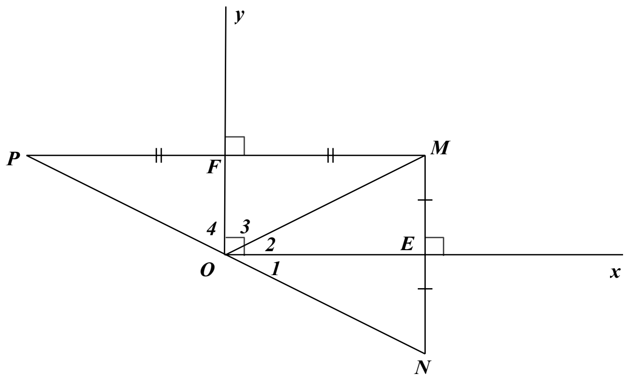
$\Rightarrow \widehat{BDA} = \hat{C} = 30°$

Bài 4. Cho góc vuông xOy. Điểm M nằm trong góc đó. Vẽ điểm N và P sao cho tia Ox là đường trung trực của MN và Oy là đường trung trực của MP.

a) Chứng minh $ON = OP$.

b) Chứng minh ba điểm P, O, N thẳng hàng.

Lời giải:



a) Vì Ox là đường trung trực của MN nên $OM = ON$

Vì Oy là đường trung trực của MP nên $OM = OP$

Do đó $ON = OP$

b) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của MN và Ox, MP và Oy.

$\Delta OME = \Delta ONE$ (c.g.c) nên $O_1 = O_2$

$\Delta OMF = \Delta ONP$ (c.g.c) nên $O_3 = O_4$

Ta có $PON = O_1 + O_2 + O_3 + O_4 = 2\left(O_2 + O_3\right) = 2.90° = 180°$

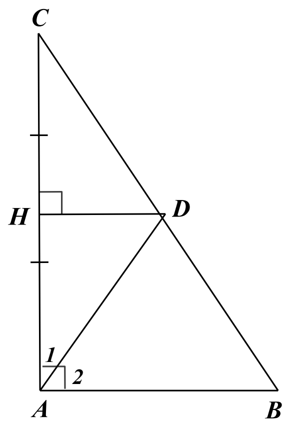
Do đó ba điểm P, O, N thẳng hàng.

Bài 5. Cho ΔABC vuông tại A. Đường trung trực của đoạn thẳng AC cắt AC tại H, cắt BC tại D. Nối A và D.

a) So sánh số đo góc DAB và DBA.

b) Chứng minh D là trung điểm của BC

Lời giải:



a) Từ giả thiết vì HD là đường trung trực của AC nên $DC = DA \Rightarrow C = A_1$

Vì ΔABC vuông tại A nên $A_2 + A_1 = 90°$, $B + C = 90°$

=> $A_2 = B$

b) $A_2 = B$ nên ΔADB cân tại $D \Rightarrow DA = DB$

Mà $DC = DA$ (vì HD là đường trung trực của AC) .

$\Rightarrow DC = DB$

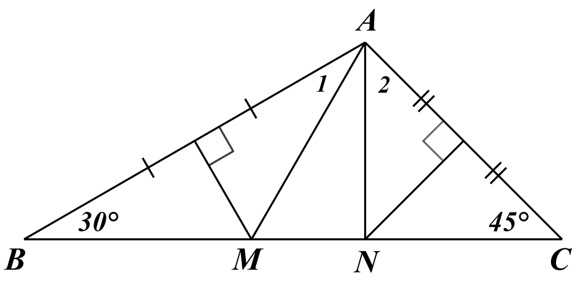
Suy ra D là trung điểm của BC

Bài 6. Cho ΔABC. Các đường trung trực của AB và AC cắt cạnh BC theo thứ tự ở M và N .

a) Biết $B = 30°$, $C = 45°$. Tính số đo góc BAC và MAN .

b) Chứng minh $MAN = 2BAC - 180°$.

Lời giải:



a) Ta có M nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB

$\Rightarrow MA = MB$

$\Rightarrow \Delta AMB$ cân tại M

$\Rightarrow B = A_1 = 30°$

Tương tự N nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AC

$\Rightarrow NA = NC$

$\Rightarrow \Delta ANC$ cân tại N

$\Rightarrow C = A_2 = 45°$

Trong ΔANC có $ANC = 180° - \left(C + A_2\right) = 180° - (45° + 45°) = 90°$ nên $ANC = 90°$.

Suy ra $AN \perp BC$.

Xét Δ ABC có $B = 30°$, $C = 45° \Rightarrow BAC = 180° - \left(B + C\right) = 105°$.

Vậy $MAN = 105° - A_1 - A_2 = 105° - 30° - 45° = 30°$

b) Ta có: $MAN = BAC - (A_1 + A_2) = BAC - (B + C) = BAC - (180° - BAC) = 2BAC - 180°$

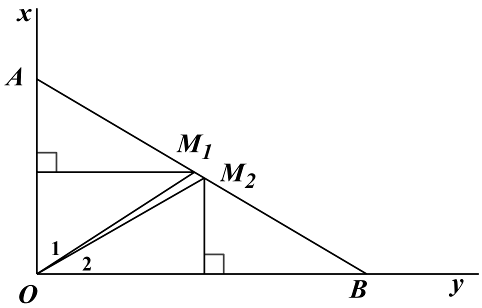
Vậy $MAN = 2BAC - 180°$

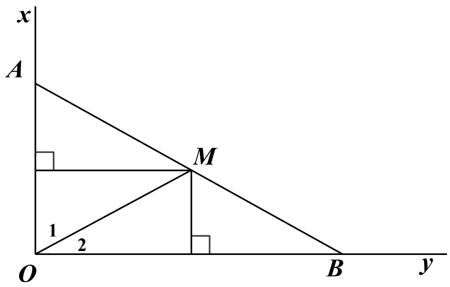
Bài 7. Cho góc vuông xOy. Trên các tia Ox, Oy lấy hai điểm A và B (không trùng với O). Đường trung trực của các đoạn thẳng OA và OB cắt nhau ở M . Chứng minh:

a) A, M , B thẳng hàng.

b) M là trung điểm của AB .

Lời giải:





a) Gọi M_1, M_2 lần lượt là giao điểm của trung trực đoạn OA, OB với AB.

Ta có M_1 nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng OA

$\Rightarrow M_1A = M_1O$

$\Rightarrow \Delta M_1OA$ cân tại M_1 nên $A = O_1$ (1)

Ta lại có M_2 nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng OB

$\Rightarrow M_2B = M_2O$

$\Rightarrow \Delta M_2OB$ cân tại M_2 nên $B = O_2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $O_1 + O_2 = A + B$

Xét ΔOAB vuông tại O nên $A + B = 90°$

Do đó $O_1 + O_2 = 90°$ (3)

Ta lại có $AOB = O_1 + M_1OM_2 + O_2 = 90°$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $M_1OM_2 = 0°$ => $M_1 \equiv M_2 \equiv M$

Vậy A, M, B thẳng hàng.

b) Ta có M lần lượt nằm trên đường trung trực của đoạn OA, OB

Nên $MO = MA$, $MO = MB$

$\Rightarrow MA = MB$ mà A, M, B thẳng hàng nên M là trung điểm của AB.

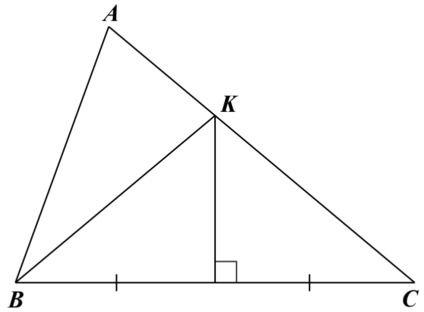
Bài 8. ΔABC có $B - C = 30°$. Đường trung trực của BC cắt AC ở K.

a) Chứng minh $KBC = KCB$.

b) Tính số đo góc ABK

c) Biết $AB = 3$ cm, $AC = 5$ cm. Tính chu vi tam giác ABK.

Lời giải:



a) K thuộc đường trung trực của BC

$\Rightarrow KB = KC$

$\Rightarrow \Delta BKC$ cân tại $K \Rightarrow KBC = C$

b) Ta có: $ABK = ABC - KBC = ABC - C = 30°$

c) Ta có: $AK + BK = AK + KC = AC = 5$ cm.

$\Rightarrow AB + AK + BK = 8$ cm

Vậy chu vi tam giác ABK là 8 cm.

Dạng 3. Chứng minh một điểm thuộc đường trung trực. Chứng minh một đường thẳng là đường trung trực của một đoạn thẳng.

I. Phương pháp giải:

• Để chứng minh điểm M thuộc trung trực của đoạn thẳng AB, ta dùng nhận xét: Điểm cách đều hai mút của một đoạn thẳng thì nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng đó.

$MA = MB \Rightarrow M$ thuộc đường trung trực của AB.

• Để chứng minh đường thẳng d là đường trung trực của đoạn thẳng AB, ta chứng minh d chứa hai điểm phân biệt cách đều A và B, hoặc dùng định nghĩa đường trung trực.

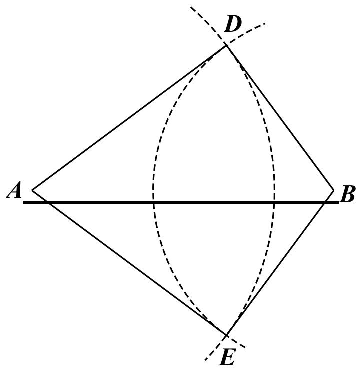
II. Bài toán.

Bài 1. Cho đoạn thẳng $AB = 5$ cm. Vẽ đường tròn tâm A bán kính 4 cm và đường tròn tâm B bán kính 3 cm. Hai đường tròn này cắt nhau tại D, E. Chứng minh:

a) Điểm A thuộc đường trung trực của DE.

b) AB là đường trung trực của DE.

Lời giải:



a) Từ giả thiết điểm D, E nằm trên đường tròn tâm A nên $AD = AE$.

Suy ra điểm A thuộc đường trung trực của DE.

b) Tương tự ý a), ta có điểm điểm B thuộc đường trung trực của DE.

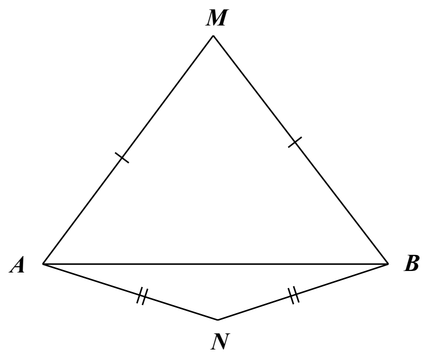
Vậy AB là đường trung trực của DE.

Bài 2. Cho đoạn thẳng AB. Dựng các tam giác cân MAB, NAB lần lượt tại M và N (M, N nằm khác phía so với AB). Chứng minh:

a) Điểm M thuộc đường trung trực của AB;

b) MN là đường trung trực của AB.

Lời giải:



a) ΔAMB cân tại M nên $AM = BM$

Suy ra điểm M thuộc đường trung trực của AB. (1)

Ta lại có ΔANB cân tại N nên $AN = BN$

Nên điểm N thuộc đường trung trực của AB. (2)

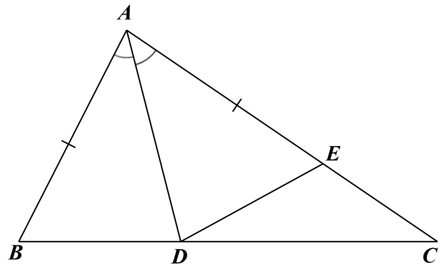
Từ (1) và (2) suy ra: MN là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Bài 3. Cho ΔABC, đường phân giác AD. Trên tia AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$. Chứng minh:

a) $BD = DE$;

b) AD là đường trung trực của BE.

Lời giải:



a) Xét ΔABD và ΔAED có:

AD là cạnh chung

$BAD = EAD$ (Vì AD là tia phân giác của BAC)

$AB = AE$ (gt)

Do đó $\Delta ABD = \Delta AED$ (c.g.c) nên $BD = DE$

b) Vì $BD = DE$ (cmt) suy ra D nằm trên đường trung trực của BE (1).

Theo giả thiết: $AB = AE$ suy ra A nằm trên đường trung trực của BE (2).

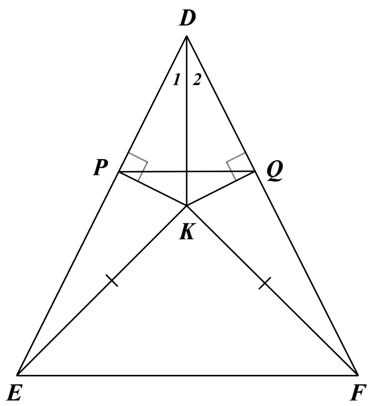
Từ (1) và (2), suy ra AD là đường trung trực của BE.

Bài 4. Cho ΔDEF có $DE = DF$. Lấy điểm K nằm trong tam giác sao cho $KE = KF$. Kẻ KP vuông góc với DE ($P \in DE$), KQ vuông góc với DF ($Q \in DF$). Chứng minh:

a) K thuộc đường trung trực của EF và PQ;

b) DK là đường trung trực của EF và PQ. Từ đó suy ra $PQ // EF$.

Lời giải:



a) Ta có: $\begin{cases} DE = DF \\ KE = KF \end{cases}$ nên K, D thuộc trung trực của EF.

Xét ΔDEK và ΔDFK có:

PK là cạnh chung

$KE = KF$ (gt)

$DE = DF$ (gt)

Do đó $\Delta ABD = \Delta AED$ (c.g.c) nên $BD = DE$

$\Rightarrow D_1 = D_2$

Xét ΔDPK và ΔDQK có:

$DPK = DQK = 90°$

$D_1 = D_2$ (cmt)

DK là cạnh chung

Do đó $\Delta DPK = \Delta DQK$

$\Rightarrow PK = QK$ và $DP = DQ$.

Từ đó suy ra K, D thuộc trung trực của PQ.

b) Ta có K, D thuộc trung trực của EF

$\Rightarrow DK$ là đường trung trực của PQ

$\Rightarrow DK \perp PQ$ (1)

Ta lại có K, D thuộc trung trực của PQ

$\Rightarrow DK$ là đường trung trực của EF.

$\Rightarrow DK \perp EF$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $PQ \,//\, EF$.

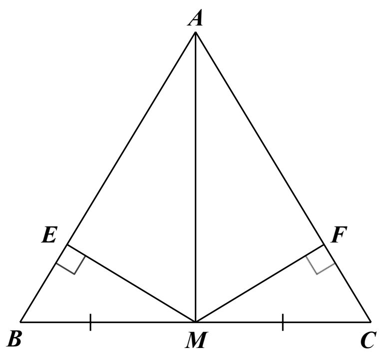
Bài 5. Cho ΔABC cân tại A, M là trung điểm của BC. ME vuông góc với AB, MF vuông góc với AC. Chứng minh:

a) AM là trung trực của của BC;

b) $ME = MF$ và AM là trung trực của EF;

c) $EF \,//\, BC$.

Lời giải:



a) Ta có ΔABC cân tại A $\Rightarrow AB = AC$ (1)

Mà $MB = MC$ (Vì M là trung điểm của BC) (2)

Suy ra A, M thuộc đường trung trực của BC

$\Rightarrow AM$ là trung trực của của BC

b) Vì ΔABC cân tại A nên $B = C$.

Xét ΔBEM và ΔCFM có:

$BEM = CFM = 90°$ (gt)

$BM = CM$ (M là trung điểm của BC)

$B = C$ (Vì ΔABC cân tại A)

Do đó $\Delta BEM = \Delta CFM$ (ch-gn)

$\Rightarrow ME = MF$

Ta có $\Delta BEM = \Delta CFM$ (ch-gn) $\Rightarrow BE = CF$

Mà ΔABC cân tại $A \Rightarrow AB = AC$

Do đó $AB - BE = AC - CF$

$\Rightarrow AE = AF$

Mặt khác, $ME = MF$ nên AM là đường trung trực của đoạn thẳng EF.

c) Ta có: AM là đường trung trực của BC và EF

$\Rightarrow AM \perp BC$, $AM \perp EF \Rightarrow EF \,//\, BC$.

Bài 6. Cho góc xOy khác góc bẹt Oz là tia phân giác của xOy. Gọi M là một điểm bất kì thuộc tia Oz. Qua M vẽ đường thẳng a vuông góc với Ox tại A, cắt Oy tại C và vẽ đường thẳng b vuông góc với Oy tại B, cắt Ox tại D. Chứng minh:

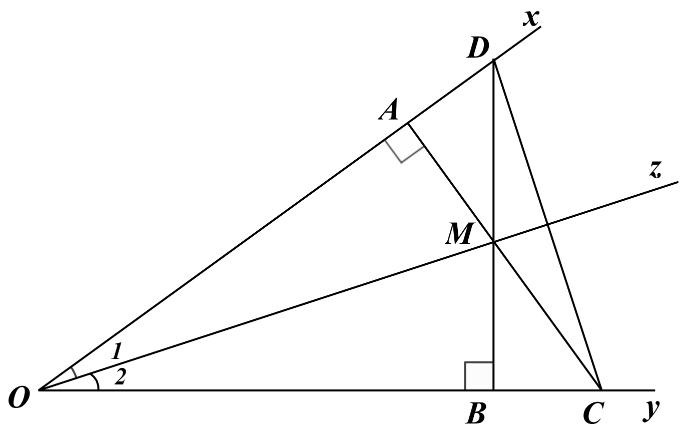
a) Điểm O thuộc đường trung trực của AB;

b) OM là đường trung trực của AB;

c) OM là đường trung trực của CD.

d) $AB \,//\, CD$

Lời giải:



a) Xét ΔOAM và ΔOEM có:

OM là cạnh chung

$O_1 = O_2$ (Vì Oz là tia phân giác của xOy)

$OAM = OBM = 90°$ (gt)

Do đó $\Delta OAM = \Delta OEM$ (ch-gn) nên $\begin{cases} OA = OB \\ MA = MB \end{cases}$

Vì $OA = OB$ nên O thuộc đường trung trực của AB.

b) Vì $MA = MB$ nên M thuộc trung trực của AB.

Mà O thuộc trung trực của AB

Suy ra OM là đường trung trực của AB.

c) $\Delta OBD = \Delta OAC$ (c.g.c)

Nên $OD = OC \Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của CD. (1)

$\Delta OMD = \Delta OMC$ (c.g.c)

Nên $MD = MC \Rightarrow M$ thuộc đường trung trực của CD. (2)

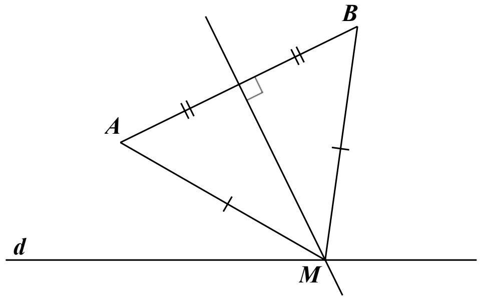
Từ (1) và (2) suy ra OM thuộc đường trung trực của CD.

d) Ta có OM là đường trung trực của AB và CD

$\Rightarrow OM \perp AB$, $OM \perp CD \Rightarrow AB \,//\, CD$.

Bài 7. Cho hai điểm A, B nằm cùng phía với đường thẳng d. Xác định vị trí điểm M trên đường thẳng d sao cho M cách đều hai điểm A và B

Lời giải:



Vì điểm M cách đều hai điểm A và B nên M thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Vậy điểm M là giao điểm của đường thẳng d với đường trung trực của AB.

Chú ý: Nếu A, B nằm sao cho $AB \perp d$ thì không tồn tại điểm cần tìm.

Bài 8. Cho tam giác ABC cân tại A ($\widehat{A} < 90°$). Đường trung trực của cạnh AC cắt tia CB tại điểm D. Trên tia đối của tia AD lấy điểm E sao cho $AE = BD$. Chứng minh:

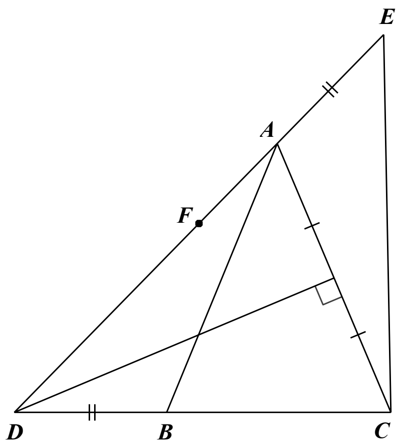
a) Chứng minh ΔADC cân;

b) Chứng minh $\widehat{DAC} = \widehat{ABC}$;

c) Chứng minh $AD = CE$;

d) Lấy F là trung điểm của DE. Chứng minh CF là đường trung trực của DE.

Lời giải:



a) Vì D thuộc đường trung trực của AC nên $DA = DC$.

$\Rightarrow \Delta ADC$ cân.

b) ΔADC cân $\Rightarrow DAC = DCA$ (1)

Vì $AB = AC$ nên $ABC = DCA$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow DAC = ABC$

c) Ta có : $EAC + DAC = DBA + ABC (= 180°)$

Mà $DAC = DCA$ suy ra $EAC = ABD$.

Chứng minh được $\Delta EAC = \Delta DBA$ (c.g.c) $\Rightarrow AD = CE$.

d) Ta có: $AD = CE$, $DA = DC$ nên $CE = CD$.

Mà $FE = FD$ (F là trung điểm của DE).

$\Rightarrow CF$ là đường trung trực của DE.

Bài 9. Cho ΔABC nhọn, đường cao AH. Lấy các điểm P và Q lần lượt đối xứng với H qua AB; AC.

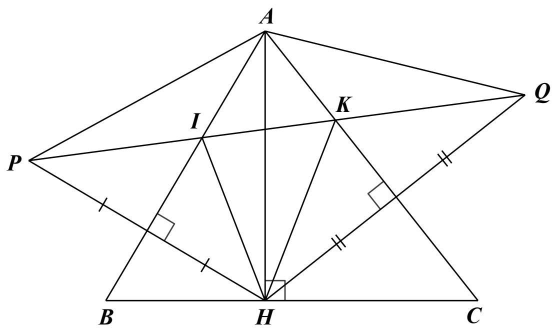
a) Chứng minh $AP = AQ$.

b) Gọi I, K lần lượt là giao điểm của PQ với AB, AC. Chứng minh $API = AHI$ và $AHK = AQK$.

c) Chứng minh HA là tia phân giác của IHK.

d) Cho $BAC = 60°$. Tính số đo góc PAQ

Lời giải:



a) Ta có P đối xứng với H qua AB nên AB là đường trung trực của đoạn thẳng PH

$\Rightarrow AP = AH$

Ta lại có Q đối xứng với H qua AC nên AC là đường trung trực của đoạn thẳng QH

$\Rightarrow AQ = AH$

Do đó $AP = AQ (= AH)$

b) Xét ΔAPI và ΔAHI ta có:

$AP = AH$ (A nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng PH)

$IP = IH$ (I nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng PH)

AI cạnh chung

Vậy $\Delta API = \Delta AHI$ (c.c.c)

$=> API = AHI$ (1)

Chứng minh tương tự: $\Delta AHK = \Delta AQK$ (c.c.c)

$\Rightarrow AHK = AQK$ (2)

c) Ta có $AP = AQ$ $\Rightarrow \Delta PAQ$ cân tại A $\Rightarrow API = AQK$ (3).

Từ (1), (2) và (3) có: $AHI = AHK$

$\Rightarrow HA$ là tia phân giác của IHK.

d) Ta có $\Delta API = \Delta AHI$ $=> PAI = HAI$

$\Delta AHK = \Delta AQK$ $\Rightarrow HAK = QAK$

Mà $PAQ = PAH + HAQ = 2(IAH + HAK) = 2BAC = 120°$

Vậy $PAQ = 120°$

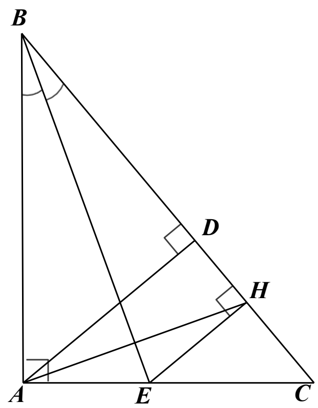
Bài 10. Cho tam giác ABC vuông tại A. Tia phân giác của B cắt AC tại E. Từ E kẻ EH vuông góc với BC tại H.

a) Chứng minh: $\Delta ABE = \Delta HBE$.

b) Chứng minh BE là đường trung trực của đoạn thẳng AH.

c) Kẻ $AD \perp BC$ $(D \in BC)$. Chứng minh AH là tia phân giác của DAC

Lời giải:



a) Xét ΔABE và ΔHBE ta có:

$BAE = BHE = 90°$

BE cạnh chung

$ABE = DBE$ (gt)

Suy ra $\Delta ABE = \Delta HBE$ (cạnh huyền - góc nhọn)

b) Vì $\Delta ABE = \Delta HBE$ (cmt) $\Rightarrow BA = BH$, $EA = EH$

$BA = BH$ (hai cạnh tương ứng) nên B thuộc đường trung trực của AH

$EA = EH$ (hai cạnh tương ứng) nên E thuộc đường trung trực của AH

Vậy BE là đường trung trực của đoạn thẳng AH

c) Ta có: $AD \,//\, EH$ (cùng vuông góc với BC) nên $DAH = EHA$ (so le trong)

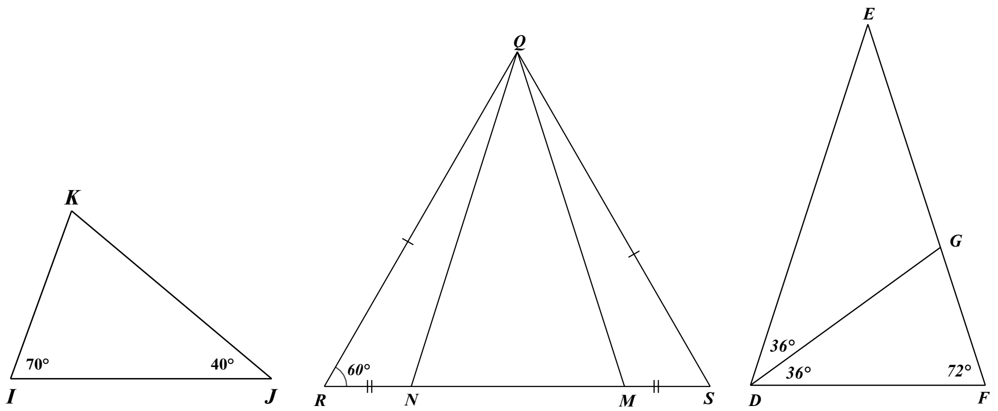
Vì $EA = EH$ (cmt) nên tam giác EAH cân tại E nên $EAH = EHA$

Vậy $EAH = DAH$ hay AH là tia phân giác của DAC .

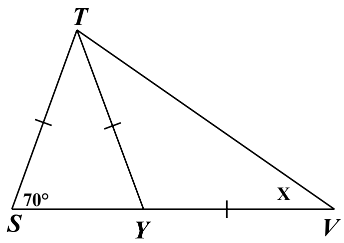
Phần III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Chứng minh tam giác cân, tam giác đều và sử dụng tính chất của tam giác cân, tam giác đều để giải quyết bài toán.

Bài 1: Trong các hình sau, hình nào là tam giác cân, hình nào là tam giác đều?



Bài 2. Tìm số đo x trong hình vẽ sau:



Bài 3. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên đường thẳng AB lấy điểm D sao cho $BD = BC$ (D và A khác phía so với B). Tính số đo các góc của tam giác ADC.

Bài 4. Cho ΔABC cân tại A. Trên các cạnh AC, AB lần lượt lấy M, N sao cho $AM = AN$.

a) Chứng minh $ABM = ACN$.

b) Gọi O là giao điểm của BM và CN. Chứng minh tam giác OBC cân.

Bài 5. Cho $xOy = 60°$, điểm A thuộc tia phân giác của xOy. Kẻ $AB \perp Ox$ ($B \in Ox$) và $AC \perp Oy$ ($C \in Oy$). Tam giác OBC là tam giác gì? Tại sao?

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, $BC = 2AB$. D là trung điểm cạnh AC. Đường thẳng vuông góc với AC tại D cắt BC tại E. Chứng minh

a) ΔEAC cân. b) ΔABE đều.

Bài 7: Cho tam giác ABC vuông tại $A(AB < AC)$. Tia phân giác góc A cắt BC tại D. Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với BC tại D, cắt AC tại F. Trên AB lấy điểm F sao cho $AE = AF$. Chứng minh

a) $ABC = DEC$; b) ΔDBF là tam giác cân; c) $DB = DE$.

Dạng 2. Vận dụng tính chất của đường trung trực để giải quyết bài toán

Bài 1. Tam giác ABC có điểm A thuộc đường trung trực của BC. Biết $B = 40°$. Tính số đo của các góc trong ΔABC.

Bài 2. Cho ΔABC cân có $A > 90°$. Các đường trung trực của AB và AC cắt cạnh BC theo thứ tự ở D và E và hai trung trực cắt nhau ở F.

a) Biết $A = 110°$. Tính số đo góc DAE.

b) Chứng minh $2BAC = DAE + 180°$.

c) Tính số đo DFE.

Bài 3. Cho góc xOy. Từ điểm A nằm trong góc đó kẻ AH vuông góc với Ox (H thuộc Ox) và AK vuông góc với Oy (K thuộc Oy). Trên tia đối của tia HA lấy điểm B sao cho $HB = HA$. Trên tia đối của tia KA lấy điểm C sao cho $KC = KA$. Chứng minh $OB = OC$.

Bài 4. Cho ΔABC vuông tại A. M là trung điểm của cạnh AB. Đường trung trực của cạnh AB cắt cạnh BC tại N. Gọi I là giao điểm của CM và AN.

a. Chứng minh ΔANB là tam giác cân. So sánh: NAB và NBA.

b. Chứng minh N là trung điểm của BC.

c. Nếu $IB = IC$, tính số đo của ABC.

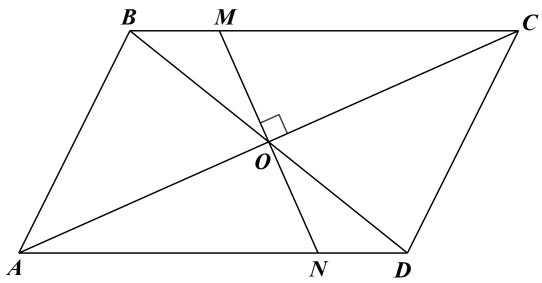
Dạng 3. Chứng minh một điểm thuộc đường trung trực. Chứng minh một đường thẳng là đường trung trực của một đoạn thẳng.

Bài 1. Cho $xOy = 90°$. Trên tia Ox lấy điểm A, trên tia Oy lấy điểm B. Kẻ đường trung trực HM của đoạn thẳng OA ($H \in OA$, $M \in AB$). Chứng minh M thuộc đường trung trực của OB.

Bài 2. Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Xác định điểm D trên AC sao cho $DA + DB = AC$.

Bài 3. Cho bốn điểm A, B, C, D tạo thành hình có $AB // CD$ và $BC // AD$ như hình vẽ.

Giao điểm của AC và BD là O. Từ O vẽ vuông góc với AC cắt cạnh BC, AD lần lượt tại M, N. Chứng minh AC là trung trực của MN và $AM = MC = CN = NA$.



Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A. Tia phân giác của B cắt AC tại E. Từ E kẻ EH vuông góc với BC tại H.

a) Chứng minh: $\Delta ABE = \Delta HBE$.

b) Chứng minh BE là đường trung trực của đoạn thẳng AH.

c) Kẻ $AD \perp BC$ $(D \in BC)$. Chứng minh AH là tia phân giác của DAC

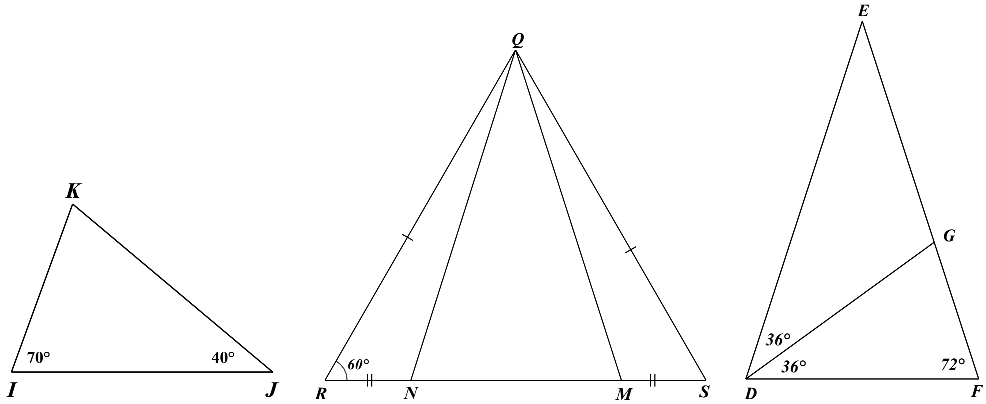
Bài 5. Cho tam giác ABC cố định, đường phân giác AI $(I \in BC)$. Trên đoạn thẳng IC lấy điểm H. Từ H kẻ đường thẳng song song với AI, cắt AB kéo dài tại E và cắt AC tại F. Chứng minh:

a) Đường trung trực của EF luôn đi qua đỉnh A của tam giác ABC;

b) Khi H di động trên đoạn thẳng IC thì đường trung trực của đoạn thẳng EF luôn cố định.

ĐÁP SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Nhận biết tam giác cân, tam giác đều. Vận dụng tính chất của tam giác cân, tam giác đều để tính số đo góc hoặc chứng minh các góc bằng nhau, các cạnh bằng nhau. Bài 1. Bài 1: Bài Bài 1. Trong các hình sau, hình nào là tam giác cân, hình nào là tam giác đều?



Lời giải:

a) Trong ΔKIJ có $K + \hat{I} + J = 180°$

Ta có $K = 180° - \hat{I} - J = 70°$

$\Rightarrow K = \hat{I}$

$\Rightarrow \Delta IJK$ cân tại J.

b) Ta có: ΔQRS có $QR = QS$ và $QRS = 60° \Rightarrow \Delta QRS$ đều.

Suy ra $\Delta QRN = \Delta QSM$ (c.g.c)

$\Rightarrow QN = QM \Leftrightarrow \Delta QMN$ cân.

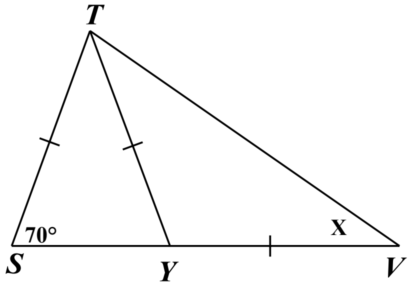
c) Ta có $DGF = 72° \Rightarrow DGE = 108°;\ DEF = 36°$.

Xét ΔDEF có $EDF = EFD = 72°$ suy ra ΔDEF cân tại E.

Xét ΔDFG có $DGF = DFG = 72° \Rightarrow \Delta DFG$ cân tại D.

Xét ΔDGE có $EDG = DEG = 36° \Rightarrow \Delta DGE$ cân tại G.

Bài 2. Tìm số đo x trong hình vẽ sau:



Lời giải:

Vì $TS = TY$ nên ΔTSY cân tại T

$\Rightarrow TYS = S = 70^\circ$

Vì $TY = YV$ nên ΔTYV cân tại Y

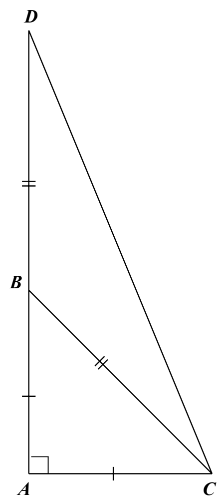
$\Rightarrow YTV = V = x$

Ta có TYS là góc ngoài của ΔTYV nên $TYS = YTV + V = 2x = 70^\circ$

$\Rightarrow x = 35^\circ$

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên đường thẳng AB lấy điểm D sao cho $BD = BC$ (D và A khác phía so với B). Tính số đo các góc của tam giác ADC.

Lời giải:



Có $ABC = ACB = 45^\circ \Rightarrow CBD = 135^\circ$.

Tam giác BCD cân tại B suy ra $ADC = BCD = \dfrac{180^\circ - 135^\circ}{2} = 22{,}5^\circ$.

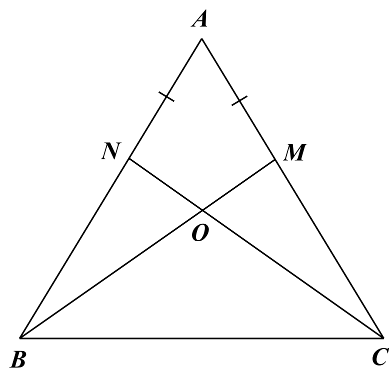
Suy ra $ACD = 67{,}5^\circ$.

Bài 4. Cho ΔABC cân tại A. Trên các cạnh AC, AB lần lượt lấy M, N sao cho $AM = AN$.

a) Chứng minh $ABM = ACN$

b) Gọi O là giao điểm của BM và CN. Chứng minh tam giác OBC cân.

Lời giải:



a) Xét ΔAMB và ΔANC ta có:

$AM = AN$ (gt)

BAC là góc chung

$AB = AC$ (ΔABC cân tại A)

Suy ra $\Delta AMB = \Delta ANC$ (c.g.c)

$\Rightarrow ABM = ACN$

b) Ta có: $ABC = ABM + MBC$, $ACB = ACN + NCB$

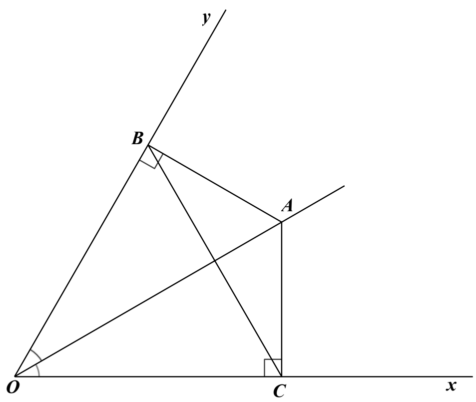
Mà $ABM = ACN$ (cmt), $ABC = ACB$ (ΔABC cân tại A)

Do đó $MBC = NCB$

Hay $OBC = OCB \Rightarrow \Delta OBC$ cân tại O

Bài 5. Cho $xOy = 60°$, điểm A thuộc tia phân giác của xOy. Kẻ $AB \perp Ox$ ($B \in Ox$) và $AC \perp Oy$ ($C \in Oy$). Tam giác OBC là tam giác gì? Tại sao?

Lời giải:



Xét ΔABO và ΔACO ta có:

$AOB = AOC$ (vì OA là phân giác xOy)

$ABO = ACO = 90°$

OA là cạnh chung

Suy ra $\Delta ABO = \Delta ACO$ (ch.gn)

$\Rightarrow OB = OC \Rightarrow \Delta OBC$ cân tại O

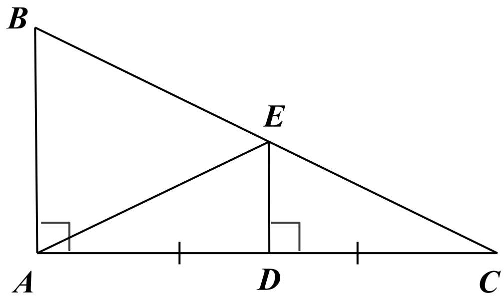
ΔOBC có $BOC = 60° \Rightarrow \Delta OBC$ đều.

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, $BC = 2AB$. D là trung điểm cạnh AC. Đường thẳng vuông góc với AC tại D cắt BC tại E. Chứng minh

a) ΔEAC cân.

b) ΔABE đều.

Lời giải:



a) Xét ΔEAD và ΔECD có $DA = DC; EDA = EDC;$

ED chung suy ra $\Delta EDA = \Delta ECD$. Suy ra $EA = EC \Rightarrow \Delta ECA$ cân.

b) Ta có $\begin{cases} ABE + ECA = 90^\circ \\ ECA = EAC \end{cases} \Rightarrow ABE + EAC = 90^\circ$

$\Rightarrow BAE = EBA$ (cùng phụ góc BAE).

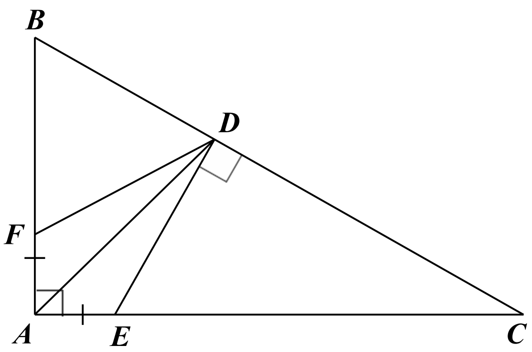
Suy ra ΔABE cân tại $E \Rightarrow EC = BE = EA = \dfrac{AB}{2} = AB$

$\Rightarrow \Delta ABE$ đều.

Bài 7: Cho tam giác ABC vuông tại $A(AB < AC)$. Tia phân giác góc A cắt BC tại D. Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với BC tại D, cắt AC tại F. Trên AB lấy điểm F sao cho $AE = AF$. Chứng minh

a) $ABC = DEC$; b) ΔDBF là tam giác cân; c) $DB = DE$.

Lời giải:



a) Ta có $ABC + ACB = 90^\circ; \ ACB + DEC = 90^\circ$

suy ra $ABC = DEC$.

b) Xét ΔFAD và ΔEAD có: AD chung; $FAD = EAD; \ AF = AE$.

Suy ra $\Delta FAD = \Delta EDA$ (c.g.c).

$\Rightarrow DFA = DEA; \Rightarrow DFB = DEC$ mà $ABC = DEC \Rightarrow ABC = DFB$

$\Rightarrow \Delta DBF$ cân tại D.

c) Ta có $\Delta FAD = \Delta EDA \Rightarrow DE = DF$ (1)

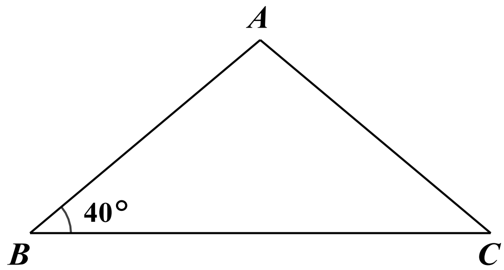
Tam giác DBF cân tại $D \Rightarrow DB = DF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $DB = DE$.

Dạng 2. Vận dụng tính chất của đường trung trực để giải quyết bài toán.

Bài 1. Tam giác ABC có điểm A thuộc đường trung trực của BC. Biết $B = 40°$. Tính số đo của các góc trong ΔABC

Lời giải:



Vì A nằm trên đường trung trực của BC nên $AB = AC$

Suy ra ΔABC cân tại A

Tính được: $ACB = 40°$, $BAC = 100°$

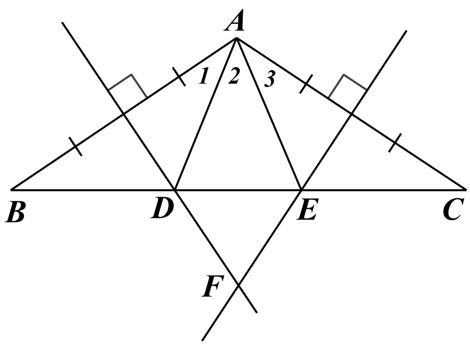
Bài 2. Cho ΔABC cân tại A có $A > 90°$. Các đường trung trực của AB và AC cắt cạnh BC theo thứ tự ở D và E và hai trung trực cắt nhau ở F.

a) Biết $A = 110°$. Tính số đo góc DAE.

b) Chứng minh $2BAC = DAE + 180°$

c) Tính số đo DFE.

Lời giải:



a) ΔABC cân tại A

$$\Rightarrow B = C = \frac{180° - BAC}{2} = \frac{180° - 110°}{2} = 35^{\circ}$$

Ta có D nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB

$\Rightarrow DA = DB$

$\Rightarrow \Delta ADB$ cân tại $D \Rightarrow B = A_1 = 35°$

Tương tự E nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng $AC \Rightarrow EA = EC$

$\Rightarrow \Delta AEC$ cân tại $E \Rightarrow C = A_3 = 35°$

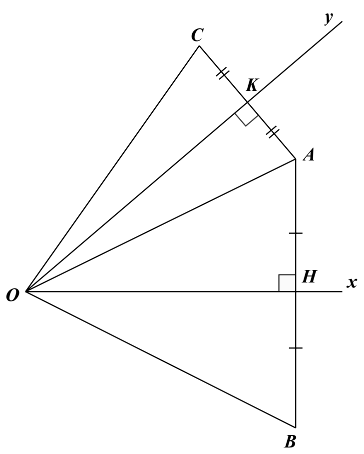
$DAE = BAC - A_1 - A_3 = 110° - 2.35° = 40°$

b) Ta có: $DAE + 180° = A_2 + (B + C + BAC) = A_2 + A_1 + A_3 + BAC = BAC + BAC = 2BAC$

Vậy $2BAC = DAE + 180°$

Bài 3. Cho góc xOy. Từ điểm A nằm trong góc đó kẻ AH vuông góc với Ox (H thuộc Ox) và AK vuông góc với Oy (K thuộc Oy). Trên tia đối của tia HA lấy điểm B sao cho $HB = HA$. Trên tia đối của tia KA lấy điểm C sao cho $KC = KA$. Chứng minh $OB = OC$.

Lời giải:



Ox là đường trung trực của AB, $O \in AB$

Nên $OA = OB$ (1)

Tương tự ta có Oy là đường trung trực của AC, $O \in AC$

Nên $OA = OC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OB = OC$.

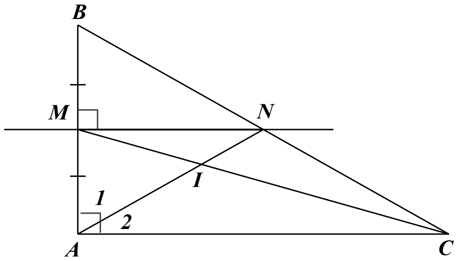
Bài 4. Cho ΔABC vuông tại A. M là trung điểm của cạnh AB. Đường trung trực của cạnh AB cắt cạnh BC tại N. Gọi I là giao điểm của CM và AN.

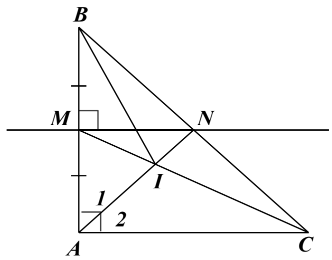
a. Chứng minh ΔANB là tam giác cân. So sánh: NAB và NBA.

b. Chứng minh N là trung điểm của BC.

c. Nếu $IB = IC$, tính số đo của ABC.

Lời giải:





a) Vì N nằm trên đường trung trực của đoạn AB nên $NA = NB$.

$\Rightarrow \Delta ANB$ là tam giác cân tại đỉnh N.

b) ΔANB là tam giác cân tại đỉnh N nên $B = A_1$.

ΔABC vuông tại A nên $B + ACB = 90°$

Mà $A_1 + A_2 = 90°$ Nên $A_2 = ACB$

Suy ra ΔANC cân tại $N \Rightarrow AN = NC$

Mà $NA = NB$ nên $NB = NC$

Do đó N là trung điểm BC.

c) Nếu $IB = IC$ mà $NB = NC$ nên IN là đường trung trực của BC.

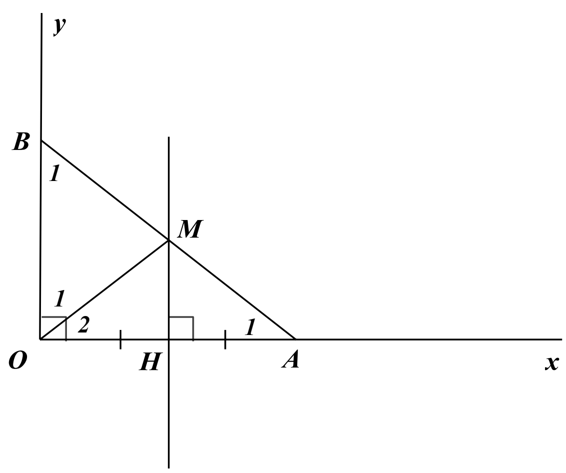
Mà $A \in IN$ nên $AB = AC$

Khi đó ΔABC vuông cân tại A $\Rightarrow ABC = 45°$.

Dạng 3. Chứng minh một điểm thuộc đường trung trực. Chứng minh một đường thẳng là đường trung trực của một đoạn thẳng.

Bài 1. Cho $xOy = 90°$. Trên tia Ox lấy điểm A, trên tia Oy lấy điểm B. Kẻ đường trung trực HM của đoạn thẳng OA ($H \in OA$, $M \in AB$). Chứng minh M thuộc đường trung trực của OB.

Lời giải:



Ta có HM là đường trung trực của đoạn thẳng OA nên $MA = MO$

$\Rightarrow \Delta OMA$ cân tại M $\Rightarrow O_2 = A_1$

Mặt khác, $A_1 + B_1 = O_2 + O_1 = 90°$

$\Rightarrow O_1 = B_1 \Rightarrow MO = MB$.

Vậy M thuộc trung trực của OB

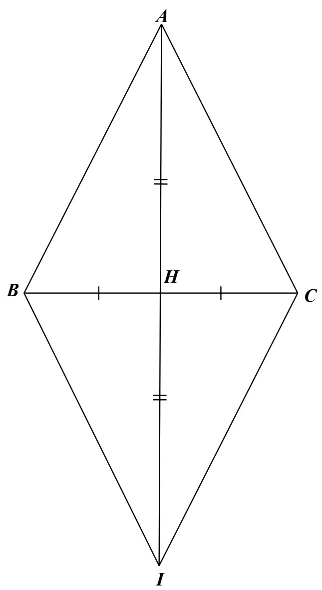
Bài 2. Cho tam giác ABC có cân tại A. Gọi H là trung điểm của BC.

a) Chứng minh rằng $\Delta ABH = \Delta ACH$

b) Chứng minh rằng AH là đường trung trực của BC

c) Trên tia đối của tia HA lấy điểm I sao cho $HA = HI$. Chứng minh rằng: $IC // AB$

d) Chứng minh $CAH = CIH$



a) ΔABH và ΔACH có:

$AB = AC$ (gt)

AH cạnh chung

$HB = HC$ (H là trung điểm BC)

Suy ra: $\Delta ABH = \Delta ACH$ (c-c-c)

b) Ta có: $AHB + AHC = 180°$ (2 góc kề bù)

Mà $AHB = AHC$ (do $\Delta ABH = \Delta ACH$)

$\Rightarrow AHB = 90^0 \Rightarrow AH \perp BC$

Mà H là trung điểm BC (gt)

Nên AH là đường trung trực của BC

c) ΔABH và ΔIHC có:

$HA = HI$ (gt)

$AHB = IHC$ (đối đỉnh)

$HB = HC$ (H là trung điểm BC)

Suy ra: $\Delta ABH = \Delta IHC$ (c-g-c)

$\Rightarrow BAH = CIH$

Mà BAH và CIH ở vị trí so le trong

Nên $IC // AB$

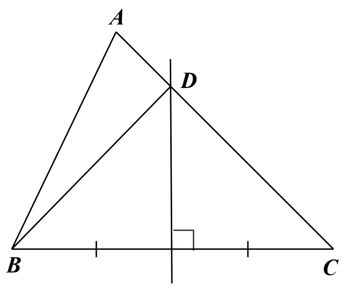
d) Ta có: $BAH = CAH$ (do $\Delta ABH = \Delta ACH$)

Mà $BAH = CIH$ (cm trên)

Nên $CAH = CIH$

Bài 3. Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Xác định điểm D trên AC sao cho $DA + DB = AC$.

Lời giải:



Ta có: $AC = DA + DC$.

Nên $DA + DB = AC \Leftrightarrow DA + DB = AD + DC$

$\Leftrightarrow DB = DC$

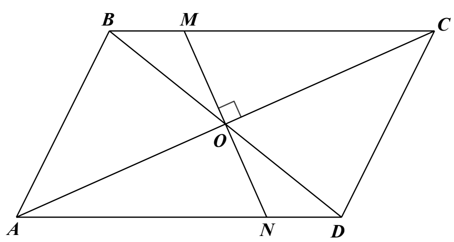
$\Leftrightarrow D$ thuộc đường trung trực của BC.

Vậy D là giao điểm của AC với đường trung trực của BC thì $DA + DB = AC$.

Bài 4. Cho bốn điểm A, B, C, D tạo thành hình có $AB // CD$ và $BC // AD$ như hình vẽ.

Giao điểm của AC và BD là O. Từ O vẽ vuông góc với AC cắt cạnh BC, AD lần lượt tại M, N. Chứng minh AC là trung trực của MN và $AM = MC = CN = NA$.

Lời giải:



Chứng minh được:

$\Delta BAC = \Delta DCA$ (g.c.g) nên $BC = AD$;

$\Delta BOC = \Delta DOA$(g.c.g) nên $OC = AO$

Do $BC // AD$ nên $MCO = NAO$ (so le trong)

$\Delta MOC = \Delta NOA \Rightarrow OM = ON$,

$AC \perp MN$ tại trung điểm của MN nên AC là trung trực của MN. Suy ra $AM = AN$ và $CM = CN$, và được MN cũng là trung trực của AC nên $AM = MC$.

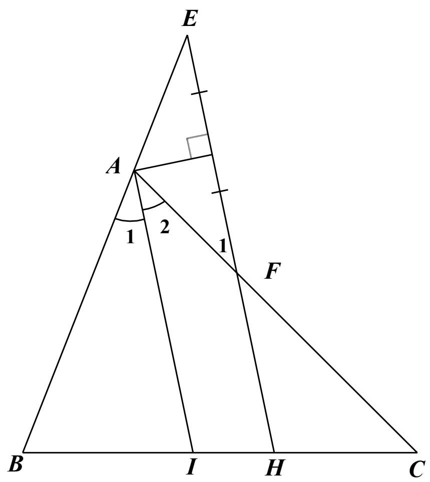
Suy ra $AM = MC = CN = NA$.

Bài 5. Cho tam giác ABC cố định, đường phân giác AI ($I \in BC$). Trên đoạn thẳng IC lấy điểm H. Từ H kẻ đường thẳng song song với AI, cắt AB kéo dài tại E và cắt AC tại F. Chứng minh:

a) Đường trung trực của EF luôn đi qua đỉnh A của tam giác ABC;

b) Khi H di động trên đoạn thẳng IC thì đường trung trực của đoạn thẳng EF luôn cố định.

Lời giải:



a) Vì $HE // AI$ nên $E = A_1$ (đồng vị) và $F_1 = A_2$ (so le trong).

Mà $A_1 = A_2$, do đó $E = F_1 \Rightarrow \Delta AEF$ cân tại A

$\Rightarrow AE = AF$

$\Rightarrow$ Đường trung trực của EF luôn đi qua đỉnh A của tam giác ABC.

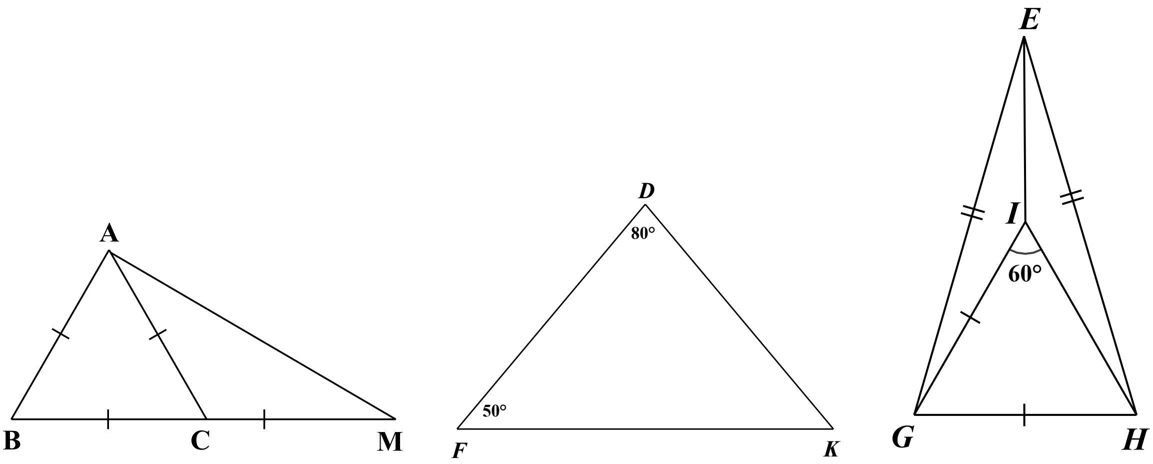
b) Vì $EF // AI$ nên đường trung trực của EF vuông góc với AI.

Từ kết quả ý a), suy ra đường trung trực của EF luôn đi qua điểm A và vuông góc với AI cố định. Vậy đường trung trực của đoạn thẳng EF luôn cố định.

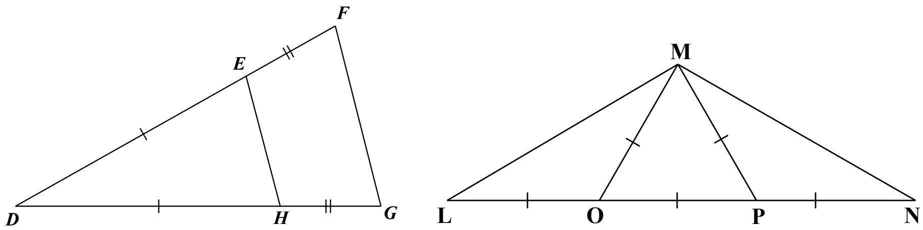
PHIẾU BÀI TẬP.

Dạng 1. Nhận biết tam giác cân, tam giác đều. Vận dụng tính chất của tam giác cân, tam giác đều để tính số đo góc hoặc chứng minh các góc bằng nhau, các cạnh bằng nhau.

Bài 1. Trong các hình sau, hình nào là tam giác cân, hình nào là tam giác đều? Giải thích tại sao?



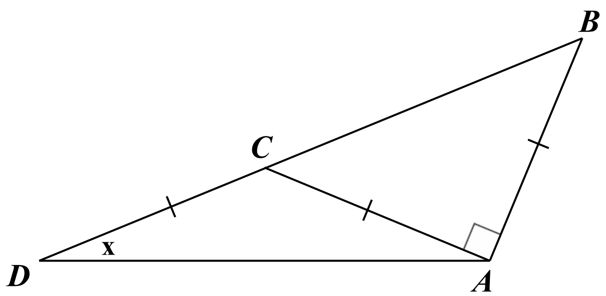
Bài 2. Trong các hình sau, hình nào là tam giác cân, hình nào là tam giác đều? Giải thích tại sao?



Bài 3. Cho tam giác ABC cân tại A. Tính số đo các góc còn lại của tam giác ABC nếu biết:

a) $\widehat{A} = 40^\circ$; b) $\widehat{B} = 50^\circ$; c) $\widehat{C} = 60^\circ$.

Bài 4. Tìm số đo x trong hình vẽ sau:



Bài 5. Cho tam giác ABD cân tại A có $\widehat{A} = 40^\circ$. Trên tia đối của tia DB lấy điểm C sao cho $DC = DA$. Tính số đo góc ACB.

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{B} = 30^\circ$. Trên cạnh BC lấy M sao cho $AM = BM$. Chứng minh ΔAMC đều.

Bài 7. Cho tam giác ABC. Tia phân giác góc B cắt cạnh AC tại D. Qua D kẻ đường thẳng song song với BC, nó cắt cạnh AB tại E. Chứng minh tam giác EBD cân.

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Tia phân giác góc A cắt cạnh BC tại D. Trên cạnh AB và AC lần lượt lấy các điểm E và F sao cho $AE = CF$. Chứng minh $\Delta ABD, \Delta ADC, \Delta AEF$ vuông cân.

Bài 9. Cho tam giác ABC đều. Trên cạnh AB, BC, CA lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $AM = BN = CP$. Chứng minh tam giác MNP đều.

Bài 10. Cho tam giác ABC cân tại A. Tia phân giác góc B cắt cạnh AC tại D, tia phân giác góc C cắt cạnh AB tại E. Chứng minh tam giác ADE cân.

Bài 11. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Chứng minh tam giác ADE cân.

Bài 12. Cho $xOy = 120°$, điểm A thuộc tia phân giác của xOy. Kẻ $AB \perp Ox$ ($B \in Ox$) và $AC \perp Oy$ ($C \in Oy$). Tam giác ABC là tam giác gì? Tại sao?

Bài 13. Cho tam giác ABC cân tại A ($A < 90°$). Kẻ BD vuông góc với AC tại D, kẻ CE vuông góc với AB tại E.

a) Chứng minh tam giác ADE cân.

b) Chứng minh $DE \,//\, BC$.

c) Gọi I là giao điểm của BD và CE. Chứng minh $IB = IC$.

d) Chứng minh $AI \perp BC$.

Bài 14. Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy điểm M trên cạnh BC $(MB < MC)$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm N sao cho $BM = CN$. Đường thẳng qua M vuông góc với BC cắt AB tại E. Đường thẳng qua N vuông góc BC cắt AC tại F.

a) Chứng minh: $EM = FN$

b) Qua E kẻ $ED \,//\, AC$ ($D \in BC$). Chứng minh $MB = MD$.

c) EF cắt BC tại O. Chứng minh $OE = OF$.

Dạng 2. Vận dụng tính chất của đường trung trực để giải quyết bài toán

I. Phương pháp giải:

Sử dụng tính chất: Điểm nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều hai mút của đoạn thẳng đó.

II. Bài toán.

Bài 1. Cho hai điểm A, B nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng MN, Chứng minh $\triangle MAB = \triangle NAB$.

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ cân tại B. Lấy điểm D đối xứng với điểm B qua AC. Chứng minh $\triangle ABD = \triangle CBD$.

Bài 3. Tam giác ABC vuông tại A có $C = 30°$. Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho $AD = AC$. Tính số đo góc BDA.

Bài 4. Cho góc vuông xOy. Điểm M nằm trong góc đó. Vẽ điểm N và P sao cho tia Ox là đường trung trực của MN và Oy là đường trung trực của MP.

a) Chứng minh $ON = OP$.

b) Chứng minh ba điểm P, O, N thẳng hàng.

Bài 5. Cho ΔABC vuông tại A. Đường trung trực của đoạn thẳng AC cắt AC tại H, cắt BC tại D. Nối A và D.

a) So sánh số đo góc DAB và DBA.

b) Chứng minh D là trung điểm của BC

Bài 6. Cho ΔABC. Các đường trung trực của AB và AC cắt cạnh BC theo thứ tự ở M và N.

a) Biết $B = 30°$, $C = 45°$. Tính số đo góc BAC và MAN.

b) Chứng minh $MAN = 2BAC - 180°$.

Bài 7. Cho góc vuông xOy. Trên các tia Ox, Oy lấy hai điểm A và B (không trùng với O). Đường trung trực của các đoạn thẳng OA và OB cắt nhau ở M. Chứng minh:

a) A, M, B thẳng hàng.

b) M là trung điểm của AB.

Bài 8. ΔABC có $B - C = 30°$. Đường trung trực của BC cắt AC ở K.

a) Chứng minh $KBC = KCB$.

b) Tính số đo góc ABK

c) Biết $AB = 3$ cm, $AC = 5$ cm. Tính chu vi tam giác ABK.

Dạng 3. Chứng minh một điểm thuộc đường trung trực. Chứng minh một đường thẳng là đường trung trực của một đoạn thẳng.

Bài 1. Cho đoạn thẳng $AB = 5$ cm. Vẽ đường tròn tâm A bán kính 4 cm và đường tròn tâm B bán kính 3 cm. Hai đường tròn này cắt nhau tại D, E. Chứng minh:

a) Điểm A thuộc đường trung trực của DE.

b) AB là đường trung trực của DE.

Bài 2. Cho đoạn thẳng AB. Dựng các tam giác cân MAB, NAB lần lượt tại M và N (M, N nằm khác phía so với AB). Chứng minh:

a) Điểm M thuộc đường trung trực của AB;

b) MN là đường trung trực của AB.

Bài 3. Cho ΔABC, đường phân giác AD. Trên tia AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$. Chứng minh:

a) $BD = DE$;

b) AD là đường trung trực của BE.

Bài 4. Cho ΔDEF có $DE = DF$. Lấy điểm K nằm trong tam giác sao cho $KE = KF$. Kẻ KP vuông góc với DE ($P \in DE$), KQ vuông góc với DF ($Q \in DF$). Chứng minh:

a) K thuộc đường trung trực của EF và PQ;

b) DK là đường trung trực của EF và PQ. Từ đó suy ra $PQ // EF$.

Bài 5. Cho ΔABC cân tại A, M là trung điểm của BC. ME vuông góc với AB, MF vuông góc với AC. Chứng minh:

a) AM là trung trực của của BC;

b) $ME = MF$ và AM là trung trực của EF;

c) $EF \,//\, BC$.

Bài 6. Cho góc xOy khác góc bẹt Oz là tia phân giác của xOy. Gọi M là một điểm bất kì thuộc tia Oz. Qua M vẽ đường thẳng a vuông góc với Ox tại A, cắt Oy tại C và vẽ đường thẳng b vuông góc với Oy tại B, cắt Ox tại D. Chứng minh:

a) Điểm O thuộc đường trung trực của AB;

b) OM là đường trung trực của AB;

c) OM là đường trung trực của CD.

d) $AB \,//\, CD$

Bài 7. Cho hai điểm A, B nằm cùng phía với đường thẳng d. Xác định vị trí điểm M trên đường thẳng d sao cho M cách đều hai điểm A và B

Bài 8. Cho tam giác ABC cân tại A ($A < 90°$). Đường trung trực của cạnh AC cắt tia CB tại điểm D. Trên tia đối của tia AD lấy điểm E sao cho $AE = BD$. Chứng minh.:

a) Chứng minh ΔADC cân;

b) Chứng minh $DAC = ABC$;

c) Chứng minh $AD = CE$;

d) Lấy F là trung điểm của DE. Chứng minh CF là đường trung trực của DE.

Bài 9. Cho ΔABC nhọn, đường cao AH. Lấy các điểm P và Q lần lượt đối xứng với H qua AB; AC.

a) Chứng minh $AP = AQ$.

b) Gọi I , K lần lượt là giao điểm của PQ với AB, AC. Chứng minh $API = AHI$ và $AHK = AQK$.

c) Chứng minh HA là tia phân giác của IHK.

d) Cho $BAC = 60°$. Tính số đo góc PAQ

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông tại A. Tia phân giác của B cắt AC tại E. Từ E kẻ EH vuông góc với BC tại H.

a) Chứng minh: $\Delta ABE = \Delta HBE$.

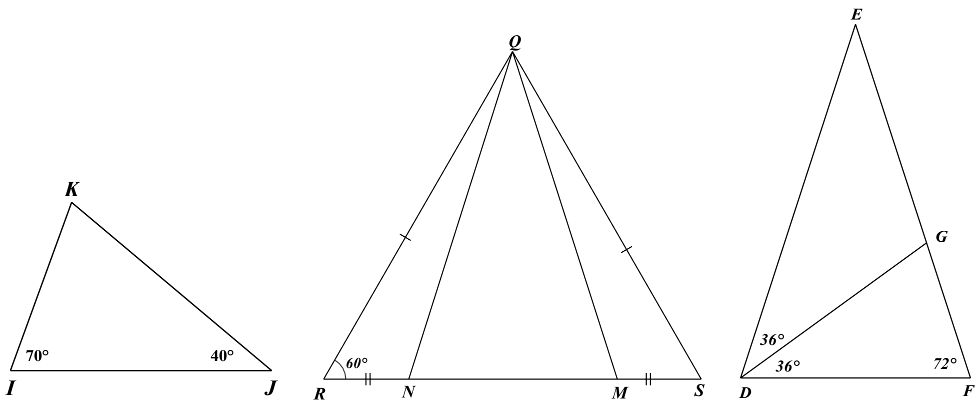
b) Chứng minh BE là đường trung trực của đoạn thẳng AH.

c) Kẻ $AD \perp BC\ (D \in BC)$. Chứng minh AH là tia phân giác của DAC

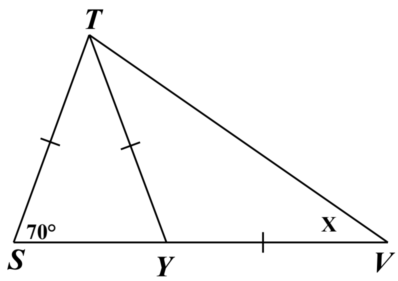
Phần III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ TỰ GIẢI

Dạng 1. Nhận biết tam giác cân, tam giác đều. Vận dụng tính chất của tam giác cân, tam giác đều để tính số đo góc hoặc chứng minh các góc bằng nhau, các cạnh bằng nhau.

Bài 1: Trong các hình sau, hình nào là tam giác cân, hình nào là tam giác đều?



Bài 2. Tìm số đo x trong hình vẽ sau:



Bài 3. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên đường thẳng AB lấy điểm D sao cho $BD = BC$ (D và A khác phía so với B). Tính số đo các góc của tam giác ADC.

Bài 4. Cho ΔABC cân tại A. Trên các cạnh AC, AB lần lượt lấy M, N sao cho $AM = AN$.

a) Chứng minh $ABM = ACN$

b) Gọi O là giao điểm của BM và CN. Chứng minh tam giác OBC cân.

Bài 5. Cho $xOy = 60°$, điểm A thuộc tia phân giác của xOy. Kẻ $AB \perp Ox$ ($B \in Ox$) và $AC \perp Oy$ ($C \in Oy$). Tam giác OBC là tam giác gì? Tại sao?

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, $BC = 2AB$. D là trung điểm cạnh AC. Đường thẳng vuông góc với AC tại D cắt BC tại E. Chứng minh

a) ΔEAC cân. b) ΔABE đều.

Bài 7: Cho tam giác ABC vuông tại $A (AB < AC)$. Tia phân giác góc A cắt BC tại D. Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với BC tại D, cắt AC tại F. Trên AB lấy điểm F sao cho $AE = AF$. Chứng minh

a) $ABC = DEC$ b) ΔDBF là tam giác cân c) $DB = DE$.

Dạng 2. Vận dụng tính chất của đường trung trực để giải quyết bài toán

Bài 1. Tam giác ABC có điểm A thuộc đường trung trực của BC. Biết $B = 40°$. Tính số đo của các góc trong ΔABC

Bài 2. Cho ΔABC cân có $A > 90°$. Các đường trung trực của AB và AC cắt cạnh BC theo thứ tự ở D và E và hai trung trực cắt nhau ở F.

a) Biết $A = 110°$. Tính số đo góc DAE.

b) Chứng minh $2BAC = DAE + 180°$

c) Tính số đo DFE.

Bài 3. Cho góc xOy. Từ điểm A nằm trong góc đó kẻ AH vuông góc với Ox (H thuộc Ox) và AK vuông góc với Oy (K thuộc Oy). Trên tia đối của tia HA lấy điểm B sao cho $HB = HA$. Trên tia đối của tia KA lấy điểm C sao cho $KC = KA$. Chứng minh $OB = OC$.

Bài 4. Cho ΔABC vuông tại A. M là trung điểm của cạnh AB. Đường trung trực của cạnh AB cắt cạnh BC tại N. Gọi I là giao điểm của CM và AN.

a. Chứng minh ΔANB là tam giác cân. So sánh: NAB và NBA .

b. Chứng minh N là trung điểm của BC.

c. Nếu $IB = IC$, tính số đo của ABC.

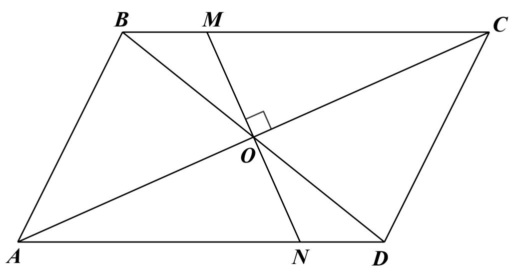
Dạng 3. Chứng minh một điểm thuộc đường trung trực. Chứng minh một đường thẳng là đường trung trực của một đoạn thẳng.

Bài 1. Cho $xOy = 90°$. Trên tia Ox lấy điểm A, trên tia Oy lấy điểm B. Kẻ đường trung trực HM của đoạn thẳng OA ($H \in OA$, $M \in AB$). Chứng minh M thuộc đường trung trực của OB.

Bài 2. Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Xác định điểm D trên AC sao cho $DA + DB = AC$.

Bài 3. Cho bốn điểm A, B, C, D tạo thành hình có $AB // CD$ và $BC // AD$ như hình vẽ.

Giao điểm của AC và BD là O. Từ O vẽ vuông góc với AC cắt cạnh BC, AD lần lượt tại M, N. Chứng minh AC là trung trực của MN và $AM = MC = CN = NA$.



Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A. Tia phân giác của B cắt AC tại E. Từ E kẻ EH vuông góc với BC tại H.

a) Chứng minh: $\Delta ABE = \Delta HBE$.

b) Chứng minh BE là đường trung trực của đoạn thẳng AH.

c) Kẻ $AD \perp BC$ $(D \in BC)$. Chứng minh AH là tia phân giác của DAC

Bài 5. Cho tam giác ABC cố định, đường phân giác AI ($I \in BC$). Trên đoạn thẳng IC lấy điểm H. Từ H kẻ đường thẳng song song với AI, cắt AB kéo dài tại E và cắt AC tại F. Chứng minh:

a) Đường trung trực của EF luôn đi qua đỉnh A của tam giác ABC;

b) Khi H di động trên đoạn thẳng IC thì đường trung trực của đoạn thẳng EF luôn cố định.

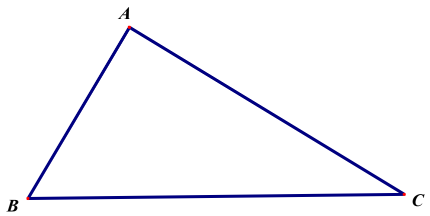
CHUYÊN ĐỀ 31: QUAN HỆ GIỮA GÓC VÀ CẠNH ĐỐI DIỆN TRONG TAM GIÁC

PHẦN I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT.

I. Góc đối diện với cạnh lớn hơn trong một tam giác

Định lí 1:

“ Trong một tam giác, góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn “.



VD: Cho $\Delta ABC,(AC > AB)$. Khi đó:

+ Cạnh AB là cạnh đối diện với góc C.

+ Cạnh AC là cạnh đối diện với góc B.

$AC > AB \Rightarrow B > C$

II. Cạnh đối diện với góc lớn hơn trong một tam giác

Định lí 2: “ Trong một tam giác, cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn ”.

VD: Cho $\Delta ABC,(AC > AB)$. Khi đó:

+ Góc C là góc đối diện với cạnh AB.

+ Góc B là góc đối diện với cạnh AC.

$B > C \Rightarrow AC > AB$

Chú ý:

+ Đối diện với cạnh là góc, mà đối diện với góc là cạnh.

+ Trong tam giác tù hoặc tam giác vuông thì góc tù và góc vuông là góc lớn nhất nên cạnh đối diện với góc vuông (cạnh huyền), cạnh đối diện với góc tù là cạnh lớn nhất.

+ Định lí 1 và 2 chỉ đúng khi ta áp dụng trong 1 tam giác.

+ Trong tam giác cạnh nhỏ nhất đối điện với góc nhọn.

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI.

Dạng 1. So sánh các góc trong một tam giác

I. Phương pháp giải:

+ TH1: Nếu các góc cần so sánh nằm trong cùng một tam giác thì ta áp dụng định lí 1:

So sánh các cạnh đối diện với các góc đó.

+ TH2: Nếu các góc cần so sánh không cùng nằm trong cùng một tam giác

Thì ta dùng góc trung gian để so sánh

II. Bài toán.

Bài 1. So sánh các góc của ΔABC biết rằng: $AB = 4cm, BC = 6cm, CA = 5cm$.

Lời giải:

ΔABC có $AB < AC < BC (4 < 5 < 6) \Rightarrow C < B < A$ (Định lí 1 – quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác).

Bài 2. So sánh các góc của ΔDEF biết rằng: $DE = 2cm, DF = 3\,cm\, EF = 4cm$.

Lời giải:

ΔDEF có $DE < DF < EF (2 < 3 < 4) \Rightarrow F < E < D$ (Định lí 1 – quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác).

Bài 3. So sánh các góc của ΔABC biết rằng: $AB = 2\sqrt{2}cm, BC = \sqrt{11}cm, CA = 3cm$.

Lời giải:

ΔABC có $AB < BC < AC (2\sqrt{2} < 3 < \sqrt{11}) \Rightarrow C < A < B$ (Định lí 1 – quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác).

Bài 4. So sánh các góc của ΔABC biết độ dài các cạnh $AB,\ BC,\ CA$ lần lượt tỉ lệ nghịch với $3,4,5$.

Lời giải:

ΔABC có: Độ dài các cạnh $AB,\ BC,\ CA$ lần lượt tỉ lệ nghịch với $3,4,5$.

$\Rightarrow AB.3 = BC.4 = CA.5$

$\Rightarrow AB > BC > AC$

$\Rightarrow ACB > BAC > ABC \text{ hay } C > A > B$ (Định lý 1).

Bài 5. So sánh các góc của ΔABC biết độ dài các cạnh $AB,\ BC,\ CA$ lần lượt tỉ lệ với $3,4,5$.

Lời giải:

ΔABC có: Độ dài các cạnh $AB,\ BC,\ CA$ lần lượt tỉ lệ với $3,4,5$.

$\Rightarrow \frac{AB}{3} = \frac{BC}{4} = \frac{AC}{5}$

$\Rightarrow AB < BC < AC$

$\Rightarrow ACB < BAC < ABC \text{ hay } C < A < B$ (Định lý 1)

Bài 6. Sử dụng quan hệ giữa góc và cạnh đối diện để chứng minh định lí: Trong một tam giác cân, hai góc ở đáy bằng nhau.

Lời giải:

Cho ΔABC cân tại A nên $AB = AC \Rightarrow C = B$ (Định lý 1)

Vậy trong một tam giác cân, hai góc ở đáy bằng nhau.

Bài 7. Sử dụng quan hệ giữa góc và cạnh đối diện để chứng minh định lí: Trong một tam giác đều, ba góc bằng nhau.

Lời giải:

Cho ΔABC đều nên $AB = AC = BC \Rightarrow C = B = A$ (Định lý 1)

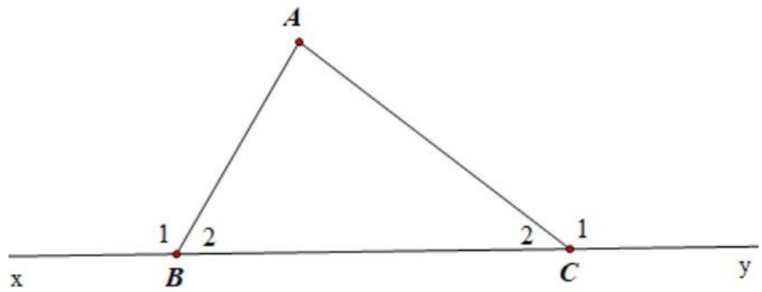
Vậy trong một tam giác đều, ba góc bằng nhau.

Bài 8. Trong một tam giác, đối diện với cạnh nhỏ nhất là góc gì (nhọn, vuông, tù)? tại sao?

Lời giải: Trong một tam giác, đối diện với cạnh nhỏ nhất là góc nhỏ nhất. Góc nhỏ nhất của tam giác là góc nhọn (tam giác nào cũng có ít nhất một góc nhọn)

Bài 9. Cho tam giác ABC có $AB < AC$. So sánh hai góc ngoài tại các đỉnh $B;C$

Lời giải:



Trước hết ta so sánh các góc trong tại hai đỉnh $B;C$

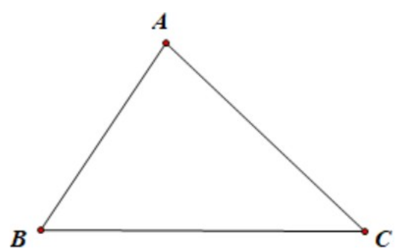
Vì $AB < AC$ nên $C_2 < B_2$ (Định lí 1)

Mà $B_1 + B_2 = C_1 + C_2 = 180°$ (Tính chất hai góc kề bù)

Do đó $C_1 > B_1$

Bài 10. Cho tam giác ABC có AB là cạnh nhỏ nhất. Chứng minh rằng $C \le 60°$

Lời giải



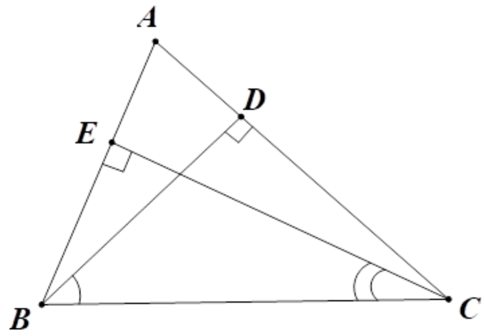
Vì tam giác ABC có AB là cạnh nhỏ nhất nên C là góc nhỏ nhấtDo

đó $C \le B, C \le A$

Suy ra $3C \le C + B + A = 180° \Rightarrow C \le 60°$

Bài 11. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$. Kẻ BD vuông góc với AC tại D, CE vuông góc với AB tại E. So sánh DBC và ECB.

Lời giải



Tam giác ABC có $AB < AC$ suy ra $ACB < ABC$ (quan hệ giữa cạnh và góc trong tam giác).

Tam giác DBC có $DBC = 90° - ACB$ (1).

(Trong tam giác vuông hai góc nhọn phụ nhau)

Tam giác ECB có $ECB = 90° - ABC$ (2)

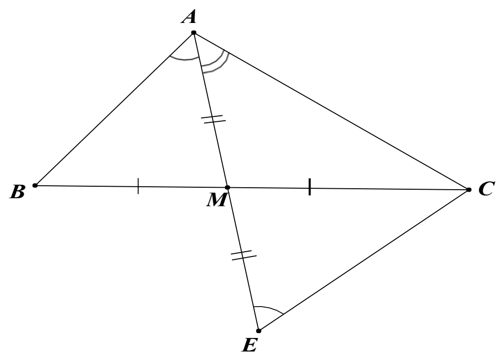
(Trong tam giác vuông hai góc nhọn phụ nhau)

Mà $ACB < ABC$ (GT) (3)

Từ (1),(2),(3) $\Rightarrow \text{DBC} > ECB$

Bài 12. Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh $MAB > MAC$.

Lời giải



Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $AM = ME$

$\Delta ABM = \Delta ECM$ (c.g.c)

$\Rightarrow AB = EC$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow BAM = CEM$ (hai góc tương ứng) (1)

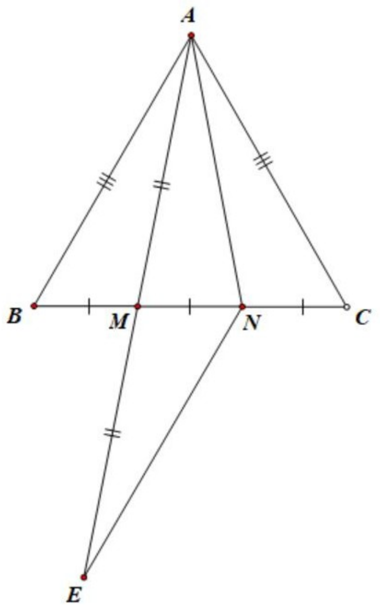
Xét ΔAEC có $CE < AC$ (vì $EC = AB < AC(gt)$)

$\Rightarrow EAC < AEC$ (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác) (2)

Từ (1),(2) $\Rightarrow MAB > MAC$ (đ.p.c.m).

Bài 13. Cho ΔABC đều. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = \frac{1}{3}BC$. Chứng minh rằng $BAM < 20°$.

Lời giải



Gọi N là điểm trên BC sao cho $BM = MN = NC$

ΔABC đều nên và $BAC = ABC = ACB = 60°$

$\Delta ABM = \Delta ACN$ (c.g.c)

$\Rightarrow BAM = CAN$ (hai góc tương ứng).

Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $AM = ME$

$\Delta ABM = \Delta ENM (c.g.c)$

$\Rightarrow AB = EN$ (hai cạnh tương ứng).

ΔABM có $B = 60°; BAM < 30°$

(Vì ΔABC đều $BM = \frac{1}{3}BC => BM < \frac{BC}{2}$ nên $BAM < 30^0$)

$\Rightarrow AMB > 90°$

$\Rightarrow ABM < AMB \Rightarrow AM < AB$ (quan hệ giữa cạnh và góc trong tam giác)

$\Rightarrow EN > AM$ mà $AM = AN(\triangle ABM = \triangle ACN)$

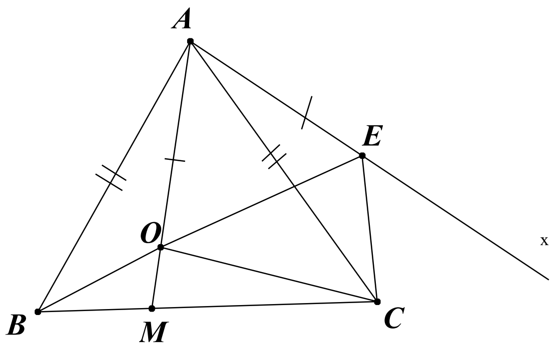
$\Rightarrow EN > AN$ hay $EAN > AEN \Rightarrow MAN > BAM$

Mà $BAM + MAN + NAC = 60° \Rightarrow MAN + 2BAM = 60°$

Mặt khác $MAN > BAM \Rightarrow 3BAM < 60° \Rightarrow BAM < 20°$ (đ.p.c.m)

Bài 14. Cho ΔABC cân tại A. Gọi M là một điểm nằm trên cạnh BC sao cho $MB < MC$. Lấy điểm O trên đoạn thẳng AM. Chứng minh rằng $AOB > AOC$.

Lời giải



Xét ΔAMB và ΔAMC có:

$AB = AC(gt)$

AM cạnh chung

$MB < MC(gt) \Rightarrow MAB < MAC$

Trên nửa mặt phẳng bờ AC, không chứa điểm B, vẽ tia Ax sao cho $CAx = MAB$.

Trên Ax lấy điểm E sao cho $AE = AO$

Ta có $\Delta AEC = \Delta AOB$ (c.g.c)

$\Rightarrow EC = OB$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow AEC = AOB$ (hai góc tương ứng)

ΔAEC và ΔAOC có AC cạnh chung; $AE = AO$ và $EAC < OAC$

Nên $EC < OC$ suy ra $EOC < OEC$ (1)

ΔAOE cân tại A nên $AOE = AEO$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow AOC < AEC$, do đó $AOC < AOB$

Dạng 2. So sánh các cạnh trong một tam giác

I. Phương pháp giải:

+ TH1: Nếu các cạnh cần so sánh nằm trong cùng một tam giác thì ta áp dụng định lí 2: So sánh các góc đối diện với các cạnh đó

+ TH2: Nếu các góc cần so sánh không cùng nằm trong cùng một tam giác Thì ta dùng góc trung gian để so sánh

II. Bài toán.

Bài 1. So sánh các cạnh của ΔABC, biết: $A = 45^0; B = 55^0$

Lời giải

ΔABC có: $A = 45^0; B = 55^0$

Mà $A + B + C = 180^0$ (tổng 3 góc của một tam giác)

$\Rightarrow 45^0 + 55^0 + C = 180^0 \Rightarrow C = 180^0 - \left(45^0 + 55^0\right) = 80^0$

$\Rightarrow C > B > A$ (Vì $80^0 > 55^0 > 45^0$)

$\Rightarrow AB > AC > BC$ (Định lý 2)

Bài 2. So sánh các cạnh của ΔABC vuông tại A, biết $B = 55^0$

Lời giải

ΔABC có: $A = 90^0; B = 55^0$

Mà $B + C = 90^0$ (tổng 3 góc của một tam giác)

$\Rightarrow 55^0 + C = 60° \Rightarrow C = 90° - 55° = 35°$

$\Rightarrow A > B > C$ (Vì $90^0 > 55^0 > 35^0$)

$\Rightarrow BC > AC > AB$ (Định lý 2)

Bài 3. So sánh các cạnh của ΔABC, biết góc ngoài tại đỉnh A bằng 100^0, $B = 55^0$

Lời giải

Vì góc ngoài tại đỉnh A bằng $120^0 \Rightarrow A = 180^0 - 100^0 = 80^0$

ΔABC có: $A = 80^0; B = 55^0$

Mà $A + B + C = 180^0$ (tổng 3 góc của một tam giác)

$\Rightarrow 80^0 + 55^0 + C = 180^0 \Rightarrow C = 180^0 - \left(80^0 + 55^0\right) = 45^0$

$\Rightarrow A > B > C$ (Vì $80^0 > 55^0 > 45^0$)

$\Rightarrow BC > AC > AB$ (Định lý 2)

Bài 4. Chứng minh trong tam giác vuông, cạnh huyền lớn hơn mỗi cạnh góc vuông.

Lời giải

Trong tam giác vuông có một góc vuông và hai góc nhọn, góc vuông là góc lớn nhất, đối diện với góc vuông là cạnh huyền, hai cạnh còn lại là hai cạnh góc vuông . Nên trong tam giác vuông cạnh huyền là cạnh lớn nhất.

Bài 5. So sánh các cạnh của $\triangle ABC$, biết ΔABC cân tại A, $A < 60^0$.

Lời giải

ΔABC cân tại A.

$\Rightarrow B = C$ (t/c tam giác cân)

$A+B+C=180^0$ (tổng 3 góc của một tam giác)

$\Rightarrow A+2B=180^0 \Rightarrow A=180^0-2B$

Mà $A<60^0 \Rightarrow 180^0-2B<60^0 \Rightarrow 120^0<2B \Rightarrow 60^0<B$

$\Rightarrow B=C>A$ (Vì $B=C>60^0>A$)

ΔABC có $\mathrm{B}=C>A$

$\Rightarrow AC=AB>BC$ (Định lý 2)

Bài 6. So sánh các cạnh của $\triangle ABC$, biết số đo các góc A,B,C lần lượt tỉ lệ với $2,3,4$.

Lời giải

Vì $A:B:C=2:3:4$

$\Rightarrow \dfrac{A}{2}=\dfrac{B}{3}=\dfrac{C}{4}$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau: $\dfrac{A}{2}=\dfrac{B}{3}=\dfrac{C}{4}=\dfrac{A+B+C}{2+3+4}=\dfrac{180^0}{9}=20^0$ (tổng 3 góc của một tam giác)

$\Rightarrow A=2.20^0=40^0$

$B=3.20^0=60^0$

$C=4.20^0=80^0$

ΔABC có: $C>B>A$ (Vì $80^0>60^0>40^0$)

$\Rightarrow AB>AC>BC$ (Định lý 2)

Bài 7: So sánh các cạnh của ΔABC biết rằng: $A=40^0$ và số đo góc B,C tỉ lệ với $3,4$.

Lời giải

Ta có ΔABC biết rằng: $A=40^0$ và số đo góc B,C tỉ lệ với $3,4$.

$A+B+C=180^0$ (tổng 3 góc của một tam giác)

$\Rightarrow 40°+B+C=180^0 \Rightarrow B+C=180^0-40=140°$

Do đó $\dfrac{B}{3}=\dfrac{C}{4}=\dfrac{B+C}{3+4}=\dfrac{140°}{7}=20°$

Suy ra $B=3.20°=60°, C=4.20°=80°$

$\Rightarrow A<B<C\ (40°<60°<80°)$

$\Rightarrow BC<AC<AB$

(Định lí 2)

Bài 8: So sánh các cạnh của ΔABC biết rằng: $A = 40^0$ và số đo góc B, C tỉ lệ nghịch với $3,4$.

Lời giải

Ta có ΔABC biết rằng: $A = 40^0$ và số đo góc B, C tỉ lệ nghịch với $3,4$.

$A + B + C = 180^0$ (tổng 3 góc của một tam giác)

$\Rightarrow 40° + B + C = 180^0 \Rightarrow B + C = 180^0 - 40 = 140°$

Do đó $3B = 4C \Rightarrow \dfrac{B}{4} = \dfrac{C}{3} = \dfrac{B+C}{4+3} = \dfrac{140°}{7} = 20°$

Suy ra $B = 4.20° = 80°, C = 3.20° = 60°$

$\Rightarrow A < C < B \; (40° < 60° < 80°)$

$\Rightarrow BC < AB < AC$

(Định lí 2)

Bài 9: Cho tam giác ΔABC cân tại A, biết $B = 45°$

a) So sánh các cạnh của tam giác ΔABC.

b) Tam giác ΔABC còn gọi là tam giác gì? Vì sao?

Lời giải

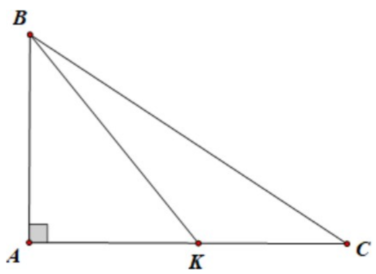
a) Tam giác ΔABC cân tại A nên $C = B = 45° \Rightarrow A = 90°$.

Vậy $A = 90° > B = C = 45° \quad \Rightarrow BC > AC = AB$.

b) Tam giác ΔABC vuông cân tại A vì $A = 90°, B = C$.

Bài 10: Cho ΔABC vuông tại A, điểm K nằm giữa A và C. So sánh BK và BC.

Lời giải

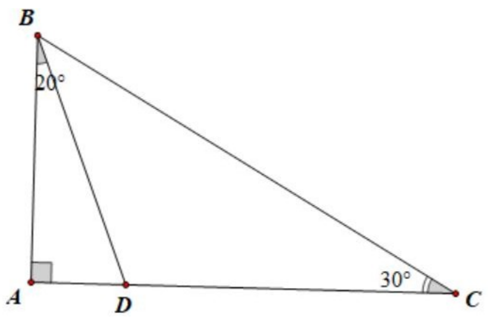


Ta có $AKC > A$ (góc ngoài ΔABK) nên $AKC > 90°$

Xét ΔBKC có $AKC > 90°$ nên $BC > BK$

Bài 11: Cho tam giác ABC vuông tại A, $C = 30°$. Điểm D thuộc cạnh AC sao cho $ABD = 20°$. So sánh BA, BD, BC, AD, DC

Lời giải



Tam giác ABC vuông tại A, $C = 30° \Rightarrow ABC = 90° - C = 90° - 30° = 60°$

$$\Rightarrow DBC = ABC - ABD = 60° - 20° = 40°$$

Xét $\Delta BDC : D = 180° - (30° + 40°) = 110°$

$\Rightarrow BDC > DBC > BCD (110° > 40° > 30°)$

$\Rightarrow BC > DC > BD$

Xét $\Delta ABD : D = 90° - 20° = 70°$

$\Rightarrow BAD > ADB > ABD (90° > 70° > 20°)$

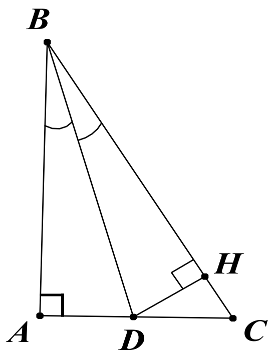
$\Rightarrow BD > AB > AD$

Vậy $BC > DC > BD > AB > AD$

Bài 12: Cho tam giác ABC vuông tại A. Tia phân giác góc B cắt AC ở D. Kẻ DH vuông góc với BC tại H. So sánh:

a) BA với BH b) DA với DC

Lời giải



a) Xét ΔABD và ΔHBD có

$BAD = BHD = 90°$

$ABD = HBD$ (gt)

BD cạnh chung

$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta HBD$ (Cạnh huyền-góc nhọn)

$\Rightarrow BA = BH$ (Hai cạnh tương ứng)

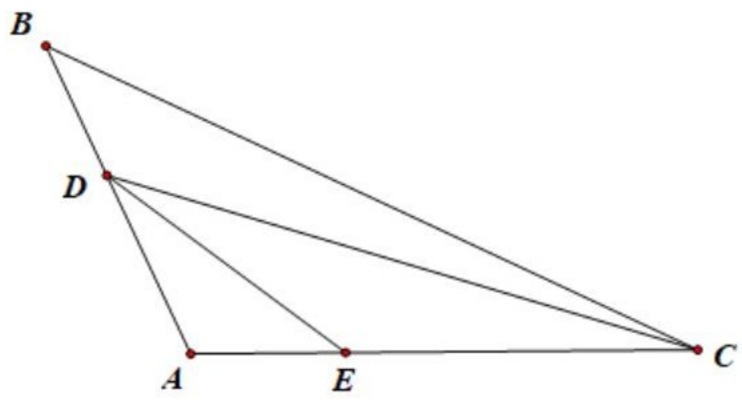
b) ΔHDC có $\widehat{DHC} = 90° \Rightarrow DC > DH$ (cạnh huyền , cạnh góc vuông)

Mà $AD = DH$ (Vì $\Delta ABD = \Delta HBD$)

$\Rightarrow DC > AD$

Bài 13: Cho tam giác ABC có $\widehat{A} > 90°$. Lấy điểm D thuộc cạnh AB điểm E thuộc cạnh AC . Chứng minh rằng $DE < BC$

Lời giải



Vì $\widehat{BDC}$ là góc ngoài của ΔDAC

Nên $\widehat{BDC} > \widehat{A} = 90°$. Do đó BC là cạnh lớn nhất của ΔDBC

$\Rightarrow BC > CD$ (1)

Mặt khác $\widehat{DEC}$ là góc ngoài của ΔADE

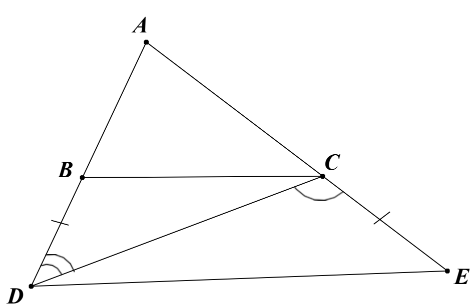
Nên $\widehat{DEC} > \widehat{A} = 90°$. Do đó DC là cạnh lớn nhất của ΔDEC

$\Rightarrow DC > DE$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $DE < BC$

Bài 14. Cho tam giác ABC nhọn. Trên tia đối của tia BA lấy điểm D và trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho $CE = BD$. Chứng minh rằng: $BC < DE$.

Lời giải



Ta có ΔACD có $\widehat{DCE} > \widehat{ADC}$ (góc ngoài của tam giác)

Xét ΔBCD và ΔCDE

Có $BD = CE$ (gt)

CD: cạnh chung

$DCE > ADC$ (cmt)

$\Rightarrow DE > BC$ (Hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau và hai góc tạo bởi các cạnh đó không bằng nhau thì góc nào lớn hơn thì có cạnh đối diện lớn hơn, ngược lại cạnh nào lớn hơn thì góc đối diện với cạnh đó lớn hơn).

Phần III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. So sánh các góc trong một tam giác

Bài 1. So sánh các góc của ΔABC biết:

a) $AB = 4cm;\ BC = 6cm;\ CA = 5cm.$

b) $AB = 9cm;\ AC = \sqrt{72}cm;\ BC = 8cm.$

c) Độ dài các cạnh $AB,\ BC,\ CA$ lần lượt tỉ lệ nghịch với $2,3,4$.

Bài 2. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$. Kẻ AH vuông góc với BC tại H. So sánh HAB và HAC.

Bài 3. Cho tam giác ABC. Có $AB < AC$ và AD là tia phân giác của góc A ($D \in BC$). Kẻ AH vuông góc với BC ($H \in BC$) và gọi M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng: Tia AD nằm giữa hai tia AH và AM.

Bài 4. Cho ΔABC, trung tuyến AM. Biết $BAM > CAM$ hãy so sánh B với C.

Dạng 2. So sánh các cạnh trong một tam giác

Bài 1. So sánh các cạnh của $\triangle ABC$, biết:

a) $A = 40^0; B = 50^0$

b) Góc ngoài tại đỉnh A bằng 120^0, $B = 54^0$

c) ΔABC cân tại A, $A > 60^0$.

d) Số đo các góc A,B,C lần lượt tỉ lệ với $2,3,4$.

Bài 2. Cho tam giác ABC cân tại A có $A = 50°$. So sánh độ dài AB và BC.

Bài 3. Cho tam giác ABC có $A = 90°, C = 30°$. Điểm D thuộc cạnh AC sao cho $ABD = 20°$.So sánh độ dài các cạnh của tam giác BDC.

Bài 4. Tam giác ABC có $AB < AC$. Vẽ ra ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE. Gọi M là trung điểm của BC. So sánh MD với ME.

ĐÁP SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. So sánh các góc trong một tam giác

Bài 1. So sánh các góc của ΔABC biết:

a) $AB = 4cm;\ BC = 6cm;\ CA = 5cm.$

b) $AB = 9cm;\ AC = \sqrt{72}cm;\ BC = 8cm.$

c) Độ dài các cạnh $AB,\ BC,\ CA$ lần lượt tỉ lệ nghịch với $2,3,4$.

Lời giải

a) ΔABC có: $AB = 4cm;\ BC = 6cm;\ CA = 5cm.$

$\Rightarrow BC > CA > AB$

$\Rightarrow BAC > CBA > ACB$ hay $A > B > C$ (Định lý 1)

b) ΔABC có: $AB = 9cm;\ AC = \sqrt{72}cm \approx 8{,}5cm;\ BC = 8cm.$

$\Rightarrow AB > AC > BC$

$\Rightarrow ACB > ABC > BAC$ hay $C > B > A$ (Định lý 1)

c) ΔABC có: Độ dài các cạnh $AB,\ BC,\ CA$ lần lượt tỉ lệ nghịch với $2,3,4$.

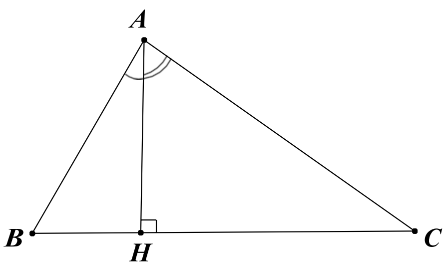
$\Rightarrow AB.2 = BC.3 = CA.4$

$\Rightarrow AB > BC > AC$

$\Rightarrow ACB > BAC > ABC$ hay $C > A > B$ (Định lý 1)

Bài 2. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$. Kẻ AH vuông góc với BC tại H . So sánh HAB và HAC .

Lời giải



Tam giác ABC có $AB < AC$ suy ra $ACB < ABC$

(quan hệ giữa cạnh và góc trong tam giác)

Tam giác HBA có $HAB = 90° - ABC$ (1)

(Trong tam giác vuông hai góc nhọn phụ nhau)

Tam giác HAC có $HAC = 90° - ACB$ (2)

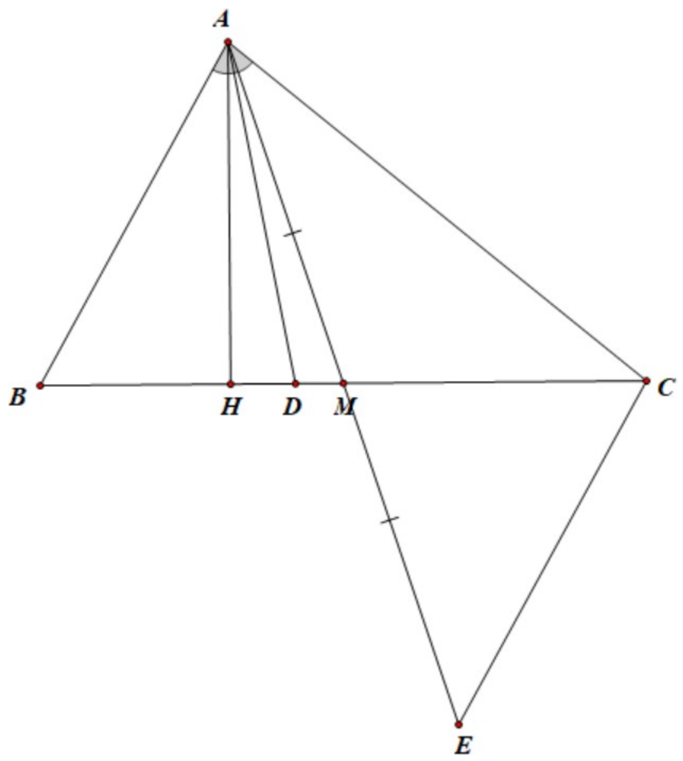
(Trong tam giác vuông hai góc nhọn phụ nhau)

Mà $ACB < ABC$ (GT) (3)

Từ (1),(2),(3) $\Rightarrow HAC > HAB$

Bài 3. Cho tam giác ABC. Có $AB < AC$ và AD là tia phân giác của góc A ($D \in BC$). Kẻ AH vuông góc với BC ($H \in BC$) và gọi M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng: Tia AD nằm giữa hai tia AH và AM.

Lời giải



Ta có $D \in BC; H \in BC$ (gt). Suy ra $H; B$ cùng thuộc một tia gốc C.

Do đó các tia AM, AD, AH cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AC.

Tia AD nằm giữa hai tia AH và AM. Khi $CAM < CAD < CAH$

Thật vậy ta có: $CAD = \dfrac{BAC}{2}$ (1)

Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $AM = ME$

$\Delta ABM = \Delta ECM(c.g.c)$

$\Rightarrow AB = EC$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow BAM = CEM$ (hai góc tương ứng) (2)

Xét ΔAEC có $CE < AC$ (vì $EC = AB < AC(gt)$)

$\Rightarrow EAC < AEC$ (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác) (3)

Từ (2),(3) $\Rightarrow MAB > MAC$

Nên $CAM + CAM < BAM + CAM$ do đó

$2CAM < BAC$, hay $CAM < \dfrac{BAC}{2}$ (4)

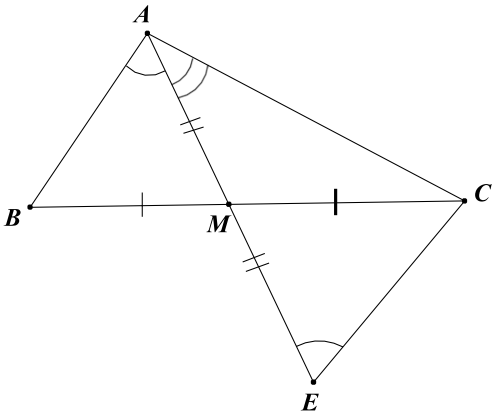
Xét ΔCAH vuông ta có

$CAH = 90° - ACH = \frac{BAC}{2} + \frac{ABC}{2} + \frac{ACB}{2} - ACB = \frac{BAC}{2} + \frac{ABC - ACB}{2} > \frac{BAC}{2}$ (5) (vì $ABC > ACB$)

Từ (1), (4),(5) $\Rightarrow CAM < CAD < CAH$. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AC, ta có $CAM < CAD < CAH$ nên tia AD nằm giữa hai tia AH và AM.

Bài 4. Cho ΔABC, trung tuyến AM. Biết $BAM > CAM$ hãy so sánh B với C.

Lời giải



Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $AM = ME$

$\Delta ABM = \Delta ECM$ (c.g.c)

$\Rightarrow AB = EC$ (hai cạnh tương ứng) (1)

$\Rightarrow BAM = CEM$ (hai góc tương ứng)

Xét ΔAEC có $AEC > EAC$ (vì $BAM = MEC > MAC(gt)$)

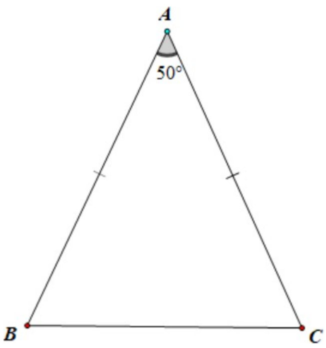
$\Rightarrow EC < AC$ (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác) (2)

Từ (1),(2) $\Rightarrow AB < AC \Rightarrow C < B$ (đ.p.c.m)

Dạng 2 . So sánh các cạnh trong một tam giác

Bài 1. Cho tam giác ABC cân tại A có $A = 50°$. So sánh độ dài AB và BC.

Lời giải



Tam giác ABC cân tại A có $A = 50°$.

$ABC = ACB = \frac{180° - A}{2} = \frac{180° - 50°}{2} = 65°$

Tam giác ABC có $BAC < ACB (50° < 65°)$ $\Rightarrow BC < AB$ (Quan hệ giữa góc và cạnh trong tam giác)

Bài 2. So sánh các cạnh của ΔABC, biết:

a) $A = 40^0; B = 60^0$

b) Góc ngoài tại đỉnh A bằng 120^0, $B = 54^0$

c) ΔABC cân tại A, $A > 60^0$.

d) Số đo các góc A, B, C lần lượt tỉ lệ với $3, 4, 5$.

Lời giải

a) ΔABC có: $A = 40^0; B = 60^0$

Mà $A + B + C = 180^0$ (tổng 3 góc của một tam giác)

$\Rightarrow 40^0 + 60^0 + C = 180^0 \Rightarrow C = 180^0 - \left(40^0 + 60^0\right) = 80^0$

$\Rightarrow C > B > A$ (Vì $80^0 > 60^0 > 40^0$)

$\Rightarrow AB > AC > BC$ (Định lý 2)

b) Vì góc ngoài tại đỉnh A bằng $120^0 \Rightarrow A = 180^0 - 120^0 = 60^0$

ΔABC có: $A = 60^0; B = 55^0$

Mà $A + B + C = 180^0$ (tổng 3 góc của một tam giác)

$\Rightarrow 60^0 + 54^0 + C = 180^0 \Rightarrow C = 180^0 - \left(60^0 + 54^0\right) = 66^0$

$\Rightarrow C > A > B$ (Vì $66^0 > 60^0 > 54^0$)

$\Rightarrow AB > BC > AC$ (Định lý 2)

c) ΔABC cân tại A

$\Rightarrow \mathrm{B} = C$ (t/c tam giác cân)

$A + B + C = 180^0$ (tổng 3 góc của một tam giác)

$\Rightarrow A + 2B = 180^0 \Rightarrow A = 180^0 - 2B$

Mà $A > 60^0 \Rightarrow 180^0 - 2B > 60^0 \Rightarrow 120^0 > 2B \Rightarrow B < 60^0$

$\Rightarrow \mathrm{B} = C < A$ (Vì $\mathrm{B} = C < 60^0 < A$)

ΔABC có $\mathrm{B} = C < A$

$\Rightarrow AC = AB < BC$ (Định lý 2)

d) Vì $A : B : C = 3 : 4 : 5$

$\Rightarrow \frac{A}{3} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5}$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau: $\frac{A}{3} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5} = \frac{A+B+C}{3+4+5} = \frac{180^0}{12} = 15^0$ (tổng 3 góc của một tam giác)

$\Rightarrow A = 3.15^0 = 45^0$

$B = 4.15^0 = 60^0$

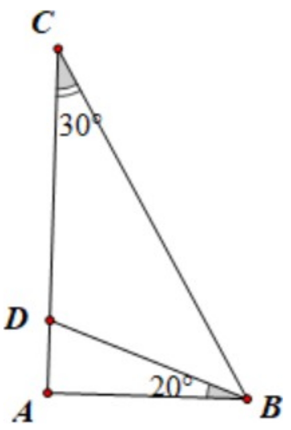
$C = 5.15^0 = 75^0$

ΔABC có: $C > B > A$ (Vì $75^0 > 60^0 > 45^0$)

$\Rightarrow AB > AC > BC$ (Định lý 2)

Bài 3. Cho tam giác ABC có $A = 90°, C = 30°$. Điểm D thuộc cạnh AC sao cho $ABD = 20°$.So sánh độ dài các cạnh của tam giác BDC.

Lời giải



Tam giác ABC có $A = 90°, C = 30° \Rightarrow B = 90° - 30° = 60°$

Tia BD nằm giữa haitia $BA; BC$,nên $DBC = ABC - ABD = 60° - 20° = 40°$

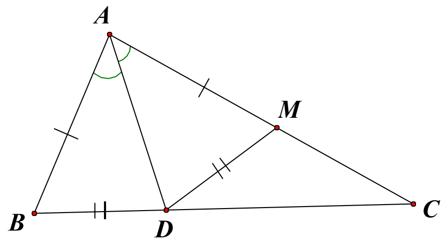
Tam giác DBC có $DCB = 30°, DBC = 40° \Rightarrow CDB = 180° - (30° + 40°) = 110^0$

Tam giác DBC có $DCB < DBC < CDB$ (Vì $30° < 40° < 110°$)

$\Rightarrow BD < CD < BC$ (Quan hệ giữa góc và cạnh trong tam giác)

Bài 4. Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$. Tia phân giác góc A cắt cạnh BC tại D. Chứng minh $DB < DC$.

Lời giải



Trên cạnh AC lấy điểm $M\ (M \in AC)$ sao cho $AB = AM$

$\Delta ABD = \Delta AMD$ (c.g.c)

$\Rightarrow BD = DM$ (hai cạnh tương ứng) (1)

$ABD = AMD$ (hai góc tương ứng)

Mặt khác $AMD + DMC = 180°$(hai góc kề bù)

Mà $ABD < 90°$ (ΔABC nhọn) $\Rightarrow AMD < 90°$

$\Rightarrow DMC > 90°$

Xét ΔDMC có $DMC > 90° \Rightarrow MCD < 90°$ hay $MCD < DMC$

$\Rightarrow DM < DC$ (quan hệ giữa cạnh và góc trong tam giác) (2)

Từ(1),(2) $\Rightarrow BD < DC$

PHIẾU BÀI TẬP

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI.

Dạng 1. So sánh các góc trong một tam giác

Bài 1. So sánh các góc của ΔABC biết rằng: $AB = 4cm, BC = 6cm, CA = 5cm$.

Bài 2. So sánh các góc của ΔDEF biết rằng: $DE = 2cm, DF = 3$ cm, $EF = 4cm$.

Bài 3. So sánh các góc của ΔABC biết rằng: $AB = 2\sqrt{2}cm, BC = \sqrt{11}cm, CA = 3cm$.

Bài 4. So sánh các góc của ΔABC biết độ dài các cạnh AB, BC, CA lần lượt tỉ lệ nghịch với $3,4,5$.

Bài 5. So sánh các góc của ΔABC biết độ dài các cạnh AB, BC, CA lần lượt tỉ lệ với $3,4,5$.

Bài 6. Sử dụng quan hệ giữa góc và cạnh đối diện để chứng minh định lí: Trong một tam giác cân, hai góc ở đáy bằng nhau.

Bài 7. Sử dụng quan hệ giữa góc và cạnh đối diện để chứng minh định lí: Trong một tam giác đều, ba góc bằng nhau.

Bài 8. Trong một tam giác, đối diện với cạnh nhỏ nhất là góc gì (nhọn, vuông, tù)? tại sao?

Bài 9. Cho tam giác ABC có $AB < AC$. So sánh hai góc ngoài tại các đỉnh $B;C$

Bài 10. Cho tam giác ABC có AB là cạnh nhỏ nhất. Chứng minh rằng $C \le 60°$

Bài 11. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$. Kẻ BD vuông góc với AC tại D, CE vuông góc với AB tại E. So sánh DBC và ECB .

Bài 12. Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh $MAB > MAC$.

Bài 13. Cho ΔABC đều. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = \frac{1}{3}BC$. Chứng minh rằng $BAM < 20°$.

Bài 14. Cho ΔABC cân tại A. Gọi M là một điểm nằm trên cạnh BC sao cho $MB < MC$. Lấy điểm O trên đoạn thẳng AM. Chứng minh rằng $AOB > AOC$.

Dạng 2. So sánh các cạnh trong một tam giác

Bài 1. So sánh các cạnh của ΔABC, biết: $A = 45^0; B = 55^0$

Bài 2. So sánh các cạnh của ΔABC vuông tại A, biết $B = 55^0$

Bài 3. So sánh các cạnh của ΔABC, biết góc ngoài tại đỉnh A bằng 100^0, $B = 55^0$

Bài 4. Chứng minh trong tam giác vuông, cạnh huyền lớn hơn mỗi cạnh góc vuông.

Bài 5. So sánh các cạnh của ΔABC, biết ΔABC cân tại A , $A < 60^0$.

Bài 6. So sánh các cạnh của ΔABC, biết số đo các góc A,B,C lần lượt tỉ lệ với $2,3,4$.

Bài 7: So sánh các cạnh của ΔABC biết rằng: $A = 40^0$ và số đo góc B,C tỉ lệ với $3,4$.

Bài 8: So sánh các cạnh của ΔABC biết rằng: $A = 40^0$ và số đo góc B,C tỉ lệ nghịch với $3,4$.

Bài 9: Cho tam giác ΔABC cân tại A, biết $B = 45°$

a) So sánh các cạnh của tam giác ΔABC.

b) Tam giác ΔABC còn gọi là tam giác gì? Vì sao?

Bài 10: Cho ΔABC vuông tại A, điểm K nằm giữa A và C. So sánh BK và BC.

Bài 11: Cho tam giác ABC vuông tại A, $C = 30°$. Điểm D thuộc cạnh AC sao cho $ABD = 20°$. So sánh BA, BD, BC, AD, DC

Bài 12: Cho tam giác ABC vuông tại A. Tia phân giác góc B cắt AC ở D. Kẻ DH vuông góc với BC tại H. So sánh:

a) BA với BH b) DA với DC

Bài 13: Cho tam giác ABC có $A > 90°$. Lấy điểm D thuộc cạnh AB điểm E thuộc cạnh AC. Chứng minh rằng $DE < BC$

Bài 14. Cho tam giác ABC nhọn. Trên tia đối của tia BA lấy điểm D và trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho $CE = BD$. Chứng minh rằng: $BC < DE$.

Phần III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. So sánh các góc trong một tam giác

Bài 1. So sánh các góc của ΔABC biết:

a) $AB = 4cm;\ BC = 6cm;\ CA = 5cm.$

b) $AB = 9cm;\ AC = \sqrt{72}cm;\ BC = 8cm.$

c) Độ dài các cạnh $AB,\ BC,\ CA$ lần lượt tỉ lệ nghịch với $2,3,4$.

Bài 2. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$. Kẻ AH vuông góc với BC tại H. So sánh HAB và HAC.

Bài 3: Cho tam giác ABC có $A > 90°$. Lấy điểm D thuộc cạnh AB điểm E thuộc cạnh AC . Chứng minh rằng $DE < BC$

Bài 4. Cho $\triangle ABC$, trung tuyến AM. Biết $BAM > CAM$ hãy so sánh B với C.

Dạng 2. So sánh các cạnh trong một tam giác

Bài 1. Cho tam giác ABC cân tại A có $A = 50°$. So sánh độ dài AB và BC.

Bài 2. So sánh các cạnh của $\triangle ABC$, biết:

a) $A = 45^0; B = 55^0$

b) Góc ngoài tại đỉnh A bằng 120^0, $B = 54^0$

c) ΔABC cân tại A, $A > 60^0$.

d) Số đo các góc A,B,C lần lượt tỉ lệ với $2,3,4$.

Bài 3. Cho tam giác ABC có $A = 90°, C = 30°$. Điểm D thuộc cạnh AC sao cho $ABD = 20°$.So sánh độ dài các cạnh của tam giác BDC.

Bài 4. Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$. Tia phân giác góc A cắt cạnh BC tại D. Chứng minh $DB < DC$.

CHUYÊN ĐỀ: QUAN HỆ GIỮA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC VÀ ĐƯỜNG XIÊN

PHẦN I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT.

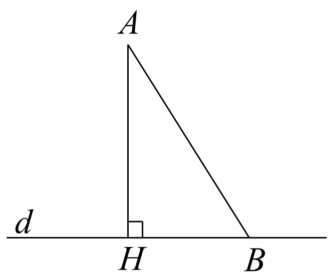
1. Khái niệm đường vuông góc và đường xiên.

Cho điểm A không thuộc đường thẳng d, các điểm B, C thuộc đường thẳng d không trùng với điểm H.

- Đoạn thẳng AH là đoạn thẳng vuông góc hay đường vuông góc kẻ từ điểm A đến đường thẳng d

- Điểm H là chân đường vuông góc hay hình chiếu của điểm A trên đường thẳng d.

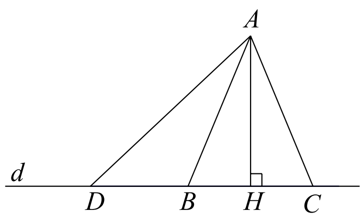
- Độ dài đoạn thẳng AH là khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d.



2. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên.

- Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm nằm ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó thì đường vuông góc là đường ngắn nhất.

$$AH \perp d \Rightarrow AH < AC,\ AH < AD$$



PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI.

Dạng 1. Nhận biết đường vuông góc, đường xiên. Tìm khoảng cách của một điểm đến một đường thẳng.

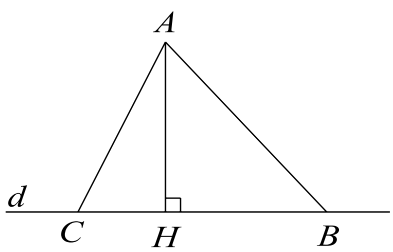
I. Phương pháp giải:

- Dựa vào khái niệm đường vuông góc, đường xiên để nhận biết các loại đường đó.

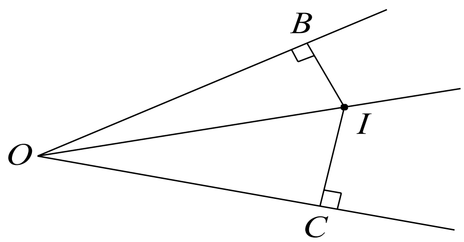
- Tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng chính là tính độ dài đường vuông góc kẻ từ điểm đó đến đường thẳng.

II. Bài toán.

Bài 1. Cho các hình vẽ sau. Hãy chỉ ra các đường vuông góc, các đường xiên kẻ từ điểm A trong hình 1 và điểm I trong hình 2.



Hình 1



Hình 2

Lời giải:

Hình 1: Đường vuông góc: AH.

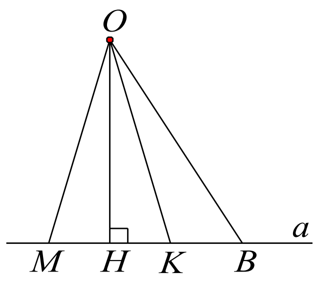
Các đường xiên: AB, AC.

Hình 2: Các đường vuông góc: IB, IC

Đường xiên: IO

Bài 2. Cho đường thẳng a và điểm O (không thuộc đường thẳng a) hãy vẽ đường vuông góc và ba đường xiên kẻ từ điểm O đến đường thẳng a. Chỉ ra các đường xiên và đường vuông góc vừa vẽ.

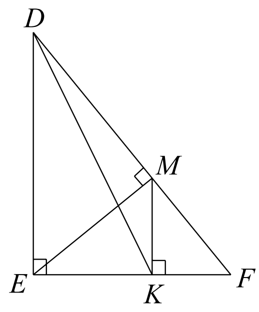
Lời giải:



Đường vuông góc: OH.

Các đường xiên: OM, OK, OB.

Bài 3. Hãy chỉ ra các đường vuông góc, các đường xiên kẻ từ một điểm nằm ngoài đường thẳng EF đến đường thẳng đó trong hình vẽ sau:



Lời giải:

Các đường vuông góc kẻ từ một điểm đến đường thẳng EF: DE, MK.

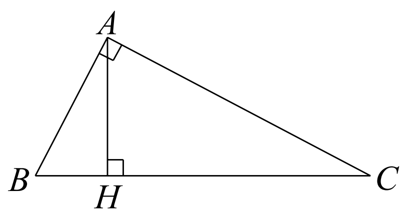
Các đường xiên kẻ từ một điểm đến đường thẳng EF: DK, DF, ME, MF.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến cạnh BC.

a) Tìm các đường vuông góc và đường xiên trên hình

b) Tìm khoảng cách từ đỉnh A, B, C đến các cạnh của tam giác ABC.

Lời giải:



a) Vì tam giác ABC vuông tại A nên $AB \perp AC$ (GT)

H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến cạnh BC (GT) suy ra $AH \perp BC$

Do đó: Các đường vuông góc: BA, BC, AH.

Các đường xiên:

Đường xiên BA, BC kẻ từ điểm A đến cạnh BC

Đường xiên CB kẻ từ điểm C đến cạnh AB

Đường xiên BC kẻ từ điểm B đến cạnh AC

b) Khoảng cách từ điểm A đến cạnh BC là độ dài cạnh AH.

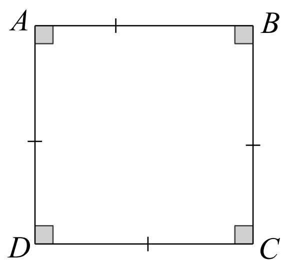
Khoảng cách từ điểm B, C đến cạnh AC, AB lần lượt là độ dài cạnh BA, CA.

Bài 5. Cho hình vuông $ABCD$. Hỏi trong bốn đỉnh của hình vuông

a) Đỉnh nào cách đều hai điểm D và B ?

b) Đỉnh nào cách đều hai đường thẳng AD và DC?

Lời giải:



a) Vì hình vuông $ABCD$ có $AD = AB$; $CD = CB$ nên đỉnh cách đều hai điểm D và B là: A và C.

b) Ta có $BA \perp AD$ tại $A \Rightarrow BA$ là khoảng cách từ B đến đường thẳng AD.

$BC \perp CD$ tại $C \Rightarrow BC$ là khoảng cách từ B đến đường thẳng CD.

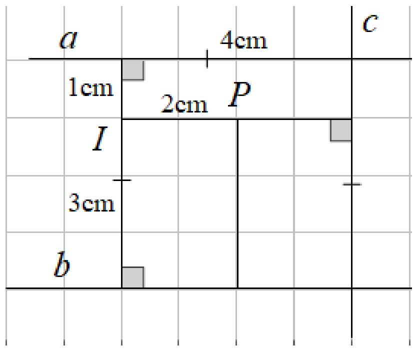
Mà $BA = BC$ (Vì $ABCD$ là hình vuông)

Vậy đỉnh cách đều hai đường thẳng AD và DC là đỉnh B.

Bài 6. Quan sát hình dưới và cho biết:

a) Khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng a, b, c.

b) Khoảng cách từ điểm P đến đường thẳng b, c.



Lời giải

a) Khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng a là 1 cm.

Khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng b là 3 cm.

Khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng c là 4 cm.

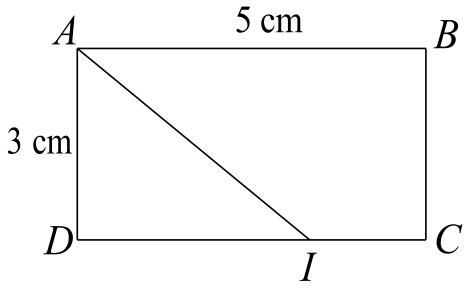
b) Khoảng cách từ điểm P đến đường thẳng b là 3 cm.

Khoảng cách từ điểm P đến đường thẳng c là 2 cm.

Bài 7. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng 3 cm, 5 cm, I là một điểm trên cạnh CD.

a) Hãy chỉ ra các đường vuông góc và đường xiên kẻ từ A điểm đến đường thẳng CD.

b) Tìm khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng AD.



Lời giải:

a) Đường vuông góc kẻ từ A điểm đến đường thẳng CD là: AD.

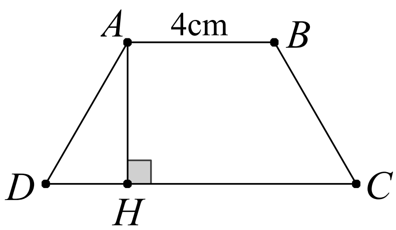
Đường xiên kẻ từ A điểm đến đường thẳng CD là: AI.

b) Vì $CD \perp AD$ tại D và $CD = 5$ cm

Nên khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng AD là 5 cm.

Bài 9. Cho hình thang cân có độ dài đáy nhỏ bằng 4 cm, độ dài đáy lớn gấp đôi độ dài đáy nhỏ. Tính khoảng cách giữa hai đáy của hình thang cân, biết diện tích hình thang cân đó bằng 18 cm^2.

Lời giải



Ta có đáy nhỏ $AB = 4$ cm; độ dài đáy lớn gấp đôi độ dài đáy nhỏ

Do đó độ dài đáy lớn CD là: $4.2 = 8$ (cm)

Kẻ $AH \perp CD$ $(H \in CD)$, khi đó AH là chiều cao của hình thang cân $ABCD$.

Diện tích của hình thang cân $ABCD$ bằng 18 cm^2, suy ra $S = \dfrac{(AB+CD).AH}{2} = 18$

Mà $AB = 4$ cm, $CD = 8$ cm

Suy ra $S = \dfrac{(4+8).AH}{2} = 18$

suy ra chiều cao của hình thang cân là: $AH = \dfrac{18.2}{4+8} = \dfrac{36}{12} = 3$

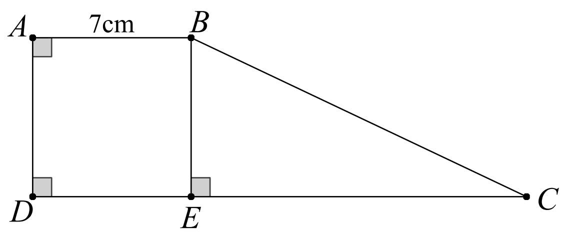
Vì $AH \perp CD$ $(H \in CD)$ nên độ dài AH là khoảng cách từ A đến đáy lớn CD.

Mặt khác $ABCD$ là hình thang cân nên ta có $AB // CD$.

Do đó AH là khoảng cách giữa hai đáy của hình thang cân $ABCD$.

Vậy khoảng cách giữa hai đáy của hình thang cân $ABCD$ là 3 cm.

Bài 10. Cho hình thang $ABCD$ (Hình vẽ) có $AB = 7$ cm. Gọi E là hình chiếu của B lên cạnh CD. Biết $ABED$ là hình vuông và diện tích hình thang $ABCD$ gấp 2 lần diện tích hình vuông $ABED$. Hãy tính khoảng cách từ C đến đường thẳng BE.



Lời giải:

Ta có E là hình chiếu của B lên cạnh CD, suy ra $BE \perp CD$ tại E hay $CE \perp BE$ tại E

Do đó độ dài CE là khoảng cách từ C đến đường thẳng BE (1)

Hình vuông $ABED$ có diện tích là $7.7 = 49$ $\left(\text{cm}^2\right)$

Diện tích hình thang $ABCD$ là: $49.2 = 98$ $\left(\text{cm}^2\right)$

Ta có công thức tính diện tích hình thang $ABCD$: $S = \dfrac{(AB + CD).BE}{2}$

Mà $AB = BE = 7$ cm; $S = 98$ cm^2

Suy ra độ dài đáy lớn của hình thang $ABCD$ là $CD = \dfrac{98.2}{7} - 7 = 21$ $\left(\text{cm}^2\right)$

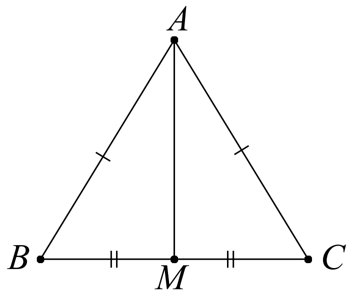
Do $E \in CD$ nên $CD = CE + DE$

$\Rightarrow CE = CD - DE = 21 - 7 = 14$ (cm) (2)

Từ (1) và (2) suy ra khoảng cách từ C đến đường thẳng BE là 14 cm.

Bài 11. Cho tam giác ABC cân tại A. Có M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh AM là khoảng cách từ A đến cạnh BC của tam giác ABC.

Lời giải:



Xét ΔABM và ΔACM có:

$AB = AC$ (Vì tam giác ABC cân tại A).

$B = C$ (Vì tam giác ABC cân tại A).

$BM = MC$ (Vì M là trung điểm của BC).

$\Rightarrow \Delta ABM = \Delta ACM$ (c.g.c)

$\Rightarrow AMB = AMC$ (Hai góc tương ứng). (1)

Mà hai góc AMB và AMC là hai góc kề bù

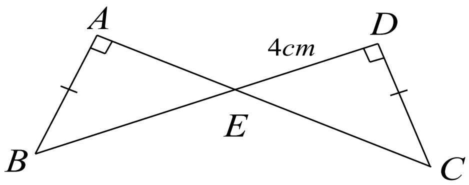
$\Rightarrow AMB + AMC = 180°$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AMB = AMC = \dfrac{180°}{2} = 90°$.

Do đó $AM \perp BC$ tại M.

Vậy AM là khoảng cách từ A đến cạnh BC của tam giác ABC.

Bài 12. Cho hình vẽ bên, biết $AB = CD$, $BAC = BDC = 90°$, $DE = 4$ cm. Tính khoảng cách từ E đến đường thẳng AB.



Lời giải:

Xét ΔABE có $A + B + AEB = 180°$ (Định lí tổng ba góc trong một tam giác)

Suy ra $B = 180° - A - AEB$ (1)

Xét ΔCDE có $C + D + CED = 180°$ (Định lí tổng ba góc trong một tam giác)

Suy ra $C = 180° - D - CED$ (2)

Mà $AEB = CED$ (2 góc đối đỉnh). (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $B = C$.

Xét ΔABE và ΔDCE có:

$BAC = BDC = 90°$

$AB = CD$

$B = C$

$\Rightarrow \Delta ABE = \Delta DCE$ $(g.c.g)$

$\Rightarrow AE = DE$

Có $DE = 4$ cm $\Rightarrow AE = 4$ cm

Mà AE là khoảng cách từ điểm E đến đường thẳng AB (Vì $AE \perp AB$ tại A).

Vậy khoảng cách từ điểm E đến đường thẳng AB bằng 4 cm.

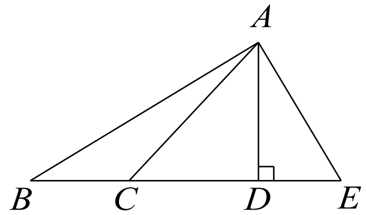
Dạng 2. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên.

I. Phương pháp giải:

Sử dụng định lý đường vuông góc ngắn hơn đường xiên (từ một điểm đến cùng một đường thẳng).

II. Bài toán.

Bài 1. Độ dài nào ngắn nhất trong các độ dài AB, AC, AD, AE.

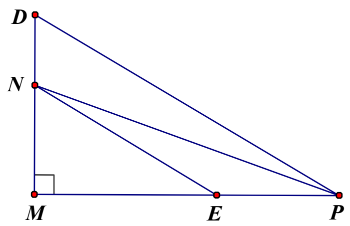


Lời giải

Ta có $AD \perp BE$ suy ra AD là đường vuông góc; AB, AC, AE là các đường xiên.

Vậy độ dài nào ngắn nhất AD.

Bài 2. Quan sát hình bên.



a) Tìm đoạn ngắn nhất trong các đoạn NM, NE, NP.

b) Tìm đoạn ngắn nhất trong các đoạn thẳng PM, PN, PD.

Lời giải:

a) Vì $NM \perp MP$ nên NM là đường vuông góc kẻ từ N đến đường thẳng MP; NE, NP là các đường xiên kẻ từ N đến MP.

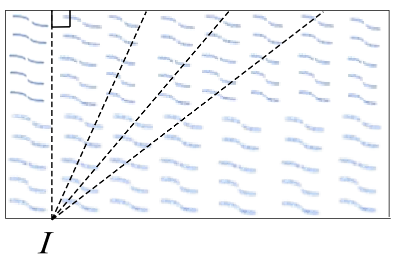
Vậy trong các đoạn NM, NE, NP thì NM là đoạn thẳng ngắn nhất (Quan hệ giữa đường vuông góc và đườn xiên).

b) Vì $PM \perp MD$ nên PM là đường vuông góc kẻ từ P; PN, PD là các đường xiên kẻ từ P.

Vậy trong các đoạn PM, PN, PD thì PM là đoạn thẳng ngắn nhất (Quan hệ giữa đường vuông góc và đườn xiên).

Bài 3. Bạn Bình xuất phát từ điểm I bên hồ bơi. Bạn ấy muốn tìm đường ngắn nhất để bơi đến thành hồ đối diện. Theo em, bạn Bình phải bơi theo đường nào?

A B C D



Lời giải:

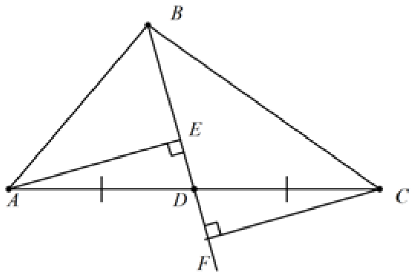
Ta có IA là đường vuông góc; IB, IC, ID là các đường xiên.

Do đó IA là đường ngắn nhất (Quan hệ giữa đường vuông góc và đườn xiên).

Vậy để bơi đến thành hồ đối diện theo đường ngắn nhất thì Bình phải bơi thep đường IA.

Bài 4. Cho tam giác ABC, điểm D nằm giữa A và C (BD không vuông góc với AC). Gọi E và F là chân các đường vuông góc kẻ từ A và C đến đường thẳng BD. So sánh AC với tổng $AE+CF$.

Lời giải:



AE là đường vuông góc, AD là đường xiên nên $AE < AD$

CF là đường vuông góc, CD là đường xiên nên $CF < CD$.

Do đó $AE+CF < AD+CD$

$\Rightarrow AE+CF < AC$

Bài 5. Cho hình vẽ. Chứng minh rằng: $BD+CE < AB+AC$

Lời giải:

Ta có $BD \perp AC$ suy ra BD là đường vuông góc; BA là đường xiên

$\Rightarrow BD < AB$ (Quan hệ đường vuông góc và đường xiên) (1)

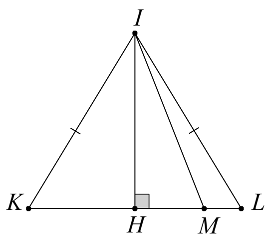
Ta có $CE \perp AB$ suy ra CE là đường vuông góc; CA là đường xiên

$\Rightarrow CE < AC$ (Quan hệ đường vuông góc và đường xiên) (2)

Cộng từng vế (1) và (2), ta có $BD+CE < AB+AC$

Bài 6. Cho tam giác IKL, $IK = IL$. Lấy điểm M tùy ý nằm giữa K và L. Khi M thay đổi thì độ dài IM thay đổi. Xác định vị trí của M để độ dài IM nhỏ nhất.

Lời giải:



a) Kẻ $IH \perp KL$ Suy ra IH đường vuông góc kẻ từ I đến đường thẳng KL.

Theo định lí về quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc thì IH chính là đường ngắn nhất trong tam giác IKL.

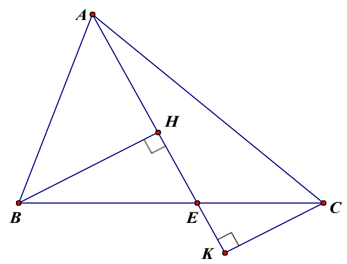
Vậy nếu M trùng với chân đường cao kẻ từ I đến đường thẳng KL thì IM sẽ có độ dài nhỏ nhất.

Bài 7. Cho ΔABC, điểm E nằm giữa B, C (AE không vuông góc với BC). Gọi H và K là chân các đường vuông góc kẻ từ B và C đến đường thẳng AE.

a) So sánh BH và BE.

b) Chứng minh $BC > BH + CK$.

Lời giải:



a) Dễ thấy BH là đường vuông góc, BE là đường xiên kẻ từ điểm B đến đường thẳng AK, do đó $BE > BH$.

b) Ta thấy CK là đường vuông góc, CE là đường xiên kẻ từ điểm C đến đường thẳng AK, do đó $CE > CK$.

Suy ra: $BE + CE > BH + CK$

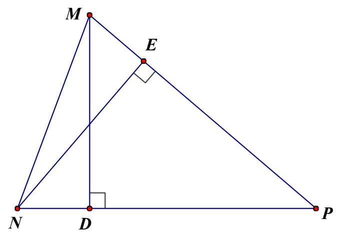
Hay $BC > BH + CK$.

Bài 8. Cho ΔMNP nhọn. Kẻ $MD \perp NP$ $(D \in NP)$, $NE \perp MP$ $(E \in MP)$

a) So sánh MN và MD.

b) Chứng minh $2MN > MD + NE$.

Lời giải:



a) Dễ thấy MD là đường vuông góc, MN là đường xiên kẻ từ điểm M đến đường thẳng NP, do đó $MN > MD$.

b) Ta thấy NE là đường vuông góc, NM là đường xiên kẻ từ điểm N đến đường thẳng MP, do đó $MN > NE$.

Suy ra: $MN + MN > MD + NE$

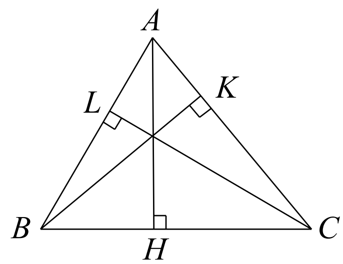
Hay $2MN > MD + NE$.

Bài 9. Cho ΔABC, kẻ $AH \perp BC$ tại H. Chứng minh rằng:

a) $AH < \frac{1}{2}(AB + AC)$

b) Kẻ $BK \perp AC$ tại K, $CL \perp AB$ tại L. Chứng minh $AH + BK + CL < AB + BC + CA$

Lời giải:



a) Ta có AH là đường vuông góc; AB, AC là các đường xiên.

Suy ra $AH < AB$; $AH < AC$

$\Rightarrow 2AH < AB + AC$

Vậy $AH < \frac{1}{2}(AB + AC)$

b) Ta có $BK \perp AC$ tại K suy ra BK là đường vuông góc; AB, BC là các đường xiên.

$CL \perp AB$ tại L suy ra CL là đường vuông góc; CA, CB là các đường xiên.

Suy ra $BK < \frac{1}{2}(BA + BC)$

$CL < \frac{1}{2}(CA + CB)$

Mà $AH < \frac{1}{2}(AB + AC)$

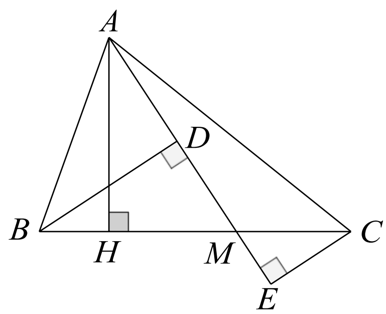
Từ ba điều trên suy ra $AH + BK + CL < AB + BC + CA$.

Bài 10. Cho ΔABC, các góc B và C nhọn. Điểm M nằm giữa B và C. Gọi d tổng các khoảng cách từ B và C đến đường thẳng AM.

a) Chứng minh rằng $d \le BC$.

b) Xác định vị trí của M trên BC sao cho d có giá trị lớn nhất.

Lời giải:



a) Vẽ $BD \perp AM$, $CE \perp AM$

Suy ra $BD \le BM$; $CE \le CM$ (Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên)

$\Rightarrow BD + CE \le BM + CM$

Theo bài ta có $BD + CE = d$

$M \in BC$ nên $BM + CM = BC$

Từ những điều trên suy ra $d \le BC$.

b) Theo a) ta có $d \le BC$

Do đó giá trị lớn nhất của d là BC

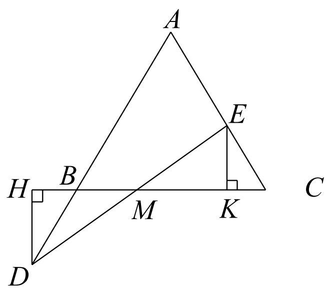
$\Leftrightarrow BD = BM$; $CE = CM$

$\Leftrightarrow D$ trùng với M và E trùng với M

$\Leftrightarrow M$ trùng với hình chiếu H của A trên BC.

Bài 11. Hai tam giác: tam giác cân ABC và tam giác ΔADE Có chung góc ở đỉnh A có $AE + AD = AB + AC$. Chứng minh rằng $BC < DE$.

Lời giải:



Vì $AD + AE = AB + AC = 2AB = 2AC$ (GT).

Nên $BD = CE$

Nếu điểm E thuộc đoạn thẳng AC thì D thuộc tia đối của tia BA

Kẻ $DH \perp BC$; $EK \perp BC$

Có ΔABC cân tại A (GT) $\Rightarrow ACB = ABC$

$HBD = ABC$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow HBD = ACB$ $(= ABC)$

Hay $HBD = KCE$

Xét ΔDHB và ΔEKC có:

$DHB = EKC = 90°$

$BD = CE$

$HBD = KCE$

$\Rightarrow \Delta DHB = \Delta EKC$ (cạnh huyền – góc nhọn).

$\Rightarrow BH = CK$ (Hai cạnh tương ứng)

Lại có $BK + CK = BC$; $BK + BH = HK$

Suy ra $BC = HK$ (1)

Gọi M là giao điểm của BC và DE.

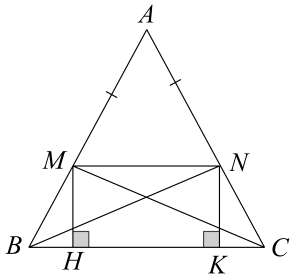
Do $DH \perp BC$; $EK \perp BC$ nên $MH < DM$; $MK < EM$ (Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên).

Suy ra $MH + MK < DM + EM$ $\Rightarrow HK < DE$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BC < DE$.

Bài 12. Cho ΔABC cân tại A, trên hai cạnh AB và AC lấy hai điểm M và N sao cho $AM = AN$. Chứng minh rằng: $BN > \dfrac{BC+MN}{2}$

Lời giải:



Kẻ $MH \perp BC$ tại H; $NK \perp BC$ tại K

$\Rightarrow BN > BK;\ CM > CH$ (Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên)

$\Rightarrow\ BN + CM > BK + CH$

Mà $BK = BH + HK$ (Do tại $H \in BK$)

$\Rightarrow BN + CM > BH + HK + CH$

Hay $BN + CM > BC + HK$ (Vì $BC = BH + CH$) (1)

Xét ΔABN và ΔACM có:

$AB = AC$ (Vì ΔABC cân tại A)

A chung

$AN = AM$ (GT)

$\Rightarrow \Delta ABN = \Delta ACM$ (c.g.c)

$\Rightarrow BN = CM$ (Hai cạnh tương ứng) (2)

Xét ΔAMN có $AN = AM$ $\Rightarrow \Delta AMN$ cân tại A

$AMN + ANM + A = 180°$ (Định lí tổng các góc trong tam giác)

$\Rightarrow\ AMN = ANM = 180° - A\ \Rightarrow AMN = \dfrac{180° - A}{2}$

Chứng minh tương tự: ΔABC cân tại A $\Rightarrow ABC = \dfrac{180° - A}{2}$

Do đó $AMN = ABC \left(= \dfrac{180° - A}{2} \right)$

Mà AMN và ABC là hai góc đồng vị

$\Rightarrow MN // BC$ (Dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song)

Ta lại có $MH \perp BC$; $NK \perp BC \Rightarrow$ $MH // NK$ (Dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song)

Do đó $MN = HK$ (Tính chất đoạn chắn) (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $2BN > BC + MN$

Vậy $BN > \dfrac{BC+MN}{2}$

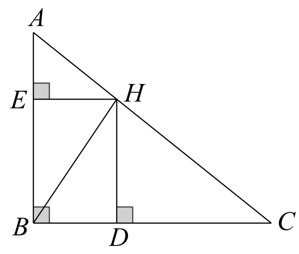
III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Nhận biết đường vuông góc, đường xiên. Tìm khoảng cách của một điểm đến một đường thẳng.

Bài 1. Quan sát hình vẽ và cho biết:

a) Các đường vuông góc kẻ đến AB; BC

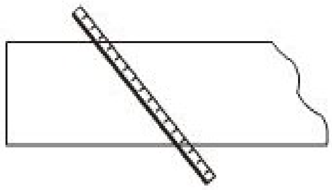
b) Các đường xiên kẻ đến AB; BC



Bài 2. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng 4 cm, I là một điểm trên cạnh CD và cách C 1 cm. Tìm khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng AD.

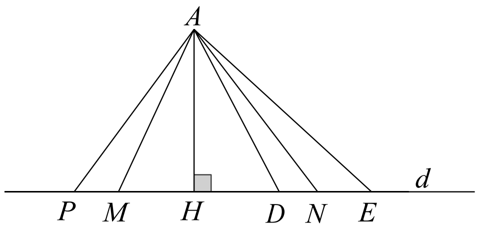
Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại B có AD là tia phân giác của BAC ($D \in BC$). Kẻ $DF \perp AC$ tại F. Tính khoảng cách từ D đến đường thẳng AC, biết $BD = 2\text{ cm}$.

Bài 4. Một tấm gỗ xẻ có hai cạnh song song. Chiều rộng của tấm gỗ là khoảng cách giữa hai cạnh đó. Muốn đo chiều rộng của tấm gỗ, ta phải đặt thước như thế nào? Tại sao? Cách đặt thước trong hình dưới có đúng không?

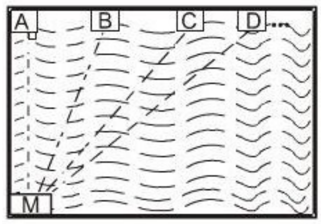


Dạng 2. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên.

Bài 1. Quan sát hình vẽ và cho biết đường nào là đường ngắn nhất? Vì sao?



Bài 2. Để tập bơi nâng dần khoảng cách, hàng ngày bạn Mai xuất phát từ M, ngày thứ nhất bạn bơi đến A, ngày thứ hai bạn bơi đến B, ngày thứ ba bạn bơi đến C, ... (Hình bên).



Bài 3. Cho tam giác ABC, điểm M nằm giữa B và C. Gọi H và K là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến các đường thẳng AB và AC. So sánh BC và $MH + MK$.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, M là trung điểm của AC. Gọi E và F là chân các đường vuông góc kẻ từ A và C đến đường thẳng BM. Chứng minh $AB < \dfrac{BE+BF}{2}$.

ĐÁP SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Nhận biết đường vuông góc, đường xiên. Tìm khoảng cách của một điểm đến một đường thẳng.

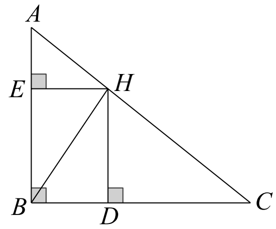
Bài 1.

a) Các đường vuông góc kẻ đến AB là: CB, HE

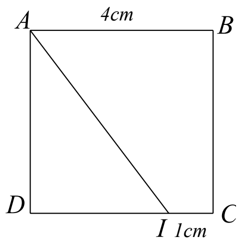
Các đường vuông góc kẻ đến BC là: AB, HD

b) Các đường xiên kẻ đến AB là $HA,\ HB$.

Các đường xiên kẻ đến BC là $HC,\ HB$.

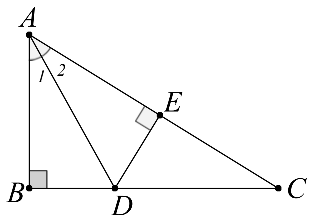


Bài 2.



Khoảng cách từ I đến đường thẳng AD là $4-1=3$ (cm)

Bài 3.



Xét ΔABD và ΔAED có

$B = E = 90^\circ$

AD chung

$A_1 = A_2$ (Vì AD là tia phân giác của BAC)

$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta AED$ (Cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow BD = ED$ (hai cạnh tương ứng)

Mà $BD = 2$ cm

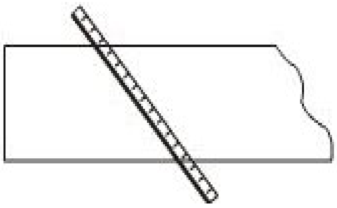
$\Rightarrow ED = 2$ cm

Vậy khoảng cách từ D đến đường thẳng AC là 2 cm.

Bài 4. Ta có khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là độ dài của đoạn thẳng có hai đầu nằm trên hai đường thẳng và vuông góc với cả hai đường thẳng đó.

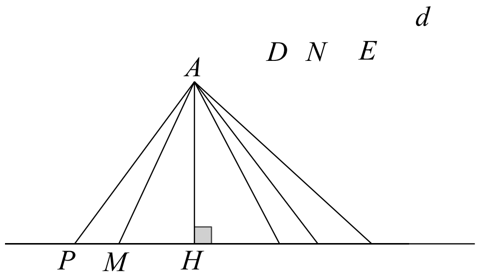
Vì vậy muốn đo bề rộng của một tấm gỗ chính là xác định khoảng cách giữa hai đường thẳng song song ta phải đặt thước vuông góc với hai cạnh song song của tấm gỗ.

Cách đặt thước như trong hình dưới là sai.



Dạng 2. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên.

Bài 1.



AH là đường vuông góc kẻ từ A đến đường thẳng d

AP, AM, AD, AN, AE là các đường xiên kẻ từ A đến đường thẳng d

Do đó AH là đường ngắn nhất (Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên).

Bài 2. Nhận thấy các điểm $A, B, C, D, ...$ cùng nằm trên một đường thẳng. Gọi đường thẳng đó là đường thẳng d.

Theo định nghĩa:

$MB, MC, MD, ...$ là các đường xiên kẻ từ M đến d.

MA là đường vuông góc kẻ từ M đến d.

AB là hình chiếu của đường xiên MB trên d

AC là hình chiếu của đường xiên MC trên d

AD là hình chiếu của đường xiên MD trên d

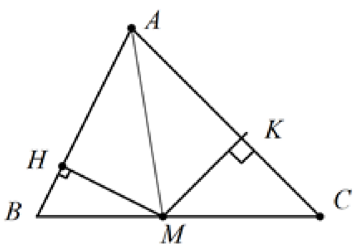
…

Theo định lý MA là đường ngắn nhất trong các đường $MA, MB, MC, MD, ...$

Vì $AB < AC < AD < ...$ nên $MB < MC < MD < ...$

Vậy $MA < MB < MC < MD < ...$ nên bạn Mai đã tập đúng mục đích đề ra.

Bài 3.



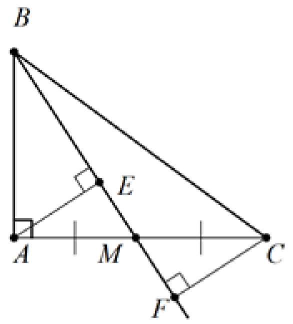
HM là đường vuông góc, BM là đường xiên nên $HM < BM$.

MK là đường vuông góc, MC là đường xiên nên $MK < MC$.

Do đó $MH + MK < MB + MC$

$\Rightarrow MH + MK < BC$.

Bài 4.



Xét ΔMAE và ΔMCF có:

$AM = CM$ (gt)

$AME = CMF$ (Hai góc đối đỉnh)

$AEM = CFM = 90°$

$\Rightarrow \Delta MAE = \Delta MCF$ $(ch - gn)$

$\Rightarrow ME = MF$

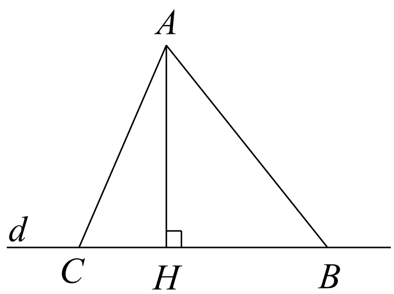
$\Rightarrow BE + BF = BM - ME + BM + MF = 2BM.$

Mặt khác $AB < BM \Rightarrow AB < \dfrac{BE + BF}{2}$

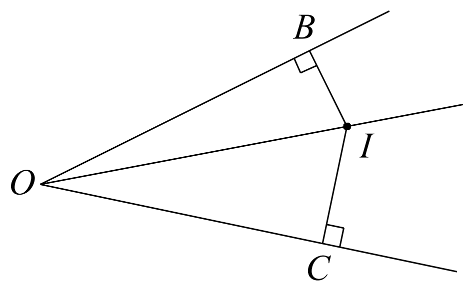
PHIẾU BÀI TẬP

Dạng 1. Nhận biết đường vuông góc, đường xiên. Tìm khoảng cách của một điểm đến một đường thẳng.

Bài 1. Cho các hình vẽ sau. Hãy chỉ ra các đường vuông góc, các đường xiên kẻ từ điểm A trong hình 1 và điểm I trong hình 2



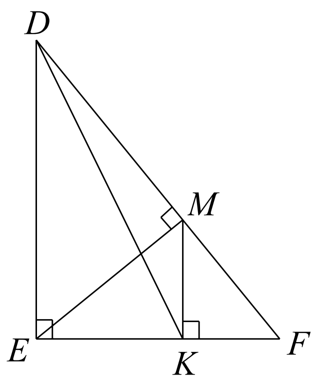
Hình 1



Hình 2

Bài 2. Cho đường thẳng a và điểm O hãy vẽ đường vuông góc và ba đường xiên kẻ từ điểm O đến đường thẳng a. Chỉ ra các đường xiên và đường vuông góc vừa vẽ.

Bài 3. Hãy chỉ ra các đường vuông góc, các đường xiên kẻ từ một điểm nằm ngoài đường thẳng EF đến đường thẳng đó trong hình vẽ sau:



Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi H là chân đường cao kẻ từ A đến cạnh BC.

a) Tìm các đường vuông góc và đường viên trên hình.

b) Tìm khoảng cách từ đỉnh A, B, C đến các cạnh của tam giác ABC.

Bài 5. Cho hình vuông $ABCD$. Hỏi trong bốn đỉnh của hình vuông

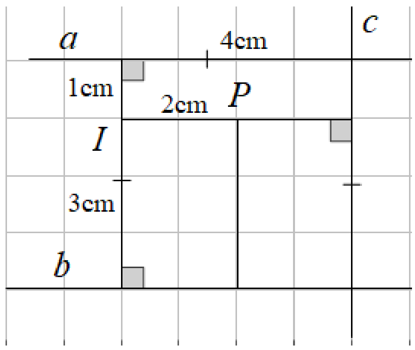
a) Đỉnh nào cách đều hai điểm D và B ?

b) Đỉnh nào cách đều hai đường thẳng AD và DC?

Bài 6. Quan sát hình dưới và cho biết:

a) Khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng a, b, c.

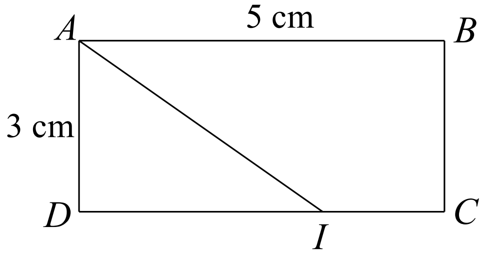
b) Khoảng cách từ điểm P đến đường thẳng b, c.



Bài 7. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng 3cm, 5cm, I là một điểm trên cạnh CD.

a) Hãy chỉ ra các đường vuông góc và đường xiên kẻ từ A điểm đến đường thẳng CD.

b) Tìm khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng AD.



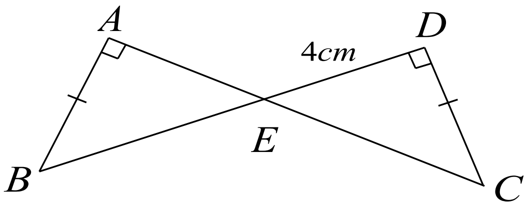
Bài 8. Cho hình vuông $ABCD$ có diện tích là 36 cm^2. Tính khoảng cách từ đỉnh A đến cạnh CD.

Bài 9. Cho hình thang cân có độ dài đáy nhỏ bằng 4 cm, độ dài đáy lớn gấp đôi độ dài đáy nhỏ. Tính khoảng cách giữa hai đáy của hình thang cân, biết diện tích hình thang cân đó bằng 18 cm^2.

Bài 10. Cho hình thang $ABCD$ (Hình vẽ) có $AB = 7$ cm. Gọi E là hình chiếu của B lên cạnh CD. Biết $ABED$ là hình vuông và diện tích hình thang $ABCD$ gấp 2 lần diện tích hình vuông $ABED$. Hãy tính khoảng cách từ C đến đường thẳng BE.

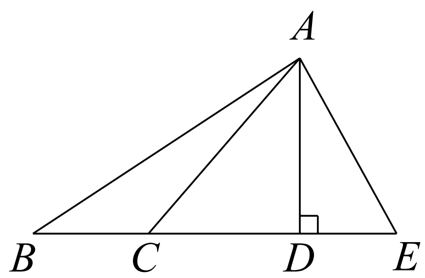
Bài 11. Cho tam giác ABC cân tại A. Có M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh AM là khoảng cách từ A đến cạnh BC của tam giác ABC.

Bài 12. Cho hình vẽ bên, biết $AB = CD$, $BAC = BDC = 90°$, $DE = 4\text{cm}$. Tính khoảng cách từ E đến đường thẳng AB.

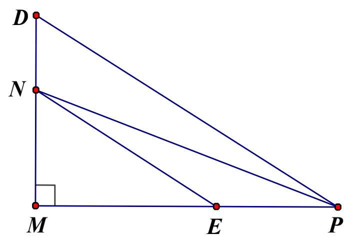


Dạng 2. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên.

Bài 1. Độ dài nào ngắn nhất trong các độ dài AB, AC, AD, AE.



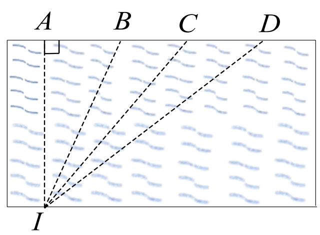
Bài 2. Quan sát hình bên.



a) Tìm đoạn ngắn nhất trong các đoạn NM, NE, NP.

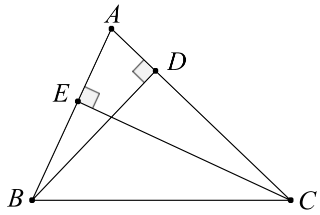
b) Tìm đoạn ngắn nhất trong các đoạn thẳng PM, PN, PD.

Bài 3. Bạn Bình xuất phát từ điểm I bên hồ bơi. Bạn ấy muốn tìm đường ngắn nhất để bơi đến thành hồ đối diện. Theo em, bạn Bình phải bơi theo đường nào?



Bài 4. Cho tam giác ABC, điểm D nằm giữa A và C (BD không vuông góc với AC). Gọi E và F là chân các đường vuông góc kẻ từ A và C đến đường thẳng BD. So sánh AC với tổng $AE + CF$.

Bài 5. Cho hình vẽ. Chứng minh rằng: $BD + CE < AB + AC$



Bài 6. Cho tam giác IKL, $IK = IL$. Lấy điểm M tùy ý nằm giữa K và L. Khi M thay đổi thì độ dài IM thay đổi. Xác định vị trí của M để độ dài IM nhỏ nhất.

Bài 7. Cho ΔABC, điểm E nằm giữa B, C (AE không vuông góc với BC). Gọi H và K là chân các đường vuông góc kẻ từ B và C đến đường thẳng AE.

a) So sánh BH và BE.

b) Chứng minh $BC > BH + CK$.

Bài 8. Cho ΔMNP nhọn. Kẻ $MD \perp NP$ $(D \in NP)$, $NE \perp MP$ $(E \in MP)$

a) So sánh MN và MD.

b) Chứng minh $2MN > MD + NE$.

Bài 9. Cho ΔABC, kẻ $AH \perp BC$ tại H. Chứng minh rằng:

a) $AH < \frac{1}{2}(AB + AC)$

b) Kẻ $BK \perp AC$ tại K, $CL \perp AB$ tại L. Chứng minh $AH + BK + CL < AB + BC + CA$

Bài 10. Cho ΔABC, các góc B và C nhọn. Điểm M nằm giữa B và C. Gọi d tổng các khoảng cách từ B và C đến đường thẳng AM.

a) Chứng minh rằng $d \le BC$.

b) Xác định vị trí của M trên BC sao cho d có giá trị lớn nhất.

Bài 11. Hai tam giác: tam giác cân ABC và tam giác ΔADE Có chung góc ở đỉnh A có $AE + AD = AB + AC$. Chứng minh rằng $BC < DE$.

Bài 12. Cho ΔABC cân tại A, trên hai cạnh AB và AC lấy hai điểm M và N sao cho $AM = AN$. Chứng minh rằng: $BN > \frac{BC + MN}{2}$

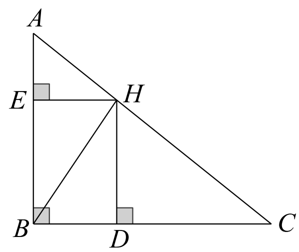
BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Nhận biết đường vuông góc, đường xiên. Tìm khoảng cách của một điểm đến một đường thẳng.

Bài 1. Quan sát hình vẽ và cho biết:

a) Các đường vuông góc kẻ đến AB; BC

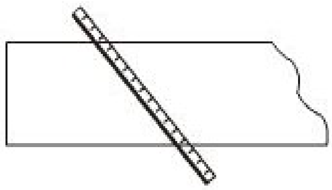
b) Các đường xiên kẻ đến AB; BC



Bài 2. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng 4 cm, I là một điểm trên cạnh CD và cách C 1 cm. Tìm khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng AD.

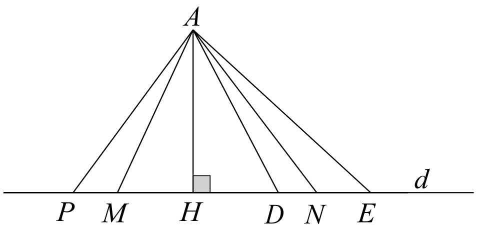
Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại B có AD là tia phân giác của BAC ($D \in BC$). Kẻ $DF \perp AC$ tại F. Tính khoảng cách từ D đến đường thẳng AC, biết $BD = 2$ cm.

Bài 4. Một tấm gỗ xẻ có hai cạnh song song. Chiều rộng của tấm gỗ là khoảng cách giữa hai cạnh đó. Muốn đo chiều rộng của tấm gỗ, ta phải đặt thước như thế nào? Tại sao? Cách đặt thước trong hình dưới có đúng không?

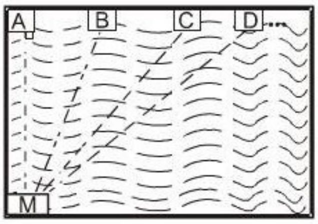


Dạng 2. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên.

Bài 1. Quan sát hình vẽ và cho biết đường nào là đường ngắn nhất? Vì sao?



Bài 2. Để tập bơi nâng dần khoảng cách, hàng ngày bạn Mai xuất phát từ M, ngày thứ nhất bạn bơi đến A, ngày thứ hai bạn bơi đến B, ngày thứ ba bạn bơi đến C, ... (Hình bên).



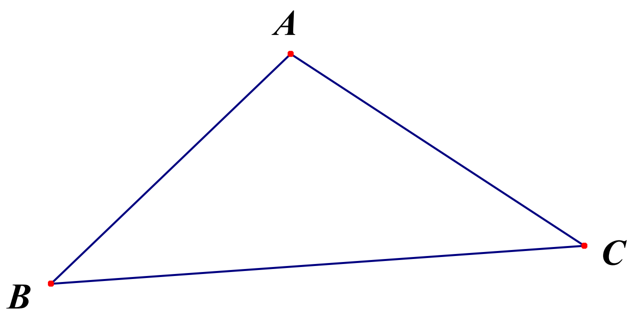
Bài 3. Cho tam giác ABC, điểm M nằm giữa B và C. Gọi H và K là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến các đường thẳng AB và AC. So sánh BC và $MH + MK$.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, M là trung điểm của AC. Gọi E và F là chân các đường vuông góc kẻ từ A và C đến đường thẳng BM. Chứng minh $AB < \dfrac{BE + BF}{2}$.

CHUYÊN ĐỀ 33: QUAN HỆ GIỮA BA CẠNH CỦA MỘT TAM GIÁC

PHẦN I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT.

*) Định lí: Trong một tam giác, độ dài của một cạnh bất kì luôn nhỏ hơn tổng độ dài hai cạnh còn lại.



Ba hệ thức:

$AB < BC + AC,$
$AC < AB + BC,$
$BC < AC + AB$

gọi là các bất đẳng thức tam giác.

- Tính chất: Trong một tam giác, độ dài của một cạnh bất kì luôn lớn hơn hiệu độ dài hai cạnh còn lại.

- Nhận xét: Nếu kí hiệu a,b,c là độ dài ba cạnh tùy ý của một tam giác thì: $|b-c| < a < b+c$.

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI.

Dạng 1. Khẳng định có tồn tại hay không một tam giác biết độ dài ba cạnh

I. Phương pháp giải:

+ Tồn tại một tam giác có độ dài ba cạnh là a,b,c nếu:

$\begin{cases} a < b+c \\ b < a+c \\ c < a+b \end{cases}$ hoặc $|b-c| < a < b+c$.

+ Trong trường hợp xác định được a là số lớn nhất trong ba số a,b,c thì điều kiện để tồn tại tam giác chỉ cần: $a < b+c$.

II. Bài toán.

Bài 1. Bộ ba độ dài nào dưới đây có thể tạo thành độ dài của ba cạnh trong tam giác?

a) 6cm; 8cm; 16cm

b) 5,5cm; 3,1cm; 2,4cm

c) 13,7cm; 8,2cm; 5,3cm

d) 8m; 12m; 7m

Lời giải:

a) Không vì $16 > 8 + 6$
b) Có vì $5,5 < 3,1 + 2,4$
c) Không vì $13,7 > 8,2 + 5,3$
d) Có vì $12 < 7 + 8$

Bài 2. Dựa vào bất đẳng thức tam giác, kiểm tra xem bộ ba đoạn thẳng có độ dài cho sau đây có thể tạo thành một tam giác hay không?

a) 3cm, 4cm, 6cm b) $2\text{m},\ 4\text{m},\ 8\text{m}$ c) $1\text{cm},\ 3\text{cm},\ 4\text{cm}$

Lời giải:

a) Ta có $6 < 3 + 4$ nên bộ ba đoạn thẳng này có thể là ba cạnh của một tam giác.
b) Không vì $8 > 2 + 4$.
c) Không vì $4 = 1 + 3$.

Bài 3. Dựa vào bất đẳng thức tam giác, kiểm tra xem bộ ba đoạn thẳng có độ dài cho sau đây không thể là ba cạnh của một tam giác.

a) $3\text{cm},\ 3\text{cm},\ 7\text{cm}$. b) $6\text{m},\ 10\text{m},\ 8\text{m}$. c) $2\text{m},\ 6\text{m},\ 8\text{m}$.

Lời giải:

a) Không vì $7 > 3 + 3$.
b) Ta có $10 < 6 + 8$ nên bộ ba đoạn thẳng này có thể là ba canh của một tam giác.
c) Không vì $8 = 6 + 2$.

Bài 4. Một tam giác cân có một cạnh bằng 6 cm. Tính hai cạnh còn lại, biết chu vi của tam giác đó bằng $20\,\text{cm}$.

Lời giải:

Nếu cạnh đã cho $(6\,\text{cm})$ là cạnh đáy thì hai cạnh còn lại là $(20 - 6) : 2 = 7\ (\text{cm})$, thỏa mãn bất đẳng thức tam giác.

Nếu cạnh đã cho $(6\,\text{cm})$ là cạnh bên thì hai cạnh còn lại là 6cm và $20 - 2.6 = 8\ (\text{cm})$, thỏa mãn bất đẳng thức tam giác.

Bài 5. Cho tam giác ABC có $BC = 1\text{cm},\ AC$=7cm.Tìm độ dài cạnh AB biết độ dài này là một số nguyên (cm).

Lời giải:

Theo bất đẳng thức tam giác, trong ABC có: $|AC - BC| < AB < AC + BC \Leftrightarrow 6 < AB < 8$

Do AB là số nguyên nên $AB = 7\text{cm}$.

Bài 6. Độ dài hai cạnh của một tam giác bằng 6cm và 2cm. Tính độ dài cạnh còn lại biết rằng số đo của cạnh đó theo cm là một số tự nhiên chẵn.

Lời giải:

Giả sử ΔABC có $AB = 6\text{cm}, AC = 2\text{cm}$.

Theo bất đẳng thức tam giác, ta có $AB - AC < BC < AB + AC$. Suy ra $4 < BC < 8$. Mà BC có độ dài theo cm là một số tự nhiên chẵn. Do đó, $BC = 6\text{cm}$.

Bài 7. Cho tam giác ABC có $AB = 4\text{cm},\ AC = 1\text{cm}$. Hãy tìm độ dài cạnh BC biết rằng độ dài này là một số nguyên (cm).

Lời giải:

Ta có $AB = 4\text{cm},\ AC = 1\text{cm}$.

Theo bất đẳng thức tam giác, ta có $AB - AC < BC < AB + AC$. Suy ra $3 < BC < 5$. Mà BC có độ dài theo cm là một số nguyên. Do đó, $BC = 4\text{cm}$.

Bài 8. Tính chu vi của tam giác cân có hai cạnh bằng 4m và 8m.

Lời giải:

Cách 1: Vì tam giác là tam giác cân nên sẽ có độ dại ba cạnh là

Th1 $4\text{m};\ 4\text{m};\ 8\text{m}$ trường hợp này không xảy ra vì $4\text{m} + 4\text{ m} = 8\text{ m}$

Th2 $4\text{m};\ 8\text{m};\ 8\text{m}$ trường hợp này xảy ra vì $4\text{m} + 8\text{ m} > 8\text{ m}$

Vậy chu vi tam giác là 20 m.

Cách 2:

Giả sử ΔABC có $AB = 4\text{m}, AC = 8\text{m}$.

Theo bất đang thức tam giác, ta có $|AB - AC| < BC < AB + AC$.

Do đó, $4 < BC < 12$. Mà ΔABC cân nên suy ra $BC = 8\text{m}$. Vậy chu vi tam giác ΔABC là 20m.

Bài 9. Tính chu vi của tam giác cân có hai cạnh bằng 3cm và 7cm.

Lời giải:

Giả sử ΔABC có $AB = 3\text{cm}, AC = 7\text{cm}$.

Theo bất đẳng thức tam giác, ta có $|AB - AC| < BC < AB + AC$. Do đó, $4 < BC < 10$. Mà ΔABC cân nên suy ra $BC = 7\text{cm}$. Vậy chu vi tam giác ABC là 17cm.

Bài 10. Ba cạnh của một tam giác có độ dài bằng $2\frac{1}{2},\ 16,\ x$ (đơn vị cm). Tìm x, biết rằng x là số tự nhiên và có giá trị nhỏ nhất có thể.

Lời giải:

Theo bất đẳng thức tam giác, ta có $|2\frac{1}{2} - 16| < x < 2\frac{1}{2} + 16 \Rightarrow 13,5 < x < 18,5$.

Mà x là số tự nhiên và có giá trị nhỏ nhất có thể nên $x = 14\text{cm}$

Bài 11. Tam giác ABC có chu vi $18\text{cm},\ BC > AC > AB$. Tính độ dài BC biết rằng độ dài đó là một số chẵn (đơn vị: cm).

Lời giải:

Ta có: $BC > AB,\ BC > AC$ nên $BC + BC + BC > AC + AB + BC$, tức là $3.BC > 18$.

Vậy $BC > 6cm$ (1)

Ta có: $BC < AC + AB$ nên $BC + BC < AB + AC + BC$, tức là $2.BC < 18$.

Vậy $BC < 9\text{cm}$ (2)

Do BC là số chẵn nên từ $(1),\ (2)$ suy ra $BC = 8\text{cm}$

Bài 12. Có bao nhiêu tam giác có độ dài hai cạnh là 7cm và 2cm còn độ dài cạnh thứ ba là một số nguyên (đơn vị cm)?

Lời giải:

Gọi độ dài cạnh còn lại của tam giác là: $x\,(cm)$.

Theo bất đẳng thức tam giác, ta có: $|7-2| < x < 7+2 \Rightarrow 5 < x < 9$

Mà x là một số nguyên nên $x \in \{6;7;8\}$.

Do đó có 3 tam giác thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 2. Chứng minh các bất đẳng thức về độ dài

I. Phương pháp giải:

Sử dụng bất đẳng thức tam giác và các biến đổi về bất đẳng thức tam giác

+ Cộng cùng một số vào hai vế của bất đẳng thức: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$.

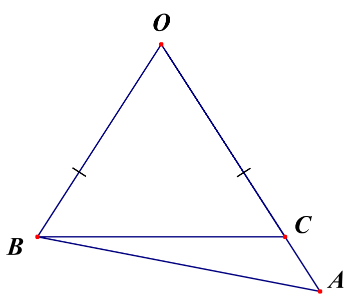
+ Cộng từng vế hai bất đẳng thức cùng chiều:

$$\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d.$$

II. Bài toán.

Bài 1. Cho tam giác OBC cân tại O. Trên tia đối của tia CO lấy điểm A. Chứng minh $AB > AC$
.

Lời giải:



Vì A thuộc tia đối CO nên C nằm giữa $O; A$ $OA > OC$ mà $OB = OC \Rightarrow OA > OB$

Xét tam giác OBA có $AO - OB < AB$ (bất đẳng thức tam giác) $\Rightarrow AC + OC - OB < AB$.

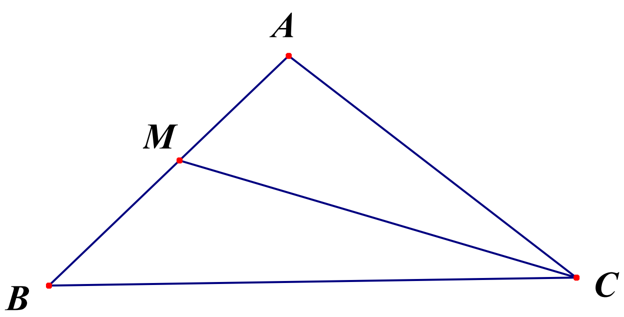
Lại có $OB = OC$ (ΔOBC cân tại O) $\Rightarrow AC < AB$ (điều phải chứng minh).

Bài 2. Cho tam giác ABC, điểm M thuộc cạnh AB.

a) So sánh MC với $AM + AC$.

b) Chứng minh $MB + MC < AB + AC$.

Lời giải:



a) Áp dụng bất đẳng thức tam giác vào tam giác AMC ta có: $MC < AM + AC$.

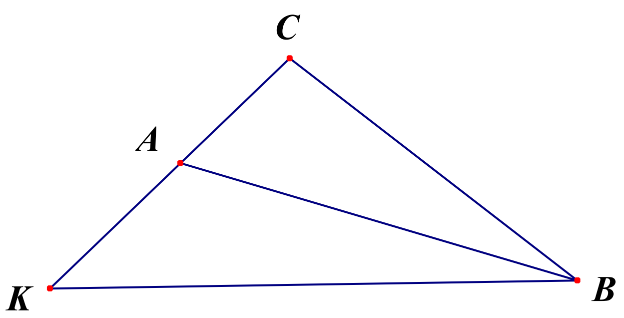
b) Ta có: $MC < AM + AC \Rightarrow MB + MC < MB + MA + AC = AB + AC$

Bài 3. Cho tam giác ABC, trên tia đối của tia AC lấy điểm K.

a) So sánh AB với $KA + KB$.

b) Chứng minh $AB + AC < KB + KC$.

Lời giải:

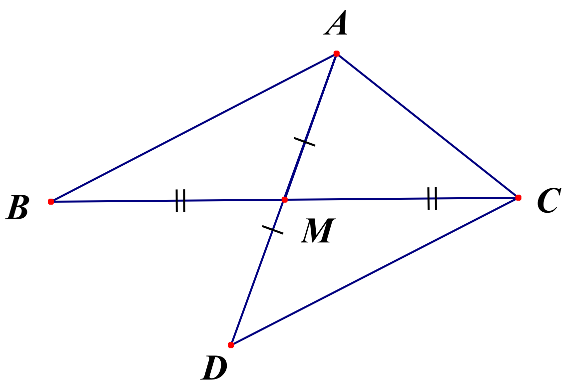


a) Áp dụng bất đẳng thức tam giác vào tam giác AKB ta có: $AB < KA + KB$.

b) Ta có: $AB < KB + \text{KA} \Rightarrow AB + AC < KB + KA + AC = KB + KC$

Bài 4. Cho tam giác ABC, M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng: $AB + AC > 2AM$

Lời giải:



Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MA$.

Xét ΔMAB và ΔMDC có

$MA = MD$

$AMB = DMC$ (đối đỉnh)

$MB = MC$ (giả thiết)

$\Rightarrow \Delta MAB = \Delta MDC$ (c.g.c)

$\Rightarrow AB = DC$ (Hai cạnh tương ứng)

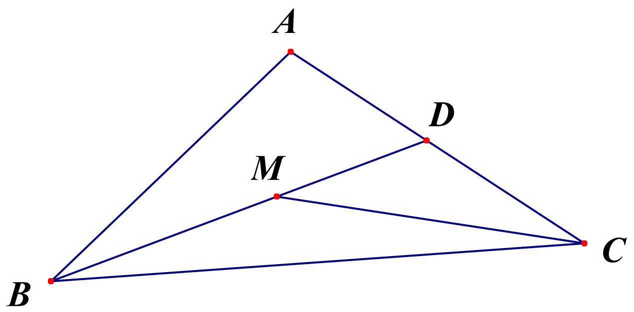
Xét ΔADC có : $CD + AC > AD$ (bất đẳng thức trong tam giác)

Do đó : $AB + AC > AD$ mà $AD = 2.AM$

$\Rightarrow AB + AC > 2AM$ (đpcm)

Bài 5. Cho điểm M nằm trong ΔABC. Chứng minh rằng: $MB + MC < AB + AC$. Từ đó suy ra: $MA + MB + MC < AB + AC + BC$.

Lời giải:



Kẻ BM cắt cạnh AC tại D.

Xét ΔABD có : $BD < AB + AD \Rightarrow MB + MD < AB + AD \quad (1)$

Xét ΔMDC có : $MC < MD + DC \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra :

$MB + MC + MD < AB + AD + DC + MD$

$\Rightarrow MB + MC < AB + AC$

CMTT ta có : $MA + MC < AB + BC$ và $MA + MB < AC + BC$

Do đó : $2.(MA + MB + MC) < 2.(AB + AC + BC)$

$\Rightarrow MA + MB + MC < AB + AC + BC$

Bài 6. Cho tam giác ABC và M là một điểm nằm trong tam giác. Gọi I là giao điểm của đường thẳng BM và cạnh AC. So sánh MA với $MI + IA$.

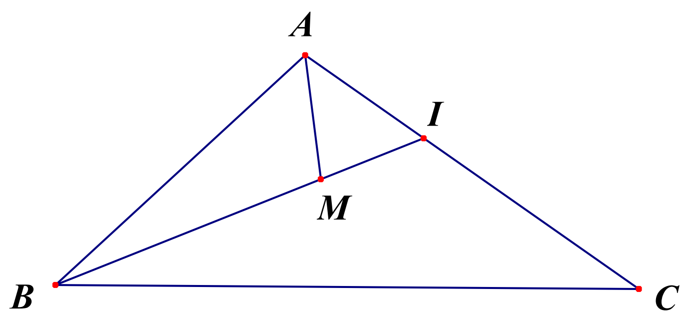
a) So sánh MA với $MI + IA$.

b) Chứng minh rằng $MA + MB < IB + IA$.

c) Chứng minh rằng $IB + IA < CA + CB$.

d) Chứng minh rằng $MA + MB < CA + CB$

Lời giải:



a) Xét ΔAMI, theo bất đẳng thức tam giác, ta có

$MA < MI + IA$

b) Từ câu a), suy ra

$MA + MB < MI + IA + MB$

Do đó, $MA + MB < IA + IB$

c) Xét ΔIBC, theo bất đẳng thức tam giác, ta có

$IB < BC + CI$

Do đó $IA + IB < CA + CB$.

d) Từ câu a) kết hợp câu b) ta được

$MA + MB < CA + CB$

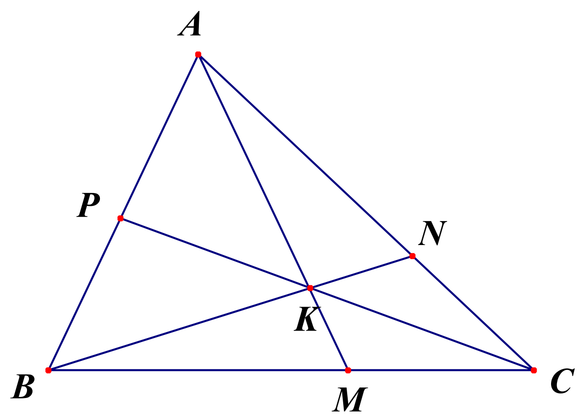
Bài 7. Cho điểm K nằm trong tam giác ABC. Gọi M là giao điểm của tia AK với cạnh BC.

a. Chứng minh rằng $KA + KB < MA + MB < CA + CB$.

b. So sánh $KB + KC$ với $AB + AC$.

c. Chứng minh rằng $KA + KB + KC$ nhỏ hơn chu vi tam giác ABC.

Lời giải:



a. Chứng minh tương tự bài tập 5 ta được

$KA + KB < MA + MB < CA + CB$

b.Gọi N là giao điểm của tia BK với AC.

Tương tự câu a) ta có

$$KB + KC < NB + NC < AB + AC \,. \qquad (1)$$

Do đó, $KB + KC < AB + AC$

c. Gọi P là giao điểm của tia CK với AB.

Ta có, $KA + KC < PA + PC < BA + BC$

Do đó, $KA + KC < BA + BC$. (2)

Từ câu a), suy ra $KA + KB < CA + CB$. (3)

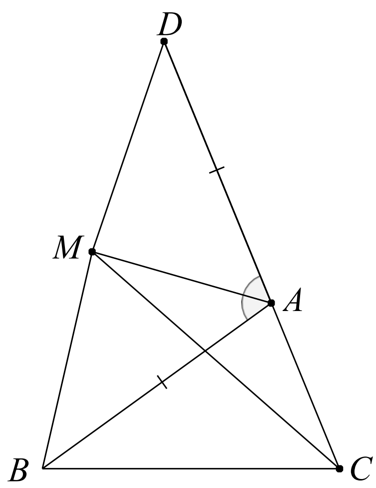
Từ (1), (2) và (3), ta thấy

$2(KA + KB + KC) < 2(AB + AC + BC) \Rightarrow KA + KB + KC < AB + AC + BC$

Vậy tổng $KA + KB + KC$ nhỏ hơn chu vi tam giác ABC.

Bài 8. Cho tam giác ABC. Trên đường phân giác của góc ngoài đỉnh A, lấy điểm M không trùng với A. Chứng minh rằng: $MB + MC > AB + AC$.

Lời giải:



Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho $AB = AD \Rightarrow AB + AC = AD + AC = CD$ (1)

Xét ΔAMB và ΔAMD có: MA: chung; $BAM = DAM$ (AM là tia phân giác của BAD); $MB = MD$ (cách vẽ)

$\Rightarrow \Delta AMB = \Delta AMC$ $(c.g.c)$

$\Rightarrow MB = MD$ (hai cạnh tương ứng)

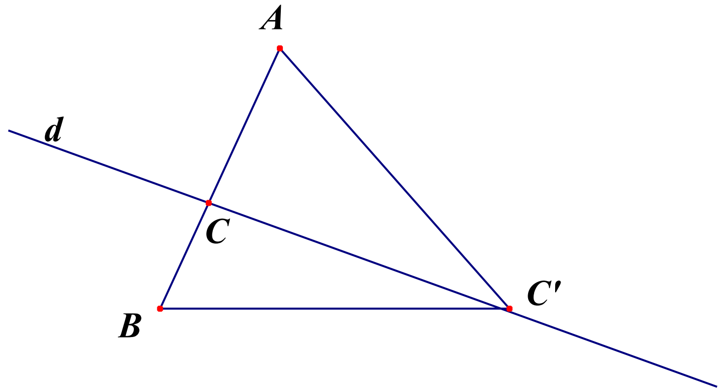
$\Rightarrow MB + MC = MD + MC$ (2)

Xét ΔMCD, ta có: $MC + MD > CD$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $MB + MC > AB + AC$.

Bài 9. Cho hai điểm A và B nằm về hai phía của đường thẳng d. Tìm điểm C thuộc đường thẳng d sao cho tổng $AC + CB$ là nhỏ nhất.

Lời giải:



Giả sử C là giao điểm của đoạn thẳng AB với đường thẳng d.

Vì C nằm giữa A và B nên ta có $AC + CB = AB$. (1)

Lấy điểm C' bất kỳ trên d $(C \neq C')$. Nối AC', BC'.

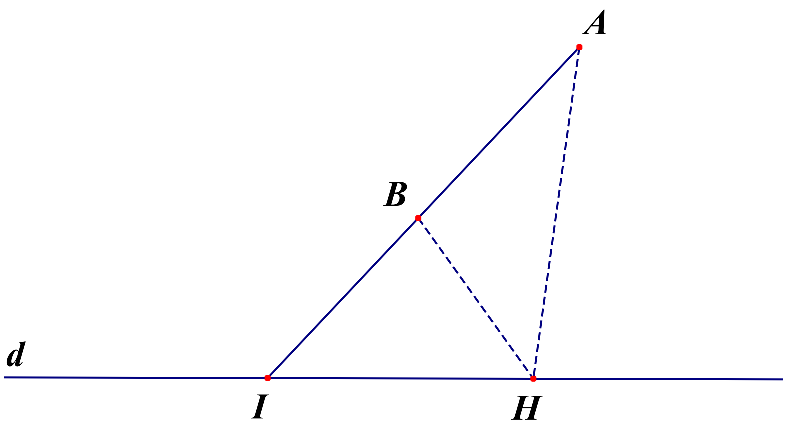
Áp dụng bất đẳng thức tam giác vào $\Delta ABC'$, ta có $AC' + BC' > AB$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AC' + BC' > AC + CB$.

Vậy C là điểm cần tìm.

Bài 10. Cho đường thẳng d và hai điểm A, B nằm cùng về một phía của d và AB không song song với d. Một điểm H di động trên d. Tìm vị trí của H sao cho $|HA - HB|$ là lớn nhất.

Lời giải:



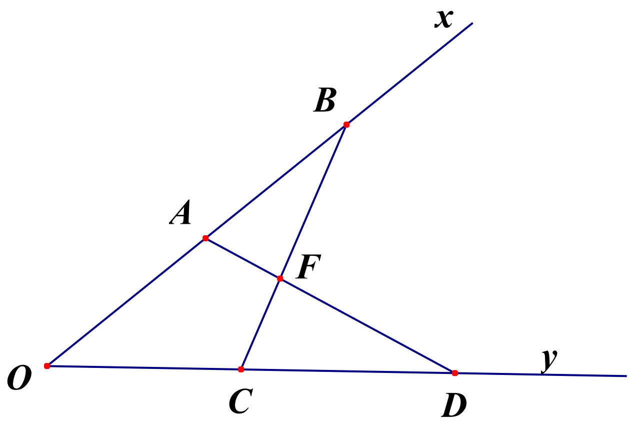
Vì AB không song song với d nên AB cắt d tại I. Với điểm H bất kì thuộc d mà H không trùng với I thì ta có tam giác HAB. Xét tam giác HAB có $|HA - HB| < AB$.

Khi $H \equiv I$ thì $|HA - HB| = AB$.

Vậy $|HA-HB|$ lớn nhất là bằng AB, khi đó $H \equiv I$ là giao điểm của hai đường thẳng d và AB.

Bài 11. Cho góc xOy nhọn, trên Ox lấy hai điểm A và B (điểm A nằm giữa hai điểm O và B). Trên Oy lấy hai điểm C và D (điểm C nằm giữa O và D). Chứng minh $AB+CD< AD+BC$.

Lời giải:



Gọi F là giao điểm của AD và BC.

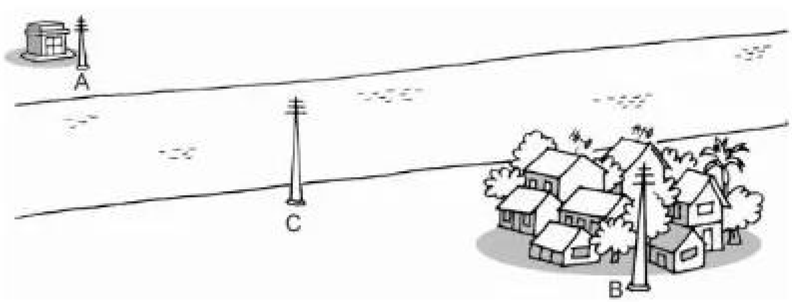
Xét ΔAFB, ta có $AB < AF + FB$ (bất đẳng thức tam giác). (1)

Xét ΔCFD, ta có $CD<CF+FD$ (bất đẳng thức tam giác). (2)

Từ $(1),(2)$ có $AB+CD<AF+FB+CF+FD=AD+BC$

hay $AB+CD<AD+BC$. (điều phải chứng minh).

Bài 12. Một trạm biến áp và một khu dân cư được xây dựng cách xa hai bờ sông tại hai địa điểm A và B. Hãy tìm trên bờ sông gần khu dân cư một địa điểm C để dựng một cột mắc dây đưa điện từ trạm biến áp về cho khu dân cư sao cho độ dài đường dây dẫn là ngắn nhất.



Lời giải:

Nếu $A;B;C$ thẳng hàng thì $AC + BC = AB$

Nếu $A;B;C$ không thẳng hàng thì ta có tam giác ΔABC lúc đó $AC + BC > AB$

Do đó: $AC + BC$ ngắn nhất khi $AC + BC = AB$

$\Rightarrow A, B, C$ thẳng hàng và C nằm giữa $A; B$.

Vậy vị trí đặt một cột mắc dây điện từ trạm về cho khu dân cư sao cho độ dài đường dây dẫn ngắn nhất là C nằm giữa A và B (và A, B, C thẳng hàng)

Phần III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1.

Bài 1. Bộ ba độ dài nào dưới đây có thể tạo thành độ dài của ba cạnh trong tam giác?

a) $6\text{cm};\ 7\text{cm};\ 15\text{cm}$

b) $4,2\text{cm};\ 3,5\text{cm};\ 2,5\text{cm}$

c) $3\text{cm};\ 7,2\text{cm};\ 5\text{cm}$

d) $3\text{m};\ 10\text{m};\ 7\text{m}$

Bài 2. Cho tam giác ABC có cạnh $AB = 2\text{cm}$ và cạnh $BC = 7\text{cm}$. Tính độ dài cạnh AC biết độ dài cạnh AC là một số nguyên tố.

Bài 3. Cho ΔABC cân.

a) Tính AC, BC biết chu vi ΔABC là 23 cm và $AB = 5$ cm.

b) Tính chu vi ΔABC biết $AB = 5\text{cm}, AC = 12\text{cm}$.

Bài 4. Có bao nhiêu tam giác có độ dài hai cạnh là 1cm và 3cm còn độ dài cạnh thứ ba là một số nguyên (đơn vị cm)?

Dạng 2.

Bài 1. Cho góc xOy, Oz là tia phân giác của góc xOy. Từ điểm M ở trong góc xOz vẽ MH vuông góc với Ox (H thuộc Ox), MK vuông góc với Oy (K thuộc Oy). Chứng minh rằng: $MH < MK$.

Bài 2. Cho ΔABC có ($AB < AC$) và AD là phân giác góc A ($D \in BC$). Gọi E là một điểm bất kỳ thuộc cạnh AD (E khác A). Chứng minh $AC - AB > EC - EB$.

Bài 3. Cho ΔABC cân tại A, góc A tù, trên cạnh BC lấy điểm D, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$, trên tia đối của tia CA lấy điểm I sao cho $CI = CA$.

a, Chứng minh rằng: $\Delta ABD = \Delta ICE$ và $AB + AC < AD + AE$.

b, Từ D và E kẻ các đường thẳng cùng vuông góc với BC cắt AB, AI lần lượt tại M và N, Chứng minh rằng: $BM = CN$.

c, Chứng minh rằng: Chu vi ΔABC nhỏ hơn chu vi ΔAMN.

Bài 4. Cho ΔABC vuông tại A, tia phân giác của góc B cắt AC tại D. Chứng minh rằng $BC - BA > DC - DA$.

ĐÁP SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1.

Bài 1.

a) Không vì $15 > 6 + 7$.

b) Có vì $4,2 < 3,5 + 2,5$

c) Có vì $7,2 < 3 + 5$

d) Không vì $10 = 3 + 7$

Bài 2.

Áp dụng tính chất quan hệ ba cạnh của một tam giác vào tam giác ABC ta có:

$|BC - AB| < AC < BC + AB \Rightarrow 5 < AC < 9$

Mà độ dài cạnh AC là một số nguyên tố nên $AC = 7\text{cm}$.

Bài 3.

a) Tính AC, BC biết chu vi ΔABC là 23 cm và $AB = 5$ cm.

Cách 1: Vì là tam giác cân

TH1 : ta có ba cạnh là $5cm$, $5cm$ *và* 13 *cm* không có tam giác có ban cạnh vậy

Th2 : ta có ba cạnh là 5cm,x cm, x cm và chu vi bằng 23cm

Lúc đó 5 $5 + x + x = 23 \Rightarrow x = 9$ thỏa mãn tam giác có ba cạnh này

Vì $AB = 5$ cm.nên $AC = BC = 9$ cm.

Cách 2

* Nếu AB là cạnh bên và ΔABC cân tại A

$\Rightarrow AB = AC = 5$ cm.

$\Rightarrow BC = 13$ cm (không thỏa mãn BĐT tam giác).

* Nếu AB là cạnh bên và ΔABC cân tại B

$\Rightarrow AB = CB = 5$ cm.

$\Rightarrow AC = 13$ cm (không thỏa mãn BĐT tam giác).

*Nếu AB là cạnh đáy thì ΔABC cân tại C

$\Rightarrow AC = BC = (23 - 5) : 2 = 9\text{cm}.$ (Thỏa mãn BĐT tam giác)

Vậy: $AC = BC = 9\text{cm}$

b) Tính chu vi ΔABC biết $AB = 5\text{cm}$, $AC = 12\text{cm}$.

* Nếu $AB = BC = 5\text{cm}$ là cạnh bên

$\Rightarrow AC = 12\text{cm}$ là cạnh đáy

Khi đó $12 > 5 + 5$ (không thỏa mãn BĐT tam giác).

Vậy $AC = BC = 12\text{cm}$ là cạnh bên

$AB = 5\text{cm}$ là cạnh đáy

Chu vi ΔABC là : $12 + 12 + 5 = 29\,(\text{cm})$

Bài 4.

Gọi độ dài cạnh còn lại của tam giác là: $x\,(cm)$.

Theo bất đẳng thức tam giác, ta có: $|1-3| < x < 1+3 \Rightarrow 2 < x < 4$

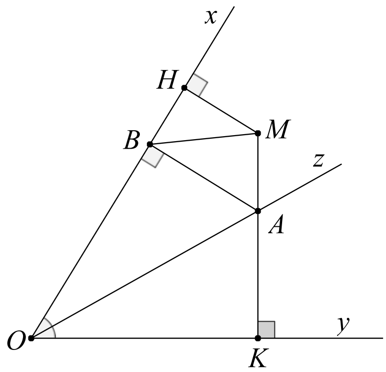
Mà x là một số nguyên nên $x = 3$.

Do đó có 1 tam giác thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 2 .

Bài 1.

Gọi A là giao điểm của MK với Oz. Vẽ AB vuông góc với Ox (B thuộc Ox). Nối B với M



Xét ΔKOA $(K = 90^0)$ và ΔBOA $(B = 90^0)$ có:

OA chung

$KOA = BOA$ (Oz là tia phân giác xOy)

$\Rightarrow \Delta KOA = \Delta BOA$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow AK = AB$ (Hai cạnh tương ứng)

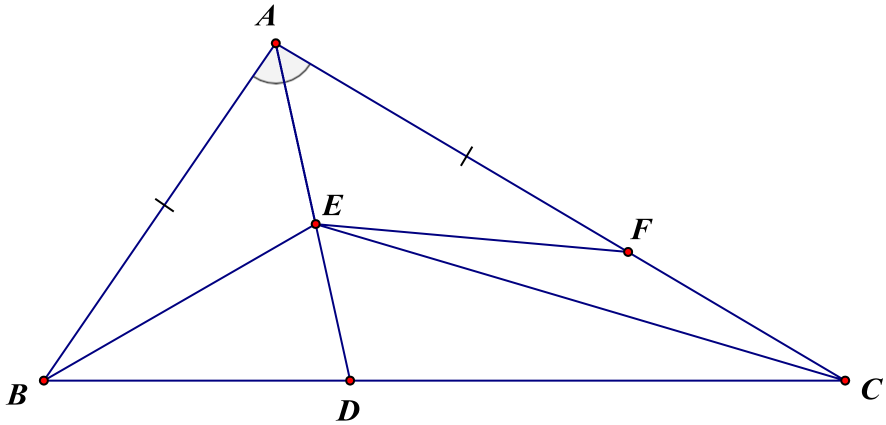
Xét ΔABM có $BM < AB + AM$ (Bất đẳng thức trong tam giác)

Do đó : $BM < AK + AM$ hay $BM < MK$

Mà $MH < BM$ (quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc)

$\Rightarrow MH < MK$ (đpcm)

Bài 2.



Trên cạnh AC lấy điểm F sao cho $AF = AB$.

Xét ΔABE và ΔAFE có $AB = AF;\ BAE = FAE;\ AE$ chung .

Do đó $\Delta ABE = \Delta AFE$ (c.g.c) $\Rightarrow BE = EF.$

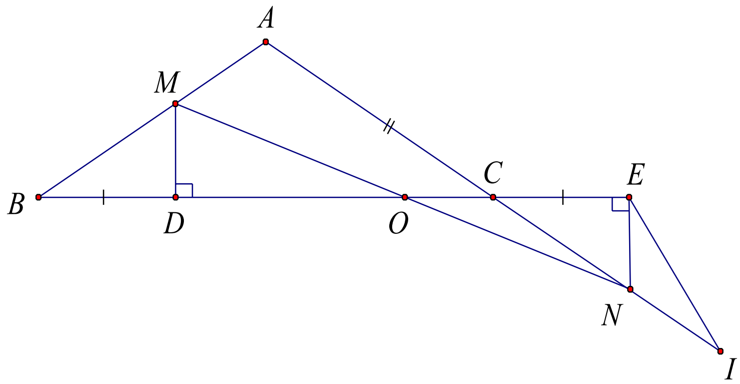
Trong tam giác EFC có $FC > EC - EF$

Mà $BE = EF$ nên $FC > EC - EB\,(1)$

Lại có $FC = AC - AF$ mà $AF = AB$ nên $FC = AC - AB\,(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $AB - AC > EC - EB.$

Bài 3.



a, CM: $\Delta ABD = \Delta ICE$ (c.g.c), Ta có : $AB + AC = AI$

Vì $\Delta ABD = \Delta ICE \Rightarrow AD = EI$

Áp dụng BĐT trong $\Delta AEI: AE + EI > AI$ hay $AE + AD > AB + AC$

b, CM: $\Delta BDM = \Delta CEN$ (g.c.g) $\Rightarrow BM = CN$

c, Vì $BM = CN \Rightarrow AB + AC = AM + AN\ (1)$

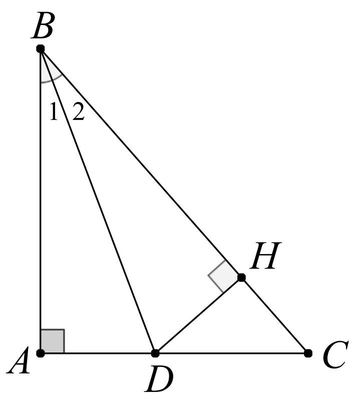
Có $BD = CE$ (gt), $\Rightarrow BC = DE$

Gọi O là giao của MN và BC

$$\Rightarrow \begin{cases} OM > OD \\ ON > OE \end{cases} \Rightarrow MO + ON > OD + OE \Rightarrow MN > DE \Rightarrow MN > BC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có : chu vi của ΔABC nhỏ hơn chu vi của ΔAMN

Bài 4.



Xét ΔADB và ΔHDB có: BD: cạnh huyền chung; $B_1 = B_2$ (BD là tia phân giác của B)

$\Rightarrow \Delta ADB = \Delta HDB$ (cạnh huyền-góc nhọn)

$\Rightarrow BA = BH; DA = DH$ (hai cạnh tương ứng)

Xét ΔHDC vuông tại H có $DC > DH$ và $HC > DC - DH$ (bất đẳng thức tam giác)

Suy ra $BC - BH = HC > DC - DA$ (vì $DH = DA$)

Do đó, $BC - BA > DC - DA$ (vì $BH = BA$)

PHIẾU BÀI TẬP

Dạng 1:

Bài 1. Bộ ba độ dài nào dưới đây có thể tạo thành độ dài của ba cạnh trong tam giác?

a) 6cm; 8cm; 16cm b) 5,5cm; 3,1cm; 2,4cm

d) 13,7cm; 8,2cm; 5,3cm c) 8m; 12m; 7m

Bài 2. Dựa vào bất đẳng thức tam giác, kiểm tra xem bộ ba đoạn thẳng có độ dài cho sau đây có thể tạo thành một tam giác hay không?

a) 3cm, 4cm, 6cm b) 2m, 4m, 8m c) 1cm, 3cm, 4cm

Bài 3. Dựa vào bất đẳng thức tam giác, kiểm tra xem bộ ba đoạn thẳng có độ dài cho sau đây không thể là ba cạnh của một tam giác.

a) 3cm, 3cm, 7cm. b) 6m, 10m, 8m. c) 2m, 6m, 8m.

Bài 4. Một tam giác cân có một cạnh bằng 6 cm. Tính hai cạnh còn lại, biết chu vi của tam giác đó bằng $20\,\text{cm}$.

Bài 5. Cho tam giác ABC có $BC = 1\text{cm}$, AC=7cm.Tìm độ dài cạnh AB biết độ dài này là một số nguyên (cm).

Bài 6. Độ dài hai cạnh của một tam giác bằng 6cm và 2cm. Tính độ dài cạnh còn lại biết rằng số đo của cạnh đó theo cm là một số tự nhiên chẵn.

Bài 7. Cho tam giác ABC có $AB = 4\text{cm},\ AC = 1\text{cm}$. Hãy tìm độ dài cạnh BC biết rằng độ dài này là một số nguyên (cm).

Bài 8. Tính chu vi của tam giác cân có hai cạnh bằng 4m và 8m.

Bài 9. Tính chu vi của tam giác cân có hai cạnh bằng 3cm và 7cm.

Bài 10. Ba cạnh của một tam giác có độ dài bằng $2\frac{1}{2}$, 16, x (đơn vị cm). Tìm x, biết rằng x là số tự nhiên và có giá trị nhỏ nhất có thể.

Bài 11. Tam giác ABC có chu vi 18cm, $BC > AC > AB$. Tính độ dài BC biết rằng độ dài đó là một số chẵn (đơn vị: cm).

Bài 12. Có bao nhiêu tam giác có độ dài hai cạnh là 7cm và 2cm còn độ dài cạnh thứ ba là một số nguyên (đơn vị cm)?

Dạng 2:

Bài 1. Cho tam giác OBC cân tại O. Trên tia đối của tia CO lấy điểm A. Chứng minh $AB > AC$.

Lại có $OB = OC$ (ΔOBC cân tại O) $\Rightarrow AC < AB$ (điều phải chứng minh).

Bài 2. Cho tam giác ABC, điểm M thuộc cạnh AB.

c) So sánh MC với $AM + AC$.
d) Chứng minh $MB + MC < AB + AC$.

Bài 3. Cho tam giác ABC, trên tia đối của tia AC lấy điểm K.

c) So sánh AB với $KA + KB$.
d) Chứng minh $AB + AC < KB + KC$.

Bài 4. Cho tam giác ABC, M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng: $AB + AC > 2AM$

Bài 5. Cho điểm M nằm trong ΔABC. Chứng minh rằng: $MB + MC < AB + AC$. Từ đó suy ra: $MA + MB + MC < AB + AC + BC$.

Bài 6. Cho tam giác ABC và M là một điểm nằm trong tam giác. Gọi I là giao điểm của đường thẳng BM và cạnh AC. So sánh MA với $MI + IA$.

a) So sánh MA với $MI + IA$.

b) Chứng minh rằng $MA + MB < IB + IA$.

c) Chứng minh rằng $IB + IA < CA + CB$.

d) Chứng minh rằng $MA+MB<CA+CB$

Bài 7. Cho điểm K nằm trong tam giác ABC. Gọi M là giao điểm của tia AK với cạnh BC.

a. Chứng minh rằng $KA+KB<MA+MB<CA+CB$.

b. So sánh $KB+KC$ với $AB+AC$.

c. Chứng minh rằng $KA+KB+KC$ nhỏ hơn chu vi tam giác ABC.

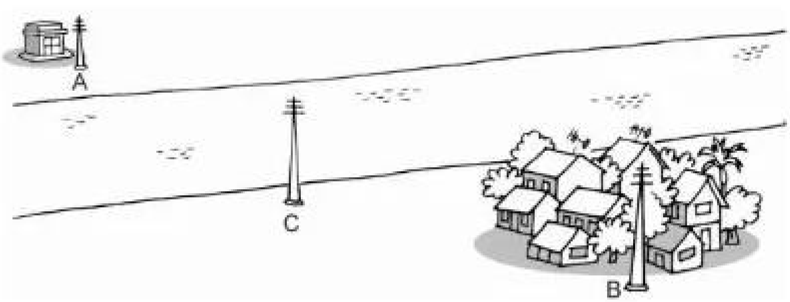
Bài 8. Cho tam giác ABC. Trên đường phân giác của góc ngoài đỉnh A, lấy điểm M không trùng với A. Chứng minh rằng: $MB+MC>AB+AC$.

Bài 9. Cho hai điểm A và B nằm về hai phía của đường thẳng d. Tìm điểm C thuộc đường thẳng d sao cho tổng $AC+CB$ là nhỏ nhất.

Bài 10. Cho đường thẳng d và hai điểm A, B nằm cùng về một phía của d và AB không song song với d. Một điểm H di động trên d. Tìm vị trí của H sao cho $|HA-HB|$ là lớn nhất.

Bài 11. Cho góc xOy nhọn, trên Ox lấy hai điểm A và B (điểm A nằm giữa hai điểm O và B). Trên Oy lấy hai điểm C và D (điểm C nằm giữa O và D). Chứng minh $AB+CD< AD+BC$.

Bài 12. Một trạm biến áp và một khu dân cư được xây dựng cách xa hai bờ sông tại hai địa điểm A và B. Hãy tìm trên bờ sông gần khu dân cư một địa điểm C để dựng một cột mắc dây đưa điện từ trạm biến áp về cho khu dân cư sao cho độ dài đường dây dẫn là ngắn nhất.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1.

Bài 1. Bộ ba độ dài nào dưới đây có thể tạo thành độ dài của ba cạnh trong tam giác?

e) 6cm; 7cm; 15cm

f) 4,2cm; 3,5cm; 2,5cm

g) 3cm; 7,2cm; 5cm

h) 3m; 10m; 7m

Bài 2. Cho tam giác ABC có cạnh $AB=2$cm và cạnh $BC=7$cm. Tính độ dài cạnh AC biết độ dài cạnh AC là một số nguyên tố.

Bài 3. Cho ΔABC cân.

a) Tính AC, BC biết chu vi ΔABC là 23 cm và $AB = 5$ cm.

b) Tính chu vi ΔABC biết $AB = 5$cm, $AC = 12$cm.

Bài 4. Có bao nhiêu tam giác có độ dài hai cạnh là 1cm và 3cm còn độ dài cạnh thứ ba là một số nguyên (đơn vị cm)?

Dạng 2.

Bài 1. Cho góc xOy, Oz là tia phân giác của góc xOy. Từ điểm M ở trong góc xOz vẽ MH vuông góc với Ox (H thuộc Ox), MK vuông góc với Oy (K thuộc Oy). Chứng minh rằng: $MH < MK$.

Bài 2. Cho ΔABC có ($AB < AC$) và AD là phân giác góc A ($D \in BC$). Gọi E là một điểm bất kỳ thuộc cạnh AD (E khác A). Chứng minh $AC - AB > EC - EB$.

Bài 3. Cho ΔABC cân tại A, góc A tù, trên cạnh BC lấy điểm D, trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$, trên tia đối của tia CA lấy điểm I sao cho $CI = CA$.

a, Chứng minh rằng: $\Delta ABD = \Delta ICE$ và $AB + AC < AD + AE$.

b, Từ D và E kẻ các đường thẳng cùng vuông góc với BC cắt AB, AI lần lượt tại M và N, Chứng minh rằng: $BM = CN$.

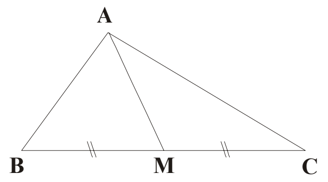
c, Chứng minh rằng: Chu vi ΔABC nhỏ hơn chu vi ΔAMN.

Bài 4. Cho ΔABC vuông tại A, tia phân giác của góc B cắt AC tại D. Chứng minh rằng $BC - BA > DC - DA$.

CHUYÊN ĐỀ 34.1. SỰ ĐỒNG QUY CỦA BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN,

PHẦN I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT.

1. Đường trung tuyến của một tam giác



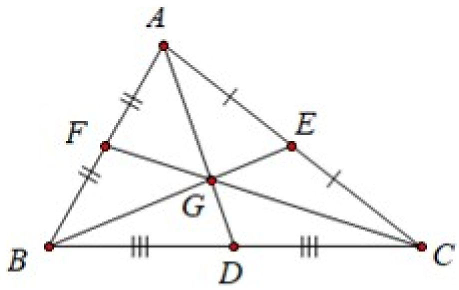
– Đoạn thẳng AM nối đỉnh A của ΔABC với trung điểm M của cạnh BC gọi là đường trung tuyến (xuất phát từ đỉnh A hoặc ứng với cạnh BC) của ΔABC.

– Đường thẳng AM cũng gọi là đường trung tuyến của ΔABC.

– Mỗi tam giác có ba đường trung tuyến.

2. Tính chất đồng quy của ba đường trung tuyến

Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm (hay đồng quy tại một điểm). Điểm gặp nhau của ba đường trung tuyến gọi là trọng tâm của tam giác đó.



3. Vị trí của trọng tâm:

Trọng tâm của một tam giác cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy: $\frac{AG}{AD}=\frac{BG}{BE}=\frac{CG}{CF}=\frac{2}{3}$

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI.

Dạng 1. Sử dụng tính chất trọng tâm của tam giác

I. Phương pháp giải:

Sử dụng linh hoạt các tỉ số liên quan đến trọng tâm tam giác.

II. Bài toán.

Bài 1. Chọn câu sai:

A. Trong một tam giác có ba đường trung tuyến.

B. Các đường trung tuyến của tam giác cắt tại một điểm.

C. Giao của ba đường trung tuyến của một tam giác gọi là trọng tâm của tam giác đó.

D. Một tam giác có hai trọng tâm.

Lời giải

Một tam giác chỉ có một trọng tâm nên D sai.

Chọn đáp án D.

Bài 2. Điền số thích hợp vào chỗ trống: "Trọng tâm của một tam giác cách mỗi đỉnh một khoảng bằng … độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy"

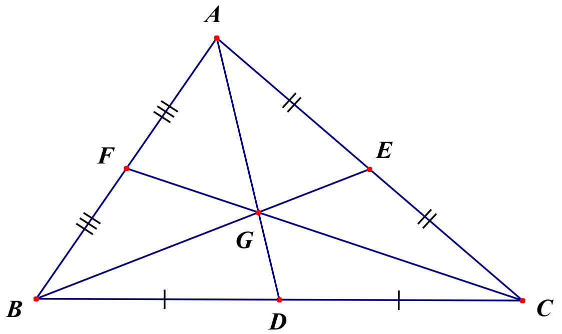
A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{3}{2}$. C. 3. D. 2.

Lời giải

Chọn đáp án A.

Theo tính chất trọng tâm của một tam giác cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy. Số cần điền là $\frac{2}{3}$.

Bài 3. Cho hình vẽ sau. Tính tỉ số $\frac{BG}{BE}$?

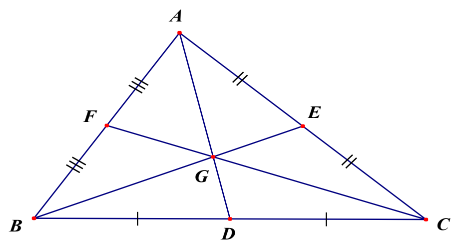


Lời giải

Ta có . AD, BE, CF . là ba đường trung tuyến của tam giác ABC và chúng cắt nhau tại G nên G là trọng tâm của tam giác ABC.

Theo tính chất ba đường trung tuyến của tam giác ta có . $\frac{BG}{BE} = \frac{2}{3}. \Rightarrow BG = \frac{2}{3}BE.$

Bài 4. Cho hình vẽ sau.Tình tỉ số $\frac{AG}{GD}$?



Lời giải

Ta có AD, BE, CF là ba đường trung tuyến của tam giác ABC và chúng cắt nhau tại G nên G là trọng tâm của tam giác ABC.

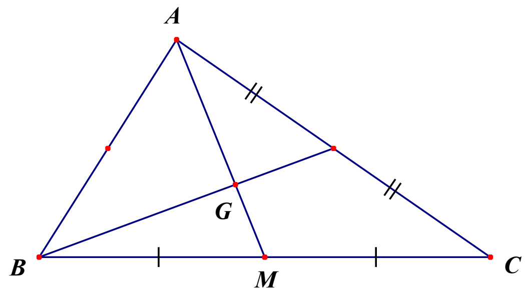
Theo tính chất ba đường trung tuyến của tam giác ta có:

$\dfrac{AG}{AD}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow AG=\dfrac{2}{3}AD\Rightarrow GD=AD-AG=AD-\dfrac{2}{3}AD=\dfrac{1}{3}AD$

$\Rightarrow\dfrac{AG}{GD}=\dfrac{\dfrac{2}{3}AD}{\dfrac{1}{3}AD}=2\Rightarrow AG=2GD.$

Bài 5. Tam giác ABC có trung tuyến $AM=9\text{cm}$ và trọng tâm G. Tính độ dài đoạn AG?

Lời giải

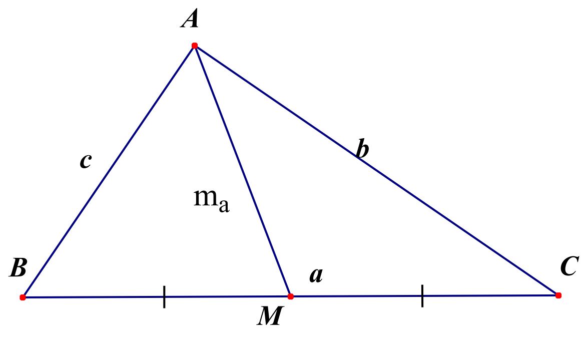


Vì G là trọng tâm của tam giác ABC và AM là đường trung tuyến, nên $AG=\dfrac{2}{3}AM$ (Tính chất ba đường trung tuyến của tam giác), do đó: $AG=\dfrac{2}{3}.9=6\text{cm}$.

Bài 6. Cho $\Delta ABC, BC=a, CA=b, AB=c.$ Kẻ trung tuyến $AM.$ Đặt $AM=m_a$.

Chứng minh rằng $\dfrac{b+c-a}{2}<m_a<\dfrac{b+c}{2}$

Lời giải



Với ΔAMB ta có: $AM+MB>AB$ (1)

Với ΔAMC ta có: $AM+MC>AC$ (2)

Cộng từng vế của (1) *và* (2) ta được: $2AM+(MB+MC)>AB+AC$

Hay $2m_a+a>b+c\ \Rightarrow m_a>\dfrac{b+c-a}{2}$

Chứng minh tương tự ta có $m_a<\dfrac{b+c}{2}$

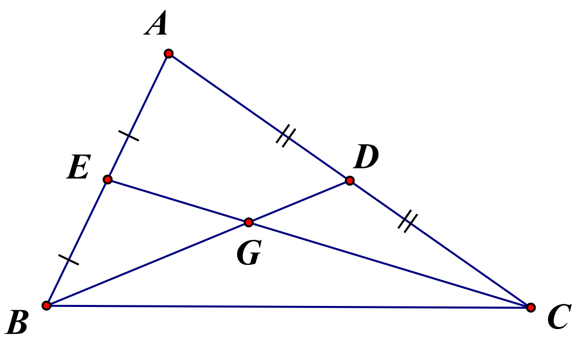
Khi đó ta có: $\frac{b+c-a}{2} < m_a < \frac{b+c}{2}$

Bài 7. Cho ΔABC có hai đường trung tuyến $BD,\ CE$

a) Tính các tỉ số $\frac{BG}{BD},\frac{CG}{CE}$

b) Chứng minh . $BD + CE > \frac{3}{2}BC$.

Lời giải



Gọi giao điểm của hai đường trung tuyến $BD,\ CE$ là G.

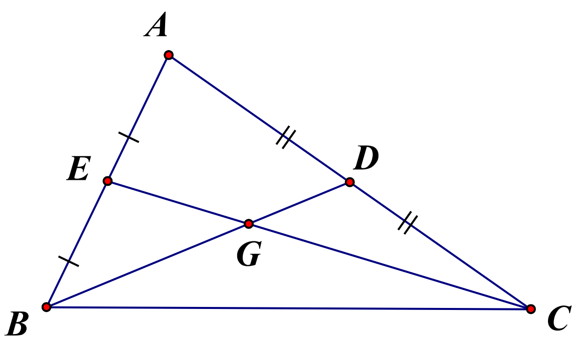
ΔGBC có: $GB + GC > BC$ (bất đẳng thức tam giác).

Mà $GB = \frac{2}{3}BD$, $GC = \frac{2}{3}CE$ nên: $\frac{2}{3}BD + \frac{2}{3}CE > BC$.

Do đó $BD + CE > \frac{3}{2}BC$.

Bài 8. Cho ΔABC có $BC = 8\,cm$, các đường trung tuyến $BD,\ CE$ cắt nhau tại G. Chứng minh $BD + CE > 12\,cm$.

Lời giải



ΔGBC có: $GB + GC > BC$ (bất đẳng thức tam giác).

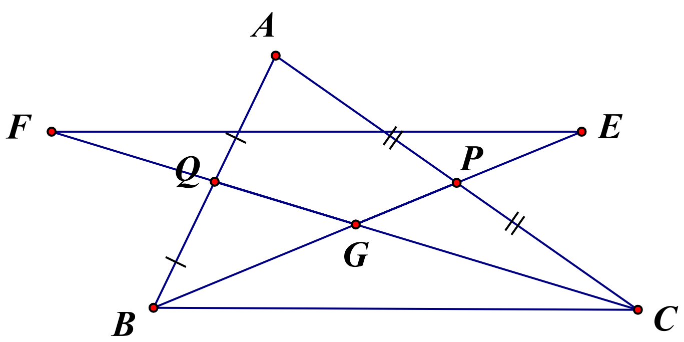
Mà $GB = \frac{2}{3}BD$, $GC = \frac{2}{3}CE$ nên: $\frac{2}{3}BD + \frac{2}{3}CE > BC$.

Do đó $BD + CE > \frac{3}{2}BC = \frac{3}{2}.8 = 12$.

Bài 9. Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến BP, CQ cắt nhau tại G. Trên tia đối của tia $.PB$. lấy điểm E sao cho $PE = PG$. Trên tia đối của tia QG lấy điểm F sao cho $QF = QG$. Chứng minh:

a) $GB = GE$, $GC = GE$;   b) $EF = BC$ và $EF//BC$.

Lời giải



a) Vì G là trọng tâm ΔABC nên $BG = 2GP$, $CG = 2GQ$.

Lại có $PE = PG$, $QF = QG$ nên $GE = 2GP$, $GF = 2GQ$.

Do đó $BG = GE, CG = GF$.

b) Suy ra $\Delta GBC = \Delta GEF$ (c.g.c)

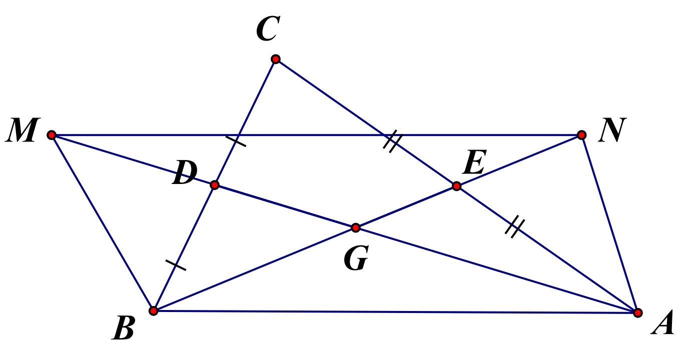
Từ đó ta có $EF = BC$ và $GEF = GBC$

$\Rightarrow EF // BC$.

Bài 10. Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến AD, BE cắt nhau tại G. Trên tia đối của tia DG lấy điểm M sao cho D là trung điểm của đoạn thẳng MG. Trên tia đối của tia EG lấy điểm N sao cho E là trung điểm GN. Chứng minh:

a) $GN = GB$, $GM = GA$;   *b)* $AN = MB$ và $AN // MB$.

Lời giải



a) Vì G là trọng tâm ΔABC nên $BG = 2GE$, A$G = 2GD$.

Lại có $GN = 2GE$, $GM = 2GD$.(D, E lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng MG, GN)

Do đó $GN = GB$, $GM = GA$;

b) Suy ra $\Delta GBM = \Delta GNA$ (c.g.c)

Từ đó ta có $AN = MB$ và $GMB = GAN$

$\Rightarrow AN // MB$.

Dạng 2. Chứng minh một điểm là trọng tâm của tam giác

I. Phương pháp giải:

Để chứng minh một điểm là trọng tâm của tam giác, ta có thể dùng một trong hai cách sau:

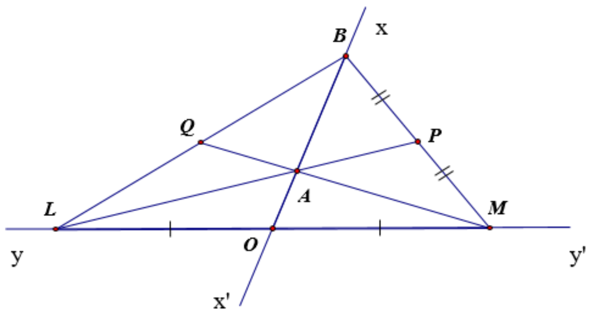
+ Chứng minh điểm đó là giao điểm của hai đường trung tuyến trong tam giác.

+ Chứng minh điểm đó thuộc mộtđường trung tuyến của tam giác và thỏa mãn một trong các tỉ lệ về tính chất trọng tâmcủa tam giác.

II. Bài toán.

Bài 1. Cho hai đường thẳng xx' và yy' cắt nhau tại O. Trên tia Ox lấy hai điểm A, B sao cho A nằm giữa O và $B, AB = 2OA$. Trên yy' lấy hai điểm L và M sao cho O là trung điểm của LM. Nối B với L, B với M và gọi P là trung điểm của đoạn MB, Q là trung điểm của đoạn LB. Chứng minh rằng các đoạn thẳng LP và MQ đi qua A.

Lời giải



Ta có O là trung điểm của đoạn LM. Suy ra BO là đường trung tuyến của ΔBLM (1)

Mặt khác $BO = BA + AO$ vì A nằm giữa O và B hay $OB = 2OA + OA = 3OA$

Suy ra $BA = \dfrac{2}{3}BO$ (2)

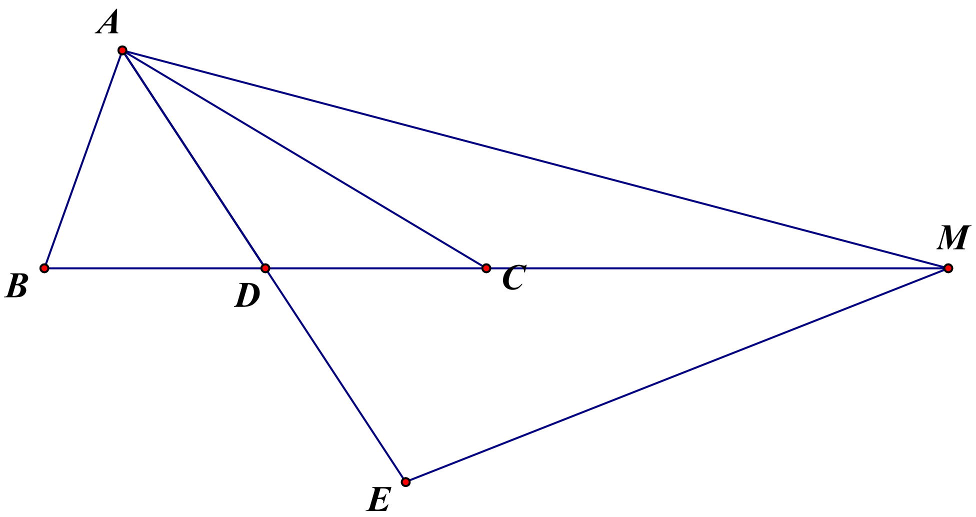
Từ $(1),(2)$ suy ra A là trọng tâm của ΔBLM

Mà LP và MQ là các đường trung tuyến của ΔBLM (vì P là trung điểm MB và O là trung điểm của đoạn LM)

Suy ra các đoạn thẳng LP và MQ đi qua A (theo tính chất ba đường trung tuyến)

Bài 2. Cho ΔABC với đường trung tuyến AD. Trên tia AD lấy điểm E sao cho $AD = DE$, trên tia BC lấy điểm M sao cho $BC = CM$. Chứng minh C là trọng tâm của ΔAEM.

Lời giải



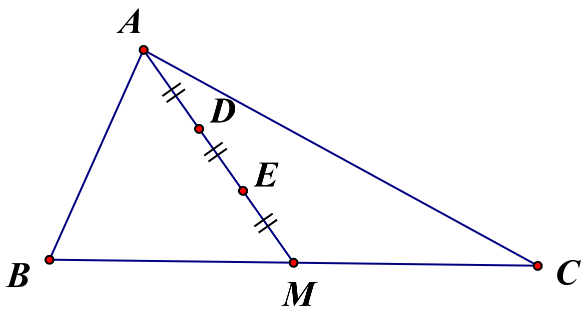
Theo đề bài ta có $AD = DE$ nên C thuộc MD là đường trung tuyến của tam giác AEM (1)

Mặt khác ta có $BC = 2CD$ và $BC = CM$ nên $CM = 2CD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra C là trọng tâm của $\Delta\ AEM$.

Bài 3. Cho ΔABC. Trên đường trung tuyến AM của tam giác đó, lấy hai điểm D, E sao cho $AD = DE = EM$. Chứng minh E là trọng tâm của ΔABC.

Lời giải

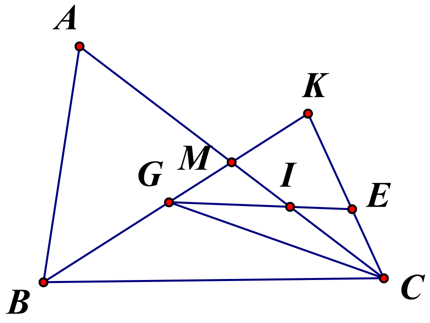


Từ giả thiết $AD = DE = EM$ ta có $AE = \frac{2}{3}AM$.

Mà E thuộc trung tuyến AM nên E là trọng tâm của ΔABC.

Bài 4. Cho ΔABC. Vẽ trung tuyến BM. Trên tia BM lấy hai điểm G, K sao cho $BG = \frac{2}{3}BM$ và G là trung điểm của BK. Gọi E là trung điểm CK; GE cắt AC tại I. Chứng minh: I là trọng tâm của ΔKGC.

Lời giải



Theo đề bài $BG = \frac{2}{3}BM$. Suy ra $BG = 2GM \Rightarrow GK = 2GM$

$\Rightarrow M$ là trung điểm GK .

Do đó I là giao điểm ba đường trung tuyến trong ΔKGC .

Dạng 3. Vấn đề đường trung tuyến trong tam giác vuông, tam giác cân, tam giác đều

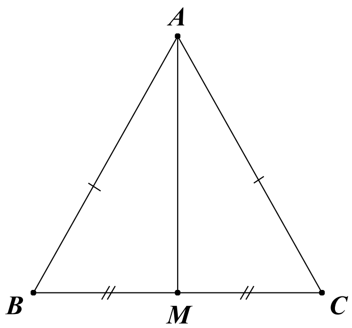
I. Phương pháp giải:

Chú ý những tính chất của tam giác vuông, tam giác cân, tam giác đều.

II. Bài toán.

Bài 1. Cho tam giác ABC cân tại A**,** trung tuyến AM**.** Chứng minh rằng AM vuông góc với BC**.**

Lời giải



Xét ΔABM và ΔABM có:

$AB = AC\,(GT)$

$BM = CM\,(GT)$

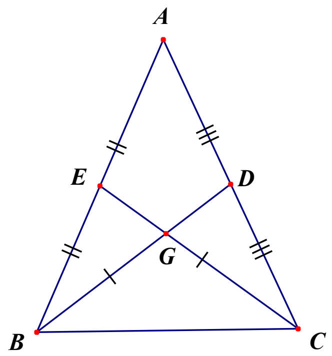
AM : cạnh chung

$\Rightarrow \Delta ABM = \Delta ACM\ (c-c-c) \Rightarrow AMB = AMC$ (Hai góc tương ứng)

Mà $AMB + AMC = 180^\circ$ nên $AMB = AMC = 90^\circ$ hay $AM \perp BC$

Bài 2. Cho ΔABC có các đường trung tuyến $BD\ và\ CE$ bằng nhau. Chứng minh rằng ΔABC là tam giác cân.

Lời giải



Gọi G là giao điểm của BD và $CE \Rightarrow BG = \frac{2}{3}BD\,;\,CG = \frac{2}{3}CE$

Do $BD = CE$ nên $BG = CG\,;\,GD = GE \Rightarrow \Delta BGE = \Delta CGD$ (c.g.c) $\Rightarrow BE = CD$

Ta lại có: $BE = \frac{1}{2}AB\,;\,CD = \frac{1}{2}CA$

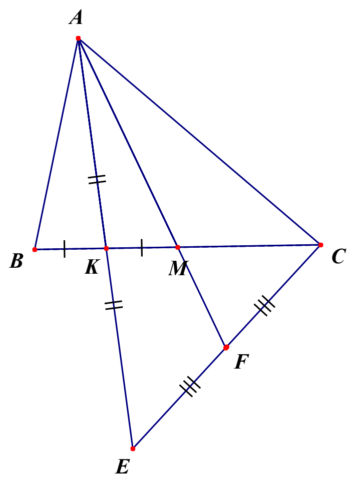
Do đó $AB = AC \;\Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A

Bài 3. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến Gọi K là trung điểm của BM. Trên tia đối của tia lấy KA điểm E sao cho $KE = KA$.

a) Điểm M là trọng tâm của tam giác nào? Vì sao?

b) Gọi F là trung điểm của CE. Chứng minh rằng ba điểm A, M, F thẳng hàng.

Lời giải



Xét ΔACE, ta có: $KA = KE(gt) \Rightarrow CK$ là đường trung tuyến

Mà $CM = \frac{2}{3}CK$ nên M là trọng tâm ΔACE.

Do F là trung điểm của $EC(gt)$ nên AF là đường trung tuyến thứ ba của ΔACE

Mà M là trọng tâm nên AF đi qua M

Hay ba điểm A, M, F thẳng hàng.

Bài 4. Cho ΔABC vuông tại A, trung tuyến AM. Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MA$.

a) Tính ABD

b) Chứng minh $\Delta ABD = \Delta BAC$.

c) Chứng minh $AM = \frac{1}{2}BC$

Lời giải

a) $\Delta AMC = \Delta DMB$ (c.g.c)

$\Rightarrow ADB = DAC \Rightarrow BD // AC$ Mà $AB \perp AC$ nên $AB \perp BD$

$\Rightarrow ABD = 90^o$.

b) $\Delta ABD = \Delta BAC$ (c.g.c).

c) $\Delta ABD = \Delta BAC$ (c.g.c) $\Rightarrow AD = BC$.

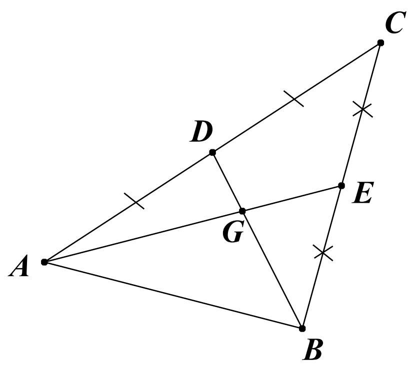
Mà $AM = \frac{1}{2}AD \Rightarrow AM = \frac{1}{2}BC$

Phần III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Sử dụng tính chất trọng tâm của tam giác

Bài 1. Cho hình 1. Điền số thích hợp vào chỗ trống :

$GD = ...BD;\ AG = ...GE;$
$GD = ...BG;\ AE = ...AG;$
$AE = ...GE.$



Hình 1

Bài 2. Cho tam giác ABC, các đường trung tuyến BD và CE cắt nhau ở G. Cho biết $BD < CE$. Hãy so sánh GBC và GCB.

Dạng 2. Chứng minh một điểm là trọng tâm của tam giác

Bài 1. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm BM. Trên tia đối của tia IA lấy điểm E sao cho $IE = IA$.

a) Điểm M là trọng tâm của tam giác nào?

b) Gọi F là trung điểm của CE. Chứng minh rằng ba điểm A, M, F thẳng hàng.

Bài 2. Cho ΔABC, M là trung điểm AC. Trên đoạn BM lấy điểm K sao cho $KM = \frac{1}{2}KB$. Điểm H thuộc tia đối của tia MK sao cho $BH = 2BK$. Gọi I là điểm thuộc cạnh AC và $IC = \frac{1}{3}CA$. Đường KI cắt HC ở E.

a) Chứng minh I là trọng tâm của ΔHKC và E là trung điểm của HC.

b) Tính các tỉ số $\frac{IE}{IK}, \frac{IC}{MC}$. Chứng minh ba điểm H, I, F thẳng hàng (I là trung điểm KC)

Bài 3. Cho hai đoạn thẳng AC và BD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đoạn. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD. Đoạn thẳng AM, AN cắt BD lần lượt tại I và K. Chứng minh:

a) I là trọng tâm của ΔABC và K là trọng tâm của $\Delta\ ADC$;

b) $BI = IK = KD$.

Bài 4. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến BD. Trên tia đối của tia DB lấy điểm E sao cho $DE = BD$. Gọi P, Q lần lượt là điểm trên BE sao cho $BP = PQ = QE$. Chứng minh:

a) CP, CQ cắt AB, AE tại trung điểm của AB, AE.

b) $CP // AQ$ và $CQ // AP$.

Dạng 3. Vấn đề đường trung tuyến trong tam giác vuông, tam giác cân, tam giác đều

Bài 1. Cho tam giác . ABC. cân tại A. Trên đường trung tuyến BD lấy điểm E sao cho $DAE = ABD.$ Chứng minh rằng $DAE = ECB.$

Bài 2. Cho tam giác ABC có các đường trung tuyến BD và CE bằng nhau. Chứng minh rằng : ΔABC là tam giác cân.

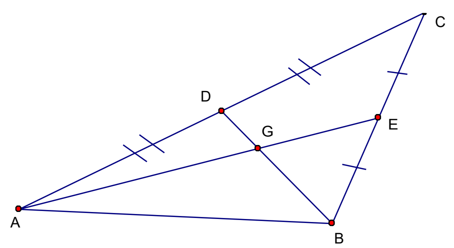
Bài 3. Cho ΔABC có ba đường trung tuyến AM, BN, CP cắt nhau tại G. Biết $AM = BN = CP$. Chứng mình ΔABC đều.

Bài 4. Cho ΔABC có ba đường trung tuyến AM, BN, CP cắt nhau tại G. Biết $AG = BG = CG$. Chứng minh ΔABC đều.

ĐÁP SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Sử dụng tính chất trọng tâm của tam giác

Bài 1.



$GD = \frac{1}{3}BD; AG = 2GE;$

$GD = \frac{1}{2}BG; AE = \frac{3}{2}AG;$

$AE = 3GE.$

Hình 1

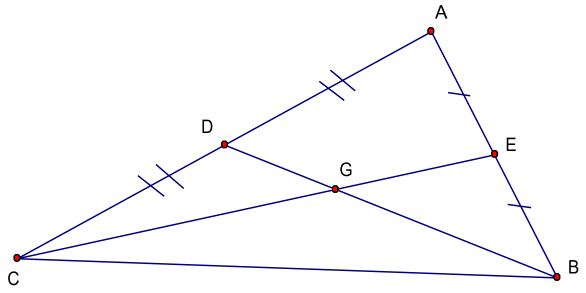
Bài 2. Hình 2.

Xét ΔABC có

BD và CE là 2 đường trung tuyến cắt nhau tại G (gt)

$\Rightarrow BG = \frac{2}{3}BD; CG = \frac{2}{3}CE$ (Tính chất ba đường trung tuyến của tam giác).

Mà $BD < CE$ (gt) $\Rightarrow BG < CG$.



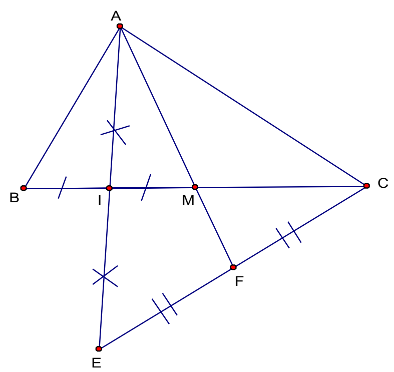
Hình 2

Xét Δ CGB có $BG < CG$ (cmt) $\Rightarrow GBC > GCB$ (Quan hệ giữa góc và cạnh trong một tam giác).

Vậy $GBC > GCB$.

Dạng 2 . Chứng minh một điểm là trọng tâm của tam giác

Bài 1. Hình 4.



Hình 4

a) Vì AM là đường trung tuyến của BC (gt)

$\Rightarrow BM = CM$ (Tính chất đường trung tuyến).

Mà $BI = IM = \frac{1}{2}BM$ (vì I là trung điểm của BM)

$\Rightarrow CM = 2IM$ $\Rightarrow CM = 2(CI - CM) \Rightarrow CM = \frac{2}{3}CI$.

Xét ΔACE có

CI là đường trung tuyến (vì $AI = IE$);

$CM = \frac{2}{3}CI$

Vậy M là trọng tâm của ΔACE (tính chất ba đường trung tuyến của tam giác)

b) Xét ΔACE có

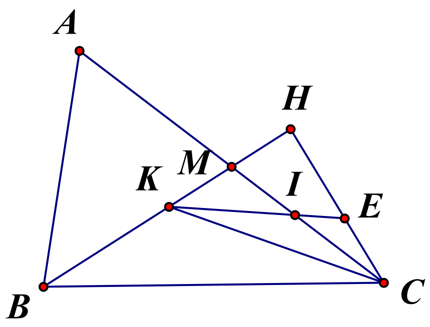
AF là đường trung tuyến của CE (vì F là trung điểm của CE);

M là trọng tâm của ΔACE

$\Rightarrow AF$ đi qua điểm M (tính chất ba đường trung tuyến của tam giác)

Vậy A, F, M thẳng hàng

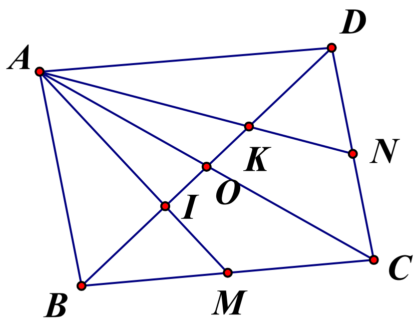
Bài 2.



a) M là trung điểm KH. Suy ra I là trọng tâm của ΔHKC. Suy ra KI là trung tuyến ΔHKC.

b) $\frac{IE}{IK} = \frac{1}{2}, \frac{IC}{MC} = \frac{2}{3}$. Suy ra HI cũng là trung tuyến ΔHKC.

Bài 3.



a) ΔABC có hai đường trung tuyến BO, AM cắt nhau tại I nên I là trọng tâm của ΔABC.

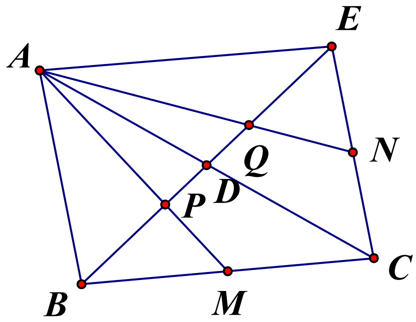
Tương tự ta có K là trọng tâm của ΔADC.

b) Từ ý a) suy ra ta có: $BI = \frac{2}{3}BO$, DK = $\frac{2}{3}$ DO

Mặt khác $BO = DO \Rightarrow BI = DK = \frac{2}{3}BO = \frac{1}{3}BD \Rightarrow IK = \frac{1}{3}BC$.

Do đó $BI = IK = KD$.

Bài 4.

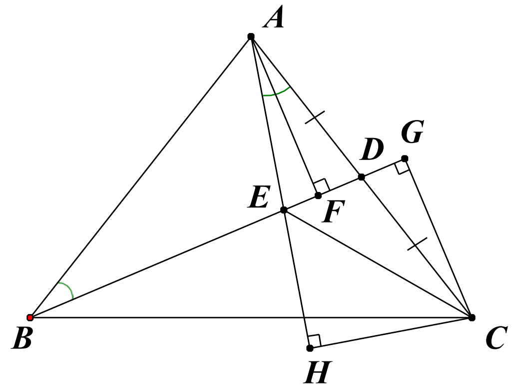


a) Chứng minh được P,Q lần lượt là trọng tâm ΔABC, ΔAEC.Suy ra ĐPCM.

b) Chú ý $\Delta ADP = \Delta CQD$ và $\Delta ADQ = \Delta CDP$.

Dạng 3. Vấn đề đường trung tuyến trong tam giác vuông, tam giác cân, tam giác đều

Bài 1. Hình 5.



Vẽ $AF \perp BD, CG \perp BD, CH \perp AE$.

Vì ΔABC cân tại A (gt) nên $AB = AC$, $ABC = ACB$.

Xét ΔABF vuông và ΔCAH vuông có

$$\left.\begin{array}{l} AB = AC \\ ABF = CAH \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABF = \Delta CAH$$ (cạnh huyền – góc nhọn),

Suy ra $AF = CH$ (hai cạnh tương ứng) (1).

Do BD là đường trung tuyến của ΔABC nên $AD = CD$.

Xét ΔADF vuông và ΔCDG vuông có

$$\left.\begin{array}{l} AD = CD \\ ADF = CDG \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ADF = \Delta CDG$$ (cạnh huyền – góc nhọn),

Suy ra $AF = CG$ (hai cạnh tương ứng) (2).

Từ (1) và (2) suy ra $CH = CG$.

Xét ΔCEH vuông và ΔCEG vuông có

$CH = CG$ (cmt); EC chung

$\Rightarrow \Delta CEH = \Delta CEG$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông), Suy ra $CEH = CEG$ (hai góc tương ứng).

Ta có $CEG = EBC + ECB$ (vì CEG là góc ngoài của ΔBEC),

$CEH = EAC + ECA$ (vì CEH là góc ngoài của ΔAEC),

Do đó $EBC + ECB = EAC + ECA$ (3).

Mặt khác, $EBA + EBC = ECB + ECA$ (vì $ABC = ACB$) (4)

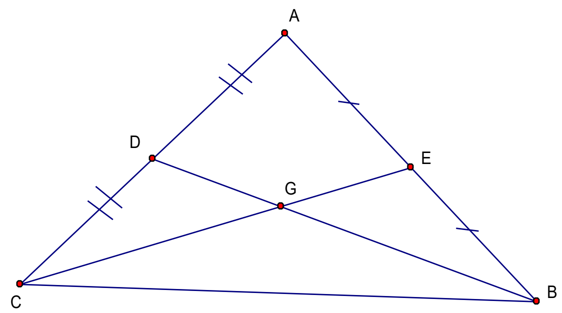
Lấy (3) trừ (4) theo từng vế và do $EAC = EBA$ (gt), ta được :

$ECB - EBA = EBA - ECB \Rightarrow EBA = ECB.$

Mà $DAE = ABD$ (gt)

Vậy $DAE = ECB.$

Bài 2. Hình 3.



Hình 3

Gọi G là giao điểm của BD và CE nên $EGB = DGC$ (Hai góc đối đỉnh).

Xét ΔABC có BD và CE là 2 đường trung tuyến cắt nhau tại G (gt)

$\Rightarrow BG = \frac{2}{3}BD, CG = \frac{2}{3}CE$ (Tính chất ba đường trung tuyến của tam giác).

Do $BD = CE$ nên $BG = CG, GD = GE$

Xét ΔBGE và ΔCGD có :

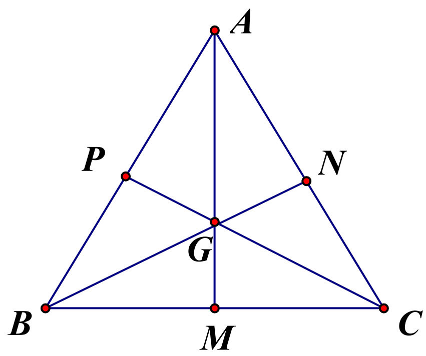
$$\left.\begin{array}{l} GE = GD \\ EGB = DGC \\ BG = CG \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta BGE = \Delta CGD \text{ (c.g.c)}$$

$\Rightarrow BE = CD$ (Hai cạnh tương ứng)

Ta có $BE = \frac{1}{2}AB, CD = \frac{1}{2}AC$ (vì BD và CE là 2 đường trung tuyến)

$\Rightarrow AB = AC.$ Vậy ΔABC là tam giác cân.

Bài 3.



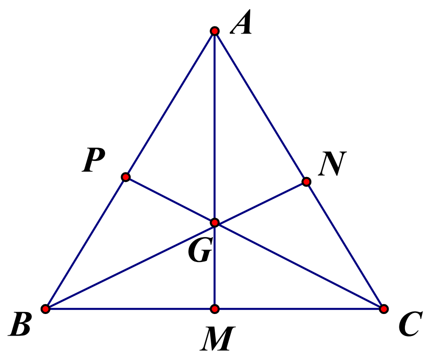
Ta có $BN = CP$ nên $GB = GC, GP = GN$.

Ta chứng minh $AB = AC$. Tương tự, ta có $AB = BC$.

Vậy $AB = BC = CA$.

Suy ra ΔABC đều.

Bài 4.



Ta có $AG = BG = CG$ và $AG = \frac{2}{3}AM$, $BG = \frac{2}{3}BN$, $CG = \frac{2}{3}CP$

$\Rightarrow AM = BN = CP$. Tương tự Bài 3 suy ra ĐPCM.

PHIẾU BÀI TẬP

Dạng 1. Sử dụng tính chất trọng tâm của tam giác

Bài 1. Chọn câu sai:

A. Trong một tam giác có ba đường trung tuyến.

B. Các đường trung tuyến của tam giác cắt tại một điểm.

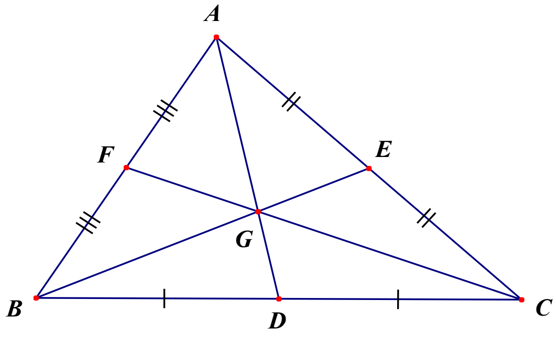
C. Giao của ba đường trung tuyến của một tam giác gọi là trọng tâm của tam giác đó.

D. Một tam giác có hai trọng tâm.

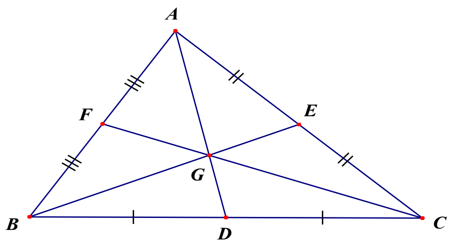
Bài 2. Điền số thích hợp vào chỗ trống: "Trọng tâm của một tam giác cách mỗi đỉnh một khoảng bằng … độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy"

A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{3}{2}$. C. 3. D. 2.

Bài 3. Cho hình vẽ sau. Tính tỉ số $\dfrac{BG}{BE}$?



Bài 4. Cho hình vẽ sau.Tình tỉ số $\dfrac{AG}{GD}$?



Bài 5. Tam giác ABC có trung tuyến $AM = 9\text{cm}$ và trọng tâm G. Tính độ dài đoạn AG?

Bài 6. Cho $\Delta ABC, BC = a, CA = b, AB = c$. Kẻ trung tuyến AM. Đặt $AM = m_a$.

Chứng minh rằng $\dfrac{b+c-a}{2} < m_a < \dfrac{b+c}{2}$

Bài 7. Cho ΔABC có hai đường trung tuyến BD, CE

a) Tính các tỉ số $\dfrac{BG}{BD}, \dfrac{CG}{CE}$

b) Chứng minh $BD + CE > \dfrac{3}{2}BC$

Bài 8. Cho ΔABC có $BC = 8\,cm$, các đường trung tuyến BD, CE cắt nhau tại G. Chứng minh $BD + CE > 12\,cm$.

Bài 9. Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến BP, CQ cắt nhau tại G. Trên tia đối của tia PB lấy điểm E sao cho $PE = PG$. Trên tia đối của tia QG lấy điểm F sao cho $QF = QG$. Chứng minh:

a) $GB = GE, GC = GE$; b) $EF = BC$ và $EF // BC$.

Bài 10. Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến AD, BE cắt nhau tại G. Trên tia đối của tia DG lấy điểm M sao cho D là trung điểm của đoạn thẳng MG. Trên tia đối của tia EG lấy điểm N sao cho E là trung điểm GN. Chứng minh:

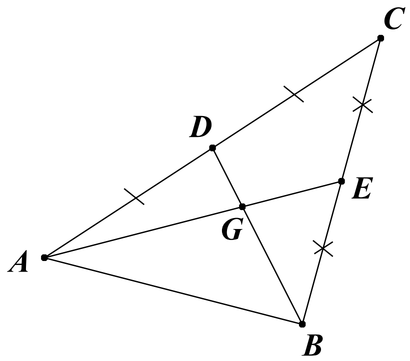
a) $GN = GB, GM = GA$; *b)* $AN = MB$ và $AN // MB$.

Bài 11. Cho hình 1. Điền số thích hợp vào chỗ trống :

$GD = ...BD; AG = ...GE;$

$GD = ...BG; AE = ...AG;$

$AE = ...GE.$



Hình 1

Bài 12. Cho tam giác ABC, các đường trung tuyến BD và CE cắt nhau ở G. Cho biết $BD < CE$. Hãy so sánh GBC và GCB.

Dạng 2.Chứng minh một điểm là trọng tâm của tam giác

Bài 1. Cho hai đường thẳng xx' và yy' cắt nhau tại O. Trên tia Ox lấy hai điểm A, B sao cho A nằm giữa O và $B, AB = 2OA$. Trên yy' lấy hai điểm L và M sao cho O là trung điểm của LM. Nối B với L, B với M và gọi P là trung điểm của đoạn MB, Q là trung điểm của đoạn LB. Chứng minh rằng các đoạn thẳng LP và MQ đi qua A.

Bài 2. Cho ΔABC với đường trung tuyến AD. Trên tia AD lấy điểm E sao cho $AD = DE$, trên tia BC lấy điểm M sao cho $BC = CM$. Chứng minh C là trọng tâm của $\Delta\ AEM$.

Bài 3. Cho ΔABC. Trên đường trung tuyến AM của tam giác đó, lấy hai điểm D, E sao cho $AD = DE = EM$. Chứng minh E là trọng tâm của ΔABC.

Bài 4. Cho ΔABC. Vẽ trung tuyến BM. Trên tia BM lấy hai điểm G, K sao cho $BG = \frac{2}{3}BM$ và G là trung điểm của BK. Gọi E là trung điểm CK; GE cắt AC tại I. Chứng minh: I là trọng tâm của ΔKGC.

Bài 5. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm BM. Trên tia đối của tia IA lấy điểm E sao cho $IE = IA$.

a) Điểm M là trọng tâm của tam giác nào?

b) Gọi F là trung điểm của CE. Chứng minh rằng ba điểm A, M, F thẳng hàng.

Bài 6. Cho ΔABC, M là trung điểm AC. Trên đoạn BM lấy điểm K sao cho $KM = \frac{1}{2}KB$. Điểm H thuộc tia đối của tia MK sao cho $BH = 2BK$. Gọi I là điểm thuộc cạnh AC và $IC = \frac{1}{3}CA$. Đường KI cắt HC ở E.

a) Chứng minh I là trọng tâm của ΔHKC và E là trung điểm của HC.

b) Tính các tỉ số $\frac{IE}{IK}, \frac{IC}{MC}$. Chứng minh ba điểm H, I, F thẳng hàng (I là trung điểm KC)

Bài 7. Cho hai đoạn thẳng AC và BD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đoạn. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD. Đoạn thẳng AM, AN cắt BD lần lượt tại I và K. Chứng minh:

a) I là trọng tâm của ΔABC và K là trọng tâm của $\Delta\ ADC$;

b) $BI = IK = KD$.

Bài 8. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến BD. Trên tia đối của tia DB lấy điểm E sao cho $DE = BD$. Gọi P, Q lần lượt là điểm trên BE sao cho $BP = PQ = QE$. Chứng minh:

a) CP, CQ cắt AB, AE tại trung điểm của AB, AE.

b) $CP // AQ$ và $CQ // AP$.

Dạng 3. Vấn đề đường trung tuyến trong tam giác vuông, tam giác cân, tam giác đều

Bài 1. Cho tam giác ABC cân tại A, trung tuyến AM. Chứng minh rằng AM vuông góc với BC.

Bài 2. Cho ΔABC có các đường trung tuyến BD *và* CE bằng nhau. Chứng minh rằng ΔABC là tam giác cân.

Bài 3. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Gọi K là trung điểm của BM. Trên tia đối của tia lấy KA điểm E sao cho $KE = KA$.
a) Điểm M là trọng tâm của tam giác nào? Vì sao?
b) Gọi F là trung điểm của CE. Chứng minh rằng ba điểm A, M, F thẳng hàng.

Bài 4. Cho ΔABC vuông tại A, trung tuyến AM. Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MA$.

a) Tính ABD

b) Chứng minh $\Delta ABD = \Delta BAC$.

c) Chứng minh $AM = \frac{1}{2}BC$

Bài 5. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên đường trung tuyến BD lấy điểm E sao cho $DAE = ABD$. Chứng minh rằng $DAE = ECB$.

Bài 6. Cho tam giác ABC có các đường trung tuyến BD và CE bằng nhau. Chứng minh rằng : ΔABC là tam giác cân.

Bài 7. Cho ΔABC có ba đường trung tuyến AM, BN, CP cắt nhau tại G. Biết $AM = BN = CP$. Chứng mình ΔABC đều.

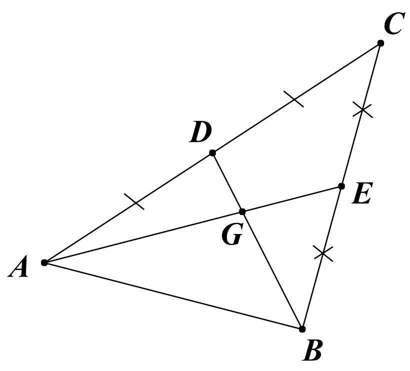
Bài 8. Cho ΔABC có ba đường trung tuyến AM, BN, CP cắt nhau tại G. Biết $AG = BG = CG$. Chứng minh ΔABC đều.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Sử dụng tính chất trọng tâm của tam giác

Bài 1. Cho hình 1. Điền số thích hợp vào chỗ trống :

$GD = ...BD; AG = ...GE;$
$GD = ...BG; AE = ...AG;$
$AE = ...GE.$



Hình 1

Bài 2. Cho tam giác ABC, các đường trung tuyến BD và CE cắt nhau ở G. Cho biết $BD < CE$. Hãy so sánh GBC và GCB.

Dạng 2. Chứng minh một điểm là trọng tâm của tam giác

Bài 1. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm BM. Trên tia đối của tia IA lấy điểm E sao cho $IE = IA$.

a) Điểm M là trọng tâm của tam giác nào?

b) Gọi F là trung điểm của CE. Chứng minh rằng ba điểm A, M, F thẳng hàng.

Bài 2. Cho ΔABC, M là trung điểm AC. Trên đoạn BM lấy điểm K sao cho $KM = \frac{1}{2}KB$. Điểm H thuộc tia đối của tia MK sao cho $BH = 2BK$. Gọi I là điểm thuộc cạnh AC và $IC = \frac{1}{3}CA$. Đường KI cắt HC ở E.

a) Chứng minh I là trọng tâm của ΔHKC và E là trung điểm của HC.

b) Tính các tỉ số $\frac{IE}{IK}, \frac{IC}{MC}$. Chứng minh ba điểm H, I, F thẳng hàng (I là trung điểm KC)

Bài 3. Cho hai đoạn thẳng AC và BD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đoạn. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD. Đoạn thẳng AM, AN cắt BD lần lượt tại I và K. Chứng minh:

a) I là trọng tâm của ΔABC và K là trọng tâm của $\Delta\ ADC$;

b) $BI = IK = KD$.

Bài 4. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến BD. Trên tia đối của tia DB lấy điểm E sao cho $DE = BD$. Gọi P, Q lần lượt là điểm trên BE sao cho $BP = PQ = QE$. Chứng minh:

a) CP, CQ cắt AB, AE tại trung điểm của AB, AE.

b) $CP // AQ$ và $CQ // AP$.

Dạng 3. Vấn đề đường trung tuyến trong tam giác vuông, tam giác cân, tam giác đều

Bài 1. Cho tam giác . ABC . cân tại A. Trên đường trung tuyến BD lấy điểm E sao cho $DAE = ABD$. Chứng minh rằng $DAE = ECB$.

Bài 2. Cho tam giác ABC có các đường trung tuyến BD và CE bằng nhau. Chứng minh rằng : ΔABC là tam giác cân.

Bài 3. Cho ΔABC có ba đường trung tuyến AM, BN, CP cắt nhau tại G. Biết $AM = BN = CP$. Chứng mình ΔABC đều.

Bài 4. Cho ΔABC có ba đường trung tuyến AM, BN, CP cắt nhau tại G. Biết $AG = BG = CG$. Chứng minh ΔABC đều.

CHUYÊN ĐỀ 34.2. BA ĐƯỜNG PHÂN GIÁC TRONG MỘT TAM GIÁC

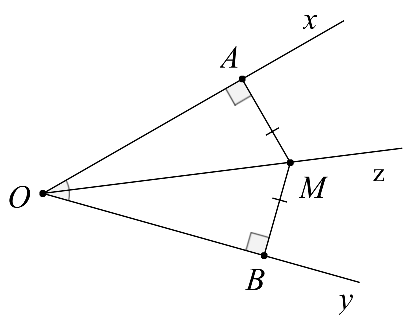
PHẦN I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT.

1. Tia phân giác của một góc

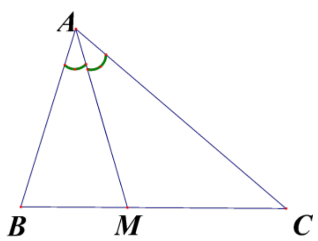
+ Định nghĩa tia phân giác của góc: Tia phân giác của một góc là tia nằm giữa hai cạnh của góc và tạo với hai cạnh ấy hai góc bằng nhau.

+ Đường thẳng chứa tia phân giác của một góc gọi là đường phân giác của góc đó.

+ Mọi điểm trên tia phân giác của một góc cách đều hai cạnh của góc đó. Ngược lại, mọi điểm nằm bên trong góc và cách đều hai cạnh của góc thì nằm trên tia phân giác của góc đó.



2. Đường phân giác của tam giác

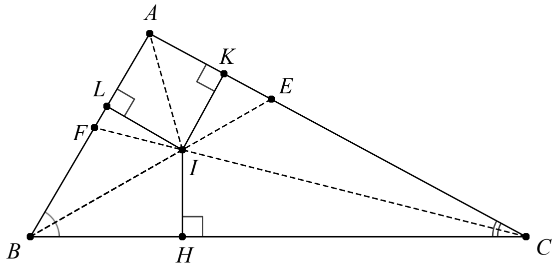


- Trong tam giác ABC, tia phân giác của góc A cắt cạnh BC tại điểm M thì đoạn thẳng AM gọi là đường phân giác xuất phát từ đỉnh A của ΔABC

- Mỗi tam giác có ba đường phân giác.

3. Tính chất ba đường phân giác của tam giác:

*** __Định lí__:** Ba đường phân giác của một tam giác cùng đi qua một điểm. Điểm này cách đều ba cạnh của tam giác đó.



PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI.

Dạng 1. Chứng minh đoạn thẳng bằng nhau, góc bằng nhau, tính độ dài đoạn thẳng, số đo góc

I. Phương pháp giải:

Sử dụng các tính chất:

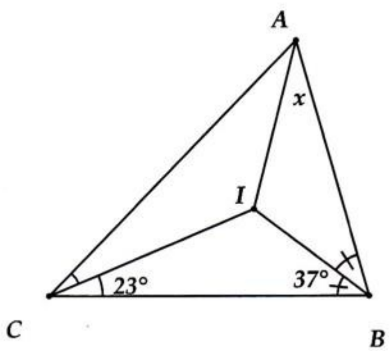
+ Giao điểm của hai đường phân giác của hai góc trong tam giác nằm trên đường phân giác của góc thứ ba.

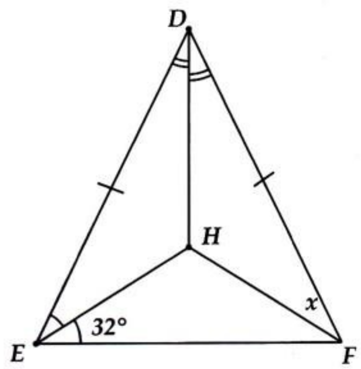
+ Giao điểm của các đường phân giác của một tam giác cách đều ba cạnh của tam giác

+ Tổng ba góc trong một tam giác bằng $180°$

II. Bài toán.

Bài 1. Tìm x trong mỗi hình vẽ sau biết CI và BI là hai phân giác của ACB và ABC, EH và FH là hai phân giác của DEF và DFE.





Lời giải

a) Ta có $B + C = 2IBC + 2ICB = 2(IBC + ICB) = 120°$

$$= A = 180° - (B + C) = 180° - 120° = 60°$$

Mà BI, CI lần lượt là tia phân giác của B và C nên I là giao điểm của ba đường phân giác trong ΔABC.

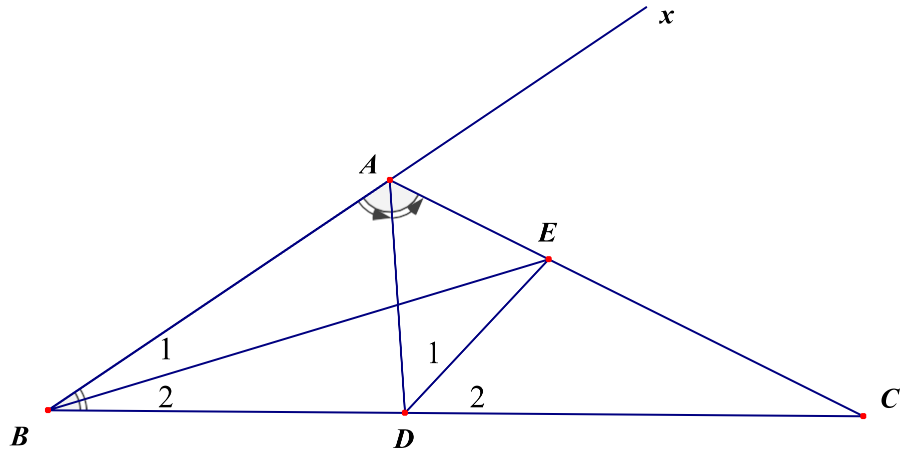
$\Rightarrow AI$ là tia phân giác của $A \Rightarrow x = \dfrac{A}{2} = 30°$.

b) Ta có ΔDEF cân tại $D \Rightarrow F = E = 2HEF = 64°$.

$\Rightarrow FH$ là tia phân giác của $DFE \Rightarrow x = \dfrac{\text{DEF}}{2} = 32°$

Bài 2. Cho ΔABC có $A = 120°$. Các đường phân giác AD, BE. Tính số đo góc BED.

Lời giải



Gọi Ax là tia đối của AB

Ta có: $BAD = DAC = \dfrac{1}{2}BAC = 60°$ (vì AD là tia phân giác BAC) nên $CAx = 60°$

Xét ΔABD có AE là tia phân giác góc ngoài đỉnh A, BE là tia phân giác của góc B và chúng cắt nhau tại E, nên DE là tia phân giác góc ngoài của góc D.

Mà EDC là góc ngoài tại đỉnh D của ΔBED, nên $BED + B_2 = EDC$.

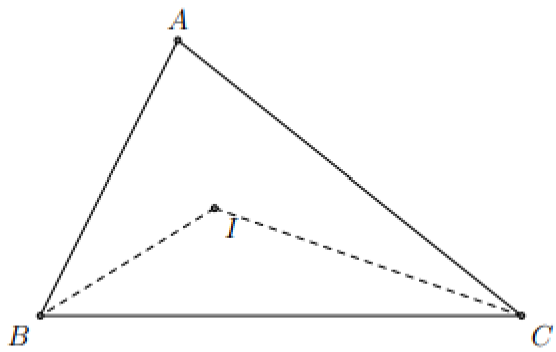
Do đó $BED = D_2 - B_2 = \dfrac{ADC - ABC}{2} = \dfrac{ABD + BAD - ABC}{2} = \dfrac{BAD}{2} = 30°$

Bài 3. Cho ΔABC. Gọi I là giao điểm của hai đường phân giác kẻ từ góc B và C. Tính số đo góc BIC trong các trường hợp:

a) $BAC = 80°$

b) $BAC = 120°$

Lời giải



a) $BAC = 80°$

Ta có BI là phân giác của ABC . Suy ra $IBC=\frac{1}{2}ABC$

Ta có CI là phân giác của ACB . Suy ra $ICB=\frac{1}{2}BCA$

Xét ΔIBC có : $BIC+IBC+BCI=180°$

Suy ra $BIC+\frac{1}{2}ABC+\frac{1}{2}BCA=180°$

Suy ra $BIC+\frac{1}{2}\left(ABC+BCA\right)=180°$

Suy ra $BIC=180°-\frac{1}{2}\left(ABC+BCA\right)$

Suy ra $BIC=180°-\frac{1}{2}\left(180°-BAC\right)$

Suy ra $BIC=90°+\frac{1}{2}BAC$

Suy ra $BIC=90°+\frac{1}{2}.a$

Suy ra $BIC=90°+\frac{1}{2}.80°$

Suy ra $BIC=130°$

b) $BAC=120°$

Ta có $BIC=90°+\frac{1}{2}.120°$

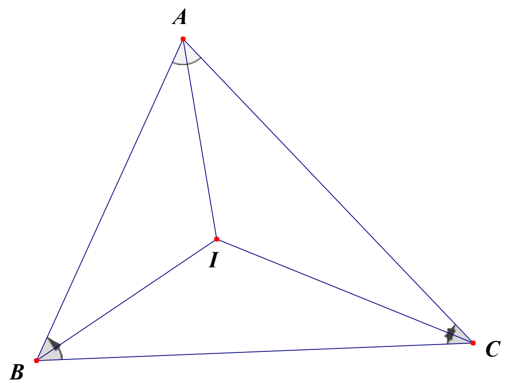
Suy ra $BIC=150°$.

Bài 4. Cho ΔABC, các tia phân giác của góc B và góc C cắt nhau ở I

a) Biết $A=70°$, tính số đo góc BIC .

b) Biết $BIC=140°$, tính số đo góc A .

Lời giải



a) Xét ΔABC, ta tính được $B + C = 110°$.

Do đó, $IBC + ICB = 55°$.

Vậy $BIC = 180° - 55° = 125°$.

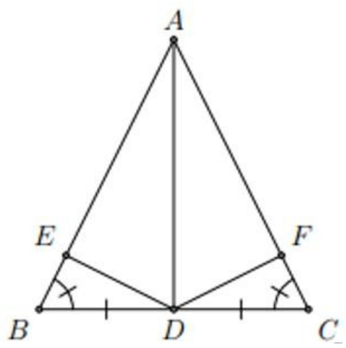
b) Xét ΔBIC, từ giả thiết suy ra $IBC + ICB = 40°$.

Do đó, ta có: $ABC + ACB = 80°$.

Vậy $BAC = 100°$.

Bài 5. Cho ΔABC cân tại A. Gọi D là trung điểm của BC; E và F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ D đến AB, AC. Chứng minh rằng $DE = DF$.

Lời giải



Xét ΔABC cân tại A có AD là đường trung tuyến đồng thời cũng là đường phân giác của góc A

Ta có $DE \perp AB; DF \perp AC\,(gt)$

Mà AD là đường phân giác của góc A (chứng minh trên)

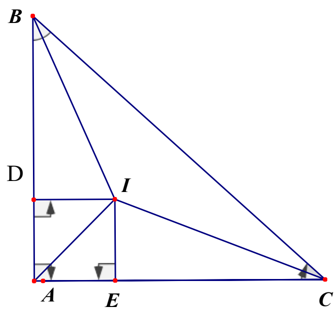
Suy ra $DE = DF$.

Bài 6. Cho ΔABC có $A = 90°$ các tia phân giác của B *và* C cắt nhau tại I. Gọi D, E là chân các đường vuông góc hạ từ I đến các cạnh AB *và* AC.

a) Biết $ID = 2\text{cm}$. Tính IE?

b) Biết $ID = x + 3$, $IE = 2x - 3$. Tìm x?

Lời giải



a) Xét ΔABC có các tia phân giác của B và C cắt nhau tại I. Nên I là giao điểm của ba đường phân giác trong ΔABC, suy ra AI là đường phân giác của góc A và I cách đều ba cạnh của ΔABC (tính chất ba đường phân giác của tam giác).

Vì I là giao điểm của ba đường phân giác trong ΔABC nên $IE = ID = 2\text{cm}$ (tính chất ba đường phân giác của tam giác)

b) Ta có: $IE = ID$ (chứng minh phần a)

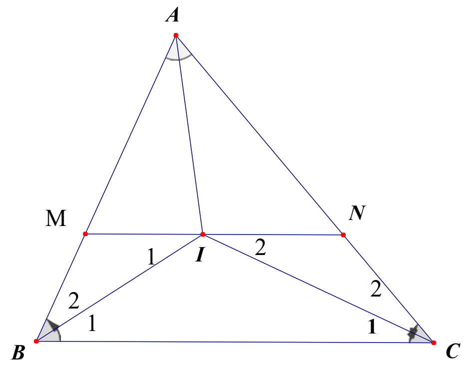
$\Rightarrow 2x - 3 = x + 3$

$\Rightarrow 2x - x = 3 + 3$

$\Rightarrow x = 6$

Bài 7. Cho ΔABC gọi I là giao điểm của hai tia phân giác góc A và góc B. Qua I kẻ đường thẳng song song với BC, cắt AB tại M, cắt AC tại N. Chứng minh rằng $MN = BM + CN$

Lời giải



Ba phân giác của một tam giác cùng đi qua một điểm nên CI là tia phân giác của góc C

Vì $MN // BC$ nên $C_1 = I_2$ (so le trong)

Mà $C_1 = C_2$ nên nên $C_2 = I_2$

Do đó ΔNIC cân nên $NC = NI$ (1)

Tương tự, ta có: $MB = MI$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $MI + IN = BM + CN$ hay $MN = BM + CN$.

Dạng 2. Chứng minh 3 đường đồng quy, 3 điểm thẳng hàng

I. Phương pháp giải:

Sử dụng các tính chất:

+ Giao điểm của hai đường phân giác của hai góc trong tam giác nằm trên đường phân giác của góc thứ ba.

+ Giao điểm của các đường phân giác của một tam giác cách đều ba cạnh của tam giác

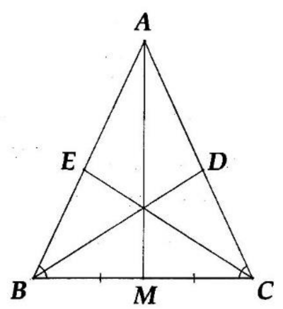
II. Bài toán.

Bài 1. Cho tam giác ABC cân tại A. Kẻ các tia phân giác BD, CE. Lấy M là trung điểm của BC.

a) Chứng minh AM là tia phân giác của góc BAC.

b) Ba đường thẳng AM, BD, CE đồng quy.

Lời giải



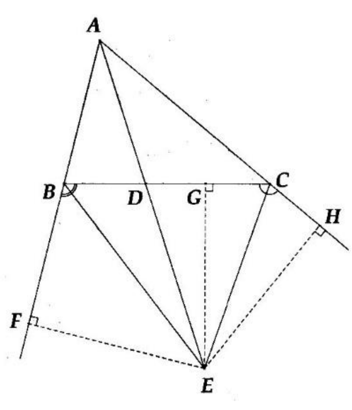
a) Chứng minh được $\Delta AMB = \Delta AMC$ (c.c.c).

Từ đó suy ra AM là tia phân giác của góc BAC.

b) Xét ΔABC có AM, BD, CE là các tia phân giác. Từ tính chất ba đường phân giác trong tam giác, suy ra ba đường thẳng AM, BD, CE đồng quy.

Bài 2. Cho tam giác ABC, tia phân giác AD. Các tia phân giác ngoài tại đỉnh B và C cắt nhau ở E. Chứng minh ba điểm A, D, E thẳng hàng.

Lời giải



Gọi F, H, G lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm E xuống các đường thẳng AB, AC, BC.

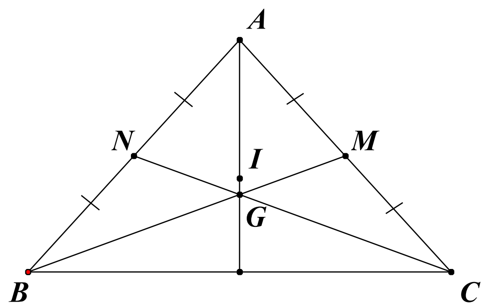
Từ giả thiết suy ra $EF = EG$ và $EH = EG$.

$\Rightarrow EF = EH$ nên E thuộc tia phân giác của góc BAC. Mà AD là tia phân giác của góc BAC.

Vậy ba điểm A, D, E thẳng hàng.

Bài 3. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi G là trọng tâm, I là điểm nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh của tam giác đó. Chứng minh ba điểm A, G, I thẳng hàng.

Lời giải



Gọi M, N là trung điểm CA và BA

ΔABC cân tại A có BM, CN là đường trung tuyến ứng với cạnh AC, $AB \Rightarrow$ BM=CN

Mà $GB = \frac{2}{3}BM$; $GC = \frac{2}{3}CN$ (Tính chất trọng tâm của tam giác) $\Rightarrow GB = GC$

Xét ΔAGB và ΔAGC có

AG chung

$AB = AC$ (do ΔABC cân tại A)

$GB = GC$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \Delta AGB = \Delta AGC\ (c-c-c)$

$\Rightarrow BAG = CAG$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow G$ thuộc tia phân giác của BAC

Theo đề bài I cách đều ba cạnh của tam giác $\Rightarrow I$ là điểm chung của ba đường phân giác

$\Rightarrow I$ thuộc tia phân giác của BAC.

Vì G, I cùng thuộc tia phân giác của BAC nên A, G, I thẳng hàng.

Bài 4. Cho tam giác ABC cân ở A có BM, CN là hai đường trung tuyến cắt nhau ở điểm G.

a) Chứng minh rằng: AG là tia phân giác của góc BAC.

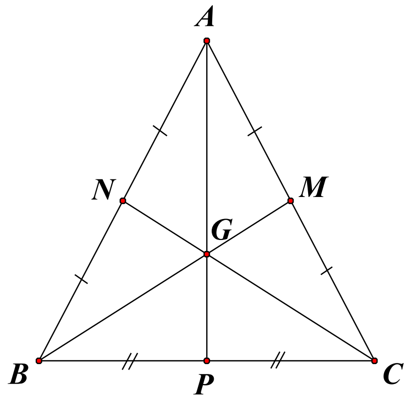
b) CMR: $GM = GN$

c) CMR: đường thẳng AG là đường trung trực của đoạn thẳng MN.

d) CMR: đường thẳng AG là đường trung trực của đoạn thẳng BC.

e) Gọi P là trung điểm BC. CMR: A, G, P thẳng hàng.

Lời giải



a) $\Delta ABM = \Delta ACN$ (c.g.c)

$\Rightarrow \begin{cases} ABM = ACN \\ BG = GC \end{cases}$

Xét ΔABG và ΔACG có:

$AB = AC$

$ABG = ACG$

$BG = CG$

$\Rightarrow \Delta ABG = \Delta ACG$ (c.g.c)

$\Rightarrow BAG = CAG$

AG là phân giác của BAC

b) $\Delta AGN = \Delta AGM$ (c.g.c) vì: AG: chung; $AN = AM$; $NAG = MAG$

$\Rightarrow GN = GM$

c) $\left.\begin{matrix} AN = AM \\ GN = \end{matrix}\right\} \Rightarrow AG$ là đường trung trực của MN

d) $\left.\begin{matrix} AB = AC \\ GB = \end{matrix}\right\} \Rightarrow AG$ là đường trung trực của BC

Xét ΔAPB và ΔAPC có:

$AB = AC$

AP chung

$BP = PC$

$\Rightarrow \Delta APB = \Delta APC$ (c.c.c)

$\Rightarrow BAP = CAP$ (hai góc tương ứng)

AP là phân giác của BAC

Mà AG là phân giác của BAC

Suy ra tia AP trùng với tia AG

Hay A, P, G thẳng hàng.

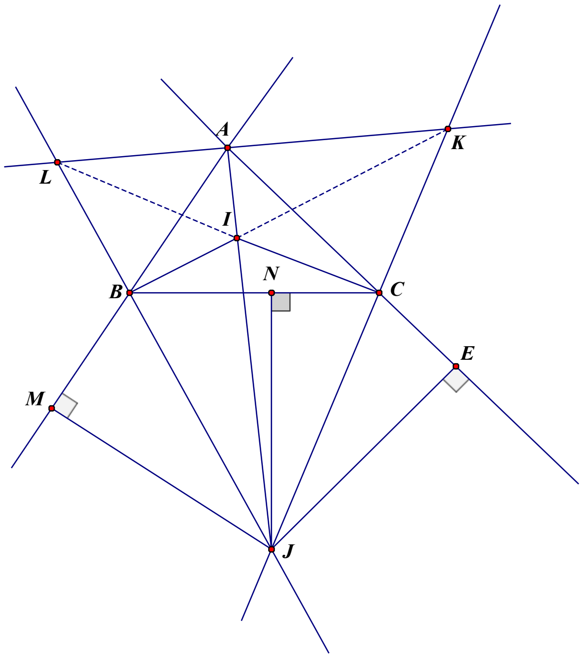
Bài 5. Cho tam giác ABC. Phân giác trong của góc B và góc C cắt nhau tại I. Phân giác các góc ngoài tại đỉnh B và đỉnh C cắt nhau tại J, phân giác các góc ngoài tại đỉnh A và đỉnh C cắt nhau tại K, phân giác các góc ngoài tại đỉnh A và đỉnh B cắt nhau tại L.

a) Chứng minh $BIC = 90^\circ + \frac{A}{2}$

b) Chứng minh ba điểm A, I, J thẳng hàng

c) Chứng minh AJ, BK, CL cắt nhau tại một điểm.

Lời giải



a) BI là tia phân giác của góc $B \Rightarrow IBC = \frac{1}{2}ABC$

CI là tia phân giác của góc $C \Rightarrow ICB = \frac{1}{2}ACB$

$\Rightarrow IBC + ICB = \frac{1}{2}ABC + \frac{1}{2}ACB = \frac{1}{2}\left(ABC + ACB\right) = \frac{1}{2}(180^\circ - A = 90^\circ - \frac{A}{2}$

Xét ΔIBC có:

$BIC + IBC + ICB = 180^\circ \Rightarrow BIC + 90^\circ - \frac{A}{2} = 180^\circ$

$\Rightarrow BIC = 90^\circ + \frac{A}{2}$

b) Kẻ $JM \perp AB, JN \perp BC, JE \perp AC$

J thuộc tia phân giác của $CBx \Rightarrow JM = JN$

J thuộc tia phân giác của $BCy \Rightarrow JN = JE$

$\Rightarrow JM = JE \Rightarrow J$ thuộc tia phân giác của BAC (1)

Phân giác trong của góc B và góc C của tam giác ABC cắt nhau tại $I \Rightarrow$ Tia AI là phân giác của BAC hay điểm I thuộc tia phân giác của BAC (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ ba điểm A, I, J là ba điểm thẳng hàng.

c) Theo câu b ta có ba điểm A, I, J thẳng hàng nên đường thẳng AJ đi qua điểm I

Chứng minh tương tự đường thẳng BK đi qua I và đường thẳng CL đi qua I

Vậy ba đường thẳng AJ, BK, CL cắt nhau tại điểm I

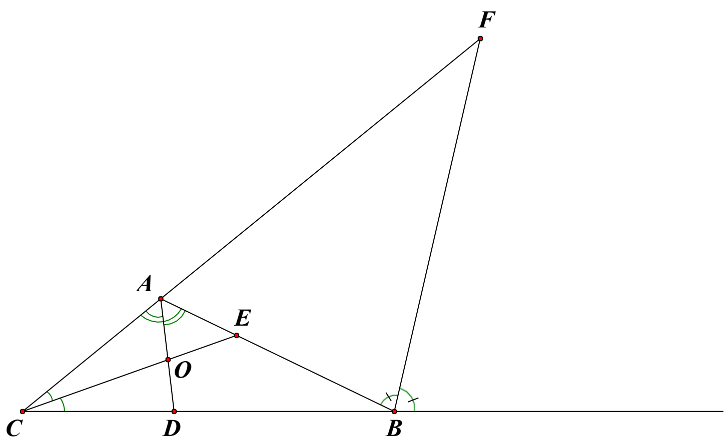
Bài 6. Cho tam giác ABC có $A = 120°$. Các tia phân giác của góc A và C cắt nhau ở O, cắt cạnh BC và AB lần lượt ở D và E. Đường phân giác góc ngoài tại đỉnh B của tam giác ABC cắt đường thẳng AC ở F. Chứng minh:

a) $BO \perp BF$

b) $BDF = ADF$

c) Ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Lời giải



a) Vì O là giao điểm của hai đường phân giác nên BO cũng là đường phân giác của tam giác.

Mà BF là đường phân giác ngoài nên $FBO = 90°$

$\Rightarrow BO \perp BF$

b) $BAC = 120°$ nên $BAF = DAC = DAB = 60°$

$\Rightarrow$ Phân giác trong của DAB vuông góc với AF

$\Rightarrow AF$ là phân giác ngoài của DAB.

Vậy F là giao điểm của các đường phân giác trong tam giác ABD

$\Rightarrow DF$ là phân giác của ADB.

Vậy $BDF = ADF$

c) Chứng minh tương tự, AE là phân giác ngoài của ΔACD mà CE là phân giác trong của tam giác. Nên E thuộc đường phân giác ngoài của ADC. Vậy ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Dạng 3. Đường phân giác đối với tam giác đặc biệt (tam giác cân, tam giác đều)

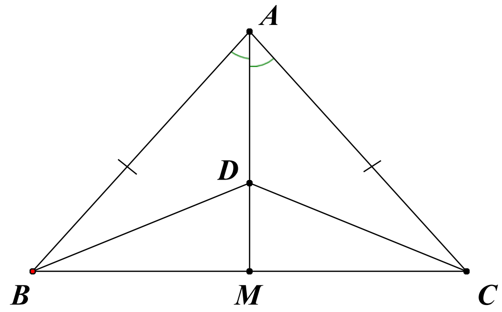
I. Phương pháp giải:

Sử dụng tính chất: trong tam giác cân, đường phân giác của góc ở đỉnh cũng đồng thời là đường trung tuyến, đường cao.

II. Bài toán.

Bài 1. Cho ΔABC cân tại A, đường phân giác AM. Gọi D là một điểm nằm giữa A và M. Khi đó ΔBDC là tam giác gì?

Lời giải



Xét ΔABD và ΔACD có:

$AB = AC$ (gt)

$A_1 = A_2$ (AM là đường phân giác)

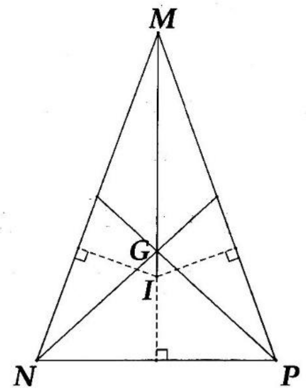
AD là cạnh chung

Nên $\Delta ABD = \Delta ACD$ (c.g.c) $\Rightarrow BD = CD$ (hai cạnh tương ứng).

Do đó ΔBDC cân tại D.

Bài 2. Cho tam giác MNP cân tại M có G là trọng tâm. I là điểm nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh của tam giác đó. Chứng minh ba điểm M, G, I thẳng hàng.

Lời giải



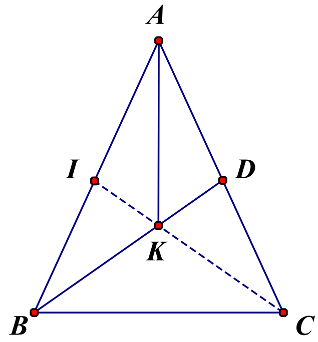
I nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh của tam giác nên MI là tia phân giác của góc M.

Do ΔMNP cân tại M nên đường phân giác MI cũng là đường trung tuyến.

G là trọng tâm của ΔMNP nên G nằm trên MI. Từ đó, suy ra M,G,I thẳng hàng.

Bài 3. Tam giác ABC cân tại A. Tia phân giác của góc A cắt đường trung tuyến BD tại K. Gọi I là trung điểm của AB. Chứng minh rằng ba điểm I,K,C thẳng hàng.

Lời giải



Tam giác ABC cân tại A có:

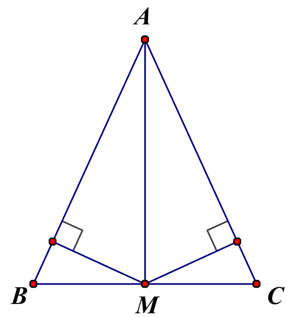
AK là tia phân giác của góc ở định nên đường thẳng AK là đường trung tuyến (1). BD là đường trung tuyến của tam giác ABC (2).

Từ (1) và (2) suy ra K là trọng tâm của tam giác ABC.

Do đó C, K, I thẳng hàng.

Bài 4. Chứng minh rằng trong tam giác cân, trung điểm của cạnh đáy cách đều hai cạnh bên.

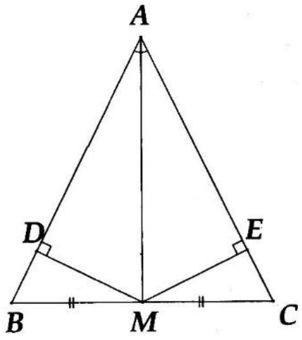
Lời giải



Xét tam giác ABC cân tại A, M là trung điểm của BC. AM là tia phân giác của góc A nên M cách đều hai cạnh AB, AC.

Bài 5. Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AM là đường phân giác của góc A. Chứng minh tam giác ABC cân tại A.

Lời giải



Hạ $MD \perp AB, ME \perp AC$.

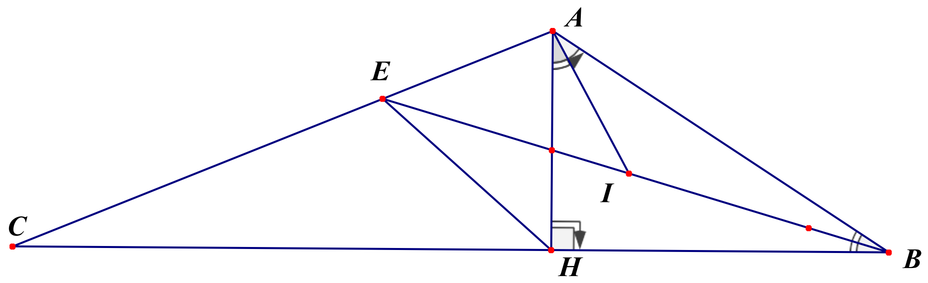
Vì AM là tia phân giác của A nên $MD = ME$.

Do đó $\Delta BDM = \Delta CEM$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông).

Suy ra $B = C$. Vậy ΔABC cân tại A.

Bài 6. Cho ΔABC có $AH \perp BC \text{ và } BAH = 2C$. Tia phân giác của góc B cắt AC tại E. Tia phân giác của góc BAH cắt BE ở I. Chứng minh ΔAIE là tam giác vuông cân tại E

Lời giải



Xét ΔAHB vuông ta có: $BAH + ABH = 90°$ mà $BAH = 2C$ và $ABH = 2IBH$

$\Rightarrow 2C + 2IBH = 90° \Rightarrow 2\left(C + IBH\right) = 90° \Rightarrow C + EBH = 45°$

Xét ΔBEC có AEI là góc ngoài tại đỉnh E nên $AEI = ECB + EBC = 45^{\circ}$

Xét ΔAHB có: $ABH + HAB = 90° \Rightarrow 2IBA + 2IAB = 90°$

$\Rightarrow IBA + IAB = 45°$

Xét ΔAIB có AIE là góc ngoài tại đỉnh I nên $AIE = IAB + IBA = 45°$

Xét ΔIAE có: $AIE = 45° = AEI$

$\Rightarrow EAI = 180° - \left(AEI + AIE\right) = 90°$ (tổng ba góc trong một tam giác)

Vậy ΔAIE là tam giác vuông cân tại E

Bài 7. Cho tam giác ABC cân ở A có M là trung điểm cạnh BC và BD là đường phân giác (D thuộc AC). AM và BD giao nhau ở điểm I.

a) CMR: Tia CI là tia phân giác của góc ACB.

b) CMR: Tam giác BIC là tam giác cân.

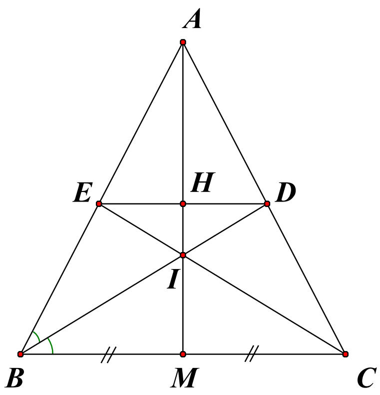
c) Gọi E là giao điểm của tia CI với cạnh AB. Chứng minh rằng: $ED//BC$

d) Gọi H là giao điểm của AM và ED. CMR: H là trung điểm của ED.

e) CMR: $AM \perp ED$

f) Tìm điều kiện của tam giác ABC để điểm I và trọng tâm G của tam giác ABC trùng nhau.

Lời giải



a) Vì ΔABC cân tại A, có AM là đường trung tuyến nên AM là phân giác

Có AM và BD giao nhau ở điểm I nên I là giao của 3 đường phân giác

$\Rightarrow CI$ là đường phân giác của tam giác ABC

b) Ta có $IBC = \dfrac{1}{2} ABC$ (I nằm trên tia phân giác BD của ABC)

$ICB = \dfrac{1}{2} ACB$ (CI là tia phân giác của ACB)

Mà $ABC = ACB$ (ΔABC cân tại A)

$\Rightarrow IBC = ICB$

$\Rightarrow \Delta IBC$ cân tại I

c) Xét ΔIEB *và* ΔIDC, có

$EBI = DCI$

$EIB = DIC$ (2 góc đối đỉnh)

$IB = IC$ IB = IC (do ΔBIC cân tại I)

$\Rightarrow \Delta IEB = \Delta IDC$ (g.c.g)

$\Rightarrow BE = DC$

$\Rightarrow AE = AD$

$\Rightarrow \Delta AED$ cân tại A

$\Rightarrow AED = \dfrac{180^\circ - A}{2}$

Mà $ABC = \dfrac{180^\circ - A}{2}$ (do ΔABC cân tại A)

$\Rightarrow AED = ABC$

Mà 2 góc ở vị trí so le trong của ED và BC

$\Rightarrow ED//BC$

d) $\Delta AHE = \Delta AHD$ (c.g.c)

$\Rightarrow HE = HD$

$\Rightarrow H$ là trung điểm của ED

e) Có:

$\left.\begin{array}{l} AE = AD \\ HE = HD \end{array}\right\} \Rightarrow AH$ là đường trung trực của ED

$\Rightarrow AH \perp ED$ hay $AM \perp ED$

f) I và trọng tâm G của ΔABC trùng nhau $\Rightarrow \Delta ABC$ đều

Dạng 4. Chứng minh mối quan hệ giữa các góc

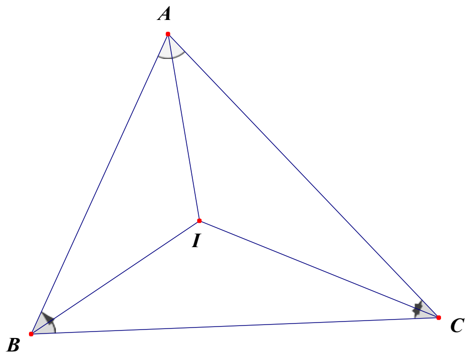
I. Phương pháp giải:

- Vận dụng các tính chất tia phân giác của một góc để tìm mối liên hệ giữa các góc.
- Dùng định lí tổng ba góc trong một tam giác bằng $180°$.

II. Bài toán.

Bài 1. Cho tam giác ABC có ba đường phân giác cắt nhau tại I. Chứng minh rằng: $IAB + IBC + IAC = 90°$

Lời giải



Vì AI là phân giác BAC nên ta có: $IAB = \frac{1}{2} BAC$

BI là phân giác ABC nên ta có: $IBC = \frac{1}{2} ABC$

CI là phân giác BCA nên ta có: $ICA = \frac{1}{2} BCA$

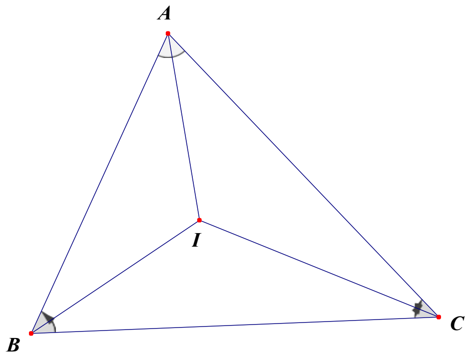
Do đó: $IAB + IBC + IAC = \frac{1}{2}(BAC + ABC + BCA = \frac{1}{2}.180° = 90°$

Bài 2. Cho tam giác ABC có ba đường phân giác cắt nhau tại I và $AB < AC$.

a) Chứng minh rằng: $CBI > ACI$

b) So sánh IB và IC

Lời giải



Vì BI là phân giác ABC nên ta có: $CBI = \frac{1}{2}ABC$

CI là phân giác BCA nên ta có: $ACI = \frac{1}{2}BCA$

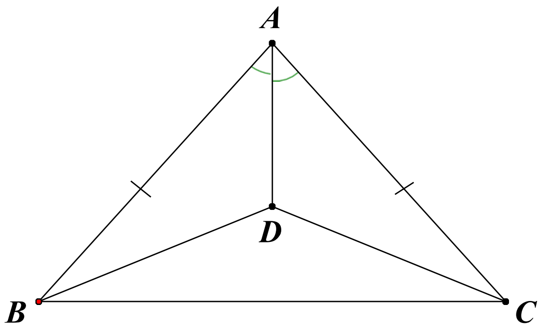
Mà $AB < AC$ nên $ABC > BCA$ (Quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác)

$\Rightarrow CBI > ACI$

Bài 3. Cho hình vẽ.

a) Chứng minh $\Delta ABD = \Delta ACD$

b) So sánh góc DBC và góc DCB.



Lời giải

a) Căn cứ vào các kí hiệu đã cho trên hình vẽ ta có:

ΔABD *và* ΔACD có: $AB = AC$; $BAD = CAD$; AD là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta ACD$ (c.g.c)

b) Vì $\Delta ABD = \Delta ACD$ (chứng minh câu a)

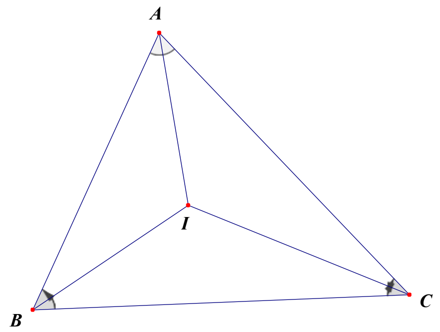
$\Rightarrow BD = CD$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow \Delta BCD$ cân tại D

$\Rightarrow DBC = DCB$ (Tính chất tam giác cân)

Bài 4. Cho ΔABC hai đường phân giác của góc B và góc C cắt nhau tại I. Chứng minh rằng: $BIC = 90° + \frac{A}{2}$

Lời giải



I là giao điểm của hai đường phân giác góc B và góc $C \Rightarrow$ Phân giác góc A là AI.

Ta có: $A + B + C = 180° \Rightarrow \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90° \Rightarrow \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90° - \frac{A}{2}$

Trong ΔBIC có $BIC = 180° - \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) = 180° - \left(90° - \frac{A}{2}\right)$

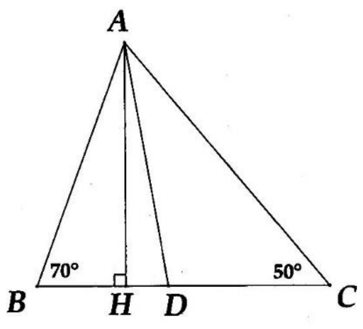
Vậy $BIC = 90° + \frac{A}{2}$

Bài 5. Cho tam giác ABC có $B > C$. Từ đỉnh A kẻ đường cao AH và tia phân giác AD.

a) Biết $B = 70°, C = 50°$, tính số đo HAD.

b) Chứng minh $HAD = \frac{B - C}{2}$

Lời giải



a) Từ giả thiết, ta tính được: $BAC = 60°$

$\Rightarrow DAC = \frac{BAC}{2} = 30° = DAB$

$\Rightarrow ADH = DAC + C = 80°$

Do đó, xét ΔAHD ta tính được:

Có thể tính $BAH = 90°$ - $70° = 20°$.

Vậy $HAD = 30° - 20° = 10°$

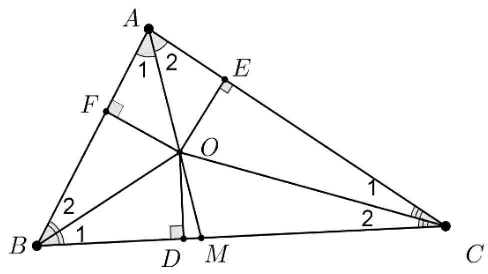
b) $HAD = 90° - HDA = 90° - \left(\frac{A}{2} + C\right) = \frac{180° - A - 2C}{2} = \frac{B - C}{2}$

Bài 6. Cho ΔABC các tia phân giác góc B và C cắt nhau ở O. Gọi D, E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ O đến BC, CA, AB $(D \in BC, E \in AC, F \in AB)$. Tia AO cắt BC ở M.

a) Chứng minh: $OD = OE = OF$

b) So sánh DOB và MOC? MOB và DOC?

Lời giải



a) Vì O là giao điểm các tia phân giác góc B và góc C của ΔABC

$\Rightarrow$ O cách đều 3 cạnh của ΔABC

$\Rightarrow OD = OE = OF$ (Tính chất ba đường phân giác trong tam giác)

b) Có $A_1 = A_2$ (AO là tia phân giác BAC)

$MOC = A_2 + C_1$ (MOC là góc ngoài ΔAOC)

$= \frac{BAC + ACB}{2} = \frac{180^0 - ABC}{2} = 90^0 - \frac{ABC}{2}$ (1)

Xét ΔBOD vuông ở D ta có $BOD = 90^0 - B_2 = 90^0 - \frac{ABC}{2}$ (2)

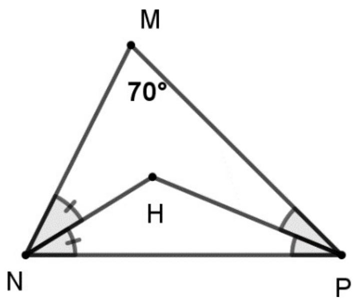
Từ (1), (2) $\Rightarrow BOD = MOC$

Chứng minh tương tự ta cũng có $MOB = DOC$ $(= 90^0 - \frac{ACB}{2})$

Phần III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Chứng minh đoạn thẳng bằng nhau, góc bằng nhau, tính độ dài đoạn thẳng, số đo góc

Bài 1. Cho hình vẽ:



H là giao điểm của hai đường phân giác xuất phát từ N và P của tam giác MNP.

a) Chứng minh rằng điểm H cách đều hai cạnh MN, MP

b) Tính số đo HMN, NHP ?

Bài 2. Cho ΔABC vuông ở A

Các tia phân giác góc B và C cắt nhau ở I .Gọi D, E, F là hình chiếu của điểm I xuống AB, AC, BC

a) Chứng minh rằng $AD = AE$

b) Trong trường hợp ΔABC cân ở A. Chứng minh ΔDEF cân

Bài 3. Cho ΔABC, các tia phân giác của góc B và góc C cắt nhau ở I

a) Biết $A = 80°$, tính số đo góc BIC.

b) Biết $BIC = 120°$, tính số đo góc A.

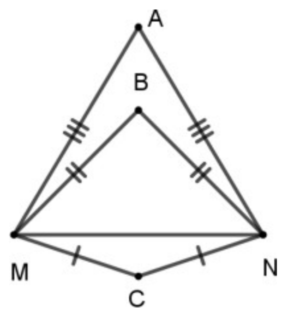
Bài 4. Cho ΔABC có $A = 90°$ các tia phân giác của B *và* C cắt nhau tại *I.* Gọi D, E là chân các đường vuông góc hạ từ I đến các cạnh AB *và* AC.

a) Biết $ID = 3\text{cm}$. Tính IE ?

b) Biết $ID = x + 2$, $IE = 2x - 4$. Tìm x ?

Dạng 2. Chứng minh 3 đường đồng quy, 3 điểm thẳng hàng

Bài 1. Cho hình vẽ :



CMR: A, B, C thẳng hàng.

Bài 2. Cho tam giác ABC cân ở A có BM, CN là hai đường trung tuyến cắt nhau ở điểm G.

a) Chứng minh rằng: AG là tia phân giác của góc BAC.

b) CMR: $GM = GN$

c) CMR: đường thẳng AG là đường trung trực của đoạn thẳng MN.

d) CMR: đường thẳng AG là đường trung trực của đoạn thẳng BC.

e) Gọi P là trung điểm BC. CMR: A, G, P thẳng hàng.

Bài 3. Cho ΔABC các tia phân giác góc B và C cắt nhau tại I.Các đường phân giác góc ngoài tại đỉnh B và C cắt nhau ở K.Chứng minh ba điểm A, I, K thẳng hàng

Bài 4. Cho tam giác ABC có $A = 120°$. Các tia phân giác của góc A và C cắt nhau ở O, cắt cạnh BC và AB lần lượt ở D và E. Đường phân giác góc ngoài tại đỉnh B của tam giác ABC cắt đường thẳng AC ở F. Chứng minh:

a) $BO \perp BF$

b) $BDF = ADF$

c) Ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Dạng 3. Đường phân giác đối với tam giác đặc biệt (tam giác cân, tam giác đều)

Bài 1. Chứng minh rằng:

a) Trong tam giác cân, đường trung tuyến ứng với cạnh đáy cũng là đường trung trực của cạnh đáy.

b) Nếu tam giác có 1 đường vừa là đường trung trực của 1 cạnh, vừa là đường phân giác thì tam giác đó là tam giác cân.

Bài 2. Cho tam giác ABC cân ở A có M là trung điểm cạnh BC và BD là đường phân giác (D thuộc AC). AM và BD giao nhau ở điểm I.

a) CMR: Tia CI là tia phân giác của góc ACB.

b) CMR: Tam giác BIC là tam giác cân.

c) Gọi E là giao điểm của tia CI với cạnh AB. Chứng minh rằng: $ED \;//\; BC$.

d) Gọi H là giao điểm của AM và ED. CMR: H là trung điểm của ED.

e) CMR: $AM \perp ED$

f) Tìm điều kiện của tam giác ABC để điểm I và trọng tâm G của tam giác ABC trùng nhau.

Bài 3. Cho tam giác ABC cân ở A có đường phân giác AD $(D \in BC)$ và đường trung tuyến BE $(E \in AC)$ cắt nhau tại O.

a) Chứng minh: O là trọng tâm ΔABC

b) Tam giác ABC cần có thêm điều kiện gì để O cũng là giao điểm 3 đường phân giác của tam giác ABC ?

Bài 4. Cho ΔABC cân ở A.Gọi G là trọng tâm tam giác, I là giao điểm các phân giác của tam giác, K là giao điểm hai đường phân giác góc ngoài tại đỉnh B và C.Chứng minh rằng bốn điểm A, G, I, K thẳng hàng.

Dạng 4. Đường phân giác đối với tam giác đặc biệt (tam giác cân, tam giác đều)

Bài 1.

Cho ΔABC có góc $A = 120°$ các phân giác AD, BE, CF

a) Chứng minh rằng DE là tia phân giác góc ngoài đỉnh D của ΔABD

b) Chứng minh rằng $EDF = 90^\circ$

Bài 2. Cho ΔABC, $A = 120^\circ$.Các tia phân giác góc A; C cắt nhau ở O, cắt các cạnh $BC; AB$ lần lượt ở D và E. Đường phân giác góc ngoài tại đỉnh B của ΔABC cắt đường thẳng AC ở F. Chứng minh:

a) $BO \perp BF$

b) $BDF = ADF$

c) $DEA + FEA = 180^\circ$

ĐÁP SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Chứng minh đoạn thẳng bằng nhau, góc bằng nhau, tính độ dài đoạn thẳng, số đo góc

Bài 1.

a) Vì H là giao điểm của hai đường phân giác của hai góc N, P nên MH là phân giác góc M

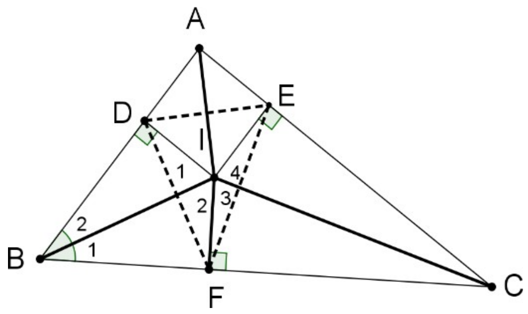
Do đó, H cách đều hai cạnh MN, MP.

b) $HMN = \frac{1}{2} NMP = \frac{1}{2}.70^\circ = 35^\circ$

$$NHP = 180^\circ - \left(\frac{1}{2} MNP + \frac{1}{2} MPN\right) = 180^\circ - \frac{1}{2}\left(MNP + MPN\right) = 180^\circ - \frac{1}{2}\left(180^\circ - NMP\right)$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2}\left(180^\circ - 70^\circ\right) = 180^\circ - \frac{1}{2}.110^\circ = 125^\circ$$

Bài 2.



a) AI là phân giác góc A

nên $IAD = IAE = 45^\circ$

Hai ΔAIE và ΔAID là hai tam giác cân ở E và ở D nên $AE = EI$ và $AD = DI$

Vì AI là phân giác góc A nên $IE = ID$

$\Rightarrow AD = AE$

b) Nếu ΔABC vuông cân ở A thì

$B = C$ nên $B_1 = B_2 = C_1 = C_2$

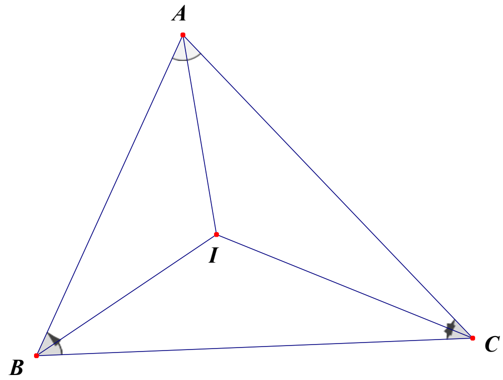
$\Rightarrow D_1 = D_2 = D_3 = D_4$. Do đó

$DIF = EIF$

$\Delta DIF = \Delta EIF$ (c.g.c) $\Rightarrow FD = FE$

Vậy ΔEDF cân ở F

Bài 3.



a) Xét ΔABC, ta tính được $B + C = 100°$.

Do đó, $IBC + ICB = 50°$.

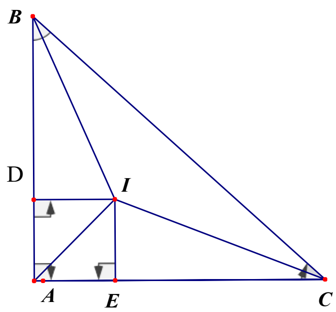
Vậy $BIC = 180° - 50° = 130°$.

b) Xét ΔBIC, từ giả thiết suy ra $IBC + ICB = 60°$.

Do đó, ta có: $ABC + ACB = 120°$.

Vậy $BAC = 180° - 120° = 60°$.

Bài 4.



a) Xét ΔABC có các tia phân giác của B và C cắt nhau tại I. Nên I là giao điểm của ba đường phân giác trong ΔABC, suy ra AI là đường phân giác của góc A và I cách đều ba cạnh của ΔABC (tính chất ba đường phân giác của tam giác).

Vì I là giao điểm của ba đường phân giác trong ΔABC nên $IE = ID = 3\text{cm}$ (tính chất ba đường phân giác của tam giác)

b) Ta có: $IE = ID$ (chứng minh phần a)

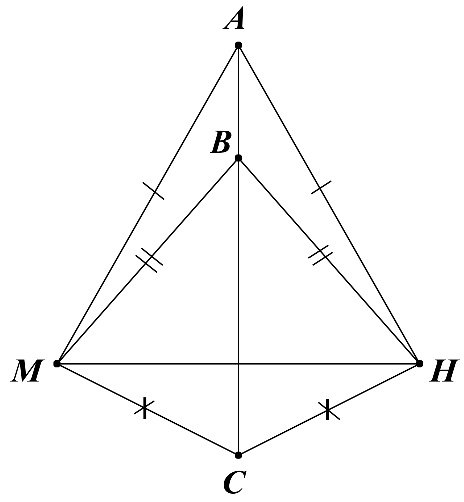
$\Rightarrow 2x - 4 = x + 2$

$\Rightarrow 2x - x = 2 + 4$

$\Rightarrow x = 6$

Dạng 2 . Đường phân giác đối với tam giác đặc biệt (tam giác cân, tam giác đều)

Bài 1:



Xét ΔABM và ΔABN có

AB chung

$AM = AN$ (gt)

$BM = BN$ (gt)

$\Rightarrow \Delta ABM = \Delta ABN \ (c-c-c)$

$\Rightarrow BAM = NAB$ (2 góc tương ứng)

$\Rightarrow AB$ là phân giác của MAN (1)

Xét ΔAMC *và* ΔANC, có

AC *chung*

$AM = AN \ (gt)$

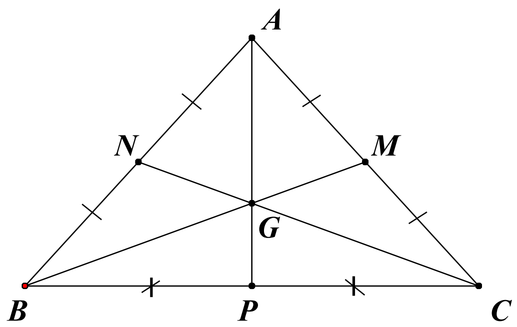
$MC = NC \ (gt)$

$\Rightarrow \Delta AMC = \Delta ANC \ (c-c-c)$

$\Rightarrow MAC = NAC$ (2 góc tương ứng) $\Rightarrow AC$ là phân giác của MAN (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AB$ trùng AC

Bài 2.



a) $\Delta ABM = \Delta ACN$ (c.g.c)

$\Rightarrow \begin{cases} ABM = ACN \\ BG = GC \end{cases}$

Xét ΔABG và ΔACG có

$AB = AC$

$ABG = ACG$

$BG = CG$

$\Rightarrow \Delta ABG = \Delta ACG$ (c.g.c)

$\Rightarrow BAG = CAG$ (hai góc tương ứng)

AG là phân giác của BAC

b) $\Delta AGN = \Delta AGM$ (c.g.c) vì AG chung; $AN = AM$; $NAG = MAG$

$\Rightarrow GN = GM$ (hai cạnh tương ứng)

c) $\left.\begin{matrix} AN = AM \\ GN = \end{matrix}\right\} \Rightarrow AG$ là đường trung trực của MN

d) $\left.\begin{matrix} AB = AC \\ GB = \end{matrix}\right\} \Rightarrow AG$ là đường trung trực của BC

Xét ΔAPB và ΔAPC có:

$AB = AC$

AP chung

$BP = PC$

$\Rightarrow \Delta APB = \Delta APC$ (c.c.c)

$\Rightarrow BAP = CAP$

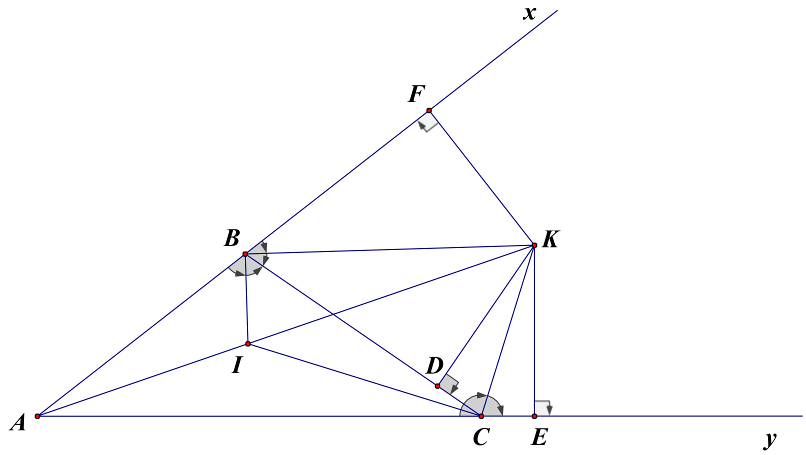
AP là phân giác của BAC

Mà AG là phân giác của BAC

$\Rightarrow AP \equiv AG$

$\Rightarrow A, P, G$ thẳng hàng.

Bài 3.



Vì I là giao điểm các phân giác của tam giác ABC nên I thuộc tia phân giác BAC (1)

Hạ $KD \perp BC, KE \perp AC, KF \perp AB$.

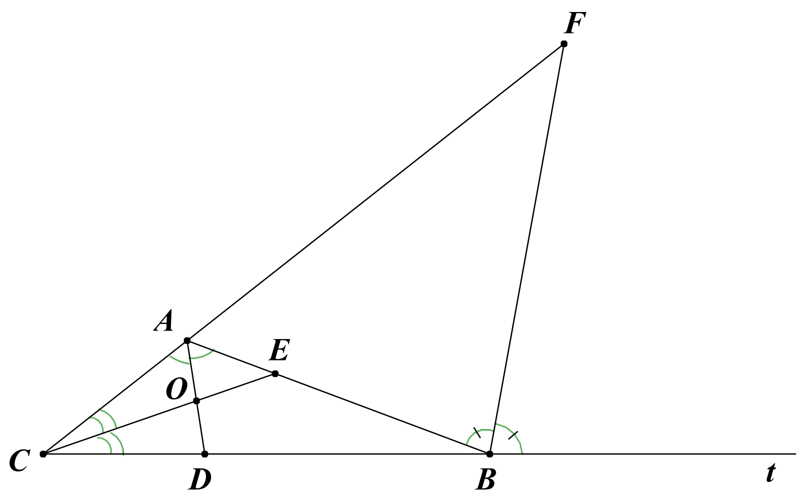
Vì K thuộc tia phân giác của CBx nên

$KB = KF$, K lại thuộc tia phân giác BCy

Nên $KD = KE$. Suy ra $KE = KF$. Điều này chứng tỏ K thuộc tia phân giác BAC (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow I$ và K cùng thuộc tia phân giác BAC .Vậy ba điểm A, I, K thẳng hàng.

Bài 4.



a) Gọi Bt là tia đối của tia BC

Vì O là giao điểm của hai đường phân giác nên BO cũng là đường phân giác của ΔABC

$$\Rightarrow OBA = \frac{1}{2}CBA$$

Mà BF là đường phân giác ngoài nên $ABF = \frac{1}{2}ABt$

$$\Rightarrow OBA + ABF = \frac{1}{2}(CBA + ABt) = \frac{1}{2}.180^\circ = 90^\circ$$

Hay $FBO = 90^0$

$\Rightarrow BO \perp BF$

b) $BAC = 120^0$ nên $BAF = DAC = DAB = 60^0$

$\Rightarrow$ phân giác trong của DAB vuông góc với AF

$\Rightarrow$ AF là phân giác ngoài của DAB.

Vậy F là giao điểm của các đường phân giác trong tam giác ABD

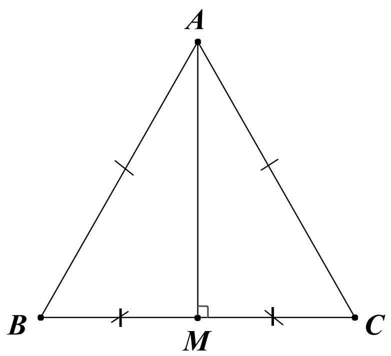
$\Rightarrow DF$ là phân giác của ADB .

Vậy $BDF = ADF$

c) Chứng minh tương tự, AE là phân giác ngoài của $\triangle ACD$ mà CE là phân giác trong của tam giác. Nên E thuộc đường phân giác ngoài của ADC. Vậy ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Dạng 3 . Đường phân giác đối với tam giác đặc biệt (tam giác cân, tam giác đều)

Bài 1.



a) Xét ΔAMB và ΔAMC, có

$AB = AC$

$B = C$

$BM = MC$

$\Rightarrow \Delta AMB = \Delta AMC$

$AMB = AMC = 90^0$

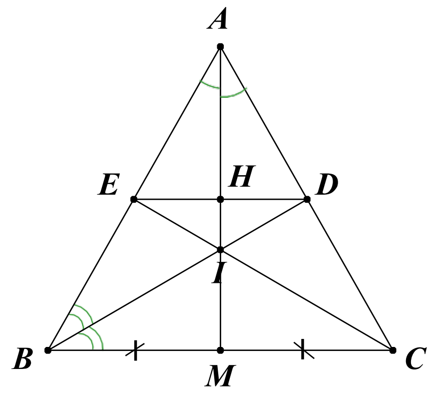
$\Rightarrow AM \perp BC$ mà AM là đường trung tuyến nên AM là đường trung trực của tam giác.

b) Cũng chứng minh $\Delta AMB = \Delta AMC$, chỉ ra $AB = AC$

$\Rightarrow \Delta ABC$ cân

Bài 2.

a) Xét ΔABM và ΔABM có:



$AB = AC\,(GT)$

$BM = CM\,(GT)$

AM : cạnh chung

$\Rightarrow \Delta ABM = \Delta ACM\ (c-c-c)$

$\Rightarrow AMB = AMC$ (Hai góc tương ứng)

$\Rightarrow AM$ là đường phân giác

Có I là giao điểm của BD và AM

$\Rightarrow I$ là giao của 3 đường phân giác

$\Rightarrow CI$ là phân giác của ΔABC

b) Ta có $IBC = \dfrac{1}{2} ABC$ (t/c phân giác)

$ICB = \dfrac{1}{2} ACB$ (t/c phân giác)

Mà $ABC = ACB$

$\Rightarrow IBC = ICB$

$\Rightarrow \Delta IBC$ cân tại I (dhnb)

c) Xét ΔIEB và ΔIDC, có

$EBI = DCI$

$EIB = DIC$ (đối đỉnh)

$IB = IC$ (do ΔBIC cân tại I)

$\Rightarrow \Delta IEB = \Delta IDC\ (g-c-g)$

$\Rightarrow BE = DC$

$\Rightarrow AE = AD$

$\Rightarrow \Delta AED$ cân tại A

$\Rightarrow AED = \dfrac{180^\circ - A}{2}$

Mà $ABC = \dfrac{180^\circ - A}{2}$ (do ΔABC cân tại A)

$\Rightarrow AED = ABC$

Mà 2 góc ở vị trí so le trong của hai đường thẳng ED và BC

$\Rightarrow ED\,//\,BC$

d) $\Delta AHE = \Delta AHD$ (c.g.c)

$\Rightarrow HE = HD$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow H$ là trung điểm của ED

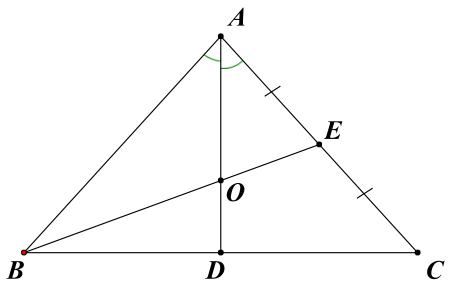
e) Có:

$$\left.\begin{aligned} AE &= AD \\ HE &= HD \end{aligned}\right\} \Rightarrow AH \text{ là đường trung trực của } ED$$

$\Rightarrow AH \perp ED$ hay $AM \perp ED$

f) I và trọng tâm G của ΔABC trùng nhau $\Rightarrow \Delta ABC$ đều

Bài 3.



a) $\Delta ABD = \Delta ACD$ (c.g.c)

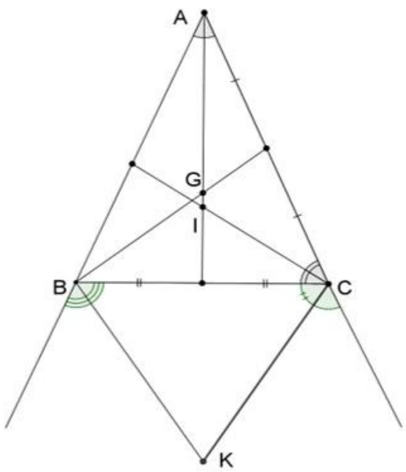
$\Rightarrow BD = CD$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow AD$ là trung tuyến

$\Rightarrow O$ là giao điểm hai đường trung tuyến AD, BE nên O là trọng tâm

b) ΔABC đều.

Bài 4.

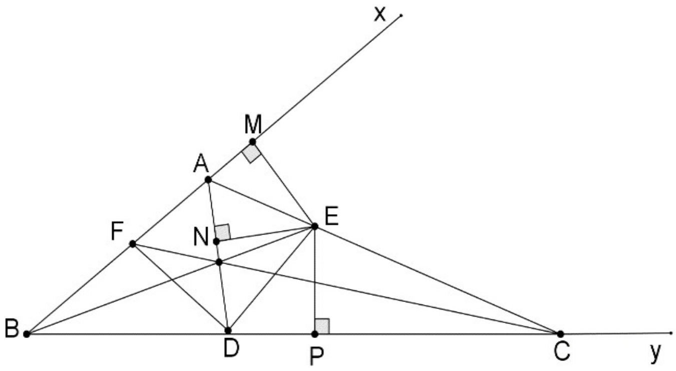


Gọi G là trọng tâm ΔABC
$\Rightarrow G$ thuộc trung tuyến AM (1)
Mà AI là phân giác của ΔABC cân tại A $\Rightarrow AI$ là trung tuyến của ΔABC (2)
Từ (1) và (2) $\Rightarrow A, I, G$ thẳng hàng (3)
Theo đề bài AI là phân giác góc A mặt khác (theo bài 4) thì AK cũng là phân giác góc A nên ba điểm A, I, K thẳng hàng (4)

Từ (3), (4) $\Rightarrow A, I, K, G$ thẳng hàng

Dạng 4.

Bài 1.



a) Gọi Ax là tia đối của tia AB

Vì $ABC = 120°$ nên $CAx = 60°$. Do AD là

phân giác BAC

nên $BAD = DAC = CAx = 60^0$

Kẻ $ME \perp AB; EN \perp AD; EP \perp DB$.

Xét ΔABD có BE là phân giác trong của góc $B \Rightarrow ME = EP$ (tính chất tia phân giác), (1)

AE là phân giác góc ngoài tại đỉnh A của tam giác $ABD \Rightarrow ME = NE$ (tính chất tia phân giác) (2)

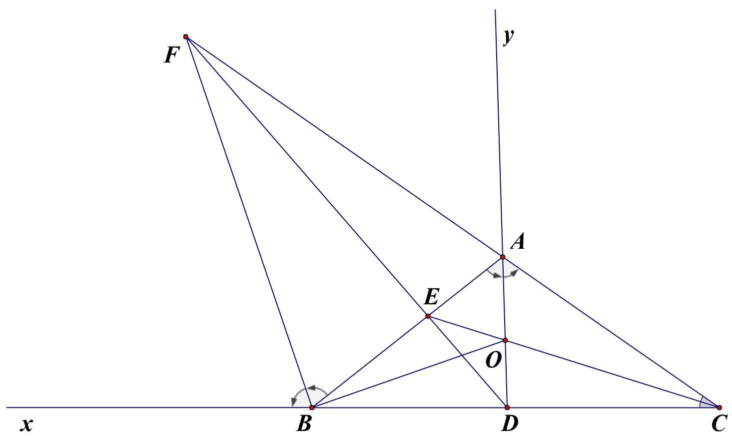
Từ (1) và (2) ta có $EP = NE$. Do đó DE là phân giác góc ngoài tại đỉnh D của ΔABD

b) Chứng minh tương tự ta có DF là phân giác góc ngoài đỉnh D của ΔDEC

Vì ADC; ADB là hai góc kề bù nên $DE \perp DF$

Hay $EDF = 90^0$

Bài 2.



a) BO, BF là hai tia phân giác hai góc kề bù nên $BO \perp BF$

b) $FAB + BAC = 180°$ mà $BAC = 120°$

$\Rightarrow FAB = 60°$.

AD là tia phân giác BAC nên

$BAD = DAC = 60°$ $FAy = DAC = 60°$ (hai góc đối đỉnh)

Từ đó suy ra $BAF = FAy$

Xét ΔABD có hai đường phân giác góc ngoài đỉnh A và B cắt nhau ở $F \Rightarrow DF$ là phân giác ABD.

Vậy $BDF = ADF$

c) Xét ΔACD có phân giác góc C và phân giác góc ngoài ở đỉnh A cắt nhau ở E

$\Rightarrow DE$ là phân giác góc ngoài đỉnh D.

DE, DF đều là tia phân giác góc ADB.

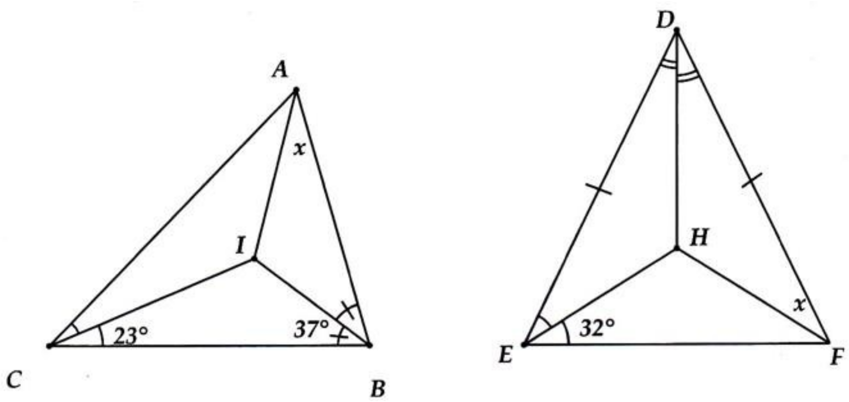
Suy ra ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Do đó, $DEA + FEA = 180°$

PHIẾU BÀI TẬP

Dạng 1. Chứng minh đoạn thẳng bằng nhau, góc bằng nhau, tính độ dài đoạn thẳng, số đo góc

Bài 1. Tìm x trong mỗi hình vẽ sau biết CI và BI là hai phân giác của ACB và ABC, EH và FH là hai phân giác của DEF và DFE.



Bài 2. Cho ΔABC có $A = 120°$. Các đường phân giác AD, BE. Tính số đo góc BED.

Bài 3. Cho ΔABC. Gọi I là giao điểm của hai đường phân giác kẻ từ góc B và C. Tính số đo góc BIC trong các trường hợp:

a) $BAC = 80°$ b) $BAC = 120°$

Bài 4. Cho ΔABC, các tia phân giác của góc B và góc C cắt nhau ở I

a) Biết $A = 70°$, tính số đo góc BIC.

b) Biết $BIC = 140°$, tính số đo góc A.

Bài 5. Cho ΔABC cân tại A. Gọi D là trung điểm của BC; E và F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ D đến AB, AC. Chứng minh rằng $DE = DF$.

Bài 6. Cho ΔABC có $A = 90°$ các tia phân giác của B và C cắt nhau tại I. Gọi D, E là chân các đường vuông góc hạ từ I đến các cạnh AB và AC.

a) Biết $ID = 2\text{cm}$. Tính IE?

b) Biết $ID = x+3$, $IE = 2x-3$. Tìm x?

Bài 7. Cho ΔABC gọi I là giao điểm của hai tia phân giác góc A và góc B. Qua I kẻ đường thẳng song song với BC, cắt AB tại M, cắt AC tại N. Chứng minh rằng $MN = BM + CN$

Dạng 2. Chứng minh 3 đường đồng quy, 3 điểm thẳng hàng

Bài 1. Cho tam giác ABC cân tại A. Kẻ các tia phân giác BD, CE. Lấy M là trung điểm của BC.

a) Chứng minh AM là tia phân giác của góc BAC.

b) Ba đường thẳng AM, BD, CE đồng quy.

Bài 2. Cho tam giác ABC, tia phân giác AD. Các tia phân giác ngoài tại đỉnh B và C cắt nhau ở E. Chứng minh ba điểm A, D, E thẳng hàng.

Bài 3. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi G là trọng tâm, I là điểm nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh của tam giác đó. Chứng minh ba điểm A, G, I thẳng hàng.

Bài 4. Cho tam giác ABC cân ở A có BM, CN là hai đường trung tuyến cắt nhau ở điểm G.

a) Chứng minh rằng: AG là tia phân giác của góc BAC.

b) CMR: $GM = GN$

c) CMR: đường thẳng AG là đường trung trực của đoạn thẳng MN.

d) CMR: đường thẳng AG là đường trung trực của đoạn thẳng BC.

e) Gọi P là trung điểm BC. CMR: A, G, P thẳng hàng.

Bài 5. Cho tam giác ABC. Phân giác trong của góc B và góc C cắt nhau tại I. Phân giác các góc ngoài tại đỉnh B và đỉnh C cắt nhau tại J, phân giác các góc ngoài tại đỉnh A và đỉnh C cắt nhau tại K, phân giác các góc ngoài tại đỉnh A và đỉnh B cắt nhau tại L.

a) Chứng minh $BIC = 90° + \frac{A}{2}$

b) Chứng minh ba điểm A, I, J thẳng hàng

c) Chứng minh AJ, BK, CL cắt nhau tại một điểm.

Bài 6. Cho tam giác ABC có $A = 120°$. Các tia phân giác của góc A và C cắt nhau ở O, cắt cạnh BC và AB lần lượt ở D và E. Đường phân giác góc ngoài tại đỉnh B của tam giác ABC cắt đường thẳng AC ở F. Chứng minh:

a) $BO \perp BF$

b) $BDF = ADF$

c) Ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Dạng 3. Đường phân giác đối với tam giác đặc biệt (tam giác cân, tam giác đều)

Bài 1. Cho ΔABC cân tại A, đường phân giác AM. Gọi D là một điểm nằm giữa A và M. Khi đó ΔBDC là tam giác gì?

Bài 2. Cho tam giác MNP cân tại M có G là trọng tâm. I là điểm nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh của tam giác đó. Chứng minh ba điểm M, G, I thẳng hàng.

Bài 3. Tam giác ABC cân tại A. Tia phân giác của góc A cắt đường trung tuyến BD tại K. Gọi I là trung điểm của AB. Chứng minh rằng ba điểm I, K, C thẳng hàng.

Bài 4. Chứng minh rằng trong tam giác cân, trung điểm của cạnh đáy cách đều hai cạnh bên.

Bài 5. Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AM là đường phân giác của góc A. Chứng minh tam giác ABC cân tại A.

Bài 6. Cho ΔABC có $AH \perp BC$ và $BAH = 2C$. Tia phân giác của góc B cắt AC tại E. Tia phân giác của góc BAH cắt BE ở I. Chứng minh ΔAIE là tam giác vuông cân tại E

Bài 7. Cho tam giác ABC cân ở A có M là trung điểm cạnh BC và BD là đường phân giác (D thuộc AC). AM và BD giao nhau ở điểm I.

a) CMR: Tia CI là tia phân giác của góc ACB.

b) CMR: Tam giác BIC là tam giác cân.

c) Gọi E là giao điểm của tia CI với cạnh AB. Chứng minh rằng: $ED // BC$

d) Gọi H là giao điểm của AM và ED. CMR: H là trung điểm của ED.

e) CMR: $AM \perp ED$

f) Tìm điều kiện của tam giác ABC để điểm I và trọng tâm G của tam giác ABC trùng nhau.

Dạng 4. Chứng minh mối quan hệ giữa các góc

Bài 1. Cho tam giác ABC có ba đường phân giác cắt nhau tại I. Chứng minh rằng: $IAB + IBC + IAC = 90°$

Bài 2. Cho tam giác ABC có ba đường phân giác cắt nhau tại I và $AB < AC$.

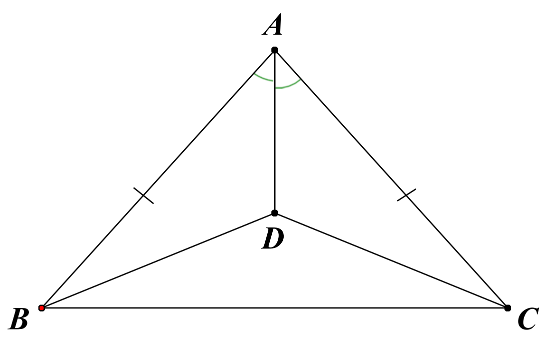
a) Chứng minh rằng: $CBI > ACI$

b) So sánh IB và IC

Bài 3. Cho hình vẽ.

a) Chứng minh $\Delta ABD = \Delta ACD$

b) So sánh góc DBC và góc DCB.



Bài 4. Cho ΔABC hai đường phân giác của góc B và góc C cắt nhau tại I. Chứng minh rằng: $BIC = 90^\circ + \frac{A}{2}$

Bài 5. Cho tam giác ABC có $B > C$. Từ đỉnh A kẻ đường cao AH và tia phân giác AD.

a) Biết $B = 70^\circ, C = 50^\circ$, tính số đo HAD.

b) Chứng minh $HAD = \frac{B-C}{2}$

Bài 6. Cho ΔABC các tia phân giác góc B và C cắt nhau ở O. Gọi D, E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ O đến BC, CA, AB $(D \in BC, E \in AC, F \in AB)$. Tia AO cắt BC ở M.

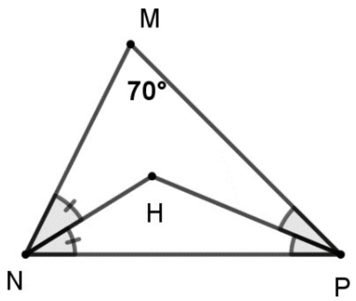
a) Chứng minh: $OD = OE = OF$

b) So sánh DOB và MOC? MOB và DOC?

Phần III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1.Chứng minh đoạn thẳng bằng nhau, góc bằng nhau, tính độ dài đoạn thẳng, số đo góc Chứng minh đoạn thẳng bằng nhau, góc bằng nhau, tính độ dài đoạn thẳng, số đo góc

Bài 1. Cho hình vẽ:



H là giao điểm của hai đường phân giác xuất phát từ N và P của tam giác MNP.

a) Chứng minh rằng điểm H cách đều hai cạnh MN, MP

b) Tính số đo HMN, NHP?

Bài 2. Cho ΔABC vuông ở A

Các tia phân giác góc B và C cắt nhau ở I .Gọi D, E, F là hình chiếu của điểm I xuống AB, AC, BC

a) Chứng minh rằng $AD = AE$

b) Trong trường hợp ΔABC cân ở A. Chứng minh ΔDEF cân

Bài 3. Cho ΔABC, các tia phân giác của góc B và góc C cắt nhau ở I

a) Biết $A = 80^\circ$, tính số đo góc BIC.

b) Biết $BIC = 120^\circ$, tính số đo góc A.

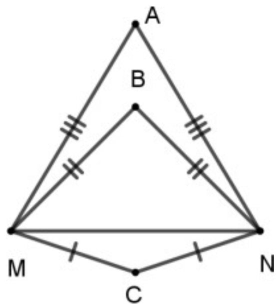
Bài 4. Cho ΔABC có $A = 90^\circ$ các tia phân giác của B *và* C cắt nhau tại *I.* Gọi D, E là chân các đường vuông góc hạ từ I đến các cạnh AB *và* AC.

a) Biết $ID = 3\text{cm}$. Tính IE?

b) Biết $ID = x+2$, $IE = 2x-4$. Tìm x?

Dạng 2. Chứng minh 3 đường đồng quy, 3 điểm thẳng hàng

Bài 1. Cho hình vẽ :



CMR: A, B, C thẳng hàng.

Bài 2. Cho tam giác ABC cân ở A có BM, CN là hai đường trung tuyến cắt nhau ở điểm G.

a) Chứng minh rằng: AG là tia phân giác của góc BAC.

b) CMR: $GM = GN$

c) CMR: đường thẳng AG là đường trung trực của đoạn thẳng MN.

d) CMR: đường thẳng AG là đường trung trực của đoạn thẳng BC.

e) Gọi P là trung điểm BC. CMR: A, G, P thẳng hàng.

Bài 3. Cho ΔABC các tia phân giác góc B và C cắt nhau tại I. Các đường phân giác góc ngoài tại đỉnh B và C cắt nhau ở K. Chứng minh ba điểm A, I, K thẳng hàng

Bài 4. Cho tam giác ABC có $A = 120^\circ$. Các tia phân giác của góc A và C cắt nhau ở O, cắt cạnh BC và AB lần lượt ở D và E. Đường phân giác góc ngoài tại đỉnh B của tam giác ABC cắt đường thẳng AC ở F. Chứng minh:

a) $BO \perp BF$

b) $BDF = ADF$

c) Ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Dạng 3. Đường phân giác đối với tam giác đặc biệt (tam giác cân, tam giác đều)

Bài 1. Chứng minh rằng:

a) Trong tam giác cân, đường trung tuyến ứng với cạnh đáy cũng là đường trung trực của cạnh đáy.

b) Nếu tam giác có 1 đường vừa là đường trung trực của 1 cạnh, vừa là đường phân giác thì tam giác đó là tam giác cân.

Bài 2. Cho tam giác ABC cân ở A có M là trung điểm cạnh BC và BD là đường phân giác (D thuộc AC). AM và BD giao nhau ở điểm I.

a) CMR: Tia CI là tia phân giác của góc ACB .

b) CMR: Tam giác BIC là tam giác cân.

c) Gọi E là giao điểm của tia CI với cạnh AB . Chứng minh rằng: $ED \;//\; BC$.

d) Gọi H là giao điểm của AM và ED . CMR: H là trung điểm của ED .

e) CMR: $AM \perp ED$

f) Tìm điều kiện của tam giác ABC để điểm I và trọng tâm G của tam giác ABC trùng nhau.

Bài 3. Cho tam giác ABC cân ở A có đường phân giác AD $(D \in BC)$ và đường trung tuyến BE $(E \in AC)$ cắt nhau tại O .

a) Chứng minh: O là trọng tâm ΔABC

b) Tam giác ABC cần có thêm điều kiện gì để O cũng là giao điểm 3 đường phân giác của tam giác ABC ?

Bài 4. Cho ΔABC cân ở A .Gọi G là trọng tâm tam giác, I là giao điểm các phân giác của tam giác, K là giao điểm hai đường phân giác góc ngoài tại đỉnh B và C .Chứng minh rằng bốn điểm A, G, I, K thẳng hàng.

Dạng 4. Đường phân giác đối với tam giác đặc biệt (tam giác cân, tam giác đều)

Bài 1.

Cho ΔABC có góc $A = 120°$ các phân giác $AD,\ BE, CF$

a) Chứng minh rằng DE là tia phân giác góc ngoài đỉnh D của ΔABD

b) Chứng minh rằng $EDF = 90°$

Bài 2. Cho ΔABC , $A = 120°$ .Các tia phân giác góc A ; C cắt nhau ở O , cắt các cạnh $BC; AB$ lần lượt ở D và E .Đường phân giác góc ngoài tại đỉnh B của ΔABC cắt đường thẳng AC ở F . Chứng minh:

c) $BO \perp BF$

d) $BDF = ADF$

c) $DEA + FEA = 180°$

CHUYÊN ĐỀ 35.

SỰ ĐỒNG QUY CỦA BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC, BA ĐƯỜNG CAO CỦA TAM GIÁC

PHẦN I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT.

1. Đường trung trực của tam giác:

Định nghĩa: Trong một tam giác, đường trung trực của mỗi cạnh được gọi là đường trung trực của tam giác đó.

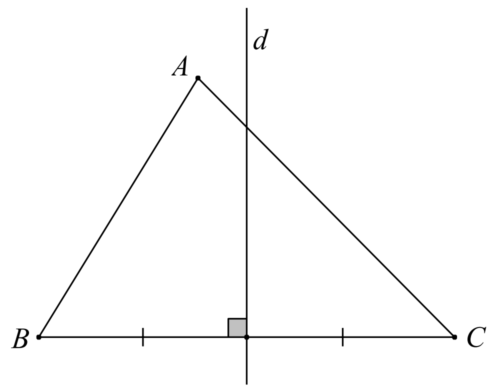
Định lí 1: Ba đường trung trực của tam giác đồng quy tại một điểm. Điểm đó cách đều ba đỉnh của tam giác.

Nhận xét: Vì giao điểm của ba đường trung trực của tam giác cách đều ba đỉnh của tam giác nên là tâm đường tròn đi qua ba đỉnh tam giác đó.

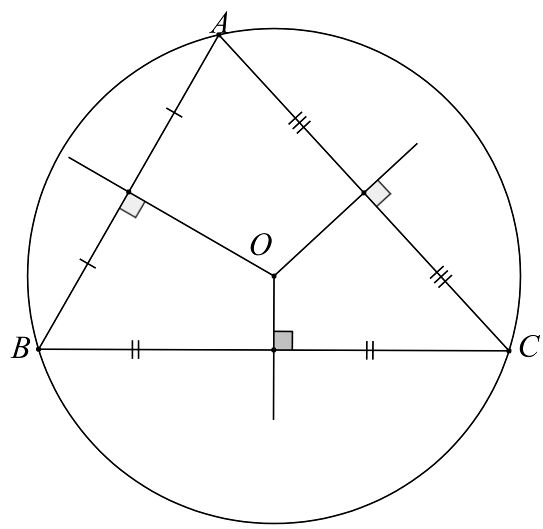
Tính chất: ΔABC cân tại A, AM là đường trung tuyến thì nó cũng là đường trung trực của BC

Cụ thể:

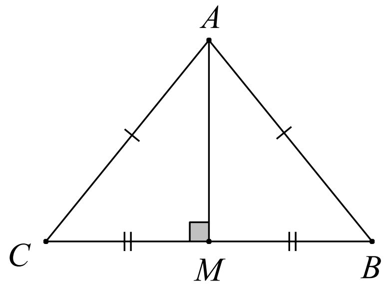
a) Cho ΔABC, (d) là đường trung trực của cạnh BC thì (d) gọi là đường trung trực của ΔABC ứng với cạnh BC.



b) Trong hình sau, điểm O là giao điểm các đường trung trực của ΔABC. Ta có $OA = OB = OC$. Điểm O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.



c) ΔABC cân tại A, AM là đường trung tuyến thì cũng là đường trung trực của BC



2. Đường cao của tam giác:

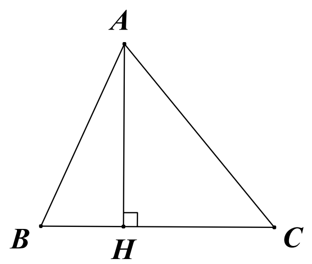
Định nghĩa: Đoạn thẳng kẻ từ một đỉnh tam giác và vuông góc với cạnh đối diện gọi là đường cao của tam giác đó.

Định lí 2: Ba đường cao của tam giác đồng quy tại một điểm.

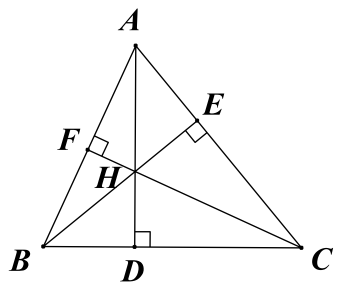
Điểm đó được gọi là trực tâm của tam giác.

Cụ thể:

a) AH là một đường cao của $\Delta ABC \Leftrightarrow AH \perp BC$

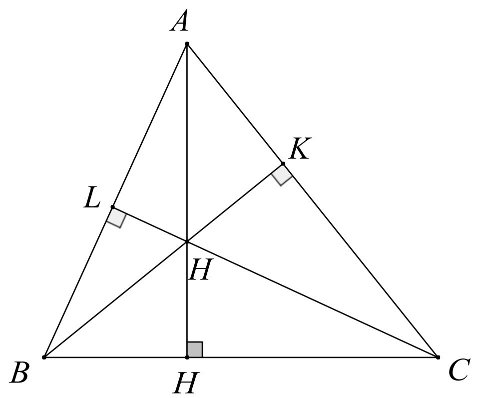


b) Trong hình vẽ AD, BE, CF là các đường cao, H là trực tâm của ΔABC.

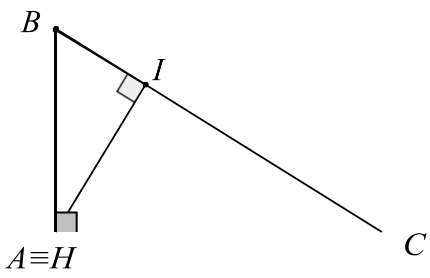


Chú ý:

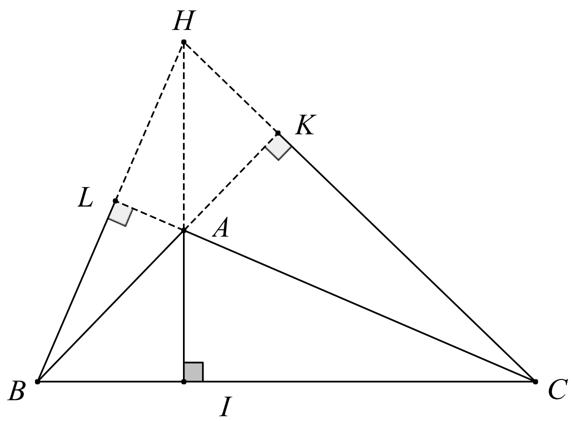
a) ΔABC là tam giác nhọn thì H nằm trong tam giác.



b) ΔABC là tam giác vuông tại A thì điểm H trùng với điểm A .

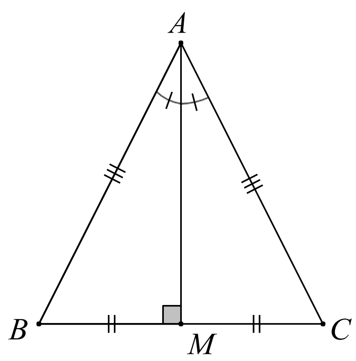


c) ΔABC là tam giác tù thì điểm H nằm ngoài tam giác.



3. Bổ sung:

Tính chất trong tam giác cân: ΔABC cân tại A, AM là đường cao thì nó cũng là đường trung trực, đường trung tuyến, đường phân giác.



PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI.

BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC

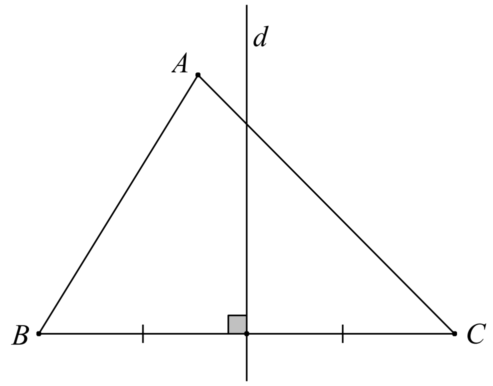
Dạng 1. Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác

I. Phương pháp giải:

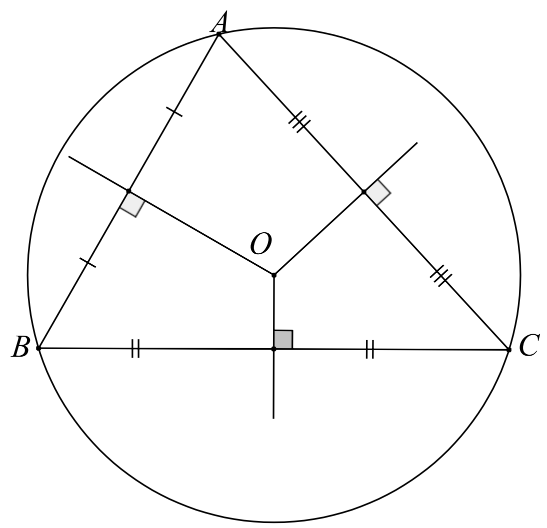
- Dựa vào định nghĩa và sự đồng quy của ba đường trung trực trong tam giác.

- Sử dụng tính chất giao điểm các đường trung trực trong tam giác thì cách đều ba đỉnh của tam giác đó.

1. Cho ΔABC, (d) là đường trung trực của cạnh BC thì (d) gọi là đường trung trực của ΔABC ứng với cạnh BC.



2. Điểm O là giao điểm các đường trung trực của $\Delta ABC.$ Ta có $OA = OB = OC.$ Điểm O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC.$



II. Bài toán.

Bài 1. Chọn đáp án đúng. Điểm cách đều 3 đỉnh của tam giác là giao điểm của:

A. 3 đường trung tuyến.

B. 3 đường phân giác.

C. 3 đường trung trực.

D. 3 đường cao.

Lời giải:

Điểm nằm trong và cách đều 3 đỉnh của tam giác là giao điểm của 3 đường trung trực. Chọn đáp án C.

Bài 2. Chọn đáp án đúng.

a) Cho ΔABC tù, giao điểm 3 đường trung trực của tam giác nằm:

A. trong ΔABC.

B. ngoài ΔABC.

C. trên 1 cạnh của ΔABC.

D. trùng với 1 đỉnh của ΔABC.

b) Cho ΔABC có $A = 90°$ thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác:

A. nằm trong ΔABC

B. nằm ngoài ΔABC

C. là trung điểm của cạnh BC

D. trùng với đỉnh A của ΔABC

c) Cho ΔABC nhọn, giao điểm 3 đường trung trực của tam giác nằm:

A. trong ΔABC

B. ngoài ΔABC

C. trên một cạnh của ΔABC

D. trùng với một đỉnh của ΔABC

Lời giải:

a) Cho ΔABC nhọn, giao điểm 3 đường trung trực của tam giác nằm trong ΔABC. Chọn đáp án B

b) Cho ΔABC có $A = 90^{\circ}$ thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm của cạnh BC. Chọn đáp án C.

c) Cho ΔABC nhọn, giao điểm 3 đường trung trực của tam giác nằm trong ΔABC. Chọn đáp án A.

Bài 3. Cho ΔABC. Vẽ điểm O cách đều ba đỉnh A, B, C và vẽ đường tròn đi qua 3 đỉnh của tam giác trong mỗi trường hợp sau:

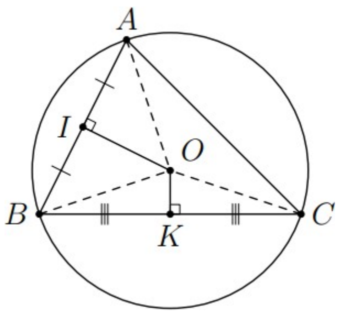
a, ΔABC là tam giác nhọn.

b, ΔABC vuông tại A.

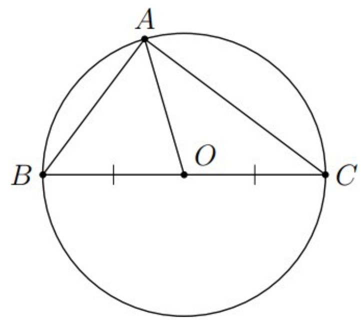
c, ΔABC là tam giác tù.

Lời giải:

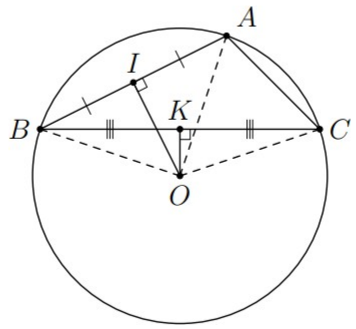
a, ΔABC là tam giác nhọn.



b, ΔABC vuông tại A.

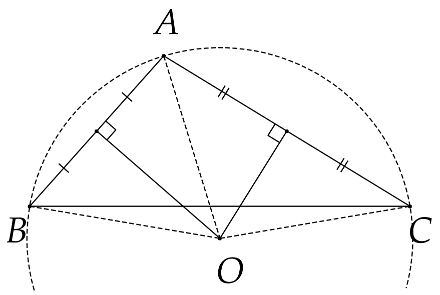


c, ΔABC là tam giác tù.



Bài 4. Cho A, B, C là ba điểm phân biệt không thẳng hàng. Xác định đường tròn đi qua ba điểm đó.

Lời giải:



Gọi đường tròn đi qua ba điểm $A,\ B,\ C$ có tâm O ta có $OA = OB = OC$.

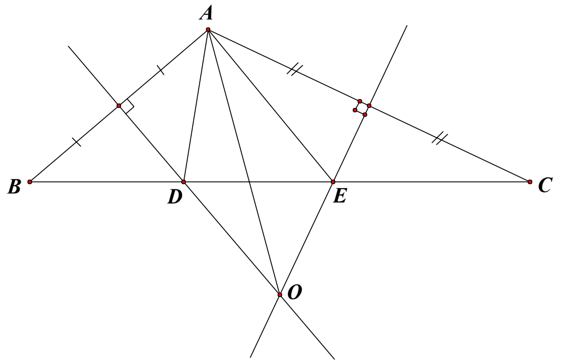
Ba điểm phân biệt $A,\ B,\ C$ không thẳng hàng tạo thành tam giác ABC.

Vì $OA = OB = OC$ nên O là giao điểm ba đường trung trực của tam giác ABC.

Vậy đường tròn đi qua ba điểm A, B, C có tâm O là giao của ba đường trung trực của ΔABC và bán kính bằng OA.

Bài 5. Cho ΔABC có $A > 90°$. Các đường trung trực của AB và của AC cắt nhau ở O và cắt BC theo thứ tự ở D và E. Nối AD, AE, OB, OC. Tìm tam giác bằng ΔOAD, bằng ΔOAE.

Lời giải:



OD là đường trung trực của AB
suy ra $DA = DB,\quad OA = OB$.

Do đó $\Delta OAD = \Delta OBD$ (c.c.c)

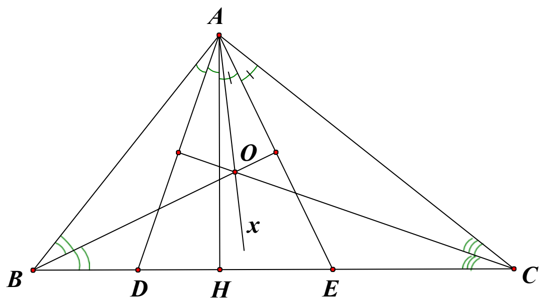
Tương tự $\Delta OAE = \Delta OCE.$

Bài 6. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Tia phân giác của các góc BAH và CAH cắt BC lần lượt ở D và E. Gọi O là giao điểm các đường phân giác của tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng đường tròn tâm O, bán kính OA đi qua ba điểm A, D, E.

b) Tính số đo góc DOE.

Lời giải:



a) Ta có

$BAE = BAC - EAC = 90^0 - EAC$ (1)

$AEB = 90^0 - HAE$ (2)

Mà $EAC = HAE\,(gt)$, do đó từ $(1),(2)$ suy r $BAE = AEB$ nên ΔAEB cân tại B.

Vì O là giao điểm các đường phân giác của tam giác ABC nên BO là đường phân giác của tam giác cân ABE, do đó BO là đường trung trực của AE, suy ra $OA = OE$ (3)

Chứng minh tương tự, CO là đường trung trực của AD, suy ra $OA = OD$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $OA = OD = OE$. Điều này chứng tỏ ba điểm A, E, D nằm trên đường tròn tâm O, bán kính OA hay đường tròn tâm O bán kính OA đi qua 3 điểm A, E, D.

b) Từ (3) suy ra ΔOAE cân tại O, nên $OAE = OEA$. Vẽ tia Ox là tia đối của tia OA, ta có $EOx = OAE + OEA = 2xAE$.

Tương tự, $xOD = 2xAD$.

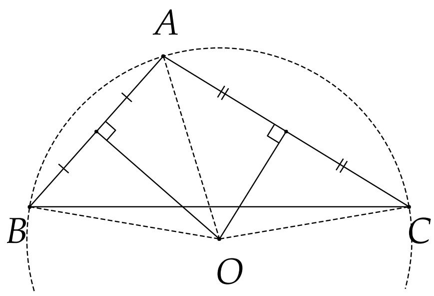
Do đó, $DOE = 2\left(xAD + xAE\right) = 2DAE = 2\left(DAH + HAE\right)$

$$= 2.\frac{BAH + HAC}{2} = 2.\frac{BAC}{2} = 90^0.$$

Vậy $DOE = 90°$

Bài 7. Tam giác ABC có A là góc tù. Các đường trung trực của các cạnh AB và AC cắt nhau ở O. Các điểm B và C có thuộc đường tròn tâm O bán kính OA hay không? Vì sao?

Lời giải



Từ giả thiết suy ra $OA = OB = OC$. Vậy các điểm B và C có thuộc đường tròn tâm O bán kính OA.

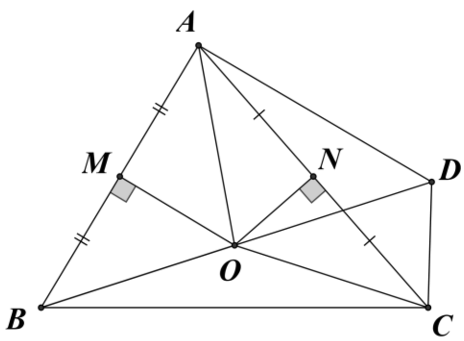
Bài 8. Cho ΔABC có ba góc nhọn, O là giao điểm hai đường trung trực của AB và AC. Trên tia đối của tia OB lấy điểm D sao cho $OB = OD$.

a) Chứng minh O thuộc đường trung trực của AD và CD.

b) Chứng minh các ΔABD, ΔCBD vuông.

c) Biết $ABC = 70°$. Hãy tính số đo ADC.

Lời giải



a) Vì O là giao điểm hai đường trung trực của AB và AC nên $OA = OB = OC$.

Mà $OD = OB$ nên $OD = OA$ và $OD = OC$

$\Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của AD và CD.

b) Xét ΔOAB cân tại O $\Rightarrow OAB = OBA = \dfrac{180^0 - AOB}{2}$

Xét ΔOAD cân tại O $\Rightarrow OAD = ODA = \dfrac{180° - AOD}{2}$

$\Rightarrow OAB + OAD = \dfrac{180° - AOB}{2} + \dfrac{180° - AOD}{2}$

$= 180° - \dfrac{AOB + AOD}{2} = 180° - \dfrac{180°}{2} = 90°$

$\Rightarrow BAD = 90°$

$\Rightarrow \Delta ABD$ vuông tại A.

Chứng minh tương tự ΔCBD vuông tại C.

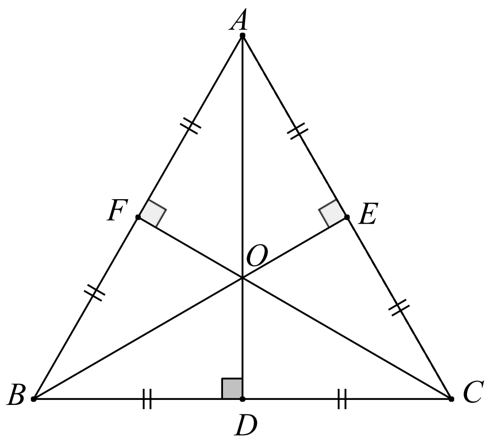
c) Ta có ΔABD vuông tại A nên $ADB = 90° - ABD$

Ta có ΔBCD vuông tại C nên $BDC = 90° - CBD$

$\Rightarrow ADO + ODC = 180° - \left(ABO + CBO\right)$

$\Rightarrow ADC = 180° - ABC = 180° - 70° = 110°$

Bài 9. Tam giác ABC có ba đường trung tuyến cắt nhau tại O. Biết rằng điểm O cũng là giao điểm của ba đường trung trực trong tam giác ABC. Chứng minh tam giác ABC đều.



Lời giải:

Cách 1:

Cho AO cắt BC tại F, BO cắt AC tại E, CO cắt AB tại D.

Suy ra D, E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC.

Vì O là giao điểm 3 đường trung trực nên $OD \perp AB$ tại D, $OE \perp AC$ tại E, $OF \perp BC$ tại F.

Suy ra AD, BE, CF là 3 đường trung trực của ΔABC.

Vì AD đường trung trực của ΔABC nên $AB = AC$ (1)

Vì BE đường trung trực của ΔABC nên $BA = BC$ (2)

Từ (1) (2) suy ra $AB = AC = BC$ suy ra ΔABC đều.

Cách 2:

Cho AO cắt BC tại F, BO cắt AC tại E, CO cắt AB tại D.

Suy ra D, E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC.

Vì O là giao điểm 3 đường trung trực nên $OD \perp AB$ tại D, $OE \perp AC$ tại E, $OF \perp BC$ tại F.

Suy ra AD, BE, CF là 3 đường trung trực của ΔABC.

Xét ΔAFB và ΔAFC có:

AF chung

$AFB = AFC \left(= 90^\circ\right)$

$BF = CF$ (vì AF là trung trực của BC)

Do đó : $\Delta AFB = \Delta AFC$ (c.g.c)

$\Rightarrow AB = AC$

Chứng minh tương tự ta được: $BA = BC$

Do đó: $AB = AC = BC$

Vậy ΔABC là tam giác đều.

Bài 10. Cho ΔABC đều. Trên cạnh AB, BC, CA lấy theo thứ tự ba điểm M, N, P sao cho $AM = BN = CP$

a. Chứng minh ΔMNP là tam giác đều

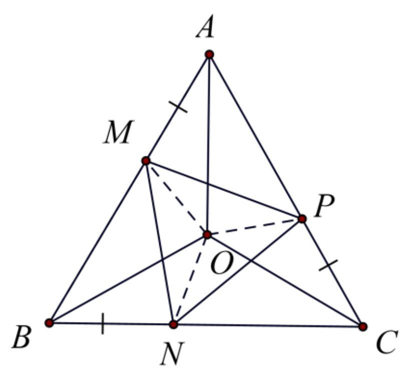
b. Gọi O là giao điểm các đường trung trực của ΔABC.

Chứng minh rằng điểm O cũng là giao điểm các đường trung trực của ΔMNP

Lời giải:

a) ΔABC đều nên $AB = BC = CA$

Mà $AM = BN = CP$ => $BM = CN = AP$



Xét ΔAMP và ΔBNM có

$AM = BN$ (gt)

$MAP = NBM$ (ΔABC đều)

$AP = BM$ (cmt)

Do đó, $\Delta AMP = \Delta BNM$ (c.g.c)

=> $MP = MN$ (hai cạnh tương ứng) (1)

Tương tự: $\Delta AMP = \Delta CPN$ (c.g.c)

Suy ra $MP = PN$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $MP = MN = PN$

Vậy ΔMNP là tam giác đều.

b) Điểm O là giao điểm các đường trung trực của tam giác đều ABC nên $OA = OB = OC$ đồng thời AO, BO, CO cũng lần lượt là các tia phân giác của BAC, ABC, ACB.

Xét ΔMAO và ΔNBO có:

$AM = BN$ (gt)

$MAO = NBO\left(=\frac{1}{2}BAC = \frac{1}{2}ABC\right)$

$OA = OB$ (cmt)

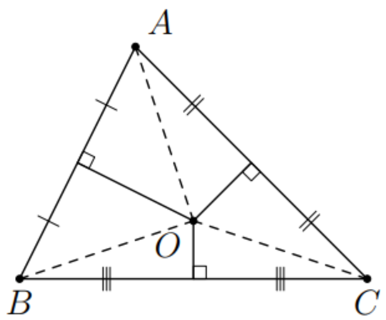
$\Rightarrow \Delta MAO = \Delta NBO(\text{c.g.c}) \Rightarrow OM = ON$ (hai cạnh tương ứng)

Tương tự : $\Delta MAO = \Delta PCO(\text{c.g.c}) \Rightarrow \text{OM} = \text{OP}$.

Vậy $OM = ON = OP$. Do đó O là giao điểm các đường trung trực của ΔMNP.

Bài 11. Trong một buổi tổng vệ sinh sân trường, 3 tổ cần dọn cỏ và rác của 3 bồn cây A, B, C ở 3 góc sân trường. Em hãy giúp 3 tổ chọn một vị trí O để đặt chiếc xe đẩy rác sao cho vị trí chiếc xe cách đều 3 bồn cây đó.

Lời giải:



Vì điểm O cách đều ba điểm A, B, C nên O là giao của ba đường trung trực của tam giác ABC hay O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Để xác định vị trí điểm O ta chỉ cần xác định giao điểm của hai trong ba đường trung trực của tam giác ABC.

Dạng 2. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy, ba điểm thẳng hàng

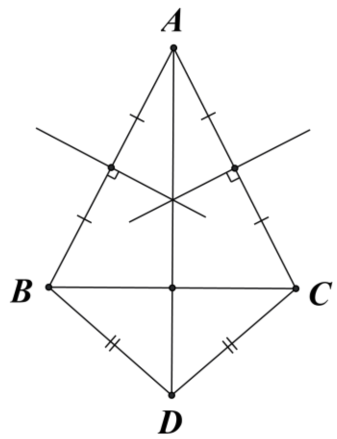
I. Phương pháp giải:

Dựa vào định lí, tính chất về đường trung trực và sự đồng quy của ba đường trung trực trong tam giác.

II. Bài toán.

Bài 1. Cho ΔABC cân tại A. Dựng tam giác BCD cân tại D biết D khác phía với A đối với đường đường thẳng BC. Gọi O là giao điểm của AB và AC. Chứng minh rằng A, O, D thẳng hàng.

Lời giải:



ΔABC cân tại $A \Rightarrow AB = AC$.

ΔBCD cân tại $D \Rightarrow DB = DC$.

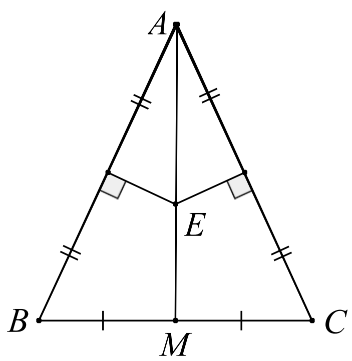
Suy ra AD là đường trung trực của BC.

Xét ΔABC, theo tính chất ba đường trung trực trong tam giác ta có các đường trung trực của AB và AC đồng quy với đường thẳng AD, hay A, O, D thẳng hàng.

Bài 2. Cho ΔABC cân tại A. Gọi M là trung điểm của BC. Các đường trung trực của AB và AC cắt nhau ở E.

Chứng minh ba điểm A, E, M thẳng hàng.

Lời giải:



Theo gt, M là trung điểm của BC

$\Rightarrow AM$ là đường trung tuyến của tam giác cân ABC

$\Rightarrow AM$ cũng là đường trung trực của BC (1)

Xét ΔABC cân tại A có đường trung trực của AB và AC cắt nhau ở E

$\Rightarrow E$ thuộc đường trung trực của BC (theo tính chất ba đường trung trực của tam giác) (2)

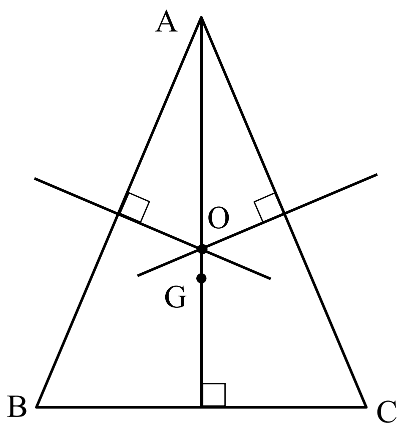
Từ (1) và (2) suy ra, ba điểm A, E, M thẳng hàng.

Bài 3. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi G là trọng tâm, O là giao điểm ba đường trung trực của tam giác ABC.

a) Tam giác BOC là tam giác gì?

b) Chứng minh ba điểm A,O,G thẳng hàng?

Lời giải:



a) Do O là giao điểm ba đường trung trực của tam giác ABC nên ta có: $OA = OB = OC$

Suy ra tam giác BOC là tam giác cân tại O

b) Do O là giao điểm ba đường trung trực của tam giác ABC nên O thuộc đường trung trực của BC (1)

Do G là trọng tâm nên G thuộc đường trung tuyến của BC đi qua A (2)

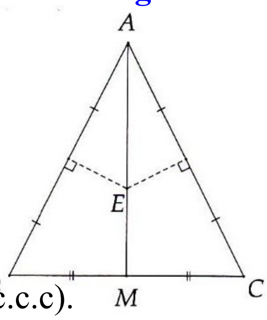
Mà tam giác ABC cân tại A nên trung tuyến ứng với cạnh BC cũng là đường trung trực của BC

Suy ra G thuộc đường trung trực của BC (3)

Từ (1), (2) và (3) Suy ra ba điểm A,O,G thẳng hàng

Bài 4. Cho tam giác ABC cân ở A. Gọi M là trung điểm của BC. Các đường trung trực của AB, AC cắt nhau ở E. Chứng minh ba điểm A, E, M thẳng hàng.

Lời giải:



Chứng minh được: $\Delta ABM = \Delta ACM$ (c.c.c).

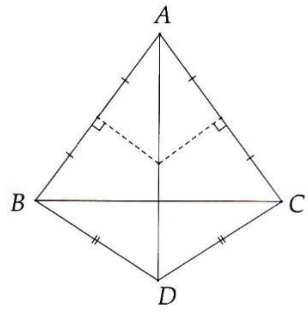
Từ đó, suy ra AM là đường trung trực của BC.

Theo tính chất ba đường trung trực của tam giác, ta suy ra điểm E thuộc đường trung trực của BC.

Vậy ba điểm A, E, M thẳng hàng.

Bài 5. Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy điểm D sao cho tam giác BCD cân tại D (D và A nằm khác phía đối với đường thẳng BC). Chứng minh các đường trung trực của AB và AC đồng quy với đường thẳng AD

Lời giải:



Từ giả thiết, ta có: $AB = AC, DB = DC$.

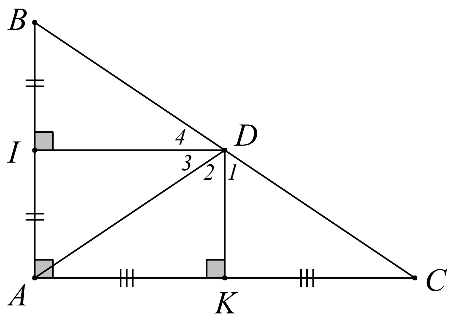
$\Rightarrow AD$ là đường trung trực của BC.

Xét ΔABC, theo tính chất ba đường trung trực trong tam giác ta có các đường trung trực của AB và AC đồng quy với đường thẳng AD.

Bài 6. Cho ΔABC vuông ở A, D là giao điểm hai đường trung trực của hai cạnh AB và AC.

Chứng minh B, D, C thẳng hàng.

Lời giải:



Gọi I là trung điểm của AB, K là trung điểm AC ta có $DI \perp AB$ và $DK \perp AC$.

Xét ΔDAK và ΔDCK có:

DK cạnh chung

$DKA = DKC \left(= 90^o\right)$

$AK = CK$ (hình vẽ)

$\Rightarrow \Delta DAK = \Delta DCK$ (c.g.c)

$\Rightarrow D_1 = D_2$

CM tương tự: $D_3 = D_4$

Ta lại có $D_2 = 90^o - DAK$ (hai góc phụ nhau)

$D_3 = 90^o - DAI$ (hai góc phụ nhau)

$\Rightarrow D_2 + D_3 = 180^o - \left(DAI + DAK\right) = 180^o - 90^o = 90^o$

$\Rightarrow D_1 + D_2 + D_3 + D_4 = 2\left(D_2 + D_3\right) = 2.90^o = 180^o$

$\Rightarrow BCD = 180^o$

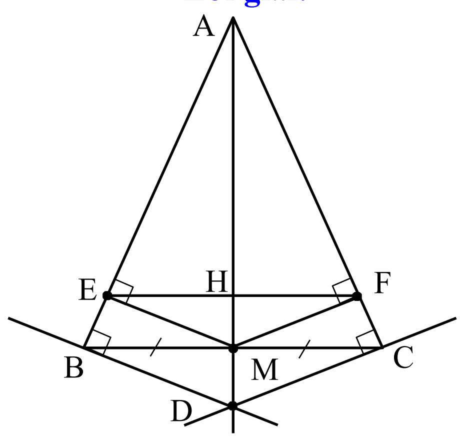
$\Rightarrow B, D, C$ thẳng hàng.

Bài 7. Cho tam giác ABC cân tại A. M là trung điểm của BC. Kẻ ME vuông góc AB tại E, MF vuông góc với AC tại F.

a) Chứng minh rằng AM là đường trung trực của EF?

b) Kẻ đường thẳng d vuông góc AB tại B, kẻ đường thẳng d' vuông góc với AC tại C, hai đường thẳng d và d' giao nhau giao tại D. Chứng minh rằng ba điểm A, M, D thẳng hàng?

Lời giải:



a) Gọi H là giao điểm của AM và EF

Xét tam giác ABC cân tại A.

M là trung điểm $BC \Rightarrow AM$ là trung tuyến ứng với BC

$\Rightarrow AM$ là đường trung trực, cũng là đường phân giác của góc A

$\Rightarrow AE = AF$ và $EAH = FAH$

Xét hai tam giác EAH và FAH, có:

$AE = AF$ (cmt)

AH là cạnh chung

$EAH = FAH$ (cmt)

Suy ra $\Delta EAH = \Delta FAH$ (c.g.c)

$\Rightarrow HE = HF$ (2 cạnh tương ứng) (1) và $AHE = AHF$ (2 góc tương ứng)

Mà $AHE + AHF = 180°$ (hai góc kề bù) $AHE = AHF = 90°$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra AH là đường trung trực của EF

Hay AM là đường trung trực của EF (đpcm)

b) Xét hai tam giác vuông ABD và ACD

AD là cạnh chung.

$BAD = CAD$ (AM là phân giác của góc A)

Suy ra $\Delta ABD = \Delta ACD$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Suy ra $DB = DC$ (2 cạnh tương ứng)

Suy ra D nằm trên đường trung trực AM của BC

Suy ra ba điểm A, M, D thẳng hàng (đpcm)

Bài 8. Cho tam giác nhọn ABC. Gọi H, G, O theo thứ tự là trực tâm, trọng tâm, giao điểm ba đường trung trực của tam giác. Tia AG cắt BC ở M. Gọi I là trung điểm của GA, K là trung điểm của GH. Chứng minh:

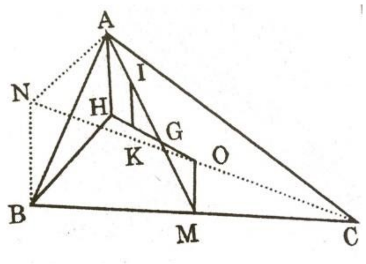
a) $OM = \frac{1}{2}AH$

b) $\Delta IGK = \Delta MGO$

c) Ba điểm H, G, O thẳng hàng

d) $GH = 2GO$

Lời giải:



a) Trên tia đối của tia OC lấy điểm N sao cho O là trung điểm của NC.

Ta có: $OM // BN$ và $OM = \frac{1}{2}BN$.

Vì $OM // AH$ (cùng vuông góc với BC) nên $AH // NB$

Chứng minh tương tự $NA // BH$.

$\Delta ANB = \Delta BHA$ (c.g.c) do đó $AH = NB$

Mà $OM = \frac{1}{2}BN$ vì thế $OM = \frac{1}{2}AH$.

b) Tam giác AGH có I là trung điểm của GA, K là trung điểm của GH nên $IK // AH$ và $IK = \frac{1}{2}AH$ Suy ra $IK // OM$ và $IK = OM$.

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $GM = \frac{1}{2}GA$, do đó $GM = GI$

$\Rightarrow \Delta IKG = \Delta MGO$ (c.g.c).

c) Vì $\Delta IKG = \Delta MGO$ (theo phần b) nên $IKG = MGO$ mà

$IGK + KGM = 180°$ do đó $KGM + MGO = 180°$

Vậy ba điểm K, G, O thẳng hàng, suy ra ba điểm H, G, O thẳng hàng.

d) $\Delta IGK = \Delta MGO$ nên $GO = GK$ mà $HG = 2GK$ do đó $HG = 2GO$.

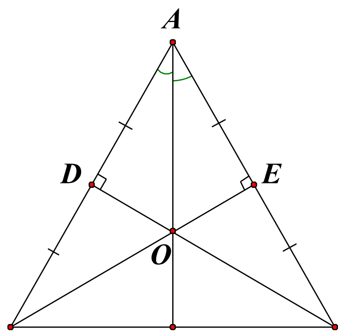
Chú ý: Đường thẳng đi qua ba điểm H, G, O được gọi là đường thẳng Ơle

Bài 9. Cho tam giác ABC cân ở A, đường phân giác AK. Các đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại O. Kéo dài CO cắt AB ở D, kéo dài BO cắt AC ở E.

a) Chứng minh ba điểm A, K, O thẳng hàng.

b) Chúng minh AK và các đường trung trực của AD và AE đồng quy.

Lời giải:



B K C

a) Ta có: $AD = \frac{1}{2}AB$ (CD là trung trực của AB)

$AE = \frac{1}{2}AC$ (BE là trung trực của AC)

Mà $AB = AC$ (tam giác ABC cân ở A)

$\Rightarrow AD = AE$

Xét hai tam giác vuông ADO và AEO có: $AD = AE$ (cmt); AO: cạnh huyền chung

$\Rightarrow \Delta ADO = \Delta AEO$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông).

Suy ra $DAO = EAO$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow AO$ là đường phân giác của BAC .

Vậy ba điểm A, K, O thẳng hàng.

b) Ta có: $AD = AE$ (chứng minh phần a) (1).

Mặt khác, có $\Delta ADO = \Delta AEO$ (chứng minh phần a) $OD = OE$ (hai cạnh tương ứng) (2).

Từ (1) và (2) suy ra AO là đường trung trực của DE, hay AK là đường trung trực của DE.

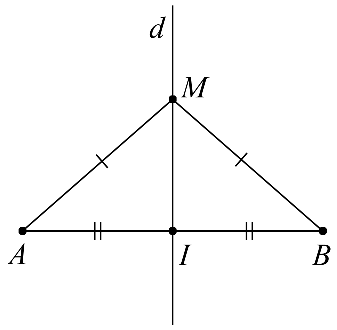
Xét ΔADE, theo tính chất ba đường trung trực của tam giác, ta có AK và các đường trung trực của AD và AE đồng quy.

Dạng 3. Vận dụng tính chất ba đường trung trực trong tam giác để giải quyết các bài toán khác

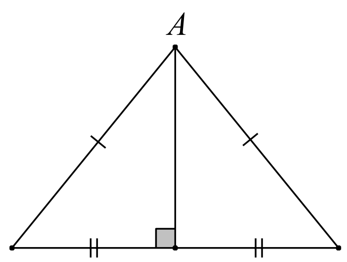
I. Phương pháp giải:

Dựa vào tính chất về đường trung trực và sự đồng quy của ba đường trung trực trong tam giác.

1. Điểm M nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng đó:



2. ΔABC cân tại A, AM là đường trung tuyến thì cũng là đường trung trực của BC

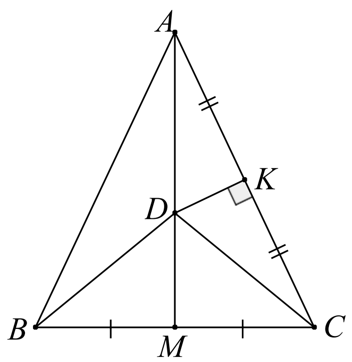


C *M* *B*

II. Bài toán.

Bài 1. Cho ΔABC cân tại A, đường trung tuyến AM. Đường trung trực của AC cắt đường thẳng AM tại D. Chứng minh rằng $DA = DB$.

Lời giải:



Cách 1:

Ta có ΔABC cân ở A nên trung tuyến AM cũng là đường trung trực của BC.

Vì D thuộc đường trung trực của AC nên $DA = DC$ (1).

Vì D thuộc đường trung trực của BC nên $DB = DC$ (2).

Từ $(1),(2)$ suy ra $DA = DB$.

Cách 2:

ΔABC cân tại A có AM là đường trung tuyến của cạnh đáy BC nên AM cũng là đường trung trực của BC.

Ta lại có đường trung trực của AC cắt AM tại D

$\Rightarrow D$ là giao điểm của hai đường trung trực của cạnh BC và AC

$\Rightarrow D$ thuộc đường trung trực của AB.

Vậy $DA = DB$.

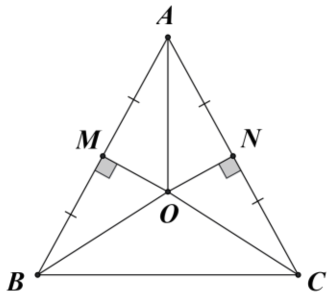
Bài 2. Cho tam giác cân ABC có $AB = AC$. Hai đường trung trực của hai cạnh $AB; AC$ cắt nhau tại O. Chứng minh: $AOB = AOC$.

Lời giải:

Vì điểm O là giao điểm các đường trung trực của ΔABC nên O thuộc đường trung trực của BC.

ΔABC cân tại A $\Rightarrow AB = AC \Rightarrow A$ thuộc đường trung trực của BC.

Do đó AO là đường trung trực của BC.



ΔABC cân tại A nên đường trung trực AO đồng thời là đường phân giác của A

Xét ΔAOB và ΔAOC có:

OA chung

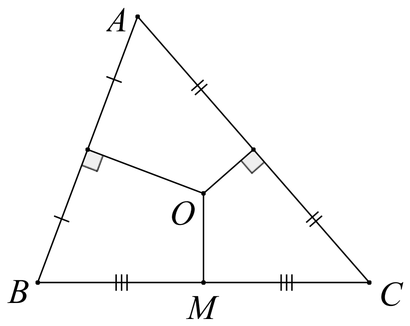
$AB = AC$ (ΔABC cân tại A)

$OAB = OAC$ (AO là tia phân giác của BAC)

Do đó, $\Delta AOB = \Delta AOC$ (c.g.c) $\Rightarrow AOB = AOC$ (hai góc tương ứng)

Bài 3. Cho ΔABC, M là trung điểm của BC. Các đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại O. Tính số đo góc OMB.

Lời giải:



Từ giả thiết suy ra O thuộc đường trung trực của BC.

$\Rightarrow OM$ là đường trung trực của BC.

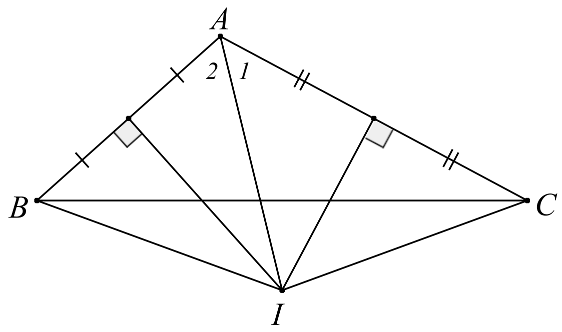
$\Rightarrow OMB = 90°$.

Bài 4. Cho ΔABC có góc $A = 110°$. Đường trung trực của các cạnh AB và AC cắt nhau tại I.

a) Chứng minh ΔBIC cân.

b) Chứng minh $BIC = 2\left(180° - BAC\right)$ và tính số đo góc BIC.

Lời giải:



a) Từ giả thiết suy ra I thuộc đường trung trực của BC

$\Rightarrow IB = IC \Rightarrow \Delta BIC$ cân.

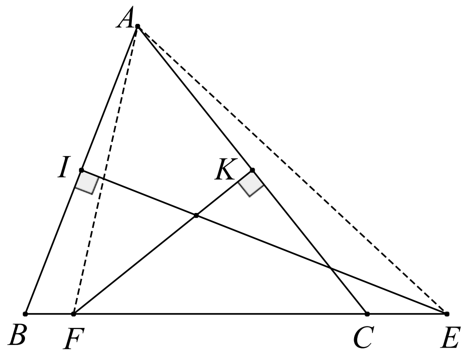
b) Có $BIA = 180° - 2A_2$; $AIC = 180° - 2A_1$.

$\Rightarrow BIC = BIA + AIC = 180° - 2A_1 + 180° - 2A_2 = 2\left(180° - BAC\right)$.

Từ đó, suy ra $BIC = 140°$.

Bài 5. Cho ΔABC có $\hat{A} = 60°$. Các đường trung trực của cạnh AB và AC lần lượt cắt BC ở E và F. Tính EAF.

Lời giải:



Trước hết, do E nằm trên đường trung trực của AB nên ΔEAB cân ở $E \Rightarrow BAE = ABE$.

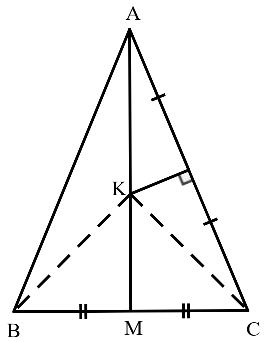
Tương tự, ta có ΔFAC cân ở $F \Rightarrow FAC = FCA$. Ta có $BCA = FCA = FAB + BAC$

$\Rightarrow FAB = BCA - BAC$

Khi đó $EAF = BAE + FAB = ABC + BCA - BAC \Rightarrow EAF = 180° - 2BAC = 180° - 120° = 60°$.

Bài 6. Cho ΔABC cân tại A. Đường trung tuyến AM cắt đường trung trực của AC tại K. Chứng minh rằng $KA = KB = KC$.

Lời giải



ΔABC cân tại A nên đường trung tuyến AM cũng là đường trung trực.

K là giao điểm các đường trung trực của BC, AC nên $KA = KB = KC$. .

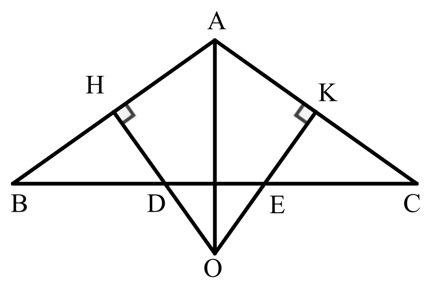
Bài 7. Cho ΔABC cân tại A, $A > 90^0$. Các đường trung trực của AB và của AC cắt nhau tại O và cắt BC tại D và E. Chứng minh rằng:

a) OA là đường trung trực của BC.

b) $BC = CE$.

c) ΔODE là tam giác cân.

Lời giải:



O là giao điểm các đường trung trực của $\Delta ABC \Rightarrow OB = OC.$

ΔABC cân tại $A \Rightarrow AB = AC.$

Vậy AO là đường trung trực của BC.

b) Gọi H là trung điểm của AB, K là trung điểm của AC.

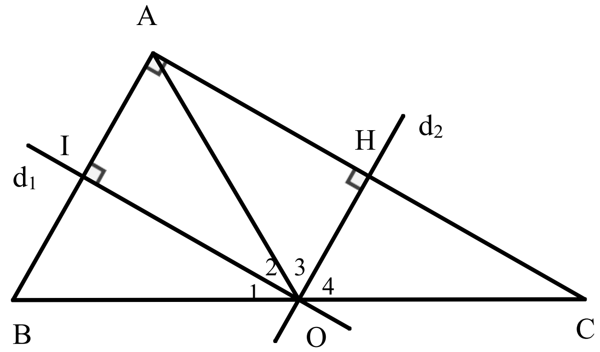
$\Delta HBD = \Delta KCE\left(g.c.g\right) \Rightarrow BD = CE.$

c) $\Delta HBD = \Delta KCE \Rightarrow HBD = KEC$

$\Rightarrow ODE = OED \Rightarrow \Delta ODE$ cân tại O.

Bài 8. Chứng minh rằng các đường trung trực của tam giác vuông cắt nhau tại trung điểm của cạnh huyền.

Lời giải:



Xét ΔABC vuông tại A.

Vẽ đường trung trực d_1 của cạnh AB, cắt AB tại I. vẽ đường trung trực d_2 của cạnh AC, cắt AC tại H

Giả sử d_1 và d_2 cắt nhau tại O. Ta có $OA = OB$, do đó $\Delta OAI = \Delta OBI$ (c.g.c)

Nên $O_1 = O_2$. Tương tự $O_3 = O_4$.

Ta có $OI // AC$ mà $OH \perp AC$ nên $IOH = 90°$.

Do đó $O_1 + O_2 + O_3 + O_4 = 2\left(O_2 + O\ \right) = 2IOH = 180^0.$

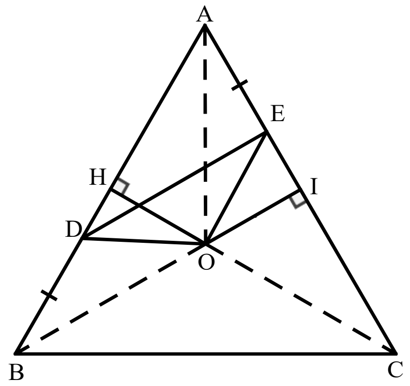
Vậy ba điểm B, O, C thẳng hàng.

Mặt khác, $OB = OC$ nên O thuộc đường trung trực của BC.

Vậy các đường trung trực của tam giác vuông cắt nhau tại trung điểm của cạnh huyền.

Bài 9. Cho tam giác đều ABC. Gọi D và E là hai điểm lần lượt trên hai cạnh AB và AC sao cho $BD = AE$. Chứng minh rằng các đường trung trực của đoạn thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định khi D và E di chuyển trên các cạnh AB và AC.

Lời giải:



Ta nhận thấy rằng:

Nếu D trùng với B thì E trùng với A, đường trung trực của DE là đường trung trực của AB.

Nếu D trùng với A thì E trùng với C, đường trung trực của DE là đường trung trực của AC
.

Do đó, ta vẽ các đường trung trực của AB và cạnh AC, chúng ta cắt nhau tại O.

Ta sẽ chứng tỏ rằng đường trung trực của DE đi qua O bằng cách chứng minh $OD = OE$.

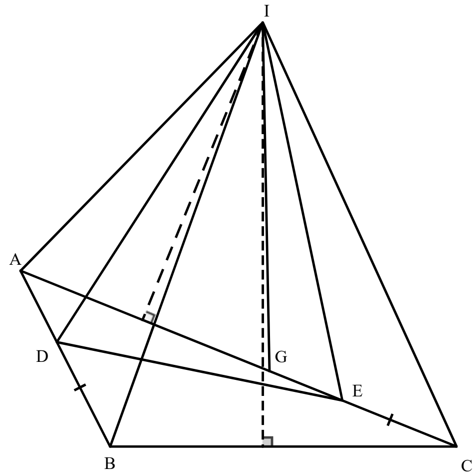
Gọi H và I theo thứ tự là trung điểm của AB và AC.

Từ đó suy ra $HD = IE$ rồi suy ra $\Delta OHD = \Delta OIE$ (c.g.c) để có $OD = OE$.

Hoặc chứng minh $OAE = OBD$ rồi suy ra $\Delta OAE = \Delta OBD$ (c.g.c) để có $OD = OE$.

Bài 10. Cho ΔABC, $AC > AB$. Hai điểm D và E theo thứ tự di chuyển trên các cạnh AB và AC sao cho $BD = CE$. Chứng minh rằng các đường trung trực của DE luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải:



Trên cạnh AC lấy điểm G với $CG = AB$ thì điểm G cố định.

Ta nhận thấy rằng:

Khi D trùng với B thì E trùng với C, đường trung trực của DE là đường trung trực của BC.

Khi D trùng với A thì E trùng với G, đường trung trực của DE là đường trung trực của AG
.

Vẽ đường trung trực của BC và AG chúng cắt nhau tại I thì I là điểm cố định.

Vì vậy nếu các đường trung trực của DE đi qua một điểm cố định thì điểm cố định đó phải là điểm I nói trên.

Thật vậy, I thuộc các đường trung trực của BC và AG nên $IB = IC, IA = IG$.

$\Delta IAB = \Delta IGC$ (c.c.c), nên $ID = IE$.

Điều này chứng tỏ rằng đường trung trực của DE luôn đi qua điểm I cố định.

BA ĐƯỜNG CAO

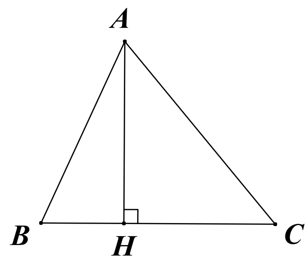
Dạng 1. Xác định trực tâm của một tam giác

I. Phương pháp giải:

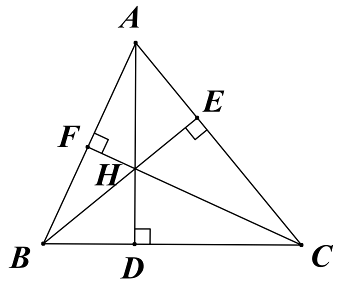
- Để xác định trực tâm của một tam giác, ta cần tìm giao điểm hai đường cao của tam giác đó

- Dựa vào định nghĩa, định lí và nhận xét, tính chất về đường cao và sự đồng quy của ba đường cao trong tam giác.

1. AH là một đường cao của $\Delta ABC \Leftrightarrow AH \perp BC$

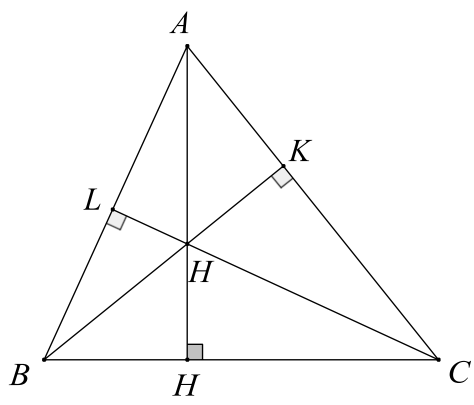


2. Trong hình vẽ AD, BE, CF là các đường cao, H là trực tâm của ΔABC.

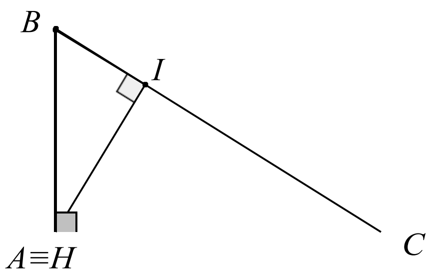


Chú ý:

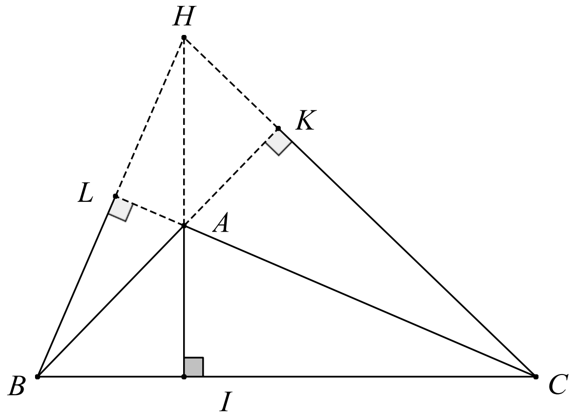
a) ΔABC là tam giác nhọn thì H nằm trong tam giác.



b) ΔABC là tam giác vuông tại A thì điểm H trùng với điểm A.



c) ΔABC là tam giác tù thì điểm H nằm ngoài tam giác.



II. Bài toán.

Bài 1. Cho ΔABC có $ABC = 90°$, $AH \perp BC$. Em chọn phát biểu đúng:

A. H là trực tâm của ΔABC

B. A là trực tâm của ΔABC

C. B là trực tâm của ΔABC

D. C là trực tâm của ΔABC

Lời giải:

Vì ΔABC có $ABC = 90^\circ$ nên ΔABC là tam giác vuông tại $B \Rightarrow B$ là trực tâm của ΔABC.

Đáp án đúng là C.

Bài 2. Cho ΔABC, hai đường cao AM và BN cắt nhau tại H. Em chọn phát biểu đúng:

A. H là trọng tâm của ΔABC.

B. $HA = \frac{2}{3}AM$ và $HB = \frac{2}{3}BN$

C. H là trực tâm của ΔABC; CH là đường cao của ΔABC.

D. CH là đường trung trực của ΔABC.

Lời giải:

ΔABC, hai đường cao AM và BN cắt nhau tại $H \Rightarrow CH$ là đường cao của $\Delta ABC \Rightarrow H$ là trực tâm của ΔABC.

Đáp án đúng là C.

Bài 3. Cho ΔABC cân tại A có $AM \perp BC$ tại M. Chọn phát biểu đúng:

A. AM là đường trung tuyến của ΔABC

B. AM là đường trung trực của BC.

C. AM là đường phân giác của BAC.

D. Cả A, B, C đều đúng.

Lời giải:

Vì ΔABC cân tại A có $AM \perp BC$ nên AM là đường cao $\Rightarrow AM$ cũng là đường trung tuyến, đường trung trực và đường phân giác của ΔABC.

Chọn đáp án D

Bài 4. Cho ΔABC vuông tại A. Lấy H thuộc AB, vẽ $HE \perp BC$ ở E. Tia EH cắt tia CA tại D. Khi đó

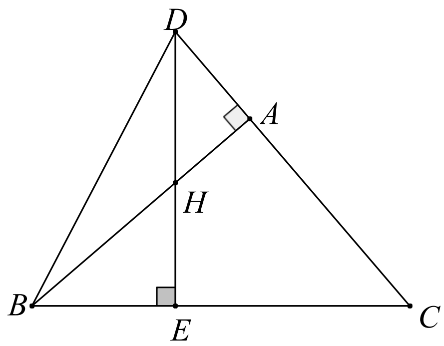
A. H là trọng tâm của ΔBCD.

B. H là trực tâm của ΔBCD.

C. H là giao ba đường trung trực của ΔBCD.

D. H là giao ba đường phân giác của ΔBCD.

Lời giải:



Trong ΔBCD có:

$BA \perp CD$ tại A (do ΔABC vuông tại A) $\Rightarrow$ BA là một đường cao của ΔBCD

$DE \perp BC$ tại E (do $HE \perp BC$) $\Rightarrow DE$ là một đường cao của ΔBCD

Mà DE giao BA tại H

Do đó H là giao điểm của hai đường cao trong ΔBCD

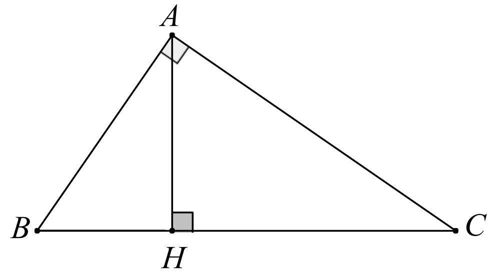
Suy ra H là giao điểm của ba đường cao trong ΔBCD

Vậy H là trực tâm của ΔBCD.

Chọn đáp án B

Bài 5. Cho tam giác ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Tìm trực tâm của các giác ΔABC, $\Delta AHB, \Delta AHC$.

Lời giải:

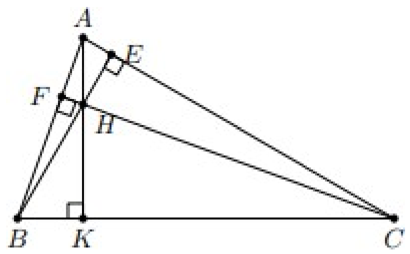


Tam giác ΔABC có hai đường cao là BA và AH. Từ đó suy ra trực tâm của tam giác ΔABC là A. Chứng minh tương tự ta có trực tâm của tam giác ΔAHB, ΔAHC đều là điểm H.

Nhận xét: Trực tâm của tam giác vuông là đỉnh góc vuông của tam giác.

Bài 6. Cho H là trực tâm của tam giác ABC không vuông. Tìm trực tâm của các tam giác HBC, HAB, HAC

Lời giải



Gọi các đường cao tam giác là AK, BE, CF. Ta có:

ΔHBC có hai đường cao là HK, BF. Từ đó suy ra trực tâm của tam giác ΔHBC là A.

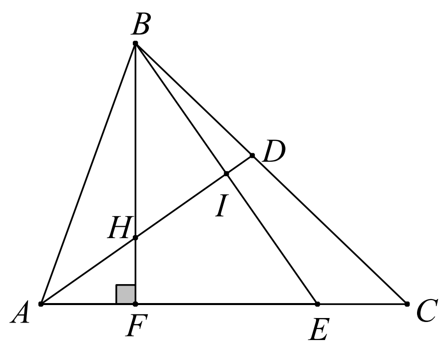
Chứng minh tương tự ta được trực tâm của tam giác $\Delta HAB, \Delta HAC$ lần lượt là C và B.

Bài 7. Cho ΔABC có $A = 70^0$, $AB < AC$, đường phân giác góc A cắt BC tại D, $BF \perp AC$ tại F, H là giao điểm của BF và AD, E thuộc AC sao cho $AE = AB$.

a) Xác định trực tâm của ΔABE.

b) Tính số đo DHF.

Lời giải



a) Gọi AD giao BE tại I

Xét ΔABE có $AE = AB$ (gt)

$\Rightarrow \Delta ABE$ cân tại A.

Lại có: AD là tia phân giác góc A của ΔABC (gt)

$\Rightarrow AI \perp BE$ (tính chất của tam giác cân)

Mặt khác: $BF \perp AE$ và AD giao BE tại H nên H là trực tâm của ΔABE (tính chất 3 đường cao trong tam giác).

b) Ta có: AD là tia phân giác của BAC (gt)

$\Rightarrow HAF = \frac{1}{2} BAC = 35^0$

Vì ΔAHF vuông tại F nên:

$$AHF = 90^0 - HAF = 90^0 - 35^0 = 55^0$$

Vì DHF và AHF là 2 góc kề bù nên:

$DHF = 180^0 - AHF = 180^0 - 55^0 = 125^0$

Dạng 2. Sử dụng tính chất trực tâm của tam giác để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, ba đường thẳng đồng quy

I. Phương pháp giải:

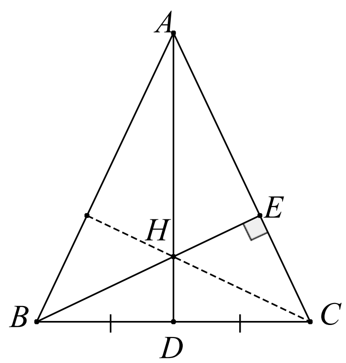
Nếu H là giao điểm hai đường cao kẻ từ B và C của tam giác ABC thì $AH \perp BC$.

Nếu ba đường thẳng là ba đường cao của một tam giác thì chúng cùng đi qua một điểm.

II. Bài toán.

Bài 1. Cho ΔABC cân tại A, đường cao BE cắt đường trung tuyến AD ở H. Chứng minh CH tạo với AB một góc 90°.

Lời giải



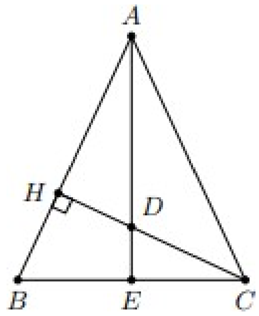
Xét ΔABC cân tại A có: AD là đường trung tuyến (gt) $\Rightarrow AD$ cũng là đường trung cao.
Lại có BE là đường cao mà BE cắt AD tại H

$\Rightarrow H$ là trực tâm của ΔABC

$\Rightarrow CH \perp AB$ hay CH tạo với AB một góc 90°.

Bài 2. Cho tam giác ΔABC cân tại A. đường cao CH cắt tia phân giác của góc A tại D. Chứng minh rằng $BD \perp AC$.

Lời giải

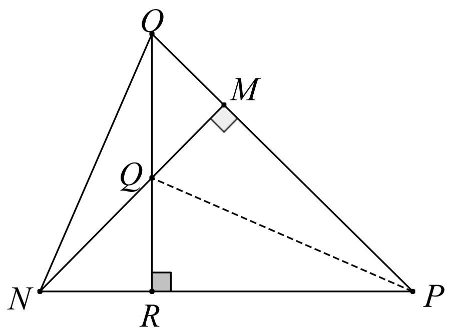


Kéo dài AD cắt BC tại E.

Từ giả thiết suy ra $AE \perp BC$. Do đó D là trực tâm của tam giác ΔABC. Vậy $BD \perp AC$.

Bài 3. Cho ΔMNP vuông tại M. Trên cạnh MN lấy điểm Q, kẻ $QR \perp NP\,(R \in NP)$. Gọi O là giao điểm của các đường thẳng PM và RQ. Chứng minh $PQ \perp ON$.

Lời giải:

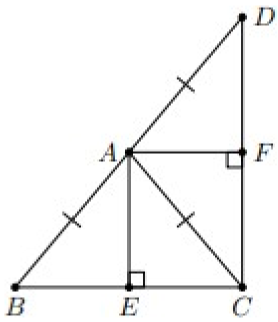


Ta có: $NM \perp PQ$, $OR \perp PN$

Mà NM giao OR tại Q $\Rightarrow Q$ là trực tâm của ΔPON $\Rightarrow PQ \perp ON$.

Bài 4. Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy điểm D sao cho A là trung điểm của BD. Kẻ đường cao AE của tam giác ABC, đường cao AF của tam giác ACD. Chứng minh rằng $AE \perp AF$.

Lời giải:



Xét tam giác cân ABC có AE là đường cao, suy ra AE cũng là đường phân giác của BAC hay $BAE = EAC$.

Tương tự trong tam giác cân ACD ta có $CAF = FAD$. Từ đó ta được

$$EAF = EAC + CAF = \frac{1}{2}(BAC + CAD) = 90^\circ$$

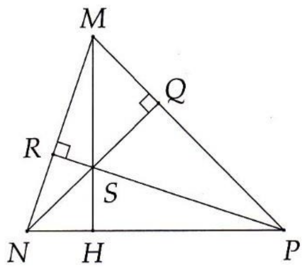
hay $AE \perp AF$.

Bài 5. Cho tam giác MNP có ba góc nhọn, các đường cao NQ, PR cắt nhau tại S.

a) Chứng minh $MS \perp NP$.

b) Cho $MNP = 65°$. Tính SMR.

Lời giải:



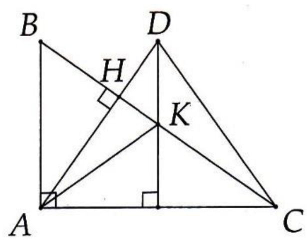
a) Vì S là trực tâm ΔMNP, do đó $MS \perp NP$.

b) Gọi H là giao điểm của MS với NP.

Chú ý ΔMHN vuông, từ đó tính được $SMR = 25°$

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ đường cao AH. Lấy điểm K thuộc đoạn thẳng HC. Qua K kẻ đường thẳng song song với AB, cắt AH tại D. Chứng minh $AK \perp CD$.

Lời giải:



Vì $AB \perp AC$, do đó $DK \perp AC$.

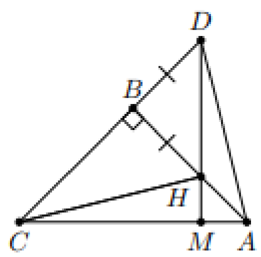
Bởi vậy K là trực tâm ΔADC, suy ra $AK \perp CD$.

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông cân tại B. Trên cạnh AB lấy điểm H. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho $BH = BD$. Chứng minh

a) $DH \perp AC$.

b) $CH \perp AD$.

Lời giải:



a) Kéo dài DH cắt AC tại M.

Do $BH = BD$ và $DBA = 90^{\circ}$ nên tam giác DBH vuông cân tại B.

Suy ra $MDC = C = 45° \Rightarrow MDC + C = 90° \Rightarrow MDC = 90° \Rightarrow DH \perp AC$

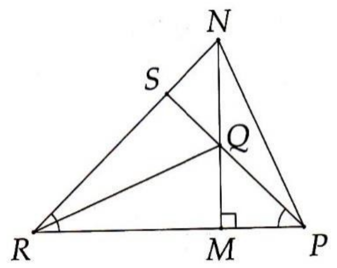
b) ΔADC có hai đường cao AB và DM cắt nhau tại H nên H là trực tâm của tam giác đó. Do vậy, $CH \perp AD$.

Bài 8. Cho tam giác MNP vuông tại M $(MP < MN)$. Trên cạnh MN lấy điểm Q sao cho $MQ = MP$, trên tia đối của tia MP lấy điểm R sao cho $MR = MN$. Chứng minh:

a) $PQ \perp NR$.

b) $RQ \perp NP$.

Lời giải:



a) Gọi S là giao điểm của PQ và NR. Tính được $SPR = SRP = 45°$, từ đó $PQ \perp NR$.

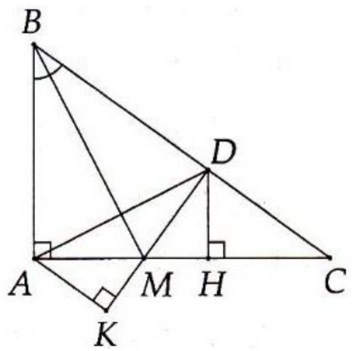
b) Từ kết quả ý a, ta có Q là trực tâm ΔPNR $\Rightarrow RQ \perp NP$

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ đường phân giác BM. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD = BA$.

a) Chứng minh $BM \perp AD$.

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên AC, K là hình chiếu vuông góc của A trên DM. Chứng minh ba đường thẳng AK, BM, DH đồng quy.

Lời giải:



a) Chú ý tam giác ABD cân tại B nên BM là đường phân giác cũng là đường cao, từ đó $BM \perp AD$.

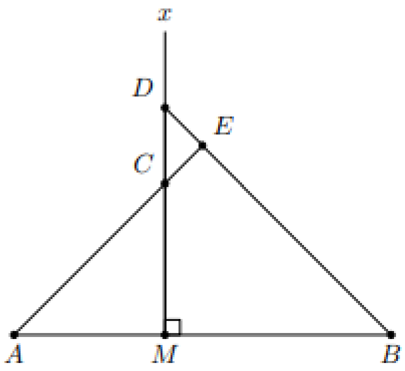
b) Chú ý AK, BM, DH là ba đường cao của ΔAMD.

Bài 10. Đoạn thẳng AB và điểm M nằm giữa A và $B(MA < MB)$. Vẽ tia đó lấy hai điểm C và D sao cho $MA = MC, MD = MB$. Tia AC vuông cắt BD tại E. Chứng minh:

a) $AE \perp BD$

b) C là trực tâm của tam giác ABD

Lời giải:



a) Do tia AC cắt BD tại E nên hai điểm C và D nằm cùng phía với AB.

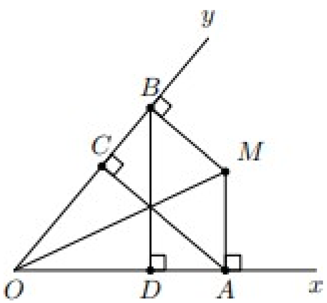
Do $MA = MC$ và $AMC = 90^\circ$ nên tam giác AMC vuông cân tại M. Tương tự ta có ΔBMD vuông cân tại M.

Từ đó suy ra $EDC = DCE = 45^\circ \Rightarrow CED = 90^\circ \Rightarrow AC \perp BD$.

b) Trong tam giác ABD, hai đường cao AE và DM cắt nhau nên C là trực tâm của tam giác ABD.

Bài 11. Cho góc nhọn xOy. Trên tia Ox lấy điểm A, trên tia Oy lấy điểm B sao cho $OA = OB$. Kẻ $AC \perp Oy, BD \perp Ox (C \in Ox, D \in Oy)$. Đường thẳng vuông góc với Ox tại A và đường thẳng vuông góc với Oy tại B cắt nhau tại M. Chứng minh: OM, AC, BD đồng quy.

Lời giải:



Xét hai tam giác vuông ΔAOM và ΔBOM có:

OM là cạnh chung.
$OA = OB$ (giả thiết)

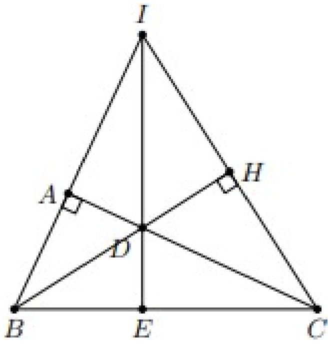
Suy ra $\Delta AOM = \Delta BOM$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông). Do đó, $AOM = BOM$.

Vậy OM là tia phân giác của tam giác cân ΔAOB. Suy ra OM là đường cao hay $OM \perp AB$.

Xét trong tam giác AOB có ba đường cao OM, AC, BD do đó OM, AC, BD đồng quy.

Bài 12. Cho tam giác ABC vuông tại A có BD là đường phân giác. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BA = BE$. Vẽ $CH \perp DB$. Chứng minh rằng BA, DE, CH đồng quy.

Lời giải:



Gọi I là giao điểm của CH và AB. Ta có D là trực tâm của tam giác IBC suy ra $ID \perp BC$ (1)

Xét ΔBAD và ΔBED có:

$AB = AE$ (gt);

$ABD = EBD$ (BD là đường phân giác)

BD: cạnh chung

$\Rightarrow \Delta BAD = \Delta BED$ (c.g.c)

$\Rightarrow BED = BAD = 90°$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow DE \perp BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra I, D, E thẳng hàng hay BA, DE, CH đồng quy.

Dạng 3. Vận dụng tính chất ba đường cao trong tam giác để giải quyết các bài toán khác

I. Phương pháp giải:

Dựa vào định lí, tính chất về sự đồng quy của ba đường cao trong tam giác.

II. Bài toán.

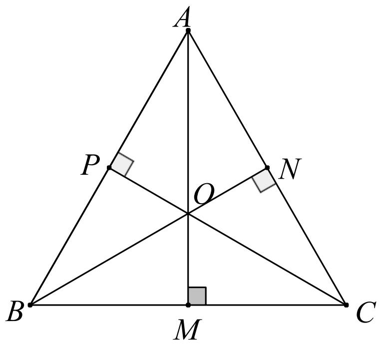
Bài 1. Cho ΔABC đều. Ba đường cao AM, BN, CP cắt nhau tại O. Chứng minh rằng:

a) $OA = OB = OC$.

b) O là trọng tâm của ΔABC

c) $AM = BN = CP$

Lời giải:



a) Vì ΔABC đều nên ΔABC cân ở cả 3 đỉnh nên ba đường cao AM, BN, CP đồng thời là ba đường trung trực, ba đường trung tuyến của tam giác.

Vì AM, BN, CP là ba đường trung trực nên $OA = OB = OC$ (1)

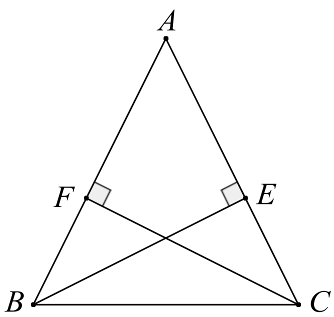
b) Vì AM, BN, CP là ba đường trung tuyến nên O là trọng tâm của ΔABC

c) Vì O là trọng tâm của ΔABC suy ra $OA = \frac{2}{3}AM, OB = \frac{2}{3}BN, OC = \frac{2}{3}CP$ (2)

Từ (1) (2) suy ra $AM = BN = CP$

Bài 2. Chứng minh rằng một tam giác có hai đường cao (xuất phát từ các đỉnh của hai góc nhọn) bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

Lời giải



Xét ΔABC có hai đường cao BE, CF và $BE = CF$

Xét hai tam giác vuông ΔCBF và ΔCBE có:

BC là cạnh chung.

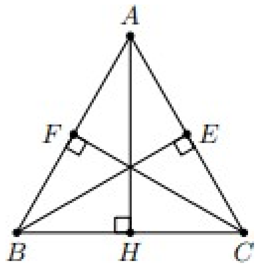
$BE = CF$ (giả thiết)

Suy ra $\Delta CBF = \Delta CBE$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông).

Từ đó suy ra $CBF = BCE$. Hay ΔABC cân tại A.

Bài 3. Chứng minh rằng một tam giác có ba đường cao bằng nhau thì tam giác đó là tam giác đều.

Lời giải



Xét tam giác ΔABC có hai đường cao AH, BE, CF và $AH = BE = CF$

Xét hai tam giác vuông ΔCBF và ΔCBE có

BC là cạnh chung.
$BE = CF$ (giả thiết)

Suy ra $\Delta CBF = \Delta CBE$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông).

Suy ra $CBF = BCE$ (1)
Xét hai tam giác vuông ΔABH va ΔBAE có

AB là cạnh chung.
$AH = BE$ (giả thiết).

Suy ra $\Delta ABH = \Delta BAE$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông).

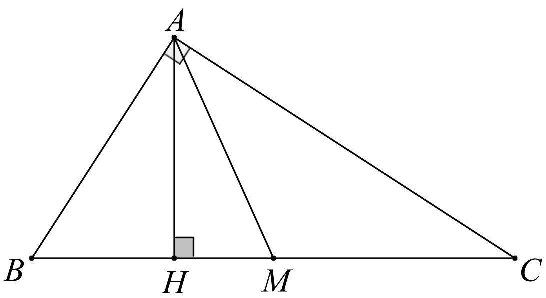
Suy ra $ABH = BAE$ (hai cạnh tương ứng) (2)

Từ (1) (2) suy ra $CBF = BCE = BAE$

Vậy ΔABC có ba góc bằng nhau nên ΔABC là tam giác đều.

Bài 4. Cho ΔABC vuông tại A, kẻ đường cao AH và trung tuyến AM. Chứng minh trực tâm của $\Delta ABC, \Delta MAB$ và ΔMAC thẳng hàng.

Lời giải



Vì AH là đường cao của ΔABC nên trực tâm của ΔABC thuộc đường thẳng AH (1)

Có: AH là đường cao của ΔABC

$\Rightarrow AH \perp BC \Rightarrow AH \perp BM, AH \perp CM$

Xét ΔABM có $AH \perp BM$

$\Rightarrow$Trực tâm của ΔABM thuộc đường thẳng AH (2)

Xét ΔACM có $AH \perp CM$

$\Rightarrow$Trực tâm của ΔACM thuộc đường thẳng AH (3)

Từ $(1);(2);(3) \Rightarrow$ Trực tâm của ΔABC; ΔABM; ΔACM thẳng hàng

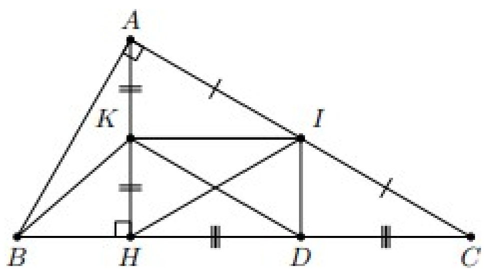
Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường cao AH. Lấy I là trung điểm của AC.

a) Chứng minh I là giao điểm của 3 đường trung trực ΔAHC

b) Gọi K và D lần lượt là trung điểm của AH và HC. Chứng minh $KD // AC$.

c) Chứng minh $BK \perp AD$.

Lời giải



a) Ta có HI là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền AC của tam giác vuông AHC nên $IH = IA = IC = \dfrac{AC}{2}$. Do đó, I là giao điểm của ba đường trung trực của ΔAHC.

b) Do I là giao điểm của ba đường trung trực của ΔAHC nên $ID \perp HC$, suy ra $ID // AH$. Tương tự ta có $IK // HC$.

Từ đó ta chứng minh được $\Delta IHK = \Delta IDC$ (c.g.c). Suy ra $KH = ID, KI = HD$.

Ta chứng minh được $\Delta KHD = \Delta IDC$ (c.g.c). Suy ra $KDH = ICD$, do đó $KD // AC$.

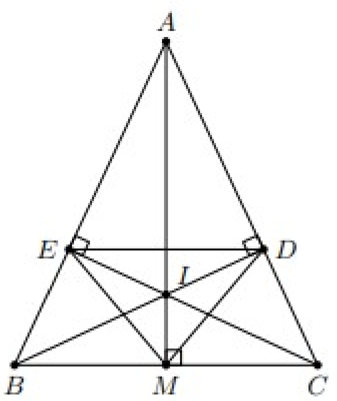
c) Do $KD // AC$ nên $KD \perp AB$. Trong ΔABD, hai đường cao KD và AH cắt nhau tại K nên K là trực tâm của tam giác. Do đó $BK \perp AD$.

Bài 6. Cho tam ABC cân tại A, hai đường cao BD và CE cắt nhau tại $I (D \in AC, E \in AB)$. Tia AI cắt BC tại M. Chứng minh

a) M là trung điểm của BC.

b) Tam giác MED là tam giác cân.

Lời giải



a) Hai đường cao BC và CE cắt nhau tại I nên I là trực tâm của tam giác ΔABC. Do đó $AI \perp BC$.

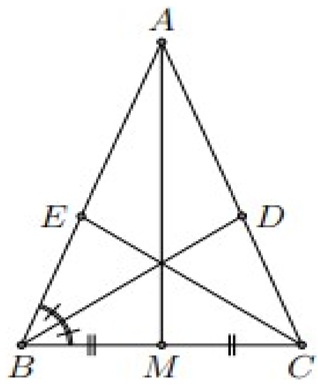
Hơn nữa, do tam giác ABC cân tại A nên đường cao AI cũng đồng thời là đường trung tuyến. Do đó, M là trung điểm của BC.

b) Trong tam giác vuông BEC, do EM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BC nên $EM = \frac{1}{2}BC$. Tương tự, $DM = \frac{1}{2}BC$. Do đó $EM = DM$, suy ra ΔMED là tam giác cân tại M.

Bài 7. Cho tam giác ABC cân tại A, đường trung tuyến AM và đường phân giác BD cắt nhau tại K. Gọi E là giao điểm của CK và AB. Chứng minh $BD = CE$.

Lời giải

ΔABC cân tại A nên đường trung tuyến AM cũng đồng thời là đường phân giác.



Hai đường phân giác AM và BD cắt nhau tại K. Do đó, CK là đường phân giác thứ ba của tam giác ΔABC.

ΔABC cân tại A nên $B = C$.

Mà $DBC = \frac{1}{2}B$ (BD là đường phân giác)

$ECB = \frac{1}{2}C$ (CK là đường phân giác)

$\Rightarrow DBC = ECB$

Xét hai tam giác ΔBDC và ΔECB có

$DBC = ECB$ (chứng minh trên)

BC: cạnh chung

$EBC = DCB$ (ΔABC cân tại A)

Suy ra $\Delta BDC = \Delta ECB$ (g.c.g)

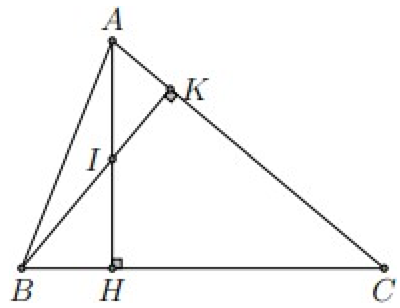
Do đó, $BD = CE$ (hai cạnh tương ứng)

Bài 8. Cho tam giác ABC. Hai đường cao AH, BK cắt nhau tại I.

a) Chứng minh rằng $CI \perp AB$.

b) Khi $ACH = 50°$, hãy tính các góc BIH, HIK.

Lời giải



a) Ta có I là trực tâm của tam giác chất đồng quy của ba đường cao, suy ra $CI \perp AB$.

b) Vì tam giác BKC vuông tại K nên $KBC = 90° - ACB = 40°$.

Mà tam giác BIH vuông tại H nên

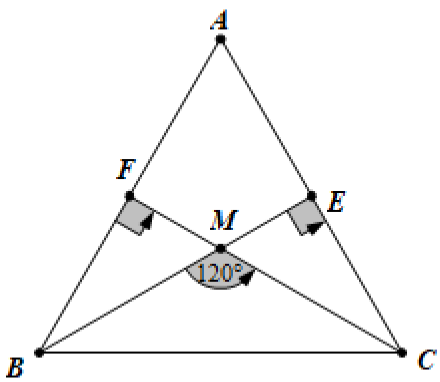
$BIH = 90° - KBC \Rightarrow BIH = 40°$.

Vì hai góc HIK và BIH kề bù nên ta $HIK = 180° - BIH$.

Từ đó tính được $HIK = 140°$.

Bài 9. Cho tam giác ABC cân tại A. Hai đường cao xuất phát từ đỉnh B và đỉnh C cắt nhau tại M. Biết góc $BMC = 120°$, tính các góc của tam giác ABC.

Lời giải



Gọi E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ đỉnh B, C của tam giác ABC. Ta có $BMC = 120°$ nên góc $CME = 60°$.

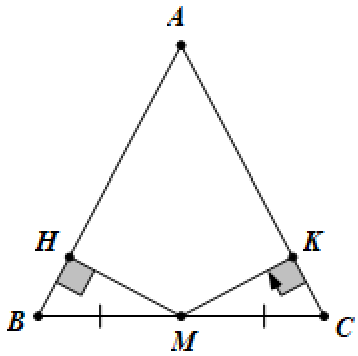
Vì tam giác CME vuông tại E nên $MCA + CME = 90°$.

Mặt khác tam giác AFC vuông tại F nên ta có $BAC + ACF = 90°$. Suy ra $BAC = CME = 60°$.

Vì tam giác ABC cân tại A nên $ABC = ACB = 60°$.

Bài 10. Cho tam giác ABC cân tại A, M là trung điểm của B,C. Gọi H và K lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến AB và AC. Chứng minh $MH = MK$.

Lời giải



Tam giác ABC cân tại A nên AM đồng thời là đường trung tuyến và đường phân giác.

Lại có $MH \perp AB, MK \perp AC$ nên theo tính chất đường phân giác của một góc, có $MH = MK$.

Phần III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC

Dạng 1. Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác

Bài 1. Cho $\Delta\ ABC$ cân tại A, đường trung tuyến AM. Đường trung trực của AB cắt AM ở O. Chứng minh rằng điểm O cách đều ba đỉnh của ΔABC

Bài 2. Cho $\Delta\ ABC$ cân tại A, O là giao điểm của ba đường trung trực. Lấy điểm D trên cạnh AB, điểm E trên cạnh sao cho $AD = CE$. Chứng minh rằng

a) $OA = OB = OC$.

b) Điểm O nằm trên đường trung trực của DE.

Bài 3. Nhà bạn Nam có một mảnh vườn nhỏ trồng hoa và cỏ nhật. Bố của bạn Nam nhờ Nam chọn vị trí để đặt vòi xoay phun tưới cây tự động sao cho vị trí đó cách đều ba khóm hoa ở ba góc vườn nhưng Nam lại chưa biết tìm như thế nào. Các em hãy giúp bạn Nam giải quyết vấn đề này nhé.

Bài 4. Ông Hùng có ba cửa hàng A, B, C không nằm trên một đường thẳng và đang muốn tìm địa điểm O để làm kho hàng. Phải chọn vị trí của kho hàng ở đâu để khoảng cách từ kho đến các cửa hàng bằng nhau?

Dạng 2. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy, ba điểm thẳng hàng

Bài 5. Cho tam giác ABC cân ở A, đường phân giác AK. Các đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại O.

a) Chứng minh rằng ba điểm A, K, O thẳng hàng.

b) Kéo dài CO cắt AB ở D, kéo dài BO cắt AC ở E. Chứng minh rằng AK và các đường trung trực của AD và AE đồng quy.

Bài 6. Cho $\widehat{xOy} = 90^\circ$ và điểm P nằm trong góc đó. Trên mặt phẳng đó lấy điểm A sao cho Ox là đường trung trực của đoạn thẳng PA và điểm B sao cho Oy là đường trung trực của đoạn thẳng PB.

a) Chứng minh ba điểm O, A, B thẳng hàng.

b) Chứng minh O là giao điểm của ba đường trung trực của ΔABP từ đó suy ra ΔABP vuông.

Bài 7. Cho tam giác MNP cân ở M, đường cao MH. Các đường trung trực của MN và MP cắt nhau ở D. Chứng minh ba điểm M, D, H thẳng hàng.

Bài 8. Cho tam giác ABC cân có A là góc tù. Gọi M là trung điểm của BC. N nằm trong tam giác ABC sao cho tam giác BNC cân tại N. Chứng minh đường thẳng AM và các đường trung trực của NB, NC đồng quy.

Dạng 3. Vận dụng tính chất ba đường trung trực trong tam giác để giải quyết các bài toán khác

Bài 9. Cho ΔABC có $\hat{A} = 110°$. Các đường trung trực của cạnh AB và AC lần lượt cắt BC ở E và F. Tính $\widehat{EAF}$.

Bài 10. Cho ΔABC cân tại A, $\hat{A} > 90^0$. Các đường trung trực của AB và của AC cắt nhau tại O và cắt BC tại D và E.

Chứng minh rằng:

a) OA là đường trung trực của BC.

b) $BD = CE$.

c) ΔODE là tam giác cân.

Bài 11. Cho M là giao điểm 3 đường trung trực của tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu M nằm trên một cạnh của tam giác ABC thì ABC là một tam giác vuông.

Bài 12. Cho ΔABC, đường phân giác $AI\left(I \in BC\right)$. Trên đoạn thẳng IC lấy điểm H, từ H kẻ đường thẳng song song với AI cắt AB kéo dài tại E và cắt AC tại F. Chứng minh rằng:

a) Đường trung trực của đoạn thẳng EF đi qua đỉnh A của ΔABC.

b) Đường trung trực của đoạn thẳng EF vuông góc với AI.

c) Khi H di động trên tia IC của ΔABC cố định thì đường trung trực của đoạn thẳng EF cố định.

Bài 13. Cho ΔABC có ba góc nhọn. Các điểm F, K, I lần lượt là trung điểm các cạnh BC, BA, AC. Gọi H là giao điểm các đường trung trực ΔABC. Trên tia đối của tia FH lấy điểm A_1 sao cho $A_1F = FH$. Trên tia đối của tia KH lấy điểm C_1 sao cho $KH = KC_1$. Trên tia đối của tia IH lấy điểm B_1 sao cho $IH = IB_1$.

a) Chứng minh rằng hình lục giác $AC_1BA_1CB_1$ có 6 cạnh bằng nhau và 2 trong 6 cạnh đó đôi một song song.

b) Chứng minh rằng: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

BA ĐƯỜNG CAO

Dạng 1. Xác định trực tâm của một tam giác

Bài 14. Cho ΔABC, các đường cao AK, BN, CM. Điểm H là trực tâm của tam giác. Tìm trực tâm của ΔBHC, ΔAHC, ΔAHB.

Bài 15. Cho tam giác ABC, hai đường cao BD và CE. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh M thuộc trung trực của DE.

Bài 16. Đoạn thẳng AB và điểm M nằm giữa A và B $(MA < MB)$. Vẽ tia Mx vuông AB lấy hai điểm C và D sao cho $MA = MC, MD = MB$. Tia AC vuông cắt BD tại E. Chứng minh

1. $AE \perp BD$

2. C là trực tâm của tam giác ΔABD.

Dạng 2. Sử dụng tính chất trực tâm của tam giác để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, ba đường thẳng đồng quy

Bài 17. Cho tam giác LMN nhọn và điểm S nằm trong tam giác. Gọi LS cắt MN tại P, MS cắt LN tại Q. Chứng minh rằng nếu LP vuông góc với MN và MQ vuông góc với LN thì NS vuông góc với ML.

Bài 18. Cho ΔMNP cân tại M, đường cao PQ cắt đường phân giác MS ở K. Chứng minh $NK \perp MP$

Bài 19. Cho ΔABC vuông tại A, kẻ đường cao AH. Lấy điểm K thuộc đoạn thẳng HC. Qua K kẻ đường thẳng song song với AB, cắt AH tại D. Chứng minh $AK \perp CD$.

Bài 20. Cho ΔMNP vuông tại $M\left(MP < MN\right)$. Trên cạnh MN lấy điểm Q sao cho $MQ = MP$, trên tia đối của tia MP lấy điểm R sao cho $MR = MN$. Chứng minh:

a) $PQ \perp NR$.

b) $RQ \perp NP$.

Dạng 3. Vận dụng tính chất ba đường cao trong tam giác để giải quyết các bài toán khác

Bài 21. Cho ΔMNP có ba góc nhọn, các đường cao NQ, PR cắt nhau tại S.

a) Chứng minh $MS \perp NP$.

b) Cho $MNP = 65^0$. Tính SMR.

Bài 22. Cho ΔABC vuông tại A, kẻ đường phân giác BM. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD = BA$.

a) Chứng minh $BM \perp AD$.

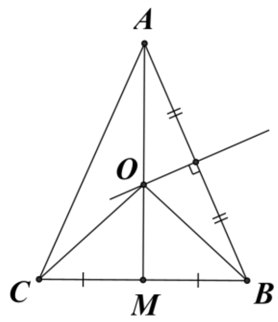
b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên AC, K là hình chiếu vuông góc của A trên DM. Chứng minh ba đường thẳng AK, BM, DH đồng quy.

ĐÁP SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC

Dạng 1. Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác

Bài 1.

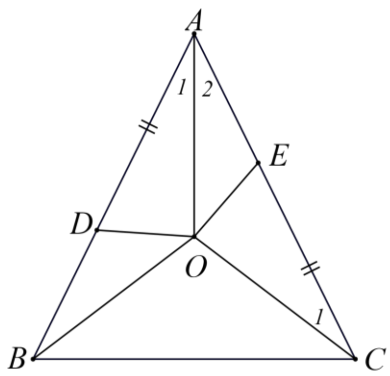


ΔABC cân tại A có AM là đường trung tuyến của cạnh đáy BC nên AM cũng là đường trung trực của BC.

Vì đường trung trực của AB cắt AM ở O ABC nên O là giao điểm của ba đường trung trực của ΔABC.

Vậy O cách đều ba đỉnh của Δ ABC.

Bài 2.



a) Điểm O là giao điểm 3 đường trung trực của ΔABC nên $OA = OB = OC$.

b) Ta có $OA = OC$ nên ΔAOC cân tại $O \Rightarrow A_2 = C_1$ (1)

ΔABC cân tại A, AO là đường trung trực nên AO là đường phân giác của BAC

$\Rightarrow A_1 = A_2$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A_1 = C_1 (= A_1)$

Xét ΔOAD và ΔOCE có:

$AD = CE$ (gt)

$A_1 = C_1$ (cmt)

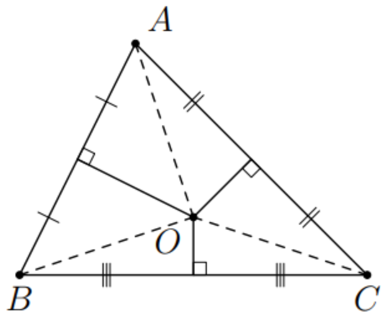
$OA = OC$

Do đó, $\Delta OAD = \Delta OCE$(c.g.c)

$\Rightarrow OD = OE$ (hai cạnh tương ứng)

Vậy O nằm trên đường trung trực DE.

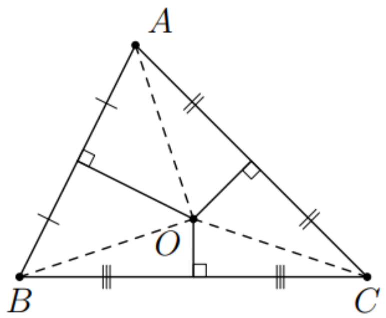
Bài 3.



Gọi vị trí ba khóm hoa đó lần lượt là A, B, C và vị trí cần đặt vòi xoay phun tưới cây tự động là O thì điểm O cách đều ba điểm A, B, C. Do đó O là giao của ba đường trung trực của tam giác ABC hay O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Để xác định vị trí điểm O ta chỉ cần xác định giao điểm của hai trong ba đường trung trực của tam giác ABC.

Bài 4.

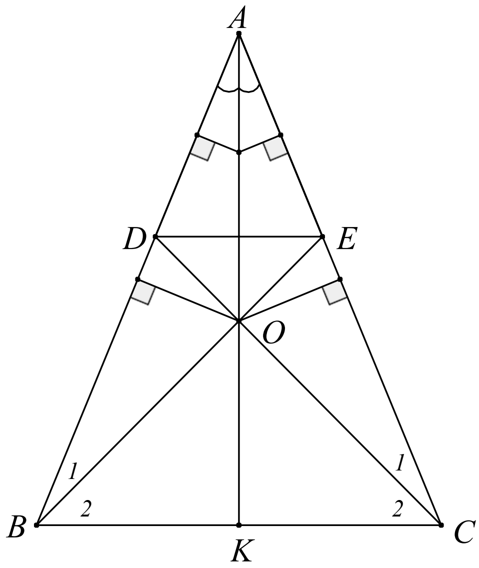


Vì điểm O cách đều ba điểm A, B, C nên O là giao của ba đường trung trực của tam giác ABC hay O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Để xác định vị trí điểm O ta chỉ cần xác định giao điểm của hai trong ba đường trung trực của tam giác ABC.

Dạng 2. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy, ba điểm thẳng hàng

Bài 5.



a) Ta có $\Delta ABD = \Delta ACD$ (c.g.c). Từ đó suy ra AD là đường trung trực của BC.

Xét ΔABC, theo tính chất ba đường trung trực của tam giác nên O thuộc đường trung trực của BC.

Vậy ba điểm A, D, O thẳng hàng.

b) Ta có $ABC = ACB$, $B_2 = B_1 \Rightarrow B_1 = C_1$.

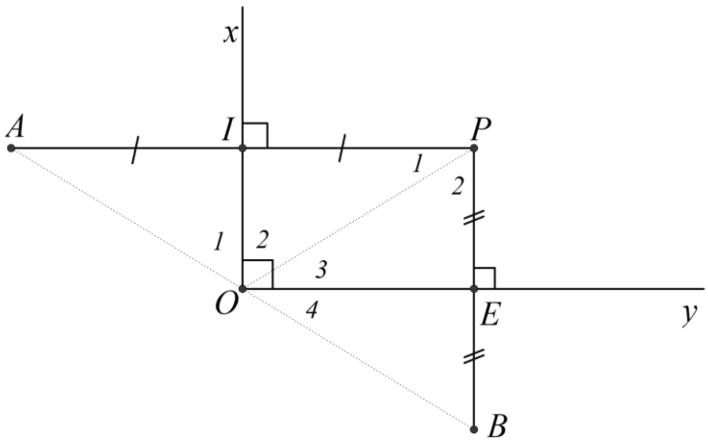
Chứng minh $\Delta ADC = \Delta AEB$ (g.c.g), suy ra $AD = AE$ (1).

Mặt khác, có $OB = OC$, $BE = CD$ (vì $\Delta ADC = \Delta AEB$) nên $OD = OE$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra AK là đường trung trực của BC.

Xét ΔADE, theo tính chất ba đường trung trực của tam giác suy ra AK và các đường trung trực của AD và AE đồng quy.

Bài 6.



a) Xét ΔAOP có: Ox là đường trung trực của PA nên $OA = OP, IA = IP$

Xét hai tam giác vuông ΔOAI và ΔOPI có: $OA = OP, IA = IP$

$\Rightarrow \Delta OAI = \Delta OPI$ (ch-cgv) $\Rightarrow O_1 = O_2$ (1)

Xét ΔBOP có: Oy là đường trung trực của PB nên $OB = OP, EB = EP$

Xét hai tam giác vuông ΔOBE và ΔOPE có: $OB = OP, EB = EP$

$\Rightarrow \Delta OBE = \Delta OPE$ (ch-cgv) $\Rightarrow O_3 = O_4$ (2)

Từ (1)(2) suy ra $O_1 + O_4 = O_2 + O_3 = 90^\circ$

$\Rightarrow AOB = O_1 + O_4 + O_2 + O_3 = 2\left(O_2 + O_3\right) = 180^\circ$

Suy ra ba điểm O, A, B thẳng hàng.

b) Ta có $OA = OP$ và $OB = OP$ theo chứng minh câu a.

$\Rightarrow OA = OB \ (= OP)$

$\Rightarrow$ O nằm trên đường trung trực của AB.

Xét ΔABP có:

Ox là đường trung trực của PA

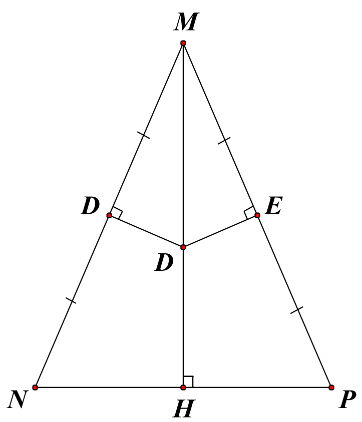
Oy là đường trung trực của PB

O nằm trên đường trung trực của AB

Suy ra O là giao điểm của ba đường trung trực của ΔABP

Mà O nằm trên cạnh AB của ΔABP nên ΔABP là tam giác vuông (Theo chứng minh Bài 1 mục III của chuyên đề này)

Bài 7.



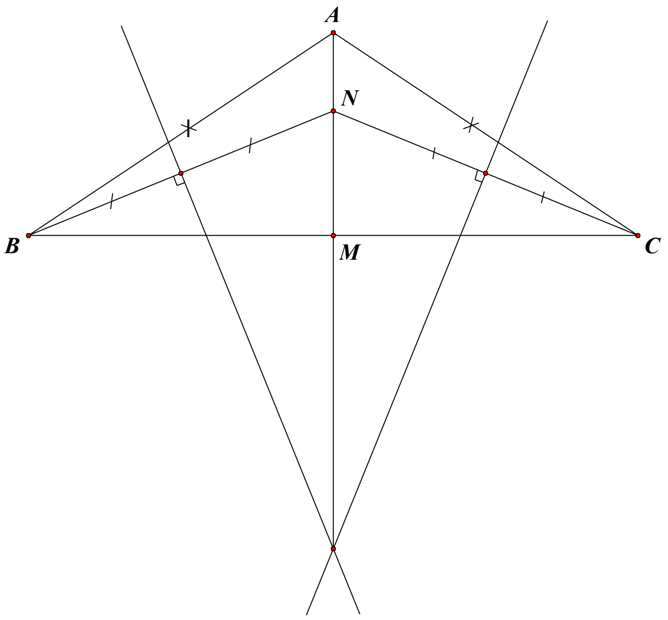
Chứng minh được: $\Delta MNH = \Delta MPH$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông).

Từ đó, suy ra MH là đường trung trực của NP.

Theo tính chất ba đường trung trực của tam giác, ta suy ra điểm D thuộc đường trung trực của NP.

Vậy ba điểm M, D, H thẳng hàng.

Bài 8.



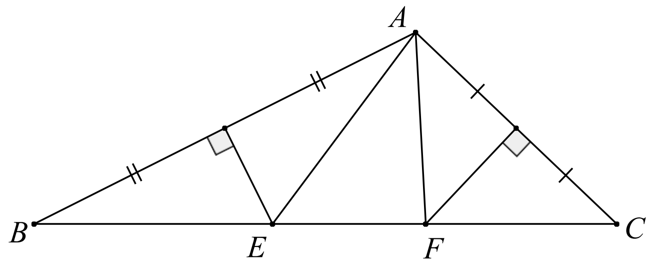
Từ giả thiết, ta có: $AB = AC, NB = NC$.

$\Rightarrow AN$ là đường trung trực của BC hay A, N, M thẳng hàng.

Xét ΔNBC, theo tính chất ba đường trung trực trong tam giác ta có các đường trung trực của NB và NC đồng quy với đường thẳng AM.

Dạng 3. Vận dụng tính chất ba đường trung trực trong tam giác để giải quyết các bài toán khác

Bài 9.

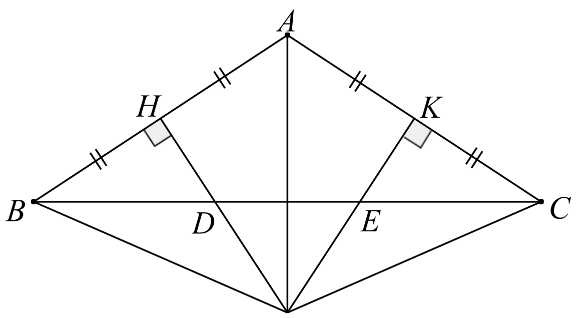


Ta có E nằm trên đường trung trực của AB nên ΔEAB cân ở $E \Rightarrow EAB = EBA$.

Tương tự F nằm trên đường trung trực của AC nên ΔFAC cân ở $F \Rightarrow FAC = FCA$

Ta có $EAF = BAC - BAE - CAF = BAC - EBA - FCA = 110° - 70° = 40°$

Bài 10.



a) Vì điểm O là giao điểm các đường trung trực của ΔABC nên O thuộc đường trung trực của BC.

ΔABC cân tại A $\Rightarrow AB = AC \Rightarrow A$ thuộc đường trung trực của BC.

Vậy AO là đường trung trực của BC.

b) Gọi H là trung điểm của AB, K là trung điểm của AC.

Xét ΔHBD và ΔKCE có:

$BHD = CKE = 90^0$

$BH = CK$

$ABC = ACB$ (ΔABC cân tại A)

Do đó, $\Delta HBD = \Delta KCE(g.c.g)$

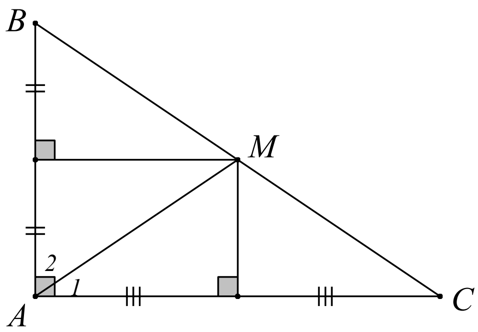
$\Rightarrow BD = CE$ (2 cạnh tương ứng)

c) $\Delta HBD = \Delta KCE \Rightarrow HBD = KEC$ (2 góc tương ứng)

mà ODE, OED lần lượt đối đỉnh với HBD, KEC

$\Rightarrow ODE = OED \Rightarrow \Delta ODE$ cân tại O.

Bài 11.



Giả sử M nằm trên cạnh BC của ΔABC

Vì M là giao điểm 3 đường trung trực của tam giác ABC nên $MA = MB = MC$

Xét ΔABM có $MA = MB$ nên ΔABM là tam giác cân.

$\Rightarrow B = A_2$ (1)

Xét ΔACM có $MA = MC$ nên ΔACM là tam giác cân.

$\Rightarrow A_1 = C$ (2)

Trong ΔABC có $B + A + C = 180^\circ$

$\Rightarrow B + A_1 + A_2 + C = 180^\circ$

$\Rightarrow B + A_1 + A_2 + C = 180^\circ$

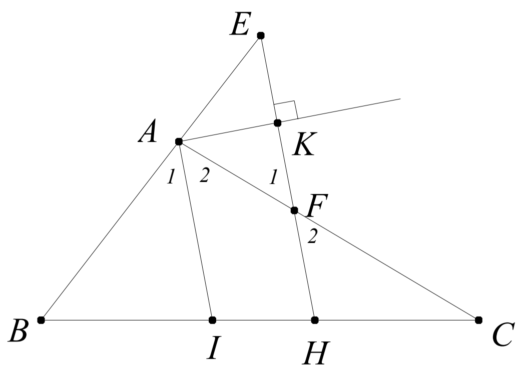
Từ (1) (2) suy ra $2A_1 + 2A_2 = 180^\circ$

$\Rightarrow 2.\left(A_1 + A_2\right) = 180^\circ$

$\Rightarrow \left(A_1 + A_2\right) = 90^\circ \Rightarrow A = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta ABC$ là tam giác vuông tại A.

Bài 12.



a) Ta có $AI//EH \Rightarrow A_1 = E$ (đồng vị) và $A_2 = F_1$ (so le trong)

Mà $A_1 = A_2$ (AI là tia phân giác của BAC) nên $E = F_1$

$\Rightarrow \Delta EAF$ là tam giác cân ở A

$\Rightarrow AE = AF \Rightarrow$ điểm A thuộc đường trung trực của EF

$\Rightarrow$ trung trực của đoạn thẳng EF đi qua đỉnh A của ΔABC.

b) Gọi đường trung trực của EF cắt EF tại K.

Ta có $AI//EH$ mà $AK \perp EH$ $\Rightarrow AK \perp AI$

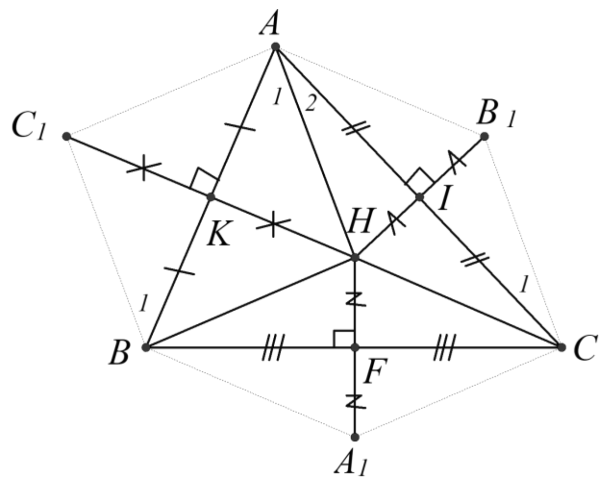
Vậy đường trung trực của đoạn thẳng EF vuông góc với AI.

c) ΔABC cố định nên đường phân giác AI cố định,

Mà $AK \perp AI$ nên AK cũng cố định.

Suy ra khi điểm H chuyển động trên IC thì AK luôn cố định hay đường trung trực của EF luôn cố định.

Bài 13.



+ Xét ΔAKH và ΔBKC_1 là hai tam giác vuông có:

$AK = KB$, $KH = KC_1$

$\Rightarrow \Delta AKH = \Delta BKC_1$(hai cạnh góc vuông)

$\Rightarrow AH = BC_1$ (1) và $A_1 = B_1$

Vì $A_1 = B_1$ và ở vị trí so le trong $\Rightarrow AH // BC_1$ (2)

+ Xét ΔAIH và ΔCIB_1 là hai tam giác vuông có:

$HI = IB$, $AI = IC$

$\Rightarrow \Delta AIH = \Delta CIB_1$ (hai cạnh góc vuông)

$\Rightarrow AH = CB_1$ (3) và $A_2 = C_1$

Vì $A_2 = C_1$ và ở vị trí so le trong $\Rightarrow AH // CB_1$ (4)

Từ (1) và (3) $\Rightarrow$ $BC_1 // CB_1$ ($// AH$)

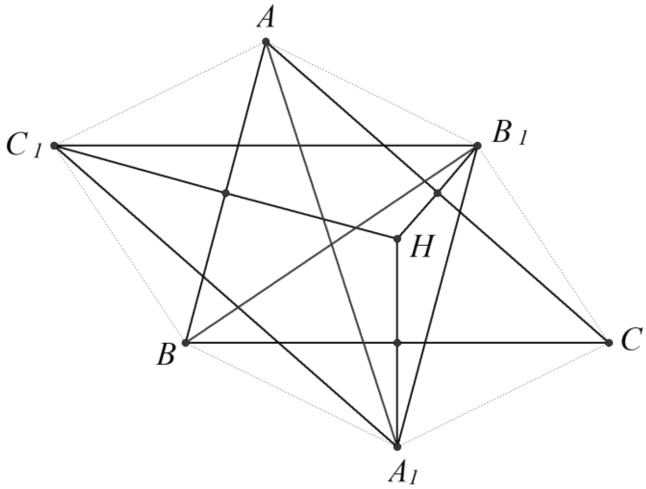
Từ (2) và (4) $\Rightarrow$ $BC_1 = CB_1$ ($= AH$)

+ Chứng minh tương tự ta có $AC_1 // CA_1$ và $AC_1 = CA_1$; $BA_1 // AB_1$ và $BA_1 = AB_1$

Mà H là giao điểm ba đường trung trực của ΔABC nên $AH = BH = CH$

Do đó $BC_1 = CB_1 = AC_1 = CA_1 = AB_1 = BA_1$

b)



Kẻ BB_1, AA_1

Xét ΔBCB_1 và ΔB_1C_1B có:

$B_1C = C_1B$ (chứng minh trên)

$BB_1C = B_1BC_1$ (2 góc so le trong của $B_1C // C_1B$)

BB_1 là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta BCB_1 = \Delta B_1C_1B$ (c.g.c) $\Rightarrow BC = C_1B_1$

Chứng minh tương tự ta được $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$

Xét $\Delta A_1B_1C_1$ và ΔABC có:

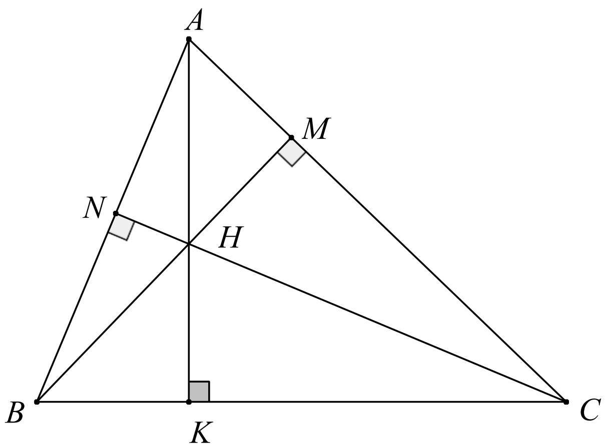
$C_1B_1 = BC$, $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$

$\Rightarrow \Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$ (c.c.c)

BA ĐƯỜNG CAO

Dạng 1. Xác định trực tâm của một tam giác

Bài 14.

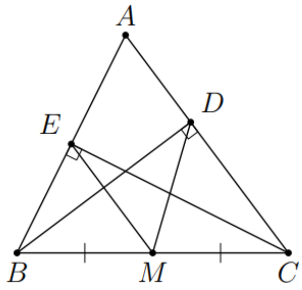


*) Các đường cao của ΔBHC là: HK, BN, CM cắt nhau tại A. Vậy trực tâm của ΔBHC là A.

*) Các đường cao của ΔAHC là: HM, AN, CK cắt nhau tại B. Vậy trực tâm của ΔAHC là B.

*) Các đường cao của ΔAHB là: HM, AM, BK cắt nhau tại C. Vậy trực tâm của ΔAHB là C.

Bài 15.

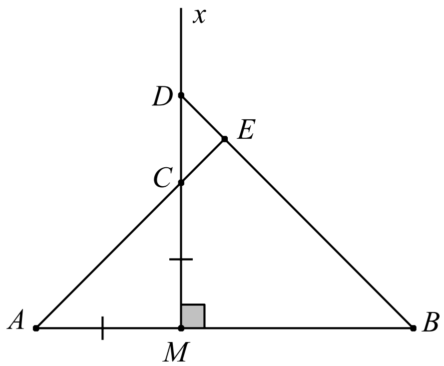


Ta có EM là đường trung tuyến trong ΔEBC vuông ở E, do đó $EM = \dfrac{1}{2}BC$ (1).

Tương tự ta có ED là đường trung tuyến trong ΔDBC vuông ở D, do đó $DM = \dfrac{1}{2}BC$ (2).

Từ $(1),(2)$ suy ra $ME = MD$, do đó M nằm trên đường trung trực của ED.

Bài 16.



a) Do tia AC cắt BD tại E nên hai điểm C và D nằm cùng phía với AB.

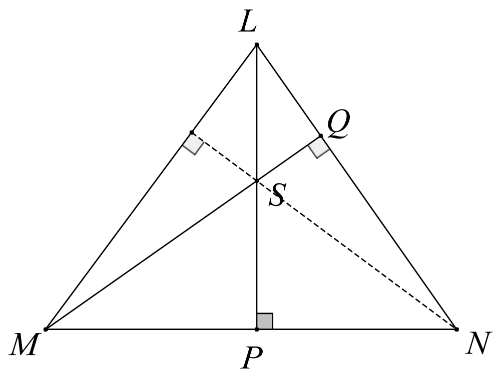
Do $MA = MC$ và $AMC = 90^\circ$ nên tam giác AMC vuông cân tại M. Tương tự ta có ΔBMD vuông cân tại M.

Từ đó suy ra $EDC = DCE = 45^\circ \Rightarrow CED = 90^\circ \Rightarrow AC \perp BD.$

b) Trong tam giác ABD, hai đường cao AE và DM cắt nhau nên C là trực tâm của tam giác ABD

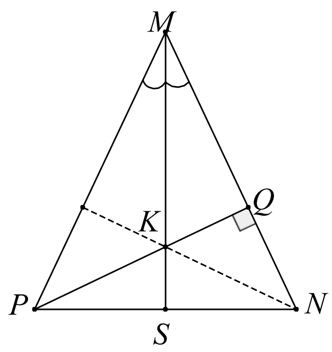
Dạng 2. Sử dụng tính chất trực tâm của tam giác để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, ba đường thẳng đồng quy

Bài 17.



Vì $MQ \perp LN$, $LN \perp MN \Rightarrow S$ là trực tâm của $\Delta LMN \Rightarrow NS \perp ML$

Bài 18.

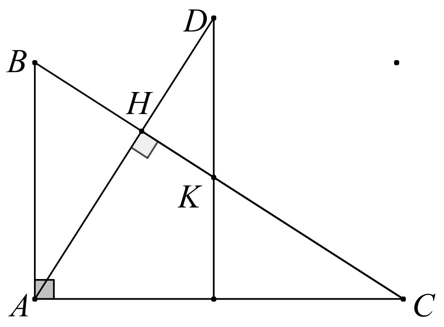


Xét ΔMPN cân tại M có MS là đường phân giác (gt) $\Rightarrow MS \perp PN$
Lại có $PQ \perp MN$

$\Rightarrow K$ là trực tâm của ΔMPN

$\Rightarrow NK \perp MP$.

Bài 19.



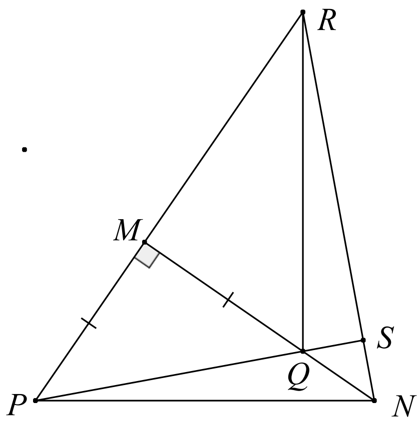
Ta có: $\begin{cases} AB \perp AC\ (gt) \\ DK\ //\ \text{AB (gt)} \end{cases}$

$\Rightarrow DK \perp AC$ (quan hệ từ vuông góc đến song song)

Lại có: $CH \perp AD$ và DK giao CH tại K

$\Rightarrow K$ là trực tâm của $\Delta ADC \Rightarrow AK \perp CD$

Bài 20.



a) Gọi RN giao PQ tại S

Ta có: $MQ = MP\,(gt) \Rightarrow \Delta MPQ$ cân tại M

Có $NMP = 90^0 \Rightarrow SPR = \dfrac{180^0 - 90^0}{2} = 45^0$

Tương tự: $SRP = \dfrac{180^0 - RMN}{2} = \dfrac{180^0 - 90^0}{2} = 45^0$

Lại có: $RSP + SRP + SPR = 180^0$ (định lí tổng ba góc trong tam giác)

$\Rightarrow RSP = 180^0 - SRP - SPR = 90^0$

$\Rightarrow PQ \perp NR$.

a) Xét ΔPRN có: $NM \perp RP\,(gt)$ và $PS \perp RN\,(cmt)$

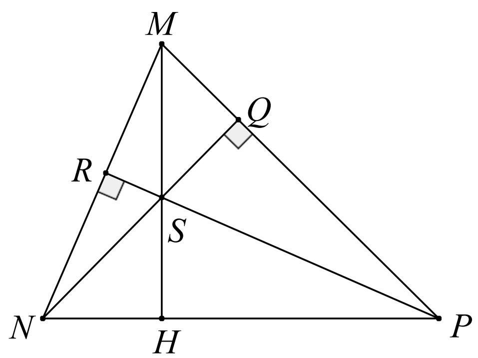
mà NM giao PS tại Q

$\Rightarrow Q$ là trực tâm của ΔPRN

$\Rightarrow RQ \perp NP$.

Dạng 3. Vận dụng tính chất ba đường cao trong tam giác để giải quyết các bài toán khác

Bài 21.



a) Xét ΔMNP có: $PR \perp MN\,(gt)$, $NQ \perp MP\,(gt)$

$\Rightarrow S$ là trực tâm của ΔMNP

$\Rightarrow MS \perp NP$.

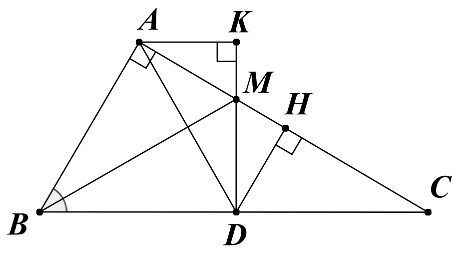
b) Gọi MS giao NP tại H

$\Rightarrow MH \perp NP \Rightarrow \Delta NMH$ vuông tại H

$\Rightarrow SMR + MNH = 90^0$

$\Rightarrow SMR = 90^0 - MNH = 90^0 - 65^0 = 25^0$.

Bài 22.



a) Ta có: $BA = BD\,(gt)$

$\Rightarrow \Delta BAD$ cân tại B

Lại có: BM là đường phân giác (gt)

$\Rightarrow BM \perp AD$.

b) Xét ΔAMD có:

$$\begin{cases} BM \perp AD \\ AK \perp MD \\ DH \perp AM \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Ba đường thẳng AK, BM, DH là ba đường cao của ΔAMD

$\Rightarrow$ Ba đường thẳng AK, BM, DH đồng quy.

PHIẾU BÀI TẬP

BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC

Dạng 1. Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác

Bài 1. Chọn đáp án đúng. Điểm cách đều 3 đỉnh của tam giác là giao điểm của:

A. 3 đường trung tuyến.

B. 3 đường phân giác.

C. 3 đường trung trực.

D. 3 đường cao.

Bài 2. Chọn đáp án đúng.

a) Cho ΔABC tù, giao điểm 3 đường trung trực của tam giác nằm:

A. trong ΔABC.

B. ngoài ΔABC.

C. trên 1 cạnh của ΔABC.

D. trùng với 1 đỉnh của ΔABC.

b) Cho ΔABC có $A = 90^\circ$ thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác:

A. nằm trong ΔABC

B. nằm ngoài ΔABC

C. là trung điểm của cạnh BC

D. trùng với đỉnh A của ΔABC

c) Cho ΔABC nhọn, giao điểm 3 đường trung trực của tam giác nằm:

A. trong ΔABC

B. ngoài ΔABC

C. trên một cạnh của ΔABC

D. trùng với một đỉnh của ΔABC

Bài 3. Cho ΔABC. Vẽ điểm O cách đều ba đỉnh A, B, C và vẽ đường tròn đi qua 3 đỉnh của tam giác trong mỗi trường hợp sau:

a) ΔABC là tam giác nhọn.

b) ΔABC vuông tại A.

c) ΔABC là tam giác tù.

Bài 4. Cho A, B, C là ba điểm phân biệt không thẳng hàng. Xác định đường tròn đi qua ba điểm đó.

Bài 5. Cho ΔABC có $A > 90^\circ$. Các đường trung trực của AB và của AC cắt nhau ở O và cắt BC theo thứ tự ở D và E. Nối AD, AE, OB, OC. Tìm tam giác bằng ΔOAD, bằng ΔOAE.

Bài 6. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Tia phân giác của các góc BAH và CAH cắt BC lần lượt ở D và E. Gọi O là giao điểm các đường phân giác của tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng đường tròn tâm O, bán kính OA đi qua ba điểm A, D, E.

b) Tính số đo góc DOE.

Bài 7. Tam giác ABC có A là góc tù. Các đường trung trực của các cạnh AB và AC cắt nhau ở O. Các điểm B và C có thuộc đường tròn tâm O bán kính OA hay không? Vì sao?

Bài 8. Cho ΔABC có ba góc nhọn, O là giao điểm hai đường trung trực của AB và AC. Trên tia đối của tia OB lấy điểm D sao cho $OB = OD$.

a) Chứng minh O thuộc đường trung trực của AD và CD.

b) Chứng minh các ΔABD, ΔCBD vuông.

c) Biết $ABC = 70^\circ$. Hãy tính số đo ADC.

Bài 9. Tam giác ABC có ba đường trung tuyến cắt nhau tại O. Biết rằng điểm O cũng là giao điểm của ba đường trung trực trong tam giác ABC. Chứng minh tam giác ABC đều.

Bài 10. Cho ΔABC đều. Trên cạnh AB, BC, CA lấy theo thứ tự ba điểm M, N, P sao cho $AM = BN = CP$

a. Chứng minh ΔMNP là tam giác đều

b. Gọi O là giao điểm các đường trung trực của ΔABC.

Chứng minh rằng điểm O cũng là giao điểm các đường trung trực của ΔMNP

Bài 11. Trong một buổi tổng vệ sinh sân trường, 3 tổ cần dọn cỏ và rác của 3 bồn cây A, B, C ở 3 góc sân trường. Em hãy giúp 3 tổ chọn một vị trí O để đặt chiếc xe đẩy rác sao cho vị trí chiếc xe cách đều 3 bồn cây đó.

Dạng 2. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy, ba điểm thẳng hàng

Bài 1. Cho ΔABC cân tại A. Dựng tam giác BCD cân tại D biết D khác phía với A đối với đường đường thẳng BC. Gọi O là giao điểm của AB và AC. Chứng minh rằng A, O, D thẳng hàng.

Bài 2. Cho ΔABC cân tại A. Gọi M là trung điểm của BC. Các đường trung trực của AB và AC cắt nhau ở E.

Chứng minh ba điểm A, E, M thẳng hàng.

Bài 3. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi G là trọng tâm, O là giao điểm ba đường trung trực của tam giác ABC.

a) Tam giác BOC là tam giác gì?

b) Chứng minh ba điểm A, O, G thẳng hàng?

Bài 4. Cho tam giác ABC cân ở A. Gọi M là trung điểm của BC. Các đường trung trực của AB, AC cắt nhau ở E. Chứng minh ba điểm A, E, M thẳng hàng.

Bài 5. Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy điểm D sao cho tam giác BCD cân tại D (D và A nằm khác phía đối với đường thẳng BC). Chứng minh các đường trung trực của AB và AC đồng quy với đường thẳng AD

Bài 6. Cho ΔABC vuông ở A, D là giao điểm hai đường trung trực của hai cạnh AB và AC.

Chứng minh B, D, C thẳng hàng.

Bài 7. Cho tam giác ABC cân tại A. M là trung điểm của BC. Kẻ ME vuông góc AB tại E, MF vuông góc với AC tại F.

a) Chứng minh rằng AM là đường trung trực của EF?

b) Kẻ đường thẳng d vuông góc AB tại B, kẻ đường thẳng d' vuông góc với AC tại C, hai đường thẳng d và d' giao nhau giao tại D. Chứng minh rằng ba điểm A, M, D thẳng hàng?

Bài 8. Cho tam giác nhọn ABC. Gọi H, G, O theo thứ tự là trực tâm, trọng tâm, giao điểm ba đường trung trực của tam giác. Tia AG cắt BC ở M. Gọi I là trung điểm của GA, K là trung điểm của GH. Chứng minh:

a) $OM = \frac{1}{2}AH$

b) $\Delta IGK = \Delta MGO$

c) Ba điểm H, G, O thẳng hàng

d) $GH = 2GO$

Bài 9. Cho tam giác ABC cân ở A, đường phân giác AK. Các đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại O. Kéo dài CO cắt AB ở D, kéo dài BO cắt AC ở E.

a) Chứng minh ba điểm A, K, O thẳng hàng.

b) Chúng minh AK và các đường trung trực của AD và AE đồng quy.

Dạng 3. Vận dụng tính chất ba đường trung trực trong tam giác để giải quyết các bài toán khác

Bài 1. Cho ΔABC cân tại A, đường trung tuyến AM. Đường trung trực của AC cắt đường thẳng AM tại D. Chứng minh rằng $DA = DB$.

Bài 2. Cho tam giác cân ABC có $AB = AC$. Hai đường trung trực của hai cạnh $AB; AC$ cắt nhau tại O. Chứng minh: $AOB = AOC$.

Bài 3. Cho ΔABC, M là trung điểm của BC. Các đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại O. Tính số đo góc OMB.

Bài 4. Cho ΔABC có góc $A = 110°$. Đường trung trực của các cạnh AB và AC cắt nhau tại I.

a) Chứng minh ΔBIC cân.

b) Chứng minh $BIC = 2\left(180° - BAC\right)$ và tính số đo góc BIC.

Bài 5. Cho ΔABC có $\hat{A} = 60°$. Các đường trung trực của cạnh AB và AC lần lượt cắt BC ở E và F. Tính EAF.

Bài 6. Cho ΔABC cân tại A. Đường trung tuyến AM cắt đường trung trực của AC tại K. Chứng minh rằng $KA = KB = KC$.

Bài 7. Cho ΔABC cân tại A, $A > 90^0$. Các đường trung trực của AB và của AC cắt nhau tại O và cắt BC tại D và E. Chứng minh rằng:

a) OA là đường trung trực của BC.

b) $BC = CE$.

c) ΔODE là tam giác cân.

Bài 8. Chứng minh rằng các đường trung trực của tam giác vuông cắt nhau tại trung điểm của cạnh huyền.

Bài 9. Cho tam giác đều ABC. Gọi D và E là hai điểm lần lượt trên hai cạnh AB và AC sao cho $BD = AE$. Chứng minh rằng các đường trung trực của đoạn thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định khi D và E di chuyển trên các cạnh AB và AC.

Bài 10. Cho ΔABC, $AC > AB$. Hai điểm D và E theo thứ tự di chuyển trên các cạnh AB và AC sao cho $BD = CE$. Chứng minh rằng các đường trung trực của DE luôn đi qua một điểm cố định.

BA ĐƯỜNG CAO

Dạng 1. Xác định trực tâm của một tam giác

Bài 1. Cho ΔABC có $ABC = 90°$, $AH \perp BC$. Em chọn phát biểu đúng:

A. H là trực tâm của ΔABC

B. A là trực tâm của ΔABC

C. B là trực tâm của ΔABC

D. C là trực tâm của ΔABC

Bài 2. Cho ΔABC, hai đường cao AM và BN cắt nhau tại H. Em chọn phát biểu đúng:

A. H là trọng tâm của ΔABC.

B. $HA = \frac{2}{3}AM$ và $HB = \frac{2}{3}BN$

C. H là trực tâm của ΔABC; CH là đường cao của ΔABC.

D. CH là đường trung trực của ΔABC.

Bài 3. Cho ΔABC cân tại A có $AM \perp BC$ tại M. Chọn phát biểu đúng:

A. AM là đường trung tuyến của ΔABC

B. AM là đường trung trực của BC.

C. AM là đường phân giác của BAC.

D. Cả A, B, C đều đúng.

Bài 4. Cho ΔABC vuông tại A. Lấy H thuộc AB, vẽ $HE \perp BC$ ở E. Tia EH cắt tia CA tại D. Khi đó

A. H là trọng tâm của ΔBCD.

B. H là trực tâm của ΔBCD.

C. H là giao ba đường trung trực của ΔBCD.

D. H là giao ba đường phân giác của ΔBCD.

Bài 5. Cho tam giác ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Tìm trực tâm của các giác ΔABC, ΔAHB, ΔAHC.

Bài 6. Cho H là trực tâm của tam giác ABC không vuông. Tìm trực tâm của các tam giác HBC, HAB, HAC

Bài 7. Cho ΔABC có $A = 70^0$, $AB < AC$, đường phân giác góc A cắt BC tại D, $BF \perp AC$ tại F, H là giao điểm của BF và AD, E thuộc AC sao cho $AE = AB$.

a) Xác định trực tâm của ΔABE.

b) Tính số đo DHF.

Dạng 2. Sử dụng tính chất trực tâm của tam giác để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, ba đường thẳng đồng quy

Bài 1. Cho ΔABC cân tại A, đường cao BE cắt đường trung tuyến AD ở H. Chứng minh CH tạo với AB một góc 90°.

Bài 2. Cho tam giác ΔABC cân tại A. đường cao CH cắt tia phân giác của góc A tại D. Chứng minh rằng $BD \perp AC$.

Bài 3. Cho ΔMNP vuông tại M. Trên cạnh MN lấy điểm Q, kẻ $QR \perp NP\left(R \in NP\right)$. Gọi O là giao điểm của các đường thẳng PM và RQ. Chứng minh $PQ \perp ON$.

Bài 4. Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy điểm D sao cho A là trung điểm của BD.Kẻ đường cao AE của tam giác ABC, đường cao AF của tam giác ACD. Chứng minh rằng $AE \perp AF$.

Bài 5. Cho tam giác MNP có ba góc nhọn, các đường cao NQ, PR cắt nhau tại S.

a) Chứng minh $MS \perp NP$.

b) Cho $\widehat{MNP} = 65°$. Tính $\widehat{SMR}$.

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ đường cao AH. Lấy điểm K thuộc đoạn thẳng HC. Qua K kẻ đường thẳng song song với AB, cắt AH tại D. Chứng minh $AK \perp CD$.

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông cân tại B.Trên cạnh AB lấy điểm H.Trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho $BH = BD$. Chứng minh

a) $DH \perp AC$.

b) $CH \perp AD$.

Bài 8. Cho tam giác MNP vuông tại M $\left(MP < MN\right)$. Trên cạnh MN lấy điểm Q sao cho $MQ = MP$, trên tia đối của tia MP lấy điểm R sao cho $MR = MN$. Chứng minh:

a) $PQ \perp NR$.

b) $RQ \perp NP$.

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ đường phân giác BM. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD = BA$.

a) Chứng minh $BM \perp AD$.

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên AC, K là hình chiếu vuông góc của A trên DM. Chứng minh ba đường thẳng AK, BM, DH đồng quy.

Bài 10. Đoạn thẳng AB và điểm M nằm giữa A và $B (MA < MB)$. Vẽ tia đó lấy hai điểm C và D sao cho $MA = MC, MD = MB$. Tia AC vuông cắt BD tại E. Chứng minh:

a) $AE \perp BD$

b) C là trực tâm của tam giác ABD

Bài 11. Cho góc nhọn xOy. Trên tia Ox lấy điểm A, trên tia Oy lấy điểm B sao cho $OA = OB$. Kẻ $AC \perp Oy, BD \perp Ox (C \in Ox, D \in Oy)$. Đường thẳng vuông góc với Ox tại A và đường thẳng vuông góc với Oy tại B cắt nhau tại M. Chứng minh: OM, AC, BD đồng quy.

Bài 12. Cho tam giác ABC vuông tại A có BD là đường phân giác. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BA = BE$. Vẽ $CH \perp DB$. Chứng minh rằng BA, DE, CH đồng quy.

Dạng 3. Vận dụng tính chất ba đường cao trong tam giác để giải quyết các bài toán khác

Bài 1. Cho ΔABC đều. Ba đường cao AM, BN, CP cắt nhau tại O. Chứng minh rằng:

a) $OA = OB = OC$.

b) O là trọng tâm của ΔABC

c) $AM = BN = CP$

Bài 2. Chứng minh rằng một tam giác có hai đường cao (xuất phát từ các đỉnh của hai góc nhọn) bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

Bài 3. Chứng minh rằng một tam giác có ba đường cao bằng nhau thì tam giác đó là tam giác đều.

Bài 4. Cho ΔABC vuông tại A, kẻ đường cao AH và trung tuyến AM. Chứng minh trực tâm của $\Delta ABC, \Delta MAB$ và ΔMAC thẳng hàng.

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường cao AH. Lấy I là trung điểm của AC.

a) Chứng minh I là giao điểm của 3 đường trung trực ΔAHC

b) Gọi K và D lần lượt là trung điểm của AH và HC. Chứng minh $KD // AC$.

c) Chứng minh $BK \perp AD$.

Bài 6. Cho tam ABC cân tại A, hai đường cao BD và CE cắt nhau tại $I (D \in AC, E \in AB)$. Tia AI cắt BC tại M. Chứng minh

a) M là trung điểm của BC.

b) Tam giác MED là tam giác cân.

Bài 7. Cho tam giác ABC cân tại A, đường trung tuyến AM và đường phân giác BD cắt nhau tại K. Gọi E là giao điểm của CK và AB. Chứng minh $BD = CE$.

Bài 8. Cho tam giác ABC. Hai đường cao AH, BK cắt nhau tại I.

a) Chứng minh rằng $CI \perp AB$.

b) Khi $ACH = 50°$, hãy tính các góc BIH, HIK.

Bài 9. Cho tam giác ABC cân tại A. Hai đường cao xuất phát từ đỉnh B và đỉnh C cắt nhau tại M. Biết góc $BMC = 120°$, tính các góc của tam giác ABC.

Bài 10. Cho tam giác ABC cân tại A, M là trung điểm của B, C. Gọi H và K lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến AB và AC. Chứng minh $MH = MK$.

Phần III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC

Dạng 1. Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác

Bài 1. Cho ΔABC cân tại A, đường trung tuyến AM. Đường trung trực của AB cắt AM ở O. Chứng minh rằng điểm O cách đều ba đỉnh của ΔABC

Bài 2. Cho ΔABC cân tại A, O là giao điểm của ba đường trung trực. Lấy điểm D trên cạnh AB, điểm E trên cạnh sao cho $AD = CE$. Chứng minh rằng

a) $OA = OB = OC$.

b) Điểm O nằm trên đường trung trực của DE.

Bài 3. Nhà bạn Nam có một mảnh vườn nhỏ trồng hoa và cỏ nhật. Bố của bạn Nam nhờ Nam chọn vị trí để đặt vòi xoay phun tưới cây tự động sao cho vị trí đó cách đều ba khóm hoa ở ba góc vườn nhưng Nam lại chưa biết tìm như thế nào. Các em hãy giúp bạn Nam giải quyết vấn đề này nhé.

Bài 4. Ông Hùng có ba cửa hàng A, B, C không nằm trên một đường thẳng và đang muốn tìm địa điểm O để làm kho hàng. Phải chọn vị trí của kho hàng ở đâu để khoảng cách từ kho đến các cửa hàng bằng nhau?

Dạng 2. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy, ba điểm thẳng hàng

Bài 5. Cho tam giác ABC cân ở A, đường phân giác AK. Các đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại O.

a) Chứng minh rằng ba điểm A, K, O thẳng hàng.

b) Kéo dài CO cắt AB ở D, kéo dài BO cắt AC ở E. Chứng minh rằng AK và các đường trung trực của AD và AE đồng quy.

Bài 6. Cho $xOy = 90^\circ$ và điểm P nằm trong góc đó. Trên mặt phẳng đó lấy điểm A sao cho Ox là đường trung trực của đoạn thẳng PA và điểm B sao cho Oy là đường trung trực của đoạn thẳng PB.

a) Chứng minh ba điểm O, A, B thẳng hàng.

b) Chứng minh O là giao điểm của ba đường trung trực của ΔABP từ đó suy ra ΔABP vuông.

Bài 7. Cho tam giác MNP cân ở M, đường cao MH. Các đường trung trực của MN và MP cắt nhau ở D. Chứng minh ba điểm M, D, H thẳng hàng.

Bài 8. Cho tam giác ABC cân có A là góc tù. Gọi M là trung điểm của BC. N nằm trong tam giác ABC sao cho tam giác BNC cân tại N. Chứng minh đường thẳng AM và các đường trung trực của NB, NC đồng quy.

Dạng 3. Vận dụng tính chất ba đường trung trực trong tam giác để giải quyết các bài toán khác

Bài 9. Cho ΔABC có $\hat{A} = 110°$. Các đường trung trực của cạnh AB và AC lần lượt cắt BC ở E và F. Tính EAF.

Bài 10. Cho ΔABC cân tại A, $A > 90^0$. Các đường trung trực của AB và của AC cắt nhau tại O và cắt BC tại D và E.

Chứng minh rằng:

a) OA là đường trung trực của BC.

b) $BD = CE$.

c) ΔODE là tam giác cân.

Bài 11. Cho M là giao điểm 3 đường trung trực của tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu M nằm trên một cạnh của tam giác ABC thì ABC là một tam giác vuông.

Bài 12. Cho ΔABC, đường phân giác $AI\left(I\in BC\right)$. Trên đoạn thẳng IC lấy điểm H, từ H kẻ đường thẳng song song với AI cắt AB kéo dài tại E và cắt AC tại F. Chứng minh rằng:

a) Đường trung trực của đoạn thẳng EF đi qua đỉnh A của ΔABC.

b) Đường trung trực của đoạn thẳng EF vuông góc với AI.

c) Khi H di động trên tia IC của ΔABC cố định thì đường trung trực của đoạn thẳng EF cố định.

Bài 13. Cho ΔABC có ba góc nhọn. Các điểm F,K,I lần lượt là trung điểm các cạnh BC,BA,AC. Gọi H là giao điểm các đường trung trực ΔABC. Trên tia đối của tỉa FH lấy điểm A_1 sao cho $A_1F=FH$. Trên tia đối của tia KH lấy điểm C_1 sao cho $KH=KC_1$. Trên tia đối của tia IH lấy điểm B_1 sao cho $IH=IB_1$.

a) Chứng minh rằng hình lục giác $AC_1BA_1CB_1$ có 6 cạnh bằng nhau và 2 trong 6 cạnh đó đôi một song song.

b) Chứng minh rằng: $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$

BA ĐƯỜNG CAO

Dạng 1. Xác định trực tâm của một tam giác

Bài 14. Cho ΔABC, các đường cao AK,BN,CM. Điểm H là trực tâm của tam giác. Tìm trực tâm của ΔBHC, ΔAHC, ΔAHB.

Bài 15. Cho tam giác ABC, hai đường cao BD và CE. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh M thuộc trung trực của DE.

Bài 16. Đoạn thẳng AB và điểm M nằm giữa A và $B(MA<MB)$. Vẽ tia Mx vuông AB lấy hai điểm C và D sao cho $MA=MC, MD=MB$. Tia AC vuông cắt BD tại E. Chứng minh

1. $AE\perp BD$

2. C là trực tâm của tam giác ΔABD.

Dạng 2. Sử dụng tính chất trực tâm của tam giác để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, ba đường thẳng đồng quy

Bài 17. Cho tam giác LMN nhọn và điểm S nằm trong tam giác. Gọi LS cắt MN tại P, MS cắt LN tại Q. Chứng minh rằng nếu LP vuông góc với MN và MQ vuông góc với LN thì NS vuông góc với ML.

Bài 18. Cho ΔMNP cân tại M, đường cao PQ cắt đường phân giác MS ở K. Chứng minh $NK\perp MP$

Bài 19. Cho ΔABC vuông tại A, kẻ đường cao AH. Lấy điểm K thuộc đoạn thẳng HC. Qua K kẻ đường thẳng song song với AB, cắt AH tại D. Chứng minh $AK\perp CD$.

Bài 20. Cho ΔMNP vuông tại $M\left(MP<MN\right)$. Trên cạnh MN lấy điểm Q sao cho $MQ=MP$, trên tia đối của tia MP lấy điểm R sao cho $MR=MN$. Chứng minh:

a) $PQ\perp NR$.

b) $RQ\perp NP$.

Dạng 3. Vận dụng tính chất ba đường cao trong tam giác để giải quyết các bài toán khác

Bài 21. Cho ΔMNP có ba góc nhọn, các đường cao NQ, PR cắt nhau tại S.

c) Chứng minh $MS \perp NP$.

d) Cho $MNP = 65^0$. Tính SMR.

Bài 22. Cho ΔABC vuông tại A, kẻ đường phân giác BM. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD = BA$.

c) Chứng minh $BM \perp AD$.

d) Gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên AC, K là hình chiếu vuông góc của A trên DM. Chứng minh ba đường thẳng AK, BM, DH đồng quy.

CHUYÊN ĐỀ 36. HÌNH HỘP CHỮ NHẬT VÀ HÌNH LẬP PHƯƠNG

PHẦN I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT.

- Các kích thước của hình hộp chữ nhật là a,b,c (cùng đơn vị độ dài) thì:

Diện tích xung quanh: $S_{xq}=2(a+b).c$

Diện tích toàn phần: $S_{tp}=S_{xq}+2S_{d}$

Thể tích: $V=abc$

- Kích thước của hình lập phương cạnh a là:

Diện tích xung quanh: $S_{x}=4a^2$

Diện tích toàn phần: $S_{t}=6a^2$

Thể tích: $V=a^3$

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI.

Dạng 1. Một số yếu tố cơ bản, diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật và hình lập phương:

I. Phương pháp giải:

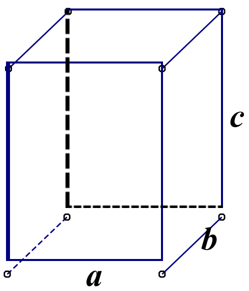
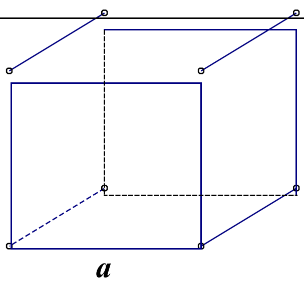
+ Nhận dạng hình, xác định được các yếu tố liên quan của hình hộp chữ nhật và hình lập phương.

+ Viết các công thức liên quan (công thức tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật và hình lập phương).

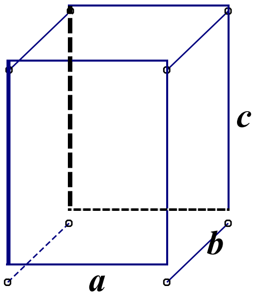
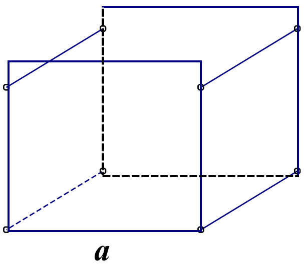
+ Thay số, tính và kết luận.

II. Bài toán.

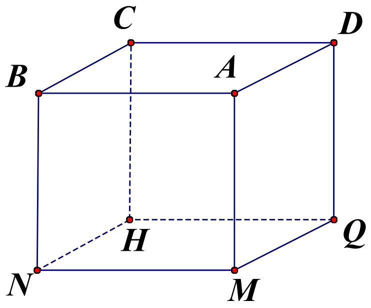
Bài 1. Hoàn thành các công thức trong bảng sau:

Hình	**Hình vẽ**	**Diện tích xung quanh**	**Thể tích**
Hình hộp chữ nhật		$S_{xq}=$	$V=$
Hình lập phương		$S_{xq}=$	$V=$

Lời giải:

Hình	**Hình vẽ**	**Diện tích xung quanh**	**Thể tích**
Hình hộp chữ nhật		$S_{xq} = 2(a+b).c$ $S_{tp} = 2\left(ab+ac+bc\right)$	$V = abc$
Hình lập phương		$S_{xq} = 4a^2$ $S_{tp} = 6a^2$	$V = a^3$

Bài 2. Cho hình hộp chữ nhật $ABCDMNHQ$ có độ dài $NB = 3\,cm$, $BC = 4\,cm$, $MN = 6\,cm$, Hãy xác định độ dài các cạnh còn lại của hình hộp chữ nhật.



Lời giải:

a) Ta có $ABCDMNHQ$ là hình hộp chữ nhật nên các mặt $ABCD$, $ABNM$, $AMQD$, $CHQD$, $BCHN$, $HNMQ$ là các hình chữ nhật. Do đó theo tính chất hình chữ nhật ta có:

$NB = AM = DQ = CH$,

$BC = AD = MQ = NH$,

$NM = AB = CD = HQ$

Mà $NB = 3\,cm$, $BC = 4\,cm$,

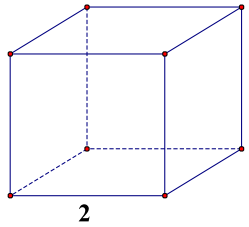
$MN = 6\,cm$,

Nên $AM = DQ = CH = 3cm$

$AD = MQ = NH = 4\,cm$

$AB = CD = HQ = 6\,cm$.

Bài 3. Cạnh của một hình lập phương bằng $2cm$. Tính diện tích toàn phần và diện tích xung quanh của hình lập phương đó.



Lời giải:

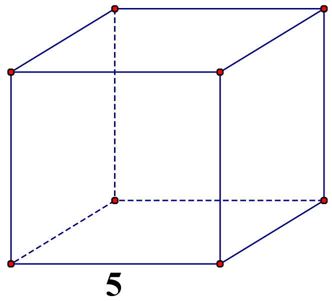
Tính diện tích xung quanh của hình lập phương đó là:

$S_x = 4a^2 = 4.2^2 = 16\ (cm^2)$

Tính diện tích toàn phần của hình lập phương đó.

$S_t = 6a^2 = 6.2^2 = 24\ (cm^2)$

Bài 4. Cạnh của một hình lập phương bằng $5cm$. Tính diện tích toàn phần và diện tích xung quanh của hình lập phương đó.



Lời giải:

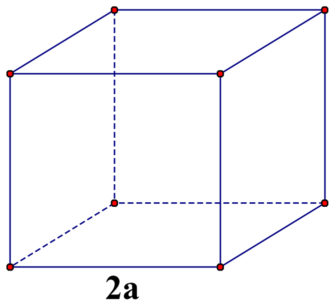
Tính diện tích xung quanh của hình lập phương đó là:

$S_x = 4a^2 = 4.5^2 = 100\ (cm^2)$

Tính diện tích toàn phần của hình lập phương đó.

$S_t = 6a^2 = 6.5^2 = 150\ (cm^2)$

Bài 5. Cạnh của một hình lập phương bằng $2a(\ cm)$. Tính diện tích toàn phần và diện tích xung quanh của hình lập phương đó.



Lời giải:

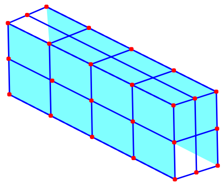
Tính diện tích xung quanh của hình lập phương đó là:

$S_x = 4.(2a)^2 = 16a^2\ (cm^2)$

Tính diện tích toàn phần của hình lập phương đó.

$S_t = 6(2a)^2 = 6.2^2.a^2 = 24a^2\ (cm^2)$

Bài 6. Hình sau đây gồm bao nhiêu đơn vị diện tích và bao nhiêu đơn vị thể tích (mỗi hình nhỏ là một hình lập phương có cạnh là 1 đơn vị độ dài).



Lời giải:

Hình có kích thước là 4; 2 và 2 đơn vị dài.

Diện tích hình gồm:

+ Bốn mặt hình chữ nhật kích thước 4.2 có diện tích là:

$4.(4.2) = 32$ (đơn vị diện tích).

+ Hai mặt hình vuông kích thước 2.2 có diện tích là:

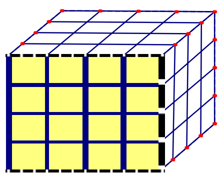
$2.(2.2) = 8$ (đơn vị diện tích).

Vậy hình có diện tích là:

$32 + 8 = 40$ (đơn vị diện tích).

Thể tích hình là $V = 4.2.2 = 16$ (đvtt)

Bài 7. Hình sau đây gồm bao nhiêu đơn vị diện tích và bao nhiêu đơn vị thể tích (mỗi hình nhỏ là một hình lập phương có cạnh là 1 đơn vị độ dài).



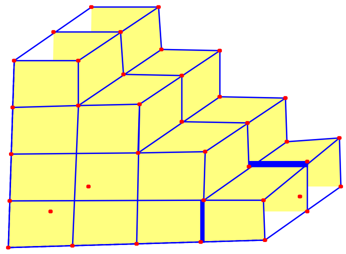
Lời giải:

Hình có lập phương kích thước là 4 đơn vị dài.

Diện tích toàn phần của hình là: $6.(4.4) = 96$ (đơn vị diện tích).

Thể tích hình là $V = 4^3 = 64$ (đvtt)

Bài 8. Hình sau đây gồm bao nhiêu đơn vị diện tích và bao nhiêu đơn vị thể tích (mỗi hình nhỏ là một hình lập phương có cạnh là 1 đơn vị độ dài).



Lời giải:

+ Hai mặt hình chữ nhật kích thước 4.2 có diện tích là: $2.(4.2)=16$ (đơn vị diện tích).

+ Bốn bậc thang có diện tích là: $4.4=16$ (đơn vị diện tích).

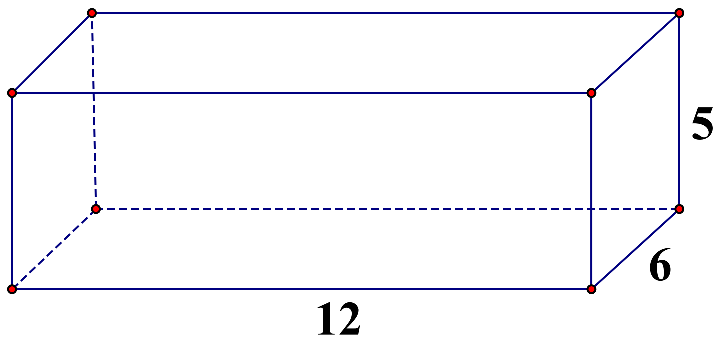
+ Hai mặt gồm $4+3+2+1=10$ hình vuông đơn vị có diện tích là: $2.10=20$ (đơn vị diện tích).

Vậy hình có diện tích là:

$16+16+20=52$ (đơn vị diện tích).

Thể tích hình là $V=(4+3+2+1).2=10.2=20$ (đvtt)

Bài 9. Tìm số hình lập phương đơn vị (hình lập phương có cạnh là 1 đơn vị độ dài) để xếp được thành hình hộp chữ nhật sau:



Lời giải:

+ Trong hình mặt đáy là hình chữ nhật có chiều dài là $12\ cm$, có thể chia thành 12 đơn vị, chiều rộng là $6\ cm$. chia thành 6 đơn vị, và chiều cao của hình hộp chữ nhật là $5\ cm$, chia thành 5 đơn vị. Do vậy số hình lập phương đơn vị có cạnh là 1 trên hình là:

$6.12.5=360$ (hình)

Bài 10. Thể tích của hình lập phương là $343\,cm^3$. Tính diện tích toàn phần và diện tích xung quanh của hình lập phương đó.

Lời giải:

Gọi cạnh hình lập phương là a, ta có:

$a^3=343$, suy ra $a=7$.

Diện tích 6 mặt hình lập phương là:

$6a^2=6.7^2=294$ (cm^2).

Diện tích xung quanh của hình lập phương là: $4a^2=4.7^2=196$ (cm^2)

Bài 11. Cho hình chữ nhật có thể tích $144\ cm^3$, diện tích xung quanh là $168\ cm^2$, diện tích toàn phần là $192\ cm^2$. Tính các kích thước của hình hộp chữ nhật đó.

Lời giải:

Gọi các kích thước của hình hộp chữ nhật là a,b,c trong đó c là độ dài đường cao thì ta có:

$abc = 144\ (1)$

$2(a+b)c = 2(ac+bc) = 168\ (2)\ 2(ab+bc+ca) = 192\ (3)$

Từ (2) và (3) suy ra

$2ab + 168 = 192 \Rightarrow ab = 12\ (4)$

Từ (1) và (4) suy ra $c = 12$

Thay $c = 12$ vào (2) ta có:

$2(a.12 + b.12) = 168 \Rightarrow a + b = 7 \Rightarrow b = 7 - a$

Thay $b = 7 - a$ vào (4) ta được:

$a(7-a) = 12 \Rightarrow a^2 - 7a + 12 = 0 \Leftrightarrow (a-3)(a-4) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3 \\ a = 4 \end{array}\right.$

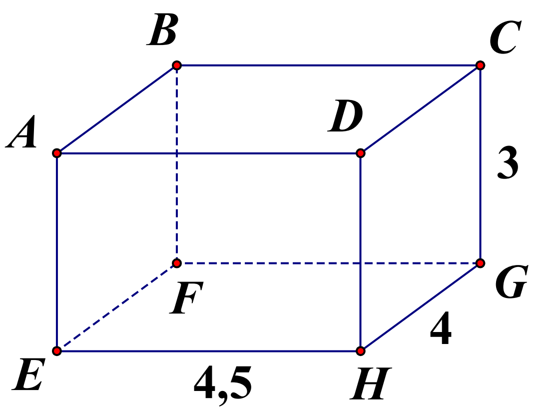
Nếu $a = 3$ thì $b = 4$

Nếu $a = 4$ thì $b = 3$

Vậy các kích thước của hình hộp chữ nhật là: $3cm;\ 4cm;\ 12cm$

Bài 12. Một căn phòng hình hộp chữ nhật có chiều dài $4,5\ m$, chiều rộng $4\ m$, chiều cao $3\ m$. Người ta muốn lăn sơn trần nhà và bốn bức tường. Biết rằng tổng diện tích các cửa là $11\ m^2$. Tính diện tích cần lăn sơn ?

Lời giải:



Diện tích trần nhà là $4,5\ .\ 4 = 18\ (m^2)$

Diện tích bốn bức tường (bao gồm cả diện tích các cửa) là : $2.4,5.3 + 2.4.3 = 27 + 24 = 51(m^2)$

Diện tích cần lăn sơn là $51 - 11 = 40\ (m^2)$

Bài 13: Một phòng học hình hộp chữ nhật có chiều dài $10\,m$, chiều rộng $5m$ và chiều cao $4\,m$. Người ta định sơn bốn bức tường căn phòng, biết giá công sơn là 25000 đồng một mét vuông.

Hỏi chi phí tiền công là bao nhiêu? cho biết căn phòng có 1 cửa chính cao $1,8\,m$ và rộng $2m$ và hai cửa sổ có cùng chiều dài $80\,cm$, chiều rộng $60\,cm$.

Lời giải:

Diện tích xung quanh của hình phòng học là:

$2.(10+5).4 = 120\,m^2$

Diện tích cửa là: $1,8.2+0,8.0,6.2 = 4,56\,m^2$

Diện tích cần sơn là

$120-4,56 = 115,44\,m^2$

Chi phí tiền công sơn: $25000.115,44 = 2886000$ (đồng)

Bài 14. Thể tích của hình hộp chữ nhật là $300\,dm^3$. Tính diện tích toàn phần và diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật đó.

Lời giải:

Chiều cao của hình hộp chữ nhật là: $300:(10.6) = 5(dm)$.

Diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật là: $S_{tp} = 2.(10+6).5+2.10.6 = 280$ (dm^2).

Diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật là: $S_{xq} = 2(a+b).c = 2(10+6).5 = 160$ (dm^2).

Bài 15. Một căn phòng rộng $4,1m$, dài $5,5\,m$, cao $3m$ .Người ta muốn quét vôi trần nhà và bốn bức tường. Biết tổng diện tích các cửa bằng 12% tổng diện tích 4 bức tường và trần nhà. Hãy tính diện tích cần quét vôi.

Lời giải:

Diện tích bốn bức tường là: $2.(4,1+5,5).3 = 57,6$ (m^2).

Diện tích trần nhà là: $4,1.5,5 = 22,55$ (m^2).

Diện tích 4 bức tường và trần nhà là: $57,6+22,55 = 80,15$ (m^2).

Tổng diện tích các cửa là: $80,15.12\% = 9,618$ (m^2).

Diện tích cần quét vôi là: $80,15-9,618 = 70,532$ (m^2).

Bài 16. Một bể nước hình hộp chữ nhật có chiều rộng $1,6\,m$. Lúc đầu bể không có nước. Người ta lắp một vòi nước, mỗi phút chảy được 24 lít nước. Sau 100 phút thì mực nước trong bể cao $0,6\,m$. Tính chiều dài của bể nước.

Lời giải:

Lượng nước chảy vào bể sau 100 phút là

$24.100 = 2400$ (lít) $= 2,4\left(m^3\right)$.

Chiều dài của bể là $2,4:0,6:1,5 = 2,5(m)$.

Bài 17. Các kích thước của một hình hộp chữ nhật tỉ lệ thuận với 5; 6; 7. Thể tích của hình hộp là $1680\,m^3$. Tính độ dài các kích thước của hình hộp chữ nhật đó.

Lời giải:

Gọi các kích thước của hình hộp chữ nhật là $a,b,c\left(a>0,b>0,c>0\right)$, ta có

$a:b:c=5:6:7$ và $abc=1680$

Ta có

$a:b:c=5:6:7\Rightarrow \frac{a}{5}=\frac{b}{6}=\frac{c}{7}$

Đặt $\frac{a}{5}=\frac{b}{6}=\frac{c}{7}=k\Rightarrow a=5k;b=6k;c=7k$

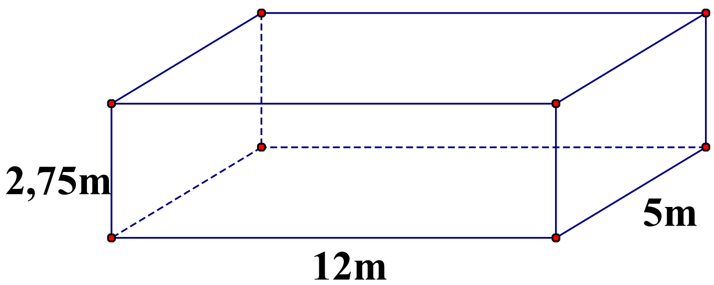
Khi đó ta có $abc=5k.6k.7k=1680\Leftrightarrow 210k^3=1680$

$\Leftrightarrow k^3=8\Leftrightarrow k=2$

Với $k=2\Rightarrow a=10\left(m\right);b=12\left(m\right);c=14\left(m\right)$.

Bài 18. Một bể bơi có chiều dài $12m$, chiều rộng $5m$ và sâu $2,75m$. Hỏi người thợ phải dùng bao nhiêu viên gạch men để lát đáy và xung quanh thành bể đó? Biết rằng mỗi viên gạch có chiều dài $25cm$, chiều rộng $20\ cm$ và diện tích mạch vữa lát không đáng kể.

Lời giải:



Diện tích xung quanh và diện tích đáy bể là:

$\left(12+5\right).2.2,75=93,5\quad\left(m^2\right)$

Diện tích một viên gạch men là:

$20.25=500$

Số viên gạch men cần dùng là:

$93,5:0,05=1870$ (viên)

Đáp số: 1870 viên gạch men

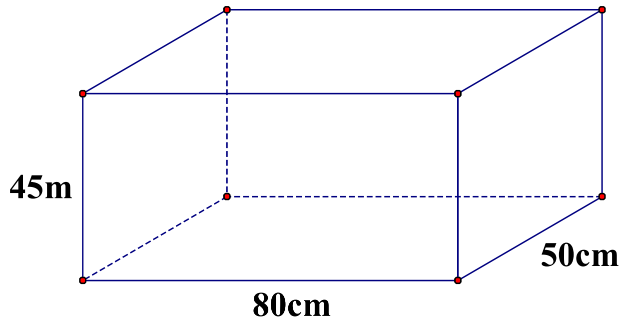
Bài 19. Một bể cá dạng hình hộp chữ nhật làm bằng kính (không có nắp) có chiều dài $80cm$, chiều rộng $50cm$, chiều cao $45cm$.

Mực nước ban đầu trong bể cao $35cm$.

a) Tính diện tích kính dùng để làm bể cá đó.

b) Người ta cho vào bể một hòn đá có thể tích 10dm^3. Hỏi mực nước trong bể lúc này cao bao nhiêu xăng – ti-mét?

Lời giải:



Diện tích xung quanh bể là: $(80 + 50) . 2 .45 = 11700$ (cm^2)

Diện tích đáy bể là: $80 .50 = 4000$ (cm^2)

Diện tích kính dùng để làm bể cá đó: $11700 + 4000 = 15700$ (cm^2)

Đổi $10\ dm^3 = 10000\ cm^3$

Thể tích nước dâng lên chính là thể tích hòn đá do đó thể tích nước dâng lên là: 10000 cm^3

Mực nước dâng lên số xăng – ti - mét là: $10000 : (50 \times 80) = 2,5$ (cm)

Mực nước trong bể lúc này cao số xăng – ti - mét là: $2,5 + 35 = 37,5$ (cm)

Đáp số: $15700cm^2$;$37,5\ cm$

Bài 20. Một hình lập phương cạnh $5\ cm$ được ghép bởi 125 hình lập phương nhỏ cạnh $1\ cm$. Số các hình lập phương nhỏ giáp với 6 mặt của các hình lập phương nhỏ khác là

Lời giải:

Số hình lập phương có 1 mặt không tiếp xúc với các hình lập phương khác là

$25.2+15.2+9.2=50+30+18=98$ (hình lập phương)

Số hình lập phương nhỏ giáp với 6 mặt của các hình lập phương nhỏ khác là

$125-98=27$ (hình lập phương)

Bài 21. Có 512 hình lập phương đơn vị (cạnh dài một đơn vị). Hỏi cần phải thêm bao nhiêu hình lập phương đơn vị để xếp thành một hình lập phương có độ dài cạnh 10 đơn vị?

Lời giải:

Thể tích của 512 hình lập phương đơn vị là $512.1^3=512$ (đvtt)

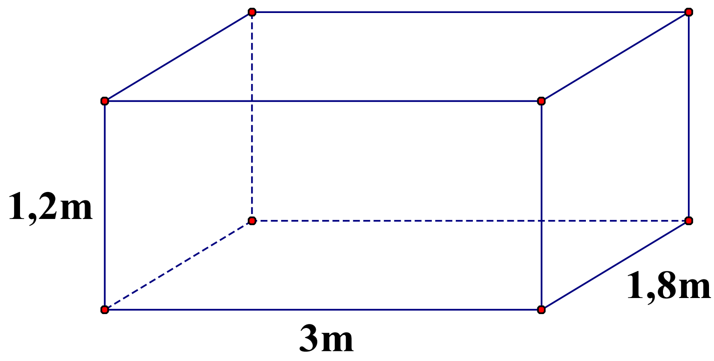
Thể tích hình lập phương cạnh 10 đơn vị là $10^3=1000$ (đvtt)

Thể tích cần tăng thêm $1000-512=488$ (đvtt)

Số hình lập phương đơn vị cần tăng $488:1^3=488$ hình.

Bài 22. Một bể chứa nước hình hộp chữ nhật có chiều dài $3\ m$,chiều rộng $1,8\ m$, chiều cao $1,2\ m$. Khi bể không chứa nước, người ta cho một máy bơm, bơm nước vào bể mỗi phút bơm được 30 lít. Hỏi sau 3 giờ 15 phút bể đã đầy nước hay chưa?

Lời giải:



Thể tích bể nước hình hộp chữ nhật là:

$3.1,8.1,2 = 6,48\ (m^3)$

Vì mỗi phút máy bơm được *30* lít nên sau *3* giờ *15* phút = *195* phút, máy bơm được lượng nước là:

$30.195 = 5850\ (l) = 5850\ (dm^3) = 5,85\ (m^3)$

Vì $5,85 < 6,48$ nên sau 3 giờ 15 phút bể vẫn chưa đầy nước.

Bài 24. Một thùng đựng hàng có nắp dạng hình hộp chữ nhật có chiều dài 2,5m, chiều rộng 1,8m và chiều cao $2m$. Người thợ cần bao nhiêu ki-lô-gam sơn để đủ sơn hai mặt của chiếc thùng đó ? Biết rằng mỗi ki-lô-gam sơn sơn được $5m^2$ mặt thùng.

Lời giải:

Diện tích xung quanh của thùng đựng hàng đó: $(2,5 + 1,8)\ x\ 2\ x\ 2 = 17,2\ (m^2)$

Diện tích 2 đáy của thùng đựng hàng là: $2,5\ .\ 1,8\ .\ 2 = 9\ (m^2)$

Diện tích toàn phần của thùng đựng hàng đó: $17,2 + 9 = 26,2\ (m^2)$

Diện tích bề mặt cần quét sơn là: $26,2\ .\ 2 = 52,4\ (m^2)$

Số ki-lô-gam sơn cần dùng là: $52,4 : 5 = 10,48\ (kg)$

Đáp số: 10,48 kg sơn.

Bài 25. Thiết bị máy được xếp vào các hình lập phương có diện tích toàn phần bằng $96dm^2$. Người ta xếp các hộp đó vào trong một thùng hình lập phương làm bằng tôn không có nắp. Khi gò một thùng như thế hết $3,2m^2$ tôn (diện tích các mép hàn không đáng kể). Hỏi mỗi thùng đựng được bao nhiêu hộp thiết bị nói trên?

Lời giải:

Đổi $3,2m^2 = 320\,dm^2$

Diện tích 1 mặt của hộp thiết bị là:

96 : 6 = 16 (dm^2)

Suy ra cạnh của hộp thiết bị là 4dm, vì 4 . 4 = 16

Diện tích một mặt của thùng đựng hàng là: 320 : 5 = 64 (dm^2)

Vì 64 = 8 . 8 nên cạnh của thùng đựng hàng là $8dm$

Thể tích một hộp đựng thiết bị là: $4^3 = 64 \ \left(dm^3\right)$

Thể tích thùng đựng hàng là: $8^3 = 512 \ \left(dm^3\right)$

Số hộp thiết bị đựng được trong một thùng là: $512 : 64 = 8$ (hộp)

Xếp mỗi lớp 4 hộp và xếp được 2 lớp như thế

Đáp số: 8 hộp

Dạng 2. Thể tích của hình hộp chữ nhật và hình lập phương:

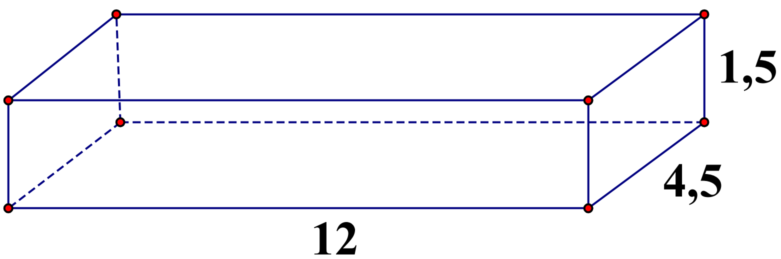
I. Phương pháp giải:

+ Áp dụng các công thức tính thể tích của hình hộp chữ nhật và hình lập phương.

+ Áp dụng giải các bài toán thực tế có liên quan

II. Bài toán.

Bài 1. Một bể bơi hình hộp chữ nhật dài $12m$, rộng $4,5m$; chiều cao của nước trong bể $1,5m$. Tính thể tích nước trong bể?



Lời giải:

Thể tích của hình hộp chữ nhật là $V = a.b.h = 12.4,5.1,5 = 81 \ \ (cm^3)$

Bài 2. Một hình hộp chữ nhật có các kích thước là $6cm$; $8cm$; $12cm$. Tính thể tích của hình hộp chữ nhật?

Lời giải:

Thể tích của hình hộp chữ nhật là $V = a.b.h = 6.8.12 = 576 \ (cm^3)$

Bài 3. Thể tích của một hình lập phương có độ dài cạnh bằng $5cm$ là:

Lời giải:

Thể tích của hình hộp lập phương là $V = a^3 = 5^3 = 125 \ (cm^3)$

Bài 4. Một bể bơi có hình dạng một hình hộp chữ nhật, có kích thước bên trong của đáy lần lượt là $6m$ và $25m$. Dung tích nước trong hồ khi mực nước trong hồ cao $2m$ là?

Lời giải:

Dung tích nước trong hồ khi mực nước trong hồ cao $2m$ là $V = a.b.h = 6.25.2 = 300 \ \ (m^3)$

Bài 1. Hình hộp chữ nhật có ba kích thước lần lượt là a ; $2a$; $\frac{a}{2}$. Thể tích của hình hộp chữ nhật đó là

Lời giải:

Thể tích của hình hộp chữ nhật là $V = a.2a.\frac{a}{2} = a^3$ (đvdt)

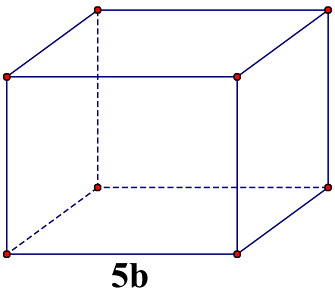
Bài 5. Hình hộp chữ nhật có ba kích thước lần lượt là a ; a ; $2a$. Thể tích của hình hộp chữ nhật đó là

Lời giải:

Thể tích của hình hộp chữ nhật là $V = a.a.2a = 2a^3$ (đvdt)

Bài 6. Cạnh của một hình lập phương bằng $5b\ (cm)$. Tính thể tích của hình lập phương đó?

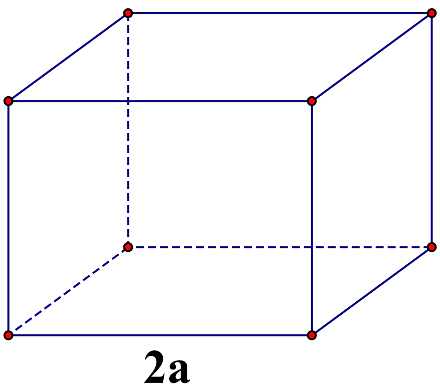
Lời giải:



Thể tích của hình lập phương là $V = (5b)^3 = 125b^3\ (cm^3)$

Bài 7. Tính thể tích của một hình lập phương có cạnh $2a\ (cm)$?

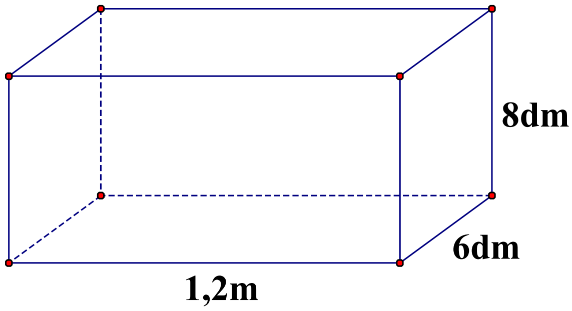
Lời giải:



Thể tích của hình lập phương là $V = (2a)^3 = 8a^3\ (cm^3)$

Bài 8. Một bể cá hình hộp chữ nhật có kích thước như sau chiều dài $1,2\,m$; chiều rộng $6\,dm$; chiều cao $8\,dm$. Tính thể tích của bể ?

Lời giải:



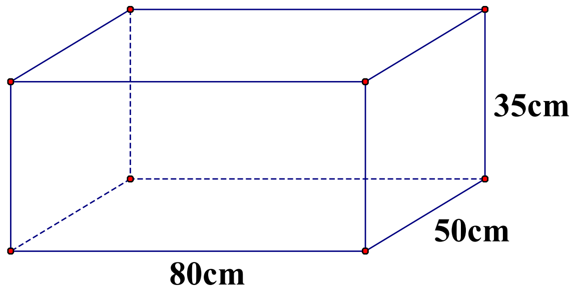
Đổi $1,2\,m = 12\,dm$

Thể tích của bể cá là

$V = 12.6.8 = 675\left(dm^3\right)$

Bài 9. Một bể cá dạng hình hộp chữ nhật làm bằng kính (không nắp) có chiều dài $80\,cm$, chiều rộng $50\,cm$. Mực nước trong bể cao $35\,cm$. Tính thể tích của mực nước trong bể theo đơn vị dm^3

Lời giải:



Thể tích của mực nước trong bể là

$V = 80.50.35 = 140000(cm^3) = 140\left(dm^3\right)$.

Bài 10. Cho biết một bể bơi tiêu chuẩn có chiều dài $50\ m$, chiều rộng $25\ m$ và chiều cao $2,3\ m$. Người ta bơm nước vào bể sao cho nước cách mép bể $0,3\ m$. Tính thể tích nước trong bể và thể tích phần không chứa nước?

Lời giải:

Nước trong bể tạo thành một hình hộp chữ nhật có chiều dài $50\,m$, chiều rộng $25\,m$ và chiều cao $2\,m$.

Thể tích nước trong bể là $V_1 = 50.25.2 = 2500\left(m^3\right)$

Thể tích của cả bể là $V = 50.25.2,3 = 2875\left(m^3\right)$

Thể tích phần bể không chứa nước là $V_2 = V - V_1 = 2875 - 2500 = 375\left(m^3\right)$.

Bài 11. Một chiếc hộp hình lập phương không có nắp được sơn cả mặt trong và mặt ngoài. Diện tích phải sơn tổng cộng là $1690\,cm^2$. Tính thể tích của hình lập phương đó.

Lời giải:

Chiếc hộp hình lập phương không có nắp gồm 5 hình vuông, mỗi hình vuông được sơn hai mặt nên diện tích của mỗi hình vuông là $1690 : 10 = 19\left(cm^2\right)$

Vì diện tích hình vuông bằng bình phương một cạnh nên cạnh của hình lập phương là $13\,cm$

Thể tích hình lập phương là $V = 13^3 = 2197\left(cm^3\right)$.

Bài 12. Một bể cá dạng hình hộp chữ nhật làm bằng kính (không nắp) có chiều dài $1m$, chiều rộng $70\,cm$, chiều cao $80\,cm$. Mực nước trong bể cao $30\,cm$. Người ta cho vào bể một hòn đá thì thể tích tăng $14000\,cm^3$. Hỏi mực nước trong bể lúc này là bao nhiêu?

Lời giải:

Đổi $1m = 100\,cm$

Thể tích phần nước ban đầu là

$V = 100.70.30 = 210000\left(cm^3\right)$.

Sau khi cho vào một hòn đá thể tích tăng $14000\left(cm^3\right)$. Khi đó thể tích phần bể chứa nước lúc sau là

$V_1 = V + 14000 = 224000\left(cm^3\right)$

Vì chiều dài và chiều rộng của bể nước không thay đổi nên sự thay đổi là do chiều cao mực nước thay đổi. Gọi chiều cao mực nước lúc sau là $h\,cm$. Ta có

$$V_1 = 70.100.h \Rightarrow h = \frac{V_1}{100.70} = \frac{224000}{100.70} = 32\,cm.$$

Bài 13. Một hình lập phương có cạnh bằng 1. Người ta tăng mỗi cạnh của nó thêm 20%. Thể tích của nó tăng bao nhiêu phần trăm?

Lời giải:

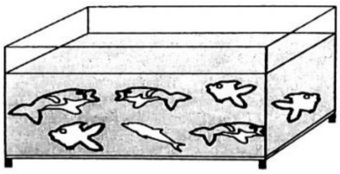
Độ dài của mỗi cạnh hình lập phương sau khi tăng thêm là $1 + 1.20\% = 1,2$ (đvđd)

Thể tích ban đầu là 1 (đvtt)

Thể tích tăng thêm là $1,2^3 - 1^3 = 0,728$ (đvtt)

Phần trăm thể tích tăng thêm là $0,728 : 1 \times 100\% = 72,8\%$.

Bài 14. Một bể cá hình hộp chữ nhật cao $50\ cm$. Diện tích đáy bằng nửa diện tích xung quanh. Trong bể đang có nước cao đến $35\ cm$. Hỏi thêm bao nhiều nước vào bể cá đó thì nước vừa đầy bể. Biết diện tích xung quanh của bể cá là $6400\ cm^2$



Lời giải:

Gọi chiều dài, rộng, cao của bể cá hình chữ nhật lầm lượt là a,b,c ($cm, a,b,c > 0$). Suy ra $c = 20\ cm$.

Do diện tích đáy bằng nửa diện tích xung quanh nên ta có

$S_{xq} = 2S_d$ hay $S_{xq} = 2ab$

suy ra $ab = 6400 : 2 = 3200$.

Gọi V là thể tích của bể cá lúc đầy nước, V_1 là thể tích bể cá với chiều cao nước là $35\ cm$, V_2 là thể tích lượng nước cần thêm để vừa đầy bể cá.

Vậy lượng nước cần thêm vào để vừa đầy bể cá là: $V_2 = V - V_1 = 50.3200 - 35.3200$ $= 3200.(50 - 35)$

$= 3200.15 = 48000\ (cm^3) = 48000\ (ml)$

Bài 15. Cho một bể bơi tiêu chuẩn có chiều dài $50\,m$, chiều rộng $25\,m$ và chiều cao $2,3\,m$.Người ta bơm nước vào bể sao cho nước cách mép bể $0,5\,m$.

a) Tính thể tích nước trong bể

b) Tính thể tích phần không chứa nước?

Lời giải:

a) Nước trong bể tạo thành một hình hộp chữ nhật có chiều dài $50\,m$, chiều rộng $25\,m$ và chiều cao $1,8\,m$.Do đó lượng nước trong bể là thể tích $V_1 = 2250\,m_3$

b) Tính thể tích của bể là $V = 2875\,m^3$

$V_2 = 2875 - 2250 = 625\,m^3$ là thể tích phần không chứa nước.

Bài 16. Hình lập phương A có cạnh bằng $\frac{2}{3}$ cạnh của hình lập phương B. Hỏi thể tích hình lập phương A bằng bao nhiêu phần thể tích hình lập phương B?

Lời giải:

Gọi chiều dài một cạnh của hình lập phương B là a.

Vì hình lập phương A có cạnh bằng $\frac{2}{3}$ cạnh của hình lập phương B nên chiều dài 1 cạnh của hình lập phương A là $\frac{2}{3}a$.

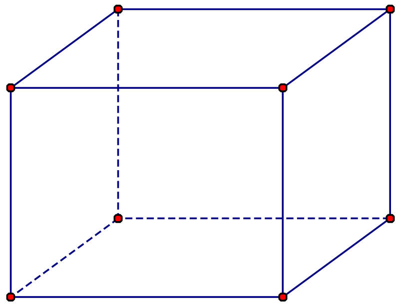
Thể tích hình lập phương B là $V_B = a^3$

Thể tích hình lập phương A là $V_A = \left(\frac{2}{3}a\right)^3 = \frac{8}{27}a^3$

$\Rightarrow V_A = \frac{8}{27}V_B$

Vậy thể tích hình lập phương A bằng $\frac{8}{27}$ thể tích hình lập phương B.

Bài 17. Tính thể tích của một hình lập phương, biết diện tích toàn phần của nó là $294\,(cm^2)$.



Lời giải:

Hình lập phương có 6 mặt bằng nhau, vậy diện tích của mỗi mặt là

$294:6=49\left(cm^2\right)$

Độ dài cạnh hình lập phương là

$a=\sqrt{49}=7\,(cm)$

Thể tích hình lập phương là

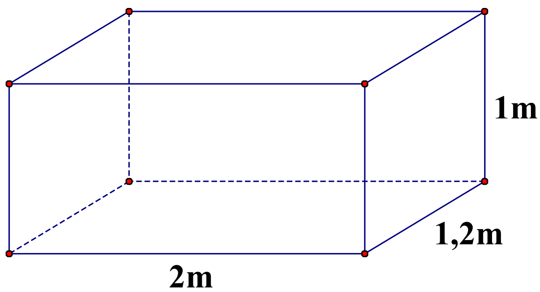
$V=7^3=343\left(cm^3\right)$.

Bài 18. Người ta xây một cái bể hình hộp chữ nhật có chiều dài $2\,m$, chiều rộng $1,2\,m$, chiều cao $1\,m$.

a) Nếu lát kín các mặt xung quanh và mặt đáy bể bằng các viên gạch hình vuông cạnh $20\ cm$ thì cần bao nhiêu viên gạch?

b) Nếu dùng một chiếc thùng hình hộp chữ nhật có kích thước $30\ cm,\ 40\ cm,\ 50\ cm$ thì cần bao nhiêu thùng nước để đổ đầy bể?

Lời giải:



a) Diện tích mặt đáy của bể là: $2.1,2=2,4\ \left(m^2\right)$

Diện tích các mặt xung quanh của bể là:

$1.2.2+1.1,2.2=6,4\ \left(m^2\right)$

Hoặc

$\left[\left(1,2+2\right).2\right].1=6,4\ \left(m^2\right)$

(Áp dụng 1 trong 2 cách tính trên)

Tổng diện tích mặt đáy và các mặt xung quang của bể là: $2,4+6,4=8,8\ \left(m^2\right)$

Vì các viên gạch hình vuông cạnh $20\ cm$ nên diện tích mỗi viên gạch là:

$20.20=400\ \left(cm^2\right)=0,04\left(m^2\right)$

Số viên gạch cần dùng là:

$8,8:0,04=220$ (viên gạch)

b) Vì chiếc thùng hình hộp chữ nhật có kích thước $30\ cm, 40\ cm, 50\ cm$ nên thể tích chiếc thùng là: $30.40.50=60000\ \left(cm^3\right)=0,06\ \left(m^3\right)$

Vì cái bể hình hộp chữ nhật có chiều dài $2\,m$, chiều rộng $1,2\,m$, chiều cao $1\,m$ nên thể tích bể là: $2.1,2.1=2,4\ \left(m^3\right)$

Số thùng nước cần dùng để đổ đầy bể là:

$2,4:0,06=40$ (thùng)

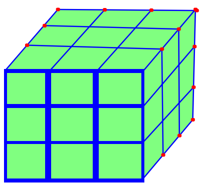
Phần III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Một số yếu tố cơ bản, diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật và hình lập phương:

Bài 1. Cạnh của một hình lập phương bằng $3cm$. Tính diện tích toàn phần và diện tích xung quanh của hình lập phương đó.

Bài 2. Cạnh của một hình lập phương bằng $5a(cm)$. Tính diện tích toàn phần và diện tích xung quanh của hình lập phương đó.

Bài 3. Hình sau đây gồm bao nhiêu đơn vị diện tích và bao nhiêu đơn vị thể tích (mỗi hình nhỏ là một hình lập phương có cạnh là 1 đơn vị độ dài).



Bài 4. Một xí nghiệp làm bánh cần dùng $30\ 000$ chiếc hộp bằng bìa cứng để đựng bánh. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh $25cm$ và cao $6cm$. Hỏi cần bao nhiêu mét vuông bìa để làm đủ số hộp kể trên, biết rằng các mép gấp dán hộp chiếm khoảng $\frac{8}{100}$ diện tích hộp

Bài 5. Một căn phòng hình hộp chữ nhật dài $4,2m$, rộng $3,6m$ và cao $3,4m$. Người ta muốn quét vôi tường và trần nhà. Hỏi diện tích cần quét vôi là bao nhiêu mét vuông, biết rằng tổng diện tích các cửa bằng $5,8m^2$.

Dạng 2. Thể tích của hình hộp chữ nhật và hình lập phương:

Bài 1. Tính thể tích của một hình lập phương có độ dài cạnh bằng $3cm$.

Bài 2. Một bể cá dạng hình hộp chữ nhật làm bằng kính (không nắp) có chiều dài $60cm$, chiều rộng $40cm$. Mực nước trong bể cao $25cm$. Tính thể tích của mực nước trong bể theo đơn vị dm^3

Bài 3. Một bể cá cảnh hình hộp chữ nhật có chiều dài $1,2m$, chiều rộng $0,4m$ và chiều cao $0,6m$. Mực nước trong bể cao $35cm$. Sau khi thả hòn Non Bộ vào trong bể thì mực nước trong bể cao $47cm$. Tính thể tích hòn Non Bộ.

Bài 4. Người ta xây một cái bể hình hộp chữ nhật có chiều dài $1,2m$, chiều rộng $1m$, chiều cao $1m$.

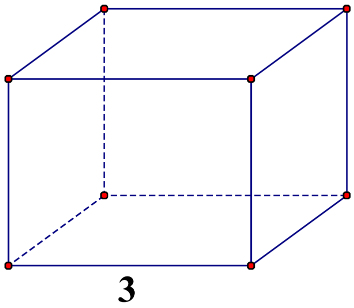
a) Nếu lát kín các mặt xung quanh và mặt đáy bể bằng các viên gạch hình vuông cạnh $20\ cm$ thì cần bao nhiêu viên gạch?

b) Nếu dùng một chiếc thùng hình hộp chữ nhật có kích thước $30cm, 40cm, 50cm$ thì cần bao nhiêu thùng nước để đổ đầy bể?

ĐÁP SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Một số yếu tố cơ bản, diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật và hình lập phương:

Bài 1. Cạnh của một hình lập phương bằng $3cm$. Tính diện tích toàn phần và diện tích xung quanh của hình lập phương đó.



Đáp số:

Tính diện tích xung quanh của hình lập phương đó là:

$S_{xq} = 4a^2 = 4.3^2 = 36\ (cm^2)$

Tính diện tích toàn phần của hình lập phương đó.

$S_{tp} = 6a^2 = 6.3^2 = 54\ (cm^2)$

Bài 2. Cạnh của một hình lập phương bằng $5a(cm)$. Tính diện tích toàn phần và diện tích xung quanh của hình lập phương đó.

Đáp số:

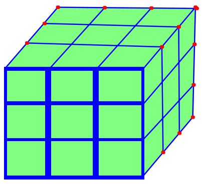
Tính diện tích xung quanh của hình lập phương đó là:

$S_{xq} = 4(5a)^2 = 4.5^2a^2 = 100a^2\ (cm^2)$

Tính diện tích toàn phần của hình lập phương đó.

$S_t = 6(5a)^2 = 6.5^2 a^2 = 150a^2\ (cm^2)$

Bài 3. Hình sau đây gồm bao nhiêu đơn vị diện tích và bao nhiêu đơn vị thể tích (mỗi hình nhỏ là một hình lập phương có cạnh là 1 đơn vị độ dài).



Đáp số:

Hình có lập phương kích thước là 3 đơn vị dài.

Diện tích toàn phần của hình là:

$6.(3.3) = 54$ (đơn vị diện tích).

Thể tích hình là $V = 3^3 = 27$ (đvtt)

Bài 4. Một xí nghiệp làm bánh cần dùng $30\ 000$ chiếc hộp bằng bìa cứng để đựng bánh. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh $25cm$ và cao $6cm$. Hỏi cần bao nhiêu mét vuông bìa để làm đủ số hộp kể trên, biết rằng các mép gấp dán hộp chiếm khoảng $\frac{8}{100}$ diện tích hộp

Đáp số:

Diện tích toàn phần của $30\ 000$ chiếc hộp là: $S_1 = (4.0,25.0,06 + 2.0,25.0,25).30000 = 5550(m^2)$

Diện tích các mép gấp dán của $30\ 000$ chiếc hộp là: $S_2 = \frac{8}{100}.5550 = 444(m^2)$

Diện tích bìa để làm số hộp trên là $S = S_1 + S_2 = 5550 + 444 = 5994(m^2)$

Bài 5. Một căn phòng hình hộp chữ nhật dài $4,2m$, rộng $3,6m$ và cao $3,4m$. Người ta muốn quét vôi tường và trần nhà. Hỏi diện tích cần quét vôi là bao nhiêu mét vuông, biết rằng tổng diện tích các cửa bằng $5,8m^2$.

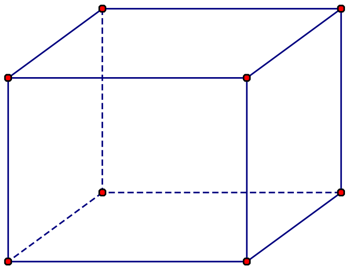
Đáp số:

Diện tích tường cần quét vôi là: $S_{tg} = S_{xq} - S = (4,2 + 3,6).2.3,4 - 5.8 = 47,24(m^2)$

Diện tích cần quét vôi là: $S = S_{tg} + S = 47,24 + 4,2.3,6 = 62,36(m^2)$

Dạng 2. Thể tích của hình hộp chữ nhật và hình lập phương:

Bài 1. Tính thể tích của một hình lập phương có độ dài cạnh bằng $3cm$.



Đáp số:

Thể tích của hình hộp lập phương là $V = a^3 = 3^3 = 27\ (cm^3)$

Bài 2. Một bể cá dạng hình hộp chữ nhật làm bằng kính (không nắp) có chiều dài $60\,cm$, chiều rộng $40\,cm$. Mực nước trong bể cao $25\,cm$. Tính thể tích của mực nước trong bể theo đơn vị dm^3

Đáp số:

Thể tích của mực nước trong bể là

$V = 60.40.25 = 60000\,(cm^3) = 60\left(dm^3\right).$

Bài 3. Một bể cá cảnh hình hộp chữ nhật có chiều dài $1,2m$, chiều rộng $0,4m$ và chiều cao $0,6m$. Mực nước trong bể cao $35cm$. Sau khi thả hòn Non Bộ vào trong bể thì mực nước trong bể cao $47cm$. Tính thể tích hòn Non Bộ.

Đáp số:

Thể tích của hòn Non Bộ bằng thể tích phần nước đã dâng lên trong bể là:

$V = 1,2.0,4.(0,47 - 0,35) = 0,567\ \left(m^3\right)$

Bài 4. Người ta xây một cái bể hình hộp chữ nhật có chiều dài $1,2\,m$, chiều rộng $1m$, chiều cao $1m$.

a) Nếu lát kín các mặt xung quanh và mặt đáy bể bằng các viên gạch hình vuông cạnh $20\ cm$ thì cần bao nhiêu viên gạch?

b) Nếu dùng một chiếc thùng hình hộp chữ nhật có kích thước $30cm,\ 40cm,\ 50cm$ thì cần bao nhiêu thùng nước để đổ đầy bể?

Đáp số:

a) Số viên gạch cần dùng là:

135 (viên gạch)

b) Vì chiếc thùng hình hộp chữ nhật có kích thước $30cm,\ 40cm,\ 50cm$ nên thể tích chiếc thùng là:

$30.40.50 = 60000\ \left(cm^3\right) = 0,06\left(m^3\right)$

Vì cái bể hình hộp chữ nhật có chiều dài $1,2\,m$, chiều rộng $1m$, chiều cao $1m$ nên thể tích bể là:

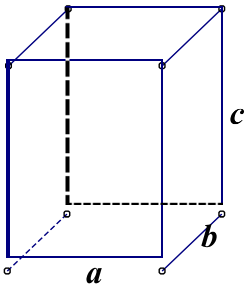
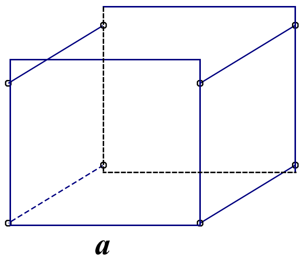
$1.1,2.1 = 1,2\left(m^3\right)$

Số thùng nước cần dùng để đổ đầy bể là:

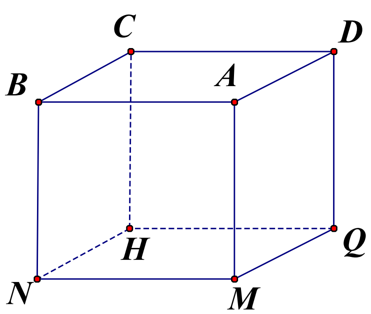
$1,2 : 0,06 = 20$ (thùng)

Dạng 1. Một số yếu tố cơ bản, diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật và hình lập phương:

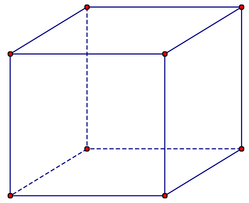
Bài 1. Hoàn thành các công thức trong bảng sau:

Hình	**Hình vẽ**	**Diện tích xung quanh**	**Thể tích**
Hình hộp chữ nhật		$S_{xq} = \ldots\ldots\ldots\ldots.$	$V =$
Hình lập phương		$S_{xq} =$	$V =$

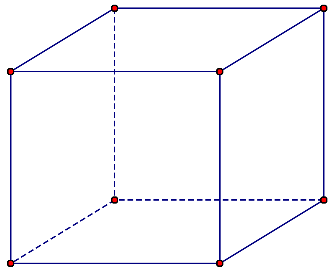
Bài 2. Cho hình hộp chữ nhật $ABCDMNHQ$ có độ dài $NB = 3\,cm$, $BC = 4\,cm$, $MN = 6\,cm$, Hãy xác định độ dài các cạnh còn lại của hình hộp chữ nhật.



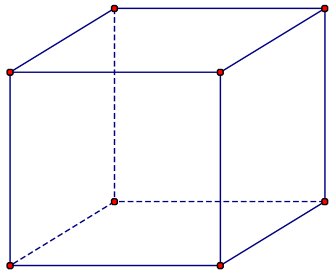
Bài 3. Cạnh của một hình lập phương bằng $2cm$. Tính diện tích toàn phần và diện tích xung quanh của hình lập phương đó.



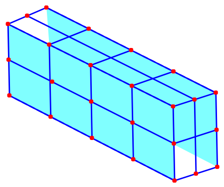
Bài 4. Cạnh của một hình lập phương bằng $5cm$. Tính diện tích toàn phần và diện tích xung quanh của hình lập phương đó.



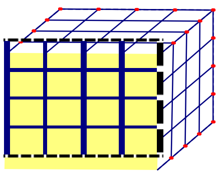
Bài 5. Cạnh của một hình lập phương bằng $2a(\ cm)$. Tính diện tích toàn phần và diện tích xung quanh của hình lập phương đó.



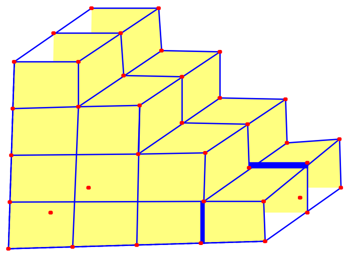
Bài 6. Hình sau đây gồm bao nhiêu đơn vị diện tích và bao nhiêu đơn vị thể tích (mỗi hình nhỏ là một hình lập phương có cạnh là 1 đơn vị độ dài).



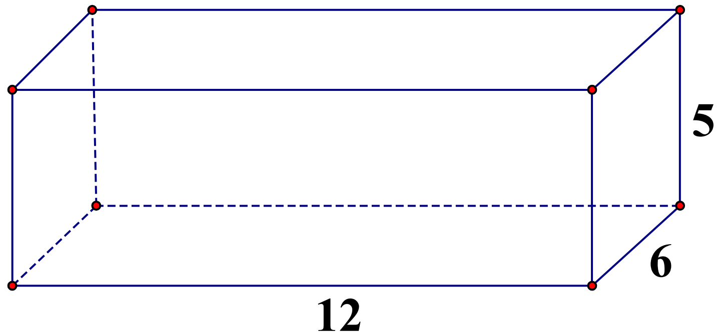
Bài 7. Hình sau đây gồm bao nhiêu đơn vị diện tích và bao nhiêu đơn vị thể tích (mỗi hình nhỏ là một hình lập phương có cạnh là 1 đơn vị độ dài).



Bài 8. Hình sau đây gồm bao nhiêu đơn vị diện tích và bao nhiêu đơn vị thể tích (mỗi hình nhỏ là một hình lập phương có cạnh là 1 đơn vị độ dài).



Bài 9. Tìm số hình lập phương đơn vị (hình lập phương có cạnh là 1 đơn vị độ dài) để xếp được thành hình hộp chữ nhật sau:



Bài 10. Thể tích của hình lập phương là $343\,cm^3$. Tính diện tích toàn phần và diện tích xung quanh của hình lập phương đó.

Bài 11. Cho hình chữ nhật có thể tích $144\ cm^3$, diện tích xung quanh là $168\ cm^2$, diện tích toàn phần là $192\ cm^2$. Tính các kích thước của hình hộp chữ nhật đó.

Bài 12. Một căn phòng hình hộp chữ nhật có chiều dài $4{,}5\ m$, chiều rộng $4\ m$, chiều cao $3\ m$. Người ta muốn lăn sơn trần nhà và bốn bức tường. Biết rằng tổng diện tích các cửa là $11\ m^2$. Tính diện tích cần lăn sơn ?

Bài 13: Một phòng học hình hộp chữ nhật có chiều dài *10 m,* chiều rộng *5m* và chiều cao *4 m.* Người ta định sơn bốn bức tường căn phòng, biết giá công sơn là *25000* đồng một mét vuông. Hỏi chi phí tiền công là bao nhiêu? cho biết căn phòng có *1* cửa chính cao *1,8 m* và rộng *2m* và hai cửa sổ có cùng chiều dài *80cm,* chiều rộng *60cm.*

Bài 14. Thể tích của hình hộp chữ nhật là $300\,dm^3$. Tính diện tích toàn phần và diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật đó.

Bài 15. Một căn phòng rộng $4{,}1m$, dài $5{,}5\,m$, cao $3m$ .Người ta muốn quét vôi trần nhà và bốn bức tường. Biết tổng diện tích các cửa bằng 12% tổng diện tích 4 bức tường và trần nhà. Hãy tính diện tích cần quét vôi.

Bài 16. Một bể nước hình hộp chữ nhật có chiều rộng $1,6\ m$. Lúc đầu bể không có nước. Người ta lắp một vòi nước, mỗi phút chảy được 24 lít nước. Sau 100 phút thì mực nước trong bể cao $0,6\ m$. Tính chiều dài của bể nước.

Bài 17. Các kích thước của một hình hộp chữ nhật tỉ lệ thuận với 5 ; 6 ; 7. Thể tích của hình hộp là $1680\ m^3$. Tính độ dài các kích thước của hình hộp chữ nhật đó.

.

Bài 18. Một bể bơi có chiều dài $12m$, chiều rộng $5m$ và sâu $2,75m$. Hỏi người thợ phải dùng bao nhiêu viên gạch men để lát đáy và xung quanh thành bể đó? Biết rằng mỗi viên gạch có chiều dài $25cm$, chiều rộng $20\ cm$ và diện tích mạch vữa lát không đáng kể.

Bài 19. Một bể cá dạng hình hộp chữ nhật làm bằng kính (không có nắp) có chiều dài $80cm$, chiều rộng $50cm$, chiều cao $45cm$.

Mực nước ban đầu trong bể cao $35cm$.

a) Tính diện tích kính dùng để làm bể cá đó.

b) Người ta cho vào bể một hòn đá có thể tích 10dm^3. Hỏi mực nước trong bể lúc này cao bao nhiêu xăng – ti-mét?

Bài 20. Một hình lập phương cạnh $5\ cm$ được ghép bởi 125 hình lập phương nhỏ cạnh $1\ cm$. Số các hình lập phương nhỏ giáp với 6 mặt của các hình lập phương nhỏ khác là

Bài 21. Có 512 hình lập phương đơn vị (cạnh dài một đơn vị). Hỏi cần phải thêm bao nhiêu hình lập phương đơn vị để xếp thành một hình lập phương có độ dài cạnh 10 đơn vị?

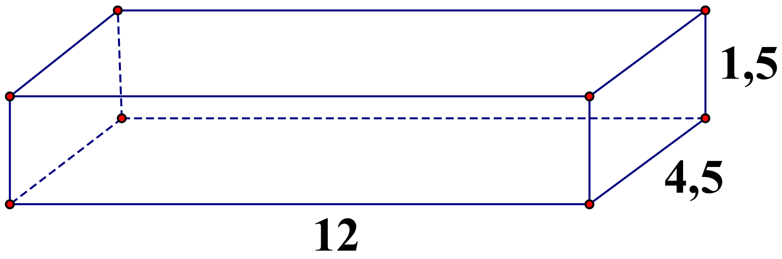
Bài 22. Một bể chứa nước hình hộp chữ nhật có chiều dài $3\ m$,chiều rộng $1,8\ m$, chiều cao $1,2\ m$. Khi bể không chứa nước, người ta cho một máy bơm, bơm nước vào bể mỗi phút bơm được 30 lít. Hỏi sau 3 giờ 15 phút bể đã đầy nước hay chưa?

Bài 24. Một thùng đựng hàng có nắp dạng hình hộp chữ nhật có chiều dài 2,5m, chiều rộng 1,8m và chiều cao $2m$. Người thợ cần bao nhiêu ki-lô-gam sơn để đủ sơn hai mặt của chiếc thùng đó ? Biết rằng mỗi ki-lô-gam sơn sơn được $5m^2$ mặt thùng.

Bài 25. Thiết bị máy được xếp vào các hình lập phương có diện tích toàn phần bằng $96dm^2$. Người ta xếp các hộp đó vào trong một thùng hình lập phương làm bằng tôn không có nắp. Khi gò một thùng như thế hết $3,2m^2$ tôn (diện tích các mép hàn không đáng kể). Hỏi mỗi thùng đựng được bao nhiêu hộp thiết bị nói trên?

Dạng 2. Thể tích của hình hộp chữ nhật và hình lập phương:

Bài 1. Một bể bơi hình hộp chữ nhật dài $12m$, rộng $4,5m$; chiều cao của nước trong bể $1,5m$. Tính thể tích nước trong bể?



Bài 2. Một hình hộp chữ nhật có các kích thước là $6cm$; $8cm$; $12cm$. Tính thể tích của hình hộp chữ nhật?

Bài 3. Thể tích của một hình lập phương có độ dài cạnh bằng $5cm$ là:

Bài 4. Một bể bơi có hình dạng một hình hộp chữ nhật, có kích thước bên trong của đáy lần lượt là $6m$ và $25m$. Dung tích nước trong hồ khi mực nước trong hồ cao $2m$ là?

Bài 1. Hình hộp chữ nhật có ba kích thước lần lượt là a; $2a$; $\frac{a}{2}$. Thể tích của hình hộp chữ nhật đó là

Bài 5. Hình hộp chữ nhật có ba kích thước lần lượt là a; a; $2a$. Thể tích của hình hộp chữ nhật đó là

Bài 6. Cạnh của một hình lập phương bằng $5b\ (cm)$. Tính thể tích của hình lập phương đó?

Bài 7. Tính thể tích của một hình lập phương có cạnh $2a\ (cm)$?

Lời giải:

Bài 8. Một bể cá hình hộp chữ nhật có kích thước như sau chiều dài $1,2\,m$; chiều rộng $6\,dm$; chiều cao $8\,dm$. Tính thể tích của bể ?

Bài 9. Một bể cá dạng hình hộp chữ nhật làm bằng kính (không nắp) có chiều dài $80\,cm$, chiều rộng $50\,cm$. Mực nước trong bể cao $35\,cm$. Tính thể tích của mực nước trong bể theo đơn vị dm^3

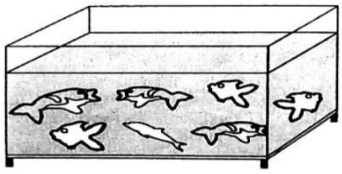
Bài 10. Cho biết một bể bơi tiêu chuẩn có chiều dài $50\ m$, chiều rộng $25\ m$ và chiều cao $2,3\ m$. Người ta bơm nước vào bể sao cho nước cách mép bể $0,3\ m$. Tính thể tích nước trong bể và thể tích phần không chứa nước?

Bài 11. Một chiếc hộp hình lập phương không có nắp được sơn cả mặt trong và mặt ngoài. Diện tích phải sơn tổng cộng là $1690\,cm^2$. Tính thể tích của hình lập phương đó.

Bài 12. Một bể cá dạng hình hộp chữ nhật làm bằng kính (không nắp) có chiều dài $1m$, chiều rộng $70\,cm$, chiều cao $80\,cm$. Mực nước trong bể cao $30\,cm$. Người ta cho vào bể một hòn đá thì thể tích tăng $14000\,cm^3$. Hỏi mực nước trong bể lúc này là bao nhiêu?

Bài 13. Một hình lập phương có cạnh bằng 1. Người ta tăng mỗi cạnh của nó thêm 20 %. Thể tích của nó tăng bao nhiêu phần trăm?

Bài 14. Một bể cá hình hộp chữ nhật cao $50\ cm$. Diện tích đáy bằng nửa diện tích xung quanh. Trong bể đang có nước cao đến $35\ cm$. Hỏi thêm bao nhiều nước vào bể cá đó thì nước vừa đầy bể. Biết diện tích xung quanh của bể cá là $6400\ cm^2$



Bài 15. Cho một bể bơi tiêu chuẩn có chiều dài $50\,m,$ chiều rộng $25\,m$ và chiều cao $2{,}3\,m$.Người ta bơm nước vào bể sao cho nước cách mép bể $0{,}5\,m.$

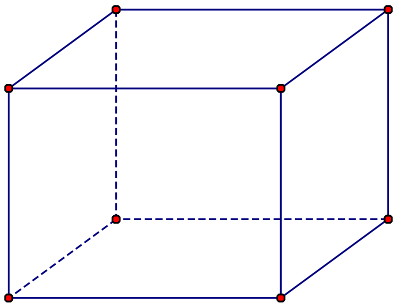
c) Tính thể tích nước trong bể

d) Tính thể tích phần không chứa nước?

.

Bài 16. Hình lập phương A có cạnh bằng $\frac{2}{3}$ cạnh của hình lập phương B. Hỏi thể tích hình lập phương A bằng bao nhiêu phần thể tích hình lập phương B?

Bài 17. Tính thể tích của một hình lập phương, biết diện tích toàn phần của nó là $294\left(cm^2\right)$.



Bài 18. Người ta xây một cái bể hình hộp chữ nhật có chiều dài $2\,m,$ chiều rộng $1{,}2\,m,$ chiều cao $1m.$

a) Nếu lát kín các mặt xung quanh và mặt đáy bể bằng các viên gạch hình vuông cạnh $20\ cm$ thì cần bao nhiêu viên gạch?

b) Nếu dùng một chiếc thùng hình hộp chữ nhật có kích thước $30\ cm,\ 40\ cm,\ 50\ cm$ thì cần bao nhiêu thùng nước để đổ đầy bể?

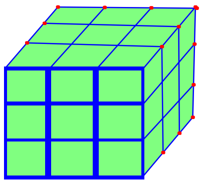
Phần III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Một số yếu tố cơ bản, diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật và hình lập phương:

Bài 1. Cạnh của một hình lập phương bằng $3cm$. Tính diện tích toàn phần và diện tích xung quanh của hình lập phương đó.

Bài 2. Cạnh của một hình lập phương bằng $5a(cm)$. Tính diện tích toàn phần và diện tích xung quanh của hình lập phương đó.

Bài 3. Hình sau đây gồm bao nhiêu đơn vị diện tích và bao nhiêu đơn vị thể tích (mỗi hình nhỏ là một hình lập phương có cạnh là 1 đơn vị độ dài).



Bài 4. Một xí nghiệp làm bánh cần dùng $30\ 000$ chiếc hộp bằng bìa cứng để đựng bánh. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh $25cm$ và cao $6cm$. Hỏi cần bao nhiêu mét vuông bìa để làm đủ số hộp kể trên, biết rằng các mép gấp dán hộp chiếm khoảng $\frac{8}{100}$ diện tích hộp

Bài 5. Một căn phòng hình hộp chữ nhật dài $4,2m$, rộng $3,6m$ và cao $3,4m$. Người ta muốn quét vôi tường và trần nhà. Hỏi diện tích cần quét vôi là bao nhiêu mét vuông, biết rằng tổng diện tích các cửa bằng $5,8m^2$.

Dạng 2. Thể tích của hình hộp chữ nhật và hình lập phương:

Bài 1. Tính thể tích của một hình lập phương có độ dài cạnh bằng $3cm$.

Bài 2. Một bể cá dạng hình hộp chữ nhật làm bằng kính (không nắp) có chiều dài $60cm$, chiều rộng $40cm$. Mực nước trong bể cao $25cm$. Tính thể tích của mực nước trong bể theo đơn vị dm^3

Bài 3. Một bể cá cảnh hình hộp chữ nhật có chiều dài $1,2m$, chiều rộng $0,4m$ và chiều cao $0,6m$. Mực nước trong bể cao $35cm$. Sau khi thả hòn Non Bộ vào trong bể thì mực nước trong bể cao $47cm$. Tính thể tích hòn Non Bộ.

Bài 4. Người ta xây một cái bể hình hộp chữ nhật có chiều dài $1,2m$, chiều rộng $1m$, chiều cao $1m$.

a) Nếu lát kín các mặt xung quanh và mặt đáy bể bằng các viên gạch hình vuông cạnh $20\ cm$ thì cần bao nhiêu viên gạch?

b) Nếu dùng một chiếc thùng hình hộp chữ nhật có kích thước $30cm$, $40cm$, $50cm$ thì cần bao nhiêu thùng nước để đổ đầy bể?

CHUYÊN ĐỀ 37. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG TAM GIÁC
VÀ HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG TỨ GIÁC

PHẦN I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT.

1.Hình lăng trụ đứng tam giác, hình lăng trụ đứng tứ giác.

Trong hình lăng trụ đứng tam giác (tứ giác):

- Hai mặt đáy song song với nhau.

- Các mặt bên là những hình chữ nhật.

- Các cạnh bên song song và bằng nhau.

Độ dài một cạnh bên gọi là chiều cao của lăng trụ đứng.

*Chú ý: Hình hộp chữ nhật và hình lập phương cũng là các hình lăng trụ đứng tứ giác.

2.Diện tích xung quanh và thể tích của hình lăng trụ đứng tam giác, hình lăng trụ đứng tứ giác.

a) Diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng tam giác, hình lăng trụ đứng tứ giác.

- Diện tích xung quanh của lăng trụ đứng bằng tích của chu vi đáy với chiều cao của nó.

$$S_{xq} = C.h$$

Trong đó

S_{xq} : Diện tích xung quanh của hình lăng trụ,

C : Chu vi một đáy của hình lăng trụ,

h : chiều cao của lăng trụ.

b) Thể tích của hình lăng trụ đứng tam giác, hình lăng trụ đứng tứ giác.

Thể tích của hình lăng trụ đứng tam giác, hình lăng trụ đứng tứ giác.

$$V = S_{\text{day}}.h$$

Trong đó:

V : Thể tích của hình lăng trụ đứng,

S : Diện tích một đáy của hình lăng trụ đứng,

h : Chiều cao của hình lăng trụ đứng.

3. Diện tích toàn phần (mở rộng):

Diện tích toàn phần bằng diện tích xung quanh cộng diện tích hai đáy.

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d$$

Trong đó:

S_{tp} là diện tích toàn phần của hình lăng trụ.

S_{xq} : Diện tích xung quanh của hình lăng trụ.

$S_đ$: Diện tích một đáy của hình lăng trụ đứng.

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI.

Dạng 1. Nhận biết các yếu tố của lăng trụ đứng tam giác, tứ giác.

I. Phương pháp giải:

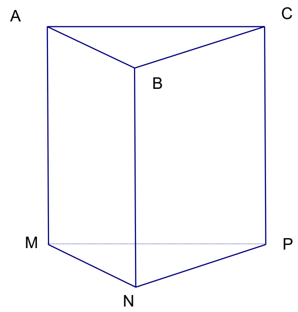
+ Học sinh vẽ hình, quan sát để xác định các mặt, các cạnh, các đỉnh.

+ Để vẽ hình lăng trụ đứng , ta thường vẽ một đáy, sau đó vẽ các cạnh bên là các đoạn thẳng song song và bằng nhau.

II. Bài toán.

Bài 1.

Quan sát và gọi tên các đỉnh, mặt đáy, mặt bên, cạnh đáy, cạnh bên của hình lăng trụ đứng tam giác ở hình vẽ sau.



Lời giải:

Các đỉnh A, B, C, M, N, P.

Các cạnh đáy: AB, AC, BC, MN, MP, NP.

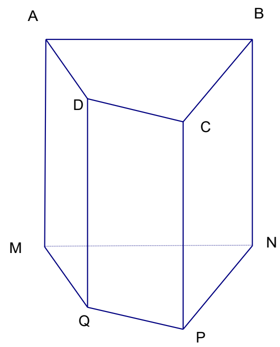
Các cạnh bên AM, BN, CP.

Các mặt đáy là các tam giác ABC và MNP.

Các mặt bên là các hình chữ nhật $ABNM$, $BCPN$, $ACPM$.

Bài 2.

Quan sát và gọi tên các đỉnh, mặt đáy, mặt bên, cạnh đáy, cạnh bên của hình lăng trụ đứng tứ giác ở hình vẽ sau.



Lời giải:

Các đỉnh A, B, C, D, M, N, P, Q.

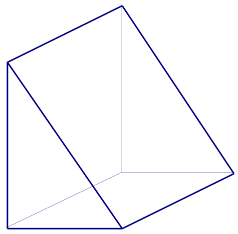
Các cạnh đáy: AB,BC,CD,DA , MN,NP,PQ,QM .

Các cạnh bên AM,BN,CP,DQ .

Các mặt đáy là các tứ giác $ABCD$ và $MNPQ$.

Các mặt bên là các hình chữ nhật $ABNM$, $BCPN$, $DCPQ$, $ADQM$.

Bài 3. Trong hình lăng trụ đứng sau có bao nhiêu mặt, bao nhiêu đỉnh và bao nhiêu cạnh.



(b)

Lời giải:

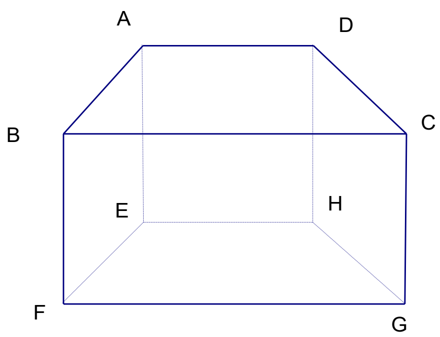
Trong hình lăng trụ trên có 5 mặt, 9 cạnh, 6 đỉnh;

Bài 4.

Cho hình lăng trụ đứng có đáy là hình thang vuông. Hãy kể tên:

a) Các cạnh song song với AD ;

b) Các cạnh song song với AB ;



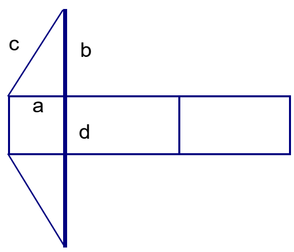
Lời giải:

Các cạnh song song với AD là BC,FG,EH .

Các cạnh song song với AB là EF .

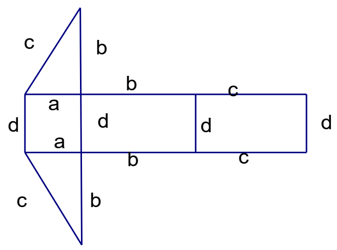
Bài 5.

Điền đầy đủ các kích thước vào hình khai triển của các hình lăng trụ ở hình dưới đây:



H.a

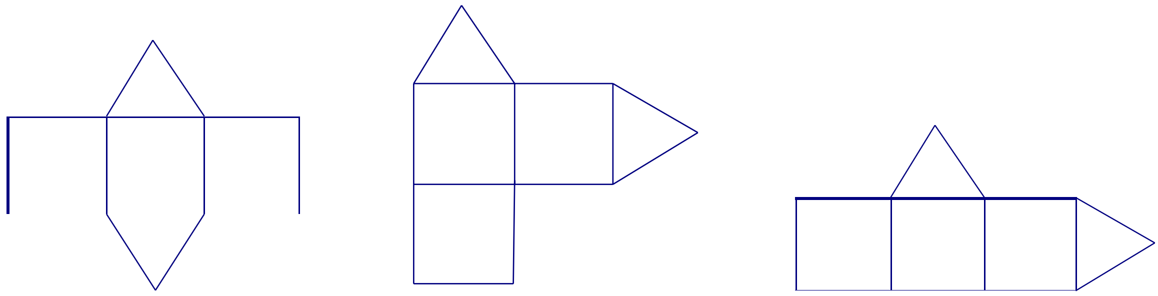
Lời giải:



H.a

Bài 6.

Trong các hình khai triển dưới đây, hình nào gấp lại được thành một hình lăng trụ đứng?



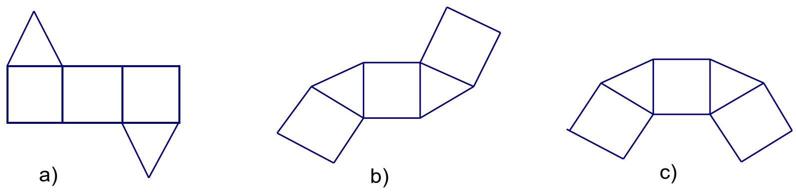
a) b) c)

Lời giải:

Hình khai triển a là hình gấp lại được thành một hình lăng trụ đứng tam giác.

Bài 7.

Trong các hình khai triển dưới đây, hình nào gấp lại được thành một hình lăng trụ đứng?



a) b) c)

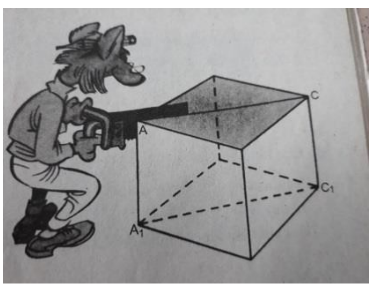
Hình khai triển a,b là hình gấp lại được thành một hình lăng trụ đứng tam giác.

Bài 8.

Người ta cưa một khối gỗ có dạng một hình lập phương như hình vẽ và được hai hình lăng trụ.

a) Đáy của lăng trụ đứng nhận được là tam giác vuông, tam giác cân, hay là tam giác đều?

b) Các mặt bên của mỗi lăng trụ đứng nhận được có phải tất cả đều là hình vuông không?



Lời giải:

a) Đáy của lăng trụ đứng nhận được là tam giác vuông cân.

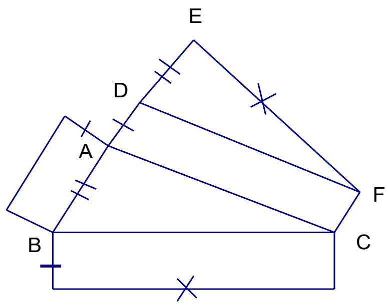
b) Các mặt bên nhận được có hai hình vuông và một mặt nhận được.

Bài 9.

Từ hình khai triển trong hình vẽ sau có thể gấp theo các cạnh để có được một lăng trụ đứng hay không? (Các tứ giác trên hình đều là những hình chữ nhật).

b) Trong hình vừa gấp được, xét xem các phát biểu dưới đây, phát biểu nào đúng:

- Cạnh AD vuông góc với cạnh AB.
- EF và CF là hai cạnh vuông góc với nhau.
- Cạnh DE và cạnh BC vuông góc với nhau.

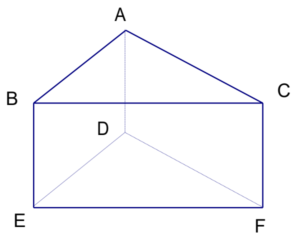


Lời giải:

a) Gấp được thành một hình lăng trụ đứng.

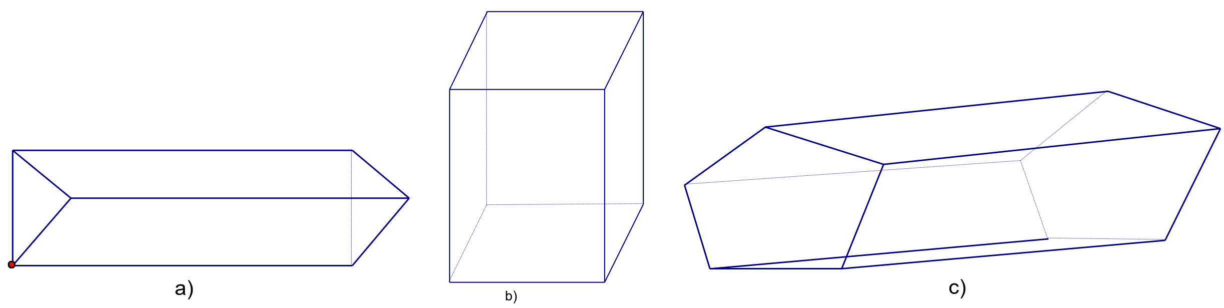
b) Sau ghi gấp ta được một hình lăng trụ đứng như hình bên.

Các phát biểu trên đều là đúng.



Bài 10.

Quan sát các hình lăng trụ đứng trong các hình vẽ sau rồi điền số thích hợp vào các ô trống ở bảng dưới đây:



Hình	a	b	c

Số cạnh của một đáy	3		
Số mặt bên		4	
Số đỉnh			
Số cạnh bên			5

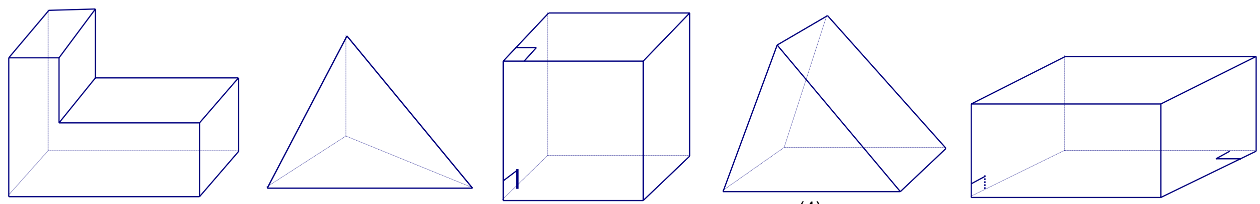
Lời giải:

Bảng được điền như sau:

Hình	a	b	c
Số cạnh của một đáy	3	4	5
Số mặt bên	3	4	5
Số đỉnh	6	8	10
Số cạnh bên	3	4	5

Bài 11:

Trong các hình sau đây, hình vẽ nào biểu diễn một hình lăng trụ đứng?



Lời giải:

Hình $3;4;5$ biểu diễn một hình lăng trụ đứng.

Dạng 2. Tính diện tích, thể tích của hình lăng trụ đứng tam giác.

I. Phương pháp giải:

1. Diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng tam giác bằng tích của chu vi đáy với chiều cao

của nó.

$$S_{xq} = C.h$$

Trong đó

S_{xq} : Diện tích xung quanh của hình lăng trụ.

C : Chu vi đáy của hình lăng trụ.

h : Chiều cao của lăng trụ.

2. Diện tích toàn phần: Diện tích toàn phần bằng diện tích xung quanh cộng diện tích hai đáy.

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d$$

Trong đó:

S_{tp} là diện tích toàn phần của hình lăng trụ.

S_{xq}: Diện tích xung quanh của hình lăng trụ.

S_d: Diện tích một đáy của hình lăng trụ đứng.

3. Thể tích của hình lăng trụ đứng tam giác bằng diện tích đáy nhân với chiều cao.

$$V = S_d.h$$

Trong đó

V: Thể tích của hình lăng trụ đứng.

S_d: Diện tích một đáy của hình lăng trụ đứng.

h: Chiều cao của hình lăng trụ đứng.

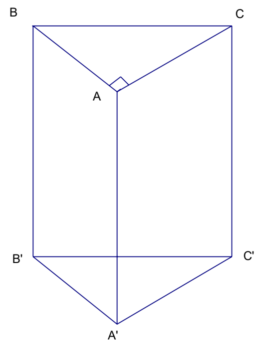
II. Bài toán.

Bài 1.

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác vuông cân, $AB = AC = 3$ cm, $BC = 5cm$

$AA' = 4$ cm. Tính diện tích xung quanh và thể tích hình lăng trụ đó.

Lời giải



Chu vi $\triangle ABC$ là: $AB + AC + BC = 3 + 3 + 5 = 11(cm)$

Diện tích xung quanh của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

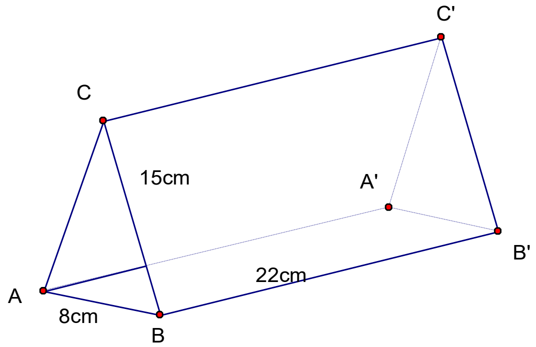
$S_x = C.h = 11.4 = 44(cm^2)$

Diện tích ΔABC là: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC = \frac{1}{2}.3.3 = \frac{9}{2}\ (\text{cm}^2)$

Thể tích của lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ là: $V = S_{\triangle ABC}.h = \frac{9}{2}.4 = 18\ (\text{cm}^3)$.

Bài 2.

Một tấm lịch để bàn có dạng một lăng trụ đứng, ACB là một tam giác cân tại C. Tính diện tích miếng bìa để làm một tấm lịch như trên.



Lời giải:

Do tam giác ACB cân ở C nên $CA = CB = 15cm$.

Chu vi ΔACB là $C = 8+15+15 = 38(cm)$

Diện tích miếng bìa để làm một tấm lịch chính là diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng, ta có:

$S_x = C.h = C.BB' = 38.22 = 836\left(cm^2\right)$.

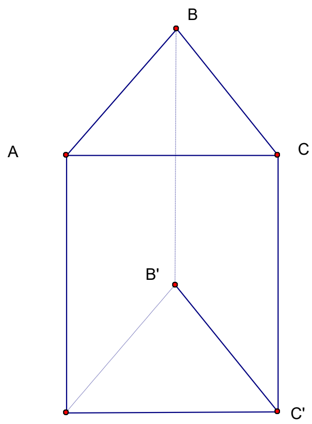
Vậy diện tích miếng bìa để làm một tấm lịch là $836cm^2$.

Bài 3.

Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 4\text{cm}$, $AA' = 10\text{cm}$. Tính diện tích xung quanh

và thể tích lăng trụ đó.

Lời giải:

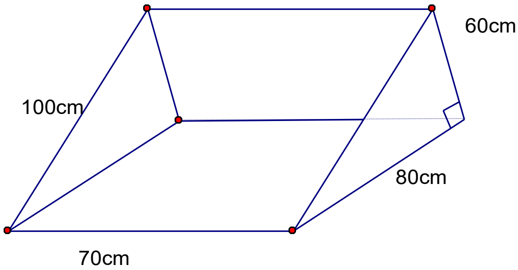


Chu vi ΔABC đều là: $3.4 = 12(\text{cm})$.

Diện tích xung quanh của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $S_x = C.h = 12.10 = 120\left(cm^2\right)$.

Bài 4.

Thùng đựng của một máy cắt cỏ có dạng lăng trụ đứng tam giác. Hãy tính thể tích của thùng.



Lời giải:

Chu vi đáy của thùng đựng máy cắt cỏ là: $C = 80 + 60 + 100 = 240(cm)$.

Diện tích đáy của thùng đựng máy cắt cỏ là: $S = \frac{1}{2}80.60 = 2400\left(cm^2\right)$.

Thể tích của thùng đựng máy cắt cỏ là: $V = S.h = 2400.70 = 168000\left(cm^3\right)$.

Bài 5.

Quan sát hình lăng trụ đứng tam giác (H.4) rồi điền số thích hợp vào các ô trống ở bảng sau:

$a(cm)$	5	3	12	7
$b(cm)$	6	2	15	
$c(cm)$	7		13	6
$h(cm)$	10	5		
Chu vi đáy (cm)		9		21
$S_{xq}\left(cm^2\right)$			80	63

Lời giải:

$a(cm)$	5	3	12	7
$b(cm)$	6	2	15	8
$c(cm)$	7	4	13	6
$h(cm)$	10	5	2	3
Chu vi đáy (cm)	18	9	40	21
$S_{xq}\left(cm^2\right)$	180	45	80	63

Bài 6.

Điền số thích hợp vào các ô trống ở bảng sau:

	Lăng trụ 1	Lăng trụ 2	Lăng trụ 3

Chiều cao của lăng trụ đứng tam giác	$5cm$	$7cm$	
Chiều cao của tam giác đáy.			$5cm$
Cạnh tương ứng với đường cao của tam giác đáy.	$3cm$	$5cm$	
Diện tích đáy	$6cm^2$		$15cm^2$
Thể tích lăng trụ đứng		$49cm^3$	$0,045l$

Lời giải:

+ Ở lăng trụ 1:

Chiều cao của tam giác đáy: $\frac{6.2}{3} = 4(cm)$.

Thể tích: $4.5 = 20\left(cm^3\right)$.

+ Ở lăng trụ 2:

Diện tích đáy: $49 : 7 = 7\left(cm^2\right)$.

Chiều cao của tam giác đáy: $\frac{7.2}{5} = 2,8(cm)$.

+ Ở lăng trụ 3:

Chiều cao của lăng trụ: $45 : 15 = 3(cm)$.

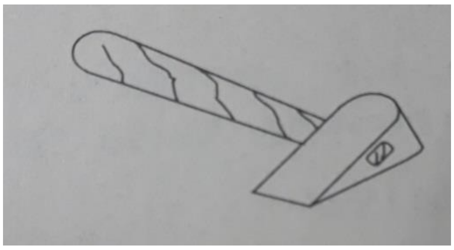
Cạnh tương ứng: $\frac{15.2}{5} = 6(cm)$.

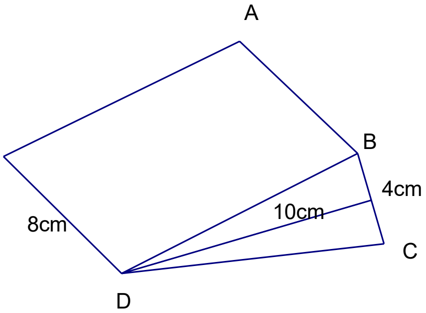
Bài 7.

Hình vẽ sau biểu diễn một lưỡi rìu bằng sắt, nó có dạng một lăng trụ đứng, BDC là một tam giác cân.

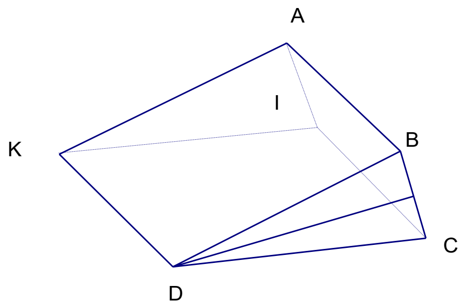
a) Hãy vẽ thêm nét khuất, điền thêm chữ vào các đỉnh rồi cho biết AB song song với những cạnh nào?

b) Tính thể tích lưỡi rìu.





Lời giải:



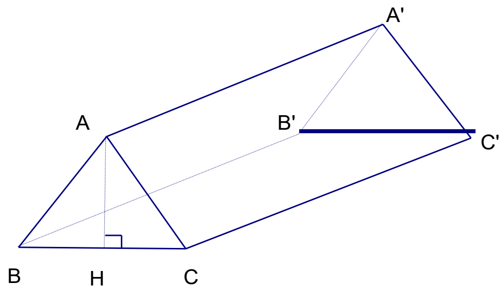
a) AB song song với KD, IC.

b) Diện tích đáy: $4.8 = 32\left(cm^2\right)$.

Thể tích của lưỡi rìu: $32.10 = 320\left(cm^3\right)$.

Bài 8.

Một lều trại có dạng hình lăng trụ đứng đáy là tam giác, thể tích phần không gian bên trong là $2,16cm^3$. Biết chiều dài CC' của lều là $2,4m$, chiều rộng BC của lều là $1,2m$. Tính chiều cao AH của lều.



Lời giải:

Diện tích đáy của tam giác ABC là: $S_{AB} = V : CC' = 2,16 : 2,4 = 0,9\left(cm^2\right)$.

Chiều cao AH của lều là : $AH = 2S_{ABC} : BC = \dfrac{2.0,9}{1,2} = 1,5(m)$.

Bài 9.

Hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có chiều cao $5m$, đáy là tam giác vuông tại A và $AB = 2m$. Tính AC, biết thể tích của hình lăng trụ bằng $15m^3$.

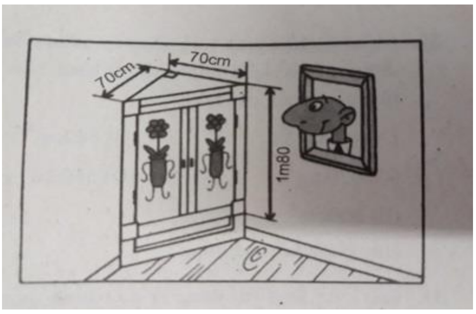
Lời giải:

Diện tích đáy của tam giác vuông ABC là: $S_{AB} = V : h = 15 : 5 = 3\left(m^2\right)$.

Cạnh AC của tam giác ABC là: $AC = 2S_{ABC} : AB = \dfrac{2.3}{2} = 3(m)$.

Bài 10.

Diện thể tích của cái tủ tường hình lăng trụ đứng có các kích thước như trong hình vẽ sau.



Lời giải:

Diện tích đáy của cái tủ tường là: $S_a = \frac{1}{2}.70.70 = 2450\left(cm^2\right)$.

Thể tích của cái tủ tường là: $V = S_a.h = 2450.180 = 441000\left(cm^3\right)$.

Bài 11.

Một hình lăng trụ đứng $ABC.DEF$ có đáy ABC là một tam giác vuông tại A, chiều cao của lăng trụ

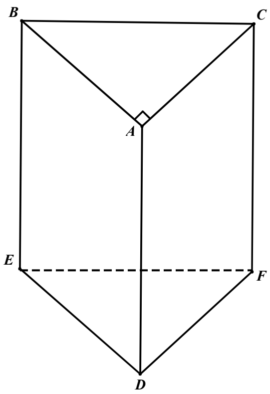
là 9 cm. Độ dài hai cạnh góc vuông của đáy là 3cm và 4cm, cạnh huyền có độ dài là 5cm.

a) Tính diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng.

b) Tính diện tích toàn phần của hình lăng trụ đứng.

c) Tính thể tích của hình lăng trụ đứng.

Lời giải:



a) Tính diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng.

Chu vi ΔABC là: $3+4+5=12\ (\text{cm})$.

Diện tích xung quanh của lăng trụ $ABC.DEF$ là: $S_{xq} = 2p.h = 12.9 = 108\ \left(\text{cm}^2\right)$.

b) Tính diện tích toàn phần của hình lăng trụ đứng.

Diện tích tam giác ABC là: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC = \frac{1}{2}.3.4 = 6\ (\text{cm}^2$.

Diện tích toàn phần của lăng trụ $ABC.DEF$ là:

$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{ABC} = 108 + 2.6 = 120\ \left(\text{cm}^2\right)$.

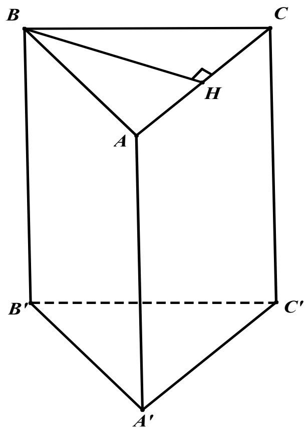
c) Tính thể tích của hình lăng trụ đứng.

Thể tích lăng trụ $ABC.DEF$ là: $V = S_{AB} .h = 6.9 = 54\left(\text{cm}^3\right)$.

Bài 12.

Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 4cm$, $BH = 2cm$, $AA' = 10cm$. Tính diện tích

xung quanh và thể tích lăng trụ đó.



Lời giải:

Chu vi ΔABC đều là: $C = 3.4 = 12\left(\text{cm}\right)$.

Diện tích xung quanh của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $S_x = c.h = 12.10 = 120\left(cm^2\right)$.

Diện tích ΔABC là: $s_{ABC} = \frac{1}{2}.AB.BH = \frac{1}{2}.4.2 = 4\left(cm^2\right)$.

Thể tích của lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ là: $V = S_{\Delta AB} .h = 4.10 = 40\left(\text{cm}^3\right)$.

Dạng 3. Tính diện tích, thể tích của hình lăng trụ đứng tứ giác.

I. Phương pháp giải:

1. Diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng tứ giác bằng tích của chu vi đáy với chiều cao của nó.

$S_{xq} = C.h$

Trong đó

S_{xq} : Diện tích xung quanh của hình lăng trụ.

C : Chu vi đáy của hình lăng trụ.

h : Chiều cao của lăng trụ.

2. Diện tích toàn phần: Diện tích toàn phần bằng diện tích xung quanh cộng diện tích hai đáy.

$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d$

Trong đó:

S_{tp} là diện tích toàn phần của hình lăng trụ.

S_{xq} : Diện tích xung quanh của hình lăng trụ.

S_d : Diện tích một đáy của hình lăng trụ đứng.

3. Thể tích của hình lăng trụ đứng tứ giác bằng diện tích đáy nhân với chiều cao.

$V = S_d.h$

Trong đó

V : Thể tích của hình lăng trụ đứng.

S_d : Diện tích một đáy của hình lăng trụ đứng.

h : Chiều cao của hình lăng trụ đứng.

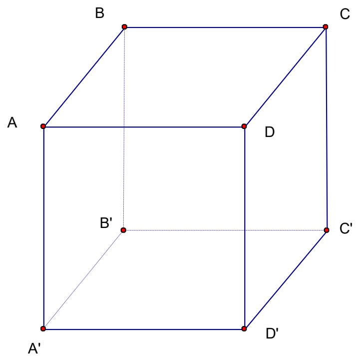
II. Bài toán.

Bài 1.

Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh $3cm$ và chiều cao bằng 5 cm .

Tính diện tích xung quanh lăng trụ.

Lời giải



Lời giải:

Chu vi của hình thoi $ABCD$ là: $4.3 = 12\left(cm\right)$.

Diện tích xung quanh của lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ là:

$S_x = C.h = 12.5 = 60\ \left(\text{cm}^2\right)$.

Bài 2.

Cho hình lăng trụ đứng có đáy là hình thoi cạnh $6cm$ và diện tích xung quanh của hình lăng trụ là

$192\left(cm^2\right)$. Tính chiều cao của hình lăng trụ.

Lời giải:

Chu vi đáy của hình lăng trụ là: $C = 6.4 = 24\left(cm\right)$.

Chiều cao của hình lăng trụ là $h = S_{xq} : C = 192 : 24 = 8\left(cm\right)$.

Bài 3.

Cho hình lăng trụ đứng có đáy là hình thoi. Biết chiều cao của hình lăng trụ $6cm$ và diện tích xung quanh của hình lăng trụ là $288cm^2$. Tính cạnh đáy của hình lăng trụ.

Lời giải:

Chu vi đáy của hình lăng trụ là: $C = S_{xq} : h = 288 : 6 = 48(cm)$

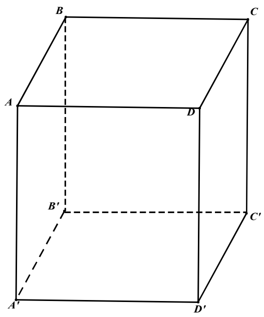
Do đáy của hình lăng trụ là hình thoi nên 4 cạnh bằng nhau.

Cạnh đáy của hình lăng trụ đứng là: $48 : 4 = 12\,(cm)$.

Bài 4.

Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 6\,\text{cm}$

$AA' = 12\,\text{cm}$.



Lời giải:

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ tứ giác đều nên tứ giác $ABCD$ là hình vuông và có chiều cao AA'.

Diện tích xung quanh của lăng trụ là: $S_x = 4.AB.AA' = 4.6.12 = 288\left(\text{cm}^2\right)$.

Diện tích đáy $ABCD$ là: $S_{ABC} = AB^2 = 6^2 = 36\ \left(\text{cm}^2\right)$.

Thể tích lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là: $V = S_{ABC}.h = 36.12 = 432\ \left(\text{cm}^3\right)$.

Bài 5.

Cho hình lăng trụ đứng tứ giác đều có thể tích là $392cm^3$ và chiều cao của hình lăng trụ là $8cm$. Tính cạnh đáy của hình lăng trụ.

Lời giải:

Diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng tứ giác đều là: $S_x = V : h = 392 : 8 = 49\left(cm^2\right)$

Do lăng trụ đứng có đáy là tứ giác đều nên đáy là hình vuông.

Vậy cạnh đáy của lăng trụ đứng là $7cm$.

Bài 6.

Cho hình lăng trụ đứng tứ giác đều có thể tích là $2160cm^3$ và cạnh đáy của hình lăng trụ là $12cm$. Tính chiều cao hình lăng trụ.

Lời giải:

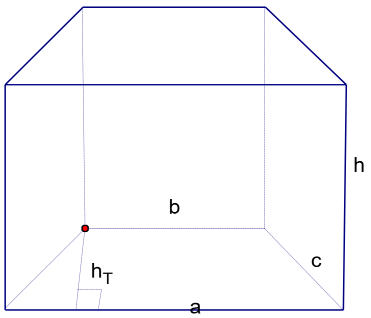
Do lăng trụ đứng có đáy là tứ giác đều nên đáy là hình vuông.

Diện tích đáy của hình lăng trụ là: $12.12 = 144\left(cm^2\right)$.

Chiều cao của hình lăng trụ là: $2160 : 144 = 15(cm)$

Bài 7.

Đáy của hình lăng trụ đứng là một hình thang cân có các cạnh $c = 9mm$ $b = 11mm$; $a = 15mm$ và chiều cao $h_T = 7mm$. Chiều cao của lăng trụ $h = 14mm$. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình lăng trụ.



Lời giải:

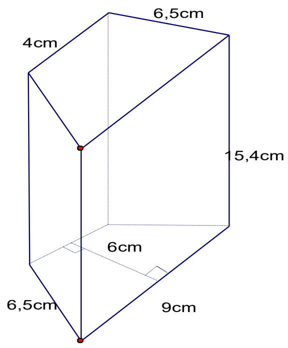
Chu vi đáy của hình lăng trụ là: $C = a + b + 2c = 15 + 11 + 2.9 = 44(mm)$.

Diện tích xung quanh của lăng trụ đứng là: $S_x = C.h = 44.14 = 616\left(mm^2\right)$.

Diện tích đáy của hình lăng trụ đứng là: $S_d = \frac{1}{2}h_T.(a+b) = \frac{1}{2}.7.(15+11) = 91\left(mm^2\right)$.

Thể tích của hình lăng trụ là: $V = S_d.h = 91.14 = 1274\left(mm^3\right)$.

Bài 8. Tính diện tích xung quang và thể tích của hình lăng trụ đứng tứ giác sau.



Lời giải:

Chu vi đáy của lăng trụ đứng tứ giác là: $C = 6,5 + 4 + 6,5 + 9 = 24(cm)$.

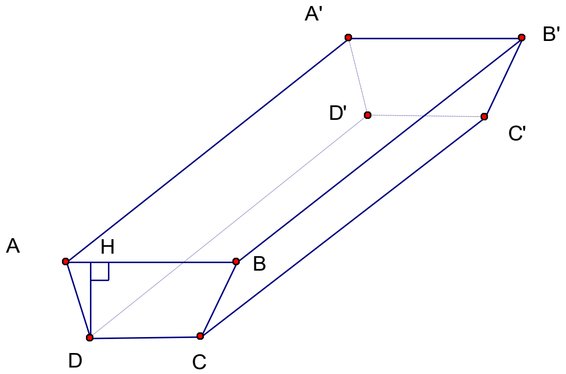
Diện tích xung quanh của lăng trụ đứng tứ giác là: $S_x = C.h = 24.15,4 = 369,6\left(cm^2\right)$.

Diện tích đáy của lăng trụ đứng tứ giác là: $S_d = \frac{1}{2}(4+9).6 = 39\left(cm^2\right)$.

Thể tích của lăng trụ đứng tứ giác là: $V = S_{đ}.h = 39.15,4 = 600,6\left(cm^3\right)$.

Bài 9.

Tính thể tích của bồn tắm có dạng hình lăng trụ đứng, đáy là hình thang cân. Biết $AA' = 4m$, $AB = 2m$, $CD = 1m$, $DH = 1m$.



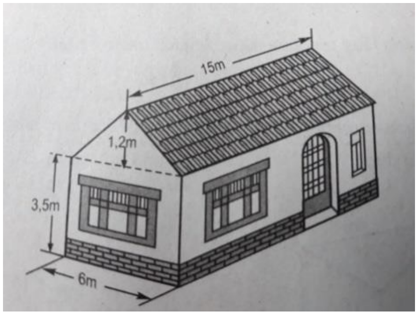
Lời giải:

Diện tích đáy của hình thang cân $ABCD$ là: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}DH.(DC + AB) = \frac{1}{2}.1.(1+2) = 1,5\,(m^2$.

Thể tích của bồn tắm là: $V = S_{ABC}.AA' = 1,5.4 = 6\left(m^3\right)$.

Bài 10.

Tính thể tích phần không gian của ngôi nhà có dạng một lăng trụ đứng theo các kích thước đã cho ở hình vẽ sau.



Lời giải:

Cần chia ngôi nhà ra làm hai phần:

+ Một phần là lăng trụ đứng: Đáy của lăng trụ này là tam giác cân, cạnh đáy $6m$, chiều cao của đáy $1,2m$; chiều cao lăng trụ $15m$.

+ Phần còn lại là hình hộp chữ nhật: Có chiều dài $15m$, rộng $6m$, cao $3,5m$.

Diện tích đáy của lăng trụ có đáy là tam giác là: $S_1 = \frac{1}{2}.1,2.6 = 3,6\left(m^2\right)$.

Thể tích của lăng trụ có đáy là tam giác: $V_1 = S_1.h_1 = 3,6.15 = 54\left(m^3\right)$.

Diện tích đáy của hình hộp chữ nhật là: $S_2 = 3,5.6 = 21\left(m^2\right)$.

Thể tích của hình hộp chữ nhật là: $V_2 = S.h = 21.15 = 315\left(m^3\right)$.

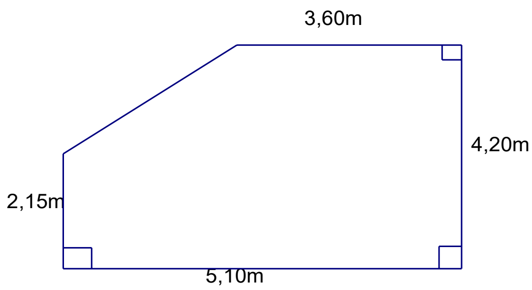
Thể tích phần không gian của ngôi nhà là: $V = V_1 + V_2 = 54 + 315 = 369\left(m^3\right)$.

Bài 11.

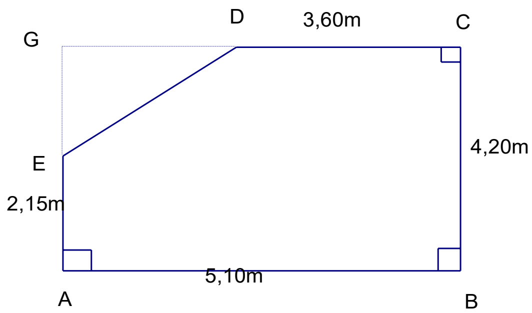
Người ta muốn đổ một tấm bê tông dày $3cm$, bề mặt của tấm bê tông có kích thước như ở hình vẽ.

a) Số bê tông cần phải đổ là bao nhiêu?

b) Cần phải có bao nhiêu chuyến xe để chở số bê tông cần thiết đến chỗ đổ bê tông, nếu mỗi xe chứa được $0.06m^3$ (không tính số bê tông dư thừa hoặc rơi vãi).



Lời giải:



Gọi đáy là đa giác $ABCDE$.

Ta có: $GD = 5,10 - 3,60 = 1,50\left(m\right)$.

$GE = 4,20 - 2,15 = 2,05\left(m\right)$.

$S_{GDE} = \frac{1}{2}.1,50.2,05 = 1,5375\left(m^2\right)$.

$S_{ABC} = 5,10.4,20 = 21,42\left(m^2\right)$.

Diện tích đáy là: $21,42 - 1,5375 = 19,8825\left(m^2\right)$.

Thể tích tấm bê tông: $19,8825.0,03 = 0,596475\left(m^3\right) \approx 0,6\left(m^3\right)$.

b)Số chuyến xe để chở là: $0,6 : 0,06 = 10$ (chuyến)

Bài 12.

Một gia đình xây bể chứa nước hình lăng trụ đứng, phần trong lòng bể có đáy là hình vuông cạnh1,5 m , chiều cao bể là 1 m. Sau đó họ dùng các viên gạch men kích thước 20 x 30 cm, dày $1cm$ để ốp xung quanh thành bể và đáy bể. Hỏi gia đình đó cần ít nhất bao nhiêu viên gạch ốp và sau khi ốp bể chứa được khoảng bao nhiêu lít nước?

Lời giải:

Diện tích đáy của bể là $1,5.1,5 = 2,25\left(m^2\right)$.

Diện tích xung quanh của bể là: $S_x = C.h = 1,5.4.1 = 6\left(cm^2\right)$

Diện tích xung quanh và đáy bể là: $2,25 + 6 = 8,25\left(m^2\right)$.

Diện tích một viên gạch là: $20.30 = 600\left(\text{cm}^2\right) = 0,06\left(\text{m}^2\right)$.

Ta có: $8,25 : 0,06 = 137,5$.

Như vậy cần ít nhất 138 viên gạch ốp.

Chiều dài cạnh đáy sau khi ốp gạch là: $1,5 - 2.0,01 = 1,48\ (\text{m})$.

Chiều cao của bể sau khi ốp gạch là: $1 - 2.0,01 = 0,98\ (\text{m})$.

Thể tích của bể sau khi ốp gạch là: $(1,48)^2.0,98 = 2,146592\ \left(\text{m}^3\right) = 2146,592\ \left(\text{dm}^3\right)$.

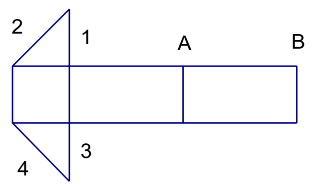
Vậy sau khi ốp bể chứa được khoảng 2147 lít nước.

Phần III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Nhận biết các yếu tố của lăng trụ đứng tam giác.

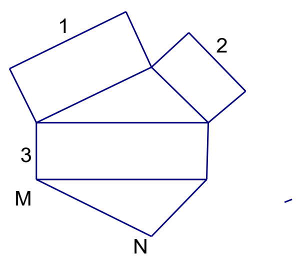
Bài 1.

Quan sát các hình khai triển trên hình vẽ rồi cho biết : Cạnh nào sẽ được ghép với cạnh AB để có được hình lăng trụ đứng ? (Sử dụng các số cho trên hình).



Bài 2.

Quan sát các hình khai triển trên hình vẽ rồi cho biết : Cạnh nào sẽ được ghép với cạnh MN để có được hình lăng trụ đứng ? (Sử dụng các số cho trên hình).



Bài 3.

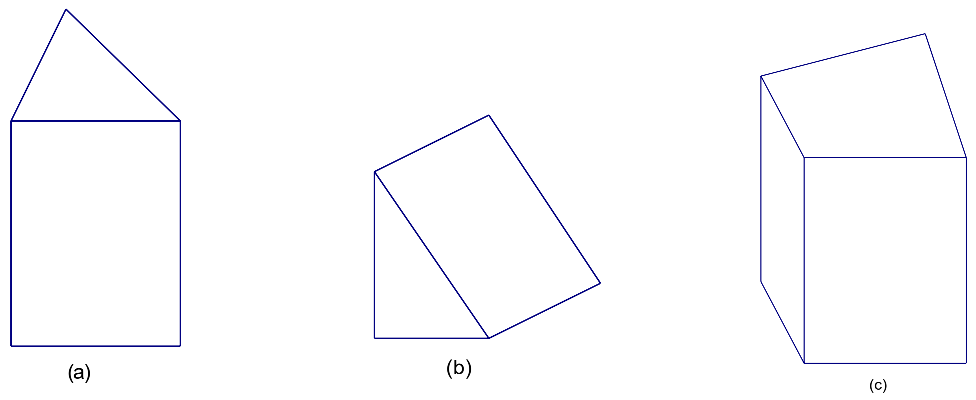
Hãy cho biết:

a) Một lăng trụ đứng có sáu mặt thì đáy của lăng trụ đó là hình gì?

b) Một lăng trụ đứng có tám mặt thì đáy của lăng trụ đó là hình gì?

Bài 4.

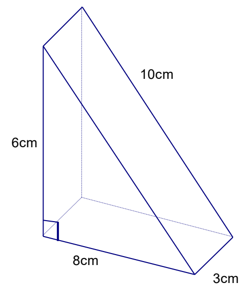
Vẽ thêm các nét khuất của hình biểu diễn các hình lăng trụ đứng sau:



Dạng 2. Tính diện tích, thể tích của hình lăng trụ đứng tam giác.

Bài 1.

Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình lăng trụ đứng theo kích thước cho trên hình vẽ.



Bài 2.

Một hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác vuông, chiều cao lăng trụ là $16cm$. Độ dài hai cạnh góc vuông của đáy là $12cm$, $9cm$, cạnh huyền là $15cm$. Hãy tính.

a) Diện tích một mặt đáy.

b) Diện tích mặt xung quanh.

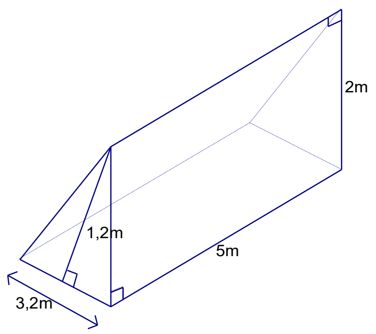
c) Thể tích lăng trụ.

Bài 3.

Một cái lều ở trại hè có dạng lăng trụ đứng tam giác (với các kích cho trên hình vẽ).

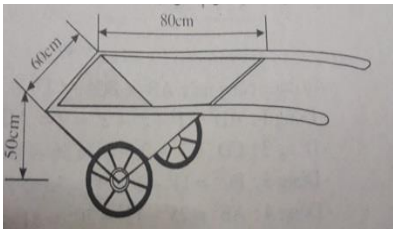
a)Tính thể tích khoảng không ở bên trong lều.

b) Số vải bạt cần có để dựng lều đó là bao nhiêu? (không tính các mép và nếp gấp của lều)



Bài 4.

Thùng chứa của xe ở hình vẽ có dạng hình lăng trụ đứng tam giác, các kích thước cho trên hình vẽ. Hỏi dung tích của thùng chứa bao nhiêu?

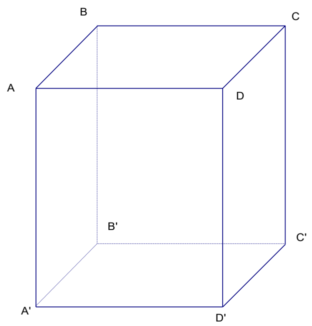


Dạng 3. Tính diện tích, thể tích của hình lăng trụ đứng tứ giác.

Bài 1.

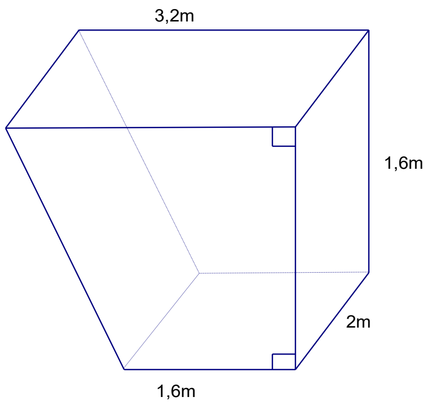
Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 4\text{cm}$

$AA' = 8\text{cm}$.



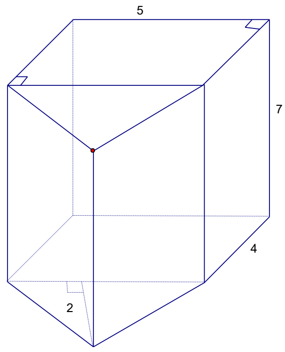
Bài 2.

Thùng một chiếc máy nông nghiệp có dạng hình lăng trụ đứng tứ giác như hình vẽ sau. Đáy của hình lăng trụ đứng này (mặt bên của thùng) là một hình thang vuông có độ dài đáy lớn $3,2m$, đáy nhỏ $1,6m$. Hỏi thùng có dung tích bao nhêu mét khối?



Bài 3:

Cho lăng trụ đứng ngũ giác với các kích thước như hình vẽ (đơn vị xentimet). Hãy tính thể tích của hình lăng trụ.



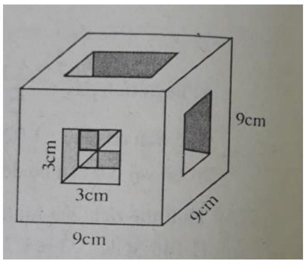
Bài 4:

Có một khôí gỗ hình lập phương cạnh $9cm$. Người ta đục ba " lỗ vuông" xuyên thủng khối gỗ như

hình vẽ.

a) Tìm thể tích của khối gỗ còn lại.

b) Tìm tổng diện tích của tất cả các mặt (ngoài lẫn trong) của khối gỗ.



ĐÁP SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1.

Bài 1.

Cạnh 2 sẽ được ghép với cạnh AB.

Bài 2 .

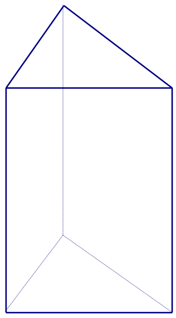
Cạnh 1 sẽ được ghép với cạnh MN.

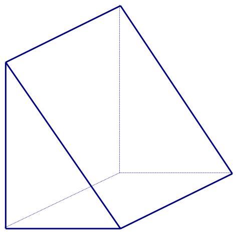
Bài 3.

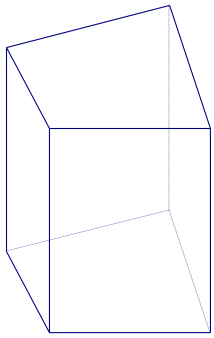
a) Đáy là một tứ giác.

b) Đáy là một lục giác.

Bài 4.


(a)


(b)


(c)

Dạng 2 .

Bài 1.

Đáy của hình lăng trụ là tam giác vuông.

Chu vi đáy của lăng trụ là: $C = 6 + 8 + 10 = 24\left(cm\right)$.

Diện tích xung quanh của lăng trụ là: $S_x = C.h = 24.3 = 72\left(cm^2\right)$.

Diện tích đáy của lăng trụ đứng là $S_a = \frac{1}{2}.6.8 = 24\left(cm^2\right)$.

Thể tích của hình lăng trụ đứng là: $V = S_a h = 24.3 = 72\left(cm^3\right)$.

Bài 2.

a) Diện tích một mặt đáy của lăng trụ là $S_a = \frac{1}{2}.12.9 = 54\left(cm^2\right)$.

b) Chu vi đáy của lăng trụ $C = 12 + 9 + 15 = 36\left(cm\right)$.

Diện tích mặt xung quanh của lăng trụ: $S_x = C.h = 36.16 = 576\left(cm^2\right)$.

c) Thể tích của lăng trụ là: $V = S_a h = 54.16 = 864\left(cm^3\right)$.

Bài 3.

a) Diện tích đáy là : $S_a = \frac{3,2.1,2}{2} = 1,92\left(m^2\right)$.

Thể tích của lều $V = S_a h = 1,92.5 = 9,6\left(m^3\right)$.

b) Số vải bạt cần có để dựng lều $5.2.2 + 1,92.2 = 23,84\left(m^2\right)$.

Bài 4.

Diện tích đáy thùng chứa của xe là $\frac{80.50}{2} = 2000\left(cm^2\right)$.

Dung tích của thùng là $2000.60 = 120000\left(cm^3\right) = 120\left(dm^3\right)$.

Dạng 3. Tính diện tích, thể tích của hình lăng trụ đứng tứ giác.

Bài 1:

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ tứ giác đều nên tứ giác $ABCD$ là hình vuông và có chiều cao AA'.

Diện tích xung quanh của lăng trụ là: $S_x = 4.AB.AA' = 4.4.8 = 128\left(\text{cm}^2\right)$.

Diện tích đáy của hình vuông $ABCD$ là $S_{ABC} = AB.AB = 4.4 = 16\left(cm^2\right)$.

Thể tích lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là: $V = S_{ABC}.h = 16.8 = 128\ \left(\text{cm}^3\right)$.

Bài 2:

Diện tích đáy của thùng chiếc mày nông nghiệp là: $\frac{1}{2}(3,2+1,6).1,6 = 4,48\left(m^2\right)$.

Thể tích của của thùng là: $4,48.2 = 5,76\left(m^3\right)$.

Bài 3:

Hình lăng trụ đã cho gồm một hình chữ nhật và một lăng trụ đứng tam giác có cùng chiều cao.

Thể tích của hình hộp chữ nhật là: $V_1 = 4.5.7 = 140\left(cm^3\right)$.

Thể tích lăng trụ đứng tam giác là: $V_2 = \frac{1}{2}.5.2.7 = 35\left(cm^3\right)$.

Thể tích lăng trụ đứng ngũ giác là: $V = V_1 + V_2 == 140 + 35 = 175\left(cm^3\right)$.

Bài 4:

a)Thể tích của khối gỗ ban đầu: $9^3 = 729\left(cm^3\right)$.

Khối gỗ lập phương cạnh $9cm$ gồm 27 khối gỗ nhỏ hình lập phương cạnh $3cm$.

Tổng cộng có 7 khối gỗ nhỏ bị đục đi, thể tích của chúng là: $3^3.7 = 189\left(cm^3\right)$.

Thể tích của khối gỗ còn lại: $729 - 189 = 540\left(cm^3\right)$.

b) Tổng diện tích 6 mặt của khối gỗ ban đầu là: $9.9.6 = 486\left(cm^3\right)$.

Ta gọi mỗi mặt của khối gỗ nhỏ là mặt nhỏ. Sau khi đục, ở mỗi mặt của khối gỗ ban đầu giảm đi một mặt nhỏ ở bên ngoài nhưng tăng thêm bốn mặt nhỏ ở bên trong, tức là tăng thêm ba mặt nhỏ.

Sau khi đục, diện tích các mặt của khối gỗ ban đầu tăng thêm:

$3.6 = 18$ (mặt nhỏ), có diện tích $3.3.18 = 162\left(cm^2\right)$.

Vậy tổng diện tích các mặt của khối gỗ sau khi đục là $486 + 162 = 648\left(cm^2\right)$.

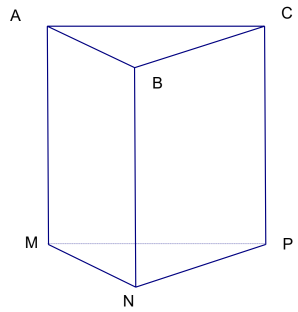
PHIẾU BÀI TẬP

(Nội dung là toàn bộ bài tập đã có trên)

Dạng 1. Nhận biết các yếu tố của lăng trụ đứng tam giác, tứ giác.

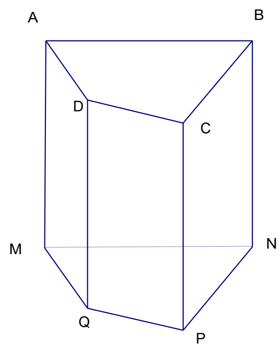
Bài 1.

Quan sát và gọi tên các đỉnh, mặt đáy, mặt bên, cạnh đáy, cạnh bên của hình lăng trụ đứng tam giác ở hình vẽ sau.

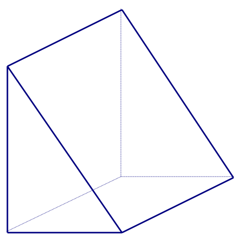


Bài 2.

Quan sát và gọi tên các đỉnh, mặt đáy, mặt bên, cạnh đáy, cạnh bên của hình lăng trụ đứng tứ giác ở hình vẽ sau.



Bài 3. Trong hình lăng trụ đứng sau có bao nhiêu mặt, bao nhiêu đỉnh và bao nhiêu cạnh.



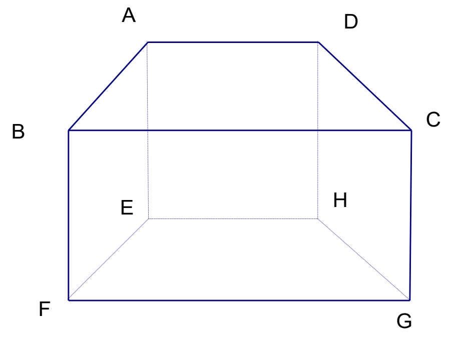
(b)

Bài 4.

Cho hình lăng trụ đứng có đáy là hình thang vuông. Hãy kể tên:

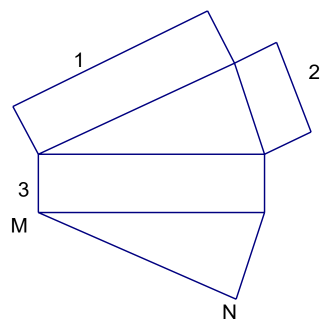
a) Các cạnh song song với AD;

b) Các cạnh song song với AB;



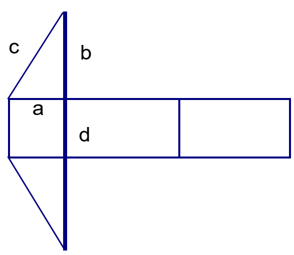
Bài 5.

Quan sát hình vẽ và cho biết, cạnh nào trong các cạnh $1;2;3$ ghép với cạnh MN để có được hình lăng trụ đứng?



Bài 6.

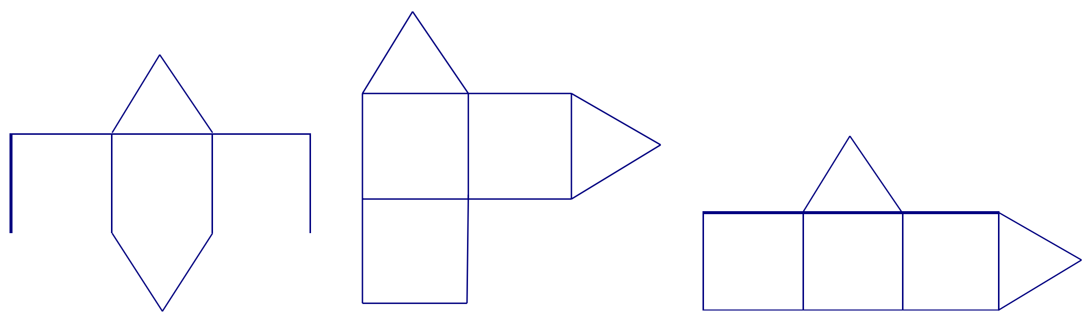
Điền đầy đủ các kích thước vào hình khai triển của các hình lăng trụ ở hình dưới đây:



H.a

Bài 7.

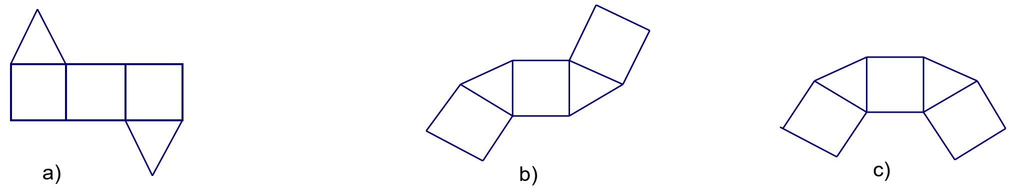
Trong các hình khai triển dưới đây, hình nào gấp lại được thành một hình lăng trụ đứng?



a) b) c)

Bài 8.

Trong các hình khai triển dưới đây, hình nào gấp lại được thành một hình lăng trụ đứng?

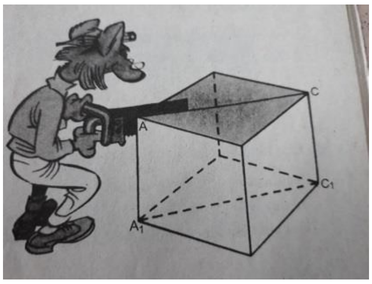


Bài 9.

Người ta cưa một khối gỗ có dạng một hình lập phương như hình vẽ và được hai hình lăng trụ.

a) Đáy của lăng trụ đứng nhận được là tam giác vuông, tam giác cân, hay là tam giác đều?

b) Các mặt bên của mỗi lăng trụ đứng nhận được có phải tất cả đều là hình vuông không?



Bài 10.

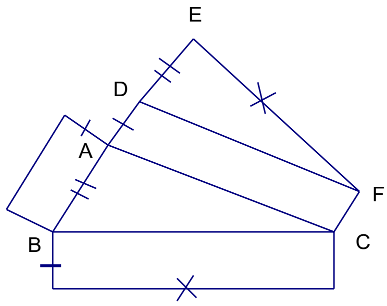
Từ hình khai triển trong hình vẽ sau có thể gấp theo các cạnh để có được một lăng trụ đứng hay không? (Các tứ giác trên hình đều là những hình chữ nhật).

b) Trong hình vừa gấp được, xét xem các phát biểu dưới đây, phát biểu nào đúng:

- Cạnh AD vuông góc với cạnh AB.

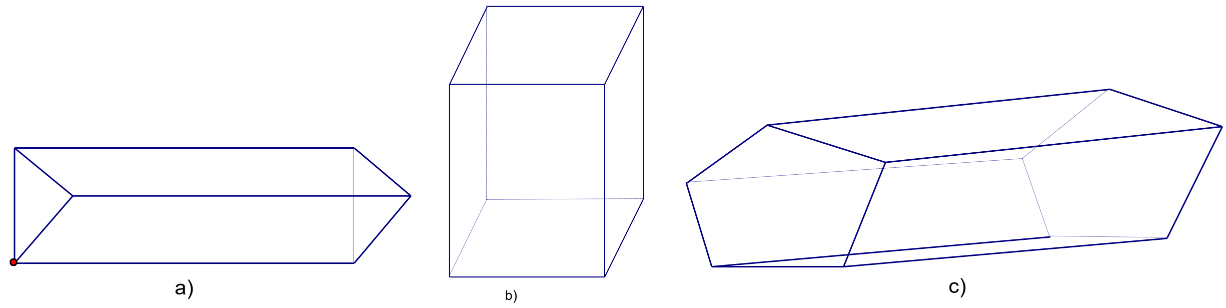
- EF và CF là hai cạnh vuông góc với nhau.

- Cạnh DE và cạnh BC vuông góc với nhau.



Bài 11.

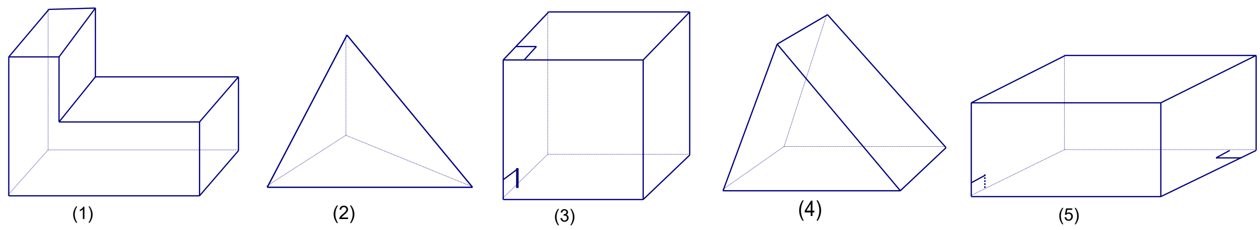
Quan sát các hình lăng trụ đứng trong các hình vẽ sau rồi điền số thích hợp vào các ô trống ở bảng dưới đây:



Hình	a	b	c
Số cạnh của một đáy	3		
Số mặt bên		4	
Số đỉnh			
Số cạnh bên			5

Bài 12:

Trong các hình sau đây, hình vẽ nào biểu diễn một hình lăng trụ đứng?



Dạng 2. Tính diện tích, thể tích của hình lăng trụ đứng tam giác.

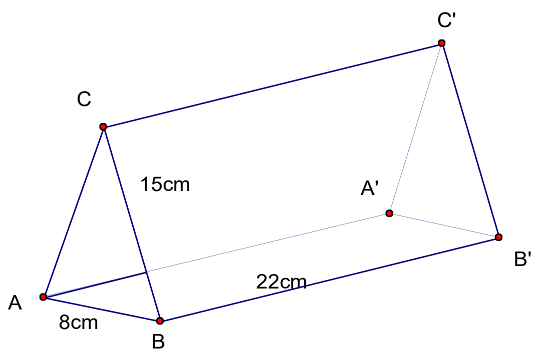
Bài 1.

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác vuông cân, $AB = AC = 3$ cm, $BC = 5cm$

$AA' = 4$ cm. Tính diện tích xung quanh và thể tích hình lăng trụ đó.

Bài 2.

Một tấm lịch để bàn có dạng một lăng trụ đứng, ACB là một tam giác cân tại C. Tính diện tích miếng bìa để làm một tấm lịch như trên.



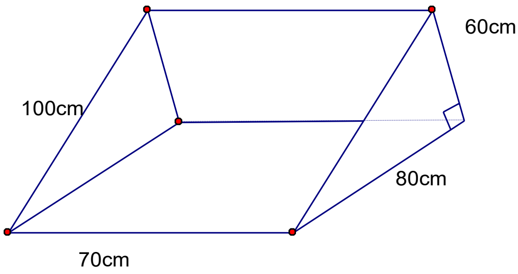
Bài 3.

Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 4\text{cm}$, $AA' = 10\text{cm}$. Tính diện tích xung quanh

và thể tích lăng trụ đó.

Bài 4.

Thùng đựng của một máy cắt cỏ có dạng lăng trụ đứng tam giác. Hãy tính thể tích của thùng.



Bài 5.

Quan sát hình lăng trụ đứng tam giác (H.4) rồi điền số thích hợp vào các ô trống ở bảng sau:

$a(cm)$	5	3	12	7
$b(cm)$	6	2	15	
$c(cm)$	7		13	6
$h(cm)$	10	5		
Chu vi đáy (cm)		9		21
$S_{xq}(cm^2)$			80	63

Bài 6.

Điền số thích hợp vào các ô trống ở bảng sau:

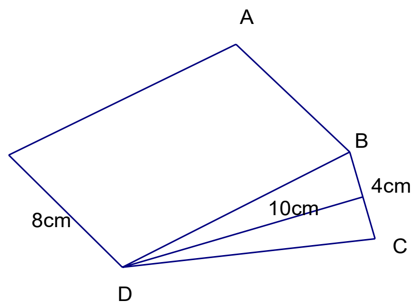
	Lăng trụ 1	Lăng trụ 2	Lăng trụ 3
Chiều cao của lăng trụ đứng tam giác	$5cm$	$7cm$	
Chiều cao của tam giác đáy.			$5cm$
Cạnh tương ứng với đường cao của tam giác đáy.	$3cm$	$5cm$	
Diện tích đáy	$6cm^2$		$15cm^2$
Thể tích lăng trụ đứng		$49cm^3$	$0{,}045l$

Bài 7.

Hình vẽ sau biểu diễn một lưỡi rìu bằng sắt, nó có dạng một lăng trụ đứng, BDC là một tam giác cân.

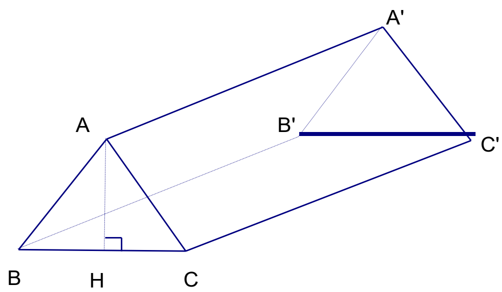
a) Hãy vẽ thêm nét khuất, điền thêm chữ vào các đỉnh rồi cho biết AB song song với những cạnh nào?

b) Tính thể tích lưỡi rìu.



Bài 8.

Một lều trại có dạng hình lăng trụ đứng đáy là tam giác, thể tích phần không gian bên trong là $2,16cm^3$. Biết chiều dài CC' của lều là $2,4m$, chiều rộng BC của lều là $1,2m$. Tính chiều cao AH của lều.

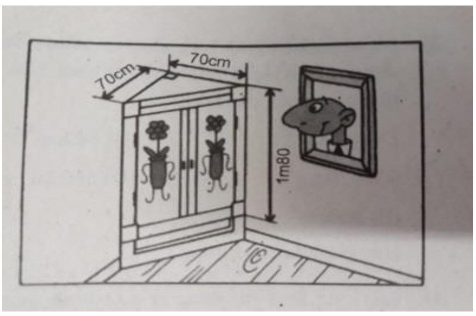


Bài 9.

Hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có chiều cao $5m$, đáy là tam giác vuông tại A và $AB = 2m$. Tính AC, biết thể tích của hình lăng trụ bằng $15m^3$.

Bài 10.

Diện thể tích của cái tủ tường hình lăng trụ đứng có các kích thước như trong hình vẽ sau.



Bài 11.

Một hình lăng trụ đứng $ABC.DEF$ có đáy ABC là một tam giác vuông tại A, chiều cao của lăng trụ

là 9 cm. Độ dài hai cạnh góc vuông của đáy là 3cm và 4cm, cạnh huyền có độ dài là 5cm.

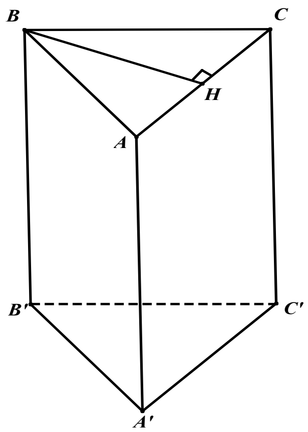
a) Tính diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng.

b) Tính diện tích toàn phần của hình lăng trụ đứng.

c) Tính thể tích của hình lăng trụ đứng.

Bài 12.

Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 4cm$, $BH = 2cm$, $AA' = 10cm$. Tính diện tích
xung quanh và thể tích lăng trụ đó.



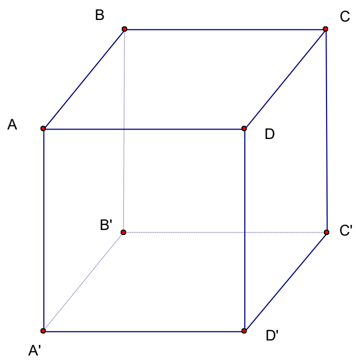
Dạng 3. Tính diện tích, thể tích của hình lăng trụ đứng tứ giác.

Bài 1.

Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh $3cm$ và chiều cao bằng 5 cm.

Tính diện tích xung quanh lăng trụ.

Lời giải



Bài 2.

Cho hình lăng trụ đứng có đáy là hình thoi cạnh $6cm$ và diện tích xung quanh của hình lăng trụ là

$192\left(cm^2\right)$. Tính chiều cao của hình lăng trụ.

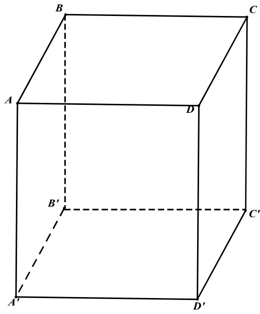
Bài 3.

Cho hình lăng trụ đứng có đáy là hình thoi. Biết chiều cao của hình lăng trụ $6cm$ và diện tích xung quanh của hình lăng trụ là $288cm^2$. Tính cạnh đáy của hình lăng trụ.

Bài 4.

Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 6$cm

$AA' = 12\,\text{cm}$.



Bài 5.

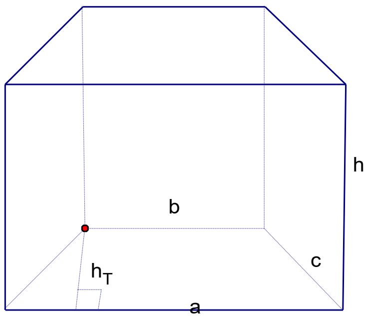
Cho hình lăng trụ đứng tứ giác đều có thể tích là $392cm^3$ và chiều cao của hình lăng trụ là $8cm$. Tính cạnh đáy của hình lăng trụ.

Bài 6.

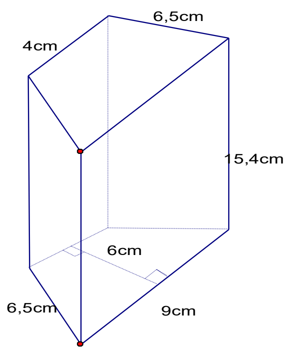
Cho hình lăng trụ đứng tứ giác đều có thể tích là $2160cm^3$ và cạnh đáy của hình lăng trụ là $12cm$. Tính chiều cao hình lăng trụ.

Bài 7.

Đáy của hình lăng trụ đứng là một hình thang cân có các cạnh $c = 9mm$ $b = 11mm$; $a = 15mm$ và chiều cao $h_T = 7mm$. Chiều cao của lăng trụ $h = 14mm$. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình lăng trụ.

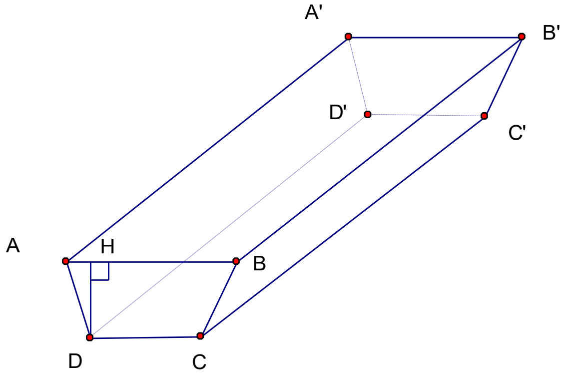


Bài 8. Tính diện tích xung quang và thể tích của hình lăng trụ đứng tứ giác sau.



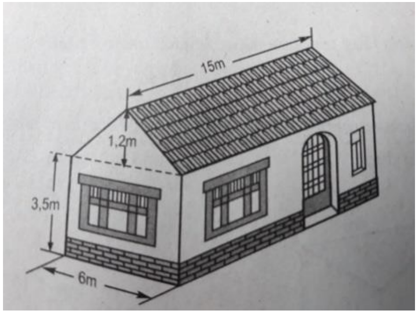
Bài 9.

Tính thể tích của bồn tắm có dạng hình lăng trụ đứng, đáy là hình thang cân. Biết $AA' = 4m$, $AB = 2m$, $CD = 1m$, $DH = 1m$.



Bài 10.

Tính thể tích phần không gian của ngôi nhà có dạng một lăng trụ đứng theo các kích thước đã cho ở hình vẽ sau.

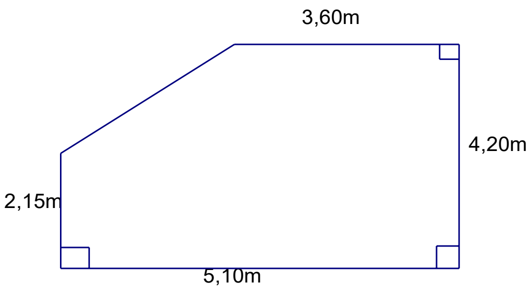


Bài 11.

Người ta muốn đổ một tấm bê tông dày $3cm$, bề mặt của tấm bê tông có kích thước như ở hình vẽ.

a) Số bê tông cần phải đổ là bao nhiêu?

b) Cần phải có bao nhiêu chuyến xe để chở số bê tông cần thiết đến chỗ đổ bê tông, nếu mỗi xe chứa được $0.06m^3$ (không tính số bê tông dư thừa hoặc rơi vãi).



Bài 12.

Một gia đình xây bể chứa nước hình lăng trụ đứng, phần trong lòng bể có đáy là hình vuông cạnh1,5 m , chiều cao bể là 1 m. Sau đó họ dùng các viên gạch men kích thước 20 x 30 cm , dày $1cm$ để ốp xung quanh thành bể và đáy bể. Hỏi gia đình đó cần ít nhất bao nhiêu viên gạch ốp và sau khi ốp bể chứa được khoảng bao nhiêu lít nước?

HẾT