

**CĐ2: TÌM ẨN CHƯA BIẾT**

Dạng 1: Tìm x thông thường
Dạng 2: Đưa về dạng tích bằng 0
Dạng 3: Sử dụng tính chất lũy thừa
Dạng 4: Tìm ẩn dạng phân thức
Dạng 5: Tìm x dạng chứa dấu giá trị tuyệt đối
Dạng 6: Sử dụng công thức tính tổng có quy luật
Dạng 7: Tổng các biểu thức không âm bằng 0
Dạng 8: Tìm ẩn dựa vào tính chất về dấu
Dạng 9: Sử dụng phương pháp chặn để tìm ẩn
Dạng 10: Tìm ẩn với điều kiện nguyên

**Dạng 1. Tìm x thông thường**

**A. Trắc nghiệm (nếu có)**

**Câu 1.** (HSG 7 huyện Lạng Giang, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

Cho  $\sqrt{\frac{25}{4}} - \frac{3}{2}x = \frac{11}{6}$ . Căn bậc hai số học của  $x$  bằng:

- A.  $\frac{4}{9}$                       B.  $\frac{2}{3}$                       C.  $\frac{16}{81}$                       D.  $\frac{1}{2}$

**CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS**                      **Lời giải**

**Chọn B**

$$\sqrt{\frac{25}{4}} - \frac{3}{2}x = \frac{11}{6}$$

$$\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x = \frac{11}{6}$$

$$\frac{3}{2}x = \frac{5}{2} - \frac{11}{6} = \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{4}{9}$$

Căn bậc hai số học của  $x$  bằng  $\frac{2}{3}$ .

**Câu 2.** (HSG 7 huyện Lục Nam 2020 - 2021)

Tìm  $x$  biết:  $\frac{4}{3} + \frac{-7}{9}x = -\frac{2}{7}$

- A.  $-\frac{102}{49}$                       B.  $\frac{3}{7}$                       C.  $\frac{102}{49}$                       D.  $-\frac{8}{15}$

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\frac{4}{3} + \frac{-7}{9}x = -\frac{2}{7}$$

$$\frac{-7}{9}x = -\frac{2}{7} - \frac{4}{3}$$

$$\frac{-7}{9}x = -\frac{34}{21}$$

$$x = -\frac{34}{21} : \frac{-7}{9}$$

$$x = \frac{102}{49}$$

**Câu 3. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)**

Nếu  $\sqrt{2x+1} = 5$  thì giá trị của  $2x^2$  bằng

- A. 12.                      B. 144.                      C. 288.                      D. 50.

**Lời giải**

**Chọn C**

Có:  $\sqrt{2x+1} = 5$

$$2x+1 = 25$$

$$x = 12$$

Khi đó:  $2x^2 = 2 \cdot 12^2 = 288$

**Câu 4. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)**

Giá trị  $x$  thỏa mãn  $x^2 \cdot (x^{19} - 2) - (x^{21} - 3x^2 + 4) = (x - 2)(x - 3)$  là

- A. 0.                      B. 3.                      C. 2.                      D. 1.

**Lời giải**

**Chọn C**

$$x^2 \cdot (x^{19} - 2) - (x^{21} - 3x^2 + 4) = (x - 2)(x - 3)$$

$$x^{21} - 2x^2 - x^{21} + 3x^2 - 4 = (x - 2)(x - 3)$$

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x - 3)$$

$$x^2 - 4 = x^2 - 2x - 3x + 6$$

$$5x = 10$$

$$x = 2$$

Vậy  $x = 2$ .

**Câu 5. (HSG 7 huyện Sơn Động 2022 - 2023)**

Giá trị  $x$  thỏa mãn  $\frac{4}{3} + \frac{-7}{9}x = \left| -\frac{2}{7} \right|$  là

- A.  $-\frac{154}{189}$ .                      B.  $\frac{66}{49}$ .                      C.  $-\frac{66}{49}$ .                      D.  $\frac{189}{154}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**



Tìm  $x$  biết:  $\frac{6}{7} + \frac{1}{7} : x = \frac{2}{21}$ .

**Lời giải**

$$\frac{6}{7} + \frac{1}{7} : x = \frac{2}{21}$$

$$\frac{1}{7} : x = \frac{2}{21} - \frac{6}{7}$$

$$\frac{1}{7} : x = \frac{2}{21} - \frac{18}{21}$$

$$\frac{1}{7} : x = \frac{-16}{21}$$

$$x = \frac{1}{7} : \frac{-16}{21}$$

$$x = \frac{1}{7} \cdot \frac{-21}{16}$$

$$x = \frac{-3}{16}$$

Vậy  $x = \frac{-3}{16}$ .

**Câu 2. (HSG 7 huyện Đô Lương 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  thoả mãn.  $2x = \frac{3}{2}x + 25\%$ .

**Lời giải**

Ta có:  $2x = \frac{3}{2}x + 25\%$

$$2x - \frac{3}{2}x = \frac{25}{100}$$

$$\left(2 - \frac{3}{2}\right)x = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Vậy  $x = \frac{1}{2}$ .

**Câu 3. (HSG 7 huyện Tân Kỳ 2022 – 2023)**

Tìm  $x$  biết rằng:  $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} : x = -3$ .

**Lời giải**

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} : x = -3$$

$$\frac{1}{4} : x = -3 - \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{4} : x = \frac{-12}{4} - \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{4} : x = \frac{-15}{4}$$

$$x = \frac{1}{4} : \frac{-15}{4}$$

$$x = \frac{1}{4} \cdot \frac{-4}{15}$$

$$x = \frac{-1}{15}$$

Vậy  $x = \frac{-1}{15}$ .

**Câu 4. (HSG 7 huyện Ứng Hòa 2022 - 2023).**

Tìm  $x$ , biết:  $\left(-1\frac{3}{5} + x\right) : \frac{12}{13} = 2\frac{1}{6}$ .

Lời giải

$$\left(-1\frac{3}{5} + x\right) : \frac{12}{13} = 2\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{8}{5} + x\right) : \frac{12}{13} = \frac{13}{6}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{8}{5} + x\right) = \frac{13}{6} \cdot \frac{12}{13}$$

$$\Rightarrow -\frac{8}{5} + x = 2$$

$$\Rightarrow x = 2 + \frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow x = \frac{18}{5}$$

Vậy  $x = \frac{18}{5}$

**Câu 5. (HSG 7 huyện Liên Trường 2022 - 2023).**

Tìm  $x$ , biết:  $3\frac{1}{2} : (2x - 1) = \frac{21}{22}$ .

Lời giải

$$3\frac{1}{2} : (2x - 1) = \frac{21}{22}$$

$$2x - 1 = \frac{7}{2} : \frac{21}{22}$$

$$2x = \frac{11}{3} + 1$$

$$x = \frac{14}{3} : 2 = \frac{7}{3}$$



CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS

$$x = \frac{14}{3} : 2$$

$$x = \frac{7}{3}$$

Vậy  $x = \frac{7}{3}$ .

**Câu 6. (HSG 7 thành phố Sài Sơn, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết:  $\frac{5}{11} + \frac{6}{11} : x = \frac{5}{22}$ .

**Lời giải**

$$\frac{5}{11} + \frac{6}{11} : x = \frac{5}{22}$$

$$\frac{6}{11} : x = \frac{5}{22} - \frac{5}{11}$$

$$\frac{6}{11} : x = \frac{-5}{22}$$

$$x = \frac{6}{11} : \frac{-5}{22}$$

$$x = \frac{-12}{5}$$

Vậy  $x = \frac{-12}{5}$ .

**Câu 7. (HSG 7 thành phố Chí Linh 2022 - 2023)**

Tìm  $x$ , biết  $\frac{11}{13} - \left(\frac{5}{42} - x\right) = -\left(\frac{15}{28} - \frac{11}{13}\right)$ .

**Lời giải**

$$\frac{11}{13} - \left(\frac{5}{42} - x\right) = -\left(\frac{15}{28} - \frac{11}{13}\right)$$

$$\frac{11}{13} - \frac{5}{42} + x = -\frac{15}{28} + \frac{11}{13}$$

$$x = -\frac{15}{28} + \frac{5}{42}$$

$$x = -\frac{5}{12}$$

Vậy  $x = -\frac{5}{12}$ .

**Câu 8. (HSG 7 huyện Nghĩa Đàn, tỉnh Nghệ An 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết:  $\frac{-8}{13} + \left(\frac{-7}{5} - x\right) = \frac{-1}{2}$ .

**Lời giải**

$$\frac{-8}{13} + \left(\frac{-7}{5} - x\right) = \frac{-1}{2}$$

$$\frac{-7}{5} - x = \frac{3}{26}$$

$$x = \frac{-7}{5} - \frac{3}{26}$$

$$x = \frac{-197}{130}$$

Vậy  $x = \frac{-197}{130}$ .

**Câu 9. (HSG 7 huyện Quốc Oai, Hà Nội 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết:  $(0,4x - 2) - (1,5x + 1) - (-4x - 0,8) = 3,6$ .

**Lời giải**

$$(0,4x - 2) - (1,5x + 1) - (-4x - 0,8) = 3,6$$

$$0,4x - 2 - 1,5x - 1 + 4x + 0,8 = 3,6$$

$$x(0,4 - 1,5 + 4) = 3,6 + 2 + 1 - 0,8$$

$$2,9x = 5,8$$

$$x = 2$$

Vậy  $x = 2$ .

**Câu 10. (Đề 66 - HSG 7 huyện Thái Thụy, 2022 - 2023)**

Tìm  $x$ , biết:  $\frac{2}{5} - \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ .

**Lời giải:**

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{20}$$

$$x - \frac{1}{2} = \frac{3}{20} : \frac{1}{3}$$

$$x - \frac{1}{2} = \frac{9}{20}$$

$$x = \frac{9}{20} + \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{19}{20}$$

Vậy  $x = \frac{9}{20}$ .

**Câu 11. (HSG 7 huyện Bá Thước, THCS thị trấn Cảnh Nài - 2022 - 2023)**

Tìm  $x$ , biết:

a)  $(x - 2034) \cdot 5 = -105$

b)  $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = \frac{5}{8}$

**Lời giải:**

a)  $(x - 2034) \cdot 5 = -105$

$$x - 2034 = (-105) : 5$$

$$x - 2034 = -21$$

$$x = -21 + 2034$$

$$x = 2013$$

Vậy  $x = 2013$ .

b)  $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = \frac{5}{8}$

$$\frac{1}{2}x = \frac{5}{8} + \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{11}{8}$$

$$x = \frac{11}{8} : \frac{1}{2} = \frac{11}{4}$$

Vậy  $x = \frac{11}{4}$ .

**Câu 12. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2021 - 2022)**

Tìm  $x$  biết  $-\frac{15}{12}x + \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$

**Lời giải**

$$-\frac{15}{12}x + \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{4}x = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{4}x = \frac{5}{4}$$

$$x = \frac{5}{4} : \frac{5}{4}$$

Vậy  $x = 1$

**Câu 13. (HSG 7 huyện Ý Yên 2021 - 2022)**

Tìm  $x$  biết  $\frac{x}{2} - \left(\frac{3x}{5} - \frac{13}{5}\right) = \frac{7}{5} - \frac{7}{10}x$

**Lời giải**

$$\frac{x}{2} - \frac{3x}{5} + \frac{13}{5} = \frac{7}{5} - \frac{7}{10}x$$

$$\frac{x}{2} - \frac{3x}{5} + \frac{7}{10}x = \frac{7}{5} - \frac{13}{5}$$



$$\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{5} + \frac{7}{10}\right)x = \frac{-6}{5}$$

$$\frac{6}{10}x = \frac{-6}{5}$$

$$x = \frac{-6}{5} : \frac{6}{10}$$

$$x = -2$$

Vậy  $x = -2$ .

**Câu 14. (HSG 7 huyện Triệu Sơn, tỉnh Thanh Hóa 2021 - 2022)**

Tìm  $x$ , biết:  $\frac{1}{11}(1-3x) = \frac{1}{5}x - \frac{1}{2}$

**Lời giải**

Ta có:  $\frac{1}{11}(1-3x) = \frac{1}{5}x - \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{11} - \frac{3}{11}x = \frac{1}{5}x - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3}{11}x - \frac{1}{5}x = \frac{-1}{11} - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-26}{55}x = \frac{-13}{22}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$$

Vậy  $x = \frac{5}{4}$ .



**Câu 15. (HSG 7 huyện Tân Kỳ 2021 - 2022)**

Tìm  $x$ , biết:  $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} : x = \frac{5}{6}$

**Lời giải**

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} : x = \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{3} : x = \frac{5}{6} - \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} : x = \frac{1}{6}$$

$$x = 2.$$

Vậy  $x = 2$

**Câu 16. (HSG 7 huyện Cửa Lò, Nghệ An 2020 - 2021)**

Tìm  $x$  biết:  $\frac{2}{5} + \frac{3}{5}x = \frac{-1}{4}$ .

**Lời giải**

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5}x = \frac{-1}{4}$$

$$\frac{3}{5}x = \frac{-1}{4} - \frac{2}{5}$$

$$\frac{3}{5}x = \frac{-5}{20} - \frac{8}{20}$$

$$\frac{3}{5}x = \frac{-13}{20}$$

$$x = \frac{-13}{20} : \frac{3}{5}$$

$$x = \frac{-13}{12}$$

Vậy  $x = -\frac{13}{12}$ .

**Câu 17. (HSG 7 huyện Bát Xát 2021 - 2022)**

Tìm  $x$  biết :  $2(x-1) - 3(2x+2) - 4(2x+3) = 16$

**Lời giải**

$$2(x-1) - 3(2x+2) - 4(2x+3) = 16$$

$$2x - 2 - 6x - 6 - 8x - 12 = 16$$

$$-12x = 36$$

$$x = -3$$

Vậy  $x = -3$

**Câu 18. (HSG 7 huyện Bá Thước 2021 - 2022)**

Tìm  $x$  biết:  $-\frac{3}{4} + \frac{1}{4} : x = -3$

**Lời giải**

$$-\frac{3}{4} + \frac{1}{4} : x = -3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} : x = -3 + \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} : x = -\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{9}$$

Vậy  $x = -\frac{1}{9}$ .

**Câu 19. (HSG 7 huyện Đức Thọ 2021 - 2022)**

Tìm  $x$ , biết  $\frac{1}{3} : 3x = 1$

**Lời giải**

$$\frac{1}{3} : 3x = 1$$

$$\frac{1}{9}x = 1$$

$$x = 9$$

Vậy  $x = 9$ .

**Câu 20. (HSG 7 huyện Thường Tín 2018 - 2019)**

Tìm  $x$  biết:  $23x - \left(\frac{1}{27} - \frac{4}{9}\right) = 0$ .

**Lời giải**

$$23x - \left(\frac{1}{27} - \frac{4}{9}\right) = 0.$$

$$23x = \frac{1}{27} - \frac{4}{9}.$$

$$23x = -\frac{11}{27}.$$

$$x = -\frac{11}{621}.$$

Vậy  $x = -\frac{11}{621}$ .

**Câu 21. (HSG 7 huyện 2018 - 2019)**

Tìm  $x$  biết:  $3(x-2) + \frac{2}{5} = 4$ .



**Lời giải**

$$3(x-2) + \frac{2}{5} = 4.$$

$$\Rightarrow 3(x-2) = 4 - \frac{2}{5}.$$

$$\Rightarrow 3(x-2) = \frac{18}{5}.$$

$$\Rightarrow x-2 = \frac{6}{5}.$$

Vậy  $x = \frac{16}{5}$ .

**Câu 22. (HSG 7 trường Lê Hồng Phong 2018 - 2019)**

Tìm  $x, y$  biết:  $x - y = xy = x : y (y \neq 0)$ .

**Lời giải**

Ta có:  $x - y = xy$  nên  $x = xy + y = y(x+1) \Rightarrow x : y = x+1$ .

Mà  $x - y = x : y$ , do đó:  $x+1 = x - y \Rightarrow y = -1$ .

Do đó:  $x+1 = -x \Rightarrow x+x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ .

Vậy  $x = -\frac{1}{2}; y = -1$ .

**Câu 23. (HSG 7 huyện Phù Cát 2017 - 2018)**

Tìm hai số  $x$  và  $y$  sao cho  $x + y = xy = x : y$  ( $y \neq 0$ )

**Lời giải**

$$\text{Từ } x + y = xy \Rightarrow x = xy - y = y(x-1) \Rightarrow x : y = x-1$$

$$\text{Ta lại có: } x : y = x + y \Rightarrow x + y = x-1 \Rightarrow y = -1$$

$$\Rightarrow x = xy - y = -x + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Vậy hai số cần tìm là  $x = \frac{1}{2}$ ;  $y = -1$ .

**Câu 24. (HSG 7 trường THCS Hưng Vũ 2018 - 2019)**

Tìm  $x$ , biết

$$\text{a) } \frac{-2}{5} + \frac{5}{3} \left( \frac{3}{2} - \frac{4}{15}x \right) = -\frac{7}{6}$$

$$\text{b) } \left( \frac{1}{4}x - 1 \right) + \left( \frac{2}{3}x - 2 \right) - \left( \frac{5}{8}x + 1 \right) = 5$$

**Lời giải**

$$\text{a) } \frac{-2}{5} + \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{2} - \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{15}x = -\frac{7}{6}$$

$$\frac{-2}{5} + \frac{5}{2} - \frac{4}{9}x = -\frac{7}{6}$$

$$-\frac{4}{9}x = -\frac{7}{6} - \left( \frac{-2}{5} + \frac{5}{2} \right)$$

$$-\frac{4}{9}x = \frac{-49}{15}$$

$$x = \frac{-49}{15} : \frac{-4}{9}$$

$$x = \frac{147}{20}$$

Vậy  $x = \frac{147}{20}$ .

$$\text{b) } \frac{1}{4}x - 1 + \frac{2}{3}x - 2 - \frac{5}{8}x - 1 = 5$$

$$\left( \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{5}{8} \right)x = 5 - (-1 - 2 - 1)$$

$$\frac{7}{24}x = 9$$

$$x = 9 : \frac{7}{24}$$

$$x = \frac{216}{7}$$

Vậy  $x = \frac{216}{7}$ .



**CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS**

**Câu 25. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường ..... 2017 - 2018)**

Tìm  $x$  biết:  $1\frac{1}{5} + \frac{1}{5} : x = -4$

**Lời giải**

$$\frac{1}{5} : x = -4 - \frac{6}{5}$$

$$\frac{1}{5} : x = \frac{-26}{5}$$

$$x = -\frac{1}{26}$$

Vậy  $x = -\frac{1}{26}$

**Câu 26. (HSG 7 huyện Mỹ Cày 2017- 2018)**

Tìm  $x$  biết:  $\frac{1}{2} : 2x = -\frac{1}{3}$

**Lời giải**

$$\frac{1}{2} : 2x = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{4}x = -\frac{1}{3}$$

$$x = -\frac{4}{3}$$

Vậy  $x = -\frac{4}{3}$ .



**Câu 27. (HSG 7 huyện Sông Lô, 2017 - 2018)**

Tìm  $x$  biết:  $\frac{1}{2016} : 2015x = -\frac{1}{2015}$

**Lời giải**

$$\frac{1}{2016} : 2015x = -\frac{1}{2015}$$

$$\frac{1}{2016 \cdot 2015}x = \frac{-1}{2015}$$

$$x = -\frac{1}{2015} : \frac{1}{2016 \cdot 2015}$$

$$x = -2016$$

Vậy  $x = -2016$

**Câu 28. (HSG 7 trường THCS Nguyễn Chí, huyện Đông Sơn, 2017 - 2018)**

Tìm  $x$  biết:  $-\frac{15}{12}x + \frac{3}{7} = \frac{6}{5}x - \frac{1}{2}$

**Lời giải**

$$-\frac{15}{12}x + \frac{3}{7} = \frac{6}{5}x - \frac{1}{2}$$

$$\frac{6}{5}x + \frac{5}{4}x = \frac{3}{7} + \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{6}{5} + \frac{5}{4}\right)x = \frac{13}{14}$$

$$\frac{49}{20}x = \frac{13}{14}$$

$$x = \frac{130}{343}$$

Vậy  $x = \frac{130}{343}$

**Câu 29. (HSG 7 huyện 2017 - 2018)**

Tìm  $x$  biết:  $1\frac{1}{5} + \frac{1}{5} : x = -4$

**Lời giải**

$$1\frac{1}{5} + \frac{1}{5} : x = -4$$

$$\frac{6}{5} + \frac{1}{5} : x = -4$$

$$\frac{1}{5} : x = -4 - \frac{6}{5}$$

$$\frac{1}{5} : x = -\frac{26}{5}$$

$$x = \frac{1}{5} : \frac{-26}{5}$$

$$x = -\frac{1}{26}$$

Vậy  $x = -\frac{1}{26}$



**CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS**

**Câu 30. (HSG 7 huyện Quốc Oai 2016 - 2017)**

Tìm  $x$ , biết:  $2x - \frac{1}{5} = \frac{6}{5}x - \frac{1}{2}$

**Lời giải**

$$2x - \frac{1}{5} = \frac{6}{5}x - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{5}x = -\frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{3}{8}$$

Vậy  $x = -\frac{3}{8}$ .

**Câu 31. (HSG 7 huyện Thanh Trì 2021 - 2022)**

Tìm  $x$  biết:  $\frac{3^{10} \cdot 11 + 9^5 \cdot 5}{27^3 \cdot 2^4} \cdot x = -9$ .

**Lời giải**

Ta có  $\frac{3^{10} \cdot 11 + 9^5 \cdot 5}{27^3 \cdot 2^4} = \frac{3^{10} \cdot (11+5)}{3^9 \cdot 2^4} = 3.$

Theo bài ta có  $3 \cdot x = -9$

$\Rightarrow x = (-9) : 3 = -3.$

Vậy  $x = -3.$

**Câu 32. (HSG 7 huyện Hòa Bình 2016 - 2017)**

Tim  $x$ , biết:  $\frac{1}{2} - x : \frac{3}{5} = 2$

**Lời giải**

$$\frac{1}{2} - x : \frac{3}{5} = 2$$

$$x : \frac{3}{5} = \frac{1}{2} - 2$$

$$x : \frac{3}{5} = \frac{-3}{2}$$

$$x = -\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{5}$$

$$x = -\frac{9}{10}$$

Vậy  $x = -\frac{9}{10}$

**Câu 33. (HSG 7 huyện Anh Sơn - 2016 - 2017)**

Tim  $x$ , biết:  $3(x-2) + \frac{2}{5} = 4$

**Lời giải**

$$3(x-2) + \frac{2}{5} = 4$$

$$\Rightarrow 3(x-2) = 4 - \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow 3(x-2) = \frac{18}{5}$$

$$\Rightarrow x-2 = \frac{6}{5}$$

$$\Rightarrow x = 3\frac{1}{5}$$

Vậy  $x = 3\frac{1}{5}$

**Câu 34. (HSG 7 huyện 2015 - 2016)**

Tim  $x$ , biết:  $-\frac{15}{12}x + \frac{3}{7} = \frac{6}{5}x - \frac{1}{2}$

**Lời giải**

$$-\frac{15}{12}x + \frac{3}{7} = \frac{6}{5}x - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{5}x + \frac{5}{4}x = \frac{3}{7} + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{6}{5} + \frac{5}{4}\right)x = \frac{13}{14} \Rightarrow \frac{49}{20}x = \frac{13}{14} \Rightarrow x = \frac{130}{343}$$

Vậy  $x = \frac{130}{343}$ .

**Câu 35. (HSG 7 huyện Thái Thụy- 2015 - 2016)**

Tim  $x$ , biết:  $\frac{1}{2} : 2x = -\frac{1}{3}$

**Lời giải**

$$\frac{1}{2} : 2x = -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{4}x = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$$

Vậy  $x = -\frac{4}{3}$ .

**Câu 36. (HSG 7 trường Ân Tường Đông 2014 - 2015)**

Tim  $x$ , biết:

a)  $\frac{3}{4} + \frac{2}{5}x = \frac{29}{60}$

b)  $\left(\frac{7}{3}x - 0,6\right) : 3\frac{2}{5} = 1$

**Lời giải**

a)  $\frac{3}{4} + \frac{2}{5}x = \frac{29}{60}$

$$\Rightarrow \frac{2}{5}x = \frac{29}{60} - \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{4}{15} : \frac{2}{5} = -\frac{2}{3}$$

Vậy  $x = -\frac{2}{3}$ .

b)  $\left(\frac{7}{3}x - 0,6\right) : 3\frac{2}{5} = 1$

$$\Rightarrow \left(\frac{7}{3}x - \frac{6}{10}\right) : \frac{17}{5} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{7}{3}x - \frac{3}{5} = \frac{17}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{3}x = \frac{17}{5} + \frac{3}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$\Rightarrow x = 4 : \frac{7}{3} = \frac{12}{7}$$



$$\text{Vậy } x = \frac{12}{7}.$$

**Câu 37. (HSG 7 huyện Thanh Miện 2022 - 2023)**

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } \frac{3}{5} + \frac{2}{5} : \left( \frac{2}{3} - x \right) = \frac{1}{2}$$

**Lời giải**

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{5} : \left( \frac{2}{3} - x \right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{5} : \left( \frac{2}{3} - x \right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{5}$$

$$\frac{2}{5} : \left( \frac{2}{3} - x \right) = \frac{-1}{10}$$

$$\frac{2}{3} - x = \frac{2}{5} : \left( \frac{-1}{10} \right)$$

$$\frac{2}{3} - x = -4$$

$$x = \frac{2}{3} - (-4)$$

$$x = \frac{14}{3}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{14}{3}.$$



**Câu 38. (HSG 7 thành phố Thanh Hóa 2022 - 2023)**

$$\text{Tìm } x, \text{ biết: } \left( \frac{1}{4}x - 1 \right) + \left( \frac{5}{6}x - 2 \right) - \left( \frac{3}{8}x + 5 \right) = 3,5$$

**Lời giải**

$$\left( \frac{1}{4}x - 1 \right) + \left( \frac{5}{6}x - 2 \right) - \left( \frac{3}{8}x + 5 \right) = 3,5$$

$$\left( \frac{1}{4}x + \frac{5}{6}x - \frac{3}{8}x \right) - (1 + 2 + 5) = 3,5$$

$$x \left( \frac{1}{4} + \frac{5}{6} - \frac{3}{8} \right) = 3,5 + 8$$

$$x \cdot \frac{17}{24} = \frac{23}{2}$$

$$x = \frac{23}{2} : \frac{17}{24} = \frac{23}{2} \cdot \frac{24}{17} = \frac{276}{17}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{276}{17}$$

**Câu 39. (HSG 7 huyện Tam Dương 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết  $x - \frac{-2}{3} = \frac{\frac{5}{11} + 0,2 - 0,375}{\frac{9}{16} - \frac{15}{22} + \frac{3}{2} \cdot (-0,2)}$ .

Lời giải

$$x - \frac{-2}{3} = \frac{\frac{5}{11} + 0,2 - 0,375}{\frac{9}{16} - \frac{15}{22} + \frac{3}{2} \cdot (-0,2)}$$

$$x - \frac{-2}{3} = \frac{\frac{5}{11} + \frac{2}{10} - \frac{3}{10}}{\frac{9}{16} - \frac{15}{22} - \frac{3}{10}}$$

$$x - \frac{-2}{3} = \frac{\frac{5}{11} + \frac{2}{10} - \frac{3}{10}}{\frac{-3}{2} \left( \frac{5}{11} + \frac{2}{10} - \frac{3}{10} \right)}$$

$$x - \frac{-2}{3} = \frac{-2}{3}$$

$$x = \frac{-4}{3}$$

Vậy  $x = \frac{-4}{3}$

**Câu 40.** (Đề thi thử Thanh Miện 2022 - 2023)

Tìm  $x$  biết:  $\frac{3}{5} - \left( \frac{47}{20} - 2x \right) \cdot \frac{2}{15} = \frac{3}{10}$ .

Lời giải

$$\frac{3}{5} - \left( \frac{47}{20} - 2x \right) \cdot \frac{2}{15} = \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow \left( \frac{47}{20} - 2x \right) \cdot \frac{2}{15} = \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow \left( \frac{47}{20} - 2x \right) \cdot \frac{2}{15} = \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{1}{10} \Rightarrow x = \frac{1}{20}$$

Vậy  $x = \frac{1}{20}$ .

**Dạng 2: Đưa về dạng tích bằng 0**

**A. Trắc nghiệm**

**Câu 1.** (HSG 7 huyện Thanh Thủy, tỉnh Phú Thọ 2021 - 2022)

Số các giá trị của  $x$  để  $(x-4)(x^2+16)(x^2-16)(x+1)=0$  là

**A.** 3

**B.** 4

**C.** 5

**D.** 6

Lời giải

**Chọn A**

Ta có :  $(x-4)(x^2+16)(x^2-16)(x+1)=0$

do  $x^2+16 > 0$  với mọi  $x$  nên  $x-4=0$  hoặc  $x^2-16=0$  hoặc  $x+1=0$   
suy ra  $x=4, x=-4, x=-1$

Vậy có 3 giá trị  $x$  thỏa mãn đề bài.

**Câu 2. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)**

Tổng các giá trị của  $x$  thỏa mãn  $(x+1)(x^2+4)(x^2-1)=0$ .

- A. 0.                                  B. -1.                                  C. 1.                                  D. 2.

Lời giải

**Chọn A**

$(x+1)(x^2+4)(x^2-1)=0$

Suy ra  $x+1=0$  hoặc  $x^2-1=0$  (vì  $x^2+4 \neq 0$ )

$\Rightarrow x=-1$  hoặc  $x=\pm 1$

Vậy  $x=1$  hoặc  $x=-1$

Tổng các giá trị của  $x$  là  $1+(-1)=0$ .

**Câu 3. (HSG 7 huyện Lâm Thao 2022 - 2023)**

Số các giá trị nguyên của  $x$  thỏa mãn  $(2x-1)^6=(2x-1)^8$  là

- A. 1.                                  B. 2.                                  C. 3.                                  D. 4.

Lời giải

**Chọn B**

Ta có  $(2x-1)^6=(2x-1)^8 \Rightarrow (2x-1)^6[1-(2x-1)^2]=0$

$\Rightarrow (2x-1)^6=0$  hoặc  $1-(2x-1)^2=0$

+) TH1:  $(2x-1)^6=0$

$2x-1=0$

$x=\frac{1}{2}$

+) TH2:  $1-(2x-1)^2=0$

$(2x-1)^2=1$

$\Rightarrow 2x-1=1$  hoặc  $2x-1=-1$

$\Rightarrow x=1$  hoặc  $x=0$

Suy ra có 2 giá trị  $x$  nguyên thỏa mãn.

**Câu 4. (HSG 7 huyện Tam Nông 2022 - 2023)**

Số các giá trị của  $x$  thỏa mãn đẳng thức sau  $(x-2)^{2024}=(x-2)^{2020}$  là

- A. 4.                                  B. 3.                                  C. 2.                                  D. 2.

Lời giải

**Chọn B**

$(x-2)^{2024}=(x-2)^{2020} \Rightarrow (x-2)^{2024}-(x-2)^{2020}=0$

$$\Rightarrow (x-2)^{2020} [(x-2)^4 - 1] = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)^{2020} = 0 \text{ hoặc } (x-2)^4 - 1 = 0$$

$$\text{TH1: } (x-2)^{2020} = 0 \Rightarrow x-2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{TH2: } (x-2)^4 - 1 = 0 \Rightarrow (x-2)^4 = 1 \Rightarrow x-2 = \pm 1$$

$$\text{Với } x-2 = 1 \Rightarrow x = 3$$

$$\text{Với } x-2 = -1 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{Do đó } x \in \{1; 2; 3\}$$

Vậy số các giá trị của thỏa mãn đẳng thức  $(x-2)^{2024} = (x-2)^{2020}$  là 3.

**Câu 5. (HSG 7 Đề khảo sát lần 3, 2022 - 2023)**

Tổng các số  $x$  thỏa mãn  $(x^2 - 1)(x^2 - 2) \dots (x^2 - 2021) = 0$  là

- A. 1.                                      B. 0.                                      C. 2020.                                      D. 2021.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có:  $x^2 - a = 0$  ( $a > 0$ )  $\Rightarrow x = \sqrt{a}$  hoặc  $x = -\sqrt{a}$

$(x^2 - 1)(x^2 - 2) \dots (x^2 - 2021) = 0$  là tích của các biểu thức dạng  $x^2 - a = 0$  ( $a > 0$ )

Nên các giá trị của  $x$  tìm được đôi một là các số đối của nhau.

Tổng các số  $x$  thỏa mãn  $(x^2 - 1)(x^2 - 2) \dots (x^2 - 2021) = 0$  là 0.

**B. Tự luận**

**Câu 1. (HSG 7 huyện Mường Lát, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết:  $x^2 - 2023x = 0$

**Lời giải**

$$x^2 - 2023x = 0$$

$$x(x - 2023) = 0$$

Suy ra  $x = 0$  hoặc  $x - 2023 = 0$

Suy ra  $x = 0$  hoặc  $x = 2023$

Vậy  $x = 0$  hoặc  $x = 2023$ .

**Câu 2. (HSG 7 Hưng Hà, Tây Đô 2022 - 2023)**

Tìm số nguyên  $x$  sao cho:  $(x+2)^{n+1} = (x+2)^{n+11}$ .

**Lời giải**

$$(x+2)^{n+1} = (x+2)^{n+11}$$

$$\Rightarrow (x+2)^{n+1} - (x+2)^{n+11} = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)^{n+1} [1 - (x+2)^{10}] = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)^{n+1} = 0 \text{ hoặc } 1 - (x+2)^{10} = 0$$

$$\Rightarrow x = -2 \text{ hoặc } x+2 = 1 \text{ hoặc } x+2 = -1$$

Vậy  $x \in \{-2; -1; -3\}$

**Câu 3. (HSG 7 Yên Bái, Yên Bình 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết:  $(2x-15)^5 = (2x-15)^3$

**Lời giải**

$$(2x-15)^5 = (2x-15)^3 \Rightarrow (2x-15)^3 \cdot [(2x-15)^2 - 1] = 0$$

$$\Rightarrow (2x-15)^3 = 0 \text{ hoặc } (2x-15)^2 - 1 = 0.$$

$$\Rightarrow 2x-15 = 0 \text{ hoặc } 2x-15 = 1 \text{ hoặc } 2x-15 = -1.$$

$$\Rightarrow x = \frac{15}{2} \text{ hoặc } x = 8 \text{ hoặc } x = 7.$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{15}{2}; 8; 7 \right\}.$$

**Câu 4. (HSG 7 Sông Lô, Vĩnh Phúc, 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết:  $(2x-15)^{2023} = (2x-15)^{2021}$ .

**Lời giải**

$$(2x-15)^{2023} = (2x-15)^{2021}$$

$$\Rightarrow (2x-15)^{2023} = (2x-15)^{2021}$$

$$\Rightarrow (2x-15)^{2021} \cdot [(2x-15)^2 - 1] = 0$$

$$\Rightarrow (2x-15)^{2021} = 0 \text{ hoặc } (2x-15)^{2021} = 1$$

$$\Rightarrow 2x-15 = 0 \text{ hoặc } 2x-15 = 1 \text{ hoặc } 2x-15 = -1.$$

$$\Rightarrow 2x = 15 \text{ hoặc } 2x = 16 \text{ hoặc } 2x = 14..$$

$$\Rightarrow x = \frac{15}{2} \text{ hoặc } x = 8 \text{ hoặc } x = 7..$$

$$\Rightarrow x \in \left\{ \frac{15}{2}; 8; 7 \right\}.$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{15}{2}; 8; 7 \right\}.$$

**Câu 5. (HSG 7 huyện Anh Sơn- 2016 - 2017)**

Tìm  $x$ , biết:  $(2x-1)^7 = (2x-1)^5$

**Lời giải**

$$(2x-1)^7 = (2x-1)^5$$

$$\Rightarrow (2x-1)^5 \cdot [(2x-1)^2 - 1] = 0$$

$$\Rightarrow (2x-1)^5 = 0 \text{ hoặc } (2x-1)^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}, x = 0 \text{ hoặc } x = 1$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{1}{2}; 0; 1 \right\}.$$

**Câu 6. (HSG 7 huyện Tam Điệp 2021 - 2022)**

Tìm  $x$  biết:  $(x-7)^{x+1} - (x-7)^{x+1} = 0$

**Lời giải**

Ta có  $(x-7)^{x+1} - (x-7)^{x+1} = 0$

$$\Rightarrow (x-7)^{x+1} [1 - (x-7)^0] = 0$$

$$\Rightarrow x-7 = 0 \text{ hoặc } (x-7)^0 = 1$$

$$\Rightarrow x = 7 \text{ hoặc } x - 7 = \pm 1$$

$$\Rightarrow x = 7 \text{ hoặc } x = 8 \text{ hoặc } x = 6$$

$$\text{Vậy } x \in \{8; 7; 6\}$$

**Câu 7. (HSG 7 huyện Thường Tín 2018 - 2019)**

Tìm  $x$  biết:

a)  $(2x-3)(3x+1) = \left( \frac{8}{2017} - \frac{8}{2018} + 27 \frac{3}{2019} \right) \cdot \left( \frac{-34}{35} + \frac{2}{5} - \frac{3}{7} + 1 \right)$ .

b)  $x^2 - 5x = -6$ .

**Lời giải**

a)  $(2x-3)(3x+1) = \left( \frac{8}{2017} - \frac{8}{2018} + 27 \frac{3}{2019} \right) \cdot \left( \frac{-34}{35} + \frac{2}{5} - \frac{3}{7} + 1 \right)$ .

Xét  $\frac{-34}{35} + \frac{2}{5} - \frac{3}{7} + 1 = \frac{-34+14-15+35}{35} = 0$ .

Thay vào ta có:  $(2x-3)(3x+1) = 0$ .

Suy ra:  $2x-3 = 0$  hoặc  $3x+1 = 0$ .

$$x = \frac{3}{2} \text{ hoặc } x = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{3}{2}; -\frac{1}{3} \right\}.$$

b)  $x^2 - 5x = -6$

Ta có:  $x^2 - 5x + 6 = 0$ .

$$\Rightarrow (x^2 - 2x) - (3x - 6) = 0.$$

$$\Rightarrow x(x-2) - 3(x-2) = 0.$$

$$\Rightarrow (x-3)(x-2) = 0.$$

TH1 :  $x-3 = 0 \Rightarrow x = 3$ .

TH2:  $x-2 = 0 \Rightarrow x = 2$ .

$$\text{Vậy } x \in \{3; 2\}.$$

**Câu 8. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn, tỉnh Bình Định, trường Đào Duy Từ 2018 - 2019)**

Cho đa thức  $A = 2x.(x-3) - x.(x-7) - 3.(x-673)$ .

Tính giá trị của  $A$  khi  $x = 2$ . Tìm  $x$  để  $A = 2019$ .

**Lời giải**

Ta có:  $A = 2x^2 - 6x - x^2 + 7x - 3x + 2019 = x^2 - 2x + 2019$ .

+) Tính giá trị của  $A$  khi  $x = 4$ .

Thay  $x = 4$  vào  $A$ , ta được:  $A = 2^2 - 2.2 + 2019 = 2019$ .

+) Tìm  $x$  để  $A = 2019$ .

$$A = 2019.$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 2019 = 2019.$$

$$x^2 - 2x = 0.$$

$$x(x-2) = 0.$$

$$x = 0 \text{ hoặc } x - 2 = 0.$$

$$\text{Vậy } x = 0 \text{ hoặc } x = 2.$$

**Câu 9. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2018 - 2019)**

Tìm  $x$  thỏa mãn:  $(\sqrt{x} - 4)(|x+2|-1)(x^2 - 3) = 0$ .

**Lời giải**

$$(\sqrt{x} - 4)(|x+2|-1).(x^2 - 3) = 0 \quad (x \geq 0).$$

$$\text{TH1: } \sqrt{x} - 4 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16$$

$$\text{TH2: } |x+2|-1 = 0 \Rightarrow |x+2| = 1 \Rightarrow x+2 = 1 \text{ hoặc } x+2 = -1.$$

Suy ra  $x = -1$  (Không thỏa mãn) hoặc  $x = -3$  (Không thỏa mãn)

$$\text{TH3: } x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3} \text{ (vì } x \geq 0).$$

$$\text{Vậy } x \in \{16; \sqrt{3}\}.$$

**Câu 10. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường HỒNG LĨNH 2022 - 2023)**

Tìm  $x$ , biết:  $(x-4)^{x+3} - (x-4)^{x+13} = 0$

**Lời giải**

$$(x-4)^{x+3} - (x-4)^{x+13} = 0$$

$$(x-4)^{x+3} [1 - (x-4)^{10}] = 0$$

$$(x-4)^{x+3} = 0 \text{ hoặc } 1 - (x-4)^{10} = 0$$

$$+ \text{ Với } (x-4)^{x+3} = 0$$

$$x-4 = 0 \quad (\text{Điều kiện } x+3 \neq 0)$$

$$x = 4$$

$$+ \text{ Với } 1 - (x-4)^{10} = 0$$

$$(x-4)^{10} = 1$$

$$x-4 = 1 \text{ hoặc } x-4 = -1$$

$$x = 5 \text{ hoặc } x = 3$$

$$\text{Vậy } x = 3, x = 4, x = 5$$

**Câu 11. (HSG 7 huyện Phù Cát 2017 - 2018)**

$$\text{Tìm } x, \text{ biết: } (x-5)^{x+1} - (x-5)^{x+13} = 0$$

**Lời giải**

$$(x-5)^{x+1} - (x-5)^{x+13} = 0$$

$$(x-5)^{x+1} \cdot [1 - (x-5)^{12}] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-5)^{x+1} = 0 \\ 1 - (x-5)^{12} = 0 \end{cases}$$

$$+ (x-5)^{x+1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-5 = 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x = 5$$

$$+ 1 - (x-5)^{12} = 0 \Rightarrow (x-5)^{12} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x-5 = 1 \\ x-5 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x \in \{4; 5; 6\}.$$

**Câu 12. (HSG 7 huyện 2018 - 2019)**

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } (2x-1)^7 = (2x-1)^5.$$

**Lời giải**

$$(2x-1)^7 = (2x-1)^5.$$

$$\Rightarrow (2x-1)^5 \cdot [(2x-1)^2 - 1] = 0.$$

$$\text{TH1: } (2x-1)^5 = 0 \Rightarrow 2x-1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{TH2: } (2x-1)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (2x-1)^2 = 1 \Rightarrow 2x-1 = 1 \text{ hoặc } 2x-1 = -1 \Rightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = 0.$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{1}{2}; 1; 0 \right\}.$$

**Câu 13. (HSG 7 huyện)**

$$\text{Tìm } x, \text{ biết: } (x-7)^{x+1} - (x-7)^{x+11} = 0$$

**Lời giải**

$$(x-7)^{x+1} - (x-7)^{x+11} = 0$$

$$(x-7)^{x+1} [1 - (x-7)^{10}] = 0$$

TH1:

$$(x-7)^{x+1} = 0$$

$$x-7 = 0$$

$$x = 7$$

TH2:



$$1 - (x - 7)^{10} = 0$$

$$1 = (x - 7)^{10}$$

$$x - 7 = 1$$

$$x = -8$$

TH3:

$$x - 7 = -1$$

$$x = 6$$

Vậy  $x = 7, x = -8, x = 6$

**Câu 14. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường ..... 2022 - 2023)**

Tim  $x$  biết:  $7x^2 - 35x + 42 = 0$

**Lời giải**

$$\text{Ta có } 7x^2 - 35x + 42 = 7(x^2 - 5x + 6)$$

$$= 7[x(x-3) - 2(x-3)]$$

$$= 7[(x^2 - 3x) - (2x - 6)]$$

$$= 7(x-3)(x-2)$$

$$7x^2 - 35x + 42 = 0$$

$$7(x-3)(x-2) = 0$$

$$\text{TH1: } x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

$$\text{TH2: } x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

Vậy  $x = 3; x = 2$



**CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS**

**Câu 15. (HSG 7 trường Phương Trung – Thanh Oai 2018-2019)**

Tim số hữu tỉ  $x$ , biết:  $x - 2\sqrt{x} = 0$  ( $x \geq 0$ )

**Lời giải**

$$x - 2\sqrt{x} = 0$$

$$\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) = 0$$

$$\text{TH1: } \sqrt{x} = 0$$

$$x = 0 \text{ (thoả điều kiện } x \geq 0)$$

$$\text{TH2: } \sqrt{x} - 2 = 0$$

$$x = 4 \text{ (thoả điều kiện } x \geq 0)$$

Vậy  $x = 4; x = 0$

**Câu 16. (HSG 7 trường THCS Vị Thanh 2018 - 2019)**

Tim  $x$  biết:  $x^2 - 2(x+3) = x - 6$

**Lời giải**

$$x^2 - 2(x+3) = x - 6$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 3$$

$$\text{Vậy } x \in \{0; 3\}$$

**Câu 17. (HSG 7 trường Trần Hưng Đạo, trường Trường Sa, 2017 – 2018)**

Tìm  $x$  biết:  $7x^2 - 35x + 42 = 0$

**Lời giải**

$$7x^2 - 35x + 42 = 0$$

$$7(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x^2 - 3x) - (2x - 6) = 0$$

$$(x-3)(x-2) = 0$$

$$\text{* TH1: } x-3 = 0$$

$$x = 3$$

$$\text{* TH2: } x-2 = 0$$

$$x = 2$$

$$\text{Vậy } x \in \{2; 3\}$$

**Câu 18. (HSG 7 trường Nguyễn Trực 2017 - 2018)**

Tìm  $x$  biết:  $x^2 - 5x + 6 = 0$

**Lời giải**

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3x + 6 = 0$$

$$x(x-2) - 3(x-2) = 0$$

$$(x-2)(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow x-2 = 0 \text{ hoặc } x-3 = 0$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = 3$$

$$\text{Vậy } x \in \{2; 3\}.$$

**Câu 19. (HSG 7 huyện Mù Cang Chải 2016 - 2017; trường Hiền Quan 2015 - 2016; huyện Khoái Châu 2014 – 2015)**

Tìm  $x$ , biết:  $x - 3\sqrt{x} = 0$  ( $x \geq 0$ )

**Lời giải**

$$x - 3\sqrt{x} = 0 \quad (x \geq 0)$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = 0 \text{ hoặc } \sqrt{x} - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 9$$

$$\text{Vậy } x \in \{0; 9\}.$$

**Câu 20. (HSG 7 huyện Nga Sơn 2016 - 2017)**

Tìm  $x$ , biết:  $x^2(x+2) + 4(x+2) = 0$

**Lời giải**

$$x^2(x+2) + 4(x+2) = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 + 4)(x+2) = 0$$

$$\Rightarrow x = -2 \text{ (do } x^2 + 4 > 0 \text{ với mọi } x)$$

Vậy  $x = -2$ .

**Câu 21. (HSG 7 trường Nguyễn Khuyến 2016 - 2017)**

Tìm  $x$ , biết:  $(2x+1)^4 = (2x+1)^6$

**Lời giải**

$$(2x+1)^4 = (2x+1)^6$$

$$\Rightarrow (2x+1)^6 - (2x+1)^4 = 0$$

$$\Rightarrow (2x+1)^4 [(2x+1)^2 - 1] = 0$$

$$\Rightarrow 2x+1 = 0 \text{ hoặc } (2x+1)^2 = 1$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}, x = 0 \text{ hoặc } x = -1$$

Vậy  $x \in \left\{ -\frac{1}{2}; 0; -1 \right\}$ .

**Câu 22. (HSG 7 huyện Quốc Oai - 2016 - 2017)**

Tìm  $x$ , biết:  $(x-3)^{x+2} - (x-3)^{x+8} = 0$

**Lời giải**

$$(x-3)^{x+2} - (x-3)^{x+8} = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)^{x+2} [1 - (x-3)^6] = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)^{x+2} = 0 \text{ hoặc } 1 - (x-3)^6 = 0$$

$$\Rightarrow x = 3, x = 4 \text{ hoặc } x = 2$$

Vậy  $x \in \{2; 3; 4\}$

**Câu 23. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc 2016 - 2017)**

Tìm  $x$ , biết:  $(x+2)^{n+1} = (x+2)^{n+1}$  với  $n$  là số tự nhiên

**Lời giải**

$$(x+2)^{n+1} = (x+2)^{n+1}$$

$$\Rightarrow (x+2)^{n+1} - (x+2)^{n+1} = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)^{n+1} [1 - (x+2)^{10}] = 0 \Rightarrow (x+2)^{n+1} = 0 \text{ hoặc } 1 - (x+2)^{10} = 0$$

$$\text{TH1: } (x+2)^{n+1} = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$\text{TH2: } 1 - (x+2)^{10} = 0 \Rightarrow (x+2)^{10} = 1 \Rightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = -3$$

$$\text{Vậy } x \in \{-2; -1; -3\}.$$

**Dạng 3: Sử dụng tính chất lũy thừa**

**A. Trắc nghiệm (nếu có)**

**Câu 1. (HSG 7 huyện Tam Nông 2022 - 2023)**

Tổng các giá trị của  $x$  trong biểu thức  $(\sqrt{x}-3)^2 = 4$  là

- A. 26.                      B. 25.                      C. 6.                      D. 1.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$(\sqrt{x}-3)^2 = 4 \Rightarrow \sqrt{x}-3 = \pm 2$$

$$\text{TH1: } \sqrt{x}-3 = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 5 \Rightarrow x = 25$$

$$\text{TH2: } \sqrt{x}-3 = -2 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$$

Tổng các giá trị của  $x$  trong biểu thức là  $25+1=26$ .

**Câu 2. (HSG 7 Thanh Thủy 2022 - 2023)**

Cho biết  $x$  là số hữu tỉ thỏa mãn  $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{16}$ . Khi đó tổng các giá trị của  $x$  là

- A.  $\frac{5}{4}$ .                      B.  $-\frac{1}{4}$ .                      C.  $\frac{3}{2}$ .                      D. 1.

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Có } \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow x-\frac{1}{2} = \frac{3}{4} \text{ hoặc } x-\frac{1}{2} = -\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{4} \text{ hoặc } x = -\frac{1}{4}$$

Tổng các giá trị của  $x$  là  $\frac{5}{4} + \frac{-1}{4} = 1$ .

**Câu 3. (HSG 7 huyện Lạng Giang, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)**

Biết rằng  $x$  là số hữu tỉ thỏa mãn:  $(2x-1)^2 - 1 = 0$ . Tích của các số đó là:

- A. 1                      B. -1                      C. 0                      D. 2

**Lời giải**

**Chọn C**

$$(2x-1)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (2x-1)^2 = 1$$

$$\Rightarrow 2x-1 = 1 \text{ hoặc } 2x-1 = -1$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = 0$$

Tích của các số hữu tỉ  $x$  là:  $1 \cdot 0 = 0$ .

**Câu 4. (HSG 7 huyện Thanh Ba 2021 - 2022)**

Cho số hữu tỉ  $x$  thỏa mãn  $(x+1)^3 = 125$ , giá trị của  $\sqrt{x}$  là

- A. -4                      B. 2                      C. -2                      D. 4

Lời giải

**Chọn B**

Ta có:

$$(x+1)^3 = 125$$

$$(x+1)^3 = 5^3$$

$$x+1 = 5$$

$$x = 4$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$\text{Vậy } \sqrt{x} = 2$$

**Câu 5. (HSG 7 huyện Tam Nông 2021 - 2022)**

Giá trị  $x$  thỏa mãn  $\sqrt{2^x} = 16$  là

- A. 4.                      B. 6.                      C. 8.                      D. 10.

Lời giải

**Chọn C**

Ta có:

$$\sqrt{2^x} = 16$$

$$2^x = 16^2$$

$$2^x = (2^4)^2$$

$$2^x = 2^8$$

$$x = 8$$

$$\text{Vậy } x = 8$$

**Câu 6. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn, tỉnh, trường Đào Duy Từ 2018 - 2019)**

Giá trị của  $x$  trong biểu thức  $(\sqrt{x}-1)^2 = 0,25$  là:

- A.  $\frac{9}{4}; \frac{1}{4}$                       B.  $-\frac{1}{4}; -\frac{9}{4}$                       C.  $\frac{9}{4}; -\frac{1}{4}$                       D.  $-\frac{9}{4}; \frac{1}{4}$ .

Lời giải

**Chọn A**

$$(\sqrt{x}-1)^2 = 0,25.$$

$$\sqrt{x}-1 = 0,5 \text{ hoặc } \sqrt{x}-1 = -0,5.$$

$$\sqrt{x} = 1,5 \text{ hoặc } \sqrt{x} = 0,5.$$

$$x = \frac{9}{4} \text{ hoặc } x = \frac{1}{4}.$$

Vậy  $x \in \left\{ \frac{9}{4}; \frac{1}{4} \right\}$ .

**Câu 7. (HSG 7 huyện Tân An, 2017 - 2018)**

Cho  $a^{2m} = -4$ . Kết quả của  $2a^{6m} - 5$  là:

- A. -123                      B. -133                      C. 123                      D. -128

**Lời giải**

**Chọn A**

$$a^{6m} = a^{2m} \cdot a^{2m} \cdot a^{2m} = (-4)^3 = -64$$

$$\text{Suy ra } 2a^{6m} - 5 = 2 \cdot (-64) - 5 = -123.$$

**Câu 8. (HSG 7 huyện Lâm Thao 2016 - 2017)**

Giá trị của  $x$  trong biểu thức  $(\sqrt{x} - 1)^2 = 0,25$  là

- A.  $\frac{9}{4}; \frac{1}{4}$                       B.  $-\frac{1}{4}; -\frac{9}{4}$                       C.  $\frac{9}{4}; -\frac{1}{4}$                       D.  $-\frac{9}{4}; \frac{1}{4}$

**Lời giải**

**Chọn A**

$$(\sqrt{x} - 1)^2 = 0,25$$

Điều kiện:  $x \geq 0$

$$\Rightarrow \sqrt{x} - 1 = 0,5 \text{ hoặc } \sqrt{x} - 1 = -0,5$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = 1,5 \text{ hoặc } \sqrt{x} = 0,5$$

$$\Rightarrow x = \frac{9}{4} \text{ hoặc } x = \frac{1}{4} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy  $x \in \left\{ \frac{9}{4}; \frac{1}{4} \right\}$ .

**Câu 9. (HSG 7 huyện Vĩnh Tường 2015 - 2016)**

Nếu  $3^x \cdot 3^{x+2} \cdot 3^{x+3} = 81 \cdot 3^{16}$  thì giá trị của  $x$  là

- A. 3                      B. 4                      C. 5                      D. 6

**Lời giải**

**Chọn C**

$$3^x \cdot 3^{x+2} \cdot 3^{x+3} = 81 \cdot 3^{16}$$

$$3^{x+(x+2)+(x+3)} = 3^4 \cdot 3^{16}$$

$$3^{3x+5} = 3^{20}$$

$$\Rightarrow 3x + 5 = 20$$

$$\Rightarrow x = 5$$

Vậy  $x = 5$ .

**B. Tự luận**

**Câu 1. (HSG 7 huyện Lục Ngạn 2022 - 2023).**

Địa y là một dạng kết hợp giữa nấm (*mycobiont*) và một loại sinh vật có thể quang hợp (*photobiont hay phycobiont*) trong mối quan hệ cộng sinh. Khi trái đất nóng dần lên làm cho băng trên các dòng sông bị đóng băng tan dần. Mười hai năm sau khi băng tan, Địa y bắt đầu phát triển và nếu mỗi nhóm Địa y phát triển trên một khoảng đất hình tròn thì mối quan hệ giữa đường kính  $d$  (tính bằng *mi-li - mét*) của hình tròn đó và tuổi  $t$  của Địa y có thể biểu diễn theo công thức:  $d = 7\sqrt{t-12}$  (với  $t \geq 12$ ). Năm 2022, người ta đã đo được đường kính của một nhóm Địa y cạnh một dòng sông là  $42mm$ . Với kết quả đo trên, em hãy tính xem băng trên dòng sông đó đã tan năm nào?

**Lời giải**

Vì đường kính của Địa y là  $42mm$  nên ta có :

$$7\sqrt{t-12} = 42 \Rightarrow \sqrt{t-12} = 6 \Rightarrow (\sqrt{t-12})^2 = 6^2 \Rightarrow t-12 = 36 \Rightarrow t = 48 \text{ (thỏa mãn } t \geq 12)$$

Do đó băng trên dòng sông đã tan vào năm:  $2022 - 48 - 12 = 1962$ .

**Câu 2. (HSG 7 thị xã Thái Hòa Nghệ An 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết:  $\frac{3}{4} - (2x-1)^2 = 50\%$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \frac{3}{4} - (2x-1)^2 = 50\% \Rightarrow (2x-1)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 2x-1 = \frac{1}{2} \text{ hoặc } 2x-1 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Trường hợp 1: } 2x-1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

$$\text{Trường hợp 2: } 2x-1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{1}{4}; \frac{3}{4} \right\}$$

**Câu 3. (HSG 7 huyện Tân Kỳ 2021 - 2022)**

Tìm  $x$ , biết:  $5 - (x-2)^2 = -4$

**Lời giải**

$$5 - (x-2)^2 = -4$$

$$(x-2)^2 = 9$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2 = 3 \\ x-2 = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x \in \{-1; 5\}$$

**Câu 4. (HSG 7 huyện Anh Sơn 2022 - 2023).**

Tìm  $x$  biết:  $\left(\frac{1}{5} - x\right)^2 = 3^2$ .

**Lời giải**

$$\text{TH1: } \frac{1}{5} - x = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{5} - 3 \Rightarrow x = \frac{-14}{5}$$

$$\text{TH2: } \frac{1}{5} - x = -3 \Rightarrow x = \frac{1}{5} + 3 \Rightarrow x = \frac{16}{5}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{16}{5}; x = \frac{-14}{5}.$$

**Câu 5. (HSG 7 huyện Lập Thạch, Vĩnh Phúc 2022 - 2023).**

Tìm  $x$ , biết  $3^{-1} \cdot 3^x + 9 \cdot 3^x = 28$ .

**Lời giải**

Tìm  $x$ , biết  $3^{-1} \cdot 3^x + 9 \cdot 3^x = 28$

$$3^{-1} \cdot 3^x + 9 \cdot 3^x = 28$$

$$3^x \cdot \left( 9 + \frac{1}{3} \right) = 28$$

$$3^x \cdot \frac{28}{3} = 28$$

$$3^x = 3$$

$$x = 1$$

Vậy  $x = 1$ .

**Câu 6. (HSG 7 thành phố Ninh Bình 2022 - 2023).**

Giải các phương trình sau:  $(x+2)^{n+1} = (x+2)^{n+11}$  (với  $n$  là số tự nhiên).

**Lời giải**

$$(x+2)^{n+1} = (x+2)^{n+11}$$

$$(x+2)^{n+1} - (x+2)^{n+11} = 0$$

$$(x+2)^{n+1} [1 - (x+2)^{10}] = 0$$

$$\text{TH1: } (x+2)^{n+1} = 0 \text{ suy ra } x = -2$$

$$\text{TH2: } 1 - (x+2)^{10} = 0$$

$$(x+2)^{10} = 1$$

$$x+2 = 1 \text{ suy ra } x = -1$$

$$x+2 = -1 \text{ suy ra } x = -3$$

Vậy  $x = -2; x = -1; x = -3$ .

**Câu 7. (HSG 7 -TP Thanh Hóa, 2022 - 2023).**

Tìm  $x$  biết:  $5^{2x-1} = 5^{2x-3} + 125 \cdot 24$ .

**Lời giải**

$$5^{2x-1} = 5^{2x-3} + 125 \cdot 24$$

$$5^{2x-1} - 5^{2x-3} = 5^3 \cdot 24$$

$$5^{2x-3} \cdot 5^2 - 5^{2x-3} = 5^3 \cdot 24$$

$$5^{2x-3} \cdot (5^2 - 1) = 5^3 \cdot 24$$

$$5^{2x-3} = 5^3$$



$$2x - 3 = 3$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

Vậy  $x = 3$ .

**Câu 8. (HSG 7 huyện Lương Tài tỉnh Bắc Ninh 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết  $5^{x+2} + 5^{x+3} = 750$ .

**Lời giải**

$$5^{x+2} + 5^{x+3} = 750$$

$$5^x \cdot 5^2 + 5^x \cdot 5^3 = 750$$

$$5^x = 5$$

$$x = 1$$

Vậy  $x = 1$ .

**Câu 9. (HSG 7 huyện Triệu Sơn 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết:  $(x+1)^{x^2+x+2} - (x+1)^{x^2+x} = 0$ .

**Lời giải**

$$(x+1)^{x^2+x+2} - (x+1)^{x^2+x} = 0$$

$$(x+1)^{x(x+1)} [(x+1)^2 - 1] = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)^{x(x+1)} = 0 \text{ hoặc } (x+1)^2 - 1 = 0$$

$$\text{Trường hợp 1: } (x+1)^{x(x+1)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x(x+1) \neq 0 \end{cases} (VL)$$

$$\text{Trường hợp 2: } (x+1)^2 - 1 = 0 \Rightarrow x+1=1 \text{ hoặc } x+1=-1$$

$$+) x+1=1 \Rightarrow x=0$$

$$+) x+1=-1 \Rightarrow x=-2$$

Vậy  $x=0$  hoặc  $x=-2$ .

**Câu 10. (HSG 7 huyện Liên Trường 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết:  $3^{x+1} + 3^{x+2} - 2 \cdot 3^x = 270$ .

**Lời giải**

$$3^{x+1} + 3^{x+2} - 2 \cdot 3^x = 270$$

$$3^x(3 + 3^2 - 2) = 270$$

$$3^x = 270 : 10 = 27 = 3^3$$

$$\Rightarrow x = 3$$

Vậy  $x = 3$ .

**Câu 11. (HSG 7 huyện Diễn Châu 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết:  $|-2| \cdot 3^x + 3^{x+2} = 99$ .

**Lời giải**

$$|-2| \cdot 3^x + 3^{x+2} = 99$$

$$2 \cdot 3^x + 3^x \cdot 3^2 = 99$$

$$3^x (2 + 3^2) = 99$$

$$3^x \cdot 11 = 99$$

$$3^x = 9$$

$$x = 2$$

Vậy  $x = 2$ .

**Câu 12. (HSG 7 huyện Hậu Lộc 2022 - 2023)**

Tìm  $x$ , biết:  $\frac{1}{5^{x-1}} + 3 \cdot 5^{2-x} = \frac{16}{125}$ .

**Lời giải**

$$\frac{1}{5^{x-1}} + 3 \cdot 5^{2-x} = \frac{16}{125}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} + 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} = \frac{16}{125}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} + 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} \cdot 5 = \frac{16}{125}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^3$$

$$\Rightarrow x - 1 = 3$$

$$\Rightarrow x = 4$$

Vậy  $x = 4$ .

**Câu 13. (HSG 7 huyện Tương Dương, tỉnh Nghệ An 2022 - 2023)**

Tìm  $x$ , biết:  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{234}$ .

**Lời giải**

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{243} \text{ hay } \left(x - \frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{3}\right)^5.$$

Từ đó suy ra:

$$x - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{5}{6}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{5}{6}.$$

**Câu 14. (HSG 7 huyện Tương Dương, tỉnh Nghệ An 2022 - 2023)**

Tìm  $x$ , biết:  $3^{x+2} + 4 \cdot 3^{x+1} + 3^{x-1} = 6^6$ .

**Lời giải**

$$3^{x+2} + 4 \cdot 3^{x+1} + 3^{x-1} = 6^6$$

$$3^3 \cdot 3^{x-1} + 4 \cdot 3^2 \cdot 3^{x+1} + 3^{x-1} = 6^6$$

$$3^{x-1} \cdot (3^3 + 4 \cdot 3^2 + 1) = 6^6$$

$$3^{x-1} \cdot 64 = 6^6$$

$$3^{x-1} \cdot 2^6 = 6^6$$

$$3^{x-1} = 6^6 : 2^6$$

$$3^{x-1} = 3^6$$

$$x - 1 = 6$$

$$x = 7$$

Vậy  $x = 7$ .

**Câu 15. (HSG 7 huyện Ninh Giang, tỉnh Hải Dương 2022 - 2023)**

Tìm  $x$ , biết:  $4^x + 5 \cdot 2^{2x+1} = 176$ .

**Lời giải**

$$4^x + 5 \cdot 2^{2x+1} = 176$$

$$2^{2x} + 5 \cdot 2^{2x} \cdot 2 = 176$$

$$2^{2x} (1+10) = 176$$

$$2^{2x} = 16$$

$$2^{2x} = 2^4$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

Vậy  $x = 2$ .

**Câu 16. (HSG 7 huyện Chương Mỹ, Hà Nội 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết:  $2^x + 2^{x+2} = 160$ .

**Lời giải**

$$2^x + 2^{x+2} = 160$$

$$2^x + 2^x \cdot 4 = 160$$

$$2^x \cdot 5 = 160$$

$$2^x = 32 = 2^5$$

$$x = 5$$

Vậy  $x = 5$ .

**Câu 17. (HSG 7 huyện Nghĩa Đàn, tỉnh Nghệ An 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết:  $3^{2x-1} - 2 = 160 - 5 \cdot 3^{2x-1}$ .

**Lời giải**

$$3^{2x-1} - 2 = 160 - 5 \cdot 3^{2x-1}$$

$$3^{2x-1} + 5 \cdot 3^{2x-1} = 162$$

$$3^{2x-1} \cdot 6 = 162$$

$$3^{2x-1} = 27$$

$$3^{2x-1} = 3^3$$

$$2x - 1 = 3$$

$$x = 2$$

Vậy  $x = 2$ .

**Câu 18. (HSG 7 huyện Nghi Lộc, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)**

Tìm số  $x$  biết :  $3^x + 3^{x+3} = 252$ .

**Lời giải**

$$3^x + 3^{x+3} = 252$$

$$3^x(1 + 3^3) = 252$$

$$3^x \cdot 28 = 252$$

$$3^x = 252 : 28$$

$$3^x = 9$$

$$3^x = 3^2$$

Suy ra  $x = 2$ .

Vậy  $x = 2$ .

**Câu 19. (HSG 7 thị xã Kỳ Anh, 2022 - 2023)**

Cho biết:  $(0,01)^{22} \cdot x = (0,001)^{23}$ . Tìm  $x$  dưới dạng lũy thừa của số hữu tỉ?

**Lời giải**

Kết quả:  $(0,1)^{25}$ .

$$(0,01)^{22} \cdot x = (0,001)^{23} \Rightarrow (0,1)^{44} \cdot x = (0,1)^{69} \Rightarrow x = (0,1)^{69} : (0,1)^{44} = (0,1)^{25}.$$

Vậy  $x = (0,1)^{25}$ .

**Câu 20. (HSG 7 Hưng Hà, Thái Phương, 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết:  $5^x + 25 \cdot 5^x \cdot 5^1 + 125 \cdot 5^x \cdot 5^2 = 81275$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } 5^x + 25 \cdot 5^x \cdot 5^1 + 125 \cdot 5^x \cdot 5^2 = 81275$$

$$5^x(1 + 25 \cdot 5 + 125 \cdot 25) = 81275$$

$$5^x \cdot 3251 = 81275$$

$$5^x = 25$$

$$5^x = 5^2$$

$$\Rightarrow x = 2$$

Vậy  $x = 2$ .

**Câu 21. (HSG 7 Yên Bình, 2022 - 2023)**

Tìm  $x$ , biết:

a)  $2^{x+2} - 2^x = 96$

b)  $(2x - 15)^5 = (2x - 15)^3$

**Lời giải**

a)  $2^{x+2} - 2^x = 96$

$$2^x(2^2 - 1) = 96$$

$$2^x = 32$$

$$2^x = 2^5$$

$$x = 5.$$

Vậy  $x = 5$ .

$$b) (2x - 15)^5 = (2x - 15)^3$$

$$(2x - 15)^3 \cdot [(2x - 15)^2 - 1] = 0$$

$$\Rightarrow (2x - 15)^3 = 0 \text{ hoặc } (2x - 15)^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 15 = 0 \text{ hoặc } 2x - 15 = 1 \text{ hoặc } 2x - 15 = -1.$$

$$\Rightarrow x = \frac{15}{2} \text{ hoặc } x = 8 \text{ hoặc } x = 7.$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{15}{2}; 8; 7 \right\}.$$

**Câu 22. (HSG 7 Sóc Sơn, 2022 - 2023)**

Tìm  $x$ , biết:  $5^{2x+3} \cdot 5^{3x} - \underbrace{1000\dots0}_{2023 \text{ số } 0} : 2^{2023} = 0.$

**Lời giải**

$$5^{2x+3} \cdot 5^{3x} - \underbrace{1000\dots0}_{2023 \text{ số } 0} : 2^{2023} = 0.$$

$$\Rightarrow 5^{5x+3} - 10^{2023} : 2^{2023} = 0$$

$$\Rightarrow 5^{5x+3} - (10 : 2)^{2023} = 0$$

$$\Rightarrow 5^{5x+3} = 5^{2023}$$

$$\Rightarrow 5x + 3 = 2023$$

$$\Rightarrow 5x = 2020$$

$$\Rightarrow x = 404.$$

Vậy  $x = 404$ .

**Câu 23. (HSG 7 huyện Yên Bình, Yên Bái 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết:  $(x - 1)^3 = 125.$

**Lời giải**

$$(x - 1)^3 = 125.$$

$$(x - 1)^3 = 5^3$$

$$x - 1 = 5$$

$$x = 6$$

Vậy  $x = 6$ .

**Câu 24. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Kim Chung 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết:  $\frac{7^{x+2} + 7^{x+1} + 7^x}{57} = \frac{5^{2x} + 5^{2x+1} + 5^{2x+3}}{131}$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{7^{x+2} + 7^{x+1} + 7^x}{57} &= \frac{5^{2x} + 5^{2x+1} + 5^{2x+3}}{131} \\ \frac{7^x \cdot 7^2 + 7^x \cdot 7^1 + 7^x}{57} &= \frac{(5^2)^x + (5^2)^x \cdot 5^1 + (5^2)^x \cdot 5^3}{131} \\ \frac{7^x (7^2 + 7^1 + 1)}{57} &= \frac{25^x (1 + 5^1 + 5^3)}{131} \end{aligned}$$

$$7^x = 25^x$$

$$\left(\frac{7}{25}\right)^x = 1$$

$$x = 0$$

Vậy  $x = 0$ .

**Câu 25. (HSG 7 huyện Bát Xát 2021 - 2022)**

Tìm  $x$  biết  $5^x + 5^{x+2} = 650$

**Lời giải**

$$5^x + 5^{x+2} = 650$$

$$5^x (1 + 5^2) = 650$$

$$5^x = 650 : (1 + 5^2)$$

$$5^x = 5^2$$

$$\Rightarrow x = 2$$

Vậy  $x = 2$ .

**Câu 26. (HSG 7 huyện Yên Mỹ 2021 - 2022)**

Tìm  $x$  biết:  $3^{x+2} - 3^{x+1} - 3^x = 135$

**Lời giải**

$$3^{x+2} - 3^{x+1} - 3^x = 135$$

$$\Rightarrow 3^x \cdot (3^2 - 3^1 - 1) = 135$$

$$\Rightarrow 3^x \cdot 5 = 135$$

$$\Rightarrow 3^x = 27$$

$$\Rightarrow 3^x = 3^3$$

$$\Rightarrow x = 3$$

Vậy  $x = 3$

**Câu 27. (HSG 7 cấp thị xã 2017 - 2018)**

Tìm  $x$  biết:  $3 + 2^{x-3} = 24 - [4^2 - (2^2 - 1)]$ .

**Lời giải**

$$3 + 2^{x-3} = 24 - [16 - (4 - 1)].$$

$$3 + 2^{x-3} = 24 - [16 - 3].$$

$$3 + 2^{x-3} = 24 - 13.$$

$$3 + 2^{x-3} = 11.$$

$$2^{x-3} = 8 = 2^3.$$

$$x - 3 = 3.$$

$$\text{Vậy } x = 6.$$

**Câu 28. (HSG 7 thị xã Kinh Môn, 2021 - 2022)**

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } (2x - 1)^2 - 4 = 21.$$

**Lời giải**

$$(2x - 1)^2 - 4 = 21.$$

$$(2x - 1)^2 = 25.$$

$$\Rightarrow 2x - 1 = 5 \text{ hoặc } 2x - 1 = -5.$$

$$\Rightarrow 2x = 6 \text{ hoặc } 2x = -4.$$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ hoặc } x = -2.$$

$$\text{Vậy } x \in \{3; -2\}.$$

**Câu 29. (HSG 7 huyện Hương Khê 2021 - 2022)**

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } (x - 1)^3 = -27.$$

**Lời giải**

$$(x - 1)^3 = -27.$$

$$\Rightarrow (x - 1)^3 = (-3)^3.$$

$$\Rightarrow x - 1 = -3.$$

$$\Rightarrow x = -2.$$

$$\text{Vậy } x = -2.$$

**Câu 30. (HSG 7 trường Lê Hồng Phong 2018 - 2019)**

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } 5^{2x-1} = 5^{2x-3} + 125.24.$$

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } 5^{2x-1} - 5^{2x-3} = 5^3.24.$$

$$\Rightarrow 5^{2x-3} (5^2 - 1) = 5^3.24$$

$$\Rightarrow 5^{2x-3} = 5^3.$$

$$\Rightarrow 2x - 3 = 3.$$

$$\Rightarrow x = 3.$$

$$\text{Vậy } x = 3.$$

**Câu 31. (HSG 7 trường Phương Trung 2022 - 2023)**

$$\text{Tìm số hữu tỉ } x, \text{ biết: } (x - 1)^5 = -243.$$

**Lời giải**

$$(x - 1)^5 = (-3)^5.$$

$$\Rightarrow x - 1 = -3.$$

$$\Rightarrow x = -2.$$

$$\text{Vậy } x = -2.$$

**Câu 32. (HSG 7 trường Phương Trung – Thanh Oai 2018-2019)**

Tìm số hữu tỉ  $x$ , biết:  $(x-1)^5 = -243$

**Lời giải**

$$(x-1)^5 = (-3)^5$$

$$x-1 = -3$$

$$x = -2$$

Vậy  $x = -2$

**Câu 33. (HSG 7 huyện Như Xuân 2018-2019)**

Tìm  $x$ , biết:  $2^{x-1} + 5 \cdot 2^{x-2} = \frac{7}{32}$

**Lời giải**

$$2^{x-1} + 5 \cdot 2^{x-2} = \frac{7}{32}$$

$$2^{x-1} \left( 1 + \frac{5}{2} \right) = \frac{7}{32}$$

$$2^{x-1} \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{32}$$

$$2^{x-1} = \frac{7}{32} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{16} = 2^{-4}$$

$$x-1 = -4$$

$$x = -3$$

Vậy  $x = -3$

**Câu 34. (HSG 7 huyện Xuân Trường 2018-2019)**

Cặp số  $(x, y)$  nào thỏa mãn đẳng thức sau:  $3^{2x+1} \cdot 7^y = 9 \cdot 21^x$

**Lời giải**

$$3^{2x+1} \cdot 7^y = 9 \cdot 21^x$$

$$3^{2x+1} \cdot 7^y = 3^2 \cdot 3^x \cdot 7^x$$

$$3^{2x+1} \cdot 7^y = 3^{x+2} \cdot 7^x$$

$$\frac{3^{2x+1}}{3^{x+2}} = \frac{7^x}{7^y}$$

$$3^{x-1} = 7^{x-y}$$

Nên  $x-1 = 0$  và  $x-y = 0$

Vậy  $x = y = 1$

**Câu 35. (HSG 7 huyện Nga Sơn 2016 - 2017)**

Tìm  $x$ , biết:  $3^{x+2} + 4 \cdot 3^{x+1} + 3^{x-1} = 6^6$

**Lời giải**

$$3^{x+2} + 4 \cdot 3^{x+1} + 3^{x-1} = 6^6$$

$$\Rightarrow 3^{x-1} \cdot (3^3 + 4 \cdot 3^2 + 1) = 2^6 \cdot 3^6$$

$$\Rightarrow 3^{x-1} \cdot 64 = 2^6 \cdot 3^6 \Rightarrow 3^{x-1} = 3^6 \Rightarrow x = 7$$

Vậy  $x = 7$ .



**Câu 36. (HSG 7 trường Nguyễn Khuyến 2016 - 2017)**

Tìm  $x$ , biết:  $(2x-1)^4 = 16$

**Lời giải**

$$(2x-1)^4 = 16$$

$$(2x-1)^4 = 2^4$$

$$\Rightarrow 2x-1 = 2 \text{ hoặc } 2x-1 = -2$$

$$\Rightarrow x = 1,5 \text{ hoặc } x = -0,5$$

$$\text{Vậy } x \in \{1,5; -0,5\}$$

**Câu 37. (HSG 7 trường Nguyễn Du 2016 - 2017)**

Tìm  $x$  thỏa mãn một trong các điều kiện sau:  $3^{x+2} + 3^x = 810$

**Lời giải**

$$3^{x+2} + 3^x = 810$$

$$\Rightarrow 3^x \cdot (3^2 + 1) = 810$$

$$\Rightarrow 3^x = 81 \Rightarrow x = 4$$

$$\text{Vậy } x = 4$$

**Câu 38. (HSG 7 huyện Hòa Bình 2016 - 2017)**

Tìm  $x$ , biết:  $2^{x+\frac{1}{2}} = 8$

**Lời giải**

$$2^{x+\frac{1}{2}} = 8$$

$$2^{x+\frac{1}{2}} = 2^3$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{2} = 3$$

$$\Rightarrow x = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{5}{2}.$$

**Câu 39. (HSG 7 huyện Việt Yên 2016 - 2017)**

Tìm  $x$  sao cho:  $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} = 17$

**Lời giải**

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} = \frac{1}{17}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 17$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{16} + 1\right) = 17$$

$$\Rightarrow \frac{17}{16} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 17$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 16$$

$$\Rightarrow 2^{-x} = 2^4$$

$$\Rightarrow x = -4$$

Vậy  $x = -4$ .

**Câu 40. (HSG 7 Tỉnh Bắc Giang 2012 - 2013)**

Tìm  $x$ , biết:  $2^{x+2} \cdot 3^{x+1} \cdot 5^x = 10800$

**Lời giải**

Ta có:  $2^{x+2} \cdot 3^{x+1} \cdot 5^x = 10800$

$$\Rightarrow 2^x \cdot 2^2 \cdot 3^x \cdot 3 \cdot 5^x = 10800$$

$$\Rightarrow (2 \cdot 3 \cdot 5)^x = 900$$

$$\Rightarrow 30^x = 30^2$$

$$\Rightarrow x = 2$$

Vậy  $x = 2$

**Câu 41. (HSG 7 trường Hiền Quan 2015 - 2016)**

Tìm các số  $x$  biết:  $(x-1)^3 = -8$

**Lời giải**

$$(x-1)^3 = -8$$

$$\Rightarrow (x-1)^3 = (-2)^3$$

$$\Rightarrow x-1 = -2 \Rightarrow x = -1$$

Vậy  $x = -1$ .

**Câu 42. (HSG 7 huyện Thanh Oai 2014 - 2015)**

Tìm  $x$  biết:  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{243}$

**Lời giải**

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{243}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{3}\right)^5$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{5}{6}$$

Vậy  $x = \frac{5}{6}$ .

**Câu 43. (HSG 7 trường Ân Tường Đông 2014 - 2015)**

Tim  $x$ , biết:  $\left(\frac{1}{2}\right)^{5x+\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$

**Lời giải**

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{5x+\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{5x+\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\Rightarrow 5x + \frac{1}{2} = 3$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Vậy  $x = \frac{1}{2}$ .

**Câu 44. (HSG 7 THCS 2018 - 2019)**

Tim số tự nhiên  $n$  biết:  $3^{-1} \cdot 3^n + 4 \cdot 3^n = 13 \cdot 3^5$

**Lời giải**

Ta có:  $3^{-1} \cdot 3^n + 4 \cdot 3^n = 13 \cdot 3^5$

$$3^n (3^{-1} + 4) = 13 \cdot 3^5$$

$$3^n \cdot \frac{13}{3} = 13 \cdot 3^5$$

$$3^n = 3^6$$

$$n = 6$$

**Câu 45. (HSG 7 huyện Đức Thọ 2017 - 2018)**

Tim giá trị  $n$  nguyên dương

a)  $\frac{1}{27} \cdot 81^n = 3^n$

b)  $8 < 2^n < 64$ .

**Lời giải**

a)  $\frac{1}{27} \cdot 81^n = 3^n$

$$\Rightarrow 3^{4n-3} = 3^n$$

$$\Rightarrow 4n - 3 = n$$

$$\Rightarrow n = 1$$

Vậy  $n = 1$

b)  $8 < 2^n < 64$

$$\Rightarrow 2^3 < 2^n < 2^6$$

Mà  $n$  nguyên dương

$$\Rightarrow n = 4, n = 5$$

**Câu 46. (HSG 7 THCS Phú Trường 2017 - 2018)**

Tim các số  $a, b, c$  biết  $ab = 2, bc = 6, ac = 3$ .

Lời giải

Theo đề bài:  $ab = 2, bc = 6, ac = 3$

Ta có:  $ab \cdot bc \cdot ac = 2 \cdot 6 \cdot 3$

$$a^2 b^2 c^2 = 36$$

$$abc = \pm 6$$

Trường hợp 1:

$$abc = 6, ab = 2 \Rightarrow c = 3$$

$$abc = 6, bc = 6 \Rightarrow a = 1$$

$$abc = 6, ac = 3 \Rightarrow b = 2$$

Trường hợp 2:

$$abc = -6, ab = 2 \Rightarrow c = -3$$

$$abc = -6, bc = 6 \Rightarrow a = -1$$

$$abc = -6, ac = 3 \Rightarrow b = -2$$

Vậy  $a = 1, b = 2, c = 3$ ;  $a = -1, b = -2, c = -3$

**Câu 47. (HSG 7 trường TH Sài Gòn, 2017 - 2018)**

Tìm  $x, y$  biết:  $5^{2x-1} = 5^{2x-3} + 125 \cdot 24$

Ta có:  $5^{2x-1} - 5^{2x-3} = 5^3 \cdot 24$

$$5^{2x-3}(5^2 - 1) = 5^3 \cdot 24$$

$$5^{2x-3} = 5^3$$

$$2x - 3 = 3$$

$$x = 3$$

Vậy  $x = 3$ .

**Câu 48. (HSG 7 trường Hương Điền, 2017 - 2018)**

Tìm các số  $a, b, c$  biết rằng:  $ab = c, bc = 4a, ac = 9b$

Lời giải

Nhân từng vế bất đẳng thức ta được:  $(abc)^2 = 36abc$

Nếu 1 trong 3 số bằng 0 thì hai số còn lại bằng 0

Nếu cả 3 số  $a, b, c$  khác 0 thì chia 2 vế cho  $abc$  ta được  $abc = 36$

Từ  $abc = 36$  và  $ab = c \Rightarrow c^2 = 6 \Rightarrow c = 6; c = -6$

Từ  $abc = 36$  và  $bc = 4a \Rightarrow 4a^2 = 36 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3; a = -3$

Từ  $abc = 36$  và  $ab = 9b \Rightarrow 9b^2 = 36 \Rightarrow b = 2; b = -2$

-Nếu  $c = 6$  thì  $a = 3; b = 2$  hoặc  $a = -3; b = -2$

-Nếu  $c = -6$  thì  $a = 3; b = -2$  hoặc  $a = -3; b = -2$

Vậy  $(a, b, c) = \{(0; 0; 0); (3; 2; 6); (3; -2; 6); (3; -2; -6); (-3; 2; -6)\}$

**Câu 49. (HSG 7 trường Hiền Quan, huyện Tam Nông, 2017 - 2018)**

Tìm  $x$ , biết:  $3^x + 3^{x+2} = 2430$

Lời giải

$$3^x + 3^{x+2} = 2430$$

$$3^x \cdot (1 + 3^2) = 2430$$

$$3^x \cdot 10 = 2430$$

$$3^x = 243 = 3^5$$

$$\Rightarrow x = 5$$

Vậy  $x = 5$ .

**Câu 50. (HSG 7 huyện Hoàng Hóa, 2017 - 2018)**

Tìm  $x$  biết:  $(2x - 3)^2 = 16$

**Lời giải**

$$(2x - 3)^2 = 16$$

$$\Rightarrow 2x - 3 = 4 \text{ hoặc } 2x - 3 = -4$$

$$\Rightarrow x = 3,5 \text{ hoặc } x = -0,5$$

Vậy  $x \in \{3,5; -0,5\}$ .

**Câu 51. (HSG 7 huyện Triệu Sơn, 2017 - 2018)**

Tìm  $x, y$  biết:  $x(x - y) = \frac{3}{10}$  và  $y(x - y) = -\frac{3}{50}$

**Lời giải**

Ta có:  $x(x - y) = \frac{3}{10}$  và  $y(x - y) = -\frac{3}{50}$

Trừ từng vế hai đẳng thức đã cho ta được:

$$x(x - y) - y(x - y) = \frac{3}{10} - \left(-\frac{3}{50}\right)$$

$$\Rightarrow (x - y)(x - y) = \frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow (x - y)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = \frac{3}{5} \\ x - y = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

Thay  $x - y = \frac{3}{5}$  vào hai đẳng thức đã cho ta được  $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{10}$

Thay  $x - y = -\frac{3}{5}$  vào hai đẳng thức đã cho ta được  $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{10}$

Vậy  $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{10}$  hoặc  $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{10}$ .

**Câu 52. (HSG 7 trường Ngô Gia Tự 2017 - 2018)**

Tìm  $x$  thỏa mãn:  $3^{x+2} + 3^x = 810$

**Lời giải**

$$3^{x+2} + 3^x = 810$$

$$\Rightarrow 3^x (3^2 + 1) = 810$$

$$\Rightarrow 3^x = 81 = 3^4 \Rightarrow x = 4$$

Vậy  $x = 4$ .

**Câu 53. (HSG 7 trường Nghĩa Điền – Tư Nghĩa 2017 - 2018)**

Tìm  $x$  biết:  $(2x-1)^4 = 81$

**Lời giải**

$$(2x-1)^4 = 81$$

$$(2x-1)^4 = 3^4$$

$$\Rightarrow 2x-1 = 3 \text{ hoặc } 2x-1 = -3$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = -1$$

Vậy  $x \in \{2; -1\}$ .

**Câu 54. (HSG 7 trường Thạnh Bình – Hà Tĩnh 2017 - 2018)**

Tìm  $x$ , biết:  $(x+2)^2 = 81$

**Lời giải**

$$(x+2)^2 = 81$$

$$\Rightarrow x+2 = 9 \text{ hoặc } x+2 = -9$$

$$\Rightarrow x = 7 \text{ hoặc } x = -11$$

Vậy  $x \in \{7; -11\}$

**Câu 55. (HSG 7 huyện 2017 - 2018)**

Tìm số tự nhiên  $n$  biết:  $3^{-1} \cdot 3^n + 4 \cdot 3^n = 13 \cdot 3^5$

**Lời giải**

$$3^{-1} \cdot 3^n + 4 \cdot 3^n = 13 \cdot 3^5$$

$$3^n \cdot (3^{-1} + 4) = 13 \cdot 3^5$$

$$3^n \cdot \frac{13}{3} = 13 \cdot 3^5$$

$$3^n = 3^6 \Rightarrow n = 6$$

Vậy  $n = 6$ .

**Câu 56. (HSG 7 trường Lê Quý Đôn 2016 - 2017)**

Tìm  $x$  sao cho:  $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} = 17$

**Lời giải**

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} = 17$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{16} + 1\right) = 17$$

$$\frac{17}{16} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 17$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 16$$

$$2^{-x} = 2^4 \Rightarrow x = -4$$

Vậy  $x = -4$ .



**CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS**

**CH2: TÌM ẨN CHƯA BIẾT**

Dạng 1: Tìm x thông thường
Dạng 2: Đưa về dạng tích bằng 0
Dạng 3: Sử dụng tính chất lũy thừa
Dạng 4: Tìm ẩn dạng phân thức
Dạng 5: Tìm x dạng chứa dấu giá trị tuyệt đối
Dạng 6: Sử dụng công thức tính tổng có quy luật
Dạng 7: Tổng các biểu thức không âm bằng 0
Dạng 8: Tìm ẩn dựa vào tính chất về dấu
Dạng 9: Sử dụng phương pháp chặn để tìm ẩn
Dạng 10: Tìm ẩn với điều kiện nguyên

**Dạng 4: Tìm ẩn dạng phân thức**

**A. Trắc nghiệm (nếu có)**

**Câu 1. (HSG 7 Yên Thế, Bắc Giang 2022 - 2023)**

Giá trị của  $x$  thỏa mãn đẳng thức  $\frac{x-2}{2021} + \frac{x-1}{2022} = \frac{x}{2023} + \frac{x+1}{2024}$  là:

- A. -2023.                      B. -2022.                      C. 2023.                      D. 2022.

**Lời giải:**

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{2021} + \frac{x-1}{2022} &= \frac{x}{2023} + \frac{x+1}{2024} \\ \Rightarrow \left(\frac{x-2}{2021} - 1\right) + \left(\frac{x-1}{2022} - 1\right) &= \left(\frac{x}{2023} - 1\right) + \left(\frac{x+1}{2024} - 1\right) \\ \Rightarrow \frac{x-2023}{2021} + \frac{x-2023}{2022} &= \frac{x-2023}{2023} + \frac{x-2023}{2024} \\ \Rightarrow (x-2023) \left(\frac{1}{2021} + \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Vì  $\frac{1}{2021} + \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024} \neq 0$  nên  $x-2023 = 0 \Rightarrow x = 2023$ .

Vậy  $x = 2023$ .

**Câu 2. (HSG 7 huyện Sơn Động 2022 - 2023)**

Cho  $x$  thỏa mãn:  $\frac{x+2022}{1} + \frac{x+2021}{2} + \dots + \frac{x+1}{2022} + \frac{x}{2023} = -2023$ . Số nghịch đảo của  $x$  là

- A. 2023.                      B.  $\frac{-1}{2023}$ .                      C. -2023.                      D.  $\frac{1}{2023}$ .

**Lời giải**



$$\frac{x+2022}{1} + \frac{x+2021}{2} + \dots + \frac{x+1}{2022} + \frac{x}{2023} = -2023$$

$$\frac{x+2022}{1} + \frac{x+2021}{2} + \dots + \frac{x+1}{2022} + \frac{x}{2023} + 2023 = 0$$

$$\left(\frac{x+2022}{1} + 1\right) + \left(\frac{x+2021}{2} + 1\right) + \dots + \left(\frac{x+1}{2022} + 1\right) + \left(\frac{x}{2023} + 1\right) = 0$$

$$\frac{x+2023}{1} + \frac{x+2023}{2} + \frac{x+2023}{3} + \dots + \frac{x+2023}{2023} = 0$$

$$(x+2023)\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2023}\right) = 0$$

Suy ra:  $x+2023=0$  hay  $x=-2023$ .

Vậy nghịch đảo của  $x$  là  $\frac{-1}{2023}$ .

**Câu 3. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2021 - 2022)**

Biết  $x$  thỏa mãn  $\frac{16}{x+1} = \frac{x+1}{4}$ . Tổng các giá trị của  $x$  là:

A. 0

B. 8

C. -8

D. -2

**Chọn D**

$$\frac{16}{x+1} = \frac{x+1}{4}$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 = 4 \cdot 16$$

$$(x+1)^2 = 64$$

$$\Rightarrow x+1=8 \text{ hoặc } x+1=-8$$

$$\Rightarrow x=7 \text{ hoặc } x=-9$$

Tổng các giá trị của  $x$  là  $7+(-9)=-2$

**Câu 4. (HSG 7 huyện Tân Yên, Bắc Giang 2022 - 2023)**

Giá trị của  $x$  thỏa mãn đẳng thức  $\frac{x-2}{2020} + \frac{x-1}{2021} = \frac{x}{2022} + \frac{x+1}{2023}$  là:

A. -2022.

B. 4.

C. 2022.

D. 0.

**Lời giải:**

$$\frac{x-2}{2020} + \frac{x-1}{2021} = \frac{x}{2022} + \frac{x+1}{2023}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x-2}{2020} - 1\right) + \left(\frac{x-1}{2021} - 1\right) = \left(\frac{x}{2022} - 1\right) + \left(\frac{x+1}{2023} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{x-2022}{2020} + \frac{x-2022}{2021} = \frac{x-2022}{2022} + \frac{x-2022}{2023}$$

$$\Rightarrow (x-2022)\left(\frac{1}{2020} + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023}\right) = 0$$

$$\text{Vì } \frac{1}{2020} + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023} \neq 0 \text{ nên } x - 2022 = 0 \Rightarrow x = 2022$$

Vậy  $x = 2022$ .

## B. Tự luận

### Câu 1. (HSG 7 thị xã Thái Hòa Nghệ An 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x; y \text{ biết: } \frac{2+y}{3} = \frac{7-2y}{5} = \frac{3+y}{4x}.$$

**Lời giải**

$$\frac{2+y}{3} = \frac{7-2y}{5} = \frac{3+y}{4x}$$

$$\text{Từ } \frac{2+y}{3} = \frac{7-2y}{5} \Rightarrow 5(2+y) = 3(7-2y) \Rightarrow y = 1$$

$$\text{Suy ra: } \frac{2+1}{3} = \frac{3+1}{4x} \Rightarrow x = 1$$

### Câu 2. (HSG 7 huyện Thanh Trì, Hà Nội 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } \frac{12}{x^2+8} + \frac{7}{x^2+3} + \frac{6}{x^2+2} = 3.$$

**Lời giải**

$$\frac{12}{x^2+8} + \frac{7}{x^2+3} + \frac{6}{x^2+2} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{6}{x^2+2} - 1 + \frac{12}{x^2+8} - 1 + \frac{7}{x^2+3} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{6-x^2-2}{x^2+2} + \frac{12-x^2-8}{x^2+8} + \frac{7-x^2-3}{x^2+3} = 0$$

$$\Rightarrow (4-x^2) \left( \frac{1}{x^2+2} + \frac{1}{x^2+8} + \frac{1}{x^2+3} \right) = 0$$

$$\text{Mà } \frac{1}{x^2+2} + \frac{1}{x^2+8} + \frac{1}{x^2+3} > 0 \text{ (do } x^2 \geq 0)$$

$$\Rightarrow 4-x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = -2$$

Vậy  $x \in \{2; -2\}$ .

### Câu 3. (HSG 7 huyện Quế Võ, tỉnh Bắc Ninh 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } \frac{x-2}{12} = \frac{3}{x-2}.$$

**Lời giải**

$$\frac{x-2}{12} = \frac{3}{x-2} \Rightarrow (x-2)^2 = 36 \Rightarrow (x-2)^2 = 6^2 \Rightarrow x-2 = \pm 6$$

$$\text{Trường hợp: } x-2 = 6 \Rightarrow x = 8$$

$$\text{Trường hợp: } x-2 = -6 \Rightarrow x = -4$$

Vậy  $x = 8$  hoặc  $x = -4$ .

### Câu 4. (Đề 75 - HSG 7 huyện Tiên Du, Bắc Ninh 2022 - 2023)

Tìm  $x$ , biết  $\frac{1-x}{-9} = \frac{-25}{1-x}$ .

**Lời giải:**

$$\frac{1-x}{-9} = \frac{-25}{1-x}. \text{ Điều kiện : } x \neq 1$$

$$\text{Suy ra } (1-x)^2 = (-9) \cdot (-25) \Rightarrow (1-x)^2 = 15^2$$

$$\text{Suy ra } 1-x = 15 \text{ hoặc } 1-x = -15.$$

$$\text{Xét } 1-x = 15 \Rightarrow x = -14 \text{ (tm).}$$

$$\text{Xét } 1-x = -15 \Rightarrow x = 16 \text{ (tm).}$$

$$\text{Vậy } x \in \{-14; 16\}.$$

**Câu 5. (HSG 7 huyện Tân Kỳ 2021 - 2022)**

Tìm  $x$  biết  $\frac{x+2}{6x-2} = \frac{1}{4}$

**Lời giải**

$$\frac{x+2}{6x-2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 4(x+2) = 6x-2$$

$$4x+8 = 6x-2$$

$$-2x = -10$$

$$x = 5.$$

$$\text{Vậy } x = 5$$

**Câu 6. (HSG 7 trường Quang Trung 2018 - 2019)**

Tìm các số hữu tỉ dương  $x, y, z$  biết:  $\frac{1}{x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}} = 1 - \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}$ .

**Lời giải**

Biến đổi vế phải thành dạng tương tự vế trái.

$$1 - \frac{1}{2 + \frac{1}{3}} = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7} = \frac{1}{\frac{7}{4}} = \frac{1}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}$$

$$\text{Suy ra } x = 1; y = 1; z = 1.$$

**Câu 7. (HSG 7 huyện Thanh Chương 2018-2019)**

Tìm  $x, y$  biết:  $\frac{x-1}{-15} = \frac{-60}{x-1}$

**Lời giải**

$$\frac{x-1}{-15} = \frac{-60}{x-1}$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = 900$$

TH1:

$$x - 1 = 30$$

$$x = 31$$

TH2:

$$x - 1 = -30$$

$$x = -29$$

Vậy  $x \in \{-29; 31\}$ .

**Câu 8. (HSG 7 huyện Hoàng Hóa, 2017 - 2018)**

Tìm hai số hữu tỷ  $a$  và  $b$  biết:  $a - b = 2(a + b) = a : b$

**Lời giải**

$$\text{Từ } a - b = 2(a + b) \Rightarrow a - b = 2a + 2b \Rightarrow -a = 3b \Rightarrow a = -3b$$

$$\text{Mặt khác: } a - b = a : b \Rightarrow -3b - b = -3b : b \Rightarrow -4b = -3 \Rightarrow b = \frac{3}{4}$$

$$\text{Vậy } a = -3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{-9}{4}$$

**Câu 9. (HSG 7 trường Hồng Đà; trường Bồ Lý 2015 - 2016)**

$$\text{Tìm } x: \frac{x+4}{2012} + \frac{x+3}{2013} = \frac{x+2}{2014} + \frac{x+1}{2015}$$

**Lời giải**

$$\frac{x+4}{2012} + \frac{x+3}{2013} = \frac{x+2}{2014} + \frac{x+1}{2015}$$

$$\Rightarrow \frac{x+4}{2012} + 1 + \frac{x+3}{2013} + 1 = \frac{x+2}{2014} + 1 + \frac{x+1}{2015} + 1$$

$$\Rightarrow (x+2016) \cdot \left( \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014} - \frac{1}{2015} \right) = 0$$

$$\Rightarrow x + 2016 = 0$$

$$\Rightarrow x = -2016$$

Vậy  $x = -2016$ .

**Câu 10. (HSG 7 huyện Mộ Càng Chải 2016 - 2017; huyện Khoái Châu 2014 - 2015)**

$$\text{Tìm } x, \text{ biết: } \frac{3(x-1)}{2} = \frac{8}{27 \cdot (x-1)}$$

**Lời giải**

$$\frac{3(x-1)}{2} = \frac{8}{27 \cdot (x-1)}$$

$$\Rightarrow 81(x-1)^2 = 16 \Rightarrow (x-1)^2 = \left(\frac{4}{9}\right)^2$$

$$\Rightarrow x-1 = \frac{4}{9} \text{ hoặc } x-1 = -\frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow x = \frac{13}{9} \text{ hoặc } x = \frac{5}{9}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{13}{9}; \frac{5}{9} \right\}$$

**Câu 11. (HSG 7 huyện Triệu Sơn 2017 - 2018)**

Cho  $\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{16} = \frac{z+9}{25}$  và  $2x^3 - 1 = 15$ . Tính  $B = x + y + z$

**Lời giải**

Ta có:  $2x^3 - 1 = 15$

$$x^3 = 8$$

$$x = 2$$

Suy ra  $\frac{18}{9} = \frac{y-25}{16} = \frac{z+9}{25} = 2$

$$+) \frac{y-25}{16} = 2 \Rightarrow y - 25 = 32 \Rightarrow y = 57$$

$$+) \frac{z+9}{25} = 2 \Rightarrow z + 9 = 50 \Rightarrow z = 41$$

Vậy  $B = x + y + z = 2 + 57 + 41 = 100$

**Câu 12. (HSG 7 huyện Nam Đàn 2022 - 2023)**

Tìm  $x, y$  biết:  $\frac{1+3y}{12} = \frac{1+6y}{3x} = \frac{1+9y}{2x}$

**Lời giải**

Ta có:  $\frac{1+6y}{3x} = \frac{1+9y}{2x}$

$$\Rightarrow \frac{1+6y}{1+9y} = \frac{3x}{2x}$$

$$\Rightarrow \frac{1+6y}{1+9y} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot (1+6y) = 3 \cdot (1+9y)$$

$$\Rightarrow 2 + 12y = 3 + 27y$$

$$\Rightarrow -1 = 15y$$

$$\Rightarrow y = \frac{-1}{15}$$

Thay  $y = \frac{-1}{15}$  vào  $\frac{1+3y}{12} = \frac{1+6y}{3x}$  ta được

$$\frac{1+3 \cdot \left(\frac{-1}{15}\right)}{12} = \frac{1+6 \cdot \left(\frac{-1}{15}\right)}{3x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{15} = \frac{\frac{3}{5}}{3x}$$

$$\Rightarrow x = 3$$

Vậy  $x = 3, y = \frac{-1}{5}$ .

**Câu 13. (HSG 7 huyện Hà Trung 2021 - 2022)**

Tìm  $x$  biết  $\frac{315-x}{101} + \frac{313-x}{103} + \frac{311-x}{105} + \frac{309-x}{107} = -4$

**Lời giải**

Ta có :  $\frac{315-x}{101} + \frac{313-x}{103} + \frac{311-x}{105} + \frac{309-x}{107} = -4$

$\frac{315-x}{101} + 1 + \frac{313-x}{103} + 1 + \frac{311-x}{105} + 1 + \frac{309-x}{107} + 1 = 0$

$\frac{416-x}{101} + \frac{416-x}{103} + \frac{416-x}{105} + \frac{416-x}{107} = 0$

$(416-x) \left( \frac{1}{101} + \frac{1}{103} + \frac{1}{105} + \frac{1}{107} \right) = 0$

Vì  $\frac{1}{101} + \frac{1}{103} + \frac{1}{105} + \frac{1}{107} \neq 0$  nên  $416-x = 0$  hay  $x = 416$

Vậy  $x = 416$ .

**Câu 14. (HSG 7 huyện Vũ Thư 2020 - 2021)**

Tìm  $x$  biết:  $\frac{x+11}{89} + \frac{x+13}{87} = \frac{x+15}{85} + \frac{x+17}{83}$

**Lời giải**

$\frac{x+11}{89} + \frac{x+13}{87} = \frac{x+15}{85} + \frac{x+17}{83}$

$\frac{x+11}{89} + 1 + \frac{x+13}{87} + 1 = \frac{x+15}{85} + 1 + \frac{x+17}{83} + 1$

$\frac{x+100}{89} + \frac{x+100}{87} = \frac{x+100}{85} + \frac{x+100}{83}$

$\frac{x+100}{89} + \frac{x+100}{87} - \frac{x+100}{85} - \frac{x+100}{83} = 0$

$(x+100) \cdot \left( \frac{1}{89} + \frac{1}{87} - \frac{1}{85} - \frac{1}{83} \right) = 0$ .

Mà  $\frac{1}{89} + \frac{1}{87} - \frac{1}{85} - \frac{1}{83} \neq 0 \Rightarrow x+100 = 0 \Rightarrow x = -100$ .

Vậy  $x = -100$ .

**Câu 15. (HSG 7 trường Đáp Cầu 2018 – 2019)**

Tìm  $x$  biết:  $\frac{x-1}{2009} + \frac{x-2}{2008} = \frac{x-3}{2007} + \frac{x-4}{2006}$ .

**Lời giải**

$\frac{x-1}{2009} + \frac{x-2}{2008} = \frac{x-3}{2007} + \frac{x-4}{2006}$ .

$\frac{x-1}{2009} - 1 + \frac{x-2}{2008} - 1 = \frac{x-3}{2007} - 1 + \frac{x-4}{2006} - 1$ .

$$\frac{x-2010}{2009} + \frac{x-2010}{2008} = \frac{x-2010}{2007} + \frac{x-2010}{2006}.$$

$$(x-2010)\left(\frac{1}{2009} + \frac{1}{2008} - \frac{1}{2007} - \frac{1}{2006}\right) = 0.$$

$$x-2010 = 0.$$

Vậy  $x = 2010$ .

**Câu 16. (HSG 7 trường Phương Trung – Thanh Oai 2018-2019)**

Tìm số hữu tỉ  $x$ , biết:  $\frac{x+2}{11} + \frac{x+2}{12} + \frac{x+2}{13} = \frac{x+2}{14} + \frac{x+2}{15}$

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \frac{x+2}{11} + \frac{x+2}{12} + \frac{x+2}{13} - \frac{x+2}{14} - \frac{x+2}{15} = 0$$

$$(x+2)\left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} - \frac{1}{15}\right) = 0$$

$$x+2 = 0 \text{ vì } \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} - \frac{1}{15}\right) \neq 0$$

$$x = -2$$

Vậy  $x = -2$

**Câu 17. (HSG 7 huyện Bát Xát 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết:  $\frac{x+4}{2014} + \frac{x+3}{2015} = \frac{x+2}{2016} + \frac{x+1}{2017}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \frac{x+4}{2014} + \frac{x+3}{2015} = \frac{x+2}{2016} + \frac{x+1}{2017}$$

$$\left(\frac{x+4}{2014} + 1\right) + \left(\frac{x+3}{2015} + 1\right) = \left(\frac{x+2}{2016} + 1\right) + \left(\frac{x+1}{2017} + 1\right)$$

$$\frac{x+2018}{2014} + \frac{x+2018}{2015} - \frac{x+2018}{2016} - \frac{x+2018}{2017} = 0$$

$$(x+2018) \cdot \left(\frac{1}{2014} + \frac{1}{2015} - \frac{1}{2016} - \frac{1}{2017}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x+2018 = 0 \text{ (vì } \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015} + \frac{1}{2016} + \frac{1}{2017} \neq 0)$$

$$x = -2018$$

Vậy  $x = -2018$ .

**Câu 18. (HSG 7 huyện Hà Trung 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết:  $\frac{x-4}{2019} + \frac{x-3}{2020} = \frac{x-2}{2021} + \frac{x-1}{2022}$ .

**Lời giải**

$$\frac{x-4}{2019} + \frac{x-3}{2020} = \frac{x-2}{2021} + \frac{x-1}{2022}$$

$$\frac{x-4}{2019} - 1 + \frac{x-3}{2020} - 1 = \frac{x-2}{2021} - 1 + \frac{x-1}{2022} - 1$$

$$\frac{x-2023}{2019} + \frac{x-2023}{2020} = \frac{x-2023}{2021} + \frac{x-2023}{2022}$$

$$(x-2023) \left( \frac{1}{2019} + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022} \right) = 0$$

$$\text{Vì } \left( \frac{1}{2019} + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022} \right) \neq 0 \text{ nên } x-2023 = 0 \Rightarrow x = 2023.$$

Vậy  $x = 2023$ .

**Câu 19. (HSG 7 huyện Tân Kỳ 2022 – 2023)**

Tìm  $x$  biết rằng:  $\frac{x-1}{2021} + \frac{x-2}{2020} = \frac{x-5}{2017} + \frac{x-7}{2015}$ .

**Lời giải**

$$\frac{x-1}{2021} + \frac{x-2}{2020} = \frac{x-5}{2017} + \frac{x-7}{2015}$$

$$\left( \frac{x-1}{2021} - 1 \right) + \left( \frac{x-2}{2020} - 1 \right) = \left( \frac{x-5}{2017} - 1 \right) + \left( \frac{x-7}{2015} - 1 \right)$$

$$\frac{x-2022}{2021} + \frac{x-2022}{2020} = \frac{x-2022}{2017} + \frac{x-2022}{2015}$$

$$\frac{x-2022}{2021} + \frac{x-2022}{2020} - \frac{x-2022}{2017} - \frac{x-2022}{2015} = 0$$

$$(x-2022) \left( \frac{1}{2021} + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2017} - \frac{1}{2015} \right) = 0$$

$$x-2022 = 0 \text{ ( vì } \frac{1}{2021} + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2017} - \frac{1}{2015} \neq 0 \text{ )}$$

$$x = 2022$$

Vậy  $x = 2022$ .

**Câu 20. (HSG 7 trường Thị Trấn Càng Nàng, huyện Bá Thước; huyện Triệu Sơn 2022 - 2023)**

Tìm  $x$ , biết:  $\frac{x-10}{30} + \frac{x-14}{43} + \frac{x-5}{95} + \frac{x-148}{8} = 0$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \left( \frac{x-10}{30} - 3 \right) + \left( \frac{x-14}{43} - 2 \right) + \left( \frac{x-5}{95} - 1 \right) + \left( \frac{x-148}{8} + 6 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x-100}{30} + \frac{x-100}{43} + \frac{x-100}{95} + \frac{x-100}{8} = 0$$

$$\Rightarrow (x-100) \left( \frac{1}{30} + \frac{1}{43} + \frac{1}{95} + \frac{1}{8} \right) = 0 \text{ mà } \left( \frac{1}{30} + \frac{1}{43} + \frac{1}{95} + \frac{1}{8} \right) \neq 0$$

$$\text{Suy ra } x-100 = 0$$

Vậy  $x = 100$ .

**Câu 21. (HSG 7 Trường THCS Võ Thị Sáu 2022 - 2023).**

Tìm  $x$  biết:  $\frac{x+2}{327} + \frac{x+3}{326} + \frac{x+4}{325} + \frac{x+5}{324} + \frac{x+349}{5} = 0$

**Lời giải**



$$\frac{x+2}{327} + \frac{x+3}{326} + \frac{x+4}{325} + \frac{x+5}{324} + \frac{x+349}{5} = 0$$

$$\left(\frac{x+2}{327} + 1\right) + \left(\frac{x+3}{326} + 1\right) + \left(\frac{x+4}{325} + 1\right) + \left(\frac{x+5}{324} + 1\right) + \left(\frac{x+349}{5} - 4\right) = 0$$

$$\frac{x+329}{327} + \frac{x+329}{326} + \frac{x+329}{325} + \frac{x+329}{324} + \frac{x+329}{5} = 0$$

$$(x+329) \cdot \left(\frac{1}{327} + \frac{1}{326} + \frac{1}{325} + \frac{1}{324} + \frac{1}{5}\right) = 0$$

Vì  $\frac{1}{327} + \frac{1}{326} + \frac{1}{325} + \frac{1}{324} + \frac{1}{5} > 0$  nên  $x+329 = 0 \Rightarrow x = -329$

Vậy  $x = -329$ .



**CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS**

**CĐ2: TÌM ẨN CHƯA BIẾT**

Dạng 1: Tìm x thông thường
Dạng 2: Đưa về dạng tích bằng 0
Dạng 3: Sử dụng tính chất lũy thừa
Dạng 4: Tìm ẩn dạng phân thức
Dạng 5: Tìm x dạng chứa dấu giá trị tuyệt đối
Dạng 6: Sử dụng công thức tính tổng có quy luật
Dạng 7: Tổng các biểu thức không âm bằng 0
Dạng 8: Tìm ẩn dựa vào tính chất về dấu
Dạng 9: Sử dụng phương pháp chặn để tìm ẩn
Dạng 10: Tìm ẩn với điều kiện nguyên

**Dạng 5. Tìm x dạng chứa dấu giá trị tuyệt đối.**

**A. Trắc nghiệm (nếu có)**

**Câu 1.** (HSG 7 huyện Thanh Thủy, tỉnh Phú Thọ 2021 - 2022)

Số giá trị của  $x$  thỏa mãn  $2021 \cdot |1-x| + (x-1)^2 = 2022 \cdot |x-1|$  là

- A. 3                      B. 2                      C. 1                      D. 0

Lời giải

**Chọn A**

Vì  $|1-x| = |x-1|$  nên từ đề bài  $2021 \cdot |1-x| + (x-1)^2 = 2022 \cdot |x-1|$

$$2021 \cdot |x-1| + (x-1)^2 = 2022 \cdot |x-1|$$

$$(x-1)^2 = 2022 \cdot |x-1| - 2021 \cdot |x-1|$$

$$(x-1)^2 = |x-1|$$

$$\Rightarrow x-1 = 0 \text{ hoặc } x-1 = 1 \text{ hoặc } x-1 = -1$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = 2 \text{ hoặc } x = 0$$

Vậy  $x \in \{0; 1; 2\}$ .

**Câu 2.** (HSG 7 huyện Thanh Ba, tỉnh Phú Thọ 2021 - 2022)

Giá trị nào của  $x$  dưới đây thỏa mãn  $|2x+3| = |9-2x|$

- A.  $x = -\frac{3}{2}$ .                      B.  $x = \frac{3}{2}$ .                      C.  $x = 0$ .                      D.  $x = 6$ .

Lời giải

**Chọn B**

Ta có:  $|2x+3| = |9-2x|$

TH1:  $2x+3 = 9-2x$

$$4x = 6$$

$$x = \frac{3}{2}$$

TH2:  $2x + 3 = -(9 - 2x)$

$$2x + 3 = -9 + 2x$$

Không có giá trị  $x$  thoả mãn

Vậy  $x = \frac{3}{2}$ .

**Câu 3. (HSG 7 Đề khảo sát lần 3, 2022 - 2023)**

Giá trị của  $x$  thoả mãn  $|2x - 3| = \left(\frac{1}{2}\right)^y$  và  $y = \frac{\frac{3}{5} - \frac{3}{31} + \frac{3}{4111}}{\frac{11}{11} - \frac{31}{31} + \frac{4111}{4111}} + \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10}}{\frac{3}{6} - \frac{1}{12} + \frac{1}{20}}$

A.  $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}$ .

B.  $-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}$ .

C.  $\frac{7}{4}; \frac{5}{4}$ .

D.  $\frac{-7}{4}; \frac{-5}{4}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có:

$$y = \frac{\frac{3}{5} - \frac{3}{31} + \frac{3}{4111}}{\frac{11}{11} - \frac{31}{31} + \frac{4111}{4111}} + \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10}}{\frac{3}{6} - \frac{1}{12} + \frac{1}{20}} = \frac{3 \left( \frac{1}{11} - \frac{1}{31} + \frac{1}{4111} \right)}{5 \left( \frac{1}{11} - \frac{1}{31} + \frac{1}{4111} \right)} + \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10}}{\frac{5}{2} \cdot \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10} \right)} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$$

Nên  $|2x - 3| = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$

+) TH1:  $2x - 3 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7}{4}$

+) TH2:  $2x - 3 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{4}$

Vậy  $x \in \left\{ \frac{7}{4}; \frac{5}{4} \right\}$ .

**B. Tự luận**

**Câu 1. (HSG 7 trường Thạnh Bình – Hà Tĩnh 2017 - 2018)**

Tìm  $x$ , biết:  $|x - 3| = 5$

**Lời giải**

$$|x - 3| = 5 \Rightarrow x - 3 = 5 \text{ hoặc } x - 3 = -5$$

$$\Rightarrow x = 8 \text{ hoặc } x = -2$$

Vậy  $x \in \{8; -2\}$ .

**Câu 2. (HSG 7 huyện Bình Lục 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết  $|2x - 1| = 3$ .

**Lời giải**

$$|2x-1|=3 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1=3 \\ 2x-1=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-1 \end{cases}$$

Vậy  $x=2$  hoặc  $x=-1$

**Câu 3. (HSG 7 thị xã Kỳ Anh, 2022 - 2023)**

Tính tổng tất cả các giá trị của  $x$  thỏa mãn:  $|x+2015|=|-2023|$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} |x+2015|=|-2023| &\Rightarrow |x+2015|=2023 \\ \Rightarrow x+2015=2023 &\text{ hoặc } x+2015=-2023 \\ \Rightarrow x=2023-2015 &\text{ hoặc } x=-2023-2015 \\ \Rightarrow x=8 &\text{ hoặc } x=-4038. \end{aligned}$$

Vậy  $8+(-4038)=-4030$

**Câu 4. (HSG 7 huyện Đức Thọ 2021 - 2022)**

Tìm  $x$  biết  $|x-1|-\frac{2}{3}=0$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} |x-1|-\frac{2}{3} &= 0 \\ |x-1| &= \frac{2}{3} \\ \Rightarrow x-1 &= \frac{2}{3} \text{ hoặc } x-1 = -\frac{2}{3} \\ \Rightarrow x &= \frac{5}{3} \text{ hoặc } x = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Vậy  $x \in \left\{ \frac{2}{3}; \frac{5}{3} \right\}$ .

**Câu 5. (HSG 7 huyện Lục Ngạn 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết:  $\left| x - \frac{2}{5} \right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{20}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \left| x - \frac{2}{5} \right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{20} \Rightarrow \left| x - \frac{2}{5} \right| = \frac{11}{20}$$

$$\Rightarrow x - \frac{2}{5} = \frac{11}{20} \text{ hoặc } x - \frac{2}{5} = -\frac{11}{20}$$

$$+ \text{ Nếu } x - \frac{2}{5} = \frac{11}{20} \Rightarrow x = \frac{2}{5} + \frac{11}{20} = \frac{19}{20}$$

$$+ \text{ Nếu } x - \frac{2}{5} = -\frac{11}{20} \Rightarrow x = \frac{2}{5} - \frac{11}{20} = \frac{-3}{20}$$

Vậy  $x = \frac{19}{20}$  hoặc  $x = \frac{-3}{20}$

**Câu 6. (HSG 7 huyện Lục Ngạn 2021 - 2022)**

Tìm  $x$ , biết:  $\left|x - \frac{2}{5}\right| = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\left|x - \frac{2}{5}\right| = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$

$$\left|x - \frac{2}{5}\right| = \frac{3}{10}$$

Suy ra  $x - \frac{2}{5} = \frac{3}{10}$  hoặc  $x - \frac{2}{5} = -\frac{3}{10}$

+ Xét  $x - \frac{2}{5} = \frac{3}{10}$

$$x = \frac{3}{10} + \frac{2}{5} = \frac{7}{10}$$

+ Xét  $x - \frac{2}{5} = -\frac{3}{10}$

$$x = -\frac{3}{10} + \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$$

Vậy  $x \in \left\{\frac{7}{10}; \frac{1}{10}\right\}$

**Câu 7. (HSG 7 huyện 2017 - 2018)**

Tìm  $x$  biết:  $|2x - 7| + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$

**Lời giải**

$$|2x - 7| + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$$

$$|2x - 7| = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$|2x - 7| = 1 \Rightarrow 2x - 7 = 1 \text{ hoặc } 2x - 7 = -1$$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ hoặc } x = 3$$

Vậy  $x \in \{4; 3\}$

**Câu 8. (HSG 7 huyện Bá Thước, 2022 - 2023)**

Tìm  $x$ , biết:  $|x - 0,25| + \frac{1}{2} = 1,25$ .

**Lời giải**

$$|x - 0,25| + \frac{1}{2} = 1,25 \Rightarrow |x - 0,25| = 0,75$$

$$\Rightarrow x - 0,25 = 0,75 \text{ hoặc } x - 0,25 = -0,75$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = -0,5.$$

Vậy  $x \in \{1; -0,5\}$ .

**Câu 9. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc 2016 - 2017)**

Tìm  $x$ , biết:  $\frac{1}{2} - \left| x + \frac{1}{5} \right| = \frac{1}{3}$

**Lời giải**

$$\frac{1}{2} - \left| x + \frac{1}{5} \right| = \frac{1}{3}$$

$$\left| x + \frac{1}{5} \right| = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \left| x + \frac{1}{5} \right| = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{5} = \frac{1}{6} \text{ hoặc } x + \frac{1}{5} = -\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{30} \text{ hoặc } x = -\frac{11}{30}$$

Vậy  $x \in \left\{ -\frac{1}{30}; -\frac{11}{30} \right\}$ .

**Câu 10. (HSG 7 huyện Quốc Oai 2016 - 2017)**

Tìm  $x$ , biết  $\left| x + \frac{1}{5} \right| - 4 = -2$

**Lời giải**

$$\left| x + \frac{1}{5} \right| - 4 = -2$$

$$\Rightarrow \left| x + \frac{1}{5} \right| = 2$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{5} = 2 \text{ hoặc } x + \frac{1}{5} = -2$$

$$\Rightarrow x = \frac{9}{5} \text{ hoặc } x = -\frac{11}{5}$$

Vậy  $x \in \left\{ \frac{9}{5}; -\frac{11}{5} \right\}$ .

**Câu 11. (HSG 7 huyện Nga Sơn- 2016 - 2017)**

Tìm  $x$  biết:  $3|2x-1|+1 = (-2)^2 - 3 \cdot (-2)^3$

**Lời giải**

$$3|2x-1|+1 = (-2)^2 - 3 \cdot (-2)^3$$

$$\Rightarrow |2x-1| = 9$$

$$\Rightarrow 2x-1 = 9 \text{ hoặc } 2x-1 = -9$$

$$\Rightarrow x = 5 \text{ hoặc } x = -4$$

Vậy  $x \in \{5; -4\}$ .

**Câu 12. (HSG 7 huyện Anh Sơn 2016 - 2017)**

Tìm  $x$ , biết:  $\left|x + \frac{1}{3}\right| - 5 = 7$

**Lời giải**

$$\left|x + \frac{1}{3}\right| - 5 = 7 \Rightarrow \left|x + \frac{1}{3}\right| = 12$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{3} = 12 \\ x + \frac{1}{3} = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{35}{3} \\ x = -\frac{37}{3} \end{cases}$$

Vậy  $x \in \left\{\frac{35}{3}; -\frac{37}{3}\right\}$ .

**Câu 13. (HSG 7 huyện Hà Trung 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết:  $3\frac{1}{2} : |2x - 1| = \frac{21}{22}$ .

**Lời giải**

$$3\frac{1}{2} : |2x - 1| = \frac{21}{22}$$

$$|2x - 1| = 3\frac{1}{2} : \frac{21}{22}$$

$$|2x - 1| = \frac{7}{2} \cdot \frac{22}{21}$$

$$|2x - 1| = \frac{11}{3}$$

$$\Rightarrow 2x - 1 = \frac{11}{3} \text{ hoặc } 2x - 1 = -\frac{11}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{7}{3} \text{ hoặc } x = -\frac{4}{3}$$

Vậy  $x \in \left\{-\frac{4}{3}; \frac{7}{3}\right\}$ .

**Câu 14. (HSG 7 huyện Ngọc Lặc, trường Nguyệt Ân; huyện Hiệp Hòa 2022 - 2023)**

Tìm  $x$ , biết:  $\left|x - \frac{1}{3}\right| + \frac{4}{5} = \left|(-3, 2) + \frac{2}{5}\right|$

**Lời giải**

$$\left|x - \frac{1}{3}\right| + \frac{4}{5} = \left|(-3, 2) + \frac{2}{5}\right|$$

$$\left|x - \frac{1}{3}\right| + \frac{4}{5} = \left|-\frac{16}{5} + \frac{2}{5}\right|$$

$$\left|x - \frac{1}{3}\right| + \frac{4}{5} = \frac{14}{5}$$

$$\left|x - \frac{1}{3}\right| = 2$$

$$\text{Suy ra } x - \frac{1}{3} = 2 \text{ hoặc } x - \frac{1}{3} = -2$$

$$\Rightarrow x = \frac{7}{3} \text{ hoặc } x = -\frac{5}{3}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{7}{3} \text{ hoặc } x = -\frac{5}{3}$$

**Câu 15. (HSG 7 huyện Bát Xát 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết  $3 \cdot |9 - 2x| - 17 = 16$

**Lời giải**

$$3 \cdot |9 - 2x| - 17 = 16$$

$$3 \cdot |9 - 2x| = 16 + 17$$

$$3 \cdot |9 - 2x| = 33$$

$$|9 - 2x| = 11$$

$$\text{Suy ra } 9 - 2x = 11 \text{ hoặc } 9 - 2x = -11$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 10$$

$$\text{Vậy } x = -1 \text{ hoặc } x = 10.$$

**Câu 16. (HSG 7 huyện Đức Thọ 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết  $10 - |x - \sqrt{9}| = 9$

**Lời giải**

$$10 - |x - \sqrt{9}| = 9$$

$$10 - |x - 3| = 9$$

$$|x - 3| = 1$$

$$x - 3 = 1 \text{ hoặc } x - 3 = -1$$

$$x = 4 \text{ hoặc } x = 2.$$

$$\text{Vậy } x = 4 \text{ hoặc } x = 2.$$

**Câu 17. (HSG 7 thành phố Vinh, trường Nguyệt Ân 2022 - 2023)**

Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  biết:  $|2x - 1| + \frac{1}{4} = 2.$

**Lời giải**

$$|2x - 1| + \frac{1}{4} = 2$$

$$|2x - 1| = \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow 2x - 1 = \frac{7}{4} \text{ hoặc } 2x - 1 = -\frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{11}{8} \text{ hoặc } x = -\frac{3}{8}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{11}{8}; x = -\frac{3}{8}.$$



**Câu 18. (HSG 7 huyện Thiệu Hóa 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết  $\left| \frac{3}{8} : \left( 2x - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{1}{6} \right| = \frac{5}{3}$

**Lời giải**

$$\left| \frac{3}{8} : \left( 2x - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{1}{6} \right| = \frac{5}{3}$$

Do  $\frac{3}{8} : \left( 2x - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{1}{6} > 0$  với mọi  $x$  nên  $\left| \frac{3}{8} : \left( 2x - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{1}{6} \right| = \frac{3}{8} : \left( 2x - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{1}{6}$

Suy ra  $\frac{3}{8} : \left( 2x - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$

$$\frac{3}{8} : \left( 2x - \frac{1}{3} \right)^2 = \frac{3}{2}$$

$$\left( 2x - \frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 2x - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \text{ hoặc } 2x - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$$

+) TH1:  $2x - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \Rightarrow 2x = \frac{5}{6} \Rightarrow x = \frac{5}{12}$

+) TH2:  $2x - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \Rightarrow 2x = \frac{-1}{6} \Rightarrow x = \frac{-1}{12}$

Vậy  $x \in \left\{ \frac{-1}{12}; \frac{5}{12} \right\}$

**Câu 19. (HSG 7 huyện Nông Cống, 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết:  $\left( \frac{31}{10} - |x+2| \right) : \left( \frac{19}{10} - \frac{7}{5} \right) + \frac{4}{5} = 1$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\left( \frac{31}{10} - |x+2| \right) : \left( \frac{19}{10} - \frac{7}{5} \right) + \frac{4}{5} = 1 \Rightarrow \frac{31}{10} - |x+2| = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{10} = \frac{1}{10}$

$$\Rightarrow |x+2| = \frac{31}{10} - \frac{1}{10} = 3$$

$$\Rightarrow x+2 = 3 \text{ hoặc } x+2 = -3 \Rightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = -5.$$

Vậy  $x = 1$  hoặc  $x = -5$ .

**Câu 20. (HSG 7 huyện Cẩm Thủy 2021 - 2022)**

Tìm  $x$  biết  $\left( 3 - \left| x - \frac{1}{2} \right| \right) \left( \frac{8}{15} - \frac{1}{5} \right) + \frac{2}{3} = 1$

**Lời giải**

$$\left( 3 - \left| x - \frac{1}{2} \right| \right) \left( \frac{8}{15} - \frac{1}{5} \right) + \frac{2}{3} = 1$$

$$\left(3 - \left|x - \frac{1}{2}\right|\right) \cdot \frac{1}{3} = 1 - \frac{2}{3}$$

$$\left(3 - \left|x - \frac{1}{2}\right|\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$3 - \left|x - \frac{1}{2}\right| = 1$$

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| = 2$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{2} = 2 \text{ hoặc } x - \frac{1}{2} = -2$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{2} \text{ hoặc } x = \frac{-3}{2}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right\}$$

**Câu 21. (HSG 7 huyện Tiên Du, Bắc Ninh, 2022 - 2023)**

Tìm  $x$ , biết:  $\frac{1}{3} - \frac{1}{3} : |2x - 1| = -\frac{2}{3}$ .

Lời giải

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3} : |2x - 1| = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3} : |2x - 1| = \frac{1}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$\frac{1}{3} : |2x - 1| = 1$$

$$|2x - 1| = \frac{1}{3}$$

Suy ra  $2x - 1 = \frac{1}{3}$  hoặc  $2x - 1 = -\frac{1}{3}$ .

- Xét  $2x - 1 = \frac{1}{3}$  suy ra  $x = \frac{2}{3}$ .

- Xét  $2x - 1 = -\frac{1}{3}$  suy ra  $x = \frac{1}{3}$ .

$$\text{Vậy } x \in \left\{\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right\}.$$

**Câu 22. (HSG 7 huyện Hà Trung 2021 - 2022)**

Tìm  $x$  biết:  $\frac{11}{4} + \frac{3}{2} : \left|4x - \frac{1}{5}\right| = \frac{7}{2}$

Lời giải

$$\frac{11}{4} + \frac{3}{2} : \left|4x - \frac{1}{5}\right| = \frac{7}{2}$$

$$\frac{3}{2} : \left| 4x - \frac{1}{5} \right| = \frac{7}{2} - \frac{11}{4}$$

$$\frac{3}{2} : \left| 4x - \frac{1}{5} \right| = \frac{3}{4}$$

$$\left| 4x - \frac{1}{5} \right| = \frac{3}{2} : \frac{3}{4}$$

$$\left| 4x - \frac{1}{5} \right| = 2$$

Suy ra:  $4x - \frac{1}{5} = 2$  hoặc  $4x - \frac{1}{5} = -2$

TH1:  $4x - \frac{1}{5} = 2 \Rightarrow 4x = \frac{11}{5} \Rightarrow x = \frac{11}{20}$

TH2:  $4x - \frac{1}{5} = -2 \Rightarrow 4x = -\frac{9}{5} \Rightarrow x = -\frac{9}{20}$

Vậy  $x \in \left\{ \frac{11}{20}; -\frac{9}{20} \right\}$

**Câu 23. (HSG 7 huyện .... 2022 - 2023)**

Tìm  $x$ , biết:  $\frac{3}{2} : |2x - 1| = \frac{3}{5}$

Lời giải

$$\frac{3}{2} : |2x - 1| = \frac{3}{5}$$

$$|2x - 1| = \frac{3}{2} : \frac{3}{5}$$

$$|2x - 1| = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow 2x - 1 = \frac{5}{2} \text{ hoặc } 2x - 1 = -\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{7}{2} \text{ hoặc } 2x = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{7}{4} \text{ hoặc } x = -\frac{3}{4}$$

Vậy  $x \in \left\{ \frac{7}{4}; -\frac{3}{4} \right\}$ .

**Câu 24. (HSG 7 huyện Đông Hưng 2022 - 2023)**

Tìm  $x$ , biết  $3\frac{1}{2} : \left( 4 - \frac{1}{3} \cdot |2x - 1| \right) = \frac{21}{22}$ .

Lời giải

$$3\frac{1}{2} : \left( 4 - \frac{1}{3} \cdot |2x - 1| \right) = \frac{21}{22}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(4 - \frac{1}{3} \cdot |2x - 1|\right) &= 3 \frac{1}{2} : \frac{21}{22} \\ \Rightarrow 4 - \frac{1}{3} \cdot |2x - 1| &= \frac{11}{3} \\ \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot |2x - 1| &= \frac{1}{3} \\ \Rightarrow |2x - 1| &= 1 \\ \Rightarrow 2x + 1 = 1 \text{ hoặc } 2x + 1 &= -1 \\ \Rightarrow x = 0 \text{ hoặc } x &= -1 \\ \text{Vậy } x &\in \{0; -1\}. \end{aligned}$$

**Câu 25. (HSG 7 huyện Mường La 2021 - 2022)**

Tìm  $x$  biết:  $\left|x - \frac{1}{2}\right| + \frac{3}{4} = \left|-1,6 + \frac{3}{5}\right|$

**Lời giải**

Ta có  $\left|x - \frac{1}{2}\right| + \frac{3}{4} = \left|-1,6 + \frac{3}{5}\right|$

$$\Rightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| + \frac{3}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ hoặc } x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{4} \text{ hoặc } x = \frac{1}{4}$$

Vậy:  $x = \frac{3}{4}$  hoặc  $x = \frac{1}{4}$

**Câu 26. (HSG 7 huyện Bình Xuyên, tỉnh Vĩnh Phúc 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết:  $\left(3 - \frac{9}{10} - |x + 2|\right) : \left(\frac{19}{10} - 1 - \frac{2}{5}\right) + \frac{4}{5} = 1$

**Lời giải**

Ta có:  $\left(3 - \frac{9}{10} - |x + 2|\right) : \left(\frac{19}{10} - 1 - \frac{2}{5}\right) + \frac{4}{5} = 1$

$$\Rightarrow \left(\frac{30}{10} - \frac{9}{10} - |x + 2|\right) : \left(\frac{19}{10} - \frac{10}{10} - \frac{4}{10}\right) = 1 - \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{21}{10} - |x + 2|\right) : \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{21}{10} - |x + 2|\right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{21}{10} - |x + 2|\right) = \frac{1}{10}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |x+2| &= \frac{21}{10} - \frac{1}{10} \\ \Rightarrow |x+2| &= 2 \\ \Rightarrow x+2 &= 2 \quad \text{hoặc} \quad x+2 = -2 \\ \Rightarrow x &= 0 \quad \text{hoặc} \quad x = -4 \\ \text{Vậy } x &\in \{0; -4\} \end{aligned}$$

**Câu 27. (HSG 7 huyện Hậu Lộc 2022 - 2023)**

Tìm  $x$ , biết:  $\left(3 - \left|x - \frac{1}{2}\right|\right) \cdot \left(\frac{8}{15} - \frac{1}{5}\right) + \frac{2}{3} = 1$ .

**Lời giải**

$$\left(3 - \left|x - \frac{1}{2}\right|\right) \cdot \left(\frac{8}{15} - \frac{1}{5}\right) + \frac{2}{3} = 1$$

$$\Rightarrow \left(3 - \left|x - \frac{1}{2}\right|\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 3 - \left|x - \frac{1}{2}\right| = 1$$

$$\Rightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| = 2$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{2} = 2 \quad \text{hoặc} \quad x - \frac{1}{2} = -2$$

TH1:  $x - \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

TH 2:  $x - \frac{1}{2} = -2 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

Vậy  $x \in \left\{\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right\}$ .

**Câu 28. (HSG 7 huyện Lương Tài tỉnh Bắc Ninh 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết:  $\left|\frac{39}{2} - 3x^2\right| = \frac{15}{2}$ .

**Lời giải**

$$\left|\frac{39}{2} - 3x^2\right| = \frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{39}{2} - 3x^2 = \frac{15}{2} \quad \text{hoặc} \quad \frac{39}{2} - 3x^2 = -\frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow 3x^2 = \frac{39}{2} - \frac{15}{2} \quad \text{hoặc} \quad 3x^2 = \frac{39}{2} + \frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow 3x^2 = 12 \quad \text{hoặc} \quad 3x^2 = 27$$

$$\Rightarrow x = \pm 2 \quad \text{hoặc} \quad x = \pm 3$$

Vậy  $x \in \{\pm 2; \pm 3\}$

**Câu 29. (HSG 7 trường Nguyễn Khuyến 2015 - 2016)**

Tìm  $x$ , biết:  $5 \cdot \left| \frac{3}{4} - \frac{2}{3}x \right| - 3,25 = -2 \left[ (1,25)^2 - 2,5 \cdot 0,25 + (-0,25)^2 \right]$

**Lời giải**

$$5 \cdot \left| \frac{3}{4} - \frac{2}{3}x \right| - 3,25 = -2 \left[ (1,25)^2 - 2,5 \cdot 0,25 + (-0,25)^2 \right]$$

$$\Rightarrow 5 \cdot \left| \frac{3}{4} - \frac{2}{3}x \right| - \frac{13}{4} = -2$$

$$\Rightarrow \left| \frac{3}{4} - \frac{2}{3}x \right| = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} - \frac{2}{3}x = \frac{1}{4} \text{ hoặc } \frac{3}{4} - \frac{2}{3}x = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{4} \text{ hoặc } x = \frac{3}{2}$$

Vậy  $x \in \left\{ \frac{3}{4}; \frac{3}{2} \right\}$ .

**Câu 30. (HSG 7 huyện Mù Cang Chải - 2016 - 2017)**

Tìm  $x$ , biết:  $|2x - 7| = |5x + 2|$

**Lời giải**

$$|2x - 7| = |5x + 2|$$

$$\Rightarrow 2x - 7 = 5x + 2 \text{ hoặc } 2x - 7 = -5x - 2$$

$$\Rightarrow x = -3 \text{ hoặc } x = \frac{5}{7}$$

Vậy  $x \in \left\{ -3; \frac{5}{7} \right\}$ .

**Câu 31. (HSG 7 huyện Sơn Dương - 2016 - 2017)**

Tìm  $x$  biết:  $|5x - 4| = |x + 2|$

**Lời giải**

Xét với  $x < -2 \Rightarrow 4 - 5x + 2 + x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$  (không thỏa mãn)

Xét với  $-2 < x < \frac{4}{5} \Rightarrow 4 - 5x - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$  (thỏa mãn)

Xét với  $x \geq \frac{4}{5} \Rightarrow 5x - 4 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$  (thỏa mãn)

Vậy  $x \in \left\{ \frac{1}{3}; \frac{3}{2} \right\}$ .

**Câu 32. (HSG 7 huyện 2017 - 2018)**

Tìm  $x$ , biết:  $3x - |2x + 1| = 2$

**Lời giải**

+ Nếu  $x \geq -\frac{1}{2}$  ta được:  $3x - 2x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3$

+ Nếu  $x < -\frac{1}{2}$  ta được:  $3x + 2x + 1 = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$

Vậy  $x = 3$ .

**Câu 33. (HSG 7 huyện 2017 - 2018)**

Tìm  $x$  biết:  $|2x - 1| - x = 4$

**Lời giải**

$$|2x - 1| = x + 4$$

+ Với  $x \geq \frac{1}{2}$ , ta được:  $2x - 1 = x + 4 \Rightarrow x = 5$  (thỏa mãn)

+ Với  $x < \frac{1}{2}$ , ta được:  $-2x + 1 = x + 4 \Rightarrow x = -1$  (thỏa mãn)

Vậy  $x \in \{5; -1\}$ .

**Câu 34. (HSG 7 huyện 2016 - 2017)**

Tìm  $x$ , biết:  $|2x + 3| = x + 2$

**Lời giải**

Ta có:  $x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$

$$|2x + 3| = x + 2$$

$$\Rightarrow 2x + 3 = x + 2 \text{ hoặc } 2x + 3 = -x - 2$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = -\frac{5}{3} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy  $x \in \left\{-1; -\frac{5}{3}\right\}$ .

**Câu 35. (HSG 7 trường Hiền Quan 2015 - 2016)**

Tìm  $x$ , biết:  $|9 - 7x| = 5x - 3$

**Lời giải**

$$|9 - 7x| = 5x - 3. \text{ Điều kiện } x \geq \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow 9 - 7x = 5x - 3 \text{ hoặc } 9 - 7x = 3 - 5x$$

$$\Rightarrow 12x = 12 \text{ hoặc } 2x = 6$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = 3 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy  $x \in \{1; 3\}$ .

**Câu 36. (HSG 7 huyện Kim Thành 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết,  $|x + 3| + 1 = 3x$ .

**Lời giải**

$$|x + 3| + 1 = 3x \text{ (*)}$$

Nếu  $x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$ .

Do đó  $|x + 3| = x + 3$

Từ (\*), ta có  $x + 3 + 1 = 3x$

$$4 = 2x$$

$$x = 2 \text{ (TM)}$$

Nếu  $x + 3 < 0 \Rightarrow x < -3$ .

$$|x + 3| = -x - 3$$

Từ (\*), ta có  $-x - 3 + 1 = 3x$

$$-2 = 4x$$

$$x = \frac{-1}{2} \text{ (Loại)}$$

Vậy  $x = 2$ .

**Câu 37. (HSG 7 huyện Tân Kỳ 2022 – 2023)**

Tìm  $x$  biết rằng:  $|x - 1| = 2 - x$ .

**Lời giải**

$$|x - 1| = 2 - x \text{ điều kiện } 2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$$

Trường hợp 1:  $1 \leq x \leq 2$  ta có :

$$|x - 1| = 2 - x$$

$$x - 1 = 2 - x$$

$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ (tm)}$$

Trường hợp 2:  $x < 1$  ta có:

$$|x - 1| = 2 - x$$

$$1 - x = 2 - x$$

$$1 = 2 \text{ (vô lý)}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{3}{2}.$$

**Câu 38. (HSG 7 thị xã Thái Hòa Nghệ An 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết:  $2x - |x - 3| = 2$ .

**Lời giải**

$$2x - |x - 3| = 2 \text{ (1)}$$

Nếu  $x \geq 3$ . Từ (1) ta có:  $2x - x + 3 = 2 \Leftrightarrow x = -1$  (loại)

Nếu  $x < 3$ . Từ (1) ta có:  $2x + x - 3 = 2 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$  (thỏa mãn)

$$\text{Vậy } x = \frac{5}{3}.$$

**Câu 39. (HSG 7 huyện Bát Xát 2021 - 2022)**

Tìm  $x$  biết:  $|2x + 3| - x = 14$

**Lời giải**



$$|2x + 3| - x = 14 \Rightarrow |2x + 3| = 14 + x$$

TH 1:  $2x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{-3}{2}$ . Khi đó ta có:

$$2x + 3 = 14 + x$$

$$x = 11 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

TH 2:  $2x + 3 < 0 \Rightarrow x < \frac{-3}{2}$ . Khi đó ta có:

$$-(2x + 3) = 14 + x$$

$$-3x = 17$$

$$x = \frac{-17}{3} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ 11; \frac{-17}{3} \right\}$$

**Câu 40. (HSG 7 huyện Bá Thước 2021 - 2022)**

Tìm  $x$  biết:  $|x - 7| + 2x + 5 = 6$

**Lời giải**

$$|x - 7| + 2x + 5 = 6$$

Nếu  $x \geq 7 \Rightarrow x - 7 + 2x + 5 = 6 \Rightarrow 3x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{3} < 7$  (loại)

Nếu  $x < 7 \Rightarrow 7 - x + 2x + 5 = 6 \Rightarrow 12 + x = 6 \Rightarrow x = -6 < 7$  (thỏa mãn)

Vậy  $x = -6$ .

**Câu 41. (HSG 7 tỉnh Quảng Ninh 2022 - 2023)**

Tìm  $x$ , biết:  $|x + 3| - 2x = 5$ .

**Lời giải**

$$|x + 3| - 2x = 5 \Rightarrow |x + 3| = 5 + 2x \quad (1)$$

TH1: Nếu  $x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow |x + 3| = x + 3$

Khi đó (1) có dạng:  $x + 3 = 5 + 2x$

$$\Rightarrow x = -2 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

TH2: Nếu  $x + 3 < 0 \Rightarrow x < -3 \Rightarrow |x + 3| = -x - 3$

Khi đó (1) có dạng:  $-x - 3 = 5 + 2x$

$$\Rightarrow 3x = -8$$

$$\Rightarrow x = \frac{-8}{3} \text{ (Không thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy  $x = -2$ .

**Câu 42. (HSG 7 huyện Tương Dương, tỉnh Nghệ An 2022 - 2023)**

Tìm  $x$ , biết:  $|2x - 1| - x = 1$ .

**Lời giải**

$$|2x - 1| - x = 1 \text{ hay } |2x - 1| = 1 + x$$

Suy ra  $2x - 1 = 1 + x$  hoặc  $-(2x - 1) = 1 + x$  (Điều kiện  $x \geq -1$ )

+ Trường hợp 1:

$$2x - 1 = 1 + x$$

$$2x - x = 1 + 1$$

$$x = 2 \text{ (Thỏa mãn)}$$

+ Trường hợp 2:

$$-(2x - 1) = 1 + x$$

$$-2x + 1 = 1 + x$$

$$3x = 0$$

$$x = 0 \text{ (Thỏa mãn)}$$

Vậy  $x \in \{2; 0\}$ .

**Câu 43. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ, tỉnh Thái Bình 2022 - 2023)**

Tìm  $x$ , biết  $2023 - |x - 2023| = x$ .

**Lời giải**

Ta có  $2023 - |x - 2023| = x$

$$|x - 2023| = 2023 - x$$

$$|x - 2023| = -(x - 2023)$$

Do đó  $x - 2023 \leq 0$

Suy ra  $x \leq 2023$

Kết luận:  $x \leq 2023$ .

**Câu 44. (HSG 7 huyện Nghĩa Hành 2021 - 2022)**

Tìm  $x$  biết:  $2|5x - 3| - 2x = 14$

**Lời giải**

Ta có:  $2|5x - 3| - 2x = 14$

$$\Rightarrow 2|5x - 3| = 2x + 14$$

$$\Rightarrow |5x - 3| = x + 7 \text{ với điều kiện } x \geq -7$$

$$\Rightarrow 5x - 3 = x + 7 \text{ hoặc } 5x - 3 = -(x + 7)$$

$$\Rightarrow 4x = 10 \text{ hoặc } 6x = -4$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{2} \text{ hoặc } x = \frac{-2}{3}$$

Vậy có hai giá trị  $x$  thỏa mãn điều kiện  $x \in \left\{ \frac{5}{2}; \frac{-2}{3} \right\}$ .

**Câu 45. (HSG 7 huyện Tân Kỳ 2021 - 2022)**

Tìm  $x$  biết:  $|x(x + 6)| = x$

**Lời giải**

Ta có:  $|x(x + 6)| = x$  Điều kiện:  $x \geq 0$

$$\Rightarrow x(x + 6) = x \text{ hoặc } x(x + 6) = -x$$

$$\Rightarrow x(x+6-1)=0 \text{ hoặc } x(x+6+1)=0$$

$$\Rightarrow x(x+5)=0 \text{ hoặc } x(x+7)=0$$

$$\Rightarrow x=0 \text{ hoặc } x=-5 \text{ hoặc } x=-7$$

Kết hợp với điều kiện ta được  $x=0$

Vậy  $x=0$ .

**Câu 46. (HSG 7 trường Cự Khê 2016 - 2017)**

Tìm  $x$  biết:  $|2x-3| = \left(\frac{1}{2}\right)^y$  và  $y = \frac{\frac{3}{7} - \frac{3}{11} + \frac{3}{101}}{\frac{5}{7} - \frac{5}{11} + \frac{5}{101}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{5}{4} - \frac{5}{6} + \frac{5}{8}}$

**Lời giải**

Ta có:  $y = \frac{3\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{101}\right)}{5\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{101}\right)} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$

Nên  $|2x-3| = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$

+) TH1:  $2x-3 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7}{4}$

+) TH2:  $2x-3 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{4}$

Vậy  $x \in \left\{\frac{7}{4}; \frac{5}{4}\right\}$ .

**Câu 47. (HSG 7 huyện Thanh Oai 2014- 2015)**

Tìm  $x$ , biết:

a)  $|2x-1| - x = 1$

b)  $|x+3| - 2x = |x-4|$

**Lời giải**

a)  $|2x-1| - x = 1$

Nếu  $x \geq \frac{1}{2}$  ta có  $2x-1-x=1 \Rightarrow x=2$  (thỏa mãn)

Nếu  $x < \frac{1}{2}$  ta có:  $-2x+1-x=1 \Rightarrow x=0$  (thỏa mãn)

Vậy  $x \in \{2; 0\}$ .

b)  $|x+3| - 2x = |x-4|$  (1)

Lập bảng xét dấu

$x$		$-3$		$4$	
$x+3$	$-$	$0$	$+$	$ $	$+$
$x-4$	$-$	$ $	$-$	$0$	$+$

+ Với  $x < 3$ , ta có (1) trở thành:

$$-x - 3 - 2x = -x + 4 \Rightarrow -2x = 7 \Rightarrow x = -3,5 \text{ (thỏa mãn)}$$

+ Với  $-3 \leq x \leq 4$ , ta có (1) trở thành:

$$x + 3 - 2x = -x + 4 \Rightarrow 0.x = 1 \text{ (vô lý)}$$

+ Với  $x > 4$ , ta có (1) trở thành:

$$x + 3 - 2x = x - 4 \Rightarrow -2x = -7 \Rightarrow x = 3,5 \text{ (không thỏa mãn)}$$

Vậy  $x = -3,5$

**Câu 47. (HSG 7 huyện Đô Lương 2022 - 2023)**

Tìm  $x \in \mathbb{N}$  thỏa mãn.  $|x - 4| - |x + 1| = -1$  (\*)

**Lời giải**

Xét  $x \geq 4$ : (\*)  $\Rightarrow x - 4 - (x + 1) = -1 \Rightarrow -4 = 0$  (vô lý) hay (\*) vô nghiệm.

Xét  $-1 \leq x < 4$ : (\*)  $\Rightarrow -(x - 4) - (x + 1) = -1 \Rightarrow -2x = -4 \Rightarrow x = 2$  (thỏa điều kiện).

Xét  $x < -1$ : (\*)  $\Rightarrow -(x - 4) + (x + 1) = -1 \Rightarrow 6 = 0$  (vô lý) hay (\*) vô nghiệm.

Vậy  $x = 2$  là giá trị cần tìm.

**Câu 49. (HSG 7 huyện Nghi Sơn 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết:  $|x + 5| + |x - 3| = 9$ .

**Lời giải**

$$|x + 5| + |x - 3| = 9 \quad (1)$$

$$* \text{ Xét } x < -5 \Rightarrow \begin{cases} x + 5 < 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x + 5| = -x - 5 \\ |x - 3| = -x + 3 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó (1)} \Rightarrow -x - 5 - x + 3 = 9 \Rightarrow -2x = 11 \Rightarrow x = \frac{-11}{2} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$* \text{ Xét } -5 \leq x \leq 3 \Rightarrow \begin{cases} x + 5 \geq 0 \\ x - 3 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x + 5| = x + 5 \\ |x - 3| = -x + 3 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó (1)} \Rightarrow x + 5 - x + 3 = 9 \Rightarrow 0.x = 1 \text{ (vô lý)}$$

$$* \text{ Xét } x > 3 \Rightarrow \begin{cases} x + 5 > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x + 5| = x + 5 \\ |x - 3| = x - 3 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó (1)} \Rightarrow x + 5 + x - 3 = 9 \Rightarrow 2x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{2} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{-11}{2}; \frac{7}{2} \right\}.$$

**Câu 50. (HSG 7 huyện Lý Nhân 2021 - 2022)**

Tìm  $x$ , biết  $|x| + |x + 2022| = 2023$

**Lời giải**

$$\text{Với } x > 0, \text{ ta được } x + x + 2022 = 2023 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Với } -2022 < x < 0, \text{ ta được } -x + x + 2022 = 2023 \Rightarrow 0x = 1 \text{ (vô lý)}$$

Với  $x < -2022$ , ta được  $-x - x - 2022 = 2023 \Rightarrow -2x = 4045 \Rightarrow x = \frac{-4045}{2}$

Vậy  $x \in \left\{ \frac{1}{2}; \frac{-4045}{2} \right\}$

**Câu 51. (HSG 7 huyện Hưng Hà, Thống Nhất, 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết:  $|2x - 3| - |3x + 2| = -4$ .

**Lời giải**

Ta có:  $2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ .

$3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2}{3}$ .

TH1:  $x \leq \frac{-2}{3}$

$|2x - 3| - |3x + 2| = -4 \Rightarrow 3 - 2x + 3x + 2 = -4 \Rightarrow x = -9$  (thỏa mãn).

TH2:  $\frac{-2}{3} < x < \frac{3}{2}$

$|2x - 3| - |3x + 2| = -4 \Rightarrow 2x - 3 + 3x + 2 = -4 \Rightarrow x = \frac{-3}{5}$  (thỏa mãn).

TH3:  $\frac{3}{2} \leq x$

$|2x - 3| - |3x + 2| = -4 \Rightarrow 2x - 3 - 3x - 2 = -4 \Rightarrow x = -1$  (loại).

Vậy  $x \in \left\{ -9; \frac{-3}{5} \right\}$ .

**Câu 52. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Kim Trung 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết:  $|x - 3| + |x - 2| = 1$

**Lời giải**

Tìm  $x$  biết:  $|x - 3| + |x - 2| = 1$  (1)

Xét:  $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

Ta có bảng xét dấu:

$x$	2	3
$x - 3$	-	+
$x - 2$	-	+

Dựa vào bảng xét dấu ta có:

- Nếu  $x < 2$  thì (1) trở thành:

$-(x - 3) - (x - 2) = 1$

$\Rightarrow -2x = -4$

$\Rightarrow x = 2$  (không thỏa mãn điều kiện)

- Nếu  $2 \leq x < 3$  thì (1) trở thành:

$$-(x-3)+(x-2)=1 \Rightarrow 0x=0 \text{ (Luôn đúng với } 2 \leq x < 3)$$

- Nếu  $3 \leq x$  thì (1) trở thành:

$$(x-3)+(x-2)=1$$

$$2x=6$$

$$x=3 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy  $2 \leq x \leq 3$  thỏa mãn bài toán.

**Câu 53. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Trần Thủ Độ 2022 - 2023)**

Tìm  $x$ , biết:  $|x-1|+|x-2|=5$ ..`

**Lời giải**

$$|x-1|+|x-2|=5 \quad (1)$$

+) Với  $x \geq 2$  khi đó (1) có dạng:  $x-1+x-2=5 \Rightarrow 2x-3=5$  (chọn)

+) Với  $1 < x < 2$  khi đó (1) có dạng:  $x-1+2-x=5 \Rightarrow 0x=4$  (vô lý)

+) Với  $x \leq 1$  khi đó (1) có dạng:  $1-x+2-x=5 \Rightarrow -2x+3=5$  (chọn)

KL:  $x=4$  hoặc  $x=-1$

**Câu 54. (HSG 7 huyện Hiệp Hòa 2016 - 2017)**

Tìm  $x$  biết:  $|4x+3|-|x-1|=7$

**Lời giải**

$$|4x+3|-|x-1|=7$$

Ta có bảng xét dấu :

$x$	$-\frac{3}{4}$	$1$
$ 4x+3 $	$-$	$+$
$ x-1 $	$-$	$+$

+ Với  $x < -\frac{3}{4}$ , ta được:  $-4x-3-(-x+1)=7 \Rightarrow -3x=11 \Rightarrow x=-\frac{11}{3}$  (thỏa mãn)

+ Với  $-\frac{3}{4} \leq x < 1$ , ta được:  $4x+3-(-x+1)=7 \Rightarrow 5x=5 \Rightarrow x=1$  (loại)

+ Với  $x \geq 1$ , ta được:  $4x+3-(x-1)=7 \Rightarrow 3x=3 \Rightarrow x=1$  (thỏa mãn)

Vậy  $x \in \left\{-\frac{11}{3}; 1\right\}$ .

**Câu 55. (HSG 7 Quận Tây Hồ 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết  $-3|x-5|+7|x-5|=2^2.5$ .

**Lời giải**

$$-3|x-5|+7|x-5|=2^2.5$$

$$4|x-5|=4.5$$

$$|x-5|=5$$

Suy ra  $x - 5 = 5$  hoặc  $x - 5 = -5$

Hay  $x = 10$  hoặc  $x = 0$

Vậy  $x \in \{10; 0\}$

**Câu 56. (HSG 7 -TP Thanh Hóa, 2022 - 2023)**

Tìm  $x$ , biết:  $\left|2x + \frac{1}{2}\right| + \left|2x - \frac{3}{2}\right| = 2$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\left|2x + \frac{1}{2}\right| + \left|2x - \frac{3}{2}\right| = \left|2x + \frac{1}{2}\right| + \left|\frac{3}{2} - 2x\right| \geq \left|2x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2x\right| = 2$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi:  $\left(2x + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2} - 2x\right) \geq 0$ .

Giải ra được:  $-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$ .

**Câu 57. (HSG 7 huyện Sóc Sơn 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết  $\left|x - \frac{3}{4}\right| + 2x^2 = \left|2x^2 + 2,5\right|$

**Lời giải**

Nhận thấy  $2x^2 + 2,5 \geq 2,5$  với mọi  $x$  nên  $\left|2x^2 + 2,5\right| = 2x^2 + 2,5$

Do đó  $\left|x - \frac{3}{4}\right| + 2x^2 = 2x^2 + 2,5$

$\Rightarrow \left|x - \frac{3}{4}\right| = 2,5$

Suy ra  $x - \frac{3}{4} = 2,5$  hoặc  $x - \frac{3}{4} = -2,5$

$\Rightarrow x = \frac{13}{4}$  hoặc  $x = -\frac{7}{4}$

Vậy  $x = \frac{13}{4}$  hoặc  $x = -\frac{7}{4}$

**Câu 58. (HSG 7 huyện Quan Hoa 2021 - 2022; huyện Minh An - 2016 - 2017)**

Tìm  $x$ , biết:  $|x - 2| + |3 - 2x| = 2x - 1$

**Lời giải**

Tìm  $x$  biết:  $|x - 2| + |3 - 2x| = 2x - 1$

Vì vế trái luôn không âm nên vế phải  $2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$

Ta có bảng xét dấu :

$x$	$\frac{3}{2}$	$2$	
$ x - 2 $	-		- 0 +

$ 3-2x $	+	0	-		-
----------	---	---	---	--	---

+ Nếu  $x > 2$  ta có:  $x - 2 + 2x - 3 = 2x - 1 \Rightarrow x = 4$  (thỏa mãn)

+ Nếu  $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$  ta có:  $2 - x + 2x - 3 = 2x - 1 \Rightarrow x = 0$  (loại)

+ Nếu  $\frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2}$  ta có:  $2 - x + 3 - 2x = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{6}{5}$  (thỏa mãn)

Vậy  $x \in \left\{4; \frac{6}{5}\right\}$ .

**Câu 59. (HSG 7 trường Ngô Gia Tự 2017 - 2018)**

Tìm  $x$ , biết:  $|x+3| + |x+7| = 4x$

**Lời giải**

Ta có bảng xét dấu :

$x$	$-7$	$-3$
$ x+3 $	-   -	0 +
$ x+7 $	- 0 +	+

+ Với  $x < -7$ , ta được:  $-x - 3 - x - 7 = 4x \Rightarrow -6x = 7 \Rightarrow x = -\frac{7}{6}$  (loại)

+ Với  $-7 \leq x < -3$ , ta được:  $-x - 3 + x + 7 = 4x \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$  (loại)

+ Với  $x \geq -3$ , ta được:  $x + 3 + x + 7 = 4x \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$  (thỏa mãn)

Vậy  $x = 5$ .

**Câu 60. (HSG 7 huyện Sông Lô, Vĩnh Phúc, 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết:  $2024x - |1011x + 2| = |1012x + 3|$ . (\*)

**Lời giải**

$$2024x - |1011x + 2| = |1012x + 3|$$

$$\Rightarrow |1011x + 2| + |1012x + 3| = 2024x \quad (1)$$

Ta có:  $|1011x + 2| \geq 0$  và  $|1012x + 3| \geq 0$ , với mọi  $x$

$$\Rightarrow |1011x + 2| + |1012x + 3| \geq 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $\Rightarrow 2024x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

Khi đó:  $|1011x + 2| = 1011x + 2$  và  $|1012x + 3| = 1012x + 3$ .

$$\text{Ta có: } 2024x - |1011x + 2| = |1012x + 3| \Rightarrow 1011x + 2 + 1012x + 3 = 2024x$$

$$\Rightarrow 1011x + 1012x - 2024x = -5 \Rightarrow -x = -5 \Rightarrow x = 5 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy  $x = 5$ .

**Câu 61. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ 2021 - 2022)**

Tìm  $x$  biết:  $\left|\frac{1}{3} + 2021x\right| + \left|\frac{2}{3} + 2022x\right| = 4044x$

**Lời giải**



$$\text{Ta có } \left| \frac{1}{3} + 2021x \right| + \left| \frac{2}{3} + 2022x \right| = 4044x$$

$$\text{mà } \begin{cases} \left| \frac{1}{3} + 2021x \right| \geq 0 (\forall x) \\ \left| \frac{2}{3} + 2022x \right| \geq 0 (\forall x) \end{cases}$$

$$\text{Nên } 4044x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

$$+ \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left| \frac{1}{3} + 2021x \right| > 0 \\ \left| \frac{2}{3} + 2022x \right| > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left| \frac{1}{3} + 2021x \right| = \frac{1}{3} + 2021x \\ \left| \frac{2}{3} + 2022x \right| = \frac{2}{3} + 2022x \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } \left| \frac{1}{3} + 2021x \right| + \left| \frac{2}{3} + 2022x \right| = 4044x$$

$$\frac{1}{3} + 2021x + \frac{2}{3} + 2022x = 4044x$$

$$+ \text{Tìm được } x = 1 \text{ (Thỏa mãn)}$$

**Câu 62.** (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Phạm Kinh Ân 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x, \text{ biết: } \left| |x-1|+2 \right| = 3$$

**Lời giải**

$$\text{Lập luận được } |x-1|+2 > 0$$

$$\text{Nên } \left| |x-1|+2 \right| = 3$$

$$\Rightarrow |x-1|+2 = 3$$

$$\Rightarrow |x-1| = 1$$

$$\Rightarrow x-1 = 1 \text{ hoặc } x-1 = -1$$

$$\text{Vậy } x = 2, x = 0$$

**Câu 63.** (HSG 7 trường Nguyễn Khuyến; Tam Hưng 2016 - 2017)

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } \left| |x+3|-8 \right| = 20$$

**Lời giải**

$$\left| |x+3|-8 \right| = 20 \Rightarrow \begin{cases} |x+3|-8 = 20 \\ |x+3|-8 = -20 \end{cases}$$

$$+ \text{Với } |x+3|-8 = 20 \Rightarrow |x+3| = 28 \Rightarrow \begin{cases} x = 25 \\ x = -31 \end{cases}$$

+ Với  $|x+3|-8=-20 \Rightarrow |x+3|=-12$  (vô nghiệm)

Vậy  $x \in \{25; -31\}$

**Câu 64. (HSG 7 thành phố Sầm Sơn, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết:  $\left|3x+2-\frac{2}{3}\right|=\frac{4}{3}$

**Lời giải**

Từ đề bài, suy ra  $|3x+2-\frac{2}{3}|=\frac{4}{3}$  hoặc  $|3x+2-\frac{2}{3}|=-\frac{4}{3}$

Nếu  $|3x+2-\frac{2}{3}|=\frac{4}{3} \Rightarrow |3x+2|=2 \Rightarrow x=0$  hoặc  $x=-\frac{4}{3}$ .

Nếu  $|3x+2-\frac{2}{3}|=-\frac{4}{3} \Rightarrow |3x+2|=-\frac{2}{3}$  (loại)

Vậy  $x=0$  hoặc  $x=-\frac{4}{3}$ .

**Câu 65. (HSG 7 thành phố Ninh Bình; huyện Hưng Hà 2022 - 2023; trường số 2 Phú Nhuận 2014 - 2015; huyện Việt Yên 2012 - 2013)**

Tìm  $x$ , biết:  $|x^2+|x-1||=x^2+2$

**Lời giải**

$|x^2+|x-1||=x^2+2$

$\Rightarrow x^2+|x-1|=x^2+2$  hoặc  $x^2+|x-1|=-x^2-2$

$\Rightarrow |x-1|=2$  hoặc  $|x-1|=-2x^2-2$

+ Nếu  $|x-1|=2 \Rightarrow x-1=2$  hoặc  $x-1=-2$

$\Rightarrow x=3$  hoặc  $x=-1$

+ Nếu  $|x-1|=-2x^2-2$  vô nghiệm do  $-2x^2-2=-2(x^2+1)<0$  với mọi  $x$

Vậy  $x \in \{-1; 3\}$ .

**Câu 66. (HSG 7 huyện Quốc Oai, Hà Nội 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết:  $|x^2+|2x-1||=x^2+2023$ .

**Lời giải**

Với mọi  $x$ , ta có  $x^2 \geq 0$ ;  $|2x-1| \geq 0 \Rightarrow x^2+|2x-1| \geq 0$

$\Rightarrow |x^2+|2x-1||=x^2+|2x-1|$

Do đó  $|x^2+|2x-1||=x^2+2023$

$x^2+|2x-1|=x^2+2023$

$|2x-1|=2023$

$2x-1=2023$  hoặc  $2x-1=-2023$

$x=1012$  hoặc  $x=-1011$

Vậy  $x = 1012$  hoặc  $x = -1011$ .

**Câu 67. (HSG 7 thành phố Bắc Giang 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết  $|x^2 + 1 + |8x - 4|| = x^2 + 2023$ .

**Lời giải**

$$|x^2 + 1 + |8x - 4|| = x^2 + 2023$$

Ta thấy  $a^2 \geq 0, \forall a; |a| \geq 0, \forall a$

Do đó với mọi  $x$ , ta có

$$x^2 \geq 0; |8x - 4| \geq 0 \text{ mà } 1 > 0 \Rightarrow x^2 + 1 + |8x - 4| > 0$$

$$\Rightarrow |x^2 + 1 + |8x - 4|| = x^2 + 1 + |8x - 4|$$

$$\text{Nên } x^2 + 1 + |8x - 4| = x^2 + 2023$$

$$\Rightarrow |8x - 4| = 2022$$

$$\Rightarrow 8x - 4 = 2022 \text{ hoặc } 8x - 4 = -2022$$

$$\text{+) TH1: } 8x - 4 = 2022$$

$$x = \frac{1013}{4}$$

$$\text{+) TH2: } 8x - 4 = -2022$$

$$x = \frac{-1009}{4}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{1013}{4}; \frac{-1009}{4} \right\}.$$



**Câu 68. (HSG 7 huyện Hương Trà, 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết:  $|3x - 3| + 2x + (-1)^{2022} = 3x + 2023^0$ .

**Lời giải**

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } |3x - 3| + 2x + (-1)^{2022} = 3x + 2023^0 \Rightarrow |3x - 3| + 2x + 1 = 3x + 1 \quad (*)$$

$$\text{Điều kiện để } x \text{ thỏa mãn bài toán là: } 3x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{-1}{3}.$$

$$\text{Khi đó } x \geq \frac{-1}{3} \Rightarrow 2x + 1 \geq 0 \text{ nên } (*) \text{ trở thành:}$$

$$\Rightarrow |3x - 3| + 2x + 1 = 3x + 1 \Rightarrow |3x - 3| = x \quad (x \geq 0).$$

$$\text{Nếu } x \geq 1 \text{ ta có } 3x - 3 = x \text{ nên } x = \frac{3}{2} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\text{Nếu } 0 \leq x < 1 \text{ ta có } 3 - 3x = x \text{ nên } x = \frac{3}{4} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{3}{2}; \frac{3}{4} \right\}.$$

**Câu 69. (HSG 7 huyện Thanh Miện 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết  $\frac{1}{|x-3|+2} = \frac{2}{|x-3|+4}$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \frac{1}{|x-3|+2} &= \frac{2}{|x-3|+4} \\ |x-3|+4 &= 2(|x-3|+2) \\ |x-3|+4 &= 2|x-3|+4 \\ 2|x-3|+4-|x-3|-4 &= 0 \\ |x-3| &= 0 \\ x-3 &= 0 \\ x &= 3 \\ \text{Vậy } x &= 3. \end{aligned}$$

**Câu 70. (HSG 7 huyện Hưng Hà, Phạm Đôn Lễ, 2022 - 2023)**

Tìm  $x$ , biết:  $\frac{2}{|x-2|+2} = \frac{3}{|6-3x|+1}$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{2}{|x-2|+2} &= \frac{3}{|6-3x|+1} \\ \Rightarrow 2 \cdot (|6-3x|+1) &= 3 \cdot (|x-2|+2) \\ \Rightarrow 2|6-3x|+2 &= 3|x-2|+6 \\ \Rightarrow 2|6-3x|-3|x-2| &= 6-2 \\ \Rightarrow 2 \cdot 3|2-x|-3|x-2| &= 4 \\ \Rightarrow 6|x-2|-3|x-2| &= 4 \\ \Rightarrow 3|x-2| &= 4 \\ \Rightarrow |x-2| &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x-2 = \frac{4}{3} \text{ hoặc } x-2 = -\frac{4}{3}$$

$$\text{TH1: } x-2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{3} + 2 \Rightarrow x = \frac{10}{3} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{TH2: } x-2 = -\frac{4}{3} \Rightarrow x = 2 - \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{10}{3}; \frac{2}{3} \right\}.$$

**Câu 71. (HSG 7 huyện Nghi Xuân, tỉnh Hà Tĩnh 2022 - 2023)**

Tìm số hữu tỉ  $x$  biết  $|x+2|+|x-2|+|x+3|=5$  (1).

**Lời giải**

\*Trường hợp 1:  $x < -3$

$$(1) \Rightarrow (-x-2) + (-x+2) + (-x-3) = 5 \Rightarrow -3x-3 = 5 \Rightarrow x = \frac{-8}{3} \text{ (loại)}$$

\*Trường hợp 2:  $x = -3$

$$(1) \Rightarrow 6 = 5 \text{ (loại)}$$

\* Trường hợp 3:  $-3 < x < -2$

$$(1) \Rightarrow (-x-2) + (-x+2) + x+3 = 5 \Rightarrow x = -2 \text{ (loại)}$$

\* Trường hợp 4:  $x = -2$

$$(1) \Rightarrow 5 = 5 \text{ (luôn đúng)}$$

\* Trường hợp 5:  $-2 < x < 2$

$$(1) \Rightarrow x+2 + (-x+2) + x+3 = 5 \Rightarrow x = -2 \text{ (loại)}$$

\* Trường hợp 6:  $x = 2$

$$(1) \Rightarrow 9 = 5 \text{ (vô lí)}$$

\* Trường hợp 7:  $x > 2$

$$(1) \Rightarrow x+2 + x-2 + x+3 = 5 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ (loại)}$$

Vậy  $x = -2$ .

**Câu 72. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2021 - 2022)**

Tìm  $x$ , biết:  $|x-1| + |x-2| + |x-4| = 3$

**Lời giải**

Nhận thấy:  $|x-1| + |x-4| = |x-1| + |4-x|$

Ta có:  $|x-1| \geq x-1$ ;  $|4-x| \geq 4-x$

$$\Rightarrow |x-1| + |x-4| = |x-1| + |4-x| \geq x-1 + 4-x$$

$$\Rightarrow |x-1| + |x-4| \geq 3$$

Lại có:  $|x-2| \geq 0 \Rightarrow |x-1| + |x-2| + |x-4| \geq 3$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ x-2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 4 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 2$$

Vậy  $x = 2$ .

**Câu 73. (HSG 7 trường Lê Tư Thành 2022 - 2023; huyện Thanh Miện 2021 - 2022)**

Tìm  $x$  biết:  $|x+1| + |x+2| + |x+3| = 4x$

**Lời giải**

Ta có:  $|x+1| + |x+2| + |x+3| = 4x$

Vì vế trái không âm với mọi  $x$  nên  $4x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

Với  $x \geq 0$  thì  $|x+1| = x+1$ ;  $|x+2| = x+2$ ;  $|x+3| = x+3$  ta có:

$$x+1 + x+2 + x+3 = 4x$$

$$\Rightarrow 3x+6 = 4x$$

$\Rightarrow x = 6$  (thỏa mãn)

Vậy  $x = 6$

**Câu 74. (HSG 7 huyện Yên Mỹ 2021 - 2022)**

Tìm  $x$ , biết  $|x-1| + |x-2| + |x-3| = x-4$

**Lời giải**

$$|x-1| + |x-2| + |x-3| = x-4$$

$$\text{Vì } |x-1| + |x-2| + |x-3| \geq 0 \text{ nên } x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \quad (1)$$

$$\text{Khi đó: } |x-1| = x-1; |x-2| = x-2; |x-3| = x-3$$

$$(1) \Rightarrow x-1 + x-2 + x-3 = x-4$$

$$\Rightarrow 2x = 2$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ (không thỏa mãn } x \geq 4)$$

Vậy không tồn tại giá trị của  $x$  thỏa mãn.

**Câu 75. (HSG 7 huyện Thạch Thành 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết:  $|x+2| + |x+3| = 4(x-1) - |x-1|$ .

**Lời giải**

$$|x+2| + |x+3| = 4(x-1) - |x-1| \text{ Suy ra } |x+2| + |x+3| + |x-1| = 4(x-1)$$

Do vế trái luôn lớn hơn hoặc bằng 0 nên vế phải cũng phải lớn hơn hoặc bằng 0 nên  $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$

Với  $x \geq 1 \Rightarrow x+2 > 0; x+3 > 0; x-1 \geq 0$  nên ta có:

$$x+2 + x+3 + x-1 = 4(x-1)$$

$$\Rightarrow x = 8 \text{ (t/m).}$$

Vậy  $x = 8$ .

**Câu 76. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Dân Chủ 2022 - 2023)**

Tìm  $x, y$  thỏa mãn:  $|x-1| + |x-2| + |y-3| + |x-4| = 3$

**Lời giải**

$$\text{Theo bài cho: } |x-1| + |x-2| + |y-3| + |x-4| = 3$$

$$|x-1| + |x-2| + |y-3| + |4-x| = 3 \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } |x-1| + |4-x| \geq |(x-1) + (4-x)|$$

$$|x-1| + |4-x| \geq 3 \quad (2)$$

$$|x-2| \geq 0, |y-3| \geq 0 \quad (3)$$

Từ (2), (3) và (1) suy ra:

$$\begin{cases} |x-1| + |4-x| = 3 & (4) \\ |x-2| = 0 & (5) \\ |y-3| = 0 & (6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x-2| = 0 & (5) \\ |y-3| = 0 & (6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x-2| = 0 & (5) \\ |y-3| = 0 & (6) \end{cases}$$

Từ (5) ta được  $x = 2$ , thay vào (4) ta có:  $|2-1| + |4-2| = 3$

$$1+2=3 \text{ (luôn đúng)}$$

Từ (6) ta được  $y = 3$ .

Vậy :  $x = 2, y = 3$ .

**Câu 77. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2021 - 2022)**

Tìm  $x$  biết:  $|x+1|+|x+2|+|x+3|+|x+4|=10x$

**Lời giải**

$$|x+1|+|x+2|+|x+3|+|x+4|=10x \quad (1)$$

Mà  $|x+1|+|x+2|+|x+3|+|x+4| \geq 0$  với mọi giá trị của  $x$  (2)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow 10x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

Với  $x \geq 0 \Rightarrow x+1 > 0, x+2 > 0, x+3 > 0, x+4 > 0$

$$\Rightarrow |x+1|=x+1, |x+2|=x+2, |x+3|=x+3, |x+4|=x+4 \quad (3)$$

Từ (1) và (3)  $\Rightarrow x+1+x+2+x+3+x+4=10x$

$$\Rightarrow 4x+10=10x \Rightarrow 6x=10$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{3} \text{ (thỏa mãn } x \geq 0)$$

Vậy  $x = \frac{5}{3}$

**Câu 78. (HSG 7 huyện Ninh Giang, tỉnh Hải Dương 2022 - 2023)**

Tìm  $x$ , biết:  $\left|x + \frac{1}{3}\right| + \left|x + \frac{2}{3}\right| + \left|x + \frac{2}{5}\right| + \left|x + \frac{3}{2}\right| = 33x$ .

**Lời giải**

$$\left|x + \frac{1}{3}\right| + \left|x + \frac{2}{3}\right| + \left|x + \frac{2}{5}\right| + \left|x + \frac{3}{2}\right| = 33x$$

Vì  $\left|x + \frac{1}{3}\right| \geq 0, \left|x + \frac{2}{3}\right| \geq 0, \left|x + \frac{2}{5}\right| \geq 0, \left|x + \frac{3}{2}\right| \geq 0 \Rightarrow 33x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

Ta có:

$$\left|x + \frac{1}{3}\right| + \left|x + \frac{2}{3}\right| + \left|x + \frac{2}{5}\right| + \left|x + \frac{3}{2}\right| = 33x$$

$$x + \frac{1}{3} + x + \frac{2}{3} + x + \frac{2}{5} + x + \frac{3}{2} = 33x$$

$$4x + \frac{29}{10} = 33x$$

$$29x = \frac{29}{10}$$

$$x = \frac{1}{10}$$

Vậy  $x = \frac{1}{10}$ .

**Câu 79. (HSG 7 huyện Trực Ninh 2021 - 2022)**

Tìm  $x$ , biết:  $|x+1|+|x+2|+|x+3|+\dots+|x+100|=605x$ .

**Lời giải**

Với mọi giá trị của  $x$ , ta có:

$$|x+1| \geq 0; |x+2| \geq 0; |x+3| \geq 0; \dots; |x+100| \geq 0$$

$$\Rightarrow |x+1| + |x+2| + |x+3| + \dots + |x+100| \geq 0$$

$$\text{Mà } |x+1| + |x+2| + |x+3| + \dots + |x+100| = 650x$$

$$\Rightarrow 650x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} |x+1| = x+1 \\ |x+2| = x+2 \\ \dots \\ |x+100| = x+100 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } (x+1) + (x+2) + (x+3) + \dots + (x+100) = 605x$$

$$100x + \frac{(1+100) \cdot 100}{2} = 605x$$

$$\Rightarrow 100x + 5050 = 605x$$

$$\Rightarrow 505x = 5050 \Rightarrow x = 10 \text{ (chọn vì thỏa mãn } x \geq 0)$$

Vậy  $x = 10$

**Câu 80. (HSG 7 huyện Than Uyên tỉnh Lai Châu 2022 - 2023)**

Tim  $x$  biết:  $|x+1| + |x+3| + \dots + |x+2023| = 2024x$ .

**Lời giải**

Vì vế trái luôn lớn hơn hoặc bằng 0 với  $\forall x$  nên  $2024x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

$$\text{Khi đó: } |x+1| + |x+3| + \dots + |x+2023| = 2024x$$

$$\Rightarrow x+1 + x+3 + \dots + x+2023 = 2024x$$

$$\Rightarrow (x+x+x+\dots+x) + (1+3+5+\dots+2023) = 2024x$$

$$\Rightarrow 1012x + \frac{2023+1}{2} \cdot 1012 = 2024x$$

$$\Rightarrow 1024144 = 2024x - 1012x$$

$$\Rightarrow 1012x = 1024144$$

$$\Rightarrow x = 1012$$

Vậy  $x = 1012$ .

**Câu 81. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023).**

Tim  $x$  biết:  $\left|x + \frac{1}{2}\right| + \left|x + \frac{1}{6}\right| + \left|x + \frac{1}{12}\right| + \dots + \left|x + \frac{1}{9900}\right| = 10x$

**Lời giải**

$$\left|x + \frac{1}{2}\right| + \left|x + \frac{1}{6}\right| + \left|x + \frac{1}{12}\right| + \dots + \left|x + \frac{1}{9900}\right| = 10x \quad (1)$$

$$\text{Ta thấy } \left|x + \frac{1}{2}\right| \geq 0; \left|x + \frac{1}{6}\right| \geq 0; \left|x + \frac{1}{12}\right| \geq 0; \dots; \left|x + \frac{1}{9900}\right| \geq 0$$



$$\text{nên } \left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{9900} \right| \geq 0$$

$$\text{mà } \left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{9900} \right| = 100x$$

$$\text{suy ra } 100x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

$$\Rightarrow \left| x + \frac{1}{2} \right| = x + \frac{1}{2}; \left| x + \frac{1}{6} \right| = x + \frac{1}{6}; \left| x + \frac{1}{12} \right| = x + \frac{1}{12}; \left| x + \frac{1}{9900} \right| = x + \frac{1}{9900} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow x + \frac{1}{2} + x + \frac{1}{6} + x + \frac{1}{12} + \dots + x + \frac{1}{9900} = 100x$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{1.2} + x + \frac{1}{2.3} + x + \frac{1}{3.4} + \dots + x + \frac{1}{99.100} = 100x$$

$$\Rightarrow 99x + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = 100x$$

$$\Rightarrow x = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} \text{ (tmđk)}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{99}{100}$$

**Câu 82. (HSG 7 trường Minh Khai 2022 - 2023; huyện Hoàng Hóa 2016 - 2017)**

$$\text{Tìm } x, \text{ biết: } \left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \left| x + \frac{1}{20} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{110} \right| = 11x$$

**Lời giải**

Ta thấy vế trái của đẳng thức luôn  $\geq 0$  nên vế phải  $\geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

Với  $x \geq 0$ ,  $\left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \left| x + \frac{1}{20} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{110} \right| = 11x$  trở thành:

$$x + \frac{1}{2} + x + \frac{1}{6} + x + \frac{1}{12} + x + \frac{1}{20} + \dots + x + \frac{1}{110} = 11x$$

$$\Rightarrow x = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{10}{11}.$$

**Câu 83. (HSG 7 huyện Nho Quan 2022 - 2023)**

$$\text{Tìm } x \text{ biết } \left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \left| x + \frac{1}{20} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{110} \right| = 12x$$

**Lời giải**

Nhận xét: Vế trái của đẳng thức luôn  $\geq 0$  nên vế phải  $\geq 0$

$$\text{Suy ra } 12x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

$$\left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \left| x + \frac{1}{20} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{110} \right| = 12x$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{2} + x + \frac{1}{6} + x + \frac{1}{12} + x + \frac{1}{20} + \dots + x + \frac{1}{110} = 12x$$

$$(x + x + x + \dots + x) + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{110} \right) = 12x$$

$$10x + \left( \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{10.11} \right) = 12x$$

$$10x + \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) = 12x$$

$$10x + \left( 1 - \frac{1}{11} \right) = 12x$$

$$2x = \frac{10}{11}$$

$$x = \frac{5}{11}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{5}{11}.$$

**Câu 84. (HSG 7 huyện Nghi Lộc; huyện Cẩm Thủy, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết:  $\left| x + \frac{1}{101} \right| + \left| x + \frac{2}{101} \right| + \left| x + \frac{3}{101} \right| + \dots + \left| x + \frac{100}{101} \right| = 101x.$

**Lời giải**

Vì  $\left| x + \frac{1}{101} \right| + \left| x + \frac{2}{101} \right| + \left| x + \frac{3}{101} \right| + \dots + \left| x + \frac{100}{101} \right| \geq 0$

Suy ra  $x \geq 0$

$$x + \frac{1}{101} + x + \frac{2}{101} + x + \frac{3}{101} + \dots + x + \frac{100}{101} = 101x$$

$$100x + \left( \frac{1}{101} + \frac{2}{101} + \frac{3}{101} + \dots + \frac{100}{101} \right) = 101x$$

$$x = \frac{1}{101} + \frac{2}{101} + \frac{3}{101} + \dots + \frac{100}{101}$$

$$x = \frac{1}{101} \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 100)$$

$$x = 50$$

Vậy  $x = 50.$

**Câu 85. (HSG 7 huyện Cẩm Khê, 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết  $\left| x - \frac{1}{3} \right| + \left| x - \frac{1}{15} \right| + \left| x - \frac{1}{35} \right| + \left| x - \frac{1}{63} \right| + \dots + \left| x - \frac{1}{483} \right| = -12x.$

**Lời giải**

Nhận xét: vế trái của biểu thức luôn dương nên vế phải lớn hơn 0 suy ra  $12x < 0$  hay  $x < 0.$

Với  $x < 0$  ta có:

$$\left| x - \frac{1}{3} \right| + \left| x - \frac{1}{15} \right| + \left| x - \frac{1}{35} \right| + \left| x - \frac{1}{63} \right| + \dots + \left| x - \frac{1}{483} \right| = -12x$$

$$\Rightarrow -x + \frac{1}{3} - x + \frac{1}{15} - x + \frac{1}{35} - x + \frac{1}{63} - \dots - x + \frac{1}{483} = -12x$$

$$\Rightarrow -11x + \left( \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{21.23} \right) = -12x$$

$$\Rightarrow -11x + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{23} \right) = -12x$$

$$\Rightarrow x = \frac{-11}{23} \text{ (TM).}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{-11}{23}.$$

**Câu 86. (HSG 7 huyện Quan Sơn, 2022 - 2023)**

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } \left| x + \frac{1}{1.5} \right| + \left| x + \frac{1}{5.9} \right| + \left| x + \frac{1}{9.13} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{397.401} \right| = 101x$$

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \left| x + \frac{1}{1.5} \right| \geq 0; \left| x + \frac{1}{5.9} \right| \geq 0; \left| x + \frac{1}{9.13} \right| \geq 0; \dots;$$

$$\text{Nên } \left| x + \frac{1}{1.5} \right| + \left| x + \frac{1}{5.9} \right| + \left| x + \frac{1}{9.13} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{397.401} \right| \geq 0 \Rightarrow 101x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

$$\text{Vì } x \geq 0 \Rightarrow x + \frac{1}{1.5} > 0; x + \frac{1}{5.9} > 0; \dots; x + \frac{1}{397.401} > 0$$

$$\text{Nên ta có: } x + \frac{1}{1.5} + x + \frac{1}{5.9} + x + \frac{1}{9.13} + \dots + x + \frac{1}{397.401} = 101x$$

$$\Rightarrow 100x + \left( \frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \dots + \frac{1}{397.401} \right) = 101x \Rightarrow 100x + \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{401} \right) = 101x \Rightarrow x = \frac{100}{401}.$$

$$\text{Vậy } x = \frac{100}{401}.$$

**Câu 87. (HSG 7 huyện Hưng Hà, 2022 - 2023)**

Tìm  $x$ , biết:

$$\left| x + \frac{1}{2021} \right| + \left| x + \frac{2}{2021} \right| + \left| x + \frac{3}{2021} \right| + \dots + \left| x + \frac{2020}{2021} \right| = 2021x.$$

**Lời giải**

Điều kiện  $x \geq 0$  suy ra:

$$x + \frac{1}{2021} + x + \frac{2}{2021} + x + \frac{3}{2021} + \dots + x + \frac{2020}{2021} = 2021x$$

$$\Rightarrow 2020x + \frac{1+2+3+\dots+2020}{2021} = 2021x$$

$$\Rightarrow 2020x + \frac{2020.2021}{2.2021} = 2021x$$

$$\Rightarrow x = 1010.$$

$$\text{Vậy } x = 1010.$$

**Câu 88. (HSG 7 huyện Trực Ninh 2020 - 2021)**

$$\text{Tìm } x \text{ nguyên biết: } |x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-90| = 2025$$

**Lời giải**

Viết lại:  $|x-1|+|x-2|+|x-3|+\dots+|x-45|+|x-46|+\dots+|x-90|=2025$

$|x-1|+|x-2|+|x-3|+\dots+|x-45|+|46-x|+\dots+|90-x|=2025$

Với mọi giá trị của  $x$ , ta có:

$|x-1| \geq x-1; |x-2| \geq x-2; \dots; |x-45| \geq x-45;$

$|46-x| \geq 46-x; |47-x| \geq 47-x; \dots; |90-x| \geq 90-x$

$\Rightarrow VT = |x-1|+|x-2|+\dots+|90-x| \geq x-1+x-2+\dots+90-x$

$\Rightarrow VT \geq (46+47+\dots+90)-(1+2+3+\dots+45)$

$\Rightarrow VT \geq 2025$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\left. \begin{array}{l} |x-1|=x-1 \\ |x-2|=x-2 \\ \dots \\ |x-45|=x-45 \\ |x-46|=46-x \\ |x-47|=47-x \\ \dots \\ |x-90|=90-x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x-1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \\ \dots \\ x-45 \geq 0 \\ x-46 \leq 0 \\ x-47 \leq 0 \\ \dots \\ x-90 \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \geq 2 \\ \dots \\ x \geq 45 \\ x \leq 46 \\ x \leq 47 \\ \dots \\ x \leq 90 \end{array} \right\} \Rightarrow 45 \leq x \leq 46$$

$\Rightarrow 45 \leq x \leq 46$

Mà  $x$  là số nguyên  $\Rightarrow x \in \{45; 46\}$

**Câu 89. (HSG 7 huyện Hưng Hà, Thống Nhất, 2022 - 2023)**

Tìm tất cả các số tự nhiên  $a, b$  sao cho:  $2^a + 7 = |b-5| + b - 5$ .

**Lời giải**

Nhận xét: Với  $x \geq 0$  thì  $|x| + x = 2x$ .

Với  $x < 0$  thì  $|x| + x = 0$ . Do đó  $|x| + x$  luôn là số chẵn với  $\forall x \in \mathbb{Z}$ .

Áp dụng nhận xét trên thì  $|b-5| + b - 5$  là số chẵn với  $b - 5 \in \mathbb{Z}$ .

Suy ra  $2^a + 7$  là số chẵn  $\Rightarrow 2^a$  lẻ khi  $a = 0$ .

Khi đó  $|b-5| + b - 5 = 8$ .

+ Nếu  $b < 5$ , ta có:  $-(b-5) + b - 5 = 8 \Rightarrow 0 = 8$  (loại).

+ Nếu  $b \geq 5$ , ta có:  $2(b-5) = 8 \Rightarrow b-5 = 4 \Rightarrow b = 9$  (thỏa mãn).

Vậy  $(a; b) = (0; 9)$ .

**Câu 90. (Đề 90 - HSG 7 Hưng Hà, trường THCS Tây Đô, 2022 - 2023)**

Tìm tất cả các số tự nhiên  $a, b$  sao cho:  $2^a + 37 = |b-45| + b - 45$ .

**Lời giải**

Nhận xét: Với  $x \geq 0$  thì  $|x| + x = 2x$ .

Với  $x < 0$  thì  $|x| + x = 0$ . Do đó  $|x| + x$  luôn là số chẵn với  $\forall x \in \mathbb{Z}$ .

Áp dụng nhận xét trên thì  $|b - 45| + b - 45$  là số chẵn với  $b \in \mathbb{Z}$ .

Suy ra  $2^a + 37$  là số chẵn  $\Rightarrow 2^a$  lẻ khi  $a = 0$ .

Khi đó  $|b - 45| + b - 45 = 38$ .

+ Nếu  $b < 45$ , ta có  $-(b - 45) + b - 45 = 38 \Rightarrow 0 = 38$  (loại).

+ Nếu  $b \geq 45$ , ta có  $2(b - 45) = 38 \Rightarrow b - 45 = 19 \Rightarrow b = 64$ . (thỏa mãn)

Vậy  $(a; b) = (0; 64)$ .

**Câu 91. (HSG 7 Tiên Du, Bắc Ninh, 2022 - 2023)**

Tìm tất cả các số tự nhiên  $m$  và  $n$  thỏa mãn  $2^m + 2021 = |n - 2020| + |n - 2022|$ .

**Lời giải**

Với các số tự nhiên  $m$  và  $n$  thỏa mãn  $2^m + 2021 = |n - 2020| + |n - 2022|$ .

Ta xét ba trường hợp sau:

\* Trường hợp 1:  $n \geq 2022$ , ta có:

$$2^m + 2021 = 2n - 4042$$

$$2^m - 2n = -6063$$

Vì  $-6063$  là số lẻ,  $2n$  là số chẵn nên  $2^m$  là số lẻ. Suy ra  $m = 0 \Rightarrow n = 3032$ .

\* Trường hợp 2:  $2020 \leq n < 2022$ , ta có:

$$2^m + 2021 = n - 2020 + 2022 - n$$

$$2^m + 2021 = 2$$

$$2^m = -2019 \text{ (vô lý)}$$

\* Trường hợp 3:  $n < 2020$ , ta có:

$$2^m + 2021 = 4042 - 2n$$

$$2^m + 2n = 2021$$

Vì  $2021$  là số lẻ,  $2n$  là số chẵn nên  $2^m$  là số lẻ. Suy ra  $m = 0 \Rightarrow n = 1010$

Vậy  $m = 0; n = 3032$  hoặc  $m = 0; n = 1010$ .

**Dạng 6. Sử dụng công thức tính tổng có quy luật.**

**Câu 1. (HSG 7 huyện Yên Định 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết:  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{4044}{2023}$ .

**Lời giải**

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{4044}{2023}$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{6065}{4046}$$

$$\frac{2}{1.2} + \frac{2}{2.3} + \frac{2}{3.4} + \frac{2}{4.5} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{6065}{4046}$$

$$2 \cdot \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{6065}{4046}$$

$$1 - \frac{1}{x+1} = \frac{6065}{8092} \Rightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{2027}{8092}$$

$$\Rightarrow x+1 = \frac{8092}{2027}$$

$$\Rightarrow x = \frac{6065}{2027}$$

Vậy  $x = \frac{6065}{2027}$ .

**Câu 2. (HSG 7 huyện An Nhơn 2021 - 2022)**

Tìm giá trị của  $x$  biết:  $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2021}{2023}$

**Lời giải**

Ta có  $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2021}{2023}$

$$\frac{2}{2.3} + \frac{2}{3.4} + \frac{2}{4.5} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2021}{2023}$$

$$2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{2021}{2023}$$

$$2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{2021}{2023}$$

$$\frac{2}{x+1} = 1 - \frac{2021}{2023}$$

$$\frac{2}{x+1} = \frac{2}{2023}$$

$$x+1 = 2023$$

$$x = 2022$$

**Câu 3. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Như Thanh 2021 - 2022)**

Tìm số tự nhiên  $x$  biết:  $2 \cdot \left( \frac{1}{9.10} + \frac{1}{10.11} + \frac{1}{11.12} + \dots + \frac{1}{x(x+1)} \right) = \frac{1}{9}$

**Lời giải**

$$2 \cdot \left( \frac{1}{9.10} + \frac{1}{10.11} + \frac{1}{11.12} + \dots + \frac{1}{x(x+1)} \right) = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow 2 \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow 2 \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{18} = \frac{1}{x+1} \Rightarrow x+1 = 18 \Rightarrow x = 17 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy  $x = 17$ .

**Câu 4. (HSG 7 huyện Hà Trung, Nghệ An 2021 - 2022)**

Tìm  $x$  biết  $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2015}{2017}$

**Lời giải**

Ta có:  $\frac{2}{2.3} + \frac{2}{3.4} + \frac{2}{4.5} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2015}{2017}$

$$2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{2015}{2017}$$

$$2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{2015}{2017}$$

$$2 \cdot \frac{x-1}{2(x+1)} = \frac{2015}{2017}$$

$$\Rightarrow 2017(x-1) = 2015(x+1)$$

$$2017x - 2017 = 2015x + 2025$$

$$2017x - 2015x = 2017 + 2025$$

$$2x = 4032$$

$$x = 2016$$

Vậy  $x = 2016$

**Câu 5. (HSG 7 huyện Hưng Hà, Phạm Đôn Lễ, 2022 - 2023)**

Tìm  $x$ , biết:  $\frac{2}{2.3} + \frac{2}{3.4} + \frac{2}{4.5} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2022}{2024}$ .

**Lời giải**

$$\frac{2}{2.3} + \frac{2}{3.4} + \frac{2}{4.5} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2022}{2024}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{2022}{2024}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{2022}{2024}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \left( \frac{x+1}{2(x+1)} - \frac{2}{2 \cdot (x+1)} \right) = \frac{2022}{2024}$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{x+1} = \frac{2022}{2024}$$

$$\Rightarrow x = 2023.$$

Vậy  $x = 2023$ .

**Câu 6. (HSG 7 huyện Mỹ Đức 2021-2022; trường Nguyễn Chí, huyện Đông Sơn 2017-2018)**

Tìm số tự nhiên  $x$  biết:  $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{49}{99}$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} &= \frac{49}{99} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \dots - \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{2x+1} \right) &= \frac{49}{99} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2x+1} \right) &= \frac{49}{99} \\ \Rightarrow 1 - \frac{1}{2x+1} &= \frac{98}{99} \\ \Rightarrow \frac{1}{2x+1} &= \frac{1}{99} \\ \Rightarrow 2x+1 &= 99 \Rightarrow 2x = 98 \Rightarrow x = 49 \\ \text{Vậy } x &= 49. \end{aligned}$$

**Câu 7. (HSG 7 huyện Kinh Môn, tỉnh Hải Dương 2022 - 2023)**

Tìm  $x$ , biết:  $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{99}{199}$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} &= \frac{99}{199} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \dots + \frac{2}{(2x-1)(2x+1)} \right) &= \frac{99}{199} \\ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} \right) &= \frac{99}{199} \\ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2x+1} \right) &= \frac{99}{199} \\ 1 - \frac{1}{2x+1} &= \frac{99.2}{199} \\ \frac{2x+1-1}{2x+1} &= \frac{198}{199} \\ \frac{2x}{2x+1} &= \frac{198}{199} \\ x &= 99 \\ \text{Vậy } x &= 99. \end{aligned}$$

**Câu 8. (HSG 7 huyện Lạng Giang, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết:  $\left( \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{8.9.10} \right) \cdot (|x|-1) = \frac{44}{45}$ .

**Lời giải**

$$\left( \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{8.9.10} \right) \cdot (|x|-1) = \frac{44}{45}$$



$$\begin{aligned} &\Rightarrow \left( \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \dots + \frac{2}{8.9.10} \right) \cdot (|x| - 1) = \frac{88}{45} \\ &\Rightarrow \left( \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{8.9} - \frac{1}{9.10} \right) \cdot (|x| - 1) = \frac{88}{45} \\ &\Rightarrow \left( \frac{1}{1.2} - \frac{1}{9.10} \right) \cdot (|x| - 1) = \frac{88}{45} \\ &\Rightarrow \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{90} \right) \cdot (|x| - 1) = \frac{88}{45} \\ &\Rightarrow \frac{22}{45} \cdot (|x| - 1) = \frac{88}{45} \\ &\Rightarrow |x| - 1 = 4 \\ &\Rightarrow |x| = 5 \\ &\Rightarrow x = \pm 5 \end{aligned}$$

Vậy  $x = -5$ ;  $x = 5$  là các giá trị cần tìm.

**Câu 9. (HSG 7 huyện Yên Bình, Yên Bái 2022 - 2023)**

Tìm  $x$ , biết  $x + 2x + 3x + \dots + 2022x = 2022 \cdot 2023$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} &x + 2x + 3x + \dots + 2022x = 2022 \cdot 2023 \\ &\Rightarrow x \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 2022) = 2022 \cdot 2023 \\ &\Rightarrow x \cdot \frac{(1 + 2022) \cdot 2022}{2} = 2022 \cdot 2023 \\ &\Rightarrow x \cdot \frac{2023 \cdot 2022}{2} = 2022 \cdot 2023 \\ &\Rightarrow x = 2. \end{aligned}$$

Vậy  $x = 2$ .

**Câu 10. (HSG 7 huyện Tam Dương 2021 - 2022)**

Tìm  $x$  biết b)  $\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022} \right) x = \frac{2021}{1} + \frac{2020}{2} + \frac{2019}{3} + \dots + \frac{1}{2021}$

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022} \right) x = \frac{2021}{1} + \frac{2020}{2} + \frac{2019}{3} + \dots + \frac{1}{2021}.$$

$$\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022} \right) x = 2021 + \frac{2020}{2} + \frac{2019}{3} + \dots + \frac{1}{2021}$$

$$\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022} \right) x = \left( 1 + \frac{2020}{2} \right) + \left( 1 + \frac{2019}{3} \right) + \left( 1 + \frac{2018}{4} \right) + \dots + \left( 1 + \frac{1}{2021} \right) + 1$$

$$\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022} \right) x = \left( 1 + \frac{2020}{2} \right) + \left( 1 + \frac{2019}{3} \right) + \left( 1 + \frac{2018}{4} \right) + \dots + \left( 1 + \frac{1}{2021} \right) + \frac{2022}{2022}$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022}\right)x = \frac{2022}{2} + \frac{2022}{3} + \frac{2022}{4} + \dots + \frac{2022}{2021} + \frac{2022}{2022}$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022}\right)x = 2022\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022}\right)$$

$$\Rightarrow x = 2022$$

Vậy  $x = 2022$ .

**Câu 11. (HSG 7 huyện Bá Thước, 2022 - 2023)**

Tìm  $x$ , biết:  $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014}\right)x = \frac{2013}{1} + \frac{2012}{2} + \dots + \frac{2}{2012} + \frac{1}{2013}$ .

**Lời giải**

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014}\right) \cdot x = \frac{2013}{1} + \frac{2012}{2} + \dots + \frac{2}{2012} + \frac{1}{2013}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014}\right) \cdot x = \frac{2012}{2} + 1 + \frac{2011}{3} + 1 \dots + \frac{2}{2012} + 1 + \frac{1}{2013} + 1 + 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014}\right) \cdot x = \frac{2014}{2} + \frac{2014}{3} + \dots + \frac{2014}{2012} + \frac{2014}{2013} + \frac{2014}{2014}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014}\right) \cdot x = 2014 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} + \frac{1}{2014}\right)$$

$$\Rightarrow x = 2014.$$

Vậy  $x = 2014$ .

**Câu 12. (HSG 7 trường Lê Hồng Phong 2018-2019; trường Giao Tân 2016 - 2017)**

Tìm số tự nhiên  $n$  thỏa mãn điều kiện:  $2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + (n-1)2^{n-1} + n \cdot 2^n = 2^{n+34}$

**Lời giải**

$$2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + (n-1)2^{n-1} + n \cdot 2^n = 2^{n+34} \quad (1)$$

Đặt  $B = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n$

$$2B = 2 \cdot (2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n)$$

$$2B = 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2^5 + \dots + (n-1)2^n + n \cdot 2^{n+1}$$

$$2B - B = (2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2^5 + \dots + (n-1)2^n + n \cdot 2^{n+1}) - (2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n)$$

$$B = -2^3 - 2^4 - 2^5 - \dots - 2^n + n \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 2^2$$

$$B = -(2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n) + n \cdot 2^{n+1} - 2^3$$

Khi đó  $B = -(2^{n+1} - 2^3) + n \cdot 2^{n+1} - 2^3$

$$= -2^{n+1} + 2^3 + n \cdot 2^{n+1} - 2^3 = -2^{n+1} + n \cdot 2^{n+1} = (n-1) \cdot 2^{n+1}$$

Từ (1) ta có:  $(n-1)2^{n+1} = 2^{n+34}$

$$2^{n+34} - (n-1) \cdot 2^{n+1} = 0$$

$$2^{n+1} \cdot [2^{33} - (n-1)] = 0$$

$$2^{33} - n + 1 = 0$$

$$n = 2^{33} + 1$$

$$\text{Vậy } n = 2^{33} + 1$$

**Câu 13. (HSG 7 huyện Châu Đức 2022 - 2023; huyện Tiên Hải 2016 - 2017)**

Tìm số tự nhiên  $n$  thỏa mãn điều kiện:  $2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + n \cdot 2^n = 2^{n+11}$

**Lời giải**

$$\text{Đặt } S = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + n \cdot 2^n$$

$$\Rightarrow 2S - S = (2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2^5 + \dots + n \cdot 2^{n+1}) - (2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + n \cdot 2^n)$$

$$\Rightarrow S = n \cdot 2^{n+1} - 2^3 - (2^3 + 2^4 + \dots + 2^{n-1} + 2^n)$$

$$\text{Đặt } T = 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{n-1} + 2^n$$

$$\Rightarrow 2T - T = 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n + 2^{n+1} - (2^3 + 2^4 + \dots + 2^{n-1} + 2^n)$$

$$\Rightarrow T = 2^{n-1} - 2^3$$

$$\text{Khi đó ta được: } S = n \cdot 2^{n+1} - 2^3 - 2^{n-1} + 2^3 = (n-1)2^{n+1}$$

$$\Rightarrow (n-1) \cdot 2^{n+1} = 2^{n+11} \Rightarrow n-1 = 2^{10} \Rightarrow n = 2^{10} + 1 = 1025$$

$$\text{Vậy } n = 1025.$$

**Câu 14. (HSG 7 huyện Quế Sơn 2018 - 2019)** Tìm  $x$ , biết:  $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{12} \cdot \dots \cdot \frac{30}{62} \cdot \frac{31}{64} = 2^x$ .

**Lời giải**

$$\frac{4 \cdot 4^5 \cdot 6 \cdot 6^5}{3 \cdot 3^5 \cdot 2 \cdot 2^5} = 2^x \Rightarrow \frac{4^6 \cdot 6^6}{3^6 \cdot 2^6} = 2^x$$

$$\Rightarrow \left(\frac{6}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{4}{2}\right)^6 = 2^x \Rightarrow 2^{12} = 2^x \Rightarrow x = 12$$

**Câu 15. (HSG 7 huyện Thái Thụy, 2017 - 2018)**

Tìm  $x$  thỏa mãn:  $\frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \cdot \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = 2^x$

**Lời giải**

$$\frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \cdot \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = \frac{4 \cdot 4^5}{3 \cdot 3^5} \cdot \frac{6 \cdot 6^5}{2 \cdot 2^5} = \frac{4^6}{3^6} \cdot \frac{6^6}{2^6} = \left(\frac{6}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{4}{2}\right)^6 = 2^{12}$$

$$\Rightarrow 2^x = 2^{12}$$

$$x = 12$$

**Câu 16. (HSG 7 trường Lý Tự Trọng 2018 - 2019; huyện Tam Dương 2017 - 2018)**

Cho  $B = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{x}(1+2+3+\dots+x)$

Tìm số nguyên dương  $x$  để  $B = 115$

**Lời giải**

$$\begin{aligned}
 B &= 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{x}(1+2+3+\dots+x) \\
 &= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2.3}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{3.4}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{4.5}{2}\right) + \dots + \frac{1}{x}\left(\frac{x(x+1)}{2}\right) \\
 &= 1 + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \dots + \frac{x+1}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (2+3+4+\dots+(x+1)) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x(x+3)}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Đề  $B = 115$  thì  $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x(x+3)}{2}\right) = 115 \Rightarrow x(x+3) = 460$

Do  $x$  nguyên dương nên  $x$  và  $x+3$  là ước dương của 460

$\Rightarrow x = 20$

Vậy  $x = 20$ .

**Câu 17. (HSG 7 huyện Hiệp Hòa 2016 - 2017)**

Tìm  $x$  biết:

a)  $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} \dots \frac{30}{62} \cdot \frac{31}{64} = 4^x$

b)  $\frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \cdot \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = 8^x$

Lời giải

a)  $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} \dots \frac{30}{62} \cdot \frac{31}{64} = 4^x$

$$\frac{1.2.3\dots30.31}{1.2.3.4\dots30.31.2^{30}.2^6} = 2^{2x}$$

$$\frac{1}{2^{36}} = 2^{2x}$$

$$2^{-36} = 2^{2x}$$

$$\Rightarrow 2x = -36$$

$$\Rightarrow x = -18$$

Vậy  $x = -18$ .

b)  $\frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \cdot \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = 8^x$

$$\frac{4.4^5}{3.3^5} \cdot \frac{6.6^5}{2.2^5} = 8^x$$

$$\frac{4^6}{3^6} \cdot \frac{6^6}{2^6} = 2^{3x}$$

$$\left(\frac{4.6}{3.2}\right)^6 = 2^{3x}$$

$$2^{3x} = 4^6$$

$$\Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$$

Vậy  $x = 4$ .

**Câu 18. (HSG 7 trường Hồng Đà, huyện Tam Nông 2015 - 2016)**

Cho  $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2015}$ . Tìm số tự nhiên  $n$  biết rằng  $2A + 3 = 3^n$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2015}$$

$$\Rightarrow 3A = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2016}$$

$$\Rightarrow 3A - A = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2016} - (3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2015})$$

$$\Rightarrow 2A = 3^{2016} - 3$$

Do đó  $2A + 3 = 3^n$  trở thành:

$$3^{2016} - 3 + 3 = 3^n \Rightarrow 3^{2016} = 3^n \Rightarrow n = 2016$$

Vậy  $n = 2016$ .

**Câu 19. (HSG 7 huyện Thanh Miện 2022 - 2023)**

Tìm cặp số tự nhiên  $x, y$  trong đó  $y$  là chữ số, biết rằng:  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + x - 1 = \overline{yyy} - x$

**Lời giải**

$$\text{Ta có } 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + x - 1 = \overline{yyy} - x$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (x - 1) + x = \overline{yyy}$$

$$\frac{(1+x)x}{2} = y.111$$

$$(1+x)x = 222.y \Rightarrow (1+x)x = 2.3.37.y$$

Vì  $(1+x)x$  là tích hai số tự nhiên liên tiếp, 37 là số nguyên tố,  $y$  là chữ số nên  $y = 6$

$$\Rightarrow x = 36$$

Vậy  $x = 36; y = 6$ .

**Câu 20. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023).**

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } \left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{9900} \right| = 10x$$

**Lời giải**

$$\left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{9900} \right| = 100x \quad (1)$$

$$\text{Ta thấy } \left| x + \frac{1}{2} \right| \geq 0; \left| x + \frac{1}{6} \right| \geq 0; \left| x + \frac{1}{12} \right| \geq 0; \dots; \left| x + \frac{1}{9900} \right| \geq 0$$

$$\text{nên } \left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{9900} \right| \geq 0$$

$$\text{mà } \left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{9900} \right| = 100x$$

$$\text{suy ra } 100x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

$$\Rightarrow \left| x + \frac{1}{2} \right| = x + \frac{1}{2}; \left| x + \frac{1}{6} \right| = x + \frac{1}{6}; \left| x + \frac{1}{12} \right| = x + \frac{1}{12}; \left| x + \frac{1}{9900} \right| = x + \frac{1}{9900} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow x + \frac{1}{2} + x + \frac{1}{6} + x + \frac{1}{12} + \dots + x + \frac{1}{9900} = 100x$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{1.2} + x + \frac{1}{2.3} + x + \frac{1}{3.4} + \dots + x + \frac{1}{99.100} = 100x$$

$$\Rightarrow 99x + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = 100x$$

$$\Rightarrow x = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} \text{ (tmđk)}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{99}{100}$$

**Câu 21. (HSG 7 trường Minh Khai 2022 - 2023; huyện Hoàng Hóa 2016 - 2017)**

$$\text{Tìm } x, \text{ biết: } \left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \left| x + \frac{1}{20} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{110} \right| = 11x$$

**Lời giải**

Ta thấy vế trái của đẳng thức luôn  $\geq 0$  nên vế phải  $\geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

$$\text{Với } x \geq 0, \left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \left| x + \frac{1}{20} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{110} \right| = 11x \text{ trở thành:}$$

$$x + \frac{1}{2} + x + \frac{1}{6} + x + \frac{1}{12} + x + \frac{1}{20} + \dots + x + \frac{1}{110} = 11x$$

$$\Rightarrow x = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{10}{11}.$$

**Câu 22. (HSG 7 huyện Nho Quan 2022 - 2023)**

$$\text{Tìm } x \text{ biết } \left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \left| x + \frac{1}{20} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{110} \right| = 12x$$

**Lời giải**

Nhận xét: Vế trái của đẳng thức luôn  $\geq 0$  nên vế phải  $\geq 0$

Suy ra  $12x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

$$\left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \left| x + \frac{1}{20} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{110} \right| = 12x$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{2} + x + \frac{1}{6} + x + \frac{1}{12} + x + \frac{1}{20} + \dots + x + \frac{1}{110} = 12x$$

$$(x + x + x + \dots + x) + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{110} \right) = 12x$$

$$10x + \left( \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{10.11} \right) = 12x$$

$$10x + \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) = 12x$$

$$10x + \left(1 - \frac{1}{11}\right) = 12x \Rightarrow 2x = \frac{10}{11} \Rightarrow x = \frac{5}{11}$$

Vậy  $x = \frac{5}{11}$ .

**Câu 23. (HSG 7 huyện Nghi Lộc; huyện Cẩm Thủy, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết:  $\left|x + \frac{1}{101}\right| + \left|x + \frac{2}{101}\right| + \left|x + \frac{3}{101}\right| + \dots + \left|x + \frac{100}{101}\right| = 101x$ .

**Lời giải**

Vì  $\left|x + \frac{1}{101}\right| + \left|x + \frac{2}{101}\right| + \left|x + \frac{3}{101}\right| + \dots + \left|x + \frac{100}{101}\right| \geq 0$

Suy ra  $x \geq 0$

$$x + \frac{1}{101} + x + \frac{2}{101} + x + \frac{3}{101} + \dots + x + \frac{100}{101} = 101x$$

$$100x + \left(\frac{1}{101} + \frac{2}{101} + \frac{3}{101} + \dots + \frac{100}{101}\right) = 101x$$

$$x = \frac{1}{101} + \frac{2}{101} + \frac{3}{101} + \dots + \frac{100}{101}$$

$$x = \frac{1}{101} \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 100) \Rightarrow x = 50$$

Vậy  $x = 50$ .

**Câu 24. (HSG 7 huyện Cẩm Khê, 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết  $\left|x - \frac{1}{3}\right| + \left|x - \frac{1}{15}\right| + \left|x - \frac{1}{35}\right| + \left|x - \frac{1}{63}\right| + \dots + \left|x - \frac{1}{483}\right| = -12x$ .

**Lời giải**

Nhận xét: vế trái của biểu thức luôn dương nên vế phải lớn hơn 0 suy ra  $12x < 0$  hay  $x < 0$ .

Với  $x < 0$  ta có:

$$\left|x - \frac{1}{3}\right| + \left|x - \frac{1}{15}\right| + \left|x - \frac{1}{35}\right| + \left|x - \frac{1}{63}\right| + \dots + \left|x - \frac{1}{483}\right| = -12x$$

$$\Rightarrow -x + \frac{1}{3} - x + \frac{1}{15} - x + \frac{1}{35} - x + \frac{1}{63} - \dots - x + \frac{1}{483} = -12x$$

$$\Rightarrow -11x + \left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{21.23}\right) = -12x$$

$$\Rightarrow -11x + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{23}\right) = -12x \Rightarrow x = \frac{-11}{23} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy  $x = \frac{-11}{23}$ .

**Câu 25. (HSG 7 huyện Quan Sơn, 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết:  $\left|x + \frac{1}{1.5}\right| + \left|x + \frac{1}{5.9}\right| + \left|x + \frac{1}{9.13}\right| + \dots + \left|x + \frac{1}{397.401}\right| = 101x$

**Lời giải**

Ta có  $\left|x + \frac{1}{1.5}\right| \geq 0; \left|x + \frac{1}{5.9}\right| \geq 0; \left|x + \frac{1}{9.13}\right| \geq 0; \dots;$

Nên  $\left|x + \frac{1}{1.5}\right| + \left|x + \frac{1}{5.9}\right| + \left|x + \frac{1}{9.13}\right| + \dots + \left|x + \frac{1}{397.401}\right| \geq 0 \Rightarrow 101x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

Vì  $x \geq 0 \Rightarrow x + \frac{1}{1.5} > 0; x + \frac{1}{5.9} > 0; \dots; x + \frac{1}{397.401} > 0$

Nên ta có:  $x + \frac{1}{1.5} + x + \frac{1}{5.9} + x + \frac{1}{9.13} + \dots + x + \frac{1}{397.401} = 101x$

$\Rightarrow 100x + \left(\frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \dots + \frac{1}{397.401}\right) = 101x \Rightarrow 100x + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{401}\right) = 101x \Rightarrow x = \frac{100}{401}$ .

Vậy  $x = \frac{100}{401}$ .

**Câu 26. (HSG 7 huyện Hưng Hà, 2022 - 2023)**

Tìm  $x$ , biết:

$$\left|x + \frac{1}{2021}\right| + \left|x + \frac{2}{2021}\right| + \left|x + \frac{3}{2021}\right| + \dots + \left|x + \frac{2020}{2021}\right| = 2021x.$$

**Lời giải**

Điều kiện  $x \geq 0$  suy ra:

$$x + \frac{1}{2021} + x + \frac{2}{2021} + x + \frac{3}{2021} + \dots + x + \frac{2020}{2021} = 2021x$$

$$\Rightarrow 2020x + \frac{1+2+3+\dots+2020}{2021} = 2021x$$

$$\Rightarrow 2020x + \frac{2020.2021}{2.2021} = 2021x \Rightarrow x = 1010.$$

Vậy  $x = 1010$ .

**Câu 27. (HSG 7 huyện Trục Ninh 2020 - 2021)**

Tìm  $x$  nguyên biết:  $|x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-90| = 2025$

**Lời giải**

Viết lại:  $|x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-45| + |x-46| + \dots + |x-90| = 2025$

$$|x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-45| + |46-x| + \dots + |90-x| = 2025$$

Với mọi giá trị của  $x$ , ta có:

$$|x-1| \geq x-1; |x-2| \geq x-2; \dots; |x-45| \geq x-45;$$

$$|46-x| \geq 46-x; |47-x| \geq 47-x; \dots; |90-x| \geq 90-x$$

$$\Rightarrow VT = |x-1| + |x-2| + \dots + |90-x| \geq x-1 + x-2 + \dots + 90-x$$

$$\Rightarrow VT \geq (46+47+\dots+90) - (1+2+3+\dots+45)$$

$$\Rightarrow VT \geq 2025$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi



$$\left. \begin{array}{l} |x-1| = x-1 \\ |x-2| = x-2 \\ \dots\dots\dots \\ |x-45| = x-45 \\ |x-46| = 46-x \\ |x-47| = 47-x \\ \dots\dots\dots \\ |x-90| = 90-x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x-1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \\ \dots\dots\dots \\ x-45 \geq 0 \\ x-46 \leq 0 \\ x-47 \leq 0 \\ \dots\dots\dots \\ x-90 \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \geq 2 \\ \dots\dots\dots \\ x \geq 45 \\ x \leq 46 \\ x \leq 47 \\ \dots\dots\dots \\ x \leq 90 \end{array} \right\} \Rightarrow 45 \leq x \leq 46$$

$$\Rightarrow 45 \leq x \leq 46$$

Mà  $x$  là số nguyên  $\Rightarrow x \in \{45; 46\}$



**CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS**

**CĐ2: TÌM ẨN CHƯA BIẾT**

Dạng 1: Tìm x thông thường
Dạng 2: Đưa về dạng tích bằng 0
Dạng 3: Sử dụng tính chất lũy thừa
Dạng 4: Tìm ẩn dạng phân thức
Dạng 5: Tìm x dạng chứa dấu giá trị tuyệt đối
Dạng 6: Sử dụng công thức tính tổng có quy luật
Dạng 7: Tổng các biểu thức không âm bằng 0
Dạng 8: Tìm ẩn dựa vào tính chất về dấu
Dạng 9: Sử dụng phương pháp chặn để tìm ẩn
Dạng 10: Tìm ẩn với điều kiện nguyên

**Dạng 7: Tổng các biểu thức không âm bằng 0**

**A. Trắc nghiệm (nếu có)**

**Câu 1. (HSG 7 huyện Tam Nông 2022 - 2023)**

Cho  $x, y$  thỏa mãn  $(12 - 2x)^{2022} + |3y - x|^{2023} = 0$ . Giá trị của biểu thức  $P = 20x - 11y$  là

- A. 142.                      **B. 98.**                      C. 109.                      D. 131.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có:  $(12 - 2x)^{2022} \geq 0$  với mọi  $x$

$|3y - x|^{2023} \geq 0$  với mọi  $x, y$

Nên  $(12 - 2x)^{2022} + |3y - x|^{2023} \geq 0$  với mọi  $x, y$

Mà  $(12 - 2x)^{2022} + |3y - x|^{2023} = 0$

Suy ra  $12 - 2x = 0$  và  $3y - x = 0$

Hay  $x = 6$  và  $y = 2$

Vậy giá trị của biểu thức  $P = 20x - 11y$  là  $P = 20.6 - 11.2 = 120 - 22 = 98$ .

**Câu 2. (HSG 7 huyện Thanh Thủy, tỉnh Phú Thọ 2021 - 2022)**

Cho  $x; y$  là các số thỏa mãn  $(x + 2y - 3)^{2022} + |2x + 3y - 5| = 0$ . Vậy  $(x; y)$  bằng

- A. (1; -1)                      **B. (1; 1)**                      C. (2; 1)                      D. (-2; 1)

**Lời giải**

Vì  $(x + 2y - 3)^{2022} \geq 0$  ;  $|2x + 3y - 5| \geq 0$  với mọi  $x, y$  nên

$(x + 2y - 3)^{2022} + |2x + 3y - 5| \geq 0$  với mọi  $x, y$

$$\text{Mà } (x+2y-3)^{2022} + |2x+3y-5| = 0 \text{ nên } \begin{cases} (x+2y-3)^{2022} = 0 \\ |2x+3y-5| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-3=0 \\ 2x+3y-5=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+3y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy  $(x; y) = (1; 1)$ .

**B. Tự luận**

**Câu 1. (HSG 7 THCS Vạn Long 2018 - 2019)**

Tìm  $x, y$  biết  $|3+y| + |2x+y| = 0$

**Lời giải**

Vì  $|3+y| \geq 0, |2x+y| \geq 0 \Rightarrow |3+y| + |2x+y| \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} |3+y|=0 \\ |2x+y|=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=-3 \end{cases}$$

**Câu 2. (HSG 7 trường Trần Hưng Đạo, trường Trường Sa, 2017 - 2018)**

Tìm  $x, y$  biết  $|3+y| + |2x+y| = 0$

**Lời giải**

Vì  $|3+y| \geq 0, |2x+y| \geq 0 \Rightarrow |3+y| + |2x+y| \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} |3+y|=0 \\ |2x+y|=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=-3 \end{cases}$$

**Câu 3. (HSG 7 huyện Cửa Lò 2020 - 2021)**

Tìm  $x, y$  biết:  $|x-2| + |x-2y| = 0$ .

**Lời giải**

Vì  $|x-2| \geq 0; |x-2y| \geq 0$  với mọi  $x, y$  nên:

$|x-2| + |x-2y| = 0$  khi và chỉ khi  $x-2=0$  và  $x-2y=0$ .

$$+ x-2=0 \Rightarrow x=2.$$

$$+ x-2y=0 \Rightarrow 2-2y=0 \Rightarrow y=1.$$

Vậy  $x=2; y=1$  là các giá trị cần tìm.

**Câu 4. (HSG 7 huyện Thái Thụy, 2017 - 2018)**

Tìm  $x$  và  $y$  thỏa mãn  $|2x-2011| + (3y+2012)^{2012} = 0$

**Lời giải**

Nhận xét  $\begin{cases} |2x-2011| \geq 0 \forall x \\ (3y+2012)^{2012} \geq 0 \forall y \end{cases}$

Đẳng thức xảy ra khi  $\begin{cases} 2x-2011=0 \\ 3y+2012=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{2011}{2} \\ y=-\frac{2012}{3} \end{cases}$

**Câu 5. (HSG 7 huyện Chương Mỹ 2018 - 2019)**

Tìm  $x, y$  biết:  $(3x-1)^{2018} + \left(y + \frac{3}{5}\right)^{2020} = 0$ .

**Lời giải**

Ta có:

$$(3x-1)^{2018} + \left(y + \frac{3}{5}\right)^{2020} = 0.$$

Mà  $(3x-1)^{2018} \geq 0$  với mọi  $x$ ;  $\left(y + \frac{3}{5}\right)^{2020} \geq 0$  với mọi  $y$ .

$$\Rightarrow (3x-1)^{2018} = 0 \text{ và } \left(y + \frac{3}{5}\right)^{2020} = 0.$$

$$\Rightarrow 3x-1=0 \text{ và } y + \frac{3}{5} = 0.$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{3}; y = -\frac{3}{5}.$$

Vậy  $x = \frac{1}{3}; y = -\frac{3}{5}$ .

**Câu 6. (HSG 7 huyện Đức Thọ 2022 - 2023)**

Tìm tất cả cặp số  $(x, y)$  thỏa mãn:  $(2x-1)^{2022} + |x+y+1|^{2023} = 0$

**Lời giải**

$$(2x-1)^{2022} + |x+y+1|^{2023} = 0 \quad (*)$$

Vì  $(2x-1)^{2022} \geq 0, |x+y+1|^{2023} \geq 0, \forall x, y$

$$\Rightarrow (2x-1)^{2022} + |x+y+1|^{2023} \geq 0$$

Để (\*) xảy ra thì  $(2x-1)^{2022} = 0$  và  $|x+y+1|^{2023} = 0$

$$\Rightarrow 2x-1=0 \text{ và } x+y+1=0$$

Hay  $x = \frac{1}{2}$  và  $y = -\frac{3}{2}$

Vậy cặp số  $(x, y)$  thỏa mãn phương trình là  $\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ .

**Câu 7. (HSG 7 trường Nguyễn Khuyến 2016 - 2017)**

Tìm các số  $x, y, z$  biết:  $(3x-5)^{2006} + (y^2-1)^{2008} + (x-z)^{2010} = 0$

**Lời giải**

$$(3x-5)^{2006} + (y^2-1)^{2008} + (x-z)^{2010} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x-5=0 \\ y^2-1=0 \\ x-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=z=\frac{5}{3} \\ y=\pm 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } (x; y; z) = \left(\frac{5}{3}; 1; \frac{5}{3}\right) \text{ hoặc } (x; y; z) = \left(\frac{5}{3}; -1; \frac{5}{3}\right)$$

**Câu 8. (HSG 7 thành phố Sầm Sơn, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)**

$$\text{Tìm } x, y, z \text{ biết: } (2x-1)^{2008} + \left(y-\frac{2}{5}\right)^{2008} + |x+y+z| = 0.$$

**Lời giải**

$$\text{Với mọi } x, y, z, \text{ ta có: } (2x-1)^{2008} \geq 0; \left(y-\frac{2}{5}\right)^{2008} \geq 0; |x+y+z| \geq 0.$$

$$\text{Nên } (2x-1)^{2008} + \left(y-\frac{2}{5}\right)^{2008} + |x+y+z| = 0 \text{ khi:}$$

$$\begin{cases} (2x-1)^{2008} = 0 \\ \left(y-\frac{2}{5}\right)^{2008} = 0 \\ |x+y+z| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{2}{5} \\ z = -\frac{9}{10} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{1}{2}; y = \frac{2}{5}; z = -\frac{9}{10}.$$

**Câu 9. (HSG 7 thị xã Bỉm Sơn 2022 - 2023)**

$$\text{Tìm } x, y, z \text{ biết } (2x-1)^{2020} + \left(y-\frac{1}{3}\right)^{2022} + |x+y-z| = 0$$

**Lời giải**

$$\text{Ta có } (2x-1)^{2020} + \left(y-\frac{1}{3}\right)^{2022} + |x+y-z| = 0$$

$$\text{Nên } \begin{cases} 2x-1=0 \\ y-\frac{1}{3}=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{5}{6} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{3}; z = \frac{5}{6}.$$

**Câu 10. (HSG 7 huyện Trục Ninh, 2018 - 2019)**

$$\text{Tìm } x, y, z \text{ biết: } (2x-1)^{2008} + \left(y-\frac{2}{5}\right)^{2008} + |x+y-z| = 0.$$

**Lời giải**

$$\text{Vì } (2x-1)^{2008} \geq 0 \text{ với mọi } x; \left(y-\frac{2}{5}\right)^{2008} \geq 0 \text{ với mọi } y; |x+y-z| \geq 0 \text{ với mọi } x, y, z$$

$$\text{do đó: } (2x-1)^{2008} + \left(y-\frac{2}{5}\right)^{2008} + |x+y-z| \geq 0 \text{ với mọi } x, y, z.$$

Theo đề bài thì:  $(2x-1)^{2008} + \left(y - \frac{2}{5}\right)^{2008} + |x+y-z| = 0$ .

Từ đó suy ra:  $(2x-1)^{2008} = 0$  và  $\left(y - \frac{2}{5}\right)^{2008} = 0$  và  $|x+y-z| = 0$ .

Vậy  $x = \frac{1}{2}$ ;  $y = \frac{2}{5}$ ;  $z = \frac{9}{10}$ .

**Câu 11. (HSG 7 huyện THẠCH THÀNH, 2017 - 2018)**

Tìm các số  $x, y, z$  biết:  $(x-1)^{2016} + (2y-1)^{2016} + |x+2y-z|^{2017} = 0$

**Lời giải**

Ta có:  $(x-1)^{2016} \geq 0 \forall x$ ;  $(2y-1)^{2016} \geq 0 \forall y$ ;  $|x+2y-z|^{2017} \geq 0 \forall x, y, z$   
 $\Rightarrow (x-1)^{2016} + (2y-1)^{2016} + |x+2y-z|^{2017} \geq 0$ .

Dấu "=" xảy ra khi 
$$\begin{cases} (x-1)^{2016} = 0 \\ (2y-1)^{2016} = 0 \\ |x+2y-z|^{2017} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 2 \end{cases}$$

Vậy  $x = 1$ ;  $y = \frac{1}{2}$ ;  $z = 2$ .

**Câu 12. (HSG 7 huyện Krông Ana 2022 - 2023)**

Tìm  $x, y, z$  biết:  $\left(3x - \frac{1}{2}\right)^{2018} + \left(y^2 - \frac{1}{2023}\right)^{2020} + (x-z-1)^{2024} = 0$

**Lời giải**

Vì  $\left(3x - \frac{1}{2}\right)^{2018} \geq 0$ ;  $\left(y^2 - \frac{1}{2023}\right)^{2020} \geq 0$ ;  $(x-z-1)^{2024} \geq 0$  với mọi  $x, y, z$  là các số thực

Theo đề ra ta có:  $\left(3x - \frac{1}{2}\right)^{2018} + \left(y^2 - \frac{1}{2023}\right)^{2020} + (x-z-1)^{2024} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(3x - \frac{1}{2}\right)^{2018} = 0 \\ \left(y^2 - \frac{1}{2023}\right)^{2020} = 0 \\ (x-z-1)^{2024} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - \frac{1}{2} = 0 \\ y^2 - \frac{1}{2023} = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ y \in \left\{ \sqrt{\frac{1}{2023}}; -\sqrt{\frac{1}{2023}} \right\} \\ z = x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ y \in \left\{ \sqrt{\frac{1}{2023}}; -\sqrt{\frac{1}{2023}} \right\} \\ z = \frac{-5}{6} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{1}{6}; y = \sqrt{\frac{1}{2023}}; z = \frac{-5}{6} \text{ hoặc } x = \frac{1}{6}; y = -\sqrt{\frac{1}{2023}}; z = \frac{-5}{6}$$

**Câu 13. (HSG 7 trường Lê Văn Tám 2017 - 2018)**

Tìm các số  $x, y, z$  biết:  $(3x-5)^{2006} + (y^2-1)^{2008} + (x-z)^{2010} = 0$

**Lời giải**

$$(3x-5)^{2006} + (y^2-1)^{2008} + (x-z)^{2010} = 0$$

Ta có:  $(3x-5)^{2006} \geq 0; (y^2-1)^{2008} \geq 0; (x-z)^{2010} \geq 0$

Nên  $(3x-5)^{2006} + (y^2-1)^{2008} + (x-z)^{2010} \geq 0$

Dấu bằng xảy ra khi 
$$\begin{cases} 3x-5=0 \\ y^2-1=0 \\ x-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{3} \\ y=-1 \\ y=1 \\ z=\frac{5}{3} \end{cases}$$

Vậy  $(x; y; z) \in \left\{ \left( \frac{5}{3}; -1; \frac{5}{3} \right); \left( \frac{5}{3}; 1; \frac{5}{3} \right) \right\}$ .

**Câu 14. (HSG 7 huyện Hưng Hà; huyện Việt Yên 2022 - 2023)**

Tìm  $x, y, z$  biết:  $\left| x - \frac{1}{2} \right| + \left| y + \frac{2}{3} \right| + |x^2 + xz| = 0$

**Lời giải**

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| + \left| y + \frac{2}{3} \right| + |x^2 + xz| = 0$$

Áp dụng tính chất  $|A| \geq 0$  ta có:

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| = 0 \text{ và } \left| y + \frac{2}{3} \right| = 0 \text{ và } |x^2 + xz| = 0$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{2} = 0 \text{ và } y + \frac{2}{3} = 0 \text{ và } x(x+z) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ và } y = -\frac{2}{3} \text{ và } z = -x = -\frac{1}{2}.$$

Vậy  $x = \frac{1}{2}; y = -\frac{2}{3}; z = -\frac{1}{2}$ .

**Câu 15. (HSG 7 huyện Hưng Hà, 2022 - 2023)**

Cho  $(x-1)^{2020} + |y-3| + (x-y+z+3)^{2022} = 0$ . Chứng minh:  $8x - 2y + z = 1$ .

**Lời giải**

Vì  $(x-1)^{2022} \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}; |y-3| \geq 0 \forall y \in \mathbb{R}; (x-y+z+3)^{2022} \geq 0 \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ .

Do đó  $(x-1)^{2020} + |y-3| + (x-y+z+3)^{2022} = 0$  khi và chỉ khi:

$$\begin{aligned} (x-1)^{2022} = 0 \text{ và } |y-3| = 0 \text{ và } (x-y+z+3)^{2022} = 0 \\ \Rightarrow x-1=0 \text{ và } y-3=0 \text{ và } x-y+z+3=0 \\ \Rightarrow x=1 \text{ và } y=3 \text{ và } z=-1. \end{aligned}$$

Suy ra:  $8x-2y+z = 8.1-2.3-1=1$  (đpcm).

**Câu 16. (HSG 7 huyện Anh Sơn 2022 - 2023).**

Cho 2 số  $x; y$  thỏa mãn  $(x+2022)^{2024} + |y-2023| = 0$ . Tính  $D = x + y$ .

**Lời giải**

Vì  $(x+2022)^{2024} \geq 0$  với mọi  $x$

$|y-2023| \geq 0$  với mọi  $x$

$$\text{Nên } (x+2022)^{2024} + |y-2023| = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x+2022)^{2024} = 0 \\ |y-2023| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2022 = 0 \\ y-2023 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2022 \\ y = 2023 \end{cases}$$

Vậy  $x = -2022$  và  $y = 2023$ .

**Câu 17. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Bùi Hữu Diên 2022 - 2023)**

Cho biểu thức đại số  $A = \frac{x^3 + 2x^2y - 0,5xy^2 + 2}{x^2 - xy + 1}$  tính giá trị của  $A$  với  $x, y$  thỏa mãn

$$(2x-1)^2 + |y+1| = 0$$

**Lời giải**

Ta có  $(2x-1)^2 + |y+1| = 0$

Mà  $(2x-1)^2 \geq 0$  và  $|y+1| \geq 0$  với mọi  $x, y$

$$\Rightarrow (2x-1)^2 + |y+1| \geq 0$$

$$\text{Nên } \begin{cases} 2x-1=0 \\ y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases}$$

Thay  $x = \frac{1}{2}$  và  $y = -1$  ta có

$$A = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (-1) - 0,5 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 + 2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot (-1) + 1} = \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 2}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1} = \frac{11}{8} : \frac{7}{4} = \frac{22}{7}$$

Vậy giá trị của biểu thức  $A$  là  $\frac{22}{7}$

**Câu 18. (HSG 7 huyện Tiền Hải, tỉnh Thái Bình 2022 - 2023)**

Tính giá trị của biểu thức  $N = 17x^{10} + 2y^3 + 2023$  biết các số  $x; y$  thỏa mãn:

$$|x-1| + \sqrt{(y+2)^{2022}} = 0.$$

**Lời giải**

Ta có:  $|x-1| \geq 0$  với mọi  $x$ ;  $\sqrt{(y+2)^{2022}} \geq 0$  với mọi  $y$ .



Mà  $|x-1| + \sqrt{(y+2)^{2022}} = 0$  suy ra  $|x-1| = 0$  và  $\sqrt{(y+2)^{2022}} = 0$

+)  $|x-1| = 0 \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$

+)  $\sqrt{(y+2)^{2022}} = 0 \Rightarrow (y+2)^{2022} = 0 \Rightarrow y = -2$

Thay  $x = 1$  và  $y = -2$  vào biểu thức  $N$  ta được

$$\begin{aligned} N &= 17x^{10} + 2y^3 + 2023 \\ &= 17 \cdot 1^{10} + 2 \cdot (-2)^3 + 2023 \\ &= 17 \cdot 1 + 2 \cdot (-8) + 2023 \\ &= 17 + (-16) + 2023 = 2024 \end{aligned}$$

Vậy khi  $|x-1| + \sqrt{(y+2)^{2022}} = 0$  thì biểu thức  $N$  có giá trị là 2024.

**Câu 19. (HSG 7 huyện Cẩm Khê, 2022 - 2023)**

Tính giá trị biểu thức:  $C = 2x^4 + 15y^{2023} + 2006$  tại  $x, y$  thỏa mãn:  $\sqrt{(y+1)^4} + (2-x)^2 = 0$

**Lời giải**

Vì  $\sqrt{(y+1)^4} \geq 0$  với mọi  $y$ ,  $(2-x)^2 \geq 0$  với mọi  $x$

do đó để  $\sqrt{(y+1)^4} + (2-x)^2 = 0$  thì  $\sqrt{(y+1)^4} = 0$  và  $(2-x)^2 = 0$

$\Rightarrow y+1 = 0$  và  $2-x = 0$ .

$\Rightarrow y = -1; x = 2$

suy ra  $C = 2 \cdot 2^4 + 15 \cdot (-1)^{2023} + 2006 = 2023$ .

Vậy  $C = 2023$ .

**Câu 20. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường THCS MINH KHAI 2022 - 2023)**

Tính giá trị của biểu thức:  $C = 2x^5 - 5y^3 + 2025$  tại  $x, y$  thỏa mãn:  $|x-1| + (y+2)^{20} = 0$

**Lời giải**

Do  $|x-1| \geq 0; (y+2)^{20} \geq 0 \Rightarrow |x-1| + (y+2)^{20} \geq 0$  với mọi  $x, y$

Kết hợp  $|x-1| + (y+2)^{20} = 0$  suy ra  $|x-1| = 0$  và  $(y+2)^{20} = 0$

Nên:  $x = 1; y = -2$

Giá trị của biểu thức:  $C = 2x^5 - 5y^3 + 2025$  tại  $x = 1; y = -2$

là:  $C = 2 \cdot 1^5 - 5 \cdot (-2)^3 + 2025 = 2 + 40 + 2025 = 2067$

Vậy  $C = 2067$

**Câu 21. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Phạm Kinh Ân 2022 - 2023)**

Cho  $|x-2| + |y-1| + (x+y-z-2)^{2020} = 0$ . Tính giá trị của:  $A = 5x^2 y^{2020} z^{2021}$ .

**Lời giải**

Vì  $|x-2| \geq 0$  với  $\forall x$ ;  $|y-1| \geq 0$  với  $\forall y$ ;  $(x+y-z-2)^{2020} \geq 0$  với  $\forall x, y, z$

Do đó  $|x-2|+|y-1|+(x+y-z-2)^{2020} = 0$  khi

$$\begin{cases} |x-2|=0 \\ |y-1|=0 \\ (x+y-z-2)^{2020} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ y-1=0 \\ x+y-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$$

Do đó  $A = 5 \cdot 2^2 \cdot 1^{2020} \cdot 1^{2021} = 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 = 20$

Vậy  $A = 20$ .

**Câu 22. (HSG 7 huyện Kinh Môn 2021 - 2022)**

Tính giá trị của biểu thức:  $C = 2x^5 - 5y^3 + 1980$  tại  $x, y$  thỏa mãn  $|x-1|+(y+2)^{20} = 0$ .

**Lời giải**

Do  $|x-1| \geq 0$ ;  $(y+2)^{20} \geq 0$  nên  $|x-1|+(y+2)^{20} \geq 0$  với mọi  $x, y$ .

Kết hợp  $|x-1|+(y+2)^{20} = 0$  suy ra  $|x-1|=0$  và  $(y+2)^{20} = 0 \Rightarrow x=1$  và  $y=-2$ .

Giá trị của biểu thức:  $C = 2x^5 - 5y^3 + 1980$  tại  $x=1$ ;  $y=-2$  là:

$$C = 2 \cdot 1^5 - 5 \cdot (-2)^3 + 1980 = 2022.$$

Vậy  $C = 2022$ .

**Câu 23. (HSG 7 huyện Tam Dương 2022 - 2023)**

Tính giá trị của biểu thức:  $C = 2x^5 - 5y^3 + 2023$  tại các giá trị của  $x, y$  thỏa mãn

$$|x+1|+(y+2)^{2024} = 0$$

**Lời giải**

Ta có:  $|x+1| \geq 0$ ;  $(y+2)^{2024} \geq 0$  với mọi  $x, y$

nên  $|x+1|+(y+2)^{2024} = 0$  khi  $|x+1|=0$  hoặc  $(y+2)^{2024} = 0$

suy ra  $x = -1$ ;  $y = -2$

$$\text{Nên } C = 2x^5 - 5y^3 + 2023 = 2 \cdot (-1)^5 - 5 \cdot (-2)^3 + 2023 = 1981$$

**Câu 24. (HSG 7 đề khảo sát lần 3, 2022 - 2023)**

Cho  $|3x-2y|+|5z-7x|+(xy+yz+xz-500)^{2020} = 0$ . Tính giá trị của:  $A = (3x-y-z)^{2021}$ .

**Lời giải**

Vì  $|3x-2y| \geq 0$ ;  $|5z-7x| \geq 0$ ;  $(xy+yz+xz-500)^{2020} \geq 0$  với  $\forall x, y, z$

Do đó  $|3x-2y|+|5z-7x|+(xy+yz+xz-500)^{2020} = 0$  khi

$$\begin{cases} |3x-2y|=0 \\ |5z-7x|=0 \\ (xy+yz+xz-500)^{2020} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-2y=0 \\ 5z-7x=0 \\ xy+yz+xz-500=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=14 \\ z=-14 \end{cases}$$

+ Nếu  $z = 14$  ta tính được:  $x = 10$ ;  $y = 15$

Thay vào biểu thức  $A = (3x-y-z)^{2021}$  ta được:  $A = (3 \cdot 10 - 15 - 14)^{2021} = 1$

+ Nếu  $z = -14$  ta tính được:  $x = -10$ ;  $y = -15$

Thay vào biểu thức  $A = (3x - y - z)^{2021}$  ta được:  $A = [3 \cdot (-10) - (-15) - (-14)]^{2021} = -1$

Vậy  $A = 1$  hoặc  $A = -1$  khi  $|3x - 2y| + |5z - 7x| + (xy + yz + xz - 500)^{2020} = 0$ .

**Câu 25. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Hồng Lĩnh 2022 - 2023)**

Cho các số thực  $x, y, z$  thỏa mãn  $(x-1)^{2022} + (2y-1)^{2022} + (x+2y-z)^{2023} = 0$ .

Chứng minh rằng  $x = y.z$

**Lời giải**

Ta có:  $(x - 1)^{2022} \geq 0 \forall x$

$(2y - 1)^{2020} \geq 0 \forall y$

$|x + 2y - z|^{2023} \geq 0 \forall x, y, z$

$(x-1)^{2022} + (2y-1)^{2022} + |x+2y-z|^{2023} \geq 0 \forall x, y, z$

Mà  $(x-1)^{2022} + (2y-1)^{2022} + |x+2y-z|^{2023} = 0$

$$\text{Nên dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} (x-1)^{2022} = 0 \\ (2y-1)^{2022} = 0 \\ |x+2y-z|^{2023} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 2 \end{cases}$$

Vậy  $x = y.z$ .

**Câu 26. (HSG 7 thi thử huyện Thanh Miện 2022 - 2023)**

Cho  $a, b, x, y$  thỏa mãn  $(bx^2 - ay^2)^{2022} + |x^2 + y^2 - 1| = 0$  ( $a \neq 0; b \neq 0; a + b \neq 0$ ).

Chứng minh rằng  $\frac{x^{2022}}{a^{1011}} + \frac{y^{2022}}{b^{1011}} = \frac{2}{(a+b)^{1011}}$ .

**Lời giải**

+ Ta có:  $(bx^2 - ay^2)^{2022} \geq 0; |x^2 + y^2 - 1| \geq 0$

$\Rightarrow (bx^2 - ay^2)^{2022} + |x^2 + y^2 - 1| \geq 0$

Do đó  $(bx^2 - ay^2)^{2022} + |x^2 + y^2 - 1| = 0$  khi và chỉ khi  $\begin{cases} bx^2 - ay^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bx^2 = ay^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

+ Ta có:  $bx^2 = ay^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a} = \frac{y^2}{b}$

$\Rightarrow \frac{x^2}{a} = \frac{y^2}{b} = \frac{x^2 + y^2}{a+b} = \frac{1}{a+b}$  (vì  $x^2 + y^2 = 1$ )

$\Rightarrow \left(\frac{x^2}{a}\right)^{1011} = \left(\frac{y^2}{b}\right)^{1011} = \left(\frac{1}{a+b}\right)^{1011}$

$$\Rightarrow \frac{x^{2022}}{a^{1011}} = \frac{y^{2022}}{b^{1011}} = \frac{1}{(a+b)^{1011}} \Rightarrow \frac{x^{2022}}{a^{1011}} + \frac{y^{2022}}{b^{1011}} = \frac{2}{(a+b)^{1011}}$$

$$\text{Vậy } \frac{x^{2022}}{a^{1011}} + \frac{y^{2022}}{b^{1011}} = \frac{2}{(a+b)^{1011}}.$$

**Câu 27. (HSG 7 trường Lý Thường Kiệt, 2017 -2018)**

Chứng minh rằng không thể tìm được số nguyên  $x, y, z$  thỏa mãn:

$$|x-y| + |y-z| + |z-x| = 2017$$

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } |x-y| + |y-z| + |z-x| = |x-y| + (x-y) + |y-z| + (y-z) + |z-x| + (z-x)$$

$$\text{Với mọi số nguyên } x \text{ ta lại có } |x| + x = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Suy ra  $|x| + x$  luôn là số chẵn với mọi số nguyên  $x$

$$\text{Từ đó ta có: } \begin{cases} |x-y| + (x-y) \\ |y-z| + (y-z) \\ |z-x| + (z-x) \end{cases} \text{ là các số chẵn với mọi số nguyên } x, y, z$$

Suy ra  $|x-y| + (x-y) + |y-z| + (y-z) + |z-x| + (z-x)$  là một số chẵn với mọi số nguyên  $x, y, z$

Hay  $|x-y| + |y-z| + |z-x|$  là một số chẵn với mọi số nguyên  $x, y, z$

Do đó, không thể tìm được số nguyên  $x, y, z$  thỏa mãn:

$$|x-y| + |y-z| + |z-x| = 2017$$

**Dạng 8: Tìm ẩn dựa vào tính chất về dấu**

**A. Trắc nghiệm (nếu có)**

**Câu 1. (HSG 7 huyện Lạng Giang, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)**

Cho các số  $x, y$  thỏa mãn:  $|1-2x| + (y-2)^{2022} \leq 0$ . Giá trị của  $B = 12x^2y + 3xy^2$  bằng:

**A.** 10

**B.** 11

**C.** 13

**D.** 12

**Lời giải**

$$|1-2x| + (y-2)^{2022} \leq 0 \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } |1-2x| \geq 0, \forall x; (y-2)^{2022} \geq 0, \forall y \Rightarrow |1-2x| + (y-2)^{2022} \geq 0, \forall x, y \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) đẳng thức xảy ra khi: } \begin{cases} |1-2x| = 0 \\ (y-2)^{2022} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-2x = 0 \\ y-2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } x = \frac{1}{2}; y = 2 \text{ vào } B \text{ ta được: } B = 12x^2y + 3xy^2 = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2 + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot (2)^2 = 12$$

Vậy  $B = 12$  khi  $|1-2x| + (y-2)^{2022} \leq 0$ .

**Câu 2. (HSG 7 huyện Sơn Động 2022 – 2023)**

Biết  $(x, y)$  là cặp số thỏa mãn:  $(x-1)^2 + |3y+12| \leq 0$ . Khi đó  $5x-2y$  bằng:

- A.** 13.                      **B.** -13.                      **C.** -3.                      **D.** 3.

**Lời giải**

Ta có:  $(x+1)^2 \geq 0$  với mọi  $x$

$|3y+12| \geq 0$  với mọi  $y$

Suy ra  $(x-1)^2 + |3y+12| \geq 0$  với mọi  $x, y$

Mà  $(x-1)^2 + |3y+12| \leq 0$

Do đó  $(x-1)^2 + |3y+12| = 0$

$\Rightarrow x-1=0$  và  $3y+12=0$

Hay  $x=1$  và  $y=-4$

Vậy  $5x-2y=5.1-2.(-4)=13$

**Câu 3. (HSG 7 huyện Tam Nông 2022 - 2023)**

Cho  $x, y$  thỏa mãn  $(x-2)^4 + (y-1)^{2022} \leq 0$  thì giá trị  $19x^2y + 4xy^2$  bằng

- A.** 80.                      **B.** 83.                      **C.** 83.                      **D.** 85.

**Lời giải**

Ta có  $(x-2)^4 \geq 0, (y-1)^{2022} \geq 0$  với mọi  $x, y$

Nên  $(x-2)^4 + (y-1)^{2022} \geq 0$

Mà  $(x-2)^4 + (y-1)^{2022} \leq 0$

Suy ra  $(x-2)^4 + (y-1)^{2022} = 0$

$\Rightarrow (x-2)^4 = 0$  và  $(y-1)^{2022} = 0$

$\Rightarrow x=2$  và  $y=1$

Khi đó  $19x^2y + 4xy^2 = 19.4.1 + 4.2.1 = 84$

**Câu 4. (HSG 7 huyện Tân Yên 2022 - 2023)**

Biết  $(x, y)$  là cặp số thỏa mãn  $(-2x-5)^{2022} + |3y+4| \leq 0$ . Khi đó  $2x+3y$  bằng

- A.** -1.                      **B.** 1.                      **C.** 9.                      **D.** -9.

**Lời giải**

Ta có  $(-2x-5)^{2022} \geq 0; |3y+4| \geq 0$  với mọi  $x, y$

Nên  $(-2x-5)^{2022} + |3y+4| \geq 0$

Mà  $(-2x-5)^{2022} + |3y+4| \leq 0$

Suy ra  $(-2x-5)^{2022} + |3y+4| = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x - 5 = 0 \\ 3y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{2} \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Khi đó:  $2x + 3y = 2 \cdot \frac{-5}{2} + 3 \cdot \frac{-4}{3} = -5 - 4 = -9.$

**B. Tự luận**

**Câu 1. (HSG 7 huyện Triệu Sơn, 2017 - 2018)**

Tìm  $x$  biết:  $(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right) > 0$

**Lời giải**

Từ  $(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right) > 0$  suy ra :  $x-3$  và  $x+\frac{1}{2}$  cùng dấu

Để thấy  $x-3 < x+\frac{1}{2}$  nên ta có:

\*)  $x-3$  và  $x+\frac{1}{2}$  cùng dương  $\Rightarrow x-3 > 0 \Rightarrow x > 3$

\*)  $x-3$  và  $x+\frac{1}{2}$  cùng âm  $\Rightarrow x+\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow x < -\frac{1}{2}$

Vậy  $x > 3$  hoặc  $x < -\frac{1}{2}$

**Câu 3. (HSG 7 huyện Nga Sơn- 2016 - 2017)**

Tìm  $x$ , biết:  $(x-2)(x+3) < 0$

**Lời giải**

Vì  $(x-2)(x+3) < 0$  nên  $x-2, x+3$  khác dấu

mà  $x+3 > x-2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2 < 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \Rightarrow -3 < x < 2$$

Vậy  $-3 < x < 2.$

**Câu 4. (HSG 7 trường Tam Hưng 2013 - 2014)**

Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  sao cho:  $(x^2 - 20)(x^2 - 15)(x^2 - 10)(x^2 - 5) < 0$

**Lời giải**

Do  $x^2 \geq 0$  với mọi  $x \Rightarrow x^2 - 20 < x^2 - 15 < x^2 - 10 < x^2 - 5$

Mà  $(x^2 - 20)(x^2 - 15)(x^2 - 10)(x^2 - 5) < 0$

Nên trong các thừa số  $(x^2 - 20), (x^2 - 15), (x^2 - 10), (x^2 - 5)$  có 1 thừa số âm hoặc có 3 thừa số âm.

+ TH1: trong trong các thừa số  $(x^2 - 20), (x^2 - 15), (x^2 - 10), (x^2 - 5)$  có một số âm

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x^2 - 20 < 0 \\ x^2 - 15 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 < 20 \\ x^2 > 15 \end{cases}$$

Mà  $x$  nguyên nên  $x^2 = 16 \Rightarrow x - 2xy + y - 3 = 0$

+ TH2: trong trong các thừa số  $(x^2 - 20)$ ,  $(x^2 - 15)$ ,  $(x^2 - 10)$ ,  $(x^2 - 5)$  có ba số âm

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x^2 - 10 < 0 \\ x^2 - 5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 < 10 \\ x^2 > 5 \end{cases}$$

$$\text{Mà } x \text{ nguyên nên } x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

Vậy  $x \in \{3; -3; 4; -4\}$ .

**Câu 5. (HSG 7 huyện Thanh Oai 2014 - 2015)**

Tìm  $x$ , biết:  $\left| \frac{3}{5} - \frac{1}{2}x \right| > \frac{2}{5}$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} & \left| \frac{3}{5} - \frac{1}{2}x \right| > \frac{2}{5} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \frac{3}{5} - \frac{1}{2}x > \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} - \frac{1}{2}x < -\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{2}{5} \\ x > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy  $x < \frac{2}{5}$  hoặc  $x > 2$

**Câu 6. (HSG 7 huyện Bồ Lý; Hồng Đà, Tam Nông 2015 - 2016)**

Tìm  $x$  để biểu thức sau nhận giá trị dương:  $x^2 + 2014x$

**Lời giải**

Ta có:  $x^2 + 2014x = x(x + 2014) > 0$

Nên  $x$  và  $x + 2014$  trái dấu nhau

Mà  $x < x + 2014$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2014 > 0 \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2014 \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow -2014 < x < 0$$

Vậy  $-2014 < x < 0$ .

**Câu 7. (HSG 7 thị xã Hoàng Mai 2022 - 2023)**

Tìm  $x, y$  biết:  $(2x - 6)^{2024} + |3y - 9| \leq 0$ .

**Lời giải**

Ta có  $(2x - 6)^{2024} \geq 0$  với mọi  $x$ ;  $|3y - 9| \geq 0$  với mọi  $y$ .

Do đó  $(2x - 6)^{2024} + |3y - 9| \geq 0$ , với mọi  $x, y$ .

Mà  $(2x - 6)^{2024} + |3y - 9| \leq 0$  nên suy ra  $(2x - 6)^{2024} + |3y - 9| = 0$ .

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-6=0 \\ 3y-9=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$$

Vậy  $x=3$  và  $y=3$ .

**Câu 8. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)**

Tìm  $x, y$  biết:  $\left(3x - \frac{1}{6}\right)^2 + |2y - 6| \leq 0$ .

**Lời giải**

Vì  $\left(3x - \frac{1}{6}\right)^2 \geq 0$  với mọi  $x$ ;  $|2y - 6| \geq 0$  với mọi  $y$ .

Do đó:  $\left(3x - \frac{1}{6}\right)^2 + |2y - 6| \geq 0$  với mọi  $x, y$ .

Khi đó, theo đề bài thì:  $\left(3x - \frac{1}{6}\right)^2 + |2y - 6| \leq 0 \Rightarrow \left(3x - \frac{1}{6}\right)^2 + |2y - 6| = 0$ .

Vì vậy:  $\begin{cases} 3x - \frac{1}{6} = 0 \\ 2y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{18} \\ y = 3 \end{cases}$ .

Vậy  $x = \frac{1}{18}$ ,  $y = 3$ .

**Câu 9. (HSG 7 trường Đáp Cầu 2018 - 2019)**

Tìm  $x, y$  biết:  $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \leq 0$ .

**Lời giải**

Vì  $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 \geq 0$  với mọi  $x$ ;  $|3y + 12| \geq 0$  với mọi  $y$ , do đó:

$\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \geq 0$  với mọi  $x, y$ .

Theo đề bài thì  $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \leq 0$ . Từ đó suy ra:  $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| = 0$ .

Khi đó  $2x - \frac{1}{6} = 0$  và  $3y + 12 = 0$ .

Suy ra  $x = \frac{1}{12}$  và  $y = -4$ .

Vậy  $x = \frac{1}{12}$ ;  $y = -4$ .

**Câu 10. (HSG 7 trường Hoàng Hóa, 2017 -2018)**

Tìm  $x, y$  biết rằng:  $(2x - 5)^{2012} + (3y + 4)^{2014} \leq 0$

**Lời giải**



$$\text{Ta có: } \begin{cases} (2x-5)^{2012} \geq 0 \\ (3y+4)^{2014} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (2x-5)^{2012} + (3y+4)^{2014} \geq 0$$

$$\text{Mà } (2x-5)^{2012} + (3y+4)^{2014} \leq 0 \Rightarrow (2x-5)^{2012} + (3y+4)^{2014} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2x-5)^{2012} = 0 \\ (3y+4)^{2014} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\frac{1}{2} \\ y = -1\frac{1}{3} \end{cases}$$

**Câu 11. (HSG 7 huyện Mường Lát, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)**

Tìm số  $x, y$  biết:  $(2022-x)^2 + |y-2023|^{2023} \leq 0$ .

**Lời giải**

$$(2022-x)^2 + |y-2023|^{2023} \leq 0 \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (2022-x)^2 \geq 0 \quad \forall x \\ |y-2023|^{2023} \geq 0 \quad \forall y \end{cases}$$

$$\text{Nên } (2022-x)^2 + |y-2023|^{2023} \geq 0 \quad \forall x, y \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $(2022-x)^2 + |y-2023|^{2023} = 0$ , đạt được khi:

$$\begin{cases} (2022-x)^2 = 0 \\ |y-2023|^{2023} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2022-x = 0 \\ y-2023 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2022 \\ y = 2023 \end{cases}$$

Vậy  $x = 2022$  và  $y = 2023$ .

**Câu 12. (HSG 7 huyện Hoàng Hóa, 2017 - 2018)**

Tìm  $x, y$  biết rằng:  $(2x-5)^{2012} + (3y+4)^{2014} \leq 0$

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (2x-5)^{2012} \geq 0 \\ (3y+4)^{2014} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (2x-5)^{2012} + (3y+4)^{2014} \geq 0$$

$$\text{Mà } (2x-5)^{2012} + (3y+4)^{2014} \leq 0$$

$$\text{Suy ra } (2x-5)^{2012} + (3y+4)^{2014} = 0$$

$$\text{Suy ra } (2x-5)^{2012} = 0 \text{ và } (3y+4)^{2014} = 0$$

$$x = 2\frac{1}{2} \text{ và } y = -1\frac{1}{3}$$

**Câu 13. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2015 - 2016)**

Tìm tất cả các cặp số  $(x; y)$  thỏa mãn  $(2x-y+7)^{2012} + |x-3|^{2013} \leq 0$

**Lời giải**

$$\text{Ta có } 2012 \text{ là số tự nhiên chẵn} \Rightarrow (2x-y+7)^{2012} \geq 0$$

$$\text{Và } |x-3| \geq 0 \Rightarrow |x-3|^{2013} \geq 0$$

$$\text{Do đó, từ } (2x-y+7)^{2012} + |x-3|^{2013} \leq 0 \text{ suy ra: } (2x-y+7)^{2012} = 0 \text{ và } |x-3|^{2013} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-y+7=0 \\ x-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=13 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } (x; y) = (3; 13).$$

**Câu 14. (HSG 7 huyện Yên Phong 2022 - 2023)**

Tìm giá trị của biểu thức  $P = 28a^2b - 9ab^2$  với  $a; b$  thỏa mãn  $(a-3)^2 + (3b+1)^{100} \leq 0$ .

**Lời giải**

Do  $(a-3)^2 \geq 0$  với mọi  $a$  và  $(3b+1)^{100} \geq 0$  với mọi  $b$  nên

$$(a-3)^2 + (3b+1)^{100} \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} (a-3)^2 = 0 \\ (3b+1)^{100} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-3=0 \\ 3b+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } P = 28a^2b - 9ab^2 = ab(28a - 9b) = 3 \cdot \frac{-1}{3} \left( 28 \cdot 3 - 9 \cdot \frac{-1}{3} \right) = -87.$$

$$\text{Vậy } P = -87.$$

**Câu 15. (HSG 7 huyện Lập Thạch, Vĩnh Phúc 2022 - 2023)**

Cho các số  $x; y$  thỏa mãn  $|2x-1| + (y-2)^{2022} \leq 0$ .

Tính giá trị của biểu thức  $B = 12x^2y + 3xy^2$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } |2x-1| + (y-2)^{2022} \leq 0.$$

$$\text{Vì } |2x-1| \geq 0; (y-2)^{2022} \geq 0 \Rightarrow |2x-1| + (y-2)^{2022} \geq 0$$

$$\text{Do đó: } |2x-1| + (y-2)^{2022} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |2x-1| = 0 \\ (y-2)^{2022} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0,5 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\text{Thay } x = 0,5; y = 2 \text{ ta có } B = 12 \cdot 0,5^2 \cdot 2 + 3 \cdot 0,5 \cdot 2^2 = 6 + 6 = 12$$

$$\text{Vậy giá trị của biểu thức } B = 12 \text{ tại } x; y \text{ thỏa mãn } |2x-1| + (y-2)^{2022} \leq 0.$$

**Câu 16. (HSG 7 huyện Ứng Hòa 2022 - 2023)**

Tính giá trị biểu thức  $B = 21x^2y + xy^2$  với  $x; y$  thỏa mãn:  $(x-2)^2 + (2y-1)^{2024} \leq 0$

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } (x-2)^2 + (2y-1)^{2024} \leq 0$$

$$\text{Vì } (x-2)^2 \geq 0; (2y-1)^{2024} \geq 0 \Rightarrow (x-2)^2 + (2y-1)^{2024} \geq 0$$

$$\text{Do đó: } (x-2)^2 + (2y-1)^{2024} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ 2y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Thay vào biểu thức ta được  $B = 21 \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{85}{2}$

**Câu 17. (HSG 7 trường Nguyễn Chí, 2017 -2018)**

Tim đa thức  $M$  biết rằng:  $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$ . Tính giá trị của  $M$  khi  $x, y$  thỏa mãn  $(2x - 5)^{2018} + (3y + 4)^{2020} \leq 0$

**Lời giải**

$$M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$$

$$\Rightarrow M = 6x^2 + 9xy - y^2 - (5x^2 - 2xy)$$

$$\Rightarrow M = 6x^2 + 9xy - y^2 - 5x^2 + 2xy = x^2 + 11xy - y^2$$

Ta có:  $\begin{cases} (2x-5)^{2018} \geq 0 \\ (3y+4)^{2020} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (2x-5)^{2018} + (3y+4)^{2020} \geq 0$

Mà  $(2x - 5)^{2018} + (3y + 4)^{2020} \leq 0 \Rightarrow (2x - 5)^{2018} + (3y + 4)^{2020} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2x-5)^{2018} = 0 \\ (3y+4)^{2020} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

thay vào ta được:  $M = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 11 \cdot \frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{25}{4} - \frac{110}{3} - \frac{16}{9} = -\frac{1159}{36}$

**Câu 18. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Văn Lang 2022 - 2023)**

Cho các số  $x, y$  thỏa mãn  $(x - 3)^4 + (2y - 1)^{2020} \leq 0$ .

Tính giá trị của biểu thức  $M = 402x^2y + 284xy^2$

**Lời giải**

Vì  $(x - 3)^4 \geq 0$ ;  $(2y - 1)^{2020} \geq 0$  với mọi  $x, y$  nên

$(x - 3)^4 + (2y - 1)^{2020} \geq 0$  với mọi  $x, y$ .

Mà theo đề bài :  $(x - 3)^4 + (2y - 1)^{2020} \geq 0$

Suy ra  $(x - 3)^4 + (2y - 1)^{2020} = 0$

Hay:  $(x - 3)^4 = 0$  và  $(2y - 1)^{2020} = 0$

suy ra  $x = 3, y = \frac{1}{2}$

Khi đó tính được:  $M = 2022$

**Câu 19. (HSG 7 thành phố Lào Cai 2022 - 2023)**

Cho hai số thực  $x, y$  thỏa mãn  $(x-y)^{2022} + (x-2)^{2024} \leq 0$ . Khi đó giá trị của biểu thức  $M = 5x^2y - 3xy^2$  là

**Lời giải**

Ta có:  $(x-y)^{2022} \geq 0$  với mọi  $x, y$

$(x-2)^{2024} \geq 0$  với mọi  $x$

Nên  $(x-y)^{2022} + (x-2)^{2024} \geq 0$  với mọi  $x, y$

Mà  $(x-y)^{2022} + (x-2)^{2024} \leq 0$

Suy ra  $(x-y)^{2022} + (x-2)^{2024} = 0$

$\Rightarrow x-2=0$  và  $x-y=0$

Hay  $x=y=2$

Vậy giá trị của biểu thức  $M = 5x^2y - 3xy^2$  là  $M = 5.2^2.2 - 3.2.2^2 = 40 - 24 = 16$ .



**CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS**

**CĐ2: TÌM ẨN CHƯA BIẾT**

Dạng 1: Tìm x thông thường
Dạng 2: Đưa về dạng tích bằng 0
Dạng 3: Sử dụng tính chất lũy thừa
Dạng 4: Tìm ẩn dạng phân thức
Dạng 5: Tìm x dạng chứa dấu giá trị tuyệt đối
Dạng 6: Sử dụng công thức tính tổng có quy luật
Dạng 7: Tổng các biểu thức không âm bằng 0
Dạng 8: Tìm ẩn dựa vào tính chất về dấu
Dạng 9: Sử dụng phương pháp chặn để tìm ẩn
Dạng 10: Tìm ẩn với điều kiện nguyên

**Dạng 9. Sử dụng phương pháp chặn để tìm ẩn**

**Câu 1. (HSG 7 huyện Quế Võ, tỉnh Bắc Ninh 2022 - 2023)**

Tìm x thỏa mãn  $|2x+3|+|2x-1|=\frac{8}{3(x+1)^2+2}$ .

**Lời giải**

Ta có  $|2x+3|+|2x-1|=|2x+3|+|1-2x|\geq|2x+3+1-2x|=|4|=4$  với mọi x.

Lại có  $3(x+1)^2+2\geq 2 \Rightarrow \frac{8}{3(x+1)^2+2}\leq\frac{8}{2}=4$  với mọi x.

Dấu “=” xảy ra  $\Leftrightarrow \begin{cases} (2x+3)(1-2x)\geq 0 \\ (x+1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1$ .

Vậy  $x=-1$ .

**Câu 2. (HSG 7 Hưng Hà, Thái Phương, 2022 - 2023)**

Cho  $\frac{6}{(x-2022)^2+2}=|y-2023|+3$ . Tính x + y.

**Lời giải**

$$\frac{6}{(x-2022)^2+2}=|y-2023|+3$$

$$(x-2022)^2\geq 0 ; \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow (x-2022)^2+2\geq 0+2=2.$$

$$\frac{1}{(x-2022)^2+2}\leq\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{6}{(x-2022)^2+2}\leq\frac{6}{2}=3 \quad (1)$$

$$|y-2023|\geq 0 ; \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow |y-2023|+3\geq 0+3=3 \quad (2)$$

$$\frac{6}{(x-2022)^2+2}=|y-2023|+3 \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:  $x-2022=0$  và  $y-2023=0$

$$\Rightarrow x = 2022; y = 2023.$$

$$\text{Suy ra } x + y = 2022 + 2023 = 4045.$$

$$\text{Vậy } x + y = 4045.$$

**Câu 3. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Thanh Trì 2021 - 2022)**

$$\text{Tìm các số } x, y \text{ nguyên thỏa mãn: } |x-8|+|6-x| = \frac{24}{5(y+3)^2+12}.$$

**Lời giải**

Ta chứng minh được  $|A|+|B| \geq |A+B|$ , nên  $|x-8|+|6-x| \geq |8-x+6-x| = 2$  với mọi  $x$ .

$$\text{Mặt khác } \frac{24}{5(y+3)^2+12} \leq 2 \text{ với mọi } y.$$

$$\text{Từ đó suy ra } y+3=0 \Rightarrow y=-3.$$

$$\text{Khi đó } |x-8|+|6-x|=2 \Rightarrow 6 \leq x \leq 8, \text{ mà } x \text{ nguyên nên } x \in \{6; 7; 8\}.$$

$$\text{Vậy các cặp số nguyên } (x; y) \text{ là } (6; -3); (7; -3); (8; -3).$$

**Câu 4. (HSG 7 Yên Thế, Bắc Giang, 2022 - 2023)**

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } |2022-x|+|2023-x|+|2024-x|=2.$$

**Lời giải**

$$\text{Ta có } |2022-x|+|2024-x|=|x-2022|+|2024-x| \geq |x-2022+2024-x|=2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |2022-x|+|2024-x| \geq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } (x-2022)(2024-x) \geq 0 \quad (*)$$

Giải (\*):

$$\text{TH1: } x-2022 \geq 0 \text{ và } 2024-x \geq 0$$

$$\Rightarrow x \geq 2022 \text{ và } x \leq 2024.$$

$$\Rightarrow 2022 \leq x \leq 2024.$$

$$\text{TH2: } x-2022 \leq 0 \text{ và } 2024-x \leq 0$$

$$\text{hoặc } \Rightarrow x \leq 2022 \text{ và } x \geq 2024 \quad (\text{loại})$$

$$\text{Ta có: } |2023-x| \geq 0 \quad \forall x \quad (2)$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } x=2023.$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow |2022-x|+|2023-x|+|2024-x| \geq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy để  $|2022-x|+|2023-x|+|2024-x|=2$  thì (1) và (2) xảy ra dấu “=” khi:

$$2022 \leq x \leq 2024 \text{ và } x=2024 \Rightarrow x=2024.$$

$$\text{Vậy } x=2024$$

**Câu 5. (HSG 7 huyện Thuận Thành 2021 - 2022)**

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } |x+1|+|x+2|+|x+3|=4x$$

**Lời giải**

Từ  $|x+1|+|x+2|+|x+3|=4x$  ta thấy vế trái:  $|x+1|+|x+2|+|x+3| \geq 0$  nên vế phải:

$$4x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0.$$

Với  $x \geq 0$  thì  $|x+1| = x+1$ ,  $|x+2| = x+2$ ,  $|x+3| = x+3$ . Do đó ta có  
 $x+1+x+2+x+3 = 4x \Rightarrow x = 6$  (thỏa mãn).  
 Vậy  $x = 6$ .

**Câu 6. (HSG 7 huyện Chư Sê 2021 - 2022)**

Chứng minh rằng không tìm được các số nguyên thỏa mãn  $|x-y|+|y-z|+|z-x| = 2023$

**Lời giải**

Ta có:  $|x-y|+|y-z|+|z-x| = |x-y|+(x-y)+|y-z|+(y-z)+|z-x|+(z-x)$

Với mọi số nguyên  $x$  ta lại có:  $|x|+x = \begin{cases} 2x & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

Suy ra  $|x|+x$  luôn là số chẵn với mọi số nguyên  $x$ .

Từ đó ta có:  $\begin{cases} |x-y|+(x-y) \\ |y-z|+(y-z) \\ |z-x|+(z-x) \end{cases}$  là các số chẵn với mọi số nguyên  $x, y, z$ .

Suy ra  $|x-y|+(x-y)+|y-z|+(y-z)+|z-x|+(z-x)$  là một số chẵn với mọi số nguyên  $x, y, z$ .

Hay  $|x-y|+|y-z|+|z-x|$  là một số chẵn với mọi số nguyên  $x, y, z$ .

Do đó không thể tìm được số nguyên  $x, y, z$  thỏa mãn:

**Câu 7. (HSG 7 trường Lê Hồng Phong 2018 - 2019)**

Chứng minh rằng không thể tìm được số nguyên  $x, y, z$  thỏa mãn :

$$|x-y|+|y-z|+|z-x| = 2017$$

**Lời giải**

Ta có:  $|x-y|+|y-z|+|z-x| = |x-y|+(x-y)+|y-z|+(y-z)+|z-x|+(z-x)$

Với mọi số nguyên  $x$  ta lại có  $|x|+x = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

Suy ra  $|x|+x$  luôn là số chẵn với mọi số nguyên  $x$

Từ đó ta có:  $|x-y|+(x-y)$ ;  $|y-z|+(y-z)$ ;  $|z-x|+(z-x)$  là các số chẵn với mọi số nguyên  $x, y, z$

Suy ra  $|x-y|+(x-y)+|y-z|+(y-z)+|z-x|+(z-x)$  là một số chẵn với mọi số nguyên  $x, y, z$

Hay  $|x-y|+|y-z|+|z-x|$  là một số chẵn với mọi số nguyên  $x, y, z$

Do đó, không thể tìm được số nguyên  $x, y, z$  thỏa mãn:  $|x-y|+|y-z|+|z-x| = 2017$

**Câu 8. (HSG 7 Hưng Hà, Lý Nam Đế, 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết:  $\left|x + \frac{1}{2}\right| + \left|x + \frac{1}{3}\right| + \left|x + \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\left|x + \frac{1}{4}\right| = \left|-x - \frac{1}{4}\right| \geq -x - \frac{1}{4}$

$\left|x + \frac{1}{3}\right| = 0$  ;  $\left|x + \frac{1}{2}\right| \geq x + \frac{1}{2}$

Do đó:  $A \geq x + \frac{1}{2} + 0 - x - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

Dấu “=” xảy ra khi:  $x + \frac{1}{4} \leq 0$  ;  $\left|x + \frac{1}{3}\right| = 0$  và  $x + \frac{1}{2} \geq 0$

Suy ra:  $x = -\frac{1}{3}$ .

Vậy  $A = \frac{1}{4}$  khi  $x = -\frac{1}{3}$ .

**Câu 9. (HSG 7 trường Giao Tân 2016 - 2017)**

Chứng minh rằng không thể tìm được số nguyên  $x, y, z$  thỏa mãn:

$|x - y| + |y - z| + |z - x| = 2017$

**Lời giải**

Ta có:  $|x - y| + |y - z| + |z - x| = |x - y| + (x - y) + |y - z| + (y - z) + |z - x| + (z - x)$

Với mọi số nguyên  $x$  ta lại có  $|x| + x = \begin{cases} 2x & \text{với } x \geq 0 \\ 0 & \text{với } x < 0 \end{cases}$

Suy ra  $|x| + x$  luôn là số chẵn với mọi số nguyên  $x$

Từ đó ta có:  $\begin{cases} |x - y| + (x - y) \\ |y - z| + (y - z) \\ |z - x| + (z - x) \end{cases}$  là các số chẵn với mọi số nguyên  $x, y, z$

$\Rightarrow |x - y| + (x - y) + |y - z| + (y - z) + |z - x| + (z - x)$  là một số chẵn với mọi  $x, y, z \in \mathbb{Z}$

Hay  $|x - y| + |y - z| + |z - x|$  là một số chẵn với mọi số nguyên  $x, y, z$

Do đó, không thể tìm được số nguyên  $x, y, z$  thỏa mãn:  $|x - y| + |y - z| + |z - x| = 2017$

**Câu 10. (HSG 7 trường Cự Khê 2013 – 2014; huyện Thanh Oai 2013- 2014)**

Tìm  $x$ , biết:  $|x - 2010| + |x - 2012| + |x - 2014| = 4$

**Lời giải**

$|x - 2010| + |x - 2012| + |x - 2014| \geq |x - 2010 + 2014 - x| + |x - 2012| \geq 4(*)$

Mà  $|x - 2010| + |x - 2012| + |x - 2014| = 4$

nên (\*) xảy ra dấu “=” khi và chỉ khi  $\begin{cases} x - 2012 = 0 \\ 2010 \leq x \leq 2014 \end{cases} \Rightarrow x = 2012$

Vậy  $x = 2012$ .

**Câu 11. (HSG 7 huyện Vĩnh Tường 2015 - 2016)**

Tìm  $x$ , thỏa mãn:  $|x - 1| + |x - 5| + |x - 2007| = 2006$

**Lời giải**



Ta có:

$$|x-1|+|x-5|+|x-2007|=|x-1|+|x-5|+|2007-x|\geq x-1+0+2007-x=2006$$

$$\text{Mà } |x-1|+|x-5|+|x-2007|=2006$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-5 = 0 \\ 2007-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 5 \\ x \leq 2007 \end{cases} \Rightarrow x = 5$$

Vậy  $x = 5$ .

**Câu 12. (HSG 7 huyện Trục Ninh 2022 - 2023)**

Tìm các cặp số nguyên  $x, y$  biết  $-x^2 + x + 1 = |y - 5|$ .

**Lời giải**

$$-x^2 + x + 1 = |y - 5| \quad (1)$$

$$-x^2 + x + 2 = |y - 5| + 1$$

$$-x^2 - x + 2x + 2 = |y - 5| + 1$$

$$-x(x+1) + 2(x+1) = |y - 5| + 1$$

$$(x+1)(2-x) = |y - 5| + 1$$

Ta có  $|y - 5| + 1 > 0$ ,  $\forall y$  nên  $(x+1)(2-x) > 0$

$$\Rightarrow (x+1)(x-2) < 0$$

$$\text{Mà } x+1 > x-2 \text{ nên } \begin{cases} x+1 > 0 \\ x-2 < 0 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 2$$

Vì  $x$  nguyên nên  $x = 0$  hoặc  $x = 1$

$$+ \text{ Với } x = 0 \text{ thì } |y - 5| = 1 \Rightarrow \begin{cases} y - 5 = 1 \\ y - 5 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } x = 1 \text{ thì } |y - 5| = 1 \Rightarrow \begin{cases} y - 5 = 1 \\ y - 5 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 \\ y = 4 \end{cases}$$

Vậy các cặp số nguyên  $(x, y)$  thỏa mãn là  $(0; 4), (0; 6), (1; 4), (1; 6)$ .

**Câu 13. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Tân Tiến 2022 - 2023)**

Tìm  $x, y, z$  biết:  $|7 - 3x| + 2|x^2 + 2| = 2x^2 + 3x - 3$

**Lời giải**

$$|7 - 3x| + 2|x^2 + 2| = 2x^2 + 3x - 3 \quad (1)$$

$$\text{Với mọi } x \text{ ta có: } x^2 \geq 0 \Rightarrow 2x^2 \geq 0 \Rightarrow 2x^2 + 3 \geq 3 \Rightarrow |2x^2 + 3| = 2x^2 + 3$$

Khi đó (1) trở thành:

$$|7 - 3x| + 2(x^2 + 2) = 2x^2 + 3x - 3$$

$$\Rightarrow |3x - 7| + 2x^2 + 4 = 2x^2 + 3x - 3$$

$$\Rightarrow |3x - 7| = 3x - 7$$

$$\Rightarrow 3x - 7 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 7 \Rightarrow x \geq \frac{7}{3}$$

Vậy  $x \geq \frac{7}{3}$

**Câu 14. (HSG 7 huyện Văn Lâm, tỉnh Hưng Yên 2022 - 2023)**

Tìm các cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn:  $|x + 2| + |x - 1| = 3 - (y + 2)^2$ .

**Lời giải**

Vì:  $|x + 2| + |1 - x| \geq |x + 2 + 1 - x| = 3$

Mặt khác:  $3 - (y + 2)^2 \leq 3$

$$\text{Đề } |x + 2| + |x - 1| = 3 - (y + 2)^2 \Rightarrow \begin{cases} |x + 2| + |x - 1| = 3 \\ 3 - (y + 2)^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x; y) \in \{(-2; -2), (-1; -2), (0; -2), (1; -2)\}.$$

Vậy các cặp số nguyên  $(x; y)$  cần tìm là:  $(-2; -2), (-1; -2), (0; -2), (1; -2)$ .

**Câu 15. (HSG 7 huyện Thái Thụy, 2022 - 2023)**

Tìm các số nguyên  $x, y$  thỏa mãn  $||x - 2022| + |x - 2023| + 3(x - y)^2| = 2(x - y)^2 + 1$ .

**Lời giải**

Ta có:  $2(x - y)^2 + 1 \geq 1$  với mọi  $x, y$ .

Có  $|x - 2022| \geq 0; |x - 2023| \geq 0; 3(x - y)^2 \geq 0$ .

Suy ra:  $|x - 2022| + |x - 2023| + 3(x - y)^2 \geq 0$  với mọi  $x; y$ .

$$\Rightarrow ||x - 2022| + |x - 2023| + 3(x - y)^2| = |x - 2022| + |x - 2023| + 3(x - y)^2.$$

Kết hợp với bài ra ta có:  $|x - 2022| + |x - 2023| + 3(x - y)^2 = 2(x - y)^2 + 1$

$$\Rightarrow |x - 2022| + |x - 2023| + (x - y)^2 = 1$$

Sử dụng bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối  $|a + b| \geq |a - b|$ , ta có:

$$|x - 2022| + |x - 2023| \geq |x - 2022 - x + 2023| = 1; (x - y)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x; y.$$

$$\Rightarrow |x - 2022| + |x - 2023| + (x - y)^2 \geq 1$$

Dấu “=” xảy ra khi:  $x = y$  và  $2022 \leq x \leq 2023$ .

Vì  $x, y$  nguyên nên ta tìm được các cặp giá trị  $(x; y)$  là  $(2022; 2022); (2023; 2023)$ .

**Câu 16. (HSG 7 huyện Giao Thủy 2016 - 2017)**

Tìm  $x, y$  biết:  $\frac{6}{(x - 1)^2 + 2} = |y - 1| + |y - 2| + |y - 3| + 1$

**Lời giải**

$$\frac{6}{(x - 1)^2 + 2} = |y - 1| + |y - 2| + |y - 3| + 1$$

+ Ta có:  $(x-1)^4 \geq 0$  với mọi  $x \Rightarrow (x-1)^4 + 2 \geq 2$

$\Rightarrow \frac{6}{(x-1)^4 + 2} \leq 3$  với mọi  $x$  hay  $VT \leq 3$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $x = 1$

+ Ta có:  $|y-1| + |y-2| + |y-3| + 1 = |y-1| + |y-3| + |y-2| + 1$   
 $\geq y-1 + 3-y+0+1 = 3$  hay  $VP \geq 3$

Dấu “=” xảy ra khi  $\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ y \leq 3 \\ y = 2 \end{cases}$

Do đó  $\frac{6}{(x-1)^2 + 2} = |y-1| + |y-2| + |y-3| + 1$

$\Rightarrow x = 1; y = 2$

Vậy  $x = 1; y = 2$ .

**Câu 17. (HSG 7 Yên Thế, Bắc Giang, 2022 - 2023)**

Tìm  $x$  biết:  $|x-2020| + |x-2021| + |x-2022| + |x-2023| = 4$ .

**Lời giải**

Ta có:  $|x-2020| + |x-2021| + |x-2022| + |x-2023|$   
 $= |x-2020| + |x-2021| + |2022-x| + |2023-x|$   
 $\leq |x-2020+2023-x| + |x-2021+2022-x| = 4$ .

Dấu “=” xảy ra khi:  $(x-2020)(2023-x) \geq 0$  và  $(x-2021)(2022-x) \geq 0$

$\Rightarrow 2020 \leq x \leq 2023$  và  $2021 \leq x \leq 2022 \Rightarrow 2021 \leq x \leq 2022$ .

Vậy  $2021 \leq x \leq 2022$ .

**Câu 18. (HSG 7 huyện Bá Thước, Thanh Hóa 2021 - 2022)**

Tìm các số nguyên  $a, b, c$  thỏa mãn  $|a-b| + |b-c| + |c-a| = 2021^a + 2022^a$

**Lời giải**

Ta có  $|a-b| + (a-b) + |b-c| + (b-c) + |c-a| + (c-a) = 2021^a + 2022^a$  (\*)

Nhận thấy  $|x-y| + (x-y)$  luôn là số chẵn với mọi  $x, y$

Nên vế trái của (\*) là số chẵn

- Nếu  $a > 0 \Rightarrow 2021^a + 2022^a$  luôn là số lẻ. Nên không xảy ra (\*)

- Nếu  $a < 0 \Rightarrow 0 < 2021^a + 2022^a < 1$  Nên không xảy ra (\*) do  $a, b, c \in \mathbb{Z}$

Do đó  $a = 0 \Rightarrow |b| + |b-c| + |c| = 0 \Rightarrow b = c = 0$

Vậy  $a = b = c = 0$

**Câu 19. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Chuyên Hải 2022 - 2023)**

Tìm  $x; y$  biết:  $\left[ (x-2)^2 + 4 \right]^2 + \sqrt{(x+2y-6)^2 + 9} = 19$

**Lời giải**

$$\left[ (x-2)^2 + 4 \right]^2 + \sqrt{(x+2y-6)^2 + 9} = 19$$

Ta có:  $(x-2)^2 \geq 0$  với mọi  $x \Rightarrow (x-2)^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow \left[ (x-2)^2 + 4 \right]^2 \geq 4^2 = 16$  (1)

$$(x+2y-6)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x; y \Rightarrow \sqrt{(x+2y-6)^2 + 9} \geq \sqrt{9} = 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra:  $\left[ (x-2)^2 + 4 \right]^2 + \sqrt{(x+2y-6)^2 + 9} \geq 16 + 3 = 19$

Vậy biểu thức:  $\left[ (x-2)^2 + 4 \right]^2 + \sqrt{(x+2y-6)^2 + 9} = 19$

$$\text{khi } \begin{cases} (x-2)^2 = 0 \\ (x+2y-6)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ x+2y-6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

Vậy  $x=2; y=2$

**Câu 20. (HSG 7 Nga Sơn, Thanh Hóa, 2022 - 2023)**

Tìm tất cả các số nguyên dương  $x, y$  thỏa mãn  $(x+y)^4 = 40x+41$ .

**Lời giải**

Do  $x, y$  nguyên dương nên  $40x < 41x, 41 \leq 41y$ . Khi đó, ta có :

$$(x+y)^4 = 40x+41 < 41x+41y = 41(x+y)$$

$$\Rightarrow (x+y)^3 < 41 < 64 = 4^3 \Rightarrow x+y < 4. \quad (1)$$

Do  $x$  nguyên dương nên  $40x+41 \geq 40.1+41=81 \Rightarrow (x+y)^4 \geq 81 \Rightarrow x+y \geq 3 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra:  $x+y=3$  mà  $x, y \in \mathbb{N}^*$  nên  $(x; y) \in \{(1; 2), (2; 1)\}$ .

Thử lại được :  $x=1; y=2$ .

Vậy  $x=1; y=2$ .

**Câu 21. (HSG 7 huyện, tỉnh, Trường Nguyễn Tông Quai 2022 - 2023)**

Tìm các số tự nhiên  $x, y, z \neq 0$  thỏa mãn điều kiện:  $x+y+z = xyz$

**Lời giải**

Không mất tính tổng quát của bài toán giả sử  $x \leq y \leq z$

Vì  $x, y, z$  là các số tự nhiên khác 0  $\Rightarrow 1 \leq x \leq y \leq z$

Ta có  $x+y+z = xyz$  (\*)

$$\Rightarrow \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} = 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2}$$

$$\Rightarrow x^2 \leq 3 \Rightarrow x=1$$

Thay vào (\*) ta được  $1+y+z = yz$

$$\Rightarrow (y-1)(z-1) = 2 \Rightarrow \begin{cases} y-1=1 \\ z-1=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ z=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = (1; 2; 3)$$

Vì vai trò của  $x, y, z$  như nhau nên các bộ số  $(x, y, z)$  thỏa mãn bài toán là :  
 $(1; 2; 3); (1; 3; 2); (2; 1; 3); (2; 3; 1); (3; 1; 2); (3; 2; 1)$

**Câu 22. (HSG 7 thành phố Vũng Tàu 2021 - 2022)**

Tìm các số nguyên  $x$  thỏa mãn:  $(x + 2022)^2 = 64(x + 2015)^3$ .

**Lời giải**

Vì  $(x + 2022)^2 \geq 0$  với mọi  $x$

Do đó  $64(x + 2015)^3 \geq 0$

Suy ra  $x + 2015 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2015$

Mà với  $x = -2015$  không thỏa mãn

Suy ra  $x \geq -2014 \Rightarrow x + 2015 \geq 1$

Khi đó  $(x + 2022)^2 = 64(x + 2015)^3 \geq 64(x + 2015)^2$

Suy ra  $x + 2022 \geq 8(x + 2015)$

Suy ra  $x \leq -2014$

Suy ra  $x = -2014$

Thử lại  $x = -2014$  thỏa mãn bài toán

Vậy  $x = -2014$ .

**Câu 23. (HSG 7 huyện Tân Kỳ 2021 - 2022)**

Tìm tất cả các số tự nhiên  $m, n$  sao cho:  $2^m + 2015 = |n + 2016| + n - 2016$

**Lời giải**

+) Với  $x \geq 0$  thì  $|x| + x = 2x$

+) Với  $x < 0$  thì  $|x| + x = 0$

Do đó  $|x| + x$  luôn chẵn với mọi  $x$  là số nguyên.

Khi đó:  $|n + 2016| + n - 2016$  là số chẵn với  $n - 2016 \in Z$

Suy ra  $2^m + 2015$  là số chẵn  $\Rightarrow 2^m$  lẻ  $\Rightarrow m = 0$

Ta có  $|n + 2016| + n - 2016 = 2016$

+) Nếu  $n < 2016$  ta có  $-(n - 2016) + n - 2016 = 2016 \Leftrightarrow 0n = 2016$  (vô lý)

+) Nếu  $n \geq 2016$  ta có  $2(n - 2016) = 2016 \Leftrightarrow n = 3024$  (thỏa mãn)

Vậy  $m = 0; n = 3024$ .

**Câu 24. (HSG 7 đề 255, 2017 - 2018)**

Tìm tất cả các số nguyên  $a$  biết:  $|a| \leq 4$

**Lời giải**

$0 \leq |a| \leq 4$  và  $a$  nguyên  $\Rightarrow |a| = 0; 1; 2; 3; 4$

+ Nếu  $|a| = 0 \Rightarrow a = 0$

+ Nếu  $|a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1$

+ Nếu  $|a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2$

+ Nếu  $|a| = 3 \Rightarrow a = \pm 3$

Vậy  $a \in \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4\}$ .

**Câu 25. (HSG 7 huyện Mỹ Đức 2022 - 2023)**

Tìm các số tự nhiên  $a, b$  thỏa mãn:  $25 - b^2 = 8(a - 2023)^2$

**Lời giải**

$$25 - b^2 = 8(a - 2023)^2$$

Vì  $b^2 \geq 0$  suy ra:

$$8(a - 2023)^2 \leq 25 \Rightarrow 8(a - 2023)^2 + b^2 = 25 \Rightarrow (a - 2023)^2 \leq \frac{25}{8}.$$

Mặt khác  $(a - 2023)^2$  là số chính phương nên  $(a - 2023)^2 = 0$  hoặc  $(a - 2023)^2 = 1$ .

Nếu  $(a - 2023)^2 = 0 \Rightarrow a = 2023$ .

Khi đó:  $25 - b^2 = 8(a - 2023)^2 \Rightarrow 25 - b^2 = 8 \cdot 0 \Rightarrow b^2 = 25 \Rightarrow b = 5$  (do  $b \in \mathbb{N}$ ).

Nếu  $(a - 2023)^2 = 1 \Rightarrow a - 2023 = 1$  hoặc  $a - 2023 = -1$

$\Rightarrow a = 2024$  hoặc  $\Rightarrow a = 2022$ .

Khi đó:  $25 - b^2 = 8(a - 2023)^2 \Rightarrow 25 - b^2 = 8 \cdot 1 \Rightarrow b^2 = 17$  (không thỏa mãn).

Vậy  $a = 2023$  và  $b = 5$  thỏa mãn điều kiện bài toán.

**Câu 26. (HSG 7 huyện Diễn Châu 2022 - 2023)**

Tìm số tự nhiên  $x; y$  biết:  $7(x - 2023)^2 = 23 - y^2$ .

**Lời giải**

Vì  $x; y$  là các số tự nhiên nên  $(x - 2023)^2; y^2$  là các số chính phương nên không âm

do đó  $23 - y^2 \leq 23 \Rightarrow 0 \leq 7(x - 2023)^2 \leq 23$

$$\text{Do đó } \begin{cases} (x - 2023)^2 = 0 \\ (x - 2023)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2023 \\ x = 2024 \end{cases}$$

+ Với  $x = 2023$  thì không có giá trị của  $y$  tự nhiên thỏa mãn.

+ Với  $x = 2024$  thì  $y^2 = 16 \Rightarrow y = 4$ .

Vậy  $(x; y) = (2024; 4)$ .

**Câu 27. (HSG 7 huyện Bình Lục 2022 - 2023; huyện Tam Dương 2017 - 2018)**

Tìm các số nguyên dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $a^3 + 3a^2 + 5 = 5^b$  và  $a + 3 = 5^c$

**Lời giải**

Do  $a \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow 5^b = a^3 + 3a^2 + 5 > a + 3 = 5^c$

Vậy  $5^b > 5^c \Rightarrow b > c \Rightarrow 5^b : 5^c$

Hay  $(a^3 + 3a^2 + 5) : (a + 3) \Leftrightarrow [a^2 \cdot (a + 3) + 5] : (a + 3)$

Mà  $a^2(a + 3) : (a + 3) \Rightarrow 5 : (a + 3) \Rightarrow a + 3 \in U(5)$

Hay  $a+3 \in \{\pm 1; \pm 5\}$ , do  $a \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow a+3 \geq 4$

Từ (1) và (2) suy ra  $a+3=5 \Rightarrow a=2$

Từ đó tính được  $5^b = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 5 = 25 = 5^2 \Rightarrow b=2$

Và  $5^c = a+3 = 2+3 = 5 \Rightarrow c=1$

Vậy  $a=2, b=2, c=1$ .

**Câu 28. (HSG 7 huyện Quốc Oai- 2016 - 2017)**

Tìm các số tự nhiên  $x, y$  thỏa mãn  $2x^2 + 3y^2 = 77$

**Lời giải**

$$2x^2 + 3y^2 = 77 \Rightarrow 3y^2 = 77 - 2x^2 \leq 77 \Rightarrow y^2 \leq \frac{77}{3} \Rightarrow y^2 \leq 25$$

Mà  $2x^2$  chẵn;  $77$  lẻ  $\Rightarrow 3y^2$  lẻ  $\Rightarrow y^2$  lẻ  $\Rightarrow y^2 \in \{1; 9; 25\}$

+ Nếu  $y^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 = 77 - 3 = 74 \Rightarrow x^2 = 37$  (không thỏa mãn)

+ Nếu  $y^2 = 9 \Rightarrow 2x^2 = 77 - 27 = 50 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5; y = 3$  (thỏa mãn)

+ Nếu  $y^2 = 25 \Rightarrow 2x^2 = 77 - 75 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1; y = 5$  (thỏa mãn)

Vậy số tự nhiên  $x, y$  thỏa mãn  $2x^2 + 3y^2 = 77$  là  $(x; y) = (5; 3); (1; 5)$

**Câu 29. (HSG 7 huyện Hoàng Hóa 2016 - 2017)**

Tìm tất cả các số tự nhiên  $a, b$  sao cho:  $2^a + 37 = |b - 45| + b - 45$

**Lời giải**

Nhận xét: với  $x \geq 0$  thì  $|x| + x = 2x$

Với  $x < 0$  thì  $|x| + x = 0$ .

Do đó  $|x| + x$  luôn là số chẵn với  $b \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 2^a + 37$  là số chẵn khi và chỉ khi  $2^a$  lẻ  $\Rightarrow a = 0$

Khi đó  $|b - 45| + b - 45 = 38$

+ Nếu  $b < 45$ , ta có:  $-(b - 45) + b - 45 = 38 \Rightarrow 0 = 38$  (vô lý)

+ Nếu  $b \geq 45$ , ta có:  $2(b - 45) = 38 \Rightarrow b = 64$  (thỏa mãn)

Vậy  $(a, b) = (0; 64)$ .

**Câu 30. (HSG 7 trường Hiền Quan 2015 - 2016)**

Tìm các số nguyên  $x, y$  thỏa mãn  $6x^2 + 5y^2 = 74$

**Lời giải**

$$6x^2 + 5y^2 = 74 \Rightarrow 6x^2 = 74 - 5y^2 \leq 74 \Rightarrow x^2 \leq \frac{37}{3} \Rightarrow x^2 \leq 13$$

Mà  $x \in \mathbb{Z}$  nên  $x^2 \in \{0; 1; 4; 9\}$

+ Nếu  $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ . Khi đó  $5y^2 = 74 \Rightarrow y^2 = \frac{74}{5}$  (không thỏa mãn do  $y \in \mathbb{Z}$ )

+ Nếu  $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$  do  $x \in \mathbb{Z}$ .

Khi đó  $6 + 5y^2 = 74 \Rightarrow y^2 = \frac{68}{5}$  (không thỏa mãn do  $y \in \mathbb{Z}$ )

+ Nếu  $x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$  do  $x \in \mathbb{Z}$ .

Khi đó  $6.4 + 5y^2 = 74 \Rightarrow y^2 = 10$  (không thỏa mãn do  $y \in \mathbb{Z}$ )

+ Nếu  $x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$  do  $x \in \mathbb{Z}$ .

Khi đó  $6.9 + 5y^2 = 74 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -2 \end{cases}$  (do  $y \in \mathbb{Z}$ )

Vậy  $(x, y) \in \{(3; 2), (-3; 2), (3; -2), (-3; -2)\}$ .

**Câu 31. (HSG 7 Tp Thanh Hóa 2022 - 2023)**

Tìm các cặp số nguyên dương  $(x, y)$  thỏa mãn:  $(x + y)^2 = 4x + 5$

**Lời giải**

Do  $x, y \in \mathbb{N}^*$ , ta có  $x \geq 1; y \geq 1 \Rightarrow 4x + 5 = (x + y)^2 \geq (1 + x)^2$

Điều này chỉ xảy ra khi  $x \leq 5$ .

Thật vậy nếu  $x \geq 6$ , ta có:  $(x + 1)^2 \geq (6 + 1)(x + 1) = 7x + 7 > 4x + 5$  (mâu thuẫn).

Khi đó ta có:  $1 \leq x \leq 5$

+) Với  $x = 1 \Rightarrow 4x + 5 = 9 \Rightarrow (1 + y)^2 = 9 \Rightarrow 1 + y = 3 \Rightarrow y = 2$  (thỏa mãn)

+) Với  $x = 2 \Rightarrow 4x + 5 = 13 \Rightarrow (2 + y)^2 = 13$  (không là số chính phương  $\Rightarrow$  Loại)

+) Với  $x = 3 \Rightarrow 4x + 5 = 17 \Rightarrow (3 + y)^2 = 17$  (Loại)

+) Với  $x = 4 \Rightarrow 4x + 5 = 21 \Rightarrow (4 + y)^2 = 21$  (Loại)

+) Với  $x = 5 \Rightarrow 4x + 5 = 25 \Rightarrow (5 + y)^2 = 25 \Rightarrow 5 + y = 5 \Rightarrow y = 0$  (Loại)

Vậy cặp số nguyên dương  $x; y$  cần tìm là:  $(x; y) = (1; 2)$

**Câu 32. (HSG 7 huyện Mộ Cày, 2017 - 2018)**

Tìm số tự nhiên  $x$  thỏa mãn  $3^x + 4^x = 5^x$

**Lời giải**

Với  $x = 0, x = 1$  thay vào không thỏa mãn

+)  $x = 2$  thay vào ta được  $3^2 + 4^2 = 5^2$  (luôn đúng), vậy  $x = 2$  thỏa mãn

+)  $x > 2$ , ta có:  $3^x + 4^x = 5^x \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$

Với  $x > 2$  ta có:  $\left(\frac{3}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2; \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{4}{5}\right)^2$

$\Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow x > 2$  (không thỏa mãn)

Vậy  $x = 2$ .



**CD2: TÌM ẨN CHƯA BIẾT**

Dạng 1: Tìm x thông thường
Dạng 2: Đưa về dạng tích bằng 0
Dạng 3: Sử dụng tính chất lũy thừa
Dạng 4: Tìm ẩn dạng phân thức
Dạng 5: Tìm x dạng chứa dấu giá trị tuyệt đối
Dạng 6: Sử dụng công thức tính tổng có quy luật
Dạng 7: Tổng các biểu thức không âm bằng 0
Dạng 8: Tìm ẩn dựa vào tính chất về dấu
Dạng 9: Sử dụng phương pháp chặn để tìm ẩn
Dạng 10: Tìm ẩn với điều kiện nguyên

**Dạng 10. Tìm ẩn với điều kiện nguyên**

**A. Trắc nghiệm**

**Câu 1. (HSG 7 huyện Lạng Giang, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)**

Tích của các số nguyên  $x$  (với  $x \neq 1$ ) sao cho  $\frac{4}{x-1}$  có giá trị nguyên:

- A. 6                                      B. 0                                      C. 15                                      D. -9

Lời giải

**Chọn B**

$\frac{4}{x-1}$  có giá trị nguyên (với  $x \neq 1$ )

$$\Rightarrow 4 : x - 1 \Rightarrow x - 1 \in U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\} \Rightarrow x \in \{2; 0; 3; -1; 5; -3\} .$$

Tích của các số nguyên  $x$  là:  $2 \cdot 0 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 5 \cdot (-3) = 0$ .

**Câu 2. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)**

Có bao nhiêu cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn:  $x + y + xy = 2$

- A. 2.                                      B. 3.                                      C. 4.                                      D. 5.

Lời giải

**Chọn C**

Ta có:  $x + y + xy = 2$

$$\Rightarrow x + y + xy + 1 = 2 + 1$$

$$\Rightarrow (x + 1) + (xy + y) = 3$$

$$\Rightarrow (x + 1) + y(x + 1) = 3$$

$$\Rightarrow (x + 1)(y + 1) = 3$$

$$\text{Lại có: } 3 = 1 \cdot 3 = 3 \cdot 1 = (-1) \cdot (-3) = (-3) \cdot (-1)$$

Nên ta có bảng:

$x+1$	1	3	-1	-3
$y+1$	3	1	-3	-1
$x$	0	2	-2	-4
$y$	2	0	-4	-2

Vậy có 4 cặp số nguyên  $(x; y)$  là:  $(0; 2); (2; 0); (-2; -4); (-4; -2)$ .

**Câu 3. (HSG 7 huyện Thanh Thủy 2021 - 2022)**

Với  $x$  nguyên, giá trị lớn nhất của biểu thức  $A = \frac{2022-x}{2-x}$  là

- A.** 2021                      **B.** 2020                      **C.** 2019                      **D.** 2018

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có:  $A = \frac{2022-x}{2-x} = \frac{2-x+2020}{2-x} = 1 + \frac{2020}{2-x}$

$A$  lớn nhất khi  $\frac{2020}{2-x}$  lớn nhất

Vì  $2020 > 0$  và không đổi nên

$\frac{2020}{2-x}$  đạt giá trị lớn nhất khi:  $2-x > 0$  và đạt giá trị nhỏ nhất.

Mà  $2-x \neq 0$  nên  $2-x = 1 \Rightarrow x = 1$

Khi đó:  $A = 1 + \frac{2020}{1} = 2021$

Vậy  $A$  đạt giá trị lớn nhất là 2021 khi  $x = 1$ .

**B. Tự luận**

**Câu 1. (HSG 7 huyện Tương Dương, tỉnh Nghệ An 2022 - 2023)**

Tìm các bộ số nguyên dương  $(x; y; z)$  của biểu thức:  $x + y + z = xyz$ .

**Lời giải**

Vì  $x, y, z$  nguyên dương nên giả sử  $1 \leq x \leq y \leq z$ .

Theo bài ra:  $x + y + z = xyz$ . Chia cả hai vế cho  $xyz$  ta được:

$$1 = \frac{1}{zy} + \frac{1}{yx} + \frac{1}{xz} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2}.$$

Suy ra  $x^2 \leq 3$

Do đó  $x = 1$ .

Thay vào  $x + y + z = xyz$  ta có:

$$1 + y + z = yz$$

$$yz - y - z - 1 = 0$$

$$y(z-1) - (z-1) - 2 = 0$$

$$(z-1)(y-1) = 2$$

Vì  $x, y, z$  nguyên dương nên  $(z-1)$  và  $(y-1)$  là các số nguyên.

Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1:  $z - 1 = 1$ ;  $y - 1 = 2$ . Suy ra  $z = 2$ ;  $y = 3$ .

Trường hợp 2:  $z - 1 = 2$ ;  $y - 1 = 1$ . Suy ra  $z = 3$ ;  $y = 2$ .

Vậy có hai bộ số nguyên dương  $(x; y; z)$  thỏa mãn là  $(1; 2; 3)$ ,  $(1; 3; 2)$ .

**Câu 2. (HSG 7 huyện Thanh Trì, Hà Nội 2022 - 2023)**

Tìm số nguyên tố  $x; y$  thỏa mãn:  $x^2 - 2y^2 = 1$

**Lời giải**

Xét  $x^2 - 2y^2 = 1$  suy ra  $x^2 = 2y^2 + 1$

+ Nếu  $x$  chia hết cho 3 mà  $x$  là số nguyên tố nên  $x = 3$

Thay vào tính được  $y = 2$  là số nguyên tố (Chọn)

+ Nếu  $x$  không chia hết cho 3

Chứng minh được  $(x^2 - 1) : 3$

Suy ra  $2y^2$  chia hết cho 3 mà  $(2, 3) = 1$  nên  $y^2$  chia hết cho 3 mà 3 là số nguyên tố nên  $y$  chia hết cho 3

Mà  $y$  là số nguyên tố nên  $y = 3$

Thay vào tính được  $x^2 = 19$  (loại)

Vậy có duy nhất cặp số  $(x, y) = (2, 3)$  thỏa mãn bài toán.

**Câu 3. (HSG 7 huyện Thanh Trì, Hà Nội 2022 - 2023)**

Tìm số nguyên  $x$  thỏa mãn:  $2(2 - x^2)(12 - x^2)(22 - x^2)(32 - x^2) + 12558 = 0$ .

**Lời giải**

$$2(2 - x^2)(12 - x^2)(22 - x^2)(32 - x^2) + 12558 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 - x^2)(12 - x^2)(22 - x^2)(32 - x^2) = -6279$$

$$\text{Đặt } A = VT = (2 - x^2)(12 - x^2)(22 - x^2)(32 - x^2).$$

Ta có:  $VP = -6279 < 0$

Mà vế trái là tích của 4 thừa số, nên trong đó có 1 hoặc 3 thừa số âm.

$$\text{Lại có: } 2 - x^2 < 12 - x^2 < 22 - x^2 < 32 - x^2$$

Ta có 2 trường hợp:

+TH1: Có 3 thừa số âm

$$\text{Do đó } 22 - x^2 < 0 < 32 - x^2 \Rightarrow 22 < x^2 < 32$$

Mà  $x \in \mathbb{Z}$  nên  $x^2$  là số chính phương

$$\Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$$

Thay vào biểu thức  $A$  ta được  $A = -6279 = VP$  (thỏa mãn)

+TH2: Có 1 thừa số âm

$$\text{Do đó } 2 - x^2 < 0 < 12 - x^2 \Rightarrow 2 < x^2 < 12$$

Mà  $x \in \mathbb{Z}$  nên  $x^2$  là số chính phương

$$\Rightarrow x^2 \in \{4; 9\}$$

$$\text{Với } x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow A = -8064 \neq VP \text{ (loại)}$$

$$\text{Với } x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow A = -6279 = VP \text{ (thoả mãn)}$$

$$\text{Vậy } x \in \{\pm 3; \pm 5\}.$$

**Câu 4. (HSG 7 huyện Ninh Giang, tỉnh Hải Dương 2022 - 2023)**

Tim tất cả các cặp số nguyên  $x, y$  sao cho  $xy - 2x + y + 1 = 0$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } xy - 2x + y + 1 = 0$$

$$x(y - 2) + (y - 2) = -3$$

$$(y - 2)(x + 1) = -3$$

$$\Rightarrow y - 2, x + 1 \in U(3) = \{-3; -1; 1; 3\}.$$

Ta có bảng

$x + 1$	$-3$	$-1$	$1$	$3$
$y - 2$	$1$	$3$	$-3$	$-1$
$x$	$-4$	$-2$	$0$	$2$
$y$	$3$	$5$	$-1$	$1$

Vậy các cặp số nguyên thỏa mãn  $(x; y) \in \{(-4; 3); (-2; 5); (0; -1); (2; 1)\}$ .

**Câu 5. (HSG 7 huyện Kinh Môn, tỉnh Hải Dương 2022 - 2023)**

Tim  $x, y$  nguyên biết:  $2xy - x - y = 2$

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } 2xy - x - y = 2$$

$$x(2y - 1) = 2 + y$$

$$x = \frac{2 + y}{2y - 1} \text{ (vì } y \text{ nguyên nên } 2y - 1 \neq 0)$$

$$2x = \frac{2y + 4}{2y - 1} = 1 + \frac{5}{2y - 1}$$

$$2x = 1 + \frac{5}{2y - 1}$$

Vì  $x$  nguyên thì  $2x$  nguyên

$$\text{Khi đó } 2y - 1 \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$$

Ta có bảng các trường hợp xảy ra:

$2y - 1$	$-1$	$1$	$-5$	$5$
$2y$	$0$	$2$	$-4$	$6$
$y$	$0$	$1$	$-2$	$3$
$x$	$-2$	$3$	$0$	$1$
	thoả mãn	thoả mãn	thoả mãn	thoả mãn

Vậy các cặp số  $(x; y)$  thỏa mãn đề bài là:  $(-2; 0); (1; 3); (0; -2); (3; 1)$ .

**Câu 6. (HSG 7 huyện Chương Mỹ, Hà Nội 2022 - 2023)**

Tìm  $x, y$  biết  $4x - xy + y = 7$  với  $x, y$  là các số nguyên.

**Lời giải**

Ta có:  $4x - xy + y = 7$

$$x(4 - y) + y - 4 = 3$$

$$(x - 1)(4 - y) = 3$$

Lập bảng

$x - 1$	1	3	-1	-3
$4 - y$	3	1	-3	-1
$x$	2	4	0	-2
$y$	1	3	7	5

Vậy các cặp  $(x; y)$  thỏa mãn là  $(2; 1), (4; 3), (0; 7), (-2; 5)$ .

**Câu 7. (HSG 7 huyện Thanh Sơn, tỉnh Phú Thọ 2022 - 2023)**

Tìm các cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn  $4x - 5y - 6xy + 7 = 0$ .

**Lời giải**

Ta có  $4x - 5y - 6xy + 7 = 0$

$$12x - 15y - 18xy + 21 = 0$$

$$(12x - 18xy) + (10 - 15y) + 11 = 0$$

$$6x(2 - 3y) + 5(2 - 3y) = -11$$

$$(6x + 5)(2 - 3y) = -11$$

Vì  $x; y \in \mathbb{Z}$  nên  $6x + 5; 2 - 3y \in \mathbb{Z} \Rightarrow 6x + 5; 2 - 3y$  là ước của  $-11$

Lập bảng

$6x + 5$	1	-11	11	-1
$2 - 3y$	-11	1	-1	11
$x$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{8}{3}$	1	-1
$y$	$\frac{13}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	-3
	loại	loại	thỏa mãn	thỏa mãn

Vậy các cặp  $(x; y)$  thỏa mãn là:  $(-1; -3), (1; 1)$ .

**Câu 8. (HSG 7 huyện Lang Chánh, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)**

Tìm các cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn:  $x^2 + xy - 3y - 5x + 3 = 0$ .

**Lời giải**

Ta có:  $x^2 + xy - 3y - 5x + 3 = 0$

Suy ra:  $x^2 + xy - 2x - 3y - 3x + 6 = 3$

$\Rightarrow x(x + y - 2) - 3(x + y - 2) = 3$

$\Rightarrow (x - 3)(x + y - 2) = 3$

Do  $x, y$  là số nguyên nên ta có:

$(x - 3)(x + y - 2) = 3 = 1.3 = 3.1 = (-1)(-3) = (-3)(-1)$

$\Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 1 \\ x + y - 2 = 3 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} x - 3 = 3 \\ x + y - 2 = 1 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} x - 3 = -1 \\ x + y - 2 = -3 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} x - 3 = -3 \\ x + y - 2 = -1 \end{cases}$

Vậy các cặp  $(x; y)$  là  $(4; 1), (6; -3), (2; -3), (0; 1)$ .

**Câu 9. (HSG 7 thị xã Bỉm Sơn 2022 - 2023)**

Tìm  $(x; y) \in \mathbb{Z}$  sao cho  $2y^2 - xy + x - 2y + 5 = 0$ .

**Lời giải**

Ta có  $2y^2 - xy + x - 2y + 5 = 0$  suy ra  $x(y - 1) = 2y^2 - 2y + 5$  (1)

Ta thấy  $y = 1$  không thỏa mãn (1)

Do đó  $y \neq 1$ .

Khi đó (1) trở thành

$$x = \frac{2y^2 - 2y + 5}{y - 1}$$

$$x = 2y + \frac{5}{y - 1}$$

Vì  $x, y$  là các số nguyên dương nên  $y - 1$  là ước của 5.

TH1.  $y - 1 = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 9$

TH2.  $y - 1 = -1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = -5$

TH3.  $y - 1 = 5 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow x = 13$

TH4.  $y - 1 = -5 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow x = -9$

Vậy  $(x; y) \in \{(9; 2); (-5; 0); (13; 6); (-9; -4)\}$ .

**Câu 10. (HSG 7 huyện Quế Võ, tỉnh Bắc Ninh 2022 - 2023)**

Tìm các số nguyên  $x, y$  thỏa mãn  $x^2 - xy = 6x - 5y - 8$ .

**Lời giải**

Ta có  $x^2 - xy = 6x - 5y - 8 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = y(x - 5)$  (1)

Khi  $x = 5$  thì ta có  $5^2 - 6.5 + 8 = 0$  (vô lí)

Do đó  $x = 5$  không thỏa mãn (1)

Khi  $x \neq 5$  thì  $y = \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 5}$

$$y = \frac{x^2 - 5x - x + 5 + 3}{x - 5}$$

$$y = \frac{(x-1)(x-5)+3}{x-5}$$

$$y = x-1 + \frac{3}{x-5}$$

Vì  $x, y$  nguyên nên  $x-5$  là ước của 3 hay  $x-5 \in \{\pm 1; \pm 3\} \Rightarrow x \in \{2; 4; 6; 8\}$ .

+ Khi  $x = 2$  thì  $y = 0$

+ Khi  $x = 4$  thì  $y = 0$

+ Khi  $x = 6$  thì  $y = 8$

+ Khi  $x = 8$  thì  $y = 8$

Vậy các cặp số  $(x; y)$  cần tìm là:  $(2; 0); (4; 0); (6; 8); (8; 8)$ .

**Câu 11. (HSG 7 huyện Nghi Xuân, tỉnh Hà Tĩnh 2022 - 2023)**

Tìm số nguyên  $x, y$  thỏa mãn:  $x + 3xy + y = -5$ .

**Lời giải**

Ta có  $x + 3xy + y = -5$

$$3x + 9xy + 3y = -15$$

$$3x(1+3y) + (1+3y) = -14$$

$$(3x+1)(1+3y) = -14$$

Ta lập bảng

$3x+1$	1	-14	-1	14	2	-7	-2	7
$3y+1$	-14	1	14	-1	-7	2	7	-2
$x$	0	-5	$-\frac{2}{3}$	$\frac{13}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{8}{3}$	-1	2
$y$	-5	0	$\frac{13}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$\frac{1}{3}$	2	-1

$x, y$  là số nguyên nên:  $(x; y) \in \{(0; -5); (-5; 0); (-1; 2); (2; -1)\}$ .

Vậy các cặp số  $(x; y)$  cần tìm là:  $(x; y) \in \{(0; -5); (-5; 0); (-1; 2); (2; -1)\}$ .

**Câu 12. (HSG 7 huyện Hiệp Hoà, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)**

Tìm các số nguyên dương  $a, b$  để  $\frac{a^2-2}{ab+2}$  có giá trị nguyên.

**Lời giải**

Để  $\frac{a^2-2}{ab+2}$  là số nguyên thì  $(a^2-2):(ab+2)$

$$\Rightarrow b(a^2-2) = a(ab+2) - 2(a+b):(ab+2)$$

$$\Rightarrow 2(a+b):(ab+2)$$

Do đó  $2(a+b) = k(ab+2)$  với  $k \in \mathbb{N}^*$

Nếu  $k \geq 2$  thì  $a+b \geq ab+1 \Rightarrow (a-1)(b-1)+1 \geq 0$  (vô lí với  $a, b \in \mathbb{N}^*$ )

Nếu  $k = 1$ . Từ đó  $(a-2)(b-2) = 2$

Vì  $a, b$  là các số tự nhiên, suy ra  $a-2; b-2$  là các số nguyên

Nên ta có bảng sau

$a-2$	-1	-2	1	2
$b-2$	-2	-1	2	1
$a$	1	0	3	4
$b$	0	1	4	3
	Loại		Loại	

Vậy ta được các cặp  $(a;b)$  cần tìm là:  $(1;0); (4;3)$ .

**Câu 13. (HSG 7 huyện Mường Lát, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)**

Tìm các số nguyên dương  $x, y$  sao cho :  $xy + 2x - y = 5$ .

**Lời giải**

$$xy + 2x - y = 5$$

$$x(y+2) - (y+2) = 5-2$$

$$(x-1)(y+2) = 3 \quad (1)$$

Vì  $x, y$  nguyên nên  $x-1$  và  $y+2$  nguyên.

$$\text{Do đó } y+2 \in U(3) \Rightarrow y+2 \in \{1; -1; 3; -3\}$$

Mà  $y$  nguyên dương nên  $y+2 \geq 3$

$$\text{Nên } y+2 = 3 \Rightarrow y = 1 \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) tìm được  $x = 2$ .

$$\text{Vậy } (x;y) = (2;1).$$

**Câu 14. (HSG 7 huyện Đồng Xuân, tỉnh Phú Yên 2022 - 2023)**

Tìm các cặp số nguyên  $(x;y)$  biết:  $\frac{x}{7} + 1 = \frac{1}{y-1}$ .

**Lời giải**

Ta có:

$$\frac{x}{7} + 1 = \frac{1}{y-1}$$

$$\frac{x+7}{7} = \frac{1}{y-1}$$

$$(x+7)(y-1) = 7$$

$$\text{Vì } 7 = 7.1 = 1.7 = (-7).(-1) = (-1).(-7)$$

Thay hết tất cả các trường hợp ta có:

$$(x;y) \in \{(0;2); (-6;8); (-14;0); (-8;-6)\}.$$

Vậy các cặp số  $(x;y)$  cần tìm là:  $(x;y) \in \{(0;2); (-6;8); (-14;0); (-8;-6)\}.$

**Câu 15. (HSG 7 huyện Gia Viễn, tỉnh Ninh Bình 2022 - 2023)**



Tìm số nguyên  $x, y$  biết  $2xy - x + y = 6$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} 2xy - x + y &= 6 \\ \Rightarrow 4xy - 2x + 2y &= 12 \\ \Rightarrow 2x(2y - 1) + (2y - 1) &= 12 - 1 \\ \Rightarrow (2x + 1)(2y - 1) &= 11 \end{aligned}$$

Do đó  $2x + 1 \in U(11)$

$$\Rightarrow 2x + 1 \in \{\pm 1; \pm 11\}$$

Ta có bảng giá trị

$2x + 1$	$-11$	$-1$	$1$	$11$
$2y - 1$	$-1$	$-11$	$11$	$1$
$x$	$-6$	$-1$	$0$	$5$
$y$	$0$	$-5$	$6$	$1$

Vậy có 4 cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn là:  $(0; 6); (-1; -5); (5; 1); (-6; 0)$ .

**Câu 16. (HSG 7 thành phố Bắc Ninh 2022 - 2023)**

Tìm cặp số nguyên  $(x; y)$  biết  $x + y = xy$ .

**Lời giải**

Ta có  $x + y = xy \Rightarrow xy - x - y = 0$  nên  $(x - 1)(y - 1) = 1$ , khi đó  $x - 1$  và  $y - 1$  là ước của 1. Ta có bảng giá trị sau:

$x - 1$	$1$	$-1$
$y - 1$	$1$	$-1$
$x$	$2$	$0$
$y$	$2$	$0$

Vậy các cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn bài toán là  $(2; 2), (0; 0)$ .

**Câu 17. (HSG 7 huyện Quảng Xương, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)**

Tìm  $x; y$  nguyên thỏa mãn:  $x^2 - xy + y + 2 = 0$ .

**Lời giải**

Ta có :  $x^2 - xy + y + 2 = 0$

Suy ra  $y(x - 1) = x^2 + 2$  (1)

Xét  $x = 1$ , thay vào (1) ta được:  $0 = 3$  (vô lí)

Do đó  $x = 1$  không thỏa mãn (1).

Xét  $x \neq 1$ , ta có:

$$y = \frac{x^2 + 2}{x - 1}$$

$$y = x + 1 + \frac{3}{x-1}$$

Để  $y$  nguyên thì  $x-1 \in U(3)$ .

Do  $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-1 \in \mathbb{Z}$  nên  $x-1 \in U(3)$

Vì  $U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$  nên ta có bảng sau

$x-1$	-3	-1	1	3
$x$	-2	0	2	4
$y = \frac{x^2+2}{x-1}$	-2	-2	6	6
Kết luận	Thoả mãn	Thoả mãn	Thoả mãn	Thoả mãn

Vậy  $(x; y) \in \{(-2; -2); (0; -2); (2; 6); (4; 6)\}$ .

**Câu 18. (HSG 7 thị xã Hoàng Mai 2022 - 2023)**

Tìm  $x, y$  nguyên biết:  $xy - 3x + 2y = -7$ .

**Lời giải**

Ta có  $xy - 3x + 2y = -7$

suy ra  $x(y-3) + 2(y-3) = -13$

hay  $(y-3)(x+2) = -13$ .

Vì  $x, y$  là các số nguyên nên  $y-3; x+2$  cũng là các số nguyên.

Do đó ta có bảng giá trị sau

$x+2$	-1	1	-13	13
$y-3$	13	-13	1	-1
$x$	-3	-1	-15	11
$y$	16	-10	4	2
Kết luận	Nhận	Nhận	Nhận	Nhận

Vậy các cặp số  $(x; y)$  thoả mãn yêu cầu bài toán là

$(x; y) \in \{(-3; 16); (-1; -10); (-15; 4); (11; 2)\}$ .

**Câu 19. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)**

Tìm các số nguyên  $x, y$  biết:  $x + y - 2xy = 4$ .

**Lời giải**

Ta có:  $x + y - 2xy = 4$

suy ra  $x - 2xy + y - 4 = 0$

$2x - 4xy + 2y - 8 = 0$

$2x - 4xy + 2y - 1 = 7$

$2x(1-2y) - (1-2y) = 7$

$(2x-1)(1-2y) = 7$ .

Lập bảng

$2x-1$	1	7	-1	-7
$1-2y$	7	1	-7	-1
$x$	1	4	0	-3
$y$	-3	0	4	1
	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Vậy  $(x; y)$  cần tìm là  $(1; -3); (4; 0); (0; 4); (-3; 1)$ .

**Câu 20. (HSG 7 huyện Thạch Thành 2022 - 2023)**

Tìm số tự nhiên  $\overline{ab}$  sao cho  $\overline{ab}^2 = (a+b)^3$ .

**Lời giải**

Do  $\overline{ab}^2 = (a+b)^3$  nên suy ra  $(a+b)^3$  là số chính phương  $\Rightarrow (a+b)$  cũng là số chính phương

$(a+b) = k^2$  (với  $k \in \mathbb{N}$ ) nên  $\overline{ab}^2 = k^6 \Rightarrow \overline{ab} = k^3$  mà  $10 \leq \overline{ab} \leq 99 \Rightarrow 10 \leq k^3 \leq 99$

Từ đó suy ra  $k \in \{3; 4\} \Rightarrow \overline{ab} \in \{27; 64\}$ .

Thử lại:

+  $\overline{ab} = 27$  nên  $a = 2, b = 7$  thỏa mãn  $\overline{ab}^2 = (a+b)^3$ .

+  $\overline{ab} = 64$  nên  $a = 6, b = 4$  không thỏa mãn  $\overline{ab}^2 = (a+b)^3$ .

Vậy  $\overline{ab} = 27$ .

**Câu 21. (HSG 7 huyện Lục Ngạn 2022 - 2023)**

Tìm các số nguyên  $x; y$  thỏa mãn  $2xy - y = 2x + 2$ .

**Lời giải**

Ta có:

$$2xy - y = 2x + 2 \Rightarrow 2xy - y - 2x - 2 = 0 \Rightarrow 2xy - 2x - y + 1 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 2x(y-1) - (y-1) - 3 = 0 \Rightarrow (y-1)(2x-1) = 3$$

Do  $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow (y-1); (2x-1)$  là các ước nguyên của 3

Ta có bảng sau

$(2x-1)$	-3	-1	1	3
$(y-1)$	-1	-3	3	1
$x$	-1	0	1	2
$y$	0	-2	4	2
	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Vậy các cặp  $(x; y)$  thỏa mãn là  $(-1; 0); (0; -2); (1; 4); (2; 2)$ .

**Câu 22. (HSG 7 huyện Anh Sơn 2022 - 2023)**

Tìm các số nguyên  $x; y$  biết  $2xy - 6x - y = 21$ .

**Lời giải**

Tìm  $x, y \in \mathbb{Z}$  biết  $2xy - 6x - y = 21$

Ta có :

$$2xy - 6x - y = 21$$

$$(2xy - 6x) - (y - 3) = 24$$

$$2x(y - 3) - (y - 3) = 24$$

$$(y - 3)(2x - 1) = 24$$

Mà  $x, y \in \mathbb{Z}$

Nên

$y - 3$	24	8	-24	-8
$y$	27	11	-21	-5
$(2x - 1)$	1	3	-1	-3
$x$	1	2	0	-1

Vậy các cặp  $(x; y)$  thỏa mãn là  $(-1; -5); (0; -21); (1; 27); (2; 11)$ .

**Câu 23. (HSG 7 huyện Đô Lương 2022 - 2023)**

Tìm tất cả các cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn  $x^2 - 3xy + 2 = y$ .

**Lời giải**

**Cách 1:** Ta có:  $x^2 - 3xy + 2 = y \Rightarrow x^2 + 2 = y(3x + 1) \Rightarrow y = \frac{x^2 + 2}{3x + 1}$

$$9y = \frac{9x^2 + 18}{3x + 1} = \frac{9x^2 - 1 + 19}{3x + 1} = 3x - 1 + \frac{19}{3x + 1}$$

Mà  $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{19}{3x + 1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow (3x + 1)$  là ước của 19

Hay  $3x + 1 = 19$  hoặc  $3x + 1 = -19$  hoặc  $3x + 1 = 1$  hoặc  $3x + 1 = -1$ .

Suy ra  $x = 6$  (nhận) hoặc  $x = -\frac{20}{3}$  (loại) hoặc  $x = 0$  (nhận) hoặc  $x = -\frac{2}{3}$  (loại).

Với  $x = 6 \Rightarrow y = 2$ .

Với  $x = 0 \Rightarrow y = 2$ .

Vậy có 2 cặp số  $(x; y)$  thỏa là  $(0; 2)$  và  $(6; 2)$ .

**Cách 2.** Ta có  $x^2 - 3xy + 2 = y \Rightarrow 9x(x - 3y) + 3(x - 3y) - 3x + 18 = 0$

$$\Rightarrow 9x^2 - 27xy - 9y + 18 = 0$$

$$\Rightarrow 3(3x + 1)(x - 3y) - (3x + 1) + 19 = 0$$

$$\Rightarrow (3x + 1)(3x - 9y - 1) = -19$$

Do  $x; y$  nguyên nên  $3x + 1$  và  $3x - 9y - 1$  là ước của 19.

Mà  $3x + 1$  là số chia 3 dư 1 nên  $3x + 1$  chỉ nhận 1 hoặc 19

Giải ra ta được  $(x; y) = (0; 2); (6; 2)$

**Câu 24. (HSG 7 huyện Nghi Sơn 2022 - 2023)**

Tìm tất cả các cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn:  $3x - y + xy - 10 = 0$ .

**Lời giải**

Ta có:  $3x - y + xy - 10 = 0$

$$\Rightarrow xy + 3x - y - 10 = 0$$

$$\Rightarrow x(y+3) - y - 3 - 7 = 0$$

$$\Rightarrow x(y+3) - (y+3) = 7 \quad (1)$$

Vì  $x; y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-1 \in \mathbb{Z}; y+3 \in \mathbb{Z}$  nên từ (1)  $\Rightarrow 7 : x-1 \Rightarrow x-1 \in \{\pm 1; \pm 7\}$

Ta có bảng giá trị sau:

$x-1$	1	-1	7	-7
$y+3$	7	-7	1	-1
$x$	2	0	8	-6
$y$	4	-10	-2	-4

Vậy  $(x; y) \in \{(2; 4), (0; -10), (8; -2), (-6; -4)\}$

**Câu 25. (HSG 7 huyện Hà Trung 2022 - 2023)**

Tìm giá trị nguyên dương của  $x; y$  sao cho:  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5x + 5y = xy \quad (x > 0; y > 0)$

$$\Rightarrow xy - 5x - 5y = 0$$

$$\Rightarrow x(y-5) - 5(y-5) = 25$$

$$\Rightarrow (x-5)(y-5) = 25$$

Vì  $x, y$  nguyên dương nên  $x-5, y-5$  là các ước của 25.

Ta có:  $U(25) = \{\pm 1; \pm 5; \pm 25\}$

Ta có bảng giá trị:

$x-5$	1	-1	5	-5	25	-25
$y-5$	25	-25	5	-5	1	-1
$x$	6	4	10	0	30	-20
$y$	30	-20	10	0	6	4

Vì  $x, y$  nguyên dương nên ta có:  $(x, y) \in \{(6; 30); (10; 10); (30; 6)\}$ .

**Câu 26. (HSG 7 huyện Lập Thạch, Vĩnh Phúc 2022 - 2023)**

Tìm các số nguyên  $x$  và  $y$  biết:  $\frac{5}{x} + \frac{y}{4} = \frac{1}{8}$ .

**Lời giải**

Ta có  $\frac{5}{x} + \frac{y}{4} = \frac{1}{8}$

$$\frac{40}{8x} + \frac{2xy}{8x} = \frac{x}{8x}$$

$$40 + 2xy = x$$

$$40 = x(1 - 2y)$$

Suy ra  $x$  và  $1 - 2y$  là ước của 40 ta có

$$40 = 1.40 = (-1).(-40) = 2.20 = (-2).(-20) = 5.8 = (-5).(-8)$$

mà  $1 - 2y$  là số lẻ nên ta có các trường hợp sau

$$\text{TH1: } \begin{cases} 1 - 2y = 1 \\ x = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 40 \end{cases}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} 1 - 2y = -1 \\ x = -40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -40 \end{cases}$$

$$\text{TH3: } \begin{cases} 1 - 2y = 5 \\ x = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = 8 \end{cases}$$

$$\text{TH4: } \begin{cases} 1 - 2y = -5 \\ x = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = -8 \end{cases}$$

Vậy  $(x; y) = \{(40; 0), (-40; 1); (8; -2), (-8; 3)\}$ .

**Câu 27. (HSG 7 huyện Thạch Thành 2022 - 2023)**

Cho các số nguyên  $x; y$  thỏa mãn  $|x-1| + y^2 = 1$  và  $|y| < |x|$ . Tính giá trị biểu thức

$$M = (x + y - 1)^{2023}.$$

**Lời giải**

Do  $x, y \in \mathbb{Z}; |x-1| \geq 0; y^2 \geq 0$  và  $|x-1| + y^2 = 1$  nên ta có các trường hợp sau:

$$\text{TH1: } \begin{cases} |x-1| = 0 \\ y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \pm 1 \end{cases} \quad (\text{Loại vì không thỏa mãn điều kiện } |y| < |x|)$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} |x-1| = 1 \\ y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \quad (\forall |y| < |x|)$$

Thay  $x = 2; y = 0$  vào biểu thức  $M = (2 + 0 - 1)^{2023} = 1^{2023} = 1$ .

**Câu 28. (HSG 7 huyện Yên Phong 2022 - 2023)**

Tìm tất cả các giá trị  $x; y$  nguyên thỏa mãn:  $5x^2 - 2xy + y^2 = 17$ .

**Lời giải**

Ta có:  $4 \equiv -1 \pmod{5} \Rightarrow 4^{2(n+1)} \equiv (-1)^{2(n+1)} \pmod{5}$

$$\Rightarrow 4^{2(n+1)} \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 4^{2(n+1)} - 1 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow (4^{2(n+1)} - 1) : 5 \quad (1)$$

Lại có:  $4 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 4^{2(n+1)} \equiv (1)^{2(n+1)} \pmod{3} \Rightarrow 4^{2(n+1)} - 1 \equiv 0 \pmod{3}$   
 $\Rightarrow (4^{2(n+1)} - 1) : 3 \quad (2)$

Mà: 3 và 5 là hai số nguyên tố cùng nhau  $(3)$

Từ (1), (2) và (3) suy ra  $(4^{2n+2} - 1) : 15$

Ta có:  $5x^2 - 2xy + y^2 = 17 \Rightarrow (x - y)^2 + 4x^2 = 17 \Rightarrow (x - y)^2 = 17 - 4x^2 \quad (*)$

Ta có:  $(x - y)^2 \geq 0 \quad \forall x, y \Rightarrow 17 - 4x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq \frac{17}{4}$

Mà  $x$  là số nguyên nên  $x^2 \in \{0; 1; 4\}$

+ Với  $x^2 = 0 \Rightarrow (x - y)^2 = 17$  (loại)

+ Với  $x^2 = 1 \Rightarrow (x - y)^2 = 13$  (loại)

+ ) Với  $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$ . Khi đó  $x^2 = 4 \Rightarrow (x - y)^2 = 1$

Với  $x = 2 \Rightarrow (2 - y)^2 = 1 \Rightarrow 2 - y = 1$  hoặc  $2 - y = -1$

+ )  $2 - y = 1 \Rightarrow y = 1$

+ )  $2 - y = -1 \Rightarrow y = 3$

Với  $x = -2 \Rightarrow (-2 - y)^2 = 1 \Rightarrow (2 + y)^2 = 1 \Rightarrow 2 + y = 1$  hoặc  $2 + y = -1$

+ )  $2 + y = 1 \Rightarrow y = -1$

+ )  $2 + y = -1 \Rightarrow y = -3$

Vậy:  $(x; y) \in \{(2; 1); (2; 3); (-2; -1); (-2; -3)\}$ .

**Câu 29. (HSG 7 thành phố Ninh Bình 2022 - 2023)**

Tìm số tự nhiên  $n$  và chữ số  $a$  biết rằng:  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \overline{aaa}$ .

**Lời giải**

$1 + 2 + 3 + \dots + n = \overline{aaa}$

$\Rightarrow n(n + 1) : 2 = 111.a$

$\Rightarrow n(n + 1) = 37.2.3.a \quad (1)$

Ta có vế trái (1) là tích hai số tự nhiên liên tiếp nên  $2.3.a = 36$  suy ra được  $a = 6$  và  $n = 36$

**Câu 30. (HSG 7 huyện Hoàng Hóa, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)**

Tìm  $x; y$  nguyên biết  $xy + 3x - y - 10 = 0$

**Lời giải**

Ta có:  $3x - y + xy - 10 = 0 \Rightarrow 3x + (xy - y) = 10$

$\Rightarrow 3x + y(x - 1) = 10 \Rightarrow (3x - 3) + y(x - 1) = 10 - 3$

$\Rightarrow 3(x - 1) + y(x - 1) = 7 \Rightarrow (x - 1)(y + 3) = 7$

Vì  $x; y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - 1; y + 3 \in \mathbb{Z}$ . Do đó:  $x - 1; y + 3 \in \mathbb{Z}_{(7)}$

Mà:  $\mathbb{Z}_{(7)} = \{-7; -1; 1; 7\}$

Ta có bảng:

$x-1$	$-7$	$-1$	$1$	$7$
$y+3$	$-1$	$-7$	$7$	$1$
$x$	$-6$	$0$	$2$	$8$
$y$	$-4$	$-10$	$4$	$-2$
KL	Chọn	Chọn	Chọn	Chọn

Vậy:  $(x; y) \in \{(-6; -4); (0; -10); (2; 4); (8; -2)\}$

**Câu 31. (HSG 7 quận Hà Đông, tỉnh Hà Nội 2022 - 2023)**

Tìm nghiệm nguyên của phương trình  $x^2y + 2xy - 27x + y = 0$ .

**Lời giải**

Ta có:  $x^2y + 2xy - 27x + y = 0 \Rightarrow (x+1)^2 y = 27x \Rightarrow 27x : (x+1)^2$

mà  $(x, x+1) = 1 \Rightarrow 27 : (x+1)^2$ .

$\Rightarrow (x+1)^2 \in U(27)$  mà  $(x+1)^2$  là số chính phương  $\Rightarrow (x+1)^2 \in \{1; 9\}$

$\Rightarrow x+1 \in \{-3; -1; 1; 3\}$

$\Rightarrow x \in \{-4; -2; 0; 2\}$

Ta có bảng sau:

$x$	$-4$	$-2$	$0$	$2$
$y$	$-12$	$-54$	$0$	$6$

Vậy phương trình có nghiệm:  $(x; y) \in \{(-4; -12); (-2; -54); (0; 0); (-2; 6)\}$

**Câu 32. (HSG 7 Trường THCS Võ Thị Sáu 2022 - 2023)**

Tìm  $x; y$  nguyên biết rằng:  $\frac{x}{8} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$

**Lời giải**

Ta có:  $\frac{x}{8} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{x}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{x-2}{8} = \frac{1}{y} \Rightarrow (x-2) \cdot y = 8$

Vì  $x; y$  nguyên nên  $x-2; y$  nguyên  $\Rightarrow x-2; y \in U(8) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$

Ta có bảng:

$x-2$	$1$	$-1$	$-2$	$2$	$4$	$-4$	$8$	$-8$
$y$	$8$	$-8$	$-4$	$4$	$2$	$-2$	$1$	$-1$
$x$	$3$	$1$	$0$	$4$	$6$	$-2$	$10$	$-6$

Vậy các cặp  $x; y$  thỏa mãn là:  $(3; 8); (1; -8); (4; 4); (0; -4); (6; 2); (-2; -2); (10; 1); (-6; -1)$

**Câu 33. (HSG 7 huyện Triệu Sơn 2022 - 2023)**

Tìm các cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn  $x^3 - xy + 1 = 2y - x$ .

**Lời giải**

$$x^3 - xy + 1 = 2y - x$$



$$\Rightarrow x^3 + x + 1 = xy + 2y$$

$$\Rightarrow x^3 + x + 1 = y(x + 2)$$

$$\Rightarrow y = \frac{x^3 + x + 1}{x + 2}$$

Vì  $x, y$  là các số nguyên nên:

$$(x^3 + x + 1) : (x + 2)$$

$$\Rightarrow (x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + 5x + 10 - 9) : (x + 2)$$

$$\Rightarrow [x^2(x + 2) - 2x(x + 2) + 5(x + 2) - 9] : (x + 2)$$

$$\Rightarrow [(x + 2)(x^2 - 2x + 5) - 9] : (x + 2)$$

$$\text{Vì } (x + 2)(x^2 - 2x + 5) : (x + 2)$$

$$\Rightarrow 9 : (x + 2)$$

$$\Rightarrow (x + 2) \in \{1; 3; 9; -1; -3; -9\}$$

$$\Rightarrow x \in \{-1; 1; 7; -3; -5; -11\} \text{ (tmđk)}$$

$$\text{* Với } x = -1 \text{ thì } y = \frac{(-1)^3 + (-1) + 1}{(-1) + 2} = -1 \text{ (tmđk)}$$

$$\text{* Với } x = 1 \text{ thì } y = \frac{1^3 + 1 + 1}{1 + 2} = 1 \text{ (tmđk)}$$

$$\text{* Với } x = 7 \text{ thì } y = \frac{7^3 + 7 + 1}{7 + 2} = 39 \text{ (tmđk)}$$

$$\text{* Với } x = -5 \text{ thì } y = \frac{(-5)^3 + (-5) + 1}{(-5) + 2} = 43 \text{ (tmđk)}$$

$$\text{* Với } x = -11 \text{ thì } y = \frac{(-11)^3 + (-11) + 1}{(-11) + 2} = 149 \text{ (tmđk)}$$

**Câu 34. (HSG 7 huyện Thọ Xuân 2022 - 2023)**

Tìm các số nguyên  $x, y$  thỏa mãn đẳng thức:  $\left| (x - y)^2 + 2(xy + y^2 - 4y) \right| = xy + y^2 - 4y$

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \left| (x - y)^2 + 2(xy + y^2 - 4y) \right| = xy + y^2 - 4y \quad (1)$$

$$\text{Mà } \left| (x - y)^2 + 2(xy + y^2 - 4y) \right| \geq 0 \text{ nên suy ra } xy + y^2 - 4y \geq 0$$

Do đó  $(x - y)^2 + 2(xy + y^2 - 4y) \geq 0$  vì  $(x - y)^2 \geq 0$  với mọi giá trị của  $x, y$ .

Khi đó, từ (1) suy ra:

$$(x - y)^2 + 2(xy + y^2 - 4y) = xy + y^2 - 4y$$

$$\Rightarrow (x-y)^2 + xy + y^2 - 4y = 0$$

$$\Rightarrow (x-y)^2 + 2(xy + y^2 - 4y) - (xy + y^2 - 4y) = 0$$

Ta lại có:  $(x-y)^2 + xy + y^2 - 4y \geq 0$  với mọi giá trị của  $x, y$ .

Do đó  $(x-y)^2 + xy + y^2 - 4y = 0$  khi  $(x-y)^2 = 0$  và  $xy + y^2 - 4y = 0$

Từ  $(x-y)^2 = 0$  suy ra:  $x = y$

Thay  $x = y$  vào  $xy + y^2 - 4y = 0$ , ta được:  $y^2 + y^2 - 4y = 0$

$$\Rightarrow 2y^2 - 4y = 0 \Rightarrow 2y(y-2) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ hoặc } y = 2.$$

Vậy  $(x; y) \in \{(0; 0); (2; 2)\}$

**Câu 35. (HSG 7 huyện Hậu Lộc 2022 - 2023)**

Tìm cặp số  $(x, y)$  nguyên thỏa mãn:  $x^2 - x(y+5) = -4y - 9$ .

**Lời giải**

Ta có:  $x^2 - x(y+5) = -4y - 9 \Rightarrow x^2 - 5x + 9 = xy - 4y \Rightarrow x^2 - 5x + 9 = y(x-4)$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 9 : x - 4 \Rightarrow x(x-4) - (x-4) + 5 : x - 4 \Rightarrow 5 : x - 4 \Rightarrow x - 4 \in \{\pm 1; \pm 5\}$$

$$\Rightarrow x \in \{-1; 3; 5; 9\}$$

Ta có bảng sau:

$x$	-1	3	5	9
$y$	-3	-3	9	9
Kết luận	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Vậy  $(x, y) \in \{(-1; -3), (3; -3), (5; 9), (9; 9)\}$

**Cách khác:** Có thể viết đẳng thức đã cho về dạng:  $(x-4)(x-y-1) = -5$

$x-4$	-5	-1	1	5
$x$	-1	3	5	9
$x-y-1$	1	5	-5	-1
$y$	-3	-3	9	9
Kết luận	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Vậy  $(x, y) \in \{(-1; -3), (3; -3), (5; 9), (9; 9)\}$ .

**Câu 36. (HSG 7 thị xã Kỳ Anh, 2022 - 2023)**

Tìm các số nguyên dương  $n$  mà khi thay vào  $A = \frac{3n+2}{n-1}$  thì  $A$  nhận được giá trị nguyên.

Tổng

tất cả các giá trị nguyên dương của  $n$  vừa tìm được bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

$$A = \frac{3n+2}{n-1} = 3 + \frac{5}{n-1} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{n-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 5:n-1 \Rightarrow n-1 \in U(5)$$

$$\Rightarrow n-1 \in \{1; -1; 5; -5\}$$

$$\Rightarrow n \in \{2; 0; 6; -4\}$$

Ta tìm được các giá trị  $n$  là:  $6; -4; 2; 0$ .

Mà  $n$  nguyên dương nên  $n = 6; n = 2$ .

**Câu 37. (HSG 7 Hương Trà, 2022 - 2023)**

Tìm giá trị nguyên của  $x$  để biểu thức:  $B = \frac{8-x}{x-3}$  ( $x \neq 3$ ) đạt giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } B = \frac{8-x}{x-3} = \frac{5-(x-3)}{x-3} = \frac{5}{x-3} - \frac{x-3}{x-3} = \frac{5}{x-3} - 1$$

$B$  có giá trị nhỏ nhất  $\Rightarrow \frac{5}{x-3}$  nhỏ nhất.

$\Rightarrow x-3$  là số nguyên âm lớn nhất.

$$\Rightarrow x-3 = -1.$$

$$\Rightarrow x = 2.$$

$$\text{Vậy } B_{\min} = \frac{5}{2-3} - 1 = -6 \text{ khi } x = 2.$$

**Câu 38. (HSG 7 Mỹ Đức, 2022 - 2023)**

Tìm các cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn điều kiện  $3xy + 2x - 5y = 6$ .

**Lời giải**

Ta có:

$$3xy + 2x - 5y = 6 \Rightarrow x(3y+2) - 5y = 6 \Rightarrow 3x(3y+2) - 15y = 18$$

$$\Rightarrow 3x(3y+2) - 15y - 10 = 18 - 10 \Rightarrow 3x(3y+2) - 5(3y+2) = 8 \Rightarrow (3x-5)(3y+2) = 8.$$

$$x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow (3x-5) \in \mathbb{Z}; (3y+2) \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 3y+2 \in U(8) = \{1; -1; 2; -2; 4; -4; 8; -8\}$$

Mà  $3y+2$  là số chia cho 3 dư 2  $\Rightarrow 3y+2 \in \{-1; 2; -4; 8\}$ .

Ta có bảng sau:

$3y+2$	$-4$	$-1$	$2$	$8$
$3x-5$	$-2$	$-8$	$4$	$1$
$y$	$-2$	$-1$	$0$	$2$
$x$	$1$	$-1$	$3$	$2$

$$\text{Vậy } (x; y) \in \{(1; -2), (-1; -1), (3; 0), (2; 2)\}.$$

**Câu 39. HSG 7 Cẩm Khê, 2022 - 2023)**

Cho biểu thức:  $P = \frac{4049-2x}{x-2023}$  ( $x \neq 2023$ ). Tìm các giá trị nguyên của  $x$  để biểu thức  $P$  đạt giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị nhỏ nhất của  $P$ .

**Lời giải**

Ta có  $P = \frac{4049 - 2x}{x - 2023} = \frac{3 - 2(x - 2023)}{x - 2023} = \frac{3}{x - 2023} - 2 (x \neq 2023)$

Biểu thức  $P$  đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi  $\frac{3}{x - 2023}$  có giá trị nhỏ nhất.

$\Rightarrow x - 2023$  là số âm lớn nhất (vì  $x$  nguyên)  $\Rightarrow x - 2023 = -1 \Rightarrow x = 2022$  (TM).

Khi đó giá trị nhỏ nhất của  $P$  là  $-5$  khi  $x = 2022$ .

Vậy GTNN của  $P$  là  $-5$  khi  $x = 2022$ .

**Câu 40. (HSG 7 Hương Trà, 2022 - 2023)**

Cho hai biểu thức  $P = \frac{4x - 7}{x - 2}; Q = \frac{3x^2 - 9x + 2}{x - 3}$ .

Tính giá trị nguyên của  $x$  để mỗi biểu thức có giá trị nguyên.

**Lời giải**

\* Ta có:  $P = \frac{4x - 7}{x - 2} = 4 + \frac{1}{x - 2} (x \neq 2)$

Với  $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - 2 \in \mathbb{Z}$  để  $P$  thì  $\frac{1}{x - 2}$  nguyên  $\Rightarrow x - 2 \in U(1) \Rightarrow x - 2 \in \{1; -1\}$   
 $\Rightarrow x \in \{3; 1\}$ .

\* Ta có:  $Q = \frac{3x^2 - 9x + 2}{x - 3} (x \neq 3)$

$Q = \frac{3x^2 - 9x + 2}{x - 3} = \frac{3x(x - 3) + 2}{x - 3} = 3x + \frac{2}{x - 3}$

Để  $Q$  nguyên thì  $\frac{2}{x - 3}$  nguyên  $\Rightarrow x - 3 \in U(2) = \{1; -1; 2; -2\} \Rightarrow x \in \{4; 2; 5; 1\}$ .

Vậy để  $Q$  nguyên thì  $x \in \{4; 2; 5; 1\}$ .

**Câu 41. (HSG 7 huyện Cẩm Khê, 2022 - 2023)**

Tìm các số  $a, b, c$  nguyên dương thỏa mãn:  $a^3 + 3a^2 + 5 = 5^b$  và  $a + 3 = 5^c$ .

**Lời giải:**

Ta có:

$a \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow 5^b = a^3 + 3a^2 + 5 = a^2 \cdot (a + 3) + 5 > a + 3 = 5^c$

$\Rightarrow 5^b > 5^c \Rightarrow b > c$

$\Rightarrow 5^b : 5^c$

$\Rightarrow (a^3 + 3a^2 + 5) : (a + 3)$

$\Rightarrow a^2(a + 3) + 5 : (a + 3)$

Vì  $a^2(a + 3) : a + 3 \Rightarrow 5 : a + 3 \Rightarrow a + 3 \in U(5) \Rightarrow a + 3 \in \{1; -1; 5; -5\}$  (1)

Do  $a \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow a + 3 \geq 4$  (2)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow a + 3 = 5 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 5 = 5^5$ .

$25 = 5^b \Rightarrow b = 2$ .

$2 + 3 = 5^c \Rightarrow c = 1$ .

Vậy  $a = 2, b = 2, c = 1$ .

**Câu 42. (HSG 7 huyện Quan Sơn, 2022 - 2023)**

Tìm các cặp số nguyên  $(x, y)$  thỏa mãn  $10^x + 6y = 2023$ .

**Lời giải**

Với  $x, y \in \mathbb{Z}$  và  $10^x + 6y = 2023 \Rightarrow 10^x = 2023 - 6y$  là số nguyên.

Suy ra:  $10^x$  là số nguyên, từ đó  $x \in \mathbb{N}$ .

Khi đó:  $10^x = 2023 - 6y$  là một số lẻ (vì  $2023 \not\div 2; 6y:2 \Rightarrow 10^x \not\div 2$ ).

Suy ra  $x = 0$ .

$$10^0 + 6y = 2023 \Rightarrow 6y = 2022 \Rightarrow y = 2022 : 6 = 337.$$

Vậy  $(x; y) = (0; 337)$ .

**Câu 43. (HSG 7 huyện ... 2022 - 2023)**

Tìm giá trị nguyên dương  $x$  và  $y$  sao cho:  $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$

**Lời giải**

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{y-x}{xy} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow xy = 5y - 5x$$

$$\Rightarrow xy + 5x - 5y = 0$$

$$\Rightarrow x(y+5) - 5(y+5) = -25$$

$$\Rightarrow (y+5)(x-5) = -25$$

Vì  $x, y$  nguyên dương nên  $y+5 > 5$  và  $x-5; y+5$  đều là ước của 25, vậy chỉ có 1 trường hợp:  $x-5 = -1$  và  $y+5 = 25$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ và } y = 20$$

Vậy  $x = 4$  và  $y = 20$ .

**Câu 44. (HSG 7 Đồng Nai - Trường Thcs - Thpt Tri Thức, 2022 - 2023)**

Tìm các cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn:  $x + 5y + xy = 2$ .

**Lời giải**

$$x + 5y + xy = 2 \Rightarrow (x + yx) + (5y + 5) = 7 \Rightarrow (x + 5)(y + 1) = 7$$

$$\Rightarrow (x + 5)(y + 1) = 1.7 = 7.1 = (-1).(-7) = (-7).(-1)$$

$x + 5$	1	7	-1	-7
$x$	-4	2	-6	-12
$y + 1$	7	1	-7	-1
$y$	6	0	-8	-2

Vậy có 4 cặp số nguyên cặp  $(x; y)$  thỏa mãn:  $x + 5y + xy = 2$  là:

$$(-4; 6); (2; 0); (-6; -8); (-12; -2).$$

**Câu 45. (HSG 7 Tiên Du, Bắc Ninh, 2022 - 2023)**

Tìm tất cả các số nguyên dương  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  và  $b$  ( $n$  là số nguyên dương nào đó) thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

i)  $b > a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > 1$ .

ii)  $\left(1 - \frac{1}{a_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{a_2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{a_3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{a_n}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{b}\right)$ .

**Lời giải**

Vì  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  và  $b$  thỏa mãn đồng thời hai điều kiện  $b > a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > 1$ .

Suy ra  $b \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{b} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow 1 - \frac{1}{b} \geq 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2\left(1 - \frac{1}{b}\right) \geq \frac{3}{4}$  (\*)

Lại có:  $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{a_1} < \frac{1}{a_2} < \frac{1}{a_3} < \dots < \frac{1}{a_n} < 1$ .

$\Rightarrow 0 < 1 - \frac{1}{a_1} < 1; 0 < 1 - \frac{1}{a_2} < 1; \dots; 0 < 1 - \frac{1}{a_n} < 1$

$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{a_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{a_2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{a_3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{a_n}\right) < 1$  (\*\*)

Từ (\*) và (\*\*) suy ra điều mâu thuẫn với  $\left(1 - \frac{1}{a_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{a_2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{a_3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{a_n}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{b}\right)$

Vậy không tồn tại các số nguyên dương thỏa mãn bài ra.

**Câu 46. (HSG 7 huyện Kim Thành 2022 - 2023)**

Tìm các số nguyên  $x, y$  biết:  $x^2y - 1 = x^2 + 4y$ .

**Lời giải**

$x^2y - 1 = x^2 + 4y$

$x^2y - x^2 - 4y = 1$

$x^2y - x^2 - 4y + 4 = 1 + 4$

$x^2(y - 1) - 4(y - 1) = 5$

$(y - 1)(x^2 - 4) = 5$

Với  $x, y \in \mathbb{Z}$  thì  $y - 1, x^2 - 4 \in U(5)$

$U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$ .

$y - 1$	-5	-1	1	5
$x^2 - 4$	-1	-5	5	1
$y$	-4	0	2	6
$x^2$	3(L)	-1(L)	9	5(L)
$x$			$\pm 3$	

Vậy các cặp số  $(x; y)$  thỏa mãn là  $(3; 2); (-3; 2)$ .

**Câu 47. (HSG 7 Hưng Hà, trường THCS Thống Nhất, 2022 - 2023)**

Cho  $Q = \frac{27 - 2x}{12 - x}$ . Tìm các số nguyên  $x$  để  $Q$  có giá trị nguyên?

**Lời giải**

$$Q = \frac{27 - 2x}{12 - x} = \frac{2 \cdot (12 - x) + 3}{12 - x} = 2 + \frac{3}{12 - x} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{12 - x} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3 : 12 - x \Rightarrow 12 - x \in U(3)$$

$$\Rightarrow 12 - x \in \{1; 3; -1; -3\}$$

$$\Rightarrow x \in \{11; 9; 13; 15\}$$

Vậy  $x \in \{11; 9; 13; 15\}$ .

**Câu 48. (HSG 7 thành phố Lào Cai 2022 - 2023)**

Tìm các số  $x, y$  nguyên dương biết:  $x^2 - 6xy + 13y^2 = 13$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } x^2 - 6xy + 13y^2 = 13 \Rightarrow x^2 - 3xy - 3xy + 9y^2 + 4y^2 = 13$$

$$\Rightarrow x(x - 3y) - 3y(x - 3y) = 13 - 4y^2 \Rightarrow (x - 3y) \cdot (x - 3y) = 13 - 4y^2$$

$$\Rightarrow (x - 3y)^2 = 13 - 4y^2 \quad (1)$$

$$\text{Do } (x - 3y)^2 \geq 0 \text{ nên } 13 - 4y^2 \geq 0 \Rightarrow -4y^2 \geq -13 \Rightarrow y^2 \leq \frac{13}{4} \Rightarrow |y| \leq \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Ngoài ra: (1) là các số nguyên dương nên  $13 - 4y^2$  là số chính phương dương nên

$$y \in \{0; 1\} \text{ (Do } |y| \leq \frac{\sqrt{13}}{2} \text{)}$$

$$\text{Với } y = 0 \Rightarrow (x - 3 \cdot 0)^2 = 13 - 4 \cdot 0 \Rightarrow x^2 = 13 \Rightarrow x = \pm\sqrt{13} \Rightarrow x \in \emptyset$$

$$y = 1 \Rightarrow (x - 3 \cdot 1)^2 = 13 - 4 \cdot 1 \Rightarrow (x - 3)^2 = 9 \Rightarrow x - 3 = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

Vậy các cặp số  $x, y$  thỏa mãn yêu cầu bài toán là:  $(0; 1); (6; 1)$ .

**Câu 49. (HSG 7 Sông Lô, Vĩnh Phúc, 2022 - 2023)**

Tìm các số nguyên  $x, y$  thỏa mãn:  $x^2 + x = 3^{2020 \cdot y} + 1$ .

**Lời giải**

+) Trường hợp  $y < 0$ , ta có:

$$VP = x^2 + x = x(x + 1) \text{ là số nguyên.}$$

$$VT = 3^{2020 \cdot y} + 1 \text{ không là số nguyên (vì } a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ với } a \neq 0, n \in \mathbb{N}^* \text{).}$$

$\Rightarrow$  Trường hợp này loại.

+) Trường hợp  $y = 0$ , ta có:  $x^2 + x = 3^{2020 \cdot 0} + 1 \Rightarrow x(x + 1) = 2 = 1 \cdot 2 = (-2)(-1)$ .

Vì  $x \in \mathbb{Z}$  nên  $x < x + 1 \Rightarrow x = 1$  hoặc  $x = -2$ .

Khi  $x = 1$  thì  $y = 0$ ; khi  $x = -2$  thì  $y = 0$ .

+) Trường hợp  $y > 0$ , ta có:

$VP = x^2 + x = x(x + 1)$  là tích hai số nguyên liên tiếp nên  $x^2 + x$  chia hết cho 3 hoặc chia cho 3 dư 2.

$VT = 3^{2020 \cdot y} + 1$  chia cho 3 dư 1.

$\Rightarrow$  Trường hợp này loại.

Vậy cặp số nguyên  $(x; y)$  cần tìm là:  $(1; 0); (-2; 0)$ .

**Câu 50. (HSG 7 Bá Thước, THCS thị trấn Cảnh Nang, 2022 - 2023)**

Tìm các số nguyên  $x, y$  thỏa mãn:  $1! + 2! + 3! + \dots + x! = y^2$ .

**Lời giải**

+ Với  $x = 1$ , ta có  $1! = y^2 \Rightarrow 1 = y^2 (y \in \mathbb{Z}) \Rightarrow y \in \{1; -1\}$ .

+ Với  $x = 2$ , ta có  $1! + 2! = y^2 \Rightarrow 3 = y^2 \Rightarrow$  Vì  $y \in \mathbb{Z}$  nên không tìm được giá trị của  $y$  thỏa mãn đề bài.

+ Với  $x = 3$ , ta có  $1! + 2! + 3! = y^2 \Rightarrow 9 = y^2 (y \in \mathbb{Z}) \Rightarrow y \in \{3; -3\}$ .

+ Với  $x \geq 4$ , ta có  $1! + 2! + 3! + \dots + x! = 33 + 5! + 6! + \dots + x!$  có chữ số tận cùng là 3 (Vì  $5!, 6!, \dots, x!$  đều có chữ số tận cùng là 0) nên không phải là số chính phương, còn  $y^2$  lại là số chính phương  $\Rightarrow$  không tìm được giá trị của  $y$  thỏa mãn đề bài.

Vậy các cặp số nguyên  $x, y$  thỏa mãn là:  $(x, y) \in \{(1; 1); (1; -1); (3; 3); (3; -3)\}$ .

**Câu 51. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường LƯU KHÁNH ĐÀM 2022 - 2023)**

Tìm số nguyên  $x, y$  biết  $2017x^2 + 2018 = y^2$

**Lời giải**

Có  $2016x^2 + 2018 = y^2 - x^2 = (y - x)(y + x)$  (\*)

Từ (\*)  $\Rightarrow (y + x)(y - x)$  chẵn

Có  $y + x + y - x = 2y$  chẵn

$\Rightarrow y + x, y - x$  cùng chẵn  $\Rightarrow (y + x)(y - x) : 4$

Mà  $2016x^2 + 2018$  không chia hết cho 4

Vậy không tìm được số nguyên  $x, y$  thỏa mãn đẳng thức trên

**Câu 52. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Trần Đức Tông 2022 - 2023)**

Tìm các số nguyên dương  $x; y$  thỏa mãn điều kiện:  $2^x + 2^y = 72$

**Lời giải**

Giả sử  $x > y$ , ta có:  $2^x + 2^y = 2^y(2^{x-y} + 1) = 2^3 \cdot 9$

Do  $2^{x-y} + 1$  là số lẻ nên  $2^{x-y} + 1 \in \{1; 3; 9\}$

$2^{x-y} + 1 = 1$	$2^y = 9 \cdot 2^3$ (loại)
-------------------	----------------------------



$2^{x-y} + 1 = 3$	$2^y = 3 \cdot 2^3$ (loại)
$2^{x-y} + 1 = 9$	$2^y = 2^3$ (thoả mãn)

Với  $2^y = 2^3$  và  $2^{x-y} + 1 = 9 \Rightarrow y = 3$  và  $x = 6$ .

Vậy  $x = 6; y = 3$

**Câu 53. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Trần Đức Tông 2022 - 2023)**

Tìm các số nguyên dương  $a, b, c$  biết rằng:  $a^3 - b^3 - c^3 = 3abc$  và  $a^2 = 2(b + c)$

**Lời giải**

$$a^3 - b^3 - c^3 = 3abc \quad (1) \text{ và } a^2 = 2(b + c) \quad (2)$$

Từ (2) suy ra  $a^2$  chẵn  $\Rightarrow a$  chẵn.

$$\text{Từ (1) suy ra } a > b; a > c \Rightarrow 2a > b + c \Rightarrow 4a > 2(b + c)$$

$$\text{Kết hợp với (2) } \Rightarrow a^2 < 4a \Rightarrow a < 4 \Rightarrow a = 2 \text{ thay vào (2)}$$

$$\text{Ta được: } b + c = 2 \Rightarrow b = c = 1 \text{ (vì } b, c \text{ nguyên dương).}$$

Thử lại thấy đúng, vậy  $a = 2, b = c = 1$

**Câu 54. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Trần Đức Tông 2022 - 2023)**

Tìm hình chữ nhật có kích thước các cạnh là số nguyên sao cho số đo diện tích bằng số đo chu vi.

**Lời giải**

Gọi kích thước hai cạnh của hình chữ nhật đó là:  $a, b$ . ĐK:  $a, b \in \mathbb{Z}^+$

$$\text{Theo bài ra ta có: } 2(a + b) = ab$$

$$2a + 2b = ab$$

$$2a - ab + 2b = 0$$

$$2a - ab - 4 + 2b = -4$$

$$a(2 - b) - 2(2 - b) = -4$$

$$(2 - b)(a - 2) = -4$$

Vì  $a, b$  là các số nguyên dương nên  $2 - b \in \mathbb{Z}; a - 2 \in \mathbb{Z}$

Để  $(2 - b)(a - 2) = -4$  thì  $2 - b$  và  $a - 2$  phải là ước của  $-4$

$$\text{Có } U(-4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$$

$$\text{Lập bảng ta được: } (a; b) \in \{(3; 6); (4; 4); (6; 3)\}$$

$$\text{Vậy với } (a; b) \in \{(3; 6); (4; 4); (6; 3)\}$$

**Câu 55. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Đức Nông 2022 - 2023)**

Tìm số tự nhiên  $x; y$  sao cho:  $2^x + 2^y = 2^{x+y}$

**Lời giải**

$$2^x + 2^y = 2^{x+y}$$

$$2^x + 2^y = 2^x \cdot 2^y$$

$$2^x(1 - 2^y) - (1 - 2^y) + 1 = 0$$

$$\begin{aligned}(1-2^y)(2^x-1) &= -1 \\ (2^y-1)(2^x-1) &= 1\end{aligned}\quad (1)$$

Vì  $x; y$  là số tự nhiên (bài cho) nên: 
$$\begin{cases} (2^y-1) \in \mathbb{N} \\ (2^x-1) \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Từ (1) ta suy ra:  $(2^y-1)(2^x-1) = 1.1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^x-1=1 \\ 2^y-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x=2 \\ 2^y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \text{ (TMĐK)}$$

Vậy  $x=1; y=1$ .

**Câu 56. (HSG 7 huyện Y Yên 2021 - 2022)**

Tìm tất cả các giá trị nguyên  $x, y$  thỏa mãn:  $2^x + 37 = |y - 45| + y - 45$ .

**Lời giải**

Với mọi giá trị của  $y$  nguyên thì  $|y - 45|$  và  $y - 45$  luôn có cùng tính chẵn hay tính lẻ, suy ra  $|y - 45| + y - 45$  luôn có giá trị là số nguyên chẵn

Do đó  $2^x + 37$  là số nguyên chẵn, mà 37 là số lẻ nên  $2^x$  là số nguyên lẻ  $2^x = 1 \Rightarrow x = 0$ .

Với  $x = 0$ , ta có  $1 + 37 = |y - 45| + y - 45 \Leftrightarrow |y - 45| + (y - 45) = 38$  (\*)

+ Trường hợp 1:  $(y - 45) < 0 \Rightarrow |y - 45| = -(y - 45)$

Khi đó (\*) trở thành:  $-(y - 45) + (y - 45) = 38 \Rightarrow 0 = 38$ , điều này vô lí.

+ Trường hợp 2:  $(y - 45) \geq 0 \Rightarrow |y - 45| = (y - 45)$

Khi đó (\*) trở thành:  $(y - 45) + (y - 45) = 38 \Rightarrow y - 45 = 19 \Rightarrow y = 64$  (chọn)

Vậy  $(x; y) = (0; 64)$ .

**Câu 57. (HSG 7 huyện Lục Ngạn 2021 - 2022)**

Tìm  $x, y \in \mathbb{Z}$ , biết:  $xy + 3x - 2y = 11$ .

**Lời giải**

Ta có:  $xy + 3x - 2y = 11$

$$xy + 3x - 2y - 6 = 5$$

$$x(y + 3) - 2(y + 3) = 5$$

$$(x - 2)(y + 3) = 5$$

Vì  $x, y$  là số nguyên nên  $5 : (x - 2) \Rightarrow (x - 2) \in \{1; -1; 5; -5\}$

Ta có bảng sau:

$x -$	1	-1	5	
$y +$	5	-5	1	
$x$	3	1	7	
$y$	2	-8	-2	

Vậy các cặp  $(x; y)$  thỏa mãn là:  $(3; 2); (1; -8); (7; -2); (-3; -4)$ .

**Câu 58. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2021 - 2022)**

Cho biểu thức  $A = \frac{x+3}{x-2}$ . Tìm số nguyên  $x$  để  $A$  có giá trị nguyên.

**Lời giải**

ĐK:  $x \neq 2$

$$A = \frac{x+3}{x-2} = 1 + \frac{5}{x-2}$$

$A$  có giá trị nguyên khi và chỉ khi  $\frac{5}{x-2}$  nguyên.

Do  $x$  nguyên nên  $x-2 \in U(5) = \{-1; 1; -5; 5\}$

Lập bảng ta được:  $x \in \{-1; 1; 3; 7\}$  (TMĐK)

Vậy  $x \in \{-1; 1; 3; 7\}$  thì  $A$  có giá trị nguyên.

**Câu 59. (HSG 7 huyện Lục Nam 2020 - 2021)**

Tìm  $x, y$  nguyên thỏa mãn:  $2xy - y = 4x + 3$

**Lời giải**

Theo bài ra ta có:

$$2xy - y = 4x + 3$$

$$2xy - 4x - y + 2 = 5$$

$$2x(y-2) - (y-2) = 5$$

$$(2x-1)(y-2) = 5$$

$$(2x-1)(y-2) = 5 = 1.5 = 5.1 = (-1).(-5) = (-5).(-1)$$

Lập bảng ta tìm được:  $(x; y) \in \{(1; 7), (3; 3), (-2; 1), (0; -3)\}$

Vậy:  $(x; y) \in \{(1; 7), (3; 3), (-2; 1), (0; -3)\}$

**Câu 60. (HSG 7 huyện Quan Hoa 2021 - 2022)**

Tìm  $x, y$  nguyên biết:  $100 - y^2 = 8(x - 2021)^2$

**Lời giải**

Tìm  $x, y$  nguyên biết:  $100 - y^2 = 8(x - 2021)^2$

Ta có:  $100 - y^2 \leq 100$

$$\Rightarrow 8(x - 2021)^2 \leq 100$$

$$\Rightarrow (x - 2021)^2 \leq 12,5$$

Do  $x, y$  nguyên nên  $(x - 2021)^2$  và  $y^2$  là số chính phương, nên

+ TH 1:  $(x - 2021)^2 = 0 \Rightarrow x = 2021$  thay vào  $\Rightarrow y = 10; y = -10$ .

+ TH 2:  $(x - 2021)^2 = 1 \Rightarrow x = 2022$  hoặc  $x = 2020$

Khi đó:  $y^2 = 92$  (loại)

+ TH 3:  $(x - 2021)^2 = 4 \Rightarrow x = 2023$  hoặc  $x = 2019$

Khi đó:  $y^2 = 68$  (loại)

+ TH 4:  $(x - 2021)^2 = 9 \Rightarrow x = 2024$  hoặc  $x = 2018$

Khi đó:  $y^2 = 28$  (loại)

Vậy  $x = 2021; y = 10$  và  $x = 2021; y = -10$ .

**Câu 61. (HSG 7 huyện Triệu Sơn, tỉnh Thanh Hóa, 2021 - 2022)**

Tìm tất cả các số nguyên  $x; y$  thỏa mãn:  $2^x + 37 = |y - 45| + y - 45$

**Lời giải**

Nhận xét:

+ Với  $a \geq 0$  thì  $|a| + a = 2a$ .

+ Với  $a < 0$  thì  $|a| + a = -a + a = 0$ .

Do đó  $|a| + a$  luôn là số chẵn với  $\forall a \in \mathbb{Z}$ .

Áp dụng nhận xét trên  $\Rightarrow |y - 45| + y - 45$  là số chẵn  $\forall y \in \mathbb{Z}$ .

$\Rightarrow 2^x + 37$  là số chẵn  $\Rightarrow 2^x$  là số lẻ  $\Rightarrow x = 0$ .

$\Rightarrow |y - 45| + y - 45 = 38$

+ Nếu  $y < 45 \Rightarrow -(y - 45) + y - 45 = 38 \Rightarrow 0 = 38$  (loại)

+ Nếu  $y \geq 45 \Rightarrow 2(y - 45) = 38 \Leftrightarrow y - 45 = 19 \Rightarrow y = 64$  (thỏa mãn)

Vậy  $(x; y) = (0; 64)$ .

**Câu 62. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Như Thanh 2021 - 2022)**

Tìm tất cả các cặp số nguyên  $(x, y)$  thỏa mãn:  $x^2y = 3 + 2xy + x$ .

**Lời giải**

Ta có:  $x^2y = 3 + 2xy + x$

$\Rightarrow x^2y - 2xy - x = 3$

$\Rightarrow x(xy - 2y - 1) = 3$

Do  $x, y \in \mathbb{Z}$  nên  $x; xy - 2y - 1 \in \mathbb{Z}$

Mà  $3 = 1.3 = (-1).(-3)$  nên ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1:  $\begin{cases} x = 1 \\ xy - 2y - 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y - 2y - 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases}$  (thỏa mãn)

Trường hợp 2:  $\begin{cases} x = 3 \\ xy - 2y - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 3y - 2y - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$  (thỏa mãn)

Trường hợp 3:  $\begin{cases} x = -1 \\ xy - 2y - 1 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ -y - 2y - 1 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$  (loại)

Trường hợp 4:  $\begin{cases} x = -3 \\ xy - 2y - 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ -3y - 2y - 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases}$  (thỏa mãn)

Vậy các cặp số nguyên  $(x, y)$  thỏa mãn:  $(1; -4), (3; 2), (-3; 0)$ .

**Câu 63. (HSG 7 huyện Thanh Miện, Hải Dương 2021 - 2022)**

Tìm  $x; y \in \mathbb{Z}$  biết:  $xy + 2x - y = 5$ .

**Lời giải**

Ta có:  $xy + 2x - y = 5$

$$\Rightarrow x(y+2) - (y+2) = 3$$

$$\Rightarrow (y-2)(x-1) = 3$$

Ta có :  $3 = 3.1 = 1.3 = (-1).(-3) = (-3).(-1)$

Lập bảng

$y+2$	3	1	-1	-3
$x-1$	1	3	-3	-1
$x$	2	4	-2	0
$y$	1	-1	-3	-5

Vậy:  $(x; y) \in \{(2; 1); (4; -1); (-2; -3); (0; -5)\}$

**Câu 64. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Chương Mỹ 2021 - 2022)**

Tìm  $x, y$  nguyên biết:  $xy + 3x - y = 6$

**Lời giải**

Ta có  $xy + 3x - y = 6 \Leftrightarrow (x-1)(y+3) = 3$

Do  $x, y \in \mathbb{Z}$  nên  $x-1; y+3 \in \mathbb{Z}$

Mà  $3 = 1.3 = (-1).(-3)$  nên ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1:  $\begin{cases} x-1=1 \\ y+3=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$  (thỏa mãn)

Trường hợp 2:  $\begin{cases} x-1=-1 \\ y+3=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-6 \end{cases}$  (thỏa mãn)

Trường hợp 3:  $\begin{cases} x-1=3 \\ y+3=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$  (thỏa mãn)

Trường hợp 4:  $\begin{cases} x-1=-3 \\ y+3=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$  (thỏa mãn)

Vậy các cặp số nguyên  $(x; y)$  là  $(2; 0); (0; -6); (4; -2); (-2; -2)$ .

**Câu 65. (HSG 7 huyện Cao Lộc 2012 - 2022)**

Tìm số nguyên  $x, y$  thỏa mãn:  $x + xy + y = 2$

**Lời giải**

Ta có:  $x + xy + y = 2$

$$x(y+1) + y+1 - 1 = 2$$

$$(y+1)(x+1) = 3$$

Với  $x; y$  nguyên  $\Rightarrow y+1; x+1$  là các số nguyên

$$\Rightarrow y+1; x+1 \text{ là các ước của } 3$$

Ta có bảng giá trị  $(x, y)$  như sau:

$x+1$	1	3	-3	-1
$y+1$	3	1	-1	-3
$x$	0	2	-4	-2
$y$	2	0	-2	-4

Vậy các cặp số  $(x, y)$  cần tìm là  $(x, y) = \{(0; 2); (2; 0); (-4; -2); (-2; -4)\}$

**Câu 66. (HSG 7 trường Nguyễn Khuyến 2017 - 2018)**

Tìm  $x, y \in \mathbb{Z}$  biết  $2xy + 3x = 4$

**Lời giải**

$$2xy + 3x = 4 \Rightarrow x(2y + 3) = 4$$

Do  $x, y \in \mathbb{Z}$  nên  $x \in U(4) = \{1; -1; 2; -2; 4; -4\}$  và  $2y + 3$  là số lẻ.

+ Nếu  $x = 1 \Rightarrow 2y + 3 = 4$  (loại)

+ Nếu  $x = -1 \Rightarrow 2y + 3 = -4$  (loại)

+ Nếu  $x = 2 \Rightarrow 2y + 3 = 2$  (loại)

+ Nếu  $x = -2 \Rightarrow 2y + 3 = -2$  (loại)

+ Nếu  $x = 4 \Rightarrow 2y + 3 = 1 \Rightarrow y = -1$  (thỏa mãn)

+ Nếu  $x = -4 \Rightarrow 2y + 3 = -1 \Rightarrow y = -2$  (thỏa mãn)

Vậy  $(x, y) \in \{(-4; -2); (4; -1)\}$ .

**Câu 67. (HSG 7 huyện Tân Kỳ 2021 - 2022)**

Tìm số nguyên  $x, y$  biết rằng:  $xy + 2x - y = 5$

**Lời giải**

$$\text{Ta có } xy + 2x - y = 5 \Rightarrow (y + 2)(x - 1) = 3$$

Vì  $x, y \in \mathbb{Z}$  nên  $y + 2 \in \mathbb{Z}; x - 1 \in \mathbb{Z}$ , nên ta có bảng:

$x-1$	1	3	-1	-3
$y+2$	3	2	-3	-1
$x$	2	4	0	-2
$y$	1	-1	-5	-3

Kết hợp với ĐK ta được  $(x, y) \in \{(2; 1); (4; -1); (0; -5); (-2; -3)\}$

**Câu 68. (HSG 7 thành phố Thái Bình, trường Trần Lãm 2022 - 2023)**

Cho biểu thức:  $A = \frac{7x-8}{2x-3}$  với  $x \neq \frac{3}{2}$

Tìm các giá trị nguyên của  $x$  để biểu thức  $A$  có giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } A = \frac{7x-8}{2x-3} = \frac{7}{2} \frac{(2x-3)-8+\frac{21}{2}}{2x-3} = \frac{7}{2} + \frac{\frac{5}{2}}{2x-3} \quad (x \in \mathbb{Z})$$

$A$  lớn nhất khi  $\frac{5}{2x-3}$  lớn nhất khi  $(2x-3)$  là số nguyên dương nhỏ nhất  
 $\Rightarrow 2x-3=1 \Rightarrow x=2$  (Thỏa mãn điều kiện  $x$  nguyên)

Thay  $x=2$  vào biểu thức  $A = \frac{7}{2} + \frac{5}{2x-3} = 6$

Vậy  $x=2$  thì giá trị lớn nhất của biểu thức  $A$  bằng 6.

**Câu 69. (HSG 7 huyện Bá Thước, Thanh Hóa 2021 - 2022)**

Tìm cặp số nguyên  $(x, y)$  thỏa mãn:  $x^2 - 6x + 8 = xy - 5y$

**Lời giải**

Ta có  $x^2 - 6x + 8 = xy - 5y \Rightarrow y(x-5) = x^2 - 6x + 8$   
 $\Rightarrow x(x-5) - (x-5) + 3 - y(x-5) = 0$   
 $\Rightarrow (x-5)(x-y-1) = -3$

Vì  $x, y$  là các số nguyên nên  $x-5, x-y-1 \in U(-3) = \{-3; -1; 1; 3\}$

Ta có bảng sau

$x-5$	1	-1	3	-3
$x-y-1$	-3	3	-1	1
$x$	6	4	8	2
$y$	8	0	8	0

Vậy các cặp  $(x, y)$  thỏa mãn bài toán là  $(6;8), (4;0), (8;8), (2;0)$

**Câu 70. (HSG 7 huyện Cẩm Thủy 2021 - 2022)**

Tìm cặp số  $(x, y)$  nguyên thỏa mãn  $x^2 - x(y+5) = -4y-9$

**Lời giải**

Ta có  $x^2 - x(y+5) = -4y-9$

$x^2 - xy - 5x = -4y-9$

$x^2 - 5x + 9 = xy - 4y$

$x^2 - 5x + 9 = y(x-4)$

Nếu  $x=4$  thì suy ra  $4^2 - 5.4 + 9 = 0$  vô lý. Vậy  $x \neq 4$

Với  $x \neq 4$  ta có  $y = \frac{x^2 - 5x + 9}{x-4} = \frac{x^2 - 4x - x + 4 + 5}{x-4} = x-1 + \frac{5}{x-4}$

Do  $x$  nguyên nên  $x-1$  nguyên, do vậy để  $y$  nguyên thì  $\frac{5}{x-4}$  nguyên hay  $5 : x-4$

$\Rightarrow x-4 \in \{-5; -1; 1; 5\} \Rightarrow x \in \{-1; 3; 5; 9\}$

Với  $x=-1$  thì  $y=-3$

Với  $x=3$  thì  $y=-3$

Với  $x = 9$  thì  $y = 9$

Với  $x = 5$  thì  $y = 9$

Vậy  $(x; y) \in \{(-1; -3); (3; -3); (5; 9); (9; 9)\}$

**Câu 71. (HSG 7 huyện Mường La 2021 - 2021)**

Tìm số tự nhiên  $n$  để phân số  $\frac{7n-8}{2n-3}$  có giá trị lớn nhất.

**Lời giải**

$$\text{Đặt } P = \frac{7n-8}{2n-3} \Rightarrow 2P = \frac{14n-16}{2n-3} = 7 + \frac{5}{2n-3}$$

$$P \text{ có GTLN} \Rightarrow 2P \text{ có GTLN} \Rightarrow \frac{5}{2n-3} \text{ có GTLN}$$

Vì  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow 2n-3 \in \mathbb{N}$  và  $2n-3$  là số tự nhiên lẻ

$$\Rightarrow 2n-3=1 \Rightarrow n=2$$

Vậy  $P$  có GTLN bằng 6 khi  $n=2$

**Câu 72. (HSG 7 huyện Mường La 2021 - 2021)**

Tìm số nguyên  $x; y$  sao cho  $x - 2xy + y = 0$

**Lời giải**

$$\text{Ta có : } x - 2xy + y = 0 \Rightarrow 2x - 4xy + 2y = 0 \Rightarrow (2x-1) - 2y(2x-1) = -1 \Rightarrow (2x-1)(1-2y) = -1$$

$$\text{Vì } x; y \in \mathbb{Z} \Rightarrow (2x-1); (1-2y) \in \mathbb{Z} \Rightarrow (2x-1)(1-2y) = -1 = 1 \cdot (-1) = (-1) \cdot 1$$

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} 2x-1=1 \\ 1-2y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 2: } \begin{cases} 2x-1=-1 \\ 1-2y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\text{Vậy: } (x; y) \in \{(1; 1); (0; 0)\}$$

**Câu 73. (HSG 7 huyện Lý Nhân 2021 - 2022)**

Tìm số nguyên  $y$  để biểu thức  $D = |y-4| + |y-10|$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải**

$$\text{Ta có } |a| = |-a| \text{ và } |a| + |b| \geq |a+b|.$$

Dấu “=” xảy ra khi  $a, b$  cùng dấu hoặc ít nhất một số bằng 0.

$$\text{Áp dụng } D = |y-4| + |y-10| = |y-4| + |-y+10| \geq |y-4+10-y| \geq 6$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } (y-4)(10-y) \geq 0 \Rightarrow 4 \leq y \leq 10.$$

$$\text{Vì } y \text{ nguyên nên } y = \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$$

**Câu 74. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2021 - 2022)**

Tìm các cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn  $4x - 5y - 6xy + 7 = 0$

**Lời giải**

$$4x - 5y - 6xy + 7 = 0$$

$$(4x - 6xy) - 5y + 7 = 0$$



$$2x(2-3y) + \frac{5}{3}(2-3y) + \frac{11}{3} = 0$$

$$6x(2-3y) + 5(2-3y) = -11$$

$$(2-3y)(6x+5) = -11$$

$$\text{Vì } x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} 2-3y \in \mathbb{Z} \\ 6x+5 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ta có bảng sau:

$2-3y$	$-1$	$11$	$1$	$-11$
$6x+5$	$11$	$-1$	$-11$	$1$
$y$	$1$	$-3$	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{3}$
$x$	$1$	$-1$	$\frac{-8}{3}$	$\frac{-2}{3}$

Vậy các cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn là  $(1; 1)$  và  $(-1; -3)$

**Câu 75. (HSG 7 huyện Tam Nông 2021 - 2022)**

Tìm số nguyên  $x$  để tích hai phân số  $\frac{3}{x-1}$  và  $\frac{x+1}{3}$  là một số nguyên.

**Lời giải**

Tích hai phân số  $\frac{3}{x-1}$  và  $\frac{x+1}{3}$  là  $\frac{3}{x-1} \cdot \frac{x+1}{3} = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$ .

Vì  $1 \in \mathbb{Z}$ ,  $\frac{3}{x-1} \cdot \frac{x+1}{3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{2}{x-1} \in \mathbb{Z}$ .

$\Rightarrow x-1 \in U\{2\} = \{-1; -2; 1; 2\}$ .

$\Rightarrow x \in \{0; -1; 2; 3\}$

Vậy  $x \in \{0; -1; 2; 3\}$ .

**Câu 76. (HSG 7 huyện Chương Mỹ 2018 - 2019)**

Tìm các cặp số nguyên dương  $(a; b)$  biết:  $3a - b + ab = 8$ .

**Lời giải**

Ta có  $3a - b + ab = 8$ .

$(ab - b) + (3a - 3) = 5$ .

$b(a - 1) + 3(a - 1) = 5$ .

$(a - 1)(b + 3) = 5$ .

Lập bảng ta có:

$a-1$	$1$	$5$	$-1$	$-5$
$a$	$2$	$6$	$0$	$-4$

$b+3$	5	1	-5	-1
$b$	2	-2	-8	-4
Xét	Thỏa mãn	Loại	Loại	Loại

Vậy các cặp số nguyên dương  $(a ; b)$  cần tìm là  $(2 ; 2)$ .

**Câu 77. (HSG 7 huyện Cát Tiên, 2018 - 2019)**

Tìm các số nguyên  $x$  để biểu thức sau có giá trị là một số nguyên  $y = \frac{2x-3}{x-2}$ .

**Lời giải**

Biểu thức  $y = \frac{2x-3}{x-2}$  có giá trị nguyên  $\Leftrightarrow 2x-3 : x-2$ .

$$\Rightarrow 2(x-2) + 1 : x-2 \Rightarrow 1 : x-2 \Rightarrow x-2 = 1 \text{ hoặc } x-2 = -1 \Rightarrow x = 3 \text{ hoặc } x = 1.$$

Vậy  $x \in \{3; 1\}$ .

**Câu 78. (HSG 7 huyện Thiệu Hóa 2020 - 2021)**

Tìm cặp số  $(x ; y)$  nguyên thỏa mãn:  $x - 2xy + y - 3 = 0$ .

**Lời giải**

Tìm cặp số  $(x ; y)$  nguyên thỏa mãn:  $x - 2xy + y - 3 = 0$ .

Ta có:  $x - 2xy + y - 3 = 0$ .

$$\Rightarrow x(1-2y) + y = 3.$$

$$\Rightarrow 2x(1-2y) + 2y = 6.$$

$$\Rightarrow 2x(1-2y) + 2y - 1 = 6 - 1.$$

$$\Rightarrow (2x-1)(1-2y) = 5 \quad (1).$$

$$\Rightarrow 2x-1 \in \text{ệ}(5) \text{ (vì } x, y \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow 2x-1 \in \{1; -1; 5; -5\} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có bảng:

$2x-1$	1	5	-1	-5
$1-2y$	5	1	-5	-1
$x$	1	3	0	-2
$y$	-2	0	3	1
	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Vậy  $(x, y) \in \{(1 ; -2), (0 ; 3), (3 ; 0), (-2 ; 1)\}$ .

**Câu 79. (HSG 7 huyện Hương Khê 2021 - 2022)**

Tìm số nguyên  $x$  và  $y$  biết:  $\frac{5}{x} + \frac{y}{2} = \frac{1}{4}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\frac{5}{x} + \frac{y}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{1}{4} - \frac{y}{2} \Rightarrow x(1-2y) = 20.$

Vì  $x$  và  $y$  nguyên mà  $1-2y$  là số lẻ nên ta có bảng sau:

$x$	-20	20	-4	4
$1-2y$	1	-1	-5	5
$y$	0	1	3	-2

Vậy ta có các cặp số  $(x ; y) \in \{(-20 ; 0); (20 ; 1); (-4 ; 3); (4 ; -2)\}.$

**Câu 80. (HSG 7 huyện Kinh Môn 2021 - 2022)**

Tìm số nguyên  $x$  và  $y$  biết:  $x + xy + y = 2.$

**Lời giải**

Ta có:  $x + xy + y = 2.$

$$x(y+1) + y + 1 = 3.$$

$$(x+1)(y+1) = 3.$$

Do  $x, y$  nguyên nên  $x+1; y+1$  cũng nguyên.

Do đó:  $x+1 \in \{3\}$  (vì  $x, y \in \mathbb{Z}$ ).

$$\Rightarrow x+1 \in \{1; -1; 3; -3\} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có bảng:

$x+1$	1	-1	3	-3
$y+1$	3	-3	1	-1
$x$	0	-2	2	-4
$y$	2	-4	0	-2
	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Vậy  $(x ; y) \in \{(0 ; 2); (2 ; 0); (-2 ; -4); (-4 ; -2)\}.$

**Câu 81. (HSG 7 trường Hồng Đà, huyện Tam Nông 2015 - 2016)**

Tìm các số nguyên  $x, y$  biết:  $x - 2xy + y = 0$

**Lời giải**

$$x - 2xy + y = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 4xy + 2y - 1 = -1$$

$$\Rightarrow 2x(1-2y) - (1-2y) = -1$$

$$\Rightarrow (2x-1)(1-2y) = -1 \Rightarrow 2x-1 \in U(1) = \{1; -1\}$$

+ Với  $2x-1=1$  thì  $1-2y=-1 \Rightarrow x=1; y=1$

+ Với  $2x-1=-1$  thì  $1-2y=1 \Rightarrow x=0; y=0$

Vậy  $(x, y) \in \{(0;0); (1;1)\}.$

**Câu 82. (HSG 7 Huyện Sơn Dương - 2016 - 2017)**

Tìm  $x, y \in \mathbb{Z}$  thỏa mãn  $x + xy + y = 9$

**Lời giải**

$$\text{Từ } x + xy + y = 9 \Rightarrow x(y+1) + (y+1) = 10$$

$$\Rightarrow (y+1)(x+1) = 10$$

$$\Rightarrow (x+1) \in U(10) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10\}$$

Ta có bảng giá trị:

$x+1$	-1	1	-2	2	-5	5	-10	10
$x$	-2	0	-3	1	-6	4	-11	9
$y+1$	-10	10	-5	5	-2	2	-1	1
$y$	-11	9	-6	4	-1	1	-2	0

$$\text{Vậy } (x; y) \in \{(-2; -11), (0; 9), (-3; -6), (1; 4), (-6; -1), (4; 1), (-11; -2), (9; 0)\}$$

**Câu 83. (HSG 7 Huyện Minh An 2016 - 2017)**

Tìm  $x, y \in \mathbb{Z}$  biết:  $xy + 2x - y = 5$

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } xy + 2x - y = 5$$

$$\Rightarrow x(y+2) - (y+2) = 3$$

$$\Rightarrow (x-1)(y+2) = 3$$

$$\Rightarrow (y+2) \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$$

Ta có bảng giá trị:

$y+2$	3	1	-1	-3
$x-1$	1	3	-3	-1
$x$	2	4	-2	0
$y$	1	-1	-3	-5

$$\text{Vậy } (x; y) \in \{(2; 1), (4; -1), (-2; -3), (0; -5)\}$$

**Câu 84. (HSG 7 trường Tam Hưng 2013 - 2014)**

Tìm tất cả các cặp số nguyên  $(m, n)$  thỏa mãn:

a)  $2^m - 2^n = 2048$

b)  $3m + 4n - mn = 16$

**Lời giải**

a)  $2^m - 2^n = 2048 \Rightarrow 2^n \cdot (2^{m-n} - 1) = 2^{11}$

Do  $2^m - 2^n = 2048$  nên  $m > n$

Khi đó  $2^{m-n} - 1$  là số lẻ

$$+ \text{ Nếu } 2^{m-n} - 1 = 1 \Rightarrow \begin{cases} m-n=1 \\ 2^n=2^{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=12 \\ n=11 \end{cases}$$

+ Nếu  $2^{m-n} - 1 > 1 \Rightarrow 2^{m-n} > 2 \Rightarrow m - n > 1$

Khi đó  $2^{m-n} - 1$  không chia hết cho 2

Mà  $2^n \cdot (2^{m-n} - 1) = 2^{11}$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$

Suy ra vô lý

Vậy  $m = 12$ ;  $n = 11$ .

b)  $3m + 4n - mn = 16$

$3m - mn + 4n - 12 = 4$

$(3 - n)(m - 4) = 4$

$\Rightarrow (3 - n) \in U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$

$3 - n$	-1	1	-2	2	-4	4
$n$	4	2	5	1	7	-1
$m - 4$	-4	4	-2	2	-1	1
$m$	0	8	2	6	3	5

Vậy  $(m; n) \in \{(0; 4), (8; 2), (2; 5), (6; 1), (3; 7), (5; -1)\}$

**Câu 85. (HSG 7 trường Nguyễn Khuyến 2015 - 2016)**

Tìm các số nguyên  $x, y$  biết:  $x^2 + 2x - 8y^2 = 41$

**Lời giải**

$x^2 + 2x - 8y^2 = 41$

$\Rightarrow (x + 1)^2 = 42 + 8y^2$

Ta thấy  $(x + 1)^2$  là số chẵn  $\Rightarrow (x + 1)^2$  chia hết cho 4

Mà  $42 + 8y^2$  không chia hết cho 4

Vậy không có số nguyên  $x, y$  thỏa mãn đề bài.

**Câu 86. (HSG 7 huyện Vĩnh Tường 2015 - 2016)**

Tìm các số tự nhiên  $x, y$  thỏa mãn:  $3x(3y - 2) + 3y = 9$

**Lời giải**

$3x(3y - 2) + 3y = 9$

$\Rightarrow 3x(3y - 2) + 3y - 2 = 7$

$\Rightarrow (3y - 2)(3x + 1) = 7$

$\Rightarrow (3y - 2)$  là ước tự nhiên của 7

Ta có bảng giá trị:

$3y - 2$	7	1	-1	-7
$3x + 1$	1	7	-7	-1
$x$	0	2	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{2}{3}$

$y$	3	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$
Kết luận	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Loại	Loại

Vậy  $(x, y) \in \{(0; 3); (2; 1)\}$ .

**Câu 87. (HSG 7 huyện Ngọc Lặc, trường Nguyệt Ân 2022 - 2023)**

Tìm các số nguyên  $x, y$  biết rằng  $2xy + 5x + 3y = 1$ .

**Lời giải**

Ta có:

$$2xy + 5x + 3y = 1$$

$$4xy + 10x + 6y = 2$$

$$2x(2y + 5) + 3(2y + 5) = 17$$

$$(2x + 3)(2y + 5) = 17$$

Vì  $x; y$  nguyên nên  $2x + 3; 2y + 5$  nguyên

Lại có  $17 = 1.17 = 17.1 = (-1).(-17) = (-17).(-1)$ . Nên ta có:

$$\text{Nếu } 2x + 3 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \text{ thì } 2y + 5 = 17 \Leftrightarrow y = 6$$

$$\text{Nếu } 2x + 3 = -1 \Leftrightarrow x = -2 \text{ thì } 2y + 5 = -17 \Leftrightarrow y = -11$$

$$\text{Nếu } 2x + 3 = 17 \Leftrightarrow x = 7 \text{ thì } 2y + 5 = 1 \Leftrightarrow y = -2$$

$$\text{Nếu } 2x + 3 = -17 \Leftrightarrow x = -10 \text{ thì } 2y + 5 = -1 \Leftrightarrow y = -3$$

Vậy các giá trị  $x, y$  cần tìm là:  $(x; y) \in \{(-1; 6); (-2; -11); (7; -2); (-10; -3)\}$

**Câu 88. (HSG 7 huyện Sóc Sơn 2022 - 2023)**

Tìm các số nguyên  $x, y$  sao cho  $xy + 2x - y = 5$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } xy + 2x - y = 5$$

$$x(y + 2) - (y + 2) = 3$$

$$(x - 1).(y + 2) = 3$$

Vì  $x, y \in \mathbb{Z}$  nên  $x - 1$  và  $y + 2$  là ước của 3  $\Rightarrow x - 1 \in \{-3; -1; 1; 3\}$

Ta có bảng giá trị sau:

$x - 1$	-3	-1	1	3
$y + 2$	-1	-3	3	1
$x$	-2	0	2	4
$y$	-3	-5	1	-1

Vậy  $(x; y) \in \{(0; -5); (-2; -3); (4; -1); (2; 1)\}$

**Câu 89. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)**

Tìm số nguyên  $a$  sao cho  $a^2 + 2a + 3$  chia hết  $a + 1$ .

**Lời giải**

Ta có:  $a^2 + 2a + 3 = a(a+1) + (a+1) + 2 = (a+1)^2 + 2$

Để  $a^2 + 2a + 3$  chia hết  $a+1$  thì  $2 : a+1$

$$\Rightarrow a+1 \in U(2) \Rightarrow a+1 \in \{-2; -1; 1; 2\}$$

$$\Rightarrow a \in \{-3; -2; 0; 1\}$$

Để  $a^2 + 2a + 3$  chia hết  $a+1$  thì  $a \in \{-3; -2; 0; 1\}$

**Câu 90. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)**

Tìm các số nguyên tố  $x, y$  thỏa mãn  $(x-1)(x+1) = 6y^2$

**Lời giải**

Vì  $6y^2 : 2$  nên  $(x-1)(x+1) : 2$

Vì  $(x-1) + (x+1) = 2x : 2$  nên  $x-1; x+1$  cùng tính chẵn lẻ

Suy ra  $x-1; x+1$  là hai số chẵn liên tiếp.

Do đó  $(x-1)(x+1) : 8$

$$\Rightarrow 6y^2 : 8 \Rightarrow 3y^2 : 4 \Rightarrow y^2 : 4 \Rightarrow y : 2$$

Mà  $y$  là số nguyên tố nên  $y = 2$

- Thay  $y = 2$  vào  $(x-1)(x+1) = 6y^2 \Rightarrow (x-1)(x+1) = 24 \Rightarrow (x-1)(x+1) = 4.6$

$$\Rightarrow x = 5 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy  $(x; y) = (5; 2)$

**Câu 91. (HSG 7 huyện Nho Quan 2022 - 2023)**

Tìm tất cả các cặp số nguyên  $(x, y)$  thỏa mãn:  $xy + 3x - y = 6$ .

**Lời giải**

$$xy + 3x - y = 6$$

$$x(y+3) - (y+3) = 3$$

$$(x-1)(y+3) = 3$$

Vì  $x; y$  nguyên nên  $x-1; y+3$  nguyên

Lại có:  $3 = 1.3 = 3.1 = (-1).(-3) = (-3).(-1)$

Ta có bảng sau:

$x-1$	1	3	-1	-3
$y+3$	3	1	-3	-1
$x$	2	4	0	-2
$y$	0	-2	-6	-4

Vậy  $(x; y) \in \{(2; 0); (4; -2); (0; -6); (-2; -4)\}$

**Câu 92. (HSG 7 huyện Sơn Động 2022 - 2023)**

Tìm số tự nhiên  $x, y$  thỏa mãn:  $7(x-2023)^2 = 23 - y^2$ .

**Lời giải**

Vì  $7(x-2023)^2 \geq 0$  mà  $7(x-2023)^2 = 23 - y^2 \Rightarrow 23 - y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq 23 \Rightarrow y^2 \leq 23$ .

Do  $y \in \mathbb{N} \Rightarrow y \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$ .

Vì 7 là số nguyên tố  $\Rightarrow 23 - y^2 : 7$ . Suy ra  $y \in \{3; 4\}$ .

+ Với  $y = 3 \Rightarrow 7(x-2023)^2 = 14 \Rightarrow (x-2023)^2 = 2$  (loại).

+ Với  $y = 4 \Rightarrow 7(x-2023)^2 = 7 \Rightarrow (x-2023)^2 = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} x-2023 = -1 \\ x-2023 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2022 \\ x = 2024 \end{cases}$  (thỏa mãn).

Vậy  $(x, y) \in \{(2022; 4); (2024; 4)\}$  là các giá trị cần tìm.

**Câu 93. (HSG 7 huyện Lâm Thao 2022 - 2023)**

Tim các số nguyên dương  $x, y$  sao cho  $2x - xy + 3y = 9$ .

**Lời giải**

Từ :  $2x - xy + 3y = 9$

$\Rightarrow (2 - y)x + 3(y - 2) = 9 \Leftrightarrow (2 - y)(x - 3) = 3$ .

Suy ra  $3 : (x - 3) \Rightarrow (x - 3)$  là ước của 3.

Suy ra  $(x - 3) \in \{-3; -1; 1; 3\}$

Ta có bảng

$x - 3$	-3	-1	1	3
$2 - y$	-1	-3	3	1
$x$	0	2	4	6
$y$	3	5	-1	1
	Loại	T/m	Loại	T/m

Vậy cặp số  $(x = 2; y = 5)$  hoặc  $(x = 6; y = 1)$  như trên thỏa mãn điều kiện đề bài

**Câu 94. (HSG 7 huyện Lâm Thao 2022 - 2023)**

Tim các số nguyên  $m$  để  $(m + 1)(m^2 + 2m)$  là một số chính phương

**Lời giải**

Ta có  $(m + 1)(m^2 + 2m)$  là một số chính phương.

Suy ra  $(m + 1)(m^2 + 2m) = k^2$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

Vì  $k^2 \geq 0 \Rightarrow (m + 1)(m^2 + 2m) \geq 0$

Với  $m < -2 \Rightarrow (m + 1)(m^2 + 2m) < 0$  (loại)

Với  $m \in \{-2; -1; 0\}$  ta đều có  $k^2 = 0$  (thỏa mãn)

Với  $m > 0$  ta có  $k^2 = (m + 1)(m^2 + 2m)$

Gọi  $d$  là một ước chung nguyên tố của  $m + 1$  và  $m^2 + 2m$



$$\text{Suy ra } \begin{cases} m+1:d \\ m^2+2m:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m+1:d \\ m:d \end{cases} \Rightarrow 1:d \Rightarrow d=1$$

Nên  $(m+1)(m^2+2m)$  là một số chính phương khi  $m+1$  và  $m^2+2m$  đều là số chính phương.

Để  $m^2+2m$  là số chính phương thì  $m^2+2m = a^2$  ( $a \in \mathbb{Z}$ ).

$$\text{Suy ra } (m+1)^2 - 1 = a^2 \Rightarrow (m+1+a)(m+1-a) = 1$$

$$\Rightarrow m+1+a = m+1-a \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -2 \end{cases} \text{ (không thoả mãn)}$$

Vậy  $m \in \{-2; -1; 0\}$  thì  $(m+1)(m^2+2m)$  là một số chính phương.

**Câu 95. (HSG 7 huyện Tam Nông 2022 - 2023)**

Tìm các số nguyên  $x, y$  sao cho  $x^2 + 2x + y = xy$ .

**Lời giải**

$$x^2 + 2x + y = xy$$

$$\Rightarrow (x^2 - 2x + 1) + (4x - 4) + 3 + y = xy$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + 4(x-1) + y - xy = -3$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + 4(x-1) + y(1-x) = -3$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + 4(x-1) - y(x-1) = -3$$

$$\Rightarrow (x-1)[(x-1) + 4 - y] = -3$$

$$\Rightarrow (x-1)[x + 3 - y] = -3$$

Ta có bảng giá trị:

$x-1$	1	-3	-1	3
$x+3-y$	-3	-1	$x$	-1
$x$	2	-2	0	4
$y$	8	0	0	8

Vậy  $(x; y) \in \{(2; 8); (-2; 0); (0; 0); (4; 8)\}$ .

**Câu 96. (HSG 7 huyện Thanh Thủy 2022 - 2023)**

Tìm các cặp số nguyên  $x, y$  biết:  $2xy - 10x - 5y = -15$

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } 2xy - 10x - 5y = -15 \Leftrightarrow (2x-5)(y-5) = 10$$

Vì  $x, y$  nguyên nên  $2x-5$  và  $y-5$  là ước của 10

Mà  $2x-5$  là số nguyên lẻ nên  $2x-5 \in \{\pm 1; \pm 5\}$

Lập bảng giá trị ta có:

$2x-5$	-5	-1	1	5
--------	----	----	---	---

$y-5$	$-2$	$-10$	$10$	$2$
$x$	$0$	$2$	$3$	$5$
$y$	$3$	$-5$	$15$	$7$

Vậy  $(x, y) = \{(0;3);(2;-5);(3;15);(5;7)\}$

**Câu 97. (HSG 7 huyện Thiệu Hóa 2022 - 2023)**

Tìm các cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn  $2x^2 + y^2 + 2xy + 2x = 4$

**Lời giải**

Ta có:  $2x^2 + y^2 + 2xy + 2x = 4$

$$x^2 + 2x + 1 + x^2 + 2xy + y^2 = 5$$

$$(x^2 + 2x + 1) + (x^2 + 2xy + y^2) = 5$$

$$(x+1)^2 + (x+y)^2 = 5$$

Vì  $x, y$  nguyên nên ta có:

$$\text{TH1 } \begin{cases} x+1=1 \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$$

$$\text{TH2 } \begin{cases} x+1=1 \\ x+y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$$

$$\text{TH3 } \begin{cases} x+1=-1 \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$$

$$\text{TH4 } \begin{cases} x+1=-1 \\ x+y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\text{TH5 } \begin{cases} x+1=2 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\text{TH6 } \begin{cases} x+1=2 \\ x+y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$$

$$\text{TH7 } \begin{cases} x+1=-2 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=4 \end{cases}$$

$$\text{TH8 } \begin{cases} x+1=-2 \\ x+y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$$

Vậy cặp số  $(x; y)$  thỏa mãn đề bài là:  $(0; 2); (0; -2); (-2; 4); (-2; 0); (1; -2); (1; 0); (-3; 4); (-3; 2)$



CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS