

ĐỀ 7: ĐA THỨC

Dạng 1: Xác định đa thức
Dạng 2: Tính giá trị của đa thức
Dạng 3: Dấu của đa thức
Dạng 4: Tìm giá trị của biến (tham số) để phép chia là phép chia hết
Dạng 5: Nghiệm của đa thức

Dạng 1. Xác định đa thức

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 Đề giao lưu HSG huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Cho $f(x) = a.x^3 + 4x(x^2 + 1) + 8$ và $g(x) = x^3 + 4x(bx + 1) + c - 3$, trong đó a, b, c là các hằng số. Để $f(x) = g(x)$ thì giá trị của số a là:

- A. 3 B. -3 C. 0 D. 1

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } f(x) = a.x^3 + 4x(x^2 + 1) + 8 = a.x^3 + 4x^3 + 4x + 8 = x^3(a + 4) + 4x + 8$$

$$g(x) = x^3 + 4x(bx + 1) + c - 3 = x^3 + 4bx^2 + 4x + c - 3$$

$$\text{Để } f(x) = g(x) \text{ thì } a + 4 = 1 \Rightarrow a = -3$$

Vậy $a = -3$.

Câu 2. (HSG 7 Đề giao lưu HSG Lạng Giang 2022 - 2023)

Cho đa thức $A(x) = 4x - 5x^2 + x - 2x^2 + 2023$ và $(5x - 6 - 5x^3) - B(x) = A(x)$. Hệ số cao nhất của $B(x)$ là:

- A. 2 B. 3 C. 2029 D. -5

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } (5x - 6 - 5x^3) - B(x) = A(x).$$

$$\Rightarrow B(x) = (5x - 6 - 5x^3) - A(x)$$

$$\Rightarrow B(x) = (5x - 6 - 5x^3) - (4x - 5x^2 + x - 2x^2 + 2023)$$

$$\Rightarrow B(x) = 5x - 6 - 5x^3 - 4x + 5x^2 - x + 2x^2 - 2023$$

$$\Rightarrow B(x) = -5x^3 + 7x^2 - 2029$$

Vậy hệ số cao nhất của $B(x)$ là -5 .

Câu 3. (HSG 7 huyện Yên Thế, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

$$\begin{aligned} &= -x^2 + 3xy + 2y^2 - 4x^2 + 5xy - 3y^2 - 3x^2 - 2xy - y^2 \\ &= -8x^2 + 6xy - 2y^2 \end{aligned}$$

Câu 7. (HSG 7 huyện Việt Yên 2022 - 2023)

Nam mua 10 quyển vở, mỗi quyển giá x đồng và hai bút bi, mỗi chiếc giá y đồng. Biểu thức biểu thị số tiền Nam phải trả là

- A. $2x - 10y$. B. $10x - 2y$. C. $2x + 10y$. D. $10x + 2y$.

Lời giải

Chọn D

Biểu thức biểu thị số tiền Nam phải trả khi mua 10 quyển vở và 2 bút bi là: $10x + 2y$

Câu 8. (HSG 7 huyện Việt Yên 2022 - 2023)

Kết quả sau khi thu gọn đơn thức $6x^2y \cdot (-2xy^2)$ là

- A. $-12x^3y^3$. B. $12x^3y^3$. C. $-12x^2y^3$. D. $-12x^2y^2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $6x^2y \cdot (-2xy^2) = -12x^3y^3$

Câu 9. (HSG 7 huyện Việt Yên 2022 - 2023)

Thu gọn đơn thức $A = \left(-\frac{1}{3}xy\right)(-3xy^2)(-x)$ ta được kết quả là

- A. $A = -xy^3$. B. $A = -x^2y^3$. C. $A = -x^3y^3$. D. $A = x^2y^3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $A = \left(-\frac{1}{3}xy\right)(-3xy^2)(-x) = -x^3y^3$

Câu 10. (HSG 7 huyện Việt Yên 2022 - 2023)

Biểu thức đại số biểu thị diện tích hình thang có đáy lớn là a , đáy nhỏ là b , đường cao là h như sau

- A. $(a+b)h$. B. $(a-b)h$. C. $\frac{(a-b)h}{2}$. D. $\frac{(a+b)h}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Câu 11. (HSG 7 huyện Việt Yên 2022 - 2023)

Tìm đa thức $f(x) = ax + b$. Biết $f(1) = \frac{7}{2}$; $f(-1) = -\frac{5}{2}$

- A. $f(x) = 3x + \frac{1}{2}$. B. $f(x) = x + \frac{1}{2}$. C. $f(x) = 3x + \frac{7}{2}$. D. $f(x) = 2x + \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(1) = \frac{7}{2}$ nên $a + b = \frac{7}{2}$

$$f(x) = (2x^2 + x - 3)^{2021} \cdot (2x^2 + 3x + 4)^{2022}$$

Ta có: tổng các hệ số của đa thức bằng giá trị của đa thức tại $x = 1$

$$f(1) = (2 \cdot 1^2 + 1 - 3)^{2021} \cdot (2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 4)^{2022} = 0^{2021} \cdot 9^{2022} = 0$$

Vậy sau khi thu gọn thì tổng các hệ số của $f(x)$ bằng 0.

Câu 16. (HSG 7 huyện Tân Yên 2022 - 2023)

Bậc của đa thức $A = 5x^{2022} - 2^2x^2y^3 + xy^2 - 5x^{2022} + x^6 - 1$ là

- A. 2022. B. 6. C. 7. D. 4.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= 5x^{2022} - 2^2x^2y^3 + xy^2 - 5x^{2022} + x^6 - 1 \\ &= -2^2x^2y^3 + xy^2 + x^6 - 1 \end{aligned}$$

Vậy bậc của đa thức là: $2 + 2 + 3 = 7$

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Yên Phong tỉnh Bắc Ninh 2022 - 2023)

Biết $f(x)$ chia cho $x - 3$ thì dư 7, chia cho $x - 2$ thì dư 5, chia cho $(x - 3) \cdot (x - 2)$ được thương là $3x$ và còn dư. Tìm $f(x)$.

Lời giải

Theo bài ta có:

$$f(x) = (x - 3) \cdot A(x) + 7 \quad (1)$$

$$f(x) = (x - 2) \cdot B(x) + 5 \quad (2)$$

Vì $f(x)$ chia cho $(x - 3) \cdot (x - 2)$ được thương là $3x$ và còn dư, nên phần dư là đa thức có bậc nhỏ hơn 2. Đặt phần dư là: $ax + b$. Khi đó ta có:

$$f(x) = 3x(x - 3)(x - 2) + ax + b \quad (3)$$

Các đẳng thức trên đúng với mọi x nên:

$$+ \text{Thay } x = 3 \text{ vào (1) ta được: } f(3) = (3 - 3) \cdot A(3) + 7 \Rightarrow f(3) = 7 \quad (4)$$

$$+ \text{Thay } x = 2 \text{ vào (2) ta được: } f(2) = (2 - 2) \cdot B(2) + 5 \Rightarrow f(2) = 5 \quad (5)$$

+ Thay $x = 3$ vào (3) ta được:

$$f(3) = 3 \cdot 3(3 - 3)(3 - 2) + a \cdot 3 + b \Rightarrow f(3) = 3a + b \quad (6)$$

+ Thay $x = 2$ vào (3) ta được:

$$f(2) = 3 \cdot 2(2 - 3)(2 - 2) + a \cdot 2 + b \Rightarrow f(2) = 2a + b \quad (7)$$

$$\text{Từ (4) và (6) ta được: } 3a + b = 7 \quad (8)$$

$$\text{Từ (5) và (7) ta được: } 2a + b = 5 \quad (9)$$

Từ (8) và (9) suy ra $a = 2; b = 1$

Vậy $f(x) = 3x(x - 3)(x - 2) + 2x + 1$ hay $f(x) = 3x^3 - 15x^2 + 20x + 1$.

Câu 2. (HSG 7 Đề giao lưu Olympic cấp thị xã – huyện Kinh Môn 2022 - 2023)

Cho hai đa thức $P(x) = 2x^3 - x + x^2 - x^3 + 3x + 5$; $Q(x) = 3x^3 + 4x^2 + 3x - 4x^3 - 5x^2 + 10$
 Tìm đa thức $M(x) = P(x) + Q(x)$ và tìm nghiệm của đa thức $M(x)$.

Lời giải

Có: $P(x) = 2x^3 - x + x^2 - x^3 + 3x + 5 = (2x^3 - x^3) + x^2 - (x - 3x) + 5 = x^3 + x^2 + 2x + 5$

$Q(x) = 3x^3 + 4x^2 + 3x - 4x^3 - 5x^2 + 10$

$= (3x^3 - 4x^3) + (4x^2 - 5x^2) + 3x + 10 = -x^3 - x^2 + 3x + 10$

$M(x) = P(x) + Q(x) = (x^3 + x^2 + 2x + 5) + (-x^3 - x^2 + 3x + 10)$

$= x^3 + x^2 + 2x + 5 - x^3 - x^2 + 3x + 10 = 5x + 15$

Cho $M(x) = 0 \Rightarrow 5x + 15 = 0 \Rightarrow x = -3$

Vậy nghiệm của đa thức $M(x)$ là $x = -3$.

Câu 3. (HSG 7 Đề HSG thị xã Bim Som 2022 - 2023)

Cho hai đa thức $f(x) = (x-1)(x+3)$ và $g(x) = x^3 - ax^2 + bx - 3$. Xác định hệ số a, b của đa thức $g(x)$ biết nghiệm của đa thức $f(x)$ cũng là nghiệm của đa thức $g(x)$.

Lời giải

Cho $f(x) = (x-1)(x+3) = 0$

$\Rightarrow x - 1 = 0$ hoặc $x + 3 = 0$

$\Rightarrow x = 1$ hoặc $x = -3$

Khi đó đa thức $f(x)$ có nghiệm là $x = 1; x = -3$.

Vì nghiệm của đa thức $f(x)$ cũng là nghiệm của đa thức $g(x)$ nên:

+) $g(1) = 1^3 - a.1^2 + b.1 - 3 = 0$ hay $-a + b = 2$ (1)

+) $g(-3) = (-3)^3 - a.(-3)^2 + b.(-3) - 3 = 0$ hay $3a + b = -10$ (2)

Kết hợp (1) và (2) ta được $\begin{cases} a = -3 \\ b = -1 \end{cases}$

Câu 4. (HSG 7 Kỳ thi chọn HSG cấp huyện Quế Võ 2022 - 2023)

Cho các đa thức: $A(x) = 3x^4 - 3x^2 + 7x + 29$; $B(x) = x^2 - x^4 + 2x^3 + 3$;

$C(x) = x^3 + 2x - 2$.

Tính $P(x) = A(x) + 3B(x) - 6C(x)$ và tìm nghiệm của $P(x)$.

Lời giải

$P(x) = (3x^4 - 3x^2 + 7x + 29) + 3(x^2 - x^4 + 2x^3 + 3) - 6(x^3 + 2x - 2)$

$= 3x^4 - 3x^2 + 7x + 29 + 3x^2 - 3x^4 + 6x^3 + 9 - 6x^3 - 12x + 12$

$= 3x^4 - 3x^4 - 6x^3 + 6x^3 - 3x^2 + 3x^2 + 7x - 12x + 29 + 9 + 12$

$= -5x + 50$

Cho $P(x) = 0 \Rightarrow -5x + 50 = 0$

$5x = 50$

$$x = 10$$

Vậy nghiệm của đa thức $P(x)$ là $x = 10$

Câu 5. (HSG 7 Giao lưu HSG TP Chí Linh 2022 - 2023)

Cho hai đa thức $P = 5x^4 + 3x^2 + 4x^3 - \frac{3}{4}x - 7x^4 - \frac{1}{4}x + 3$; $Q = \frac{1}{2}x^3 - 2x^4 + 4x^2 + x + \frac{7}{2}x^3$

Tìm đa thức H biết $P - H = Q - (x^2 + 3x - 7)$

Lời giải

$$P - H = Q - (x^2 + 3x - 7) \text{ nên } H = P - [Q - (x^2 + 3x - 7)]$$

$$\Rightarrow H = P - Q + (x^2 + 3x - 7)$$

$$\text{Ta có } P - Q = \left(5x^4 + 3x^2 + 4x^3 - \frac{3}{4}x - 7x^4 - \frac{1}{4}x + 3 \right) - \left(\frac{1}{2}x^3 - 2x^4 + 4x^2 + x + \frac{7}{2}x^3 \right)$$

$$= 5x^4 + 3x^2 + 4x^3 - \frac{3}{4}x - 7x^4 - \frac{1}{4}x + 3 - \frac{1}{2}x^3 + 2x^4 - 4x^2 - x - \frac{7}{2}x^3$$

$$= -x^2 - 2x + 3$$

$$\Rightarrow H = -x^2 - 2x + 3 + x^2 + 3x - 7 = x - 4$$

Vậy $H = x - 4$

Câu 6. (HSG 7 huyện Mường Lát; Đề giao lưu HSG Thanh Sơn 2022 - 2023)

Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$, xác định các hệ số a, b, c biết: $f(0) = 2$; $f(1) = 7$; $f(-2) = -14$.

Lời giải

Ta có: $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\text{Mà } \begin{cases} f(0) = 2 \\ f(1) = 7 \\ f(-2) = -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ a + b + c = 7 \\ 4a - 2b + c = -14 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ a + b + 2 = 7 \\ 4a - 2b + 2 = -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ a + b = 5 \\ 4a - 2b = -16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ a + b = 5 \\ 2a - b = -8 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } a + b + 2a - b = 5 + (-8) \Rightarrow 3a = -3 \Rightarrow a = -1$$

Do đó $b = 6$. Vậy $a = -1, b = 6, c = 2$.

Câu 7. (HSG 7 Đề kiểm định HSG Quỳnh Phụ 2022 - 2023)

Cho đa thức: $F(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{99} + x^{100}$ và

$$G(x) = 99x^{99} - 99x^{98} + 99x^{97} - 99x^{96} + \dots + 99x - 99.$$

a) Tìm đa thức $H(x)$ sao cho: $F(x) - H(x) = G(x)$.

b) Tính giá trị của đa thức $H(x)$ tại $x = 99$.

Lời giải

$$\text{a) Vì } F(x) - H(x) = G(x) \Rightarrow H(x) = F(x) - G(x)$$

$$\begin{aligned}
 H(x) &= (1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{99} + x^{100}) - (99x^{99} - 99x^{98} + 99x^{97} - 99x^{96} + \dots + 99x - 99) \\
 &= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{99} + x^{100} - 99x^{99} + 99x^{98} - 99x^{97} + 99x^{96} - \dots - 99x + 99 \\
 &= (1 + 99) + (-x - 99x) + (x^2 + 99x^2) + \dots + (x^{98} + 99x^{98}) + (-x^{99} - 99x^{99}) + x^{100} \\
 &= 100 - 100x + 100x^2 - \dots + 100x^{98} - 100x^{99} + x^{100} \\
 &= x^{100} - 100x^{99} + 100x^{98} - \dots + 100x^2 - 100x + 100
 \end{aligned}$$

b) Tại $x = 99$ thì $100 = x + 1$

$$\begin{aligned}
 \text{Khi đó, } H(x) &= x^{100} - (x+1)x^{99} + (x+1)x^{98} - \dots + (x+1)x^2 - (x+1)x + (x+1) \\
 &= x^{100} - x^{100} - x^{99} + x^{99} + x^{98} - \dots + x^3 + x^2 - x^2 - x + x + 1
 \end{aligned}$$

Vậy giá trị của đa thức $H(x)$ tại $x = 99$ là 1

Câu 8. (HSG 7 Đề giao lưu HSG Văn Lâm 2022 - 2023)

Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx - 2$. Xác định hệ số a, b biết đa thức $f(x)$ nhận $x = -1$ và $x = 2$ làm nghiệm.

Lời giải

Đa thức $f(x) = ax^2 + bx - 2$ nhận $x = -1$ làm nghiệm

$$\Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow a - b - 2 = 0 \text{ hay } a = b + 2$$

Đa thức $f(x) = ax^2 + bx - 2$ nhận $x = 2$ làm nghiệm.

$$\Rightarrow f(2) = 0 \Rightarrow 4a + 2b - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 4(b + 2) + 2b - 2 = 0 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow a = 1.$$

Vậy $a = 1; b = -1$.

Câu 9. (HSG 7 huyện Sóc Sơn - Hà Nội 2022 - 2023)

Cho hai đa thức $f(x) = 2x^2 + ax + 4$ và $g(x) = x^2 - 5x - b$ (a, b là các hằng số). Hãy tìm các hệ số a, b của hai đa thức trên, biết: $f(1) = g(2); f(-1) = g(5)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } f(1) = a + 6; g(2) = -b - 6 \Rightarrow a + 6 = -b - 6 \Rightarrow a + b = -12 \quad (1)$$

$$\text{Ta có } f(-1) = -a + 6; g(5) = -b \Rightarrow -a + 6 = -b \Rightarrow a - b = 6 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) tìm ra $a = -3; b = -9$

Vậy hai hệ số a, b cần tìm là: $a = -3; b = -9$.

Câu 10. (HSG 7 huyện Cát Tiên 2018 - 2019)

Cho hai đa thức : $f(x) = ax + b; g(x) = x^2 - x + 1$

Hãy xác định a, b biết: $f(1) = g(2)$ và $f(-2) = g(1)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f(1) = g(2) \Rightarrow a + b = 3 \quad (1)$$

$$f(-2) = g(1) \Rightarrow -2a + b = 1 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow -3a + a + b = 1 \Rightarrow -3a = 1 - 3 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$\text{Với } a = \frac{2}{3} \text{ nên } b = \frac{7}{3}$$

$$\text{Vậy } a = \frac{2}{3}, b = \frac{7}{3}.$$

Câu 11. (HSG 7 huyện Hương Trà 2022 - 2023)

Cho $f(x) = ax^3 + 4x(x^2 - 1) + 8$ và $g(x) = x^3 - 4x(bx + 1) + c - 3$ trong đó a, b, c là các hằng số. Xác định a, b, c để $f(x) = g(x)$.

Lời giải

Cách 1: Ta có: $f(x) = ax^3 + 4x(x^2 - 1) + 8 = (a + 4)x^3 - 4x + 8$

$$g(x) = x^3 - 4x(bx + 1) + c - 3 = x^3 - 4bx^2 - 4x + c - 3$$

Do $f(x) = g(x)$ nên: $a + 4 = 1; -4b = 0; c - 3 = 8$

Khi đó: $a = -3; b = 0; c = 11$.

Cách 2: Ta có: $f(x) = ax^3 + 4x(x^2 - 1) + 8 = (a + 4)x^3 - 4x + 8$

$$g(x) = x^3 - 4x(bx + 1) + c - 3 = x^3 - 4bx^2 - 4x + c - 3$$

Do $f(x) = g(x)$ nên chọn $x = 0; 1; -1$ ta được

$$f(0) = g(0) \Rightarrow c = 11 \Rightarrow g(x) = x^3 - 4bx^2 - 4x + 8$$

$$f(1) = g(1) \Rightarrow a + 4b = -3 \quad (1)$$

$$f(-1) = g(-1) \Rightarrow -a + 4b = 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $b = 0; a = -3$. Vậy $a = -3; b = 0; c = 11$.

Câu 12. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ 2021 - 2022)

Xác định đa thức bậc nhất $f(x)$ thỏa mãn $f(x+2) - f(x) = 4$ với mọi x và $f(2022) = 2022$

Lời giải

Vì $f(x)$ là đa thức bậc nhất, nên $f(x) = a.x + b$ ($a \neq 0$) $\Rightarrow f(x+2) = a.(x+2) + b$

$$\text{Ta có } f(x+2) - f(x) = a.(x+2) + b - (a.x + b) = a.x + 2a + b - a.x - b = 2a$$

$$\text{Mà } f(x+2) - f(x) = 4 \text{ với mọi } x \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2 \text{ (thỏa mãn } a \neq 0) \Rightarrow f(x) = 2x + b$$

$$\text{Ta có } f(2022) = 2022 \Rightarrow 2.2022 + b = 2022 \Rightarrow b = -2022 - 4044 = -2022$$

$$\text{Vậy đa thức } f(x) = 2x - 2022$$

Câu 13. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2021 - 2022)

Cho đa thức M thỏa mãn: $M - (19x^2y + xy^2) = 2x^2y + 5xy^2$

Tìm đa thức M và tính giá trị của M tại $x = 2$ và $y = -1$

Lời giải

$$\text{Ta có: } M - (19x^2y + xy^2) = 2x^2y + 5xy^2$$

$$M = 2x^2y + 5xy^2 + 19x^2y + xy^2$$

$$M = (2x^2y + 19x^2y) + (5xy^2 + xy^2) = 21x^2y + 6xy^2$$

Thay $x = 2$ và $y = -1$ vào biểu thức M ta được:

$$M = 21.2^2.(-1) + 6.2.(-1)^2 = -84 + 12 = -72$$

Vậy với $x = 2$ và $y = -1$ thì $M = -72$

Câu 14. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Tìm giá trị của m để đa thức sau là đa thức bậc 3 theo biến x :

$$f(x) = (m^2 - 25)x^4 + (20 + 4m)x^3 + 7x^2 - 9$$

Lời giải

Ta có: $f(x) = (m^2 - 25)x^4 + (20 + 4m)x^3 + 7x^2 - 9$ là đa thức bậc 3 biến x khi:

$$m^2 - 25 = 0 \text{ và } 20 + 4m \neq 0$$

$$\Rightarrow m = \pm 5 \text{ và } m \neq -5$$

Vậy $m = 5$ thì $f(x)$ là đa thức bậc 3 biến x .

Câu 15. (HSG 7 huyện Chương Mỹ 2020 - 2021)

Cho hai đa thức: $f(x) = -5x^5 + 3x^3 + 2x^2 + x + \frac{1}{2}$ và $g(x) = 5x^5 - 3x^3 - x^2 - x + \frac{1}{2}$.

Tính $h(x) = f(x) + g(x)$.

Lời giải

Ta có: $h(x) = f(x) + g(x) = -5x^5 + 3x^3 + 2x^2 + x + \frac{1}{2} + 5x^5 - 3x^3 - x^2 - x + \frac{1}{2} = x^2 + 1$.

Câu 16. (HSG 7 huyện Mỹ Đức 2022 - 2023)

Tìm đa thức M biết rằng: $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$.

Lời giải

Từ $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$ suy ra:

$$M = 6x^2 + 9xy - y^2 - (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2 - 5x^2 + 2xy = x^2 + 11xy - y^2.$$

Câu 17. (HSG 7 huyện Cửa Lò 2020 - 2021)

Cho hai đa thức: $A(x) = -2x^5 + x^4 - 2x^2 - 7x - 3$ và $B(x) = -2x^5 + x^4 + 3x^2 + 3x - 3$.

Tính $M(x) = A(x) + B(x)$; $N(x) = A(x) - B(x)$.

Lời giải

Ta có: $A(x) = -2x^5 + x^4 - 2x^2 - 7x - 3$ và $B(x) = -2x^5 + x^4 + 3x^2 + 3x - 3$.

Suy ra: $M(x) = A(x) + B(x) = -4x^5 + 2x^4 + x^2 - 4x - 6$.

$$N(x) = A(x) - B(x) = -5x^2 - 10x.$$

Câu 18. (HSG 7 huyện Yên Mỹ 2021 - 2022)

Cho hai đa thức:

$$P(x) = x^5 - 2x^3 + 3x^4 - 9x^2 + 11x - 6 \text{ và } Q(x) = 3x^4 + x^5 - 2(x^3 + 4) - 10x^2 + 9x.$$

Tính $M(x) = P(x) - Q(x)$.

Lời giải

$$M(x) = P(x) - Q(x)$$

$$M(x) = (x^5 - 2x^3 + 3x^4 - 9x^2 + 11x - 6) - (3x^4 + x^5 - 2(x^3 + 4) - 10x^2 + 9x)$$

$$M(x) = x^2 + 2x + 2.$$

Câu 19. (HSG 7 huyện Cửa Lò 2022 - 2023)

Cho hai đa thức: $A(x) = -2x^5 + x^4 - 2x^2 - 7x - 3$ và $B(x) = -2x^5 + x^4 + 3x^2 + 3x - 3$.

Tính $M(x) = A(x) + B(x)$; $N(x) = A(x) - B(x)$.

Lời giải

Ta có: $A(x) = -2x^5 + x^4 - 2x^2 - 7x - 3$ và $B(x) = -2x^5 + x^4 + 3x^2 + 3x - 3$. Suy ra:

$$M(x) = A(x) + B(x) = -4x^5 + 2x^4 + x^2 - 4x - 6;$$

$$N(x) = A(x) - B(x) = -5x^2 - 10x.$$

Câu 20. (HSG 7 huyện Tân Kỳ 2021 - 2022)

Tìm hệ số a trong đa thức $P(x) = 2x^2 + ax + 2$ biết $x = -2$ là nghiệm của đa thức $P(x)$.

Lời giải

Vì $x = -2$ là nghiệm của đa thức nên $P(-2) = 0 \Rightarrow 2.2^2 + 2.a + 2 = 0 \Rightarrow a = -5$.

Vậy $a = -5$.

Câu 21. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2018 - 2019)

Cho đa thức $f(x) = ax + b$. Tìm a, b biết $f(1) = 3$ và $f(-2) = 0$.

Lời giải

Ta có $f(1) = 3 \Rightarrow a.1 + b = 3 \Rightarrow a + b = 3 \Rightarrow b = 3 - a$

$$f(-2) = 0 \Rightarrow -2a + b = 0 \Rightarrow -2a + 3 - a = 0 \Rightarrow -3a = -3 \Rightarrow a = 1$$

Thay $a = 1$ vào $b = 3 - a$ ta được $b = 2$

Vậy $a = 1$; $b = 2$.

Câu 22. (HSG 7 huyện Chương Mỹ 2018 - 2019)

Cho 2 đa thức $f(x) = x^2 + 2mx + m^2 - 2$ và $g(x) = m^2x^2 + 2(m-1)x + 5$

a) Tìm m để $f(-1) = g(1)$.

b) Với giá trị m tìm được ở câu a, tìm đa thức $h(x) = 2f(x) - g(x)$.

c) Với đa thức $h(x)$ ở câu b. Tìm nghiệm của đa thức $h(x) + 3x^2 - 9$.

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } f(-1) = (-1)^2 + 2m.(-1) + m^2 - 2 = m^2 - 2m - 1$$

$$g(1) = m^2.1^2 + 2(m-1).1 + 5 = m^2 + 2m + 3$$

$$\text{Để } f(-1) = g(1) \Rightarrow m^2 - 2m - 1 = m^2 + 2m + 3 \Rightarrow m = -1.$$

b) Với $m = -1$ thì $f(x) = x^2 - 2x - 1$ và $g(x) = x^2 - 4x + 5$

$$h(x) = 2f(x) - g(x) = 2 \cdot (x^2 - 2x - 1) - (x^2 - 4x + 5)$$

$$h(x) = x^2 - 7.$$

c) Ta có $h(x) + 3x^2 - 9 = 0$

$$\Rightarrow x^2 - 7 + 3x^2 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 4$$

$$\Rightarrow x = \pm 2$$

Câu 23. (HSG 7 huyện Thường Tín 2018 - 2019)

Cho $f(x) = x(x^{19} - x^5 - x^{2018})$; $g(x) = x^{2019} - x^{20} + 9 + x^2(x^4 + x^2 + 2)$. Tính

$$k(x) = f(x) + g(x)$$

Lời giải

Ta có $k(x) = f(x) + g(x)$

$$k(x) = x(x^{19} - x^5 - x^{2018}) + x^{2019} - x^{20} + 9 + x^2(x^4 + x^2 + 2)$$

$$k(x) = x^4 + 2x^2 + 9.$$

Câu 24. (HSG 7 trường THCS Nhơn Trí 2018 - 2019)

Tìm giá trị của m để đa thức sau là đa thức bậc 3 theo biến x

$$f(x) = (m^2 - 25)x^4 + (20 + 4m)x^3 + 7x^2 - 9$$

Lời giải

$f(x) = (m^2 - 25)x^4 + (20 + 4m)x^3 + 7x^2 - 9$ là đa thức bậc 3 biến x khi :

$$\begin{cases} m^2 - 25 = 0 \\ 20 + 4m \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \pm 5 \\ m \neq -5 \end{cases} \Rightarrow m = 5$$

Vậy $m = 5$ thì $f(x)$ là đa thức bậc 3 biến x .

Câu 25. (HSG 7 huyện Tân Tạo và Huyện Phú Khánh_2018-2019)

Tìm đa thức bậc hai biết $f(x) - f(x-1) = x$. Từ đó áp dụng tính tổng $S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$.

Lời giải

Đa thức bậc hai cần tìm có dạng: $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$

$$\text{Ta có: } f(x-1) = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$$

$$f(x) - f(x-1) = 2ax - a + b = x \Rightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ b - a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy đa thức cần tìm là $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + c$ (c là hằng số tùy ý)

Áp dụng:

$$\text{Với } x=1, \text{ ta có: } 1 = f(1) - f(0)$$

Với $x = 2$, ta có: $1 = f(2) - f(1)$

.....
 Với $x = n$, ta có: $n = f(n) - f(n-1)$

$$\Rightarrow S = 1 + 2 + 3 + \dots + n = f(n) - f(0) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + c - c = \frac{n(n+1)}{2}$$

Câu 26. (HSG 7 huyện năm 2022 - 2023)

Cho hai đa thức $f(x) = x^5 - 3x^2 + 7x^4 - 9x^3 + x^2 - \frac{1}{4}x$;

$$g(x) = 5x^4 - x^5 + x^2 - 2x^3 + 3x^2 - \frac{1}{4}$$

Tính $f(x) + g(x)$ và $f(x) - g(x)$

Lời giải

$$f(x) + g(x) = 12x^4 - 11x^3 + 2x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$

$$f(x) - g(x) = 2x^5 + 2x^4 - 7x^3 - 6x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

Câu 27. (HSG 7 huyện Hồng Ngự, tỉnh, trường THCS Hậu A 2022 - 2023)

Cho đa thức $P(x) = x^4 - 3x^2 + \frac{1}{2} - x$. Tìm các đa thức $Q(x)$, $R(x)$ sao cho:

a) $P(x) + Q(x) = x^5 - 2x^2 + 1$

b) $P(x) - R(x) = x^3$

Lời giải

a) Ta có: $P(x) + Q(x) = x^5 - 2x^2 + 1$

$$\Rightarrow Q(x) = P(x) - (x^5 - 2x^2 + 1)$$

$$= x^4 - 3x^2 + \frac{1}{2} - x - x^5 + 2x^2 - 1$$

$$= -x^5 + x^4 - x^2 - x - \frac{1}{2}$$

Vậy $Q(x) = -x^5 + x^4 - x^2 - x - \frac{1}{2}$

b) $P(x) - R(x) = x^3$

$$\Rightarrow R(x) = P(x) - x^3$$

$$= x^4 - 3x^2 + \frac{1}{2} - x - x^3$$

$$= x^4 - x^3 - 3x^2 - x + \frac{1}{2}$$

Vậy $R(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 - x + \frac{1}{2}$

Câu 28. (HSG 7 huyện Thạch Thành 2017 - 2018)

1) Tìm đa thức A biết: $A - (3xy - 4y^2) = x^2 - 7xy + 8y^2$

2) Cho hàm số $y = f(x) = ax + 2$ có đồ thị đi qua điểm $A(a-1; a^2 + a)$

a) Tìm a

b) Với a vừa tìm được, tìm giá trị của x thỏa mãn $f(2x-1) = f(1-2x)$

Lời giải

1) $A - (3xy - 4y^2) = x^2 - 7xy + 8y^2$

$$A = x^2 - 7xy + 8y^2 + (3xy - 4y^2)$$

$$A = x^2 - 4xy + 4y^2$$

2)

a) Vì đồ thị hàm số $y = f(x) = ax + 2$ đi qua điểm $A(a-1; a^2 + a)$ nên:

$$a^2 + a = a(a-1) + 2$$

$$\Rightarrow a^2 + a = a^2 - a + 2$$

$$\Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

b) Với $a = 1 \Rightarrow y = f(x) = x + 2$

ta có: $f(2x-1) = f(1-2x)$

$$\Rightarrow (2x-1) + 2 = (1-2x) + 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Câu 29. (Đề thi HSG 7 năm học 2017 - 2018)

Cho 2 đa thức: $P(x) = x^2 + 2mx + m^2$; $Q(x) = x^2 + (2m+1)x + m^2$

Tìm m biết $P(1) = Q(-1)$

Lời giải

$$P(1) = 1^2 + 2m \cdot 1 + m^2 = m^2 + 2m + 1$$

$$Q(-1) = 1 - 2m - 1 + m^2 = m^2 - 2m$$

Đề $P(1) = Q(-1)$

$$\Rightarrow m^2 + 2m + 1 = m^2 - 2m$$

$$\Rightarrow 4m = -1 \Rightarrow m = -\frac{1}{4}$$

Vậy $m = -\frac{1}{4}$ thì thỏa mãn $P(1) = Q(-1)$.

Câu 30. (HSG 7 huyện Khoái Châu 2014 - 2015)

Xác định đa thức $P(x)$ có bậc 2 với hệ số cao nhất bằng 1 và nhận hai số 0 ; -3 làm nghiệm.

Lời giải

Vì đa thức $P(x)$ có bậc 2 với hệ số cao nhất bằng 1 nên $P(x) = x^2 + ax + b$ (trong đó a, b là các hệ số)

Có 0 là một nghiệm của đa thức $P(x)$, nên $P(0) = b = 0$

Có -3 là một nghiệm của đa thức $P(x)$, nên: $P(-3) = 9 - 3a + 0 = 0 \Rightarrow a = 3$

Vậy đa thức $P(x) = x^2 + 3x$ là đa thức cần tìm.

Câu 31. (HSG 7 huyện Bình Lục 2022 - 2023)

Tìm đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$ biết $P(-1) = -1$; $P(0) = 1$; $P(1) = 3$ với x là biến số và a, b, c là các hệ số.

Lời giải

Theo đề bài, ta có:

$$P(-1) = -1 \Rightarrow a - b + c = -1$$

$$P(0) = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$P(1) = 3 \Rightarrow a + b + c = 3$$

Kết hợp lại, tìm được $a = 0, b = 2, c = 1$

Vậy đa thức cần tìm là $P(x) = 2x + 1$

Câu 32. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Hùng Thư năm 2017 - 2018)

Cho hai đa thức: $A = 5xy^2 + 6x - 3x^2y + 7y^2 + 1$; $B = 5x + 13xy^2 + 3y^2 - 6x^2y + 5$

Tính $A + B$; $A - B$

Lời giải:

$$A + B = 18xy^2 - 9x^2y + 10y^2 + 11x + 6$$

$$A - B = -8xy^2 + 3x^2y + 4y^2 + x - 4$$

Câu 33. (HSG 7 huyện Cự Khê, 2016- 2017)

Cho các đa thức : $P(x) = 3x^4 - x^3 + 4x^2 + 2x + 1$; $Q(x) = -2x^4 - x^2 + x - 2$

a) Tính $P(x) + Q(x)$

b) Tìm đa thức $H(x)$ biết $Q(x) - H(x) = -2x^4 - 2$

c) Tìm nghiệm của đa thức $H(x)$

Lời giải

a) $P(x) + Q(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 + 3x - 1$

b) Ta có: $Q(x) - H(x) = -2x^4 - 2$

$$H(x) = Q(x) + 2x^4 + 2 = -2x^4 - x^2 + x - 2 + 2x^4 + 2 = -x^2 + x$$

c) Xét $H(x) = 0$

$$H(x) = -x^2 + x = x(1 - x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 1$$

Vậy đa thức $H(x)$ có nghiệm là $x = 0$; $x = 1$.

$$\Rightarrow f(-4) = \frac{10127}{17}$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Lục Nam 2020 - 2021)

Cho đa thức $f(x) = x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \dots - 101x + 101$. Giá trị của $f(100)$ là:

- A. -1 . B. 1 . C. 100 . D. 101 .

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } f(x) &= x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \dots - 101x + 101 \\ &= x^{10} - 100x^9 - x^9 + 100x^8 + x^8 - \dots - 100x^3 - x^3 + 100x^2 + x^2 - 100x - x + 101 \\ &= (x^{10} - 100x^9) - (x^9 - 100x^8) + (x^8 - 100x^7) \dots - (x^3 - 100x^2) + (x^2 - 100x) - x + 101 \\ &= x^9(x - 100) - x^8(x - 100) + x^7(x - 100) \dots - x^2(x - 100) + x(x - 100) - x + 101 \\ &= (x - 100)(x^9 - x^8 + x^7 \dots - x^2 + x) - x + 101 \end{aligned}$$

Với $x = 100$ ta có:

$$\begin{aligned} f(100) &= (100 - 100)(100^{21} - 100^{20} + \dots - 100^2 + 100) - 100 + 101 \\ &= 0 \cdot (100^{21} - 100^{20} + \dots - 100^2 + 100) - 100 + 101 \\ &= 0 - 100 + 101 = 1 \end{aligned}$$

Vậy $f(x) = 1$ với $x = 100$.

Cách 2:

Với $x = 100 \Rightarrow x + 1 = 101$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \dots - 101x + 101 \\ f(x) &= x^{10} - (x+1)x^9 + (x+1)x^8 - (x+1)x^7 + \dots - (x+1)x + (x+1) \\ f(x) &= x^{10} - x^{10} - x^9 + x^9 + x^8 - x^8 - x^7 + \dots - x^2 - x + x + 1 \\ f(x) &= 1 \end{aligned}$$

Vậy $f(x) = 1$ với $x = 100$.

Câu 4. (HSG 7 huyện Lục Nam 2020 - 2021)

Cho đa thức $P(x)$ thỏa mãn: $f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$. Giá trị của $f(2)$ là:

- A. $\frac{13}{24}$. B. $-\frac{13}{24}$. C. $\frac{23}{34}$. D. $-\frac{13}{32}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Với } x = 2 \text{ ta có: } f(2) + 3f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^2 = 4 \quad (1)$$

$$\text{Với } x = \frac{1}{2} \text{ ta có: } f\left(\frac{1}{2}\right) + 3f(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$\begin{cases} f(2) + 3f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^2 = 4 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) + 3f(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Suy ra $f(2) = \frac{-13}{32}$

Câu 5. (HSG 7 huyện Lục Nam 2020 - 2021)

Cho $C = 2x - 2y + 13x^3y^2(x - y) + 15(y^2x - x^2y) + \left(\frac{234}{216}\right)^0$ biết $x - y = 0$.

Giá trị các biểu thức sau C bằng:

- A.** 1 **B.** -1 **C.** 2 **D.** 0

Lời giải

Chọn A

Ta có: $C = 2(x - y) + 13x^3y^2(x - y) + 15xy(y - x) + \left(\frac{234}{216}\right)^0$

$C = 2(x - y) + 13x^3y^2(x - y) - 15xy(x - y) + 1$

$C = (x - y)(2 + 13x^3y^2 - 15xy) + 1$

Thay $x - y = 0$ vào C ta được: $C = 0 \cdot (2 + 13x^3y^2 - 15xy) + 1 = 0 + 1 = 1$

Vậy $C = 1$ với $x - y = 0$.

Câu 6. (HSG 7 huyện Thanh Ba 2021 - 2022)

Tổng các hệ số của đa thức nhận được sau khi bỏ dấu ngoặc trong biểu thức

$P(x) = (8x^2 + 3x - 10)^{2021} \cdot (8x^2 + x - 10)^{2022}$ là

- A.** -10^{4043} **B.** 1 **C.** 2021 **D.** 2022

Lời giải

Chọn B

Tổng các hệ số của đa thức $P(x)$ là $P(1)$.

Ta có: $P(1) = (8 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 10)^{2021} \cdot (8 \cdot 1^2 + 1 - 10)^{2022} = 1^{2021} \cdot (-1)^{2022} = 1 \cdot 1 = 1$.

Do đó tổng các hệ số của đa thức $P(x)$ nhận được sau khi bỏ dấu ngoặc trong biểu thức

$P(x) = (8x^2 + 3x - 10)^{2021} \cdot (8x^2 + x - 10)^{2022}$ là 1.

Câu 7. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2021 - 2022)

Cho $x + y = 0$. Giá trị của đa thức $D = 3xy(x + y) + 2x^3y + 2x^2y^2 + 4$ là

- A.** 0 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Lời giải

Chọn C

Ta có: $D = 3xy(x + y) + 2x^3y + 2x^2y^2 + 4$
 $= 3xy(x + y) + 2x^2y(x + y) + 4 = 4$ (vì $x + y = 0$).
 Vậy $D = 4$ khi $x + y = 0$.

Câu 8. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2021 - 2022)

Cho $f(x) = ax^3 + 4x(x^2 + 1) + 8$ và $g(x) = x^3 + 4x(bx + 1) + c - 3$, trong đó a, b, c là các hằng số. Để $f(x) = g(x)$ thì giá trị của số a là

- A. 3. B. -3. C. 0. D. 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f(x) = ax^3 + 4x(x^2 + 1) + 8 = ax^3 + 4x^3 + 4x + 8 = (a + 4)x^3 + 4x + 8$.

$g(x) = x^3 + 4x(bx + 1) + c - 3 = x^3 + 4bx^2 + 4x + c - 3$.

Để $f(x) = g(x)$ thì $a + 4 = 1$. Suy ra: $a = -3$.

Câu 9. (HSG 7 trường THCS Đào Duy Từ 2018 - 2019)

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định với mọi $x > 1$. Biết $f(n) = (n - 1) \cdot f(n - 1)$ và $f(1) = 1$. Giá trị của $f(4)$ là:

- A. 3 B. 5 C. 6 D. 1

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(4) = (4 - 1)f(4 - 1) \Rightarrow f(4) = 3f(3)$

$f(3) = (3 - 1)f(3 - 1) \Rightarrow f(3) = 2f(2)$

$f(2) = (2 - 1)f(2 - 1) \Rightarrow f(2) = f(1)$

Do đó $f(4) = 6$.

Câu 10. (HSG 7 huyện Sơn Động 2022 - 2023)

Giá trị biểu thức: $A = 7x^2y - 5xy^2 - 11x^2y - 10xy^2 + 15xy^2 + 4x^2y - 2023$ tại $x = 1$, $y = -0,5$ là:

- A. 0. B. 1. C. -2023. D. 2023.

Lời giải

Chọn C

Thay $x = 1$ vào biểu thức A , ta được:

$A = 7x^2y - 5xy^2 - 11x^2y - 10xy^2 + 15xy^2 + 4x^2y - 2023$

$= 7y - 5y^2 - 11y - 10y^2 + 15y^2 + 4y - 2023$

$= (7y - 11y + 4y) + (-5y^2 - 10y^2 + 15y^2) - 2023 = -2023$.

Vậy giá trị của biểu thức A tại $x = 1$, $y = -0,5$ là -2023 .

Câu 11. (HSG 7 huyện Lâm Thao 2022 - 2023)

Cho biết $x^3 - 2x + 3 = 0$. Giá trị của biểu thức $P(x) = -5x^4 + 10x^2 - 15x + 1$ là.

- A. $P(x) = 0$. B. $P(x) = 1$. C. $P(x) = -5$. D. $P(x) = -6$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } P(x) = -5x^4 + 10x^2 - 15x + 1 = -5x(x^3 - 2x + 3) + 1 = 0 + 1 = 1$$

Câu 12. (HSG 7 huyện Tam Nông 2022 - 2023)

Cho $P(x) = x^{2023} - 2023x^{2022} - 2023x^{2021} - \dots - 2023x^2 - 2023x + 1$. Tính $P(2024)$.

- A. 2023. B. -2023. C. 2024. D. 2025.

Lời giải

Chọn D

$$P(x) = x^{2023} - 2023x^{2022} - 2023x^{2021} - \dots - 2023x^2 - 2023x + 1$$

$$P(x) = x^{2023} - (2023x^{2022} + 2023x^{2021} + \dots + 2023x^2 + 2023x) + 1$$

$$P(x) = x^{2023} - 2023(x^{2022} + \dots + x^2 + x) + 1$$

$$\text{Đặt } A = x^{2022} + \dots + x^2 + x$$

$$\Rightarrow x.A = x^{2023} + \dots + x^3 + x^2$$

$$\Rightarrow x.A - A = x^{2023} + \dots + x^3 + x^2 - (x^{2022} + \dots + x^2 + x)$$

$$\Rightarrow A(x-1) = x^{2023} - x$$

$$\Rightarrow A = \frac{x^{2023} - x}{x-1}$$

$$\text{Do đó } P(x) = x^{2023} - 2023 \cdot \frac{x^{2023} - x}{x-1} + 1$$

$$\Rightarrow P(2024) = 2024^{2023} - 2023 \cdot \frac{2024^{2023} - 2024}{2024-1} + 1$$

$$\Rightarrow P(2024) = 2024 + 1 = 2025.$$

Câu 13. (HSG 7 huyện Tam Nông 2022 - 2023)

Cho x, y thỏa mãn $(x-2)^4 + (y-1)^{2022} \leq 0$ thì giá trị $19x^2y + 4xy^2$ bằng

- A. 80. B. 84. C. 83. D. 85.

Lời giải

Chọn B

Ta có $(x-2)^4 \geq 0$, $(y-1)^{2022} \geq 0$ nên x, y thỏa mãn $(x-2)^4 + (y-1)^{2022} \leq 0$ khi

$$(x-2)^4 = 0 \text{ và } (y-1)^{2022} = 0$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ và } y = 1$$

$$\text{Khi đó } 19x^2y + 4xy^2 = 19.4.1 + 4.2.1 = 84$$

Câu 14. (HSG 7 huyện Tam Nông 2022 - 2023)

Giá trị của biểu thức $Q = a^2 - b^2 + c^2$ biết $ab = 2, bc = 6$ và $ac = 3$ là:

- A. 10. B. -6. C. -10. D. 6.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Từ } ab = 2, bc = 6 \Rightarrow \frac{ab}{bc} = \frac{2}{6} \Rightarrow a = \frac{1}{3}c \Rightarrow \frac{1}{3}c.c = 3 \Rightarrow c = \pm 3$$

$$\Rightarrow a = \pm 1, b = \pm 2$$

$$\Rightarrow Q = a^2 - b^2 + c^2 = 1 - 4 + 9 = 6$$

Câu 15. (HSG 7 huyện Thanh Thủy 2022 - 2023)

Cho biết $x^3 - 2x + 3 = 0$. Giá trị của biểu thức $P(x) = -4x^4 + 8x^2 - 12x + 5$ là

- A.** $P(x) = 0$. **B.** $P(x) = 5$. **C.** $P(x) = -3$. **D.** $P(x) = -5$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } P(x) = -4x^4 + 8x^2 - 12x + 5 = -4x(x^3 - 2x + 3) + 5 = 0 + 5 = 5$$

Câu 16. (HSG 7 huyện Tân Yên 2022 - 2023)

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định với mọi $x > 1$. Biết $f(n) = (n-1).f(n-1)$ và $f(1) = 1$. Giá trị của $f(5)$ là

- A.** 10. **B.** 24. **C.** 6. **D.** 16.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } f(1) = 1$$

$$f(2) = (2-1).f(1) = 1$$

$$f(3) = (3-1).f(2) = 2.1 = 2$$

$$f(4) = (4-1).f(3) = 3.2 = 6$$

$$f(5) = (5-1).f(4) = 4.6 = 24.$$

Câu 17. (HSG 7 huyện đề khảo sát lần 3, 2022 - 2023)

Cho hàm số $f(x)$ sao cho với mọi $x \neq 0$ ta đều có $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) + f(1) = 6$. Giá trị của

$f(-1)$ là

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) + f(1) = 6 \quad (*)$$

$$\text{Thay } x = 1 \text{ vào } (*) \text{ ta được: } f(1) + f(1) + f(1) = 6$$

$$\Rightarrow 3f(1) = 6 \Rightarrow f(1) = 2$$

$$\text{Thay } x = -1 \text{ vào } (*) \text{ ta được: } f(-1) + f(-1) + f(1) = 6$$

$$\Rightarrow 2f(-1) + f(1) = 6 \Rightarrow 2f(-1) + 2 = 6 \Rightarrow f(-1) = 0$$

$$\text{Vậy } f(-1) = 0.$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3.1} + \frac{1}{4.2} + \frac{1}{5.3} + \dots + \frac{1}{2022.2020} + \frac{1}{2023.2021} + \frac{1}{2.2023} + \frac{1}{2.2023} \\
 &= \left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{2021.2023} \right) + \left(\frac{1}{2.4} + \frac{1}{4.2} + \dots + \frac{1}{2020.2022} \right) + \frac{1}{2.2023} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \dots + \frac{2}{2021.2023} \right) + \left(\frac{2}{2.4} + \frac{2}{4.2} + \dots + \frac{2}{2020.2022} \right) \right] + \frac{1}{2.2023} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2023} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2022} \right) \right] + \frac{1}{2.2023} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2023} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2022} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3033}{2022} - \frac{1}{2022} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3032}{2022} = \frac{758}{1011}
 \end{aligned}$$

Câu 3. (HSG 7 Huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức $C = x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \dots - 101x + 101$ với $x = 100$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } C &= x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \dots - 101x + 101 \\
 &= x^{10} - 100x^9 - x^9 + 100x^8 + x^8 - 100x^7 - x^7 + \dots - 100x - x + 100 + 1 \\
 &= x^9(x - 100) - x^8(x - 100) + x^7(x - 100) - \dots + x(x - 100) - (x - 100) + 1 \\
 &= (x - 100)(x^9 - x^8 + x^7 - \dots + x - 1) + 1
 \end{aligned}$$

Với $x = 100$ ta có: $C = (100 - 100)(100^9 - 100^8 + \dots + 100 - 1) + 1 = 1$

Vậy $C = 1$ với $x = 100$.

Câu 4. (HSG 7 Đề chọn HSG cấp TP Bắc Giang, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

Cho đa thức bậc ba $Q(x)$ với hệ số x^3 là một số nguyên dương và $Q(5) - Q(4) = 2023$. Chứng minh rằng $Q(7) - Q(2)$ là hợp số.

Lời giải

Đa thức bậc ba $Q(x)$ với hệ số x^3 là một số nguyên dương nên

$$Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \in \mathbb{N}^*)$$

Ta có: $Q(5) = 125a + 25b + 5c + d$

$$Q(4) = 64a + 16b + 4c + d$$

$$\Rightarrow Q(5) - Q(4) = 61a + 9b + c = 2023 \quad (1)$$

Lại có $Q(7) = 343a + 49b + 7c + d$

$$Q(2) = 8a + 4b + 2c + d$$

$$\Rightarrow Q(7) - Q(2) = 335a + 45b + 5c \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $Q(7) - Q(2) = 30a + (305a + 45b + 5c) = 30a + 10115$

Vì $(30a + 10115) : 5$ nên $[Q(7) - Q(2)] : 5 \quad (a \in \mathbb{N}^*)$

$$\text{Mà } Q(7) - Q(2) > 5$$

Do vậy $Q(7) - Q(2)$ là hợp số.

Câu 5. (HSG 7 Giao lưu HSG TP Chí Linh 2022 - 2023)

Cho đa thức $A(x) = x^4 - 123x^3 + 123x^2 - 123x + 125$. Tính $A(122)$.

Lời giải

Khi $x = 122$ thì ta có $123 = x + 1$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } A(x) &= x^4 - (x+1)x^3 + (x+1)x^2 - (x+1)x + 125 \\ &= x^4 - x^4 - x^3 + x^3 + x^2 - x^2 - x + 125 \\ &= -x + 125 \end{aligned}$$

Vậy $A(122) = -122 + 125 = 3$.

Câu 6. (HSG 7 Đề HSG cấp huyện Hiệp Hòa 2022 - 2023)

Cho đa thức $P(x) = x^6 + 2023x^5 - 2023x^4 + 2023x^3 - 2023x^2 + 2023x - 2023$. Tính $P(-2024)$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} P(-2024) &= (-2024)^6 + 2023 \cdot (-2024)^5 - 2023 \cdot (-2024)^4 \\ &\quad + 2023 \cdot (-2024)^3 - 2023 \cdot (-2024)^2 + 2023 \cdot (-2024) - 2023 \\ P(-2024) &= (-2024)^6 + 2023 \cdot [-2024^5 - 2024^4 - 2024^3 - 2024^2 - 2024^1 - 1] \\ P(-2024) &= (-2024)^6 - 2023 \cdot (2024^5 + 2024^4 + 2024^3 + 2024^2 + 2024 + 1) \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } A = 2024^5 + 2024^4 + 2024^3 + 2024^2 + 2024 + 1$$

$$2024 \cdot A = 2024^6 + 2024^5 + 2024^4 + 2024^3 + 2024^2 + 2024$$

$$2024A - A = 2024^6 - 1$$

$$2023A = 2024^6 - 1$$

$$A = \frac{2024^6 - 1}{2023}$$

$$\text{Khi đó } P(-2024) = (-2024)^6 - 2023 \cdot \frac{2024^6 - 1}{2023}$$

$$P(-2024) = 2024^6 - 2024^6 + 1 = 1$$

Vậy $P(-2024) = 1$

Câu 7. (HSG 7 Đề khảo sát HSG huyện Tiên Hải 2022 - 2023)

Cho đa thức $P = ax^2 + bx + c$ biết $7a - b + 4c = 0$. Chứng minh $P(2) \cdot P(-1)$ không là số dương.

Lời giải

Vì $7a - b + 4c = 0 \Rightarrow b = 7a + 4c$, thay vào biểu thức $P(x)$ ta được:

$$P(x) = ax^2 + (7a + 4c)x + c$$

$$P(2) = a \cdot 2^2 + (7a + 4c) \cdot 2 + c = 4a + 14a + 8c + c = 18a + 9c = 9(2a + c)$$

$$P(-1) = a \cdot (-1)^2 + (7a + 4c) \cdot (-1) + c = a - 7a - 4c + c = -6a - 3c \\ = (-3) \cdot (2a + c)$$

$$\text{Ta có } P(2) \cdot P(-1) = 9 \cdot (2a + c) \cdot (-3) \cdot (2a + c) = -27(2a + c)^2$$

Vì $(2a + c)^2 \geq 0$ với mọi a, c nên $-27(2a + c)^2 \leq 0$.

Vậy $P(2) \cdot P(-1)$ không là số dương.

Câu 8. (HSG 7 Đề giao lưu HSG Quảng Xương 2022 - 2023)

Cho đa thức $f(x) = 2x^2 + 6x$

a) Tính các giá trị $f(-1)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$

b) Tìm nghiệm của đa thức $f(x)$.

Lời giải

a) Ta có: $f(x) = 2x^2 + 6x$

$$\text{Khi đó } f(-1) = 2(-1)^2 + 6(-1) = 2 - 6 = -4$$

$$\text{Tương tự: } f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\text{Vậy: } f(-1) = -4; f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}$$

b) Ta có: $f(x) = 2x^2 + 6x = 0$

$$\text{Hay } 2x^2 + 6x = 0$$

$$\text{Suy ra: } 2x(x + 3) = 0. \text{ Do đó: } 2x = 0 \text{ hoặc } x + 3 = 0$$

$$\text{Nên } x = 0 \text{ hoặc } x = -3$$

$$\text{Vậy } x = 0; x = -3$$

Câu 9. (HSG 7 Đề khảo sát chất lượng HSG huyện Nghi Lộc 2022 - 2023)

Cho đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Biết $P(1) = 15$ và $P(2) = 30$. Tính hiệu $P(3) - P(0)$.

Lời giải

Cho đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

Vì $P(1) = 15$ thay vào $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

$$\text{Ta có } 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 15$$

$$a + b + c + 1 = 15$$

$$a + b + c = 14$$

Vì $P(2) = 30$ thay vào $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

$$\text{Ta có } 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 30$$

$$4a + 2b + c = 22$$

$$a + b + c + 3a + b = 22$$

Mà $a + b + c = 14$ nên

$$14 + 3a + b = 22$$

$$3a + b = 8$$

$$+) P(3) = 3^3 + 3^2a + 3b + c = 27 + 9a + 3b + c$$

$$+) P(0) = 0^3 + 0^2.a + 0.b + c = c$$

$$P(3) - P(0) = (27 + 9a + 3b + c) - c = 27 + 9a + 3b$$

$$= 27 + 3(3a + b) = 27 + 3.8 = 51 \text{ (vì } 3a + b = 8)$$

Vậy với $P(1) = 15$ và $P(2) = 30$ thì $P(3) - P(0) = 51$.

Câu 10. (HSG 7 Đề Olympic thị xã Hoàng Mai 2022 - 2023)

Tính giá trị của đa thức $M = 5x^4 + 9x^2y^2 + 4y^4 + 5y^2$ với $x^2 + y^2 = 5$.

Lời giải

$$\text{Ta có } M = 5x^4 + 9x^2y^2 + 4y^4 + 5y^2$$

$$= 5x^4 + 5x^2y^2 + 4x^2y^2 + 4y^4 + 5y^2$$

$$= 5x^2(x^2 + y^2) + 4y^2(x^2 + y^2) + 5y^2$$

Thay $x^2 + y^2 = 5$ vào đa thức M ta được:

$$M = 5 \cdot x^2 \cdot 5 + 4y^2 \cdot 5 + 5y^2 = 25x^2 + 25y^2 = 25(x^2 + y^2) = 25 \cdot 5 = 125$$

Vậy $M = 125$ với $x^2 + y^2 = 5$

Câu 11. (HSG 7 Đề giao lưu HSG huyện Vĩnh Lộc – Thanh Hóa 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức $P = x^3 - y^2 + x + x^2y - 2x^2 + 2021 + 3y - xy$ với $x + y = 2$.

Lời giải

$$\text{Ta có } P = x^3 - y^2 + x + x^2y - 2x^2 + 2021 + 3y - xy$$

$$= x^2(x + y) - y(x + y) - 2x^2 + 3y + x + 2021$$

Thay $x + y = 2$ vào đa thức P ta được:

$$P = 2x^2 - 2y - 2x^2 + 3y + x + 2021 = y + x + 2021 = 2 + 2021 = 2023$$

Vậy $P = 2023$ với $x + y = 2$.

Câu 12. (HSG 7 Đề giao lưu HSG huyện Chương Mỹ 2022 - 2023)

Cho biểu thức $f(x) = ax^2 + bx + c$, biết rằng giá trị của biểu thức $f(x)$ tại $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ lần lượt bằng 2023; 2027 và 2025. Tính giá trị của biểu thức $f(x)$ tại $x = 2$.

Lời giải

$$\text{Ta có } f(0) = c = 2023$$

$$f(1) = a + b + c = 2027 \Rightarrow a + b = 2027$$

$$f(-1) = a - b + c = 2025 \Rightarrow a - b = 2025$$

$$\Rightarrow a = 2026; b = 1$$

Suy ra $f(x) = 2026x^2 + x$

Ta có $f(2) = 2026 \cdot 2^2 + 2 = 8106$.

Vậy $f(2) = 8106$.

Câu 13. (HSG 7 huyện Cẩm Khê 2022 – 2023)

Cho đa thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ (x là ẩn, a, b, c là hệ số).

Biết $f(0) = 2022$; $f(1) = 2023$; $f(-1) = 2021$. Tính $f(-2022)$.

Lời giải

Xét $x = 0$; $f(0) = 2022 \Rightarrow c = 2022$

Xét $x = 1$; $f(1) = 2023 \Rightarrow a + b + c = 2023 \Rightarrow a + b = 1$ (1)

Xét $x = -1$; $f(-1) = 2021 \Rightarrow a - b + c = 2021 \Rightarrow a - b = -1$ (2)

Cộng vế (1) và (2) $\Rightarrow a = 0$

Thay $a = 0$ vào (1) ta được $b = 1$

Từ đó ta tìm được $f(x) = x + 2022 \Rightarrow f(-2022) = 0$

Câu 14. (HSG 7 huyện Thường Xuân tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là hệ số biết: $f(x+1) - f(x) = 2x - 3$.

Tính giá trị biểu thức: $P = \frac{f(5) - f(2)}{9}$.

Lời giải

Do $f(x)$ là đa thức bậc hai. Gọi $f(x) = ax^2 + bx + c$

Theo đề bài: $f(x+1) - f(x) = 2x - 3$

$$\Rightarrow a(x+1)^2 + b(x+1) + c - (ax^2 + bx + c) = 2x - 3$$

$$\Rightarrow a(x^2 + 2x + 1) + b(x+1) + c - ax^2 - bx - c = 2x - 3$$

$$\Rightarrow 2ax + a + b = 2x - 3 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + c$$

$$\text{Khi đó: } P = \frac{f(5) - f(2)}{9} = \frac{5^2 - 4 \cdot 5 + c - (2^2 - 4 \cdot 2 + c)}{9} = 1$$

Câu 15. (HSG 7 huyện Cẩm Thủy tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Tìm đa thức M biết rằng: $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$.

Tính giá trị của M khi x, y thỏa mãn: $(2x - 5)^{2018} + (3y + 4)^{2020} \leq 0$.

Lời giải

Ta có: $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2 \Rightarrow M = 6x^2 + 9xy - y^2 - (5x^2 - 2xy)$

$$\Rightarrow M = 6x^2 + 9xy - y^2 - 5x^2 + 2xy = x^2 + 11xy - y^2$$

$$\text{Lại có: } \begin{cases} (2x-5)^{2018} \geq 0 \\ (3y+4)^{2020} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (2x-5)^{2018} + (3y+4)^{2020} \geq 0$$

$$\text{Mà: } (2x-5)^{2018} + (3y+4)^{2020} \leq 0 \Rightarrow (2x-5)^{2018} + (3y+4)^{2020} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2x-5)^{2018} = 0 \\ (3y+4)^{2020} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Thay vào ta được M ta được:

$$M = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 11 \cdot \frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{25}{4} - \frac{110}{3} - \frac{16}{9} = \frac{-1159}{36}$$

Câu 16. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho $A = x^{22} - 2023x^{21} + 2023x^{20} - \dots - 2023x^3 + 2023x^2 - 2023x + 1$.

Tính giá trị biểu thức A với $x = 2022$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= x^{22} - 2023x^{21} + 2023x^{20} - \dots - 2023x^3 + 2023x^2 - 2023x + 1 \\ &= x^{22} - 2022x^{21} - x^{21} + 2022x^{20} + x^{20} - \dots - 2022x^3 - x^3 + 2022x^2 + x^2 - 2022x - x + 1 \\ &= (x^{22} - 2022x^{21}) - (x^{21} - 2022x^{20}) + \dots - (x^3 - 2022x^2) + (x^2 - 2022x) - x + 1 \\ &= x^{21}(x - 2022) - x^{20}(x - 2022) + \dots - x^2(x - 2022) + x(x - 2022) - x + 1 \\ &= (x - 2022)(x^{21} - x^{20} + \dots - x^2 + x) - x + 1 \end{aligned}$$

Với $x = 2022$ ta có:

$$\begin{aligned} A &= (2022 - 2022)(2022^{21} - 2022^{20} + \dots - 2022^2 + 2022) - 2022 + 1 \\ &= 0 \cdot (2022^{21} - 2022^{20} + \dots - 2022^2 + 2022) - 2022 + 1 \\ &= 0 - 2022 + 1 = -2021 \end{aligned}$$

Vậy $A = -2021$ với $x = 2022$

Câu 17. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

a) Cho $|x-2| + |y-1| + (x+y-z-2)^{2020} = 0$. Tính giá trị của: $A = 5x^2y^{2020}z^{2021}$.

b) Tính giá trị của biểu thức: $6x^2 + 5x - 2$ tại x thoả mãn $|x-2| = 1$.

Lời giải

a) Vì $|x-2| \geq 0$ với $\forall x$; $|y-1| \geq 0$ với $\forall y$; $(x+y-z-2)^{2020} \geq 0$ với $\forall x, y, z$

Do đó $|x-2| + |y-1| + (x+y-z-2)^{2020} = 0$ khi

$$\begin{cases} |x-2| = 0 \\ |y-1| = 0 \\ (x+y-z-2)^{2020} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2 = 0 \\ y-1 = 0 \\ x+y-z-2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Do đó $A = 5 \cdot 2^2 \cdot 1^{2020} \cdot 1^{2021} = 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 = 20$

Vậy $A = 20$.

b) Tính giá trị của biểu thức: $6x^2 + 5x - 2$ tại x thỏa mãn $|x - 2| = 1$.

Ta có $|x - 2| = 1$ suy ra:

* $x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3$

* $x - 2 = -1 \Rightarrow x = 1$

Thay $x = 1$ vào biểu thức ta được $6.1^2 + 5.1 - 2 = 9$

Thay $x = 3$ vào biểu thức ta được $6.3^2 + 5.3 - 2 = 67$

Kết luận: $x = 1$ thì giá trị biểu thức bằng 9.

$x = 3$ thì giá trị biểu thức bằng 67.

Câu 18. (HSG 7 huyện Tam Điệp 2021 - 2022)

Cho $f(x) = x^2 + x$. Tính tổng $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(47) + f(48)$

Lời giải

Ta có $f(x) = x^2 + x \Rightarrow f(x) = x(x + 1)$

$$M = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(47) + f(48)$$

$$\Rightarrow M = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 47.48 + 48.49$$

$$\Rightarrow 3M = 1.2(3 - 0) + 2.3(4 - 1) + 3.4(5 - 2) + \dots + 47.48(49 - 46) + 48.49(50 - 47)$$

$$\Rightarrow 3M = 1.2.3 + 2.3.4 - 1.2.3 + 3.4.5 - 2.3.4 + \dots + 47.48.49 - 46.47.48 + 48.49.50 - 47.48.49$$

$$\Rightarrow 3M = 48.49.50$$

$$\Rightarrow M = \frac{48.49.50}{3} = 39200.$$

Câu 19. (HSG 7 huyện Lục Ngạn 2021 - 2022)

Tính giá trị của $K = 10x - 10y + 3x^2y(x - y) + 2021(y^2x - x^2y) + \left(\frac{2022}{2023}\right)^0$, biết $x - y = 0$.

Lời giải

$$\text{Ta có } K = 10x - 10y + 3x^2y(x - y) + 2021(y^2x - x^2y) + \left(\frac{2022}{2023}\right)^0$$

$$= 10(x - y) + 3x^2y(x - y) + 2021xy(y - x) + 1$$

$$\text{Vì } x - y = 0 \text{ nên } K = 0 + 1 = 1$$

$$\text{Vậy } K = 1.$$

Câu 20. (HSG 7 huyện An Nhơn 2021 - 2022)

Tính giá trị của biểu thức $x^{2021} - 2022x^{2020} + 2022x^{2019} - 2022x^{2018} + \dots - 2022x^2 + 2022x + 1$ tại $x = 2021$

Lời giải

Ta có: $x^{2021} - 2022x^{2020} + 2022x^{2019} - 2022x^{2018} + \dots - 2022x^2 + 2022x + 1$

$$= x^{2021} - (2021 + 1)x^{2020} + (2021 + 1)x^{2019} - (2021 + 1)x^{2018} + \dots - (2021 + 1)x^2 + (2021 + 1)x + 1$$

$$= x^{2021} - (x + 1)x^{2020} + (x + 1)x^{2019} - (x + 1)x^{2018} + \dots - (x + 1)x^2 + (x + 1)x + 1$$

$$= x^{2021} - x^{2021} - x^{2020} + x^{2020} + x^{2019} - x^{2019} - x^{2018} + \dots - x^3 - x^2 + x^2 + x + 1 = x + 1$$

Thay $x = 2021$ vào biểu thức ta được: $2021 + 1 = 2022$

Câu 21. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức $f(x) = x^5 - 2018x^4 + 2016x^3 + 2018x^2 - 2016x - 2017$ tại $x = 2017$

Lời giải

Tính giá trị của đa thức $f(x) = x^5 - 2018x^4 + 2016x^3 + 2018x^2 - 2016x - 2017$ tại $x = 2017$

Ta có $x = 2017$ nên $2018 = x + 1$; $2016 = x - 1$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó ta có: } f(2017) &= x^5 - (x+1)x^4 + (x-1)x^3 + (x+1)x^2 - (x-1)x - x \\ &= x^5 - x^5 - x^4 + x^4 - x^3 + x^3 + x^2 - x^2 + x - x \\ &= 0 \end{aligned}$$

Vậy $f(2017) = 0$

Câu 22. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức: $C = 2x^5 - 5y^3 + 2025$ tại x, y thỏa mãn: $|x-1| + (y+2)^{20} = 0$

Lời giải

Ta có: Do $|x-1| \geq 0$; $(y+2)^{20} \geq 0 \Rightarrow |x-1| + (y+2)^{20} \geq 0$ với mọi x, y .

Kết hợp $|x-1| + (y+2)^{20} = 0$ suy ra $|x-1| = 0$ và $(y+2)^{20} = 0$
 $\Rightarrow x = 1$; $y = -2$

Giá trị của biểu thức : $C = 2x^5 - 5y^3 + 2025$ tại $x = 1$; $y = -2$ là:

$$C = 2.1^5 - 5.(-2)^3 + 2025 = 2 + 40 + 2025 = 2067$$

Vậy $C = 2067$

Câu 23. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức $P = x^{99} - 100x^{98} + 100x^{97} - 100x^{96} + \dots + 100x - 1$ với $x = 99$.

Lời giải

Ta có:

$$P = x^{99} - 99x^{98} - x^{98} + 99x^{97} + x^{99} - 99x^{96} - x^{96} + \dots + 99x + x - 1$$

$$P = x^{98}(x - 99) - x^{97}(x - 99) + x^{96}(x - 99) - \dots - x(x - 99) + (x - 1)$$

$$P = (x - 99)(x^{98} - x^{97} + x^{96} - \dots - x) + (x - 1)$$

Với $x = 99$, ta có:

$$P = (99 - 99)(99^{98} - 99^{97} + 99^{96} - \dots - 99) + (99 - 1) = 98$$

Vậy $P = 98$ với $x = 99$

Câu 24. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho ba số thực a, b, c khác 0 và đôi một khác nhau thỏa mãn: $a^2 \cdot (b + c) = b^2 \cdot (a + c) = 2023$.

Tính giá trị biểu thức: $H = c^2 \cdot (a + b)$

Lời giải

$$\text{Từ } a^2 \cdot (b+c) = b^2 \cdot (a+c) = 2023 \Rightarrow \frac{a}{ab+bc} = \frac{b}{ab+ac} = \frac{a-b}{-c(a-b)} = \frac{1}{-c} \quad \text{vì } a \neq b$$

$$\Rightarrow ab+bc = -ac \Rightarrow b(a+c) = -ac \Rightarrow b^2(a+c) = -abc \quad (1)$$

$$\text{Từ } \Rightarrow ac+bc = -ab \Rightarrow c(a+b) = -ab \Rightarrow c^2(a+b) = -abc \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow c^2(a+b) = c^2(a+c)$$

$$\text{Mà } b^2 \cdot (a+c) = 2023 \Rightarrow H = c^2 \cdot (a+b) = 2023$$

Câu 25. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $a^{100} + b^{100} = a^{101} + b^{101} = a^{102} + b^{102}$.

Hãy tính giá trị của biểu thức: $P = a^{2022} + b^{2023}$.

Lời giải

Ta có: $a^{102} + b^{102} = (a^{101} + b^{101}) \cdot (a+b) - ab \cdot (a^{100} + b^{100})$ với mọi a, b (1)

Mà $a^{100} + b^{100} = a^{101} + b^{101} = a^{102} + b^{102}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 1 = (a+b) - ab \Leftrightarrow (a-1) \cdot (b-1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \Rightarrow 1+b^{100} = 1+b^{101} = 1+b^{102} \Rightarrow b=1 \\ b=1 \Rightarrow 1+a^{100} = 1+a^{101} = 1+a^{102} \Rightarrow a=1 \end{cases}$$

Do đó $P = a^{2022} + b^{2023} = 1^{2022} + 1^{2023} = 2$

Câu 26. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho $M = x^{22} - 2023x^{21} + 2023x^{20} - \dots - 2023x^3 + 2023x^2 - 2023x + 1$.

Tính giá trị biểu thức M với $x = 2022$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } M &= x^{22} - 2023x^{21} + 2023x^{20} - \dots - 2023x^3 + 2023x^2 - 2023x + 1 \\ &= x^{22} - 2022x^{21} - x^{21} + 2022x^{20} + x^{20} - \dots - 2022x^3 - x^3 + 2022x^2 + x^2 - 2022x - x + 1 \\ &= x^{21}(x-2022) - x^{20}(x-2022) + \dots - x^2(x-2022) + x(x-2022) - x + 1 \\ &= (x-2022)(x^{21} - x^{20} + \dots - x^2 + x) - x + 1 \end{aligned}$$

Với $x = 2022$

$$M = (2022 - 2022)(2022^{21} - 2022^{20} + \dots - 2022^2 + 2022) - 2022 + 1$$

$$= 0 \cdot (2022^{21} - 2022^{20} + \dots - 2022^2 + 2022) - 2022 + 1$$

$$= 0 - 2022 + 1 = -2021$$

Vậy $M = -2021$ với $x = 2022$

Câu 27. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho các số $x; y$ thỏa mãn $(x-3)^4 + (2y-1)^{2020} \leq 0$. Tính giá trị của biểu thức

$$M = 402x^2y + 284xy^2$$

Lời giải

Vì $(x-3)^4 \geq 0; (2y-1)^{2020} \geq 0$ với mọi $x; y$

Nên $(x-3)^4 + (2y-1)^{2020} \geq 0$ với mọi $x; y$.

Mà theo đề bài : $(x-3)^4 + (2y-1)^{2020} \leq 0$

Suy ra $(x-3)^4 + (2y-1)^{2020} = 0$

Hay: $(x-3)^4 = 0$ và $(2y-1)^{2020} = 0$

suy ra $x = 3, y = \frac{1}{2}$

Khi đó tính được: $M = 2022$

Câu 28. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức $A = (x-3)^{2019} + (x-y-1)^{2020} + 2021$ biết rằng $x; y$ thỏa mãn đẳng thức $\left[(x-2)^2 + 4 \right]^2 + \sqrt{(x+2y-6)^2 + 9} = 19$

Lời giải

Ta có: $(x-2)^2 \geq 0$ với mọi $x \in R \Rightarrow (x-2)^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow \left[(x-2)^2 + 4 \right]^2 \geq 4^2 = 16$ (1)

Ta có: $(x+2y-6)^2 \geq 0$ với mọi $x; y \in R \Rightarrow \sqrt{(x+2y-6)^2 + 9} \geq \sqrt{9} = 3$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra: $\left[(x-2)^2 + 4 \right]^2 + \sqrt{(x+2y-6)^2 + 9} \geq 16 + 3 = 19$

Vậy biểu thức $\left[(x-2)^2 + 4 \right]^2 + \sqrt{(x+2y-6)^2 + 9} = 19$ khi $(x-2)^2 = 0$ và $(x+2y-6)^2 = 0$

Suy ra $x = 2$ và $y = 2$

Thay $x = 2; y = 2$ vào biểu thức A đã cho ta được:

$$A = (2-3)^{2019} + (2-2-1)^{2020} + 2021 = (-1)^{2019} + (-1)^{2020} + 2021 = -1 + 1 + 2021 = 2021$$

Vậy $A = 2021$

Câu 29. (HSG 7 huyện Như Thanh 2021 - 2022)

Cho hai số x, y thỏa mãn: $(2x-1)^{2022} + (3y+6)^{2022} \leq 0$. Tính giá trị của M biết rằng:

$$2M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2.$$

Lời giải

Ta có: $(2x-1)^{2022} \geq 0 \forall x$ và $(3y+6)^{2022} \geq 0 \forall y$ nên

$(2x-1)^{2022} + (3y+6)^{2022} \leq 0$ khi và chỉ khi $(2x-1)^{2022} = 0$ và $(3y+6)^{2022} = 0$.

$(2x-1)^{2022} = 0$ khi $2x-1 = 0$ hay $x = \frac{1}{2}$.

$(3y+6)^{2022} = 0$ khi $3y+6 = 0$ hay $y = -2$.

Mặt khác: $2M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$ suy ra:

$$2M = 6x^2 + 9xy - y^2 - 5x^2 + 2xy = x^2 + 11xy - y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-2) - (-2)^2 = -\frac{59}{4}.$$

Như vậy: $M = -\frac{59}{8}$.

Câu 30. (HSG 7 huyện Mỹ Đức 2020 - 2021)

Tìm đa thức M biết rằng: $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$.

Tính giá trị của M khi x, y thỏa mãn: $(2x - 5)^{2020} + (3y + 4)^{2022} \leq 0$.

Lời giải

Ta có: $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$ suy ra:

$$M = 6x^2 + 9xy - y^2 - (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2 - 5x^2 + 2xy = x^2 + 11xy - y^2.$$

Ta có: $(2x - 5)^{2020} \geq 0 \quad \forall x$ và $(3y + 4)^{2022} \geq 0 \quad \forall y$ nên

$$(2x - 5)^{2020} + (3y + 4)^{2022} \leq 0 \text{ khi và chỉ khi } (2x - 5)^{2020} = 0 \text{ và } (3y + 4)^{2022} = 0.$$

$$+ (2x - 5)^{2020} = 0 \text{ khi } 2x - 5 = 0. \text{ Suy ra } x = \frac{5}{2}.$$

$$+ (3y + 4)^{2022} = 0 \text{ khi } 3y + 4 = 0. \text{ Suy ra } y = -\frac{4}{3}.$$

Thay vào biểu thức M ta được:

$$M = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 11 \cdot \frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{25}{4} - \frac{110}{3} - \frac{16}{9} = -\frac{1159}{36}.$$

Câu 31. (HSG 7 huyện Chương Mỹ 2021 - 2022)

Cho đa thức: $A = 11x^4y^3z^2 + 20x^2yz - (4xy^2z - 10x^2yz + 3x^4y^3z^2) - (2008xyz^2 + 8x^4y^3z^2)$.

a) Xác định bậc của A .

b) Tính giá trị của A nếu $15x - 2y = 1004z$.

Lời giải

a) Ta có:

$$A = 11x^4y^3z^2 + 20x^2yz - (4xy^2z - 10x^2yz + 3x^4y^3z^2) - (2008xyz^2 + 8x^4y^3z^2)$$

$$= 11x^4y^3z^2 + 20x^2yz - 4xy^2z + 10x^2yz - 3x^4y^3z^2 - 2008xyz^2 - 8x^4y^3z^2$$

$$= 30x^2yz - 4xy^2z - 2008xyz^2$$

$\Rightarrow A$ có bậc 4.

b) Ta có: $A = 30x^2yz - 4xy^2z - 2008xyz^2 = 2xyz(15x - 2y - 1004z)$.

Vì $15x - 2y = 1004z$ nên $15x - 2y - 1004z = 0$.

Vậy $A = 0$.

Câu 32. (HSG 7 huyện Thanh Trì 2021 - 2022)

Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$. Tính $f(-1)$ biết: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$ và $f(2) = 36$.

Lời giải

Ta có: $f(x) = ax^2 + bx + c$ nên $f(2) = 4a + 2b + c$.

Mà $f(2) = 36$ suy ra $4a + 2b + c = 36$. (1)

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{4a}{8} = \frac{2b}{6} = \frac{c}{4} = \frac{4a + 2b + c}{8 + 6 + 4} = \frac{36}{18} = 2.$$

Suy ra: $a = 4$; $b = 6$; $c = 8$.

Do đó: $f(x) = ax^2 + bx + c = 4x^2 + 6x + 8$.

Khi đó: $f(-1) = 4 - 6 + 8 = 6$.

Câu 33. (HSG 7 huyện Tam Dương 2021 - 2022)

Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ trong đó $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ và thỏa mãn $b = 3a + c$.

Chứng minh rằng tích $f(1) \cdot f(-2)$ là bình phương của một số nguyên.

Lời giải

Ta có: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

Nên $f(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = a + b + c + d$,

$f(-2) = a(-2)^3 + b(-2)^2 + c(-2) + d = -8a + 4b - 2c + d$.

Khi đó: $f(1) - f(-2) = (a + b + c + d) - (-8a + 4b - 2c + d) = 9a - 3b + 3c$

$= (9a + 3c) - 3b = 3(3a + c) - 3b = 3b - 3b = 0$ (do $b = 3a + c$).

Suy ra $f(1) = f(-2)$.

Suy ra $f(1) \cdot f(-2) = [f(1)]^2 = (a + b + c + d)^2$ là bình phương của một số nguyên.

Câu 34. (HSG 7 huyện Thanh Ba 2021 - 2022)

Cho đa thức: $P(x) = x \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x \right) - \left(-\frac{1}{2}x^4 + x^2 \right)$.

Chứng minh rằng: $P(x)$ nhận giá trị nguyên với mọi số x nguyên.

Lời giải

Ta có: $P(x) = x \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x \right) - \left(-\frac{1}{2}x^4 + x^2 \right)$

$$= \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^4 - x^2 = \frac{1}{2}(x^3 - x^2) = \frac{1}{2}x \cdot x(x-1).$$

Vì $x(x-1)$ là tích của hai số nguyên liên tiếp nên $x(x-1)$ chia hết cho 2.

Vậy $P(x)$ nhận giá trị nguyên với mọi x nguyên.

Câu 35. (HSG 7 huyện Vũ Thư 2020 - 2021)

Cho đa thức: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d là các số nguyên).

Biết $7a + b + c = 0$. Chứng minh rằng $f(3) \cdot f(-2)$ là số chính phương.

Lời giải

Ta có: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{Z}$)

Suy ra: $f(3) = 27a + 9b + 3c + d$ và $f(-2) = -8a + 4b - 2c + d$.

Suy ra: $f(3) - f(-2) = 35a + 5b + 5c = 5(7a + b + c) = 0$ (vì $7a + b + c = 0$).

Như vậy $f(3) = f(-2)$. Do đó $f(3) \cdot f(-2) = [f(3)]^2$.

Mà $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ nên $f(3) \in \mathbb{Z} \Rightarrow [f(3)]^2$ là số chính phương.

Vậy $f(3) \cdot f(-2)$ là số chính phương.

Câu 36. (HSG 7 huyện Cẩm Thủy, Thanh Hóa 2021 - 2022)

Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \in \mathbb{N}^*$ và $f(5) - f(4) = 2022$.

Chứng minh $f(7) - f(2)$ là hợp số.

Lời giải

Ta có: $f(5) - f(4) = (125a + 25b + 5c + d) - (64a + 16b + 4c + d) = 61a + 9b + c$.

Vì $f(5) - f(4) = 2022$ nên $61a + 9b + c = 2022$.

Lại có: $f(7) - f(2) = (343a + 49b + 7c + d) - (8a + 4b + 2c + d) = 335a + 45b + 5c$
 $= 305a + 45b + 5c + 30c = 5(61a + 9b + c) + 30c = 5 \cdot 2022 + 30c = 10(1011 + 3a)$.

Vì a nguyên dương nên $10(1011 + 3a) : 10$ và $10(1011 + 3a) > 10$.

Suy ra: $10(1011 + 3a)$ là hợp số.

Vậy $f(7) - f(2)$ là hợp số.

Câu 37. (HSG 7 huyện Mường La 2021 - 2022)

Tính giá trị của đa thức: $P = x^3 + x^2y - 2x^2 - xy - y^2 + 3y + x + 2017$ với $x + y = 2$.

Lời giải

Ta có: $P = x^3 + x^2y - 2x^2 - xy - y^2 + 3y + x + 2017$

$= x^2(x + y - 2) - x(x + y - 2) + x + y + 2017$

$= x^2(x + y - 2) - x(x + y - 2) + x + y + 2017$.

Vì $x + y = 2$ nên: $P(x) = x^2 \cdot 0 - x \cdot 0 + 2 + 2017 = 2019$.

Câu 38. (HSG 7 huyện Đức Thọ 2021 - 2022)

Cho $f(x) = x^2 + mx - 1$, $g(x) = x^2 + (m + 1)x + 2$. Tìm giá trị m biết $f(1) = g(-1)$.

Lời giải

Ta có: $f(1) = g(-1)$ nên

$$1^2 + m \cdot 1 - 1 = (-1)^2 + (m + 1) \cdot (-1) + 2$$

$$m = -m + 2$$

$$\Rightarrow m = 1.$$

Câu 39. (HSG 7 huyện Yên Mỹ 2021 - 2022)

Cho hai đa thức:

$$P(x) = x^5 - 2x^3 + 3x^4 - 9x^2 + 11x - 6 \text{ và } Q(x) = 3x^4 + x^5 - 2(x^3 + 4) - 10x^2 + 9x.$$

Tính $M(x) = P(x) - Q(x)$.

Tính giá trị của đa thức $M(x)$ khi $|x+2| = 3$.

Lời giải

$$\begin{aligned} M(x) &= P(x) - Q(x) \\ &= (x^5 - 2x^3 + 3x^4 - 9x^2 + 11x - 6) - (3x^4 + x^5 - 2(x^3 + 4) - 10x^2 + 9x) \\ &= (x^5 - 2x^3 + 3x^4 - 9x^2 + 11x - 6) - (x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 9x - 8) \\ &= x^2 + 2x + 2. \end{aligned}$$

Khi $|x+2| = 3$ suy ra $x+2 = 3$ hoặc $x+2 = -3$. Hay $x = 1$ hoặc $x = -5$.

Với $x = 1$ ta có $M(x) = x^2 + 2x + 2 = 1^2 + 2.1 + 2 = 5$.

Với $x = -5$ ta có $M(x) = (-5)^2 + 2.(-5) + 2 = 17$.

Câu 40. (HSG 7 huyện Tam Nông 2021 - 2022)

Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn: $f(x) + x \cdot f(-x) = x + 1$ với mọi giá trị của x . Tính $f(1)$.

Lời giải

Xét đa thức $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + x \cdot f(-x) = x + 1$ với mọi giá trị của x .

Khi $x = 1$, ta có: $f(1) + 1 \cdot f(-1) = 1 + 1$ hay $f(1) + f(-1) = 2$. (1)

Khi $x = -1$, ta có: $f(-1) + (-1) \cdot f(1) = -1 + 1$ hay $f(-1) - f(1) = 0$. (2)

Lấy (1) trừ (2) vế với vế, ta được: $2f(1) = 2 \Rightarrow f(1) = 1$.

Vậy $f(1) = 1$.

Câu 41. (HSG 7 huyện Thiệu Hóa 2020 - 2021)

Cho đa thức: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \in \mathbb{N}^*$ và $f(5) - f(4) = 2022$.

Chứng minh: $f(7) - f(2)$ là hợp số.

Lời giải

Xét đa thức: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Ta có: } f(5) - f(4) = (a.5^3 + b.5^2 + c.5 + d) - (a.4^3 + b.4^2 + c.4 + d)$$

$$\Rightarrow f(5) - f(4) = (125a + 25b + 5c + d) - (64a + 16b + 4c + d)$$

$$\Rightarrow f(5) - f(4) = 61a + 9b + c$$

$$\text{Mà } f(5) - f(4) = 2022$$

$$\Rightarrow 61a + 9b + c = 2022 \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } f(7) - f(2) = (a.7^3 + b.7^2 + c.7 + d) - (a.2^3 + b.2^2 + c.2 + d)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(7) - f(2) &= (343a + 49b + 7c + d) - (8a + 4b + 2c + d) \\ \Rightarrow f(7) - f(2) &= 335a + 45b + 5c \\ \Rightarrow f(7) - f(2) &= 5(67a + 9b + c) = 5(6a + 61a + 9b + c) \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra: $f(7) - f(2) = 5 \cdot (6a + 2022)$ là hợp số.
 Vậy $f(7) - f(2)$ là hợp số.

Câu 42. (HSG 7 thị xã Kinh Môn 2021 - 2022)

Tính giá trị của biểu thức: $C = 2x^5 - 5y^3 + 1980$ tại x, y thỏa mãn: $|x-1| + (y+2)^{20} = 0$

Lời giải

Do $|x-1| \geq 0; (y+2)^{20} \geq 0$ nên $|x-1| + (y+2)^{20} \geq 0$ với mọi x, y

Kết hợp $|x-1| + (y+2)^{20} = 0$ suy ra $\begin{cases} |x-1| = 0 \\ (y+2)^{20} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$

Giá trị của biểu thức: $C = 2x^5 - 5y^3 + 1980$ tại $x = 1; y = -2$ là:

$$C = 2 \cdot 1^5 - 5 \cdot (-2)^3 + 1980 = 2022$$

Vậy $C = 2022$.

Câu 43. (HSG 7 huyện Hương Khê 2021 - 2022)

Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$. Trong đó a, b, c là các hằng số thỏa mãn $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}$ và $a \neq 0$. Tính $\frac{P(-2) - 3P(1)}{a}$.

Lời giải

Ta có $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} \Rightarrow b = 2a; c = 3a$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{P(-2) - 3P(1)}{a} &= \frac{4a - 2b + c - 3(a + b + c)}{a} = \frac{a - 5b - 2c}{a} \\ &= \frac{a - 5 \cdot 2a - 2 \cdot 3a}{a} = \frac{-15a}{a} = -15. \end{aligned}$$

Câu 44. (HSG 7 huyện Tiên Hải 2021 - 2022)

Cho hàm số $y = f(x) = (m+1)x$ với $m \neq -1$

a) Với $m = 2$. Hãy tính $f(2022)$.

b) Tìm giá trị của m để $f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1 \cdot x_2)$ với $x_1; x_2$ là các số thực khác 0.

Lời giải

a) Với $m = 2$ thỏa mãn $m \neq -1 \Rightarrow f(x) = 3x$

Ta có $f(2022) = 3 \cdot 2022 = 6066$

Vậy với $m = 2$ thì $f(2022) = 6066$

b) Ta có $f(x_1) = (m+1)x_1, f(x_2) = (m+1)x_2$

$$\Rightarrow f(x_1) \cdot f(x_2) = (m+1)^2 x_1 \cdot x_2$$

$$\text{Mà } f(x_1 \cdot x_2) = (m+1)x_1 \cdot x_2$$

$$\text{Đề } f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1 \cdot x_2) \Rightarrow (m+1)^2 x_1 x_2 = (m+1)x_1 x_2$$

Do $x_1; x_2$ là các số thực khác 0, $m \neq -1$

$$\Rightarrow m+1=1 \Rightarrow m=0 \text{ (thỏa mãn } m \neq -1)$$

Vậy đề $f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1 \cdot x_2)$ thì $m=0$.

Câu 45. (HSG 7 trường THCS Nguyễn Trung Trực 2018 - 2019)

Cho đa thức: $f(x) = x^{17} - 2000x^{16} + 2000x^{15} - 2000x^{14} + \dots + 2000x - 1$

Tính giá trị của đa thức tại $x = 1999$.

Lời giải

$$f(x) = x^{17} - 1999x^{16} - x^{16} + 1995x^{15} + x^{15} - 1999x^{14} - x^{14} + \dots + 1999x + x - 1$$

$$\begin{aligned} f(1999) &= 1999^{17} - 1999^{17} - 1999^{16} + 1999^{16} + 1999^{15} - 1999^{15} + \dots + 1999^2 + 1999 - 1 \\ &= 1999 - 1 = 1998. \end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức là $f(1999) = 1998$.

Câu 46. (HSG 7 trường THCS Bảo Phương 2018 - 2019)

Cho đa thức $f(x) = x^{14} - 14x^{13} + 14x^{12} - \dots + 13x^2 - 14x + 14$. Tính $f(13)$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{14} - (13+1)x^{13} + (13+1)x^{12} - \dots + (13+1)x^2 - (13+1)x + (13+1) \\ &= x^{14} - (x+1)x^{13} + (x+1)x^{12} - \dots + (x+1)x^2 - (x+1)x + (x+1) \\ &= x^{14} - x^{14} - x^{13} + x^{13} + x^{12} - \dots + x^3 + x^2 - x^2 - x + x + 1 \\ &= 1 \text{ (Vì thay } 14 = 13 + 1 = x + 1). \end{aligned}$$

Vậy $f(13) = 1$.

Câu 47. (HSG 7 trường THCS Trần Thiện 2018 - 2019)

Tính giá trị các biểu thức:

a) $A = 2a^2 - 4|a| + 3a - 1$ lần lượt tại $a = \frac{2}{3}$; $a = -2$.

b) $B = 2x^2 - 3xy - 6y^2$ tại $|x| = \frac{1}{2}$ và $y = \frac{2}{3}$.

Lời giải

a) Với $a = \frac{2}{3}$ thì $A = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \left|\frac{2}{3}\right| + 3 \cdot \frac{2}{3} - 1 \Rightarrow A = \frac{-7}{9}$

Vậy $A = \frac{-7}{9}$ tại $a = \frac{2}{3}$.

Với $a = -2$ thì $A = 2 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot |-2| + 3 \cdot (-2) - 1 \Rightarrow A = -7$

Vậy $A = -7$ tại $a = -2$.

a) TH1: $x = \frac{1}{2}$ và $y = \frac{2}{3}$ thì $B = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow B = -\frac{19}{6}$

Vậy $B = -\frac{19}{6}$ tại $x = \frac{1}{2}; y = \frac{2}{3}$.

TH2: $x = -\frac{1}{2}$ và $y = \frac{2}{3}$ thì $B = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{3} - 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow B = -\frac{7}{6}$

Vậy $B = -\frac{7}{6}$ tại $x = -\frac{1}{2}; y = \frac{2}{3}$.

Câu 48. (HSG 7 huyện Thường Tín 2018 - 2019)

Cho $f(x) = x(x^{19} - x^5 - x^{2018}); g(x) = x^{2019} - x^{20} + 9 + x^2(x^4 + x^2 + 2)$

a) Tính $k(x) = f(x) + g(x)$

b) Tính giá trị của $k(x)$ tại $x = \left(2 - \frac{5}{3} + \frac{7}{6} - \frac{9}{10} + \frac{11}{15} - \frac{13}{21} + \frac{15}{28} - \frac{17}{36} + \frac{19}{45}\right) \cdot \frac{5}{6}$

c) Chứng minh rằng: đa thức $k(x)$ không nhận giá trị 2019 với mọi giá trị của x nguyên ?

Lời giải

a) $k(x) = f(x) + g(x)$

$$k(x) = x(x^{19} - x^5 - x^{2018}) + x^{2019} - x^{20} + 9 + x^2(x^4 + x^2 + 2)$$

$$k(x) = x^4 + 2x^2 + 9.$$

b) Xét $2 - \frac{5}{3} + \frac{7}{6} - \frac{9}{10} + \frac{11}{15} - \frac{13}{21} + \frac{15}{28} - \frac{17}{36} + \frac{19}{45}$

$$= 2 \left(1 - \frac{5}{6} + \frac{7}{12} - \frac{9}{20} + \frac{11}{30} - \frac{13}{42} + \frac{15}{56} - \frac{17}{72} + \frac{19}{90} \right)$$

$$= 2 \cdot \left(1 - \frac{2+3}{6} + \frac{3+4}{12} - \frac{4+5}{20} + \frac{5+6}{30} - \frac{6+7}{42} + \frac{7+8}{56} - \frac{8+9}{72} + \frac{9+10}{90} \right)$$

$$= 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \right)$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{10} \right) = 2 \cdot \frac{6}{10} = \frac{6}{5}$$

Khi đó $x = \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{6} = 1$ nên $k(1) = (1)^4 + 2 \cdot (1)^2 + 9 = 12$.

b) Xét $k(x) = x^4 + 2x^2 + 9 = x^2(x^2 + 2) + 9$

Giả sử $k(x) = 2019 \Rightarrow x^2(x^2 + 2) = 2010$

Vì x nguyên nên 2010 chẵn và $x^2; x^2 + 2$ cùng tính chẵn (hoặc lẻ) $\Rightarrow x^2; x^2 + 2$ là hai số chẵn liên tiếp nên $x^2(x^2 + 2):4$, còn 2010 không chia hết cho 4.

Vậy giả sử là sai hay $k(x)$ không nhận giá trị 2019 với mọi x nguyên.

Câu 49. (HSG 7 huyện Rạch Giá 20198 - 2019)

Cho đa thức $f(x)$ xác định với mọi x thỏa mãn: $x.f(x+2) = (x^2 - 9)f(x)$.

- 1) Tính $f(5)$.
- 2) Chứng minh rằng $f(x)$ có ít nhất 3 nghiệm.

Lời giải

1) Ta có: $x = 3$ nên $3.f(3+2) = (3^2 - 9)f(3) \Rightarrow f(5) = 0$

2) Với $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow x = 0$ là một nghiệm

Với $x = 3 \Rightarrow f(5) = 0 \Rightarrow x = 5$ là một nghiệm

Với $x = -3 \Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow x = -1$ là một nghiệm

Vậy $f(x)$ có ít nhất là 3 nghiệm.

Câu 50. (HSG 7 trường THCS Đào Duy Từ 2018 - 2019)

Cho đa thức $A = 2x(x-3) - x(x-7) - 3(x-673)$. Tính giá trị của A khi $x = 2$.

Tìm x để $A = 2019$.

Lời giải

Ta có: $A = 2x^2 - 6x - x^2 + 7x - 3x + 2019 = x^2 - 2x + 2019$

+) Tính giá trị của A khi $x = 2$, thay $x = 2$ vào A , ta được:

$$A = 2^2 - 2 \cdot 2 + 2019 = 2019$$

Vậy $x = 2$ thì $A = 2019$.

+) Tìm x để $A = 2019$

$$A = 2019 \Rightarrow x^2 - 2x + 2019 = 2019$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy $A = 2019$ thì $x \in \{0; 2\}$.

Câu 51. (HSG 7 trường THCS Đáp Cầu 2018 - 2019)

Cho đa thức $A(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{99} + x^{100}$

a) Chứng minh rằng $x = -1$ là nghiệm của $A(x)$.

b) Tính giá trị của đa thức $A(x)$ tại $x = \frac{1}{2}$.

Lời giải

$$a) A(-1) = (-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^{99} + (-1)^{100}$$

$$= -1 + 1 - 1 + 1 + \dots - 1 + 1 = 0 \text{ (vì có 50 số 1 và 50 số } -1)$$

Suy ra $x = -1$ là nghiệm của đa thức $A(x)$.

$$b) \text{ Với } x = \frac{1}{2} \text{ thì giá trị của đa thức } A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2A &= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} \\ \Rightarrow 2A &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}}\right) + 1 - \frac{1}{2^{100}} \\ \Rightarrow 2A &= A + 1 - \frac{1}{2^{100}} \\ \Rightarrow A &= 1 - \frac{1}{2^{100}}. \end{aligned}$$

Câu 52. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn, trường Đào Duy Từ; huyện Nam Trà My, trường Trà Ka 2018-2019)

Cho đa thức $A = 2x(x-3) - x(x-7) - 3(x-673)$. Tính giá trị của A khi $x = 2$. Tìm x để $A = 2019$

Lời giải

Ta có: $A = 2x^2 - 6x - x^2 + 7x - 3x + 2019 = x^2 - 2x + 2019$

+) Tính giá trị của A khi $x = 2$, thay $x = 2$ vào A , ta được:

$$A = 2^2 - 2 \cdot 2 + 2019 = 2019$$

+) Tìm x để $A = 2019$

$$A = 2019 \Rightarrow x^2 - 2x + 2019 = 2019 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Câu 53. (HSG 7 2018-2019)

a) Cho hai đa thức:

$$f(x) = x^5 - 3x^2 + 7x^4 - 9x^3 + x^2 - \frac{1}{4}x; \quad g(x) = 5x^4 - x^5 + x^2 - 2x^3 + 3x^2 - \frac{1}{4}.$$

Tính $f(x) + g(x)$ và $f(x) - g(x)$

b) Tính giá trị của đa thức sau: $A = x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \dots + x^{100}$ tại $x = -1$

Lời giải

$$a) f(x) + g(x) = 12x^4 - 11x^3 + 2x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$

$$f(x) - g(x) = 2x^5 + 2x^4 - 7x^3 - 6x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

$$b) A = (-1)^2 + (-1)^4 + (-1)^6 + \dots + (-1)^{100} = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = 50 \text{ (50 số hạng).}$$

Câu 54. (HSG 7 Huyện Thăng Bình 2018-2019)

Cho đa thức $A = 2x(x-3) - x(x-7) - 5(x-403)$

a) Tính giá trị của A khi $x = 4$.

b) Tìm x để $A = 2015$.

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } A = 2x(x-3) - x(x-7) - 5(x-403) = x^2 - 4x + 2015$$

Với $x = 4$ ta được $A = 2015$.

b) $A = 2015$

Suy ra

$$x^2 - 4x + 2015 = 2015$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Vậy khi $x \in \{0; 4\}$ thì $A = 2015$.

Câu 55. (HSG 7 huyện Hoàng Hoá 2018-2019)

Tính giá trị biểu thức: $C = x^{15} - 2019x^{14} + 2019x^{13} - 2019x^{12} + \dots + 2019x - 1$ với $x = 2018$

Lời giải

Ta có: $2019 = 2018 + 1 = x + 1$

Do đó: $C = x^{15} - (x+1)x^{14} + (x+1)x^{13} - (x+1)x^{12} + \dots + (x+1)x - 1$

$$= x - 1 = 2018 - 1 = 2017$$

Vậy $C = 2017$

Câu 56. (HSG 7 huyện Kim Thành 2018-2019)

Cho $|x - 2| + |y - 1| + (x + y - z - 2)^{2016} = 0$. Tính giá trị của $A = 5x^2y^{2016}z^{2017}$

Lời giải

Vì $|x - 2| \geq 0 \forall x$; $|y - 1| \geq 0 \forall y$; $(x + y - z - 2)^{2016} \geq 0 \forall x, y, z$

Do đó $|x - 2| + |y - 1| + (x + y - z - 2)^{2016} = 0$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} |x - 2| = 0 \\ |y - 1| = 0 \\ (x + y - z - 2)^{2016} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y - 1 = 0 \\ x + y - z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Do đó $A = 5 \cdot 2^2 \cdot 1^{2016} \cdot 1^{2017} = 20$.

Vậy $A = 20$.

Câu 57. (HSG 7 trường THCS Thanh Mai 2018-2019)

Tính giá trị các biểu thức: $B = 2x^2 - 3xy - 6y^2$ tại $|x| = \frac{1}{2}$ và $y = \frac{2}{3}$

Lời giải

Ta có $|x| = \frac{1}{2}$ suy ra $x \in \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\}$

Do đó:

* Với $x = \frac{1}{2}$ và $y = \frac{2}{3} \Rightarrow B = -\frac{19}{6}$

* Với $x = -\frac{1}{2}$ và $y = \frac{2}{3} \Rightarrow B = -\frac{7}{6}$

Câu 58. (HSG 7 huyện Việt Yên 2018-2019)

Cho đa thức $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Biết rằng $f(1) = f(-1); f(2) = f(-2)$. Chứng minh $f(x) = f(-x)$ với mọi x

Lời giải

$$f(1) = a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0; f(-1) = a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0$$

Do $f(1) = f(-1)$ nên $a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0$

$$\Rightarrow a_3 + a_1 = -a_3 - a_1$$

$$\Rightarrow a_3 + a_1 = 0 \quad (1)$$

Tương tự $f(2) = 16a_4 + 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0$

$$f(-2) = 16a_4 - 8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + a_0$$

Vì $f(2) = f(-2)$ nên $4a_3 + a_1 = 0 \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow a_1 = a_3 = 0$

Vậy $f(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0$

$$f(-x) = a_4(-x)^4 + a_2(x)^2 + a_0 = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 \text{ với mọi } x.$$

Vậy $f(x) = f(-x)$ với mọi x

Câu 59. (HSG 7 Huyện Kim Thành 2018-2019)

Xác định tổng các hệ số của đa thức $f(x) = (5 - 6x + x^2)^{2016} \cdot (5 + 6x + x^2)^{2017}$

Lời giải

Vì tổng các hệ số của đa thức $f(x)$ bằng $f(1)$.

Mà đa thức $f(x) = (5 - 6x + x^2)^{2016} \cdot (5 + 6x + x^2)^{2017}$

$$\text{Có } f(1) = (5 - 6 \cdot 1 + 1^2)^{2016} \cdot (5 + 6 \cdot 1 + 1^2)^{2017} = 0$$

Vậy đa thức đã cho có tổng các hệ số bằng 0.

Câu 60. (HSG 7 huyện Đà Nẵng, trường THCS Nguyễn Khuyến 2022 - 2023)

Cho đa thức $P = 3x^3 + 4x^2 - 8x + 1$. Tính giá trị của P biết $x^2 + x - 3 = 0$

Lời giải

Ta có: $x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 + x = 3 \quad (1)$

$$P = 3x^3 + 4x^2 - 8x + 1$$

$$= (3x^3 + 3x^2) + (x^2 + x) - 9x + 1$$

$$= 3x(x^2 + x) + (x^2 + x) - 9x + 1 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được: $P = 9x + 3 - 9x + 1 = 4$

Vậy $P = 4$.

Câu 61. (HSG 7 huyện 2022 - 2023)

Cho đa thức $f(x) = 2 - x^2$. Hãy tính $f(0); f\left(-\frac{1}{2}\right)$

Lời giải

$$f(0) = 2 - 0^2 = 2;$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}$$

Câu 62. (HSG 7 huyện 2022 - 2023)

Tính giá trị của đa thức sau: $A = x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \dots + x^{100}$ tại $x = -1$.

Lời giải

$$A = (-1)^2 + (-1)^4 + (-1)^6 + \dots + (-1)^{100} = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = 50 \text{ (có 50 số hạng)}$$

Câu 63. (HSG 7 huyện 2022 - 2023)

Cho đa thức $A(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{99} + x^{100}$. Tính giá trị của đa thức $A(x)$ tại $x = \frac{1}{2}$

Lời giải

Với $x = \frac{1}{2}$ thì giá trị của đa thức là

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}}$$

$$\Rightarrow 2A = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}}$$

$$\Rightarrow 2A = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}}\right) + 1 - \frac{1}{2^{100}}$$

$$\Rightarrow 2A = A + 1 - \frac{1}{2^{100}}$$

$$\Rightarrow A = 1 - \frac{1}{2^{100}}$$

Vậy $A = 1 - \frac{1}{2^{100}}$

Câu 64. (HSG 7 huyện 2022 - 2023)

Cho $f(x)$ là hàm số xác định với mọi x thỏa mãn điều kiện $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$ và $f(2) = 10$. Tính $f(32)$

Lời giải

Vì $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$ nên:

$$f(4) = f(2 \cdot 2) = f(2) \cdot f(2) = 10 \cdot 10 = 100$$

$$f(16) = f(4 \cdot 4) = f(4) \cdot f(4) = 100 \cdot 100 = 10000$$

$$f(32) = f(16 \cdot 2) = f(16) \cdot f(2) = 10000 \cdot 10 = 100000$$

Vậy $f(32) = 100000$

Câu 65. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc 2022 - 2023)

Cho biểu thức: $M = a + 2ab - b$. Tính giá trị của M với $|a| = 1,5$; $b = -0,75$

Lời giải

Ta có: $|a|=1,5 \Rightarrow \begin{cases} a=1,5 \\ a=-1,5 \end{cases}$

Với $a=1,5; b=-0,75 \Rightarrow M=a+2ab-b=1,5+2.1,5.(-0,75)=0$

Với $a=-1,5; b=-0,75 \Rightarrow M=a+2ab-b=\frac{3}{2}$

Câu 66. (HSG 7 huyện Vị Thanh 2017 - 2018)

Cho biểu thức: $P = x - 4xy + y$. Tính giá trị của P với $|x|=1,5; y=-0,75$

Lời giải

Ta có: $|x|=1,5 \Rightarrow \begin{cases} x=1,5 \\ x=-1,5 \end{cases}$

+) Với $x=1,5; y=-0,75$ ta có:

$$P = 1,5 - 4.1,5.(-0,75) - 0,75$$

$$= 1,5.(1+3) - 0,75 = 5,25$$

+) Với $x=-1,5; y=-0,75$ ta có:

$$P = -1,5 - 4(1,5).(-0,75) - 0,75 = -6,75$$

Câu 67. (HSG 7 huyện Cẩm Phả 2017 - 2018)

Cho đa thức $f(x) = x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \dots - 101x + 101$. Tính $f(100)$

Lời giải

Ta có: $f(x) = x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \dots - 101x + 101$

$$= x^{10} - 100x^9 - x^9 + 100x^8 + x^8 - \dots - 100x^3 - x^3 + 100x^2 + x^2 - 100x - x + 101$$

$$= (x^{10} - 100x^9) - (x^9 - 100x^8) + (x^8 - 100x^7) \dots - (x^3 - 100x^2) + (x^2 - 100x) - x + 101$$

$$= x^9(x-100) - x^8(x-100) + x^7(x-100) \dots - x^2(x-100) + x(x-100) - x + 101$$

$$= (x-100)(x^9 - x^8 + x^7 \dots - x^2 + x) - x + 101$$

Với $x=100$ ta có:

$$f(x) = (100-100)(100^{21} - 100^{20} + \dots - 100^2 + 100) - 100 + 101$$

$$= 0.(100^{21} - 100^{20} + \dots - 100^2 + 100) - 100 + 101$$

$$= 0 - 100 + 101 = 1$$

Vậy $f(x)=1$ với $x=100$

Câu 68. (HSG 7 huyện Mỹ Xuyên 2017 - 2018)

Cho đa thức $B(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{99} + x^{100}$. Tính giá trị của đa thức $B(x)$ tại $x = \frac{1}{2}$

Lời giải

Thay $x = \frac{1}{2}$ vào đa thức $B(x)$ ta có:

$$B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}}$$

$$2B = 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \right)$$

$$2B = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}}$$

$$2B = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \right) + 2 - \frac{1}{2^{100}}$$

$$\Rightarrow 2B = B + 2 - \frac{1}{2^{100}}$$

$$\Rightarrow B = 2 - \frac{1}{2^{100}}$$

Vậy $B = 2 - \frac{1}{2^{100}}$

Câu 69. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2017 - 2018)

Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$

a) Biết $f(0) = 0$, $f(1) = 2013$ và $f(-1) = 2012$. Tính a, b, c .

b) Chứng minh rằng nếu $f(1) = 2012$, $f(-2) = f(3) = 2036$ thì đa thức $f(x)$ vô nghiệm.

Lời giải

a) Vì $f(0) = 0$ nên $c = 0$;

$$f(1) = 2013 \text{ nên } a + b + c = 2013$$

$$f(-1) = 2012 \text{ nên } a - b + c = 2012$$

$$\text{Khi đó: } a = \frac{4025}{2}; b = \frac{1}{2}; c = 0$$

b) Tính được:

$$2012 = f(1) = a + b + c \quad (1)$$

$$2036 = f(-2) = 4a - 2b + c \quad (2)$$

$$2036 = f(3) = 9a + 3b + c \quad (3)$$

Từ (1), (2) có $a - b = 8$

Từ (2), (3) có $a + b = 0 \Rightarrow a = 4, b = 4$

$$\text{N như vậy } f(x) = 4x^2 - 4x + 2012 = (2x - 1)^2 + 2011 > 0 (\forall x)$$

Vậy đa thức vô nghiệm.

Câu 70. (HSG 7 huyện Bồ Trách 2017 - 2018)

Cho hàm số $y = f(x) = -4x^3 + x$

a) Tính $f(0)$; $f(-0,5)$

b) Chứng minh : $f(-a) = -f(a)$

Lời giải

$$\text{a) } f(0) = -4 \cdot 0^3 + 0 = 0$$

$$f(-0,5) = -4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2} = 0$$

$$b) f(-a) = -4 \cdot (-a)^3 - a = 4a^3 - a$$

$$-f(a) = -[-4a^3 + a] = 4a^3 - a$$

$$\text{Khi đó } f(-a) = -f(a)$$

Câu 71. (HSG 7 huyện Triệu Sơn 2015 - 2016)

Tính giá trị đa thức sau:

$$a) B = 2x^2 - 3x + 5 \text{ với } |x| = \frac{1}{2};$$

$$b) C = 2x - 2y + 13x^3y^2(x - y) + 15(y^2x - x^2y) + \left(\frac{2015}{2016}\right)^0, \text{ biết } x - y = 0.$$

Lời giải

$$a) \text{ Vì } |x| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Với } x = \frac{1}{2} \Rightarrow B = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} + 5 = 4$$

$$\text{Với } x = -\frac{1}{2} \Rightarrow B = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 5 = 7$$

$$\text{Vậy } B = 4 \text{ khi } x = \frac{1}{2}$$

$$B = 7 \text{ khi } x = -\frac{1}{2}$$

$$b) C = 2x - 2y + 13x^3y^2(x - y) + 15(y^2x - x^2y) + \left(\frac{2015}{2016}\right)^0$$

$$= 2(x - y) + 13x^3y^2(x - y) - 15xy(x - y) + 1 = 1 \text{ (do } x - y = 0).$$

Câu 72. (HSG 7 huyện Tam Hưng 2013 - 2014)

Cho đa thức $f(x) = x^{2015} - 2000x^{2014} + 2000x^{2013} - 2000x^{2012} + \dots + 2000x - 1$.

Tính giá trị của đa thức tại $x = 1999$.

Lời giải

Ta có

$$f(x) = x^{2015} - (1999 + 1)x^{2014} + (1999 + 1)x^{2013} - (1999 + 1)x^{2012} + \dots + (1999 + 1)x - 1$$

Thay $1999 = x$ vào đa thức, ta được

$$f(x) = x^{2015} - (x + 1)x^{2014} + (x + 1)x^{2013} - (x + 1)x^{2012} + (x + 1)x^{2011} - (x + 1)x^{2010} + \dots - (x + 1)x^2$$

$$f(x) = x^{2015} - x^{2015} - x^{2014} + x^{2014} - x^{2013} + x^{2013} - x^{2012} + x^{2012} - \dots + x^2 - x^2 + x - 1$$

$$= x - 1$$

$$\text{Suy ra } f(1999) = 1999 - 1 = 1998.$$

Câu 73. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2014 - 2015)

Cho đa thức $f(x) = ax^5 + bx^3 + 2014x + 1$, biết: $f(2015) = 2$. Hãy tính $f(-2015)$.

Lời giải

Ta có: $f(x) = ax^5 + bx^3 + 2014x + 1$

$$\Rightarrow f(-x) = a(-x)^5 + b(-x)^3 + 2014(-x) + 1 = -ax^5 - bx^3 - 2014x + 1$$

$$\Rightarrow f(x) + f(-x) = 2 \Rightarrow f(2015) + f(-2015) = 2$$

$$\Rightarrow f(-2015) = 2 - f(2015) = 2 - 2 = 0$$

Vậy $f(-2015) = 0$.

Câu 74. (HSG 7 cấp trường 2014 - 2015)

Cho đa thức $f(x)$ xác định với mọi x thuộc \mathbb{R} . Biết rằng với mọi x ta đều có

$$f(x) + 3.f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2. \text{ Tính } f(2).$$

Lời giải

Vì với mọi x ta đều có $f(x) + 3.f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$ nên thay $x = 2, x = \frac{1}{2}$ vào $f(x) + 3.f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$

ta được:

$$+) f(2) + 3.f\left(\frac{1}{2}\right) = 4$$

$$+) f\left(\frac{1}{2}\right) + 3.f(2) = \frac{1}{4}$$

$$\text{Vì } f\left(\frac{1}{2}\right) + 3.f(2) = \frac{1}{4} \Rightarrow 9.f(2) + 3.f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\text{Có } \left(9.f(2) + 3.f\left(\frac{1}{2}\right)\right) - \left(f(2) + 3.f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{3}{4} - 4$$

$$\Rightarrow 8.f(2) = \frac{-13}{4} \Rightarrow f(2) = \frac{-13}{32}$$

Vậy $f(2) = \frac{-13}{32}$.

Câu 75. (HSG 7 huyện Văn Bàn 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức: $A = 2x^2 - 3x + 1$ với $|x| = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Vì $|x| = \frac{1}{2}$ nên $x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = -\frac{1}{2}$.

$$+ \text{ Với } x = \frac{1}{2} \text{ thì } A = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\frac{1}{2} + 1 = 2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 1 = 0.$$

$$+ \text{ Với } x = -\frac{1}{2} \text{ thì } A = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 1 = 3.$$

Vậy $A = 0$ hoặc $A = 3$ khi $|x| = \frac{1}{2}$.

Câu 76. (HSG 7 huyện Thanh Thủy 2022 - 2023)

Cho $P(x)$ là một đa thức bậc 4 có hệ số cao nhất là 1 thỏa mãn điều kiện: $P(1) = 3$; $P(3) = 11$; $P(5) = 27$. Tính $P(-2) + 7P(6)$.

Lời giải

Xét đa thức $f(x) = x^2 + 2$ thỏa mãn $f(1) = 3$; $f(3) = 11$; $f(5) = 27$.

Đặt $Q(x) = P(x) - f(x)$, khi đó $Q(x) = P(x) - (x^2 + 2)$

$$\text{Ta có: } Q(1) = P(1) - (1^2 + 2) = 3 - 3 = 0$$

$$Q(3) = P(3) - (3^2 + 2) = 11 - 11 = 0$$

$$Q(5) = P(5) - (5^2 + 2) = 27 - 27 = 0$$

Suy ra $x = 1$; $x = 3$; $x = 5$ là các nghiệm của đa thức $Q(x)$, do đó :

$$Q(x) = (x-1)(x-3)(x-5)(x-m)$$

$$\text{Suy ra } P(x) = (x-1)(x-3)(x-5)(x-m) + x^2 + 2$$

$$\text{Khi đó } P(-2) = (-2-1)(-2-3)(-2-5)(-2-m) + (-2)^2 + 2 = 216 + m$$

$$P(6) = (6-1)(6-3)(6-5)(6-m) + 6^2 + 2 = 128 - 15m$$

$$\text{Vậy } P(-2) + 7P(6) = 216 + 105m + 7(128 - 15m) = 1112$$

Câu 77. (HSG 7 huyện Trực Ninh 2022 - 2023)

Cho đa thức $f(x) = x^5 - 2024x^4 + 2022x^3 + 2024x^2 - 2022x - 2023$. Tính $f(2023)$.

Lời giải

Ta có $f(x) = x^5 - 2024x^4 + 2022x^3 + 2024x^2 - 2022x - 2023$

Với $x = 2023$ thì $x - 2023 = 0$; $x + 1 = 2024$ và $x - 1 = 2022$

$$f(x) = x^5 - (x+1)x^4 + (x-1)x^3 + (x+1)x^2 - (x-1)x - 2023$$

$$f(x) = x^5 - x^5 - x^4 + x^4 - x^3 + x^3 + x^2 - x^2 + x - 2023$$

$$f(x) = x - 2023$$

$$f(2023) = 2023 - 2023 = 0$$

Vậy $f(2023) = 0$.

Câu 78. (HSG 7 huyện Nam Đàn 2022 - 2023)

Cho $x - y = -3$. Hãy tính giá trị của biểu thức:

$$P = x^3 + 3x^2 + y^2 - x^2y - xy + x - 4y + 2023$$

Lời giải

$$P = x^3 + 3x^2 + y^2 - x^2y - xy + x - 4y + 2023$$

$$P = (x^3 - xy + x) - (x^2y - y^2 + y) + (3x^2 - 3y + 3) + 2020$$

$$P = x.(x^2 - y + 1) - y.(x^2 - y + 1) + 3.(x^2 - y + 1) + 2020$$

$$P = (x - y + 3).(x^2 - y + 1) + 2020$$

$$P = (-3 + 3).(x^2 - y + 1) + 2020$$

$$P = 2020.$$

Câu 79. (HSG 7 huyện Tam Dương 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức: $C = 2x^5 - 5y^3 + 2023$ tại các giá trị của x, y thỏa mãn $|x+1| + (y+2)^{2024} = 0$

Lời giải

Ta có $|x+1| \geq 0; (y+2)^{2024} \geq 0$ với mọi x, y

Nên $|x+1| + (y+2)^{2024} = 0$ khi $|x+1| = 0$ hoặc $(y+2)^{2024} = 0$

Suy ra $x = -1; y = -2$

Vậy $C = 2x^5 - 5y^3 + 2023 = 2.(-1)^5 - 5.(-2)^3 + 2023 = 1981.$

Câu 80. (HSG 7 huyện Tam Dương 2022 - 2023)

Cho hai đa thức $A = x^3 + 4x^2 - 5x - 1$ và $B = x^4 - x^3 - x^2 - 7x - 1$

Tìm đa thức P thỏa mãn $P = 2A - \{A - [A - (A - B)] + 2B\}$ và tính $P(0), P(-2)$

Lời giải

Ta có $P = 2A - \{A - [A - (A - B)] + 2B\}$

$$= 2A - \{A - [A - A + B] + 2B\}$$

$$= 2A - \{A - B + 2B\}$$

$$= 2A - \{A + B\}$$

$$= 2A - A - B$$

$$= A - B$$

Thay $A = x^3 + 4x^2 - 5x - 1; B = x^4 - x^3 - x^2 - 7x - 1$ ta có:

$$P = x^3 + 4x^2 - 5x - 1 - (x^4 - x^3 - x^2 - 7x - 1)$$

$$= x^3 + 4x^2 - 5x - 1 - x^4 + x^3 + x^2 + 7x + 1$$

$$= -x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 2x$$

Khi đó:

$$P(0) = -0^4 + 2.0^3 + 5.0^2 + 2.0 = 0$$

$$P(2) = -2^4 + 2.3^3 + 5.2^2 + 2.2 = 62$$

Câu 81. (HSG 7 Đề mũ nhọn 2022 - 2023)

Cho đa thức $f(x) = x^6 + 2023x^5 - 2023x^4 + 2023x^3 - 2023x^2 + 2023x + 2023.$

Tính $f(-2024).$

Lời giải

$$f(x) = x^6 + 2023x^5 - 2023x^4 + 2023x^3 - 2023x^2 + 2023x + 2023$$

$$= x^6 + 2024x^5 - x^5 - 2024x^4 + x^4 + 2024x^3 - x^3 - 2024x^2 + x^2 + 2024x - x + 2023$$

$$= x^5(x + 2024) - x^4(x + 2024) + x^3(x + 2024) - x^2(x + 2024) + x(x + 2024) - x + 2023$$

Do đó $f(-2024) = 2024 + 2023 = 4047$

Câu 82. (HSG 7 huyện Phù Cát, tỉnh, trường năm 2017 - 2018)

Cho đa thức $P = 3x^3 + 4x^2 - 8x + 1$

a) Chứng minh rằng $x = 1$ là nghiệm của đa thức.

b) Tính giá trị của P biết $x^2 + x - 3 = 0$.

Lời giải

a) Ta có $P(1) = 3.1^3 + 4.1^2 - 8.1 + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ nghiệm của đa thức P . (đpcm)

b) Rút được $x^2 + x = 3$

$$P = (3x^3 + 3x^2) + (x^2 + x) - 9x + 1$$

$$= 3x(x^2 + x) + (x^2 + x) - 9x + 1$$

$$= 9x + 3 - 9x + 1 = 4.$$

Câu 83. (HSG 7 huyện Thiệu Hóa, tỉnh Thanh Hóa, trường năm 2016 - 2017)

Tính giá trị biểu thức sau:

$$C = 2x - 2y + 13x^3y^2(x - y) + 15(y^2x - x^2y) + \left(\frac{2015}{2016}\right)^0, \text{ biết } x - y = 0$$

Lời giải:

$$C = 2x - 2y + 13x^3y^2(x - y) + 15(y^2x - x^2y) + \left(\frac{2015}{2016}\right)^0$$

$$= 2(x - y) + 13x^3y^2(x - y) - 15xy(x - y) + 1 = 1 \text{ (Vì } x - y = 0).$$

Câu 84. (HSG 7 Đề giao lưu 2017 - 2018)

Cho x là 3 số thực tùy ý thỏa mãn $x + y + z = 0$ và $-1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1; -1 \leq z \leq 1$.

Chứng minh rằng đa thức $x^2 + y^4 + z^6$ có giá trị không lớn hơn 2.

Lời giải

Trong 3 số x, y, z có ít nhất hai số cùng dấu.

$$\text{Giả sử } x, y \geq 0 \Rightarrow z - x - y \leq 0$$

$$\text{Vì } -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1 \Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq |x| + |y| + |z|$$

$$\Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq x + y - z$$

$$\Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq -2z$$

$$-1 \leq z \leq 1, z \leq 0 \Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq 2$$

$$\text{Vậy } x^2 + y^4 + z^6 \leq 2.$$

Câu 85. (HSG 7 tỉnh Đà Nẵng, trường Nguyễn Khuyến năm 2016 - 2017)

a) Tìm giá trị của m để đa thức sau là đa thức bậc 3 theo biến x

$$f(x) = (m^2 - 25)x^4 + (20 + 4m)x^3 + 7x^2 - 9$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của đa thức $g(x) = 16x^4 - 72x^2 + 90$

Lời giải:

a) $f(x) = (m^2 - 25)x^4 + (20 + 4m)x^3 + 7x^2 - 9$ là đa thức bậc 3 biến x khi :

$$\begin{cases} m^2 - 25 = 0 \\ 20 + 4m \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \pm 5 \\ m \neq -5 \end{cases} \Rightarrow m = 5$$

Vậy $m = 5$ thì $f(x)$ là đa thức bậc 3 biến x

$$b) g(x) = 16x^4 - 72x^2 + 90 = (4x^2)^2 - 2 \cdot 4x^2 \cdot 9 + 9^2 + 9 = (4x^2 - 9)^2 + 9$$

$$\text{Với mọi giá trị của } x \text{ ta có: } (4x^2 - 9)^2 \geq 0 \Rightarrow g(x) = (4x^2 - 9)^2 + 9 \geq 9$$

$$\text{Min}_{g(x)} = 9 \Leftrightarrow 4x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{3}{2}.$$

Câu 86. (HSG 7 huyện Tam Dương, tỉnh, trường năm 2017 - 2018)

Cho đa thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ (x là ẩn, a, b, c hệ số)

Biết rằng: $f(0) = 2018, f(1) = 2019, f(-1) = 2017$. Tính $f(-2019)$

Lời giải

$$\text{Xét } x = 0: f(0) = 2018 \Rightarrow c = 2018$$

$$\text{Xét } x = 1: f(1) = 2019 \Rightarrow a + b + c = 2018 \Rightarrow a + b = 1 \quad (1)$$

$$\text{Xét } x = -1: f(-1) = 2017 \Rightarrow a - b + c = 2017 \Rightarrow a - b = -1 \quad (2)$$

$$\text{Cộng (1) và (2) vế theo vế } \Rightarrow a = 0 \Rightarrow b = 1$$

$$\text{Từ đó tìm được } f(x) = x + 2018$$

$$\text{Suy ra } f(-2019) = -1.$$

CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS

CD7: ĐA THỨC

Dạng 1: Xác định đa thức
Dạng 2: Tính giá trị của đa thức
Dạng 3: Dấu của đa thức
Dạng 4: Tìm giá trị của biến (tham số) để phép chia là phép chia hết
Dạng 5: Nghiệm của đa thức

Dạng 3. Dấu của đa thức

Câu 1. (HSG 7 Thị xã Nghi Sơn Tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ biết $21a - 3b + 5c = 0$. Chứng minh $f(1) \cdot f(-3) \leq 0$.

Lời giải

Ta có $3 \cdot f(1) + 2 \cdot f(-3) = 3 \cdot (a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c) + 2 \cdot [a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c]$

$3 \cdot (a + b + c) + 2 \cdot (9a - 3b + c) = 21a - 3b + 5c = 0$

$\Rightarrow 3 \cdot f(1) = -2f(-3)$

$\Rightarrow f(1) \cdot f(-3) = \frac{-2}{3} [f(-3)]^2 \leq 0$

$\Rightarrow f(1) \cdot f(-3) \leq 0$ (đpcm).

Câu 2. (HSG 7 trường Lê Hồng Phong 2018 - 2019)

Cho $A = |2x^4 + 3x^2 + 1| - |-2x^4 - x^2 - 1|$

Chứng tỏ rằng giá trị biểu thức A luôn không âm với mọi giá trị của x .

Lời giải

Vì $2x^4 \geq 0$; $3x^2 \geq 0 \Rightarrow 2x^4 + 3x^2 + 1 > 0$

Từ đó $|-2x^4 - x^2 - 1| = 2x^4 + x^2 + 1$.

$\Rightarrow A = 2x^4 + 3x^2 + 1 - 2x^4 - x^2 - 1 = 2x^2 \geq 0$ với mọi x

Vậy giá trị của A luôn không âm với mọi x .

Câu 3. (HSG 7 _2018-2019)

Cho các đơn thức $A = -\frac{1}{2}x^2yz^2$, $B = -\frac{3}{4}xy^2z^2$, $C = x^3y$

Chứng minh rằng các đơn thức A, B, C không thể cùng nhận giá trị âm

Lời giải

Giả sử cả 3 đơn thức A, B, C cùng có giá trị âm

$\Rightarrow A \cdot B \cdot C$ có giá trị âm (1)

Mặt khác $A \cdot B \cdot C = \left(-\frac{1}{2}x^2yz^2\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}xy^2z^2\right) \cdot x^3y = \frac{3}{8}x^6y^4z^4$

$$\text{Vì } \frac{3}{8}x^6y^4z^2 \geq 0 \forall x, y$$

$$\Rightarrow ABC \geq 0 \forall x, y \quad (2)$$

Ta thấy (1) mâu thuẫn với (2)

\Rightarrow điều giả sử sai.

Vậy ba đơn thức A, B, C không thể cùng giá trị âm.

Câu 4. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc 2022 - 2023)

Xác định dấu của c , biết rằng $2a^3bc$ trái dấu với $-3a^5b^3c^2$

Lời giải

Do $2a^3bc$ và $-3a^5b^3c^2$ trái dấu nên $a \neq 0; b \neq 0; c \neq 0$

$$2a^3bc \cdot (-3a^5b^3c^2) < 0$$

$$\Rightarrow -6a^8b^4c^3 < 0$$

$$\Rightarrow a^8b^4c^3 > 0$$

$$\Rightarrow c^3 > 0 \text{ (do } a^8b^4 > 0 \forall a, b \neq 0)$$

$$\Rightarrow c > 0$$

Vậy $c > 0$ tức là mang dấu dương.

Câu 5. (HSG 7 huyện, trường THCS Phú Trường 2022 - 2023)

Chứng minh đa thức $x^2 + 4x + 10$ dương.

Lời giải

$$\text{Ta có: } x^2 + 4x + 10 = x^2 + 2x + 2x + 4 + 6 = (x+2)^2 + 6$$

$$\text{Vì } (x+2)^2 \geq 0 \forall x \text{ nên } (x+2)^2 + 6 > 0 \forall x$$

Do đó $x^2 + 4x + 10$ dương.

Câu 6. (HSG 7 huyện Tam Hưng 2013 - 2014)

Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$. Chứng tỏ rằng: $f(-2) \cdot f(3) \leq 0$ nếu $13a + b + 2c = 0$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f(-2) + f(3) = (4a - 2b + c) + (9a + 3b + c) = 13a + b + 2c$$

$$\Rightarrow f(-2) + f(3) = 0 \text{ (vì } 13a + b + 2c = 0)$$

$$\Rightarrow f(-2) = -f(3)$$

$$\Rightarrow f(-2) \cdot f(3) = -f(3) \cdot f(3) = -[f(3)]^2 \leq 0$$

Câu 7. (HSG 7 Đề huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$, biết $5a - b + 2c = 0$. Chứng minh rằng $f(1) \cdot f(-2) \leq 0$

Lời giải

$$\text{Ta có: } f(1) = a + b + c$$

$$f(-2) = 4a - 2b + c$$

$$f(1) + f(-2) = a + b + c + 4a - 2b + c = 5a - b + 2c = 0$$

$$\Rightarrow f(1) = -f(-2)$$

$$\Rightarrow f(1).f(-2) = -[f(-2)]^2 \leq 0$$

Câu 8. (HSG 7 Đề quận Tây Hồ 2022 - 2023)

Cho đa thức $f(x) = a.x^2 + bx + c$, với a, b, c là các hệ số thỏa mãn $5a - 7b - c = 0$. Chứng tỏ tích $f(-2).f(1)$ là một số không âm

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(-2) = 4a - 2b + c \\ f(1) = a + b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2f(-2) = 8a - 4b + 2c \\ -3f(1) = -3a - 3b - 3c \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } 2f(-2) - 3f(1) = 5a - 7b - c = 0$$

$$\Rightarrow 2f(-2) - 3f(1) = 0$$

$$\Rightarrow 2f(-2) = 3f(1)$$

Suy ra $f(-2)$ và $f(1)$ cùng dấu

Do đó $f(-2).f(1)$ là số không âm.



CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS

CD7: ĐA THỨC

Dạng 1: Xác định đa thức
Dạng 2: Tính giá trị của đa thức
Dạng 3: Dấu của đa thức
Dạng 4: Tìm giá trị của biến (tham số) để phép chia là phép chia hết
Dạng 5: Nghiệm của đa thức

Dạng 4. Tìm giá trị của biến (tham số) để phép chia là phép chia hết.

Câu 1. (HSG 7 huyện Lục Ngạn Tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

Tìm số dư trong phép chia đa thức $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ cho đa thức $g(x) = x - 2$.

Lời giải

Theo định lí Bozu, số dư của phép chia đa thức $f(x)$ cho đa thức bậc nhất $g(x) = x - 2$ sẽ bằng $f(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 1 = 21$

Vậy số dư phép chia đa thức $f(x)$ cho đa thức bậc nhất $g(x)$ là 21.

Câu 2. (HSG 7 Đề giao lưu HSG Lạng Giang 2022 - 2023)

Đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ có a, b, c là các số nguyên và $a \neq 0$ thức. Biết với mọi giá trị nguyên của x thì $f(x)$ chia hết cho 7. Chứng minh a, b, c cũng chia hết cho 7.

Lời giải

$f(x) = ax^2 + bx + c : 7$ với mọi giá trị nguyên của x .

+ Với $x = 0$

$$\Rightarrow f(0) = c : 7$$

+ Với $x = 1$

$$\Rightarrow f(1) = (a + b + c) : 7$$

Mà $c : 7$ (cm trên)

$$\Rightarrow (a + b) : 7 \quad (1)$$

+ Với $x = -1$

$$\Rightarrow f(-1) = (a - b + c) : 7$$

Mà $c : 7$ (cm trên)

$$\Rightarrow (a - b) : 7 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow [(a + b) - (a - b)] : 7$$

$$\Rightarrow 2b : 7 \Rightarrow b : 7 \quad (\text{do } (2, 7) = 1)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow [(a + b) + (a - b)] : 7$$

$$\Rightarrow 2a : 7 \Rightarrow a : 7 \quad (\text{do } (2, 7) = 1)$$

Vậy a, b, c chia hết cho 7 với $f(x)$ chia hết cho 7.

Câu 3. (HSG 7 huyện Mỹ Đức- Hà Nội 2022 - 2023)

Cho đa thức $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Biết $Q(x)$ chia hết cho 5 với mọi $x \in \mathbb{Z}$. Chứng tỏ các hệ số a, b, c, d đều chia hết cho 5.

Lời giải

Vì $Q(x) \equiv 0 \pmod{5}$ với mọi $x \in \mathbb{Z}$

Với $x = 0$, ta có $Q(0) = d \equiv 0 \pmod{5}$

Với $x = 1$, ta có $Q(1) = (a + b + c + d) \equiv 0 \pmod{5}$

Mà $d \equiv 0 \pmod{5}$

$$\Rightarrow (a + b + c) \equiv 0 \pmod{5} \quad (1)$$

Với $x = -1$, ta có $Q(-1) = (-a + b - c + d) \equiv 0 \pmod{5}$

mà $d \equiv 0 \pmod{5}$

$$\Rightarrow (a + b - c) \equiv 0 \pmod{5} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$Q(1) + Q(-1) = 2b \equiv 0 \pmod{5} \text{ mà } (2; 5) = 1 \text{ nên } b \equiv 0 \pmod{5}$$

$$Q(1) - Q(-1) = 2(a + c) \equiv 0 \pmod{5} \text{ mà } (2; 5) = 1 \text{ nên } (a + c) \equiv 0 \pmod{5} \quad (3)$$

Với $x = 2$, ta có $Q(2) = (8a + 4b + 2c + d) \equiv 0 \pmod{5}$

$$\text{hay } [6a + 2(a + c) + 4b + d] \equiv 0 \pmod{5}$$

Mà $d \equiv 0 \pmod{5}$, $(a + c) \equiv 0 \pmod{5}$, $b \equiv 0 \pmod{5}$ nên $6a \equiv 0 \pmod{5}$ mà $(6; 5) = 1 \Rightarrow a \equiv 0 \pmod{5}$

Kết hợp với (3) suy ra $c \equiv 0 \pmod{5}$

Vậy $a \equiv 0 \pmod{5}$; $b \equiv 0 \pmod{5}$; $c \equiv 0 \pmod{5}$; $d \equiv 0 \pmod{5}$.

Câu 4. (HSG 7 Trường THCS Đáp Cầu 2018 - 2019)

Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$

Biết $f(1) \equiv 0 \pmod{3}$, $f(0) \equiv 0 \pmod{3}$, $f(-1) \equiv 0 \pmod{3}$. Chứng minh rằng a, b, c đều chia hết cho 3

Lời giải

Ta có: $f(0) = c$; $f(1) = a + b + c$; $f(-1) = a - b + c$

$$f(0) \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow c \equiv 0 \pmod{3}$$

$$f(1) \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow (a + b + c) \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow (a + b) \equiv 0 \pmod{3} \quad (1)$$

$$f(-1) \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow (a - b + c) \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow (a - b) \equiv 0 \pmod{3} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $[(a + b) + (a - b)] \equiv 0 \pmod{3}$

$$\Rightarrow 2a \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\text{mà } (2; 3) = 1$$

$$\Rightarrow a \equiv 0 \pmod{3}$$

Chứng minh tương tự $\Rightarrow b:3$.

Vậy a, b, c đều chia hết cho 3.

Câu 5. (HSG 7 huyện Tam Điệp 2021 - 2022)

Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ (với a, b, c là các số nguyên).

Chứng minh rằng: Nếu $f(x)$ chia hết cho 3 với mọi giá trị của x thì a, b, c , đều chia hết cho 3.

Lời giải

Với $f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số nguyên, $f(x)$ chia hết cho 3 với mọi x

+ Ta có $f(0) = c$ do $f(0):3 \Rightarrow c:3$

+ Lại có: $f(1) - f(-1) = (a + b + c) - (a - b + c) = 2b$

Do $f(1)$ và $f(-1)$ chia hết cho 3

$\Rightarrow 2b:3 \Rightarrow b:3$ vì $(2,3) = 1$

+ $f(1):3 \Rightarrow (a + b + c):3$

mà b và c chia hết cho 3

$\Rightarrow a:3$

Vậy a, b, c đều chia hết cho 3.

Câu 6. (HSG 7 huyện Hương Khê 2021 - 2022)

Tìm $n \in \mathbb{Z}$ sao cho $(2n - 3):(n + 1)$.

Lời giải

Đề $(2n - 3):(n + 1)$

$\Rightarrow (2n + 2 - 5):(n + 1)$

$\Rightarrow [2(n + 1) - 5]:(n + 1)$

$\Rightarrow 5:(n + 1)$

Hay $n + 1$ là Ư(5). Mà $Ư(5) \in \{\pm 1; \pm 5\}$

Ta có bảng sau:

$n + 1$	-1	1	-5	5
n	-2	0	-6	4

Vậy $n \in \{-2; 0; -6; 4\}$.

Câu 7. (HSG 7 huyện Sầm Sơn 2017 - 2018)

$P(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn: $P(x):7 \forall x \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng a, b, c đều chia hết cho 7.

Lời giải

Vì $P(x):7 \forall x \in \mathbb{Z}$ nên ta có:

+) $P(0):7$ nên $c:7$

$$+) P(1):7 \text{ nên } (a+b+c):7 \Rightarrow (a+b):7 \quad (1)$$

$$+) P(-1):7 \text{ nên } (a-b+c):7 \Rightarrow (a-b):7 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } [(a+b)+(a-b)]:7 \Leftrightarrow 2a:7 \text{ mà } 2 \nmid 7 \Rightarrow a:7$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } [(a+b)-(a-b)]:7 \Leftrightarrow 2b:7 \text{ mà } 2 \nmid 7 \Rightarrow b:7$$

Vậy a, b, c đều chia hết cho 7.

Câu 8. (HSG 7 Đề huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Tìm số nguyên a sao cho $a^2 + 2a + 3$ chia hết cho $a + 1$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } a^2 + 2a + 3 = a(a+1) + (a+1) + 2 = (a+1)^2 + 2$$

Để $a^2 + 2a + 3$ chia hết cho $a + 1$ thì $2 : a + 1$

$$\Rightarrow a + 1 \in U(2) \Rightarrow a + 1 \in \{-2; -1; 1; 2\}$$

$$\Rightarrow a \in \{-3; -2; 0; 1\}$$

Vậy $a^2 + 2a + 3$ chia hết cho $a + 1$ thì $a \in \{-3; -2; 0; 1\}$

Câu 9. (HSG 7 Đề huyện Lâm Thao 2022 - 2023)

Cho đa thức $A(x) = x^3 - x^2 + ax + b - 2$ và $B(x) = x^2 - 2x + 3$ (với $a; b \in \mathbb{R}$).

Xác định hệ số $a; b$ để $A(x)$ chia cho $B(x)$ có số dư bằng 6

Lời giải

Thực hiện phép chia được dư là $(a-1)x + b - 5$

$$\text{Để } A(x) \text{ chia hết cho } B(x) \text{ có số dư bằng 6 thì } \begin{cases} a-1=0 \\ b-5=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=11 \end{cases}$$

Vậy $a = 1; b = 11$

Câu 10. (HSG 7 Đề quận Tây Hồ 2022 - 2023)

Tìm a để đa thức $2x^4 - 5x^2 + x^3 - 3x - a$ chia hết cho đa thức $x - 3$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2x^4 - 5x^2 + x^3 - 3x - a$$

$$= 2x^4 + x^3 - 5x^2 - 3x - a$$

$$= (x-3)(2x^3 + 7x^2 + 16x + 45) + 135 - a$$

Để $2x^4 - 5x^2 + x^3 - 3x - a$ chia hết cho $x - 3$ thì

$$135 - a = 0$$

$$\Rightarrow a = 135$$

Vậy $a = 135$.

ĐỀ 7: ĐA THỨC

Dạng 1: Xác định đa thức
Dạng 2: Tính giá trị của đa thức
Dạng 3: Dấu của đa thức
Dạng 4: Tìm giá trị của biến (tham số) để phép chia là phép chia hết
Dạng 5: Nghiệm của đa thức

Dạng 5. Nghiệm của đa thức.

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 Đề giao lưu HSG Lạng Giang 2022 - 2023)

Cho đa thức $f(x) = x(x^2 - 4)(x^2 + 2023)$ có các nghiệm là:

- A. $\{-2; 2\}$ B. $\{0; 2; -2\}$ C. $\{0; 2\}$ D. $\{2023; 2; -2\}$

Lời giải

Chọn B

$$f(x) = x(x^2 - 4)(x^2 + 2023) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ hoặc } x^2 - 4 = 0 \text{ hoặc } x^2 + 2023 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = \pm 2$$

($x^2 + 2023 = 0$ không tìm được x thỏa mãn vì $x^2 + 2023 > 0$ với mọi x)

Vậy đa thức $f(x) = x(x^2 - 4)(x^2 + 2023)$ có các nghiệm là: $0; 2; -2$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Thanh Ba 2021 - 2022)

Cho hai đa thức: $P(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 5x$ và $Q(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 6x + 2$.

Đa thức $G(x) = P(x) - Q(x)$ có số nghiệm là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn C

$$P(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 5x \text{ và } Q(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 6x + 2.$$

$$\begin{aligned} G(x) &= P(x) - Q(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 = x^2(x + 2) - (x + 2) = (x + 2)(x^2 - 1) \\ &= (x + 2)(x - 1)(x + 1). \end{aligned}$$

Cho $G(x) = 0$ suy ra $(x + 2)(x - 1)(x + 1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \\ x - 1 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Do đó $G(x)$ có số nghiệm là 3.

Câu 3. (HSG 7 huyện Tam Nông 2021 - 2022)

Cho hai đa thức $P(x) = -2x^4 - x^2 + x - 2$ và $Q(x)$ thỏa mãn: $P(x) - Q(x) = -2x^4 - 2$.
 Nghiệm của đa thức $Q(x)$ là

- A.** $x = 0$ và $x = -1$. **B.** $x = 0$ và $x = 1$. **C.** $x = 1$ và $x = -1$. **D.** $x = 1$ và $x = 2$.

Lời giải

Chọn B

Từ $P(x) - Q(x) = -2x^4 - 2$ suy ra:

$$Q(x) = P(x) - (-2x^4 - 2) = -2x^4 - x^2 + x - 2 - (-2x^4 - 2) = -2x^4 - x^2 + x - 2 + 2x^4 + 2 = -x^2 + x = x(-x + 1).$$

$Q(x) = 0$ khi $x(-x + 1) = 0$. Suy ra: $x = 0$ hoặc $x = 1$.

Do đó nghiệm của đa thức $Q(x)$ là $x = 0$ và $x = 1$.

Câu 4. (HSG 7 đề khảo sát lần 3, 2022 - 2023)

Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn điều kiện $5x.f(x - 2021) = (x - 14).f(x)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.** Đa thức $f(x)$ có nhiều nhất 2 nghiệm. **B.** Đa thức $f(x)$ vô nghiệm.
C. Đa thức $f(x)$ có ít nhất 2 nghiệm. **D.** Đa thức $f(x)$ chỉ có 1 nghiệm.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $5x.f(x - 2021) = (x - 14).f(x)$ (*)

+ Thay $x = 14$ vào (*) ta được: $5.14.f(14 - 2021) = (14 - 14).f(14)$

$$\Rightarrow 5.14.f(-2007) = 0 \Rightarrow f(-2007) = 0$$

$\Rightarrow x = -2007$ là 1 nghiệm của $f(x)$

+ Thay $x = 0$ vào (*) ta được: $5.0.f(0 - 2021) = (0 - 14).f(0)$

$$(0 - 14).f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

$\Rightarrow x = 0$ là 1 nghiệm của $f(x)$

Vậy đa thức $f(x)$ có ít nhất 2 nghiệm.

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Lập Thạch tỉnh Vĩnh Phúc 2022 - 2023)

Cho các đa thức: $A(x) = 3x - 9x^2 + 4x + 5x^3 + 7x^2 + 1$ và $B(x) = 5x^3 - 3x^2 + 7x + 10$. Hãy tìm nghiệm của đa thức $C(x) = A(x) - B(x)$.

Lời giải

Ta có $A(x) = 3x - 9x^2 + 4x + 5x^3 + 7x^2 + 1 = 5x^3 - 2x^2 + 7x + 1$

$$C(x) = A(x) - B(x) = (5x^3 - 2x^2 + 7x + 1) - (5x^3 - 3x^2 + 7x + 10)$$

$$C(x) = (5x^3 - 5x^3) + (-2x^2 + 3x^2) + (7x - 7x) + (1 - 10)$$

$$\text{Ta có } C(x) = x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

Vậy $x = \pm 3$ là nghiệm của đa thức $C(x) = A(x) - B(x)$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Yên Định 2022 - 2023)

Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn điều kiện: $x \cdot f(x-2) = (x-1) \cdot f(x)$. Chứng minh rằng đa thức $f(x)$ có ít nhất 2 nghiệm.

Lời giải

+ Khi $x = 0$ thì ta có:

$$0 \cdot f(0-2) = (0-1)f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

Vậy $x = 0$ là 1 nghiệm của đa thức $f(x)$

+ Khi $x = 1$ thì ta có:

$$1 \cdot f(1-2) = (1-1)f(1) \Rightarrow f(-1) = 0$$

Vậy $x = -1$ là một nghiệm của đa thức $f(x)$

Vậy $f(x)$ có ít nhất 2 nghiệm là $0; -1$.

Câu 3. (HSG 7 Quảng Ninh 2022 - 2023)

Cho hai đa thức: $M(x) = 2x^3 - x^2 - 3x + 1$ và $N(x) = -x^3 + x^2 - x + 2$. Tìm một nghiệm của đa thức: $P(x) = M(x) + N(x)$.

Lời giải

Ta có: $P(x) = M(x) + N(x)$

$$\Rightarrow P(x) = (2x^3 - x^2 - 3x + 1) + (-x^3 + x^2 - x + 2)$$

$$P(x) = 2x^3 - x^2 - 3x + 1 - x^3 + x^2 - x + 2$$

$$P(x) = x^3 - 4x + 3$$

Với $x = 1$ ta có: $P(1) = 1^3 - 4 \cdot 1 + 3 = 0$

Suy ra: $x = 1$ là một nghiệm của đa thức $P(x)$.

Câu 4. (HSG 7 Đề giao lưu HSG Gia Viễn 2022 - 2023)

Cho đa thức $Q(x) = ax^2 + bx + 4c$. Chứng minh rằng nếu đa thức $Q(x)$ nhận 2 và -2 là nghiệm thì a và c là hai số đối nhau.

Lời giải

Vì $Q(x) = ax^2 + bx + 4c$ nhận 2 và -2 là nghiệm nên $Q(2) = 0; Q(-2) = 0$.

Ta có: $Q(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 4c = 4a + 2b + 4c = 0$

$$Q(-2) = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + 4c = 4a - 2b + 4c = 0$$

$$\Rightarrow 4a + 2b + 4c + 4a - 2b + 4c = 0 \Rightarrow 8a + 8c = 0$$

$$\Rightarrow 8(a + c) = 0 \Rightarrow a + c = 0$$

$\Rightarrow a$ và c là hai số đối nhau.

Câu 5. (HSG 7 huyện Trục Ninh 2020 - 2021)

Chứng minh đa thức sau không có nghiệm $A = x^{12} - x^9 + x^8 - x^7 + x^6 - x^3 + 1$.

Lời giải

$$A = x^{12} - x^9 + x^8 - x^7 + x^6 - x^3 + 1$$

Ta có : $x^{12}; x^8; x^6 \geq 0$ với mọi x (*)

$$+) \text{ Nếu } x \geq 1, \text{ khi đó } \left. \begin{array}{l} x^{12} \geq x^9 \\ x^8 \geq x^7 \\ x^6 \geq x^3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^{12} - x^9 \geq 0 \\ x^8 - x^7 \geq 0 \\ x^6 - x^3 \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow A = x^{12} - x^9 + x^8 - x^7 + x^6 - x^3 + 1 \geq 1 > 0$$

+) Nếu $x \leq 0$ khi đó $-x^9; -x^7; -x^3 \geq 0$.

Kết hợp với (*) ta có $A = x^{12} - x^9 + x^8 - x^7 + x^6 - x^3 + 1 \geq 1 > 0$

+) Nếu $0 < x < 1$. ta có

$$A = x^{12} + (x^8 - x^9) + (x^6 - x^7) + (1 - x^3) = x^{12} + x^8(1-x) + x^6(1-x) + (1-x^3)$$

Vì $0 < x < 1$ nên $1-x > 0, 1-x^3 > 0$

Kết hợp với (*) suy ra $A = x^{12} - x^9 + x^8 - x^7 + x^6 - x^3 + 1 > 0$

Vậy $A > 0$ với mọi x . Do đó đa thức đã cho không có nghiệm.

Câu 6. (HSG 7 huyện Nghĩa Hành 2021 - 2022)

Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn điều kiện: $x \cdot f(x+1) = (x+2) \cdot f(x)$.

Chứng minh rằng đa thức $f(x)$ có ít nhất hai nghiệm là 0 và -1.

Lời giải

Ta có: $x \cdot f(x+1) = (x+2) \cdot f(x)$ với mọi x (1)

+ Thay $x = 0$ vào (1) ta được: $0 \cdot f(1) = 2 \cdot f(0)$

Do $0 = 2 \cdot f(0)$ nên $f(0) = 0$. Khi đó 0 là một nghiệm của $f(x)$.

+ Thay $x = -1$ vào (1) ta được: $-1 \cdot f(0) = 1 \cdot f(-1)$ nên $-f(0) = f(-1)$.

Do $f(0) = 0$ nên $f(-1) = 0$. Khi đó -1 cũng là một nghiệm của $f(x)$.

Vậy đa thức $f(x)$ có ít nhất hai nghiệm là 0 và -1.

Câu 7. (HSG 7 huyện Chương Mỹ 2021 - 2022)

Cho hai đa thức: $f(x) = -5x^5 + 3x^3 + 2x^2 + x + \frac{1}{2}$ và $g(x) = 5x^5 - 3x^3 - x^2 - x + \frac{1}{2}$.

a) Tính $h(x) = f(x) + g(x)$. Chứng tỏ đa thức $h(x)$ không có nghiệm.

b) Tìm nghiệm của đa thức $h(x) - 5$.

Lời giải

$$a) h(x) = f(x) + g(x) = -5x^5 + 3x^3 + 2x^2 + x + \frac{1}{2} + 5x^5 - 3x^3 - x^2 - x + \frac{1}{2} = x^2 + 1.$$

Ta có: $x^2 \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên $x^2 + 1 \geq 1$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Do đó $h(x) \neq 0$ với mọi x .

Vậy đa thức $h(x)$ không có nghiệm.

$$b) \text{ Ta có: } h(x) - 5 = x^2 + 1 - 5 = x^2 - 4.$$

$$h(x) - 5 = 0 \text{ khi } x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2.$$

Vậy nghiệm của đa thức $h(x) - 5$ là $x = 2$ và $x = -2$.

Câu 8. (HSG 7 huyện Cao Lộc 2021 - 2022)

Tìm nghiệm của đa thức: $P(x) = 2x^2 + 3x + 1$.

Lời giải

Ta có:

$$P(x) = 0$$

$$2x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$2x^2 + 2x + x + 1 = 0$$

$$2x(x+1) + x+1 = 0$$

$$(x+1)(2x+1) = 0.$$

Suy ra $x+1=0$ hoặc $2x+1=0$.

Suy ra $x = -1$ hoặc $x = -\frac{1}{2}$.

Vậy đa thức $P(x)$ có hai nghiệm là $x = -1$ và $x = -\frac{1}{2}$.

Câu 9. (HSG 7 huyện Cửa Lò 2020 - 2021)

Cho hai đa thức: $A(x) = -2x^5 + x^4 - 2x^2 - 7x - 3$ và $B(x) = -2x^5 + x^4 + 3x^2 + 3x - 3$.

Tìm nghiệm của đa thức $N(x) = A(x) - B(x)$.

Lời giải

Ta có: $A(x) = -2x^5 + x^4 - 2x^2 - 7x - 3$ và $B(x) = -2x^5 + x^4 + 3x^2 + 3x - 3$.

Suy ra: $N(x) = A(x) - B(x) = -5x^2 - 10x$.

Cho $N(x) = 0 \Rightarrow -5x^2 - 10x = 0 \Rightarrow -5x(x+2) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ hoặc $x + 2 = 0 \Rightarrow x = 0$ hoặc $x = -2$.

Vậy nghiệm của đa thức $N(x)$ là 0 và -2 .

Câu 10. (HSG 7 huyện Chư Sê, Gia Lai 2020 - 2021)

Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ nhận 1 và -1 là nghiệm thì a và c là hai số đối nhau.

Lời giải

Ta có: $f(x)$ nhận 1 và -1 là nghiệm thì $f(1) = 0$ và $f(-1) = 0$.

$f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$; $f(-1) = 0 \Rightarrow a - b + c = 0$.

Suy ra: $(a + b + c) + (a - b + c) = 0 \Rightarrow 2(a + c) = 0 \Rightarrow a + c = 0 \Rightarrow a = -c$.

Vậy a và c là hai số đối nhau.

Câu 11. (HSG 7 Trường Phong Đạt_2018-2019)

Cho biết $(x-1)f(x) = (x+4)f(x+8)$ với mọi x . Chứng minh $f(x)$ có ít nhất hai nghiệm.

Lời giải

Vì $(x-1)f(x) = (x+4)f(x+8)$ với mọi x nên:

+ Với $x = -4$ thì $-5f(-4) = 0.f(4) \Rightarrow f(-4) = 0$.

Khi đó $x = -4$ là một nghiệm của $f(x)$

+ Với $x = -12$ thì $-13f(-12) = -8.f(-4) \Rightarrow f(-12) = f(-4) = 0$.

Khi đó $x = -12$ là một nghiệm của $f(x)$

Do đó $f(x)$ có ít nhất 2 nghiệm là -4 và -12 .

Câu 12. (HSG 7 Trường Thanh Cao_2018-2019)

Chứng minh rằng đa thức: $f(x) = -4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1$ không có nghiệm nguyên.

Lời giải

Nếu đa thức $f(x) = -4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1$ có nghiệm thì nghiệm đó là ước của -1 ,

Mặt khác $U(-1) = \{-1; 1\}$

Ta có: $f(-1) = -11 \neq 0; f(1) = -3 \neq 0$.

Vậy đa thức đã cho không có nghiệm nguyên.

Câu 13. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2017 - 2018)

Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn: $x.f(x-2011) = (x-2012).f(x)$

Chứng minh rằng đa thức $f(x)$ có ít nhất hai nghiệm khác nhau.

Lời giải

+) Với $x = 0$ ta có: $-2012.f(0) = 0.f(-2011) = 0$ hay $f(0) = 0$

Khi đó $x = 0$ là nghiệm của đa thức $f(x)$.

+) Với $x = 2011$ ta có: $2011.f(2011-2011) = (2011-2012)f(2011)$

$$\Rightarrow 2011.f(0) = -1f(2011) = 0$$

$$\Rightarrow f(2011) = 0$$

Khi đó $x = 2011$ là nghiệm của đa thức $f(x)$.

Vậy đa thức $f(x)$ có ít nhất hai nghiệm khác nhau.

Câu 14. (HSG 7 huyện Khoái Châu 2014 - 2015)

Cho đa thức $f(x)$, biết với mọi x ta có : $x.f(x+1) = (x+2)f(x)$. Chứng minh rằng đa thức $f(x)$ luôn có ít nhất hai nghiệm.

Lời giải

Vì với mọi x ta có $x.f(x+1) = (x+2)f(x)$ nên

- Với $x = 0$, ta có: $0.f(1) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow 0$ là một nghiệm của $f(x)$

- Với $x = -2$, ta có: $-2f(-1) = 0f(-2) \Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow -1$ cũng là một nghiệm của $f(x)$

Vậy đa thức $f(x)$ luôn có ít nhất hai nghiệm.

Câu 15. (HSG 7 trường Cao Dương 2016 - 2017)

Cho đa thức $f(x) = x^2 + mx + 2$.

- a) Xác định m để $f(x)$ nhận -2 làm một nghiệm;
 b) Tìm tập hợp các nghiệm của $f(x)$ ứng với giá trị vừa tìm được của m .

Lời giải

a) Vì $f(x)$ nhận -2 làm một nghiệm

$$\Rightarrow (-2)^2 + m \cdot (-2) + 2 = 0 \Rightarrow 6 - 2m = 0 \Rightarrow m = 3$$

b) Ta có $f(x) = x^2 + 3x + 2 = x^2 + 2x + x + 2 = x(x + 2) + (x + 2) = (x + 2)(x + 1)$

$$\text{Cho } f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x + 1)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Vậy tập hợp các nghiệm của $f(x)$ là $S = \{-1; -2\}$

Câu 16. (HSG 7 trường Nguyễn Khuyến 2015 - 2016)

Tìm nghiệm của đa thức $7x^2 - 35x + 42$.

Lời giải

Ta có $7x^2 - 35x + 42$

$$= 7(x^2 - 5x + 6)$$

$$= 7(x^2 - 3x - 2x + 6)$$

$$= 7[x(x - 3) - 2(x - 3)]$$

$$= 7(x - 3)(x - 2)$$

$$\text{Cho } 7x^2 - 35x + 42 = 0 \Rightarrow 7(x - 3)(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của đa thức trên là $x \in \{2; 3\}$.

Câu 17. (HSG 7 huyện Thanh Oai 2014 - 2015)

Chứng minh rằng đa thức $x^2 - 2x + 2$ vô nghiệm.

Lời giải

$$\text{Ta có : } x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 + 1 = (x - 1)^2 + 1$$

$$\text{Vì } (x - 1)^2 \geq 0 (\forall x) \Rightarrow (x - 1)^2 + 1 \geq 1 \text{ với mọi } x$$

Do đó $x^2 - 2x + 2 > 0$ với mọi x

Vì thế đa thức đã cho vô nghiệm.

Câu 18. (HSG 7 trường Tân Ước 2013 - 2014)

Tìm nghiệm của đa thức sau: $x^2 + 8x + 25$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } x^2 + 8x + 25 = x^2 + 4x + 4x + 16 + 9 = x(x + 4) + 4(x + 4) + 9$$

$$= (x+4)(x+4) + 9 = (x+4)^2 + 9$$

$$\text{Vì } (x+4)^2 \geq 0 (\forall x) \Rightarrow (x+4)^2 + 9 > 0 \text{ với mọi } x$$

Do đó $x^2 + 8x + 25 > 0$ với mọi x

\Rightarrow Đa thức $x^2 + 8x + 25$ vô nghiệm.

Câu 19. (HSG 7 Đề huyện Sóc Sơn 2022 - 2023)

Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn $x.f(x+2023) = (x+4046).f(x)$. Chứng minh $f(x)$ có ít nhất hai nghiệm.

Lời giải

$$\text{Ta có } x.f(x+2023) = (x+4046).f(x) \quad (*)$$

+ Thay $x=0$ vào (*) ta được $0.f(0+2023) = (0+4046).f(0) \Rightarrow f(0) = 0$. Nên $x=0$ là một nghiệm của $f(x)$.

+ Thay $x=-2023$ vào (*) ta được $-2023.f(-2023+2023) = (-2023+4046).f(-2023) \Rightarrow -2023.f(0) = 2023.f(-2023)$, mà $f(0) = 0$ nên $f(-2023) = 0$. Suy ra $x=-2023$ là một nghiệm của $f(x)$.

Câu 20. (HSG 7 TP Ninh Bình 2022 - 2023)

Cho đa thức $f(x) = 2016 \cdot x^4 - 32(25 \cdot k + 2) \cdot x^2 + k^2 - 100$ (với k là số thực dương cho trước). Biết đa thức $f(x)$ có đúng ba nghiệm phân biệt a, b, c (với $a < b < c$). Tính hiệu của $a - c$.

Lời giải

Ta thấy đa thức $f(x)$ nếu có nghiệm $x = a$ (a khác 0) thì $x = -a$ cũng là một nghiệm của $f(x)$, nên đa thức $f(x)$ có 2 nghiệm.

Mà đa thức $f(x)$ có đúng ba nghiệm phân biệt nên một trong ba nghiệm sẽ bằng 0

Thay $x=0$ vào đa thức $f(x)$ ta được: $k^2 - 100 = 0$ nên $k = 10$ (vì k dương).

$$\text{Với } k = 10 \text{ ta có } f(x) = 2016 \cdot x^4 - 8064 \cdot x^2 = 2016x^2 \cdot (x^2 - 4)$$

$$\text{Cho } f(x) = 2016x^2 \cdot (x^2 - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 2^2 = (-2)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Vì $a < b < c$ nên $f(x)$ sẽ có 3 nghiệm phân biệt là $a = -2$; $b = 0$ và $c = 2$

Khi đó $a - c = -2 - 2 = -4$.

Câu 21. (HSG 7 huyện Mù Cang Chải, 2016- 2017)

a) Xác định đa thức $P(x)$ có bậc 2 với hệ số cao nhất bằng 1 và nhận hai số $0; -3$ làm nghiệm

b) Cho đa thức $f(x)$, biết với mọi x ta có: $x.f(x+1) = (x+2)f(x)$.

Chứng minh rằng đa thức $f(x)$ luôn có ít nhất hai nghiệm.

Lời giải

a) $P(x) = x^2 + ax + b$

+) Có 0 là một nghiệm của đa thức, nên $f(0) = b = 0$

+) Có -3 là một nghiệm của đa thức, nên: $9 - 3a + 0 = 0 \Rightarrow a = 3$

Đa thức $P(x) = x^2 + 3x$ là đa thức cần tìm.

b) Với $x = 0$, ta có: $0 \cdot f(1) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow 0$ là một nghiệm của $f(x)$

Với $x = -2$, ta có: $-2f(-1) = 0f(-2) \Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow -1$ là một nghiệm của $f(x)$

Vậy đa thức $f(x)$ luôn có ít nhất hai nghiệm.

Câu 22. (HSG 7 huyện Đất Mũi, 2016- 2017)

Cho đa thức $f(x)$ xác định với mọi x thỏa mãn: $x \cdot f(x+2) = (x^2 - 9)f(x)$

1) Tính $f(5)$

2) Chứng minh rằng $f(x)$ có ít nhất 3 nghiệm

Lời giải

1) Ta có: $x = 3 \Rightarrow f(5) = 0$

2) Với $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow x = 0$ là một nghiệm

Với $x = 3 \Rightarrow f(5) = 0 \Rightarrow x = 5$ là một nghiệm

Với $x = -3 \Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow x = -1$ là một nghiệm

Vậy $f(x)$ có ít nhất là 3 nghiệm.

Câu 23. (HSG 7 trường Nguyễn Trực 2017- 2018)

Chứng minh rằng đa thức $f(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$ không có nghiệm.

Lời giải

Xét từng khoảng

+ Xét $x \leq 0$ dẫn đến $f(x) \geq 1 > 0$

+ Xét $0 < x < 1$ lập luận dẫn đến $f(x) > 0$

+ Xét $x \geq 1$ lập luận dẫn đến $f(x) > 0$

Trong cả ba khoảng trên đều có $f(x) \neq 0$ nên đa thức $f(x)$ không có nghiệm.

Câu 24. (HSG 7 huyện Phù Cát, trường Ngô Gia Tự năm 2017 - 2018)

Chứng minh đa thức sau không có nghiệm: $C = x^{10} - x^5 + x^2 - x + 1$

Lời giải:

Xét đa thức : $C = x^{10} - x^5 + x^2 - x + 1$

Nếu $x = 0 \Rightarrow C = 1 > 0$

Nếu $x < 0 \Rightarrow x^{10} + x^2 + 1 > 0$; $-x^5 - x > 0 \Rightarrow C > 0$

Nếu $0 < x < 1 \Rightarrow C = x^{10} + x^2(1 - x^3) + (1 - x) > 0$

Nếu $x \geq 1 \Rightarrow C = x^5 \cdot (x^5 - 1) + x(x - 1) + 1 > 0$

Vậy $C > 0$ với mọi x nên đa thức C không có nghiệm.

Câu 25. (HSG 7 trường Kim An năm 2017 - 2018)

Chứng minh đa thức $x^2 + 4x + 10$ không có nghiệm.

Lời giải:

Ta có: $x^2 + 4x + 10 = x^2 + 2x + 2x + 4 + 6 = (x + 2)^2 + 6 > 0$ ($\forall x$)

Do đó $x^2 + 4x + 10$ không có nghiệm.



CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS