

CD1: THỰC HIỆN PHÉP TÍNH

Dạng 1: Tính toán đơn giản
Dạng 2: Lũy thừa phối hợp các phép tính
Dạng 3: Tính tổng các số tự nhiên được lập từ một chữ số
Dạng 4: Tính tổng dãy phân số có quy luật
Dạng 5: Tính tổng tự nhiên dạng tích
Dạng 6: Tính tích
Dạng 7: Tính tổng cùng số mũ
Dạng 8: Tính tổng cùng cơ số
Dạng 9: Tính tỉ số của hai tổng
Dạng 10: Tính giá trị biểu thức

DẠNG 1: TÍNH TOÁN ĐƠN GIẢN

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 huyện Yên Thế - Bắc Giang 2022 - 2023)

Kết quả phép tính $A = \frac{2 - \frac{2}{19} + \frac{2}{43} - \frac{2}{2023}}{3 - \frac{3}{19} + \frac{3}{43} - \frac{3}{2023}}$ là:

- A.** $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{4}{5}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{5}{6}$.

Lời giải

Chọn A

$$A = \frac{2 - \frac{2}{19} + \frac{2}{43} - \frac{2}{2023}}{3 - \frac{3}{19} + \frac{3}{43} - \frac{3}{2023}} = \frac{2 \cdot \left(1 - \frac{1}{19} + \frac{1}{43} - \frac{1}{2023}\right)}{3 \cdot \left(1 - \frac{1}{19} + \frac{1}{43} - \frac{1}{2023}\right)} = \frac{2}{3}$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Tân Yên - Bắc Giang 2022 - 2023)

Kết quả phép tính $A = \frac{2 - \frac{2}{19} + \frac{2}{43} - \frac{2}{1943}}{3 - \frac{3}{19} + \frac{3}{43} - \frac{3}{1943}}$ là:

- A.** $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{4}{5}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{5}{6}$.

Lời giải

Chọn A

$$A = 2023^0 - \left| \frac{1}{2} - \frac{3}{5} \right| + \sqrt{\frac{16}{25}} = 1 - \frac{1}{10} + \frac{4}{5} = \frac{10}{10} - \frac{1}{10} + \frac{8}{10} = \frac{17}{10}.$$

Câu 6. (HSG 7 huyện Thanh Thủy 2022 - 2023) Đề 375

Giá trị biểu thức $A = \left(0,4 + \frac{3}{5} \right) \cdot \sqrt{\frac{25}{64}} - \frac{3}{4} \cdot (-2023)^0 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{5} - 3 \right).$

A. $\frac{-49}{40}.$

B. $\frac{49}{40}.$

C. $\frac{-40}{49}.$

D. $\frac{40}{49}.$

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} & \left(0,4 + \frac{3}{5} \right) \cdot \sqrt{\frac{25}{64}} - \frac{3}{4} \cdot (-2023)^0 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{5} - 3 \right) \\ &= \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5} \right) \cdot \frac{5}{8} - \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{5} - \frac{15}{5} \right) \\ &= 1 \cdot \frac{5}{8} - \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-11}{5} \right) \\ &= \frac{5}{8} - \frac{3}{4} + \left(\frac{-11}{10} \right) = -\frac{49}{40} \end{aligned}$$

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Ứng Hoà năm 2022-2023)

Tính giá trị biểu thức $A = \frac{4}{9} : \left(\frac{1}{15} - \frac{2}{3} \right) + \frac{4}{9} : \left(\frac{1}{11} - \frac{5}{22} \right).$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{4}{9} : \left(\frac{1}{15} - \frac{2}{3} \right) + \frac{4}{9} : \left(\frac{1}{11} - \frac{5}{22} \right) \\ &= \frac{4}{9} : \left(\frac{1}{15} - \frac{10}{15} \right) + \frac{4}{9} : \left(\frac{2}{22} - \frac{5}{22} \right) \\ &= \frac{4}{9} : \left(\frac{-9}{15} \right) + \frac{4}{9} : \left(\frac{-3}{22} \right) \\ &= \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{-5}{3} \right) + \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{-22}{3} \right) \\ &= \frac{-20}{27} + \frac{-88}{27} = \frac{-108}{27} = -4 \end{aligned}$$

Câu 2. (HSG 7 Tp Bắc Ninh năm 2022-2023)

Thực hiện phép tính (hợp lí nếu có thể): $\frac{3}{5} : \left(\frac{-1}{15} - \frac{1}{6} \right) + \frac{3}{5} : \left(\frac{-1}{3} - 1\frac{1}{15} \right);$

Lời giải

$$\begin{aligned} & \frac{3}{5} : \left(\frac{-1}{15} - \frac{1}{6} \right) + \frac{3}{5} : \left(\frac{-1}{3} - 1\frac{1}{15} \right) \\ &= \frac{3}{5} : \frac{-7}{30} + \frac{3}{5} : \frac{-7}{5} \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{5} \left(\frac{-30}{7} + \frac{-5}{7} \right) = -3$$

Câu 3. (HSG 7 Bình Xuyên năm 2022-2023)

Tính hợp lí $\left(\frac{-4}{7} + \frac{2}{5} \right) : \frac{2}{3} + \left(\frac{-3}{7} + \frac{3}{5} \right) \cdot \frac{3}{2}$

Lời giải

$$\begin{aligned} & \left(\frac{-4}{7} + \frac{2}{5} \right) : \frac{2}{3} + \left(\frac{-3}{7} + \frac{3}{5} \right) \cdot \frac{3}{2} \\ &= \left(\frac{-4}{7} + \frac{2}{5} \right) : \frac{2}{3} + \left(\frac{-3}{7} + \frac{3}{5} \right) : \frac{2}{3} \\ &= \left[\left(\frac{-4}{7} + \frac{-3}{7} \right) + \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5} \right) \right] : \frac{2}{3} \\ &= 0 : \frac{2}{3} = 0 \end{aligned}$$

Câu 4. (HSG 7 Liên Đường năm 2022-2023)

Thực hiện phép tính: $\frac{3}{4} : \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{9} \right) + \frac{9}{4}$

Lời giải

$$\frac{3}{4} : \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{9} \right) + \frac{9}{4} = \frac{3}{4} : \left(\frac{6}{9} - \frac{5}{9} \right) + \frac{9}{4} = \frac{3}{4} : \frac{1}{9} + \frac{9}{4} = \frac{27}{4} + \frac{9}{4} = \frac{36}{4} = 9$$

Câu 5. (HSG 7 Diễm Châu năm 2022-2023)

Tính giá trị biểu thức: $\left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11} \right) : \frac{5}{11} + \left(\frac{-4}{7} + \frac{-3}{11} \right) : \frac{5}{11}$;

Lời giải

$$\begin{aligned} & \left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11} \right) : \frac{5}{11} + \left(\frac{-4}{7} + \frac{-3}{11} \right) : \frac{5}{11} = \left(\frac{3}{7} + \frac{4}{11} + \frac{-4}{7} + \frac{-3}{11} \right) : \frac{5}{11} \\ &= \left(\frac{-3}{7} + \frac{-4}{7} + \frac{4}{11} + \frac{-3}{11} \right) : \frac{5}{11} = \left(-1 + \frac{1}{11} \right) : \frac{5}{11} \\ &= \frac{-10}{11} \cdot \frac{11}{5} = -2 \end{aligned}$$

Câu 6. (HSG 7 Anh Sơn năm 2022-2023)

Thực hiện phép tính: $A = \frac{11}{24} - \frac{5}{41} + \frac{13}{24} + 0,5 - \frac{36}{41}$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{11}{24} - \frac{5}{41} + \frac{13}{24} + 0,5 - \frac{36}{41} \\ A &= \left(\frac{11}{24} + \frac{13}{24} \right) + \left(-\frac{5}{41} - \frac{36}{41} \right) + 0,5 \\ A &= \frac{24}{24} + \left(-\frac{41}{41} \right) + 0,5 \end{aligned}$$

$$A = 1 + (-1) + 0,5 = 0,5$$

Câu 7. (HSG 7 Hà Trung năm 2022-2023)

Tính giá trị các biểu thức sau: $A = \frac{15}{34} + \frac{7}{21} + \frac{19}{34} - \frac{20}{15} + \frac{3}{7}$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{15}{34} + \frac{7}{21} + \frac{19}{34} - \frac{20}{15} + \frac{3}{7} \\ &= \left(\frac{15}{34} + \frac{19}{34}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3}\right) + \frac{3}{7} \\ &= 1 + (-1) + \frac{3}{7} = \frac{3}{7} \end{aligned}$$

Câu 8. (HSG 7 Lập Thạch Vĩnh Phúc năm 2022-2023)

Tính giá trị của biểu thức

a) $16\frac{3}{5}\left(-\frac{1}{3}\right) + 13\frac{3}{5}\sqrt{\frac{1}{9}}$

b) $\frac{5}{15} + \frac{14}{25} - \frac{12}{9} + \frac{2}{7} - \frac{-11}{25}$

Lời giải

a) $16\frac{3}{5}\left(-\frac{1}{3}\right) + 13\frac{3}{5}\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{93}{5} \cdot \frac{-1}{3} + \frac{68}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{-83 + 68}{15} = \frac{-15}{15} = -1$

b) $\frac{5}{15} + \frac{14}{25} - \frac{12}{9} + \frac{2}{7} - \frac{-11}{25} = \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3}\right) + \left(\frac{14}{25} + \frac{11}{25}\right) + \frac{2}{7} = -1 + 1 + \frac{2}{7} = \frac{2}{7}$

Câu 9. (HSG 7 Tân Kỳ . Huyện Tân Kỳ Năm 2022-2023)

Thực hiện phép tính:

a) $\frac{-2}{7} \cdot 3\frac{5}{8} - 2\frac{5}{8} \cdot \frac{-2}{7}$

b) $-3 \cdot \left|\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right| + \sqrt{\frac{25}{36}}$

Lời giải

a) $\frac{-2}{7} \cdot 3\frac{5}{8} - 2\frac{5}{8} \cdot \frac{-2}{7} = \frac{-2}{7} \cdot \frac{29}{8} - \frac{21}{8} \cdot \frac{-2}{7} = \frac{-2}{7} \cdot \left(\frac{29}{8} - \frac{21}{8}\right) = \frac{-2}{7} \cdot 1 = \frac{-2}{7}$

b) $-3 \cdot \left|\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right| + \sqrt{\frac{25}{36}} = -3 \cdot \left|\frac{2}{4} - \frac{3}{4}\right| + \frac{5}{6} = -3 \cdot \left|-\frac{1}{4}\right| + \frac{5}{6} = -3 \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{6} = \frac{-3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{-9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{1}{12}$

Câu 10. (HSG 7 huyện Tương Dương 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức:

a) $-7.5 + 15.9$

b) $\frac{7}{19} \cdot \frac{8}{11} + \frac{7}{19} \cdot \frac{3}{11} + \frac{12}{19}$

Lời giải

a) $-7.5 + 15.9 = -35 + 135 = 100.$

$$b) \frac{7}{19} \cdot \frac{8}{11} + \frac{7}{19} \cdot \frac{3}{11} + \frac{12}{19} = \frac{7}{19} \cdot \left(\frac{8}{11} + \frac{3}{11} \right) + \frac{12}{19} = \frac{7}{19} \cdot 1 + \frac{12}{19} = \frac{19}{19} = 1.$$

Câu 11. (HSG 7 huyện Chương Mỹ 2022 - 2023)

Tính bình phương của $A = \left(\frac{-2}{3} + \frac{3}{7} \right) : \frac{4}{5} + \left(\frac{-1}{3} + \frac{4}{7} \right) \cdot 1,25$.

Lời giải

Ta có $A = \left(\frac{-2}{3} + \frac{3}{7} \right) : \frac{4}{5} + \left(\frac{-1}{3} + \frac{4}{7} \right) \cdot 1,25$

$$A = \frac{-5}{21} \cdot \frac{5}{4} + \frac{5}{21} \cdot \frac{5}{4}$$

$$A = \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{-5}{21} + \frac{5}{21} \right)$$

$$A = \frac{5}{4} \cdot 0 = 0$$

Vậy $A^2 = 0$.

Câu 12. (HSG 7 huyện Hà Trung 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức sau: $A = \left(\frac{-5}{9} + \frac{3}{8} \right) : \frac{8}{9} + \left(\frac{-7}{9} + \frac{5}{8} \right) : \frac{8}{9}$

Lời giải

$$A = \left(\frac{-5}{9} + \frac{3}{8} \right) : \frac{8}{9} + \left(\frac{-7}{9} + \frac{5}{8} \right) : \frac{8}{9}$$

$$A = \left(\frac{-5}{9} + \frac{3}{8} + \frac{-7}{9} + \frac{5}{8} \right) : \frac{8}{9}$$

$$A = \left(\frac{-5}{9} + \frac{-7}{9} + \frac{3}{8} + \frac{5}{8} \right) \cdot \frac{9}{8}$$

$$A = \left(\frac{-12}{9} + 1 \right) \cdot \frac{9}{8} = \frac{-3}{9} \cdot \frac{9}{8} = \frac{-3}{8}$$

Câu 13. (HSG 7 huyện Lang Chánh + Thị xã Bỉm Sơn 2022 - 2023)

Tính bằng cách hợp lí: $A = \left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11} \right) : \frac{7}{11} + \left(\frac{-4}{7} + \frac{7}{11} \right) : \frac{7}{11}$

Lời giải

$$A = \left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11} \right) : \frac{7}{11} + \left(\frac{-4}{7} + \frac{7}{11} \right) : \frac{7}{11}$$

$$= \left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11} \right) \cdot \frac{11}{7} + \left(\frac{-4}{7} + \frac{7}{11} \right) \cdot \frac{11}{7}$$

$$= \left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11} + \frac{-4}{7} + \frac{7}{11} \right) \cdot \frac{11}{7}$$

$$= \left(\frac{-3}{7} + \frac{-4}{7} + \frac{4}{11} + \frac{7}{11} \right) \cdot \frac{11}{7}$$

$$= (-1+1) \cdot \frac{11}{7}$$

$$= 0 \cdot \frac{11}{7} = 0$$

Câu 14. (HSG 7 huyện Quế Võ 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính: $1\frac{4}{23} - \frac{5}{21} - \frac{4}{23} + 2014 - \frac{16}{21}$

Lời giải

$$\begin{aligned} 1\frac{4}{23} - \frac{5}{21} - \frac{4}{23} + 2014 - \frac{16}{21} &= \left(\frac{27}{23} - \frac{4}{23}\right) - \left(\frac{5}{21} + \frac{16}{21}\right) + 2014 \\ &= \frac{23}{23} - \frac{21}{21} + 2014 = 1 - 1 + 2014 = 2014 \end{aligned}$$

Câu 15. (HSG 7 TP Chí Linh 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính: $(0,6 - 75\%) : \left(\frac{1}{5} - 1\frac{3}{4}\right)$

Lời giải

$$\begin{aligned} (0,6 - 75\%) : \left(\frac{1}{5} - 1\frac{3}{4}\right) \\ &= \left(\frac{3}{5} - \frac{3}{4}\right) : \left(\frac{1}{5} - \frac{7}{4}\right) = \left(\frac{12}{20} - \frac{15}{20}\right) : \left(\frac{4}{20} - \frac{35}{20}\right) = \frac{-3}{20} : \frac{-31}{20} = \frac{3}{31} \end{aligned}$$

Câu 16. (HSG 7 huyện Nghĩa Đàn, tỉnh Nghệ An 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức: $B = \frac{11}{8} \cdot \left[\left(\frac{-5}{11} : \frac{13}{8} - \frac{5}{11} : \frac{13}{5} \right) + \frac{-6}{33} \right] + \frac{-3}{4}$

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \frac{11}{8} \cdot \left[\left(\frac{-5}{11} : \frac{13}{8} - \frac{5}{11} : \frac{13}{5} \right) + \frac{-6}{33} \right] + \frac{-3}{4} \\ &= \frac{11}{8} \cdot \left[\left(\frac{-5}{11} \cdot \frac{8}{13} - \frac{5}{11} \cdot \frac{5}{13} \right) + \frac{-6}{33} \right] + \frac{-3}{4} \\ &= \frac{11}{8} \cdot \left[\frac{-5}{11} \cdot \left(\frac{8}{13} + \frac{5}{13} \right) + \frac{-2}{11} \right] + \frac{-3}{4} \\ &= \frac{11}{8} \cdot \left[\frac{-5}{11} \cdot 1 + \frac{-2}{11} \right] + \frac{-3}{4} \\ &= \frac{11}{8} \cdot \frac{-7}{11} + \frac{-3}{4} = \frac{-7}{8} + \frac{-3}{4} = \frac{-13}{8} \end{aligned}$$

Câu 17. (HSG 7 huyện Mường Lát 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính: $A = \left(\frac{-4}{7} + \frac{2}{5} \right) : \frac{2}{3} + \left(\frac{-3}{7} + \frac{3}{5} \right) : \frac{2}{3}$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{-4}{7} + \frac{2}{5} \right) : \frac{2}{3} + \left(\frac{-3}{7} + \frac{3}{5} \right) : \frac{2}{3} \\ A &= \left(\frac{-4}{7} + \frac{2}{5} + \frac{-3}{7} + \frac{3}{5} \right) : \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$A = \left[\left(\frac{-4}{7} + \frac{-3}{7} \right) + \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5} \right) \right] : \frac{2}{3} = (-1+1) : \frac{2}{3} = 0$$

Câu 18. (HSG 7 huyện Tiền Hải 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính: $A = \left(\frac{-5}{9} + \frac{9}{15} \right) : \left(\frac{-3}{2} \right) + \left(\frac{-4}{9} + \frac{8}{20} \right) : \left(\frac{-3}{2} \right)$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{-5}{9} + \frac{9}{15} \right) : \left(\frac{-3}{2} \right) + \left(\frac{-4}{9} + \frac{8}{20} \right) : \left(\frac{-3}{2} \right) \\ &= \left(\frac{-5}{9} + \frac{3}{5} \right) \cdot \left(\frac{-2}{3} \right) + \left(\frac{-4}{9} + \frac{2}{5} \right) \cdot \left(\frac{-2}{3} \right) \\ &= \left(\frac{-2}{3} \right) \cdot \left(\frac{-5}{9} + \frac{3}{5} + \frac{-4}{9} + \frac{2}{5} \right) \\ &= \left(\frac{-2}{3} \right) \cdot \left[\left(\frac{-5}{9} + \frac{-4}{9} \right) + \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5} \right) \right] \\ &= \left(\frac{-2}{3} \right) \cdot [(-1)+1] = \left(\frac{-2}{3} \right) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Câu 19. (HSG 7 huyện Gia Viễn, tỉnh Ninh Bình 2022 - 2023)

Tính giá trị các biểu thức sau: $A = \frac{7}{23} \cdot \frac{5}{17} + \frac{7}{23} \cdot \frac{12}{17} + \frac{-30}{23}$

Lời giải

$$A = \frac{7}{23} \cdot \frac{5}{17} + \frac{7}{23} \cdot \frac{12}{17} + \frac{-30}{23} = \frac{7}{23} \cdot \left(\frac{5}{17} + \frac{12}{17} \right) + \frac{-30}{23} = \frac{7}{23} \cdot 1 + \frac{-30}{23} = \frac{-23}{23} = -1$$

Câu 20. (HSG 7 huyện Quảng Xương 2022 - 2023)

Tính giá trị các biểu thức sau: $A = \left(\frac{-2}{3} + \frac{3}{7} \right) : \frac{4}{5} + \left(\frac{-1}{3} + \frac{11}{7} \right) : \frac{4}{5}$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{-2}{3} + \frac{3}{7} \right) : \frac{4}{5} + \left(\frac{-1}{3} + \frac{11}{7} \right) : \frac{4}{5} \\ &= \left(\frac{-2}{3} + \frac{3}{7} \right) \cdot \frac{5}{4} + \left(\frac{-1}{3} + \frac{11}{7} \right) \cdot \frac{5}{4} \\ &= \left(\frac{-2}{3} + \frac{3}{7} + \frac{-1}{3} + \frac{11}{7} \right) \cdot \frac{5}{4} = (-1+2) \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Câu 21. (HSG 7 huyện Nghi Lộc, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Tính giá trị các biểu thức: $A = \left(\frac{-4}{7} + \frac{2}{5} \right) : \frac{2}{3} + \left(\frac{-3}{7} + \frac{3}{5} \right) : \frac{2}{3}$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{-4}{7} + \frac{2}{5} \right) : \frac{2}{3} + \left(\frac{-3}{7} + \frac{3}{5} \right) : \frac{2}{3} = \left(\frac{-4}{7} + \frac{2}{5} \right) \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{-3}{7} + \frac{3}{5} \right) \cdot \frac{3}{2} \\ &= \left(\frac{-4}{7} + \frac{2}{5} + \frac{-3}{7} + \frac{3}{5} \right) \cdot \frac{3}{2} = \left[\left(\frac{-4}{7} + \frac{-3}{7} \right) + \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5} \right) \right] \cdot \frac{3}{2} = (-1+1) \cdot \frac{3}{2} = 0 \end{aligned}$$

Vậy : $A = 0$

Câu 22. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Tính giá trị các biểu thức sau: $A = \left(2\frac{1}{3} + 3,5\right) : \left(-4\frac{1}{6} + 2\frac{1}{7}\right) + 7,5$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \left(2\frac{1}{3} + 3,5\right) : \left(-4\frac{1}{6} + 2\frac{1}{7}\right) + 7,5 \\ &= \left(\frac{7}{3} + \frac{7}{2}\right) : \left(-\frac{25}{6} + \frac{15}{7}\right) + \frac{15}{2} \\ &= \frac{35}{6} : \frac{-85}{42} + \frac{15}{2} = \frac{35}{6} \cdot \frac{-42}{85} + \frac{15}{2} = \frac{-49}{17} + \frac{15}{2} = \frac{157}{34} \end{aligned}$$

Câu 23. (HSG 7 huyện Văn Lâm 2022 - 2023)

Thực hiện các phép tính sau:

a) $42 \cdot 53 + 47 \cdot 156 - 47 \cdot 114.$

b) $\frac{7}{13} \cdot \frac{7}{15} - \frac{5}{12} \cdot \frac{21}{39} + \frac{49}{91} \cdot \frac{8}{15}.$

Lời giải

a) $42 \cdot 53 + 47 \cdot 156 - 47 \cdot 114.$
 $= 42 \cdot 53 + 47 \cdot (156 - 114)$
 $= 42 \cdot 53 + 47 \cdot 42$
 $= 42 \cdot (53 + 47) = 42 \cdot 100 = 4200.$

b) $\frac{7}{13} \cdot \frac{7}{15} - \frac{5}{12} \cdot \frac{21}{39} + \frac{49}{91} \cdot \frac{8}{15}.$
 $= \frac{7}{13} \cdot \frac{7}{15} - \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{13} + \frac{7}{13} \cdot \frac{8}{15}$
 $= \frac{7}{13} \cdot \left(\frac{7}{15} - \frac{5}{12} + \frac{8}{15}\right)$
 $= \frac{7}{13} \cdot \left(1 - \frac{5}{12}\right) = \frac{7}{13} \cdot \frac{7}{12} = \frac{49}{156}.$

Câu 24. (HSG 7 huyện Mỹ Đức – Hà Nội 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính sau: $A = \left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11}\right) : \frac{7}{11} + \left(\frac{-4}{7} + \frac{7}{11}\right) : \frac{7}{11}$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11}\right) : \frac{7}{11} + \left(\frac{-4}{7} + \frac{7}{11}\right) : \frac{7}{11} \\ A &= \left[\left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11}\right) + \left(\frac{-4}{7} + \frac{7}{11}\right)\right] : \frac{7}{11} \\ A &= \left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11} + \frac{-4}{7} + \frac{7}{11}\right) \cdot \frac{11}{7} = (-1+1) \cdot \frac{11}{7} = 0 \end{aligned}$$

Câu 25. (HSG 7 huyện Hiệp Hòa 2022 – 2023 lần 2)

Thực hiện phép tính sau: $\left[6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 \right] : \left(-\frac{1}{3} - 1\right)$

Lời giải

$$\begin{aligned} & \left[6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 \right] : \left(-\frac{1}{3} - 1\right) \\ &= \left[6 \cdot \frac{1}{9} + 1 + 1 \right] : \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{3}\right) \\ &= \left[\frac{2}{3} + 2 \right] : \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3} \cdot \frac{-3}{4} = -2 \end{aligned}$$

Câu 26. (HSG 7 huyện Quan Sơn 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức bằng cách hợp lý: $M = \left(-\frac{2}{5} + \frac{1}{4} : \frac{-7}{101}\right) \cdot \left(\frac{55}{17} - \frac{4}{17} \cdot \frac{2}{7}\right) \cdot \left(1 - \frac{5}{13} : \frac{5}{13}\right)$

Lời giải

$$\begin{aligned} M &= \left(-\frac{2}{5} + \frac{1}{4} : \frac{-7}{101}\right) \cdot \left(\frac{55}{17} - \frac{4}{17} \cdot \frac{2}{7}\right) \cdot \left(1 - \frac{5}{13} : \frac{5}{13}\right) \\ M &= \left(-\frac{2}{5} + \frac{1}{4} : \frac{7}{101}\right) \cdot \left(\frac{55}{17} - \frac{4}{17} \cdot \frac{2}{7}\right) \cdot (1 - 1) \\ M &= \left(-\frac{2}{5} + \frac{1}{4} : \frac{7}{101}\right) \cdot \left(\frac{55}{17} - \frac{4}{17} \cdot \frac{2}{7}\right) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Câu 27. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2022 - 2023)

Tính bằng cách hợp lý: $A = \left(\frac{-2}{3} + \frac{3}{7}\right) : \frac{4}{5} + \left(\frac{-1}{3} + \frac{11}{7}\right) : \frac{4}{5}$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{-2}{3} + \frac{3}{7}\right) : \frac{4}{5} + \left(\frac{-1}{3} + \frac{11}{7}\right) : \frac{4}{5} \\ A &= \left(\frac{-2}{3} + \frac{3}{7}\right) \cdot \frac{5}{4} + \left(\frac{-1}{3} + \frac{11}{7}\right) \cdot \frac{5}{4} \\ A &= \left(\frac{-2}{3} + \frac{3}{7} + \frac{-1}{3} + \frac{11}{7}\right) \cdot \frac{5}{4} = (-1 + 2) \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Câu 28. (HSG 7 trường Tri Thức – Đồng Nai 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính một cách hợp lý:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \left(\frac{-5}{8} + \frac{6}{17}\right) : \frac{-2}{3} + \left(\frac{-3}{8} + \frac{11}{17}\right) : \frac{-2}{3} \\ \text{b)} & \frac{2001}{-2022} + \frac{2022}{2023} + \frac{2023}{2024} + \frac{-21}{2022} + \frac{1}{2024} \end{aligned}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a)} & \left(\frac{-5}{8} + \frac{6}{17}\right) : \frac{-2}{3} + \left(\frac{-3}{8} + \frac{11}{17}\right) : \frac{-2}{3} \\ &= \left(\frac{-5}{8} + \frac{6}{17}\right) \cdot \frac{-3}{2} + \left(\frac{-3}{8} + \frac{11}{17}\right) \cdot \frac{-3}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{-3}{2} \cdot \left[\left(\frac{-5}{8} + \frac{-3}{8} \right) + \left(\frac{6}{17} + \frac{11}{17} \right) \right]$$

$$= \frac{-3}{2} \cdot (-1+1) = 0$$

b) $\frac{2001}{-2022} + \frac{2022}{2023} + \frac{2023}{2024} + \frac{-21}{2022} + \frac{1}{2024}$

$$= \left(\frac{-2001}{2022} + \frac{-21}{2022} \right) + \left(\frac{2023}{2024} + \frac{1}{2024} \right) + \frac{2022}{2023}$$

$$= -1 + 1 + \frac{2022}{2023} = \frac{2022}{2023}$$

Câu 29. (HSG 7 huyện Nông Công 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức sau:

$$A = \left(2\frac{1}{3} + 3,5 \right) : \left(-4\frac{1}{6} + 3\frac{1}{7} \right) + 7,5.$$

$$B = \left[6 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) + 1 \right] : \left(-\frac{1}{3} - 1 \right).$$

Lời giải

$$A = \left(2\frac{1}{3} + 3,5 \right) : \left(-4\frac{1}{6} + 3\frac{1}{7} \right) + 7,5 = \left(\frac{7}{3} + \frac{7}{2} \right) : \left(\frac{-25}{6} + \frac{22}{7} \right) + \frac{15}{2} = \frac{35}{6} \cdot \frac{-42}{43} + \frac{15}{2} = \frac{155}{86}.$$

Vậy $A = \frac{155}{86}$

$$B = \left[6 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) + 1 \right] : \left(-\frac{1}{3} - 1 \right) = \left[6 \cdot \frac{1}{9} - (-1) + 1 \right] : \frac{-4}{3} = \frac{8}{3} : \frac{-4}{3} = -2.$$

Vậy $B = -2$

Câu 30. (HSG 7 TX Kỳ Anh – Hà Tĩnh 2022 - 2023)

Kết quả của phép tính $0,75 \cdot \frac{12}{17} - \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{5}{17} \right) + 2022 \frac{1}{4}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$0,75 \cdot \frac{12}{17} - \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{5}{17} \right) + 2022 \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \left(\frac{12}{17} + \frac{5}{17} \right) + 2022 \frac{1}{4} = 2023$$

Câu 31. (HSG 7 huyện Thường Xuân 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức: $N = \frac{-1,2 : \left(1\frac{3}{5} \cdot 1,25 \right) + \left(1,08 - \frac{2}{25} \right) : \frac{4}{7}}{0,64 - \frac{1}{25}} + \frac{\left(5\frac{5}{9} - \frac{9}{4} \right) \cdot \frac{36}{17}}{0,6 \cdot 0,5} : \frac{2}{5}$

Lời giải

$$N = \frac{-1,2 : \left(1\frac{3}{5} \cdot 1,25 \right) + \left(1,08 - \frac{2}{25} \right) : \frac{4}{7}}{0,64 - \frac{1}{25}} + \frac{\left(5\frac{5}{9} - \frac{9}{4} \right) \cdot \frac{36}{17}}{0,6 \cdot 0,5} : \frac{2}{5}$$

$$N = \frac{-6}{5} : \left(\frac{8}{5} \cdot \frac{5}{4} \right) + \frac{\left(\frac{27}{25} - \frac{2}{25} \right) : \frac{4}{7}}{\left(\frac{50}{9} - \frac{9}{4} \right) \cdot \frac{36}{17}} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} : \frac{2}{5}$$

$$N = \frac{-6}{5} : 2 + \frac{1 : \frac{4}{7}}{\frac{119}{36} \cdot \frac{36}{17}} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{-3}{5} + \frac{7}{4} + \frac{3}{4} = -1 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 0.$$

Vậy $N = 0$

Câu 32. (HSG 7 huyện Yên Bình – Yên Bái 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức: $B = \frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11}}{\frac{4}{9} - \frac{4}{7} - \frac{4}{11}} + \frac{0,6 - \frac{3}{25} - \frac{3}{125} - \frac{3}{625}}{\frac{4}{5} - 0,16 - \frac{4}{125} - \frac{4}{625}}$

Lời giải

$$B = \frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11}}{\frac{4}{9} - \frac{4}{7} - \frac{4}{11}} + \frac{0,6 - \frac{3}{25} - \frac{3}{125} - \frac{3}{625}}{\frac{4}{5} - 0,16 - \frac{4}{125} - \frac{4}{625}}$$

$$= \frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11}}{4 \cdot \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} \right)} + \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \frac{1}{125} - \frac{1}{625} \right)}{4 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \frac{1}{125} - \frac{1}{625} \right)} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

Vậy $B = 1$.

Câu 33. (HSG 7 thị trấn Cành Nàng – huyện Bá Thước – Thanh Hóa 2022 - 2023)

Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $B = 42.53 + 47.156 - 47.114$

b) $C = \frac{7}{13} \cdot \frac{7}{15} - \frac{5}{12} \cdot \frac{21}{39} + \frac{49}{91} \cdot \frac{8}{15}$

Lời giải

a) $B = 42.53 + 47.156 - 47.114$

$$B = 42.53 + 47.(156 - 114) = 42.53 + 47.42$$

$$B = 42.(53 + 47) = 42.100 = 4200$$

Vậy $B = 4200$

b) $C = \frac{7}{13} \cdot \frac{7}{15} - \frac{5}{12} \cdot \frac{21}{39} + \frac{49}{91} \cdot \frac{8}{15}$

$$C = \frac{7}{13} \cdot \frac{7}{15} - \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{13} + \frac{7}{13} \cdot \frac{8}{15}$$

$$C = \frac{7}{13} \cdot \left(\frac{7}{15} - \frac{5}{12} + \frac{8}{15} \right)$$

$$C = \frac{7}{13} \cdot \left(1 - \frac{5}{12} \right)$$

$$C = \frac{7}{13} \cdot \frac{7}{12} = \frac{49}{156}$$

$$\text{Vậy } C = \frac{49}{156}$$

Câu 34. (HSG 7 huyện Tiên Du – Bắc Ninh 2022 - 2023)

Tính giá trị các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-3} + \frac{1}{-3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{-5} + \frac{1}{-5} \cdot \frac{1}{6}.$$

$$\text{b) } B = 3\sqrt{(-5)^2} - 0,5 \cdot 0, (3) \cdot \sqrt{9} + \left| -\frac{2^2}{3} \right| : \left(-1\frac{1}{3} \right).$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-3} + \frac{1}{-3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{-5} + \frac{1}{-5} \cdot \frac{1}{6}.$$

$$A = \frac{-1}{2 \cdot 3} + \frac{-1}{3 \cdot 4} + \frac{-1}{4 \cdot 5} + \frac{-1}{5 \cdot 6}$$

$$A = -\left(\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} \right)$$

$$A = -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right)$$

$$A = -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Vậy } A = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{b) } B = 3\sqrt{(-5)^2} - 0,5 \cdot 0, (3) \cdot \sqrt{9} + \left| -\frac{2^2}{3} \right| : \left(-1\frac{1}{3} \right).$$

$$B = 3 \cdot 5 - 0,5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{4}{3} : \frac{-4}{3}$$

$$B = 15 - 0,5 + \frac{4}{3} \cdot \frac{-3}{4}$$

$$B = 15 - 0,5 + (-1)$$

$$B = 13,5.$$

$$\text{Vậy } B = 13,5$$

Câu 35. (HSG 7 huyện Nga Sơn – Thanh Hóa 2022 - 2023)

$$\text{Thực hiện phép tính: } A = \frac{1}{2} - \frac{-2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{5}{7} - \frac{-1}{6} + \frac{-4}{35} + \frac{1}{41}$$

Lời giải

$$A = \frac{1}{2} - \frac{-2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{5}{7} - \frac{-1}{6} + \frac{-4}{35} + \frac{1}{41}$$

$$A = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{5}{7} + \frac{1}{6} - \frac{4}{35} + \frac{1}{41}$$

$$A = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{2}{5} + \frac{5}{7} - \frac{4}{35}\right) + \frac{1}{41}$$

$$A = \left(\frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{14}{35} + \frac{25}{35} - \frac{4}{35}\right) + \frac{1}{41}$$

$$A = 1 + 1 + \frac{1}{41} = 2 + \frac{1}{41} = 2\frac{1}{41}$$

Vậy $A = 2\frac{1}{41}$.

Câu 36. (HSG 7 huyện Sông Lô – Vĩnh Phúc 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức

$$A = \left[\left(\frac{2}{193} - \frac{3}{386} \right) \cdot \frac{193}{17} + \frac{33}{34} \right] : \left[\left(\frac{7}{1008} + \frac{11}{2016} \right) \cdot \frac{1008}{25} + \frac{1007}{2016} \right]$$

Lời giải

$$A = \left[\left(\frac{2}{193} - \frac{3}{386} \right) \cdot \frac{193}{17} + \frac{33}{34} \right] : \left[\left(\frac{7}{1008} + \frac{11}{2016} \right) \cdot \frac{1008}{25} + \frac{1007}{2016} \right]$$

$$A = \left[\frac{2}{17} - \frac{3}{34} + \frac{33}{34} \right] : \left[\left(\frac{7}{25} + \frac{11}{50} \right) + \frac{1007}{2016} \right]$$

$$A = 1 : \left[\frac{1}{2} + \frac{1007}{2016} \right]$$

$$A = 1 : \left(\frac{2015}{2016} \right)$$

$$A = \frac{2016}{2015}$$

Vậy $A = \frac{2016}{2015}$

Câu 37. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính:
$$\frac{\frac{1}{2003} + \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005}}{\frac{2}{2002} + \frac{2}{2003} - \frac{2}{2004}} - \frac{\frac{2}{2002} + \frac{2}{2003} - \frac{2}{2004}}{\frac{1}{2003} + \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005}}$$

Lời giải

Ta có:
$$\frac{\frac{1}{2003} + \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005}}{\frac{2}{2002} + \frac{2}{2003} - \frac{2}{2004}} - \frac{\frac{2}{2002} + \frac{2}{2003} - \frac{2}{2004}}{\frac{1}{2003} + \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2003} + \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005}}{2 \cdot \left(\frac{1}{2002} + \frac{1}{2003} - \frac{1}{2004} \right)} - \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{2002} + \frac{1}{2003} - \frac{1}{2004} \right)}{5 \cdot \left(\frac{1}{2003} + \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005} \right)}$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{2}{3} = -\frac{7}{15}$$

Câu 38. (HSG 7 trường Lí Nam Đế, huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính: $M = \left(\frac{1,5+1-0,75}{2,5+\frac{5}{3}-1,25} + \frac{0,375-0,3+\frac{3}{11}+\frac{3}{12}}{-0,625+0,5-\frac{5}{11}-\frac{5}{12}} \right) : \frac{1890}{2005} + 115$

Lời giải

$$M = \left(\frac{1,5+1-0,75}{2,5+\frac{5}{3}-1,25} + \frac{0,375-0,3+\frac{3}{11}+\frac{3}{12}}{-0,625+0,5-\frac{5}{11}-\frac{5}{12}} \right) : \frac{1890}{2005} + 115$$

$$M = \left(\frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{3} - \frac{3}{4}}{\frac{5}{2} + \frac{5}{3} - \frac{5}{4}} + \frac{\frac{3}{8} - \frac{3}{10} + \frac{3}{11} + \frac{3}{12}}{\frac{-5}{8} + \frac{5}{10} - \frac{5}{11} - \frac{5}{12}} \right) : \frac{378}{401} + 115$$

$$M = \left[\frac{3 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)}{5 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)} + \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} \right)}{-5 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} \right)} \right] : \frac{378}{401} + 115$$

$$M = \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{-5} \right) : \frac{378}{401} + 115 = 0 : \frac{378}{401} + 115 = 115$$

Vậy $M = 115$

Câu 39. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Thông Nhất 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính: $A = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}}{\frac{9}{9} - \frac{7}{7} - \frac{11}{11}} + \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}}{\frac{5}{5} - \frac{25}{25} - \frac{125}{125} - \frac{625}{625}}$

Lời giải

$$A = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}}{\frac{9}{9} - \frac{7}{7} - \frac{11}{11}} + \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}}{\frac{5}{5} - \frac{25}{25} - \frac{125}{125} - \frac{625}{625}}$$

$$A = \frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11}}{4 \cdot \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} \right)} + \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \frac{1}{125} - \frac{1}{625} \right)}{4 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \frac{1}{125} - \frac{1}{625} \right)}$$

$$A = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

Vậy $A = 1$

Câu 40. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Thái Phương 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính: $N = \frac{1.5.6 + 2.10.12 + 4.20.24 + 9.45.54}{1.3.5 + 2.6.10 + 4.12.20 + 9.27.45}$

Lời giải

$$N = \frac{1.5.6 + 2.10.12 + 4.20.24 + 9.45.54}{1.3.5 + 2.6.10 + 4.12.20 + 9.27.45}$$

$$N = \frac{1.5.3.2 + 2.10.6.2 + 4.20.12.2 + 9.45.27.2}{1.3.5 + 2.6.10 + 4.12.20 + 9.27.45}$$

$$N = \frac{2.(1.3.5 + 2.6.10 + 4.12.20 + 9.27.45)}{1.3.5 + 2.6.10 + 4.12.20 + 9.27.45}$$

$$N = 2$$

Vậy $N = 2$

Câu 41. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023; huyện Minh An 2016 - 2017)

$$\text{Tính giá trị của } M = \frac{0,375 - 0,3 + \frac{3}{11} + \frac{3}{12}}{-0,625 + 0,5 - \frac{5}{11} - \frac{5}{12}} + \frac{1,5 + 1 - 0,75}{2,5 + \frac{5}{3} - 1,25}$$

Lời giải

$$M = \frac{0,375 - 0,3 + \frac{3}{11} + \frac{3}{12}}{-0,625 + 0,5 - \frac{5}{11} - \frac{5}{12}} + \frac{1,5 + 1 - 0,75}{2,5 + \frac{5}{3} - 1,25}$$

$$M = \frac{\frac{3}{8} - \frac{3}{10} + \frac{3}{11} + \frac{3}{12}}{-\frac{5}{8} + \frac{5}{10} - \frac{5}{11} - \frac{5}{12}} + \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{3} - \frac{3}{4}}{\frac{5}{2} + \frac{5}{3} - \frac{5}{4}}$$

$$M = \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12}\right)}{-5 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12}\right)} + \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)}{5 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)}$$

$$M = \frac{-3}{5} + \frac{3}{5} = 0$$

Vậy $M = 0$

Câu 42. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Minh Khai 2022 - 2023)

$$\text{Thực hiện phép tính: } A = \left[\left(\frac{2}{193} - \frac{3}{386} \right) \cdot \frac{193}{17} + \frac{33}{34} \right] : \left[\left(\frac{7}{1931} + \frac{11}{3862} \right) \cdot \frac{1931}{25} + \frac{9}{2} \right].$$

Lời giải

$$\left[\left(\frac{2}{193} - \frac{3}{386} \right) \cdot \frac{193}{17} + \frac{33}{34} \right] = \frac{2}{193} \cdot \frac{193}{17} - \frac{3}{386} \cdot \frac{193}{17} + \frac{33}{34} = \frac{2}{17} - \frac{3}{34} + \frac{33}{34} = 1$$

$$\left[\left(\frac{7}{1931} + \frac{11}{3862} \right) \cdot \frac{1931}{25} + \frac{9}{2} \right] = \frac{7}{1931} \cdot \frac{1931}{25} + \frac{11}{3862} \cdot \frac{1931}{25} + \frac{9}{2} = \frac{7}{25} + \frac{11}{50} + \frac{9}{2} = 5$$

$$A = 1 : 5 = \frac{1}{5}$$

Câu 43. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Lưu Khánh Đàm 2022 - 2023)

$$\text{Thực hiện phép tính: } \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left[-2^3 \cdot \sqrt{1\frac{9}{16}} + \left(-2\frac{2}{3}\right)^0 \right]$$

Lời giải

$$\begin{aligned} & \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left[-2^3 \cdot \sqrt[3]{1\frac{9}{16}} + \left(-2\frac{2}{3}\right)^0 \right] \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left[-2^3 \cdot \sqrt[3]{\frac{25}{16}} + 1 \right] \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left[-8 \cdot \frac{5}{4} + 1 \right] = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot [-10 + 1] \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot (-9) = \frac{3}{4} + \frac{-9}{4} = \frac{-3}{2} \end{aligned}$$

Câu 44. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023; huyện Thuận Thành 2021 - 2022; huyện Yên Lập; huyện Lộc Hà 2018 - 2019)

Thực hiện phép tính: $M = \left(\frac{0,4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11} - \frac{1}{3} - 0,25 + \frac{1}{5}}{1,4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11} - 1\frac{1}{6} - 0,875 + 0,7} \right) : \frac{2022}{2023}$

Lời giải

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{0,4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11} - \frac{1}{3} - 0,25 + \frac{1}{5}}{1,4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11} - 1\frac{1}{6} - 0,875 + 0,7} \right) : \frac{2022}{2023} \\ &= \left(\frac{\frac{2}{5} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11} - \frac{3}{4} + \frac{1}{5}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{9} + \frac{7}{11} - \frac{7}{6} - \frac{7}{8} + \frac{7}{10}} \right) : \frac{2022}{2023} \\ &= \left(\frac{2 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right)}{7 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \right) - \frac{7}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right)} \right) : \frac{2022}{2023} \\ &= \left(\frac{2}{7} - \frac{2}{7} \right) : \frac{2022}{2023} = 0 \end{aligned}$$

Câu 45. HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Trần Đức Thông 2022 - 2023)

Tính $A = \left[\left(\frac{2}{2022} - \frac{3}{4044} \right) \frac{2022}{17} + \frac{33}{34} \right] : \left[\left(\frac{7}{2023} + \frac{11}{4046} \right) \cdot \frac{2023}{25} + \frac{9}{2} \right] + 0, (22)$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \left[\left(\frac{2}{2022} - \frac{3}{4044} \right) \frac{2022}{17} + \frac{33}{34} \right] : \left[\left(\frac{7}{2023} + \frac{11}{4046} \right) \cdot \frac{2023}{25} + \frac{9}{2} \right] + 0, (22) \\ &= \left[\left(\frac{4}{4044} - \frac{3}{4044} \right) \frac{2022}{17} + \frac{33}{34} \right] : \left[\left(\frac{14}{4046} + \frac{11}{4046} \right) \cdot \frac{2023}{25} + \frac{9}{2} \right] + 22 \cdot 0, (01) \\ &= \left[\frac{1}{4044} \cdot \frac{2022}{17} + \frac{33}{34} \right] : \left[\frac{25}{4046} \cdot \frac{2023}{25} + \frac{9}{2} \right] + 22 \cdot \frac{1}{99} \\ &= \left[\frac{1}{34} + \frac{33}{34} \right] : \left[\frac{1}{2} + \frac{9}{2} \right] + \frac{2}{9} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{2}{9} = \frac{9}{45} + \frac{10}{45} = \frac{19}{45}$$

Câu 46. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Kim Trung 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức: $B = \frac{0,375 - 0,3 + \frac{3}{11} + \frac{3}{12}}{-0,625 + 0,5 - \frac{5}{11} - \frac{5}{12}} - \frac{1,5 + 1 - 0,75}{2,5 + \frac{5}{3} - 1,25}$

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \frac{\frac{3}{8} - \frac{3}{10} + \frac{3}{11} + \frac{3}{12}}{-\frac{5}{8} + \frac{5}{10} - \frac{5}{11} - \frac{5}{12}} - \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{3} - \frac{3}{4}}{\frac{5}{2} + \frac{5}{3} - \frac{5}{4}} \\ &= \frac{3\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12}\right)}{-5\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12}\right)} - \frac{3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)}{5\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)} \\ &= \frac{-3}{5} - \frac{3}{5} = -\frac{6}{5} \end{aligned}$$

Câu 47. HSG 7 huyện Thái Thụy, tỉnh Thái Bình, 2022 - 2023)

Tính bằng cách hợp lý: $A = 23\frac{1}{3} + \frac{3}{5} - \frac{1}{3} - \frac{13}{5} + \left(\frac{21}{22}\right)^0$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= 23\frac{1}{3} + \frac{3}{5} - \frac{1}{3} - \frac{13}{5} + \left(\frac{21}{22}\right)^0 \\ &= \frac{70}{3} + \frac{3}{5} - \frac{1}{3} - \frac{13}{5} + 1 \\ &= \left(\frac{70}{3} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{13}{5} - \frac{3}{5}\right) + 1 \\ &= 23 - 2 + 1 = 22 \end{aligned}$$

Câu 48. (HSG 7 huyện Ý Yên, tỉnh Thái Bình, 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{4}{9} : \left(\frac{-3}{5} + \frac{1}{2}\right) - \frac{4}{9} : \frac{-3}{5}$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{4}{9} : \left(\frac{-3}{5} + \frac{1}{2}\right) - \frac{4}{9} : \frac{-3}{5} \\ &= \frac{4}{9} : \frac{-1}{10} + \frac{4}{9} : \frac{3}{5} = \frac{4}{9} \cdot \frac{-10}{1} + \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{3} \\ &= \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{-10}{1} + \frac{5}{3}\right) = \frac{4}{9} \cdot \frac{-25}{3} = \frac{-100}{27} \end{aligned}$$

Câu 49. (HSG 7 thị xã An Nhơn, tỉnh Bình Định, 2022 - 2023; huyện Kinh Môn 2018 - 2019)

Tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{\frac{3}{7} - \frac{3}{11} + \frac{3}{13}}{\frac{5}{7} - \frac{5}{11} + \frac{5}{13}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{5}{4} - \frac{5}{6} + \frac{5}{8}}$

Lời giải

$$A = \frac{\frac{3}{7} - \frac{3}{11} + \frac{3}{13}}{\frac{5}{7} - \frac{5}{11} + \frac{5}{13}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{5}{4} - \frac{5}{6} + \frac{5}{8}}$$

$$= \frac{3\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right)}{5\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right)} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Câu 50. (HSG 7 huyện Triệu Sơn, tỉnh Thanh Hóa, 2021 - 2022)

Thực hiện phép tính: $\frac{3}{7} : \left(\frac{-4}{5} + \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{7} : \frac{-4}{5}$.

Lời giải

Ta có $\frac{3}{7} : \left(\frac{-4}{5} + \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{7} : \frac{-4}{5} = \frac{3}{7} : \frac{-3}{10} - \frac{3}{7} : \frac{-4}{5} = \frac{3}{7} \cdot \frac{-10}{3} - \frac{3}{7} \cdot \frac{-5}{4} = \frac{-10}{7} + \frac{15}{28} = \frac{-25}{28}$.

Câu 51. (HSG 7 huyện Như Thanh, tỉnh Thanh Hóa, 2021 - 2022) .

Tính giá trị của các biểu thức sau: $A = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1$

Lời giải

$$A = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) - 2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{-1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 1 = -\frac{3}{2}$$

Câu 52. (HSG 7 huyện Hà Trung, tỉnh Thanh Hóa, 2021 - 2022)

Thực hiện phép tính: $A = \frac{7}{13} \cdot \frac{7}{15} - \frac{5}{12} \cdot \frac{21}{39} + \frac{49}{91} \cdot \frac{8}{15}$

Lời giải

$$A = \frac{7}{13} \cdot \frac{7}{15} - \frac{5}{12} \cdot \frac{21}{39} + \frac{49}{91} \cdot \frac{8}{15} = \frac{7}{13} \cdot \frac{7}{15} - \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{13} + \frac{7}{13} \cdot \frac{8}{15} = \frac{7}{13} \left(\frac{7}{15} - \frac{5}{12} + \frac{8}{15}\right) = \frac{7}{13} \cdot \frac{7}{12} = \frac{49}{156}$$

Câu 53. (HSG 7 huyện Mỹ Đức 2020 - 2021)

Thực hiện phép tính: $A = \left(2\frac{1}{3} + 3,5\right) : \left(-4\frac{1}{6} + 2\frac{1}{7}\right) + 7,5$

Lời giải

$$A = \left(2\frac{1}{3} + 3,5\right) : \left(-4\frac{1}{6} + 2\frac{1}{7}\right) + 7,5 = \left(\frac{7}{3} + \frac{7}{2}\right) : \left(-\frac{25}{6} + \frac{15}{7}\right) + \frac{15}{2}$$

$$= \frac{35}{6} : -\frac{85}{42} + \frac{15}{2} = \frac{35}{6} \cdot -\frac{42}{85} + \frac{15}{2} = -\frac{29}{17} + \frac{15}{2} = \frac{157}{34}$$

Câu 54. (HSG 7 huyện Chương Mỹ, tỉnh Hà Nội, 2020 - 2021)

Thực hiện phép tính: $A = 0,25 : \left[\left(3\frac{4}{5} + 0,1 \right) : 0,75 - 4\frac{1}{5} \cdot 1,25 \right] + 2022$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= 0,25 : \left[\left(3\frac{4}{5} + 0,1 \right) : 0,75 - 4\frac{1}{5} \cdot 1,25 \right] + 2022 = \frac{1}{4} : \left[\left(\frac{19}{5} + \frac{1}{10} \right) : \frac{3}{4} - \frac{21}{5} \cdot \frac{5}{4} \right] + 2022 \\ &= \frac{1}{4} : \left[\frac{39}{10} \cdot \frac{4}{3} - \frac{21}{4} \right] + 2022 = \frac{1}{4} \cdot \frac{20}{-1} + 2022 = -5 + 2022 = 2017 \end{aligned}$$

Câu 55. (HSG 7 huyện Thanh Thủy, tỉnh Phú Thọ, 2021 - 2022)

Thực hiện phép tính: $B = \frac{3}{7} : \left(\frac{-4}{5} + \frac{1}{2} \right) - \frac{3}{7} : \frac{-4}{5}$

Lời giải

$$B = \frac{3}{7} : \left(\frac{-4}{5} + \frac{1}{2} \right) - \frac{3}{7} : \frac{-4}{5} = \frac{3}{7} : \frac{-3}{10} - \frac{3}{7} : \frac{-4}{5} = \frac{-10}{7} + \frac{15}{28} = \frac{-25}{28}$$

Câu 56. (HSG 7 huyện Bình Lục 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức: $A = \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{7} + \frac{3}{11}}{\frac{4}{5} - \frac{3}{7} + \frac{3}{11}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{7}}{\frac{2}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{14}}$

Lời giải

$$A = \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{7} + \frac{3}{11}}{\frac{4}{5} - \frac{3}{7} + \frac{3}{11}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{7}}{\frac{2}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{14}} = \frac{3 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} \right)}{5 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} \right)} + \frac{2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{14} \right)}{5 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{14} \right)} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$$

Câu 57. (HSG 7 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức sau $A = \frac{15}{34} + \frac{7}{21} + \frac{19}{34} - \frac{20}{15} + \frac{3}{7}$.

Lời giải

$$A = \frac{15}{34} + \frac{7}{21} + \frac{19}{34} - \frac{20}{15} + \frac{3}{7} = \left(\frac{15}{34} + \frac{19}{34} \right) + \frac{1}{3} - \frac{4}{3} + \frac{3}{7} = 1 + (-1) + \frac{3}{7} = \frac{3}{7}$$

Câu 58. (HSG 7 huyện Tân Kỳ, tỉnh Nghệ An, 2021 - 2022)

Thực hiện phép tính: a) $29\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} - 13\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8}$ b) $2 \left| \frac{5}{8} - \frac{3}{4} \right| + \sqrt{\frac{9}{16}}$ c) $1\frac{7}{8} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8} \right)$

Lời giải

a) $29\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} - 13\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{8} \left(29\frac{1}{4} - 13\frac{1}{4} \right) = \frac{5}{8} \cdot 16 = 10$

b) $2 \left| \frac{5}{8} - \frac{3}{4} \right| + \sqrt{\frac{9}{16}} = 2 \left| \frac{-1}{8} \right| + \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

c) $1\frac{7}{8} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8} \right) = \frac{15}{8} - \frac{5}{24} = \frac{5}{3}$

Câu 59. (HSG 7 huyện Cửa Lò, tỉnh Nghệ An, 2020 - 2021)

Thực hiện phép tính:

a) $\frac{-7}{25} \cdot \frac{11}{13} + \frac{-7}{25} \cdot \frac{2}{13} - \frac{18}{25}$
 b) $\left(\frac{1}{3} + \frac{12}{67} + \frac{13}{41}\right) - \left(\frac{79}{67} - \frac{28}{41}\right)$

Lời giải

a) $\frac{-7}{25} \cdot \frac{11}{13} + \frac{-7}{25} \cdot \frac{2}{13} - \frac{18}{25} = \frac{-7}{25} \cdot \left(\frac{11}{13} + \frac{2}{13}\right) - \frac{18}{25} = \frac{-7}{25} \cdot 1 - \frac{18}{25} = -1.$
 b) $\left(\frac{1}{3} + \frac{12}{67} + \frac{13}{41}\right) - \left(\frac{79}{67} - \frac{28}{41}\right)$
 $= \frac{1}{3} + \frac{12}{67} + \frac{13}{41} - \frac{79}{67} + \frac{28}{41} = \left(\frac{12}{67} - \frac{79}{67}\right) + \left(\frac{13}{41} + \frac{28}{41}\right) + \frac{1}{3} = -1 + 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$

Câu 60. (HSG 7 huyện Vũ Thư, 2020 - 2021)

Thực hiện phép tính: $A = \sqrt{11^2 - 72} - 1\frac{1}{2} : \sqrt{\frac{25}{4}} - \left(\frac{2021}{2022}\right)^0$

Lời giải

$A = \sqrt{11^2 - 72} - 1\frac{1}{2} : \sqrt{\frac{25}{4}} - \left(\frac{2021}{2022}\right)^0 = \sqrt{121 - 72} - \frac{3}{2} : \frac{5}{2} - 1 = \sqrt{49} - \frac{3}{5} - 1 = 7 - 1 - \frac{3}{5} = 5\frac{2}{5}.$

Câu 61. (HSG 7 huyện Bá Thước, tỉnh Thanh Hóa, 2021 - 2022)

Thực hiện phép tính: $A = \left(\frac{-5}{11} + \frac{7}{22} - \frac{4}{33} - \frac{5}{44}\right) : \left(38\frac{1}{22} - 39\frac{7}{22}\right)$

Lời giải

$A = \left(\frac{-5}{11} + \frac{7}{22} - \frac{4}{33} - \frac{5}{44}\right) : \left(38\frac{1}{22} - 39\frac{7}{22}\right) = \frac{-17}{132} : \left(-1\frac{3}{11}\right) = \frac{17}{168}$

Câu 62. (HSG 7 huyện Quảng Trạch, 2021 - 2022)

Thực hiện phép tính: $B = \left(2\frac{1}{3} + 3,5\right) : \left(-4\frac{1}{6} + 2\frac{1}{7}\right) + 7,5.$

Lời giải

$B = \left(2\frac{1}{3} + 3,5\right) : \left(-4\frac{1}{6} + 2\frac{1}{7}\right) + 7,5 = \left(\frac{7}{3} + \frac{7}{2}\right) : \left(-\frac{25}{6} + \frac{15}{7}\right) + \frac{15}{2}$
 $= \frac{35}{6} : \frac{-85}{42} + \frac{15}{2} = \frac{35}{6} \cdot \frac{-42}{85} + \frac{15}{2} = -\frac{49}{17} + \frac{15}{2} = \frac{157}{34}$

Câu 63. (HSG 7 huyện Bình Long 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính: $5\frac{4}{23} \cdot 27\frac{3}{47} + 4\frac{3}{47} \cdot \left(-5\frac{4}{23}\right).$

Lời giải

$5\frac{4}{23} \cdot 27\frac{3}{47} + 4\frac{3}{47} \cdot \left(-5\frac{4}{23}\right) = 5\frac{4}{23} \cdot 27\frac{3}{47} - 4\frac{3}{47} \cdot 5\frac{4}{23}$
 $= 5\frac{4}{23} \cdot \left(27\frac{3}{47} - 4\frac{3}{47}\right) = 5\frac{4}{23} \cdot 23 = \frac{119}{23} \cdot 23 = 119.$

Câu 64. (HSG 7 huyện Yên Mỹ, 2021 - 2022)

Thực hiện phép tính: $A = \frac{2000}{-2021} + \frac{2021}{2022} + \frac{2022}{2023} + \frac{-21}{2021} + \frac{1}{2022}$

Lời giải

$$A = \frac{2000}{-2021} + \frac{2021}{2022} + \frac{2022}{2023} + \frac{-21}{2021} + \frac{1}{2022} = \left(\frac{-2000}{2021} + \frac{-21}{2021} \right) + \left(\frac{1}{2022} + \frac{2021}{2022} \right) + \frac{2022}{2023}$$

$$A = -1 + 1 + \frac{2022}{2023} = \frac{2022}{2023}$$

Câu 65. (HSG 7 huyện Hà Trung, tỉnh Thanh Hóa, 2021 - 2022)

Thực hiện phép tính: $C = \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{39} + \frac{1}{51}}{\frac{1}{8} - \frac{1}{52} + \frac{1}{68}}$

Lời giải

$$C = \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{39} + \frac{1}{51}}{\frac{1}{8} - \frac{1}{52} + \frac{1}{68}} = \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{13} + \frac{1}{17} \right)}{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{13} + \frac{1}{17} \right)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

Câu 66. (HSG 7 huyện Nghĩa Hành, 2021 - 2022)

Thực hiện phép tính: $A = \frac{\left(\frac{3}{10} - \frac{4}{15} - \frac{7}{20} \right) \cdot \frac{5}{19}}{\left(\frac{1}{14} + \frac{1}{7} - \frac{-3}{35} \right) \cdot \frac{-4}{3}}$

Lời giải

$$A = \frac{\left(\frac{3}{10} - \frac{4}{15} - \frac{7}{20} \right) \cdot \frac{5}{19}}{\left(\frac{1}{14} + \frac{1}{7} - \frac{-3}{35} \right) \cdot \frac{-4}{3}} = \frac{\left(\frac{18}{60} - \frac{16}{60} - \frac{21}{60} \right) \cdot \frac{5}{19}}{\left(\frac{5}{70} + \frac{10}{70} + \frac{6}{70} \right) \cdot \frac{-4}{3}} = \frac{\frac{-19}{60} \cdot \frac{5}{19}}{\frac{21}{70} \cdot \frac{-4}{3}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{12} \cdot \frac{5}{2} = \frac{1}{12} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{24}$$

Câu 67. (HSG 7 huyện Chương Mỹ, tỉnh Hà Nội, 2020 - 2021)

Thực hiện phép tính: $B = \frac{\frac{-4}{8} + \frac{4}{8} - \frac{4}{8}}{\frac{5}{5} - \frac{19}{19} + \frac{23}{23}} + 1$

Lời giải

$$B = \frac{\frac{-4}{8} + \frac{4}{8} - \frac{4}{8}}{\frac{5}{5} - \frac{19}{19} + \frac{23}{23}} + 1 = \frac{-4 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{19} + \frac{1}{23} \right)}{8 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{19} + \frac{1}{23} \right)} + 1 = \frac{-4}{8} + 1 = \frac{-1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

Câu 68. (HSG 7 huyện Ứng Hòa, tỉnh Hà Nội, 2021 - 2022)

Thực hiện phép tính: $A = \frac{0,125 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7}}{0,375 - \frac{3}{5} + \frac{3}{7}} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 0,2}{\frac{3}{4} + 0,5 - \frac{3}{10}}$

Lời giải

$$A = \frac{0,125 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 0,2}{0,375 - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} + \frac{3}{4} + 0,5 - \frac{3}{10}} = \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}}{\frac{3}{8} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} + \frac{3}{4} + \frac{3}{6} - \frac{3}{10}}$$

$$= \frac{\frac{11}{8} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{2}{4} + \frac{2}{6} - \frac{2}{10}}{3 \cdot \left(\frac{11}{8} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right)} = \frac{1}{3} + \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right)}{3 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right)} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

Câu 69. (HSG 7 huyện Cao Lộc, 2021 - 2022)

Thực hiện phép tính: $A = \frac{\frac{1}{2020} + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022} - \frac{2}{2021} + \frac{2}{2022} + \frac{2}{2023}}{\frac{1}{2020} + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022} - \frac{2}{2021} + \frac{2}{2022} + \frac{2}{2023}}$

Lời giải

$$A = \frac{\frac{1}{2020} + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022} - \frac{2}{2021} + \frac{2}{2022} + \frac{2}{2023}}{\frac{1}{2020} + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022} - \frac{2}{2021} + \frac{2}{2022} + \frac{2}{2023}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2020} + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022} - 2 \left(\frac{1}{2021} + \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023} \right)}{3 \left(\frac{1}{2020} + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022} \right) - 5 \left(\frac{1}{2021} + \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023} \right)} = \frac{1}{3} - \frac{2}{5} = \frac{1}{15}$$

Câu 70. (HSG 7 huyện Thanh Ba, 2021 - 2022)

Thực hiện phép tính: $M = 2022 : \left[\frac{0,4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11} - 1\frac{1}{6} + 0,875 - 0,7}{1,4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11} - \frac{1}{3} - 0,25 + \frac{1}{5}} \right]$

Lời giải

$$M = 2022 : \left[\frac{0,4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11} - 1\frac{1}{6} + 0,875 - 0,7}{1,4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11} - \frac{1}{3} - 0,25 + \frac{1}{5}} \right]$$

$$= 2022 : \left[\frac{2 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \right) - \frac{7}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right)}{7 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \right) - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}} \right] = 2022 : \left(\frac{2}{7} \cdot \frac{-7}{2} \right) = -2022$$

Câu 71. (HSG 7 huyện Vũ Thư, 2020 - 2021)

Thực hiện phép tính: $B = \frac{155 - \frac{10}{7} - \frac{5}{11} + \frac{5}{23} - \frac{3}{5} - 0,9 + \frac{3}{13}}{403 - \frac{26}{7} - \frac{13}{11} + \frac{13}{23} - 0,2 - \frac{3}{10} + \frac{1}{13}}$

Lời giải

$$B = \frac{155 - \frac{10}{7} - \frac{5}{11} + \frac{5}{23}}{403 - \frac{26}{7} - \frac{13}{11} + \frac{13}{23}} - \frac{\frac{3}{5} - 0,9 + \frac{3}{13}}{0,2 - \frac{3}{10} + \frac{1}{13}} = \frac{5 \cdot \left(31 - \frac{2}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{23}\right)}{13 \cdot \left(31 - \frac{2}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{23}\right)} - \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{5} - 0,3 + \frac{1}{13}\right)}{\frac{1}{5} - 0,3 + \frac{1}{13}}$$

$$= \frac{5}{13} - 3 = \frac{-34}{13}.$$

Câu 72. (HSG 7 huyện Vũ Thư 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính: $A = \left(\frac{-4}{17} + \frac{3}{19}\right) \cdot \frac{21}{22} + \left(\frac{-13}{17} + \frac{16}{19}\right) : \frac{22}{21}$.

Lời giải

$$A = \left(\frac{-4}{17} + \frac{3}{19}\right) \cdot \frac{21}{22} + \left(\frac{-13}{17} + \frac{16}{19}\right) : \frac{22}{21}$$

$$= \left(\frac{-4}{17} + \frac{3}{19}\right) \cdot \frac{21}{22} + \left(\frac{-13}{17} + \frac{16}{19}\right) \cdot \frac{21}{22}$$

$$= \frac{21}{22} \cdot \left(\frac{-4}{17} + \frac{3}{19} + \frac{-13}{17} + \frac{16}{19}\right) = \frac{21}{22} \cdot (-1+1) = 0$$

Câu 73. (HSG 7 huyện Lý Nhân, tỉnh Hà Nam 2021 - 2022)

Thực hiện phép tính: $A = \frac{\frac{4}{5} : \left(0,8 \cdot \frac{5}{4}\right) + \left(1,08 - \frac{2}{25}\right) : \frac{4}{7}}{0,64 - \frac{1}{25} + \left(6\frac{5}{9} - 3\frac{1}{4}\right) \cdot 2\frac{2}{17}}$ và $B = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{5}{4}\right)^3 - 5\left(\frac{3}{4} - \frac{5}{4}\right)}{\left(-\frac{5}{8}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{5}{6}}$

Lời giải

$$A = \frac{\frac{4}{5} : \left(0,8 \cdot \frac{5}{4}\right) + \left(1,08 - \frac{2}{25}\right) : \frac{4}{7}}{0,64 - \frac{1}{25} + \left(6\frac{5}{9} - 3\frac{1}{4}\right) \cdot 2\frac{2}{17}} = \frac{\frac{4}{5} : \frac{1}{1} + \left(1,08 - \frac{2}{25}\right) : \frac{4}{7}}{\frac{16}{25} - \frac{1}{25} + \left(6\frac{5}{9} - 3\frac{1}{4}\right) \cdot 2\frac{2}{17}} = \frac{\frac{4}{5} + \frac{1 \cdot 7}{119 \cdot 36}}{\frac{15}{25} + \frac{119 \cdot 36}{36 \cdot 17}} = \frac{4}{5} + \frac{7}{4} = \frac{4}{3} + \frac{7}{4} = \frac{4}{3} + \frac{1}{4} = \frac{19}{12}$$

$$B = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{5}{4}\right)^3 - 5\left(\frac{3}{4} - \frac{5}{4}\right)}{\left(-\frac{5}{8}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{5}{6}} = \frac{\frac{27}{64} + \frac{125}{64} + \frac{5}{2}}{\frac{25}{64} + \frac{4}{9} - \frac{5}{6}} = \frac{\frac{39}{8}}{\frac{1}{576}} = 2808$$

Câu 74. (HSG 7 huyện Yên Mỹ, 2021 - 2022)

Thực hiện phép tính: $B = \frac{0,1 + \frac{1}{13} - \frac{1}{19}}{202,1 + \frac{2021}{13} - \frac{2021}{19}} : \frac{2022}{2021}$

Lời giải

$$B = \frac{\frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \frac{1}{19}}{\frac{2021}{10} + \frac{2021}{13} - \frac{2021}{19}} : \frac{2022}{2021} = \frac{\frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \frac{1}{19}}{2021 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \frac{1}{19}\right)} : \frac{2022}{2021} = \frac{1}{2021} \cdot \frac{2021}{2022} = \frac{1}{2022}$$

Câu 75. (HSG 7 huyện Thiệu Hóa 2021 - 2022)

Tính giá trị biểu thức sau: $A = \left(\frac{-5}{8} + \frac{6}{17}\right) : \frac{-2}{3} + \left(\frac{-3}{8} + \frac{11}{17}\right) : \frac{-2}{3}$

Lời giải

$$A = \left(\frac{-5}{8} + \frac{6}{17}\right) : \frac{-2}{3} + \left(\frac{-3}{8} + \frac{11}{17}\right) : \frac{-2}{3}$$

$$A = \left(\frac{-5}{8} + \frac{6}{17}\right) \cdot \frac{-3}{2} + \left(\frac{-3}{8} + \frac{11}{17}\right) \cdot \frac{-3}{2}$$

$$A = \left(\frac{-5}{8} + \frac{6}{17} + \frac{-3}{8} + \frac{11}{17}\right) \cdot \frac{-3}{2}$$

$$A = \left[\left(\frac{-5}{8} + \frac{-3}{8}\right) + \left(\frac{6}{17} + \frac{11}{17}\right)\right] \cdot \frac{-3}{2}$$

$$A = (-1+1) \cdot \frac{-3}{2} = 0$$

Câu 76. (HSG 7 thị xã Kinh Môn 2021 - 2022)

Tính $M = \left(\frac{0,2 - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} - 0,125 + \frac{1}{10}}{1,4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11} - 1\frac{1}{6} - 0,875 + 0,7}\right) : \frac{2021}{2022}$

Lời giải

$$M = \left(\frac{0,2 - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} - 0,125 + \frac{1}{10}}{1,4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11} - 1\frac{1}{6} - 0,875 + 0,7}\right) : \frac{2021}{2022}$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10}}{\frac{5}{5} - \frac{7}{9} + \frac{7}{11} - \frac{6}{6} - \frac{8}{8} + \frac{10}{10}}\right) : \frac{2021}{2022} = \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{7}\right) : \frac{2021}{2022} = 0$$

Câu 77. (HSG 7 huyện Hương Khê 2021 - 2022)

Thực hiện phép tính: $\frac{7}{17} \cdot \frac{1001}{2022} + \frac{1021}{2022} \cdot \frac{7}{17}$

Lời giải

$$\frac{7}{17} \cdot \frac{1001}{2022} + \frac{1021}{2022} \cdot \frac{7}{17} = \frac{7}{17} \left(\frac{1001}{2022} + \frac{1021}{2022}\right) = \frac{7}{17} \cdot \frac{2022}{2022} = \frac{7}{17}$$

Câu 78. (HSG 7 huyện Tiên Hải 2021 - 2022)

Thực hiện phép tính: $A = \sqrt{1 + \frac{7}{9}} + \sqrt{1 - \frac{24}{25}}$

Lời giải

$$A = \sqrt{1 + \frac{7}{9}} + \sqrt{1 - \frac{24}{25}} = \sqrt{\frac{16}{9}} + \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{4}{3} + \frac{1}{5} = \frac{23}{15}$$

Vậy $A = \frac{23}{15}$

Câu 79. (HSG 7 20 - 20)

Tính hợp lý các biểu thức sau:

a) $27\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} - 13\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8}$

b) $2\left|\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right| + \sqrt{\frac{4}{9}}$

Lời giải

a) $27\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} - 13\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{8} \cdot \left(27\frac{1}{4} - 13\frac{1}{4}\right) = 14 \cdot \frac{5}{8} = \frac{35}{4}$

b) $2\left|\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right| + \sqrt{\frac{4}{9}} = 2\left|\frac{1}{4}\right| + \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$

Câu 80. (HSG 7 huyện Sơn Tây 2018 - 2019)

Thực hiện phép tính: $\frac{3}{4} : \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{9}\right) + \frac{9}{4}$

Lời giải

$$\frac{3}{4} : \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{9}\right) + \frac{9}{4} = \frac{3}{4} : \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{9}\right) + \frac{9}{4} = \frac{3}{4} : \frac{1}{9} + \frac{9}{4} = \frac{27}{4} + \frac{9}{4} = 4$$

Câu 81. (HSG 7 huyện Sơn Trà 2018 - 2019)

Tính hợp lý

a) $\frac{7}{-25} + \frac{-18}{25} + \frac{4}{23} + \frac{5}{7} + \frac{19}{23}$

b) $\frac{7}{19} \cdot \frac{8}{11} + \frac{7}{19} \cdot \frac{3}{11} + \frac{12}{19}$

c) $(-25) \cdot 125 \cdot 4 \cdot (-8) \cdot (-17)$

d) $\frac{7}{35} \cdot \frac{10}{19} + \frac{7}{35} \cdot \frac{9}{19} - \frac{2}{35}$

Lời giải

a) $\frac{7}{-25} + \frac{-18}{25} + \frac{4}{23} + \frac{5}{7} + \frac{19}{23} = \left(\frac{-7}{25} + \frac{-18}{25}\right) + \left(\frac{4}{23} + \frac{19}{23}\right) + \frac{5}{7} = -1 + 1 + \frac{5}{7} = \frac{5}{7}$

b) $\frac{7}{19} \cdot \frac{8}{11} + \frac{7}{19} \cdot \frac{3}{11} + \frac{12}{19} = \left(\frac{7}{19} \cdot \frac{8}{11} + \frac{7}{19} \cdot \frac{3}{11}\right) + \frac{12}{19} = \frac{7}{19} \cdot \left(\frac{8}{11} + \frac{3}{11}\right) + \frac{12}{19} = \frac{7}{19} + \frac{12}{19} = 1$

c) $(-25) \cdot 125 \cdot 4 \cdot (-8) \cdot (-17) = (-25) \cdot 4 \cdot 125 \cdot (-8) \cdot (-17) = (-100) \cdot (-1000) \cdot (-17) = -1700000$

d) $\frac{7}{35} \cdot \frac{10}{19} + \frac{7}{35} \cdot \frac{9}{19} - \frac{2}{35} = \frac{7}{35} \cdot \left(\frac{10}{19} + \frac{9}{19}\right) - \frac{2}{35} = \frac{7}{35} - \frac{2}{35} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$

Câu 82. (HSG 7 huyện Trục Ninh 2018 - 2019)

Thực hiện phép tính: $\left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11}\right) : \frac{7}{11} + \left(\frac{-4}{7} + \frac{7}{11}\right) : \frac{7}{11}$

Lời giải

$$\left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11}\right) : \frac{7}{11} + \left(\frac{-4}{7} + \frac{7}{11}\right) : \frac{7}{11} = \left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11} + \frac{-4}{7} + \frac{7}{11}\right) : \frac{7}{11} = (-1 + 1) : \frac{7}{11} = 0$$

Câu 83. (HSG 7 trường Quang Trung 2018 - 2019; tỉnh Lào Cai 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính:
$$A = \frac{0,125 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7}}{0,375 - \frac{3}{5} + \frac{3}{7}} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 0,2}{\frac{3}{4} + 0,5 - \frac{3}{10}}$$

Lời giải

$$A = \frac{0,125 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7}}{0,375 - \frac{3}{5} + \frac{3}{7}} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 0,2}{\frac{3}{4} + 0,5 - \frac{3}{10}}$$

$$= \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7}}{\frac{3}{8} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7}} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}}{\frac{3}{4} + \frac{5}{10} - \frac{3}{10}} = \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7}}{3 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right)} + \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right)}{3 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right)} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

Câu 84. (HSG 7 thành phố Thủ Đức 2022 – 2023) Đề 384

Thực hiện phép tính:
$$A = \frac{1}{2} - \frac{-2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{5}{7} - \frac{-1}{6} + \frac{-4}{35} + \frac{1}{41}.$$

Lời giải

$$A = \frac{1}{2} - \frac{-2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{5}{7} - \frac{-1}{6} + \frac{-4}{35} + \frac{1}{41} = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{5}{7} + \frac{1}{6} + \frac{-4}{35} + \frac{1}{41}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{2}{5} + \frac{5}{7} + \frac{-4}{35}\right) + \frac{1}{41}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{41} = \frac{83}{41}$$

Câu 85. (HSG 7 huyện Hiệp Đức 2018 - 2019)

Thực hiện phép tính:
$$A = \left[\left(\frac{2}{193} - \frac{3}{386} \right) \cdot \frac{193}{17} + \frac{33}{34} \right] : \left[\left(\frac{7}{1931} + \frac{11}{3862} \right) \cdot \frac{1931}{25} + \frac{9}{2} \right]$$

Lời giải

Ta có:
$$\left(\frac{2}{193} - \frac{3}{386} \right) \cdot \frac{193}{17} + \frac{33}{34} = \frac{2}{193} \cdot \frac{193}{17} - \frac{3}{386} \cdot \frac{193}{17} + \frac{33}{34} = \frac{2}{17} - \frac{3}{34} + \frac{33}{34} = 1$$

$$\left(\frac{7}{1931} + \frac{11}{3862} \right) \cdot \frac{1931}{25} + \frac{9}{2} = \frac{7}{1931} \cdot \frac{1931}{25} + \frac{11}{3862} \cdot \frac{1931}{25} + \frac{9}{2} = \frac{7}{25} + \frac{11}{50} + \frac{9}{2} = 5$$

$$\Rightarrow A = 1 : 5 = \frac{1}{5}$$

Câu 86. (HSG 7 huyện Tam Nông 2018 - 2019)

Tính bằng cách hợp lý
$$A = \frac{0,75 - 0,6 + \frac{3}{7} + \frac{3}{13}}{2,75 - 2,2 + \frac{11}{7} + \frac{11}{13}}$$

Lời giải

$$A = \frac{0,75 - 0,6 + \frac{3}{7} + \frac{3}{13}}{2,75 - 2,2 + \frac{11}{7} + \frac{11}{13}} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} + \frac{3}{13}}{\frac{11}{4} - \frac{11}{5} + \frac{11}{7} + \frac{11}{13}} = \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13}\right)}{11 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13}\right)} = \frac{3}{11}$$

Câu 87. (HSG 7 huyện Tân Tạo 2018 - 2019)

Thực hiện phép tính:
$$A = \frac{0,375 - 0,3 + \frac{3}{11} + \frac{3}{12}}{-0,265 + 0,5 - \frac{5}{11} - \frac{5}{12}} + \frac{1,5 + 1 - 0,75}{2,5 + \frac{5}{3} - 1,25}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{0,375 - 0,3 + \frac{3}{11} + \frac{3}{12}}{-0,265 + 0,5 - \frac{5}{11} - \frac{5}{12}} + \frac{1,5 + 1 - 0,75}{2,5 + \frac{5}{3} - 1,25} \\ &= \frac{\frac{3}{8} - \frac{3}{10} + \frac{3}{11} + \frac{3}{12}}{-\frac{53}{200} + \frac{5}{10} - \frac{5}{11} - \frac{5}{12}} + \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{3} - \frac{3}{4}}{\frac{5}{2} + \frac{5}{3} - \frac{5}{4}} = \frac{3 \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} \right)}{\frac{-53}{200} - 5 \left(-\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} \right)} + \frac{3 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)}{5 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)} \\ &= \frac{3 \cdot \left(\frac{165 - 132 + 120 + 110}{1320} \right)}{\frac{-53}{200} - 5 \left(\frac{-66 + 60 + 55}{660} \right)} + \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot \frac{263}{1320}}{\frac{-53}{200} - 5 \cdot \frac{49}{660}} + \frac{3}{5} \\ &= \frac{3 \cdot \frac{263}{1320}}{-1749 - 1225} + \frac{3}{5} = \frac{3945}{-5948} + \frac{3}{5} = \frac{-1881}{29740} \end{aligned}$$

Câu 88. (HSG 7 huyện Phú Ninh 2018 - 2019; huyện Nam Sách 2017 - 2018; huyện Tân Lạc; huyện Ngọc Lặc 2015 - 2016)

Thực hiện phép tính:
$$A = \frac{155 - \frac{10}{7} - \frac{5}{11} + \frac{5}{23}}{403 - \frac{26}{7} - \frac{13}{11} + \frac{13}{23}} + \frac{\frac{3}{5} + \frac{3}{13} - 0,9}{\frac{7}{91} + 0,2 - \frac{3}{10}}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{155 - \frac{10}{7} - \frac{5}{11} + \frac{5}{23}}{403 - \frac{26}{7} - \frac{13}{11} + \frac{13}{23}} + \frac{\frac{3}{5} + \frac{3}{13} - 0,9}{\frac{7}{91} + 0,2 - \frac{3}{10}} \\ &= \frac{5 \cdot \left(31 - \frac{2}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{23} \right)}{13 \cdot \left(31 - \frac{2}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{23} \right)} + \frac{\frac{3}{5} + \frac{3}{13} - \frac{9}{10}}{\frac{1}{13} + \frac{1}{5} - \frac{3}{10}} \\ &= \frac{5 \cdot \left(31 - \frac{2}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{23} \right)}{13 \cdot \left(31 - \frac{2}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{23} \right)} + \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{13} - \frac{3}{10} \right)}{\frac{1}{5} + \frac{1}{13} - \frac{3}{10}} = \frac{5}{13} + 3 = 3 \frac{5}{13} \end{aligned}$$

Câu 89. (HSG 7 huyện Thiệu Hoá 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức sau:
$$A = \frac{(-2)^2}{9} : \left(\frac{1}{15} - \frac{2}{3} \right) + \frac{4}{(-3)^2} : \left(\frac{1}{11} - \frac{5}{22} \right)$$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{(-2)^2}{9} : \left(\frac{1}{15} - \frac{2}{3} \right) + \frac{4}{(-3)^2} : \left(\frac{1}{11} - \frac{5}{22} \right) \\ &= \frac{4}{9} : \left(\frac{1}{15} - \frac{10}{15} \right) + \frac{4}{9} : \left(\frac{2}{22} - \frac{5}{22} \right) \\ &= \frac{4}{9} : \frac{-3}{5} + \frac{4}{9} : \frac{-3}{22} = \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{-5}{3} + \frac{-22}{3} \right) = \frac{4}{9} \cdot (-9) = -4 \end{aligned}$$

Câu 90. (HSG 7 huyện Nam Đàn, tỉnh Nghệ An 2022 – 2023)

Tính $A = \left[\left(\frac{9}{51} + \frac{7}{102} \right) \cdot \frac{102}{5} + 2023 \right] : \left[\left(\frac{1}{71} - \frac{3}{142} \right) \cdot \frac{71}{13} + \frac{27}{26} \right]$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \left[\left(\frac{9}{51} + \frac{7}{102} \right) \cdot \frac{102}{5} + 2023 \right] : \left[\left(\frac{1}{71} - \frac{3}{142} \right) \cdot \frac{71}{13} + \frac{27}{26} \right] \\ A &= \left[\left(\frac{18}{102} + \frac{7}{102} \right) \cdot \frac{102}{5} + 2023 \right] : \left[\left(\frac{2}{142} - \frac{3}{142} \right) \cdot \frac{71}{13} + \frac{27}{26} \right] \\ A &= \left[\frac{25}{102} \cdot \frac{102}{5} + 2023 \right] : \left[\left(\frac{-1}{142} \right) \cdot \frac{71}{13} + \frac{27}{26} \right] \\ A &= [5 + 2023] : \left[\frac{-1}{26} + \frac{27}{26} \right] = 2028 : 1 = 2028 \end{aligned}$$

Vậy $A = 2028$

Câu 91. (HSG 7 huyện Thanh Chương 2018 - 2019)

Thực hiện phép tính: $M = \frac{-1,2 : \left(1\frac{3}{5} \cdot 1,25 \right) + \left(1,08 - \frac{2}{25} \right) : \frac{4}{7}}{0,64 - \frac{1}{25}} + \frac{\left(5\frac{5}{9} - \frac{9}{4} \right) \cdot \frac{36}{17}}{+0,6 \cdot 0,5} : \frac{2}{5}$

Lời giải

$$\begin{aligned} M &= \frac{-1,2 : \left(1\frac{3}{5} \cdot 1,25 \right) + \left(1,08 - \frac{2}{25} \right) : \frac{4}{7}}{0,64 - \frac{1}{25}} + \frac{\left(5\frac{5}{9} - \frac{9}{4} \right) \cdot \frac{36}{17}}{+0,6 \cdot 0,5} : \frac{2}{5} \\ &= \frac{-1,2 : 2}{0,6} + \frac{\frac{7}{4}}{\frac{119}{36} \cdot \frac{36}{17}} + 0,75 = -1 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 0 \end{aligned}$$

Câu 92. (HSG 7 huyện Kim Thành 2018 - 2019)

Tính: $A = \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{11} + \frac{3}{13}}{\frac{5}{4} - \frac{5}{11} + \frac{5}{13}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{5}{4} - \frac{5}{6} + \frac{5}{8}}$

Lời giải

$$A = \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{11} + \frac{3}{13}}{\frac{5}{4} - \frac{5}{11} + \frac{5}{13}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{5}{4} - \frac{5}{6} + \frac{5}{8}} = \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \right)}{5 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \right)} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right)}$$

$$A = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$$

Câu 93. (HSG 7 huyện Hoàng Hóa 2018 - 2019)

Tính $B = 15\frac{1}{4} : \left(-\frac{5}{7}\right) - 25\frac{1}{4} : \left(-\frac{5}{7}\right)$

Lời giải

$$B = 15\frac{1}{4} : \left(-\frac{5}{7}\right) - 25\frac{1}{4} : \left(-\frac{5}{7}\right) = \left(15\frac{1}{4} - 25\frac{1}{4}\right) : \left(-\frac{5}{7}\right) = -10 \cdot \left(-\frac{7}{5}\right) = 14$$

Câu 94. (HSG 7 huyện Bến Lức năm học 2018-2019)

Thực hiện phép tính: $A = \left[\left(\frac{2}{193} - \frac{3}{386} \right) \cdot \frac{193}{17} + \frac{33}{34} \right] : \left[\left(\frac{7}{1931} + \frac{11}{3862} \right) \cdot \frac{1931}{25} + \frac{9}{2} \right]$

Lời giải

$$\left[\left(\frac{2}{193} - \frac{3}{386} \right) \cdot \frac{193}{17} + \frac{33}{34} \right] = \frac{2}{193} \cdot \frac{193}{17} - \frac{3}{386} \cdot \frac{193}{17} + \frac{33}{34} = \frac{2}{17} - \frac{2}{34} + \frac{33}{34} = 1$$

$$\left[\left(\frac{7}{1931} + \frac{11}{3862} \right) \cdot \frac{1931}{25} + \frac{9}{2} \right] = \frac{7}{1931} \cdot \frac{1931}{25} + \frac{11}{3862} \cdot \frac{1931}{25} + \frac{9}{2} = \frac{7}{25} + \frac{11}{50} + \frac{9}{2} = 5$$

$$\Rightarrow A = 1 : 5 = \frac{1}{5}$$

Câu 95. (HSG 7 huyện 2017 - 2018)

Tính: $A = 1\frac{13}{15} \cdot (0,5)^2 \cdot 3 + \left(\frac{8}{15} - 1\frac{19}{60} \right) : 1\frac{23}{24}$

Lời giải

Biến đổi $A = \frac{7}{5} - \frac{47}{60} : \frac{47}{24} = \frac{7}{5} - \frac{2}{5} = 1$

Câu 96. (HSG 7 huyện Chương Mỹ ; huyện Hương Sơn năm học 2017 - 2018)

Thực hiện phép tính: $\frac{0,375 - 0,3 + \frac{3}{11} + \frac{3}{12}}{-0,265 + 0,5 - \frac{5}{11} - \frac{5}{12}} + \frac{1,5 + 1 - 0,75}{2,5 + \frac{5}{3} - 1,25}$

Lời giải

$$A = \frac{\frac{3}{8} - \frac{3}{10} + \frac{3}{11} + \frac{3}{12}}{-\frac{53}{100} + \frac{5}{10} - \frac{5}{11} - \frac{5}{12}} + \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{3} - \frac{3}{4}}{\frac{5}{2} + \frac{5}{3} - \frac{5}{4}}$$

$$= \frac{3 \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} \right)}{-\frac{53}{100} - 5 \left(-\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} \right)} + \frac{3 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)}{5 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3 \cdot \left(\frac{165 - 132 + 120 + 110}{1320} \right)}{\frac{-53}{100} - 5 \left(\frac{-66 + 60 + 55}{660} \right)} + \frac{3}{5} \\
 &= \frac{3 \cdot \frac{263}{1320}}{\frac{-53}{100} - 5 \cdot \frac{49}{660}} + \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot \frac{263}{1320}}{\frac{-1749 - 1225}{3300}} + \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot \frac{263}{1320}}{\frac{-1749 - 1225}{3300}} + \frac{3}{5} \\
 &= \frac{3945}{-5948} + \frac{3}{5} = \frac{-1881}{29740}
 \end{aligned}$$

Câu 97. (HSG 7 Vinh, Trường THCS Nguyệt Ân 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức: $A = \left(\frac{10 \cdot \sqrt{1,44}}{3} + \frac{24 \cdot \sqrt{0,25}}{7} \right) : \left(\frac{12}{7} + \frac{\sqrt{144}}{9} \right)$

Lời giải

$$A = \left(\frac{10 \cdot \sqrt{1,44}}{3} + \frac{24 \cdot \sqrt{0,25}}{7} \right) : \left(\frac{12}{7} + \frac{\sqrt{144}}{9} \right)$$

$$A = \left(\frac{10 \cdot 1,2}{3} + \frac{24 \cdot 0,5}{7} \right) : \left(\frac{12}{7} + \frac{12}{9} \right)$$

$$A = \left(\frac{12}{3} + \frac{12}{7} \right) : \left(\frac{12}{7} + \frac{12}{9} \right)$$

$$A = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{7} \right) : \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} \right)$$

$$A = \frac{10}{21} : \frac{16}{63} = \frac{15}{8}$$

Vậy $A = \frac{15}{8}$

Câu 98. (HSG 7 Thanh Hoá 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính sau: $A = \frac{6}{7} : \left(\frac{3}{26} - \frac{3}{13} \right) + \frac{6}{7} : \left(\frac{1}{10} - \frac{8}{5} \right)$

Lời giải

$$A = \frac{6}{7} : \left(\frac{3}{26} - \frac{3}{13} \right) + \frac{6}{7} : \left(\frac{1}{10} - \frac{8}{5} \right)$$

$$A = \frac{6}{7} : \frac{-3}{26} + \frac{6}{7} : \frac{-3}{2}$$

$$A = \frac{6}{7} \cdot \frac{-26}{3} + \frac{6}{7} \cdot \frac{-2}{3}$$

$$A = \frac{6}{7} \left(\frac{-26}{3} + \frac{-2}{3} \right) = \frac{6}{7} \cdot \frac{-28}{3} = -8$$

Câu 99. (HSG 7)

Tính: $7,3 \cdot 10,5 + 7,3 \cdot 15 + 2,7 \cdot 10,5 + 15 \cdot 2,7$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 &7,3 \cdot 10,5 + 7,3 \cdot 15 + 2,7 \cdot 10,5 + 15 \cdot 2,7 \\
 &= 10,5 \cdot (7,3 + 2,7) + 15 \cdot (7,3 + 2,7) \\
 &= 10,5 \cdot 10 + 15 \cdot 10 \\
 &= 10 \cdot (10,5 + 15) = 10 \cdot 25,5 = 255
 \end{aligned}$$

Câu 100. (HSG 7 Thanh Hoá 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính sau: $C = \left(\frac{0,4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11} - \frac{1}{3} - 0,25 + \frac{1}{5}}{1,4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11} - 1\frac{1}{6} - 0,875 + 0,7} \right) : \frac{2023}{2024} + 2023$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 C &= \left(\frac{0,4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11} - \frac{1}{3} - 0,25 + \frac{1}{5}}{1,4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11} - 1\frac{1}{6} - 0,875 + 0,7} \right) : \frac{2023}{2024} + 2023 \\
 &= \left(\frac{\frac{2}{5} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{9} + \frac{7}{11} - \frac{7}{6} - \frac{7}{4} + \frac{7}{10}} \right) \cdot \frac{2024}{2023} + 2023 \\
 &= \left(\frac{2 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \right) - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{7 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \right) - 7 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right)} \right) \cdot \frac{2024}{2023} + 2023 \\
 &= \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{7} \right) \cdot \frac{2024}{2023} + 2023 = \frac{1}{7} \cdot \frac{2024}{2023} + 2023 = \frac{2024}{14161} + 2023 = 2023 \frac{2024}{14161}
 \end{aligned}$$

Câu 101. (HSG 7 huyện Mộ Cày 2017 - 2018)

Tính $A = \left(\frac{-4}{7} + \frac{2}{5} \right) : \frac{2}{3} + \left(\frac{-3}{7} + \frac{3}{5} \right) : \frac{2}{3}$

Lời giải

$$A = \left(\frac{-4}{7} + \frac{2}{5} \right) : \frac{2}{3} + \left(\frac{-3}{7} + \frac{3}{5} \right) : \frac{2}{3} = \left[\left(\frac{-4}{7} + \frac{3}{7} \right) + \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5} \right) \right] : \frac{2}{3} = 0 : \frac{2}{3} = 0$$

Câu 102. (HSG 7 huyện Thạch Thành 2017 - 2018)

Tính giá trị các biểu thức sau: $A = \left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11} \right) : \frac{7}{11} + \left(\frac{-4}{7} + \frac{7}{11} \right) : \frac{7}{11}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11} \right) : \frac{7}{11} + \left(\frac{-4}{7} + \frac{7}{11} \right) : \frac{7}{11} = \left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11} \right) \cdot \frac{11}{7} + \left(\frac{-4}{7} + \frac{7}{11} \right) \cdot \frac{11}{7} \\
 A &= \frac{11}{7} \cdot \left[\left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11} \right) + \left(\frac{-4}{7} + \frac{7}{11} \right) \right] = \frac{11}{7} \cdot \left[\left(\frac{-3}{7} + \frac{-4}{7} \right) + \left(\frac{4}{11} + \frac{7}{11} \right) \right] = \frac{11}{7} \cdot [(-1) + 1] = 0
 \end{aligned}$$

Câu 103. (HSG 7 huyện Hoàng Hóa 2017 - 2018)

Tính giá trị của biểu thức $M = \left(2\frac{1}{3} + 3,5 \right) : \left(-4\frac{1}{6} + 3\frac{1}{7} \right) + 7,5$

Lời giải

$$M = \left(2\frac{1}{3} + 3,5\right) : \left(-4\frac{1}{6} + 3\frac{1}{7}\right) + 7,5 = \left(\frac{7}{3} + \frac{7}{2}\right) : \left(\frac{-25}{6} + \frac{22}{7}\right) + \frac{15}{2}$$

$$M = \frac{35}{6} : \frac{-43}{42} + \frac{15}{2} = \frac{35}{6} \cdot \frac{42}{-43} + \frac{15}{2} = 1\frac{69}{86}$$

Câu 104. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2017 - 2018)

Tính giá trị biểu thức $\frac{7}{13} \cdot \frac{5}{9} - \frac{5}{9} \cdot \left(-\frac{2}{13}\right) - \frac{5}{9} \cdot \frac{18}{13}$

Lời giải

$$\frac{7}{13} \cdot \frac{5}{9} - \frac{5}{9} \cdot \left(-\frac{2}{13}\right) - \frac{5}{9} \cdot \frac{18}{13}$$

$$= \frac{5}{9} \left[\frac{7}{13} - \left(-\frac{2}{13}\right) - \frac{18}{13} \right] = \frac{5}{9} \cdot \frac{-9}{13} = \frac{-5}{13}$$

Câu 105. (HSG 7 huyện Đông Sơn, trường THCS Nguyễn Chí 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức $A = \left(2\frac{1}{3} + 3,5\right) : \left(-4\frac{1}{6} + 2\frac{1}{7}\right) + 7,5$

Lời giải

$$A = \left(2\frac{1}{3} + 3,5\right) : \left(-4\frac{1}{6} + 2\frac{1}{7}\right) + 7,5 = \left(\frac{7}{3} + \frac{7}{2}\right) : \left(-\frac{25}{6} + \frac{15}{7}\right) + \frac{15}{2}$$

$$= \frac{35}{6} : \frac{-85}{42} + \frac{15}{2} = \frac{35}{6} \cdot \frac{-42}{85} + \frac{15}{2} = \frac{-49}{17} + \frac{15}{2} = \frac{157}{34}$$

Câu 106. (HSG 7 huyện Tam Dự 2017 - 2018)

Thực hiện phép tính:

$$\left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11}\right) : \frac{7}{11} + \left(\frac{-4}{7} + \frac{7}{11}\right) : \frac{7}{11}$$

Lời giải

$$A = \left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11}\right) : \frac{7}{11} + \left(\frac{-4}{7} + \frac{7}{11}\right) : \frac{7}{11} = \left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11}\right) \cdot \frac{11}{7} + \left(\frac{-4}{7} + \frac{7}{11}\right) \cdot \frac{11}{7}$$

$$A = \frac{11}{7} \cdot \left[\left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11}\right) + \left(\frac{-4}{7} + \frac{7}{11}\right)\right] = \frac{11}{7} \cdot \left[\left(\frac{-3}{7} + \frac{-4}{7}\right) + \left(\frac{4}{11} + \frac{7}{11}\right)\right] = \frac{11}{7} \cdot [(-1) + 1] = 0$$

Câu 107. (HSG 7 Thanh Miện 2022 - 2023) Đề 377

Thực hiện phép tính:

a) $\left[\left(\frac{2}{191} - \frac{3}{382}\right) \cdot \frac{191}{17} + \frac{33}{34}\right] : \left[\left(\frac{7}{1011} + \frac{11}{2022}\right) \cdot \frac{1011}{25} + \frac{9}{2}\right]$

b) $\sqrt{11^2 - 72} - 1\frac{1}{2} : \sqrt{\frac{25}{4}} - \left(\frac{2023}{2024}\right)^0$

Lời giải

a) $\left[\left(\frac{2}{191} - \frac{3}{382}\right) \cdot \frac{191}{17} + \frac{33}{34}\right] : \left[\left(\frac{7}{1011} + \frac{11}{2022}\right) \cdot \frac{1011}{25} + \frac{9}{2}\right]$

$$= \left(\frac{2}{17} - \frac{3}{34} + \frac{33}{34} \right) : \left(\frac{7}{25} + \frac{11}{50} + \frac{9}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{2}{17} + \frac{15}{17} \right) : \left(\frac{14}{50} + \frac{11}{50} + \frac{225}{50} \right) = 1 : 5 = \frac{1}{5}$$

b) $\sqrt{11^2 - 72} - 1 \frac{1}{2} : \sqrt{\frac{25}{4}} - \left(\frac{2023}{2024} \right)^0$

$$= \sqrt{49} - \frac{3}{2} : \frac{5}{2} - 1$$

$$= 7 - \frac{3}{5} - 1 = 6 - \frac{3}{5} = \frac{27}{5}$$

Câu 108. (HSG 7 huyện Phù Cát 2017 - 2018)

Không dùng máy tính, hãy tính giá trị của biểu thức: $S = \frac{\frac{3}{13} - 0,6 + \frac{3}{7} + 0,75}{\frac{11}{7} - 2,2 + \frac{11}{13} + 2,75}$

Lời giải

$$S = \frac{\frac{3}{13} - 0,6 + \frac{3}{7} + 0,75}{\frac{11}{7} - 2,2 + \frac{11}{13} + 2,75} = \frac{\frac{3}{13} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} + \frac{3}{4}}{\frac{11}{7} - \frac{11}{5} + \frac{11}{13} + \frac{11}{4}} = \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{4} \right)}{11 \cdot \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \frac{1}{4} \right)} = \frac{3}{11}$$

Câu 109. (HSG 7 cấp huyện 2017 - 2018)

Tính $A = 1 \frac{13}{15} \cdot (0,5)^2 \cdot 3 + \left(\frac{8}{15} - 1 \frac{19}{60} \right) : 1 \frac{23}{24}$

Lời giải

$$A = \frac{7}{5} - \frac{47}{60} : \frac{47}{24} = \frac{7}{5} - \frac{2}{5} = 1$$

Câu 110. (HSG 7 huyện Thiệu Hóa 2016 - 2017)

Tính hợp lý:

a) $\frac{7}{-25} + \frac{-18}{25} + \frac{4}{23} + \frac{5}{7} + \frac{19}{23}$

b) $\frac{7}{19} \cdot \frac{8}{11} + \frac{7}{19} \cdot \frac{3}{11} + \frac{12}{19}$

c) $(-25) \cdot 125 \cdot 4 \cdot (-8) \cdot (-17)$

d) $\frac{7}{35} \cdot \frac{10}{19} + \frac{7}{35} \cdot \frac{9}{19} - \frac{2}{35}$

Lời giải

a) $\frac{7}{-25} + \frac{-18}{25} + \frac{4}{23} + \frac{5}{7} + \frac{19}{23} = \left(\frac{-7}{25} + \frac{-18}{25} \right) + \left(\frac{4}{23} + \frac{19}{23} \right) + \frac{5}{7} = -1 + 1 + \frac{5}{7} = \frac{5}{7}$

b) $\frac{7}{19} \cdot \frac{8}{11} + \frac{7}{19} \cdot \frac{3}{11} + \frac{12}{19} = \left(\frac{7}{19} \cdot \frac{8}{11} + \frac{7}{19} \cdot \frac{3}{11} \right) + \frac{12}{19} = \frac{7}{19} \cdot \left(\frac{8}{11} + \frac{3}{11} \right) + \frac{12}{19} = \frac{7}{19} + \frac{12}{19} = 1$

c) $(-25) \cdot 125 \cdot 4 \cdot (-8) \cdot (-17) = (-25) \cdot 4 \cdot 125 \cdot (-8) \cdot (-17) = (-100) \cdot (-1000) \cdot (-17) = -1700000$

$$d) \frac{7}{35} \cdot \frac{10}{19} + \frac{7}{35} \cdot \frac{9}{19} - \frac{2}{35} = \frac{7}{35} \cdot \left(\frac{10}{19} + \frac{9}{19} \right) - \frac{2}{35} = \frac{7}{35} - \frac{2}{35} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}.$$

Câu 111. (HSG 7 huyện Nga Sơn 2016 - 2017)

Thực hiện phép tính $A = \left(3\frac{5}{6} - 1\frac{1}{3} \right) \left(3\frac{4}{15} - 2\frac{3}{5} \right)$

Lời giải

$$A = \left(3\frac{5}{6} - 1\frac{1}{3} \right) \left(3\frac{4}{15} - 2\frac{3}{5} \right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

Câu 112. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc 2016 - 2017)

Tính: $A = \left(2\frac{1}{3} + 3,5 \right) : \left(-4\frac{1}{6} + 3\frac{1}{7} \right) + 7,5$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \left(2\frac{1}{3} + 3,5 \right) : \left(-4\frac{1}{6} + 3\frac{1}{7} \right) + 7,5 \\ &= \left(\frac{7}{3} + \frac{7}{2} \right) : \left(\frac{-25}{6} + \frac{22}{7} \right) + \frac{15}{2} \\ &= \frac{35}{6} : \frac{-43}{42} + \frac{15}{2} = \frac{-245}{43} + \frac{15}{2} = \frac{155}{86} \end{aligned}$$

Câu 113. (HSG 7 huyện Thanh Hà 2016 - 2017)

Tính $7,3 \cdot 10,5 + 7,3 \cdot 15 + 2,7 \cdot 10,5 + 15 \cdot 2,7$

Lời giải

$$\begin{aligned} &7,3 \cdot 10,5 + 7,3 \cdot 15 + 2,7 \cdot 10,5 + 15 \cdot 2,7 \\ &= 10,5 \cdot (7,3 + 2,7) + 15 \cdot (7,3 + 2,7) \\ &= 10,5 \cdot 10 + 15 \cdot 10 = 105 + 150 = 255 \end{aligned}$$

Câu 114. (HSG 7 huyện Hoàng Hóa 2016 - 2017)

Tính giá trị của biểu thức $A = \left(\frac{-4}{7} + \frac{2}{5} \right) : \frac{2}{3} + \left(\frac{-3}{7} + \frac{3}{5} \right) : \frac{2}{3}$

Lời giải

$$A = \left(\frac{-4}{7} + \frac{2}{5} \right) : \frac{2}{3} + \left(\frac{-3}{7} + \frac{3}{5} \right) : \frac{2}{3} = \left(\frac{-4}{7} + \frac{2}{5} + \frac{-3}{7} + \frac{3}{5} \right) : \frac{2}{3} = 0 : \frac{2}{3} = 0$$

Câu 115. (HSG 7 Tây Hồ 2022 - 2023) Đề 374

Tính hợp lí: $A = \left(\frac{-5}{8} + \frac{7}{4} \right) : \frac{-2022}{2023} + \left(\frac{-3}{8} + \frac{6}{24} \right) : \frac{-2022}{2023}$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{-5}{8} + \frac{7}{4} \right) : \frac{-2022}{2023} + \left(\frac{-3}{8} + \frac{6}{24} \right) : \frac{-2022}{2023} \\ &= \left(\frac{-5}{8} + \frac{7}{4} \right) \cdot \frac{-2023}{2022} + \left(\frac{-3}{8} + \frac{1}{4} \right) \cdot \frac{-2023}{2022} \\ &= \left(\frac{-5}{8} + \frac{-3}{8} + \frac{7}{4} + \frac{1}{4} \right) \cdot \frac{-2023}{2022} \end{aligned}$$

$$= \frac{-2023}{2022} \cdot (-1+2) = \frac{-2023}{2022}$$

Câu 116. (HSG 7 Thanh Thủy 2022 - 2023) Đề 375

$$\text{Tính: } A = \frac{2022}{2023} : \left(\frac{0,4 - \frac{2}{11} + \frac{2}{13}}{1,4 - \frac{7}{11} + \frac{7}{13}} \cdot \frac{-1\frac{1}{6} + 0,875 - 0,7}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + 0,2} \right)$$

Lời giải

$$A = \frac{2022}{2023} : \left(\frac{\frac{2}{5} - \frac{2}{11} + \frac{2}{13}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{11} + \frac{7}{13}} \cdot \frac{-\frac{7}{6} + \frac{7}{8} - \frac{7}{10}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}} \right)$$

$$A = \frac{2022}{2023} : \left(\frac{2\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right)}{7\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right)} \cdot \frac{-7\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}} \right)$$

$$A = \frac{2022}{2023} : \left(\frac{2}{7} \cdot \frac{-7}{2} \right) \text{ (vì } \frac{1}{5} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \neq 0 \text{ và } \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \neq 0)$$

$$A = \frac{2022}{2023} : (-1) = -\frac{2022}{2023}$$

$$\text{Vậy } A = -\frac{2022}{2023}$$

Câu 117. (HSG 7 Trục Ninh 2022 - 2023) Đề 376

$$\text{Tính giá trị của biểu thức sau: } B = (\sqrt{6,25} - 5\sqrt{0,49}) \cdot \left(21\sqrt{\frac{64}{441}} - 13\sqrt{\frac{81}{169}} \right).$$

Lời giải

$$B = (\sqrt{6,25} - 5\sqrt{0,49}) \cdot \left(21\sqrt{\frac{64}{441}} - 13\sqrt{\frac{81}{169}} \right)$$

$$= (2,5 - 5 \cdot 0,7) \left(21 \cdot \frac{8}{21} - 13 \cdot \frac{9}{13} \right)$$

$$= (2,5 - 3,5) \cdot (8 - 9) = -1 \cdot (-1) = 1$$

$$\text{Vậy } B = 1.$$

Câu 118. (HSG 7 huyện Việt Yên 2016 - 2017)

$$\text{Tính } A = -3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}$$

Lời giải

$$A = -3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}} = -3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{4}{3}}} = -3 + \frac{1}{1 + \frac{3}{4}} = -3 + \frac{1}{\frac{7}{4}} = -3 + \frac{4}{7} = -\frac{17}{7}$$

Câu 119. (HSG 7 huyện 2015 - 2016)

Tính $\left[18\frac{1}{6} - \left(0,06 : 7\frac{1}{2} + 3\frac{2}{5} \cdot 0,38 \right) \right] : \left(19 - 2\frac{2}{3} \cdot 4\frac{3}{4} \right)$

Lời giải

$$\begin{aligned} & \left[18\frac{1}{6} - \left(0,06 : 7\frac{1}{2} + 3\frac{2}{5} \cdot 0,38 \right) \right] : \left(19 - 2\frac{2}{3} \cdot 4\frac{3}{4} \right) \\ &= \left[\frac{109}{6} - \left(\frac{6}{100} : \frac{15}{2} + \frac{17}{5} \cdot \frac{38}{100} \right) \right] : \left(19 - \frac{8}{3} \cdot \frac{19}{4} \right) \\ &= \left[\frac{109}{6} - \left(\frac{3}{50} \cdot \frac{2}{15} + \frac{17}{5} \cdot \frac{19}{50} \right) \right] : \left(19 - \frac{38}{3} \right) \\ &= \left[\frac{109}{6} - \left(\frac{2}{250} + \frac{323}{250} \right) \right] : \frac{19}{3} \\ &= \left(\frac{109}{6} - \frac{13}{10} \right) \cdot \frac{3}{19} = \frac{506}{30} \cdot \frac{3}{19} = \frac{253}{95} \end{aligned}$$

Câu 120. (HSG 7 tỉnh Bắc Giang 2012 - 2013)

Rút gọn: $A = \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{5} + \frac{1}{10} \right) : \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{12} \right)$

Lời giải

$$A = \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{5} + \frac{1}{10} \right) : \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{12} \right) = \frac{12}{10} : \frac{11}{12} = \frac{6}{5} \cdot \frac{12}{11} = \frac{72}{55}$$

Câu 121. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2015 - 2016)

Tính $A = \left(\frac{-4}{7} + \frac{2}{5} \right) : \frac{2}{3} + \left(\frac{-3}{7} + \frac{3}{5} \right) : \frac{2}{3}$

Lời giải

$$A = \left(\frac{-4}{7} + \frac{2}{5} \right) : \frac{2}{3} + \left(\frac{-3}{7} + \frac{3}{5} \right) : \frac{2}{3} = \left[\left(\frac{-4}{7} + \frac{3}{7} \right) + \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5} \right) \right] : \frac{2}{3} = 0 : \frac{2}{3} = 0$$

Câu 122. (HSG 7 trường Ân Tường Đông 2014 - 2015)

Thực hiện phép tính:

a) $A = -\frac{14}{25} \cdot 34,8 - \frac{14}{25} \cdot 65,2$

b) $B = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} : \left(-\frac{3}{2} \right) - (-7)$

Lời giải

a) $A = -\frac{14}{25} \cdot 34,8 - \frac{14}{25} \cdot 65,2 = -\frac{14}{25} \cdot (34,8 + 65,2) = -\frac{14}{25} \cdot 100 = -56$

b) $B = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} : \left(-\frac{3}{2} \right) - (-7) = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) + 7 = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} + 7 = \frac{31}{4}$

Câu 123. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2014 - 2015)

Tính giá trị biểu thức:
$$S = \frac{\frac{3}{13} - 0,6 + \frac{3}{7} + 0,75}{\frac{11}{7} - 2,2 + \frac{11}{13} + 2,75}$$

Lời giải

$$S = \frac{\frac{3}{13} - 0,6 + \frac{3}{7} + 0,75}{\frac{11}{7} - 2,2 + \frac{11}{13} + 2,75} = \frac{\frac{3}{13} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} + \frac{3}{4}}{\frac{11}{7} - \frac{11}{5} + \frac{11}{13} + \frac{11}{4}} = \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{4} \right)}{11 \cdot \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \frac{1}{4} \right)} = \frac{3}{11}$$

Câu 124. (HSG 7 huyện Phú Thiện 2015 - 2016)

Thực hiện phép tính:

a) $\frac{3}{4} : \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{9} \right) + \frac{9}{4}$

b) $\frac{45}{19} - \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} \right)^{-1} \right)^{-1} \right)^{-1}$

Lời giải

a) $\frac{3}{4} : \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{9} \right) + \frac{9}{4} = \frac{3}{4} : \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{9} \right) + \frac{9}{4} = \frac{3}{4} : \frac{1}{9} + \frac{9}{4} = \frac{27}{4} + \frac{9}{4} = 4$

b) $\frac{45}{19} - \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} \right)^{-1} \right)^{-1} \right)^{-1} = \frac{45}{19} - \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{3} + 4}} = \frac{45}{19} - \frac{26}{19} = \frac{19}{19} = 1$

Câu 125. (HSG 7 huyện Krông Ana 2022 - 2023) Đề 361

Thực hiện phép tính: $\left[6 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) + 1 \right] : \left(-\frac{1}{3} - 1 \right)$

Lời giải

$$\left[6 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) + 1 \right] : \left(-\frac{1}{3} - 1 \right) = \left[6 \cdot \frac{1}{9} + 1 + 1 \right] : \left(-\frac{4}{3} \right) = \frac{8}{3} : \left(-\frac{4}{3} \right) = -2$$

Câu 126. (HSG 7 huyện Ngọc Lặc, trường Nguyệt Ân 2022 - 2023) Đề 362

Tính giá trị biểu thức.

a) $A = (0,8 \cdot 7 + 0,8^2) \cdot \left(1,25 \cdot 7 - \frac{4}{5} \cdot 1,25 \right) + 31,64$

b) $B = \left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11} \right) : \frac{7}{11} + \left(\frac{-4}{7} + \frac{7}{11} \right) : \frac{7}{11}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= (0,8 \cdot 7 + 0,8^2) \cdot \left(1,25 \cdot 7 - \frac{4}{5} \cdot 1,25\right) + 31,64 \\ &= 0,8 \cdot 1,25 \cdot \left(7 + \frac{4}{5}\right) \left(7 + \frac{4}{5}\right) + 31,64 \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{39}{5} \cdot \frac{31}{5} + \frac{791}{25} \\ &= \frac{1}{25} \cdot (1209 + 791) = \frac{2000}{25} = 80 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } A &= \left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11}\right) : \frac{7}{11} + \left(\frac{-4}{7} + \frac{7}{11}\right) : \frac{7}{11} \\ &= \left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11}\right) \cdot \frac{11}{7} + \left(\frac{-4}{7} + \frac{7}{11}\right) \cdot \frac{11}{7} \\ &= \frac{11}{7} \left[\left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11}\right) + \left(\frac{-4}{7} + \frac{7}{11}\right)\right] \\ &= \frac{11}{7} [(-1) + 1] = \frac{11}{7} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Câu 127. (HSG 7 huyện Bát Xát, tỉnh Lào Cai 2022 - 2023) Đề 363

Thực hiện các phép tính: $\left[18\frac{1}{6} - \left(0,06 : 7\frac{1}{2} + 3\frac{2}{5} \cdot 0,38\right)\right] : \left(19 - 2\frac{2}{3} \cdot 4\frac{3}{4}\right)$

Lời giải

$$\begin{aligned} &\left[18\frac{1}{6} - \left(0,06 : 7\frac{1}{2} + 3\frac{2}{5} \cdot 0,38\right)\right] : \left(19 - 2\frac{2}{3} \cdot 4\frac{3}{4}\right) \\ &= \left[\frac{109}{6} - \left(\frac{6}{100} : \frac{15}{2} + \frac{17}{5} \cdot \frac{38}{100}\right)\right] : \left(19 - \frac{8}{3} \cdot \frac{19}{4}\right) \\ &= \left[\frac{109}{6} - \left(\frac{3}{50} \cdot \frac{2}{15} + \frac{17}{5} \cdot \frac{19}{50}\right)\right] : \left(19 - \frac{38}{3}\right) \\ &= \left[\frac{109}{6} - \left(\frac{2}{250} + \frac{323}{250}\right)\right] : \frac{19}{3} \\ &= \left(\frac{109}{6} - \frac{13}{10}\right) \cdot \frac{3}{19} = \frac{506}{30} \cdot \frac{3}{19} = \frac{253}{95} \end{aligned}$$

Câu 128. (HSG 7 tỉnh Ninh Bình 2022 - 2023) Đề 364

Thực hiện phép tính: $\left[6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 1\right] : \left(-\frac{1}{3} - 1\right)^2$

Lời giải

$$\begin{aligned} &\left[6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 1\right] : \left(-\frac{1}{3} - 1\right)^2 \\ &= \left[6 \cdot \frac{1}{9} - 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 1\right] : \left(-\frac{4}{3}\right)^2 \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{2}{3} + 1 + 1 \right] : \frac{16}{9} = \frac{8}{3} \cdot \frac{9}{16} = \frac{3}{2}$$

Câu 129. (HSG 7 huyện Sóc Sơn 2022 - 2023) Đề 366

Thực hiện các phép tính:

a) $\left(-\frac{3}{5}\right)^2 \cdot 5^2 - \left(2\frac{1}{4}\right)^3 : \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left|-\frac{1}{2}\right|$

b) $\left(\frac{0,4 - \frac{2}{\sqrt{81}} + \frac{2}{11} - \frac{1}{3} - 0,25 + \frac{1}{5}}{1,4 - \frac{7}{\sqrt{81}} + \frac{7}{11} - 1\frac{1}{6} - 0,875 + 0,7}\right) : \frac{2022}{2023}$

Lời giải

a) $\left(-\frac{3}{5}\right)^2 \cdot 5^2 - \left(2\frac{1}{4}\right)^3 : \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left|-\frac{1}{2}\right| = 3^2 - \left(\frac{9}{4} : \frac{3}{4}\right)^3 + \frac{1}{2} = 9 - 3^3 + \frac{1}{2} = -\frac{35}{2}$

b) $\left(\frac{0,4 - \frac{2}{\sqrt{81}} + \frac{2}{11} - \frac{1}{3} - 0,25 + \frac{1}{5}}{1,4 - \frac{7}{\sqrt{81}} + \frac{7}{11} - 1\frac{1}{6} - 0,875 + 0,7}\right) : \frac{2022}{2023} = \left(\frac{\frac{2}{5} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{9} + \frac{7}{11} - \frac{7}{6} - \frac{7}{8} + \frac{7}{10}}\right) : \frac{2022}{2023}$

$$= \left[\frac{2 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{7 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) - \frac{7}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)}\right] : \frac{2022}{2023} = \left(\frac{2}{7} - \frac{2}{7}\right) : \frac{2022}{2023} = 0$$

Câu 130. (HSG 7 huyện Nho Quan 2022 - 2023) Đề 368

Thực hiện các phép tính

a) $\sqrt{1 + \frac{5}{4}} + \sqrt{1 - \frac{7}{16}}$

b) $\left(2\frac{1}{3} + 3,5\right) : \left(-4\frac{1}{6} + 2\frac{1}{7}\right) + 7,5$

Lời giải

a) $\sqrt{1 + \frac{5}{4}} + \sqrt{1 - \frac{7}{16}} = \sqrt{\frac{9}{4}} + \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$

b) $\left(2\frac{1}{3} + 3,5\right) : \left(-4\frac{1}{6} + 2\frac{1}{7}\right) + 7,5 = \left(\frac{7}{3} + \frac{7}{2}\right) : \left(-\frac{25}{6} + \frac{15}{7}\right) + \frac{15}{2} = \frac{35}{6} : \frac{-85}{42} + \frac{15}{2}$

$$= \frac{35}{6} \cdot \frac{-42}{85} + \frac{15}{2} = \frac{-49}{17} + \frac{15}{2} = \frac{157}{34}$$

Câu 131. (HSG 7 Bảo Thắng 2022 - 2023) Đề 371

Tính giá trị biểu thức: $A = \left(2\frac{1}{3} + 3,5\right) : \left(-4\frac{1}{6} + 2\frac{1}{7}\right) + 7,5$

Lời giải

$$A = \left(2\frac{1}{3} + 3,5\right) : \left(-4\frac{1}{6} + 2\frac{1}{7}\right) + 7,5$$

$$A = \left(\frac{7}{3} + \frac{7}{2} \right) : \left(\frac{-25}{6} + \frac{15}{7} \right) + \frac{15}{2}$$

$$A = \frac{35}{6} : \frac{-85}{42} + \frac{15}{2}$$

$$A = \frac{35}{6} \cdot \frac{-42}{85} + \frac{15}{2} = \frac{-49}{17} + \frac{15}{2} = \frac{157}{34}$$



CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS

CD1: THỰC HIỆN PHÉP TÍNH
DẠNG 2: LŨY THỪA PHỐI HỢP CÁC PHÉP TÍNH

A. Trắc nghiệm.

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Kết quả phép tính $\frac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{8^4 \cdot 3^{12} - 6^{11}}$ là:

- A. $\frac{12}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{2}{3}$

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \frac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{8^4 \cdot 3^{12} - 6^{11}} &= \frac{(2^2)^6 \cdot (3^2)^5 + (2 \cdot 3)^9 \cdot 2^3 \cdot 5 \cdot 3}{(2^3)^4 \cdot 3^{12} - (2 \cdot 3)^{11}} \\ &= \frac{2^{12} \cdot 3^{10} + 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5}{2^{12} \cdot 3^{12} - 2^{11} \cdot 3^{11}} = \frac{2^{12} \cdot 3^{10} \cdot (1+5)}{2^{11} \cdot 3^{11} \cdot (2 \cdot 3 - 1)} = \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 5} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Thanh Sơn, tỉnh Phú Thọ, 2021 - 2022)

Biểu thức $\frac{45}{19} - \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} \right)^{-1} \right)^{-1} \right)^{-1}$ có giá trị là:

- A. -2 B. -1 C. 0 D. 1

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \frac{45}{19} - \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} \right)^{-1} \right)^{-1} \right)^{-1} &= \frac{45}{19} - \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + 4 \right)^{-1} \right)^{-1} \\ &= \frac{45}{19} - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{13} \right)^{-1} = \frac{45}{19} - \left(\frac{19}{26} \right)^{-1} = \frac{45}{19} - \frac{26}{19} = \frac{19}{19} = 1 \end{aligned}$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Thanh Sơn, năm 2021 - 2022)

Kết quả phép tính $A = \frac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{8^4 \cdot 3^{12} - 6^{11}}$ là:

- A. $\frac{12}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{2}{3}$

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} A &= \frac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{8^4 \cdot 3^{12} - 6^{11}} = \frac{2^{12} \cdot 3^{10} + 2^9 \cdot 3^9 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 5}{2^{12} \cdot 3^{12} - 2^{11} \cdot 3^{11}} \\ &= \frac{2^{12} \cdot 3^{10} + 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5}{2^{12} \cdot 3^{12} - 2^{11} \cdot 3^{11}} = \frac{2^{12} \cdot 3^{10} \cdot (1+5)}{2^{11} \cdot 3^{11} \cdot (2 \cdot 3 - 1)} = \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 5} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Câu 4. (HSG 7 huyện Tam Nông, 2021 - 2022)

Giá trị biểu thức $P = \sqrt{\frac{9}{25}} + 2022^{0^{2023}} + |-0,4|$ là

A. 2.

B. 4.

C. 2022.

D. 2023.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } P = \sqrt{\frac{9}{25}} + 2022^{0^{2023}} + |-0,4| = \frac{3}{5} + 1 + \frac{2}{5} = \frac{5}{5} + 1 = 2$$

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 THCS Thị trấn Cà Nàng năm 2022-2023)

Tính giá trị biểu thức: $A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3}$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3} = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 + 2^{12} \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 5^{10} \cdot 7^4}{5^9 \cdot 7^3 + 5^9 \cdot 2^3 \cdot 7^3} \\ &= \frac{2^{12} \cdot 3^4 \cdot (3-1)}{2^{12} \cdot 3^5 \cdot (3+1)} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 \cdot (1-7)}{5^9 \cdot 7^3 \cdot (1+2^3)} = \frac{2}{3 \cdot 4} - \frac{5 \cdot (-6)}{9} = \frac{1}{6} + \frac{10}{3} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Câu 2. (HSG 7 TP Bắc Ninh năm 2022-2023)

Tính $\sqrt{\frac{4}{25}} \cdot \left(\frac{-1}{25}\right)^0 + \left|\frac{9}{10}\right| \cdot 0, (6) - \left(\frac{1}{-2^2}\right) : \frac{8^2}{4^4}$;

Lời giải

$$\sqrt{\frac{4}{25}} \cdot \left(\frac{-1}{25}\right)^0 + \left|\frac{9}{10}\right| \cdot 0, (6) - \left(\frac{1}{-2^2}\right) : \frac{8^2}{4^4} = \frac{2}{5} \cdot 1 + \frac{9}{10} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{2^8}{2^6}$$

Câu 3. (HSG 7 Hoàng Hoá năm 2022-2023)

Tính giá trị biểu thức: $A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3}$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3} = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 + 2^{12} \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 5^{10} \cdot 7^4}{5^9 \cdot 7^3 + 5^9 \cdot 2^3 \cdot 7^3} \\ &= \frac{2^{12} \cdot 3^4 \cdot (3-1)}{2^{12} \cdot 3^5 \cdot (3+1)} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 \cdot (1-7)}{5^9 \cdot 7^3 \cdot (1+2^3)} = \frac{2}{3 \cdot 4} - \frac{5 \cdot (-6)}{9} = \frac{1}{6} + \frac{10}{3} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Câu 4. (HSG 7 Quận Hà Đông năm 2022-2023)

Rút gọn biểu thức sau: $A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 81}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5}$

Lời giải

$$A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 81}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 - 2^{12} \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^4 (3-1)}{2^{12} \cdot 3^5 (3-1)} = \frac{1}{3}.$$

Câu 5. (HSG 7 H Bình Xuyên năm 2022-2023)

Rút gọn biểu thức sau: $A = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^4} \cdot (-1)^{2023}}{\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{-5}{12}\right)^3} - \frac{71}{5}$

Lời giải

$$A = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^4} \cdot (-1)^{2023}}{\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{-5}{12}\right)^3} - \frac{71}{5} = \frac{2^9 \cdot 3^5 \cdot 5^2}{2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3} - \frac{71}{5} = \frac{72}{5} - \frac{71}{5} = \frac{1}{5}$$

Câu 6. (HSG 7 Triệu Sơn năm 2022-2023)

Thực hiện các phép tính: $A = 1000 - \left\{(-5)^3 \cdot (-2)^3 - 11[7^2 - 5 \cdot 2^3 + 8(11^2 - 121)]\right\}.$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= 1000 - \left\{(-125) \cdot (-8) - 11[49 - 40 + 8 \cdot (121 - 121)]\right\} \\ &= 1000 - [1000 - 11 \cdot (9 + 8 \cdot 0)] = 1000 - (1000 - 11 \cdot 9) = 99 \end{aligned}$$

Câu 7. (HSG 7 Liên Đường năm 2022-2023)

Thực hiện phép tính: $\frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 3^6}{2^{12} \cdot 9^3 - 8^4 \cdot 3^5}$

Lời giải

$$\frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 3^6}{2^{12} \cdot 9^3 - 8^4 \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^6}{2^{12} \cdot 3^6 - 2^{12} \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^5 \cdot (1-3)}{2^{12} \cdot 3^5 \cdot (3-1)} = -1$$

Câu 8. (HSG 7 Diễn Châu năm 2022-2023)

Tính giá trị biểu thức: $\left[6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 1\right] : \left(-\frac{1}{3} - 1\right)$

Lời giải

$$\begin{aligned} &\left[6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 1\right] : \left(-\frac{1}{3} - 1\right) = \left(6 \cdot \frac{1}{9} + 1 + 1\right) : \left(-\frac{4}{3}\right) \\ &= \left(6 \cdot \frac{1}{9} + 1 + 1\right) : \left(-\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{2}{3} + 2\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{8}{3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -2 \end{aligned}$$

Câu 9. (HSG 7 Hậu Lộc năm 2022-2023)

Tính giá trị biểu thức $A = 99^{99} - \left\{1, (3) - \left[5 \cdot 2^3 - (-7)^2 + \frac{1}{3} + 99^9 \cdot (27^4 - 81^3 - 99^{90})\right]\right\}.$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 A &= 99^{99} - \left\{ 1, (3) - \left[5 \cdot 2^3 - (-7)^2 + \frac{1}{3} + 99^9 \cdot (27^4 - 81^3 - 99^{90}) \right] \right\} \\
 A &= 99^{99} - \left\{ 1, (3) - \left[5 \cdot 2^3 - (-7)^2 + \frac{1}{3} + 99^9 \cdot (3^{12} - 3^{12} - 99^{90}) \right] \right\} \\
 &= 99^{99} - \left\{ 1, (3) - \left[5 \cdot 2^3 - (-7)^2 + \frac{1}{3} - 99^{99} \right] \right\} \\
 &= 99^{99} - \left\{ 1, (3) - 5 \cdot 2^3 + (-7)^2 - \frac{1}{3} + 99^{99} \right\} \\
 &= 99^{99} - \frac{4}{3} + 40 - 49 + \frac{1}{3} - 99^{99} = -10
 \end{aligned}$$

Vậy $A = -10$

Câu 10. (HSG 7 Thái Hoa Nghệ An năm 2022-2023)

Tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{2^7 + \left(\frac{9}{4}\right)^3 : \left(\frac{3}{16}\right)^3}{2^7 \cdot 5^2 + 512}$

Lời giải

$$A = \frac{2^7 + \left(\frac{9}{4}\right)^3 : \left(\frac{3}{16}\right)^3}{2^7 \cdot 5^2 + 512} = \frac{2^7 + 12^3}{2^7 \cdot 5^2 + 2^7 \cdot 2^2} = \frac{2^6(2 + 3^3)}{2^7(5^2 + 2^2)} = \frac{1}{2}$$

Câu 11. (HSG 7 Lục Ngạn năm 2022-2023)

Tính $B = 2 \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} \left[(5^2 + 2^3) : \frac{11}{2} - 6 \right] + 2023^0$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 B &= 2 \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} \left[(5^2 + 2^3) : \frac{11}{2} - 6 \right] + 2023^0 = \frac{7}{3} \cdot \frac{9}{2} \left[(25 + 8) \cdot \frac{2}{11} - 6 \right] + 1 \\
 &= \frac{63}{6} \cdot \left[33 \cdot \frac{2}{11} - 6 \right] + 1 = \frac{63}{6} \cdot 0 + 1 = 1.
 \end{aligned}$$

Câu 12. (HSG 7 Anh Sơn năm 2022-2023)

Thực hiện phép tính: $B = \frac{4^5 \cdot 9^4 - 2 \cdot 6^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 6^8 \cdot 20}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{4^5 \cdot 9^4 - 2 \cdot 6^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 6^8 \cdot 20} = \frac{2^{2.5} \cdot 3^{2.4} - 2 \cdot (2.3)^9}{2^{10} \cdot 3^8 + (2.3)^8 \cdot 20} = \frac{2^{10} \cdot 3^8 - 2 \cdot 2^9 \cdot 3^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 2^8 \cdot 3^8 \cdot 20} \\
 &= \frac{2^{10} \cdot 3^8 - 2^{10} \cdot 3^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 2^8 \cdot 3^8 \cdot 2^2 \cdot 5} = \frac{2^{10} \cdot 3^8 (1 - 3)}{2^{10} \cdot 3^8 (1 + 5)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

Câu 13. (HSG 7 Đô Lương năm 2022-2023)

Tính $A = \left(\frac{-2}{3}\right)^2 \cdot 2023 + \left(\frac{-4}{9}\right) \cdot 2022 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$.

Lời giải

Ta có: $A = \left(\frac{-2}{3}\right)^2 \cdot 2023 + \left(\frac{-4}{9}\right) \cdot 2022 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$$= \frac{4}{9} \cdot 2023 - \frac{4}{9} \cdot 2022 + \frac{9}{4} = \frac{4}{9}(2023 - 2022) + \frac{9}{4} = \frac{4}{9} + \frac{9}{4} = \frac{16}{36} + \frac{81}{36} = \frac{97}{36}.$$

Vậy $A = \frac{97}{36}$.

Câu 14. (HSG 7 Nghi Sơn năm 2022-2023)

Thực hiện phép tính: $A = \frac{2^{19} \cdot 27^3 \cdot 5 - 15 \cdot (-4)^9 \cdot 9^4}{6^9 \cdot 2^{10} - (-12)^{10}}$

Lời giải

$$A = \frac{2^{19} \cdot 27^3 \cdot 5 - 15 \cdot (-4)^9 \cdot 9^4}{6^9 \cdot 2^{10} - (-12)^{10}} = \frac{2^{19} \cdot (3^3)^3 \cdot 5 - 3 \cdot 5 \cdot (-2^2)^9 \cdot (3^2)^4}{(2 \cdot 3)^9 \cdot 2^{10} - (2^2 \cdot 3)^{10}}$$

$$= \frac{2^{19} \cdot 3^9 \cdot 5 + 2^{18} \cdot 3^9 \cdot 5}{2^{19} \cdot 3^9 - 2^{20} \cdot 3^{10}} = \frac{2^{18} \cdot 3^9 \cdot 5(2+1)}{2^{19} \cdot 3^9(1-2 \cdot 3)} = \frac{2^{18} \cdot 3^9 \cdot 5 \cdot 3}{2^{19} \cdot 3^9 \cdot (-5)} = \frac{-3}{2}$$

Câu 15. (HSG 7 Vĩnh Yên năm 2022-2023)

Thực hiện phép tính: $A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3}$

Lời giải

$$A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3} = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 + 2^{12} \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 5^{10} \cdot 7^4}{5^9 \cdot 7^3 + 5^9 \cdot 2^3 \cdot 7^3}$$

$$= \frac{2^{12} \cdot 3^4 \cdot 2}{2^{12} \cdot 3^5 \cdot 4} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 \cdot (-6)}{5^9 \cdot 7^3 \cdot 9} = \frac{1}{6} - \frac{10}{3} = \frac{7}{2}$$

Câu 16. (HSG 7 huyện Hiệp Hòa 2022-2023 lần 2)

Rút gọn biểu thức: $A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3}$

Lời giải

$$A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3}$$

$$= \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 5^{10} \cdot 7^4}{5^9 \cdot 7^3 + 5^9 \cdot 7^3 \cdot 2^3} = \frac{2^{12} \cdot 3^4(3-1)}{2^{12} \cdot 3^6} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 \cdot (1-7)}{5^9 \cdot 7^3 \cdot (1+2^3)}$$

$$= \frac{2^{12} \cdot 3^4 \cdot 2}{2^{12} \cdot 3^6} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 \cdot (-6)}{5^9 \cdot 7^3 \cdot 9} = \frac{2}{3^2} - \frac{5 \cdot (-6)}{9} = \frac{2}{9} - \frac{-30}{9} = \frac{32}{9}$$

Câu 17. (HSG 7 Hà Trung năm 2022-2023)

Tính giá trị các biểu thức sau: $B = \frac{4^5 \cdot 9^4 - 2 \cdot 6^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 6^8 \cdot 20}$

Lời giải

$$B = \frac{4^5 \cdot 9^4 - 2 \cdot 6^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 6^8 \cdot 20} = \frac{2^{10} \cdot 3^8 - 2 \cdot (2 \cdot 3)^9}{2^{10} \cdot 3^8 + (2 \cdot 3)^8 \cdot 2^2 \cdot 5} = \frac{2^{10} \cdot 3^8 - 2^{10} \cdot 3^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 2^{10} \cdot 3^8 \cdot 5} = \frac{2^{10} \cdot 3^8 (1-3)}{2^{10} \cdot 3^8 (1+5)} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$$

Câu 18. (HSG 7 Hà Trung năm 2022-2023)

Tính giá trị của các biểu thức:

a) $A = \sqrt{11^2 - 72} - 1 \frac{1}{2} : \sqrt{\frac{25}{4}} - \left(\frac{20222}{2023}\right)^0$

b) $B = \frac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{8^4 \cdot 3^{12} - 6^{11}}$

Lời giải

a) $A = \sqrt{11^2 - 72} - 1 \frac{1}{2} : \sqrt{\frac{25}{4}} - \left(\frac{2022}{2023}\right)^0$
 $= \sqrt{121 - 72} - \frac{3}{2} : \frac{5}{2} - 1 = \sqrt{49} - \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5} - 1 = 7 - \frac{3}{5} - 1 = 6 - \frac{3}{5} = \frac{27}{5}$

b) $B = \frac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{8^4 \cdot 3^{12} - 6^{11}} = \frac{2^{12} \cdot 3^{10} + 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5}{2^{12} \cdot 3^{12} - 2^{11} \cdot 3^{11}} = \frac{2^{12} \cdot 3^{10} (1+5)}{2^{11} \cdot 3^{11} (2 \cdot 3 - 1)} = \frac{4}{5}$

Câu 19. (HSG 7 Tân Kỳ năm 2022-2023)

Thực hiện phép tính: $\frac{4^5 \cdot 9^4 + 2 \cdot 6^9}{2^{10} \cdot 3^8 - 6^8 \cdot 20}$

Lời giải

$$\frac{4^5 \cdot 9^4 + 2 \cdot 6^9}{2^{10} \cdot 3^8 - 6^8 \cdot 20} = \frac{2^{10} \cdot 3^8 + 2 \cdot 2^9 \cdot 3^9}{2^{10} \cdot 3^8 - 2^8 \cdot 3^8 \cdot 2^2 \cdot 5} = \frac{2^{10} \cdot 3^8 + 2^{10} \cdot 3^8 \cdot 3}{2^{10} \cdot 3^8 - 2^{10} \cdot 3^8 \cdot 5} = \frac{2^{10} \cdot 3^8 \cdot (1+3)}{2^{10} \cdot 3^8 \cdot (1-5)} = \frac{2^{10} \cdot 3^8 \cdot 4}{2^{10} \cdot 3^8 \cdot (-4)} = -1$$

Câu 20. (HSG 7 Ninh Bình năm 2022-2023)

Thực hiện phép tính sau: $A = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^7 \cdot 5^7 + \left(\frac{9}{4}\right)^3 : \left(\frac{3}{16}\right)^3}{2^7 \cdot 5^2 + 512}$

Lời giải

$$A = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^7 \cdot 5^7 + \left(\frac{9}{4}\right)^3 : \left(\frac{3}{16}\right)^3}{2^7 \cdot 5^2 + 512} = \frac{\frac{2^7}{5^7} \cdot 5^7 + \frac{3^6}{2^6} : \frac{3^3}{2^{12}}}{2^7 \cdot 5^2 + 2^9}$$

$$= \frac{2^7 + \frac{3^6}{2^6} \cdot \frac{2^{12}}{3^3}}{2^7 \cdot 5^2 + 2^9} = \frac{2^7 + 3^3 \cdot 2^6}{2^7 \cdot 5^2 + 2^9} = \frac{2^6 \cdot (2 + 3^3)}{2^7 \cdot (5^2 + 2^2)} = \frac{2 + 27}{2 \cdot (25 + 4)} = \frac{29}{2 \cdot 29} = \frac{1}{2}$$

Câu 21. (HSG 7 Quảng Ninh năm 2022-2023)

Thực hiện các phép tính: $A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{2^{12} \cdot 9^3 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{2^{12} \cdot 9^3 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3} \\
 &= \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 + 2^{12} \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 5^{10} \cdot 7^4}{5^9 \cdot 7^3 + 5^9 \cdot 2^3 \cdot 7^2} \\
 &= \frac{2^{12} \cdot 3^4 (3-1)}{2^{12} \cdot 3^5 (3+1)} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 (1-7)}{5^9 \cdot 7^2 (7+2^3)} = \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{5 \cdot 7 \cdot 6}{15} = \frac{1}{6} + 14 = 14 \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

Câu 22. (HSG 7 huyện Tương Dương 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức: $\frac{2 \cdot 8^4 + 4 \cdot 6^9}{2^7 \cdot 6^7 + 2^7 \cdot 40 \cdot 9^4}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \frac{2 \cdot 8^4 + 4 \cdot 6^9}{2^7 \cdot 6^7 + 2^7 \cdot 40 \cdot 9^4} &= \frac{2 \cdot (2^3)^4 + 2^2 \cdot 2^9 \cdot 3^9}{2^7 \cdot 2^7 \cdot 3^7 + 2^7 \cdot 2^3 \cdot 5 \cdot (3^2)^4} \\
 &= \frac{2 \cdot 2^{12} + 2^{11} \cdot 3^9}{2^{14} \cdot 3^7 + 2^{10} \cdot 5 \cdot 3^8} = \frac{2^{11} \cdot (2^2 + 3^9)}{2^{10} \cdot 3^7 \cdot (2^4 + 5 \cdot 3)} = \frac{2 \cdot (2^2 + 3^9)}{3^7 \cdot (2^4 + 15)} = \frac{2 \cdot (4 + 19683)}{2187 \cdot (16 + 15)} = \frac{39374}{67797}
 \end{aligned}$$

Câu 23. (HSG 7 TP Sầm Sơn, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính: $A = \frac{(-4)^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{8^4 \cdot 3^{12} - 6^{11}}$

Lời giải

$$A = \frac{(-4)^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{8^4 \cdot 3^{12} - 6^{11}} = \frac{(-4)^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{8^4 \cdot 3^{12} - 6^{11}} = \frac{2^{12} \cdot 3^{10} + 2^9 \cdot 3^9 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 5}{2^{12} \cdot 3^{12} - 2^{11} \cdot 3^{11}} = \frac{2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 6}{2^{11} \cdot 3^{11} \cdot 5} = \frac{4}{5}$$

Câu 24. (HSG 7 huyện Thanh Trì 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính: $A = \frac{1}{55^2} \cdot 5^4 \cdot (-11)^2 \cdot 55^5 \cdot \left(\frac{1}{5^2}\right)^2 : (5^3 \cdot 11^6)$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{55^2} \cdot 5^4 \cdot (-11)^2 \cdot 55^5 \cdot \left(\frac{1}{5^2}\right)^2 : (5^3 \cdot 11^6) \\
 &= \frac{1}{5^2 \cdot 11^2} \cdot 5^4 \cdot 11^2 \cdot 5^5 \cdot 11^5 \cdot \frac{1}{5^4} \cdot \frac{1}{5^3 \cdot 11^6} = \frac{1}{5^2 \cdot 11^2} \cdot 5^9 \cdot 11^7 \cdot \frac{1}{5^7 \cdot 11^6} = \frac{5^9 \cdot 11^7}{5^9 \cdot 11^8} = \frac{1}{11}
 \end{aligned}$$

Câu 25. (HSG 7 huyện Ninh Giang 2022 - 2023)

Rút gọn biểu thức: $A = \frac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{8^4 \cdot 3^{12} - 6^{11}}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{8^4 \cdot 3^{12} - 6^{11}} = \frac{2^{12} \cdot 3^{10} + (2 \cdot 3)^9 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 5}{2^{12} \cdot 3^{12} - (2 \cdot 3)^{11}} \\
 &= \frac{2^{12} \cdot 3^{10} + 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5}{2^{12} \cdot 3^{12} - 2^{11} \cdot 3^{11}} = \frac{2^{12} \cdot 3^{10} (1+5)}{2^{11} \cdot 3^{11} (2 \cdot 3 - 1)} = \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 5} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}
 \end{aligned}$$

Câu 26. (HSG 7 huyện Chương Mỹ 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức: $B = \sqrt{2\frac{14}{25}} - \sqrt{1,21} + \frac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{8^4 \cdot 3^{12} - 6^{11}}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{2\frac{14}{25}} - \sqrt{1,21} + \frac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{8^4 \cdot 3^{12} - 6^{11}} \\ &= \sqrt{\frac{49}{25}} - \sqrt{1,1^2} + \frac{(2^2)^6 \cdot (3^2)^5 + (2 \cdot 3)^9 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 5}{(2^3)^4 \cdot 3^{12} - (2 \cdot 3)^{11}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2} - 1,1 + \frac{2^{12} \cdot 3^{10} + 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5}{2^{12} \cdot 3^{12} - 2^{11} \cdot 3^{11}} \\ &= \frac{7}{5} - \frac{11}{10} + \frac{2^{12} \cdot 3^{10} (1+5)}{2^{11} \cdot 3^{11} \cdot (2 \cdot 3 - 1)} = \frac{3}{10} + \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 5} = \frac{3}{10} + \frac{4}{5} = \frac{11}{10} \end{aligned}$$

Câu 27. (HSG 7 huyện Lang Chánh 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức $C = \frac{2^{30} \cdot 5^7 + 2^{13} \cdot 5^{27}}{2^{10} \cdot 5^7 \cdot (2^{17} + 5^{20})}$

Lời giải

$$C = \frac{2^{30} \cdot 5^7 + 2^{13} \cdot 5^{27}}{2^{10} \cdot 5^7 \cdot (2^{17} + 5^{20})} = \frac{2^{13} \cdot 5^7 \cdot (2^{17} + 5^{20})}{2^{10} \cdot 5^7 \cdot (2^{17} + 5^{20})} = \frac{2^{13} \cdot 5^7}{2^{10} \cdot 5^7} = 2^3 = 8$$

Câu 28. (HSG 7 TP Bắc Giang 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức: $M = \frac{3^{12} \cdot 5^7 + 9^6 \cdot 25^3}{27^5 \cdot 25^3 + (3^2 \cdot 5)^6}$.

Lời giải

$$M = \frac{3^{12} \cdot 5^7 + 9^6 \cdot 25^3}{27^5 \cdot 25^3 + (3^2 \cdot 5)^6} = \frac{3^{12} \cdot 5^7 + 3^{12} \cdot 5^6}{3^{15} \cdot 5^6 + 3^{12} \cdot 5^6} = \frac{3^{12} \cdot 5^6 \cdot (5+1)}{3^{12} \cdot 5^6 \cdot (3^3 + 1)} = \frac{3^{12} \cdot 5^6 \cdot 6}{3^{12} \cdot 5^6 \cdot 28} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$$

Câu 29. (HSG 7 huyện Quê Võ 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính: $\left[\frac{4}{11} \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^0 + \frac{7}{22} \cdot 2 \right]^{2013} - \left(\frac{1}{2^2} : \frac{8^2}{4^4} \right)^{2014}$

Lời giải

$$\begin{aligned} &\left[\frac{4}{11} \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^0 + \frac{7}{22} \cdot 2 \right]^{2013} - \left(\frac{1}{2^2} : \frac{8^2}{4^4} \right)^{2014} = \left[\frac{4}{11} \cdot 1 + \frac{7}{11} \right]^{2013} - \left(\frac{1}{2^2} : \frac{8^2}{16^2} \right)^{2014} \\ &= \left(\frac{11}{11} \right)^{2013} - \left(\frac{1}{2^2} : \frac{1}{2^2} \right)^{2014} = 1^{2013} - 1^{2014} = 0 \end{aligned}$$

Câu 30. (HSG 7 TP Chí Linh 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính: $\frac{8^5 \cdot 25^7}{125^5 \cdot 4^7}$

Lời giải

$$\frac{8^5 \cdot 25^7}{125^5 \cdot 4^7} = \frac{(2^3)^5 \cdot (5^2)^7}{(5^3)^5 \cdot (2^2)^7} = \frac{2^{15} \cdot 5^{14}}{5^{15} \cdot 2^{14}} = \frac{2}{5}$$

Câu 31. (HSG 7 huyện Nghĩa Đàn, tỉnh Nghệ An 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức: $A = 4 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 + 25 \cdot \left[\left(\frac{3}{4}\right)^2 : \left(\frac{5}{4}\right)^3\right] : \left(\frac{3}{2}\right)^2$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= 4 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 + 25 \cdot \left[\left(\frac{3}{4}\right)^2 : \left(\frac{5}{4}\right)^3\right] : \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &= 4 \cdot \frac{25}{16} + 25 \cdot \left[\frac{9}{16} : \frac{125}{64}\right] : \frac{9}{4} = \frac{25}{4} + 25 \cdot \left[\frac{9}{16} \cdot \frac{64}{125}\right] \cdot \frac{4}{9} \\ &= \frac{25}{4} + 25 \cdot \frac{9 \cdot 4}{125 \cdot 9} = \frac{25}{4} + \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{1} = \frac{25}{4} + \frac{16}{5} = \frac{189}{20} \end{aligned}$$

Câu 32. (HSG 7 huyện Nghi Xuân 2022 - 2023)

Tính $A = \frac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{-8^4 \cdot 3^{12} + 6^{11}}$

Lời giải

$$A = \frac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{-8^4 \cdot 3^{12} + 6^{11}} = \frac{2^{12} \cdot 3^{10} + 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5}{-2^{12} \cdot 3^{12} + 2^{11} \cdot 3^{11}} = \frac{2^{13} \cdot 3^{11}}{2^{11} \cdot 3^{11} \cdot (-5)} = \frac{-4}{5}$$

Câu 33. (HSG 7 huyện Quốc Oai 2022 - 2023)

Tính giá trị của các biểu thức: $A = \left(\frac{2}{3} - 0,75\right) : \sqrt{\frac{1}{16}} + \left[\frac{-2}{15} : \left(\frac{-2}{5}\right)^2\right] \cdot \sqrt{\frac{64}{25}} + 6 \cdot \sqrt{\frac{25}{144}}$

Lời giải

$$A = \left(\frac{2}{3} - 0,75\right) : \sqrt{\frac{1}{16}} + \left[\frac{-2}{15} : \left(\frac{-2}{5}\right)^2\right] \cdot \sqrt{\frac{64}{25}} + 6 \cdot \sqrt{\frac{25}{144}}$$

$$A = \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right) : \frac{1}{4} + \left[\frac{-2}{15} \cdot \frac{25}{4}\right] \cdot \frac{8}{5} + 6 \cdot \frac{5}{12}$$

$$A = \frac{-1}{12} \cdot 4 + \frac{-4}{3} + \frac{5}{2} = \frac{-1}{3} + \frac{-4}{3} + \frac{5}{2} = \frac{5}{6}$$

Câu 34. (HSG 7 huyện Mường Lát 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính:

a) $B = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^7 \cdot 5^7 + \left(\frac{9}{4}\right)^3 : \left(\frac{3}{16}\right)^3}{2^7 \cdot 5^2 + 512}$

b) $C = \left| \frac{7}{9} - \frac{\frac{1}{3} - \frac{2}{5} - \frac{3}{7}}{\frac{9}{3} - \frac{18}{5} - \frac{27}{7}} \right| - \left| \frac{8}{9} - \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 \right|$

Lời giải

$$a) B = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^7 \cdot 5^7 + \left(\frac{9}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{16}\right)^3}{2^7 \cdot 5^2 + 512}$$

$$B = \frac{\left(\frac{2}{5} \cdot 5\right)^7 + \left(\frac{9}{4} \cdot \frac{3}{16}\right)^3}{2^7 \cdot 5^2 + 2^9}$$

$$B = \frac{2^7 + 12^3}{2^7 \cdot (5^2 + 2^2)} = \frac{2^7 + (2^2 \cdot 3)^3}{2^7 \cdot (25 + 4)} = \frac{2^7 + 2^6 \cdot 3^3}{2^7 \cdot 29} = \frac{2^6 (2 + 3^3)}{2^7 \cdot 29} = \frac{2^6 \cdot 29}{2^7 \cdot 29} = \frac{1}{2}$$

$$b) C = \left| \frac{7}{9} - \frac{\frac{1}{3} - \frac{2}{5} - \frac{3}{7}}{\frac{3}{5} - \frac{2}{7}} \right| - \left| \frac{8}{9} - \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 \right|$$

$$C = \left| \frac{7}{9} - \frac{\frac{1}{3} - \frac{2}{5} - \frac{3}{7}}{\frac{3}{5} - \frac{2}{7}} \right| - \left| \frac{8}{9} - \frac{2}{9} \right| = \left| \frac{7}{9} - \frac{1}{9} \right| - \left| \frac{6}{9} \right| = \left| \frac{6}{9} \right| - \left| \frac{6}{9} \right| = 0$$

Câu 35. (HSG 7 huyện Tiên Hải 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính: $B = \frac{6^8 \cdot 2^4 - 4^5 \cdot 18^4}{27^3 \cdot 8^4 - 3^9 \cdot 2^{13}}$

Lời giải

$$B = \frac{6^8 \cdot 2^4 - 4^5 \cdot 18^4}{27^3 \cdot 8^4 - 3^9 \cdot 2^{13}} = \frac{(2 \cdot 3)^8 \cdot 2^4 - (2^2)^5 \cdot (2 \cdot 3^2)^4}{(3^3)^3 \cdot (2^3)^4 - 3^9 \cdot 2^{13}} = \frac{2^8 \cdot 3^8 \cdot 2^4 - 2^{10} \cdot 2^4 \cdot 3^8}{3^9 \cdot 2^{12} - 3^9 \cdot 2^{13}}$$

$$= \frac{2^{12} \cdot 3^8 - 2^{14} \cdot 3^8}{3^9 \cdot 2^{12} - 3^9 \cdot 2^{13}} = \frac{2^{12} \cdot 3^8 (1 - 2^2)}{3^9 \cdot 2^{12} (1 - 2)} = \frac{2^{12} \cdot 3^8 \cdot (-3)}{3^9 \cdot 2^{12} \cdot (-1)} = \frac{2^{12} \cdot 3^8 \cdot 3}{3^9 \cdot 2^{12} \cdot 1} = \frac{2^{12} \cdot 3^9}{3^9 \cdot 2^{12}} = 1$$

Câu 36. (HSG 7 huyện Điện Bàn 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức sau $A = 3\sqrt{(-5)^2} - 0,5 \cdot 0, (3)\sqrt{9} + \left| \frac{-2^2}{3} \right| : \left(-1\frac{1}{3} \right)$.

Lời giải

$$A = 3\sqrt{(-5)^2} - 0,5 \cdot 0, (3)\sqrt{9} + \left| \frac{-2^2}{3} \right| : \left(-1\frac{1}{3} \right)$$

$$A = 3 \cdot 5 - 0,5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{4}{3} : \left(-\frac{4}{3} \right) = 15 - 0,5 - 1 = 13,5$$

Câu 37. (HSG 7 TP Bắc Ninh 2022 - 2023)

Rút gọn biểu thức $A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 81}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5}$

Lời giải

$$\text{Ta có } A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 81}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 + 2^{12} \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^4 \cdot (3-1)}{2^{12} \cdot 3^5 \cdot (3+1)} = \frac{2}{3 \cdot 4} = \frac{1}{6}.$$

Câu 38. (HSG 7 huyện Quảng Xương 2022 - 2023)

Tính giá trị các biểu thức sau: $C = \sqrt{25} + (2^2 \cdot 3)^2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 2023^0 + \left|-\frac{1}{4}\right|$

Lời giải

$$C = \sqrt{25} + (2^2 \cdot 3)^2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 2023^0 + \left|-\frac{1}{4}\right|$$

$$C = 5 + 2^4 \cdot 3^2 \cdot \left(-\frac{1}{2^2}\right) + 1 + \frac{1}{4} = 5 - 36 + 1 + \frac{1}{4} = -\frac{119}{4}$$

Câu 39. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính sau: $\left[9 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 6 \cdot \frac{1}{3}\right] : \left(-\frac{1}{3} - 1\right)$

Lời giải

$$\left[9 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 6 \cdot \frac{1}{3}\right] : \left(-\frac{1}{3} - 1\right)$$

$$= \left[9 \cdot \left(-\frac{1}{27}\right) - 6 \cdot \frac{1}{9} + \frac{19}{3}\right] : \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{3}\right)$$

$$= \left[-\frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{19}{3}\right] : \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -4$$

Câu 40. (HSG 7 Thị xã Hoàng Mai 2022 - 2023)

Tính: $(-8)^2 : \left\{25 - 18 : \left[(5^2 + 2^3) : 11 - 2023^0\right]\right\}$.

Lời giải

$$(-8)^2 : \left\{25 - 18 : \left[(5^2 + 2^3) : 11 - 2023^0\right]\right\}$$

$$= 64 : \{25 - 18 : [33 : 11 - 1]\}$$

$$= 64 : \{25 - 18 : 2\} = 64 : 16 = 4.$$

Câu 41. (HSG 7 TX Hương Trà; huyện Mỹ Đức; huyện Sóc Sơn; huyện Hưng Hà; huyện Bình Long 2022 - 2023)

Tính: $A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3}$

Lời giải

$$A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3}$$

$$A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 + 2^{12} \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 5^{10} \cdot 7^4}{5^9 \cdot 7^3 + 5^9 \cdot 2^3 \cdot 7^3}$$

$$A = \frac{2^{12} \cdot 3^4 (3-1)}{2^{12} \cdot 3^5 (3+1)} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 (1-7)}{5^9 \cdot 7^3 (1+2^3)} = \frac{1}{6} + \frac{10}{3} = \frac{7}{2}$$

Câu 42. (HSG 7 huyện Việt Yên 2022 - 2023)

Rút gọn biểu thức: $B = \frac{2 \cdot 8^4 \cdot 27^2 + 4 \cdot 6^9}{2^7 \cdot 6^7 + 2^7 \cdot 40 \cdot 9^4}$

Lời giải

$$B = \frac{2 \cdot 8^4 \cdot 27^2 + 4 \cdot 6^9}{2^7 \cdot 6^7 + 2^7 \cdot 40 \cdot 9^4} = \frac{2 \cdot (2^3)^4 \cdot (3^3)^2 + 2^2 \cdot 2^9 \cdot 3^9}{2^7 \cdot 2^7 \cdot 3^7 + 2^7 \cdot 2^3 \cdot 5 \cdot (3^2)^4}$$

$$= \frac{2^{13} \cdot 3^6 + 2^{11} \cdot 3^9}{2^{14} \cdot 3^7 + 2^{10} \cdot 3^8 \cdot 5} = \frac{2^{11} \cdot 3^6 \cdot (2^2 + 3^3)}{2^{10} \cdot 3^7 \cdot (2^4 + 3 \cdot 5)} = \frac{2}{3}$$

Câu 43. (HSG 7 huyện Cẩm Khê 2022 - 2023)

Rút gọn biểu thức: $A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3}$

Lời giải

$$A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3}$$

$$A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 5^{10} \cdot 7^4}{5^9 \cdot 7^3 + 5^9 \cdot 7^3 \cdot 2^3}$$

$$A = \frac{2^{12} \cdot 3^4 (3-1)}{2^{12} \cdot 3^6} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 (1-7)}{5^9 \cdot 7^3 \cdot (1+2^3)}$$

$$A = \frac{2^{12} \cdot 3^4 \cdot 2}{2^{12} \cdot 3^6} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 \cdot (-6)}{5^9 \cdot 7^3 \cdot 9} = \frac{2}{3^2} - \frac{5 \cdot (-6)}{9} = \frac{32}{9}$$

Câu 44. (HSG 7 trường Tri Thức – Đồng Nai 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính một cách hợp lí: $\frac{2^{23} \cdot 9^{13} - 4^{10} \cdot 3^{27}}{5 \cdot 2^{20} \cdot 27^8}$

Lời giải

$$\frac{2^{23} \cdot 9^{13} - 4^{10} \cdot 3^{27}}{5 \cdot 2^{20} \cdot 27^8} = \frac{2^{23} \cdot 3^{26} - 2^{20} \cdot 3^{27}}{5 \cdot 2^{20} \cdot 3^{24}} = \frac{2^{20} \cdot 3^{26} (2^3 - 3)}{5 \cdot 2^{20} \cdot 3^{24}} = \frac{2^{20} \cdot 3^{26} \cdot 5}{5 \cdot 2^{20} \cdot 3^{24}} = 3^2 = 9$$

Câu 45. (HSG 7 huyện Thường Xuân 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức: $M = \left[\frac{4}{11} \cdot \left(\frac{1}{25} \right)^0 + \frac{7}{22} \cdot 2 \right]^{2022} - \left(\frac{1}{2^2} \cdot \frac{8^2}{4^2} \right)^{2023}$

Lời giải

$$M = \left[\frac{4}{11} \cdot \left(\frac{1}{25} \right)^0 + \frac{7}{22} \cdot 2 \right]^{2022} - \left(\frac{1}{2^2} \cdot \frac{8^2}{4^2} \right)^{2023} = \left(\frac{4}{11} + \frac{7}{11} \right)^{2022} - \left(\frac{1}{2^2} \cdot \frac{2^6}{2^4} \right)^{2023} = 1 - 1 = 0$$

Câu 46. (HSG 7 huyện Yên Bình – Yên Bái 2022 - 2023)

Tính giá trị các biểu thức: $A = \frac{4^5 \cdot 9^4 - 2 \cdot 6^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 6^8 \cdot 20}$

Lời giải

Ta có: $A = \frac{4^5 \cdot 9^4 - 2 \cdot 6^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 6^8 \cdot 20} = \frac{2^{10} \cdot 3^8 - 2^{10} \cdot 3^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 2^{10} \cdot 3^8 \cdot 5} = \frac{2^{10} \cdot 3^8 (1-3)}{2^{10} \cdot 3^8 (1+5)} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$

Câu 47. (HSG 7 thị trấn Cành Nàng – huyện Bá Thước – Thanh Hóa 2022 - 2023)

Tính giá trị các biểu thức sau: $A = 3 \cdot \left(\frac{-2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{-2}{3}\right) + 4 \cdot \left(\frac{-2}{3}\right)^0$

Lời giải

$$A = 3 \cdot \left(\frac{-2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{-2}{3}\right) + 4 \cdot \left(\frac{-2}{3}\right)^0 = 3 \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{3} + 4 \cdot 1 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + 4 = 6\frac{2}{3}$$

Câu 48. (HSG 7 huyện Tân Yên 2022 - 2023)

Rút gọn: $A = \left(2 \left| \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \right| + \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{2^2 \cdot 10 + 2^3 \cdot 6}{2^2 \cdot 15 - 2^4}}\right) \cdot \left(0 \cdot (3) - \frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right)^{2022}$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \left(2 \left| \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \right| + \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{2^2 \cdot 10 + 2^3 \cdot 6}{2^2 \cdot 15 - 2^4}}\right) \cdot \left(0 \cdot (3) - \frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right)^{2022} \\ &= \left(2 \left| -\frac{1}{4} \right| + \frac{2}{3} + \frac{2^3 \cdot (5+6)}{2^2 \cdot (15-4)}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right)^{2022} \\ &= \left(2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + 2\right) \cdot (0)^{2022} = 0 \end{aligned}$$

Vậy $A = 0$.

Câu 49. (HSG 7 trường THCS Lê Quý Đôn – Hà Đông 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính: $A = \frac{2^{19} \cdot 27^3 \cdot 5 - 15 \cdot (-4)^9 \cdot 9^4}{6^9 \cdot 2^{10} - (-12)^{10}}$

Lời giải

$$A = \frac{2^{19} \cdot 27^3 \cdot 5 - 15 \cdot (-4)^9 \cdot 9^4}{6^9 \cdot 2^{10} - (-12)^{10}} = \frac{2^{19} \cdot 3^9 \cdot 5 + 5 \cdot 2^{18} \cdot 3^9}{2^{19} \cdot 3^9 - 2^{20} \cdot 3^{10}}$$

$$A = \frac{2^{18} \cdot 3^9 \cdot 5(2+1)}{2^{19} \cdot 3^9 (1-2 \cdot 3)} = \frac{2^{18} \cdot 3^{10} \cdot 5}{2^{19} \cdot 3^9 \cdot (-5)} = \frac{-3}{2}$$

Vậy $A = \frac{-3}{2}$

Câu 50. (HSG 7 huyện Tiên Du – Bắc Ninh 2022 - 2023)

Tính giá trị các biểu thức sau: $C = \frac{(-2)^5 \cdot 6^4 + 9^2 \cdot 8^4}{(-12)^4}$

Lời giải

$$C = \frac{(-2)^5 \cdot 6^4 + 9^2 \cdot 8^4}{(-12)^4} = \frac{-2^5 \cdot (2 \cdot 3)^4 + (3^2)^2 \cdot (2^3)^4}{(-2^2 \cdot 3)^4}$$

$$= \frac{-2^5 \cdot 2^4 \cdot 3^4 + 3^4 \cdot 2^{12}}{2^8 \cdot 3^4} = \frac{-2^9 \cdot 3^4 + 3^4 \cdot 2^{12}}{2^8 \cdot 3^4} = \frac{2^9 \cdot 3^4 (-1 + 2^3)}{2^8 \cdot 3^4} = \frac{2^9 \cdot 3^4 \cdot 7}{2^8 \cdot 3^4} = 14$$

Vậy $C = 14$.

Câu 51. (HSG 7 huyện Sông Lô – Vĩnh Phúc 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức: $B = \frac{3^{12} \cdot 5^7 + 9^6 \cdot 25^3}{27^5 \cdot 25^3 + (3^2 \cdot 5)^6} + \frac{\frac{2}{7} - 0,4 - \frac{2}{9}}{2 - \frac{14}{5} - \frac{14}{9}}$

Lời giải

$$B = \frac{3^{12} \cdot 5^7 + 9^6 \cdot 25^3}{27^5 \cdot 25^3 + (3^2 \cdot 5)^6} + \frac{\frac{2}{7} - 0,4 - \frac{2}{9}}{2 - \frac{14}{5} - \frac{14}{9}} = \frac{3^{12} \cdot 5^7 + 3^{12} \cdot 5^6}{3^{15} \cdot 5^6 + 3^{12} \cdot 5^6} + \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right)}{14 \cdot \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right)}$$

$$= \frac{3^{12} \cdot 5^6 (5+1)}{3^{12} \cdot 5^6 (3^3 + 1)} + \frac{2}{14} = \frac{6}{28} + \frac{2}{14} = \frac{3}{14} + \frac{2}{14} = \frac{5}{14}$$

Câu 52. (HSG 7 trường Kỳ Đồng – huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính và viết kết quả dưới dạng một phân số:

$$A = \frac{49^5 \cdot 8^{10}}{14^7 \cdot 49 \cdot 4^{13}} - \frac{\frac{7}{10} - \frac{7}{12} + \frac{7}{5}}{0,8 - \frac{8}{12} + \frac{8}{5}} + 1,2(3)$$

Lời giải

$$A = \frac{49^5 \cdot 8^{10}}{14^7 \cdot 49 \cdot 4^{13}} - \frac{\frac{7}{10} - \frac{7}{12} + \frac{7}{5}}{0,8 - \frac{8}{12} + \frac{8}{5}} + 1,2(3)$$

$$= \frac{(7^2)^5 \cdot (2^3)^{10}}{(2 \cdot 7)^7 \cdot 7^2 \cdot (2^2)^{13}} - \frac{7 \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{5}\right)}{8 \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{5}\right)} + \frac{12(3)}{10}$$

$$= \frac{7^{10} \cdot 2^{30}}{2^7 \cdot 7^7 \cdot 7^2 \cdot 2^{26}} - \frac{7}{8} + \frac{12+0(3)}{10}$$

$$= \frac{7}{2^3} - \frac{7}{8} + \frac{12+3 \cdot \frac{1}{9}}{10} = \frac{7}{8} - \frac{7}{8} + \frac{12+\frac{1}{3}}{10} = 0 + \frac{37}{30} = \frac{37}{30}$$

Câu 53. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính: $A = \frac{6^{11} - 3^{12} \cdot 8^4}{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}$

Lời giải

$$A = \frac{6^{11} - 3^{12} \cdot 8^4}{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120} = \frac{(2 \cdot 3)^{11} - 3^{12} \cdot (2^3)^4}{(2^2)^6 \cdot (3^2)^5 + (2 \cdot 3)^9 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 5}$$

$$= \frac{2^{11} \cdot 3^{11} - 3^{12} \cdot 2^{12}}{2^{12} \cdot 3^{10} + 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5} = \frac{2^{11} \cdot 3^{11} \cdot (1 - 3 \cdot 2)}{2^{12} \cdot 3^{10} \cdot (1 + 5)} = \frac{3 \cdot (-5)}{2 \cdot 6} = \frac{-5}{4}$$

Vậy $A = \frac{-5}{4}$.

Câu 54. (HSG 7 đề minh họa huyện Hưng Hà, trường Lê Quý Đôn 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính: $E = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^4 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3}$

Lời giải

$$E = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^4 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3}$$

$$E = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 + 2^{12} \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 5^8 \cdot 7^4}{5^9 \cdot 7^3 + 5^9 \cdot 2^3 \cdot 7^3}$$

$$E = \frac{2^{12} \cdot 3^4 \cdot (3 - 1)}{2^{12} \cdot 3^5 \cdot (3 + 1)} - \frac{5^8 \cdot 7^3 \cdot (5^2 - 7)}{5^9 \cdot 7^3 \cdot (1 + 2^3)}$$

$$E = \frac{2^{12} \cdot 3^4 \cdot 2}{2^{12} \cdot 3^5 \cdot 4} - \frac{5^8 \cdot 7^3 \cdot (25 - 7)}{5^9 \cdot 7^3 \cdot 9} = \frac{1}{6} - \frac{18}{5 \cdot 9} = \frac{1}{6} - \frac{2}{5} = -\frac{7}{30}$$

Vậy $E = -\frac{7}{30}$

Câu 55. (HSG 7 trường Thái Hưng; trường Bắc Sơn, huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Tính: $A = \left[\frac{4}{11} \cdot 2018^0 + \frac{7}{22} \cdot 2 \right]^{2022} - \left(\frac{1}{2^2} : \frac{8^2}{4^4} \right)^{2023}$

Lời giải

$$A = \left[\frac{4}{11} \cdot 2018^0 + \frac{7}{22} \cdot 2 \right]^{2022} - \left(\frac{1}{2^2} : \frac{8^2}{4^4} \right)^{2023}$$

$$= \left(\frac{4}{11} \cdot 1 + \frac{7}{11} \right)^{2022} - \left(\frac{1}{2^2} \cdot \frac{2^8}{2^6} \right)^{2023}$$

$$= \left(\frac{4}{11} + \frac{7}{11} \right)^{2022} - \left(\frac{1}{2^2} \cdot 2^2 \right)^{2023} = \left(\frac{11}{11} \right)^{2022} - 1^{2023} = 1 - 1 = 0$$

Vậy $A = 0$.

Câu 56. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường Nguyễn Tông Quai 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính: $A = \frac{9 \cdot 6^9 \cdot 120 - 4^6 \cdot 9^6}{8^4 \cdot 3^{13} - 6^{12}}$

Lời giải

$$A = \frac{9 \cdot 6^9 \cdot 120 - 4^6 \cdot 9^6}{8^4 \cdot 3^{12} - 6^{12}} = \frac{3^2 \cdot 2^9 \cdot 3^9 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 5 - 2^{12} \cdot 3^{12}}{2^{12} \cdot 3^{13} - 2^{12} \cdot 3^{12}} = \frac{3^{12} \cdot 2^{12} \cdot 5 - 2^{12} \cdot 3^{12}}{2^{12} \cdot 3^{12} (3-1)} = \frac{3^{12} \cdot 2^{12} (5-1)}{2^{12} \cdot 3^{12} \cdot 2} = 2$$

Câu 57. (Đề khảo sát HSG 7 lần 3 năm 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức sau: $A = \frac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{8^4 \cdot 3^{12} - 6^{11}}$

Lời giải

$$A = \frac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{8^4 \cdot 3^{12} - 6^{11}} = \frac{2^{12} \cdot 3^{10} + 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5}{2^{12} \cdot 3^{12} - 2^{11} \cdot 3^{11}} = \frac{2^{12} \cdot 3^{10} \cdot (1+5)}{2^{11} \cdot 3^{11} \cdot (2 \cdot 3 - 1)} = \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 5} = \frac{4}{5}$$

Câu 58. (Đề thi thử HSG 7 huyện Thanh Miện 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức: $A = \frac{4^{12} \cdot 9^{10} - 8^8 \cdot 27^6}{2^{24} \cdot 81^5 + 6^6 \cdot 4^9 \cdot 9^7}$

Lời giải

$$A = \frac{4^{12} \cdot 9^{10} - 8^8 \cdot 27^6}{2^{24} \cdot 81^5 + 6^6 \cdot 4^9 \cdot 9^7} = \frac{2^{24} \cdot 3^{20} - 2^{24} \cdot 3^{18}}{2^{24} \cdot 3^{20} + 2^6 \cdot 3^6 \cdot 2^{18} \cdot 3^{14}} = \frac{2^{24} \cdot 3^{18} (3^2 - 1)}{2^{24} \cdot 3^{20} (1+1)} = \frac{2^{24} \cdot 3^{18} (3^2 - 1)}{2^{24} \cdot 3^{20} (1+1)} = \frac{8}{3^2 \cdot 2} = \frac{4}{9}$$

Câu 59. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường Bùi Hữu Diên 2022 - 2023)

Tính $A = \frac{5 \cdot 4^{15} \cdot 9^9 - 4 \cdot 3^{20} \cdot 8^9}{5 \cdot 2^9 \cdot 6^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 27^6}$

Lời giải

$$A = \frac{5 \cdot 4^{15} \cdot 9^9 - 4 \cdot 3^{20} \cdot 8^9}{5 \cdot 2^9 \cdot 6^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 27^6} = \frac{5 \cdot 2^{30} \cdot 3^{18} - 2^2 \cdot 3^{20} \cdot 2^{27}}{5 \cdot 2^9 \cdot 2^{19} \cdot 3^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 3^{18}} = \frac{5 \cdot 2^{30} \cdot 3^{18} - 2^{29} \cdot 3^{20}}{5 \cdot 2^{28} \cdot 3^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 3^{18}} = \frac{2^{29} \cdot 3^{18} (5 \cdot 2 - 3^2)}{2^{28} \cdot 3^{18} \cdot (5 \cdot 3 - 7 \cdot 2)} = 2$$

Câu 60. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Vũ Thị Thục 2022 - 2023)

Tính: $A = \frac{30 \cdot 4^7 \cdot 3^{29} - 5 \cdot 14^5 \cdot 2^{12}}{54 \cdot 6^{14} \cdot 9^7 - 12 \cdot 8^5 \cdot 7^5} - 0,2(3)$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{30 \cdot 4^7 \cdot 3^{29} - 5 \cdot 14^5 \cdot 2^{12}}{54 \cdot 6^{14} \cdot 9^7 - 12 \cdot 8^5 \cdot 7^5} - 0,2(3) \\ &= \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^{14} \cdot 3^{29} - 5 \cdot 2^5 \cdot 7^5 \cdot 2^{12}}{2 \cdot 3^3 \cdot 2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 3^{14} - 2^2 \cdot 3 \cdot 2^{15} \cdot 7^5} - \frac{1}{10} \cdot 2, (3) \\ &= \frac{2^{15} \cdot 3^{30} \cdot 5 - 5 \cdot 2^{17} \cdot 7^5}{2^{15} \cdot 3^{31} - 2^{17} \cdot 3 \cdot 7^5} - \frac{1}{10} [2 + 0, (3)] \\ &= \frac{2^{15} \cdot 5 (3^{30} - 2^2 \cdot 7^5)}{2^{15} \cdot 3 (3^{30} - 2^2 \cdot 7^5)} - \frac{1}{10} [2 + 3 \cdot 0, (1)] \\ &= \frac{5}{3} - \frac{1}{10} \left[2 + 3 \cdot \frac{1}{9} \right] = \frac{5}{3} - \frac{1}{10} \cdot \frac{7}{3} = \frac{5}{3} - \frac{7}{30} = \frac{43}{30} \end{aligned}$$

Câu 61. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường Lê Tư Thành 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính: $A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5}$

Lời giải

$$A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 + 2^{12} \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^4 (3-1)}{2^{12} \cdot 3^5 (3+1)} = \frac{2}{3 \cdot 4} = \frac{1}{6}$$

Câu 62. (HSG 7 huyện Tam Điệp, tỉnh Ninh Bình, trường 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính: $A = \frac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{8^4 \cdot 3^{12} + 6^{11}}$

Lời giải

$$A = \frac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{8^4 \cdot 3^{12} + 6^{11}} = \frac{2^{12} \cdot 3^{10} + 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5}{2^{12} \cdot 3^{12} + 2^{11} \cdot 3^{11}} = \frac{2^{12} \cdot 3^{10} (1+5)}{2^{11} \cdot 3^{11} (6+1)} = \frac{2^{13} \cdot 3^{11}}{2^{11} \cdot 3^{11} \cdot 7} = \frac{2^2}{7} = \frac{4}{7}$$

Câu 63. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính: $A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} + 0, (3)$

Lời giải

$$A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} + 0, (3) = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 + 2^{12} \cdot 3^5} + \frac{3}{9}$$

$$= \frac{2^{12} \cdot 3^4 \cdot (3-1)}{2^{12} \cdot 3^5 \cdot (3+1)} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

Câu 64. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính:

a) $\sqrt{1 + \frac{9}{16}} : \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)^2 + \sqrt{1 - \frac{80}{81}} : \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)^2$

b) $\frac{25^5 \cdot 7^3 - 5^{10} \cdot 49^2}{125^3 \cdot 7^3 + 5^9 \cdot 14^3}$

Lời giải

a) $\sqrt{1 + \frac{9}{16}} : \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)^2 + \sqrt{1 - \frac{80}{81}} : \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)^2$

$$= \sqrt{\frac{16+9}{16}} : \left(\frac{3}{12} - \frac{4}{12}\right)^2 + \sqrt{\frac{81-80}{81}} : \left(\frac{2}{6} - \frac{3}{6}\right)^2$$

$$= \sqrt{\frac{25}{16}} : \left(-\frac{1}{12}\right)^2 + \sqrt{\frac{1}{81}} : \left(-\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{5}{4} : \frac{1}{144} + \frac{1}{9} : \frac{1}{36} = \frac{5}{4} \cdot 144 + \frac{1}{9} \cdot 36 = 180 + 4 = 184$$

b) $\frac{25^5 \cdot 7^3 - 5^{10} \cdot 49^2}{125^3 \cdot 7^3 + 5^9 \cdot 14^3} = \frac{(5^2)^5 \cdot 7^3 - 5^{10} \cdot (7^2)^2}{(5^3)^3 \cdot 7^3 + 5^9 \cdot (2 \cdot 7)^3}$

$$= \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 5^{10} \cdot 7^4}{5^9 \cdot 7^3 + 5^9 \cdot 2^3 \cdot 7^3} = \frac{5^{10} \cdot 7^3 (1-7)}{5^9 \cdot 7^3 (1+2^3)} = \frac{5 \cdot (-6)}{1+8} = \frac{-30}{9} = -\frac{10}{3}$$

Câu 65. (HSG 7 huyện Ý Yên, tỉnh Nam Định, 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính: $B = \frac{4^4 \cdot 9^4 - 2^{10} \cdot 3^9}{2^{10} \cdot 3^8 + (-6)^8 \cdot 20} - \frac{3^{15} \cdot 2^{22} + 6^{16} \cdot 4^3}{2 \cdot 9^8 \cdot 8^7 - 7 \cdot 27^5 \cdot 2^{22}}$

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \frac{4^4 \cdot 9^4 - 2^{10} \cdot 3^9}{2^{10} \cdot 3^8 + (-6)^8 \cdot 20} - \frac{3^{15} \cdot 2^{22} + 6^{16} \cdot 4^3}{2 \cdot 9^8 \cdot 8^7 - 7 \cdot 27^5 \cdot 2^{22}} \\ &= \frac{(2^2)^4 \cdot (3^2)^4 - 2^{10} \cdot 3^9}{2^{10} \cdot 3^8 + (-2 \cdot 3)^8 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{3^{15} \cdot 2^{22} + (2 \cdot 3)^{16} \cdot (2^2)^3}{2 \cdot (3^2)^8 \cdot (2^3)^7 - 7 \cdot (3^3)^5 \cdot 2^{22}} \\ &= \frac{2^8 \cdot 3^8 - 2^{10} \cdot 3^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 2^8 \cdot 3^8 \cdot 2^2 \cdot 5} - \frac{3^{15} \cdot 2^{22} + 2^{16} \cdot 3^{16} \cdot 2^6}{2 \cdot 3^{16} \cdot 2^{21} - 7 \cdot 3^{15} \cdot 2^{22}} \\ &= \frac{2^8 \cdot 3^8 (1 - 2^2 \cdot 3)}{2^{10} \cdot 3^8 (1 + 5)} - \frac{3^{15} \cdot 2^{22} (1 + 3)}{3^{15} \cdot 2^{22} (3 - 7)} \\ &= \frac{-11}{2^2 \cdot 6} - \frac{4}{-4} = \frac{-11}{24} + 1 = \frac{13}{24} \end{aligned}$$

Câu 66. (HSG 7 huyện Bình Lục 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức: $B = \frac{4^6 \cdot 9^5 - 6^9 \cdot 240}{-8^4 \cdot 3^{13} + 2 \cdot 6^{11}}$

Lời giải

$$B = \frac{4^6 \cdot 9^5 - 6^9 \cdot 240}{-8^4 \cdot 3^{13} + 2 \cdot 6^{11}} = \frac{2^{12} \cdot 3^{10} - 2^{13} \cdot 3^{10} \cdot 5}{-2^{12} \cdot 3^{13} + 2^{12} \cdot 3^{11}} = \frac{2^{12} \cdot 3^{10} (1 - 2 \cdot 5)}{2^{12} \cdot 3^{11} (-3^2 + 1)} = \frac{-9}{3 \cdot (-8)} = \frac{3}{8}$$

Câu 67. (HSG 7 huyện Tam Dương 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 81}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5}$

Lời giải

$$A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 81}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 + 2^{12} \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^4 (3 - 1)}{2^{12} \cdot 3^5 (3 + 1)} = \frac{2^{12} \cdot 3^4 \cdot 2}{2^{12} \cdot 3^5 \cdot 4} = \frac{1}{6}$$

Câu 68. (HSG 7 huyện Trực Ninh, tỉnh Nam Định, 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức: $A = \frac{7 \cdot 14^{10} \cdot 2 + 1024 \cdot 21 \cdot 7^{10}}{-10 \cdot 2^8 \cdot 7^9 \cdot 98 + 28^5 \cdot 7^6}$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{7 \cdot 14^{10} \cdot 2 + 1024 \cdot 21 \cdot 7^{10}}{-10 \cdot 2^8 \cdot 7^9 \cdot 98 + 28^5 \cdot 7^6} \\ &= \frac{7 \cdot (2 \cdot 7)^{10} \cdot 2 + 2^{10} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7^{10}}{-5 \cdot 2 \cdot 2^8 \cdot 7^9 \cdot 2 \cdot 7^2 + (2^2 \cdot 7)^5 \cdot 7^6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{7 \cdot 2^{10} \cdot 7^{10} \cdot 2 + 2^{10} \cdot 3 \cdot 7^{11}}{-5 \cdot 2^{10} \cdot 7^{11} + 2^{10} \cdot 7^5 \cdot 7^6} \\
 &= \frac{2^{11} \cdot 7^{11} + 2^{10} \cdot 3 \cdot 7^{11}}{-5 \cdot 2^{10} \cdot 7^{11} + 2^{10} \cdot 7^{11}} \\
 &= \frac{2^{10} \cdot 7^{11} (2+3)}{2^{10} \cdot 7^{11} (-5+1)} = \frac{-5}{4}
 \end{aligned}$$

Câu 69. (HSG 7 huyện Lục Ngạn, tỉnh Bắc Giang, 2022 - 2023)

Tính $A = \frac{49^5 \cdot 8^{10}}{14^7 \cdot 49 \cdot 4^{13}} - \frac{7}{10} - \frac{7}{12} + \frac{7}{5}$
 $0,8 - \frac{8}{12} + \frac{8}{5}$

Lời giải

$$A = \frac{49^5 \cdot 8^{10}}{14^7 \cdot 49 \cdot 4^{13}} - \frac{7}{10} - \frac{7}{12} + \frac{7}{5} = \frac{7^{10} \cdot 2^{30}}{2^7 \cdot 7^7 \cdot 7^2 \cdot 2^{26}} - \frac{7 \cdot \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{5}\right)}{8 \cdot \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{5}\right)} = \frac{7^{10} \cdot 2^{30}}{7^9 \cdot 2^{33}} - \frac{7}{8} = \frac{7}{8} - \frac{7}{8} = 0$$

Câu 70. (SG 7 huyện Lục Nam, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính: $A = \left(\frac{1,5 + 1 - 0,75}{2,5 + \frac{5}{3} - 1,25} + \frac{0,375 - 0,3 + \frac{3}{11} + \frac{3}{12}}{-0,625 + 0,5 - \frac{5}{11} - \frac{5}{12}} \right) : \frac{1890}{2005} + 100$

Lời giải

$$A = \left(\frac{1,5 + 1 - 0,75}{2,5 + \frac{5}{3} - 1,25} + \frac{0,375 - 0,3 + \frac{3}{11} + \frac{3}{12}}{-0,625 + 0,5 - \frac{5}{11} - \frac{5}{12}} \right) : \frac{1890}{2005} + 100.$$

$$A = \left(\frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{3} - \frac{3}{4}}{\frac{5}{2} + \frac{5}{3} - \frac{5}{4}} + \frac{\frac{3}{8} - \frac{3}{10} + \frac{3}{11} + \frac{3}{12}}{\frac{-5}{8} + \frac{5}{10} - \frac{5}{11} - \frac{5}{12}} \right) : \frac{378}{401} + 100$$

$$A = \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{-5} \right) : \frac{378}{401} + 100 = 0 : \frac{378}{401} + 100 = 100$$

Câu 71. (HSG 7 huyện Trục Ninh, tỉnh Nam Định, 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức: $B = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} + \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} + \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3} \\
 &= \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 + 2^{12} \cdot 3^5} + \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 5^{10} \cdot 7^4}{5^9 \cdot 7^3 + 5^9 \cdot 2^3 \cdot 7^3} = \frac{2^{12} \cdot 3^4 (3-1)}{2^{12} \cdot 3^5 (3+1)} + \frac{5^{10} \cdot 7^3 (1-7)}{5^9 \cdot 7^3 (1+2^3)} \\
 &= \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{5 \cdot (-6)}{9} = \frac{1}{6} + \frac{-10}{3} = \frac{-19}{6}
 \end{aligned}$$

Câu 72. (HSG 7 huyện Như Thanh, tỉnh Thanh Hóa, 2021 - 2022)

Thực hiện phép tính: $B = \frac{2.8^4.27^2 + 4.6^9}{2^7.6^7 + 2^7.40.9^4}$

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \frac{2.8^4.27^2 + 4.6^9}{2^7.6^7 + 2^7.40.9^4} = \frac{2.(2^3)^4.(3^3)^2 + 2^2.2^9.3^9}{2^7.2^7.3^7 + 2^7.5.2^3.3^8} \\ &= \frac{2^{13}.3^6 + 2^{11}.3^9}{2^{14}.3^7 + 2^{10}.3^8.5} = \frac{2^{11}.3^6.(2^2 + 3^3)}{2^{10}.3^7.(2^4 + 3.5)} = \frac{2.31}{3.31} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Câu 73. (HSG 7 huyện Hà Trung, tỉnh Thanh Hóa, 2021 - 2022)

Thực hiện phép tính: $B = \frac{5.4^{15}.9^9 - 4.3^{20}.8^9}{5.2^9.6^{19} - 7.2^{29}.27^6}$

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \frac{5.4^{15}.9^9 - 4.3^{20}.8^9}{5.2^9.6^{19} - 7.2^{29}.27^6} \\ &= \frac{5.2^{30}.3^{18} - 2^{29}.3^{20}}{5.2^9.2^{19}.3^{19} - 7.2^{29}.3^{18}} = \frac{5.2^{30}.3^{18} - 2^{29}.3^{20}}{5.2^{28}.3^{19} - 7.2^{29}.3^{18}} \\ &= \frac{2^{29}.3^{18}(5.2 - 3^2)}{2^{28}.3^{18}(5.3 - 7.2)} = \frac{2^{29}.3^{18}}{2^{28}.3^{18}} = 2 \end{aligned}$$

Câu 74. (HSG 7 huyện Nghĩa Hành, 2021 - 2022)

Thực hiện phép tính: $B = \frac{3^6.45^4 - 3^{13}.5^4}{27^4.25^3 + 45^6}$

Lời giải

$$B = \frac{3^6.45^4 - 3^{13}.5^4}{27^4.25^3 + 45^6} = \frac{3^{14}.5^4 - 3^{13}.5^4}{3^{12}.5^6 + 5^6.3^{12}} = \frac{3^{13}.5^4(3-1)}{3^{12}.5^6(1+1)} = \frac{3}{5^2} = \frac{3}{25}$$

Câu 75. (HSG 7 huyện Mỹ Đức 2020 - 2021)

Thực hiện phép tính: $B = \frac{10^4.81 - 16.15^2}{4^4.675}$

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \frac{10^4.81 - 16.15^2}{4^4.675} \\ &= \frac{2^4.5^4.3^4 - 2^4.3^2.5^2}{2^8.3^3.5^2} = \frac{2^4.3^2.5^2(5^2.3^2 - 1)}{2^8.3^3.5^2} \\ &= \frac{225 - 1}{2^4.3} = \frac{224}{2^4.3} = \frac{2^5.7}{2^4.3} = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

Câu 76. (HSG 7 huyện Ứng Hòa; huyện Bá Thước 2021 - 2022)

Thực hiện phép tính: $B = \frac{2.8^4.27^2 + 4.6^9}{2^7.6^7 + 2^7.40.9^4}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{2 \cdot 8^4 \cdot 27^2 + 4 \cdot 6^9}{2^7 \cdot 6^7 + 2^7 \cdot 40 \cdot 9^4} \\
 &= \frac{2 \cdot 2^{12} \cdot 3^6 + 2^2 \cdot 2^9 \cdot 3^9}{2^7 \cdot 2^7 \cdot 3^7 + 2^7 \cdot 2^3 \cdot 5 \cdot 3^8} = \frac{2^{13} \cdot 3^6 + 2^{11} \cdot 3^9}{2^{14} \cdot 3^7 + 2^{10} \cdot 5 \cdot 3^8} \\
 &= \frac{2^{11} \cdot 3^6 (2^2 + 3^3)}{2^{10} \cdot 3^7 (2^4 + 5 \cdot 3)} = \frac{2 \cdot 31}{3 \cdot 31} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

Câu 77. (HSG 7 huyện Cao Lộc, 2021 - 2022)

Thực hiện phép tính: $B = \frac{6^4 \cdot 9}{4^2 \cdot 6^3 + 8^2 \cdot 9}$

Lời giải

$$B = \frac{6^4 \cdot 9}{4^2 \cdot 6^3 + 8^2 \cdot 9} = \frac{2^4 \cdot 3^4 \cdot 3^2}{2^4 \cdot 2^3 \cdot 3^3 + 2^6 \cdot 3^2} = \frac{2^4 \cdot 3^6}{2^6 \cdot 3^2 (2 \cdot 3 + 1)} = \frac{3^4}{2^2 \cdot 7} = \frac{81}{28}$$

Câu 78. (HSG 7 huyện Tân Kỳ, tỉnh Nghệ An, 2021 - 2022)

Thực hiện phép tính: $B = \frac{2^3 \cdot 10 + 2^5 \cdot 4}{2^3 \cdot 15 - 2^4}$

Lời giải

$$B = \frac{2^3 \cdot 10 + 2^5 \cdot 4}{2^3 \cdot 15 - 2^4} = \frac{2^3 \cdot (10 + 2^2 \cdot 4)}{2^3 \cdot (15 - 2)} = \frac{26}{13} = 2$$

Vậy $B = 2$

Câu 79. (HSG 7 huyện Nam Đàn, tỉnh Nghệ An 2022 - 2023)

Tính $B = (7,5)^{2022} \cdot \frac{1}{78^{2023}} \cdot (-0,4)^{2022} \cdot (-26)^{2023}$

Lời giải

$$B = (7,5)^{2022} \cdot \frac{1}{78^{2023}} \cdot (-0,4)^{2022} \cdot (-26)^{2023}$$

$$B = \left[(7,5)^{2022} \cdot (-0,4)^{2022} \right] \cdot \left[\frac{1}{78^{2023}} \cdot (-26)^{2023} \right]$$

$$B = (-3)^{2022} \cdot \left(\frac{-1}{3} \right)^{2023} = (-3)^{2022} \cdot \frac{1}{(-3)^{2023}} = \frac{-1}{3}$$

Câu 80. (HSG 7 huyện Cẩm Thủy, tỉnh Thanh Hóa, 2021 - 2022)

Thực hiện phép tính: $A = 99^{99} - \left\{ 1, (3) - \left[5 \cdot 2^3 - (-7)^2 + \frac{1}{3} + 99^9 \cdot (27^4 - 81^3 - 99^{90}) \right] \right\}$

Lời giải

$$A = 99^{99} - \left\{ 1, (3) - \left[5 \cdot 2^3 - (-7)^2 + \frac{1}{3} + 99^9 \cdot (27^4 - 81^3 - 99^{90}) \right] \right\}$$

$$= 99^{99} - \left\{ 1, (3) - \left[5 \cdot 2^3 - (-7)^2 + \frac{1}{3} + 99^9 \cdot (3^{12} - 3^{12} - 99^{90}) \right] \right\}$$

$$= 99^{99} - \left\{ 1, (3) - \left[5.8 - 49 + \frac{1}{3} - 99^{99} \right] \right\} = 99^{99} - \frac{4}{3} + 40 - 49 + \frac{1}{3} - 99^{99} = -10$$

Câu 81. (HSG 7 huyện Mường La, 2021 - 2022)

Thực hiện phép tính: $A = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^5 \cdot 5^7 + \left(\frac{9}{4}\right)^3 : \left(\frac{9}{16}\right)^3}{2^7 \cdot 5^2 + 512}$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^7 \cdot 5^7 + \left(\frac{9}{4}\right)^3 : \left(\frac{3}{16}\right)^3}{2^7 \cdot 5^2 + 512} = \frac{\frac{2^7}{5^7} \cdot 5^7 + \left(\frac{3^2}{2^2}\right)^3 : \left(\frac{3}{2^4}\right)^3}{2^7 \cdot 5^2 + 2^9} \\ &= \frac{5^7 + \frac{3^6}{2^6} \cdot \frac{2^{12}}{3^6}}{2^7 \cdot 5^2 + 2^9} = \frac{2^7 + 2^6 \cdot 3^3}{2^7 \cdot 5^2 + 2^9} = \frac{2^6 \cdot (2 + 3^3)}{2^7 \cdot (5^2 + 2^2)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Câu 82. (HSG 7 huyện Thuận Thành, 2021 - 2022)

Thực hiện phép tính: $A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 - 5^9 \cdot 14^3}$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 - 5^9 \cdot 14^3} \\ &= \frac{2^{12} \cdot 3^5 - (2^2)^6 \cdot (3^2)^2}{(2^2)^6 \cdot (3)^6 + (2^3)^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - (5^2)^5 \cdot (7^2)^2}{(5^3)^3 \cdot 7^3 - 5^9 \cdot 7^3 \cdot 2^3} \\ &= \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 + 2^{12} \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 5^{10} \cdot 7^4}{5^9 \cdot 7^3 - 5^9 \cdot 7^3 \cdot 2^3} \\ &= \frac{2^{12} \cdot 3^4 (3 - 1)}{2^{12} \cdot 3^5 (3 + 1)} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 (1 - 7)}{5^9 \cdot 7^3 (1 - 2^3)} \\ &= \frac{2}{3 \cdot 4} - \frac{5(-6)}{-7} = \frac{1}{6} - \frac{30}{7} = \frac{-173}{42} \end{aligned}$$

Câu 83. (HSG 7 huyện Chư Sê, 2021 - 2022)

Thực hiện phép tính: $A = \frac{5 \cdot 4^{15} \cdot 9^9 - 4 \cdot 3^{20} \cdot 8^9}{5 \cdot 2^{10} \cdot 6^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 27^6}$

Lời giải

$$A = \frac{5 \cdot 4^{15} \cdot 9^9 - 4 \cdot 3^{20} \cdot 8^9}{5 \cdot 2^{10} \cdot 6^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 27^6} = \frac{5 \cdot 2^{30} \cdot 3^{18} - 2^{29} \cdot 3^{20}}{5 \cdot 2^{29} \cdot 3^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 3^{18}} = \frac{2^{29} \cdot 3^{18} \cdot (5 \cdot 2 - 3^2)}{2^{29} \cdot 3^{18} \cdot (5 \cdot 3 - 7)} = \frac{1}{8}$$

Câu 84. (HSG 7 huyện Thiệu Hoá 2022 - 2023)

Tính giá trị các biểu thức sau: $B = \frac{2^{10} \cdot 52 + 2^{12} \cdot 65}{2^{11} \cdot 52} + \frac{(-3)^{10} \cdot 11 + 3^9 \cdot 15}{3^8 \cdot 2^3 \cdot 6}$

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \frac{2^{10} \cdot 52 + 2^{12} \cdot 65}{2^{11} \cdot 52} + \frac{(-3)^{10} \cdot 11 + 3^9 \cdot 15}{3^8 \cdot 2^3 \cdot 6} \\ &= \frac{2^{10} \cdot 2^2 \cdot 13 + 2^{12} \cdot 65}{2^{11} \cdot 2 \cdot 26} + \frac{3^{10} \cdot 11 + 3^9 \cdot 3 \cdot 5}{3^8 \cdot 2^3 \cdot 2 \cdot 3} \\ &= \frac{2^{12} \cdot 13 + 2^{12} \cdot 65}{2^{12} \cdot 26} + \frac{3^{10} \cdot 11 + 3^{10} \cdot 5}{3^9 \cdot 2^4} \\ &= \frac{2^{12} \cdot (13 + 65)}{2^{12} \cdot 26} + \frac{3^{10} \cdot (11 + 5)}{3^9 \cdot 16} = \frac{78}{26} + \frac{3^{10}}{3^9} = 3 + 3 = 6 \end{aligned}$$

Câu 85. (HSG 7 huyện Đức Thọ, Hà Tĩnh, 2021 - 2022)

Tính giá trị biểu thức $A = \frac{2^{2023} - 4 \cdot 3^{2022}}{3 \cdot 2^{2021} - 3^{2023}}$

Lời giải

$$A = \frac{2^{2023} - 4 \cdot 3^{2022}}{3 \cdot 2^{2021} - 3^{2023}} = \frac{2^{2023} - 2^2 \cdot 3^{2022}}{3 \cdot 2^{2021} - 3 \cdot 3^{2022}} = \frac{2^2 \cdot 2^{2021} - 2^2 \cdot 3^{2022}}{3 \cdot (2^{2021} - 3^{2022})} = \frac{4 \cdot (2^{2021} - 3^{2022})}{3 \cdot (2^{2021} - 3^{2022})} = \frac{4}{3}$$

Câu 86. (HSG 7 huyện Yên Mỹ, 2021 - 2022)

Thực hiện phép tính: $C = \left[\frac{2020}{2021} \cdot \left(\frac{1}{2022} \right)^0 + \frac{1}{4042} \cdot 2 \right]^{2021} + \left(\frac{1}{2^{100}} : \frac{8^{100}}{4^{200}} \right)^{2022}$

Lời giải

$$\begin{aligned} C &= \left[\frac{2020}{2021} \cdot \left(\frac{1}{2022} \right)^0 + \frac{1}{4042} \cdot 2 \right]^{2021} + \left(\frac{1}{2^{100}} : \frac{8^{100}}{4^{200}} \right)^{2022} \\ &= \left[\frac{2020}{2021} \cdot 1 + \frac{1}{2021} \right]^{2021} + \left(\frac{1}{2^{100}} : \frac{2^{300}}{2^{400}} \right)^{2022} = (1)^{2021} + (1)^{2022} = 2 \end{aligned}$$

Câu 87. (HSG 7 huyện Thiệu Hóa 2021 - 2022)

Tính giá trị các biểu thức sau: $B = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5}$

Lời giải

$$B = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 + 2^{12} \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^4 \cdot (3 - 1)}{2^{12} \cdot 3^5 \cdot (3 + 1)} = \frac{2^{12} \cdot 3^4 \cdot 2}{2^{12} \cdot 3^5 \cdot 4} = \frac{1}{6}$$

Câu 88. (HSG 7 huyện Tiên Hải 2021 - 2022)

Thực hiện phép tính: $B = \frac{3^{12} \cdot 5^7 + 9^6 \cdot 25^3}{27^5 \cdot 25^3 + (3^2 \cdot 5)^6}$

Lời giải

$$B = \frac{3^{12} \cdot 5^7 + 9^6 \cdot 25^3}{27^5 \cdot 25^3 + (3^2 \cdot 5)^6} = \frac{3^{12} \cdot 5^7 + 3^{12} \cdot 5^6}{3^{15} \cdot 5^6 + 3^{12} \cdot 5^6} = \frac{3^{12} \cdot 5^6 \cdot (5 + 1)}{3^{12} \cdot 5^6 \cdot (3^3 + 1)} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$$

Câu 89. (HSG 7 trường Lê Hồng Phong 2018 - 2019)

Tính giá trị biểu thức: $M = \frac{2016^{10} + 2016^{11}}{2016^{10} - 2016^{11}}$

Lời giải

$$M = \frac{2016^{10} + 2016^{11}}{2016^{10} - 2016^{11}} = \frac{2016^{10} \cdot (1 + 2016)}{2016^{10} \cdot (1 - 2016)} = \frac{-2017}{2015}$$

Câu 90. (HSG 7 20 - 20)

Tính hợp lý các biểu thức sau: $\frac{2^2 \cdot 10 + 2^3 \cdot 6}{2^2 \cdot 15 - 2^4}$

Lời giải

$$\frac{2^2 \cdot 10 + 2^3 \cdot 6}{2^2 \cdot 15 - 2^4} = \frac{2^3 \cdot 5 + 2^3 \cdot 6}{2^2 \cdot 15 - 2^2 \cdot 4} = \frac{2^3 \cdot (5 + 6)}{2^2 \cdot (15 - 4)} = \frac{2 \cdot 11}{11} = 2$$

Câu 91. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2018 - 2019)

Thực hiện phép tính: $P = \sqrt{\frac{9}{25}} + 2018^0 + |-0,4|$

Lời giải

$$P = \sqrt{\frac{9}{25}} + 2018^0 + |-0,4| = \frac{3}{5} + 1 + \frac{2}{5} = 2$$

Câu 92. (HSG 7 huyện Chương Mỹ 2018 - 2019)

Tính giá trị biểu thức: $P = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^5 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 14^3}$

Lời giải

$$P = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 + 2^{12} \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 5^{10} \cdot 7^4}{5^9 \cdot 7^3 + 5^9 \cdot 2^3 \cdot 7^3} = \frac{2^{12} \cdot 3^4 \cdot (3 - 1)}{2^{12} \cdot 3^5 \cdot (3 + 1)} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 \cdot (1 - 7)}{5^9 \cdot 7^3 \cdot (1 + 8)} = \frac{1}{6} - \frac{-10}{3} = \frac{7}{2}$$

Câu 93. (HSG 7 huyện Sơn Tây 2018 - 2019)

Thực hiện phép tính:

a) $\frac{45}{19} - \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} \right)^{-1} \right)^{-1} \right)^{-1}$

b) $\frac{5 \cdot 4^{15} \cdot 9^9 - 4 \cdot 3^{20} \cdot 8^9}{5 \cdot 2^{10} \cdot 6^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 27^6}$

Lời giải

a) $\frac{45}{19} - \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} \right)^{-1} \right)^{-1} \right)^{-1} = \frac{45}{19} - \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{3} + 4}} = \frac{45}{19} - \frac{26}{19} = \frac{19}{19} = 1$

$$b) \frac{5.4^{15}.9^9 - 4.3^{20}.8^9}{5.2^{10}.6^{19} - 7.2^{29}.27^6} = \frac{5.2^{2.15}.3^{2.9} - 2^2.3^{20}.2^{3.9}}{5.2^{10}.2^{19}.3^{19} - 7.2^{29}.3^{3.6}} = \frac{2^{29}.3^{18} \cdot (5.2 - 3^2)}{2^{29}.3^{18} \cdot (5.3 - 7)} = \frac{10 - 9}{15 - 7} = \frac{1}{8}$$

Câu 94. (HSG 7 trường Đáp Cầu 2018 - 2019)

Tính: $A = \frac{16^3 \cdot 3^{10} + 120 \cdot 6^9}{4^6 \cdot 3^{12} + 6^{11}}$

Lời giải

$$A = \frac{(2^4)^3 \cdot 3^{10} + 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot (2 \cdot 3)^9}{(2^2)^6 \cdot 3^{12} + (2 \cdot 3)^{11}} = \frac{2^{12} \cdot 3^{10} + 3^{10} \cdot 2^{12} \cdot 5}{2^{12} \cdot 3^{12} + 2^{11} \cdot 3^{11}} = \frac{2^{12} \cdot 3^{10} (1 + 5)}{2^{11} \cdot 3^{11} \cdot (2 \cdot 3 + 1)} = \frac{6 \cdot 2^{12} \cdot 3^{10}}{7 \cdot 2^{11} \cdot 3^{11}} = \frac{4}{7}$$

Câu 95. (HSG 7 huyện Lục Nam 2018 - 2019)

Thực hiện phép tính: $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2 \cdot (-1)^{2003}}{\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(-\frac{5}{12}\right)^3}$

Lời giải

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2 \cdot (-1)^{2003}}{\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(-\frac{5}{12}\right)^3} = \frac{\frac{2^3}{3^3} \cdot \frac{3^2}{2^4} \cdot (-1)}{\frac{2^2}{5^2} \cdot \left(-\frac{5^3}{3^3 \cdot 2^6}\right)} = \frac{-\frac{1}{2 \cdot 3}}{-\frac{5}{3^3 \cdot 2^4}} = \frac{3^2 \cdot 2^3}{5} = \frac{72}{5}$$

Câu 96. (HSG 7 2021 - 2022)

Tính $B = \left[(0,1)^2\right]^0 + \left[\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}\right]^2 \cdot \frac{1}{49} \cdot \left[(2^2)^3 : 2^5\right]$

Lời giải

$$B = \left[(0,1)^2\right]^0 + \left[\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}\right]^2 \cdot \frac{1}{49} \cdot \left[(2^2)^3 : 2^5\right] = 1 + 49 \cdot \frac{1}{49} \cdot (2^6 : 2^5) = 1 + 2 = 3$$

Câu 97. (HSG 7 Vinh, trường Nguyệt Ân 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức sau $N = \frac{4^5 \cdot 9^4 - 2 \cdot 6^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 6^8 \cdot 20}$

Lời giải

$$N = \frac{2^{10} \cdot 3^8 - 2 \cdot 2^9 \cdot 3^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 2^8 \cdot 3^8 \cdot 2^2 \cdot 5} = \frac{2^{10} \cdot 3^8 - 2^{10} \cdot 3^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 2^{10} \cdot 3^8 \cdot 5} = \frac{2^{10} \cdot 3^8 (1 - 3)}{2^{10} \cdot 3^8 (1 + 5)} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$$

Vậy $N = \frac{-1}{3}$

Câu 98. (HSG 7 thành phố Thanh Hoá 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính: $B = \frac{3^{100} + 3^{101} + 3^{102}}{3^{102} + 3^{103} + 3^{104}} + \frac{\sqrt{64}}{6}$

Lời giải

$$B = \frac{3^{100} + 3^{101} + 3^{102}}{3^{102} + 3^{103} + 3^{104}} + \frac{\sqrt{64}}{6} = \frac{3^{100}(1+3+3^2)}{3^{102}(1+3+3^2)} + \frac{8}{6} = \frac{1}{9} + \frac{4}{3} = \frac{13}{9}$$

Câu 99. (HSG 7 huyện Như Xuân 2018 - 2019; huyện Thạch Thành 2017 - 2018)

Thực hiện phép tính: $A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5}$

Lời giải

$$A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 + 2^{12} \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^4 \cdot (3-1)}{2^{12} \cdot 3^5 \cdot (3+1)} = \frac{2}{3 \cdot 4} = \frac{1}{6}$$

Câu 100. (HSG 7 huyện Hoàng Hóa 2018 - 2019)

Tính $A = 1000 - \left\{ 10^3 - 11 \cdot [(-7)^2 - 5 \cdot 2^3 + 8 \cdot (11^2 - 121)] \right\}$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= 1000 - \left\{ 1000 - 11 \cdot [49 - 40 + 8 \cdot (121 - 121)] \right\} \\ &= 1000 - [1000 - 11 \cdot (9 + 8 \cdot 0)] = 1000 - (1000 - 11 \cdot 9) = 99 \end{aligned}$$

Câu 101. (HSG 7 Tây Hồ 2022 - 2023)

Rút gọn biểu thức: $B = \frac{7 \cdot (2 \cdot 3^2)^5 \cdot 4 - (2^3 \cdot 3^2)^2 \cdot 3^6}{5 \cdot 2^6 \cdot 3^{10} + (2^3 \cdot 3^5)^2}$

Lời giải

$$B = \frac{7 \cdot (2 \cdot 3^2)^5 \cdot 4 - (2^3 \cdot 3^2)^2 \cdot 3^6}{5 \cdot 2^6 \cdot 3^{10} + (2^3 \cdot 3^5)^2} = \frac{7 \cdot 2^5 \cdot 3^{10} \cdot 2^2 - 2^6 \cdot 3^4 \cdot 3^6}{5 \cdot 2^6 \cdot 3^{10} + 2^6 \cdot 3^{10}} = \frac{2^6 \cdot 3^{10} \cdot (7 \cdot 2 - 1)}{2^6 \cdot 3^{10} \cdot (5 + 1)} = \frac{13}{6}$$

Câu 102. (HSG 7 Trực Ninh 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức sau $A = \frac{\left(\frac{2}{7}\right)^7 \cdot 7^7 + \left(\frac{21}{4}\right)^3 : \left(\frac{7}{16}\right)^3}{2^7 \cdot 5^2 + 512}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{\left(\frac{2}{7}\right)^7 \cdot 7^7 + \left(\frac{21}{4}\right)^3 : \left(\frac{7}{16}\right)^3}{2^7 \cdot 5^2 + 512} = \frac{\left(\frac{2}{7} \cdot 7\right)^7 + \left(\frac{21}{4} \cdot \frac{16}{7}\right)^3}{2^7 \cdot 5^2 + 2^9} \\ &= \frac{2^7 + (3 \cdot 2^2)^3}{2^7 \cdot (5^2 + 2^2)} = \frac{2^7 + 3^3 \cdot 2^6}{2^7 \cdot (25 + 4)} = \frac{2^6 (2 + 27)}{2^7 \cdot 29} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{1}{2}$.

Câu 103. (HSG 7)

Tính $A = \frac{16^3 \cdot 3^{10} + 120 \cdot 6^9}{4^6 \cdot 3^{12} + 6^{11}}$

Lời giải

$$A = \frac{(2^4)^3 \cdot 3^{10} + 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot (2 \cdot 3)^9}{(2^2)^6 \cdot 3^{12} + (2 \cdot 3)^{11}} = \frac{2^{12} \cdot 3^{10} + 3^{10} \cdot 2^{12} \cdot 5}{2^{12} \cdot 3^{12} + 2^{11} \cdot 3^{11}} = \frac{2^{12} \cdot 3^{10} (1+5)}{2^{11} \cdot 3^{11} \cdot (2 \cdot 3 + 1)} = \frac{6 \cdot 2^{12} \cdot 3^{10}}{7 \cdot 2^{11} \cdot 3^{11}} = \frac{4}{7}$$

Câu 104. (HSG 7)

Tính $P = \frac{2^{19} \cdot 27^3 + 15 \cdot 4^9 \cdot 9^4}{6^9 \cdot 2^{10} + 12^{10}}$

Lời giải

$$P = \frac{2^{19} \cdot (3^3)^3 + 3 \cdot 5 \cdot (2^2)^9 \cdot (3^2)^4}{(2 \cdot 3)^9 \cdot 2^{10} + (3 \cdot 2^2)^{10}} = \frac{2^{19} \cdot 3^9 + 3 \cdot 5 \cdot 2^{18} \cdot 3^8}{2^9 \cdot 3^9 \cdot 2^{10} + 3^{10} \cdot 2^{20}} = \frac{2^{18} \cdot 3^2 \cdot (2+5)}{3^9 \cdot 2^{19} \cdot (1+3 \cdot 2)} = \frac{1}{2}$$

Câu 105. (HSG 7 huyện Vị Thanh; huyện Bồ Trách 2017 - 2018)

Rút gọn biểu thức $A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 81}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5}$

Lời giải

$$A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 81}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 - 2^{12} \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^4 \cdot (3-1)}{2^{12} \cdot 3^5 \cdot (3-1)} = \frac{1}{3}$$

Câu 106. (HSG 7 trường thực hành Sài Gòn 2017 - 2018)

Tính giá trị biểu thức $M = \frac{2016^{10} + 2016^{11}}{2016^{10} - 2016^{11}}$

Lời giải

$$M = \frac{2016^{10} \cdot (1 + 2016)}{2016^{10} \cdot (1 - 2016)} = \frac{-2017}{2015}$$

Câu 107. (HSG 7 huyện Việt Yên 2017 - 2018)

Tính: $C = \frac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{-8^4 \cdot 3^{12} + 6^{11}}$

Lời giải

$$C = \frac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{-8^4 \cdot 3^{12} + 6^{11}} = \frac{2^{12} \cdot 3^{10} + 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5}{-2^{12} \cdot 3^{12} + 2^{11} \cdot 3^{11}} = \frac{2^{12} \cdot 3^{10} \cdot (1+5)}{2^{11} \cdot 3^{11} \cdot (1-2 \cdot 3)} = \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot (-5)} = \frac{-4}{5}$$

Câu 108. (HSG 7 Đức Thọ 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức $\frac{27^{10} + 9^{10}}{27^5 + 3 \cdot 9^{12}}$

Lời giải

$$\frac{27^{10} + 9^{10}}{27^5 + 3 \cdot 9^{12}} = \frac{(3^3)^{10} + (3^2)^{10}}{(3^3)^5 + 3 \cdot (3^2)^{12}} = \frac{3^{30} + 3^{20}}{3^{15} + 3^{25}} = \frac{3^{20} \cdot (3^{10} + 1)}{3^{15} \cdot (3^{10} + 1)} = 3^5 = 243.$$

Câu 109. (HSG 7 Bảo Thắng 2022 - 2023)

Rút gọn biểu thức: $B = \frac{2 \cdot 8^4 \cdot 27^2 + 4 \cdot 6^9}{2^7 \cdot 6^7 + 2^7 \cdot 40 \cdot 9^4}$

Lời giải

$$B = \frac{2 \cdot 8^4 \cdot 27^2 + 4 \cdot 6^9}{2^7 \cdot 6^7 + 2^7 \cdot 40 \cdot 9^4} = \frac{2 \cdot (2^3)^4 \cdot (3^3)^2 + 2^2 \cdot 2^9 \cdot 3^9}{2^7 \cdot 2^7 \cdot 3^7 + 2^7 \cdot 2^3 \cdot 5 \cdot (3^2)^4}$$

$$= \frac{2^{13} \cdot 3^6 + 2^{11} \cdot 3^9}{2^{14} \cdot 3^7 + 2^{10} \cdot 5 \cdot 3^8} = \frac{2^{11} \cdot 3^6 \cdot (2^2 + 3^3)}{2^{10} \cdot 3^7 \cdot (2^4 + 3 \cdot 5)} = \frac{2 \cdot 31}{3 \cdot 31} = \frac{2}{3}$$

Câu 110. (HSG 7 huyện Triệu Sơn 2017 - 2018)

Thực hiện phép tính: $A = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^7 \cdot 5^7 + \left(\frac{9}{4}\right)^3 : \left(\frac{3}{16}\right)^3}{2^7 \cdot 5^2 + 512}$

Lời giải

$$A = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^7 \cdot 5^7 + \left(\frac{9}{4}\right)^3 : \left(\frac{3}{16}\right)^3}{2^7 \cdot 5^2 + 512} = \frac{\left(\frac{2}{5} \cdot 5\right)^7 + \left(\frac{9}{4} : \frac{3}{16}\right)^3}{2^7 \cdot 5^2 + 2^7 \cdot 2^2} = \frac{2^7 + 12^3}{2^7 \cdot 5^2 + 2^7 \cdot 2^2} = \frac{2^6 \cdot (2 + 3^3)}{2^7 \cdot (5^2 + 2^2)} = \frac{1}{2}$$

Câu 111. (HSG 7 huyện Đông Sơn, trường THCS Nguyễn Chí 2017 - 2018)

Rút gọn biểu thức $B = \frac{2 \cdot 8^4 + 4 \cdot 6^9}{2^7 \cdot 6^7 + 2^7 \cdot 40 \cdot 9^4}$

Lời giải

$$B = \frac{2 \cdot 8^4 \cdot 27^2 + 4 \cdot 6^9}{2^7 \cdot 6^7 + 2^7 \cdot 40 \cdot 9^4} = \frac{2 \cdot (2^3)^4 \cdot (3^3)^2 + 2^2 \cdot 2^9 \cdot 3^9}{2^7 \cdot 2^7 \cdot 3^7 + 2^7 \cdot 2^3 \cdot 5 \cdot (3^2)^4} = \frac{2^{13} \cdot 3^6 + 2^{11} \cdot 3^9}{2^{14} \cdot 3^7 + 2^{10} \cdot 3^8 \cdot 5} = \frac{2^{11} \cdot 3^6 \cdot (2^2 + 3^3)}{2^{10} \cdot 3^7 \cdot (2^4 + 3 \cdot 5)} = \frac{2}{3}$$

Câu 112. (HSG 7 huyện Việt Yên 2017 - 2018)

Tính: $A = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1$

Lời giải

$$A = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) - 2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{-3}{2}$$

Câu 113. (HSG 7 huyện Anh Sơn, trường THCS Tào Sơn 2017 - 2018)

Thực hiện phép tính: $\frac{1}{2} : \left(\frac{1}{2} : \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{5}{3} + \frac{1}{2}$

Lời giải

$$\frac{1}{2} : \left(\frac{1}{2} : \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{5}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} : \frac{9}{16} - \frac{13}{6} = \frac{8}{9} - \frac{13}{6} = \frac{-23}{18}$$

Câu 114. (HSG 7 Sơn Động 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức: $A = \frac{4^{20} \cdot 25^{20}}{10^{40}} - \frac{9}{11} \cdot \frac{17}{23} + \frac{9}{11} \cdot \frac{-6}{23}$

Lời giải

$$A = \frac{4^{20} \cdot 25^{20}}{10^{40}} - \frac{9}{11} \cdot \frac{17}{23} + \frac{9}{11} \cdot \frac{-6}{23} = \frac{2^{40} \cdot 5^{40}}{2^{40} \cdot 5^{40}} - \frac{9}{11} \left(\frac{17}{23} + \frac{6}{23}\right) = 1 - \frac{9}{11} \cdot 1 = \frac{2}{11}$$

Câu 115. (HSG 7 trường Hồng Thái, Sơn Dương 2017 - 2018)

Tính: $A = \frac{16^3 \cdot 3^{10} + 120 \cdot 6^9}{4^6 \cdot 3^{12} + 6^{11}}$

Lời giải

$$A = \frac{(2^4)^3 \cdot 3^{10} + 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot (2 \cdot 3)^9}{(2^2)^6 \cdot 3^{12} + (2 \cdot 3)^{11}} = \frac{2^{12} \cdot 3^{10} + 3^{10} \cdot 2^{12} \cdot 5}{2^{12} \cdot 3^{12} + 2^{11} \cdot 3^{11}} = \frac{2^{12} \cdot 3^{10} \cdot (1+5)}{2^{11} \cdot 3^{11} \cdot (2 \cdot 3 + 1)} = \frac{6 \cdot 2^{12} \cdot 3^{10}}{7 \cdot 2^{11} \cdot 3^{11}} = \frac{4}{7}$$

Câu 116. (HSG 7 huyện Trục Ninh 2017 - 2018)

Thực hiện phép tính: $\frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^2 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 13^3}$

Lời giải

$$\begin{aligned} E &= \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 9^2}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 25^2 \cdot 49^2}{(125 \cdot 7)^3 + 5^9 \cdot 13^3} \\ &= \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 + 2^{12} \cdot 3^5} - \frac{5^{10} \cdot 7^3 - 5^4 \cdot 7^4}{5^9 \cdot 7^3 + 5^9 \cdot 13^3} \\ &= \frac{2^{12} \cdot 3^4 \cdot (3-1)}{2^{12} \cdot 3^5 \cdot (3+1)} - \frac{5^4 \cdot 7^3 \cdot (5^6 - 7)}{5^9 \cdot 7^3 \cdot 9} \\ &= \frac{2^{12} \cdot 3^4 \cdot 2}{2^{12} \cdot 3^5 \cdot 4} - \frac{5^4 \cdot 7^3 \cdot (5^6 - 7)}{5^9 \cdot 7^3 \cdot 9} \\ &= \frac{1}{6} - \frac{5^6 - 7}{5^5 \cdot 9} = \frac{-2429}{6250} \end{aligned}$$

Câu 117. (HSG 7 cấp huyện 2017 - 2018)

Thực hiện phép tính:

a) $A = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot 5^2 - \left(2\frac{1}{4}\right)^3 : \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \frac{1}{2}$

b) $B = \left[\frac{4}{11} \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^0 + \frac{7}{22} \cdot 2\right]^{2010} - \left(\frac{1}{2^2} : \frac{8^2}{4^4}\right)^{2009}$

Lời giải

a) $A = 3^2 - \left(\frac{9}{4}\right)^3 : \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \frac{1}{2} = 3^2 - \left(\frac{9 \cdot 4}{4 \cdot 3}\right)^3 + \frac{1}{2} = 9 - 27 + \frac{1}{2} = -\frac{35}{2}$

b) $B = \left(\frac{4}{11} + \frac{7}{11}\right)^{2010} - \left(\frac{1}{2^2} \cdot \frac{2^8}{2^6}\right) = 1 - 1 = 0$

Câu 118. (HSG 7 huyện Tam Dương 2017 - 2018)

Rút gọn biểu thức sau: $A = \frac{10^4 \cdot 81 - 16 \cdot 15^2}{4^4 \cdot 675}$

Lời giải

$$A = \frac{10^4 \cdot 81 - 16 \cdot 15^2}{4 \cdot 675} = \frac{2^4 \cdot 5^4 \cdot 3^4 - 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^8 \cdot 3^3 \cdot 5^2}$$

$$= \frac{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot (5^2 \cdot 3^2 - 1)}{2^8 \cdot 3^3 \cdot 5^2} = \frac{225 - 1}{2^4 \cdot 3} = \frac{224}{2^4 \cdot 3} = \frac{14}{3}$$

Câu 119. (HSG 7 huyện Hòa Bình 2016 - 2017)

Tính: $2^4 + 8 \left[(-2)^2 : \frac{1}{2} \right]^0 - 2^{-2} \cdot 4 + (-2)^2$

Lời giải

$$2^4 + 8 \left[(-2)^2 : \frac{1}{2} \right]^0 - 2^{-2} \cdot 4 + (-2)^2 = 16 + 8 \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot 4 + 4 = 27$$

Câu 120. (HSG 7 huyện Giao Thủy 2016 - 2017)

Tính $\left[6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 \right] : \left(-\frac{1}{3} - 1\right)^2$

Lời giải

$$\left[6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 \right] : \left(-\frac{1}{3} - 1\right)^2 = \left(6 \cdot \frac{1}{9} + 1 + 1 \right) : \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3} + 2\right) : \frac{16}{9} = \frac{8}{3} \cdot \frac{9}{16} = \frac{3}{2}$$

Câu 121. (HSG 7 trường Lê Quý Đôn, Tứ Kỳ; huyện Việt Yên 2016 - 2017)

Tính: $B = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2 \cdot (-1)^{2011}}{\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(-\frac{5}{12}\right)^3}$

Lời giải

$$B = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2 \cdot (-1)^{2011}}{\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(-\frac{5}{12}\right)^3} = \frac{2^3 \cdot 3^2 \cdot (-1)}{2^2 \cdot \frac{-5^3}{(3 \cdot 2^2)^3}} = \frac{-\frac{1}{6}}{-\frac{5}{3^3 \cdot 2^4}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3^3 \cdot 2^4}{5} = \frac{72}{5}$$

Câu 122. (HSG 7 huyện Nho Quan 2022 - 2023; Nga Sơn 2016 - 2017)

Thực hiện phép tính $B = \frac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{8^4 \cdot 3^{12} - 6^{11}}$

Lời giải

$$B = \frac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{8^4 \cdot 3^{12} - 6^{11}} = \frac{2^{12} \cdot 3^{10} + 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5}{2^{12} \cdot 3^{12} - 2^{11} \cdot 3^{11}} = \frac{2^{12} \cdot 3^{10} \cdot (1 + 5)}{2^{11} \cdot 3^{11} \cdot (2 \cdot 3 - 1)} = \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 5} = \frac{4}{5}$$

Câu 123. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc 2016 - 2017)

Rút gọn biểu thức: $B = \frac{2 \cdot 8^4 \cdot 27^2 + 4 \cdot 6^9}{2^7 \cdot 6^7 + 2^7 \cdot 40 \cdot 9^4}$

Lời giải

$$B = \frac{2 \cdot 8^4 \cdot 27^2 + 4 \cdot 6^9}{2^7 \cdot 6^7 + 2^7 \cdot 40 \cdot 9^4} = \frac{2^{13} \cdot 3^6 + 2^{11} \cdot 3^9}{2^{14} \cdot 3^7 + 2^{10} \cdot 3^8 \cdot 5} = \frac{2^{11} \cdot 3^6 \cdot (2^2 + 3^3)}{2^{10} \cdot 3^7 \cdot (2^4 + 3 \cdot 5)} = \frac{2}{3}$$

Câu 124. (HSG 7 huyện Thanh Hà 2016 - 2017)

Tính $(6^9 \cdot 2^{10} + 12^{10}) : (2^{19} \cdot 27^3 + 15 \cdot 4^9 \cdot 9^4)$

Lời giải

$$\begin{aligned} & (6^9 \cdot 2^{10} + 12^{10}) : (2^{19} \cdot 27^3 + 15 \cdot 4^9 \cdot 9^4) \\ &= (3^9 \cdot 2^9 \cdot 2^{10} + 2^{20} \cdot 3^{10}) : (2^{19} \cdot 3^9 + 3 \cdot 5 \cdot 2^{18} \cdot 3^8) \\ &= [2^{19} \cdot 3^{19} \cdot (1 + 2 \cdot 3)] : [2^{18} \cdot 3^9 \cdot (2 + 5)] \\ &= (2 \cdot 3) : 7 = 2 \end{aligned}$$

Câu 125. (HSG 7 huyện Hậu Lộc 2016 - 2017)

Rút gọn biểu thức $A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 81}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5}$

Lời giải

$$A = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 4^6 \cdot 81}{(2^2 \cdot 3)^6 + 8^4 \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^5 - 2^{12} \cdot 3^4}{2^{12} \cdot 3^6 - 2^{12} \cdot 3^5} = \frac{2^{12} \cdot 3^4 \cdot (3 - 1)}{2^{12} \cdot 3^5 \cdot (3 - 1)} = \frac{1}{3}$$

Câu 126. (HSG 7 trường Hồng Đà, Tam Nông 2015 - 2016)

Tính giá trị biểu thức: $\frac{2^{12} \cdot 13 + 2^{12} \cdot 65}{2^{10} \cdot 104} + \frac{3^{10} \cdot 11 + 3^{10} \cdot 5}{3^9 \cdot 2^4}$

Lời giải

$$\frac{2^{12} \cdot 13 + 2^{12} \cdot 65}{2^{10} \cdot 104} + \frac{3^{10} \cdot 11 + 3^{10} \cdot 5}{3^9 \cdot 2^4} = \frac{2^{12} \cdot 78}{2^{10} \cdot 104} + \frac{3^{10} \cdot 16}{3^9 \cdot 16} = 3 + 3 = 6$$

CD1: THỰC HIỆN PHÉP TÍNH

DẠNG 3: TÍNH TỔNG CÁC SỐ TỰ NHIÊN ĐƯỢC LẬP TỪ MỘT CHỮ SỐ

A. Trắc nghiệm

B. Tự luận

Câu 1. (Bổ sung)

Tính tổng tự nhiên: $A = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots9}_{10}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } A &= (10-1) + (10^2-1) + (10^3-1) + \dots + (10^{10}-1) \\ &= (10+10^2+10^3+\dots+10^{10}) - 10 = \underbrace{111\dots1}_{10} \cdot 10 - 10 = \underbrace{111\dots1}_{9} \cdot 100. \end{aligned}$$

Câu 2. (Bổ sung)

Tính tổng tự nhiên: $C = 5 + 55 + 555 + \dots + \underbrace{555\dots5}_{10}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } C = 5 \left(1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111\dots1}_{10} \right) \quad (10 \text{ số } 1)$$

$$9C = 5 \left(9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots9}_{10} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= (10-1) + (10^2-1) + (10^3-1) + \dots + (10^{10}-1) \\ &= (10+10^2+10^3+\dots+10^{10}) - 10 = \underbrace{111\dots1}_{9} \cdot 10 - 10 = \underbrace{111\dots1}_{8} \cdot 100 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C = \frac{5 \cdot \underbrace{111\dots1}_{8} \cdot 100}{9} = \frac{\underbrace{555\dots5}_{8} \cdot 500}{9}$$

CD1: THỰC HIỆN PHÉP TÍNH
DẠNG 4: TÍNH TỔNG DÃY PHÂN SỐ CÓ QUY LUẬT

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Sơn, Phú Thọ 2021 - 2022)

Giá trị của biểu thức $\frac{5^2}{1.6} + \frac{5^2}{6.11} + \dots + \frac{5^2}{26.31}$ là:

- A. $\frac{26}{150}$. B. $\frac{150}{26}$. C. $\frac{31}{150}$. D. $\frac{150}{31}$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & \frac{5^2}{1.6} + \frac{5^2}{6.11} + \dots + \frac{5^2}{26.31} \\ &= \frac{5.5}{1.6} + \frac{5.5}{6.11} + \dots + \frac{5.5}{26.31} \\ &= 5. \left(\frac{5}{1.6} + \frac{5}{6.11} + \dots + \frac{5}{26.31} \right) \\ &= 5. \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{26} - \frac{1}{31} \right) \\ &= 5. \left(1 - \frac{1}{31} \right) = 5. \frac{30}{31} = \frac{150}{31} \end{aligned}$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{-1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{100}}$. Giá trị biểu thức $B = 4|A| + \frac{1}{3^{100}}$ là

- A. 0. B. 1. C. -1. D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{100}} \\ \Rightarrow 3A &= -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{99}} \\ \Rightarrow 3A + A &= \left(-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{99}} \right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{100}} \right) \\ \Rightarrow 4A &= \frac{1}{3^{100}} - 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3^{100}} - 1 \right) \\ \text{Do } 3^{100} > 1 &\Rightarrow \frac{1}{3^{100}} < 1 \Rightarrow \frac{1}{3^{100}} - 1 < 0 \Rightarrow A = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3^{100}} - 1 \right) < 0 \Rightarrow |A| = -A \\ \Rightarrow B &= 4|A| + \frac{1}{3^{100}} = -4A + \frac{1}{3^{100}} \\ &= -4. \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3^{100}} - 1 \right) + \frac{1}{3^{100}} = - \left(\frac{1}{3^{100}} - 1 \right) + \frac{1}{3^{100}} = -\frac{1}{3^{100}} + 1 + \frac{1}{3^{100}} = 1 \end{aligned}$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Tam Nông 2022 - 2023)

Giá trị của $Q = \frac{2}{1.3} + \frac{1}{2.3} + \frac{2}{6.5} + \frac{5}{10.15} + \frac{2}{7.15} + \frac{7}{21.28} + \frac{8}{28.36} + \frac{1}{4.45} + \frac{10}{45.55}$ là

- A. 1. B. $\frac{99}{100}$. C. $\frac{53}{55}$. D. $\frac{54}{55}$.

Lời giải

Chọn D

$$Q = \frac{2}{1.3} + \frac{1}{2.3} + \frac{2}{6.5} + \frac{5}{10.15} + \frac{2}{7.15} + \frac{7}{21.28} + \frac{8}{28.36} + \frac{1}{4.45} + \frac{10}{45.55}$$

$$Q = \frac{2}{1.3} + \frac{3}{6.3} + \frac{4}{6.10} + \frac{5}{10.15} + \frac{6}{21.15} + \frac{7}{21.28} + \frac{8}{28.36} + \frac{9}{36.45} + \frac{10}{45.55}$$

$$Q = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{15} + \frac{1}{15} - \frac{1}{21} + \frac{1}{21} - \frac{1}{28} + \frac{1}{28} - \frac{1}{36} + \frac{1}{36} - \frac{1}{45} + \frac{1}{45} - \frac{1}{55}$$

$$Q = 1 - \frac{1}{55} = \frac{54}{55}.$$

Câu 4. (HSG 7 huyện Thanh Thủy 2022 - 2023) Đề 375

Cho biểu thức $N = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$. Khẳng định đúng là

- A. $N < \frac{3}{16}$. B. $N > \frac{3}{16}$. C. $\frac{3}{16} < N < \frac{3}{4}$. D. $N > \frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn A

$$N = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$3N = 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{99}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}}.$$

$$3N + N = \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{99}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}\right).$$

$$4N = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$\frac{4N}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{99}} - \frac{1}{3^{100}} - \frac{100}{3^{101}}$$

$$4N + \frac{4N}{3} = 1 - \frac{100}{3^{100}} - \frac{1}{3^{100}} - \frac{100}{3^{101}}$$

$$\frac{16N}{3} = 1 + \left(\frac{100}{3^{100}} + \frac{1}{3^{100}} + \frac{100}{3^{101}}\right).$$

Vì $\frac{100}{3^{100}} + \frac{1}{3^{100}} + \frac{100}{3^{101}} > 0$ nên $\frac{16N}{3} < 1$.

Vậy $N < \frac{3}{16}$.

Câu 5. (HSG 7 huyện Lạng Giang 2022 - 2023)

Kết quả của phép tính $A = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \dots + \frac{1}{16}(1+2+3+\dots+16)$ là:

A. 75

B. 86

C. 76

D. 126

Lời giải

Chọn C

$$A = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \dots + \frac{1}{16}(1+2+3+\dots+16)$$

$$A = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{(2+1) \cdot 2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{(3+1) \cdot 3}{2} + \dots + \frac{1}{16} \cdot \frac{(16+1) \cdot 16}{2}$$

$$A = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} + \dots + \frac{1}{16} \cdot \frac{17 \cdot 16}{2}$$

$$A = 1 + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \dots + \frac{17}{2}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot [2 + 3 + 4 + \dots + 17]$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{(17+2) \cdot 16}{2} \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{19 \cdot 16}{2} = 19 \cdot 4 = 76$$

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 TP Bắc Ninh năm 2022-2023)

Tính: $\frac{1}{3} + \frac{3}{7} + \frac{1}{7.2} + \frac{5}{2.13} + \frac{3}{13.4} + \frac{5}{4.21}$

Lời giải

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{7} + \frac{1}{7.2} + \frac{5}{2.13} + \frac{3}{13.4} + \frac{5}{4.21}$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{5}{8 \cdot 13} + \frac{3}{13 \cdot 16} + \frac{5}{16 \cdot 21} \right)$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{4-3}{3 \cdot 4} + \frac{7-4}{4 \cdot 7} + \frac{8-7}{7 \cdot 8} + \frac{13-8}{8 \cdot 13} + \frac{16-13}{13 \cdot 16} + \frac{21-16}{16 \cdot 21} \right)$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{21} \right)$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{21} \right) = 4 \cdot \frac{2}{7} = \frac{8}{7}$$

Câu 2. (HSG 7 Thái Hoa Nghệ An năm 2022-2023)

Tính giá trị của biểu thức: $B = \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.7} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{50.103} \right) : \frac{102}{103}$

Lời giải

$$B = \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.7} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{50.103} \right) : \frac{102}{103}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{1.4} + \frac{3}{4.7} + \frac{3}{7.10} + \dots + \frac{3}{100.103} \right) : \frac{102}{103}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{100} - \frac{1}{103} \right) : \frac{102}{103}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{102}{103} \cdot \frac{103}{102} = \frac{2}{3}$$

Câu 3. (HSG 7 Đô Lương năm 2022-2023)

Chúng minh. $99 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100} \right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{99}{100}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & 99 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(1 - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{100} \right) \\ &= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{3}{3} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{4}{4} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{100}{100} - \frac{1}{100} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{99}{100} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } 99 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100} \right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{99}{100}.$$

Câu 4. (HSG 7 huyện Đô Lương; trường Lí Nam Đế, huyện Hưng Hà 2022 - 2023; tỉnh Bắc Giang 2012 - 2013)

Cho: $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022}$ và $P = \frac{1}{1012} + \frac{1}{1013} + \frac{1}{1014} + \dots + \frac{1}{2022}$.

Tính $(S - P)^{2022}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2021} + \frac{1}{2022} - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2022} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2021} + \frac{1}{2022} - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1011} \right) \\ &= \frac{1}{1012} + \frac{1}{1013} + \frac{1}{1014} + \dots + \frac{1}{2022} = P \\ \Rightarrow S - P &= 0 \Rightarrow (S - P)^{2022} = 0 \end{aligned}$$

Câu 5. (HSG 7 Hà Trung năm 2022-2023)

Tính giá trị các biểu thức sau: $D = \frac{-1}{91} + \frac{-1}{247} + \frac{-1}{475} + \frac{-1}{775} + \frac{-1}{1147}$

Lời giải

$$\begin{aligned} D &= \frac{-1}{91} + \frac{-1}{247} + \frac{-1}{475} + \frac{-1}{775} + \frac{-1}{1147} \\ &= \frac{-1}{7 \cdot 13} + \frac{-1}{13 \cdot 19} + \frac{-1}{19 \cdot 25} + \frac{-1}{25 \cdot 31} + \frac{-1}{31 \cdot 37} \\ &= \frac{-1}{6} \left(\frac{6}{7 \cdot 13} + \frac{6}{13 \cdot 19} + \frac{6}{19 \cdot 25} + \frac{6}{25 \cdot 31} + \frac{6}{31 \cdot 37} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{-1}{6} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{19} + \frac{1}{19} - \frac{1}{25} + \frac{1}{25} - \frac{1}{31} + \frac{1}{31} - \frac{1}{37} \right)$$

$$= \frac{-1}{6} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{37} \right) = \frac{-1}{6} \cdot \frac{30}{259} = \frac{-5}{259}$$

Câu 6. (HSG 7 huyện Kim Sơn, tỉnh Ninh Bình 2022 - 2023)

Rút gọn: $A = \frac{1}{100} - \frac{1}{100.99} - \frac{1}{99.98} - \frac{1}{98.97} - \dots - \frac{1}{3.2} - \frac{1}{2.1}$

Lời giải

$$A = \frac{1}{100} - \frac{1}{100.99} - \frac{1}{99.98} - \frac{1}{98.97} - \dots - \frac{1}{3.2} - \frac{1}{2.1}$$

$$A = \frac{1}{100} - \left(\frac{1}{100.99} + \frac{1}{99.98} + \frac{1}{98.97} + \dots + \frac{1}{3.2} + \frac{1}{2.1} \right)$$

$$A = \frac{1}{100} - \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{97.98} + \frac{1}{98.99} + \frac{1}{99.100} \right)$$

$$A = \frac{1}{100} - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{98} + \frac{1}{98} - \frac{1}{99} + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right)$$

$$A = \frac{1}{100} - \left(1 - \frac{1}{100} \right)$$

$$A = \frac{1}{100} - 1 + \frac{1}{100} = \frac{2}{100} - 1 = \frac{1}{50} - 1 = -\frac{49}{50}$$

Câu 7. (HSG 7 Thi thử huyện Thanh Miện 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính:

a) $S = \frac{2}{1.4} + \frac{2}{4.7} + \frac{2}{7.10} + \dots + \frac{2}{2023.2026}$

b) $P = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022}}{\frac{2021}{1} + \frac{2020}{2} + \frac{2019}{3} + \dots + \frac{2}{2020} + \frac{1}{2021}}$

Lời giải

a) $S = \frac{2}{1.4} + \frac{2}{4.7} + \frac{2}{7.10} + \dots + \frac{2}{2023.2026}$

$$\Rightarrow S \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{1.4} + \frac{3}{4.7} + \frac{3}{7.10} + \dots + \frac{3}{2023.2026}$$

$$= 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{2023} - \frac{1}{2026}$$

$$= 1 - \frac{1}{2026} = \frac{2025}{2026}$$

$$\Rightarrow S = \frac{2025}{2026} \cdot \frac{2}{3} = \frac{675}{1013}$$

b) $P = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022}}{\frac{2021}{1} + \frac{2020}{2} + \frac{2019}{3} + \dots + \frac{2}{2020} + \frac{1}{2021}}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022}}{\frac{2022-1}{1} + \frac{2022-2}{2} + \frac{2022-3}{3} + \dots + \frac{2022-2020}{2020} + \frac{2022-2021}{2021}} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022}}{\frac{2022}{1} + \frac{2022}{2} + \frac{2022}{3} + \dots + \frac{2022}{2020} + \frac{2022}{2021} - \left(\frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \dots + \frac{2020}{2020} + \frac{2021}{2021} \right)} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022}}{2022 \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2020} + \frac{1}{2021} \right) - 2021} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022}}{2022 + 2022 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2020} + \frac{1}{2021} \right) - 2021} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022}}{1 + 2022 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2020} + \frac{1}{2021} \right)} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022}}{2022 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2020} + \frac{1}{2021} + \frac{1}{2022} \right)} = \frac{1}{2022}
 \end{aligned}$$

Câu 8. (HSG 7 Thành phố Bắc Giang 2022 - 2023)

Chứng minh rằng $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{4047}{2023^2 \cdot 2024^2} < 1$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 &\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{4047}{2023^2 \cdot 2024^2} \\
 &= \frac{2^2 - 1^2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{4^2 - 3^2}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2024^2 - 2023^2}{2023^2 \cdot 2024^2} \\
 &= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2023^2} - \frac{1}{2024^2} = 1 - \frac{1}{2024^2}
 \end{aligned}$$

Ta thấy $1 - \frac{1}{2024^2} < 1$

Do vậy $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{4047}{2023^2 \cdot 2024^2} < 1$

Câu 9. (HSG 7 TX Bim Sơn 2022 - 2023; huyện Trục Ninh 2018 - 2019; huyện Tam Dự 2017 - 2018)

Thực hiện phép tính $\frac{1}{99.97} - \frac{1}{97.95} - \frac{1}{95.93} - \dots - \frac{1}{5.3} - \frac{1}{3.1}$

Lời giải

$$\begin{aligned} & \frac{1}{99.97} - \frac{1}{97.95} - \frac{1}{95.93} - \dots - \frac{1}{5.3} - \frac{1}{3.1} \\ &= \frac{1}{99.97} - \left(\frac{1}{97.95} + \frac{1}{95.93} + \dots + \frac{1}{5.3} + \frac{1}{3.1} \right) \\ &= \frac{1}{99.97} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{95} - \frac{1}{97} + \frac{1}{93} - \frac{1}{95} + \dots + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + 1 - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{99.97} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{97} \right) \\ &= \frac{1}{99.97} - \frac{1}{2} \cdot \frac{96}{97} = \frac{1}{99.97} - \frac{48}{97} = \frac{-4751}{9603} \end{aligned}$$

Câu 10. (HSG 7 Thành phố Chí Linh 2022 - 2023)

Chứng minh $S = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{4^4} + \dots + \frac{2023}{4^{2023}} < \frac{1}{2}$

Lời giải

$$S = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{4^4} + \dots + \frac{2023}{4^{2023}}$$

Nên ta có $4S = 1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{4^3} + \dots + \frac{2023}{4^{2022}}$

$$4S - S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2022}} - \frac{2023}{4^{2023}}$$

$$3S < 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2022}}$$

Đặt $A = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2022}}$

$$4A = 4 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{2021}}$$

$$4A - A = 4 - \frac{1}{4^{2022}}$$

$$\Rightarrow 3A < 4 \Rightarrow A < \frac{4}{3}$$

Suy ra $S < \frac{4}{9} < \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Vậy $S = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{4^4} + \dots + \frac{2023}{4^{2023}} < \frac{1}{2}$

Câu 11. (HSG 7 huyện Chương Mỹ 2022 - 2023)

Cho tổng $S = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \dots + \frac{1}{2024^2} + \frac{1}{2025^2}$. So sánh S với 1.

Lời giải

Ta có $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ ($k \in \mathbb{N}, k > 1$)

Thay $k = 10; 11; 12; \dots; 2025$ ta được

$$\frac{1}{10^2} < \frac{1}{9 \cdot 10}; \frac{1}{11^2} < \frac{1}{10 \cdot 11}; \frac{1}{12^2} < \frac{1}{11 \cdot 12} \dots; \frac{1}{2024^2} < \frac{1}{2023 \cdot 2024}$$

$$\text{Suy ra } S < \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{2024} - \frac{1}{2025}$$

$$\Rightarrow S < \frac{1}{9} - \frac{1}{2025} < 1$$

Vậy $S < 1$.

Câu 12. (HSG 7 huyện Mường Lát 2022 - 2023)

$$\text{Cho } A = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}. \text{ Chứng minh: } A < \frac{3}{16}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$3A = 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{99}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}}$$

$$3A + A = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$4A = \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} \right) - \frac{100}{3^{100}} \quad (1)$$

$$\text{Đặt } B = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}}$$

$$3B = 3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{97}} - \frac{1}{3^{98}}$$

$$3B + B = 3 - \frac{1}{3^{99}} \quad \text{CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS}$$

$$4B = 3 - \frac{1}{3^{99}} < 3 \Rightarrow B < \frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } 4A < \frac{3}{4} - \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{4}$$

$$\text{Do đó } A < \frac{3}{16}$$

Câu 13. (HSG 7 huyện Tiền Hải 2022 - 2023)

$$\text{Cho } M = \frac{3}{3.5} + \frac{3}{5.7} + \frac{3}{7.9} + \frac{3}{9.11} + \dots + \frac{3}{53.55}. \text{ Tính } M \text{ và so sánh } M \text{ với } \frac{1}{2}.$$

Lời giải

$$M = \frac{3}{3.5} + \frac{3}{5.7} + \frac{3}{7.9} + \frac{3}{9.11} + \dots + \frac{3}{53.55}$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \frac{1}{9.11} + \dots + \frac{1}{53.55} \right)$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \frac{2}{7.9} + \frac{2}{9.11} + \dots + \frac{2}{53.55} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{5-3}{3 \cdot 5} + \frac{7-5}{5 \cdot 7} + \frac{9-7}{7 \cdot 9} + \frac{11-9}{9 \cdot 11} + \dots + \frac{55-53}{53 \cdot 55} \right) \\
 &= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{53} - \frac{1}{55} \right) \\
 &= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{55} \right) = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{55-3}{165} \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{52}{165} = \frac{26}{55}
 \end{aligned}$$

Ta có $M = \frac{26}{55} < \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

Câu 14. (HSG 7 Trường THCS Đồng Xuân – Phúc Yên 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100}$. Chứng minh rằng $\frac{7}{12} < A < \frac{5}{6}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right) - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9} \right) - \dots - \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99} \right) - \frac{1}{100} \\
 &= \frac{5}{6} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right) - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9} \right) - \dots - \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99} \right) - \frac{1}{100} < \frac{5}{6} \quad (1)
 \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{9900} \\
 A &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{12} \right) + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{9900} = \frac{7}{12} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{9900} > \frac{7}{12} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta suy ra điều phải chứng minh.

Câu 15. (HSG 7 huyện Điện Bàn 2022 - 2023)

Cho biểu thức: $P = \frac{3}{(1 \cdot 2)^2} + \frac{5}{(2 \cdot 3)^2} + \frac{7}{(3 \cdot 4)^2} + \dots + \frac{19}{(9 \cdot 10)^2}$. Hãy so sánh P với 1.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } P &= \frac{3}{(1 \cdot 2)^2} + \frac{5}{(2 \cdot 3)^2} + \frac{7}{(3 \cdot 4)^2} + \dots + \frac{19}{(9 \cdot 10)^2} \\
 &= \frac{3}{1.4} + \frac{5}{4.9} + \frac{7}{9.16} + \dots + \frac{19}{81.100} \\
 &= 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{81} - \frac{1}{100}
 \end{aligned}$$

$$P = 1 - \frac{1}{100} < 1$$

Vậy $P < 1$.

Câu 16. (HSG 7 huyện Quảng Xương 2022 - 2023)

Tính giá trị các biểu thức sau: $B = \frac{1}{2.4} + \frac{1}{4.6} + \dots + \frac{1}{98.100}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{1}{2.4} + \frac{1}{4.6} + \dots + \frac{1}{98.100} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{98} - \frac{1}{100} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{100} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{49}{100} = \frac{49}{200}
 \end{aligned}$$

Câu 17. (HSG 7 Thị xã Hoàng Mai 2022 - 2023)

Tính: $\frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+2023}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+2023} \\
 &= \frac{1}{(1+3).3} + \frac{1}{(1+4).4} + \frac{1}{(1+5).5} + \dots + \frac{1}{(1+2023).2023} \\
 &= \frac{2}{3.4} + \frac{2}{4.5} + \frac{2}{5.6} + \dots + \frac{2}{2023.2024} \\
 &= 2 \left(\frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{2023.2024} \right) \\
 &= 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2024} \right) = \frac{2021}{3036}.
 \end{aligned}$$

Câu 18. (HSG 7 huyện Hưng Hà (đề minh họa) 2022 - 2023)

Tính $A = \frac{2.2023}{1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+2023}}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{2.2023}{1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+2023}} \\
 \text{Ta có: } &1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+2023} \\
 &= 1 + \frac{1}{3.2} + \frac{1}{4.3} + \frac{1}{5.4} + \dots + \frac{1}{2024.2023} \\
 &= 1 + \frac{2}{2.3} + \frac{2}{3.4} + \frac{2}{4.5} + \dots + \frac{2}{2023.2024} \\
 &= 1 + 2 \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2023} - \frac{1}{2024} \right) \right] \\
 &= 1 + 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2024} \right) = 1 + 1 - \frac{1}{1012} = 2 - \frac{1}{1012} = \frac{2023}{1012}
 \end{aligned}$$

$$\text{Nên } A = \frac{2 \cdot 2023}{\frac{2023}{1012}} = 2024$$

$$\text{Vậy } A = 2024$$

Câu 19. (HSG 7 huyện Quan Sơn 2022 - 2023)

$$\text{Tính bằng cách hợp lý: } S = \left(-\frac{1}{7}\right)^0 + \left(-\frac{1}{7}\right)^1 + \left(-\frac{1}{7}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{7}\right)^{2023}$$

Lời giải

$$S = \left(-\frac{1}{7}\right)^0 + \left(-\frac{1}{7}\right)^1 + \left(-\frac{1}{7}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{7}\right)^{2023}$$

$$S = 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots - \frac{1}{7^{2023}} ;$$

$$7S = 7 - 1 + \frac{1}{7} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} - \dots - \frac{1}{7^{2022}}$$

$$8S = 7 - \frac{1}{7^{2023}} \Rightarrow S = \frac{7^{2024} - 1}{8 \cdot 7^{2023}}$$

$$\text{Vậy } S = \frac{7^{2024} - 1}{8 \cdot 7^{2023}}$$

Câu 20. (HSG 7 huyện Quan Sơn 2022 - 2023)

$$\text{Cho } C = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022} \text{ và}$$

$$D = \frac{1}{1012} + \frac{1}{1013} + \frac{1}{1014} + \dots + \frac{1}{2021} + \frac{1}{2022}$$

$$\text{Tính } I = (C - D)^{2021} + 2022.$$

Lời giải

$$\text{Có } C = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2021}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2022}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2021} + \frac{1}{2022}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2022}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2021} + \frac{1}{2022}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1011}\right)$$

$$= \frac{1}{1012} + \frac{1}{1013} + \frac{1}{1014} + \dots + \frac{1}{2021} + \frac{1}{2022} = D$$

$$\text{Suy ra } C = D.$$

$$\text{Vậy } I = (C - D)^{2021} + 2022 = 2022$$

Câu 21. (HSG 7 huyện Nông Cống 2022 - 2023)

$$\text{Tính: } C = \left(\frac{1}{4 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 14} + \frac{1}{14 \cdot 19} + \dots + \frac{1}{44 \cdot 49}\right) \cdot \frac{1 - 3 - 5 - 7 - \dots - 49}{90}.$$

Lời giải

$$C = \left(\frac{1}{4.9} + \frac{1}{9.14} + \frac{1}{14.19} + \dots + \frac{1}{44.49} \right) \cdot \frac{1-3-5-7-\dots-49}{90}$$

$$C = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{14} + \frac{1}{14} - \frac{1}{19} + \dots + \frac{1}{44} - \frac{1}{49} \right) \cdot \frac{1-(3+5+7+\dots+49)}{90}$$

$$C = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{49} \right) \cdot \frac{1-(52 \cdot 24 : 2)}{90} = \frac{9}{4.49} \cdot \frac{-623}{90} = -\frac{9}{4.49} \cdot \frac{7.89}{90} = \frac{-89}{280}.$$

Vậy $C = \frac{-89}{280}$.

Câu 22. (HSG 7 tỉnh Thái Bình 2022 - 2023)

Tính: $A = \left(\frac{2}{4.9} + \frac{2}{9.14} + \frac{2}{14.19} + \dots + \frac{2}{44.49} \right) \cdot \frac{1-3-5-7-\dots-49}{623}$.

Lời giải

$$A = \left(\frac{2}{4.9} + \frac{2}{9.14} + \frac{2}{14.19} + \dots + \frac{2}{44.49} \right) \cdot \frac{1-3-5-7-\dots-49}{623}$$

$$A = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{14} + \frac{1}{14} - \frac{1}{19} + \dots + \frac{1}{44} - \frac{1}{49} \right) \cdot \frac{1-(3+5+7+\dots+49)}{623}$$

$$A = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{49} \right) \cdot \frac{1-(52 \cdot 24 : 2)}{623} = \frac{9}{4.49} \cdot \frac{-623}{623} = -\frac{9}{4.49} = -\frac{9}{196}.$$

Vậy $A = -\frac{9}{196}$.

Câu 23. (HSG 7 trường THCS Lê Quý Đôn – Hà Đông 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính: $B = \frac{1}{2.15} + \frac{1}{15.3} + \frac{1}{3.21} + \dots + \frac{6}{87.90}$

Lời giải

$$B = \frac{6}{12.15} + \frac{6}{15.18} + \frac{6}{18.21} + \dots + \frac{6}{87.90} = 2 \left(\frac{3}{12.15} + \frac{3}{15.18} + \dots + \frac{3}{87.90} \right)$$

$$B = 2 \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{15} + \frac{1}{15} - \frac{1}{18} + \dots + \frac{1}{87} - \frac{1}{90} \right) = 2 \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{90} \right) = \frac{39}{270}$$

Vậy $B = \frac{39}{270}$.

Câu 24. (HSG 7 trường Phạm Đôn Lễ - huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Tính

$$A = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{2022}(1+2+3+\dots+2022)$$

Lời giải

$$A = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{2022}(1+2+3+\dots+2022)$$

$$A = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+2) \cdot 2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{(1+3) \cdot 3}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{(1+4) \cdot 4}{2} + \dots + \frac{1}{2022} \cdot \frac{(1+2022) \cdot 2022}{2}$$

$$A = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} + \dots + \frac{1}{2022} \cdot \frac{2023 \cdot 2022}{2}$$

$$A = \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \dots + \frac{2023}{2}$$

$$A = \frac{2+3+4+5+\dots+2023}{2}$$

$$A = \frac{(2+2023) \cdot 2022}{4} = 1023637,5$$

Vậy $A = 1023637,5$

Câu 25. (HSG 7 trường Trần Thái Tông, Hưng Hà 2022 - 2023; huyện Hà Trung 2021 - 2022)

Tính: $A = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{20}(1+2+3+\dots+20)$

Lời giải

$$A = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{20}(1+2+3+\dots+20)$$

$$A = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{(2+1) \cdot 2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{(3+1) \cdot 3}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{(4+1) \cdot 4}{2} + \dots + \frac{1}{20} \cdot \frac{(20+1) \cdot 20}{2}$$

$$A = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} + \dots + \frac{1}{20} \cdot \frac{20 \cdot 21}{2}$$

$$A = \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \dots + \frac{21}{2}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot (2+3+4+5+\dots+21)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(21+2) \cdot 20}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{20 \cdot 23}{2} = 115$$

Câu 26. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường Nguyễn Tông Quai 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính : $B = \frac{10}{7 \cdot 12} + \frac{10}{12 \cdot 17} + \frac{10}{17 \cdot 22} + \dots + \frac{10}{2012 \cdot 2017} + \frac{10}{2017 \cdot 2022}$

Lời giải

$$B = \frac{10}{7 \cdot 12} + \frac{10}{12 \cdot 17} + \frac{10}{17 \cdot 22} + \dots + \frac{10}{2012 \cdot 2017} + \frac{10}{2017 \cdot 2022}$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{5}{7 \cdot 12} + \frac{5}{12 \cdot 17} + \frac{5}{17 \cdot 22} + \dots + \frac{5}{2012 \cdot 2017} + \frac{5}{2017 \cdot 2022} \right)$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \frac{1}{17} + \frac{1}{17} - \frac{1}{22} + \dots + \frac{1}{2012} - \frac{1}{2017} + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2022} \right)$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{2022} \right) = 2 \cdot \frac{2022-7}{2022 \cdot 7} = \frac{2015}{7077}$$

Vậy $B = \frac{2015}{7077}$

Câu 27. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường Lưu Khánh Đàm 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính : $\frac{3}{(1 \cdot 2)^2} + \frac{5}{(2 \cdot 3)^2} + \frac{7}{(3 \cdot 4)^2} + \dots + \frac{19}{(9 \cdot 10)^2}$

Lời giải

$$\begin{aligned} & \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + \frac{7}{(3.4)^2} + \dots + \frac{19}{(9.10)^2} \\ &= \frac{3}{1.4} + \frac{5}{4.9} + \frac{7}{9.16} + \dots + \frac{19}{81.100} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{81} - \frac{1}{100} \\ &= 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} \end{aligned}$$

Câu 28. (HSG 7 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức sau:

$$C = 2023 - \frac{1}{2}(1+2) - \frac{1}{3}(1+2+3) - \frac{1}{4}(1+2+3+4) - \dots - \frac{1}{2022}(1+2+3+\dots+2022)$$

Lời giải

$$\begin{aligned} C &= 2023 - \frac{1}{2}(1+2) - \frac{1}{3}(1+2+3) - \frac{1}{4}(1+2+3+4) - \dots - \frac{1}{2022}(1+2+3+\dots+2022) \\ &= 2023 - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+2) \cdot 2}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{(1+3) \cdot 3}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{(1+4) \cdot 4}{2} - \dots - \frac{1}{2022} \cdot \frac{(1+2022) \cdot 2022}{2} \\ &= 2023 - \frac{3}{2} - \frac{4}{3} - \frac{5}{2} - \dots - \frac{2023}{2} \\ &= 2023 - \frac{3+4+5+\dots+2023}{2} = 2023 - \frac{(3+2023) \cdot 2021}{4} = \frac{-4086454}{4} \end{aligned}$$

Câu 29. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường Duyên Hải 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức

$$B = 1 + (1+2) + (1+2+3) + (1+2+3+4) + \dots + (1+2+3+\dots+16)$$

Lời giải

Áp dụng công thức tính tổng các số hạng của dãy số cách đều

$$1+2+3+\dots+n = \frac{(1+n)n}{2} \text{ ta có:}$$

$$1+2 = \frac{(1+2)2}{2}; 1+2+3 = \frac{(1+3)3}{2}; 1+2+3+4 = \frac{(1+4)4}{2}; \dots;$$

$$1+2+3+\dots+16 = \frac{(1+16)16}{2}$$

$$\text{Khi đó: } B = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+2) \cdot 2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{(1+3) \cdot 3}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{(1+4) \cdot 4}{2} + \dots + \frac{1}{16} \cdot \frac{(1+16) \cdot 16}{2}$$

$$B = \frac{2+3+4+5+\dots+17}{2}$$

$$\frac{(2+17) \cdot 16}{2}$$

$$B = \frac{2}{2} \quad (\text{Áp dụng công thức tính tổng các số hạng của dãy số cách đều})$$

$$B = 152$$

$$\text{Vậy } B = 152$$

Câu 30. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường Văn Lang 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức $M = 2 - \frac{5}{3} + \frac{7}{6} - \frac{9}{10} + \frac{11}{15} - \frac{13}{21} + \frac{15}{28} - \frac{17}{36} + \frac{19}{45}$

Lời giải

$$\begin{aligned} M &= 2 - \frac{5}{3} + \frac{7}{6} - \frac{9}{10} + \frac{11}{15} - \frac{13}{21} + \frac{15}{28} - \frac{17}{36} + \frac{19}{45} \\ &= 2 \left(1 - \frac{5}{6} + \frac{7}{12} - \frac{9}{20} + \frac{11}{30} - \frac{13}{42} + \frac{15}{56} - \frac{17}{72} + \frac{19}{90} \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{10} \right) = \frac{6}{5} \end{aligned}$$

Câu 31. (HSG 7 tỉnh Ninh Bình; trường Vũ Thị Thục, Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho biểu thức $A = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{100}}$. Tính giá trị biểu thức

$$B = 4|A| + \frac{1}{3^{100}}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{100}} \\ 3A &= -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{99}} \\ 3A + A &= \left(-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{99}} \right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{100}} \right) \\ 4A &= \frac{1}{3^{100}} - 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3^{100}} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\text{Do } 3^{100} > 1 \Rightarrow \frac{1}{3^{100}} < 1 \Rightarrow \frac{1}{3^{100}} - 1 < 0 \Rightarrow A = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3^{100}} - 1 \right) < 0$$

$$\text{Khi đó: } |A| = -A$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow B &= 4|A| + \frac{1}{3^{100}} = -4A + \frac{1}{3^{100}} \\ &= -4 \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3^{100}} - 1 \right) + \frac{1}{3^{100}} = - \left(\frac{1}{3^{100}} - 1 \right) + \frac{1}{3^{100}} = -\frac{1}{3^{100}} + 1 + \frac{1}{3^{100}} = 1 \end{aligned}$$

Câu 32. (HSG 7 huyện Nho Quan 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức $A = \frac{5^2}{1.6} + \frac{5^2}{6.11} + \frac{5^2}{11.16} + \dots + \frac{5^2}{56.61} + \frac{5^2}{61.66}$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{5^2}{1.6} + \frac{5^2}{6.11} + \frac{5^2}{11.16} + \dots + \frac{5^2}{56.61} + \frac{5^2}{61.66} \\ &= 5 \left(\frac{5}{1.6} + \frac{5}{6.11} + \frac{5}{11.16} + \dots + \frac{5}{56.61} + \frac{5}{61.66} \right) \\ &= 5 \left(1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{56} - \frac{1}{61} + \frac{1}{61} - \frac{1}{66} \right) \end{aligned}$$

$$= 5 \left(1 - \frac{1}{66} \right) = 5 \cdot \frac{65}{66} = \frac{325}{66}$$

Vậy $A = \frac{325}{66}$.

Câu 33. (HSG 7 huyện Thanh Miện, 2021 - 2022)

Thực hiện phép tính: $A = \frac{1}{12} + \frac{7}{12.17} + \frac{7}{17.22} + \frac{7}{22.27} + \dots + \frac{7}{2017.2022}$.

Lời giải

$$A = \frac{1}{12} + \frac{7}{12.17} + \frac{7}{17.22} + \frac{7}{22.27} + \dots + \frac{7}{2017.2022}$$

$$= \frac{7}{7.12} + \frac{7}{12.17} + \frac{7}{17.22} + \frac{7}{22.27} + \dots + \frac{7}{2017.2022}$$

$$A = \frac{7}{5} \left(\frac{5}{7.12} + \frac{5}{12.17} + \frac{5}{17.22} + \frac{5}{22.27} + \dots + \frac{5}{2017.2022} \right)$$

$$A = \frac{7}{5} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \frac{1}{17} + \frac{1}{17} - \frac{1}{22} + \dots + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2022} \right)$$

$$A = \frac{7}{5} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{2022} \right) = \frac{7}{5} \cdot \frac{2015}{7.2022} = \frac{403}{2022}$$

Câu 34. (HSG 7 huyện Nghĩa Hành, 2021 - 2022)

Thực hiện phép tính: $P = \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6} + \dots + \frac{1}{2019.2020.2021} + \frac{1}{2020.2021.2022}$

Lời giải

$$P = \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6} + \dots + \frac{1}{2019.2020.2021} + \frac{1}{2020.2021.2022}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{2020.2021} - \frac{1}{2021.2022} \right)$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{2021.2022} \right)$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{337.2021 - 1}{2021.2022} = \frac{340538}{2021.2022} = \frac{170269}{2021.1011} = \frac{170269}{2042220}$$

Câu 35. (HSG 7 huyện Cao Lộc, 2021 - 2022)

Thực hiện phép tính: $A = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{2019.2021} + \frac{1}{2021.2023}$

Lời giải

$$A = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{2019.2021} + \frac{1}{2021.2023}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \dots + \frac{2}{2019.2021} + \frac{2}{2021.2023} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2021} + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2023} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2023} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2022}{2023} = \frac{1011}{2023}$$

Câu 36. (HSG 7 Thành phố Vũng Tàu, 2021 - 2022)

Thực hiện phép tính: $A = \frac{5}{28} + \frac{5}{70} + \frac{5}{130} + \frac{5}{208} + \dots + \frac{5}{9700}$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{5}{28} + \frac{5}{70} + \frac{5}{130} + \frac{5}{208} + \dots + \frac{5}{9700} \\ &= \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{4 \cdot 7} + \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{7 \cdot 10} + \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{10 \cdot 13} + \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{13 \cdot 16} + \dots + \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{97 \cdot 100} \\ &= \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{100} \right) = \frac{5}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{100} \right) = \frac{5}{3} \cdot \frac{24}{100} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Câu 37. (HSG 7 huyện Cửa Lò, tỉnh Nghệ An, 2020 - 2021)

Thực hiện phép tính:

$$A = \left(-\frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{1}{6} \right) + \left(-\frac{1}{12} \right) + \left(-\frac{1}{20} \right) + \left(-\frac{1}{30} \right) + \left(-\frac{1}{42} \right) + \left(-\frac{1}{56} \right) + \left(-\frac{1}{72} \right) + \left(-\frac{1}{90} \right).$$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \left(-\frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{1}{6} \right) + \left(-\frac{1}{12} \right) + \left(-\frac{1}{20} \right) + \left(-\frac{1}{30} \right) + \left(-\frac{1}{42} \right) + \left(-\frac{1}{56} \right) + \left(-\frac{1}{72} \right) + \left(-\frac{1}{90} \right). \\ &= - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} \right) \\ &= - \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 10} \right) \\ &= - \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) \\ &= - \left(1 - \frac{1}{10} \right) = -\frac{9}{10}. \end{aligned}$$

Câu 38. (HSG 7 huyện Bát Xát, tỉnh Lào Cai, 2021 - 2022)

Thực hiện phép tính: $M = \frac{1}{2.6} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{4.10} + \dots + \frac{1}{498.998} + \frac{1}{499.1000}$

Lời giải

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2.6} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{4.10} + \dots + \frac{1}{498.998} + \frac{1}{499.1000} \\ &= \frac{2}{4.6} + \frac{2}{6.8} + \frac{2}{8.10} + \dots + \frac{2}{996.998} + \frac{2}{998.1000} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{996} - \frac{1}{998} + \frac{1}{998} - \frac{1}{1000} = \frac{1}{4} - \frac{1}{1000} = \frac{249}{1000} \end{aligned}$$

Câu 39. (HSG 7 huyện Mường La, 2021 - 2022)

Thực hiện phép tính: $B = \frac{13}{4.9} - \frac{23}{9.14} + \frac{33}{14.19} - \frac{43}{19.24} + \dots + \frac{95}{44.49} - \frac{19.54}{49.54}$

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \frac{13}{4.9} - \frac{23}{9.14} + \frac{33}{14.19} - \frac{43}{19.24} + \dots + \frac{93}{44.49} - \frac{103}{49.54} \\ &= \frac{4+9}{4.9} - \frac{9+14}{9.14} + \frac{14+19}{14.19} - \frac{19+24}{19.24} + \dots + \frac{44+49}{44.49} - \frac{49+54}{49.54} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \frac{1}{14} + \frac{1}{14} + \frac{1}{19} - \frac{1}{19} - \frac{1}{24} + \dots + \frac{1}{44} + \frac{1}{49} - \frac{1}{49} - \frac{1}{54} = \frac{1}{4} - \frac{1}{54} = \frac{25}{108}$$

Câu 40. (HSG 7 huyện Quảng Trạch, tỉnh Quảng Bình, 2021 - 2022)

Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ ta có: $A = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{12}$.

Lời giải

Với $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ ta có: $A = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{n^3}$

$$\Rightarrow 2A = \frac{2}{3^3} + \frac{2}{4^3} + \frac{2}{5^3} + \dots + \frac{2}{n^3}$$

$$\text{Ta có: } \frac{2}{3^3} < \frac{2}{2.3.4} = \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4}$$

$$\frac{2}{4^3} < \frac{2}{3.4.5} = \frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5}$$

$$\frac{2}{5^3} < \frac{2}{4.5.6} = \frac{1}{4.5} - \frac{1}{5.6}$$

.....

$$\frac{2}{n^3} < \frac{2}{(n-1).n(n+1)} = \frac{1}{(n-1).n} - \frac{1}{n.(n+1)}$$

$$\Rightarrow 2A = \frac{2}{3^3} + \frac{2}{4^3} + \frac{2}{5^3} + \dots + \frac{2}{n^3} < \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5} + \frac{1}{4.5} - \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{(n-1).n} - \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow 2A < \frac{1}{2.3} - \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{12} - \frac{1}{2n(n+1)} < \frac{1}{12}$$

Vậy $A = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{12}$ (với $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$).

Câu 41. (HSG 7 huyện Đức Thọ, tỉnh Hà Tĩnh, 2021 - 2022)

Tính giá trị của biểu thức $Q = \frac{3}{1.2} - \frac{5}{2.3} + \frac{7}{3.4} - \dots + \frac{2019}{1009.1010} - \frac{2021}{1010.1011}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } Q = \frac{3}{1.2} - \frac{5}{2.3} + \frac{7}{3.4} - \dots + \frac{2019}{1009.1010} - \frac{2021}{1010.1011}$$

$$= \frac{1+2}{1.2} - \frac{2+3}{2.3} + \frac{3+4}{3.4} - \dots + \frac{1009+1010}{1009.1010} - \frac{1010+1011}{1010.1011}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \dots + \left(\frac{1}{1009} + \frac{1}{1010}\right) - \left(\frac{1}{1010} + \frac{1}{1011}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots + \frac{1}{1009} + \frac{1}{1010} - \frac{1}{1010} - \frac{1}{1011}$$

$$= 1 - \frac{1}{1011} = \frac{1010}{1011}$$

Câu 42. (HSG 7 huyện 2016 - 2017)

Thực hiện phép tính: $\left(\frac{1}{4.9} + \frac{1}{9.14} + \frac{1}{14.19} + \dots + \frac{1}{44.49}\right) \cdot \frac{1-3-5-7-\dots-49}{89}$

Lời giải

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{4.9} + \frac{1}{9.14} + \frac{1}{14.19} + \dots + \frac{1}{44.49}\right) \cdot \frac{1-3-5-7-\dots-49}{89} \\ &= \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{14} + \frac{1}{14} - \frac{1}{19} + \dots + \frac{1}{44} - \frac{1}{49}\right) \cdot \frac{2-(1+3+5+7+\dots+49)}{12} \\ &= \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{49}\right) \cdot \frac{2-(12.50+25)}{89} = -\frac{5.9.7.89}{5.4.7.7.89} = -\frac{9}{28} \end{aligned}$$

Câu 43. (HSG 7 huyện Hương Khê 2021 - 2022)

Tính $E = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{100}(1+1+2+\dots+100)$

Lời giải

$$\begin{aligned} E &= 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{100}(1+1+2+\dots+100) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2.3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3.4}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4.5}{2} + \dots + \frac{1}{100} \cdot \frac{100.101}{2} \\ &= 1 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{2} + \dots + \frac{101}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \dots + \frac{101}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(1+2+3+\dots+101) - \frac{1}{2} = 2575 \end{aligned}$$

Vậy $E = 2575$

Câu 44. (HSG 7 Lê Hồng Phong 2018 - 2019)

Tính nhanh : $N = \frac{1}{1000} - \frac{1}{1000.999} - \frac{1}{999.998} - \frac{1}{998.997} - \dots - \frac{1}{3.2} - \frac{1}{2.1}$

Lời giải

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{1000} - \left(\frac{1}{1000.999} + \frac{1}{999.998} + \frac{1}{998.997} + \dots + \frac{1}{3.2} + \frac{1}{2.1}\right) \\ &= \frac{1}{1000} - \left(\frac{1}{999} - \frac{1}{1000} + \frac{1}{998} - \frac{1}{999} + \frac{1}{997} - \frac{1}{998} + \dots + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{1000} - \left(1 - \frac{1}{1000}\right) = \frac{499}{500} \end{aligned}$$

Câu 45. (HSG 7 huyện Bát Xát 2022 - 2023)

Thực hiện các phép tính: $D = \frac{5^2}{1.6} + \frac{5^2}{6.11} + \dots + \frac{5^2}{26.31}$

Lời giải

$$\begin{aligned} D &= \frac{5^2}{1.6} + \frac{5^2}{6.11} + \dots + \frac{5^2}{26.31} \\ D &= 5 \left(\frac{5}{1.6} + \frac{5}{6.11} + \frac{5}{11.16} + \dots + \frac{5}{26.31}\right) \end{aligned}$$

$$= 5 \left(1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{26} - \frac{1}{31} \right)$$

$$= 5 \left(1 - \frac{1}{31} \right) = 5 \left(\frac{31}{31} - \frac{1}{31} \right) = 5 \cdot \frac{30}{31} = \frac{150}{31}$$

Vậy $D = \frac{150}{31}$.

Câu 46. (HSG 7 huyện Kim Thành 2022 - 2023)

Tính nhanh giá trị của biểu thức sau $A = \frac{1}{11.14} + \frac{1}{14.17} + \frac{1}{17.20} + \dots + \frac{1}{38.41}$.

Lời giải

$$A = \frac{1}{11.14} + \frac{1}{14.17} + \frac{1}{17.20} + \dots + \frac{1}{38.41}$$

$$A = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{11.14} + \frac{3}{14.17} + \frac{3}{17.20} + \dots + \frac{3}{38.41} \right)$$

$$A = \frac{1}{3} \left(\frac{14-11}{11.14} + \frac{17-14}{14.17} + \frac{20-17}{17.20} + \dots + \frac{41-38}{38.41} \right)$$

$$A = \frac{1}{3} \left(\frac{14}{11.14} - \frac{11}{11.14} + \frac{17}{14.17} - \frac{14}{14.17} + \frac{20}{17.20} - \frac{17}{17.20} + \dots + \frac{41}{38.41} - \frac{38}{38.41} \right)$$

$$A = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{14} + \frac{1}{14} - \frac{1}{17} + \frac{1}{17} - \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{38} - \frac{1}{41} \right)$$

$$A = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{41} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{30}{451} = \frac{10}{451}$$

Vậy $A = \frac{10}{451}$.

Câu 47. (HSG 7 trường Quang Trung 2018 - 2019)

Thực hiện phép tính: $B = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}}{\frac{1}{99} + \frac{1}{98} + \frac{1}{97} + \dots + \frac{1}{1}}$

Lời giải

$$B = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}}{\frac{1}{99} + \frac{1}{98} + \frac{1}{97} + \dots + \frac{1}{1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}}{\frac{100-1}{1} + \frac{100-2}{2} + \frac{100-3}{3} + \dots + \frac{100-99}{99}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}}{\left(\frac{100}{1} + \frac{100}{2} + \frac{100}{3} + \dots + \frac{100}{99} \right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \dots + \frac{99}{99} \right)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}}{100 + 100 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} \right) - 99} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}}{1 + 100 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} \right)} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}}{100 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100} \right)} = \frac{1}{100}
 \end{aligned}$$

Câu 48. (HSG 7 huyện Tam Nông 2018 - 2019)

Tính: $B = \frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \dots + \frac{2}{2011.2013}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \dots + \frac{2}{2011.2013} \\
 &= \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2011} - \frac{1}{2013} \\
 &= 1 - \frac{1}{2013} = \frac{2012}{2013}
 \end{aligned}$$

Câu 49. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2018 - 2019)

Cho $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015}$ và

$P = \frac{1}{1008} + \frac{1}{1009} + \frac{1}{1010} + \dots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015}$. Tính $(S - P)^{2016}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } P &= \frac{1}{1008} + \frac{1}{1009} + \frac{1}{1010} + \dots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015} \\
 &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} \right) \\
 &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015} \right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2014} \right) \\
 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015} = S
 \end{aligned}$$

Do đó $(S - P)^{2016} = 0$

Câu 50. (HSG 7 huyện Sơn Dương 2016 - 2017)

Tính $B = \frac{1}{19} + \frac{9}{19.29} + \frac{9}{29.39} + \frac{9}{39.49} + \dots + \frac{9}{1999.2009}$

Lời giải

$$B = \frac{1}{19} + \frac{9}{19.29} + \frac{9}{29.39} + \frac{9}{39.49} + \dots + \frac{9}{1999.2009}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{9}{9.19} + \frac{9}{19.29} + \frac{9}{29.39} + \frac{9}{39.49} + \dots + \frac{9}{1999.2009} \\
 &= \frac{9}{10} \cdot \left(\frac{10}{9.19} + \frac{10}{19.29} + \frac{10}{29.39} + \frac{10}{39.49} + \dots + \frac{10}{1999.2009} \right) \\
 &= \frac{9}{10} \cdot \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{19} + \frac{1}{19} - \frac{1}{29} + \frac{1}{29} - \frac{1}{39} + \dots + \frac{1}{1999} - \frac{1}{2009} \right) \\
 &= \frac{9}{10} \cdot \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{2009} \right) = \frac{200}{2009}
 \end{aligned}$$

Câu 51. (HSG 7 huyện Quê Sơn năm học 2018 - 2019; huyện Kim Sơn 2017 - 2018; trường Đức Thắng, Hiệp Hòa 2016 - 2017)

Tính: $P = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{16}(1+2+3+\dots+16)$

Lời giải

$$P = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{16}(1+2+3+\dots+16)$$

$$P = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2.3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3.4}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4.5}{2} + \dots + \frac{1}{16} \cdot \frac{16.17}{2}$$

$$P = \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \dots + \frac{17}{2}$$

$$P = \frac{1}{2}(1+2+3+\dots+17-1) = 76.$$

Câu 52. (HSG 7 huyện Thanh Oai, trường THCS Hồng Dương năm học 2017 - 2018)

Tính: $B = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{50}} - \frac{1}{3^{51}}$

Lời giải

$$B = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{50}} - \frac{1}{3^{51}}$$

$$B = \frac{1}{(-3)} + \frac{1}{(-3)^2} + \frac{1}{(-3)^3} + \dots + \frac{1}{(-3)^{50}} + \frac{1}{(-3)^{51}}$$

$$-\frac{1}{3}B = \frac{1}{(-3)^2} + \frac{1}{(-3)^3} + \dots + \frac{1}{(-3)^{51}} + \frac{1}{(-3)^{52}}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}B = \frac{1}{-3} - \frac{1}{(-3)^{52}} = \frac{-3^{51}-1}{3^{52}}$$

$$\Rightarrow B = \frac{-3^{51}-1}{4.3^{51}}$$

Câu 53. (HSG 7 huyện Đức Thọ năm học 2017 - 2018)

Thực hiện phép tính: $\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8.15} + \frac{1}{15.22} + \dots + \frac{1}{43.50} \right) \frac{4-3-5-7-\dots-49}{217}$

Lời giải

$$\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8.15} + \frac{1}{15.22} + \dots + \frac{1}{43.50} \right) \frac{4-3-5-7-\dots-49}{217}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{7} \cdot \left(1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{43} - \frac{1}{50} \right) \cdot \frac{5 - (1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 49)}{217} \\
 &= \frac{1}{7} \cdot \left(1 - \frac{1}{50} \right) \cdot \frac{5 - (12 \cdot 50 + 25)}{217} \\
 &= \frac{1}{7} \cdot \frac{49}{50} \cdot \frac{5 - 625}{7 \cdot 31} \\
 &= -\frac{7 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 31}{7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 31} \\
 &= -\frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

Câu 54. (HSG 7 trường Lý Thường Kiệt 2017 - 2018; trường Giao Tân 2016 - 2017)

Rút gọn $A = \frac{1}{100} - \frac{1}{100.99} - \frac{1}{99.98} - \frac{1}{98.97} - \dots - \frac{1}{3.2} - \frac{1}{2.1}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 1.1) A &= \frac{1}{100} - \frac{1}{100.99} - \frac{1}{99.98} - \frac{1}{98.97} - \dots - \frac{1}{3.2} - \frac{1}{2.1} \\
 A &= \frac{1}{100} - \left(\frac{1}{100.99} + \frac{1}{99.98} + \frac{1}{98.97} + \dots + \frac{1}{3.2} + \frac{1}{2.1} \right) \\
 A &= \frac{1}{100} - \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{97.98} + \frac{1}{98.99} + \frac{1}{99.100} \right) \\
 A &= \frac{1}{100} - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{98} + \frac{1}{98} - \frac{1}{99} + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right) \\
 A &= \frac{1}{100} - \left(1 - \frac{1}{100} \right) = \frac{-49}{50}
 \end{aligned}$$

Câu 55. (HSG 7 trường thực hành Sài Gòn 2017 - 2018)

Tính nhanh : $N = \frac{1}{1000} - \frac{1}{1000.999} - \frac{1}{999.998} - \frac{1}{998.997} - \dots - \frac{1}{3.2} - \frac{1}{2.1}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{1}{1000} - \left(\frac{1}{1000.999} + \frac{1}{999.998} + \frac{1}{998.997} + \dots + \frac{1}{3.2} + \frac{1}{2.1} \right) \\
 &= \frac{1}{1000} - \left(\frac{1}{999} - \frac{1}{1000} + \frac{1}{998} - \frac{1}{999} + \frac{1}{997} - \frac{1}{998} + \dots + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{1000} - \left(1 - \frac{1}{1000} \right) = \frac{499}{500}
 \end{aligned}$$

Câu 56. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2017 - 2018)

Tính: $P = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{2012}(1+2+3+\dots+2012)$

Lời giải

$$P = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{2012}(1+2+3+\dots+2012)$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2.3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3.4}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4.5}{2} + \dots + \frac{1}{2012} \cdot \frac{2012.2013}{2} \\
 &= \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \dots + \frac{2013}{2} = \frac{1}{2}(2+3+4+\dots+2013) \\
 &= \frac{1}{2}(1+2+3+\dots+2013-1) = \frac{1}{2}\left(\frac{2012 \cdot 2013}{2} - 1\right) = \frac{2025077}{2}
 \end{aligned}$$

Câu 57. (HSG 7 huyện Hòa Bình 2016 - 2017)

Tính giá trị biểu thức: $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100}$

Lời giải

$$A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{99.100} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$$

Câu 58. (HSG 7 huyện Đức Thọ 2015 - 2016)

Thực hiện phép tính: $\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8.15} + \frac{1}{15.22} + \dots + \frac{1}{43.50}\right) \cdot \frac{4-3-5-7-\dots-49}{217}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8.15} + \frac{1}{15.22} + \dots + \frac{1}{43.50}\right) \cdot \frac{4-3-5-7-\dots-49}{217} \\
 &= \frac{1}{7} \cdot \left(1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{15} + \frac{1}{15} - \frac{1}{22} + \dots + \frac{1}{43} - \frac{1}{50}\right) \cdot \frac{5 - (1+3+5+7+\dots+49)}{217} \\
 &= \frac{1}{7} \cdot \left(1 - \frac{1}{50}\right) \cdot \frac{5 - (12.50 + 25)}{217} \\
 &= \frac{1}{7} \cdot \frac{49}{50} \cdot \frac{5 - 625}{7.31} = \frac{7.7.2.2.5.31}{7.2.5.5.7.31} = -\frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

Câu 59. (HSG 7 trường Nghĩa Điền, Tư Nghĩa 2017 - 2018)

Tính tổng: $A = \frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \dots + \frac{2}{2011.2013}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \dots + \frac{2}{2011.2013} \\
 &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2011} - \frac{1}{2013} = 1 - \frac{1}{2013} = \frac{2012}{2013}
 \end{aligned}$$

Câu 60. (HSG 7 Thi thử Hiệp Hòa 2022 - 2023 lần 2)

Cho $A = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{1000^2}$. Chứng minh rằng: $A < \frac{25}{36}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{1000^2} \\
 \Rightarrow A &< \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{999.1000} \\
 \Rightarrow A &< \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{999} - \frac{1}{1000}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - \frac{1}{1000}$$

$$\Rightarrow A < \frac{25}{36} - \frac{1}{1000} < \frac{25}{36} \text{ (đpcm)}$$

$$\text{Vậy } A < \frac{25}{36}.$$



CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS

CD1: THỰC HIỆN PHÉP TÍNH
DẠNG 5: TÍNH TỔNG TỰ NHIÊN DẠNG TÍCH

A. Trắc nghiệm

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Trì 2022 - 2023)

So sánh hai biểu thức A và B biết $A = 2.1 + 2.3 + 2.5 + \dots + 2.97 + 2.99$ và $B = 2.2 + 2.4 + 2.6 + \dots + 2.98 + 100$

Lời giải

Ta có: $A = 2.1 + 2.3 + 2.5 + \dots + 2.97 + 2.99$

$$B = 2.2 + 2.4 + 2.6 + \dots + 2.98 + 100$$

$$\Rightarrow B - A = \underbrace{2 + 2 + 2 + \dots + 2}_{49 \text{ số}} + 100 - 2.99$$

$$B - A = 2 \cdot 49 + 2 \cdot 50 - 2 \cdot 99$$

$$B - A = 2 \cdot (49 + 50 - 99) = 0$$

$$\Rightarrow B - A = 0 \Rightarrow A = B$$

Vậy $A = B$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Nghi Xuân 2022 - 2023)

Tính kết quả của biểu thức $B = 1 \cdot 5 + 5 \cdot 9 + 9 \cdot 13 + 13 \cdot 17 + \dots + 93 \cdot 97 + 97 \cdot 101$

Lời giải

$$B = 1 \cdot 5 + 5 \cdot 9 + 9 \cdot 13 + 13 \cdot 17 + \dots + 93 \cdot 97 + 97 \cdot 101$$

$$12A = 1 \cdot 5 \cdot 12 + 5 \cdot 9 \cdot 12 + 9 \cdot 13 \cdot 12 + 13 \cdot 17 \cdot 12 + \dots + 93 \cdot 97 \cdot 12 + 97 \cdot 101 \cdot 12$$

$$12A = 1.5 \cdot (9 + 3) + 5.9 \cdot (13 - 1) + 9.13 \cdot (17 - 5) + 13.17 \cdot (21 - 9)$$

$$+ \dots + 93.97 \cdot (101 - 89) + 97.101 \cdot (105 - 93)$$

$$12A = 1.5.9 + 1.5.3 - 1.5.9 + 5.9.13 - 5.9.13 + 9.13.17 - 9.13.17 + \dots - 89.93.97 + 93.97.101 - 93.97.101 + 97.101.105$$

$$12A = 97.101.105 + 15$$

$$\Rightarrow A = \frac{97.101.105 + 15}{12} = 85725.$$

Vậy $A = 85725$

Câu 3. (HSG 7 huyện Tam Điệp, tỉnh Ninh Bình, trường 2022 - 2023)

Cho $f(x) = x^2 + x$. Tính tổng $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(47) + f(48)$

Lời giải

Ta có $f(x) = x^2 + x \Rightarrow f(x) = x(x+1)$

$$M = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(47) + f(48)$$

$$M = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 47.48 + 48.49$$

$$3M = 1.2(3-0) + 2.3(4-1) + 3.4(5-2) + \dots + 47.48(49-46) + 48.49(50-47)$$

$$3M = 1.2.3 + 2.3.4 - 1.2.3 + 3.4.5 - 2.3.4 + \dots + 47.48.49 - 46.47.48 + 48.49.50 - 47.48.49$$

$$3M = 48.49.50$$

$$\Rightarrow M = \frac{48.49.50}{3} = 39200$$

Câu 4. (HSG 7 huyện Châu Đức năm học 2018-2019; huyện Tiền Hải 2016 - 2017)

Tính giá trị biểu thức: $B = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + 4.5.6 + \dots + 17.18.19$

Lời giải

$$B = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + 4.5.6 + \dots + 17.18.19$$

$$\Rightarrow 4B = 1.2.3.4 + 2.3.4.(5-1) + 3.4.5.(6-2) + \dots + 17.18.19.(20-16)$$

$$4B = 1.2.3.4 + 2.3.4.5 - 1.2.3.4 + 3.4.5.6 - 2.3.4.5 + \dots + 17.18.19.20 - 16.17.18.19$$

$$4B = 17.18.19.20$$

$$\Rightarrow B = 17.18.19.5 = 29070$$

Vậy $B = 29070$.

Câu 5. (HSG 7 huyện 2018 - 2019)

Tính giá trị biểu thức: $B = \frac{1.2 + 2.4 + 3.6 + 4.8 + 5.10}{3.4 + 6.8 + 9.12 + 12.16 + 15.20}$

Lời giải

$$B = \frac{1.2 + 2.4 + 3.6 + 4.8 + 5.10}{3.4 + 6.8 + 9.12 + 12.16 + 15.20}$$

Ta có: $3.4 + 6.8 + 9.12 + 12.16 + 15.20$

$$= 6.1.2 + 6.2.4 + 6.3.6 + 6.4.8 + 6.5.10$$

$$= 6.(1.2 + 2.4 + 3.6 + 4.8 + 5.10)$$

$$\Rightarrow B = \frac{1.2 + 2.4 + 3.6 + 4.8 + 5.10}{6.(1.2 + 2.4 + 3.6 + 4.8 + 5.10)} = \frac{1}{6}$$

CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS

CD1: THỰC HIỆN PHÉP TÍNH
DẠNG 6: TÍNH TÍCH

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Thủy, tỉnh Phú Thọ, năm 2021 - 2022)

Rút gọn biểu thức: $A = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2022}\right)$ ta được

- A.** $A = \frac{3}{2}$. **B.** $A = \frac{2021}{2022}$. **C.** $A = \frac{2023}{2}$. **D.** $A = \frac{2}{2021}$.

Lời giải

Chọn C

$$A = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2022}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \dots \frac{2023}{2022} = \frac{2023}{2}.$$

Vậy chọn đáp án C.

Câu 2. (HSG 7 Đề khảo sát lần 3, 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức: $B = \left(1 - \frac{1}{1+2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{1+2+3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{1+2+\dots+2021}\right)$

- A.** $\frac{671}{2021}$. **B.** $\frac{2023}{6063}$. **C.** $\frac{2019}{6063}$. **D.** $\frac{2020}{6063}$.

Lời giải

Chọn D

$$B = \left(1 - \frac{1}{1+2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{1+2+3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{1+2+\dots+2021}\right)$$

$$B = \left(1 - \frac{1}{\frac{(1+2) \cdot 2}{2}}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{\frac{(1+3) \cdot 3}{2}}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{\frac{(1+4) \cdot 4}{2}}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{\frac{(1+2021) \cdot 2021}{2}}\right)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{10} \dots \frac{2022 \cdot 2021 - 2}{2021 \cdot 2022} = \frac{4}{6} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{18}{20} \dots \frac{2021 \cdot 2022 - 2}{2021 \cdot 2022}$$

$$= \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} \cdot \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} \cdot \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} \dots \frac{2020 \cdot 2023}{2021 \cdot 2022} = \frac{2023}{6063}$$

Câu 3. (HSG 7 Đề khảo sát lần 3, 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức: $\left(\frac{3}{4} - 81\right) \cdot \left(\frac{3^2}{5} - 81\right) \cdot \left(\frac{3^3}{6} - 81\right) \dots \left(\frac{3^{2018}}{2021} - 81\right)$

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2021. **D.** 3^{2021} .

Lời giải

Chọn A

$$\left(\frac{3}{4} - 81\right) \cdot \left(\frac{3^2}{5} - 81\right) \cdot \left(\frac{3^3}{6} - 81\right) \dots \left(\frac{3^{2018}}{2021} - 81\right)$$

Ta thấy: trong dãy số trên có $\frac{3^6}{9} - 81 = 0$.

$$\text{Do đó } \left(\frac{3}{4} - 81\right) \cdot \left(\frac{3^2}{5} - 81\right) \cdot \left(\frac{3^3}{6} - 81\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{3^{2018}}{2021} - 81\right) = 0.$$

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 TP Thanh Hoá năm 2022-2023)

$$\text{Cho } A = \left(\frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{3} - 1\right) \left(\frac{1}{4} - 1\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{2019} - 1\right) \left(\frac{1}{2020} - 1\right) \left(\frac{1}{2021} - 1\right)$$

$$B = \left(-1\frac{1}{2}\right) \left(-1\frac{1}{3}\right) \left(-1\frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(-1\frac{1}{2019}\right) \left(-1\frac{1}{2020}\right)$$

Tính giá trị biểu thức $M = A \cdot B$.

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{3} - 1\right) \left(\frac{1}{4} - 1\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{2019} - 1\right) \left(\frac{1}{2020} - 1\right) \left(\frac{1}{2021} - 1\right) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{2}{3}\right) \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(-\frac{2018}{2019}\right) \left(-\frac{2019}{2020}\right) \left(-\frac{2020}{2021}\right) \quad (2020 \text{ thừa số}) \\ &= \frac{1}{2021} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \left(-1\frac{1}{2}\right) \left(-1\frac{1}{3}\right) \left(-1\frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(-1\frac{1}{2019}\right) \left(-1\frac{1}{2020}\right) \\ &= \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{4}{3}\right) \left(-\frac{5}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(-\frac{2020}{2019}\right) \left(-\frac{2021}{2020}\right) \quad (2019 \text{ thừa số}) \\ &= \frac{-2021}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } M = A \cdot B = \frac{1}{2021} \cdot \frac{-2021}{2} = \frac{-1}{2}$$

Câu 2. (HSG 7 Thọ Xuân Thanh Hoá năm 2022-2023)

$$\text{Tính giá trị biểu thức: } B = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2022}\right) \left(1 - \frac{1}{2023}\right)$$

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2022}\right) \left(1 - \frac{1}{2023}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2021}{2022} \cdot \frac{2022}{2023} = \frac{1}{2023} \end{aligned}$$

Câu 3. (HSG 7 Hậu Lộc năm 2022-2023)

$$\text{Tính tích } P = \left(1 + \frac{7}{9}\right) \left(1 + \frac{7}{20}\right) \left(1 + \frac{7}{33}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{7}{2900}\right).$$

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= \left(1 + \frac{7}{9}\right) \left(1 + \frac{7}{20}\right) \left(1 + \frac{7}{33}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{7}{2900}\right) \\ &= \frac{2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 51 \cdot 57}{1 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 11 \cdot \dots \cdot 50 \cdot 58} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 51}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 50} \cdot \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 57}{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot \dots \cdot 58} = \frac{51 \cdot 8}{58} = \frac{204}{29} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{204}{29}.$$

Câu 4. (HSG 7 Lập Thạch-Thanh Hoá năm 2022-2023)

$$\text{Tính bằng cách hợp lí: } B = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \left(1 - \frac{1}{10}\right) \left(1 - \frac{1}{15}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{210}\right)$$

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \left(1 - \frac{1}{10}\right) \left(1 - \frac{1}{15}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{210}\right) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{5}{6}\right) \left(\frac{9}{10}\right) \left(\frac{14}{15}\right) \dots \left(\frac{209}{210}\right) = \left(\frac{4}{6}\right) \left(\frac{10}{12}\right) \left(\frac{18}{20}\right) \left(\frac{28}{30}\right) \dots \left(\frac{418}{420}\right) \\ &= \frac{(1.4).(2.5).(3.6).(4.7).....(19.22)}{(2.3).(3.4).(4.5).(5.6).....(20.21)} = \frac{(1.2.3.....19).(4.5.6.7.....22)}{(2.3.4.....20).(3.4.5.6.....21)} = \frac{11}{30} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } B = \frac{11}{30}$$

Câu 5. (HSG 7 TX Hương Trà 2022 - 2023)

$$\text{Tính: } B = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2 \cdot (-1)^{2023}}{\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(-\frac{5}{12}\right)^3}$$

Lời giải

$$B = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2 \cdot (-1)^{2023}}{\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(-\frac{5}{12}\right)^3} = \frac{\frac{8}{27} \cdot \frac{9}{16} \cdot (-1)}{\frac{4}{25} \cdot \frac{125}{1728}} = \frac{-1}{6} : \frac{-5}{432} = \frac{1}{6} \cdot \frac{432}{5} = \frac{72}{5}$$

Câu 6. (HSG 7 huyện Yên Bình – Yên Bái 2022 - 2023)

$$\text{Tính giá trị các biểu thức: } C = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{400}\right)$$

Lời giải

$$\begin{aligned} C &= \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{400}\right) \\ C &= \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} \dots \frac{399}{400} = \frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{3.5}{4.4} \dots \frac{19.21}{20.20} = \frac{(1.2.3...19)(3.4.5...21)}{(2.3.4...20)(2.3.4.5...20)} \end{aligned}$$

$$C = \frac{21}{20.2} = \frac{21}{40}$$

$$\text{Vậy } C = \frac{21}{40}.$$

Câu 7. (HSG 7 huyện Nông Công 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức sau:

$$C = \left(\frac{1}{4.9} + \frac{1}{9.14} + \frac{1}{14.19} + \dots + \frac{1}{44.49}\right) \cdot \frac{1-3-5-7-\dots-49}{90}.$$

Lời giải

$$C = \left(\frac{1}{4.9} + \frac{1}{9.14} + \frac{1}{14.19} + \dots + \frac{1}{44.49} \right) \cdot \frac{1-3-5-7-\dots-49}{90}$$

$$C = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{14} + \frac{1}{14} - \frac{1}{19} + \dots + \frac{1}{44} - \frac{1}{49} \right) \cdot \frac{1-(3+5+7+\dots+49)}{90}$$

$$C = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{49} \right) \cdot \frac{1-(52 \cdot 24 : 2)}{90} = \frac{9}{4.49} \cdot \frac{-623}{90} = -\frac{9}{4.49} \cdot \frac{-7.89}{90} = \frac{-89}{280}.$$

$$\text{Vậy } C = \frac{-89}{280}$$

Câu 8. (HSG 7)

$$\text{Tính tích: } A = \frac{2^2}{1.3} \cdot \frac{3^2}{2.4} \cdot \frac{4^2}{3.5} \dots \frac{20^2}{19.21}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{3.3}{2.4} \cdot \frac{4.4}{3.5} \dots \frac{20.20}{19.21} = \frac{(2.3.4 \dots 20)(2.3.4 \dots 20)}{(1.2.3 \dots 19)(3.4.5 \dots 21)} = \frac{20.2}{21} = \frac{40}{21}$$

Câu 9. (HSG 7)

$$\text{Tính tích: } C = \left(1 - \frac{1}{1+2} \right) \left(1 - \frac{1}{1+2+3} \right) \left(1 - \frac{1}{1+2+3+4} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{1+2+3+\dots+2016} \right)$$

Lời giải

$$\begin{aligned} C &= \left(1 - \frac{1}{1+2} \right) \left(1 - \frac{1}{1+2+3} \right) \left(1 - \frac{1}{1+2+3+4} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{1+2+3+\dots+2016} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{\frac{(1+2) \cdot 2}{2}} \right) \left(1 - \frac{1}{\frac{(1+3) \cdot 3}{2}} \right) \left(1 - \frac{1}{\frac{(1+4) \cdot 4}{2}} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{\frac{(1+2016) \cdot 2016}{2}} \right) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{10} \dots \frac{2017 \cdot 2016 - 2}{2016 \cdot 2017} = \frac{4}{6} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{18}{20} \dots \frac{2016 \cdot 2017 - 2}{2016 \cdot 2017} \\ &= \frac{1.4}{2.3} \cdot \frac{2.5}{3.4} \cdot \frac{3.6}{4.5} \dots \frac{2015 \cdot 2018}{2016 \cdot 2017} = \frac{1004}{3009} \end{aligned}$$

Câu 10. (HSG 7)

$$\text{Tính: } A = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7} \right) \dots \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{99} \right)$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{1}{2.3} \cdot \frac{3}{2.5} \cdot \frac{5}{2.7} \dots \frac{97}{2.99} = \frac{(1.3.5 \dots 97)}{2^{49} \cdot (3.5.7 \dots 99)} = \frac{1}{2^{49} \cdot 99}$$

Câu 11. (HSG 7 Trường Trà My 2018 - 2019; trường Hiền Quan 2017 - 2018; trường Xuân Dương 2013 - 2014)

$$\text{Tính } \left(\frac{3}{4} - 81 \right) \cdot \left(\frac{3^2}{5} - 81 \right) \cdot \left(\frac{3^3}{6} - 81 \right) \dots \left(\frac{3^{2000}}{2003} - 81 \right)$$

Lời giải

$$\left(\frac{3}{4}-81\right)\cdot\left(\frac{3^2}{5}-81\right)\cdot\left(\frac{3^3}{6}-81\right)\cdot\dots\cdot\left(\frac{3^{2000}}{2003}-81\right)$$

Ta thấy: trong dãy số trên có $\frac{3^6}{9}-81=0$.

$$\text{Do đó } \left(\frac{3}{4}-81\right)\cdot\left(\frac{3^2}{5}-81\right)\cdot\left(\frac{3^3}{6}-81\right)\cdot\dots\cdot\left(\frac{3^{2000}}{2003}-81\right)=0.$$

Câu 12. (HSG 7 huyện Việt Yên 2017 - 2018)

$$\text{Tính: } B = \frac{1}{2} : \left(-1\frac{1}{2}\right) : \left(1\frac{1}{3}\right) : \left(-1\frac{1}{4}\right) : 1\frac{1}{5} : \left(-1\frac{1}{6}\right) : \dots : \left(-1\frac{1}{100}\right)$$

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2} : \left(-1\frac{1}{2}\right) : 1\frac{1}{3} : \left(-1\frac{1}{4}\right) : 1\frac{1}{5} : \left(-1\frac{1}{6}\right) : \dots : \left(-1\frac{1}{100}\right) \\ &= \frac{1}{2} : \frac{-3}{2} : \frac{4}{3} : \frac{-5}{4} : \frac{6}{5} : \frac{-7}{6} : \dots : \frac{-101}{100} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{3} \cdot \frac{-3}{4} \cdot \frac{-4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{-6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{-100}{101} \\ &= \frac{1.2.3.4.5.6.\dots.100}{2.3.4.5.6.7.\dots.101} = \frac{1}{101} \end{aligned}$$

Câu 13. (HSG 7 huyện Kim Thành 2022 - 2023)

$$\text{Tính hợp lý giá trị biểu thức } B = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{19.21}\right)$$

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{19.21}\right) \\ B &= \frac{4}{1.3} \cdot \frac{9}{2.4} \cdot \frac{16}{3.5} \cdot \dots \cdot \frac{400}{19.21} \\ B &= \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{3.3}{2.4} \cdot \frac{4.4}{3.5} \cdot \dots \cdot \frac{20.20}{19.21} \\ B &= \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{20}{19} \cdot \frac{20}{21}\right) \\ B &= \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{20}{19}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{20}{21}\right) \\ B &= \frac{20.2}{1.21} = \frac{40}{21} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } B = \frac{40}{21}.$$

Câu 14. (HSG 7 huyện Sơn Trà 2018 - 2019; huyện Bồ Trạch; huyện Cẩm Phả 2017 - 2018; huyện Thiệu Hóa 2016 - 2017; huyện Triệu Sơn 2015 - 2016)

$$\text{Tính giá trị các biểu thức sau: } A = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2015.2017}\right)$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2015.2017}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5}\right) \cdots \left(\frac{2016}{2015} \cdot \frac{2016}{2017}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5}\right) \cdots \left(\frac{2016}{2015} \cdot \frac{2016}{2017}\right) = \frac{2016}{2017}
 \end{aligned}$$

Câu 15. (HSG 7 Trường Đông Xuân, TP Phúc Yên, Vĩnh Lộc; huyện Trục Ninh 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức: $C = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2021.2023}\right)$

Lời giải

$$C = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2021.2023}\right)$$

$$C = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{1.3}\right) \left(\frac{9}{2.4}\right) \left(\frac{16}{3.5}\right) \cdots \left(\frac{2022^2}{2001.2023}\right)$$

$$C = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5}\right) \cdots \left(\frac{2022}{2021} \cdot \frac{2022}{2023}\right)$$

$$C = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{2022}{2021}\right) \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2022}{2023}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2022}{1} \cdot \frac{2}{2023} = \frac{2022}{2023}$$

Vậy $C = \frac{2022}{2023}$.

Câu 16. (HSG 7 huyện Nga Sơn 2016 - 2017)

Thực hiện phép tính $C = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \left(1 - \frac{1}{10}\right) \left(1 - \frac{1}{15}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{210}\right)$

Lời giải

$$C = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \left(1 - \frac{1}{10}\right) \left(1 - \frac{1}{15}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{210}\right)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{14}{15} \cdots \frac{209}{210}$$

$$= \frac{4}{6} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{18}{20} \cdot \frac{28}{30} \cdots \frac{418}{420} = \frac{(1.4)(2.5) \cdot (3.6) \cdot (4.7) \cdots (19.22)}{(2.3) \cdot (3.4) \cdot (4.5) \cdot (5.6) \cdots (20.21)}$$

$$= \frac{(1.2.3 \cdots 19) \cdot (4.5.6.7 \cdots 22)}{(2.3.4 \cdots 20) \cdot (3.4.5.6 \cdots 21)} = \frac{11}{30}$$

Câu 17. (HSG 7 huyện Trục Ninh 2022 - 2023; huyện Việt Yên 2018 - 2019)

Tính $A = \left(\frac{1}{4} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{9} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{16} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{100} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{121} - 1\right)$

Lời giải

$$A = \left(\frac{1}{4} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{9} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{16} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{100} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{121} - 1\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-3}{4} \cdot \frac{-8}{9} \cdot \frac{-15}{16} \cdots \frac{-99}{100} \cdot \frac{-120}{121} \\
 &= \frac{1.3}{2^2} \cdot \frac{2.4}{3^2} \cdot \frac{3.5}{4^2} \cdots \frac{9.11}{10^2} \cdot \frac{10.12}{11^2} \\
 &= \frac{1.2.3.4 \cdots 10.3.4.5.6 \cdots 11.12}{2^2.3^2 \cdots 11^2} \\
 &= \frac{1.2.11.12}{2^2.11^2} = \frac{12}{22} = \frac{6}{11}
 \end{aligned}$$

Câu 18. (HSG 7 huyện Thanh Miện 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính: $\left(\frac{1}{2^2}-1\right)\left(\frac{1}{3^2}-1\right)\left(\frac{1}{4^2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{100^2}-1\right)\left(\frac{1}{101^2}-1\right)$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{1}{2^2}-1\right)\left(\frac{1}{3^2}-1\right)\left(\frac{1}{4^2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{100^2}-1\right)\left(\frac{1}{101^2}-1\right) \\
 &= \frac{-3}{2^2} \cdot \frac{-8}{3^2} \cdot \frac{-15}{4^2} \cdots \frac{-9999}{100^2} \cdot \frac{-10200}{101^2} \\
 &= \frac{-1.3}{2^2} \cdot \frac{-2.4}{3^2} \cdot \frac{-3.5}{4^2} \cdots \frac{-99.101}{100^2} \cdot \frac{-100.102}{101^2} \\
 &= \frac{-1.(-2).(-3)\cdots(-100).3.4.5\cdots 102}{2.3.4\cdots 101.2.3.4\cdots 101} \\
 &= \frac{1.2.3\cdots 100.3.4.5\cdots 102}{2.3.4\cdots 101.2.3.4\cdots 101} = \frac{1.102}{101.2} = \frac{51}{101}
 \end{aligned}$$

Câu 19. (HSG 7 huyện Nga Sơn – Thanh Hóa; Tp Thủ Đức 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính: $C = \left(\frac{1}{2^2}-1\right) \cdot \left(\frac{1}{3^2}-1\right) \cdot \left(\frac{1}{4^2}-1\right) \cdots \left(\frac{1}{2023^2}-1\right)$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 C &= \left(\frac{1}{2^2}-1\right) \cdot \left(\frac{1}{3^2}-1\right) \cdot \left(\frac{1}{4^2}-1\right) \cdots \left(\frac{1}{2023^2}-1\right) \\
 C &= \frac{1-2^2}{2^2} \cdot \frac{1-3^2}{3^2} \cdot \frac{1-4^2}{4^2} \cdots \frac{1-2023^2}{2023^2} \\
 C &= \frac{-3}{2^2} \cdot \frac{-8}{3^2} \cdot \frac{-15}{4^2} \cdots \frac{-4092528}{2023^2} \\
 C &= \frac{3}{2^2} \cdot \frac{8}{3^2} \cdot \frac{15}{4^2} \cdots \frac{4092528}{2023^2} \\
 C &= \frac{1.3}{2^2} \cdot \frac{2.4}{3^2} \cdot \frac{3.5}{4^2} \cdots \frac{2022 \cdot 2024}{2023^2} \\
 C &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2022 \cdot 2024}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdots 2023^2} \\
 C &= \frac{(1.2.3.4.5 \cdots 2022)(3.4.5 \cdots 99.2024)}{(2.3.4.5 \cdots 99.2023)(2.3.4.5 \cdots 2023)} = \frac{1.2024}{2023.2} = \frac{1012}{2023}
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } C = \frac{1012}{2023}.$$

Câu 20. (HSG 7 tỉnh Thái Bình 2022 - 2023)

Cho $B = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right)\left(\frac{1}{3^2} - 1\right)\left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1\right)$. Hãy so sánh B với $-\frac{1}{2}$

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{1}{2^2} - 1\right)\left(\frac{1}{3^2} - 1\right)\left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1\right) \\ &= \frac{-3}{2^2} \cdot \frac{-8}{3^2} \cdot \frac{-15}{4^2} \dots \frac{-9999}{100^2} \\ &= \frac{-1.3}{2^2} \cdot \frac{-2.4}{3^2} \cdot \frac{-3.5}{4^2} \dots \frac{-99.101}{100^2} \\ &= \frac{-1 \cdot (-2) \cdot (-3) \dots (-99) \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots 101}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 101 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 101} \\ &= -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 99 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots 101}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 100 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 100} = -\frac{1 \cdot 101}{100 \cdot 2} = -\frac{101}{200} \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \frac{101}{200} > \frac{100}{200} = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{101}{200} < -\frac{100}{200} = -\frac{1}{2} \text{ hay } B < -\frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } B < -\frac{1}{2}.$$

Câu 21. (HSG 7 TP Sầm Sơn, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính: $B = \left(1 - \frac{1}{15}\right)\left(1 - \frac{1}{21}\right)\left(1 - \frac{1}{28}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{210}\right)$

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \left(1 - \frac{1}{15}\right)\left(1 - \frac{1}{21}\right)\left(1 - \frac{1}{28}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{210}\right) \\ &= \frac{14}{15} \cdot \frac{20}{21} \cdot \frac{27}{28} \dots \frac{209}{210} = \frac{28}{30} \cdot \frac{40}{42} \cdot \frac{54}{56} \dots \frac{418}{420} = \frac{4 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 9 \dots 19 \cdot 22}{5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 8 \dots 20 \cdot 21} = \frac{11}{15} \end{aligned}$$

Câu 22. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường Minh Khai 2022 - 2023)

Tính giá trị của các biểu thức: $B = \frac{(1+17)\left(1+\frac{17}{2}\right)\left(1+\frac{17}{3}\right) \dots \left(1+\frac{17}{19}\right)}{(1+19)\left(1+\frac{19}{2}\right)\left(1+\frac{19}{3}\right) \dots \left(1+\frac{19}{17}\right)}$

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \frac{(1+17)\left(1+\frac{17}{2}\right)\left(1+\frac{17}{3}\right) \dots \left(1+\frac{17}{19}\right)}{(1+19)\left(1+\frac{19}{2}\right)\left(1+\frac{19}{3}\right) \dots \left(1+\frac{19}{17}\right)} = \frac{18 \cdot \frac{19}{2} \cdot \frac{20}{3} \cdot \frac{21}{4} \dots \frac{36}{19}}{20 \cdot \frac{21}{2} \cdot \frac{22}{3} \cdot \frac{23}{4} \dots \frac{36}{17}} \\ &= \frac{18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21 \dots 36}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 17 \cdot 18 \cdot 19} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 17}{20 \cdot 21 \cdot 22 \dots 36} \\ &= \frac{20 \cdot 21 \dots 36}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 17} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 17}{20 \cdot 21 \cdot 22 \dots 36} \end{aligned}$$

= 1

Câu 23. (HSG 7 huyện Cẩm Thủy, tỉnh Thanh Hóa, 2021 - 2022)

Thực hiện phép tính: $P = \left(1 + \frac{7}{9}\right)\left(1 + \frac{7}{20}\right)\left(1 + \frac{7}{33}\right)\dots\left(1 + \frac{7}{2900}\right)$

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= \left(1 + \frac{7}{9}\right)\left(1 + \frac{7}{20}\right)\left(1 + \frac{7}{33}\right)\dots\left(1 + \frac{7}{2900}\right) \\ &= \frac{16}{9} \cdot \frac{27}{20} \cdot \frac{40}{43} \dots \frac{2907}{2900} = \frac{2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 10 \dots 51 \cdot 57}{1 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 11 \dots 50 \cdot 58} \\ &= \frac{51 \cdot 8}{58} = \frac{204}{29}. \end{aligned}$$



CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS

CD1: THỰC HIỆN PHÉP TÍNH
DẠNG 7: TÍNH TỔNG CÙNG SỐ MŨ

A. Trắc nghiệm

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7)

Thực hiện phép tính

a) $A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 98^2$

b) $B = -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \dots - 19^2 + 20^2$

Lời giải

a) Ta có $A = 1.1 + 2.2 + 3.3 + \dots + 98.98$

$$\Rightarrow A = 1(2-1) + 2(3-1) + 3(4-1) + \dots + 98(99-1)$$

$$\Rightarrow A = (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99) - (1 + 2 + 3 + \dots + 98)$$

Đặt $B = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99$, tính tổng B ta được:

$$3B = 1.2(3-0) + 2.3(4-1) + 3.4(5-2) + \dots + 98.99(100-97)$$

$$3B = (1.2.3 - 0.1.2) + (2.3.4 - 1.2.3) + (3.4.5 - 2.3.4) + \dots + (98.99.100 - 97.98.99)$$

$$3B = 98.99.100 - 0.1.2 = 98.99.100 \Rightarrow B = \frac{98.99.100}{3}$$

Thay vào A ta được $A = B + \frac{98.99}{2} = \frac{98.99.100}{3} + \frac{98.99}{2}$

b) Ta có $B = -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \dots - 19^2 + 20^2 \Rightarrow B = -(1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 19^2 - 20^2)$

$$B = -\left[(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 19^2 + 20^2) - 2(2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 20^2) \right]$$

$$B = -\left[\left(\frac{20.21.22}{3} + \frac{20.21}{2} \right) - 2.2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2) \right]$$

$$B = -20.22.7 - 20.7 - 8\left(\frac{10.11.12}{3} + \frac{10.11}{2} \right) = -20.7.23 - 8(10.11.4 + 5.11)$$

Câu 2. (HSG 7)

Tính: $D = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 99^2$

Lời giải

Ta có $D = (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 99^2 + 100^2) - (2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 100^2)$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{100.101.102}{3} + \frac{100.101}{2} \right) - 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 50^2)$$

Đặt $A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 50^2 \Rightarrow A = \frac{50.51.52}{3} + \frac{50.51}{2}$, thay vào D ta được :

$$D = 100.101.34 + 50.101 - 4(50.52.17 + 25.51)$$

Câu 3. (HSG 7)

Tính: $11^2 + 13^2 + 15^2 + \dots + 199^2$

Lời giải

$$\text{Ta có } D = (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 99^2 + 100^2) - (2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 100^2)$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{100 \cdot 101 \cdot 102}{3} + \frac{100 \cdot 101}{2} \right) - 2^2 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 50^2)$$

$$\text{Đặt } A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 50^2 \Rightarrow A = \frac{50 \cdot 51 \cdot 52}{3} + \frac{50 \cdot 51}{2}, \text{ thay vào } D \text{ ta được :}$$

$$D = 100 \cdot 101 \cdot 34 + 50 \cdot 101 - 4(50 \cdot 52 \cdot 17 + 25 \cdot 51)$$

Câu 4. (HSG 7)

$$\text{Biết } 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 = 3025. \text{ Tính } S = 2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + 20^3$$

Lời giải

$$\text{Ta có : } 2^3 = (2 \cdot 1)^3 = 2^3 \cdot 1^3$$

$$4^3 = (2 \cdot 2)^3 = 2^3 \cdot 2^3$$

$$6^3 = (2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3$$

.....

$$20^3 = (2 \cdot 10)^3 = 2^3 \cdot 10^3$$

$$\Rightarrow S = 2^3 \cdot (1^3 + 2^3 + \dots + 10^3) = 8 \cdot 3025 = 24200$$

Câu 5. (HSG 7 huyện Nam Hương; huyện Hồng Ngự 2017 - 2018)

$$\text{Biết rằng : } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 = 385. \text{ Tính tổng: } S = 2^2 + 4^2 + \dots + 20^2$$

Lời giải

$$S = (2 \cdot 1)^2 + (2 \cdot 2)^2 + \dots + (2 \cdot 10)^2$$

$$= 2^2 \cdot 1^2 + 2^2 \cdot 2^2 + \dots + 2^2 \cdot 10^2$$

$$= 2^2 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + 10^2)$$

$$= 2^2 \cdot 385 = 1540$$

CD1: THỰC HIỆN PHÉP TÍNH
DẠNG 8: TÍNH TỔNG CÙNG CƠ SỞ

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Thủy, tỉnh Phú Thọ, năm 2021 - 2022)

Cho $S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2021} + 2^{2022}$, khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $S : 2^{2022}$. B. $S + 1$ là số chính phương.
C. $(S + 1) : 2^{2022}$. D. $S = 2^{2023} + 1$

Lời giải

Chọn C

Ta có : $S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2021} + 2^{2022}$

$2S = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{2022} + 2^{2023}$

$\Rightarrow 2S - S = S = (2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{2022} + 2^{2023}) - (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2021} + 2^{2022})$

$\Rightarrow S = 2^{2023} - 1$.

Câu 2. (HSG 7 Huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Giá trị biểu thức $\frac{5^2}{1.6} + \frac{5^2}{6.11} + \dots + \frac{5^2}{26.31}$ là:

- A. $\frac{26}{150}$. B. $\frac{150}{26}$. C. $\frac{31}{150}$. D. $\frac{150}{31}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\frac{5^2}{1.6} + \frac{5^2}{6.11} + \dots + \frac{5^2}{26.31} = \frac{5.5}{1.6} + \frac{5.5}{6.11} + \dots + \frac{5.5}{26.31} = 5 \cdot \left(\frac{5}{1.6} + \frac{5}{6.11} + \dots + \frac{5}{26.31} \right)$
 $= 5 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{26} - \frac{1}{31} \right) = 5 \cdot \left(1 - \frac{1}{31} \right) = 5 \cdot \frac{30}{31} = \frac{150}{31}$

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Thống Nhất 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính: $B = 1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{100}$

Lời giải

Ta có: $2^2.B = 2^2.(1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{100})$

$4.B = 2^2.1 + 2^2.2^2 + 2^2.2^4 + \dots + 2^2.2^{100}$

$4.B = 2^2 + 2^4 + 2^6 + \dots + 2^{102}$

Khi đó: $4.B - B = (2^2 + 2^4 + 2^6 + \dots + 2^{102}) - (1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{100})$

$3.B = 2^2 + 2^4 + 2^6 + \dots + 2^{102} - 1 - 2^2 - 2^4 - \dots - 2^{100}$

$B = \frac{2^{102} - 1}{3}$.

Vậy $B = \frac{2^{102} - 1}{3}$

Câu 2. (HSG 7 huyện Quan Sơn 2022 - 2023)

Tính giá trị các biểu thức bằng cách hợp lý: $S = \left(-\frac{1}{7}\right)^0 + \left(-\frac{1}{7}\right)^1 + \left(-\frac{1}{7}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{7}\right)^{2023}$

Lời giải

$$S = \left(-\frac{1}{7}\right)^0 + \left(-\frac{1}{7}\right)^1 + \left(-\frac{1}{7}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{7}\right)^{2023}$$

$$S = 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots - \frac{1}{7^{2023}} ;$$

$$7S = 7 - 1 + \frac{1}{7} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} - \dots - \frac{1}{7^{2022}}$$

$$8S = 7 - \frac{1}{7^{2023}} \Rightarrow S = \frac{7^{2024} - 1}{8 \cdot 7^{2023}}$$

$$\text{Vậy } S = \frac{7^{2024} - 1}{8 \cdot 7^{2023}}$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường Minh Khai 2022 - 2023)

Rút gọn : $B = (-5)^0 + (-5)^1 + (-5)^2 + (-5)^3 + \dots + (-5)^{2016} + (-5)^{2017}$.

Lời giải

$$(-5)B = (-5)^1 + (-5)^2 + (-5)^3 + \dots + (-5)^{2016} + (-5)^{2017} + (-5)^{2018} .$$

$$B = (-5)^0 + (-5)^1 + (-5)^2 + (-5)^3 + \dots + (-5)^{2016} + (-5)^{2017} .$$

$$\text{Do đó: } (-5)B - B = (-6)B = (-5)^{2018} - 1$$

$$\text{Vậy } B = \frac{(-5)^{2018} - 1}{-4} = \frac{1 - 5^{2018}}{4}$$

Câu 4. (HSG 7 huyện Thanh Trì, 2021 - 2022)

Thực hiện phép tính: $A = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + 3^4 - \dots + 3^{2022} - \frac{3^{2023}}{4}$

Lời giải

$$\text{Đặt } B = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + 3^4 - \dots + 3^{2022} .$$

$$\text{Ta có: } 3B = 3 - 3^2 + 3^3 - 3^4 - \dots - 3^{2022} + 3^{2023}$$

Cộng từng vế ta có

$$4B = 1 + 3^{2023} \text{ nên } B = \frac{1 + 3^{2023}}{4} . \text{ Ta lại có } A = B - \frac{3^{2023}}{4} \text{ suy ra } A = \frac{1}{4} . \text{ Vậy } A = \frac{1}{4}$$

Câu 5. (HSG 7 huyện Bá Thước, tỉnh Thanh Hóa, 2021 - 2022)

Thực hiện phép tính: $C = 3^{100} - 3^{99} + 3^{98} - 3^{97} + \dots + 3^2 - 3$

Lời giải

$$\text{Ta có: } C = 3^{100} - 3^{99} + 3^{98} - 3^{97} + \dots + 3^2 - 3$$

$$3C = 3^{101} - 3^{100} + 3^{99} - 3^{98} + \dots + 3^3 - 3^2$$

$$4C = 3^{101} - 3 \Rightarrow C = \frac{3^{101} - 3}{4}$$

$$\text{Vậy } C = \frac{3^{101} - 3}{4}$$

Câu 6. (HSG 7 trường Điện Hồng huyện Thanh Oai 2018 - 2019)

$$\text{Tính : } B = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{50}} - \frac{1}{3^{51}}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{50}} - \frac{1}{3^{51}} \\ &= \frac{1}{(-3)} + \frac{1}{(-3)^2} + \frac{1}{(-3)^3} + \dots + \frac{1}{(-3)^{50}} + \frac{1}{(-3)^{51}} \\ -\frac{1}{3}B &= \frac{1}{(-3)^2} + \frac{1}{(-3)^3} + \dots + \frac{1}{(-3)^{51}} + \frac{1}{(-3)^{52}} \\ \text{Suy ra, } \frac{4}{3}B &= \frac{1}{-3} - \frac{1}{(-3)^{52}} = \frac{-3^{51} - 1}{3^{52}} \end{aligned}$$

$$B = \frac{-3^{51} - 1}{4 \cdot 3^{51}}$$

Câu 7. (HSG 7 Võ Thị Sáu năm 2022-2023)

$$\text{Cho } A = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \dots + \frac{2022}{4^{2022}}. \text{ Chứng minh rằng: } A < \frac{1}{2}.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \dots + \frac{2022}{4^{2022}} \\ 4A &= 1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{4^3} + \dots + \frac{2022}{4^{2021}} \\ 4A - A &= \left(1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{4^3} + \dots + \frac{2022}{4^{2021}}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \dots + \frac{2022}{4^{2022}}\right) \\ 3A &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2021}} - \frac{2022}{4^{2022}} \\ 3A &= \frac{1}{3} \cdot \left(4 - \frac{1}{4^{2021}}\right) - \frac{2022}{4^{2022}} \end{aligned}$$

Câu 8. (HSG 7 huyện Hiệp Đức; huyện Bến Lức 2018 - 2019)

$$\text{Rút gọn : } B = (-5)^0 + (-5)^1 + (-5)^2 + (-5)^3 + \dots + (-5)^{2016} + (-5)^{2017}.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } B &= (-5)^0 + (-5)^1 + (-5)^2 + (-5)^3 + \dots + (-5)^{2016} + (-5)^{2017} \\ (-5)B &= (-5)^1 + (-5)^2 + (-5)^3 + \dots + (-5)^{2016} + (-5)^{2017} + (-5)^{2018} \\ B &= (-5)^0 + (-5)^1 + (-5)^2 + (-5)^3 + \dots + (-5)^{2016} + (-5)^{2017} \\ \text{Do đó: } (-5)B - B &= -6B = (-5)^{2018} - 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow B = \frac{1 - 5^{2018}}{6}$$

Câu 9. (HSG 7 huyện 2022 - 2023; trường Hiệp Thạnh, Duyên Hải 2016 - 2017)

Tính $A = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{49} + 5^{50}$

Lời giải

Ta có: $A = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{49} + 5^{50}$

$$\Rightarrow 5A = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{50} + 5^{51}$$

$$\Rightarrow 5A - A = (5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{50} + 5^{51}) - (1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{49} + 5^{50})$$

$$\Rightarrow 4A = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{50} + 5^{51} - 1 - 5 - 5^2 - 5^3 - \dots - 5^{49} - 5^{50}$$

$$\Rightarrow 4A = 5^{51} - 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{5^{51} - 1}{4}$$

Câu 10. (HSG 7 thị xã Sầm Sơn 2017 - 2018)

Rút gọn $A = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{2011}$

Lời giải

$$A = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{2011} \quad (1)$$

$$5A = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2012} \quad (2)$$

Lấy (2) trừ (1) theo vế ta được $5A - A = 5^{2012} - 1$

$$4A = 5^{2012} - 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{5^{2012} - 1}{4}$$

Câu 11. (HSG 7 huyện 2018 - 2019)

Tính $S = 2^{100} - 2^{99} + 2^{98} + \dots + 2^2 - 2$

Lời giải

$$S = 2^{100} - 2^{99} + 2^{98} + \dots + 2^2 - 2$$

$$2S = 2^{101} - 2^{100} + 2^{99} + \dots + 2^3 - 2^2$$

$$2S + S = 2^{101} - 2$$

$$3S = 2^{101} - 2$$

$$\Rightarrow S = \frac{2^{101} - 2}{3}$$

Câu 12. (HSG 7 Quận Hà Đông năm 2022-2023; huyện Quế Sơn; huyện Việt Yên 2018 - 2019; huyện Kim Sơn 2017 - 2018)

Tính $S = 2^{2010} - 2^{2009} - 2^{2008} - \dots - 2 - 1$

Lời giải

$$S = 2^{2010} - 2^{2009} - 2^{2008} - \dots - 2 - 1$$

$$S = 2^{2010} - (2^{2009} + 2^{2008} + \dots + 2 + 1)$$

Đặt $A = 2^{2009} + 2^{2008} + \dots + 2^2 + 2 + 1$

$$2A - A = 2(2^{2009} + 2^{2008} + \dots + 2 + 1) - (2^{2009} + 2^{2008} + \dots + 2 + 1)$$

$$A = 2^{2010} + 2^{2009} + \dots + 2^2 + 2 - 2^{2009} - 2^{2008} + \dots - 2 - 1 = 2^{2010} - 1$$

$$\text{Do đó } S = 2^{2010} - (2^{2010} - 1) = 1$$

Vậy $S = 1$

Câu 13. (HSG 7 huyện Lang Chánh 2022 - 2023)

$$\text{Tính: } B = 2^{2022} - 2^{2021} - 2^{2020} - \dots - 2 - 1$$

Lời giải

$$S = 2^{2022} - 2^{2021} - 2^{2020} - \dots - 2 - 1$$

$$S = 2^{2022} - (2^{2021} + 2^{2020} + \dots + 2 + 1)$$

$$\text{Đặt } P = 2^{2021} + 2^{2020} + \dots + 2 + 1$$

$$2P = 2^{2022} + 2^{2021} + 2^{2020} + \dots + 2$$

$$2P - P = (2^{2022} + 2^{2021} + 2^{2020} + \dots + 2) - (2^{2021} + 2^{2020} + \dots + 2 + 1)$$

$$2P - P = 2^{2022} - 1$$

$$P = 2^{2022} - 1$$

$$\text{Do đó: } S = 2^{2022} - (2^{2022} - 1) = 1$$

Vậy $S = 1$

Câu 14. (HSG 7 trường THCS Lý Thường Kiệt, 2017 - 2018)

Chứng minh rằng: $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ chia hết cho 31

Lời giải

$$\text{Đặt } D = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100} \text{ (có 100 số hạng)}$$

$$= (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) + (2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}) + \dots$$

$$+ (2^{96} + 2^{97} + 2^{98} + 2^{99} + 2^{100}) \text{ (có 20 nhóm)}$$

$$D = 2 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + 2^6 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \dots + 2^{96} \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)$$

$$D = 2 \cdot 31 + 2^6 \cdot 31 + \dots + 2^{96} \cdot 31$$

$$D = 31 \cdot (2 + 2^6 + \dots + 2^{96}) \text{ chia hết cho 31}$$

Vậy $D = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ chia hết cho 31

Câu 15. (HSG 7 huyện Mỹ Cày, 2017 - 2018)

Cho đa thức $B(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{99} + x^{100}$. Tính giá trị của đa thức $B(x)$ tại $x = \frac{1}{2}$

Lời giải

Với $x = \frac{1}{2}$ thì giá trị của đa thức

$$\begin{aligned}
 B &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \\
 2B &= 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \right) \\
 &= 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} \\
 \Rightarrow 2B &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \right) + 2 - \frac{1}{2^{100}} \\
 \Rightarrow 2B &= B + 2 - \frac{1}{2^{100}} \Rightarrow B = 2 - \frac{1}{2^{100}}
 \end{aligned}$$

Vậy $B = 2 - \frac{1}{2^{100}}$

Câu 16. (HSG 7 huyện Tân An, 2017 - 2018)

Chứng tỏ rằng: $M = 75 \cdot (4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$ chia hết cho 10^2 .

Lời giải

$$\begin{aligned}
 M &= 75 \cdot (4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25 \\
 &= 25 \cdot (4 - 1) \cdot (4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25 \\
 &= 25 \cdot \left[4(4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) - (4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) \right] + 25 \\
 &= 25 \cdot (4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4) - 25(4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25 \\
 &= 25 \cdot 4^{2018} - 25 + 25 \\
 &= 25 \cdot 4^{2018} = 25 \cdot 4 \cdot 4^{2017} = 100 \cdot 4^{2017} : 100
 \end{aligned}$$

Vậy $M : 10^2$.

Câu 17. (HSG 7 cấp huyện 2017 - 2018)

Tính $A = 1 + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \dots + \frac{100}{2^{100}}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } A &= 1 + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \dots + \frac{100}{2^{100}} \\
 \Rightarrow 2A &= 2 + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \dots + \frac{100}{2^{99}} \\
 2A - A &= \left(2 + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \dots + \frac{100}{2^{99}} \right) - \left(1 + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \dots + \frac{100}{2^{100}} \right) \\
 &= \left(2 + \frac{3}{2^2} - 1 \right) + \left(\frac{4}{2^3} - \frac{3}{2^3} \right) + \left(\frac{5}{2^4} - \frac{4}{2^4} \right) + \dots + \left(\frac{100}{2^{99}} - \frac{99}{2^{99}} \right) - \frac{100}{2^{100}} \\
 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{99}} - \frac{100}{2^{100}} \\
 &= 1 + \left(1 - \frac{1}{2^{99}} \right) - \frac{100}{2^{100}}
 \end{aligned}$$

$$= 2 - \frac{1}{2^{99}} - \frac{100}{2^{100}} = 2 - \frac{102}{2^{100}}$$

Câu 18. (HSG 7 trường Đức Thắng, Hiệp Hòa 2016 - 2017)

Cho $H = 2^{2010} - 2^{2009} - 2^{2008} - \dots - 2 - 1$. Tính 2010^H .

Lời giải

$$\text{Ta có: } H = 2^{2010} - 2^{2009} - 2^{2008} - \dots - 2 - 1$$

$$\text{Nên } 2H = 2^{2011} - 2^{2010} - 2^{2009} - \dots - 2^2 - 2$$

$$\Rightarrow 2H - H = 2^{2011} - 2^{2010} - 2^{2010} - 2^{2009} + 2^{2009} + \dots - 2^2 + 2^2 - 2 + 2 - 1$$

$$H = 2^{2011} - 2 \cdot 2^{2010} + 1 = 1$$

$$\Rightarrow 2010^H = 2010.$$

Câu 19. (HSG 7 huyện Giao Thủy 2016 - 2017)

Cho biểu thức $A = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{100}}$. Tính $B = 4|A| + \frac{1}{3^{100}}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{100}}$$

$$3A = -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{99}}$$

$$A + 3A = -1 + \frac{1}{3^{100}} \Rightarrow A = \frac{1}{4} \cdot \left(-1 + \frac{1}{3^{100}} \right)$$

$$\Rightarrow A < 0 \Rightarrow |A| = -\frac{1}{4} \left(-1 + \frac{1}{3^{100}} \right) = \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^{100}} \right)$$

$$B = 4 \cdot |A| + \frac{1}{3^{100}} = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^{100}} \right) + \frac{1}{3^{100}} = 1$$

Câu 20. (HSG 7 huyện Hiệp Hoà 2022 - 2023)

Tính $M = \left(\frac{-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{2}\right)^3 + \left(\frac{-3}{2}\right)^4 + \left(\frac{-3}{2}\right)^5 + \dots + \left(\frac{-3}{2}\right)^{100}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } M = \left(\frac{-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{2}\right)^3 + \left(\frac{-3}{2}\right)^4 + \left(\frac{-3}{2}\right)^5 + \dots + \left(\frac{-3}{2}\right)^{100}$$

$$\frac{-3}{2}M = \left(\frac{-3}{2}\right)^3 + \left(\frac{-3}{2}\right)^4 + \left(\frac{-3}{2}\right)^5 + \dots + \left(\frac{-3}{2}\right)^{100} + \left(\frac{-3}{2}\right)^{101}$$

$$M - \frac{-3}{2}M = \left[\left(\frac{-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{2}\right)^3 + \left(\frac{-3}{2}\right)^4 + \dots + \left(\frac{-3}{2}\right)^{100} \right] - \left[\left(\frac{-3}{2}\right)^3 + \left(\frac{-3}{2}\right)^4 + \dots + \left(\frac{-3}{2}\right)^{100} + \left(\frac{-3}{2}\right)^{101} \right]$$

$$\frac{5}{2}M = \left(\frac{-3}{2}\right)^2 - \left(\frac{-3}{2}\right)^{101}$$

$$M = \frac{-27}{10} + \frac{5 \cdot (3)^{101}}{2^{100}}$$

$$\text{Vậy } M = \frac{-27}{10} + \frac{5 \cdot (3)^{101}}{2^{100}}$$

Câu 21. (HSG 7 huyện Văn Lâm 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2023}}$.

Lời giải

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2023}}$$

Đặt $A = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2023}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}A = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \dots + \frac{1}{4^{2024}}$$

$$A - \frac{1}{4}A = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2023}} \right) - \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \dots + \frac{1}{4^{2024}} \right)$$

$$\frac{3}{4}A = \frac{1}{4} - \frac{1}{4^{2024}}$$

$$\Rightarrow A = \frac{4^{2023} - 1}{3 \cdot 4^{2023}}$$

Câu 22. (HSG 7 Triệu Sơn năm 2022-2023)

Thực hiện các phép tính: $B = 1 - \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^4 - \dots - \left(\frac{3}{4}\right)^{2023} + \left(\frac{3}{4}\right)^{2024}$.

Lời giải

$$B = 1 - \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^4 - \dots - \left(\frac{3}{4}\right)^{2023} + \left(\frac{3}{4}\right)^{2024}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}B = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 - \left(\frac{3}{4}\right)^4 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{2023} - \left(\frac{3}{4}\right)^{2024} + \left(\frac{3}{4}\right)^{2025}$$

$$\Rightarrow B + \frac{3}{4}B = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^{2025}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{3}{4}\right)B = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^{2025}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{4}B = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^{2025}$$

$$\Rightarrow B = \left[1 + \left(\frac{3}{4}\right)^{2025}\right] : \frac{7}{4} = \left[1 + \left(\frac{3}{4}\right)^{2025}\right] \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{7} + \frac{3^{2025}}{4^{2024} \cdot 7}$$

Câu 23. (HSG Hưng Hà 2022-2023)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{5} - \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} - \frac{4}{5^4} + \frac{5}{5^5} - \dots + \frac{2021}{5^{2021}} - \frac{2022}{5^{2022}} < \frac{5}{36}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Đặt } A &= \frac{1}{5} - \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} - \frac{4}{5^4} + \frac{5}{5^5} - \dots + \frac{2021}{5^{2021}} - \frac{2022}{5^{2022}} \\ \Rightarrow 5A &= 1 - \frac{2}{5^1} + \frac{3}{5^2} - \frac{4}{5^3} + \frac{5}{5^4} - \dots + \frac{2021}{5^{2020}} - \frac{2022}{5^{2021}} \\ \Rightarrow 5A + A &= 6A = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} - \dots - \frac{1}{5^{2021}} - \frac{2022}{5^{2021}} \\ \text{Đặt } P &= 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{5^5} + \dots - \frac{1}{5^{2021}} \\ \Rightarrow 5P &= 5 - 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} - \dots - \frac{1}{5^{2020}} \\ \Rightarrow 6P &= 5 - \frac{1}{5^{2021}} \Rightarrow P = \frac{5}{6} - \frac{1}{6 \cdot 5^{2021}} \\ \Rightarrow 6A &= \frac{5}{6} - \frac{1}{6 \cdot 5^{2021}} - \frac{2022}{5^{2022}} < \frac{5}{6} \\ \Rightarrow A &< \frac{5}{36}. \end{aligned}$$

Câu 24. (HSG 7 Vĩnh Yên năm 2022-2023)

a) Tính: $S = 2^{100} - 2^{99} + 2^{98} + \dots + 2^2 - 2$

b) Chứng tỏ: $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{2019}{3^{2019}} < 0,75$

Lời giải

a) Ta có: $S = 2^{100} - 2^{99} + 2^{98} + \dots + 2^2 - 2$

$$2S = 2^{101} - 2^{100} + 2^{99} + \dots + 2^3 - 2^2$$

$$3S = 2^{101} - 2 \Rightarrow S = \frac{2^{101} - 2}{3}$$

b) Đặt $A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{2019}{3^{2019}}$

$$3A = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \dots + \frac{2019}{3^{2018}}$$

Suy ra: $2A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2018}} - \frac{2019}{3^{2019}}$

Đặt $M = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2018}}$

$$\Rightarrow 3M = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2017}}$$

$$\Rightarrow 2M = 1 - \frac{1}{3^{2018}} < 1 \Rightarrow M < \frac{1}{2}$$

Ta có: $2A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2018}} - \frac{2019}{3^{2019}} = 1 + M - \frac{2019}{3^{2019}} < 1 + M < 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow A < \frac{3}{4}$

CD1: THỰC HIỆN PHÉP TÍNH
DẠNG 9: TÍNH TỈ SỐ CỦA HAI TỔNG

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 huyện Yên Thế - Bắc Giang 2022 - 2023)

Kết quả phép tính $A = \frac{2 - \frac{2}{19} + \frac{2}{43} - \frac{2}{2023}}{3 - \frac{3}{19} + \frac{3}{43} - \frac{3}{2023}}$ là:

- A.** $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{4}{5}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{5}{6}$.

Lời giải

Chọn A

$$A = \frac{2 - \frac{2}{19} + \frac{2}{43} - \frac{2}{2023}}{3 - \frac{3}{19} + \frac{3}{43} - \frac{3}{2023}} = \frac{2 \cdot \left(1 - \frac{1}{19} + \frac{1}{43} - \frac{1}{2023}\right)}{3 \cdot \left(1 - \frac{1}{19} + \frac{1}{43} - \frac{1}{2023}\right)} = \frac{2}{3}$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Tân Yên - Bắc Giang 2022 - 2023)

Kết quả phép tính $A = \frac{2 - \frac{2}{19} + \frac{2}{43} - \frac{2}{1943}}{3 - \frac{3}{19} + \frac{3}{43} - \frac{3}{1943}}$ là:

- A.** $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{4}{5}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{5}{6}$.

Lời giải

Chọn A

$$A = \frac{2 - \frac{2}{19} + \frac{2}{43} - \frac{2}{1943}}{3 - \frac{3}{19} + \frac{3}{43} - \frac{3}{1943}} = \frac{2 \cdot \left(1 - \frac{1}{19} + \frac{1}{43} - \frac{1}{1943}\right)}{3 \cdot \left(1 - \frac{1}{19} + \frac{1}{43} - \frac{1}{1943}\right)} = \frac{2}{3}$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Thanh Sơn, tỉnh Phú Thọ, 2021 - 2022)

Giá trị biểu thức $\frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11}}{\frac{4}{9} - \frac{4}{7} - \frac{4}{11}} + \frac{0,6 - \frac{3}{25} - \frac{3}{125} - \frac{3}{625}}{\frac{4}{5} - 0,16 - \frac{4}{125} - \frac{4}{625}}$ là:

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

$$\frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11}}{\frac{4}{9} - \frac{4}{7} - \frac{4}{11}} + \frac{0,6 - \frac{3}{25} - \frac{3}{125} - \frac{3}{625}}{\frac{4}{5} - 0,16 - \frac{4}{125} - \frac{4}{625}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11}}{4 \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} \right)} + \frac{\frac{3}{5} - \frac{3}{25} - \frac{3}{125} - \frac{3}{625}}{4 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \frac{1}{125} - \frac{1}{625} \right)} \\
 &= \frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11}}{4 \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} \right)} + \frac{3 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \frac{1}{125} - \frac{1}{625} \right)}{4 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \frac{1}{125} - \frac{1}{625} \right)} \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1
 \end{aligned}$$

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 Lai Châu năm 2022-2023)

Tính giá trị biểu thức: $A = 5 \cdot \left[\frac{12 + \frac{12}{289} - \frac{12}{7} - \frac{12}{85}}{4 - \frac{4}{7} - \frac{4}{85} + \frac{4}{289}} \cdot \frac{5 + \frac{5}{13} + \frac{5}{95} + \frac{5}{169}}{6 + \frac{6}{13} + \frac{6}{169} + \frac{6}{95}} \right] \cdot \frac{166166166}{747747747}$

Lời giải

$$A = 5 \cdot \left[\frac{12 + \frac{12}{289} - \frac{12}{7} - \frac{12}{85}}{4 - \frac{4}{7} - \frac{4}{85} + \frac{4}{289}} \cdot \frac{5 + \frac{5}{13} + \frac{5}{95} + \frac{5}{169}}{6 + \frac{6}{13} + \frac{6}{169} + \frac{6}{95}} \right] \cdot \frac{166166166}{747747747}$$

$$A = 5 \cdot \left[\frac{12 \left(1 + \frac{1}{289} - \frac{1}{7} - \frac{1}{85} \right)}{4 \left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{85} + \frac{1}{289} \right)} \cdot \frac{5 \left(1 + \frac{1}{13} + \frac{1}{95} + \frac{1}{169} \right)}{6 \left(1 + \frac{1}{13} + \frac{1}{169} + \frac{1}{95} \right)} \right] \cdot \frac{2 \cdot 83083083}{9 \cdot 83083083}$$

$$A = 5 \cdot \left[\frac{12 \left(1 + \frac{1}{289} - \frac{1}{7} - \frac{1}{85} \right)}{4 \left(1 + \frac{1}{289} - \frac{1}{7} - \frac{1}{85} \right)} \cdot \frac{5 \left(1 + \frac{1}{13} + \frac{1}{95} + \frac{1}{169} \right)}{6 \left(1 + \frac{1}{13} + \frac{1}{169} + \frac{1}{95} \right)} \right] \cdot \frac{2 \cdot 83083083}{9 \cdot 83083083}$$

$$A = 5 \cdot \left[\frac{12}{4} \cdot \frac{5}{6} \right] \cdot \frac{2}{9} = 5 \cdot \left[3 \cdot \frac{6}{5} \right] \cdot \frac{2}{9} = 5 \cdot \frac{18}{5} \cdot \frac{2}{9} = 4$$

Vậy $A = 4$

Câu 2. (HSG 7 Thọ Xuân Thanh Hoá năm 2022-2023)

Tính giá trị biểu thức: $A = \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{11} + \frac{3}{13}}{\frac{5}{4} - \frac{5}{11} + \frac{5}{13}} - \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{5}{2} - \frac{5}{3} + \frac{5}{4}}$

Lời giải

$$A = \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{11} + \frac{3}{13}}{\frac{5}{4} - \frac{5}{11} + \frac{5}{13}} - \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{5}{2} - \frac{5}{3} + \frac{5}{4}} = \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \right)}{5 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \right)} - \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{5 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right)} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

Câu 3. (HSG 7 Diêm Châu năm 2022-2023)

Tính giá trị biểu thức:
$$\left(\frac{0,4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11} - \frac{1}{3} - 0,25 + \frac{1}{5}}{1,4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11} - 1\frac{1}{6} - 0,875 + 0,7} \right) : \frac{2022}{2023}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} & \left(\frac{0,4 - \frac{2}{9} + \frac{2}{11} - \frac{1}{3} - 0,25 + \frac{1}{5}}{1,4 - \frac{7}{9} + \frac{7}{11} - 1\frac{1}{6} - 0,875 + 0,7} \right) : \frac{2022}{2023} \\ &= \left(\frac{2\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)}{7\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) - \frac{7}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)} \right) : \frac{2022}{2023} \\ &= \left(\frac{2}{7} - \frac{2}{7} \right) : \frac{2022}{2023} = 0 \end{aligned}$$

Câu 4. (HSG Hưng Hà 2022-2023)

Thực hiện phép tính:
$$A = \left(\frac{0,375 - 0,3 + \frac{3}{11} + \frac{3}{12} - 1 + \frac{2}{17} - \frac{2}{19}}{-0,625 + 0,5 - \frac{5}{11} - \frac{5}{12} - 2,5 + \frac{5}{17} - \frac{5}{19}} \right) \cdot 1\frac{3}{2020}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{0,375 - 0,3 + \frac{3}{11} + \frac{3}{12} - 1 + \frac{2}{17} - \frac{2}{19}}{-0,625 + 0,5 - \frac{5}{11} - \frac{5}{12} - 2,5 + \frac{5}{17} - \frac{5}{19}} \right) \cdot 1\frac{3}{2020} \\ &= \left[\frac{3 \cdot \left(0,125 - 0,1 + \frac{1}{11} + \frac{1}{12}\right) - 2 \cdot \left(0,5 + \frac{1}{17} - \frac{1}{19}\right)}{-5 \cdot \left(0,125 - 0,1 + \frac{1}{11} + \frac{1}{12}\right) - 5 \cdot \left(0,5 + \frac{1}{17} - \frac{1}{19}\right)} \right] \cdot \frac{2023}{2020} \\ &= \left(\frac{-3}{5} - \frac{2}{5} \right) \cdot \frac{2023}{2020} = -1 \cdot \frac{2023}{2020} = -\frac{2023}{2020} \end{aligned}$$

Câu 5. (HSG 7 Nghi Sơn năm 2022-2023)

Thực hiện phép tính:
$$B = \frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11}}{\frac{4}{9} - \frac{4}{7} - \frac{4}{11}} + \frac{0,6 - \frac{3}{25} - \frac{3}{125} - \frac{3}{625}}{\frac{4}{5} - 0,16 - \frac{4}{125} - \frac{4}{625}}$$

Lời giải

$$B = \frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11}}{\frac{4}{9} - \frac{4}{7} - \frac{4}{11}} + \frac{0,6 - \frac{3}{25} - \frac{3}{125} - \frac{3}{625}}{\frac{4}{5} - 0,16 - \frac{4}{125} - \frac{4}{625}}$$

$$= \frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11}}{4 \cdot \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} \right)} + \frac{3 \cdot \left(0,2 - \frac{1}{25} - \frac{1}{125} - \frac{1}{625} \right)}{4 \cdot \left(0,2 - \frac{1}{25} - \frac{1}{125} - \frac{1}{625} \right)} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

Câu 6. (HSG 7 Đông Hưng năm 2022-2023)

Thực hiện phép tính sau $A = \frac{2022}{2023} : \left(\frac{0,4 - \frac{2}{11} + \frac{2}{13}}{1,4 - \frac{7}{11} + \frac{7}{13}} + \frac{2,5 - \frac{5}{3} + 1,25}{3,5 - 2\frac{1}{3} + 1,75} \right)$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{2022}{2023} : \left(\frac{0,4 - \frac{2}{11} + \frac{2}{13}}{1,4 - \frac{7}{11} + \frac{7}{13}} + \frac{2,5 - \frac{5}{3} + 1,25}{3,5 - 2\frac{1}{3} + 1,75} \right) \\ &= \frac{2022}{2023} : \left[\frac{2 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \right)}{7 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \right)} + \frac{5 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right)}{7 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right)} \right] \\ &= \frac{2022}{2023} : \left(\frac{2}{7} + \frac{5}{7} \right) = \frac{2022}{2023} \end{aligned}$$

Câu 7. (HSG 7 Hà Trung năm 2022-2023)

Tính giá trị các biểu thức sau $C = \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{11} + \frac{3}{13}}{\frac{5}{4} - \frac{5}{11} + \frac{5}{13}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{4}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8}}$

Lời giải

$$C = \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{11} + \frac{3}{13}}{\frac{5}{4} - \frac{5}{11} + \frac{5}{13}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{4}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8}} = \frac{3 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \right)}{5 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \right)} + \frac{2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \right)}{5 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \right)} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$$

Câu 8. (HSG 7 Lập Thạch-Thanh Hoá năm 2022-2023)

Tính bằng cách hợp lí: $A = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{13}}{\frac{2}{3} - \frac{2}{7} - \frac{2}{13}} \cdot \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{16} - \frac{3}{64} - \frac{3}{256}}{1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} - \frac{1}{64}} + \frac{5}{8}$

Lời giải

$$A = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{13}}{2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{13} \right)} \cdot \frac{\frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} - \frac{1}{64} \right)}{1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} - \frac{1}{64}} + \frac{5}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{5}{8} = 1$$

Vậy $A = 1$

Câu 7. (HSG 7 Thi thử huyện Thanh Miện 2022 - 2023)

Thực hiện phép tính:
$$P = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022}}{\frac{2021}{1} + \frac{2020}{2} + \frac{2019}{3} + \dots + \frac{2}{2020} + \frac{1}{2021}}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022}}{\frac{2021}{1} + \frac{2020}{2} + \frac{2019}{3} + \dots + \frac{2}{2020} + \frac{1}{2021}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022}}{\frac{2022-1}{1} + \frac{2022-2}{2} + \frac{2022-3}{3} + \dots + \frac{2022-2020}{2020} + \frac{2022-2021}{2021}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022}}{\frac{2022}{1} + \frac{2022}{2} + \frac{2022}{3} + \dots + \frac{2022}{2020} + \frac{2022}{2021} - \left(\frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \dots + \frac{2020}{2020} + \frac{2021}{2021} \right)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022}}{2022 \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2020} + \frac{1}{2021} \right) - 2021} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022}}{2022 + 2022 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2020} + \frac{1}{2021} \right) - 2021} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022}}{1 + 2022 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2020} + \frac{1}{2021} \right)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022}}{2022 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2020} + \frac{1}{2021} + \frac{1}{2022} \right)} = \frac{1}{2022} \end{aligned}$$

Câu 9. (HSG 7 TP Bắc Giang 2022 - 2023)

Tính tỉ số $\frac{A}{B}$ biết $A = 92 - \frac{1}{9} - \frac{2}{10} - \frac{3}{11} - \dots - \frac{92}{100}$ và $B = \frac{1}{45} + \frac{1}{50} + \frac{1}{55} + \dots + \frac{1}{500}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \left(1 - \frac{1}{9} \right) + \left(1 - \frac{2}{10} \right) + \left(1 - \frac{3}{11} \right) + \dots + \left(1 - \frac{92}{100} \right) \\ &= \frac{8}{9} + \frac{8}{10} + \frac{8}{11} + \dots + \frac{8}{100} \\ &= 8 \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{100} \right) \end{aligned}$$

Lại có $B = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{100} \right)$

Thay vào tỉ số $\frac{A}{B}$ ta được

$$\frac{A}{B} = \frac{8 \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{100} \right)}{\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{100} \right)} = \frac{8}{\frac{1}{5}} = 40$$

Vậy $A=40$

Câu 10. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường Nguyễn Tông Quai 2022 - 2023)

Cho $|2023x_1 - 2022y_1| + |2023x_2 - 2022y_2| + \dots + |2023x_{100} - 2022y_{100}| \leq 0$.

Tính $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{100}}{y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{100}}$.

Lời giải

Ta có

$$|2023x_1 - 2022y_1| \geq 0$$

$$|2023x_2 - 2022y_2| \geq 0$$

...

$$|2023x_{100} - 2022y_{100}| \geq 0$$

$$\Rightarrow (2023x_1 - 2022y_1)^2 + (2023x_2 - 2022y_2)^2 + \dots + (2023x_{100} - 2022y_{100})^2 \geq 0$$

Theo bài ra ta có: $|2023x_1 - 2022y_1| + |2023x_2 - 2022y_2| + \dots + |2023x_{100} - 2022y_{100}| \leq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} |2023x_1 - 2022y_1| = 0 \\ |2023x_2 - 2022y_2| = 0 \\ \vdots \\ |2023x_{100} - 2022y_{100}| = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2023x_1 = 2022y_1 \\ 2023x_2 = 2022y_2 \\ \vdots \\ 2023x_{100} = 2022y_{100} \end{cases} \Rightarrow \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \dots = \frac{x_{100}}{y_{100}} = \frac{2022}{2023} \quad (1)$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta được:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \dots = \frac{x_{100}}{y_{100}} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{100}}{y_1 + y_2 + \dots + y_{100}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{100}}{y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{100}} = \frac{2022}{2023}$ (đpcm)

Câu 11. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường Bắc Sơn 2022 - 2023)

Tính hợp lí giá trị biểu thức: $B = \frac{2021.1 + 2020.2 + 2019.3 + \dots + 2.2020 + 1.2021}{1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 2020.2021 + 2021.2022}$

Lời giải

$$B = \frac{2021.1 + 2020.2 + 2019.3 + \dots + 2.2020 + 1.2021}{1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 2020.2021 + 2021.2022}$$

$$\text{Đặt } C = 2021.1 + 2020.2 + 2019.3 + \dots + 2.2020 + 1.2021$$

$$= (1+2+\dots+2021) + (1+2+\dots+2020) + \dots + (1+2) + 1$$

$$= \frac{2021.2022}{2} + \frac{2020.2021}{2} + \dots + \frac{2.3}{2} + \frac{1.2}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (1.2 + 2.3 + \dots + 2020.2021 + 2021.2022)$$

$$\text{Do đó } B = \frac{1}{2}$$

Câu 12. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường Trần Thủ Độ 2022 - 2023)

$$\text{Tính giá trị của } A = \frac{92 - \frac{1}{9} - \frac{2}{10} - \frac{3}{11} - \dots - \frac{92}{100}}{\frac{1}{45} + \frac{1}{50} + \frac{1}{55} + \dots + \frac{1}{500}}$$

Lời giải

$$\text{Ta có } A = \frac{92 - \frac{1}{9} - \frac{2}{10} - \frac{3}{11} - \dots - \frac{92}{100}}{\frac{1}{45} + \frac{1}{50} + \frac{1}{55} + \dots + \frac{1}{500}}$$

$$A = \frac{\left(1 - \frac{1}{9}\right) + \left(1 - \frac{2}{10}\right) + \left(1 - \frac{3}{11}\right) + \dots + \left(1 - \frac{92}{100}\right)}{\frac{1}{45} + \frac{1}{50} + \frac{1}{55} + \dots + \frac{1}{500}}$$

$$A = \frac{\frac{8}{9} + \frac{8}{10} + \frac{8}{11} + \dots + \frac{8}{100}}{\frac{1}{45} + \frac{1}{50} + \frac{1}{55} + \dots + \frac{1}{500}}$$

$$A = \frac{8 \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{100}\right)}{\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{100}\right)} = 40$$

$$\text{Vậy } A = 40$$

Câu 13. (HSG 7 huyện Bá Thước, tỉnh Thanh Hóa, 2021 - 2022)

$$\text{Thực hiện phép tính: } D = \frac{2.2022}{1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+2022}}$$

Lời giải

$$D = \frac{2.2022}{1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+2022}}$$

$$D = \frac{2.2022}{1+2 \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2022} - \frac{1}{2023}\right) \right]} = \frac{2.2022}{1+2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2023}\right)}$$

$$= \frac{2.2022.2023}{2.2022} = 2023$$

Câu 14. (Bổ sung)

Tính các giá trị biểu thức sau: $A = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{9120} + \frac{1}{9506} + \frac{1}{9900}}{50 - \frac{50}{51} - \frac{51}{52} - \frac{52}{53} - \dots - \frac{97}{98} - \frac{98}{99} - \frac{99}{100}}$

Lời giải

Xét tử: $T = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{9120} + \frac{1}{9506} + \frac{1}{9900}$

$$T = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{95.96} + \frac{1}{97.98} + \frac{1}{99.100}$$

$$T = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{98} + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

$$T = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{97} + \frac{1}{98} + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}\right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{98} + \frac{1}{100}\right)$$

$$T = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{49} + \frac{1}{50}\right)$$

$$T = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} \quad (1)$$

Xét mẫu:

$$M = 50 - \frac{50}{51} - \frac{51}{52} - \frac{52}{53} - \dots - \frac{97}{98} - \frac{98}{99} - \frac{99}{100}$$

$$M = \left(1 - \frac{50}{51}\right) + \left(1 - \frac{51}{52}\right) + \dots + \left(1 - \frac{98}{99}\right) + \left(1 - \frac{99}{100}\right)$$

$$M = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: tử bằng mẫu. Do đó: $A = 1$

Câu 15. (Bổ sung)

Tính tỉ số $\frac{A}{B}$ biết $A = \frac{2012}{51} + \frac{2012}{52} + \frac{2012}{53} + \dots + \frac{2012}{100}$ và $B = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100}$

Lời giải

Ta có: $A = 2012 \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{100}\right)$

$$B = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}\right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{100}\right)$$

$$B = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{50}\right) = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{100}$$

Khi đó: $\frac{A}{B} = \frac{2012}{1} = 2012$

Câu 16. (Bổ sung)

Tính tỉ số $\frac{A}{B}$ biết: $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{101.102}$ và

$$B = \frac{1}{52.102} + \frac{1}{53.101} + \frac{1}{54.100} + \dots + \frac{1}{102.52} + \frac{2}{77.154}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \frac{1}{101} - \frac{1}{102} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{101} - \frac{1}{102}\right)$$

$$A = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{101} + \frac{1}{102}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{102}\right)$$

$$A = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{102}\right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{51}\right) = \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \dots + \frac{1}{101} + \frac{1}{102}$$

$$A = \left(\frac{1}{52} + \frac{1}{102}\right) + \left(\frac{1}{53} + \frac{1}{101}\right) + \dots + \left(\frac{1}{76} + \frac{1}{78}\right) + \frac{1}{77} = \frac{154}{52.102} + \frac{154}{53.101} + \dots + \frac{154}{76.78} + \frac{154}{77.154}$$

$$\text{và } B = \left(\frac{1}{52.102} + \frac{1}{102.52}\right) + \left(\frac{1}{53.101} + \frac{1}{101.53}\right) + \dots + \left(\frac{1}{76.78} + \frac{1}{78.76}\right) + \frac{2}{77.154}$$

$$B = \frac{2}{52.102} + \frac{2}{53.101} + \dots + \frac{2}{76.78} + \frac{2}{77.154} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{154}{2} = 77$$

Câu 17. (Bổ sung)

Tính tỉ số $\frac{A}{B}$ biết: $A = 92 - \frac{1}{9} - \frac{2}{10} - \frac{3}{11} - \dots - \frac{92}{100}$ và $B = \frac{1}{45} + \frac{1}{50} + \frac{1}{55} + \dots + \frac{1}{500}$

Lời giải

Ta có:

$$A = \left(1 - \frac{1}{9}\right) + \left(1 - \frac{2}{10}\right) + \left(1 - \frac{3}{11}\right) + \dots + \left(1 - \frac{92}{100}\right) = \frac{8}{9} + \frac{8}{10} + \dots + \frac{8}{100} = 8\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{100}\right)$$

$$B = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{100}\right). \text{ Khi đó: } \frac{A}{B} = \frac{8}{\frac{1}{5}} = 40$$

Câu 18. (HSG 7 huyện Kinh Môn 2018 - 2019)

Cho $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2019}$; $B = \frac{1}{2018} + \frac{2}{2017} + \frac{3}{2016} + \dots + \frac{2017}{2} + \frac{2018}{1}$

Tính $\frac{A}{B}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2018} + \frac{2}{2017} + \dots + \frac{2017}{2} + \frac{2018}{1} \\ &= \frac{2019-2018}{2018} + \frac{2019-2017}{2017} + \dots + \frac{2019-2}{2} + \frac{2019-1}{1} \\ &= \frac{2019}{2018} - 1 + \frac{2019}{2017} - 1 + \dots + \frac{2019}{2} - 1 + \frac{2019}{1} - 1 \\ &= \frac{2019}{2018} + \frac{2019}{2017} + \dots + \frac{2019}{2} + 2019 - \underbrace{\left(1+1+\dots+1+1\right)}_{2018} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2019 - 2018 + \frac{2019}{2018} + \frac{2019}{2017} + \dots + \frac{2019}{2} \\
 &= 1 + \frac{2019}{2018} + \frac{2019}{2017} + \dots + \frac{2019}{2} \\
 &= 2019 \cdot \left(\frac{1}{2019} + \frac{1}{2018} + \frac{1}{2017} + \dots + \frac{1}{2} \right) \\
 &= 2019 \cdot A \\
 &\Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{1}{2019} \\
 \text{Vậy } \frac{A}{B} &= \frac{1}{2019}
 \end{aligned}$$

Câu 19. (HSG 7 trường Ân Tường Đông 2014 - 2015)

Cho $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{48} + \frac{1}{49} + \frac{1}{50}$ và $P = \frac{1}{49} + \frac{2}{48} + \frac{3}{47} + \dots + \frac{48}{2} + \frac{49}{1}$

Tính $\frac{S}{P}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } P &= \frac{1}{49} + \frac{2}{48} + \frac{3}{47} + \dots + \frac{48}{2} + \frac{49}{1} \\
 &= \left(\frac{1}{49} + 1 \right) + \left(\frac{2}{48} + 1 \right) + \left(\frac{3}{47} + 1 \right) + \dots + \left(\frac{48}{2} + 1 \right) + 1 \\
 &= \left(\frac{50}{49} + \frac{50}{48} + \frac{50}{47} + \dots + \frac{50}{2} \right) + 1 \\
 &= \frac{50}{50} + \frac{50}{49} + \frac{50}{48} + \frac{50}{47} + \dots + \frac{50}{2} \\
 &= 50 \cdot \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{49} + \frac{1}{48} + \dots + \frac{1}{2} \right) \\
 \Rightarrow \frac{S}{P} &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{49} + \frac{1}{50}}{50 \cdot \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{49} + \frac{1}{48} + \dots + \frac{1}{2} \right)} = \frac{1}{50}.
 \end{aligned}$$

Câu 20. (HSG 7 thành phố Vinh, trường Nguyệt Ân 2022 - 2023) Đề 378

Cho $A = 1 + 2^4 + 2^8 + \dots + 2^{1996} + 2^{2000}$ và $B = 1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{2000} + 2^{2002}$. Tính tỉ số $\frac{A}{B}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } A &= 1 + 2^4 + 2^8 + \dots + 2^{1996} + 2^{2000} \\
 2^4 \cdot A &= 2^4 + 2^8 + \dots + 2^{2000} + 2^{2004} \\
 2^4 \cdot A - A &= (2^4 + 2^8 + \dots + 2^{2000} + 2^{2004}) - (1 + 2^4 + 2^8 + \dots + 2^{1996} + 2^{2000}) \\
 15A &= 2^{2004} - 1 \\
 A &= \frac{2^{2004} - 1}{15}
 \end{aligned}$$

$$\text{Lại có: } B = 1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{2000} + 2^{2002}.$$

$$2^2 \cdot B = 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{2002} + 2^{2004}$$

$$2^2 \cdot B - B = (2^2 + 2^4 + \dots + 2^{2002} + 2^{2004}) - (1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{2000} + 2^{2002})$$

$$3B = 2^{2004} - 1$$

$$B = \frac{2^{2004} - 1}{3}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{A}{B} = \frac{\frac{2^{2004} - 1}{15}}{\frac{2^{2004} - 1}{3}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

$$\text{Vậy: } \frac{A}{B} = \frac{1}{5}$$



CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS

CD1: THỰC HIỆN PHÉP TÍNH
DẠNG 10: TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn, trường Đào Duy Từ 2018 – 2019, Huyện Nam Trà My 2018-2019; trường Phan Đình Phùng 2017 - 2018)

Biết $a + b = 9$. Kết quả của phép tính $\overline{0, a(b)} + \overline{0, b(a)}$ là:

- A. 2. **B. 1.** C. 0,5. D. 1,5.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\overline{0, a(b)} + \overline{0, b(a)} = 0, a + 0,0(b) + 0, b + 0,0(a) = 0, (a) + 0, (b)$

Mà $0, (a) = \frac{a}{9}$; $0, (b) = \frac{b}{9}$

Nên $0, (a) + 0, (b) = \frac{a}{9} + \frac{b}{9} = \frac{a+b}{9} = 1$ (do $a + b = 9$).

Câu 2. (HSG 7 huyện Sơn Động 2022 - 2023) Đề 369

Giá trị biểu thức: $A = 7x^2y - 5xy^2 - 11x^2y - 10xy^2 + 15xy^2 + 4x^2y - 2023$ tại $x = 1, y = -0,5$

- A. 0. **B. 1.** **C. -2023.** D. 2023.

Lời giải

Chọn C

Thay $x = 1$ vào biểu thức A , ta được:

$$\begin{aligned} A &= 7x^2y - 5xy^2 - 11x^2y - 10xy^2 + 15xy^2 + 4x^2y - 2023 \\ &= 7y - 5y^2 - 11y - 10y^2 + 15y^2 + 4y - 2023 \\ &= (7y - 11y + 4y) + (-5y^2 - 10y^2 + 15y^2) - 2023 = -2023. \end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức A tại $x = 1, y = -0,5$ là -2023 .

Câu 3. (HSG 7 huyện Tam Nông 2022 - 2023) Đề 373

Cho $a, b, c \neq 0$ và $a - b - c = 0$. Kết quả nào sau đây là giá trị của biểu thức

$$P = \left(1 - \frac{c}{a}\right) \left(1 - \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) + 2023.$$

- A. 2023. **B. 2022.** C. 2000. D. 2024.

Lời giải

Chọn B

Từ $a - b - c = 0 \Rightarrow a - c = b, b - a = -c, b + c = a$

$$P = \left(1 - \frac{c}{a}\right) \left(1 - \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) + 2023 = \frac{a-c}{a} \cdot \frac{b-a}{b} \cdot \frac{c+b}{c} + 2023$$

$$P = \frac{b}{a} \cdot \frac{-c}{b} \cdot \frac{a}{c} + 2023 = -1 + 2023 = 2022$$

Câu 4. (HSG 7 huyện Tam Nông 2022 - 2023) Đề 373

Cho $\frac{x}{3} = \frac{y}{7}$. Giá trị của biểu thức $A = \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{3x^2 - y^2}$ là

- A. -1. B. -0,9. C. $-\frac{8}{11}$. D. $\frac{8}{11}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \frac{x}{3} = \frac{y}{7} \Rightarrow \frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{49} = \frac{2xy}{42} = \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{16} = \frac{3x^2 - y^2}{-22}$$

$$A = \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{3x^2 - y^2} = \frac{16}{-22} = \frac{-8}{11}$$

Câu 5. (HSG 7 huyện Tam Nông 2022 - 2023) Đề 373

Giá trị của biểu thức $Q = a^2 - b^2 + c^2$ biết $ab = 2, bc = 6$ và $ac = 3$ là

- A. 10. B. -6. C. -10. D. 6.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Từ } ab = 2, bc = 6 \Rightarrow \frac{ab}{bc} = \frac{2}{6} \Rightarrow a = \frac{1}{3}c \Rightarrow \frac{1}{3}c \cdot c = 3 \Rightarrow c = \pm 3$$

$$a = \pm 1, b = \pm 2$$

$$Q = a^2 - b^2 + c^2 = 1 - 4 + 9 = 6$$

Câu 6. (HSG 7 huyện Thanh Thủy 2022 - 2023) Đề 375

Biết $\frac{x}{y} = \frac{6}{5}$. Khi đó giá trị của biểu thức $A = \frac{5x - 9y}{9x - 5y}$ là

- A. $\frac{5}{9}$. B. $\frac{9}{5}$. C. $-\frac{15}{29}$. D. $\frac{-29}{15}$.

Lời giải

Chọn C

$\frac{x}{y} = \frac{6}{5}$ suy ra $x = \frac{6}{5}y$. Thay vào A ta được:

$$A = \frac{5 \cdot \frac{6}{5}y - 9y}{9 \cdot \frac{6}{5}y - 5y} = \frac{6y - 9y}{\frac{54}{5}y - 5y} = \frac{-3y}{\frac{29}{5}y} = -\frac{15}{29}$$

Câu 7. (HSG 7 huyện Việt Yên 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức $B = 5x^2 - 2x - 18$ tại $|x| = 4$ là

- A. $B = 54$. B. $B = 70$.
C. $B = 54$ hoặc $B = 70$. D. $B = 45$ hoặc $B = 70$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $|x| = 4 \Rightarrow x = 4$ hoặc $x = -4$

+ Nếu $x = 4$ thì $B = 5 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 - 18 = 5 \cdot 16 - 8 - 18 = 54$

+ Nếu $x = -4$ thì $A = B = 5 \cdot (-4)^2 - 2 \cdot (-4) - 18 = 5 \cdot 16 + 8 - 18 = 70$

Vậy $B = 54$ hoặc $B = 70$ tại $|x| = 4$.

Câu 8. (HSG 7 huyện Việt Yên 2022 - 2023)

Cho biểu thức $A = x^2 - 3x + 8$. Giá trị của biểu thức A tại $x = -2$ là

- A. 13. B. 18. C. 19. D. 9.

Lời giải

Chọn B

Ta có $A = x^2 - 3x + 8$

Thay $x = -2$ vào biểu thức A ta được: $A = (-2)^2 - 3 \cdot (-2) + 8 = 18$.

Câu 9. (HSG 7 huyện Tân Yên 2022 - 2023)

Với $-3 \leq x \leq -1$ thì $A = |x+3| + |1-x|$ bằng

- A. $-2x-4$. B. $2x+4$. C. 4. D. 2.

Lời giải

Chọn C

Với $-3 \leq x \leq -1$ thì $x+3 \geq 0$, $1-x \geq 2 > 0$

Do đó: $A = |x+3| + |1-x| = x+3+1-x = 4$

Câu 10. (HSG 7 huyện Tân Yên 2022 - 2023)

Biết $(x; y)$ là cặp số thỏa mãn $(-2x-5)^2 + |3y+4| \leq 0$ khi đó $2x+3y$ bằng

- A. -1. B. 1. C. 9. D. -9.

Lời giải

Chọn D

Ta có $(-2x-5)^2 + |3y+4| \leq 0$

Do $(-2x-5)^2 \geq 0$; $|3y+4| \geq 0$ với mọi x, y nên $(-2x-5)^2 + |3y+4| \geq 0$ với mọi x, y

$$\Rightarrow (-2x-5)^2 + |3y+4| = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2x-5=0 \\ 3y+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{5}{2} \\ y=-\frac{4}{3} \end{cases}$$

Khi đó: $2x+3y = 2 \cdot \frac{-5}{2} + 3 \cdot \frac{-4}{3} = -9$.

Câu 11. (HSG 7 huyện Tân Yên 2022 - 2023)

Cho dãy tỉ số bằng nhau $\frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$.

Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$

- A. 4. B. -4. C. 4 hoặc -4. D. 16.

Lời giải

Chọn C

Từ: $\frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$

$$\text{Suy ra : } \frac{2a+b+c+d}{a} - 1 = \frac{a+2b+c+d}{b} - 1 = \frac{a+b+2c+d}{c} - 1 = \frac{a+b+c+2d}{d} - 1$$

$$\frac{a+b+c+d}{a} = \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d} \quad (*)$$

$$\text{Nếu } a+b+c+d=0 \Rightarrow a+b=-(c+d) ; (b+c)=-(a+d)$$

$$M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c} = -4$$

$$\text{Nếu } a+b+c+d \neq 0 \text{ thì từ } (*), \text{ ta có } a=b=c=d$$

$$M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c} = 4$$

$$\text{Vậy } M=4 \text{ nếu } a+b+c+d \neq 0$$

$$M=-4 \text{ nếu } a+b+c+d=0$$

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Nghi Xuân 2022 - 2023)

$$\text{Cho biểu thức } M = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{47.49} + \frac{1}{48.50}. \text{ Tính } C = 2M + \frac{1}{49}$$

Lời giải

$$M = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{47.49} + \frac{1}{48.50}$$

$$2M = \frac{2}{1.3} + \frac{2}{2.4} + \frac{2}{3.5} + \dots + \frac{2}{47.49} + \frac{2}{48.50}$$

$$2M = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{47} - \frac{1}{49} + \frac{1}{48} - \frac{1}{50}$$

$$2M = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{49} - \frac{1}{50}$$

$$C = 2M + \frac{1}{49} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{49} - \frac{1}{50} + \frac{1}{49} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{50} = \frac{37}{25}$$

$$\text{Vậy } C = \frac{37}{25}$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

$$\text{Cho } S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015} \text{ và } P = \frac{1}{1008} + \frac{1}{1009} + \frac{1}{1010} + \dots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015}.$$

$$\text{Tính } (S-P)^{2022}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } P = \frac{1}{1008} + \frac{1}{1009} + \frac{1}{1010} + \dots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} \right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015} \right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2014} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015} = S. \text{ Do đó } (S-P)^{2022} = 0.$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2022 - 2023)

Cho biểu thức $D = x^2y - 2y^3 + 1$. Tính giá trị của biểu thức D biết: $x = \frac{1}{2}; y = 2$.

Lời giải

Thay $x = \frac{1}{2}; y = 2$ vào biểu thức D ta được: $D = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2 - 2 \cdot 2^3 + 1 = \frac{-29}{2}$

Vậy khi $x = \frac{1}{2}; y = 2$ thì biểu thức D có giá trị là $\frac{-29}{2}$.

Câu 4. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường Hồng Lĩnh 2022 - 2023)

Cho biểu thức $P = x^{99} - 100x^{98} + 100x^{97} - 100x^{96} + \dots + 100x - 1$. Tính giá trị biểu thức P với $x = 99$.

Lời giải

$$P = x^{99} - 100x^{98} + 100x^{97} - 100x^{96} + \dots + 100x - 1$$

$$P = x^{99} - 99x^{98} - x^{98} + 99x^{97} + x^{99} - 99x^{96} - x^{96} + \dots + 99x + x - 1$$

$$P = x^{98}(x - 99) - x^{97}(x - 99) + x^{96}(x - 99) - \dots - x(x - 99) + (x - 1)$$

$$P = (x - 99)(x^{98} - x^{97} + x^{96} - \dots - x) + (x - 1)$$

Với $x = 99$, ta có:

$$P = (99 - 99)(99^{98} - 99^{97} + 99^{96} - \dots - 99) + (99 - 1) = 98$$

Vậy $P = 98$ với $x = 99$

Câu 5. (HSG 7 thị xã An Nhơn, tỉnh Bình Định, 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức $x^{2021} - 2022x^{2020} + 2022x^{2019} - 2022x^{2018} + \dots - 2022x^2 + 2022x + 1$ tại $x = 2021$

Lời giải

Ta có tại $x = 2021$

$$x^{2021} - 2022x^{2020} + 2022x^{2019} - 2022x^{2018} + \dots - 2022x^2 + 2022x + 1$$

$$= x^{2021} - (2021+1)x^{2020} + (2021+1)x^{2019} - (2021+1)x^{2018} + \dots - (2021+1)x^2 + (2021+1)x + 1$$

$$= x^{2021} - (x+1)x^{2020} + (x+1)x^{2019} - (x+1)x^{2018} + \dots - (x+1)x^2 + (x+1)x + 1$$

$$= x^{2021} - x^{2021} - x^{2020} + x^{2020} + x^{2019} - x^{2019} - x^{2018} + \dots - x^3 - x^2 + x^2 + x + 1$$

$$= x + 1$$

$$= 2021 + 1$$

$$= 2022$$

Câu 6. (HSG 7 trường Phạm Đôn Lễ - huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức: $B = x^{2023} - 2022 \cdot x^{2022} - 2022 \cdot x^{2021} - \dots - 2022 \cdot x + 1$ khi $x = 2023$.

Lời giải

$$x = 2023 \Rightarrow 2022 = x - 1$$

Thay $2022 = x - 1$ vào biểu thức B ta được:

$$B = x^{2023} - (x-1) \cdot x^{2022} - (x-1) \cdot x^{2021} - \dots - (x-1) \cdot x + 1$$

$$B = x^{2023} - x^{2023} + x^{2022} - x^{2022} + x^{2021} - \dots - x^2 + x + 1$$

$$B = x + 1$$

$$\Rightarrow B = 2023 + 1 = 2024$$

Vậy $B = 2024$ khi $x = 2023$.

Câu 7. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Nguyễn Tông Quai 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức $f(x) = x^5 - 2018x^4 + 2016x^3 + 2018x^2 - 2016x - 2017$ tại $x = 2017$

Lời giải

$$f(x) = x^5 - 2018x^4 + 2016x^3 + 2018x^2 - 2016x - 2017 \text{ tại } x = 2017$$

$$\text{Ta có } x = 2017 \Rightarrow \begin{cases} 2018 = x + 1 \\ 2016 = x - 1 \end{cases} \text{ . Khi đó ta có:}$$

$$\begin{aligned} f(2017) &= x^5 - (x+1)x^4 + (x-1)x^3 + (x+1)x^2 - (x-1)x - x \\ &= x^5 - x^5 - x^4 + x^4 - x^3 + x^3 + x^2 - x^2 + x - x = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } f(2017) = 0$$

Câu 8. (HSG 7 huyện Sông Lô 2017 - 2018)

Tính giá trị của biểu thức $N = xyz^2z^3 + x^3y^4z^5 + \dots + x^{2014}y^{2015}z^{2016}$ tại $x = -1; y = -1; z = -1$

Lời giải

$$\text{Ta có: } N = xyz \cdot yz^2 + x^2y^2z^2 \cdot yz^2 + x^3y^3z^3 \cdot yz^2 + \dots + x^{2014}y^{2014}z^{2014} \cdot yz^2$$

Thay $y = 1; z = -1$ ta được:

$$\begin{aligned} N &= -xyz - x^2y^2z^2 - x^3y^3z^3 - \dots - x^{2014}y^{2014}z^{2014} \\ &= -(xyz) - (xyz)^2 - (xyz)^3 - \dots - (xyz)^{2014} \end{aligned}$$

$$\text{Thay } xyz = -1 \text{ ta được: } N = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1 = 0$$

$$\text{Vậy } N = 0$$

Câu 9. HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường Vũ Thị Thục 2022 - 2023)

Tính $A = x^{22} - 2023x^{21} + 2023x^{20} - \dots - 2023x^3 + 2023x^2 - 2023x + 1$ với $x = 2022$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= x^{22} - 2023x^{21} + 2023x^{20} - \dots - 2023x^3 + 2023x^2 - 2023x + 1 \\ &= x^{22} - 2022x^{21} - x^{21} + 2022x^{20} + x^{20} - \dots - 2022x^3 - x^3 + 2022x^2 + x^2 - 2022x - x + 1 \\ &= (x^{22} - 2022x^{21}) - (x^{21} - 2022x^{20}) + \dots - (x^3 - 2022x^2) + (x^2 - 2022x) - x + 1 \\ &= x^{21}(x - 2022) - x^{20}(x - 2022) + \dots - x^2(x - 2022) + x(x - 2022) - x + 1 \\ &= (x - 2022)(x^{21} - x^{20} + \dots - x^2 + x) - x + 1 \end{aligned}$$

Thay $x = 2022$ vào biểu thức A ta được:

$$\begin{aligned} A &= (2022 - 2022)(2022^{21} - 2022^{20} + \dots - 2022^2 + 2022) - 2022 + 1 \\ &= 0 \cdot (2022^{21} - 2022^{20} + \dots - 2022^2 + 2022) - 2022 + 1 = 0 - 2022 + 1 = -2021 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } A = -2021 \text{ với } x = 2022$$

Câu 10. (HSG 7 cấp huyện 2017 - 2018)

Tính giá trị của biểu thức $C = \frac{2x^2 - 5x + 3}{2x - 1}$ tại $x = \left| \frac{3}{2} \right|$.

Lời giải

Ta có: $x = \left| \frac{3}{2} \right| \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

Thay $x = \frac{3}{2}$ vào biểu thức C ta được: $C = \frac{2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 5 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 3}{2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 1} = -\frac{15}{4}$

Vậy $C = -\frac{15}{4}$ khi $x = \left| \frac{3}{2} \right|$.

Câu 11. (HSG 7 huyện Mù Cang Chải 2016 - 2017; huyện Khoái Châu 2014 - 2015)

Cho biểu thức: $A = \frac{3x^3 - x^2 - 3x + 2005}{3x^4 - x^3 + 3x + 2014}$. Tính giá trị của biểu thức với $x = \frac{1}{3}$.

Lời giải

Ta có: $x = \frac{1}{3} \Rightarrow 3x - 1 = 0$

$A = \frac{3x^3 - x^2 - 3x + 2005}{3x^4 - x^3 + 3x + 2014} = \frac{x^2(3x - 1) - (3x - 1) + 2014}{x^3(3x - 1) + (3x - 1) + 2015} = \frac{2014}{2015}$

Câu 12. (HSG 7 huyện Tiên Phước 2018 - 2019; trường Nguyễn Văn Trỗi 2017 - 2018; trường Võ Thị Sáu, Phù Yên 2016 - 2017)

Tính giá trị biểu thức: $A = \frac{(a+b)(-x-y) - (a-y)(b-x)}{abxy(xy+ay+ab+by)}$ với $a = \frac{1}{3}; b = -2; x = \frac{3}{2}; y = 1$.

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{(a+b)(-x-y) - (a-y)(b-x)}{abxy(xy+ay+ab+by)} \\ &= \frac{a(-x-y) + b(-x-y) - a(b-x) + y(b-x)}{abxy(xy+ay+ab+by)} \\ &= \frac{-ax - ay - bx - by - ab + ax + by - xy}{abxy(xy+ay+ab+by)} \\ &= \frac{-ay - bx - ab - xy}{abxy(xy+ay+ab+by)} \\ &= \frac{-xy + ay + ab + by}{abxy(xy+ay+ab+by)} = \frac{-1}{abxy} \end{aligned}$$

Thay $a = \frac{1}{3}; b = -2; x = \frac{3}{2}; y = 1$ vào biểu thức A ta được: $A = \frac{-1}{\frac{1}{3} \cdot (-2) \cdot \frac{3}{2} \cdot 1} = -1$.

Câu 13. (HSG 7 huyện Năm Căn; huyện Trà Lý; huyện Dương Nam 2017-2018; huyện Phú Lý 2016 - 2017; huyện Đức Phổ 2015 - 2016)

Tính giá trị biểu thức $P = \left| a - \frac{1}{2014} \right| + \left| a - \frac{1}{2016} \right|$, với $a = \frac{1}{2015}$

Lời giải

Thay $a = \frac{1}{2015}$ vào biểu thức $P = \left| \frac{1}{2015} - \frac{1}{2014} \right| + \left| \frac{1}{2015} - \frac{1}{2016} \right|$

Ta được: $P = \frac{1}{2014} - \frac{1}{2015} + \frac{1}{2015} - \frac{1}{2016}$

$$P = \frac{1}{2014} - \frac{1}{2016} = \frac{2016 - 2014}{2014 \cdot 2016}$$

$$P = \frac{2}{2014 \cdot 2016} = \frac{1}{1007 \cdot 2016} = \frac{1}{2030112}$$

Câu 14. (HSG 7 huyện Tam Dương, 2021 - 2022)

Tính giá trị của biểu thức $A = \left| a - \frac{1}{2020} \right| + \left| a - \frac{1}{2022} \right|$ với $a = \frac{1}{2021}$.

Lời giải

$$A = \left| a - \frac{1}{2020} \right| + \left| a - \frac{1}{2022} \right| \text{ với } a = \frac{1}{2021}$$

Thay $a = \frac{1}{2021}$ vào biểu thức $A = \left| a - \frac{1}{2020} \right| + \left| a - \frac{1}{2022} \right|$ ta được

$$\begin{aligned} A &= \left| \frac{1}{2021} - \frac{1}{2020} \right| + \left| \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022} \right| = \frac{1}{2020} - \frac{1}{2021} + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022} = \frac{1}{2020} - \frac{1}{2022} \\ &= \frac{2022 - 2020}{2020 \cdot 2022} = \frac{2}{2020 \cdot 2022} = \frac{1}{1010 \cdot 2022} = \frac{1}{2042220} \end{aligned}$$

Vậy với $a = \frac{1}{2021}$ thì $A = \frac{1}{2042220}$.

Câu 15. (HSG 7 TP Bắc Ninh 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức $P = \left| a - \frac{1}{2021} \right| + \left| a - \frac{1}{2023} \right|$ với $a = \frac{1}{2022}$.

Lời giải

Thay $a = \frac{1}{2022}$ vào biểu thức $P = \left| a - \frac{1}{2021} \right| + \left| a - \frac{1}{2023} \right|$ ta có

$$\begin{aligned} P &= \left| \frac{1}{2022} - \frac{1}{2021} \right| + \left| \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023} \right| = \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022} + \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023} \\ &= \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022} + \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023} = \frac{1}{2021} - \frac{1}{2023} = \frac{2}{4088483} \end{aligned}$$

Câu 16. (HSG 7 huyện Bát Xát, tỉnh Lào Cai, 2021 - 2022)

Tính giá trị biểu thức $B = 5x^2 - 2x - 18$ tại $|x| = 4$.

Lời giải

Ta có $|x| = 4 \Rightarrow x = 4$ hoặc $x = -4$

+ Nếu $x = 4$ thì $B = 5 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 - 18 = 5 \cdot 16 - 8 - 18 = 54$

+ Nếu $x = -4$ thì $A = B = 5 \cdot (-4)^2 - 2 \cdot (-4) - 18 = 5 \cdot 16 + 8 - 18 = 70$

Vậy $B = 54$ hoặc $B = 70$ tại $|x| = 4$.

Câu 17. (HSG 7 huyện Văn Bàn 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức: $A = 2x^2 - 3x + 1$ với $|x| = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Vì $|x| = \frac{1}{2}$ nên $x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = -\frac{1}{2}$.

+ Với $x = \frac{1}{2}$ thì $A = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\frac{1}{2} + 1 = 2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 1 = 0$.

+ Với $x = -\frac{1}{2}$ thì $A = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 1 = 3$.

Vậy $A = 0$ hoặc $A = 3$ khi $|x| = \frac{1}{2}$.

Câu 18. (HSG 7 trường Thanh Mai 2018 - 2019)

Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = 2a^2 - 4|a| + 3a - 1$ lần lượt tại $a = \frac{2}{3}$; $a = -2$

b) $B = 2x^2 - 3xy - 6y^2$ tại $|x| = \frac{1}{2}$ và $y = \frac{2}{3}$

Lời giải

a) Thay $a = \frac{2}{3}$ vào biểu thức $A = 2a^2 - 4|a| + 3a - 1$, ta được: $A = 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4\left|\frac{2}{3}\right| + 3 \cdot \frac{2}{3} - 1 = \frac{-7}{9}$

Thay $a = -2$ vào biểu thức $A = 2a^2 - 4|a| + 3a - 1$, ta được: $A = 2(-2)^2 - 4|-2| + 3 \cdot (-2) - 1 = -7$

b) Ta có $|x| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Trường hợp 1: $x = \frac{1}{2}$ và $y = \frac{2}{3}$, ta được: $B = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - 6\left(\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{19}{6}$.

Trường hợp 2: $x = -\frac{1}{2}$ và $y = \frac{2}{3}$, ta được: $B = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{3} - 6\left(\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{7}{6}$.

Câu 19. (HSG 7 trường Nguyễn Khuyến, Đà Nẵng 2017 - 2018)

Tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{x^3 - x^2 + 3y}{x^2 - y}$ biết $|x| = \frac{1}{2}$; y là số nguyên âm lớn nhất.

Lời giải

$$\text{Ta có: } |x| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Do y là số nguyên âm lớn nhất nên $y = -1$

$$+ \text{Thay } x = -\frac{1}{2}, y = -1 \text{ vào biểu thức ta được: } A = \frac{-17}{50}$$

$$+ \text{Thay } x = \frac{1}{2}, y = -1 \text{ vào biểu thức ta được: } A = \frac{-27}{50}.$$

Câu 20. (HSG 7 huyện Hậu Lộc 2016 - 2017)

Cho biểu thức: $P = x - 4xy + y$. Tính giá trị của P với $|x| = 1,5; y = -0,75$

Lời giải

$$\text{Ta có: } |x| = 1,5 \Rightarrow \begin{cases} x = 1,5 \\ x = -1,5 \end{cases}$$

+ Với $x = 1,5; y = -0,75$ thì:

$$P = 1,5 - 4 \cdot 1,5 \cdot (-0,75) - 0,75 = 1,5 \cdot (1 + 3) - 0,75 = 5,25$$

+ Với $x = -1,5; y = -0,75$ thì:

$$P = -1,5 - 4 \cdot (-1,5) \cdot (-0,75) - 0,75 = -6,75$$

Câu 21. (HSG 7 huyện Vị Thanh 2017 – 2018, huyện Bồ Trạch 2017 - 2018)

Cho biểu thức: $P = x - 4xy + y$. Tính giá trị của P với $|x| = 1,5; y = -0,75$

Lời giải

$$\text{Ta có: } |x| = 1,5 \Rightarrow \begin{cases} x = 1,5 \\ x = -1,5 \end{cases}$$

Với $x = 1,5; y = -0,75$ thì:

$$P = 1,5 - 4 \cdot 1,5 \cdot (-0,75) - 0,75 = 1,5 \cdot (1 + 3) - 0,75 = 5,25$$

Với $x = -1,5; y = -0,75$ thì:

$$P = -1,5 - 4 \cdot (-1,5) \cdot (-0,75) - 0,75 = -6,75$$

Câu 22. (HSG 7 trường Phạm Kinh Ân 2022 - 2023; trường THCS Hiền Quan 2017 - 2018)

Tính giá trị của biểu thức : $6x^2 + 5x - 2$ tại x thoả mãn $|x - 2| = 1$

Lời giải

Ta có $|x - 2| = 1$ suy ra:

$$* x - 2 = 1$$

$$x = 3$$

$$* x - 2 = -1$$

$$x = 1$$

Thay $x = 1$ vào biểu thức ta được $6 \cdot 1 + 5 \cdot 1 - 2 = 9$

Thay $x = 3$ vào biểu thức ta được $6 \cdot 3 + 5 \cdot 3 - 2 = 67$

Câu 23. (HSG 7 huyện Hương Khê 2017 - 2018; Đất Mũi 2016 - 2017)

Tính giá trị của biểu thức sau: $A = \frac{2x^2 + 3x - 1}{3x - 2}$ với $|x - 1| = \frac{2}{3}$

Lời giải

$$|x - 1| = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{5}{3} \\ x - 1 = -\frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Thay $x = \frac{5}{3}$ vào biểu thức A ta được $A = \frac{2\left(\frac{5}{3}\right)^2 + 3 \cdot \frac{5}{3} - 1}{3 \cdot \frac{5}{3} - 2} = \frac{2 \cdot \frac{25}{9} + 5 - 1}{3 - 2} = \frac{\frac{50}{9} + 4}{1} = \frac{\frac{50}{9} + \frac{36}{9}}{1} = \frac{86}{9}$

Thay $x = \frac{1}{3}$ vào biểu thức A ta được $A = \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{3} - 1}{3 \cdot \frac{1}{3} - 2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{9} + 1 - 1}{1 - 2} = \frac{\frac{2}{9}}{-1} = -\frac{2}{9}$

Vậy $A = \frac{86}{9}$ hoặc $A = -\frac{2}{9}$ khi $|x - 1| = \frac{2}{3}$.

Câu 24. (HSG 7 huyện Bình Long 2022 - 2023) Đề 389

Tính giá trị biểu thức $6x^2 + 5x - 2$ tại x thỏa mãn $|x - 2| = 1$.

Lời giải

Ta có: $|x - 2| = 1$ suy ra $x - 2 = 1$ hoặc $x - 2 = -1$. Suy ra: $x = 3$ hoặc $x = 1$.

+ Với $x = 3$ thì giá trị của biểu thức là: $6 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 - 2 = 67$.

+ Với $x = 1$ thì giá trị của biểu thức là: $6 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 2 = 9$.

Vậy giá trị của biểu thức $6x^2 + 5x - 2$ bằng 67 hoặc bằng 9 khi $|x - 2| = 1$.

Câu 25. (HSG 7 huyện Bồ Trạch; huyện Cẩm Phả 2017-2018; huyện Triệu Sơn; huyện Thiệu Hóa 2016 - 2017)

Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $B = 2x^2 - 3x + 5$ với $|x| = \frac{1}{2}$

b) $C = 2x - 2y + 13x^3y^2(x - y) + 15(y^2x - x^2y) + \left(\frac{2015}{2016}\right)^0$, biết $x - y = 0$

Lời giải

a) Vì $|x| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Với $x = \frac{1}{2} \Rightarrow B = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} + 5 = 4$

Với $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow B = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 5 = 7$ Vậy $B = 4$ khi $x = \frac{1}{2}$ và $B = 7$ khi $x = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{b) } C &= 2x - 2y + 13x^3y^2(x - y) + 15(y^2x - x^2y) + \left(\frac{2015}{2016}\right)^0 \\ &= 2(x - y) + 13x^3y^2(x - y) - 15xy(x - y) + 1 \end{aligned}$$

Thay $x - y = 0$ vào biểu thức trên ta được $C = 2 \cdot 0 + 13x^3y^2 \cdot 0 - 15xy \cdot 0 + 1 = 1$

Câu 26. (HSG 7 huyện Lục Ngạn, tỉnh Bắc Giang, trường 2022 - 2023)

Tính giá trị của $K = 10x - 10y + 3x^2y(x - y) + 2021(y^2x - x^2y) + \left(\frac{2022}{2023}\right)^0$, biết $x - y = 0$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } K &= 10x - 10y + 3x^2y(x - y) + 2021(y^2x - x^2y) + \left(\frac{2022}{2023}\right)^0 \\ &= 10(x - y) + 3x^2y(x - y) + 2021xy(y - x) + 1 \end{aligned}$$

Vì $x - y = 0$ nên $K = 0 + 1 = 1$

Vậy $K = 1$

Câu 27. (HSG 7 huyện Nam Đàn, tỉnh Nghệ An 2022 - 2023) Đề 381

Cho $x - y = -3$. Hãy tính giá trị của biểu thức: $P = x^3 + 3x^2 + y^2 - x^2y - xy + x - 4y + 2023$.

Lời giải

$$P = x^3 + 3x^2 + y^2 - x^2y - xy + x - 4y + 2023$$

$$P = (x^3 - xy + x) - (x^2y - y^2 + y) + (3x^2 - 3y + 3) + 2020$$

$$P = x \cdot (x^2 - y + 1) - y \cdot (x^2 - y + 1) + 3 \cdot (x^2 - y + 1) + 2020$$

$$P = (x - y + 3) \cdot (x^2 - y + 1) + 2020$$

$$P = (-3 + 3) \cdot (x^2 - y + 1) + 2020 \text{ do } x - y = -3.$$

$$P = 2020.$$

Câu 28. (HSG 7 huyện Vũ Thư 2022 - 2023)

Cho $\frac{a}{b} = \sqrt{6^2 + 8^2} : \frac{(0,8)^5}{(0,4)^6}$ (với $a, b \in \mathbb{R}$). Tính $B = (a - b) : (b - 9a)$.

Lời giải

$$\frac{a}{b} = \sqrt{6^2 + 8^2} : \frac{(0,8)^5}{(0,4)^6} = \sqrt{6^2 + 8^2} : \frac{2^5(0,4)^5}{(0,4)^6} = \sqrt{6^2 + 8^2} : \frac{2^5}{0,4} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{8} \Rightarrow b = 8a$$

$$\text{Khi đó: } B = (a - b) : (b - 9a) = (a - 8a) : (8a - 9a) = 7$$

Câu 29. (HSG 7 huyện Gia Viễn 2022 - 2023)

Tính giá trị các biểu thức sau: $M = a + 3b + 2c$, biết $a + b = 5$; $b + c = -8$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } M = a + 3b + 2c = (a + b) + 2b + 2c = (a + b) + 2(b + c)$$

Thay $a + b = 5$; $b + c = -8$ vào $M = (a + b) + 2(b + c)$ ta được:

$$M = 5 + 2(-8) = 5 + (-16) = -11$$

Vậy $M = -11$

Câu 30. (HSG 7 huyện Quảng Xương 2022 - 2023)

Tính giá trị các biểu thức sau: $D = \frac{3 \cdot a - 2 \cdot b}{a - 3 \cdot b}$ với $\frac{a}{b} = \frac{10}{3}$

Lời giải

$$D = \frac{3 \cdot a - 2 \cdot b}{a - 3 \cdot b} \quad (1) \quad \text{với} \quad \frac{a}{b} = \frac{10}{3}$$

$$\text{Với} \quad \frac{a}{b} = \frac{10}{3} \Rightarrow b = \frac{3}{10}a$$

$$\text{Thay } b = \frac{3}{10}a \text{ vào (1) ta có } D = \frac{3 \cdot a - 2 \cdot \frac{3}{10} \cdot a}{1 \cdot a - 3 \cdot \frac{3}{10} \cdot a} = \frac{\left(3 - \frac{6}{10}\right) \cdot a}{\left(1 - \frac{9}{10}\right) \cdot a} = \frac{\frac{24}{10}}{\frac{1}{10}} = \frac{24}{10} \cdot 10 = 24$$

Vậy $D = 24$

Câu 31. (HSG 7 huyện Nông Cống 2022 - 2023)

Cho biết $\frac{a}{2} - b = c : \frac{2}{3}$ và $a, b, c \neq 0$. Tính giá trị của biểu thức:

$$M = 2023 - \left(\frac{c}{a} - \frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{a}{b} - 2\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{b}{c}\right)^3$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{a}{2} - b = c : \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a - 2b}{2} = \frac{3c}{2} \Rightarrow a - 2b = 3c; 3c - a = -2b; 3c + 2b = a.$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } M &= 2023 - \left(\frac{c}{a} - \frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{a}{b} - 2\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{b}{c}\right)^3 \\ &= 2023 - \left(\frac{3c - a}{3a}\right)^3 \cdot \left(\frac{a - 2b}{b}\right)^3 \cdot \left(\frac{3c + 2b}{2c}\right)^3 \\ &= 2023 - \left(\frac{-2b}{3a}\right)^3 \cdot \left(\frac{3c}{b}\right)^3 \cdot \left(\frac{a}{2c}\right)^3 = 2023 + 1^3 = 2024. \end{aligned}$$

Vậy $M = 2024$

Câu 32. (HSG 7 huyện Quảng Xương 2022 - 2023)

Cho 3 số $a; b; c$ thỏa mãn điều kiện $a \cdot b \cdot c = 2023$

$$\text{Tính giá trị biểu thức } P = \frac{2023a}{a \cdot b + 2023a + 2023} + \frac{b}{b \cdot c + b + 2023} + \frac{c}{a \cdot c + c + 1}$$

Lời giải

Thay $a \cdot b \cdot c = 2023$ vào P ta được:

$$\begin{aligned} P &= \frac{2023a}{a \cdot b + 2023a + 2023} + \frac{b}{b \cdot c + b + 2023} + \frac{c}{a \cdot c + c + 1} \\ P &= \frac{a \cdot b \cdot c \cdot a}{a \cdot b + a \cdot b \cdot c \cdot a + a \cdot b \cdot c} + \frac{b}{b \cdot c + b + a \cdot b \cdot c} + \frac{c}{a \cdot c + c + 1} \end{aligned}$$

$$P = \frac{a.b.c.a}{a.b(1+c.a+c)} + \frac{b}{b.(c+1+a.c)} + \frac{c}{a.c+c+1} = \frac{ac+1+c}{ac+c+1} = 1$$

Vậy với $a.b.c = 2023$ thì $P = 1$

Câu 33. (HSG 7 huyện Sóc Sơn – Hà Nội 2022 - 2023)

Cho ba số a, b, c thỏa mãn: $a^3 = b^3 - c^3$ và $b^3 = 1011 - c^3$. Tính giá trị của biểu thức:
 $N = 3a^3 - 5b^3 + c^3$.

Lời giải

Ta có: $a^3 = b^3 - c^3 \Rightarrow a^3 - b^3 + c^3 = 0$; $b^3 = 1011 - c^3 \Rightarrow b^3 + c^3 = 1011$ (1)

Lại có: $N = 3a^3 - 5b^3 + c^3 = 3(a^3 - b^3 + c^3) - 2(b^3 + c^3)$ (2)

Thay (1) vào (2) ta được: $N = 3.0 - 2.1011 = -2022$.

Vậy $N = -2022$.

Câu 34. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường Trần Đức Thông 2022 - 2023)

Cho ba số thực $a, b, c \neq 0$ và đôi một khác nhau thỏa mãn: $a^2.(b+c) = b^2.(a+c) = 2023$. Tính giá trị biểu thức: $H = c^2.(a+b)$

Lời giải

Từ $a^2.(b+c) = b^2.(a+c) = 2023$

$$\frac{a}{ab+bc} = \frac{b}{ab+ac} = \frac{a-b}{-c(a-b)} = \frac{1}{-c} \text{ vì } a \neq b$$

$$\Rightarrow ab+bc = -ac \Rightarrow b(a+c) = -ac \Rightarrow b^2(a+c) = -abc \quad (1)$$

$$\text{Từ } \Rightarrow ac+bc = -ab \Rightarrow c(a+b) = -ab \Rightarrow c^2(a+b) = -abc \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow c^2(a+b) = c^2(a+c)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow c^2(a+b) = c^2(a+c)$

Mà $b^2.(a+c) = 2023 \Rightarrow H = c^2.(a+b) = 2023$

Câu 35. (HSG 7 trường Kim An 2017 - 2018)

Tính giá trị của biểu thức $\frac{2a-5b}{a-3b}$ với $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{2a-5b}{a-3b} = \frac{2\left(\frac{a}{b}\right)-5}{\left(\frac{a}{b}\right)-3} = \frac{2.\frac{3}{5}-5}{\frac{3}{5}-3} = \frac{14}{9}$.

Câu 36. (HSG 7 quận Tây Hồ 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức $C = \frac{2x-3y+4z}{x+y-3z}$ biết rằng $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$; $4z = 3y$

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ 4z = 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ \frac{z}{3} = \frac{y}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{8} = \frac{y}{12} \\ \frac{z}{9} = \frac{y}{12} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{y}{12} = \frac{z}{9}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{8} = \frac{y}{12} = \frac{z}{9} = \frac{2x-3y+4z}{16} = \frac{x+y-3z}{-7} = k \quad (k \neq 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-3y+4z = 16k \\ x+y-3z = -7k \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } C = \frac{2x-3y+4z}{x+y-3z} = \frac{16k}{-7k} = -\frac{16}{7}$$

$$\text{Vậy } C = -\frac{16}{7} \text{ khi } \frac{x}{2} = \frac{y}{3}; 4z = 3y.$$

Câu 37. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức $A = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc}$ biết $a, b, c \neq 0$ và $(3a-2b)^2 + |4b-3c| = 0$

Lời giải

Ta có $(3a-2b)^2 \geq 0; |4b-3c| \geq 0$ với mọi $a, b, c \neq 0$ mà $(3a-2b)^2 + |4b-3c| = 0$

Suy ra: $3a-2b=0; 4b-3c=0 \Rightarrow 6a=4b=3c$

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k$$

$$a = 2k; b = 3k; c = 4k$$

$$\text{Ta có } A = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} = \frac{8k^3 + 27k^3 + 64k^3}{24k^3} = \frac{99k^3}{24k^3} = \frac{33}{8}$$

Câu 51. (HSG 7 thị xã Kinh Môn 2021 - 2022)

Tính giá trị của biểu thức: $C = 2x^5 - 5y^3 + 1980$ tại x, y thỏa mãn: $|x-1| + (y+2)^{20} = 0$

Lời giải

Do $|x-1| \geq 0; (y+2)^{20} \geq 0$ nên $|x-1| + (y+2)^{20} \geq 0$ với mọi x, y

$$\text{Kết hợp } |x-1| + (y+2)^{20} = 0 \text{ suy ra } \begin{cases} |x-1| = 0 \\ (y+2)^{20} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Giá trị của biểu thức: $C = 2x^5 - 5y^3 + 1980$ tại $x = 1; y = -2$ là:

$$C = 2.1^5 - 5.(-2)^3 + 1980 = 2022$$

$$\text{Vậy } C = 2022$$

Câu 38. (HSG 7 huyện Tam Dương 2022 - 2023) Đề 382

Tính giá trị của biểu thức: $C = 2x^5 - 5y^3 + 2023$ tại các giá trị của x, y thỏa mãn $|x+1| + (y+2)^{2024} = 0$

Lời giải

Ta có : $|x+1| \geq 0; (y+2)^{2024} \geq 0$ với mọi x, y

nên $|x+1| + (y+2)^{2024} = 0$ khi $|x+1| = 0$ và $(y+2)^{2024} = 0$

suy ra $x = -1; y = -2$

Thay $x = -1; y = -2$ vào C ta được: $C = 2.(-1)^5 - 5.(-2)^3 + 2023 = 1981$

Câu 39. (HSG 7 huyện Cẩm Khê 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức: $C = 2x^4 + 15y^{2023} + 2006$ tại x, y thỏa mãn:

$$\sqrt{(y+1)^4} + (2-x)^2 = 0$$

Lời giải

Vì $\sqrt{(y+1)^4} \geq 0$ với mọi $y, (2-x)^2 \geq 0$ với mọi x do đó để $\sqrt{(y+1)^4} + (2-x)^2 = 0$ thì

$y = -1; x = 2$ Thay $y = -1; x = 2$ vào C ta được: $C = 2.2^4 + 15.(-1)^{2023} + 2006 = 2023$

Vậy $C = 2023$

Câu 40. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Minh Khai 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức: $C = 2x^5 - 5y^3 + 2025$ tại x, y thỏa mãn: $|x-1| + (y+2)^{20} = 0$

Lời giải

Do $|x-1| \geq 0; (y+2)^{20} \geq 0$ với mọi x, y .

Kết hợp $|x-1| + (y+2)^{20} = 0$ suy ra $|x-1| = 0$ và $(y+2)^{20} = 0$

$\Rightarrow x = 1; y = -2$.

Giá trị của biểu thức : $C = 2x^5 - 5y^3 + 2025$ tại $x = 1; y = -2$ là:

$$C = 2.1^5 - 5.(-2)^3 + 2025 = 2 + 40 + 2025 = 2067$$

Vậy $C = 2067$

Câu 41. (HSG 7 Thọ Xuân Thanh Hoá năm 2022-2023)

Cho $R(x) = x^2 - 2x$. Tính: $S = \frac{1}{R(3)} + \frac{1}{R(4)} + \frac{1}{R(5)} + \dots + \frac{1}{R(2022)} + \frac{1}{R(2023)} + \frac{1}{2.2023}$

Lời giải

Ta có $R(x) = x^2 - 2x = x(x-2)$.

$$S = \frac{1}{R(3)} + \frac{1}{R(4)} + \frac{1}{R(5)} + \dots + \frac{1}{R(2022)} + \frac{1}{R(2023)} + \frac{1}{2.2023}$$

$$= \frac{1}{3.(3-2)} + \frac{1}{4.(4-2)} + \frac{1}{5.(5-2)} + \dots + \frac{1}{2022.(2022-2)} + \frac{1}{2023.(2023-2)} + \frac{1}{2.2023}$$

$$= \frac{1}{3.1} + \frac{1}{4.2} + \frac{1}{5.3} + \dots + \frac{1}{2022.2020} + \frac{1}{2023.2021} + \frac{1}{2.2023} + \frac{1}{2.2023}$$

$$= \left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{2021.2023} \right) + \left(\frac{1}{2.4} + \frac{1}{4.2} + \dots + \frac{1}{2020.2022} \right) + \frac{1}{2.2023}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \dots + \frac{2}{2021.2023} \right) + \left(\frac{2}{2.4} + \frac{2}{4.2} + \dots + \frac{2}{2020.2022} \right) \right] + \frac{1}{2.2023}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2023} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2022} \right) \right] + \frac{1}{2 \cdot 2023}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2023} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2022} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3033}{2022} - \frac{1}{2022} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3032}{2022} = \frac{758}{1011}$$

Câu 42. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường Kim Trung 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức $A = (x-3)^{2019} + (x-y-1)^{2020} + 2021$

biết rằng $x; y$ thỏa mãn đẳng thức $\left[(x-2)^2 + 4 \right]^2 + \sqrt{(x+2y-6)^2 + 9} = 19$

Lời giải

Ta có: $(x-2)^2 \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow \left[(x-2)^2 + 4 \right]^2 \geq 4^2 = 16 \quad (1)$$

Ta có: $(x+2y-6)^2 \geq 0$ với mọi $x; y \in \mathbb{R}$ nên $\sqrt{(x+2y-6)^2 + 9} \geq \sqrt{9} = 3 \quad (2)$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \left[(x-2)^2 + 4 \right]^2 + \sqrt{(x+2y-6)^2 + 9} \geq 16 + 3 = 19$$

$$\text{Vậy biểu thức } \left[(x-2)^2 + 4 \right]^2 + \sqrt{(x+2y-6)^2 + 9} = 19$$

$$\text{khi và chỉ khi } \begin{cases} (x-2)^2 = 0 \\ (x+2y-6)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ x+2y-6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

Thay $x=2; y=2$ vào biểu thức A đã cho ta được:

$$A = (2-3)^{2019} + (2-2-1)^{2020} + 2021 = (-1)^{2019} + (-1)^{2020} + 2021 = 2021$$

$$\text{Vậy } A = 2021 \text{ khi } \left[(x-2)^2 + 4 \right]^2 + \sqrt{(x+2y-6)^2 + 9} = 19.$$

Câu 43. (HSG 7 huyện Thường Xuân 2022 - 2023)

Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là hệ số biết: $f(x+1) - f(x) = 2x - 3$.

$$\text{Tính giá trị biểu thức: } P = \frac{f(5) - f(2)}{9}.$$

Lời giải

Do $f(x)$ là đa thức bậc hai. Gọi $f(x) = ax^2 + bx + c$

Theo đề bài: $f(x+1) - f(x) = 2x - 3$

$$\Rightarrow a(x+1)^2 + b(x+1) + c - (ax^2 + bx + c) = 2x - 3$$

$$\Rightarrow a(x^2 + 2x + 1) + b(x+1) + c - ax^2 - bx - c = 2x - 3$$

$$\Rightarrow 2ax + a + b = 2x - 3 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + c$$

$$\text{Khi đó: } P = \frac{f(5) - f(2)}{9} = \frac{5^2 - 4 \cdot 5 + c - (2^2 - 4 \cdot 2 + c)}{9} = 1$$

Vậy $P = 1$

Câu 44. (HSG 7 Hâu Lộc năm 2022-2023)

Tính giá trị biểu thức $Q = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc}$ với a, b, c thỏa mãn: $(3a - 2b)^2 + |4b - 3c| \leq 0$.

Lời giải

$$Q = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} \text{ với } a, b, c \text{ thỏa mãn: } (3a - 2b)^2 + |4b - 3c| \leq 0.$$

Vì $(3a - 2b)^2 \geq 0$; $|4b - 3c| \geq 0$ với $\forall a, b$ nên để $(3a - 2b)^2 + |4b - 3c| \leq 0$ thì:

$$\begin{cases} (3a - 2b)^2 = 0 \\ |4b - 3c| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a = 2b \\ 4b = 3c \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}.$$

Đặt $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k \Rightarrow a = 2k; b = 3k; c = 4k$. Thay vào Q ta có:

$$Q = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} = \frac{(2k)^3 + (3k)^3 + (4k)^3}{2k \cdot 3k \cdot 4k} = \frac{k^3(2^3 + 3^3 + 4^3)}{24k^3} = \frac{33}{8}.$$

Vậy $Q = \frac{33}{8}$.

Câu 45. (HSG 7 huyện Nghi Lộc, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Tính giá trị các biểu thức M , biết $M + (3x^2 - 4xy) = 3x^2 + 7xy - y^2$ và x, y thỏa mãn:

$$(x+1)^{2022} + (y-4)^{2024} \leq 0$$

Lời giải

$$M + (3x^2 - 4xy) = 3x^2 + 7xy - y^2$$

$$\begin{aligned} M &= (3x^2 + 7xy - y^2) - (3x^2 - 4xy) \\ &= 3x^2 + 7xy - y^2 - 3x^2 + 4xy \\ &= 11xy - y^2 \end{aligned}$$

Biết x, y thỏa mãn: $(x+1)^{2022} + (y-4)^{2024} \leq 0$

Vì $(x+1)^{2022} \geq 0$ với mọi x và $(y-4)^{2024} \geq 0$ với mọi y

Suy ra $\begin{cases} x+1=0 \\ y-4=0 \end{cases}$ Do đó $\begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases}$

Thay $x = -1$ và $y = 4$ vào M ta được:

$$M = 11xy - y^2 = 11 \cdot (-1) \cdot 4 - 4^2 = -60$$

Vậy $(x+1)^{2022} + (y-4)^{2024} \leq 0$ thì $M = -60$

Câu 46. (HSG 7 huyện Mỹ Đức – Hà Nội 2022 - 2023)

Cho x là số thỏa mãn điều kiện $(x-1)(x+3) - 2x + 3 \leq 0$. Tính giá trị của biểu thức

$$M = 2023x^{2022} + 2022x^{2023} + 2023$$

Lời giải

Ta có: $(x-1)(x+3) - 2x + 3 \leq 0$

$\Rightarrow x^2 + 2x - 3 - 2x + 3 \leq 0$

$\Rightarrow x^2 \leq 0$ (1)

Mà $x^2 \geq 0 \forall x$ (2)

Do đó $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$.

Thay vào biểu thức M ta được: $M = 2023 \cdot 0^{2022} + 2022 \cdot 0^{2023} + 2023 = 2023$.

Vậy $M = 2023$.

Câu 47. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường Văn Lang 2022 - 2023)

Cho các số x, y thỏa mãn $(x-3)^4 + (2y-1)^{2020} \leq 0$. Tính giá trị của biểu thức

$M = 402x^2y + 284xy^2$.

Lời giải

a) Vì $(x-3)^4 \geq 0$; $(2y-1)^{2020} \geq 0$ với mọi x, y nên

$(x-3)^4 + (2y-1)^{2020} \geq 0$ với mọi x, y .

Mà theo đề bài : $(x-3)^4 + (2y-1)^{2020} \leq 0$

Suy ra $(x-3)^4 + (2y-1)^{2020} = 0$

Hay: $(x-3)^4 = 0$ và $(2y-1)^{2020} = 0$

suy ra $x = 3; y = \frac{1}{2}$

Khi đó tính được: $M = 2022$.

Câu 48. (HSG 7 huyện Kim Sơn, tỉnh Ninh Bình, trường 2022 - 2023)

Tìm đa thức M biết rằng: $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$. Tính giá trị của M khi x, y thỏa mãn $(2x-5)^{2018} + (3y+4)^{2020} \leq 0$.

Lời giải

$M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2 \Rightarrow M = 6x^2 + 9xy - y^2 - (5x^2 - 2xy) = x^2 + 11xy - y^2$

Ta có: $\begin{cases} (2x-5)^{2018} \geq 0 \\ (3y+4)^{2020} \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (2x-5)^{2018} + (3y+4)^{2020} \geq 0$

Mà $(2x-5)^{2018} + (3y+4)^{2020} \leq 0 \Rightarrow (2x-5)^{2018} + (3y+4)^{2020} = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} (2x-5)^{2018} = 0 \\ (3y+4)^{2020} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases}$

$$\text{Thay vào } M \text{ ta được: } M = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 11 \cdot \frac{5}{2} \left(-\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{25}{4} - \frac{110}{3} - \frac{16}{9} = -\frac{1159}{36}$$

Câu 49. (HSG 7 huyện Cẩm Thủy – Thanh Hóa 2022 - 2023)

Tìm đa thức M biết rằng: $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$. Tính giá trị của M khi x, y thỏa mãn: $(2x - 5)^{2018} + (3y + 4)^{2020} \leq 0$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2 \Rightarrow M = 6x^2 + 9xy - y^2 - (5x^2 - 2xy)$$

$$\Rightarrow M = 6x^2 + 9xy - y^2 - 5x^2 + 2xy = x^2 + 11xy - y^2$$

$$\text{Lại có: } \begin{cases} (2x - 5)^{2018} \geq 0 \\ (3y + 4)^{2020} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (2x - 5)^{2018} + (3y + 4)^{2020} \geq 0$$

$$\text{Mà: } (2x - 5)^{2018} + (3y + 4)^{2020} \leq 0 \Rightarrow (2x - 5)^{2018} + (3y + 4)^{2020} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2x - 5)^{2018} = 0 \\ (3y + 4)^{2020} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Thay vào M ta được :

$$M = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 11 \cdot \frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{25}{4} - \frac{110}{3} - \frac{16}{9} = -\frac{1159}{36}$$

$$\text{Vậy } M = \frac{-1159}{36}$$

Câu 50. (HSG 7 huyện Mỹ Đức 2020 - 2021)

Tìm đa thức M biết rằng: $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$.

Tính giá trị của M khi x, y thỏa mãn: $(2x - 5)^{2020} + (3y + 4)^{2022} \leq 0$

Lời giải

$$M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2 \Rightarrow M = 6x^2 + 9xy - y^2 - (5x^2 - 2xy)$$

$$\Rightarrow M = 6x^2 + 9xy - y^2 - 5x^2 + 2xy = x^2 + 11xy - y^2$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (2x - 5)^{2020} \geq 0 \\ (3y + 4)^{2022} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (2x - 5)^{2020} + (3y + 4)^{2022} \geq 0$$

$$\text{Mà } (2x - 5)^{2020} + (3y + 4)^{2022} \leq 0 \Rightarrow (2x - 5)^{2020} + (3y + 4)^{2022} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2x - 5)^{2020} = 0 \\ (3y + 4)^{2022} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases} \text{ . Thay vào ta được}$$

$$M = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 11 \cdot \frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{25}{4} - \frac{110}{3} - \frac{16}{9} = -\frac{1159}{36}$$

Câu 51. (HSG 7 huyện Như Thanh, tỉnh Thanh Hóa, 2021 - 2022)

Cho hai số x, y thỏa mãn $(2x-1)^{2022} + (3y+6)^{2022} \leq 0$. Tính giá trị của M biết rằng:
 $2M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} (2x-1)^{2022} \geq 0 (\forall x) \\ (3y+6)^{2022} \geq 0 (\forall y) \end{cases} \Rightarrow (2x-1)^{2022} + (3y+6)^{2022} \geq 0 \forall (x, y)$

Mà $(2x-1)^{2022} + (3y+6)^{2022} \leq 0 \forall (x, y) \Rightarrow (2x-1)^{2022} + (3y+6)^{2022} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2x-1)^{2022} = 0 \\ (3y+6)^{2022} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \\ 3y+6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -2 \end{cases}$$

$$2M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$$

$$2M = 6x^2 + 9xy - y^2 - 5x^2 + 2xy$$

$$M = (x^2 + 11xy - y^2) : 2$$

Thay vào biểu thức ta được:

$$M = \left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 + 11 \cdot \left(\frac{1}{2} \right) \cdot (-2) - (-2)^2 \right] : 2 = -\frac{59}{8}$$

Câu 52. (HSG 7 huyện Thanh Trì, 2021 - 2022)

Cho $(x+1)^{2020} + (y-2)^{2022} \leq 0$. Tính giá trị của biểu thức $B = -3x^5y + 8xy^2$.

Lời giải

Ta có $(x+1)^{2020} + (y-2)^{2022} \geq 0$ đúng với mọi x và y .

Mà $(x+1)^{2020} + (y-2)^{2022} \leq 0$ nên $x+1=0$ và $y-2=0$

Suy ra $x = -1$ và $y = 2$.

Thay $x = -1$ và $y = 2$ vào B ta có $B = -3x^5y + 8xy^2 = -3 \cdot (-1)^5 \cdot 2 + 8 \cdot (-1) \cdot 2^2 = -26$.

Câu 53. (HSG 7 huyện Thanh Thủy, tỉnh Phú Thọ, 2021 - 2022)

Tính giá trị của biểu thức $P = \left(-\frac{21}{22} \right)^x - \sqrt{y+1}$ với x, y thỏa mãn
 $(-7)^{2021} \cdot x^{2022} - \left| y + \frac{3}{4} \right| \geq 0$.

Lời giải

Vì $(-7)^{2021} \cdot x^{2022} \leq 0$; $-\left| y + \frac{3}{4} \right| \leq 0$ mà theo đề bài ta có $(-7)^{2021} \cdot x^{2022} - \left| y + \frac{3}{4} \right| \geq 0$

nên suy ra $(-7)^{2021} \cdot x^{2022} = 0$ và $y + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x = 0$ và $y = -0,75$

Thay $x = 0$ và $y = -0,75$ vào biểu thức P ta được:

$$P = \left(-\frac{21}{22} \right)^0 - \sqrt{-0,75+1} = 1 - 0,5 = 0,5$$

Câu 54. (HSG 7 huyện Cẩm Thủy, tỉnh Thanh Hóa, 2021 - 2022)

Tính giá trị biểu thức $P = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc}$ với a, b, c thỏa mãn $(3a - 2b)^2 + |4b - 3c| \leq 0$

Lời giải

Vì $(3a - 2b)^2 \geq 0; |4b - 3c| \geq 0$

nên để $(3a - 2b)^2 + |4b - 3c| \leq 0$ thì $\begin{cases} 3a - 2b = 0 \\ |4b - 3c| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a = 2b \\ 4b = 3c \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$ Đặt

$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k \Rightarrow a = 2k; b = 3k; c = 4k$

Khi đó ta có $P = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} = \frac{(2k)^3 + (3k)^3 + (4k)^3}{(2k)(3k)(4k)} = \frac{k^3(8 + 27 + 64)}{24k^3} = \frac{33}{8}$

Vậy $P = \frac{33}{8}$.

Câu 55. (HSG 7 huyện Tam Dương 2017 - 2018)

Cho x, y thỏa mãn $(x - 2)^4 + (2y - 1)^{2018} \leq 0$. Tính giá trị của biểu thức $M = 11x^2y + 4xy^2$

Lời giải

Vì $(x - 2)^4 \geq 0; (2y - 1)^{2018} \geq 0$ với mọi x, y nên: $(x - 2)^4 + (2y - 1)^{2014} \geq 0 (\forall x, y)$

Mà theo đề bài $(x - 2)^4 + (2y - 1)^{2014} \leq 0$

$\Rightarrow (x - 2)^4 + (2y - 1)^{2014} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ 2y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

Khi đó: $M = 11 \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 22 + 2 = 24$

Câu 56. (HSG 7 huyện Bình Lục 2022 - 2023)

Cho x, y thỏa mãn $(x + 2)^4 + (2y - 1)^{2024} \leq 0$. Tính giá trị của biểu thức $M = 5x^2y - 4xy^2$

Lời giải

Ta có: $(x + 2)^4 \geq 0$ với mọi x

$(2y - 1)^{2024} \geq 0$ với mọi y

$(x + 2)^4 + (2y - 1)^{2024} \geq 0$ với mọi x, y

Theo đề bài, để $(x + 2)^4 + (2y - 1)^{2024} \leq 0$ thì $(x + 2)^4 + (2y - 1)^{2024} = 0$

$\begin{cases} (x + 2)^4 = 0 \\ (2y - 1)^{2024} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \\ 2y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

Thay $x = -2, y = \frac{1}{2}$ vào biểu thức M ta được:

$M = 5x^2y - 4xy^2 = 5 \cdot (-2)^2 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot (-2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 12$

Câu 57. (HSG 7 huyện Triệu Sơn, tỉnh Thanh Hóa, 2021 - 2022)

Tính giá trị biểu thức $P = \left(\frac{-21}{22}\right)^x - \sqrt{y+1}$ với x, y thoả mãn : $(-5)^{2021} x^{2022} - \left|y + \frac{3}{4}\right| \geq 0$.

Lời giải

Ta có: $(-5)^{2021} x^{2022} - \left|y + \frac{3}{4}\right| \geq 0 \Rightarrow -5^{2021} x^{2022} - \left|y + \frac{3}{4}\right| \geq 0 \Rightarrow 5^{2021} x^{2022} + \left|y + \frac{3}{4}\right| \leq 0$

Vì $5^{2021} x^{2022} \geq 0 \forall x; \left|y + \frac{3}{4}\right| \geq 0 \forall y \Rightarrow 5^{2021} x^{2022} + \left|y + \frac{3}{4}\right| \leq 0$ chỉ xảy ra khi

$$5^{2021} x^{2022} + \left|y + \frac{3}{4}\right| = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^{2022} = 0 \\ y + \frac{3}{4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

+ Ta có: $P = \left(\frac{-21}{22}\right)^x - \sqrt{y+1} = \left(\frac{-21}{22}\right)^0 - \sqrt{\frac{-3}{4} + 1} = 1 - \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

Vậy $P = \frac{1}{2}$.

Câu 58. (HSG 7 huyện Thường Xuân 2022 - 2023)

Cho x, y, z, t thoả mãn: $\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z}$.

Tính $P = \left(\frac{x+y}{z+t}\right)^{2020} + \left(\frac{y+z}{x+t}\right)^{2021} + \left(\frac{z+t}{x+y}\right)^{2022} + \left(\frac{t+x}{z+y}\right)^{2023}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z}$

$$\Rightarrow \frac{x}{y+z+t} + 1 = \frac{y}{z+t+x} + 1 = \frac{z}{t+x+y} + 1 = \frac{t}{x+y+z} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+z+t}{y+z+t} = \frac{x+y+z+t}{z+t+x} = \frac{x+y+z+t}{t+x+y} = \frac{x+y+z+t}{x+y+z} \quad (1)$$

+ TH1: $x+y+z+t = 0$

Từ (1) $\Rightarrow x+y = -z-t; y+z = -t-x; z+t = -y-x; t+x = -y-z$

$$\Rightarrow P = \left(\frac{x+y}{z+t}\right)^{2020} + \left(\frac{y+z}{x+t}\right)^{2021} + \left(\frac{z+t}{x+y}\right)^{2022} + \left(\frac{t+x}{z+y}\right)^{2023}$$

$$= \left(\frac{-z-t}{z+t}\right)^{2020} + \left(\frac{-x-t}{x+t}\right)^{2021} + \left(\frac{-x-y}{x+y}\right)^{2022} + \left(\frac{-y-z}{z+y}\right)^{2023}$$

$$= 1 + (-1) + 1 + (-1) = 0$$

+ TH2: $x+y+z+t \neq 0$

Từ (1) $\Rightarrow y+z+t = z+t+x = t+x+y = x+y+z \Rightarrow x = y = z = t$

Thay các biến y, z, t bởi x ta được:

$$P = \left(\frac{x+x}{x+x}\right)^{2020} + \left(\frac{x+x}{x+x}\right)^{2021} + \left(\frac{x+x}{x+x}\right)^{2022} + \left(\frac{x+x}{x+x}\right)^{2023} = 1+1+1+1 = 4$$

Vậy $P = 0$ hoặc $P = 4$

Câu 59. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường Dân Chủ 2022 - 2023)

Cho $x+y+z = 2023$ và $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} = \frac{1}{7}$. Tính $P = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \\ &= \left(\frac{x}{y+z} + 1\right) + \left(\frac{y}{x+z} + 1\right) + \left(\frac{z}{x+y} + 1\right) - 3 \\ &= \frac{x+y+z}{y+z} + \frac{x+y+z}{x+z} + \frac{x+y+z}{x+y} - 3 \\ &= (x+y+z) \left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{x+y}\right) - 3 \end{aligned}$$

Mà $x+y+z = 2023$ và $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} = \frac{1}{7}$

Do đó $P = 2023 \cdot \frac{1}{7} - 3 = 289 - 3 = 286$

Câu 60. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường Trần Thủ Độ 2022 - 2023)

Cho 3 số a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Tính $S = \frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+ac}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S &= \frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+ac} \\ S &= \frac{1}{1+a+ab} + \frac{a}{a+ab+abc} + \frac{1}{abc+c+ac} \quad (\text{Vì } abc = 1) \\ S &= \frac{1}{1+a+ab} + \frac{a}{a+ab+1} + \frac{abc}{c(ab+1+a)} \quad (\text{Vì } abc = 1) \\ S &= \frac{1}{1+a+ab} + \frac{a}{a+ab+1} + \frac{ab}{ab+1+a} \\ S &= \frac{1+a+ab}{1+a+ab} = 1 \end{aligned}$$

Câu 61. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường Văn Lang 2022 - 2023)

Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$$

Tính giá trị của biểu thức: $M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$

Lời giải

$$\text{Từ: } \frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{2a+b+c+d}{a} - 1 = \frac{a+2b+c+d}{b} - 1 = \frac{a+b+2c+d}{c} - 1 = \frac{a+b+c+2d}{d} - 1$$

$$\frac{a+b+c+d}{a} = \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d} \quad (*)$$

$$\text{Nếu } a+b+c+d=0 \Rightarrow a+b=-(c+d); (b+c)=-(a+d)$$

$$M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c} = -4$$

Nếu $a+b+c+d \neq 0$ thì từ (*), ta có $a=b=c=d$

$$M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c} = 4$$

Vậy $M=4$ nếu $a+b+c+d \neq 0$

$$M = -4 \text{ nếu } a+b+c+d = 0$$

Câu 62. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường Vũ Thị Thục 2022 - 2023)

Cho bốn số khác không a, b, c, d thỏa mãn điều kiện: $b^2 = a.c; c^2 = b.d$

và $a = 2022; d = 2023$. Tính giá trị của biểu thức $E = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3}$.

Lời giải

Theo bài ra ta có:

$$b^2 = a.c \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

$$c^2 = b.d \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \quad (1) \Rightarrow \frac{a^3}{b^3} = \frac{b^3}{c^3} = \frac{c^3}{d^3} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3} \quad (3)$$

$$\text{Mặt khác: } \frac{a^3}{b^3} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) (2) ta có: } \frac{a^3}{b^3} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{d} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) (4) ta có: } \frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3} = \frac{a}{d} = \frac{2022}{2023}$$

$$\text{Vậy } E = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3} = \frac{2022}{2023}$$

Câu 63. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường Lê Tư Thành 2022 - 2023)

Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$.

Tính giá trị của biểu thức: $A = 2022.x + y^{2023} + z^{2023}$.

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2$$

$$\frac{1}{x+y+z} = 2 \Rightarrow x+y+z = 0,5 \Rightarrow \frac{0,5-x+1}{x} = \frac{0,5-y+2}{y} = \frac{0,5-z-3}{z} = 2$$

$$\text{Suy ra } x = \frac{1}{2}; y = \frac{5}{6}; z = -\frac{5}{6}$$

$$\text{Khi đó ta có } 2022 \cdot x + y^{2023} + z^{2023} = 2022 \cdot 0 + 0 = 1011$$

$$\text{Vậy với } x, y, z \text{ là các số thực thỏa mãn } \frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$$

thì giá trị của biểu thức $2022 \cdot x + y^{2023} + z^{2023}$ là 1011

Câu 64. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường 2022 - 2023)

$$\text{Cho } a+b+c = 2022 \text{ và } \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{1}{2022}. \text{ Tính } S = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}.$$

Lời giải

Vì $a+b+c = 2022$ nên:

$$a = 2022 - (b+c), b = 2022 - (a+c), c = 2022 - (a+b)$$

Do đó:

$$\begin{aligned} S &= \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{a+b} = \frac{2022 - (b+c)}{b+c} + \frac{2022 - (a+c)}{a+c} + \frac{2022 - (a+b)}{a+b} \\ &= 2022 \cdot \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} \right) - 3 = 2022 \cdot \frac{1}{2022} - 3 = 1 - 3 = -2 \end{aligned}$$

Câu 65. (HSG 7 thị xã An Nhơn, tỉnh Bình Định, 2022 - 2023)

Cho ba số x, y, z là ba số khác 0 thỏa mãn điều kiện $\frac{y+z-x}{x} = \frac{z+x-y}{y} = \frac{x+y-z}{z}$. Hãy

$$\text{tính giá trị của biểu thức: } C = \left(1 + \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right) \left(1 + \frac{z}{x}\right)$$

Lời giải

Với ba số x, y, z là ba số khác 0 và áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta được:

$$\text{Ta có } \frac{y+z-x}{x} = \frac{z+x-y}{y} = \frac{x+y-z}{z} = \frac{y+z-x+z+x-y+x+y-z}{x+y+z} = \frac{x+y+z}{x+y+z} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y+z-x = x \\ x+z-y = y \\ x+y-z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+z = 2x \\ x+z = 2y \\ x+y = 2z \end{cases}$$

$$C = \left(1 + \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right) \left(1 + \frac{z}{x}\right) = \left(\frac{x+y}{y}\right) \left(\frac{y+z}{z}\right) \left(\frac{z+x}{x}\right) = \frac{2z}{y} \cdot \frac{2x}{z} \cdot \frac{2y}{x} = 8$$

Câu 66. (HSG 7 huyện Thanh Thủy; huyện Hưng Hà, tỉnh, trường Hồng Lĩnh 2022 - 2023)

$$\text{Cho } a, b, c \text{ là ba số thực khác 0, thỏa mãn: } \frac{a+b-2023c}{c} = \frac{b+c-2023a}{a} = \frac{c+a-2023b}{b}.$$

Hãy tính giá trị của biểu thức $C = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{a+b-2023c}{c} = \frac{b+c-2023a}{a} = \frac{c+a-2023b}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b-2023c}{c} + 2024 = \frac{b+c-2023a}{a} + 2024 = \frac{c+a-2023b}{b} + 2024$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c}{c} = \frac{b+c+a}{a} = \frac{c+a+b}{b}$$

+ Nếu $a+b+c \neq 0$ thì $a=b=c$

$$\Rightarrow C = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = 2.2.2 = 8$$

+ Nếu $a+b+c=0$ thì $a+b=-c$; $a+c=-b$; $b+c=-a$

$$\Rightarrow C = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{a+b}{a}\right) \left(\frac{a+c}{c}\right) \left(\frac{c+b}{b}\right) = \frac{(-a).(-b).(-c)}{a.b.c} = -1$$

Vậy $C = 8$ hoặc $C = -1$.

Câu 67. (HSG 7 huyện Ngọc Lặc, trường Nguyệt Ân 2022 - 2023)

a) Cho a, b, c là ba số thực khác 0 thỏa mãn điều kiện: $\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$

Hãy tính giá trị của biểu thức $M = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right)$

b) Cho $\frac{x}{3} = \frac{y}{5}$. Tính giá trị biểu thức. $C = \frac{5x^2 + 3y^2}{10x^2 - 3y^2}$

Lời giải

a) + Nếu $a+b+c \neq 0$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, Ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 1$$

$$\text{Mà } \frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 2$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 2$$

$$\text{Vậy: } M = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+a}{a}\right) \left(\frac{c+a}{c}\right) \left(\frac{b+c}{b}\right) = 8$$

+ Nếu $a+b+c=0$

$$\text{Ta có: } \frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = -2$$

$$\text{mà } \frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = -1$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = -1$$

$$\text{Vậy } M = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+a}{a}\right) \left(\frac{c+a}{c}\right) \left(\frac{b+c}{b}\right) = -1$$

b) Đặt $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = k \Rightarrow \begin{cases} x = 3k \\ y = 5k \end{cases}$. Khi đó:

$$C = \frac{5x^2 + 3y^2}{10x^2 - 3y^2} = \frac{5(3k)^2 + 3(5k)^2}{10(3k)^2 - 3(5k)^2} = \frac{45k^2 + 75k^2}{90k^2 - 75k^2} = \frac{120k^2}{15k^2} = 8$$

Câu 68. (HSG 7 huyện Tam Nông 2022 - 2023)

Cho các số a, b, c khác 0 thỏa mãn $\frac{ab}{a+b} = \frac{bc}{b+c} = \frac{ca}{c+a}$. Tính giá trị của biểu thức

$$M = \frac{a^2b + b^2c + c^2a}{a^3 + b^3 + c^3} + \frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2}$$

Lời giải

Từ $\frac{ab}{a+b} = \frac{bc}{b+c} = \frac{ca}{c+a} \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{b+c}{bc} = \frac{c+a}{ca}$ (a, b, c khác 0)

$$\Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{1}{c} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \Rightarrow a = b = c$$

Đặt $a = b = c = k$ ($k \neq 0$)

Khi đó $M = \frac{k^3 + k^3 + k^3}{k^3 + k^3 + k^3} + \frac{k^2}{k^2} + \frac{k^2}{k^2} + \frac{k^2}{k^2} = 4$

Câu 69. (HSG 7 huyện Triệu Sơn, tỉnh Thanh Hóa, 2021 - 2022)

Cho: $2a - b = \frac{2}{3}(a + b)$. Tính $M = \frac{a^4 + 5^4}{b^4 + 4^4}$.

Lời giải

Ta có: $2a - b = \frac{2}{3}(a + b) = \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b \Rightarrow \frac{4a}{3} = \frac{5b}{3} \Rightarrow 4a = 5b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{4}$

$$\Rightarrow \frac{a^4}{b^4} = \frac{5^4}{4^4} = \frac{a^4 + 5^4}{b^4 + 4^4}$$

$$\Rightarrow M = \frac{a^4 + 5^4}{b^4 + 4^4} = \frac{5^4}{4^4} = \frac{625}{256}$$

Vậy $M = \frac{625}{256}$.

Câu 70. (HSG 7 huyện, tỉnh Lào Cai 2022 - 2023)

Cho $\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25}$ và $4x^3 - 3 = 29$. Tính giá trị biểu thức $A = x - 2y + 3z$.

Lời giải

Cho $\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25}$ và $4x^3 - 3 = 29$. Tính giá trị biểu thức $A = x - 2y + 3z$.

Ta có: $4x^3 - 3 = 29 \Rightarrow 4x^3 = 32 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$

Thay $x = 2$ vào

$$\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25} \text{ ta được: } \frac{2+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25} \Rightarrow 2 = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{y-25}{-16} = 2 \Rightarrow y-25 = -32 \Rightarrow y = -7; \frac{z+49}{25} = 2 \Rightarrow z+49 = 50 \Rightarrow z = 1$$

Thay $x = 2; y = -7; z = 1$ vào A ta được: $A = 2 - 2(-7) + 3.1 = 19$

Vậy giá trị của biểu thức $A = 19$.

Câu 71. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Trần Đức Thông 2022 - 2023)

Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $a^{100} + b^{100} = a^{101} + b^{101} = a^{102} + b^{102}$.

Hãy tính giá trị của biểu thức : $P = a^{2022} + b^{2023}$

Lời giải

Ta có : $a^{102} + b^{102} = (a^{101} + b^{101}) \cdot (a + b) - ab \cdot (a^{100} + b^{100})$ với mọi a, b (1)

Mà $a^{100} + b^{100} = a^{101} + b^{101} = a^{102} + b^{102}$ (2)

Từ (1) và (2): $1 = (a + b) - ab$

$$(a - 1) \cdot (b - 1) = 0$$

TH1: $a = 1$

$$1^{100} + b^{100} = 1^{101} + b^{101} = 1^{102} + b^{102}$$

$$b^{100} = b^{101} = b^{102}$$

$b = 0$ hoặc $b = 1$

Do $b > 0$ nên $b = 1$

TH2: $b = 1$

$$1^{100} + a^{100} = 1^{101} + a^{101} = 1^{102} + a^{102}$$

$$a^{100} = a^{101} = a^{102}$$

$a = 0$ hoặc $a = 1$

Do $a > 0$ nên $a = 1$

$$\text{Do đó } P = a^{2022} + b^{2023} = 1^{2022} + 1^{2023} = 2$$



CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS

CĐ2: TÌM ẨN CHƯA BIẾT

Dạng 1: Tìm x thông thường
Dạng 2: Đưa về dạng tích bằng 0
Dạng 3: Sử dụng tính chất lũy thừa
Dạng 4: Tìm ẩn dạng phân thức
Dạng 5: Tìm x dạng chứa dấu giá trị tuyệt đối
Dạng 6: Sử dụng công thức tính tổng có quy luật
Dạng 7: Tổng các biểu thức không âm bằng 0
Dạng 8: Tìm ẩn dựa vào tính chất về dấu
Dạng 9: Sử dụng phương pháp chặn để tìm ẩn
Dạng 10: Tìm ẩn với điều kiện nguyên

Dạng 1. Tìm x thông thường

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. (HSG 7 huyện Lạng Giang, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

Cho $\sqrt{\frac{25}{4}} - \frac{3}{2}x = \frac{11}{6}$. Căn bậc hai số học của x bằng:

- A. $\frac{4}{9}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{16}{81}$ D. $\frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn B

$$\sqrt{\frac{25}{4}} - \frac{3}{2}x = \frac{11}{6}$$

$$\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x = \frac{11}{6}$$

$$\frac{3}{2}x = \frac{5}{2} - \frac{11}{6} = \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{4}{9}$$

Căn bậc hai số học của x bằng $\frac{2}{3}$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Lục Nam 2020 - 2021)

Tìm x biết: $\frac{4}{3} + \frac{-7}{9}x = -\frac{2}{7}$

- A. $-\frac{102}{49}$ B. $\frac{3}{7}$ C. $\frac{102}{49}$ D. $-\frac{8}{15}$

Lời giải

Chọn C

$$\frac{4}{3} + \frac{-7}{9}x = -\frac{2}{7}$$

$$\frac{-7}{9}x = -\frac{2}{7} - \frac{4}{3}$$

$$\frac{-7}{9}x = -\frac{34}{21}$$

$$x = -\frac{34}{21} : \frac{-7}{9}$$

$$x = \frac{102}{49}$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Nếu $\sqrt{2x+1} = 5$ thì giá trị của $2x^2$ bằng

- A. 12. B. 144. **C. 288.** D. 50.

Lời giải

Chọn C

Có: $\sqrt{2x+1} = 5$

$$2x+1 = 25$$

$$x = 12$$

Khi đó: $2x^2 = 2 \cdot 12^2 = 288$

Câu 4. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Giá trị x thỏa mãn $x^2 \cdot (x^{19} - 2) - (x^{21} - 3x^2 + 4) = (x-2)(x-3)$ là

- A. 0. B. 3. **C. 2.** D. 1.

Lời giải

Chọn C

$$x^2 \cdot (x^{19} - 2) - (x^{21} - 3x^2 + 4) = (x-2)(x-3)$$

$$x^{21} - 2x^2 - x^{21} + 3x^2 - 4 = (x-2)(x-3)$$

$$x^2 - 4 = (x-2)(x-3)$$

$$x^2 - 4 = x^2 - 2x - 3x + 6$$

$$5x = 10$$

$$x = 2$$

Vậy $x = 2$.

Câu 5. (HSG 7 huyện Sơn Động 2022 - 2023)

Giá trị x thỏa mãn $\frac{4}{3} + \frac{-7}{9}x = \left| -\frac{2}{7} \right|$ là

- A. $-\frac{154}{189}$. B. $\frac{66}{49}$. C. $-\frac{66}{49}$. D. $\frac{189}{154}$.

Lời giải

Chọn B

Tìm x biết: $\frac{6}{7} + \frac{1}{7} : x = \frac{2}{21}$.

Lời giải

$$\frac{6}{7} + \frac{1}{7} : x = \frac{2}{21}$$

$$\frac{1}{7} : x = \frac{2}{21} - \frac{6}{7}$$

$$\frac{1}{7} : x = \frac{2}{21} - \frac{18}{21}$$

$$\frac{1}{7} : x = \frac{-16}{21}$$

$$x = \frac{1}{7} : \frac{-16}{21}$$

$$x = \frac{1}{7} \cdot \frac{-21}{16}$$

$$x = \frac{-3}{16}$$

Vậy $x = \frac{-3}{16}$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Đô Lương 2022 - 2023)

Tìm x thoả mãn. $2x = \frac{3}{2}x + 25\%$.

Lời giải

Ta có: $2x = \frac{3}{2}x + 25\%$

$$2x - \frac{3}{2}x = \frac{25}{100}$$

$$\left(2 - \frac{3}{2}\right)x = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Vậy $x = \frac{1}{2}$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Tân Kỳ 2022 – 2023)

Tìm x biết rằng: $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} : x = -3$.

Lời giải

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} : x = -3$$

$$\frac{1}{4} : x = -3 - \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{4} : x = \frac{-12}{4} - \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{4} : x = \frac{-15}{4}$$

$$x = \frac{1}{4} : \frac{-15}{4}$$

$$x = \frac{1}{4} \cdot \frac{-4}{15}$$

$$x = \frac{-1}{15}$$

Vậy $x = \frac{-1}{15}$.

Câu 4. (HSG 7 huyện Ứng Hòa 2022 - 2023).

Tìm x , biết: $\left(-1\frac{3}{5} + x\right) : \frac{12}{13} = 2\frac{1}{6}$.

Lời giải

$$\left(-1\frac{3}{5} + x\right) : \frac{12}{13} = 2\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{8}{5} + x\right) : \frac{12}{13} = \frac{13}{6}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{8}{5} + x\right) = \frac{13}{6} \cdot \frac{12}{13}$$

$$\Rightarrow -\frac{8}{5} + x = 2$$

$$\Rightarrow x = 2 + \frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow x = \frac{18}{5}$$

Vậy $x = \frac{18}{5}$



CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS

Câu 5. (HSG 7 huyện Liên Trường 2022 - 2023).

Tìm x , biết: $3\frac{1}{2} : (2x-1) = \frac{21}{22}$.

Lời giải

$$3\frac{1}{2} : (2x-1) = \frac{21}{22}$$

$$2x-1 = \frac{7}{2} : \frac{21}{22}$$

$$2x = \frac{11}{3} + 1$$

$$x = \frac{14}{3} : 2 = \frac{7}{3}$$

$$x = \frac{14}{3} : 2$$

$$x = \frac{7}{3}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{7}{3}.$$

Câu 6. (HSG 7 thành phố Sài Sơn, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } \frac{5}{11} + \frac{6}{11} : x = \frac{5}{22}.$$

Lời giải

$$\frac{5}{11} + \frac{6}{11} : x = \frac{5}{22}$$

$$\frac{6}{11} : x = \frac{5}{22} - \frac{5}{11}$$

$$\frac{6}{11} : x = \frac{-5}{22}$$

$$x = \frac{6}{11} : \frac{-5}{22}$$

$$x = \frac{-12}{5}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{-12}{5}.$$

Câu 7. (HSG 7 thành phố Chí Linh 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x, \text{ biết } \frac{11}{13} - \left(\frac{5}{42} - x \right) = - \left(\frac{15}{28} - \frac{11}{13} \right).$$

Lời giải

$$\frac{11}{13} - \left(\frac{5}{42} - x \right) = - \left(\frac{15}{28} - \frac{11}{13} \right)$$

$$\frac{11}{13} - \frac{5}{42} + x = - \frac{15}{28} + \frac{11}{13}$$

$$x = - \frac{15}{28} + \frac{5}{42}$$

$$x = - \frac{5}{12}$$

$$\text{Vậy } x = - \frac{5}{12}.$$

Câu 8. (HSG 7 huyện Nghĩa Đàn, tỉnh Nghệ An 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } \frac{-8}{13} + \left(\frac{-7}{5} - x \right) = \frac{-1}{2}.$$

Lời giải

$$\frac{-8}{13} + \left(\frac{-7}{5} - x \right) = \frac{-1}{2}$$

$$\frac{-7}{5} - x = \frac{3}{26}$$

$$x = \frac{-7}{5} - \frac{3}{26}$$

$$x = \frac{-197}{130}$$

Vậy $x = \frac{-197}{130}$.

Câu 9. (HSG 7 huyện Quốc Oai, Hà Nội 2022 - 2023)

Tìm x biết: $(0,4x - 2) - (1,5x + 1) - (-4x - 0,8) = 3,6$.

Lời giải

$$(0,4x - 2) - (1,5x + 1) - (-4x - 0,8) = 3,6$$

$$0,4x - 2 - 1,5x - 1 + 4x + 0,8 = 3,6$$

$$x(0,4 - 1,5 + 4) = 3,6 + 2 + 1 - 0,8$$

$$2,9x = 5,8$$

$$x = 2$$

Vậy $x = 2$.

Câu 10. (Đề 66 - HSG 7 huyện Thái Thụy, 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $\frac{2}{5} - \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$.

Lời giải:

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{20}$$

$$x - \frac{1}{2} = \frac{3}{20} : \frac{1}{3}$$

$$x - \frac{1}{2} = \frac{9}{20}$$

$$x = \frac{9}{20} + \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{19}{20}$$

Vậy $x = \frac{9}{20}$.

Câu 11. (HSG 7 huyện Bá Thước, THCS thị trấn Cảnh Nài - 2022 - 2023)

Tìm x , biết:

a) $(x - 2034) \cdot 5 = -105$

b) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = \frac{5}{8}$

Lời giải:

a) $(x - 2034) \cdot 5 = -105$

$$x - 2034 = (-105) : 5$$

$$x - 2034 = -21$$

$$x = -21 + 2034$$

$$x = 2013$$

Vậy $x = 2013$.

b) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = \frac{5}{8}$

$$\frac{1}{2}x = \frac{5}{8} + \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{11}{8}$$

$$x = \frac{11}{8} : \frac{1}{2} = \frac{11}{4}$$

Vậy $x = \frac{11}{4}$.

Câu 12. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2021 - 2022)

Tìm x biết $-\frac{15}{12}x + \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$

Lời giải

$$-\frac{15}{12}x + \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{4}x = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{4}x = \frac{5}{4}$$

$$x = \frac{5}{4} : \frac{5}{4}$$

Vậy $x = 1$

Câu 13. (HSG 7 huyện Ý Yên 2021 - 2022)

Tìm x biết $\frac{x}{2} - \left(\frac{3x}{5} - \frac{13}{5}\right) = \frac{7}{5} - \frac{7}{10}x$

Lời giải

$$\frac{x}{2} - \frac{3x}{5} + \frac{13}{5} = \frac{7}{5} - \frac{7}{10}x$$

$$\frac{x}{2} - \frac{3x}{5} + \frac{7}{10}x = \frac{7}{5} - \frac{13}{5}$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{5} + \frac{7}{10}\right)x = \frac{-6}{5}$$

$$\frac{6}{10}x = \frac{-6}{5}$$

$$x = \frac{-6}{5} : \frac{6}{10}$$

$$x = -2$$

Vậy $x = -2$.

Câu 14. (HSG 7 huyện Triệu Sơn, tỉnh Thanh Hóa 2021 - 2022)

Tìm x , biết: $\frac{1}{11}(1-3x) = \frac{1}{5}x - \frac{1}{2}$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{11}(1-3x) = \frac{1}{5}x - \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{11} - \frac{3}{11}x = \frac{1}{5}x - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3}{11}x - \frac{1}{5}x = \frac{-1}{11} - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-26}{55}x = \frac{-13}{22}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$$

Vậy $x = \frac{5}{4}$.



Câu 15. (HSG 7 huyện Tân Kỳ 2021 - 2022)

Tìm x , biết: $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} : x = \frac{5}{6}$

Lời giải

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} : x = \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{3} : x = \frac{5}{6} - \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} : x = \frac{1}{6}$$

$$x = 2.$$

Vậy $x = 2$

Câu 16. (HSG 7 huyện Cửa Lò, Nghệ An 2020 - 2021)

Tìm x biết: $\frac{2}{5} + \frac{3}{5}x = \frac{-1}{4}$.

Lời giải

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5}x = \frac{-1}{4}$$

$$\frac{3}{5}x = \frac{-1}{4} - \frac{2}{5}$$

$$\frac{3}{5}x = \frac{-5}{20} - \frac{8}{20}$$

$$\frac{3}{5}x = \frac{-13}{20}$$

$$x = \frac{-13}{20} : \frac{3}{5}$$

$$x = \frac{-13}{12}$$

Vậy $x = -\frac{13}{12}$.

Câu 17. (HSG 7 huyện Bát Xát 2021 - 2022)

Tìm x biết : $2(x-1) - 3(2x+2) - 4(2x+3) = 16$

Lời giải

$$2(x-1) - 3(2x+2) - 4(2x+3) = 16$$

$$2x - 2 - 6x - 6 - 8x - 12 = 16$$

$$-12x = 36$$

$$x = -3$$

Vậy $x = -3$

Câu 18. (HSG 7 huyện Bá Thước 2021 - 2022)

Tìm x biết: $-\frac{3}{4} + \frac{1}{4} : x = -3$

Lời giải

$$-\frac{3}{4} + \frac{1}{4} : x = -3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} : x = -3 + \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} : x = -\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{9}$$

Vậy $x = -\frac{1}{9}$.

Câu 19. (HSG 7 huyện Đức Thọ 2021 - 2022)

Tìm x , biết $\frac{1}{3} : 3x = 1$

Lời giải

$$\frac{1}{3} : 3x = 1$$

$$\frac{1}{9}x = 1$$

$$x = 9$$

Vậy $x = 9$.

Câu 20. (HSG 7 huyện Thường Tín 2018 - 2019)

Tìm x biết: $23x - \left(\frac{1}{27} - \frac{4}{9}\right) = 0$.

Lời giải

$$23x - \left(\frac{1}{27} - \frac{4}{9}\right) = 0.$$

$$23x = \frac{1}{27} - \frac{4}{9}.$$

$$23x = -\frac{11}{27}.$$

$$x = -\frac{11}{621}.$$

Vậy $x = -\frac{11}{621}$.

Câu 21. (HSG 7 huyện 2018 - 2019)

Tìm x biết: $3(x-2) + \frac{2}{5} = 4$.



Lời giải

$$3(x-2) + \frac{2}{5} = 4.$$

$$\Rightarrow 3(x-2) = 4 - \frac{2}{5}.$$

$$\Rightarrow 3(x-2) = \frac{18}{5}.$$

$$\Rightarrow x-2 = \frac{6}{5}.$$

Vậy $x = \frac{16}{5}$.

Câu 22. (HSG 7 trường Lê Hồng Phong 2018 - 2019)

Tìm x, y biết: $x - y = xy = x : y (y \neq 0)$.

Lời giải

Ta có: $x - y = xy$ nên $x = xy + y = y(x+1) \Rightarrow x : y = x+1$.

Mà $x - y = x : y$, do đó: $x+1 = x - y \Rightarrow y = -1$.

Do đó: $x+1 = -x \Rightarrow x+x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Vậy $x = -\frac{1}{2}; y = -1$.

Câu 23. (HSG 7 huyện Phù Cát 2017 - 2018)

Tìm hai số x và y sao cho $x + y = xy = x : y$ ($y \neq 0$)

Lời giải

$$\text{Từ } x + y = xy \Rightarrow x = xy - y = y(x-1) \Rightarrow x : y = x-1$$

$$\text{Ta lại có: } x : y = x + y \Rightarrow x + y = x-1 \Rightarrow y = -1$$

$$\Rightarrow x = xy - y = -x + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Vậy hai số cần tìm là $x = \frac{1}{2}$; $y = -1$.

Câu 24. (HSG 7 trường THCS Hưng Vũ 2018 - 2019)

Tìm x , biết

$$\text{a) } \frac{-2}{5} + \frac{5}{3} \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{15}x \right) = -\frac{7}{6}$$

$$\text{b) } \left(\frac{1}{4}x - 1 \right) + \left(\frac{2}{3}x - 2 \right) - \left(\frac{5}{8}x + 1 \right) = 5$$

Lời giải

$$\text{a) } \frac{-2}{5} + \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{2} - \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{15}x = -\frac{7}{6}$$

$$\frac{-2}{5} + \frac{5}{2} - \frac{4}{9}x = -\frac{7}{6}$$

$$-\frac{4}{9}x = -\frac{7}{6} - \left(\frac{-2}{5} + \frac{5}{2} \right)$$

$$-\frac{4}{9}x = \frac{-49}{15}$$

$$x = \frac{-49}{15} : \frac{-4}{9}$$

$$x = \frac{147}{20}$$

Vậy $x = \frac{147}{20}$.

$$\text{b) } \frac{1}{4}x - 1 + \frac{2}{3}x - 2 - \frac{5}{8}x - 1 = 5$$

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{5}{8} \right)x = 5 - (-1 - 2 - 1)$$

$$\frac{7}{24}x = 9$$

$$x = 9 : \frac{7}{24}$$

$$x = \frac{216}{7}$$

Vậy $x = \frac{216}{7}$.



CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS

Câu 25. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường 2017 - 2018)

Tìm x biết: $1\frac{1}{5} + \frac{1}{5} : x = -4$

Lời giải

$$\frac{1}{5} : x = -4 - \frac{6}{5}$$

$$\frac{1}{5} : x = \frac{-26}{5}$$

$$x = -\frac{1}{26}$$

Vậy $x = -\frac{1}{26}$

Câu 26. (HSG 7 huyện Mỹ Cày 2017- 2018)

Tìm x biết: $\frac{1}{2} : 2x = -\frac{1}{3}$

Lời giải

$$\frac{1}{2} : 2x = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{4}x = -\frac{1}{3}$$

$$x = -\frac{4}{3}$$

Vậy $x = -\frac{4}{3}$.



Câu 27. (HSG 7 huyện Sông Lô, 2017 - 2018)

Tìm x biết: $\frac{1}{2016} : 2015x = -\frac{1}{2015}$

Lời giải

$$\frac{1}{2016} : 2015x = -\frac{1}{2015}$$

$$\frac{1}{2016 \cdot 2015}x = \frac{-1}{2015}$$

$$x = -\frac{1}{2015} : \frac{1}{2016 \cdot 2015}$$

$$x = -2016$$

Vậy $x = -2016$

Câu 28. (HSG 7 trường THCS Nguyễn Chí, huyện Đông Sơn, 2017 - 2018)

Tìm x biết: $-\frac{15}{12}x + \frac{3}{7} = \frac{6}{5}x - \frac{1}{2}$

Lời giải

$$-\frac{15}{12}x + \frac{3}{7} = \frac{6}{5}x - \frac{1}{2}$$

$$\frac{6}{5}x + \frac{5}{4}x = \frac{3}{7} + \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{6}{5} + \frac{5}{4}\right)x = \frac{13}{14}$$

$$\frac{49}{20}x = \frac{13}{14}$$

$$x = \frac{130}{343}$$

Vậy $x = \frac{130}{343}$

Câu 29. (HSG 7 huyện 2017 - 2018)

Tìm x biết: $1\frac{1}{5} + \frac{1}{5} : x = -4$

Lời giải

$$1\frac{1}{5} + \frac{1}{5} : x = -4$$

$$\frac{6}{5} + \frac{1}{5} : x = -4$$

$$\frac{1}{5} : x = -4 - \frac{6}{5}$$

$$\frac{1}{5} : x = -\frac{26}{5}$$

$$x = \frac{1}{5} : \frac{-26}{5}$$

$$x = -\frac{1}{26}$$

Vậy $x = -\frac{1}{26}$



CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS

Câu 30. (HSG 7 huyện Quốc Oai 2016 - 2017)

Tìm x , biết: $2x - \frac{1}{5} = \frac{6}{5}x - \frac{1}{2}$

Lời giải

$$2x - \frac{1}{5} = \frac{6}{5}x - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{5}x = -\frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{3}{8}$$

Vậy $x = -\frac{3}{8}$.

Câu 31. (HSG 7 huyện Thanh Trì 2021 - 2022)

Tìm x biết: $\frac{3^{10} \cdot 11 + 9^5 \cdot 5}{27^3 \cdot 2^4} \cdot x = -9$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{3^{10} \cdot 11 + 9^5 \cdot 5}{27^3 \cdot 2^4} = \frac{3^{10} \cdot (11+5)}{3^9 \cdot 2^4} = 3.$$

Theo bài ta có $3 \cdot x = -9$

$$\Rightarrow x = (-9) : 3 = -3.$$

Vậy $x = -3$.

Câu 32. (HSG 7 huyện Hòa Bình 2016 - 2017)

Tìm x , biết: $\frac{1}{2} - x : \frac{3}{5} = 2$

Lời giải

$$\frac{1}{2} - x : \frac{3}{5} = 2$$

$$x : \frac{3}{5} = \frac{1}{2} - 2$$

$$x : \frac{3}{5} = \frac{-3}{2}$$

$$x = -\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{5}$$

$$x = -\frac{9}{10}$$

Vậy $x = -\frac{9}{10}$

Câu 33. (HSG 7 huyện Anh Sơn - 2016 - 2017)

Tìm x , biết: $3(x-2) + \frac{2}{5} = 4$

Lời giải

$$3(x-2) + \frac{2}{5} = 4$$

$$\Rightarrow 3(x-2) = 4 - \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow 3(x-2) = \frac{18}{5}$$

$$\Rightarrow x-2 = \frac{6}{5}$$

$$\Rightarrow x = 3\frac{1}{5}$$

Vậy $x = 3\frac{1}{5}$

Câu 34. (HSG 7 huyện 2015 - 2016)

Tìm x , biết: $-\frac{15}{12}x + \frac{3}{7} = \frac{6}{5}x - \frac{1}{2}$

Lời giải

$$-\frac{15}{12}x + \frac{3}{7} = \frac{6}{5}x - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{5}x + \frac{5}{4}x = \frac{3}{7} + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{6}{5} + \frac{5}{4}\right)x = \frac{13}{14} \Rightarrow \frac{49}{20}x = \frac{13}{14} \Rightarrow x = \frac{130}{343}$$

Vậy $x = \frac{130}{343}$.

Câu 35. (HSG 7 huyện Thái Thụy- 2015 - 2016)

Tìm x , biết: $\frac{1}{2} : 2x = -\frac{1}{3}$

Lời giải

$$\frac{1}{2} : 2x = -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{4}x = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$$

Vậy $x = -\frac{4}{3}$.

Câu 36. (HSG 7 trường Ân Tường Đông 2014 - 2015)

Tìm x , biết:

a) $\frac{3}{4} + \frac{2}{5}x = \frac{29}{60}$

b) $\left(\frac{7}{3}x - 0,6\right) : 3\frac{2}{5} = 1$

Lời giải

a) $\frac{3}{4} + \frac{2}{5}x = \frac{29}{60}$

$$\Rightarrow \frac{2}{5}x = \frac{29}{60} - \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{4}{15} : \frac{2}{5} = -\frac{2}{3}$$

Vậy $x = -\frac{2}{3}$.

b) $\left(\frac{7}{3}x - 0,6\right) : 3\frac{2}{5} = 1$

$$\Rightarrow \left(\frac{7}{3}x - \frac{6}{10}\right) : \frac{17}{5} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{7}{3}x - \frac{3}{5} = \frac{17}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{3}x = \frac{17}{5} + \frac{3}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$\Rightarrow x = 4 : \frac{7}{3} = \frac{12}{7}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{12}{7}.$$

Câu 37. (HSG 7 huyện Thanh Miện 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } \frac{3}{5} + \frac{2}{5} : \left(\frac{2}{3} - x \right) = \frac{1}{2}$$

Lời giải

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{5} : \left(\frac{2}{3} - x \right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{5} : \left(\frac{2}{3} - x \right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{5}$$

$$\frac{2}{5} : \left(\frac{2}{3} - x \right) = \frac{-1}{10}$$

$$\frac{2}{3} - x = \frac{2}{5} : \left(\frac{-1}{10} \right)$$

$$\frac{2}{3} - x = -4$$

$$x = \frac{2}{3} - (-4)$$

$$x = \frac{14}{3}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{14}{3}.$$

Câu 38. (HSG 7 thành phố Thanh Hóa 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x, \text{ biết: } \left(\frac{1}{4}x - 1 \right) + \left(\frac{5}{6}x - 2 \right) - \left(\frac{3}{8}x + 5 \right) = 3,5$$

Lời giải

$$\left(\frac{1}{4}x - 1 \right) + \left(\frac{5}{6}x - 2 \right) - \left(\frac{3}{8}x + 5 \right) = 3,5$$

$$\left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{6}x - \frac{3}{8}x \right) - (1 + 2 + 5) = 3,5$$

$$x \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{6} - \frac{3}{8} \right) = 3,5 + 8$$

$$x \cdot \frac{17}{24} = \frac{23}{2}$$

$$x = \frac{23}{2} : \frac{17}{24} = \frac{23}{2} \cdot \frac{24}{17} = \frac{276}{17}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{276}{17}$$

Câu 39. (HSG 7 huyện Tam Dương 2022 - 2023)

Tìm x biết $x - \frac{-2}{3} = \frac{\frac{5}{11} + 0,2 - 0,375}{\frac{9}{16} - \frac{15}{22} + \frac{3}{2} \cdot (-0,2)}$.

Lời giải

$$x - \frac{-2}{3} = \frac{\frac{5}{11} + 0,2 - 0,375}{\frac{9}{16} - \frac{15}{22} + \frac{3}{2} \cdot (-0,2)}$$

$$x - \frac{-2}{3} = \frac{\frac{5}{11} + \frac{2}{10} - \frac{3}{8}}{\frac{9}{16} - \frac{15}{22} - \frac{3}{10}}$$

$$x - \frac{-2}{3} = \frac{\frac{5}{11} + \frac{2}{10} - \frac{3}{8}}{\frac{-3}{2} \left(\frac{5}{11} + \frac{2}{10} - \frac{3}{8} \right)}$$

$$x - \frac{-2}{3} = \frac{-2}{3}$$

$$x = \frac{-4}{3}$$

Vậy $x = \frac{-4}{3}$

Câu 40. (Đề thi thử Thanh Miện 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\frac{3}{5} - \left(\frac{47}{20} - 2x \right) \cdot \frac{2}{15} = \frac{3}{10}$.

Lời giải

$$\frac{3}{5} - \left(\frac{47}{20} - 2x \right) \cdot \frac{2}{15} = \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{47}{20} - 2x \right) \cdot \frac{2}{15} = \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{47}{20} - 2x \right) \cdot \frac{2}{15} = \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{1}{10} \Rightarrow x = \frac{1}{20}$$

Vậy $x = \frac{1}{20}$.

Dạng 2: Đưa về dạng tích bằng 0

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Thủy, tỉnh Phú Thọ 2021 - 2022)

Số các giá trị của x để $(x-4)(x^2+16)(x^2-16)(x+1)=0$ là

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

Lời giải

Chọn A

$$\Rightarrow (x-2)^{2020}[(x-2)^4 - 1] = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)^{2020} = 0 \text{ hoặc } (x-2)^4 - 1 = 0$$

$$\text{TH1: } (x-2)^{2020} = 0 \Rightarrow x-2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{TH2: } (x-2)^4 - 1 = 0 \Rightarrow (x-2)^4 = 1 \Rightarrow x-2 = \pm 1$$

$$\text{Với } x-2 = 1 \Rightarrow x = 3$$

$$\text{Với } x-2 = -1 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{Do đó } x \in \{1; 2; 3\}$$

Vậy số các giá trị của thỏa mãn đẳng thức $(x-2)^{2024} = (x-2)^{2020}$ là 3.

Câu 5. (HSG 7 Đề khảo sát lần 3, 2022 - 2023)

Tổng các số x thỏa mãn $(x^2 - 1)(x^2 - 2)\dots(x^2 - 2021) = 0$ là

- A. 1. B. 0. C. 2020. D. 2021.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $x^2 - a = 0$ ($a > 0$) $\Rightarrow x = \sqrt{a}$ hoặc $x = -\sqrt{a}$

$(x^2 - 1)(x^2 - 2)\dots(x^2 - 2021) = 0$ là tích của các biểu thức dạng $x^2 - a = 0$ ($a > 0$)

Nên các giá trị của x tìm được đôi một là các số đối của nhau.

Tổng các số x thỏa mãn $(x^2 - 1)(x^2 - 2)\dots(x^2 - 2021) = 0$ là 0.

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Mường Lát, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Tìm x biết: $x^2 - 2023x = 0$

Lời giải

$$x^2 - 2023x = 0$$

$$x(x - 2023) = 0$$

Suy ra $x = 0$ hoặc $x - 2023 = 0$

Suy ra $x = 0$ hoặc $x = 2023$

Vậy $x = 0$ hoặc $x = 2023$.

Câu 2. (HSG 7 Hưng Hà, Tây Đô 2022 - 2023)

Tìm số nguyên x sao cho: $(x+2)^{n+1} = (x+2)^{n+11}$.

Lời giải

$$(x+2)^{n+1} = (x+2)^{n+11}$$

$$\Rightarrow (x+2)^{n+1} - (x+2)^{n+11} = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)^{n+1} [1 - (x+2)^{10}] = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)^{n+1} = 0 \text{ hoặc } 1 - (x+2)^{10} = 0$$

$$\Rightarrow x = -2 \text{ hoặc } x+2 = 1 \text{ hoặc } x+2 = -1$$

Vậy $x \in \{-2; -1; -3\}$

Câu 3. (HSG 7 Yên Bái, Yên Bình 2022 - 2023)

Tìm x biết: $(2x-15)^5 = (2x-15)^3$

Lời giải

$$(2x-15)^5 = (2x-15)^3 \Rightarrow (2x-15)^3 \cdot [(2x-15)^2 - 1] = 0$$

$$\Rightarrow (2x-15)^3 = 0 \text{ hoặc } (2x-15)^2 - 1 = 0.$$

$$\Rightarrow 2x-15 = 0 \text{ hoặc } 2x-15 = 1 \text{ hoặc } 2x-15 = -1.$$

$$\Rightarrow x = \frac{15}{2} \text{ hoặc } x = 8 \text{ hoặc } x = 7.$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{15}{2}; 8; 7 \right\}.$$

Câu 4. (HSG 7 Sông Lô, Vĩnh Phúc, 2022 - 2023)

Tìm x biết: $(2x-15)^{2023} = (2x-15)^{2021}$.

Lời giải

$$(2x-15)^{2023} = (2x-15)^{2021}$$

$$\Rightarrow (2x-15)^{2023} = (2x-15)^{2021}$$

$$\Rightarrow (2x-15)^{2021} \cdot [(2x-15)^2 - 1] = 0$$

$$\Rightarrow (2x-15)^{2021} = 0 \text{ hoặc } (2x-15)^{2021} = 1$$

$$\Rightarrow 2x-15 = 0 \text{ hoặc } 2x-15 = 1 \text{ hoặc } 2x-15 = -1.$$

$$\Rightarrow 2x = 15 \text{ hoặc } 2x = 16 \text{ hoặc } 2x = 14..$$

$$\Rightarrow x = \frac{15}{2} \text{ hoặc } x = 8 \text{ hoặc } x = 7..$$

$$\Rightarrow x \in \left\{ \frac{15}{2}; 8; 7 \right\}.$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{15}{2}; 8; 7 \right\}.$$

Câu 5. (HSG 7 huyện Anh Sơn- 2016 - 2017)

Tìm x , biết: $(2x-1)^7 = (2x-1)^5$

Lời giải

$$(2x-1)^7 = (2x-1)^5$$

$$\Rightarrow (2x-1)^5 \cdot [(2x-1)^2 - 1] = 0$$

$$\Rightarrow (2x-1)^5 = 0 \text{ hoặc } (2x-1)^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}, x = 0 \text{ hoặc } x = 1$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{1}{2}; 0; 1 \right\}.$$

Câu 6. (HSG 7 huyện Tam Điệp 2021 - 2022)

Tìm x biết: $(x-7)^{x+1} - (x-7)^{x+1} = 0$

Lời giải

Ta có $(x-7)^{x+1} - (x-7)^{x+1} = 0$

$$\Rightarrow (x-7)^{x+1} [1 - (x-7)^0] = 0$$

$$\Rightarrow x-7 = 0 \text{ hoặc } (x-7)^0 = 1$$

$$\Rightarrow x = 7 \text{ hoặc } x - 7 = \pm 1$$

$$\Rightarrow x = 7 \text{ hoặc } x = 8 \text{ hoặc } x = 6$$

$$\text{Vậy } x \in \{8; 7; 6\}$$

Câu 7. (HSG 7 huyện Thường Tín 2018 - 2019)

Tìm x biết:

a) $(2x-3)(3x+1) = \left(\frac{8}{2017} - \frac{8}{2018} + 27 \frac{3}{2019} \right) \cdot \left(\frac{-34}{35} + \frac{2}{5} - \frac{3}{7} + 1 \right)$.

b) $x^2 - 5x = -6$.

Lời giải

a) $(2x-3)(3x+1) = \left(\frac{8}{2017} - \frac{8}{2018} + 27 \frac{3}{2019} \right) \cdot \left(\frac{-34}{35} + \frac{2}{5} - \frac{3}{7} + 1 \right)$.

Xét $\frac{-34}{35} + \frac{2}{5} - \frac{3}{7} + 1 = \frac{-34+14-15+35}{35} = 0$.

Thay vào ta có: $(2x-3)(3x+1) = 0$.

Suy ra: $2x-3 = 0$ hoặc $3x+1 = 0$.

$$x = \frac{3}{2} \text{ hoặc } x = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{3}{2}; -\frac{1}{3} \right\}.$$

b) $x^2 - 5x = -6$

Ta có: $x^2 - 5x + 6 = 0$.

$$\Rightarrow (x^2 - 2x) - (3x - 6) = 0.$$

$$\Rightarrow x(x-2) - 3(x-2) = 0.$$

$$\Rightarrow (x-3)(x-2) = 0.$$

TH1 : $x-3 = 0 \Rightarrow x = 3$.

TH2: $x-2 = 0 \Rightarrow x = 2$.

$$\text{Vậy } x \in \{3; 2\}.$$

Câu 8. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn, tỉnh Bình Định, trường Đào Duy Từ 2018 - 2019)

Cho đa thức $A = 2x(x-3) - x(x-7) - 3(x-673)$.

Tính giá trị của A khi $x = 2$. Tìm x để $A = 2019$.

Lời giải

Ta có: $A = 2x^2 - 6x - x^2 + 7x - 3x + 2019 = x^2 - 2x + 2019$.

+) Tính giá trị của A khi $x = 4$.

Thay $x = 4$ vào A , ta được: $A = 2^2 - 2.2 + 2019 = 2019$.

+) Tìm x để $A = 2019$.

$$A = 2019.$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 2019 = 2019.$$

$$x^2 - 2x = 0.$$

$$x(x-2) = 0.$$

$$x = 0 \text{ hoặc } x - 2 = 0.$$

$$\text{Vậy } x = 0 \text{ hoặc } x = 2.$$

Câu 9. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2018 - 2019)

Tìm x thỏa mãn: $(\sqrt{x} - 4)(|x+2|-1)(x^2 - 3) = 0$.

Lời giải

$$(\sqrt{x} - 4)(|x+2|-1)(x^2 - 3) = 0 \quad (x \geq 0).$$

$$\text{TH1: } \sqrt{x} - 4 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16$$

$$\text{TH2: } |x+2|-1 = 0 \Rightarrow |x+2| = 1 \Rightarrow x+2 = 1 \text{ hoặc } x+2 = -1.$$

Suy ra $x = -1$ (Không thỏa mãn) hoặc $x = -3$ (Không thỏa mãn)

$$\text{TH3: } x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3} \text{ (vì } x \geq 0).$$

$$\text{Vậy } x \in \{16; \sqrt{3}\}.$$

Câu 10. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường HỒNG LĨNH 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $(x-4)^{x+3} - (x-4)^{x+13} = 0$

Lời giải

$$(x-4)^{x+3} - (x-4)^{x+13} = 0$$

$$(x-4)^{x+3} [1 - (x-4)^{10}] = 0$$

$$(x-4)^{x+3} = 0 \text{ hoặc } 1 - (x-4)^{10} = 0$$

$$+ \text{ Với } (x-4)^{x+3} = 0$$

$$x-4 = 0 \quad (\text{Điều kiện } x+3 \neq 0)$$

$$x = 4$$

$$+ \text{ Với } 1 - (x-4)^{10} = 0$$

$$(x-4)^{10} = 1$$

$$x-4 = 1 \text{ hoặc } x-4 = -1$$

$$x = 5 \text{ hoặc } x = 3$$

$$\text{Vậy } x = 3, x = 4, x = 5$$

Câu 11. (HSG 7 huyện Phù Cát 2017 - 2018)

$$\text{Tìm } x, \text{ biết: } (x-5)^{x+1} - (x-5)^{x+13} = 0$$

Lời giải

$$(x-5)^{x+1} - (x-5)^{x+13} = 0$$

$$(x-5)^{x+1} \cdot [1 - (x-5)^{12}] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-5)^{x+1} = 0 \\ 1 - (x-5)^{12} = 0 \end{cases}$$

$$+ (x-5)^{x+1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-5 = 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x = 5$$

$$+ 1 - (x-5)^{12} = 0 \Rightarrow (x-5)^{12} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x-5 = 1 \\ x-5 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x \in \{4; 5; 6\}.$$

Câu 12. (HSG 7 huyện 2018 - 2019)

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } (2x-1)^7 = (2x-1)^5.$$

Lời giải

$$(2x-1)^7 = (2x-1)^5.$$

$$\Rightarrow (2x-1)^5 \cdot [(2x-1)^2 - 1] = 0.$$

$$\text{TH1: } (2x-1)^5 = 0 \Rightarrow 2x-1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{TH2: } (2x-1)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (2x-1)^2 = 1 \Rightarrow 2x-1 = 1 \text{ hoặc } 2x-1 = -1 \Rightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = 0.$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{1}{2}; 1; 0 \right\}.$$

Câu 13. (HSG 7 huyện)

$$\text{Tìm } x, \text{ biết: } (x-7)^{x+1} - (x-7)^{x+11} = 0$$

Lời giải

$$(x-7)^{x+1} - (x-7)^{x+11} = 0$$

$$(x-7)^{x+1} [1 - (x-7)^{10}] = 0$$

TH1:

$$(x-7)^{x+1} = 0$$

$$x-7 = 0$$

$$x = 7$$

TH2:

$$1 - (x - 7)^{10} = 0$$

$$1 = (x - 7)^{10}$$

$$x - 7 = 1$$

$$x = -8$$

TH3:

$$x - 7 = -1$$

$$x = 6$$

Vậy $x = 7, x = -8, x = 6$

Câu 14. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường 2022 - 2023)

Tim x biết: $7x^2 - 35x + 42 = 0$

Lời giải

$$\text{Ta có } 7x^2 - 35x + 42 = 7(x^2 - 5x + 6)$$

$$= 7[x(x-3) - 2(x-3)]$$

$$= 7[(x^2 - 3x) - (2x - 6)]$$

$$= 7(x-3)(x-2)$$

$$7x^2 - 35x + 42 = 0$$

$$7(x-3)(x-2) = 0$$

$$\text{TH1: } x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

$$\text{TH2: } x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

Vậy $x = 3; x = 2$



CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS

Câu 15. (HSG 7 trường Phương Trung – Thanh Oai 2018-2019)

Tim số hữu tỉ x , biết: $x - 2\sqrt{x} = 0$ ($x \geq 0$)

Lời giải

$$x - 2\sqrt{x} = 0$$

$$\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) = 0$$

$$\text{TH1: } \sqrt{x} = 0$$

$$x = 0 \text{ (thoả điều kiện } x \geq 0)$$

$$\text{TH2: } \sqrt{x} - 2 = 0$$

$$x = 4 \text{ (thoả điều kiện } x \geq 0)$$

Vậy $x = 4; x = 0$

Câu 16. (HSG 7 trường THCS Vị Thanh 2018 - 2019)

Tim x biết: $x^2 - 2(x+3) = x - 6$

Lời giải

$$x^2 - 2(x+3) = x - 6$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 3$$

Vậy $x \in \{0; 3\}$

Câu 17. (HSG 7 trường Trần Hưng Đạo, trường Trường Sa, 2017 – 2018)

Tìm x biết: $7x^2 - 35x + 42 = 0$

Lời giải

$$7x^2 - 35x + 42 = 0$$

$$7(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x^2 - 3x) - (2x - 6) = 0$$

$$(x - 3)(x - 2) = 0$$

* TH1: $x - 3 = 0$
 $x = 3$

* TH2: $x - 2 = 0$
 $x = 2$

Vậy $x \in \{2; 3\}$

Câu 18. (HSG 7 trường Nguyễn Trực 2017 - 2018)

Tìm x biết: $x^2 - 5x + 6 = 0$

Lời giải

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3x + 6 = 0$$

$$x(x - 2) - 3(x - 2) = 0$$

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow x - 2 = 0 \text{ hoặc } x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = 3$$

Vậy $x \in \{2; 3\}$.

Câu 19. (HSG 7 huyện Mù Cang Chải 2016 - 2017; trường Hiền Quan 2015 - 2016; huyện Khoái Châu 2014 – 2015)

Tìm x , biết: $x - 3\sqrt{x} = 0$ ($x \geq 0$)

Lời giải

$$x - 3\sqrt{x} = 0 \quad (x \geq 0)$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = 0 \text{ hoặc } \sqrt{x} - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 9$$

Vậy $x \in \{0; 9\}$.

Câu 20. (HSG 7 huyện Nga Sơn 2016 - 2017)

Tìm x , biết: $x^2(x+2)+4(x+2)=0$

Lời giải

$$x^2(x+2)+4(x+2)=0$$

$$\Rightarrow (x^2+4)(x+2)=0$$

$$\Rightarrow x=-2 \text{ (do } x^2+4>0 \text{ với mọi } x)$$

Vậy $x=-2$.

Câu 21. (HSG 7 trường Nguyễn Khuyến 2016 - 2017)

Tìm x , biết: $(2x+1)^4=(2x+1)^6$

Lời giải

$$(2x+1)^4=(2x+1)^6$$

$$\Rightarrow (2x+1)^6-(2x+1)^4=0$$

$$\Rightarrow (2x+1)^4[(2x+1)^2-1]=0$$

$$\Rightarrow 2x+1=0 \text{ hoặc } (2x+1)^2=1$$

$$\Rightarrow x=-\frac{1}{2}, x=0 \text{ hoặc } x=-1$$

Vậy $x \in \left\{-\frac{1}{2}; 0; -1\right\}$.

Câu 22. (HSG 7 huyện Quốc Oai - 2016 - 2017)

Tìm x , biết: $(x-3)^{x+2}-(x-3)^{x+8}=0$

Lời giải

$$(x-3)^{x+2}-(x-3)^{x+8}=0$$

$$\Rightarrow (x-3)^{x+2}[1-(x-3)^6]=0$$

$$\Rightarrow (x-3)^{x+2}=0 \text{ hoặc } 1-(x-3)^6=0$$

$$\Rightarrow x=3, x=4 \text{ hoặc } x=2$$

Vậy $x \in \{2; 3; 4\}$

Câu 23. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc 2016 - 2017)

Tìm x , biết: $(x+2)^{n+1}=(x+2)^{n+1}$ với n là số tự nhiên

Lời giải

$$(x+2)^{n+1}=(x+2)^{n+1}$$

$$\Rightarrow (x+2)^{n+1}-(x+2)^{n+1}=0$$

$$\Rightarrow (x+2)^{n+1}[1-(x+2)^{10}]=0 \Rightarrow (x+2)^{n+1}=0 \text{ hoặc } 1-(x+2)^{10}=0$$

$$\text{TH1: } (x+2)^{n+1} = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$\text{TH2: } 1 - (x+2)^{10} = 0 \Rightarrow (x+2)^{10} = 1 \Rightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = -3$$

$$\text{Vậy } x \in \{-2; -1; -3\}.$$

Dạng 3: Sử dụng tính chất lũy thừa

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. (HSG 7 huyện Tam Nông 2022 - 2023)

Tổng các giá trị của x trong biểu thức $(\sqrt{x}-3)^2 = 4$ là

- A. 26. B. 25. C. 6. D. 1.

Lời giải

Chọn A

$$(\sqrt{x}-3)^2 = 4 \Rightarrow \sqrt{x}-3 = \pm 2$$

$$\text{TH1: } \sqrt{x}-3 = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 5 \Rightarrow x = 25$$

$$\text{TH2: } \sqrt{x}-3 = -2 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$$

Tổng các giá trị của x trong biểu thức là $25+1 = 26$.

Câu 2. (HSG 7 Thanh Thủy 2022 - 2023)

Cho biết x là số hữu tỉ thỏa mãn $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{16}$. Khi đó tổng các giá trị của x là

- A. $\frac{5}{4}$. B. $-\frac{1}{4}$. C. $\frac{3}{2}$. D. 1.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Có } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \text{ hoặc } x - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{4} \text{ hoặc } x = -\frac{1}{4}$$

Tổng các giá trị của x là $\frac{5}{4} + \frac{-1}{4} = 1$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Lạng Giang, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

Biết rằng x là số hữu tỉ thỏa mãn: $(2x-1)^2 - 1 = 0$. Tích của các số đó là:

- A. 1 B. -1 C. 0 D. 2

Lời giải

Chọn C

$$(2x-1)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (2x-1)^2 = 1$$

$$\Rightarrow 2x-1 = 1 \text{ hoặc } 2x-1 = -1$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = 0$$

Tích của các số hữu tỉ x là: $1 \cdot 0 = 0$.

Câu 4. (HSG 7 huyện Thanh Ba 2021 - 2022)

Cho số hữu tỉ x thỏa mãn $(x+1)^3 = 125$, giá trị của \sqrt{x} là

- A. -4 B. 2 C. -2 D. 4

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$(x+1)^3 = 125$$

$$(x+1)^3 = 5^3$$

$$x+1 = 5$$

$$x = 4$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$\text{Vậy } \sqrt{x} = 2$$

Câu 5. (HSG 7 huyện Tam Nông 2021 - 2022)

Giá trị x thỏa mãn $\sqrt{2^x} = 16$ là

- A. 4. B. 6. C. 8. D. 10.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$\sqrt{2^x} = 16$$

$$2^x = 16^2$$

$$2^x = (2^4)^2$$

$$2^x = 2^8$$

$$x = 8$$

$$\text{Vậy } x = 8$$

Câu 6. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn, tỉnh, trường Đào Duy Từ 2018 - 2019)

Giá trị của x trong biểu thức $(\sqrt{x}-1)^2 = 0,25$ là:

- A. $\frac{9}{4}; \frac{1}{4}$ B. $-\frac{1}{4}; -\frac{9}{4}$ C. $\frac{9}{4}; -\frac{1}{4}$ D. $-\frac{9}{4}; \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn A

$$(\sqrt{x}-1)^2 = 0,25.$$

$$\sqrt{x}-1 = 0,5 \text{ hoặc } \sqrt{x}-1 = -0,5.$$

$$\sqrt{x} = 1,5 \text{ hoặc } \sqrt{x} = 0,5.$$

$$x = \frac{9}{4} \text{ hoặc } x = \frac{1}{4}.$$

Vậy $x \in \left\{ \frac{9}{4}; \frac{1}{4} \right\}$.

Câu 7. (HSG 7 huyện Tân An, 2017 - 2018)

Cho $a^{2m} = -4$. Kết quả của $2a^{6m} - 5$ là:

A. -123

B. -133

C. 123

D. -128

Lời giải

Chọn A

$$a^{6m} = a^{2m} \cdot a^{2m} \cdot a^{2m} = (-4)^3 = -64$$

$$\text{Suy ra } 2a^{6m} - 5 = 2 \cdot (-64) - 5 = -123.$$

Câu 8. (HSG 7 huyện Lâm Thao 2016 - 2017)

Giá trị của x trong biểu thức $(\sqrt{x} - 1)^2 = 0,25$ là

A. $\frac{9}{4}; \frac{1}{4}$

B. $-\frac{1}{4}; -\frac{9}{4}$

C. $\frac{9}{4}; -\frac{1}{4}$

D. $-\frac{9}{4}; \frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn A

$$(\sqrt{x} - 1)^2 = 0,25$$

Điều kiện: $x \geq 0$

$$\Rightarrow \sqrt{x} - 1 = 0,5 \text{ hoặc } \sqrt{x} - 1 = -0,5$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = 1,5 \text{ hoặc } \sqrt{x} = 0,5$$

$$\Rightarrow x = \frac{9}{4} \text{ hoặc } x = \frac{1}{4} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{9}{4}; \frac{1}{4} \right\}.$$

Câu 9. (HSG 7 huyện Vĩnh Tường 2015 - 2016)

Nếu $3^x \cdot 3^{x+2} \cdot 3^{x+3} = 81 \cdot 3^{16}$ thì giá trị của x là

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

Lời giải

Chọn C

$$3^x \cdot 3^{x+2} \cdot 3^{x+3} = 81 \cdot 3^{16}$$

$$3^{x+(x+2)+(x+3)} = 3^4 \cdot 3^{16}$$

$$3^{3x+5} = 3^{20}$$

$$\Rightarrow 3x + 5 = 20$$

$$\Rightarrow x = 5$$

$$\text{Vậy } x = 5.$$

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Lục Ngạn 2022 - 2023).

Địa y là một dạng kết hợp giữa nấm (*mycobiont*) và một loại sinh vật có thể quang hợp (*photobiont hay phycobiont*) trong mối quan hệ cộng sinh. Khi trái đất nóng dần lên làm cho băng trên các dòng sông bị đóng băng tan dần. Mười hai năm sau khi băng tan, Địa y bắt đầu phát triển và nếu mỗi nhóm Địa y phát triển trên một khoảng đất hình tròn thì mối quan hệ giữa đường kính d (tính bằng *mi-li - mét*) của hình tròn đó và tuổi t của Địa y có thể biểu diễn theo công thức: $d = 7\sqrt{t-12}$ (với $t \geq 12$). Năm 2022, người ta đã đo được đường kính của một nhóm Địa y cạnh một dòng sông là $42mm$. Với kết quả đo trên, em hãy tính xem băng trên dòng sông đó đã tan năm nào?

Lời giải

Vì đường kính của Địa y là $42mm$ nên ta có :

$$7\sqrt{t-12} = 42 \Rightarrow \sqrt{t-12} = 6 \Rightarrow (\sqrt{t-12})^2 = 6^2 \Rightarrow t-12 = 36 \Rightarrow t = 48 \text{ (thỏa mãn } t \geq 12)$$

Do đó băng trên dòng sông đã tan vào năm: $2022 - 48 - 12 = 1962$.

Câu 2. (HSG 7 thị xã Thái Hòa Nghệ An 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\frac{3}{4} - (2x-1)^2 = 50\%$.

Lời giải

Ta có $\frac{3}{4} - (2x-1)^2 = 50\% \Rightarrow (2x-1)^2 = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow 2x-1 = \frac{1}{2} \text{ hoặc } 2x-1 = -\frac{1}{2}$$

Trường hợp 1: $2x-1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{4}$

Trường hợp 2: $2x-1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

Vậy $x \in \left\{ \frac{1}{4}; \frac{3}{4} \right\}$

Câu 3. (HSG 7 huyện Tân Kỳ 2021 - 2022)

Tìm x , biết: $5 - (x-2)^2 = -4$

Lời giải

$$5 - (x-2)^2 = -4$$

$$(x-2)^2 = 9$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2 = 3 \\ x-2 = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -1 \end{cases}$$

Vậy $x \in \{-1; 5\}$

Câu 4. (HSG 7 huyện Anh Sơn 2022 - 2023).

Tìm x biết: $\left(\frac{1}{5} - x\right)^2 = 3^2$.

Lời giải

$$\text{TH1: } \frac{1}{5} - x = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{5} - 3 \Rightarrow x = \frac{-14}{5}$$

$$\text{TH2: } \frac{1}{5} - x = -3 \Rightarrow x = \frac{1}{5} + 3 \Rightarrow x = \frac{16}{5}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{16}{5}; x = \frac{-14}{5}.$$

Câu 5. (HSG 7 huyện Lập Thạch, Vĩnh Phúc 2022 - 2023).

Tìm x , biết $3^{-1} \cdot 3^x + 9 \cdot 3^x = 28$.

Lời giải

Tìm x , biết $3^{-1} \cdot 3^x + 9 \cdot 3^x = 28$

$$3^{-1} \cdot 3^x + 9 \cdot 3^x = 28$$

$$3^x \cdot \left(9 + \frac{1}{3} \right) = 28$$

$$3^x \cdot \frac{28}{3} = 28$$

$$3^x = 3$$

$$x = 1$$

Vậy $x = 1$.

Câu 6. (HSG 7 thành phố Ninh Bình 2022 - 2023).

Giải các phương trình sau: $(x+2)^{n+1} = (x+2)^{n+11}$ (với n là số tự nhiên).

Lời giải

$$(x+2)^{n+1} = (x+2)^{n+11}$$

$$(x+2)^{n+1} - (x+2)^{n+11} = 0$$

$$(x+2)^{n+1} [1 - (x+2)^{10}] = 0$$

$$\text{TH1: } (x+2)^{n+1} = 0 \text{ suy ra } x = -2$$

$$\text{TH2: } 1 - (x+2)^{10} = 0$$

$$(x+2)^{10} = 1$$

$$x+2 = 1 \text{ suy ra } x = -1$$

$$x+2 = -1 \text{ suy ra } x = -3$$

Vậy $x = -2; x = -1; x = -3$.

Câu 7. (HSG 7 -TP Thanh Hóa, 2022 - 2023).

Tìm x biết: $5^{2x-1} = 5^{2x-3} + 125 \cdot 24$.

Lời giải

$$5^{2x-1} = 5^{2x-3} + 125 \cdot 24$$

$$5^{2x-1} - 5^{2x-3} = 5^3 \cdot 24$$

$$5^{2x-3} \cdot 5^2 - 5^{2x-3} = 5^3 \cdot 24$$

$$5^{2x-3} \cdot (5^2 - 1) = 5^3 \cdot 24$$

$$5^{2x-3} = 5^3$$

$$2x - 3 = 3$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

Vậy $x = 3$.

Câu 8. (HSG 7 huyện Lương Tài tỉnh Bắc Ninh 2022 - 2023)

Tìm x biết $5^{x+2} + 5^{x+3} = 750$.

Lời giải

$$5^{x+2} + 5^{x+3} = 750$$

$$5^x \cdot 5^2 + 5^x \cdot 5^3 = 750$$

$$5^x = 5$$

$$x = 1$$

Vậy $x = 1$.

Câu 9. (HSG 7 huyện Triệu Sơn 2022 - 2023)

Tìm x biết: $(x+1)^{x^2+x+2} - (x+1)^{x^2+x} = 0$.

Lời giải

$$(x+1)^{x^2+x+2} - (x+1)^{x^2+x} = 0$$

$$(x+1)^{x(x+1)} [(x+1)^2 - 1] = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)^{x(x+1)} = 0 \text{ hoặc } (x+1)^2 - 1 = 0$$

$$\text{Trường hợp 1: } (x+1)^{x(x+1)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x(x+1) \neq 0 \end{cases} (VL)$$

$$\text{Trường hợp 2: } (x+1)^2 - 1 = 0 \Rightarrow x+1=1 \text{ hoặc } x+1=-1$$

$$+) x+1=1 \Rightarrow x=0$$

$$+) x+1=-1 \Rightarrow x=-2$$

Vậy $x=0$ hoặc $x=-2$.

Câu 10. (HSG 7 huyện Liên Trường 2022 - 2023)

Tìm x biết: $3^{x+1} + 3^{x+2} - 2 \cdot 3^x = 270$.

Lời giải

$$3^{x+1} + 3^{x+2} - 2 \cdot 3^x = 270$$

$$3^x(3 + 3^2 - 2) = 270$$

$$3^x = 270 : 10 = 27 = 3^3$$

$$\Rightarrow x = 3$$

Vậy $x = 3$.

Câu 11. (HSG 7 huyện Diễn Châu 2022 - 2023)

Tìm x biết: $|-2| \cdot 3^x + 3^{x+2} = 99$.

Lời giải

$$|-2| \cdot 3^x + 3^{x+2} = 99$$

$$2 \cdot 3^x + 3^x \cdot 3^2 = 99$$

$$3^x (2 + 3^2) = 99$$

$$3^x \cdot 11 = 99$$

$$3^x = 9$$

$$x = 2$$

Vậy $x = 2$.

Câu 12. (HSG 7 huyện Hậu Lộc 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $\frac{1}{5^{x-1}} + 3 \cdot 5^{2-x} = \frac{16}{125}$.

Lời giải

$$\frac{1}{5^{x-1}} + 3 \cdot 5^{2-x} = \frac{16}{125}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} + 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} = \frac{16}{125}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} + 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} \cdot 5 = \frac{16}{125}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^3$$

$$\Rightarrow x - 1 = 3$$

$$\Rightarrow x = 4$$

Vậy $x = 4$.

Câu 13. (HSG 7 huyện Tương Dương, tỉnh Nghệ An 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{234}$.

Lời giải

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{243} \text{ hay } \left(x - \frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{3}\right)^5.$$

Từ đó suy ra:

$$x - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{5}{6}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{5}{6}.$$

Câu 14. (HSG 7 huyện Tương Dương, tỉnh Nghệ An 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $3^{x+2} + 4 \cdot 3^{x+1} + 3^{x-1} = 6^6$.

Lời giải

$$3^{x+2} + 4 \cdot 3^{x+1} + 3^{x-1} = 6^6$$

$$3^3 \cdot 3^{x-1} + 4 \cdot 3^2 \cdot 3^{x+1} + 3^{x-1} = 6^6$$

$$3^{x-1} \cdot (3^3 + 4 \cdot 3^2 + 1) = 6^6$$

$$3^{x-1} \cdot 64 = 6^6$$

$$3^{x-1} \cdot 2^6 = 6^6$$

$$3^{x-1} = 6^6 : 2^6$$

$$3^{x-1} = 3^6$$

$$x - 1 = 6$$

$$x = 7$$

Vậy $x = 7$.

Câu 15. (HSG 7 huyện Ninh Giang, tỉnh Hải Dương 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $4^x + 5 \cdot 2^{2x+1} = 176$.

Lời giải

$$4^x + 5 \cdot 2^{2x+1} = 176$$

$$2^{2x} + 5 \cdot 2^{2x} \cdot 2 = 176$$

$$2^{2x} (1+10) = 176$$

$$2^{2x} = 16$$

$$2^{2x} = 2^4$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

Vậy $x = 2$.

Câu 16. (HSG 7 huyện Chương Mỹ, Hà Nội 2022 - 2023)

Tìm x biết: $2^x + 2^{x+2} = 160$.

Lời giải

$$2^x + 2^{x+2} = 160$$

$$2^x + 2^x \cdot 4 = 160$$

$$2^x \cdot 5 = 160$$

$$2^x = 32 = 2^5$$

$$x = 5$$

Vậy $x = 5$.

Câu 17. (HSG 7 huyện Nghĩa Đàn, tỉnh Nghệ An 2022 - 2023)

Tìm x biết: $3^{2x-1} - 2 = 160 - 5 \cdot 3^{2x-1}$.

Lời giải

$$3^{2x-1} - 2 = 160 - 5 \cdot 3^{2x-1}$$

$$3^{2x-1} + 5 \cdot 3^{2x-1} = 162$$

$$3^{2x-1} \cdot 6 = 162$$

$$3^{2x-1} = 27$$

$$3^{2x-1} = 3^3$$

$$2x - 1 = 3$$

$$x = 2$$

Vậy $x = 2$.

Câu 18. (HSG 7 huyện Nghi Lộc, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Tìm số x biết : $3^x + 3^{x+3} = 252$.

Lời giải

$$3^x + 3^{x+3} = 252$$

$$3^x(1 + 3^3) = 252$$

$$3^x \cdot 28 = 252$$

$$3^x = 252 : 28$$

$$3^x = 9$$

$$3^x = 3^2$$

Suy ra $x = 2$.

Vậy $x = 2$.

Câu 19. (HSG 7 thị xã Kỳ Anh, 2022 - 2023)

Cho biết: $(0,01)^{22} \cdot x = (0,001)^{23}$. Tìm x dưới dạng lũy thừa của số hữu tỉ?

Lời giải

Kết quả: $(0,1)^{25}$.

$$(0,01)^{22} \cdot x = (0,001)^{23} \Rightarrow (0,1)^{44} \cdot x = (0,1)^{69} \Rightarrow x = (0,1)^{69} : (0,1)^{44} = (0,1)^{25}.$$

Vậy $x = (0,1)^{25}$.

Câu 20. (HSG 7 Hưng Hà, Thái Phương, 2022 - 2023)

Tìm x biết: $5^x + 25 \cdot 5^x \cdot 5^1 + 125 \cdot 5^x \cdot 5^2 = 81275$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 5^x + 25 \cdot 5^x \cdot 5^1 + 125 \cdot 5^x \cdot 5^2 = 81275$$

$$5^x(1 + 25 \cdot 5 + 125 \cdot 25) = 81275$$

$$5^x \cdot 3251 = 81275$$

$$5^x = 25$$

$$5^x = 5^2$$

$$\Rightarrow x = 2$$

Vậy $x = 2$.

Câu 21. (HSG 7 Yên Bình, 2022 - 2023)

Tìm x , biết:

a) $2^{x+2} - 2^x = 96$

b) $(2x - 15)^5 = (2x - 15)^3$

Lời giải

a) $2^{x+2} - 2^x = 96$

$$2^x(2^2 - 1) = 96$$

$$2^x = 32$$

$$2^x = 2^5$$

$$x = 5.$$

Vậy $x = 5$.

$$b) (2x - 15)^5 = (2x - 15)^3$$

$$(2x - 15)^3 \cdot [(2x - 15)^2 - 1] = 0$$

$$\Rightarrow (2x - 15)^3 = 0 \text{ hoặc } (2x - 15)^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 15 = 0 \text{ hoặc } 2x - 15 = 1 \text{ hoặc } 2x - 15 = -1.$$

$$\Rightarrow x = \frac{15}{2} \text{ hoặc } x = 8 \text{ hoặc } x = 7.$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{15}{2}; 8; 7 \right\}.$$

Câu 22. (HSG 7 Sóc Sơn, 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $5^{2x+3} \cdot 5^{3x} - \underbrace{1000\dots 0}_{2023 \text{ số } 0} : 2^{2023} = 0.$

Lời giải

$$5^{2x+3} \cdot 5^{3x} - \underbrace{1000\dots 0}_{2023 \text{ số } 0} : 2^{2023} = 0.$$

$$\Rightarrow 5^{5x+3} - 10^{2023} : 2^{2023} = 0$$

$$\Rightarrow 5^{5x+3} - (10 : 2)^{2023} = 0$$

$$\Rightarrow 5^{5x+3} = 5^{2023}$$

$$\Rightarrow 5x + 3 = 2023$$

$$\Rightarrow 5x = 2020$$

$$\Rightarrow x = 404.$$

Vậy $x = 404$.

Câu 23. (HSG 7 huyện Yên Bình, Yên Bái 2022 - 2023)

Tìm x biết: $(x - 1)^3 = 125.$

Lời giải

$$(x - 1)^3 = 125.$$

$$(x - 1)^3 = 5^3$$

$$x - 1 = 5$$

$$x = 6$$

Vậy $x = 6$.

Câu 24. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Kim Chung 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\frac{7^{x+2} + 7^{x+1} + 7^x}{57} = \frac{5^{2x} + 5^{2x+1} + 5^{2x+3}}{131}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{7^{x+2} + 7^{x+1} + 7^x}{57} &= \frac{5^{2x} + 5^{2x+1} + 5^{2x+3}}{131} \\ \frac{7^x \cdot 7^2 + 7^x \cdot 7^1 + 7^x}{57} &= \frac{(5^2)^x + (5^2)^x \cdot 5^1 + (5^2)^x \cdot 5^3}{131} \\ \frac{7^x(7^2 + 7^1 + 1)}{57} &= \frac{25^x(1 + 5^1 + 5^3)}{131} \end{aligned}$$

$$7^x = 25^x$$

$$\left(\frac{7}{25}\right)^x = 1$$

$$x = 0$$

Vậy $x = 0$.

Câu 25. (HSG 7 huyện Bát Xát 2021 - 2022)

Tìm x biết $5^x + 5^{x+2} = 650$

Lời giải

$$5^x + 5^{x+2} = 650$$

$$5^x(1 + 5^2) = 650$$

$$5^x = 650 : (1 + 5^2)$$

$$5^x = 5^2$$

$$\Rightarrow x = 2$$

Vậy $x = 2$.

Câu 26. (HSG 7 huyện Yên Mỹ 2021 - 2022)

Tìm x biết: $3^{x+2} - 3^{x+1} - 3^x = 135$

Lời giải

$$3^{x+2} - 3^{x+1} - 3^x = 135$$

$$\Rightarrow 3^x \cdot (3^2 - 3^1 - 1) = 135$$

$$\Rightarrow 3^x \cdot 5 = 135$$

$$\Rightarrow 3^x = 27$$

$$\Rightarrow 3^x = 3^3$$

$$\Rightarrow x = 3$$

Vậy $x = 3$

Câu 27. (HSG 7 cấp thị xã 2017 - 2018)

Tìm x biết: $3 + 2^{x-3} = 24 - [4^2 - (2^2 - 1)]$.

Lời giải

$$3 + 2^{x-3} = 24 - [16 - (4 - 1)].$$

$$3 + 2^{x-3} = 24 - [16 - 3].$$

$$3 + 2^{x-3} = 24 - 13.$$

$$3 + 2^{x-3} = 11.$$

$$2^{x-3} = 8 = 2^3.$$

$$x - 3 = 3.$$

$$\text{Vậy } x = 6.$$

Câu 28. (HSG 7 thị xã Kinh Môn, 2021 - 2022)

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } (2x - 1)^2 - 4 = 21.$$

Lời giải

$$(2x - 1)^2 - 4 = 21.$$

$$(2x - 1)^2 = 25.$$

$$\Rightarrow 2x - 1 = 5 \text{ hoặc } 2x - 1 = -5.$$

$$\Rightarrow 2x = 6 \text{ hoặc } 2x = -4.$$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ hoặc } x = -2.$$

$$\text{Vậy } x \in \{3; -2\}.$$

Câu 29. (HSG 7 huyện Hương Khê 2021 - 2022)

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } (x - 1)^3 = -27.$$

Lời giải

$$(x - 1)^3 = -27.$$

$$\Rightarrow (x - 1)^3 = (-3)^3.$$

$$\Rightarrow x - 1 = -3.$$

$$\Rightarrow x = -2.$$

$$\text{Vậy } x = -2.$$

Câu 30. (HSG 7 trường Lê Hồng Phong 2018 - 2019)

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } 5^{2x-1} = 5^{2x-3} + 125.24.$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 5^{2x-1} - 5^{2x-3} = 5^3.24.$$

$$\Rightarrow 5^{2x-3} (5^2 - 1) = 5^3.24$$

$$\Rightarrow 5^{2x-3} = 5^3.$$

$$\Rightarrow 2x - 3 = 3.$$

$$\Rightarrow x = 3.$$

$$\text{Vậy } x = 3.$$

Câu 31. (HSG 7 trường Phương Trung 2022 - 2023)

$$\text{Tìm số hữu tỉ } x, \text{ biết: } (x - 1)^5 = -243.$$

Lời giải

$$(x - 1)^5 = (-3)^5.$$

$$\Rightarrow x - 1 = -3.$$

$$\Rightarrow x = -2.$$

$$\text{Vậy } x = -2.$$

Câu 32. (HSG 7 trường Phương Trung – Thanh Oai 2018-2019)

Tìm số hữu tỉ x , biết: $(x-1)^5 = -243$

Lời giải

$$(x-1)^5 = (-3)^5$$

$$x-1 = -3$$

$$x = -2$$

Vậy $x = -2$

Câu 33. (HSG 7 huyện Như Xuân 2018-2019)

Tìm x , biết: $2^{x-1} + 5 \cdot 2^{x-2} = \frac{7}{32}$

Lời giải

$$2^{x-1} + 5 \cdot 2^{x-2} = \frac{7}{32}$$

$$2^{x-1} \left(1 + \frac{5}{2} \right) = \frac{7}{32}$$

$$2^{x-1} \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{32}$$

$$2^{x-1} = \frac{7}{32} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{16} = 2^{-4}$$

$$x-1 = -4$$

$$x = -3$$

Vậy $x = -3$

Câu 34. (HSG 7 huyện Xuân Trường 2018-2019)

Cặp số (x, y) nào thỏa mãn đẳng thức sau: $3^{2x+1} \cdot 7^y = 9 \cdot 21^x$

Lời giải

$$3^{2x+1} \cdot 7^y = 9 \cdot 21^x$$

$$3^{2x+1} \cdot 7^y = 3^2 \cdot 3^x \cdot 7^x$$

$$3^{2x+1} \cdot 7^y = 3^{x+2} \cdot 7^x$$

$$\frac{3^{2x+1}}{3^{x+2}} = \frac{7^x}{7^y}$$

$$3^{x-1} = 7^{x-y}$$

Nên $x-1 = 0$ và $x-y = 0$

Vậy $x = y = 1$

Câu 35. (HSG 7 huyện Nga Sơn 2016 - 2017)

Tìm x , biết: $3^{x+2} + 4 \cdot 3^{x+1} + 3^{x-1} = 6^6$

Lời giải

$$3^{x+2} + 4 \cdot 3^{x+1} + 3^{x-1} = 6^6$$

$$\Rightarrow 3^{x-1} \cdot (3^3 + 4 \cdot 3^2 + 1) = 2^6 \cdot 3^6$$

$$\Rightarrow 3^{x-1} \cdot 64 = 2^6 \cdot 3^6 \Rightarrow 3^{x-1} = 3^6 \Rightarrow x = 7$$

Vậy $x = 7$.

Câu 36. (HSG 7 trường Nguyễn Khuyến 2016 - 2017)

Tìm x , biết: $(2x-1)^4 = 16$

Lời giải

$$(2x-1)^4 = 16$$

$$(2x-1)^4 = 2^4$$

$$\Rightarrow 2x-1 = 2 \text{ hoặc } 2x-1 = -2$$

$$\Rightarrow x = 1,5 \text{ hoặc } x = -0,5$$

$$\text{Vậy } x \in \{1,5; -0,5\}$$

Câu 37. (HSG 7 trường Nguyễn Du 2016 - 2017)

Tìm x thỏa mãn một trong các điều kiện sau: $3^{x+2} + 3^x = 810$

Lời giải

$$3^{x+2} + 3^x = 810$$

$$\Rightarrow 3^x \cdot (3^2 + 1) = 810$$

$$\Rightarrow 3^x = 81 \Rightarrow x = 4$$

$$\text{Vậy } x = 4$$

Câu 38. (HSG 7 huyện Hòa Bình 2016 - 2017)

Tìm x , biết: $2^{x+\frac{1}{2}} = 8$

Lời giải

$$2^{x+\frac{1}{2}} = 8$$

$$2^{x+\frac{1}{2}} = 2^3$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{2} = 3$$

$$\Rightarrow x = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{5}{2}.$$

Câu 39. (HSG 7 huyện Việt Yên 2016 - 2017)

Tìm x sao cho: $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} = 17$

Lời giải

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} = \frac{1}{17}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 17$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{16} + 1\right) = 17$$

$$\Rightarrow \frac{17}{16} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 17$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 16$$

$$\Rightarrow 2^{-x} = 2^4$$

$$\Rightarrow x = -4$$

Vậy $x = -4$.

Câu 40. (HSG 7 Tỉnh Bắc Giang 2012 - 2013)

Tìm x , biết: $2^{x+2} \cdot 3^{x+1} \cdot 5^x = 10800$

Lời giải

Ta có: $2^{x+2} \cdot 3^{x+1} \cdot 5^x = 10800$

$$\Rightarrow 2^x \cdot 2^2 \cdot 3^x \cdot 3 \cdot 5^x = 10800$$

$$\Rightarrow (2 \cdot 3 \cdot 5)^x = 900$$

$$\Rightarrow 30^x = 30^2$$

$$\Rightarrow x = 2$$

Vậy $x = 2$

Câu 41. (HSG 7 trường Hiền Quan 2015 - 2016)

Tìm các số x biết: $(x-1)^3 = -8$

Lời giải

$$(x-1)^3 = -8$$

$$\Rightarrow (x-1)^3 = (-2)^3$$

$$\Rightarrow x-1 = -2 \Rightarrow x = -1$$

Vậy $x = -1$.

Câu 42. (HSG 7 huyện Thanh Oai 2014 - 2015)

Tìm x biết: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{243}$

Lời giải

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{243}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{3}\right)^5$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{5}{6}$$

Vậy $x = \frac{5}{6}$.

Câu 43. (HSG 7 trường Ân Tường Đông 2014 - 2015)

Tìm x , biết: $\left(\frac{1}{2}\right)^{5x+\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$

Lời giải

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{5x+\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{5x+\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\Rightarrow 5x + \frac{1}{2} = 3$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Vậy $x = \frac{1}{2}$.

Câu 44. (HSG 7 THCS 2018 - 2019)

Tìm số tự nhiên n biết: $3^{-1} \cdot 3^n + 4 \cdot 3^n = 13 \cdot 3^5$

Lời giải

Ta có: $3^{-1} \cdot 3^n + 4 \cdot 3^n = 13 \cdot 3^5$

$$3^n (3^{-1} + 4) = 13 \cdot 3^5$$

$$3^n \cdot \frac{13}{3} = 13 \cdot 3^5$$

$$3^n = 3^6$$

$$n = 6$$

Câu 45. (HSG 7 huyện Đức Thọ 2017 - 2018)

Tìm giá trị n nguyên dương

a) $\frac{1}{27} \cdot 81^n = 3^n$

b) $8 < 2^n < 64$.

Lời giải

a) $\frac{1}{27} \cdot 81^n = 3^n$

$$\Rightarrow 3^{4n-3} = 3^n$$

$$\Rightarrow 4n - 3 = n$$

$$\Rightarrow n = 1$$

Vậy $n = 1$

b) $8 < 2^n < 64$

$$\Rightarrow 2^3 < 2^n < 2^6$$

Mà n nguyên dương

$$\Rightarrow n = 4, n = 5$$

Câu 46. (HSG 7 THCS Phú Trường 2017 - 2018)

Tìm các số a, b, c biết $ab = 2, bc = 6, ac = 3$.

Lời giải

Theo đề bài: $ab = 2, bc = 6, ac = 3$

Ta có: $ab \cdot bc \cdot ac = 2 \cdot 6 \cdot 3$

$$a^2 b^2 c^2 = 36$$

$$abc = \pm 6$$

Trường hợp 1:

$$abc = 6, ab = 2 \Rightarrow c = 3$$

$$abc = 6, bc = 6 \Rightarrow a = 1$$

$$abc = 6, ac = 3 \Rightarrow b = 2$$

Trường hợp 2:

$$abc = -6, ab = 2 \Rightarrow c = -3$$

$$abc = -6, bc = 6 \Rightarrow a = -1$$

$$abc = -6, ac = 3 \Rightarrow b = -2$$

Vậy $a = 1, b = 2, c = 3$; $a = -1, b = -2, c = -3$

Câu 47. (HSG 7 trường TH Sài Gòn, 2017 - 2018)

Tim x, y biết: $5^{2x-1} = 5^{2x-3} + 125 \cdot 24$

Ta có: $5^{2x-1} - 5^{2x-3} = 5^3 \cdot 24$

$$5^{2x-3} (5^2 - 1) = 5^3 \cdot 24$$

$$5^{2x-3} = 5^3$$

$$2x - 3 = 3$$

$$x = 3$$

Vậy $x = 3$.

Câu 48. (HSG 7 trường Hương Điền, 2017 - 2018)

Tim các số a, b, c biết rằng: $ab = c, bc = 4a, ac = 9b$

Lời giải

Nhân từng vế bất đẳng thức ta được: $(abc)^2 = 36abc$

Nếu 1 trong 3 số bằng 0 thì hai số còn lại bằng 0

Nếu cả 3 số a, b, c khác 0 thì chia 2 vế cho abc ta được $abc = 36$

Từ $abc = 36$ và $ab = c \Rightarrow c^2 = 6 \Rightarrow c = 6; c = -6$

Từ $abc = 36$ và $bc = 4a \Rightarrow 4a^2 = 36 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3; a = -3$

Từ $abc = 36$ và $ab = 9b \Rightarrow 9b^2 = 36 \Rightarrow b = 2; b = -2$

-Nếu $c = 6$ thì $a = 3; b = 2$ hoặc $a = -3; b = -2$

-Nếu $c = -6$ thì $a = 3; b = -2$ hoặc $a = -3; b = -2$

Vậy $(a, b, c) = \{(0; 0; 0); (3; 2; 6); (3; -2; 6); (3; -2; -6); (-3; 2; -6)\}$

Câu 49. (HSG 7 trường Hiền Quan, huyện Tam Nông, 2017 - 2018)

Tim x , biết: $3^x + 3^{x+2} = 2430$

Lời giải

$$3^x + 3^{x+2} = 2430$$

$$3^x \cdot (1 + 3^2) = 2430$$

$$3^x \cdot 10 = 2430$$

$$3^x = 243 = 3^5$$

$$\Rightarrow x = 5$$

Vậy $x = 5$.

Câu 50. (HSG 7 huyện Hoàng Hóa, 2017 - 2018)

Tìm x biết: $(2x - 3)^2 = 16$

Lời giải

$$(2x - 3)^2 = 16$$

$$\Rightarrow 2x - 3 = 4 \text{ hoặc } 2x - 3 = -4$$

$$\Rightarrow x = 3,5 \text{ hoặc } x = -0,5$$

Vậy $x \in \{3,5; -0,5\}$.

Câu 51. (HSG 7 huyện Triệu Sơn, 2017 - 2018)

Tìm x, y biết: $x(x - y) = \frac{3}{10}$ và $y(x - y) = -\frac{3}{50}$

Lời giải

Ta có: $x(x - y) = \frac{3}{10}$ và $y(x - y) = -\frac{3}{50}$

Trừ từng vế hai đẳng thức đã cho ta được:

$$x(x - y) - y(x - y) = \frac{3}{10} - \left(-\frac{3}{50}\right)$$

$$\Rightarrow (x - y)(x - y) = \frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow (x - y)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = \frac{3}{5} \\ x - y = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

Thay $x - y = \frac{3}{5}$ vào hai đẳng thức đã cho ta được $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{10}$

Thay $x - y = -\frac{3}{5}$ vào hai đẳng thức đã cho ta được $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{10}$

Vậy $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{10}$ hoặc $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{10}$.

Câu 52. (HSG 7 trường Ngô Gia Tự 2017 - 2018)

Tìm x thỏa mãn: $3^{x+2} + 3^x = 810$

Lời giải

$$3^{x+2} + 3^x = 810$$

$$\Rightarrow 3^x (3^2 + 1) = 810$$

$$\Rightarrow 3^x = 81 = 3^4 \Rightarrow x = 4$$

Vậy $x = 4$.

Câu 53. (HSG 7 trường Nghĩa Điền – Tư Nghĩa 2017 - 2018)

Tìm x biết: $(2x-1)^4 = 81$

Lời giải

$$(2x-1)^4 = 81$$

$$(2x-1)^4 = 3^4$$

$$\Rightarrow 2x-1 = 3 \text{ hoặc } 2x-1 = -3$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = -1$$

Vậy $x \in \{2; -1\}$.

Câu 54. (HSG 7 trường Thạnh Bình – Hà Tĩnh 2017 - 2018)

Tìm x , biết: $(x+2)^2 = 81$

Lời giải

$$(x+2)^2 = 81$$

$$\Rightarrow x+2 = 9 \text{ hoặc } x+2 = -9$$

$$\Rightarrow x = 7 \text{ hoặc } x = -11$$

Vậy $x \in \{7; -11\}$

Câu 55. (HSG 7 huyện 2017 - 2018)

Tìm số tự nhiên n biết: $3^{-1} \cdot 3^n + 4 \cdot 3^n = 13 \cdot 3^5$

Lời giải

$$3^{-1} \cdot 3^n + 4 \cdot 3^n = 13 \cdot 3^5$$

$$3^n \cdot (3^{-1} + 4) = 13 \cdot 3^5$$

$$3^n \cdot \frac{13}{3} = 13 \cdot 3^5$$

$$3^n = 3^6 \Rightarrow n = 6$$

Vậy $n = 6$.

Câu 56. (HSG 7 trường Lê Quý Đôn 2016 - 2017)

Tìm x sao cho: $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} = 17$

Lời giải

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} = 17$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{16} + 1\right) = 17$$

$$\frac{17}{16} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 17$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 16$$

$$2^{-x} = 2^4 \Rightarrow x = -4$$

Vậy $x = -4$.



CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS

CH2: TÌM ẨN CHƯA BIẾT

Dạng 1: Tìm x thông thường
Dạng 2: Đưa về dạng tích bằng 0
Dạng 3: Sử dụng tính chất lũy thừa
Dạng 4: Tìm ẩn dạng phân thức
Dạng 5: Tìm x dạng chứa dấu giá trị tuyệt đối
Dạng 6: Sử dụng công thức tính tổng có quy luật
Dạng 7: Tổng các biểu thức không âm bằng 0
Dạng 8: Tìm ẩn dựa vào tính chất về dấu
Dạng 9: Sử dụng phương pháp chặn để tìm ẩn
Dạng 10: Tìm ẩn với điều kiện nguyên

Dạng 4: Tìm ẩn dạng phân thức

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. (HSG 7 Yên Thế, Bắc Giang 2022 - 2023)

Giá trị của x thỏa mãn đẳng thức $\frac{x-2}{2021} + \frac{x-1}{2022} = \frac{x}{2023} + \frac{x+1}{2024}$ là:

- A. -2023. B. -2022. C. 2023. D. 2022.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{2021} + \frac{x-1}{2022} &= \frac{x}{2023} + \frac{x+1}{2024} \\ \Rightarrow \left(\frac{x-2}{2021} - 1\right) + \left(\frac{x-1}{2022} - 1\right) &= \left(\frac{x}{2023} - 1\right) + \left(\frac{x+1}{2024} - 1\right) \\ \Rightarrow \frac{x-2023}{2021} + \frac{x-2023}{2022} &= \frac{x-2023}{2023} + \frac{x-2023}{2024} \\ \Rightarrow (x-2023) \left(\frac{1}{2021} + \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Vì $\frac{1}{2021} + \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024} \neq 0$ nên $x-2023 = 0 \Rightarrow x = 2023$.

Vậy $x = 2023$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Sơn Động 2022 - 2023)

Cho x thỏa mãn: $\frac{x+2022}{1} + \frac{x+2021}{2} + \dots + \frac{x+1}{2022} + \frac{x}{2023} = -2023$. Số nghịch đảo của x là

- A. 2023. B. $\frac{-1}{2023}$. C. -2023. D. $\frac{1}{2023}$.

Lời giải

$$\frac{x+2022}{1} + \frac{x+2021}{2} + \dots + \frac{x+1}{2022} + \frac{x}{2023} = -2023$$

$$\frac{x+2022}{1} + \frac{x+2021}{2} + \dots + \frac{x+1}{2022} + \frac{x}{2023} + 2023 = 0$$

$$\left(\frac{x+2022}{1} + 1\right) + \left(\frac{x+2021}{2} + 1\right) + \dots + \left(\frac{x+1}{2022} + 1\right) + \left(\frac{x}{2023} + 1\right) = 0$$

$$\frac{x+2023}{1} + \frac{x+2023}{2} + \frac{x+2023}{3} + \dots + \frac{x+2023}{2023} = 0$$

$$(x+2023)\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2023}\right) = 0$$

Suy ra: $x+2023=0$ hay $x=-2023$.

Vậy nghịch đảo của x là $\frac{-1}{2023}$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2021 - 2022)

Biết x thỏa mãn $\frac{16}{x+1} = \frac{x+1}{4}$. Tổng các giá trị của x là:

A. 0

B. 8

C. -8

D. -2

Chọn D

$$\frac{16}{x+1} = \frac{x+1}{4}$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 = 4 \cdot 16$$

$$(x+1)^2 = 64$$

$$\Rightarrow x+1=8 \text{ hoặc } x+1=-8$$

$$\Rightarrow x=7 \text{ hoặc } x=-9$$

Tổng các giá trị của x là $7+(-9)=-2$

Câu 4. (HSG 7 huyện Tân Yên, Bắc Giang 2022 - 2023)

Giá trị của x thỏa mãn đẳng thức $\frac{x-2}{2020} + \frac{x-1}{2021} = \frac{x}{2022} + \frac{x+1}{2023}$ là:

A. -2022.

B. 4.

C. 2022.

D. 0.

Lời giải:

$$\frac{x-2}{2020} + \frac{x-1}{2021} = \frac{x}{2022} + \frac{x+1}{2023}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x-2}{2020} - 1\right) + \left(\frac{x-1}{2021} - 1\right) = \left(\frac{x}{2022} - 1\right) + \left(\frac{x+1}{2023} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{x-2022}{2020} + \frac{x-2022}{2021} = \frac{x-2022}{2022} + \frac{x-2022}{2023}$$

$$\Rightarrow (x-2022)\left(\frac{1}{2020} + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023}\right) = 0$$

$$\text{Vì } \frac{1}{2020} + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023} \neq 0 \text{ nên } x - 2022 = 0 \Rightarrow x = 2022$$

Vậy $x = 2022$.

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 thị xã Thái Hòa Nghệ An 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x; y \text{ biết: } \frac{2+y}{3} = \frac{7-2y}{5} = \frac{3+y}{4x}.$$

Lời giải

$$\frac{2+y}{3} = \frac{7-2y}{5} = \frac{3+y}{4x}$$

$$\text{Từ } \frac{2+y}{3} = \frac{7-2y}{5} \Rightarrow 5(2+y) = 3(7-2y) \Rightarrow y = 1$$

$$\text{Suy ra: } \frac{2+1}{3} = \frac{3+1}{4x} \Rightarrow x = 1$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Thanh Trì, Hà Nội 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } \frac{12}{x^2+8} + \frac{7}{x^2+3} + \frac{6}{x^2+2} = 3.$$

Lời giải

$$\frac{12}{x^2+8} + \frac{7}{x^2+3} + \frac{6}{x^2+2} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{6}{x^2+2} - 1 + \frac{12}{x^2+8} - 1 + \frac{7}{x^2+3} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{6-x^2-2}{x^2+2} + \frac{12-x^2-8}{x^2+8} + \frac{7-x^2-3}{x^2+3} = 0$$

$$\Rightarrow (4-x^2) \left(\frac{1}{x^2+2} + \frac{1}{x^2+8} + \frac{1}{x^2+3} \right) = 0$$

$$\text{Mà } \frac{1}{x^2+2} + \frac{1}{x^2+8} + \frac{1}{x^2+3} > 0 \text{ (do } x^2 \geq 0)$$

$$\Rightarrow 4-x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = -2$$

Vậy $x \in \{2; -2\}$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Quế Võ, tỉnh Bắc Ninh 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } \frac{x-2}{12} = \frac{3}{x-2}.$$

Lời giải

$$\frac{x-2}{12} = \frac{3}{x-2} \Rightarrow (x-2)^2 = 36 \Rightarrow (x-2)^2 = 6^2 \Rightarrow x-2 = \pm 6$$

$$\text{Trường hợp: } x-2 = 6 \Rightarrow x = 8$$

$$\text{Trường hợp: } x-2 = -6 \Rightarrow x = -4$$

Vậy $x = 8$ hoặc $x = -4$.

Câu 4. (Đề 75 - HSG 7 huyện Tiên Du, Bắc Ninh 2022 - 2023)

Tìm x , biết $\frac{1-x}{-9} = \frac{-25}{1-x}$.

Lời giải:

$$\frac{1-x}{-9} = \frac{-25}{1-x}. \text{ Điều kiện : } x \neq 1$$

$$\text{Suy ra } (1-x)^2 = (-9) \cdot (-25) \Rightarrow (1-x)^2 = 15^2$$

$$\text{Suy ra } 1-x = 15 \text{ hoặc } 1-x = -15.$$

$$\text{Xét } 1-x = 15 \Rightarrow x = -14 \text{ (tm).}$$

$$\text{Xét } 1-x = -15 \Rightarrow x = 16 \text{ (tm).}$$

$$\text{Vậy } x \in \{-14; 16\}.$$

Câu 5. (HSG 7 huyện Tân Kỳ 2021 - 2022)

Tìm x biết $\frac{x+2}{6x-2} = \frac{1}{4}$

Lời giải

$$\frac{x+2}{6x-2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 4(x+2) = 6x-2$$

$$4x+8 = 6x-2$$

$$-2x = -10$$

$$x = 5.$$

$$\text{Vậy } x = 5$$

Câu 6. (HSG 7 trường Quang Trung 2018 - 2019)

Tìm các số hữu tỉ dương x, y, z biết: $\frac{1}{x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}} = 1 - \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}$.

Lời giải

Biến đổi vế phải thành dạng tương tự vế trái.

$$1 - \frac{1}{2 + \frac{1}{3}} = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7} = \frac{1}{\frac{7}{4}} = \frac{1}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}$$

$$\text{Suy ra } x = 1; y = 1; z = 1.$$

Câu 7. (HSG 7 huyện Thanh Chương 2018-2019)

Tìm x, y biết: $\frac{x-1}{-15} = \frac{-60}{x-1}$

Lời giải

$$\frac{x-1}{-15} = \frac{-60}{x-1}$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = 900$$

TH1:

$$x - 1 = 30$$

$$x = 31$$

TH2:

$$x - 1 = -30$$

$$x = -29$$

Vậy $x \in \{-29; 31\}$.

Câu 8. (HSG 7 huyện Hoàng Hóa, 2017 - 2018)

Tìm hai số hữu tỷ a và b biết: $a - b = 2(a + b) = a : b$

Lời giải

$$\text{Từ } a - b = 2(a + b) \Rightarrow a - b = 2a + 2b \Rightarrow -a = 3b \Rightarrow a = -3b$$

$$\text{Mặt khác: } a - b = a : b \Rightarrow -3b - b = -3b : b \Rightarrow -4b = -3 \Rightarrow b = \frac{3}{4}$$

$$\text{Vậy } a = -3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{-9}{4}$$

Câu 9. (HSG 7 trường Hồng Đà; trường Bồ Lý 2015 - 2016)

$$\text{Tìm } x: \frac{x+4}{2012} + \frac{x+3}{2013} = \frac{x+2}{2014} + \frac{x+1}{2015}$$

Lời giải

$$\frac{x+4}{2012} + \frac{x+3}{2013} = \frac{x+2}{2014} + \frac{x+1}{2015}$$

$$\Rightarrow \frac{x+4}{2012} + 1 + \frac{x+3}{2013} + 1 = \frac{x+2}{2014} + 1 + \frac{x+1}{2015} + 1$$

$$\Rightarrow (x+2016) \cdot \left(\frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014} - \frac{1}{2015} \right) = 0$$

$$\Rightarrow x + 2016 = 0$$

$$\Rightarrow x = -2016$$

Vậy $x = -2016$.

Câu 10. (HSG 7 huyện Mù Cang Chải 2016 - 2017; huyện Khoái Châu 2014 - 2015)

$$\text{Tìm } x, \text{ biết: } \frac{3(x-1)}{2} = \frac{8}{27 \cdot (x-1)}$$

Lời giải

$$\frac{3(x-1)}{2} = \frac{8}{27 \cdot (x-1)}$$

$$\Rightarrow 81(x-1)^2 = 16 \Rightarrow (x-1)^2 = \left(\frac{4}{9}\right)^2$$

$$\Rightarrow x-1 = \frac{4}{9} \text{ hoặc } x-1 = -\frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow x = \frac{13}{9} \text{ hoặc } x = \frac{5}{9}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{13}{9}; \frac{5}{9} \right\}$$

Câu 11. (HSG 7 huyện Triệu Sơn 2017 - 2018)

Cho $\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{16} = \frac{z+9}{25}$ và $2x^3 - 1 = 15$. Tính $B = x + y + z$

Lời giải

Ta có: $2x^3 - 1 = 15$

$$x^3 = 8$$

$$x = 2$$

Suy ra $\frac{18}{9} = \frac{y-25}{16} = \frac{z+9}{25} = 2$

$$+) \frac{y-25}{16} = 2 \Rightarrow y - 25 = 32 \Rightarrow y = 57$$

$$+) \frac{z+9}{25} = 2 \Rightarrow z + 9 = 50 \Rightarrow z = 41$$

Vậy $B = x + y + z = 2 + 57 + 41 = 100$

Câu 12. (HSG 7 huyện Nam Đàn 2022 - 2023)

Tim x, y biết: $\frac{1+3y}{12} = \frac{1+6y}{3x} = \frac{1+9y}{2x}$

Lời giải

Ta có: $\frac{1+6y}{3x} = \frac{1+9y}{2x}$

$$\Rightarrow \frac{1+6y}{1+9y} = \frac{3x}{2x}$$

$$\Rightarrow \frac{1+6y}{1+9y} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot (1+6y) = 3 \cdot (1+9y)$$

$$\Rightarrow 2 + 12y = 3 + 27y$$

$$\Rightarrow -1 = 15y$$

$$\Rightarrow y = \frac{-1}{15}$$

Thay $y = \frac{-1}{15}$ vào $\frac{1+3y}{12} = \frac{1+6y}{3x}$ ta được

$$\frac{1+3 \cdot \left(\frac{-1}{15}\right)}{12} = \frac{1+6 \cdot \left(\frac{-1}{15}\right)}{3x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{15} = \frac{\frac{3}{5}}{3x}$$

$$\Rightarrow x = 3$$

Vậy $x = 3, y = \frac{-1}{5}$.

Câu 13. (HSG 7 huyện Hà Trung 2021 - 2022)

Tìm x biết $\frac{315-x}{101} + \frac{313-x}{103} + \frac{311-x}{105} + \frac{309-x}{107} = -4$

Lời giải

Ta có : $\frac{315-x}{101} + \frac{313-x}{103} + \frac{311-x}{105} + \frac{309-x}{107} = -4$

$\frac{315-x}{101} + 1 + \frac{313-x}{103} + 1 + \frac{311-x}{105} + 1 + \frac{309-x}{107} + 1 = 0$

$\frac{416-x}{101} + \frac{416-x}{103} + \frac{416-x}{105} + \frac{416-x}{107} = 0$

$(416-x) \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{103} + \frac{1}{105} + \frac{1}{107} \right) = 0$

Vì $\frac{1}{101} + \frac{1}{103} + \frac{1}{105} + \frac{1}{107} \neq 0$ nên $416-x = 0$ hay $x = 416$

Vậy $x = 416$.

Câu 14. (HSG 7 huyện Vũ Thư 2020 - 2021)

Tìm x biết: $\frac{x+11}{89} + \frac{x+13}{87} = \frac{x+15}{85} + \frac{x+17}{83}$

Lời giải

$\frac{x+11}{89} + \frac{x+13}{87} = \frac{x+15}{85} + \frac{x+17}{83}$

$\frac{x+11}{89} + 1 + \frac{x+13}{87} + 1 = \frac{x+15}{85} + 1 + \frac{x+17}{83} + 1$

$\frac{x+100}{89} + \frac{x+100}{87} = \frac{x+100}{85} + \frac{x+100}{83}$

$\frac{x+100}{89} + \frac{x+100}{87} - \frac{x+100}{85} - \frac{x+100}{83} = 0$

$(x+100) \cdot \left(\frac{1}{89} + \frac{1}{87} - \frac{1}{85} - \frac{1}{83} \right) = 0$.

Mà $\frac{1}{89} + \frac{1}{87} - \frac{1}{85} - \frac{1}{83} \neq 0 \Rightarrow x+100 = 0 \Rightarrow x = -100$.

Vậy $x = -100$.

Câu 15. (HSG 7 trường Đáp Cầu 2018 – 2019)

Tìm x biết: $\frac{x-1}{2009} + \frac{x-2}{2008} = \frac{x-3}{2007} + \frac{x-4}{2006}$.

Lời giải

$\frac{x-1}{2009} + \frac{x-2}{2008} = \frac{x-3}{2007} + \frac{x-4}{2006}$.

$\frac{x-1}{2009} - 1 + \frac{x-2}{2008} - 1 = \frac{x-3}{2007} - 1 + \frac{x-4}{2006} - 1$.

$$\frac{x-2010}{2009} + \frac{x-2010}{2008} = \frac{x-2010}{2007} + \frac{x-2010}{2006}.$$

$$(x-2010)\left(\frac{1}{2009} + \frac{1}{2008} - \frac{1}{2007} - \frac{1}{2006}\right) = 0.$$

$$x-2010 = 0.$$

Vậy $x = 2010$.

Câu 16. (HSG 7 trường Phương Trung – Thanh Oai 2018-2019)

Tìm số hữu tỉ x , biết: $\frac{x+2}{11} + \frac{x+2}{12} + \frac{x+2}{13} = \frac{x+2}{14} + \frac{x+2}{15}$

Lời giải

Ta có: $\frac{x+2}{11} + \frac{x+2}{12} + \frac{x+2}{13} - \frac{x+2}{14} - \frac{x+2}{15} = 0$

$$(x+2)\left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} - \frac{1}{15}\right) = 0$$

$$x+2 = 0 \text{ vì } \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} - \frac{1}{15}\right) \neq 0$$

$$x = -2$$

Vậy $x = -2$

Câu 17. (HSG 7 huyện Bát Xát 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\frac{x+4}{2014} + \frac{x+3}{2015} = \frac{x+2}{2016} + \frac{x+1}{2017}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{x+4}{2014} + \frac{x+3}{2015} = \frac{x+2}{2016} + \frac{x+1}{2017}$

$$\left(\frac{x+4}{2014} + 1\right) + \left(\frac{x+3}{2015} + 1\right) = \left(\frac{x+2}{2016} + 1\right) + \left(\frac{x+1}{2017} + 1\right)$$

$$\frac{x+2018}{2014} + \frac{x+2018}{2015} - \frac{x+2018}{2016} - \frac{x+2018}{2017} = 0$$

$$(x+2018) \cdot \left(\frac{1}{2014} + \frac{1}{2015} - \frac{1}{2016} - \frac{1}{2017}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x+2018 = 0 \text{ (vì } \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015} + \frac{1}{2016} + \frac{1}{2017} \neq 0)$$

$$x = -2018$$

Vậy $x = -2018$.

Câu 18. (HSG 7 huyện Hà Trung 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\frac{x-4}{2019} + \frac{x-3}{2020} = \frac{x-2}{2021} + \frac{x-1}{2022}$.

Lời giải

$$\frac{x-4}{2019} + \frac{x-3}{2020} = \frac{x-2}{2021} + \frac{x-1}{2022}$$

$$\frac{x-4}{2019} - 1 + \frac{x-3}{2020} - 1 = \frac{x-2}{2021} - 1 + \frac{x-1}{2022} - 1$$

$$\frac{x-2023}{2019} + \frac{x-2023}{2020} = \frac{x-2023}{2021} + \frac{x-2023}{2022}$$

$$(x-2023) \left(\frac{1}{2019} + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022} \right) = 0$$

$$\text{Vì } \left(\frac{1}{2019} + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022} \right) \neq 0 \text{ nên } x-2023 = 0 \Rightarrow x = 2023.$$

Vậy $x = 2023$.

Câu 19. (HSG 7 huyện Tân Kỳ 2022 – 2023)

Tìm x biết rằng: $\frac{x-1}{2021} + \frac{x-2}{2020} = \frac{x-5}{2017} + \frac{x-7}{2015}$.

Lời giải

$$\frac{x-1}{2021} + \frac{x-2}{2020} = \frac{x-5}{2017} + \frac{x-7}{2015}$$

$$\left(\frac{x-1}{2021} - 1 \right) + \left(\frac{x-2}{2020} - 1 \right) = \left(\frac{x-5}{2017} - 1 \right) + \left(\frac{x-7}{2015} - 1 \right)$$

$$\frac{x-2022}{2021} + \frac{x-2022}{2020} = \frac{x-2022}{2017} + \frac{x-2022}{2015}$$

$$\frac{x-2022}{2021} + \frac{x-2022}{2020} - \frac{x-2022}{2017} - \frac{x-2022}{2015} = 0$$

$$(x-2022) \left(\frac{1}{2021} + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2017} - \frac{1}{2015} \right) = 0$$

$$x-2022 = 0 \text{ (vì } \frac{1}{2021} + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2017} - \frac{1}{2015} \neq 0 \text{)}$$

$$x = 2022$$

Vậy $x = 2022$.

Câu 20. (HSG 7 trường Thị Trấn Càng Nàng, huyện Bá Thước; huyện Triệu Sơn 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $\frac{x-10}{30} + \frac{x-14}{43} + \frac{x-5}{95} + \frac{x-148}{8} = 0$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \left(\frac{x-10}{30} - 3 \right) + \left(\frac{x-14}{43} - 2 \right) + \left(\frac{x-5}{95} - 1 \right) + \left(\frac{x-148}{8} + 6 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x-100}{30} + \frac{x-100}{43} + \frac{x-100}{95} + \frac{x-100}{8} = 0$$

$$\Rightarrow (x-100) \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{43} + \frac{1}{95} + \frac{1}{8} \right) = 0 \text{ mà } \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{43} + \frac{1}{95} + \frac{1}{8} \right) \neq 0$$

$$\text{Suy ra } x-100 = 0$$

Vậy $x = 100$.

Câu 21. (HSG 7 Trường THCS Võ Thị Sáu 2022 - 2023).

Tìm x biết: $\frac{x+2}{327} + \frac{x+3}{326} + \frac{x+4}{325} + \frac{x+5}{324} + \frac{x+349}{5} = 0$

Lời giải

$$\frac{x+2}{327} + \frac{x+3}{326} + \frac{x+4}{325} + \frac{x+5}{324} + \frac{x+349}{5} = 0$$

$$\left(\frac{x+2}{327} + 1\right) + \left(\frac{x+3}{326} + 1\right) + \left(\frac{x+4}{325} + 1\right) + \left(\frac{x+5}{324} + 1\right) + \left(\frac{x+349}{5} - 4\right) = 0$$

$$\frac{x+329}{327} + \frac{x+329}{326} + \frac{x+329}{325} + \frac{x+329}{324} + \frac{x+329}{5} = 0$$

$$(x+329) \cdot \left(\frac{1}{327} + \frac{1}{326} + \frac{1}{325} + \frac{1}{324} + \frac{1}{5}\right) = 0$$

Vì $\frac{1}{327} + \frac{1}{326} + \frac{1}{325} + \frac{1}{324} + \frac{1}{5} > 0$ nên $x+329 = 0 \Rightarrow x = -329$

Vậy $x = -329$.



CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS

CH2: TÌM ẨN CHƯA BIẾT

Dạng 1: Tìm x thông thường
Dạng 2: Đưa về dạng tích bằng 0
Dạng 3: Sử dụng tính chất lũy thừa
Dạng 4: Tìm ẩn dạng phân thức
Dạng 5: Tìm x dạng chứa dấu giá trị tuyệt đối
Dạng 6: Sử dụng công thức tính tổng có quy luật
Dạng 7: Tổng các biểu thức không âm bằng 0
Dạng 8: Tìm ẩn dựa vào tính chất về dấu
Dạng 9: Sử dụng phương pháp chặn để tìm ẩn
Dạng 10: Tìm ẩn với điều kiện nguyên

Dạng 5. Tìm x dạng chứa dấu giá trị tuyệt đối.

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Thủy, tỉnh Phú Thọ 2021 - 2022)

Số giá trị của x thỏa mãn $2021 \cdot |1-x| + (x-1)^2 = 2022 \cdot |x-1|$ là

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

Lời giải

Chọn A

Vì $|1-x| = |x-1|$ nên từ đề bài $2021 \cdot |1-x| + (x-1)^2 = 2022 \cdot |x-1|$

$$2021 \cdot |x-1| + (x-1)^2 = 2022 \cdot |x-1|$$

$$(x-1)^2 = 2022 \cdot |x-1| - 2021 \cdot |x-1|$$

$$(x-1)^2 = |x-1|$$

$$\Rightarrow x-1 = 0 \text{ hoặc } x-1 = 1 \text{ hoặc } x-1 = -1$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = 2 \text{ hoặc } x = 0$$

Vậy $x \in \{0; 1; 2\}$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Thanh Ba, tỉnh Phú Thọ 2021 - 2022)

Giá trị nào của x dưới đây thỏa mãn $|2x+3| = |9-2x|$

- A. $x = -\frac{3}{2}$. B. $x = \frac{3}{2}$. C. $x = 0$. D. $x = 6$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $|2x+3| = |9-2x|$

TH1: $2x+3 = 9-2x$

$$4x = 6$$

$$x = \frac{3}{2}$$

TH2: $2x + 3 = -(9 - 2x)$

$$2x + 3 = -9 + 2x$$

Không có giá trị x thoả mãn

Vậy $x = \frac{3}{2}$.

Câu 3. (HSG 7 Đề khảo sát lần 3, 2022 - 2023)

Giá trị của x thoả mãn $|2x - 3| = \left(\frac{1}{2}\right)^y$ và $y = \frac{\frac{3}{5} - \frac{3}{31} + \frac{3}{4111}}{\frac{11}{11} - \frac{31}{31} + \frac{4111}{4111}} + \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10}}{\frac{3}{6} - \frac{1}{12} + \frac{1}{20}}$

A. $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}$.

B. $-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}$.

C. $\frac{7}{4}; \frac{5}{4}$.

D. $\frac{-7}{4}; \frac{-5}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$y = \frac{\frac{3}{5} - \frac{3}{31} + \frac{3}{4111}}{\frac{11}{11} - \frac{31}{31} + \frac{4111}{4111}} + \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10}}{\frac{3}{6} - \frac{1}{12} + \frac{1}{20}} = \frac{3 \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{31} + \frac{1}{4111} \right)}{5 \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{31} + \frac{1}{4111} \right)} + \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10}}{\frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10} \right)} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$$

Nên $|2x - 3| = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$

+) TH1: $2x - 3 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7}{4}$

+) TH2: $2x - 3 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{4}$

Vậy $x \in \left\{ \frac{7}{4}; \frac{5}{4} \right\}$.

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 trường Thạnh Bình – Hà Tĩnh 2017 - 2018)

Tìm x , biết: $|x - 3| = 5$

Lời giải

$$|x - 3| = 5 \Rightarrow x - 3 = 5 \text{ hoặc } x - 3 = -5$$

$$\Rightarrow x = 8 \text{ hoặc } x = -2$$

Vậy $x \in \{8; -2\}$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Bình Lục 2022 - 2023)

Tìm x biết $|2x - 1| = 3$.

Lời giải

$$|2x-1|=3 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1=3 \\ 2x-1=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-1 \end{cases}$$

Vậy $x=2$ hoặc $x=-1$

Câu 3. (HSG 7 thị xã Kỳ Anh, 2022 - 2023)

Tính tổng tất cả các giá trị của x thỏa mãn: $|x+2015|=|-2023|$.

Lời giải

$$\begin{aligned} |x+2015|=|-2023| &\Rightarrow |x+2015|=2023 \\ \Rightarrow x+2015=2023 &\text{ hoặc } x+2015=-2023 \\ \Rightarrow x=2023-2015 &\text{ hoặc } x=-2023-2015 \\ \Rightarrow x=8 &\text{ hoặc } x=-4038. \end{aligned}$$

Vậy $8+(-4038)=-4030$

Câu 4. (HSG 7 huyện Đức Thọ 2021 - 2022)

Tìm x biết $|x-1|-\frac{2}{3}=0$.

Lời giải

$$\begin{aligned} |x-1|-\frac{2}{3} &= 0 \\ |x-1| &= \frac{2}{3} \\ \Rightarrow x-1 &= \frac{2}{3} \text{ hoặc } x-1 = -\frac{2}{3} \\ \Rightarrow x &= \frac{5}{3} \text{ hoặc } x = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Vậy $x \in \left\{ \frac{2}{3}; \frac{5}{3} \right\}$.

Câu 5. (HSG 7 huyện Lục Ngạn 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\left| x - \frac{2}{5} \right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{20}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \left| x - \frac{2}{5} \right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{20} \Rightarrow \left| x - \frac{2}{5} \right| = \frac{11}{20}$$

$$\Rightarrow x - \frac{2}{5} = \frac{11}{20} \text{ hoặc } x - \frac{2}{5} = -\frac{11}{20}$$

$$+ \text{ Nếu } x - \frac{2}{5} = \frac{11}{20} \Rightarrow x = \frac{2}{5} + \frac{11}{20} = \frac{19}{20}$$

$$+ \text{ Nếu } x - \frac{2}{5} = -\frac{11}{20} \Rightarrow x = \frac{2}{5} - \frac{11}{20} = \frac{-3}{20}$$

Vậy $x = \frac{19}{20}$ hoặc $x = \frac{-3}{20}$

Câu 6. (HSG 7 huyện Lục Ngạn 2021 - 2022)

Tìm x , biết: $\left|x - \frac{2}{5}\right| = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$.

Lời giải

Ta có: $\left|x - \frac{2}{5}\right| = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$

$$\left|x - \frac{2}{5}\right| = \frac{3}{10}$$

Suy ra $x - \frac{2}{5} = \frac{3}{10}$ hoặc $x - \frac{2}{5} = -\frac{3}{10}$

+ Xét $x - \frac{2}{5} = \frac{3}{10}$

$$x = \frac{3}{10} + \frac{2}{5} = \frac{7}{10}$$

+ Xét $x - \frac{2}{5} = -\frac{3}{10}$

$$x = -\frac{3}{10} + \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$$

Vậy $x \in \left\{\frac{7}{10}; \frac{1}{10}\right\}$

Câu 7. (HSG 7 huyện 2017 - 2018)

Tìm x biết: $|2x - 7| + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$

Lời giải

$$|2x - 7| + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$$

$$|2x - 7| = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$|2x - 7| = 1 \Rightarrow 2x - 7 = 1 \text{ hoặc } 2x - 7 = -1$$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ hoặc } x = 3$$

Vậy $x \in \{4; 3\}$

Câu 8. (HSG 7 huyện Bá Thước, 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $|x - 0,25| + \frac{1}{2} = 1,25$.

Lời giải

$$|x - 0,25| + \frac{1}{2} = 1,25 \Rightarrow |x - 0,25| = 0,75$$

$$\Rightarrow x - 0,25 = 0,75 \text{ hoặc } x - 0,25 = -0,75$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = -0,5.$$

Vậy $x \in \{1; -0,5\}$.

Câu 9. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc 2016 - 2017)

Tìm x , biết: $\frac{1}{2} - \left| x + \frac{1}{5} \right| = \frac{1}{3}$

Lời giải

$$\frac{1}{2} - \left| x + \frac{1}{5} \right| = \frac{1}{3}$$

$$\left| x + \frac{1}{5} \right| = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \left| x + \frac{1}{5} \right| = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{5} = \frac{1}{6} \text{ hoặc } x + \frac{1}{5} = -\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{30} \text{ hoặc } x = -\frac{11}{30}$$

Vậy $x \in \left\{ -\frac{1}{30}; -\frac{11}{30} \right\}$.

Câu 10. (HSG 7 huyện Quốc Oai 2016 - 2017)

Tìm x , biết $\left| x + \frac{1}{5} \right| - 4 = -2$

Lời giải

$$\left| x + \frac{1}{5} \right| - 4 = -2$$

$$\Rightarrow \left| x + \frac{1}{5} \right| = 2$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{5} = 2 \text{ hoặc } x + \frac{1}{5} = -2$$

$$\Rightarrow x = \frac{9}{5} \text{ hoặc } x = -\frac{11}{5}$$

Vậy $x \in \left\{ \frac{9}{5}; -\frac{11}{5} \right\}$.

Câu 11. (HSG 7 huyện Nga Sơn- 2016 - 2017)

Tìm x biết: $3|2x-1|+1 = (-2)^2 - 3 \cdot (-2)^3$

Lời giải

$$3|2x-1|+1 = (-2)^2 - 3 \cdot (-2)^3$$

$$\Rightarrow |2x-1| = 9$$

$$\Rightarrow 2x-1 = 9 \text{ hoặc } 2x-1 = -9$$

$$\Rightarrow x = 5 \text{ hoặc } x = -4$$

Vậy $x \in \{5; -4\}$.

Câu 12. (HSG 7 huyện Anh Sơn 2016 - 2017)

Tìm x , biết: $\left|x + \frac{1}{3}\right| - 5 = 7$

Lời giải

$$\left|x + \frac{1}{3}\right| - 5 = 7 \Rightarrow \left|x + \frac{1}{3}\right| = 12$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{3} = 12 \\ x + \frac{1}{3} = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{35}{3} \\ x = -\frac{37}{3} \end{cases}$$

Vậy $x \in \left\{\frac{35}{3}; -\frac{37}{3}\right\}$.

Câu 13. (HSG 7 huyện Hà Trung 2022 - 2023)

Tìm x biết: $3\frac{1}{2} : |2x - 1| = \frac{21}{22}$.

Lời giải

$$3\frac{1}{2} : |2x - 1| = \frac{21}{22}$$

$$|2x - 1| = 3\frac{1}{2} : \frac{21}{22}$$

$$|2x - 1| = \frac{7}{2} \cdot \frac{22}{21}$$

$$|2x - 1| = \frac{11}{3}$$

$$\Rightarrow 2x - 1 = \frac{11}{3} \text{ hoặc } 2x - 1 = -\frac{11}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{7}{3} \text{ hoặc } x = -\frac{4}{3}$$

Vậy $x \in \left\{-\frac{4}{3}; \frac{7}{3}\right\}$.

Câu 14. (HSG 7 huyện Ngọc Lặc, trường Nguyệt Ân; huyện Hiệp Hòa 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $\left|x - \frac{1}{3}\right| + \frac{4}{5} = \left|(-3, 2) + \frac{2}{5}\right|$

Lời giải

$$\left|x - \frac{1}{3}\right| + \frac{4}{5} = \left|(-3, 2) + \frac{2}{5}\right|$$

$$\left|x - \frac{1}{3}\right| + \frac{4}{5} = \left|-\frac{16}{5} + \frac{2}{5}\right|$$

$$\left|x - \frac{1}{3}\right| + \frac{4}{5} = \frac{14}{5}$$

$$\left|x - \frac{1}{3}\right| = 2$$

$$\text{Suy ra } x - \frac{1}{3} = 2 \text{ hoặc } x - \frac{1}{3} = -2$$

$$\Rightarrow x = \frac{7}{3} \text{ hoặc } x = -\frac{5}{3}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{7}{3} \text{ hoặc } x = -\frac{5}{3}$$

Câu 15. (HSG 7 huyện Bát Xát 2022 - 2023)

Tìm x biết $3 \cdot |9 - 2x| - 17 = 16$

Lời giải

$$3 \cdot |9 - 2x| - 17 = 16$$

$$3 \cdot |9 - 2x| = 16 + 17$$

$$3 \cdot |9 - 2x| = 33$$

$$|9 - 2x| = 11$$

$$\text{Suy ra } 9 - 2x = 11 \text{ hoặc } 9 - 2x = -11$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 10$$

$$\text{Vậy } x = -1 \text{ hoặc } x = 10.$$

Câu 16. (HSG 7 huyện Đức Thọ 2022 - 2023)

Tìm x biết $10 - |x - \sqrt{9}| = 9$

Lời giải

$$10 - |x - \sqrt{9}| = 9$$

$$10 - |x - 3| = 9$$

$$|x - 3| = 1$$

$$x - 3 = 1 \text{ hoặc } x - 3 = -1$$

$$x = 4 \text{ hoặc } x = 2.$$

$$\text{Vậy } x = 4 \text{ hoặc } x = 2.$$

Câu 17. (HSG 7 thành phố Vinh, trường Nguyệt Ân 2022 - 2023)

Tìm $x \in \mathbb{Z}$ biết: $|2x - 1| + \frac{1}{4} = 2.$

Lời giải

$$|2x - 1| + \frac{1}{4} = 2$$

$$|2x - 1| = \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow 2x - 1 = \frac{7}{4} \text{ hoặc } 2x - 1 = -\frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{11}{8} \text{ hoặc } x = -\frac{3}{8}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{11}{8}; x = -\frac{3}{8}.$$

Câu 18. (HSG 7 huyện Thiệu Hóa 2022 - 2023)

Tìm x biết $\left| \frac{3}{8} : \left(2x - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{1}{6} \right| = \frac{5}{3}$

Lời giải

$$\left| \frac{3}{8} : \left(2x - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{1}{6} \right| = \frac{5}{3}$$

Do $\frac{3}{8} : \left(2x - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{1}{6} > 0$ với mọi x nên $\left| \frac{3}{8} : \left(2x - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{1}{6} \right| = \frac{3}{8} : \left(2x - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{1}{6}$

Suy ra $\frac{3}{8} : \left(2x - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$

$$\frac{3}{8} : \left(2x - \frac{1}{3} \right)^2 = \frac{3}{2}$$

$$\left(2x - \frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 2x - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \text{ hoặc } 2x - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$$

+) TH1: $2x - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \Rightarrow 2x = \frac{5}{6} \Rightarrow x = \frac{5}{12}$

+) TH2: $2x - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \Rightarrow 2x = -\frac{1}{6} \Rightarrow x = -\frac{1}{12}$

Vậy $x \in \left\{ \frac{-1}{12}; \frac{5}{12} \right\}$

Câu 19. (HSG 7 huyện Nông Cống, 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\left(\frac{31}{10} - |x+2| \right) : \left(\frac{19}{10} - \frac{7}{5} \right) + \frac{4}{5} = 1$.

Lời giải

Ta có: $\left(\frac{31}{10} - |x+2| \right) : \left(\frac{19}{10} - \frac{7}{5} \right) + \frac{4}{5} = 1 \Rightarrow \frac{31}{10} - |x+2| = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{10} = \frac{1}{10}$

$$\Rightarrow |x+2| = \frac{31}{10} - \frac{1}{10} = 3$$

$$\Rightarrow x+2 = 3 \text{ hoặc } x+2 = -3 \Rightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = -5.$$

Vậy $x = 1$ hoặc $x = -5$.

Câu 20. (HSG 7 huyện Cẩm Thủy 2021 - 2022)

Tìm x biết $\left(3 - \left| x - \frac{1}{2} \right| \right) \left(\frac{8}{15} - \frac{1}{5} \right) + \frac{2}{3} = 1$

Lời giải

$$\left(3 - \left| x - \frac{1}{2} \right| \right) \left(\frac{8}{15} - \frac{1}{5} \right) + \frac{2}{3} = 1$$

$$\left(3 - \left|x - \frac{1}{2}\right|\right) \cdot \frac{1}{3} = 1 - \frac{2}{3}$$

$$\left(3 - \left|x - \frac{1}{2}\right|\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$3 - \left|x - \frac{1}{2}\right| = 1$$

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| = 2$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{2} = 2 \text{ hoặc } x - \frac{1}{2} = -2$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{2} \text{ hoặc } x = \frac{-3}{2}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right\}$$

Câu 21. (HSG 7 huyện Tiên Du, Bắc Ninh, 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $\frac{1}{3} - \frac{1}{3} : |2x - 1| = -\frac{2}{3}$.

Lời giải

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3} : |2x - 1| = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3} : |2x - 1| = \frac{1}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$\frac{1}{3} : |2x - 1| = 1$$

$$|2x - 1| = \frac{1}{3}$$

Suy ra $2x - 1 = \frac{1}{3}$ hoặc $2x - 1 = -\frac{1}{3}$.

- Xét $2x - 1 = \frac{1}{3}$ suy ra $x = \frac{2}{3}$.

- Xét $2x - 1 = -\frac{1}{3}$ suy ra $x = \frac{1}{3}$.

$$\text{Vậy } x \in \left\{\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right\}.$$

Câu 22. (HSG 7 huyện Hà Trung 2021 - 2022)

Tìm x biết: $\frac{11}{4} + \frac{3}{2} : \left|4x - \frac{1}{5}\right| = \frac{7}{2}$

Lời giải

$$\frac{11}{4} + \frac{3}{2} : \left|4x - \frac{1}{5}\right| = \frac{7}{2}$$

$$\frac{3}{2} : \left| 4x - \frac{1}{5} \right| = \frac{7}{2} - \frac{11}{4}$$

$$\frac{3}{2} : \left| 4x - \frac{1}{5} \right| = \frac{3}{4}$$

$$\left| 4x - \frac{1}{5} \right| = \frac{3}{2} : \frac{3}{4}$$

$$\left| 4x - \frac{1}{5} \right| = 2$$

Suy ra: $4x - \frac{1}{5} = 2$ hoặc $4x - \frac{1}{5} = -2$

TH1: $4x - \frac{1}{5} = 2 \Rightarrow 4x = \frac{11}{5} \Rightarrow x = \frac{11}{20}$

TH2: $4x - \frac{1}{5} = -2 \Rightarrow 4x = -\frac{9}{5} \Rightarrow x = -\frac{9}{20}$

Vậy $x \in \left\{ \frac{11}{20}; -\frac{9}{20} \right\}$

Câu 23. (HSG 7 huyện 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $\frac{3}{2} : |2x - 1| = \frac{3}{5}$

Lời giải

$$\frac{3}{2} : |2x - 1| = \frac{3}{5}$$

$$|2x - 1| = \frac{3}{2} : \frac{3}{5}$$

$$|2x - 1| = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow 2x - 1 = \frac{5}{2} \text{ hoặc } 2x - 1 = -\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{7}{2} \text{ hoặc } 2x = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{7}{4} \text{ hoặc } x = -\frac{3}{4}$$

Vậy $x \in \left\{ \frac{7}{4}; -\frac{3}{4} \right\}$.

Câu 24. (HSG 7 huyện Đông Hưng 2022 - 2023)

Tìm x , biết $3\frac{1}{2} : \left(4 - \frac{1}{3} \cdot |2x - 1| \right) = \frac{21}{22}$.

Lời giải

$$3\frac{1}{2} : \left(4 - \frac{1}{3} \cdot |2x - 1| \right) = \frac{21}{22}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(4 - \frac{1}{3} \cdot |2x - 1|\right) &= 3 \frac{1}{2} : \frac{21}{22} \\ \Rightarrow 4 - \frac{1}{3} \cdot |2x - 1| &= \frac{11}{3} \\ \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot |2x - 1| &= \frac{1}{3} \\ \Rightarrow |2x - 1| &= 1 \\ \Rightarrow 2x + 1 = 1 \text{ hoặc } 2x + 1 &= -1 \\ \Rightarrow x = 0 \text{ hoặc } x &= -1 \\ \text{Vậy } x \in \{0; -1\}. \end{aligned}$$

Câu 25. (HSG 7 huyện Mường La 2021 - 2022)

Tìm x biết: $\left|x - \frac{1}{2}\right| + \frac{3}{4} = \left|-1,6 + \frac{3}{5}\right|$

Lời giải

Ta có $\left|x - \frac{1}{2}\right| + \frac{3}{4} = \left|-1,6 + \frac{3}{5}\right|$

$$\Rightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| + \frac{3}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ hoặc } x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{4} \text{ hoặc } x = \frac{1}{4}$$

Vậy: $x = \frac{3}{4}$ hoặc $x = \frac{1}{4}$

Câu 26. (HSG 7 huyện Bình Xuyên, tỉnh Vĩnh Phúc 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\left(3 - \frac{9}{10} - |x + 2|\right) : \left(\frac{19}{10} - 1 - \frac{2}{5}\right) + \frac{4}{5} = 1$

Lời giải

Ta có: $\left(3 - \frac{9}{10} - |x + 2|\right) : \left(\frac{19}{10} - 1 - \frac{2}{5}\right) + \frac{4}{5} = 1$

$$\Rightarrow \left(\frac{30}{10} - \frac{9}{10} - |x + 2|\right) : \left(\frac{19}{10} - \frac{10}{10} - \frac{4}{10}\right) = 1 - \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{21}{10} - |x + 2|\right) : \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{21}{10} - |x + 2|\right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{21}{10} - |x + 2|\right) = \frac{1}{10}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |x+2| &= \frac{21}{10} - \frac{1}{10} \\ \Rightarrow |x+2| &= 2 \\ \Rightarrow x+2 &= 2 \quad \text{hoặc} \quad x+2 = -2 \\ \Rightarrow x &= 0 \quad \text{hoặc} \quad x = -4 \\ \text{Vậy } x &\in \{0; -4\} \end{aligned}$$

Câu 27. (HSG 7 huyện Hậu Lộc 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $\left(3 - \left|x - \frac{1}{2}\right|\right) \cdot \left(\frac{8}{15} - \frac{1}{5}\right) + \frac{2}{3} = 1.$

Lời giải

$$\left(3 - \left|x - \frac{1}{2}\right|\right) \cdot \left(\frac{8}{15} - \frac{1}{5}\right) + \frac{2}{3} = 1$$

$$\Rightarrow \left(3 - \left|x - \frac{1}{2}\right|\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 3 - \left|x - \frac{1}{2}\right| = 1$$

$$\Rightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| = 2$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{2} = 2 \quad \text{hoặc} \quad x - \frac{1}{2} = -2$$

TH1: $x - \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

TH 2: $x - \frac{1}{2} = -2 \Rightarrow x = \frac{-3}{2}$

Vậy $x \in \left\{\frac{5}{2}; \frac{-3}{2}\right\}.$

Câu 28. (HSG 7 huyện Lương Tài tỉnh Bắc Ninh 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\left|\frac{39}{2} - 3x^2\right| = \frac{15}{2}.$

Lời giải

$$\left|\frac{39}{2} - 3x^2\right| = \frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{39}{2} - 3x^2 = \frac{15}{2} \quad \text{hoặc} \quad \frac{39}{2} - 3x^2 = -\frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow 3x^2 = \frac{39}{2} - \frac{15}{2} \quad \text{hoặc} \quad 3x^2 = \frac{39}{2} + \frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow 3x^2 = 12 \quad \text{hoặc} \quad 3x^2 = 27$$

$$\Rightarrow x = \pm 2 \quad \text{hoặc} \quad x = \pm 3$$

Vậy $x \in \{\pm 2; \pm 3\}$

Câu 29. (HSG 7 trường Nguyễn Khuyến 2015 - 2016)

Tìm x , biết: $5 \cdot \left| \frac{3}{4} - \frac{2}{3}x \right| - 3,25 = -2 \left[(1,25)^2 - 2,5 \cdot 0,25 + (-0,25)^2 \right]$

Lời giải

$$5 \cdot \left| \frac{3}{4} - \frac{2}{3}x \right| - 3,25 = -2 \left[(1,25)^2 - 2,5 \cdot 0,25 + (-0,25)^2 \right]$$

$$\Rightarrow 5 \cdot \left| \frac{3}{4} - \frac{2}{3}x \right| - \frac{13}{4} = -2$$

$$\Rightarrow \left| \frac{3}{4} - \frac{2}{3}x \right| = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} - \frac{2}{3}x = \frac{1}{4} \text{ hoặc } \frac{3}{4} - \frac{2}{3}x = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{4} \text{ hoặc } x = \frac{3}{2}$$

Vậy $x \in \left\{ \frac{3}{4}; \frac{3}{2} \right\}$.

Câu 30. (HSG 7 huyện Mù Cang Chải - 2016 - 2017)

Tìm x , biết: $|2x - 7| = |5x + 2|$

Lời giải

$$|2x - 7| = |5x + 2|$$

$$\Rightarrow 2x - 7 = 5x + 2 \text{ hoặc } 2x - 7 = -5x - 2$$

$$\Rightarrow x = -3 \text{ hoặc } x = \frac{5}{7}$$

Vậy $x \in \left\{ -3; \frac{5}{7} \right\}$.

Câu 31. (HSG 7 huyện Sơn Dương - 2016 - 2017)

Tìm x biết: $|5x - 4| = |x + 2|$

Lời giải

Xét với $x < -2 \Rightarrow 4 - 5x + 2 + x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ (không thỏa mãn)

Xét với $-2 < x < \frac{4}{5} \Rightarrow 4 - 5x - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$ (thỏa mãn)

Xét với $x \geq \frac{4}{5} \Rightarrow 5x - 4 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ (thỏa mãn)

Vậy $x \in \left\{ \frac{1}{3}; \frac{3}{2} \right\}$.

Câu 32. (HSG 7 huyện 2017 - 2018)

Tìm x , biết: $3x - |2x + 1| = 2$

Lời giải

+ Nếu $x \geq -\frac{1}{2}$ ta được: $3x - 2x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3$

+ Nếu $x < -\frac{1}{2}$ ta được: $3x + 2x + 1 = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$

Vậy $x = 3$.

Câu 33. (HSG 7 huyện 2017 - 2018)

Tìm x biết: $|2x - 1| - x = 4$

Lời giải

$$|2x - 1| = x + 4$$

+ Với $x \geq \frac{1}{2}$, ta được: $2x - 1 = x + 4 \Rightarrow x = 5$ (thỏa mãn)

+ Với $x < \frac{1}{2}$, ta được: $-2x + 1 = x + 4 \Rightarrow x = -1$ (thỏa mãn)

Vậy $x \in \{5; -1\}$.

Câu 34. (HSG 7 huyện 2016 - 2017)

Tìm x , biết: $|2x + 3| = x + 2$

Lời giải

Ta có: $x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$

$$|2x + 3| = x + 2$$

$$\Rightarrow 2x + 3 = x + 2 \text{ hoặc } 2x + 3 = -x - 2$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = -\frac{5}{3} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $x \in \left\{-1; -\frac{5}{3}\right\}$.

Câu 35. (HSG 7 trường Hiền Quan 2015 - 2016)

Tìm x , biết: $|9 - 7x| = 5x - 3$

Lời giải

$$|9 - 7x| = 5x - 3. \text{ Điều kiện } x \geq \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow 9 - 7x = 5x - 3 \text{ hoặc } 9 - 7x = 3 - 5x$$

$$\Rightarrow 12x = 12 \text{ hoặc } 2x = 6$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = 3 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $x \in \{1; 3\}$.

Câu 36. (HSG 7 huyện Kim Thành 2022 - 2023)

Tìm x biết, $|x + 3| + 1 = 3x$.

Lời giải

$$|x + 3| + 1 = 3x \text{ (*)}$$

Nếu $x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$.

Do đó $|x + 3| = x + 3$

Từ (*), ta có $x + 3 + 1 = 3x$

$$4 = 2x$$

$$x = 2 \text{ (TM)}$$

Nếu $x + 3 < 0 \Rightarrow x < -3$.

$$|x + 3| = -x - 3$$

Từ (*), ta có $-x - 3 + 1 = 3x$

$$-2 = 4x$$

$$x = \frac{-1}{2} \text{ (Loại)}$$

Vậy $x = 2$.

Câu 37. (HSG 7 huyện Tân Kỳ 2022 – 2023)

Tìm x biết rằng: $|x - 1| = 2 - x$.

Lời giải

$$|x - 1| = 2 - x \text{ điều kiện } 2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$$

Trường hợp 1: $1 \leq x \leq 2$ ta có :

$$|x - 1| = 2 - x$$

$$x - 1 = 2 - x$$

$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ (tm)}$$

Trường hợp 2: $x < 1$ ta có:

$$|x - 1| = 2 - x$$

$$1 - x = 2 - x$$

$$1 = 2 \text{ (vô lý)}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{3}{2} .$$

Câu 38. (HSG 7 thị xã Thái Hòa Nghệ An 2022 - 2023)

Tìm x biết: $2x - |x - 3| = 2$.

Lời giải

$$2x - |x - 3| = 2 \text{ (1)}$$

Nếu $x \geq 3$. Từ (1) ta có: $2x - x + 3 = 2 \Leftrightarrow x = -1$ (loại)

Nếu $x < 3$. Từ (1) ta có: $2x + x - 3 = 2 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$ (thỏa mãn)

$$\text{Vậy } x = \frac{5}{3} .$$

Câu 39. (HSG 7 huyện Bát Xát 2021 - 2022)

Tìm x biết: $|2x + 3| - x = 14$

Lời giải

$$|2x + 3| - x = 14 \Rightarrow |2x + 3| = 14 + x$$

TH 1: $2x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{-3}{2}$. Khi đó ta có:

$$2x + 3 = 14 + x$$

$$x = 11 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

TH 2: $2x + 3 < 0 \Rightarrow x < \frac{-3}{2}$. Khi đó ta có:

$$-(2x + 3) = 14 + x$$

$$-3x = 17$$

$$x = \frac{-17}{3} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ 11; \frac{-17}{3} \right\}$$

Câu 40. (HSG 7 huyện Bá Thước 2021 - 2022)

Tìm x biết: $|x - 7| + 2x + 5 = 6$

Lời giải

$$|x - 7| + 2x + 5 = 6$$

Nếu $x \geq 7 \Rightarrow x - 7 + 2x + 5 = 6 \Rightarrow 3x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{3} < 7$ (loại)

Nếu $x < 7 \Rightarrow 7 - x + 2x + 5 = 6 \Rightarrow 12 + x = 6 \Rightarrow x = -6 < 7$ (thỏa mãn)

Vậy $x = -6$.

Câu 41. (HSG 7 tỉnh Quảng Ninh 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $|x + 3| - 2x = 5$.

Lời giải

$$|x + 3| - 2x = 5 \Rightarrow |x + 3| = 5 + 2x \quad (1)$$

TH1: Nếu $x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow |x + 3| = x + 3$

Khi đó (1) có dạng: $x + 3 = 5 + 2x$

$$\Rightarrow x = -2 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

TH2: Nếu $x + 3 < 0 \Rightarrow x < -3 \Rightarrow |x + 3| = -x - 3$

Khi đó (1) có dạng: $-x - 3 = 5 + 2x$

$$\Rightarrow 3x = -8$$

$$\Rightarrow x = \frac{-8}{3} \text{ (Không thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy $x = -2$.

Câu 42. (HSG 7 huyện Tương Dương, tỉnh Nghệ An 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $|2x - 1| - x = 1$.

Lời giải

$$|2x - 1| - x = 1 \text{ hay } |2x - 1| = 1 + x$$

Suy ra $2x - 1 = 1 + x$ hoặc $-(2x - 1) = 1 + x$ (Điều kiện $x \geq -1$)

+ Trường hợp 1:

$$2x - 1 = 1 + x$$

$$2x - x = 1 + 1$$

$$x = 2 \text{ (Thỏa mãn)}$$

+ Trường hợp 2:

$$-(2x - 1) = 1 + x$$

$$-2x + 1 = 1 + x$$

$$3x = 0$$

$$x = 0 \text{ (Thỏa mãn)}$$

Vậy $x \in \{2; 0\}$.

Câu 43. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ, tỉnh Thái Bình 2022 - 2023)

Tìm x , biết $2023 - |x - 2023| = x$.

Lời giải

Ta có $2023 - |x - 2023| = x$

$$|x - 2023| = 2023 - x$$

$$|x - 2023| = -(x - 2023)$$

Do đó $x - 2023 \leq 0$

Suy ra $x \leq 2023$

Kết luận: $x \leq 2023$.

Câu 44. (HSG 7 huyện Nghĩa Hành 2021 - 2022)

Tìm x biết: $2|5x - 3| - 2x = 14$

Lời giải

Ta có: $2|5x - 3| - 2x = 14$

$$\Rightarrow 2|5x - 3| = 2x + 14$$

$$\Rightarrow |5x - 3| = x + 7 \text{ với điều kiện } x \geq -7$$

$$\Rightarrow 5x - 3 = x + 7 \text{ hoặc } 5x - 3 = -(x + 7)$$

$$\Rightarrow 4x = 10 \text{ hoặc } 6x = -4$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{2} \text{ hoặc } x = \frac{-2}{3}$$

Vậy có hai giá trị x thỏa mãn điều kiện $x \in \left\{ \frac{5}{2}; \frac{-2}{3} \right\}$.

Câu 45. (HSG 7 huyện Tân Kỳ 2021 - 2022)

Tìm x biết: $|x(x + 6)| = x$

Lời giải

Ta có: $|x(x + 6)| = x$ Điều kiện: $x \geq 0$

$$\Rightarrow x(x + 6) = x \text{ hoặc } x(x + 6) = -x$$

$$\Rightarrow x(x+6-1)=0 \text{ hoặc } x(x+6+1)=0$$

$$\Rightarrow x(x+5)=0 \text{ hoặc } x(x+7)=0$$

$$\Rightarrow x=0 \text{ hoặc } x=-5 \text{ hoặc } x=-7$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x=0$

Vậy $x=0$.

Câu 46. (HSG 7 trường Cự Khê 2016 - 2017)

Tìm x biết: $|2x-3| = \left(\frac{1}{2}\right)^y$ và $y = \frac{\frac{3}{7} - \frac{3}{11} + \frac{3}{101}}{\frac{5}{7} - \frac{5}{11} + \frac{5}{101}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{5}{4} - \frac{5}{6} + \frac{5}{8}}$

Lời giải

Ta có: $y = \frac{3\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{101}\right)}{5\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{101}\right)} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$

Nên $|2x-3| = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$

+) TH1: $2x-3 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7}{4}$

+) TH2: $2x-3 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{4}$

Vậy $x \in \left\{\frac{7}{4}; \frac{5}{4}\right\}$.

Câu 47. (HSG 7 huyện Thanh Oai 2014- 2015)

Tìm x , biết:

a) $|2x-1| - x = 1$

b) $|x+3| - 2x = |x-4|$

Lời giải

a) $|2x-1| - x = 1$

Nếu $x \geq \frac{1}{2}$ ta có $2x-1-x=1 \Rightarrow x=2$ (thỏa mãn)

Nếu $x < \frac{1}{2}$ ta có: $-2x+1-x=1 \Rightarrow x=0$ (thỏa mãn)

Vậy $x \in \{2; 0\}$.

b) $|x+3| - 2x = |x-4|$ (1)

Lập bảng xét dấu

x		-3		4	
$x+3$	-	0	+		+
$x-4$	-		-	0	+

+ Với $x < 3$, ta có (1) trở thành:

$$-x - 3 - 2x = -x + 4 \Rightarrow -2x = 7 \Rightarrow x = -3,5 \text{ (thỏa mãn)}$$

+ Với $-3 \leq x \leq 4$, ta có (1) trở thành:

$$x + 3 - 2x = -x + 4 \Rightarrow 0.x = 1 \text{ (vô lý)}$$

+ Với $x > 4$, ta có (1) trở thành:

$$x + 3 - 2x = x - 4 \Rightarrow -2x = -7 \Rightarrow x = 3,5 \text{ (không thỏa mãn)}$$

Vậy $x = -3,5$

Câu 47. (HSG 7 huyện Đô Lương 2022 - 2023)

Tìm $x \in \mathbb{N}$ thỏa mãn. $|x - 4| - |x + 1| = -1$ (*)

Lời giải

Xét $x \geq 4$: (*) $\Rightarrow x - 4 - (x + 1) = -1 \Rightarrow -4 = 0$ (vô lý) hay (*) vô nghiệm.

Xét $-1 \leq x < 4$: (*) $\Rightarrow -(x - 4) - (x + 1) = -1 \Rightarrow -2x = -4 \Rightarrow x = 2$ (thỏa điều kiện).

Xét $x < -1$: (*) $\Rightarrow -(x - 4) + (x + 1) = -1 \Rightarrow 6 = 0$ (vô lý) hay (*) vô nghiệm.

Vậy $x = 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 49. (HSG 7 huyện Nghi Sơn 2022 - 2023)

Tìm x biết: $|x + 5| + |x - 3| = 9$.

Lời giải

$$|x + 5| + |x - 3| = 9 \quad (1)$$

$$* \text{ Xét } x < -5 \Rightarrow \begin{cases} x + 5 < 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x + 5| = -x - 5 \\ |x - 3| = -x + 3 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó (1)} \Rightarrow -x - 5 - x + 3 = 9 \Rightarrow -2x = 11 \Rightarrow x = \frac{-11}{2} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$* \text{ Xét } -5 \leq x \leq 3 \Rightarrow \begin{cases} x + 5 \geq 0 \\ x - 3 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x + 5| = x + 5 \\ |x - 3| = -x + 3 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó (1)} \Rightarrow x + 5 - x + 3 = 9 \Rightarrow 0.x = 1 \text{ (vô lý)}$$

$$* \text{ Xét } x > 3 \Rightarrow \begin{cases} x + 5 > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x + 5| = x + 5 \\ |x - 3| = x - 3 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó (1)} \Rightarrow x + 5 + x - 3 = 9 \Rightarrow 2x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{2} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{-11}{2}; \frac{7}{2} \right\}.$$

Câu 50. (HSG 7 huyện Lý Nhân 2021 - 2022)

Tìm x , biết $|x| + |x + 2022| = 2023$

Lời giải

$$\text{Với } x > 0, \text{ ta được } x + x + 2022 = 2023 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Với } -2022 < x < 0, \text{ ta được } -x + x + 2022 = 2023 \Rightarrow 0x = 1 \text{ (vô lý)}$$

Với $x < -2022$, ta được $-x - x - 2022 = 2023 \Rightarrow -2x = 4045 \Rightarrow x = \frac{-4045}{2}$

Vậy $x \in \left\{ \frac{1}{2}; \frac{-4045}{2} \right\}$

Câu 51. (HSG 7 huyện Hưng Hà, Thống Nhất, 2022 - 2023)

Tìm x biết: $|2x - 3| - |3x + 2| = -4$.

Lời giải

Ta có: $2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$.

$3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2}{3}$.

TH1: $x \leq \frac{-2}{3}$

$|2x - 3| - |3x + 2| = -4 \Rightarrow 3 - 2x + 3x + 2 = -4 \Rightarrow x = -9$ (thỏa mãn).

TH2: $\frac{-2}{3} < x < \frac{3}{2}$

$|2x - 3| - |3x + 2| = -4 \Rightarrow 2x - 3 + 3x + 2 = -4 \Rightarrow x = \frac{-3}{5}$ (thỏa mãn).

TH3: $\frac{3}{2} \leq x$

$|2x - 3| - |3x + 2| = -4 \Rightarrow 2x - 3 - 3x - 2 = -4 \Rightarrow x = -1$ (loại).

Vậy $x \in \left\{ -9; \frac{-3}{5} \right\}$.

Câu 52. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Kim Trung 2022 - 2023)

Tìm x biết: $|x - 3| + |x - 2| = 1$

Lời giải

Tìm x biết: $|x - 3| + |x - 2| = 1$ (1)

Xét: $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

Ta có bảng xét dấu:

x		2	3	
$x - 3$	-	-	+	
$x - 2$	-	+	+	

Dựa vào bảng xét dấu ta có:

- Nếu $x < 2$ thì (1) trở thành:

$-(x - 3) - (x - 2) = 1$

$\Rightarrow -2x = -4$

$\Rightarrow x = 2$ (không thỏa mãn điều kiện)

- Nếu $2 \leq x < 3$ thì (1) trở thành:

$$-(x-3)+(x-2)=1 \Rightarrow 0x=0 \text{ (Luôn đúng với } 2 \leq x < 3)$$

- Nếu $3 \leq x$ thì (1) trở thành:

$$(x-3)+(x-2)=1$$

$$2x=6$$

$$x=3 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy $2 \leq x \leq 3$ thỏa mãn bài toán.

Câu 53. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Trần Thủ Độ 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $|x-1|+|x-2|=5$..`

Lời giải

$$|x-1|+|x-2|=5 \quad (1)$$

+) Với $x \geq 2$ khi đó (1) có dạng: $x-1+x-2=5 \Rightarrow 2x-3=5$ (chọn)

+) Với $1 < x < 2$ khi đó (1) có dạng: $x-1+2-x=5 \Rightarrow 0x=4$ (vô lý)

+) Với $x \leq 1$ khi đó (1) có dạng: $1-x+2-x=5 \Rightarrow -2x+3=5$ (chọn)

KL: $x=4$ hoặc $x=-1$

Câu 54. (HSG 7 huyện Hiệp Hòa 2016 - 2017)

Tìm x biết: $|4x+3|-|x-1|=7$

Lời giải

$$|4x+3|-|x-1|=7$$

Ta có bảng xét dấu :

x	$-\frac{3}{4}$	1
$ 4x+3 $	$-$	$+$
$ x-1 $	$-$	$+$

+ Với $x < -\frac{3}{4}$, ta được: $-4x-3-(-x+1)=7 \Rightarrow -3x=11 \Rightarrow x=-\frac{11}{3}$ (thỏa mãn)

+ Với $-\frac{3}{4} \leq x < 1$, ta được: $4x+3-(-x+1)=7 \Rightarrow 5x=5 \Rightarrow x=1$ (loại)

+ Với $x \geq 1$, ta được: $4x+3-(x-1)=7 \Rightarrow 3x=3 \Rightarrow x=1$ (thỏa mãn)

Vậy $x \in \left\{-\frac{11}{3}; 1\right\}$.

Câu 55. (HSG 7 Quận Tây Hồ 2022 - 2023)

Tìm x biết $-3|x-5|+7|x-5|=2^2.5$.

Lời giải

$$-3|x-5|+7|x-5|=2^2.5$$

$$4|x-5|=4.5$$

$$|x-5|=5$$

Suy ra $x - 5 = 5$ hoặc $x - 5 = -5$

Hay $x = 10$ hoặc $x = 0$

Vậy $x \in \{10; 0\}$

Câu 56. (HSG 7 -TP Thanh Hóa, 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $\left|2x + \frac{1}{2}\right| + \left|2x - \frac{3}{2}\right| = 2$.

Lời giải

Ta có: $\left|2x + \frac{1}{2}\right| + \left|2x - \frac{3}{2}\right| = \left|2x + \frac{1}{2}\right| + \left|\frac{3}{2} - 2x\right| \geq \left|2x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2x\right| = 2$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi: $\left(2x + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2} - 2x\right) \geq 0$.

Giải ra được: $-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$.

Câu 57. (HSG 7 huyện Sóc Sơn 2022 - 2023)

Tìm x biết $\left|x - \frac{3}{4}\right| + 2x^2 = \left|2x^2 + 2,5\right|$

Lời giải

Nhận thấy $2x^2 + 2,5 \geq 2,5$ với mọi x nên $\left|2x^2 + 2,5\right| = 2x^2 + 2,5$

Do đó $\left|x - \frac{3}{4}\right| + 2x^2 = 2x^2 + 2,5$

$\Rightarrow \left|x - \frac{3}{4}\right| = 2,5$

Suy ra $x - \frac{3}{4} = 2,5$ hoặc $x - \frac{3}{4} = -2,5$

$\Rightarrow x = \frac{13}{4}$ hoặc $x = -\frac{7}{4}$

Vậy $x = \frac{13}{4}$ hoặc $x = -\frac{7}{4}$

Câu 58. (HSG 7 huyện Quan Hoa 2021 - 2022; huyện Minh An - 2016 - 2017)

Tìm x , biết: $|x - 2| + |3 - 2x| = 2x - 1$

Lời giải

Tìm x biết: $|x - 2| + |3 - 2x| = 2x - 1$

Vì vế trái luôn không âm nên vế phải $2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$

Ta có bảng xét dấu :

x	$\frac{3}{2}$	2	
$ x - 2 $	-		- 0 +

$ 3-2x $	+	0	-		-
----------	---	---	---	--	---

+ Nếu $x > 2$ ta có: $x - 2 + 2x - 3 = 2x - 1 \Rightarrow x = 4$ (thỏa mãn)

+ Nếu $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$ ta có: $2 - x + 2x - 3 = 2x - 1 \Rightarrow x = 0$ (loại)

+ Nếu $\frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2}$ ta có: $2 - x + 3 - 2x = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{6}{5}$ (thỏa mãn)

Vậy $x \in \left\{4; \frac{6}{5}\right\}$.

Câu 59. (HSG 7 trường Ngô Gia Tự 2017 - 2018)

Tìm x , biết: $|x+3| + |x+7| = 4x$

Lời giải

Ta có bảng xét dấu :

x	-7	-3
$ x+3 $	- -	0 +
$ x+7 $	- 0 +	+

+ Với $x < -7$, ta được: $-x - 3 - x - 7 = 4x \Rightarrow -6x = 7 \Rightarrow x = -\frac{7}{6}$ (loại)

+ Với $-7 \leq x < -3$, ta được: $-x - 3 + x + 7 = 4x \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$ (loại)

+ Với $x \geq -3$, ta được: $x + 3 + x + 7 = 4x \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$ (thỏa mãn)

Vậy $x = 5$.

Câu 60. (HSG 7 huyện Sông Lô, Vĩnh Phúc, 2022 - 2023)

Tìm x biết: $2024x - |1011x + 2| = |1012x + 3|$. (*)

Lời giải

$$2024x - |1011x + 2| = |1012x + 3|$$

$$\Rightarrow |1011x + 2| + |1012x + 3| = 2024x \quad (1)$$

Ta có: $|1011x + 2| \geq 0$ và $|1012x + 3| \geq 0$, với mọi x

$$\Rightarrow |1011x + 2| + |1012x + 3| \geq 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\Rightarrow 2024x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

Khi đó: $|1011x + 2| = 1011x + 2$ và $|1012x + 3| = 1012x + 3$.

$$\text{Ta có: } 2024x - |1011x + 2| = |1012x + 3| \Rightarrow 1011x + 2 + 1012x + 3 = 2024x$$

$$\Rightarrow 1011x + 1012x - 2024x = -5 \Rightarrow -x = -5 \Rightarrow x = 5 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $x = 5$.

Câu 61. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ 2021 - 2022)

Tìm x biết: $\left|\frac{1}{3} + 2021x\right| + \left|\frac{2}{3} + 2022x\right| = 4044x$

Lời giải

$$\text{Ta có } \left| \frac{1}{3} + 2021x \right| + \left| \frac{2}{3} + 2022x \right| = 4044x$$

$$\text{mà } \begin{cases} \left| \frac{1}{3} + 2021x \right| \geq 0 (\forall x) \\ \left| \frac{2}{3} + 2022x \right| \geq 0 (\forall x) \end{cases}$$

$$\text{Nên } 4044x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

$$+ \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left| \frac{1}{3} + 2021x \right| > 0 \\ \left| \frac{2}{3} + 2022x \right| > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left| \frac{1}{3} + 2021x \right| = \frac{1}{3} + 2021x \\ \left| \frac{2}{3} + 2022x \right| = \frac{2}{3} + 2022x \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } \left| \frac{1}{3} + 2021x \right| + \left| \frac{2}{3} + 2022x \right| = 4044x$$

$$\frac{1}{3} + 2021x + \frac{2}{3} + 2022x = 4044x$$

$$+ \text{Tìm được } x = 1 \text{ (Thỏa mãn)}$$

Câu 62. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Phạm Kinh Ân 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x, \text{ biết: } \left| |x-1|+2 \right| = 3$$

Lời giải

$$\text{Lập luận được } |x-1|+2 > 0$$

$$\text{Nên } \left| |x-1|+2 \right| = 3$$

$$\Rightarrow |x-1|+2 = 3$$

$$\Rightarrow |x-1| = 1$$

$$\Rightarrow x-1 = 1 \text{ hoặc } x-1 = -1$$

$$\text{Vậy } x = 2, x = 0$$

Câu 63. (HSG 7 trường Nguyễn Khuyến; Tam Hưng 2016 - 2017)

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } \left| |x+3|-8 \right| = 20$$

Lời giải

$$\left| |x+3|-8 \right| = 20 \Rightarrow \begin{cases} |x+3|-8 = 20 \\ |x+3|-8 = -20 \end{cases}$$

$$+ \text{Với } |x+3|-8 = 20 \Rightarrow |x+3| = 28 \Rightarrow \begin{cases} x = 25 \\ x = -31 \end{cases}$$

+ Với $|x+3|-8=-20 \Rightarrow |x+3|=-12$ (vô nghiệm)

Vậy $x \in \{25; -31\}$

Câu 64. (HSG 7 thành phố Sầm Sơn, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\left|3x+2-\frac{2}{3}\right|=\frac{4}{3}$

Lời giải

Từ đề bài, suy ra $|3x+2-\frac{2}{3}|=\frac{4}{3}$ hoặc $|3x+2-\frac{2}{3}|=-\frac{4}{3}$

Nếu $|3x+2-\frac{2}{3}|=\frac{4}{3} \Rightarrow |3x+2|=2 \Rightarrow x=0$ hoặc $x=-\frac{4}{3}$.

Nếu $|3x+2-\frac{2}{3}|=-\frac{4}{3} \Rightarrow |3x+2|=-\frac{2}{3}$ (loại)

Vậy $x=0$ hoặc $x=-\frac{4}{3}$.

Câu 65. (HSG 7 thành phố Ninh Bình; huyện Hưng Hà 2022 - 2023; trường số 2 Phú Nhuận 2014 - 2015; huyện Việt Yên 2012 - 2013)

Tìm x , biết: $|x^2+|x-1||=x^2+2$

Lời giải

$|x^2+|x-1||=x^2+2$

$\Rightarrow x^2+|x-1|=x^2+2$ hoặc $x^2+|x-1|=-x^2-2$

$\Rightarrow |x-1|=2$ hoặc $|x-1|=-2x^2-2$

+ Nếu $|x-1|=2 \Rightarrow x-1=2$ hoặc $x-1=-2$

$\Rightarrow x=3$ hoặc $x=-1$

+ Nếu $|x-1|=-2x^2-2$ vô nghiệm do $-2x^2-2=-2(x^2+1)<0$ với mọi x

Vậy $x \in \{-1; 3\}$.

Câu 66. (HSG 7 huyện Quốc Oai, Hà Nội 2022 - 2023)

Tìm x biết: $|x^2+|2x-1||=x^2+2023$.

Lời giải

Với mọi x , ta có $x^2 \geq 0$; $|2x-1| \geq 0 \Rightarrow x^2+|2x-1| \geq 0$

$\Rightarrow |x^2+|2x-1||=x^2+|2x-1|$

Do đó $|x^2+|2x-1||=x^2+2023$

$x^2+|2x-1|=x^2+2023$

$|2x-1|=2023$

$2x-1=2023$ hoặc $2x-1=-2023$

$x=1012$ hoặc $x=-1011$

Vậy $x = 1012$ hoặc $x = -1011$.

Câu 67. (HSG 7 thành phố Bắc Giang 2022 - 2023)

Tìm x biết $|x^2 + 1 + |8x - 4|| = x^2 + 2023$.

Lời giải

$$|x^2 + 1 + |8x - 4|| = x^2 + 2023$$

Ta thấy $a^2 \geq 0, \forall a; |a| \geq 0, \forall a$

Do đó với mọi x , ta có

$$x^2 \geq 0; |8x - 4| \geq 0 \text{ mà } 1 > 0 \Rightarrow x^2 + 1 + |8x - 4| > 0$$

$$\Rightarrow |x^2 + 1 + |8x - 4|| = x^2 + 1 + |8x - 4|$$

$$\text{Nên } x^2 + 1 + |8x - 4| = x^2 + 2023$$

$$\Rightarrow |8x - 4| = 2022$$

$$\Rightarrow 8x - 4 = 2022 \text{ hoặc } 8x - 4 = -2022$$

$$\text{+) TH1: } 8x - 4 = 2022$$

$$x = \frac{1013}{4}$$

$$\text{+) TH2: } 8x - 4 = -2022$$

$$x = \frac{-1009}{4}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{1013}{4}; \frac{-1009}{4} \right\}.$$



Câu 68. (HSG 7 huyện Hương Trà, 2022 - 2023)

Tìm x biết: $|3x - 3| + 2x + (-1)^{2022} = 3x + 2023^0$.

Lời giải

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } |3x - 3| + 2x + (-1)^{2022} = 3x + 2023^0 \Rightarrow |3x - 3| + 2x + 1 = 3x + 1 \quad (*)$$

$$\text{Điều kiện để } x \text{ thỏa mãn bài toán là: } 3x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{-1}{3}.$$

$$\text{Khi đó } x \geq \frac{-1}{3} \Rightarrow 2x + 1 \geq 0 \text{ nên } (*) \text{ trở thành:}$$

$$\Rightarrow |3x - 3| + 2x + 1 = 3x + 1 \Rightarrow |3x - 3| = x \quad (x \geq 0).$$

$$\text{Nếu } x \geq 1 \text{ ta có } 3x - 3 = x \text{ nên } x = \frac{3}{2} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\text{Nếu } 0 \leq x < 1 \text{ ta có } 3 - 3x = x \text{ nên } x = \frac{3}{4} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{3}{2}; \frac{3}{4} \right\}.$$

Câu 69. (HSG 7 huyện Thanh Miện 2022 - 2023)

Tìm x biết $\frac{1}{|x-3|+2} = \frac{2}{|x-3|+4}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \frac{1}{|x-3|+2} &= \frac{2}{|x-3|+4} \\ |x-3|+4 &= 2(|x-3|+2) \\ |x-3|+4 &= 2|x-3|+4 \\ 2|x-3|+4-|x-3|-4 &= 0 \\ |x-3| &= 0 \\ x-3 &= 0 \\ x &= 3 \\ \text{Vậy } x &= 3. \end{aligned}$$

Câu 70. (HSG 7 huyện Hưng Hà, Phạm Đôn Lễ, 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $\frac{2}{|x-2|+2} = \frac{3}{|6-3x|+1}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{2}{|x-2|+2} &= \frac{3}{|6-3x|+1} \\ \Rightarrow 2 \cdot (|6-3x|+1) &= 3 \cdot (|x-2|+2) \\ \Rightarrow 2|6-3x|+2 &= 3|x-2|+6 \\ \Rightarrow 2|6-3x|-3|x-2| &= 6-2 \\ \Rightarrow 2 \cdot 3|2-x|-3|x-2| &= 4 \\ \Rightarrow 6|x-2|-3|x-2| &= 4 \\ \Rightarrow 3|x-2| &= 4 \\ \Rightarrow |x-2| &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x-2 = \frac{4}{3} \text{ hoặc } x-2 = -\frac{4}{3}$$

$$\text{TH1: } x-2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{3} + 2 \Rightarrow x = \frac{10}{3} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{TH2: } x-2 = -\frac{4}{3} \Rightarrow x = 2 - \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{10}{3}; \frac{2}{3} \right\}.$$

Câu 71. (HSG 7 huyện Nghi Xuân, tỉnh Hà Tĩnh 2022 - 2023)

Tìm số hữu tỉ x biết $|x+2|+|x-2|+|x+3|=5$ (1).

Lời giải

*Trường hợp 1: $x < -3$

$$(1) \Rightarrow (-x-2) + (-x+2) + (-x-3) = 5 \Rightarrow -3x-3 = 5 \Rightarrow x = \frac{-8}{3} \text{ (loại)}$$

*Trường hợp 2: $x = -3$

$$(1) \Rightarrow 6 = 5 \text{ (loại)}$$

* Trường hợp 3: $-3 < x < -2$

$$(1) \Rightarrow (-x-2) + (-x+2) + x+3 = 5 \Rightarrow x = -2 \text{ (loại)}$$

* Trường hợp 4: $x = -2$

$$(1) \Rightarrow 5 = 5 \text{ (luôn đúng)}$$

* Trường hợp 5: $-2 < x < 2$

$$(1) \Rightarrow x+2 + (-x+2) + x+3 = 5 \Rightarrow x = -2 \text{ (loại)}$$

* Trường hợp 6: $x = 2$

$$(1) \Rightarrow 9 = 5 \text{ (vô lí)}$$

* Trường hợp 7: $x > 2$

$$(1) \Rightarrow x+2 + x-2 + x+3 = 5 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ (loại)}$$

Vậy $x = -2$.

Câu 72. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2021 - 2022)

Tìm x , biết: $|x-1| + |x-2| + |x-4| = 3$

Lời giải

Nhận thấy: $|x-1| + |x-4| = |x-1| + |4-x|$

Ta có: $|x-1| \geq x-1$; $|4-x| \geq 4-x$

$$\Rightarrow |x-1| + |x-4| = |x-1| + |4-x| \geq x-1 + 4-x$$

$$\Rightarrow |x-1| + |x-4| \geq 3$$

Lại có: $|x-2| \geq 0 \Rightarrow |x-1| + |x-2| + |x-4| \geq 3$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ x-2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 4 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 2$$

Vậy $x = 2$.

Câu 73. (HSG 7 trường Lê Tư Thành 2022 - 2023; huyện Thanh Miện 2021 - 2022)

Tìm x biết: $|x+1| + |x+2| + |x+3| = 4x$

Lời giải

Ta có: $|x+1| + |x+2| + |x+3| = 4x$

Vì vế trái không âm với mọi x nên $4x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

Với $x \geq 0$ thì $|x+1| = x+1$; $|x+2| = x+2$; $|x+3| = x+3$ ta có:

$$x+1 + x+2 + x+3 = 4x$$

$$\Rightarrow 3x+6 = 4x$$

$\Rightarrow x = 6$ (thỏa mãn)

Vậy $x = 6$

Câu 74. (HSG 7 huyện Yên Mỹ 2021 - 2022)

Tìm x , biết $|x-1| + |x-2| + |x-3| = x-4$

Lời giải

$$|x-1| + |x-2| + |x-3| = x-4$$

$$\text{Vì } |x-1| + |x-2| + |x-3| \geq 0 \text{ nên } x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \quad (1)$$

$$\text{Khi đó: } |x-1| = x-1; |x-2| = x-2; |x-3| = x-3$$

$$(1) \Rightarrow x-1 + x-2 + x-3 = x-4$$

$$\Rightarrow 2x = 2$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ (không thỏa mãn } x \geq 4)$$

Vậy không tồn tại giá trị của x thỏa mãn.

Câu 75. (HSG 7 huyện Thạch Thành 2022 - 2023)

Tìm x biết: $|x+2| + |x+3| = 4(x-1) - |x-1|$.

Lời giải

$$|x+2| + |x+3| = 4(x-1) - |x-1| \text{ Suy ra } |x+2| + |x+3| + |x-1| = 4(x-1)$$

Do vế trái luôn lớn hơn hoặc bằng 0 nên vế phải cũng phải lớn hơn hoặc bằng 0 nên $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$

Với $x \geq 1 \Rightarrow x+2 > 0; x+3 > 0; x-1 \geq 0$ nên ta có:

$$x+2 + x+3 + x-1 = 4(x-1)$$

$$\Rightarrow x = 8 \text{ (t/m).}$$

Vậy $x = 8$.

Câu 76. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Dân Chủ 2022 - 2023)

Tìm x, y thỏa mãn: $|x-1| + |x-2| + |y-3| + |x-4| = 3$

Lời giải

Theo bài cho: $|x-1| + |x-2| + |y-3| + |x-4| = 3$

$$|x-1| + |x-2| + |y-3| + |4-x| = 3 \quad (1)$$

Ta có: $|x-1| + |4-x| \geq |(x-1) + (4-x)|$

$$|x-1| + |4-x| \geq 3 \quad (2)$$

$$|x-2| \geq 0, |y-3| \geq 0 \quad (3)$$

Từ (2), (3) và (1) suy ra:

$$\begin{cases} |x-1| + |4-x| = 3 & (4) \\ |x-2| = 0 & (5) \\ |y-3| = 0 & (6) \end{cases}$$

Từ (5) ta được $x = 2$, thay vào (4) ta có: $|2-1| + |4-2| = 3$

$$1+2=3 \text{ (luôn đúng)}$$

Từ (6) ta được $y = 3$.

Vậy : $x = 2, y = 3$.

Câu 77. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2021 - 2022)

Tìm x biết: $|x+1|+|x+2|+|x+3|+|x+4|=10x$

Lời giải

$$|x+1|+|x+2|+|x+3|+|x+4|=10x \quad (1)$$

Mà $|x+1|+|x+2|+|x+3|+|x+4| \geq 0$ với mọi giá trị của x (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 10x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

Với $x \geq 0 \Rightarrow x+1 > 0, x+2 > 0, x+3 > 0, x+4 > 0$

$$\Rightarrow |x+1|=x+1, |x+2|=x+2, |x+3|=x+3, |x+4|=x+4 \quad (3)$$

Từ (1) và (3) $\Rightarrow x+1+x+2+x+3+x+4=10x$

$$\Rightarrow 4x+10=10x \Rightarrow 6x=10$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{3} \text{ (thỏa mãn } x \geq 0)$$

Vậy $x = \frac{5}{3}$

Câu 78. (HSG 7 huyện Ninh Giang, tỉnh Hải Dương 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $\left|x + \frac{1}{3}\right| + \left|x + \frac{2}{3}\right| + \left|x + \frac{2}{5}\right| + \left|x + \frac{3}{2}\right| = 33x$.

Lời giải

$$\left|x + \frac{1}{3}\right| + \left|x + \frac{2}{3}\right| + \left|x + \frac{2}{5}\right| + \left|x + \frac{3}{2}\right| = 33x$$

Vì $\left|x + \frac{1}{3}\right| \geq 0, \left|x + \frac{2}{3}\right| \geq 0, \left|x + \frac{2}{5}\right| \geq 0, \left|x + \frac{3}{2}\right| \geq 0 \Rightarrow 33x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

Ta có:

$$\left|x + \frac{1}{3}\right| + \left|x + \frac{2}{3}\right| + \left|x + \frac{2}{5}\right| + \left|x + \frac{3}{2}\right| = 33x$$

$$x + \frac{1}{3} + x + \frac{2}{3} + x + \frac{2}{5} + x + \frac{3}{2} = 33x$$

$$4x + \frac{29}{10} = 33x$$

$$29x = \frac{29}{10}$$

$$x = \frac{1}{10}$$

Vậy $x = \frac{1}{10}$.

Câu 79. (HSG 7 huyện Trực Ninh 2021 - 2022)

Tìm x , biết: $|x+1|+|x+2|+|x+3|+\dots+|x+100|=605x$.

Lời giải

Với mọi giá trị của x , ta có:

$$|x+1| \geq 0; |x+2| \geq 0; |x+3| \geq 0; \dots; |x+100| \geq 0$$

$$\Rightarrow |x+1| + |x+2| + |x+3| + \dots + |x+100| \geq 0$$

$$\text{Mà } |x+1| + |x+2| + |x+3| + \dots + |x+100| = 650x$$

$$\Rightarrow 650x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} |x+1| = x+1 \\ |x+2| = x+2 \\ \dots \\ |x+100| = x+100 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } (x+1) + (x+2) + (x+3) + \dots + (x+100) = 605x$$

$$100x + \frac{(1+100) \cdot 100}{2} = 605x$$

$$\Rightarrow 100x + 5050 = 605x$$

$$\Rightarrow 505x = 5050 \Rightarrow x = 10 \text{ (chọn vì thỏa mãn } x \geq 0)$$

Vậy $x = 10$

Câu 80. (HSG 7 huyện Than Uyên tỉnh Lai Châu 2022 - 2023)

Tim x biết: $|x+1| + |x+3| + \dots + |x+2023| = 2024x$.

Lời giải

Vì vế trái luôn lớn hơn hoặc bằng 0 với $\forall x$ nên $2024x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

$$\text{Khi đó: } |x+1| + |x+3| + \dots + |x+2023| = 2024x$$

$$\Rightarrow x+1 + x+3 + \dots + x+2023 = 2024x$$

$$\Rightarrow (x+x+x+\dots+x) + (1+3+5+\dots+2023) = 2024x$$

$$\Rightarrow 1012x + \frac{2023+1}{2} \cdot 1012 = 2024x$$

$$\Rightarrow 1024144 = 2024x - 1012x$$

$$\Rightarrow 1012x = 1024144$$

$$\Rightarrow x = 1012$$

Vậy $x = 1012$.

Câu 81. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023).

Tim x biết: $\left|x + \frac{1}{2}\right| + \left|x + \frac{1}{6}\right| + \left|x + \frac{1}{12}\right| + \dots + \left|x + \frac{1}{9900}\right| = 10x$

Lời giải

$$\left|x + \frac{1}{2}\right| + \left|x + \frac{1}{6}\right| + \left|x + \frac{1}{12}\right| + \dots + \left|x + \frac{1}{9900}\right| = 10x \quad (1)$$

$$\text{Ta thấy } \left|x + \frac{1}{2}\right| \geq 0; \left|x + \frac{1}{6}\right| \geq 0; \left|x + \frac{1}{12}\right| \geq 0; \dots; \left|x + \frac{1}{9900}\right| \geq 0$$

$$\text{nên } \left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{9900} \right| \geq 0$$

$$\text{mà } \left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{9900} \right| = 100x$$

$$\text{suy ra } 100x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

$$\Rightarrow \left| x + \frac{1}{2} \right| = x + \frac{1}{2}; \left| x + \frac{1}{6} \right| = x + \frac{1}{6}; \left| x + \frac{1}{12} \right| = x + \frac{1}{12}; \left| x + \frac{1}{9900} \right| = x + \frac{1}{9900} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow x + \frac{1}{2} + x + \frac{1}{6} + x + \frac{1}{12} + \dots + x + \frac{1}{9900} = 100x$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{1.2} + x + \frac{1}{2.3} + x + \frac{1}{3.4} + \dots + x + \frac{1}{99.100} = 100x$$

$$\Rightarrow 99x + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = 100x$$

$$\Rightarrow x = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} \text{ (tmđk)}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{99}{100}$$

Câu 82. (HSG 7 trường Minh Khai 2022 - 2023; huyện Hoàng Hóa 2016 - 2017)

$$\text{Tìm } x, \text{ biết: } \left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \left| x + \frac{1}{20} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{110} \right| = 11x$$

Lời giải

Ta thấy vế trái của đẳng thức luôn ≥ 0 nên vế phải $\geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

Với $x \geq 0$, $\left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \left| x + \frac{1}{20} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{110} \right| = 11x$ trở thành:

$$x + \frac{1}{2} + x + \frac{1}{6} + x + \frac{1}{12} + x + \frac{1}{20} + \dots + x + \frac{1}{110} = 11x$$

$$\Rightarrow x = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{10}{11}.$$

Câu 83. (HSG 7 huyện Nho Quan 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x \text{ biết } \left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \left| x + \frac{1}{20} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{110} \right| = 12x$$

Lời giải

Nhận xét: Vế trái của đẳng thức luôn ≥ 0 nên vế phải ≥ 0

$$\text{Suy ra } 12x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

$$\left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \left| x + \frac{1}{20} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{110} \right| = 12x$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{2} + x + \frac{1}{6} + x + \frac{1}{12} + x + \frac{1}{20} + \dots + x + \frac{1}{110} = 12x$$

$$(x + x + x + \dots + x) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{110} \right) = 12x$$

$$10x + \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{10.11} \right) = 12x$$

$$10x + \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) = 12x$$

$$10x + \left(1 - \frac{1}{11} \right) = 12x$$

$$2x = \frac{10}{11}$$

$$x = \frac{5}{11}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{5}{11}.$$

Câu 84. (HSG 7 huyện Nghi Lộc; huyện Cẩm Thủy, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\left| x + \frac{1}{101} \right| + \left| x + \frac{2}{101} \right| + \left| x + \frac{3}{101} \right| + \dots + \left| x + \frac{100}{101} \right| = 101x.$

Lời giải

Vì $\left| x + \frac{1}{101} \right| + \left| x + \frac{2}{101} \right| + \left| x + \frac{3}{101} \right| + \dots + \left| x + \frac{100}{101} \right| \geq 0$

Suy ra $x \geq 0$

$$x + \frac{1}{101} + x + \frac{2}{101} + x + \frac{3}{101} + \dots + x + \frac{100}{101} = 101x$$

$$100x + \left(\frac{1}{101} + \frac{2}{101} + \frac{3}{101} + \dots + \frac{100}{101} \right) = 101x$$

$$x = \frac{1}{101} + \frac{2}{101} + \frac{3}{101} + \dots + \frac{100}{101}$$

$$x = \frac{1}{101} \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 100)$$

$$x = 50$$

Vậy $x = 50.$

Câu 85. (HSG 7 huyện Cẩm Khê, 2022 - 2023)

Tìm x biết $\left| x - \frac{1}{3} \right| + \left| x - \frac{1}{15} \right| + \left| x - \frac{1}{35} \right| + \left| x - \frac{1}{63} \right| + \dots + \left| x - \frac{1}{483} \right| = -12x.$

Lời giải

Nhận xét: vế trái của biểu thức luôn dương nên vế phải lớn hơn 0 suy ra $12x < 0$ hay $x < 0.$

Với $x < 0$ ta có:

$$\left| x - \frac{1}{3} \right| + \left| x - \frac{1}{15} \right| + \left| x - \frac{1}{35} \right| + \left| x - \frac{1}{63} \right| + \dots + \left| x - \frac{1}{483} \right| = -12x$$

$$\Rightarrow -x + \frac{1}{3} - x + \frac{1}{15} - x + \frac{1}{35} - x + \frac{1}{63} - \dots - x + \frac{1}{483} = -12x$$

$$\Rightarrow -11x + \left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{21.23} \right) = -12x$$

$$\Rightarrow -11x + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{23} \right) = -12x$$

$$\Rightarrow x = \frac{-11}{23} \text{ (TM).}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{-11}{23}.$$

Câu 86. (HSG 7 huyện Quan Sơn, 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } \left| x + \frac{1}{1.5} \right| + \left| x + \frac{1}{5.9} \right| + \left| x + \frac{1}{9.13} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{397.401} \right| = 101x$$

Lời giải

$$\text{Ta có } \left| x + \frac{1}{1.5} \right| \geq 0; \left| x + \frac{1}{5.9} \right| \geq 0; \left| x + \frac{1}{9.13} \right| \geq 0; \dots;$$

$$\text{Nên } \left| x + \frac{1}{1.5} \right| + \left| x + \frac{1}{5.9} \right| + \left| x + \frac{1}{9.13} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{397.401} \right| \geq 0 \Rightarrow 101x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

$$\text{Vì } x \geq 0 \Rightarrow x + \frac{1}{1.5} > 0; x + \frac{1}{5.9} > 0; \dots; x + \frac{1}{397.401} > 0$$

$$\text{Nên ta có: } x + \frac{1}{1.5} + x + \frac{1}{5.9} + x + \frac{1}{9.13} + \dots + x + \frac{1}{397.401} = 101x$$

$$\Rightarrow 100x + \left(\frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \dots + \frac{1}{397.401} \right) = 101x \Rightarrow 100x + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{401} \right) = 101x \Rightarrow x = \frac{100}{401}.$$

$$\text{Vậy } x = \frac{100}{401}.$$

Câu 87. (HSG 7 huyện Hưng Hà, 2022 - 2023)

Tìm x , biết:

$$\left| x + \frac{1}{2021} \right| + \left| x + \frac{2}{2021} \right| + \left| x + \frac{3}{2021} \right| + \dots + \left| x + \frac{2020}{2021} \right| = 2021x.$$

Lời giải

Điều kiện $x \geq 0$ suy ra:

$$x + \frac{1}{2021} + x + \frac{2}{2021} + x + \frac{3}{2021} + \dots + x + \frac{2020}{2021} = 2021x$$

$$\Rightarrow 2020x + \frac{1+2+3+\dots+2020}{2021} = 2021x$$

$$\Rightarrow 2020x + \frac{2020.2021}{2.2021} = 2021x$$

$$\Rightarrow x = 1010.$$

$$\text{Vậy } x = 1010.$$

Câu 88. (HSG 7 huyện Trực Ninh 2020 - 2021)

$$\text{Tìm } x \text{ nguyên biết: } |x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-90| = 2025$$

Lời giải

Viết lại: $|x-1|+|x-2|+|x-3|+\dots+|x-45|+|x-46|+\dots+|x-90|=2025$

$|x-1|+|x-2|+|x-3|+\dots+|x-45|+|46-x|+\dots+|90-x|=2025$

Với mọi giá trị của x , ta có:

$|x-1| \geq x-1; |x-2| \geq x-2; \dots; |x-45| \geq x-45;$

$|46-x| \geq 46-x; |47-x| \geq 47-x; \dots; |90-x| \geq 90-x$

$\Rightarrow VT = |x-1|+|x-2|+\dots+|90-x| \geq x-1+x-2+\dots+90-x$

$\Rightarrow VT \geq (46+47+\dots+90)-(1+2+3+\dots+45)$

$\Rightarrow VT \geq 2025$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\left. \begin{array}{l} |x-1|=x-1 \\ |x-2|=x-2 \\ \dots \\ |x-45|=x-45 \\ |x-46|=46-x \\ |x-47|=47-x \\ \dots \\ |x-90|=90-x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x-1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \\ \dots \\ x-45 \geq 0 \\ x-46 \leq 0 \\ x-47 \leq 0 \\ \dots \\ x-90 \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \geq 2 \\ \dots \\ x \geq 45 \\ x \leq 46 \\ x \leq 47 \\ \dots \\ x \leq 90 \end{array} \right\} \Rightarrow 45 \leq x \leq 46$$

$\Rightarrow 45 \leq x \leq 46$

Mà x là số nguyên $\Rightarrow x \in \{45; 46\}$

Câu 89. (HSG 7 huyện Hưng Hà, Thống Nhất, 2022 - 2023)

Tìm tất cả các số tự nhiên a, b sao cho: $2^a + 7 = |b-5| + b - 5$.

Lời giải

Nhận xét: Với $x \geq 0$ thì $|x| + x = 2x$.

Với $x < 0$ thì $|x| + x = 0$. Do đó $|x| + x$ luôn là số chẵn với $\forall x \in \mathbb{Z}$.

Áp dụng nhận xét trên thì $|b-5| + b - 5$ là số chẵn với $b - 5 \in \mathbb{Z}$.

Suy ra $2^a + 7$ là số chẵn $\Rightarrow 2^a$ lẻ khi $a = 0$.

Khi đó $|b-5| + b - 5 = 8$.

+ Nếu $b < 5$, ta có: $-(b-5) + b - 5 = 8 \Rightarrow 0 = 8$ (loại).

+ Nếu $b \geq 5$, ta có: $2(b-5) = 8 \Rightarrow b-5 = 4 \Rightarrow b = 9$ (thỏa mãn).

Vậy $(a; b) = (0; 9)$.

Câu 90. (Đề 90 - HSG 7 Hưng Hà, trường THCS Tây Đô, 2022 - 2023)

Tìm tất cả các số tự nhiên a, b sao cho: $2^a + 37 = |b-45| + b - 45$.

Lời giải

Nhận xét: Với $x \geq 0$ thì $|x| + x = 2x$.

Với $x < 0$ thì $|x| + x = 0$. Do đó $|x| + x$ luôn là số chẵn với $\forall x \in \mathbb{Z}$.

Áp dụng nhận xét trên thì $|b - 45| + b - 45$ là số chẵn với $b \in \mathbb{Z}$.

Suy ra $2^a + 37$ là số chẵn $\Rightarrow 2^a$ lẻ khi $a = 0$.

Khi đó $|b - 45| + b - 45 = 38$.

+ Nếu $b < 45$, ta có $-(b - 45) + b - 45 = 38 \Rightarrow 0 = 38$ (loại).

+ Nếu $b \geq 45$, ta có $2(b - 45) = 38 \Rightarrow b - 45 = 19 \Rightarrow b = 64$. (thỏa mãn)

Vậy $(a; b) = (0; 64)$.

Câu 91. (HSG 7 Tiên Du, Bắc Ninh, 2022 - 2023)

Tìm tất cả các số tự nhiên m và n thỏa mãn $2^m + 2021 = |n - 2020| + |n - 2022|$.

Lời giải

Với các số tự nhiên m và n thỏa mãn $2^m + 2021 = |n - 2020| + |n - 2022|$.

Ta xét ba trường hợp sau:

* Trường hợp 1: $n \geq 2022$, ta có:

$$2^m + 2021 = 2n - 4042$$

$$2^m - 2n = -6063$$

Vì -6063 là số lẻ, $2n$ là số chẵn nên 2^m là số lẻ. Suy ra $m = 0 \Rightarrow n = 3032$.

* Trường hợp 2: $2020 \leq n < 2022$, ta có:

$$2^m + 2021 = n - 2020 + 2022 - n$$

$$2^m + 2021 = 2$$

$$2^m = -2019 \text{ (vô lý)}$$

* Trường hợp 3: $n < 2020$, ta có:

$$2^m + 2021 = 4042 - 2n$$

$$2^m + 2n = 2021$$

Vì 2021 là số lẻ, $2n$ là số chẵn nên 2^m là số lẻ. Suy ra $m = 0 \Rightarrow n = 1010$

Vậy $m = 0; n = 3032$ hoặc $m = 0; n = 1010$.

Dạng 6. Sử dụng công thức tính tổng có quy luật.

Câu 1. (HSG 7 huyện Yên Định 2022 - 2023)

Tìm x biết: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{4044}{2023}$.

Lời giải

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{4044}{2023}$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{6065}{4046}$$

$$\frac{2}{1.2} + \frac{2}{2.3} + \frac{2}{3.4} + \frac{2}{4.5} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{6065}{4046}$$

$$2 \cdot \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{6065}{4046}$$

$$1 - \frac{1}{x+1} = \frac{6065}{8092} \Rightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{2027}{8092}$$

$$\Rightarrow x+1 = \frac{8092}{2027}$$

$$\Rightarrow x = \frac{6065}{2027}$$

Vậy $x = \frac{6065}{2027}$.

Câu 2. (HSG 7 huyện An Nhơn 2021 - 2022)

Tìm giá trị của x biết: $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2021}{2023}$

Lời giải

Ta có $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2021}{2023}$

$$\frac{2}{2.3} + \frac{2}{3.4} + \frac{2}{4.5} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2021}{2023}$$

$$2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{2021}{2023}$$

$$2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{2021}{2023}$$

$$\frac{2}{x+1} = 1 - \frac{2021}{2023}$$

$$\frac{2}{x+1} = \frac{2}{2023}$$

$$x+1 = 2023$$

$$x = 2022$$

Câu 3. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Như Thanh 2021 - 2022)

Tìm số tự nhiên x biết: $2 \cdot \left(\frac{1}{9.10} + \frac{1}{10.11} + \frac{1}{11.12} + \dots + \frac{1}{x(x+1)} \right) = \frac{1}{9}$

Lời giải

$$2 \cdot \left(\frac{1}{9.10} + \frac{1}{10.11} + \frac{1}{11.12} + \dots + \frac{1}{x(x+1)} \right) = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow 2 \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow 2 \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{18} = \frac{1}{x+1} \Rightarrow x+1 = 18 \Rightarrow x = 17 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $x = 17$.

Câu 4. (HSG 7 huyện Hà Trung, Nghệ An 2021 - 2022)

Tìm x biết $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2015}{2017}$

Lời giải

Ta có: $\frac{2}{2.3} + \frac{2}{3.4} + \frac{2}{4.5} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2015}{2017}$

$$2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{2015}{2017}$$

$$2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{2015}{2017}$$

$$2 \cdot \frac{x-1}{2(x+1)} = \frac{2015}{2017}$$

$$\Rightarrow 2017(x-1) = 2015(x+1)$$

$$2017x - 2017 = 2015x + 2025$$

$$2017x - 2015x = 2017 + 2025$$

$$2x = 4032$$

$$x = 2016$$

Vậy $x = 2016$

Câu 5. (HSG 7 huyện Hưng Hà, Phạm Đôn Lễ, 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $\frac{2}{2.3} + \frac{2}{3.4} + \frac{2}{4.5} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2022}{2024}$.

Lời giải

$$\frac{2}{2.3} + \frac{2}{3.4} + \frac{2}{4.5} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2022}{2024}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{2022}{2024}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{2022}{2024}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{x+1}{2(x+1)} - \frac{2}{2 \cdot (x+1)} \right) = \frac{2022}{2024}$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{x+1} = \frac{2022}{2024}$$

$$\Rightarrow x = 2023.$$

Vậy $x = 2023$.

Câu 6. (HSG 7 huyện Mỹ Đức 2021-2022; trường Nguyễn Chí, huyện Đông Sơn 2017-2018)

Tìm số tự nhiên x biết: $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{49}{99}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} &= \frac{49}{99} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \dots - \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{2x+1} \right) &= \frac{49}{99} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2x+1} \right) &= \frac{49}{99} \\ \Rightarrow 1 - \frac{1}{2x+1} &= \frac{98}{99} \\ \Rightarrow \frac{1}{2x+1} &= \frac{1}{99} \\ \Rightarrow 2x+1 &= 99 \Rightarrow 2x = 98 \Rightarrow x = 49 \\ \text{Vậy } x &= 49. \end{aligned}$$

Câu 7. (HSG 7 huyện Kinh Môn, tỉnh Hải Dương 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{99}{199}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} &= \frac{99}{199} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \dots + \frac{2}{(2x-1)(2x+1)} \right) &= \frac{99}{199} \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} \right) &= \frac{99}{199} \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2x+1} \right) &= \frac{99}{199} \\ 1 - \frac{1}{2x+1} &= \frac{99.2}{199} \\ \frac{2x+1-1}{2x+1} &= \frac{198}{199} \\ \frac{2x}{2x+1} &= \frac{198}{199} \\ x &= 99 \\ \text{Vậy } x &= 99. \end{aligned}$$

Câu 8. (HSG 7 huyện Lạng Giang, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{8.9.10} \right) \cdot (|x|-1) = \frac{44}{45}$.

Lời giải

$$\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{8.9.10} \right) \cdot (|x|-1) = \frac{44}{45}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \dots + \frac{2}{8.9.10} \right) \cdot (|x| - 1) = \frac{88}{45}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{8.9} - \frac{1}{9.10} \right) \cdot (|x| - 1) = \frac{88}{45}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{9.10} \right) \cdot (|x| - 1) = \frac{88}{45}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{90} \right) \cdot (|x| - 1) = \frac{88}{45}$$

$$\Rightarrow \frac{22}{45} \cdot (|x| - 1) = \frac{88}{45}$$

$$\Rightarrow |x| - 1 = 4$$

$$\Rightarrow |x| = 5$$

$$\Rightarrow x = \pm 5$$

Vậy $x = -5$; $x = 5$ là các giá trị cần tìm.

Câu 9. (HSG 7 huyện Yên Bình, Yên Bái 2022 - 2023)

Tìm x , biết $x + 2x + 3x + \dots + 2022x = 2022 \cdot 2023$.

Lời giải

$$x + 2x + 3x + \dots + 2022x = 2022 \cdot 2023$$

$$\Rightarrow x \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 2022) = 2022 \cdot 2023$$

$$\Rightarrow x \cdot \frac{(1 + 2022) \cdot 2022}{2} = 2022 \cdot 2023$$

$$\Rightarrow x \cdot \frac{2023 \cdot 2022}{2} = 2022 \cdot 2023$$

$$\Rightarrow x = 2.$$

Vậy $x = 2$.

Câu 10. (HSG 7 huyện Tam Dương 2021 - 2022)

Tìm x biết b) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022} \right) x = \frac{2021}{1} + \frac{2020}{2} + \frac{2019}{3} + \dots + \frac{1}{2021}$

Lời giải

$$\text{Ta có } \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022} \right) x = \frac{2021}{1} + \frac{2020}{2} + \frac{2019}{3} + \dots + \frac{1}{2021}.$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022} \right) x = 2021 + \frac{2020}{2} + \frac{2019}{3} + \dots + \frac{1}{2021}$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022} \right) x = \left(1 + \frac{2020}{2} \right) + \left(1 + \frac{2019}{3} \right) + \left(1 + \frac{2018}{4} \right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{2021} \right) + 1$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022} \right) x = \left(1 + \frac{2020}{2} \right) + \left(1 + \frac{2019}{3} \right) + \left(1 + \frac{2018}{4} \right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{2021} \right) + \frac{2022}{2022}$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022}\right)x = \frac{2022}{2} + \frac{2022}{3} + \frac{2022}{4} + \dots + \frac{2022}{2021} + \frac{2022}{2022}$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022}\right)x = 2022 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022}\right)$$

$$\Rightarrow x = 2022$$

Vậy $x = 2022$.

Câu 11. (HSG 7 huyện Bá Thước, 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014}\right)x = \frac{2013}{1} + \frac{2012}{2} + \dots + \frac{2}{2012} + \frac{1}{2013}$.

Lời giải

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014}\right) \cdot x = \frac{2013}{1} + \frac{2012}{2} + \dots + \frac{2}{2012} + \frac{1}{2013}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014}\right) \cdot x = \frac{2012}{2} + 1 + \frac{2011}{3} + 1 \dots + \frac{2}{2012} + 1 + \frac{1}{2013} + 1 + 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014}\right) \cdot x = \frac{2014}{2} + \frac{2014}{3} + \dots + \frac{2014}{2012} + \frac{2014}{2013} + \frac{2014}{2014}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014}\right) \cdot x = 2014 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} + \frac{1}{2014}\right)$$

$$\Rightarrow x = 2014.$$

Vậy $x = 2014$.

Câu 12. (HSG 7 trường Lê Hồng Phong 2018-2019; trường Giao Tân 2016 - 2017)

Tìm số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện: $2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + (n-1)2^{n-1} + n \cdot 2^n = 2^{n+34}$

Lời giải

$$2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + (n-1)2^{n-1} + n \cdot 2^n = 2^{n+34} \quad (1)$$

Đặt $B = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n$

$$2B = 2 \cdot (2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n)$$

$$2B = 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2^5 + \dots + (n-1)2^n + n \cdot 2^{n+1}$$

$$2B - B = (2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2^5 + \dots + (n-1)2^n + n \cdot 2^{n+1})$$

$$- (2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n)$$

$$B = -2^3 - 2^4 - 2^5 - \dots - 2^n + n \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 2^2$$

$$B = - (2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n) + n \cdot 2^{n+1} - 2^3$$

Khi đó $B = - (2^{n+1} - 2^3) + n \cdot 2^{n+1} - 2^3$

$$= -2^{n+1} + 2^3 + n \cdot 2^{n+1} - 2^3 = -2^{n+1} + n \cdot 2^{n+1} = (n-1) \cdot 2^{n+1}$$

Từ (1) ta có: $(n-1)2^{n+1} = 2^{n+34}$

$$2^{n+34} - (n-1) \cdot 2^{n+1} = 0$$

$$2^{n+1} \cdot [2^{33} - (n-1)] = 0$$

$$2^{33} - n + 1 = 0$$

$$n = 2^{33} + 1$$

$$\text{Vậy } n = 2^{33} + 1$$

Câu 13. (HSG 7 huyện Châu Đức 2022 - 2023; huyện Tiên Hải 2016 - 2017)

Tìm số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện: $2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n = 2^{n+11}$

Lời giải

$$\text{Đặt } S = 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n$$

$$\Rightarrow 2S - S = (2.2^3 + 3.2^4 + 4.2^5 + \dots + n.2^{n+1}) - (2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n)$$

$$\Rightarrow S = n.2^{n+1} - 2^3 - (2^3 + 2^4 + \dots + 2^{n-1} + 2^n)$$

$$\text{Đặt } T = 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{n-1} + 2^n$$

$$\Rightarrow 2T - T = 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n + 2^{n+1} - (2^3 + 2^4 + \dots + 2^{n-1} + 2^n)$$

$$\Rightarrow T = 2^{n-1} - 2^3$$

$$\text{Khi đó ta được: } S = n.2^{n+1} - 2^3 - 2^{n-1} + 2^3 = (n-1)2^{n+1}$$

$$\Rightarrow (n-1).2^{n+1} = 2^{n+11} \Rightarrow n-1 = 2^{10} \Rightarrow n = 2^{10} + 1 = 1025$$

$$\text{Vậy } n = 1025.$$

Câu 14. (HSG 7 huyện Quế Sơn 2018 - 2019) Tìm x , biết: $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{12} \cdot \dots \cdot \frac{30}{62} \cdot \frac{31}{64} = 2^x$.

Lời giải

$$\frac{4.4^5 \cdot 6.6^5}{3.3^5 \cdot 2.2^5} = 2^x \Rightarrow \frac{4^6 \cdot 6^6}{3^6 \cdot 2^6} = 2^x$$

$$\Rightarrow \left(\frac{6}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{4}{2}\right)^6 = 2^x \Rightarrow 2^{12} = 2^x \Rightarrow x = 12$$

Câu 15. (HSG 7 huyện Thái Thụy, 2017 - 2018)

Tìm x thỏa mãn: $\frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \cdot \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = 2^x$

Lời giải

$$\frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \cdot \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = \frac{4.4^5 \cdot 6.6^5}{3.3^5 \cdot 2.2^5} = \frac{4^6 \cdot 6^6}{3^6 \cdot 2^6} = \left(\frac{6}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{4}{2}\right)^6 = 2^{12}$$

$$\Rightarrow 2^x = 2^{12}$$

$$x = 12$$

Câu 16. (HSG 7 trường Lý Tự Trọng 2018 - 2019; huyện Tam Dương 2017 - 2018)

Cho $B = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{x}(1+2+3+\dots+x)$

Tìm số nguyên dương x để $B = 115$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 B &= 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{x}(1+2+3+\dots+x) \\
 &= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2.3}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{3.4}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{4.5}{2}\right) + \dots + \frac{1}{x}\left(\frac{x(x+1)}{2}\right) \\
 &= 1 + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \dots + \frac{x+1}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (2+3+4+\dots+(x+1)) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x(x+3)}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Đề $B = 115$ thì $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x(x+3)}{2}\right) = 115 \Rightarrow x(x+3) = 460$

Do x nguyên dương nên x và $x+3$ là ước dương của 460

$$\Rightarrow x = 20$$

Vậy $x = 20$.

Câu 17. (HSG 7 huyện Hiệp Hòa 2016 - 2017)

Tìm x biết:

a) $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} \dots \frac{30}{62} \cdot \frac{31}{64} = 4^x$

b) $\frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \cdot \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = 8^x$

Lời giải

a) $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} \dots \frac{30}{62} \cdot \frac{31}{64} = 4^x$

$$\frac{1.2.3\dots30.31}{1.2.3.4\dots30.31.2^{30}.2^6} = 2^{2x}$$

$$\frac{1}{2^{36}} = 2^{2x}$$

$$2^{-36} = 2^{2x}$$

$$\Rightarrow 2x = -36$$

$$\Rightarrow x = -18$$

Vậy $x = -18$.

b) $\frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \cdot \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = 8^x$

$$\frac{4.4^5}{3.3^5} \cdot \frac{6.6^5}{2.2^5} = 8^x$$

$$\frac{4^6}{3^6} \cdot \frac{6^6}{2^6} = 2^{3x}$$

$$\left(\frac{4.6}{3.2}\right)^6 = 2^{3x}$$

$$2^{3x} = 4^6$$

$$\Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$$

Vậy $x = 4$.

Câu 18. (HSG 7 trường Hồng Đà, huyện Tam Nông 2015 - 2016)

Cho $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2015}$. Tìm số tự nhiên n biết rằng $2A + 3 = 3^n$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2015}$$

$$\Rightarrow 3A = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2016}$$

$$\Rightarrow 3A - A = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2016} - (3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2015})$$

$$\Rightarrow 2A = 3^{2016} - 3$$

Do đó $2A + 3 = 3^n$ trở thành:

$$3^{2016} - 3 + 3 = 3^n \Rightarrow 3^{2016} = 3^n \Rightarrow n = 2016$$

Vậy $n = 2016$.

Câu 19. (HSG 7 huyện Thanh Miện 2022 - 2023)

Tìm cặp số tự nhiên x, y trong đó y là chữ số, biết rằng: $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + x - 1 = \overline{yyy} - x$

Lời giải

$$\text{Ta có } 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + x - 1 = \overline{yyy} - x$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (x - 1) + x = \overline{yyy}$$

$$\frac{(1+x)x}{2} = y.111$$

$$(1+x)x = 222.y \Rightarrow (1+x)x = 2.3.37.y$$

Vì $(1+x)x$ là tích hai số tự nhiên liên tiếp, 37 là số nguyên tố, y là chữ số nên $y = 6$

$$\Rightarrow x = 36$$

Vậy $x = 36; y = 6$.

Câu 20. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023).

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } \left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{9900} \right| = 10x$$

Lời giải

$$\left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{9900} \right| = 100x \quad (1)$$

$$\text{Ta thấy } \left| x + \frac{1}{2} \right| \geq 0; \left| x + \frac{1}{6} \right| \geq 0; \left| x + \frac{1}{12} \right| \geq 0; \dots; \left| x + \frac{1}{9900} \right| \geq 0$$

$$\text{nên } \left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{9900} \right| \geq 0$$

$$\text{mà } \left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{9900} \right| = 100x$$

$$\text{suy ra } 100x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

$$\Rightarrow \left| x + \frac{1}{2} \right| = x + \frac{1}{2}; \left| x + \frac{1}{6} \right| = x + \frac{1}{6}; \left| x + \frac{1}{12} \right| = x + \frac{1}{12}; \left| x + \frac{1}{9900} \right| = x + \frac{1}{9900} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow x + \frac{1}{2} + x + \frac{1}{6} + x + \frac{1}{12} + \dots + x + \frac{1}{9900} = 100x$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{1.2} + x + \frac{1}{2.3} + x + \frac{1}{3.4} + \dots + x + \frac{1}{99.100} = 100x$$

$$\Rightarrow 99x + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = 100x$$

$$\Rightarrow x = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} \text{ (tmđk)}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{99}{100}$$

Câu 21. (HSG 7 trường Minh Khai 2022 - 2023; huyện Hoàng Hóa 2016 - 2017)

$$\text{Tìm } x, \text{ biết: } \left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \left| x + \frac{1}{20} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{110} \right| = 11x$$

Lời giải

Ta thấy vế trái của đẳng thức luôn ≥ 0 nên vế phải $\geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

$$\text{Với } x \geq 0, \left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \left| x + \frac{1}{20} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{110} \right| = 11x \text{ trở thành:}$$

$$x + \frac{1}{2} + x + \frac{1}{6} + x + \frac{1}{12} + x + \frac{1}{20} + \dots + x + \frac{1}{110} = 11x$$

$$\Rightarrow x = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{10}{11}.$$

Câu 22. (HSG 7 huyện Nho Quan 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x \text{ biết } \left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \left| x + \frac{1}{20} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{110} \right| = 12x$$

Lời giải

Nhận xét: Vế trái của đẳng thức luôn ≥ 0 nên vế phải ≥ 0

Suy ra $12x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

$$\left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \left| x + \frac{1}{20} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{110} \right| = 12x$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{2} + x + \frac{1}{6} + x + \frac{1}{12} + x + \frac{1}{20} + \dots + x + \frac{1}{110} = 12x$$

$$(x + x + x + \dots + x) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{110} \right) = 12x$$

$$10x + \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{10.11} \right) = 12x$$

$$10x + \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) = 12x$$

$$10x + \left(1 - \frac{1}{11}\right) = 12x \Rightarrow 2x = \frac{10}{11} \Rightarrow x = \frac{5}{11}$$

Vậy $x = \frac{5}{11}$.

Câu 23. (HSG 7 huyện Nghi Lộc; huyện Cẩm Thủy, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\left|x + \frac{1}{101}\right| + \left|x + \frac{2}{101}\right| + \left|x + \frac{3}{101}\right| + \dots + \left|x + \frac{100}{101}\right| = 101x$.

Lời giải

Vì $\left|x + \frac{1}{101}\right| + \left|x + \frac{2}{101}\right| + \left|x + \frac{3}{101}\right| + \dots + \left|x + \frac{100}{101}\right| \geq 0$

Suy ra $x \geq 0$

$$x + \frac{1}{101} + x + \frac{2}{101} + x + \frac{3}{101} + \dots + x + \frac{100}{101} = 101x$$

$$100x + \left(\frac{1}{101} + \frac{2}{101} + \frac{3}{101} + \dots + \frac{100}{101}\right) = 101x$$

$$x = \frac{1}{101} + \frac{2}{101} + \frac{3}{101} + \dots + \frac{100}{101}$$

$$x = \frac{1}{101} \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 100) \Rightarrow x = 50$$

Vậy $x = 50$.

Câu 24. (HSG 7 huyện Cẩm Khê, 2022 - 2023)

Tìm x biết $\left|x - \frac{1}{3}\right| + \left|x - \frac{1}{15}\right| + \left|x - \frac{1}{35}\right| + \left|x - \frac{1}{63}\right| + \dots + \left|x - \frac{1}{483}\right| = -12x$.

Lời giải

Nhận xét: vế trái của biểu thức luôn dương nên vế phải lớn hơn 0 suy ra $12x < 0$ hay $x < 0$.

Với $x < 0$ ta có:

$$\left|x - \frac{1}{3}\right| + \left|x - \frac{1}{15}\right| + \left|x - \frac{1}{35}\right| + \left|x - \frac{1}{63}\right| + \dots + \left|x - \frac{1}{483}\right| = -12x$$

$$\Rightarrow -x + \frac{1}{3} - x + \frac{1}{15} - x + \frac{1}{35} - x + \frac{1}{63} - \dots - x + \frac{1}{483} = -12x$$

$$\Rightarrow -11x + \left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{21.23}\right) = -12x$$

$$\Rightarrow -11x + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{23}\right) = -12x \Rightarrow x = \frac{-11}{23} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $x = \frac{-11}{23}$.

Câu 25. (HSG 7 huyện Quan Sơn, 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\left|x + \frac{1}{1.5}\right| + \left|x + \frac{1}{5.9}\right| + \left|x + \frac{1}{9.13}\right| + \dots + \left|x + \frac{1}{397.401}\right| = 101x$

Lời giải

Ta có $\left|x + \frac{1}{1.5}\right| \geq 0; \left|x + \frac{1}{5.9}\right| \geq 0; \left|x + \frac{1}{9.13}\right| \geq 0; \dots;$

Nên $\left|x + \frac{1}{1.5}\right| + \left|x + \frac{1}{5.9}\right| + \left|x + \frac{1}{9.13}\right| + \dots + \left|x + \frac{1}{397.401}\right| \geq 0 \Rightarrow 101x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

Vì $x \geq 0 \Rightarrow x + \frac{1}{1.5} > 0; x + \frac{1}{5.9} > 0; \dots; x + \frac{1}{397.401} > 0$

Nên ta có: $x + \frac{1}{1.5} + x + \frac{1}{5.9} + x + \frac{1}{9.13} + \dots + x + \frac{1}{397.401} = 101x$

$\Rightarrow 100x + \left(\frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \dots + \frac{1}{397.401}\right) = 101x \Rightarrow 100x + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{401}\right) = 101x \Rightarrow x = \frac{100}{401}$.

Vậy $x = \frac{100}{401}$.

Câu 26. (HSG 7 huyện Hưng Hà, 2022 - 2023)

Tìm x , biết:

$$\left|x + \frac{1}{2021}\right| + \left|x + \frac{2}{2021}\right| + \left|x + \frac{3}{2021}\right| + \dots + \left|x + \frac{2020}{2021}\right| = 2021x.$$

Lời giải

Điều kiện $x \geq 0$ suy ra:

$$x + \frac{1}{2021} + x + \frac{2}{2021} + x + \frac{3}{2021} + \dots + x + \frac{2020}{2021} = 2021x$$

$$\Rightarrow 2020x + \frac{1+2+3+\dots+2020}{2021} = 2021x$$

$$\Rightarrow 2020x + \frac{2020.2021}{2.2021} = 2021x \Rightarrow x = 1010.$$

Vậy $x = 1010$.

Câu 27. (HSG 7 huyện Trục Ninh 2020 - 2021)

Tìm x nguyên biết: $|x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-90| = 2025$

Lời giải

Viết lại: $|x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-45| + |x-46| + \dots + |x-90| = 2025$

$$|x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-45| + |46-x| + \dots + |90-x| = 2025$$

Với mọi giá trị của x , ta có:

$$|x-1| \geq x-1; |x-2| \geq x-2; \dots; |x-45| \geq x-45;$$

$$|46-x| \geq 46-x; |47-x| \geq 47-x; \dots; |90-x| \geq 90-x$$

$$\Rightarrow VT = |x-1| + |x-2| + \dots + |90-x| \geq x-1 + x-2 + \dots + 90-x$$

$$\Rightarrow VT \geq (46+47+\dots+90) - (1+2+3+\dots+45)$$

$$\Rightarrow VT \geq 2025$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\left. \begin{array}{l} |x-1| = x-1 \\ |x-2| = x-2 \\ \dots\dots\dots \\ |x-45| = x-45 \\ |x-46| = 46-x \\ |x-47| = 47-x \\ \dots\dots\dots \\ |x-90| = 90-x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x-1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \\ \dots\dots\dots \\ x-45 \geq 0 \\ x-46 \leq 0 \\ x-47 \leq 0 \\ \dots\dots\dots \\ x-90 \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \geq 2 \\ \dots\dots\dots \\ x \geq 45 \\ x \leq 46 \\ x \leq 47 \\ \dots\dots\dots \\ x \leq 90 \end{array} \right\} \Rightarrow 45 \leq x \leq 46$$

$$\Rightarrow 45 \leq x \leq 46$$

Mà x là số nguyên $\Rightarrow x \in \{45; 46\}$



CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS

CD2: TÌM ẨN CHƯA BIẾT

Dạng 1: Tìm x thông thường
Dạng 2: Đưa về dạng tích bằng 0
Dạng 3: Sử dụng tính chất lũy thừa
Dạng 4: Tìm ẩn dạng phân thức
Dạng 5: Tìm x dạng chứa dấu giá trị tuyệt đối
Dạng 6: Sử dụng công thức tính tổng có quy luật
Dạng 7: Tổng các biểu thức không âm bằng 0
Dạng 8: Tìm ẩn dựa vào tính chất về dấu
Dạng 9: Sử dụng phương pháp chặn để tìm ẩn
Dạng 10: Tìm ẩn với điều kiện nguyên

Dạng 7: Tổng các biểu thức không âm bằng 0

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. (HSG 7 huyện Tam Nông 2022 - 2023)

Cho x, y thỏa mãn $(12 - 2x)^{2022} + |3y - x|^{2023} = 0$. Giá trị của biểu thức $P = 20x - 11y$ là

- A. 142. **B. 98.** C. 109. D. 131.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $(12 - 2x)^{2022} \geq 0$ với mọi x

$|3y - x|^{2023} \geq 0$ với mọi x, y

Nên $(12 - 2x)^{2022} + |3y - x|^{2023} \geq 0$ với mọi x, y

Mà $(12 - 2x)^{2022} + |3y - x|^{2023} = 0$

Suy ra $12 - 2x = 0$ và $3y - x = 0$

Hay $x = 6$ và $y = 2$

Vậy giá trị của biểu thức $P = 20x - 11y$ là $P = 20.6 - 11.2 = 120 - 22 = 98$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Thanh Thủy, tỉnh Phú Thọ 2021 - 2022)

Cho $x; y$ là các số thỏa mãn $(x + 2y - 3)^{2022} + |2x + 3y - 5| = 0$. Vậy $(x; y)$ bằng

- A. (1; -1) **B. (1; 1)** C. (2; 1) D. (-2; 1)

Lời giải

Vì $(x + 2y - 3)^{2022} \geq 0$; $|2x + 3y - 5| \geq 0$ với mọi x, y nên

$(x + 2y - 3)^{2022} + |2x + 3y - 5| \geq 0$ với mọi x, y

$$\text{Mà } (x+2y-3)^{2022} + |2x+3y-5| = 0 \text{ nên } \begin{cases} (x+2y-3)^{2022} = 0 \\ |2x+3y-5| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-3=0 \\ 2x+3y-5=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+3y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy $(x; y) = (1; 1)$.

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 THCS Vạn Long 2018 - 2019)

Tìm x, y biết $|3+y| + |2x+y| = 0$

Lời giải

Vì $|3+y| \geq 0, |2x+y| \geq 0 \Rightarrow |3+y| + |2x+y| \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} |3+y|=0 \\ |2x+y|=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=-3 \end{cases}$$

Câu 2. (HSG 7 trường Trần Hưng Đạo, trường Trường Sa, 2017 - 2018)

Tìm x, y biết $|3+y| + |2x+y| = 0$

Lời giải

Vì $|3+y| \geq 0, |2x+y| \geq 0 \Rightarrow |3+y| + |2x+y| \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} |3+y|=0 \\ |2x+y|=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=-3 \end{cases}$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Cửa Lò 2020 - 2021)

Tìm x, y biết: $|x-2| + |x-2y| = 0$.

Lời giải

Vì $|x-2| \geq 0; |x-2y| \geq 0$ với mọi x, y nên:

$|x-2| + |x-2y| = 0$ khi và chỉ khi $x-2=0$ và $x-2y=0$.

$$+ x-2=0 \Rightarrow x=2.$$

$$+ x-2y=0 \Rightarrow 2-2y=0 \Rightarrow y=1.$$

Vậy $x=2; y=1$ là các giá trị cần tìm.

Câu 4. (HSG 7 huyện Thái Thụy, 2017 - 2018)

Tìm x và y thỏa mãn $|2x-2011| + (3y+2012)^{2012} = 0$

Lời giải

Nhận xét $\begin{cases} |2x-2011| \geq 0 \forall x \\ (3y+2012)^{2012} \geq 0 \forall y \end{cases}$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} 2x-2011=0 \\ 3y+2012=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{2011}{2} \\ y=-\frac{2012}{3} \end{cases}$

Câu 5. (HSG 7 huyện Chương Mỹ 2018 - 2019)

Tìm x, y biết: $(3x-1)^{2018} + \left(y + \frac{3}{5}\right)^{2020} = 0$.

Lời giải

Ta có:

$$(3x-1)^{2018} + \left(y + \frac{3}{5}\right)^{2020} = 0.$$

Mà $(3x-1)^{2018} \geq 0$ với mọi x ; $\left(y + \frac{3}{5}\right)^{2020} \geq 0$ với mọi y .

$$\Rightarrow (3x-1)^{2018} = 0 \text{ và } \left(y + \frac{3}{5}\right)^{2020} = 0.$$

$$\Rightarrow 3x-1=0 \text{ và } y + \frac{3}{5} = 0.$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{3}; y = -\frac{3}{5}.$$

$$\text{Vậy } x = \frac{1}{3}; y = -\frac{3}{5}.$$

Câu 6. (HSG 7 huyện Đức Thọ 2022 - 2023)

Tìm tất cả cặp số (x, y) thỏa mãn: $(2x-1)^{2022} + |x+y+1|^{2023} = 0$

Lời giải

$$(2x-1)^{2022} + |x+y+1|^{2023} = 0 \quad (*)$$

Vì $(2x-1)^{2022} \geq 0$, $|x+y+1|^{2023} \geq 0$, $\forall x, y$

$$\Rightarrow (2x-1)^{2022} + |x+y+1|^{2023} \geq 0$$

Để (*) xảy ra thì $(2x-1)^{2022} = 0$ và $|x+y+1|^{2023} = 0$

$$\Rightarrow 2x-1=0 \text{ và } x+y+1=0$$

$$\text{Hay } x = \frac{1}{2} \text{ và } y = -\frac{3}{2}$$

Vậy cặp số (x, y) thỏa mãn phương trình là $\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

Câu 7. (HSG 7 trường Nguyễn Khuyến 2016 - 2017)

Tìm các số x, y, z biết: $(3x-5)^{2006} + (y^2-1)^{2008} + (x-z)^{2010} = 0$

Lời giải

$$(3x-5)^{2006} + (y^2-1)^{2008} + (x-z)^{2010} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x-5=0 \\ y^2-1=0 \\ x-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=z=\frac{5}{3} \\ y=\pm 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } (x; y; z) = \left(\frac{5}{3}; 1; \frac{5}{3}\right) \text{ hoặc } (x; y; z) = \left(\frac{5}{3}; -1; \frac{5}{3}\right)$$

Câu 8. (HSG 7 thành phố Sầm Sơn, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $(2x-1)^{2008} + \left(y-\frac{2}{5}\right)^{2008} + |x+y+z| = 0$.

Lời giải

Với mọi x, y, z , ta có: $(2x-1)^{2008} \geq 0$; $\left(y-\frac{2}{5}\right)^{2008} \geq 0$; $|x+y+z| \geq 0$.

Nên $(2x-1)^{2008} + \left(y-\frac{2}{5}\right)^{2008} + |x+y+z| = 0$ khi:

$$\begin{cases} (2x-1)^{2008} = 0 \\ \left(y-\frac{2}{5}\right)^{2008} = 0 \\ |x+y+z| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{2}{5} \\ z = -\frac{9}{10} \end{cases}$$

Vậy $x = \frac{1}{2}$; $y = \frac{2}{5}$; $z = -\frac{9}{10}$.

Câu 9. (HSG 7 thị xã Bỉm Sơn 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết $(2x-1)^{2020} + \left(y-\frac{1}{3}\right)^{2022} + |x+y-z| = 0$

Lời giải

Ta có $(2x-1)^{2020} + \left(y-\frac{1}{3}\right)^{2022} + |x+y-z| = 0$

$$\text{Nên } \begin{cases} 2x-1=0 \\ y-\frac{1}{3}=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{5}{6} \end{cases}$$

Vậy $x = \frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{3}$; $z = \frac{5}{6}$.

Câu 10. (HSG 7 huyện Trục Ninh, 2018 - 2019)

Tìm x, y, z biết: $(2x-1)^{2008} + \left(y-\frac{2}{5}\right)^{2008} + |x+y-z| = 0$.

Lời giải

Vì $(2x-1)^{2008} \geq 0$ với mọi x ; $\left(y-\frac{2}{5}\right)^{2008} \geq 0$ với mọi y ; $|x+y-z| \geq 0$ với mọi x, y, z

do đó: $(2x-1)^{2008} + \left(y-\frac{2}{5}\right)^{2008} + |x+y-z| \geq 0$ với mọi x, y, z .

Theo đề bài thì: $(2x-1)^{2008} + \left(y - \frac{2}{5}\right)^{2008} + |x+y-z| = 0$.

Từ đó suy ra: $(2x-1)^{2008} = 0$ và $\left(y - \frac{2}{5}\right)^{2008} = 0$ và $|x+y-z| = 0$.

Vậy $x = \frac{1}{2}$; $y = \frac{2}{5}$; $z = \frac{9}{10}$.

Câu 11. (HSG 7 huyện THẠCH THÀNH, 2017 - 2018)

Tìm các số x, y, z biết: $(x-1)^{2016} + (2y-1)^{2016} + |x+2y-z|^{2017} = 0$

Lời giải

Ta có: $(x-1)^{2016} \geq 0 \forall x$; $(2y-1)^{2016} \geq 0 \forall y$; $|x+2y-z|^{2017} \geq 0 \forall x, y, z$
 $\Rightarrow (x-1)^{2016} + (2y-1)^{2016} + |x+2y-z|^{2017} \geq 0$.

Dấu "=" xảy ra khi
$$\begin{cases} (x-1)^{2016} = 0 \\ (2y-1)^{2016} = 0 \\ |x+2y-z|^{2017} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 2 \end{cases}$$

Vậy $x = 1$; $y = \frac{1}{2}$; $z = 2$.

Câu 12. (HSG 7 huyện Krông Ana 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $\left(3x - \frac{1}{2}\right)^{2018} + \left(y^2 - \frac{1}{2023}\right)^{2020} + (x-z-1)^{2024} = 0$

Lời giải

Vì $\left(3x - \frac{1}{2}\right)^{2018} \geq 0$; $\left(y^2 - \frac{1}{2023}\right)^{2020} \geq 0$; $(x-z-1)^{2024} \geq 0$ với mọi x, y, z là các số thực

Theo đề ra ta có: $\left(3x - \frac{1}{2}\right)^{2018} + \left(y^2 - \frac{1}{2023}\right)^{2020} + (x-z-1)^{2024} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(3x - \frac{1}{2}\right)^{2018} = 0 \\ \left(y^2 - \frac{1}{2023}\right)^{2020} = 0 \\ (x-z-1)^{2024} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - \frac{1}{2} = 0 \\ y^2 - \frac{1}{2023} = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ y \in \left\{ \sqrt{\frac{1}{2023}}; -\sqrt{\frac{1}{2023}} \right\} \\ z = x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ y \in \left\{ \sqrt{\frac{1}{2023}}; -\sqrt{\frac{1}{2023}} \right\} \\ z = \frac{-5}{6} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{1}{6}; y = \sqrt{\frac{1}{2023}}; z = \frac{-5}{6} \text{ hoặc } x = \frac{1}{6}; y = -\sqrt{\frac{1}{2023}}; z = \frac{-5}{6}$$

Câu 13. (HSG 7 trường Lê Văn Tám 2017 - 2018)

Tìm các số x, y, z biết: $(3x-5)^{2006} + (y^2-1)^{2008} + (x-z)^{2010} = 0$

Lời giải

$$(3x-5)^{2006} + (y^2-1)^{2008} + (x-z)^{2010} = 0$$

Ta có: $(3x-5)^{2006} \geq 0; (y^2-1)^{2008} \geq 0; (x-z)^{2010} \geq 0$

Nên $(3x-5)^{2006} + (y^2-1)^{2008} + (x-z)^{2010} \geq 0$

Dấu bằng xảy ra khi
$$\begin{cases} 3x-5=0 \\ y^2-1=0 \\ x-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{3} \\ y=-1 \\ y=1 \\ z=\frac{5}{3} \end{cases}$$

Vậy $(x; y; z) \in \left\{ \left(\frac{5}{3}; -1; \frac{5}{3} \right); \left(\frac{5}{3}; 1; \frac{5}{3} \right) \right\}$.

Câu 14. (HSG 7 huyện Hưng Hà; huyện Việt Yên 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $\left| x - \frac{1}{2} \right| + \left| y + \frac{2}{3} \right| + |x^2 + xz| = 0$

Lời giải

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| + \left| y + \frac{2}{3} \right| + |x^2 + xz| = 0$$

Áp dụng tính chất $|A| \geq 0$ ta có:

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| = 0 \text{ và } \left| y + \frac{2}{3} \right| = 0 \text{ và } |x^2 + xz| = 0$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{2} = 0 \text{ và } y + \frac{2}{3} = 0 \text{ và } x(x+z) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ và } y = -\frac{2}{3} \text{ và } z = -x = -\frac{1}{2}.$$

Vậy $x = \frac{1}{2}; y = -\frac{2}{3}; z = -\frac{1}{2}$.

Câu 15. (HSG 7 huyện Hưng Hà, 2022 - 2023)

Cho $(x-1)^{2020} + |y-3| + (x-y+z+3)^{2022} = 0$. Chứng minh: $8x - 2y + z = 1$.

Lời giải

Vì $(x-1)^{2022} \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}; |y-3| \geq 0 \forall y \in \mathbb{R}; (x-y+z+3)^{2022} \geq 0 \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

Do đó $(x-1)^{2020} + |y-3| + (x-y+z+3)^{2022} = 0$ khi và chỉ khi:

$$\begin{aligned} (x-1)^{2022} = 0 \text{ và } |y-3| = 0 \text{ và } (x-y+z+3)^{2022} = 0 \\ \Rightarrow x-1=0 \text{ và } y-3=0 \text{ và } x-y+z+3=0 \\ \Rightarrow x=1 \text{ và } y=3 \text{ và } z=-1. \end{aligned}$$

Suy ra: $8x - 2y + z = 8.1 - 2.3 - 1 = 1$ (đpcm).

Câu 16. (HSG 7 huyện Anh Sơn 2022 - 2023).

Cho 2 số $x; y$ thỏa mãn $(x+2022)^{2024} + |y-2023| = 0$. Tính $D = x + y$.

Lời giải

Vì $(x+2022)^{2024} \geq 0$ với mọi x

$|y-2023| \geq 0$ với mọi x

$$\text{Nên } (x+2022)^{2024} + |y-2023| = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x+2022)^{2024} = 0 \\ |y-2023| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2022 = 0 \\ y-2023 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2022 \\ y = 2023 \end{cases}$$

Vậy $x = -2022$ và $y = 2023$.

Câu 17. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Bùi Hữu Diên 2022 - 2023)

Cho biểu thức đại số $A = \frac{x^3 + 2x^2y - 0,5xy^2 + 2}{x^2 - xy + 1}$ tính giá trị của A với x, y thỏa mãn

$$(2x-1)^2 + |y+1| = 0$$

Lời giải

Ta có $(2x-1)^2 + |y+1| = 0$

Mà $(2x-1)^2 \geq 0$ và $|y+1| \geq 0$ với mọi x, y

$$\Rightarrow (2x-1)^2 + |y+1| \geq 0$$

$$\text{Nên } \begin{cases} 2x-1=0 \\ y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases}$$

Thay $x = \frac{1}{2}$ và $y = -1$ ta có

$$A = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (-1) - 0,5 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 + 2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot (-1) + 1} = \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 2}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1} = \frac{11}{8} : \frac{7}{4} = \frac{22}{7}$$

Vậy giá trị của biểu thức A là $\frac{22}{7}$

Câu 18. (HSG 7 huyện Tiền Hải, tỉnh Thái Bình 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức $N = 17x^{10} + 2y^3 + 2023$ biết các số $x; y$ thỏa mãn:

$$|x-1| + \sqrt{(y+2)^{2022}} = 0.$$

Lời giải

Ta có: $|x-1| \geq 0$ với mọi x ; $\sqrt{(y+2)^{2022}} \geq 0$ với mọi y .

Mà $|x-1| + \sqrt{(y+2)^{2022}} = 0$ suy ra $|x-1| = 0$ và $\sqrt{(y+2)^{2022}} = 0$

+) $|x-1| = 0 \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$

+) $\sqrt{(y+2)^{2022}} = 0 \Rightarrow (y+2)^{2022} = 0 \Rightarrow y = -2$

Thay $x = 1$ và $y = -2$ vào biểu thức N ta được

$$\begin{aligned} N &= 17x^{10} + 2y^3 + 2023 \\ &= 17 \cdot 1^{10} + 2 \cdot (-2)^3 + 2023 \\ &= 17 \cdot 1 + 2 \cdot (-8) + 2023 \\ &= 17 + (-16) + 2023 = 2024 \end{aligned}$$

Vậy khi $|x-1| + \sqrt{(y+2)^{2022}} = 0$ thì biểu thức N có giá trị là 2024.

Câu 19. (HSG 7 huyện Cẩm Khê, 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức: $C = 2x^4 + 15y^{2023} + 2006$ tại x, y thỏa mãn: $\sqrt{(y+1)^4} + (2-x)^2 = 0$

Lời giải

Vì $\sqrt{(y+1)^4} \geq 0$ với mọi y , $(2-x)^2 \geq 0$ với mọi x

do đó để $\sqrt{(y+1)^4} + (2-x)^2 = 0$ thì $\sqrt{(y+1)^4} = 0$ và $(2-x)^2 = 0$

$\Rightarrow y+1 = 0$ và $2-x = 0$.

$\Rightarrow y = -1; x = 2$

suy ra $C = 2 \cdot 2^4 + 15 \cdot (-1)^{2023} + 2006 = 2023$.

Vậy $C = 2023$.

Câu 20. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường THCS MINH KHAI 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức: $C = 2x^5 - 5y^3 + 2025$ tại x, y thỏa mãn: $|x-1| + (y+2)^{20} = 0$

Lời giải

Do $|x-1| \geq 0; (y+2)^{20} \geq 0 \Rightarrow |x-1| + (y+2)^{20} \geq 0$ với mọi x, y

Kết hợp $|x-1| + (y+2)^{20} = 0$ suy ra $|x-1| = 0$ và $(y+2)^{20} = 0$

Nên: $x = 1; y = -2$

Giá trị của biểu thức: $C = 2x^5 - 5y^3 + 2025$ tại $x = 1; y = -2$

là: $C = 2 \cdot 1^5 - 5 \cdot (-2)^3 + 2025 = 2 + 40 + 2025 = 2067$

Vậy $C = 2067$

Câu 21. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Phạm Kinh Ân 2022 - 2023)

Cho $|x-2| + |y-1| + (x+y-z-2)^{2020} = 0$. Tính giá trị của: $A = 5x^2 y^{2020} z^{2021}$.

Lời giải

Vì $|x-2| \geq 0$ với $\forall x$; $|y-1| \geq 0$ với $\forall y$; $(x+y-z-2)^{2020} \geq 0$ với $\forall x, y, z$

Do đó $|x-2|+|y-1|+(x+y-z-2)^{2020} = 0$ khi

$$\begin{cases} |x-2|=0 \\ |y-1|=0 \\ (x+y-z-2)^{2020} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ y-1=0 \\ x+y-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$$

Do đó $A = 5 \cdot 2^2 \cdot 1^{2020} \cdot 1^{2021} = 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 = 20$

Vậy $A = 20$.

Câu 22. (HSG 7 huyện Kinh Môn 2021 - 2022)

Tính giá trị của biểu thức: $C = 2x^5 - 5y^3 + 1980$ tại x, y thỏa mãn $|x-1|+(y+2)^{20} = 0$.

Lời giải

Do $|x-1| \geq 0$; $(y+2)^{20} \geq 0$ nên $|x-1|+(y+2)^{20} \geq 0$ với mọi x, y .

Kết hợp $|x-1|+(y+2)^{20} = 0$ suy ra $|x-1|=0$ và $(y+2)^{20} = 0 \Rightarrow x=1$ và $y=-2$.

Giá trị của biểu thức: $C = 2x^5 - 5y^3 + 1980$ tại $x=1$; $y=-2$ là:

$$C = 2 \cdot 1^5 - 5 \cdot (-2)^3 + 1980 = 2022.$$

Vậy $C = 2022$.

Câu 23. (HSG 7 huyện Tam Dương 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức: $C = 2x^5 - 5y^3 + 2023$ tại các giá trị của x, y thỏa mãn

$$|x+1|+(y+2)^{2024} = 0$$

Lời giải

Ta có: $|x+1| \geq 0$; $(y+2)^{2024} \geq 0$ với mọi x, y

nên $|x+1|+(y+2)^{2024} = 0$ khi $|x+1|=0$ hoặc $(y+2)^{2024} = 0$

suy ra $x = -1$; $y = -2$

$$\text{Nên } C = 2x^5 - 5y^3 + 2023 = 2 \cdot (-1)^5 - 5 \cdot (-2)^3 + 2023 = 1981$$

Câu 24. (HSG 7 đề khảo sát lần 3, 2022 - 2023)

Cho $|3x-2y|+|5z-7x|+(xy+yz+xz-500)^{2020} = 0$. Tính giá trị của: $A = (3x-y-z)^{2021}$.

Lời giải

Vì $|3x-2y| \geq 0$; $|5z-7x| \geq 0$; $(xy+yz+xz-500)^{2020} \geq 0$ với $\forall x, y, z$

Do đó $|3x-2y|+|5z-7x|+(xy+yz+xz-500)^{2020} = 0$ khi

$$\begin{cases} |3x-2y|=0 \\ |5z-7x|=0 \\ (xy+yz+xz-500)^{2020} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-2y=0 \\ 5z-7x=0 \\ xy+yz+xz-500=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=14 \\ z=-14 \end{cases}$$

+ Nếu $z = 14$ ta tính được: $x = 10$; $y = 15$

Thay vào biểu thức $A = (3x-y-z)^{2021}$ ta được: $A = (3 \cdot 10 - 15 - 14)^{2021} = 1$

+ Nếu $z = -14$ ta tính được: $x = -10$; $y = -15$

Thay vào biểu thức $A = (3x - y - z)^{2021}$ ta được: $A = [3 \cdot (-10) - (-15) - (-14)]^{2021} = -1$

Vậy $A = 1$ hoặc $A = -1$ khi $|3x - 2y| + |5z - 7x| + (xy + yz + xz - 500)^{2020} = 0$.

Câu 25. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Hồng Lĩnh 2022 - 2023)

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $(x-1)^{2022} + (2y-1)^{2022} + (x+2y-z)^{2023} = 0$.

Chứng minh rằng $x = y.z$

Lời giải

Ta có: $(x - 1)^{2022} \geq 0 \forall x$

$(2y - 1)^{2020} \geq 0 \forall y$

$|x + 2y - z|^{2023} \geq 0 \forall x, y, z$

$(x-1)^{2022} + (2y-1)^{2022} + |x+2y-z|^{2023} \geq 0 \forall x, y, z$

Mà $(x-1)^{2022} + (2y-1)^{2022} + |x+2y-z|^{2023} = 0$

$$\text{Nên dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} (x-1)^{2022} = 0 \\ (2y-1)^{2022} = 0 \\ |x+2y-z|^{2023} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 2 \end{cases}$$

Vậy $x = y.z$.

Câu 26. (HSG 7 thi thử huyện Thanh Miện 2022 - 2023)

Cho a, b, x, y thỏa mãn $(bx^2 - ay^2)^{2022} + |x^2 + y^2 - 1| = 0$ ($a \neq 0; b \neq 0; a + b \neq 0$).

Chứng minh rằng $\frac{x^{2022}}{a^{1011}} + \frac{y^{2022}}{b^{1011}} = \frac{2}{(a+b)^{1011}}$.

Lời giải

+ Ta có: $(bx^2 - ay^2)^{2022} \geq 0; |x^2 + y^2 - 1| \geq 0$

$\Rightarrow (bx^2 - ay^2)^{2022} + |x^2 + y^2 - 1| \geq 0$

Do đó $(bx^2 - ay^2)^{2022} + |x^2 + y^2 - 1| = 0$ khi và chỉ khi $\begin{cases} bx^2 - ay^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bx^2 = ay^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

+ Ta có: $bx^2 = ay^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a} = \frac{y^2}{b}$

$\Rightarrow \frac{x^2}{a} = \frac{y^2}{b} = \frac{x^2 + y^2}{a+b} = \frac{1}{a+b}$ (vì $x^2 + y^2 = 1$)

$\Rightarrow \left(\frac{x^2}{a}\right)^{1011} = \left(\frac{y^2}{b}\right)^{1011} = \left(\frac{1}{a+b}\right)^{1011}$

$$\Rightarrow \frac{x^{2022}}{a^{1011}} = \frac{y^{2022}}{b^{1011}} = \frac{1}{(a+b)^{1011}} \Rightarrow \frac{x^{2022}}{a^{1011}} + \frac{y^{2022}}{b^{1011}} = \frac{2}{(a+b)^{1011}}$$

$$\text{Vậy } \frac{x^{2022}}{a^{1011}} + \frac{y^{2022}}{b^{1011}} = \frac{2}{(a+b)^{1011}}.$$

Câu 27. (HSG 7 trường Lý Thường Kiệt, 2017 -2018)

Chứng minh rằng không thể tìm được số nguyên x, y, z thỏa mãn:

$$|x-y| + |y-z| + |z-x| = 2017$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } |x-y| + |y-z| + |z-x| = |x-y| + (x-y) + |y-z| + (y-z) + |z-x| + (z-x)$$

$$\text{Với mọi số nguyên } x \text{ ta lại có } |x| + x = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Suy ra $|x| + x$ luôn là số chẵn với mọi số nguyên x

$$\text{Từ đó ta có: } \begin{cases} |x-y| + (x-y) \\ |y-z| + (y-z) \\ |z-x| + (z-x) \end{cases} \text{ là các số chẵn với mọi số nguyên } x, y, z$$

Suy ra $|x-y| + (x-y) + |y-z| + (y-z) + |z-x| + (z-x)$ là một số chẵn với mọi số nguyên x, y, z

Hay $|x-y| + |y-z| + |z-x|$ là một số chẵn với mọi số nguyên x, y, z

Do đó, không thể tìm được số nguyên x, y, z thỏa mãn:

$$|x-y| + |y-z| + |z-x| = 2017$$

Dạng 8: Tìm ẩn dựa vào tính chất về dấu

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. (HSG 7 huyện Lạng Giang, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

Cho các số x, y thỏa mãn: $|1-2x| + (y-2)^{2022} \leq 0$. Giá trị của $B = 12x^2y + 3xy^2$ bằng:

A. 10

B. 11

C. 13

D. 12

Lời giải

$$|1-2x| + (y-2)^{2022} \leq 0 \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } |1-2x| \geq 0, \forall x; (y-2)^{2022} \geq 0, \forall y \Rightarrow |1-2x| + (y-2)^{2022} \geq 0, \forall x, y \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) đẳng thức xảy ra khi: } \begin{cases} |1-2x| = 0 \\ (y-2)^{2022} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-2x = 0 \\ y-2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } x = \frac{1}{2}; y = 2 \text{ vào } B \text{ ta được: } B = 12x^2y + 3xy^2 = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2 + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot (2)^2 = 12$$

Vậy $B = 12$ khi $|1-2x| + (y-2)^{2022} \leq 0$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Sơn Động 2022 – 2023)

Biết (x, y) là cặp số thỏa mãn: $(x-1)^2 + |3y+12| \leq 0$. Khi đó $5x-2y$ bằng:

- A.** 13. **B.** -13. **C.** -3. **D.** 3.

Lời giải

Ta có: $(x+1)^2 \geq 0$ với mọi x

$|3y+12| \geq 0$ với mọi y

Suy ra $(x-1)^2 + |3y+12| \geq 0$ với mọi x, y

Mà $(x-1)^2 + |3y+12| \leq 0$

Do đó $(x-1)^2 + |3y+12| = 0$

$\Rightarrow x-1=0$ và $3y+12=0$

Hay $x=1$ và $y=-4$

Vậy $5x-2y=5.1-2.(-4)=13$

Câu 3. (HSG 7 huyện Tam Nông 2022 - 2023)

Cho x, y thỏa mãn $(x-2)^4 + (y-1)^{2022} \leq 0$ thì giá trị $19x^2y + 4xy^2$ bằng

- A.** 80. **B.** 83. **C.** 83. **D.** 85.

Lời giải

Ta có $(x-2)^4 \geq 0, (y-1)^{2022} \geq 0$ với mọi x, y

Nên $(x-2)^4 + (y-1)^{2022} \geq 0$

Mà $(x-2)^4 + (y-1)^{2022} \leq 0$

Suy ra $(x-2)^4 + (y-1)^{2022} = 0$

$\Rightarrow (x-2)^4 = 0$ và $(y-1)^{2022} = 0$

$\Rightarrow x=2$ và $y=1$

Khi đó $19x^2y + 4xy^2 = 19.4.1 + 4.2.1 = 84$

Câu 4. (HSG 7 huyện Tân Yên 2022 - 2023)

Biết (x, y) là cặp số thỏa mãn $(-2x-5)^{2022} + |3y+4| \leq 0$. Khi đó $2x+3y$ bằng

- A.** -1. **B.** 1. **C.** 9. **D.** -9.

Lời giải

Ta có $(-2x-5)^{2022} \geq 0; |3y+4| \geq 0$ với mọi x, y

Nên $(-2x-5)^{2022} + |3y+4| \geq 0$

Mà $(-2x-5)^{2022} + |3y+4| \leq 0$

Suy ra $(-2x-5)^{2022} + |3y+4| = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x - 5 = 0 \\ 3y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{2} \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Khi đó: $2x + 3y = 2 \cdot \frac{-5}{2} + 3 \cdot \frac{-4}{3} = -5 - 4 = -9.$

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Triệu Sơn, 2017 - 2018)

Tìm x biết: $(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right) > 0$

Lời giải

Từ $(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right) > 0$ suy ra : $x-3$ và $x+\frac{1}{2}$ cùng dấu

Để thấy $x-3 < x+\frac{1}{2}$ nên ta có:

*) $x-3$ và $x+\frac{1}{2}$ cùng dương $\Rightarrow x-3 > 0 \Rightarrow x > 3$

*) $x-3$ và $x+\frac{1}{2}$ cùng âm $\Rightarrow x+\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow x < -\frac{1}{2}$

Vậy $x > 3$ hoặc $x < -\frac{1}{2}$

Câu 3. (HSG 7 huyện Nga Sơn- 2016 - 2017)

Tìm x , biết: $(x-2)(x+3) < 0$

Lời giải

Vì $(x-2)(x+3) < 0$ nên $x-2, x+3$ khác dấu

mà $x+3 > x-2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2 < 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \Rightarrow -3 < x < 2$$

Vậy $-3 < x < 2.$

Câu 4. (HSG 7 trường Tam Hưng 2013 - 2014)

Tìm $x \in \mathbb{Z}$ sao cho: $(x^2 - 20)(x^2 - 15)(x^2 - 10)(x^2 - 5) < 0$

Lời giải

Do $x^2 \geq 0$ với mọi $x \Rightarrow x^2 - 20 < x^2 - 15 < x^2 - 10 < x^2 - 5$

Mà $(x^2 - 20)(x^2 - 15)(x^2 - 10)(x^2 - 5) < 0$

Nên trong các thừa số $(x^2 - 20), (x^2 - 15), (x^2 - 10), (x^2 - 5)$ có 1 thừa số âm hoặc có 3 thừa số âm.

+ TH1: trong trong các thừa số $(x^2 - 20), (x^2 - 15), (x^2 - 10), (x^2 - 5)$ có một số âm

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x^2 - 20 < 0 \\ x^2 - 15 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 < 20 \\ x^2 > 15 \end{cases}$$

Mà x nguyên nên $x^2 = 16 \Rightarrow x - 2xy + y - 3 = 0$

+ TH2: trong trong các thừa số $(x^2 - 20)$, $(x^2 - 15)$, $(x^2 - 10)$, $(x^2 - 5)$ có ba số âm

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x^2 - 10 < 0 \\ x^2 - 5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 < 10 \\ x^2 > 5 \end{cases}$$

$$\text{Mà } x \text{ nguyên nên } x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

Vậy $x \in \{3; -3; 4; -4\}$.

Câu 5. (HSG 7 huyện Thanh Oai 2014 - 2015)

Tìm x , biết: $\left| \frac{3}{5} - \frac{1}{2}x \right| > \frac{2}{5}$

Lời giải

$$\begin{aligned} & \left| \frac{3}{5} - \frac{1}{2}x \right| > \frac{2}{5} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \frac{3}{5} - \frac{1}{2}x > \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} - \frac{1}{2}x < -\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{2}{5} \\ x > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $x < \frac{2}{5}$ hoặc $x > 2$

Câu 6. (HSG 7 huyện Bồ Lý; Hồng Đà, Tam Nông 2015 - 2016)

Tìm x để biểu thức sau nhận giá trị dương: $x^2 + 2014x$

Lời giải

Ta có: $x^2 + 2014x = x(x + 2014) > 0$

Nên x và $x + 2014$ trái dấu nhau

Mà $x < x + 2014$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2014 > 0 \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2014 \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow -2014 < x < 0$$

Vậy $-2014 < x < 0$.

Câu 7. (HSG 7 thị xã Hoàng Mai 2022 - 2023)

Tìm x, y biết: $(2x - 6)^{2024} + |3y - 9| \leq 0$.

Lời giải

Ta có $(2x - 6)^{2024} \geq 0$ với mọi x ; $|3y - 9| \geq 0$ với mọi y .

Do đó $(2x - 6)^{2024} + |3y - 9| \geq 0$, với mọi x, y .

Mà $(2x - 6)^{2024} + |3y - 9| \leq 0$ nên suy ra $(2x - 6)^{2024} + |3y - 9| = 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-6=0 \\ 3y-9=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$$

Vậy $x=3$ và $y=3$.

Câu 8. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Tìm x, y biết: $\left(3x - \frac{1}{6}\right)^2 + |2y - 6| \leq 0$.

Lời giải

Vì $\left(3x - \frac{1}{6}\right)^2 \geq 0$ với mọi x ; $|2y - 6| \geq 0$ với mọi y .

Do đó: $\left(3x - \frac{1}{6}\right)^2 + |2y - 6| \geq 0$ với mọi x, y .

Khi đó, theo đề bài thì: $\left(3x - \frac{1}{6}\right)^2 + |2y - 6| \leq 0 \Rightarrow \left(3x - \frac{1}{6}\right)^2 + |2y - 6| = 0$.

Vì vậy: $\begin{cases} 3x - \frac{1}{6} = 0 \\ 2y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{18} \\ y = 3 \end{cases}$.

Vậy $x = \frac{1}{18}$, $y = 3$.

Câu 9. (HSG 7 trường Đáp Cầu 2018 - 2019)

Tìm x, y biết: $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \leq 0$.

Lời giải

Vì $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 \geq 0$ với mọi x ; $|3y + 12| \geq 0$ với mọi y , do đó:

$\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \geq 0$ với mọi x, y .

Theo đề bài thì $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \leq 0$. Từ đó suy ra: $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| = 0$.

Khi đó $2x - \frac{1}{6} = 0$ và $3y + 12 = 0$.

Suy ra $x = \frac{1}{12}$ và $y = -4$.

Vậy $x = \frac{1}{12}$; $y = -4$.

Câu 10. (HSG 7 trường Hoàng Hóa, 2017 -2018)

Tìm x, y biết rằng: $(2x - 5)^{2012} + (3y + 4)^{2014} \leq 0$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (2x-5)^{2012} \geq 0 \\ (3y+4)^{2014} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (2x-5)^{2012} + (3y+4)^{2014} \geq 0$$

$$\text{Mà } (2x-5)^{2012} + (3y+4)^{2014} \leq 0 \Rightarrow (2x-5)^{2012} + (3y+4)^{2014} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2x-5)^{2012} = 0 \\ (3y+4)^{2014} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\frac{1}{2} \\ y = -1\frac{1}{3} \end{cases}$$

Câu 11. (HSG 7 huyện Mường Lát, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Tìm số x, y biết: $(2022-x)^2 + |y-2023|^{2023} \leq 0$.

Lời giải

$$(2022-x)^2 + |y-2023|^{2023} \leq 0 \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (2022-x)^2 \geq 0 \quad \forall x \\ |y-2023|^{2023} \geq 0 \quad \forall y \end{cases}$$

$$\text{Nên } (2022-x)^2 + |y-2023|^{2023} \geq 0 \quad \forall x, y \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $(2022-x)^2 + |y-2023|^{2023} = 0$, đạt được khi:

$$\begin{cases} (2022-x)^2 = 0 \\ |y-2023|^{2023} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2022-x = 0 \\ y-2023 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2022 \\ y = 2023 \end{cases}$$

Vậy $x = 2022$ và $y = 2023$.

Câu 12. (HSG 7 huyện Hoàng Hóa, 2017 - 2018)

Tìm x, y biết rằng: $(2x-5)^{2012} + (3y+4)^{2014} \leq 0$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (2x-5)^{2012} \geq 0 \\ (3y+4)^{2014} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (2x-5)^{2012} + (3y+4)^{2014} \geq 0$$

$$\text{Mà } (2x-5)^{2012} + (3y+4)^{2014} \leq 0$$

$$\text{Suy ra } (2x-5)^{2012} + (3y+4)^{2014} = 0$$

$$\text{Suy ra } (2x-5)^{2012} = 0 \text{ và } (3y+4)^{2014} = 0$$

$$x = 2\frac{1}{2} \text{ và } y = -1\frac{1}{3}$$

Câu 13. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2015 - 2016)

Tìm tất cả các cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $(2x-y+7)^{2012} + |x-3|^{2013} \leq 0$

Lời giải

$$\text{Ta có } 2012 \text{ là số tự nhiên chẵn} \Rightarrow (2x-y+7)^{2012} \geq 0$$

$$\text{Và } |x-3| \geq 0 \Rightarrow |x-3|^{2013} \geq 0$$

$$\text{Do đó, từ } (2x-y+7)^{2012} + |x-3|^{2013} \leq 0 \text{ suy ra: } (2x-y+7)^{2012} = 0 \text{ và } |x-3|^{2013} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-y+7=0 \\ x-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=13 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } (x; y) = (3; 13).$$

Câu 14. (HSG 7 huyện Yên Phong 2022 - 2023)

Tìm giá trị của biểu thức $P = 28a^2b - 9ab^2$ với $a; b$ thỏa mãn $(a-3)^2 + (3b+1)^{100} \leq 0$.

Lời giải

Do $(a-3)^2 \geq 0$ với mọi a và $(3b+1)^{100} \geq 0$ với mọi b nên

$$(a-3)^2 + (3b+1)^{100} \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} (a-3)^2 = 0 \\ (3b+1)^{100} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-3=0 \\ 3b+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } P = 28a^2b - 9ab^2 = ab(28a - 9b) = 3 \cdot \frac{-1}{3} \left(28 \cdot 3 - 9 \cdot \frac{-1}{3} \right) = -87.$$

$$\text{Vậy } P = -87.$$

Câu 15. (HSG 7 huyện Lập Thạch, Vĩnh Phúc 2022 - 2023)

Cho các số $x; y$ thỏa mãn $|2x-1| + (y-2)^{2022} \leq 0$.

Tính giá trị của biểu thức $B = 12x^2y + 3xy^2$.

Lời giải

Ta có $|2x-1| + (y-2)^{2022} \leq 0$.

Vì $|2x-1| \geq 0; (y-2)^{2022} \geq 0 \Rightarrow |2x-1| + (y-2)^{2022} \geq 0$

Do đó: $|2x-1| + (y-2)^{2022} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} |2x-1| = 0 \\ (y-2)^{2022} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0,5 \\ y = 2 \end{cases}$$

Thay $x = 0,5; y = 2$ ta có $B = 12 \cdot 0,5^2 \cdot 2 + 3 \cdot 0,5 \cdot 2^2 = 6 + 6 = 12$

Vậy giá trị của biểu thức $B = 12$ tại $x; y$ thỏa mãn $|2x-1| + (y-2)^{2022} \leq 0$.

Câu 16. (HSG 7 huyện Ứng Hòa 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức $B = 21x^2y + xy^2$ với $x; y$ thỏa mãn: $(x-2)^2 + (2y-1)^{2024} \leq 0$

Lời giải

Ta có: $(x-2)^2 + (2y-1)^{2024} \leq 0$

Vì $(x-2)^2 \geq 0; (2y-1)^{2024} \geq 0 \Rightarrow (x-2)^2 + (2y-1)^{2024} \geq 0$

Do đó: $(x-2)^2 + (2y-1)^{2024} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ 2y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Thay vào biểu thức ta được $B = 21 \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{85}{2}$

Câu 17. (HSG 7 trường Nguyễn Chíich, 2017 -2018)

Tim đa thức M biết rằng: $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$. Tính giá trị của M khi x, y thỏa mãn $(2x - 5)^{2018} + (3y + 4)^{2020} \leq 0$

Lời giải

$$M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$$

$$\Rightarrow M = 6x^2 + 9xy - y^2 - (5x^2 - 2xy)$$

$$\Rightarrow M = 6x^2 + 9xy - y^2 - 5x^2 + 2xy = x^2 + 11xy - y^2$$

Ta có: $\begin{cases} (2x-5)^{2018} \geq 0 \\ (3y+4)^{2020} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (2x-5)^{2018} + (3y+4)^{2020} \geq 0$

Mà $(2x - 5)^{2018} + (3y + 4)^{2020} \leq 0 \Rightarrow (2x - 5)^{2018} + (3y + 4)^{2020} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2x-5)^{2018} = 0 \\ (3y+4)^{2020} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

thay vào ta được: $M = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 11 \cdot \frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{25}{4} - \frac{110}{3} - \frac{16}{9} = \frac{-1159}{36}$

Câu 18. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Văn Lang 2022 - 2023)

Cho các số x, y thỏa mãn $(x - 3)^4 + (2y - 1)^{2020} \leq 0$.

Tính giá trị của biểu thức $M = 402x^2y + 284xy^2$

Lời giải

Vì $(x-3)^4 \geq 0$; $(2y-1)^{2020} \geq 0$ với mọi x, y nên

$(x-3)^4 + (2y-1)^{2020} \geq 0$ với mọi x, y .

Mà theo đề bài : $(x - 3)^4 + (2y - 1)^{2020} \leq 0$

Suy ra $(x-3)^4 + (2y-1)^{2020} = 0$

Hay: $(x-3)^4 = 0$ và $(2y-1)^{2020} = 0$

suy ra $x = 3, y = \frac{1}{2}$

Khi đó tính được: $M = 2022$

Câu 19. (HSG 7 thành phố Lào Cai 2022 - 2023)

Cho hai số thực x, y thỏa mãn $(x-y)^{2022} + (x-2)^{2024} \leq 0$. Khi đó giá trị của biểu thức $M = 5x^2y - 3xy^2$ là

Lời giải

Ta có: $(x-y)^{2022} \geq 0$ với mọi x, y

$(x-2)^{2024} \geq 0$ với mọi x

Nên $(x-y)^{2022} + (x-2)^{2024} \geq 0$ với mọi x, y

Mà $(x-y)^{2022} + (x-2)^{2024} \leq 0$

Suy ra $(x-y)^{2022} + (x-2)^{2024} = 0$

$\Rightarrow x-2=0$ và $x-y=0$

Hay $x = y = 2$

Vậy giá trị của biểu thức $M = 5x^2y - 3xy^2$ là $M = 5.2^2.2 - 3.2.2^2 = 40 - 24 = 16$.



CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS

CĐ2: TÌM ẨN CHƯA BIẾT

Dạng 1: Tìm x thông thường
Dạng 2: Đưa về dạng tích bằng 0
Dạng 3: Sử dụng tính chất lũy thừa
Dạng 4: Tìm ẩn dạng phân thức
Dạng 5: Tìm x dạng chứa dấu giá trị tuyệt đối
Dạng 6: Sử dụng công thức tính tổng có quy luật
Dạng 7: Tổng các biểu thức không âm bằng 0
Dạng 8: Tìm ẩn dựa vào tính chất về dấu
Dạng 9: Sử dụng phương pháp chặn để tìm ẩn
Dạng 10: Tìm ẩn với điều kiện nguyên

Dạng 9. Sử dụng phương pháp chặn để tìm ẩn

Câu 1. (HSG 7 huyện Quế Võ, tỉnh Bắc Ninh 2022 - 2023)

Tìm x thỏa mãn $|2x+3|+|2x-1|=\frac{8}{3(x+1)^2+2}$.

Lời giải

Ta có $|2x+3|+|2x-1|=|2x+3|+|1-2x|\geq|2x+3+1-2x|=|4|=4$ với mọi x.

Lại có $3(x+1)^2+2\geq 2 \Rightarrow \frac{8}{3(x+1)^2+2}\leq\frac{8}{2}=4$ với mọi x.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} (2x+3)(1-2x)\geq 0 \\ (x+1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1$.

Vậy $x=-1$.

Câu 2. (HSG 7 Hưng Hà, Thái Phương, 2022 - 2023)

Cho $\frac{6}{(x-2022)^2+2}=|y-2023|+3$. Tính x + y.

Lời giải

$$\frac{6}{(x-2022)^2+2}=|y-2023|+3$$

$$(x-2022)^2\geq 0 ; \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow (x-2022)^2+2\geq 0+2=2.$$

$$\frac{1}{(x-2022)^2+2}\leq\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{6}{(x-2022)^2+2}\leq\frac{6}{2}=3 \quad (1)$$

$$|y-2023|\geq 0 ; \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow |y-2023|+3\geq 0+3=3 \quad (2)$$

$$\frac{6}{(x-2022)^2+2}=|y-2023|+3 \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $x-2022=0$ và $y-2023=0$

$$\Rightarrow x = 2022; y = 2023.$$

$$\text{Suy ra } x + y = 2022 + 2023 = 4045.$$

$$\text{Vậy } x + y = 4045.$$

Câu 3. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Thanh Trì 2021 - 2022)

$$\text{Tìm các số } x, y \text{ nguyên thỏa mãn: } |x-8|+|6-x| = \frac{24}{5(y+3)^2+12}.$$

Lời giải

Ta chứng minh được $|A|+|B| \geq |A+B|$, nên $|x-8|+|6-x| \geq |8-x+6-x| = 2$ với mọi x .

$$\text{Mặt khác } \frac{24}{5(y+3)^2+12} \leq 2 \text{ với mọi } y.$$

$$\text{Từ đó suy ra } y+3=0 \Rightarrow y=-3.$$

$$\text{Khi đó } |x-8|+|6-x|=2 \Rightarrow 6 \leq x \leq 8, \text{ mà } x \text{ nguyên nên } x \in \{6; 7; 8\}.$$

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ là $(6; -3); (7; -3); (8; -3)$.

Câu 4. (HSG 7 Yên Thế, Bắc Giang, 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } |2022-x|+|2023-x|+|2024-x|=2.$$

Lời giải

$$\text{Ta có } |2022-x|+|2024-x| = |x-2022|+|2024-x| \geq |x-2022+2024-x| = 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |2022-x|+|2024-x| \geq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } (x-2022)(2024-x) \geq 0 \quad (*)$$

Giải (*):

$$\text{TH1: } x-2022 \geq 0 \text{ và } 2024-x \geq 0$$

$$\Rightarrow x \geq 2022 \text{ và } x \leq 2024.$$

$$\Rightarrow 2022 \leq x \leq 2024.$$

$$\text{TH2: } x-2022 \leq 0 \text{ và } 2024-x \leq 0$$

$$\text{hoặc } \Rightarrow x \leq 2022 \text{ và } x \geq 2024 \quad (\text{loại})$$

$$\text{Ta có: } |2023-x| \geq 0 \quad \forall x \quad (2)$$

Dấu “=” xảy ra khi $x=2023$.

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow |2022-x|+|2023-x|+|2024-x| \geq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy để $|2022-x|+|2023-x|+|2024-x|=2$ thì (1) và (2) xảy ra dấu “=” khi:

$$2022 \leq x \leq 2024 \text{ và } x=2024 \Rightarrow x=2024.$$

$$\text{Vậy } x=2024$$

Câu 5. (HSG 7 huyện Thuận Thành 2021 - 2022)

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } |x+1|+|x+2|+|x+3|=4x$$

Lời giải

Từ $|x+1|+|x+2|+|x+3|=4x$ ta thấy vế trái: $|x+1|+|x+2|+|x+3| \geq 0$ nên vế phải:

$$4x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0.$$

Với $x \geq 0$ thì $|x+1| = x+1$, $|x+2| = x+2$, $|x+3| = x+3$. Do đó ta có
 $x+1+x+2+x+3 = 4x \Rightarrow x = 6$ (thỏa mãn).
 Vậy $x = 6$.

Câu 6. (HSG 7 huyện Chư Sê 2021 - 2022)

Chứng minh rằng không tìm được các số nguyên thỏa mãn $|x-y|+|y-z|+|z-x| = 2023$

Lời giải

Ta có: $|x-y|+|y-z|+|z-x| = |x-y|+(x-y)+|y-z|+(y-z)+|z-x|+(z-x)$

Với mọi số nguyên x ta lại có: $|x|+x = \begin{cases} 2x & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

Suy ra $|x|+x$ luôn là số chẵn với mọi số nguyên x .

Từ đó ta có: $\begin{cases} |x-y|+(x-y) \\ |y-z|+(y-z) \\ |z-x|+(z-x) \end{cases}$ là các số chẵn với mọi số nguyên x, y, z .

Suy ra $|x-y|+(x-y)+|y-z|+(y-z)+|z-x|+(z-x)$ là một số chẵn với mọi số nguyên x, y, z .

Hay $|x-y|+|y-z|+|z-x|$ là một số chẵn với mọi số nguyên x, y, z .

Do đó không thể tìm được số nguyên x, y, z thỏa mãn:

Câu 7. (HSG 7 trường Lê Hồng Phong 2018 - 2019)

Chứng minh rằng không thể tìm được số nguyên x, y, z thỏa mãn :

$$|x-y|+|y-z|+|z-x| = 2017$$

Lời giải

Ta có: $|x-y|+|y-z|+|z-x| = |x-y|+(x-y)+|y-z|+(y-z)+|z-x|+(z-x)$

Với mọi số nguyên x ta lại có $|x|+x = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

Suy ra $|x|+x$ luôn là số chẵn với mọi số nguyên x

Từ đó ta có: $|x-y|+(x-y)$; $|y-z|+(y-z)$; $|z-x|+(z-x)$ là các số chẵn với mọi số nguyên x, y, z

Suy ra $|x-y|+(x-y)+|y-z|+(y-z)+|z-x|+(z-x)$ là một số chẵn với mọi số nguyên x, y, z

Hay $|x-y|+|y-z|+|z-x|$ là một số chẵn với mọi số nguyên x, y, z

Do đó, không thể tìm được số nguyên x, y, z thỏa mãn: $|x-y|+|y-z|+|z-x| = 2017$

Câu 8. (HSG 7 Hưng Hà, Lý Nam Đế, 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\left|x + \frac{1}{2}\right| + \left|x + \frac{1}{3}\right| + \left|x + \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Ta có: $\left|x + \frac{1}{4}\right| = \left|-x - \frac{1}{4}\right| \geq -x - \frac{1}{4}$

$\left|x + \frac{1}{3}\right| = 0$; $\left|x + \frac{1}{2}\right| \geq x + \frac{1}{2}$

Do đó: $A \geq x + \frac{1}{2} + 0 - x - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

Dấu “=” xảy ra khi: $x + \frac{1}{4} \leq 0$; $\left|x + \frac{1}{3}\right| = 0$ và $x + \frac{1}{2} \geq 0$

Suy ra: $x = -\frac{1}{3}$.

Vậy $A = \frac{1}{4}$ khi $x = -\frac{1}{3}$.

Câu 9. (HSG 7 trường Giao Tân 2016 - 2017)

Chứng minh rằng không thể tìm được số nguyên x, y, z thỏa mãn:

$|x - y| + |y - z| + |z - x| = 2017$

Lời giải

Ta có: $|x - y| + |y - z| + |z - x| = |x - y| + (x - y) + |y - z| + (y - z) + |z - x| + (z - x)$

Với mọi số nguyên x ta lại có $|x| + x = \begin{cases} 2x & \text{với } x \geq 0 \\ 0 & \text{với } x < 0 \end{cases}$

Suy ra $|x| + x$ luôn là số chẵn với mọi số nguyên x

Từ đó ta có: $\begin{cases} |x - y| + (x - y) \\ |y - z| + (y - z) \\ |z - x| + (z - x) \end{cases}$ là các số chẵn với mọi số nguyên x, y, z

$\Rightarrow |x - y| + (x - y) + |y - z| + (y - z) + |z - x| + (z - x)$ là một số chẵn với mọi $x, y, z \in \mathbb{Z}$

Hay $|x - y| + |y - z| + |z - x|$ là một số chẵn với mọi số nguyên x, y, z

Do đó, không thể tìm được số nguyên x, y, z thỏa mãn: $|x - y| + |y - z| + |z - x| = 2017$

Câu 10. (HSG 7 trường Cự Khê 2013 – 2014; huyện Thanh Oai 2013- 2014)

Tìm x , biết: $|x - 2010| + |x - 2012| + |x - 2014| = 4$

Lời giải

$|x - 2010| + |x - 2012| + |x - 2014| \geq |x - 2010 + 2014 - x| + |x - 2012| \geq 4(*)$

Mà $|x - 2010| + |x - 2012| + |x - 2014| = 4$

nên (*) xảy ra dấu “=” khi và chỉ khi $\begin{cases} x - 2012 = 0 \\ 2010 \leq x \leq 2014 \end{cases} \Rightarrow x = 2012$

Vậy $x = 2012$.

Câu 11. (HSG 7 huyện Vĩnh Tường 2015 - 2016)

Tìm x , thỏa mãn: $|x - 1| + |x - 5| + |x - 2007| = 2006$

Lời giải

Ta có:

$$|x-1|+|x-5|+|x-2007|=|x-1|+|x-5|+|2007-x|\geq x-1+0+2007-x=2006$$

$$\text{Mà } |x-1|+|x-5|+|x-2007|=2006$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-5 = 0 \\ 2007-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 5 \\ x \leq 2007 \end{cases} \Rightarrow x = 5$$

Vậy $x = 5$.

Câu 12. (HSG 7 huyện Trục Ninh 2022 - 2023)

Tìm các cặp số nguyên x, y biết $-x^2 + x + 1 = |y - 5|$.

Lời giải

$$-x^2 + x + 1 = |y - 5| \quad (1)$$

$$-x^2 + x + 2 = |y - 5| + 1$$

$$-x^2 - x + 2x + 2 = |y - 5| + 1$$

$$-x(x+1) + 2(x+1) = |y - 5| + 1$$

$$(x+1)(2-x) = |y - 5| + 1$$

Ta có $|y - 5| + 1 > 0$, $\forall y$ nên $(x+1)(2-x) > 0$

$$\Rightarrow (x+1)(x-2) < 0$$

$$\text{Mà } x+1 > x-2 \text{ nên } \begin{cases} x+1 > 0 \\ x-2 < 0 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 2$$

Vì x nguyên nên $x = 0$ hoặc $x = 1$

$$+ \text{ Với } x = 0 \text{ thì } |y - 5| = 1 \Rightarrow \begin{cases} y - 5 = 1 \\ y - 5 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } x = 1 \text{ thì } |y - 5| = 1 \Rightarrow \begin{cases} y - 5 = 1 \\ y - 5 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 \\ y = 4 \end{cases}$$

Vậy các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn là $(0; 4), (0; 6), (1; 4), (1; 6)$.

Câu 13. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Tân Tiến 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $|7 - 3x| + 2|x^2 + 2| = 2x^2 + 3x - 3$

Lời giải

$$|7 - 3x| + 2|x^2 + 2| = 2x^2 + 3x - 3 \quad (1)$$

$$\text{Với mọi } x \text{ ta có: } x^2 \geq 0 \Rightarrow 2x^2 \geq 0 \Rightarrow 2x^2 + 3 \geq 3 \Rightarrow |2x^2 + 3| = 2x^2 + 3$$

Khi đó (1) trở thành:

$$|7 - 3x| + 2(x^2 + 2) = 2x^2 + 3x - 3$$

$$\Rightarrow |3x - 7| + 2x^2 + 4 = 2x^2 + 3x - 3$$

$$\Rightarrow |3x - 7| = 3x - 7$$

$$\Rightarrow 3x - 7 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 7 \Rightarrow x \geq \frac{7}{3}$$

Vậy $x \geq \frac{7}{3}$

Câu 14. (HSG 7 huyện Văn Lâm, tỉnh Hưng Yên 2022 - 2023)

Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $|x + 2| + |x - 1| = 3 - (y + 2)^2$.

Lời giải

Vì: $|x + 2| + |1 - x| \geq |x + 2 + 1 - x| = 3$

Mặt khác: $3 - (y + 2)^2 \leq 3$

$$\text{Đề } |x + 2| + |x - 1| = 3 - (y + 2)^2 \Rightarrow \begin{cases} |x + 2| + |x - 1| = 3 \\ 3 - (y + 2)^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x; y) \in \{(-2; -2), (-1; -2), (0; -2), (1; -2)\}.$$

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ cần tìm là: $(-2; -2), (-1; -2), (0; -2), (1; -2)$.

Câu 15. (HSG 7 huyện Thái Thụy, 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $||x - 2022| + |x - 2023| + 3(x - y)^2| = 2(x - y)^2 + 1$.

Lời giải

Ta có: $2(x - y)^2 + 1 \geq 1$ với mọi x, y .

Có $|x - 2022| \geq 0; |x - 2023| \geq 0; 3(x - y)^2 \geq 0$.

Suy ra: $|x - 2022| + |x - 2023| + 3(x - y)^2 \geq 0$ với mọi $x; y$.

$$\Rightarrow ||x - 2022| + |x - 2023| + 3(x - y)^2| = |x - 2022| + |x - 2023| + 3(x - y)^2.$$

Kết hợp với bài ra ta có: $|x - 2022| + |x - 2023| + 3(x - y)^2 = 2(x - y)^2 + 1$

$$\Rightarrow |x - 2022| + |x - 2023| + (x - y)^2 = 1$$

Sử dụng bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối $|a + b| \geq |a - b|$, ta có:

$$|x - 2022| + |x - 2023| \geq |x - 2022 - x + 2023| = 1; (x - y)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x; y.$$

$$\Rightarrow |x - 2022| + |x - 2023| + (x - y)^2 \geq 1$$

Dấu “=” xảy ra khi: $x = y$ và $2022 \leq x \leq 2023$.

Vì x, y nguyên nên ta tìm được các cặp giá trị $(x; y)$ là $(2022; 2022); (2023; 2023)$.

Câu 16. (HSG 7 huyện Giao Thủy 2016 - 2017)

Tìm x, y biết: $\frac{6}{(x - 1)^2 + 2} = |y - 1| + |y - 2| + |y - 3| + 1$

Lời giải

$$\frac{6}{(x - 1)^2 + 2} = |y - 1| + |y - 2| + |y - 3| + 1$$

+ Ta có: $(x-1)^4 \geq 0$ với mọi $x \Rightarrow (x-1)^4 + 2 \geq 2$

$\Rightarrow \frac{6}{(x-1)^4 + 2} \leq 3$ với mọi x hay $VT \leq 3$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$

+ Ta có: $|y-1| + |y-2| + |y-3| + 1 = |y-1| + |y-3| + |y-2| + 1$
 $\geq y-1 + 3-y+0+1 = 3$ hay $VP \geq 3$

Dấu “=” xảy ra khi $\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ y \leq 3 \\ y = 2 \end{cases}$

Do đó $\frac{6}{(x-1)^2 + 2} = |y-1| + |y-2| + |y-3| + 1$

$\Rightarrow x = 1; y = 2$

Vậy $x = 1; y = 2$.

Câu 17. (HSG 7 Yên Thế, Bắc Giang, 2022 - 2023)

Tìm x biết: $|x-2020| + |x-2021| + |x-2022| + |x-2023| = 4$.

Lời giải

Ta có: $|x-2020| + |x-2021| + |x-2022| + |x-2023|$
 $= |x-2020| + |x-2021| + |2022-x| + |2023-x|$
 $\leq |x-2020+2023-x| + |x-2021+2022-x| = 4$.

Dấu “=” xảy ra khi: $(x-2020)(2023-x) \geq 0$ và $(x-2021)(2022-x) \geq 0$

$\Rightarrow 2020 \leq x \leq 2023$ và $2021 \leq x \leq 2022 \Rightarrow 2021 \leq x \leq 2022$.

Vậy $2021 \leq x \leq 2022$.

Câu 18. (HSG 7 huyện Bá Thước, Thanh Hóa 2021 - 2022)

Tìm các số nguyên a, b, c thỏa mãn $|a-b| + |b-c| + |c-a| = 2021^a + 2022^a$

Lời giải

Ta có $|a-b| + (a-b) + |b-c| + (b-c) + |c-a| + (c-a) = 2021^a + 2022^a$ (*)

Nhận thấy $|x-y| + (x-y)$ luôn là số chẵn với mọi x, y

Nên vế trái của (*) là số chẵn

- Nếu $a > 0 \Rightarrow 2021^a + 2022^a$ luôn là số lẻ. Nên không xảy ra (*)

- Nếu $a < 0 \Rightarrow 0 < 2021^a + 2022^a < 1$ Nên không xảy ra (*) do $a, b, c \in \mathbb{Z}$

Do đó $a = 0 \Rightarrow |b| + |b-c| + |c| = 0 \Rightarrow b = c = 0$

Vậy $a = b = c = 0$

Câu 19. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Chuyên Hải 2022 - 2023)

Tìm $x; y$ biết: $\left[(x-2)^2 + 4 \right]^2 + \sqrt{(x+2y-6)^2 + 9} = 19$

Lời giải

$$\left[(x-2)^2 + 4 \right]^2 + \sqrt{(x+2y-6)^2 + 9} = 19$$

Ta có: $(x-2)^2 \geq 0$ với mọi $x \Rightarrow (x-2)^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow \left[(x-2)^2 + 4 \right]^2 \geq 4^2 = 16$ (1)

$$(x+2y-6)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x; y \Rightarrow \sqrt{(x+2y-6)^2 + 9} \geq \sqrt{9} = 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra: $\left[(x-2)^2 + 4 \right]^2 + \sqrt{(x+2y-6)^2 + 9} \geq 16 + 3 = 19$

Vậy biểu thức: $\left[(x-2)^2 + 4 \right]^2 + \sqrt{(x+2y-6)^2 + 9} = 19$

$$\text{khi } \begin{cases} (x-2)^2 = 0 \\ (x+2y-6)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ x+2y-6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

Vậy $x=2; y=2$

Câu 20. (HSG 7 Nga Sơn, Thanh Hóa, 2022 - 2023)

Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn $(x+y)^4 = 40x+41$.

Lời giải

Do x, y nguyên dương nên $40x < 41x, 41 \leq 41y$. Khi đó, ta có :

$$(x+y)^4 = 40x+41 < 41x+41y = 41(x+y)$$

$$\Rightarrow (x+y)^3 < 41 < 64 = 4^3 \Rightarrow x+y < 4. \quad (1)$$

Do x nguyên dương nên $40x+41 \geq 40.1+41=81 \Rightarrow (x+y)^4 \geq 81 \Rightarrow x+y \geq 3 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $x+y=3$ mà $x, y \in \mathbb{N}^*$ nên $(x; y) \in \{(1; 2), (2; 1)\}$.

Thử lại được : $x=1; y=2$.

Vậy $x=1; y=2$.

Câu 21. (HSG 7 huyện, tỉnh, Trường Nguyễn Tông Quai 2022 - 2023)

Tìm các số tự nhiên $x, y, z \neq 0$ thỏa mãn điều kiện: $x+y+z = xyz$

Lời giải

Không mất tính tổng quát của bài toán giả sử $x \leq y \leq z$

Vì x, y, z là các số tự nhiên khác 0 $\Rightarrow 1 \leq x \leq y \leq z$

Ta có $x+y+z = xyz$ (*)

$$\Rightarrow \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} = 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2}$$

$$\Rightarrow x^2 \leq 3 \Rightarrow x=1$$

Thay vào (*) ta được $1+y+z = yz$

$$\Rightarrow (y-1)(z-1) = 2 \Rightarrow \begin{cases} y-1=1 \\ z-1=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ z=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = (1; 2; 3)$$

Vì vai trò của x, y, z như nhau nên các bộ số (x, y, z) thỏa mãn bài toán là :
 $(1; 2; 3); (1; 3; 2); (2; 1; 3); (2; 3; 1); (3; 1; 2); (3; 2; 1)$

Câu 22. (HSG 7 thành phố Vũng Tàu 2021 - 2022)

Tìm các số nguyên x thỏa mãn: $(x + 2022)^2 = 64(x + 2015)^3$.

Lời giải

Vì $(x + 2022)^2 \geq 0$ với mọi x

Do đó $64(x + 2015)^3 \geq 0$

Suy ra $x + 2015 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2015$

Mà với $x = -2015$ không thỏa mãn

Suy ra $x \geq -2014 \Rightarrow x + 2015 \geq 1$

Khi đó $(x + 2022)^2 = 64(x + 2015)^3 \geq 64(x + 2015)^2$

Suy ra $x + 2022 \geq 8(x + 2015)$

Suy ra $x \leq -2014$

Suy ra $x = -2014$

Thử lại $x = -2014$ thỏa mãn bài toán

Vậy $x = -2014$.

Câu 23. (HSG 7 huyện Tân Kỳ 2021 - 2022)

Tìm tất cả các số tự nhiên m, n sao cho: $2^m + 2015 = |n + 2016| + n - 2016$

Lời giải

+) Với $x \geq 0$ thì $|x| + x = 2x$

+) Với $x < 0$ thì $|x| + x = 0$

Do đó $|x| + x$ luôn chẵn với mọi x là số nguyên.

Khi đó: $|n + 2016| + n - 2016$ là số chẵn với $n - 2016 \in Z$

Suy ra $2^m + 2015$ là số chẵn $\Rightarrow 2^m$ lẻ $\Rightarrow m = 0$

Ta có $|n + 2016| + n - 2016 = 2016$

+) Nếu $n < 2016$ ta có $-(n - 2016) + n - 2016 = 2016 \Leftrightarrow 0n = 2016$ (vô lý)

+) Nếu $n \geq 2016$ ta có $2(n - 2016) = 2016 \Leftrightarrow n = 3024$ (thỏa mãn)

Vậy $m = 0; n = 3024$.

Câu 24. (HSG 7 đề 255, 2017 - 2018)

Tìm tất cả các số nguyên a biết: $|a| \leq 4$

Lời giải

$0 \leq |a| \leq 4$ và a nguyên $\Rightarrow |a| = 0; 1; 2; 3; 4$

+ Nếu $|a| = 0 \Rightarrow a = 0$

+ Nếu $|a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1$

+ Nếu $|a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2$

+ Nếu $|a| = 3 \Rightarrow a = \pm 3$

Vậy $a \in \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4\}$.

Câu 25. (HSG 7 huyện Mỹ Đức 2022 - 2023)

Tìm các số tự nhiên a, b thỏa mãn: $25 - b^2 = 8(a - 2023)^2$

Lời giải

$$25 - b^2 = 8(a - 2023)^2$$

Vì $b^2 \geq 0$ suy ra:

$$8(a - 2023)^2 \leq 25 \Rightarrow 8(a - 2023)^2 + b^2 = 25 \Rightarrow (a - 2023)^2 \leq \frac{25}{8}.$$

Mặt khác $(a - 2023)^2$ là số chính phương nên $(a - 2023)^2 = 0$ hoặc $(a - 2023)^2 = 1$.

Nếu $(a - 2023)^2 = 0 \Rightarrow a = 2023$.

Khi đó: $25 - b^2 = 8(a - 2023)^2 \Rightarrow 25 - b^2 = 8 \cdot 0 \Rightarrow b^2 = 25 \Rightarrow b = 5$ (do $b \in \mathbb{N}$).

Nếu $(a - 2023)^2 = 1 \Rightarrow a - 2023 = 1$ hoặc $a - 2023 = -1$

$\Rightarrow a = 2024$ hoặc $\Rightarrow a = 2022$.

Khi đó: $25 - b^2 = 8(a - 2023)^2 \Rightarrow 25 - b^2 = 8 \cdot 1 \Rightarrow b^2 = 17$ (không thỏa mãn).

Vậy $a = 2023$ và $b = 5$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 26. (HSG 7 huyện Diễn Châu 2022 - 2023)

Tìm số tự nhiên $x; y$ biết: $7(x - 2023)^2 = 23 - y^2$.

Lời giải

Vì $x; y$ là các số tự nhiên nên $(x - 2023)^2; y^2$ là các số chính phương nên không âm

do đó $23 - y^2 \leq 23 \Rightarrow 0 \leq 7(x - 2023)^2 \leq 23$

$$\text{Do đó } \begin{cases} (x - 2023)^2 = 0 \\ (x - 2023)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2023 \\ x = 2024 \end{cases}$$

+ Với $x = 2023$ thì không có giá trị của y tự nhiên thỏa mãn.

+ Với $x = 2024$ thì $y^2 = 16 \Rightarrow y = 4$.

Vậy $(x; y) = (2024; 4)$.

Câu 27. (HSG 7 huyện Bình Lục 2022 - 2023; huyện Tam Dương 2017 - 2018)

Tìm các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a^3 + 3a^2 + 5 = 5^b$ và $a + 3 = 5^c$

Lời giải

Do $a \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow 5^b = a^3 + 3a^2 + 5 > a + 3 = 5^c$

Vậy $5^b > 5^c \Rightarrow b > c \Rightarrow 5^b : 5^c$

Hay $(a^3 + 3a^2 + 5) : (a + 3) \Leftrightarrow [a^2 \cdot (a + 3) + 5] : (a + 3)$

Mà $a^2(a + 3) : (a + 3) \Rightarrow 5 : (a + 3) \Rightarrow a + 3 \in U(5)$

Hay $a+3 \in \{\pm 1; \pm 5\}$, do $a \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow a+3 \geq 4$

Từ (1) và (2) suy ra $a+3=5 \Rightarrow a=2$

Từ đó tính được $5^b = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 5 = 25 = 5^2 \Rightarrow b=2$

Và $5^c = a+3 = 2+3 = 5 \Rightarrow c=1$

Vậy $a=2, b=2, c=1$.

Câu 28. (HSG 7 huyện Quốc Oai- 2016 - 2017)

Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn $2x^2 + 3y^2 = 77$

Lời giải

$$2x^2 + 3y^2 = 77 \Rightarrow 3y^2 = 77 - 2x^2 \leq 77 \Rightarrow y^2 \leq \frac{77}{3} \Rightarrow y^2 \leq 25$$

Mà $2x^2$ chẵn; 77 lẻ $\Rightarrow 3y^2$ lẻ $\Rightarrow y^2$ lẻ $\Rightarrow y^2 \in \{1; 9; 25\}$

+ Nếu $y^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 = 77 - 3 = 74 \Rightarrow x^2 = 37$ (không thỏa mãn)

+ Nếu $y^2 = 9 \Rightarrow 2x^2 = 77 - 27 = 50 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5; y = 3$ (thỏa mãn)

+ Nếu $y^2 = 25 \Rightarrow 2x^2 = 77 - 75 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1; y = 5$ (thỏa mãn)

Vậy số tự nhiên x, y thỏa mãn $2x^2 + 3y^2 = 77$ là $(x; y) = (5; 3); (1; 5)$

Câu 29. (HSG 7 huyện Hoàng Hóa 2016 - 2017)

Tìm tất cả các số tự nhiên a, b sao cho: $2^a + 37 = |b - 45| + b - 45$

Lời giải

Nhận xét: với $x \geq 0$ thì $|x| + x = 2x$

Với $x < 0$ thì $|x| + x = 0$.

Do đó $|x| + x$ luôn là số chẵn với $b \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 2^a + 37$ là số chẵn khi và chỉ khi 2^a lẻ $\Rightarrow a = 0$

Khi đó $|b - 45| + b - 45 = 38$

+ Nếu $b < 45$, ta có: $-(b - 45) + b - 45 = 38 \Rightarrow 0 = 38$ (vô lý)

+ Nếu $b \geq 45$, ta có: $2(b - 45) = 38 \Rightarrow b = 64$ (thỏa mãn)

Vậy $(a, b) = (0; 64)$.

Câu 30. (HSG 7 trường Hiền Quan 2015 - 2016)

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $6x^2 + 5y^2 = 74$

Lời giải

$$6x^2 + 5y^2 = 74 \Rightarrow 6x^2 = 74 - 5y^2 \leq 74 \Rightarrow x^2 \leq \frac{37}{3} \Rightarrow x^2 \leq 13$$

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x^2 \in \{0; 1; 4; 9\}$

+ Nếu $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$. Khi đó $5y^2 = 74 \Rightarrow y^2 = \frac{74}{5}$ (không thỏa mãn do $y \in \mathbb{Z}$)

+ Nếu $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ do $x \in \mathbb{Z}$.

Khi đó $6 + 5y^2 = 74 \Rightarrow y^2 = \frac{68}{5}$ (không thỏa mãn do $y \in \mathbb{Z}$)

+ Nếu $x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$ do $x \in \mathbb{Z}$.

Khi đó $6.4 + 5y^2 = 74 \Rightarrow y^2 = 10$ (không thỏa mãn do $y \in \mathbb{Z}$)

+ Nếu $x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$ do $x \in \mathbb{Z}$.

Khi đó $6.9 + 5y^2 = 74 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -2 \end{cases}$ (do $y \in \mathbb{Z}$)

Vậy $(x, y) \in \{(3; 2), (-3; 2), (3; -2), (-3; -2)\}$.

Câu 31. (HSG 7 Tp Thanh Hóa 2022 - 2023)

Tìm các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn: $(x + y)^2 = 4x + 5$

Lời giải

Do $x, y \in \mathbb{N}^*$, ta có $x \geq 1; y \geq 1 \Rightarrow 4x + 5 = (x + y)^2 \geq (1 + x)^2$

Điều này chỉ xảy ra khi $x \leq 5$.

Thật vậy nếu $x \geq 6$, ta có: $(x + 1)^2 \geq (6 + 1)(x + 1) = 7x + 7 > 4x + 5$ (mâu thuẫn).

Khi đó ta có: $1 \leq x \leq 5$

+) Với $x = 1 \Rightarrow 4x + 5 = 9 \Rightarrow (1 + y)^2 = 9 \Rightarrow 1 + y = 3 \Rightarrow y = 2$ (thỏa mãn)

+) Với $x = 2 \Rightarrow 4x + 5 = 13 \Rightarrow (2 + y)^2 = 13$ (không là số chính phương \Rightarrow Loại)

+) Với $x = 3 \Rightarrow 4x + 5 = 17 \Rightarrow (3 + y)^2 = 17$ (Loại)

+) Với $x = 4 \Rightarrow 4x + 5 = 21 \Rightarrow (4 + y)^2 = 21$ (Loại)

+) Với $x = 5 \Rightarrow 4x + 5 = 25 \Rightarrow (5 + y)^2 = 25 \Rightarrow 5 + y = 5 \Rightarrow y = 0$ (Loại)

Vậy cặp số nguyên dương $x; y$ cần tìm là: $(x; y) = (1; 2)$

Câu 32. (HSG 7 huyện Mộ Cày, 2017 - 2018)

Tìm số tự nhiên x thỏa mãn $3^x + 4^x = 5^x$

Lời giải

Với $x = 0, x = 1$ thay vào không thỏa mãn

+) $x = 2$ thay vào ta được $3^2 + 4^2 = 5^2$ (luôn đúng), vậy $x = 2$ thỏa mãn

+) $x > 2$, ta có: $3^x + 4^x = 5^x \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$

Với $x > 2$ ta có: $\left(\frac{3}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2; \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{4}{5}\right)^2$

$\Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow x > 2$ (không thỏa mãn)

Vậy $x = 2$.

CD2: TÌM ẨN CHƯA BIẾT

Dạng 1: Tìm x thông thường
Dạng 2: Đưa về dạng tích bằng 0
Dạng 3: Sử dụng tính chất lũy thừa
Dạng 4: Tìm ẩn dạng phân thức
Dạng 5: Tìm x dạng chứa dấu giá trị tuyệt đối
Dạng 6: Sử dụng công thức tính tổng có quy luật
Dạng 7: Tổng các biểu thức không âm bằng 0
Dạng 8: Tìm ẩn dựa vào tính chất về dấu
Dạng 9: Sử dụng phương pháp chặn để tìm ẩn
Dạng 10: Tìm ẩn với điều kiện nguyên

Dạng 10. Tìm ẩn với điều kiện nguyên

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 huyện Lạng Giang, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

Tích của các số nguyên x (với $x \neq 1$) sao cho $\frac{4}{x-1}$ có giá trị nguyên:

- A. 6 B. 0 C. 15 D. -9

Lời giải

Chọn B

$\frac{4}{x-1}$ có giá trị nguyên (với $x \neq 1$)
 $\Rightarrow 4 : x - 1 \Rightarrow x - 1 \in U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\} \Rightarrow x \in \{2; 0; 3; -1; 5; -3\}$.

Tích của các số nguyên x là: $2 \cdot 0 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 5 \cdot (-3) = 0$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $x + y + xy = 2$

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $x + y + xy = 2$
 $\Rightarrow x + y + xy + 1 = 2 + 1$
 $\Rightarrow (x + 1) + (xy + y) = 3$
 $\Rightarrow (x + 1) + y(x + 1) = 3$
 $\Rightarrow (x + 1)(y + 1) = 3$

Lại có: $3 = 1 \cdot 3 = 3 \cdot 1 = (-1) \cdot (-3) = (-3) \cdot (-1)$

Nên ta có bảng:

$x+1$	1	3	-1	-3
$y+1$	3	1	-3	-1
x	0	2	-2	-4
y	2	0	-4	-2

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x; y)$ là: $(0; 2); (2; 0); (-2; -4); (-4; -2)$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Thanh Thủy 2021 - 2022)

Với x nguyên, giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{2022-x}{2-x}$ là

- A.** 2021 **B.** 2020 **C.** 2019 **D.** 2018

Lời giải

Chọn A

Ta có: $A = \frac{2022-x}{2-x} = \frac{2-x+2020}{2-x} = 1 + \frac{2020}{2-x}$

A lớn nhất khi $\frac{2020}{2-x}$ lớn nhất

Vì $2020 > 0$ và không đổi nên

$\frac{2020}{2-x}$ đạt giá trị lớn nhất khi: $2-x > 0$ và đạt giá trị nhỏ nhất.

Mà $2-x \neq 0$ nên $2-x = 1 \Rightarrow x = 1$

Khi đó: $A = 1 + \frac{2020}{1} = 2021$

Vậy A đạt giá trị lớn nhất là 2021 khi $x = 1$.

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Tương Dương, tỉnh Nghệ An 2022 - 2023)

Tìm các bộ số nguyên dương $(x; y; z)$ của biểu thức: $x + y + z = xyz$.

Lời giải

Vì x, y, z nguyên dương nên giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$.

Theo bài ra: $x + y + z = xyz$. Chia cả hai vế cho xyz ta được:

$$1 = \frac{1}{zy} + \frac{1}{yx} + \frac{1}{xz} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2}.$$

Suy ra $x^2 \leq 3$

Do đó $x = 1$.

Thay vào $x + y + z = xyz$ ta có:

$$1 + y + z = yz$$

$$yz - y - z - 1 = 0$$

$$y(z-1) - (z-1) - 2 = 0$$

$$(z-1)(y-1) = 2$$

Vì x, y, z nguyên dương nên $(z-1)$ và $(y-1)$ là các số nguyên.

Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $z - 1 = 1$; $y - 1 = 2$. Suy ra $z = 2$; $y = 3$.

Trường hợp 2: $z - 1 = 2$; $y - 1 = 1$. Suy ra $z = 3$; $y = 2$.

Vậy có hai bộ số nguyên dương $(x; y; z)$ thỏa mãn là $(1; 2; 3)$, $(1; 3; 2)$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Thanh Trì, Hà Nội 2022 - 2023)

Tìm số nguyên tố $x; y$ thỏa mãn: $x^2 - 2y^2 = 1$

Lời giải

Xét $x^2 - 2y^2 = 1$ suy ra $x^2 = 2y^2 + 1$

+ Nếu x chia hết cho 3 mà x là số nguyên tố nên $x = 3$

Thay vào tính được $y = 2$ là số nguyên tố (Chọn)

+ Nếu x không chia hết cho 3

Chứng minh được $(x^2 - 1) : 3$

Suy ra $2y^2$ chia hết cho 3 mà $(2, 3) = 1$ nên y^2 chia hết cho 3 mà 3 là số nguyên tố nên y chia hết cho 3

Mà y là số nguyên tố nên $y = 3$

Thay vào tính được $x^2 = 19$ (loại)

Vậy có duy nhất cặp số $(x, y) = (2, 3)$ thỏa mãn bài toán.

Câu 3. (HSG 7 huyện Thanh Trì, Hà Nội 2022 - 2023)

Tìm số nguyên x thỏa mãn: $2(2 - x^2)(12 - x^2)(22 - x^2)(32 - x^2) + 12558 = 0$.

Lời giải

$$2(2 - x^2)(12 - x^2)(22 - x^2)(32 - x^2) + 12558 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 - x^2)(12 - x^2)(22 - x^2)(32 - x^2) = -6279$$

$$\text{Đặt } A = VT = (2 - x^2)(12 - x^2)(22 - x^2)(32 - x^2).$$

Ta có: $VP = -6279 < 0$

Mà vế trái là tích của 4 thừa số, nên trong đó có 1 hoặc 3 thừa số âm.

$$\text{Lại có: } 2 - x^2 < 12 - x^2 < 22 - x^2 < 32 - x^2$$

Ta có 2 trường hợp:

+TH1: Có 3 thừa số âm

$$\text{Do đó } 22 - x^2 < 0 < 32 - x^2 \Rightarrow 22 < x^2 < 32$$

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên x^2 là số chính phương

$$\Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$$

Thay vào biểu thức A ta được $A = -6279 = VP$ (thỏa mãn)

+TH2: Có 1 thừa số âm

$$\text{Do đó } 2 - x^2 < 0 < 12 - x^2 \Rightarrow 2 < x^2 < 12$$

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên x^2 là số chính phương

$$\Rightarrow x^2 \in \{4; 9\}$$

$$\text{Với } x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow A = -8064 \neq VP \text{ (loại)}$$

$$\text{Với } x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow A = -6279 = VP \text{ (thoả mãn)}$$

$$\text{Vậy } x \in \{\pm 3; \pm 5\}.$$

Câu 4. (HSG 7 huyện Ninh Giang, tỉnh Hải Dương 2022 - 2023)

Tìm tất cả các cặp số nguyên x, y sao cho $xy - 2x + y + 1 = 0$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } xy - 2x + y + 1 = 0$$

$$x(y - 2) + (y - 2) = -3$$

$$(y - 2)(x + 1) = -3$$

$$\Rightarrow y - 2, x + 1 \in U(3) = \{-3; -1; 1; 3\}.$$

Ta có bảng

$x + 1$	-3	-1	1	3
$y - 2$	1	3	-3	-1
x	-4	-2	0	2
y	3	5	-1	1

Vậy các cặp số nguyên thỏa mãn $(x; y) \in \{(-4; 3); (-2; 5); (0; -1); (2; 1)\}$.

Câu 5. (HSG 7 huyện Kinh Môn, tỉnh Hải Dương 2022 - 2023)

Tìm x, y nguyên biết: $2xy - x - y = 2$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2xy - x - y = 2$$

$$x(2y - 1) = 2 + y$$

$$x = \frac{2 + y}{2y - 1} \text{ (vì } y \text{ nguyên nên } 2y - 1 \neq 0)$$

$$2x = \frac{2y + 4}{2y - 1} = 1 + \frac{5}{2y - 1}$$

$$2x = 1 + \frac{5}{2y - 1}$$

Vì x nguyên thì $2x$ nguyên

$$\text{Khi đó } 2y - 1 \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$$

Ta có bảng các trường hợp xảy ra:

$2y - 1$	-1	1	-5	5
$2y$	0	2	-4	6
y	0	1	-2	3
x	-2	3	0	1
	thoả mãn	thoả mãn	thoả mãn	thoả mãn

Vậy các cặp số $(x; y)$ thỏa mãn đề bài là: $(-2; 0); (1; 3); (0; -2); (3; 1)$.

Câu 6. (HSG 7 huyện Chương Mỹ, Hà Nội 2022 - 2023)

Tìm x, y biết $4x - xy + y = 7$ với x, y là các số nguyên.

Lời giải

Ta có: $4x - xy + y = 7$

$$x(4 - y) + y - 4 = 3$$

$$(x - 1)(4 - y) = 3$$

Lập bảng

$x - 1$	1	3	-1	-3
$4 - y$	3	1	-3	-1
x	2	4	0	-2
y	1	3	7	5

Vậy các cặp $(x; y)$ thỏa mãn là $(2; 1), (4; 3), (0; 7), (-2; 5)$.

Câu 7. (HSG 7 huyện Thanh Sơn, tỉnh Phú Thọ 2022 - 2023)

Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $4x - 5y - 6xy + 7 = 0$.

Lời giải

Ta có $4x - 5y - 6xy + 7 = 0$

$$12x - 15y - 18xy + 21 = 0$$

$$(12x - 18xy) + (10 - 15y) + 11 = 0$$

$$6x(2 - 3y) + 5(2 - 3y) = -11$$

$$(6x + 5)(2 - 3y) = -11$$

Vì $x; y \in \mathbb{Z}$ nên $6x + 5; 2 - 3y \in \mathbb{Z} \Rightarrow 6x + 5; 2 - 3y$ là ước của -11

Lập bảng

$6x + 5$	1	-11	11	-1
$2 - 3y$	-11	1	-1	11
x	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{8}{3}$	1	-1
y	$\frac{13}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	-3
	loại	loại	thỏa mãn	thỏa mãn

Vậy các cặp $(x; y)$ thỏa mãn là: $(-1; -3), (1; 1)$.

Câu 8. (HSG 7 huyện Lang Chánh, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $x^2 + xy - 3y - 5x + 3 = 0$.

Lời giải

Ta có: $x^2 + xy - 3y - 5x + 3 = 0$

Suy ra: $x^2 + xy - 2x - 3y - 3x + 6 = 3$

$\Rightarrow x(x + y - 2) - 3(x + y - 2) = 3$

$\Rightarrow (x - 3)(x + y - 2) = 3$

Do x, y là số nguyên nên ta có:

$(x - 3)(x + y - 2) = 3 = 1.3 = 3.1 = (-1)(-3) = (-3)(-1)$

$\Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 1 \\ x + y - 2 = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x - 3 = 3 \\ x + y - 2 = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x - 3 = -1 \\ x + y - 2 = -3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x - 3 = -3 \\ x + y - 2 = -1 \end{cases}$

Vậy các cặp $(x; y)$ là $(4; 1), (6; -3), (2; -3), (0; 1)$.

Câu 9. (HSG 7 thị xã Bỉm Sơn 2022 - 2023)

Tìm $(x; y) \in \mathbb{Z}$ sao cho $2y^2 - xy + x - 2y + 5 = 0$.

Lời giải

Ta có $2y^2 - xy + x - 2y + 5 = 0$ suy ra $x(y - 1) = 2y^2 - 2y + 5$ (1)

Ta thấy $y = 1$ không thỏa mãn (1)

Do đó $y \neq 1$.

Khi đó (1) trở thành

$$x = \frac{2y^2 - 2y + 5}{y - 1}$$

$$x = 2y + \frac{5}{y - 1}$$

Vì x, y là các số nguyên dương nên $y - 1$ là ước của 5.

TH1. $y - 1 = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 9$

TH2. $y - 1 = -1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = -5$

TH3. $y - 1 = 5 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow x = 13$

TH4. $y - 1 = -5 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow x = -9$

Vậy $(x; y) \in \{(9; 2); (-5; 0); (13; 6); (-9; -4)\}$.

Câu 10. (HSG 7 huyện Quế Võ, tỉnh Bắc Ninh 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^2 - xy = 6x - 5y - 8$.

Lời giải

Ta có $x^2 - xy = 6x - 5y - 8 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = y(x - 5)$ (1)

Khi $x = 5$ thì ta có $5^2 - 6.5 + 8 = 0$ (vô lí)

Do đó $x = 5$ không thỏa mãn (1)

Khi $x \neq 5$ thì $y = \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 5}$

$$y = \frac{x^2 - 5x - x + 5 + 3}{x - 5}$$

$$y = \frac{(x-1)(x-5)+3}{x-5}$$

$$y = x-1 + \frac{3}{x-5}$$

Vì x, y nguyên nên $x-5$ là ước của 3 hay $x-5 \in \{\pm 1; \pm 3\} \Rightarrow x \in \{2; 4; 6; 8\}$.

+ Khi $x = 2$ thì $y = 0$

+ Khi $x = 4$ thì $y = 0$

+ Khi $x = 6$ thì $y = 8$

+ Khi $x = 8$ thì $y = 8$

Vậy các cặp số $(x; y)$ cần tìm là: $(2; 0); (4; 0); (6; 8); (8; 8)$.

Câu 11. (HSG 7 huyện Nghi Xuân, tỉnh Hà Tĩnh 2022 - 2023)

Tìm số nguyên x, y thỏa mãn: $x + 3xy + y = -5$.

Lời giải

Ta có $x + 3xy + y = -5$

$$3x + 9xy + 3y = -15$$

$$3x(1+3y) + (1+3y) = -14$$

$$(3x+1)(1+3y) = -14$$

Ta lập bảng

$3x+1$	1	-14	-1	14	2	-7	-2	7
$3y+1$	-14	1	14	-1	-7	2	7	-2
x	0	-5	$-\frac{2}{3}$	$\frac{13}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{8}{3}$	-1	2
y	-5	0	$\frac{13}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$\frac{1}{3}$	2	-1

x, y là số nguyên nên: $(x; y) \in \{(0; -5); (-5; 0); (-1; 2); (2; -1)\}$.

Vậy các cặp số $(x; y)$ cần tìm là: $(x; y) \in \{(0; -5); (-5; 0); (-1; 2); (2; -1)\}$.

Câu 12. (HSG 7 huyện Hiệp Hoà, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên dương a, b để $\frac{a^2-2}{ab+2}$ có giá trị nguyên.

Lời giải

Để $\frac{a^2-2}{ab+2}$ là số nguyên thì $(a^2-2):(ab+2)$

$$\Rightarrow b(a^2-2) = a(ab+2) - 2(a+b):(ab+2)$$

$$\Rightarrow 2(a+b):(ab+2)$$

Do đó $2(a+b) = k(ab+2)$ với $k \in \mathbb{N}^*$

Nếu $k \geq 2$ thì $a+b \geq ab+1 \Rightarrow (a-1)(b-1)+1 \geq 0$ (vô lí với $a, b \in \mathbb{N}^*$)

Nếu $k = 1$. Từ đó $(a-2)(b-2) = 2$

Vì a, b là các số tự nhiên, suy ra $a-2; b-2$ là các số nguyên

Nên ta có bảng sau

$a-2$	-1	-2	1	2
$b-2$	-2	-1	2	1
a	1	0	3	4
b	0	1	4	3
	Loại		Loại	

Vậy ta được các cặp $(a; b)$ cần tìm là: $(1; 0); (4; 3)$.

Câu 13. (HSG 7 huyện Mường Lát, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên dương x, y sao cho : $xy + 2x - y = 5$.

Lời giải

$$xy + 2x - y = 5$$

$$x(y+2) - (y+2) = 5-2$$

$$(x-1)(y+2) = 3 \quad (1)$$

Vì x, y nguyên nên $x-1$ và $y+2$ nguyên.

$$\text{Do đó } y+2 \in U(3) \Rightarrow y+2 \in \{1; -1; 3; -3\}$$

Mà y nguyên dương nên $y+2 \geq 3$

$$\text{Nên } y+2 = 3 \Rightarrow y = 1 \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) tìm được $x = 2$.

$$\text{Vậy } (x; y) = (2; 1).$$

Câu 14. (HSG 7 huyện Đồng Xuân, tỉnh Phú Yên 2022 - 2023)

Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ biết: $\frac{x}{7} + 1 = \frac{1}{y-1}$.

Lời giải

Ta có:

$$\frac{x}{7} + 1 = \frac{1}{y-1}$$

$$\frac{x+7}{7} = \frac{1}{y-1}$$

$$(x+7)(y-1) = 7$$

$$\text{Vì } 7 = 7.1 = 1.7 = (-7).(-1) = (-1).(-7)$$

Thay hết tất cả các trường hợp ta có:

$$(x; y) \in \{(0; 2); (-6; 8); (-14; 0); (-8; -6)\}.$$

Vậy các cặp số $(x; y)$ cần tìm là: $(x; y) \in \{(0; 2); (-6; 8); (-14; 0); (-8; -6)\}.$

Câu 15. (HSG 7 huyện Gia Viễn, tỉnh Ninh Bình 2022 - 2023)

Tìm số nguyên x, y biết $2xy - x + y = 6$.

Lời giải

$$\begin{aligned} 2xy - x + y &= 6 \\ \Rightarrow 4xy - 2x + 2y &= 12 \\ \Rightarrow 2x(2y - 1) + (2y - 1) &= 12 - 1 \\ \Rightarrow (2x + 1)(2y - 1) &= 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } 2x + 1 &\in U(11) \\ \Rightarrow 2x + 1 &\in \{\pm 1; \pm 11\} \end{aligned}$$

Ta có bảng giá trị

$2x + 1$	-11	-1	1	11
$2y - 1$	-1	-11	11	1
x	-6	-1	0	5
y	0	-5	6	1

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn là: $(0; 6); (-1; -5); (5; 1); (-6; 0)$.

Câu 16. (HSG 7 thành phố Bắc Ninh 2022 - 2023)

Tìm cặp số nguyên $(x; y)$ biết $x + y = xy$.

Lời giải

Ta có $x + y = xy \Rightarrow xy - x - y = 0$ nên $(x - 1)(y - 1) = 1$, khi đó $x - 1$ và $y - 1$ là ước của 1. Ta có bảng giá trị sau:

$x - 1$	1	-1
$y - 1$	1	-1
x	2	0
y	2	0

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn bài toán là $(2; 2), (0; 0)$.

Câu 17. (HSG 7 huyện Quảng Xương, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Tìm $x; y$ nguyên thỏa mãn: $x^2 - xy + y + 2 = 0$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } x^2 - xy + y + 2 = 0$$

$$\text{Suy ra } y(x - 1) = x^2 + 2 \quad (1)$$

Xét $x = 1$, thay vào (1) ta được: $0 = 3$ (vô lí)

Do đó $x = 1$ không thỏa mãn (1).

Xét $x \neq 1$, ta có:

$$y = \frac{x^2 + 2}{x - 1}$$

$$y = x + 1 + \frac{3}{x-1}$$

Để y nguyên thì $x-1 \in U(3)$.

Do $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-1 \in \mathbb{Z}$ nên $x-1 \in U(3)$

Vì $U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$ nên ta có bảng sau

$x-1$	-3	-1	1	3
x	-2	0	2	4
$y = \frac{x^2+2}{x-1}$	-2	-2	6	6
Kết luận	Thoả mãn	Thoả mãn	Thoả mãn	Thoả mãn

Vậy $(x; y) \in \{(-2; -2); (0; -2); (2; 6); (4; 6)\}$.

Câu 18. (HSG 7 thị xã Hoàng Mai 2022 - 2023)

Tìm x, y nguyên biết: $xy - 3x + 2y = -7$.

Lời giải

Ta có $xy - 3x + 2y = -7$

suy ra $x(y-3) + 2(y-3) = -13$

hay $(y-3)(x+2) = -13$.

Vì x, y là các số nguyên nên $y-3; x+2$ cũng là các số nguyên.

Do đó ta có bảng giá trị sau

$x+2$	-1	1	-13	13
$y-3$	13	-13	1	-1
x	-3	-1	-15	11
y	16	-10	4	2
Kết luận	Nhận	Nhận	Nhận	Nhận

Vậy các cặp số $(x; y)$ thoả mãn yêu cầu bài toán là

$(x; y) \in \{(-3; 16); (-1; -10); (-15; 4); (11; 2)\}$.

Câu 19. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên x, y biết: $x + y - 2xy = 4$.

Lời giải

Ta có: $x + y - 2xy = 4$

suy ra $x - 2xy + y - 4 = 0$

$2x - 4xy + 2y - 8 = 0$

$2x - 4xy + 2y - 1 = 7$

$2x(1-2y) - (1-2y) = 7$

$(2x-1)(1-2y) = 7$.

Lập bảng

$2x-1$	1	7	-1	-7
$1-2y$	7	1	-7	-1
x	1	4	0	-3
y	-3	0	4	1
	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Vậy $(x; y)$ cần tìm là $(1; -3); (4; 0); (0; 4); (-3; 1)$.

Câu 20. (HSG 7 huyện Thạch Thành 2022 - 2023)

Tìm số tự nhiên \overline{ab} sao cho $\overline{ab}^2 = (a+b)^3$.

Lời giải

Do $\overline{ab}^2 = (a+b)^3$ nên suy ra $(a+b)^3$ là số chính phương $\Rightarrow (a+b)$ cũng là số chính phương

$(a+b) = k^2$ (với $k \in \mathbb{N}$) nên $\overline{ab}^2 = k^6 \Rightarrow \overline{ab} = k^3$ mà $10 \leq \overline{ab} \leq 99 \Rightarrow 10 \leq k^3 \leq 99$

Từ đó suy ra $k \in \{3; 4\} \Rightarrow \overline{ab} \in \{27; 64\}$.

Thử lại:

+ $\overline{ab} = 27$ nên $a = 2, b = 7$ thỏa mãn $\overline{ab}^2 = (a+b)^3$.

+ $\overline{ab} = 64$ nên $a = 6, b = 4$ không thỏa mãn $\overline{ab}^2 = (a+b)^3$.

Vậy $\overline{ab} = 27$.

Câu 21. (HSG 7 huyện Lục Ngạn 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên $x; y$ thỏa mãn $2xy - y = 2x + 2$.

Lời giải

Ta có:

$$2xy - y = 2x + 2 \Rightarrow 2xy - y - 2x - 2 = 0 \Rightarrow 2xy - 2x - y + 1 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 2x(y-1) - (y-1) - 3 = 0 \Rightarrow (y-1)(2x-1) = 3$$

Do $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow (y-1); (2x-1)$ là các ước nguyên của 3

Ta có bảng sau

$(2x-1)$	-3	-1	1	3
$(y-1)$	-1	-3	3	1
x	-1	0	1	2
y	0	-2	4	2
	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Vậy các cặp $(x; y)$ thỏa mãn là $(-1; 0); (0; -2); (1; 4); (2; 2)$.

Câu 22. (HSG 7 huyện Anh Sơn 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên $x; y$ biết $2xy - 6x - y = 21$.

Lời giải

Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ biết $2xy - 6x - y = 21$

Ta có :

$$2xy - 6x - y = 21$$

$$(2xy - 6x) - (y - 3) = 24$$

$$2x(y - 3) - (y - 3) = 24$$

$$(y - 3)(2x - 1) = 24$$

Mà $x, y \in \mathbb{Z}$

Nên

$y - 3$	24	8	-24	-8
y	27	11	-21	-5
$(2x - 1)$	1	3	-1	-3
x	1	2	0	-1

Vậy các cặp $(x; y)$ thoả mãn là $(-1; -5); (0; -21); (1; 27); (2; 11)$.

Câu 23. (HSG 7 huyện Đô Lương 2022 - 2023)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thoả mãn $x^2 - 3xy + 2 = y$.

Lời giải

Cách 1: Ta có: $x^2 - 3xy + 2 = y \Rightarrow x^2 + 2 = y(3x + 1) \Rightarrow y = \frac{x^2 + 2}{3x + 1}$

$$9y = \frac{9x^2 + 18}{3x + 1} = \frac{9x^2 - 1 + 19}{3x + 1} = 3x - 1 + \frac{19}{3x + 1}$$

Mà $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{19}{3x + 1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow (3x + 1)$ là ước của 19

Hay $3x + 1 = 19$ hoặc $3x + 1 = -19$ hoặc $3x + 1 = 1$ hoặc $3x + 1 = -1$.

Suy ra $x = 6$ (nhận) hoặc $x = -\frac{20}{3}$ (loại) hoặc $x = 0$ (nhận) hoặc $x = -\frac{2}{3}$ (loại).

Với $x = 6 \Rightarrow y = 2$.

Với $x = 0 \Rightarrow y = 2$.

Vậy có 2 cặp số $(x; y)$ thỏa là $(0; 2)$ và $(6; 2)$.

Cách 2. Ta có $x^2 - 3xy + 2 = y \Rightarrow 9x(x - 3y) + 3(x - 3y) - 3x + 18 = 0$

$$\Rightarrow 9x^2 - 27xy - 9y + 18 = 0$$

$$\Rightarrow 3(3x + 1)(x - 3y) - (3x + 1) + 19 = 0$$

$$\Rightarrow (3x + 1)(3x - 9y - 1) = -19$$

Do $x; y$ nguyên nên $3x + 1$ và $3x - 9y - 1$ là ước của 19.

Mà $3x + 1$ là số chia 3 dư 1 nên $3x + 1$ chỉ nhận 1 hoặc 19

Giải ra ta được $(x; y) = (0; 2); (6; 2)$

Câu 24. (HSG 7 huyện Nghi Sơn 2022 - 2023)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $3x - y + xy - 10 = 0$.

Lời giải

Ta có: $3x - y + xy - 10 = 0$

$$\Rightarrow xy + 3x - y - 10 = 0$$

$$\Rightarrow x(y+3) - y - 3 - 7 = 0$$

$$\Rightarrow x(y+3) - (y+3) = 7 \quad (1)$$

Vì $x; y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-1 \in \mathbb{Z}; y+3 \in \mathbb{Z}$ nên từ (1) $\Rightarrow 7 : x-1 \Rightarrow x-1 \in \{\pm 1; \pm 7\}$

Ta có bảng giá trị sau:

$x-1$	1	-1	7	-7
$y+3$	7	-7	1	-1
x	2	0	8	-6
y	4	-10	-2	-4

Vậy $(x; y) \in \{(2; 4), (0; -10), (8; -2), (-6; -4)\}$

Câu 25. (HSG 7 huyện Hà Trung 2022 - 2023)

Tìm giá trị nguyên dương của $x; y$ sao cho: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5x + 5y = xy \quad (x > 0; y > 0)$

$$\Rightarrow xy - 5x - 5y = 0$$

$$\Rightarrow x(y-5) - 5(y-5) = 25$$

$$\Rightarrow (x-5)(y-5) = 25$$

Vì x, y nguyên dương nên $x-5, y-5$ là các ước của 25.

Ta có: $U(25) = \{\pm 1; \pm 5; \pm 25\}$

Ta có bảng giá trị:

$x-5$	1	-1	5	-5	25	-25
$y-5$	25	-25	5	-5	1	-1
x	6	4	10	0	30	-20
y	30	-20	10	0	6	4

Vì x, y nguyên dương nên ta có: $(x, y) \in \{(6; 30); (10; 10); (30; 6)\}$.

Câu 26. (HSG 7 huyện Lập Thạch, Vĩnh Phúc 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên x và y biết: $\frac{5}{x} + \frac{y}{4} = \frac{1}{8}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{5}{x} + \frac{y}{4} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{40}{8x} + \frac{2xy}{8x} = \frac{x}{8x}$$

$$40 + 2xy = x$$

$$40 = x(1 - 2y)$$

Suy ra x và $1 - 2y$ là ước của 40 ta có

$$40 = 1.40 = (-1).(-40) = 2.20 = (-2).(-20) = 5.8 = (-5).(-8)$$

mà $1 - 2y$ là số lẻ nên ta có các trường hợp sau

$$\text{TH1: } \begin{cases} 1 - 2y = 1 \\ x = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 40 \end{cases}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} 1 - 2y = -1 \\ x = -40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -40 \end{cases}$$

$$\text{TH3: } \begin{cases} 1 - 2y = 5 \\ x = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = 8 \end{cases}$$

$$\text{TH4: } \begin{cases} 1 - 2y = -5 \\ x = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = -8 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } (x; y) = \{(40; 0), (-40; 1); (8; -2), (-8; 3)\}.$$

Câu 27. (HSG 7 huyện Thạch Thành 2022 - 2023)

Cho các số nguyên $x; y$ thỏa mãn $|x-1| + y^2 = 1$ và $|y| < |x|$. Tính giá trị biểu thức

$$M = (x + y - 1)^{2023}.$$

Lời giải

Do $x, y \in \mathbb{Z}; |x-1| \geq 0; y^2 \geq 0$ và $|x-1| + y^2 = 1$ nên ta có các trường hợp sau:

$$\text{TH1: } \begin{cases} |x-1| = 0 \\ y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \pm 1 \end{cases} \quad (\text{Loại vì không thỏa mãn điều kiện } |y| < |x|)$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} |x-1| = 1 \\ y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \quad (\forall |y| < |x|)$$

$$\text{Thay } x = 2; y = 0 \text{ vào biểu thức } M = (2 + 0 - 1)^{2023} = 1^{2023} = 1.$$

Câu 28. (HSG 7 huyện Yên Phong 2022 - 2023)

Tìm tất cả các giá trị $x; y$ nguyên thỏa mãn: $5x^2 - 2xy + y^2 = 17$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 4 \equiv -1 \pmod{5} \Rightarrow 4^{2(n+1)} \equiv (-1)^{2(n+1)} \pmod{5}$$

$$\Rightarrow 4^{2(n+1)} \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 4^{2(n+1)} - 1 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow (4^{2(n+1)} - 1) : 5 \quad (1)$$

Lại có: $4 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 4^{2(n+1)} \equiv (1)^{2(n+1)} \pmod{3} \Rightarrow 4^{2(n+1)} - 1 \equiv 0 \pmod{3}$
 $\Rightarrow (4^{2(n+1)} - 1) : 3 \quad (2)$

Mà: 3 và 5 là hai số nguyên tố cùng nhau (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $(4^{2n+2} - 1) : 15$

Ta có: $5x^2 - 2xy + y^2 = 17 \Rightarrow (x - y)^2 + 4x^2 = 17 \Rightarrow (x - y)^2 = 17 - 4x^2 \quad (*)$

Ta có: $(x - y)^2 \geq 0 \quad \forall x, y \Rightarrow 17 - 4x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq \frac{17}{4}$

Mà x là số nguyên nên $x^2 \in \{0; 1; 4\}$

+ Với $x^2 = 0 \Rightarrow (x - y)^2 = 17$ (loại)

+ Với $x^2 = 1 \Rightarrow (x - y)^2 = 13$ (loại)

+) Với $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$. Khi đó $x^2 = 4 \Rightarrow (x - y)^2 = 1$

Với $x = 2 \Rightarrow (2 - y)^2 = 1 \Rightarrow 2 - y = 1$ hoặc $2 - y = -1$

+) $2 - y = 1 \Rightarrow y = 1$

+) $2 - y = -1 \Rightarrow y = 3$

Với $x = -2 \Rightarrow (-2 - y)^2 = 1 \Rightarrow (2 + y)^2 = 1 \Rightarrow 2 + y = 1$ hoặc $2 + y = -1$

+) $2 + y = 1 \Rightarrow y = -1$

+) $2 + y = -1 \Rightarrow y = -3$

Vậy: $(x; y) \in \{(2; 1); (2; 3); (-2; -1); (-2; -3)\}$.

Câu 29. (HSG 7 thành phố Ninh Bình 2022 - 2023)

Tìm số tự nhiên n và chữ số a biết rằng: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \overline{aaa}$.

Lời giải

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \overline{aaa}$$

$$\Rightarrow n(n + 1) : 2 = 111.a$$

$$\Rightarrow n(n + 1) = 37.2.3.a \quad (1)$$

Ta có vế trái (1) là tích hai số tự nhiên liên tiếp nên $2.3.a = 36$ suy ra được $a = 6$ và $n = 36$

Câu 30. (HSG 7 huyện Hoàng Hóa, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Tìm $x; y$ nguyên biết $xy + 3x - y - 10 = 0$

Lời giải

Ta có: $3x - y + xy - 10 = 0 \Rightarrow 3x + (xy - y) = 10$

$$\Rightarrow 3x + y(x - 1) = 10 \Rightarrow (3x - 3) + y(x - 1) = 10 - 3$$

$$\Rightarrow 3(x - 1) + y(x - 1) = 7 \Rightarrow (x - 1)(y + 3) = 7$$

Vì $x; y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - 1; y + 3 \in \mathbb{Z}$. Do đó: $x - 1; y + 3 \in \mathbb{Z}_{(7)}$

Mà: $\mathbb{Z}_{(7)} = \{-7; -1; 1; 7\}$

Ta có bảng:

$x-1$	-7	-1	1	7
$y+3$	-1	-7	7	1
x	-6	0	2	8
y	-4	-10	4	-2
KL	Chọn	Chọn	Chọn	Chọn

Vậy: $(x; y) \in \{(-6; -4); (0; -10); (2; 4); (8; -2)\}$

Câu 31. (HSG 7 quận Hà Đông, tỉnh Hà Nội 2022 - 2023)

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2y + 2xy - 27x + y = 0$.

Lời giải

Ta có: $x^2y + 2xy - 27x + y = 0 \Rightarrow (x+1)^2 y = 27x \Rightarrow 27x : (x+1)^2$

mà $(x, x+1) = 1 \Rightarrow 27 : (x+1)^2$.

$\Rightarrow (x+1)^2 \in U(27)$ mà $(x+1)^2$ là số chính phương $\Rightarrow (x+1)^2 \in \{1; 9\}$

$\Rightarrow x+1 \in \{-3; -1; 1; 3\}$

$\Rightarrow x \in \{-4; -2; 0; 2\}$

Ta có bảng sau:

x	-4	-2	0	2
y	-12	-54	0	6

Vậy phương trình có nghiệm: $(x; y) \in \{(-4; -12); (-2; -54); (0; 0); (-2; 6)\}$

Câu 32. (HSG 7 Trường THCS Võ Thị Sáu 2022 - 2023)

Tìm $x; y$ nguyên biết rằng: $\frac{x}{8} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$

Lời giải

Ta có: $\frac{x}{8} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{x}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{x-2}{8} = \frac{1}{y} \Rightarrow (x-2) \cdot y = 8$

Vì $x; y$ nguyên nên $x-2; y$ nguyên $\Rightarrow x-2; y \in U(8) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$

Ta có bảng:

$x-2$	1	-1	-2	2	4	-4	8	-8
y	8	-8	-4	4	2	-2	1	-1
x	3	1	0	4	6	-2	10	-6

Vậy các cặp $x; y$ thỏa mãn là: $(3; 8); (1; -8); (4; 4); (0; -4); (6; 2); (-2; -2); (10; 1); (-6; -1)$

Câu 33. (HSG 7 huyện Triệu Sơn 2022 - 2023)

Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^3 - xy + 1 = 2y - x$.

Lời giải

$$x^3 - xy + 1 = 2y - x$$

$$\Rightarrow x^3 + x + 1 = xy + 2y$$

$$\Rightarrow x^3 + x + 1 = y(x + 2)$$

$$\Rightarrow y = \frac{x^3 + x + 1}{x + 2}$$

Vì x, y là các số nguyên nên:

$$(x^3 + x + 1) : (x + 2)$$

$$\Rightarrow (x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + 5x + 10 - 9) : (x + 2)$$

$$\Rightarrow [x^2(x + 2) - 2x(x + 2) + 5(x + 2) - 9] : (x + 2)$$

$$\Rightarrow [(x + 2)(x^2 - 2x + 5) - 9] : (x + 2)$$

$$\text{Vì } (x + 2)(x^2 - 2x + 5) : (x + 2)$$

$$\Rightarrow 9 : (x + 2)$$

$$\Rightarrow (x + 2) \in \{1; 3; 9; -1; -3; -9\}$$

$$\Rightarrow x \in \{-1; 1; 7; -3; -5; -11\} \text{ (tmđk)}$$

$$* \text{ Với } x = -1 \text{ thì } y = \frac{(-1)^3 + (-1) + 1}{(-1) + 2} = -1 \text{ (tmđk)}$$

$$* \text{ Với } x = 1 \text{ thì } y = \frac{1^3 + 1 + 1}{1 + 2} = 1 \text{ (tmđk)}$$

$$* \text{ Với } x = 7 \text{ thì } y = \frac{7^3 + 7 + 1}{7 + 2} = 39 \text{ (tmđk)}$$

$$* \text{ Với } x = -5 \text{ thì } y = \frac{(-5)^3 + (-5) + 1}{(-5) + 2} = 43 \text{ (tmđk)}$$

$$* \text{ Với } x = -11 \text{ thì } y = \frac{(-11)^3 + (-11) + 1}{(-11) + 2} = 149 \text{ (tmđk)}$$

Câu 34. (HSG 7 huyện Thọ Xuân 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức: $\left| (x - y)^2 + 2(xy + y^2 - 4y) \right| = xy + y^2 - 4y$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \left| (x - y)^2 + 2(xy + y^2 - 4y) \right| = xy + y^2 - 4y \quad (1)$$

$$\text{Mà } \left| (x - y)^2 + 2(xy + y^2 - 4y) \right| \geq 0 \text{ nên suy ra } xy + y^2 - 4y \geq 0$$

Do đó $(x - y)^2 + 2(xy + y^2 - 4y) \geq 0$ vì $(x - y)^2 \geq 0$ với mọi giá trị của x, y .

Khi đó, từ (1) suy ra:

$$(x - y)^2 + 2(xy + y^2 - 4y) = xy + y^2 - 4y$$

$$\Rightarrow (x-y)^2 + xy + y^2 - 4y = 0$$

$$\Rightarrow (x-y)^2 + 2(xy + y^2 - 4y) - (xy + y^2 - 4y) = 0$$

Ta lại có: $(x-y)^2 + xy + y^2 - 4y \geq 0$ với mọi giá trị của x, y .

Do đó $(x-y)^2 + xy + y^2 - 4y = 0$ khi $(x-y)^2 = 0$ và $xy + y^2 - 4y = 0$

Từ $(x-y)^2 = 0$ suy ra: $x = y$

Thay $x = y$ vào $xy + y^2 - 4y = 0$, ta được: $y^2 + y^2 - 4y = 0$

$$\Rightarrow 2y^2 - 4y = 0 \Rightarrow 2y(y-2) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ hoặc } y = 2.$$

Vậy $(x; y) \in \{(0; 0); (2; 2)\}$

Câu 35. (HSG 7 huyện Hậu Lộc 2022 - 2023)

Tìm cặp số (x, y) nguyên thỏa mãn: $x^2 - x(y+5) = -4y-9$.

Lời giải

Ta có: $x^2 - x(y+5) = -4y-9 \Rightarrow x^2 - 5x + 9 = xy - 4y \Rightarrow x^2 - 5x + 9 = y(x-4)$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 9 : x-4 \Rightarrow x(x-4) - (x-4) + 5 : x-4 \Rightarrow 5 : x-4 \Rightarrow x-4 \in \{\pm 1; \pm 5\}$$

$$\Rightarrow x \in \{-1; 3; 5; 9\}$$

Ta có bảng sau:

x	-1	3	5	9
y	-3	-3	9	9
Kết luận	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Vậy $(x, y) \in \{(-1; -3), (3; -3), (5; 9), (9; 9)\}$

Cách khác: Có thể viết đẳng thức đã cho về dạng: $(x-4)(x-y-1) = -5$

$x-4$	-5	-1	1	5
x	-1	3	5	9
$x-y-1$	1	5	-5	-1
y	-3	-3	9	9
Kết luận	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Vậy $(x, y) \in \{(-1; -3), (3; -3), (5; 9), (9; 9)\}$.

Câu 36. (HSG 7 thị xã Kỳ Anh, 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên dương n mà khi thay vào $A = \frac{3n+2}{n-1}$ thì A nhận được giá trị nguyên.

Tổng

tất cả các giá trị nguyên dương của n vừa tìm được bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$A = \frac{3n+2}{n-1} = 3 + \frac{5}{n-1} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{n-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 5:n-1 \Rightarrow n-1 \in U(5)$$

$$\Rightarrow n-1 \in \{1; -1; 5; -5\}$$

$$\Rightarrow n \in \{2; 0; 6; -4\}$$

Ta tìm được các giá trị n là: $6; -4; 2; 0$.

Mà n nguyên dương nên $n = 6; n = 2$.

Câu 37. (HSG 7 Hương Trà, 2022 - 2023)

Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức: $B = \frac{8-x}{x-3}$ ($x \neq 3$) đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

$$\text{Ta có: } B = \frac{8-x}{x-3} = \frac{5-(x-3)}{x-3} = \frac{5}{x-3} - \frac{x-3}{x-3} = \frac{5}{x-3} - 1$$

B có giá trị nhỏ nhất $\Rightarrow \frac{5}{x-3}$ nhỏ nhất.

$\Rightarrow x-3$ là số nguyên âm lớn nhất.

$$\Rightarrow x-3 = -1.$$

$$\Rightarrow x = 2.$$

$$\text{Vậy } B_{\min} = \frac{5}{2-3} - 1 = -6 \text{ khi } x = 2.$$

Câu 38. (HSG 7 Mỹ Đức, 2022 - 2023)

Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $3xy + 2x - 5y = 6$.

Lời giải

Ta có:

$$3xy + 2x - 5y = 6 \Rightarrow x(3y+2) - 5y = 6 \Rightarrow 3x(3y+2) - 15y = 18$$

$$\Rightarrow 3x(3y+2) - 15y - 10 = 18 - 10 \Rightarrow 3x(3y+2) - 5(3y+2) = 8 \Rightarrow (3x-5)(3y+2) = 8.$$

$$x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow (3x-5) \in \mathbb{Z}; (3y+2) \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 3y+2 \in U(8) = \{1; -1; 2; -2; 4; -4; 8; -8\}$$

Mà $3y+2$ là số chia cho 3 dư 2 $\Rightarrow 3y+2 \in \{-1; 2; -4; 8\}$.

Ta có bảng sau:

$3y+2$	-4	-1	2	8
$3x-5$	-2	-8	4	1
y	-2	-1	0	2
x	1	-1	3	2

Vậy $(x; y) \in \{(1; -2), (-1; -1), (3; 0), (2; 2)\}$.

Câu 39. HSG 7 Cẩm Khê, 2022 - 2023)

Cho biểu thức: $P = \frac{4049-2x}{x-2023}$ ($x \neq 2023$). Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị nhỏ nhất của P .

Lời giải

Ta có $P = \frac{4049 - 2x}{x - 2023} = \frac{3 - 2(x - 2023)}{x - 2023} = \frac{3}{x - 2023} - 2 (x \neq 2023)$

Biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{3}{x - 2023}$ có giá trị nhỏ nhất.

$\Rightarrow x - 2023$ là số âm lớn nhất (vì x nguyên) $\Rightarrow x - 2023 = -1 \Rightarrow x = 2022$ (TM).

Khi đó giá trị nhỏ nhất của P là -5 khi $x = 2022$.

Vậy GTNN của P là -5 khi $x = 2022$.

Câu 40. (HSG 7 Hương Trà, 2022 - 2023)

Cho hai biểu thức $P = \frac{4x - 7}{x - 2}; Q = \frac{3x^2 - 9x + 2}{x - 3}$.

Tính giá trị nguyên của x để mỗi biểu thức có giá trị nguyên.

Lời giải

* Ta có: $P = \frac{4x - 7}{x - 2} = 4 + \frac{1}{x - 2} (x \neq 2)$

Với $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - 2 \in \mathbb{Z}$ để P thì $\frac{1}{x - 2}$ nguyên $\Rightarrow x - 2 \in U(1) \Rightarrow x - 2 \in \{1; -1\}$
 $\Rightarrow x \in \{3; 1\}$.

* Ta có: $Q = \frac{3x^2 - 9x + 2}{x - 3} (x \neq 3)$

$Q = \frac{3x^2 - 9x + 2}{x - 3} = \frac{3x(x - 3) + 2}{x - 3} = 3x + \frac{2}{x - 3}$

Để Q nguyên thì $\frac{2}{x - 3}$ nguyên $\Rightarrow x - 3 \in U(2) = \{1; -1; 2; -2\} \Rightarrow x \in \{4; 2; 5; 1\}$.

Vậy để Q nguyên thì $x \in \{4; 2; 5; 1\}$.

Câu 41. (HSG 7 huyện Cẩm Khê, 2022 - 2023)

Tìm các số a, b, c nguyên dương thỏa mãn: $a^3 + 3a^2 + 5 = 5^b$ và $a + 3 = 5^c$.

Lời giải:

Ta có:

$a \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow 5^b = a^3 + 3a^2 + 5 = a^2 \cdot (a + 3) + 5 > a + 3 = 5^c$

$\Rightarrow 5^b > 5^c \Rightarrow b > c$

$\Rightarrow 5^b : 5^c$

$\Rightarrow (a^3 + 3a^2 + 5) : (a + 3)$

$\Rightarrow a^2(a + 3) + 5 : (a + 3)$

Vì $a^2(a + 3) : a + 3 \Rightarrow 5 : a + 3 \Rightarrow a + 3 \in U(5) \Rightarrow a + 3 \in \{1; -1; 5; -5\}$ (1)

Do $a \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow a + 3 \geq 4$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow a + 3 = 5 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 5 = 5^5$.

$25 = 5^b \Rightarrow b = 2$.

$2 + 3 = 5^c \Rightarrow c = 1$.

Vậy $a = 2, b = 2, c = 1$.

Câu 42. (HSG 7 huyện Quan Sơn, 2022 - 2023)

Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $10^x + 6y = 2023$.

Lời giải

Với $x, y \in \mathbb{Z}$ và $10^x + 6y = 2023 \Rightarrow 10^x = 2023 - 6y$ là số nguyên.

Suy ra: 10^x là số nguyên, từ đó $x \in \mathbb{N}$.

Khi đó: $10^x = 2023 - 6y$ là một số lẻ (vì $2023 \not\div 2; 6y:2 \Rightarrow 10^x \not\div 2$).

Suy ra $x = 0$.

$$10^0 + 6y = 2023 \Rightarrow 6y = 2022 \Rightarrow y = 2022 : 6 = 337.$$

Vậy $(x; y) = (0; 337)$.

Câu 43. (HSG 7 huyện ... 2022 - 2023)

Tìm giá trị nguyên dương x và y sao cho: $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$

Lời giải

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{y-x}{xy} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow xy = 5y - 5x$$

$$\Rightarrow xy + 5x - 5y = 0$$

$$\Rightarrow x(y+5) - 5(y+5) = -25$$

$$\Rightarrow (y+5)(x-5) = -25$$

Vì x, y nguyên dương nên $y+5 > 5$ và $x-5; y+5$ đều là ước của 25, vậy chỉ có 1 trường hợp: $x-5 = -1$ và $y+5 = 25$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ và } y = 20$$

Vậy $x = 4$ và $y = 20$.

Câu 44. (HSG 7 Đồng Nai - Trường Thcs - Thpt Tri Thức, 2022 - 2023)

Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $x + 5y + xy = 2$.

Lời giải

$$x + 5y + xy = 2 \Rightarrow (x + yx) + (5y + 5) = 7 \Rightarrow (x + 5)(y + 1) = 7$$

$$\Rightarrow (x + 5)(y + 1) = 1.7 = 7.1 = (-1).(-7) = (-7).(-1)$$

$x + 5$	1	7	-1	-7
x	-4	2	-6	-12
$y + 1$	7	1	-7	-1
y	6	0	-8	-2

Vậy có 4 cặp số nguyên cặp $(x; y)$ thỏa mãn: $x + 5y + xy = 2$ là:

$$(-4; 6); (2; 0); (-6; -8); (-12; -2).$$

Câu 45. (HSG 7 Tiên Du, Bắc Ninh, 2022 - 2023)

Tìm tất cả các số nguyên dương $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ và b (n là số nguyên dương nào đó) thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

i) $b > a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > 1$.

ii) $\left(1 - \frac{1}{a_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{a_2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{a_3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{a_n}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{b}\right)$.

Lời giải

Vì $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ và b thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $b > a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > 1$.

Suy ra $b \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{b} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow 1 - \frac{1}{b} \geq 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2\left(1 - \frac{1}{b}\right) \geq \frac{3}{4}$ (*)

Lại có: $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{a_1} < \frac{1}{a_2} < \frac{1}{a_3} < \dots < \frac{1}{a_n} < 1$.

$\Rightarrow 0 < 1 - \frac{1}{a_1} < 1; 0 < 1 - \frac{1}{a_2} < 1; \dots; 0 < 1 - \frac{1}{a_n} < 1$

$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{a_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{a_2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{a_3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{a_n}\right) < 1$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra điều mâu thuẫn với $\left(1 - \frac{1}{a_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{a_2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{a_3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{a_n}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{b}\right)$

Vậy không tồn tại các số nguyên dương thỏa mãn bài ra.

Câu 46. (HSG 7 huyện Kim Thành 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên x, y biết: $x^2y - 1 = x^2 + 4y$.

Lời giải

$x^2y - 1 = x^2 + 4y$

$x^2y - x^2 - 4y = 1$

$x^2y - x^2 - 4y + 4 = 1 + 4$

$x^2(y - 1) - 4(y - 1) = 5$

$(y - 1)(x^2 - 4) = 5$

Với $x, y \in \mathbb{Z}$ thì $y - 1, x^2 - 4 \in U(5)$

$U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$.

$y - 1$	-5	-1	1	5
$x^2 - 4$	-1	-5	5	1
y	-4	0	2	6
x^2	3(L)	-1(L)	9	5(L)
x			± 3	

Vậy các cặp số $(x; y)$ thỏa mãn là $(3; 2); (-3; 2)$.

Câu 47. (HSG 7 Hưng Hà, trường THCS Thống Nhất, 2022 - 2023)

Cho $Q = \frac{27 - 2x}{12 - x}$. Tìm các số nguyên x để Q có giá trị nguyên?

Lời giải

$$Q = \frac{27 - 2x}{12 - x} = \frac{2 \cdot (12 - x) + 3}{12 - x} = 2 + \frac{3}{12 - x} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{12 - x} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3 : 12 - x \Rightarrow 12 - x \in U(3)$$

$$\Rightarrow 12 - x \in \{1; 3; -1; -3\}$$

$$\Rightarrow x \in \{11; 9; 13; 15\}$$

Vậy $x \in \{11; 9; 13; 15\}$.

Câu 48. (HSG 7 thành phố Lào Cai 2022 - 2023)

Tìm các số x, y nguyên dương biết: $x^2 - 6xy + 13y^2 = 13$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } x^2 - 6xy + 13y^2 = 13 \Rightarrow x^2 - 3xy - 3xy + 9y^2 + 4y^2 = 13$$

$$\Rightarrow x(x - 3y) - 3y(x - 3y) = 13 - 4y^2 \Rightarrow (x - 3y) \cdot (x - 3y) = 13 - 4y^2$$

$$\Rightarrow (x - 3y)^2 = 13 - 4y^2 \quad (1)$$

$$\text{Do } (x - 3y)^2 \geq 0 \text{ nên } 13 - 4y^2 \geq 0 \Rightarrow -4y^2 \geq -13 \Rightarrow y^2 \leq \frac{13}{4} \Rightarrow |y| \leq \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Ngoài ra: (1) là các số nguyên dương nên $13 - 4y^2$ là số chính phương dương nên

$$y \in \{0; 1\} \text{ (Do } |y| \leq \frac{\sqrt{13}}{2} \text{)}$$

$$\text{Với } y = 0 \Rightarrow (x - 3 \cdot 0)^2 = 13 - 4 \cdot 0 \Rightarrow x^2 = 13 \Rightarrow x = \pm\sqrt{13} \Rightarrow x \in \emptyset$$

$$y = 1 \Rightarrow (x - 3 \cdot 1)^2 = 13 - 4 \cdot 1 \Rightarrow (x - 3)^2 = 9 \Rightarrow x - 3 = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

Vậy các cặp số x, y thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $(0; 1); (6; 1)$.

Câu 49. (HSG 7 Sông Lô, Vĩnh Phúc, 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2 + x = 3^{2020 \cdot y} + 1$.

Lời giải

+) Trường hợp $y < 0$, ta có:

$$VP = x^2 + x = x(x + 1) \text{ là số nguyên.}$$

$$VT = 3^{2020 \cdot y} + 1 \text{ không là số nguyên (vì } a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ với } a \neq 0, n \in \mathbb{N}^* \text{).}$$

\Rightarrow Trường hợp này loại.

+) Trường hợp $y = 0$, ta có: $x^2 + x = 3^{2020 \cdot 0} + 1 \Rightarrow x(x + 1) = 2 = 1 \cdot 2 = (-2)(-1)$.

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x < x + 1 \Rightarrow x = 1$ hoặc $x = -2$.

Khi $x = 1$ thì $y = 0$; khi $x = -2$ thì $y = 0$.

+) Trường hợp $y > 0$, ta có:

$VP = x^2 + x = x(x+1)$ là tích hai số nguyên liên tiếp nên $x^2 + x$ chia hết cho 3 hoặc chia cho 3 dư 2.

$VT = 3^{2020 \cdot y} + 1$ chia cho 3 dư 1.

\Rightarrow Trường hợp này loại.

Vậy cặp số nguyên $(x; y)$ cần tìm là: $(1; 0); (-2; 0)$.

Câu 50. (HSG 7 Bá Thước, THCS thị trấn Cảnh Nài, 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $1! + 2! + 3! + \dots + x! = y^2$.

Lời giải

+ Với $x = 1$, ta có $1! = y^2 \Rightarrow 1 = y^2 (y \in \mathbb{Z}) \Rightarrow y \in \{1; -1\}$.

+ Với $x = 2$, ta có $1! + 2! = y^2 \Rightarrow 3 = y^2 \Rightarrow$ Vì $y \in \mathbb{Z}$ nên không tìm được giá trị của y thỏa mãn đề bài.

+ Với $x = 3$, ta có $1! + 2! + 3! = y^2 \Rightarrow 9 = y^2 (y \in \mathbb{Z}) \Rightarrow y \in \{3; -3\}$.

+ Với $x \geq 4$, ta có $1! + 2! + 3! + \dots + x! = 33 + 5! + 6! + \dots + x!$ có chữ số tận cùng là 3 (Vì $5!, 6!, \dots, x!$ đều có chữ số tận cùng là 0) nên không phải là số chính phương, còn y^2 lại là số chính phương \Rightarrow không tìm được giá trị của y thỏa mãn đề bài.

Vậy các cặp số nguyên x, y thỏa mãn là: $(x, y) \in \{(1; 1); (1; -1); (3; 3); (3; -3)\}$.

Câu 51. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường LƯU KHÁNH ĐÀM 2022 - 2023)

Tìm số nguyên x, y biết $2017x^2 + 2018 = y^2$

Lời giải

Có $2016x^2 + 2018 = y^2 - x^2 = (y-x)(y+x)$ (*)

Từ (*) $\Rightarrow (y+x)(y-x)$ chẵn

Có $y+x + y-x = 2y$ chẵn

$\Rightarrow y+x, y-x$ cùng chẵn $\Rightarrow (y+x)(y-x):4$

Mà $2016x^2 + 2018$ không chia hết cho 4

Vậy không tìm được số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức trên

Câu 52. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Trần Đức Tông 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên dương $x; y$ thỏa mãn điều kiện: $2^x + 2^y = 72$

Lời giải

Giả sử $x > y$, ta có: $2^x + 2^y = 2^y(2^{x-y} + 1) = 2^3 \cdot 9$

Do $2^{x-y} + 1$ là số lẻ nên $2^{x-y} + 1 \in \{1; 3; 9\}$

$2^{x-y} + 1 = 1$	$2^y = 9 \cdot 2^3$ (loại)
-------------------	----------------------------

$2^{x-y} + 1 = 3$	$2^y = 3 \cdot 2^3$ (loại)
$2^{x-y} + 1 = 9$	$2^y = 2^3$ (thoả mãn)

Với $2^y = 2^3$ và $2^{x-y} + 1 = 9 \Rightarrow y = 3$ và $x = 6$.

Vậy $x = 6; y = 3$

Câu 53. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Trần Đức Tông 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên dương a, b, c biết rằng: $a^3 - b^3 - c^3 = 3abc$ và $a^2 = 2(b + c)$

Lời giải

$$a^3 - b^3 - c^3 = 3abc \quad (1) \text{ và } a^2 = 2(b + c) \quad (2)$$

Từ (2) suy ra a^2 chẵn $\Rightarrow a$ chẵn.

$$\text{Từ (1) suy ra } a > b; a > c \Rightarrow 2a > b + c \Rightarrow 4a > 2(b + c)$$

$$\text{Kết hợp với (2) } \Rightarrow a^2 < 4a \Rightarrow a < 4 \Rightarrow a = 2 \text{ thay vào (2)}$$

$$\text{Ta được: } b + c = 2 \Rightarrow b = c = 1 \text{ (vì } b, c \text{ nguyên dương).}$$

Thử lại thấy đúng, vậy $a = 2, b = c = 1$

Câu 54. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Trần Đức Tông 2022 - 2023)

Tìm hình chữ nhật có kích thước các cạnh là số nguyên sao cho số đo diện tích bằng số đo chu vi.

Lời giải

Gọi kích thước hai cạnh của hình chữ nhật đó là: a, b . ĐK: $a, b \in \mathbb{Z}^+$

$$\text{Theo bài ra ta có: } 2(a + b) = ab$$

$$2a + 2b = ab$$

$$2a - ab + 2b = 0$$

$$2a - ab - 4 + 2b = -4$$

$$a(2 - b) - 2(2 - b) = -4$$

$$(2 - b)(a - 2) = -4$$

Vì a, b là các số nguyên dương nên $2 - b \in \mathbb{Z}; a - 2 \in \mathbb{Z}$

Để $(2 - b)(a - 2) = -4$ thì $2 - b$ và $a - 2$ phải là ước của -4

$$\text{Có } U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$$

$$\text{Lập bảng ta được: } (a; b) \in \{(3; 6); (4; 4); (6; 3)\}$$

$$\text{Vậy với } (a; b) \in \{(3; 6); (4; 4); (6; 3)\}$$

Câu 55. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Đức Nông 2022 - 2023)

Tìm số tự nhiên $x; y$ sao cho: $2^x + 2^y = 2^{x+y}$

Lời giải

$$2^x + 2^y = 2^{x+y}$$

$$2^x + 2^y = 2^x \cdot 2^y$$

$$2^x(1 - 2^y) - (1 - 2^y) + 1 = 0$$

$$\begin{aligned}(1-2^y)(2^x-1) &= -1 \\ (2^y-1)(2^x-1) &= 1\end{aligned}\quad (1)$$

Vì $x; y$ là số tự nhiên (bài cho) nên: $\begin{cases} (2^y-1) \in \mathbb{N} \\ (2^x-1) \in \mathbb{N} \end{cases}$

Từ (1) ta suy ra: $(2^y-1)(2^x-1) = 1.1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^x-1=1 \\ 2^y-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x=2 \\ 2^y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \text{ (TMĐK)}$$

Vậy $x=1; y=1$.

Câu 56. (HSG 7 huyện Y Yên 2021 - 2022)

Tìm tất cả các giá trị nguyên x, y thỏa mãn: $2^x + 37 = |y - 45| + y - 45$.

Lời giải

Với mọi giá trị của y nguyên thì $|y - 45|$ và $y - 45$ luôn có cùng tính chẵn hay tính lẻ, suy ra $|y - 45| + y - 45$ luôn có giá trị là số nguyên chẵn

Do đó $2^x + 37$ là số nguyên chẵn, mà 37 là số lẻ nên 2^x là số nguyên lẻ $2^x = 1 \Rightarrow x = 0$.

Với $x = 0$, ta có $1 + 37 = |y - 45| + y - 45 \Leftrightarrow |y - 45| + (y - 45) = 38$ (*)

+ Trường hợp 1: $(y - 45) < 0 \Rightarrow |y - 45| = -(y - 45)$

Khi đó (*) trở thành: $-(y - 45) + (y - 45) = 38 \Rightarrow 0 = 38$, điều này vô lí.

+ Trường hợp 2: $(y - 45) \geq 0 \Rightarrow |y - 45| = (y - 45)$

Khi đó (*) trở thành: $(y - 45) + (y - 45) = 38 \Rightarrow y - 45 = 19 \Rightarrow y = 64$ (chọn)

Vậy $(x; y) = (0; 64)$.

Câu 57. (HSG 7 huyện Lục Ngạn 2021 - 2022)

Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$, biết: $xy + 3x - 2y = 11$.

Lời giải

Ta có: $xy + 3x - 2y = 11$

$$xy + 3x - 2y - 6 = 5$$

$$x(y + 3) - 2(y + 3) = 5$$

$$(x - 2)(y + 3) = 5$$

Vì x, y là số nguyên nên $5 : (x - 2) \Rightarrow (x - 2) \in \{1; -1; 5; -5\}$

Ta có bảng sau:

$x -$	1	-1	5	
$y +$	5	-5	1	
x	3	1	7	
y	2	-8	-2	

Vậy các cặp $(x; y)$ thỏa mãn là: $(3; 2); (1; -8); (7; -2); (-3; -4)$.

Câu 58. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2021 - 2022)

Cho biểu thức $A = \frac{x+3}{x-2}$. Tìm số nguyên x để A có giá trị nguyên.

Lời giải

ĐK: $x \neq 2$

$$A = \frac{x+3}{x-2} = 1 + \frac{5}{x-2}$$

A có giá trị nguyên khi và chỉ khi $\frac{5}{x-2}$ nguyên.

Do x nguyên nên $x-2 \in U(5) = \{-1; 1; -5; 5\}$

Lập bảng ta được: $x \in \{-1; 1; 3; 7\}$ (TMĐK)

Vậy $x \in \{-1; 1; 3; 7\}$ thì A có giá trị nguyên.

Câu 59. (HSG 7 huyện Lục Nam 2020 - 2021)

Tìm x, y nguyên thỏa mãn: $2xy - y = 4x + 3$

Lời giải

Theo bài ra ta có:

$$2xy - y = 4x + 3$$

$$2xy - 4x - y + 2 = 5$$

$$2x(y-2) - (y-2) = 5$$

$$(2x-1)(y-2) = 5$$

$$(2x-1)(y-2) = 5 = 1.5 = 5.1 = (-1).(-5) = (-5).(-1)$$

Lập bảng ta tìm được: $(x; y) \in \{(1; 7), (3; 3), (-2; 1), (0; -3)\}$

Vậy: $(x; y) \in \{(1; 7), (3; 3), (-2; 1), (0; -3)\}$

Câu 60. (HSG 7 huyện Quan Hoa 2021 - 2022)

Tìm x, y nguyên biết: $100 - y^2 = 8(x - 2021)^2$

Lời giải

Tìm x, y nguyên biết: $100 - y^2 = 8(x - 2021)^2$

Ta có: $100 - y^2 \leq 100$

$$\Rightarrow 8(x - 2021)^2 \leq 100$$

$$\Rightarrow (x - 2021)^2 \leq 12,5$$

Do x, y nguyên nên $(x - 2021)^2$ và y^2 là số chính phương, nên

+ TH 1: $(x - 2021)^2 = 0 \Rightarrow x = 2021$ thay vào $\Rightarrow y = 10; y = -10$.

+ TH 2: $(x - 2021)^2 = 1 \Rightarrow x = 2022$ hoặc $x = 2020$

Khi đó: $y^2 = 92$ (loại)

+ TH 3: $(x - 2021)^2 = 4 \Rightarrow x = 2023$ hoặc $x = 2019$

Khi đó: $y^2 = 68$ (loại)

+ TH 4: $(x - 2021)^2 = 9 \Rightarrow x = 2024$ hoặc $x = 2018$

Khi đó: $y^2 = 28$ (loại)

Vậy $x = 2021; y = 10$ và $x = 2021; y = -10$.

Câu 61. (HSG 7 huyện Triệu Sơn, tỉnh Thanh Hóa, 2021 - 2022)

Tìm tất cả các số nguyên $x; y$ thỏa mãn: $2^x + 37 = |y - 45| + y - 45$

Lời giải

Nhận xét:

+ Với $a \geq 0$ thì $|a| + a = 2a$.

+ Với $a < 0$ thì $|a| + a = -a + a = 0$.

Do đó $|a| + a$ luôn là số chẵn với $\forall a \in \mathbb{Z}$.

Áp dụng nhận xét trên $\Rightarrow |y - 45| + y - 45$ là số chẵn $\forall y \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow 2^x + 37$ là số chẵn $\Rightarrow 2^x$ là số lẻ $\Rightarrow x = 0$.

$\Rightarrow |y - 45| + y - 45 = 38$

+ Nếu $y < 45 \Rightarrow -(y - 45) + y - 45 = 38 \Rightarrow 0 = 38$ (loại)

+ Nếu $y \geq 45 \Rightarrow 2(y - 45) = 38 \Leftrightarrow y - 45 = 19 \Rightarrow y = 64$ (thỏa mãn)

Vậy $(x; y) = (0; 64)$.

Câu 62. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Như Thanh 2021 - 2022)

Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn: $x^2y = 3 + 2xy + x$.

Lời giải

Ta có: $x^2y = 3 + 2xy + x$

$\Rightarrow x^2y - 2xy - x = 3$

$\Rightarrow x(xy - 2y - 1) = 3$

Do $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $x; xy - 2y - 1 \in \mathbb{Z}$

Mà $3 = 1.3 = (-1).(-3)$ nên ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\begin{cases} x = 1 \\ xy - 2y - 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y - 2y - 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2: $\begin{cases} x = 3 \\ xy - 2y - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 3y - 2y - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Trường hợp 3: $\begin{cases} x = -1 \\ xy - 2y - 1 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ -y - 2y - 1 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$ (loại)

Trường hợp 4: $\begin{cases} x = -3 \\ xy - 2y - 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ -3y - 2y - 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn: $(1; -4), (3; 2), (-3; 0)$.

Câu 63. (HSG 7 huyện Thanh Miện, Hải Dương 2021 - 2022)

Tìm $x; y \in \mathbb{Z}$ biết: $xy + 2x - y = 5$.

Lời giải

Ta có: $xy + 2x - y = 5$

$$\Rightarrow x(y + 2) - (y + 2) = 3$$

$$\Rightarrow (y - 2)(x - 1) = 3$$

Ta có : $3 = 3.1 = 1.3 = (-1).(-3) = (-3).(-1)$

Lập bảng

$y + 2$	3	1	-1	-3
$x - 1$	1	3	-3	-1
x	2	4	-2	0
y	1	-1	-3	-5

Vậy: $(x; y) \in \{(2; 1); (4; -1); (-2; -3); (0; -5)\}$

Câu 64. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Chương Mỹ 2021 - 2022)

Tìm x, y nguyên biết: $xy + 3x - y = 6$

Lời giải

Ta có $xy + 3x - y = 6 \Leftrightarrow (x - 1)(y + 3) = 3$

Do $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $x - 1; y + 3 \in \mathbb{Z}$

Mà $3 = 1.3 = (-1).(-3)$ nên ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\begin{cases} x - 1 = 1 \\ y + 3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2: $\begin{cases} x - 1 = -1 \\ y + 3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -6 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Trường hợp 3: $\begin{cases} x - 1 = 3 \\ y + 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Trường hợp 4: $\begin{cases} x - 1 = -3 \\ y + 3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ là $(2; 0); (0; -6); (4; -2); (-2; -2)$.

Câu 65. (HSG 7 huyện Cao Lộc 2012 - 2022)

Tìm số nguyên x, y thỏa mãn: $x + xy + y = 2$

Lời giải

Ta có: $x + xy + y = 2$

$$x(y + 1) + y + 1 - 1 = 2$$

$$(y + 1)(x + 1) = 3$$

Với $x; y$ nguyên $\Rightarrow y + 1; x + 1$ là các số nguyên

$$\Rightarrow y + 1; x + 1 \text{ là các ước của } 3$$

Ta có bảng giá trị (x, y) như sau:

$x+1$	1	3	-3	-1
$y+1$	3	1	-1	-3
x	0	2	-4	-2
y	2	0	-2	-4

Vậy các cặp số (x, y) cần tìm là $(x, y) = \{(0; 2); (2; 0); (-4; -2); (-2; -4)\}$

Câu 66. (HSG 7 trường Nguyễn Khuyến 2017 - 2018)

Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ biết $2xy + 3x = 4$

Lời giải

$$2xy + 3x = 4 \Rightarrow x(2y + 3) = 4$$

Do $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $x \in U(4) = \{1; -1; 2; -2; 4; -4\}$ và $2y + 3$ là số lẻ.

+ Nếu $x = 1 \Rightarrow 2y + 3 = 4$ (loại)

+ Nếu $x = -1 \Rightarrow 2y + 3 = -4$ (loại)

+ Nếu $x = 2 \Rightarrow 2y + 3 = 2$ (loại)

+ Nếu $x = -2 \Rightarrow 2y + 3 = -2$ (loại)

+ Nếu $x = 4 \Rightarrow 2y + 3 = 1 \Rightarrow y = -1$ (thỏa mãn)

+ Nếu $x = -4 \Rightarrow 2y + 3 = -1 \Rightarrow y = -2$ (thỏa mãn)

Vậy $(x, y) \in \{(-4; -2); (4; -1)\}$.

Câu 67. (HSG 7 huyện Tân Kỳ 2021 - 2022)

Tìm số nguyên x, y biết rằng: $xy + 2x - y = 5$

Lời giải

$$\text{Ta có } xy + 2x - y = 5 \Rightarrow (y + 2)(x - 1) = 3$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $y + 2 \in \mathbb{Z}; x - 1 \in \mathbb{Z}$, nên ta có bảng:

$x-1$	1	3	-1	-3
$y+2$	3	2	-3	-1
x	2	4	0	-2
y	1	-1	-5	-3

Kết hợp với ĐK ta được $(x, y) \in \{(2; 1); (4; -1); (0; -5); (-2; -3)\}$

Câu 68. (HSG 7 thành phố Thái Bình, trường Trần Lãm 2022 - 2023)

Cho biểu thức: $A = \frac{7x-8}{2x-3}$ với $x \neq \frac{3}{2}$

Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A có giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{7x-8}{2x-3} = \frac{7}{2} \frac{(2x-3)-8+\frac{21}{2}}{2x-3} = \frac{7}{2} + \frac{\frac{5}{2}}{2x-3} \quad (x \in \mathbb{Z})$$

A lớn nhất khi $\frac{5}{2x-3}$ lớn nhất khi $(2x-3)$ là số nguyên dương nhỏ nhất
 $\Rightarrow 2x-3=1 \Rightarrow x=2$ (Thỏa mãn điều kiện x nguyên)

Thay $x=2$ vào biểu thức $A = \frac{7}{2} + \frac{5}{2x-3} = 6$

Vậy $x=2$ thì giá trị lớn nhất của biểu thức A bằng 6.

Câu 69. (HSG 7 huyện Bá Thước, Thanh Hóa 2021 - 2022)

Tìm cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn: $x^2 - 6x + 8 = xy - 5y$

Lời giải

Ta có $x^2 - 6x + 8 = xy - 5y \Rightarrow y(x-5) = x^2 - 6x + 8$
 $\Rightarrow x(x-5) - (x-5) + 3 - y(x-5) = 0$
 $\Rightarrow (x-5)(x-y-1) = -3$

Vì x, y là các số nguyên nên $x-5, x-y-1 \in U(-3) = \{-3; -1; 1; 3\}$

Ta có bảng sau

$x-5$	1	-1	3	-3
$x-y-1$	-3	3	-1	1
x	6	4	8	2
y	8	0	8	0

Vậy các cặp (x, y) thỏa mãn bài toán là $(6; 8), (4; 0), (8; 8), (2; 0)$

Câu 70. (HSG 7 huyện Cẩm Thủy 2021 - 2022)

Tìm cặp số (x, y) nguyên thỏa mãn $x^2 - x(y+5) = -4y - 9$

Lời giải

Ta có $x^2 - x(y+5) = -4y - 9$

$x^2 - xy - 5x = -4y - 9$

$x^2 - 5x + 9 = xy - 4y$

$x^2 - 5x + 9 = y(x-4)$

Nếu $x=4$ thì suy ra $4^2 - 5 \cdot 4 + 9 = 0$ vô lý. Vậy $x \neq 4$

Với $x \neq 4$ ta có $y = \frac{x^2 - 5x + 9}{x-4} = \frac{x^2 - 4x - x + 4 + 5}{x-4} = x-1 + \frac{5}{x-4}$

Do x nguyên nên $x-1$ nguyên, do vậy để y nguyên thì $\frac{5}{x-4}$ nguyên hay $5 : x-4$

$\Rightarrow x-4 \in \{-5; -1; 1; 5\} \Rightarrow x \in \{-1; 3; 5; 9\}$

Với $x=-1$ thì $y=-3$

Với $x=3$ thì $y=-3$

Với $x = 9$ thì $y = 9$

Với $x = 5$ thì $y = 9$

Vậy $(x; y) \in \{(-1; -3); (3; -3); (5; 9); (9; 9)\}$

Câu 71. (HSG 7 huyện Mường La 2021 - 2021)

Tìm số tự nhiên n để phân số $\frac{7n-8}{2n-3}$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải

$$\text{Đặt } P = \frac{7n-8}{2n-3} \Rightarrow 2P = \frac{14n-16}{2n-3} = 7 + \frac{5}{2n-3}$$

$$P \text{ có GTLN} \Rightarrow 2P \text{ có GTLN} \Rightarrow \frac{5}{2n-3} \text{ có GTLN}$$

Vì $n \in \mathbb{N} \Rightarrow 2n-3 \in \mathbb{N}$ và $2n-3$ là số tự nhiên lẻ

$$\Rightarrow 2n-3=1 \Rightarrow n=2$$

Vậy P có GTLN bằng 6 khi $n=2$

Câu 72. (HSG 7 huyện Mường La 2021 - 2021)

Tìm số nguyên $x; y$ sao cho $x - 2xy + y = 0$

Lời giải

$$\text{Ta có : } x - 2xy + y = 0 \Rightarrow 2x - 4xy + 2y = 0 \Rightarrow (2x-1) - 2y(2x-1) = -1 \Rightarrow (2x-1)(1-2y) = -1$$

$$\text{Vì } x; y \in \mathbb{Z} \Rightarrow (2x-1); (1-2y) \in \mathbb{Z} \Rightarrow (2x-1)(1-2y) = -1 = 1 \cdot (-1) = (-1) \cdot 1$$

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} 2x-1=1 \\ 1-2y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 2: } \begin{cases} 2x-1=-1 \\ 1-2y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Vậy: $(x; y) \in \{(1; 1); (0; 0)\}$

Câu 73. (HSG 7 huyện Lý Nhân 2021 - 2022)

Tìm số nguyên y để biểu thức $D = |y-4| + |y-10|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

$$\text{Ta có } |a| = |-a| \text{ và } |a| + |b| \geq |a+b|.$$

Dấu “=” xảy ra khi a, b cùng dấu hoặc ít nhất một số bằng 0.

$$\text{Áp dụng } D = |y-4| + |y-10| = |y-4| + |-y+10| \geq |y-4+10-y| \geq 6$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } (y-4)(10-y) \geq 0 \Rightarrow 4 \leq y \leq 10.$$

Vì y nguyên nên $y = \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$

Câu 74. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2021 - 2022)

Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $4x - 5y - 6xy + 7 = 0$

Lời giải

$$4x - 5y - 6xy + 7 = 0$$

$$(4x - 6xy) - 5y + 7 = 0$$

$$2x(2-3y) + \frac{5}{3}(2-3y) + \frac{11}{3} = 0$$

$$6x(2-3y) + 5(2-3y) = -11$$

$$(2-3y)(6x+5) = -11$$

$$\text{Vì } x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} 2-3y \in \mathbb{Z} \\ 6x+5 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ta có bảng sau:

$2-3y$	-1	11	1	-11
$6x+5$	11	-1	-11	1
y	1	-3	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{3}$
x	1	-1	$\frac{-8}{3}$	$\frac{-2}{3}$

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn là $(1; 1)$ và $(-1; -3)$

Câu 75. (HSG 7 huyện Tam Nông 2021 - 2022)

Tìm số nguyên x để tích hai phân số $\frac{3}{x-1}$ và $\frac{x+1}{3}$ là một số nguyên.

Lời giải

Tích hai phân số $\frac{3}{x-1}$ và $\frac{x+1}{3}$ là $\frac{3}{x-1} \cdot \frac{x+1}{3} = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$.

Vì $1 \in \mathbb{Z}$, $\frac{3}{x-1} \cdot \frac{x+1}{3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{2}{x-1} \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow x-1 \in U\{2\} = \{-1; -2; 1; 2\}$.

$\Rightarrow x \in \{0; -1; 2; 3\}$

Vậy $x \in \{0; -1; 2; 3\}$.

Câu 76. (HSG 7 huyện Chương Mỹ 2018 - 2019)

Tìm các cặp số nguyên dương $(a; b)$ biết: $3a - b + ab = 8$.

Lời giải

Ta có $3a - b + ab = 8$.

$(ab - b) + (3a - 3) = 5$.

$b(a-1) + 3(a-1) = 5$.

$(a-1)(b+3) = 5$.

Lập bảng ta có:

$a-1$	1	5	-1	-5
a	2	6	0	-4

$b+3$	5	1	-5	-1
b	2	-2	-8	-4
Xét	Thỏa mãn	Loại	Loại	Loại

Vậy các cặp số nguyên dương $(a ; b)$ cần tìm là $(2 ; 2)$.

Câu 77. (HSG 7 huyện Cát Tiên, 2018 - 2019)

Tìm các số nguyên x để biểu thức sau có giá trị là một số nguyên $y = \frac{2x-3}{x-2}$.

Lời giải

Biểu thức $y = \frac{2x-3}{x-2}$ có giá trị nguyên $\Leftrightarrow 2x-3 : x-2$.

$$\Rightarrow 2(x-2) + 1 : x-2 \Rightarrow 1 : x-2 \Rightarrow x-2 = 1 \text{ hoặc } x-2 = -1 \Rightarrow x = 3 \text{ hoặc } x = 1.$$

Vậy $x \in \{3; 1\}$.

Câu 78. (HSG 7 huyện Thiệu Hóa 2020 - 2021)

Tìm cặp số $(x ; y)$ nguyên thỏa mãn: $x - 2xy + y - 3 = 0$.

Lời giải

Tìm cặp số $(x ; y)$ nguyên thỏa mãn: $x - 2xy + y - 3 = 0$.

Ta có: $x - 2xy + y - 3 = 0$.

$$\Rightarrow x(1-2y) + y = 3.$$

$$\Rightarrow 2x(1-2y) + 2y = 6.$$

$$\Rightarrow 2x(1-2y) + 2y - 1 = 6 - 1.$$

$$\Rightarrow (2x-1)(1-2y) = 5 \quad (1).$$

$$\Rightarrow 2x-1 \in \text{ệ}(5) \text{ (vì } x, y \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow 2x-1 \in \{1; -1; 5; -5\} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có bảng:

$2x-1$	1	5	-1	-5
$1-2y$	5	1	-5	-1
x	1	3	0	-2
y	-2	0	3	1
	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Vậy $(x, y) \in \{(1 ; -2), (0 ; 3), (3 ; 0), (-2 ; 1)\}$.

Câu 79. (HSG 7 huyện Hương Khê 2021 - 2022)

Tìm số nguyên x và y biết: $\frac{5}{x} + \frac{y}{2} = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{5}{x} + \frac{y}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{1}{4} - \frac{y}{2} \Rightarrow x(1-2y) = 20.$

Vì x và y nguyên mà $1-2y$ là số lẻ nên ta có bảng sau:

x	-20	20	-4	4
$1-2y$	1	-1	-5	5
y	0	1	3	-2

Vậy ta có các cặp số $(x ; y) \in \{(-20 ; 0); (20 ; 1); (-4 ; 3); (4 ; -2)\}.$

Câu 80. (HSG 7 huyện Kinh Môn 2021 - 2022)

Tìm số nguyên x và y biết: $x + xy + y = 2.$

Lời giải

Ta có: $x + xy + y = 2.$

$x(y+1) + y + 1 = 3.$

$(x+1)(y+1) = 3.$

Do x, y nguyên nên $x+1; y+1$ cũng nguyên.

Do đó: $x+1 \in \{3\}$ (vì $x, y \in \mathbb{Z}$).

$\Rightarrow x+1 \in \{1; -1; 3; -3\}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có bảng:

$x+1$	1	-1	3	-3
$y+1$	3	-3	1	-1
x	0	-2	2	-4
y	2	-4	0	-2
	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Vậy $(x ; y) \in \{(0 ; 2); (2 ; 0); (-2 ; -4); (-4 ; -2)\}.$

Câu 81. (HSG 7 trường Hồng Đà, huyện Tam Nông 2015 - 2016)

Tìm các số nguyên x, y biết: $x - 2xy + y = 0$

Lời giải

$x - 2xy + y = 0$

$\Rightarrow 2x - 4xy + 2y - 1 = -1$

$\Rightarrow 2x(1-2y) - (1-2y) = -1$

$\Rightarrow (2x-1)(1-2y) = -1 \Rightarrow 2x-1 \in U(1) = \{1; -1\}$

+ Với $2x-1=1$ thì $1-2y=-1 \Rightarrow x=1; y=1$

+ Với $2x-1=-1$ thì $1-2y=1 \Rightarrow x=0; y=0$

Vậy $(x, y) \in \{(0;0); (1;1)\}.$

Câu 82. (HSG 7 Huyện Sơn Dương - 2016 - 2017)

Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $x + xy + y = 9$

Lời giải

$$\text{Từ } x + xy + y = 9 \Rightarrow x(y+1) + (y+1) = 10$$

$$\Rightarrow (y+1)(x+1) = 10$$

$$\Rightarrow (x+1) \in U(10) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10\}$$

Ta có bảng giá trị:

$x+1$	-1	1	-2	2	-5	5	-10	10
x	-2	0	-3	1	-6	4	-11	9
$y+1$	-10	10	-5	5	-2	2	-1	1
y	-11	9	-6	4	-1	1	-2	0

$$\text{Vậy } (x; y) \in \{(-2; -11), (0; 9), (-3; -6), (1; 4), (-6; -1), (4; 1), (-11; -2), (9; 0)\}$$

Câu 83. (HSG 7 Huyện Minh An 2016 - 2017)

Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ biết: $xy + 2x - y = 5$

Lời giải

$$\text{Ta có: } xy + 2x - y = 5$$

$$\Rightarrow x(y+2) - (y+2) = 3$$

$$\Rightarrow (x-1)(y+2) = 3$$

$$\Rightarrow (y+2) \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$$

Ta có bảng giá trị:

$y+2$	3	1	-1	-3
$x-1$	1	3	-3	-1
x	2	4	-2	0
y	1	-1	-3	-5

$$\text{Vậy } (x; y) \in \{(2; 1), (4; -1), (-2; -3), (0; -5)\}$$

Câu 84. (HSG 7 trường Tam Hưng 2013 - 2014)

Tìm tất cả các cặp số nguyên (m, n) thỏa mãn:

a) $2^m - 2^n = 2048$

b) $3m + 4n - mn = 16$

Lời giải

$$\text{a) } 2^m - 2^n = 2048 \Rightarrow 2^n \cdot (2^{m-n} - 1) = 2^{11}$$

Do $2^m - 2^n = 2048$ nên $m > n$

Khi đó $2^{m-n} - 1$ là số lẻ

$$+ \text{ Nếu } 2^{m-n} - 1 = 1 \Rightarrow \begin{cases} m-n=1 \\ 2^n=2^{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=12 \\ n=11 \end{cases}$$

+ Nếu $2^{m-n} - 1 > 1 \Rightarrow 2^{m-n} > 2 \Rightarrow m - n > 1$

Khi đó $2^{m-n} - 1$ không chia hết cho 2

Mà $2^n \cdot (2^{m-n} - 1) = 2^{11}$, $m, n \in \mathbb{Z}$

Suy ra vô lý

Vậy $m = 12$; $n = 11$.

b) $3m + 4n - mn = 16$

$3m - mn + 4n - 12 = 4$

$(3 - n)(m - 4) = 4$

$\Rightarrow (3 - n) \in U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$

$3 - n$	-1	1	-2	2	-4	4
n	4	2	5	1	7	-1
$m - 4$	-4	4	-2	2	-1	1
m	0	8	2	6	3	5

Vậy $(m; n) \in \{(0; 4), (8; 2), (2; 5), (6; 1), (3; 7), (5; -1)\}$

Câu 85. (HSG 7 trường Nguyễn Khuyến 2015 - 2016)

Tìm các số nguyên x, y biết: $x^2 + 2x - 8y^2 = 41$

Lời giải

$x^2 + 2x - 8y^2 = 41$

$\Rightarrow (x + 1)^2 = 42 + 8y^2$

Ta thấy $(x + 1)^2$ là số chẵn $\Rightarrow (x + 1)^2$ chia hết cho 4

Mà $42 + 8y^2$ không chia hết cho 4

Vậy không có số nguyên x, y thỏa mãn đề bài.

Câu 86. (HSG 7 huyện Vĩnh Tường 2015 - 2016)

Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn: $3x(3y - 2) + 3y = 9$

Lời giải

$3x(3y - 2) + 3y = 9$

$\Rightarrow 3x(3y - 2) + 3y - 2 = 7$

$\Rightarrow (3y - 2)(3x + 1) = 7$

$\Rightarrow (3y - 2)$ là ước tự nhiên của 7

Ta có bảng giá trị:

$3y - 2$	7	1	-1	-7
$3x + 1$	1	7	-7	-1
x	0	2	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{2}{3}$

y	3	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$
Kết luận	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Loại	Loại

Vậy $(x, y) \in \{(0; 3); (2; 1)\}$.

Câu 87. (HSG 7 huyện Ngọc Lặc, trường Nguyệt Ân 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên x, y biết rằng $2xy + 5x + 3y = 1$.

Lời giải

Ta có:

$$2xy + 5x + 3y = 1$$

$$4xy + 10x + 6y = 2$$

$$2x(2y + 5) + 3(2y + 5) = 17$$

$$(2x + 3)(2y + 5) = 17$$

Vì $x; y$ nguyên nên $2x + 3; 2y + 5$ nguyên

Lại có $17 = 1.17 = 17.1 = (-1).(-17) = (-17).(-1)$. Nên ta có:

$$\text{Nếu } 2x + 3 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \text{ thì } 2y + 5 = 17 \Leftrightarrow y = 6$$

$$\text{Nếu } 2x + 3 = -1 \Leftrightarrow x = -2 \text{ thì } 2y + 5 = -17 \Leftrightarrow y = -11$$

$$\text{Nếu } 2x + 3 = 17 \Leftrightarrow x = 7 \text{ thì } 2y + 5 = 1 \Leftrightarrow y = -2$$

$$\text{Nếu } 2x + 3 = -17 \Leftrightarrow x = -10 \text{ thì } 2y + 5 = -1 \Leftrightarrow y = -3$$

Vậy các giá trị x, y cần tìm là: $(x; y) \in \{(-1; 6); (-2; -11); (7; -2); (-10; -3)\}$

Câu 88. (HSG 7 huyện Sóc Sơn 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên x, y sao cho $xy + 2x - y = 5$.

Lời giải

$$\text{Ta có } xy + 2x - y = 5$$

$$x(y + 2) - (y + 2) = 3$$

$$(x - 1).(y + 2) = 3$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $x - 1$ và $y + 2$ là ước của 3 $\Rightarrow x - 1 \in \{-3; -1; 1; 3\}$

Ta có bảng giá trị sau:

$x - 1$	-3	-1	1	3
$y + 2$	-1	-3	3	1
x	-2	0	2	4
y	-3	-5	1	-1

Vậy $(x; y) \in \{(0; -5); (-2; -3); (4; -1); (2; 1)\}$

Câu 89. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Tìm số nguyên a sao cho $a^2 + 2a + 3$ chia hết $a + 1$.

Lời giải

Ta có: $a^2 + 2a + 3 = a(a+1) + (a+1) + 2 = (a+1)^2 + 2$

Để $a^2 + 2a + 3$ chia hết $a+1$ thì $2 : a+1$

$$\Rightarrow a+1 \in U(2) \Rightarrow a+1 \in \{-2; -1; 1; 2\}$$

$$\Rightarrow a \in \{-3; -2; 0; 1\}$$

Để $a^2 + 2a + 3$ chia hết $a+1$ thì $a \in \{-3; -2; 0; 1\}$

Câu 90. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên tố x, y thỏa mãn $(x-1)(x+1) = 6y^2$

Lời giải

Vì $6y^2 : 2$ nên $(x-1)(x+1) : 2$

Vì $(x-1) + (x+1) = 2x : 2$ nên $x-1; x+1$ cùng tính chẵn lẻ

Suy ra $x-1; x+1$ là hai số chẵn liên tiếp.

Do đó $(x-1)(x+1) : 8$

$$\Rightarrow 6y^2 : 8 \Rightarrow 3y^2 : 4 \Rightarrow y^2 : 4 \Rightarrow y : 2$$

Mà y là số nguyên tố nên $y = 2$

- Thay $y = 2$ vào $(x-1)(x+1) = 6y^2 \Rightarrow (x-1)(x+1) = 24 \Rightarrow (x-1)(x+1) = 4.6$

$$\Rightarrow x = 5 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $(x; y) = (5; 2)$

Câu 91. (HSG 7 huyện Nho Quan 2022 - 2023)

Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn: $xy + 3x - y = 6$.

Lời giải

$$xy + 3x - y = 6$$

$$x(y+3) - (y+3) = 3$$

$$(x-1)(y+3) = 3$$

Vì $x; y$ nguyên nên $x-1; y+3$ nguyên

Lại có: $3 = 1.3 = 3.1 = (-1).(-3) = (-3).(-1)$

Ta có bảng sau:

$x-1$	1	3	-1	-3
$y+3$	3	1	-3	-1
x	2	4	0	-2
y	0	-2	-6	-4

Vậy $(x; y) \in \{(2; 0); (4; -2); (0; -6); (-2; -4)\}$

Câu 92. (HSG 7 huyện Sơn Động 2022 - 2023)

Tìm số tự nhiên x, y thỏa mãn: $7(x-2023)^2 = 23 - y^2$.

Lời giải

Vì $7(x-2023)^2 \geq 0$ mà $7(x-2023)^2 = 23 - y^2 \Rightarrow 23 - y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq 23 \Rightarrow y^2 \leq 23$.

Do $y \in \mathbb{N} \Rightarrow y \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

Vì 7 là số nguyên tố $\Rightarrow 23 - y^2 : 7$. Suy ra $y \in \{3; 4\}$.

+ Với $y = 3 \Rightarrow 7(x-2023)^2 = 14 \Rightarrow (x-2023)^2 = 2$ (loại).

+ Với $y = 4 \Rightarrow 7(x-2023)^2 = 7 \Rightarrow (x-2023)^2 = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} x-2023 = -1 \\ x-2023 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2022 \\ x = 2024 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy $(x, y) \in \{(2022; 4); (2024; 4)\}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 93. (HSG 7 huyện Lâm Thao 2022 - 2023)

Tim các số nguyên dương x, y sao cho $2x - xy + 3y = 9$.

Lời giải

Từ : $2x - xy + 3y = 9$

$\Rightarrow (2 - y)x + 3(y - 2) = 9 \Leftrightarrow (2 - y)(x - 3) = 3$.

Suy ra $3 : (x - 3) \Rightarrow (x - 3)$ là ước của 3.

Suy ra $(x - 3) \in \{-3; -1; 1; 3\}$

Ta có bảng

$x - 3$	-3	-1	1	3
$2 - y$	-1	-3	3	1
x	0	2	4	6
y	3	5	-1	1
	Loại	T/m	Loại	T/m

Vậy cặp số $(x = 2; y = 5)$ hoặc $(x = 6; y = 1)$ như trên thỏa mãn điều kiện đề bài

Câu 94. (HSG 7 huyện Lâm Thao 2022 - 2023)

Tim các số nguyên m để $(m+1)(m^2 + 2m)$ là một số chính phương

Lời giải

Ta có $(m+1)(m^2 + 2m)$ là một số chính phương.

Suy ra $(m+1)(m^2 + 2m) = k^2$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Vì $k^2 \geq 0 \Rightarrow (m+1)(m^2 + 2m) \geq 0$

Với $m < -2 \Rightarrow (m+1)(m^2 + 2m) < 0$ (loại)

Với $m \in \{-2; -1; 0\}$ ta đều có $k^2 = 0$ (thỏa mãn)

Với $m > 0$ ta có $k^2 = (m+1)(m^2 + 2m)$

Gọi d là một ước chung nguyên tố của $m+1$ và $m^2 + 2m$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} m+1:d \\ m^2+2m:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m+1:d \\ m:d \end{cases} \Rightarrow 1:d \Rightarrow d=1$$

Nên $(m+1)(m^2+2m)$ là một số chính phương khi $m+1$ và m^2+2m đều là số chính phương.

Để m^2+2m là số chính phương thì $m^2+2m = a^2$ ($a \in \mathbb{Z}$).

$$\text{Suy ra } (m+1)^2 - 1 = a^2 \Rightarrow (m+1+a)(m+1-a) = 1$$

$$\Rightarrow m+1+a = m+1-a \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -2 \end{cases} \text{ (không thoả mãn)}$$

Vậy $m \in \{-2; -1; 0\}$ thì $(m+1)(m^2+2m)$ là một số chính phương.

Câu 95. (HSG 7 huyện Tam Nông 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên x, y sao cho $x^2 + 2x + y = xy$.

Lời giải

$$x^2 + 2x + y = xy$$

$$\Rightarrow (x^2 - 2x + 1) + (4x - 4) + 3 + y = xy$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + 4(x-1) + y - xy = -3$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + 4(x-1) + y(1-x) = -3$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + 4(x-1) - y(x-1) = -3$$

$$\Rightarrow (x-1)[(x-1) + 4 - y] = -3$$

$$\Rightarrow (x-1)[x + 3 - y] = -3$$

Ta có bảng giá trị:

$x-1$	1	-3	-1	3
$x+3-y$	-3	-1	x	-1
x	2	-2	0	4
y	8	0	0	8

Vậy $(x; y) \in \{(2; 8); (-2; 0); (0; 0); (4; 8)\}$.

Câu 96. (HSG 7 huyện Thanh Thủy 2022 - 2023)

Tìm các cặp số nguyên x, y biết: $2xy - 10x - 5y = -15$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2xy - 10x - 5y = -15 \Leftrightarrow (2x-5)(y-5) = 10$$

Vì x, y nguyên nên $2x-5$ và $y-5$ là ước của 10

Mà $2x-5$ là số nguyên lẻ nên $2x-5 \in \{\pm 1; \pm 5\}$

Lập bảng giá trị ta có:

$2x-5$	-5	-1	1	5
--------	----	----	---	---

$y-5$	-2	-10	10	2
x	0	2	3	5
y	3	-5	15	7

Vậy $(x, y) = \{(0;3);(2;-5);(3;15);(5;7)\}$

Câu 97. (HSG 7 huyện Thiệu Hóa 2022 - 2023)

Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $2x^2 + y^2 + 2xy + 2x = 4$

Lời giải

Ta có: $2x^2 + y^2 + 2xy + 2x = 4$

$$x^2 + 2x + 1 + x^2 + 2xy + y^2 = 5$$

$$(x^2 + 2x + 1) + (x^2 + 2xy + y^2) = 5$$

$$(x+1)^2 + (x+y)^2 = 5$$

Vì x, y nguyên nên ta có:

$$\text{TH1 } \begin{cases} x+1=1 \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$$

$$\text{TH2 } \begin{cases} x+1=1 \\ x+y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$$

$$\text{TH3 } \begin{cases} x+1=-1 \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$$

$$\text{TH4 } \begin{cases} x+1=-1 \\ x+y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\text{TH5 } \begin{cases} x+1=2 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\text{TH6 } \begin{cases} x+1=2 \\ x+y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$$

$$\text{TH7 } \begin{cases} x+1=-2 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=4 \end{cases}$$

$$\text{TH8 } \begin{cases} x+1=-2 \\ x+y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$$

Vậy cặp số $(x; y)$ thỏa mãn đề bài là: $(0; 2); (0; -2); (-2; 4); (-2; 0); (1; -2); (1; 0); (-3; 4); (-3; 2)$



CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS

CĐ3: CÁC BÀI TOÁN VỀ LŨY THỪA SỐ TỰ NHIÊN

Dạng 1: So sánh hai lũy thừa
Dạng 2: So sánh biểu thức lũy thừa với một số (so sánh hai biểu thức lũy thừa với nhau)
Dạng 3: Một số bài toán khác

Dạng 1. So sánh hai lũy thừa

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Ba 2021-2022)

Cho hai số $a = 2^{333}$ và $b = 3^{222}$. Khẳng định nào đúng

A. $a = b$

B. $a > b$

C. $a < b$

D. $3a = 2b$

Lời giải

Chọn A

Ta có : $a = 2^{333} = 2^{3 \cdot 111} = (2^3)^{111} = 8^{111}$

$b = 3^{222} = 3^{2 \cdot 111} = (3^2)^{111} = 9^{111}$

Vì $8^{111} < 9^{111}$ nên $a < b$.

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Mường La 2021 - 2022)

Sắp xếp các số hữu tỉ sau theo thứ tự tăng dần 2^{100} ; 3^{75} ; 5^{50}

Lời giải

Ta có $2^{100} = 16^{25}$; $3^{75} = 27^{25}$; $5^{50} = 25^{25}$

Mà: $0 < 16 < 25 < 27 \Rightarrow 16^{25} < 25^{25} < 27^{25}$

Vậy: $2^{100} < 5^{50} < 3^{75}$

Câu 2. (HSG 7 huyện Văn Lâm, tỉnh Hưng Yên 2022 - 2023)

Chứng tỏ rằng: $5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$.

Lời giải

Ta có: $2^{63} = (2^7)^9 = 128^9$

$5^{27} = (5^3)^9 = 125^9$

$\Rightarrow 2^{63} > 5^{27}$ (1)

Lại có: $2^{63} = (2^9)^7 = 512^7$

$5^{28} = (5^4)^7 = 625^7$

$\Rightarrow 2^{63} < 5^{28}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2018 - 2019)

So sánh: 222^{333} và 333^{222}

Lời giải

Ta có: $222^{333} = (222^3)^{111}$; $333^{222} = (333^2)^{111}$

$$222^3 = (2.111)^3 = 8.111^3 = 8.111.111^2 = 888.111^2$$

$$333^2 = (3.111)^2 = 9.111^2$$

Vì $888 > 9 \Rightarrow 888.111^2 > 9.111^2 \Rightarrow 222^3 > 333^2 \Rightarrow (222^3)^{111} > (333^2)^{111} \Rightarrow 222^{333} > 333^{222}$

Vậy $222^{333} > 333^{222}$

Câu 4. (HSG 7 huyện, trường 2022 - 2023)

So sánh hai số: 3^{30} và 5^{20}

Lời giải

$$3^{30} = (3^3)^{10} = 27^{10}; \quad 5^{20} = (5^2)^{10} = 25^{10} < 27^{10}$$

$$\Rightarrow 3^{30} > 5^{20}$$

Câu 5. (HSG 7 huyện, 2017 - 2018)

So sánh: 16^{20} và 2^{100}

Lời giải

Biến đổi $16^{20} = 2^{4.20} = 2^{80}$

Có $2^{80} < 2^{100}$

$$\Rightarrow 16^{20} < 2^{100}$$

Câu 6. (HSG 7 huyện)

So sánh hai A và B, biết: $A = 3^{21}$; $B = 2^{31}$

Lời giải

$$A = 3^{21} = 3 \cdot (3^2)^{10} = 3 \cdot 9^{10}$$

$$B = 2^{31} = 2 \cdot (2^3)^{10} = 2 \cdot 8^{10}$$

Vì $3 \cdot 9^{10} > 2 \cdot 8^{10}$ nên $A > B$

Câu 7. (HSG 7 huyện)

So sánh hai số: $(-5)^{39}$ và $(-2)^{91}$

Lời giải

$$(-5)^{39} = -5^{39} = -(5^3)^{13} = -125^{13}$$

$$(-2)^{91} = -2^{91} = -(2^7)^{13} = -128^{13}$$

Ta thấy:

$$125^{13} < 128^{13}$$

$$\Rightarrow -125^{13} > -128^{13}$$

$$\Rightarrow (-5)^{39} > (-2)^{91}$$

Câu 8. (HSG 7 trường Hồng Thái, Sơn Dương 2017 - 2018)

So sánh hai số 3^{50} và 5^{20} .

Lời giải

Ta có : $3^{30} = \left((3^3)^{10}\right) = 27^{10}$;

$5^{20} = (5^2)^{10} = 25^{10} < 27^{10}$

$\Rightarrow 3^{30} > 5^{20}$

Câu 9. (HSG 7 trường Lê Văn Tám 2017 - 2018; trường Nguyễn Khuyến 2015 - 2016)

So sánh hợp lý:

a) $\left(\frac{1}{16}\right)^{200}$ và $\left(\frac{1}{2}\right)^{1000}$

b) $(-32)^{27}$ và $(-18)^{39}$

Lời giải

a) Ta có: $\left(\frac{1}{16}\right)^{200} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4.200} = \left(\frac{1}{2}\right)^{800} > \left(\frac{1}{2}\right)^{1000}$

b) Ta có: $32^{27} = (2^5)^{27} = 2^{135} < 2^{156} = 2^{4.39} < 16^{39} < 18^{39}$

$\Rightarrow -32^{27} > -18^{39}$

$\Rightarrow (-32)^{27} > (-18)^{39}$

Câu 10. (HSG 7 trường Nguyễn Khuyến 2015 - 2016)

Biết $x \in \mathbb{Q}$ và $0 < x < 1$. Chứng minh $x^n < x$ với $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Lời giải

Xét $x^n - x = x(x^{n-1} - 1)$

Với $0 < x < 1 \Rightarrow x^{n-1} - 1 < 0$; $x > 0$

$\Rightarrow x^n - x < 0$

$\Rightarrow x^n < x$

Vậy $x^n < x$ với $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

Dạng 2: So sánh biểu thức lũy thừa với một số (so sánh hai biểu thức lũy thừa)

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 Phòng GD&ĐT Thanh Thủy 2022 - 2023)

Cho biểu thức $N = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$. Khẳng định đúng là

A. $N < \frac{3}{16}$.

B. $N > \frac{3}{16}$.

C. $\frac{3}{16} < N < \frac{3}{4}$.

D. $N > \frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $N = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$

$\Rightarrow 3N = 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{99}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}}$

$$\Rightarrow 4N = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}} < 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} \quad (1)$$

$$\text{Đặt } M = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}}$$

$$\Rightarrow 3M = 3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{97}} - \frac{1}{3^{98}} = 2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{97}} - \frac{1}{3^{98}}$$

$$4M = 3 - \frac{1}{3^{99}} < 3 \Rightarrow M < \frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow 4N < M < \frac{3}{4} \Rightarrow N < \frac{3}{16}$$

Câu 2. (HSG 7 Đề khảo sát lần 3 2022 - 2023)

Cho biểu thức $a = (-2)^{2020}$; $b = -3 \cdot (-2)^{2021}$. Kết luận nào sau đây là đúng?

- A. $a > b$. B. $a < b$. C. $a < -b$. D. $-a > b$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } a = (-2)^{2020} = 2^{2020}$$

$$b = -3 \cdot (-2)^{2021} = -3 \cdot (-2) \cdot (-2)^{2020} = 6 \cdot 2^{2020} > 2^{2020}$$

Do đó: $a < b$.

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Quảng Trạch 2021 - 2022)

Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ ta có: $A = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{12}$.

Lời giải

$$\text{Với } n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \text{ ta có: } A = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{n^3}$$

$$\Rightarrow 2A = \frac{2}{3^3} + \frac{2}{4^3} + \frac{2}{5^3} + \dots + \frac{2}{n^3}$$

Ta có:

$$\frac{2}{3^3} < \frac{2}{2.3.4} = \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4}$$

$$\frac{2}{4^3} < \frac{2}{3.4.5} = \frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5}$$

$$\frac{2}{5^3} < \frac{2}{4.5.6} = \frac{1}{4.5} - \frac{1}{5.6}$$

.....

$$\frac{2}{n^3} < \frac{2}{(n-1).n(n+1)} = \frac{1}{(n-1).n} - \frac{1}{n.(n+1)}$$

$$\Rightarrow 2A = \frac{2}{3^3} + \frac{2}{4^3} + \frac{2}{5^3} + \dots + \frac{2}{n^3} < \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5} + \frac{1}{4.5} - \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{(n-1).n} - \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow 2A < \frac{1}{2.3} - \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{12} - \frac{1}{2n(n+1)}$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{12}$$

Vậy $A = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{12}$ (với $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$).

Câu 2. (HSG 7 huyện Ninh Giang (Đợt 1), tỉnh Hải Dương 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2022}{3^{2022}} < \frac{3}{4}$.

Lời giải

Ta có $3A = 3\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2022}{3^{2022}}\right) = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{5}{3^4} + \dots + \frac{2022}{3^{2021}}$

$$3A - A = \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{5}{3^4} + \dots + \frac{2022}{3^{2021}}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2022}{3^{2022}}\right)$$

$$3A - A = 1 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2021}}\right) - \frac{2022}{3^{2022}}$$

Đặt $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2021}}$

$$3B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2020}}$$

$$3B - B = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2020}}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2021}}\right)$$

$$2B = 1 - \frac{1}{3^{2021}}$$

$$B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{2021}} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2A < 1 + \frac{1}{2} - \frac{2022}{3^{2022}}$$

$$\Rightarrow A < \frac{3}{4} - \frac{1011}{3^{2022}}$$

$$\Rightarrow A < \frac{3}{4}$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Chương Mỹ, Hà Nội 2022 - 2023)

Cho tổng $S = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \dots + \frac{1}{2024^2} + \frac{1}{2025^2}$. So sánh S với 1.

Lời giải

Ta có $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ ($k \in \mathbb{N}, k > 1$)

Thay $k = 10; k = 11; \dots, k = 2025$, ta có

$$S < \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{2024} - \frac{1}{2025}$$

$$\Rightarrow S < \frac{1}{9} - \frac{1}{2025} < 1$$

Vậy $S < 1$.

Câu 4. (HSG 7 thành phố Bắc Giang, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

Chứng minh rằng $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{4047}{2023^2 \cdot 2024^2} < 1$.

Lời giải

$$\begin{aligned} & \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{4047}{2023^2 \cdot 2024^2} \\ &= \frac{2^2 - 1^2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{4^2 - 3^2}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2024^2 - 2023^2}{2023^2 \cdot 2024^2} \\ &= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2023^2} - \frac{1}{2024^2} \\ &= 1 - \frac{1}{2024^2} \end{aligned}$$

Ta thấy $1 - \frac{1}{2024^2} < 1$

Do vậy $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{4047}{2023^2 \cdot 2024^2} < 1$

Câu 5. (HSG 7 thành phố Chí Linh, tỉnh Hải Dương 2022 - 2023)

Chứng minh $S = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{4^4} + \dots + \frac{2023}{4^{2023}} < \frac{1}{2}$

Lời giải

$$S = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{4^4} + \dots + \frac{2023}{4^{2023}}$$

$$\text{Nên ta có } 4S = 1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{4^3} + \dots + \frac{2023}{4^{2022}}$$

$$4S - S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2022}} - \frac{2023}{4^{2023}}$$

$$3S < 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2022}}$$

$$\text{Đặt } A = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2022}}$$

$$4A = 4 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{2021}}$$

$$4A - A = 4 - \frac{1}{4^{2022}}$$

$$\Rightarrow 3A < 4$$

$$\Rightarrow A < \frac{4}{3}$$

$$\text{Suy ra } S < \frac{4}{9} < \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } S = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{4^4} + \dots + \frac{2023}{4^{2023}} < \frac{1}{2}$$

Câu 6. (HSG 7 huyện Mùong Lát 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$. Chứng minh: $A < \frac{3}{16}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$3A = 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{99}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}}$$

$$3A + A = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$4A = \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}}\right) - \frac{100}{3^{100}} \quad (1)$$

$$\text{Đặt } B = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}}$$

$$3B = 3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{97}} - \frac{1}{3^{98}}$$

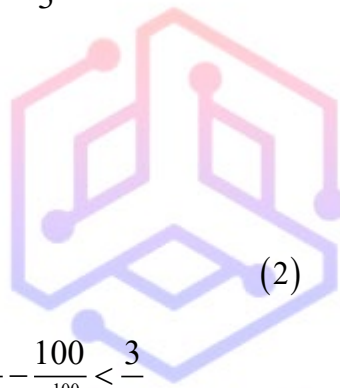
$$3B + B = 3 - \frac{1}{3^{99}}$$

$$4B = 3 - \frac{1}{3^{99}} < 3$$

$$\Rightarrow B < \frac{3}{4}$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } 4A < \frac{3}{4} - \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{4}$$

$$\text{Do đó } A < \frac{3}{16}$$



CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS

Câu 7. (HSG 7 thị xã Điện Bàn, tỉnh Nghệ An 2022 - 2023)

Cho biểu thức $P = \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + \frac{7}{(3.4)^2} + \dots + \frac{19}{(9.10)^2}$. Hãy so sánh P với 1.

Lời giải

$$\text{Ta có } P = \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + \frac{7}{(3.4)^2} + \dots + \frac{19}{(9.10)^2}$$

$$P = \frac{3}{1.4} + \frac{5}{4.9} + \frac{7}{9.16} + \dots + \frac{19}{81.100}$$

$$P = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{81} - \frac{1}{100}$$

$$P = 1 - \frac{1}{100}$$

Suy ra $P < 1$.

Câu 8. (HSG 7 huyện Quảng Xương, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2023}} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$

Lời giải

Ta có

$$VT = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2023}} \quad (1)$$

$$3.VT = 3 \cdot \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{2023}} \right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2022}} \quad (2)$$

Lấy (2) trừ (1) theo vế với vế ta được: $2.VT = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3^{2023}} \right) < \frac{1}{3}$

Vậy: $VT < \frac{1}{6} \quad (3)$

$$VP = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$$

Ta thấy $\frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} > \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{100.101}$

Nên $VP > \frac{1}{5} - \frac{1}{101} = \frac{96}{505} > \frac{96}{576} = \frac{1}{6} \quad (4)$

Từ (3) và (4) suy ra: $VP > VT$

Câu 9. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2, trường TH và THCS Kỳ Đồng 2022 - 2023)

Cho $B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{99}}$. So sánh B với 50

Lời giải

$$B = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{98} + 1} + \dots + \frac{1}{2^{99}} \right)$$

$$B = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{98} + 1} + \dots + \frac{1}{2^{99}} \right) \quad (\text{Có 98 nhóm trong } B)$$

$$B > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{99}} + \dots + \frac{1}{2^{99}} \right) \quad (\text{Có 98 nhóm trong ngoặc})$$

$$B > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + \dots + 2^{98} \cdot \frac{1}{2^{99}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{99}{2} = \frac{101}{2} > \frac{100}{2} = 50$$

Vậy $B > 50$

Câu 10. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường Thái Hưng 2022 - 2023)

Cho $D = \left(\frac{1}{2^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{3^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{4^2} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1 \right)$

So sánh D với $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Vì D là tích của 99 số âm nên:

$$-D = \left(1 - \frac{1}{4} \right) \left(1 - \frac{1}{9} \right) \left(1 - \frac{1}{16} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{100^2} \right)$$

$$-D = \frac{3}{2^2} \cdot \frac{8}{3^2} \cdot \frac{15}{4^2} \dots \frac{9999}{100^2} = \frac{1.3}{2^2} \cdot \frac{2.4}{3^2} \cdot \frac{3.5}{4^2} \dots \frac{99.101}{100^2}$$

$$-D = \frac{1.2.3.4.5 \dots 98.99}{2.3.4.5 \dots 99.100} \cdot \frac{3.4.5 \dots 100.101}{2.3.4 \dots 99.100}$$

$$-D = \frac{1}{100} \cdot \frac{101}{2} = \frac{101}{200} > \frac{100}{200} \text{ hay } -D > \frac{1}{2}.$$

Vậy $D < -\frac{1}{2}$

Câu 11. (HSG 7 huyện Quang Sơn, 2022 - 2023)

$A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2018}{3^{2018}}$. So sánh A và $\frac{3}{4}$.

Lời giải

$$A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2018}{3^{2018}}$$

$$3A = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{2018}{3^{2017}}$$

$$3A - A = \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{2018}{3^{2017}}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2018}{3^{2018}}\right)$$

$$2A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2017}} - \frac{2018}{3^{2018}}$$

$$2A < 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2017}} \quad (1).$$

Đặt $B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2017}}$

Suy ra: $3B = 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2016}}$

$$3B - B = \left(3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2016}}\right) - \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2017}}\right)$$

$$2B = 3 - \frac{1}{3^{2017}} \Rightarrow B = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{2017}} < \frac{3}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $2A < \frac{3}{2}$ Hay $A < \frac{3}{4}$.

Vậy $A < \frac{3}{4}$

Câu 12. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Trần Thái Tông 2022 - 2023)

Cho $M = \frac{2022^{2024} - 2021^{2024}}{2022^{2024} + 2021^{2024}}$; $N = \frac{2022^{2023} - 2021^{2023}}{2022^{2023} + 2021^{2023}}$. Hãy so sánh M và N

Lời giải

Ta có: $2022 > 2021 \Rightarrow \frac{2022}{2021} > 1$

Mà $2024 > 2023 \Rightarrow \left(\frac{2022}{2021}\right)^{2024} > \left(\frac{2022}{2021}\right)^{2023}$

$$\Rightarrow 1 + \left(\frac{2022}{2021}\right)^{2024} > 1 + \left(\frac{2022}{2021}\right)^{2023}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{1 + \left(\frac{2022}{2021}\right)^{2024}} &< \frac{1}{1 + \left(\frac{2022}{2021}\right)^{2023}} \\ \Rightarrow \frac{2021^{2024}}{2022^{2024} + 2021^{2024}} &< \frac{2021^{2023}}{2022^{2023} + 2021^{2023}} \\ \Rightarrow \frac{2 \cdot 2021^{2024}}{2022^{2024} + 2021^{2024}} &< \frac{2 \cdot 2021^{2023}}{2022^{2023} + 2021^{2023}} \\ \Rightarrow 1 - \frac{2 \cdot 2021^{2024}}{2022^{2024} + 2021^{2024}} &> 1 - \frac{2 \cdot 2021^{2023}}{2022^{2023} + 2021^{2023}} \\ \Rightarrow \frac{2022^{2024} - 2021^{2024}}{2022^{2024} + 2021^{2024}} &> \frac{2022^{2023} - 2021^{2023}}{2022^{2023} + 2021^{2023}} \end{aligned}$$

Vậy $M > N$

Câu 13. (HSG 7 huyện Thái Thụy, 2022 - 2023)

Cho $B = \frac{1}{11} + \frac{1}{11^2} + \dots + \frac{1}{11^{100}}$. So sánh B với $\frac{1}{10}$.

$$B = \frac{1}{11} + \frac{1}{11^2} + \dots + \frac{1}{11^{100}}$$

$$11B = 1 + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{11^{99}}$$

$$11B - B = 1 - \frac{1}{11^{100}}$$

$$\Rightarrow 10B = 1 - \frac{1}{11^{100}} < 1.$$

$$\Rightarrow 10B < 1$$

$$\text{Vậy } B < \frac{1}{10}$$

Lời giải

Câu 14. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Bình Lăng 2022 - 2023)

Chứng minh tổng: $A = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{2019^2} + \frac{1}{2020^2}$ không phải là một số nguyên

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{1.2} > \frac{1}{2.2};$$

$$\frac{1}{2.3} > \frac{1}{3.3};$$

$$\frac{1}{3.4} > \frac{1}{4.4};$$

...

$$\frac{1}{2018.2019} > \frac{1}{2019.2019};$$

$$\frac{1}{2019 \cdot 2020} > \frac{1}{2020 \cdot 2020};$$

Do đó ta có:

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2018 \cdot 2019} + \frac{1}{2019 \cdot 2020} > 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{2019^2} + \frac{1}{2020^2}$$

$$\Rightarrow A < 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019} + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}$$

$$\Rightarrow A < 1 + 1 - \frac{1}{2020} = 1 + \frac{2019}{2020}$$

Vì $0 < \frac{2019}{2020} < 1$ nên $1 < 1 + \frac{2019}{2020} < 2$

Vậy suy ra: $1 < A < 2$

Chứng tỏ A không phải là một số nguyên.

Câu 15. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Thai Hưng 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2018}} + \frac{1}{3^{2019}} < \frac{1}{2}$

Lời giải

$$3B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2018}} + \frac{1}{3^{2019}}$$

$$3B - B = 1 - \frac{1}{3^{2019}}$$

$$2B = 1 - \frac{1}{3^{2019}}$$

$$\Rightarrow B = \left(1 - \frac{1}{3^{2019}}\right) : 2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{2019}} < \frac{1}{2}$$

Vậy $B < \frac{1}{2}$

Câu 16. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Phạm Kinh Ân 2022 - 2023)

$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2016}} + \frac{1}{3^{2017}}$. Chứng minh: $B < \frac{1}{2}$

Lời giải

Ta có: $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2016}} + \frac{1}{3^{2017}}$

$$3B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2016}}$$

$$3B - B = 1 - \frac{1}{3^{2017}}$$

$$B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{2017}} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow B < \frac{1}{2}$$

Câu 17. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Diệp Nông 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2020^3} < \frac{1}{40}$

Lời giải

$$\text{Đặt } A = \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2020^3}$$

$$A = \frac{1}{5.5.5} + \frac{1}{6.6.6} + \frac{1}{7.7.7} + \dots + \frac{1}{2020.2020.2020}$$

$$A < \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{6.7.8} + \dots + \frac{1}{2019.2020.2021}$$

$$A < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4.5} - \frac{1}{5.6} + \frac{1}{5.6} - \frac{1}{6.7} + \frac{1}{6.7} - \frac{1}{7.8} + \dots + \frac{1}{2019.2020} - \frac{1}{2020.2021} \right)$$

$$A < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4.5} - \frac{1}{2020.2021} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{2020.2021} \right)$$

$$\text{Vì } \frac{1}{2020.2021} > 0 \text{ nên } \frac{1}{20} - \frac{1}{2020.2021} < \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{2020.2021} \right) < \frac{1}{40}$$

$$\text{hay } A < \frac{1}{40}.$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2020^3} < \frac{1}{40}.$$

Câu 18. (HSG 7 huyện Tam Điệp, tỉnh Ninh Bình, trường 2022 - 2023)

Cho dãy số $a_1; a_2; \dots; a_n$ được xác định như sau: $a_1 = 1; a_2 = 1 + \frac{1}{2}; a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}; \dots;$
 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{2a_2^2} + \frac{1}{3a_3^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < 2$, với mọi số tự nhiên $n > 1$.

Lời giải

Với mọi $k \geq 2$ ta có: $\frac{1}{ka_k^2} < \frac{1}{ka_{k-1}a_k}$ (vì $a_k > a_{k-1}$)

$$\text{Ta có: } \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} = \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k-1} \cdot a_k} = \frac{1}{k \cdot a_{k-1} \cdot a_k}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{1}{k \cdot a_k^2} < \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}$$

Với $k \in \{2; 3; 4; 5; 6; \dots; n\}$ ta có:

$$\frac{1}{2 \cdot a_2^2} < \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2};$$

$$\frac{1}{3 \cdot a_3^2} < \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3};$$

...

$$\frac{1}{n \cdot a_n^2} < \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}$$

Cộng từng vế theo vế ta được:

$$\frac{1}{2a_2^2} + \frac{1}{3a_2^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} < \frac{1}{a_1} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{2a_2^2} + \frac{1}{3a_3^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < 2$$

Câu 19. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường 2021 - 2022)

Cho $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{9^2}$. Chứng minh $\frac{2}{5} < A < \frac{8}{9}$

Lời giải

Ta có $A < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{8.9}$

$$\Rightarrow A < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{8} - \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow A < 1 - \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow A < \frac{8}{9} \quad (1)$$

Ta có $A > \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{9.10}$

$$\Rightarrow A > \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow A > \frac{4}{10}$$

$$\Rightarrow A > \frac{2}{5} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{2}{5} < A < \frac{8}{9}$.

Câu 20. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ, tỉnh Thái Bình, trường 2021 - 2022)

Cho $A = 1 - \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 - \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2022}$. Chứng tỏ rằng A không phải là số nguyên

Lời giải

Ta có: $A = 1 - \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 - \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2022}$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}A = \frac{2}{3} \left[1 - \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 - \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2022} \right]$$

$$= \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^5 - \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2023}$$

$$\Rightarrow A + \frac{2}{3}A = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2023} \Rightarrow A = \left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2023} \right] \cdot \frac{3}{5}$$

Vì $\left(\frac{2}{3}\right)^{2023} > 0 \Rightarrow 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2023} > 0$ mà $\frac{3}{5} > 0$ nên $A > 0$ (1)

$$\text{Vì } 0 < \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2023} < \frac{2}{3} \Rightarrow 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2023} < 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow A = \left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2023} \right] \cdot \frac{3}{5} < \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} = 1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $0 < A < 1$ nên A không là số nguyên.

Câu 21. (HSG 7 huyện Lục Ngạn, tỉnh Bắc Ninh, trường 2021 - 2022)

Cho $C = \frac{2020}{2019^2 + 1} + \frac{2020}{2019^2 + 2} + \frac{2020}{2019^2 + 3} + \dots + \frac{2020}{2019^2 + 2019}$. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức C không phải là số nguyên.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{2020}{2019^2 + 1} < \frac{2020}{2019^2},$$

$$\frac{2020}{2019^2 + 2} < \frac{2020}{2019^2},$$

$$\frac{2020}{2019^2 + 3} < \frac{2020}{2019^2},$$

...

$$\frac{2020}{2019^2 + 2019} < \frac{2020}{2019^2}.$$

Từ đó suy ra

$$C < \frac{2020}{2019^2} + \frac{2020}{2019^2} + \frac{2020}{2019^2} + \dots + \frac{2020}{2019^2}$$

$$C < \frac{2020}{2019^2} \cdot 2019 = \frac{2020}{2019} < 2$$

$$\Rightarrow C < 2$$

$$\text{Ta có: } \frac{2020}{2019^2 + 1} > \frac{2020}{2019^2 + 2019},$$

$$\frac{2020}{2019^2 + 2} > \frac{2020}{2019^2 + 2019},$$

$$\frac{2020}{2019^2 + 3} > \frac{2020}{2019^2 + 2019},$$

...

$$\frac{2020}{2019^2 + 2018} > \frac{2020}{2019^2 + 2019},$$

$$\frac{2020}{2019^2 + 2019} = \frac{2020}{2019^2 + 2019}$$

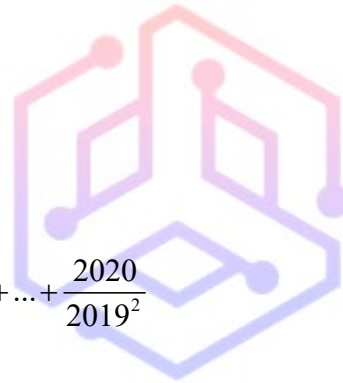
Từ đó suy ra

$$C > \frac{2020}{2019^2 + 2019} + \frac{2020}{2019^2 + 2019} + \frac{2020}{2019^2 + 2019} + \dots + \frac{2020}{2019^2 + 2019}$$

$$C > \frac{2020}{2019^2 + 2019} \cdot 2019 = \frac{2020 \cdot 2019}{2019(2019 + 1)} = 1$$

$$\Rightarrow C > 1$$

(2)



CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS

Từ (1) và (2) suy ra $1 < C < 2$ nên C không là số nguyên.

Câu 22. (HSG 7 huyện Quan Hóa, tỉnh Thanh Hóa, trường 2021 - 2022)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}} < \frac{1}{50}$

Lời giải

$$\text{Đặt: } A = \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}}$$

$$\text{Ta có: } 49.A = 49. \left(\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{4n-6}} - \frac{1}{7^{4n-4}} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}} \right)$$

$$49.A = 1 - \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{7^{4n-4}} - \frac{1}{7^{4n-2}} + \dots + \frac{1}{7^{96}} - \frac{1}{7^{98}}$$

$$\Rightarrow 50A = 1 - \frac{1}{7^{100}} < 1$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{50}.$$

Câu 23. (HSG 7 trường THCS Điện Hồng 2018 - 2019)

Chứng minh: $\frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$

Lời giải

$$\text{Đặt } A = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}, \text{ ta có:}$$

$$*A < \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{4} - \frac{1}{100} < \frac{1}{4}$$

$$*A > \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100} + \frac{1}{100.101} = \frac{1}{5} - \frac{1}{101} > \frac{1}{6}$$

Câu 24. (HSG 7 trường THCS Bảo Phương 2018 - 2019)

Chứng minh rằng: $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}} + \frac{1}{3^{2013}} < \frac{1}{2}$

Lời giải

$$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}} + \frac{1}{3^{2013}}$$

$$3B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}}$$

$$3B - B = 1 - \frac{1}{3^{2013}} \Rightarrow 2B = 1 - \frac{1}{3^{2013}}$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2.3^{2013}} < \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } B < \frac{1}{2}.$$

Câu 25. (HSG 7 trường THCS Điện Hồng 2018 - 2019)

Chứng minh: $\frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$

Lời giải

Đặt $A = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$, ta có:

$$*A < \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{4} - \frac{1}{100} < \frac{1}{4}$$

$$*A > \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100} + \frac{1}{100.101} = \frac{1}{5} - \frac{1}{101} > \frac{1}{6}$$

Câu 26. (HSG 7 Huyện Thường Tín 2018 - 2019)

Chứng minh rằng: $B = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{2019^3} < \frac{1}{2^2}$

Lời giải

Ta có: $2^3 > 1.2.3 \Rightarrow \frac{1}{2^3} < \frac{1}{1.2.3}$

Tương tự: $\frac{1}{3^3} < \frac{1}{2.3.4}; \dots; \frac{1}{2019^3} < \frac{1}{2017.2018.2019}$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{2017.2018.2019} = \frac{1}{2} \left(\frac{3-1}{1.2.3} + \frac{4-2}{2.3.4} + \dots + \frac{2019-2017}{2017.2018.2019} \right)$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2017.2018} - \frac{1}{2018.2019} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2018.2019} \right)$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2018.2019.2} < \frac{1}{2^2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{2019^3} < \frac{1}{2^2}$$

Câu 27. (HSG 7 trường Hương Điền 2017 - 2018)

Chứng minh: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < 1$

Lời giải

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

...

$$\frac{1}{2005^2} < \frac{1}{2004.2005} = \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < 1 - \frac{1}{2005}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < 1 \text{ (đpcm)}$$

Câu 28. (HSG 7 huyện Trục Ninh 2017 - 2018)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{4n-2}} - \frac{1}{7^{4n}} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}} < \frac{1}{50}$

Lời giải

$$\text{Đặt } A = \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{4n-2}} - \frac{1}{7^{4n}} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}}$$

$$\text{Ta có: } 49A = 1 - \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{7^{4n-4}} - \frac{1}{7^{4n-2}} + \dots + \frac{1}{7^{96}} - \frac{1}{7^{98}}$$

$$\Rightarrow 50A = 1 - \frac{1}{7^{100}} < 1 \Rightarrow A < \frac{1}{50}$$

Câu 29. (HSG 7 trường Nghĩa Điền 2017 - 2018)

$$\text{So sánh các số sau: } A = \frac{10^{2011} + 1}{10^{2012} + 1} \text{ và } B = \frac{10^{2012} + 1}{10^{2013} + 1}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{10^{2011} + 1}{10^{2012} + 1} \Rightarrow 10A = \frac{10^{2012} + 10}{10^{2012} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2012} + 1}$$

$$B = \frac{10^{2012} + 1}{10^{2013} + 1} \Rightarrow 10B = \frac{10^{2013} + 10}{10^{2013} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2013} + 1}$$

$$\text{Vì } \frac{9}{10^{2012} + 1} > \frac{9}{10^{2013} + 1} \text{ nên } 10A > 10B$$

$$\Rightarrow A > B.$$

Câu 30. (HSG 7 Phòng GD&ĐT Thiệu Hóa 2022 - 2023)

$$\text{Cho } C = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2023^2}. \text{ Chứng minh rằng } C < \frac{3}{4}.$$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{3.3} < \frac{1}{2.3}$$

$$\frac{1}{4.4} < \frac{1}{3.4}$$

...

$$\frac{1}{2023.2023} < \frac{1}{2022.2023}$$

$$\text{Suy ra } C < \frac{1}{4} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2022.2023}$$

$$C < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023}$$

$$C < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2023} < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Vậy } C < \frac{3}{4}.$$

Câu 31. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

$$\text{a) } \frac{1.3+2}{2^2} + \frac{2.4+2}{3^2} + \frac{3.5+2}{4^2} + \dots + \frac{2021.2023+2}{2022^2} + \frac{2022.2024+2}{2023^2} < 2023$$

$$\text{b) Cho } P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100}. \text{ Chứng minh rằng } P < \frac{1}{10}$$

Lời giải

$$\text{Đặt } A = \frac{1.3+2}{2^2} + \frac{2.4+2}{3^2} + \frac{3.5+2}{4^2} + \dots + \frac{2021.2023+2}{2022^2} + \frac{2022.2024+2}{2023^2} \quad (1)$$

Ta thấy tổng A có 2022 số hạng

$$A = \frac{1.3+2}{2^2} + \frac{2.4+2}{3^2} + \frac{3.5+2}{4^2} + \dots + \frac{2021.2023+2}{2022^2} + \frac{2022.2024+2}{2023^2}$$

$$A = \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \left(1 + \frac{1}{3^2}\right) + \left(1 + \frac{1}{4^2}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{2022^2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2023^2}\right)$$

$$A = \underbrace{\left(1+1+1+\dots+1\right)}_{2022s/h} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2023^2}\right)$$

$$A = 2022 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2022^2} + \frac{1}{2023^2}\right) \quad (2)$$

Ta có:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2} \\ \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3} \\ \frac{1}{4^2} < \frac{1}{3.4} \\ \dots \\ \frac{1}{2023^2} < \frac{1}{2022.2023} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2^2} < 1 - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4^2} < \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ \dots \\ \frac{1}{2023^2} < \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2023^2} = 1 - \frac{1}{2023} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2023^2} < 1$$

$$\text{Do đó } A = 2022 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2023^2}\right) < 2022 + 1 = 2023 \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3)

$$\text{Chứng tỏ: } \frac{1.3+2}{2^2} + \frac{2.4+2}{3^2} + \frac{3.5+2}{4^2} + \dots + \frac{2021.2023+2}{2022^2} + \frac{2022.2024+2}{2023^2} < 2023$$

b) Ta đi chứng minh bài toán phụ sau: $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

Thật vậy: với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có: $n^2 + n < n^2 + n + n + 1$

$$(n + 1) < (n + 1)^2$$

$$\Rightarrow \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$$

(Nhân chéo chứng minh $n(n + 2) < (n + 1)(n + 1)$)

Cho n các giá trị từ 1 đến 99 ta có:

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}; \frac{3}{4} < \frac{5}{6}; \frac{5}{6} < \frac{6}{7}; \dots; \frac{99}{100} < \frac{100}{101}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{99}{100} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots \frac{100}{101} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{99}{100} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{99}{100} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots \frac{100}{101} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{99}{100} \\ &\Rightarrow \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{99}{100} \right)^2 < \frac{1}{101} < \frac{1}{100} \\ &\text{Vậy } P < \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Câu 32. (HSG 7 huyện Quang Sơn, 2022 - 2023)

Chứng minh rằng $\frac{1}{4048} < \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2021}{2022} \cdot \frac{2023}{2024} \right)^2 < \frac{1}{2025}$.

Lời giải

$$\frac{1}{4048} < \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2021}{2022} \cdot \frac{2023}{2024} \right)^2 < \frac{1}{2025}$$

Với mọi $n \geq 1$ ta có:

$$\frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} < \frac{n^2}{n^2 + 2n} = \frac{n}{n+2}$$

Từ đó suy ra:

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2021}{2022} \cdot \frac{2023}{2024} \right)^2 < \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} \cdots \frac{2021}{2023} \cdot \frac{2023}{2025} = \frac{1}{2025} \quad (1)$$

Với mọi $n \geq 2$ ta có:

$$\frac{n^2}{(n+1)^2} > \frac{n^2 - 1}{(n+1)^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{(n+1)^2} = \frac{n-1}{n+1}$$

Từ đó suy ra:

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2021}{2022} \cdot \frac{2023}{2024} \right)^2 > \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{4}{6} \cdots \frac{2020}{2022} \cdot \frac{2022}{2024} = \frac{1}{4048} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{1}{4048} < \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2021}{2022} \cdot \frac{2023}{2024} \right)^2 < \frac{1}{2025}$ (đpcm)

Câu 33. (HSG 7 huyện Tri Thức, tỉnh Đồng Nai, 2022 - 2023)

Chứng minh: $\frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{8}$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{100^2} = \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{50^2} \right) \\ &< \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{49 \cdot 50} \right) = \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{49} - \frac{1}{50} \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{50} \right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{200} < \frac{1}{8} \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{8}$$

Câu 34. (HSG 7 huyện Tiêu Du, tỉnh Bắc Ninh, 2022 - 2023)

1. Cho $A = \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \frac{1}{7^8} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}}$. Chứng minh rằng $A < \frac{1}{50}$.

2. Cho $A = \frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3} + \frac{4}{7^4} + \dots + \frac{99}{7^{99}} + \frac{100}{7^{100}}$. Chứng minh rằng $A < \frac{7}{36}$.

Lời giải

1) Ta có $A = \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \frac{1}{7^8} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}}$

$$7^2 A = 7^2 \cdot \left(\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \frac{1}{7^8} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}} \right)$$

$$49A = 1 - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^4} - \frac{1}{7^6} + \frac{1}{7^8} - \dots + \frac{1}{7^{96}} - \frac{1}{7^{98}}$$

$$\Rightarrow 49A + A = \left(1 - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^4} - \frac{1}{7^6} + \frac{1}{7^8} - \dots + \frac{1}{7^{96}} - \frac{1}{7^{98}} \right) + \left(\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \frac{1}{7^8} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}} \right)$$

$$50A = 1 - \frac{1}{7^{100}} < 1$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{50}$$

Vậy $A < \frac{1}{50}$.

2) Ta có $A = \frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3} + \frac{4}{7^4} + \dots + \frac{99}{7^{99}} + \frac{100}{7^{100}}$

$$7.A = 1 + \frac{2}{7^1} + \frac{3}{7^2} + \frac{4}{7^3} + \dots + \frac{99}{7^{98}} + \frac{100}{7^{99}}$$

$$\Rightarrow 7A - A = \left(1 + \frac{2}{7^1} + \frac{3}{7^2} + \frac{4}{7^3} + \dots + \frac{99}{7^{98}} + \frac{100}{7^{99}} \right) - \left(\frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3} + \frac{4}{7^4} + \dots + \frac{99}{7^{99}} + \frac{100}{7^{100}} \right)$$

$$\Rightarrow 6A = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{99}} - \frac{100}{7^{100}}$$

Đặt $B = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{99}}$

$$\Rightarrow 7B = 7 + 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{98}}$$

$$\Rightarrow 7B - B = \left(7 + 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{98}} \right) - \left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{99}} \right)$$

$$6B = 7 - \frac{1}{7^{99}} < 7$$

$$\Rightarrow B < \frac{7}{6}$$

Câu 35. (HSG 7 huyện Nga Sơn, tỉnh Thanh Hóa, 2022 - 2023)

Cho $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{2023} - 1}$. Chứng minh rằng: $A > \frac{2023}{2}$.

Lời giải

Ta có

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{2022} + 1} + \dots + \frac{1}{2^{2023}}\right) - \frac{1}{2^{2023}}$$

$$A > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{2022}} + \dots + \frac{1}{2^{2023}}\right) - \frac{1}{2^{2023}}$$

$$A > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + 2^{2022} \cdot \frac{1}{2^{2023}} - \frac{1}{2^{2023}}$$

$$A > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2006}} = 1 + 2016 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2016}} = \frac{2023}{2} + \left(1 - \frac{1}{2^{2023}}\right) > \frac{2023}{2}.$$

Vậy $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{2023} - 1} > \frac{2023}{2}.$

Câu 36. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2, tỉnh Thanh Hóa, 2022 - 2023)

- a) Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$
- b) Chứng minh rằng $\frac{2n \cdot (2n-1) \cdot \dots \cdot (n+1)}{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} \geq \frac{4^n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Lời giải

- a) Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$

Ta có: $A = \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot n} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$

- b) Chứng minh rằng $\frac{2n \cdot (2n-1) \cdot \dots \cdot (n+1)}{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} \geq \frac{4^n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Với $n = 1$, ta có: $2 \leq 2$ nên đúng.

Giả sử đúng với $n = k$, tức là $\frac{4^k}{k+1} \leq \frac{2k \cdot (2k-1) \cdot \dots \cdot (k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}$

Ta đi chứng minh đúng khi $n = k+1$, tức là

$$\frac{4^{k+1}}{k+2} \leq \frac{(2k+2) \cdot (2k+1) \cdot 2k \cdot \dots \cdot (k+2)}{(k+1) \cdot k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}$$

Thật vậy:

$$\frac{4^k}{k+1} \cdot \frac{4(k+1)}{k+2} \leq \frac{2k \cdot (2k-1) \cdot \dots \cdot (k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{4(k+1)}{k+2}$$

$$\frac{4^{k+1}}{k+2} \leq \frac{2k \cdot (2k-1) \cdot \dots \cdot (k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{4(k+1)}{k+2}$$

Ta có thể chứng minh:

$$VT \leq \frac{2k \cdot (2k-1) \cdot \dots \cdot (k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} = VP.$$

Vậy $\frac{2n \cdot (2n-1) \cdot \dots \cdot (n+1)}{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} \geq \frac{4^n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Câu 37. (HSG 7 huyện Hưng Hà, 2022 - 2023)

Cho $B = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n-1}{(n-1)^2 \cdot n^2}$ (với n là số tự nhiên lớn hơn 1).

Chứng minh $B < 1$

Lời giải

Cho $B = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n-1}{(n-1)^2 \cdot n^2}$ (với n là số tự nhiên lớn hơn 1).

$$B = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n-1}{(n-1)^2 \cdot n^2}$$

$$B = \frac{2^2 - 1^2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{4^2 - 3^2}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{n^2 - (n-1)^2}{(n-1)^2 \cdot n^2}$$

$$B = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}$$

$$B = 1 - \frac{1}{n^2}$$

Vì n là số tự nhiên lớn hơn 1 nên $\frac{1}{n^2} > 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{n^2} < 1$

Vậy $B < 1$

Câu 38. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường Lê Nam Đế 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $A = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{7^2} + \dots + \frac{2}{2007^2} < \frac{1003}{2008}$

Lời giải

Tổng A không có thừa số chung, do vậy ta đánh giá từng số hạng

$$\frac{2}{3^2} = \frac{2}{9} < \frac{2}{8} = \frac{2}{2 \cdot 4}$$

$$\frac{2}{5^2} = \frac{2}{25} < \frac{2}{24} = \frac{2}{4 \cdot 6}$$

$$\frac{2}{7^2} = \frac{2}{49} < \frac{2}{48} = \frac{2}{6 \cdot 8}$$

.....

$$\frac{2}{2007^2} < \frac{2}{2006 \cdot 2008}$$

$$A < \frac{2}{2 \cdot 4} + \frac{2}{4 \cdot 6} + \frac{2}{6 \cdot 8} + \dots + \frac{2}{2006 \cdot 2008} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2008} = \frac{1003}{2008}$$

Câu 39. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường Thái Phương 2022 - 2023)

Cho $S_1 = 1 + \frac{1}{5}$; $S_2 = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2}$; $S_3 = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3}$; ...; $S_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Chứng minh rằng: $\frac{1}{5S_1^2} + \frac{1}{5^2S_2^2} + \frac{1}{5^3S_3^2} + \dots + \frac{1}{5^nS_n^2} < \frac{1}{4}$

Lời giải

+) Ta có

$$S_n^2 > S_{n-1}^2 > \dots > S_2^2 > S_1^2 > 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5S_1^2} + \frac{1}{5^2 S_2^2} + \frac{1}{5^3 S_3^2} + \dots + \frac{1}{5^n S_n^2} < \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^n}$$

$$A = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^n}$$

$$\Rightarrow 5A = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^{n-1}}$$

$$\Rightarrow 4A = 1 - \frac{1}{5^n} < 1$$

Vậy $A < \frac{1}{4}$

Câu 40. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường2022 - 2023)

Chứng minh rằng $\frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$.

Lời giải

Đặt: $A = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$

Ta có:

$$A < \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{4} - \frac{1}{100} < \frac{1}{4}$$

$$A > \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100} + \frac{1}{100.101} = \frac{1}{5} - \frac{1}{101} > \frac{1}{6}$$

Vậy $\frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$ (đpcm)

Câu 41. (HSG 7 huyện Hiệp Hòa 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{1000^2}$. Chứng minh rằng $A < \frac{25}{36}$.

Lời giải

$$A = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{1000^2}$$

Ta có:

$$\frac{1}{4.4} < \frac{1}{3.4}$$

$$\frac{1}{5.5} < \frac{1}{4.5}$$

...

$$\frac{1}{1000.1000} < \frac{1}{999.1000}$$

Do đó: $A < \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{999.1000}$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{999} - \frac{1}{1000}$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - \frac{1}{1000} = \frac{25}{36} - \frac{1}{1000} < \frac{25}{36}$$

Vậy $A < \frac{25}{36}$.



CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS

Dạng 3: Một số bài toán khác

Câu 1. (HSG 7 huyện Ứng Hòa 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức $B = 21x^2y + xy^2$ với x, y thỏa mãn điều kiện:

$$(x-2)^2 + (2y-1)^{2024} \leq 0$$

Lời giải

Ta có: $(x-2)^2 + (2y-1)^{2024} \leq 0$

$$\begin{cases} x-2=0 \\ 2y-1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Thay vào biểu thức ta được $B = 21 \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{85}{2}$

Vậy $B = \frac{85}{2}$

Câu 2. (HSG 7 huyện Ứng Hòa 2022 - 2023)

Cho biểu thức $C = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2022} + 3^{2023}$. Tìm số tự nhiên n , biết rằng $2C + 3 = 3^n$

Lời giải

Ta có: $C = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2022} + 3^{2023}$ (1) $3C = 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + \dots + 3^{2023} + 3^{2024}$ (2)

Trừ (2) cho (1) về theo về ta được:

$$2C = 3^{2024} - 3$$

$$2C + 3 = 3^{2024}$$

Mà $2C + 3 = 3^n$.

$$3^{2024} = 3^n$$

Vậy $n = 2024$

Câu 3. (HSG 7 huyện Thanh Miện 2022 - 2023)

Cho $a; b; x; y$ thỏa mãn $(bx^2 - ay^2)^{2022} + |x^2 + y^2 - 1| = 0$ ($a \neq 0; b \neq 0; a + b \neq 0$)

Chứng minh rằng: $\frac{x^{2022}}{a^{1011}} + \frac{y^{2022}}{b^{1011}} = \frac{2}{(a+b)^{1011}}$

Lời giải

Ta có: $(bx^2 - ay^2)^{2022} + |x^2 + y^2 - 1| = 0 \Rightarrow \begin{cases} bx^2 - ay^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$

Với $bx^2 - ay^2 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a} = \frac{y^2}{b} \Rightarrow \frac{x^2}{a} = \frac{y^2}{b} = \frac{x^2 + y^2}{a+b} = \frac{1}{a+b}$ (do $x^2 + y^2 - 1 = 0$)

$$\Rightarrow \left(\frac{x^2}{a}\right)^{1011} = \left(\frac{y^2}{b}\right)^{1011} = \left(\frac{1}{a+b}\right)^{1011} \Rightarrow \frac{x^{2022}}{a^{1011}} = \frac{y^{2022}}{b^{1011}} = \frac{1}{(a+b)^{1011}}$$

$$\Rightarrow \frac{x^{2022}}{a^{1011}} + \frac{y^{2022}}{b^{1011}} = \frac{2}{(a+b)^{1011}}$$

$$\text{Vậy } \frac{x^{2022}}{a^{1011}} + \frac{y^{2022}}{b^{1011}} = \frac{2}{(a+b)^{1011}}.$$

Câu 4. (HSG 7 huyện Sầm Sơn, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Cho x, y, z là các số thực khác 0, thỏa mãn: $\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$

Tính giá trị của biểu thức $A = 4046x + (y)^{2023} + (z)^{2023}$.

Lời giải

Từ đề bài ta có x, y, z và $x+y+z$ khác 0.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z} = 2$$

$$\Rightarrow x+y+z = 0,5$$

$$\Rightarrow \frac{0,5-x+1}{x} = \frac{0,5-y+2}{y} = \frac{0,5-z-3}{z} = 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}; y = \frac{5}{6}; z = \frac{-5}{6}.$$

Khi đó ta có: $A = 4046x + (y)^{2023} + (z)^{2023}$

$$= 4046 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{5}{6}\right)^{2023} + \left(\frac{-5}{6}\right)^{2023}$$

$$= 4046 \cdot \frac{1}{2} + 0$$

$$= 2023$$

Vậy với x, y, z là các số thực khác 0, thỏa mãn: $\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$

Thì giá trị của biểu thức $A = 4046x + (y)^{2023} + (z)^{2023} = 2023$.

Câu 5. (HSG 7 huyện Sầm Sơn, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Tìm các số tự nhiên a biết $6a+4$ và $a+2$ là các lũy thừa của 2.

Lời giải

Vì a là số tự nhiên nên $6a+4 > a+2$.

Mặt khác có $6a+4$ và $a+2$ là các lũy thừa của 2 nên $6a+4$ chia hết cho $a+2$

$$\Rightarrow 6a(a+2) - 8 \text{ chia hết cho } a+2 \Rightarrow a+2 \in U(8), \text{ mà } a \text{ là số tự nhiên nên}$$

$$\Rightarrow a+2 \in \{0; 4; 8\} \Rightarrow a \in \{0; 2; 6\}$$

Thay vào các giá trị của a vừa tìm được vào đề bài $6a+4$ và $a+2$ là các lũy thừa của 2 thì $a=0; a=2$ (thỏa mãn).

Câu 6. (HSG 7 huyện Triệu Sơn, 2017 - 2018)

Cho các số thực dương a và b thỏa mãn: $a^{100} + b^{100} = a^{101} + b^{101} = a^{102} + b^{102}$. Hãy tính giá trị của biểu thức: $P = a^{2014} + b^{2015}$

Lời giải

Ta có đẳng thức: $a^{102} + b^{102} = (a^{101} + b^{101})(a + b) - ab(a^{100} + b^{100})$ với mọi a, b

Kết hợp với: $a^{100} + b^{100} = a^{101} + b^{101} = a^{102} + b^{102}$

Suy ra: $1 = (a + b) - ab \Rightarrow (a - 1)(b - 1) = 0$

TH1: $a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow 1 + b^{100} = 1 + b^{101} = 1 + b^{102} \Rightarrow b = 1$

TH2: $b - 1 = 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow 1 + a^{100} = 1 + a^{101} = 1 + a^{102} \Rightarrow a = 1$

TH1: $a = 1 \Rightarrow 1 + b^{100} = 1 + b^{101} = 1 + b^{102} \Rightarrow b = 1$

TH2: $b = 1 \Rightarrow 1 + a^{100} = 1 + a^{101} = 1 + a^{102} \Rightarrow a = 1$

Do đó: $P = a^{2014} + b^{2014} = 1^{2004} + 1^{2005} = 2$

Câu 7. (HSG 7 Phòng GD&ĐT TP Ninh Bình 2022 - 2023)

Cho biểu thức $A = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{100}}$. Tính giá trị biểu thức $B = 4|A| + \frac{1}{3^{100}}$.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{100}} \\ \Rightarrow 3A &= -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{99}} \\ \Rightarrow 3A + A &= \left(-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{99}}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{100}}\right) \\ \Rightarrow 4A &= \frac{1}{3^{100}} - 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3^{100}} - 1\right) \end{aligned}$$

Do $3^{100} > 1 \Rightarrow \frac{1}{3^{100}} < 1 \Rightarrow \frac{1}{3^{100}} - 1 < 0 \Rightarrow A = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3^{100}} - 1\right) < 0 \Rightarrow |A| = -A$

$$B = 4|A| + \frac{1}{3^{100}} = -4A + \frac{1}{3^{100}} = -4 \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3^{100}} - 1\right) + \frac{1}{3^{100}} = -\left(\frac{1}{3^{100}} - 1\right) + \frac{1}{3^{100}} = -\frac{1}{3^{100}} + 1 + \frac{1}{3^{100}} = 1$$

Vậy $B = 1$.

Câu 8. (HSG 7 Phòng GD&ĐT Huyện Vũ Thư 2022 - 2023)

Cho biểu thức $C = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n$. Tìm số tự nhiên n để: $2C + 1 = 3^{2023}$

Lời giải

Ta có: $C = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n$

$$\Rightarrow 3C = 3(1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n) = 3 + 3^2 + \dots + 3^{n+1}$$

$$\Rightarrow 2C = 3C - C = (3 + 3^2 + \dots + 3^{n+1}) - (1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n) = 3^{n+1} - 1$$

$$\Rightarrow 2C + 1 = 3^{n+1} - 1 + 1 = 3^{n+1}$$

$$\Rightarrow 2C + 1 = 3^{2023}$$

$$\Rightarrow 3^{n+1} = 3^{2023}$$

$$\Rightarrow n + 1 = 2023$$

$$\Rightarrow n = 2022$$

Vậy $n = 2022$



CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS

CD4: CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH CHIA HẾT

Dạng 1: Chứng minh chia hết

Dạng 2: Tìm số tận cùng

Dạng 1: Chứng minh chia hết

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Thủy 2021 - 2022)

Cho $S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2021} + 2^{2022}$, khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $S : 2^{2022}$.
- B. $S + 1$ là số chính phương.
- C. $(S + 1) : 2^{2022}$.
- D. $S = 2^{2023} + 1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2021} + 2^{2022}$
 $2S = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2021} + 2^{2022} + 2^{2023}$
 $2S - S = (2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2021} + 2^{2022} + 2^{2023}) - (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2021} + 2^{2022})$
 $S = 2^{2023} - 2^0$
 $= 2^{2023} - 1$
 Suy ra: $S - 1 = 2^{2023} : 2^{2022}$
 Vậy: $S - 1 : 2^{2022}$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Nguyễn Tông Quai, 2022 - 2023)

Một số tự nhiên a , sao cho a chia cho 3 dư 2, chia cho 5 dư 3, chia cho 7 dư 4. Khi a chia cho 105 có số dư là:

- A. 100.
- B. 53.
- C. 52.
- D. 10.

Lời giải

Chọn B

Vì a chia cho 3 dư 2, chia cho 5 dư 3, chia cho 7 dư 4 nên

$$\begin{cases} a - 2 : 3 \\ a - 3 : 5 \\ a - 4 : 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 2 - 51 : 3 \\ a - 3 - 50 : 5 \\ a - 4 - 49 : 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 53 : 3 \\ a - 53 : 5 \\ a - 53 : 7 \end{cases}$$

$\Rightarrow a - 53$ là bội của 105
 hay a chia 105 có số dư là 53.

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 Thanh Hóa 2022 - 2023)

Chứng tỏ rằng: $9^{1945} - 2^{1930}$ chia hết cho 5.

Lời giải

Ta có: $9^{1945} = 9^{1444} \cdot 9 = (9^2)^{972} \cdot 9 = 81^{972} \cdot 9 = \dots 1 \cdot 9 = \dots 9$
 $2^{1930} = 2^{1928} \cdot 2^2 = (2^4)^{482} \cdot 4 = 16^{482} \cdot 4 = \dots 6 \cdot 4 = \dots 4$

Vậy: $9^{1945} - 2^{1930} = \dots 9 - \dots 4 = \dots 5$ nên chia hết cho 5.

Câu 2. (HSG 7 huyện Lương Tài 2022 - 2023)

Biết $a+1$ và $2a+1$ đồng thời là các số chính phương. Chứng minh rằng $a:12$.

Lời giải

Ta có $a+1$ và $2a+1$ đồng thời là các số chính phương

Đặt $a+1 = m^2$; $2a+1 = n^2$ ($m, n \in \mathbb{N}$)

Mà $2a+1$ là số lẻ $\Rightarrow n$ lẻ

$$\Rightarrow 2a = n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$$

Vì n lẻ nên $n+1$, $n-1$ là hai số chẵn liên tiếp.

$$(n-1)(n+1):8 \Rightarrow 2a:8 \Rightarrow a:4 \quad (1)$$

Mặt khác $a+1+2a+1 = 3a+2 = n^2 + m^2$ là số chia cho 3 dư 2

Do vậy cả hai số n^2 và m^2 chia cho 3 dư 1

$$\text{Khi đó } m^2 - k^2 = 2a+1 - a - 1 = a:3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a:12$

Vậy $a:12$

Câu 3. (HSG 7 huyện Bình Xuyên – Vĩnh Phúc 2022 - 2023)

Cho n là số tự nhiên, chứng minh rằng $9 \cdot 10^n + 18$ chia hết cho 27

Lời giải

$$\text{Ta có: } 9 \cdot 10^n + 18 = 9 \cdot (10^n + 2) : 9 \quad (1)$$

Mặt khác 10^n là số có tổng các chữ số là 1

Nên $10^n + 2$ là số có tổng các chữ số là 3

$$\text{Suy ra } (10^n + 2) : 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $9 \cdot (10^n + 2) : 27$ hay $(9 \cdot 10^n + 18) : 27$

Câu 4. (HSG 7 huyện Liên Trường 2022 - 2023; huyện Thanh Ba 2021 - 2022)

Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương ta luôn có $4^{n+3} + 4^{n+2} - 4^{n+1} - 4^n$ chia hết cho 300.

Lời giải

$$\text{Ta có } 4^{n+3} + 4^{n+2} - 4^{n+1} - 4^n$$

$$= 4^n \cdot (4^3 + 4^2 - 4 - 1) = 4^n \cdot 75$$

$$= 4^{n-1} \cdot 4 \cdot 35 = 300 \cdot 4^{n-1}$$

Mà $300 \cdot 4^{n-1}$ chia hết cho 300 (với mọi n nguyên dương)

Nên $4^{n+3} + 4^{n+2} - 4^{n+1} - 4^n$ chia hết cho 300

Câu 5. (HSG 7 huyện Diễn Châu 2022 - 2023)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3, biết $p+2$ cũng là số nguyên tố. Chứng tỏ rằng $p+1$ chia hết cho 6.

Lời giải

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3, biết $p+2$ cũng là số nguyên tố. Chứng tỏ rằng $p+1$ chia hết cho 6.

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p lẻ, do đó $p+1$ chẵn

$$\Rightarrow (p+1):2 \quad (1)$$

Cũng do p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p = 3k+1$ hoặc $p = 3k+2$ ($k \in \mathbb{N}$)

Nếu $p = 3k+1$ thì $p+2 = 3k+3 = 3(k+1):3$

$\Rightarrow p+2$ không là số nguyên tố nên $p = 3k+1$ không xảy ra.

Do đó $p = 3k+2 \Rightarrow p+1 = 3k+3 = 3(k+1):3 \quad (2)$

Vì $(2;3) = 1$ nên từ (1) và (2) ta có $(p+1):6$

Câu 6. (HSG 7 huyện Cẩm Thủy 2022 – 2023; huyện Như Thanh 2021 - 2022)

Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. thỏa mãn $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3)$. Chứng minh $a+b+c+d$ chia hết cho 3.

Lời giải

Ta có: $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3)$

$$a^3 + b^3 = 2c^3 - 16d^3$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3c^3 - 15d^3 = 3(c^3 - 5d^3):3 \quad (1)$$

Xét hiệu $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 - (a+b+c+d)$

$$= (a^3 - a) + (b^3 - b) + (c^3 - c) + (d^3 - d)$$

$$= (a-1).a.(a+1) + (b-1).b.(b+1) + (c-1).c.(c+1) + (d-1).d.(d+1)$$

Mà tổng các tích 3 số nguyên liên tiếp thì chia hết cho 3

$$\Rightarrow [(a-1).a.(a+1) + (b-1).b.(b+1) + (c-1).c.(c+1) + (d-1).d.(d+1)]:3$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 - (a+b+c+d):3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a+b+c+d$ chia hết cho 3.

Câu 7. (HSG 7 huyện Thanh Miện 2021 - 2022)

Chứng minh rằng nếu $\overline{abcd}:29$ thì $a+3b+9c+27d$ chia hết cho 29

Lời giải

Ta có:

$$\overline{abcd}:29$$

$$\Rightarrow (1000a + 100b + 10c + d):29$$

$$\Rightarrow (2000a + 200b + 20c + 2d):29$$

$$\Rightarrow [(2001a - a) + (203b - 3b) + (29c - 9c) + (29d - 27d)]:29$$

$$\Rightarrow [(2001a + 203b + 29c + 29d) - (a + 3b + 9c + 27d)]:29$$

$$\Rightarrow [(69.29a + 7.29b + 29c + 29d) - (a + 3b + 9c + 27d)]:29$$

Mà $(69.29a + 7.29b + 29c + 29d) = 29.(69a + 7b + c + d):29$

$$\Rightarrow (a + 3b + 9c + 27d):29$$

Câu 8. (HSG 7 huyện Thanh Thủy 2021 - 2022)

Cho p, q là các số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh rằng $p^2 + 2039q^2$ chia hết cho 24

Lời giải

$$\text{Ta có } p^2 + 2039q^2 = p^2 - q^2 + 2040q^2 = (p^2 - 1) - (q^2 - 1) + 2040q^2$$

Ta thấy $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$ và p là số nguyên tố lớn hơn 5 nên p lẻ suy ra $p - 1$ và $p + 1$ là hai số chẵn liên tiếp

suy ra $(p - 1)(p + 1) : 8$.

Lại có $(p - 1) \cdot p \cdot (p + 1)$ là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp

suy ra $(p - 1) \cdot p \cdot (p + 1) : 3$

Mà $p \not\equiv 3 \pmod{3} \Rightarrow (p - 1)(p + 1) : 3$

Vì $(3; 8) = 1$ nên $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1) : 24$

Tương tự ta có $(q^2 - 1) : 24$ và $(2040q^2) : 24$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Câu 9. (HSG 7 huyện Cửa Lò 2021 - 2022)

Cho x, y là các số nguyên thỏa mãn: $(x - y)^2 + 2xy$ chia hết cho 4. Chứng minh rằng: x và y đều chia hết cho 2.

Lời giải

$(x - y)^2 + 2xy$ chia hết cho 4 $\Rightarrow (x - y)^2 + 2xy$ chia hết cho 2

Mà $2xy$ chia hết cho 2 nên $(x - y)^2$ chia hết cho 2

$\Rightarrow x - y$ chia hết cho 2 $\Rightarrow (x - y)^2$ chia hết cho 4

Mặt khác $(x - y)^2 + 2xy$ chia hết cho 4

$\Rightarrow 2xy$ chia hết cho 4 $\Rightarrow xy$ chia hết cho 2

$\Rightarrow x$ hoặc y chia hết cho 2

Lại có $x - y$ chia hết cho 2

Vậy x và y đều chia hết cho 2.

Câu 10. (HSG 7 huyện Cửa Lò 2021 - 2022)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh $(p^2 - 1) : 24$

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ và p không chia hết cho 3.

+ Ta chứng minh $(p^2 - 1) : 3$. Thật vậy, vì p không chia hết cho 3 nên có hai trường hợp:

Nếu $p \equiv 1 \pmod{3}$ thì $p^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow (p^2 - 1) : 3$.

Nếu $p \equiv 2 \pmod{3}$ thì $p^2 \equiv 4 \pmod{3} \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow (p^2 - 1) : 3$.

+ Ta chứng minh $(p^2 - 1) : 8$. Thật vậy, vì p là số lẻ nên có các trường hợp :

Nếu $p \equiv 1 \pmod{8}$ thì $p^2 \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow (p^2 - 1) : 8$.

Nếu $p \equiv 3 \pmod{8}$ thì $p^2 \equiv 9 \pmod{8} \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow (p^2 - 1) : 8$.

Nếu $p \equiv 5 \pmod{8}$ thì $p^2 \equiv 25 \pmod{8} \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow (p^2 - 1) : 8$.

Nếu $p \equiv 7 \pmod{8}$ thì $p^2 \equiv 49 \pmod{8} \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow (p^2 - 1) : 8$.

+) Như vậy: vì 3 và 8 nguyên tố cùng nhau nên $(p^2 - 1) : (3 \cdot 8)$ hay $(p^2 - 1) : 24$.

Câu 11. (HSG 7 huyện Vũ Thư 2020 - 2021)

Cho x, y, z, t là các số nguyên thỏa mãn: $x^3 + y^3 = 7 \cdot (2z^3 - 13t^3)$.

Chứng minh rằng: $(x + y + z + t) : 3$.

Lời giải

* Chứng minh bài toán phụ: $(n^3 - n) : 3$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$.

Cách 1:

Thật vậy: + Nếu n chia hết cho 3 thì $n^3 - n$ chia hết cho 3.

+ Nếu n chia 3 dư 1 thì n^3 chia 3 dư 1 $\Rightarrow n^3 - n$ chia hết cho 3.

+ Nếu n chia 3 dư 2 thì n^3 chia 3 dư 2 $\Rightarrow n^3 - n$ chia hết cho 3.

$\Rightarrow [(n-1)n(n+1)] : 3 \Rightarrow (n^3 - n) : 3$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$. (Đpcm)

Cách 2:

Ta có $n^3 - n = n \cdot (n^2 - 1) = n(n^2 - n + n - 1) = n[n(n-1) + 1 \cdot (n-1)] = (n-1)n(n+1)$.

Do $n \in \mathbb{Z}$ nên $(n-1), n, (n+1)$ là 3 số nguyên liên tiếp

\Rightarrow luôn có một số chia hết cho 3.

$\Rightarrow (n-1)n(n+1) : 3 \Rightarrow (n^3 - n) : 3$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$. (Đpcm)

* Quay trở lại bài toán ban đầu. Điều kiện: $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$

Ta có: $x^3 + y^3 = 7 \cdot (2z^3 - 13t^3)$

$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 14z^3 - 91t^3 + z^3 + t^3 = 15z^3 - 90t^3 = 3(5z^3 - 30t^3) : 3$.

Xét hiệu $(x^3 + y^3 + z^3 + t^3) - (x + y + z + t) = (x^3 - x) + (y^3 - y) + (z^3 - z) + (t^3 - t)$.

Áp dụng bài toán phụ $\Rightarrow (x^3 - x) : 3, (y^3 - y) : 3, (z^3 - z) : 3, (t^3 - t) : 3$

$\Rightarrow [(x^3 + y^3 + z^3 + t^3) - (x + y + z + t)] : 3$.

Mà $(x^3 + y^3 + z^3 + t^3) : 3 \Rightarrow (x + y + z + t) : 3$. Đpcm.

Câu 12. (HSG 7 huyện Bát Xát, Lào Cai 2021 - 2022)

Chứng minh rằng số có dạng \overline{abcabc} luôn chia hết cho 11.

Lời giải

Ta có: $\overline{abcabc} = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$

$= a \cdot 10^2(10^3 + 1) + b \cdot 10(10^3 + 1) + c(10^3 + 1)$

$= (10^3 + 1)(a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c)$

$$\begin{aligned}
 &= (10000+1)(a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c) \\
 &= 1001 \cdot (a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c) \\
 &= 11 \cdot 91 \cdot (a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c) : 11
 \end{aligned}$$

Vậy $\overline{abcabc} : 11$

Câu 13. (HSG 7 huyện Bá Thước, Thanh Hóa 2021 - 2022)

Cho x, y là các số nguyên thỏa mãn $\frac{x^2-1}{2} = \frac{y^2-1}{3}$. Chứng minh rằng $x^2 - y^2$ chia hết cho 40

Lời giải

Vì x^2 chia cho 8 dư 0, 1, 4 nên $3x^2$ chia cho 8 dư 0, 3, 4

Vì y^2 chia cho 8 dư 0, 1, 4 nên $2y^2$ chia cho 8 dư 0, 2, 4

Từ giả thiết $\frac{x^2-1}{2} = \frac{y^2-1}{3} \Rightarrow 3x^2 - 2y^2 = 1$ nên $3x^2 - 2y^2$ chia cho 8 dư 1

Do đó x^2 chia cho 8 dư 1 và y^2 chia cho 8 dư 1. Nên $x^2 - y^2$ chia hết cho 5 (1)

Vì x^2 chia hết cho 5 dư 0, 1, 4 nên $3x^2$ chia cho 5 dư 0, 3, 2

Vì y^2 chia hết cho 5 dư 0, 1, 4 nên $2y^2$ chia cho 5 dư 0, 2, 3.

Mặt khác từ $3x^2 - 2y^2 = 1$ nên $3x^2 - 2y^2$ chia cho 5 dư 1

Do đó x^2 chia cho 5 dư 1 và y^2 chia cho 5 dư 1. Nên $x^2 - y^2$ chia hết cho 40 (đpcm)

Câu 14. (HSG 7 huyện Cẩm Thủy, Thanh Hóa 2021 - 2022; huyện Thiệu Hóa 2022 - 2023)

Cho a, b, c là ba số nguyên thỏa mãn $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Chứng minh abc chia hết cho 4

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Rightarrow bc = a(b+c)$ (1)

* Nếu a là số nguyên chẵn:

Suy ra $a(b+c) : 2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $bc : 2$, do đó abc chia hết cho 4.

* Nếu a là số nguyên lẻ:

Nếu b và c cùng lẻ: suy ra $(b+c) : 2$ (3)

Từ (1) và (3) suy ra: $bc : 2$ mâu thuẫn vì b và c cùng lẻ.

Vậy trong hai số b và c có một số chẵn và một số lẻ.

Vì b và c có vai trò như nhau nên ta giả sử b là số nguyên chẵn và c là số nguyên lẻ.

Suy ra: $bc : 2$ (4)

Từ (1) và (4) suy ra $a(b+c) : 2$

Mà $(b+c)$ không chia hết cho 2 (vì b là số nguyên chẵn và c là số nguyên lẻ) nên $a : 2$.

Từ (4) và (5) suy ra: abc chia hết cho 4.

Vậy abc chia hết cho 4.

Câu 15. (HSG 7 huyện Mường La 2021 - 2022)

Với n là số nguyên dương. Chứng minh rằng $7.5^{2n} + 12.6^n$ chia hết cho 19.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & 7.5^{2n} + 12.6^n \\ &= 7.25^n + (19-7) \cdot 6^n \\ &= 19.6^n + 7(25^n - 6^n) : 19 \end{aligned}$$

$$\text{vì } (25^n - 6^n) : (25 - 6)$$

nên $7.5^{2n} + 12.6^n$ chia hết cho 19.

Câu 16. (HSG 7 huyện Quảng Trạch 2021 - 2022)

Chứng minh rằng: $10^n + 18n - 1$ chia hết cho 27 với mọi số tự nhiên n .

Lời giải

Cách 1:

$$\text{Ta có } J = 10^n + 18n - 1 = (10^n - 1) + 18n = 9(111\dots1 + 2n) = 9.L \text{ (số } 111\dots1 \text{ có } n \text{ chữ số } 1).$$

$$\text{Xét biểu thức } L = 111\dots1 + 2n = (111\dots1) - n + 3n$$

Ta đã biết một số tự nhiên và tổng các chữ số của nó có cùng số dư trong phép chia cho 3. Số 111...1 (có n chữ số 1) có tổng các chữ số là $1+1+1+\dots+1 = n$ (vì có n chữ số 1).

$$\text{Do đó } (111\dots1 - n) : 3$$

$$\text{suy ra } L = [(111\dots1 - n) + 3n] : 3$$

$$\text{do đó } 9L : 27 \text{ hay } J : 27$$

$$\text{Vậy } J = 10^n + 18n - 1 = (10^n - 1) + 18n : 27.$$

Cách 2:

$$+) \text{ Với } \forall n \in \mathbb{N}, \text{ Đặt } A = 10^n + 18n - 1 = (10^n - 1) - 9n + 27n.$$

$$\begin{aligned} +) \text{ Xét } & (10^n - 1) - 9n = (10 - 1)(10^{n-1} + 10^{n-2} + 10^{n-3} + \dots + 10^2 + 10 + 1) - 9n \\ &= 9(10^{n-1} + 10^{n-2} + 10^{n-3} + \dots + 10^2 + 10 + 1 - n). \end{aligned}$$

$$= 9[(10^{n-1} - 1) + (10^{n-2} - 1) + (10^{n-3} - 1) + \dots + (10^2 - 1) + (10 - 1) + (1 - 1)].$$

$$+) \text{ Ta lại có: } (10^{n-1} - 1) = 9.(10^{n-2} + 10^{n-3} + \dots + 10^2 + 10 + 1) = 9k_1 \text{ (} k_1 \in \mathbb{N} \text{)}$$

$$(10^{n-2} - 1) = 9.(10^{n-3} + 10^{n-4} + \dots + 10^2 + 10 + 1) = 9k_2 \text{ (} k_2 \in \mathbb{N} \text{)}$$

...

$$10^2 - 1 = 9.11$$

$$10 - 1 = 9.1$$

$$+) \text{ Vậy } (10^n - 1) - 9n = 9.9(k_1 + k_2 + \dots + 11 + 1) = 81k : 27$$

$$+) \text{ Do đó } A = 10^n + 18n - 1 = (10^n - 1) - 9n + 27n = 81k + 27n : 27 \text{ (} n \in \mathbb{N} \text{)}$$

Câu 17. (HSG 7 Thị xã Kinh Môn, tỉnh Hải Dương 2022 - 2023)

Cho a, b là các số nguyên thỏa mãn: $(7a - 14b + 5)(a - 3b + 1) : 7$.

Chứng minh rằng $(29a + 18b + 36) : 7$

Lời giải

Do $(7a - 14b + 5)(a - 3b + 1) : 7$

vì $(7a - 14b + 5)$ không chia hết cho 7 mà 7 là số nguyên tố nên $(a - 3b + 1) : 7$

Mà $(28a + 21b + 35) : 7$

$\Rightarrow (28a + 21b + 35) + (a - 3b + 1) : 7$

$\Rightarrow 29a + 18b + 36 : 7$ (đpcm)

Câu 18. (HSG 7 huyện Tương Dương, Nghệ An 2022 - 2023; huyện Hoài Nhơn; huyện Thăng Bình 2018 - 2019; huyện Lâm Thao 2016 - 2017)

Chứng tỏ rằng $M = 75.(4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$ chia hết cho 10^2 .

Lời giải

$M = 75.(4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$

$= 25.(4 - 1).(4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$

$= 25.[4.(4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) - (4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 1]$

$= 25.[(4^{2019} + 4^{2018} + \dots + 4^3 + 4^2 + 4) - (4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 1]$

$= 25.(4^{2019} - 1 + 1)$

$= 25.4^{2019}$

$= 25.4.4^{2018}$

$= 10^2.4^{2018}$

Ta thấy $(10^2.4^{2018}) : 10^2$.

Vậy $M = 75.(4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$ chia hết cho 10^2 .

Câu 19. (HSG 7 huyện Ninh Giang, tỉnh Hải Dương 2022 - 2023)

Cho các số tự nhiên x, y thỏa mãn $(2x + 3y) : 17$. Chứng minh $(9x + 5y) : 17$.

Lời giải

Ta có $(2x + 3y) : 17 \Rightarrow 4(2x + 3y) : 17 \Rightarrow (8x + 12y) : 17$

Ta lại có: $9x + 5y + 8x + 12y = 17x + 17y = 17(x + y) : 17$

Mà $(2x + 3y) : 17$ nên $(9x + 5y) : 17$.

Câu 20. (HSG 7 huyện Hà Trung, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Cho $a, b \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $M = (9a + 11b)(5b + 11a)$ chia hết cho 19. Chứng minh rằng $M : 361$.

Lời giải

Ta có: $M = (9a + 11b)(5b + 11a) : 19$ mà 19 là số nguyên tố nên $(9a + 11b) : 19$ hoặc $(5b + 11a) : 19$

Lại có: $3(9a+11b):19+(5b+11a)=38a+38b=19(2a+2b):19$ (*)

+ Nếu $(9a+11b):19$ kết hợp với (*) suy ra: $(5b+11a):19$

+ Nếu: $(5b+11a):19$ kết hợp với (*) suy ra $(9a+11b):19$

$\Rightarrow M=(9a+11b)(5b+11a):19.19$

$\Rightarrow M:361$

Câu 21. (HSG 7 TP Bắc Giang, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

Cho $m; n; t$ là ba số nguyên tố lớn hơn 3 thỏa mãn: $m-n=n-t=a$ ($a \in \mathbb{N}^*$). Chứng minh rằng a chia hết cho 6.

Lời giải

Ta có

$$m-n=n-t=a \quad (a \in \mathbb{N}^*)$$

Suy ra $n=t+a; m=n+a=t+2a$

Do đó ta có $t; t+a; t+2a$ là các số nguyên tố lớn hơn 3

Xét số dư của ba số nguyên tố $t; t+a; t+2a$ đã cho khi chia cho 3, số dư nhận được có thể là 1 hoặc 2. Do đó có ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho 3 và hiệu của chúng chia hết cho 3.

$$\text{Mặt khác } (t+a)-t=a; (t+2a)-t=2a; (t+2a)-(t+a)=a$$

Suy ra a hoặc $2a$ chia hết cho 3. Mà $(2,3)=1$ nên $a:3$ (1)

Vì m, n là các số nguyên tố lớn hơn 3 nên m, n là các số lẻ

$\Rightarrow m-n$ Từ (1) và (2) kết hợp với $(2,3)=1$ ta có $a:6$

Câu 22. (HSG 7 thị xã Bim Sơn, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Cho các số nguyên dương a, b, c sao cho: $a^2+b^2=c^2$. Chứng minh: $ab:(a+b+c)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } a^2+b^2=c^2 \Rightarrow (a+b)^2-c^2=2ab \Rightarrow (a+b+c)(a+b-c)=2ab$$

Suy ra $2ab:(a+b+c)$ (1)

mà $(a+b+c)-(a+b-c)=2c$ chẵn nên $(a+b+c); (a+b-c)$ cùng tính chẵn lẻ.

Nếu $(a+b+c)$ lẻ thì từ (1) suy ra $ab:(a+b+c)$

Nếu $(a+b+c)$ chẵn thì $(a+b-c)$ chẵn. Đặt $(a+b-c)=2k$ thì

$$(a+b+c)2k=2ab \Rightarrow (a+b+c)k=ab \text{ suy ra } ab:(a+b+c)$$

Vậy $ab:(a+b+c)$

Câu 23. (HSG 7 huyện Lạng Giang, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

Cho bốn số tự nhiên phân biệt $d < c < b < a$.

Chứng minh rằng: $P=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d):12$

Lời giải

Xét P chia hết cho 3:

Chia bốn số phân biệt a, b, c, d cho 3 luôn có hai phép chia có cùng số dư \Rightarrow hiệu hai số bị chia đó chia hết cho 3 \Rightarrow tồn tại hiệu hai số trong bốn số a, b, c, d chia hết cho 3

Do vậy P chia hết cho 3 (1)

Xét P chia hết cho 4:

Trường hợp 1: Trong bốn số a, b, c, d nếu có hai số có cùng số dư khi chia cho 4 thì P chia hết cho 4

Trường hợp 2: Khi chia bốn số đó cho 4 có đủ các trường hợp về số dư 1; 2; suy ra trong bốn số a, b, c, d có hai số chẵn, hai số lẻ. Giả sử a, c chẵn và b, d lẻ $\Rightarrow (a-c):2$ và $(b-d):2$

Do vậy P chia hết cho 4

Suy ra P luôn chia hết cho 4 (2)

Từ (1) và (2) và suy ra $P:(3.4)$ hay $P:12$

Câu 24. (HSG 7 huyện Quốc Oai, Hà Nội 2022 - 2023)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3 thỏa mãn $10p+1$ cũng là số nguyên tố. Chứng minh rằng $5p+1$ chia hết cho 6.

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ $\Rightarrow 5p$ là số lẻ $\Rightarrow 5p+1$ là số chẵn $\Rightarrow (5p+1):2$ (1)

Xét ba số chẵn liên tiếp: $10p; 10p+1; 10p+2$ luôn tồn tại một số chia hết cho 3

Mà $10p+1$ là số nguyên tố lớn hơn 3 $\Rightarrow (10p+1) \not\vdots 3$

p là số nguyên tố lớn hơn 3 $\Rightarrow p \not\vdots 3$ và $\text{UCLN}(10;3)=1 \Rightarrow 10p \not\vdots 3$

Do đó $10p+2 \vdots 3 \Rightarrow 2(5p+1) \vdots 3$ mà $\text{UCLN}(2;3)=1 \Rightarrow 5p+1 \vdots 3$ (2)

Từ (1) và (2) kết hợp với $\text{UCLN}(2;3)=1$ nên $5p+1 \vdots 6$

Câu 25. (HSG 7 huyện Gia Viễn, Ninh Bình 2022 - 2023)

Chứng tỏ rằng tích của hai số nguyên lẻ liên tiếp cộng thêm 9 thì chia hết cho 4.

Lời giải

Gọi hai số nguyên lẻ liên tiếp là $2a+1$ và $2a-1$ ($a \in \mathbb{Z}$)

Tích của hai số nguyên lẻ liên tiếp cộng thêm 9 bằng:

$$(2a+1)(2a-1)+9$$

$$=4a^2-2a+2a-1+9$$

$$=4a^2+8$$

$$=4.(a^2+2):4$$

Vậy tích của hai số nguyên lẻ liên tiếp cộng thêm 9 thì chia hết cho 4.

Câu 26. (HSG 7 thành phố Bắc Ninh, tỉnh Bắc Ninh 2022 - 2023)

Chứng minh rằng số $B = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133, với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } B = 11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11^n \cdot 121 + 144^n \cdot 12 = 133 \cdot 11^n + 12 \cdot (144^n - 11^n). \quad (1)$$

Mặt khác ta có $(144^n - 11^n) : (144 - 11) \Rightarrow (144^n - 11^n) : 133. (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $B : 133.$

Câu 27. (HSG 7 huyện Nghi Lộc, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Chứng minh rằng số $A = \frac{(17^{2014^{2016}} - 3^{96^{97}})}{2}$ là một số tự nhiên chia hết cho 5.

Lời giải

Ta có: $2014 : 2 \Rightarrow 2014^{2016} : 2^{2016}$

$\Rightarrow 2014^{2016} : 4 \Rightarrow 2014^{2016} = 4k (k \in \mathbb{N}^*)$

Vì 17^4 có chữ số tận cùng là 1

$\Rightarrow 17^{2014^{2016}} = 17^{4k} = (17^4)^k$ có chữ số tận cùng là 1

Tương tự $3^{96^{97}} = 3^{4t} = (3^4)^t = (81)^k$ có chữ số tận cùng là 1

$\Rightarrow 17^{2014^{2016}} - 3^{96^{97}}$ có chữ số tận cùng là 0

Nên A là một số tự nhiên, vì $A > 0$

$\Rightarrow A : 2.$

$\Rightarrow A$ là một số tự nhiên có tận cùng là 0

$\Rightarrow A : 5$

Câu 28. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Cho a, b là các số nguyên thỏa mãn $(7a + 5 - 21b)(a + 1 - 3b) : 7$. Chứng minh rằng: $(11b + 15 + 43a) : 7$

Lời giải

Từ $(7a + 5 - 21b)(a + 1 - 3b) : 7$

suy ra $(7a - 21b + 5)(a - 3b + 1) : 7$

$\Rightarrow (a - 3b + 1) : 7$ vì $(7a - 21b + 5)$ không chia hết cho 7 và 7 là số nguyên tố.

Từ $(a - 3b + 1) : 7 \Rightarrow [(42a + 14b + 14) + (a - 3b + 1)] : 7$

Vì $(42a + 14b + 14) : 7$

$\Rightarrow (11b + 15 + 43a) : 7$

Câu 29. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Cho hai số nguyên tố khác nhau p và q . Chứng minh rằng: $p^{q-1} + q^{p-1} - 1$ chia hết cho $p \cdot q$

Lời giải

Vì p, q nguyên tố cùng nhau và p khác q nên: $(p, q) = 1.$

Áp dụng định lí Fermat ta có:

$p^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$ và $q^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

suy ra $p^{q-1} - 1 : q$ và $q^{p-1} - 1 : p$ mặt khác $p^{q-1} : p$ và $q^{p-1} : q$

nên ta có: $p^{q-1} + q^{p-1} - 1 : q ; p^{q-1} + q^{p-1} - 1 : p$ mà $(p, q) = 1$

nên: $(p^{q-1} + q^{p-1} - 1) : p \cdot q$

Câu 30. (HSG 7 huyện Hưng Hà, 2022 - 2023)

Tìm một số có ba chữ số biết rằng số đó chia hết cho 72, các chữ số của nó sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn tỷ lệ với 2; 3; 4.

Lời giải

Gọi ba chữ số của số cần tìm là a, b, c

Điều kiện: $a, b, c \in \mathbb{N}^*, 0 < a < b < c \leq 9$

Theo bài ra: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$ và số có ba chữ số a, b, c chia hết cho 72.

Ta có số có ba chữ số a, b, c chia hết cho 72 nên nó chia hết cho 9 và 8

Số có ba chữ số a, b, c chia hết cho 9

Suy ra $(a+b+c):9$ (dấu hiệu chia hết cho 9) mà $0 < a+b+c < 27$ (Do a, b, c là các chữ số)

nên $a+b+c \in \{9; 18\}$

Từ $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$, áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau ta có: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{a+b+c}{2+3+4}$

+) Nếu $a+b+c=9 \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{9}{9} = 1 \Rightarrow a=2.1=2; b=3.1=3; c=4.1=4$

Ta được các số 234, 324, 342, 243, 423, 432. Nhưng số cần tìm phải chia hết cho 8 nên chỉ có số 432 chia hết cho 72 (1)

+) Nếu $a+b+c=18 \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{18}{9} = 2 \Rightarrow a=4.2=8; b=3.2=6; c=4.2=8$

Ta được các số 468, 486, 648, 684, 864, 846. Nhưng số cần tìm phải chia hết cho 8 nên chỉ có số 648; 864 chia hết cho 72 (2)

Từ (1) và (2) ta được các số cần tìm là: 432; 648; 864

Câu 31. (HSG 7 huyện Mỹ Đức Hà Nội năm 2022 - 2023)

Cho đa thức $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Biết $Q(x)$ chia hết cho 5 với mọi $x \in \mathbb{Z}$. Chứng tỏ các hệ số a, b, c, d đều chia hết cho 5.

Lời giải

Vì $Q(x):5$ với mọi $x \in \mathbb{Z}$

Với $x=0$, ta có $Q(0) = d:5$

Với $x=1$, ta có $Q(1) = (a+b+c+d):5$ mà $d:5 \Rightarrow (a+b+c):5$ (1)

Với $x=-1$, ta có $Q(-1) = (-a+b-c+d):5$

mà $d:5 \Rightarrow (-a+b-c):5$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$Q(1)+Q(-1) = (2b+2d):5$ lại có $d:5 \Rightarrow 2d:5$ mà 5 và 2 là hai số nguyên tố cùng nhau nên $b:5$

$Q(1)-Q(-1) = 2(a+c):5$ mà 5 và 2 là hai số nguyên tố cùng nhau nên $(a+c):5$ (3)

Với $x = 2$, ta có $Q(2) = (8a + 4b + 2c + d) : 5$ hay $[6a + 2(a + c) + 4b + d] : 5$

Mà $d : 5$, $(a + c) : 5$, $b : 5$ nên $6a : 5$ mà 5 và 6 là hai số nguyên tố cùng nhau nên $a : 5$

Từ (3) suy ra $c : 5$.

Vậy $a : 5$; $b : 5$; $c : 5$; $d : 5$

Câu 32. (HSG 7 huyện Nông Công, 2022 - 2023)

Cho số nguyên n ($n > 1$) thỏa mãn $n^2 + 4$ và $n^2 + 16$ là các số nguyên tố. Chứng minh n chia hết cho 5.

Lời giải

Với mọi số nguyên n thì n^2 chia cho 5 dư 0; 1 hoặc 4.

+ Nếu n^2 chia 5 dư 1 thì $n^2 = 5k + 1$ ($k \in \mathbb{N}^*$) $\Rightarrow n^2 + 4 = 5k + 1 + 4 = (5k + 5) : 5$.

Do đó nên $n^2 + 4$ không là số nguyên tố. Loại trừ trường hợp này.

+ Nếu n^2 chia 5 dư 4 thì $n^2 = 5k + 4$ ($k \in \mathbb{N}^*$) $\Rightarrow n^2 + 16 = (5k + 20) : 5$.

Do đó $n^2 + 16$ không là số nguyên tố. Loại trừ trường hợp này.

Vậy $n^2 : 5$ suy ra $n : 5$.

Câu 33. (HSG 7 huyện Thường Xuân 2022 - 2023)

Cho m ; n là hai số chính phương lẻ liên tiếp. Chứng minh rằng: $mn - m - n + 1$ chia hết cho 192.

Lời giải

Ta có: $192 = 16 \cdot 12$

Do m ; n là hai số chính phương lẻ liên tiếp nên ta có:

$$m = (2k - 1)^2 \text{ và } n = (2k + 1)^2 \text{ (} k \in \mathbb{N}^* \text{)}$$

$$\text{Khi đó: } mn - m - n + 1 = (m - 1)(n - 1)$$

$$= [(2k - 1)^2 - 1][(2k + 1)^2 - 1] = (4k^2 - 4k)(4k^2 + 4k)$$

$$= 16k^2(k - 1)(k + 1) : 16 \text{ (1)}$$

$$\text{Ta có: } k(k - 1)(k + 1) : 3 \text{ và } k(k - 1)k(k + 1) : 4$$

$$\text{Mà } (3, 4) = 1 \text{ nên } k^2(k - 1)(k + 1) : 12$$

$$\Rightarrow mn - m - n + 1 = 16k^2(k - 1)(k + 1) : 12$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } mn - m - n + 1 : 192 \text{ (đpcm)}$$

Câu 34. (HSG 7 huyện Hiệp Hòa 2022 - 2023 lần 2)

Tìm số nguyên a để $a^2 + a + 3$ chia hết cho $a + 1$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } a^2 + a + 3 \text{ chia hết cho } a + 1 \Rightarrow [a(a + 1) + 3] : (a + 1) \text{ (1)}$$

$$\text{Vì } a \text{ là số nguyên nên } a(a + 1) : (a + 1) \text{ (2)}$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } 3 : (a + 1) \text{ hay } a + 1 \text{ là các ước của 3}$$

Do đó $a+1 \in \{-3; -1; 1; 3\} \Rightarrow a \in \{-4; -2; 0; 2\}$

Vậy $a \in \{-4; -2; 0; 2\}$ là các giá trị nguyên cần tìm.

Câu 35. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Trần Thủ Độ 2022 - 2023)

Cho $A = 16(1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2020}) + 4$. Chứng minh: $A : 100$.

Lời giải

Đặt $B = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2020}$

$\Rightarrow 5B = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2021}$

$\Rightarrow 5B - B = 5^{2021} - 1$

$\Rightarrow B = \frac{5^{2021} - 1}{4}$

$\Rightarrow 16B + 4 = 4 \cdot 5^{2021}$

$\Rightarrow 16B = 4 \cdot 5^{2021} - 4$

$\Rightarrow A = 4 \cdot 5^{2021} = 100 \cdot 5^{2019} : 100$

Vậy $A : 100$

Câu 36. (HSG 7 huyện Kim Sơn, tỉnh Ninh Bình, 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ chia hết cho 31.

Lời giải

Đặt $D = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ (có 100 số hạng)

$D = (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) + (2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}) + \dots + (2^{96} + 2^{97} + 2^{98} + 2^{99} + 2^{100})$

(có 20 nhóm)

$D = 2 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + 2^6 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \dots + 2^{96} \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)$

$D = 2 \cdot 31 + 2^6 \cdot 31 + \dots + 2^{96} \cdot 31 = 31 \cdot (2 + 2^6 + \dots + 2^{96})$ chia hết cho 31.

Câu 37. (HSG 7 huyện Trực Ninh, tỉnh Ninh Bình, 2021 - 2022)

Chứng minh rằng $\frac{10^{2021} + 539}{9}$ có giá trị là một số tự nhiên.

Lời giải

Ta có: $\frac{10^{2021} + 539}{9} = \frac{100\dots00000 + 539}{9} = \frac{100\dots00539}{9}$

Trong đó số 100...00539 là số có tổng các chữ số chia hết cho 9 nên số đó chia hết cho 9.

Vậy $\frac{10^{2021} + 539}{9}$ có giá trị là một số tự nhiên.

Câu 38. (HSG 7 huyện Quan Hóa, tỉnh Thanh Hóa, 2021 - 2022)

Cho các số nguyên dương n thỏa mãn $n+1$ và $2n+1$ đều là số chính phương. Chứng minh rằng $n : 24$

Lời giải

Đặt $n+1 = k^2$; $2n+1 = m^2$, $k, m \in \mathbb{N}$

Vì $2n+1$ là số lẻ nên m là số lẻ. Đặt $m = 2t+1$ ($t \in \mathbb{N}$) ta có:

$2n+1 = (2t+1)^2 \Rightarrow n = 2t(t+1)$

$\Rightarrow n$ là số chẵn $\Rightarrow k$ là số lẻ.

$\Rightarrow n = k^2 - 1 = (k - 1) \cdot (k + 1)$ là tích của hai số chẵn liên tiếp

$\Rightarrow n : 8$

Mặt khác: $(n + 1) + (2n + 1) = 3n + 2 = k^2 + m^2$ là số chia 3 dư 2

Mà số chính phương khi chia cho 3 chỉ dư 0 hoặc 1

$\Rightarrow k^2$ và m^2 chia 3 dư 1 $\Rightarrow m^2 - k^2 = (2n + 1) - (n + 1) = n : 3$

Vì $(3, 8) = 1$ nên $n : 24$ (đpcm).

Câu 39. (HSG 7 huyện Thị xã An Nhơn, 2021 - 2022)

Chứng minh rằng: Với mọi n nguyên dương thì $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} & 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n \\ &= (3^{n+2} + 3^n) - (2^{n+2} + 2^n) \\ &= 3^n(9 + 1) - 2^n(4 + 1) \\ &= 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 2 \cdot 5 \\ &= 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 10 \\ &= 10 \cdot (3^n - 2^{n-1}) : 10 \end{aligned}$$

Câu 40. (HSG 7 trường THCS Quang Trung Cát Tiên 2018 - 2019)

Chứng minh rằng:

a) $10^6 - 5^7$ chia hết cho 59.

b) $313^5 \cdot 229 - 313^6 \cdot 36$ chia hết cho 7.

Lời giải

a) $10^6 - 5^7 = (2 \cdot 5)^6 - 5^7 = 2^6 \cdot 5^6 - 5^7 = 5^6 \cdot (2^6 - 5) = 5^6 \cdot 59 : 59$

b) $313^5 \cdot 229 - 313^6 \cdot 36 = 313^5 \cdot 229 - 313^6 \cdot (1 + 35)$
 $= 313^5 \cdot 229 - 313^6 - 313^6 \cdot 35$
 $= 313^5 \cdot (229 - 313) - 313^6 \cdot 35$
 $= 313^5 \cdot (-14) - 313^6 \cdot 35$
 $= 7 \cdot (-2 \cdot 313^5 - 313^6 \cdot 5) : 7$

Câu 41. (HSG 7 trường Hiền Quang, 2018 - 2019)

Chứng minh rằng $7^6 + 7^5 - 7^4$ chia hết cho 55

Lời giải

$$7^6 + 7^5 - 7^4 = 7^4 \cdot (7^2 + 7 - 1) = 7^4 \cdot 55 : 55$$

Câu 42. (HSG 7 huyện Việt Yên, 2018 - 2019)

Cho $S = 17 + 17^2 + 17^3 + \dots + 17^{18}$. Chứng tỏ rằng S chia hết cho 307.

Lời giải

$$\begin{aligned} S &= 17 \cdot (1 + 17 + 17^2) + 17^4 \cdot (1 + 17 + 17^2) + \dots + 17^{16} \cdot (1 + 17 + 17^2) \\ &= 17 \cdot 307 + 17^4 \cdot 307 + \dots + 17^{16} \cdot 307 \end{aligned}$$

$$= 307 \cdot (17 + 17^4 + \dots + 17^{16}) : 307$$

Câu 43. (HSG 7 huyện Hoàng Hóa, 2018 - 2019)

Cho p, q là các số nguyên tố lớn hơn 3 và thỏa mãn $p = q + 2$. Chứng minh rằng: $(p + q) : 12$.

Lời giải

Vì q nguyên tố, $q > 3$ nên q có dạng $6k + 1$ hoặc $6k + 5$ ($k \in \mathbb{N}$)

Nếu $q = 6k + 1$ thì $p = q + 2 = (6k + 3) : 3$ mà $p > 3$ nên p là hợp số (loại)

Nếu $q = 6k + 5 \Rightarrow p = q + 2 = 6k + 5 + 2 = 6k + 7$

Suy ra $p + q = (6k + 7) + (6k + 5) = (12k + 12) : 12$

Câu 44. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường 2022 - 2023)

Tim số tự nhiên nhỏ nhất a để khi ghép nó vào bên phải số 2019 thì được một số tự nhiên chia hết cho 2018.

Lời giải

Đặt $a = \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$, a_1, a_2, \dots, a_n là các chữ số, $a_1 \neq 0$)

Số tự nhiên cần tìm có dạng $\overline{2019 a_1 a_2 \dots a_n}$

Theo giả thiết, ta có: $\overline{2019 a_1 a_2 \dots a_n} : 2018$

$(2019 \cdot 10^n + \overline{a_1 a_2 \dots a_n}) : 2018$

$(2018 \cdot 10^n + 10^n + \overline{a_1 a_2 \dots a_n}) : 2018$

$(10^n + \overline{a_1 a_2 \dots a_n}) : 2018$

Xét các trường hợp:

Với $n = 1$, ta được: $(10 + a_1) : 2018$ nên không tìm được a_1 vì $10 < 10 + a_1 < 20$

Với $n = 2$, ta được $(100 + \overline{a_1 a_2}) : 2018$ nên không tìm được $\overline{a_1 a_2}$ vì $100 < 100 + \overline{a_1 a_2} < 200$

Với $n = 3$, ta được $(1000 + \overline{a_1 a_2 a_3}) : 2018$, không tìm được $\overline{a_1 a_2 a_3}$ vì $1000 < 1000 + \overline{a_1 a_2 a_3} < 2000$

Với $n = 4$, ta được $(10000 + \overline{a_1 a_2 a_3 a_4}) : 2018$

$(10000 + \overline{a_1 a_2 a_3 a_4} - 5 \cdot 2018) : 2018$

Hay $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4} - 90 = 2018 \Rightarrow \overline{a_1 a_2 a_3 a_4} = 2108$

Vậy số tự nhiên a nhỏ nhất cần tìm là $a = 2108$

Câu 45. (HSG 7 trường Tôn Đức Thắng, 2018 - 2019)

Đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ có a, b, c là các số nguyên, và $a \neq 0$. Biết với mọi giá trị nguyên của x thì $f(x)$ chia hết cho 7. Chứng minh a, b, c cũng chia hết cho 7.

Lời giải

Với $x = 0 \Rightarrow f(x) = f(0) = c : 7$

$$\text{Với } x=1 \Rightarrow f(x)=f(1)=(a+b+c):7 \quad (1)$$

$$\text{Với } x=-1 \Rightarrow f(x)=f(-1)=(a-b+c):7 \quad (2)$$

$$\text{Từ và } \Rightarrow f(1)-f(-1)=a+b+c-a+b-c=2b:7 \Rightarrow b:7$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} (a+b+c):7 \\ b:7 \\ c:7 \end{cases} \Rightarrow a:7$$

Vậy $a:7; b:7; c:7$.

Câu 46. (HSG 7 Phòng GD&ĐT KRÔNG ANA 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+996}$ chia hết cho 120 (với $x \in \mathbb{N}$)

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+996} &= 3^x \cdot (3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{996}) \\ &= 3^x \cdot [(3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + (3^5 + 3^6 + 3^7 + 3^8) + \dots + (3^{993} + 3^{994} + 3^{995} + 3^{996})] \\ &= 3^x \cdot (120 + 120 \cdot 3^4 + 120 \cdot 3^8 \dots + 120 \cdot 3^{992}) \\ &= 3^x \cdot 120 \cdot (1 + 3^4 + 3^8 \dots + 3^{992}) : 120 \quad (\text{với } x \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

Câu 47. (HSG 7 Phòng GD&ĐT TP Lào Cai 2022 - 2023)

Chứng minh $A = 8 \cdot 5^{2n} + 11 \cdot 6^n$ chia hết cho 19 với $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= 8 \cdot 5^{2n} + 11 \cdot 6^n \\ &= 8 \cdot 25^n + (19 - 8) \cdot 6^n \\ &= 8 \cdot 25^n + 19 \cdot 6^n - 8 \cdot 6^n \\ &= 19 \cdot 6^n + 8 \cdot (25^n - 6^n) \\ &= 19 \cdot 6^n + 8 \cdot (25 - 6) \cdot (25^{n-1} + 25^{n-2} \cdot 6 + \dots + 25 \cdot 6^{n-2} + 6^{n-1}) \\ &= 19 \cdot 6^n + 8 \cdot 19 \cdot (25^{n-1} + 25^{n-2} \cdot 6 + \dots + 25 \cdot 6^{n-2} + 6^{n-1}) \\ &= 19 [6^n + 8 \cdot (25^{n-1} + 25^{n-2} \cdot 6 + \dots + 25 \cdot 6^{n-2} + 6^{n-1})] : 19 \end{aligned}$$

Vậy $A:19$.

Câu 48. (HSG 7 huyện Vĩnh Yên, 2018 - 2019)

Chứng minh rằng: $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100}$ chia hết cho 120 (với $x \in \mathbb{N}$)

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100} &= (3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4}) + (3^{x+5} + 3^{x+6} + 3^{x+7} + 3^{x+8}) + \dots + (3^{x+97} + 3^{x+98} + 3^{x+99} + 3^{x+100}) \\ &= 3^x (3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 3^{x+4} (3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + 3^{x+96} (3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4) \\ &= 3^x \cdot 120 + 3^{x+4} \cdot 120 + \dots + 3^{x+96} \cdot 120 \\ &= 120 (3^x + 3^{x+4} + \dots + 3^{x+96}) : 120 \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

Câu 49. (HSG 7 huyện)

Chứng minh rằng: Số $A = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133, với mọi $n \in \mathbb{N}$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= 11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11^2 \cdot 11^n + 12 \cdot (12^2)^n \\ &= 121 \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n \\ &= (133 - 12) \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n \\ &= 133 \cdot 11^n - 12 \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n \\ &= 133 \cdot 11^n + 12 \cdot (144^n - 11^n) \end{aligned}$$

Ta thấy: $133 \cdot 11^n : 133$

$$(144^n - 11^n) : (144 - 11) = 133 \Rightarrow 12 \cdot (144^n - 11^n) : 133$$

Do đó suy ra: $133 \cdot 11^n + 12 \cdot (144^n - 11^n)$ chia hết cho 133

Vậy số $A = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133, với mọi $n \in \mathbb{N}$

Câu 50. (HSG 7 huyện Nam Sách 2017 - 2018; huyện Tân Lạc; Ngọc Lặc 2022 - 2023; Ngọc Lặc 2015 - 2016)

Chứng minh rằng $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10 với mọi số nguyên dương n .

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n &= 3^n \cdot 9 - 2^n \cdot 4 + 3^n - 2^n \\ &= 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 = 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 10 \\ &= 10 \cdot (3^n - 2^{n-1}) : 10 \end{aligned}$$

Vậy $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10 với mọi số nguyên dương n .

Câu 51. (HSG 7 Phòng GD&ĐT Tam Dương 2022 - 2023)

Cho ba số chính phương x, y, z . Chứng minh rằng $A = (x - y)(y - z)(z - x)$ chia hết cho 12.

Lời giải

Vì một số chính phương chia cho 3 hoặc chia cho 4 đều dư 0 hoặc 1

Nên có ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho 3, chia cho 4

nên $x - y$ hoặc $y - z$ hoặc $z - x$ chia hết cho 3

do đó $A = (x - y)(y - z)(z - x)$ chia hết cho 3

Tương tự ta có $A = (x - y)(y - z)(z - x)$ chia hết cho 4

mà 3 và 4 là hai số nguyên tố cùng nhau nên $A = (x - y)(y - z)(z - x)$ chia hết cho 12

Câu 52. (HSG 7 thị xã Sầm Sơn và trường THCS Trường Sa, 2017 - 2018)

$P(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn: $P(x) : 7 \quad \forall x \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng a, b, c đều chia hết cho 7

Lời giải

$$P(0) : 7 \text{ nên } c : 7$$

$$P(1) : 7 \text{ nên } (a + b + c) : 7 \Rightarrow (a + b) : 7 \quad (1); \quad P(-1) : 7 \text{ nên } (a - b + c) : 7 \Rightarrow (a - b) : 7 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 2a:7$ mà $(2;7)=1$ nên $a:7 \Rightarrow b:7$

Câu 53. (HSG 7 thị xã Sầm Sơn 2017 - 2018)

Chứng minh rằng: $333^{555^{777}} + 777^{555^{333}}$ chia hết cho 10.

Lời giải

Chứng minh các số mũ đều có số dư bằng 3 khi chia cho 4

Đặt $555^{777} = 4q+3$; $555^{333} = 4p+3$ ta có:

$$\begin{aligned} 333^{555^{777}} + 777^{555^{333}} &= 333^{4q+3} + 777^{4p+3} = 333^3 \cdot (333^4)^q + 777^3 \cdot (777^4)^p \\ &= (\text{số tận cùng là } 7) + (\text{số tận cùng là } 3) \times (\text{số tận cùng là } 1) = \overline{\dots 7} + \overline{\dots 3} = \overline{\dots 0} \end{aligned}$$

Câu 54. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2017 - 2018)

Cho a, b là các số tự nhiên thỏa mãn: $a + 4b$ chia hết cho 13. Chứng minh rằng $10a + b$ cũng chia hết cho 13

Lời giải

$$(a + 4b):13 \Rightarrow 10(a + 4b):13$$

$$10.(a + 4b) - (10a + b) = 10a + 40b - 10a - b = 39b:13$$

$$\text{Do } 10(a + 4b):13 \Rightarrow (10a + b):13$$

Câu 55. (HSG 7 trường Nghĩa Điền 2017 - 2018)

Chứng minh rằng: $(81^7 - 27^9 - 9^{13}):405$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 81^7 - 27^9 - 9^{13} &= 3^{28} - 3^{27} - 3^{26} \\ &= 3^{26} \cdot (3^2 - 3 - 1) = 3^{22} \cdot 3^4 \cdot 5 = 3^{22} \cdot 405:405 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (81^7 - 27^9 - 9^{13}):405$$

Câu 56. (HSG 7 huyện Cẩm Khê 2017 - 2018; huyện Tân Kỳ 2015 - 2016)

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có: $5^{n+2} + 3^{n+2} - 3^n - 5^n$ chia hết cho 25.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 5^{n+2} + 3^{n+2} - 3^n - 5^n = (5^{n+2} - 5^n) + (3^{n+2} - 3^n) = 5^n \cdot 24 + 3^n \cdot 8$$

Vì n nguyên dương nên $5^n \cdot 24$ chia hết cho 24; $3^n \cdot 8$ chia hết cho 24

Vậy $5^{n+2} + 3^{n+2} - 3^n - 5^n$ chia hết cho 25 với mọi số nguyên dương n .

Câu 57. (HSG 7 huyện Nam Sách 2017 - 2018; huyện Tân Lạc; Ngọc Lặc 2015 - 2016)

Chứng minh rằng $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10 với mọi số nguyên dương n .

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n &= 3^n \cdot 9 - 2^n \cdot 4 + 3^n - 2^n \\ &= 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 = 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 10 \\ &= 10 \cdot (3^n - 2^{n-1}):10 \end{aligned}$$

Vậy $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10 với mọi số nguyên dương n .

Câu 58. (HSG 7 trường Hồng Thái, Sơn Dương 2017 - 2018; huyện Thái Thụy 2015 - 2016)

Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Biết $f(1) \vdots 3$; $f(0) \vdots 3$; $f(-1) \vdots 3$. Chứng minh rằng a, b, c đều chia hết cho 3.

Lời giải

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\Rightarrow f(0) = c; f(1) = a + b + c; f(-1) = a - b + c$$

$$\text{Ta có: } f(0) \vdots 3 \Rightarrow c \vdots 3$$

$$f(1) \vdots 3 \Rightarrow (a + b + c) \vdots 3 \Rightarrow (a + b) \vdots 3 \quad (1)$$

$$f(-1) \vdots 3 \Rightarrow (a - b + c) \vdots 3 \Rightarrow (a - b) \vdots 3 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } [(a + b) + (a - b)] \vdots 3 \Rightarrow 2a \vdots 3 \Rightarrow a \vdots 3 \text{ mà } (2; 3) = 1 \Rightarrow b \vdots 3$$

Vậy a, b, c đều chia hết cho 3.

Câu 59. (HSG 7 trường Lê Quý Đôn 2016 - 2017; huyện Việt Yên 2016 - 2017)

Chứng minh rằng: $(3a + 2b) \vdots 17$ khi và chỉ khi $(10a + b) \vdots 17$ ($a, b \in \mathbb{Z}$).

Lời giải

$$\oplus (3a + 2b) \vdots 17 \Rightarrow (10a + b) \vdots 17$$

$$\text{Ta có: } (3a + 2b) \vdots 17 \Rightarrow 9(3a + 2b) \vdots 17$$

$$\Rightarrow (27a + 18b) \vdots 17$$

$$\Rightarrow (17a + 17b) + (10a + b) \vdots 17$$

$$\Rightarrow (10a + b) \vdots 17$$

$$\oplus (10a + b) \vdots 17 \Rightarrow (3a + 2b) \vdots 17$$

$$\text{Ta có: } (10a + b) \vdots 17 \Rightarrow 2(10a + b) \vdots 17$$

$$\Rightarrow (20a + 2b) \vdots 17$$

$$\Rightarrow (17a + 3a + 2b) \vdots 17$$

$$\Rightarrow (3a + 2b) \vdots 17$$

Vậy với $a, b \in \mathbb{Z}$ thì $(3a + 2b) \vdots 17$ khi và chỉ khi $(10a + b) \vdots 17$.

Câu 60. (HSG 7 trường Hiền Quan 2015 - 2016)

Với a, b là các số nguyên dương sao cho $a + 1$ và $b + 2007$ chia hết cho 6. Chứng minh rằng: $4^a + a + b$ chia hết cho 6.

Lời giải

$$\text{Vì } a \text{ nguyên dương nên ta có } 4^a \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 4^a + 2 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\text{Mà } (4^a + 2) \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow (4^a + 2) \vdots 6$$

Khi đó ta có $4^a + a + b = 4^a + 2 + a + 1 + b + 2007 - 2010$ chia hết cho 6.

Vậy với a, b là các số nguyên dương sao cho $a + 1$ và $b + 2007$ chia hết cho 6 thì $4^a + a + b$ chia hết cho 6.

Câu 61. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2015 - 2016)

Chứng minh rằng: Số $A = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133, với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= 11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11^2 \cdot 11^n + 12 \cdot (12^2)^n = 121 \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n \\ &= (133 - 12) \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n = 133 \cdot 11^n - 12 \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n \\ &= 133 \cdot 11^n + 12 \cdot (144^n - 11^n) \end{aligned}$$

Ta thấy: $133 \cdot 11^n : 133$

$$(144^n - 11^n) : (144 - 11) = 133 \Rightarrow 12 \cdot (144^n - 11^n) : 133$$

Do đó suy ra $133 \cdot 11^n + 12 \cdot (144^n - 11^n)$ chia hết cho 133

Vậy: số $A = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133, với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Dạng 2: Tìm chữ số tận cùng

Câu 1. (HSG 7 TP Bắc Ninh, năm học 2022 - 2023)

Tìm chữ số tận cùng của C biết $C = 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ với ($n \in \mathbb{N}$).

Lời giải

Với $n = 0$, khi đó $C = 3^2 - 2^2 + 1 - 1 = 5$, C có chữ số tận cùng là 5.

Với $n \geq 1$. Ta có:

$$C = (3^{n+2} + 3^n) - (2^{n+2} + 2^n) = 10 \cdot 3^n - 10 \cdot 2^{n-1} = 10 \cdot (3^n - 2^{n-1}) : 10$$

nên C có chữ số tận cùng là 0.

Vậy $n = 0$, C có chữ số tận cùng là 5.

$n \geq 1$, C có chữ số tận cùng là 0.

Câu 2. (HSG 7 huyện Yên Thế, 2022 - 2023)

Cho hàm số $f(x) = x + \frac{1}{2}$ và

$$S = f(0) + f\left(\frac{1}{2001}\right) + f\left(\frac{2}{2001}\right) + \dots + f\left(\frac{1999}{2001}\right) + f\left(\frac{2000}{2001}\right) + f(1).$$

Tìm hai chữ số tận cùng của S^{2023} .

Lời giải

$$\text{Ta có } f(x) = x + \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) + f(1-x) = x + \frac{1}{2} + 1 - x + \frac{1}{2} = 2$$

$$S = f(0) + f\left(\frac{1}{2001}\right) + f\left(\frac{2}{2001}\right) + \dots + f\left(\frac{1999}{2001}\right) + f\left(\frac{2000}{2001}\right) + f(1)$$

$$= [f(0) + f(1)] + \left[f\left(\frac{1}{2001}\right) + f\left(\frac{2000}{2001}\right) \right] + \left[f\left(\frac{2}{2001}\right) + f\left(\frac{1999}{2001}\right) \right] + \dots + \left[f\left(\frac{1000}{2001}\right) + f\left(\frac{1001}{2001}\right) \right]$$

$$= 2 + 2 + 2 + \dots + 2 = 2002.$$

$$\Rightarrow S^{2023} = 2002^{2023}.$$

\Rightarrow Hai chữ số tận cùng của S bằng 2 chữ số tận cùng của 2^{2023} .

$$\text{Ta có } 2^{2023} = (2^{20})^{101} \cdot 2^3 = \overline{.76}^{101} \cdot 8 = \overline{...76} \cdot 8 = \overline{...608}.$$

Vậy hai chữ số tận cùng của S là 08.

Câu 3. (HSG 7 huyện Tiền Hải, tỉnh Thái Bình 2022 - 2023)

Cho tích $A = 1.2.3.4.5.....398.399.400$. Hỏi tích A có tận cùng bao nhiêu chữ số 0?

Lời giải

Vì tích 5.2 có tận cùng bằng 1 chữ số 0. Muốn biết tích A có tận cùng bao nhiêu chữ số 0 thì cần xem khi phân tích A ra thừa số nguyên tố có bao nhiêu thừa số 2 và bao nhiêu thừa số 5. Ta thấy thừa số 5 ít hơn thừa số 2 nên ta chỉ cần tìm số thừa số 5.

Kể từ số 1, cứ 5 số lại có một số là bội của 5; cứ $25 = 5^2$ số lại có một số là bội của 25 cứ $125 = 5^3$ số lại có một số là bội của 125.

Do đó số thừa số 5 khi phân tích A ra thừa số nguyên tố là:

$$\left[\frac{400-5}{5} + 1 \right] + \left[\frac{400-25}{25} + 1 \right] + \left[\frac{375-125}{125} + 1 \right] = 80 + 16 + 3 = 99$$

Vậy tích A có tận cùng 99 chữ số 0.

Câu 4. (HSG 7 huyện Thanh Chương năm 2018 - 2019).

Cho $N = 0,7.(2007^{2009} - 2013^{1999})$. Chứng minh rằng N là một số nguyên.

Lời giải.

Ta có: $2007 \equiv 7 \pmod{10}$

$$\Rightarrow 2007^{2009} \equiv 7^{2009} \pmod{10}$$

Mà $7^2 = 49 \equiv -1 \pmod{10}$

$$\Rightarrow 7^{2009} = (7^2)^{1004} . 7 \equiv 1.7 \pmod{10}$$

$$\Rightarrow 7^{2009} \equiv 7 \pmod{10}$$

Nên $2007^{2009} \equiv 7 \pmod{10}$

Lại có: $2013 \equiv 3 \pmod{10}$

$$\Rightarrow 2013^{1999} \equiv 3^{1999} \pmod{10}$$

Mà $3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{10}$

$$\Rightarrow 3^{1999} = (3^4)^{499} . 3^3 \equiv 27 \pmod{10}$$

$$\Rightarrow 3^{1999} \equiv 7 \pmod{10}$$

Nên $2013^{1999} \equiv 7 \pmod{10}$

Do đó $(2007^{2009} - 2013^{1999}) \equiv 0 \pmod{10}$

$$\Rightarrow 2007^{2009} - 2013^{1999} \text{ có chữ số tận cùng là } 0$$

Vậy $N = 0,7.(2007^{2009} - 2013^{1999})$ là số nguyên.

Câu 5. a) Hãy tìm chữ số tận cùng của $9^{9^{10}}$.

b) Hãy tìm hai chữ số tận cùng của 3^{1000} .

c) Hãy tìm ba chữ số tận cùng của $2^{5^{12}}$.

Lời giải

a) Ta có $9^{2n+1} = 9.81^n \equiv 9 \pmod{10}$

mà 9^{10} là số lẻ

$$\text{Nên } 9^{9^{10}} \equiv 9 \pmod{10}$$

Vậy chữ số tận cùng của $9^{9^{10}}$ là 9.

$$\text{b) Ta có: } 3^4 = 81 \equiv -19 \pmod{100}$$

$$\Rightarrow 3^8 \equiv (-19)^2 \pmod{100}$$

$$\text{Mà } (-19)^2 = 361 \equiv 61 \pmod{100}$$

$$\Rightarrow 3^8 \equiv 61 \pmod{100}$$

$$\text{Do đó } 3^{10} = 3^8 \cdot 9 \equiv 61 \cdot 9 = 549 \equiv 49 \pmod{100}$$

$$\Rightarrow 3^{20} \equiv 49^2 \equiv 01 \pmod{100} \text{ do } 49^2 = 2401$$

$$\Rightarrow 3^{1000} = (3^{20})^{50} \equiv 01 \pmod{100}$$

Vậy hai chữ số tận cùng của 3^{1000} là 01.

$$\text{c) + Ta có: } (a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$\text{Nếu } a:25 \text{ thì } (a+b)^5 \equiv b^5 \pmod{125}$$

$$+ \text{ Ta có: } 2^{10} = 1024 \equiv -1 \pmod{25} \text{ nên } 2^{10} = 25k - 1 \text{ với } k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow 2^{50} = (2^{10})^5 = (25k - 1)^5 \equiv -1 \pmod{125}$$

$$\Rightarrow 2^{512} = (2^{50})^{10} \cdot 2^{12} \equiv (-1)^{10} \cdot 2^{12} \equiv 2^{12} \pmod{125}$$

$$\text{Do } 2^{12} = 2^{10} \cdot 2^2 = 1024 \cdot 4 \equiv 96 \pmod{25}$$

$$\Rightarrow 2^{512} \equiv 96 \pmod{125} \text{ hay } 2^{512} = 125m + 96 \text{ với } m \in \mathbb{N}$$

$$\text{Lại có: } 2^{512} = (2^4)^{123} = 16^{123} : 8 ; 96 : 8$$

$$\Rightarrow m : 8 \text{ nên } m = 8n \text{ với } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Khi đó } 2^{512} = 125 \cdot 8n + 96 = 1000n + 96$$

Vậy ba chữ số tận cùng của 2^{512} là 096.

CH 5: SỐ NGUYÊN TỐ - HỢP SỐ

Dạng 1: Sử dụng các tính chất của phép chia số nguyên
Dạng 2: Áp dụng định lý Fermat
Dạng 3: Sử dụng phương pháp phân tích
Dạng 4: Giải phương trình nghiệm nguyên dựa vào tính chất số nguyên tố
Dạng 5: Các bài toán về hai số nguyên tố cùng nhau

Dạng 1. Sử dụng các tính chất của phép chia số nguyên

Câu 1. (HSG 7 huyện Bá Thước 2022 - 2023)

Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn $a^2 + b^2 = 2021(c^2 + 3d^2)$. Chứng minh $a + b + c + d$ là hợp số.

Lời giải

Ta có: $a^2 + b^2 = 2021(c^2 + 3d^2) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2022c^2 + 3064d^2$

Mà $(2022c^2 + 3064d^2) : 2$ nên $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) : 2$

Ta xét $[(a^2 - a + b^2 - b + c^2 - c + d^2 - d) + (a + b + c + d)] : 2$

Mà $(a^2 - a) = a(a-1) : 2; b^2 - b = b(b-1) : 2; c(c-1) : 2; d(d-1) : 2$

$(a + b + c + d) : 2$. Do $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$ nên $a + b + c + d > 2$

Vậy $a + b + c + d$ là hợp số.

Câu 2. (HSG 7 trường THCS Võ Thị Sáu 2022 - 2023)

Chứng minh rằng nếu $2^n - 1$ là số nguyên tố ($n > 2$) thì $2^n + 1$ là hợp số.

Lời giải

Ta có: $2^n - 1; 2^n; 2^n + 1$ là ba số tự nhiên liên tiếp nên một trong ba số sẽ chia hết cho 3.

Mà $2^n - 1$ là số nguyên tố ($n > 2$) nên $2^n - 1$ không chia hết cho 3

Mặt khác: với $n > 2$ thì 2^n là số chẵn nên 2^n không chia hết cho 3

Suy ra: $2^n + 1$ chia hết cho 3

Vậy $2^n + 1$ là hợp số (đpcm).

Câu 3. (HSG 7 huyện Triệu Sơn 2022 - 2023)

Cho số nguyên tố p . Giả sử x, y là các số tự nhiên khác 0, thỏa mãn điều kiện $\frac{x^2 + py^2}{xy}$

là các số tự nhiên. Chứng minh rằng $\frac{x^2 + py^2}{xy} = p + 1$.

Lời giải

Gọi ƯCLN $(x, y) = d (d \in \mathbb{N}^*)$, khi đó tồn tại các số tự nhiên a và b để $x = da; y = db$ và $(a; b) = 1$

Ta có: $\frac{x^2 + py^2}{xy} = \frac{d^2 a^2 + pd^2 a^2}{d^2 ab} = \frac{a^2 + pb^2}{ab} \in \mathbb{N}^*$.

Từ đó ta được: $(a^2 + pb^2) : ab \Rightarrow (a^2 + pb^2) : b \Rightarrow a^2 : b$.

Do $(a; b) = 1$ nên ta suy ra được $b = 1$. Suy ra $(a^2 + p) : a \Rightarrow p : a$.

Do p là số nguyên tố nên ra được $a = 1$ hoặc $a = p$. Khi đó ta xét các trường hợp

- Với $a = 1$, khi đó ta được $x = y = d \Rightarrow \frac{x^2 + py^2}{xy} = \frac{d^2 + pd^2}{d^2} = p + 1$.
- Với $a = p$, khi đó ta được $x = dp; y = d \Rightarrow \frac{x^2 + py^2}{xy} = \frac{d^2 p^2 + d^2 p}{d^2 p} = p + 1$.

Vậy ta luôn có $\frac{x^2 + py^2}{xy} = p + 1$

Câu 4 (HSG 7 huyện Thọ Xuân 2022 - 2023)

Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $(p+1)(p-1)$ chia hết cho 24.

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p = 3k + 1$ hoặc $p = 3k + 2 (k \in \mathbb{N}^*)$

- Nếu $p = 3k + 1$ thì $(p+1)(p-1) = (3k+1+1)(3k+1-1) = (3k+2).3k : 3$

- Nếu $p = 3k + 2$ thì $(p+1)(p-1) = (3k+2+1)(3k+2-1) = (3k+3).(3k+1) = 3.(k+1)(3k+1) : 3$

Suy ra $(p+1)(p-1)$ chia hết cho 3 (1)

Ta lại có: p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ

Do đó $p+1$ và $p-1$ là hai số chẵn liên tiếp

Suy ra $(p+1)(p-1)$ chia hết cho 8 (2)

Mà 3 và 8 là hai số nguyên tố cùng nhau (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $(p+1)(p-1)$ chia hết cho 24.

Câu 5 (HSG 7 Diễn Châu Liên trường THCS 2022 - 2023)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3, biết $p+2$ cũng là số nguyên tố. Chứng tỏ rằng $p+1$ chia hết cho 6.

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p lẻ, do đó $p+1$ chẵn

$\Rightarrow (p+1) : 2$ (1)

Cũng do p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p = 3k + 1$ hoặc $p = 3k + 2 (k \in \mathbb{N})$

Nếu $p = 3k + 1$ thì $p + 2 = 3k + 3 = 3(k + 1) : 3$

$\Rightarrow p + 2$ không là số nguyên tố nên $p = 3k + 1$ không xảy ra.

Do đó $p = 3k + 2 \Rightarrow p + 1 = 3k + 3 = 3(k + 1) : 3$ (2)

Vì $(2; 3) = 1$ nên từ (1) và (2) ta có $(p+1) : 6$

Câu 6. (HSG 7 Thị xã Thái Hòa 2022 - 2023)

Tìm số nguyên tố p và q sao cho $p^2 - 2q^2 = 17$

Lời giải

Từ gt: $p^2 - 2q^2 = 17 \Rightarrow p^2 - 17 = 2q^2$ suy ra p lẻ.

Với p lẻ $\Rightarrow p^2$ chia 4 dư 1 $\Rightarrow p^2 - 17$ chia hết cho 4 $\Rightarrow 2q^2$ chia hết cho 4 $\Rightarrow q = 2$ vì q là số nguyên tố.

Với $q = 2$ ta có $p = 5$

Câu 7. (HSG 7 huyện Lục Ngạn 2022 - 2023)

Cho p và $2p+1$ là các số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $5p+2$ là hợp số.

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p có dạng $3k+1$ hoặc $3k+2$ với $k \in \mathbb{N}^*$

-Nếu $p = 3k+1 \Rightarrow 2p+1 = 2(3k+1)+1 = 6k+3 = 3(2k+1)$

Khi đó $2p+1$ lớn hơn 3 và có ít nhất 3 ước là 1; 3; $2p+1$ trái với giả thiết $2p+1$ là số nguyên tố

Do đó p có dạng $3k+2$

Xét $5p+2 = 5.(3k+2)+2 = 15k+12 = 3(5k+4)$

Khi đó $5p+2$ lớn hơn 3 và có ít nhất 3 ước là 1; 3; $5p+2$ nên $5p+2$ là hợp số.

Vậy Cho p và $2p+1$ là các số nguyên tố lớn hơn 3 thì $5p+2$ là hợp số (đpcm).

Câu 8. (HSG 7 huyện Lập Thạch 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên tố p sao cho $2^p + p^2$ là một số nguyên tố.

Lời giải

Với $p = 2$ thì $2^p + p^2 = 2^2 + 2^2 = 8$ là hợp số

Với $p = 3$ thì $2^p + p^2 = 2^3 + 3^2 = 17$ là số nguyên tố

Với p là số nguyên tố và $p > 3$ nên $p = 3k+1$ hoặc $p = 3k+2$ với $k \in \mathbb{N}^*$

Ta có $2^p + p^2 = (2^p + 1) + (p^2 - 1)$ vì $(2^p + 1):3$ và $(p^2 - 1):3$ với mọi số nguyên tố p có dạng: $p = 3k+1$ hoặc $p = 3k+2$ với $k \in \mathbb{N}^*$. Suy ra $2^p + p^2 = (2^p + 1) + (p^2 - 1)$ là hợp số.

Vậy Với $p = 3$ thì $2^p + p^2 = 2^3 + 3^2 = 17$ là số nguyên tố.

Câu 9. (HSG 7 huyện Thanh Trì; Hiệp Hòa 2022 - 2023)

Tìm số nguyên tố $x; y$ thỏa mãn: $x^2 - 2y^2 = 1$

Lời giải

Xét $x^2 - 2y^2 = 1$ suy ra $x^2 = 2y^2 + 1$

- Nếu x chia hết cho 3 mà x là số nguyên tố nên $x = 3$

Thay vào tính được $y = 2$ là số nguyên tố (Chọn)

- Nếu x không chia hết cho 3, thì x chia cho 3 dư 1 hoặc dư 2

$\Rightarrow x^2$ chia cho 3 dư 1

$\Rightarrow (x^2 - 1):3$

Suy ra $2y^2$ chia hết cho 3 mà $(2,3)=1$ nên y^2 chia hết cho 3 mà 3 là số nguyên tố nên y chia hết cho 3

Mà y là số nguyên tố nên $y=3$

Thay vào tính được $x^2=19$ (loại)

Vậy có duy nhất cặp số $(x,y)=(2,3)$ thỏa mãn bài toán.

Câu 10. (HSG 7 huyện Ninh Giang 2022 - 2023)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3 thỏa mãn $10p+1$ cũng là số nguyên tố. Chứng minh rằng: $(5p+1):6$.

Lời giải

Ta có p là số nguyên tố lớn hơn 3

Xét ba số tự nhiên liên tiếp $10p; 10p+1; 10p+2$ trong đó có một số chia hết cho 2, một số chia hết cho 3

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 và $10p+1$ là số nguyên tố nên p và $10p+1$ không chia hết cho 2 và cho 3.

mà 3 và 10 là hai số nguyên tố cùng nhau nên $10p \not\div 3, 10p+1 \not\div 3$ do đó $(10p+2):3 \Rightarrow 2(5p+1):3 \Rightarrow (5p+1):3$

p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p lẻ $\Rightarrow 5p+1$ chẵn $\Rightarrow (5p+1):2$

Vì $(5p+1):3$ và $(5p+1):2$ mà 2 và 3 là hai số nguyên tố cùng nhau nên $(5p+1):6$

Vậy p là số nguyên tố lớn hơn 3 thỏa mãn $10p+1$ cũng là số nguyên tố thì $(5p+1):6$.

Câu 11. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Tìm số nguyên tố p sao cho $2p+1$ và $4p+1$ đều là số nguyên tố.

Lời giải

- Xét $p=2$ thì $4p+1=9$ là hợp số (loại)

- Xét $p=3$ thì $2p+1=7; 4p+1=13$ đều là số nguyên tố

- Nếu $p > 3$ thì $p \not\div 3$ nên $p=3k+1$ hoặc $p=3k+2$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

- Xét được $p=3k+1$ thì $2p+1$ là hợp số (loại)

- Xét được $p=3k+2$ thì $4p+1$ là hợp số (loại)

- Kết luận: $p=3$ thì $2p+1=7; 4p+1=13$ đều là số nguyên tố

Câu 12. (HSG 7 huyện Hà Trung 2022 - 2023)

Cho a,b,c,d là các số nguyên dương thỏa mãn $a^2-2b^2=3(c^2-5d^2-b^2)$. Chứng minh: $a+b+c+d$ là hợp số.

Lời giải

Ta có:

$$a^2-2b^2=3(c^2-5d^2-b^2) \Rightarrow a^2-2b^2+3b^2+c^2+d^2=3(c^2-5d^2-b^2)+3b^2+c^2+d^2$$

$$a^2+b^2+c^2+d^2=3(c^2-5d^2-b^2)+3b^2+c^2+d^2=4c^2-14d^2=2.(2c^2-7d^2):2$$

$$\Rightarrow (a^2+b^2+c^2+d^2):2 \quad (1)$$

Xét hiệu: $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (a + b + c + d) = a(a-1) + b(b-1) + c(c-1) + d(d-1)$

$a(a-1)$; $b(b-1)$; $c(c-1)$; $d(d-1)$ đều là các tích của hai số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 2

Suy ra: $[(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (a + b + c + d)] : 2 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $(a + b + c + d) : 2$ mà $a + b + c + d > 2$ nên $a + b + c + d$ là hợp số.

Câu 13. (HSG 7 huyện Lang Chánh 2022 - 2023)

Cho các số nguyên tố p và q thỏa mãn: $p^2 - 2q^2 = 17$. Tính $(p + q)^4 + 15$

Lời giải

Ta có:

$$p^2 - 2q^2 = 17$$

$$\Rightarrow p^2 - 1 = 2q^2 + 16$$

$$\Rightarrow (p-1)(p+1) = (2q^2 + 16) : 2$$

$$\Rightarrow (p-1)(p+1) : 2$$

Mà $(p+1) - (p-1) = 2$

suy ra $p-1$; $p+1$ là hai số chẵn liên tiếp $\Rightarrow (p-1)(p+1) : 8$

$$\Rightarrow (2q^2 + 16) : 8 \text{ mà } 16 : 8 \Rightarrow 2q^2 : 8 \Rightarrow q^2 : 4 \Rightarrow q : 2$$

Mà q là số nguyên tố $\Rightarrow q = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 + 17 = 2 \cdot 2^2 + 17 = 25$

Mà p là số nguyên tố $\Rightarrow p = 5$.

Ta có: $(p + q)^4 + 15 = (5 + 2)^4 + 15 = 2416$.

Vậy: $(p + q)^4 + 15 = 2416$

Câu 14. (HSG 7 Bắc Giang 2022 - 2023)

Cho m ; n ; t là ba số nguyên tố lớn hơn 3 thỏa mãn: $m - n = n - t = a$ ($a \in \mathbb{N}^*$). Chứng minh rằng a chia hết cho 6.

Lời giải

Ta có: $m - n = n - t = a$ ($a \in \mathbb{N}^*$)

Suy ra $n = t + a$; $m = n + a = t + 2a$

Do đó ta có t ; $t + a$; $t + 2a$ là các số nguyên tố lớn hơn 3

Xét số dư của ba số nguyên tố t ; $t + a$; $t + 2a$ đã cho khi chia cho 3, số dư nhận được có thể là 1 hoặc 2. Do đó có ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho 3 và hiệu của chúng chia hết cho 3.

Mặt khác $(t + a) - t = a$; $(t + 2a) - t = 2a$; $(t + 2a) - (t + a) = a$

Suy ra a hoặc $2a$ chia hết cho 3. Mà $(2; 3) = 1$ nên $a : 3$ (1)

Vì m , n là các số nguyên tố lớn hơn 3 nên m , n là các số lẻ

$\Rightarrow m - n$ Từ (1) và (2) kết hợp với $(2; 3) = 1$ ta có $a : 6$

Câu 15. (HSG 7 Huyện Quốc Oai 2022 - 2023)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3 thỏa mãn $10p+1$ cũng là số nguyên tố. Chứng minh rằng $5p+1$ chia hết cho 6.

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ $\Rightarrow 5p$ là số lẻ

$5p+1$ là số chẵn $\Rightarrow (5p+1):2$ (1)

Xét ba số tự nhiên liên tiếp $10p; 10p+1; 10p+2$ luôn tồn tại một số chia hết cho 3

Mà $10p+1$ là số nguyên tố nên $(10p+1) \not\vdots 3$

p là số nguyên tố lớn hơn 3 $\Rightarrow p \not\vdots 3$ và $ƯCLN(10;3)=1 \Rightarrow 10p \not\vdots 3$

Do đó $(10p+2):3 \Rightarrow 2(5p+1):3$ mà $ƯCLN(2;3)=1 \Rightarrow (5p+1):3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $5p+1$ chia hết cho 6

Câu 16. (HSG 7 TP Phúc Yên- Trường THCS Đồng Xuân 2022 - 2023)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $(p^2 - 1):24$.

Lời giải

Ta có $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$.

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p lẻ. Do đó $p-1$ và $p+1$ là hai số chẵn liên tiếp. Từ đó $(p-1)(p+1):8$ (1).

Xét ba số tự nhiên liên tiếp $p-1; p; p+1$. Ta có $(p-1)p(p+1):3$.

Mà p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3 nên $(p-1)(p+1):3$ (2).

Từ (1) và (2) kết hợp với $(3;8)=1$ và $3.8=24$ ta suy ra $(p^2 - 1):24$ (đpcm).

Câu 17. (HSG 7 (LDP) Hưng Hà 2022 - 2023)

Tìm một số có ba chữ số biết rằng số đó chia hết cho 72, các chữ số của nó sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn tỷ lệ với 2; 3; 4

Lời giải

Gọi ba chữ số của số cần tìm là a, b, c . Điều kiện $a, b, c \in \mathbb{N}^*; a < b < c \leq 9$.

Theo bài ra: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$ và số có ba chữ số a, b, c chia hết cho 72.

Ta có số có ba chữ số a, b, c chia hết cho 72 nên nó chia hết cho 9, chia hết cho 8.

Số có ba chữ số a, b, c chia hết cho 9

$\Rightarrow (a+b+c):9$ mà $0 < a+b+c < 27$ nên $a+b+c \in \{9; 18\}$

Từ $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$, áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{a+b+c}{2+3+4}$

+) Nếu $a+b+c=9 \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{9}{9} = 1$

$\Rightarrow a=2; b=3; c=4$.

Ta được các số 234; 243; 324; 342; 423; 432. Nhưng số cần tìm phải chia hết cho 8 nên chỉ có số 432 chia hết cho 72 (1)

$$+) \text{ Nếu } a+b+c=18 \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{18}{9} = 2$$

$$\Rightarrow a=4; b=6; c=8.$$

Ta được các số 468; 486; 648; 684; 846; 864. Nhưng số cần tìm phải chia hết cho 8 nên chỉ có số 648; 864 chia hết cho 72 (2)

Từ (1) và (2) ta được các số cần tìm là: 432; 648; 864

Câu 18. (HSG 7 huyện Nông Cống 2022 - 2023)

Cho số nguyên $n (n > 1)$ thỏa mãn $n^2 + 4$ và $n^2 + 16$ là các số nguyên tố. Chứng minh n chia hết cho 5.

Lời giải

Với mọi số nguyên n thì n^2 chia cho 5 dư 0; 1 hoặc 4.

$$+ \text{ Nếu } n^2 \text{ chia 5 dư 1 thì } n^2 = 5k+1 (k \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow n^2 + 4 = 5k+1+4 = (5k+5) : 5.$$

Do đó nên $n^2 + 4$ không là số nguyên tố. Loại trừ trường hợp này.

$$+ \text{ Nếu } n^2 \text{ chia 5 dư 4 thì } n^2 = 5k+4 (k \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow n^2 + 16 = (5k+20) : 5.$$

Do đó $n^2 + 16$ không là số nguyên tố. Loại trừ trường hợp này.

Vậy $n^2 : 5$, suy ra $n : 5$.

Câu 19. (HSG 7 huyện Thường Xuân 2022 - 2023)

Cho $m; n$ là hai số chính phương lẻ liên tiếp. Chứng minh rằng: $mn - m - n + 1$ chia hết cho 192.

Lời giải

Ta có: $192 = 16.12$

Do $m; n$ là hai số chính phương lẻ liên tiếp nên ta có: $m = (2k-1)^2$ và $n = (2k+1)^2$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

$$\text{Khi đó: } mn - m - n + 1 = (m-1)(n-1)$$

$$= [(1k-1)^2 - 1][(2k+1)^2 - 1] = (4k^2 - 4k)(4k^2 + 4k)$$

$$= 16k^2(k-1)(k+1) : 16 \quad (1)$$

Ta có: $k(k-1)(k+1) : 3$ và $k(k-1)k(k+1) : 4$

Mà $(3, 4) = 1$ nên $k^2(k-1)(k+1) : 12$

$$\Rightarrow mn - m - n + 1 = 16k^2(k-1)(k+1) : 12 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra: $mn - m - n + 1 : 192$ (đpcm)

Câu 20. (HSG 7 thành phố Thanh Hoá, 2022 - 2023; huyện Thanh Ba năm 2021 - 2022)

Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Chứng minh rằng: $a+b+c+d$ là hợp số.

Lời giải

$$\text{Ta có: } (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (a+b+c+d) = (a^2 - a) + (b^2 - b) + (c^2 - c) + (d^2 - d)$$

$$= a(a-1) + b(b-1) + c(c-1) + d(d-1) \text{ chia hết cho 2.}$$

Mà $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ nên $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = 2(b^2 + d^2)$ chia hết cho 2

$\Rightarrow a + b + c + d$ chia hết cho 2.

Mặt khác, a, b, c, d là các số nguyên dương $\Rightarrow a + b + c + d \geq 4$.

Vậy $(a + b + c + d)$ là hợp số.

Câu 21. (HSG 7 huyện Cẩm Thủy năm 2021 - 2022)

Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \in \mathbb{N}^*$ và $f(5) - f(4) = 2022$.

Chứng minh $f(7) - f(2)$ là hợp số.

Lời giải

Ta có: $f(5) - f(4) = (125a + 25b + 5c + d) - (64a + 16b + 4c + d) = 2022$

$\Rightarrow 61a + 9b + c = 2022$.

$f(7) - f(2) = (343a + 49b + 7c + d) - (8a + 4b + 2c + d) = 335a + 45b + 5c$

$= 305a + 45b + 5c + 30a = 5(61a + 9b + c) + 30a = 5 \cdot 2022 + 30a = 10(1011 + 3a)$.

Vì a nguyên dương nên $10(1011 + 3a) : 10$ và $10(1011 + 3a) > 10$

nên $10(1011 + 3a)$ là hợp số.

Vậy $f(7) - f(2)$ là hợp số.

Câu 22. (HSG 7 huyện Kinh Môn 2020 - 2021)

Cho các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ chia hết cho 2. Chứng minh rằng: $a + b + c + d$ là hợp số.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - a - b - c - d &= (a^2 - a) + (b^2 - b) + (c^2 - c) + (d^2 - d) \\ &= a(a-1) + b(b-1) + c(c-1) + d(d-1) \end{aligned}$$

Do a, b, c, d là các số nguyên dương, nên a và $a-1$; b và $b-1$; c và $c-1$; d và $d-1$ là hai số nguyên liên tiếp. Suy ra:

$$\begin{cases} a(a-1) : 2 \\ b(b-1) : 2 \\ c(c-1) : 2 \\ d(d-1) : 2 \end{cases} \Rightarrow [(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (a + b + c + d)] : 2$$

$$\text{Mà } (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) : 2 \Rightarrow (a + b + c + d) : 2 \quad (1)$$

$$\text{Vì } a, b, c, d \text{ là các số nguyên dương } \Rightarrow a + b + c + d > 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow a + b + c + d$ là hợp số.

Vậy $a + b + c + d$ là hợp số.

Câu 23. (HSG 7 huyện Giao Thủy 2016 - 2017)

Cho các số nguyên dương $a; b; c; d; e$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$ chia hết cho 2. Chứng tỏ rằng $a + b + c + d + e$ là hợp số

Lời giải

$$\text{Đặt } A = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2; B = a + b + c + d + e$$

$$\begin{aligned} \text{Xét: } A + B &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) + (a + b + c + d + e) \\ &= (a^2 + a) + (b^2 + b) + (c^2 + c) + (d^2 + d) + (e^2 + e) \\ &= a(a+1) + b(b+1) + c(c+1) + d(d+1) + e(e+1) \end{aligned}$$

Với n là số nguyên thì tích 2 số nguyên liên tiếp chia hết cho 2 nên $A + B$ chia hết cho 2. Theo đề bài A chia hết cho 2 nên B chia hết cho 2 và $B > 2$ Vậy B là hợp số.

Câu 24. (HSG 7 tỉnh Bắc Giang 2012 - 2013)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $p^2 + 2012$ là hợp số.

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p có dạng $p = 3k \pm 1$ ($k \in \mathbb{N}, k \geq 1$)

+ Với $p = 3k + 1$ ta có:

$$p^2 + 2012 = (3k + 1)^2 + 2012 = 9k^2 + 6k + 2013 \Rightarrow (p^2 + 2012) : 3$$

+ Với $p = 3k - 1$ ta có

$$p^2 + 2012 = (3k - 1)^2 + 2012 = 9k^2 - 6k + 2013 \Rightarrow (p^2 + 2012) : 3$$

Vậy $p^2 + 2012$ là hợp số

Câu 25. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2018 - 2019)

Một số nguyên tố p chia cho 42 có số dư r là hợp số. Tìm hợp số r

Lời giải

Vì p chia cho 42 có số dư là r nên $p = 42k + r$ ($0 < r < 42, r \in \mathbb{N}$)

Hay $p = 2.3.7k + r$

Vì p là số nguyên tố nên r không chia hết cho 2; 3; 7

$\Rightarrow r$ là hợp số không chia hết cho 2, 3, 7 và $r < 42$, Vậy hợp số $r = 25$

Câu 26. (HSG 7 huyện Hương Sơn 2017-2018)

Cho $m, n \in \mathbb{N}^*$ và p là số nguyên tố thỏa mãn: $\frac{p}{m-1} = \frac{m+n}{p}$ (1). Chứng minh rằng:

$$p^2 = n + 2$$

Lời giải

+ Nếu $m + n$ chia hết cho $p \Rightarrow p \mid (m - 1)$ do p là số nguyên tố và $m, n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow m = 2$ hoặc $m = p + 1$ khi đó từ (1) ta có: $p^2 = n + 2$

Nếu $m + n$ không chia hết cho p , từ (1) $\Rightarrow (m + n)(m - 1) = p^2$

Do p là số nguyên tố và $m, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m - 1 = p^2$ và $m + n = 1$

$\Rightarrow m^2 = p^2 + 1$ và $n = -p^2 < 0$ (loại)

Vậy $p^2 = n + 2$

Câu 27. (HSG 7 huyện Kim Thành, 2022 - 2023)

Cho biết a, b là các số nguyên tố thỏa mãn: $a^2 - b^2 - 4 = 113$. Chứng minh rằng $a + b$ cũng là một số nguyên tố.

Lời giải

$$a^2 - b^2 - 4 = 113$$

$$a^2 - b^2 = 117 \quad (*)$$

Nếu a và b cùng tính chẵn lẻ thì $(a^2 - b^2):2$ mà $117 \not\div 2$ nên $(*)$ vô lý.

Do đó trong hai số a, b phải có một số chẵn

Mà a, b có một số nguyên tố nên $a = 2$ hoặc $b = 2$.

Nếu $a = 2$ thì $4 - b^2 = 117$

$$b^2 = -113 \text{ (Vô lý)}$$

Nếu $b = 2$ thì $a^2 - 4 = 117$

$$a^2 = 121$$

$$a = 11$$

$$a + b = 11 + 2 = 13 \text{ là số nguyên tố (đpcm)}$$

Câu 28. (HSG 7 huyện Triệu Sơn, tỉnh Thanh Hoá, 2017 - 2018)

Tìm số nguyên tố p để $p + 2, p + 6, p + 8, p + 14$ cũng là các số nguyên tố.

Lời giải

Nếu $p = 2$ thì $p + 2 = 4$, là hợp số \Rightarrow loại

Nếu $p = 3$ thì $p + 6 = 9$, là hợp số \Rightarrow loại

Nếu $p = 5$ thì $p + 2 = 7, p + 6 = 11, p + 8 = 13, p + 14 = 19$ đều là các số nguyên tố.

Nếu $p > 5$, vì p là số nguyên tố nên p không chia hết cho 5

$\Rightarrow p$ có dạng $5k + 1$ hoặc $5k + 2$ hoặc $5k + 3$ hoặc $5k + 4$ ($k \in \mathbb{N}$)

- Nếu $p = 5k + 1$ thì $p + 14 = 5k + 1 + 14 = 5k + 15 = 5(k + 3):5$, mà $p + 14 > 5$ nên $p + 14$ là hợp số

- Nếu $p = 5k + 2$ thì $p + 8 = 5k + 2 + 8 = 5k + 10 = 5(k + 2):5$, mà $p + 8 > 5$ nên $p + 8$ là hợp số

- Nếu $p = 5k + 3$ thì $p + 2 = 5k + 3 + 2 = 5k + 5 = 5(k + 1):5$, mà $p + 2 > 5$ nên $p + 2$ là hợp số

- Nếu $p = 5k + 4$ thì $p + 6 = 5k + 4 + 6 = 5k + 10 = 5(k + 2):5$, mà $p + 6 > 5$ nên $p + 6$ là hợp số

Vậy p chỉ có 1 giá trị duy nhất là $p = 5$

Câu 29. (HSG 7 huyện Thanh Sơn, tỉnh, trường 2022-2023)

Tìm các số nguyên tố x, y thỏa mãn $(x - 1)(x + 1) = 6y^2$

Lời giải

+ Vì $6y^2 : 2 \Rightarrow (x - 1)(x + 1) : 2$

+ Vì $(x - 1) + (x + 1) = 2x : 2$ nên $x - 1; x + 1$ cùng tính chẵn lẻ

Suy ra $x - 1; x + 1$ là hai số chẵn liên tiếp.

Do đó $(x - 1)(x + 1) : 8$

$$\Rightarrow 6y^2 : 8 \Rightarrow 3y^2 : 4 \Rightarrow y^2 : 4 \Rightarrow y : 2$$

Mà y là số nguyên tố nên $y = 2$

$$\text{- Thay } y = 2 \text{ vào } (x-1)(x+1) = 6y^2 \Rightarrow (x-1)(x+1) = 24 \Rightarrow (x-1)(x+1) = 4.6$$

$$\Rightarrow x = 5 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $(x; y) = (5; 2)$.

Câu 30. (HSG 7 Tây Hồ, 2022 - 2023)

Tìm cặp số nguyên tố p, q thỏa mãn $p^q \cdot q^p = (2p+q+1) \cdot (2q+p+1)$

Lời giải

$$\text{Ta có: } p^q \cdot q^p = (2p+q+1) \cdot (2q+p+1) \quad (1)$$

TH1: p, q có một số là số chẵn

Giả sử p là số chẵn

Do p là số nguyên tố

$$\Rightarrow p = 2$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow 2^q \cdot q^2 = (4+q+1)(2q+2+1) = (q+5) \cdot (2q+3) (*)$$

$$\Rightarrow (q+5)(2q+3) : 2 \text{ mà } 2q+3 \text{ là số lẻ nên } (q+5) : 2 \Rightarrow q \text{ lẻ} \Rightarrow q \geq 3$$

Do (*) suy ra $(q+5)(2q+3) : q$

$$\Rightarrow \begin{cases} q+5 : q \\ 2q+3 : q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 : q \\ 3 : q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 = q \\ 3 = q \end{cases} \quad (\text{do } q \text{ là số nguyên tố})$$

Thử lại ta nhận $q = 5; p = 2$

TH2: $p; q$ là số nguyên tố lẻ $\Rightarrow p \geq 3; q \geq 3$

$$\Rightarrow 2p+q+1; 2q+p+1 \text{ là những số chẵn}$$

$$\Rightarrow (2p+q+1)(2q+p+1) : 4 \text{ mà } p^q \cdot q^p \text{ là số lẻ nên vô lí}$$

Vậy $(p; q) \in \{(2; 3); (3; 2)\}$

Dạng 2: Áp dụng định lý Fermat

Câu 1. (HSG 7 quận Hà Đông 2022 - 2023)

Cho $A = 2^{2^{10n+1}} + 19$. Chứng minh rằng A là hợp số

Lời giải

Theo định lý Fermat bé, do 11 là số nguyên tố nên ta có $2^{10} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 2^{10n} \equiv 1 \pmod{11}$

$$\Rightarrow 2^{10n+1} = 2 \cdot 2^{10n} \equiv 2 \pmod{22} \Rightarrow 2^{10n+1} = 22k + 2 \quad (k \in \mathbb{N})$$

Do 23 là số nguyên tố nên $2^{22} \equiv 1 \pmod{23} \Rightarrow 2^{2^{10n+1}} = 2^{22k+2} = 4 \cdot 2^{22k} \equiv 4 \pmod{23}$

$\Rightarrow 2^{2^{10n+1}} + 19 \equiv 4 + 19 \equiv 0 \pmod{23}$. Nên $A : 23$ mà $A > 23$ với $\forall n \geq 1$ nên A là hợp số.

Câu 2. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc-Tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Cho hai số nguyên tố khác nhau p và q . Chứng minh rằng : $p^{q-1} + q^{p-1} - 1$ chia hết cho $p \cdot q$

Lời giải

Vì p, q nguyên tố cùng nhau và p khác q nên: $(p, q) = 1$.

Áp dụng định lí Fermat ta có : $p^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$ và $q^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$
 $\Rightarrow (p^{q-1} - 1) : q$ và $(q^{p-1} - 1) : p$ mặt khác $p^{q-1} : p$ và $q^{p-1} : q$
 nên ta có : $(p^{q-1} + q^{p-1} - 1) : q$; $(p^{q-1} + q^{p-1} - 1) : p$ mà $(p, q) = 1$
 nên : $(p^{q-1} + q^{p-1} - 1) : p \cdot q$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Cẩm Thủy – Thanh Hóa 2022 - 2023)

Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3)$. Chứng minh $a + b + c + d$ chia hết cho 3

Lời giải

Ta có $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3) \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3c^3 - 15d^3$

Mà $(3c^3 - 15d^3) : 3$ nên $(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) : 3$ (1)

Dư trong phép chia a cho 3 là $\{0; \pm 1\}$ suy ra dư trong phép chia a^3 cho 3 cũng là $\{0; \pm 1\}$
 hay $a \equiv a^3 \pmod{3}$

Tương tự ta có $b \equiv b^3 \pmod{3}$; $c \equiv c^3 \pmod{3}$; $d \equiv d^3 \pmod{3}$

$a + b + c + d \equiv a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \pmod{3}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a + b + c + d$ chia hết cho 3.

Câu 4. (HSG 7 huyện Tam Dương 2016 - 2017)

Tìm các số nguyên tố p thỏa mãn $2^p + p^2$ là các số nguyên tố

Lời giải

Với $p = 2$ thì $2^p + p^2 = 4 + 4 = 8$ không là số nguyên tố

Với $p = 3$ thì $2^p + p^2 = 8 + 9 = 17$ là số nguyên tố

Với $p > 3$ thì p là số nguyên tố nên p lẻ nên $2^p = 2^{2k+1} \equiv 2 \pmod{3}$

Và $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$ nên $2^p + p^2 : 3$

Mà $2^p + p^2 > 3$ nên $2^p + p^2$ là hợp số

Vậy với $p = 3$ thì $2^p + p^2$ là hợp số

Vậy với $p = 3$ thì $2^p + p^2$ là số nguyên tố.

Câu 5. (HSG 7 huyện Phú Lý 2018 - 2019)

Tìm các số nguyên tố p thỏa mãn $2^p + p^2$ là các số nguyên tố.

Lời giải

Với $p = 2$ thì $2^p + p^2 = 4 + 4 = 8$ không là số nguyên tố

Với $p = 3$ thì $2^p + p^2 = 8 + 9 = 17$ là số nguyên tố

Với $p > 3$ thì p là số nguyên tố nên p lẻ nên $2^p = 2^{2k+1} \equiv 2 \pmod{3}$

Và $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$ nên $(2^p + p^2) : 3$

Mà $2^p + p^2 > 3$ nên $2^p + p^2$ là hợp số

\Rightarrow với $p > 3$ thì $2^p + p^2$ là hợp số

Vậy với $p = 3$ thì $2^p + p^2$ là số nguyên tố.

Dạng 3: Phương pháp phân tích

Câu 1. (HSG 7 huyện Yên Định 2022 - 2023)

Tim số nguyên tố \overline{ab} để $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương $a > b > 0$

Lời giải

$$A = \overline{ab} - \overline{ba} = 9a - 9b = 3^2(a - b)$$

Để là số chính phương thì $a - b$ là số chính phương

$$\text{Mà } 1 \leq a - b \leq 8 \Rightarrow a - b \in \{1; 4\}$$

$$\text{TH1: Với } a - b = 1 \Rightarrow \overline{ab} \in \{21; 32; 43; 54; 65; 76; 87; 98\}$$

Thấy có 43 là số nguyên tố

$$\text{TH2: Với } a - b = 4 \Rightarrow \overline{ab} \in \{51; 62; 73; 84; 95\}$$

Có 73 là số nguyên tố

Vậy số nguyên tố \overline{ab} bằng 43 hoặc 73

Câu 2. (HSG 7 Bắc Giang 2022 - 2023)

Cho đa thức bậc ba $Q(x)$ với hệ số x^3 là một số nguyên dương và $Q(5) - Q(4) = 2023$.

Chứng minh rằng $Q(7) - Q(2)$ là hợp số.

Lời giải

Đa thức bậc ba $Q(x)$ với hệ số x^3 là một số nguyên dương nên

$$Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \in \mathbb{N}^*)$$

$$\text{Ta có: } Q(5) = 125a + 25b + 5c + d; \quad Q(4) = 64a + 16b + 4c + d$$

$$\Rightarrow Q(5) - Q(4) = 61a + 9b + c = 2023 \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } Q(7) = 343a + 49b + 7c + d; \quad Q(2) = 8a + 4b + 2c + d$$

$$\Rightarrow Q(7) - Q(2) = 335a + 45b + 5c \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } Q(7) - Q(2) = 30a + (305a + 45b + 5c) = 30a + 10115$$

$$\Rightarrow [Q(7) - Q(2)] : 5 \quad (a \in \mathbb{N}^*); \quad \text{Mà } Q(7) - Q(2) > 5$$

Do vậy $Q(7) - Q(2)$ là hợp số.

Câu 3. (HSG 7 huyện Nghĩa Đàn 2022 - 2023)

Tim tất cả các số nguyên tố x và y thỏa mãn: $3x^2 + 1 = 19y^2$

Lời giải

$$\text{Ta có } 3x^2 + 1 = 19y^2 \Rightarrow 19y^2 - 3x^2 = 1$$

Vì 1 là số lẻ nên $19y^2 - 3x^2$ là số lẻ $\Rightarrow 19y^2$ và $3x^2$ phải không cùng tính chẵn lẻ.

Do 19 và 3 đều là số lẻ nên x và y không cùng tính chẵn lẻ.

*) Trường hợp 1: y lẻ và x chẵn

Vì x và y các số nguyên tố nên x là số nguyên tố chẵn $\Rightarrow x = 2$

Khi đó theo đề bài ta có: $3.2^2 + 1 = 19y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{13}{19}$ (loại)

*) Trường hợp 2: y chẵn và x lẻ

Vì x và y các số nguyên tố nên y là số nguyên tố chẵn $\Rightarrow y = 2$

Khi đó theo đề bài ta có: $3x^2 + 1 = 19.2^2 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$ (thỏa mãn)

Vậy $x = 5$; $y = 2$

Câu 4. (HSG 7 huyện Yên Bái – Yên Bình 2022 - 2023)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Biết $p+2$ cũng là số nguyên tố. Chứng tỏ rằng $p+1$ chia hết cho 6.

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p lẻ, do đó $p+1$ chẵn

$$\Rightarrow (p+1) : 2 \quad (1)$$

Cũng do p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p = 3k+1$ hoặc $p = 3k+2$, ($k \in \mathbb{N}$)

Nếu $p = 3k+1$ thì $p+2 = 3k+3 = 3(k+1) : 3$

$\Rightarrow p+2$ không là số nguyên tố nên $p = 3k+1$ không xảy ra.

$$\text{Do đó } p = 3k+2 \Rightarrow p+1 = 3k+3 = 3(k+1) : 3 \quad (2)$$

Vì $(2,3) = 1$ nên từ (1) và (2) ta có $(p+1) : 6$

Câu 5. (HSG 7 huyện Thiệu Hóa 2020 - 2021)

Cho đa thức: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \in \mathbb{N}^*$ và $f(5) - f(4) = 2022$. Chứng minh: $f(7) - f(2)$ là hợp số.

Lời giải

Xét đa thức: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Ta có: } f(5) - f(4) = (a.5^3 + b.5^2 + c.5 + d) - (a.4^3 + b.4^2 + c.4 + d)$$

$$\Rightarrow f(5) - f(4) = (125a + 25b + 5c + d) - (64a + 16b + 4c + d)$$

$$\Rightarrow f(5) - f(4) = 61a + 9b + c$$

$$\text{Mà } f(5) - f(4) = 2022 \Rightarrow 61a + 9b + c = 2022 \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } f(7) - f(2) = (a.7^3 + b.7^2 + c.7 + d) - (a.2^3 + b.2^2 + c.2 + d)$$

$$\Rightarrow f(7) - f(2) = (343a + 49b + 7c + d) - (8a + 4b + 2c + d)$$

$$\Rightarrow f(7) - f(2) = 335a + 45b + 5c$$

$$\Rightarrow f(7) - f(2) = 5(67a + 9b + c) = 5(6a + 61a + 9b + c) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $f(7) - f(2) = 5.(6a + 2022)$ là hợp số.

Vậy $f(7) - f(2)$ là hợp số.

Câu 6. (HSG 7 huyện Tiền Hải 2021 - 2022)

Cho 2022 số $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2021}, a_{2022}$ là các số tự nhiên khác 0 thỏa mãn:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{2021}} + \frac{1}{a_{2022}} = 1.$$
 Chứng minh rằng: Tồn tại ít nhất một số trong 2022 số đã cho là số chẵn.

Lời giải

Từ
$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{2021}} + \frac{1}{a_{2022}} = 1$$

$$\Rightarrow a_2 a_3 \dots a_{2022} + a_1 a_2 \dots a_{2021} = a_1 a_2 \dots a_{2022} \quad (*)$$

Giả sử các số $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2021}, a_{2022}$ đều là số lẻ, khi đó vế trái của (*) là tổng của 2022 số lẻ nên vế trái là số chẵn, mà vế phải là số lẻ (mâu thuẫn) \Rightarrow Điều giả sử sai.
 Vậy do đó tồn tại ít nhất một số trong 2022 số đã cho là số chẵn (đpcm).

Câu 7. (HSG 7 Trường THCS Nguyễn Trung Trực 2018-2019)

Chứng minh rằng nếu m và n là các số tự nhiên thì số: $A = (5m + n + 1)(3m - n + 4)$ là số chẵn.

Lời giải

Ta xét hiệu $(5m + n + 1) - (3m - n + 4) = 5m + n + 1 - 3m + n - 4 = 2m + 2n - 3$

Với $m, n \in \mathbb{N}$ thì $2m + 2n - 3$ là một số lẻ.

Do đó trong hai số $5m + n + 1$ và $3m - n + 4$ phải có một số chẵn.

Suy ra tích của chúng là một số chẵn.

Vậy A là số chẵn.

Câu 8. (HSG 7 trường Nguyễn Trung Trực 2017 - 2018)

Cho a, b, c đôi một khác nhau và $\neq 0$. Biết \overline{ab} là số nguyên tố và $\frac{\overline{ab}}{bc} = \frac{b}{c}$. Tìm \overline{abc} .

Lời giải

Ta có:
$$\frac{\overline{ab}}{bc} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

Do \overline{ab} là 1 số nguyên tố có hai chữ số nên $b \in \{1; 3; 7; 9\}$

Do $ac = b^2$ ta xét các trường hợp

$+ b = 1 \Rightarrow a = c = 1$ (loại do $a \neq c$)

$+ b = 3 \Rightarrow ac = 9 = 1.9$ (do $a \neq c$) $\Rightarrow \overline{ab} = 13$ (do 93 không là nguyên tố)

Có
$$\frac{\overline{ab}}{bc} = \frac{13}{39} = \frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{b}{c} \quad (tm)$$

$+ b = 7; b = 9$ đều bị loại do dẫn đến $a = c$

Vậy $\overline{abc} = 139$.

Câu 9. (HSG 7 huyện Thanh Miện, tỉnh Hải Dương, 2022- 2023)

Tìm các số nguyên tố p thỏa mãn $2^p + p^2$ là số nguyên tố.

Lời giải

Nếu $p = 2 \Rightarrow 2^p + p^2 = 8$ không là số nguyên tố (loại).

Nếu $p = 3 \Rightarrow 2^p + p^2 = 17$ là số nguyên tố (chọn).

Nếu $p > 3$ thì p là số lẻ $\Rightarrow p = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow 2^p = 2^{2k+1} = 2 \cdot 4^k$ chia cho 3 dư 2.

Lại có p^2 là số chính phương lớn hơn 3 nên chia cho 3 dư 1. Suy ra $2^p + p^2$ chia hết cho 3 (loại).

Vậy $p = 3$.

Câu 10. (HSG 7 thành phố Lào Cai, 2022 - 2023)

Chứng minh $n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 + n + 2$ không thể là số nguyên tố.

Lời giải

Ta có: $n^3 + n + 2 = n^3 + 1 + n + 1 = (n+1)(n^2 - n + 1) + (n+1) = (n+1)(n^2 - n + 2)$

Do $\forall n \in \mathbb{N}^*$ nên $n+1 > 1$ và $n^2 - n + 2 > 1$

Vậy $(n+1)(n^2 - n + 2)$ là hợp số hay $n^3 + n + 2$ không thể là số nguyên tố.

Câu 11. (HSG 7 huyện Phù Cát 2017 - 2018; Hoài Nhơn 2014 - 2015)

Cho p là số nguyên tố. Tìm tất cả các số nguyên a thỏa mãn: $a^2 + a - p = 0$

Lời giải

Từ $a^2 + a - p = 0 \Rightarrow p = a^2 + a = a(a+1)$

Với $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow p = a(a+1) : 2; p$ là số nguyên tố $\Rightarrow p = 2$

$\Rightarrow a(a+1) = 2 = 1 \cdot 2 = (-1) \cdot (-2) \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$

Câu 12. (HSG 7 trường Nguyễn Trực 2017 - 2018)

Tìm x, y biết: $x^2 - 6y^2 + 1 = 2$ (x, y là nguyên tố)

Lời giải

$x^2 - 6y^2 + 1 = 2 \Rightarrow x^2 = 6y^2 + 1$

vì x, y là nguyên tố nên $x > 0; y > 0; y < x$

Do đó y là số chẵn $\Rightarrow y = 2$

$\Rightarrow x^2 = 6 \cdot 2^2 + 1 = 25 \Rightarrow x = 5$

Vậy $x = 5; y = 2$.

Dạng 4: Giải phương trình nghiệm nguyên dựa vào tính chất số nguyên tố

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Miện năm 2021 - 2022)

Tìm số nguyên tố p sao cho $p+2$ và $p+4$ đều là số nguyên tố.

Lời giải

Nếu $p = 2$ thì $p+2 = 4$ là hợp số (loại).

Nếu $p = 3$ thì $p+2 = 5, p+4 = 7$ đều là số nguyên tố. Thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Nếu $p > 3$ thì $p = 3k + 1$ hoặc $p = 3k + 2$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

+ Nếu $p = 3k + 1 \Rightarrow p + 2 = 3k + 1 + 2 = 3k + 3 = 3(k + 1)$ chia hết cho 3.

Mà $p > 3$ nên $p + 2$ là hợp số (loại).

+ Nếu $p = 3k + 2 \Rightarrow p + 4 = 3k + 2 + 4 = 3k + 6 = 3(k + 2)$ chia hết cho 3.

Mà $p > 3$ nên $p + 4$ là hợp số (loại).

Vậy $p = 3$ là giá trị cần tìm.

Câu 2. (HSG 7 huyện Thanh Sơn năm 2021 - 2022)

Tìm số nguyên tố p sao cho $2p + 1$ và $4p + 1$ đều là số nguyên tố.

Lời giải

Với $p = 2 \Rightarrow 4p + 1 = 9$ không là số nguyên tố $\Rightarrow p = 2$ không thỏa mãn.

Với $p = 3$ thì $2p + 1 = 7$ là số nguyên tố và $4p + 1 = 13$ là số nguyên tố. Thỏa mãn.

Với $p > 3$ thì vì p là số nguyên tố nên $p \not\equiv 3$. Ta có 2 trường hợp:

+ Nếu $p = 3k + 1 \Rightarrow 2p + 1 = (6k + 3) : 3$. Mà $6k + 3 > 3 \Rightarrow 2p + 1$ không là số nguyên tố.

+ Nếu $p = 3k + 2 \Rightarrow 4p + 1 = (12k + 9) : 3$. Mà $12k + 9 > 3 \Rightarrow 4p + 1$ không là số nguyên tố.

Vậy $p = 3$ là giá trị cần tìm.

Câu 3.

Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^2 - y^3 = 7$.

Lời giải

* Chứng minh mệnh đề: Giả sử a và b nguyên tố cùng nhau thì mọi ước số nguyên tố lẻ của $a^2 + b^2$ chỉ có dạng $4m + 1$ (mà không có dạng $4m + 3$) trong đó m là số nguyên dương.

Xét số nguyên tố $p = 4m + 3 = 2(2m + 1) + 1$

Nếu p là ước số nguyên tố của $a^2 + b^2$ thì p là ước chung của a và b

Mà a và b nguyên tố cùng nhau nên $p = 1$ không là số nguyên tố

Vậy khi p lẻ, p chỉ có dạng $4m + 1$.

$$x^2 - y^3 = 7 \Rightarrow x^2 + 1 = y^3 + 2^3$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 = (y + 2)(y^2 - 2y + 4)$$

Nếu y chẵn thì $(y + 2)(y^2 - 2y + 4)$ cho 4

$\Rightarrow x$ lẻ, $x = 2t + 1 \Rightarrow x^2 + 1 = 4t^2 + 4t + 2$ không chia hết cho 4 (mâu thuẫn)

Do đó y là số lẻ, $y = 2k + 1$

$\Rightarrow y^2 - 2y + 4 = 4k^2 + 3$ phải có ước số nguyên tố lẻ dạng $4m + 3$ (vì tích các số dạng $4m + 1$ có dạng $4k + 1$)

$\Rightarrow x^2 + 1$ có ước số nguyên tố dạng $4m + 3$ (trái với mệnh đề trên)

Vậy không có cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^2 - y^3 = 7$.

Câu 4.

Tìm các số nguyên dương x, y sao cho $\frac{x^2 + y^2}{x - y} = k$ là số nguyên dương và là ước của 1995.

Lời giải

Giả sử $\frac{x^2 + y^2}{x - y} = k$ nguyên dương và k là ước số của $1995 = 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19 = 5n$ với $n = 3 \cdot 7 \cdot 19$

Các số nguyên tố 3; 7; 19 đều có dạng

Gọi ước chung lớn nhất của x, y là $d = (x, y)$ thì $x = du, y = dv$ với $(u, v) = 1$

Theo giả thiết $\frac{x^2 + y^2}{x - y} = k \Rightarrow x^2 + y^2 = k(x - y)$

$$\Rightarrow d(u^2 + v^2) = k(u - v) \quad (1)$$

+ TH1: Nếu k là ước của $n \Rightarrow k$ có ước nguyên tố dạng $4m + 3$

Có $(u, v) = 1$ nên $u^2 + v^2$ không chứa các ước số nguyên tố của k

Nên k là ước của $d \Rightarrow d = kt$

$$\text{Khi đó (1)} \Rightarrow t(u^2 + v^2) = u - v$$

Do đó $u^2 < u^2 + v^2 \leq u - v \Rightarrow (1)$ vô nghiệm

+ TH2: Nếu $k = 5m$ với m là ước của n

Có $(u, v) = 1$ nên $u^2 + v^2$ không chứa các ước số nguyên tố của m

Nên m là ước của $d \Rightarrow d = mt$

$$\text{Khi đó (1)} \Rightarrow t(u^2 + v^2) = 5(u - v)$$

$$\text{Do đó} \Rightarrow u^2 + v^2 \leq 5(u - v) \Rightarrow A = u^2 + v^2 - 5(u - v) \leq 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác: } 4A &= 4u^2 - 20u + 25 + 4v^2 + 20v + 25 - 50 \\ &= (2u - 5)^2 + (2v + 5)^2 - 50 \geq 1^2 + 7^2 - 50 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 4A \geq 0 \Rightarrow A \geq 0 \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) và (3)} \Rightarrow A = 0 \text{ khi đó } \begin{cases} 2u - 5 = \pm 1 \\ 2v + 5 = 7 \end{cases}$$

$$\text{Giải ra ta được: } \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} u = 3 \\ v = 1 \end{cases}. \text{ Khi đó } t = 1 \Rightarrow d = m.$$

Ta tìm được các số x, y là: $\begin{cases} x = 3m \\ y = m \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2m \\ y = m \end{cases}$ trong đó m là ước của $n = 3 \cdot 7 \cdot 19$

Nghĩa là $m \in \{1; 3; 7; 19; 21; 57; 133; 399\}$

$$\text{Vậy } (x; y) \in \left\{ (3; 1), (2; 1), (9; 3), (6; 3), (21; 7), (14; 7), (57; 19), (38; 19), (63; 21), (42; 21), (171; 57), (114; 57), (399; 133), (266; 133), (1197; 399), (798; 399) \right\}.$$

Dạng 5. Các bài toán về hai số nguyên tố cùng nhau

Câu 1. (HSG 7 huyện Nga Sơn - Thanh Hóa 2022 - 2023)

Tìm số nguyên tố p sao cho $p + 2, p + 6, p + 8, p + 14$ cũng là số nguyên tố.

Lời giải

Giả sử với $p = 2$ là số nguyên tố $\Rightarrow p + 2 = 4 : 2$ là hợp số $\Rightarrow p = 2$ (loại).

+ Với $p = 3$ là số nguyên tố $\Rightarrow p + 6 = 9 : 3$ là hợp số $\Rightarrow p = 3$ (loại).

+ Với $p = 5$ là số nguyên tố $\Rightarrow p + 2 = 7, p + 6 = 11, p + 8 = 13, p + 14 = 19$ đều là số nguyên tố.

+ Với $p > 5 \Rightarrow p = 5k + 1, p = 5k + 2, p = 5k + 3, p = 5k + 4, (k \in \mathbb{N})$

- Nếu $p = 5k + 1 \Rightarrow p + 14 = 5k + 1 + 14 = (5k + 15) : 5$ và lớn hơn 5 $\Rightarrow p + 14$ là hợp số $\Rightarrow p = 5k + 1$ (loại).

- Nếu $p = 5k + 2 \Rightarrow p + 8 = 5k + 10 = 5(k + 2) : 5$ và lớn hơn 5 $\Rightarrow p + 8$ là hợp số $\Rightarrow p = 5k + 2$ (loại).

- Nếu $p = 5k + 3 \Rightarrow p + 2 = (5k + 5) : 5$ và lớn hơn 5 $\Rightarrow p + 2$ là hợp số $\Rightarrow p = 5k + 3$ (loại).

- Nếu $p = 5k + 4 \Rightarrow p + 6 = 5k + 4 + 6 = (5k + 10) : 5$ và lớn hơn 5 $\Rightarrow p + 6$ là hợp số $\Rightarrow p = 5k + 4$ (loại).

Vậy $p = 5$ là số nguyên tố cần tìm.

Câu 2. (HSG 7 huyện Sông Lô – Vĩnh Phúc 2022 - 2023)

Tìm số nguyên tố p sao cho $p^2 + 4$ và $p^2 - 4$ đều là số nguyên tố.

Lời giải

Với $p = 2 \Rightarrow p^2 + 4 = 8; p^2 - 4 = 0 \Rightarrow p^2 + 4$ và $p^2 - 4$ là hợp số.

Vậy $p = 2$ (không thỏa mãn)

Với $p = 3 \Rightarrow p^2 + 4 = 13; p^2 - 4 = 5 \Rightarrow p^2 + 4$ và $p^2 - 4$ là số nguyên tố.

Vậy $p = 3$ (thỏa mãn).

Với p là số nguyên tố và $p > 3 \Rightarrow p$ chia 3 dư 1 hoặc 2 $\Rightarrow p^2$ chia 3 dư 1 $\Rightarrow (p^2 - 4) : 3$

Mà $p^2 - 4 > 3 \Rightarrow p^2 - 4$ là hợp số (không thỏa mãn).

Vậy $p = 3$ thì $p^2 + 4$ và $p^2 - 4$ cũng là các số nguyên tố.

Câu 3. (HSG 7 huyện Yên Thế - BG 2022 - 2023)

Cho p là số nguyên tố thỏa mãn $p - 2$ và $p + 2$ đều là số nguyên tố. Hỏi $3p + 2$ là số nguyên tố hay hợp số.

Lời giải

Xét $p = 2$ thì $p - 2 = 0$ và $p + 2 = 4$ không phải là số nguyên tố (KTM);

Xét $p = 3$ thì $p - 2 = 1$ không phải là số nguyên tố (KTM).

Xét $p = 5$ thì $p - 3 = 3$ và $p + 2 = 7$ là các số nguyên tố (TM)

Khi đó $3p + 2 = 17$ là số nguyên tố.

Xét $p > 5$ thì p có dạng $3k + 1$ hoặc $3k + 2$ ($k \in \mathbb{N}, k \geq 2$).

+) Với $p = 3k + 1$ thì $p + 2 = 3k + 3 = 3(k + 1) : 3$, mà $p > 5 \Rightarrow p$ là hợp số (KTM).

+) Với $p = 3k + 2$ thì $p - 2 = 3k : 3$, mà $p > 5 \Rightarrow p$ là hợp số (KTM).

Vậy khi $p; p - 2; p + 2$ đều là số nguyên tố thì $3p + 2$ cũng là số nguyên tố.

Câu 4. (HSG 7 huyện Quảng Trạch năm 2021 - 2022)

Chứng minh rằng: Với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $2n+1$ và $\frac{n(n+1)}{2}$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Lời giải

Gọi d là ước chung lớn nhất của $\frac{n(n+1)}{2}$ và $2n+1$. Khi đó $\frac{n(n+1)}{2} : d$ và $(2n+1) : d$.

Vì $\frac{n(n+1)}{2} : d \Rightarrow n(n+1) : d \Rightarrow n : d$ hoặc $(n+1) : d$.

+ Nếu $n : d \Rightarrow 2n : d$, kết hợp với $(2n+1) : d$ ta có $1 : d \Rightarrow d = 1$.

+ Nếu $(n+1) : d \Rightarrow 2(n+1) : d \Rightarrow (2n+2) : d$, kết hợp với $(2n+1) : d$ ta có $1 : d \Rightarrow d = 1$.

Trong mọi trường hợp ta đều có $d = 1$. Vậy với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $2n+1$ và $\frac{n(n+1)}{2}$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Câu 5. (HSG 7 năm 2021 - 2022)

Cho hai đa thức $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^{2009} + x^{2010}$

và $Q(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots - x^{2009} + x^{2010}$.

Giá trị của biểu thức $P\left(\frac{1}{2}\right) + Q\left(\frac{1}{2}\right)$ có dạng biểu thức hữu tỉ là $\frac{a}{b}$; $a, b \in \mathbb{N}$; a, b là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh $a : 5$.

Lời giải

$$\text{Đặt } A = P\left(\frac{1}{2}\right) + Q\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2009} \quad (1)$$

$$\text{Suy ra } 4A = 10 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2007} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } 3A = 8 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2009} \Rightarrow A = \frac{8 - \frac{1}{2^{2009}}}{3} = \frac{2^{2012} - 1}{3 \cdot 2^{2009}} = \frac{a}{b}$$

Ta thấy: $2^{2012} - 1 = 4^{1006} - 1 : 3$;

$2^{2012} - 1$ và 2^{2009} là hai số nguyên tố cùng nhau nên $2^{2012} - 1 = 3a$.

Ta có: $3a = 2^{2012} - 1 = 16^{503} - 1$.

Vì 16^{503} có chữ số tận cùng là 6 nên $3a$ có chữ số tận cùng là 5, suy ra $3a$ chia hết cho 5.

Mà 3 và 5 nguyên tố cùng nhau nên $a : 5$.

Vậy $a : 5$

Câu 6. (HSG 7 huyện Vĩnh Tường 2015 - 2016)

Cho $(a, b) = 1$. Chứng minh rằng $(a^{2007}, b^{2006}) = 1$

Lời giải

Giả sử a^{2007} và b^{2006} đều chia hết cho số nguyên tố $d \Rightarrow a : d$ và $b : d$

Mà $(a, b) = 1$

$\Rightarrow d = 1$ (vô lý).

Vậy $(a^{2007}, b^{2006}) = 1$.



CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS

CHƯƠNG 6: CÁC BÀI TOÁN VỀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Dạng 1: Chứng minh một số (một tổng) là số chính phương
Dạng 2: Chứng minh một số (một tổng) không là số chính phương
Dạng 3: Tìm số chính phương

Dạng 1: Chứng minh một số (một tổng) là số chính phương

Câu 1. (HSG 7 huyện Hậu Lộc 2022 - 2023)

Cho a, b, c, d là các số nguyên thỏa mãn $a^2 = b^2 + c^2 + d^2$. Chứng minh rằng: $abcd + 2023$ viết được dưới dạng hiệu của hai số chính phương.

Lời giải

Cách 1:

Ta có: $(2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 4m(m+1) + 1$.

Do đó ta có $(2m+1)^2$ là số chính phương lẻ chia 8 luôn dư 1.

Nếu a, b, c, d đều lẻ thì a^2, b^2, c^2, d^2 chia 8 đều dư 1 dẫn đến không xảy ra $a^2 = b^2 + c^2 + d^2$ (vì vế trái chia 8 dư 1, vế phải chia 8 dư 3)

Vậy trong các số a, b, c, d phải có ít nhất một số chẵn nên $abcd$ chẵn $\Rightarrow abcd + 2023$ lẻ.

Đặt $abcd + 2023 = 2k + 1 (k \in \mathbb{Z}) = (k+1)^2 - k^2$

Cách 2:

$$a^2 - b^2 = c^2 + d^2 \Rightarrow (a-b)(a+b) = c^2 + d^2$$

Giả sử cả bốn số a, b, c, d đều lẻ thì $(a-b), (a+b)$ chẵn $\Rightarrow (a-b)(a+b):4$

$$\Rightarrow (c^2 + d^2):4$$

mà c^2, d^2 là các số chính phương lẻ khi chia cho 4 dư 1 nên $(c^2 + d^2):4$ dư 2 (mâu thuẫn). Điều giả sử sai.

Suy ra ít nhất một trong bốn số có một số chẵn $\Rightarrow abcd$ chẵn $\Rightarrow abcd + 2023$ lẻ.

$$\text{Ta có: } abcd + 2023 = \frac{abcd}{2} + \frac{abcd}{2} + 1011 + 1012 = \left(\frac{abcd}{2} + 1012\right) + \left(\frac{abcd}{2} + 1011\right)$$

$$= \left[\left(\frac{abcd}{2} + 1012\right) + \left(\frac{abcd}{2} + 1011\right) \right] \cdot 1$$

$$= \left[\left(\frac{abcd}{2} + 1012\right) + \left(\frac{abcd}{2} + 1011\right) \right] \cdot \left[\left(\frac{abcd}{2} + 1012\right) - \left(\frac{abcd}{2} + 1011\right) \right]$$

$$= \left(\frac{abcd}{2} + 1012\right)^2 - \left(\frac{abcd}{2} + 1011\right)^2$$

mà $abcd$ chẵn nên $abcd:2$ hay $\frac{abcd}{2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left(\frac{abcd}{2} + 1012\right)^2; \left(\frac{abcd}{2} + 1011\right)^2$ là các số chính phương.

Vậy $abcd + 2023$ viết được dưới dạng hiệu của hai số chính phương.

Câu 2. (HSG 7 thị xã Nghị Sơn 2022 - 2023)

Cho n là số tự nhiên có hai chữ số, Tìm n biết $n+4$ và $2n$ đều là các số chính phương.

Lời giải

Nhận xét: Số chính phương không thể tận cùng là 2; 3; 7; 8

Vì $2n$ là số chính phương nên n chẵn $\Rightarrow n$ tận cùng là 0; 2; 4; 6; 8

- Nếu n tận cùng là 4; 8 thì $n+4$ không phải là số chính phương.
- Nếu n tận cùng là 6 thì $2n$ không phải là số chính phương.

Do đó n chỉ có thể tận cùng là 0 hoặc 2 $\Rightarrow n+4$ chỉ có thể tận cùng là 4 hoặc 6.

Vì n là số có hai chữ số nên $14 \leq n+4 < 104$. Mà $n+4$ là số chính phương tận cùng là 4 hoặc 6 nên $n+4 \in \{16; 36; 64\}$

- Nếu $n+4=16 \Rightarrow n=12$ khi đó $2n=24$ (không thỏa mãn)
- Nếu $n+4=36 \Rightarrow n=32$ khi đó $2n=64$ (thỏa mãn)
- Nếu $n+4=64 \Rightarrow n=60$ khi đó $2n=120$ (không thỏa mãn)

Vậy $n=32$

Câu 3. (HSG 7 Thành phố Ninh Bình 2022 - 2023)

Cho 5 số dương đôi một khác nhau sao cho mỗi số không có ước nguyên tố nào khác 2 và 3. Chứng minh rằng trong 5 số đó tồn tại hai số mà tích của chúng là một số chính phương

Lời giải

Mỗi số trong 5 số có dạng $2^x \cdot 3^y$ trong đó x, y là số tự nhiên khác 0.

$(x; y)$ chỉ có thể $(C; C); (L; L); (C; L); (L; C)$ vì có 5 số 4 dạng

nên tồn tại 2 số cùng một dạng nên tích 2 số này là số chính phương.

Câu 4. (HSG 7 huyện Điện Bàn 2022 - 2023)

Cho số tự nhiên a gồm 60 chữ số 1, số tự nhiên b gồm 30 chữ số 2. Chứng minh rằng hiệu $a-b$ là một số chính phương.

Lời giải

$$\text{Ta có: } a = \underbrace{111\dots111}_{60c/s1} = \underbrace{111\dots11100\dots000}_{30c/s1} + \underbrace{111\dots111}_{30c/s0} = \underbrace{111\dots111}_{30c/s1} \cdot 10^{30} + \underbrace{111\dots111}_{30c/s1}$$

$$\text{Đặt } c = \underbrace{111\dots111}_{30c/s1} \Rightarrow 9c+1 = \underbrace{999\dots99}_{30c/s9} + 1 = 10^{30}$$

$$\text{Khi đó } a = c \cdot (9c+1) + c = 9c^2 + 2c \text{ và } b = 2c$$

$$\text{Xét hiệu } a-b = 9c^2 + 2c - 2c = 9c^2 = (3c)^2$$

Vậy $a-b = (3c)^2$ là số chính phương.

Câu 5. (HSG 7 huyện HƯNG HẢ, trường VĂN LANG 2022 - 2023)

Biết $\left|x + \frac{1}{2}\right| + \left|x + \frac{1}{6}\right| + \left|x + \frac{1}{12}\right| + \left|x + \frac{1}{20}\right| + \dots + \left|x + \frac{1}{110}\right| = 11x$. Chứng minh rằng $110x$ là số chính phương.

Lời giải

Nhận xét: Vế trái của đẳng thức luôn ≥ 0 nên vế phải ≥ 0

suy ra $11x \geq 0$ hay $x \geq 0$.

Vì $x \geq 0$ nên ta có

$$\left|x + \frac{1}{2}\right| + \left|x + \frac{1}{6}\right| + \left|x + \frac{1}{12}\right| + \left|x + \frac{1}{20}\right| + \dots + \left|x + \frac{1}{110}\right| = 11x$$

$$x + \frac{1}{2} + x + \frac{1}{6} + x + \frac{1}{12} + x + \frac{1}{20} + \dots + x + \frac{1}{110} = 11x$$

$$\text{suy ra } x = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11} \text{ (t/m)}$$

Với $x = \frac{10}{11}$ thì $110x = 100 = 10^2$ nên $110x$ là số chính phương.

Câu 6. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình 2021 – 2022S)

Cho các số thực dương m và n thỏa mãn: $m^{2020} + n^{2020} = m^{2021} + n^{2021} = m^{2022} + n^{2022}$ và $P = 7 + m^2 + n^2$. Chứng minh rằng P là số chính phương.

Lời giải

$$m^{2020} + n^{2020} = m^{2021} + n^{2021} = m^{2022} + n^{2022}$$

$$\text{Suy ra } m^{2022} + n^{2022} - m^{2021} - n^{2021} = 0 \text{ và } m^{2021} + n^{2021} - m^{2020} - n^{2020} = 0$$

$$\text{Hay } m^{2021} \cdot (m-1) + n^{2021} \cdot (n-1) = 0 \text{ và } m^{2020} \cdot (m-1) + n^{2020} \cdot (n-1) = 0$$

Từ đó suy ra

$$\Rightarrow m^{2021} \cdot (m-1) - m^{2020} \cdot (m-1) + n^{2021} \cdot (n-1) - n^{2020} \cdot (n-1) = 0$$

$$\Rightarrow m^{2020} \cdot (m-1)^2 - n^{2020} \cdot (n-1)^2 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } m^{2020} > 0; n^{2020} > 0; (m-1)^2 \geq 0; (n-1)^2 \geq 0$$

$$\text{Nên } m^{2020} (m-1)^2 \geq 0 \text{ và } n^{2020} (n-1)^2 \geq 0 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } m^{2020} (m-1)^2 = 0 \text{ và } n^{2020} (n-1)^2 = 0 \text{ hay } (m-1)^2 = 0 \text{ (do } m^{2020} > 0)$$

$$\text{và } (n-1)^2 = 0 \text{ (do } n^{2020} > 0)$$

$$\text{Từ đó ta có } m-1=0 \text{ và } n-1=0 \text{ hay } m=1 \text{ và } n=1$$

$$\text{Khi đó } P = 7 + m^2 + n^2 = 7 + 1 + 1 = 9 = 3^2$$

Vậy P là số chính phương.

Câu 7. (HSG 7 huyện Quan Hoa, tỉnh Thanh Hoá 2021 – 2022)

Cho các số nguyên dương n thỏa mãn $n+1$ và $2n+1$ đều là số chính phương. Chứng minh rằng $n \div 24$.

Lời giải

$$\text{Đặt } n+1 = k^2, 2n+1 = m^2 (k, m \in \mathbb{N})$$

$$\text{Vì } 2n+1 \text{ là số lẻ nên } m \text{ là số lẻ. Đặt } m = 2t+1 (t \in \mathbb{N}) \text{ ta có: } 2n+1 = (2t+1)^2$$

$$\Rightarrow n = 2t(t+1) \Rightarrow n, \text{ suy ra } n = 2t(t+1) \text{ hay } n \text{ là số chẵn} \Rightarrow k \text{ là số lẻ.}$$

$$\text{Do vậy } n = k^2 - 1 = (k-1) \cdot (k+1) \text{ là tích của hai số chẵn liên tiếp nên } n \div 8$$

$$\text{Mặt khác: } (n+1) + (2n+1) = 3n+2 = k^2 + m^2 \text{ là số chia 3 dư 2}$$

$$\text{Mà số chính phương khi chia cho 3 chỉ dư 0 hoặc 1 nên } k^2 \text{ và } m^2 \text{ chia 3 dư 1}$$

$$\text{Do đó } m^2 - k^2 = (2n+1) - (n+1) = n \div 3. \text{ Vì } (3, 8) = 1 \text{ nên } n \div 24 \text{ (đpcm).}$$

Câu 8. (HSG 7 huyện Nghĩa Hành năm 2021 - 2022)

Cho 5 số chính phương bất kì có chữ số hàng chục khác nhau còn chữ số hàng đơn vị đều là 6. Chứng minh rằng tổng các chữ số hàng chục của 5 số chính phương đó là một số chính phương.

Lời giải

Nếu một số chính phương $M = a^2$ có chữ số hàng đơn vị là 6 thì a là số chẵn,

Do đó $a : 2 \Rightarrow a^2 : 4$.

Theo dấu hiệu chia hết cho 4 thì hai chữ số tận cùng của M phải chia hết cho 4.

Nên 2 chữ số tận cùng của M phải là một trong các số: 16; 36; 56; 76; 96.

Mà 5 số chính phương bất kì có chữ số hàng chục khác nhau, chữ số hàng đơn vị đều là 6 nên 5 chữ số hàng chục đó chính là: 1; 3; 5; 7; 9.

Từ đó tổng các chữ số hàng chục của 5 số chính phương đó là:

$1+3+5+7+9 = 25 = 5^2$ là số chính phương.

Câu 9. (HSG 7 huyện Tam Dương năm 2021 - 2022)

Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ trong đó $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ và thỏa mãn $b = 3a + c$.

Chứng minh rằng tích $f(1) \cdot f(-2)$ là bình phương của một số nguyên.

Lời giải

Ta có: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Nên: $f(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = a + b + c + d$.

$f(-2) = a(-2)^3 + b(-2)^2 + c(-2) + d = -8a + 4b - 2c + d$.

Khi đó: $f(1) - f(-2) = (a + b + c + d) - (-8a + 4b - 2c + d) = 9a - 3b + 3c$

$= (9a + 3c) - 3b = 3(3a + c) - 3b = 3b - 3b = 0$ (do $b = 3a + c$).

Suy ra $f(1) = f(-2)$.

Do đó $f(1) \cdot f(-2) = [f(1)]^2 = (a + b + c + d)^2$ là bình phương của một số nguyên.

Câu 10. (HSG 7 huyện Vũ Thư năm 2021 - 2022)

Cho đa thức: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d là các số nguyên). Biết $7a + b + c = 0$.

Chứng minh rằng $f(3) \cdot f(-2)$ là số chính phương.

Lời giải

Ta có: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{Z}$)

$\Rightarrow f(3) = 27a + 9b + 3c + d$ và $f(-2) = -8a + 4b - 2c + d$

$\Rightarrow f(3) - f(-2) = 35a + 5b + 5c = 5(7a + b + c) = 0$ (vì $7a + b + c = 0$)

$\Rightarrow f(3) = f(-2) \Rightarrow f(3) \cdot f(-2) = [f(3)]^2$.

Vì $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ nên $f(3) \in \mathbb{Z} \Rightarrow [f(3)]^2$ là số chính phương.

Vậy $f(3) \cdot f(-2)$ là số chính phương.

Câu 11. (HSG 7 huyện Vũ Thư, tỉnh Thái Bình, 2022- 2023)

Cho đa thức: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Biết a, b, c là các số nguyên và $2a + b = 0$. Chứng minh rằng: $f(5) \cdot f(-3)$ là số chính phương.

Lời giải

Vì $f(x) = ax^2 + bx + c$, nên:

$$\begin{aligned} f(5) &= 25a + 5b + c \\ f(-3) &= 9a - 3b + c \end{aligned} \quad (1)$$

Mà: $2a + b = 0 \Rightarrow b = -2a$ (2)

$$\begin{aligned} f(5) &= 15a + c \\ f(-3) &= 15a + c \end{aligned}$$

Do đó: $f(5) \cdot f(-3) = (15a + c)^2$ là số chính phương (vì a, c đều là số nguyên)

Câu 12. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn, trường Đào Duy Từ; huyện Nam Trà My, trường Trà Ka; huyện Thăng Bình; huyện Bến Lức 2018 - 2019)

Cho tích $a \cdot b$ là số chính phương và $(a, b) = 1$. Chứng minh rằng a và b đều là số chính phương

Lời giải

Giả sử a không phải là số chính phương, suy ra khi phân tích số a ra thừa số nguyên tố thì số a chứa thừa số k mũ lẻ

Vì $(a, b) = 1$ nên b không chứa thừa số nguyên tố k

Do đó $a \cdot b$ chứa thừa số nguyên tố k mũ lẻ $\Rightarrow a \cdot b$ không phải là số chính phương, trái với giả thiết nên giả sử sai

Vậy nếu $a \cdot b$ là số chính phương và $(a, b) = 1$ thì a và b đều là số chính phương

Câu 13. (HSG 7 huyện Tân An 2017 - 2018)

Cho tích $a \cdot b$ là số chính phương và $(a, b) = 1$. Chứng minh rằng a và b đều là số chính phương.

Lời giải

Đặt $a \cdot b = c^2$ (1)

Gọi $(a, b) = d$ nên $a : d, c : d$

Hay $a = m \cdot d$ và $c = n \cdot d$ với $(m, n) = 1$

Thay vào (1) ta được: $m \cdot d \cdot b = n^2 \cdot d^2$

$$\Rightarrow m \cdot b = n^2 \cdot d \Rightarrow \begin{cases} b : n^2 \\ n^2 : b \end{cases} \text{ do } (a, b) = 1; (b, d) = 1$$

$$\Rightarrow b = n^2$$

Thay vào (1) ta được: $a \cdot n^2 = n^2 \cdot d^2 \Rightarrow a = d^2$

Vậy a và b đều là số chính phương.

Câu 14. (HSG 7 trường Phan Đình Phùng 2017 - 2018; huyện Lâm Thao 2016 - 2017)

Cho tích $a \cdot b$ là số chính phương và $(a, b) = 1$. Chứng minh rằng a và b đều là số chính phương

Lời giải

Giả sử a không phải là số chính phương, suy ra khi phân tích số a ra thừa số nguyên tố thì số a chứa thừa số k mũ lẻ

Vì $(a,b)=1$ nên b không chứa thừa số nguyên tố k

Do đó $a.b$ chứa thừa số nguyên tố k mũ lẻ $\Rightarrow a.b$ không phải là số chính phương, trái với giả thiết nên giả sử sai

Vậy nếu $a.b$ là số chính phương và $(a,b)=1$ thì a và b đều là số chính phương.

Dạng 2: Chứng minh một số không là số chính phương

Câu 1. (HSG 7 huyện Hà Trung 2022 - 2023)

Với là n số tự nhiên, chứng minh rằng: $n^2 + 2022$ không phải là số chính phương.

Lời giải

Vì n là số tự nhiên nên n^2 là số chính phương thì n^2 có dạng $4k$ hoặc $4k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$)

Nếu $n^2 = 4k$ thì $n^2 + 2022 = 4k + 2022 = 4(k + 505) + 2$

$\Rightarrow n^2 + 2022$ không phải là số chính phương

Nếu $n^2 = 4k + 1$ thì $n^2 + 2022 = 4k + 1 + 2022 = 4k + 2023 = 4(k + 505) + 3$

$\Rightarrow n^2 + 2022$ không phải là số chính phương

Vậy với mọi số tự nhiên n thì $n^2 + 2022$ không phải là số chính phương.

Câu 2. (HSG 7 huyện Quảng Xương, Tiền Hải 2022 - 2023)

Cho $A = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$. Chứng tỏ rằng A không phải là số chính phương

Lời giải

Ta có : $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 111.a + 111b + 111c = 3.37.(a + b + c)$

Vì số chính phương phải chứa thừa số nguyên tố với số mũ chẵn.

Do đó $a + b + c = 3.37.k^2$ ($k \in \mathbb{N}$). Điều này vô lí vì: $3 \leq a + b + c \leq 27$

Vậy A không là số chính phương

Câu 3. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc-Thanh Hoá 2022 - 2023)

Cho $f(x)$ là đa thức hệ số nguyên và thoả mãn $f(0) = 0$ và $f(1) = 2$. Chứng minh rằng $f(7)$ không thể là số chính phương.

Lời giải

Vì $f(0) = 0$ và $f(1) = 2$ nên $f(x)$ có dạng :

$f(x) = 2 + x(x-1).g(x)$ trong đó $g(x)$ là 1 đa thức với hệ số nguyên.

Ta có $f(7) = 2 + 42.g(7) \equiv 2 \pmod{3}$ nên $f(7)$ không thể là số chính phương

Câu 4. (HSG 7 huyện Hiệp Hoà 2022 - 2023)

Cho p là tích của 2023 số nguyên tố đầu tiên. Chứng minh rằng $p-1$ và $p+1$ không là số chính phương

Lời giải

Nhận xét: Một số chính phương khi chia cho 3 và 4 thì chỉ có thể có số dư là 0 hoặc 1

+) Từ giả thiết, suy ra p chia hết cho 2; 3 nhưng không chia hết cho 4

Như vậy, vì $p \not\equiv 3$ suy ra $p-1$ chia cho 3 dư 2 (mâu thuẫn) $\Rightarrow p-1$ không là số chính phương.

+ Vì $p:2$ và p không chia hết cho 4, suy ra p chia cho 4 dư 2 $\Rightarrow p+1$ chia cho 4 dư 3 (mâu thuẫn) nên $p+1$ cũng không là số chính phương.

Vậy $p-1, p+1$ không là số chính phương.

Câu 5. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Trần Đức Thông 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{2001}{2000^2+1} + \frac{2001}{2000^2+2} + \dots + \frac{2001}{2000^2+2000}$. Chứng minh rằng: $1 < A^2 < 4$.

Lời giải

Tổng A có tất cả 2000 số hạng.

$$\text{Ta có : } \frac{2001}{2000^2+1} > \frac{2001}{2000^2+2} > \frac{2001}{2000^2+3} > \dots > \frac{2001}{2000^2+2000}$$

$$\text{Suy ra } A > \frac{2001}{2000^2+2000} \cdot 2000 = \frac{2001 \cdot 2000}{2000(2000+1)} = 1 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác: } A &< \frac{2001}{2000^2+1} \cdot 2000 = \frac{2001 \cdot 2000}{2000^2+1} = \frac{(2000+1) \cdot 2000}{2000^2+1} = \frac{2000^2+2000}{2000^2+1} \\ &= \frac{(2000+1) \cdot 2000}{2000^2+1} = \frac{(2000^2+1)+1999}{2000^2+1} = 1 + \frac{1999}{2000^2+1} < 2 \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra $1 < A < 2$ hay $1 < A^2 < 4$.

Câu 6. (HSG 7 huyện Triệu Sơn năm năm 2021 - 2022)

Chứng minh rằng nếu số tự nhiên \overline{abc} là số nguyên tố thì $b^2 - 4ac$ không là số chính phương.

Lời giải

Giả sử $b^2 - 4ac$ là số chính phương $m^2 (m \in \mathbb{N})$.

$$\begin{aligned} + \quad \text{Xét} \quad 4a \cdot \overline{abc} &= 4a(100a+10b+c) = 400a^2 + 40ab + 4ac \\ &= 400a^2 + 20ab + 20ab + b^2 - b^2 + 4ac \\ &= 20a(20a+b) + b(20a+b) - (b^2 - 4ac) = (20a+b) \cdot (20a+b) - (b^2 - 4ac) \\ &= (20a+b)^2 - (b^2 - 4ac) = (20a+b)^2 - m^2 = (20a+b+m)(20a+b-m). \end{aligned}$$

+ Vì \overline{abc} là số nguyên tố suy ra tồn tại một trong hai thừa số $20a+b+m$ hoặc $20a+b-m$ chia hết cho số nguyên tố \overline{abc} .

+ Vì $b^2 - m^2 = 4ac > 0 \Rightarrow b > m$ nên:

$$20a+b-m \leq 20a+b+m < 20a+b+b < 100a+10b+c = \overline{abc}.$$

Suy ra $20a+b+m$ và $20a+b-m$ đều không chia hết cho số nguyên tố \overline{abc} .

Do đó điều giả sử là sai.

Vậy nếu số tự nhiên \overline{abc} là số nguyên tố thì $b^2 - 4ac$ không là số chính phương.

Câu 7. (HSG 7 huyện Mường La năm 2021 - 2022)

Cho $S = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cba}$ với a, b, c là các chữ số bất kì. Chứng minh rằng S không phải là số chính phương.

Lời giải

Ta có:

$$S = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = (100a + 10b + c) + (100b + 10c + a) + (100c + 10a + b)$$

$$= 111a + 111b + 111c = 111(a + b + c) = 37 \cdot 3(a + b + c).$$

Giả sử S là số chính phương, thì S phải chứa số nguyên tố 37 với số mũ chẵn $\Rightarrow 3(a + b + c) : 37 \Rightarrow (a + b + c) : 37$.

Điều này không xảy ra vì a, b, c là các chữ số nên $0 \leq a, b, c \leq 9 \Rightarrow 0 \leq a + b + c \leq 27$.

Vậy $S = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ không phải là số chính phương.

Câu 8. (HSG 7 huyện Hoàng Hoá 2017-2018)

Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên n để $n^2 + 2002$ là số chính phương.

Lời giải

Nếu số chính phương chia hết cho a (a là số nguyên tố) thì nó chia hết cho a^2

Giả sử: $A = n^2 + 2002$ là số chính phương.

+ Xét trường hợp 1: n là số chẵn $\Rightarrow n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2 \Rightarrow A = n^2 + 2002 = 4k^2 + 2002$

Ta có: $4k^2$ chia hết cho 2, 2002 chia hết cho 2 $\Rightarrow A$ chia hết cho 2 $\Rightarrow A$ chia hết cho 4

Do $4k^2$ chia hết cho 4, còn 2002 không chia hết cho 4 $\Rightarrow A$ không chia hết cho 4 (loại)

+ Xét trường hợp 2: n là số lẻ $\Rightarrow n = 2k + 1$

$\Rightarrow A$ là số chính phương lẻ, có dạng $(2b + 1)^2 = 4b^2 + 4b + 1$ chia cho 4 dư 1.

Mà $A = (2k + 1)^2 + 2002 = 4k^2 + 4k + 2003$ chia cho 4 dư 3 (loại)

Vậy không tồn tại số tự nhiên n để $n^2 + 2002$ là số chính phương.

Câu 9. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Lưu Khánh Đàm 2022 - 2023)

Có tìm được hai chữ số a và b để $\overline{2011ab}$ là bình phương của một số tự nhiên không? Vì sao?

Lời giải

Ta có: $0 \leq \overline{ab} \leq 99 \Rightarrow 201100 \leq \overline{2011ab} \leq 201199$

$$448^2 < \overline{2011ab} < 449^2$$

448 và 449 là hai số tự nhiên liên tiếp

nên $\overline{2011ab}$ không là bình phương của một số tự nhiên.

Vậy không tìm được hai chữ số a và b để $\overline{2011ab}$ là bình phương của một số tự nhiên.

Dạng 3: Tìm số chính phương

Câu 1. (HSG 7 Thành Phố Phúc Yên-Trường THCS Đồng Xuân 2022 - 2023)

Tìm số chính phương có 4 chữ số biết rằng nếu cộng chữ số hàng nghìn với 3 và trừ chữ số hàng đơn vị đi 3 ra vẫn được một số chính phương

Lời giải

Gọi \overline{abcd} là số phải tìm với $a, b, c, d \in \mathbb{N}; 0 \leq a, b, c, d \leq 9; a \neq 0$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overline{abcd} = k^2 \\ \overline{(a+3)bc(d-3)} = m^2 \end{cases} \text{ với } k, m \in \mathbb{N}; 31 < k < m < 99$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \overline{abcd} = k^2 \\ \overline{abcd} + 3000 - 3 = m^2 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } m^2 - k^2 = 2997 \Rightarrow (m+k)(m-k) = 2997 = 81 \cdot 37 = 111 \cdot 27 = 333 \cdot 9$$

Vì tích trên là lẻ nên m, k khác tính chẵn lẻ và hai thừa số đều lẻ mà $k, m \in \mathbb{N}; 31 < k < m < 99$ nên ta có các trường hợp sau:

$$\text{TH1: } \begin{cases} m-k=37 \\ m+k=81 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=59 \\ k=22 \end{cases}$$

Khi đó $k^2 = 22^2 = 484$, chỉ có 3 chữ số, loại.

$$\text{TH2: } \begin{cases} m+k=111 \\ m-k=27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=69 \\ k=42 \end{cases}$$

Khi đó $m^2 = 69^2 = 4761; k^2 = 42^2 = 1764$ (thỏa mãn)

Vậy số cần tìm là: 1764.

Câu 2. (HSG 7 Bắc Giang 2022 - 2023)

Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho các số $n+1; 6n+1; 20n+1$ đều là các số chính phương.

Lời giải

+ Số chính phương lẻ chia 8 dư 1.

+ Số chính phương chia 3 dư 0 hoặc 1.

Ta thấy $6n+1$ là số chính phương lẻ nên chia 8 dư 1

Suy ra $6n:8 \Rightarrow 3n:4$ mà $(3;4)$ suy ra $n:4$

Nên $n+1$ là số chính phương lẻ do đó $n+1$ chia 8 dư 1 $\Rightarrow n:8(1)$

Ta lại có $(n+1)+(20n+1) = 21n+2$ chia 3 dư 2

Suy ra $n+1$ và $20n+1$ đều chia 3 dư 1 (số chính phương chia 3 dư 0 hoặc 1)

Từ đó ta có $n:3(2)$

Mặt khác $(3;8) = 1$ (3)

Từ (1); (2); và (3) Suy ra $n:24 \Rightarrow n \in B(24) = \{0; 24; 48 \dots\}$

Vì n là số nguyên dương nên ta xét các trường hợp sau:

+ Với $n = 24$ ta có $20n+1 = 481$ (không là số chính phương)

$\Rightarrow n = 24$ loại.

+ với $n = 48$ ta có $n+1 = 49 = 7^2; 6n+1 = 289 = 17^2; 20n+1 = 961 = 31^2$

$\Rightarrow n = 48$ thỏa mãn bài toán

Vậy số nguyên dương nhỏ nhất $n = 48$.

Câu 3. (HSG 7 olympic Mỹ Đức – Hà Nội 2022 - 2023)

Tim các số tự nhiên a, b thỏa mãn: $25 - b^2 = 8(a - 2023)^2$

Lời giải

$$25 - b^2 = 8(a - 2023)^2 \Rightarrow 8(a - 2023)^2 + b^2 = 25$$

$$\text{Mà } b^2 \geq 0 \text{ suy ra } 8(a - 2023)^2 \leq 25 \Rightarrow (a - 2023)^2 \leq \frac{25}{8}$$

Mặt khác $(a - 2023)^2$ là số chính phương nên $(a - 2023)^2 = 0$ hoặc $(a - 2023)^2 = 1$

Nếu $(a - 2023)^2 = 0$ thì $b^2 = 25 \Rightarrow b = 5$ (Do $b \in \mathbb{N}$)

Nếu $(a - 2023)^2 = 1 \Rightarrow b^2 = 17$ (không thỏa mãn)

Vậy $a = 2023$ và $b = 5$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 4. (HSG 7 huyện Quan Sơn 2022 - 2023)

Tìm tất cả các số có hai chữ số \overline{ab} biết rằng $2\overline{ab} + 1$ và $3\overline{ab} + 1$ đều là số chính phương.

Lời giải

Giả sử $2\overline{ab} + 1 = m^2$ và $3\overline{ab} + 1 = n^2$ ($m, n \in \mathbb{N}^*$)

Nếu \overline{ab} chia cho 5 dư 1 thì $2\overline{ab} + 1$ chia cho 5 dư 3. Điều này là vô lí.

Nếu \overline{ab} chia cho 5 dư 2 thì $3\overline{ab} + 1$ chia cho 5 dư 2. Điều này cũng vô lí.

Nếu \overline{ab} chia cho 5 dư 3 thì $2\overline{ab} + 1$ chia cho 5 dư 2. Đây là điều vô lí.

Nếu \overline{ab} chia cho 5 dư 4 thì $3\overline{ab} + 1$ chia cho 5 dư 3. Điều này là vô lí.

Vậy $\overline{ab} : 5$

Mặt khác do m lẻ nên m^2 chia cho 8 dư 1 suy ra $\overline{ab} : 4$

Nếu \overline{ab} chia cho 8 dư 4 thì $3\overline{ab} + 1$ chia cho 8 dư 5. Điều này là vô lí.

Vậy $\overline{ab} : 8$

Mà $(5; 8) = 1$ nên $\overline{ab} : 40$

Suy ra $\overline{ab} = 40$ hoặc $\overline{ab} = 80$

Thử lại trực tiếp ta có $\overline{ab} = 40$ (thỏa mãn)

Vậy $\overline{ab} = 40$.

Câu 5. (HSG 7 huyện Bá Thước, thị trấn Cảnh Nang 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $1! + 2! + 3! + \dots + x! = y^2$

Lời giải

+Với $x = 1$, ta có $1! = y^2 \Rightarrow 1 = y^2 \Rightarrow y = \pm 1$ (thỏa mãn)

+Với $x = 2$, ta có $1! + 2! = y^2 \Rightarrow 3 = y^2 \Rightarrow$ không tìm được giá trị của y thỏa mãn đề bài

+Với $x = 3$, ta có $1! + 2! + 3! = y^2 \Rightarrow 9 = y^2 \Rightarrow y = \pm 3$ (thỏa mãn)

+Với $x \geq 4$, ta có $1! + 2! + 3! + 4! + \dots + x! = 33 + 5! + 6! + \dots + x!$ có chữ số tận cùng là 3 (Vì $5!, 6!, \dots, x!$ đều có chữ số tận cùng là 0 nên không phải là số chính phương, còn y^2 lại là số chính phương

\Rightarrow không tìm được giá trị của y thỏa mãn đề bài.

Vậy các cặp số nguyên x, y thỏa mãn là: $(x, y) = \{(1; 1); (1; -1); (3; 3); (3; -3)\}$

Câu 6. (HSG 7 huyện Tiên Hải 2021 - 2022)

Cho n là số tự nhiên có 2 chữ số. Tìm n biết $n + 4$ và $2n$ là số chính phương.

Lời giải

Vì n là số tự nhiên có hai chữ số $\Rightarrow 9 < n < 100 \Rightarrow 18 < 2n < 200$.

Mà $2n$ là số chính phương chẵn $\Rightarrow 2n \in \{36; 64; 100; 144; 196\} \Rightarrow n \in \{18; 32; 50; 72; 98\}$

Mà $n + 4$ là số chính phương $\Rightarrow n = 32$.

Vậy $n = 32$

Câu 7. (HSG 7 tỉnh Bắc Giang 2012 - 2013)

Cho n là số tự nhiên có 2 chữ số. Tìm n biết $n + 4$ và $2n$ đều là các số chính phương.

Lời giải

Vì n là số có hai chữ số nên $9 < n < 100 \Rightarrow 18 < 2n < 200$

Mặt khác $2n$ là số chính phương chẵn

nên $2n$ có thể nhận các giá trị: 36; 64; 100; 144; 196.

Với $2n = 36 \Rightarrow n = 18 \Rightarrow n + 4 = 22$ không là số chính phương

Với $2n = 64 \Rightarrow n = 32 \Rightarrow n + 4 = 36$ là số chính phương

Với $2n = 100 \Rightarrow n = 50 \Rightarrow n + 4 = 54$ không là số chính phương

Với $2n = 144 \Rightarrow n = 72 \Rightarrow n + 4 = 76$ không là số chính phương

Với $2n = 196 \Rightarrow n = 98 \Rightarrow n + 4 = 102$ không là số chính phương

Vậy số cần tìm là $n = 32$

Câu 8. (HSG 7 huyện Vĩnh Tường 2015 - 2016)

Tim tất cả các số chính phương có 4 chữ số chia hết cho 153.

Lời giải

Gọi số cần tìm là a ($a \in \mathbb{N}^*, 1000 \leq a \leq 9999$)

$$\text{Ta có: } a:153 \Rightarrow \begin{cases} a:5 \\ a:3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3^2 \\ y=5^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a:51^2 \Rightarrow a:2601$$

$$\Rightarrow a = 51^2 \cdot k^2 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow a = 2601$$

Vậy số cần tìm là: 2601.

Câu 9. (HSG 7 huyện Lâm Thao 2022 - 2023)

Tim các số nguyên m để $(m+1)(m^2+2m)$ là một số chính phương.

Lời giải

Ta có $(m+1)(m^2+2m)$ là một số chính phương.

$$\text{Suy ra } (m+1)(m^2+2m) = k^2 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Vì } k^2 \geq 0 \Rightarrow (m+1)(m^2+2m) \geq 0$$

$$\text{Với } m < -2 \Rightarrow (m+1)(m^2+2m) < 0 \text{ (loại)}$$

$$\text{Với } m \in \{-2; -1; 0\} \text{ ta đều có } k^2 = 0 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Với } m > 0 \text{ ta có } k^2 = (m+1)(m^2+2m)$$

Gọi d là một ước chung nguyên tố của $m+1$ và m^2+2m

$$\text{Suy ra } \begin{cases} (m+1):d \\ (m^2+2m):d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m+1):d \\ m:d \end{cases} \Rightarrow 1:d \Rightarrow d = 1$$

Nên $(m+1)(m^2+2m)$ là một số chính phương khi $m+1$ và m^2+2m đều là số chính phương.

$$\text{Để } m^2+2m \text{ là số chính phương thì } m^2+2m = a^2 \quad (a \in \mathbb{Z}).$$

Suy ra $(m+1)^2 - 1 = a^2 \Rightarrow (m+1+a)(m+1-a) = 1 \Rightarrow m+1+a = m+1-a \Rightarrow a = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -2 \end{cases} \text{ (không thoả mãn)}$$

Vậy $m \in \{-2; -1; 0\}$ thì $(m+1)(m^2 + 2m)$ là một số chính phương.

Câu 10. (HSG 7 huyện Trục Ninh, tỉnh, trường, 2022 - 2023)

Cho $A = 4^{27} + 4^{1000} + 4^x$. Tìm số tự nhiên x lớn nhất sao cho A là số chính phương.

Lời giải

Giả sử tồn tại số tự nhiên x để A là số chính phương.

* Xét $x \geq 27$:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= 4^{27} + 4^{1000} + 4^x = 4^{27} (1 + 4^{973} + 4^{x-27}) \\ &= (2^2)^{27} \left[(2^{x-27})^2 + 2 \cdot 2^{x-27} \cdot 1 + 1 + 4^{973} - 2 \cdot 2^{x-27} \right] \\ &= (2^2)^{27} \left[(2^{x-27})^2 + 2^{x-27} + 2^{x-27} + 1 + 4^{973} - 2 \cdot 2^{x-27} \right] \\ &= (2^2)^{27} \left[2^{x-27} (2^{x-27} + 1) + (2^{x-27} + 1) + 4^{973} - 2 \cdot 2^{x-27} \right] \\ &= (2^{27})^2 \left[(2^{x-27} + 1)^2 + 4^{973} - 2 \cdot 2^{x-27} \right] \end{aligned}$$

Ta có: $(2^{27})^2$ là số chính phương.

Với $x \geq 27$ và $x \in \mathbb{N}$ thì $1 + 4^{973} + 4^{x-27} \in \mathbb{N}$

nên để A là một số chính phương thì $B = (2^{x-27} + 1)^2 + 4^{973} - 2 \cdot 2^{x-27}$ cũng là một số chính phương

$$\Rightarrow B \geq 0 \text{ mà } (2^{x-27} + 1)^2 \geq 0 \text{ nên } 4^{973} - 2 \cdot 2^{x-27} \geq 0$$

$$\Rightarrow 2^{1946} - 2^{x-26} \geq 0$$

$$\Rightarrow x - 26 \leq 1946$$

$$\Rightarrow x \leq 1972$$

Kết hợp với điều kiện ta có: $27 \leq x \leq 1972$

Vì x là số tự nhiên lớn nhất nên $x = 1972$.

$$\text{Thay } x = 1972 \text{ vào } A \text{ ta được } A = \left[2^{27} \cdot (2^{1945} + 1) \right]^2 \text{ là số chính phương (1)}$$

* Xét $0 \leq x < 27$:

Giả sử tồn tại x thỏa mãn $0 \leq x < 27$ để A là số chính phương

$$\begin{aligned} A &= 4^{27} + 4^{1000} + 4^x = 4^x (4^{27-x} + 4^{1000-x} + 1) \\ &= (2^2)^x \left[(2^{27-x})^2 + 2 \cdot 2^{27-x} \cdot 1 + 1 + (2^2)^{1000-x} - 2 \cdot 2^{27-x} \right] \\ &= (2^x)^2 \left[(2^{27-x})^2 + 2^{27-x} + 2^{27-x} + 1 + 2^{2000-2x} - 2 \cdot 2^{27-x} \right] \\ &= (2^x)^2 \left[(2^{27-x} + 1)^2 + (2^{2000-2x} - 2^{28-x}) \right] \end{aligned}$$

Ta có: $(2^x)^2$ là số chính phương.

Với $0 \leq x < 27$ và $x \in \mathbb{N}$ thì $4^{27-x} + 4^{1000-x} + 1 \in \mathbb{N}$

Nên để A là một số chính phương thì $C = (2^{27-x} + 1)^2 + 2^{2000-2x} - 2^{28-x}$ cũng là một số chính phương
 $\Rightarrow C \geq 0$ mà $(2^{27-x} + 1)^2 \geq 0$ nên $2^{2000-2x} - 2^{28-x} \geq 0 \Rightarrow 2000 - 2x \geq 28 - x \Rightarrow x \leq 1972$ (2)
 Từ (1) và (2) suy ra $x = 1972$ là số lớn nhất để A là số chính phương.

Câu 11. (HSG 7 thị xã Bình Long, 2022 - 2023)

Tim số chính phương có 4 chữ số, biết rằng 2 chữ số đầu giống nhau, 2 chữ số cuối giống nhau.

Lời giải

Gọi số chính phương có 4 chữ số, biết 2 chữ số đầu giống nhau, 2 chữ số cuối giống nhau cần tìm là \overline{aabb} ($1 \leq a \leq 9; 0 \leq b \leq 9$)

Vì \overline{aabb} là số chính phương nên: $\overline{aabb} = n^2$.

Ta có: $n^2 = 1000a + 100a + 10b + b = 1100a + 11b = 11 \cdot (100a + b) \Rightarrow n^2 : 11 \Rightarrow n : 11$.

Mà $999 < n^2 < 10000 \Rightarrow 31 < n < 100$. Do $n : 11$ nên $n \in \{33; 44; 55; 66; 77; 88; 99\}$.

Thử trực tiếp chỉ có $n = 88 \Rightarrow n^2 = 88^2 = 7744$.

Vậy số cần tìm là 7744.

Dạng 4: Dạng khác

Câu 1. (HSG 7 huyện Lương Tài 2022 - 2023)

Biết $a+1$ và $2a+1$ đồng thời là các số chính phương. Chứng minh rằng $a : 12$.

Lời giải

Ta có $a+1$ và $2a+1$ đồng thời là các số chính phương

Đặt $a+1 = m^2; 2a+1 = n^2 (m, n \in \mathbb{N})$

Mà $2a+1$ là số lẻ $\Rightarrow n$ lẻ

$\Rightarrow 2a = n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$

Vì n lẻ nên $n+1, n-1$ là hai số chẵn liên tiếp

$(n-1)(n+1) : 8 \Rightarrow 2a : 8 \Rightarrow a : 4$ (1)

Mặt khác $a+1+2a+1 = 3a+2 = n^2 + m^2$ là số chia cho 3 dư 2

Do vậy cả 2 số n^2 và m^2 chia cho 3 dư 1

Khi đó $m^2 - k^2 = 2a+1 - a - 1 = a : 3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a : 12$

Vậy $a : 12$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Thạch Thành 2022 - 2023)

Tim số tự nhiên \overline{ab} sao cho $\overline{ab}^2 = (a+b)^3$.

Lời giải

Do $\overline{ab}^2 = (a+b)^3$ nên suy ra $(a+b)^3$ là số chính phương

$\Rightarrow (a+b)$ cũng là số chính phương

$(a+b) = k^2$ (với $k \in \mathbb{N}$) nên $\overline{ab}^2 = k^6$

$\Rightarrow \overline{ab} = k^3$ mà $10 \leq \overline{ab} \leq 99 \Rightarrow 10 \leq k^3 \leq 99$

Từ đó suy ra $k \in \{3; 4\} \Rightarrow \overline{ab} \in \{27; 64\}$.

Thử lại:

+ $\overline{ab} = 27$ nên $a = 2, b = 7$ thỏa mãn $\overline{ab}^2 = (a + b)^3$.

+ $\overline{ab} = 64$ nên $a = 6, b = 4$ không thỏa mãn $\overline{ab}^2 = (a + b)^3$.

Vậy $\overline{ab} = 27$.



CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS

ĐỀ 7: ĐA THỨC

Dạng 1: Xác định đa thức
Dạng 2: Tính giá trị của đa thức
Dạng 3: Dấu của đa thức
Dạng 4: Tìm giá trị của biến (tham số) để phép chia là phép chia hết
Dạng 5: Nghiệm của đa thức

Dạng 1. Xác định đa thức

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 Đề giao lưu HSG huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Cho $f(x) = a.x^3 + 4x(x^2 + 1) + 8$ và $g(x) = x^3 + 4x(bx + 1) + c - 3$, trong đó a, b, c là các hằng số. Để $f(x) = g(x)$ thì giá trị của số a là:

- A. 3 **B. -3** C. 0 D. 1

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } f(x) = a.x^3 + 4x(x^2 + 1) + 8 = a.x^3 + 4x^3 + 4x + 8 = x^3(a + 4) + 4x + 8$$

$$g(x) = x^3 + 4x(bx + 1) + c - 3 = x^3 + 4bx^2 + 4x + c - 3$$

$$\text{Để } f(x) = g(x) \text{ thì } a + 4 = 1 \Rightarrow a = -3$$

Vậy $a = -3$.

Câu 2. (HSG 7 Đề giao lưu HSG Lạng Giang 2022 - 2023)

Cho đa thức $A(x) = 4x - 5x^2 + x - 2x^2 + 2023$ và $(5x - 6 - 5x^3) - B(x) = A(x)$. Hệ số cao nhất của $B(x)$ là:

- A. 2 **B. 3** C. 2029 **D. -5**

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } (5x - 6 - 5x^3) - B(x) = A(x).$$

$$\Rightarrow B(x) = (5x - 6 - 5x^3) - A(x)$$

$$\Rightarrow B(x) = (5x - 6 - 5x^3) - (4x - 5x^2 + x - 2x^2 + 2023)$$

$$\Rightarrow B(x) = 5x - 6 - 5x^3 - 4x + 5x^2 - x + 2x^2 - 2023$$

$$\Rightarrow B(x) = -5x^3 + 7x^2 - 2029$$

Vậy hệ số cao nhất của $B(x)$ là -5 .

Câu 3. (HSG 7 huyện Yên Thế, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$. Trong đó a, b, c là các hằng số thỏa mãn $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}$ ($a \neq 0$). Tính $[P(-2) - 3 \cdot P(1)] : a$.

- A.** -6. **B.** -15. **C.** 6. **D.** 15.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Vì } \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} \text{ nên } \begin{cases} b = 2a \\ c = 3a \end{cases}$$

Có $P(x) = ax^2 + bx + c$ nên:

$$P(-2) = 4a - 2b + c = 4a - 4a + 3a = 3a ; P(1) = a + 2a + 3a = 6a$$

$$\Rightarrow [P(-2) - 3 \cdot P(1)] : a = (3a - 18a) : a$$

$$\Rightarrow [P(-2) - 3 \cdot P(1)] : a = -15$$

Câu 4. (HSG 7 huyện Sơn Động 2022 - 2023)

Cho hai đa thức: $f(x) = ax + b$; $g(x) = x^2 - x + 1$, biết $f(1) = g(2)$. Khi đó $a + b$ bằng:

- A.** -3. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Vì } f(1) = g(2) \text{ nên } a \cdot 1 + b = 2^2 - 2 + 1 \text{ hay } a + b = 3.$$

Câu 5. (HSG 7 huyện Việt Yên 2022 - 2023)

Thu gọn biểu thức sau $-12u^2 (uv)^2 - (-11u^4) \cdot (2v)^2$ ta được đơn thức có phần hệ số là

- A.** -32. **B.** -56. **C.** 10. **D.** 32.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } -12u^2 (uv)^2 - (-11u^4) \cdot (2v)^2$$

$$= -12u^2 \cdot u^2 v^2 + 11u^4 \cdot 4v^2$$

$$= -12u^4 v^2 + 44u^4 v^2$$

$$= 32u^4 v^2$$

Vậy đơn thức thu được có phần hệ số là 32.

Câu 6. (HSG 7 huyện Việt Yên 2022 - 2023)

Cho các đa thức $A = 4x^2 - 5xy + 3y^2$; $B = 3x^2 + 2xy + y^2$; $C = -x^2 + 3xy + 2y^2$. Tính $C - A - B$

- A.** $8x^2 + 6xy + 2y^2$. **B.** $-8x^2 + 6xy - 2y^2$. **C.** $8x^2 - 6xy - 2y^2$. **D.** $8x^2 - 6xy + 2y^2$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } A = 4x^2 - 5xy + 3y^2; B = 3x^2 + 2xy + y^2; C = -x^2 + 3xy + 2y^2$$

$$\Rightarrow C - A - B = -x^2 + 3xy + 2y^2 - (4x^2 - 5xy + 3y^2) - (3x^2 + 2xy + y^2)$$

$$\begin{aligned} &= -x^2 + 3xy + 2y^2 - 4x^2 + 5xy - 3y^2 - 3x^2 - 2xy - y^2 \\ &= -8x^2 + 6xy - 2y^2 \end{aligned}$$

Câu 7. (HSG 7 huyện Việt Yên 2022 - 2023)

Nam mua 10 quyển vở, mỗi quyển giá x đồng và hai bút bi, mỗi chiếc giá y đồng. Biểu thức biểu thị số tiền Nam phải trả là

- A. $2x - 10y$. B. $10x - 2y$. C. $2x + 10y$. D. $10x + 2y$.

Lời giải

Chọn D

Biểu thức biểu thị số tiền Nam phải trả khi mua 10 quyển vở và 2 bút bi là: $10x + 2y$

Câu 8. (HSG 7 huyện Việt Yên 2022 - 2023)

Kết quả sau khi thu gọn đơn thức $6x^2y \cdot (-2xy^2)$ là

- A. $-12x^3y^3$. B. $12x^3y^3$. C. $-12x^2y^3$. D. $-12x^2y^2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $6x^2y \cdot (-2xy^2) = -12x^3y^3$

Câu 9. (HSG 7 huyện Việt Yên 2022 - 2023)

Thu gọn đơn thức $A = \left(-\frac{1}{3}xy\right)(-3xy^2)(-x)$ ta được kết quả là

- A. $A = -xy^3$. B. $A = -x^2y^3$. C. $A = -x^3y^3$. D. $A = x^2y^3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $A = \left(-\frac{1}{3}xy\right)(-3xy^2)(-x) = -x^3y^3$

Câu 10. (HSG 7 huyện Việt Yên 2022 - 2023)

Biểu thức đại số biểu thị diện tích hình thang có đáy lớn là a , đáy nhỏ là b , đường cao là h như sau

- A. $(a+b)h$. B. $(a-b)h$. C. $\frac{(a-b)h}{2}$. D. $\frac{(a+b)h}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Câu 11. (HSG 7 huyện Việt Yên 2022 - 2023)

Tìm đa thức $f(x) = ax + b$. Biết $f(1) = \frac{7}{2}$; $f(-1) = -\frac{5}{2}$

- A. $f(x) = 3x + \frac{1}{2}$. B. $f(x) = x + \frac{1}{2}$. C. $f(x) = 3x + \frac{7}{2}$. D. $f(x) = 2x + \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(1) = \frac{7}{2}$ nên $a + b = \frac{7}{2}$

$$f(-1) = -\frac{5}{2} \text{ nên } -a + b = -\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{2}; a = 3. \text{ Khi đó ta được đa thức: } f(x) = 3x + \frac{1}{2}$$

Câu 12. (HSG 7 huyện Việt Yên 2022 - 2023)

Bậc của đa thức $x^3y^2 - xy^5 + 7xy - 9$ là

A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn D

Bậc của đa thức $x^3y^2 - xy^5 + 7xy - 9$ là 6.

Câu 13. (HSG 7 huyện Việt Yên 2022 - 2023)

Viết đơn thức $21x^4y^5z^6$ dưới dạng tích hai đơn thức, trong đó có một đơn thức là $3x^2y^2z$

A. $(3x^2y^2z) \cdot (7x^2y^3z^5)$.

B. $(3x^2y^2z) \cdot (7x^2y^3z^4)$.

C. $(3x^2y^2z) \cdot (18x^2y^3z^5)$. D. $(3x^2y^2z) \cdot (-7x^2y^3z^5)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $(3x^2y^2z) \cdot (7x^2y^3z^5) = 21x^4y^5z^6$

Câu 14. (HSG 7 huyện Việt Yên 2022 - 2023)

Một bể đang chứa 480 lít nước, có một vòi chảy vào mỗi phút chảy được x lít. Cùng lúc đó một vòi khác chảy nước từ bể ra. Mỗi phút lượng nước chảy ra bằng $\frac{1}{4}$ lượng nước chảy vào.

Hãy biểu thị lượng nước trong bể sau khi đồng thời mở cả hai vòi trên sau a phút.

A. $480 + \frac{3}{4}ax$.

B. $\frac{3}{4}ax$.

C. $480 - \frac{3}{4}ax$.

D. $480 + ax$.

Lời giải

Chọn A

Sau a phút vòi thứ nhất chảy vào bể được: ax (lít)

Sau a phút vòi thứ hai chảy ra được: $\frac{1}{4}ax$ (lít)

Khi đó lượng nước trong bể sau khi đồng thời mở cả hai vòi trên sau a phút là:

$$480 + ax - \frac{1}{4}ax = 480 + \frac{3}{4}ax \text{ (lít)}$$

Câu 15. (HSG 7 huyện Việt Yên 2022 - 2023)

Cho đa thức $f(x) = (2x^2 + x - 3)^{2021} \cdot (2x^2 + 3x + 4)^{2022}$. Sau khi thu gọn thì tổng các hệ số của $f(x)$ bằng

A. -1.

B. 0.

C. 1.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

$$f(x) = (2x^2 + x - 3)^{2021} \cdot (2x^2 + 3x + 4)^{2022}$$

Ta có: tổng các hệ số của đa thức bằng giá trị của đa thức tại $x = 1$

$$f(1) = (2 \cdot 1^2 + 1 - 3)^{2021} \cdot (2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 4)^{2022} = 0^{2021} \cdot 9^{2022} = 0$$

Vậy sau khi thu gọn thì tổng các hệ số của $f(x)$ bằng 0.

Câu 16. (HSG 7 huyện Tân Yên 2022 - 2023)

Bậc của đa thức $A = 5x^{2022} - 2^2x^2y^3 + xy^2 - 5x^{2022} + x^6 - 1$ là

- A. 2022. B. 6. C. 7. D. 4.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= 5x^{2022} - 2^2x^2y^3 + xy^2 - 5x^{2022} + x^6 - 1 \\ &= -2^2x^2y^3 + xy^2 + x^6 - 1 \end{aligned}$$

Vậy bậc của đa thức là: $2 + 2 + 3 = 7$

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Yên Phong tỉnh Bắc Ninh 2022 - 2023)

Biết $f(x)$ chia cho $x - 3$ thì dư 7, chia cho $x - 2$ thì dư 5, chia cho $(x - 3) \cdot (x - 2)$ được thương là $3x$ và còn dư. Tìm $f(x)$.

Lời giải

Theo bài ta có:

$$f(x) = (x - 3) \cdot A(x) + 7 \quad (1)$$

$$f(x) = (x - 2) \cdot B(x) + 5 \quad (2)$$

Vì $f(x)$ chia cho $(x - 3) \cdot (x - 2)$ được thương là $3x$ và còn dư, nên phần dư là đa thức có bậc nhỏ hơn 2. Đặt phần dư là: $ax + b$. Khi đó ta có:

$$f(x) = 3x(x - 3)(x - 2) + ax + b \quad (3)$$

Các đẳng thức trên đúng với mọi x nên:

$$+ \text{Thay } x = 3 \text{ vào (1) ta được: } f(3) = (3 - 3) \cdot A(3) + 7 \Rightarrow f(3) = 7 \quad (4)$$

$$+ \text{Thay } x = 2 \text{ vào (2) ta được: } f(2) = (2 - 2) \cdot B(2) + 5 \Rightarrow f(2) = 5 \quad (5)$$

+ Thay $x = 3$ vào (3) ta được:

$$f(3) = 3 \cdot 3(3 - 3)(3 - 2) + a \cdot 3 + b \Rightarrow f(3) = 3a + b \quad (6)$$

+ Thay $x = 2$ vào (3) ta được:

$$f(2) = 3 \cdot 2(2 - 3)(2 - 2) + a \cdot 2 + b \Rightarrow f(2) = 2a + b \quad (7)$$

$$\text{Từ (4) và (6) ta được: } 3a + b = 7 \quad (8)$$

$$\text{Từ (5) và (7) ta được: } 2a + b = 5 \quad (9)$$

Từ (8) và (9) suy ra $a = 2; b = 1$

Vậy $f(x) = 3x(x - 3)(x - 2) + 2x + 1$ hay $f(x) = 3x^3 - 15x^2 + 20x + 1$.

Câu 2. (HSG 7 Đề giao lưu Olympic cấp thị xã – huyện Kinh Môn 2022 - 2023)

Cho hai đa thức $P(x) = 2x^3 - x + x^2 - x^3 + 3x + 5$; $Q(x) = 3x^3 + 4x^2 + 3x - 4x^3 - 5x^2 + 10$
 Tìm đa thức $M(x) = P(x) + Q(x)$ và tìm nghiệm của đa thức $M(x)$.

Lời giải

Có: $P(x) = 2x^3 - x + x^2 - x^3 + 3x + 5 = (2x^3 - x^3) + x^2 - (x - 3x) + 5 = x^3 + x^2 + 2x + 5$

$Q(x) = 3x^3 + 4x^2 + 3x - 4x^3 - 5x^2 + 10$

$= (3x^3 - 4x^3) + (4x^2 - 5x^2) + 3x + 10 = -x^3 - x^2 + 3x + 10$

$M(x) = P(x) + Q(x) = (x^3 + x^2 + 2x + 5) + (-x^3 - x^2 + 3x + 10)$

$= x^3 + x^2 + 2x + 5 - x^3 - x^2 + 3x + 10 = 5x + 15$

Cho $M(x) = 0 \Rightarrow 5x + 15 = 0 \Rightarrow x = -3$

Vậy nghiệm của đa thức $M(x)$ là $x = -3$.

Câu 3. (HSG 7 Đề HSG thị xã Bim Som 2022 - 2023)

Cho hai đa thức $f(x) = (x-1)(x+3)$ và $g(x) = x^3 - ax^2 + bx - 3$. Xác định hệ số a, b của đa thức $g(x)$ biết nghiệm của đa thức $f(x)$ cũng là nghiệm của đa thức $g(x)$.

Lời giải

Cho $f(x) = (x-1)(x+3) = 0$

$\Rightarrow x - 1 = 0$ hoặc $x + 3 = 0$

$\Rightarrow x = 1$ hoặc $x = -3$

Khi đó đa thức $f(x)$ có nghiệm là $x = 1; x = -3$.

Vì nghiệm của đa thức $f(x)$ cũng là nghiệm của đa thức $g(x)$ nên:

+) $g(1) = 1^3 - a.1^2 + b.1 - 3 = 0$ hay $-a + b = 2$ (1)

+) $g(-3) = (-3)^3 - a.(-3)^2 + b.(-3) - 3 = 0$ hay $3a + b = -10$ (2)

Kết hợp (1) và (2) ta được $\begin{cases} a = -3 \\ b = -1 \end{cases}$

Câu 4. (HSG 7 Kỳ thi chọn HSG cấp huyện Quế Võ 2022 - 2023)

Cho các đa thức: $A(x) = 3x^4 - 3x^2 + 7x + 29$; $B(x) = x^2 - x^4 + 2x^3 + 3$;

$C(x) = x^3 + 2x - 2$.

Tính $P(x) = A(x) + 3B(x) - 6C(x)$ và tìm nghiệm của $P(x)$.

Lời giải

$P(x) = (3x^4 - 3x^2 + 7x + 29) + 3(x^2 - x^4 + 2x^3 + 3) - 6(x^3 + 2x - 2)$

$= 3x^4 - 3x^2 + 7x + 29 + 3x^2 - 3x^4 + 6x^3 + 9 - 6x^3 - 12x + 12$

$= 3x^4 - 3x^4 - 6x^3 + 6x^3 - 3x^2 + 3x^2 + 7x - 12x + 29 + 9 + 12$

$= -5x + 50$

Cho $P(x) = 0 \Rightarrow -5x + 50 = 0$

$5x = 50$

$$x = 10$$

Vậy nghiệm của đa thức $P(x)$ là $x = 10$

Câu 5. (HSG 7 Giao lưu HSG TP Chí Linh 2022 - 2023)

Cho hai đa thức $P = 5x^4 + 3x^2 + 4x^3 - \frac{3}{4}x - 7x^4 - \frac{1}{4}x + 3$; $Q = \frac{1}{2}x^3 - 2x^4 + 4x^2 + x + \frac{7}{2}x^3$

Tìm đa thức H biết $P - H = Q - (x^2 + 3x - 7)$

Lời giải

$$P - H = Q - (x^2 + 3x - 7) \text{ nên } H = P - [Q - (x^2 + 3x - 7)]$$

$$\Rightarrow H = P - Q + (x^2 + 3x - 7)$$

$$\text{Ta có } P - Q = \left(5x^4 + 3x^2 + 4x^3 - \frac{3}{4}x - 7x^4 - \frac{1}{4}x + 3 \right) - \left(\frac{1}{2}x^3 - 2x^4 + 4x^2 + x + \frac{7}{2}x^3 \right)$$

$$= 5x^4 + 3x^2 + 4x^3 - \frac{3}{4}x - 7x^4 - \frac{1}{4}x + 3 - \frac{1}{2}x^3 + 2x^4 - 4x^2 - x - \frac{7}{2}x^3$$

$$= -x^2 - 2x + 3$$

$$\Rightarrow H = -x^2 - 2x + 3 + x^2 + 3x - 7 = x - 4$$

Vậy $H = x - 4$

Câu 6. (HSG 7 huyện Mường Lát; Đề giao lưu HSG Thanh Sơn 2022 - 2023)

Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$, xác định các hệ số a, b, c biết: $f(0) = 2$; $f(1) = 7$; $f(-2) = -14$.

Lời giải

Ta có: $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\text{Mà } \begin{cases} f(0) = 2 \\ f(1) = 7 \\ f(-2) = -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ a + b + c = 7 \\ 4a - 2b + c = -14 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ a + b + 2 = 7 \\ 4a - 2b + 2 = -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ a + b = 5 \\ 4a - 2b = -16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ a + b = 5 \\ 2a - b = -8 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } a + b + 2a - b = 5 + (-8) \Rightarrow 3a = -3 \Rightarrow a = -1$$

Do đó $b = 6$. Vậy $a = -1, b = 6, c = 2$.

Câu 7. (HSG 7 Đề kiểm định HSG Quỳnh Phụ 2022 - 2023)

Cho đa thức: $F(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{99} + x^{100}$ và

$$G(x) = 99x^{99} - 99x^{98} + 99x^{97} - 99x^{96} + \dots + 99x - 99.$$

a) Tìm đa thức $H(x)$ sao cho: $F(x) - H(x) = G(x)$.

b) Tính giá trị của đa thức $H(x)$ tại $x = 99$.

Lời giải

$$\text{a) Vì } F(x) - H(x) = G(x) \Rightarrow H(x) = F(x) - G(x)$$

$$\begin{aligned}
 H(x) &= (1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{99} + x^{100}) - (99x^{99} - 99x^{98} + 99x^{97} - 99x^{96} + \dots + 99x - 99) \\
 &= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{99} + x^{100} - 99x^{99} + 99x^{98} - 99x^{97} + 99x^{96} - \dots - 99x + 99 \\
 &= (1 + 99) + (-x - 99x) + (x^2 + 99x^2) + \dots + (x^{98} + 99x^{98}) + (-x^{99} - 99x^{99}) + x^{100} \\
 &= 100 - 100x + 100x^2 - \dots + 100x^{98} - 100x^{99} + x^{100} \\
 &= x^{100} - 100x^{99} + 100x^{98} - \dots + 100x^2 - 100x + 100
 \end{aligned}$$

b) Tại $x = 99$ thì $100 = x + 1$

$$\begin{aligned}
 \text{Khi đó, } H(x) &= x^{100} - (x+1)x^{99} + (x+1)x^{98} - \dots + (x+1)x^2 - (x+1)x + (x+1) \\
 &= x^{100} - x^{100} - x^{99} + x^{99} + x^{98} - \dots + x^3 + x^2 - x^2 - x + x + 1
 \end{aligned}$$

Vậy giá trị của đa thức $H(x)$ tại $x = 99$ là 1

Câu 8. (HSG 7 Đề giao lưu HSG Văn Lâm 2022 - 2023)

Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx - 2$. Xác định hệ số a, b biết đa thức $f(x)$ nhận $x = -1$ và $x = 2$ làm nghiệm.

Lời giải

Đa thức $f(x) = ax^2 + bx - 2$ nhận $x = -1$ làm nghiệm

$$\Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow a - b - 2 = 0 \text{ hay } a = b + 2$$

Đa thức $f(x) = ax^2 + bx - 2$ nhận $x = 2$ làm nghiệm.

$$\Rightarrow f(2) = 0 \Rightarrow 4a + 2b - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 4(b + 2) + 2b - 2 = 0 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow a = 1.$$

Vậy $a = 1; b = -1$.

Câu 9. (HSG 7 huyện Sóc Sơn - Hà Nội 2022 - 2023)

Cho hai đa thức $f(x) = 2x^2 + ax + 4$ và $g(x) = x^2 - 5x - b$ (a, b là các hằng số). Hãy tìm các hệ số a, b của hai đa thức trên, biết: $f(1) = g(2); f(-1) = g(5)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } f(1) = a + 6; g(2) = -b - 6 \Rightarrow a + 6 = -b - 6 \Rightarrow a + b = -12 \quad (1)$$

$$\text{Ta có } f(-1) = -a + 6; g(5) = -b \Rightarrow -a + 6 = -b \Rightarrow a - b = 6 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) tìm ra $a = -3; b = -9$

Vậy hai hệ số a, b cần tìm là: $a = -3; b = -9$.

Câu 10. (HSG 7 huyện Cát Tiên 2018 - 2019)

Cho hai đa thức : $f(x) = ax + b; g(x) = x^2 - x + 1$

Hãy xác định a, b biết: $f(1) = g(2)$ và $f(-2) = g(1)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f(1) = g(2) \Rightarrow a + b = 3 \quad (1)$$

$$f(-2) = g(1) \Rightarrow -2a + b = 1 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow -3a + a + b = 1 \Rightarrow -3a = 1 - 3 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$\text{Với } a = \frac{2}{3} \text{ nên } b = \frac{7}{3}$$

$$\text{Vậy } a = \frac{2}{3}, b = \frac{7}{3}.$$

Câu 11. (HSG 7 huyện Hương Trà 2022 - 2023)

Cho $f(x) = ax^3 + 4x(x^2 - 1) + 8$ và $g(x) = x^3 - 4x(bx + 1) + c - 3$ trong đó a, b, c là các hằng số. Xác định a, b, c để $f(x) = g(x)$.

Lời giải

Cách 1: Ta có: $f(x) = ax^3 + 4x(x^2 - 1) + 8 = (a + 4)x^3 - 4x + 8$

$$g(x) = x^3 - 4x(bx + 1) + c - 3 = x^3 - 4bx^2 - 4x + c - 3$$

Do $f(x) = g(x)$ nên: $a + 4 = 1; -4b = 0; c - 3 = 8$

Khi đó: $a = -3; b = 0; c = 11$.

Cách 2: Ta có: $f(x) = ax^3 + 4x(x^2 - 1) + 8 = (a + 4)x^3 - 4x + 8$

$$g(x) = x^3 - 4x(bx + 1) + c - 3 = x^3 - 4bx^2 - 4x + c - 3$$

Do $f(x) = g(x)$ nên chọn $x = 0; 1; -1$ ta được

$$f(0) = g(0) \Rightarrow c = 11 \Rightarrow g(x) = x^3 - 4bx^2 - 4x + 8$$

$$f(1) = g(1) \Rightarrow a + 4b = -3 \quad (1)$$

$$f(-1) = g(-1) \Rightarrow -a + 4b = 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $b = 0; a = -3$. Vậy $a = -3; b = 0; c = 11$.

Câu 12. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ 2021 - 2022)

Xác định đa thức bậc nhất $f(x)$ thỏa mãn $f(x+2) - f(x) = 4$ với mọi x và $f(2022) = 2022$

Lời giải

Vì $f(x)$ là đa thức bậc nhất, nên $f(x) = a.x + b$ ($a \neq 0$) $\Rightarrow f(x+2) = a.(x+2) + b$

$$\text{Ta có } f(x+2) - f(x) = a.(x+2) + b - (a.x + b) = a.x + 2a + b - a.x - b = 2a$$

$$\text{Mà } f(x+2) - f(x) = 4 \text{ với mọi } x \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2 \text{ (thỏa mãn } a \neq 0) \Rightarrow f(x) = 2x + b$$

$$\text{Ta có } f(2022) = 2022 \Rightarrow 2.2022 + b = 2022 \Rightarrow b = -2022 - 4044 = -2022$$

$$\text{Vậy đa thức } f(x) = 2x - 2022$$

Câu 13. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2021 - 2022)

Cho đa thức M thỏa mãn: $M - (19x^2y + xy^2) = 2x^2y + 5xy^2$

Tìm đa thức M và tính giá trị của M tại $x = 2$ và $y = -1$

Lời giải

$$\text{Ta có: } M - (19x^2y + xy^2) = 2x^2y + 5xy^2$$

$$M = 2x^2y + 5xy^2 + 19x^2y + xy^2$$

$$M = (2x^2y + 19x^2y) + (5xy^2 + xy^2) = 21x^2y + 6xy^2$$

Thay $x = 2$ và $y = -1$ vào biểu thức M ta được:

$$M = 21.2^2.(-1) + 6.2.(-1)^2 = -84 + 12 = -72$$

Vậy với $x = 2$ và $y = -1$ thì $M = -72$

Câu 14. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Tìm giá trị của m để đa thức sau là đa thức bậc 3 theo biến x :

$$f(x) = (m^2 - 25)x^4 + (20 + 4m)x^3 + 7x^2 - 9$$

Lời giải

Ta có: $f(x) = (m^2 - 25)x^4 + (20 + 4m)x^3 + 7x^2 - 9$ là đa thức bậc 3 biến x khi:

$$m^2 - 25 = 0 \text{ và } 20 + 4m \neq 0$$

$$\Rightarrow m = \pm 5 \text{ và } m \neq -5$$

Vậy $m = 5$ thì $f(x)$ là đa thức bậc 3 biến x .

Câu 15. (HSG 7 huyện Chương Mỹ 2020 - 2021)

Cho hai đa thức: $f(x) = -5x^5 + 3x^3 + 2x^2 + x + \frac{1}{2}$ và $g(x) = 5x^5 - 3x^3 - x^2 - x + \frac{1}{2}$.

Tính $h(x) = f(x) + g(x)$.

Lời giải

Ta có: $h(x) = f(x) + g(x) = -5x^5 + 3x^3 + 2x^2 + x + \frac{1}{2} + 5x^5 - 3x^3 - x^2 - x + \frac{1}{2} = x^2 + 1$.

Câu 16. (HSG 7 huyện Mỹ Đức 2022 - 2023)

Tìm đa thức M biết rằng: $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$.

Lời giải

Từ $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$ suy ra:

$$M = 6x^2 + 9xy - y^2 - (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2 - 5x^2 + 2xy = x^2 + 11xy - y^2.$$

Câu 17. (HSG 7 huyện Cửa Lò 2020 - 2021)

Cho hai đa thức: $A(x) = -2x^5 + x^4 - 2x^2 - 7x - 3$ và $B(x) = -2x^5 + x^4 + 3x^2 + 3x - 3$.

Tính $M(x) = A(x) + B(x)$; $N(x) = A(x) - B(x)$.

Lời giải

Ta có: $A(x) = -2x^5 + x^4 - 2x^2 - 7x - 3$ và $B(x) = -2x^5 + x^4 + 3x^2 + 3x - 3$.

Suy ra: $M(x) = A(x) + B(x) = -4x^5 + 2x^4 + x^2 - 4x - 6$.

$$N(x) = A(x) - B(x) = -5x^2 - 10x.$$

Câu 18. (HSG 7 huyện Yên Mỹ 2021 - 2022)

Cho hai đa thức:

$$P(x) = x^5 - 2x^3 + 3x^4 - 9x^2 + 11x - 6 \text{ và } Q(x) = 3x^4 + x^5 - 2(x^3 + 4) - 10x^2 + 9x.$$

Tính $M(x) = P(x) - Q(x)$.

Lời giải

$$M(x) = P(x) - Q(x)$$

$$M(x) = (x^5 - 2x^3 + 3x^4 - 9x^2 + 11x - 6) - (3x^4 + x^5 - 2(x^3 + 4) - 10x^2 + 9x)$$

$$M(x) = x^2 + 2x + 2.$$

Câu 19. (HSG 7 huyện Cửa Lò 2022 - 2023)

Cho hai đa thức: $A(x) = -2x^5 + x^4 - 2x^2 - 7x - 3$ và $B(x) = -2x^5 + x^4 + 3x^2 + 3x - 3$.

Tính $M(x) = A(x) + B(x)$; $N(x) = A(x) - B(x)$.

Lời giải

Ta có: $A(x) = -2x^5 + x^4 - 2x^2 - 7x - 3$ và $B(x) = -2x^5 + x^4 + 3x^2 + 3x - 3$. Suy ra:

$$M(x) = A(x) + B(x) = -4x^5 + 2x^4 + x^2 - 4x - 6;$$

$$N(x) = A(x) - B(x) = -5x^2 - 10x.$$

Câu 20. (HSG 7 huyện Tân Kỳ 2021 - 2022)

Tìm hệ số a trong đa thức $P(x) = 2x^2 + ax + 2$ biết $x = -2$ là nghiệm của đa thức $P(x)$.

Lời giải

Vì $x = -2$ là nghiệm của đa thức nên $P(-2) = 0 \Rightarrow 2.2^2 + 2.a + 2 = 0 \Rightarrow a = -5$.

Vậy $a = -5$.

Câu 21. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2018 - 2019)

Cho đa thức $f(x) = ax + b$. Tìm a, b biết $f(1) = 3$ và $f(-2) = 0$.

Lời giải

Ta có $f(1) = 3 \Rightarrow a.1 + b = 3 \Rightarrow a + b = 3 \Rightarrow b = 3 - a$

$$f(-2) = 0 \Rightarrow -2a + b = 0 \Rightarrow -2a + 3 - a = 0 \Rightarrow -3a = -3 \Rightarrow a = 1$$

Thay $a = 1$ vào $b = 3 - a$ ta được $b = 2$

Vậy $a = 1$; $b = 2$.

Câu 22. (HSG 7 huyện Chương Mỹ 2018 - 2019)

Cho 2 đa thức $f(x) = x^2 + 2mx + m^2 - 2$ và $g(x) = m^2x^2 + 2(m-1)x + 5$

a) Tìm m để $f(-1) = g(1)$.

b) Với giá trị m tìm được ở câu a, tìm đa thức $h(x) = 2f(x) - g(x)$.

c) Với đa thức $h(x)$ ở câu b. Tìm nghiệm của đa thức $h(x) + 3x^2 - 9$.

Lời giải

a) Ta có $f(-1) = (-1)^2 + 2m.(-1) + m^2 - 2 = m^2 - 2m - 1$

$$g(1) = m^2.1^2 + 2(m-1).1 + 5 = m^2 + 2m + 3$$

Để $f(-1) = g(1) \Rightarrow m^2 - 2m - 1 = m^2 + 2m + 3 \Rightarrow m = -1$.

b) Với $m = -1$ thì $f(x) = x^2 - 2x - 1$ và $g(x) = x^2 - 4x + 5$

$$h(x) = 2f(x) - g(x) = 2 \cdot (x^2 - 2x - 1) - (x^2 - 4x + 5)$$

$$h(x) = x^2 - 7.$$

c) Ta có $h(x) + 3x^2 - 9 = 0$

$$\Rightarrow x^2 - 7 + 3x^2 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 4$$

$$\Rightarrow x = \pm 2$$

Câu 23. (HSG 7 huyện Thường Tín 2018 - 2019)

Cho $f(x) = x(x^{19} - x^5 - x^{2018})$; $g(x) = x^{2019} - x^{20} + 9 + x^2(x^4 + x^2 + 2)$. Tính

$$k(x) = f(x) + g(x)$$

Lời giải

Ta có $k(x) = f(x) + g(x)$

$$k(x) = x(x^{19} - x^5 - x^{2018}) + x^{2019} - x^{20} + 9 + x^2(x^4 + x^2 + 2)$$

$$k(x) = x^4 + 2x^2 + 9.$$

Câu 24. (HSG 7 trường THCS Nhơn Trí 2018 - 2019)

Tìm giá trị của m để đa thức sau là đa thức bậc 3 theo biến x

$$f(x) = (m^2 - 25)x^4 + (20 + 4m)x^3 + 7x^2 - 9$$

Lời giải

$f(x) = (m^2 - 25)x^4 + (20 + 4m)x^3 + 7x^2 - 9$ là đa thức bậc 3 biến x khi :

$$\begin{cases} m^2 - 25 = 0 \\ 20 + 4m \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \pm 5 \\ m \neq -5 \end{cases} \Rightarrow m = 5$$

Vậy $m = 5$ thì $f(x)$ là đa thức bậc 3 biến x .

Câu 25. (HSG 7 huyện Tân Tạo và Huyện Phú Khánh_2018-2019)

Tìm đa thức bậc hai biết $f(x) - f(x-1) = x$. Từ đó áp dụng tính tổng $S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$.

Lời giải

Đa thức bậc hai cần tìm có dạng: $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$

$$\text{Ta có: } f(x-1) = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$$

$$f(x) - f(x-1) = 2ax - a + b = x \Rightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ b - a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy đa thức cần tìm là $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + c$ (c là hằng số tùy ý)

Áp dụng:

$$\text{Với } x=1, \text{ ta có: } 1 = f(1) - f(0)$$

Với $x = 2$, ta có: $1 = f(2) - f(1)$

.....
 Với $x = n$, ta có: $n = f(n) - f(n-1)$

$$\Rightarrow S = 1 + 2 + 3 + \dots + n = f(n) - f(0) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + c - c = \frac{n(n+1)}{2}$$

Câu 26. (HSG 7 huyện năm 2022 - 2023)

Cho hai đa thức $f(x) = x^5 - 3x^2 + 7x^4 - 9x^3 + x^2 - \frac{1}{4}x$;

$$g(x) = 5x^4 - x^5 + x^2 - 2x^3 + 3x^2 - \frac{1}{4}$$

Tính $f(x) + g(x)$ và $f(x) - g(x)$

Lời giải

$$f(x) + g(x) = 12x^4 - 11x^3 + 2x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$

$$f(x) - g(x) = 2x^5 + 2x^4 - 7x^3 - 6x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

Câu 27. (HSG 7 huyện Hồng Ngự, tỉnh, trường THCS Hậu A 2022 - 2023)

Cho đa thức $P(x) = x^4 - 3x^2 + \frac{1}{2} - x$. Tìm các đa thức $Q(x)$, $R(x)$ sao cho:

a) $P(x) + Q(x) = x^5 - 2x^2 + 1$

b) $P(x) - R(x) = x^3$

Lời giải

a) Ta có: $P(x) + Q(x) = x^5 - 2x^2 + 1$

$$\Rightarrow Q(x) = P(x) - (x^5 - 2x^2 + 1)$$

$$= x^4 - 3x^2 + \frac{1}{2} - x - x^5 + 2x^2 - 1$$

$$= -x^5 + x^4 - x^2 - x - \frac{1}{2}$$

Vậy $Q(x) = -x^5 + x^4 - x^2 - x - \frac{1}{2}$

b) $P(x) - R(x) = x^3$

$$\Rightarrow R(x) = P(x) - x^3$$

$$= x^4 - 3x^2 + \frac{1}{2} - x - x^3$$

$$= x^4 - x^3 - 3x^2 - x + \frac{1}{2}$$

Vậy $R(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 - x + \frac{1}{2}$

Câu 28. (HSG 7 huyện Thạch Thành 2017 - 2018)

1) Tìm đa thức A biết: $A - (3xy - 4y^2) = x^2 - 7xy + 8y^2$

2) Cho hàm số $y = f(x) = ax + 2$ có đồ thị đi qua điểm $A(a-1; a^2 + a)$

a) Tìm a

b) Với a vừa tìm được, tìm giá trị của x thỏa mãn $f(2x-1) = f(1-2x)$

Lời giải

1) $A - (3xy - 4y^2) = x^2 - 7xy + 8y^2$

$$A = x^2 - 7xy + 8y^2 + (3xy - 4y^2)$$

$$A = x^2 - 4xy + 4y^2$$

2)

a) Vì đồ thị hàm số $y = f(x) = ax + 2$ đi qua điểm $A(a-1; a^2 + a)$ nên:

$$a^2 + a = a(a-1) + 2$$

$$\Rightarrow a^2 + a = a^2 - a + 2$$

$$\Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

b) Với $a = 1 \Rightarrow y = f(x) = x + 2$

ta có: $f(2x-1) = f(1-2x)$

$$\Rightarrow (2x-1) + 2 = (1-2x) + 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Câu 29. (Đề thi HSG 7 năm học 2017 - 2018)

Cho 2 đa thức: $P(x) = x^2 + 2mx + m^2$; $Q(x) = x^2 + (2m+1)x + m^2$

Tìm m biết $P(1) = Q(-1)$

Lời giải

$$P(1) = 1^2 + 2m \cdot 1 + m^2 = m^2 + 2m + 1$$

$$Q(-1) = 1 - 2m - 1 + m^2 = m^2 - 2m$$

Để $P(1) = Q(-1)$

$$\Rightarrow m^2 + 2m + 1 = m^2 - 2m$$

$$\Rightarrow 4m = -1 \Rightarrow m = -\frac{1}{4}$$

Vậy $m = -\frac{1}{4}$ thì thỏa mãn $P(1) = Q(-1)$.

Câu 30. (HSG 7 huyện Khoái Châu 2014 - 2015)

Xác định đa thức $P(x)$ có bậc 2 với hệ số cao nhất bằng 1 và nhận hai số 0 ; -3 làm nghiệm.

Lời giải

Vì đa thức $P(x)$ có bậc 2 với hệ số cao nhất bằng 1 nên $P(x) = x^2 + ax + b$ (trong đó a, b là các hệ số)

Có 0 là một nghiệm của đa thức $P(x)$, nên $P(0) = b = 0$

Có -3 là một nghiệm của đa thức $P(x)$, nên: $P(-3) = 9 - 3a + 0 = 0 \Rightarrow a = 3$

Vậy đa thức $P(x) = x^2 + 3x$ là đa thức cần tìm.

Câu 31. (HSG 7 huyện Bình Lục 2022 - 2023)

Tìm đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$ biết $P(-1) = -1$; $P(0) = 1$; $P(1) = 3$ với x là biến số và a, b, c là các hệ số.

Lời giải

Theo đề bài, ta có:

$$P(-1) = -1 \Rightarrow a - b + c = -1$$

$$P(0) = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$P(1) = 3 \Rightarrow a + b + c = 3$$

Kết hợp lại, tìm được $a = 0, b = 2, c = 1$

Vậy đa thức cần tìm là $P(x) = 2x + 1$

Câu 32. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Hùng Thư năm 2017 - 2018)

Cho hai đa thức: $A = 5xy^2 + 6x - 3x^2y + 7y^2 + 1$; $B = 5x + 13xy^2 + 3y^2 - 6x^2y + 5$

Tính $A + B$; $A - B$

Lời giải:

$$A + B = 18xy^2 - 9x^2y + 10y^2 + 11x + 6$$

$$A - B = -8xy^2 + 3x^2y + 4y^2 + x - 4$$

Câu 33. (HSG 7 huyện Cự Khê, 2016- 2017)

Cho các đa thức : $P(x) = 3x^4 - x^3 + 4x^2 + 2x + 1$; $Q(x) = -2x^4 - x^2 + x - 2$

a) Tính $P(x) + Q(x)$

b) Tìm đa thức $H(x)$ biết $Q(x) - H(x) = -2x^4 - 2$

c) Tìm nghiệm của đa thức $H(x)$

Lời giải

a) $P(x) + Q(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 + 3x - 1$

b) Ta có: $Q(x) - H(x) = -2x^4 - 2$

$$H(x) = Q(x) + 2x^4 + 2 = -2x^4 - x^2 + x - 2 + 2x^4 + 2 = -x^2 + x$$

c) Xét $H(x) = 0$

$$H(x) = -x^2 + x = x(1 - x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 1$$

Vậy đa thức $H(x)$ có nghiệm là $x = 0$; $x = 1$.

ĐỀ 7: ĐA THỨC

Dạng 1: Xác định đa thức
Dạng 2: Tính giá trị của đa thức
Dạng 3: Dấu của đa thức
Dạng 4: Tìm giá trị của biến (tham số) để phép chia là phép chia hết
Dạng 5: Nghiệm của đa thức

Dạng 2. Tính giá trị của đa thức

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 Đề giao lưu HSG huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Cho $x + y = 0$. Giá trị của đa thức $D = 3xy(x + y) + 2x^3y + 2x^2y^2 + 4$ là:

- A. 0 B. 3 C. 4 D. 5

Lời giải

Chọn C

Ta có $D = 3xy(x + y) + 2x^3y + 2x^2y^2 + 4 = 3xy(x + y) + 2x^2y(x + y) + 4$

Thay $x + y = 0$ vào đa thức D ta được:

$$D = 3xy \cdot 0 + 2x^2y \cdot 0 + 4 = 0 + 0 + 4 = 4$$

Vậy giá trị của đa thức $D = 4$ khi $x + y = 0$.

Câu 2. (HSG 7 Đề giao lưu HSG Lạng Giang 2022 - 2023)

Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn: $f(x) + x.f(-x) = x + 2023$ với mọi giá trị của x . Kết quả của $f(-4)$ là:

- A. $\frac{10117}{17}$ B. $\frac{-10127}{17}$ C. $\frac{-10117}{17}$ D. $\frac{10127}{17}$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f(x) + x.f(-x) = x + 2023$ (1)

+ Thay $x = 4$ vào (1) ta được:

$$f(4) + 4.f(-4) = 4 + 2023$$

$$\Rightarrow f(4) + 4.f(-4) = 2027$$

$$\Rightarrow 4 \cdot f(4) + 16.f(-4) = 8108$$
 (2)

+ Thay $x = -4$ vào (1) ta được:

$$f(-4) - 4.f(4) = -4 + 2023$$

$$\Rightarrow f(-4) - 4.f(4) = 2019$$

$$\Rightarrow -4.f(4) + f(-4) = 2019$$
 (3)

Từ (2), (3) $\Rightarrow [4 \cdot f(4) + 16.f(-4)] + [-4.f(4) + f(-4)] = 8108 + 2019$

$$\Rightarrow 17.f(-4) = 10127$$

$$\Rightarrow f(-4) = \frac{10127}{17}$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Lục Nam 2020 - 2021)

Cho đa thức $f(x) = x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \dots - 101x + 101$. Giá trị của $f(100)$ là:

- A. -1 . B. 1 . C. 100 . D. 101 .

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } f(x) &= x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \dots - 101x + 101 \\ &= x^{10} - 100x^9 - x^9 + 100x^8 + x^8 - \dots - 100x^3 - x^3 + 100x^2 + x^2 - 100x - x + 101 \\ &= (x^{10} - 100x^9) - (x^9 - 100x^8) + (x^8 - 100x^7) \dots - (x^3 - 100x^2) + (x^2 - 100x) - x + 101 \\ &= x^9(x - 100) - x^8(x - 100) + x^7(x - 100) \dots - x^2(x - 100) + x(x - 100) - x + 101 \\ &= (x - 100)(x^9 - x^8 + x^7 \dots - x^2 + x) - x + 101 \end{aligned}$$

Với $x = 100$ ta có:

$$\begin{aligned} f(100) &= (100 - 100)(100^{21} - 100^{20} + \dots - 100^2 + 100) - 100 + 101 \\ &= 0 \cdot (100^{21} - 100^{20} + \dots - 100^2 + 100) - 100 + 101 \\ &= 0 - 100 + 101 = 1 \end{aligned}$$

Vậy $f(x) = 1$ với $x = 100$.

Cách 2:

Với $x = 100 \Rightarrow x + 1 = 101$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \dots - 101x + 101 \\ f(x) &= x^{10} - (x+1)x^9 + (x+1)x^8 - (x+1)x^7 + \dots - (x+1)x + (x+1) \\ f(x) &= x^{10} - x^{10} - x^9 + x^9 + x^8 - x^8 - x^7 + \dots - x^2 - x + x + 1 \\ f(x) &= 1 \end{aligned}$$

Vậy $f(x) = 1$ với $x = 100$.

Câu 4. (HSG 7 huyện Lục Nam 2020 - 2021)

Cho đa thức $P(x)$ thỏa mãn: $f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$. Giá trị của $f(2)$ là:

- A. $\frac{13}{24}$. B. $-\frac{13}{24}$. C. $\frac{23}{34}$. D. $-\frac{13}{32}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Với } x = 2 \text{ ta có: } f(2) + 3f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^2 = 4 \quad (1)$$

$$\text{Với } x = \frac{1}{2} \text{ ta có: } f\left(\frac{1}{2}\right) + 3f(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$\begin{cases} f(2) + 3f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^2 = 4 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) + 3f(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Suy ra $f(2) = \frac{-13}{32}$

Câu 5. (HSG 7 huyện Lục Nam 2020 - 2021)

Cho $C = 2x - 2y + 13x^3y^2(x - y) + 15(y^2x - x^2y) + \left(\frac{234}{216}\right)^0$ biết $x - y = 0$.

Giá trị các biểu thức sau C bằng:

- A.** 1 **B.** -1 **C.** 2 **D.** 0

Lời giải

Chọn A

Ta có: $C = 2(x - y) + 13x^3y^2(x - y) + 15xy(y - x) + \left(\frac{234}{216}\right)^0$

$C = 2(x - y) + 13x^3y^2(x - y) - 15xy(x - y) + 1$

$C = (x - y)(2 + 13x^3y^2 - 15xy) + 1$

Thay $x - y = 0$ vào C ta được: $C = 0 \cdot (2 + 13x^3y^2 - 15xy) + 1 = 0 + 1 = 1$

Vậy $C = 1$ với $x - y = 0$.

Câu 6. (HSG 7 huyện Thanh Ba 2021 - 2022)

Tổng các hệ số của đa thức nhận được sau khi bỏ dấu ngoặc trong biểu thức

$P(x) = (8x^2 + 3x - 10)^{2021} \cdot (8x^2 + x - 10)^{2022}$ là

- A.** -10^{4043} **B.** 1 **C.** 2021 **D.** 2022

Lời giải

Chọn B

Tổng các hệ số của đa thức $P(x)$ là $P(1)$.

Ta có: $P(1) = (8 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 10)^{2021} \cdot (8 \cdot 1^2 + 1 - 10)^{2022} = 1^{2021} \cdot (-1)^{2022} = 1 \cdot 1 = 1$.

Do đó tổng các hệ số của đa thức $P(x)$ nhận được sau khi bỏ dấu ngoặc trong biểu thức

$P(x) = (8x^2 + 3x - 10)^{2021} \cdot (8x^2 + x - 10)^{2022}$ là 1.

Câu 7. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2021 - 2022)

Cho $x + y = 0$. Giá trị của đa thức $D = 3xy(x + y) + 2x^3y + 2x^2y^2 + 4$ là

- A.** 0 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Lời giải

Chọn C

Ta có: $D = 3xy(x + y) + 2x^3y + 2x^2y^2 + 4$
 $= 3xy(x + y) + 2x^2y(x + y) + 4 = 4$ (vì $x + y = 0$).
 Vậy $D = 4$ khi $x + y = 0$.

Câu 8. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2021 - 2022)

Cho $f(x) = ax^3 + 4x(x^2 + 1) + 8$ và $g(x) = x^3 + 4x(bx + 1) + c - 3$, trong đó a, b, c là các hằng số. Để $f(x) = g(x)$ thì giá trị của số a là

- A. 3. B. -3. C. 0. D. 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f(x) = ax^3 + 4x(x^2 + 1) + 8 = ax^3 + 4x^3 + 4x + 8 = (a + 4)x^3 + 4x + 8$.

$g(x) = x^3 + 4x(bx + 1) + c - 3 = x^3 + 4bx^2 + 4x + c - 3$.

Để $f(x) = g(x)$ thì $a + 4 = 1$. Suy ra: $a = -3$.

Câu 9. (HSG 7 trường THCS Đào Duy Từ 2018 - 2019)

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định với mọi $x > 1$. Biết $f(n) = (n - 1) \cdot f(n - 1)$ và $f(1) = 1$. Giá trị của $f(4)$ là:

- A. 3 B. 5 C. 6 D. 1

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(4) = (4 - 1)f(4 - 1) \Rightarrow f(4) = 3f(3)$

$f(3) = (3 - 1)f(3 - 1) \Rightarrow f(3) = 2f(2)$

$f(2) = (2 - 1)f(2 - 1) \Rightarrow f(2) = f(1)$

Do đó $f(4) = 6$.

Câu 10. (HSG 7 huyện Sơn Động 2022 - 2023)

Giá trị biểu thức: $A = 7x^2y - 5xy^2 - 11x^2y - 10xy^2 + 15xy^2 + 4x^2y - 2023$ tại $x = 1$, $y = -0,5$ là:

- A. 0. B. 1. C. -2023. D. 2023.

Lời giải

Chọn C

Thay $x = 1$ vào biểu thức A , ta được:

$A = 7x^2y - 5xy^2 - 11x^2y - 10xy^2 + 15xy^2 + 4x^2y - 2023$

$= 7y - 5y^2 - 11y - 10y^2 + 15y^2 + 4y - 2023$

$= (7y - 11y + 4y) + (-5y^2 - 10y^2 + 15y^2) - 2023 = -2023$.

Vậy giá trị của biểu thức A tại $x = 1$, $y = -0,5$ là -2023 .

Câu 11. (HSG 7 huyện Lâm Thao 2022 - 2023)

Cho biết $x^3 - 2x + 3 = 0$. Giá trị của biểu thức $P(x) = -5x^4 + 10x^2 - 15x + 1$ là.

- A. $P(x) = 0$. B. $P(x) = 1$. C. $P(x) = -5$. D. $P(x) = -6$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } P(x) = -5x^4 + 10x^2 - 15x + 1 = -5x(x^3 - 2x + 3) + 1 = 0 + 1 = 1$$

Câu 12. (HSG 7 huyện Tam Nông 2022 - 2023)

Cho $P(x) = x^{2023} - 2023x^{2022} - 2023x^{2021} - \dots - 2023x^2 - 2023x + 1$. Tính $P(2024)$.

- A. 2023. B. -2023. C. 2024. D. 2025.

Lời giải

Chọn D

$$P(x) = x^{2023} - 2023x^{2022} - 2023x^{2021} - \dots - 2023x^2 - 2023x + 1$$

$$P(x) = x^{2023} - (2023x^{2022} + 2023x^{2021} + \dots + 2023x^2 + 2023x) + 1$$

$$P(x) = x^{2023} - 2023(x^{2022} + \dots + x^2 + x) + 1$$

$$\text{Đặt } A = x^{2022} + \dots + x^2 + x$$

$$\Rightarrow x.A = x^{2023} + \dots + x^3 + x^2$$

$$\Rightarrow x.A - A = x^{2023} + \dots + x^3 + x^2 - (x^{2022} + \dots + x^2 + x)$$

$$\Rightarrow A(x-1) = x^{2023} - x$$

$$\Rightarrow A = \frac{x^{2023} - x}{x-1}$$

$$\text{Do đó } P(x) = x^{2023} - 2023 \cdot \frac{x^{2023} - x}{x-1} + 1$$

$$\Rightarrow P(2024) = 2024^{2023} - 2023 \cdot \frac{2024^{2023} - 2024}{2024-1} + 1$$

$$\Rightarrow P(2024) = 2024 + 1 = 2025.$$

Câu 13. (HSG 7 huyện Tam Nông 2022 - 2023)

Cho x, y thỏa mãn $(x-2)^4 + (y-1)^{2022} \leq 0$ thì giá trị $19x^2y + 4xy^2$ bằng

- A. 80. B. 84. C. 83. D. 85.

Lời giải

Chọn B

Ta có $(x-2)^4 \geq 0$, $(y-1)^{2022} \geq 0$ nên x, y thỏa mãn $(x-2)^4 + (y-1)^{2022} \leq 0$ khi

$$(x-2)^4 = 0 \text{ và } (y-1)^{2022} = 0$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ và } y = 1$$

$$\text{Khi đó } 19x^2y + 4xy^2 = 19.4.1 + 4.2.1 = 84$$

Câu 14. (HSG 7 huyện Tam Nông 2022 - 2023)

Giá trị của biểu thức $Q = a^2 - b^2 + c^2$ biết $ab = 2, bc = 6$ và $ac = 3$ là:

- A. 10. B. -6. C. -10. D. 6.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Từ } ab = 2, bc = 6 \Rightarrow \frac{ab}{bc} = \frac{2}{6} \Rightarrow a = \frac{1}{3}c \Rightarrow \frac{1}{3}c.c = 3 \Rightarrow c = \pm 3$$

$$\Rightarrow a = \pm 1, b = \pm 2$$

$$\Rightarrow Q = a^2 - b^2 + c^2 = 1 - 4 + 9 = 6$$

Câu 15. (HSG 7 huyện Thanh Thủy 2022 - 2023)

Cho biết $x^3 - 2x + 3 = 0$. Giá trị của biểu thức $P(x) = -4x^4 + 8x^2 - 12x + 5$ là

- A.** $P(x) = 0$. **B.** $P(x) = 5$. **C.** $P(x) = -3$. **D.** $P(x) = -5$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } P(x) = -4x^4 + 8x^2 - 12x + 5 = -4x(x^3 - 2x + 3) + 5 = 0 + 5 = 5$$

Câu 16. (HSG 7 huyện Tân Yên 2022 - 2023)

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định với mọi $x > 1$. Biết $f(n) = (n-1).f(n-1)$ và $f(1) = 1$. Giá trị của $f(5)$ là

- A.** 10. **B.** 24. **C.** 6. **D.** 16.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } f(1) = 1$$

$$f(2) = (2-1).f(1) = 1$$

$$f(3) = (3-1).f(2) = 2.1 = 2$$

$$f(4) = (4-1).f(3) = 3.2 = 6$$

$$f(5) = (5-1).f(4) = 4.6 = 24.$$

Câu 17. (HSG 7 huyện đề khảo sát lần 3, 2022 - 2023)

Cho hàm số $f(x)$ sao cho với mọi $x \neq 0$ ta đều có $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) + f(1) = 6$. Giá trị của

$f(-1)$ là

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) + f(1) = 6 \quad (*)$$

$$\text{Thay } x = 1 \text{ vào } (*) \text{ ta được: } f(1) + f(1) + f(1) = 6$$

$$\Rightarrow 3f(1) = 6 \Rightarrow f(1) = 2$$

$$\text{Thay } x = -1 \text{ vào } (*) \text{ ta được: } f(-1) + f(-1) + f(1) = 6$$

$$\Rightarrow 2f(-1) + f(1) = 6 \Rightarrow 2f(-1) + 2 = 6 \Rightarrow f(-1) = 0$$

$$\text{Vậy } f(-1) = 0.$$

Câu 18. (HSG 7 huyện Tân Yên 2022 - 2023)

Tính giá trị của đa thức $xy + x^2y^2 + x^3y^3 + \dots + x^{2021}y^{2021}$ tại $x = 1$; $y = -1$ là

- A. 1. B. 2021. C. -1. D. 0.

Lời giải

Chọn C

Thay $x = 1$; $y = -1$ vào đa thức $xy + x^2y^2 + x^3y^3 + \dots + x^{2021}y^{2021}$ ta được:

$$1 \cdot (-1) + 1^2 \cdot (-1)^2 + 1^3 \cdot (-1)^3 + \dots + 1^{2021} \cdot (-1)^{2021}$$

$$= \underbrace{-1 + 1 - 1 + \dots - 1}_{2021 \text{ số hạng}} = -1$$

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 TP Thanh Hoá 2022 - 2023)

Cho hàm số $f(x)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Biết rằng với mọi $x \neq 0$ ta đều có $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$. Tính $f(2)$.

Lời giải

Với $x = 2$ ta có: $f(2) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^2 = 4$ (*)

Với $x = \frac{1}{2}$ ta có: $f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - 2f(2)$ (**)

Thay (**) vào (*) Ta được: $f(2) + 2\left[\frac{1}{4} - 2f(2)\right] = 4$

$$\Rightarrow f(2) + \frac{1}{2} - 4f(2) = 4$$

$$\Rightarrow 3f(2) = \frac{1}{2} - 4$$

$$\Rightarrow 3f(2) = \frac{-7}{2}$$

$$\Rightarrow f(2) = \frac{-7}{6}$$

Câu 2. (HSG 7 Huyện Thọ Xuân 2022 - 2023)

Cho đa thức $R(x) = x^2 - 2x$. Tính giá trị biểu thức:

$$S = \frac{1}{R(3)} + \frac{1}{R(4)} + \frac{1}{R(5)} + \dots + \frac{1}{R(2022)} + \frac{1}{R(2023)} + \frac{1}{2 \cdot 2023}$$

Lời giải

Ta có $R(x) = x^2 - 2x = x(x - 2)$.

$$S = \frac{1}{R(3)} + \frac{1}{R(4)} + \frac{1}{R(5)} + \dots + \frac{1}{R(2022)} + \frac{1}{R(2023)} + \frac{1}{2 \cdot 2023}$$

$$= \frac{1}{3 \cdot (3-2)} + \frac{1}{4 \cdot (4-2)} + \frac{1}{5 \cdot (5-2)} + \dots + \frac{1}{2022 \cdot (2022-2)} + \frac{1}{2023 \cdot (2023-2)} + \frac{1}{2 \cdot 2023}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3.1} + \frac{1}{4.2} + \frac{1}{5.3} + \dots + \frac{1}{2022.2020} + \frac{1}{2023.2021} + \frac{1}{2.2023} + \frac{1}{2.2023} \\
 &= \left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{2021.2023} \right) + \left(\frac{1}{2.4} + \frac{1}{4.2} + \dots + \frac{1}{2020.2022} \right) + \frac{1}{2.2023} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \dots + \frac{2}{2021.2023} \right) + \left(\frac{2}{2.4} + \frac{2}{4.2} + \dots + \frac{2}{2020.2022} \right) \right] + \frac{1}{2.2023} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2023} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2022} \right) \right] + \frac{1}{2.2023} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2023} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2022} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3033}{2022} - \frac{1}{2022} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3032}{2022} = \frac{758}{1011}
 \end{aligned}$$

Câu 3. (HSG 7 Huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức $C = x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \dots - 101x + 101$ với $x = 100$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } C &= x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \dots - 101x + 101 \\
 &= x^{10} - 100x^9 - x^9 + 100x^8 + x^8 - 100x^7 - x^7 + \dots - 100x - x + 100 + 1 \\
 &= x^9(x - 100) - x^8(x - 100) + x^7(x - 100) - \dots + x(x - 100) - (x - 100) + 1 \\
 &= (x - 100)(x^9 - x^8 + x^7 - \dots + x - 1) + 1
 \end{aligned}$$

Với $x = 100$ ta có: $C = (100 - 100)(100^9 - 100^8 + \dots + 100 - 1) + 1 = 1$

Vậy $C = 1$ với $x = 100$.

Câu 4. (HSG 7 Đề chọn HSG cấp TP Bắc Giang, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

Cho đa thức bậc ba $Q(x)$ với hệ số x^3 là một số nguyên dương và $Q(5) - Q(4) = 2023$. Chứng minh rằng $Q(7) - Q(2)$ là hợp số.

Lời giải

Đa thức bậc ba $Q(x)$ với hệ số x^3 là một số nguyên dương nên

$$Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \in \mathbb{N}^*)$$

Ta có: $Q(5) = 125a + 25b + 5c + d$

$$Q(4) = 64a + 16b + 4c + d$$

$$\Rightarrow Q(5) - Q(4) = 61a + 9b + c = 2023 \quad (1)$$

Lại có $Q(7) = 343a + 49b + 7c + d$

$$Q(2) = 8a + 4b + 2c + d$$

$$\Rightarrow Q(7) - Q(2) = 335a + 45b + 5c \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $Q(7) - Q(2) = 30a + (305a + 45b + 5c) = 30a + 10115$

Vì $(30a + 10115) : 5$ nên $[Q(7) - Q(2)] : 5 \quad (a \in \mathbb{N}^*)$

$$\text{Mà } Q(7) - Q(2) > 5$$

Do vậy $Q(7) - Q(2)$ là hợp số.

Câu 5. (HSG 7 Giao lưu HSG TP Chí Linh 2022 - 2023)

Cho đa thức $A(x) = x^4 - 123x^3 + 123x^2 - 123x + 125$. Tính $A(122)$.

Lời giải

Khi $x = 122$ thì ta có $123 = x + 1$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } A(x) &= x^4 - (x+1)x^3 + (x+1)x^2 - (x+1)x + 125 \\ &= x^4 - x^4 - x^3 + x^3 + x^2 - x^2 - x + 125 \\ &= -x + 125 \end{aligned}$$

Vậy $A(122) = -122 + 125 = 3$.

Câu 6. (HSG 7 Đề HSG cấp huyện Hiệp Hòa 2022 - 2023)

Cho đa thức $P(x) = x^6 + 2023x^5 - 2023x^4 + 2023x^3 - 2023x^2 + 2023x - 2023$. Tính $P(-2024)$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} P(-2024) &= (-2024)^6 + 2023 \cdot (-2024)^5 - 2023 \cdot (-2024)^4 \\ &\quad + 2023 \cdot (-2024)^3 - 2023 \cdot (-2024)^2 + 2023 \cdot (-2024) - 2023 \\ P(-2024) &= (-2024)^6 + 2023 \cdot [-2024^5 - 2024^4 - 2024^3 - 2024^2 - 2024^1 - 1] \\ P(-2024) &= (-2024)^6 - 2023 \cdot (2024^5 + 2024^4 + 2024^3 + 2024^2 + 2024 + 1) \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } A = 2024^5 + 2024^4 + 2024^3 + 2024^2 + 2024 + 1$$

$$2024 \cdot A = 2024^6 + 2024^5 + 2024^4 + 2024^3 + 2024^2 + 2024$$

$$2024A - A = 2024^6 - 1$$

$$2023A = 2024^6 - 1$$

$$A = \frac{2024^6 - 1}{2023}$$

$$\text{Khi đó } P(-2024) = (-2024)^6 - 2023 \cdot \frac{2024^6 - 1}{2023}$$

$$P(-2024) = 2024^6 - 2024^6 + 1 = 1$$

Vậy $P(-2024) = 1$

Câu 7. (HSG 7 Đề khảo sát HSG huyện Tiên Hải 2022 - 2023)

Cho đa thức $P = ax^2 + bx + c$ biết $7a - b + 4c = 0$. Chứng minh $P(2) \cdot P(-1)$ không là số dương.

Lời giải

Vì $7a - b + 4c = 0 \Rightarrow b = 7a + 4c$, thay vào biểu thức $P(x)$ ta được:

$$P(x) = ax^2 + (7a + 4c)x + c$$

$$P(2) = a.2^2 + (7a + 4c).2 + c = 4a + 14a + 8c + c = 18a + 9c = 9(2a + c)$$

$$P(-1) = a.(-1)^2 + (7a + 4c).(-1) + c = a - 7a - 4c + c = -6a - 3c \\ = (-3).(2a + c)$$

$$\text{Ta có } P(2).P(-1) = 9.(2a + c).(-3).(2a + c) = -27(2a + c)^2$$

Vì $(2a + c)^2 \geq 0$ với mọi a, c nên $-27(2a + c)^2 \leq 0$.

Vậy $P(2).P(-1)$ không là số dương.

Câu 8. (HSG 7 Đề giao lưu HSG Quảng Xương 2022 - 2023)

Cho đa thức $f(x) = 2x^2 + 6x$

a) Tính các giá trị $f(-1)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$

b) Tìm nghiệm của đa thức $f(x)$.

Lời giải

a) Ta có: $f(x) = 2x^2 + 6x$

$$\text{Khi đó } f(-1) = 2(-1)^2 + 6(-1) = 2 - 6 = -4$$

$$\text{Tương tự: } f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\text{Vậy: } f(-1) = -4; f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}$$

b) Ta có: $f(x) = 2x^2 + 6x = 0$

$$\text{Hay } 2x^2 + 6x = 0$$

$$\text{Suy ra: } 2x(x + 3) = 0. \text{ Do đó: } 2x = 0 \text{ hoặc } x + 3 = 0$$

$$\text{Nên } x = 0 \text{ hoặc } x = -3$$

$$\text{Vậy } x = 0; x = -3$$

Câu 9. (HSG 7 Đề khảo sát chất lượng HSG huyện Nghi Lộc 2022 - 2023)

Cho đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Biết $P(1) = 15$ và $P(2) = 30$. Tính hiệu $P(3) - P(0)$.

Lời giải

Cho đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

Vì $P(1) = 15$ thay vào $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

$$\text{Ta có } 1^3 + a.1^2 + b.1 + c = 15$$

$$a + b + c + 1 = 15$$

$$a + b + c = 14$$

Vì $P(2) = 30$ thay vào $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

$$\text{Ta có } 2^3 + a.2^2 + b.2 + c = 30$$

$$4a + 2b + c = 22$$

$$a + b + c + 3a + b = 22$$

Mà $a + b + c = 14$ nên

$$14 + 3a + b = 22$$

$$3a + b = 8$$

$$+) P(3) = 3^3 + 3^2a + 3b + c = 27 + 9a + 3b + c$$

$$+) P(0) = 0^3 + 0^2.a + 0.b + c = c$$

$$P(3) - P(0) = (27 + 9a + 3b + c) - c = 27 + 9a + 3b$$

$$= 27 + 3(3a + b) = 27 + 3.8 = 51 \text{ (vì } 3a + b = 8)$$

Vậy với $P(1) = 15$ và $P(2) = 30$ thì $P(3) - P(0) = 51$.

Câu 10. (HSG 7 Đề Olympic thị xã Hoàng Mai 2022 - 2023)

Tính giá trị của đa thức $M = 5x^4 + 9x^2y^2 + 4y^4 + 5y^2$ với $x^2 + y^2 = 5$.

Lời giải

$$\text{Ta có } M = 5x^4 + 9x^2y^2 + 4y^4 + 5y^2$$

$$= 5x^4 + 5x^2y^2 + 4x^2y^2 + 4y^4 + 5y^2$$

$$= 5x^2(x^2 + y^2) + 4y^2(x^2 + y^2) + 5y^2$$

Thay $x^2 + y^2 = 5$ vào đa thức M ta được:

$$M = 5 \cdot x^2 \cdot 5 + 4y^2 \cdot 5 + 5y^2 = 25x^2 + 25y^2 = 25(x^2 + y^2) = 25 \cdot 5 = 125$$

Vậy $M = 125$ với $x^2 + y^2 = 5$

Câu 11. (HSG 7 Đề giao lưu HSG huyện Vĩnh Lộc – Thanh Hóa 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức $P = x^3 - y^2 + x + x^2y - 2x^2 + 2021 + 3y - xy$ với $x + y = 2$.

Lời giải

$$\text{Ta có } P = x^3 - y^2 + x + x^2y - 2x^2 + 2021 + 3y - xy$$

$$= x^2(x + y) - y(x + y) - 2x^2 + 3y + x + 2021$$

Thay $x + y = 2$ vào đa thức P ta được:

$$P = 2x^2 - 2y - 2x^2 + 3y + x + 2021 = y + x + 2021 = 2 + 2021 = 2023$$

Vậy $P = 2023$ với $x + y = 2$.

Câu 12. (HSG 7 Đề giao lưu HSG huyện Chương Mỹ 2022 - 2023)

Cho biểu thức $f(x) = ax^2 + bx + c$, biết rằng giá trị của biểu thức $f(x)$ tại $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ lần lượt bằng 2023; 2027 và 2025. Tính giá trị của biểu thức $f(x)$ tại $x = 2$.

Lời giải

$$\text{Ta có } f(0) = c = 2023$$

$$f(1) = a + b + c = 2027 \Rightarrow a + b = 2027$$

$$f(-1) = a - b + c = 2025 \Rightarrow a - b = 2025$$

$$\Rightarrow a = 2026; b = 1$$

Suy ra $f(x) = 2026x^2 + x$

Ta có $f(2) = 2026 \cdot 2^2 + 2 = 8106$.

Vậy $f(2) = 8106$.

Câu 13. (HSG 7 huyện Cẩm Khê 2022 – 2023)

Cho đa thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ (x là ẩn, a, b, c là hệ số).

Biết $f(0) = 2022$; $f(1) = 2023$; $f(-1) = 2021$. Tính $f(-2022)$.

Lời giải

Xét $x = 0$; $f(0) = 2022 \Rightarrow c = 2022$

Xét $x = 1$; $f(1) = 2023 \Rightarrow a + b + c = 2023 \Rightarrow a + b = 1$ (1)

Xét $x = -1$; $f(-1) = 2021 \Rightarrow a - b + c = 2021 \Rightarrow a - b = -1$ (2)

Cộng vế (1) và (2) $\Rightarrow a = 0$

Thay $a = 0$ vào (1) ta được $b = 1$

Từ đó ta tìm được $f(x) = x + 2022 \Rightarrow f(-2022) = 0$

Câu 14. (HSG 7 huyện Thường Xuân tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là hệ số biết: $f(x+1) - f(x) = 2x - 3$.

Tính giá trị biểu thức: $P = \frac{f(5) - f(2)}{9}$.

Lời giải

Do $f(x)$ là đa thức bậc hai. Gọi $f(x) = ax^2 + bx + c$

Theo đề bài: $f(x+1) - f(x) = 2x - 3$

$$\Rightarrow a(x+1)^2 + b(x+1) + c - (ax^2 + bx + c) = 2x - 3$$

$$\Rightarrow a(x^2 + 2x + 1) + b(x+1) + c - ax^2 - bx - c = 2x - 3$$

$$\Rightarrow 2ax + a + b = 2x - 3 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + c$$

$$\text{Khi đó: } P = \frac{f(5) - f(2)}{9} = \frac{5^2 - 4 \cdot 5 + c - (2^2 - 4 \cdot 2 + c)}{9} = 1$$

Câu 15. (HSG 7 huyện Cẩm Thủy tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Tìm đa thức M biết rằng: $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$.

Tính giá trị của M khi x, y thỏa mãn: $(2x - 5)^{2018} + (3y + 4)^{2020} \leq 0$.

Lời giải

Ta có: $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2 \Rightarrow M = 6x^2 + 9xy - y^2 - (5x^2 - 2xy)$

$$\Rightarrow M = 6x^2 + 9xy - y^2 - 5x^2 + 2xy = x^2 + 11xy - y^2$$

$$\text{Lại có: } \begin{cases} (2x-5)^{2018} \geq 0 \\ (3y+4)^{2020} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (2x-5)^{2018} + (3y+4)^{2020} \geq 0$$

$$\text{Mà: } (2x-5)^{2018} + (3y+4)^{2020} \leq 0 \Rightarrow (2x-5)^{2018} + (3y+4)^{2020} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2x-5)^{2018} = 0 \\ (3y+4)^{2020} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Thay vào ta được M ta được:

$$M = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 11 \cdot \frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{25}{4} - \frac{110}{3} - \frac{16}{9} = \frac{-1159}{36}$$

Câu 16. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho $A = x^{22} - 2023x^{21} + 2023x^{20} - \dots - 2023x^3 + 2023x^2 - 2023x + 1$.

Tính giá trị biểu thức A với $x = 2022$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= x^{22} - 2023x^{21} + 2023x^{20} - \dots - 2023x^3 + 2023x^2 - 2023x + 1 \\ &= x^{22} - 2022x^{21} - x^{21} + 2022x^{20} + x^{20} - \dots - 2022x^3 - x^3 + 2022x^2 + x^2 - 2022x - x + 1 \\ &= (x^{22} - 2022x^{21}) - (x^{21} - 2022x^{20}) + \dots - (x^3 - 2022x^2) + (x^2 - 2022x) - x + 1 \\ &= x^{21}(x - 2022) - x^{20}(x - 2022) + \dots - x^2(x - 2022) + x(x - 2022) - x + 1 \\ &= (x - 2022)(x^{21} - x^{20} + \dots - x^2 + x) - x + 1 \end{aligned}$$

Với $x = 2022$ ta có:

$$\begin{aligned} A &= (2022 - 2022)(2022^{21} - 2022^{20} + \dots - 2022^2 + 2022) - 2022 + 1 \\ &= 0 \cdot (2022^{21} - 2022^{20} + \dots - 2022^2 + 2022) - 2022 + 1 \\ &= 0 - 2022 + 1 = -2021 \end{aligned}$$

Vậy $A = -2021$ với $x = 2022$

Câu 17. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

a) Cho $|x-2| + |y-1| + (x+y-z-2)^{2020} = 0$. Tính giá trị của: $A = 5x^2y^{2020}z^{2021}$.

b) Tính giá trị của biểu thức: $6x^2 + 5x - 2$ tại x thoả mãn $|x-2| = 1$.

Lời giải

a) Vì $|x-2| \geq 0$ với $\forall x$; $|y-1| \geq 0$ với $\forall y$; $(x+y-z-2)^{2020} \geq 0$ với $\forall x, y, z$

Do đó $|x-2| + |y-1| + (x+y-z-2)^{2020} = 0$ khi

$$\begin{cases} |x-2| = 0 \\ |y-1| = 0 \\ (x+y-z-2)^{2020} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2 = 0 \\ y-1 = 0 \\ x+y-z-2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Do đó $A = 5 \cdot 2^2 \cdot 1^{2020} \cdot 1^{2021} = 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 = 20$

Vậy $A = 20$.

b) Tính giá trị của biểu thức: $6x^2 + 5x - 2$ tại x thỏa mãn $|x - 2| = 1$.

Ta có $|x - 2| = 1$ suy ra:

* $x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3$

* $x - 2 = -1 \Rightarrow x = 1$

Thay $x = 1$ vào biểu thức ta được $6.1^2 + 5.1 - 2 = 9$

Thay $x = 3$ vào biểu thức ta được $6.3^2 + 5.3 - 2 = 67$

Kết luận: $x = 1$ thì giá trị biểu thức bằng 9.

$x = 3$ thì giá trị biểu thức bằng 67.

Câu 18. (HSG 7 huyện Tam Điệp 2021 - 2022)

Cho $f(x) = x^2 + x$. Tính tổng $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(47) + f(48)$

Lời giải

Ta có $f(x) = x^2 + x \Rightarrow f(x) = x(x + 1)$

$$M = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(47) + f(48)$$

$$\Rightarrow M = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 47.48 + 48.49$$

$$\Rightarrow 3M = 1.2(3 - 0) + 2.3(4 - 1) + 3.4(5 - 2) + \dots + 47.48(49 - 46) + 48.49(50 - 47)$$

$$\Rightarrow 3M = 1.2.3 + 2.3.4 - 1.2.3 + 3.4.5 - 2.3.4 + \dots + 47.48.49 - 46.47.48 + 48.49.50 - 47.48.49$$

$$\Rightarrow 3M = 48.49.50$$

$$\Rightarrow M = \frac{48.49.50}{3} = 39200.$$

Câu 19. (HSG 7 huyện Lục Ngạn 2021 - 2022)

Tính giá trị của $K = 10x - 10y + 3x^2y(x - y) + 2021(y^2x - x^2y) + \left(\frac{2022}{2023}\right)^0$, biết $x - y = 0$.

Lời giải

$$\text{Ta có } K = 10x - 10y + 3x^2y(x - y) + 2021(y^2x - x^2y) + \left(\frac{2022}{2023}\right)^0$$

$$= 10(x - y) + 3x^2y(x - y) + 2021xy(y - x) + 1$$

$$\text{Vì } x - y = 0 \text{ nên } K = 0 + 1 = 1$$

$$\text{Vậy } K = 1.$$

Câu 20. (HSG 7 huyện An Nhơn 2021 - 2022)

Tính giá trị của biểu thức $x^{2021} - 2022x^{2020} + 2022x^{2019} - 2022x^{2018} + \dots - 2022x^2 + 2022x + 1$ tại $x = 2021$

Lời giải

Ta có: $x^{2021} - 2022x^{2020} + 2022x^{2019} - 2022x^{2018} + \dots - 2022x^2 + 2022x + 1$

$$= x^{2021} - (2021 + 1)x^{2020} + (2021 + 1)x^{2019} - (2021 + 1)x^{2018} + \dots - (2021 + 1)x^2 + (2021 + 1)x + 1$$

$$= x^{2021} - (x + 1)x^{2020} + (x + 1)x^{2019} - (x + 1)x^{2018} + \dots - (x + 1)x^2 + (x + 1)x + 1$$

$$= x^{2021} - x^{2021} - x^{2020} + x^{2020} + x^{2019} - x^{2019} - x^{2018} + \dots - x^3 - x^2 + x^2 + x + 1 = x + 1$$

Thay $x = 2021$ vào biểu thức ta được: $2021 + 1 = 2022$

Câu 21. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức $f(x) = x^5 - 2018x^4 + 2016x^3 + 2018x^2 - 2016x - 2017$ tại $x = 2017$

Lời giải

Tính giá trị của đa thức $f(x) = x^5 - 2018x^4 + 2016x^3 + 2018x^2 - 2016x - 2017$ tại $x = 2017$

Ta có $x = 2017$ nên $2018 = x + 1$; $2016 = x - 1$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó ta có: } f(2017) &= x^5 - (x+1)x^4 + (x-1)x^3 + (x+1)x^2 - (x-1)x - x \\ &= x^5 - x^5 - x^4 + x^4 - x^3 + x^3 + x^2 - x^2 + x - x \\ &= 0 \end{aligned}$$

Vậy $f(2017) = 0$

Câu 22. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức: $C = 2x^5 - 5y^3 + 2025$ tại x, y thỏa mãn: $|x-1| + (y+2)^{20} = 0$

Lời giải

Ta có: Do $|x-1| \geq 0$; $(y+2)^{20} \geq 0 \Rightarrow |x-1| + (y+2)^{20} \geq 0$ với mọi x, y .

Kết hợp $|x-1| + (y+2)^{20} = 0$ suy ra $|x-1| = 0$ và $(y+2)^{20} = 0$
 $\Rightarrow x = 1$; $y = -2$

Giá trị của biểu thức: $C = 2x^5 - 5y^3 + 2025$ tại $x = 1$; $y = -2$ là:

$$C = 2 \cdot 1^5 - 5 \cdot (-2)^3 + 2025 = 2 + 40 + 2025 = 2067$$

Vậy $C = 2067$

Câu 23. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức $P = x^{99} - 100x^{98} + 100x^{97} - 100x^{96} + \dots + 100x - 1$ với $x = 99$.

Lời giải

Ta có:

$$P = x^{99} - 99x^{98} - x^{98} + 99x^{97} + x^{99} - 99x^{96} - x^{96} + \dots + 99x + x - 1$$

$$P = x^{98}(x - 99) - x^{97}(x - 99) + x^{96}(x - 99) - \dots - x(x - 99) + (x - 1)$$

$$P = (x - 99)(x^{98} - x^{97} + x^{96} - \dots - x) + (x - 1)$$

Với $x = 99$, ta có:

$$P = (99 - 99)(99^{98} - 99^{97} + 99^{96} - \dots - 99) + (99 - 1) = 98$$

Vậy $P = 98$ với $x = 99$

Câu 24. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho ba số thực a, b, c khác 0 và đôi một khác nhau thỏa mãn: $a^2 \cdot (b + c) = b^2 \cdot (a + c) = 2023$.

Tính giá trị biểu thức: $H = c^2 \cdot (a + b)$

Lời giải

$$\text{Từ } a^2 \cdot (b+c) = b^2 \cdot (a+c) = 2023 \Rightarrow \frac{a}{ab+bc} = \frac{b}{ab+ac} = \frac{a-b}{-c(a-b)} = \frac{1}{-c} \quad \text{vì } a \neq b$$

$$\Rightarrow ab+bc = -ac \Rightarrow b(a+c) = -ac \Rightarrow b^2(a+c) = -abc \quad (1)$$

$$\text{Từ } \Rightarrow ac+bc = -ab \Rightarrow c(a+b) = -ab \Rightarrow c^2(a+b) = -abc \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow c^2(a+b) = c^2(a+c)$$

$$\text{Mà } b^2 \cdot (a+c) = 2023 \Rightarrow H = c^2 \cdot (a+b) = 2023$$

Câu 25. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $a^{100} + b^{100} = a^{101} + b^{101} = a^{102} + b^{102}$.

Hãy tính giá trị của biểu thức: $P = a^{2022} + b^{2023}$.

Lời giải

Ta có: $a^{102} + b^{102} = (a^{101} + b^{101}) \cdot (a+b) - ab \cdot (a^{100} + b^{100})$ với mọi a, b (1)

Mà $a^{100} + b^{100} = a^{101} + b^{101} = a^{102} + b^{102}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 1 = (a+b) - ab \Leftrightarrow (a-1) \cdot (b-1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \Rightarrow 1+b^{100} = 1+b^{101} = 1+b^{102} \Rightarrow b=1 \\ b=1 \Rightarrow 1+a^{100} = 1+a^{101} = 1+a^{102} \Rightarrow a=1 \end{cases}$$

Do đó $P = a^{2022} + b^{2023} = 1^{2022} + 1^{2023} = 2$

Câu 26. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho $M = x^{22} - 2023x^{21} + 2023x^{20} - \dots - 2023x^3 + 2023x^2 - 2023x + 1$.

Tính giá trị biểu thức M với $x = 2022$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } M &= x^{22} - 2023x^{21} + 2023x^{20} - \dots - 2023x^3 + 2023x^2 - 2023x + 1 \\ &= x^{22} - 2022x^{21} - x^{21} + 2022x^{20} + x^{20} - \dots - 2022x^3 - x^3 + 2022x^2 + x^2 - 2022x - x + 1 \\ &= x^{21}(x-2022) - x^{20}(x-2022) + \dots - x^2(x-2022) + x(x-2022) - x + 1 \\ &= (x-2022)(x^{21} - x^{20} + \dots - x^2 + x) - x + 1 \end{aligned}$$

Với $x = 2022$

$$M = (2022 - 2022)(2022^{21} - 2022^{20} + \dots - 2022^2 + 2022) - 2022 + 1$$

$$= 0 \cdot (2022^{21} - 2022^{20} + \dots - 2022^2 + 2022) - 2022 + 1$$

$$= 0 - 2022 + 1 = -2021$$

Vậy $M = -2021$ với $x = 2022$

Câu 27. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho các số $x; y$ thỏa mãn $(x-3)^4 + (2y-1)^{2020} \leq 0$. Tính giá trị của biểu thức

$$M = 402x^2y + 284xy^2$$

Lời giải

Vì $(x-3)^4 \geq 0; (2y-1)^{2020} \geq 0$ với mọi $x; y$

Nên $(x-3)^4 + (2y-1)^{2020} \geq 0$ với mọi $x; y$.

Mà theo đề bài : $(x-3)^4 + (2y-1)^{2020} \leq 0$

Suy ra $(x-3)^4 + (2y-1)^{2020} = 0$

Hay: $(x-3)^4 = 0$ và $(2y-1)^{2020} = 0$

suy ra $x = 3, y = \frac{1}{2}$

Khi đó tính được: $M = 2022$

Câu 28. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức $A = (x-3)^{2019} + (x-y-1)^{2020} + 2021$ biết rằng $x; y$ thỏa mãn đẳng thức $\left[(x-2)^2 + 4 \right]^2 + \sqrt{(x+2y-6)^2 + 9} = 19$

Lời giải

Ta có: $(x-2)^2 \geq 0$ với mọi $x \in R \Rightarrow (x-2)^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow \left[(x-2)^2 + 4 \right]^2 \geq 4^2 = 16$ (1)

Ta có: $(x+2y-6)^2 \geq 0$ với mọi $x; y \in R \Rightarrow \sqrt{(x+2y-6)^2 + 9} \geq \sqrt{9} = 3$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra: $\left[(x-2)^2 + 4 \right]^2 + \sqrt{(x+2y-6)^2 + 9} \geq 16 + 3 = 19$

Vậy biểu thức $\left[(x-2)^2 + 4 \right]^2 + \sqrt{(x+2y-6)^2 + 9} = 19$ khi $(x-2)^2 = 0$ và $(x+2y-6)^2 = 0$

Suy ra $x = 2$ và $y = 2$

Thay $x = 2; y = 2$ vào biểu thức A đã cho ta được:

$$A = (2-3)^{2019} + (2-2-1)^{2020} + 2021 = (-1)^{2019} + (-1)^{2020} + 2021 = -1 + 1 + 2021 = 2021$$

Vậy $A = 2021$

Câu 29. (HSG 7 huyện Như Thanh 2021 - 2022)

Cho hai số x, y thỏa mãn: $(2x-1)^{2022} + (3y+6)^{2022} \leq 0$. Tính giá trị của M biết rằng:

$$2M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2.$$

Lời giải

Ta có: $(2x-1)^{2022} \geq 0 \forall x$ và $(3y+6)^{2022} \geq 0 \forall y$ nên

$(2x-1)^{2022} + (3y+6)^{2022} \leq 0$ khi và chỉ khi $(2x-1)^{2022} = 0$ và $(3y+6)^{2022} = 0$.

$(2x-1)^{2022} = 0$ khi $2x-1 = 0$ hay $x = \frac{1}{2}$.

$(3y+6)^{2022} = 0$ khi $3y+6 = 0$ hay $y = -2$.

Mặt khác: $2M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$ suy ra:

$$2M = 6x^2 + 9xy - y^2 - 5x^2 + 2xy = x^2 + 11xy - y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-2) - (-2)^2 = -\frac{59}{4}.$$

Như vậy: $M = -\frac{59}{8}$.

Câu 30. (HSG 7 huyện Mỹ Đức 2020 - 2021)

Tìm đa thức M biết rằng: $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$.

Tính giá trị của M khi x, y thỏa mãn: $(2x - 5)^{2020} + (3y + 4)^{2022} \leq 0$.

Lời giải

Ta có: $M + (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2$ suy ra:

$$M = 6x^2 + 9xy - y^2 - (5x^2 - 2xy) = 6x^2 + 9xy - y^2 - 5x^2 + 2xy = x^2 + 11xy - y^2.$$

Ta có: $(2x - 5)^{2020} \geq 0 \quad \forall x$ và $(3y + 4)^{2022} \geq 0 \quad \forall y$ nên

$$(2x - 5)^{2020} + (3y + 4)^{2022} \leq 0 \text{ khi và chỉ khi } (2x - 5)^{2020} = 0 \text{ và } (3y + 4)^{2022} = 0.$$

$$+ (2x - 5)^{2020} = 0 \text{ khi } 2x - 5 = 0. \text{ Suy ra } x = \frac{5}{2}.$$

$$+ (3y + 4)^{2022} = 0 \text{ khi } 3y + 4 = 0. \text{ Suy ra } y = -\frac{4}{3}.$$

Thay vào biểu thức M ta được:

$$M = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 11 \cdot \frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{25}{4} - \frac{110}{3} - \frac{16}{9} = -\frac{1159}{36}.$$

Câu 31. (HSG 7 huyện Chương Mỹ 2021 - 2022)

Cho đa thức: $A = 11x^4y^3z^2 + 20x^2yz - (4xy^2z - 10x^2yz + 3x^4y^3z^2) - (2008xyz^2 + 8x^4y^3z^2)$.

a) Xác định bậc của A .

b) Tính giá trị của A nếu $15x - 2y = 1004z$.

Lời giải

a) Ta có:

$$A = 11x^4y^3z^2 + 20x^2yz - (4xy^2z - 10x^2yz + 3x^4y^3z^2) - (2008xyz^2 + 8x^4y^3z^2)$$

$$= 11x^4y^3z^2 + 20x^2yz - 4xy^2z + 10x^2yz - 3x^4y^3z^2 - 2008xyz^2 - 8x^4y^3z^2$$

$$= 30x^2yz - 4xy^2z - 2008xyz^2$$

$\Rightarrow A$ có bậc 4.

b) Ta có: $A = 30x^2yz - 4xy^2z - 2008xyz^2 = 2xyz(15x - 2y - 1004z)$.

Vì $15x - 2y = 1004z$ nên $15x - 2y - 1004z = 0$.

Vậy $A = 0$.

Câu 32. (HSG 7 huyện Thanh Trì 2021 - 2022)

Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$. Tính $f(-1)$ biết: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$ và $f(2) = 36$.

Lời giải

Ta có: $f(x) = ax^2 + bx + c$ nên $f(2) = 4a + 2b + c$.

Mà $f(2) = 36$ suy ra $4a + 2b + c = 36$. (1)

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{4a}{8} = \frac{2b}{6} = \frac{c}{4} = \frac{4a + 2b + c}{8 + 6 + 4} = \frac{36}{18} = 2.$$

Suy ra: $a = 4$; $b = 6$; $c = 8$.

Do đó: $f(x) = ax^2 + bx + c = 4x^2 + 6x + 8$.

Khi đó: $f(-1) = 4 - 6 + 8 = 6$.

Câu 33. (HSG 7 huyện Tam Dương 2021 - 2022)

Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ trong đó $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ và thỏa mãn $b = 3a + c$.

Chứng minh rằng tích $f(1) \cdot f(-2)$ là bình phương của một số nguyên.

Lời giải

Ta có: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

Nên $f(1) = a.1^3 + b.1^2 + c.1 + d = a + b + c + d$,

$f(-2) = a(-2)^3 + b(-2)^2 + c(-2) + d = -8a + 4b - 2c + d$.

Khi đó: $f(1) - f(-2) = (a + b + c + d) - (-8a + 4b - 2c + d) = 9a - 3b + 3c$

$= (9a + 3c) - 3b = 3(3a + c) - 3b = 3b - 3b = 0$ (do $b = 3a + c$).

Suy ra $f(1) = f(-2)$.

Suy ra $f(1) \cdot f(-2) = [f(1)]^2 = (a + b + c + d)^2$ là bình phương của một số nguyên.

Câu 34. (HSG 7 huyện Thanh Ba 2021 - 2022)

Cho đa thức: $P(x) = x \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x \right) - \left(-\frac{1}{2}x^4 + x^2 \right)$.

Chứng minh rằng: $P(x)$ nhận giá trị nguyên với mọi số x nguyên.

Lời giải

Ta có: $P(x) = x \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x \right) - \left(-\frac{1}{2}x^4 + x^2 \right)$

$$= \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^4 - x^2 = \frac{1}{2}(x^3 - x^2) = \frac{1}{2}x \cdot x(x-1).$$

Vì $x(x-1)$ là tích của hai số nguyên liên tiếp nên $x(x-1)$ chia hết cho 2.

Vậy $P(x)$ nhận giá trị nguyên với mọi x nguyên.

Câu 35. (HSG 7 huyện Vũ Thư 2020 - 2021)

Cho đa thức: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d là các số nguyên).

Biết $7a + b + c = 0$. Chứng minh rằng $f(3) \cdot f(-2)$ là số chính phương.

Lời giải

Ta có: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{Z}$)

Suy ra: $f(3) = 27a + 9b + 3c + d$ và $f(-2) = -8a + 4b - 2c + d$.

Suy ra: $f(3) - f(-2) = 35a + 5b + 5c = 5(7a + b + c) = 0$ (vì $7a + b + c = 0$).

Như vậy $f(3) = f(-2)$. Do đó $f(3) \cdot f(-2) = [f(3)]^2$.

Mà $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ nên $f(3) \in \mathbb{Z} \Rightarrow [f(3)]^2$ là số chính phương.

Vậy $f(3) \cdot f(-2)$ là số chính phương.

Câu 36. (HSG 7 huyện Cẩm Thủy, Thanh Hóa 2021 - 2022)

Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \in \mathbb{N}^*$ và $f(5) - f(4) = 2022$.

Chứng minh $f(7) - f(2)$ là hợp số.

Lời giải

Ta có: $f(5) - f(4) = (125a + 25b + 5c + d) - (64a + 16b + 4c + d) = 61a + 9b + c$.

Vì $f(5) - f(4) = 2022$ nên $61a + 9b + c = 2022$.

Lại có: $f(7) - f(2) = (343a + 49b + 7c + d) - (8a + 4b + 2c + d) = 335a + 45b + 5c$
 $= 305a + 45b + 5c + 30c = 5(61a + 9b + c) + 30c = 5 \cdot 2022 + 30c = 10(1011 + 3a)$.

Vì a nguyên dương nên $10(1011 + 3a) : 10$ và $10(1011 + 3a) > 10$.

Suy ra: $10(1011 + 3a)$ là hợp số.

Vậy $f(7) - f(2)$ là hợp số.

Câu 37. (HSG 7 huyện Mường La 2021 - 2022)

Tính giá trị của đa thức: $P = x^3 + x^2y - 2x^2 - xy - y^2 + 3y + x + 2017$ với $x + y = 2$.

Lời giải

Ta có: $P = x^3 + x^2y - 2x^2 - xy - y^2 + 3y + x + 2017$

$= x^2(x + y - 2) - x(x + y - 2) + x + y + 2017$

$= x^2(x + y - 2) - x(x + y - 2) + x + y + 2017$.

Vì $x + y = 2$ nên: $P(x) = x^2 \cdot 0 - x \cdot 0 + 2 + 2017 = 2019$.

Câu 38. (HSG 7 huyện Đức Thọ 2021 - 2022)

Cho $f(x) = x^2 + mx - 1$, $g(x) = x^2 + (m + 1)x + 2$. Tìm giá trị m biết $f(1) = g(-1)$.

Lời giải

Ta có: $f(1) = g(-1)$ nên

$$1^2 + m \cdot 1 - 1 = (-1)^2 + (m + 1) \cdot (-1) + 2$$

$$m = -m + 2$$

$$\Rightarrow m = 1.$$

Câu 39. (HSG 7 huyện Yên Mỹ 2021 - 2022)

Cho hai đa thức:

$$P(x) = x^5 - 2x^3 + 3x^4 - 9x^2 + 11x - 6 \text{ và } Q(x) = 3x^4 + x^5 - 2(x^3 + 4) - 10x^2 + 9x.$$

Tính $M(x) = P(x) - Q(x)$.

Tính giá trị của đa thức $M(x)$ khi $|x+2| = 3$.

Lời giải

$$\begin{aligned} M(x) &= P(x) - Q(x) \\ &= (x^5 - 2x^3 + 3x^4 - 9x^2 + 11x - 6) - (3x^4 + x^5 - 2(x^3 + 4) - 10x^2 + 9x) \\ &= (x^5 - 2x^3 + 3x^4 - 9x^2 + 11x - 6) - (x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 9x - 8) \\ &= x^2 + 2x + 2. \end{aligned}$$

Khi $|x+2| = 3$ suy ra $x+2 = 3$ hoặc $x+2 = -3$. Hay $x = 1$ hoặc $x = -5$.

Với $x = 1$ ta có $M(x) = x^2 + 2x + 2 = 1^2 + 2.1 + 2 = 5$.

Với $x = -5$ ta có $M(x) = (-5)^2 + 2.(-5) + 2 = 17$.

Câu 40. (HSG 7 huyện Tam Nông 2021 - 2022)

Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn: $f(x) + x \cdot f(-x) = x + 1$ với mọi giá trị của x . Tính $f(1)$.

Lời giải

Xét đa thức $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + x \cdot f(-x) = x + 1$ với mọi giá trị của x .

Khi $x = 1$, ta có: $f(1) + 1 \cdot f(-1) = 1 + 1$ hay $f(1) + f(-1) = 2$. (1)

Khi $x = -1$, ta có: $f(-1) + (-1) \cdot f(1) = -1 + 1$ hay $f(-1) - f(1) = 0$. (2)

Lấy (1) trừ (2) vế với vế, ta được: $2f(1) = 2 \Rightarrow f(1) = 1$.

Vậy $f(1) = 1$.

Câu 41. (HSG 7 huyện Thiệu Hóa 2020 - 2021)

Cho đa thức: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \in \mathbb{N}^*$ và $f(5) - f(4) = 2022$.

Chứng minh: $f(7) - f(2)$ là hợp số.

Lời giải

Xét đa thức: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Ta có: } f(5) - f(4) = (a.5^3 + b.5^2 + c.5 + d) - (a.4^3 + b.4^2 + c.4 + d)$$

$$\Rightarrow f(5) - f(4) = (125a + 25b + 5c + d) - (64a + 16b + 4c + d)$$

$$\Rightarrow f(5) - f(4) = 61a + 9b + c$$

$$\text{Mà } f(5) - f(4) = 2022$$

$$\Rightarrow 61a + 9b + c = 2022 \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } f(7) - f(2) = (a.7^3 + b.7^2 + c.7 + d) - (a.2^3 + b.2^2 + c.2 + d)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(7) - f(2) &= (343a + 49b + 7c + d) - (8a + 4b + 2c + d) \\ \Rightarrow f(7) - f(2) &= 335a + 45b + 5c \\ \Rightarrow f(7) - f(2) &= 5(67a + 9b + c) = 5(6a + 61a + 9b + c) \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra: $f(7) - f(2) = 5 \cdot (6a + 2022)$ là hợp số.
 Vậy $f(7) - f(2)$ là hợp số.

Câu 42. (HSG 7 thị xã Kinh Môn 2021 - 2022)

Tính giá trị của biểu thức: $C = 2x^5 - 5y^3 + 1980$ tại x, y thỏa mãn: $|x-1| + (y+2)^{20} = 0$

Lời giải

Do $|x-1| \geq 0; (y+2)^{20} \geq 0$ nên $|x-1| + (y+2)^{20} \geq 0$ với mọi x, y

Kết hợp $|x-1| + (y+2)^{20} = 0$ suy ra $\begin{cases} |x-1| = 0 \\ (y+2)^{20} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$

Giá trị của biểu thức: $C = 2x^5 - 5y^3 + 1980$ tại $x = 1; y = -2$ là:

$$C = 2 \cdot 1^5 - 5 \cdot (-2)^3 + 1980 = 2022$$

Vậy $C = 2022$.

Câu 43. (HSG 7 huyện Hương Khê 2021 - 2022)

Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$. Trong đó a, b, c là các hằng số thỏa mãn $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}$ và

$a \neq 0$. Tính $\frac{P(-2) - 3P(1)}{a}$.

Lời giải

Ta có $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} \Rightarrow b = 2a; c = 3a$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{P(-2) - 3P(1)}{a} &= \frac{4a - 2b + c - 3(a + b + c)}{a} = \frac{a - 5b - 2c}{a} \\ &= \frac{a - 5 \cdot 2a - 2 \cdot 3a}{a} = \frac{-15a}{a} = -15. \end{aligned}$$

Câu 44. (HSG 7 huyện Tiên Hải 2021 - 2022)

Cho hàm số $y = f(x) = (m+1)x$ với $m \neq -1$

a) Với $m = 2$. Hãy tính $f(2022)$.

b) Tìm giá trị của m để $f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1 \cdot x_2)$ với $x_1; x_2$ là các số thực khác 0.

Lời giải

a) Với $m = 2$ thỏa mãn $m \neq -1 \Rightarrow f(x) = 3x$

Ta có $f(2022) = 3 \cdot 2022 = 6066$

Vậy với $m = 2$ thì $f(2022) = 6066$

b) Ta có $f(x_1) = (m+1)x_1, f(x_2) = (m+1)x_2$

$$\Rightarrow f(x_1) \cdot f(x_2) = (m+1)^2 x_1 \cdot x_2$$

$$\text{Mà } f(x_1 \cdot x_2) = (m+1)x_1 \cdot x_2$$

$$\text{Đề } f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1 \cdot x_2) \Rightarrow (m+1)^2 x_1 x_2 = (m+1)x_1 x_2$$

Do $x_1; x_2$ là các số thực khác 0, $m \neq -1$

$$\Rightarrow m+1=1 \Rightarrow m=0 \text{ (thỏa mãn } m \neq -1)$$

Vậy đề $f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1 \cdot x_2)$ thì $m=0$.

Câu 45. (HSG 7 trường THCS Nguyễn Trung Trực 2018 - 2019)

Cho đa thức: $f(x) = x^{17} - 2000x^{16} + 2000x^{15} - 2000x^{14} + \dots + 2000x - 1$

Tính giá trị của đa thức tại $x = 1999$.

Lời giải

$$f(x) = x^{17} - 1999x^{16} - x^{16} + 1995x^{15} + x^{15} - 1999x^{14} - x^{14} + \dots + 1999x + x - 1$$

$$\begin{aligned} f(1999) &= 1999^{17} - 1999^{17} - 1999^{16} + 1999^{16} + 1999^{15} - 1999^{15} + \dots + 1999^2 + 1999 - 1 \\ &= 1999 - 1 = 1998. \end{aligned}$$

Vậy giá trị của biểu thức là $f(1999) = 1998$.

Câu 46. (HSG 7 trường THCS Bảo Phương 2018 - 2019)

Cho đa thức $f(x) = x^{14} - 14x^{13} + 14x^{12} - \dots + 13x^2 - 14x + 14$. Tính $f(13)$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{14} - (13+1)x^{13} + (13+1)x^{12} - \dots + (13+1)x^2 - (13+1)x + (13+1) \\ &= x^{14} - (x+1)x^{13} + (x+1)x^{12} - \dots + (x+1)x^2 - (x+1)x + (x+1) \\ &= x^{14} - x^{14} - x^{13} + x^{13} + x^{12} - \dots + x^3 + x^2 - x^2 - x + x + 1 \\ &= 1 \text{ (Vì thay } 14 = 13 + 1 = x + 1). \end{aligned}$$

Vậy $f(13) = 1$.

Câu 47. (HSG 7 trường THCS Trần Thiện 2018 - 2019)

Tính giá trị các biểu thức:

a) $A = 2a^2 - 4|a| + 3a - 1$ lần lượt tại $a = \frac{2}{3}$; $a = -2$.

b) $B = 2x^2 - 3xy - 6y^2$ tại $|x| = \frac{1}{2}$ và $y = \frac{2}{3}$.

Lời giải

a) Với $a = \frac{2}{3}$ thì $A = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \left|\frac{2}{3}\right| + 3 \cdot \frac{2}{3} - 1 \Rightarrow A = \frac{-7}{9}$

Vậy $A = \frac{-7}{9}$ tại $a = \frac{2}{3}$.

Với $a = -2$ thì $A = 2 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot |-2| + 3 \cdot (-2) - 1 \Rightarrow A = -7$

Vậy $A = -7$ tại $a = -2$.

a) TH1: $x = \frac{1}{2}$ và $y = \frac{2}{3}$ thì $B = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow B = -\frac{19}{6}$

Vậy $B = -\frac{19}{6}$ tại $x = \frac{1}{2}; y = \frac{2}{3}$.

TH2: $x = -\frac{1}{2}$ và $y = \frac{2}{3}$ thì $B = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{3} - 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow B = -\frac{7}{6}$

Vậy $B = -\frac{7}{6}$ tại $x = -\frac{1}{2}; y = \frac{2}{3}$.

Câu 48. (HSG 7 huyện Thường Tín 2018 - 2019)

Cho $f(x) = x(x^{19} - x^5 - x^{2018}); g(x) = x^{2019} - x^{20} + 9 + x^2(x^4 + x^2 + 2)$

a) Tính $k(x) = f(x) + g(x)$

b) Tính giá trị của $k(x)$ tại $x = \left(2 - \frac{5}{3} + \frac{7}{6} - \frac{9}{10} + \frac{11}{15} - \frac{13}{21} + \frac{15}{28} - \frac{17}{36} + \frac{19}{45}\right) \cdot \frac{5}{6}$

c) Chứng minh rằng: đa thức $k(x)$ không nhận giá trị 2019 với mọi giá trị của x nguyên ?

Lời giải

a) $k(x) = f(x) + g(x)$

$$k(x) = x(x^{19} - x^5 - x^{2018}) + x^{2019} - x^{20} + 9 + x^2(x^4 + x^2 + 2)$$

$$k(x) = x^4 + 2x^2 + 9.$$

b) Xét $2 - \frac{5}{3} + \frac{7}{6} - \frac{9}{10} + \frac{11}{15} - \frac{13}{21} + \frac{15}{28} - \frac{17}{36} + \frac{19}{45}$

$$= 2 \left(1 - \frac{5}{6} + \frac{7}{12} - \frac{9}{20} + \frac{11}{30} - \frac{13}{42} + \frac{15}{56} - \frac{17}{72} + \frac{19}{90} \right)$$

$$= 2 \cdot \left(1 - \frac{2+3}{6} + \frac{3+4}{12} - \frac{4+5}{20} + \frac{5+6}{30} - \frac{6+7}{42} + \frac{7+8}{56} - \frac{8+9}{72} + \frac{9+10}{90} \right)$$

$$= 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \right)$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{10} \right) = 2 \cdot \frac{6}{10} = \frac{6}{5}$$

Khi đó $x = \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{6} = 1$ nên $k(1) = (1)^4 + 2 \cdot (1)^2 + 9 = 12$.

b) Xét $k(x) = x^4 + 2x^2 + 9 = x^2(x^2 + 2) + 9$

Giả sử $k(x) = 2019 \Rightarrow x^2(x^2 + 2) = 2010$

Vì x nguyên nên 2010 chẵn và $x^2; x^2 + 2$ cùng tính chẵn (hoặc lẻ) $\Rightarrow x^2; x^2 + 2$ là hai số chẵn liên tiếp nên $x^2(x^2 + 2):4$, còn 2010 không chia hết cho 4.

Vậy giả sử là sai hay $k(x)$ không nhận giá trị 2019 với mọi x nguyên.

Câu 49. (HSG 7 huyện Rạch Giá 20198 - 2019)

Cho đa thức $f(x)$ xác định với mọi x thỏa mãn: $x.f(x+2) = (x^2 - 9)f(x)$.

- 1) Tính $f(5)$.
- 2) Chứng minh rằng $f(x)$ có ít nhất 3 nghiệm.

Lời giải

1) Ta có: $x = 3$ nên $3.f(3+2) = (3^2 - 9)f(3) \Rightarrow f(5) = 0$

2) Với $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow x = 0$ là một nghiệm

Với $x = 3 \Rightarrow f(5) = 0 \Rightarrow x = 5$ là một nghiệm

Với $x = -3 \Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow x = -1$ là một nghiệm

Vậy $f(x)$ có ít nhất là 3 nghiệm.

Câu 50. (HSG 7 trường THCS Đào Duy Từ 2018 - 2019)

Cho đa thức $A = 2x.(x-3) - x.(x-7) - 3.(x-673)$. Tính giá trị của A khi $x = 2$.

Tìm x để $A = 2019$.

Lời giải

Ta có: $A = 2x^2 - 6x - x^2 + 7x - 3x + 2019 = x^2 - 2x + 2019$

+) Tính giá trị của A khi $x = 2$, thay $x = 2$ vào A , ta được:

$$A = 2^2 - 2.2 + 2019 = 2019$$

Vậy $x = 2$ thì $A = 2019$.

+) Tìm x để $A = 2019$

$$A = 2019 \Rightarrow x^2 - 2x + 2019 = 2019$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy $A = 2019$ thì $x \in \{0; 2\}$.

Câu 51. (HSG 7 trường THCS Đáp Cầu 2018 - 2019)

Cho đa thức $A(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{99} + x^{100}$

a) Chứng minh rằng $x = -1$ là nghiệm của $A(x)$.

b) Tính giá trị của đa thức $A(x)$ tại $x = \frac{1}{2}$.

Lời giải

a) $A(-1) = (-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^{99} + (-1)^{100}$

$$= -1 + 1 - 1 + 1 + \dots - 1 + 1 = 0 \text{ (vì có 50 số 1 và 50 số -1)}$$

Suy ra $x = -1$ là nghiệm của đa thức $A(x)$.

b) Với $x = \frac{1}{2}$ thì giá trị của đa thức $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2A &= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} \\ \Rightarrow 2A &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}}\right) + 1 - \frac{1}{2^{100}} \\ \Rightarrow 2A &= A + 1 - \frac{1}{2^{100}} \\ \Rightarrow A &= 1 - \frac{1}{2^{100}}. \end{aligned}$$

Câu 52. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn, trường Đào Duy Từ; huyện Nam Trà My, trường Trà Ka 2018-2019)

Cho đa thức $A = 2x(x-3) - x(x-7) - 3(x-673)$. Tính giá trị của A khi $x = 2$. Tìm x để $A = 2019$

Lời giải

Ta có: $A = 2x^2 - 6x - x^2 + 7x - 3x + 2019 = x^2 - 2x + 2019$

+) Tính giá trị của A khi $x = 2$, thay $x = 2$ vào A , ta được:

$$A = 2^2 - 2 \cdot 2 + 2019 = 2019$$

+) Tìm x để $A = 2019$

$$A = 2019 \Rightarrow x^2 - 2x + 2019 = 2019 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Câu 53. (HSG 7 2018-2019)

a) Cho hai đa thức:

$$f(x) = x^5 - 3x^2 + 7x^4 - 9x^3 + x^2 - \frac{1}{4}x; \quad g(x) = 5x^4 - x^5 + x^2 - 2x^3 + 3x^2 - \frac{1}{4}.$$

Tính $f(x) + g(x)$ và $f(x) - g(x)$

b) Tính giá trị của đa thức sau: $A = x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \dots + x^{100}$ tại $x = -1$

Lời giải

$$a) f(x) + g(x) = 12x^4 - 11x^3 + 2x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$

$$f(x) - g(x) = 2x^5 + 2x^4 - 7x^3 - 6x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

$$b) A = (-1)^2 + (-1)^4 + (-1)^6 + \dots + (-1)^{100} = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = 50 \text{ (50 số hạng).}$$

Câu 54. (HSG 7 Huyện Thăng Bình 2018-2019)

Cho đa thức $A = 2x(x-3) - x(x-7) - 5(x-403)$

a) Tính giá trị của A khi $x = 4$.

b) Tìm x để $A = 2015$.

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } A = 2x(x-3) - x(x-7) - 5(x-403) = x^2 - 4x + 2015$$

Với $x = 4$ ta được $A = 2015$.

b) $A = 2015$

Suy ra

$$x^2 - 4x + 2015 = 2015$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Vậy khi $x \in \{0; 4\}$ thì $A = 2015$.

Câu 55. (HSG 7 huyện Hoàng Hoá 2018-2019)

Tính giá trị biểu thức: $C = x^{15} - 2019x^{14} + 2019x^{13} - 2019x^{12} + \dots + 2019x - 1$ với $x = 2018$

Lời giải

Ta có: $2019 = 2018 + 1 = x + 1$

Do đó: $C = x^{15} - (x+1)x^{14} + (x+1)x^{13} - (x+1)x^{12} + \dots + (x+1)x - 1$

$$= x - 1 = 2018 - 1 = 2017$$

Vậy $C = 2017$

Câu 56. (HSG 7 huyện Kim Thành 2018-2019)

Cho $|x - 2| + |y - 1| + (x + y - z - 2)^{2016} = 0$. Tính giá trị của $A = 5x^2y^{2016}z^{2017}$

Lời giải

Vì $|x - 2| \geq 0 \forall x; |y - 1| \geq 0 \forall y; (x + y - z - 2)^{2016} \geq 0 \forall x, y, z$

Do đó $|x - 2| + |y - 1| + (x + y - z - 2)^{2016} = 0$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} |x - 2| = 0 \\ |y - 1| = 0 \\ (x + y - z - 2)^{2016} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y - 1 = 0 \\ x + y - z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Do đó $A = 5 \cdot 2^2 \cdot 1^{2016} \cdot 1^{2017} = 20$.

Vậy $A = 20$.

Câu 57. (HSG 7 trường THCS Thanh Mai 2018-2019)

Tính giá trị các biểu thức: $B = 2x^2 - 3xy - 6y^2$ tại $|x| = \frac{1}{2}$ và $y = \frac{2}{3}$

Lời giải

Ta có $|x| = \frac{1}{2}$ suy ra $x \in \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\}$

Do đó:

* Với $x = \frac{1}{2}$ và $y = \frac{2}{3} \Rightarrow B = -\frac{19}{6}$

* Với $x = -\frac{1}{2}$ và $y = \frac{2}{3} \Rightarrow B = -\frac{7}{6}$

Câu 58. (HSG 7 huyện Việt Yên 2018-2019)

Cho đa thức $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Biết rằng $f(1) = f(-1); f(2) = f(-2)$. Chứng minh $f(x) = f(-x)$ với mọi x

Lời giải

$$f(1) = a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0; f(-1) = a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0$$

Do $f(1) = f(-1)$ nên $a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0$

$$\Rightarrow a_3 + a_1 = -a_3 - a_1$$

$$\Rightarrow a_3 + a_1 = 0 \quad (1)$$

Tương tự $f(2) = 16a_4 + 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0$

$$f(-2) = 16a_4 - 8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + a_0$$

Vì $f(2) = f(-2)$ nên $4a_3 + a_1 = 0 \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow a_1 = a_3 = 0$

Vậy $f(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0$

$$f(-x) = a_4(-x)^4 + a_2(x)^2 + a_0 = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 \text{ với mọi } x.$$

Vậy $f(x) = f(-x)$ với mọi x

Câu 59. (HSG 7 Huyện Kim Thành 2018-2019)

Xác định tổng các hệ số của đa thức $f(x) = (5 - 6x + x^2)^{2016} \cdot (5 + 6x + x^2)^{2017}$

Lời giải

Vì tổng các hệ số của đa thức $f(x)$ bằng $f(1)$.

Mà đa thức $f(x) = (5 - 6x + x^2)^{2016} \cdot (5 + 6x + x^2)^{2017}$

$$\text{Có } f(1) = (5 - 6 \cdot 1 + 1^2)^{2016} \cdot (5 + 6 \cdot 1 + 1^2)^{2017} = 0$$

Vậy đa thức đã cho có tổng các hệ số bằng 0.

Câu 60. (HSG 7 huyện Đà Nẵng, trường THCS Nguyễn Khuyến 2022 - 2023)

Cho đa thức $P = 3x^3 + 4x^2 - 8x + 1$. Tính giá trị của P biết $x^2 + x - 3 = 0$

Lời giải

Ta có: $x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 + x = 3 \quad (1)$

$$P = 3x^3 + 4x^2 - 8x + 1$$

$$= (3x^3 + 3x^2) + (x^2 + x) - 9x + 1$$

$$= 3x(x^2 + x) + (x^2 + x) - 9x + 1 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được: $P = 9x + 3 - 9x + 1 = 4$

Vậy $P = 4$.

Câu 61. (HSG 7 huyện 2022 - 2023)

Cho đa thức $f(x) = 2 - x^2$. Hãy tính $f(0); f\left(-\frac{1}{2}\right)$

Lời giải

$$f(0) = 2 - 0^2 = 2;$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}$$

Câu 62. (HSG 7 huyện 2022 - 2023)

Tính giá trị của đa thức sau: $A = x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \dots + x^{100}$ tại $x = -1$.

Lời giải

$$A = (-1)^2 + (-1)^4 + (-1)^6 + \dots + (-1)^{100} = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = 50 \text{ (có 50 số hạng)}$$

Câu 63. (HSG 7 huyện 2022 - 2023)

Cho đa thức $A(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{99} + x^{100}$. Tính giá trị của đa thức $A(x)$ tại $x = \frac{1}{2}$

Lời giải

Với $x = \frac{1}{2}$ thì giá trị của đa thức là

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}}$$

$$\Rightarrow 2A = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}}$$

$$\Rightarrow 2A = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}}\right) + 1 - \frac{1}{2^{100}}$$

$$\Rightarrow 2A = A + 1 - \frac{1}{2^{100}}$$

$$\Rightarrow A = 1 - \frac{1}{2^{100}}$$

Vậy $A = 1 - \frac{1}{2^{100}}$

Câu 64. (HSG 7 huyện 2022 - 2023)

Cho $f(x)$ là hàm số xác định với mọi x thỏa mãn điều kiện $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$ và $f(2) = 10$. Tính $f(32)$

Lời giải

Vì $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$ nên:

$$f(4) = f(2 \cdot 2) = f(2) \cdot f(2) = 10 \cdot 10 = 100$$

$$f(16) = f(4 \cdot 4) = f(4) \cdot f(4) = 100 \cdot 100 = 10000$$

$$f(32) = f(16 \cdot 2) = f(16) \cdot f(2) = 10000 \cdot 10 = 100000$$

Vậy $f(32) = 100000$

Câu 65. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc 2022 - 2023)

Cho biểu thức: $M = a + 2ab - b$. Tính giá trị của M với $|a| = 1,5$; $b = -0,75$

Lời giải

Ta có: $|a|=1,5 \Rightarrow \begin{cases} a=1,5 \\ a=-1,5 \end{cases}$

Với $a=1,5; b=-0,75 \Rightarrow M=a+2ab-b=1,5+2.1,5.(-0,75)=0$

Với $a=-1,5; b=-0,75 \Rightarrow M=a+2ab-b=\frac{3}{2}$

Câu 66. (HSG 7 huyện Vị Thanh 2017 - 2018)

Cho biểu thức: $P = x - 4xy + y$. Tính giá trị của P với $|x|=1,5; y=-0,75$

Lời giải

Ta có: $|x|=1,5 \Rightarrow \begin{cases} x=1,5 \\ x=-1,5 \end{cases}$

+) Với $x=1,5; y=-0,75$ ta có:

$$P = 1,5 - 4.1,5.(-0,75) - 0,75$$

$$= 1,5.(1+3) - 0,75 = 5,25$$

+) Với $x=-1,5; y=-0,75$ ta có:

$$P = -1,5 - 4(1,5).(-0,75) - 0,75 = -6,75$$

Câu 67. (HSG 7 huyện Cẩm Phả 2017 - 2018)

Cho đa thức $f(x) = x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \dots - 101x + 101$. Tính $f(100)$

Lời giải

Ta có: $f(x) = x^{10} - 101x^9 + 101x^8 - 101x^7 + \dots - 101x + 101$

$$= x^{10} - 100x^9 - x^9 + 100x^8 + x^8 - \dots - 100x^3 - x^3 + 100x^2 + x^2 - 100x - x + 101$$

$$= (x^{10} - 100x^9) - (x^9 - 100x^8) + (x^8 - 100x^7) \dots - (x^3 - 100x^2) + (x^2 - 100x) - x + 101$$

$$= x^9(x-100) - x^8(x-100) + x^7(x-100) \dots - x^2(x-100) + x(x-100) - x + 101$$

$$= (x-100)(x^9 - x^8 + x^7 \dots - x^2 + x) - x + 101$$

Với $x=100$ ta có:

$$f(x) = (100-100)(100^{21} - 100^{20} + \dots - 100^2 + 100) - 100 + 101$$

$$= 0.(100^{21} - 100^{20} + \dots - 100^2 + 100) - 100 + 101$$

$$= 0 - 100 + 101 = 1$$

Vậy $f(x)=1$ với $x=100$

Câu 68. (HSG 7 huyện Mỹ Xuyên 2017 - 2018)

Cho đa thức $B(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{99} + x^{100}$. Tính giá trị của đa thức $B(x)$ tại $x = \frac{1}{2}$

Lời giải

Thay $x = \frac{1}{2}$ vào đa thức $B(x)$ ta có:

$$B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}}$$

$$2B = 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \right)$$

$$2B = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}}$$

$$2B = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \right) + 2 - \frac{1}{2^{100}}$$

$$\Rightarrow 2B = B + 2 - \frac{1}{2^{100}}$$

$$\Rightarrow B = 2 - \frac{1}{2^{100}}$$

$$\text{Vậy } B = 2 - \frac{1}{2^{100}}$$

Câu 69. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2017 - 2018)

Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$

a) Biết $f(0) = 0$, $f(1) = 2013$ và $f(-1) = 2012$. Tính a, b, c .

b) Chứng minh rằng nếu $f(1) = 2012$, $f(-2) = f(3) = 2036$ thì đa thức $f(x)$ vô nghiệm.

Lời giải

a) Vì $f(0) = 0$ nên $c = 0$;

$$f(1) = 2013 \text{ nên } a + b + c = 2013$$

$$f(-1) = 2012 \text{ nên } a - b + c = 2012$$

$$\text{Khi đó: } a = \frac{4025}{2}; b = \frac{1}{2}; c = 0$$

b) Tính được:

$$2012 = f(1) = a + b + c \quad (1)$$

$$2036 = f(-2) = 4a - 2b + c \quad (2)$$

$$2036 = f(3) = 9a + 3b + c \quad (3)$$

Từ (1), (2) có $a - b = 8$

Từ (2), (3) có $a + b = 0 \Rightarrow a = 4, b = 4$

$$\text{N như vậy } f(x) = 4x^2 - 4x + 2012 = (2x - 1)^2 + 2011 > 0 (\forall x)$$

Vậy đa thức vô nghiệm.

Câu 70. (HSG 7 huyện Bồ Trách 2017 - 2018)

Cho hàm số $y = f(x) = -4x^3 + x$

a) Tính $f(0)$; $f(-0,5)$

b) Chứng minh : $f(-a) = -f(a)$

Lời giải

$$\text{a) } f(0) = -4 \cdot 0^3 + 0 = 0$$

$$f(-0,5) = -4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2} = 0$$

$$b) f(-a) = -4 \cdot (-a)^3 - a = 4a^3 - a$$

$$-f(a) = -[-4a^3 + a] = 4a^3 - a$$

$$\text{Khi đó } f(-a) = -f(a)$$

Câu 71. (HSG 7 huyện Triệu Sơn 2015 - 2016)

Tính giá trị đa thức sau:

$$a) B = 2x^2 - 3x + 5 \text{ với } |x| = \frac{1}{2};$$

$$b) C = 2x - 2y + 13x^3y^2(x - y) + 15(y^2x - x^2y) + \left(\frac{2015}{2016}\right)^0, \text{ biết } x - y = 0.$$

Lời giải

$$a) \text{ Vì } |x| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Với } x = \frac{1}{2} \Rightarrow B = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} + 5 = 4$$

$$\text{Với } x = -\frac{1}{2} \Rightarrow B = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 5 = 7$$

$$\text{Vậy } B = 4 \text{ khi } x = \frac{1}{2}$$

$$B = 7 \text{ khi } x = -\frac{1}{2}$$

$$b) C = 2x - 2y + 13x^3y^2(x - y) + 15(y^2x - x^2y) + \left(\frac{2015}{2016}\right)^0$$

$$= 2(x - y) + 13x^3y^2(x - y) - 15xy(x - y) + 1 = 1 \text{ (do } x - y = 0).$$

Câu 72. (HSG 7 huyện Tam Hưng 2013 - 2014)

Cho đa thức $f(x) = x^{2015} - 2000x^{2014} + 2000x^{2013} - 2000x^{2012} + \dots + 2000x - 1$.

Tính giá trị của đa thức tại $x = 1999$.

Lời giải

Ta có

$$f(x) = x^{2015} - (1999 + 1)x^{2014} + (1999 + 1)x^{2013} - (1999 + 1)x^{2012} + \dots + (1999 + 1)x - 1$$

Thay $1999 = x$ vào đa thức, ta được

$$f(x) = x^{2015} - (x + 1)x^{2014} + (x + 1)x^{2013} - (x + 1)x^{2012} + (x + 1)x^{2011} - (x + 1)x^{2010} + \dots - (x + 1)x^2$$

$$f(x) = x^{2015} - x^{2015} - x^{2014} + x^{2014} - x^{2013} + x^{2013} - x^{2012} + x^{2012} - \dots + x^2 - x^2 + x - 1$$

$$= x - 1$$

$$\text{Suy ra } f(1999) = 1999 - 1 = 1998.$$

Câu 73. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2014 - 2015)

Cho đa thức $f(x) = ax^5 + bx^3 + 2014x + 1$, biết: $f(2015) = 2$. Hãy tính $f(-2015)$.

Lời giải

Ta có: $f(x) = ax^5 + bx^3 + 2014x + 1$

$$\Rightarrow f(-x) = a(-x)^5 + b(-x)^3 + 2014(-x) + 1 = -ax^5 - bx^3 - 2014x + 1$$

$$\Rightarrow f(x) + f(-x) = 2 \Rightarrow f(2015) + f(-2015) = 2$$

$$\Rightarrow f(-2015) = 2 - f(2015) = 2 - 2 = 0$$

Vậy $f(-2015) = 0$.

Câu 74. (HSG 7 cấp trường 2014 - 2015)

Cho đa thức $f(x)$ xác định với mọi x thuộc \mathbb{R} . Biết rằng với mọi x ta đều có

$$f(x) + 3.f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2. \text{ Tính } f(2).$$

Lời giải

Vì với mọi x ta đều có $f(x) + 3.f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$ nên thay $x = 2, x = \frac{1}{2}$ vào $f(x) + 3.f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$

ta được:

$$+) f(2) + 3.f\left(\frac{1}{2}\right) = 4$$

$$+) f\left(\frac{1}{2}\right) + 3.f(2) = \frac{1}{4}$$

$$\text{Vì } f\left(\frac{1}{2}\right) + 3.f(2) = \frac{1}{4} \Rightarrow 9.f(2) + 3.f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\text{Có } \left(9.f(2) + 3.f\left(\frac{1}{2}\right)\right) - \left(f(2) + 3.f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{3}{4} - 4$$

$$\Rightarrow 8.f(2) = \frac{-13}{4} \Rightarrow f(2) = \frac{-13}{32}$$

Vậy $f(2) = \frac{-13}{32}$.

Câu 75. (HSG 7 huyện Văn Bàn 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức: $A = 2x^2 - 3x + 1$ với $|x| = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Vì $|x| = \frac{1}{2}$ nên $x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = -\frac{1}{2}$.

$$+ \text{ Với } x = \frac{1}{2} \text{ thì } A = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\frac{1}{2} + 1 = 2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 1 = 0.$$

$$+ \text{ Với } x = -\frac{1}{2} \text{ thì } A = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 1 = 3.$$

Vậy $A = 0$ hoặc $A = 3$ khi $|x| = \frac{1}{2}$.

Câu 76. (HSG 7 huyện Thanh Thủy 2022 - 2023)

Cho $P(x)$ là một đa thức bậc 4 có hệ số cao nhất là 1 thỏa mãn điều kiện: $P(1) = 3$; $P(3) = 11$; $P(5) = 27$. Tính $P(-2) + 7P(6)$.

Lời giải

Xét đa thức $f(x) = x^2 + 2$ thỏa mãn $f(1) = 3$; $f(3) = 11$; $f(5) = 27$.

Đặt $Q(x) = P(x) - f(x)$, khi đó $Q(x) = P(x) - (x^2 + 2)$

$$\text{Ta có: } Q(1) = P(1) - (1^2 + 2) = 3 - 3 = 0$$

$$Q(3) = P(3) - (3^2 + 2) = 11 - 11 = 0$$

$$Q(5) = P(5) - (5^2 + 2) = 27 - 27 = 0$$

Suy ra $x = 1$; $x = 3$; $x = 5$ là các nghiệm của đa thức $Q(x)$, do đó :

$$Q(x) = (x-1)(x-3)(x-5)(x-m)$$

$$\text{Suy ra } P(x) = (x-1)(x-3)(x-5)(x-m) + x^2 + 2$$

$$\text{Khi đó } P(-2) = (-2-1)(-2-3)(-2-5)(-2-m) + (-2)^2 + 2 = 216 + m$$

$$P(6) = (6-1)(6-3)(6-5)(6-m) + 6^2 + 2 = 128 - 15m$$

$$\text{Vậy } P(-2) + 7P(6) = 216 + 105m + 7(128 - 15m) = 1112$$

Câu 77. (HSG 7 huyện Trực Ninh 2022 - 2023)

Cho đa thức $f(x) = x^5 - 2024x^4 + 2022x^3 + 2024x^2 - 2022x - 2023$. Tính $f(2023)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } f(x) = x^5 - 2024x^4 + 2022x^3 + 2024x^2 - 2022x - 2023$$

Với $x = 2023$ thì $x - 2023 = 0$; $x + 1 = 2024$ và $x - 1 = 2022$

$$f(x) = x^5 - (x+1)x^4 + (x-1)x^3 + (x+1)x^2 - (x-1)x - 2023$$

$$f(x) = x^5 - x^5 - x^4 + x^4 - x^3 + x^3 + x^2 - x^2 + x - 2023$$

$$f(x) = x - 2023$$

$$f(2023) = 2023 - 2023 = 0$$

$$\text{Vậy } f(2023) = 0.$$

Câu 78. (HSG 7 huyện Nam Đàn 2022 - 2023)

Cho $x - y = -3$. Hãy tính giá trị của biểu thức:

$$P = x^3 + 3x^2 + y^2 - x^2y - xy + x - 4y + 2023$$

Lời giải

$$P = x^3 + 3x^2 + y^2 - x^2y - xy + x - 4y + 2023$$

$$P = (x^3 - xy + x) - (x^2y - y^2 + y) + (3x^2 - 3y + 3) + 2020$$

$$P = x.(x^2 - y + 1) - y.(x^2 - y + 1) + 3.(x^2 - y + 1) + 2020$$

$$P = (x - y + 3).(x^2 - y + 1) + 2020$$

$$P = (-3 + 3).(x^2 - y + 1) + 2020$$

$$P = 2020.$$

Câu 79. (HSG 7 huyện Tam Dương 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức: $C = 2x^5 - 5y^3 + 2023$ tại các giá trị của x, y thỏa mãn $|x+1| + (y+2)^{2024} = 0$

Lời giải

Ta có $|x+1| \geq 0; (y+2)^{2024} \geq 0$ với mọi x, y

Nên $|x+1| + (y+2)^{2024} = 0$ khi $|x+1| = 0$ hoặc $(y+2)^{2024} = 0$

Suy ra $x = -1; y = -2$

Vậy $C = 2x^5 - 5y^3 + 2023 = 2.(-1)^5 - 5.(-2)^3 + 2023 = 1981.$

Câu 80. (HSG 7 huyện Tam Dương 2022 - 2023)

Cho hai đa thức $A = x^3 + 4x^2 - 5x - 1$ và $B = x^4 - x^3 - x^2 - 7x - 1$

Tìm đa thức P thỏa mãn $P = 2A - \{A - [A - (A - B)] + 2B\}$ và tính $P(0), P(-2)$

Lời giải

Ta có $P = 2A - \{A - [A - (A - B)] + 2B\}$

$$= 2A - \{A - [A - A + B] + 2B\}$$

$$= 2A - \{A - B + 2B\}$$

$$= 2A - \{A + B\}$$

$$= 2A - A - B$$

$$= A - B$$

Thay $A = x^3 + 4x^2 - 5x - 1; B = x^4 - x^3 - x^2 - 7x - 1$ ta có:

$$P = x^3 + 4x^2 - 5x - 1 - (x^4 - x^3 - x^2 - 7x - 1)$$

$$= x^3 + 4x^2 - 5x - 1 - x^4 + x^3 + x^2 + 7x + 1$$

$$= -x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 2x$$

Khi đó:

$$P(0) = -0^4 + 2.0^3 + 5.0^2 + 2.0 = 0$$

$$P(2) = -2^4 + 2.3^3 + 5.2^2 + 2.2 = 62$$

Câu 81. (HSG 7 Đề mũ nhọn 2022 - 2023)

Cho đa thức $f(x) = x^6 + 2023x^5 - 2023x^4 + 2023x^3 - 2023x^2 + 2023x + 2023.$

Tính $f(-2024).$

Lời giải

$$f(x) = x^6 + 2023x^5 - 2023x^4 + 2023x^3 - 2023x^2 + 2023x + 2023$$

$$= x^6 + 2024x^5 - x^5 - 2024x^4 + x^4 + 2024x^3 - x^3 - 2024x^2 + x^2 + 2024x - x + 2023$$

$$= x^5(x + 2024) - x^4(x + 2024) + x^3(x + 2024) - x^2(x + 2024) + x(x + 2024) - x + 2023$$

Do đó $f(-2024) = 2024 + 2023 = 4047$

Câu 82. (HSG 7 huyện Phù Cát, tỉnh, trường năm 2017 - 2018)

Cho đa thức $P = 3x^3 + 4x^2 - 8x + 1$

a) Chứng minh rằng $x = 1$ là nghiệm của đa thức.

b) Tính giá trị của P biết $x^2 + x - 3 = 0$.

Lời giải

a) Ta có $P(1) = 3.1^3 + 4.1^2 - 8.1 + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ nghiệm của đa thức P . (đpcm)

b) Rút được $x^2 + x = 3$

$$P = (3x^3 + 3x^2) + (x^2 + x) - 9x + 1$$

$$= 3x(x^2 + x) + (x^2 + x) - 9x + 1$$

$$= 9x + 3 - 9x + 1 = 4.$$

Câu 83. (HSG 7 huyện Thiệu Hóa, tỉnh Thanh Hóa, trường năm 2016 - 2017)

Tính giá trị biểu thức sau:

$$C = 2x - 2y + 13x^3y^2(x - y) + 15(y^2x - x^2y) + \left(\frac{2015}{2016}\right)^0, \text{ biết } x - y = 0$$

Lời giải:

$$C = 2x - 2y + 13x^3y^2(x - y) + 15(y^2x - x^2y) + \left(\frac{2015}{2016}\right)^0$$

$$= 2(x - y) + 13x^3y^2(x - y) - 15xy(x - y) + 1 = 1 \text{ (Vì } x - y = 0).$$

Câu 84. (HSG 7 Đề giao lưu 2017 - 2018)

Cho x là 3 số thực tùy ý thỏa mãn $x + y + z = 0$ và $-1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1; -1 \leq z \leq 1$.

Chứng minh rằng đa thức $x^2 + y^4 + z^6$ có giá trị không lớn hơn 2.

Lời giải

Trong 3 số x, y, z có ít nhất hai số cùng dấu.

$$\text{Giả sử } x, y \geq 0 \Rightarrow z - x - y \leq 0$$

$$\text{Vì } -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1 \Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq |x| + |y| + |z|$$

$$\Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq x + y - z$$

$$\Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq -2z$$

$$-1 \leq z \leq 1, z \leq 0 \Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq 2$$

$$\text{Vậy } x^2 + y^4 + z^6 \leq 2.$$

Câu 85. (HSG 7 tỉnh Đà Nẵng, trường Nguyễn Khuyến năm 2016 - 2017)

a) Tìm giá trị của m để đa thức sau là đa thức bậc 3 theo biến x

$$f(x) = (m^2 - 25)x^4 + (20 + 4m)x^3 + 7x^2 - 9$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của đa thức $g(x) = 16x^4 - 72x^2 + 90$

Lời giải:

a) $f(x) = (m^2 - 25)x^4 + (20 + 4m)x^3 + 7x^2 - 9$ là đa thức bậc 3 biến x khi :

$$\begin{cases} m^2 - 25 = 0 \\ 20 + 4m \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \pm 5 \\ m \neq -5 \end{cases} \Rightarrow m = 5$$

Vậy $m = 5$ thì $f(x)$ là đa thức bậc 3 biến x

$$b) g(x) = 16x^4 - 72x^2 + 90 = (4x^2)^2 - 2 \cdot 4x^2 \cdot 9 + 9^2 + 9 = (4x^2 - 9)^2 + 9$$

Với mọi giá trị của x ta có: $(4x^2 - 9)^2 \geq 0 \Rightarrow g(x) = (4x^2 - 9)^2 + 9 \geq 9$

$$\text{Min}_{g(x)} = 9 \Leftrightarrow 4x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{3}{2}.$$

Câu 86. (HSG 7 huyện Tam Dương, tỉnh, trường năm 2017 - 2018)

Cho đa thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ (x là ẩn, a, b, c hệ số)

Biết rằng: $f(0) = 2018, f(1) = 2019, f(-1) = 2017$. Tính $f(-2019)$

Lời giải

Xét $x = 0$: $f(0) = 2018 \Rightarrow c = 2018$

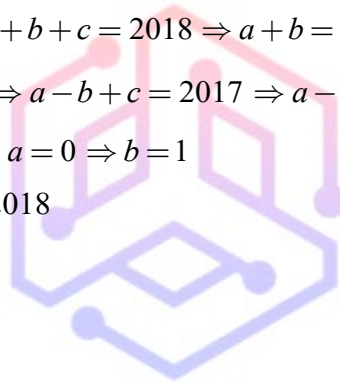
Xét $x = 1$: $f(1) = 2019 \Rightarrow a + b + c = 2018 \Rightarrow a + b = 1$ (1)

Xét $x = -1$: $f(-1) = 2017 \Rightarrow a - b + c = 2017 \Rightarrow a - b = -1$ (2)

Cộng (1) và (2) vế theo vế $\Rightarrow a = 0 \Rightarrow b = 1$

Từ đó tìm được $f(x) = x + 2018$

Suy ra $f(-2019) = -1$.



CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS

CD7: ĐA THỨC

Dạng 1: Xác định đa thức
Dạng 2: Tính giá trị của đa thức
Dạng 3: Dấu của đa thức
Dạng 4: Tìm giá trị của biến (tham số) để phép chia là phép chia hết
Dạng 5: Nghiệm của đa thức

Dạng 3. Dấu của đa thức

Câu 1. (HSG 7 Thị xã Nghi Sơn Tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ biết $21a - 3b + 5c = 0$. Chứng minh $f(1) \cdot f(-3) \leq 0$.

Lời giải

Ta có $3 \cdot f(1) + 2 \cdot f(-3) = 3 \cdot (a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c) + 2 \cdot [a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c]$

$3 \cdot (a + b + c) + 2 \cdot (9a - 3b + c) = 21a - 3b + 5c = 0$

$\Rightarrow 3 \cdot f(1) = -2f(-3)$

$\Rightarrow f(1) \cdot f(-3) = \frac{-2}{3} [f(-3)]^2 \leq 0$

$\Rightarrow f(1) \cdot f(-3) \leq 0$ (đpcm).

Câu 2. (HSG 7 trường Lê Hồng Phong 2018 - 2019)

Cho $A = |2x^4 + 3x^2 + 1| - |-2x^4 - x^2 - 1|$

Chứng tỏ rằng giá trị biểu thức A luôn không âm với mọi giá trị của x .

Lời giải

Vì $2x^4 \geq 0$; $3x^2 \geq 0 \Rightarrow 2x^4 + 3x^2 + 1 > 0$

Từ đó $|-2x^4 - x^2 - 1| = 2x^4 + x^2 + 1$.

$\Rightarrow A = 2x^4 + 3x^2 + 1 - 2x^4 - x^2 - 1 = 2x^2 \geq 0$ với mọi x

Vậy giá trị của A luôn không âm với mọi x .

Câu 3. (HSG 7 _2018-2019)

Cho các đơn thức $A = -\frac{1}{2}x^2yz^2$, $B = -\frac{3}{4}xy^2z^2$, $C = x^3y$

Chứng minh rằng các đơn thức A, B, C không thể cùng nhận giá trị âm

Lời giải

Giả sử cả 3 đơn thức A, B, C cùng có giá trị âm

$\Rightarrow A \cdot B \cdot C$ có giá trị âm (1)

Mặt khác $A \cdot B \cdot C = \left(-\frac{1}{2}x^2yz^2\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}xy^2z^2\right) \cdot x^3y = \frac{3}{8}x^6y^4z^4$

$$\text{Vì } \frac{3}{8}x^6y^4z^2 \geq 0 \forall x, y$$

$$\Rightarrow ABC \geq 0 \forall x, y \quad (2)$$

Ta thấy (1) mâu thuẫn với (2)

\Rightarrow điều giả sử sai.

Vậy ba đơn thức A, B, C không thể cùng giá trị âm.

Câu 4. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc 2022 - 2023)

Xác định dấu của c , biết rằng $2a^3bc$ trái dấu với $-3a^5b^3c^2$

Lời giải

Do $2a^3bc$ và $-3a^5b^3c^2$ trái dấu nên $a \neq 0; b \neq 0; c \neq 0$

$$2a^3bc \cdot (-3a^5b^3c^2) < 0$$

$$\Rightarrow -6a^8b^4c^3 < 0$$

$$\Rightarrow a^8b^4c^3 > 0$$

$$\Rightarrow c^3 > 0 \text{ (do } a^8b^4 > 0 \forall a, b \neq 0)$$

$$\Rightarrow c > 0$$

Vậy $c > 0$ tức là mang dấu dương.

Câu 5. (HSG 7 huyện, trường THCS Phú Trường 2022 - 2023)

Chứng minh đa thức $x^2 + 4x + 10$ dương.

Lời giải

$$\text{Ta có: } x^2 + 4x + 10 = x^2 + 2x + 2x + 4 + 6 = (x+2)^2 + 6$$

$$\text{Vì } (x+2)^2 \geq 0 \forall x \text{ nên } (x+2)^2 + 6 > 0 \forall x$$

Do đó $x^2 + 4x + 10$ dương.

Câu 6. (HSG 7 huyện Tam Hưng 2013 - 2014)

Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$. Chứng tỏ rằng: $f(-2) \cdot f(3) \leq 0$ nếu $13a + b + 2c = 0$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f(-2) + f(3) = (4a - 2b + c) + (9a + 3b + c) = 13a + b + 2c$$

$$\Rightarrow f(-2) + f(3) = 0 \text{ (vì } 13a + b + 2c = 0)$$

$$\Rightarrow f(-2) = -f(3)$$

$$\Rightarrow f(-2) \cdot f(3) = -f(3) \cdot f(3) = -[f(3)]^2 \leq 0$$

Câu 7. (HSG 7 Đề huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$, biết $5a - b + 2c = 0$. Chứng minh rằng $f(1) \cdot f(-2) \leq 0$

Lời giải

$$\text{Ta có: } f(1) = a + b + c$$

$$f(-2) = 4a - 2b + c$$

$$f(1) + f(-2) = a + b + c + 4a - 2b + c = 5a - b + 2c = 0$$

$$\Rightarrow f(1) = -f(-2)$$

$$\Rightarrow f(1).f(-2) = -[f(-2)]^2 \leq 0$$

Câu 8. (HSG 7 Đề quận Tây Hồ 2022 - 2023)

Cho đa thức $f(x) = a.x^2 + bx + c$, với a, b, c là các hệ số thỏa mãn $5a - 7b - c = 0$. Chứng tỏ tích $f(-2).f(1)$ là một số không âm

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(-2) = 4a - 2b + c \\ f(1) = a + b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2f(-2) = 8a - 4b + 2c \\ -3f(1) = -3a - 3b - 3c \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } 2f(-2) - 3f(1) = 5a - 7b - c = 0$$

$$\Rightarrow 2f(-2) - 3f(1) = 0$$

$$\Rightarrow 2f(-2) = 3f(1)$$

Suy ra $f(-2)$ và $f(1)$ cùng dấu

Do đó $f(-2).f(1)$ là số không âm.



CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS

CD7: ĐA THỨC

Dạng 1: Xác định đa thức
Dạng 2: Tính giá trị của đa thức
Dạng 3: Dấu của đa thức
Dạng 4: Tìm giá trị của biến (tham số) để phép chia là phép chia hết
Dạng 5: Nghiệm của đa thức

Dạng 4. Tìm giá trị của biến (tham số) để phép chia là phép chia hết.

Câu 1. (HSG 7 huyện Lục Ngạn Tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

Tìm số dư trong phép chia đa thức $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ cho đa thức $g(x) = x - 2$.

Lời giải

Theo định lí Bozu, số dư của phép chia đa thức $f(x)$ cho đa thức bậc nhất $g(x) = x - 2$ sẽ bằng $f(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 1 = 21$

Vậy số dư phép chia đa thức $f(x)$ cho đa thức bậc nhất $g(x)$ là 21.

Câu 2. (HSG 7 Đề giao lưu HSG Lạng Giang 2022 - 2023)

Đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ có a, b, c là các số nguyên và $a \neq 0$ thức. Biết với mọi giá trị nguyên của x thì $f(x)$ chia hết cho 7. Chứng minh a, b, c cũng chia hết cho 7.

Lời giải

$f(x) = ax^2 + bx + c \div 7$ với mọi giá trị nguyên của x .

+ Với $x = 0$

$$\Rightarrow f(0) = c \div 7$$

+ Với $x = 1$

$$\Rightarrow f(1) = (a + b + c) \div 7$$

Mà $c \div 7$ (cm trên)

$$\Rightarrow (a + b) \div 7 \quad (1)$$

+ Với $x = -1$

$$\Rightarrow f(-1) = (a - b + c) \div 7$$

Mà $c \div 7$ (cm trên)

$$\Rightarrow (a - b) \div 7 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow [(a + b) - (a - b)] \div 7$$

$$\Rightarrow 2b \div 7 \Rightarrow b \div 7 \quad (\text{do } (2, 7) = 1)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow [(a + b) + (a - b)] \div 7$$

$$\Rightarrow 2a \div 7 \Rightarrow a \div 7 \quad (\text{do } (2, 7) = 1)$$

Vậy a, b, c chia hết cho 7 với $f(x)$ chia hết cho 7.

Câu 3. (HSG 7 huyện Mỹ Đức- Hà Nội 2022 - 2023)

Cho đa thức $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Biết $Q(x)$ chia hết cho 5 với mọi $x \in \mathbb{Z}$. Chứng tỏ các hệ số a, b, c, d đều chia hết cho 5.

Lời giải

Vì $Q(x) \div 5$ với mọi $x \in \mathbb{Z}$

Với $x = 0$, ta có $Q(0) = d \div 5$

Với $x = 1$, ta có $Q(1) = (a + b + c + d) \div 5$

Mà $d \div 5$

$$\Rightarrow (a + b + c) \div 5 \quad (1)$$

Với $x = -1$, ta có $Q(-1) = (-a + b - c + d) \div 5$

mà $d \div 5$

$$\Rightarrow (a + b - c) \div 5 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$Q(1) + Q(-1) = 2b \div 5 \text{ mà } (2; 5) = 1 \text{ nên } b \div 5$$

$$Q(1) - Q(-1) = 2(a + c) \div 5 \text{ mà } (2; 5) = 1 \text{ nên } (a + c) \div 5 \quad (3)$$

Với $x = 2$, ta có $Q(2) = (8a + 4b + 2c + d) \div 5$

$$\text{hay } [6a + 2(a + c) + 4b + d] \div 5$$

Mà $d \div 5$, $(a + c) \div 5$, $b \div 5$ nên $6a \div 5$ mà $(6; 5) = 1 \Rightarrow a \div 5$

Kết hợp với (3) suy ra $c \div 5$

Vậy $a \div 5$; $b \div 5$; $c \div 5$; $d \div 5$.

Câu 4. (HSG 7 Trường THCS Đáp Cầu 2018 - 2019)

Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$

Biết $f(1) \div 3$, $f(0) \div 3$, $f(-1) \div 3$. Chứng minh rằng a, b, c đều chia hết cho 3

Lời giải

Ta có: $f(0) = c$; $f(1) = a + b + c$; $f(-1) = a - b + c$

$$f(0) \div 3 \Rightarrow c \div 3$$

$$f(1) \div 3 \Rightarrow (a + b + c) \div 3 \Rightarrow (a + b) \div 3 \quad (1)$$

$$f(-1) \div 3 \Rightarrow (a - b + c) \div 3 \Rightarrow (a - b) \div 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $[(a + b) + (a - b)] \div 3$

$$\Rightarrow 2a \div 3$$

$$\text{mà } (2; 3) = 1$$

$$\Rightarrow a \div 3$$

Chứng minh tương tự $\Rightarrow b:3$.

Vậy a, b, c đều chia hết cho 3.

Câu 5. (HSG 7 huyện Tam Điệp 2021 - 2022)

Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ (với a, b, c là các số nguyên).

Chứng minh rằng: Nếu $f(x)$ chia hết cho 3 với mọi giá trị của x thì a, b, c , đều chia hết cho 3.

Lời giải

Với $f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số nguyên, $f(x)$ chia hết cho 3 với mọi x

+ Ta có $f(0) = c$ do $f(0):3 \Rightarrow c:3$

+ Lại có: $f(1) - f(-1) = (a + b + c) - (a - b + c) = 2b$

Do $f(1)$ và $f(-1)$ chia hết cho 3

$\Rightarrow 2b:3 \Rightarrow b:3$ vì $(2,3) = 1$

+ $f(1):3 \Rightarrow (a + b + c):3$

mà b và c chia hết cho 3

$\Rightarrow a:3$

Vậy a, b, c đều chia hết cho 3.

Câu 6. (HSG 7 huyện Hương Khê 2021 - 2022)

Tìm $n \in \mathbb{Z}$ sao cho $(2n - 3):(n + 1)$.

Lời giải

Đề $(2n - 3):(n + 1)$

$\Rightarrow (2n + 2 - 5):(n + 1)$

$\Rightarrow [2(n + 1) - 5]:(n + 1)$

$\Rightarrow 5:(n + 1)$

Hay $n + 1$ là Ư(5). Mà $Ư(5) \in \{\pm 1; \pm 5\}$

Ta có bảng sau:

$n + 1$	-1	1	-5	5
n	-2	0	-6	4

Vậy $n \in \{-2; 0; -6; 4\}$.

Câu 7. (HSG 7 huyện Sầm Sơn 2017 - 2018)

$P(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn: $P(x):7 \forall x \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng a, b, c đều chia hết cho 7.

Lời giải

Vì $P(x):7 \forall x \in \mathbb{Z}$ nên ta có:

+) $P(0):7$ nên $c:7$

$$+) P(1):7 \text{ nên } (a+b+c):7 \Rightarrow (a+b):7 \quad (1)$$

$$+) P(-1):7 \text{ nên } (a-b+c):7 \Rightarrow (a-b):7 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } [(a+b)+(a-b)]:7 \Leftrightarrow 2a:7 \text{ mà } 2 \nmid 7 \Rightarrow a:7$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } [(a+b)-(a-b)]:7 \Leftrightarrow 2b:7 \text{ mà } 2 \nmid 7 \Rightarrow b:7$$

Vậy a, b, c đều chia hết cho 7.

Câu 8. (HSG 7 Đề huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Tìm số nguyên a sao cho $a^2 + 2a + 3$ chia hết cho $a + 1$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } a^2 + 2a + 3 = a(a+1) + (a+1) + 2 = (a+1)^2 + 2$$

Để $a^2 + 2a + 3$ chia hết cho $a + 1$ thì $2 : a + 1$

$$\Rightarrow a + 1 \in U(2) \Rightarrow a + 1 \in \{-2; -1; 1; 2\}$$

$$\Rightarrow a \in \{-3; -2; 0; 1\}$$

Vậy $a^2 + 2a + 3$ chia hết cho $a + 1$ thì $a \in \{-3; -2; 0; 1\}$

Câu 9. (HSG 7 Đề huyện Lâm Thao 2022 - 2023)

Cho đa thức $A(x) = x^3 - x^2 + ax + b - 2$ và $B(x) = x^2 - 2x + 3$ (với $a; b \in \mathbb{R}$).

Xác định hệ số $a; b$ để $A(x)$ chia cho $B(x)$ có số dư bằng 6

Lời giải

Thực hiện phép chia được dư là $(a-1)x + b - 5$

$$\text{Để } A(x) \text{ chia hết cho } B(x) \text{ có số dư bằng 6 thì } \begin{cases} a-1=0 \\ b-5=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=11 \end{cases}$$

Vậy $a = 1; b = 11$

Câu 10. (HSG 7 Đề quận Tây Hồ 2022 - 2023)

Tìm a để đa thức $2x^4 - 5x^2 + x^3 - 3x - a$ chia hết cho đa thức $x - 3$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & 2x^4 - 5x^2 + x^3 - 3x - a \\ &= 2x^4 + x^3 - 5x^2 - 3x - a \\ &= (x-3)(2x^3 + 7x^2 + 16x + 45) + 135 - a \end{aligned}$$

Để $2x^4 - 5x^2 + x^3 - 3x - a$ chia hết cho $x - 3$ thì

$$135 - a = 0$$

$$\Rightarrow a = 135$$

Vậy $a = 135$.

ĐỀ 7: ĐA THỨC

Dạng 1: Xác định đa thức
Dạng 2: Tính giá trị của đa thức
Dạng 3: Dấu của đa thức
Dạng 4: Tìm giá trị của biến (tham số) để phép chia là phép chia hết
Dạng 5: Nghiệm của đa thức

Dạng 5. Nghiệm của đa thức.

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 Đề giao lưu HSG Lạng Giang 2022 - 2023)

Cho đa thức $f(x) = x(x^2 - 4)(x^2 + 2023)$ có các nghiệm là:

- A. $\{-2; 2\}$ B. $\{0; 2; -2\}$ C. $\{0; 2\}$ D. $\{2023; 2; -2\}$

Lời giải

Chọn B

$$f(x) = x(x^2 - 4)(x^2 + 2023) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ hoặc } x^2 - 4 = 0 \text{ hoặc } x^2 + 2023 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = \pm 2$$

($x^2 + 2023 = 0$ không tìm được x thỏa mãn vì $x^2 + 2023 > 0$ với mọi x)

Vậy đa thức $f(x) = x(x^2 - 4)(x^2 + 2023)$ có các nghiệm là: $0; 2; -2$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Thanh Ba 2021 - 2022)

Cho hai đa thức: $P(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 5x$ và $Q(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 6x + 2$.

Đa thức $G(x) = P(x) - Q(x)$ có số nghiệm là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn C

$$P(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 5x \text{ và } Q(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 6x + 2.$$

$$G(x) = P(x) - Q(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 = x^2(x + 2) - (x + 2) = (x + 2)(x^2 - 1) = (x + 2)(x - 1)(x + 1).$$

Cho $G(x) = 0$ suy ra $(x + 2)(x - 1)(x + 1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \\ x - 1 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Do đó $G(x)$ có số nghiệm là 3.

Câu 3. (HSG 7 huyện Tam Nông 2021 - 2022)

Cho hai đa thức $P(x) = -2x^4 - x^2 + x - 2$ và $Q(x)$ thỏa mãn: $P(x) - Q(x) = -2x^4 - 2$.
 Nghiệm của đa thức $Q(x)$ là

- A.** $x = 0$ và $x = -1$. **B.** $x = 0$ và $x = 1$. **C.** $x = 1$ và $x = -1$. **D.** $x = 1$ và $x = 2$.

Lời giải

Chọn B

Từ $P(x) - Q(x) = -2x^4 - 2$ suy ra:

$$Q(x) = P(x) - (-2x^4 - 2) = -2x^4 - x^2 + x - 2 - (-2x^4 - 2) = -2x^4 - x^2 + x - 2 + 2x^4 + 2 = -x^2 + x = x(-x + 1).$$

$Q(x) = 0$ khi $x(-x + 1) = 0$. Suy ra: $x = 0$ hoặc $x = 1$.

Do đó nghiệm của đa thức $Q(x)$ là $x = 0$ và $x = 1$.

Câu 4. (HSG 7 đề khảo sát lần 3, 2022 - 2023)

Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn điều kiện $5x.f(x - 2021) = (x - 14).f(x)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.** Đa thức $f(x)$ có nhiều nhất 2 nghiệm. **B.** Đa thức $f(x)$ vô nghiệm.
C. Đa thức $f(x)$ có ít nhất 2 nghiệm. **D.** Đa thức $f(x)$ chỉ có 1 nghiệm.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $5x.f(x - 2021) = (x - 14).f(x)$ (*)

+ Thay $x = 14$ vào (*) ta được: $5.14.f(14 - 2021) = (14 - 14).f(14)$

$$\Rightarrow 5.14.f(-2007) = 0 \Rightarrow f(-2007) = 0$$

$\Rightarrow x = -2007$ là 1 nghiệm của $f(x)$

+ Thay $x = 0$ vào (*) ta được: $5.0.f(0 - 2021) = (0 - 14).f(0)$

$$(0 - 14).f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

$\Rightarrow x = 0$ là 1 nghiệm của $f(x)$

Vậy đa thức $f(x)$ có ít nhất 2 nghiệm.

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Lập Thạch tỉnh Vĩnh Phúc 2022 - 2023)

Cho các đa thức: $A(x) = 3x - 9x^2 + 4x + 5x^3 + 7x^2 + 1$ và $B(x) = 5x^3 - 3x^2 + 7x + 10$. Hãy tìm nghiệm của đa thức $C(x) = A(x) - B(x)$.

Lời giải

Ta có $A(x) = 3x - 9x^2 + 4x + 5x^3 + 7x^2 + 1 = 5x^3 - 2x^2 + 7x + 1$

$$C(x) = A(x) - B(x) = (5x^3 - 2x^2 + 7x + 1) - (5x^3 - 3x^2 + 7x + 10)$$

$$C(x) = (5x^3 - 5x^3) + (-2x^2 + 3x^2) + (7x - 7x) + (1 - 10)$$

Ta có $C(x) = x^2 - 9 = 0$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

Vậy $x = \pm 3$ là nghiệm của đa thức $C(x) = A(x) - B(x)$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Yên Định 2022 - 2023)

Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn điều kiện: $x \cdot f(x-2) = (x-1) \cdot f(x)$. Chứng minh rằng đa thức $f(x)$ có ít nhất 2 nghiệm.

Lời giải

+ Khi $x = 0$ thì ta có:

$$0 \cdot f(0-2) = (0-1)f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

Vậy $x = 0$ là 1 nghiệm của đa thức $f(x)$

+ Khi $x = 1$ thì ta có:

$$1 \cdot f(1-2) = (1-1)f(1) \Rightarrow f(-1) = 0$$

Vậy $x = -1$ là một nghiệm của đa thức $f(x)$

Vậy $f(x)$ có ít nhất 2 nghiệm là $0; -1$.

Câu 3. (HSG 7 Quảng Ninh 2022 - 2023)

Cho hai đa thức: $M(x) = 2x^3 - x^2 - 3x + 1$ và $N(x) = -x^3 + x^2 - x + 2$. Tìm một nghiệm của đa thức: $P(x) = M(x) + N(x)$.

Lời giải

Ta có: $P(x) = M(x) + N(x)$

$$\Rightarrow P(x) = (2x^3 - x^2 - 3x + 1) + (-x^3 + x^2 - x + 2)$$

$$P(x) = 2x^3 - x^2 - 3x + 1 - x^3 + x^2 - x + 2$$

$$P(x) = x^3 - 4x + 3$$

Với $x = 1$ ta có: $P(1) = 1^3 - 4 \cdot 1 + 3 = 0$

Suy ra: $x = 1$ là một nghiệm của đa thức $P(x)$.

Câu 4. (HSG 7 Đề giao lưu HSG Gia Viễn 2022 - 2023)

Cho đa thức $Q(x) = ax^2 + bx + 4c$. Chứng minh rằng nếu đa thức $Q(x)$ nhận 2 và -2 là nghiệm thì a và c là hai số đối nhau.

Lời giải

Vì $Q(x) = ax^2 + bx + 4c$ nhận 2 và -2 là nghiệm nên $Q(2) = 0; Q(-2) = 0$.

Ta có: $Q(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 4c = 4a + 2b + 4c = 0$

$$Q(-2) = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + 4c = 4a - 2b + 4c = 0$$

$$\Rightarrow 4a + 2b + 4c + 4a - 2b + 4c = 0 \Rightarrow 8a + 8c = 0$$

$$\Rightarrow 8(a + c) = 0 \Rightarrow a + c = 0$$

$\Rightarrow a$ và c là hai số đối nhau.

Câu 5. (HSG 7 huyện Trục Ninh 2020 - 2021)

Chứng minh đa thức sau không có nghiệm $A = x^{12} - x^9 + x^8 - x^7 + x^6 - x^3 + 1$.

Lời giải

$$A = x^{12} - x^9 + x^8 - x^7 + x^6 - x^3 + 1$$

Ta có : $x^{12}; x^8; x^6 \geq 0$ với mọi x (*)

$$+) \text{ Nếu } x \geq 1, \text{ khi đó } \left. \begin{array}{l} x^{12} \geq x^9 \\ x^8 \geq x^7 \\ x^6 \geq x^3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^{12} - x^9 \geq 0 \\ x^8 - x^7 \geq 0 \\ x^6 - x^3 \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow A = x^{12} - x^9 + x^8 - x^7 + x^6 - x^3 + 1 \geq 1 > 0$$

+) Nếu $x \leq 0$ khi đó $-x^9; -x^7; -x^3 \geq 0$.

Kết hợp với (*) ta có $A = x^{12} - x^9 + x^8 - x^7 + x^6 - x^3 + 1 \geq 1 > 0$

+) Nếu $0 < x < 1$. ta có

$$A = x^{12} + (x^8 - x^9) + (x^6 - x^7) + (1 - x^3) = x^{12} + x^8(1-x) + x^6(1-x) + (1-x^3)$$

Vì $0 < x < 1$ nên $1-x > 0, 1-x^3 > 0$

Kết hợp với (*) suy ra $A = x^{12} - x^9 + x^8 - x^7 + x^6 - x^3 + 1 > 0$

Vậy $A > 0$ với mọi x . Do đó đa thức đã cho không có nghiệm.

Câu 6. (HSG 7 huyện Nghĩa Hành 2021 - 2022)

Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn điều kiện: $x \cdot f(x+1) = (x+2) \cdot f(x)$.

Chứng minh rằng đa thức $f(x)$ có ít nhất hai nghiệm là 0 và -1.

Lời giải

Ta có: $x \cdot f(x+1) = (x+2) \cdot f(x)$ với mọi x (1)

+ Thay $x = 0$ vào (1) ta được: $0 \cdot f(1) = 2 \cdot f(0)$

Do $0 = 2 \cdot f(0)$ nên $f(0) = 0$. Khi đó 0 là một nghiệm của $f(x)$.

+ Thay $x = -1$ vào (1) ta được: $-1 \cdot f(0) = 1 \cdot f(-1)$ nên $-f(0) = f(-1)$.

Do $f(0) = 0$ nên $f(-1) = 0$. Khi đó -1 cũng là một nghiệm của $f(x)$.

Vậy đa thức $f(x)$ có ít nhất hai nghiệm là 0 và -1.

Câu 7. (HSG 7 huyện Chương Mỹ 2021 - 2022)

Cho hai đa thức: $f(x) = -5x^5 + 3x^3 + 2x^2 + x + \frac{1}{2}$ và $g(x) = 5x^5 - 3x^3 - x^2 - x + \frac{1}{2}$.

a) Tính $h(x) = f(x) + g(x)$. Chứng tỏ đa thức $h(x)$ không có nghiệm.

b) Tìm nghiệm của đa thức $h(x) - 5$.

Lời giải

$$a) h(x) = f(x) + g(x) = -5x^5 + 3x^3 + 2x^2 + x + \frac{1}{2} + 5x^5 - 3x^3 - x^2 - x + \frac{1}{2} = x^2 + 1.$$

Ta có: $x^2 \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên $x^2 + 1 \geq 1$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Do đó $h(x) \neq 0$ với mọi x .

Vậy đa thức $h(x)$ không có nghiệm.

$$b) \text{ Ta có: } h(x) - 5 = x^2 + 1 - 5 = x^2 - 4.$$

$$h(x) - 5 = 0 \text{ khi } x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2.$$

Vậy nghiệm của đa thức $h(x) - 5$ là $x = 2$ và $x = -2$.

Câu 8. (HSG 7 huyện Cao Lộc 2021 - 2022)

Tìm nghiệm của đa thức: $P(x) = 2x^2 + 3x + 1$.

Lời giải

Ta có:

$$P(x) = 0$$

$$2x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$2x^2 + 2x + x + 1 = 0$$

$$2x(x+1) + x+1 = 0$$

$$(x+1)(2x+1) = 0.$$

Suy ra $x+1=0$ hoặc $2x+1=0$.

Suy ra $x = -1$ hoặc $x = -\frac{1}{2}$.

Vậy đa thức $P(x)$ có hai nghiệm là $x = -1$ và $x = -\frac{1}{2}$.

Câu 9. (HSG 7 huyện Cửa Lò 2020 - 2021)

Cho hai đa thức: $A(x) = -2x^5 + x^4 - 2x^2 - 7x - 3$ và $B(x) = -2x^5 + x^4 + 3x^2 + 3x - 3$.

Tìm nghiệm của đa thức $N(x) = A(x) - B(x)$.

Lời giải

Ta có: $A(x) = -2x^5 + x^4 - 2x^2 - 7x - 3$ và $B(x) = -2x^5 + x^4 + 3x^2 + 3x - 3$.

Suy ra: $N(x) = A(x) - B(x) = -5x^2 - 10x$.

Cho $N(x) = 0 \Rightarrow -5x^2 - 10x = 0 \Rightarrow -5x(x+2) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ hoặc $x + 2 = 0 \Rightarrow x = 0$ hoặc $x = -2$.

Vậy nghiệm của đa thức $N(x)$ là 0 và -2 .

Câu 10. (HSG 7 huyện Chư Sê, Gia Lai 2020 - 2021)

Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ nhận 1 và -1 là nghiệm thì a và c là hai số đối nhau.

Lời giải

Ta có: $f(x)$ nhận 1 và -1 là nghiệm thì $f(1) = 0$ và $f(-1) = 0$.

$f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$; $f(-1) = 0 \Rightarrow a - b + c = 0$.

Suy ra: $(a + b + c) + (a - b + c) = 0 \Rightarrow 2(a + c) = 0 \Rightarrow a + c = 0 \Rightarrow a = -c$.

Vậy a và c là hai số đối nhau.

Câu 11. (HSG 7 Trường Phong Đạt_2018-2019)

Cho biết $(x-1)f(x) = (x+4)f(x+8)$ với mọi x . Chứng minh $f(x)$ có ít nhất hai nghiệm.

Lời giải

Vì $(x-1)f(x) = (x+4)f(x+8)$ với mọi x nên:

+ Với $x = -4$ thì $-5f(-4) = 0.f(4) \Rightarrow f(-4) = 0$.

Khi đó $x = -4$ là một nghiệm của $f(x)$

+ Với $x = -12$ thì $-13f(-12) = -8.f(-4) \Rightarrow f(-12) = f(-4) = 0$.

Khi đó $x = -12$ là một nghiệm của $f(x)$

Do đó $f(x)$ có ít nhất 2 nghiệm là -4 và -12 .

Câu 12. (HSG 7 Trường Thanh Cao_2018-2019)

Chứng minh rằng đa thức: $f(x) = -4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1$ không có nghiệm nguyên.

Lời giải

Nếu đa thức $f(x) = -4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1$ có nghiệm thì nghiệm đó là ước của -1 ,

Mặt khác $U(-1) = \{-1; 1\}$

Ta có: $f(-1) = -11 \neq 0; f(1) = -3 \neq 0$.

Vậy đa thức đã cho không có nghiệm nguyên.

Câu 13. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2017 - 2018)

Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn: $x.f(x-2011) = (x-2012).f(x)$

Chứng minh rằng đa thức $f(x)$ có ít nhất hai nghiệm khác nhau.

Lời giải

+) Với $x = 0$ ta có: $-2012.f(0) = 0.f(-2011) = 0$ hay $f(0) = 0$

Khi đó $x = 0$ là nghiệm của đa thức $f(x)$.

+) Với $x = 2011$ ta có: $2011.f(2011-2011) = (2011-2012)f(2011)$

$$\Rightarrow 2011.f(0) = -1f(2011) = 0$$

$$\Rightarrow f(2011) = 0$$

Khi đó $x = 2011$ là nghiệm của đa thức $f(x)$.

Vậy đa thức $f(x)$ có ít nhất hai nghiệm khác nhau.

Câu 14. (HSG 7 huyện Khoái Châu 2014 - 2015)

Cho đa thức $f(x)$, biết với mọi x ta có: $x.f(x+1) = (x+2)f(x)$. Chứng minh rằng đa thức $f(x)$ luôn có ít nhất hai nghiệm.

Lời giải

Vì với mọi x ta có $x.f(x+1) = (x+2)f(x)$ nên

- Với $x = 0$, ta có: $0.f(1) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow 0$ là một nghiệm của $f(x)$

- Với $x = -2$, ta có: $-2f(-1) = 0f(-2) \Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow -1$ cũng là một nghiệm của $f(x)$

Vậy đa thức $f(x)$ luôn có ít nhất hai nghiệm.

Câu 15. (HSG 7 trường Cao Dương 2016 - 2017)

Cho đa thức $f(x) = x^2 + mx + 2$.

- a) Xác định m để $f(x)$ nhận -2 làm một nghiệm;
 b) Tìm tập hợp các nghiệm của $f(x)$ ứng với giá trị vừa tìm được của m .

Lời giải

a) Vì $f(x)$ nhận -2 làm một nghiệm

$$\Rightarrow (-2)^2 + m \cdot (-2) + 2 = 0 \Rightarrow 6 - 2m = 0 \Rightarrow m = 3$$

b) Ta có $f(x) = x^2 + 3x + 2 = x^2 + 2x + x + 2 = x(x + 2) + (x + 2) = (x + 2)(x + 1)$

$$\text{Cho } f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x + 1)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Vậy tập hợp các nghiệm của $f(x)$ là $S = \{-1; -2\}$

Câu 16. (HSG 7 trường Nguyễn Khuyến 2015 - 2016)

Tìm nghiệm của đa thức $7x^2 - 35x + 42$.

Lời giải

Ta có $7x^2 - 35x + 42$

$$= 7(x^2 - 5x + 6)$$

$$= 7(x^2 - 3x - 2x + 6)$$

$$= 7[x(x - 3) - 2(x - 3)]$$

$$= 7(x - 3)(x - 2)$$

$$\text{Cho } 7x^2 - 35x + 42 = 0 \Rightarrow 7(x - 3)(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của đa thức trên là $x \in \{2; 3\}$.

Câu 17. (HSG 7 huyện Thanh Oai 2014 - 2015)

Chứng minh rằng đa thức $x^2 - 2x + 2$ vô nghiệm.

Lời giải

$$\text{Ta có : } x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 + 1 = (x - 1)^2 + 1$$

$$\text{Vì } (x - 1)^2 \geq 0 (\forall x) \Rightarrow (x - 1)^2 + 1 \geq 1 \text{ với mọi } x$$

Do đó $x^2 - 2x + 2 > 0$ với mọi x

Vì thế đa thức đã cho vô nghiệm.

Câu 18. (HSG 7 trường Tân Ước 2013 - 2014)

Tìm nghiệm của đa thức sau: $x^2 + 8x + 25$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } x^2 + 8x + 25 = x^2 + 4x + 4x + 16 + 9 = x(x + 4) + 4(x + 4) + 9$$

$$= (x+4)(x+4) + 9 = (x+4)^2 + 9$$

$$\text{Vì } (x+4)^2 \geq 0 (\forall x) \Rightarrow (x+4)^2 + 9 > 0 \text{ với mọi } x$$

Do đó $x^2 + 8x + 25 > 0$ với mọi x

\Rightarrow Đa thức $x^2 + 8x + 25$ vô nghiệm.

Câu 19. (HSG 7 Đề huyện Sóc Sơn 2022 - 2023)

Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn $x.f(x+2023) = (x+4046).f(x)$. Chứng minh $f(x)$ có ít nhất hai nghiệm.

Lời giải

$$\text{Ta có } x.f(x+2023) = (x+4046).f(x) \quad (*)$$

+ Thay $x=0$ vào (*) ta được $0.f(0+2023) = (0+4046).f(0) \Rightarrow f(0) = 0$. Nên $x=0$ là một nghiệm của $f(x)$.

+ Thay $x=-2023$ vào (*) ta được $-2023.f(-2023+2023) = (-2023+4046).f(-2023) \Rightarrow -2023.f(0) = 2023.f(-2023)$, mà $f(0) = 0$ nên $f(-2023) = 0$. Suy ra $x=-2023$ là một nghiệm của $f(x)$.

Câu 20. (HSG 7 TP Ninh Bình 2022 - 2023)

Cho đa thức $f(x) = 2016 \cdot x^4 - 32(25 \cdot k + 2) \cdot x^2 + k^2 - 100$ (với k là số thực dương cho trước). Biết đa thức $f(x)$ có đúng ba nghiệm phân biệt a, b, c (với $a < b < c$). Tính hiệu của $a - c$.

Lời giải

Ta thấy đa thức $f(x)$ nếu có nghiệm $x = a$ (a khác 0) thì $x = -a$ cũng là một nghiệm của $f(x)$, nên đa thức $f(x)$ có 2 nghiệm.

Mà đa thức $f(x)$ có đúng ba nghiệm phân biệt nên một trong ba nghiệm sẽ bằng 0

Thay $x=0$ vào đa thức $f(x)$ ta được: $k^2 - 100 = 0$ nên $k = 10$ (vì k dương).

$$\text{Với } k = 10 \text{ ta có } f(x) = 2016 \cdot x^4 - 8064 \cdot x^2 = 2016x^2 \cdot (x^2 - 4)$$

$$\text{Cho } f(x) = 2016x^2 \cdot (x^2 - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 2^2 = (-2)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Vì $a < b < c$ nên $f(x)$ sẽ có 3 nghiệm phân biệt là $a = -2$; $b = 0$ và $c = 2$

Khi đó $a - c = -2 - 2 = -4$.

Câu 21. (HSG 7 huyện Mù Cang Chải, 2016- 2017)

a) Xác định đa thức $P(x)$ có bậc 2 với hệ số cao nhất bằng 1 và nhận hai số $0; -3$ làm nghiệm

b) Cho đa thức $f(x)$, biết với mọi x ta có : $x.f(x+1) = (x+2)f(x)$.

Chứng minh rằng đa thức $f(x)$ luôn có ít nhất hai nghiệm.

Lời giải

a) $P(x) = x^2 + ax + b$

+) Có 0 là một nghiệm của đa thức, nên $f(0) = b = 0$

+) Có -3 là một nghiệm của đa thức, nên: $9 - 3a + 0 = 0 \Rightarrow a = 3$

Đa thức $P(x) = x^2 + 3x$ là đa thức cần tìm.

b) Với $x = 0$, ta có: $0 \cdot f(1) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow 0$ là một nghiệm của $f(x)$

Với $x = -2$, ta có: $-2f(-1) = 0f(-2) \Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow -1$ là một nghiệm của $f(x)$

Vậy đa thức $f(x)$ luôn có ít nhất hai nghiệm.

Câu 22. (HSG 7 huyện Đất Mũi, 2016- 2017)

Cho đa thức $f(x)$ xác định với mọi x thỏa mãn: $x \cdot f(x+2) = (x^2 - 9)f(x)$

1) Tính $f(5)$

2) Chứng minh rằng $f(x)$ có ít nhất 3 nghiệm

Lời giải

1) Ta có: $x = 3 \Rightarrow f(5) = 0$

2) Với $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow x = 0$ là một nghiệm

Với $x = 3 \Rightarrow f(5) = 0 \Rightarrow x = 5$ là một nghiệm

Với $x = -3 \Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow x = -1$ là một nghiệm

Vậy $f(x)$ có ít nhất là 3 nghiệm.

Câu 23. (HSG 7 trường Nguyễn Trực 2017- 2018)

Chứng minh rằng đa thức $f(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$ không có nghiệm.

Lời giải

Xét từng khoảng

+ Xét $x \leq 0$ dẫn đến $f(x) \geq 1 > 0$

+ Xét $0 < x < 1$ lập luận dẫn đến $f(x) > 0$

+ Xét $x \geq 1$ lập luận dẫn đến $f(x) > 0$

Trong cả ba khoảng trên đều có $f(x) \neq 0$ nên đa thức $f(x)$ không có nghiệm.

Câu 24. (HSG 7 huyện Phù Cát, trường Ngô Gia Tự năm 2017 - 2018)

Chứng minh đa thức sau không có nghiệm: $C = x^{10} - x^5 + x^2 - x + 1$

Lời giải:

Xét đa thức : $C = x^{10} - x^5 + x^2 - x + 1$

Nếu $x = 0 \Rightarrow C = 1 > 0$

Nếu $x < 0 \Rightarrow x^{10} + x^2 + 1 > 0$; $-x^5 - x > 0 \Rightarrow C > 0$

Nếu $0 < x < 1 \Rightarrow C = x^{10} + x^2(1 - x^3) + (1 - x) > 0$

Nếu $x \geq 1 \Rightarrow C = x^5 \cdot (x^5 - 1) + x(x - 1) + 1 > 0$

Vậy $C > 0$ với mọi x nên đa thức C không có nghiệm.

Câu 25. (HSG 7 trường Kim An năm 2017 - 2018)

Chứng minh đa thức $x^2 + 4x + 10$ không có nghiệm.

Lời giải:

Ta có: $x^2 + 4x + 10 = x^2 + 2x + 2x + 4 + 6 = (x + 2)^2 + 6 > 0 (\forall x)$

Do đó $x^2 + 4x + 10$ không có nghiệm.



CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS

CD8: BIỂU ĐỒ VÀ XÁC SUẤT

Phần 1: Xác suất
Phần 2: Biểu đồ

Dạng 1. Xác suất

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 huyện Lâm Thao 2022 - 2023)

Trong thư viện có 9 quyển sách gồm 3 quyển Toán giống nhau, 3 quyển Ngữ Văn giống nhau, 3 quyển Tiếng Anh giống nhau. Xác suất để chọn được một quyển sách không phải Toán là.

- A. $\frac{1}{9}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Các kết quả có thể xảy ra khi chọn ngẫu nhiên 1 quyển sách là 9 khả năng
 Các kết quả thuận lợi để chọn được quyển sách không phải sách Toán là: 6 khả năng

Vậy Xác suất để chọn được một quyển sách không phải Toán là : $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Thanh Thủy 2022 - 2023)

Có 2 hộp bút chì màu. Hộp thứ nhất có 5 bút chì màu đỏ và 7 bút chì màu xanh. Hộp thứ hai có 8 bút chì màu đỏ và 4 bút chì màu xanh. Chọn ngẫu nhiên mỗi hộp một cây bút chì. Xác suất để có 1 cây bút chì màu đỏ và 1 cây bút chì màu xanh là

- A. $\frac{19}{36}$. B. $\frac{17}{36}$. C. $\frac{5}{12}$. D. $\frac{7}{12}$.

Lời giải

Chọn A

Xác suất chọn 1 đỏ hộp thứ nhất với 1 xanh hộp thứ hai là $\frac{5}{12} \cdot \frac{4}{12} = \frac{20}{144}$.

Xác suất chọn 1 xanh hộp thứ nhất với 1 đỏ hộp thứ hai là $\frac{7}{12} \cdot \frac{8}{12} = \frac{56}{144}$.

Xác suất chọn được 1 đỏ và 1 xanh ở cả 2 hộp (mỗi hộp 1 cái) là

$$\frac{20}{144} + \frac{56}{144} = \frac{76}{144} = \frac{19}{36}.$$

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Bát Xát 2022 - 2023)

Viết ngẫu nhiên một số tự nhiên chẵn có hai chữ số. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

- a) “Số tự nhiên được viết ra là bội của số 20”;
 b) “Số tự nhiên được viết ra là ước của số 150”;

Lời giải

Tập hợp A gồm các số tự nhiên chẵn có hai chữ số: $A = \{10;12;14;...;94;96;98\}$

Tập hợp A có $\frac{98-10}{2} + 1 = 45$ (phần tử).

a) Có 4 kết quả có thể xảy ra cho biến cố: “Số tự nhiên được viết ra là bội của số 20” là: 20; 40; 60; 80. Do đó, xác suất của biến cố này là $\frac{4}{45}$.

b) Có 3 kết quả có thể xảy ra cho biến cố: “Số tự nhiên được viết ra là ước của số 150” là: 10; 30; 50. Do đó, xác suất của biến cố này là $\frac{3}{45} = \frac{1}{15}$.

Câu 2. (HSG 7 TP Ninh Bình 2022 - 2023)

Một hộp có 100 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1,2,3,...,99,100 (hai thẻ khác nhau ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp. Hãy tính xác suất của biến cố: “Số trên thẻ được rút ra là số có tổng các chữ số bằng 9”.

Lời giải

Số có tổng các chữ số bằng 9 nghĩa là số chia hết cho 9 (bỏ số 99).

Số lượng các số chia hết cho 9 từ 1 đến 90 là $(90-9):9+1=10$ số

Khi rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp ta được:

- Số kết quả có thể xảy ra là 100

- Số kết quả thuận lợi là 10

Khi đó xác suất của biến cố: “Số trên thẻ được rút ra là số có tổng các chữ số bằng 9” là:

$$\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Văn Bàn 2022 - 2023)

Bạn An mở ngẫu nhiên một cuốn sách có 315 trang. Tính xác suất để trang sách bạn An mở được là một số chia hết cho 3.

Lời giải

Từ 1 đến 315 có 315 số hạng.

Từ 1 đến 315 có số số hạng chia hết cho 3 là $(315-3):3+1=105$ (số).

Xác suất biến cố “trang sách bạn An mở được là một số chia hết cho 3” là: $\frac{105}{315} = \frac{1}{3}$.

Câu 4. (HSG 7 huyện Sóc Sơn 2022 - 2023)

Trong kì thi học sinh giỏi câu lạc bộ các môn văn hóa, lớp 7A có 7 học sinh đăng kí thi môn Toán, 5 học sinh đăng kí thi môn Ngữ văn, 6 học sinh đăng kí thi môn Ngoại ngữ; trong đó có 3 học sinh đăng kí thi cả Toán và Ngữ văn, 4 học sinh đăng kí thi cả Toán và Ngoại ngữ, 2 học sinh đăng kí thi cả Ngữ văn và Ngoại ngữ, 1 học sinh đăng kí thi cả ba môn. Chọn ngẫu nhiên một học sinh đăng kí thi trong lớp 7A. Tính xác suất của biến cố A: “Học sinh được chọn thi đăng kí môn Toán”.

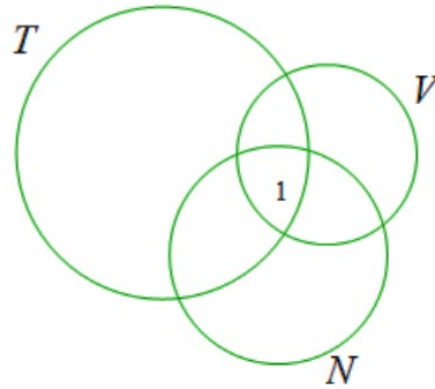
Lời giải

Kí hiệu T là tập hợp số học sinh đăng kí môn Toán,

V là tập hợp số học sinh đăng kí môn Ngữ văn,

N là tập hợp số học sinh đăng kí môn Ngoại ngữ.

Ta có biểu diễn sơ đồ ven như sau:



Số học sinh chỉ đăng kí thi môn Toán là: $7 - 3 - 4 + 1 = 1$ (học sinh).

Số học sinh chỉ đăng kí thi môn Ngữ văn là: $5 - 3 - 2 + 1 = 1$ (học sinh).

Số học sinh chỉ đăng kí thi môn Toán và Ngữ văn mà không đăng kí thi môn Ngoại ngữ là: $3 - 1 = 2$ (học sinh).

Vậy số học sinh đăng kí dự thi là $1 + 1 + 2 + 6 = 10$ (học sinh).

Suy ra xác suất thực nghiệm của biến cố A là $\frac{1}{10}$

Câu 5. (HSG 7 huyện Nho Quan – Ninh Bình 2022 - 2023)

Một hộp có 15 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, ..., 14, 15; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

- a) “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 5”.
- b) “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia cho 3 dư 1”.

Lời giải

a) Tập hợp gồm các kết quả có thể xảy ra đối với số xuất hiện trên thẻ được rút ra là: $B = \{1; 2; 3; \dots; 15\}$

Số phần tử của tập hợp B là 15.

Có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 5” là 5, 10, 15. Vì thế xác suất của biến cố đó là $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

b) Có 5 kết quả thuận lợi cho biến cố “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia cho 3 dư 1” là 1, 4, 7, 10, 13

Vì thế xác suất của biến cố đó là: $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

Câu 6. (HSG 7 huyện Đức Thọ 2022 - 2023)

Một hộp có chứa bốn cái thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1; 2; 3; 4. Hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên hai thẻ trong hộp. Tính xác suất của biến cố “Tích các số trên hai thẻ rút ra là số chẵn”.

Lời giải

Ta có: $n(\Omega) = C_4^2 = 6$.

Gọi A là biến cố “Rút ngẫu nhiên hai thẻ trong hộp mà tích các số trên thẻ rút ra là số chẵn”

$$A = \{(1; 2); (1; 4); (2; 3); (2; 4); (3; 4)\} \Rightarrow n(A) = 5$$

$$\text{Suy ra } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{5}{6}$$

Vậy xác suất của biến cố “Tích các số trên hai thẻ rút ra là số chẵn” là $\frac{5}{6}$.

Câu 7. (HSG 7 huyện Bảo Thắng 2022 - 2023)

Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có hai chữ số. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 2 mà ko chia hết cho 5?

Lời giải

Ta có: $(99 - 10) + 1 = 90$ số có 2 chữ số \Rightarrow Có 90 số có 2 chữ số.

Xét từ 10 – 20 : Có các số chia hết cho 2 mà không chia hết cho 5 là :12; 14; 16; 18

\Rightarrow Có 4 số

Xét từ 10 – 99: Có $4 \cdot 9 = 36$ số có hai chữ số chia hết cho 2 mà không chia hết cho chia hết cho 5.

\Rightarrow Xác suất để Lan bốc trúng số có hai chữ số chia hết cho 2 mà không chia hết cho 5 là:

$$36 : 90 = \frac{2}{5}.$$

Vậy xác suất để Lan bốc trúng số có hai chữ số chia hết cho 2 mà không chia hết cho 5 là $\frac{2}{5}$

Câu 8. (HSG 7 Quận Tây Hồ 2022 - 2023)

Trong một hộp gỗ kín có các thẻ được đánh số từ 100 đến 1000. Rút ngẫu nhiên 1 thẻ trong hộp. Tính xác suất rút ra một số chia hết cho 17.

Lời giải

Từ 100 đến 1000 có 901 thẻ. Trong đó có 53 thẻ ghi số chia hết cho 17 nên xác suất của biến cố A : “thẻ ghi số chia hết cho 17” là $\frac{53}{901}$.

Câu 9. (HSG 7 TP Lào cai 2022 - 2023)

Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có hai chữ số. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 2 mà không chia hết cho 5?

Lời giải

Các số tự nhiên có 2 chữ số từ 10 đến 99 có 90 cách chọn

Gọi A là biến cố: “Số được chọn là số chia hết cho 2 mà không chia hết cho 5 ”

Gọi số cần tìm có dạng: \overline{ab} trong đó $a, b \in \mathbb{N}; 1 \leq a \leq 9; 0 \leq b \leq 9$

Có 9 cách chọn a ; có 4 cách chọn b

Nên số cần tìm \overline{ab} có $9 \cdot 4 = 36$ cách chọn

Vậy xác suất để số được chọn chia hết cho 2 mà không chia hết cho 5 là: $\frac{36}{90}$.

Câu 10. Gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất loại 6 mặt.



- a) Tìm xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên mặt hai con xúc xắc bằng 12.
 b) Tìm xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên mặt hai con xúc xắc bằng 10.

Lời giải

Kí hiệu $(a; b)$ là một kết quả xảy ra về số chấm xuất hiện trên mặt hai con xúc xắc, với $a; b$ lần lượt là số chấm xuất hiện trên mặt con xúc xắc thứ nhất và thứ hai.

Tập hợp các khả năng có thể xảy ra là

$\{(1;1); (1;2); (1;3); (1;4); (1;5); (1;6); (2;1); (2;2); \dots; (6;4); (6;5); (6;6)\}$: có 36 khả năng.

- a) Tổng số chấm xuất hiện trên hai mặt con xúc xắc bằng 12 khi hai lần đều gieo được mặt 6 chấm. \Rightarrow Có 1 khả năng gieo như vậy.

Xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên mặt hai con xúc xắc bằng 12 là $P_1 = \frac{1}{36}$.

- b) Tập hợp các khả năng xảy ra về số chấm xuất hiện trên mặt hai con xúc xắc có tổng bằng 10 là $\{(4;6); (5;5); (6;4)\}$: có 3 khả năng.

Xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 10 là $P_2 = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

Câu 11. Gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất loại 6 mặt.



- a) Tìm xác suất để hiệu giữa số chấm xuất hiện trên mặt hai con xúc xắc bằng 4.
 b) Tìm xác suất để hiệu giữa số chấm xuất hiện trên mặt hai con xúc xắc bằng 3.

Lời giải

Kí hiệu $(a; b)$ là một kết quả xảy ra về số chấm xuất hiện trên mặt hai con xúc xắc, với $a; b$ lần lượt là số chấm xuất hiện trên mặt con xúc xắc thứ nhất và thứ hai.

Tập hợp các khả năng có thể xảy ra là

$\{(1;1); (1;2); (1;3); (1;4); (1;5); (1;6); (2;1); (2;2); \dots; (6;4); (6;5); (6;6)\}$: có 36 khả năng.

- a) Xét biến cố A : “Số chấm xuất hiện trên mặt hai con xúc xắc có hiệu bằng 4”.

Tập hợp các khả năng xảy ra của biến cố A là $\{(5;1); (6;2); (1;5); (2;6)\}$: có 4 khả năng.

Xác suất xảy ra biến cố A là $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

- b) Xét biến cố B : “Số chấm xuất hiện trên mặt hai con xúc xắc có hiệu bằng 3”.

Tập hợp các khả năng xảy ra của biến cố B là

$\{(4;1); (5;2); (6;3); (3;6); (2;5); (1;4)\}$: có 6 khả năng.

Xác suất xảy ra biến cố B là $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Câu 12. Bình và Minh mỗi người gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất loại 6 mặt.



- Tìm xác suất để số chấm xuất hiện trên mặt con xúc xắc của Bình hơn của Minh 3 chấm.
- Tìm xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên mặt hai con xúc xắc bằng 8 và số chấm xuất hiện trên mặt con xúc xắc của Bình không vượt quá số chấm xuất hiện trên mặt con xúc xắc của Minh.

Lời giải

Kí hiệu $(a;b)$ là một kết quả xảy ra về số chấm xuất hiện trên mặt hai con xúc xắc, với $a;b$ lần lượt là số chấm xuất hiện trên mặt con xúc xắc của Bình và của Minh.

Tập hợp các khả năng có thể xảy ra là

$\{(1;1); (1;2); (1;3); (1;4); (1;5); (1;6); (2;1); (2;2); \dots; (6;4); (6;5); (6;6)\}$: có 36 khả năng.

- Xét biến cố A : “Số chấm xuất hiện trên mặt con xúc xắc của Bình hơn của Minh 3 chấm”

Tập hợp các khả năng xảy ra của biến cố A là $\{(4;1); (5;2); (6;3)\}$: có 3 khả năng.

Xác suất xảy ra biến cố A là $P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

- Xét biến cố B : “Tổng số chấm xuất hiện trên mặt hai con xúc xắc bằng 8 và số chấm xuất hiện trên mặt con xúc xắc của Bình không vượt quá số chấm xuất hiện trên mặt con xúc xắc của Minh”.

Tập hợp các khả năng xảy ra của biến cố B là $\{(2;6); (3;5); (4;4)\}$: có 3 khả năng.

Xác suất xảy ra biến cố B là $P(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

Câu 13. Viết các số tự nhiên có hai chữ số (chữ số 0 đứng đầu). Xóa đi một trong các số đó.

Xét các biến cố:

- Số được xóa đi chia hết cho 10.
- Số được xóa đi là số chính phương.
- Số được xóa đi có hai chữ số giống nhau nhưng không chia hết cho 2.

Tính xác suất của mỗi biến cố A, B, C .

Lời giải

Có 90 số tự nhiên có hai chữ số, đó là 10, số 11; ...; số 98, số 99.

Có 9 kết quả có thể xảy ra khi xóa đi một số chia hết cho 10, đó là các số 10; 20; 30; 40; ...;

Có 6 kết quả có thể xảy ra khi xóa đi một số chính phương, đó là các số 16; 25; 36; 49; 64; 81.

Có 5 kết quả có thể xảy ra khi xóa đi một số có hai chữ số giống nhau nhưng không chia hết cho 2, đó là các số 11; 33; 55; 77; 99.

Vậy xác suất của biến cố A là $\frac{9}{90} = 0,1 = 10\%$.

Xác suất của biến cố B là $\frac{6}{90} = 0,0(6) \approx 6,7\%$.

Xác suất của biến cố C là $\frac{5}{90} = 0,0(5) \approx 5,6\%$.

Câu 14. Một hộp có 6 bi xanh và 4 bi đỏ có cùng chất liệu và kích cỡ. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi trong hộp. Tính xác suất để trong hai viên bi lấy ra:

- Có 1 viên bi xanh.
- Có 2 viên bi xanh.
- Có ít nhất 1 bi đỏ.

Lời giải

Do trong hộp có 6 bi xanh và 4 bi đỏ có cùng chất liệu và kích cỡ, khi lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi trong hộp ta có các khả năng sau:

+ Số cách lấy ra hai viên bi lấy ra cùng màu xanh là $6 \cdot (6-1) : 2 = 15$.

+ Số cách lấy ra hai viên bi lấy ra cùng màu đỏ là $4 \cdot (4-1) : 2 = 6$.

+ Số cách lấy ra hai viên bi khác màu $6 \cdot 4 = 24$.

Tổng số cách lấy ra hai viên bi là $15 + 6 + 24 = 45$.

a) Hai viên bi lấy ra có 1 viên bi xanh.

Xét biến cố A : Hai viên bi lấy ra có 1 viên bi xanh.

Có 24 đồng khả năng xảy ra.

Vậy xác suất để trong hai viên bi lấy ra có 1 viên bi xanh là $P(A) = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$.

b) Hai viên bi lấy ra có 2 viên bi xanh.

Xét biến cố B : Hai viên bi lấy ra có 2 viên bi xanh.

Có 15 đồng khả năng xảy ra.

Vậy xác suất để trong hai viên bi lấy ra có 2 viên bi xanh là $P(B) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$.

c) Hai viên bi lấy ra có ít nhất 1 bi đỏ.

Xét biến cố C : Hai viên bi lấy ra có ít nhất 1 bi đỏ.

Hai viên bi lấy ra có ít nhất 1 bi đỏ xảy ra khi cả hai viên bi lấy ra cùng màu đỏ hoặc hai viên bi lấy ra khác màu.

Có $6 + 24 = 30$ đồng khả năng xảy ra.

Vậy xác suất để trong hai viên bi lấy ra có ít nhất 1 bi đỏ là $P(C) = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$.

Câu 15. Một hộp chứa 10 quả cầu đỏ được đánh số từ 1 đến 10, 20 quả cầu xanh được đánh số từ 1 đến 20. Lấy ngẫu nhiên một quả. Tìm xác suất để quả được chọn:

- Màu đỏ và ghi số chẵn.
- Màu xanh hoặc ghi số lẻ.

Lời giải

Tập hợp các kết quả có thể xảy ra khi lấy ngẫu nhiên một quả cầu trong hộp là:

{quả cầu màu đỏ đánh số 1, quả cầu màu đỏ đánh số 2, quả cầu màu đỏ đánh số 3, ..., quả cầu màu đỏ đánh số 10, quả cầu màu xanh đánh số 1, quả cầu màu xanh đánh số 2, quả cầu màu xanh đánh số 3, ..., quả cầu màu xanh đánh số 20} Tập hợp này có 30 phần tử.

a) Tập hợp các kết quả thuận lợi cho biến cố “Quả cầu được chọn có màu đỏ và ghi số chẵn” là:

{quả cầu màu đỏ đánh số 2, quả cầu màu đỏ đánh số 4, quả cầu màu đỏ đánh số 6, quả cầu màu đỏ đánh số 8, quả cầu màu đỏ đánh số 10}. Do đó, xác suất của biến cố “Quả cầu được chọn có màu đỏ và ghi số chẵn” là: $\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$.

b) Tập hợp các kết quả thuận lợi cho biến cố “Quả cầu được chọn có màu xanh hoặc ghi số lẻ” là:

{quả cầu màu đỏ đánh số 1, quả cầu màu đỏ đánh số 3, quả cầu màu đỏ đánh số 5, quả cầu màu đỏ đánh số 7, quả cầu màu đỏ đánh số 9, quả cầu màu xanh đánh số 1, quả cầu màu xanh đánh số 2, quả cầu màu xanh đánh số 3, ..., quả cầu màu xanh đánh số 20}.

Tập hợp này có 25 phần tử. Do đó, xác suất của biến cố “Quả cầu được chọn có màu xanh hoặc ghi số lẻ” là: $\frac{25}{30} = \frac{5}{6}$.

Câu 16. Một hộp đựng 4 viên bi xanh, 3 viên bi đỏ và 2 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 2 viên bi.

a) Tính xác suất để chọn được hai viên bi cùng màu.

b) Tính xác suất chọn được hai viên bi khác màu.

Lời giải

Do trong hộp có 4 bi xanh và 3 bi đỏ và 2 viên bi vàng có cùng chất liệu và kích cỡ, khi lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi trong hộp ta có các khả năng sau:

+ Số cách lấy ra hai viên bi lấy ra cùng màu xanh là $4.(4-1):2 = 6$.

+ Số cách lấy ra hai viên bi lấy ra cùng màu đỏ là $3.(3-1):2 = 3$.

+ Số cách lấy ra hai viên bi lấy ra cùng màu vàng là $2.(2-1):2 = 1$.

+ Số cách lấy ra hai viên bi khác màu $4.3 + 3.2 + 4.2 = 26$.

Tổng số cách lấy ra hai viên bi là $6 + 3 + 1 + 26 = 46$.

a) Tính xác suất để chọn được hai viên bi cùng màu.

Xét biến cố A : “Hai viên bi lấy ra cùng màu”.

Có $6 + 3 + 1 = 10$ đồng khả năng xảy ra.

Vậy xác suất để trong hai viên bi lấy ra cả hai viên bi cùng màu là $P(A) = \frac{10}{46} = \frac{5}{23}$.

b) Tính xác suất chọn được hai viên bi khác màu.

Xét biến cố B : “Hai viên bi lấy ra hai viên bi khác màu”.

Có 26 đồng khả năng xảy ra.

Vậy xác suất để trong hai viên bi lấy ra có 2 viên bi khác màu là $P(B) = \frac{26}{46} = \frac{12}{23}$.

Câu 17. Một cái túi có 4 quả cầu đỏ, 6 quả cầu xanh và 2 quả cầu vàng. Chọn ngẫu nhiên 2 quả cầu. Tính xác suất để trong 2 quả cầu 1 quả màu đỏ và một quả màu vàng.

Lời giải

Do trong hộp có 4 quả cầu đỏ và 6 quả cầu xanh và 2 quả cầu vàng có cùng chất liệu và kích cỡ, khi lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 quả cầu trong hộp ta có các khả năng sau:

+ Số cách lấy ra hai quả cầu lấy ra cùng màu xanh là $6 \cdot (6-1) : 2 = 15$.

+ Số cách lấy ra hai quả cầu lấy ra cùng màu đỏ là $4 \cdot (4-1) : 2 = 6$.

+ Số cách lấy ra hai quả cầu lấy ra cùng màu vàng là $2 \cdot (2-1) : 2 = 1$.

+ Số cách lấy ra hai quả cầu khác màu $4 \cdot 6 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 44$.

Tổng số cách lấy ra hai quả cầu là $15 + 6 + 1 + 44 = 66$.

Xét biến cố A : “Hai viên bi lấy ra hai quả cầu 1 màu đỏ, 1 màu vàng”.

Có 8 đồng khả năng xảy ra.

Vậy xác suất để trong hai viên bi lấy ra hai quả cầu 1 màu đỏ, 1 màu vàng là: $P(A) = \frac{8}{66} = \frac{4}{33}$

Câu 18. Một hộp đựng 3 viên bi trắng 6 viên bi màu xanh và 4 viên bi màu đỏ. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 2 viên bi. Tính xác suất để trong 2 viên bi lấy ra:

a) Không có viên bi nào là bi màu xanh.

b) Có ít nhất 1 viên bi là màu xanh.

Lời giải

Do trong hộp có 3 viên bi trắng, 6 viên bi màu xanh, 4 viên bi đỏ có cùng chất liệu và kích cỡ, khi lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi trong hộp ta có các khả năng sau:

+ Số cách lấy ra hai viên bi lấy ra cùng màu xanh là $6 \cdot (6-1) : 2 = 15$.

+ Số cách lấy ra hai viên bi lấy ra cùng màu đỏ là $4 \cdot (4-1) : 2 = 6$.

+ Số cách lấy ra hai viên bi lấy ra cùng màu vàng là $3 \cdot (3-1) : 2 = 3$.

+ Số cách lấy ra hai viên bi khác màu $3 \cdot 6 + 6 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 54$.

Tổng số cách lấy ra hai viên bi là $15 + 6 + 3 + 54 = 78$.

a) Tính xác suất để chọn không có viên bi nào là bi màu xanh.

Xét biến cố A : “Hai viên bi lấy ra không có viên bi nào màu xanh”.

Hai viên bi lấy ra không có viên bi nào màu xanh. Khi đó có hai viên bi màu đỏ, hai viên bi màu vàng hoặc hai viên bi (một đỏ, một xanh).

Có $6 + 3 + 3 \cdot 4 = 21$ đồng khả năng xảy ra.

Vậy xác suất để trong hai viên bi lấy ra mà không có viên bi màu xanh là $P(A) = \frac{21}{78} = \frac{7}{26}$.

b) Tính xác suất chọn được hai viên bi lấy ra ít nhất một viên bi màu xanh.

Xét biến cố B : “Hai viên bi lấy ra hai viên bi ít nhất một viên bi màu xanh”.

Hai viên bi lấy ra hai viên bi ít nhất một viên bi màu xanh. Khi đó có thể cả hai viên bi màu xanh hoặc có thể một bi xanh, một bi đỏ hoặc có thể một bi xanh, một bi trắng.

Có $15 + 3 \cdot 6 + 6 \cdot 4 = 57$ đồng khả năng xảy ra.

Vậy xác suất để trong hai viên bi lấy ra có ít nhất một viên bi màu xanh là $P(B) = \frac{57}{78} = \frac{19}{26}$.

Câu 19. Trong một hộp có 12 bóng đèn giống nhau, trong đó có 4 bóng bị hỏng. Lấy ngẫu nhiên ra 2 bóng.

a) Tính xác suất để lấy được 2 bóng tốt.

b) Tính xác suất để lấy được đúng 1 bóng tốt.

Lời giải

Do trong hộp có trong hộp 12 bóng đèn giống nhau, trong đó có 4 bóng bị hỏng. Khi đó số bóng đèn tốt là $12 - 4 = 8$ bóng đèn. Khi lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 bóng đèn trong hộp ta có các khả năng sau:

+ Số cách lấy ra hai bóng đèn lấy ra cùng là bóng tốt là $8 \cdot (8 - 1) : 2 = 14$.

+ Số cách lấy ra hai bóng đèn lấy ra cùng là bóng bị hỏng là $4 \cdot (4 - 1) : 2 = 6$.

+ Số cách lấy ra hai bóng đèn lấy ra khác nhau là $8 \cdot 4 = 32$.

Tổng số cách lấy ra hai bóng đèn là $14 + 6 + 32 = 52$.

a) Xét biến cố A : “Hai bóng lấy ra là bóng tốt”.

Có 14 đồng khả năng xảy ra.

Vậy xác suất để trong hai viên bi lấy ra cả hai viên bi cùng màu là $P(A) = \frac{14}{52} = \frac{7}{26}$.

b) Xét biến cố B : “Hai bóng lấy ra đúng một bóng tốt”.

Có 32 đồng khả năng xảy ra.

Vậy xác suất để trong hai viên bi lấy ra có 2 viên bi khác màu là $P(B) = \frac{32}{52} = \frac{8}{13}$.

Câu 20. Một hộp chứa bốn cái thẻ được đánh số 1, 2, 3, 4. Lấy ngẫu nhiên hai thẻ. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) A : “Tổng các số trên hai thẻ là số chẵn”.

b) B : “Tích các số trên hai thẻ là số chẵn”.

Lời giải

Khi lấy ngẫu nhiên hai thẻ, tập hợp các kết quả có thể xảy ra đối với số ghi trên hai thẻ là:

$\{(1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 3), (2; 4), (3; 4)\}$.

a) Tập hợp các kết quả thuận lợi cho biến cố A là: $\{(1; 3), (2; 4)\}$.

Do đó, xác suất của biến cố A là $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

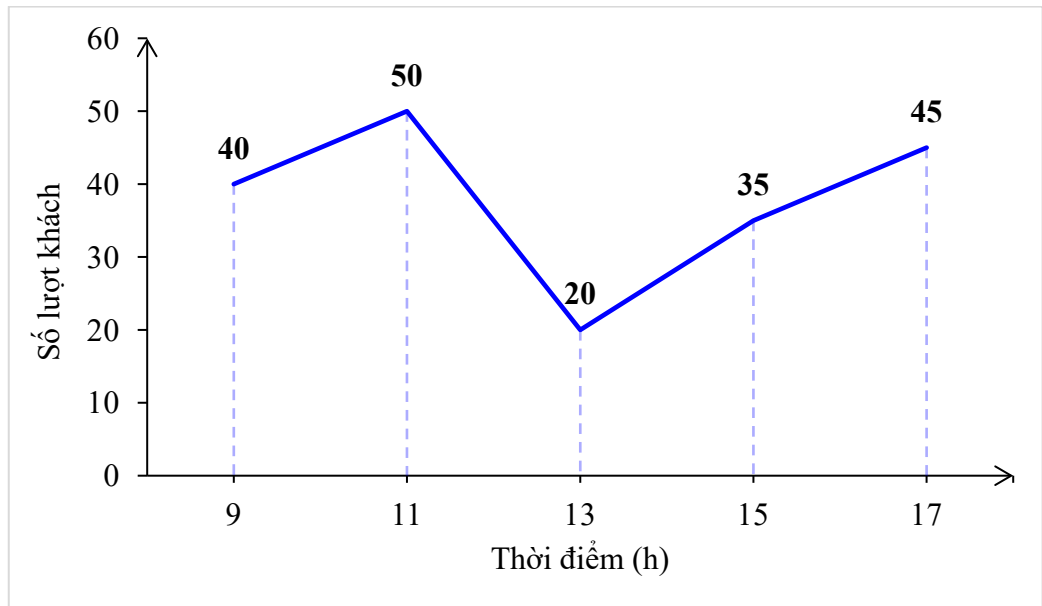
b) Tập hợp các kết quả thuận lợi cho biến cố B là: $\{(1; 2), (1; 4), (2; 3), (2; 4), (3; 4)\}$.

Do đó, xác suất của biến cố “Tích các số trên hai thẻ là số chẵn” là $\frac{5}{6}$.

Dạng 2. Biểu đồ

Câu 1. (HSG 7 huyện Đức Thọ 2022 - 2023)

Biểu đồ đoạn thẳng dưới đây biểu diễn số lượt khách đã đến ăn Phở Bò tại một nhà hàng vào một số thời điểm trong ngày.



Tỉ số phần trăm số lượt khách vào ăn Phở tại thời điểm 11 giờ so với tổng số lượt khách vào ăn Phở tại thời điểm 9 giờ đến thời điểm 17 giờ là (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai):

Lời giải

Tổng số lượt khách vào ăn Phở tại thời điểm 9 giờ đến thời điểm 17 giờ là:

$$40 + 50 + 20 + 35 + 45 = 190 \text{ (khách)}$$

Vậy tỉ số phần trăm số lượt khách vào ăn Phở tại thời điểm 11 giờ so với tổng số lượt khách

vào ăn Phở tại thời điểm 9 giờ đến thời điểm 17 giờ là: $\frac{50}{190} \cdot 100\% \approx 26,32\%$.

Câu 2.

- a) Lập phiếu khảo sát về mức độ thường xuyên đi học bằng xe đạp của các bạn học sinh trong lớp.
- b) Giả sử có 40 bạn tham gia cuộc khảo sát về mức độ thường xuyên đi học bằng xe đạp và kết quả thu được như sau:
 - + Có $\frac{1}{5}$ số học sinh cả lớp rất thường xuyên đi học bằng xe đạp
 - + Có 20% số học sinh cả lớp thường xuyên đi học bằng xe đạp
 - + Số học sinh thỉnh thoảng đi xe đạp bằng $\frac{2}{7}$ số học sinh đi học thường xuyên bằng xe đạp
 - + Còn lại là số học sinh không bao giờ đi học bằng xe đạp
 Tính số học sinh tương ứng với mỗi mức độ và lập bảng thống kê.
- c) Phân loại dữ liệu có trong bảng thống kê đó.

Lời giải

a) Phiếu khảo sát:

Bạn có thường xuyên đi học bằng xe đạp không? (Đánh dấu x vào phương án bạn lựa chọn)

Rất thường xuyên

- Thường xuyên
- Thỉnh thoảng
- Không bao giờ

b) Số học sinh đi học rất thường xuyên bằng xe đạp là: $\frac{1}{5}.40 = 8$ (học sinh)

Số học sinh đi học thường xuyên bằng xe đạp là: $40\%.40 = 16$ (học sinh)

Số học sinh đi học thỉnh thoảng bằng xe đạp là: $\frac{3}{4}.16 = 12$ (học sinh)

Số học sinh đi học không bao giờ bằng xe đạp là: $40 - 8 - 16 - 12 = 4$ (học sinh)

Bảng thống kê

Mức độ	Rất thường xuyên	Thường xuyên	Thỉnh thoảng	Không bao giờ
Số học sinh	8	16	12	4

c) Dữ liệu về mức độ thường xuyên đi học bằng xe đạp không phải là dãy dữ liệu số, có thể sắp xếp theo thứ tự

Số học sinh đi học bằng xe đạp ứng với mỗi mức độ là dãy số liệu

Câu 3.

a) Lập phiếu hỏi về thể loại văn học dân gian yêu thích nhất (thần thoại, truyền thuyết, cổ tích, ngụ ngôn) của các bạn trong lớp

b) Giả sử có 35 bạn bất kì tham gia cuộc khảo sát và thu được kết quả như sau:

+ Không có bạn nào thích truyện ngụ ngôn

+ Có $\frac{3}{7}$ số học sinh tham gia khảo sát thích truyện cổ tích

+ Số học sinh thích thể loại truyền thuyết bằng $\frac{2}{5}$ số học sinh thích thể loại cổ tích

+ Còn lại là số học sinh thích thể loại thần thoại

Tính số học sinh yêu thích nhất mỗi thể loại văn học sau đó lập bảng thống kê

c) Phân loại các dữ liệu trong bảng thống kê

Lời giải

a) Phiếu khảo sát:

Bạn thích nhất thể loại văn học dân gian nào? (Đánh dấu x vào phương án bạn lựa chọn)

- Thần thoại
- Cổ tích
- Truyền thuyết
- Ngụ ngôn

b) Số học sinh thích truyện ngụ ngôn là : 0 (học sinh)

Số học sinh thích truyện cổ tích là : $\frac{3}{7}.35 = 15$ (học sinh)

Số học sinh thích truyện truyền thuyết là : $\frac{2}{5}.15 = 6$ (học sinh)

Số học sinh thích thể truyện thần thoại là: $35 - 0 - 15 - 6 = 14$ (học sinh)

Bảng thống kê

Thể loại văn học	Ngữ ngôn	Cổ tích	Truyện thuyết	Thần thoại
Số học sinh yêu thích nhất	0	15	6	14

c) Dữ liệu về các thể loại văn học không phải là dãy số liệu, không sắp xếp theo thứ tự Dữ liệu về số học sinh yêu thích nhất thuộc loại dữ liệu số.

Câu 4. Để tìm hiểu về khả năng tự nấu ăn của các bạn học sinh trong lớp 7A , Minh đã chọn 30 bạn bất kì trong lớp tham gia khảo sát. Kết quả như sau:

+ Có 20% các bạn tham gia khảo sát tự đánh giá khả năng nấu ăn không đạt

+ Có $\frac{1}{3}$ các bạn tham gia khảo sát tự đánh giá khả năng nấu ăn đạt

+ Số các bạn tự đánh giá khả năng nấu ăn giỏi bằng $\frac{7}{5}$ số các bạn tự đánh giá nấu ăn không đạt

+ Còn lại là các bạn tự đánh giá nấu ăn xuất sắc.

a) Lập bảng thống kê từ dữ liệu thu được

b) Phân loại các dữ liệu trong bảng thống kê

Lời giải

a) Số học sinh tự đánh giá khả năng nấu ăn không đạt là: $20\%.30 = 6$ (Học sinh)

Số học sinh tự đánh giá khả năng nấu ăn đạt là: $\frac{1}{3}.30 = 10$ (Học sinh)

Số học sinh tự đánh giá khả năng nấu ăn giỏi là: $\frac{7}{5}.10 = 14$ (Học sinh)

Số học sinh tự đánh giá khả năng nấu ăn xuất sắc là: $30 - 6 - 10 - 14 = 0$ (Học sinh)

Bảng thống kê:

Khả năng tự nấu ăn	Không đạt	Đạt	Giỏi	Xuất sắc
Số bạn nữ tự đánh giá	6	10	14	0

b) + Khả năng tự nấu ăn của các học sinh lớp 7A không là dãy dữ liệu số, có thể sắp xếp theo thứ tự

+ Số bạn nữ tự đánh giá khả năng nấu ăn là dãy dữ liệu số

Câu 5. Bình muốn lấy ý kiến về các môn học mà các bạn cùng khối 7 trường mình yêu thích nên bạn đã chọn 100 bạn bất kì trong khối 7 gọi là các bạn tham gia khảo sát. Kết quả như sau:

+ Có 20% các bạn tham gia khảo sát thích môn Tiếng Anh

+ Có $\frac{3}{8}$ các bạn còn lại thích môn Ngữ Văn

+ Số các bạn thích môn Toán bằng $\frac{7}{5}$ số các bạn thích môn Tiếng Anh

+ Còn lại là các bạn thích các môn Khoa học tự nhiên, Lịch Sử - Địa lý, Nghệ thuật

a) Tính số học sinh thích mỗi môn theo khảo sát và sắp xếp chúng theo thứ tự từ lớn đến bé

b) Kết quả nhận được có phải là số liệu không.

Lời giải

a) Số học sinh thích môn Tiếng Anh là: $20\% \cdot 100 = 20$ (Học sinh)

Số học sinh thích môn Ngữ văn là: $\frac{3}{8} \cdot (100 - 20) = 30$ (Học sinh)

Số học sinh thích Toán là: $\frac{7}{5} \cdot 20 = 28$ (Học sinh)

Số học sinh thích các môn Khoa học tự nhiên, Lịch Sử - Địa lý, Nghệ thuật là:
 $100 - 20 - 30 - 28 = 22$ (Học sinh)

b) Kết quả nhận được là số học sinh thích các môn học. Đó là dãy số liệu

Câu 6.

a) Em hãy lập phiếu hỏi để khảo sát về mức độ đi học thường xuyên bằng xe đạp điện của các bạn học sinh lớp 7A

b) Để thu thập được dữ liệu trên bạn Hoa đã phát phiếu khảo sát cho 20 bạn học sinh trong lớp. Dữ liệu thu được từ cách khảo sát của bạn Hoa có đại diện được cho cho tất cả học sinh khối 7 hay không?

Lời giải

a) Phiếu khảo sát:

Bạn có thường xuyên đi học bằng xe đạp không? (Đánh dấu x vào phương án bạn lựa chọn)

Rất thường xuyên

Thường xuyên

Thỉnh thoảng

Không bao giờ

b) Dữ liệu thu được từ cách khảo sát của bạn Hoa không đại diện được cho cho tất cả học sinh khối 7. Vì đối tượng được quan tâm là toàn bộ học sinh trong trường nhưng ở đây Hoa chỉ khảo sát học sinh của lớp 7A.

Câu 7.

a) Hãy lập phiếu hỏi để khảo sát về mức độ thích chơi game sau những giờ học căng thẳng của học sinh toàn khối 7.

b) Để biết được mức độ thích chơi game của tất cả học sinh khối 7, Hoàng đã phát phiếu khảo sát cho 20 bạn trong lớp. Dữ liệu thu được từ cách khảo sát của bạn Hoàng có đại diện cho tất cả học sinh khối 7 hay không?

Lời giải

a) Phiếu khảo sát:

Bạn có thích chơi game sau những giờ học căng thẳng không? (Đánh dấu x vào phương án bạn lựa chọn)

Rất thích

Thích

Bình thường

Không thích

b) Dữ liệu thu được từ cách khảo sát của bạn Hoàng không đại diện được cho cho tất cả học sinh khối 7. Vì đối tượng được quan tâm là toàn bộ học sinh trong trường nhưng ở đây Hoàng chỉ khảo sát cho học sinh của một lớp.

Câu 8.

a) Em hãy lập phiếu hỏi để khảo sát về mức độ thích học môn tiếng Anh của các bạn học sinh khối 7

b) Để biết được mức độ thích học tiếng Anh của các bạn học sinh khối 7, bạn Hằng đã phát phiếu khảo sát cho 30 bạn trong lớp. Dữ liệu thu được từ cách khảo sát của bạn Hằng có đại diện cho tất cả học sinh khối 7 hay không?

Lời giải

a) Phiếu khảo sát:

Bạn có thích học môn tiếng anh không? (Đánh dấu x vào phương án bạn lựa chọn)

Rất thích

Thích

Bình thường

Không thích

b) Dữ liệu thu được từ cách khảo sát của bạn Hằng không đại diện được cho cho tất cả học sinh khối 7. Vì đối tượng được quan tâm là toàn bộ học sinh trong trường nhưng ở đây Hằng chỉ khảo sát cho học sinh của một lớp.

Câu 9.

Toàn muốn tìm hiểu về khả năng bơi lội của các bạn cùng khối 7 trường mình nên bạn đã chọn 120 bạn bất kì trong khối 7 tham gia khảo sát. Kết quả như sau:

+ Có 30% các bạn tham gia khảo sát chưa biết bơi

+ Có $\frac{3}{8}$ các bạn còn lại biết bơi

+ Còn lại là các bạn bơi giỏi

Toàn khẳng định rằng“ Đa phần học sinh trường mình biết bơi“. Kết luận này có đúng không?

Lời giải

Số học sinh chưa biết bơi là: $30\%.120 = 36$ (học sinh)

Số học sinh biết bơi là: $\frac{7}{12}.(120 - 36) = 49$ (học sinh)

Số học sinh bơi giỏi là: $120 - 36 - 49 = 35$ (học sinh)

Toàn khẳng định rằng“ Đa phần học sinh trường mình biết bơi“. Kết luận này là kết luận đúng.

Câu 10.

Để khảo sát về mức độ thích đọc sách hoặc nghe nhạc vào thời gian rảnh rỗi của các học sinh trong lớp 7A , Bạn Hùng đã phát phiếu khảo sát cho 30 bạn bất kì trong lớp.

a) Em hãy giúp bạn Hùng thiết kế phiếu khảo sát

b) Giả sử Bạn Hùng phát phiếu khảo sát cho 30 bạn bất kì và thu được kết quả như sau:

+ Có 30% các bạn tham gia khảo sát rất thích đọc sách hoặc nghe nhạc vào thời gian rảnh rỗi

+ Có $\frac{1}{4}$ số học sinh còn lại thích đọc sách hoặc nghe nhạc vào thời gian rảnh rỗi

+ Số học sinh đọc sách hoặc nghe nhạc vào thời gian rảnh rỗi ở mức bình thường bằng $\frac{3}{4}$ tổng số học rất thích và thích .

+ Còn lại là số học sinh không thích đọc sách hoặc nghe nhạc vào thời gian rảnh rỗi.

Bạn Hùng nói rằng: “Đa số học sinh thích nghe nhạc và đọc sách vào thời gian rảnh”. Theo em bạn Hùng nhận định như vậy đúng hay sai. Nếu sai hãy sửa lại cho đúng.

Lời giải

a) Phiếu khảo sát

Bạn có thích đọc sách hoặc nghe nhạc vào thời gian rảnh rỗi không? (Đánh dấu x vào phương án bạn lựa chọn)

Rất thích

Thích

Bình thường

Không thích

b) Số học sinh rất thích đọc sách hoặc nghe nhạc vào thời gian rảnh rỗi là:

$$30\% \cdot 30 = 9 \text{ (học sinh)}$$

Số học sinh thích đọc sách hoặc nghe nhạc vào thời gian rảnh rỗi là:

$$\frac{1}{3} \cdot (30 - 9) = 7 \text{ (học sinh)}$$

Số học sinh thích đọc sách hoặc nghe nhạc vào thời gian rảnh rỗi ở mức bình thường là:

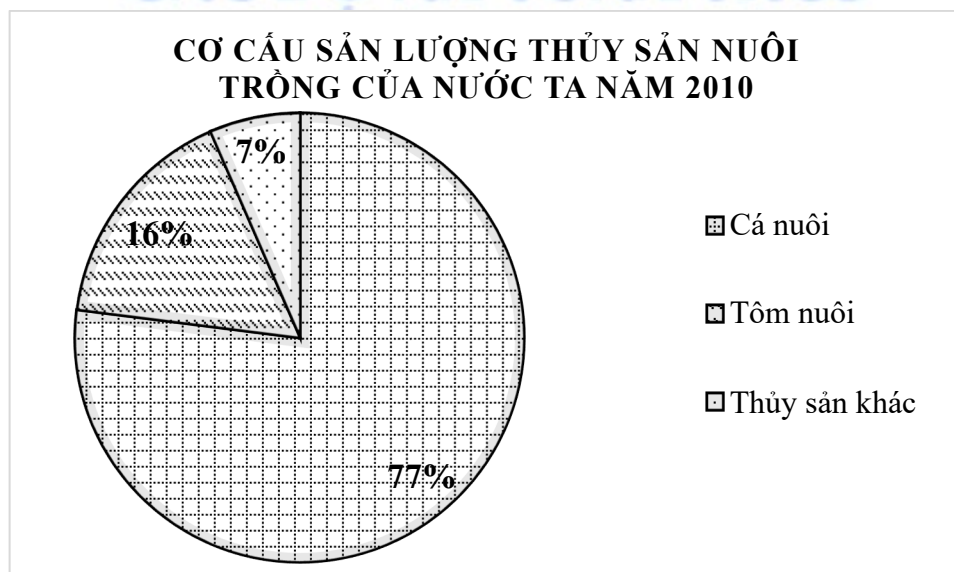
$$\frac{3}{4} \cdot (9 + 7) = 12 \text{ (học sinh)}$$

Số học sinh không thích đọc sách hoặc nghe nhạc vào thời gian rảnh rỗi là:

$$30 - 9 - 7 - 12 = 2 \text{ (học sinh)}$$

Theo em, nhận định của Hùng là sai. Sửa lại: Đa số học sinh thích đọc sách hoặc nghe nhạc vào thời gian rảnh rỗi ở mức bình thường.

Câu 11. Cho biểu đồ hình quạt tròn sau:



a) Biểu đồ hình quạt tròn trên cho biết điều gì? Lập bảng số liệu thống kê.

b) Biết rằng khối lượng Cá nuôi năm 2010 thu được là 12,7 triệu tấn. Tính tổng sản lượng thủy sản thu được của nước ta năm 2010.

Lời giải

a) Biểu đồ hình quạt tròn trên cho biết tỉ lệ phần trăm sản lượng thủy sản nuôi trồng của nước ta năm 2010.

Bảng dữ liệu

Sản phẩm thủy sản	Cá nuôi	Tôm nuôi	Thủy sản khác
Tỉ lệ phần trăm	77%	16%	7%

b) Tổng sản lượng thủy sản thu được ở nước ta năm 2010 là: $12,7 : 77\% \approx 16,5$ triệu tấn.

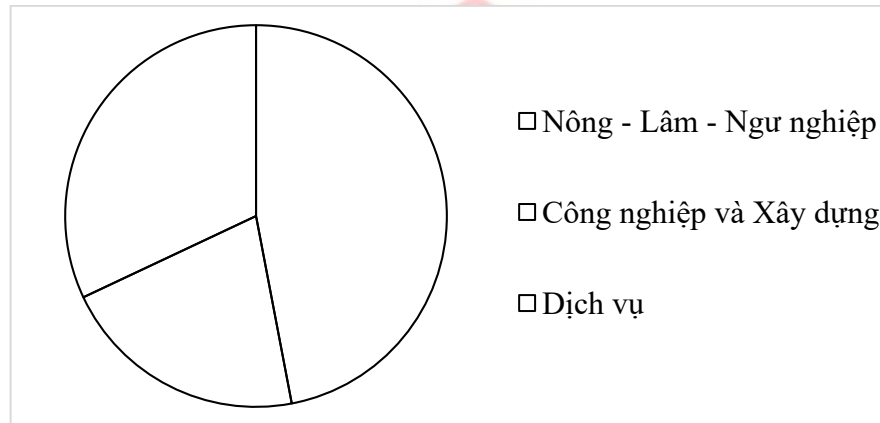
Câu 12. Cho bảng số liệu sau:

LAO ĐỘNG ĐANG LÀM VIỆC PHÂN THEO NGÀNH KINH TẾ Ở NƯỚC TA NĂM 2013

Ngành	Nông – Lâm – Ngư nghiệp	Công nghiệp và Xây dựng	Dịch vụ
Số lao động (nghìn người)	24399	11086	16723

a) Tính tỉ số phần trăm số lao động đang làm việc phân theo ngành kinh tế ở nước ta năm 2013. (làm tròn chữ số hàng phần mười)

b) Hoàn thiện biểu đồ hình quạt tròn sau.



Lời giải

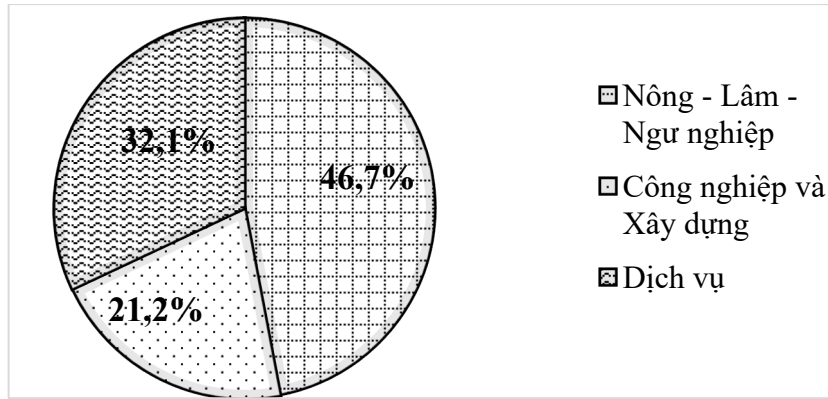
a) Tổng số lao động đang làm việc phân theo ngành kinh tế ở nước ta năm 2013 là:
 $24399 + 11086 + 16723 = 52208$ nghìn người.

Tỉ số phần trăm số lao động đang làm trong ngành Nông – Lâm – Ngư nghiệp chiếm:
 $24399 : 52208 \cdot 100\% \approx 46,7\%$

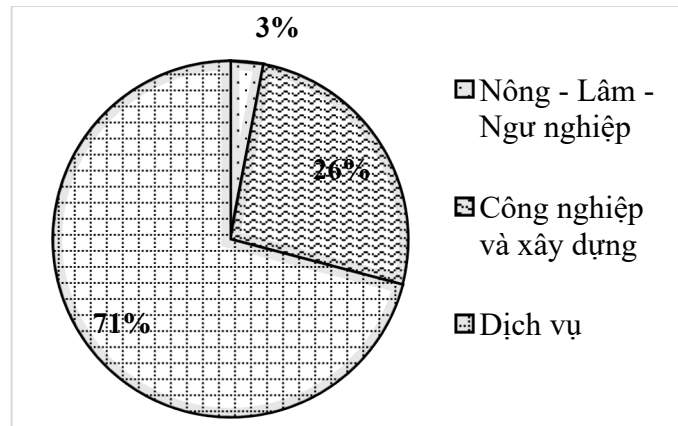
Tỉ số phần trăm số lao động đang làm trong ngành Công nghiệp và Xây dựng chiếm:
 $11086 : 52208 \cdot 100\% \approx 21,2\%$

Tỉ số phần trăm số lao động đang làm trong ngành Dịch vụ chiếm:
 $100\% - 46,7\% - 21,2\% \approx 32,1\%$

b)



Câu 13. Biểu đồ hình quạt tròn sau thể hiện cơ cấu sản lượng theo ngành kinh tế của Pháp năm 2000.



Biết rằng doanh thu ngành Dịch vụ của Pháp năm 2000 là khoảng 23 tỷ USD. Tính doanh thu của từng ngành kinh tế Pháp năm đó. Lập bảng số liệu thể hiện doanh thu của các ngành. (Làm tròn đến chữ số hàng đơn vị)

Lời giải

Tổng doanh thu kinh tế của Pháp năm 2000 là: $23 : 71\% \approx 32$ tỷ USD.

Doanh thu ngành Công nghiệp và xây dựng là: $32 \cdot 26\% \approx 8$ tỷ USD.

Doanh thu ngành Nông – Lâm – Ngư nghiệp của Pháp năm 2000 là: $32 - 8 - 23 \approx 1$ tỷ USD.

Bảng số liệu thể hiện doanh thu của các ngành.

Ngành kinh tế	Nông – Lâm – Ngư nghiệp	Công nghiệp và Xây dựng	Dịch vụ
Doanh thu (tỷ USD)	1	8	23

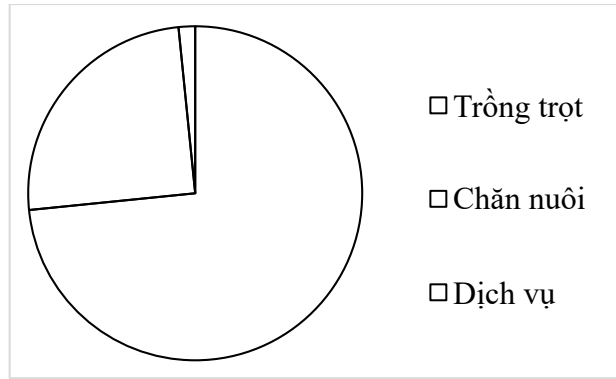
Câu 14. Cho bảng số liệu sau:

GIÁ TRỊ SẢN XUẤT NÔNG NGHIỆP PHÂN THEO NGÀNH CỦA NƯỚC TA NĂM 2015

Ngành	Trồng trọt	Chăn nuôi	Dịch vụ
Giá trị (nghìn tỉ đồng)	396,7	135,2	8,3

a) Tính tỉ số phần trăm giá trị sản xuất nông nghiệp phân theo ngành của nước ta năm 2015. (làm tròn đến chữ số hàng phân mười).

b) Hoàn thiện biểu đồ hình quạt tròn sau:



Lời giải

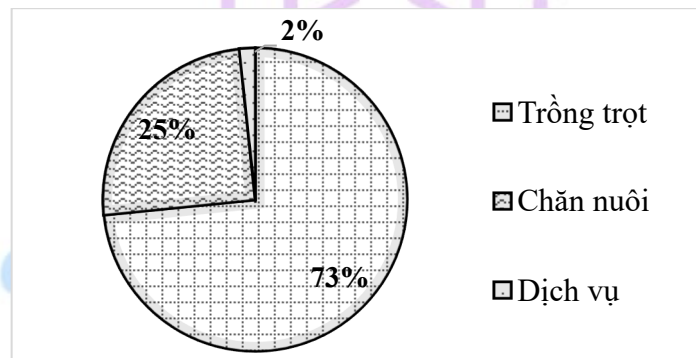
a) Tổng giá trị sản xuất nông nghiệp phân theo ngành của nước ta năm 2015 là:
 $396,7 + 135,2 + 8,3 = 540,2$ nghìn tỉ đồng.

Tỉ số phần trăm giá trị ngành Trồng trọt của nước ta năm 2015 là:
 $396,7 : 540,2 \cdot 100\% \approx 73,4\%$

Tỉ số phần trăm giá trị ngành Chăn nuôi của nước ta năm 2015 là:
 $135,2 : 540,2 \cdot 100\% \approx 25,0\%$

Tỉ số phần trăm giá trị ngành Dịch vụ của nước ta năm 2015 là:
 $100\% - 73,4\% - 25,0\% \approx 1,6\%$

b)

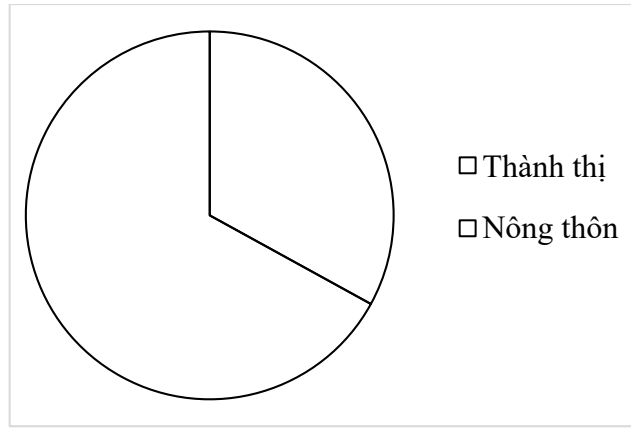


Câu 15. Bảng số liệu sau cho biết dân số Việt Nam năm 2016.

Vùng	Thành thị	Nông thôn
Dân số (nghìn người)	30 035	60 394

a) Tính tổng dân số Việt Nam năm 2016. Lập bảng dữ liệu tỉ lệ phần trăm dân số Việt Nam năm 2016. (Làm tròn đến chữ số hàng đơn vị)

b) Hoàn thiện biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn dân số Việt Nam năm 2016.



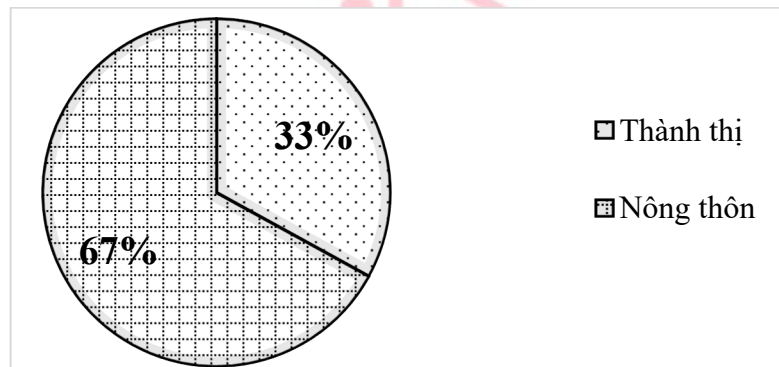
Lời giải

a) Tổng dân số Việt Nam năm 2016 là: $30035 + 60394 = 90429$ nghìn người.

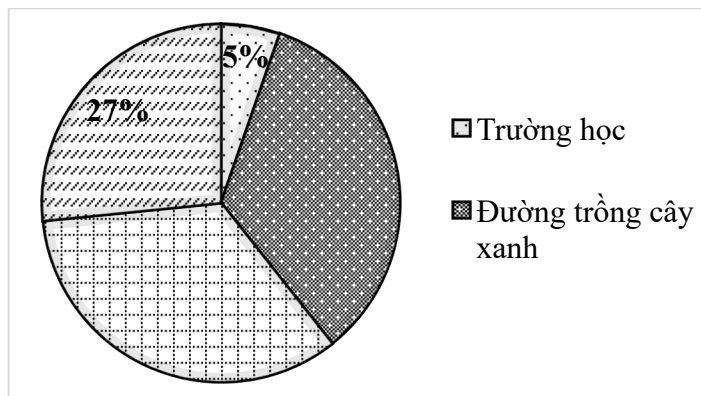
Bảng dữ liệu tỉ lệ phần trăm dân số Việt Nam năm 2016.

Vùng	Thành thị	Nông thôn
Dân số (%)	33%	67%

b)



Câu 16. Biểu đồ hình quạt sau đây biểu diễn tỉ số phần trăm đất sử dụng cho khu đô thị mới Văn Phú. Biết diện tích khu đô thị là 47 ha và diện tích đất dùng vào Đường trồng cây xanh và Biệt thự là bằng nhau. Tính diện tích đất sử dụng từng loại.



Lời giải

a) Gọi tỉ số phần trăm đất sử dụng cho Đường trồng cây xanh là $x\%$.

Vì diện tích đất dùng vào Đường trồng cây xanh và Biệt thự là bằng nhau. Ta có:

$$x + x + 27\% + 5\% = 100\%$$

$$2x + 32\% = 100\%$$

$$2x = 68\%$$

$x = 34\%$.

b) Diện tích đất dùng để xây Trường học là: $47.5\% = 2,35 \text{ ha}$

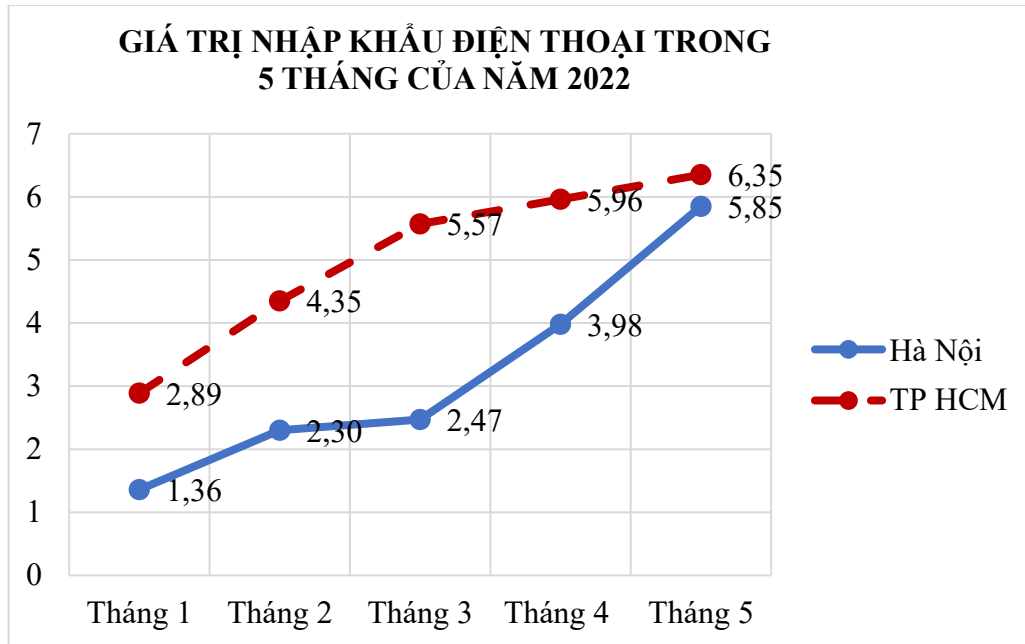
Diện tích đất dùng vào Đường trồng cây xanh là: $47.34\% = 15,98 \text{ ha}$

Diện tích đất xây Biệt thự là: $15,98 \text{ ha}$

Diện tích đất xây nhà cao tầng là: $47 - 2,35 - 15,98.2 = 12,69 \text{ ha}$.

Câu 17.

Bảng biểu diễn sau cho biết giá trị nhập khẩu điện thoại trong 5 tháng của năm 2022



- Các đường màu đỏ và màu xanh trong biểu đồ biểu diễn những số liệu nào?
- Cho biết xu thế về giá trị nhập khẩu điện thoại trong 5 tháng
- Tháng nào giá trị nhập khẩu điện thoại ở TP HCM lớn hơn Hà Nội.

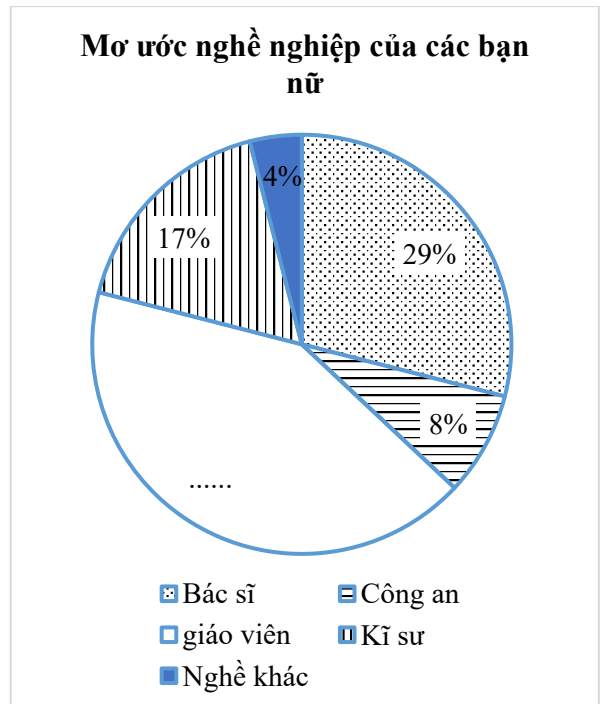
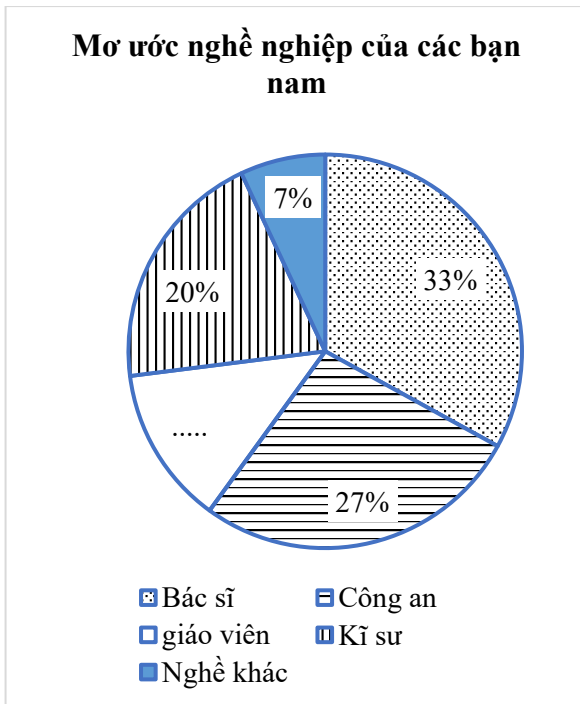
Lời giải

- Đường màu đỏ trong biểu đồ biểu diễn giá trị nhập khẩu điện thoại ở TP HCM, Đường màu xanh trong biểu đồ biểu diễn giá trị nhập khẩu điện thoại ở Hà Nội
- Đường màu đỏ luôn đi lên theo thời gian
- Tháng 6 giá trị nhập khẩu điện thoại ở TP HCM lớn hơn Hà Nội

Câu 18.

Một nhóm nghiên cứu đã khảo sát về mơ ước nghề nghiệp của các bạn học sinh khối 7 của một tỉnh và thu được kết quả như các biểu đồ.

Tỉ lệ phần trăm học sinh tham gia các môn thể thao của khối 7



- a) Lập bảng thống kê về mơ ước nghề nghiệp của các bạn nam, nữ
- b) Liệt kê những nghề có tỉ lệ bạn nữ lựa chọn cao hơn các bạn nam
- c) Một trường Trung học của tỉnh này có 250 học sinh khối 7, gồm 130 bạn nam và 120 bạn nữ, hãy dự đoán số bạn có mơ ước trở thành giáo viên?

Lời giải

a) Bảng thống kê về mơ ước nghề nghiệp của các bạn nam

Nghề nghiệp	Bác sĩ	Công an	Giáo viên	Kỹ sư	Nghề khác
Tỷ lệ (%)	33	27	13	20	7

Bảng thống kê về mơ ước nghề nghiệp của các bạn nữ

Nghề nghiệp	Bác sĩ	Công an	Giáo viên	Kỹ sư	Nghề khác
Tỷ lệ (%)	27	8	42	17	4

- b) Nghề có tỉ lệ bạn nữ lựa chọn cao hơn các bạn nam: giáo viên
- c) Ta có: $130.13\% = 17$
 $120.42\% = 50$
 Dự đoán số bạn có mơ ước trở thành giáo viên: $17 + 5 = 67$ (giáo viên).

CD9: CÁC DẠNG TOÁN VỀ PHÂN SỐ

Dạng 1: Tìm phân số thỏa mãn điều kiện cho trước
Dạng 2: Chứng minh phân số đã cho là tối giản
Dạng 3: Tìm điều kiện để phân số là phân số tối giản
Dạng 4: Tìm số tự nhiên n để phân số rút gọn được
Dạng 5: Một số bài toán có lời văn
Dạng 6: Các bài toán về so sánh

Dạng 1. Tìm phân số thỏa mãn điều kiện cho trước

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. (HSG 7 huyện Tân An 2017 - 2018)

Giá trị của x trong biểu thức $(\sqrt{x}-1)^2 = 0,25$ là:

A. $\frac{9}{4}; \frac{1}{4}$

B. $-\frac{1}{4}; -\frac{9}{4}$

C. $\frac{9}{4}; -\frac{1}{4}$

D. $-\frac{9}{4}; \frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn A

$$(\sqrt{x}-1)^2 = 0,25$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-1 = \frac{1}{2} \\ \sqrt{x}-1 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \frac{3}{2} \\ \sqrt{x} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{4} \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Vậy $x \in \left\{ \frac{9}{4}; \frac{1}{4} \right\}$.

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Hậu Lộc 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức $Q = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc}$ với a, b, c thỏa mãn: $(3a-2b)^2 + |4b-3c| \leq 0$.

Lời giải

$$Q = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} \text{ với } a, b, c \text{ thỏa mãn: } (3a-2b)^2 + |4b-3c| \leq 0.$$

Vì $(3a-2b)^2 \geq 0$; $|4b-3c| \geq 0$ với $\forall a, b$ nên để $(3a-2b)^2 + |4b-3c| \leq 0$ thì:

$$\begin{cases} (3a-2b)^2 = 0 \\ |4b-3c| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a = 2b \\ 4b = 3c \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}.$$

Đặt $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k \Rightarrow a = 2k; b = 3k; c = 4k$. Thay vào Q ta có:

$$Q = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} = \frac{(2k)^3 + (3k)^3 + (4k)^3}{2k \cdot 3k \cdot 4k} = \frac{k^3(2^3 + 3^3 + 4^3)}{24k^3} = \frac{33}{8}.$$

Vậy $Q = \frac{33}{8}$.

Câu 2. (HSG 7 Thị xã Thái Hòa 2022 - 2023)

Cho $\frac{a-2b+c}{b} = \frac{b-5c+a}{2c} = \frac{c-8a+b}{3a}$ và a, b, c khác 0.

Tính $P = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \cdot \left(1 + \frac{b}{c}\right) \cdot \left(1 + \frac{c}{a}\right)$

Lời giải

Từ $\frac{a-2b+c}{b} = \frac{b-5c+a}{2c} = \frac{c-8a+b}{3a}$ và a, b, c khác 0.

$$\Rightarrow \frac{a-2b+c}{b} + 3 = \frac{b-5c+a}{2c} + 3 = \frac{c-8a+b}{3a} + 3$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c}{b} = \frac{b+c+a}{2c} = \frac{c+a+b}{3a}$$

TH1: Nếu $a+b+c=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} b+c = -a \\ a+b = -c \\ c+a = -b \end{cases}$$

Thay vào P ta có $P = -1$

TH 2: Nếu $a+b+c \neq 0$

$$\Rightarrow b = 2c = 3a \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{3}; \frac{b}{c} = \frac{2}{1}; \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$$

Thay vào P ta có $P = 10$

Câu 3. (HSG 7 huyện Yên Phong, tỉnh Bắc Ninh 2022 - 2023)

Cho các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c = 2023$. Chứng minh rằng giá trị biểu

thức sau không phải là một số nguyên: $A = \frac{a}{2023-c} + \frac{b}{2023-a} + \frac{c}{2023-b}$

Lời giải

Theo bài ra ta có $a+b+c = 2023 \Rightarrow \begin{cases} 2023-c = a+b \\ 2023-a = b+c \\ 2023-b = a+c \end{cases}$

$$A = \frac{a}{2023-c} + \frac{b}{2023-a} + \frac{c}{2023-b} = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c}$$

Vì a, b, c là các số nguyên dương nên

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} > \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+a} + \frac{c}{a+c+b} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$$

Ta lại có $\frac{a}{a+b}; \frac{b}{b+c}; \frac{c}{a+c} < 1$ nên

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} < \frac{a+c}{a+b+c} + \frac{b+a}{b+c+a} + \frac{c+b}{a+c+b} = \frac{2 \cdot (a+b+c)}{a+b+c} = 2$$

Vì $1 < A < 2$ nên A không phải là một số nguyên.

Câu 4. (HSG 7 tỉnh Quảng Ninh 2022 - 2023)

Cho a, b, c là các số thỏa mãn : $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$. Tính tổng :

$$S = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}$$

Lời giải

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{2(a+b+c)} = \frac{1}{2}$$

$$+) \frac{a}{b+c} = \frac{1}{2} \Rightarrow b+c = 2a$$

$$+) \frac{b}{c+a} = \frac{1}{2} \Rightarrow c+a = 2b$$

$$+) \frac{c}{a+b} = \frac{1}{2} \Rightarrow a+b = 2c$$

$$\text{Suy ra : } S = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \frac{2c}{c} + \frac{2a}{a} + \frac{2b}{b} = 2 + 2 + 2 = 6$$

Câu 5. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Duyên Hải 2022 - 2023)

Tìm ba phân số tối giản. Biết tổng của chúng bằng $\frac{269}{30}$. Tử số của chúng tỉ lệ thuận với 5 ;

7 ; 11. Mẫu số của chúng tỉ lệ nghịch với $\frac{1}{4} ; \frac{1}{5} ; \frac{1}{6}$.

Lời giải

Gọi ba phân số tối giản cần tìm là: $\frac{a}{b} ; \frac{c}{d} ; \frac{e}{f}$ (Điều kiện $(a,b)=1 ; (c,d)=1 ; (e,f)=1$).

Vì tử số của chúng tỉ lệ thuận với 5 ; 7 ; 11 nên $\frac{a}{5} = \frac{c}{7} = \frac{e}{11} = k$

$$\Rightarrow a = 5k ; c = 7k ; e = 11k$$

Vì mẫu số của chúng tỉ lệ nghịch với $\frac{1}{4} ; \frac{1}{5} ; \frac{1}{6}$ nên $\frac{1}{4}b = \frac{1}{5}d = \frac{1}{6}f$

$$\Rightarrow \frac{b}{4} = \frac{d}{5} = \frac{f}{6} = q$$

$$\Rightarrow b = 4q ; d = 5q ; f = 6q$$

Do tổng của ba phân số bằng $\frac{269}{30}$ nên $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{269}{30}$

$$\Rightarrow \frac{5k}{4q} + \frac{7k}{5q} + \frac{11k}{6q} = \frac{269}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{269}{60} \cdot \frac{k}{q} = \frac{269}{30} \Rightarrow \frac{k}{q} = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{5k}{4q} = \frac{5}{4} \cdot 2 = \frac{5}{2} \\ \frac{c}{d} = \frac{7k}{5q} = \frac{7}{5} \cdot 2 = \frac{14}{5} \\ \frac{e}{f} = \frac{11k}{6q} = \frac{11}{6} \cdot 2 = \frac{11}{3} \end{cases}$$

Vậy ba phân số cần tìm là $\frac{5}{2}$; $\frac{14}{5}$; $\frac{11}{3}$.

Câu 6. (HSG 7 huyện 2017 - 2018)

Tìm phân số có tử là 7 biết nó lớn hơn $-\frac{9}{10}$ và nhỏ hơn $-\frac{9}{11}$

Lời giải

Gọi mẫu phân số cần tìm là x ta có:

$$\begin{aligned} \frac{-9}{10} < \frac{7}{x} < \frac{-9}{11} \\ \Rightarrow \frac{63}{-70} < \frac{63}{9x} < \frac{63}{-77} \\ \Rightarrow -77 < 9x < -70 \end{aligned}$$

$$\text{vì } 9x:9 \Rightarrow 9x = -72 \Rightarrow x = 8$$

Vậy phân số cần tìm là $-\frac{7}{8}$.

Câu 7. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Bùi Hữu Diên 2022 - 2023)

Tìm ba phân số tối giản biết tổng của chúng là $4\frac{9}{40}$; các tử của chúng tỉ lệ với 2; 3; 5 còn các mẫu của chúng tương ứng tỉ lệ với 5; 4; 3.

Lời giải

Gọi ba phân số tối giản cần tìm là $\frac{a}{a'}$; $\frac{b}{b'}$; $\frac{c}{c'}$ (Điều kiện $(a, a') = 1$; $(b, b') = 1$; $(c, c') = 1$)

Theo đề bài ta có:

$$\begin{cases} \frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \frac{c}{c'} = 4\frac{9}{40} \\ \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} & (1) \\ \frac{a'}{5} = \frac{b'}{4} = \frac{c'}{3} & (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } \frac{a}{2} : \frac{a'}{5} = \frac{b}{3} : \frac{b'}{4} = \frac{c}{5} : \frac{c'}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a'} \cdot \frac{5}{2} = \frac{b}{b'} \cdot \frac{4}{3} = \frac{c}{c'} \cdot \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{a}{\frac{2}{5}} = \frac{b}{\frac{3}{4}} = \frac{c}{\frac{5}{3}}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{\frac{a}{2}}{\frac{5}{5}} = \frac{\frac{b}{3}}{\frac{4}{4}} = \frac{\frac{c}{5}}{\frac{3}{3}} = \frac{\frac{a+b+c}{2+3+5}}{\frac{40}{5+4+3}} = \frac{4 \cdot \frac{9}{60}}{\frac{169}{60}} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{a'} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{5} \\ \frac{b}{b'} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{8} \\ \frac{c}{c'} = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Vậy ba phân số tối giản cần tìm là $\frac{3}{5}; \frac{9}{8}; \frac{5}{2}$.

Câu 8. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Phạm Kính Ân 2022 - 2023)

Tìm 3 phân số có tổng của chúng bằng $1\frac{1}{70}$, các tử của chúng tỉ lệ với 3; 4; 5 và các mẫu tương ứng của chúng tỉ lệ với 5; 1; 2.

Lời giải

Gọi ba phân số cần tìm lần lượt là $\frac{a}{x}; \frac{b}{y}; \frac{c}{z}$.

Theo đề bài ta có

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1\frac{1}{70}; \frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} \text{ và } \frac{x}{5} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{3} : \frac{x}{5} = \frac{b}{4} : \frac{y}{1} = \frac{c}{5} : \frac{z}{2} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{\frac{a}{3}}{\frac{x}{5}} = \frac{\frac{b}{4}}{\frac{y}{1}} = \frac{\frac{c}{5}}{\frac{z}{2}} = \frac{\frac{a+b+c}{3+4+5}}{\frac{1}{\frac{5}{5} + \frac{1}{1} + \frac{2}{2}}} = \frac{1\frac{1}{70}}{\frac{70}{10}} = \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{x} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{35} \\ \frac{b}{y} = \frac{4}{1} \cdot \frac{1}{7} = \frac{4}{7} \\ \frac{c}{z} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{7} = \frac{5}{14} \end{cases}$$

Vậy ba phân số cần tìm là $\frac{3}{35}; \frac{4}{7}; \frac{5}{14}$.

Câu 9. (HSG 7 huyện Kim Thành, năm học 2017 - 2018)

Cho $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2017}; B = \frac{1}{2016} + \frac{2}{2015} + \frac{3}{2014} + \dots + \frac{2015}{2} + \frac{2016}{1}$.

Tính $\frac{A}{B}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{1}{2016} + \frac{2}{2015} + \frac{3}{2014} + \dots + \frac{2015}{2} + \frac{2016}{1} \\
 &= \left(\frac{1}{2016} + 1\right) + \left(\frac{2}{2015} + 1\right) + \left(\frac{3}{2014} + 1\right) + \dots + \left(\frac{2015}{2} + 1\right) + 1 \\
 &= \frac{2017}{2016} + \frac{2017}{2015} + \frac{2017}{2014} + \dots + \frac{2017}{2} + \frac{2017}{1} \\
 &= 2017 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2017}\right)
 \end{aligned}$$

Do đó $\frac{A}{B} = \frac{1}{2017}$

Câu 10. (HSG 7 huyện Việt Yên, năm học 2018 - 2019)

Cho $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{37.38}$ và $B = \frac{1}{20.38} + \frac{1}{21.37} + \dots + \frac{1}{38.20}$

Chứng minh rằng $\frac{A}{B}$ là một số nguyên.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{37.38} \\
 &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{37} - \frac{1}{38} \\
 &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{37}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{38}\right) \\
 &= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{38}\right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{38}\right) \\
 &= \frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{38} \\
 B &= \frac{1}{20.38} + \frac{1}{21.37} + \dots + \frac{1}{38.20} \\
 \Rightarrow 58B &= \frac{1}{20} + \frac{1}{38} + \frac{1}{21} + \frac{1}{37} + \dots + \frac{1}{38} + \frac{1}{20} = 2 \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{38}\right) = 2A \\
 \Rightarrow B &= \frac{2}{58}A \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{58}{2} = 29 \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Câu 11. (HSG 7 cấp huyện Thạch Thành, tỉnh Thanh Hoá 2017 - 2018)

Tìm số hữu tỉ x , sao cho tổng của số đó với nghịch đảo của nó có giá trị là một số nguyên.

Lời giải

Gọi $x = \frac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, \text{UCLN}(m, n) = 1$

Khi đó: $x + \frac{1}{x} = \frac{m}{n} + \frac{n}{m} = \frac{m^2 + n^2}{mn}$ (1)

Để $x + \frac{1}{x}$ nguyên thì $m^2 + n^2 : mn$

$$\Rightarrow m^2 + n^2 : m \Rightarrow n^2 : m \Rightarrow n : m$$

$$\text{Mà UCLN}(m, n) = 1 \Rightarrow m = 1 \text{ hoặc } m = -1$$

*) Với $m = 1$

$$\text{Từ (1), ta có: } x + \frac{1}{x} = \frac{1^2 + n^2}{1 \cdot n} = \frac{1 + n^2}{n} \text{ Để } x + \frac{1}{x} \text{ nguyên thì } 1 + n^2 : n \Rightarrow 1 : n \text{ hay } n = \pm 1$$

*) Với $m = -1$

$$\text{Từ (1), ta có: } x + \frac{1}{x} = \frac{(-1)^2 + n^2}{(-1) \cdot n} = \frac{1 + n^2}{-n}$$

$$\text{Để } x + \frac{1}{x} \text{ nguyên thì } 1 + n^2 : (-n) \Rightarrow 1 : (-n) \text{ hay } n = \pm 1$$

$$\text{Khi đó } x = \frac{m}{n} \text{ nên } x = \pm 1$$

Câu 12. (HSG 7 trường THCS Nguyễn Trãi 2018-2019)

Ba phân số có tổng bằng $\frac{213}{70}$, các tử của chúng tỉ lệ với 3; 4; 5, các mẫu của chúng tỉ lệ với 5; 1; 2. Tìm ba phân số đó.

Lời giải

Gọi các phân số phải tìm là: a, b, c

$$\text{Ta có: } a + b + c = \frac{213}{70} \text{ và } a : b : c = \frac{3}{5} : \frac{4}{1} : \frac{5}{2} = 6 : 40 : 25 \Rightarrow \frac{a}{6} = \frac{b}{40} = \frac{c}{25}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{6} = \frac{b}{40} = \frac{c}{25} = \frac{a + b + c}{6 + 40 + 25} = \frac{213}{70} : 71 = \frac{3}{70}$$

$$\Rightarrow a = \frac{9}{35}; b = \frac{12}{7}; c = \frac{15}{14}$$

$$\text{Vậy ba phân số cần tìm là } \frac{9}{35}; \frac{12}{7}; \frac{15}{14}$$

Câu 13. (HSG 7 trường THCS Phú Trường 2017-2018)

Tính giá trị của biểu thức $\frac{2a-5b}{a-3b}$ với $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$

Lời giải

$$\frac{2a-5b}{a-3b} = \frac{2\left(\frac{a}{b}\right)-5}{\left(\frac{a}{b}\right)-3} = \frac{2 \cdot \frac{3}{5} - 5}{\frac{3}{5} - 3} = \frac{14}{9}$$

Dạng 2. Chứng minh phân số đã cho tối giản

Câu 1. (HSG 7 huyện Triệu Sơn 2022 - 2023)

Cho số nguyên tố p . Giả sử x, y là các số tự nhiên khác 0, thỏa mãn điều kiện $\frac{x^2 + py^2}{xy}$ là các số tự nhiên. Chứng minh rằng $\frac{x^2 + py^2}{xy} = p + 1$.

Lời giải

Gọi ƯCLN $(x, y) = d (d \in \mathbb{N}^*)$, khi đó tồn tại các số tự nhiên a và b để $x = da; y = db$ và $(a; b) = 1$

Ta có: $\frac{x^2 + py^2}{xy} = \frac{d^2a^2 + pd^2b^2}{d^2ab} = \frac{a^2 + pb^2}{ab} \in \mathbb{N}^*$.

Từ đó ta được: $a^2 + pb^2 : ab \Rightarrow a^2 + pb^2 : b \Rightarrow a^2 : b$.

Do $(a; b) = 1$ nên ta suy ra được $b = 1$. Suy ra $a^2 + p : a \Rightarrow p : a$.

Do p là số nguyên tố nên ra được $a = 1$ hoặc $a = p$. Khi đó ta xét các trường hợp

Với $a = 1$, khi đó ta được $x = y = d \Rightarrow \frac{x^2 + py^2}{xy} = \frac{d^2 + pd^2}{d^2} = p + 1$.

Với $a = p$, khi đó ta được $x = dp; y = d \Rightarrow \frac{x^2 + py^2}{xy} = \frac{d^2p^2 + d^2p}{d^2p} = p + 1$.

Vậy ta luôn có $\frac{x^2 + py^2}{xy} = p + 1$

Câu 2. (HSG 7 huyện Hoa Lư, tỉnh Ninh Bình 2020 - 2021)

Chứng minh với n là số nguyên thì phân số $\frac{2n+5}{n+3}$ là phân số tối giản.

Lời giải

Điều kiện: $n \neq -3$

Gọi ƯCLN $(n+3, 2n+5) = d$

$\Rightarrow \begin{cases} (n+3) : d \\ (2n+5) : d \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2(n+3) : d \\ (2n+5) : d \end{cases}$

$\Rightarrow [(2n+6) - (2n+5)] : d$

$\Rightarrow 1 : d$

$\Rightarrow d = 1$

Vậy $\frac{2n+5}{n+3}$ là phân số tối giản.

Câu 3. (HSG 7 huyện Thanh Ba, tỉnh Phú Thọ 2020 - 2021)

Chứng minh phân số $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản với mọi số tự nhiên n .

Lời giải

$$\text{Gọi } \text{ƯCLN}(12n+1, 30n+2) = d$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12n+1:d \\ 30n+2:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(12n+1):d \\ 2(30n+2):d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (60n+5) - (60n+4):d$$

$$\Rightarrow 1:d$$

$$\Rightarrow d = 1$$

Vậy phân số $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản với mọi số tự nhiên n .

Câu 4. (HSG 7 huyện Sơn Tịnh, tỉnh Quảng Ngãi 2020 - 2021)

Chứng tỏ rằng với mọi số tự nhiên n , phân số $\frac{12n+5}{15n+6}$ là phân số tối giản.

Lời giải

$$\text{Gọi } \text{ƯCLN}(12n+5, 15n+6) = d$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12n+5:d \\ 15n+6:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(12n+5):d \\ 4(15n+6):d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (60n+25) - (60n+24):d$$

$$\Rightarrow 1:d$$

$$\Rightarrow d = 1$$

Vậy phân số $\frac{12n+5}{15n+6}$ là phân số tối giản.

Câu 5. (HSG 7 huyện Nho Quan, tỉnh Ninh Bình 2020 - 2021)

Chứng tỏ rằng với n là số nguyên dương thì $\frac{14n+3}{24n+5}$ là phân số tối giản.

Lời giải

$$\text{Gọi } d = \text{ƯCLN}(14n+3; 24n+5)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 14n+3:d \\ 24n+5:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12 \cdot (14n+3):d \\ 7 \cdot (24n+5):d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 168n+36:d \\ 168n+35:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (168n+36) - (168n+35):d$$

$$\Rightarrow 168n+36 - 168n - 35:d$$

$$\Rightarrow 1:d \Rightarrow d = 1$$

Vậy: phân số $\frac{14n+3}{24n+5}$ là phân số tối giản với n là số nguyên dương.

Câu 6. (HSG 7 huyện Chí Linh năm học 2022 - 2023)

Chứng tỏ phân số có dạng $\frac{n-4}{3n-11}$ là phân số tối giản với mọi số nguyên n .

Lời giải

$$\text{Gọi ước chung của } n-4 \text{ và } 3n-11 \text{ là } d \Rightarrow \begin{cases} n-4:d \\ 3n-11:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3n-12:d \\ 3n-11:d \end{cases}$$

$$\text{Do đó } (3n-12)-(3n-11) = -1:d \Rightarrow d = \pm 1.$$

Vậy phân số có dạng $\frac{n-4}{3n-11}$ là phân số tối giản với mọi số nguyên n .

Dạng 3. Tìm điều kiện để phân số là phân số tối giản

Câu 1. (HSG 7 huyện Than Uyên, tỉnh Lai Châu, 2022 - 2023)

Tìm phân số tối giản $\frac{m}{n}$ biết rằng nếu cộng tử với 6 và cộng mẫu với 9 thì giá trị phân số đó không đổi ?

Lời giải

Vì phân số tối giản $\frac{m}{n}$ khi cộng tử với 6 và cộng mẫu với 9 thì giá trị phân số đó không

$$\text{đổi nên ta có: } \frac{m}{n} = \frac{m+6}{n+9} = \frac{m-(m+6)}{n-(n+9)} = \frac{m-m-6}{n-n-9} = \frac{-6}{-9} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Vậy } \frac{m}{n} = \frac{2}{3}.$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Phù Cát, tỉnh Bình Định 2020 - 2021)

Tìm $n \in \mathbb{N}$ để phân số $\frac{n+1}{3n-1}$ là phân số tối giản.

Lời giải

$$\text{Gọi } \text{ƯCLN}(n+1, 3n-1) = d$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+1:d \\ 3n-1:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3n+3:d \\ 3n-1:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (3n+3)-(3n-1):d$$

$$\Rightarrow 4:d$$

$$\Rightarrow d \in \{1; 2; 4\}$$

Để $\frac{n+1}{3n-1}$ là phân số tối giản thì $d \notin \{2; 4\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+1 \not\equiv 2 \\ n+1 \not\equiv 4 \end{cases} \Rightarrow n+1 \not\equiv 2$$

$$\Rightarrow n+1 \neq 2k (k \in \mathbb{N}^*)$$

$$\Rightarrow n \neq 2k-1$$

Vậy $n \neq 2k-1 (k \in \mathbb{N}^*)$ thì phân số $\frac{n+1}{3n-1}$ là phân số tối giản.

Câu 3. (HSG 7 huyện Triệu Sơn, tỉnh Thanh Hóa 2020 - 2021)

Tìm các số tự nhiên n để phân số $\frac{1-3n}{2n-3}$ là phân số tối giản.

Lời giải

Gọi $d \in \text{ƯC}(1-3n; 2n-3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-3n:d \\ 2n-3:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2.(1-3n):d \\ 3.(2n-3):d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-6n:d \\ 6n-9:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2-6n) + (6n-9):d$$

$$\Rightarrow 2-6n+6n-9:d$$

$$\Rightarrow -7:d \Rightarrow d \in \{\pm 1; \pm 7\}$$

Để phân số $\frac{1-3n}{2n-3}$ là phân số tối giản thì $d \neq \pm 7$

Hay $2n-3$ không chia hết cho 7

$$\Rightarrow 2n-3 \neq 7k$$

$$\Rightarrow 2n-3-7 \neq 7k$$

$$\Rightarrow 2n-10 \neq 7k$$

$$\Rightarrow n-5 \neq 7k$$

$$\Rightarrow n \neq 7k+5$$

Vậy với $n \neq 7k+5$ phân số $\frac{1-3n}{2n-3}$ là phân số tối giản.

Câu 4. (HSG 7 huyện Phú Lương, tỉnh Thái Nguyên 2020 - 2021)

Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để các phân số sau đều là phân số tối giản:

$$\frac{7}{n+9}; \frac{8}{n+10}; \frac{9}{n+11}; \dots; \frac{100}{n+102}$$

Lời giải

Ta có các phân số đã cho đều có dạng $\frac{x}{x+(n+2)}$ với $x \in \{7; 8; 9; \dots; 100\}$

Do đó để các phân số đều tối giản thì x và $n+2$ phải nguyên tố cùng nhau.

Suy ra $n+2$ phải nhỏ nhất và nguyên tố cùng nhau với các số $7; 8; 9; \dots; 100$.

$$\Rightarrow n+2 \text{ là số nguyên tố nhỏ nhất và lớn hơn } 100$$

$$\Rightarrow n+2 = 101$$

$$\Rightarrow n = 99.$$

Dạng 4. Tìm số tự nhiên n để phân số rút gọn được

Câu 1.

Tìm tất cả các số tự nhiên n để phân số $B = \frac{6n+7}{3n+2}$ không là phân số tối giản.

Lời giải

Gọi d là ước nguyên tố chung (nếu có) của $6n+7$ và $3n+2$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6n+7:d \\ 3n+2:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6n+7:d \\ 6n+4:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (6n+7) - (6n+4):d \text{ hay } 3:d$$

Vì d là ước nguyên tố nên $d = 3$

Khi đó $3n+2:3 \Rightarrow 2:3$ vô lý

Vậy không có số tự nhiên n để phân số $B = \frac{6n+7}{3n+2}$ không là phân số tối giản.

Câu 2.

Tìm tất cả các số tự nhiên n để phân số $\frac{3n^2+2n+3}{2n+1}$ không là phân số tối giản.

Lời giải

Gọi d là ước nguyên tố chung (nếu có) của $3n^2+2n+3$ và $2n+1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3n^2+2n+3:d \\ 2n+1:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(3n^2+2n+3):d \\ 3n(2n+1):d \end{cases}$$

$$\Rightarrow [2(3n^2+2n+3) - 3n(2n+1)]:d \text{ hay } 2n+12:d \Rightarrow 2n+1+11:d$$

$$\text{Suy ra } 11:d \Rightarrow d=11$$

$$\text{Khi đó } (2n+1-11):11 \text{ hay } 2(n-5):11$$

$$\Rightarrow n-5:11$$

$$\Rightarrow n=11k+5 (k \in \mathbb{N})$$

Vậy với $n=11k+5 (k \in \mathbb{N})$ để phân số $\frac{3n^2+2n+3}{2n+1}$ không là phân số tối giản.

Câu 3. (HSG 7 huyện Tam Nông 2021 - 2022)

Tìm số nguyên x để tích hai phân số $\frac{3}{x-1}$ và $\frac{x+1}{3}$ là một số nguyên.

Lời giải

Tích hai phân số $\frac{3}{x-1}$ và $\frac{x+1}{3}$ là:

$$\frac{3}{x-1} \cdot \frac{x+1}{3} = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$$

Để tích này là một số nguyên thì $\frac{2}{x-1} \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Mà } x \in \mathbb{Z} \text{ nên } x-1 \in U\{2\} = \{-1; -2; 1; 2\}.$$

$$\text{Suy ra: } x \in \{0; -1; 2; 3\}.$$

Vậy $x \in \{0; -1; 2; 3\}$ là các giá trị cần tìm.

Dạng 5. Một số bài toán có lời văn

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Sơn năm học 2022 - 2023)

Cả ba vòi nước cùng chảy vào một bể nước. Nếu vòi 1 và vòi 2 cùng chảy thì 6 giờ được $\frac{3}{5}$ bể. Nếu vòi 2 và vòi 3 cùng chảy thì 5 giờ chảy được $\frac{7}{12}$ bể, nếu vòi 1 và vòi 3 cùng chảy thì 9 giờ chảy được $\frac{3}{4}$ bể. Thời gian cả ba vòi cùng chảy đầy bể là:

- A. 6 giờ. B. $\frac{10}{3}$ giờ. C. $\frac{20}{3}$ giờ. D. 3 giờ.

Lời giải

Chọn C

Một giờ vòi 1 và vòi 2 cùng chảy được: $\frac{3}{5} : 6 = \frac{1}{10}$ (bể)

Một giờ vòi 2 và vòi 3 cùng chảy được: $\frac{7}{12} : 5 = \frac{7}{60}$ (bể)

Một giờ vòi 1 và vòi 3 cùng chảy được: $\frac{3}{4} : 9 = \frac{1}{12}$ (bể)

Một giờ cả ba vòi cùng chảy được: $\left(\frac{1}{10} + \frac{7}{60} + \frac{1}{12}\right) : 2 = \frac{3}{20}$ (bể)

Thời gian cả ba vòi cùng chảy đầy bể là: $1 : \frac{3}{20} = \frac{20}{3}$ (giờ)

Câu 2. (HSG 7 huyện Sơn Động, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

Trong đợt ôn thi học sinh giỏi môn Toán lớp 7, bạn Nam đã giải một số bài toán trắc nghiệm. Sau khi thầy giáo kiểm tra kết quả thì có một số câu sai. Nếu bạn Nam sửa hai câu từ đáp án sai thành đáp án đúng thì tỉ lệ số câu đúng của bạn sẽ là 76%. Nếu bạn Nam bỏ hẳn hai câu đó thì tỉ lệ số câu đúng của bạn là 75%. Hỏi trong đợt ôn thi bạn Nam đã giải bao nhiêu bài toán trắc nghiệm?

A. 150

B. 100

C. 50

D. 20

Lời giải

Chọn C

Gọi số câu trắc nghiệm Nam đã giải trong đợt ôn thi là a (với $a > 2$).

Trong đó Nam làm đúng b câu.

Khi đó, theo đề bài ta có: $b + 2 = 76\%a$ và $b = 75\%(a - 2)$.

Suy ra: $76\%a - 2 = 75\%a - 1,5$

$76\%a - 75\%a = 2 - 1,5$

$1\%a = 0,5$

$a = 50$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Thanh Thủy, tỉnh Phú Thọ 2022 - 2023)

Câu	Câu hỏi	Đáp án đúng
Câu 2	Một số tự nhiên lẻ có hai chữ số và chia hết cho 5. Hiệu của số đó và chữ số hàng chục của nó bằng 68. Số đó là?	
Câu 3	Tích của hai số hữu tỷ bằng hiệu của chúng. Tìm hiệu hai số nghịch đảo của hai số hữu tỷ đã cho?	
Câu 4	Một cửa hàng mua sắm trên Internet cứ cách 495 giờ lại gửi email quảng cáo đến khách hàng. Nếu lần gần đây nhất Nam nhận quảng cáo là thứ Ba, thì lần nhận quảng cáo tiếp theo sẽ là ngày thứ mấy?	
Câu 5	Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 21m và tỉ lệ giữa chúng là 5 và 8. Diện tích khu vườn bằng bao nhiêu.	
Câu 6	Mai mua nhằm 5 ổ bánh mì và 2 chai sữa, nên đã trả lại hàng và đồng thời mua lại 2 ổ bánh mì và 5 chai sữa. Tổng số tiền lần này rẻ hơn lần trước 4200	

đồng. Vậy giá tiền 1 chai sữa ít hơn giá tiền 1 ổ bánh mì là bao nhiêu đồng?
--

Đáp án

Câu	Câu hỏi	Đáp án đúng
Câu 2	Một số tự nhiên lẻ có hai chữ số và chia hết cho 5. Hiệu của số đó và chữ số hàng chục của nó bằng 68. Số đó là?	75
Câu 3	Tích của hai số hữu tỷ bằng hiệu của chúng. Tìm hiệu hai số nghịch đảo của hai số hữu tỉ đã cho?	-1
Câu 4	Một cửa hàng mua sắm trên Internet cứ cách 495 giờ lại gửi email quảng cáo đến khách hàng. Nếu lần gần đây nhất Nam nhận quảng cáo là thứ Ba, thì lần nhận quảng cáo tiếp theo sẽ là ngày thứ mấy?	Thứ 2
Câu 5	Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 21m và tỉ lệ giữa chúng là 5 và 8. Diện tích khu vườn bằng bao nhiêu.	1960 m ²
Câu 6	Mai mua nhầm 5 ổ bánh mì và 2 chai sữa, nên đã trả lại hàng và đồng thời mua lại 2 ổ bánh mì và 5 chai sữa. Tổng số tiền lần này rẻ hơn lần trước 4200 đồng. Vậy giá tiền 1 chai sữa ít hơn giá tiền 1 ổ bánh mì là bao nhiêu đồng?	1300

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Đô Lương 2022 - 2023)

Nhân dịp trồng cây đầu xuân, một trường THCS có ba lớp 7A; 7B; 7C tham gia trồng cây. Nhà trường giao chỉ tiêu trồng cây cho từng lớp. Sau buổi làm việc thứ nhất thì thấy $\frac{1}{3}$ số cây trồng được của lớp 7A bằng $\frac{3}{4}$ số cây trồng được của lớp 7B và bằng $\frac{3}{5}$ số cây còn lại chưa trồng của lớp 7C. Tính số cây còn lại chưa trồng của lớp 7C sau buổi làm việc thứ nhất. Biết rằng tổng số cây đã trồng trong buổi thứ nhất của hai lớp 7A và 7B là 39 cây.

Lời giải

Gọi số cây lớp 7A trồng được trong buổi thứ nhất là $x, (x \in \mathbb{N}^*)$

Gọi số cây lớp 7B trồng được trong buổi thứ nhất là $y, (y \in \mathbb{N}^*)$

Gọi số cây lớp 7C chưa trồng được trong buổi thứ nhất là $z, (z \in \mathbb{N}^*)$

$$\text{Theo đề: } \frac{1}{3}x = \frac{3}{4}y = \frac{3}{5}z \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{4}{9}x \\ z = \frac{5}{9}x \end{cases}.$$

Tổng số cây lớp 7A và 7B đã trồng được trong buổi thứ nhất là 39 cây nên

$$x + y = 39 \Rightarrow x + \frac{4}{9}x = 39 \Leftrightarrow \frac{13}{9}x = 39 \Leftrightarrow x = 27.$$

$$\text{Suy ra } z = \frac{5}{9}x = \frac{5}{9}.27 = 15.$$

Vậy số cây chưa trồng của lớp 7C là 15 cây.

Câu 2. (HSG 7 huyện Ý Yên, tỉnh Nam Định 2021 - 2022)

Hai xe ô tô khởi hành cùng một lúc từ hai địa điểm A và B , đi ngược chiều nhau trên cùng một tuyến đường. Đến điểm gặp nhau, xe thứ hai đi được quãng đường dài hơn xe thứ nhất là 20 km. Biết rằng nếu đi hết quãng đường AB , xe thứ nhất đi hết 4 giờ 15 phút, xe thứ hai đi hết 3 giờ 45 phút. Tính độ dài quãng đường AB .

Lời giải

Đổi 4 giờ 15 phút = $\frac{17}{4}$ giờ, 3 giờ 45 phút = $\frac{15}{4}$ giờ.

Gọi a (km/h) và b (km/h) lần lượt là vận tốc xe ô tô xuất phát từ A và xuất phát từ B . Điều kiện $a > 0, b > 0$.

Hai xe ô tô cùng khởi hành và đi ngược chiều nhau, đến điểm gặp nhau xe thứ hai đi được quãng đường dài hơn xe thứ nhất là 20 km nên vị trí gặp nhau cách điểm chính giữa đoạn đường AB là 10 km.

Gọi độ dài quãng đường AB là s (km), $s > 0$.

Vì thời gian đi ngược chiều của hai xe là như nhau nên ta có: $\frac{\frac{1}{2}s - 10}{a} = \frac{\frac{1}{2}s + 10}{b}$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{2}s - 10\right)}{a} = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{2}s + 10\right)}{b}$$

$$\text{hay } \frac{s - 20}{a} = \frac{s + 20}{b} \quad (1)$$

Nếu cùng đi hết quãng đường AB như nhau thì vận tốc và thời gian của mỗi xe là hai đại lượng tỉ lệ nghịch, suy ra $\frac{17}{4}a = \frac{15}{4}b \Leftrightarrow 17a = 15b \Leftrightarrow \frac{a}{15} = \frac{b}{17} \quad (2)$

Nhân vế với vế của (1) và (2) ta được: $\frac{s - 20}{15} = \frac{s + 20}{17}$

$$\text{Suy ra } 17(s - 20) = 15(s + 20)$$

$$17s - 340 = 15s + 300$$

$$17s - 15s = 340 + 300$$

$$2s = 640$$

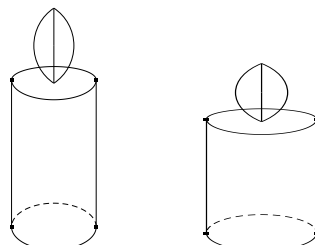
$$s = 320 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy quãng đường AB dài 150 km.

Câu 3. (HSG 7 huyện Quế Võ năm học 2022 - 2023)

Hai ngọn nến hình trụ có chiều cao và đường kính khác nhau được đặt thẳng đứng trên mặt bàn. Ngọn nến thứ nhất cháy hết trong 6 giờ, ngọn nến thứ hai cháy hết trong 8 giờ. Hai ngọn nến được thắp sáng cùng lúc, sau 3 giờ chúng có cùng chiều cao.

Tìm tỉ lệ chiều cao lúc đầu của hai ngọn nến.



Lời giải

Gọi chiều cao ban đầu ngọn nến thứ nhất là x cm

Chiều cao ban đầu ngọn nến thứ hai là y cm (Điều kiện: $x > 0, y > 0$)

Giả sử tốc độ tiêu hao của hai cây nến khi cháy là không đổi.

Mỗi giờ cây nến thứ nhất giảm $\frac{x}{6}$ cm

\Rightarrow Sau 3 giờ chiều cao cây nến thứ nhất còn: $x - 3 \cdot \frac{x}{6} = \frac{x}{2}$ cm.

Mỗi giờ cây nến thứ hai giảm $\frac{y}{8}$ cm

\Rightarrow Sau 3 giờ chiều cao cây nến thứ hai còn: $y - 3 \cdot \frac{y}{8} = \frac{5y}{8}$ cm.

Vì sau 3 giờ cháy, hai cây nến có cùng chiều cao nên ta có: $\frac{x}{2} = \frac{5y}{8} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{5}{4}$.

Vậy tỉ lệ chiều cao ban đầu của hai ngọn nến là $\frac{x}{y} = \frac{5}{4}$.

Câu 4. (HSG 7 huyện Đồng Xuân năm học 2022 - 2023)

Một người gửi tiết kiệm tại ngân hàng với số tiền là 200 triệu đồng, gửi theo lãi suất 6% kỳ hạn một năm lĩnh lãi mỗi quý (3 tháng). Theo quy định nếu đến hạn mà người gửi không đến lĩnh lãi thì số tiền lãi đó sẽ được nhập vào vốn gửi ban đầu. Do công việc người đó không đến lĩnh kỳ quý thứ nhất, các quý còn lại thì vẫn được lĩnh lãi bình thường. Vậy tổng số tiền gửi và lãi sau 1 năm là bao nhiêu?

Lời giải

Lãi suất mỗi quý là: $6\% : 4 = 1,5\%$

Tiền lãi quý thứ nhất là: $200 \cdot 1,5\% = 3$ (triệu)

Tổng số tiền cả vốn và lãi sau quý thứ nhất là: $200 + 3 = 203$ (triệu)

Tiền lãi quý thứ hai là: $203 \cdot 1,5\% = 3,045$ (triệu)

Tiền lãi quý thứ ba và thứ tư bằng tiền lãi quý thứ hai.

Vậy tổng số tiền cả vốn lẫn lãi sau 1 năm là: $200 + 3 + 3,045 \cdot 3 = 212,135$ (triệu)

Câu 5. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ năm học 2022 - 2023)

Hai cửa hàng A và B bán cùng một loại bút với giá 15000 đồng một chiếc, nhưng mỗi cửa hàng áp dụng hình thức khuyến mãi khác nhau:

Cửa hàng A : Nếu mua 3 chiếc trở lên thì được giảm 25% cho tổng số bút mua, nếu mua từ 10 chiếc trở lên thì từ chiếc thứ 10 trở đi thì mỗi chiếc lại được giảm thêm 5% so với giá giảm ban đầu.

Cửa hàng B : Cứ mua 3 chiếc thì được tặng thêm 1 chiếc.

Bạn An cần mua đúng 13 chiếc bút cho hoạt động nhóm thì bạn ấy nên mua ở cửa hàng nào để tiết kiệm và tiết kiệm bao nhiêu tiền so với cửa hàng kia.

Lời giải

Nếu mua ở cửa hàng A thì An phải trả số tiền là:

$$(9 \cdot 15000) \cdot 75\% + [(4 \cdot 15000) \cdot 75\%] 95\% = 144000 \text{ (đồng)}$$

Nếu mua ở cửa hàng B , cứ 3 chiếc thì được tặng 1 chiếc, nên để có 13 chiếc bút thì An phải trả số tiền là: $9.15000 + 15000 = 150000$ (đồng)

Vậy An mua bút ở cửa hàng A thì sẽ tiết kiệm hơn, và tiết kiệm được:

$150000 - 144000 = 6000$ (đồng), so với mua ở cửa hàng B .

Câu 6. (HSG 7 huyện Thanh Thủy, tỉnh Phú Thọ 2022 - 2023)

Một số tự nhiên lẻ có hai chữ số và chia hết cho 5. Hiệu của số đó và chữ số hàng chục của nó bằng 68. Số đó là?

Lời giải

Vì số tự nhiên lẻ có hai chữ số và chia hết cho 5 nên số đó có chữ số hàng đơn vị là chữ số 5

Gọi chữ số hàng chục là: a ($a \in \mathbb{N}^*, a < 10$)

Số đó có dạng $\overline{a5} = 10a + 5$

Vì hiệu của số đó và chữ số hàng chục của nó bằng 68 nên ta có phương trình:

$$10a + 5 - a = 68$$

$$9a = 63$$

$$a = 7$$

Vậy số đó là 75.

Câu 7. (HSG 7 huyện Thanh Thủy, tỉnh Phú Thọ 2022 - 2023)

Tích của hai số hữu tỷ bằng hiệu của chúng. Tìm hiệu hai số nghịch đảo của hai số hữu tỷ đã cho?

Lời giải

Gọi 2 số hữu tỷ là: a, b , ($a, b \neq 0$)

Vì tích của hai số hữu tỷ bằng hiệu của chúng nên ta có: $ab = a - b$

Hiệu hai số nghịch đảo của hai số hữu tỷ đã cho là: $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b - a}{ab} = \frac{-(a - b)}{ab} = \frac{-ab}{ab} = -1$

Câu 8. (HSG 7 huyện Thanh Thủy, tỉnh Phú Thọ 2022 - 2023)

Một cửa hàng mua sắm trên Internet cứ cách 495 giờ lại gửi email quảng cáo đến khách hàng. Nếu lần gần đây nhất Nam nhận quảng cáo là thứ Ba, thì lần nhận quảng cáo tiếp theo sẽ là ngày thứ mấy?

Lời giải

Vì 1 ngày có 24 giờ nên 495 giờ là 20 ngày 15 giờ

Ta xét hai trường hợp:

TH1: Nếu Nam nhận email lúc 0h đến trước 9h sáng thì lần nhận quảng cáo tiếp theo sẽ vào ngày thứ ba.

TH2: Nếu Nam nhận email lúc 9h đến trước 24h thì lần nhận quảng cáo tiếp theo sẽ vào ngày thứ tư.

Câu 9. (HSG 7 huyện Thanh Thủy, tỉnh Phú Thọ 2022 - 2023)

Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 21m và tỉ lệ giữa chúng là 5 và 8. Diện tích khu vườn bằng bao nhiêu.

Lời giải

Gọi chiều dài hình chữ nhật là: x (m) ($x > 21$)

Thì chiều rộng là: $x - 21$ (m)

Vì tỉ lệ giữa chúng là 5 và 8 nên ta có phương trình:

$$\frac{x-21}{5} = \frac{x}{8}$$

$$\Rightarrow 8x - 168 = 5x$$

$$\Rightarrow 3x = 168$$

$$\Rightarrow x = 56$$

Chiều dài hình chữ nhật là 56m và chiều rộng là $56 - 21 = 35$ (m)

Vậy diện tích khu vườn là $56.35 = 1960$ (m²)

Câu 10. (HSG 7 huyện Thanh Thủy, tỉnh Phú Thọ 2022 - 2023)

Mai mua nhầm 5 ổ bánh mì và 2 chai sữa, nên đã trả lại hàng và đồng thời mua lại 2 ổ bánh mì và 5 chai sữa. Tổng số tiền lần này rẻ hơn lần trước 4200 đồng. Vậy giá tiền 1 chai sữa ít hơn giá tiền 1 ổ bánh mì là bao nhiêu đồng?

Lời giải

Gọi giá tiền 1 chai sữa là: x (đồng) ($0 < x < 4200$)

Gọi giá tiền 1 ổ bánh mì là: y (đồng) ($0 < y < 4200$)

Giá tiền Mai 5 ổ bánh mì và 2 chai sữa là: $2x + 5y$ (đồng)

Giá tiền Mai 2 ổ bánh mì và 5 chai sữa là: $5x + 2y$ (đồng)

Vì số tiền lần sau rẻ hơn lần trước 4200 đồng, nên ta có phương trình:

$$(2x + 5y) - (5x + 2y) = 4200$$

$$\Rightarrow 3y - 3x = 4200$$

$$\Rightarrow 3(y - x) = 4200$$

$$\Rightarrow y - x = 1400$$

Vậy giá tiền 1 chai sữa ít hơn giá tiền 1 ổ bánh mì là 1400 đồng.

Câu 11. (HSG 7 Huyện Tam Điệp, tỉnh Ninh Bình 2022 - 2023)

Ba tổ công nhân có mức sản xuất tỉ lệ với 5;4;3. Tổ I tăng năng suất 10%, tổ II tăng năng suất 20% và tổ III tăng năng suất 30%. Do đó trong cùng một thời gian tổ I làm được nhiều hơn tổ III là 16 sản phẩm. Tính tổng số sản phẩm mà ba tổ làm được.

Lời giải

Gọi x, y, z lần lượt là số sản phẩm khoán của tổ I; II và III ($x; y; z \in \mathbb{N}^*$)

Theo đầu bài ta có $\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} \Rightarrow z = \frac{3x}{5}$ (1)

Do tổ I tăng năng suất 10% nên số sp tổ I làm được là $x + 10\%.x = 1,1x$ (sp)

Do tổ II tăng năng suất 20% nên số sp tổ II làm được là $y + 20\%.y = 1,2y$ (sp)

Do tổ III tăng năng suất 30% nên số sp tổ III làm được là $z + 30\%.z = 1,3z$ (sp)

Do trong cùng một thời gian tổ I làm được nhiều hơn tổ III là 16 sản phẩm nên ta có:
 $1,1x - 1,3z = 16$ (2)

Thế (1) vào (2) ta có: $1,1x - 1,3 \cdot \frac{3x}{5} = 16 \Rightarrow 0,32x = 16 \Rightarrow x = 50$ (TMĐK)

Thay $x = 50$ vào (1) $\Rightarrow z = \frac{3 \cdot 50}{5} = 30$ (TMĐK)

Khi đó $y = 4 \cdot \frac{z}{3} = 4 \cdot \frac{30}{3} = 40$ (TMĐK)

Vậy số sản phẩm khoán của tổ I,II và III lần lượt là 50;40;30 sản phẩm.

⇒ Tổng số sản phẩm tổ I,II và III làm được là $1,1.50 + 1,2.40 + 1,3.30 = 142$ sản phẩm.

Câu 12. (HSG 7 Huyện Đức Thọ, tỉnh Hà Tĩnh 2022 - 2023)

Diện tích ba mặt của một hình hộp chữ nhật là 30 cm^2 , 40 cm^2 và 75 cm^2 . Hỏi thể tích của hình hộp đó bằng bao nhiêu cm^3 ?

Lời giải

Gọi kích thước ba cạnh của hình hộp chữ nhật lần là $a, b, c (a, b, c > 0, \text{cm})$

Vì các mặt là các hình chữ nhật, nên diện tích ba mặt lần lượt là:

$$\begin{cases} ab = 30 \\ bc = 40 \\ ac = 75 \end{cases} \Rightarrow (abc)^2 = 30.40.75 \Rightarrow abc = 300.$$

Vậy thể tích của hình hộp chữ nhật là: $V = abc = 300 \text{ cm}^3$.

Câu 13. (HSG 7 Thành phố Thủ Đức, Thành phố Hồ Chí Minh 2022 - 2023)

Ông Bình mua một con nghé và một con bê vàng. Ông bán lại đồng giá 18 triệu mỗi con, do nghé mất giá nên ông chịu lỗ 20%, nhưng bù lại nhờ bê vàng lên giá nên ông lời được 20%. Hỏi ông Bình lời hay lỗ? Giải thích.

Lời giải

Coi giá mua của mỗi con là 100%

Giá bán của con nghé chiếm số phần trăm so với giá mua là $100 - 20 = 80\%$

Ông bình mua con nghé với giá $18\ 000\ 000 : 80\% = 22\ 500\ 000$ (đồng)

Giá bán của con bê chiếm số phần trăm so với giá mua là $100 + 20 = 120\%$

Ông Bình mua con bê với giá $18\ 000\ 000 : 120\% = 15\ 000\ 000$ (đồng)

Ông Bình mua con bê và con nghé với giá

$22\ 500\ 000 + 15\ 000\ 000 = 37\ 500\ 000$ (đồng)

Ông Bình bán một con bê với một con nghé với giá

$18\ 000\ 000 \cdot 2 = 36\ 000\ 000$ (đồng)

Số tiền ông Bình có được sau khi mua và bán là:

$36\ 000\ 000 - 37\ 500\ 000 = -1\ 500\ 000$ (đồng)

⇒ Ông Bình lỗ 1 500 000 đồng

Câu 14. (HSG 7 huyện năm 2017 - 2018)

Bốn con Ngựa ăn hết một xe cỏ trong một ngày, một con Dê ăn hết một xe cỏ trong 6 ngày, hai con Cừu trong 24 ngày ăn hết 2 xe cỏ. Hỏi chỉ ba con (ngựa, dê và cừu) ăn hết hai xe cỏ trong mấy ngày ?

Lời giải

Vì 4 con ngựa cùng ăn hết 1 xe cỏ trong 1 ngày, do đó một con ngựa ăn hết 1 xe cỏ trong 4 ngày.

Một con dê ăn hết một xe cỏ trong 6 ngày.

Hai con cừu ăn hết hai xe cỏ trong 24 ngày nên một con cừu ăn hết một xe cỏ trong 24 ngày nên một con cừu ăn hết 1 xe cỏ trong 12 ngày.

Trong một ngày: một con ngựa ăn hết $\frac{1}{4}$ xe cỏ, một con dê ăn hết $\frac{1}{6}$ xe cỏ, một con cừu ăn hết $\frac{1}{12}$ xe cỏ

Cả ba con ăn hết $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$ (xe cỏ).

Vậy cả 3 con ăn hết 1 xe cỏ trong 2 ngày nên ăn hết 2 xe cỏ trong 4 ngày.

Dạng 6. Các bài toán về so sánh

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. (HSG 7 Huyện Thanh Thủy, tỉnh Phú Thọ 2022 - 2023)

Cho biểu thức $N = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$. Khẳng định đúng là:

- A.** $N < \frac{3}{16}$. **B.** $N > \frac{3}{16}$. **C.** $\frac{3}{16} < N < \frac{3}{4}$. **D.** $N > \frac{3}{4}$.

Lời giải

$$3N = 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{99}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}}$$

$$3N + N = 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{99}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$3N + N = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$\frac{4N}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \dots + \frac{1}{3^{99}} - \frac{1}{3^{100}} - \frac{100}{3^{101}}$$

$$4N + \frac{4N}{3} = 1 - \frac{101}{3^{100}} - \frac{100}{3^{101}}$$

$$\frac{16N}{3} = 1 - \left(\frac{101}{3^{100}} + \frac{100}{3^{101}} \right) < 1 \quad (\text{vì } \frac{101}{3^{100}} + \frac{100}{3^{101}} > 0) \Rightarrow N < \frac{3}{16}$$

Vậy $N < \frac{3}{16}$.

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 Tp. Thanh Hóa 2022 - 2023; trường THCS Nguyễn Chí, huyện Đông Sơn 2017-2018)

Cho $B = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \frac{24}{25} + \dots + \frac{2499}{2500}$. Chứng tỏ B không phải là số nguyên.

Lời giải

Ta có: $B = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \frac{24}{25} + \dots + \frac{2499}{2500}$ (Thêm bớt 49 đơn vị)

$$B = 49 - \left(1 - \frac{3}{4} + 1 - \frac{8}{9} + 1 - \frac{15}{16} + 1 - \frac{24}{25} + \dots + 1 - \frac{2499}{2500} \right)$$

$$B = 49 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{50^2} \right)$$

$$\text{Đặt } M = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{50^2}$$

$$\text{Áp dụng tính chất } \frac{1}{n \cdot (n+1)} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1) \cdot n}$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{50^2} < \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 4} \dots + \frac{1}{50 \cdot 49}$$

$$M < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \dots + \frac{1}{49} - \frac{1}{50} = 1 - \frac{1}{50} < 1$$

$$\text{Lại có: } M > \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} \dots + \frac{1}{50 \cdot 51} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \dots + \frac{1}{50} - \frac{1}{51}$$

$$\text{Hay } M > \frac{1}{2} - \frac{1}{50} = \frac{49}{100} > 0$$

Từ đó suy ra $0 < M < 1$, Do đó $B = 49 - M$ không phải là một số nguyên.

Câu 2. (HSG 7 trường Võ Thị Sáu 2022 - 2023)

$$\text{Cho } A = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \dots + \frac{2022}{4^{2022}}. \text{ Chứng minh rằng: } A < \frac{1}{2}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \dots + \frac{2022}{4^{2022}}$$

$$4A = 1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{4^3} + \dots + \frac{2022}{4^{2021}}$$

$$4A - A = \left(1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{4^3} + \dots + \frac{2022}{4^{2021}}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \dots + \frac{2022}{4^{2022}}\right)$$

$$3A = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2021}} - \frac{2022}{4^{2022}}$$

$$3A = \frac{1}{3} \cdot \left(4 - \frac{1}{4^{2021}}\right) - \frac{2022}{4^{2022}}$$

$$3A = \frac{4}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^{2021}} - \frac{2022}{4^{2022}} < \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow A < \frac{4}{9} < \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } A < \frac{1}{2}$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Thọ Xuân, tỉnh Thanh Hóa, 2022 - 2023)

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{1}{65} < \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2023^3} < \frac{1}{40}$$

Lời giải

$$\text{Đặt } S = \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2023^3}$$

Ta có:

$$S = \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2023^3} < \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{2022 \cdot 2023 \cdot 2024}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{4.5.6} + \frac{2}{5.6.7} + \frac{2}{6.7.8} + \dots + \frac{2}{2022.2023.2024} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4.5} - \frac{1}{5.6} + \frac{1}{5.6} - \frac{1}{6.7} + \frac{1}{6.7} - \frac{1}{7.8} + \dots + \frac{1}{2022.2023} - \frac{1}{2023.2024} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4.5} - \frac{1}{2023.2024} \right) < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20} \\
 &\Rightarrow S < \frac{1}{40} \quad (1)
 \end{aligned}$$

Ta lại có: $S = \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2023^3} > \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{6.7.8} + \dots + \frac{1}{2023.2024.2025}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{5.6.7} + \frac{2}{6.7.8} + \dots + \frac{2}{2023.2024.2025} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{5.6} - \frac{1}{6.7} + \frac{1}{6.7} - \frac{1}{7.8} + \dots + \frac{1}{2023.2024} - \frac{1}{2024.2025} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{5.6} - \frac{1}{2024.2025} \right) > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{30} - \frac{1}{2.2024.2025} > \frac{1}{60} - \frac{1}{2.2024.2025} > \frac{1}{60} - \frac{1}{780} = \frac{1}{65} \\
 &\Rightarrow S > \frac{1}{65} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{1}{65} < S < \frac{1}{40}$

Vậy $\frac{1}{65} < \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2023^3} < \frac{1}{40}$.

Câu 4. (HSG 7 huyện Hậu Lộc 2022 - 2023)

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 1$$

Lời giải

Sử dụng tính chất: $0 < a < 1 \Rightarrow a < \sqrt{a}$.

Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên ta có:

$$0 < \frac{a}{b+c} < 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} > \frac{a}{b+c}, \text{ mà } \frac{a}{b+c} > \frac{a}{a+b+c} \text{ (do } a, b, c \text{ dương)}$$

Do đó ta có: $\sqrt{\frac{a}{b+c}} > \frac{a}{a+b+c} \quad (1)$

Chứng minh tương tự ta được:

$$\sqrt{\frac{b}{c+a}} > \frac{b}{a+b+c} \quad (2); \quad \sqrt{\frac{c}{a+b}} > \frac{c}{a+b+c} \quad (3)$$

Cộng về ba bất đẳng thức (1) (2) (3) ta được

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} = 1$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 5. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{5} - \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} - \frac{4}{5^4} + \frac{5}{5^5} - \dots + \frac{2021}{5^{2021}} - \frac{2022}{5^{2022}} < \frac{5}{36}$

Lời giải

Đặt $A = \frac{1}{5} - \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} - \frac{4}{5^4} + \frac{5}{5^5} - \dots + \frac{2021}{5^{2021}} - \frac{2022}{5^{2022}}$

Suy ra: $5A = 1 - \frac{2}{5^1} + \frac{3}{5^2} - \frac{4}{5^3} + \frac{5}{5^4} - \dots + \frac{2021}{5^{2020}} - \frac{2022}{5^{2021}}$

Suy ra: $5A + A = 6A = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} - \dots - \frac{1}{5^{2021}} - \frac{2022}{5^{2021}}$

Đặt $P = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{5^5} + \dots - \frac{1}{5^{2021}}$

Suy ra: $5P = 5 - 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} - \dots - \frac{1}{5^{2020}}$

Suy ra: $6P = 5 - \frac{1}{5^{2021}} \Rightarrow P = \frac{5}{6} - \frac{1}{6 \cdot 5^{2021}}$

Suy ra: $6A = \frac{5}{6} - \frac{1}{6 \cdot 5^{2021}} - \frac{2022}{5^{2022}} < \frac{5}{6} \Rightarrow A < \frac{5}{36}$

Vậy $A < \frac{5}{36}$.

Câu 6. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023; trường Hoàng Quyên 2018 - 2019; huyện Hưng Sơn 2017 - 2018; huyện Hưng Khê 2016 - 2017)

Cho ba số a, b, c thỏa mãn $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2.$$

Lời giải

* Nếu $a + b + c = 0$ thì $a = b = c = 0$

Khi đó $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} = \frac{0}{bc+1} + \frac{0}{ac+1} + \frac{0}{ab+1} = 0 \leq 2$

* Nếu $a + b + c \neq 0$

Vì $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$

$\Rightarrow (1-a) \geq 0; (1-b) \geq 0$

$\Rightarrow (1-a)(1-b) \geq 0$

$\Rightarrow 1 + ab \geq a + b(1)$

Lại có $1 + ab \geq c(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 2(1 + ab) \geq a + b + c$

$\Rightarrow \frac{c}{2(1 + ab)} \leq \frac{c}{a + b + c}$

Tương tự ta có: $\frac{b}{2(1 + ac)} \leq \frac{b}{a + b + c}; \frac{c}{2(1 + ab)} \leq \frac{c}{a + b + c}$

Từ đó suy ra $\frac{a}{2(1+bc)} + \frac{b}{2(1+ac)} + \frac{c}{2(1+ab)} \leq \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c}$

$$\Rightarrow \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$$

Từ hai trường hợp trên suy ra $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2 \Rightarrow$ đpcm

Câu 7. (HSG 7 huyện Đô Lương 2022 - 2023)

Chứng minh. $99 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{99}{100}$.

Lời giải

Ta có: $99 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}\right)$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{100}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{4}{4} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{100}{100} - \frac{1}{100}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{99}{100}$$

Vậy: $99 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{99}{100}$.

Câu 8. (HSG 7 thị xã Nghi Sơn 2022 - 2023)

Cho $S_n = \frac{1^2-1}{1} + \frac{2^2-1}{2^2} + \frac{3^2-1}{3^2} + \dots + \frac{n^2-1}{n^2}$ (với $n \in \mathbb{N}$ và $n > 1$). Chứng minh S_n không là số nguyên.

Lời giải

Ta có: $S_n = \frac{1^2-1}{1} + \frac{2^2-1}{2^2} + \frac{3^2-1}{3^2} + \dots + \frac{n^2-1}{n^2}$

$$= 1 - \frac{1}{2^2} + 1 - \frac{1}{3^2} + 1 - \frac{1}{4^2} \dots + 1 - \frac{1}{n^2}$$

$$= n - 1 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \dots + \frac{1}{n^2}\right) < n - 1 \Rightarrow S_n < n - 1 \quad (1)$$

Lại có $S_n = n - 1 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \dots + \frac{1}{n^2}\right)$

$$> n - 1 - \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} \dots + \frac{1}{(n-1).n}\right)$$

$$= n - 1 - \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= n - 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) > n - 2 \Rightarrow S_n > n - 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow n - 2 < S_n < n - 1$ Chứng tỏ S_n không là số nguyên.

Câu 9. (HSG 7 huyện Vĩnh Yên 2022 - 2023)

Chứng tỏ: $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{2019}{3^{2019}} < 0,75$

Lời giải

$$\text{Đặt } A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{2019}{3^{2019}}$$

$$3A = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \dots + \frac{2019}{3^{2018}}$$

$$\text{Suy ra: } 2A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2018}} - \frac{2019}{3^{2019}}$$

$$\text{Đặt } M = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2018}}$$

$$\Rightarrow 3M = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2017}}$$

$$\Rightarrow 2M = 1 - \frac{1}{3^{2018}} < 1 \Rightarrow M < \frac{1}{2}$$

$$\text{Ta có: } 2A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2018}} - \frac{2019}{3^{2019}} = 1 + M - \frac{2019}{3^{2019}} < 1 + M < 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow A < \frac{3}{4}$$

Câu 10. (HSG 7 huyện Đông Hưng 2022 - 2023)

Cho $B = \frac{3^{2023} - 4}{3^{2022} - 1}$ và $C = \frac{3^{2022} - 4}{3^{2021} - 1}$. Hãy so sánh B và C.

Lời giải

$$B = \frac{3^{2023} - 4}{3^{2022} - 1} \Rightarrow \frac{1}{3}B = \frac{3^{2023} - 4}{3^{2023} - 3} = 1 - \frac{1}{3^{2023} - 3}$$

$$C = \frac{3^{2022} - 4}{3^{2021} - 1} \Rightarrow \frac{1}{3}C = \frac{3^{2022} - 4}{3^{2022} - 3} = 1 - \frac{1}{3^{2022} - 3}$$

$$\text{Vì } 3^{2023} - 3 > 3^{2022} - 3 \Rightarrow \frac{1}{3^{2023} - 3} < \frac{1}{3^{2022} - 3}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{3^{2023} - 3} > 1 - \frac{1}{3^{2022} - 3} \Rightarrow \frac{1}{3}B > \frac{1}{3}C$$

Vậy $B > C$

Câu 11. (HSG 7 tỉnh Quảng Ninh 2022 - 2023)

Giả sử x, y, z là độ dài 3 cạnh của một tam giác có chu vi bằng 2, chứng minh:

$$S = \frac{x}{yz+1} + \frac{y}{xz+1} + \frac{z}{xy+1} < 2$$

Lời giải

Giả sử x, y, z là độ dài 3 cạnh của một tam giác và có chu vi bằng 2 nên

suy ra : $0 < x \leq y \leq z < 1$ suy ra : $x - 1 < 0; y - 1 < 0$

suy ra $(x-1)(y-1) < 0$ suy ra : $xy + 1 > x + y$ suy ra: $\frac{1}{xy+1} < \frac{1}{x+y}$

$$\text{Suy ra: } \frac{z}{xy+1} < \frac{z}{x+y} \quad (1)$$

Chứng minh tương tự : $\frac{x}{yz+1} < \frac{x}{y+z}$ (2); $\frac{y}{xz+1} < \frac{y}{x+z}$ (3)

Cộng vế với vế (1), (2), (3) ta được :

$$\frac{x}{yz+1} + \frac{y}{xz+1} + \frac{z}{xy+1} < \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \quad (4)$$

Mà : $\frac{x}{y+z} < \frac{x+x}{x+y+z}$ suy ra : $\frac{x}{y+z} < \frac{2x}{x+y+z}$

Chứng minh tương tự : $\frac{y}{x+z} < \frac{2y}{x+y+z}$; $\frac{z}{x+y} < \frac{2z}{x+y+z}$

suy ra : $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} < \frac{2x}{x+y+z} + \frac{2y}{x+y+z} + \frac{2z}{x+y+z}$

suy ra : $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} < \frac{2(x+y+z)}{x+y+z}$

suy ra : $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} < 2$ (5)

Từ (4) và (5) (đpcm)

Câu 12. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Hồng Lĩnh 2022 - 2023)

Cho $B = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{3^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1\right)$. Hãy so sánh B với $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

B là tích của 99 số âm, do đó:

$$-B = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{100^2}\right)$$

$$-B = \frac{1.3}{2^2} \cdot \frac{2.4}{3^2} \cdot \frac{3.5}{4^2} \dots \frac{99.101}{100^2}$$

$$-B = \frac{1.2.3.4 \dots 98.99}{2.3.4 \dots 99.100} \cdot \frac{3.4.5 \dots 100.101}{2.3.4 \dots 99.100}$$

$$-B = \frac{1}{100} \cdot \frac{101}{2}$$

$$-B = \frac{101}{200}$$

Vì $\frac{101}{200} > \frac{100}{200} = \frac{1}{2}$ nên $-B > \frac{1}{2} \Rightarrow B < -\frac{1}{2}$

Vậy $B < -\frac{1}{2}$.

Câu 13. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Dân Chủ 2022 - 2023)

Cho $B = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n-1}{(n-1)^2 \cdot n^2}$ (với n là số tự nhiên lớn hơn 1).

Chứng minh rằng $B < 1$.

Lời giải

$$B = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n-1}{(n-1)^2 \cdot n^2}$$

$$B = \frac{2^2 - 1^2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{4^2 - 3^2}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{n^2 - (n-1)^2}{(n-1)^2 \cdot n^2}$$

$$B = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}$$

$$B = 1 - \frac{1}{n^2}$$

Vì n là số tự nhiên lớn hơn 1 nên $\frac{1}{n^2} > 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{n^2} < 1$.

Vậy $B < 1$.

Câu 14. (HSG 7 trường Trần Đức Thông, huyện Hưng Hà; huyện Mường Lát 2022 - 2023)

Cho biểu thức: $P = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$. Chứng minh rằng: $P < \frac{3}{16}$.

Lời giải

$$\text{Xét } 3P = 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{99}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}}$$

$$\Rightarrow 3P + P = 1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{3}{3^2} - \frac{2}{3^2}\right) + \left(\frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^3}\right) + \dots + \left(\frac{99}{3^{98}} - \frac{98}{3^{98}}\right) + \left(\frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{99}}\right) - \frac{100}{3^{100}}$$

$$\Rightarrow 4P = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$\Rightarrow 12P = 3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{97}} - \frac{1}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}}$$

$$\Rightarrow 4P + 12P = \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}\right) + \left(3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{97}} - \frac{1}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}}\right)$$

$$\Rightarrow 16P = 3 - \frac{101}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$\Rightarrow 16P = 3 - \frac{303}{3^{100}} - \frac{100}{3^{100}} = 3 - \frac{403}{3^{100}}$$

$$\Rightarrow P = \frac{3}{16} - \frac{403}{16 \cdot 3^{100}}$$

$$\text{Vì } \frac{3}{16} - \frac{403}{16 \cdot 3^{100}} < \frac{3}{16} \Rightarrow P < \frac{3}{16}$$

Câu 15. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Trần Đức Thông 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{2001}{2000^2 + 1} + \frac{2001}{2000^2 + 2} + \dots + \frac{2001}{2000^2 + 2000}$. Chứng minh rằng: $1 < A^2 < 4$.

Lời giải

Tổng A có tất cả 2000 số hạng.

$$\text{Ta có: } \frac{2001}{2000^2 + 1} > \frac{2001}{2000^2 + 2} > \frac{2001}{2000^2 + 3} > \dots > \frac{2001}{2000^2 + 2000}$$

$$\Rightarrow A > \frac{2001}{2000^2 + 2000} \cdot 2000 = \frac{2001 \cdot 2000}{2000(2000 + 1)} = 1 \quad (1)$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} A &< \frac{2001}{2000^2 + 1} \cdot 2000 = \frac{2001 \cdot 2000}{2000^2 + 1} = \frac{(2000 + 1) \cdot 2000}{2000^2 + 1} = \frac{2000^2 + 2000}{2000^2 + 1} \\ &= \frac{(2000 + 1) \cdot 2000}{2000^2 + 1} = \frac{(2000^2 + 1) + 1999}{2000^2 + 1} = 1 + \frac{1999}{2000^2 + 1} < 2 \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra $1 < A < 2 \Rightarrow 1 < A^2 < 4$.

Câu 16. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Tân Tiến 2022 - 2023)

So sánh B và C , biết:

$$B = \frac{1}{1010} + \frac{1}{1011} + \frac{1}{1012} + \dots + \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023}$$

$$C = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} C &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2023}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1011}\right) + \left(\frac{1}{1012} + \frac{1}{1013} + \dots + \frac{1}{2023}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{1010} + \frac{1}{1011}\right) \\ &= \frac{1}{1011} + \frac{1}{1012} + \dots + \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023} \\ &\Rightarrow B = C. \end{aligned}$$

Câu 17. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Bùi Hữu Diên 2022 - 2023)

$$\text{Cho } B = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right)\left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2018.2020}\right)$$

So sánh B với 2.

Lời giải

$$B = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right)\left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2018.2020}\right)$$

$$B = \frac{4}{1.3} \cdot \frac{9}{2.4} \cdot \frac{16}{3.5} \dots \frac{2019.2019}{2018.2020}$$

$$B = \frac{2.2.3.3.4.4 \dots 2019.2019}{1.3.2.4.3.5 \dots 2018.2020}$$

$$B = \frac{2.3.4 \dots 2019.2.3.4 \dots 2019}{1.2.3 \dots 2018.3.4.5 \dots 2020}$$

$$B = 2019 \cdot \frac{2}{2020} = \frac{2019}{1010}$$

$$\text{Ta có } \frac{2019}{1010} < \frac{2020}{1010} \Rightarrow B < 2.$$

Câu 18. (HSG 7 huyện Hiệp Đức; trường Lục Nam, huyện Thái Thụy; huyện Bến Lức 2018 - 2019; huyện Than Uyên 2017 - 2018; tỉnh Ninh Bình 2022 - 2023)

Chứng tỏ rằng $S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2}$ không là số tự nhiên với mọi $n \in \mathbb{N}, n > 2$

Lời giải

$$\begin{aligned} S &= \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2} \\ &= \frac{2^2 - 1}{2^2} + \frac{3^2 - 1}{3^2} + \frac{4^2 - 1}{4^2} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2} \\ &= 1 - \frac{1}{2^2} + 1 - \frac{1}{3^2} + 1 - \frac{1}{4^2} + \dots + 1 - \frac{1}{n^2} = (1 + 1 + 1 + \dots + 1) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) \\ &\Rightarrow S < n - 1 \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận xét: $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2}; \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3}; \frac{1}{4^2} < \frac{1}{3.4}; \dots; \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1).n}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} &< \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1).n} = 1 - \frac{1}{n} < 1 \\ \Rightarrow -\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) &> -1 \\ \Rightarrow (n-1) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) &> (n-1) - 1 = n - 2 \\ \Rightarrow S > n - 2 \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra $n - 2 < S < n - 1$ hay S không là số nguyên

Câu 19. (HSG 7 trường Thanh Thủy; trường Bảo Phương 2018 - 2019)

Chứng minh rằng: $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}} + \frac{1}{3^{2013}} < \frac{1}{2}$

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}} + \frac{1}{3^{2013}} \\ 3B &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}} \\ 3B - B &= 1 - \frac{1}{3^{2013}} \Rightarrow 2B = 1 - \frac{1}{3^{2013}} \\ \Rightarrow B &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{2013}} < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vậy $B < \frac{1}{2}$

Câu 20. (HSG 7 huyện Tiền Hải 2022 - 2023)

Cho $M = \frac{3}{3.5} + \frac{3}{5.7} + \frac{3}{7.9} + \frac{3}{9.11} + \dots + \frac{3}{53.55}$. Tính M và so sánh M với $\frac{1}{2}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{3}{3.5} + \frac{3}{5.7} + \frac{3}{7.9} + \frac{3}{9.11} + \dots + \frac{3}{53.55} \\
 &= 3 \cdot \left(\frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \frac{1}{9.11} + \dots + \frac{1}{53.55} \right) \\
 &= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \frac{2}{7.9} + \frac{2}{9.11} + \dots + \frac{2}{53.55} \right) \\
 &= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{5-3}{3.5} + \frac{7-5}{5.7} + \frac{9-7}{7.9} + \frac{11-9}{9.11} + \dots + \frac{55-53}{53.55} \right) \\
 &= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{53} - \frac{1}{55} \right) \\
 &= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{55} \right) \\
 &= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{55-3}{165} \right) \\
 &= \frac{3}{2} \cdot \frac{52}{165} = \frac{26}{55}
 \end{aligned}$$

Ta có $M = \frac{26}{55} < \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

Câu 21. (HSG 7 huyện Chương Mỹ 2022 - 2023)

Cho tổng $S = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \dots + \frac{1}{2024^2} + \frac{1}{2025^2}$. So sánh S với 1.

Lời giải

Ta có $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ ($k \in \mathbb{N}, k > 1$)

Thay $k = 10; 11; 12; \dots; 2025$,

ta có $S < \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{2024} - \frac{1}{2025}$

$\Rightarrow S < \frac{1}{9} - \frac{1}{2025} < 1$.

Vậy $S < 1$.

Câu 22. (HSG 7 Bắc Giang năm học 2022 - 2023)

Chứng minh rằng $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{4047}{2023^2 \cdot 2024^2} < 1$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } & \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{4047}{2023^2 \cdot 2024^2} \\
 &= \frac{2^2 - 1^2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{4^2 - 3^2}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2024^2 - 2023^2}{2023^2 \cdot 2024^2} \\
 &= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2023^2} - \frac{1}{2024^2} \\
 &= 1 - \frac{1}{2024^2}
 \end{aligned}$$

Ta thấy $1 - \frac{1}{2024^2} < 1$

Do vậy $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{4047}{2023^2 \cdot 2024^2} < 1$.

Câu 23. (HSG 7 huyện Đồng Xuân năm học 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100}$. Chứng minh rằng $\frac{7}{12} < A < \frac{5}{6}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) - \dots - \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99}\right) - \frac{1}{100} \\ &= \frac{5}{6} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) - \dots - \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99}\right) - \frac{1}{100} < \frac{5}{6} \quad (1) \end{aligned}$$

Mặt khác: $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{9900}$

$$A = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{12}\right) + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{9900} = \frac{7}{12} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{9900} > \frac{7}{12} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra điều phải chứng minh.

Câu 24. (HSG 7 trường Điện Hồng; trường Hồng Dương 2018-2019; trường Bích Hòa 2017-2018; huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Chứng minh: $\frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$.

Lời giải

Đặt $A = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$, ta có:

$$*A < \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100}$$

$$A < \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

$$A < \frac{1}{4} - \frac{1}{100}$$

$$A < \frac{1}{4}$$

$$*A > \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100} + \frac{1}{100.101}$$

$$A > \frac{1}{5} - \frac{1}{101}$$

$$A > \frac{1}{6}$$

Vậy $\frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$.

Câu 25. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Thường Tín 2018 - 2019)

Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{2019^3} < \frac{1}{2^2}$.

Lời giải

Ta có: $2^3 > 1.2.3 \Rightarrow \frac{1}{2^3} < \frac{1}{1.2.3}$

Tương tự: $\frac{1}{3^3} < \frac{1}{2.3.4}; \dots; \frac{1}{2019^3} < \frac{1}{2017.2018.2019}$

$\Rightarrow A < \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{2017.2018.2019}$

$A < \frac{1}{2} \left(\frac{3-1}{1.2.3} + \frac{4-2}{2.3.4} + \dots + \frac{2019-2017}{2017.2018.2019} \right)$

$\Rightarrow A < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2017.2018} - \frac{1}{2018.2019} \right)$

$A < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2018.2019} \right)$

$\Rightarrow A < \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2018.2019.2}$

$A < \frac{1}{2^2}$

Vậy $A = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{2019^3} < \frac{1}{2^2}$.

Câu 26. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Lê Hồng Phong 2018 - 2019)

Chứng minh rằng: Nếu $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_9$ thì: $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3$.

Lời giải

Ta có: $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_9$ nên suy ra:

$$a_1 + a_2 + a_3 < 3a_3 \quad (1)$$

$$a_4 + a_5 + a_6 < 3a_6 \quad (2)$$

$$a_7 + a_8 + a_9 < 3a_9 \quad (3)$$

Cộng vế với vế của (1), (2), (3) ta được:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_9 < 3(a_3 + a_6 + a_9)$$

Vì $a_1 + a_2 + \dots + a_9 > 0$ nên ta được: $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3$.

Câu 27. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Cát Tiên 2018 - 2019)

Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Hãy so sánh $\frac{a}{b}$ với $\frac{a+c}{b+d}$.

Lời giải

Vì a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ nên $ad < bc$ (1)

Mặt khác: $\frac{a}{b} = \frac{a(b+d)}{b(b+d)} = \frac{ab+ad}{b(b+d)}$ (2)

$\frac{a+c}{b+d} = \frac{b(a+c)}{b(b+d)} = \frac{ab+bc}{b(b+d)}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$.

Câu 28. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Lục Nam 2018 - 2019)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2004^3} < \frac{1}{40}$.

Lời giải

Đặt $A = \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2004^3}$

$A < \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{6.7.8} + \dots + \frac{1}{2003.2004.2005}$

$A < \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4.5} - \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.5} - \dots + \frac{1}{2003.2004} - \frac{1}{2004.2005} \right) \right]$

$A < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4.5} - \frac{1}{2004.2005} \right)$

$A < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4.5}$

$A < \frac{1}{40}$.

Vậy $\frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2004^3} < \frac{1}{40}$.

Câu 29. (HSG 7 trường THCS Hương - Điền - Nam Hương năm 2017 - 2018)

Chứng minh: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < 1$.

Lời giải

$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}; \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{2005^2} < \frac{1}{2004.2005} = \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005}$

$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005}$

$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < 1 - \frac{1}{2005}$

$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < 1$ (đpcm)

Câu 30. (HSG 7 huyện Năm Căn, huyện Dương Nam Căn 2017 - 2018)

Cho các số $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{15}$. Chứng minh rằng: $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}}{a_5 + a_{10} + a_{15}} < 5$

Lời giải

Ta có: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 < 5a_5$

$a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} < 5a_{10}$

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} < 5a_{15}$$

Suy ra $a_1 + a_2 + \dots + a_{15} < 5(a_5 + a_{10} + a_{15})$

Vậy $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}}{a_5 + a_{10} + a_{15}} < 5$

Câu 31. (HSG 7 trường THCS Tào Sơn, huyện Anh Sơn 2017-2018)

Chứng minh rằng: $A = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{19}{9^2 \cdot 10^2} < 1$

Lời giải

Ta có: $A = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{19}{9^2 \cdot 10^2}$
 $= \frac{2^2 - 1^2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{4^2 - 3^2}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{10^2 - 9^2}{9^2 \cdot 10^2}$
 $= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{10^2} = 1 - \frac{1}{10^2} < 1$

Câu 32. (HSG 7, trường THCS Trường Sa, NH: 2017-2018)

Biết $x \in \mathbb{Q}$ và $0 < x < 1$. Chứng minh $x^n < x$ với $n \in \mathbb{N}; n \geq 2$

Lời giải

Xét $x^n - x = x(x^{n-1} - 1)$

Vì $0 < x < 1; n \geq 2 \Rightarrow x^{n-1} < 1 \Rightarrow x^{n-1} - 1 < 0$ mà $x > 0 \Rightarrow x^n - x < 0$ nên $x^n < x$ (đpcm)

Câu 33. (HSG 7 Đề 240)

Cho $M = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$ với $a, b, c > 0$

- a) Chứng minh $M > 1$.
- b) Chứng tỏ rằng M không phải là số nguyên.

Lời giải

a) Vì $a, b, c > 0$ nên $\frac{a}{a+b} > \frac{a}{a+b+c}; \frac{b}{b+c} > \frac{b}{a+b+c}; \frac{c}{c+a} > \frac{c}{a+b+c}$

$\Rightarrow M = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$

Vậy $M > 1$

b) Mà $\left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}\right) + \left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a}\right)$
 $= \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}\right) + \left(\frac{b}{b+c} + \frac{c}{b+c}\right) + \left(\frac{c}{c+a} + \frac{a}{c+a}\right) = 3$

Vì $\left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a}\right) > 1$ (tương tự câu a)

Suy ra: $M = \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}\right) < 2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $1 < M < 2$ nên M không phải là số nguyên.

Câu 34. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc 2017 - 2018)

Tìm tỉ số của A và B , biết rằng:

$$A = \frac{1}{1.1981} + \frac{1}{2.1982} + \dots + \frac{1}{n.(1980+n)} + \dots + \frac{1}{25.2005}$$

$$B = \frac{1}{1.26} + \frac{1}{2.27} + \dots + \frac{1}{m.(25+m)} + \dots + \frac{1}{1980.2005}$$

Trong đó, A có 25 số hạng và B có 1980 số hạng.

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{n(1980+n)} = \frac{1}{1980} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{1980+n} \right)$; $\frac{1}{m(25+m)} = \frac{1}{25} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{25+m} \right)$

Áp dụng tính A và B ta được:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1980} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1981} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1982} + \dots + \frac{1}{25} - \frac{1}{2005} \right) \\ &= \frac{1}{1980} \cdot \left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{25} \right) - \left(\frac{1}{1981} + \frac{1}{1982} + \dots + \frac{1}{2005} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{25} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{26} + \frac{1}{2} - \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{1980} - \frac{1}{2005} \right) \\ &= \frac{1}{25} \cdot \left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{25} \right) - \left(\frac{1}{1981} + \frac{1}{1982} + \dots + \frac{1}{2005} \right) \right] \end{aligned}$$

Vậy $\frac{A}{B} = \frac{1}{1980} : \frac{1}{25} = \frac{5}{396}$.

Câu 35. (HSG 7 năm 2022 - 2023)

Không dùng máy tính, hãy so sánh: $A = \frac{2006}{2007} + \frac{2007}{2008} + \frac{2008}{2009} + \frac{2009}{2006}$ với 4.

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{2007-1}{2007} + \frac{2008-1}{2008} + \frac{2009-1}{2009} + \frac{2006+3}{2006} \\ &= 1 - \frac{1}{2007} + 1 - \frac{1}{2008} + 1 - \frac{1}{2009} + 1 + \frac{3}{2006} \\ &= 4 + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2007} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2008} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2009} \end{aligned}$$

Do $\frac{1}{2006} > \frac{1}{2007}$, $\frac{1}{2006} > \frac{1}{2008}$, $\frac{1}{2006} > \frac{1}{2009}$

$\Rightarrow A > 4$

Câu 36. (HSG 7 năm 2022 - 2023; huyện Thanh Hà 2016 - 2017)

So sánh A và B trong mỗi trường hợp sau:

a) $A = \frac{-2012}{4025}$; $B = \frac{-1999}{3997}$

b) $A = \frac{2011}{1.2} + \frac{2011}{3.4} + \frac{2011}{5.6} + \dots + \frac{2011}{1999.2000}$; $B = \frac{2012}{1001} + \frac{2012}{1002} + \frac{2012}{1003} + \dots + \frac{2012}{2000}$

Lời giải

a) $\frac{2012}{4025} < \frac{2012}{4024} = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} = \frac{1999}{3998} < \frac{1999}{3997}$

$$\Rightarrow \frac{2012}{4025} < \frac{1999}{3997} \Rightarrow \frac{-2012}{4025} > \frac{-1999}{3997}.$$

Vậy $A > B$

$$\begin{aligned} \text{b) } A &= \frac{2011}{1.2} + \frac{2011}{3.4} + \frac{2011}{5.6} + \dots + \frac{2011}{1999.2000} \\ &= 2011 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{1999} - \frac{1}{2000} \right) \\ &= 2011 \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{1999} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2000} \right) \right] \\ &= 2011 \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{1999} + \frac{1}{2000} \right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2000} \right) \right] \\ &= 2011 \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1999} + \frac{1}{2000} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{999} + \frac{1}{1000} \right) \right] \\ &= 2011 \cdot \left(\frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \frac{1}{1003} + \dots + \frac{1}{1999} + \frac{1}{2000} \right) \\ B &= 2012 \cdot \left(\frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \frac{1}{1003} + \dots + \frac{1}{2000} \right) \end{aligned}$$

Suy ra $A < B$

Câu 37. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

a) Chứng minh: $\frac{1.3+2}{2^2} + \frac{2.4+2}{3^2} + \frac{3.5+2}{4^2} + \dots + \frac{2021.2023+2}{2022^2} + \frac{2022.2024+2}{2023^2} < 2023$

b) Cho $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100}$. Chứng minh rằng $P < \frac{1}{10}$

Lời giải

a) Đặt $A = \frac{1.3+2}{2^2} + \frac{2.4+2}{3^2} + \frac{3.5+2}{4^2} + \dots + \frac{2021.2023+2}{2022^2} + \frac{2022.2024+2}{2023^2}$ (1)

Ta thấy tổng A có 2022 số hạng

$$A = \frac{1.3+2}{2^2} + \frac{2.4+2}{3^2} + \frac{3.5+2}{4^2} + \dots + \frac{2021.2023+2}{2022^2} + \frac{2022.2024+2}{2023^2}$$

$$A = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2^2} \right) + \left(1 + \frac{1}{3^2} \right) + \left(1 + \frac{1}{4^2} \right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{2022^2} \right) + \left(1 + \frac{1}{2023^2} \right)}_{2018 \text{ số hạng}}$$

$$A = \underbrace{(1+1+1+\dots+1)}_{2022 \text{ số hạng}} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2023^2} \right)$$

$$A = 2022 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2018^2} + \frac{1}{2023^2} \right) \quad (2)$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2} \\ \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3} \\ \frac{1}{4^2} < \frac{1}{3.4} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{1}{2023^2} < \frac{1}{2022.2023} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2^2} < 1 - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4^2} < \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{1}{2023^2} < \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023} \end{cases}$$

Suy ra: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2023^2} = 1 - \frac{1}{2023} < 1$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2023^2} < 1$$

$$2022 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2023^2} \right) < 2022 + 1 = 2023$$

Chứng tỏ: $\frac{1.3+2}{2^2} + \frac{2.4+2}{3^2} + \frac{3.5+2}{4^2} + \dots + \frac{2021.2023+2}{2022^2} + \frac{2022.2024+2}{2023^2} < 2023$

b) Ta đi chứng minh bài toán phụ sau: $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

Thật vậy: với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có: $n^2 + n < n^2 + n + n + 1$

$$n(n+1) < (n+1)^2$$

$$\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$$

Nhân chéo chứng minh $n(n+2) < (n+1)(n+1)$

Cho n các giá trị từ 1 đến 99 ta có:

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}; \frac{3}{4} < \frac{5}{6}; \frac{5}{6} < \frac{6}{7}; \dots; \frac{99}{100} < \frac{100}{101}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \dots \frac{99}{100} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \dots \frac{100}{101}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \dots \frac{99}{100} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \dots \frac{99}{100} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \dots \frac{100}{101} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \dots \frac{99}{100}$$

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \dots \frac{99}{100} \right)^2 < \frac{1}{101}$$

Câu 38. (HSG 7 huyện Quan Sơn 2022 - 2023)

Chứng minh rằng $\frac{1}{4048} < \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2021}{2022} \cdot \frac{2023}{2024} \right)^2 < \frac{1}{2025}$.

Lời giải

$$\frac{1}{4048} < \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2021}{2022} \cdot \frac{2023}{2024} \right)^2 < \frac{1}{2025}$$

Với mọi $n \geq 1$ ta có: $\frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} < \frac{n^2}{n^2 + 2n} = \frac{n}{n+2}$.

Từ đó suy ra: $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2021}{2022} \cdot \frac{2023}{2024}\right)^2 < \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} \cdots \frac{2021}{2023} \cdot \frac{2013}{2025} = \frac{1}{2025}$

Với mọi $n \geq 2$ ta có: $\frac{n^2}{(n+1)^2} > \frac{n^2-1}{(n+1)^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{(n+1)^2} = \frac{n-1}{n+1}$.

Từ đó suy ra: $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2021}{2022} \cdot \frac{2023}{2024}\right)^2 > \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{4}{6} \cdots \frac{2020}{2022} \cdot \frac{2022}{2024} = \frac{1}{4048}$.

Câu 39. (HSG 7 huyện, Thái Thụy 2022 - 2023)

Cho $B = \frac{1}{11} + \frac{1}{11^2} + \cdots + \frac{1}{11^{100}}$. So sánh B với $\frac{1}{10}$.

Lời giải

$$B = \frac{1}{11} + \frac{1}{11^2} + \cdots + \frac{1}{11^{100}}$$

$$11B = 1 + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{11^{99}}$$

$$11B - B = 1 - \frac{1}{11^{100}}$$

$$10B = 1 - \frac{1}{11^{100}} < 1 \Rightarrow B < \frac{1}{10}$$

$$\text{Vậy } B < \frac{1}{10}$$

Câu 40. (HSG 7 trường Tri Thức 2022 - 2023)

Chứng minh: $\frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{8}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{100^2} = \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{50^2} \right) \\ & < \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \cdots + \frac{1}{49.50} \right) = \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{49} - \frac{1}{50} \right) \\ & = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{50} \right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{200} < \frac{1}{8} \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

Câu 41. (HSG 7 huyện Thường Xuân 2022 - 2023)

Cho dãy số $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ được xác định như sau: $a_1 = 1; a_2 = 1 + \frac{1}{2}; a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}; \dots;$

$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{2a_2^2} + \frac{1}{3a_3^2} + \cdots + \frac{1}{na_n^2} < 2$, với mọi số tự nhiên $n > 1$.

Lời giải

Với mọi $\forall k \geq 2$, ta có: $\frac{1}{k.a_k^2} < \frac{1}{k.a_{k-1}.a_k}$ (vì $a_k > a_{k-1}$).

$$\text{Lại có: } \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} = \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k-1}.a_k} = \frac{1}{k.a_{k-1}.a_k}$$

Suy ra: $\frac{1}{k.a_k^2} < \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}$

Cho $k = 2; 3; \dots; n$, ta có:

$$\frac{1}{2a_2^2} < \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}; \frac{1}{3a_3^2} < \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}; \dots; \frac{1}{na_n^2} < \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}$$

Cộng theo vế ta được:

$$\frac{1}{2a_2^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} < \frac{1}{a_1} = 1$$

Suy ra: $\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{2a_2^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < 1 + 1 = 2$ (đpcm)

Câu 42. (HSG 7 huyện Tiên Du 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \frac{1}{7^8} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}}$. Chứng minh rằng $A < \frac{1}{50}$

Lời giải

Ta có $A = \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \frac{1}{7^8} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}}$

$$\Rightarrow 7^2 \cdot A = 7^2 \cdot \left(\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \frac{1}{7^8} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}} \right)$$

$$\Rightarrow 49A = 1 - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^4} - \frac{1}{7^6} + \frac{1}{7^8} - \dots + \frac{1}{7^{96}} - \frac{1}{7^{98}}$$

$$\Rightarrow 49A + A = \left(1 - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^4} - \frac{1}{7^6} + \frac{1}{7^8} - \dots + \frac{1}{7^{96}} - \frac{1}{7^{98}} \right) + \left(\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \frac{1}{7^8} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}} \right)$$

$$\Rightarrow 50A = 1 - \frac{1}{7^{100}} < 1 \Rightarrow A < \frac{1}{50}$$

Vậy $A < \frac{1}{50}$.

Câu 43. (HSG 7 huyện Trục Ninh năm 2017 - 2018)

Cho $A = \frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3} + \frac{4}{7^4} + \dots + \frac{99}{7^{99}} + \frac{100}{7^{100}}$. Chứng minh rằng $A < \frac{7}{36}$.

Lời giải

Ta có $A = \frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3} + \frac{4}{7^4} + \dots + \frac{99}{7^{99}} + \frac{100}{7^{100}}$

$$\Rightarrow 7A = 1 + \frac{2}{7^1} + \frac{3}{7^2} + \frac{4}{7^3} + \dots + \frac{99}{7^{98}} + \frac{100}{7^{99}}$$

$$\Rightarrow 7A - A = \left(1 + \frac{2}{7^1} + \frac{3}{7^2} + \frac{4}{7^3} + \dots + \frac{99}{7^{98}} + \frac{100}{7^{99}} \right) - \left(\frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3} + \frac{4}{7^4} + \dots + \frac{99}{7^{99}} + \frac{100}{7^{100}} \right)$$

$$\Rightarrow 6A = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{99}} - \frac{100}{7^{100}}$$

Đặt $B = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{99}}$

$$\Rightarrow 7B = 7 + 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{98}}$$

$$\Rightarrow 7B - B = \left(7 + 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{98}}\right) - \left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{99}}\right)$$

$$\Rightarrow 6B = 7 - \frac{1}{7^{99}} < 7 \Rightarrow B < \frac{7}{6}$$

Lại có: $6A = B - \frac{100}{7^{100}} < B$

$$\Rightarrow 6A < \frac{7}{6} \Rightarrow A < \frac{7}{36}$$

Vậy $A < \frac{7}{36}$.

Câu 44. (HSG 7 huyện, Nga Sơn 2022 - 2023)

Cho $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{2023} - 1}$. Chứng minh rằng: $A > \frac{2023}{2}$.

Lời giải

Ta có $A = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{2022} + 1} + \dots + \frac{1}{2^{2023}}\right) - \frac{1}{2^{2023}}$

$$A > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{2022}} + \dots + \frac{1}{2^{2023}}\right) - \frac{1}{2^{2023}}$$

$$A > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + 2^{2022} \cdot \frac{1}{2^{2023}} - \frac{1}{2^{2023}}$$

$$A > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2023}} = 1 + 2016 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2023}} = \frac{2023}{2} + \left(1 - \frac{1}{2^{2023}}\right) > \frac{2023}{2}$$

Vậy $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{2023} - 1} > \frac{2023}{2}$.

Câu 45. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$

Lời giải

Ta có: $A = \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \dots + \frac{1}{n.n} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1).n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$

Câu 46. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho $B = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n-1}{(n-1)^2 \cdot n^2}$ (với n là số tự nhiên lớn hơn 1).

Chứng minh rằng: $B < 1$.

Lời giải

$$B = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n-1}{(n-1)^2 \cdot n^2}$$

$$B = \frac{2^2 - 1^2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{4^2 - 3^2}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{n^2 - (n-1)^2}{(n-1)^2 \cdot n^2}$$

$$B = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}$$

$$B = 1 - \frac{1}{n^2}$$

Vì n là số tự nhiên lớn hơn 1 nên $\frac{1}{n^2} > 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{n^2} < 1$.

Vậy $B < 1$.

Câu 47. (HSG 7 huyện Sơn Dương năm 2016 - 2017)

Chứng minh rằng: Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì $\frac{a^{2014} + b^{2014}}{c^{2014} + d^{2014}} = \left(\frac{a-b}{c-d}\right)^{2014}$

Lời giải

$$\text{Từ } \frac{a}{d} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a-b}{c-d} \Rightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^{2014} = \left(\frac{b}{d}\right)^{2014} = \left(\frac{a-b}{c-d}\right)^{2014} \quad (1)$$

$$\text{Từ } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^{2014} = \left(\frac{b}{d}\right)^{2014} = \frac{a^{2014} + b^{2014}}{c^{2014} + d^{2014}} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{a^{2014} + b^{2014}}{c^{2014} + d^{2014}} = \left(\frac{a-b}{c-d}\right)^{2014}.$$

Câu 48. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 – 2023)

Chứng minh rằng: $A = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{7^2} + \dots + \frac{2}{2007^2} < \frac{1003}{2008}$

Lời giải

Tổng A không có thừa số chung, do vậy ta đánh giá từng số hạng

$$\frac{2}{3^2} = \frac{2}{9} < \frac{2}{8} = \frac{2}{2.4}$$

$$\frac{2}{5^2} = \frac{2}{25} < \frac{2}{24} = \frac{2}{4.6}$$

$$\frac{2}{7^2} = \frac{2}{49} < \frac{2}{48} = \frac{2}{6.8}$$

.....

$$\frac{2}{2007^2} < \frac{2}{2006.2008}$$

$$A < \frac{2}{2.4} + \frac{2}{4.6} + \frac{2}{6.8} + \dots + \frac{2}{2006.2008} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2008} = \frac{1003}{2008}$$

Câu 49. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 – 2023)

Cho $M = \frac{2022^{2024} - 2021^{2024}}{2022^{2024} + 2021^{2024}}$; $N = \frac{2022^{2023} - 2021^{2023}}{2022^{2023} + 2021^{2023}}$. Hãy so sánh M và N .

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2022 > 2021 \Rightarrow \frac{2022}{2021} > 1$$

$$\text{Mà } 2024 > 2023 \Rightarrow \left(\frac{2022}{2021}\right)^{2024} > \left(\frac{2022}{2021}\right)^{2023}$$

$$\Rightarrow 1 + \left(\frac{2022}{2021}\right)^{2024} > 1 + \left(\frac{2022}{2021}\right)^{2023}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{1 + \left(\frac{2022}{2021}\right)^{2024}} &< \frac{1}{1 + \left(\frac{2022}{2021}\right)^{2023}} \\ \Rightarrow \frac{2021^{2024}}{2022^{2024} + 2021^{2024}} &< \frac{2021^{2023}}{2022^{2023} + 2021^{2023}} \\ \Rightarrow \frac{2 \cdot 2021^{2024}}{2022^{2024} + 2021^{2024}} &< \frac{2 \cdot 2021^{2023}}{2022^{2023} + 2021^{2023}} \\ \Rightarrow 1 - \frac{2 \cdot 2021^{2024}}{2022^{2024} + 2021^{2024}} &> 1 - \frac{2 \cdot 2021^{2023}}{2022^{2023} + 2021^{2023}} \\ \Rightarrow \frac{2022^{2024} - 2021^{2024}}{2022^{2024} + 2021^{2024}} &> \frac{2022^{2023} - 2021^{2023}}{2022^{2023} + 2021^{2023}} \end{aligned}$$

Vậy $M > N$.

Câu 50. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 – 2023)

So sánh A với 1 biết: $A = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2021.2023}\right)$

Lời giải

$$A = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2021.2023}\right)$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3+1}{1.3} \cdot \frac{2.4+1}{2.4} \dots \frac{2021.2023+1}{2021.2023}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{3.3}{2.4} \cdot \frac{4.4}{3.5} \dots \frac{2022.2022}{2021.2023}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{2.3.4 \dots 2022}{1.2.3 \dots 2021} \cdot \frac{2.3.4 \dots 2022}{3.4.5 \dots 2023}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{2022}{1} \cdot \frac{2}{2023}$$

$$A = \frac{2022}{2023} < \frac{2023}{2023} = 1$$

Vậy $A < 1$.

Câu 51. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 – 2023)

Cho $S_1 = 1 + \frac{1}{5}$; $S_2 = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2}$; ...; $S_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{5S_1^2} + \frac{1}{5^2S_2^2} + \frac{1}{5^3S_3^2} + \dots + \frac{1}{5^nS_n^2} < \frac{1}{4}$.

Lời giải

Ta có: $S_n > S_{n-1} > \dots > S_2 > S_1 > 1$

$$\Rightarrow S_n^2 > S_{n-1}^2 > \dots > S_2^2 > S_1^2 > 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5S_1^2} + \frac{1}{5^2S_2^2} + \frac{1}{5^3S_3^2} + \dots + \frac{1}{5^nS_n^2} < \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^n}$$

$$\text{Đặt } A = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^n}$$

$$\Rightarrow 5A = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^{n-1}}$$

$$\Rightarrow 4A = 1 - \frac{1}{5^n} < 1 \Rightarrow A < \frac{1}{4}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{5S_1^2} + \frac{1}{5^2S_2^2} + \frac{1}{5^3S_3^2} + \dots + \frac{1}{5^nS_n^2} < \frac{1}{4}.$$

Câu 52. (HSG 7 huyện Khoái Châu 2014 - 2015; huyện Mù Cang Chải 2016 - 2017)

$$\text{Cho } A = \left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{4}-1\right)\dots\left(\frac{1}{2015}-1\right)\left(\frac{1}{2016}-1\right). \text{ So sánh } A \text{ với } \frac{-1}{2015}$$

Lời giải

$$\text{Ta có } A = \left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{4}-1\right)\dots\left(\frac{1}{2015}-1\right)\left(\frac{1}{2016}-1\right)$$

$$= \frac{-1}{2} \cdot \frac{-2}{3} \cdot \frac{-3}{4} \dots \frac{-2014}{2015} \cdot \frac{-2015}{2016} = \frac{-1}{2016}$$

$$\text{Mà } \frac{-1}{2016} > \frac{-1}{2015}$$

$$\text{Vậy } A > \frac{-1}{2015}.$$

Câu 53. (HSG 7 huyện Tư Nghĩa, Trường Nghĩa Điền năm 2017 - 2018)

$$\text{So sánh các số sau: } A = \frac{10^{2011} + 1}{10^{2012} + 1} \text{ và } B = \frac{10^{2012} + 1}{10^{2013} + 1}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 10A = \frac{10^{2012} + 10}{10^{2012} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2012} + 1}$$

$$10B = \frac{10^{2013} + 10}{10^{2013} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2013} + 1}$$

$$\text{Vì } \frac{9}{10^{2012} + 1} > \frac{9}{10^{2013} + 1} \text{ nên } 10A > 10B \Rightarrow A > B.$$

CHƯƠNG 10: TỈ LỆ THỨC VÀ DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU

Dạng 1: Tìm số hạng chưa biết dựa vào tỉ lệ thức
Dạng 2: Chứng minh đẳng thức
Dạng 3: Chứng minh bất đẳng thức
Dạng 4: Bài toán về dãy tỉ số bằng nhau và chia tỉ lệ

Dạng 1. Tìm số hạng chưa biết dựa vào tỉ lệ thức

A. TRẮC NGHIỆM

Câu 1. (Đề HSG 7 LDP huyện Yên Thế 2022 - 2023)

Cho $\frac{x}{y} = \frac{9}{11}$ và $x + y = 60$. Tính $2x + 3y$?

- A. 50. B. 60. C. 120. **D. 153.**

Lời giải

Chọn D

$\frac{x}{y} = \frac{9}{11} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{11}$. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{9} = \frac{y}{11} = \frac{x+y}{9+11} = \frac{60}{20} = 3$$

Do đó $x = 9 \cdot 3 = 27; y = 11 \cdot 3 = 33$

$$\Rightarrow 2x + 3y = 2 \cdot 27 + 3 \cdot 33 = 153$$

Câu 2. (Đề HSG 7 LDP huyện Yên Thế 2022 - 2023)

Cho $\frac{x}{5} = \frac{y}{4}$ và $x^2 - y^2 = 9$. Tính tổng bình phương hai số x, y .

- A. 41.** B. 81. C. 9. D. 25.

Lời giải

Chọn A

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x^2}{25} = \frac{y^2}{16}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta được:

$$\frac{x^2}{25} = \frac{y^2}{16} = \frac{x^2 - y^2}{25 - 16} = \frac{9}{9} = 1$$

Do đó $x^2 = 1 \cdot 25 = 25$

$y^2 = 1 \cdot 16 = 16$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 41$$

Câu 3. (Đề HSG 7 LDP huyện Yên Thế 2022 - 2023)

Cho $\frac{x}{y} = 4$ và $xy = 9$. Khi đó $x^2 + y^2$ bằng bao nhiêu?

- A. 97. B. 81. **C. $\frac{153}{4}$.** D. 13.

Lời giải

Chọn C

$$\frac{x}{y} = 4 \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{1} = k \Rightarrow x = 4k, y = k$$

$$\text{Do } xy = 9 \Rightarrow 4k \cdot k = 9 \Rightarrow k = \pm \frac{3}{2}$$

$$\text{Với } k = \pm \frac{3}{2} \text{ thì } x^2 + y^2 = (4k)^2 + k^2 = \frac{153}{4}$$

Câu 4. (HSG 7 huyện Thanh Thủy, 2021 - 2022)

Cho hai số x, y biết $\frac{x}{y} = \frac{5}{7}$ và $x + y = 72$. Vậy $2x - 3y$ bằng

A. 30

B. -66

C. -44

D. 40

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \frac{x}{y} = \frac{5}{7} \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{7}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{x+y}{5+7} = \frac{72}{12} = 6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{5} = 6 \\ \frac{y}{7} = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 42 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x - 3y = 2 \cdot 30 - 3 \cdot 42 = -66$$

$$\text{Vậy } 2x - 3y = -66.$$

Câu 5. (HSG 7 huyện THANH SƠN 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{5a+2b+8c}{-7a-4b+6c}$ với $a:b:c=1:2:3$ vậy A bằng:

A. 13.

B. -5.

C. 11.

D. 9.

Lời giải

Chọn C

$$a:b:c=1:2:3 \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = k \Rightarrow a = k; b = 2k; c = 3k$$

$$A = \frac{5a+2b+8c}{-7a-4b+6c} = \frac{5k+4k+24k}{-7k-8k+18k} = \frac{33k}{3k} = 11$$

Câu 6. (HSG 7 huyện THANH SƠN 2022 - 2023)

Cho $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$ và $a+b+c \neq 0$ giá trị của $A = \frac{a^{19}b^4c^{2023}}{a^{2046}}$ là:

A. 1.

B. -1.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Vì $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$, áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = \frac{a+b+c}{b+c+a} = 1 \Rightarrow a = b = c$$

$$\Rightarrow A = \frac{a^{19}b^4c^{2023}}{a^{2046}} = \frac{a^{19}a^4a^{2023}}{a^{2046}} = \frac{a^{2046}}{a^{2046}} = 1$$

Câu 7. (HSG 7 huyện LÂM THAO 2022 - 2023)

Cho $5x = 3y$. Giá trị của biểu thức $A = \frac{8x^2 + 3y^2 - 2xy}{10x^2 - 3y^2}$ là.

- A. $\frac{9}{7}$. B. $\frac{39}{25}$. C. $\frac{197}{223}$. **D. $\frac{39}{5}$.**

Lời giải

Chọn D

Ta có $5x = 3y \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{5}$

Đặt $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = k \Rightarrow x = 3k; y = 5k$

Suy ra $A = \frac{8x^2 + 3y^2 - 2xy}{10x^2 - 3y^2} = \frac{8.9k^2 + 3.25k^2 - 2.3k.5k}{10.9k^2 - 3.25k^2} = \frac{117k^2}{15k^2} = \frac{117}{15} = \frac{39}{5}$

Câu 8. (HSG 7 đề khảo sát lần 3, 2022 - 2023)

Cho $3(a+b) = 2(3a-b)$. Tỉ số của hai số a và b bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{2}{3}$.** B. $\frac{3}{5}$. C. $\frac{5}{3}$. D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$3(a+b) = 2(3a-b)$$

$$\Rightarrow 3a + 3b = 6a - 2b$$

$$\Rightarrow 3a = 5b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{3}$$

Câu 9. (HSG 7 đề khảo sát lần 3, 2022 - 2023)

Nếu $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$ và $\frac{b}{4} = \frac{c}{5}$ thì a, b, c tỉ lệ với

- A. 12;8;15.** B. 15;12;8. **C. 8;12;15.** D. 8;12;20.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} \Rightarrow \frac{a}{8} = \frac{b}{12}$

$$\frac{b}{4} = \frac{c}{5} \Rightarrow \frac{b}{12} = \frac{c}{15}$$

Do đó: $\frac{a}{8} = \frac{b}{12} = \frac{c}{15} \Rightarrow a;b;c$ tỉ lệ với 8;12;15.

Câu 10. (HSG 7 huyện Tân Yên 2022 - 2023)

Cho dãy tỉ số bằng nhau $\frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$ và biểu thức $M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$. Giá trị của biểu thức M là

- A. 4. B. -4. C. 4 hoặc -4. D. 16.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & \frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d} \\ \Rightarrow & 1 + \frac{a+b+c+d}{a} = 1 + \frac{a+b+c+d}{b} = 1 + \frac{a+b+c+d}{c} = 1 + \frac{a+b+c+d}{d} \\ \Rightarrow & \frac{a+b+c+d}{a} = \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d}. \quad (1) \end{aligned}$$

+ Nếu $a+b+c+d \neq 0$ thì từ (1) $\Rightarrow a=b=c=d$.

$$\text{Khi đó, } Q = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c} = 1+1+1+1=4.$$

$$+ \text{ Với } a+b+c+d=0 \Rightarrow \begin{cases} a+b=-(c+d) \\ b+c=-(a+d) \\ c+d=-(a+b) \\ d+a=-(b+c) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } Q &= \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c} = \frac{-(c+d)}{c+d} + \frac{-(d+a)}{d+a} + \frac{-(a+b)}{a+b} + \frac{-(b+c)}{b+c} \\ &= -1-1-1-1=-4. \end{aligned}$$

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Ứng Hòa, 2021 - 2022)

Cho $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$ và $a+b+c=2022$. Tính a, b, c ?

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} \\ \Rightarrow & \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = \frac{a+b+c}{b+c+a} = 1 \\ \Rightarrow & \begin{cases} \frac{a}{b} = 1 \\ \frac{b}{c} = 1 \\ \frac{c}{a} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ b = c \\ c = a \end{cases} \Rightarrow a = b = c \end{aligned}$$

$$\text{Mà } a+b+c=2022 \Rightarrow 3a=2022 \Rightarrow a=674 \Rightarrow a=b=c=674$$

Vậy $a=b=c=674$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Thường Tín 2018 - 2019)

Cho $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$ và $a + b + c = 2019$. Tính a, b, c .

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = \frac{2019}{2019} = 1$$

$$\text{Từ } \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow a = b$$

$$\frac{b}{c} = 1 \Rightarrow b = c$$

$$\text{Suy ra } a = b = c = \frac{2019}{3} = 673$$

Câu 3. (HSG 7 trường Thiệu Vận, huyện Thiệu Hóa 2022 - 2023)

Cho $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$ và $a + b + c = 2025$. Tính a, b, c

Lời giải

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1 \Rightarrow \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow a = b$$

Tương tự $b = c$

$$\Rightarrow a = b = c = \frac{2025}{3} = 675.$$

Câu 4. (HSG 7. Trường THCS Ân Tường Đông.2014 – 2015)

Tìm các số a, b, c biết: $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7}$ và $a + b - c = 10$

Lời giải

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7} = \frac{a+b-c}{3+5-7} = 10$

$$\text{Từ } \frac{a}{3} = 10 \Rightarrow a = 30$$

$$\text{Từ } \frac{b}{5} = 10 \Rightarrow b = 50$$

$$\text{Từ } \frac{c}{7} = 10 \Rightarrow c = 70$$

Vậy $a = 30, b = 50, c = 70$

Câu 5. (HSG 7 trường Thiệu Châu 2022 - 2023; trường THCS Hiền Quan 2018 - 2019)

Tìm các số a, b, c biết rằng: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$ và $a + 2b - 3c = -20$

Lời giải

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{2b}{6} = \frac{3c}{12} = \frac{a+2b-3c}{2+6-12} = \frac{-20}{-4} = 5 \Rightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 15 \\ c = 20 \end{cases}$$

Câu 6. (HSG 7 trường Thống Nhất, huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023; trường Tư Nghĩa, huyện Nghĩa Điền 2017 - 2018)

Tìm x, y, z biết: $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{9}$ và $x - 3y + 4z = 62$

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{9} = \frac{3y}{9} = \frac{4z}{36} = \frac{x-3y+4z}{4-9+36} = \frac{x-3y+4z}{31} = \frac{62}{31} = 2$$

Suy ra $x = 4.2 = 8$; $y = 3.2 = 6$; $z = 9.2 = 18$

Vậy $x = 8; y = 6; z = 18$.

Câu 7. (HSG 7 huyện Bát Xát, 2021 - 2022)

Tìm các số x, y, z biết $\frac{x}{10} = \frac{y}{6} = \frac{z}{21}$ và $5x + y - 2z = 28$.

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{6} = \frac{z}{21} = \frac{5x}{50} = \frac{y}{6} = \frac{2z}{42} = \frac{5x+y-2z}{50+6-42} = \frac{28}{14} = 2$$

$$\frac{x}{10} = 2 \Rightarrow x = 2.10 = 20$$

$$\frac{y}{6} = 2 \Rightarrow y = 6.2 = 12$$

$$\frac{z}{21} = 2 \Rightarrow z = 21.2 = 42$$

Vậy $x = 20, y = 12, z = 42$

Câu 8. (HSG 7 huyện Trục Ninh 2020 - 2021)

Tìm x, y biết: $\frac{2x-1}{5} = \frac{3y-2}{3}$ và $x + y = 2$.

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{2x-1}{5} = \frac{3y-2}{3} = \frac{6x-3}{15} = \frac{6y-4}{6} = \frac{6x-3+6y-4}{15+6} = \frac{6(x+y)-7}{21} = \frac{6.2-7}{21} = \frac{5}{21}$$

(vì $x + y = 2$)

$$\text{Từ } \frac{2x-1}{5} = \frac{3y-2}{3} = \frac{5}{21} \text{ suy ra } \begin{cases} 42x - 21 = 25 \\ 63y - 42 = 15 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 42x = 46 \\ 63y = 57 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{23}{21} \\ y = \frac{19}{21} \end{cases}$$

Vậy $x = \frac{23}{21}; y = \frac{19}{21}$.

Câu 9. (HSG 7 Tp Ninh Bình 2022 - 2023; huyện Giao Thủy 2016 - 2017)

Tìm x, y biết: $\frac{x}{y} = \frac{8}{5}$ và $5x + 4y = 120$

Lời giải

$$\frac{x}{y} = \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{y}{5}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{x}{8} = \frac{y}{5} = \frac{5x}{40} = \frac{4y}{20} = \frac{5x+4y}{40+20} = \frac{120}{60} = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \cdot 8 = 16 \\ y = 2 \cdot 5 = 10 \end{cases}$$

Câu 10. (HSG 7 huyện Quế Sơn 2022 - 2023; huyện Kim Sơn 2017 - 2018; huyện Hiệp Hòa 2016 - 2017)

Tìm x, y biết $\frac{4+x}{7+y} = \frac{4}{7}$ và $x + y = 22$

Lời giải

$$\frac{4+x}{7+y} = \frac{4}{7} \Rightarrow 7(4+x) = 4(7+y)$$

$$\Rightarrow 28 + 7x = 28 + 4y$$

$$\Rightarrow 7x = 4y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{4}{7} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{7}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau: $\frac{x}{4} = \frac{y}{7} = \frac{x+y}{4+7} = \frac{22}{11} = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{4} = 2 \Rightarrow x = 8 \\ \frac{y}{7} = 2 \Rightarrow y = 14 \end{cases}$$

Vậy $x = 8; y = 14$

Câu 11. (HSG 7 huyện Việt Yên 2016 - 2017)

Tìm x, y, z biết: $\frac{4+x}{7+y} = \frac{4}{7}$ và $x + y = 55$

Lời giải

$$\frac{4+x}{7+y} = \frac{4}{7} \Rightarrow 28 + 7x = 28 + 4y \Rightarrow 7x = 4y \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{7}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau: $\frac{x}{4} = \frac{y}{7} = \frac{x+y}{4+7} = \frac{55}{11} = 5$

$$\Rightarrow x = 20; y = 35$$

Câu 12. (HSG 7 huyện Vũ Thư, 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{6}$ và $x + y + z = 27$.

Lời giải

$$\text{Đặt } \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{6} = k \Rightarrow x = 2k+1; y = 4k-3; z = 6k+5.$$

$$\text{Vì } x+y+z = 27 \Rightarrow 2k+1+4k-3+6k+5 = 27$$

$$\Rightarrow 12k+3 = 27 \Rightarrow 12k = 24 \Rightarrow k = 2.$$

$$\text{Với } k = 2 \text{ ta có: } x = 2.2+1 = 5; y = 4.2-3 = 5; z = 6.2+5 = 17$$

$$\text{Vậy } (x, y, z) = (5; 5; 17).$$

Câu 13. (HSG 7 huyện Văn Bàn 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x, y, z \text{ biết: } \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-5}{6} \text{ và } 5z-3x-4y = 50.$$

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{6} = \frac{5(z-5)-3(x-1)-4(y+3)}{2} = \frac{(5z-3x-4y)-34}{8} = \frac{50-34}{8} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{2} = 2 \Rightarrow x-1 = 4 \Rightarrow x = 5$$

$$\frac{y+3}{4} = 2 \Rightarrow y+3 = 8 \Rightarrow y = 5$$

$$\frac{z-5}{6} = 2 \Rightarrow z-5 = 12 \Rightarrow z = 17$$

$$\text{Vậy } (x, y, z) = (5; 5; 17).$$

Câu 14. (HSG 7 huyện Trà My, tỉnh Quảng Nam, trường Trà My 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x, y, z \text{ biết } \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-2}{3} \text{ và } x-3y+4z = 4$$

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-2}{3} = \frac{x-1}{2} = \frac{3y-9}{12} = \frac{4z-8}{12} = \frac{x-1-3y+9+4z-8}{2-12+12} = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{2} = 2 \Rightarrow x-1 = 4 \Rightarrow x = 5 \\ \frac{y-3}{4} = 2 \Rightarrow y-3 = 8 \Rightarrow y = 11 \\ \frac{z-2}{3} = 2 \Rightarrow z-2 = 6 \Rightarrow z = 8 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x = 5; y = 11; z = 8$$

Câu 15. (HSG 7 trường Võ Thị Sáu; trường Kim Trung 2022 - 2023; trường Hồng Liên; trường Phương Trung 2018 - 2019)

$$\text{Cho } \frac{a-1}{2} = \frac{b+3}{4} = \frac{c-5}{6} \text{ và } 5a-3b-4c = 46. \text{ Tìm } a, b, c.$$

Lời giải

Ta có: $\frac{a-1}{2} = \frac{b+3}{4} = \frac{c-5}{6} = \frac{5 \cdot (a-1)}{5 \cdot 2} = \frac{3 \cdot (b+3)}{3 \cdot 4} = \frac{4 \cdot (c-5)}{4 \cdot 6} = \frac{5a-5}{10} = \frac{3b+9}{12} = \frac{4c-20}{24}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a-1}{2} = \frac{b+3}{4} = \frac{c-5}{6} = \frac{5a-5}{10} = \frac{3b+9}{12} = \frac{4c-20}{24}$$

$$= \frac{(5a-5) - (3b+9) - (4c-20)}{10-12-24} = \frac{5a-3b-4c+6}{-26} = \frac{46+6}{-26} = \frac{52}{-26} = -2.$$

Suy ra: $\frac{a-1}{2} = -2 \Rightarrow a-1 = -4 \Rightarrow a = -3.$

$$\frac{b+3}{4} = -2 \Rightarrow b+3 = -8 \Rightarrow b = -11.$$

$$\frac{c-5}{6} = -2 \Rightarrow c-5 = -12 \Rightarrow c = -7.$$

Vậy $(a ; b ; c) = (-3 ; -11 ; -7).$

Câu 16. (HSG 7 huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $\frac{3x-2y}{4} = \frac{4y-3z}{2} = \frac{2z-4x}{3}$ và $x-2y+3z=8.$

Lời giải

Ta có: $\frac{3x-2y}{4} = \frac{4y-3z}{2} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{12x-8y}{16} = \frac{8y-6z}{4} = \frac{6z-12x}{9}.$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{12x-8y}{16} = \frac{8y-6z}{4} = \frac{6z-12x}{9} = \frac{12x-8y+8y-6z+6z-12x}{16+4+9} = 0$$

Suy ra: $12x-8y=0; 8y-6z=0; 6z-12x=0$

$$\Rightarrow 12x=8y=6z \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}.$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x-2y+3z}{2-6+12} = \frac{8}{8} = 1 \Rightarrow x=2; y=3; z=4.$$

Vậy $x=2; y=3; z=4.$

Câu 17. (HSG 7 huyện Anh Sơn năm 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $\frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$ và $x+y+z=72.$

Lời giải

Ta có: $\frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2} \Rightarrow \frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{4}.$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{4} = \frac{4(3x-2y)+3(2z-4x)+2(4y-3z)}{16+9+4} = 0$$

Suy ra:

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 0 \Rightarrow 3x = 2y \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ 4y - 3z = 0 \Rightarrow 4y = 3z \Rightarrow \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}.$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y+z}{2+3+4} = \frac{72}{9} = 8 \Rightarrow x = 8 \cdot 2 = 16; y = 8 \cdot 3 = 24; z = 8 \cdot 4 = 32.$$

Vậy $x = 16, y = 24, z = 32$.

Câu 18. (HSG 7 huyện Kinh Môn 2022 - 2023; huyện Bá Thước 2021 - 2022; huyện Sơn Trà 2018 - 2019; huyện Bồ Trạch; huyện Cẩm Phả 2017 - 2018; huyện Thiệu Hóa 2016 - 2017; huyện Triệu Sơn 2015 - 2016)

Tìm x, y, z , biết: $\frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$ và $x+y+z=18$

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2} \Rightarrow \frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{4}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta được

$$\frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{4} = \frac{12x-8y+6z-12x+8y-6z}{16+9+4} = 0$$

$$*) \frac{4(3x-2y)}{16} = 0 \Rightarrow 3x = 2y \Rightarrow 12x = 8y \quad (1)$$

$$*) \frac{3(2z-4x)}{9} = 0 \Rightarrow 2z = 4x \Rightarrow 6z = 12x \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) Suy ra } 12x = 8y = 6z \Rightarrow \frac{12x}{48} = \frac{8y}{48} = \frac{6z}{48} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{6} = \frac{z}{8}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta được

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{6} = \frac{z}{8} = \frac{x+y+z}{4+6+8} = \frac{18}{18} = 1 \quad (\text{vì } x+y+z=18)$$

$$\Rightarrow x = 4; y = 6; z = 8$$

Vậy $x = 4; y = 6; z = 8$

Câu 19. (HSG huyện Bình Long; huyện Vũ Thư 2022 - 2023; huyện Trục Ninh 2018 - 2019; huyện Tam Đur 2017 - 2018)

Tìm ba số $a; b; c$ biết: $\frac{3a-2b}{5} = \frac{2c-5a}{3} = \frac{5b-3c}{2}$ và $a+b+c=-50$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{3a-2b}{5} = \frac{2c-5a}{3} = \frac{5b-3c}{2} \Rightarrow \frac{15a-10b}{25} = \frac{6c-15a}{9} = \frac{10b-6c}{4}$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} 15a = 10b \\ 6c = 15a \\ 10b = 6c \end{cases} \Rightarrow 15a = 10b = 6c \Rightarrow \frac{15a}{90} = \frac{10b}{90} = \frac{6c}{90} \Rightarrow \frac{a}{6} = \frac{b}{9} = \frac{c}{15}.$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có: $\frac{a}{6} = \frac{b}{9} = \frac{c}{15} = \frac{a+b+c}{6+9+15} = \frac{-50}{30} = \frac{-5}{3}$.

Suy ra: $a = 6 \cdot \frac{-5}{3} = -10$; $b = 9 \cdot \frac{-5}{3} = -15$; $c = 15 \cdot \frac{-5}{3} = -25$.

Vậy $a = -10$; $b = -15$; $c = -25$.

Câu 20. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Lê Tư Thành 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $\frac{3x-2y}{5} = \frac{2z-5x}{3} = \frac{5y-3z}{2}$ và $x+y+z=50$.

Lời giải

Từ $\frac{3x-2y}{5} = \frac{2z-5x}{3} = \frac{5y-3z}{2} \Rightarrow \frac{15x-10y}{25} = \frac{6z-15x}{9} = \frac{10y-6z}{4}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau có:

$$\frac{15x-10y}{25} = \frac{6z-15x}{9} = \frac{10y-6z}{4} = \frac{15x-10y+6z-15x+10y-6z}{38} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 15x-10y=0 \\ 6z-15x=0 \\ 10y-6z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x=2y \\ 2z=5x \\ 5y=3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ \frac{x}{2} = \frac{z}{5} \\ \frac{z}{5} = \frac{y}{3} \end{cases}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau có:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{2+3+5} = \frac{50}{10} = 5$$

Từ đó suy ra $x=10, y=15, z=25$.

Câu 21. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Trần Thủ Độ 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $\frac{6x-5y}{11} = \frac{7y-6z}{4} = \frac{5z-7x}{30}$ và $4x+2y-z=10$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{6x-5y}{11} &= \frac{7y-6z}{4} = \frac{5z-7x}{30} \\ \Rightarrow \frac{7(6x-5y)}{7 \cdot 11} &= \frac{5(7y-6z)}{5 \cdot 4} = \frac{6(5z-7x)}{6 \cdot 30} \\ \Rightarrow \frac{42x-35y}{77} &= \frac{35y-30z}{20} = \frac{30z-42x}{180} \end{aligned}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau

$$\Rightarrow \frac{42x-35y}{77} = \frac{35y-30z}{20} = \frac{30z-42x}{180} = \frac{42x-35y+35y-30z+30z-42x}{77+20+180} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z}{7}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có: $\frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z}{7} = \frac{4x+2y-z}{20+12-7} = \frac{2}{5}$

Suy ra $x=2$; $y=\frac{12}{5}$; $z=\frac{14}{5}$.

Câu 22. (HSG 7 trường Trần Thiện; trường Thanh Mai 2018 - 2019)

Tìm các số x, y, z biết:

a) $\frac{x}{10} = \frac{y}{6} = \frac{z}{21}$ và $5x + y - 2z = 28$

b) $3x = 2y; 7y = 5z$ và $x - y + z = 32$

c) $\frac{2x}{3} = \frac{3y}{4} = \frac{4z}{5}$ và $x + y + z = 49$

Lời giải

a) Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{6} = \frac{z}{21} = \frac{5x}{50} = \frac{y}{6} = \frac{2z}{42} = \frac{5x + y - 2z}{50 + 6 - 42} = \frac{28}{14} = 2$$

Từ $\frac{x}{10} = 2$ suy ra $x = 2 \cdot 10 = 20$

$\frac{y}{6} = 2$ suy ra $y = 2 \cdot 6 = 12$

$\frac{z}{21} = 2$ suy ra $z = 2 \cdot 21 = 42$

Vậy $x = 20; y = 12; z = 42$.

b) $3x = 2y; 7y = 5z$ và $x - y + z = 32$

Từ $3x = 2y$ suy ra $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{15}$ (1)

$7y = 5z$ suy ra $\frac{y}{5} = \frac{z}{7} \Rightarrow \frac{y}{15} = \frac{z}{21}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{21}$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{21} = \frac{x - y + z}{10 - 15 + 21} = \frac{32}{16} = 2$$

Từ $\frac{x}{10} = 2$ suy ra $x = 2 \cdot 10 = 20$

$\frac{y}{15} = 2$ suy ra $y = 2 \cdot 15 = 30$

$\frac{z}{21} = 2$ suy ra $z = 2 \cdot 21 = 42$

Vậy $x = 20; y = 30; z = 42$

c) $\frac{2x}{3} = \frac{3y}{4} = \frac{4z}{5} \Rightarrow \frac{x}{18} = \frac{y}{16} = \frac{z}{15}$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{18} = \frac{y}{16} = \frac{z}{15} = \frac{x + y + z}{18 + 16 + 15} = \frac{49}{49} = 1$$

Từ $\frac{x}{18} = 1$ suy ra $x = 1 \cdot 18 = 18$

$$\frac{y}{16} = 1 \text{ suy ra } y = 1 \cdot 16 = 16$$

$$\frac{z}{15} = 1 \text{ suy ra } z = 1 \cdot 15 = 15$$

Vậy $x = 18; y = 16; z = 15$

Câu 23. (HSG 7 Thị xã Kinh Môn; trường Thống Nhất; trường Phan Kính Ân huyện Hưng Hà 2022 - 2023; trường Trần Lãm 2021 - 2022; huyện Vĩnh Yên 2018 - 2019; huyện Mỹ Cày; huyện Thái Thụy 2017 - 2018)

Tìm x, y, z biết: $\frac{5z-6y}{4} = \frac{6x-4z}{5} = \frac{4y-5x}{6}$ và $3x-2y+5z=96$.

Lời giải

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\begin{aligned} \frac{5z-6y}{4} &= \frac{6x-4z}{5} = \frac{4y-5x}{6} = \frac{20z-24y}{16} = \frac{30x-20z}{25} = \frac{24y-30x}{36} \\ &= \frac{20z-24y+30x-20z+24y-30x}{16+25+36} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} 5z = 6y \\ 6x = 4z \\ 4y = 5x \end{cases} \text{ suy ra } \frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6} = \frac{3x-2y+5z}{12-10+30} = \frac{96}{32} = 3$$

Suy ra $x = 12; y = 15; z = 18$

Vậy $x = 12; y = 15; z = 18$.

Câu 24. (HSG 7 trường Thị Trấn Bến Lức; trường Mường Thanh 2022 - 2023; huyện Hiệp Đức 2018 - 2019)

Tìm a, b, c biết $\frac{12a-15b}{7} = \frac{20c-12a}{9} = \frac{15b-20c}{11}$ và $a+b+c=48$

Lời giải

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{12a-15b}{7} = \frac{20c-12a}{9} = \frac{15b-20c}{11} = \frac{12a-15b+20c-12a+15b-20c}{27} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{12a-15b}{7} = 0 &\Rightarrow 12a = 15b \\ \frac{20c-12a}{9} = 0 &\Rightarrow 20c = 12a \end{aligned} \right\} \Rightarrow 12a = 15b = 20c \Rightarrow \frac{a}{12} = \frac{b}{15} = \frac{c}{20}$$

Và $a+b+c=48$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{12} = \frac{b}{15} = \frac{c}{20} = \frac{a+b+c}{12+15+20} = \frac{48}{5} = 24$$

$\Rightarrow a = 20, b = 16, c = 12$

Vậy $a = 20; b = 16; c = 12$

Câu 25. (HSG 7 huyện Trực Tỉnh 2016 - 2017; huyện Phú Thiện. 2015 - 2016)

Tìm x, y, z biết: $\frac{2x-y}{5} = \frac{3y-2z}{15}$ và $x+z=2y$

Lời giải

Từ $x+z=2y$ ta có:

$$x-2y+z=0 \text{ hay } 2x-4y+2z=0 \text{ hay } 2x-y-3y+2z=0$$

$$\text{Hay } 2x-y=3y-2z$$

$$\text{Vậy nếu } \frac{2x-y}{5} = \frac{3y-2z}{15} \text{ thì } 2x-y=3y-2z=0$$

$$\text{Từ } 2x-y=0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}y$$

$$\text{Từ } 3y-2z=0 \text{ và } x+z=2y \Rightarrow x+z+y-2z=0 \text{ hay } \frac{1}{2}y+y-z=0$$

$$\text{Hay } \frac{3}{2}y-z=0 \text{ hay } y = \frac{2}{3}z, \text{ suy ra: } x = \frac{1}{3}z$$

$$\text{Vậy } (x, y, z) = \left(\frac{1}{2}y; y; \frac{3}{2}y \right) \text{ với } y \in \mathbb{R}.$$

Câu 26. (HSG 7 huyện Thái Thụy năm 2022 - 2023)

Tìm các số $x; y; z$ thỏa mãn: $\frac{xy+1}{10} = \frac{yz+2}{27} = \frac{zx+3}{19}$ và $xy+yz+zx=50$

Lời giải

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{xy+1}{10} = \frac{yz+2}{27} = \frac{zx+3}{19} = \frac{xy+1+yz+2+zx+3}{10+27+19} = \frac{56}{56} = 1$$

$$\frac{xy+1}{10} = 1 \Rightarrow xy = 9, \text{ tương tự ta cũng có:}$$

$$yz = 25; zx = 16$$

$$\Rightarrow (xyz)^2 = 9 \cdot 25 \cdot 16 = 60^2 \Rightarrow xyz = 60 \text{ hoặc } xyz = -60$$

$$\text{Với } xyz = -60 \Rightarrow x = \frac{-12}{5}; y = \frac{-14}{5}; z = \frac{-20}{3}$$

$$\text{Với } xyz = 60 \Rightarrow x = \frac{12}{5}; y = \frac{14}{5}; z = \frac{20}{3}.$$

Câu 27. (HSG 7 huyện Nguyệt Án 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết $2x = 3y = 5z$ và $x+3y-2z=66$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2x = 3y = 5z \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{6}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{6} = \frac{3y}{30} = \frac{2z}{12} = \frac{x+3y-2z}{15+30-12} = \frac{66}{33} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{x}{15} = 2 \Rightarrow x = 30$$

$$\Rightarrow \frac{y}{10} = 2 \Rightarrow y = 20$$

$$\Rightarrow \frac{z}{6} = 2 \Rightarrow z = 12$$

Vậy $x = 30; y = 20; z = 6$

Câu 28. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường THCS Tân Tiến 2022 - 2023)

Tìm $x; y; z$ biết: $3x = 4y = 6z$ và $x - y + z = -15$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 3x = 4y = 6z \Rightarrow \frac{3x}{12} = \frac{4y}{12} = \frac{6z}{12} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$$

Mà $x - y + z = -15$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta được:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2} = \frac{x - y + z}{4 - 3 + 2} = \frac{-15}{3} = -5$$

Do đó:

$$x = -5 \cdot 4 = -20$$

$$y = -5 \cdot 3 = -15$$

$$z = -5 \cdot 2 = -10$$

Vậy $x = -20; y = -15; z = -10$.

Câu 29. (HSG 7 Trường THCS Hiền Quan. 2015 - 2016)

Tìm các số x, y, z biết: $12x = 15y = 20z$ và $x + y + z = 48$

Lời giải

$$\text{Vì } 12x = 15y = 20z \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$$

$$\text{Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta được: } \frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x + y + z}{12} = \frac{48}{12} = 4$$

$$\Rightarrow x = 20; y = 16; z = 12$$

Câu 30. (HSG 7 huyện Ứng Hòa đợt 1, 2022 - 2023; huyện Bồ Trạch; huyện Vị Thanh 2017 - 2018)

Tìm các số x, y, z biết: $2x = 3y; 4y = 5z$ và $x + y + z = 11$.

Lời giải

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} 2x = 3y \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10} \\ 4y = 5z \Leftrightarrow \frac{y}{5} = \frac{z}{4} \Leftrightarrow \frac{y}{10} = \frac{z}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta được:

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8} = \frac{x + y + z}{15 + 10 + 8} = \frac{11}{33} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Như vậy: } x = \frac{1}{3} \cdot 15 = 5; y = 10 \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{3}; z = 8 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

Câu 31. (HSG 7 huyện Hà Trung; huyện Chương Mỹ; huyện Hương Sơn 2022 - 2023; huyện Đức Thọ 2021 - 2022; huyện Tân Tạo; huyện Phú Khánh 2018 - 2019; huyện Minh An 2016 - 2017)

Tìm x, y, z biết: $2x = 3y; 4y = 5z$ và $4x - 3y + 5z = 7$

Lời giải

Từ $2x = 3y; 4y = 5z \Rightarrow 8x = 12y = 15z$

$$\Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8} = \frac{4x}{60} = \frac{3y}{30} = \frac{5z}{40} = \frac{4x - 3y + 5z}{60 - 30 + 40} = \frac{7}{70} = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8} = \frac{4x}{60} = \frac{3y}{30} = \frac{5z}{40} = \frac{4x - 3y + 5z}{60 - 30 + 40} = \frac{7}{70} = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow x = 15 \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{2}; y = 10 \cdot \frac{1}{10} = 1; z = 8 \cdot \frac{1}{10} = \frac{4}{5}$$

Vậy $x = \frac{3}{2}; y = 1; z = \frac{4}{5}$

Câu 32. HSG 7 huyện Cát Tiên 2018 - 2019; huyện Cẩm Khê 2017 - 2018; huyện Tân Kỳ 2015 - 2016)

Tìm x, y, z biết: $2x = 3y, 4y = 5z$ và $x - y - z = 30$.

Lời giải

$$2x = 3y \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10}$$

$$4y = 5z \Rightarrow \frac{y}{5} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{y}{10} = \frac{z}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8} = \frac{x - y - z}{15 - 10 - 8} = \frac{30}{-3} = -10$$

$$\text{Từ } \frac{x}{15} = -10 \Rightarrow x = 15 \cdot (-10) = -150$$

$$\frac{y}{10} = -10 \Rightarrow y = 10 \cdot (-10) = -100$$

$$\frac{z}{8} = -10 \Rightarrow z = 8 \cdot (-10) = -80$$

Vậy $x = -150; y = -100; z = -80$

Câu 33. (HSG 7 THCS Yên Phong năm 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $2x = 3y; 4y = 5z$ và $x - y + z = 26$.

Lời giải

$$\text{Từ } 2x = 3y \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10}; \quad 4y = 5z \Rightarrow \frac{y}{5} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{y}{10} = \frac{z}{8}$$

Suy ra $\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8}$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8} = \frac{x-y+z}{15-10+8} = \frac{26}{13} = 2.$$

Suy ra: $x = 15 \cdot 2 = 30$; $y = 2 \cdot 10 = 20$; $z = 2 \cdot 8 = 16$.

Vậy $x = 30$, $y = 20$, $z = 16$.

Câu 34. (HSG 2018 - 2019)

Tìm các số a, b, c biết: $2a = 3b$; $5b = 7c$ và $3a - 7b + 5c = -30$

Lời giải

$$\text{Vì } 2a = 3b \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{2} \Rightarrow \frac{a}{21} = \frac{b}{14} \quad (1)$$

$$5b = 7c \Rightarrow \frac{b}{7} = \frac{c}{5} \Rightarrow \frac{b}{14} = \frac{c}{10} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \frac{a}{21} = \frac{b}{14} = \frac{c}{10}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{21} = \frac{b}{14} = \frac{c}{10} = \frac{3a}{63} = \frac{7b}{98} = \frac{5c}{50} = \frac{3a - 7b + 5c}{63 - 98 + 50} = \frac{-30}{15} = -2$$

$$\Rightarrow a = -42; b = -28; c = -20$$

Câu 35. (HSG 7 huyện Thiệu Hoá, tỉnh Thanh Hoá, trường THCS Thiệu Đô 2022 – 2023)

Tìm a, b, c biết $3a = 2b$, $4b = 5c$ và $-a - b + c = -52$

Lời giải

$$\text{Từ } 3a = 2b \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} \Rightarrow \frac{a}{10} = \frac{b}{15}$$

$$\text{Từ } 4b = 5c \Rightarrow \frac{b}{5} = \frac{c}{4} \Rightarrow \frac{b}{15} = \frac{c}{12}$$

$$\text{Do đó } \frac{a}{10} = \frac{b}{15} = \frac{c}{12}$$

$$\frac{a}{10} = \frac{b}{15} = \frac{c}{12} = \frac{c - a - b}{12 - 10 - 15} = \frac{-52}{-13} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{a}{10} = 4 \Rightarrow a = 4 \cdot 10 = 40$$

$$\frac{b}{15} = 4 \Rightarrow b = 15 \cdot 4 = 60$$

$$\frac{c}{12} = 4 \Rightarrow c = 4 \cdot 12 = 48$$

Vậy $a = 40$; $b = 60$; $c = 48$

Câu 36. (HSG 7 THCS Hiền Quan, Tam Nông 2017-2018)

Tìm x, y, z biết $3x = 2y$, $4y = 5z$ và $x + y - z = 78$

Lời giải

$$\text{Từ } 3x = 2y \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{5} \quad (1)$$

$$+) 4y = 5z \Rightarrow \frac{y}{5} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{y}{15} = \frac{z}{12} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{12}$ và $x + y - z = 78$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{12} = \frac{x+y-z}{10+15-12} = \frac{78}{13} = 6 \Rightarrow x = 60; y = 90; z = 72$$

Câu 37. (HSG huyện Bình Lục 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết $4x = 3y; 7y = 5z$ và $2x + 3y - z = -62$

Lời giải

Theo đề bài, ta có:

$$\left. \begin{array}{l} 4x = 3y \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20} \\ 7y = 5z \Rightarrow \frac{y}{5} = \frac{z}{7} \Rightarrow \frac{y}{20} = \frac{z}{28} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{28}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta được:

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{28} = \frac{2x+3y-z}{30+60-28} = \frac{-62}{62} = -1$$

Suy ra: $x = -15; y = -20; z = -28$

Vậy $x = -15; y = -20; z = -28$

Câu 38. (HSG 7 huyện Chí Linh; huyện Vĩnh Lộc 2022 – 2023)

Tìm x, y, z biết $5x = 6y; 3y = 2z$ và $5x - 7y + 9z = 250$

Lời giải

Ta có $3x = 2z \Rightarrow 6y = 4z$

$$\text{Mà } 5x = 6y \Rightarrow 5x = 6y = 4z \Rightarrow \frac{5x}{60} = \frac{6y}{60} = \frac{4z}{60} = \frac{x}{12} = \frac{y}{10} = \frac{z}{15}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{x}{12} = \frac{y}{10} = \frac{z}{15} = \frac{5x-7y+9z}{5.12-7.10+9.15} = \frac{250}{125} = 2$$

Do đó

$$\frac{x}{12} = 2 \Rightarrow x = 2.12 = 24$$

$$\frac{y}{10} = 2 \Rightarrow y = 2.10 = 20$$

$$\frac{z}{15} = 2 \Rightarrow z = 2.15 = 30$$

Vậy $x = 24; y = 20; z = 30$

Câu 39. (HSG 7 huyện Thanh Miện 2022 – 2023)

Tìm x, y, z biết: $3x = 4y = 5z - 3x - 4y$ và $2x + y = z - 19$

Lời giải

$$\text{Đặt } 3x = 4y = 5z - 3x - 4y = t \Rightarrow x = \frac{t}{3}; y = \frac{t}{4}; z = \frac{3t}{5}$$

$$\text{Thay vào } 2x + y = z - 19 \text{ suy ra } 2 \cdot \frac{t}{3} + \frac{t}{4} = \frac{3t}{5} - 19$$

$$2.\frac{t}{3} + \frac{t}{4} - \frac{3t}{5} = -19$$

$$t.\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{3}{5}\right) = -19$$

$$t.\frac{19}{60} = -19$$

$$t = -60$$

$$\Rightarrow x = -20; y = -15; z = -36$$

Vậy $x = -20; y = -15; z = -36$.

Câu 40. (HSG 7 huyện Thường Xuân; huyện Thạch Thành; trường Thị trấn Càng Nàng; trường Yên Mỹ 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $3x = 4y = 5z - 3x - 4y$ và $2x + y = z - 38$.

Lời giải

Ta có: $3x = 4y = 5z - 3x - 4y$

$$\Rightarrow \frac{3x}{1} = \frac{4y}{1} = \frac{5z - 3x - 4y}{1} = \frac{3x + 4y + 5z - 3x - 4y}{1+1+1} = \frac{5z}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{1} = \frac{4y}{1} = \frac{5z}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{y}{15} = \frac{z}{36}$$

Lại có: $2x + y = z - 38 \Rightarrow 2x + y - z = -38$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{20} = \frac{y}{15} = \frac{z}{36} = \frac{2x + y - z}{2.20 + 15 - 36} = \frac{-38}{19} = -2$$

Suy ra: $x = -40; y = -30; z = -72$

Vậy: $(x; y; z) = (-40; -30; -72)$

Câu 41. (HSG 7 huyện Hương Khê, tỉnh Hà Tĩnh, 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $3(x+1) = 2(y+2)$; $4(y+2) = 3(z+3)$ và $5x - 3y + z = 50$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 3(x+1) = 2(y+2) \Rightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{3};$$

$$4(y+2) = 3(z+3) \Rightarrow \frac{y+2}{3} = \frac{z+3}{4}$$

$$\text{Suy ra } \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+3}{4} = \frac{5x+5}{10} = \frac{3y+6}{9} = \frac{z+3}{4}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta được:

$$\frac{5x+5}{10} = \frac{3y+6}{9} = \frac{z+3}{4} = \frac{5x-3y+z+2}{5} = \frac{48+2}{2} = 10$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x+1=20 \\ y+2=30 \\ z+3=40 \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} x=19 \\ y=28 \\ z=37 \end{cases}$$

Vậy $x = 19; y = 28; z = 37$

Câu 42. (HSG 7 tỉnh Thái Bình, huyện Quỳnh Phụ 2021 - 2022)

Tìm các số dương x, y, z biết: $\frac{x+2y}{3} = \frac{y+2z}{4} = \frac{z+2x}{5}$ và $xy + yz + 2zx = 280$

Lời giải

+ Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x+2y}{3} = \frac{y+2z}{4} = \frac{z+2x}{5} = \frac{x+2y+y+2z+z+2x}{3+4+5} = \frac{x+y+z}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{y+2z}{4} = \frac{x+y+z}{4} \Rightarrow y+2z = x+y+z \Rightarrow x = z \quad (1)$$

Và

$$\Rightarrow \frac{x+2y}{3} = \frac{x+y+z}{4} \Rightarrow \frac{x+2y}{3} = \frac{x+y+x}{4} \Rightarrow 4x+8y = 6x+3y \Rightarrow y = \frac{2}{5}x \quad (2)$$

+ Thay (1) và (2) vào $xy + yz + 2zx = 280$ ta được: $x \cdot \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}x \cdot x + 2x \cdot x = 280$

+ Giải ra tìm được $x^2 = 100 \Rightarrow x = 10$ (vì $x > 0$)

$$\Rightarrow z = x = 10; y = \frac{2}{5} \cdot 10 = 4.$$

Vậy $x = 10; y = 4; z = 10$.

Câu 43. (HSG 7 huyện Lâm Thao 2022 – 2023)

Tìm x, y, z biết $6x = 4y = 3z$ và $xy - yz + xz = 50$

Lời giải

Từ $6x = 4y = 3z$ và $xy - yz + xz = 50$ suy ra

$$\frac{x}{\frac{1}{6}} = \frac{y}{\frac{1}{4}} = \frac{z}{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{xy}{\frac{1}{24}} = \frac{yz}{\frac{1}{12}} = \frac{xz}{\frac{1}{18}} = \frac{xy - yz + xz}{\frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{18}} = \frac{xy - yz + xz}{\frac{1}{72}} = \frac{50}{\frac{1}{72}} = 3600$$

$$\Rightarrow xy = 150, yz = 300, xz = 200$$

$$\text{Đặt } \frac{x}{\frac{1}{6}} = \frac{y}{\frac{1}{4}} = \frac{z}{\frac{1}{3}} = k \Rightarrow x = \frac{1}{6}k, y = \frac{1}{4}k, z = \frac{1}{3}k$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}k \cdot \frac{1}{4}k = 150 \Rightarrow k^2 = 3600 \Rightarrow k = \pm 60$$

$$\Rightarrow x = \pm 10, y = \pm 15, z = \pm 20$$

Vì $6x = 4y = 3z$ nên x, y, z cùng dấu.

$$\text{Vậy } (x, y, z) = (10; 15; 20), (-10; -15; -20)$$

Câu 44. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Bùi Hữu Diên 2022 - 2023)

Tìm a, b, c biết $3a = 2b; 5a = 3c$ và $ab + bc + ca = -204$.

Lời giải

$$\text{Ta có } 3a = 2b \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} \Rightarrow \frac{a}{6} = \frac{b}{9}$$

$$5a = 3c \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{c}{5} \Rightarrow \frac{a}{6} = \frac{c}{10}$$

$$\text{Do đó } \frac{a}{6} = \frac{b}{9} = \frac{c}{10}$$

$$\text{Đặt } \frac{a}{6} = \frac{b}{9} = \frac{c}{10} = k \Rightarrow \begin{cases} a = 6k \\ b = 9k \\ c = 10k \end{cases}$$

$$\text{Ta có } ab + bc + ca = 54k + 90k + 60k = 204k$$

$$\text{Mà } ab + bc + ca = -204 \Rightarrow 204k = -204 \Rightarrow k = -1.$$

$$\text{Từ đó suy ra } a = -6; b = -9; c = -10.$$

Câu 45. (HSG 7 huyện Quế Sơn 2022 - 2023; huyện Tiên Hải 2016 - 2017)

Tim các số x, y, z biết rằng: $3x = 4y, 5y = 6z$ và $xyz = 30$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 3x = 4y \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{y}{6}$$

$$5y = 6z \Rightarrow \frac{y}{6} = \frac{z}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{y}{6} = \frac{z}{5}$$

$$\text{Đặt } \frac{x}{8} = \frac{y}{6} = \frac{z}{5} = k \Rightarrow x = 8k, y = 6k, z = 5k$$

$$xyz = 30 \Rightarrow 8k \cdot 6k \cdot 5k = 30 \Leftrightarrow k^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = 4, y = 3, z = \frac{5}{2}$$

$$\text{Vậy } x = 4; y = 3; z = \frac{5}{2}$$

Câu 46. (HSG 7 trường THCS Lê Quý Đôn, quận Hà Đông năm 2022 - 2023)

Tim x, y, z biết: $\frac{4}{3x-2y} = \frac{3}{2z-4x} = \frac{2}{4y-3z}$ và $x + y - z = -10$

Lời giải

$$\text{Từ } \frac{4}{3x-2y} = \frac{3}{2z-4x} = \frac{2}{4y-3z} \Rightarrow \frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$$

$$= \frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{2} = \frac{(12x-8y) + (6z-12x) + (8y-6z)}{27} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2y \\ 2z = 4x \\ 4y = 3z \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y-z}{2+3-4} = -10.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -20 \\ y = -30 \\ z = -40 \end{cases}$$

Vậy $(x, y, z) = (-20; -30; -40)$

Câu 47. (HSG 7 huyện Quế Võ, năm học 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết $\frac{x}{y} = \frac{9}{7}; \frac{y}{z} = \frac{7}{3}$ và $x - y + z = -15$.

Lời giải

Ta có $\frac{x}{y} = \frac{9}{7} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{7}$ và $\frac{y}{z} = \frac{7}{3} \Rightarrow \frac{y}{7} = \frac{z}{3}$

Suy ra: $\frac{x}{9} = \frac{y}{7} = \frac{z}{3} = \frac{x - y + z}{9 - 7 + 3} = \frac{-15}{5} = -3$

Do đó:

$$x = -3.9 = -27$$

$$y = -3.7 = -21$$

$$z = -3.3 = -9$$

Vậy $x = -27; y = -21; z = -9$

Câu 48. (HSG 7 huyện Nông Cống; trường Lý Nam Đế, huyện Hưng Hà 2022 - 2023; huyện Hoàng Hoá 2018 - 2019)

Tìm các số x, y, z thỏa mãn: $\frac{x}{y} = \frac{10}{9}; \frac{y}{z} = \frac{3}{4}$ và $x - y + z = 78$.

Lời giải

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x}{y} = \frac{10}{9} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{9} \\ \frac{y}{z} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{y}{9} = \frac{z}{12} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{9} = \frac{z}{12}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta được:

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{9} = \frac{z}{12} = \frac{x - y + z}{10 - 9 + 12} = \frac{78}{13} = 6$$

$$\Rightarrow x = 60; y = 54; z = 72.$$

Vậy: $x = 60, y = 54, z = 72$

Câu 49. (HSG 7 huyện Bình Xuyên 2022 - 2023; huyện Hoàng Hóa 2016 - 2017)

Tìm 3 số x, y, z biết rằng: $\frac{x}{3} = \frac{y}{7}; \frac{y}{2} = \frac{z}{5}; x + y + z = -110$.

Lời giải

Từ $\frac{x}{3} = \frac{y}{7} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y}{14}; \frac{y}{2} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{y}{14} = \frac{z}{35}$

Suy ra: $\frac{x}{6} = \frac{y}{14} = \frac{z}{35}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{x}{6} = \frac{y}{14} = \frac{z}{35} = \frac{x + y + z}{6 + 14 + 35} = \frac{-110}{55} = -2$

Suy ra: $x = -2.6 = -12; y = -2.14 = -28; z = -2.25 = -70$

Vậy $x = -12; y = -28; z = -70$

Câu 50. (HSG 7 trường THCS Tri Thức, huyện Đồng Nai năm 2022 - 2023)

Tìm $x; y; z$ thỏa mãn: $\frac{x}{10} = \frac{y}{5}; \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ và $x + 4z = 320$

Lời giải

Ta có: $\frac{x}{10} = \frac{y}{5} \Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{y}{10}$ và $\frac{y}{2} = \frac{z}{3} \Rightarrow \frac{y}{10} = \frac{z}{15}$

Nên: $\frac{x}{20} = \frac{y}{10} = \frac{z}{15} = \frac{4z}{60} = \frac{x+4z}{20+60} = \frac{320}{80} = 4$

Từ $\frac{x}{20} = 4 \Rightarrow x = 20.4 = 80$

$\frac{y}{10} = 4 \Rightarrow y = 10.4 = 40$

$\frac{z}{15} = 4 \Rightarrow z = 15.4 = 60$

Câu 51. (HSG 7 huyện Cửa Lò, 2020 - 2021)

Tìm x, y, z biết: $\frac{x}{3} = \frac{y}{6}; \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ và $x + y - z = 24$.

Lời giải

$\frac{x}{3} = \frac{y}{6}; \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ và $x + y - z = 24$.

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x}{3} = \frac{y}{6} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y}{12} \\ \frac{y}{4} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{y}{12} = \frac{z}{15} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y}{12} = \frac{z}{15}.$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta được:

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{12} = \frac{z}{15} = \frac{x+y-z}{6+12-15} = \frac{24}{3} = 8.$$

Suy ra: $x = 6.8 = 48; y = 12.8 = 96; z = 15.8 = 120$.

Vậy $x = 48; y = 96; z = 120$ là các giá trị cần tìm.

Câu 52. (HSG 7 huyện Tiên Hải, năm học 2022 - 2023)

Tìm $x; y; z$ biết $\frac{x}{4} = \frac{y}{7}; \frac{y}{5} = \frac{z}{6}$ và $x + y - z = 39$.

Lời giải

$$\text{Vì } \frac{x}{4} = \frac{y}{7} \Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{y}{35} \quad (1);$$

$$\frac{y}{5} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{y}{35} = \frac{z}{42} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) Suy ra } \frac{x}{20} = \frac{y}{35} = \frac{z}{42}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{20} = \frac{y}{35} = \frac{z}{42} = \frac{x+y-z}{20+35-42} = \frac{39}{13} = 3$$

Do đó:

$$+) \frac{x}{20} = 3 \Rightarrow x = 60$$

$$\Rightarrow \frac{y}{35} = 3 \Rightarrow y = 105$$

$$+) \frac{z}{42} = 3 \Rightarrow z = 126$$

Vậy $x = 60$; $y = 105$; $z = 126$

Câu 53. (HSG 7 huyện Chương Mỹ; trường Văn Lang, huyện Hưng Hà; trường Lê Đình Kiên, huyện Vĩnh Lộc; quận Thủ Đức 2022 - 2023; huyện Lục Ngạn 2021 - 2022)

Tìm x, y, z , biết: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$; $\frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ và $2x - 3y + z = 6$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{12} \quad (1)$$

$$\frac{y}{3} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{y}{12} = \frac{z}{20} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) Suy ra } \frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20} = \frac{2x - 3y + z}{2 \cdot 9 - 3 \cdot 12 + 20} = \frac{6}{2} = 3$$

Do đó:

$$\frac{x}{9} = 3 \Rightarrow x = 3 \cdot 9 = 27$$

$$\frac{y}{12} = 3 \Rightarrow y = 3 \cdot 12 = 36$$

$$\frac{z}{20} = 3 \Rightarrow z = 3 \cdot 20 = 60$$

Vậy $x = 27$; $y = 36$; $z = 60$.

Câu 54. (HSG 7 huyện Gia Viễn, tỉnh Ninh Bình, năm học 2022 – 2023)

Tìm x, y, z biết: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$, $\frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ và $2x - 3y + z = -6$.

Lời giải

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{12} \quad (1);$$

$$\frac{y}{3} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{y}{12} = \frac{z}{20} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } \frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20}.$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20} = \frac{2x}{18} = \frac{3y}{36} = \frac{z}{20} = \frac{2x - 3y + z}{18 - 36 + 20} = \frac{-6}{2} = -3$$

Ta có: $\frac{x}{9} = -3 \Rightarrow x = 9 \cdot (-3) = -27$

$\frac{y}{12} = -3 \Rightarrow y = 12 \cdot (-3) = -36$

$\frac{z}{20} = -3 \Rightarrow z = 20 \cdot (-3) = -60.$

Vậy $x = -27$; $y = -36$; $z = -60$

Câu 55. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ, năm học 2022 – 2023)

Tìm các số x, y, z biết $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}; \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ và $3x - 2y + z = 46.$

Lời giải

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{12} \\ \frac{y}{3} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{y}{12} = \frac{z}{20} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20}$$

Đặt $\frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20} = k \Rightarrow x = 9k; y = 12k; z = 20k$

Vì $3x - 2y + z = 46 \Rightarrow 3 \cdot 9k - 2 \cdot 12k + 20k = 46$

$\Rightarrow 27k - 24k + 20k = 46$

$\Rightarrow 23k = 46$

$\Rightarrow k = 46 : 23 = 2$

Do đó:

$x = 2 \cdot 9 = 18$

$y = 2 \cdot 12 = 24$

$z = 2 \cdot 20 = 40$

Vậy: $x = 18; y = 24; z = 40$

Câu 56. (HSG 7 huyện Duyên Hải 2016 - 2017)

Tìm các số x, y, z biết rằng: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}, \frac{y}{5} = \frac{z}{7}$ và $2x + 3y - z = 186$

Lời giải

Từ giả thiết ta có: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20}$ và $\frac{y}{5} = \frac{z}{7} \Rightarrow \frac{y}{20} = \frac{z}{28}$

$\Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{28}$

$\Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{28} = \frac{2x + 3y - z}{30 + 60 - 28} = \frac{186}{62} = 3$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{15} = 3 \\ \frac{y}{20} = 3 \\ \frac{z}{28} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 45 \\ y = 60 \\ z = 84 \end{cases}$$

Câu 57. (HSG 7 huyện Nho Quan 2022 - 2023; huyện Thạch Thành 2017 - 2018)

Tìm x, y, z biết: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$; $\frac{y}{5} = \frac{z}{7}$ và $x + y + z = 92$.

Lời giải

Ta có: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{15}$ (1) và $\frac{y}{5} = \frac{z}{7} \Rightarrow \frac{y}{15} = \frac{z}{21}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{21}$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{21} = \frac{x+y+z}{10+15+21} = \frac{92}{46} = 2.$$

Suy ra: $x = 20$; $y = 30$; $z = 42$.

Vậy $x = 20, y = 30, z = 42$.

Câu 58. (HSG 7 huyện Hoàng Hóa 2017 - 2018)

Tìm x, y, z biết: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$; $\frac{y}{5} = \frac{z}{4}$ và $x - y + z = 49$

Lời giải

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} = \frac{y}{3}; \frac{y}{5} = \frac{z}{4} &\Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{15}; \frac{y}{15} = \frac{z}{12} \\ \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{12} &= \frac{x-y+z}{10-15+12} = \frac{-49}{7} = -7 \\ \Rightarrow x = -70; y = -105; z = -84 \end{aligned}$$

Câu 59. (HSG 7 huyện Việt Yên 2016 - 2017)

Tìm x, y, z biết: $\frac{x}{10} = \frac{y}{15}$, $x = \frac{z}{2}$ và $x + 2y - 3z = -24$

Lời giải

Từ $\frac{x}{10} = \frac{y}{15}$ suy ra $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$

$\frac{x}{1} = \frac{z}{2}$ suy ra $\frac{x}{2} = \frac{z}{4}$

Do đó $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ hay $\frac{x}{2} = \frac{2y}{6} = \frac{3z}{12}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có: $\frac{x}{2} = \frac{2y}{6} = \frac{3z}{12} = \frac{x+2y-3z}{2+6-12} = \frac{-24}{-4} = 6$

$\Rightarrow y = \frac{2}{5}x \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = 6 \Rightarrow x = 12; y = 18; z = 24.$

Vậy $x = 12; y = 18; z = 24$.

Câu 60. (HSG 7 huyện Tứ Kỳ, tỉnh, trường Lê Quý Đôn năm học 2016 - 2017)

Tìm x, y, z biết: $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}; 5x = 7z$ và $x - 2y + z = 32$

Lời giải

$$\text{Từ } \frac{x}{y} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2} \Rightarrow \frac{x}{21} = \frac{y}{14} \quad (1)$$

$$\text{Từ } 5x = 7z \Rightarrow \frac{x}{7} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{x}{21} = \frac{z}{15} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{x}{21} = \frac{y}{14} = \frac{z}{15} = \frac{x - 2y + z}{21 - 28 + 15} = \frac{32}{8} = 4$$

$$\Rightarrow x = 84; y = 56; z = 60.$$

Câu 61. (HSG 7 huyện Bát Xát 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $\frac{x}{y} = \frac{7}{20}; \frac{y}{z} = \frac{5}{8}$ và $2x + 5y - 2z = 100$.

Lời giải

$$\text{Từ } \frac{x}{y} = \frac{7}{20} \Rightarrow \frac{x}{7} = \frac{y}{20};$$

$$\frac{y}{z} = \frac{5}{8} \Rightarrow \frac{y}{5} = \frac{z}{8} \Rightarrow \frac{y}{20} = \frac{z}{32}.$$

$$\text{Do đó: } \frac{x}{7} = \frac{y}{20} = \frac{z}{32}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{7} = \frac{y}{20} = \frac{z}{32} = \frac{2x + 5y - 2z}{2 \cdot 7 + 5 \cdot 20 - 2 \cdot 32} = \frac{100}{50} = 2$$

Suy ra: $x = 14, y = 40, z = 64$.

Câu 62. (Đề HSG 7 2017-2018)

Tìm các cặp số $(x; y)$ biết: $\frac{x}{3} = \frac{y}{7}; xy = 84$

Lời giải

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{7}; xy = 84 \Rightarrow \frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{49} = \frac{xy}{3 \cdot 7} = \frac{84}{21} = 4$$

$$\Rightarrow x^2 = 4 \cdot 9 = 36 \Rightarrow x = \pm 6$$

$$\Rightarrow y^2 = 4 \cdot 49 = 196 \Rightarrow y = \pm 14$$

Do x, y cùng dấu nên:

$$\bullet x = 6; y = 14$$

$$\bullet x = -6; y = -14$$

Câu 63. (HSG 7 huyện Đức Thọ, tỉnh Hà Tĩnh, trường Hoàng Xuân Hãn 2022 - 2023)

Tìm các cặp số $(x; y)$ biết: $\frac{x}{5} = \frac{y}{9}$ và $xy = 405$

Lời giải

a) Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{9} \Rightarrow \frac{x^2}{25} = \frac{y^2}{81} = \frac{xy}{5 \cdot 9} = \frac{405}{45} = 9$$

$$\Rightarrow x^2 = 9 \cdot 25 = 15^2 \Rightarrow x = \pm 15$$

$$\Rightarrow y^2 = 9 \cdot 81 = 27^2 \Rightarrow y = \pm 27$$

Do x, y cùng dấu nên: $\begin{cases} x = 15; y = 27 \\ x = -15; y = -27 \end{cases}$

Vậy $(x; y) \in \{(-15; -27); (15; 27)\}$

Câu 64. (Đề chọn HSG huyện Việt Yên 2017-2018)

Tìm x, y biết $\frac{x}{4} = \frac{y}{7}$ và $xy = 112$

Lời giải

Ta có: $\frac{x}{4} = \frac{y}{7} \Rightarrow \frac{x^2}{16} = \frac{xy}{4 \cdot 7} = \frac{112}{28}$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{16 \cdot 112}{28} = 64 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \Rightarrow y = 14 \\ x = -8 \Rightarrow y = -14 \end{cases}$$

Câu 65. (HSG 7 huyện Chương Mỹ; huyện Như Xuân 2022 – 2023)

Tìm hai số x, y biết rằng: $\frac{x}{2} = \frac{y}{5}$ và $xy = 40$

Lời giải

Nhân cả hai vế của $\frac{x}{2} = \frac{y}{5}$ với x ta được: $\frac{x^2}{2} = \frac{xy}{5} = \frac{40}{5} = 8$

$$\Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \Rightarrow y = 10 \\ x = -4 \Rightarrow y = -10 \end{cases}$$

Vậy $(x; y) \in \{(-4; -10); (4; 10)\}$

Câu 66. (HSG 7 huyện Tam Dương, tỉnh, trường năm học 2017 - 2018)

Tìm ba số x, y, z thỏa mãn $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ và $2x^2 + 2y^2 - 3z^2 = -100$

Lời giải

$$\text{Từ } \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{16} = \frac{z^2}{25} = \frac{2x^2}{18} = \frac{2y^2}{32} = \frac{3z^2}{75} = \frac{2x^2 + 2y^2 - 3z^2}{-25} = \frac{-100}{-25} = 4$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x^2 = 36 \\ y^2 = 64 \\ z^2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \\ z = 10 \\ x = -6 \\ y = -8 \\ z = -10 \end{cases} \quad (\text{Vì } x, y, z \text{ cùng dấu})$$

Vậy $(x; y; z) \in \{(6; 8; 10); (-6; -8; -10)\}$

Câu 67. (HSG 7 trường Lê Văn Tám 2017 - 2018; trường Nguyễn Khuyến 2015 – 2016)

Tìm các số x, y, z biết: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 116$

Lời giải

$$\text{Vì } \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{16} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{4+9+16} = \frac{116}{29} = 4$$

$$\text{Do } \frac{x^2}{4} = 4 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$$

$$\text{Do } \frac{y^2}{9} = 4 \Rightarrow y^2 = 36 \Rightarrow y = \pm 6$$

$$\text{Do } \frac{z^2}{16} = 4 \Rightarrow z^2 = 64 \Rightarrow z = \pm 8$$

Vì x, y, z cùng dấu nên:

$$\begin{cases} x = 4; y = 6; z = 8 \\ x = -4; y = -6; z = -8 \end{cases}$$

Câu 68. (HSG 7 huyện Chương Mỹ 2018 - 2019)

Tìm a, b, c biết $a^2 + 3b^2 - 2c^2 = -16$ và $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$

Lời giải

Ta có: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} \Rightarrow \frac{a^2}{4} = \frac{3b^2}{27} = \frac{2c^2}{32}$ và a, b, c cùng dấu

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{a^2}{4} = \frac{3b^2}{27} = \frac{2c^2}{32} = \frac{a^2 + 3b^2 - 2c^2}{4+27-32} = \frac{-16}{-1} = 16$$

$$\text{Từ } \frac{a^2}{4} = 16 \Rightarrow a^2 = 16 \cdot 4 \Rightarrow a = \pm 8$$

$$\frac{3b^2}{27} = 16 \Rightarrow b^2 = 16 \cdot 9 \Rightarrow b = \pm 12$$

$$\frac{2c^2}{32} = 16 \Rightarrow c^2 = 16 \cdot 16 \Rightarrow c = \pm 16$$

Vậy các số a, b, c cần tìm là: $(a = 8; b = 12; c = 16)$ hoặc $(a = -8; b = -12; c = -16)$

Câu 69. (HSG 7 huyện Mỹ Đức năm 2022 - 2023)

Tìm các số x, y, z biết: $\frac{2x-1}{5} = \frac{3y+2}{4} = \frac{4z-2}{3}$ và $3x^3 - 1 = 80$

Lời giải

Ta có: $3x^3 - 1 = 80 \Rightarrow 3x^3 = 81 \Rightarrow x^3 = 27 \Rightarrow x = 3$.

$$\text{Khi đó: } \frac{3y+2}{4} = \frac{4z-2}{3} = \frac{2 \cdot 3 - 1}{5} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{3y+2}{4} = 1 \Rightarrow 3y+2 = 4 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{4z-2}{3} = 1 \Rightarrow 4z-2 = 3 \Rightarrow z = \frac{5}{4}$$

Kết luận $x = 3$; $y = \frac{2}{3}$; $z = \frac{5}{4}$.

Câu 70. (HSG 7 huyện Lập Thạch năm 2022 - 2023)

Tìm các số x, y biết: $4x = 5y$ và $x^2 - y^2 = 1$.

Lời giải

Ta có: $4x = 5y \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{4} = k \Rightarrow x = 5k, y = 4k$.

Do đó: $x^2 - y^2 = 1 \Leftrightarrow 25k^2 - 16k^2 = 9k^2 = 1 \Rightarrow k = \pm \frac{1}{3}$.

Với $k = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{5}{3}; y = \frac{4}{3}$.

Với $k = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = -\frac{5}{3}; y = -\frac{4}{3}$.

Vậy $(x; y) = \left\{ \left(-\frac{5}{3}; -\frac{4}{3} \right), \left(\frac{5}{3}; \frac{4}{3} \right) \right\}$.

Câu 71. (HSG 7 đề thi thử Thanh Miện lần 3, 2022 - 2023)

Tìm các số x, y biết: $\frac{2x}{3} = \frac{3y}{2}$ và $xy^2 = 18$.

Lời giải

Ta có: $\frac{2x}{3} = \frac{3y}{2} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{4} = k \quad (k \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow x = 9k; y = 4k$

Mà $xy^2 = 18$ nên $9k.(4k)^2 = 18$

$\Rightarrow 144k^3 = 18 \Rightarrow k^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{9}{2}; y = 2$

Câu 72. (HSG 7 trường THCS Kỳ Đồng, huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $\frac{12x-15y}{7} = \frac{20z-12x}{9} = \frac{15y-20z}{11}$ và $x^2 - 2y^2 + 3z^2 = 2000$

Lời giải

Ta có: $\frac{12x-15y}{7} = \frac{20z-12x}{9} = \frac{15y-20z}{11}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{12x-15y}{7} = \frac{20z-12x}{9} = \frac{15y-20z}{11} = \frac{(12x-15y)+(20z-12x)+(15y-20z)}{7+9+11} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12x-15y=0 \\ 20z-12x=0 \end{cases} \Rightarrow 12x=15y=20z$$

$$\Rightarrow \frac{12x}{60} = \frac{15y}{60} = \frac{20z}{60} \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$$

Đặt $\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = k \Rightarrow x = 5k, y = 4k, z = 3k$

Mà $x^2 - 2y^2 + 3z^2 = 2000$

$$\Rightarrow (5k)^2 - 2.(4k)^2 + 3(3k)^2 = 2000$$

$$\Rightarrow 25k^2 - 32k^2 + 27k^2 = 2000$$

$$\Rightarrow 20k^2 = 2000 \Rightarrow k^2 = 100$$

Do đó $k = 10$ hoặc $k = -10$

+) Với $k = 10$. Tính được $x = 50, y = 40, z = 30$

+ Với $k = -10$. Tính được $x = -50, y = -40, z = -30$

Vậy: $x = 50, y = 40, z = 30$ hoặc $x = -50, y = -40, z = -30$.

Câu 73. (HSG 7 trường Lê Quý Đôn, huyện Hưng Hà; trường Tân Kỳ 2022 - 2023; trường Nhơn Trí 2018 - 2019; trường Nguyễn Khuyến, Đà Nẵng 2016 - 2017)

Tìm số \overline{xyz} biết $\frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{25}$ và $x - y + z = 4$

Lời giải

Theo bài ra ta có: $\frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{25}$ và $x, y, z \in \mathbb{N}, x \neq 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{x - y + z}{2 - 3 + 5} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\Rightarrow x = 2; y = 3; z = 5.$$

Vậy $\overline{xyz} = 235$

Câu 74. (HSG 7 huyện Bắc Giang, năm học 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết rằng: $\frac{(x-1)^3}{27} = \frac{(y-2)^3}{8} = \frac{(z-3)^3}{64}$ và $x - 2y + 3z = 28$.

Lời giải

Ta có $\frac{(x-1)^3}{27} = \frac{(y-2)^3}{8} = \frac{(z-3)^3}{64}$

$$\Rightarrow \left(\frac{x-1}{3}\right)^3 = \left(\frac{y-2}{2}\right)^3 = \left(\frac{z-3}{4}\right)^3$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{4}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{4} = \frac{x-2y+3z-6}{11} = \frac{22}{11} = 2 \text{ (vì } x-2y+3z=38)$$

Từ đó suy ra $x = 2.3 + 1 = 7; y = 2.2 + 2 = 6; z = 2.4 + 3 = 11$

Vậy $x = 7; y = 6; z = 11$

Câu 75. (HSG 7 trường THCS Kỳ Đồng, huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Tìm các số hữu tỉ x, y . Biết: $\frac{x^3 + y^3}{6} = \frac{x^3 - 2y^3}{4}$ và $x^6 \cdot y^6 = 64$.

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x^3 + y^3}{6} = \frac{x^3 - 2y^3}{4} = \frac{(x^3 + y^3) - (x^3 - 2y^3)}{6 - 4}$$

$$= \frac{2(x^3 + y^3) + (x^3 - 2y^3)}{2 \cdot 6 + 4} = \frac{3y^3}{2} = \frac{3x^3}{16}$$

$$\Rightarrow y^3 = \frac{x^3}{8} \Rightarrow \frac{x^6}{64} = \frac{y^6}{1} \Rightarrow \frac{y^{12}}{1} = \frac{x^6 \cdot y^6}{64} = 1$$

$$\Rightarrow y^{12} = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

+ Với $y = 1 \Rightarrow x = 2$

+ Với $y = -1 \Rightarrow x = -2$

Vậy $x = 2; y = 1$ hoặc $x = -2; y = -1$

Vậy $(x; y) \in \{(2; 1); (-2; -1)\}$

Câu 76. (HSG 7 huyện Hậu Lộc; huyện Thiệu Hóa 2022 - 2023)

Tìm x, y biết: $\frac{3x-1}{4} = \frac{7y-4}{5} = \frac{3x+7y-5}{3x}$.

Lời giải

Biết: $\frac{3x-1}{4} = \frac{7y-4}{5} = \frac{3x+7y-5}{3x}$. (1)

+ Nếu $3x+7y-5=0$ thì $\begin{cases} 3x-1=0 \\ 7y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{4}{7} \end{cases}$.

+ Nếu $3x+7y-5 \neq 0$ thì áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{3x-1}{4} = \frac{7y-4}{5} = \frac{3x+7y-5}{9} \Rightarrow \frac{3x+7y-5}{9} = \frac{3x+7y-5}{3x} \neq 0 \Rightarrow x = 3.$$

Từ (1) $\Rightarrow \frac{3 \cdot 3 - 1}{4} = \frac{7y - 4}{5} \Rightarrow y = 2$.

Vậy $(x, y) \in \left\{ \left(\frac{1}{3}; \frac{4}{7} \right), (3; 2) \right\}$.

Câu 77. (HSG 7 Tp Thanh Hóa 2022 - 2023; huyện Triệu Sơn; huyện Thanh Thủy 2021 - 2022)

Tìm $x; y$, biết: $\frac{x-1}{2} = \frac{2y+1}{5} = \frac{3x-4y-5}{2x}$

Lời giải

Ta có: $\frac{x-1}{2} = \frac{2y+1}{5} = \frac{3x-4y-5}{2x}$ ĐK: $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Từ } \frac{x-1}{2} &= \frac{2y+1}{5} = \frac{3x-4y-5}{2x} \\ \Rightarrow \frac{3x-3}{6} &= \frac{4y+2}{10} = \frac{3x-4y-5}{2x} = \frac{(3x-3)-(4y+2)}{6-10} = \frac{3x-4y-5}{-4} \\ \Rightarrow \frac{3x-4y-5}{2x} &= \frac{3x-4y-5}{-4} \\ + \text{ Nếu } 3x-4y-5 &= 0 \Rightarrow \frac{3x-3}{6} = \frac{4y+2}{10} = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} 3x-3=0 \\ 4y+2=0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases} \\ + \text{ Nếu } 3x-4y-5 &\neq 0 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2 \\ \Rightarrow \frac{-2-1}{2} &= \frac{2y+1}{5} \Rightarrow 2y+1 = \frac{-15}{2} \Rightarrow y = \frac{-17}{4} \end{aligned}$$

Vậy giá trị x, y cần tìm là: $(x; y) \in \left\{ \left(1; \frac{-1}{2}\right); \left(-2; \frac{-17}{4}\right) \right\}$

Câu 78. (HSG 7 huyện Như Thanh, 2021 - 2022)

Tìm hai số x và y biết: $\frac{5x-1}{3} = \frac{7y-6}{5} = \frac{5x+7y-7}{4x}$

Lời giải

$$\frac{5x-1}{3} = \frac{7y-6}{5} = \frac{5x+7y-7}{4x} \quad \text{Điều kiện: } x \neq 0$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có: $\frac{5x-1}{3} = \frac{7y-6}{5} = \frac{5x+7y-7}{8}$

Suy ra: $\frac{5x-1}{3} = \frac{7y-6}{5} = \frac{5x+7y-7}{4x} = \frac{5x+7y-7}{8}$

Hay $\frac{5x+7y-7}{4x} = \frac{5x+7y-7}{8}$

TH1: Nếu $5x+7y-7 = 0 \Rightarrow \frac{5x-1}{3} = \frac{7y-6}{5} = 0$

$$\Rightarrow 5x-1 = 7y-6 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{5}; y = \frac{6}{7}$$

TH2: Nếu $5x+7y-7 \neq 0$ thì $4x = 8 \Rightarrow x = 2$

$$\Rightarrow \frac{5 \cdot 2 - 1}{3} = \frac{7y-6}{5} \Rightarrow 3 = \frac{7y-6}{5} \Rightarrow 7y-6 = 15 \Rightarrow y = 3$$

Vậy $(x; y) = \left(\frac{1}{5}; \frac{6}{7}\right)$ và $(x; y) = (2; 3)$.

Câu 79. (HSG 7 trường Diệp Nông, huyện Hưng Hà 2022 - 2023; huyện Hà Trung, 2021 - 2022)

Tìm x, y biết: $\frac{1+2y}{18} = \frac{1+4y}{24} = \frac{1+6y}{6x}$

Lời giải

$$\frac{1+2y}{18} = \frac{1+4y}{24} = \frac{1+6y}{6x}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{2+4y}{36} = \frac{1+4y}{24} = \frac{2+4y-1-4y}{36-24} = \frac{1}{12} = \frac{2}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{1+4y}{24} = \frac{2}{24}$$

$$\Rightarrow 1+4y = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{4}$$

Với $y = \frac{1}{4}$ ta có $\frac{1+6y}{6x} = \frac{1}{12}$

$$\Rightarrow \frac{1+6 \cdot \frac{1}{4}}{6x} = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow 6x = 12 \left(1 + \frac{3}{2}\right) \Rightarrow x = 5.$$

Vậy $(x; y) = \left(5; \frac{1}{4}\right)$

Câu 80. (HSG 7 huyện Thanh Chương 2018 - 2019)

Tìm x, y biết: $\frac{2x+1}{5} = \frac{3y-2}{7} = \frac{2x+3y-1}{6x}$.

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau từ 2 tỉ số đầu ta có:

$$\frac{2x+1}{5} = \frac{3y-2}{7} = \frac{2x+3y-1}{12}$$

Kết hợp với giả thiết $\Rightarrow \frac{2x+3y-1}{12} = \frac{2x+3y-1}{6x}$

+ Nếu $2x+3y-1 \neq 0 \Leftrightarrow 6x = 12 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 3$

+ Nếu $2x+3y-1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1-3y$. Thay vào 2 tỉ số đầu ta tính được $y = \frac{2}{3}; x = -\frac{1}{2}$

Câu 81. (HSG 7 huyện Cao Lộc, 2021 - 2022)

Tìm x, y biết: $\frac{2+3y}{12} = \frac{2+5y}{3x} = \frac{2+7y}{4x}$

Lời giải

Theo tính chất dãy tỷ số bằng nhau

$$\frac{2+3y}{12} = \frac{2+5y}{3x} = \frac{2y}{3x-12} \Rightarrow \frac{2+5y}{3x} = \frac{2+7y}{4x} = \frac{2y}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{2y}{x} = \frac{2y}{3x-12}$$

$$\Rightarrow x = 3x-12 \Rightarrow -2x = -12 \Rightarrow x = 6$$

Lại có $\frac{2+3y}{12} = \frac{2+5y}{3x}$

$$\Rightarrow \frac{2+3y}{12} = \frac{2+5y}{18} \Rightarrow \frac{2+3y}{2} = \frac{2+5y}{3}$$

$$\Rightarrow 6+9y = 4+10y \Rightarrow y = 2$$

Vậy $x = 6; y = 2$

Câu 82. (HSG 7 trường Hoàng Xuân Hãn, huyện Đức Thọ 2022 - 2023)

Tìm các cặp số $(x; y)$ biết: $\frac{1+5y}{24} = \frac{1+7y}{7x} = \frac{1+9y}{2x}$

Lời giải

$$\frac{1+5y}{24} = \frac{1+7y}{7x} = \frac{1+9y}{2x}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{1+5y}{24} = \frac{1+7y}{7x} = \frac{1+9y}{2x} = \frac{1+9y-1-7y}{2x-7x} = \frac{2y}{-5x} = \frac{1+7y-1-5y}{7x-24} = \frac{2y}{7x-24}$$

$$\Rightarrow \frac{2y}{-5x} = \frac{2y}{7x-24} \Rightarrow -5x = 7x-24 \Rightarrow x = 2$$

Thay $x = 2$ vào trên ta được:

$$\frac{1+5y}{24} = \frac{y}{-5} \Rightarrow -5-25y = 24y \Rightarrow 49y = -5 \Rightarrow y = -\frac{5}{49}$$

Vậy $x = 2; y = -\frac{5}{49}$ thỏa mãn đề bài

Câu 83. (HSG huyện Nam Đàn 2022 - 2023)

Tìm $x; y$ biết $\frac{1+3y}{12} = \frac{1+6y}{3x} = \frac{1+9y}{2x}$

Lời giải

Ta có: $\frac{1+6y}{3x} = \frac{1+9y}{2x}$

$$\Rightarrow \frac{1+6y}{1+9y} = \frac{3x}{2x} \Rightarrow \frac{1+6y}{1+9y} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 2.(1+6y) = 3.(1+9y)$$

$$\Rightarrow 2+12y = 3+27y$$

$$\Rightarrow -1 = 15y \Rightarrow y = \frac{-1}{15}$$

Thay $y = \frac{-1}{15}$ vào $\frac{1+3y}{12} = \frac{1+6y}{3x}$ ta được

$$\frac{1+3.\left(\frac{-1}{15}\right)}{12} = \frac{1+6.\left(\frac{-1}{15}\right)}{3x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{15} = \frac{\frac{3}{5}}{3x} \Rightarrow x = 3$$

Vậy $x = 3, y = \frac{-1}{15}$

Câu 84. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Vũ Thị Thục 2022 - 2023)

Tìm x, y biết $\frac{x-y}{3} = \frac{x+y}{13} = \frac{xy}{200}$.

Lời giải

Ta có $\frac{x-y}{3} = \frac{x+y}{13} = \frac{xy}{200}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{x+y}{3} = \frac{x-y}{13} = \frac{xy}{200} = \frac{x+y+x-y}{3+13} = \frac{x}{8}$$

+ Nếu $x=0 \Rightarrow y=0$

+ Nếu $x \neq 0 \Rightarrow \frac{xy}{200} = \frac{x}{8} \Rightarrow \frac{y}{25} = 1 \Rightarrow y = 25$.

Thay $y = 25$ ta có $\frac{x-25}{3} = \frac{x}{8} \Rightarrow 8x - 200 = 3x \Rightarrow x = 40$.

Vậy $(x; y) \in \{(0; 0); (40; 25)\}$.

Câu 85. (HSG 7 huyện Nghi Xuân, năm học 2022 - 2023)

Tìm các số hữu tỉ dương x, y, z thỏa mãn tất cả các điều kiện sau:

$$\frac{xy}{x+y} = \frac{1}{6}; \frac{yz}{y+z} = \frac{1}{9}; \frac{zx}{z+x} = \frac{1}{7}$$

Lời giải

Ta có: $\frac{xy}{x+y} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{x+y}{xy} = 6 \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 6$ (1)

$$\frac{yz}{y+z} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{y+z}{yz} = 9 \Rightarrow \frac{1}{z} + \frac{1}{y} = 9$$
 (2)

$$\frac{zx}{z+x} = \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{z+x}{zx} = 7 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 7$$
 (3)

Từ (1);(2);(3) suy ra: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 11$

Do đó: $\frac{1}{z} = 5 \Rightarrow z = \frac{1}{5}; \frac{1}{y} = 4 \Rightarrow y = \frac{1}{4}; \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Vậy $x = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{4}; z = \frac{1}{5}$.

Câu 86. (HSG 7 tỉnh, huyện Trục Ninh 2020 - 2021)

Cho a, b, c là các số thực khác 0. Tìm các số thực x, y, z khác không thỏa mãn:

$$\frac{xy}{ay+bx} = \frac{yz}{bz+cy} = \frac{zx}{cx+az} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Lời giải

Từ $\frac{xy}{ay+bx} = \frac{yz}{bz+cy} = \frac{zx}{cx+az} \Rightarrow \frac{xyz}{ayz+bxz} = \frac{yzx}{bzx+cyx} = \frac{zxy}{cxy+azy}$ ($x, y, z \neq 0$)

$$\text{Suy ra } \begin{cases} ayz + bxz = bzx + cyz \\ bzx + cyz = cxy + azy \\ ayz + bxz = cxy + azy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ayz = cyx \\ bzx = azy \\ bxz = cxy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} az = cx \\ bx = ay \\ bz = cy \end{cases} \quad (\text{Vì } x, y, z \neq 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{z}{c} \\ \frac{y}{b} = \frac{x}{a} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \\ \frac{z}{c} = \frac{y}{b} \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k \quad (k \neq 0) \Rightarrow \begin{cases} x = ak \\ y = bk \\ z = ck \end{cases}, \text{ thay vào } \frac{xy}{ay + bx} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2 + b^2 + c^2} \text{ ta có}$$

$$\frac{ak \cdot bk}{abk + bak} = \frac{(ak)^2 + (bk)^2 + (ck)^2}{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow \frac{k}{2} = \frac{k^2(a^2 + b^2 + c^2)}{a^2 + b^2 + c^2} = k^2$$

$$\Rightarrow k = 2k^2 \Rightarrow k(1 - 2k) = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2} \quad (\text{vì } k \neq 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}a \\ y = \frac{1}{2}b \\ z = \frac{1}{2}c \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{1}{2}a; z = \frac{1}{2}c; y = \frac{1}{2}b.$$

Câu 87. (HSG 7 huyện Kim Sơn 2021 - 2022; trường Lê Hồng Phong 2018 - 2019; trường Lý Thường Kiệt 2017 - 2018)

$$\text{Tìm các số } x, y, z \text{ biết: } \frac{xy}{2y + 4x} = \frac{yz}{4z + 6y} = \frac{zx}{6x + 2z} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2^2 + 4^2 + 6^2}$$

Lời giải

$$\frac{xy}{2y + 4x} = \frac{yz}{4z + 6y} = \frac{zx}{6x + 2z} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2^2 + 4^2 + 6^2} \quad (2)$$

$$\text{Xét } x = 0 \Rightarrow y = z = 0 \Rightarrow 2y + 4x = 0 \quad (\text{vô lí})$$

$$\text{Suy ra } x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$$

$$\text{Khi đó từ (2) suy ra: } \frac{2y + 4x}{xy} = \frac{4z + 6y}{yz} = \frac{6x + 2z}{zx} = \frac{2^2 + 4^2 + 6^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x} + \frac{4}{y} = \frac{4}{y} + \frac{6}{z} = \frac{6}{z} + \frac{2}{x} = \frac{2^2 + 4^2 + 6^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{4}{y} = \frac{6}{z} \text{ và } \frac{2}{x} = \frac{4}{y} = \frac{2^2 + 4^2 + 6^2}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{2}{x} + \frac{4}{y} = \frac{2}{x} + \frac{2}{x} = 2 \cdot \frac{2}{x}$$

$$\text{Đặt } \frac{2}{x} = \frac{4}{y} = \frac{6}{z} = \frac{1}{k} (k \neq 0)$$

$$\Rightarrow \frac{2^2 + 4^2 + 6^2}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{2}{k} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k \\ y = 4k \\ z = 6k \\ x^2 + y^2 + z^2 = 28k \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{Thay } \begin{cases} x = 2k \\ y = 4k \\ z = 6k \end{cases} \text{ vào (3) ta được:}$$

$$(2k)^2 + (4k)^2 + (6k)^2 = 28k \Rightarrow 56k^2 - 28k = 0 \Rightarrow 56k \cdot (2k - 1) = 0$$

$$\Rightarrow k = 0 \text{ (loại) hoặc } k = \frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Với } k = \frac{1}{2} \text{ thì tìm được } x = 1; y = 2; z = 3.$$

$$\text{Vậy } x = 1; y = 2; z = 3.$$

Câu 88. (HSG 7 huyện Triệu Sơn năm 2022 - 2023)

$$\text{Tìm các số thực } x, y, z \text{ biết } \frac{x+y-7}{z} = \frac{y+z+2}{x} = \frac{x+z+5}{y} = \frac{6}{x+y+z}.$$

Lời giải

Với $x, y, z \neq 0$ và $x+y+z \neq 0$, theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{x+y-7}{z} = \frac{y+z+2}{x} = \frac{x+z+5}{y} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2.$$

$$\text{Suy ra: } \frac{6}{x+y+z} = 2 \Leftrightarrow x+y+z = 3.$$

Khi đó:

$$+ \frac{x+y-7}{z} = 2 \Leftrightarrow \frac{3-z-7}{z} = 2 \Leftrightarrow -4-z = 2z \Leftrightarrow z = -\frac{4}{3} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$+ \frac{y+z+2}{x} = 2 \Leftrightarrow \frac{3-x+2}{x} = 2 \Leftrightarrow 5-x = 2x \Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$+ \frac{x+z+5}{y} = 2 \Leftrightarrow \frac{3-y+5}{y} = 2 \Leftrightarrow 8-y = 2y \Leftrightarrow y = \frac{8}{3} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{5}{3}; y = \frac{8}{3}; z = -\frac{4}{3} \text{ là các số thực cần tìm.}$$

Câu 89. (HSG 7 huyện Thanh Sơn; Thanh Hóa lần 2, 2022 - 2023; huyện Thanh Sơn 2021 - 2022; trường Lê Quý Đôn, huyện Tứ Kỳ 2016 - 2017; trường Bồ Lý 2015 - 2016)

$$\text{Tìm ba số } a, b, c \text{ biết rằng: } \frac{b+c+1}{a} = \frac{a+c+2}{b} = \frac{a+b-3}{c} = \frac{1}{a+b+c}.$$

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{b+c+1}{a} = \frac{a+c+2}{b} = \frac{a+b-3}{c} = \frac{1}{a+b+c}$$

$$= \frac{b+c+a+c+a+b+1+2-3}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2.$$

Suy ra: $\frac{1}{a+b+c} = 2$ hay $a+b+c = 0,5$.

Do đó:

$$\frac{b+c+1}{a} = 2 \Rightarrow \frac{(0,5-a)+1}{a} = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{a+c+2}{b} = 2 \Rightarrow \frac{(0,5-b)+2}{b} = 2 \Rightarrow b = \frac{5}{6}.$$

$$\frac{a+b-3}{c} = 2 \Rightarrow \frac{(0,5-c)-3}{c} = 2 \Rightarrow c = \frac{-5}{6}.$$

Vậy $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{5}{6}$; $c = \frac{-5}{6}$.

Câu 90. (HSG 7 huyện Sóc Sơn 2022 - 2023)

Tìm x, y, z khác 0 biết rằng $\frac{y+z+4}{x} = \frac{x+z+5}{y} = \frac{x+y-9}{z} = \frac{2023}{x+y+z}$

Lời giải

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{y+z+4}{x} = \frac{x+z+5}{y} = \frac{x+y-9}{z} = \frac{2023}{x+y+z}$$

$$= \frac{(y+z+4)+(x+z+5)+(x+y-9)}{x+y+z} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2$$

Suy ra $\frac{2023}{x+y+z} = 2 \Leftrightarrow x+y+z = 1011,5$

Do đó $\frac{1011,5-x+4}{x} = \frac{1011,5-y+5}{y} = \frac{1011,5-z-9}{z} = 2$

Hay $\frac{1015,5-x}{x} = \frac{1016,5-y}{y} = \frac{1002,5-z}{z} = 2$

Suy ra $x = \frac{677}{2}$; $y = \frac{2033}{6}$; $z = \frac{2005}{6}$

Câu 91. (HSG 7 huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $\frac{x}{y+z+1} = \frac{y}{x+z+2} = \frac{z}{x+y-3} = x+y+z$

Lời giải

Từ: $\frac{x}{y+z+1} = \frac{y}{x+z+2} = \frac{z}{x+y-3}$

$$\Rightarrow \frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z}$$

$$= \frac{(y+z+1)+(x+z+2)+(x+y-3)}{x+y+z} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2 = x+y+z$$

$$\text{Suy ra: } y + z + 1 = 2x \Rightarrow x + y + z = 3x - 1 = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$x + z + 2 = 2y \Rightarrow x + y + z = 3y - 2 = 2 \Rightarrow y = \frac{4}{3}$$

$$x + y - 3 = 2z \Rightarrow x + y + z = 3z + 3 = 2 \Rightarrow z = \frac{-1}{3}$$

Câu 92. (HSG 7 huyện Thọ Sơn – Thanh Hóa năm 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $\frac{y+z-2}{x+1} = \frac{z+x+1}{y-1} = \frac{x+y-3}{z-2} = \frac{1}{x+y+z-2}$ (với giả thiết các tỉ số đều có nghĩa).

Lời giải

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{y+z-2}{x+1} = \frac{z+x+1}{y-1} = \frac{x+y-3}{z-2} = \frac{y+z-2+z+x+1+x+y-3}{x+1+y-1+z-2} = \frac{2 \cdot (x+y+z-2)}{x+y+z-2} = 2.$$

Suy ra:

$$+ y + z - 2 = 2(x + 1) = 2x + 2 \Rightarrow y + z = 2x + 4.$$

$$+ z + x + 1 = 2(y - 1) = 2y - 2 \Rightarrow z + x = 2y - 3.$$

$$+ x + y - 3 = 2 \cdot (z - 2) = 2z - 4 \Rightarrow x + y = 2z - 1.$$

Mặt khác: $\frac{1}{x+y+z-2} = 2 \Rightarrow x+y+z-2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x+y+z = \frac{5}{2}.$

Suy ra: $y+z = \frac{5}{2} - x; z+x = \frac{5}{2} - y; x+y = \frac{5}{2} - z.$

Như vậy:

$$+ 2x + 4 = \frac{5}{2} - x \Rightarrow 3x = \frac{-3}{2} \Rightarrow x = \frac{-1}{2}.$$

$$+ 2y - 3 = \frac{5}{2} - y \Rightarrow 3y = \frac{11}{2} \Rightarrow y = \frac{11}{6}.$$

$$+ 2z - 1 = \frac{5}{2} - z \Rightarrow 3z = \frac{7}{2} \Rightarrow z = \frac{7}{6}.$$

Vậy $x = \frac{-1}{2}; y = \frac{11}{6}; z = \frac{7}{6}.$

Câu 93. (HSG 7 huyện Đức Thọ, tỉnh Hà Tĩnh, trường Hoàng Xuân Hãn 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết $\frac{x}{y+z-5} = \frac{y}{x+z+3} = \frac{z}{x+y+2} = \frac{x+y+z}{2}$

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{x}{y+z-5} = \frac{y}{x+z+3} = \frac{z}{x+y+2} = \frac{x+y+z}{2} = \frac{x+y+z}{2(x+y+z)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+z}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x+y+z=1$$

$$\Rightarrow y + z = 1 - x; x + z = 1 - y; x + y = 1 - z$$

$$\frac{x}{1-x-5} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = -4 - x \Rightarrow 3x = -4 \Rightarrow x = \frac{-4}{3}$$

$$\frac{y}{1-y+3} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2y = 4 - y \Rightarrow 3y = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{3}$$

$$\frac{z}{1-z+2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2z = 3 - z \Rightarrow 3z = 3 \Rightarrow z = 1$$

$$\text{Vậy } x = \frac{-4}{3}; y = \frac{4}{3}; z = 1$$

Câu 94. (HSG 7 huyện Quảng xương, tỉnh Thanh Hoá, năm học 2022 – 2023)

Tìm các số $x; y; z$ biết:

$$\text{a) } \frac{x}{y+z+1} = \frac{y}{x+z+1} = \frac{z}{x+y-2} = x+y+z$$

$$\text{b) } x : y : z = \frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6} \text{ và } x^2 + y^2 + z^2 = 24309$$

Lời giải

$$\text{a) } \frac{x}{y+z+1} = \frac{y}{x+z+1} = \frac{z}{x+y-2} = x+y+z \quad (1)$$

+ Nếu $x+y+z=0$ thì từ đề bài (1) suy ra $x=y=z=0$

+ Nếu $x+y+z \neq 0$. Áp dụng tính chất dãy tỉ số nhau ta có:

$$\frac{x}{y+z+1} = \frac{y}{x+z+1} = \frac{z}{x+y-2} = \frac{x+y+z}{2(x+y+z)} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \frac{x+y+z}{2(x+y+z)} = x+y+z \quad (*)$$

$$\text{Từ (*) suy ra } x+y+z = \frac{1}{2}$$

Thay vào đề bài tính được

$$\frac{x}{y+z+1} = \frac{x}{\frac{1}{2}-x+1} = \frac{1}{2} \text{ suy ra } x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Tương tự: } y = \frac{1}{2}; z = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } (x; y; z) \in \left\{ (0; 0; 0); \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right) \right\}$$

Câu 95. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2018 - 2019)

$$\text{Tìm } x, y \text{ biết: } \frac{x+y}{2017} = \frac{xy}{2018} = \frac{x-y}{2019}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{x+y}{2017} = \frac{xy}{2018} = \frac{x-y}{2019} \quad (1)$$

Áp dụng tính chất của tỉ lệ thức ta có:

$$\frac{x+y}{2017} = \frac{x-y}{2019} = \frac{x+y+x-y}{2017+2019} = \frac{2x}{4036} = \frac{x}{2018} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{xy}{2018} = \frac{x}{2018}$

TH1: $x = 0 \Rightarrow y = 0$

TH2: $x \neq 0$, từ (2) $\Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = -2018$ (tm)

Vậy $(x; y) = \{(0; 0); (-2018; 1)\}$

Câu 96. (HSG 7 trường Đáp Cầu 2018 - 2019)

Cho hai đại lượng tỉ lệ nghịch x và y ; x_1, x_2 là hai giá trị bất kỳ của x ; y_1, y_2 là hai giá trị tương ứng của y . Tính y_1, y_2 biết $y_1^2 + y_2^2 = 52$ và $x_1 = 2; x_2 = 3$.

Lời giải

Vì x, y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow \frac{y_2}{y_1} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{y_2}{2} = \frac{y_1}{3} \Rightarrow \left(\frac{y_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{y_1}{3}\right)^2 \Rightarrow \frac{y_2^2}{9} = \frac{y_1^2}{4} = \frac{y_1^2 + y_2^2}{9+4} = \frac{52}{13} = 4$$

+) $\frac{y_1^2}{9} = 4 \Rightarrow y_1^2 = 36 \Rightarrow y_1 = \pm 6$

Với $y_1 = -6 \Rightarrow y_2 = -4$

Với $y_1 = 6 \Rightarrow y_2 = 4$

Câu 97. (HSG 7 huyện Vị Thanh, tỉnh Hậu Giang, trường THCS Việt Xuân 2022 - 2023)

Cho 4 số a, b, c, d biết $a = 3b = 4c = 5d$ và $ab - c^2 - d^2 = 831$. Tính $b - c$

Lời giải

$$a = 3b = 4c = 5d$$

$$\Rightarrow \frac{a}{60} = \frac{b}{20} = \frac{c}{15} = \frac{d}{12} \Leftrightarrow \frac{ab}{1200} = \frac{c^2}{225} = \frac{d^2}{144} = \frac{ab - c^2 - d^2}{1200 - 225 - 144} = \frac{831}{831} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2}{144} = 1 \Rightarrow d = \pm 12$$

$$\left[\begin{array}{l} d = 12 \Rightarrow b = 20, c = 15 \Rightarrow b - c = 5 \\ d = -12 \Rightarrow b = -20; c = -15 \Rightarrow b - c = -5 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} d = 12 \Rightarrow b = 20, c = 15 \Rightarrow b - c = 5 \\ d = -12 \Rightarrow b = -20; c = -15 \Rightarrow b - c = -5 \end{array} \right.$$

Vậy $d = 12 \Rightarrow b - c = 5$

Và $d = -12 \Rightarrow b - c = -5$

Câu 98. (HSG 7 huyện Hải Châu, trường Nguyễn Khuyến 2022 - 2023)

Cho $\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{16} = \frac{z+9}{25}$ và $\frac{9-x}{7} + \frac{11-x}{9} = 2$. Tìm $x + y + z$

Lời giải

Từ $\frac{9-x}{7} + \frac{11-x}{9} = 2 \Leftrightarrow (2-x)\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Thay $x = 2 \Rightarrow \frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{16} = \frac{z+9}{25} = \frac{x+y+z}{50} = \frac{2+16}{9} = 2 \Rightarrow x + y + z = 100$

Câu 99. (HSG 7 huyện Hà Trung, tỉnh Thanh Hoá, năm học 2022 - 2023)

Cho a, b, c, d thỏa mãn: $a = 3b = 4c = 5d$ và $ab - c^2 - d^2 = 831$. Tính $a - b + c$

Lời giải

Vì $a = 3b = 4c = 5d$

$$\Rightarrow \frac{a}{60} = \frac{3b}{60} = \frac{4c}{60} = \frac{5d}{60} \text{ (BCNN(1; 3; 4; 5) = 60)}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{60} = \frac{b}{20} = \frac{c}{15} = \frac{d}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{1200} = \frac{c^2}{225} = \frac{d^2}{144}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{ab}{1200} = \frac{c^2}{225} = \frac{d^2}{144} = \frac{ab - c^2 - d^2}{1200 - 225 - 144} = \frac{831}{831} = 1 \text{ (vì } ab - c^2 - d^2 = 831)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{144} = 1 \Rightarrow d^2 = 144 \Rightarrow d = \pm 12$$

$$+ d = 12 \Rightarrow a = 60; b = 20; c = 15 \Rightarrow a - b + c = 55$$

$$+ d = -12 \Rightarrow a = -60; b = -20; c = -15 \Rightarrow a - b + c = -55$$

Vậy: $a - b + c = -55$; $a - b + c = 55$

Câu 100. (HSG 7 thị xã Hương Trà; Tp. Lào Cai 2022 - 2023; huyện Nam Sách 2017 - 2018; huyện Tân Lạc; huyện Ngọc Lặc 2015 - 2016)

Cho $\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25}$ và $4x^3 - 3 = 29$. Tính $x - 2y + 3z$

Lời giải

Ta có: $4x^3 - 3 = 29 \Rightarrow 4x^3 = 32 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$

Thay $x = 2$ vào

$$\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25} \text{ ta được: } \frac{2+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25} \Rightarrow 2 = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{y-25}{-16} = 2 \Rightarrow y - 25 = -32 \Rightarrow y = -7; \frac{z+49}{25} = 2 \Rightarrow z + 49 = 50 \Rightarrow z = 1$$

Thay $x = 2; y = -7; z = 1$ vào A ta được: $A = 2 - 2(-7) + 3.1 = 19$

Vậy giá trị của biểu thức $A = 19$.

Câu 101. (HSG 7 huyện Cẩm Khê năm 2022 - 2023)

Cho $\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{16} = \frac{z+9}{25}$ và $3x^3 - 7 = 17$. Tính $B = x - y + z + 2037$

Lời giải

Ta có $3x^3 - 7 = 17 \Rightarrow 3x^3 = 24 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$

$$\text{Khi đó: } \frac{x+16}{9} = \frac{2+16}{9} = 2$$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{16} = \frac{z+9}{25} = \frac{x+16-y+25+z+9}{9-16+25} = 2 \Rightarrow x-y+z+50 = 36 \Rightarrow x-y+z = -14$$

$$\Rightarrow x-y+z+2037 = 2023$$

Vậy $x-y+z+2037 = 2023$

Câu 102. (HSG 7 huyện Hương Khê, tỉnh Hà Tĩnh, 2022 - 2023)

Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$. Trong đó a, b, c là các hằng số thỏa mãn $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}$ và $a \neq 0$. Tính $\frac{P(-2) - 3P(1)}{a}$.

Lời giải

Ta có $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}$ suy ra $b = 2a; c = 3a$

$$\text{Suy ra } \frac{P(-2) - 3P(1)}{a} = \frac{4a - 2b + c - 3(a + b + c)}{a} = \frac{a - 5b - 2c}{a}$$

$$= \frac{a - 5 \cdot 2a - 2 \cdot 3a}{a} = \frac{-15a}{a} = -15.$$

Câu 103. (HSG 7 huyện Hoàng Hóa - Thanh Hóa năm 2022 - 2023)

Cho $\frac{x+16}{9} = \frac{y-30}{-16} = \frac{z+49}{25}$ và $4x^3 - 3 = 29$. Tính $C = 26x - 3y + z^{2023}$.

Lời giải

Ta có: $4x^3 - 3 = 29 \Rightarrow 4x^3 = 32 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$.

$$\text{Thay vào tỉ lệ thức ta được: } \frac{2+16}{9} = \frac{y-30}{-16} = \frac{z+49}{25} \Rightarrow \frac{y-30}{-16} = \frac{z+49}{25} = 2$$

$$\Rightarrow y = -2, z = 1.$$

Khi đó: $C = 26x - 3y + z^{2023} = 26 \cdot 2 - 3 \cdot (-2) + 1 = 59$.

Câu 104. (HSG 7 huyện Liên Trường 2022 - 2023)

Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn: $\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$.

Tính giá trị của biểu thức: $A = 2022 \cdot x + (y+z)^{2023}$.

Lời giải

Điều kiện: $x + y + z \neq 0; x \neq 0; y \neq 0; z \neq 0$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2.$$

$$\text{Suy ra: } \frac{1}{x+y+z} = 2 \Leftrightarrow x+y+z = \frac{1}{2} \quad (1) \text{ và } \frac{y+z+1}{x} = 2 \Leftrightarrow y+z+1 = 2x \quad (2).$$

$$\text{Trừ (1) và (2) vế với vế, ta được: } x-1 = \frac{1}{2} - 2x \Leftrightarrow 3x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Mà $x + y + z = \frac{1}{2}$ nên $y + z = 0$.

Thay vào biểu thức ta có: $A = 2022 \cdot \frac{1}{2} + 0^{2023} = 1011$.

Câu 105. (HSG 7 Thành Phố Sầm Sơn, tỉnh Thanh Hoá, năm học 2022 - 2023)

Cho x, y, z là các số thực khác 0, thỏa mãn: $\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$

Tính giá trị của biểu thức $A = 4046x + (y)^{2023} + (z)^{2023}$.

Lời giải

Từ đề bài ta có x, y, z và $x+y+z$ khác 0.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z} = 2$$

$$\Rightarrow x+y+z = 0,5$$

$$\Rightarrow \frac{0,5-x+1}{x} = \frac{0,5-y+2}{y} = \frac{0,5-z-3}{z} = 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}; y = \frac{5}{6}; z = \frac{-5}{6}$$

$$\text{Khi đó ta có: } A = 4046 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{5}{6}\right)^{2023} + \left(\frac{-5}{6}\right)^{2023} = 4046 \cdot \frac{1}{2} + 0 = 2023$$

Câu 106. (HSG 7 trường Tây Đô, huyện Hưng Hà 2022 - 2023; huyện Tam Dương 2016 - 2017)

Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$.

Tính giá trị của biểu thức: $A = 2016x + y^{2017} + z^{2017}$

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z} = 2$$

$$\Rightarrow x+y+z = 0,5$$

$$\Rightarrow \frac{0,5-x+1}{x} = \frac{0,5-y+2}{y} = \frac{0,5-z-3}{z} = 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}; y = \frac{5}{6}; z = -\frac{5}{6}$$

$$\text{Khi đó ta có } A = 2016x + y^{2017} + z^{2017} = 1008$$

Câu 107. (HSG 7 quận Hà Đông; huyện Yên Thế; huyện Quế Sơn 2022 - 2023)

Cho $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$ và $\frac{y}{5} = \frac{z}{6}$. Tính $M = \frac{2x+3y+4z}{3x+4y+5z}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20}; \frac{y}{5} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{y}{20} = \frac{z}{24}$$

$$\text{Nhu vậy: } \frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{24} = k \Rightarrow x = 15k, y = 20k, z = 24k.$$

$$\text{Suy ra: } M = \frac{2x+3y+4z}{3x+4y+5z} = \frac{2.15k+3.20k+4.24k}{3.15k+4.20k+5.24k} = \frac{186k}{245k} = \frac{186}{245}.$$

Câu 108. (HSG 7 huyện Khoái Châu 2015 – 2016)

$$\text{Cho } \frac{x}{4} = \frac{y}{7}; \frac{y}{5} = \frac{z}{6}. \text{ Tính } B = \frac{3x-4y+5z}{x-2y+5z}.$$

Lời giải

$$\text{Từ } \frac{x}{4} = \frac{y}{7}; \frac{y}{5} = \frac{z}{6} \text{ suy ra } \frac{x}{20} = \frac{y}{35} = \frac{z}{42}$$

$$\text{Đặt } \frac{x}{20} = \frac{y}{35} = \frac{z}{42} = k$$

$$\Rightarrow x = 20k, y = 35k, z = 42k$$

$$\text{Khi đó } B = \frac{3.20k - 4.35k + 5.42k}{20k - 2.35k + 5.42k} = \frac{130k}{160k} = \frac{13}{16}$$

Câu 109. (HSG 7 huyện Chương Mỹ 2018 - 2019)

$$\text{Cho } \frac{a+b}{a-3} = \frac{b+4}{b-4}. \text{ Tính giá trị biểu thức: } D = \frac{a^3+3^3}{b^3+4^3}$$

Lời giải

$$\text{Từ } \frac{a+3}{a-3} = \frac{b+4}{b-4} \Rightarrow \frac{a+3}{b+4} = \frac{a-3}{b-4}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a+3}{b+4} = \frac{a-3}{b-4} = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b} \text{ và } \frac{a+3}{b+4} = \frac{a-3}{b-4} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Từ } \frac{a}{b} = \frac{3}{4} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3} = \frac{3^3}{4^3} = \frac{a^3+3^3}{b^3+4^3}$$

$$\Rightarrow D = \frac{a^3+3^3}{b^3+4^3} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$$

Câu 110. (HSG 7 huyện Quốc Oai, năm học 2022 - 2023)

$$\text{Cho } 2x - y = \frac{2}{3}(x + y). \text{ Tính } C = \frac{x^2+5^2}{y^2+4^2}$$

Lời giải

$$1. \text{ Ta có: } 2x - y = \frac{2}{3}(x + y) \Rightarrow 2x - \frac{2}{3}x = y + \frac{2}{3}y \Rightarrow 4x = 5y$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} = \frac{5^2}{4^2}$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{5^2}{4^2} = \frac{x^2+5^2}{y^2+4^2}$$

$$\Rightarrow C = \frac{x^2 + 5^2}{y^2 + 4^5} = \frac{25}{16}$$

Câu 111. (Đề HSG 7 LDP huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho $x, y, z \neq 0$ thoả mãn: $\frac{x+y+2023z}{z} = \frac{y+z+2023x}{x} = \frac{x+z+2023y}{y}$. Tính giá trị của

biểu thức: $A = \left(1 + \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{y}{z}\right)\left(1 + \frac{z}{x}\right)$.

Lời giải

$$\frac{x+y+2023z}{z} = \frac{y+z+2023x}{x} = \frac{x+z+2023y}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+2023z}{z} - 2022 = \frac{y+z+2023x}{x} - 2022 = \frac{x+z+2023y}{y} - 2022$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+z}{z} = \frac{y+z+x}{x} = \frac{x+z+y}{y} \quad (1)$$

Nếu $x+y+z \neq 0$, từ (1) suy ra $x = y = z$

từ đó tính được $A = \left(1 + \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{y}{z}\right)\left(1 + \frac{z}{x}\right) = 8$

Nếu $x+y+z = 0$, suy ra: $\begin{cases} x+y = -z \\ z+y = -x \\ x+z = -y \end{cases}$

từ đó ta có $A = \left(1 + \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{y}{z}\right)\left(1 + \frac{z}{x}\right) = \frac{x+y}{y} \cdot \frac{y+z}{z} \cdot \frac{x+z}{x} = \frac{(-z) \cdot (-x) \cdot (-y)}{y \cdot z \cdot x} = -1$

Vậy $A = \begin{cases} 8 \text{ khi } x+y+z \neq 0 \\ -1 \text{ khi } x+y+z = 0 \end{cases}$

Câu 112. (HSG 7 đề khảo sát Thái Bình 2022 - 2023)

Cho $a, b, c \neq 0$ thoả mãn: $\frac{a+b-2023c}{c} = \frac{b+c-2023a}{a} = \frac{c+a-2023b}{b}$. Tính giá trị của

biểu thức: $C = \left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{a}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right)$.

Lời giải

$$\frac{a+b-2023c}{c} = \frac{b+c-2023a}{a} = \frac{c+a-2023b}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b-2023c}{c} + 2024 = \frac{b+c-2023a}{a} + 2024 = \frac{c+a-2023b}{b} + 2024$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c}{c} = \frac{b+c+a}{a} = \frac{c+a+b}{b}$$

+ Nếu $a+b+c \neq 0$, từ (1) suy ra $a = b = c$

từ đó tính được $C = \left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{a}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

+ Nếu $a+b+c=0$, suy ra:
$$\begin{cases} a+b=-c \\ b+c=-a \\ c+a=-b \end{cases}$$

từ đó ta có $C = \left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{a}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{a+b}{a}\right)\left(\frac{a+c}{c}\right)\left(\frac{c+b}{b}\right) = \frac{(-a) \cdot (-b) \cdot (-c)}{a \cdot b \cdot c} = -1$

Vậy $A = \begin{cases} 8 \text{ khi } a+b+c \neq 0 \\ -1 \text{ khi } a+b+c = 0 \end{cases}$

Câu 113. (HSG 7 huyện Mỹ Đức, 2021 - 2022)

Cho dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{2022a+b+c+d}{a} = \frac{1+2022b+c+d}{b} = \frac{a+b+2022c+d}{c} = \frac{a+b+c+2022d}{d}$$

Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$. (Với các mẫu số của các phân số trên khác 0)

Lời giải

$$\frac{2022a+b+c+d}{a} = \frac{1+2022b+c+d}{b} = \frac{a+b+2022c+d}{c} = \frac{a+b+c+2022d}{d}$$

$$\Rightarrow \frac{2022a+b+c+d}{a} - 2021 = \frac{a+2022b+c+d}{b} - 2021$$

$$= \frac{a+b+2022c+d}{c} - 2021 = \frac{a+b+c+2022d}{d} - 2021$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c+d}{a} = \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d} \quad (*)$$

TH1: $a+b+c+d=0 \Rightarrow a+b=-(c+d); a+c=-(b+d);$

$a+d=-(b+c)$. Ta có: $P = -1-1-1-1 = -4$

TH2: $a+b+c+d \neq 0$. Từ (*) suy ra $a=b=c=d$

Ta có: $P = 1+1+1+1 = 4$

Vậy $P \in \{4; -4\}$

Câu 114. (HSG 7 huyện Vĩnh Yên; trường Thái Hưng, huyện Hưng Hà 2022 - 2023; trường Hồng Liên 2018 - 2019)

Cho ba số thực a, b, c khác 0 thỏa mãn: $\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$.

Hãy tính giá trị của biểu thức: $B = \left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{a}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right)$.

Lời giải

+ Với $a+b+c \neq 0$, áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1.$$

Suy ra: $\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{c} - 1 = \frac{b+c}{a} - 1 = \frac{c+a}{b} - 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 2.$$

$$\text{Khi đó: } B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \frac{a+b}{a} \cdot \frac{c+a}{c} \cdot \frac{b+c}{b} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8.$$

+) Nếu $a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c; b+c=-a; c+a=-b.$

$$\text{Khi đó: } B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \frac{a+b}{a} \cdot \frac{c+a}{c} \cdot \frac{b+c}{b} = \frac{-c}{a} \cdot \frac{-b}{c} \cdot \frac{-a}{b} = -1.$$

Vậy: +) Nếu $a+b+c \neq 0$ thì $B=8.$

+) Nếu $a+b+c=0$ thì $B=-1.$

Câu 115. (HSG 7 huyện Thanh Miện, 2021 - 2022)

Cho các số x, y, z khác 0 và $x+y+z \neq 0$ thỏa mãn $\frac{x+y-z}{z} = \frac{y+z-x}{x} = \frac{z+x-y}{y}.$

$$\text{Tính giá trị biểu thức } P = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z}\right) \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right) \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{y}\right)$$

Lời giải

Với các số x, y, z khác 0 và $x+y+z \neq 0$ áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau có:

$$\frac{x+y-z}{z} = \frac{y+z-x}{x} = \frac{z+x-y}{y} = \frac{x+y+z}{x+y+z} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x+y-z}{z} = 1 \\ \frac{y+z-x}{x} = 1 \\ \frac{z+x-y}{y} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=2z \\ y+z=2x \\ z+x=2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=3z \\ y+z+x=3x \\ z+x+y=3y \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3x = 3y = 3z \Rightarrow x = y = z$$

Thay $x = y = z$ vào biểu thức P ta có:

$$P = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z}\right) \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right) \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{y}\right)$$

$$P = \left(\frac{x}{x} + \frac{y}{y}\right) \left(\frac{y}{y} + \frac{z}{z}\right) \left(\frac{z}{z} + \frac{x}{x}\right)$$

$$P = (1+1)(1+1)(1+1) = 8$$

Vậy giá trị của biểu thức $P=8$

Câu 116. (HSG 7 trường THCS Phạm Đôn Lễ; trường Trần Thái Tông, huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Cho các số $a, b, c \neq 0$ thỏa mãn: $\frac{a-b+c}{2b} = \frac{c-a+b}{2a} = \frac{a-c+b}{2c}$

$$\text{Tính giá trị biểu thức: } P = \left(1 + \frac{c}{b}\right) \cdot \left(1 + \frac{b}{a}\right) \cdot \left(1 + \frac{a}{c}\right)$$

Lời giải

Ta có $P = \left(1 + \frac{c}{b}\right) \cdot \left(1 + \frac{b}{a}\right) \cdot \left(1 + \frac{a}{c}\right) = \frac{b+c}{b} \cdot \frac{a+b}{a} \cdot \frac{c+a}{c}$

*) TH 1: Nếu $a+b+c=0$ thì:

$$\begin{cases} a+b=-c \\ b+c=-a \\ a+c=-b \end{cases} \text{ Thay vào biểu thức } P \text{ ta có:}$$

$$P = \frac{-a}{b} \cdot \frac{-c}{a} \cdot \frac{-b}{c} = -1 \text{ (vì } a, b, c \neq 0 \text{)}$$

*) TH 2: Nếu $a+b+c \neq 0$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a-b+c}{2b} = \frac{c-a+b}{2a} = \frac{a-c+b}{2c} = \frac{a-b+c+c-a+b+a-c+b}{2b+2a+2c} = \frac{a+b+c}{2(a+b+c)} = \frac{1}{2}$$

Suy ra:

$$\frac{a-b+c}{2b} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a-b+c}{b} = 1 \Rightarrow a-b+c=b \Rightarrow a+c=2b$$

$$\frac{c-a+b}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{c-a+b}{a} = 1 \Rightarrow c-a+b=a \Rightarrow c+b=2a$$

$$\frac{a-c+b}{2c} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a-c+b}{c} = 1 \Rightarrow a-c+b=c \Rightarrow a+b=2c$$

Thay vào biểu thức P ta có $P = \frac{2a}{b} \cdot \frac{2c}{a} \cdot \frac{2b}{c} = 8$

Vậy $P=1$ nếu $a+b+c=0$; $P=8$ nếu $a+b+c \neq 0$

Câu 117. (HSG 7 Thị xã Thái Hòa – Nghệ An năm 2022 - 2023)

Cho ba số thực a, b, c khác 0 thỏa mãn: $\frac{a-2b+c}{b} = \frac{b-5c+a}{2c} = \frac{c-8a+b}{3a}$.

Tính $P = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right)$.

Lời giải

Từ $\frac{a-2b+c}{b} = \frac{b-5c+a}{2c} = \frac{c-8a+b}{3a}$ (a, b, c khác 0)

$$\Rightarrow \frac{a-2b+c}{b} + 3 = \frac{b-5c+a}{2c} + 3 = \frac{c-8a+b}{3a} + 3$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c}{b} = \frac{b+c+a}{2c} = \frac{c+a+b}{3a} \quad (1)$$

+ Nếu $a+b+c=0$ thì:

$$P = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right) = \frac{a+b}{b} \cdot \frac{b+c}{c} \cdot \frac{a+c}{a} = \frac{-c}{b} \cdot \frac{-a}{c} \cdot \frac{-b}{a} = -1.$$

+ Nếu $a+b+c \neq 0$ thì từ (1) $\Rightarrow b=2c=3a \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{3}; \frac{b}{c} = \frac{2}{1}; \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$.

Thay vào P ta có $P=10$.

Câu 118. (HSG 7 huyện Nga Sơn, Thanh Hóa; Quảng Ninh năm 2022 - 2023)

Cho $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$. Tính giá trị biểu thức: $P = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}$.

Lời giải

+ Nếu $a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c; b+c=-a; a+c=-b$

Khi đó $P = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \frac{-c}{c} + \frac{-a}{a} + \frac{-b}{b} = (-1) + (-1) + (-1) = -3$.

+ Nếu $a+b+c \neq 0$ thì: $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{2(a+b+c)} = \frac{1}{2}$.

Suy ra $b+c=2a; c+a=2b; a+b=2c$.

Khi đó $P = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \frac{2c}{c} + \frac{2a}{a} + \frac{2b}{b} = 6$. Vậy: $P = -3$ hoặc $P = 6$.

Câu 119. (HSG 7 huyện Văn Lâm, năm học 2022 – 2023)

Cho $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b}$. Tính giá trị của biểu thức $B = \frac{a}{b+c} + \frac{a+b}{c} + \frac{b}{c+a}$.

Lời giải

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c}$$

Nếu $a+b+c \neq 0 \Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 2 \Rightarrow \frac{a}{b+c} = \frac{1}{2}; \frac{a+b}{c} = 2; \frac{b}{c+a} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow B = \frac{a}{b+c} + \frac{a+b}{c} + \frac{b}{c+a} = \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{2} = 3$$

Nếu $a+b+c=0 \Rightarrow B = \frac{a}{b+c} + \frac{a+b}{c} + \frac{b}{c+a} = -3$.

Vậy: + Nếu $a+b+c \neq 0$ thì $B = 3$.

+ Nếu $a+b+c = 0$ thì $B = -3$.

Câu 120. (HSG 7 huyện Đồng Xuân, năm học 2022 – 2023)

Cho $x+y+z=2023$ và $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} = \frac{1}{7}$.

Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}$.

Lời giải

Ta có: $P = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}$

$$\Rightarrow P+3 = \frac{x}{y+z} + 1 + \frac{y}{z+x} + 1 + \frac{z}{x+y} + 1$$

$$= \frac{x+y+z}{y+z} + \frac{y+z+x}{z+x} + \frac{z+x+y}{x+y}$$

$$= (x+y+z) \left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y} \right) = 2023 \cdot \frac{1}{7} = 289$$

$$\Rightarrow P = 289 - 3 = 286$$

Vậy, $P = 286$.

Câu 121. (HSG 7 huyện Lang Chánh, tỉnh Thanh Hoá, năm học 2022 - 2023)

Cho a, b, c thỏa mãn $\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-a)(b-c)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = 2022$

Tính giá trị biểu thức $Q = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}$

Lời giải

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-a)(b-c)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = 2022$$

$$\Rightarrow \frac{(b-a)-(c-a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(c-b)-(a-b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(a-c)-(b-c)}{(c-a)(c-b)} = 2022$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} + \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 2022$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right) = 2022$$

Vậy $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 1011$

Câu 122. (HSG 7 thị xã Nghi Sơn năm 2022 - 2023; huyện Lục Nam 2018 - 2019)

Cho dãy tỉ số bằng nhau: $\frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$.

Tính giá trị biểu thức: $Q = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$

$$\Rightarrow 1 + \frac{a+b+c+d}{a} = 1 + \frac{a+b+c+d}{b} = 1 + \frac{a+b+c+d}{c} = 1 + \frac{a+b+c+d}{d}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c+d}{a} = \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d}. \quad (1)$$

+ Nếu $a+b+c+d \neq 0$ thì từ (1) $\Rightarrow a=b=c=d$.

Khi đó, $Q = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c} = 1+1+1+1 = 4$.

+ Với $a+b+c+d = 0 \Rightarrow \begin{cases} a+b = -(c+d) \\ b+c = -(a+d) \\ c+d = -(a+b) \\ d+a = -(b+c) \end{cases}$

Khi đó: $Q = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c} = \frac{-(c+d)}{c+d} + \frac{-(d+a)}{d+a} + \frac{-(a+b)}{a+b} + \frac{-(b+c)}{b+c} = -1-1-1-1 = -4$.

Câu 123. (HSG 7 huyện Than Uyên – Lai Châu năm 2022 - 2023)

Cho $a; b; c$ khác 0 và $\frac{a+b-c}{c} = \frac{a-b+c}{b} = \frac{b+c-a}{a}$.

Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{abc}$.

Lời giải

Vì $\frac{a+b-c}{c} = \frac{a-b+c}{b} = \frac{b+c-a}{a}$ nên:

$$\frac{a+b-c}{c} + 2 = \frac{a-b+c}{b} + 2 = \frac{b+c-a}{a} + 2 \Rightarrow \frac{a+b+c}{c} = \frac{a+b+c}{b} = \frac{b+c+a}{a}. \quad (1)$$

- Nếu $a+b+c=0$ thì $a+b=-c$; $b+c=-a$; $c+a=-b$.

$$\text{Khi đó: } A = \frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{abc} = \frac{(-c) \cdot (-b) \cdot (-a)}{abc} = -1.$$

- Nếu $a+b+c \neq 0$ thì từ (1) suy ra: $a=b=c$.

$$\text{Khi đó: } A = \frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{abc} = 8.$$

Câu 124. (HSG 7 huyện Yên Định; huyện Thanh Trì 2022 - 2023)

Cho $a, b, c > 0$ và: $\frac{2b+c-a}{a} = \frac{2c-b+a}{b} = \frac{2a+b-c}{c}$.

$$\text{Tính: } P = \frac{(3a-2b)(3b-2c)(3c-2a)}{(3a-c)(3b-a)(3c-b)}.$$

Lời giải

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có: $\frac{2b+c-a}{a} = \frac{2c-b+a}{b} = \frac{2a+b-c}{c}$

$$= \frac{(2b+c-a) + (2c-b+a) + (2a+b-c)}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2.$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} 2b+c-a=2a \\ 2c-b+a=2b \\ 2a+b-c=2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a-2b=c \\ 3b-2c=a \\ 3c-2a=b \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 3a-c=2b \\ 3b-a=2c \\ 3c-b=2a \end{cases}.$$

Khi đó ta được $P = \frac{1}{8}$.

Câu 125. (HSG 7 huyện Thường Xuân năm 2022 - 2023)

Cho x, y, z, t thỏa mãn: $\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z}$.

$$\text{Tính } P = \left(\frac{x+y}{z+t}\right)^{2020} + \left(\frac{y+z}{x+t}\right)^{2021} + \left(\frac{z+t}{x+y}\right)^{2022} + \left(\frac{t+x}{z+y}\right)^{2023}.$$

Lời giải

Ta có: $\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z}$

$$\Rightarrow \frac{x}{y+z+t} + 1 = \frac{y}{z+t+x} + 1 = \frac{z}{t+x+y} + 1 = \frac{t}{x+y+z} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+z+t}{y+z+t} = \frac{x+y+z+t}{z+t+x} = \frac{x+y+z+t}{t+x+y} = \frac{x+y+z+t}{x+y+z} \quad (1)$$

+ TH1: $x+y+z+t=0$

Từ (1) $\Rightarrow x+y=-z-t; y+z=-t-x; z+t=-y-x; t+x=-y-z$

$$\Rightarrow P = \left(\frac{x+y}{z+t}\right)^{2020} + \left(\frac{y+z}{x+t}\right)^{2021} + \left(\frac{z+t}{x+y}\right)^{2022} + \left(\frac{t+x}{z+y}\right)^{2023}$$

$$= \left(\frac{-z-t}{z+t}\right)^{2020} + \left(\frac{-x-t}{x+t}\right)^{2021} + \left(\frac{-x-y}{x+y}\right)^{2022} + \left(\frac{-y-z}{z+y}\right)^{2023}$$

$$= 1 + (-1) + 1 + (-1) = 0$$

+ TH2: $x+y+z+t \neq 0$

Từ (1) $\Rightarrow y+z+t=z+t+x=t+x+y=x+y+z \Rightarrow x=y=z=t$

Thay các biến y, z, t bởi x ta được:

$$P = \left(\frac{x+x}{x+x}\right)^{2020} + \left(\frac{x+x}{x+x}\right)^{2021} + \left(\frac{x+x}{x+x}\right)^{2022} + \left(\frac{x+x}{x+x}\right)^{2023} = 1+1+1+1=4$$

Vậy: $P=0$ hoặc $P=4$



CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS

CHƯƠNG 10: TỈ LỆ THỨC VÀ DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU

Dạng 1: Tìm số hạng chưa biết dựa vào tỉ lệ thức
Dạng 2: Chứng minh đẳng thức
Dạng 3: Chứng minh bất đẳng thức
Dạng 4: Bài toán về dãy tỉ số bằng nhau và chia tỉ lệ

Dạng 2. Chứng minh đẳng thức

Câu 1. (HSG 7 huyện Phù Cát, trường THCS Ngô Gia Tự 2017 - 2018; trường Nguyễn Du 2016 - 2017)

Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ với $a, b, c, d \neq 0; a \neq \pm b, c \neq \pm d$.

Chứng minh: $\frac{b}{b-a} = \frac{d}{d-c}$ và $\frac{c+d}{a+b} = \frac{c}{a}$

Lời giải

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow 1 - \frac{a}{b} = 1 - \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b-a}{b} = \frac{d-c}{d} \Rightarrow \frac{b}{b-a} = \frac{d}{d-c}$$

$$\text{Từ } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{d}{b} = \frac{c+d}{a+b}$$

Câu 2. (HSG 7 trường Bích Hoà; trường Thiệu Văn 2022 - 2023)

Cho $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$. Chứng minh rằng: $\frac{a-c}{a+c} = \frac{c-b}{c+b}$

Lời giải

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{b} = \frac{a-c}{c-b} = \frac{a+c}{c+b} \Rightarrow \frac{a-c}{a+c} = \frac{c-b}{c+b}$$

Câu 3. (HSG 2018 - 2019)

Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng: $\frac{5a+3b}{5a-3b} = \frac{5c+3d}{5c-3d}$

Lời giải

$$\text{Đặt } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow a = kb, c = kd$$

$$\text{Suy ra: } \frac{5a+3b}{5a-3b} = \frac{b(5k+3)}{b(5k-3)} = \frac{5k+3}{5k-3}$$

$$\text{Và } \frac{5c+3d}{5c-3d} = \frac{d(5k+3)}{d(5k-3)} = \frac{5k+3}{5k-3}$$

$$\text{Vậy } \frac{5a+3b}{5a-3b} = \frac{5c+3d}{5c-3d}$$

Câu 4. (HSG 7 Tp Ninh Bình 2022 - 2023; huyện Thanh Oai 2014 - 2015)

Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng $\frac{2a-3b}{2a+3b} = \frac{2c-3d}{2c+3d}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Cho } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} &\Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \\ \Rightarrow \frac{2a}{2c} = \frac{3b}{3d} = \frac{2a-3b}{2c-3d} = \frac{2a+3b}{2c+3d} \\ \Rightarrow \frac{2a-3b}{2a+3b} &= \frac{2c-3d}{2c+3d} \\ \text{Vậy } \frac{2a-3b}{2a+3b} &= \frac{2c-3d}{2c+3d} \end{aligned}$$

Câu 5. (HSG 7 huyện Giao Thủy 2016 - 2017)

Cho tỉ lệ thức: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (giả thiết các tỉ lệ thức đều có nghĩa).

Chứng minh rằng: $\frac{2a+3b}{2a-3b} = \frac{2c+3d}{2c-3d}$

Lời giải

Giả thiết các tỉ lệ thức đều có nghĩa, từ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{2a}{2c} = \frac{3b}{3d}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{2a}{2c} = \frac{3b}{3d} = \frac{2a+2c}{2c+3d} = \frac{2a-3b}{2c-3d} \Rightarrow \frac{2a+3b}{2a-3b} = \frac{2c+3d}{2c-3d}$$

Câu 6. (HSG 7 trường Thiệu Vận, huyện Thiệu Hóa; huyện Thường Tín 2018 - 2019)

Chứng minh rằng: Từ tỷ lệ thức $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \neq 1$ ta có tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Lời giải

$$\frac{a+b}{a-b} \neq 1 \Rightarrow b \neq 0; \frac{c+d}{c-d} \neq 1 \Rightarrow d \neq 0$$

$$\text{Vì } \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \Rightarrow (a+b)(c-d) = (a-b)(c+d)$$

$$\Rightarrow 2bc = 2ad \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (b, d \neq 0) \quad (\text{ĐPCM}).$$

Câu 7. (HSG 7 SƠN ĐỘNG 2022 - 2023)

Cho $\frac{7x+5y}{3x-7y} = \frac{7z+5t}{3z-7t}$. Chứng minh: $\frac{x}{y} = \frac{z}{t}$.

Lời giải

Đặt: $\frac{7x+5y}{3x-7y} = \frac{7z+5t}{3z-7t} = k$, ta có:

$$7x+5y = k(3x-7y) \Rightarrow (3k-7)x = (7k+5)y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{7k+5}{3k-7}. \quad (1)$$

$$7z+5t = k(3z-7t) \Rightarrow (3k-7)z = (7k+5)t \Rightarrow \frac{z}{t} = \frac{7k+5}{3k-7}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x}{y} = \frac{z}{t}$. Đây là điều phải chứng minh.

Câu 8. (HSG 7 huyện 2022 - 2023)

Chứng minh rằng từ tỉ lệ thức $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+a}{c-a}$ suy ra hệ thức $a^2 = bc$

Lời giải

Đặt $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+a}{c-a} = k$, ta có: $a+b = k(a-b)$

$$\Rightarrow a+b = ka - kb \Rightarrow a - ka = -kb - b \Leftrightarrow a(1-k) = b(-k-1)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{-k-1}{1-k} = \frac{-(k+1)}{-(k-1)} = \frac{k+1}{k-1} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{k+1}{k-1}$$

$$c+a = k(c-a) \Rightarrow c+a = kc - ka \Rightarrow c - kc = -ka - a$$

$$\Rightarrow c(1-k) = a(-k-1) \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{-k-1}{1-k} = \frac{-(k+1)}{-(k-1)} = \frac{k+1}{k-1}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{k+1}{k-1} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{a} = \frac{k+1}{k-1} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{a} \Rightarrow a^2 = bc$$

Vậy: $a^2 = bc$

Câu 9. (HSG 7 huyện Anh Sơn; huyện Phú Thiện 2015 - 2016)

Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng: $(a+2c)(b+d) = (a+c)(b+2d)$.

Lời giải

Ta có: $(a+2c)(b+d) = (a+c)(b+2d)$

$$ab + ad + 2cb + 2cd = ab + 2ad + cb + 2cd$$

$$cb = ad \text{ suy ra: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Câu 10. (HSG 7 THCS Hiền Quan, Tam Nông 2017-2018)

Cho $(a+3)(b-4) - (a-3)(b+4) = 0$. Chứng minh: $\frac{a}{3} = \frac{b}{4}$

Lời giải

$$\text{Tính được } 6a = 8b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{4}$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} = \frac{(c+d)^2}{c^2+d^2}$$

Câu 11. (HSG 7 huyện Chương Mỹ 2021 - 2022; trường THCS Thanh Oai 2018 - 2019; trườngương Sương Bình 2017 - 2018)

Chứng minh rằng: Nếu $2(x+y) = 5(y+z) = 3(z+x)$ thì $\frac{x-y}{4} = \frac{y-z}{5}$.

Lời giải

$$2(x+y) = 5(y+z) = 3(z+x)$$

$$\Rightarrow \frac{2(x+y)}{30} = \frac{5(y+z)}{30} = \frac{3(z+x)}{30} \Rightarrow \frac{x+y}{15} = \frac{y+z}{6} = \frac{z+x}{10}$$

$$\text{Biến đổi: } \frac{z+x}{10} = \frac{y+z}{6} = \frac{x-y}{4} \quad (1); \quad \frac{x+y}{15} = \frac{z+x}{10} = \frac{y-z}{5} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x-y}{4} = \frac{y-z}{5}$.

Câu 12. (HSG 7 trường Võ Thị Sáu; trường Hồng Dương, Thanh Oai 2022 - 2023; trường Điện Hồng, Thanh Oai; trường Phong Đạt 2018 - 2019; trường Thạch Bình 2017 - 2018)

Cho $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$. Chứng minh: $\left(\frac{a+b+c}{b+c+d}\right)^3 = \frac{a}{d}$.

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{a+b+c}{b+c+d}$.

Suy ra: $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \left(\frac{b}{c}\right)^3 = \left(\frac{c}{d}\right)^3 = \left(\frac{a+b+c}{b+c+d}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{d}$.

Vậy: $\left(\frac{a+b+c}{b+c+d}\right)^3 = \frac{a}{d}$ (đpcm).

Câu 13. (HSG 7 trường Lê Quý Đôn, huyện Hưng Hà 2022 - 2023; trường Hùng Thụ; đề khảo sát huyện Thái Thụy 2017 - 2018; trường Tam Hưng 2016 - 2017)

Cho a, b, c, d là 4 số khác 0, thỏa mãn điều kiện: $b^2 = ac; c^2 = bd; b^3 + c^3 + d^3 \neq 0$

Chứng minh rằng: $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3} = \frac{a}{d}$

Lời giải

Từ giả thiết: $b^2 = ac; c^2 = bd \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$

Ta có: $\frac{a^3}{b^3} = \frac{b^3}{c^3} = \frac{c^3}{d^3} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3}$ (1)

Lại có: $\frac{a^3}{b^3} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{d}$ (2)

Từ (1) và (2): $\Rightarrow \frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3} = \frac{a}{d}$

Câu 14. (HSG 7 trường Kim Trung; trường Tân Tiến, huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng: $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3} = \frac{a}{d}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \left(\frac{b}{c}\right)^3 = \left(\frac{c}{d}\right)^3 \Rightarrow \frac{a^3}{b^3} = \frac{b^3}{c^3} = \frac{c^3}{d^3}$

Áp dụng tính chất của dãy tỷ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a^3}{b^3} = \frac{b^3}{c^3} = \frac{c^3}{d^3} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3} \quad (1)$$

Lại có: $\frac{a^3}{b^3} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}$ và $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$

Do đó suy ra: $\frac{a^3}{b^3} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{d}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3} = \frac{a}{d}$.

Câu 15. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Trần Thủ Độ 2022 - 2023)

Cho $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ (Giả sử các tỉ số đều có nghĩa).

Chứng minh rằng $\left(\frac{a+b+c}{b+c+d}\right)^3 = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3}$.

Lời giải

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{a+b+c}{b+c+d} \Rightarrow \frac{a^3}{b^3} = \frac{b^3}{c^3} = \frac{c^3}{d^3} = \left(\frac{a+b+c}{b+c+d}\right)^3 \quad (1)$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a^3}{b^3} = \frac{b^3}{c^3} = \frac{c^3}{d^3} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \left(\frac{a+b+c}{b+c+d}\right)^3 = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3}$.

Câu 16. (HSG 7 huyện Hoàng Hoá 2018 - 2019)

Cho $b^2 = ac$, $c^2 = bd$. Với $b, c, d \neq 0$, $b+c \neq d$, $b^5 + c^5 \neq d^5$.

Chứng minh: $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 - d^3} = \left(\frac{a+b-c}{b+c-d}\right)^3$.

Lời giải

Từ $b^2 = ac \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ (1); $c^2 = bd \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{a+b-c}{b+c-d}$
 $\Rightarrow \left(\frac{a+b-c}{b+c-d}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3} = \frac{b^3}{c^3} = \frac{c^3}{d^3} = \frac{a^3 + b^3 - c^3}{b^3 + c^3 - d^3}$

Vậy $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 - d^3} = \left(\frac{a+b-c}{b+c-d}\right)^3$.

Câu 17. (HSG 7 huyện Tam Dương, 2021 - 2022)

Cho a, b, c, d là các số khác 0 thỏa mãn $b^2 = ac$; $c^2 = bd$; $b^3 + 27c^3 + 8d^3 \neq 0$.

Chứng minh rằng $\frac{a}{d} = \frac{a^3 + 27b^3 + 8c^3}{b^3 + 27c^3 + 8d^3}$.

Lời giải

Do $b^2 = ac \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{a}{b}$ (1) và $c^2 = bd \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{b}{c}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{3b}{3c} = \frac{2c}{2d}$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} = \left(\frac{3b}{3c}\right)^3 = \left(\frac{2c}{2d}\right)^3$$

Hay $\frac{a}{d} = \frac{a^3}{b^3} = \frac{27b^3}{27c^3} = \frac{8c^3}{8d^3}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{a}{d} = \frac{a^3}{b^3} = \frac{27b^3}{27c^3} = \frac{8c^3}{8d^3} = \frac{a^3 + 27b^3 + 8c^3}{b^3 + 27c^3 + 8d^3}$$

Vậy $\frac{a}{d} = \frac{a^3 + 27b^3 + 8c^3}{b^3 + 27c^3 + 8d^3}$

Câu 18. (HSG 7 huyện Nguyệt Ấn, Tp Vinh 2022 - 2023)

Cho $b^2 = ac; c^2 = bd$ (a, b, c, d và $12b + 3c - 5d \neq 0$).

Chứng minh: $\left(\frac{12a + 3b - 5c}{12b + 3c - 5d}\right)^3 = \frac{a}{d}$

Lời giải

Ta có $b^2 = ac \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ (1) và $c^2 = bd \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{12a + 3b - 5c}{12b + 3c - 5d} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \left(\frac{12a + 3b - 5c}{12b + 3c - 5d}\right)^3 \quad (3)$$

Mặt khác: $\Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{d}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $\left(\frac{12a + 3b - 5c}{12b + 3c - 5d}\right)^3 = \frac{a}{d}$ (đpcm)

Câu 19. (HSG 7 huyện Tam Điệp 2021 - 2022)

Cho $a, b, c \neq 0$ thỏa mãn $b^2 = ac$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{c} = \frac{(a + 2022b)^2}{(b + 2022c)^2}$

Lời giải

Ta có $b^2 = ac \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{2022b}{2022c}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{b} = \frac{2022b}{2022c} = \frac{a + 2022b}{b + 2022c} \Rightarrow \frac{(a + 2022b)^2}{(b + 2022c)^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$$

Vậy $\frac{a}{c} = \frac{(a + 2022b)^2}{(b + 2022c)^2}$.

Câu 20. (HSG 7 huyện Tam Nông 2018 - 2019)

Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (giả thiết các tỉ lệ đều có nghĩa). Chứng minh rằng

a) $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$

b) $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$

Lời giải

a) Đặt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ ta có: $a = kb$; $c = kd$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{k.b}{k.b+b} = \frac{k.b}{(k+1)b} = \frac{k}{k+1}$$

$$\frac{c}{c+d} = \frac{kd}{kd+d} = \frac{kd}{(k+1)d} = \frac{k}{k+1}$$

Vậy $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$.

b) $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2 = \frac{(kb+b)^2}{(kd+d)^2} = \frac{(k+1)^2 \cdot b^2}{(k+1)^2 \cdot d^2} = \frac{b^2}{d^2}$ (1)

$$\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} = \frac{(kb)^2+b^2}{(kd)^2+d^2} = \frac{k^2b^2+b^2}{k^2d^2+d^2} = \frac{(k^2+1)b^2}{(k^2+1)d^2} = \frac{b^2}{d^2}$$
 (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$.

Câu 21. (HSG 7 trường Nguyễn Trãi, Thường Tín; trường Bích Hòa; trường Thiệu Vân; huyện Nam Đàn 2022 - 2023; trường Nguyễn Trung Trực, quận Tân Bình; trường Cù Chính Lan 2018 - 2019)

Cho $c^2 = ab$. Chứng minh rằng:

a) $\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2} = \frac{a}{b}$

b) $\frac{b^2-a^2}{a^2+c^2} = \frac{b-a}{a}$

Lời giải

a) Từ $\frac{a}{c} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \left(\frac{c}{b}\right)^2$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a^2}{c^2} = \frac{c^2}{b^2} = \frac{a^2+c^2}{c^2+b^2} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a^2+c^2}{b^2+c^2} \text{ (đpcm).}$$

b) Áp dụng chứng minh phần a) ta có:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a^2+c^2}{b^2+c^2} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{b^2+c^2}{a^2+c^2} \Rightarrow \frac{b}{a} - 1 = \frac{b^2+c^2}{a^2+c^2} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} - \frac{a}{a} = \frac{b^2 + c^2}{a^2 + c^2} - \frac{a^2 + c^2}{a^2 + c^2} \Rightarrow \frac{b-a}{a} = \frac{b^2 + c^2 - a^2 - c^2}{a^2 + c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{a} = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + c^2} \text{ (điều phải chứng minh)}$$

Câu 22. (HSG 7 trường Nguyễn Trực 2017 - 2018)

Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng:

a) $\frac{a^2 - b^2}{ab} = \frac{c^2 - d^2}{cd}$;

b) $\frac{(a+b)^2}{a^2 + b^2} = \frac{(c+d)^2}{c^2 + d^2}$

Lời giải

a) Đặt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow a = bk ; c = dk$

$$VT = \frac{a^2 - b^2}{ab} = \frac{b^2 k^2 - b^2}{b^2 k} = \frac{k^2 - 1}{k} \quad (1)$$

$$VP = \frac{c^2 - d^2}{cd} = \frac{d^2 k^2 - d^2}{d^2 k} = \frac{k^2 - 1}{k} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{a^2 - b^2}{ab} = \frac{c^2 - d^2}{cd}$

b) Ta có: $VT = \frac{(a+b)^2}{a^2 + b^2} = \frac{(bk + b)^2}{b^2 k^2 + b^2} = \frac{b^2 (k+1)^2}{b^2 (k^2 + 1)} = \frac{(k+1)^2}{k^2 + 1} \quad (1)$

$$VP = \frac{(c+d)^2}{c^2 + d^2} = \frac{(dk + d)^2}{d^2 k^2 + d^2} = \frac{(k+1)^2}{k^2 + 1} \quad (2)$$

Câu 23. (HSG 7 huyện Bảo Thắng 2022 - 2023; trường Kỳ Xuân, Chương Mỹ; trường Tri Thức, Đồng Nai; huyện An Nhơn 2021 - 2022; trường Bảo Phương; trường Thanh Thủy 2018 - 2019)

Cho $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{b}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{a}{c} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{a^2}{c^2} = \frac{c^2}{b^2}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có: $\frac{a^2}{c^2} = \frac{c^2}{b^2} = \frac{a^2 + c^2}{c^2 + b^2} \quad (1)$

Lại có: $\frac{a^2}{c^2} = \frac{a}{c} \cdot \frac{a}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{b}$.

Câu 24. (HSG 7 huyện Thanh Oai 2014 - 2015)

Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ với $b \neq 0; d \neq 0$. Chứng minh rằng $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2} = \frac{ac}{bd}$.

Lời giải

Ta có $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = \frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2}$ (1)

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = \frac{ac}{bd}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2} = \frac{ac}{bd}$.

Câu 25. (HSG 7 huyện Nga Sơn 2016 - 2017)

Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng: $\frac{ab}{cd} = \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$

Lời giải

Ta có: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d}$

$\Rightarrow \frac{a \cdot b}{c \cdot d} = \frac{a+b}{c+d} \cdot \frac{a+b}{c+d} \Rightarrow \frac{a \cdot b}{c \cdot d} = \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$

Câu 26. (HSG 7 Nga Sơn, Thanh Hóa năm 2022 - 2023)

Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng $\frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{2022a^2 + 2023c^2}{2022b^2 + 2023d^2}$.

Lời giải

Ta có $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{c}{d}\right)^2 \Rightarrow \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}$

$\Rightarrow \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{2022a^2}{2022b^2} = \frac{2023c^2}{2023d^2} = \frac{2022a^2 + 2023c^2}{2022b^2 + 2023d^2}$

Vậy $\frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{2022a^2 + 2023c^2}{2022b^2 + 2023d^2}$.

Câu 27. (HSG 7 Hưng Hà năm 2022 - 2023; trường Phương Chung 2018 - 2019)

Cho tỉ lệ thức: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, với điều kiện mẫu thức xác định.

Chứng minh rằng: $\frac{2a^2 - 3ab + 5b^2}{2b^2 + 3ab} = \frac{2c^2 - 3cd + 5d^2}{2d^2 + 3cd}$.

Lời giải

Đặt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ ta có $a = bk, c = dk$

Thay $a = bk, c = dk$ ta có:

$$\frac{2a^2 - 3ab + 5b^2}{2b^2 + 3ab} = \frac{2(bk)^2 - 3(bk).b + 5b^2}{2b^2 + 3bk.b} = \frac{b^2 \cdot (2k^2 - 3k + 5)}{b^2(2 + 3k)} = \frac{2k^2 - 3k + 5}{2 + 3k}$$

$$\frac{2c^2 - 3cd + 5d^2}{2d^2 + 3cd} = \frac{2(dk)^2 - 3(dk)d + 5d^2}{2d^2 + 3(dk)d} = \frac{d^2(2k^2 - 3k + 5)}{d^2 \cdot (2 + 3k)} = \frac{2k^2 - 3k + 5}{2 + 3k}$$

$$\text{Vậy } \frac{2a^2 - 3ab + 5b^2}{2b^2 + 3ab} = \frac{2c^2 - 3cd + 5d^2}{2d^2 + 3cd}$$

Câu 28. (HSG 7 trường Hoàng Quyên, huyện Phú Lý; huyện Sơn Tây 2018 - 2019)

Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng: $(a + 2c) \cdot (b + d) = (a + c) \cdot (b + 2d)$

Lời giải

$$\text{Vì } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2c}{2d} = \frac{a + 2c}{b + 2d} \quad (1)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{a + c}{b + d} = \frac{a + 2c}{b + 2d} \Rightarrow (a + 2c) \cdot (b + d) = (a + c) \cdot (b + 2d)$$

Câu 29. (HSG 7 huyện Hiệp Hoà, năm học 2022 - 2023)

Cho các số thực a, b, c, d dương khác nhau thỏa mãn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

$$\text{Chứng minh } \frac{a^2 - c^2}{b^2 - d^2} = \frac{3a^2 + 2c^2}{3b^2 + 2d^2}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = \frac{a^2 - c^2}{b^2 - d^2} = \frac{3a^2 + 2c^2}{3b^2 + 2d^2}$$

$$\text{Do đó: } \frac{a^2 - c^2}{b^2 - d^2} = \frac{3a^2 + 2c^2}{3b^2 + 2d^2}$$

$$\text{Vậy: } \frac{a^2 - c^2}{b^2 - d^2} = \frac{3a^2 + 2c^2}{3b^2 + 2d^2}$$

Câu 30. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Bùi Hữu Diên 2022 - 2023)

Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, hãy suy ra tỉ lệ thức $\frac{7a^2 + 8ab}{13a^2 - 6b^2} = \frac{7c^2 + 8cd}{13c^2 - 6d^2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{d^2}$$

$$\text{Lại có } \frac{a^2}{c^2} = \frac{a}{c} \cdot \frac{a}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$$

Do đó $\frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{d^2} = \frac{ab}{cd}$

Suy ra $\frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{d^2} = \frac{ab}{cd} = \frac{7a^2}{7c^2} = \frac{13a^2}{13c^2} = \frac{6b^2}{6d^2} = \frac{8ab}{8cd}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{7a^2}{7c^2} = \frac{13a^2}{13c^2} = \frac{6b^2}{6d^2} = \frac{8ab}{8cd} = \frac{7a^2 + 8ab}{7c^2 + 8cd} = \frac{13a^2 - 6b^2}{13c^2 - 6d^2}$$

Từ $\frac{7a^2 + 8ab}{7c^2 + 8cd} = \frac{13a^2 - 6b^2}{13c^2 - 6d^2} \Rightarrow \frac{7a^2 + 8ab}{13a^2 - 6b^2} = \frac{7c^2 + 8cd}{13c^2 - 6d^2}$ (đpcm).

Câu 31. (HSG 7 huyện Bát Xát 2022 - 2023)

Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng: $\frac{7a^2 + 3ab}{11a^2 - 8b^2} = \frac{7c^2 + 3cd}{11c^2 - 8d^2}$.

Lời giải

Từ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{d^2} = \frac{7a^2}{7c^2} = \frac{b}{d} \cdot \frac{b}{d} = \frac{b}{d} \cdot \frac{a}{c} = \frac{ab}{dc} = \frac{3ab}{3cd} = \frac{7a^2 + 3ab}{7c^2 + 3cd} \quad (1)$$

Lại có: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{d^2} = \frac{11a^2}{11c^2} = \frac{8b^2}{8d^2} = \frac{11a^2 - 8b^2}{11c^2 - 8d^2} \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{7a^2 + 3ab}{7c^2 + 3cd} = \frac{11a^2 - 8b^2}{11c^2 - 8d^2} \Rightarrow \frac{7a^2 + 3ab}{11a^2 - 8b^2} = \frac{7c^2 + 3cd}{11c^2 - 8d^2}$ (đpcm)

Câu 32. (HSG 7 huyện Nghĩa dân, năm học 2022 - 2023)

Cho $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (với a, b, c, d khác 0). Chứng minh rằng: $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}$

Lời giải

Cho $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (với a, b, c, d khác 0). Chứng minh rằng: $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}$

Đặt $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = k \Rightarrow a = ck; b = dk$ (*)

Lần lượt thay (*) vào vế trái và vế phải của đẳng thức cần chứng minh, ta có:

$$+) \left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2 = \left(\frac{ck+dk}{c+d}\right)^2 = \left(\frac{(c+d)k}{c+d}\right)^2 = k^2 \quad (1)$$

$$+) \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2} = \frac{(ck)^2 + (dk)^2}{c^2 + d^2} = \frac{(c^2 + d^2)k^2}{c^2 + d^2} = k^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}$ (đpcm)

Câu 33. (HSG 7 trường Phú trường; huyện Thanh Oai 2022 - 2023; huyện Ứng Hòa 2021 - 2022; trường Kim An 2017 - 2018)

Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng: $\frac{3a^6 + c^6}{3b^6 + d^6} = \frac{(a+c)^6}{(b+d)^6}$ (với $b+d \neq 0$).

Lời giải

Với $b+d \neq 0$ ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} &\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \\ \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^6 &= \left(\frac{c}{d}\right)^6 = \left(\frac{a+c}{b+d}\right)^6 \Rightarrow \frac{a^6}{b^6} = \frac{c^6}{d^6} = \frac{(a+c)^6}{(b+d)^6} \Rightarrow \frac{3a^6}{3b^6} = \frac{c^6}{d^6} = \frac{(a+c)^6}{(b+d)^6} \\ \Rightarrow \frac{3a^6 + c^6}{3b^6 + d^6} &= \frac{(a+c)^6}{(b+d)^6} \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

Câu 34. (HSG 7 trường Vạn Long; trường Thống Nhất 2022 - 2023; trường Tôn Đức Thắng 2018 - 2019; trường Trần Hưng Đạo; trường Trường Sa 2017-2018; trường Nguyễn Khuyến 2015-2016)

Cho bốn số dương a, b, c, d thỏa điều kiện $a+c=2b$ và $c(b+d)=2bd$.

Chứng minh $\left(\frac{a+c}{b+d}\right)^8 = \frac{a^8 + b^8}{b^8 + d^8}$

Lời giải

$$\text{Từ } c(b+d) = 2bd \Rightarrow b+d = \frac{2bd}{c}$$

Mà $a+c=2b$

$$\text{nên } \frac{a+c}{b+d} = \frac{2b}{\frac{2bd}{c}} = \frac{2bc}{2bd} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$$

$$\Rightarrow d(a+c) = c(b+d) \Rightarrow ad + cd = bc + cd \Rightarrow ad = bc$$

Vì $a, b, c, d > 0$ nên $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a+c}{b+d}\right)^8 = \frac{a^8}{b^8} = \frac{c^8}{d^8} = \frac{a^8 + c^8}{b^8 + d^8}$$

Câu 35. (HSG 7 huyện Phú Lý, trường Hoàng Quyên 2018 - 2019; trường Tân Ước, Thanh Oai 2013 - 2014)

Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng: $\frac{a^{1005} + b^{1005}}{c^{1005} + d^{1005}} = \frac{(a+b)^{1005}}{(c+d)^{1005}}$

Lời giải

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d} \Rightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^{1005} = \left(\frac{b}{d}\right)^{1005} = \left(\frac{a+b}{c+d}\right)^{1005}$$

$$\Rightarrow \frac{a^{1005}}{c^{1005}} = \frac{b^{1005}}{d^{1005}} = \frac{(a+b)^{1005}}{(c+d)^{1005}} \quad (\text{theo tính chất Dãy tỉ số bằng nhau}) \quad (1)$$

$$\text{Mà } \frac{a^{1005}}{c^{1005}} = \frac{b^{1005}}{d^{1005}} = \frac{a^{1005} + b^{1005}}{c^{1005} + d^{1005}} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{a^{1005} + b^{1005}}{c^{1005} + d^{1005}} = \frac{(a+b)^{1005}}{(c+d)^{1005}} \quad (\text{đpcm})$$

Câu 36. (HSG 7 Cẩm Thủy, Thanh Hóa năm 2022 - 2023; trường Ngô Gia Tự, huyện Phù Cát 2017 - 2018; trường Nguyễn Du 2016 - 2017)

Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ với $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0, a \neq \pm b, c \neq \pm d$.

$$\text{Chứng minh: } \left(\frac{a-b}{c-d}\right)^{2013} = \frac{a^{2013} + b^{2013}}{c^{2013} + d^{2013}}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{2013} = \left(\frac{c}{d}\right)^{2013} = \left(\frac{a-c}{b-d}\right)^{2013} \quad (1)$$

$$\text{Mà: } \left(\frac{a}{b}\right)^{2013} = \left(\frac{c}{d}\right)^{2013} = \frac{a^{2013}}{b^{2013}} = \frac{c^{2013}}{d^{2013}} = \frac{a^{2013} + c^{2013}}{b^{2013} + d^{2013}} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow \left(\frac{a-b}{c-d}\right)^{2013} = \frac{a^{2013} + b^{2013}}{c^{2013} + d^{2013}} \quad (\text{đpcm})$$

Câu 37. (HSG TP LÀO CAI 2022 - 2023)

Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ với $b, d \neq 0; c \neq -d$. Chứng minh $\frac{a^{2022} + b^{2022}}{c^{2022} + d^{2022}} = \frac{(a+b)^{2022}}{(c+d)^{2022}}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d} \Rightarrow \frac{a^{2022}}{c^{2022}} = \frac{b^{2022}}{d^{2022}} = \frac{(a+b)^{2022}}{(c+d)^{2022}} \quad (1)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a^{2022}}{c^{2022}} = \frac{b^{2022}}{d^{2022}} = \frac{a^{2022} + b^{2022}}{c^{2022} + d^{2022}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra được $\frac{a^{2022} + b^{2022}}{c^{2022} + d^{2022}} = \frac{(a+b)^{2022}}{(c+d)^{2022}}$ điều phải chứng minh.

Câu 38. (HSG 7 huyện Gia Viễn, tỉnh Ninh Bình, năm học 2022 - 2023)

Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, với $b \neq 0, d \neq 0; c \neq d$. Chứng minh rằng $\frac{(a-b)^{2023}}{a^{2023} - b^{2023}} = \frac{(c-d)^{2023}}{c^{2023} - d^{2023}}$.

Lời giải

Với $b \neq 0, d \neq 0; c \neq d$, thì

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a-b}{c-d} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{a^{2023}}{c^{2023}} = \frac{b^{2023}}{d^{2023}} = \frac{(a-b)^{2023}}{(c-d)^{2023}} \quad (2)$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a^{2023}}{c^{2023}} = \frac{b^{2023}}{d^{2023}} = \frac{(a-b)^{2023}}{(c-d)^{2023}} = \frac{a^{2023} - b^{2023}}{c^{2023} - d^{2023}}$$

$$\Rightarrow \frac{(a-b)^{2023}}{a^{2023} - b^{2023}} = \frac{(c-d)^{2023}}{c^{2023} - d^{2023}}$$

Câu 39. (HSG 7 huyện Kinh Môn 2018 - 2019)

Cho các số dương a, b, c, d ($c \neq d$) và $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

$$\text{CMR: } \frac{(a^{2018} + b^{2018})^{2019}}{(c^{2018} + d^{2018})^{2019}} = \frac{(a^{2019} - b^{2019})^{2018}}{(c^{2019} - d^{2019})^{2018}}$$

Lời giải

Với $a, b, c, d > 0, c \neq d$ ta có: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a^{2018}}{c^{2018}} = \frac{b^{2018}}{d^{2018}}$

$$\text{Do đó } \frac{a^{2018}}{c^{2018}} = \frac{b^{2018}}{d^{2018}} = \frac{a^{2018} + b^{2018}}{c^{2018} + d^{2018}}$$

$$\Rightarrow \frac{(a^{2018})^{2019}}{(c^{2018})^{2019}} = \frac{(a^{2018} + b^{2018})^{2019}}{(c^{2018} + d^{2018})^{2019}} \quad (1)$$

Lại có: $a, b, c, d > 0, c \neq d$, ta có:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a^{2019}}{c^{2019}} = \frac{b^{2019}}{d^{2019}} = \frac{a^{2019} - b^{2019}}{c^{2019} - d^{2019}}$$

$$\Rightarrow \frac{(a^{2019})^{2018}}{(c^{2019})^{2018}} = \frac{(a^{2019} - b^{2019})^{2018}}{(c^{2019} - d^{2019})^{2018}} \quad (2)$$

$$\text{Mà } \frac{(a^{2018})^{2019}}{(c^{2018})^{2019}} = \frac{(a^{2019})^{2018}}{(c^{2019})^{2018}} = \frac{a^{2019 \cdot 2018}}{c^{2019 \cdot 2018}} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3)} \Rightarrow \frac{(a^{2018} + b^{2018})^{2019}}{(c^{2018} + d^{2018})^{2019}} = \frac{(a^{2019} - b^{2019})^{2018}}{(c^{2019} - d^{2019})^{2018}}.$$

Câu 40. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Cao Dương – đề Olympic. 2016 - 2017)

Cho các số a, b, c, d với $a + b + c + d \neq 0$ thỏa mãn

$$\frac{b+c+d}{a} = \frac{c+d+a}{b} = \frac{a+b+d}{c} = \frac{a+b+c}{d} = k. \text{ Tính giá trị của } k.$$

Lời giải

Với $a + b + c + d \neq 0$ theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{b+c+d}{a} = \frac{c+d+a}{b} = \frac{a+b+d}{c} = \frac{a+b+c}{d} = \frac{3a+3b+3c+3d}{a+b+c+d} = \frac{3(a+b+c+d)}{a+b+c+d} = 3$$

$$\Rightarrow k=3$$

Câu 41. (HSG 7 huyện Cát Tiên 2018 - 2019; huyện Cẩm Khê 2017 - 2018; huyện Tân Kỳ 2015 - 2016)

Cho các số thực $a; b; c; d; e$ khác 0 thỏa mãn $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2a^4 + 3b^4 + 4c^4 + 5d^4}{2b^4 + 3c^4 + 4d^4 + 5e^4} = \frac{a}{e}$$

Lời giải

Ta có $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{e} = \frac{a}{e}$

Ta lại có: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e}$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{e} = \frac{a^4}{b^4} = \frac{b^4}{c^4} = \frac{c^4}{d^4} = \frac{d^4}{e^4}$$

$$= \frac{2a^4}{2b^4} = \frac{3b^4}{3c^4} = \frac{4c^4}{4d^4} = \frac{5d^4}{5e^4} = \frac{2a^4 + 3b^4 + 4c^4 + 5d^4}{2b^4 + 3c^4 + 4d^4 + 5e^4}$$

Vậy suy ra $\frac{2a^4 + 3b^4 + 4c^4 + 5d^4}{2b^4 + 3c^4 + 4d^4 + 5e^4} = \frac{a}{e}$ (ĐPCM).

Câu 42. (HSG 7 trường Thiệu Vũ, huyện Thiệu Hóa; huyện Quỳnh Phụ 2022 - 2023; huyện Tân Kỳ 2021 - 2022; huyện Hoài Nhơn 2018 - 2019; huyện Thanh Hà 2016 - 2017)

Cho $\frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$. Chứng minh $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$.

Lời giải

Ta có $\frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$

$$= \frac{12x-8y}{16} = \frac{6z-12x}{9} = \frac{8y-6z}{4} = \frac{12x-8y+6z-12x+8y-6z}{16+9+4} = 0.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x-2y=0 \\ 2z-4x=0 \\ 4y-3z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x=2y \\ 2z=4x \\ 4y=3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ \frac{x}{2} = \frac{z}{4} \\ \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$$

Vậy: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$

Câu 43. (HSG 7 trường Lê Hồng Phong 2018 - 2019)

Biết rằng: $\frac{bz-cy}{a} = \frac{cx-az}{b} = \frac{ay-bx}{c}$. Chứng minh: $x:y:z = a:b:c$

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{bz - cy}{a} = \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c} = \frac{abz - acy}{a^2} = \frac{bcx - abz}{b^2} = \frac{acy - bcz}{c^2}$$

$$= \frac{abz - acy + bcx - abz + acy - bcx}{a^2 + b^2 + c^2} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} bz - cy = 0 \\ cx - az = 0 \\ ay - bx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bz = cy \\ cx = az \\ ay = bx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{z}{c} = \frac{y}{b} \\ \frac{x}{a} = \frac{z}{c} \\ \frac{y}{b} = \frac{x}{a} \end{cases} \Rightarrow \frac{z}{c} = \frac{y}{b} = \frac{x}{a}$$

$$\Rightarrow x : y : z = a : b : c \text{ (đpcm)}$$

Câu 44. (HSG 7 huyện Đông Hưng năm 2022 - 2023; thị xã Sầm Sơn 2017 - 2018)

Biết: $\frac{bz - cy}{a} = \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c}$ ($a, b, c \neq 0$). Chứng minh rằng: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có: $a, b, c \neq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ và

$$\frac{bz - cy}{a} = \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c} = \frac{a(bz - cy)}{a^2} = \frac{b(cx - az)}{b^2} = \frac{c(ay - bx)}{c^2}.$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a(bz - cy)}{a^2} = \frac{b(cx - az)}{b^2} = \frac{c(ay - bx)}{c^2} = \frac{0}{a^2 + b^2 + c^2} = 0.$$

$$\text{Suy ra: } bz - cy = 0 \Rightarrow \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{z}{c} = \frac{x}{a}; \frac{x}{a} = \frac{y}{b}.$$

$$\text{Suy ra: } \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

Câu 45. (HSG 7 TP Vũng Tàu, 2021 - 2022)

Cho $\frac{bz - cy}{a} = \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c}$. Chứng tỏ rằng $\frac{x^{2022} + y^{2022} + z^{2022}}{a^{2022} + b^{2022} + c^{2022}} = \frac{(x + y + z)^{2022}}{(a + b + c)^{2022}}$

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{bz - cy}{a} = \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{abz - acy}{a^2} = \frac{bcx - baz}{b^2} = \frac{cay - cbx}{c^2} = \frac{abz - acy + bcx - baz + cay - cbx}{a^2 + b^2 + c^2} = 0$$

$$\Rightarrow bz - cy = cx - az = ay - bx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x + y + z}{a + b + c}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^{2022} = \left(\frac{y}{b}\right)^{2022} = \left(\frac{z}{c}\right)^{2022} = \left(\frac{x + y + z}{a + b + c}\right)^{2022}$$

$$\Rightarrow \frac{x^{2022} + y^{2022} + z^{2022}}{a^{2022} + b^{2022} + c^{2022}} = \frac{(x + y + z)^{2022}}{(a + b + c)^{2022}}$$

$$\text{Vậy } \frac{x^{2022} + y^{2022} + z^{2022}}{a^{2022} + b^{2022} + c^{2022}} = \frac{(x + y + z)^{2022}}{(a + b + c)^{2022}}$$

Câu 46. (HSG 7 huyện Thanh Ba, 2021 - 2022)

Cho 3 số x, y, z thỏa mãn: $\frac{x}{2020} = \frac{y}{2021} = \frac{z}{2022}$.

Chứng minh rằng $(x - z)^3 = 8(x - y)^2 \cdot (y - z)$

Lời giải

$$\frac{x}{2020} = \frac{y}{2021} = \frac{z}{2022} \Rightarrow \frac{x - z}{2020 - 2022} = \frac{x - y}{2020 - 2021} = \frac{y - z}{2021 - 2022}$$

$$\Rightarrow \frac{x - z}{-2} = \frac{x - y}{-1} = \frac{y - z}{-1}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x - z}{-2}\right)^3 = \left(\frac{x - y}{-1}\right)^3$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x - z}{-2}\right)^3 = \left(\frac{x - y}{-1}\right)^2 \cdot \left(\frac{y - z}{-1}\right) \quad (\text{vì } \frac{x - y}{-1} = \frac{y - z}{-1})$$

$$\Rightarrow \frac{(x - z)^3}{(-2)^3} = \frac{(x - y)^2}{(-1)^2} \cdot \frac{y - z}{-1}$$

$$\Rightarrow (x - z)^3 = 8(x - y)^2 (y - z) \quad (\text{đpcm})$$

Câu 47. (HSG 7 Thanh Hóa lần 2 năm 2022 - 2023)

Cho các số a, b, c thỏa mãn: $\frac{a}{2021} = \frac{b}{2020} = \frac{c}{2019}$.

Chứng minh rằng: $4(a - b)(b - c) = (a - c)^2$.

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{2021} = \frac{b}{2020} = \frac{c}{2019} = \frac{a - b}{1} = \frac{b - c}{1} = \frac{a - c}{2}$$

Suy ra: $2(a - b) = a - c$ và $2(b - c) = a - c$.

Nhân vế với vế ta có: $4(a - b)(b - c) = (a - c)^2$ (đpcm).

Câu 48. (HSG 7 trường Thái Phương, huyện Hưng Hà năm học 2022 - 2023)

Cho $\frac{x}{2022} = \frac{y}{2023} = \frac{z}{2024}$. Chứng minh rằng: $4(x - y)(y - z) = (z - x)^2$

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{2020} = \frac{y}{2021} = \frac{z}{2022} = \frac{x - y}{-1} = \frac{y - z}{-1} = \frac{z - x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-y)^2}{1} = \frac{(z-x)^2}{4}$$

$$\Rightarrow 4(x-y)^2 = (z-x)^2$$

$$\Rightarrow 4(x-y)(x-y) = (z-x)^2$$

Mà $\frac{x-y}{-1} = \frac{y-z}{-1} \Rightarrow (x-y) = (y-z)$

Do đó $4(x-y)(y-z) = (z-x)^2$

Vậy $4(x-y)(y-z) = (z-x)^2$ (đpcm)

Câu 49. (HSG 7 huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Cho ba số thực a, b, c biết: $\frac{a}{2021} = \frac{b}{2022} = \frac{c}{2023}$.

Chứng minh rằng: $4(a-b)(b-c) = (c-a)^2$.

Lời giải

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{2021} = \frac{b}{2022} = \frac{c}{2023} = \frac{a-b}{-1} = \frac{b-c}{-1} = \frac{c-a}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(a-b)^2}{1} = \frac{(c-a)^2}{4}$$

$$\Rightarrow 4(a-b)^2 = (c-a)^2 \Rightarrow 4(a-b)(a-b) = (c-a)^2. \quad (1)$$

Mà $\frac{a-b}{-1} = \frac{b-c}{-1} \Rightarrow (a-b) = (b-c)$

nên từ (1) suy ra: $4(a-b)(b-c) = (c-a)^2$.

Vậy $4(a-b)(b-c) = (c-a)^2$ (đpcm).

Câu 50. (HSG 7 huyện Lâm Thao 2022 - 2023)

Cho 3 số a, b, c thỏa mãn $\frac{a}{2021} = \frac{b}{2022} = \frac{c}{2023}$.

Chứng minh rằng $(a-c)^3 = 8(a-b)^2 \cdot (b-c)$

Lời giải

Ta có $\frac{a}{2021} = \frac{b}{2022} = \frac{c}{2023}$

$$\Rightarrow \frac{a-c}{2021-2023} = \frac{a-b}{2021-2022} = \frac{b-c}{2022-2023}$$

$$\Rightarrow \frac{a-c}{-2} = \frac{a-b}{-1} = \frac{b-c}{-1}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a-c}{-2}\right)^3 = \left(\frac{a-b}{-1}\right)^2 \cdot \left(\frac{b-c}{-1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{(a-c)^3}{(-2)^3} = \frac{(a-b)^2}{(-1)^2} \cdot \left(\frac{b-c}{-1} \right)$$

$$\Rightarrow (a-c)^3 = 8(a-b)^2(b-c)$$

Câu 51. (HSG 7 Hưng Hà năm 2022 - 2023; huyện Lục Ngạn 2020 - 2021; huyện Việt Yên 2017 - 2018)

Cho dãy tỉ số bằng nhau: $\frac{ab+ac}{2} = \frac{bc+ba}{3} = \frac{ca+cb}{4}$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{15}$

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{ab+ac}{2} &= \frac{bc+ba}{3} = \frac{ca+cb}{4} = \frac{ab+ac-(bc+ba)+ca+cb}{2-3+4} \\ &= \frac{ab+ac+bc+ba-(ca+cb)}{2+3-4} = \frac{-(ab+ac)+bc+ba+ca+cb}{-2+3+4} = \frac{2ac}{3} = \frac{2ab}{1} = \frac{2bc}{5} \end{aligned}$$

$$\text{Từ } \frac{2ac}{3} = \frac{2ab}{1} \Rightarrow \frac{c}{3} = b \Rightarrow \frac{c}{15} = \frac{b}{5}$$

$$\frac{2ac}{3} = \frac{2bc}{5} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{5}$$

$$\text{Do đó } \frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{15}. \text{ (đpcm)}$$

Câu 52. (HSG 7 trường Trường Yên, huyện Chương Mỹ; huyện Hương Sơn; huyện Tam Dương 2022 - 2023; huyện Thái Thụy; huyện Như Thanh 2021 - 2022; huyện Tân Tạo; huyện Phú Khánh 2018 - 2019; huyện Sông Lô 2017 - 2018; huyện Minh An 2016 - 2017)

Cho dãy tỉ số bằng nhau $\frac{2bz-3cy}{a} = \frac{3cx-az}{2b} = \frac{ay-2bx}{3c}$ (với $a, b, c \neq 0$).

Chứng minh $\frac{x}{a} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{2bz-3cy}{a} &= \frac{3cx-az}{2b} = \frac{ay-2bx}{3c} \text{ và } a, b, c \neq 0 \\ &= \frac{a(2bz-3cy)}{a.a} = \frac{2b(3cx-az)}{2b.2b} = \frac{3c(ay-2bx)}{3c.3c} \\ &= \frac{2abz-3acy}{a^2} = \frac{6bcx-2abz}{4b^2} = \frac{3acy-6bcx}{9c^2} \\ &= \frac{2abz-3acy+6bcx-2abz+3acy-6bcx}{a^2+4b^2+9c^2} = 0 \end{aligned}$$

(Vì $a, b, c \neq 0$ nên $a^2+4b^2+9c^2 \neq 0$)

$$* \frac{2bz-3cy}{a} = 0 \Rightarrow 2bz-3cy=0 \Rightarrow \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c} \quad (1)$$

$$* \frac{3cx-az}{2b} = 0 \Rightarrow 3cx-az=0 \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{z}{3c} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x}{a} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c}$ (đpcm).

Câu 53. (HSG 7 huyện Cẩm Khê năm 2022 - 2023; huyện Thái Thụy 2018 - 2019)

Cho x, y, z, a, b, c thỏa mãn $\frac{x}{a+2b+c} = \frac{y}{2a+b-c} = \frac{z}{4a-4b+c}$

Chứng minh rằng: $\frac{a}{x+2y+z} = \frac{b}{2x+y-z} = \frac{c}{4x-4y+z}$ (với điều kiện các mẫu thức khác 0)

Lời giải

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{a+2b+c} = \frac{2y}{4a+2b-2c} = \frac{z}{4a-4b+c} = \frac{x+2y+z}{9a} \quad (1)$$

$$\frac{2x}{2a+4b+2c} = \frac{y}{2a+b-c} = \frac{z}{4a-4b+c} = \frac{2x+y-z}{9b} \quad (2)$$

$$\frac{4x}{4a+8b+4c} = \frac{4y}{8a+4b-4c} = \frac{z}{4a-4b+c} = \frac{4x-4y+z}{9c} \quad (3)$$

Từ (1),(2),(3) ta có:

$$\frac{x+2y+z}{9a} = \frac{2x+y-z}{9b} = \frac{4x-4y+z}{9c} \text{ hay } \frac{9a}{x+2y+z} = \frac{9b}{2x+y-z} = \frac{9c}{4x-4y+z}$$

$$\text{Vậy } \frac{a}{x+2y+z} = \frac{b}{2x+y-z} = \frac{c}{4x-4y+z} \text{ (ĐPCM).}$$

Câu 54. (HSG 7 huyện Hoàng Hóa – Thanh Hóa năm 2022 - 2023)

Cho tỉ lệ thức: $\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} = \frac{ab}{cd}$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} = \frac{ab}{cd} = \frac{a^2+ab+ab+b^2}{c^2+cd+cd+d^2} = \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{cd} = \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2} \Rightarrow \frac{c(a+b)}{a(c+d)} = \frac{b(c+d)}{d(a+b)} \Rightarrow \frac{ca+cb}{ca+ad} = \frac{bc+bd}{da+db} = \frac{ca-bd}{ca-bd} = 1$$

$$\Rightarrow ca+cb = ca+ad \Rightarrow cb = ad \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Câu 55. (HSG 7 trường Cù Chính Lan 2018 - 2019; trường Nguyễn Khuyến 2016 - 2017)

Biết $a^2+ab+\frac{b^2}{3} = 25$; $c^2+\frac{b^2}{3} = 9$; $a^2+ac+c^2 = 16$

Và $a \neq 0$, $c \neq 0$, $a \neq -c$. Chứng minh rằng: $\frac{2c}{a} = \frac{b+c}{a+c}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } c^2 + \frac{b^2}{3} + a^2 + ac + c^2 = a^2 + ab + \frac{b^2}{3} \text{ (vì } 9+16=25)$$

$$\text{Suy ra } 2c^2 = a(b-c) \Rightarrow \frac{2c}{a} = \frac{b-c}{c} \quad (a \neq 0; b \neq 0)$$

$$\Rightarrow \frac{2c}{a} = \frac{b-c}{c} = \frac{2c+b-c}{a+c} = \frac{b+c}{a+c} \quad (a \neq -c; a+c \neq 0)$$

$$\text{Vậy } \frac{2c}{a} = \frac{b+c}{a+c} \quad (\text{đpcm}).$$

Câu 56. (HSG 7 huyện Tân Kỳ năm 2022 - 2023)

$$\text{Biết: } a^2 + ab + \frac{b^2}{3} = 2023; c^2 + \frac{b^2}{3} = 2000; a^2 + ac + c^2 = 23 \text{ và } a \neq 0; c \neq 0; a \neq -c.$$

$$\text{Chứng minh rằng } \frac{2c}{a} = \frac{b+c}{a+c}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } a^2 + ab + \frac{b^2}{3} = 2023; c^2 + \frac{b^2}{3} = 2000; a^2 + ac + c^2 = 23$$

$$\Rightarrow \left(a^2 + ab + \frac{b^2}{3} \right) - \left(c^2 + \frac{b^2}{3} \right) - (a^2 + ac + c^2) = 2023 - 2000 - 23$$

$$\Rightarrow a^2 + ab + \frac{b^2}{3} - c^2 - \frac{b^2}{3} - a^2 - ac - c^2 = 0$$

$$\Rightarrow ab - ac - 2c^2 = 0$$

$$\Rightarrow ab = ac + 2c^2$$

$$\Rightarrow ab + ac = 2ac + 2c^2$$

$$\Rightarrow a(b+c) = 2c(a+c)$$

$$\Rightarrow \frac{2c}{a} = \frac{b+c}{a+c}.$$

Câu 57. (HSG 7 huyện Điện Bàn; huyện Tiên Du 2022 – 2023)

Cho các số tự nhiên có hai chữ số \overline{ab} và \overline{bc} thỏa mãn điều kiện $\frac{b}{c} = \frac{\overline{ab}}{\overline{bc}}$. Chứng minh

$$\text{rằng } \frac{a}{c} = \frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{10a+b}{10b+c} \Rightarrow \frac{10a+b}{10b+c} = \frac{b}{c}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{10a+b}{10b+c} = \frac{b}{c} = \frac{10a+b-b}{10b+c-c} = \frac{10a}{10b} = \frac{a}{b} \text{ suy ra } \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

$$\text{Suy ra } \frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2}{c^2} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c}. \quad (1)$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$.

Câu 58. (HSG 7 huyện Đông Sơn 2022 - 2023; trường Đáp Cầu 2018 - 2019; trường Hồng Thái, huyện Sơn Dương 2017 - 2018)

Cho x, y, z là các số khác 0 và $x^2 = yz, y^2 = xz, z^2 = xy$. Chứng minh rằng: $x = y = z$

Lời giải

Vì x, y, z là các số khác 0 và $x^2 = yz, y^2 = xz, z^2 = xy$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{z}{x}; \frac{y}{z} = \frac{x}{y}; \frac{z}{x} = \frac{y}{z} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x} = \frac{x+y+z}{y+z+x} = 1 \Rightarrow x = y = z$$

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x} = \frac{x+y+z}{y+z+x} = 1 \Rightarrow x = y = z$$

Câu 59. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2015 – 2016)

Cho x, y, z thỏa mãn $x^2 = yz, y^2 = xz, z^2 = xy$. Chứng minh rằng: $x = y = z$

Lời giải

TH1: Nếu $x = 0$ thì $y = z = 0 \Rightarrow x = y = z$. Tương tự với y, z

TH2: x, y, z là các số khác 0 từ $x^2 = yz, y^2 = xz, z^2 = xy$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{z}{x}; \frac{y}{z} = \frac{x}{y}; \frac{z}{x} = \frac{y}{z} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau:

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x} = \frac{x+y+z}{y+z+x} = 1 \Rightarrow x = y = z$$

Vậy $x = y = z$

Câu 60. (HSG 7 huyện Thạch Thành năm 2022 - 2023)

Cho các số a, b, c, x, y, z thỏa mãn: $a + b + c = a^2 + b^2 + c^2 = 1$ và $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ (các tỉ số đều có nghĩa). Chứng minh rằng $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2$.

Lời giải

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{x+y+z}{1} = x+y+z \text{ (vì } a+b+c=1\text{)}.$$

$$\text{Suy ra: } (x+y+z)^2 = \left(\frac{x}{a}\right)^2 = \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{z}{c}\right)^2 = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{1} = x^2+y^2+z^2$$

Câu 61. (HSG 7 tỉnh Nam Định, huyện Ý Yên 2021– 2022)

Cho x, y, z là các số nguyên dương và $x + y + z$ là số lẻ, các số thực a, b, c thỏa mãn:

$$\frac{a-b}{x} = \frac{b-c}{y} = \frac{a-c}{z}. \text{ Chứng minh rằng: } a = b = c.$$

Lời giải

Theo đề bài: $\frac{a-b}{x} = \frac{b-c}{y} = \frac{a-c}{z}$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a-b}{x} = \frac{b-c}{y} = \frac{a-c}{z} = \frac{a-b+b-c+a-c}{x+y+z} = \frac{2a-2c}{x+y+z} \quad (1)$$

Và $\frac{a-b}{x} = \frac{b-c}{y} = \frac{a-b+b-c}{x+y} = \frac{a-c}{x+y} \quad (2)$

Từ (1), (2) $\Rightarrow \frac{2(a-c)}{x+y+z} = \frac{a-c}{x+y} \quad (3)$

Nếu $a-c \neq 0$; Từ (3) $\Rightarrow 2(x+y) = x+y+z$. (Vô lý vì $(x+y+z)$ lẻ (theo đề bài); còn $2(x+y)$ luôn chẵn với mọi x, y).

Do đó $a-c = 0$. Thay vào dãy tỉ số đã cho ta được

$$\frac{a-b}{x} = \frac{b-c}{y} = \frac{0}{z} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ b-c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=b \\ b=c \end{cases}$$

Vậy $a=b=c$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

Câu 62. (HSG 7 trường Bảo Phương 2018 - 2019)

Cho $\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z}$.

Chứng minh rằng biểu thức sau có giá trị nguyên: $A = \frac{x+y}{z+t} + \frac{y+z}{t+x} + \frac{z+t}{x+y} + \frac{t+z}{y+z}$

Lời giải

Ta có: $\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z} = \frac{x+y+z+t}{3(x+y+z+t)} = \frac{1}{3}$

Suy ra $3x = y+z+t$; $3y = z+t+x$; $3z = t+x+y$; $3t = x+y+z$

Từ đó suy ra được: $x+y = z+t$; $y+z = t+x$; $z+t = x+y$; $t+x = y+z$

$$A = \frac{x+y}{z+t} + \frac{y+z}{t+x} + \frac{z+t}{x+y} + \frac{t+z}{y+z} = 1+1+1+1 = 4$$

Vậy $A = 4$, A có giá trị nguyên.

Câu 63. (HSG 7 trường Lý Nam Đế, huyện Hưng Hà năm học 2022 - 2023)

Cho bốn số a, b, c, d thỏa mãn $\frac{a}{b+c+d} = \frac{b}{a+c+d} = \frac{c}{a+b+d}$

Chứng minh rằng biểu thức M có giá trị nguyên biết: $M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{d+a}{b+c}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c+d} = \frac{b}{a+c+d} = \frac{c}{a+b+d} &\Rightarrow \frac{a}{b+c+d} + 1 = \frac{b}{a+c+d} + 1 = \frac{c}{a+b+d} + 1 \\ &\Rightarrow \frac{a+b+c+d}{b+c+d} = \frac{a+b+c+d}{a+c+d} = \frac{a+b+c+d}{a+b+d} \end{aligned}$$

Ta xét hai trường hợp

+) Nếu $a+b+c+d=0$

Vì $a+b+c+d=0$ nên $a+b=-(c+d) \Rightarrow \frac{a+b}{c+d} = -1$.

Tương tự ta cũng có: $\frac{b+c}{d+a} = -1; \frac{d+a}{b+c} = -1$

Suy ra: $M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{d+a}{b+c} = -3$

+) Nếu $a+b+c+d \neq 0$. Từ $\frac{a+b+c+d}{b+c+d} = \frac{a+b+c+d}{a+c+d} = \frac{a+b+c+d}{a+b+d}$

ta được: $\Rightarrow b+c+d = a+c+d = a+b+d \Rightarrow a=b=c$

Do đó $M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{d+a}{b+c} = 1+1+1=3$

Vậy biểu thức $M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{d+a}{b+c}$ có giá trị nguyên

Câu 64. (HSG 7 huyện Hưng Hà năm học 2022 - 2023)

Cho $(x_1p - y_1q)^{2n} + (x_2p - y_2q)^{2n} + (x_3p - y_3q)^{2n} + \dots + (x_mp - y_mq)^{2n} \leq 0$

với $m, n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_m}{y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_m} = \frac{q}{p}$

Lời giải

Ta có: $(x_1p - y_1q)^{2n} \geq 0; (x_2p - y_2q)^{2n} \geq 0; (x_3p - y_3q)^{2n} \geq 0; \dots; (x_mp - y_mq)^{2n} \geq 0$

$\Rightarrow (x_1p - y_1q)^{2n} + (x_2p - y_2q)^{2n} + (x_3p - y_3q)^{2n} + \dots + (x_mp - y_mq)^{2n} \geq 0$

Mà $(x_1p - y_1q)^{2n} + (x_2p - y_2q)^{2n} + (x_3p - y_3q)^{2n} + \dots + (x_mp - y_mq)^{2n} \leq 0$ (gt)

$\Rightarrow x_1p - y_1q = x_2p - y_2q = x_3p - y_3q = \dots = x_mp - y_mq$

Do đó $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \dots = \frac{x_m}{y_m} = \frac{q}{p}$ hay $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_m}{y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_m} = \frac{q}{p}$

$$\text{Do đó } \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \quad (4)$$

$$\text{Mà } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2 \quad (5)$$

$$\text{Từ (4) và (5) suy ra } \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Chương Mỹ; trường Thiệu Viên, huyện Thiệu Hóa 2022 - 2023)

$$\text{Cho } M = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \text{ với } a, b, c > 0.$$

- a) Chứng minh $M > 1$.
 b) Chứng tỏ rằng M không phải là số nguyên.

Lời giải

$$\text{a) Với } a, b, c > 0 \text{ ta có } \frac{a}{a+b} > \frac{a}{a+b+c}; \frac{b}{b+c} > \frac{b}{a+b+c}; \frac{c}{c+a} > \frac{c}{c+a+b}$$

$$\text{Suy ra } M > \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{c+a+b} = 1$$

Vậy $M > 1$.

$$\text{b) Với } a, b, c > 0 \text{ ta có } 0 < \frac{a}{a+b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}$$

$$\text{Tương tự: } 0 < \frac{b}{b+c} < 1 \Rightarrow \frac{b}{b+c} < \frac{b+a}{a+b+c}; \quad 0 < \frac{c}{c+a} < 1 \Rightarrow \frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{a+b+c}.$$

$$\text{Suy ra } M < \frac{a+c}{a+b+c} + \frac{b+a}{a+b+c} + \frac{c+b}{c+a+b} = 2$$

Ta có $1 < M < 2$ nên M không phải là số nguyên.

Câu 4. (HSG 7 trường Nguyễn Khuyến, 2016 - 2017)

Chứng minh rằng $M = \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+t} + \frac{z}{y+z+t} + \frac{t}{x+z+t}$ có giá trị không phải là số tự nhiên ($x, y, z, t \in \mathbb{N}^*$)

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{x}{x+y+z+t} < \frac{x}{x+y+z} < \frac{x}{x+y}$$

$$\frac{y}{x+y+z+t} < \frac{y}{x+y+t} < \frac{y}{x+y}$$

$$\frac{z}{x+y+z+t} < \frac{z}{y+z+t} < \frac{z}{z+t}$$

$$\frac{t}{x+y+z+t} < \frac{t}{x+z+t} < \frac{t}{z+t}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+z+t}{x+y+z+t} < M < \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} \right) + \left(\frac{z}{z+t} + \frac{t}{z+t} \right)$$

Hay $1 < M < 2$. Vậy M có giá trị không phải là số tự nhiên

Câu 5. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Cho ba số a, b, c thỏa mãn $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$

Lời giải

Ta có $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$

$$\Rightarrow (a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab - a - b + 1 \geq 0 \Leftrightarrow ab + 1 \geq a + b$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{ab+1} \leq \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow \frac{c}{ab+1} \leq \frac{c}{a+b}$$

Tương tự ta có: $\frac{a}{bc+1} \leq \frac{a}{b+c}$; $\frac{b}{ac+1} \leq \frac{b}{a+c}$

$$\text{Do đó: } \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} \leq 2.$$

Câu 6. (HSG 7 huyện Cẩm Thủy, 2022 - 2023)

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 1$

Lời giải

Vì a, b, c là ba cạnh của tam giác nên ta có

$$0 < \frac{a}{b+c} < 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} \left(1 - \sqrt{\frac{a}{b+c}}\right) > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} > \frac{a}{b+c}$$

Vì a, b, c là các số dương nên $\frac{a}{b+c} > \frac{a}{a+b+c}$

$$\text{Do đó } \sqrt{\frac{a}{b+c}} > \frac{a}{a+b+c}$$

Chứng minh tương tự ta được $\sqrt{\frac{b}{c+a}} > \frac{b}{a+b+c}$; $\sqrt{\frac{c}{a+b}} > \frac{c}{a+b+c}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} = 1$$

Bài toán được chứng minh

Câu 7. (HSG 7 trường Kỳ Đồng, Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho $a, b, c, d > 0$, Chứng minh: $M = \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b}$ có giá trị không nguyên.

Lời giải

Với $a, b, c, d > 0$, ta có:

$$\frac{a+b}{a+b+c} > \frac{a+b}{a+b+c+d}; \frac{b+c}{b+c+d} > \frac{b+c}{a+b+c+d}; \frac{c+d}{c+d+a} > \frac{c+d}{a+b+c+d};$$

$$\frac{d+a}{a+b+d} > \frac{d+a}{a+b+c+d}$$

Cộng theo vế ta được:

$$\frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b} > \frac{2(a+b+c+d)}{a+b+c+d} = 2(*)$$

Với $a, b, c, d > 0$, ta có: $\frac{a+b+c}{a+b+c} = \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = 1$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} = \frac{a+b+d}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d}$$

Mà $\frac{c}{a+b+c} > \frac{c}{a+b+c+d}$ ($a, b, c, d > 0$) nên suy ra:

$$\frac{a+b}{a+b+c} < \frac{a+b+d}{a+b+c+d} \quad (1)$$

Chứng minh tương tự, ta được:

$$\frac{b+c}{b+c+d} < \frac{a+b+c}{a+b+c+d} \quad (2)$$

$$\frac{c+d}{c+d+a} < \frac{c+d+b}{a+b+c+d} \quad (3)$$

$$\frac{d+a}{a+b+d} < \frac{d+a+c}{a+b+c+d} \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4) cộng theo vế ta được:

$$\frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b} < \frac{3(a+b+c+d)}{a+b+c+d} = 3(**)$$

Từ (*) và (**) $2 < M = \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b} < 3$

Vậy với $a, b, c, d > 0$, M có giá trị không nguyên (đpcm)

Câu 8. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình 2021 - 2022)

Cho ba phân số tối giản có tổng bằng $4\frac{9}{40}$; các tử của chúng tỉ lệ với 2; 3; 5, còn các mẫu số tương ứng tỉ lệ với 5; 4; 3. Chứng minh rằng trong ba phân số có một phân số nhỏ hơn 1.

Lời giải

Gọi ba phân số cần tìm là x, y, z (Đk: $x, y, z \neq 0$).

Theo bài ra ba phân số tối giản có tổng bằng $4\frac{9}{40}$ nên $x + y + z = 4\frac{9}{40}$.

Lại có các tử của chúng tỉ lệ với 2; 3; 5 còn các mẫu số tương ứng tỉ lệ với 5; 4; 3

nên x, y, z tỉ lệ với $\frac{2}{5}; \frac{3}{4}; \frac{5}{3}$ hay $\frac{x}{\frac{2}{5}} = \frac{y}{\frac{3}{4}} = \frac{z}{\frac{5}{3}}$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{2+\frac{3}{5}+\frac{5}{3}} = \frac{4 \cdot \frac{9}{40}}{\frac{169}{40}} = \frac{3}{5}$$

Suy ra $x = \frac{3}{5}$; $y = \frac{9}{8}$; $z = \frac{5}{2}$.

Vì $x = \frac{3}{5} < 1$; $y = \frac{9}{8} > 1$; $z = \frac{5}{2} > 1$

Vậy trong ba phân số có một phân số nhỏ hơn.

Câu 9. (HSG 7 huyện Thiệu Hoá, tỉnh Thanh Hoá, trường Thiệu Trung 2022 – 2023)

Cho biểu thức $M = \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+t} + \frac{z}{y+z+t} + \frac{t}{x+z+t}$ với x, y, z, t là

các số tự nhiên khác 0. Chứng minh $M^{10} < 1025$

Lời giải

Ta có: $\frac{x}{x+y+z} < \frac{x}{x+y}$, $\frac{y}{x+y+t} < \frac{y}{x+y}$, $\frac{z}{y+z+t} < \frac{z}{z+t}$; $\frac{t}{x+z+t} < \frac{t}{z+t}$

$$\Rightarrow M < \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} \right) + \left(\frac{z}{z+t} + \frac{t}{z+t} \right) \Rightarrow M < 2$$

Có $M^{10} < 2^{10} = 1024 < 1025 \Rightarrow M^{10} < 1025$

Vậy: $M^{10} < 1025$.

CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS

CD10: TỈ LỆ THỨC VÀ DẪY TỈ SỐ BẰNG NHAU

Dạng 1: Tìm số hạng chưa biết dựa vào tỉ lệ thức
Dạng 2: Chứng minh đẳng thức
Dạng 3: Chứng minh bất đẳng thức
Dạng 4: Bài toán về dãy tỉ số bằng nhau và chia tỉ lệ

Dạng 4: Bài toán về dãy tỉ số bằng nhau và chia tỉ lệ

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 huyện Lâm Thao 2022 - 2023)

Cho ΔABC có độ dài các cạnh là a, b, c tỉ lệ thuận với ba số $6; 8; 11$ và $c^2 - a^2 = 340$. Chu vi của ΔABC là.

- A. 20 cm. B. 25 cm. C. 40 cm. **D. 50 cm.**

Lời giải

Chọn D

Theo bài ta có:

$$\frac{a}{6} = \frac{b}{8} = \frac{c}{11} \text{ và } c^2 - a^2 = 340$$

$$\text{Từ } \frac{a}{6} = \frac{b}{8} = \frac{c}{11} \Rightarrow \frac{a^2}{36} = \frac{b^2}{64} = \frac{c^2}{121}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a^2}{36} = \frac{b^2}{64} = \frac{c^2}{121} = \frac{c^2 - a^2}{121 - 36} = \frac{340}{85} = 4$$

$$\text{Suy ra } a^2 = 4.36 = 144; b^2 = 4.64 = 256; c^2 = 4.121 = 484$$

$$\Rightarrow a = 12; b = 16; c = 22$$

Do đó chu vi ΔABC là: $12 + 16 + 22 = 50$ cm.

Câu 2. (HSG 7 đề khảo sát lần 3 2022 - 2023)

Tìm a , biết a tỉ lệ thuận với b theo hệ số tỉ lệ 2; b tỉ lệ nghịch với c theo hệ số tỉ lệ 6 và $c^2 - 6c = -9$

- A. $a = 2$. **B. $a = 4$.** C. $a = 6$. D. $a = 12$.

Lời giải

Chọn B

Vì a tỉ lệ thuận với b theo hệ số tỉ lệ 2 nên $a = 2b$

b tỉ lệ nghịch với c theo hệ số tỉ lệ 6 nên $bc = 6$

$$\text{Mà } c^2 - 6c = -9 \Rightarrow c^2 - 6c + 9 = 0 \Rightarrow (c - 3)^2 = 0 \Rightarrow c = 3$$

$$\text{Khi đó: } b.3 = 6 \Rightarrow b = 2$$

$$\text{Và } a = 2.2 = 4$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Tân Yên 2022 - 2023)

Tìm a , biết a tỉ lệ thuận với b theo hệ số tỉ lệ 2; b tỉ lệ thuận với c theo hệ số tỉ lệ -2 thì c tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ là

- A. 2. B. -4 . C. $-\frac{1}{4}$. D. -2 .

Lời giải

Chọn C

Vì a tỉ lệ thuận với b theo hệ số tỉ lệ 2 nên $a = 2b$

b tỉ lệ thuận với c theo hệ số tỉ lệ -2 nên $b = -2c$

$$\Rightarrow a = 2 \cdot (-2c) \Rightarrow a = -4c \Rightarrow c = -\frac{1}{4}a$$

Vậy c tỉ lệ thuận với x theo hệ số tỉ lệ $-\frac{1}{4}$

Câu 4. (HSG 7 đề khảo sát lần 3, 2022 - 2023)

Một đội sản xuất gồm 12 người làm xong công việc trong 10 giờ. Biết năng suất lao động của mỗi người như nhau, nếu thêm ba người nữa thì thời gian làm xong công việc đó là

- A. 7,5 giờ. B. 7 giờ. C. 8 giờ. D. 8,25 giờ.

Lời giải

Chọn C

Vì đội sản xuất gồm 12 người làm xong công việc trong 10 giờ

Nên mỗi giờ đội sản xuất 12 người làm được: $\frac{1}{10}$ công việc

Mỗi giờ mỗi người làm được: $\frac{1}{120}$ công việc

Mỗi giờ đội sản xuất 15 người làm được: $\frac{1}{120} \cdot 15 = \frac{1}{8}$ công việc

Vậy đội sản xuất 15 người làm xong công việc trong 8 giờ.

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Mỹ Đức, 2021 - 2022)

Tìm hai số nguyên dương x và y biết rằng tổng, hiệu và tích của chúng tỉ lệ nghịch với 35; 210; 12

Lời giải

Do tổng, hiệu và tích của x và y lần lượt tỉ lệ nghịch với 35; 210; 12.

$$\text{Ta có } (x + y) \cdot 35 = (x - y) \cdot 210 = 12 \cdot xy$$

$$\Rightarrow \frac{35(x + y)}{420} = \frac{210(x - y)}{420} = \frac{12xy}{420}$$

$$\Rightarrow \frac{x + y}{12} = \frac{x - y}{2} = \frac{xy}{35} \quad (1)$$

Theo tính chất của dãy tỷ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x + y}{12} = \frac{x - y}{2} = \frac{x}{7} = \frac{y}{5} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{xy}{35} = \frac{x}{7} = \frac{y}{5} = \frac{xy}{7y} = \frac{xy}{5x}$

Vì $x > 0; y > 0$ ta có: $7y = 35 \Rightarrow y = 5$ và $5x = 35 \Rightarrow x = 7$

Vậy hai số phải tìm là: $x = 7$ và $y = 5$

Câu 2. (HSG 7 huyện K.Rông Ana 2022 - 2023; huyện Phù Cát 2017 - 2018)

Tìm hai số khác 0, biết tổng, hiệu, tích của hai số đó tỉ lệ với $3; \frac{1}{3}; \frac{200}{3}$

Lời giải

Gọi 2 số khác 0 cần tìm là x và y .

$$\text{Ta có: } \frac{x+y}{3} = \frac{x-y}{\frac{1}{3}} = \frac{xy}{\frac{200}{3}} = \frac{x+y+x-y}{3+\frac{1}{3}} = \frac{2x}{\frac{10}{3}} = \frac{3x}{5} = k \neq 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{5k}{3} \quad (1); \quad x+y = 3k \quad (2); \quad xy = \frac{200k}{3} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow y = 3k - \frac{5k}{3} = \frac{4k}{3} \Rightarrow xy = \frac{5k}{3} \cdot \frac{4k}{3} = \frac{20k^2}{9} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4)} \Rightarrow \frac{200k}{3} = \frac{20k^2}{9} \Leftrightarrow k = 30 (k \neq 0) \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 30}{3} = 50; \quad y = \frac{4 \cdot 30}{3} = 40$$

Vậy hai số cần tìm là 50; 40

Câu 3. (HSG 7 trường THCS Thanh Oai 2018 - 2019)

Tìm hai số dương biết tổng, hiệu, tích của chúng tỉ lệ nghịch với ba số 30;120; 16.

Lời giải

Gọi 2 số đó là a, b . Ta có:

$$30(a+b) = 120(a-b) = 16ab$$

$$\text{Từ điều kiện: } 30(a+b) = 120(a-b) \Rightarrow \frac{a}{5} = \frac{b}{3}$$

$$\text{Từ điều kiện: } 120(a-b) = 16ab \Rightarrow \frac{a-b}{2} = \frac{ab}{15}$$

Từ đó tìm được $a = 5, b = 3$.

Câu 4. (Đề HSG 7 LDP huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Tìm một số có ba chữ số biết rằng số đó chia hết cho 72, các chữ số của nó sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn tỷ lệ với 2;3;4.

Lời giải

Gọi ba chữ số của số cần tìm là $a; b; c$ (Điều kiện $a; b; c \in \mathbb{N}^*; a < b < c \leq 9$)

Theo bài ra: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$ và số có ba chữ số \overline{abc} chia hết cho 72

Ta có \overline{abc} chia hết cho 72 nên \overline{abc} chia hết cho 8 và \overline{abc} chia hết cho 9

\overline{abc} chia hết cho 9 $\Rightarrow (a+b+c):9$ mà $a; b; c \in \mathbb{N}^*; 0 < a+b+c < 27$

Nên $a+b+c \in \{9, 18\}$

Từ $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$, áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau ta có: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{a+b+c}{2+3+4}$

$$+) \text{ Nếu } a+b+c=9 \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{a+b+c}{2+3+4} = \frac{9}{9} = 1$$

$$\Rightarrow a=2; b=3; c=4$$

Ta được các số 234; 243; 324; 342; 423; 432. Nhưng số cần tìm phải chia hết cho 8 nên chỉ có số 432 thỏa mãn.

$$+) \text{ Nếu } a+b+c=18 \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{a+b+c}{2+3+4} = \frac{18}{9} = 2$$

$$\Rightarrow a=4; b=6; c=8$$

Ta được các số 468; 486; 648; 684; 864; 846. Nhưng số cần tìm phải chia hết cho 8 nên chỉ có số 648; 864 thỏa mãn.

Vậy số phải tìm là 432; 648; 864

Câu 5. (Đề HSG 7 trường Tây Đô; trường Bắc Sơn, huyện Hưng Hà; trường Hồng Dương 2022 - 2023; huyện Thanh Trì 2021 - 2022; trường Điện Hồng 2018 - 2019; huyện Trục Ninh 2017 - 2018; huyện Hoàng Hóa 2016 - 2017)

Tìm số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng số đó là bội của 18 và các chữ số của nó tỉ lệ theo 1;2;3.

Lời giải

Gọi a, b, c là các chữ số của số có ba chữ số cần tìm, khi đó có ít nhất một trong 3 chữ số a, b, c khác 0 và $a, b, c \leq 9; a, b, c \in \mathbb{N}$.

Vì có ít nhất một trong 3 chữ số a, b, c khác 0 và $a, b, c \leq 9; a, b, c \in \mathbb{N}$ nên $1 \leq a+b+c \leq 27$. Mặt khác số cần tìm là bội của 18 nên là bội của 9, do đó $a+b+c=9$ hoặc $a+b+c=18$ hoặc $a+b+c=27$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có: $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{6}$; mà $a, b, c \in \mathbb{N}$

Suy ra $a+b+c$ chia hết cho 6, nên $a+b+c=18$

$$\text{Do đó } \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

Từ đó suy ra $a=3; b=6; c=9$ (thỏa mãn điều kiện)

Do số phải tìm là bội của 18 nên chữ số hàng đơn vị chẵn

Vậy hai số cần tìm là: 396; 936.

Câu 6. (Đề chọn HSG huyện Việt Yên 2017-2018)

Tìm số có 3 chữ số biết rằng số đó chia hết cho 36 và các chữ số của nó tỉ lệ với 1;2;3

Lời giải

Gọi ba chữ số của số phải tìm là a, b, c ta có:

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}. \text{ Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta được: } \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}, \text{ áp dụng tính chất dãy}$$

$$\text{tỉ số bằng nhau ta được: } \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{6} (*)$$

Do số phải tìm chia hết cho 36 nên số đó chia hết cho 9 suy ra $a+b+c$ chia hết cho 9

Mà a, b, c là các chữ số có ít nhất một chữ số khác 0 nên $a + b + c$ chỉ có thể nhận một trong ba giá trị 9; 18; 27

$$\text{Nếu } a + b + c = 9 \Rightarrow (*) \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{6} \Rightarrow a = \frac{9}{6} (k \cdot m)$$

Nếu $a + b + c = 18 \Rightarrow (*) \Rightarrow a = 3, b = 6, c = 9$, vì số phải tìm chia hết cho 36 nên chữ số hàng đơn vị chẵn, ta có số 396 hoặc 936.

$$\text{Nếu } a + b + c = 27, (*) \Rightarrow a = \frac{27}{6} (k \cdot m)$$

Vậy số phải tìm là 936; 396

Câu 7. (ĐỀ HSG 7 huyện Cẩm Thủy; huyện Hậu Lộc 2022 - 2023; trường Thanh Thùy; trường Bảo Phương 2018 - 2019; huyện Anh Sơn 2017 - 2018)

Số A được chia thành ba phần số tỉ lệ theo $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$. Biết rằng tổng các bình phương của ba số đó bằng 24 309. Tìm số A

Lời giải

Gọi ba phần được chia lần lượt là: a, b, c

$$\text{Theo bài ra ta có: } a : b : c = \frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6} \text{ và } a^2 + b^2 + c^2 = 24309$$

$$\text{Ta có: } a : b : c = \frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{a}{24} = \frac{b}{45} = \frac{c}{10}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{24} = \frac{b}{45} = \frac{c}{10} \Rightarrow \frac{a^2}{576} = \frac{b^2}{2025} = \frac{c^2}{100} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{576 + 2025 + 100} = \frac{24309}{2701} = 9$$

$$\Rightarrow a^2 = 576 \cdot 9 = 5184 \Rightarrow a = \pm 72$$

$$b^2 = 2025 \cdot 9 = 18225 \Rightarrow b = \pm 135$$

$$c^2 = 100 \cdot 9 = 900 \Rightarrow c = \pm 30$$

$$\text{Vi: } \frac{a}{24} = \frac{b}{45} = \frac{c}{10} \Rightarrow a, b, c \text{ cùng dấu}$$

$$\text{Do đó } a = 72, b = 135, c = 30 \text{ hoặc } a = -72, b = -135, c = -30$$

$$\text{Với } a = -72, b = -135, c = -30 \text{ thì } A = -72 + (-135) + (-30) = -237$$

$$\text{Với } a = 72, b = 135, c = 30 \text{ thì } A = 72 + 135 + 30 = 235$$

$$\text{Vậy: } A = -237 \text{ hoặc } A = 235$$

Câu 8. (HSG 7 huyện Như Xuân 2018 - 2019)

Số M được chia thành ba số tỉ lệ với $0,5; 1\frac{2}{3}; 2\frac{1}{4}$. Tìm số M biết rằng tổng bình phương của ba số đó là 4660.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 0,5 : 1\frac{2}{3} : 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2} : \frac{5}{3} : \frac{9}{4} = \frac{6}{12} : \frac{20}{12} : \frac{27}{12} = 6 : 20 : 27$$

Giả sử M được chia ra thành 3 số x, y, z . Theo bài ra ta có:

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{20} = \frac{z}{27} \Leftrightarrow \frac{x^2}{6^2} = \frac{y^2}{20^2} = \frac{z^2}{27^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{6^2 + 20^2 + 27^2} = \frac{4660}{1165} = 4 = 2^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 12^2 \Rightarrow x = \pm 12; y^2 = 40^2 \Rightarrow y = \pm 40; z^2 = 54^2 \Rightarrow z = \pm 54$$

Vậy $M = 12 + 40 + 54 = 106$ hoặc $M = -12 - 40 - 54 = -106$

Câu 9. (HSG 7 huyện Nga Sơn, 2016 - 2017)

Cho ba số $x < y < z$ thỏa mãn $x + y + z = 51$. Biết rằng 3 tổng của 2 trong 3 số đã cho tỉ lệ với 9,12,13. Tìm x, y, z

Lời giải

Theo đề bài $x < y < z \Rightarrow x + y < x + z < y + z$

Do 3 tổng của 2 trong ba số tỉ lệ với 9,12,13 mà $9 < 12 < 13$ với $x < y < z$ thì chỉ có $x + y < x + z < y + z$

Từ đó suy ra $(x + y) : (x + z) : (y + z) = 9 : 12 : 13$

Hay $\frac{x + y}{9} = \frac{x + z}{12} = \frac{y + z}{13}$, áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x + y}{9} = \frac{x + z}{12} = \frac{y + z}{13} = \frac{x + y + x + z + y + z}{9 + 12 + 13} = \frac{2(x + y + z)}{34} = \frac{2 \cdot 51}{34} = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x + y}{9} = 3 \\ \frac{x + z}{12} = 3 \\ \frac{y + z}{13} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 27 \\ x + z = 36 \\ y + z = 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 15 \\ z = 24 \end{cases}$$

Câu 10. (HSG 7 huyện Thanh Oai, trường THCS Phú Trường 2022 – 2023)

Tìm hai số dương, biết rằng tổng, hiệu, tích của chúng lần lượt tỉ lệ nghịch với 15;60 và 8

Lời giải

Gọi hai số phải tìm là $a, b (a > b > 0)$, theo đầu bài ta có:

$$15(a + b) = 60(a - b) = 8ab \text{ hay}$$

$$\frac{a + b}{8} = \frac{a - b}{2} = \frac{ab}{15} = k \Rightarrow k = 1 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 8 \cdot 1 = 8 \\ a - b = 2 \cdot 1 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a = 10 \\ 2b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases}$$

Câu 11. (Đề HSG 7 minh họa Hưng Hà 2022 - 2023)

Tìm 3 phân số có tổng của chúng bằng $1\frac{1}{70}$, các tử của chúng tỉ lệ với 3;4;5 và các mẫu số tương ứng của chúng tỉ lệ với 5;1;2.

Lời giải

Gọi 3 phân số cần tìm là $\frac{a}{x}; \frac{b}{y}; \frac{c}{z}$ ($a, b, c, x, y, z \in \mathbb{Z}; x \neq 0; y \neq 0; z \neq 0$)

Vì tổng của chúng bằng $1\frac{1}{70}$ nên $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1\frac{1}{70}$

Vì các tử của chúng tỉ lệ với 3; 4; 5 và các mẫu số tương ứng của chúng tỉ lệ với 5; 1; 2 nên

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} \text{ và } \frac{x}{5} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}.$$

$$\Rightarrow \frac{a}{3} : \frac{x}{5} = \frac{b}{4} : \frac{y}{1} = \frac{c}{5} : \frac{z}{2} \Rightarrow \frac{\frac{a}{3}}{\frac{x}{5}} = \frac{\frac{b}{4}}{\frac{y}{1}} = \frac{\frac{c}{5}}{\frac{z}{2}} = \frac{\frac{a}{3} + \frac{b}{4} + \frac{c}{5}}{\frac{x}{5} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2}} = \frac{1\frac{1}{70}}{\frac{71}{10}} = \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{3}{35}; \frac{b}{y} = \frac{4}{7}; \frac{c}{z} = \frac{5}{14}$$

Vậy ba phân số cần tìm là $\frac{3}{35}; \frac{4}{7}; \frac{5}{14}$.

Câu 12. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Bùi Hữu Diên 2022 - 2023)

Tìm ba phân số tối giản biết tổng của chúng là $4\frac{9}{40}$; các tử của chúng tỉ lệ với 2; 3; 5 còn các mẫu tương ứng tỉ lệ với 5; 4; 3.

Lời giải

Gọi ba phân số cần tìm là x, y, z (Đk: $x, y, z \neq 0$).

Theo bài ra ba phân số tối giản có tổng bằng $4\frac{9}{40}$ nên $x + y + z = 4\frac{9}{40}$.

Lại có các tử của chúng tỉ lệ với 2; 3; 5 còn các mẫu số tương ứng tỉ lệ với 5; 4; 3 nên x, y, z tỉ lệ với $\frac{2}{5}; \frac{3}{4}; \frac{5}{3}$ hay $\frac{x}{\frac{2}{5}} = \frac{y}{\frac{3}{4}} = \frac{z}{\frac{5}{3}}$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{\frac{2}{5}} = \frac{y}{\frac{3}{4}} = \frac{z}{\frac{5}{3}} = \frac{x+y+z}{\frac{2}{5} + \frac{3}{4} + \frac{5}{3}} = \frac{4\frac{9}{40}}{\frac{169}{40}} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Suy ra } x = \frac{3}{5}; y = \frac{9}{8}; z = \frac{5}{2}.$$

Vậy ba phân số tối giản là $\frac{3}{5}; \frac{9}{8}; \frac{5}{2}$.

Câu 13. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình 2021 - 2022)

Cho ba phân số tối giản có tổng bằng $4\frac{9}{40}$; các tử của chúng tỉ lệ với 2; 3; 5, còn các mẫu số tương ứng tỉ lệ với 5; 4; 3. Chứng minh rằng trong ba phân số có một phân số nhỏ hơn 1.

Lời giải

Gọi ba phân số cần tìm là x, y, z (Đk: $x, y, z \neq 0$).

Theo bài ra ba phân số tối giản có tổng bằng $4\frac{9}{40}$ nên $x + y + z = 4\frac{9}{40}$.

Lại có các tử của chúng tỉ lệ với 2;3;5 còn các mẫu số tương ứng tỉ lệ với 5;4;3 nên x, y, z tỉ lệ với $\frac{2}{5}; \frac{3}{4}; \frac{5}{3}$ hay $\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{5+\frac{3}{4}+\frac{5}{3}} = \frac{4 \cdot \frac{9}{40}}{\frac{169}{40}} = \frac{3}{2}$$

Suy ra $x = \frac{3}{5}; y = \frac{9}{8}; z = \frac{5}{2}$.

Vì $x = \frac{3}{5} < 1; y = \frac{9}{8} > 1; z = \frac{5}{2} > 1$ nên trong ba phân số có một phân số nhỏ hơn.

Câu 14. (HSG 7 trường Nguyễn Trãi; trường Thanh Văn 2022 - 2023; huyện Kim Sơn 2021 - 2022; trường Nguyễn Trung Trực 2018 - 2019)

Ba phân số có tổng bằng $\frac{213}{70}$. Các tử của chúng tương ứng tỉ lệ với 3;4;5, các mẫu số của chúng tương ứng tỉ lệ với 5;1;2. Tìm ba phân số đó.

Lời giải

Gọi ba phân số cần tìm là a, b, c .

Vì các tử số của chúng tương ứng tỉ lệ với 3;4;5 và các mẫu số của chúng tương ứng tỉ lệ với 5;1;2 nên ta có $a : b : c = \frac{3}{5} : \frac{4}{1} : \frac{5}{2} = 6 : 40 : 25$

$$\Rightarrow \frac{a}{6} = \frac{b}{40} = \frac{c}{25} = \frac{a+b+c}{6+40+25} = \frac{\frac{213}{70}}{71} = \frac{3}{70}$$

$$\Rightarrow a = \frac{3 \cdot 6}{70} = \frac{9}{35}$$

$$\Rightarrow b = \frac{40 \cdot 3}{70} = \frac{12}{7}$$

$$\Rightarrow c = \frac{25 \cdot 3}{70} = \frac{15}{14}$$

Vậy ba phân số cần tìm là: $\frac{9}{35}; \frac{12}{7}; \frac{15}{14}$.

Câu 15. (HSG 7 huyện Thanh Oai, Trường Mỹ Hưng, 2016 - 2017)

Tổng ba phân số tối giản bằng $5\frac{25}{63}$ các tử của chúng tỉ lệ nghịch với 20;4;5. Các mẫu của chúng tỉ lệ thuận với 1;3;7. Tìm ba phân số đó.

Lời giải

Gọi ba phân số cần tìm là a, b, c

Theo bài ra ta có: $a + b + c = 5\frac{25}{63}$

$$a : b : c = \frac{1}{20} : \frac{1}{3} : \frac{1}{7} = \frac{1}{20} = \frac{1}{12} = \frac{1}{35} = 21 : 35 : 12$$

$$\Rightarrow \frac{a}{21} = \frac{b}{35} = \frac{c}{12} = \frac{a+b+c}{21+35+12} = \frac{5 \cdot \frac{25}{63}}{68} = \frac{5}{63}$$

$$\Rightarrow a = 21 \cdot \frac{5}{63} = \frac{5}{3}; b = 35 \cdot \frac{5}{63} = \frac{25}{9}; c = 12 \cdot \frac{5}{63} = \frac{20}{21}$$

Vậy ba phân số cần tìm là $\frac{5}{3}; \frac{25}{9}; \frac{20}{21}$

Câu 16. (HSG 7 huyện Tiền Hải, tỉnh Thái Bình, 2022 - 2023)

Tìm 3 phân số có tổng bằng $9\frac{9}{70}$, biết các tử số tỉ lệ theo 3 : 4 : 5 và các mẫu số tương ứng tỉ lệ theo 5 : 1 : 2.

Lời giải

Gọi 3 phân số cần tìm là $x = \frac{a}{a'}$; $y = \frac{b}{b'}$; $z = \frac{c}{c'}$ với a, a', b, b', c, c' là các số nguyên; a', b', c' khác 0.

Ta có $a : b : c = 3 : 4 : 5$ suy ra $a = 3k, b = 4k, c = 5k$ ($k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$)

$a' : b' : c' = 5 : 1 : 2 \Rightarrow a' = 5q, b' = q, c' = 2q$ ($q \in \mathbb{Z}; q \neq 0$)

suy ra $x : y : z = \frac{3k}{5q} : \frac{4k}{q} : \frac{5k}{2q} = \frac{3}{5} : \frac{4}{1} : \frac{5}{2} = 6 : 40 : 25$ suy ra $\frac{x}{6} = \frac{y}{40} = \frac{z}{25}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta được:

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{40} = \frac{z}{25} = \frac{x+y+z}{6+40+25} = \frac{9\frac{9}{70}}{71} = \frac{9}{70}$$

Câu 17. (HSG 7 trường Cù Chính Lan 2018 - 2019)

Tổng ba phân số tối giản bằng $5\frac{25}{63}$ các tử của chúng tỉ lệ nghịch với 20; 4; 5. Các mẫu của chúng tỉ lệ thuận với 1; 3; 7. Tìm ba phân số đó.

Lời giải

Gọi ba phân số cần tìm là a, b, c

Theo bài ra ta có: $a + b + c = 5\frac{25}{63}$

$$\text{và } a : b : c = \frac{1}{20} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5} \Rightarrow a : b : c = \frac{1}{20} : \frac{1}{12} : \frac{1}{35} \Rightarrow \frac{a}{21} = \frac{b}{35} = \frac{c}{12}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta được:

$$\frac{a}{21} = \frac{b}{35} = \frac{c}{12} = \frac{a+b+c}{21+35+12} = \frac{5 \cdot \frac{25}{63}}{68} = \frac{5}{63}$$

$$\Rightarrow a = 21 \cdot \frac{5}{63} = \frac{5}{3}; b = 35 \cdot \frac{5}{63} = \frac{25}{9}; c = 12 \cdot \frac{5}{63} = \frac{20}{21}$$

Vậy ba phân số cần tìm là $\frac{5}{3}; \frac{25}{9}; \frac{20}{21}$

Câu 18. (Đề HSG 7 huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Độ dài ba đường cao của một tam giác tỷ lệ với các số 3;5;6. Tính độ dài các cạnh tương ứng của tam giác đó biết rằng chu vi của tam giác đó là 42cm

Lời giải

Gọi độ dài các cạnh tương ứng của ba đường cao lần lượt là $a(cm), b(cm), c(cm)$ ($0 < a, b, c < 42$)

Theo bài ra:

+ Chu vi của tam giác bằng 42cm nên ta có: $a + b + c = 42$

+ Vì diện tích tam giác không thay đổi nên độ dài đường cao và cạnh tương ứng là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên ta có: $a.3 = b.5 = c.6$

$$\Rightarrow \frac{a.3}{30} = \frac{b.5}{30} = \frac{c.6}{30} \Rightarrow \frac{a}{10} = \frac{b}{6} = \frac{c}{5}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{10} = \frac{b}{6} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{10+6+5} = \frac{42}{21} = 2$$

$$\text{Suy ra: } \frac{a}{10} = 2 \Rightarrow a = 20; \frac{b}{6} = 2 \Rightarrow b = 12; \frac{c}{5} = 2 \Rightarrow c = 10$$

Ta có: $a = 20; b = 12; c = 10$ thỏa mãn điều kiện

Vậy độ dài các cạnh tương ứng của tam giác là: 20cm; 12cm; 10cm

Câu 19. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Bùi Hữu Diên 2022 - 2023)

Độ dài của ba cạnh tam giác tỉ lệ với 2; 3; 4. Tính chiều cao tương ứng của ba cạnh biết tổng độ dài ba chiều cao là 13cm.

Lời giải

Gọi độ dài ba cạnh của tam giác lần lượt là a, b, c (cm; $a, b, c > 0$) và độ dài ba đường cao tương ứng lần lượt là x, y, z (cm; $x, y, z > 0$).

Theo bài ra ta có $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$ và $x + y + z = 13$.

$$\text{Diện tích tam giác là } S = \frac{1}{2}ax = \frac{1}{2}by = \frac{1}{2}cz$$

$$\Rightarrow ax = by = cz \Rightarrow \frac{a}{2}.2x = \frac{b}{3}.3y = \frac{c}{4}.4z$$

$$\Rightarrow 2x = 3y = 4z \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{6+4+3} = \frac{13}{13} = 1$$

Suy ra $x = 6; y = 4; z = 3$.

Vậy độ dài ba đường cao của tam giác lần lượt là 6cm; 4cm; 3cm.

Câu 20. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Trần Thủ Độ 2022 - 2023)

Độ dài ba cạnh của tam giác tỉ lệ với 2; 3; 4. Tính độ dài ba đường cao tương ứng của tam giác biết tổng độ dài ba đường cao là 26 cm.

Lời giải

Gọi độ dài ba cạnh của tam giác lần lượt là a, b, c (cm; $a, b, c > 0$) và độ dài ba đường cao tương ứng lần lượt là x, y, z (cm; $x, y, z > 0$).

Theo bài ra ta có $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$ và $x + y + z = 26$.

Diện tích tam giác là $S = \frac{1}{2}ax = \frac{1}{2}by = \frac{1}{2}cz$

$\Rightarrow ax = by = cz \Rightarrow \frac{a}{2} \cdot 2x = \frac{b}{3} \cdot 3y = \frac{c}{4} \cdot 4z$

$\Rightarrow 2x = 3y = 4z \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$\frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{6+4+3} = \frac{26}{13} = 2$

Suy ra $x = 12$; $y = 8$; $z = 6$.

Vậy độ dài ba đường cao của tam giác lần lượt là 12 cm; 8 cm; 6 cm.

Câu 21. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc, 2016 - 2017)

Tìm độ dài 3 cạnh của tam giác có chu vi bằng 13cm. Biết độ dài 3 đường cao tương ứng lần lượt là 2cm, 3cm, 4cm.

Lời giải

Gọi độ dài ba cạnh của tam giác là x, y, z (cm) ($x, y, z > 0$)

Theo bài ra ta có: $x + y + z = 13$

Và $2x = 3y = 4z = 2S_{ABC} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$\frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{6+4+3} = \frac{13}{13} = 1 \Rightarrow x = 6, y = 4, z = 3$

Câu 22. (HSG 7 TP Vũng Tàu, 2021 - 2022)

Cho một tam giác có chu vi là 48cm, cạnh thứ nhất với cạnh thứ hai tỉ lệ với 1 và 2, cạnh thứ hai và cạnh thứ ba tỉ lệ với 6 và 7. Tính độ dài các cạnh của tam giác đó.

Lời giải

Gọi độ dài 3 cạnh: cạnh thứ nhất, cạnh thứ 2, cạnh thứ 3 lần lượt là a, b, c

Theo đề bài ta có: $a + b + c = 48$; $\frac{a}{1} = \frac{b}{2}$; $\frac{b}{6} = \frac{c}{7}$

$\Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{3+6+7} = 3$

$\Rightarrow a = 9; b = 18; c = 21$

Vậy độ dài các cạnh của tam giác lần lượt là 9cm; 18cm; 21cm

Câu 23. (HSG 7 trường Hưng Vũ, huyện Bắc Sơn 2022 - 2023; huyện Sơn Dương 2016 - 2017)

Tìm số đo các góc của ΔABC , biết rằng số đo các góc này tỉ lệ với 2,3,4

Lời giải

Trong ΔABC , ta có: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$

Không mất tính tổng quát, giả sử $\widehat{A} < \widehat{B} < \widehat{C}$

Theo giả thiết ta có: $\frac{\widehat{A}}{2} = \frac{\widehat{B}}{3} = \frac{\widehat{C}}{4}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{\widehat{A}}{2} = \frac{\widehat{B}}{3} = \frac{\widehat{C}}{4} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}}{2 + 3 + 4} = \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ \Rightarrow \begin{cases} \frac{\widehat{A}}{2} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 40^\circ \\ \frac{\widehat{B}}{3} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 60^\circ \\ \frac{\widehat{C}}{4} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 80^\circ \end{cases}$$

Vậy $\widehat{A} = 40^\circ, \widehat{B} = 60^\circ, \widehat{C} = 80^\circ$

Câu 24. (HSG 7 huyện Lục Ngạn – Bắc Giang năm 2022 - 2023)

Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài và chiều rộng lần lượt tỉ lệ với 4 và 3. Biết chu vi khu vườn là 140 m. Tính chiều dài và chiều rộng khu vườn đó?

Lời giải

Gọi chiều dài và chiều rộng của khu vườn lần lượt là x (m), y (m).

Điều kiện: $x > 0; y > 0$.

Vì chu vi của mảnh vườn là 140 m nên ta có: $2(x + y) = 140 \Rightarrow x + y = 70$.

Mặt khác chiều dài và chiều rộng lần lượt tỉ lệ với 4 và 3 nên: $\frac{x}{4} = \frac{y}{3}$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có: $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{x+y}{4+3} = \frac{70}{7} = 10$.

Suy ra: $x = 10 \cdot 4 = 40$ và $y = 10 \cdot 3 = 30$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn lần lượt là 40 m và 30 m.

Câu 25. (HSG 7 huyện Hoàng Mai, năm học 2022 – 2023)

Ông A chia một khu đất thành 3 mảnh hình chữ nhật có diện tích bằng nhau cho ba người con trai. Biết rằng chiều rộng của các mảnh đất lần lượt là 6m, 8m, 10m. Tổng chiều dài các mảnh đất là 47m. Tính diện tích khu đất đó.

Lời giải

Gọi chiều dài của 3 mảnh đất lần lượt là x, y, z . ($0 < x, y, z < 47$)(m)

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $0 < x < y < z$.

Vì các hình chữ nhật có diện tích bằng nhau nên chiều dài và chiều rộng của mỗi hình chữ nhật ứng với hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Do đó ta có

$$10x = 8y = 6z \Rightarrow \frac{10x}{120} = \frac{8y}{120} = \frac{6z}{120} \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{y}{15} = \frac{z}{20}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta lại có

$$\frac{x}{12} = \frac{y}{15} = \frac{z}{20} = \frac{x+y+z}{12+15+20} = \frac{47}{47} = 1.$$

Suy ra $x = 12, y = 15, z = 20$.

Vậy ta có các mảnh đất hình chữ nhật với kích thước như sau

$$(\text{rộng, dài}) \in \{(6, 20); (8, 15); (10, 12)\}.$$

Các mảnh đất này có diện tích bằng nhau và bằng $6 \cdot 20 = 120 \text{ (m}^2\text{)}$.

Vậy diện tích khu đất là $3 \cdot 120 = 420 \text{ (m}^2\text{)}$.

Câu 26. (Đề HSG 7 thị xã Kỳ Anh năm 2022 - 2023)

Một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích là 84 m^2 ; tỉ số giữa chiều rộng và chiều dài bằng $\frac{3}{7}$ độ dài của hàng rào bao quanh mảnh đất trên bằng bao nhiêu mét?

Lời giải

Vì tỉ số giữa chiều rộng và chiều dài là nên đặt chiều dài là $3k$, chiều rộng là $7k$ ($k > 0$)

Do diện tích của mảnh đất là 84 m^2 nên $3k \cdot 7k = 84 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = 2$ do $k > 0$

Với $k = 2$ thì chiều rộng của mảnh đất là $3 \cdot 2 = 6 \text{ m}$, chiều dài của mảnh đất là $7 \cdot 2 = 14 \text{ m}$

Vậy độ dài hàng rào bao quanh mảnh đất là $2 \cdot (6 + 14) = 40 \text{ m}$

Câu 27. (Đề HSG 7 trường THCS Lê Quý Đôn, huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Ba thửa ruộng hình chữ nhật A, B, C có cùng diện tích. Chiều rộng của 3 thửa ruộng A, B, C lần lượt tỉ lệ với $3; 4; 5$. Chiều dài của thửa ruộng A nhỏ hơn tổng chiều dài của 2 thửa ruộng B và C là 35 mét. Tính chiều dài mỗi thửa ruộng.

Lời giải

Gọi chiều dài của mỗi thửa ruộng A, B, C lần lượt là $x, y, z \text{ (m)}$ ($x, y, z > 0$)

Vì chiều dài của thửa ruộng A nhỏ hơn tổng chiều dài của 2 thửa ruộng B và C là 35 mét nên $y + z - x = 35$

Gọi chiều rộng của mỗi thửa ruộng A, B, C lần lượt là $a, b, c \text{ (m)}$ ($a, b, c > 0$)

Vì ba thửa ruộng hình chữ nhật A, B, C có cùng diện tích nên ta có: $ax = by = cz$ (1)

Chiều rộng của 3 thửa ruộng A, B, C lần lượt tỉ lệ với $3; 4; 5$ nên $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$

Đặt $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = k$ ($k > 0$) $\Rightarrow a = 3k; b = 4k; c = 5k$, thay vào (1) ta được

$$3kx = 4ky = 5kz \Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{y}{15} = \frac{z}{12}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{20} = \frac{y}{15} = \frac{z}{12} = \frac{y+z-x}{15+12-20} = \frac{35}{7} = 5$$

Từ đó tính được: $x = 100; y = 75; z = 60$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy chiều dài mỗi thửa ruộng A, B, C lần lượt là $100 \text{ m}; 75 \text{ m}; 60 \text{ m}$.

Câu 28. (HSG 7 huyện Thanh Trì 2022 - 2023; huyện Tam Dương 2021 - 2022; huyện Tiên Phước; trường Lê Hồng Phong, huyện Yên Mỹ 2018 - 2019; trường Võ Thị Sáu; trường Đáp Cầu; trường Trà Lý; huyện Dương Nam; huyện Năm Căn 2017 - 2018; huyện Đức Phổ 2015 - 2016)

Cho ba hình chữ nhật, biết diện tích của hình thứ nhất và diện tích của hình thứ hai tỉ lệ với 4 và 5, diện tích hình thứ hai và diện tích hình thứ ba tỉ lệ với 7 và 8, hình thứ nhất và hình thứ hai có cùng chiều dài và tổng các chiều rộng của chúng là 27cm, hình thứ hai và hình thứ ba có cùng chiều rộng, chiều dài của hình thứ ba là 24cm. Tính diện tích của mỗi hình chữ nhật đó.

Lời giải

Gọi diện tích ba hình chữ nhật lần lượt là S_1, S_2, S_3 , chiều dài, chiều rộng tương ứng là $d_1, r_1, d_2, r_2, d_3, r_3$ theo đề bài ta có:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{5}; \frac{S_2}{S_3} = \frac{7}{8} \text{ và } d_1 = d_2; r_1 + r_2 = 27; r_2 = r_3; d_3 = 24$$

Vì hình thứ nhất và hình thứ hai cùng chiều dài

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{5} = \frac{r_1}{r_2} \Rightarrow \frac{r_1}{4} = \frac{r_2}{5} = \frac{r_1 + r_2}{9} = \frac{27}{9} = 3$$

Suy ra chiều rộng $r_1 = 12\text{cm}, r_2 = 15\text{cm}$

Vì hình thứ hai và hình thứ ba cùng chiều rộng

$$\frac{S_2}{S_3} = \frac{7}{8} = \frac{d_2}{d_3} \Rightarrow d_2 = \frac{7d_3}{8} = \frac{7 \cdot 24}{8} = 21(\text{cm})$$

Vậy diện tích hình thứ hai: $S_2 = d_2 r_2 = 21 \cdot 15 = 315\text{cm}^2$

Diện tích hình thứ nhất: $S_1 = \frac{4}{5} S_2 = \frac{4}{5} \cdot 315 = 252\text{cm}^2$

Diện tích hình thứ ba: $S_3 = \frac{8}{7} S_2 = \frac{8}{7} \cdot 315 = 360\text{cm}^2$

Câu 29. (Đề HSG 7 trường THCS Phạm Đôn Lễ, huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Trong một đợt lao động ba khối 7;8;9 của một trường trồng được 828m đường hoa. Trung bình mỗi học sinh khối 7;8;9 theo thứ tự trồng được 2m;3m;4m đường hoa. Biết rằng số học sinh khối 7;8;9 tỉ lệ với 9;10;11. Tính số học sinh mỗi khối.

Lời giải

Gọi số học sinh mỗi khối 7;8;9 lần lượt là $a, b, c (a, b, c \in N^*)$

Ta có: $\frac{a}{9} = \frac{b}{10} = \frac{c}{11}$

Số mét đường hoa mỗi khối 7;8;9 trồng được lần lượt là $2a; 3b; 4c (m)$.

Do đó ta có: $2a + 3b + 4c = 828$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta được:

$$\frac{2a}{18} = \frac{3b}{30} = \frac{4c}{44} = \frac{2a + 3b + 4c}{18 + 30 + 44} = \frac{828}{92} = 9$$

Do đó: $a = 9 \cdot 9 = 81; b = 9 \cdot 10 = 90; c = 9 \cdot 11 = 99$

Vậy số học sinh mỗi khối 7;8;9 lần lượt là 81;90;99

Câu 30. (Đề HSG 7 trường THCS Lý Nam Đế, huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Trong một đợt lao động, ba khối 7,8,9 chuyên được $912m^3$ đất. Trung bình mỗi học sinh khối 7,8,9 theo thứ tự làm được $1,2m^3$; $1,4m^3$; $1,6m^3$. Số học sinh khối 7 và khối 8 tỉ lệ với 1 và 3. Số học sinh khối 8 và khối 9 tỉ lệ với 4 và 5. Tính số học sinh của mỗi khối?

Lời giải

Gọi số học sinh của ba khối 7,8,9 lần lượt là a, b, c (học sinh) ($a, b, c \in \mathbb{N}^*$)

Vì ba khối 7,8,9 chuyên được $912m^3$ đất nên ta có: $1,2a + 1,4b + 1,6c = 912$

Theo đề bài ta có: $\frac{a}{1} = \frac{b}{3}$ và $\frac{b}{4} = \frac{c}{5}$

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{3} \Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{b}{12}$$

$$\frac{b}{4} = \frac{c}{5} \Rightarrow \frac{b}{12} = \frac{c}{15}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{b}{12} = \frac{c}{15} \Rightarrow \frac{1,2a}{1,2 \cdot 4} = \frac{1,4b}{1,4 \cdot 12} = \frac{1,6c}{1,6 \cdot 15} \Rightarrow \frac{1,2a}{4,8} = \frac{1,4b}{16,8} = \frac{1,6c}{24}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta được:

$$\frac{1,2a}{4,8} = \frac{1,4b}{16,8} = \frac{1,6c}{24} = \frac{1,2a + 1,4b + 1,6c}{4,8 + 16,8 + 24} = \frac{912}{45,6} = 20$$

$$\text{Suy ra: } \frac{1,2a}{4,8} = 20 \Rightarrow 1,2a = 20 \cdot 4,8 \Rightarrow a = 80 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\frac{1,4b}{16,8} = 20 \Rightarrow 1,4b = 20 \cdot 16,8 \Rightarrow b = 240 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\frac{1,6c}{24} = 20 \Rightarrow 1,6c = 20 \cdot 24 \Rightarrow c = 300 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy số học sinh của ba khối 7,8,9 lần lượt là 80 học sinh, 240 học sinh, 300 học sinh

Câu 31. (HSG 7 huyện Quốc Oai, năm học 2022 – 2023)

Một công trường dự định phân chia số đất cho ba đội I, II, III tỉ lệ với 7;6;5. Nhưng sau đó vì số người của các đội thay đổi nên đã chia lại tỉ lệ 6;5;4. Như vậy có một đội làm nhiều hơn so với dự định là $6m^3$. Tính tổng số đất đã phân chia cho các đội.

Lời giải

Gọi tổng số đất đã phân chia cho các đội là $x(m^3)$; $x > 0$

Số đất dự định chia cho 3 đội I, II, III lần lượt là $a, b, c(m^3)$; $a, b, c > 0$

$$\text{Ta có } \frac{a}{7} = \frac{b}{6} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18}$$

$$\Rightarrow a = \frac{7x}{18}; b = \frac{6x}{18}; c = \frac{5x}{18} \text{ (1)}$$

Số đất sau đó chia cho 3 đội I, II, III lần lượt là $a', b', c'(m^3)$. ĐK: $a', b', c' > 0$

$$\text{Ta có } \frac{a'}{6} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{4} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{15}$$

$$\Rightarrow a' = \frac{6x}{15}; b' = \frac{5x}{15}; c' = \frac{4x}{15} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có: $a < a', b = b', c > c'$ nên đội I nhận nhiều hơn lúc đầu

$$\text{Vì } a - a' = 6 \text{ hay } \frac{7x}{18} - \frac{6x}{15} = 6$$

$$\Rightarrow \frac{x}{90} = 4 \Rightarrow x = 360$$

Vậy tổng số đất đã phân chia cho các đội là $360m^3$ đất.

Câu 32. (HSG 7 huyện SÓC SƠN 2022 - 2023)

Một bể chứa có dạng hình hộp chữ nhật và không có nước. Biết rằng chiều rộng, chiều dài và chiều cao của bể tỉ lệ với 3; 4; 5 và diện tích xung quanh 4 mặt của bể (không kể đáy) là $280m^2$. Người ta tiến hành bơm nước cho bể. Hỏi sau bao lâu thì đầy? Biết cứ mỗi phút máy bơm được vào bể 400 lít nước.

Lời giải

Gọi chiều rộng, chiều dài và chiều cao của bể nước lần lượt là x, y, z ($m; x, y, z > 0$).

$$\text{Theo đề bài ta có } \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}.$$

Vì diện tích xung quanh của bể nước là $280m^2$ nên $2(x + y)z = 280 \Leftrightarrow xz + yz = 140$ (*)

Đặt $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = k > 0 \Rightarrow x = 3k; y = 4k; z = 5k$, thay vào (*) suy ra

$$3k \cdot 5k + 4k \cdot 5k = 140 \Leftrightarrow 35k^2 = 140 \Leftrightarrow k = 2$$

$$\Rightarrow x = 6; y = 8; z = 10 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy thể tích của bể nước là: $6 \cdot 8 \cdot 10 = 480m^3 = 480\,000$ lít.

Thời gian bể bơi được bơm đầy nước là: $480\,000 : 400 = 1\,200$ (phút) = 20 (giờ).

Vậy sau 20 giờ thì bể được bơm đầy nước.

Câu 33. (HSG 7 NGUYỆT AN-TP VINH 2022 – 2023)

Một bể nước dạng hình hộp chữ nhật có chiều dài, chiều rộng và chiều cao tỉ lệ với 1:2:4. Tổng diện tích sáu mặt của bể nước là $112m^2$. Tính thể tích bể nước.

Lời giải

Gọi chiều dài, chiều rộng và chiều cao của bể nước dạng hình hộp chữ nhật lần lượt là $x; y; z$ (m)

Điều kiện: $x > 0; y > 0; z > 0$

Theo bài ra ta có: $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{4}$ và

Tổng diện tích 6 mặt của bể nước hình hộp chữ nhật là:

$$2(xy + yz + zx) = 112$$

$$\Leftrightarrow xy + yz + zx = 56 \quad (1)$$

$$\text{Đặt: } \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{4} = k \quad (k > 0) \Rightarrow \begin{cases} x = k \\ y = 2k \\ z = 4k \end{cases} \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được: $xy + yz + zx = 56$

$$\Rightarrow k.2k + 2k.4k + 4k.k = 56$$

$$\Rightarrow 2k^2 + 8k^2 + 4k^2 = 56 \Rightarrow 14k^2 = 56 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = -2 \end{cases}$$

$$\text{Vì } k > 0 \text{ nên } k = 2. \text{ Khi đó ta có } \begin{cases} x = k = 2 \\ y = 2k = 4 \text{ (thoả mãn điều kiện)} \\ z = 4k = 8 \end{cases}$$

Thể tích của bể là: $V = x.y.z = 2.4.8 = 64 \text{ (m}^3\text{)}$

Vậy thể tích của bể là: $V = 64\text{m}^3$.

Câu 34. (HSG 7 huyện Triệu Hóa 2022 - 2023)

Một vật chuyển động trên các cạnh hình vuông. Trên hai cạnh thứ nhất vật chuyển động với vận tốc 4 m/s, trên cạnh thứ hai với vận tốc 3 m/s và trên hai cạnh còn lại vật chuyển động với vận tốc 5 m/s. Tính cạnh hình vuông biết rằng tổng thời gian chuyển động trên cạnh thứ nhất và thứ hai hơn tổng thời gian chuyển động trên hai cạnh còn lại là 44 giây.

Lời giải

Gọi thời gian vật chuyển động lần lượt trên cạnh thứ nhất, thứ hai, thứ ba (thứ tư) là a, b, c (s) (ĐK: $a; b; c > 0$)

Vì độ dài quãng đường bằng nhau nên thời gian và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch

$$\text{Ta có: } 4a = 3b = 5c \Rightarrow \frac{a}{\frac{1}{4}} = \frac{b}{\frac{1}{3}} = \frac{c}{\frac{1}{5}}; \text{ và } a + b - 2c = 44$$

$$\text{Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có: } \frac{a}{\frac{1}{4}} = \frac{b}{\frac{1}{3}} = \frac{c}{\frac{1}{5}} = \frac{a+b-2c}{\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{5}} = \frac{44}{\frac{11}{60}} = 240$$

$$\text{Do đó } a = 240 \cdot \frac{1}{4} = 60$$

Vậy cạnh hình vuông là $4.60 = 240 \text{ m}$

Câu 35. (HSG 7 TP Vũng Tàu, 2021 - 2022)

Một vật chuyển động trên các cạnh hình vuông. Trên hai cạnh thứ nhất và thứ hai vật chuyển động với vận tốc 14m/s , trên cạnh thứ ba với vận tốc 22m/s , trên cạnh thứ tư với vận tốc 2m/s . Hỏi độ dài cạnh hình vuông biết rằng tổng thời gian vật chuyển động trên bốn cạnh là 106 giây.

Lời giải

Gọi x, y, z là thời gian chuyển động lần lượt với các vận tốc $14\text{m/s}, 22\text{m/s}, 2\text{m/s}$

Theo đề bài ta có $14x = 22y = 2z$; $x + x + y + z = 106$

$$\Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{14}} = \frac{y}{\frac{1}{22}} = \frac{z}{\frac{1}{2}} = \frac{106}{\frac{1}{154}} = 154$$

$$\Rightarrow x = 11; y = 7; z = 77$$

Vậy độ dài cạnh hình vuông là $11.14 = 154\text{m}$.

Câu 36. (HSG 7 Tp Ninh Bình 2022 - 2023)

Một vật chuyển động trên các cạnh hình vuông. Trên hai cạnh đầu vật chuyển động với vận tốc $5m/s$, trên cạnh thứ ba với vận tốc $4m/s$, trên cạnh thứ tư với vận tốc $3m/s$. Hỏi độ dài cạnh hình vuông biết rằng tổng thời gian vật chuyển động trên bốn cạnh là 59 giây.

Lời giải

Gọi x, y, z (giây) là thời gian chuyển động lần lượt với các vận tốc $5m/s, 4m/s, 3m/s$

Điều kiện: $0 < x, y, z < 59$

Theo bài ra ta có: $x + x + y + z = 59$

Vì quãng đường là cạnh hình vuông nên $5x = 4y = 3z \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+x+y+z}{1+1+4+3} = \frac{59}{9} = 60$$

Do đó: $x = 60 \cdot \frac{1}{9} = 12$; $y = 60 \cdot \frac{4}{9} = 15$; $z = 60 \cdot \frac{3}{9} = 20$ (thỏa mãn)

Vậy cạnh hình vuông là $5 \cdot 12 = 60m$.

Diện tích hình thứ nhất: $S_1 = \frac{4}{5} S_2 = \frac{4}{5} \cdot 315 = 252cm^2$

Diện tích hình thứ ba: $S_3 = \frac{8}{7} S_2 = \frac{8}{7} \cdot 315 = 360cm^2$

Câu 37. (HSG 7 trường Thiệu Châu 2022 - 2023; trường Hiền Quan 2018 - 2019)

Có 16 tờ giấy bạc loại 20000đ, 50000đ, 100000đ. Trị giá mỗi loại tiền trên đều bằng nhau. Hỏi mỗi loại có mấy tờ?

Lời giải

Gọi số tờ giấy bạc loại 20000đ, 50000đ, 100000đ theo thứ tự là x, y, z ($x, y, z \in \mathbb{N}^*$)

Theo bài ra ta có: $x + y + z = 16$ và $20000x = 50000y = 100000z$

Biến đổi $20000x = 50000y = 100000z$

$$\Rightarrow \frac{20000x}{100000} = \frac{50000y}{100000} = \frac{100000z}{100000} \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} = \frac{x+y+z}{5+2+1} = \frac{16}{8} = 2$$

Suy ra $x = 10, y = 4, z = 2$.

Vậy số tờ giấy bạc loại 20000đ, 50000đ, 100000đ theo thứ tự là 10; 4; 2

Câu 38. (HSG 7 huyện Hương Khê, tỉnh Hà Tĩnh, 2022 - 2023)

Cháu An được mừng tuổi 24 tiền loại 20000đ, 50000đ, 100000đ. Biết giá trị mỗi loại tiền trên đều bằng nhau. Hỏi cháu An có mấy tờ tiền mỗi loại ?

Lời giải

Gọi số tờ tiền loại 20000đ, 50000đ, 100000đ lần lượt là x, y, z

Điều kiện: $x, y, z \in \mathbb{N}^*; 0 < x, y, z < 24$

Theo đề bài ta có $20000x = 50000y = 100000z$ suy ra $\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ và $x + y + z = 24$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta được:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} = \frac{x+y+z}{5+2+1} = \frac{24}{8} = 3$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x = 3 \cdot 5 = 15 \\ y = 3 \cdot 2 = 6 \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \\ z = 3 \cdot 1 = 3 \end{cases}$$

Vậy An có 15 tờ 20000 đồng; 6 tờ 50000 đồng; 3 tờ 100000 đồng.

$$\text{Suy ra } x = \frac{27}{35}, y = \frac{36}{7}, z = \frac{45}{14}$$

Câu 39. (HSG 7 Tp Lào Cai 2022 - 2023)

Nghi hè, Nam được mẹ cho đi du lịch SaPa. Trên đường thăm quan, mua sắm các đặc sản, Nam gặp một bác bán đào. Quan sát bác bán đào có 3 loại, bạn có hỏi giá để mua. Bác bán đào nói: “3 lần giá loại I bằng 2 lần giá loại II; 4 lần giá loại I bằng 2 lần giá loại III; 4 lần giá loại II bằng 3 lần giá loại III. Nếu mua 3 kg đào, mỗi loại một kg thì hết 180000 đồng”. Em hãy giúp Nam tính xem 1 kg đào mỗi loại giá bao nhiêu tiền?

Lời giải

Gọi số tiền mua đào có 3 loại lần lượt là x, y, z (đồng)

Do 3 lần giá loại I bằng 2 lần giá loại II; 4 lần giá loại I bằng 2 lần giá loại III; 4 lần giá loại II bằng 3 lần giá loại III nên $3x = 2y; 4x = 2z; 4y = 3z \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$

Do mua 3 kg đào, mỗi loại một kg thì hết 180000 nên $x + y + z = 180000$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau nên: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y+z}{2+3+4} = \frac{180000}{9} = 20000$

Suy ra: $x = 40000; y = 60000; z = 80000$

Câu 40. (HSG 7 huyện Thiệu Hoá, tỉnh Thanh Hoá, trường THCS Thiệu Đô 2022 – 2023)

Bốn con ngựa ăn hết 1 xe cỏ trong 1 ngày, một con Dê ăn hết một xe cỏ trong 6 ngày, hai con cừu trong 24 ngày ăn hết 2 xe cỏ. Hỏi chỉ ba con (Ngựa, Dê và Cừu) ăn hết hai xe cỏ trong mấy ngày?

Lời giải

Vì bốn con ngựa cùng ăn hết xe cỏ trong 1 ngày

do đó một con ngựa ăn hết 1 xe cỏ trong 4 ngày

Một con dê ăn hết một xe cỏ trong 6 ngày.

Hai con cừu ăn hết hai xe cỏ trong 24 ngày nên một con cừu ăn hết một xe cỏ trong 12 ngày.

Trong một ngày: Một con ngựa ăn hết $\frac{1}{4}$ (xe cỏ)

một con dê ăn hết $\frac{1}{6}$ (xe cỏ),

một con cừu ăn hết $\frac{1}{12}$ (xe cỏ)

Cả ba con ăn hết: $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$ (xe cỏ)

Cả ba con ăn hết 1 xe cỏ trong 2 ngày nên ăn hết 2 xe cỏ trong 4 ngày.

Câu 41. (HSG 7 huyện Hoà Bình, 2016 - 2017)

Hai lớp 7A và 7B đi lao động trồng cây. Biết rằng tỉ số giữa số cây trồng được của lớp 7A và 7B là 0,8. Lớp 7B trồng nhiều hơn lớp 7A là 20 cây. Tính số cây mỗi lớp trồng được

Lời giải

Gọi x, y theo thứ tự là số cây trồng được của lớp 7A, 7B. Ta có:

$$y - x = 20 \text{ và } \frac{x}{y} = 0,8 \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{4}{5} \quad (1)$$

$$\text{Từ (1) ta có tỉ lệ thức } \frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{y-x}{5-4} = \frac{20}{1} = 20 \Rightarrow \begin{cases} x = 80 \\ y = 100 \end{cases}$$

Câu 42. (HSG 7 tỉnh Bắc Giang- 2012 - 2013)

Ba bạn An, Bình, Cường có tổng số viên bi là 74. Biết rằng số viên bi của An và Bình tỉ lệ với 5 và 6; số viên bi của Bình và Cường tỉ lệ với 4 và 5. Tính số viên bi của mỗi bạn.

Lời giải

Gọi số viên bi của An, Bình, Cường lần lượt là a, b, c viên

Điều kiện: $a, b, c. (a, b, c \in \mathbb{N}^*, a, b, c < 74)$

Vì tổng số viên bi của ba bạn là 74 nên $a + b + c = 74$

Vì số viên bi của An và Bình tỉ lệ với 5 và 6 nên $\frac{a}{5} = \frac{b}{6} \Rightarrow \frac{a}{10} = \frac{b}{12}$

Vì số viên bi của Bình và Cường tỉ lệ với 4 và 5 nên $\frac{b}{4} = \frac{c}{5} \Rightarrow \frac{b}{12} = \frac{c}{15}$

$$\text{Nên ta có: } \frac{a}{10} = \frac{b}{12} = \frac{c}{15} = \frac{a+b+c}{10+12+15} = \frac{74}{37} = 2$$

Từ đó suy ra $a = 20; b = 24; c = 30$ (thỏa mãn)

Vậy số viên bi của ba bạn An, Bình, Cường lần lượt là 20; 24; 30.

Câu 43. (HSG 7 huyện Diễn Châu năm 2022 - 2023)

Một trường THCS có ba lớp 7, tổng số học sinh hai lớp 7A, 7B là 85 em. Nếu chuyển 10 học sinh từ lớp 7A sang lớp 7C thì số học sinh ba lớp 7A, 7B, 7C tỉ lệ thuận với 7 ; 8 ; 9. Hỏi lúc đầu mỗi lớp có bao nhiêu học sinh?

Lời giải

Gọi số học sinh của lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là x, y, z (học sinh), $(x, y, z \in \mathbb{N}^*, x > 10)$.

Theo bài ra ta có: $x + y = 85. (1)$

Nếu chuyển 10 học sinh từ lớp 7A sang lớp 7C thì số học sinh lớp 7A, 7B, 7C tỉ lệ thuận với 7; 8; 9 nên ta có:

$$\frac{x-10}{7} = \frac{y}{8} = \frac{z+10}{9}. (2)$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x-10}{7} = \frac{y}{8} = \frac{z+10}{9} = \frac{(x-10)+y}{7+8} = \frac{85-10}{15} = 5.$$

Suy ra $x = 45, y = 40, z = 35$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy số học sinh của lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là 45, 40, 35 học sinh.

Câu 44. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn, huyện Nam Trà My, huyện Thăng Bình; huyện Bến Lức 2018 - 2019; trường Phan Đình Phùng 2017 - 2018; huyện Lâm Thao 2016 - 2017)

Học sinh khối 7 của một trường gồm 3 lớp tham gia trồng cây. Lớp 7A trồng toàn bộ 32,5% số cây. Biết số cây lớp 7B và 7C trồng được theo tỉ lệ 1,5 và 1,2. Hỏi số cây cả 3 lớp trồng được là bao nhiêu, biết số cây của lớp 7A trồng được ít hơn số cây của lớp 7B trồng được là 120 cây.

Lời giải

Gọi a, b, c ($a, b, c \in \mathbb{N}^*$) lần lượt là số cây của lớp 7A, 7B, 7C trồng được.

$$\text{Theo đề ta có: } \frac{b}{1,5} = \frac{c}{1,2} \Rightarrow c = \frac{4}{5}b \quad (1);$$

$$b - a = 120 \Rightarrow a = b - 120 \quad (2)$$

$$\text{và } a = 32,5\%(a + b + c) \Rightarrow a + b + c = \frac{40a}{13} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1) và (2) (3) } \Rightarrow b - 120 + b + \frac{4}{5}b = \frac{40}{13}(b - 120)$$

$$\Rightarrow \frac{14}{5}b - 120 = \frac{40}{13}b - \frac{4800}{13}$$

$$\Rightarrow \frac{40}{13}b - \frac{14}{5}b = \frac{4800}{13} - 120$$

$$\Rightarrow \frac{18}{65}b = \frac{3240}{13} \Rightarrow b = \frac{3240}{13} : \frac{18}{65} = 900 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\Rightarrow a = 900 - 120 = 780; c = \frac{4}{5}.900 = 720 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy cả 3 lớp trồng được số cây là $900 + 780 + 720 = 2400$ cây.

Câu 45. (HSG 7 Tp Thanh Hóa; quận Hà Đông 2022 - 2023; huyện Bá Thước 2021 - 2022)

Nhà trường dự định chia vở viết cho 3 lớp 7A; 7B; 7C theo tỉ lệ số học sinh là 7 : 6 : 5. Nhưng sau đó vì có học sinh chuyển giữa ba lớp nên phải chia lại theo tỉ lệ 6 : 5 : 4. Như vậy có lớp đã nhận ít hơn theo dự định 12 quyển vở. Tính số vở mỗi lớp nhận được.

Lời giải

Gọi tổng số vở chia cho 3 lớp là x ($x \in \mathbb{N}^*$).

Gọi số vở dự định chia cho 3 lớp 7A, 7B, 7C lúc đầu lần lượt là a, b, c . ($a, b, c \in \mathbb{N}^*$)

$$\text{Ta có: } \frac{a}{7} = \frac{b}{6} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{7x}{18}; b = \frac{6x}{18}; c = \frac{5x}{18} \quad (1)$$

Gọi số vở sau đó chia cho 3 lớp lần lượt là a', b', c' ($a', b', c' \in \mathbb{N}^*$), ta có:

$$\frac{a'}{6} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{4} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{15} \Rightarrow a' = \frac{6x}{15}; b' = \frac{5x}{15}; c' = \frac{4x}{15} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có: $a < a'; b = b'; c > c'$ nên lớp 7C nhận ít hơn lúc đầu.

$$\text{Vì lớp 7C nhận ít hơn 12 quyển nên } c - c' = 12 \Rightarrow \frac{5x}{18} - \frac{4x}{15} = 12 \Rightarrow x = 1080$$

$$\text{+ Số vở lớp 7A nhận được là: } a' = \frac{6.1080}{15} = 432 \text{ (quyển vở)}$$

+ Số vờ lớp 7B nhận được là: $b' = \frac{5.1080}{15} = 360$ (quyển vờ)

+ Số vờ lớp 7C nhận được là: $c' = \frac{4.1080}{15} = 288$ (quyển vờ)

Câu 46. (HSG 7 trường Mường Than; trường Thị trấn Bến Lức; 2022 - 2023; huyện Hiệp Đức 2018 - 2019)

Một công trường dự định phân chia số đất cho ba đội I, II, III tỉ lệ với 7;6;5. Nhưng sau đó vì số người của các đội thay đổi nên đã chia lại tỉ lệ 6;5;4. Như vậy có một đội làm nhiều hơn so với dự định là $6m^3$. Tính tổng số đất đã phân chia cho các đội.

Lời giải

Gọi tổng số đất đã phân chia cho các đội là $x(m^3); x > 0$

Số đất dự định chia cho 3 đội I, II, III lần lượt là $a, b, c(m^3); a, b, c > 0$

$$\text{Ta có } \frac{a}{7} = \frac{b}{6} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{7x}{18}; b = \frac{6x}{18}; c = \frac{5x}{18} \quad (1)$$

Số đất sau đó chia cho 3 đội I, II, III lần lượt là $a', b', c'(m^3)$. ĐK: $a', b', c' > 0$

$$\text{Ta có } \frac{a'}{6} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{4} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{15} \Rightarrow a' = \frac{6x}{15}; b' = \frac{5x}{15}; c' = \frac{4x}{15} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có: $a < a', b = b', c > c'$ nên đội I nhận nhiều hơn lúc đầu

$$\text{Vì } a - a' = 6 \text{ hay } \frac{7x}{18} - \frac{6x}{15} = 6 \Rightarrow \frac{x}{90} = 4 \Rightarrow x = 360$$

Vậy tổng số đất đã phân chia cho các đội là $360m^3$ đất.

Câu 47. (HSG 7 huyện Bình Xuyên – Vĩnh Phúc năm 2022 - 2023)

Ba lớp 7A, 7B, 7C cùng tham gia trồng cây trong vườn trường, lúc đầu thầy phụ trách dự định giao số cây trồng cho ba lớp tỉ lệ với 5:6:7 nhưng sau đó thầy giao theo tỉ lệ 4:5:6 nên có một lớp trồng nhiều hơn dự định 4 cây. Tính tổng số cây mà ba lớp đã trồng.

Lời giải

Gọi tổng số cây 3 lớp đã trồng là $x (x \in \mathbb{N}^*)$.

Số cây dự định chia cho 3 lớp 7A, 7B, 7C lúc đầu lần lượt là a, b, c .

$$\text{Ta có: } \frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{5x}{18}; b = \frac{6x}{18}; c = \frac{7x}{18} \quad (1)$$

Số cây sau đó chia cho 3 lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là a', b', c' .

$$\frac{a'}{4} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{6} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{15} \Rightarrow a' = \frac{4x}{15}; b' = \frac{5x}{15} = \frac{x}{3}; c' = \frac{6x}{15} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $a > a', b = b', c < c'$ nên lớp 7C nhận nhiều hơn lúc đầu.

$$\text{Vậy } c' - c = 4 \text{ hay } \frac{6x}{15} - \frac{7x}{18} = 4 \Rightarrow \frac{x}{90} = 4 \Rightarrow x = 360.$$

Vậy số cây ba lớp trồng được là 360 cây.

Câu 48. (HSG 7 trường Thị Trấn Cành Nàng 2022 - 2023)

Để phòng tránh Covid-19 trường A phát khẩu trang cho ba lớp 7A, 7B, 7C. Lúc đầu số khẩu trang dự định chia cho ba lớp tỉ lệ với 5 ; 6 ; 7 nhưng sau đó chia theo tỉ lệ 4 ; 5 ; 6 nên có một lớp nhận nhiều hơn dự định 4 khẩu trang. Tính tổng số khẩu trang mà ba lớp đã được phát.

Lời giải

Gọi tổng số khẩu trang 3 lớp cùng mua là x (x là số tự nhiên lớn hơn 0)

Gọi số khẩu trang dự định chia cho 3 lớp 7A, 7B, 7C lúc đầu lần lượt là a, b, c (gói).

$$\text{Ta có: } \frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{5x}{18}; b = \frac{6x}{18} = \frac{x}{3}; c = \frac{7x}{18}.$$

Gọi số khẩu trang sau đó chia cho 3 lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là $a'; b'; c'$ (gói).

$$\text{Ta có: } \frac{a'}{4} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{6} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{15} \Rightarrow a' = \frac{4x}{15}; b' = \frac{5x}{15} = \frac{x}{3}; c' = \frac{6x}{15} = \frac{2x}{5}.$$

So sánh ta có: $a > a'; b = b'; c < c'$ nên lớp 7C nhận nhiều hơn lúc đầu.

$$\text{Suy ra: } c' - c = 4 \text{ hay } \frac{6x}{15} - \frac{7x}{18} = 4 \Rightarrow \frac{x}{90} = 4 \Rightarrow x = 360 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy tổng số khẩu trang 3 lớp đã nhận được là 360 cái.

Câu 49. (HSG 7 trường Yên Lập; trường Nguyệt Ân; huyện Bình Lục; huyện Ứng Hòa đợt 1; huyện Tương Dương; huyện Vĩnh Lộc 2022 - 2023; huyện Ứng Hòa; huyện Thanh Thủy 2021 - 2022; trường Lý Tự Trọng; trường Phong Đạt; trường Hồng Liên 2018 - 2019; trường Hùng Thư 2017 - 2018; huyện Hương Khê 2016 - 2017; trường Phú Nhuận 2014 - 2015)

Ba lớp 7A, 7B, 7C cùng mua một số gói tăm từ thiện, lúc đầu số gói tăm dự định chia cho ba lớp với tỉ lệ 5 : 6 : 7 nhưng sau đó chia theo tỉ lệ 4 : 5 : 6 nên có một lớp nhận nhiều hơn dự định 4 gói.

a) Tính tổng số gói tăm mà ba lớp đã mua.

b) Nếu mỗi gói tăm là 5000 đồng thì số tiền ba lớp đã mua ủng hộ từ thiện là bao nhiêu?

Lời giải

a) Gọi tổng số gói tăm 3 lớp cùng mua là x ($x \in \mathbb{N}^*$)

Số gói tăm dự định chia cho 3 lớp 7A, 7B, 7C lúc đầu lần lượt là a, b, c

$$\text{Ta có: } \frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{5x}{18}; b = \frac{6x}{18}; c = \frac{7x}{18} \quad (1)$$

Số gói tăm sau đó chia cho 3 lớp lần lượt là a', b', c' , ta có:

$$\frac{a'}{4} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{6} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{15} \Rightarrow a' = \frac{4x}{15}; b' = \frac{5x}{15}; c' = \frac{6x}{15} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có: $a > a'; b = b'; c < c'$ nên lớp 7C nhận nhiều hơn lúc đầu

$$\Rightarrow c' - c = 4 \Rightarrow \frac{6x}{15} - \frac{7x}{18} = 4 \Rightarrow x = 360 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy số gói tăm 3 lớp đã mua là 360 gói.

b) Số tiền đã mua ủng hộ là $360.5000 = 1800000$ đồng.

Câu 50. (HSG 7 huyện Tiền Hải, năm học 2022 – 2023)

Ba lớp 7A, 7B, 7C cùng mua một số gói tăm từ thiện, lúc đầu số gói tăm dự định chia cho ba lớp tỉ lệ với 5 : 6 : 7 nhưng sau đó chia theo tỉ lệ 4 : 5 : 6 nên có một lớp nhận nhiều hơn dự định 12 gói. Tính tổng số gói tăm mà ba lớp đã mua.

Lời giải

Gọi tổng số gói tăm 3 lớp cùng mua là x (x là số tự nhiên khác 0)

Số gói tăm dự định chia cho 3 lớp 7A, 7B, 7C lúc đầu lần lượt là: a, b, c

$$\text{Ta có: } \frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{5x}{18}; b = \frac{6x}{18} = \frac{x}{3}; c = \frac{7x}{18} \quad (1)$$

Số gói tăm sau đó chia cho 3 lớp lần lượt là a', b', c' , ta có:

$$\frac{a'}{4} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{6} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{18} \Rightarrow a' = \frac{4x}{15}; b' = \frac{5x}{15} = \frac{x}{3}; c' = \frac{6x}{15} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có: $a > a'$; $b = b'$; $c < c'$ nên lớp 7C nhận nhiều hơn lúc đầu

$$\text{Do đó: } c' - c = 12 \text{ hay } \frac{6x}{15} - \frac{7x}{18} = 12 \Rightarrow x = 1080 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy số gói tăm 3 lớp đã mua là 1080 gói.

Câu 51. (HSG 7 huyện Lý Nhân, 2021 – 2022)

Ba lớp 7A, 7B, 7C cùng mua tăm từ thiện. Lúc đầu dự định chia số gói tăm cho ba lớp nói trên theo tỉ lệ 4, 5, 6 nhưng sau đó lại chia theo tỉ lệ 3, 4, 5 nên có một lớp nhận nhiều hơn dự định 8 gói. Tính tổng số gói tăm ba lớp mua?

Lời giải

Gọi tổng số gói tăm ba lớp cùng mua là x (x là số tự nhiên khác 0)

số gói tăm dự định chia cho ba lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là a, b, c

$$\text{Ta có } \frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{5x}{18}; b = \frac{6x}{18} = \frac{x}{3}; c = \frac{7x}{18} \quad (1)$$

Số gói tăm sau đó chia cho ba lớp lần lượt là a', b', c' , ta có

$$\frac{a'}{3} = \frac{b'}{4} = \frac{c'}{5} = \frac{a'+b'+c'}{12} = \frac{x}{12} \Rightarrow a' = \frac{3x}{12}; b' = \frac{4x}{12}; c' = \frac{5x}{12} \quad (2)$$

So sánh (1), (2) ta có $a > a'$; $b = b'$; $c < c'$ nên lớp 7C nhận nhiều hơn lúc ban đầu

$$\text{Vậy } c' - c = 8 \text{ hay } \frac{5x}{12} - \frac{7x}{18} = 8 \Rightarrow \frac{x}{36} = 8 \Rightarrow x = 288$$

Vậy số gói tăm ba lớp đã mua là 288 gói.

Câu 52. (Đề HSG 7 trường Thái Phương, huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Ba lớp 7A, 7B, 7C cùng mua một số gói tăm từ thiện, số gói tăm lớp 7A và 7B tỉ lệ với 2; 3. Số gói tăm lớp 7B và 7C tỉ lệ với 4; 5. Biết lớp 7B mua nhiều hơn 7A là 40. Tính tổng số gói tăm mà ba lớp đã mua.

Lời giải

Gọi số gói tăm lớp 7A, 7B, 7C lần lượt mua là $x; y; z$ với $x; y; z$ nguyên dương vì số gói tăm

$$\text{lớp 7A và 7B tỉ lệ với 2 và 3 nên } \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{y}{12} \quad (1)$$

$$\text{Vì số gói tăm lớp 7B và 7C tỉ lệ với 4 và 5 nên } \frac{y}{4} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{y}{12} = \frac{z}{15} \quad (2)$$

Từ (1);(2) ta có $\frac{x}{8} = \frac{y}{12} = \frac{z}{15}$

Vì số gói tăm lớp 7B nhiều hơn 7A là 40 nên $y - x = 40$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{8} = \frac{y}{12} = \frac{z}{15} = \frac{y-x}{12-8} = \frac{40}{4} = 10$$

$$\Rightarrow x = 8 \cdot 10 = 80; y = 12 \cdot 10 = 120; z = 15 \cdot 10 = 150(TM)$$

Vậy số gói tăm 3 lớp đã mua là $80 + 120 + 150 = 350$ (gói)

Câu 53. (HSG 7 Huyện Tam Dương 2022 - 2023)

Tổng số quyển vở học sinh lớp 7A quyên góp được để tặng cho học sinh vùng cao là một số tự nhiên có ba chữ số. Biết rằng số đó là bội của 18, các chữ số của nó tỉ lệ theo 1 : 2 : 3 và chữ số hàng trăm là số nhỏ nhất. Tìm số quyển vở mà lớp 7A quyên góp được.

Lời giải

Gọi a, b, c là các chữ số của số có ba chữ số cần tìm, ta có $1 \leq a + b + c \leq 27$

mặt khác số cần tìm là bội của 18 nên là bội của 9 do đó. $a + b + c = 9; a + b + c = 18; a + b + c = 27$

Theo đề bài ta có $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{1+2+3} = \frac{a+b+c}{6}$

Như vậy $a + b + c$ chia hết cho 6 nên $a + b + c = 18$ do đó $a = 3; b = 6; c = 9$

Do số cần tìm là bội của 18 nên chữ số hàng đơn vị phải là số chẵn và chữ số hàng trăm là chữ số nhỏ nhất nên số cần tìm là 963

Câu 54. (HSG 7 huyện Thọ Sơn – Thanh Hóa năm 2022 - 2023)

Một đơn vị công nhân sửa đường theo dự định phân chia số mét đường phải sửa cho 3 tổ: Tổ 1, Tổ 2, Tổ 3 tương ứng theo tỉ lệ 4 : 5 : 6. Nhưng sau đó, vì số người thay đổi nên đơn vị đã chia lại số mét đường phải sửa cho Tổ 1, Tổ 2, Tổ 3 tương ứng theo tỉ lệ 3 : 4 : 5. Do đó, có một tổ làm ít hơn dự định 20 m đường. Tính số mét đường đơn vị đã chia lại cho mỗi tổ.

Lời giải

Gọi tổng số mét đường ba tổ công nhân phải sửa là x (x là số tự nhiên khác 0).

Số mét đường dự định chia cho Tổ 1, Tổ 2, Tổ 3 lúc đầu lần lượt là: a, b, c .

Ta có: $\frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6} = \frac{a+b+c}{15} = \frac{x}{15} \Rightarrow a = \frac{4x}{15} = \frac{16x}{60}; b = \frac{5x}{15} = \frac{x}{3}; c = \frac{6x}{15} = \frac{24x}{60}$. (1)

Số mét đường sau đó chia cho Tổ 1, Tổ 2, Tổ 3 lần lượt là: a', b', c' .

Ta có: $\frac{a'}{3} = \frac{b'}{4} = \frac{c'}{5} = \frac{a'+b'+c'}{12} = \frac{x}{12} \Rightarrow a' = \frac{3x}{12} = \frac{15x}{60}; b' = \frac{4x}{12} = \frac{x}{3}; c' = \frac{25x}{60}$. (2)

So sánh (1) và (2) ta có: $a > a'; b = b'; c < c'$ nên Tổ 1 nhận ít hơn lúc đầu 20 m.

Suy ra: $c' - c = 4$ hay $\frac{16x}{60} - \frac{15x}{60} = 20 \Rightarrow \frac{x}{60} = 20 \Rightarrow x = 20 \cdot 60 = 1200$ (thỏa mãn).

Vậy số mét đường đơn vị đã chia lại cho 3 tổ lần lượt là:

Tổ 1: $a' = \frac{3x}{12} = \frac{3 \cdot 1200}{12} = 300$ (m).

Tổ 2: $b' = \frac{4x}{12} = \frac{1200}{3} = 400$ (m).

$$\text{Tổ 3: } c' = \frac{5x}{12} = \frac{5 \cdot 1200}{12} = 500 \text{ (m)}.$$

Câu 55. (HSG 7 huyện Kim Sơn 2021 - 2022)

Ba máy xay, xay được 359 tấn thóc. Số ngày làm việc của các máy tỉ lệ với 3 : 4 : 5, số giờ làm việc hàng ngày của các máy tỉ lệ theo 6 : 7 : 8 còn công suất của các máy tỉ lệ nghịch với 5 : 4 : 3. Hỏi mỗi máy xay được bao nhiêu tấn thóc?

Lời giải

Gọi x, y, z là số tấn thóc mỗi máy xay xay được.

x_1, y_1, z_1 là số ngày làm việc của mỗi máy.

x_2, y_2, z_2 là số giờ làm việc hàng ngày của mỗi máy.

x_3, y_3, z_3 là công suất của mỗi máy đó (tấn/giờ).

$$\text{Theo bài ra ta có: } x + y + z = 359 \quad (1)$$

$$x_1 : y_1 : z_1 = 3 : 4 : 5 \quad (2)$$

$$x_2 : y_2 : z_2 = 6 : 7 : 8 \quad (3)$$

$$x_3 : y_3 : z_3 = \frac{1}{5} : \frac{1}{4} : \frac{1}{3} \quad (4)$$

$$\text{Từ (2), (3), (4) ta có: } \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}{3 \cdot 6 \cdot \frac{1}{5}} = \frac{y_1 \cdot y_2 \cdot y_3}{4 \cdot 7 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3}{5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{3}} \quad (5)$$

$$\text{Từ (1), (5) ta có: } \frac{x}{\frac{18}{5}} = \frac{y}{7} = \frac{z}{\frac{40}{3}}$$

$$\text{Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau: } \frac{x}{\frac{18}{5}} = \frac{y}{7} = \frac{z}{\frac{40}{3}} = \frac{x+y+z}{\frac{18}{5} + 7 + \frac{40}{3}} = \frac{359}{\frac{359}{15}} = 15$$

$$\text{Suy ra: } x = 54; y = 105; z = 200.$$

Vậy số thóc mà các máy lần lượt xay được là 54 tấn, 105 tấn, 200 tấn.

Câu 56. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Vũ Thị Thục 2022 - 2023)

Tổng số học sinh của một trường là 630 học sinh. Biết số học sinh khối 6 và 7 tỉ lệ với 2 và 3; số học sinh khối 7 và 8 tỉ lệ với 4 và 5; số học sinh khối 8 và 9 tỉ lệ với 6 và 7. Tính số học sinh mỗi khối.

Lời giải

Gọi số HS của các khối 6; 7; 8; 9 lần lượt là: $x; y; z; t$ (học sinh) (Điều kiện $x; y; z; t > 0$).

$$\text{Theo bài ra ta có: } \frac{x}{2} = \frac{y}{3}; \frac{y}{4} = \frac{z}{5}; \frac{z}{6} = \frac{t}{7} \text{ và } x + y + z + t = 630.$$

$$\text{Ta có: } \frac{x}{2} = \frac{y}{3}; \frac{y}{4} = \frac{z}{5}; \frac{z}{6} = \frac{t}{7} \Rightarrow \frac{x}{16} = \frac{y}{24}; \frac{y}{24} = \frac{z}{30}; \frac{z}{30} = \frac{t}{35} \Rightarrow \frac{x}{16} = \frac{y}{24} = \frac{z}{30} = \frac{t}{35}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{16} = \frac{y}{24} = \frac{z}{30} = \frac{t}{35} = \frac{x+y+z+t}{16+24+30+35} = \frac{630}{105} = 6$$

$$+) \frac{x}{16} = 6 \Rightarrow x = 6.16 = 96$$

$$+) \frac{y}{24} = 6 \Rightarrow y = 6.24 = 144$$

$$+) \frac{z}{30} = 6 \Rightarrow z = 6.30 = 180$$

$$+) \frac{t}{35} = 6 \Rightarrow x = 6.35 = 210$$

Vậy số HS của khối 6; 7; 8; 9 lần lượt là: 96; 144; 180; 210.

Câu 57. (HSG 7 huyện Nghĩa Hành, 2021 - 2022)

Lớp 7A có 52 học sinh được chia làm ba tổ. Nếu tổ một bớt đi 1 học sinh, tổ hai bớt đi 2 học sinh, tổ ba thêm vào 3 học sinh thì số học sinh tổ một, hai, ba tỉ lệ nghịch với 3; 4; 2. Tìm số học sinh của mỗi tổ.

Lời giải

Gọi số học sinh tổ một, tổ hai, tổ ba của lớp 7A lần lượt là x, y, z (học sinh)

ĐK: $x, y, z \in \mathbb{N}^*, x, y, z < 52$

+) Lớp 7A có 52 học sinh nên $x + y + z = 52$.

+) Nếu tổ một bớt đi 1 học sinh, tổ hai bớt đi 2 học sinh, tổ ba thêm vào 3 học sinh thì số học sinh tổ một, hai, ba tỉ lệ nghịch với 3; 4; 2

Nên ta có $3.(x-1) = 4.(y-2) = 2.(z+3)$

$$\Rightarrow \frac{3(x-1)}{12} = \frac{4(y-2)}{12} = \frac{2(z+3)}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)}{4} = \frac{(y-2)}{3} = \frac{(z+3)}{6}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\Rightarrow \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{6} = \frac{x+y+z}{13} = \frac{52}{13} = 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=16 \\ y-2=12 \\ z+3=24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=17 \\ y=14 \\ z=21 \end{cases} \text{ (Thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy số học sinh tổ một, tổ hai, tổ ba của lớp 7A lần lượt là 17 học sinh, 14 học sinh, 21 học sinh

Câu 58. (HSG 7 thị xã Thái Hòa 2022 - 2023)

Trong phong trào “Tết vì bạn nghèo” năm 2022 của một trường A, ba khối 6, 7, 8 đã ủng hộ được 9 120 000 đồng. Trung bình mỗi học sinh khối 6, 7, 8 theo thứ tự ủng hộ được 12 000 đồng; 14 000 đồng; 16 000 đồng. Số học sinh đã ủng hộ khối 6 và 7 tỉ lệ với 1 và 3, số học sinh đã ủng hộ khối 7 và 8 tỉ lệ với 4 và 5. Tính số học sinh mỗi khối của trường A đã ủng hộ.

Lời giải

Gọi x, y, z lần lượt là số học sinh đã ủng hộ khối 6, 7, 8 (với $x, y, z \in \mathbb{N}^*$).

Do số học sinh khối 6 và 7 tỉ lệ với 1 và 3, số học sinh khối 7 và 8 tỉ lệ với 4 và 5 suy ra:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{3}; \frac{y}{4} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{12} = \frac{z}{15}. \quad (1)$$

Mặt khác cả ba khối ủng hộ được 9 120 000 đồng và trung bình mỗi học sinh khối 6, 7, 8 theo thứ tự ủng hộ được 12 000 đồng; 14 000 đồng; 16 000 đồng nên:

$$12000x + 14000y + 16000z = 9120000 \Rightarrow 12x + 14y + 16z = 9120. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{12} = \frac{z}{15} = \frac{12x + 14y + 16z}{4 \cdot 12 + 12 \cdot 14 + 15 \cdot 16} = \frac{9120}{456} = 20.$$

Suy ra: $x = 80$, $y = 240$, $z = 300$ (thỏa mãn).

Vậy khối 6 có 80 học sinh, khối 7 có 240 học sinh và khối 8 có 300 học sinh.

Câu 59. (HSG 7 huyện Nghĩa Đàn, năm học 2022 - 2023)

Bạn Tùng mua 62 viên bi gồm 3 loại. Loại I giá 5 nghìn đồng một viên, loại II giá 3 nghìn đồng một viên, loại III giá 2 nghìn đồng một viên. Hỏi bạn Tùng mua mỗi loại bao nhiêu viên bi biết rằng số tiền bạn Tùng mua mỗi loại bi là như nhau.

Lời giải

Gọi số viên bi loại I, loại II, loại III bạn Tùng mua được lần lượt là x , y , z (viên bi) ($x; y; z \in N^*$)

Số tiền bạn Tùng mua bi loại I, loại II, loại III lần lượt là $5x$; $3y$; $2z$ (nghìn đồng)

Vì số tiền bạn Tùng mua mỗi loại bi là như nhau nên ta có: $5x = 3y = 2z$

$$\Rightarrow \frac{5x}{30} = \frac{3y}{30} = \frac{2z}{30} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y}{10} = \frac{z}{15}$$

Vì bạn Tùng mua tất cả 62 viên bi nên $x + y + z = 62$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta được

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{10} = \frac{z}{15} = \frac{x+y+z}{6+10+15} = \frac{62}{31} = 2$$

$$\Rightarrow x = 6 \cdot 2 = 12(TM)$$

$$y = 10 \cdot 2 = 20(TM)$$

$$z = 15 \cdot 2 = 30(TM)$$

Vậy số viên bi loại I, loại II, loại III bạn Tùng mua được lần lượt là 12; 20; 30 (viên bi).

Câu 60. (HSG 7 huyện Nghi Lộc, năm học 2022 – 2023)

Cuối năm công ty A thưởng 45 triệu đồng cho ba tổ lao động xuất sắc. Biết rằng số tiền thưởng của tổ 1 và tổ 3 tỷ lệ thuận với 5 và 4, số tiền thưởng của tổ 2 và tổ 3 tỉ lệ nghịch với $\frac{1}{3}$ và $\frac{1}{2}$. Tính số tiền thưởng của mỗi tổ.

Lời giải

Gọi số tiền thưởng của ba tổ công nhân lần lượt là x, y, z (triệu đồng) $x, y, z > 0$

Tổng số tiền thưởng của ba tổ là 45 triệu đồng nên ta có: $x + y + z = 45$

Số tiền thưởng của tổ 1 và tổ 3 tỷ lệ thuận với 5 và 4 nên $\frac{x}{5} = \frac{z}{4}$

Số tiền thưởng của tổ 2 và tổ 3 tỉ lệ nghịch với $\frac{1}{3}$ và $\frac{1}{2}$ ta được $y \cdot \frac{1}{3} = z \cdot \frac{1}{2}$ hay $\frac{y}{6} = \frac{z}{4}$

Suy ra $\frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z}{4}$

Áp dụng tính chất của dãy tỷ số bằng nhau: $\frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z}{4} = \frac{x+y+z}{5+6+4} = \frac{45}{15} = 3$

Suy ra $x = 5.3 = 15$; $y = 6.3 = 18$; $z = 4.3 = 12$ (thỏa mãn)

Vậy số tiền thưởng của ba tổ công nhân lần lượt là 15 triệu đồng, 18 triệu đồng, 12 triệu đồng.

Câu 61. (Đề HSG 7 huyện Mỹ Đức, thành phố Hà Nội năm 2022 - 2023)

Một giá sách có tổng số 51 quyển sách được xếp vào 3 ngăn. Nếu ngăn thứ nhất xếp thêm 1 quyển, ngăn thứ hai bớt đi 5 quyển và ngăn thứ ba xếp thêm 1 quyển thì số sách ở mỗi ngăn tỉ lệ nghịch với 15;20;12. Tìm số sách ở mỗi ngăn lúc đầu.

Lời giải

Gọi số sách ở ngăn 1, ngăn 2, ngăn 3 lúc đầu lần lượt là: x, y, z

$(x, y, z \in \mathbb{N}^*; x < 51; 5 < y < 51; z < 51)$

Do tổng số sách là 51 quyển nên ta có $x + y + z = 51$

Khi ngăn thứ nhất thêm 1 quyển, ngăn thứ hai bớt đi 5 quyển và ngăn thứ ba xếp thêm 1 quyển thì số sách ở mỗi ngăn tỉ lệ nghịch với 15;20;12.

Nên ta có: $15(x+1) = 20(y-5) = 12(z+1)$

$$\Rightarrow \frac{15(x+1)}{60} = \frac{20(y-5)}{60} = \frac{12(z+1)}{60}$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{4} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+1}{5} = \frac{x+y+z-3}{12} = \frac{51-3}{12} = 4$$

$\Rightarrow x = 15, y = 17, z = 19$

Vậy số sách lúc đầu ở ngăn 1, ngăn 2, ngăn 3 lần lượt là: 15 quyển, 17 quyển, 19 quyển.

Câu 62. (Đề HSG 7 huyện Thái Thụy năm 2022 - 2023)

Trong kỳ thi khảo sát năng lực học sinh môn Toán của huyện A, ba khối 6,7,8 có 458 học sinh đăng ký tham gia. Khi khảo sát khối 6 giảm 5 học sinh, khối 7 giữ nguyên, khối 8 giảm 3 học sinh nên số học sinh tham gia khảo sát của khối 6,7,8 lần lượt tỉ lệ với 6;5;4. Tính số học sinh mỗi khối đăng ký tham gia khảo sát.

Lời giải

Gọi số học sinh khối 6;7;8 đăng ký tham gia khảo sát lần lượt là: x, y, z ($x, y, z \in \mathbb{N}^*$).

Theo bài ra ta có: $x + y + z = 458$.

Số học sinh khối 6;7;8 tham gia khảo sát lần lượt là $x-5$ (học sinh); y (học sinh); $z-3$ (học sinh).

Vì khi khảo sát khối 6 giảm 5 học sinh, khối 7 giữ nguyên, khối 8 giảm 3 học sinh nên số học sinh tham gia khảo sát của khối 6,7,8 lần lượt tỉ lệ với 6;5;4 nên $\frac{x-5}{6} = \frac{y}{5} = \frac{z-3}{4}$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x-5}{6} = \frac{y}{5} = \frac{z-3}{4} = \frac{x-5+y+z-3}{6+5+4} = \frac{x+y+z-8}{15} = \frac{450}{15} = 30$$

$\Rightarrow \frac{x-5}{6} = 30 \Rightarrow x = 185$ (thỏa mãn)

$$\frac{y}{5} = 30 \Rightarrow y = 150 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\frac{z-3}{4} = 30 \Rightarrow z = 123 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy số học sinh khối 6; 7; 8 đăng ký tham gia khảo sát lần lượt là: 185; 150; 123 học sinh.

Câu 63. Đề HSG 7 huyện Sóc Sơn, thành phố Hà Nội năm 2021 - 2022)

Trong một đợt thu kế hoạch nhỏ, ba khối 7; 8; 9 của một trường THCS đã thu gom được 912kg giấy vụn. Trung bình mỗi học sinh khối 7; 8; 9 theo thứ tự nộp là 1,2(kg); 1,4(kg); 1,6(kg) giấy vụn. Biết rằng số học sinh khối 7; 8 tỉ lệ với 1 và 3; Số học sinh khối 8 và 9 tỉ lệ với 4 và 5. Tính số học sinh của mỗi khối.

Lời giải

Gọi số học sinh khối 7; 8; 9 lần lượt là $x; y; z$ ($x, y, z \in \mathbb{N}$)

Trung bình mỗi học sinh khối 7; 8; 9 theo thứ tự nộp là 1,2(kg); 1,4(kg); 1,6(kg) giấy vụn nên ta có: $1,2x + 1,4y + 1,6z = 912$ (1)

Số học sinh khối 8 và 9 tỉ lệ với 4 và 5 nên $\frac{x}{1} = \frac{y}{3}; \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ (2)

$$\Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{12} = \frac{z}{15}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{12} = \frac{z}{15} = \frac{1,2x}{4,8} = \frac{1,4y}{16,8} = \frac{1,6z}{24} = \frac{1,2x + 1,4y + 1,6z}{4,8 + 16,8 + 24} = \frac{912}{45,6} = 20$$

Suy ra: $x = 4.20 = 80; y = 12.20 = 240; z = 15.20 = 300$ (thỏa mãn)

Vậy số học sinh khối 7; 8; 9 lần lượt là 80 học sinh, 240 học sinh, 300 học sinh.

Câu 64. (Đề HSG 7 trường Trần Thái Tông, huyện Hưng Hà; huyện Thái Thụy 2022 - 2023)

Cuối học kì I, ba bạn An, Tâm, Bình được thưởng tổng số vở là 58 quyển. Ba bạn quyết định dùng một nửa số vở của An, $\frac{1}{3}$ số vở của Tâm, $\frac{1}{4}$ số vở của Bình để tặng các bạn học sinh nghèo. Biết số vở còn lại sau khi tặng của ba bạn bằng nhau. Hỏi mỗi bạn được thưởng bao nhiêu quyển vở?

Lời giải

Gọi số vở được thưởng của ba bạn An, Tâm, Bình thứ tự là x, y, z (quyển).

Điều kiện: x, y, z nguyên dương.

Theo bài ra ta có: $\frac{1}{2}x = \frac{2}{3}y = \frac{3}{4}z$ và $x + y + z = 58$.

$$\Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{y}{9} = \frac{z}{8} \text{ và } x + y + z = 58$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{12} = \frac{y}{9} = \frac{z}{8} = \frac{x+y+z}{12+9+8} = \frac{58}{29} = 2$$

Nên $x = 2.12 = 24$ (TMĐK)

$y = 2.9 = 18$ (TMĐK)

$$z = 2.8 = 16 \text{ (TMDK)}$$

Vậy An được thưởng 24 quyển vở.

Tâm được thưởng 18 quyển vở.

Bình được thưởng 16 quyển vở.

Câu 65. (HSG 7 đề khảo sát Thái Bình 2022 - 2023)

Một đội công nhân có 38 người, được chia thành ba nhóm I, II, III. Nếu thêm 2 người vào nhóm I, thêm 3 người vào nhóm II và bớt 4 người của nhóm III thì số công nhân của ba nhóm I, II, III tỉ lệ nghịch với các số 4; 3; 2. Tìm số công nhân của mỗi nhóm.

Lời giải

Gọi số công nhân của ba nhóm I, II, III lần lượt là $x; y; z$ (người)

(Điều kiện: $x, y, z \in \mathbb{N}^*$; $x, y, z < 38$)

Vì đội công nhân có 38 người nên $x + y + z = 38$

Nếu thêm 2 người vào nhóm I, thêm 3 người vào nhóm II và bớt 4 người của nhóm III thì số công nhân của ba nhóm I, II, III tỉ lệ nghịch với các số 4; 3; 2 nên ta có:

$$4(x+2) = 3(y+3) = 2(z-4)$$

$$\Rightarrow \frac{4(x+2)}{12} = \frac{3(y+3)}{12} = \frac{2(z-4)}{12} \Rightarrow \frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-4}{6}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta được:

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-4}{6} = \frac{x+2+y+3+z-4}{3+4+6} = \frac{x+y+z+1}{13} = \frac{39}{13} = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2=9 \\ y+3=12 \\ z-4=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=9 \\ z=22 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy số công nhân của ba nhóm I, II, III lần lượt là 7 người; 9 người; 22 người.

Câu 66. (HSG 7 huyện Thạch Thành 2022 - 2023)

Một bản thảo sách giáo khoa dày 555 trang được giao cho 3 người đánh máy. Để đánh máy một trang người thứ nhất cần 5 phút, người thứ hai cần 4 phút, người thứ ba cần 6 phút. Hỏi mỗi người đánh được bao nhiêu trang bản thảo, biết rằng cả ba người cùng nhau làm từ đầu đến khi đánh máy xong.

Lời giải

Gọi số trang mà người thứ nhất, người thứ hai, người thứ ba lần lượt đánh máy được là $x; y; z$ (với $x; y; z$ nguyên dương).

Trong cùng một khoảng thời gian số trang sách đánh được tỉ lệ nghịch với thời gian đánh 1 trang sách nên ta có:

$$x : y : z = \frac{1}{5} : \frac{1}{4} : \frac{1}{6} = 12 : 15 : 10 \text{ hay } \frac{x}{12} = \frac{y}{15} = \frac{z}{10}.$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{12} = \frac{y}{15} = \frac{z}{10} = \frac{x+y+z}{12+15+10} = \frac{555}{37} = 15.$$

Suy ra: $x = 180; y = 225; z = 150$.

Vậy số trang người thứ nhất, người thứ hai, người thứ ba lần lượt đánh được là: 180; 225; 150.

Câu 67. (HSG 7 huyện Tân Kỳ, 2021 - 2022)

Ba đội máy cày, cày ba cánh đồng có cùng diện tích. Đội thứ nhất cày xong trong 3 ngày, đội thứ hai trong 5 ngày và đội thứ 3 trong 6 ngày. Hỏi mỗi đội có bao nhiêu máy, biết rằng đội thứ hai có nhiều hơn đội thứ ba là 1 máy (năng suất các máy như nhau)

Lời giải

Gọi số máy cày đội I; II; III lần lượt là x, y, z (máy) ($x, y, z \in \mathbb{N}^*$)

Vì ba đội máy cày, cày ba cánh đồng có cùng diện tích và năng suất các máy như nhau nên số máy và thời gian hoàn thành công việc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

Theo bài ta có: $3x = 5y = 6z; y - z = 2$

$$\text{Khi đó } 3x = 5y = 6z \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{6} = \frac{z}{5} = \frac{y-z}{6-5} = 2$$

Suy ra: $x = 20; y = 12; z = 10$

Vậy số máy cày đội I; II; III lần lượt là 20; 12; 10 máy

Câu 68. (HSG 7 huyện Anh Sơn năm 2022 - 2023)

Ba lớp 7A, 7B, 7C cùng chuyển một khối lượng gạch như nhau. Thời gian để các lớp 7A, 7B, 7C hoàn thành công việc lần lượt là 2 giờ, 3 giờ, 4 giờ. Tính số học sinh tham gia làm việc của mỗi lớp, biết rằng số học sinh tham gia làm việc tại 7C ít hơn số học sinh tham gia của 7B là 5 người. (Năng suất việc của mỗi học sinh là như nhau).

Lời giải:

Gọi số học sinh tham gia chuyển gạch của 3 lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là x, y, z (học sinh).

Điều kiện: $x, y, z \in \mathbb{N}^*$.

Thời gian hoàn thành công việc của 3 lớp lần lượt là 2 giờ, 3 giờ, 4 giờ và thời gian và số học sinh là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên: $2x = 3y = 4z$ hay $\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{4}}$.

Mà số học sinh tham gia làm việc tại 7C ít hơn số học sinh tham gia của 7B là 5 người nên $y - z = 5$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$2x = 3y = 4z = \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{4}} = \frac{y-z}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} = \frac{5}{\frac{1}{12}} = 60.$$

Suy ra: $x = 30; y = 20; z = 15$.

Vậy lớp 7A có 30 học sinh, lớp 7B có 20 học sinh, lớp 7C có 15 học sinh.

Câu 69. (HSG 7 huyện Anh Sơn, 2016 - 2017)

Ba đội cùng chuyển một khối lượng gạch như nhau. Thời gian để đội thứ nhất, đội thứ hai và đội thứ ba làm xong công việc lần lượt là 2 giờ, 3 giờ, 4 giờ. Tính số người tham gia làm việc của mỗi đội, biết rằng số người của đội thứ ba ít hơn số người của đội thứ hai là 5 người.

Lời giải

Gọi số người tham gia làm việc của đội 1, đội 2, đội 3 lần lượt là x, y, z (giờ)

ĐK: $x, y, z > 0$

Cùng một khối lượng công việc, số người tham gia và thời gian làm việc tỉ lệ nghịch.

Theo bài ra ta có: $2x = 3y = 4z$ và $y - z = 5$

$$\text{Suy ra } \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{4}}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{4}} = \frac{y-z}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} = \frac{5}{\frac{1}{12}} = 60$$

$$\text{Do đó } \Rightarrow y = 20, z = 15, x = 30$$

Vậy số người tham gia làm việc của đội thứ nhất, đội thứ hai, đội thứ ba lần lượt là 30 người, 20 người, 15 người.

Câu 70. (HSG 7 Thái Bình, 2021 – 2022)

Ba tổ công nhân A, B, C phải sản xuất cùng một số sản phẩm như nhau. Thời gian 3 tổ hoàn thành kế hoạch theo thứ tự là 14 ngày, 15 ngày và 21 ngày. Tổ A nhiều hơn tổ C là 10 người. Hỏi mỗi tổ có bao nhiêu công nhân? (Năng suất lao động của các công nhân là như nhau.)

Lời giải

Gọi số công nhân của ba tổ A, B, C lần lượt là x, y, z (người). ĐK: $x, y, z \in \mathbb{N}^*$

Theo đề bài ta có: x, y, z tỉ lệ nghịch với 14, 15, 21

$$\Rightarrow x, y, z \text{ tỉ lệ thuận với } \frac{1}{14}; \frac{1}{15}; \frac{1}{21}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{14}} = \frac{y}{\frac{1}{15}} = \frac{z}{\frac{1}{21}} \text{ và } x - z = 10$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{x}{\frac{1}{14}} = \frac{y}{\frac{1}{15}} = \frac{z}{\frac{1}{21}} = \frac{x-z}{\frac{1}{14}-\frac{1}{21}} = \frac{10}{\frac{1}{42}} = 420$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{14} \cdot 420 = 30$$

$$y = \frac{1}{15} \cdot 420 = 28$$

$$z = \frac{1}{21} \cdot 420 = 20$$

Vậy tổ A có 30 công nhân, tổ B có 28 công nhân, tổ C có 20 công nhân.

Câu 71. (Đề HSG 7 huyện Nông Cống năm 2022 - 2023)

Ba đội công nhân làm ba khối lượng công việc như nhau. Đội thứ nhất hoàn thành công việc trong 4 ngày, đội thứ hai trong 6 ngày. Hỏi đội thứ ba hoàn thành công việc trong bao nhiêu ngày? Biết rằng tổng số người của đội một và đội hai gấp 5 lần số người của đội ba.

Lời giải

Gọi x, y, z lần lượt là số người của đội thứ nhất, thứ hai và thứ ba ($x, y, z \in \mathbb{N}^*$).

Vì tổng số người của đội một và đội hai gấp 5 lần số người của đội ba nên: $x + y = 5z$.

Gọi t là số ngày để đội thứ ba hoàn thành công việc ($t > 0$).

Vì khối lượng công việc như nhau nên số người của mỗi đội tỉ lệ nghịch với số ngày hoàn thành công việc. Như vậy ta có: $4x = 6y = tz$.

$$\text{Suy ra: } \frac{x}{\frac{1}{4}} = \frac{y}{\frac{1}{6}} = \frac{z}{\frac{1}{t}} = \frac{x+y}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = \frac{5z}{\frac{5}{12}} = 12z.$$

$$\text{Suy ra: } tz = 12z \Leftrightarrow t = 12 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy đội thứ ba hoàn thành công việc trong 12 ngày

Câu 72. (HSG 7 huyện Hồng Ngự, tỉnh Đồng Tháp, trường THCS Hồng Ngự 2022 – 2023; huyện Hòa Bình 2016 - 2017)

Ba đội san đất làm ba khối công việc như nhau. Đội thứ nhất hoàn thành công việc trong 4 ngày, đội thứ hai hoàn thành công việc trong 6 ngày và đội thứ ba hoàn thành công việc trong 8 ngày. Hỏi mỗi đội có bao nhiêu máy (có cùng năng suất), biết rằng đội thứ nhất có nhiều hơn đội thứ hai 2 máy

Lời giải

Gọi x, y, z theo thứ tự là số máy ủi của đội 1, 2, 3

Do các máy có cùng công suất, khối lượng công việc của ba đội như nhau

⇒ Số máy và thời gian hoàn thành công việc là tỉ lệ nghịch với nhau.

$$\text{Ta có: } 4x = 6y = 8z \Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{4}} = \frac{y}{\frac{1}{6}} = \frac{z}{\frac{1}{8}} \text{ và } x - y = 2$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{\frac{1}{4}} = \frac{y}{\frac{1}{6}} = \frac{z}{\frac{1}{8}} = \frac{x-y}{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}} = \frac{2}{\frac{1}{12}} = 24$$

$$\text{Do đó } \frac{x}{\frac{1}{4}} = 24 \Rightarrow x = 6; \frac{y}{\frac{1}{6}} = 24 \Rightarrow y = 4; \frac{z}{\frac{1}{8}} = 24 \Rightarrow z = 3$$

Vậy số máy của ba đội 1, 2, 3 lần lượt là 6; 4; 3 máy.

Câu 73. (HSG 7 trường Bắc Sơn; trường Thái Hưng, huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Ba công nhân làm được 860 sản phẩm như nhau trong cùng một thời gian. Để làm xong 1 sản phẩm đó người thứ nhất cần 5 phút, người thứ hai cần 6 phút, người thứ ba cần 9 phút. Tính số sản phẩm mỗi người làm được.

Lời giải

Gọi số sản phẩm mỗi công nhân làm được lần lượt là a, b, c (sản phẩm) (Điều kiện: $a, b, c \in \mathbb{N}^*$)

Theo bài ra ta có: $5a = 6b = 9c$ và $a + b + c = 860$.

$$\Rightarrow \frac{a}{\frac{1}{5}} = \frac{b}{\frac{1}{6}} = \frac{c}{\frac{1}{9}} \text{ và } a + b + c = 860$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{\frac{1}{5}} = \frac{b}{\frac{1}{6}} = \frac{c}{\frac{1}{9}} = \frac{a+b+c}{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9}} = \frac{860}{\frac{18+15+10}{90}} = \frac{860 \cdot 90}{43} = 1800$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{5} \cdot 1800 = 360 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$b = \frac{1}{6} \cdot 1800 = 300 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$c = \frac{1}{9} \cdot 1800 = 200 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy số sản phẩm mỗi người làm được lần lượt là: 360 (sản phẩm); 300 (sản phẩm) và 200 (sản phẩm).

Câu 74.

Trong đợt dịch Covid-19, ba xí nghiệp sản xuất khẩu trang y tế trong 7 ngày được 2072 thùng. Biết số thùng xí nghiệp thứ nhất sản xuất trong 4 ngày bằng số thùng xí nghiệp thứ hai sản xuất trong 5 ngày, bằng số thùng xí nghiệp thứ ba sản xuất trong 6 ngày. Hỏi trong một ngày, mỗi xí nghiệp sản xuất được bao nhiêu thùng khẩu trang (coi năng suất mỗi ngày làm việc của từng xí nghiệp không thay đổi).

Lời giải

Gọi số thùng khẩu trang của xí nghiệp thứ nhất, thứ hai và thứ ba làm trong một ngày lần lượt là: $x; y; z$ (thùng). (ĐK: $x; y; z > 0$).

Vì trong 7 ngày cả ba xí nghiệp sản xuất được 2072 thùng nên:

$$7(x + y + z) = 2072 \Rightarrow x + y + z = 296 \quad (1)$$

$$\text{Theo bài ra ta có: } 4x = 5y = 6z \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{12} = \frac{z}{10} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{12} = \frac{z}{10} = \frac{x + y + z}{15 + 12 + 10} = \frac{296}{37} = 8$$

Suy ra: $x = 120; y = 96; z = 80$ (thỏa mãn).

Vậy trong một ngày xí nghiệp thứ nhất làm được 120 (thùng); xí nghiệp thứ hai làm được 96 (thùng); xí nghiệp thứ ba làm được 80 (thùng).

Câu 75. (HSG 7 huyện Sơn Động; huyện Lương Tài 2022 - 2023)

Nhà trường thành lập 3 nhóm học sinh khối 7 tham gia chăm sóc di tích lịch sử. Trong đó, $\frac{2}{3}$ số học sinh của nhóm I bằng $\frac{8}{11}$ số học sinh của nhóm II và bằng $\frac{4}{5}$ số học sinh nhóm III. Biết rằng số học sinh của nhóm I ít hơn tổng số học sinh của nhóm II và nhóm III là 18 học sinh. Tính số học sinh của mỗi nhóm.

Lời giải

Gọi số học sinh của nhóm I, II, III lần lượt là x, y, z (x, y, z nguyên dương).

$$\text{Theo bài ra ta có: } \frac{2}{3}x = \frac{8}{11}y = \frac{4}{5}z \text{ và } y + z - x = 18.$$

$$\text{Từ } \frac{2}{3}x = \frac{8}{11}y = \frac{4}{5}z \Rightarrow \frac{2 \cdot x}{3 \cdot 8} = \frac{8 \cdot y}{11 \cdot 8} = \frac{4 \cdot z}{5 \cdot 8} \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{y}{11} = \frac{z}{10}.$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta được:

$$\frac{x}{12} = \frac{y}{11} = \frac{z}{10} = \frac{y + z - x}{11 + 10 - 12} = \frac{18}{9} = 2$$

$$\Rightarrow x = 12 \cdot 2 = 24; y = 11 \cdot 2 = 22; z = 10 \cdot 2 = 20 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy: nhóm I có 24 học sinh; nhóm II có 22 học sinh, nhóm III có 20 học sinh.

Câu 76. (HSG 7 huyện Lang Giang năm học 2022 - 2023)

Một trường THCS có 3 lớp 7, biết $\frac{2}{3}$ số học sinh của lớp 7A bằng $\frac{3}{4}$ số học sinh lớp 7B và bằng $\frac{4}{5}$ số học sinh lớp 7C. Số học sinh lớp 7C ít hơn tổng số học sinh của hai lớp 7A và 7B là 57 học sinh. Số học sinh của khối 7 là bao nhiêu ?

Lời giải

Gọi số học sinh của 3 lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là x, y, z (học sinh), ($x, y, z \in \mathbb{N}^*$)

Theo bài ta có:

$$\frac{2}{3}x = \frac{3}{4}y = \frac{4}{5}z$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}x = \frac{3}{4}y \\ \frac{3}{4}y = \frac{4}{5}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x = 9y \\ 15y = 16z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{9} = \frac{y}{8} \\ \frac{y}{16} = \frac{z}{15} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{18} = \frac{y}{16} \\ \frac{y}{16} = \frac{z}{15} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{18} = \frac{y}{16} = \frac{z}{15}$$

Mà $x + y - z = 57$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{18} = \frac{y}{16} = \frac{z}{15} = \frac{x+y-z}{18+16-15} = \frac{57}{19} = 3 \Rightarrow x = 54; y = 48; z = 45$$

Vậy số học sinh của khối 7 là: $54+48+45 = 147$ (học sinh)

Câu 77. (HSG 7 huyện Văn Bàn; trường Thiệu Vận, huyện Thiệu Hóa; Tp Bắc Ninh 2022 - 2023; huyện Lục Ngạn 2021 - 2022; huyện Hoài Nhơn 2015 - 2016)

Ba lớp 7A, 7B, 7C ở trường H có tất cả 147 học sinh. Nếu đưa $\frac{1}{3}$ số học sinh của lớp 7A, $\frac{1}{4}$ số học sinh của lớp 7B và $\frac{1}{5}$ số học sinh của lớp 7C đi thi học sinh giỏi cấp huyện thì số học sinh còn lại của ba lớp bằng nhau. Tính số học sinh của mỗi lớp 7 ở trường H.

Lời giải

Gọi số học sinh của mỗi lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là a, b, c (học sinh).

Điều kiện $a, b, c \in \mathbb{N}^*; a, b, c < 147$.

Nếu đưa $\frac{1}{3}$ số học sinh của lớp 7A đi thi thì số học sinh còn lại là $a - \frac{1}{3}a = \frac{2a}{3}$ (học sinh).

Nếu đưa $\frac{1}{4}$ số học sinh của lớp 7B đi thi thì số học sinh còn lại là $b - \frac{1}{4}b = \frac{3b}{4}$ (học sinh)

Nếu đưa $\frac{1}{5}$ số học sinh của lớp 7C đi thi thì số học sinh còn lại là $c - \frac{1}{5}c = \frac{4c}{5}$ (học sinh)

Khi đó số học sinh còn lại của ba lớp bằng nhau nên ta có $\frac{2a}{3} = \frac{3b}{4} = \frac{4c}{5} \Rightarrow \frac{a}{18} = \frac{b}{16} = \frac{c}{15}$

Vì ba lớp 7A, 7B, 7C ở trường H có tất cả 147 học sinh nên $a + b + c = 147$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có: $\frac{a}{18} = \frac{b}{16} = \frac{c}{15} = \frac{a+b+c}{18+16+15} = \frac{147}{49} = 3$

Từ đó tìm được $a = 54; b = 48; c = 45$ (thỏa mãn điều kiện)

Số học sinh của ba lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là 54; 48; 45 học sinh.

Câu 78. (HSG 7 huyện Thanh Oai, năm học 2022 - 2023)

Ba lớp 7A, 7B, 7C có tất cả 127 học sinh. Nếu đưa $\frac{1}{3}$ số học sinh của lớp 7A, $\frac{2}{7}$ số học sinh của lớp 7B và $\frac{1}{4}$ số học sinh của lớp 7C đi thì số học sinh còn lại của 3 lớp bằng nhau. Tính số học sinh của mỗi lớp lúc đầu.

Lời giải

Gọi số học sinh của ba lớp 7A, 7B, 7C lúc đầu lần lượt là a, b, c (học sinh), $a, b, c \in \mathbb{N}^*$.

Ba lớp 7A, 7B, 7C có tất cả 127 học sinh nên $a + b + c = 127$

Nếu đưa $\frac{1}{3}$ số học sinh của lớp 7A, $\frac{2}{7}$ số học sinh của lớp 7B và $\frac{1}{4}$ số học sinh của lớp 7C

đi thì số học sinh còn lại của 3 lớp bằng nhau nên ta có: $a - \frac{1}{3}a = b - \frac{2}{7}b = c - \frac{1}{4}c$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}a = \frac{5}{7}b = \frac{3}{4}c \Rightarrow \frac{2a}{3 \cdot 30} = \frac{5b}{7 \cdot 30} = \frac{3c}{4 \cdot 30} \Rightarrow \frac{a}{45} = \frac{b}{42} = \frac{c}{40}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có: $\frac{a}{45} = \frac{b}{42} = \frac{c}{40} = \frac{a+b+c}{45+42+40} = \frac{127}{127} = 1$

Do đó $a = 45, b = 42, c = 40$ thỏa mãn điều kiện

Vậy số học sinh của ba lớp 7A, 7B, 7C lúc đầu lần lượt là 45; 42; 40 (học sinh)

Câu 79. (HSG 7 huyện Đô Lương năm 2022 - 2023)

Nhân dịp trồng cây đầu xuân, một trường THCS có ba lớp 7A, 7B, 7C tham gia trồng cây.

Nhà trường giao chỉ tiêu trồng cây cho từng lớp. Sau buổi làm việc thứ nhất thì thấy $\frac{1}{3}$ số

cây trồng được của lớp 7A bằng $\frac{3}{4}$ số cây trồng được của lớp 7B và bằng $\frac{3}{5}$ số cây còn lại

chưa trồng của lớp 7C. Tính số cây còn lại chưa trồng của lớp 7C sau buổi làm việc thứ nhất. Biết rằng tổng số cây đã trồng trong buổi thứ nhất của hai lớp 7A và 7B là 39 cây.

Lời giải

Gọi số cây lớp 7A, 7B, 7C trồng được trong buổi thứ nhất lần lượt là: x, y, z (cây).

Điều kiện: $x, y, z \in \mathbb{N}^*$.

Vì $\frac{1}{3}$ số cây trồng được của lớp 7A bằng $\frac{3}{4}$ số cây trồng được của lớp 7B và bằng $\frac{3}{5}$ số

cây còn lại chưa trồng của lớp 7C nên: $\frac{1}{3}x = \frac{3}{4}y = \frac{3}{5}z \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$.

Tổng số cây lớp 7A và 7B đã trồng được trong buổi thứ nhất là 39 cây nên $x + y = 39$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có: $\frac{x}{9} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = \frac{x+y}{9+4} = \frac{39}{13} = 3$.

Suy ra: $z = 3 \cdot 5 = 15$.

Vậy số cây chưa trồng của lớp 7C là 15 cây.

Câu 80. (HSG 7 huyện Đông Hưng; trường Kỳ Đồng, huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Lúc ban đầu ba kho có tất cả 710 tấn thóc. Sau khi bán đi $\frac{1}{5}$ số thóc ở kho I, $\frac{1}{6}$ số thóc ở kho II và $\frac{1}{11}$ số thóc ở kho III thì số thóc còn lại ở ba kho bằng nhau. Hỏi lúc đầu mỗi kho có bao nhiêu tấn thóc?

Lời giải

Gọi số thóc lúc đầu ở kho I, II, III lần lượt là x, y, z (tấn). Điều kiện: $x, y, z > 0$.

Vì lúc ban đầu ba kho có tất cả 710 tấn thóc nên $x + y + z = 710$.

Sau khi bán đi $\frac{1}{5}$ số thóc ở kho I, $\frac{1}{6}$ số thóc ở kho II và $\frac{1}{11}$ số thóc ở kho III thì số thóc còn lại ở ba kho bằng nhau nên $\frac{4}{5}x = \frac{5}{6}y = \frac{10}{11}z$.

$$\text{Vì } \frac{4}{5}x = \frac{5}{6}y = \frac{10}{11}z \Rightarrow \frac{4}{5 \cdot 20}x = \frac{5}{6 \cdot 20}y = \frac{10}{11 \cdot 20}z \Rightarrow \frac{x}{25} = \frac{y}{20} = \frac{z}{22}.$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{25} = \frac{y}{20} = \frac{z}{22} = \frac{x+y+z}{71} = \frac{710}{71} = 10 \Rightarrow x = 250; y = 240; z = 220.$$

Vậy số thóc kho I, II, III lúc đầu lần lượt có là 250 tấn, 240 tấn, 220 tấn.

Câu 81. (HSG 7 huyện Tân Kỳ năm 2022 - 2023)

Ba hộp trứng gà có tất cả 710 quả. Sau khi bán $\frac{1}{5}$ số trứng ở hộp thứ nhất, $\frac{1}{6}$ số trứng ở hộp thứ hai và $\frac{1}{11}$ số trứng ở hộp thứ ba thì số trứng còn lại ở ba hộp bằng nhau. Hỏi lúc đầu mỗi hộp có bao nhiêu quả trứng?

Lời giải

Gọi x, y, z lần lượt là số trứng ở ba hộp. Điều kiện: $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ và $x, y, z < 710$.

Vì tổng số trứng ở ba hộp là 710 nên: $x + y + z = 710$.

Vì sau khi bán $\frac{1}{5}$ số trứng ở hộp thứ nhất, $\frac{1}{6}$ số trứng ở hộp thứ hai và $\frac{1}{11}$ số trứng ở hộp thứ ba thì số trứng còn lại ở ba hộp bằng nhau nên: $\frac{4}{5}x = \frac{5}{6}y = \frac{10}{11}z \Rightarrow \frac{x}{25} = \frac{y}{24} = \frac{z}{22}$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta được:

$$\frac{x}{25} = \frac{y}{24} = \frac{z}{22} = \frac{x+y+z}{25+24+22} = \frac{710}{71} = 10 \Rightarrow x = 250, y = 240, z = 220 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Vậy ban đầu ba hộp có số trứng lần lượt là 250; 240; 220 quả.

Câu 82. (HSG 7 huyện BẢO THẮNG 2022 - 2023)

Bốn túi đường có tổng cộng 156 kg. Lần thứ nhất người ta lấy đi 1 kg ở túi thứ nhất, 2 kg ở túi thứ hai, 3 kg ở túi thứ ba, 4 kg ở túi thứ tư. Lần thứ hai người ta lấy đi $\frac{1}{5}$ số đường còn lại ở túi thứ nhất, $\frac{1}{4}$ số đường còn lại ở túi thứ hai, $\frac{1}{3}$ số đường còn lại ở túi thứ ba, $\frac{1}{2}$ số đường còn lại ở túi thứ tư thì số kg đường còn lại sau lần lấy thứ hai của bốn túi bằng nhau. Tính số kg đường mỗi túi lúc đầu.

Lời giải

Gọi $x+1$; $y+2$; $z+3$; $t+4$ là số kg đường ở túi thứ nhất, túi thứ hai, túi thứ ba, túi thứ tư. Sau lần thứ nhất tổng số đường ở 4 túi còn là: $156-(1+2+3+4)=146$ kg. Hay $x+y+z+t=146$.

Sau lần thứ hai số đường ở túi thứ nhất, túi thứ hai, túi thứ ba, túi thứ tư lần lượt là: $\frac{4}{5}x$ (kg); $\frac{3}{4}y$ (kg); $\frac{2}{3}z$ (kg); $\frac{1}{2}t$ (kg).

Theo bài ra ta có: $\frac{4}{5}x = \frac{3}{4}y = \frac{2}{3}z = \frac{1}{2}t$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{\frac{4}{5}x}{\frac{3}{4}y} = \frac{\frac{3}{4}y}{\frac{2}{3}z} = \frac{\frac{2}{3}z}{\frac{1}{2}t} = \frac{12}{15}x = \frac{12}{16}y = \frac{12}{18}z = \frac{12}{24}t = \frac{12(x+y+z+t)}{15+16+18+24} = \frac{12 \cdot 146}{73} = 24$$

Do đó: $\frac{4}{5}x = 24 \Rightarrow x = 30$

$\frac{3}{4}y = 24 \Rightarrow y = 32$

$\frac{2}{3}z = 24 \Rightarrow z = 36$

Vậy số đường mỗi túi ban đầu là:

Túi 1: $30+1=31$ kg

Túi 2: $32+2=34$ kg

Túi 3: $36+3=39$ kg

Túi 4: $48+4=52$ kg

Câu 83. (HSG HUYỆN BÌNH LONG- 2022 - 2023)

Trong đợt thi đua chào mừng ngày Quốc khánh 2-9, ba đội xe được giao vận chuyển ít nhất là 3030 tấn hàng. Cuối đợt đội I vượt mức 26%, đội II vượt mức 5% và đội III vượt mức 8% định mức của mỗi đội nên khối lượng mà ba đội đã vận chuyển được bằng nhau. Tính định mức vận chuyển của mỗi đội xe.

Lời giải

Gọi định mức vận chuyển của các đội I, II, III lần lượt là a, b, c (tấn, $a, b, c > 0$).

Ta có: $a+b+c=3030$.

Cuối đợt đội I vượt mức 26%, đội II vượt mức 5% và đội III vượt mức 8% định mức của mỗi đội nên khối lượng mà ba đội đã vận chuyển được bằng nhau nên ta có:

$$126\%a = 105\%b = 108\%c \Rightarrow 126a = 105b = 108c \Rightarrow \frac{a}{\frac{1}{126}} = \frac{b}{\frac{1}{105}} = \frac{c}{\frac{1}{108}}$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{\frac{1}{126}} = \frac{b}{\frac{1}{105}} = \frac{c}{\frac{1}{108}} = \frac{a+b+c}{\frac{1}{126} + \frac{1}{105} + \frac{1}{108}} = \frac{3030}{\frac{101}{3780}} = 113400.$$

Suy ra: $a = \frac{1}{126} \cdot 113400 = 900$; $b = \frac{1}{105} \cdot 113400 = 1080$; $c = \frac{1}{108} \cdot 113400 = 1050$.

Vận định mức vận chuyển của các đội I, II, II lần lượt là 900; 1080; 1050 (tấn hàng).

Câu 84. (Đề HSG 7 trường Lê Quý Đôn, Hà Đông năm 2022 - 2023)

Trong kì thi giao lưu học sinh giỏi cấp trường, ba khối 6,7,8 có tất cả 342 học sinh dự thi.

Tính số học sinh dự thi của mỗi khối, biết rằng nếu tăng $\frac{3}{13}$ số học sinh dự thi của khối lớp

6, tăng $\frac{5}{11}$ số học sinh dự thi của khối lớp 7 và tăng $\frac{1}{7}$ số học sinh dự thi của khối lớp 8 thì số học sinh dự thi của mỗi khối là như nhau.

Lời giải

Gọi tổng số học sinh dự thi giao lưu học sinh giỏi môn toán cấp trường của ba khối 6;7;8 lần lượt là $a, b, c (a, b, c \in \mathbb{N}^*)$

Theo bài ra ta có: $a + \frac{3}{13}a = b + \frac{5}{11}b = c + \frac{1}{7}c (*)$ và $a + b + c = 360$

$$\text{Từ } (*) \Rightarrow \frac{16a}{13} = \frac{16b}{11} = \frac{8c}{7} \Rightarrow \frac{16a}{13} = \frac{16b}{11} = \frac{16c}{14} \Rightarrow \frac{a}{13} = \frac{b}{11} = \frac{c}{14}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{13} = \frac{b}{11} = \frac{c}{14} = \frac{a+b+c}{13+11+14} = \frac{342}{38} = 9 \Rightarrow a = 117, b = 99, c = 126$$

Vậy tổng số học sinh dự thi giao lưu học sinh giỏi môn toán cấp trường của ba khối 6;7;8 lần lượt là 117;99;126

Câu 85. (Đề HSG 7 trường THCS Thống Nhất, huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Trường có 3 lớp 7, biết $\frac{2}{3}$ số học sinh lớp 7A bằng $\frac{3}{4}$ số học sinh 7B và bằng $\frac{4}{5}$ số học sinh 7C. Lớp 7C có số học sinh ít hơn tổng số học sinh của 2 lớp kia là 57 bạn. Tính số học sinh mỗi lớp?

Lời giải

Gọi số học sinh của ba lớp 7A;7B;7C lần lượt là a, b, c (học sinh) ($a, b, c \in \mathbb{N}^*$)

Vì $\frac{2}{3}$ có số học sinh lớp 7A bằng $\frac{3}{4}$ số học sinh 7B và bằng $\frac{4}{5}$ số học sinh 7C

$$\text{nên ta có: } \frac{2}{3}a = \frac{3}{4}b = \frac{4}{5}c \Rightarrow \frac{2a}{3 \cdot 12} = \frac{3b}{4 \cdot 12} = \frac{4c}{5 \cdot 12} \Rightarrow \frac{a}{18} = \frac{b}{16} = \frac{c}{15}$$

Vì lớp 7C có số học sinh ít hơn tổng số học sinh của 2 lớp kia là 57 bạn nên $a + b - c = 57$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{18} = \frac{b}{16} = \frac{c}{15} = \frac{a+b-c}{18+16-15} = \frac{57}{19} = 3$$

Suy ra $a = 3 \cdot 18 = 54; b = 3 \cdot 16 = 48; c = 3 \cdot 15 = 45$ (thỏa mãn)

Vậy số học sinh của ba lớp 7A;7B;7C lần lượt là 54 học sinh, 48 học sinh, 45 học sinh.

Câu 86. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Văn Lang 2022 - 2023)

Ba kho A, B, C chứa một số gạo. Nếu nhập vào kho A thêm $\frac{1}{7}$ số gạo của kho đó, xuất ở kho B đi $\frac{1}{9}$ số gạo của kho đó và xuất ở kho C đi $\frac{2}{7}$ số gạo của kho đó thì khi đó số gạo ở ba kho bằng nhau. Tính số gạo ở mỗi kho lúc đầu, biết kho B nhiều hơn kho A 20 tạ.

Lời giải

Gọi số gạo lúc đầu của kho A, B, C lần lượt là x, y, z (tạ) (Điều kiện $x, y, z > 0$)

Theo bài ra, ta có: $\frac{8}{7}x = \frac{8}{9}y = \frac{5}{7}z$ (1) và $y - x = 20$.

Chia cả ba tỉ số của (1) cho 40 (BCNN của 8 và 5) ta được: $\frac{x}{35} = \frac{y}{45} = \frac{z}{56}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có

$$\frac{x}{35} = \frac{y}{45} = \frac{z}{56} = \frac{y-x}{45-35} = \frac{20}{10} = 2$$

$$\text{Do đó } \frac{x}{35} = 2 \Rightarrow x = 70$$

$$\frac{y}{45} = 2 \Rightarrow y = 90$$

$$\frac{z}{56} = 2 \Rightarrow z = 112$$

Vậy số gạo ở mỗi kho A, B, C lúc đầu lần lượt là: 70 tạ, 90 tạ, 112 tạ.

Câu 87. (HSG 7 huyện Điện Bàn, năm học 2022 - 2023)

Một người đi từ A đến B với vận tốc 4km/h và dự định đến B vào lúc 11 giờ 45 phút. Sau khi đi được $\frac{4}{5}$ quãng đường thì người đó đi với vận tốc 3km/h nên đến B lúc 12 giờ 00 phút cùng ngày. Em hãy tính chiều dài quãng đường AB và cho biết người đó khởi hành từ A lúc mấy giờ?

Lời giải

Gọi t_1 là thời gian dự định để đi hết $\frac{1}{5}$ quãng đường cuối cùng;

Gọi t_2 là thời gian thực tế để đi hết $\frac{1}{5}$ quãng đường cuối cùng;

Vì cùng quãng đường thì thời gian và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Theo đề ta có tỉ lệ thức $\frac{t_2}{4} = \frac{t_1}{3}$

Vì thời gian thực tế đến B trễ hơn dự định 15 phút nên ta có $t_2 - t_1 = 15$ phút = $\frac{1}{4}$ h,

$$\text{kết hợp } \frac{t_2}{4} = \frac{t_1}{3} = \frac{t_2 - t_1}{4 - 3} = \frac{1}{4} \Rightarrow t_1 = \frac{3}{4} \text{ h}$$

Độ dài quãng đường AB là $\frac{3}{4} \cdot 4 \cdot 5 = 15$ km

Thời gian dự định đi từ A đến B là $15 : 4 = 3\text{h } 45\text{ph}$

Người đó khởi hành tại A vào lúc 11h 45 ph – 3h 45 ph = 8h00 ph

Câu 88. (HSG 7 huyện Lục Nam 2018 - 2019)

Hai xe máy khởi hành cùng một lúc từ A và B, cách nhau 11km để đi đến C (ba địa điểm A, B, C ở cùng trên một đường thẳng). Vận tốc của người đi từ A là 20km/h. Vận tốc của người đi từ B là 24km/h. Tính quãng đường mỗi người đã đi. Biết họ đến C cùng một lúc.

Lời giải

Gọi quãng đường đi được của 2 người lần lượt là $a, b (km) (a, b > 0)$

+ TH1: C nằm giữa hai điểm A và B

Theo đề bài ta có: $a + b = 11$ và $\frac{a}{20} = \frac{b}{24}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta được:

$$\frac{a}{20} = \frac{b}{24} = \frac{a+b}{20+24} = \frac{11}{44} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = 5; b = 6$$

Vậy quãng đường $AC = 5 \text{ km}; BC = 6 \text{ km}.$

+ TH2: C không nằm giữa hai điểm A và B

Theo đề bài ta có: $b - a = 11$ và $\frac{a}{20} = \frac{b}{24}$

Lập luận được B không nằm giữa A và C

$$\frac{a}{20} = \frac{b}{24} = \frac{b-a}{24-20} = \frac{11}{4} \Rightarrow a = 55; b = 66$$

Vậy quãng đường $AC = 55 \text{ km}; BC = 66 \text{ km}.$

CD11: CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC, TÌM GTLN, GTNN

Dạng 1: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất
Dạng 2.1: Bất đẳng thức về chứng minh tổng phân số tự nhiên
Dạng 2.2: Bất đẳng thức về chứng minh tổng lũy thừa
Dạng 2.3: Bất đẳng thức về chứng minh tích của một dãy
Dạng 3: Bất đẳng thức dạng chữ

Dạng 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. (HSG 7 huyện Lạng Giang 2022 - 2023)

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = \sqrt{x} + (x - 2y + 1)^2 + 10$ với $x \geq 0$ là:

- A.** 10 **B.** 11 **C.** 1 **D.** -10

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\sqrt{x} \geq 0, \forall x \geq 0; (x - 2y + 1)^2 \geq 0, \forall x, y$

$\Rightarrow \sqrt{x} + (x - 2y + 1)^2 \geq 0, \forall x \geq 0, \forall y$

$\Rightarrow C = \sqrt{x} + (x - 2y + 1)^2 + 10 \geq 10, \forall x \geq 0, \forall y$

Giá trị nhỏ nhất của C bằng 10 khi:

$$\begin{cases} \sqrt{x} = 0 \\ (x - 2y + 1)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của C bằng 10 khi $x = 0; y = \frac{1}{2}$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Lục Nam - Bắc Giang 2021 - 2022)

Cho số $x \in Z$ để $B = \frac{2018 - x}{2017 - x}$ có giá trị lớn nhất. Giá trị lớn nhất của B là :

- A.** 1. **B.** 4 **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $B = \frac{2018 - x}{2017 - x} = \frac{2017 - x + 1}{2017 - x} = 1 + \frac{1}{2017 - x}$

Suy ra B đạt giá trị lớn nhất khi $2017 - x$ là số dương nhỏ nhất.

Mà x là số nguyên $\Rightarrow 2017 - x = 1 \Rightarrow x = 2016$.

Khi đó $B = 1 + 1 = 2$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Thanh Thủy - Phú Thọ 2021 - 2022)

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |y - 2| + |y - 5|$ là

- A.** 2 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 7

Lời giải

Chọn B

Ta có: $A = |y-2| + |y-5| = |y-2| + |5-y|$

Áp dụng BĐT giá trị tuyệt đối: $|a| + |b| \geq |a+b|$. Dấu '=' xảy ra khi $a.b \geq 0$.

Ta có $|y-2| + |5-y| \geq |y-2+5-y| = 3$. Dấu '=' xảy ra khi $(y-2)(5-y) \geq 0 \Rightarrow 2 \leq y \leq 5 \Rightarrow A \geq 3$

Vậy A có giá trị nhỏ nhất bằng 3 khi $2 \leq y \leq 5$

Câu 4. (HSG 7 huyện Thanh Thủy - Phú Thọ 2021 - 2022)

Với x nguyên, giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{2022-x}{2-x}$ là

- A.** 2021 **B.** 2020 **C.** 2019 **D.** 2018

Lời giải

Chọn A

Ta có: $A = \frac{2022-x}{2-x} = 1 + \frac{2020}{2-x}, x \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2-x \in \mathbb{Z}$.

Để A có giá trị lớn nhất thì $2-x$ là số nguyên dương nhỏ nhất, hay $2-x=1 \Rightarrow x=1$.

Vậy GTLN của A là 2021 khi $x=1$.

Câu 5. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn, huyện Nam Trà My, huyện Thăng Bình, trường Đào Duy Từ 2018 - 2019; huyện Lâm Thao 2016 - 2017)

Cho $(a-b)^2 + 6ab = 36$. Giá trị lớn nhất của $x = a.b$ là:

- A.** 6 **B.** -6 **C.** 7 **D.** 5

Lời giải

Chọn A

Ta có $(a-b)^2 + 6ab = 36$

Suy ra: $6ab = 36 - (a-b)^2 \leq 36$

Suy ra $ab \leq \frac{36}{6} \Rightarrow ab \leq 6$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = \pm\sqrt{6}$

Vậy x đạt giá trị lớn nhất bằng 6 khi $a = b = \pm\sqrt{6}$.

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Than Uyên - Lai Châu 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{2024}{4 - |2022x-1|}$.

Lời giải

Với mọi x ta có: $|2022x-1| \geq 0 \Rightarrow 4 - |2022x-1| \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{4 - |2022x-1|} \geq \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \frac{1}{4 - |2022x-1|} \cdot 2024 \geq \frac{1}{4} \cdot 2024 \Rightarrow \frac{2024}{4 - |2022x-1|} \geq 506$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $2022x-1=0 \Rightarrow x = \frac{1}{2022}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng 506 khi và chỉ khi $x = \frac{1}{2022}$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Lương Tài - Bắc Ninh 2022 - 2023)

Cho x thoả mãn: $|x-2|+|x-3|+|x-4|+|x-5|=4$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của x , M là giá trị lớn nhất của x . Tính giá trị của $A = m + M$.

Lời giải

Áp dụng tính chất: $|a| \geq a$, dấu “=” xảy ra khi $a \geq 0$, ta được:

$$|x-2| \geq x-2 \text{ dấu “=” xảy ra khi } x-2 \geq 0.$$

$$|x-3| \geq x-3 \text{ dấu “=” xảy ra khi } x-3 \geq 0.$$

$$|4-x| \geq 4-x \text{ dấu “=” xảy ra khi } 4-x \geq 0.$$

$$|5-x| \geq 5-x \text{ dấu “=” xảy ra khi } 5-x \geq 0.$$

$$\text{Suy ra: } |x-2|+|x-3|+|4-x|+|5-x| \geq x-2+x-3+4-x+5-x=4.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi: } \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 3 \leq x \leq 4.$$

Suy ra 3 là giá trị nhỏ nhất của x , 4 là giá trị lớn nhất của x .

$$\text{Suy ra: } A = m + M = 3 + 4 = 7.$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Lương Tài - Bắc Ninh 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |x-1|+|x-2|+|x-3|+\dots+|x-23|$.

Lời giải

Ta có: $A = |x-1|+|x-2|+|x-3|+\dots+|x-23|$ thì:

$$A = |x-1|+|x-2|+\dots+|11-x|+|x-12|+|13-x|+\dots+|23-x|.$$

Áp dụng tính chất $|a| \geq a$, dấu “=” xảy ra khi $a \geq 0$, ta được:

$$|x-1| \geq x-1; |x-2| \geq x-2; \dots; |x-11| \geq x-11;$$

$$|x-12| \geq 0; |13-x| \geq 13-x; \dots; |23-x| \geq 23-x.$$

$$\text{Suy ra: } A \geq x-1+x-2+\dots+x-11+0+13-x+\dots+23-x$$

$$= 23-1+22-2+\dots+13-11+0 = 22+20+18+16+14+\dots+2 = \frac{(22+2).11}{2} = 132.$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 12$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 132 khi $x = 12$.

Câu 4. (HSG 7 trường Bồ Lý 2015 - 2016; huyện Hoàng Hóa; trường Phạm Kinh Ân 2022 - 2023)

Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $A = |x+1|+5$

b) $B = \frac{x^2+15}{x^2+3}$.

Lời giải

a) Với mọi x , ta có: $|x+1| \geq 0 \Rightarrow A = |x+1| + 5 \geq 5$, dấu "=" xảy ra khi $x = -1$

Vậy $\min A = 5 \Leftrightarrow x = -1$.

b) Ta có: $B = \frac{x^2 + 15}{x^2 + 3} = \frac{(x^2 + 3) + 12}{x^2 + 3} = 1 + \frac{12}{x^2 + 3}$.

Với mọi x , ta có:

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 3 \geq 3 \Rightarrow \frac{12}{x^2 + 3} \leq \frac{12}{3} \Rightarrow \frac{12}{x^2 + 3} \leq 4 \Rightarrow 1 + \frac{12}{x^2 + 3} \leq 5.$$

Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Vậy GVLN của B là 5 khi $x = 0$.

Câu 5. (HSG 7 huyện Hậu Lộc 2016 - 2017; huyện Bồ Trách, huyện Vị Thanh 2017 - 2018; huyện Hà Đông 2022 - 2023)

Cho ba số a, b, c thỏa mãn: $0 \leq a \leq b+1 \leq c+2$ và $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của c .

Lời giải

Vì: $0 \leq a \leq b+1 \leq c+2$ nên $0 \leq a+b+1+c+2 \leq c+2+c+2+c+2$.

Suy ra: $0 \leq 4 \leq 3c+6$ (vì $a+b+c=1$).

$$\text{Hay } 3c \geq -2 \Rightarrow c \geq -\frac{2}{3}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của c là $-\frac{2}{3}$ khi đó $a+b = \frac{5}{3}$.

Câu 6. (HSG 7 huyện Bình Xuyên - Vĩnh Phúc 2022 - 2023)

Cho x là số thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |2x-1| + |2x-2| + \dots + |2x-10|$.

Lời giải

Ta có: $A = |2x-1| + |2x-2| + \dots + |2x-10|$

$$A = (|2x-1| + |2x-10|) + (|2x-2| + |2x-9|) \dots + (|2x-5| + |2x-6|)$$

$$A = (|2x-1| + |10-2x|) + (|2x-2| + |9-2x|) \dots + (|2x-5| + |6-2x|)$$

$$A \geq |2x-1+10-2x| + |2x-2+9-2x| + |2x-5+6-2x| = 9+7+5+3+1 = 25.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi: } \begin{cases} (2x-1)(10-2x) \geq 0 \\ (2x-2)(9-2x) \geq 0 \\ \dots \\ (2x-5)(6-2x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{5} \leq x \leq 5 \\ 1 \leq x \leq \frac{9}{2} \\ \dots \\ \frac{5}{2} \leq x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{2} \leq x \leq 3.$$

Câu 7. (HSG 7 huyện Triệu Sơn 2022 - 2023)

Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 \leq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 2023ca - ab - bc$.

Lời giải

Ta có: $P = 2023ca - ab - bc = 2023ca - b(a+c)$.

Có: $(x-y)^2 \geq 0 \quad \forall x, y \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \quad \forall x, y$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$. (*)

+ Áp dụng bất đẳng thức (*), ta có: $b(a+c) \leq \frac{b^2 + (a+c)^2}{2}$.

Suy ra: $-b(a+c) \geq -\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - ac = \frac{-2}{2} - ac = -1 - ac$.

Do đó: $P \geq 2023ca - 1 - ac = 2022ac - 1$.

+ Lại có: $|ac| = |a| \cdot |c| \leq \frac{a^2 + c^2}{2} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = \frac{2}{2} = 1$, suy ra $-1 \leq ac \leq 1$.

Do đó: $P \geq 2022ac - 1 \geq 2022 \cdot (-1) - 1 = -2023$.

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\begin{cases} b = a + c \\ |a| = |c| \\ a^2 + b^2 + c^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -c \\ a^2 + b^2 + c^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = -a \\ a^2 + 0^2 + a^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = 0 \\ c = -a \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = a + c \\ |a| = |c| \\ a^2 + b^2 + c^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ a = c \\ a^2 + b^2 + c^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ c = a \\ a^2 + (2a)^2 + a^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{1}{6} \\ b = 2a \\ c = a \end{cases}$$

Vậy $P_{\min} = -2023$ khi:

$$(a; b; c) \in \left\{ (1; 0; -1), (-1; 0; 1), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}} \right), \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}; \frac{-2}{\sqrt{6}}; \frac{-1}{\sqrt{6}} \right) \right\}.$$

Câu 8. (HSG 7 huyện Diễn Châu 2022 - 2023)

Tìm số nguyên x để biểu thức sau đạt giá trị lớn nhất, tìm giá trị lớn nhất đó: $P = \frac{x+1}{2x-2}$.

Lời giải

Ta có: $P = \frac{x+1}{2x-2} = \frac{(x-1)+2}{2(x-1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{x-1}$.

Để $P_{\max} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1}$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow x-1$ đạt giá trị nhỏ nhất và $x-1 > 0$.

Mà x nguyên nên $x = 2$.

Vậy $P_{\max} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2-1} = \frac{3}{2}$ khi $x = 2$.

Câu 9. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $D = \frac{2022}{2023 - |x - 2024|}$ với $x \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2023 - |x - 2024| \in \mathbb{Z}$.

Để D đạt giá trị nhỏ nhất thì $2023 - |x - 2024|$ lớn nhất và âm.

$$\Rightarrow 2023 - |x - 2024| = -1 \Rightarrow |x - 2024| = 2024$$

$\Rightarrow x = 0$ hoặc $x = 4048$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức D là -2022 khi $x = 0$ hoặc $x = 4048$.

Câu 10. (HSG 7 huyện Thái Hòa - Nghệ An 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = |x+1| + |x-1| + \sqrt{x^2+4}$.

Lời giải

Ta có: $|x+1| + |x-1| = |x+1| + |1-x| \geq |x+1-x+1| = 2$ với mọi x và $\sqrt{x^2+4} \geq 2$ với mọi x .

Suy ra: $Q \geq 4$ với mọi x .

Dấu bằng xảy ra khi $(x+1)(1-x) > 0$ và $x^2 = 0$ hay $x = 0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $Q = 4$ khi $x = 0$.

Câu 11. (HSG 7 huyện Đông Hưng, huyện Hưng Hà, trường Lê Quý Đôn - Hà Tĩnh, TP Ninh Bình 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F = |x-2022| + |x-2023|$.

Lời giải

$$F = |x-2022| + |x-2023| = |x-2022| + |2023-x|.$$

Vì $|x-2022| \geq x-2022$ dấu "=" xảy ra khi $x-2022 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2022$

và $|2023-x| \geq 2023-x$ dấu "=" xảy ra khi $2023-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2023$.

Suy ra: $F = |x-2022| + |2023-x| \geq x-2022 + 2023-x = 1$.

Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases} x \geq 2022 \\ x \leq 2023 \end{cases} \Rightarrow 2022 \leq x \leq 2023$.

Vậy $\text{Min} F = 1$ khi $2022 \leq x \leq 2023$.

Câu 12. (HSG 7 huyện Hà Trung 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |x-2021| + |x-2022| + |x-2023|$.

Lời giải

Ta có: $A = |x-2021| + |x-2022| + |x-2023| = (|x-2021| + |2023-x|) + |x-2022|$.

Do $|x-2021| + |2023-x| \geq |x-2021+2023-x| = 2$ và $|x-2022| \geq 0$ với mọi x nên $A \geq 2$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} (x-2021)(2023-x) \geq 0 \\ x-2022 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2022$.

Vậy $\text{Min} A = 2$ khi $x = 2022$.

Câu 13. (HSG 7 huyện Lập Thạch - Vĩnh Phúc 2022 - 2023)

Cho biểu thức $A = \frac{2026-x}{x-2023}$. Tìm x nguyên để A có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{2026-x}{x-2023} = \frac{2003-x+3}{x-2003} = -1 + \frac{3}{x-2003}$$

A nhỏ nhất khi $\frac{3}{x-2003}$ nhỏ nhất.

$\frac{3}{x-2003}$ nhỏ nhất khi $x-2003$ là số âm lớn nhất.

Mà x nguyên suy ra $x - 2023 = -1 \Leftrightarrow x = 2022$.

Vậy A có GTNN là -4 khi $x = 2022$.

Câu 14. (HSG 7 huyện Tân Kỳ 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |2x - 4| + |2x - 6| + |2x - 8|$.

Lời giải

Ta có: $A = |2x - 4| + |8 - 2x| + |2x - 6|$.

Ta có: $|2x - 6| \geq 0$. (1)

$$|2x - 4| + |8 - 2x| \geq |2x - 4 + 8 - 2x| = 4. (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $A = |2x - 4| + |2x - 6| + |2x - 8| \geq 4$.

Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases} 2x - 6 = 0 \\ (2x - 4)(8 - 2x) \geq 0 \end{cases}$ hay $x = 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |2x - 4| + |2x - 6| + |2x - 8|$ bằng 4 khi $x = 3$.

Câu 15. (HSG 7 Ninh Bình 2022 - 2023)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{27 - 2x}{12 - x}$ (với x là số nguyên).

Lời giải

Ta có: $Q = \frac{27 - 2x}{12 - x} = 2 + \frac{3}{12 - x}$.

Suy ra Q lớn nhất khi $\frac{3}{12 - x}$ lớn nhất.

$\frac{3}{12 - x}$ lớn nhất khi $12 - x$ là số dương nhỏ nhất.

Mà x nguyên nên $12 - x = 1$. Hay $x = 11$.

Với $x = 11$ thì $Q = \frac{27 - 2 \cdot 11}{12 - 11} = 5$.

Suy ra Q có giá trị lớn nhất là 5 khi $x = 11$.

Câu 16. (HSG 7 trường Giao Tân 2016 - 2017; trường Lê Hồng Phong 2018 - 2019; huyện Trương Dương 2022 - 2023)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = (2x - 5y)^2 - (15y - 6x)^2 - |xy - 90|$.

Lời giải

Ta có: $P = (2x - 5y)^2 - (15y - 6x)^2 - |xy - 90|$

$$= (2x - 5y)^2 - (6x - 15y)^2 - |xy - 90|$$

$$= (2x - 5y)^2 - 9 \cdot (2x - 5y)^2 - |xy - 90|$$

$$= -[8 \cdot (2x - 5y)^2 + |xy - 90|]$$

Ta có: $8 \cdot (2x - 5y)^2 \geq 0$ với mọi giá trị của x, y ;

$|xy - 90| \geq 0$ với mọi giá trị của x, y .

Do đó $8.(2x-5y)^2 + |xy-90| \geq 0$ với mọi giá trị của x, y .

Nên $-[8.(2x-5y)^2 + |xy-90|] \leq 0$ với mọi giá trị của x, y .

Hay $P \leq 0$ với mọi giá trị của x, y .

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(2x-5y)^2 = 0$ và $|xy-90| = 0$.

+ Với $|xy-90| = 0$ thì $xy-90 = 0$ (1).

+ Với $(2x-5y)^2 = 0$ thì $2x-5y = 0$. Do đó $2x = 5y \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{2}$.

Đặt $\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = k$, khi đó $x = 5k, y = 2k$, thay $x = 5k, y = 2k$ vào (1) ta được:

$5k.2k - 90 = 0 \Rightarrow k^2 = 9$. Suy ra $k = 3$ hoặc $k = -3$.

Nếu $k = 3$ thì $x = 15; y = 6$;

Nếu $k = -3$ thì $x = -15; y = -6$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là 0 khi và chỉ khi $x = 15; y = 6$ hoặc $x = -15; y = -6$.

Câu 17. (HSG 7 trường Lang Chánh 2022 - 2023)

Cho các số không âm x, y, z thỏa mãn: $x + 3z = 2022$ và $x + 2y = 2023$. Tính giá trị lớn

nhất của biểu thức: $A = x + y + z + \frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có: $x + 3z = 2022$ (1) và $x + 2y = 2023$ (2)

Từ (1) $\Rightarrow x = 2022 - 3z$

Trừ từng vế của (2) cho (1), ta được: $2y - 3z = 1 \Rightarrow y = \frac{1+3z}{2}$

Khi đó: $A = x + y + z + \frac{1}{2} = (2022 - 3z) + \frac{1+3z}{2} + z + \frac{1}{2}$

$$= 2022 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 3z + \frac{3}{2}z + z = 2023 - \frac{1}{2}z$$

Vì $z \geq 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}z \leq 0 \Rightarrow 2023 - \frac{1}{2}z \leq 2023 \Rightarrow A \leq 2023$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} z = 0 \\ x = 2022 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Vậy: GTLN của A bằng 2023 $\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 2022 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Câu 18. (HSG 7 TP Bắc Giang 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = \frac{|x-2022|+2023}{|x-2022|+2024}$.

Lời giải

Ta có $C = \frac{(|x-2022|+2024)-1}{|x-2022|+2024} = 1 - \frac{1}{|x-2022|+2024}$.

Ta thấy C đạt giá trị nhỏ nhất khi $\frac{1}{|x-2022|+2024}$ đạt giá trị lớn nhất

$\Rightarrow |x-2022|+2024$ đạt giá trị nhỏ nhất (vì $1 > 0$).

Mặt khác $|x-2022| \geq 0, \forall x \Rightarrow |x-2022|+2024 \geq 2024, \forall x$.

Do đó $C \geq 1 - \frac{1}{2024} = \frac{2023}{2024}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x-2022 = 0$. Suy ra $x = 2022$

Vậy giá trị nhỏ nhất của C là $\frac{2023}{2024}$.

Câu 19. (HSG 7 trường Hiệp Hòa 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = |3x-4| + |5x-7| - x + 2025$.

Lời giải

Ta có: $3x-4=0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$

$5x-7=0 \Rightarrow x = \frac{7}{5}$

Ta có bảng xét dấu sau:

		$\frac{4}{3}$		$\frac{7}{5}$	
$3x-4$	-	0	+		+
$5x-7$	-		-	0	+

TH1: với $x \leq \frac{4}{3} \Rightarrow \begin{cases} |3x-4| = 4-3x \\ |5x-7| = 7-5x \end{cases}$

Khi đó $A = 4-3x+7-5x-x+2025 = 2036-9x \geq 2036-9 \cdot \frac{4}{3} = 2024$ (1)

TH2: với $\frac{4}{3} < x < \frac{7}{5} \Rightarrow \begin{cases} |3x-4| = 3x-4 \\ |5x-7| = 5x-7 \end{cases}$

Khi đó $A = 3x-4+7-5x-x+2025 = -3x+2028 \geq -3 \cdot \frac{7}{5} + 2028 = \frac{10119}{5}$ (2)

TH3: Với $x \geq \frac{7}{5} \Rightarrow \begin{cases} |3x-4| = 3x-4 \\ |5x-7| = 5x-7 \end{cases}$

Khi đó $A = 3x-4+5x-7-x+2025 = 7x-2014 \geq 7 \cdot \frac{7}{5} - 2014 = \frac{10119}{5}$ (3)

Từ (1); (2) và (3) suy ra $A \geq \frac{10119}{5} \forall x$. Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{7}{5}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{10119}{5}$ khi $x = \frac{7}{5}$.

Câu 20. (HSG 7 huyện Gia Viễn - Ninh Bình 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 6 \left| y - \frac{1}{8} \right| + x^2 - 4x + 7$.

Lời giải

Ta có: $P = 6 \left| y - \frac{1}{8} \right| + x^2 - 4x + 7$.

$$6 \left| y - \frac{1}{8} \right| \geq 0, \forall y$$

$$x^2 - 4x + 7 = x^2 - 2x - 2x + 4 + 3 = x(x-2) - 2(x-2) + 3 = (x-2)^2 + 3 > 0, \forall x$$

$$\Rightarrow P \geq 3, \forall x, y. \text{ Dấu "=" xảy ra khi: } \begin{cases} 6 \left| y - \frac{1}{8} \right| = 0 \\ (x-2)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{8} \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 3 khi $\begin{cases} y = \frac{1}{8} \\ x = 2 \end{cases}$.

Câu 21. (HSG 7 huyện Hương Khê-Hà Tĩnh 2022 - 2023)

Cho biểu thức: $P = \frac{4049 - 2x}{x - 2023} (x \neq 2023)$. Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị nhỏ nhất của P .

Lời giải

$$P = \frac{4049 - 2x}{x - 2023} = \frac{3 - 2(x - 2023)}{x - 2023} = \frac{3}{x - 2023} - 2 (x \neq 2023)$$

Biểu thức P đạt GTNN khi và chỉ khi $\frac{3}{x - 2023}$ có GTNN $\Rightarrow x - 2023$ là số âm lớn nhất

(vì x nguyên) $\Rightarrow x - 2023 = -1 \Rightarrow x = 2022$ (TM)

Khi đó GTNN của P là -5 khi $x = 2022$.

Vậy GTNN của P là -5 khi $x = 2022$.

Câu 22. (HSG 7 huyện Thái Thụy - Thái Bình 2022 - 2023)

Cho biểu thức $E = \frac{a-5}{a-2}$ với a là số nguyên. Tìm giá trị nguyên nhỏ nhất của E ?

Lời giải

Điều kiện: $a \neq 2$

$$E = \frac{a-5}{a-2} = \frac{a-2-3}{a-2} = 1 - \frac{3}{a-2};$$

E nhận giá trị nguyên khi $\frac{3}{a-2}$ là số nguyên.

$$\Rightarrow 3 : a - 2 \Rightarrow a - 2 \in \{\pm 1; \pm 3\} \Rightarrow a \in \{3; 5; 1; -1\}$$

Thử lại các trường hợp thì ta tính được giá trị nhỏ nhất của E bằng -2 khi $a = 3$
 Vậy giá trị nguyên nhỏ nhất của E bằng -2 khi $a = 3$.

Câu 23. (HSG 7 huyện Sông Lô, trường Đôn Nghĩa–Hưng Hà 2022 - 2023)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{14-x}{4-x}$ với x là số nguyên khác 4 .

Lời giải

Ta có: $P = \frac{14-x}{4-x} = 1 + \frac{10}{4-x}$

P đạt GTLN $\Leftrightarrow \frac{10}{4-x}$ đạt GTLN

Nếu $4-x > 0$ thì $\frac{10}{4-x} > 0$

Nếu $4-x < 0$ thì $\frac{10}{4-x} < 0$

Để $\frac{10}{4-x}$ đạt GTLN thì $4-x$ là số nguyên dương nhỏ nhất $\Rightarrow 4-x = 1 \Rightarrow x = 3$ (TM)

Khi $x = 3$ thì $P = 11$.

Vậy P có GTLN bằng 11 khi $x = 3$

Câu 24. (HSG 7 trường Lý Nam Đế - Hưng Hà 2022 - 2023)

Tìm x nguyên để biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất $B = \frac{2011}{2012 - |x - 2010|}$.

Lời giải

Ta có: $-|x - 2010| \leq 0$ với mọi $x \Rightarrow 2012 - |x - 2010| \leq 2012$ với mọi x .

* Trường hợp 1: $2012 - |x - 2010| < 0 \Rightarrow |x - 2010| > 2012 \Rightarrow \begin{cases} x > 4022 \\ x < -2 \end{cases}$.

Khi đó, $B < 0$. B nhỏ nhất khi và chỉ khi $-B = \frac{2011}{|x - 2010| - 2012}$ đạt giá trị dương lớn nhất

khi và chỉ khi $|x - 2010| - 2012 = 1$

$\Leftrightarrow |x - 2010| = 2013 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4023 \\ x = -3 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Khi đó, B nhỏ nhất bằng -2011 .

* Trường hợp 2: $2012 - |x - 2010| > 0 \Rightarrow |x - 2010| < 2012 \Rightarrow -2 < x < 4022$

Khi đó, $0 < 2012 - |x - 2010| \leq 2012 \Rightarrow B \geq \frac{2011}{2012}$.

Vậy $x = -3$ hoặc $x = 4023$. biểu thức $B = \frac{2011}{2012 - |x - 2010|}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng -2011

Câu 25. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $D = \frac{2(x-1)^2 + 2(y-2)^2 + 100}{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2}$

Lời giải

$$D = \frac{2(x-1)^2 + 2(y-2)^2 + 100}{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2}$$

$$= \frac{2[(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2] - 4 + 100}{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2} = 2 + \frac{96}{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2}$$

$$\forall \begin{cases} (x-1)^2 \geq 0 \\ (y-2)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + 2 \geq 2$$

$$\Rightarrow \frac{96}{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2} \leq \frac{96}{2} = 48$$

$$\Rightarrow 2 + \frac{96}{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2} \leq 50 \Rightarrow D \leq 50$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ (y-2)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức } D \text{ là } 50 \text{ khi } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Câu 26. (HSG 7 huyện Hưng Khê - Hà Tĩnh, trường Tân Tiến - Hưng Hà 2022 - 2023)

$$\text{Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức } C = \frac{2|x-1|+3}{|x-1|+1}$$

Lời giải

$$\text{Ta có } C = \frac{2|x-1|+3}{|x-1|+1} = \frac{2|x-1|+2+1}{|x-1|+1} = 2 + \frac{1}{|x-1|+1}$$

$$\text{Vì } |x-1| \geq 0 \text{ với mọi } x.$$

$$\Rightarrow |x-1|+1 \geq 1 \text{ với mọi } x.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x-1|+1} \leq 1 \text{ với mọi } x.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x-1|+1} + 2 \leq 3 \text{ với mọi } x.$$

Vậy giá trị lớn nhất C là 3 khi và chỉ khi $x = 1$

Câu 27. (HSG 7 huyện Tam Dương - Vĩnh phúc 2016 - 2017; huyện Phủ Lý, trường THCS Lý Tự Trọng 2018 - 2019; huyện Hưng Hà, Vũng Tàu 2022 - 2023)

$$\text{Tìm giá trị nguyên của } x \text{ để biểu thức } M = \frac{2016x-2016}{3x+2} \text{ có giá trị nhỏ nhất.}$$

Lời giải

$$M = \frac{2016x-2016}{3x+2} = \frac{672(3x+2)-2016-1344}{3x+2} = 672 - \frac{3360}{3x+2}$$

$$M \text{ nhỏ nhất} \Rightarrow \frac{3360}{3x+2} \text{ lớn nhất}$$

$$\text{Xét } 3x+2 < 0 \text{ thì } \frac{3360}{3x+2} < 0 \quad (1)$$

Xét $3x+2 > 0$ thì $\frac{3360}{3x+2} > 0$

$\frac{3360}{3x+2}$ lớn nhất khi $3x+2$ nhỏ nhất

Mà x nguyên, $3x+2$ dương và $3x+2$ chia 3 dư 2 nên $3x+2=2$ nên $x=0$

Khi đó: $\frac{3360}{3x+2} = \frac{3360}{3.0+2} = 1680$ (2)

So sánh (1) và (2) thì $\frac{3360}{3x+2}$ có giá trị lớn nhất bằng 1680

Vậy $M_{\min} = -1008$ khi $x=0$.

Câu 28. (HSG 7 huyện Hoàng Hoá - Thanh Hoá 2017 - 2018; trường Nguyễn Tông Quai - Hưng Hà 2022 - 2023)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $B = \frac{x^2 + y^2 + 3}{x^2 + y^2 + 2}$.

Lời giải

Ta có: $B = \frac{x^2 + y^2 + 3}{x^2 + y^2 + 2} = \frac{x^2 + y^2 + 2 + 1}{x^2 + y^2 + 2} = 1 + \frac{1}{x^2 + y^2 + 2}$

Mà $\begin{cases} x^2 \geq 0 \\ y^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + 2 \geq 2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2$ nhỏ nhất bằng 2 khi $x = y = 0$

Khi đó B lớn nhất bằng $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Vậy $B_{\max} = \frac{3}{2}$ khi $x = y = 0$.

Câu 29. (HSG 7 trường Minh Khai - Hưng Hà 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $C = \frac{|x-2017|+2018}{|x-2017|+2019}$.

Lời giải

Ta có: $C = \frac{|x-2017|+2018}{|x-2017|+2019} = \frac{(|x-2017|+2019)-1}{|x-2017|+2019} = 1 - \frac{1}{|x-2017|+2019}$

Biểu thức C đạt giá trị nhỏ nhất khi $|x-2017|+2019$ có giá trị nhỏ nhất

Mà $|x-2017| \geq 0$ nên $|x-2017|+2019 \geq 2019$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = 2017 \Rightarrow C = \frac{2018}{2019}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của C là $\frac{2018}{2019}$ khi $x = 2017$.

Câu 30. (HSG 7 trường Cự Khê 2016 - 2017; trường Lưu Khánh Đàm - Hưng Hà 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = (x-2)^2 + |y-x| + 3$.

Lời giải

Ta có $(x-2)^2 \geq 0$ với mọi x và $|y-x| \geq 0$ với mọi $x, y \Rightarrow A \geq 3$ với mọi x, y .

Suy ra A nhỏ nhất bằng 3 khi $\begin{cases} (x-2)^2 = 0 \\ |y-x| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$

Vậy $A_{\min} = 3$ khi $x = y = 2$.

Câu 31. (HSG 7 trường Hồng Lĩnh - Hưng Hà 2022 - 2023)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau $K = (3x - 2y)^2 - (4y - 6x)^2 - |x + y - 5|$.

Lời giải

Ta có: $K = (3x - 2y)^2 - (4y - 6x)^2 - |x + y - 5|$

$$= (3x - 2y)^2 - 4 \cdot (2y - 3x)^2 - |x + y - 5|$$

$$= (3x - 2y)^2 - 4 \cdot (3x - 2y)^2 - |x + y - 5|$$

$$= -3 \cdot (3x - 2y)^2 - |x + y - 5|$$

$$= -[3 \cdot (3x - 2y)^2 + |x + y - 5|]$$

Ta có $3 \cdot (3x - 2y)^2 \geq 0$ với mọi giá trị của x, y

$|x + y - 5| \geq 0$ với mọi giá trị của x, y

Do đó $[3 \cdot (3x - 2y)^2 + |x + y - 5|] \geq 0$ với mọi giá trị của x, y

Nên $-[3 \cdot (3x - 2y)^2 + |x + y - 5|] \leq 0$ với mọi giá trị của x, y

Hay $K \leq 0$ với mọi giá trị của x, y

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $3x - 2y = 0$ và $x + y - 5 = 0$ (1)

Với $3x - 2y = 0$ thì $3x = 2y \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3}$.

Đặt $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = k$. Khi đó $x = 2k$; $y = 3k$

Thay $x = 2k$ và $y = 3k$ vào (1) ta được $2k + 3k - 5 = 0 \Rightarrow 5k = 5 \Rightarrow k = 1$

Với $k = 1$ thì $x = 2$; $y = 3$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức K là 0 khi và chỉ khi $x = 2$; $y = 3$.

Câu 32. (HSG 7 huyện Đất Mũi 2016 - 2017; huyện Hương Khê - Hà Tĩnh 2017 - 2018; huyện Rạch Giá - Kiên Giang 2018 - 2019; trường Hồng Lĩnh - Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho a, b, c, d là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$E = |x - a| + |x - b| + |x - c| + |x - d|.$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c \leq d$. Áp dụng BĐT $|a| + |b| \geq |a + b|$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $ab \geq 0$ ta có:

$$|x - a| + |x - d| \geq |x - a| + |d - x| \geq |x - a + d - x| = d - a \quad (1)$$

$$|x - b| + |x - c| \geq |x - b| + |c - x| \geq |x - b + c - x| = c - b \quad (2)$$

Suy ra $E \geq c + d - a - b$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi dấu "=" ở (1) và (2) xảy ra

khi và chỉ khi $(x-a)(d-x) \geq 0$ và $(x-b)(c-x) \geq 0$.

Suy ra $a \leq x \leq d$ và $b \leq x \leq c$.

Do đó $MinE = c + d - a - b$ khi $b \leq x \leq c$.

Câu 33. (HSG 7 trường Dân Chủ - Hưng Hà 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = |x-2| + (x-y)^2 + 3\sqrt{z^2+9} + 16$

Lời giải

Ta có: $C = |x-2| + (x-y)^2 + 3\sqrt{z^2+9} + 16$

Vì $|x-2| \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$; $(x-y)^2 \geq 0 \forall x, y \in \mathbb{R}$; $z^2 \geq 0 \forall z \in \mathbb{R} \Rightarrow z^2 + 9 \geq 0 \forall z \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \sqrt{z^2+9} \geq 3 \forall z \in \mathbb{R} \Rightarrow 3\sqrt{z^2+9} \geq 9 \forall z \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow |x-2| + (x-y)^2 + 3\sqrt{z^2+9} + 16 \geq 25$

$\Rightarrow |x-2| + (x-y)^2 + 3\sqrt{z^2+9} + 16 \geq 25$ hay $C \geq 25$

Vậy $C_{\min} = 25$ khi $x = y = 2$ và $z = 0$.

Câu 34. (HSG 7 trường THCS Tân Ước 2013 - 2014; huyện Hương Khê (và Đề 326) 2016 - 2017; trường THCS Hồng Liên, huyện Phú Lý - Hà Nam, trường Hoàng Quyên, trường Lý Tự Trọng, trường Phong Đạt 2018 - 2019; trường Thái Hưng - Hưng Hà 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |2x-2| + |2x-2013|$.

Lời giải

Ta có: $A = |2x-2| + |2x-2013| = |2x-2| + |2013-2x| \geq |2x-2+2013-2x| = 2011$

Dấu "=" xảy ra khi $(2x-2)(2013-2x) \geq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq \frac{2013}{2}$

Vậy $A_{\min} = 2011$ khi $1 \leq x \leq \frac{2013}{2}$.

Câu 35. (HSG 7 trường Trần Thủ Độ - Hưng Hà 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của $B = \frac{2|2x-3|+7}{|2x-3|+5}$

Lời giải

Ta có $B = \frac{2|2x-3|+7}{|2x-3|+5} = 2 - \frac{3}{|2x-3|+5}$

Vì $|2x-3| \geq 0$ với mọi x .

$\Rightarrow |2x-3|+5 \geq 5 \Rightarrow \frac{1}{|2x-3|+5} \leq \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{-3}{|2x-3|+5} \geq \frac{-3}{5} \Rightarrow B \geq \frac{7}{5}$

Dấu "=" xảy ra khi $2x-3=0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

Vậy $B_{\min} = \frac{7}{5}$ khi $x = \frac{3}{2}$.

Câu 36. (HSG 7 huyện Hoàng Hoá - Thanh Hoá 2017 - 2018; trường Lê Tư Thành - Hưng Hà, Mường La - Sơn La, huyện Sóc Sơn 2022 - 2023)

Tìm số tự nhiên n để phân số $\frac{7n-8}{2n-3}$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{7n-8}{2n-3} = \frac{2(7n-8)}{2(2n-3)} = \frac{7(2n-3)+5}{2(2n-3)} = \frac{7}{2} + \frac{5}{2(2n-3)}.$$

Phân số đã cho có giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{5}{2(2n-3)}$ lớn nhất.

Suy ra $2(2n-3)$ nhỏ nhất khác 0.

Mà n là số tự nhiên nên $2(2n-3) = 2 \Rightarrow 2n-3 = 1 \Rightarrow 2n = 4 \Rightarrow n = 2$

Vậy giá trị lớn nhất của phân số đã cho bằng 6 khi $n = 2$.

Câu 37. (HSG 7 trường Điện Nông - Hưng Hà 2022 - 2023)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{3|x-2|+2020}{|x-2|+2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } P = \frac{3|x-2|+2020}{|x-2|+2} = \frac{3(|x-2|+2)-6+2020}{|x-2|+2} = 3 + \frac{2014}{|x-2|+2}$$

Ta thấy: $|x-2| \geq 0 \quad \forall x \Rightarrow |x-2|+2 \geq 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x-2|+2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2014}{|x-2|+2} \leq \frac{2014}{2} \Rightarrow 3 + \frac{2014}{|x-2|+2} \leq 3 + 1007 \Rightarrow P \leq 1010$$

Do đó P đạt giá trị lớn nhất là 1010 khi và chỉ khi $|x-2|=0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$.

Vậy biểu thức P đạt giá trị lớn nhất bằng 1010 khi và chỉ khi $x=2$.

Câu 38. (HSG 7 huyện Hưng Hà - Thái Bình 2021 - 2022)

Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $B = \frac{2022-x}{2021-x}$ có giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Lời giải

$$\text{Ta có: } B = \frac{2022-x}{2021-x} = \frac{(2021-x)+1}{2021-x} = 1 + \frac{1}{2021-x}$$

Để B lớn nhất thì $B = \frac{1}{2021-x}$ lớn nhất

+ Nếu $2021-x < 0$ thì $\frac{1}{2021-x} < 0$

+ Nếu $2021-x > 0$ thì $\frac{1}{2021-x} > 0$

Vì x là số nguyên nên $2021-x$ là số nguyên dương

Để $\frac{1}{2021-x}$ lớn nhất thì $2021-x$ phải là số dương nhỏ nhất khi $2021-x = 1 \Rightarrow x = 2020$

Khi đó $B = 1+1 = 2$

Vậy biểu thức B đạt giá trị lớn nhất bằng 2 khi $x = 2020$.

Câu 39. (HSG 7 huyện Ý Yên - Nam Định 2021 - 2022)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = 4y - 2y^2 - 5 - |2x - 3y + 1|$.

Lời giải

Xét $B = 4y - 2y^2 - 5$

$$= (4y - 2y^2 - 2) - 3 = -2(y^2 - 2y + 1) - 3 = -2(y^2 - y - y + 1) - 3$$

$$= -2[(y^2 - y) - (y - 1)] - 3 = -2[y(y - 1) - 1 \cdot (y - 1)] - 3$$

$$= -2(y - 1)(y - 1) - 3 = -2(y - 1)^2 - 3$$

Do đó $A = -2(y - 1)^2 - |2x - 3y + 1| - 3$

Với mọi giá trị của x, y , ta có $(y - 1)^2 \geq 0$ và $|2x - 3y + 1| \geq 0$

$$\Rightarrow -2(y - 1)^2 - |2x - 3y + 1| \leq 0$$

$$\Rightarrow A = -2(y - 1)^2 - |2x - 3y + 1| - 3 \leq -3$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} (y - 1)^2 = 0 \\ |2x - 3y + 1| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 1 = 0 \\ 2x - 3y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ 2x - 3 \cdot 1 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức A là -3 , đạt được khi và chỉ khi $(x; y) = (1; 1)$.

Câu 40. (HSG 7 huyện Lục Ngạn - Bắc Giang 2021 - 2022)

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = |x - 2019| + |x - 2020| + |x - 2021|$.

Lời giải

Ta có: $P = |x - 2019| + |x - 2020| + |x - 2021|$

$$= (|x - 2019| + |2021 - x|) + |x - 2020|$$

Ta có $|x - 2019| + |2021 - x| \geq |x - 2019 + 2021 - x| = 2$

Dấu bằng xảy ra khi $(x - 2019)(2021 - x) \geq 0 \Rightarrow 2019 \leq x \leq 2021$ (1)

Lại có $|x - 2020| \geq 0$, dấu bằng xảy ra khi $x = 2020$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra biểu thức P có giá trị nhỏ nhất là 2 , xảy ra khi $x = 2020$.

Câu 41. (HSG 7 huyện Lục Nam - Bắc Giang 2021 - 2022)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = (2x - 5y)^2 - (15y - 6x)^2 - |xy - 40|$.

Lời giải

Ta có $P = (2x - 5y)^2 - (15y - 6x)^2 - |xy - 40|$

$$= (2x - 5y)^2 - (6x - 15y)^2 - |xy - 40|$$

$$= (2x - 5y)^2 - 9 \cdot (2x - 5y)^2 - |xy - 40|$$

$$= -[8 \cdot (2x - 5y)^2 + |xy - 40|]$$

Ta thấy $(2x - 5y)^2 \geq 0$ với mọi x, y nên $8 \cdot (2x - 5y)^2 \geq 0$ với mọi x, y

$$|xy - 40| \geq 0 \text{ với mọi } x, y$$

Khi đó $8.(2x-5y)^2 + |xy-40| \geq 0$ với mọi x, y

Suy ra $-[8.(2x-5y)^2 + |xy-40|] \leq 0$ với mọi x, y

Hay $P \leq 0$ với mọi x, y

Dấu "=" xảy ra khi $(2x-5y)^2 = 0$ và $|xy-40| = 0$

+ Với $(2x-5y)^2 = 0$ thì $2x = 5y \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{2}$

+ Với $|xy-40| = 0$ thì $xy = 40$

Đặt $\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = k$ ta được $x = 5k$ và $y = 2k$

Mà $xy = 40$ nên $5k \cdot 2k = 40$

Tìm được $k = 2$ hoặc $k = -2$

+ Nếu $k = 2$ thì $x = 10 ; y = 4$

+ Nếu $k = -2$ thì $x = -10 ; y = -4$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 0 khi và chỉ khi $x = 10 ; y = 4$ hoặc $x = -10 ; y = -4$.

Câu 42. (HSG 7 huyện Lục Nam - Bắc Giang 2021 - 2022)

Cho $x = 1 - y, x > 0, y > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^2 - x}{x} + \frac{b^2 + y}{y}$ (a và b là hằng số dương đã cho).

Lời giải

Theo bài ra ta có: $x = 1 - y \Rightarrow x + y = 1$

$$\begin{aligned} \text{và } P &= \frac{a^2 - x}{x} + \frac{b^2 + y}{y} = \frac{a^2}{x} - 1 + \frac{b^2}{y} + 1 = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \\ &= \frac{a^2(x+y)}{x} + \frac{b^2(x+y)}{y} \quad (\text{vì } x+y=1) = a^2 + \frac{a^2 y}{x} + \frac{b^2 x}{y} + b^2 \end{aligned}$$

Vì $a, b > 0$ và không đổi. Mà $\frac{a^2 y}{x} \cdot \frac{b^2 x}{y} = a^2 b^2$ không đổi

$$\Rightarrow \frac{a^2 y}{x} + \frac{b^2 x}{y} \text{ nhỏ nhất khi } \frac{a^2 y}{x} = \frac{b^2 x}{y}$$

$$\Rightarrow a^2 y^2 = b^2 x^2 \Rightarrow ay = bx$$

$$\Rightarrow a(1-x) = bx \Rightarrow (a+b)x = a \Rightarrow x = \frac{a}{a+b}$$

$$\Rightarrow y = 1-x = 1 - \frac{a}{a+b} = \frac{b}{a+b}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a}{a+b} : \frac{b}{a+b} = \frac{a}{b}$$

$$\begin{aligned} \text{Thay vào } P \text{ ta được: } P &= a^2 + b^2 + a^2 \cdot \frac{b}{a} + b^2 \cdot \frac{a}{b} \\ &= a^2 + b^2 + ab + ab = a(a+b) + b(a+b) = (a+b)(a+b) = (a+b)^2 \end{aligned}$$

Vậy $P_{\min} = (a+b)^2$ khi $x = \frac{a}{a+b}$; $y = \frac{b}{a+b}$.

Câu 43. (HSG 7 Thị xã An Nhơn 2021 - 2022)

Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức $B = \frac{22-3x}{4-x}$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải

Ta có: $B = \frac{22-3x}{4-x} = \frac{12-3x+10}{4-x} = 3 + \frac{10}{4-x}$

Suy ra B đạt giá trị lớn nhất khi $4-x$ là số dương nhỏ nhất.

Mà x là số nguyên $\Rightarrow 4-x=1 \Rightarrow x=3$.

Khi đó $B = 3+10 = 13$

Vậy $B_{\max} = 13$ khi $x = 3$.

Câu 44. (HSG 7 huyện Mỹ Đức - Hà Nội 2021 - 2022)

Cho biểu thức: $Q = |x-2020| + |x-2021| + |x-2022|$. Tìm x để biểu thức Q có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Lời giải

Ta có: $Q = |x-2020| + |x-2021| + |x-2022|$

Áp dụng BĐT giá trị tuyệt đối: $|a| + |b| \geq |a+b|$. Dấu '=' xảy ra khi $a.b \geq 0$.

Ta có $|x-2020| + |2022-x| \geq |x-2020+2022-x| = 2$ với mọi x (1)

$|x-2021| \geq 0$ với mọi x (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A \geq 2$ với mọi x

Dấu '=' xảy ra: $\begin{cases} (x-2020)(2022-x) \geq 0 \\ x-2021 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2021$

Vậy Q có giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi $x = 2021$.

Câu 45. (HSG 7 huyện Ứng Hòa - Hà Nội 2021 - 2022)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |2021-x| + |2022-x|$.

Lời giải

Ta có: $P = |2021-x| + |2022-x| = |x-2021| + |2022-x|$

Ta có $|x-2021| + |2022-x| \geq |x-2021+2022-x| = 1$

Dấu bằng xảy ra khi $(x-2021)(2022-x) \geq 0 \Leftrightarrow 2021 \leq x \leq 2022$.

Vậy biểu thức P có giá trị nhỏ nhất là 1, xảy ra khi $2021 \leq x \leq 2022$.

Câu 46. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2014 - 2015; huyện Phù Cát - Bình Định 2017 - 2018; TP Vũng Tàu 2021 - 2022; huyện Krông Ana 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |x-2| + |2x-3| + |3x-4|$

Lời giải

Ta có: $|x-2| + |3x-4| = |2-x| + |3x-4| \geq |2-x+3x-4| = |2x-2|$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (2-x)(3x-4) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 3x-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \geq x \\ 3x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq x \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \leq 0 \\ 3x-4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \\ 3x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq \frac{4}{3} \end{cases}$$

Lại có: $|2x-2|+|2x-3|=|2x-2|+|3-2x| \geq |2x-2+3-2x|=|1|=1$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow (3-2x)(2x-2) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x \geq 0 \\ 2x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x \geq -3 \\ 2x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x \leq 0 \\ 2x-2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x \leq -3 \\ 2x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x \leq 1 \end{cases}$$

Do đó $\Rightarrow A = |x-2|+|2x-3|+|3x-4| \geq 1$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3} \leq x \leq 2 \\ 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq x \leq \frac{3}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 1 $\Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq x \leq \frac{3}{2}$

Câu 47. (HSG 7 thị xã Cửa Lò - Nghệ An 2021 - 2022)

Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn: $a+3c=2021$; $a+2b=2022$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=a+b+c$.

Lời giải

Ta có: $a+3c=2021 \Rightarrow a=2021-3c$; $a+2b=2022 \Rightarrow a=2022-2b$.

Suy ra: $2021-3c=2022-2b \Rightarrow 2b=2022-2021+3c=1+3c \Rightarrow b=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}c$.

Như vậy: $P=a+b+c=2021-3c+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}c+c=2021\frac{1}{2}-\frac{1}{2}c \geq 2021\frac{1}{2}$ (vì $c \geq 0$).

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow c=0$. Khi đó $a+3c=2021 \Rightarrow a=2021$; $a+2b=2022 \Rightarrow b=\frac{1}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $2021\frac{1}{2}$ khi $a=2021$; $b=\frac{1}{2}$; $c=0$.

Câu 48. (HSG 7 huyện Vũ Thư - Thái Bình 2021 - 2022)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $C=2022+|3y-1|+(2x-y+3)^2$.

Lời giải

Với mọi x, y ta có: $|3y-1| \geq 0$ và $(2x-y+3)^2 \geq 0$

$\Rightarrow |3y-1|+(2x-y+3)^2 \geq 0 \Rightarrow C \geq 2022$.

Dấu bằng xảy ra khi $|3y-1|=0$ và $(2x-y+3)^2=0 \Leftrightarrow 3y-1=0$ và $2x-y+3=0$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{3}; x = \frac{-4}{3}.$$

Vậy $C_{\min} = 2022$ với $(x; y) = \left(\frac{-4}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Câu 49. (HSG 7 thành phố Thái Bình 2021 - 2022)

Cho biểu thức: $A = \frac{7x-8}{2x-3}$ với $x \neq \frac{3}{2}$.

1. Tính giá trị của biểu thức A biết $\left|x + \frac{1}{3}\right| - 2 = -1$.

2. Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A có giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Lời giải

1. Ta có: $\left|x + \frac{1}{3}\right| - 2 = -1 \Rightarrow \left|x + \frac{1}{3}\right| = 1$

Trường hợp 1: $x + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow x = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Trường hợp 2: $x + \frac{1}{3} = -1 \Rightarrow x = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}$

$\Rightarrow x = \frac{2}{3}$ hoặc $x = -\frac{4}{3}$

Với $x = \frac{2}{3}$ thỏa mãn điều kiện $x \neq \frac{3}{2}$ thay vào biểu thức A tính được $A = \frac{7 \cdot \frac{2}{3} - 8}{2 \cdot \frac{2}{3} - 3} = 2$

Với $x = -\frac{4}{3}$ thỏa mãn điều kiện $x \neq \frac{3}{2}$ thay vào biểu thức A tính được $A = \frac{7 \cdot \frac{-4}{3} - 8}{2 \cdot \frac{-4}{3} - 3} = \frac{52}{17}$

Vậy $A = 2$ tại $x = \frac{2}{3}$, $A = \frac{52}{17}$ tại $x = -\frac{4}{3}$

2. Ta có: $A = \frac{7x-8}{2x-3} = \frac{7(2x-3)-8+\frac{21}{2}}{2x-3} = \frac{7}{2} + \frac{\frac{5}{2}}{2x-3}$ ($x \in \mathbb{Z}$)

A lớn nhất khi $\frac{\frac{5}{2}}{2x-3}$ lớn nhất

$\frac{\frac{5}{2}}{2x-3}$ lớn nhất khi $(2x-3)$ là số nguyên dương nhỏ nhất $\Rightarrow 2x-3=1 \Rightarrow x=2$ (Thỏa mãn)

Thay $x=2$ vào biểu thức $A = \frac{7}{2} + \frac{\frac{5}{2}}{2x-3} = 6$

Vậy $x=2$ thì giá trị lớn nhất của biểu thức A bằng 6.

Câu 50. (HSG 7 huyện Bát Xát - Lào Cai 2021 - 2022)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \frac{2011}{2012 - 3|x - 2010|}$

Lời giải

$$M = \frac{2011}{2012 - 3|x - 2010|}$$

Biểu thức M đạt giá trị nhỏ nhất khi $2012 - 3|x - 2010|$ có giá trị lớn nhất

Mà $-3|x - 2010| \leq 0$ với mọi $x \Rightarrow 2012 - 3|x - 2010| \leq 2012$ với mọi x

Dấu “=” xảy ra khi $x = 2010$

Suy ra $M \leq \frac{2011}{2012}$ với mọi x

Vậy $M_{\min} = \frac{2011}{2012}$ khi $x = 2010$

Câu 51. (HSG 7 huyện Mường La - Sơn La 2021 - 2022)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{|x - 2016| + 2017}{|x - 2016| + 2018}$

Lời giải

Ta có: $A = \frac{|x - 2016| + 2017}{|x - 2016| + 2018} = 1 - \frac{1}{|x - 2016| + 2018}$

A có GTNN khi $\frac{1}{|x - 2016| + 2018}$ có GTLN

Lại có: $|x - 2016| + 2018 \geq 2018$ (với $\forall x$). Dấu “=” xảy ra khi $x = 2016$

Vậy A có GTNN là $\frac{2017}{2018}$ khi $x = 2016$

Câu 52. (HSG 7 huyện Triệu Sơn 2015 - 2016; huyện Bồ Trách - Quảng Bình 2017 - 2018; Chư Sê - Gia Lai 2021 - 2022)

Cho $x + y = 1$ và $x > 0, y > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}$ (a và b là các hằng số dương đã cho).

Lời giải

Ta có:
$$P = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} = \frac{a^2 \cdot 1}{x} + \frac{b^2 \cdot 1}{y} = \frac{a^2 \cdot (x + y)}{x} + \frac{b^2 \cdot (x + y)}{y}$$

$$= a^2 + \frac{a^2 y}{x} + b^2 + \frac{b^2 x}{y} = \left(\frac{a^2 y}{x} + \frac{b^2 x}{y} \right) + a^2 + b^2$$

Các số dương $\frac{a^2 y}{x}, \frac{b^2 x}{y}$ có tích không đổi nên tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi

$$\frac{a^2 y}{x} = \frac{b^2 x}{y} \Rightarrow a^2 y^2 = b^2 x^2 \Rightarrow ay = bx \Rightarrow a(1 - x) = bx \Rightarrow x = \frac{a}{a + b}$$

Suy ra $y = \frac{b}{a + b}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức là $P = (a+b)^2$ khi $x = \frac{a}{a+b}; y = \frac{b}{a+b}$.

Câu 53. (HSG 7 huyện Lý Nhân - Hà Nam 2021 - 2022)

Tìm số nguyên y để biểu thức $D = |y-4| + |y-10|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Ta có $|a| = |-a|$ và $|a| + |b| \geq |a+b|$.

Dấu “=” xảy ra khi a, b cùng dấu hoặc ít nhất một số bằng 0.

Áp dụng $D = |y-4| + |y-10| = |y-4| + |-y+10| \geq |y-4+10-y| \geq 6$

Dấu “=” xảy ra khi $(y-4)(10-y) \geq 0 \Leftrightarrow 4 \leq y \leq 10$.

Vì y nguyên nên $y \in \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

Câu 54. (HSG 7 huyện Quảng Trạch - Quảng Bình 2021 - 2022)

Tìm một số có ba chữ số sao cho tỷ số giữa số đó với tổng các chữ số của nó có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Gọi số có ba chữ số cần tìm là \overline{abc} (a, b, c là các chữ số, $0 < a \leq 9; 0 \leq b; c \leq 9$).

Ta có $k = \frac{\overline{abc}}{a+b+c} = \frac{100a+10b+c}{a+b+c} = 1 + \frac{99a+9b}{a+b+c}$

Với a, b xác định thì k bé nhất khi c là số lớn nhất $\Rightarrow c = 9$.

Khi đó $k = 1 + \frac{99a+9b}{a+b+9} = 1 + \frac{9(a+b+9)+90a-81}{a+b+9} = 10 + \frac{90a-81}{a+b+9}$

Với a xác định thì k bé nhất khi b là số lớn nhất $\Rightarrow b = 9$.

Khi đó: $k = 10 + \frac{90a-81}{a+18} = 10 + 9 \cdot \frac{10a-9}{a+18} = 10 + 9 \cdot \frac{10(a+18)-189}{a+18} = 100 - \frac{9 \cdot 189}{a+18}$

$\Rightarrow k = 100 - \frac{9 \cdot 189}{a+18}$ bé nhất khi a bé nhất $\Rightarrow a = 1$.

Vậy số cần tìm là 199 và $k = \frac{199}{19}$

Câu 55. (HSG 7 huyện Quảng Trạch - Quảng Bình 2021 - 2022)

Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ ta có: $A = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{12}$.

Lời giải

Với $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ ta có: $A = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{n^3}$

$\Rightarrow 2A = \frac{2}{3^3} + \frac{2}{4^3} + \frac{2}{5^3} + \dots + \frac{2}{n^3}$

Ta có: $\frac{2}{3^3} < \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4}$

$\frac{2}{4^3} < \frac{2}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5}$

$\frac{2}{5^3} < \frac{2}{4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{4 \cdot 5} - \frac{1}{5 \cdot 6}$

$$\begin{aligned} & \dots\dots\dots \\ & \frac{2}{n^3} < \frac{2}{(n-1).n(n+1)} = \frac{1}{(n-1).n} - \frac{1}{n.(n+1)} \\ \Rightarrow 2A &= \frac{2}{3^3} + \frac{2}{4^3} + \frac{2}{5^3} + \dots + \frac{2}{n^3} < \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5} + \frac{1}{4.5} - \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{(n-1).n} - \frac{1}{n(n+1)} \\ \Rightarrow 2A &< \frac{1}{2.3} - \frac{1}{n(n+1)} \Rightarrow A < \frac{1}{12} - \frac{1}{2n(n+1)} \Rightarrow A < \frac{1}{12} \\ \text{Vậy } A &= \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{12} \text{ (với } n \in \mathbb{N}, n \geq 3\text{)}. \end{aligned}$$

Câu 56. (HSG 7 huyện Đức Thọ - Hà Tĩnh 2021 - 2022)

Tìm số tự nhiên n để phân số $B = \frac{10n-3}{4n-10}$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

$$\text{Đặt } B = \frac{10n-3}{4n-10} = \frac{2,5(4n-10)+22}{4n-10} = 2,5 + \frac{22}{4n-10}$$

B có GTLN $\Rightarrow \frac{22}{4n-10}$ có GTLN $\Rightarrow \frac{22}{4n-10}$ có GTLN $\Rightarrow 4n-10 = 2 \Rightarrow n = 3$ (Vì $n \in \mathbb{N}$
 $\Rightarrow 4n-10 \in \mathbb{N}$ và $4n-10$ là số tự nhiên chẵn)
 Vậy B có GTLN bằng 13,5 khi $n = 3$

Câu 57. (HSG 7 huyện Tam Nông - Phú Thọ 2021 - 2022; huyện Lâm Thao 2022 - 2023)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{|x-2022| - |x-2023| + |x-2024| + 2022}{|x-2022| + |x-2023| + |x-2024|}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } P = \frac{|x-2022| + |x-2023| + |x-2024| + 2022 - 2|x-2023|}{|x-2022| + |x-2023| + |x-2024|}$$

$$P = 1 + \frac{2022 - 2|x-2023|}{|x-2022| + |x-2023| + |x-2024|}$$

Vì $|x-2023| \geq 0 \Rightarrow 2022 - 2|x-2023| \leq 2022$.

$$\begin{aligned} & |x-2022| + |x-2023| + |x-2024| = |x-2022| + |2024-x| + |x-2023| \\ & \geq |x-2022+2024-x| + |x-2023| = 2 + |x-2023| \geq 2 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{1}{|x-2022| + |x-2023| + |x-2024|} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2022 - 2|x-2023|}{|x-2022| + |x-2023| + |x-2024|} \leq \frac{2022}{2}$$

$$\Rightarrow P = 1 + \frac{2022 - 2|x-2023|}{|x-2022| + |x-2023| + |x-2024|} \leq 1 + \frac{2022}{2} = 1012.$$

Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} x-2023 = 0 \\ (x-2022)(2024-x) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2023 \\ 2022 \leq x \leq 2024 \end{cases} \Rightarrow x = 2023.$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 1012$ khi $x = 2023$.

Câu 58. (HSG 7 huyện Thiệu Hóa - Thanh Hóa 2021 - 2022)

Cho x, y, z là ba số thực tùy ý thỏa mãn $x + y + z = 0$ và $-1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1; -1 \leq z \leq 1$.
 Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = x^2 + y^4 + z^6$.

Lời giải

Trong ba số x, y, z có ít nhất hai số cùng dấu.

Giả sử $x \geq 0, y \geq 0$ hoặc $x \leq 0, y \leq 0$

* Nếu $x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow z = -x - y \leq 0$

Mà $-1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1; -1 \leq z \leq 1$

Do đó: $0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; -1 \leq z \leq 0$

Khi đó: $P = x^2 + y^4 + z^6 \leq |x| + |y| + |z|$

Mà $|x| + |y| + |z| = x + y - z$ (vì $0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; -1 \leq z \leq 0$)

Do đó $P = x^2 + y^4 + z^6 \leq x + y - z$

Mà $x + y = -z$ (vì $x + y + z = 0$)

Do đó $P = x^2 + y^4 + z^6 \leq -2z$

Mặt khác: $-1 \leq z \leq 0$

$\Rightarrow P = x^2 + y^4 + z^6 \leq 2$

Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} x^2 = x \\ y^4 = y \\ z = -1 \\ x + y + z = 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{0; 1\} \\ y \in \{0; 1\} \\ z = -1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y; z) = \{(0; 1; -1), (1; 0; -1)\}$

* Nếu $x \leq 0, y \leq 0 \Rightarrow z = -x - y \geq 0$

Mà $-1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1; -1 \leq z \leq 1$

Do đó: $-1 \leq x \leq 0; -1 \leq y \leq 0; 0 \leq z \leq 1$

Khi đó $P = x^2 + y^4 + z^6 \leq |x| + |y| + |z|$

Mà $|x| + |y| + |z| = (-x) + (-y) + z$ (vì $-1 \leq x \leq 0; -1 \leq y \leq 0; 0 \leq z \leq 1$)

Do đó $P = x^2 + y^4 + z^6 \leq (-x) + (-y) + z$

Mà $-x - y = z$ (vì $x + y + z = 0$)

$\Rightarrow P = x^2 + y^4 + z^6 \leq 2z$

Mặt khác: $0 \leq z \leq 1 \Rightarrow P = x^2 + y^4 + z^6 \leq 2$

Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} x^2 = x \\ y^4 = y \\ z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ -1 \leq x \leq 0 \\ -1 \leq y \leq 0 \end{cases}$ không có giá trị nào của x, y, z thỏa mãn.

Tương tự với trường hợp x và y cùng dấu hoặc y và z cùng dấu ta cũng có:

$$(x; y; z) = \{(0; -1; 1), (1; -1; 0), (-1; 0; 1), (-1; 1; 0)\}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là 2 khi

$$(x; y; z) = \{(0; 1; -1), (1; 0; -1), (0; -1; 1), (1; -1; 0), (-1; 0; 1), (-1; 1; 0)\}$$

Câu 59. (HSG 7 thị xã Kinh Môn - Hải Dương 2021 - 2022)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |2x - y| - 3|2y - 4x| - 2x^2 + 8x + 2014$.

Lời giải

$$\begin{aligned} T &= |2x - y| - 3|2y - 4x| - 2x^2 + 8x + 2014 \\ &= |2x - y| - 6|2x - y| - 2(x^2 - 4x + 4) + 8 + 2014 \\ &= -5|2x - y| - 2(x - 2)^2 + 2022 \end{aligned}$$

Ta có $|2x - y| \geq 0, \forall x; y; (x - 2)^2 \geq 0, \forall x$

Suy ra $-5|2x - y| \leq 0, \forall x, y; -2(x - 2)^2 \leq 0, \forall x$

$$-5|2x - y| - 2(x - 2)^2 + 2022 \leq 2022, \forall x; y$$

Suy ra $T \leq 2022, \forall x; y$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức T là 2022 khi $x = 2; y = 4$

Câu 60. (HSG 7 huyện Tiền Hải - Thái Bình 2021 - 2022)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{40 - 3x}{13 - x}$ với x là số nguyên khác 13.

Lời giải

$$\text{Ta có } P = \frac{40 - 3x}{13 - x} = 3 + \frac{1}{13 - x} \text{ với } x \neq 0$$

Suy ra P lớn nhất khi $\frac{1}{13 - x}$ lớn nhất

$$\text{* Nếu } x > 13 \text{ thì } 13 - x < 0 \Rightarrow \frac{1}{13 - x} < 0.$$

$$\text{* Nếu } x < 13 \text{ thì } 13 - x > 0 \Rightarrow \frac{1}{13 - x} > 0.$$

Từ hai trường hợp trên suy ra $\frac{1}{13 - x}$ lớn nhất khi $x < 13$

Vì phân số $\frac{1}{13 - x}$ có tử và mẫu là các số nguyên dương, tử không đổi nên phân số có giá trị

lớn nhất khi mẫu là số nguyên dương nhỏ nhất.

$$\text{Hay } 13 - x = 1 \Leftrightarrow x = 12 \text{ (thỏa mãn } x < 13)$$

Suy ra P có giá trị lớn nhất là 4 khi $x = 12$

Câu 61. (HSG 7 trường Lê Hồng Phong 2018 - 2019)

Cho $A = |2x^4 + 3x^2 + 1| - |-2x^4 - x^2 - 1|$. Chứng tỏ rằng giá trị biểu thức A luôn không âm với mọi giá trị của x .

Lời giải

$$\text{Vì } 2x^4 \geq 0, 3x^2 \geq 0 \Rightarrow 2x^4 + 3x^2 + 1 > 0$$

$$\text{Từ đó } |-2x^4 - x^2 - 1| = 2x^4 + x^2 + 1$$

$$\Rightarrow A = 2x^4 + 3x^2 + 1 - 2x^4 - x^2 - 1 = 2x^2 \geq 0 \text{ với mọi } x$$

Vậy giá trị của A luôn không âm với mọi x

Câu 62. (HSG 7 huyện Tân Bình - TP Hồ Chí Minh, trường Nguyễn Trung Trực, trường Nguyễn Trãi 2018 - 2019)

Tìm số tự nhiên x để phân số $\frac{7x-8}{2x-3}$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải

$$\text{Đặt } A = \frac{7x-8}{2x-3} = \frac{2(7x-8)}{2(2x-3)} = \frac{7(2x-3)+5}{2(2x-3)} = \frac{7}{2} + \frac{5}{2(2x-3)}$$

$$\text{Đặt } B = \frac{5}{2(2x-3)} \text{ thì } A \text{ lớn nhất khi và chỉ khi } B \text{ lớn nhất}$$

Với $x \in \mathbb{N}$, B đạt giá trị lớn nhất khi $2x-3$ là số tự nhiên nhỏ nhất khác 0 $\Leftrightarrow 2x-3=1$
 $\Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2$

GTLN của A là $A=6 \Leftrightarrow x=2$

Câu 63. (HSG 7 trường Bảo Phương, trường Thanh Thùy 2018 - 2019)

Tìm số nguyên x để M đạt giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị nhỏ nhất đó $M = \frac{x-14}{4-x}$

Lời giải

$$M = \frac{x-14}{4-x} = \frac{-10-(4-x)}{4-x} = \frac{-10}{4-x} - 1$$

M nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{-10}{4-x}$ nhỏ nhất

$$\text{Xét } x < 4 \text{ thì } \frac{-10}{4-x} < 0;$$

$$x > 4 \text{ thì } \frac{-10}{4-x} > 0$$

$$\text{Ta chỉ xét } x < 4 \text{ thì } \frac{-10}{4-x} \text{ nhỏ nhất} \Rightarrow \frac{10}{4-x} \text{ lớn nhất}$$

$$\Rightarrow 4-x=1 \text{ (vì mẫu nguyên dương nhỏ nhất)}$$

Vậy $x=3$ khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức M là -11

Câu 64. (HSG 7 trường Trần Thiện, trường Thanh Mai 2018 - 2019)

Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |x-2008| + |x-2009| + |y-2010| + |x-2011| + 2011$

Lời giải

Áp dụng tính chất $|a| = |-a|$ và $|a| + |b| \geq |a+b|$, dấu "=" xảy ra khi $ab \geq 0$ và $|a| \geq 0 \Leftrightarrow a=0$.

$$\text{Ta có: } |x-2008| + |x-2011| = |x-2008| + |2011-x| \geq |x-2008+2011-x| = 3$$

Dấu "=" xảy ra khi $(x - 2008)(2011 - x) \geq 0 \Leftrightarrow 2008 \leq x \leq 2011$

Ta có: $|x - 2009| \geq 0$, với mọi x . Dấu "=" xảy ra khi $x = 2009$

Ta có: $|y - 2010| \geq 0$, với mọi y . Dấu "=" xảy ra khi $y = 2010$

Do đó: $A \geq 3 + 2011 = 2014$. Đẳng thức xảy ra khi $x = 2009$; $y = 2010$

$$\text{Vậy } A_{\min} = 2014 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2009 \\ y = 2010 \end{cases}$$

Câu 65. (HSG 7 trường Hồng Dương 2017 - 2018; trường Điện Hồng 2018 - 2019)

Với giá trị nào của x thì biểu thức: $P = -x^2 - 8x + 5$ có giá trị lớn nhất? Tìm giá trị lớn nhất đó.

Lời giải

$$\text{Ta có: } P = -x^2 - 8x + 5 = -x^2 - 8x - 16 + 21 = -(x^2 + 8x + 16) + 21 = -(x + 4)^2 + 21$$

$$\text{Do } -(x + 4)^2 \leq 0 \text{ với mọi } x \Rightarrow -(x + 4)^2 + 21 \leq 21 \text{ với mọi } x$$

Do đó biểu thức P đạt giá trị lớn nhất là 21 khi $x = -4$

Câu 66. (HSG 7 trường Phương Trung, trường Bình Hân 2018 - 2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |x - 2001| + |x - 1|$

Lời giải

$$A = |x - 2001| + |x - 1| = |x - 2001| + |1 - x| \geq |x - 2001 + 1 - x| = 2000$$

Vậy biểu thức đạt GTNN là 2000 $\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2001$

Câu 67. (HSG 7 huyện Anh Sơn 2016 - 2017; Đ164 huyện 2018 - 2019)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = |x| - |x - 2|$

Lời giải

Xét các trường hợp:

$$\text{Trường hợp 1: } x \geq 2 \Rightarrow A = x - (x - 2) = 2$$

$$\text{Trường hợp 2: } 0 \leq x < 2 \Rightarrow A = x + x - 2 = 2x - 2 < 2$$

$$\text{Trường hợp 3: } x < 0 \Rightarrow A = -x + x - 2 = -2 < 2$$

Do đó với mọi giá trị của x thì $A \leq 2$

Vậy giá trị lớn nhất của $A = 2 \Leftrightarrow x \geq 2$

Câu 68. (HSG 7 huyện Thái Thụy - Thái Bình 2018 - 2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = |x - 2017| + |x - 2018| + |x - 2019|$

Lời giải

$$Q = |x - 2017| + |x - 2018| + |x - 2019|$$

$$Q = (|x - 2017| + |x - 2019|) + x - 2018, \text{ vì } |x - 2019| = |2019 - x|$$

$$\Rightarrow Q = (|x - 2017| + |2019 - x|) + |x - 2018|$$

$$\text{Mà } |x - 2017| + |2019 - x| \geq |x - 2017 + 2019 - x| = 2$$

$$Q = \left. \begin{aligned} &(|x - 2017| + |2019 - x|) \geq 2 + |x - 2018| \\ &|x - 2018| \geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow Q \geq 2$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} (x - 2017)(2019 - x) \geq 0 \\ x - 2018 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2017 \leq x \leq 2019 \\ x = 2018 \end{cases} \Rightarrow x = 2018$$

Vậy Q đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi $x = 2018$

Câu 69. (HSG 7 huyện Thường Tín - Hà Nội 2018 - 2019)

$$\text{Tìm GTLN của: } A = \frac{|x - 2019| + 2020}{|x - 2019| + 2021}$$

Lời giải

$$A = \frac{|x - 2019| + 2020}{|x - 2019| + 2021} = \frac{|x - 2019| + 2021 - 1}{|x - 2019| + 2021}$$

$$A = 1 - \frac{1}{|x - 2019| + 2021}$$

$$\text{Vì } |x - 2019| + 2021 \geq 2021 \text{ với mọi } x \Rightarrow \frac{1}{|x - 2019| + 2021} \leq \frac{1}{2021}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = 2019$$

$$\text{Do đó } A = 1 - \frac{1}{|x - 2019| + 2021} \geq 1 - \frac{1}{2021} = \frac{2020}{2021}$$

$$\text{GTNN của } A = \frac{2020}{2021} \Leftrightarrow x = 2019$$

Câu 70. (HSG 7 trường Mỹ Hưng 2016 - 2017; trường Hùng Thư 2017 - 2018; trường Cù Chính Lan 2018 - 2019)

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: } A = |x - 2013| + |x - 2014| + |x - 2015|$$

Lời giải

$$A = |x - 2013| + |x - 2014| + |x - 2015|$$

$$A = (|x - 2013| + |x - 2015|) + |x - 2014|$$

$$\text{Vì } |x - 2015| = |2015 - x|$$

$$\Rightarrow A = (|x - 2013| + |2015 - x|) + |x - 2014|$$

$$\text{Mà } |x - 2013| + |2015 - x| \geq |x - 2013 + 2015 - x| = 2$$

Do đó:

$$A = (|x - 2013| + |2015 - x|) + |x - 2014| \geq 2 + |x - 2014| \left. \begin{aligned} &|x - 2014| \geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A \geq 2$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2013)(2015 - x) \geq 0 \\ x - 2014 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2014 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy trị nhỏ nhất của biểu thức A là 2 $\Leftrightarrow x = 2014$

Câu 71. (HSG 7 trường Nguyễn Khuyến 2016 - 2017; trường Nhơn Trí 2018 - 2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của đa thức $g(x) = 16x^4 - 72x^2 + 90$

Lời giải

$$g(x) = 16x^4 - 72x^2 + 90 = (4x^2)^2 - 2 \cdot 4x^2 \cdot 9 + 9^2 + 9 = (4x^2 - 9)^2 + 9$$

Với mọi giá trị của x ta có: $(4x^2 - 9)^2 \geq 0 \Rightarrow g(x) = (4x^2 - 9)^2 + 9 \geq 9$

$$g(x)_{\min} = 9 \Leftrightarrow 4x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{3}{2}$$

Câu 72. (HSG 7 huyện Lâm Thao 2016 - 2017; huyện Tân An, trường Phan Đình Phùng 2017 - 2018; huyện Hoài Nhơn - Bình Định, trường Đào Duy Từ, huyện Nam Trà My, huyện Thăng Bình 2018 - 2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của A , biết: $A = |7x - 5y| + |2z - 3x| + |xy + yz + zx - 2000|$

Lời giải

Ta có $|7x - 5y| \geq 0$; $|2z - 3x| \geq 0$ và $|xy + yz + zx - 2000| \geq 0 \Rightarrow A \geq 0$

Dấu "=" xảy ra khi
$$\begin{cases} 7x = 5y \\ 2z = 3x \\ xy + yz + zx = 2000 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{5} = \frac{y}{7} \\ \frac{x}{2} = \frac{z}{3} \\ xy + yz + zx = 2000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{10} = \frac{y}{14} \\ \frac{x}{10} = \frac{z}{15} \\ xy + yz + zx = 2000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{10} = \frac{y}{14} = \frac{z}{15} \\ xy + yz + zx = 2000 \end{cases}$$

Đặt $\frac{x}{10} = \frac{y}{14} = \frac{z}{15} = k$, khi đó $x = 10k; y = 14k; z = 15k$

Suy ra $xy + yz + zx = 2000$

$$\Rightarrow 10k \cdot 14k + 14k \cdot 15k + 15k \cdot 10k = 2000$$

$$\Rightarrow 140k^2 + 210k^2 + 150k^2 = 2000$$

$$\Rightarrow 500k^2 = 2000$$

$$\Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = 2 \text{ hoặc } k = -2$$

Dùng phương pháp thế, từ đó tìm được:
$$\begin{cases} x = 20, y = 28, z = 30 \\ x = -20, y = -28, z = -30 \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 0. Dấu "=" xảy ra khi $(x; y; z) = (20; 28; 30)$ hoặc $(x; y; z) = (-20; -28; -30)$

Câu 73. (HSG 7 trường Quang Trung 2018 - 2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau khi x thay đổi: $B = |x - 2| + |3 - x|$

Lời giải

Ta xét các trường hợp: $x < 2$, $2 \leq x \leq 3$, $x > 3$.

Nếu $x < 2 \Rightarrow x - 2 < 0$; $3 - x > 0$

$$\text{Do đó: } |x - 2| = -(x - 2); |3 - x| = 3 - x \Rightarrow B = -(x - 2) + 3 - x = -2x + 5$$

Vì $x < 2 \Rightarrow -x > -2$. Do đó $B = -2x + 5 > (-2) \cdot 2 + 5 \Rightarrow B > 1 \Rightarrow B$ nhỏ nhất $= 2$

Nếu $2 \leq x \leq 3 \Rightarrow x - 2 \geq 0; 3 - x \geq 0 \Rightarrow B = x - 2 + 3 - x = 1 \Rightarrow B = 1$

Nếu $x > 3 \Rightarrow x - 2 > 0; 3 - x < 0 \Rightarrow B = x - 2 - (3 - x) = 2x - 5$

Vì $x > 3 \Rightarrow B = 2x - 5 > 2 \cdot 3 - 5 \Rightarrow B > 1 \Rightarrow B = 2$

Từ 3 trường hợp trên ta được giá trị nhỏ nhất của biểu thức B là 1 khi $2 \leq x \leq 3$

Câu 74. (HSG 7 huyện Hiệp Đức, trường Thanh Thùy 2018 - 2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = \frac{|x - 2017| + 2018}{|x - 2017| + 2019}$

Lời giải

$$C = \frac{|x - 2017| + 2018}{|x - 2017| + 2019} = \frac{(|x - 2017| + 2019) - 1}{|x - 2017| + 2019} = 1 - \frac{1}{|x - 2017| + 2019}$$

Biểu thức C đạt giá trị nhỏ nhất khi $|x - 2017| + 2019$ có giá trị nhỏ nhất

Mà $|x - 2017| \geq 0$ nên $|x - 2017| + 2019 \geq 2019$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 2017 \Rightarrow C = \frac{2018}{2019}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của C là $\frac{2018}{2019}$ khi $x = 2017$

Câu 75. (HSG 7 huyện Tân Lạc - Hòa Bình 2015 - 2016; huyện Nam Sách - Hải Dương 2017 - 2018; huyện Phú Ninh 2018 - 2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |2014 - x| + |2015 - x| + |2016 - x|$

Lời giải

Vì $|2015 - x| \geq 0$ nên $A = |2014 - x| + |2015 - x| + |2016 - x| \geq |2014 - x| + |2016 - x|$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 2015$ (1)

Ta có: $|2014 - x| + |2016 - x| = |x - 2014| + |2016 - x| \geq |x - 2014 + 2016 - x| = 2$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(x - 2014)(2016 - x) \geq 0$, suy ra $2014 \leq x \leq 2016$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $A \geq 2$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 2015$

Vậy A nhỏ nhất bằng 2 khi $x = 2015$.

Câu 76. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2018 - 2019)

Cho biểu thức $M = \frac{5 - x}{x - 2}$. Tìm x nguyên để M có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

$$\text{Ta có: } M = \frac{5 - x}{x - 2} = \frac{3 - (x - 2)}{x - 2} = \frac{3}{x - 2} - 1 \quad (x \neq 2)$$

M nhỏ nhất $\Rightarrow \frac{3}{x - 2}$ nhỏ nhất $\Rightarrow x - 2$ lớn nhất và $x - 2 < 0$

$\Rightarrow x$ lớn nhất và $x < 2 \Rightarrow x = 1$ ($x \in \mathbb{Z}$)

Khi đó GTNN của M là $M = \frac{3}{1 - 2} - 1 = -4 \Leftrightarrow x = 1$

Câu 77. (HSG 7 huyện Lộc Hà 2018 - 2019; huyện Yên Lập 2017 - 2018)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |2x+2| + |2x-2013|$ với x là số nguyên.

Lời giải

Ta có: $A = |2x+2| + |2x-2013| = |2x+2| + |2013-2x| \geq |2x+2+2013-2x| = 2015$

Dấu "=" xảy ra khi $(2x+2)(2013-2x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{2013}{2}$

Vậy $MaxA = 2015$ khi $x = -1$

Câu 78. (HSG 7 huyện Việt Yên 2018 - 2019)

Cho 4 số không âm a, b, c, d thỏa mãn $a+b+c+d=1$. Gọi S là tổng các giá trị tuyệt đối của hiệu từng cặp số có được từ 4 số này. S có thể đạt được giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải

Giả sử $a \geq b \geq c \geq d$ khi đó:

$$S = |a-b| + |a-c| + |a-d| + |b-c| + |b-d| + |c-d|$$

$$S = (a-b) + (a-c) + (a-d) + (b-c) + (b-d) + (c-d)$$

$$S = (3a+b) - (c+3d)$$

Do $c+3d \geq 0 \Rightarrow S \leq 3a+b$; $S = 3a+b$ khi $c=d=0$, lúc đó $a+b=1$

Do $a \leq 1$ ta có: $S = 2a + (a+b) = 2a+1 \leq 2.1+1$ hay $S \leq 3$

Vậy S có thể đạt được giá trị lớn nhất bằng 3.

Câu 79. (HSG 7 (đề 333) 2016 - 2017; trường Sương Bình 2017 - 2018; trường Thanh Cao 2018 - 2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |x-2006| + |2007-x|$

Lời giải

$$C\acute{o} \ A = |x-2006| + |2007-x| \geq |x-2006+2007-x|$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (x-2006)(2007-x) \geq 0 \Leftrightarrow 2006 \leq x \leq 2007$

Vậy $A_{\min} = 1 \Leftrightarrow 2006 \leq x \leq 2007$

Câu 80. (HSG 7 trường Xuân Dương 2013 - 2014; trường Trà My 2018 - 2019)

Tìm giá trị nguyên lớn nhất của biểu thức $M = \frac{15-x}{5-x}$

Lời giải

$$M = \frac{15-x}{5-x} = 1 + \frac{10}{5-x}. M \text{ lớn nhất khi và chỉ khi } \frac{10}{5-x} \text{ lớn nhất}$$

$$+) \ x > 5 \text{ thì } \frac{10}{5-x} < 0 \quad (1)$$

+) $x < 5$ thì $\frac{10}{5-x} > 0$ mà $\frac{10}{5-x}$ có tử không đổi nên phương trình có giá trị lớn nhất khi mẫu nhỏ nhất mà $5-x$ là số nguyên dương nhỏ nhất khi $5-x=1 \Rightarrow x=4$

$$\text{Khi đó } \frac{10}{5-x} = 10 \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) thấy $\frac{10}{5-x}$ lớn nhất bằng 10.

Vậy GTLN của $M = 11$ khi và chỉ khi $x = 4$

Câu 81. (HSG 7 huyện Tam Dương - Vĩnh phúc 2016 - 2017; huyện Phủ Lý, trường Lý Tự Trọng 2018 - 2019)

Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn: $2x = 3y = 5z$ và $|x - 2y| = 5$. Tìm giá trị lớn nhất của $3x - 2z$

Lời giải

Ta có: $\frac{x}{3} = \frac{2y}{4} = \frac{x-2y}{-1}, 3y = 5z$

Nếu $x - 2y = 5 \Rightarrow x = -15, y = -10, z = -6$. Khi đó $3x - 2z = -45 + 12 = -33$

Nếu $x - 2y = -5 \Rightarrow x = 15; y = 10; z = 6$. Khi đó $3x - 2z = 45 - 12 = 33$

Vậy giá trị lớn nhất của $3x - 2z$ là 33.

Câu 82. (HSG 7 trường Hưng Vũ 2018 - 2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $C = \frac{-4}{(2x-3)^2 + 5}$

Lời giải

C nhỏ nhất $\Rightarrow (2x-3)^2 + 5$ lớn nhất

Mà mẫu số $(2x-3)^2 + 5 \geq 5 (\forall x \in \mathbb{Q})$

Vậy $C_{\min} = \frac{-4}{5} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

Câu 83. (HSG 7 huyện Đức Thọ 2017 - 2018)

Tìm giá trị nhỏ nhất hoặc lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $A = |x+5| + 5$

b) $B = \frac{x^2 + 17}{x^2 + 7}$

Lời giải

a) $A = |x+5| + 5$

Ta có: $|x+5| \geq 0 \Rightarrow A \geq 5$. Dấu "=" xảy ra khi $x = -5$

Vậy $MinA = 5 \Leftrightarrow x = -5$.

b) $B = \frac{x^2 + 17}{x^2 + 7} = \frac{(x^2 + 7) + 10}{x^2 + 7} = 1 + \frac{10}{x^2 + 7}$

Ta có: $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 7 \geq 7 \Rightarrow \frac{10}{x^2 + 7} \leq \frac{10}{7} \Rightarrow 1 + \frac{10}{x^2 + 7} \leq 1 + \frac{10}{7} \Rightarrow B \leq \frac{17}{7}$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$

Vậy $MaxB = \frac{17}{7} \Leftrightarrow x = 0$.

Câu 84. (HSG 7 trường Bích Hòa 2017 - 2018)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau: $A = \frac{|x|+1996}{-1997}$

Lời giải

$A < 0$ với mọi x nên A đạt giá trị lớn nhất khi $|A|$ đạt giá trị nhỏ nhất

$$|A| = \left| \frac{|x|+1996}{-1997} \right| = \frac{|x|+1996}{1997}$$

$|x| \geq 0 \forall x$ nên $|x|+1996 \geq 1996$, vậy $|A|$ nhỏ nhất bằng $\frac{1996}{1997} \Leftrightarrow x = 0$

Suy ra GTLN của $A = \frac{1996}{-1997} \Leftrightarrow x = 0$.

Câu 85. (HSG 7 trường Kim An, trường Phú Trường 2017 - 2018)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = \frac{x+2}{|x|}$ với x là số nguyên.

Lời giải

Xét các trường hợp:

+) $x \leq -2 \Rightarrow A \leq 0$

+) $x = -1 \Rightarrow A = 1$

+) $x \geq 1 \Rightarrow A = \frac{x+2}{x} = 1 + \frac{2}{x} \Rightarrow A$ lớn nhất $\Rightarrow \frac{2}{x}$ lớn nhất

Vì x là số nguyên dương, nên $\frac{2}{x}$ lớn nhất $\Rightarrow x$ nhỏ nhất, tức là $x = 1$, khi đó $A = 3$

Vậy giá trị lớn nhất của $A = 3 \Leftrightarrow x = 1$.

Câu 86. (HSG 7 huyện Việt Yên 2017 - 2018)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = |2013-x| + |2014-x|$

Lời giải

Áp dụng BĐT $|a| + |b| \geq |a+b|$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $ab \geq 0$

Ta có: $P = |2013-x| + |2014-x| = |x-2013| + |2014-x|$

$P \geq |x-2013+2014-x| = |1| = 1$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(x-2013)(2014-x) \geq 0$, hay $2013 \leq x \leq 2014$

Vậy $\text{Min}P = 1$ khi $2013 \leq x \leq 2014$.

Câu 87. (HSG 7 huyện Thạch Thành - Thanh Hoá 2017 - 2018)

Cho các số a, b, c không âm thỏa mãn: $a+3c = 2016; a+2b = 2017$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a+b+c$.

Lời giải

Ta có: $a+3c = 2016$ (1) và $a+2b = 2017$ (2)

Từ (1) $\Rightarrow a = 2016 - 3c$

Trừ theo vế của (2) và (1), ta được $2b - 3c = 1 \Leftrightarrow b = \frac{1+3c}{2}$. Khi đó:

$$P = a + b + c = (2016 - 3c) + \frac{1 + 3c}{2} + c$$

$$= \left(2016 + \frac{1}{2}\right) + \frac{-6c + 3c + 2c}{2} = 2016\frac{1}{2} - \frac{c}{2}$$

Vì a, b, c không âm nên $P = 2016\frac{1}{2} - \frac{c}{2} \leq 2016\frac{1}{2}$, dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} c = 0 \\ a + 3c = 2016 \text{ hay } a = 2016, b = \frac{1}{2}, c = 0 \\ a + 2b = 2017. \end{cases}$$

Vậy $MaxP = 2016\frac{1}{2}$ khi $a = 2016, b = \frac{1}{2}, c = 0$.

Câu 88. (HSG 7 huyện Hoàng Hoá - Thanh Hoá 2017 - 2018)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = |2012 - x| + |2013 - x|$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức: $|A| + |B| \geq |A + B|$. Dấu “=” xảy ra khi $AB \geq 0$ (*)

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } M &= |2012 - x| + |2013 - x| = |2012 - x| + |x - 2013| \\ &\geq |2012 - x + x - 2013| = |-1| = 1 \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $(2012 - x)(x - 2013) \geq 0 \Rightarrow 2012 \leq x \leq 2013$

Vậy $MinM = 1 \Leftrightarrow 2012 \leq x \leq 2013$

Câu 89. (HSG 7 huyện Mỹ Xuyên 2017 - 2018)

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x + \sqrt{x} + 1$

Lời giải

ĐKXĐ: $x \geq 0$

$$\text{Ta có: } x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow x + \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow P = x + \sqrt{x} + 1 \geq 1$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 0$ (thỏa mãn ĐKXĐ). Vậy $P_{\min} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Câu 90. (HSG 7 huyện Sông Lô 2017 - 2018)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |x - 2015| + |x - 2016| + |x - 2017|$

Lời giải

$$P = |x - 2015| + |2016 - x| + |x - 2017| = (|x - 2015| + |2017 - x|) + |x - 2016|$$

$$\text{Ta có: } |x - 2015| + |2017 - x| \geq |x - 2015 + 2017 - x| = 2.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } 2015 \leq x \leq 2017 \quad (1)$$

$$\text{Lại có } |x - 2016| \geq 0. \text{ Dấu “=” xảy ra khi } x = 2016 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $\min P = 2 \Leftrightarrow x = 2016$

Câu 91. (HSG 7 huyện Sông Lô 2017 - 2018)

Cho bốn số nguyên dương khác nhau thỏa mãn tổng của hai số bất kỳ chia hết cho 2 và tổng của ba số bất kỳ chia hết cho 3. Tính giá trị nhỏ nhất của tổng bốn số này

Lời giải

Nhận xét: Vì trong bốn số nguyên dương khác nhau luôn thỏa mãn tổng của hai số bất kỳ chia hết cho 2 và tổng của ba số bất kỳ chia hết cho 3 nên bốn số phải cùng số dư khi chia cho 2 và 3. Để có tổng nhỏ nhất, mỗi trong hai số dư này là 1

Từ đó ta có các số 1, 7, 13, 19. Tổng của chúng là $1 + 7 + 13 + 19 = 40$.

Câu 92. (HSG 7 huyện Tam Dương - Vĩnh phúc 2017 - 2018)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{27-2x}{12-x}$ (với $x \in \mathbb{Z}$)

Lời giải

Ta có: $Q = \frac{27-2x}{12-x} = 2 + \frac{3}{12-x}$, suy ra Q lớn nhất khi $\frac{3}{12-x}$ lớn nhất

* Nếu $x > 12$ thì $12-x < 0 \Rightarrow \frac{3}{12-x} < 0$

* Nếu $x < 12$ thì $12-x > 0 \Rightarrow \frac{3}{12-x} > 0$

Từ hai trường hợp trên suy ra $\frac{3}{12-x}$ lớn nhất khi $12-x > 0$

Vì phân số $\frac{3}{12-x}$ có tử và mẫu là các số nguyên dương, tử không đổi nên phân số có giá trị

lớn nhất khi mẫu là số nguyên dương nhỏ nhất $\Rightarrow 12-x = 1 \Rightarrow x = 11$

Suy ra A có giá trị lớn nhất là 5 khi $x = 11$.

Câu 93. (HSG 7 trường Nguyễn Du 2016 - 2017; trường Ngô Gia Tự, huyện Phù Cát 2017 - 2018)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $B = |x-2| + |x-8|$.

Lời giải

Ta có: $B = |x-2| + |x-8| = |x-2| + |8-x| \geq |x-2+8-x| = 6$.

Dấu "=" xảy ra khi $(x-2)(8-x) \geq 0 \Rightarrow 2 \leq x \leq 8$

Vậy $B_{\min} = 6$ khi $2 \leq x \leq 8$.

Câu 94. (HSG 7 huyện Khoái Châu 2014 - 2015; huyện Mù Cang Chải 2016 - 2017)

Cho biểu thức: $C = \frac{2(x-1)^2+1}{(x-1)^2+2}$. Với giá trị nào của x thì biểu thức C có giá trị nhỏ nhất.

Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Lời giải

Ta có: $C = \frac{2(x-1)^2+1}{(x-1)^2+2} = \frac{2[(x-1)^2+2]-3}{(x-1)^2+2} = 2 - \frac{3}{(x-1)^2+2}$

Suy ra C nhỏ nhất khi $\frac{3}{(x-1)^2+2}$ lớn nhất.

Vì $(x-1)^2+2 \geq 2$ nên $\frac{3}{(x-1)^2+2} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow 2 - \frac{3}{(x-1)^2+2} \geq 2 - \frac{2}{3}$ hay $C \geq \frac{1}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của C bằng $\frac{1}{3}$ khi và chỉ khi $x = 1$.

Câu 95. (HSG 7 đề 351 2014 - 2015; huyện Việt Yên 2016 - 2017)

Cho $F = \frac{42-x}{x-15}$. Tìm số nguyên x để F đạt giá trị nhỏ nhất

Lời giải

a) Ta thấy $F = \frac{42-x}{x-15} = -1 + \frac{27}{x-15}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $\frac{27}{x-15}$ nhỏ nhất

Xét $x-15 > 0$ thì $\frac{27}{x-15} > 0$

Xét $x-15 < 0$ thì $\frac{27}{x-15} < 0$.

Vậy $\frac{27}{x-15}$ nhỏ nhất khi $x-15 < 0$

Phân số $\frac{27}{x-15}$ có tử dương mẫu âm

Khi đó $\frac{27}{x-15}$ nhỏ nhất khi $x-15$ là số nguyên âm lớn nhất $\Rightarrow x-15 = -1 \Rightarrow x = 14$

Vậy khi $x = 14$ thì F đạt giá trị nhỏ nhất bằng -28

Câu 96. (HSG 7 huyện Đức Thọ 2016 - 2017)

Tìm giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất của các biểu thức $A = |x+5| + 5$.

Lời giải

Ta có: $|x+5| \geq 0$ nên $A = |x+5| + 5 \geq 5$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = -5$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 5, đạt được khi $x = -5$.

Câu 97. (HSG 7 tỉnh Bắc Giang 2012 - 2013)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |x-2012| + |x-2013|$ với x là số tự nhiên.

Lời giải

$$P = |x-2012| + |x-2013|$$

Nếu $x = 2012$ hoặc $x = 2013$ thì $P = 1$

Nếu $x > 2013$ thì $x-2012 > 1 > 0 \Rightarrow |x-2012| = x-2012 > 1$

Nên $P = |x-2012| + |x-2013| > 1 + |x-2013| > 1$

Nếu $x < 2012$ thì $x-2013 < -1 < 0 \Rightarrow |x-2013| = 2013-x$

Mà $x-2013 < -1 \Rightarrow 2013-x > 1 \Rightarrow |x-2013| = 2013-x > 1$

Nên $P = |x-2012| + |x-2013| > |x-2012| + 1 > 1$

Do đó giá trị nhỏ nhất của P bằng 1, đạt được khi $x = 2012$ hoặc $x = 2013$.

Câu 98. (HSG 7 huyện Việt Yên 2013 - 2014; thị xã Bình Long 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |2x-2| + |2x-2003|$ với x là số nguyên.

Lời giải

Ta có: $A = |2x - 2| + |2x - 2003| = |2x - 2| + |2003 - 2x| \geq |2x - 2 + 2003 - 2x| = 2001$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(2x - 2)(2003 - 2x) \geq 0 \Rightarrow 2 \leq 2x \leq 2003 \Rightarrow 1 \leq x \leq \frac{2003}{2}$

Mà x là số nguyên nên $1 \leq x \leq 1001; x \in \mathbb{Z}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2001, đạt được với các giá trị nguyên của x thỏa mãn $1 \leq x \leq 1001$.

Câu 99. (HSG 7 huyện Thanh Oai 2014 - 2015)

Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $B = \frac{8-x}{x-3}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Ta có $B = \frac{8-x}{x-3} = \frac{5-(x-3)}{x-3} = \frac{5}{x-3} - 1$

Để B đạt giá trị nhỏ nhất cần $\frac{5}{x-3}$ đạt giá trị nhỏ nhất

Xét $x > 3 \Rightarrow x - 3 > 0$ thì $\frac{5}{x-3} > 0$

Xét $x < 3 \Rightarrow x - 3 < 0 \Rightarrow \frac{5}{x-3} < 0$

Vậy $\frac{5}{x-3}$ nhỏ nhất khi $x - 3 < 0$

Phân số $\frac{5}{x-3}$ (với x là số nguyên) có tử dương ($5 > 0$) và mẫu âm ($x - 3 < 0$)

Nên $\frac{5}{x-3}$ nhỏ nhất khi $(x - 3)$ là số nguyên âm lớn nhất $\Rightarrow x - 3 = -1 \Rightarrow x = 2$

Khi đó $B = \frac{5}{-1} - 1 = -6$

Vậy với $x = 2$ thì B đạt giá trị nhỏ nhất là -6 .

Câu 100. (HSG 7 trường Cao Dương 2016 - 2017; huyện Bát Xát 2022 - 2023)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{4}{(2x-3)^2 + 5}$.

Lời giải

Với $4 > 0$, để $A = \frac{4}{(2x-3)^2 + 5}$ có giá trị lớn nhất cần $(2x-3)^2 + 5$ đạt giá trị nhỏ nhất

Mà $(2x-3)^2 + 5 \geq 5 \Rightarrow \frac{4}{(2x-3)^2 + 5} \leq \frac{4}{5}$

Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{3}{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của A là $\frac{4}{5}$, đạt được khi $x = \frac{3}{2}$.

Câu 101. (HSG 7 huyện Bảo Thắng 2022 - 2023)

Cho biểu thức $A = -16 - |3x - 18| - |y - 11|$. Tìm x, y để A đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Lời giải

Ta có: $A = -16 - |3x - 18| - |y - 11|$

$$\text{Vì } \begin{cases} |3x - 18| \geq 0 \\ |y - 11| \geq 0 \end{cases} \Rightarrow -|3x - 18| - |y - 11| \leq 0$$

$$A = -16 - |3x - 18| - |y - 11| \leq -16$$

Giá trị lớn nhất của A là -16 khi và chỉ khi

$$\Rightarrow -|3x - 18| - |y - 11| = 0 \Rightarrow \begin{cases} |3x - 18| = 0 \\ |y - 11| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 18 \\ y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{18}{3} \\ y = 11 \end{cases}$$

Vậy giá trị lớn nhất của A là -16 khi và chỉ khi $\begin{cases} x = \frac{18}{3} \\ y = 11 \end{cases}$.

Câu 102. (HSG 7 huyện Tam Nông 2022 - 2023)

Cho 3 số thực x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 6109$ và $0 \leq z \leq y + 4 \leq x + 19$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x - 2$.

Lời giải

Ta có $0 \leq z \leq y + 4 \leq x + 19$ nên $z \leq x + 19$ và $y \leq x + 15$

Suy ra $x + y + z \leq x + x + 15 + x + 19$

$$\Rightarrow 6109 \leq 3x + 34 \Rightarrow 3x \geq 5985 \Rightarrow x \geq 1995$$

Do đó $P = x - 2 \geq 1995 - 2 = 1993$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 1995$, $y = 1995 + 15 = 2010$, $z = 1995 + 19 = 2014$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = x - 2$ là 1993 khi $x = 1995$, $y = 2010$, $z = 2014$

Câu 103. (HSG 7 huyện Thanh Thủy 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{|x - 2020| + |x - 2021| + 2022}{|x - 2020| + |x - 2021| + 2023}$

Lời giải

$$\text{Ta có } A = \frac{|x - 2020| + |x - 2021| + 2022}{|x - 2020| + |x - 2021| + 2023} = \frac{|x - 2020| + |x - 2021| + 2023 - 1}{|x - 2020| + |x - 2021| + 2023}$$

$$= 1 - \frac{1}{|x - 2020| + |x - 2021| + 2023}$$

Khi đó A nhỏ nhất khi $\frac{1}{|x - 2020| + |x - 2021| + 2023}$ lớn nhất

$$\Rightarrow |x - 2020| + |x - 2021| + 2023 \text{ nhỏ nhất}$$

Ta có: $|x - 2020| + |x - 2021| + 2023 = |x - 2020| + |2021 - x| + 2023$

$$\geq |x - 2020 + 2021 - x| + 2023 \geq 2024$$

Dấu “=” xảy ra $(x - 2020)(x - 2021) \geq 0 \Leftrightarrow 2020 \leq x \leq 2021$

Vậy $MinA = 1 - \frac{1}{2024} = \frac{2023}{2024} \Leftrightarrow 2020 \leq x \leq 2021$

Câu 104. (HSG 7 trường Nguyễn Án - TP Vinh 2022 - 2023)

Cho x, y là các số nguyên dương thoả mãn: $\frac{x+2y}{x+y} = \frac{2023}{2022}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của x .

Lời giải

Ta có: $\frac{x+2y}{x+y} = \frac{2023}{2022} \Rightarrow 1 + \frac{y}{x+y} = 1 + \frac{1}{2022} \Rightarrow \frac{y}{x+y} = \frac{1}{2022}$

$$\Rightarrow 2022y = x + y \Rightarrow x = 2021y$$

Vì y là số nguyên dương nên $2021y \geq 2021 \Rightarrow x \geq 2021$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $y = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của x bằng 2021, đạt tại $y = 1$

Câu 105. (HSG 7 huyện Vũ Thư 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $D = \sqrt{(2x+1)^2 + 4} + 3|4y^2 - 1| + 5$

Lời giải

$$(2x+1)^2 \geq 0 \forall x \Rightarrow (2x+1)^2 + 4 \geq 4 \forall x \Rightarrow \sqrt{(2x+1)^2 + 4} \geq \sqrt{4} = 2 \forall x$$

$$|4y^2 - 1| \geq 0 \forall y \Rightarrow 3|4y^2 - 1| \geq 0 \forall y$$

$$\Rightarrow \sqrt{(2x+1)^2 + 4} + |4y^2 - 1| + 5 \geq 2 + 0 + 5 = 7 \forall x, y$$

$$\Rightarrow D \geq 7 \Rightarrow D_{\min} = 7$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = \frac{-1}{2}; 4y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow y = \pm \frac{1}{2}$

Vậy $D_{\min} = 7$ tại $x = \frac{-1}{2}, y = \pm \frac{1}{2}$.

Câu 106. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{2(x-1)^2 + 4(2x+y-1)^2 + 19}{(x-1)^2 + 2(2x+y-1)^2 + 4}$

Lời giải

$$A = \frac{2(x-1)^2 + 4(2x+y-1)^2 + 19}{(x-1)^2 + 2(2x+y-1)^2 + 4} = \frac{2[(x-1)^2 + 2(2x+y-1)^2 + 4] + 11}{(x-1)^2 + 2(2x+y-1)^2 + 4}$$

$$= 2 + \frac{11}{(x-1)^2 + 2(2x+y-1)^2 + 4}$$

Vì $(x-1)^2 \geq 0; 2(2x+y-1)^2 \geq 0 \Rightarrow (x-1)^2 + 2(2x+y-1)^2 + 4 \geq 4$

$$\Rightarrow \frac{11}{(x-1)^2 + 2(2x+y-1)^2 + 4} \leq \frac{11}{4}$$

$$\Rightarrow 2 + \frac{11}{(x-1)^2 + 2(2x+y-1)^2 + 4} \leq \frac{19}{4} \Rightarrow A \leq \frac{19}{4}$$

$$\text{Đấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ 2x+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy Max } A = \frac{19}{4} \Leftrightarrow (x; y) = (1; -1)$$

Câu 107. (HSG 7 huyện Nho Quan - Ninh Bình 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |x - 2021| + |x - 2023| + |x - 2025|$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } |x - 2021| + |x - 2025| = |x - 2021| + |2025 - x| \geq |x - 2021 + 2025 - x| = 4$$

Đấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $2021 \leq x \leq 2025$. (1)

Mặt khác: $|x - 2023| \geq 0$, dấu “=” xảy ra khi $x = 2023$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $P = |x - 2021| + |x - 2023| + |x - 2025| \geq 4$

$$\text{Đấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} 2021 \leq x \leq 2025 \\ x = 2023 \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 4 khi $x = 2023$.

Câu 107. (HSG 7 huyện Thiệu Hóa - Thanh Hóa 2022 - 2023)

Với a và b là các số thực, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3a^2 + b^2 + 3ab + 3a + 2b + 3$.

Lời giải

$$\text{Ta có } P = 3a^2 + b^2 + 3ab + 3a + 2b + 3.$$

$$= a^2 + (a^2 + b^2 + 1 + 2ab + 2a + 2b) + a(a + b + 1) + 2$$

$$= a^2 + (a + b + 1)^2 + a(a + b + 1) + 2$$

$$= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (a + b + 1)^2 + a(a + b + 1) + \frac{3a^2}{4} + 2$$

$$= \left(\frac{3}{2}a + b + 1\right)^2 + \frac{3a^2}{4} + 2$$

$$\text{Do đó } P \geq 2 \text{ vì } \left(\frac{3}{2}a + b + 1\right)^2 \geq 0 \text{ và } \frac{3a^2}{4} > 0$$

Vậy GTNN của P là 2 khi $a = 0; b = -1$

Câu 108. (HSG 7 huyện Kim Thành 2022 - 2023)

Cho a, b, c là các số tự nhiên khác 0 thỏa mãn: $\frac{95}{24} < \frac{a+1}{a} + \frac{b+1}{b} + \frac{c+1}{c} < 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $P = a + b + c + 2011$.

Lời giải

P nhỏ nhất khi a, b, c nhỏ nhất và thỏa mãn điều kiện bài toán.

$$\frac{95}{24} < \frac{a+1}{a} + \frac{b+1}{b} + \frac{c+1}{c} < 4$$

$$\frac{95}{24} < 1 + \frac{1}{a} + 1 + \frac{1}{b} + 1 + \frac{1}{c} < 4$$

$$\frac{23}{24} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1 \quad (*)$$

a, b, c có vai trò như nhau, giả sử $a \geq b \geq c \Rightarrow \frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{c}$.

$$\frac{23}{24} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{3}{c} \Rightarrow \frac{23}{24} < \frac{3}{c} \Rightarrow c < 3 \frac{3}{23}$$

Từ (*) $\Rightarrow \frac{1}{c} < 1 \Rightarrow c > 1$

Do đó $1 < c < 3 \frac{3}{23}$ mà c là số tự nhiên $\Rightarrow c = 2; c = 3$.

TH1: Nếu $c = 2$ thì $\frac{11}{24} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{2}$.

$$\frac{11}{24} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{2}{b} \Rightarrow \frac{11}{24} < \frac{2}{b} \Rightarrow b < 4 \frac{4}{11}$$

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{2} \Rightarrow b > 2 \Rightarrow 4 \frac{4}{11} > b > 2$$

Do b là số tự nhiên nên $\Rightarrow b = 3; b = 4$.

Với $b = 3$ thì $\frac{1}{8} < \frac{1}{a} < \frac{1}{6} \Rightarrow 8 > a > 6$

Do a là số tự nhiên nên $a = 7$.

Ta được $a = 7; b = 3; c = 2$ thỏa mãn (*) và $a \geq b \geq c$

Với $b = 4$ thì $\frac{5}{24} < \frac{1}{a} < \frac{1}{4} \Rightarrow 4 \frac{4}{5} > a > 4$

Do a là số tự nhiên nên không có giá trị thỏa mãn.

TH2: Nếu $c = 3$ thì $\frac{5}{8} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{2}{3}$.

$$\frac{1}{b} < \frac{2}{3} \Rightarrow b > 1 \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{8} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{2}{b} \Rightarrow \frac{5}{8} < \frac{2}{b} \Rightarrow b < 3 \frac{1}{5} \Rightarrow 3 \frac{1}{5} > b > 1 \frac{1}{2}$$

Do b là số tự nhiên nên $b = 2; b = 3$.

* Nếu $b = 2$ thì $\frac{1}{8} < \frac{1}{a} < \frac{1}{6} \Rightarrow 8 > a > 6$ mà a là số tự nhiên nên $a = 7$.

Ta được $a = 7; b = 2; c = 3$ (không thỏa mãn $a \geq b \geq c$)

* Nếu $b = 3$ thì $\frac{7}{24} < \frac{1}{a} < \frac{1}{3} \Rightarrow 4 \frac{3}{7} > a > 3$ mà a là số tự nhiên nên $a = 4$.

Ta được $a = 4; b = 3; c = 2$ không thỏa mãn (*).

Từ các trường hợp trên ta thấy P đạt giá trị nhỏ nhất là $P = a + b + c + 2011 = 2023$.

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là $P = 2023$ khi $a = 7; b = 3; c = 2$ và các hoán vị của nó.

Câu 109. (HSG 7 huyện Văn Bàn 2022 - 2023)

Tìm GTLN của biểu thức $B = \frac{2020}{5 + (2x - 3y)^2 + |xy - 24|}$

Lời giải

Vì $(2x - 3y)^2 \geq 0; |xy - 24| \geq 0 \Rightarrow (2x - 3y)^2 + |xy - 24| \geq 0$

$$\Rightarrow 5 + (2x - 3y)^2 + |xy - 24| \geq 5$$

$$\Rightarrow \frac{2020}{5 + (2x - 3y)^2 + |xy - 24|} \leq \frac{2020}{5} = 404$$

$$\Rightarrow B \leq 404$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 2x - 3y = 0 & (1) \\ xy - 24 = 0 & (2) \end{cases}$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow 2x = 3y \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2}$$

$$\text{Đặt } \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = k \Rightarrow \begin{cases} x = 3k \\ y = 2k \end{cases}$$

$$\text{Mà } xy - 24 = 0 \Rightarrow 3k \cdot 2k - 24 = 0 \Rightarrow 6k^2 = 24 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -6 \\ y = -4 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } B_{\max} = 404 \text{ khi } \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -6 \\ y = -4 \end{cases}$$

Câu 110. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ 2022 - 2023)

Cho biểu thức: $P = \frac{3 - 2x}{2 - x}$ với x là số nguyên. Tìm giá trị lớn nhất của P .

Lời giải

$$\text{Ta có } P = \frac{3 - 2x}{2 - x} = \frac{2x - 3}{x - 2} = \frac{2(x - 2) + 1}{x - 2} = 2 + \frac{1}{x - 2}.$$

Đề P có giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{1}{x - 2}$ có giá trị lớn nhất.

$$+ \text{ Với } x < 2 \Rightarrow x - 2 < 0 \Rightarrow \frac{1}{x - 2} < 0 \quad (1)$$

$$+ \text{ Với } x = 2 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{x - 2} \text{ không có nghĩa (2)}$$

$$+ \text{ Với } x > 2 \Rightarrow x - 2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{x - 2} > 0$$

Phân số $\frac{1}{x - 2}$ có tử và mẫu đều dương, tử không đổi nên phân số đạt giá trị lớn nhất khi mẫu đạt giá trị nhỏ nhất.

Vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - 2 \in \mathbb{Z}$ và $x - 2 > 0$ nên $x - 2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi

$$x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow \frac{1}{x - 2} = 1 \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{1}{x-2}$ có giá trị lớn nhất là 1 khi $x = 3$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 3 khi $x = 3$.

Dạng 2.1: Bất đẳng thức về chứng minh tổng phân số tự nhiên

Câu 1. (HSG 7 huyện Đồng Xuân 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100}$. Chứng minh rằng $\frac{7}{12} < A < \frac{5}{6}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) - \dots - \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99}\right) - \frac{1}{100} \\ &= \frac{5}{6} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) - \dots - \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99}\right) - \frac{1}{100} < \frac{5}{6} \quad (1) \end{aligned}$$

Mặt khác: $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{9900}$

$$A = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{12}\right) + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{9900} = \frac{7}{12} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{9900} > \frac{7}{12} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra điều phải chứng minh.

Câu 2. (HSG 7 huyện Nga Sơn 2022 - 2023)

Cho $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{2023} - 1}$. Chứng minh rằng: $A > \frac{2023}{2}$.

Lời giải

Ta có: $A = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{2022} + 1} + \dots + \frac{1}{2^{2023}}\right) - \frac{1}{2^{2023}}$

$$A > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{2022}} + \dots + \frac{1}{2^{2023}}\right) - \frac{1}{2^{2023}}$$

$$A > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + 2^{2022} \cdot \frac{1}{2^{2023}} - \frac{1}{2^{2023}}$$

$$A > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2006}} = 1 + 2016 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2016}} = \frac{2023}{2} + \left(1 - \frac{1}{2^{2023}}\right) > \frac{2023}{2}.$$

Vậy $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{2023} - 1} > \frac{2023}{2}$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Thái Thụy - Thái Bình 2018 - 2019; trường Nguyệt Ân, huyện Ngọc Lặc 2022 - 2023)

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ thì tổng $S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2}$ không thể là một số nguyên.

Lời giải

S có $(n-1)$ số hạng

$$S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2} = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$S = n - 1 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) < n - 1 \quad (1)$$

Mặt khác $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1).n} = 1 - \frac{1}{n}$

$$S > n - 1 - 1 + \frac{1}{n} = n - 2 + \frac{1}{n} > n - 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $n - 2 < S < n - 1$

Vậy S không có giá trị nguyên với mọi số tự nhiên $n \geq 2$

Câu 4. (HSG 7 huyện Cát Tiên - Lâm Đồng 2018 - 2019)

Cho các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 2016$. Chứng minh rằng giá trị biểu

thức sau không phải là một số nguyên: $A = \frac{a}{2016 - c} + \frac{b}{2016 - a} + \frac{c}{2016 - b}$

Lời giải

$$A = \frac{a}{2016 - c} + \frac{b}{2016 - a} + \frac{c}{2016 - b} = \frac{a}{a + b} + \frac{b}{b + c} + \frac{c}{c + a}$$

Ta có: $\frac{a}{a + b} > \frac{a}{a + b + c}$; $\frac{b}{b + c} > \frac{b}{a + b + c}$; $\frac{c}{c + a} > \frac{c}{a + b + c} \Rightarrow A > 1$

Mặt khác: $\frac{a}{a + b} < \frac{a + c}{a + b + c}$; $\frac{b}{b + c} < \frac{a + b}{a + b + c}$; $\frac{c}{c + a} < \frac{b + c}{a + b + c} \Rightarrow A < 2$

Vậy $1 < A < 2$ nên A không phải là một số nguyên.

Câu 5. (HSG 7 đề 283 2018 - 2019)

Cho biểu thức $M = \frac{x}{x + y + z} + \frac{y}{x + y + t} + \frac{z}{y + z + t} + \frac{t}{x + z + t}$ với x, y, z, t là các số tự nhiên

khác 0. Chứng minh $M^{10} < 1025$.

Lời giải

$$\frac{x}{x + y + z} < \frac{x}{x + y}, \frac{y}{x + y + t} < \frac{y}{x + y}, \frac{z}{y + z + t} < \frac{z}{x + z + t}, \frac{t}{x + z + t} < \frac{t}{z + t}$$

$$\Rightarrow M < \left(\frac{x}{x + y} + \frac{y}{x + y}\right) + \left(\frac{z}{z + t} + \frac{t}{z + t}\right) \Rightarrow M < 2$$

Có $M^{10} < 2^{10} = 1024 < 1025 \Rightarrow M^{10} < 1025$

Câu 6. (HSG 7 trường Nguyễn Khuyến 2015 - 2016; trường Nguyễn Khuyến, trường Thái Phiên 2016 - 2017)

Chứng minh rằng $M = \frac{x}{x + y + z} + \frac{y}{x + y + t} + \frac{z}{y + z + t} + \frac{t}{x + z + t}$ có giá trị không phải là số

tự nhiên ($x, y, z, t \in \mathbb{N}^*$)

Lời giải

Ta có: $\frac{x}{x + y + z + t} < \frac{x}{x + y + z} < \frac{x}{x + y}$

$$\frac{y}{x+y+z+t} < \frac{y}{x+y+t} < \frac{y}{x+y}$$

$$\frac{z}{x+y+z+t} < \frac{z}{y+z+t} < \frac{z}{z+t}$$

$$\frac{t}{x+y+z+t} < \frac{t}{x+z+t} < \frac{t}{z+t}$$

$$\frac{x+y+z+t}{x+y+z+t} < M < \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} \right) + \left(\frac{z}{z+t} + \frac{t}{z+t} \right)$$

Hay $1 < M < 2$.

Vậy M có giá trị không phải là số tự nhiên.

Câu 7. (HSG 7 huyện Sơn Dương 2016 - 2017)

Cho $M = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$ với $a, b, c > 0$. Chứng tỏ rằng M không phải là số nguyên.

Lời giải

Vì $a, b, c > 0$ nên: $\frac{a}{a+b} > \frac{a}{a+b+c}$; $\frac{b}{b+c} > \frac{b}{a+b+c}$; $\frac{c}{c+a} > \frac{c}{a+b+c}$

Do đó $M = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$. Do đó $M > 1$ (1)

$$\begin{aligned} \text{Mà } & \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \right) + \left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} \right) \\ &= \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} \right) + \left(\frac{b}{b+c} + \frac{c}{b+c} \right) + \left(\frac{c}{c+a} + \frac{a}{c+a} \right) = 3 \end{aligned}$$

Vì $\left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} \right) > 1$ suy ra $M = \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \right) < 2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $1 < M < 2$ nên M không phải là số nguyên.

Câu 8. (HSG 7 huyện Thiệu Hóa - Thanh Hóa 2022 - 2023)

Cho $C = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2023^2}$. Chứng minh rằng $C < \frac{3}{4}$.

Lời giải

$$C = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2023^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \dots + \frac{1}{2023.2023}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \frac{1}{3.3} < \frac{1}{2.3} \\ \frac{1}{4.4} < \frac{1}{3.4} \\ \dots \\ \frac{1}{2023.2023} < \frac{1}{2022.2023} \end{cases}$$

Suy ra $C < \frac{1}{4} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2022.2023}$

$$C < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023}$$

$$C < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2023} < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Vậy } C < \frac{3}{4}$$

Câu 9. (HSG 7 huyện Tam Điệp–Ninh Bình 2021 - 2022; huyện Vũ Thư, huyện Thường Xuân 2022 - 2023)

Cho biết $a_1 = 1; a_2 = 1 + \frac{1}{2}; a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}; \dots; a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{2a_2^2} + \frac{1}{3a_3^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < 2 \text{ với mọi số tự nhiên } n \text{ lớn hơn } 1$$

Lời giải

Với mọi $k \geq 2$, ta có: $\frac{1}{k \cdot a_k^2} < \frac{1}{k \cdot a_{k-1} \cdot a_k}$ (vì $a_k > a_{k-1}$)

$$\text{Ta có: } \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} = \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k-1} \cdot a_k} = \frac{1}{k \cdot a_{k-1} \cdot a_k}$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{k \cdot a_k^2} < \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}$$

$$\text{Cho } k = 2; 3; \dots; n \text{ ta có: } \frac{1}{2a_2^2} < \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}; \frac{1}{3a_3^2} < \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}; \dots; \frac{1}{na_n^2} < \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}$$

Cộng theo vế ta được:

$$\frac{1}{2a_2^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} < \frac{1}{a_1} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{2a_2^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < 1 + 1 = 2$$

Dạng 2.2: Bất đẳng thức về chứng minh tổng lũy thừa tự nhiên

Câu 1. (HSG 7 trường Võ Thị Sáu 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \dots + \frac{2022}{4^{2022}}$. Chứng minh rằng: $A < \frac{1}{2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \dots + \frac{2022}{4^{2022}}$$

$$4A = 1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{4^3} + \dots + \frac{2022}{4^{2021}}$$

$$4A - A = \left(1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{4^3} + \dots + \frac{2022}{4^{2021}}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \dots + \frac{2022}{4^{2022}}\right)$$

$$3A = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2021}} - \frac{2022}{4^{2022}}$$

$$3A = \frac{1}{3} \cdot \left(4 - \frac{1}{4^{2021}}\right) - \frac{2022}{4^{2022}}$$

$$3A = \frac{4}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^{2021}} - \frac{2022}{4^{2022}} < \frac{4}{3} \Rightarrow A < \frac{4}{9} < \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Vậy $A < \frac{1}{2}$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Thọ Xuân–Thanh Hóa 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{65} < \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2023^3} < \frac{1}{40}$.

Lời giải

Đặt: $S = \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2023^3}$. Ta có:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2023^3} < \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{6.7.8} + \dots + \frac{1}{2022.2023.2024} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{4.5.6} + \frac{2}{5.6.7} + \frac{2}{6.7.8} + \dots + \frac{2}{2022.2023.2024} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4.5} - \frac{1}{5.6} + \frac{1}{5.6} - \frac{1}{6.7} + \frac{1}{6.7} - \frac{1}{7.8} + \dots + \frac{1}{2022.2023} - \frac{1}{2023.2024} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4.5} - \frac{1}{2023.2024} \right) < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{40}. \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta lại có: } S &= \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2023^3} > \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{6.7.8} + \dots + \frac{1}{2023.2024.2025} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{5.6.7} + \frac{2}{6.7.8} + \dots + \frac{2}{2023.2024.2025} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{5.6} - \frac{1}{6.7} + \frac{1}{6.7} - \frac{1}{7.8} + \dots + \frac{1}{2023.2024} - \frac{1}{2024.2025} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{5.6} - \frac{1}{2024.2025} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{30} - \frac{1}{2.2024.2025} = \frac{1}{60} - \frac{1}{2.2024.2025} > \frac{1}{60} - \frac{1}{780} = \frac{1}{65}. \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{1}{65} < S < \frac{1}{40}$.

Vậy $\frac{1}{65} < \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2023^3} < \frac{1}{40}$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{5} - \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} - \frac{4}{5^4} + \frac{5}{5^5} - \dots + \frac{2021}{5^{2021}} - \frac{2022}{5^{2022}} < \frac{5}{36}$.

Lời giải

Đặt: $A = \frac{1}{5} - \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} - \frac{4}{5^4} + \frac{5}{5^5} - \dots + \frac{2021}{5^{2021}} - \frac{2022}{5^{2022}}$. Ta có:

$$5A = 1 - \frac{2}{5^1} + \frac{3}{5^2} - \frac{4}{5^3} + \frac{5}{5^4} - \dots + \frac{2021}{5^{2020}} - \frac{2022}{5^{2021}}$$

$$\Rightarrow 5A + A = 6A = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} - \dots - \frac{1}{5^{2021}} - \frac{2022}{5^{2021}}.$$

$$\text{Đặt } P = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{5^5} + \dots - \frac{1}{5^{2021}} \text{ thì } 6A = P - \frac{2022}{5^{2022}}$$

$$\Rightarrow 5P = 5 - 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} - \dots - \frac{1}{5^{2020}}$$

$$\Rightarrow 6P = 5 - \frac{1}{5^{2021}} \Rightarrow P = \frac{5}{6} - \frac{1}{6 \cdot 5^{2021}}$$

$$\Rightarrow 6A = \frac{5}{6} - \frac{1}{6 \cdot 5^{2021}} - \frac{2022}{5^{2022}} < \frac{5}{6} \Rightarrow A < \frac{5}{36}.$$

Câu 4. (HSG 7 TP Vĩnh Yên 2022 - 2023)

Chứng tỏ: $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{2019}{3^{2019}} < 0,75.$

Lời giải

Đặt $A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{2019}{3^{2019}}$. Ta có: $3A = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \dots + \frac{2019}{3^{2018}}$

Suy ra: $2A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2018}} - \frac{2019}{3^{2019}}$.

Đặt $M = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2018}}$

$$\Rightarrow 3M = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2017}}$$

$$\Rightarrow 2M = 1 - \frac{1}{3^{2018}} < 1 \Rightarrow M < \frac{1}{2}.$$

Ta có: $2A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2018}} - \frac{2019}{3^{2019}} = 1 + M - \frac{2019}{3^{2019}} < 1 + M < 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow A < \frac{3}{4}.$

Câu 5. (HSG 7 huyện Ninh Giang 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2022}{3^{2022}} < \frac{3}{4}.$

Lời giải

Ta có $3A = 3\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2022}{3^{2022}}\right) = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{5}{3^4} + \dots + \frac{2022}{3^{2021}}$

$$3A - A = \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{5}{3^4} + \dots + \frac{2022}{3^{2021}}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2022}{3^{2022}}\right)$$

$$3A - A = 1 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2021}}\right) - \frac{2022}{3^{2022}}$$

Đặt $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2021}}$

$$3B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2020}}$$

$$3B - B = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2020}}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2021}}\right)$$

$$2B = 1 - \frac{1}{3^{2021}} \Rightarrow B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{2021}} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2A < 1 + \frac{1}{2} - \frac{2022}{3^{2022}} \Rightarrow A < \frac{3}{4} - \frac{1011}{3^{2022}} \Rightarrow A < \frac{3}{4}.$$

Câu 6. (HSG 7 huyện Chí Linh 2022 - 2023)

Chứng minh $S = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{4^4} + \dots + \frac{2023}{4^{2023}} < \frac{1}{2}$.

Lời giải

$$S = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{4^4} + \dots + \frac{2023}{4^{2023}}.$$

Nên ta có $4S = 1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{4^3} + \dots + \frac{2023}{4^{2022}}$.

$$4S - S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2022}} - \frac{2023}{4^{2023}}$$

$$3S < 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2022}}$$

Đặt $A = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2022}}$

$$4A = 4 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{2021}}$$

$$4A - A = 4 - \frac{1}{4^{2022}} \Rightarrow 3A < 4 \Rightarrow A < \frac{4}{3}.$$

Suy ra $S < \frac{4}{9} < \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Vậy $S = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{4^4} + \dots + \frac{2023}{4^{2023}} < \frac{1}{2}$.

Câu 7. (HSG 7 huyện Hà Trung 2022 - 2023)

Cho biểu thức: $S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2}$ với $n \in N$ và $n > 2$. Chứng minh rằng S không phải là số tự nhiên.

Lời giải

$$S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2} \text{ với } n \in N \text{ và } n > 2.$$

Ta có: $S = \frac{2^2 - 1}{2^2} + \frac{3^2 - 1}{3^2} + \frac{4^2 - 1}{4^2} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2}$

$$S = 1 - \frac{1}{2^2} + 1 - \frac{1}{3^2} + 1 - \frac{1}{4^2} + 1 - \frac{1}{5^2} + \dots + 1 - \frac{1}{n^2}$$

$$S = (1 + 1 + 1 + \dots + 1) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$S = (n - 1) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) \Rightarrow S < (n - 1).$$

Lại có $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n}$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$$

$$\Rightarrow S > (n-1) - 1 \Rightarrow S > n - 2 \Rightarrow n - 2 < S < n - 1$$

mà $n - 2$; $n - 1$ là hai số tự nhiên liên tiếp nên S không phải là số tự nhiên.

Câu 8. (HSG 7 trường Trần Đức Thông - Hưng Hà, huyện Mùrng Lát 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$. Chứng minh: $A < \frac{3}{16}$.

Lời giải

Ta có: $A = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$

$$3A = 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{99}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}}$$

$$3A + A = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$4A = \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}}\right) - \frac{100}{3^{100}} \quad (1)$$

Đặt $B = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}}$

$$3B = 3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{97}} - \frac{1}{3^{98}}$$

$$3B + B = 3 - \frac{1}{3^{99}}$$

$$4B = 3 - \frac{1}{3^{99}} < 3 \Rightarrow B < \frac{3}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $4A < \frac{3}{4} - \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{4}$

Do đó $A < \frac{3}{16}$.

Câu 9. (HSG 7 huyện Quảng Xương 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2023}} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$

Lời giải

Ta có $VT = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2023}} \quad (1)$.

$$3.VT = 3 \cdot \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{2023}}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2022}} \quad (2)$$

Lấy (2) trừ (1) theo vế với vế ta được: $2.VT = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3^{2023}}\right) < \frac{1}{3} \Rightarrow VT < \frac{1}{6} \quad (3)$

$$VP = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$$

Ta thấy $\frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} > \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{100.101}$.

Nên $VP > \frac{1}{5} - \frac{1}{101} = \frac{96}{505} > \frac{96}{576} = \frac{1}{6}$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra: $VP > VT$.

Câu 10. (HSG 7 trường Tri Thức tỉnh Đồng Nai 2022 - 2023)

Chứng minh: $\frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{8}$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{100^2} = \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{50^2} \right)$
 $< \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{49.50} \right) = \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{49} - \frac{1}{50} \right)$
 $= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{50} \right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{200} < \frac{1}{8}$ (đpcm)

Câu 11. (HSG 7 huyện Quan Hóa 2021 - 2022; huyện Tiên Du - Bắc Ninh, trường Lê Quý Đôn - Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \frac{1}{7^8} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}}$. Chứng minh rằng $A < \frac{1}{50}$.

Lời giải

Ta có $A = \frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3} + \frac{4}{7^4} + \dots + \frac{99}{7^{99}} + \frac{100}{7^{100}}$
 $7.A = 1 + \frac{2}{7^1} + \frac{3}{7^2} + \frac{4}{7^3} + \dots + \frac{99}{7^{98}} + \frac{100}{7^{99}}$
 $\Rightarrow 7A - A = \left(1 + \frac{2}{7^1} + \frac{3}{7^2} + \frac{4}{7^3} + \dots + \frac{99}{7^{98}} + \frac{100}{7^{99}} \right) - \left(\frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3} + \frac{4}{7^4} + \dots + \frac{99}{7^{99}} + \frac{100}{7^{100}} \right)$
 $\Rightarrow 6A = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{99}} - \frac{100}{7^{100}}$
 Đặt $B = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{99}}$
 $\Rightarrow 7B = 7 + 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{98}}$
 $\Rightarrow 7B - B = \left(7 + 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{98}} \right) - \left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{99}} \right)$
 $6B = 7 - \frac{1}{7^{99}} < 7 \Rightarrow B < \frac{7}{6}$
 Lại có: $6A = B - \frac{100}{7^{100}} < B \Rightarrow 6A < \frac{7}{6} \Rightarrow A < \frac{7}{36}$
 Vậy $A < \frac{7}{36}$.

Câu 12. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$

Lời giải

Ta có: $A = \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \dots + \frac{1}{n.n} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1).n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$

Câu 13. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho $D = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right)\left(\frac{1}{3^2} - 1\right)\left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1\right)$. So sánh D với $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Vì D là tích của 99 số âm nên:

$$\begin{aligned}
 -D &= \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{100^2}\right) \\
 -D &= \frac{3}{2^2} \cdot \frac{8}{3^2} \cdot \frac{15}{4^2} \dots \frac{9999}{100^2} = \frac{1.3}{2^2} \cdot \frac{2.4}{3^2} \cdot \frac{3.5}{4^2} \dots \frac{99.101}{100^2} \\
 -D &= \frac{1.2.3.4.5 \dots 98.99}{2.3.4.5 \dots 99.100} \cdot \frac{3.4.5 \dots 100.101}{2.3.4 \dots 99.100} \\
 D &= \frac{1}{100} \cdot \frac{101}{2} = \frac{101}{200} > \frac{100}{200} \Rightarrow D > \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Vậy $D < -\frac{1}{2}$

Câu 14. (HSG 7 trường Lý Nam Đế - Hưng Hà 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $A = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{7^2} + \dots + \frac{2}{2007^2} < \frac{1003}{2008}$

Lời giải

Tổng A không có thừa số chung, do vậy ta đánh giá từng số hạng

$$\frac{2}{3^2} = \frac{2}{9} < \frac{2}{8} = \frac{2}{2.4}$$

$$\frac{2}{5^2} = \frac{2}{25} < \frac{2}{24} = \frac{2}{4.6}$$

$$\frac{2}{7^2} = \frac{2}{49} < \frac{2}{48} = \frac{2}{6.8}$$

.....

$$\frac{2}{2007^2} < \frac{2}{2006.2008}$$

$$A < \frac{2}{2.4} + \frac{2}{4.6} + \frac{2}{6.8} + \dots + \frac{2}{2006.2008} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2008} = \frac{1003}{2008}$$

Câu 15. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho $S_1 = 1 + \frac{1}{5}; S_2 = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2}; \dots; S_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n} (n \in \mathbb{N}^*)$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{5S_1^2} + \frac{1}{5^2S_2^2} + \frac{1}{5^3S_3^2} + \dots + \frac{1}{5^nS_n^2} < \frac{1}{4}$$

Lời giải

Ta có $S_n > S_{n-1} > \dots > S_2 > S_1 > 1$

$$\Rightarrow S_n^2 > S_{n-1}^2 > \dots > S_2^2 > S_1^2 > 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5S_1^2} + \frac{1}{5^2S_2^2} + \frac{1}{5^3S_3^2} + \dots + \frac{1}{5^nS_n^2} < \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^n}$$

Đặt $A = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^n}$

$$\Rightarrow 5A = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^{n-1}}$$

$$\Rightarrow 4A = 1 - \frac{1}{5^n} < 1 \Rightarrow A < \frac{1}{4}$$

Vậy $A < \frac{1}{4}$

Câu 16. (HSG 7 trường Lưu Khánh Đàm - Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho $S_n = \frac{1^2-1}{1} + \frac{2^2-1}{2^2} + \frac{3^2-1}{3^2} + \dots + \frac{n^2-1}{n^2}$ (với $n \in \mathbb{N}$ và $n > 1$). Chứng minh rằng S_n không là số nguyên.

Lời giải

$$\text{Có } S_n = 1 - \frac{1}{1^2} + 1 - \frac{1}{2^2} + 1 - \frac{1}{3^2} + \dots + 1 - \frac{1}{n^2} = (n-1) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right)$$

Đặt $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

Do $A > 0$ nên $S_n < n-1$

Mặt khác $A < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 1 - \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow S_n > (n-1) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = n - 2 + \frac{1}{n} > n - 2 \text{ (do } \frac{1}{n} > 0 \text{)}$$

$\Rightarrow n - 2 < S_n < n - 1$ nên S_n không là số nguyên.

Câu 17. (HSG 7 trường Dân Chủ - Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho $B = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n-1}{(n-1)^2 \cdot n^2}$ (với n là số tự nhiên lớn hơn 1).

Chứng minh rằng: $B < 1$.

Lời giải

Ta có: $B = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n-1}{(n-1)^2 \cdot n^2}$

$$= \frac{2^2 - 1^2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{4^2 - 3^2}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{n^2 - (n-1)^2}{(n-1)^2 \cdot n^2}$$

$$= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}$$

$$= 1 - \frac{1}{n^2}$$

Vì n là số tự nhiên lớn hơn 1 nên $\frac{1}{n^2} > 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{n^2} < 1$.

Vậy $B < 1$.

Câu 18. (HSG 7 trường Trần Đức Thông - Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{2001}{2000^2 + 1} + \frac{2001}{2000^2 + 2} + \dots + \frac{2001}{2000^2 + 2000}$. Chứng minh rằng: $1 < A^2 < 4$.

Lời giải

Tổng A có tất cả 2000 số hạng.

$$\text{Ta có: } \frac{2001}{2000^2 + 1} > \frac{2001}{2000^2 + 2} > \frac{2001}{2000^2 + 3} > \dots > \frac{2001}{2000^2 + 2000}$$

$$\Rightarrow A > \frac{2001}{2000^2 + 2000} \cdot 2000 = \frac{2001 \cdot 2000}{2000(2000 + 1)} = 1 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } A < \frac{2001}{2000^2 + 1} \cdot 2000 = \frac{2001 \cdot 2000}{2000^2 + 1} = \frac{(2000 + 1) \cdot 2000}{2000^2 + 1} = \frac{2000^2 + 2000}{2000^2 + 1}$$

$$= \frac{(2000 + 1) \cdot 2000}{2000^2 + 1} = \frac{(2000^2 + 1) + 1999}{2000^2 + 1} = 1 + \frac{1999}{2000^2 + 1} < 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $1 < A < 2 \Rightarrow 1 < A^2 < 4$.

Vậy $1 < A^2 < 4$.

Câu 19. (HSG 7 trường Kim Trung - Hưng Hà 2022 - 2023)

Chứng minh tổng: $A = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{2019^2} + \frac{1}{2020^2}$ không phải là một số nguyên.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{1}{1 \cdot 2} > \frac{1}{2 \cdot 2}; \frac{1}{2 \cdot 3} > \frac{1}{3 \cdot 3}; \frac{1}{3 \cdot 4} > \frac{1}{4 \cdot 4}; \dots; \frac{1}{2018 \cdot 2019} > \frac{1}{2019 \cdot 2019}; \frac{1}{2019 \cdot 2020} > \frac{1}{2020 \cdot 2020}$$

Do đó ta có:

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2018 \cdot 2019} + \frac{1}{2019 \cdot 2020} > 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{2019^2} + \frac{1}{2020^2}$$

$$\Rightarrow A < 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019} + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}$$

$$\Rightarrow A < 1 + 1 - \frac{1}{2020} = 1 + \frac{2019}{2020}$$

$$\text{Vì } 0 < \frac{2019}{2020} < 1 \text{ nên } 1 < 1 + \frac{2019}{2020} < 2$$

Suy ra: $1 < A < 2$.

Vậy A không phải là một số nguyên.

Câu 20. (HSG 7 huyện Lục Nam 2018 - 2019; trường Điệp Nông 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2020^3} < \frac{1}{40}$.

Lời giải

$$\text{Đặt } A = \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2020^3}$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{5.5.5} < \frac{1}{4.5.6}; \frac{1}{6.6.6} < \frac{1}{5.6.7}; \frac{1}{7.7.7} < \frac{1}{6.7.8}; \dots; \frac{1}{2020.2020.2020} < \frac{1}{2019.2020.2021}$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{5.5.5} + \frac{1}{6.6.6} + \frac{1}{7.7.7} + \dots + \frac{1}{2020.2020.2020}$$

$$< \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{6.7.8} + \dots + \frac{1}{2019.2020.2021}$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4.5} - \frac{1}{5.6} + \frac{1}{5.6} - \frac{1}{6.7} + \frac{1}{6.7} - \frac{1}{7.8} + \dots + \frac{1}{2019.2020} - \frac{1}{2020.2021} \right)$$

$$\Rightarrow A \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4.5} - \frac{1}{2020.2021} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{2020.2021} \right)$$

$$\text{Vì } \frac{1}{2020.2021} > 0 \text{ nên } \frac{1}{20} - \frac{1}{2020.2021} < \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{2020.2021} \right) < \frac{1}{40}$$

$$\text{Hay } A < \frac{1}{40}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2020^3} < \frac{1}{40}$$

Câu 21. (HSG 7 huyện Hưng Hà - Thái Bình 2022 - 2023)

$$\text{Cho } A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{9^2}. \text{ Chứng minh } \frac{2}{5} < A < \frac{8}{9}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có } A < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{8.9}$$

$$\Rightarrow A < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{8} - \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow A < 1 - \frac{1}{9} \Rightarrow A < \frac{8}{9} \quad (1)$$

$$\text{Ta có } A > \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{9.10}$$

$$\Rightarrow A > \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow A > \frac{4}{10} \Rightarrow A > \frac{2}{5} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{2}{5} < A < \frac{8}{9} \text{ (đpcm).}$$

Câu 22. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ 2021 - 2022)

$$\text{Cho } A = 1 - \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 - \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2022}. \text{ Chứng tỏ rằng } A \text{ không phải là số nguyên.}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } A + \frac{2}{3}A = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2023} \Rightarrow A = \left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2023} \right] \cdot \frac{3}{5}$$

$$\text{Vì } \left(\frac{2}{3}\right)^{2023} > 0 \Rightarrow 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2023} > 0 \text{ mà } \frac{3}{5} > 0 \text{ nên } A > 0 \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } 0 < \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2023} < \frac{2}{3} \Rightarrow 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2023} < 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow A = \left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2023}\right] \cdot \frac{3}{5} < \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} = 1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $0 < A < 1$ nên A không là số nguyên (đpcm).

Câu 23. (HSG 7 huyện Lục Ngạn–Bắc Giang 2021 - 2022)

$$\text{Cho } C = \frac{2020}{2019^2 + 1} + \frac{2020}{2019^2 + 2} + \frac{2020}{2019^2 + 3} + \dots + \frac{2020}{2019^2 + 2019}.$$

Chứng minh rằng giá trị của biểu thức C không phải là số nguyên.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{2020}{2019^2 + 1} < \frac{2020}{2019^2}$$

$$\frac{2020}{2019^2 + 2} < \frac{2020}{2019^2}$$

$$\frac{2020}{2019^2 + 3} < \frac{2020}{2019^2}$$

...

$$\frac{2020}{2019^2 + 2019} < \frac{2020}{2019^2}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } C < \frac{2020}{2019^2} + \frac{2020}{2019^2} + \frac{2020}{2019^2} + \dots + \frac{2020}{2019^2} = \frac{2020}{2019^2} \cdot 2019 = \frac{2020}{2019} < 2$$

$$\Rightarrow C < 2$$

CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS

$$\text{Ta có: } \frac{2020}{2019^2 + 1} > \frac{2020}{2019^2 + 2019},$$

$$\frac{2020}{2019^2 + 2} > \frac{2020}{2019^2 + 2019},$$

$$\frac{2020}{2019^2 + 3} > \frac{2020}{2019^2 + 2019},$$

...

$$\frac{2020}{2019^2 + 2018} > \frac{2020}{2019^2 + 2019},$$

$$\frac{2020}{2019^2 + 2019} = \frac{2020}{2019^2 + 2019}$$

$$\begin{aligned} \text{Từ đó suy ra } C &> \frac{2020}{2019^2 + 2019} + \frac{2020}{2019^2 + 2019} + \frac{2020}{2019^2 + 2019} + \dots + \frac{2020}{2019^2 + 2019} \\ &= \frac{2020}{2019^2 + 2019} \cdot 2019 = \frac{2020 \cdot 2019}{2019(2019 + 1)} = 1 \Rightarrow C > 1 \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $1 < C < 2$ nên C không là số nguyên.

Câu 24. (HSG 7 trường Bảo Phương, trường Thanh Thùy 2018 - 2019)

Chứng minh rằng: $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}} + \frac{1}{3^{2013}} < \frac{1}{2}$

Lời giải

$$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}} + \frac{1}{3^{2013}}$$

$$3B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}}$$

$$3B - B = 1 - \frac{1}{3^{2013}} \Rightarrow 2B = 1 - \frac{1}{3^{2013}} \Rightarrow B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{2013}} < \frac{1}{2}$$

Vậy $B < \frac{1}{2}$

Câu 25. (HSG 7 trường Bích Hòa 2013 - 2014; trường Hồng Dương 2017 - 2018; huyện Thanh Oai, trường Điện Hồng 2018 - 2019)

Chứng minh: $\frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$

Lời giải

Đặt $A = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$, ta có:

$$A < \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{4} - \frac{1}{100} < \frac{1}{4}$$

$$A > \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100} + \frac{1}{100.101} = \frac{1}{5} - \frac{1}{101} > \frac{1}{6}$$

Câu 26. (HSG 7 huyện Thường Tín - Hà Nội 2018 - 2019)

Chứng minh rằng: $B = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{2019^3} < \frac{1}{2^2}$

Lời giải

Ta có: $2^3 > 1.2.3 \Rightarrow \frac{1}{2^3} < \frac{1}{1.2.3}$

Tương tự: $\frac{1}{3^3} < \frac{1}{2.3.4}; \dots; \frac{1}{2019^3} < \frac{1}{2017.2018.2019}$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{2017.2018.2019} = \frac{1}{2} \left(\frac{3-1}{1.2.3} + \frac{4-2}{2.3.4} + \dots + \frac{2019-2017}{2017.2018.2019} \right)$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2017.2018} - \frac{1}{2018.2019} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2018.2019} \right)$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2018.2019.2} < \frac{1}{2^2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{2019^3} < \frac{1}{2^2}$$

Câu 27. (HSG 7 trường Trần Hưng Đạo 2017 - 2018; trường Vạn Long 2018 - 2019)

Biết $x \in \mathbb{Q}$ và $0 < x < 1$. Chứng minh $x^n < x$ với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Lời giải

Xét $x^n - x = x(x^{n-1} - 1)$

$$0 < x < 1 \Rightarrow x^{n-1} - 1 < 0; x > 0 \Rightarrow x^n - x < 0$$

Suy ra điều phải chứng minh

Câu 28. (HSG 7 trường Hương Điền - Nam Hương 2017 - 2018)

Chứng minh: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < 1$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

.....

$$\frac{1}{2005^2} < \frac{1}{2004.2005} = \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < 1 - \frac{1}{2005}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < 1$$

Câu 29. (HSG 7 huyện Đông Sơn - Thanh Hoá, trường Nguyễn Chí Chính 2017 - 2018)

Cho $B = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \frac{24}{25} + \dots + \frac{2499}{2500}$. Chứng tỏ B không phải là số nguyên.

Lời giải

Ta có: $B = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \frac{24}{25} + \dots + \frac{2499}{2500}$

$$B = 49 - \left(1 - \frac{3}{4} + 1 - \frac{8}{9} + 1 - \frac{15}{16} + 1 - \frac{24}{25} + \dots + 1 - \frac{2499}{2500} \right)$$

$$B = 49 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{50^2} \right) = 49 - M$$

Trong đó $M = \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{50^2} \right)$

Áp dụng tính chất $\frac{1}{(n+1)n} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}$

Ta có: $\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{50^2} \right) < \left(\frac{1}{2.1} + \frac{1}{3.2} + \frac{1}{4.3} + \frac{1}{5.4} + \dots + \frac{1}{50.49} \right)$

$$M < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{49} - \frac{1}{50} = 1 - \frac{1}{50} < 1$$

Lại có: $M > \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{50.51} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{50} - \frac{1}{51}$

$$M > \frac{1}{2} - \frac{1}{51} = \frac{49}{101} > 0$$

Từ đó suy ra $0 < M < 1 \Rightarrow B = 49 - M$, không phải là một số nguyên.

Câu 30. (HSG 7 huyện Anh Sơn, trường THCS Tào Sơn 2017 - 2018)

Chứng minh rằng: $A = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{19}{9^2 \cdot 10^2} < 1$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{19}{9^2 \cdot 10^2} \\ &= \frac{2^2 - 1^2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{4^2 - 3^2}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{10^2 - 9^2}{9^2 \cdot 10^2} \\ &= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{10^2} = 1 - \frac{1}{10^2} < 1 \end{aligned}$$

Câu 31. (HSG 7 huyện Trục Ninh 2022 - 2023)

Cho $A = 4^{27} + 4^{1000} + 4^x$. Tìm số tự nhiên x lớn nhất sao cho A là số chính phương.

Lời giải

Giả sử tồn tại số tự nhiên x để A là số chính phương.

* Xét $x \geq 27$:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= 4^{27} + 4^{1000} + 4^x = 4^{27} (1 + 4^{973} + 4^{x-27}) \\ &= (2^2)^{27} \left[(2^{x-27})^2 + 2 \cdot 2^{x-27} \cdot 1 + 1 + 4^{973} - 2 \cdot 2^{x-27} \right] \\ &= (2^2)^{27} \left[(2^{x-27})^2 + 2^{x-27} + 2^{x-27} + 1 + 4^{973} - 2 \cdot 2^{x-27} \right] \\ &= (2^2)^{27} \left[2^{x-27} (2^{x-27} + 1) + (2^{x-27} + 1) + 4^{973} - 2 \cdot 2^{x-27} \right] \\ &= (2^{27})^2 \left[(2^{x-27} + 1)^2 + 4^{973} - 2 \cdot 2^{x-27} \right] \end{aligned}$$

Ta có: $(2^{27})^2$ là số chính phương.

Với $x \geq 27$ và $x \in \mathbb{N}$ thì $1 + 4^{973} + 4^{x-27} \in \mathbb{N}$ nên để A là một số chính phương thì $B = (2^{x-27} + 1)^2 + 4^{973} - 2 \cdot 2^{x-27}$ cũng là một số chính phương

$$\Rightarrow B \geq 0 \text{ mà } (2^{x-27} + 1)^2 \geq 0 \text{ nên } 4^{973} - 2 \cdot 2^{x-27} \geq 0$$

$$\Rightarrow 2^{1946} - 2^{x-26} \geq 0$$

$$\Rightarrow x - 26 \leq 1946 \Rightarrow x \leq 1972$$

Kết hợp với điều kiện ta có: $27 \leq x \leq 1972$

Vì x là số tự nhiên lớn nhất nên $x = 1972$.

Thay $x = 1972$ vào A ta được $A = \left[2^{27} \cdot (2^{1945} + 1) \right]^2$ là số chính phương (1)

* Xét $0 \leq x < 27$:

Giả sử tồn tại x thỏa mãn $0 \leq x < 27$ để A là số chính phương

$$\begin{aligned} A &= 4^{27} + 4^{1000} + 4^x = 4^x (4^{27-x} + 4^{1000-x} + 1) \\ &= (2^2)^x \left[(2^{27-x})^2 + 2 \cdot 2^{27-x} \cdot 1 + 1 + (2^2)^{1000-x} - 2 \cdot 2^{27-x} \right] \end{aligned}$$

$$= (2^x)^2 \left[(2^{27-x})^2 + 2^{27-x} + 2^{27-x} + 1 + 2^{2000-2x} - 2^{28-x} \right]$$

$$= (2^x)^2 \left[(2^{27-x} + 1)^2 + (2^{2000-2x} - 2^{28-x}) \right]$$

Ta có: $(2^x)^2$ là số chính phương.

Với $0 \leq x < 27$ và $x \in \mathbb{N}$ thì $4^{27-x} + 4^{1000-x} + 1 \in \mathbb{N}$

Nên để A là một số chính phương thì $C = (2^{27-x} + 1)^2 + 2^{2000-2x} - 2^{28-x}$ cũng là một số chính phương $\Rightarrow C \geq 0$ mà $(2^{27-x} + 1)^2 \geq 0$

$$\text{nên} \Rightarrow 2^{2000-2x} - 2^{28-x} \geq 0 \Rightarrow 2000 - 2x \geq 28 - x \Rightarrow x \leq 1972 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $x = 1972$ là số lớn nhất để A là số chính phương.

Câu 32. (HSG 7 TP Thanh Hóa 2022 - 2023)

Gọi $a; b$ là hai giá trị tương ứng của $x; y$ để biểu thức $A = x^2 + 4x + y^2 - 4y + 100$ đạt giá trị nhỏ nhất. Chứng minh rằng: $(a + b)^{2023} = a^{2023} + b^{2023}$

Lời giải

Ta có: $A = x^2 + 4x + y^2 - 4y + 100$

$$= (x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) + 92$$

$$= (x + 2)^2 + (y - 2)^2 + 92$$

$$\text{Vì } (x + 2)^2 \geq 0; (y - 2)^2 \geq 0 \Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 2)^2 + 92 \geq 92, \forall x, y$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x + 2 = 0$ và $y - 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ và $y = 2$

A đạt giá trị nhỏ nhất bằng 92 khi $x = -2; y = 2$ suy ra $a = -2; b = 2$

$$+) \text{ Thay } a = -2; b = 2 \text{ vào vế trái của } (a + b)^{2023} = a^{2023} + b^{2023}$$

$$\text{Ta được: } (-2 + 2)^{2023} = 0^{2023} = 0 \quad (1)$$

$$+) \text{ Thay } a = -2; b = 2 \text{ vào vế phải của } (a + b)^{2023} = a^{2023} + b^{2023}$$

$$\text{Ta được: } (-2)^{2023} + 2^{2023} = -2^{2023} + 2^{2023} = 0 \quad (2)$$

Dạng 2.3 Bất đẳng thức về chứng minh tích của một dãy

Câu 1. (HSG 7 huyện Hưng Hà-Thái Bình 2022 - 2023)

Cho $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \dots \frac{99}{100}$. Chứng minh rằng $P < \frac{1}{10}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Cho n các giá trị từ 1 đến 99 ta có:

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}; \frac{3}{4} < \frac{4}{5}; \frac{5}{6} < \frac{6}{7}; \dots; \frac{99}{100} < \frac{100}{101}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \dots \frac{99}{100} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \dots \frac{100}{101}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{99}{100} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{99}{100} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots \frac{100}{101} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{99}{100}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{99}{100} \right)^2 < \frac{1}{101}.$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Quan Sơn 2022 - 2023)

Chứng minh rằng $\frac{1}{4048} < \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2021}{2022} \cdot \frac{2023}{2024} \right)^2 < \frac{1}{2025}$.

Lời giải

$$\frac{1}{4048} < \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2021}{2022} \cdot \frac{2023}{2024} \right)^2 < \frac{1}{2025}.$$

Với mọi $n \geq 1$ ta có: $\frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} < \frac{n^2}{n^2 + 2n} = \frac{n}{n+2}$.

Từ đó suy ra: $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2021}{2022} \cdot \frac{2023}{2024} \right)^2 < \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} \cdots \frac{2021}{2023} \cdot \frac{2013}{2025} = \frac{1}{2025}$

Với mọi $n \geq 2$ ta có: $\frac{n^2}{(n+1)^2} > \frac{n^2 - 1}{(n+1)^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{(n+1)^2} = \frac{n-1}{n+1}$.

Từ đó suy ra: $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2021}{2022} \cdot \frac{2023}{2024} \right)^2 > \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{4}{6} \cdots \frac{2020}{2022} \cdot \frac{2022}{2024} = \frac{1}{4048}$.

Dạng 3. Bất đẳng thức dạng chữ

Câu 1. (HSG 7 huyện Phú Lý 2016 - 2017; huyện Dương Nam 2017 - 2018; quận Hà Đông 2022 - 2023)

Cho $a > 2, b > 2$. Chứng minh $ab > a + b$.

Lời giải

Từ $a > 2 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{2}$; $b > 2 \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{2}$.

Suy ra: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a+b}{ab} < 1$.

Vậy $ab > a + b$.

Câu 2. (HSG 7 Cẩm Thủy - Nam Định 2021 - 2022; Hậu Lộc 2022 - 2023)

Cho ba số a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 1$.

Lời giải

Sử dụng tính chất: $0 < a < 1 \Rightarrow a < \sqrt{a}$.

Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên ta có: $0 < \frac{a}{b+c} < 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} > \frac{a}{b+c}$.

Mà $\frac{a}{b+c} > \frac{a}{a+b+c}$ (do a, b, c dương) nên: $\sqrt{\frac{a}{b+c}} > \frac{a}{a+b+c}$. (1)

Chứng minh tương tự ta được: $\sqrt{\frac{b}{c+a}} > \frac{b}{a+b+c}$ (2) và $\sqrt{\frac{c}{a+b}} > \frac{c}{a+b+c}$ (3).

Cộng về ba bất đẳng thức (1); (2); (3) ta được:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} = 1.$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 3. (HSG 7 huyện Tân Ước 2013 - 2014; trường Phú Nhuận 2014 - 2015; huyện Thái Thụy 2015 - 2016; huyện Hương Khê 2016 - 2017; huyện Yên Lập, huyện Hương Sơn 2017 - 2018; huyện Phú Lí - Hà Nam, trường Hoàng Quyên, trường Lý Tự Trọng, huyện Lộc Hà 2018 - 2019; huyện Triệu Sơn - Thanh Hóa, huyện Thanh Sơn - Phú Thọ 2021 - 2022; huyện Hưng Hà, huyện Cẩm Thủy, huyện Thanh Sơn, thị Xã Bỉm Sơn, trường Kinh Môn, huyện Sơn Động 2022 - 2023)

Cho ba số thực $a; b; c$ thỏa mãn: $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$. Chứng minh: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$

Lời giải

Vì $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$, nên $(a-1)(b-1) \geq 0$ suy ra $ab+1 \geq a+b$

Do đó $\frac{1}{ab+1} \leq \frac{1}{a+b}$ nên $\frac{c}{ab+1} \leq \frac{c}{a+b}$ (1)

Tương tự: $\frac{a}{bc+1} \leq \frac{a}{b+c}$ (2) ; $\frac{b}{ac+1} \leq \frac{b}{a+c}$ (3)

Do đó: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$ (4)

Mà $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$ (đpcm)

Câu 4. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2015 - 2016; huyện Mô Cày 2017 - 2018; huyện Kinh Môn 2018 - 2019; huyện Đông Hưng 2022 - 2023)

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2 \leq 2(ab+bc+ca).$$

Lời giải

Ta có: $(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Tương tự ta có $b^2 + c^2 \geq 2bc$; $c^2 + a^2 \geq 2ac$. Suy ra:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + ac + bc) \text{ hay } a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc. \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác, ta có: $a + b > c \Rightarrow ac + bc > c^2$
 $a + c > b \Rightarrow ab + bc > b^2$
 $b + c > a \Rightarrow ab + ac > a^2$

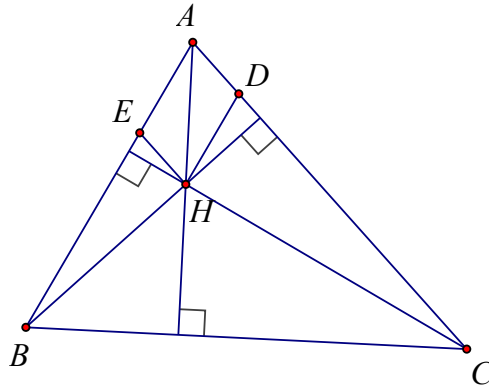
$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + ac + bc). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(ab + bc + ca)$.

Câu 5. (HSG 7 huyện Yên Định - Thanh Hóa 2022 - 2023)

Cho tam giác nhọn ABC , trực tâm H . Chứng minh: $HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + AC + BC)$.

Lời giải



Qua H kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC tại $D \Rightarrow CH \perp HD$.

Qua H kẻ đường thẳng song song với AC cắt AB tại $E \Rightarrow BH \perp HE$.

Ta có $\triangle AHD = \triangle HAE$ (g.c.g) $\Rightarrow AD = HE, AE = HD$.

Trong $\triangle AHD$ có $HA < HD + AD$ nên $HA < AE + AD$. (1)

Từ $BH \perp HE \Rightarrow \triangle HBE$ vuông cân nên $HB < BE$. (2)

Tương tự, ta có: $HC < DC$. (3)

Từ (1), (2), (3) ta có: $HA + HB + HC < AB + AC$. (4)

Tương tự: $HA + HB + HC < AB + BC$ (5)

và $HA + HB + HC < AB + BC$. (6)

Từ (4), (5), (6) suy ra: $HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + AC + BC)$.

Câu 6. (HSG 7 huyện Yên Định - Thanh Hóa 2022 - 2023)

Cho x, y, z là 3 số thực tùy ý thỏa mãn $x + y + z = 0$ và $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1$. Chứng minh rằng đa thức $x^2 + y^4 + z^6$ có giá trị không lớn hơn 2.

Lời giải

Trong ba số x, y, z có ít nhất hai số cùng dấu. Giả sử $x, y \geq 0 \Rightarrow z = -x - y \leq 0$.

Vì $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1$ nên: $x^2 + y^4 + z^6 \leq |x| + |y| + |z|$

$\Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq x + y - z \Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq -2z$.

Vì $-1 \leq z \leq 1$ và $z \leq 0 \Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq 2$.

Vậy $x^2 + y^4 + z^6 \leq 2$.

Câu 7. (HSG 7 Quảng Ninh 2022 - 2023)

Giả sử x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 2, chứng minh:

$$S = \frac{x}{yz+1} + \frac{y}{xz+1} + \frac{z}{xy+1} < 2.$$

Lời giải

Vì x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác và có chu vi bằng 2. Không giảm tính tổng quát ta suy ra: $0 < x \leq y \leq z < 1$.

Suy ra: $x-1 < 0; y-1 < 0 \Rightarrow (x-1)(y-1) < 0 \Rightarrow xy+1 > x+y$

$$\Rightarrow \frac{1}{xy+1} < \frac{1}{x+y} \Rightarrow \frac{z}{xy+1} < \frac{z}{x+y}. \quad (1)$$

Chứng minh tương tự: $\frac{x}{yz+1} < \frac{x}{y+z} \quad (2); \frac{y}{xz+1} < \frac{y}{x+z} \quad (3).$

Cộng vế với vế (1), (2), (3) ta được: $\frac{x}{yz+1} + \frac{y}{xz+1} + \frac{z}{xy+1} < \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \quad (4)$

Mà $\frac{x}{y+z} < \frac{x+x}{x+y+z} \Rightarrow \frac{x}{y+z} < \frac{2x}{x+y+z}.$

Tương tự: $\frac{y}{x+z} < \frac{2y}{x+y+z}; \frac{z}{x+y} < \frac{2z}{x+y+z}.$

Suy ra: $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} < \frac{2x}{x+y+z} + \frac{2y}{x+y+z} + \frac{2z}{x+y+z}$

$$\Rightarrow \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} < \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} \Rightarrow \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} < 2 \quad (5)$$

Từ (4) và (5) ta được: $S = \frac{x}{yz+1} + \frac{y}{xz+1} + \frac{z}{xy+1} < 2.$ Đpcm.

Câu 8. (HSG 7 TP Bắc Ninh 2022 - 2023)

Cho ba số a, b, c thỏa mãn $0 \leq a \leq b+1 \leq c+2$ và $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của c .

Lời giải

Vì $0 \leq a \leq b+1 \leq c+2$ nên $0 \leq a+b+1+c+2 \leq c+2+c+2+c+2$
 $\Rightarrow 0 \leq 4 \leq 3c+6$ (vì $a+b+c=1$)

Hay $3c \geq -2 \Rightarrow c \geq \frac{-2}{3}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của c là $\frac{-2}{3}$ khi đó $a+b = \frac{5}{3}.$

Câu 9. (HSG 7 thị xã Hoàng Mai 2022 - 2023)

Cho a, b, c là các số thỏa mãn: $a+b+c=0$. Chứng minh: $2022ab+2023bc+4045ca \leq 0$.

Lời giải

Từ $a+b+c=0 \Rightarrow b+c=-a; a+b=-c$. Do đó

$$\begin{aligned} 2022ab+2023bc+4045ca &= 2022ab+2022ca+2023bc+2023ca \\ &= 2022a(b+c)+2023c(b+a) \\ &= 2022a \cdot (-a)+2023c \cdot (-c) \\ &= -2022a^2-2023c^2 = -(2022a^2+2023c^2) \leq 0 \end{aligned}$$

Vậy $2022ab+2023bc+4045ca \leq 0$ nếu $a+b+c=0$.

Câu 10. (HSG 7 huyện Anh Sơn, 2015 - 2016; trường Lê Quý Đôn Hà Đông 2022 - 2023)

Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh: $2(ab+bc+ca) > a^2+b^2+c^2$

Lời giải

Trong tam giác, tổng độ dài hai cạnh lớn hơn cạnh còn lại nên ta có:

$$b+c > a \Rightarrow a(b+c) > a^2 \Rightarrow ab+ac > a^2$$

Tương tự ta có : $bc+ba > b^2$ và $ac+cb > c^2$

Cộng theo vế ta được : $2(ab+bc+ca) > a^2+b^2+c^2$

Vậy a, b, c là ba cạnh của một tam giác thì $2(ab+bc+ca) > a^2+b^2+c^2$

Câu 11. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh: $M = \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b}$ có giá trị không nguyên.

Lời giải

Với $a, b, c, d > 0$, ta có: $\frac{a+b}{a+b+c} > \frac{a+b}{a+b+c+d}$

$$\frac{b+c}{b+c+d} > \frac{b+c}{a+b+c+d}$$

$$\frac{c+d}{c+d+a} > \frac{c+d}{a+b+c+d}$$

$$\frac{d+a}{a+b+d} > \frac{d+a}{a+b+c+d}$$

Cộng theo vế ta được: $\frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b} > \frac{2(a+b+c+d)}{a+b+c+d} = 2(*)$

Với $a, b, c, d > 0$, ta có: $\frac{a+b+c}{a+b+c} = \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = 1$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} = \frac{a+b+d}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d}$$

Mà $\frac{c}{a+b+c} > \frac{c}{a+b+c+d}$ (với $a, b, c, d > 0$) nên suy ra: $\frac{a+b}{a+b+c} < \frac{a+b+d}{a+b+c+d}$ (1)

Chứng minh tương tự, ta được: $\frac{b+c}{b+c+d} < \frac{a+b+c}{a+b+c+d}$ (2)

$$\frac{c+d}{c+d+a} < \frac{c+d+b}{a+b+c+d}$$
 (3)

$$\frac{d+a}{a+b+d} < \frac{d+a+c}{a+b+c+d}$$
 (4)

Từ (1), (2), (3), (4) cộng theo vế ta được:

$$\frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b} < \frac{3(a+b+c+d)}{a+b+c+d} = 3(**)$$

Từ (*) và (**) $2 < M = \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b} < 3$

Vậy với $a, b, c, d > 0$, M có giá trị không nguyên (đpcm)

Câu 12. (HSG 7 trường Dân Chủ - Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng: $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$.

Lời giải

Ta có: a, b, c là các số thực dương

$$\Rightarrow \frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+b}; \frac{b}{a+b+c} < \frac{b}{b+c}; \frac{c}{a+b+c} < \frac{c}{c+a}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c}{a+b+c} < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \Rightarrow 1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \quad (1)$$

Ta có: a, b, c là các số thực dương

$$\Rightarrow \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}; \frac{b+a}{a+b+c} < \frac{b}{b+c}; \frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{a+b+c}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} \Rightarrow \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$.

Câu 13. (HSG 7 trường Bùi Hữu Diên - Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho 3 số a, b, c là các số nguyên dương sao cho mỗi số nhỏ hơn tổng hai số kia. Chứng

minh $1 < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$

Lời giải

Theo bài ta có $b+c < a+b+c \Rightarrow \frac{1}{b+c} > \frac{1}{a+b+c} \Rightarrow \frac{a}{b+c} > \frac{a}{a+b+c} \quad (1)$

Lại có $a < b+c \Rightarrow a+b+c < b+c+b+c \Rightarrow \frac{1}{a+b+c} > \frac{1}{2(b+c)} \Rightarrow \frac{2a}{a+b+c} > \frac{a}{b+c} \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{b+c} < \frac{2a}{a+b+c} \quad (3)$

Tương tự có $\frac{b}{a+b+c} < \frac{b}{a+c} < \frac{2b}{a+b+c} \quad (4)$

$\frac{c}{a+b+c} < \frac{c}{a+b} < \frac{2c}{a+b+c} \quad (5)$

Từ (3), (4) và (5) $\Rightarrow 1 < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 2$ (đpcm).

Câu 14. (HSG 7 trường Văn Lang - Hưng Hà 2022 - 2023)

Với a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$.

Lời giải

Ta có $(a-b)^2 \geq 0$ với mọi $a, b \Rightarrow (a-b)(a-b) \geq 0 \Rightarrow a^2 - ab - ab + b^2 \geq 0$
 $\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \quad (1)$

Vì a, b là các số nguyên dương nên $ab > 0$ do đó chia cả 2 vế của (1) cho ab , ta được:

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2 \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

Tương tự $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2; \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) &= a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \\ &= 1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1 \\ &= 3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Mà } \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2; \frac{a}{c}+\frac{c}{a} \geq 2; \frac{b}{c}+\frac{c}{b} \geq 2$$

$$\text{Do đó } 3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right) \geq 9$$

$$\Rightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9 \text{ (đpcm).}$$

Câu 15. (HSG 7 huyện Hoàng Hóa 2016 - 2017; huyện Thanh Miện - Hải Dương 2021 - 2022)

Cho 20 số nguyên khác 0: $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{20}$ có các tính chất sau:

+ a_1 là số dương.

+ Tổng của ba số viết liền nhau bất kì là một số dương.

+ Tổng của 20 số đó là số âm.

Chứng minh rằng: $a_1 \cdot a_{14} + a_{14} \cdot a_{12} < a_1 \cdot a_{12}$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} &a_1 + (a_2 + a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7) + (a_8 + a_9 + a_{10}) + (a_{11} + a_{12} + a_{13}) + a_{14} \\ &+ (a_{15} + a_{16} + a_{17}) + (a_{18} + a_{19} + a_{20}) < 0 \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } a_1 > 0; a_2 + a_3 + a_4 > 0; a_5 + a_6 + a_7 > 0; a_8 + a_9 + a_{10} > 0; a_{11} + a_{12} + a_{13} > 0; \\ a_{15} + a_{16} + a_{17} > 0; a_{18} + a_{19} + a_{20} > 0$$

$$\Rightarrow a_{14} < 0$$

$$\begin{aligned} \text{Tương tự: } &(a_1 + a_2 + a_3) + \dots + (a_{10} + a_{11} + a_{12}) + (a_{13} + a_{14}) + (a_{15} + a_{16} + a_{17}) + (a_{18} + a_{19} + a_{20}) < 0 \\ &\Rightarrow a_{13} + a_{14} < 0 \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác: } a_{12} + a_{13} + a_{14} > 0 \Rightarrow a_{12} > 0$$

$$\text{Từ các điều kiện: } a_1 > 0; a_{12} > 0; a_{14} < 0 \Rightarrow a_1 \cdot a_{14} + a_{14} \cdot a_{12} < a_1 \cdot a_{12} \text{ (đpcm).}$$

Câu 16. (HSG 7 huyện Phù Yên - Sơn La, trường Võ Thị Sáu 2017 - 2018; huyện Tiên Phước 2018 - 2019; huyện Yên Mỹ - Hưng Yên, trường Lê Hồng Phong 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: Nếu $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_9$ thì $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3$

Lời giải

Ta có: $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_9$ nên suy ra:

$$a_1 + a_2 + a_3 < 3a_3 \quad (1)$$

$$a_4 + a_5 + a_6 < 3a_6 \quad (2)$$

$$a_7 + a_8 + a_9 < 3a_9 \quad (3)$$

Cộng vế với vế của (1), (2), (3) ta được: $a_1 + a_2 + \dots + a_9 < 3(a_3 + a_6 + a_9)$

Vì $a_1 + a_2 + \dots + a_9 > 0$ nên ta được: $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3$

Câu 17. (HSG 7 huyện Sơn Trà - Đà Nẵng 2018 - 2019)

Tìm x, y biết $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \leq 0$

Lời giải

Vì $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 \geq 0$ với mọi x ; $|3y + 12| \geq 0$ với mọi y , do đó:

$\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \geq 0$ với mọi x, y . Theo đề bài thì:

$\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \leq 0$. Từ đó suy ra $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| = 0$.

Khi đó $2x - \frac{1}{6} = 0$ và $3y + 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{12}$ và $y = -4$.

Vậy $x = \frac{1}{12}$; $y = -4$.

Câu 18. (HSG 7 huyện Đức Phổ 2015 - 2016; huyện Phù Lý 2016 - 2017; huyện Trà Lý, huyện Năm Căn 2017 - 2018)

Cho các số $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{15}$. Chứng minh rằng: $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}}{a_5 + a_{10} + a_{15}} < 5$.

Lời giải

Với: $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{15}$. Ta có:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 < 5a_5$$

$$a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} < 5a_{10}$$

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} < 5a_{15}$$

Suy ra $a_1 + a_2 + \dots + a_{15} < 5(a_5 + a_{10} + a_{15})$

Vậy $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}}{a_5 + a_{10} + a_{15}} < 5$

Câu 19. (HSG 7 huyện Triệu Sơn - Thanh Hoá 2017 - 2018)

Gọi a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác. Chứng minh: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$

Lời giải

Vì $a < b+c$ nên $\frac{a}{b+c} < 1 \Rightarrow \frac{a}{b+c} < \frac{a+a}{b+c+a}$ (1)

Tương tự ta có: $\frac{b}{c+a} < 1 \Rightarrow \frac{b}{c+a} < \frac{b+b}{c+a+b}$ (2)

$$\frac{c}{a+b} < 1 \Rightarrow \frac{c}{a+b} < \frac{c+c}{a+b+c} \quad (3)$$

Từ (1) (2), (3) suy ra : $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < \frac{2a+2b+2c}{a+b+c} = 2$

Câu 20. (HSG 7 huyện Cẩm Khê - Phú Thọ 2017 - 2018)

Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Hãy so sánh $\frac{a}{b}$ với $\frac{a+c}{b+d}$.

Lời giải

Vì a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ nên $ad < bc$ (1)

Mặt khác: $\frac{a}{b} = \frac{a(b+d)}{b(b+d)} = \frac{ab+ad}{b(b+d)}$ (2)

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{b(a+c)}{b(b+d)} = \frac{ab+bc}{b(b+d)} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$.

Câu 21. (HSG 7 trường Nguyễn Du 2016 - 2017)

Chứng minh với mọi $a, b \in \mathbb{Q}$ thì $|a|+|b| \geq |a+b|$.

Lời giải

Ta có: $(|a|+|b|)^2 = a^2 + 2|ab| + b^2$; $(|a+b|)^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Lại có $|ab| \geq ab$ nên $2|ab| \geq 2ab$

Vì thế $a^2 + 2|ab| + b^2 \geq a^2 + 2ab + b^2$

Vậy $|a|+|b| \geq |a+b|$ với mọi $a, b \in \mathbb{Q}$.

Câu 22. (HSG 7 huyện Bảo Thắng 2022 - 2023)

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

Lời giải

Đặt $x = b+c-a$; $y = a+c-b$; $z = a+b-c$ ta có: $a = \frac{z+y}{2}$; $b = \frac{x+z}{2}$; $c = \frac{y+x}{2}$

Do đó: $\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} = \frac{1}{2} \left(\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} \right)$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) \geq \frac{1}{2} (2+2+2) = 3$$

ĐỀ 12: ĐỒNG DƯ THỨC

Dạng 1: Sử dụng đồng dư thức chứng minh chia hết
Dạng 2: Sử dụng đồng dư thức tìm số dư
Dạng 3: Tìm điều kiện của biến để chia hết
Dạng 4: Sử dụng đồng dư tìm chữ số tận cùng
Dạng 5: Sử dụng đồng dư trong bài toán về số chính phương
Dạng 6: Sử dụng đồng dư trong bài toán về số nguyên tố, hợp số
Dạng 7: Sử dụng đồng dư trong bài toán tìm nghiệm nguyên

Dạng 1. SỬ DỤNG ĐỒNG DƯ THỨC CHỨNG MINH CHIA HẾT

Câu 1. (HSG 7 huyện Hoàng Hoá 2022 - 2023; Cẩm Thụy 2022 - 2023)

Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3)$. Chứng minh $(a + b + c + d) : 3$.

Lời giải

Ta có: $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3)$.

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3c^3 - 15d^3$$

Mà $(3c^3 - 15d^3) : 3$ nên $(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) : 3$. (1)

Dư trong phép chia a cho 3 là 0; 1; -1.

Suy ra dư trong phép chia a^3 cho 3 cũng lần lượt là 0; 1; -1.

Như vậy: $a \equiv a^3 \pmod{3}$.

Tương tự ta có: $b \equiv b^3 \pmod{3}$, $c \equiv c^3 \pmod{3}$, $d \equiv d^3 \pmod{3}$.

Suy ra: $a + b + c + d \equiv a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \pmod{3}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a + b + c + d$ chia hết cho 3.

Câu 2. (HSG 7 huyện Yên Phong, tỉnh Bắc Ninh 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $(4^{2n+2} - 1) : 15$ với mọi số tự nhiên n .

Lời giải

Ta có: $4 \equiv -1 \pmod{5}$

$$\Rightarrow 4^{2(n+1)} \equiv (-1)^{2(n+1)} \pmod{5}$$

$$\Rightarrow 4^{2(n+1)} \equiv 1 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow (4^{2(n+1)} - 1) \equiv 0 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow (4^{2(n+1)} - 1) : 5. \quad (1)$$

Lại có: $4 \equiv 1 \pmod{3}$

$$\Rightarrow 4^{2(n+1)} \equiv (1)^{2(n+1)} \pmod{3}$$

$$\Rightarrow (4^{2(n+1)} - 1) \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow (4^{2(n+1)} - 1) : 3. \quad (2)$$

Lại có: 3 và 5 là hai số nguyên tố cùng nhau. (3)

$$\text{Từ (1) và (2) và (3)} \Rightarrow (4^{2n+2} - 1) : 15.$$

Câu 3. (HSG T7 TP Bắc Giang năm học 2022 - 2023)

Cho $m; n; t$ là ba số nguyên tố lớn hơn 3 thỏa mãn: $m - n = n - t = a$ ($a \in \mathbb{N}^*$). Chứng minh rằng a chia hết cho 6.

Lời giải

$$\text{Ta có: } m - n = n - t = a \quad (a \in \mathbb{N}^*)$$

$$\text{Suy ra } n = t + a; m = n + a = t + 2a$$

Do đó ta có $t; t + a; t + 2a$ là các số nguyên tố lớn hơn 3.

Xét số dư của ba số nguyên tố $t; t + a; t + 2a$ đã cho khi chia cho 3, số dư nhận được có thể là 1 hoặc 2

Do đó có ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho 3 và hiệu của chúng chia hết cho 3.

$$\text{Mặt khác } (t + a) - t = a; (t + 2a) - t = 2a; (t + 2a) - (t + a) = a$$

$$\text{Suy ra } a \text{ hoặc } 2a \text{ chia hết cho 3. Mà } (2, 3) = 1 \text{ nên } a : 3 \quad (1)$$

Vì m, n là các số nguyên tố lớn hơn 3 nên m, n là các số lẻ

$$\Rightarrow m - n : 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) kết hợp với $(2, 3) = 1$ ta có $a : 6$

Câu 4. (HSG 7 huyện Cẩm Thủy, tỉnh Thanh Hóa, trường 2022 - 2023)

Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. thỏa mãn $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3)$. Chứng minh $a + b + c + d$ chia hết cho 3.

Lời giải

$$\text{Ta có } a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3) \text{ khi và chỉ khi } a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3c^3 - 15d^3$$

$$\text{Mà } (3c^3 - 15d^3) : 3 \text{ nên } (a^3 + b^3 + c^3 + d^3) : 3 \quad (1)$$

Dư trong phép chia a cho 3 là $\{-1; 0; 1\}$ suy ra dư trong phép chia a^3 cho 3 cũng là $\{-1; 0; 1\}$ hay $a \equiv a^3 \pmod{3}$

Tương tự ta có:

$$b \equiv b^3 \pmod{3}; c \equiv c^3 \pmod{3}; d \equiv d^3 \pmod{3}$$

$$\text{Suy ra } a + b + c + d \equiv a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \pmod{3} \quad (2)$$

Vậy $a + b + c + d$ chia hết cho 3

Câu 5. (HSG T7 Huyện Nghi Lộc, năm học 2022 - 2023)

Chứng minh rằng số $A = \frac{(17^{2014^{2016}} - 3^{96^{97}})}{2}$ là một số tự nhiên chia hết cho 5.

Lời giải

Ta có: $2014^{2016} = (2014^2)^{1008} : 4$ nên $2014^{2016} = 4k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) suy ra $17^{2014^{2016}} = 17^{4k}$

Mà $17^{4k} = (17^2)^{2k} = 289^{2k}$ luôn có chữ số tận cùng là chữ số 1 nên $17^{2014^{2016}}$ luôn có chữ số tận cùng là chữ số 1

$96^{97} : 4$ nên $96^{97} = 4m$ ($m \in \mathbb{N}^*$) suy ra $3^{96^{97}} = 3^{4m}$

$3^{4m} = 81^m$ luôn có tận cùng là chữ số 1 nên $3^{96^{97}}$ luôn có chữ số tận cùng là chữ số 1

Suy ra $(17^{2014^{2016}} - 3^{96^{97}})$ có chữ số tận cùng là chữ số 0

Do vậy $(17^{2014^{2016}} - 3^{96^{97}})$ chia hết cho 2 nên A là số tự nhiên.

$(17^{2014^{2016}} - 3^{96^{97}})$ có chữ số tận cùng là 0 nên A chia hết cho 5

Câu 6. (HSG 7 Huyện Vĩnh Lộc, Tỉnh Thanh Hóa, năm học 2022 – 2023)

Cho hai số nguyên tố khác nhau p và q . Chứng minh rằng: $p^{q-1} + q^{p-1} - 1$ chia hết cho $p.q$

Lời giải

Vì p, q nguyên tố cùng nhau và p khác q nên: $(p, q) = 1$.

Áp dụng định lí Fermat ta có: $p^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$ và $q^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

$\Rightarrow (p^{q-1} - 1) : q$ và $(q^{p-1} - 1) : p$

mặt khác $p^{q-1} : p$ và $q^{p-1} : q$

nên ta có: $(p^{q-1} + q^{p-1} - 1) : q$; $(p^{q-1} + q^{p-1} - 1) : p$

mà $(p, q) = 1$

nên: $(p^{q-1} + q^{p-1} - 1) : (p.q)$.

Câu 7. (HSG 7 huyện Nông Cống 2022 - 2023)

Viết 6 số tự nhiên vào 6 mặt của một con xúc xắc. Chứng tỏ rằng khi ta gieo xúc xắc xuống mặt bàn thì trong 5 mặt có thể nhìn thấy bao giờ cũng tìm được một hay nhiều mặt để tổng các số trên mặt đó chia hết cho 5.

Lời giải

Gọi các số trên mặt là $a_1; a_2; a_3; a_4; a_5$.

Xét 5 tổng:

$$S_1 = a_1;$$

$$S_2 = a_1 + a_2;$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3;$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4;$$

$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5.$$

+ Nếu một trong 5 tổng đó chia hết cho 5 thì bài toán đã giải xong.

+ Nếu không có tổng nào chia hết cho 5 thì tồn tại hai tổng có cùng số dư khi chia cho 5

(vì có 5 tổng mà có 4 số dư khác 0 là 1; 2; 3; 4). Nên hiệu của hai tổng đó chia hết cho 5

+ Gọi 2 tổng đó là S_m và S_n ($1 \leq m < n \leq 5$) thì $S_m - S_n : 5$

Hay $(a_1 + a_2 + \dots + a_m) - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m : 5$.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Câu 8. (HSG 7 huyện Cửa Lò, tỉnh Nghệ An, 2022 - 2023)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh $(p^2 - 1) : 24$.

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ và p không chia hết cho 3.

+ Ta chứng minh $(p^2 - 1) : 3$. Thật vậy, vì p không chia hết cho 3 nên có hai trường hợp:

- Nếu $p \equiv 1 \pmod{3}$ thì $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$
 $\Rightarrow (p^2 - 1) : 3$.
- Nếu $p \equiv 2 \pmod{3}$ thì $p^2 \equiv 4 \pmod{3} \equiv 1 \pmod{3}$
 $\Rightarrow (p^2 - 1) : 3$.

+ Ta chứng minh $(p^2 - 1) : 8$. Thật vậy, vì p là số lẻ nên có các trường hợp:

- Nếu $p \equiv 1 \pmod{8}$ thì $p^2 \equiv 1 \pmod{8}$
 $\Rightarrow (p^2 - 1) : 8$.
- Nếu $p \equiv 3 \pmod{8}$ thì $p^2 \equiv 9 \pmod{8} \equiv 1 \pmod{8}$
 $\Rightarrow (p^2 - 1) : 8$.
- Nếu $p \equiv 5 \pmod{8}$ thì $p^2 \equiv 25 \pmod{8} \equiv 1 \pmod{8}$
 $\Rightarrow (p^2 - 1) : 8$.
- Nếu $p \equiv 7 \pmod{8}$ thì $p^2 \equiv 49 \pmod{8} \equiv 1 \pmod{8}$
 $\Rightarrow (p^2 - 1) : 8$.

Như vậy: vì 3 và 8 nguyên tố cùng nhau nên $(p^2 - 1) : (3 \cdot 8)$ hay $(p^2 - 1) : 24$.

Câu 9. (HSG 7 huyện Bá Thước, 2022 - 2023)

Cho x, y là các số nguyên thỏa mãn $\frac{x^2 - 1}{2} = \frac{y^2 - 1}{3}$.

Chứng minh rằng $x^2 - y^2$ chia hết cho 40.

Lời giải

Vì x^2 chia cho 8 dư 0;1;4 nên $3x^2$ chia cho 8 dư 0;3;4.

Vì y^2 chia cho 8 dư 0;1;4 nên $2y^2$ chia cho 8 dư 0;2;4.

Từ giả thiết $\frac{x^2 - 1}{2} = \frac{y^2 - 1}{3}$

$$\Rightarrow 3x^2 - 2y^2 = 1$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 2y^2 \text{ chia cho } 8 \text{ dư } 1.$$

Do đó x^2 chia cho 8 dư 1 và y^2 chia cho 8 dư 1. Nên $x^2 - y^2$ chia hết cho 8 ; (1)

Vì x^2 chia hết cho 5 dư 0;1;4 nên $3x^2$ chia cho 5 dư 0;3;2.

Vì y^2 chia hết cho 5 dư 0;1;4 nên $2y^2$ chia cho 5 dư 0;2;3.

Mặt khác từ $3x^2 - 2y^2 = 1$ nên $3x^2 - 2y^2$ chia cho 5 dư 1.

Do đó x^2 chia cho 5 dư 1 và y^2 chia cho 5 dư 1. Nên $x^2 - y^2$ chia hết cho 5 ; (2)

Vì 5 và 8 nguyên tố cùng nhau nên $x^2 - y^2$ chia hết cho 40.

Câu 10. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn, trường Đào Duy Từ 2018-2019).

Chứng tỏ rằng $M = 75.(4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$ chia hết cho 10^2

Lời giải.

$$\text{Ta có: } M = 75.(4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$$

$$= 75.(4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4) + (75 + 25)$$

$$= 75.(4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4) + 100$$

$$\text{Ta có: } 75 \equiv -25 \pmod{100}$$

$$\Rightarrow 75.(4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4) \equiv -25(4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4) \pmod{100}$$

$$\text{Lại có: } -25.(4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4) = -25.4.(4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4 + 1)$$

$$= -100(4^{2017} + 4^{2016} + \dots + 4 + 1) : 100$$

$$\Rightarrow 75.(4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4) \equiv 0 \pmod{100}$$

$$\text{Hay } 75.(4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4) : 100$$

$$\text{Do đó } [75.(4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4) + 100] : 100$$

Vậy $M = 75.(4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$ chia hết cho 10^2 .

Câu 11. (HSG 7 trường THCS Hiền Quan 2018-2019).

Chứng minh rằng $7^6 + 7^5 - 7^4$ chia hết cho 55.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } 7^2 = 49$$

$$\text{Mà } 49 \equiv -1 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow 7^2 \equiv -1 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow 7^4 = (7^2)^2 \equiv (-1)^2 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow 7^4 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$\text{Lại có } 7^5 = 7^4.7 \equiv 1.7 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow 7^5 \equiv 7 \pmod{5}$$

$$\text{Và } 7^6 = 7^4 \cdot 7^2 \equiv 1 \cdot 49 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow 7^6 \equiv -1 \pmod{5}$$

$$\text{Nên } 7^6 + 7^5 - 7^4 \equiv (-1 + 7 - 1) \pmod{5}$$

$$\Rightarrow (7^6 + 7^5 - 7^4) \equiv 0 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow (7^6 + 7^5 - 7^4) : 5$$

$$\text{Vì } 49 \equiv 5 \pmod{11} \Rightarrow 7^2 \equiv 5 \pmod{11}$$

$$\Rightarrow 7^4 = (7^2)^2 \equiv 5^2 \pmod{11}$$

$$\Rightarrow 7^4 \equiv 3 \pmod{11}$$

$$\text{Lại có } 7^5 = 7^4 \cdot 7 \equiv 3 \cdot 7 \pmod{11}$$

$$\Rightarrow 7^5 \equiv -1 \pmod{11}$$

$$\text{Và } 7^6 = (7^2)^3 \equiv 5^3 \pmod{11}$$

$$\Rightarrow 7^6 \equiv 4 \pmod{11}$$

$$\text{Nên } (7^6 + 7^5 - 7^4) \equiv (4 - 1 - 3) \pmod{11}$$

$$\Rightarrow (7^6 + 7^5 - 7^4) \equiv 0 \pmod{11}$$

$$\Rightarrow (7^6 + 7^5 - 7^4) : 11$$

Do 5 và 11 là hai số nguyên tố cùng nhau nên $7^6 + 7^5 - 7^4$ chia hết cho 55.

Câu 12. (HSG 7 trường Lê Hồng Phong 2018-2019).

Chứng minh rằng: $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ chia hết cho 31.

Lời giải.

$$\text{Đặt } 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100} = A$$

$$\Rightarrow 2A = 2(2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100}) = 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{100} + 2^{101}$$

$$\Rightarrow 2A - A = (2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{100} + 2^{101}) - (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{99} + 2^{100})$$

$$\Rightarrow A = 2^{101} - 2$$

$$\text{Vì } 2^5 = 32 \equiv 1 \pmod{31}$$

$$\Rightarrow 2^{100} = (2^5)^{20} \equiv 1^{20} \pmod{31}$$

$$\Rightarrow 2^{100} \equiv 1 \pmod{31}$$

$$\text{Nên } 2^{101} = 2^{100} \cdot 2 \equiv 1 \cdot 2 \pmod{31}$$

$$\Rightarrow 2^{101} \equiv 2 \pmod{31}$$

$$\text{Do đó } (2^{101} - 2) \equiv (2 - 2) \pmod{31}$$

$$\Rightarrow A \equiv 0 \pmod{31}$$

Vậy $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ chia hết cho 31.

Câu 13. (HSG 7 huyện Việt Yên 2018-2019).

Cho $S = 17 + 17^2 + 17^3 + \dots + 17^{18}$. Chứng tỏ rằng S chia hết cho 307.

Lời giải.

$$\text{Ta có } S = 17 + 17^2 + 17^3 + \dots + 17^{18}$$

$$\Rightarrow 17S = 17 \cdot (17 + 17^2 + 17^3 + \dots + 17^{18}) = 17^2 + 17^3 + 17^4 + \dots + 17^{19}$$

$$\Rightarrow 17S - S = (17^2 + 17^3 + 17^4 + \dots + 17^{19}) - (17 + 17^2 + 17^3 + \dots + 17^{18})$$

$$\Rightarrow 16S = 17^{19} - 17$$

$$\text{Vì } 17^3 = 17 \cdot 289 \equiv 17 \cdot (-18) \pmod{307}$$

$$\Rightarrow 17^3 \equiv 1 \pmod{307}$$

$$\Rightarrow 17^{19} = 17 \cdot (17^3)^6 \equiv 17 \pmod{307}$$

$$\Rightarrow (17^{19} - 17) \equiv 0 \pmod{307}$$

$$\text{Hay } 16S = (17^{19} - 17) : 307$$

Mà 16 và 307 là hai số nguyên tố cùng nhau nên S chia hết cho 307.

Câu 14. (HSG 7 huyện Vĩnh Yên năm 2018 - 2019).

Chứng minh rằng: $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100}$ chia hết cho 120 (với $x \in \mathbb{N}$).

Lời giải.

$$\text{Ta có: } 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100} = 3^x \cdot (3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100})$$

$$\text{Đặt } E = 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100}$$

$$\Rightarrow 3E = 3 \cdot (3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100}) = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{101}$$

$$\Rightarrow 3E - E = (3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{101}) - (3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100}) = 3^{101} - 3$$

$$\Rightarrow 2E = 3^{101} - 3$$

$$\text{Lại có: } 3^5 = 243 \equiv 3 \pmod{240}$$

$$\Rightarrow 3^{101} = (3^5)^{20} \cdot 3 \equiv 3^{20} \cdot 3 \pmod{240}$$

$$\Rightarrow 3^{101} \equiv 3^{21} \pmod{240}$$

$$\text{Vì } 3^{21} = (3^5)^4 \cdot 3 \equiv 3^4 \cdot 3 \pmod{240}$$

$$\Rightarrow 3^{21} \equiv 3^5 \pmod{240}$$

$$\Rightarrow 3^{21} \equiv 3 \pmod{240}$$

$$\text{Do đó } 3^{101} \equiv 3 \pmod{240}$$

$$\Rightarrow (3^{101} - 3) : 240$$

$$\Rightarrow 3^{101} - 3 = 240k \text{ (với } k \in \mathbb{N} \text{)}$$

$$\Rightarrow 2E = 3^{101} - 3 = 240k$$

$$\Rightarrow E = 120k : 120 \text{ (với } k \in \mathbb{N} \text{)}$$

$$\text{Vậy } 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100} = 3^x \cdot (3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100}) : 120$$

Câu 15. (HSG 7 huyện Văn Bàn 2022 - 2023)

Cho bốn số tự nhiên phân biệt $a > b > c > d$.

Chứng minh rằng: $P = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ chia hết cho 12.

Lời giải

Chia bốn số phân biệt a, b, c, d cho 3 luôn có hai phép chia có cùng số dư.

Suy ra hiệu hai số bị chia đó chia hết cho 3

\Rightarrow tồn tại hiệu hai số trong bốn số a, b, c, d chia hết cho 3.

Do vậy P chia hết cho 3; (1)

Trong bốn số a, b, c, d nếu có hai số có cùng số dư khi chia cho 4 thì P chia hết cho 4; trái lại, khi chia bốn số đó cho 4 có đủ bốn trường hợp về số dư là 0;1;2;3.

Suy ra trong bốn số a, b, c, d có hai số chẵn, hai số lẻ, giả sử a, c chẵn và b, d lẻ

$$\Rightarrow (a-c) : 2 \text{ và } (b-d) : 2$$

Do vậy P chia hết cho 4 ; (2)

Từ (1), (2) và $(3, 4) = 1 \Rightarrow P : 12$.

Dạng 2. SỬ DỤNG ĐỒNG DƯ THỨC TÌM SỐ DƯ

Câu 1. (HSG 7 trường Hiền Quan 2015 - 2016)

Tìm số dư khi chia 2^{2011} cho 31.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2^5 = 32 \equiv 1 \pmod{31}$$

$$\Rightarrow (2^5)^{402} \equiv 1 \pmod{31}$$

$$\Rightarrow 2^{2011} \equiv 2 \pmod{31}.$$

Vậy số dư khi chia 2^{2011} cho 31 là 2.

Câu 2. (HSG 7 huyện Vĩnh Tường 2015 - 2016)

Tìm số dư khi chia 3^{41} cho 11.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 3^{10} \equiv 1 \pmod{11}$$

$$\Rightarrow 3^{41} = 3 \cdot (3^{10})^4 \equiv 3 \cdot 1^4 = 3 \pmod{11}$$

Vậy số dư khi chia 3^{41} cho 11 là 3.

Câu 3.

a) Tìm số dư trong phép chia của số $A = 3^{2005} + 4^{2005}$ khi chia cho 11.

b) Tìm số dư trong phép chia của số $B = 2016^{2018} + 2$ khi chia cho 5.

Lời giải

a) Ta có: $3^5 = 243 \equiv 1 \pmod{11}$

$$\Rightarrow (3^5)^{401} = 3^{2005} \equiv 1 \pmod{11} \quad (1)$$

Mặt khác: $4^5 = 1024 \equiv 1 \pmod{11}$

$$\Rightarrow (4^5)^{401} = 4^{2005} \equiv 1 \pmod{11} \quad (2)$$

Từ (1) và (2): $(3^{2005} + 4^{2005}) \equiv (1+1) \pmod{11}$

Vậy số dư của $A = 3^{2005} + 4^{2005}$ khi chia cho 11 là 2.

b) Ta có: $2016 \equiv 1 \pmod{5}$ do đó $2016^{2018} \equiv 1 \pmod{5}$

$$\Rightarrow 2016^{2018} + 2 \equiv 1 + 2 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow 2016^{2018} + 2 \equiv 3 \pmod{5}$$

Vậy số dư trong phép chia của số $B = 2016^{2018} + 2$ khi chia cho 5 là 3.

Dạng 3. TÌM ĐIỀU KIỆN CỦA BIẾN ĐỂ CHIA HẾT

Câu 1. (HSG 7 huyện Trục Ninh, 2018-2019)

Tìm các số tự nhiên a, b sao cho: $(2008a + 3b + 1)(2008^a + 2008a + b) = 225$

Lời giải

Ta có: $(2008a + 3b + 1)(2008^a + 2008a + b) = 225$

$\Rightarrow 2008a + 3b + 1$ và $2008^a + 2008a + b$ là hai số lẻ.

Nếu $a \neq 0 \Rightarrow 2008^a + 2008a$ là số chẵn.

Để $2008^a + 2008a + b$ lẻ thì b lẻ

Nếu b lẻ $\Rightarrow 3b + 1$ chẵn,

$\Rightarrow 2008a + 3b + 1$ chẵn (không thỏa mãn).

Do đó $a = 0$

Với $a = 0 \Rightarrow (3b + 1)(b + 1) = 225$

Vì $b \in \mathbb{N} \Rightarrow (3b + 1)(b + 1) = 3.75 = 5.45 = 9.25$

$3b + 1$ không chia hết cho 3 và $3b + 1 > b + 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3b + 1 = 25 \\ b + 1 = 9 \end{cases} \Rightarrow b = 8$$

Vậy $a = 0, b = 8$.

Câu 2. Tìm số tự nhiên n sao cho: $(2^{3n+4} + 3^{2n+1}) : 19$

Lời giải

Ta có: $2^{3n+4} + 3^{2n+1} = 16.8^n + 3.9^n$

Vì $16 \equiv -3 \pmod{19}$

$$\Rightarrow 16.8^n \equiv -3.8^n \pmod{19}$$

Mà $(2^{3n+4} + 3^{2n+1}) : 19$

$$\Rightarrow (-3 \cdot 8^n + 3 \cdot 9^n) \equiv 0 \pmod{19}$$

$$\Rightarrow (9^n - 8^n) \equiv 0 \pmod{19}$$

$$\Rightarrow 9^n \equiv 8^n \pmod{19}$$

$\Rightarrow n = 0$ do $8 \equiv 9 \pmod{19}$ là vô lý.

Vậy $n = 0$.

Câu 3.

Tìm số tự nhiên n có bốn chữ số sao cho chia n cho 131 thì dư 112 và chia n cho 132 thì dư 98

Lời giải

Ta có: $n \equiv 98 \pmod{132}$

$$\Rightarrow n = 132k + 98 \text{ với } k \in \mathbb{N} \quad (1)$$

$$\Rightarrow 132k + 98 \equiv 112 \pmod{131}$$

$$\Rightarrow k + 98 + 33 \equiv 112 + 33 \pmod{131}$$

$$\Rightarrow k + 131 \equiv 145 \pmod{131}$$

$$\Rightarrow k \equiv 14 \pmod{131}$$

$$\Rightarrow k = 131m + 14 \text{ với } m \in \mathbb{N} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow n = 132(131m + 14) + 98 = 131 \cdot 132m + 1946$

$\Rightarrow n = 1946$.

Dạng 4. SỬ DỤNG ĐỒNG DƯ TÌM CHỮ SỐ TẬN DÙNG

Câu 1. (HSG 7 TP Bắc Ninh, năm học 2022 - 2023)

Tim chữ số tận cùng của C biết $C = 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ với ($n \in \mathbb{N}$).

Lời giải

Với $n = 0$, khi đó $C = 3^2 - 2^2 + 1 - 1 = 5$, C có chữ số tận cùng là 5.

Với $n \geq 1$. Ta có:

$$C = (3^{n+2} + 3^n) - (2^{n+2} + 2^n) = 10 \cdot 3^n - 10 \cdot 2^{n-1} = 10 \cdot (3^n - 2^{n-1}): 10$$

nên C có chữ số tận cùng là 0.

Vậy $n = 0$, C có chữ số tận cùng là 5.

$n \geq 1$, C có chữ số tận cùng là 0.

Câu 2. (HSG 7 huyện Thanh Chương năm 2018 - 2019).

Cho $N = 0,7 \cdot (2007^{2009} - 2013^{1999})$. Chứng minh rằng N là một số nguyên.

Lời giải.

Ta có: $2007 \equiv 7 \pmod{10}$

$$\Rightarrow 2007^{2009} \equiv 7^{2009} \pmod{10}$$

Mà $7^2 = 49 \equiv -1 \pmod{10}$

$$\Rightarrow 7^{2009} = (7^2)^{1004} \cdot 7 \equiv 1 \cdot 7 \pmod{10}$$

$$\Rightarrow 7^{2009} \equiv 7 \pmod{10}$$

Nên $2007^{2009} \equiv 7 \pmod{10}$

Lại có: $2013 \equiv 3 \pmod{10}$

$$\Rightarrow 2013^{1999} \equiv 3^{1999} \pmod{10}$$

Mà $3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{10}$

$$\Rightarrow 3^{1999} = (3^4)^{499} \cdot 3^3 \equiv 27 \pmod{10}$$

$$\Rightarrow 3^{1999} \equiv 7 \pmod{10}$$

Nên $2013^{1999} \equiv 7 \pmod{10}$

Do đó $(2007^{2009} - 2013^{1999}) \equiv 0 \pmod{10}$

$\Rightarrow 2007^{2009} - 2013^{1999}$ có chữ số tận cùng là 0

Vậy $N = 0,7 \cdot (2007^{2009} - 2013^{1999})$ là số nguyên.

Câu 3. a) Hãy tìm chữ số tận cùng của $9^{9^{10}}$.

b) Hãy tìm hai chữ số tận cùng của 3^{1000} .

c) Hãy tìm ba chữ số tận cùng của $2^{5^{12}}$.

Lời giải

a) Ta có $9^{2n+1} = 9 \cdot 81^n \equiv 9 \pmod{10}$

mà 9^{10} là số lẻ

Nên $9^{9^{10}} \equiv 9 \pmod{10}$

Vậy chữ số tận cùng của $9^{9^{10}}$ là 9.

b) Ta có: $3^4 = 81 \equiv -19 \pmod{100}$

$$\Rightarrow 3^8 \equiv (-19)^2 \pmod{100}$$

Mà $(-19)^2 = 361 \equiv 61 \pmod{100}$

$$\Rightarrow 3^8 \equiv 61 \pmod{100}$$

Do đó $3^{10} = 3^8 \cdot 9 \equiv 61 \cdot 9 = 549 \equiv 49 \pmod{100}$

$$\Rightarrow 3^{20} \equiv 49^2 \equiv 01 \pmod{100} \text{ do } 49^2 = 2401$$

$$\Rightarrow 3^{1000} = (3^{20})^{50} \equiv 01 \pmod{100}$$

Vậy hai chữ số tận cùng của 3^{1000} là 01.

c) + Ta có: $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Nếu $a:25$ thì $(a+b)^5 \equiv b^5 \pmod{125}$

+ Ta có: $2^{10} = 1024 \equiv -1 \pmod{25}$ nên $2^{10} = 25k - 1$ với $k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow 2^{50} = (2^{10})^5 = (25k - 1)^5 \equiv -1 \pmod{125}$$

$$\Rightarrow 2^{512} = (2^{50})^{10} \cdot 2^{12} \equiv (-1)^{10} \cdot 2^{12} \equiv 2^{12} \pmod{125}$$

$$\text{Do } 2^{12} = 2^{10} \cdot 2^2 = 1024 \cdot 4 \equiv 96 \pmod{25}$$

$$\Rightarrow 2^{512} \equiv 96 \pmod{125} \text{ hay } 2^{512} = 125m + 96 \text{ với } m \in \mathbb{N}$$

$$\text{Lại có: } 2^{512} = (2^4)^{128} = 16^{128} : 8 ; 96 : 8$$

$$\Rightarrow m : 8 \text{ nên } m = 8n \text{ với } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Khi đó } 2^{512} = 125 \cdot 8n + 96 = 1000n + 96$$

Vậy ba chữ số tận cùng của 2^{512} là 096.

Dạng 5. SỬ DỤNG ĐỒNG DƯ TRONG BÀI TOÁN VỀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Câu 1. (HSG 7 Huyện Vĩnh Lộc, Tỉnh Thanh Hóa, năm học 2022 – 2023)

Cho $f(x)$ là đa thức hệ số nguyên và thỏa mãn $f(0) = 0$ và $f(1) = 2$. Chứng minh rằng $f(7)$ không thể là số chính phương.

Lời giải

Vì $f(0) = 0$ và $f(1) = 2$ nên $f(x)$ có dạng:

$$f(x) = 2 + x(x-1) \cdot g(x) \text{ trong đó } g(x) \text{ là đa thức với hệ số nguyên.}$$

Ta có $f(7) = 2 + 42 \cdot g(7) \equiv 2 \pmod{3}$ nên $f(7)$ không thể là số chính phương.

Câu 2. (HSG 7 Huyện Hiệp Hòa, năm học 2022 - 2023)

Cho p là tích của 2023 số nguyên tố đầu tiên. Chứng minh rằng $p-1$ và $p+1$ không là số chính phương.

Lời giải

Nhận xét: Một số chính phương khi chia cho 3 và 4 thì chỉ có thể có số dư là 0 hoặc 1

+) Từ giả thiết, suy ra p chia hết cho 2; 3 nhưng không chia hết cho 4

Như vậy, vì $p : 3$ suy ra $p-1$ chia cho 3 dư 2 (mâu thuẫn)

$\Rightarrow p-1$ không là số chính phương.

+) Vì $p : 2$ và p không chia hết cho 4

$\Rightarrow p$ chia cho 4 dư 2

$\Rightarrow p+1$ chia cho 4 dư 3 (mâu thuẫn)

nên $p+1$ cũng không là số chính phương.

Vậy $p-1$, $p+1$ không là số chính phương.

Câu 3. (HSG T7 Huyện Quảng Xương, năm học 2022 - 2023)

Cho $A = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$. Chứng tỏ rằng A không phải là số chính phương.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 111a + 111b + 111c = 3 \cdot 37 \cdot (a + b + c)$$

Vì số chính phương phải chứa thừa số nguyên tố với số mũ chẵn.

$$\text{Do đó } a + b + c = 3 \cdot 37 \cdot k^2 \text{ (} k \in \mathbb{N} \text{) .}$$

Điều này vô lí vì: $3 \leq a + b + c \leq 27$

Vậy A không là số chính phương.

Câu 4. (HSG 7 huyện Quan Sơn 2022 - 2023)

Tìm tất cả các số có hai chữ số \overline{ab} biết rằng $2\overline{ab} + 1$ và $3\overline{ab} + 1$ đều là số chính phương.

Lời giải

Giả sử $2\overline{ab} + 1 = m^2$ và $3\overline{ab} + 1 = n^2$ ($m, n \in \mathbb{N}^*$)

Nếu \overline{ab} chia cho 5 dư 1 thì $2\overline{ab} + 1$ chia cho 5 dư 3. Điều này là vô lí.

Nếu \overline{ab} chia cho 5 dư 2 thì $3\overline{ab} + 1$ chia cho 5 dư 2. Điều này cũng vô lí.

Nếu \overline{ab} chia cho 5 dư 3 thì $2\overline{ab} + 1$ chia cho 5 dư 2. Đây là điều vô lí.

Nếu \overline{ab} chia cho 5 dư 4 thì $3\overline{ab} + 1$ chia cho 5 dư 3. Điều này là vô lí.

Vậy $\overline{ab} : 5$

Mặt khác do m lẻ nên m^2 chia cho 8 dư 1 suy ra $\overline{ab} : 4$

Nếu \overline{ab} chia cho 8 dư 4 thì $3\overline{ab} + 1$ chia cho 8 dư 5. Điều này là vô lí.

Vậy $\overline{ab} : 8$

Mà $(5; 8) = 1$ nên $\overline{ab} : 40$

Suy ra $\overline{ab} = 40$ hoặc $\overline{ab} = 80$

Thử lại trực tiếp ta có $\overline{ab} = 40$ thỏa mãn.

Câu 5. Chứng minh rằng: $A = 19^k + 5^k + 1995^k + 1996^k$ (với k chẵn) không thể là số chính phương.

Lời giải

Với k chẵn ta có:

$$19^k \equiv (-1)^k \pmod{4} \Rightarrow 19^k \equiv 1 \pmod{4}$$

$$5^k \equiv 1^k \pmod{4} \Rightarrow 5^k \equiv 1 \pmod{4}$$

$$1995^k \equiv (-1)^k \pmod{4} \Rightarrow 1995^k \equiv 1 \pmod{4}$$

$$1996^k \equiv 0 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow A = 19^k + 5^k + 1995^k + 1996^k \equiv 3 \pmod{4} \text{ hay } A \text{ chia 3 dư 4.}$$

Vậy $A = 19^k + 5^k + 1995^k + 1996^k$ (với k chẵn) không thể là số chính phương.

Câu 6. Tìm tất cả các số tự nhiên x, y để $2^x + 5^y$ là số chính phương.

Lời giải

Giả sử ($k \in \mathbb{N}$)

Nếu $x = 0$ thì $1 + 5^y = k^2$ do đó k chẵn

$$\Rightarrow k^2 : 4; 1 + 5^y \text{ chia 4 dư 2.}$$

Vậy $x \neq 0$

Ta có $2^x + 5^y = k^2 \Rightarrow k$ lẻ và k không chia hết cho 5.

+ TH1: với $y = 0$ thì $2^x + 1 = k^2 = (2n + 1)^2$ (vì k lẻ nên $k = 2n + 1, n \in \mathbb{N}$)

$$\Rightarrow 2^x = 4n(n + 1) \Rightarrow n = 1.$$

Khi đó $x = 3; y = 0$ (thỏa mãn)

Thử lại: $2^x + 5^y = 2^3 + 5^0 = 9$ là số chính phương.

+ TH2: với $y \neq 0$ và k không chia hết cho 5

$$\Rightarrow k^2 \equiv \pm 1 \pmod{5}$$

$$\text{Mà } 2^x + 5^y = k^2$$

$$\Rightarrow 2^x \equiv \pm 1 \pmod{5}$$

$\Rightarrow x$ chẵn.

$$\text{Đặt } x = 2x_1 \ (x_1 \in \mathbb{N}), \text{ ta có: } 5^y = (k + 2^{x_1})(k - 2^{x_1})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k + 2^{x_1} = 5^{y_1} \\ k - 2^{x_1} = 5^{y_2} \end{cases} \text{ với } y_1 + y_2 = y; y_1 > y_2; y_1, y_2 \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow 2^{x_1+1} = 5^{y_1} - 5^{y_2} = 5^{y_2}(5^{y_1-y_2} - 1)$$

$$\Rightarrow 5^{y_2} = 1 \Rightarrow y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = y$$

$$\text{Khi đó: } 2^{x_1+1} = 5^y - 1$$

Nếu $y = 2t \ (t \in \mathbb{N})$ thì $2^{x_1+1} = 5^{2t} - 1 = 25^t - 1$ chia hết cho 3 (vô lý).

Do đó y lẻ.

$$\Rightarrow 2^{x_1+1} = 5^y - 1 = 4(5^{y-1} + 5^{y-2} + \dots + 5 + 1)$$

Nếu $y > 1$ thì $5^{y-1} + 5^{y-2} + \dots + 5 + 1$ lẻ (vô lý)

$$\text{Nếu } y = 1 \Rightarrow x_1 = 1 \text{ khi đó } x = 2; y = 1$$

Thử lại: $2^x + 5^y = 2^2 + 5^1 = 9$ là số chính phương.

Vậy $x = 2; y = 1$ hoặc $x = 3; y = 0$

Dạng 6. SỬ DỤNG ĐỒNG DƯ TRONG BÀI TOÁN VỀ SỐ NGUYÊN TỐ HỢP SỐ

Câu 1. (HSG 7 Quận Hà Đông 2022 - 2023)

Cho $A = 2^{2^{10n+1}} + 19$. Chứng minh rằng A là hợp số.

Lời giải

Theo định lí Fermat bé, do 11 là số nguyên tố nên ta có $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$

$$\Rightarrow 2^{10n} \equiv 1 \pmod{11}$$

$$\Rightarrow 2^{10n+1} = 2 \cdot 2^{10n} \equiv 2 \pmod{11}$$

$$\Rightarrow 2^{10n+1} = 22k + 2 \ (k \in \mathbb{N})$$

Do 23 là số nguyên tố nên $2^{22} \equiv 1 \pmod{23}$

$$\Rightarrow 2^{2^{10n+1}} = 2^{22k+2} = 4 \cdot 2^{22k} \equiv 4 \pmod{23}$$

$$\Rightarrow \left(2^{2^{10n+1}} + 19 \right) \equiv (4 + 19) \equiv 0 \pmod{23}$$

Nên $A \vdots 23$.

Mà $A > 23$ với $\forall n \geq 1$

nên A là hợp số.

Câu 2. (HSG 7 huyện Bình Xuyên, tỉnh Vĩnh Phúc 2022 - 2023)

Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để số $2^{2023} + 23n$ là một bội số của 31.

Lời giải

Ta có: $2^5 = 32 \equiv 1 \pmod{31}$ và $2023 = 5 \cdot 404 + 3$.

Do đó: $2^{2022} = (2^5)^{404} \cdot 2 \equiv 8 \pmod{31}$.

Suy ra $(2^{2022} + 23 \cdot n) \equiv (8 + 23 \cdot n) \pmod{31}$.

Vì n là số tự nhiên nhỏ nhất thỏa mãn $(2^{2023} + 23n) : 31$

$$\Rightarrow 8 + 23n = 31.$$

$$\Rightarrow n = 1.$$

Vậy $n = 1$ là số tự nhiên cần tìm.

Câu 3. (HSG 7 huyện Nông Cống 2022 - 2023)

Cho số nguyên n ($n > 1$) thỏa mãn $n^2 + 4$ và $n^2 + 16$ là các số nguyên tố. Chứng minh n chia hết cho 5.

Lời giải

Với mọi số nguyên n thì n^2 chia cho 5 dư 0; 1 hoặc 4.

+ Nếu n^2 chia 5 dư 1 thì $n^2 = 5k + 1$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

$$\Rightarrow n^2 + 4 = 5k + 1 + 4 = (5k + 5) : 5.$$

Do đó nên $n^2 + 4$ không là số nguyên tố. Loại trừ trường hợp này.

+ Nếu n^2 chia 5 dư 4 thì $n^2 = 5k + 4$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

$$\Rightarrow n^2 + 16 = (5k + 20) : 5.$$

Do đó $n^2 + 16$ không là số nguyên tố. Loại trừ trường hợp này.

Vậy $n^2 : 5$, suy ra $n : 5$.

Câu 4. (HSG 7 huyện Hoàng Hóa năm 2018 - 2019).

Cho p, q là các số nguyên tố lớn hơn 3 và thỏa mãn $p = q + 2$. Chứng minh: $(p + q) : 12$.

Lời giải.

Cách 1.

Vì $q > 3$, q là số nguyên tố nên q không chia hết cho 3

$$\Rightarrow q \equiv 1 \pmod{3} \text{ hoặc } q \equiv -1 \pmod{3}$$

Nếu $q \equiv 1 \pmod{3}$

$$\Rightarrow p \equiv 2 + 1 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow p \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow p : 3$$

Mà $p > 3$

$\Rightarrow p$ là hợp số (mâu thuẫn với đề bài p là số nguyên tố lớn hơn 3)

$$\text{Nên } q \equiv -1 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow p \equiv 2 + (-1) \pmod{3}$$

$$\Rightarrow p \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\text{Khi đó } p + q \equiv 1 - 1 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow p + q \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\text{Hay } (p + q) : 3$$

Vì $q > 3$, q là số nguyên tố nên q là số lẻ

$\Rightarrow q$ là số chia 4 dư 1 hoặc dư 3

$$\Rightarrow q \equiv 1 \pmod{4} \text{ hoặc } q \equiv -1 \pmod{4}$$

$$+ \text{ Nếu } q \equiv 1 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow p \equiv 2 + 1 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow p \equiv 3 \pmod{4}$$

$$\text{Khi đó } p + q \equiv 3 + 1 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow p + q \equiv 0 \pmod{4}$$

$$+ \text{ Nếu } q \equiv -1 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow p \equiv 2 + (-1) \pmod{4}$$

$$\Rightarrow p \equiv 1 \pmod{4}$$

$$\text{Khi đó } p + q \equiv 1 - 1 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow p + q \equiv 0 \pmod{4}$$

$$\text{Do vậy } (p + q) : 4$$

Vì 3 và 4 là hai số nguyên tố cùng nhau nên $(p + q) : 12$

Cách 2.

Vì $q > 3$, q là số nguyên tố nên q là số lẻ và không chia hết cho 3

$\Rightarrow q$ chia cho 12 dư 1; dư 5; dư 7 hoặc dư 11

$$\Rightarrow q \equiv 1 \pmod{12} \text{ hoặc } q \equiv 5 \pmod{12} \text{ hoặc } q \equiv -5 \pmod{12} \text{ hoặc } q \equiv -1 \pmod{12}$$

$$+ \text{ Nếu } q \equiv 1 \pmod{12}$$

$$\Rightarrow p \equiv 2 + 1 \pmod{12}$$

$$\Rightarrow p \equiv 3 \pmod{12}$$

$$\Rightarrow p = 12k + 3 = 3(4k + 1) : 3 \text{ với } k \text{ là số tự nhiên}$$

Mà $p > 3$



CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS

$\Rightarrow p$ là hợp số (mâu thuẫn với đề bài p là số nguyên tố lớn hơn 3)

$\Rightarrow q \equiv 1 \pmod{12}$ (loại)

+ Nếu $q \equiv -1 \pmod{12}$

$\Rightarrow p \equiv 2 + (-1) \pmod{12}$

$\Rightarrow p \equiv 1 \pmod{12}$

Khi đó $p + q \equiv 1 - 1 \pmod{12}$

$\Rightarrow p + q \equiv 0 \pmod{12}$

Hay $(p + q) : 12$

- Nếu $q \equiv 5 \pmod{12}$

$\Rightarrow p \equiv 2 + 5 \pmod{12}$

$\Rightarrow p \equiv -5 \pmod{12}$

Khi đó $p + q \equiv -5 + 5 \pmod{12}$

$\Rightarrow p + q \equiv 0 \pmod{12}$ hay $(p + q) : 12$

- Nếu $q \equiv -5 \pmod{12}$

$\Rightarrow p \equiv 2 + (-5) \pmod{12}$

$\Rightarrow p \equiv -3 \pmod{12}$

$\Rightarrow p = 12m - 3 = 3(4m - 1) : 3$ với m là số tự nhiên, $m > 0$

Mà $p > 3 \Rightarrow p$ là hợp số (mâu thuẫn với đề bài p là số nguyên tố lớn hơn 3)

$\Rightarrow q \equiv 1 \pmod{12}$ (loại)

Vậy $(p + q) : 12$

Câu 5. (HSG 7 trường THCS Lý Tự Trọng 2018 - 2019)

Tìm các số nguyên tố p thỏa mãn $2^p + p^2$ là các số nguyên tố

Lời giải

Với $p = 2$ thì $2^p + p^2 = 4 + 4 = 8$ không là số nguyên tố

Với $p = 3$ thì $2^p + p^2 = 8 + 9 = 17$ là số nguyên tố

Với $p > 3$ thì p là số nguyên tố nên p lẻ nên $2^p = 2^{2k+1} \equiv 2 \pmod{3}$

Và $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$ nên $(2^p + p^2) : 3$

Mà $2^p + p^2 > 3$ nên $2^p + p^2$ là hợp số

Vậy với $p = 3$ thì $2^p + p^2$ là hợp số

Vậy với $p = 3$ thì $2^p + p^2$ là số nguyên tố.

Câu 6. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $p^2 + 14$ là số nguyên tố.

Lời giải

Ta xét hai trường hợp sau:

+ TH1: Với $p = 3 \Rightarrow p^2 + 14 = 3^2 + 14 = 23$ là số nguyên tố.

+ TH2: Với $p \neq 3 \Rightarrow p^2 \equiv 1 \pmod{3}$ mà $14 \equiv 2 \pmod{3}$

$\Rightarrow (p^2 + 14) : 3$ và có $p^2 + 14 > 3$

$\Rightarrow p^2 + 14$ không là số nguyên tố.

Vậy $p = 3$.

Câu 7. Cho $n \in \mathbb{N}^*$ chứng minh rằng: $19 \cdot 8^n + 17$ là hợp số.

Lời giải

Ta xét các trường hợp sau:

+ TH1: $n = 2k$

$\Rightarrow 19 \cdot 8^n + 17 \equiv 1 \cdot (-1)^{2k} + 2 = 3 \equiv 0 \pmod{3}$

$\Rightarrow (19 \cdot 8^n + 17) : 3$

Mà $19 \cdot 8^n + 17 > 3$ nên $19 \cdot 8^n + 17$ là hợp số

+ TH2: $n = 4k + 1$

Khi đó: $19 \cdot 8^n + 17 = 19 \cdot 8^{4k+1} + 17 = 19 \cdot 8 \cdot 64^{2k} + 17$

Mà $19 \equiv 6 \pmod{13}$; $64^{2k} = 4096^k \equiv 1^k \pmod{13}$; $17 \equiv 4 \pmod{13}$

$\Rightarrow 19 \cdot 8^n + 17 \equiv 6 \cdot 8 \cdot 1 + 4 \equiv 52 \equiv 0 \pmod{13}$

Mà $19 \cdot 8^n + 17 > 13$ nên $19 \cdot 8^n + 17$ là hợp số

+ TH3: $n = 4k + 3$

Khi đó: $19 \cdot 8^n + 17 = 19 \cdot 8^{4k+3} + 17 = 19 \cdot 8 \cdot 64^{2k+1} + 17$

Mà $19 \equiv -1 \pmod{5}$; $64^{2k+1} = (-1)^{2k+1} \equiv -1 \pmod{5}$; $17 \equiv 2 \pmod{5}$; $8 \equiv 3 \pmod{5}$

$\Rightarrow 19 \cdot 8^n + 17 \equiv (-1) \cdot 3 \cdot (-1) + 2 \equiv 5 \equiv 0 \pmod{5}$

Mà $19 \cdot 8^n + 17 > 5$ nên $19 \cdot 8^n + 17$ là hợp số

Vậy với $n \in \mathbb{N}^*$, $19 \cdot 8^n + 17$ là hợp số.

Dạng 7. SỬ DỤNG ĐỒNG DƯ TRONG BÀI TOÁN TÌM NGHIỆM NGUYÊN

Câu 1. (HSG 7 huyện Thường Xuân, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2 + x = 3^{2020 \cdot y} + 1$

Lời giải

+) Trường hợp $y < 0$, ta có:

$VP = x^2 + x = x(x+1)$ là số nguyên

$VT = 3^{2020 \cdot y} + 1$ không là số nguyên (vì $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ với $a \neq 0, n \in \mathbb{N}^*$)

\Rightarrow Trường hợp này loại.

+) Trường hợp $y = 0$, ta có: $x^2 + x = 3^{2020 \cdot 0} + 1$

$$\Rightarrow x(x+1) = 2 = 1 \cdot 2 = (-2)(-1)$$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x < x+1$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = -2$$

Với $x = 1$ thì $y = 0$

Với $x = -2$ thì $y = 0$

+) Trường hợp $y > 0$, ta có:

$VP = x^2 + x = x(x+1)$ là tích hai số nguyên liên tiếp

nên $x^2 + x$ chia hết cho 3 hoặc chia cho 3 dư 2.

$VT = 3^{2020 \cdot y} + 1$ chia cho 3 dư 1.

\Rightarrow Trường hợp này loại.

Vậy cặp số nguyên $(x; y)$ cần tìm là: $(1; 0); (-2; 0)$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Phú Ninh 2018-2019)

Tìm x, y thuộc \mathbb{Z} biết: $25 - y^2 = 8(x - 2015)^2$.

Lời giải.

Ta có: $25 - y^2 \leq 25$

$$\Rightarrow 8(x - 2015)^2 \leq 25$$

$$\Rightarrow 0 \leq (x - 2015)^2 < 4$$

Vì với số nguyên a bất kì thì $a \equiv 0 \pmod{3}$ hoặc $a \equiv 1 \pmod{3}$ hoặc $a \equiv -1 \pmod{3}$

$$\Rightarrow a^2 \equiv 0 \pmod{3} \text{ hoặc } a^2 \equiv 1^2 \pmod{3} \text{ hoặc } a^2 \equiv (-1)^2 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow a^2 \equiv 0 \pmod{3} \text{ hoặc } a^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

Nên số chính phương chỉ có thể chia hết cho 3 hoặc chia cho 3 dư 1

$$\Rightarrow (x - 2015)^2 \equiv 0 \pmod{3} \text{ hoặc } (x - 2015)^2 \equiv 1 \pmod{3} \text{ với } x \in \mathbb{Z}$$

+ Nếu $(x - 2015)^2 \equiv 1 \pmod{3}$

$$\Rightarrow 8 \cdot (x - 2015)^2 \equiv 8 \cdot 1 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow 8 \cdot (x - 2015)^2 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow y^2 = 25 - 8 \cdot (x - 2015)^2 \equiv 25 - 2 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow y^2 \equiv 2 \pmod{3} \text{ với } y \in \mathbb{Z}$$

(vô lí vì y^2 là số chính phương không chia hết cho 3 thì chia cho 3 dư 1)

+ Nếu $(x - 2015)^2 \equiv 0 \pmod{3}$

Mà $0 \leq (x - 2015)^2 < 4$; $(x - 2015)^2$ là số chính phương với $x \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow (x - 2015)^2 = 0 \Rightarrow x = 2015$$

khi đó $y = 5$ hoặc $y = -5$.

Vậy $x = 2015$; $y = 5$ hoặc $y = -5$

Câu 3. (HSG 7 trường Tôn Đức Thắng 2018-2019).

Tìm các số nguyên x, y biết $x^2 + 2x - 8y^2 = 41$.

Lời giải.

Ta có $x^2 + 2x - 8y^2 = 41$

$$\Rightarrow x^2 + 2x = 8y^2 + 41$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x = 4(2y^2 + 10) + 1$$

Vì $4(2y^2 + 10) + 1 \equiv 1 \pmod{4}$ với $y \in \mathbb{Z}$

Nên $x^2 + 2x \equiv 1 \pmod{4}$

$\Rightarrow x^2 + 2x$ là số lẻ mà $2x:2$ (với $x \in \mathbb{Z}$)

$\Rightarrow x^2$ là số lẻ $\Rightarrow x$ là số lẻ

$\Rightarrow x \equiv 1 \pmod{4}$ hoặc $x \equiv -1 \pmod{4}$

$\Rightarrow x^2 \equiv 1^2 \pmod{4}$ hoặc $x^2 \equiv (-1)^2 \pmod{4}$

$\Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod{4}$

+ Nếu $x \equiv -1 \pmod{4} \Rightarrow 2x \equiv -2 \pmod{4}$

$\Rightarrow x^2 + 2x \equiv 1 + (-2) \pmod{4}$

$\Rightarrow x^2 + 2x \equiv -1 \pmod{4}$ (vô lí vì $x^2 + 2x \equiv 1 \pmod{4}$)

+ Nếu $x \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow 2x \equiv 2 \pmod{4}$

$\Rightarrow x^2 + 2x \equiv 1 + 2 \pmod{4}$

$\Rightarrow x^2 + 2x \equiv 3 \pmod{4}$ (vô lí vì $x^2 + 2x \equiv 1 \pmod{4}$)

Vậy không có giá trị nguyên nào của x, y thỏa mãn đề bài.

Câu 4. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2015 - 2016)

Tìm số tự nhiên n và chữ số a biết rằng: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \overline{aaa}$

Lời giải

Ta có: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ và $\overline{aaa} = a.111 = a.3.37$

Do đó, từ $1 + 2 + 3 + \dots + n = \overline{aaa}$

$$\Rightarrow n(n+1) = 2.3.37a$$

$\Rightarrow n(n+1)$ chia hết cho số nguyên tố 37

$\Rightarrow n$ hoặc $n+1$ chia hết cho 37 (1)

Mặt khác: $\frac{n(n+1)}{2} = \overline{aaa} \leq 999$

$$\Rightarrow n(n+1) \leq 1998 \Rightarrow n < 45 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow n = 37$ hoặc $n + 1 = 37$

+ Với $n = 37 \Rightarrow \overline{aaa} = \frac{37 \cdot 38}{2} = 703$ (không thỏa mãn)

+ Với $n + 1 = 37 \Rightarrow \overline{aaa} = \frac{36 \cdot 37}{2} = 666$ (thỏa mãn)

Vậy $n = 36$ và $a = 6$.

Câu 5. Chứng minh rằng các phương trình sau không có nghiệm nguyên:

a) $x^2 - y^2 = 1998$

b) $x^2 + y^2 = 1999$

Lời giải

Nhận xét: Số chính phương chia cho 4 chỉ có số dư 0 hoặc 1.

a) Ta có: $x^2 \equiv 0 \pmod{4}$ hoặc $x^2 \equiv 1 \pmod{4}$

$$y^2 \equiv 0 \pmod{4} \text{ hoặc } y^2 \equiv 1 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 \equiv 0 \pmod{4} \text{ hoặc } x^2 - y^2 \equiv 1 \pmod{4} \text{ hoặc } x^2 - y^2 \equiv 3 \pmod{4}$$

Mà $1998 \equiv 2 \pmod{4}$

Nên phương trình $x^2 - y^2 = 1998$ không có nghiệm nguyên.

b) Ta có: $x^2 \equiv 0 \pmod{4}$ hoặc $x^2 \equiv 1 \pmod{4}$

$$y^2 \equiv 0 \pmod{4} \text{ hoặc } y^2 \equiv 1 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{4} \text{ hoặc } x^2 + y^2 \equiv 1 \pmod{4} \text{ hoặc } x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod{4}$$

Mà $1999 \equiv 3 \pmod{4}$

Nên phương trình $x^2 + y^2 = 1999$ không có nghiệm nguyên.

Câu 6. Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 = 2y^2 - 8y + 3$.

Lời giải

$$x^2 = 2y^2 - 8y + 3 \Leftrightarrow x^2 = 2(y - 2)^2 - 5$$

Nhận xét: Số chính phương chia cho 8 chỉ có số dư 0 hoặc 1 hoặc 4.

Ta có: $x^2 \equiv 0 \pmod{8}$ hoặc $x^2 \equiv 1 \pmod{8}$ hoặc $x^2 \equiv 4 \pmod{8}$

$$(y - 2)^2 \equiv 0 \pmod{8} \text{ hoặc } (y - 2)^2 \equiv 1 \pmod{8} \text{ hoặc } (y - 2)^2 \equiv 4 \pmod{8}$$

$$\Rightarrow 2(y - 2)^2 \equiv 0 \pmod{8} \text{ hoặc } 2(y - 2)^2 \equiv 2 \pmod{8}$$

$$\Rightarrow 2(y - 2)^2 - 5 \equiv 3 \pmod{8} \text{ hoặc } 2(y - 2)^2 - 5 \equiv 5 \pmod{8}$$

Do đó phương trình $x^2 = 2y^2 - 8y + 3$ không có nghiệm nguyên.

Hết.

ĐỀ 13: NGUYÊN LÝ DIRICHLET

Dạng 1: Sử dụng trong bài toán chia hết
Dạng 2: Sử dụng trong bài toán về tính chất các phần tử trong tập hợp
Dạng 3: Sử dụng trong một số bài toán thực tế
Dạng 4: Sử dụng trong một số bài toán về hình học

Dạng 1. Sử dụng trong bài toán chia hết

Câu 1. (HSG 7 TRƯỜNG THCS VÕ THỊ SÁU 2022 - 2023)

Chứng minh rằng nếu $2^n - 1$ là số nguyên tố ($n > 2$) thì $2^n + 1$ là hợp số.

Lời giải

Ta có: $2^n - 1; 2^n; 2^n + 1$ là ba số tự nhiên liên tiếp theo Dirichlet có một trong ba số sẽ chia hết cho 3

Mà $2^n - 1$ là số nguyên tố ($n > 2$) nên $2^n - 1$ không chia hết cho 3.

Mặt khác: với $n > 2$ thì 2^n không là bội của 3, nên 2^n không chia hết cho 3.

Suy ra: $2^n + 1$ chia hết cho 3 và $2^n + 1 > 3$ với mọi $n > 2$.

Vậy $2^n + 1$ là hợp số (đpcm).

Câu 2. (HSG 7 LIÊN TRƯỜNG 2022 - 2023)

Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên gồm toàn chữ số 1 chia hết cho 2007.

Lời giải

Xét 2008 số sau: 1; 11; 111; ...; $\underbrace{111\dots11}_{2008}$

Theo Dirichle tồn tại ít nhất 2 số chia cho 2007 có cùng số dư

Giả sử hai số đó là

$$A = \underbrace{111\dots11}_n$$

$$B = \underbrace{111\dots11}_k \quad (n > k)$$

$$\Rightarrow A - B = \underbrace{111\dots11}_n - \underbrace{111\dots11}_k = 10^k \cdot \underbrace{111\dots11}_{n-k} : 2007$$

$$\text{Mà } (10^k; 2007) = 1 \Rightarrow \underbrace{111\dots11}_{n-k} : 2007$$

Câu 3. (HSG 7 TP Sầm Sơn, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Chứng minh rằng luôn tồn tại số tự nhiên có dạng 20232023...2023 chia hết cho 23.

Lời giải

Xét 23 số tự nhiên trong đó mỗi số được viết liên tiếp từ n số 2023 lại với nhau ($n = 1; 2; 3; \dots; 23$)

Ta được các số: 2023; 20232023; 202320232023; ...; 20232023...2023.

+ Nếu trong dãy có một số chia hết cho 23 thì ta có điều cần chứng minh.

+ Nếu trong dãy trên không có số nào chia hết cho 23, thì đem các số đó chia cho 23 có ít nhất 2 số có cùng số dư.

+ Giả sử hai số đó là: $a = \underbrace{2023\dots2023}_{m \text{ số } 2023}$ và $b = \underbrace{2023\dots2023}_{n \text{ số } 2023}$ với $m > n$

Khi đó $a - b$ chia hết cho 23

$\Rightarrow 2023\dots202300\dots0$ chia hết cho 23 (có $m - n$ số 2023 và $4n$ chữ số 0)

$\Rightarrow 2023\dots2023 \cdot 10^{4n}$ chia hết cho 23.

Do 23 là số nguyên tố và 10^{4n} không chia hết cho 23

$\Rightarrow 20232023\dots2023$ chia hết cho 23.

Câu 4. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Nông Công 2022 - 2023)

Viết 6 số tự nhiên vào 6 mặt của một con xúc xắc. Chứng tỏ rằng khi ta gieo xúc xắc xuống mặt bàn thì trong 5 mặt có thể nhìn thấy bao giờ cũng tìm được một hay nhiều mặt để tổng các số trên các mặt đó chia hết cho 5.

Lời giải

Gọi các số trên 5 mặt là $a_1; a_2; a_3; a_4; a_5$.

Xét 5 tổng: $S_1 = a_1; S_2 = a_1 + a_2; S_3 = a_1 + a_2 + a_3;$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4; S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5.$$

+ Nếu một trong 5 tổng đó chia hết cho 5 thì bài toán đã giải xong.

+ Nếu không có tổng nào chia hết cho 5 thì tồn tại hai tổng có cùng số dư khi chia cho 5 (vì có 5 tổng mà có 4 số dư khác 0 là 1; 2; 3; 4). Nên hiệu của hai tổng đó chia hết cho 5.

+ Gọi 2 tổng đó là S_m và S_n ($1 \leq m < n \leq 5$) thì $(S_m - S_n) : 5$

$$\text{hay } (a_1 + a_2 + \dots + a_m) - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m) : 5.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Câu 5. (HSG 7 tp Vũng Tàu 2021 - 2022)

Chứng tỏ rằng tồn tại một số tự nhiên tận cùng là 2022 và chia hết cho 2021.

Lời giải

Xét 2022 số có dạng 2022, 20222022, ..., 2022...2022

Theo nguyên tắc Dirichlet thì có ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho 2021

Giả sử hai số đó là $A = 2022\dots2022$ (n số 2022) và $B = 2022\dots2022$ (k số 2022); $n < k$

$$B - A = \underbrace{2022\dots2022}_{k-n \text{ số } 2022} \cdot 10^n \text{ chia hết } 2021$$

Mà $(2021, 10^n) = 1$

$$\text{Suy ra } B - A = \underbrace{2022\dots2022}_{k-n \text{ số } 2022} \text{ chia hết cho } 2021$$

Vậy luôn tồn tại một số tự nhiên tận cùng là 2022 và chia hết cho 2021.

Câu 6. (HSG 7 huyện Tam Dương, tỉnh Vĩnh Phúc, năm học 2022 - 2023)

Mỗi ô vuông đơn vị của bảng kích thước 10×10 (10 dòng, 10 cột) được ghi một số nguyên dương không vượt quá 10 sao cho bất kỳ hai số nào ghi trong hai ô chung một cạnh hoặc hai ô chung một đỉnh của bảng là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng có số được ghi ít nhất 17 lần.

Lời giải

Trên mỗi hình vuông con, kích thước 2×2 chỉ có không quá 1 số chia hết cho 2. Cũng vậy, có không quá 1 số chia hết cho 3. Lát kín bằng bởi 25 hình vuông, kích thước 2×2 , ta thấy có nhiều nhất 25 số chia hết cho 2 và có nhiều nhất 25 số chia hết cho 3. Do đó, có ít nhất 50 số còn lại không chia hết cho 2, cũng không chia hết cho 3. Vì vậy, chúng phải là một trong các số 1; 5; 7. Từ đó, theo nguyên lý Dirichlet, có ít nhất một số trong các số 1; 5; 7 xuất hiện ít nhất 17 lần.

Câu 7. (HSG 7 huyện Vĩnh Tường 2015 - 2016)

Chứng minh rằng: Trong 45 số tự nhiên liên tiếp tồn tại 9 số có tổng chia hết cho 45.

Lời giải

Ta có 45 số tự nhiên liên tiếp chia cho 45 ta được các số dư là $0, 1, 2, 3, \dots, 44$

$$\text{Do } 1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$$

Suy ra các số chia cho 45 theo thứ tự dư: $1, 2, 3, \dots, 9$ thì tổng của 9 số này chia hết cho 45.

Câu 8.

Cho dãy số gồm 5 số tự nhiên bất kì a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 . Chứng minh rằng tồn tại một số chia hết cho 5 hoặc tổng của một số số liên tiếp trong dãy đã cho chia hết cho 5.

Lời giải:

Ta sẽ thành lập dãy số mới gồm 5 số sau đây:

$$S_1 = a_1.$$

$$S_2 = a_1 + a_2.$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3.$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4.$$

$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5.$$

Nếu một trong các số $S_i (i = 1; 2; 3; 4; 5)$ chia hết cho 5 thì bài toán đã được chứng minh.

Nếu không có số nào chia hết cho 5 thì khi đem chia các số S_i cho 5 sẽ được số dư có giá trị từ 1 đến 4.

Có 5 số dư mà chỉ có 4 giá trị (5 thỏ, 4 lông). Theo nguyên tắc Dirichlê ít nhất phải có 2 số dư có cùng giá trị. Hiệu của chúng chia hết cho 5. Hiệu này chính là tổng các a_i liên tiếp nhau hoặc là a_i nào đó.

Câu 9.

Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên gồm toàn chữ số 1 chia hết cho 2016.

Lời giải:

Xét 2017 số có dạng $1; 11; \dots; 11\dots111; 11\dots11$. Theo nguyên tắc Dirichlê thì tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho 2016.

Giả sử hai số đó là: $A = 11\dots1$ (n chữ số 1); $B = 11\dots1$ (k chữ số 1) (với $k < n$)

Khi đó $A - B = 11\dots1.10^k$ ($n - k$ chữ số 1)

$A - B$ chia hết cho 2016. Do $(2016; 10^k) = 1$

Nên $C = 11\dots1$ ($n - k$ chữ số 1) chia hết cho 2016.

Câu 10.

Cho các số tự nhiên từ 1 đến 2012. Hỏi có thể chọn ra được nhiều nhất bao nhiêu số sao cho tổng của hai số bất kỳ trong chúng không chia hết cho hiệu của nó.

Lời giải

+ Ta thấy, nếu hai số chia cho 3 cùng dư 2 thì hiệu của chúng chia hết cho 3 và tổng của chúng chia 3 dư 1 nên tổng của chúng không chia hết cho hiệu của chúng.

+ Trong các số tự nhiên từ 1 đến 2012 sẽ có 671 số chia cho 3 dư 2 là các số có dạng $3k + 2$ ($k = 0, 1, 2, \dots, 670$)

Khi đó hai số bất kỳ trong 671 số này có tổng chia 3 dư 1, hiệu chia hết cho 3 nên tổng không chia hết cho hiệu của chúng.

Ta chứng minh rằng chọn được nhiều nhất 672 số trong các số từ 1 đến 2012, thì trong 672 số này luôn tìm được hai số a, b ($a > b$) sao cho $a - b \leq 2$.

Thật vậy, giả sử ngược lại thì hiệu giữa số nhỏ nhất và số lớn nhất trong các số đã cho sẽ không nhỏ hơn $3 \cdot 671 = 2013$ (trái với giả thiết hiệu giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất không vượt quá $2012 - 1 = 2011$). Do đó $a - b = 1$ hoặc.

+ Nếu $a - b = 1$ thì $(a + b) : (a - b)$

+ Nếu $a - b = 2$ thì $a + b$ là số chẵn, nên $(a + b) : 2$ hay $(a + b) : (a - b)$

Như vậy các số tự nhiên từ 1 đến 2012 không thể chọn được hơn 671 số thỏa mãn điều kiện bài toán.

Suy ra số lượng lớn nhất các số phải tìm là 671.

Dạng 2. Sử dụng trong bài toán về tính chất các phần tử trong tập hợp

Câu 1. (HSG 7 Thành Phố Ninh Bình 2022 - 2023)

Cho 5 số dương đôi một khác nhau sao cho mỗi số không có ước nguyên tố nào khác 2 và 3. Chứng minh rằng trong 5 số đó tồn tại hai số mà tích của chúng là một số chính phương.

Lời giải

Mỗi số trong 5 số có dạng $2^x \cdot 3^y$ trong đó x, y là số tự nhiên khác 0.

$(x; y)$ chỉ có thể (Chẵn, Chẵn); (Lẻ, Lẻ); (Chẵn, Lẻ); (Lẻ, Chẵn) vì có 5 số mà chỉ có 4 dạng nên tồn tại 2 số cùng một dạng nên tích 2 số này là số chính phương.

Câu 2. (HSG 7 huyện Gia Viễn, tỉnh Ninh Bình 2022 - 2023)

Một cái hộp đựng 60 quả bóng giống nhau, gồm ba màu: màu đỏ, màu xanh và màu vàng. Trong đó có 18 quả bóng màu đỏ và 25 quả bóng màu vàng. Hỏi cần phải lấy ra ngẫu nhiên ít nhất bao nhiêu quả bóng để chắc chắn rằng lấy ra được 2 quả bóng xanh?

Lời giải

Số quả bóng màu xanh là: $60 - 18 - 25 = 17$ (quả).

Trường hợp xấu nhất: Ta lấy ra được 25 quả bóng màu vàng, 18 bóng màu đỏ và 1 quả bóng màu xanh. Khi đó, ta cần lấy thêm 1 quả bóng nữa thì chắc chắn có được 2 quả bóng màu xanh.

Vậy cần lấy ít nhất là: $25 + 18 + 1 + 1 = 45$ quả bóng để thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3. (HSG 7, Trường THCS Lý Tự Trọng 2018-2019)

Trong một bảng ô vuông gồm có 5×5 ô vuông, người ta viết vào mỗi ô vuông chỉ một trong 3 số 1; 0; -1. Chứng minh rằng trong các tổng của 5 số theo mỗi cột, mỗi hàng, mỗi đường chéo phải có ít nhất hai tổng số bằng nhau.

Lời giải

Ta có 5 cột, 5 hàng và 2 đường chéo nên sẽ có 12 tổng

Mỗi ô vuông chỉ nhận một trong 3 số 1; 0 hoặc -1 nên mỗi tổng chỉ nhận các giá trị từ -5 đến 5 . Ta có 11 số nguyên từ -5 đến 5 là $-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$.

Vậy theo nguyên lý Dirichle phải có ít nhất hai tổng bằng nhau (đpcm).

Câu 4. (HSG 7 huyện Thanh Hà 2016 - 2017)

Cho 100 số hữu tỉ trong đó tích của bất kỳ ba số nào cũng là một số âm. Chứng minh rằng:

- a) Tích của 100 số đó là một số dương.
- b) Tất cả 100 số đó đều là số âm.

Lời giải

a) Trong 100 số đã cho, phải có ít nhất một số âm (vì nếu cả 100 số đều dương thì tích của ba số bất kì không thể là một số âm).

Ta tách riêng số âm đó ra. Chia 99 số còn lại thành 33 nhóm, mỗi nhóm 3 thừa số.

Theo đề bài, mỗi nhóm đều có tích là một số âm nên tích của 33 nhóm tức là của 99 số là một số âm.

Nhân số âm này với số âm đã tách riêng từ đầu ta được tích của 100 số là một số dương.

b) Sắp xếp 100 số đã cho theo thứ tự tăng dần, chẳng hạn $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_{100}$

Các số này đều khác 0 (vì nếu có một thừa số bằng 0 thì tích của nó với hai thừa số khác cũng bằng 0, trái với đề bài).

Xét tích $a_{98} \cdot a_{99} \cdot a_{100} < 0 \Rightarrow a_{98} < 0$ (vì nếu $a_{98} > 0$ thì $a_{99} > 0, a_{100} > 0$, tích của ba số này không thể là một số âm).

Do đó $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{98}$ là các số âm

+ Xét tích $a_1 a_2 a_{99} < 0$ mà $a_1 a_2 > 0$ nên $a_{99} < 0$

+ Xét tích $a_1 a_2 a_{100} < 0$ mà $a_1 a_2 > 0$ nên $a_{100} < 0$

Vậy tất cả 100 số đã cho đều là số âm.

Câu 5. (HSG 7 huyện Hoàng Hóa 2016 - 2017)

Cho 20 số nguyên khác 0: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$ có các tính chất sau:

- * a_1 là số dương
- * Tổng của ba số viết liền nhau bất kỳ là một số dương.
- * Tổng của 20 số đó là số âm

Chứng minh rằng: $a_1 \cdot a_{14} + a_{14} \cdot a_{12} < a_1 \cdot a_{12}$

Lời giải

+ Ta có:

$$a_1 + (a_2 + a_3 + a_4) + \dots + (a_{11} + a_{12} + a_{13}) + a_{14} + (a_{15} + a_{16} + a_{17}) + (a_{18} + a_{19} + a_{20}) < 0$$

$$a_1 > 0; a_2 + a_3 + a_4 > 0; \dots; a_{11} + a_{12} + a_{13} > 0; a_{15} + a_{16} + a_{17} > 0; a_{18} + a_{19} + a_{20} > 0$$

$$\Rightarrow a_{14} < 0$$

+ Ta cũng có:

$$(a_1 + a_2 + a_3) + \dots + (a_{10} + a_{11} + a_{12}) + a_{13} + a_{14} + (a_{15} + a_{16} + a_{17}) + (a_{18} + a_{19} + a_{20}) < 0$$

$$\Rightarrow a_{13} + a_{14} < 0$$

Mặt khác: $a_{12} + a_{13} + a_{14} > 0 \Rightarrow a_{12} > 0$

Như vậy: $a_1 > 0; a_{12} > 0; a_{14} < 0$

$\Rightarrow a_1 \cdot a_{14} + a_{14} \cdot a_{12} < a_1 a_{12}$ (điều phải chứng minh).

Câu 6.

Cho 100 số hữu tỉ trong đó tích của bất kỳ ba số nào cũng là một số âm. Chứng minh rằng tất cả 100 số đó đều là số âm.

Lời giải

Trong 100 số đã cho, phải có ít nhất một số âm (vì nếu cả 100 số đều dương thì tích của 3 số bất kỳ không thể là một số âm).

Ta tách riêng số âm đó ra, 99 số còn lại chia thành 33 nhóm, mỗi nhóm 3 thừa số

Theo đề bài, mỗi nhóm đều có tích là một số âm nên tích của 33 nhóm là số âm, tức là tích của 99 số là một số âm

Nhân số âm này với số âm đã tách riêng từ đầu ta được tích của 100 số là một số dương

Sắp xếp 100 số đã cho theo thứ tự tăng dần, chẳng hạn:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_{100}$$

Các số này đều khác 0 (vì nếu có 1 thừa số bằng 0 thì tích của nó với hai thừa số khác cũng bằng 0, trái với đề bài)

Xét tích $a_{98} \cdot a_{99} \cdot a_{100} < 0 \Rightarrow a_{98} < 0$ (vì nếu $a_{98} > 0$ thì $a_{99} > 0, a_{100} > 0$, tích của ba số này không thể là một số âm).

Vậy $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{98}$ là các số âm.

Xét tích: $a_1 \cdot a_2 \cdot a_{99} < 0$ mà $a_1 a_2 > 0$ nên $a_{99} < 0$.

Xét tích: $a_1 \cdot a_2 \cdot a_{100} < 0$ mà $a_1 a_2 > 0$ nên $a_{100} < 0$.

Vậy tất cả 100 số đã cho đều là số âm.

Dạng 3. Sử dụng trong một số bài toán thực tế

Câu 1.

Một lớp học có 40 học sinh. Chứng minh rằng có ít nhất 4 học sinh có tháng sinh giống nhau.

Lời giải :

Một năm có 12 tháng. Ta phân chia 40 học sinh vào 12 tháng đó. Nếu mỗi tháng có không quá 3 học sinh được sinh ra thì số học sinh không quá: $3 \cdot 12 = 36$ mà $36 < 40$.

Vậy tồn tại một tháng có ít nhất 4 học sinh trùng tháng sinh

Câu 2.

Có 10 đội bóng thi đấu với nhau trong một giải, mỗi đội phải đấu một trận với các đội khác. Chứng minh rằng vào bất cứ lúc nào cũng có hai đội đã đấu số trận như nhau.

Lời giải :

Rõ ràng nếu trong 10 đội bóng có 1 đội chưa đấu một trận nào thì trong các đội còn lại không có đội nào đã thi đấu 9 trận.

Như vậy 10 đội chỉ có số trận đấu hoặc từ 0 đến 8 hoặc từ 1 đến 9. Vậy theo nguyên lý Dirichlê phải có ít nhất 2 đội đã đấu số trận đấu như nhau. (Đội chưa đấu trận nào, số trận bằng 0)

Câu 3.

Trong 45 học sinh làm bài kiểm tra không có ai bị điểm dưới 2, chỉ có 2 học sinh được điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên từ 0 đến 10).

Lời giải :

Vì trong lớp có 45 học sinh làm bài kiểm tra không có ai bị điểm dưới 2 và có 2 học sinh được 10 điểm nên có $45 - 2 = 43$ học sinh còn lại có số điểm từ 2 đến 9 điểm.

Như vậy có 43 học sinh phân chia vào 8 loại điểm (từ 2 đến 9). Giả sử mỗi loại trong 8 loại điểm đều là điểm của không quá 5 học sinh thì lớp học có không quá $5 \cdot 8 = 40$ học sinh, ít hơn 43 học sinh. Vậy tồn tại ít nhất 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau.

Câu 4.

Một đồi thông có 800000 cây thông. Trên mỗi cây thông có không quá 500000 chiếc lá. Chứng minh rằng ít nhất cũng có 2 cây thông có cùng số lá như nhau trên cây.

Lời giải :

Ta hãy tưởng tượng mỗi cây thông là một "thỏ", như vậy có 800000 "thỏ" được nhốt vào không quá 500000 "chiếc lồng". Lồng 1 ứng với cây thông có một chiếc lá trên cây, lồng 2 ứng với cây thông có 2 chiếc lá trên cây v.v...

Số thỏ lớn hơn số lồng, theo nguyên tắc Diriclé ít nhất có 1 lồng nhốt không ít hơn 2 thỏ nghĩa là có ít nhất 2 cây thông có cùng số lá.

Câu 5.

Có 6 nhà khoa học viết thư trao đổi với nhau về một trong hai đề tài: bảo vệ môi trường và chương trình dân số. Chứng minh rằng có ít nhất ba nhà khoa học cùng trao đổi về một đề tài.

Lời giải

Gọi 6 nhà khoa học là A, B, C, D, E, F.

Nhà khoa học A sẽ viết thư trao đổi với 5 nhà khoa học còn lại về 2 đề tài, có $5 = 2 \cdot 2 + 1$ nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất 3 nhà khoa học (chẳng hạn B, C, D) được nhà khoa học A trao đổi về cùng một đề tài (chẳng hạn đề tài môi trường).

Trong ba nhà khoa học B, C, D nếu có hai người nào cũng trao đổi về đề tài môi trường (chẳng hạn B, C) thì ta chọn được A, B, C cùng trao đổi về một đề tài.

Nếu trong ba nhà khoa học B, C, D không có hai người nào trao đổi về đề tài môi trường thì họ sẽ trao đổi với nhau về đề tài dân số, ta sẽ chọn được B, C, D cùng trao đổi một đề tài.

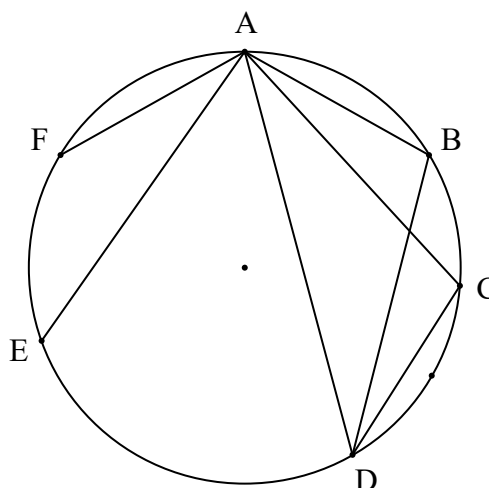
Vậy có ít nhất ba nhà khoa học cùng trao đổi về một đề tài.

Dạng 4. Sử dụng trong một số bài toán về hình học

Câu 1. (HSG 7 huyện Tam Dương 2021 – 2022; trường THCS Yên Phong 2022 - 2023)

Trên một đường tròn có 6 điểm phân biệt. Hai điểm bất kỳ trong 6 điểm này đều được nối với nhau bởi một đoạn thẳng màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có ba cạnh cùng màu.

Lời giải



Xét 6 điểm phân biệt A, B, C, D, E, F trên một đường tròn

Nối điểm A với 5 điểm còn lại ta được 5 đoạn thẳng.

Vì các đoạn thẳng chỉ có màu xanh hoặc đỏ nên theo nguyên lý Diricletthi có ít nhất $\left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil + 1 = 3$ ba đoạn thẳng có cùng một màu.

Giả sử ba đoạn $AB; AC; AD$ có cùng màu và là màu đỏ.

Khi đó luôn tồn tại một trong ba tam giác ABC, ACD, BCD có ba cạnh cùng màu.

Thật vậy:

+ Nếu tam giác BCD có ít nhất một cạnh là màu đỏ, giả sử là cạnh BC , thì tam giác ABC có ba cạnh màu đỏ (thỏa mãn đề bài).

+ Nếu tam giác BCD không có cạnh nào màu đỏ thì tức là cả ba cạnh của tam giác BCD cùng màu xanh (thỏa mãn đề bài).

Vậy luôn tồn tại ít nhất một tam giác được tạo thành từ ba đoạn thẳng đó sẽ có ba cạnh cùng màu.

Câu 2. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Sông Lô, Vĩnh Phúc 2022 - 2023)

Cho một hình vuông có cạnh bằng 5 đơn vị và cho 76 điểm nằm bên trong hình vuông đó. Chứng tỏ rằng có một hình tròn với bán kính bằng $\frac{3}{4}$ đơn vị chứa trọn 4 trong 76 điểm đã cho.

Lời giải

Chia hình vuông đã cho thành 25 hình vuông nhỏ cạnh bằng 1.

Nếu trong mỗi hình vuông nhỏ có không quá 3 điểm (trong số các điểm đã cho) thì trong hình vuông lớn có không quá $25 \cdot 3 = 75$ (điểm), trái với giả thiết trong hình vuông lớn có 76 điểm.

Như vậy, có ít nhất một hình vuông nhỏ (cạnh bằng 1) chứa bốn điểm (trong các điểm đã cho).

Hình tròn với đường kính là đường chéo của hình vuông nhỏ này chứa toàn bộ hình vuông nhỏ và có bán kính $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3}{4}$. Vậy có một hình tròn với bán kính bằng $\frac{3}{4}$ đơn vị chứa trọn 4 trong 76 điểm đã cho.

Câu 3. (HSG 7 huyện Triệu Sơn 2015 - 2016)

Chứng minh rằng từ 8 số nguyên dương tùy ý không lớn hơn 20, luôn chọn được ba số x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Lời giải

Giả sử 8 số nguyên dương tùy ý đã cho là $a_1, a_2, a_3, \dots, a_8$ với $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_8 \leq 20$

Thấy rằng với ba số dương a, b, c thỏa mãn $a \geq b \geq c$ và $b + c > a$ thì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Từ đó, ta thấy nếu trong các số $a_1, a_2, a_3, \dots, a_8$ không chọn được 3 số là độ dài ba cạnh của một tam giác thì:

$$a_6 \geq a_7 + a_8 \geq 1 + 1 = 2$$

$$a_5 \geq a_6 + a_7 \geq 2 + 1 = 3$$

$$a_4 \geq a_5 + a_6 \geq 3 + 2 = 5$$

$$a_3 \geq a_4 + a_5 \geq 5 + 3 = 8$$

$$a_2 \geq a_3 + a_4 \geq 8 + 5 = 13$$

$$a_1 \geq a_2 + a_3 \geq 13 + 8 = 21$$

Điều này trái với giả thiết đề bài.

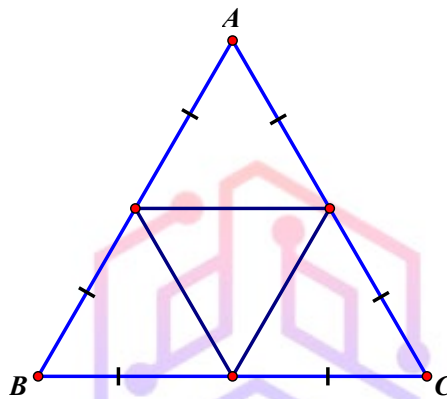
Do đó điều giả sử trên là sai.

Vậy trong 8 số nguyên trên đã cho luôn chọn được 3 số x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Câu 4.

Cho ΔABC đều có cạnh bằng 1. Đánh dấu 5 điểm phân biệt bất kỳ trong ΔABC . Chứng minh rằng tồn tại ít nhất là 2 điểm trong số đó mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 0,5.

Lời giải



Ta có: ΔABC đều có cạnh bằng 1

Các đường nối trung điểm các cạnh của ΔABC chia ΔABC thành bốn tam giác đều có cạnh là 0,5.

Theo nguyên tắc Dirichlet, tồn tại ít nhất là 2 điểm rơi vào cùng một tam giác nhỏ.

Ta có khoảng cách giữa 2 điểm này nhỏ hơn 0,5.

Dạng 5. Bài liên quan đến bảng ô vuông

Câu 1. (HSG 7 huyện Tam Dương 2016 - 2017)

Trong một bảng ô vuông gồm có 5×5 ô vuông, người ta viết vào mỗi ô vuông chỉ một trong 3 số 1; 0; -1. Chứng minh rằng trong các tổng của 5 số theo mỗi cột, mỗi hàng, mỗi đường chéo phải có ít nhất hai tổng số bằng nhau.

Lời giải

Ta có 5 cột, 5 hàng và 2 đường chéo nên sẽ có 12 tổng

Mỗi ô vuông chỉ nhận một trong 3 số 1; 0 hoặc -1

nên mỗi tổng chỉ nhận các giá trị từ -5 đến 5.

Ta có 11 số nguyên từ -5 đến 5 là -5; -4;; 0; 1;; 5.

Vậy theo nguyên lý Dirichle phải có ít nhất hai tổng bằng nhau.

Câu 2.

Trên bảng ô vuông kích thước 8×8 , ta viết các số tự nhiên từ 1 đến 64, mỗi số viết vào một ô một cách tùy ý. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai ô vuông chung cạnh mà hiệu các số ghi trong chúng không nhỏ hơn 5.

Lời giải

Ta xét hàng có ô ghi số 1 và cột có ô ghi số 64. Hiệu giữa hai ô này là 63.

Số cặp ô kề nhau từ ô ghi số 1 đến ô ghi số 64 nhiều nhất là 14 (gồm 7 cặp ô chung cạnh tính theo hàng và 7 cặp ô chung cạnh tính theo cột).

Ta có $64 = 14 \cdot 4 + 8$ nên theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất hai ô kề nhau mà hai số ghi trên đó có hiệu không nhỏ hơn $4 + 1 = 5$.

Vậy luôn tồn tại hai ô vuông chung cạnh mà hiệu các số ghi trong chúng không nhỏ hơn 5.



CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS

ĐỀ 14: PHẦN HÌNH HỌC

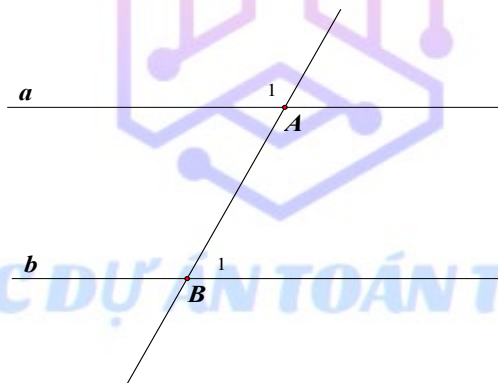
Dạng toán: Tính số đo góc, chứng minh góc bằng nhau, so sánh góc
Dạng toán: Tính độ dài đoạn thẳng, chứng minh đoạn thẳng bằng nhau
Dạng toán: Chứng minh tam giác bằng nhau
Dạng toán: Chứng minh ba điểm thẳng hàng
Dạng toán: Bất đẳng thức tam giác
Dạng toán: Chứng minh song song, vuông góc
Dạng toán: Hình khối trong thực tiễn
Dạng toán: Bài toán chứng minh tổng hợp

Dạng toán: Tính số đo góc, chứng minh góc bằng nhau, so sánh góc

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Ba 2021 - 2022)

Cho $a // b$ và $\widehat{A}_1 = 2\widehat{B}_1$ (hình vẽ bên). Số đo \widehat{B}_1 bằng



A. 30° .

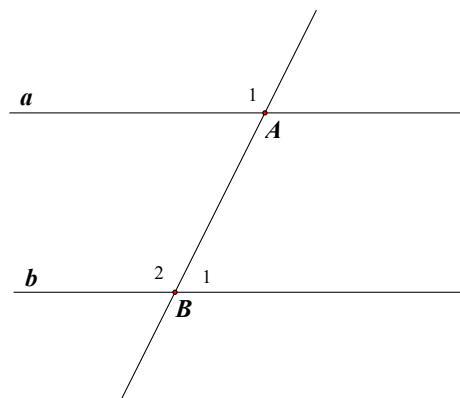
B. 60° .

C. 90° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn B



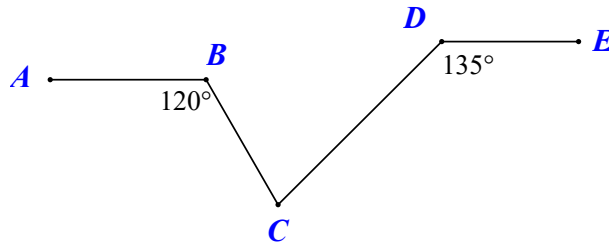
Vì $a // b$ nên $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_2$ (đồng vị) và $\widehat{A}_1 = 2\widehat{B}_1$

Mà $\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 180^\circ$ hay $\widehat{B}_1 + \widehat{A}_1 = 180^\circ$ mà $\widehat{A}_1 = 2\widehat{B}_1$ (gt)

$$\Rightarrow \widehat{B}_1 + 2\widehat{B}_1 = 180^\circ \Rightarrow 3\widehat{B}_1 = 180^\circ \Rightarrow \widehat{B}_1 = 60^\circ$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Tam Nông, 2022 - 2023)

Cho hình vẽ $AB \parallel DE$. Số đo \widehat{BCD} bằng



A. 75° .

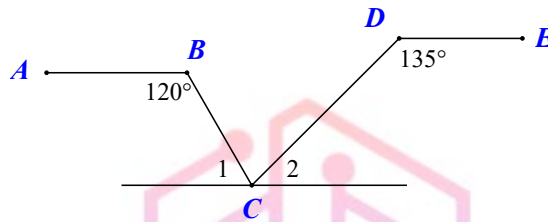
B. 85° .

C. 45° .

D. 65° .

Lời giải

Chọn A



Kẻ đường thẳng qua C và song song với AB .

Mà $AB \parallel DE$ nên đường thẳng đó cũng song song với DE .

Do đó $\widehat{C}_1 + \widehat{ABC} = 180^\circ$ và $\widehat{C}_2 + \widehat{CDE} = 180^\circ$ (hai góc trong cùng phía)

$$\Rightarrow \widehat{C}_1 = 60^\circ, \widehat{C}_2 = 45^\circ \Rightarrow \widehat{BCD} = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Thanh Ba 2021 - 2022; huyện Tân An 2017 - 2018; huyện Lâm Thao 2016 - 2017)

Cho $\widehat{xOy} = 50^\circ$, điểm A nằm trên Oy . Qua A vẽ tia Am . Để Am song song với Ox thì số đo của \widehat{OAm} là:

A. 50° .

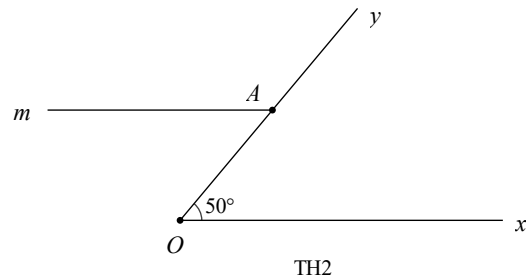
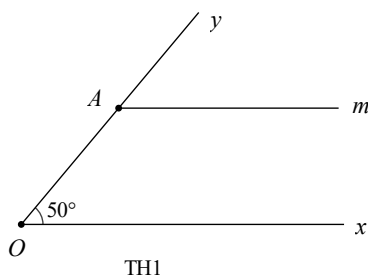
B. 130° .

C. 50° và 130° .

D. 80° .

Lời giải

Chọn C



TH1: Vì $Am \parallel Ox$

nên $\widehat{AOx} + \widehat{OAm} = 180^\circ$ (hai góc trong cùng phía)

Thay $\widehat{AOx} = 50^\circ$, ta có :

$$50^\circ + \widehat{OAm} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{OAm} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

TH2: Vì $Am \parallel Ox$

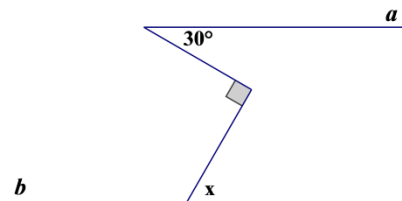
nên $\widehat{AOx} = \widehat{OAm}$ (hai góc so le trong)

$$\text{mà } \widehat{AOx} = 50^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{OAm} = 50^\circ$$

Câu 4. (HSG 7 huyện Thảo Lâm, 2022 - 2023)

Cho $a \parallel b$ như hình vẽ bên. Số đo góc x bằng:



A. 150° .

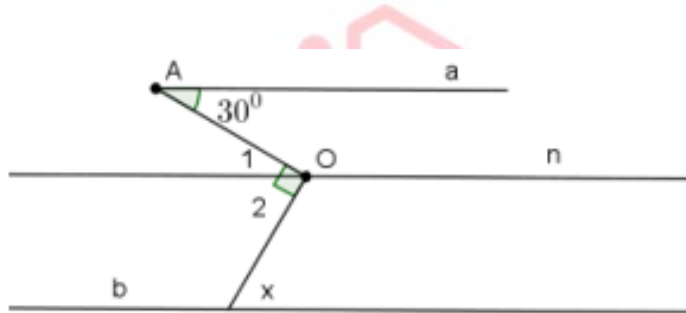
B. 90° .

C. 60° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn C



Kẻ $n \parallel a \parallel b$

Vì $n \parallel a \Rightarrow \widehat{O_1} = \widehat{A}$ (2 góc so le trong)

$$\Rightarrow \widehat{O_1} = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{O_2} = \widehat{O} - 30^\circ = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

Vì $n \parallel b \Rightarrow x = \widehat{O_2}$ (2 góc so le trong)

$$\Rightarrow x = \widehat{O_2} = 60^\circ$$

Câu 5. (HSG 7 huyện Thanh Ba 2021 – 2022)

Cho ΔABC có $\widehat{A} = 40^\circ$; $\widehat{B} - \widehat{C} = 20^\circ$ trên tia đối của AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$. Số đo \widehat{CBE} là:

A. 80° .

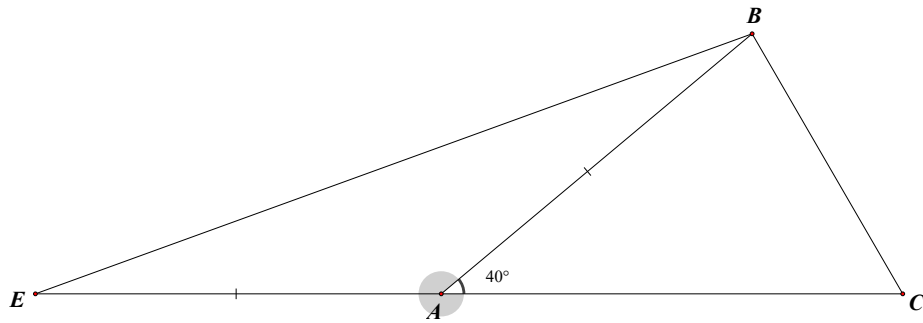
B. 100° .

C. 90° .

D. 120° .

Lời giải

Chọn B



Xét tam giác ABC có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ (định lí tổng ba góc trong tam giác) và $\widehat{A} = 40^\circ; \widehat{B} - \widehat{C} = 20^\circ$ Suy ra $\widehat{B} + \widehat{C} = 140^\circ$ nên $\widehat{B} = \frac{140^\circ + 20^\circ}{2} = 80^\circ; \widehat{C} = 60^\circ$

Xét $\triangle AEB$ cân tại A (do $AE = AB$ (gt) nên $\widehat{AEB} = \widehat{ABE}$ (tính chất của tam giác cân) (1)

Lại có: \widehat{BAC} là góc ngoài tam giác AEB $\widehat{BAC} = \widehat{AEB} + \widehat{ABE}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ABE} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = 20^\circ$

Do đó $\widehat{CBE} = \widehat{CBA} + \widehat{ABE} = 80^\circ + 20^\circ = 100^\circ$

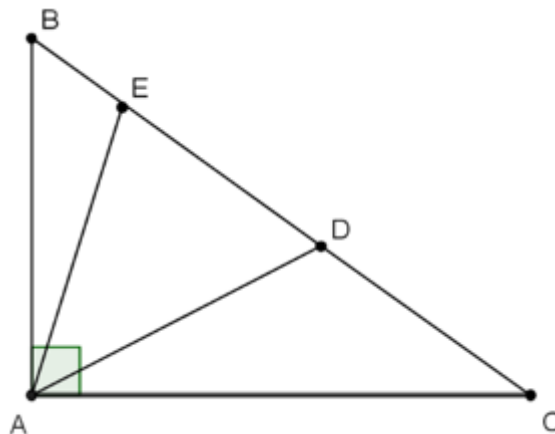
Câu 6. (HSG 7 huyện Thảo Lâm, 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Trên cạnh BC lấy điểm 2 điểm D và E sao cho $BD = BA$; $CE = CA$. Khi đó \widehat{DAE} có số đo là.

- A. 20° . B. 30° . C. 45° . D. 60° .

Lời giải

Chọn C



Xét $\triangle ACE$ cân tại $C \Rightarrow \widehat{CAE} = \widehat{CEA}$

$\triangle BAD$ cân tại $B \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{BDA}$

$\Rightarrow \widehat{BAD} + \widehat{CAE} = \widehat{AED} + \widehat{ADE}$

$\Rightarrow 90^\circ + \widehat{DAE} = 180^\circ - \widehat{DAE}$

$\Rightarrow 2\widehat{DAE} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{DAE} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$

Vậy $\widehat{DAE} = 45^\circ$

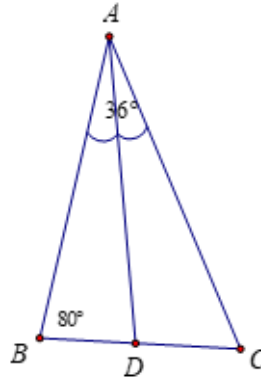
Câu 7. (HSG 7 huyện Sơn Động, 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 80^\circ$, $\widehat{A} = 36^\circ$. Tia phân giác \widehat{BAC} cắt BC tại D . Số đo \widehat{ADC} là

A. 90° . B. 88° . C. 82° . D. 98° .

Lời giải

Chọn D



Vì AD là phân giác của \widehat{BAC} nên $\widehat{BAD} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \cdot 36^\circ = 18^\circ$.

Vì \widehat{ADC} là góc ngoài của $\triangle ABD$ nên $\widehat{ADC} = \widehat{B} + \widehat{BAD} = 80^\circ + 18^\circ = 98^\circ$.

Câu 8. (HSG 7 huyện Tam Nông, 2022 - 2023)

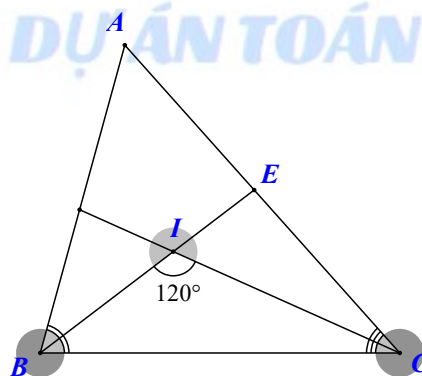
Cho tam giác ABC . Hai tia phân giác của \widehat{B} và \widehat{C} cắt nhau tại I . Nếu $\widehat{BIC} = 120^\circ$ thì số đo \widehat{BAC} bằng.

A. 120° . B. 100° . C. 90° . D. 60° .

Lời giải

Chọn D

CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS



Trong tam giác BIC có $\widehat{IBC} + \widehat{ICB} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

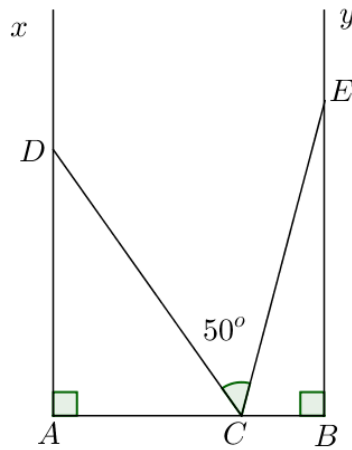
$$\Rightarrow 2\widehat{IBC} + 2\widehat{ICB} = 2 \cdot 60^\circ$$

Mà $\widehat{ABC} = 2\widehat{IBC}$ và $\widehat{ACB} = 2\widehat{ICB}$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 180^\circ - (\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) = 60^\circ$$

Câu 9. (HSG 7 Tam Nông, Phú Thọ 2021-2022)

Cho hình vẽ. Biết hai tia Ax, By vuông góc với AB . Trên hai tia Ax, By và đoạn AB lần lượt lấy các điểm D, E, C sao cho $\widehat{DCE} = 50^\circ$.



Khi đó

A. $\widehat{ADC} + \widehat{CEB} = 90^\circ$.

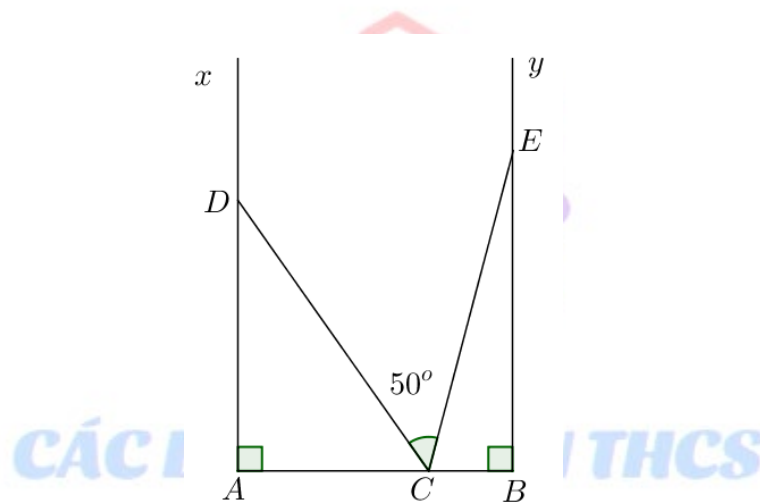
B. $\widehat{ADC} + \widehat{CEB} = 50^\circ$.

C. $\widehat{ADC} + \widehat{CEB} = 100^\circ$.

D. $\widehat{ADC} + \widehat{CEB} = 80^\circ$.

Lời giải

Chọn B



Xét $\triangle ACD$ vuông tại A có $\widehat{ADC} + \widehat{ACD} = 90^\circ$ (hai góc nhọn phụ nhau)

Xét $\triangle BCE$ vuông tại B có $\widehat{CEB} + \widehat{BCE} = 90^\circ$ (hai góc nhọn phụ nhau)

$$\Rightarrow \widehat{ADC} + \widehat{ACD} + \widehat{BEC} + \widehat{BCE} = 180^\circ \Rightarrow (\widehat{ADC} + \widehat{CEB}) + (\widehat{ACD} + \widehat{BCE}) = 180^\circ \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \widehat{ACD} + \widehat{DCE} + \widehat{BCE} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{ACD} + 50^\circ + \widehat{BCE} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{ACD} + \widehat{BCE} = 130^\circ \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow (\widehat{ADC} + \widehat{CEB}) + 130^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{ADC} + \widehat{CEB} = 50^\circ$$

Câu 10. (HSG 7 huyện Tam Nông, Phú Thọ 2021 - 2022)

Cho tam giác ABC cân tại A , $\widehat{A} = 20^\circ$. Vẽ tam giác đều DBC (D nằm trong tam giác ABC).

Tia phân giác \widehat{ABD} cắt AC tại M . Số đo góc BDM là

A. 140° .

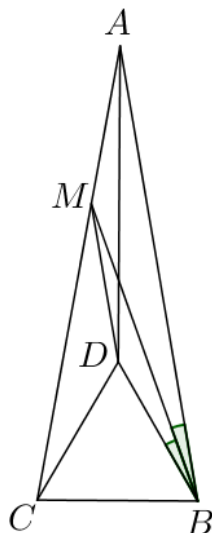
B. 150° .

C. 160° .

D. 170° .

Lời giải

Chọn C



$$\Delta ABC \text{ cân tại } A, \hat{A} = 20^\circ \text{ suy ra } \widehat{ABC} = \widehat{BCA} = \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2} = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ$$

$$\text{Mà } \Delta DBC \text{ đều suy ra } \widehat{DBC} = \widehat{BCD} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{DCA} = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$$

$$\text{Có } BM \text{ là tia phân giác của } \widehat{ABD} \text{ suy ra } \widehat{ABM} = \widehat{MBD} = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ$$

+) Xét ΔABD và ΔACD có
 $BD = DC$ (cạnh ΔDBC đều)

Cạnh DA chung

$AB = AC$ (vì tam giác ABC cân tại A)

Suy ra $\Delta ABD = \Delta ACD$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{BDA} = \widehat{CDA}, \widehat{BAD} = \widehat{CAD}$ (hai góc tương ứng)

$$+) \widehat{BAD} = \widehat{CAD} \text{ mà } \widehat{BAC} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CAD} = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ$$

$$+) \text{ có } \widehat{BDA} + \widehat{CDA} + \widehat{BDC} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{BDA} + \widehat{CDA} + 60^\circ = 360^\circ \Rightarrow \widehat{BDA} + \widehat{CDA} = 300^\circ$$

mà $\widehat{BDA} = \widehat{CDA}$ suy ra $\widehat{BDA} = \widehat{CDA} = 150^\circ$ (1)

+) Xét ΔAMB và ΔBAD có

$$\widehat{BAM} = \widehat{BAD} (= 10^\circ)$$

Cạnh AB chung

$$\widehat{ABM} = \widehat{BAD} (= 10^\circ)$$

Suy ra $\Delta AMB = \Delta BAD$ (g.c.g) $\Rightarrow AM = DB; MB = AD$ (hai cạnh tương ứng)

+) Xét ΔDMB và ΔMDA có

$$MB = AD$$

$$\widehat{DBM} = \widehat{MAD} (= 10^\circ)$$

$$DB = AM$$

Suy ra $\Delta DMB = \Delta MDA$ (g.c.g)

$$\Rightarrow \widehat{ADM} = \widehat{BMD} \text{ (hai góc tương ứng)} \quad (2)$$

$$+) \text{ Xét } \Delta DMB \text{ có } \widehat{BDM} + \widehat{MBD} + \widehat{BMD} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BDA} + \widehat{ADM} + 10^\circ + \widehat{BMD} = 180^\circ \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) suy ra } \Rightarrow 150^\circ + \widehat{ADM} + 10^\circ + \widehat{ADM} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{ADM} = 10^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BDM} = \widehat{BDA} + \widehat{ADM} = 150^\circ + 10^\circ = 160^\circ$$

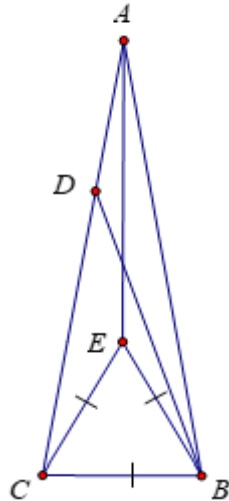
Câu 11. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2018 – 2019)

Cho tam giác ABC cân tại A , $\widehat{A} = 20^\circ$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD = BC$. Số đo của góc BDC là:

- A. 50° . B. 70° . C. 30° . D. 80° .

Lời giải

Chọn C



Vẽ tam giác đều EBC . Ta có: $BC = CE = EB$

Mà $AD = BC$ (gt)

Nên $AD = BE$.

Chứng minh $\triangle AEB = \triangle AEC$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{DAB} = \widehat{DAC}$, do đó $\widehat{EAB} = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ$

$\triangle ABC$ cân tại A , mà $\widehat{A} = 20^\circ$ (gt) $\Rightarrow \widehat{ABC} = (180^\circ - 20^\circ) : 2 = 80^\circ$

$\triangle EBC$ đều nên $\widehat{EBC} = 60^\circ$, tia BE nằm giữa hai tia $BA, BC \Rightarrow \widehat{ABE} = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$

Xét $\triangle ABE$ và $\triangle BAD$ có AB cạnh chung; $\widehat{ABE} = \widehat{BAD} = 20^\circ$; $BE = AD$

Vậy $\triangle ABE = \triangle BAD$ (c.g.g) $\Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{ABD} = 10^\circ$

Mà $\widehat{BDC} = \widehat{BAD} + \widehat{ABD}$ (góc ngoài của $\triangle ABD$)

Nên $\widehat{BDC} = 20^\circ + 10^\circ = 30^\circ$.

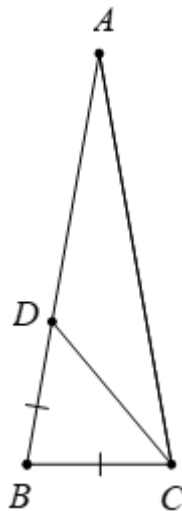
Câu 12. (HSG 7 huyện Tân An 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC cân tại A , $\widehat{A} = 20^\circ$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $BD = BC$. Số đo của góc BDC là:

- A. 50° B. 70° C. 30° D. 80°

Lời giải

Chọn A



+) Xét $\triangle ABC$ có:

$$\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ \text{ (tổng ba góc trong một tam giác)}$$

$$20^\circ + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 160^\circ$$

mà $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ ($\triangle ABC$ cân tại A)

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 80^\circ$$

+) Ta có: $AD = BC$ (gt)

$\Rightarrow \triangle BDC$ cân tại B .

+) Xét $\triangle BDC$ có:

$$\widehat{DBC} + \widehat{BDC} + \widehat{BCD} = 180^\circ \text{ (tổng ba góc trong một tam giác)}$$

$$80^\circ + \widehat{BDC} + \widehat{BCD} = 180^\circ$$

$$\widehat{BDC} + \widehat{BCD} = 100^\circ$$

mà $\widehat{BDC} = \widehat{BCD}$ ($\triangle BDC$ cân tại B)

$$\Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{BCD} = 50^\circ$$

Câu 13. (HSG 7 Tam Nông, Phú Thọ 2021-2022)

Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 2\widehat{B} + 2\widehat{C}$. Các phân giác trong hai góc B và C cắt nhau tại I . Số đo góc \widehat{BIC} là

A. 150° .

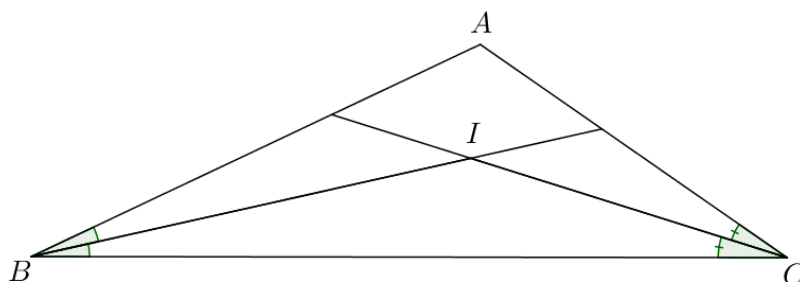
B. 155° .

C. 160° .

D. 120° .

Lời giải

Chọn A



Xét $\triangle ABC$ có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ (ĐL tổng ba góc của một tam giác)

$$\Rightarrow \widehat{A} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C})$$

$$\text{Ta có } 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 2(\widehat{B} + \widehat{C}) \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 60^\circ$$

Các phân giác trong hai góc B và C cắt nhau tại I nên ta có $\widehat{IBC} = \frac{\widehat{B}}{2}$; $\widehat{ICB} = \frac{\widehat{C}}{2}$ (t/c đường phân giác của một góc)

$$\Rightarrow \widehat{IBC} + \widehat{ICB} = \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

Xét $\triangle IBC$ có $\widehat{IBC} + \widehat{ICB} + \widehat{BIC} = 180^\circ$ (ĐL tổng ba góc của một tam giác)

$$\Rightarrow 30^\circ + \widehat{BIC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BIC} = 150^\circ$$

Câu 14. (HSG 7 trường THCS Phan Đình Phùng 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC vuông tại B , $AB = 6$, $\widehat{A} = 30^\circ$. Phân giác góc C cắt AB tại D . Khi đó độ dài đoạn thẳng BD và AD lần lượt là:

A. 2; 4

B. 3; 3

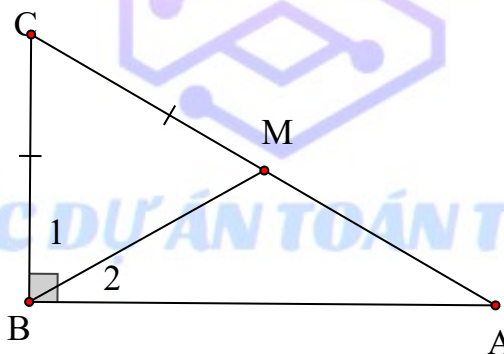
C. 4; 2

D. 1; 5

Lời giải

Chọn A

* Chứng minh nhận xét: Nếu một tam giác vuông có một góc nhọn bằng 30° thì cạnh góc vuông đối diện với nó bằng nửa cạnh huyền.



Xét $\triangle ABC$, ta có: $\widehat{B} = 90^\circ$, $\widehat{A} = 30^\circ$

Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $CM = BC$

Ta có: $\triangle BCM$ cân tại C .

Mà $\widehat{C} + \widehat{A} = 90^\circ$ (tính chất tam giác vuông)

$$\text{Suy ra: } \widehat{C} = 90^\circ - \widehat{A} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

Suy ra: $\triangle BCM$ đều

Suy ra: $BC = CM = BM$ và $\widehat{B}_1 = 60^\circ$

Ta có: $\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = \widehat{ABC} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{B}_2 = 90^\circ - \widehat{B}_1 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

Trong $\triangle BAM$, ta có: $\widehat{B}_2 = \widehat{A} = 30^\circ$

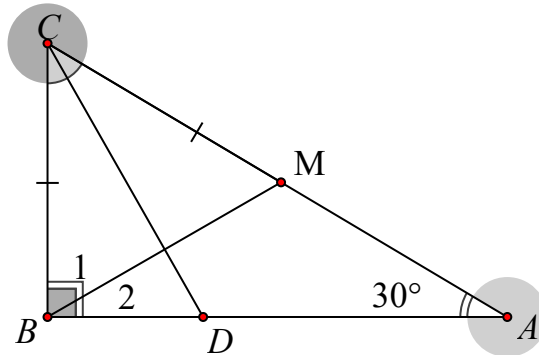
Suy ra: $\triangle BAM$ cân tại M (vì có 2 góc kề cạnh AB bằng nhau)

Hay $AM = MB$

Suy ra: $BC = CM = AM$ mà $CM + MA = AC \Rightarrow BC = \frac{1}{2} AC$.

Vậy: **Nếu một tam giác vuông có một góc nhọn bằng 30° thì cạnh góc vuông đối diện với nó bằng nửa cạnh huyền.**

Áp dụng vào bài tập



Ta có: $\widehat{BCD} = \widehat{DCA} = \frac{\widehat{BCA}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$ (Vì CD là tia phân giác của \widehat{BCA})

Xét $\triangle DAC$ có: $\hat{A} = \widehat{DCA} = 30^\circ$

$\Rightarrow \triangle DAC$ cân tại $D \Rightarrow DC = DA$

Xét $\triangle BDC$ vuông tại B , có $\widehat{BCD} = 30^\circ$

$\Rightarrow BD = \frac{1}{2} DC$

$\Rightarrow BD + DA = \frac{DC}{2} + DC = \frac{3DC}{2} = AB$

$\Rightarrow 3DC = 2AB \Rightarrow DC = \frac{2AB}{3} = \frac{2.6}{3} = 4$

$\Rightarrow DC = DA = 4$

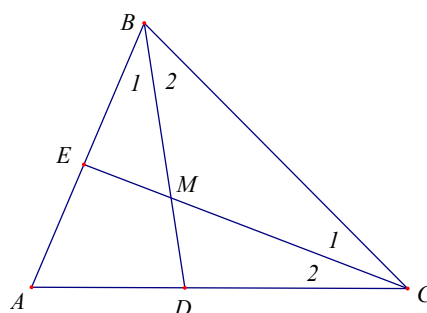
$\Rightarrow BD = \frac{1}{2} DC = \frac{1}{2}.4 = 2$

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Nghi Xuân 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tia phân giác của góc B cắt AC ở D . Tia phân giác của góc C cắt AB ở E ; BD và CE cắt nhau tại M . Tính \widehat{EMD} ?

Lời giải



Xét $\triangle ABC$ có: $\hat{A} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 120^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{B}_2 + \widehat{C}_1 = 120^\circ : 2 = 60^\circ$$

$$\text{Xét } \triangle BMC \text{ có } \widehat{B}_2 + \widehat{C}_1 + \widehat{BMD} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BMD} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

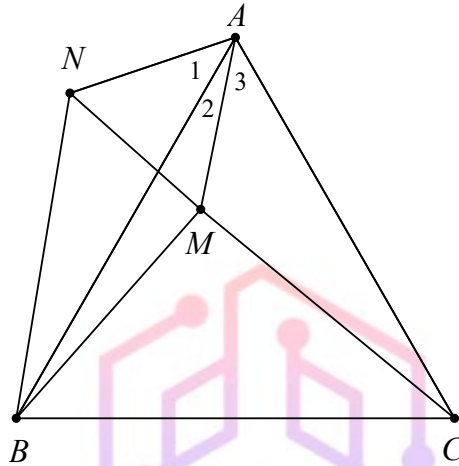
$$\Rightarrow \widehat{EMD} = \widehat{BMD} = 120^\circ \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

$$\text{Vậy } \widehat{EDM} = 120^\circ$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Hoàng Hóa 2017 - 2018)

Cho tam giác đều ABC . M là một điểm nằm trong tam giác sao cho $MA : MB : MC = 3 : 4 : 5$. Tính số đo góc AMB .

Lời giải



Do $MA : MB : MC = 3 : 4 : 5$

$$\text{Đặt } \frac{MA}{3} = \frac{MB}{4} = \frac{MC}{5} = a$$

$$\Rightarrow MA = 3a, MB = 4a, MC = 5a$$

Trên nửa mặt phẳng bờ AC dựng tam giác đều AMN .

$$\Rightarrow AM = AN = MN = 3a \text{ và } \widehat{AMN} = 60^\circ$$

Xét $\triangle ABN$ và $\triangle ACM$ có:

$$AB = AC \text{ (gt)}$$

$$AN = AM (= 3a)$$

$$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_3 \text{ (= } 60^\circ - \widehat{A}_2)$$

$$\Rightarrow \triangle ABN = \triangle ACM \text{ (c - g - c)}$$

$$\Rightarrow BN = CM = 5a$$

$$\text{Xét } \triangle BMN \text{ có: } BN^2 = (5a)^2 = 25a^2$$

$$BM^2 + MN^2 = (4a)^2 + (3a)^2 = 25a^2$$

$$\Rightarrow BN^2 = BM^2 + MN^2$$

$\Rightarrow \triangle BMN$ vuông tại M (định lý Pytago đảo)

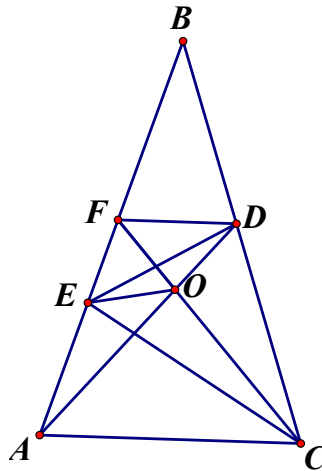
$$\Rightarrow \widehat{NMB} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AMN} + \widehat{NMB} = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Như Xuân, 2018 - 2019)

Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = \widehat{BCA} = 80^\circ$. Ở miền trong của tam giác vẽ hai tia Ax và Cy cắt BC, BA lần lượt tại D và E . Cho biết $\widehat{CAD} = 60^\circ, \widehat{ECA} = 50^\circ$. Tính số đo \widehat{ADE} .

Lời giải



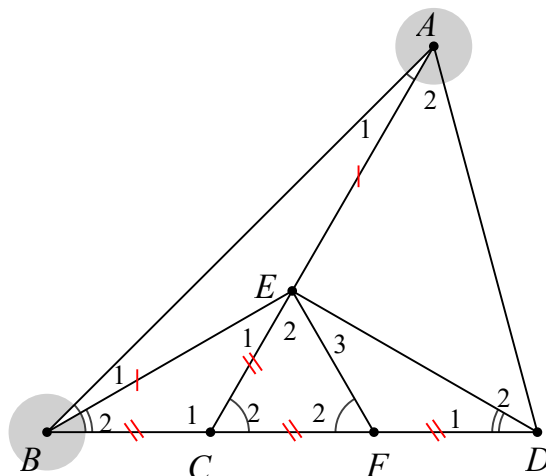
Kẻ tia CF sao cho $\widehat{ACF} = 60^\circ (F \in AB)$, Tia CF cắt AD tại O
 $\Rightarrow \Delta AOC; \Delta FOD$ đều $\Rightarrow OA = OC = AC; OF = OD = FD$.
 ΔAEC có: $\widehat{EAC} = 80^\circ, \widehat{ACE} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{CEA} = 50^\circ \Rightarrow \Delta AEC$ cân tại A
 Có $\widehat{EAO} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{AEO} = \widehat{AOE} = 80^\circ \Rightarrow \widehat{EOF} = 40^\circ$
 Suy ra $\widehat{AFC} = 180^\circ - 80^\circ - 60^\circ = 40^\circ = \widehat{EOF}$
 $\Rightarrow \Delta EOF$ cân tại $E \Rightarrow EO = EF$
 $\Rightarrow \Delta FDE = \Delta ODE (c.c.c) \Rightarrow \widehat{ODE} = \widehat{FDE} = \frac{1}{2} \widehat{FDA} = \frac{1}{2} 60^\circ = 30^\circ$

Vậy $\widehat{ADE} = 30^\circ$.

Câu 4. (HSG 7 huyện Diễn Châu 2022 - 2023; huyện Phù Ninh 2018 - 2019; huyện Nam Sách 2017 - 2018; trường Tân Lạc; huyện Ngọc Lặc 2015 - 2016)

Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 45^\circ, \widehat{C} = 120^\circ$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD = 2CB$. Tính \widehat{ADB} ?

Lời giải



Trên CA lấy điểm E sao cho $AE = BE \Rightarrow \Delta EBA$ cân tại E

$$\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{A}_1 = 15^\circ \Rightarrow \widehat{B}_2 = 30^\circ.$$

Ta có $\widehat{E}_1 = \widehat{A}_1 + \widehat{B}_2 = 30^\circ$ (tính chất góc ngoài của tam giác)

Do đó $\triangle CBE$ cân tại $C \Rightarrow CB = CE$.

Gọi F là trung điểm $CD \Rightarrow CB = CE = CF = FD$.

Tam giác CEF cân tại C có $\widehat{C}_2 = 180^\circ - \widehat{C}_1 = 60^\circ$ nên CEF là tam giác đều.

$\Rightarrow CE = CF = FD = EF \Rightarrow \triangle EDF$ cân tại F .

$$\text{Suy ra } \widehat{D}_1 = \widehat{E}_3 = \frac{\widehat{F}_2}{2} = 30^\circ$$

Xét tam giác CDE ta có: $\widehat{CED} = \widehat{E}_2 + \widehat{E}_3 = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$ (1)

Ta có: $\widehat{D}_1 = \widehat{B}_1 \Rightarrow \triangle EBD$ cân tại $E \Rightarrow EB = ED \Rightarrow EA = ED (= EB)$ (2)

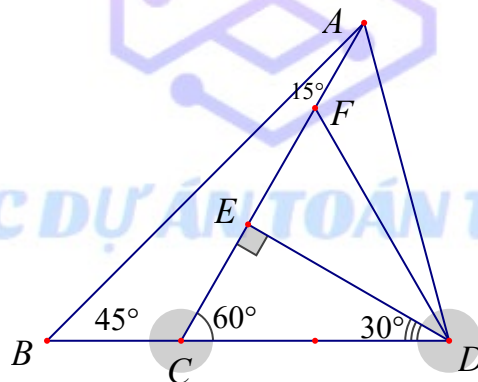
Từ (1) và (2) suy ra $\triangle EDA$ vuông cân tại $E \Rightarrow \widehat{D}_2 = 45^\circ$

Vậy $\widehat{ADB} = \widehat{D}_1 + \widehat{D}_2 = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$.

Câu 5. (HSG 7 huyện Đông Hưng; huyện Vũ Thư 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 15^\circ$, $\widehat{ABC} = 45^\circ$, trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD = 2CB$. Tính số đo \widehat{ADC} .

Lời giải



Kẻ $DE \perp CA$.

Xét $\triangle ABC$, có $\widehat{ACB} = 180^\circ - 45^\circ - 15^\circ = 120^\circ \Rightarrow \widehat{ACD} = 60^\circ$ hay $\widehat{ECD} = 60^\circ$.

Xét $\triangle CED$ có $\widehat{CED} = 90^\circ$, $\widehat{ECD} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{EDC} = 30^\circ$ nên $\triangle CED$ là nửa tam giác đều.

Trên tia đối của tia EC lấy điểm F sao cho $EC = EF$.

$\triangle DCF$ có đường cao DE đồng thời là trung tuyến và có $\widehat{ECD} = 60^\circ$ nên là tam giác đều.

$\Rightarrow CE = \frac{1}{2} CD \Rightarrow CE = CB \Rightarrow \triangle EBC$ cân tại C

$\Rightarrow \widehat{CBE} = \widehat{CEB} = 30^\circ = \widehat{EDC} \Rightarrow \triangle EBD$ cân tại E .

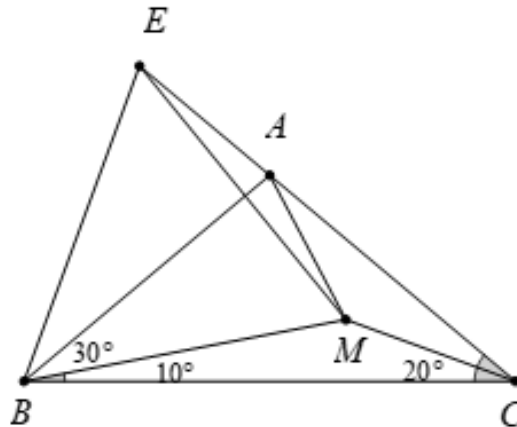
$\Rightarrow \widehat{EBA} = 15^\circ \Rightarrow \triangle BEA$ cân tại $E \Rightarrow EA = EB = ED \Rightarrow \triangle AED$ vuông cân $\Rightarrow \widehat{ADE} = 45^\circ$.

Vậy $\widehat{ADB} = \widehat{ADE} + \widehat{EDB} = 75^\circ$.

Câu 6. (HSG 7 huyện Kinh Môn 2022 - 2023; trường Ngô Gia Tự 2017 - 2018; trường Nguyễn Du, huyện Nga Sơn 2016 - 2017)

Cho tam giác ABC có $AB = AC$, $\hat{A} = 100^\circ$. Điểm M nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{MBC} = 10^\circ$, $\widehat{MCB} = 20^\circ$. Tính số đo góc \widehat{AMB} .

Lời giải



+) Ta có tam giác ABC cân tại A và $\hat{A} = 100^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ.$$

Trên tia CA lấy điểm E sao cho $CE = CB \Rightarrow \triangle BCE$ cân tại $C \Rightarrow \widehat{BEC} = \widehat{EBC} = 70^\circ$.

+) Xét $\triangle MCB$ và $\triangle MCE$ có:

MC chung

$$\widehat{MCB} = \widehat{MCE} (= 20^\circ)$$

$CB = CE$ (cách lấy điểm E)

Suy ra $\triangle MCB = \triangle MCE$ (c - g - c)

$$\Rightarrow \widehat{MBC} = \widehat{MEC} = 10^\circ \Rightarrow \widehat{MBE} = \widehat{MEB} = 70^\circ - 10^\circ = 60^\circ$$

$\Rightarrow \triangle MEB$ đều $\Rightarrow BM = BE$.

+) Ta có $\widehat{MBA} = \widehat{CBA} - \widehat{CBM} = 40^\circ - 10^\circ = 30^\circ$

Mặt khác $\widehat{ABE} = \widehat{MBE} - \widehat{MBA} = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$

Suy ra $\widehat{ABE} = \widehat{ABM} (= 30^\circ)$

+) Xét $\triangle MAB$ và $\triangle EAB$ có:

AB chung

$$\widehat{MBA} = \widehat{EBA} (= 30^\circ)$$

$BM = BE$ (cmt)

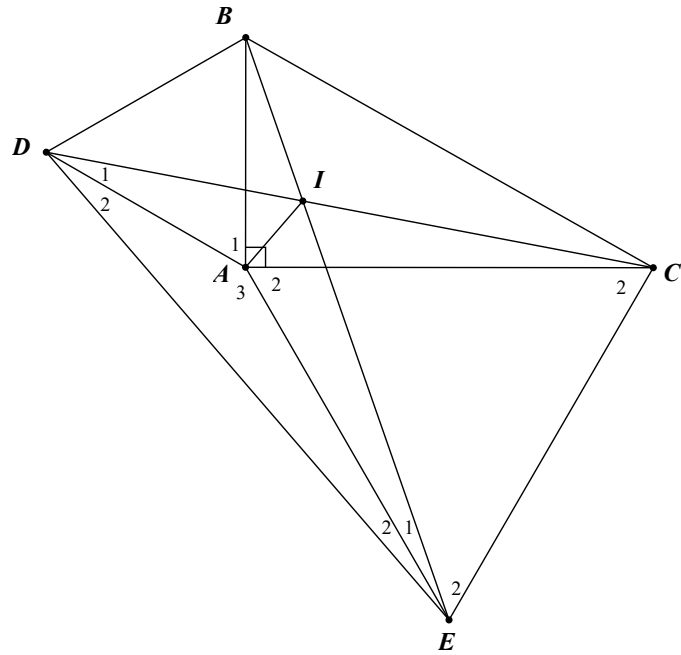
Suy ra $\triangle MAB = \triangle EAB$ (c - g - c)

$$\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AEB} = 70^\circ.$$

Câu 7. (HSG 7 huyện Thạch Thành 2017- 2018)

Cho tam giác ABC vuông tại A . Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE . Gọi I là giao điểm của BE và CD . Chứng minh rằng $\widehat{EIC} = 60^\circ$ và IA là tia phân giác của \widehat{DIE} .

Lời giải



Ta có:
$$\begin{cases} \widehat{DAC} = \widehat{A}_1 + 90^\circ = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \\ \widehat{BAE} = \widehat{A}_2 + 90^\circ = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{BAE}$$

Xét $\triangle DAC$ và $\triangle BAE$ có

$$DA = BA \text{ (gt)}$$

$$\widehat{DAC} = \widehat{BAE} \text{ (cmt)}$$

$$AC = AE \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \triangle DAC = \triangle BAE \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow BE = CD \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

Ta có: $\widehat{A}_3 + \widehat{A}_1 + \widehat{BAC} + \widehat{A}_2 = 360^\circ$

$$\Leftrightarrow \widehat{A}_3 + 60^\circ + 90^\circ + 60^\circ = 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{A}_3 = 150^\circ = \widehat{DAC}$$

Xét $\triangle DAE$ và $\triangle BAE$ có

$$DA = BA \text{ (gt)}$$

$$\widehat{A}_3 = \widehat{DAC} \text{ (cmt)}$$

AE chung

$$\Rightarrow \triangle DAE = \triangle BAE \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow DE = BE$$

Vậy $\triangle BDE$ cân tại E

Ta có: $\triangle DAC = \triangle BAE$ (cmt)

$$\Rightarrow \widehat{E}_1 = \widehat{C}_1 \text{ (hai góc tương ứng)}$$

Lại có: $\widehat{I}_1 + \widehat{E}_2 + \widehat{ICE} = 180^\circ$ (tổng 3 góc trong $\triangle ICE$)

$$\Leftrightarrow \widehat{I}_1 + (\widehat{AEC} - \widehat{E}_1) + (\widehat{C}_1 + \widehat{C}_2) = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{I}_1 + 60^\circ - \widehat{E}_1 + \widehat{C}_1 + 60^\circ = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{I}_1 + 120^\circ = 180^\circ \left(\widehat{E}_1 = \widehat{C}_1 \right)$$

$$\Leftrightarrow \widehat{I}_1 = 60^\circ$$

Vì $\triangle DAE = \triangle BAE$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{E}_1 = \widehat{E}_2$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow EA$ là tia phân giác của \widehat{DEI} (1)

Vì $\begin{cases} \triangle DAC = \triangle BAE \\ \triangle DAE = \triangle BAE \end{cases} \Rightarrow \triangle DAC = \triangle DAE \Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow DA$ là tia phân giác của \widehat{EDC} (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A$ là giao điểm của 2 tia phân giác trong $\triangle DIE$

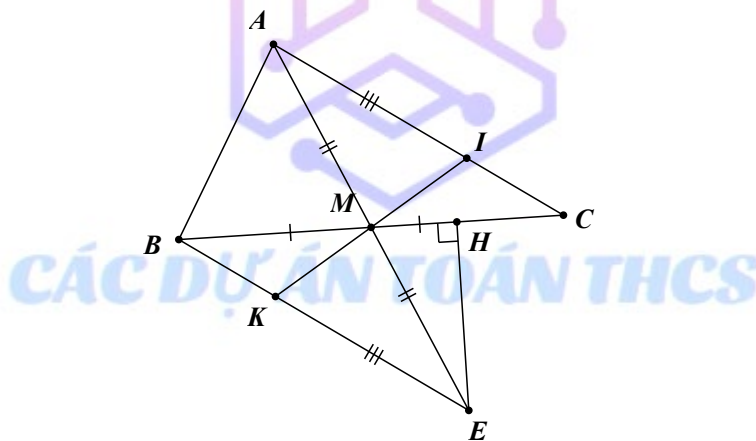
$\Rightarrow IA$ là đường phân giác thứ 3 trong $\triangle DIE$

Vậy IA là tia phân giác của \widehat{DIE} .

Câu 8. (HSG 7 Huyện 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC , M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Gọi I là một điểm trên AC , K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$. Từ E kẻ $EH \perp BC$ ($H \in BC$). Biết $\widehat{HBE} = 50^\circ$; $\widehat{MEB} = 25^\circ$. Tính \widehat{HEM} và \widehat{BME} .

Lời giải



Xét $\triangle AMC$ và $\triangle EMB$ có:

$$AM = EM \text{ (gt)}$$

$$\widehat{AMC} = \widehat{EMB} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$BM = MC \text{ (gt)}$$

Nên $\triangle AMC = \triangle EMB$ (c.g.c)

$$\Rightarrow AC = EB$$

Vì $\triangle AMC = \triangle EMB \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MEB}$, 2 góc ở vị trí so le trong được tạo bởi đường thẳng AC, EB cắt đường thẳng AE)

$$\Rightarrow AC \parallel BE$$

Xét $\triangle AMI$ và $\triangle EMK$ có: $AM = EM$ (gt)

$$\widehat{MAI} = \widehat{MEK} \text{ (}\triangle AMC = \triangle EMB\text{)}$$

$$AI = EK \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \Delta AMI = \Delta EMK (c.g.c)$$

$$\Rightarrow \widehat{AMI} = \widehat{EMK}$$

$$\text{Mà } \widehat{AMI} + \widehat{IME} = 180^\circ \text{ (Kề bù)}$$

$$\Rightarrow \widehat{EMK} + \widehat{IME} = 180^\circ \Rightarrow \text{ba điểm } I, M, K \text{ thẳng hàng.}$$

$$\text{Trong tam giác vuông } BHE \left(\widehat{H} = 90^\circ \right) \text{ có } \widehat{HBE} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{HEB} = 40^\circ$$

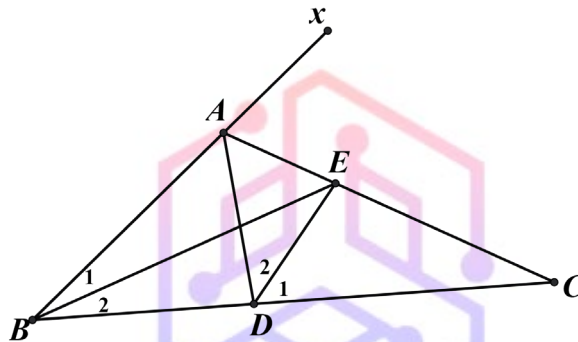
$$\Rightarrow \widehat{HEM} = \widehat{HEB} - \widehat{MEB} = 40^\circ - 25^\circ = 15^\circ$$

\widehat{BME} là góc ngoài tại đỉnh M của ΔHEM nên $\widehat{BME} = \widehat{HEM} + \widehat{MHE} = 15^\circ + 90^\circ = 105^\circ$
(định lý góc ngoài của tam giác)

Câu 9. (HSG 7 trường THCS Hiệp Thạnh 2016 - 2017)

Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^\circ$. Các đường phân giác AD và BE , tính số đo của góc BED

Lời giải



Gọi Ax là tia đối của tia AB ta có: $\widehat{BAD} = \widehat{DAC} = 60^\circ$

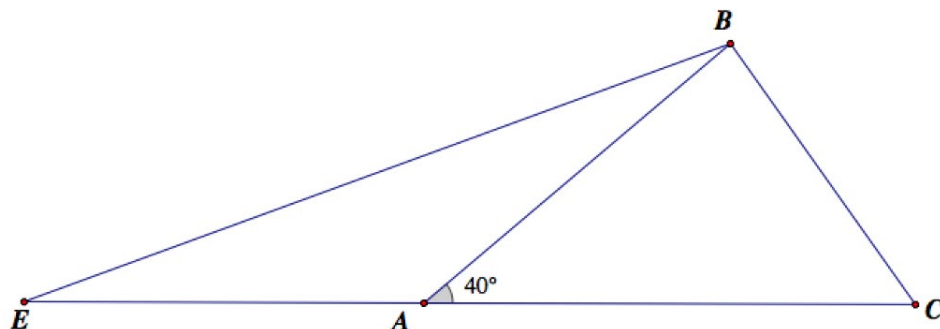
Xét ΔABD có AE là tia phân giác góc ngoài của đỉnh A ; BE là phân giác của góc B chúng cắt nhau tại E nên DE là phân giác góc ngoài của D ,

$$\text{Xét } \Delta BED \text{ có } \widehat{BED} = \widehat{D}_1 - \widehat{B}_2 = \frac{\widehat{ADC} - \widehat{ABC}}{2} = \frac{\widehat{BAD}}{2} = 30^\circ$$

Câu 10. (HSG 7 huyện Đức Thọ, 2022 - 2023)

Tam giác ABC có $x \widehat{A} = 40^\circ$; $\widehat{B} - \widehat{C} = 30^\circ$. Trên tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$. Tính số đo góc CBE .

Lời giải



Ta có: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ (tổng ba góc của tam giác)

$$\Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$$

$$\text{Mà } \widehat{B} - \widehat{C} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 85^\circ, \widehat{C} = 55^\circ$$

$$\text{Có: } \widehat{BAE} + \widehat{BAC} = 180^\circ \text{ (2 góc kề bù)}$$

$$\Rightarrow \widehat{BAE} = 180^\circ - \widehat{BAC} = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$$

Xét $\triangle BAE$ có: $AE = AB \Rightarrow \triangle BAE$ cân tại E

$$\Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{AEB} = \frac{180^\circ - \widehat{BAE}}{2} = \frac{180^\circ - 140^\circ}{2} = 20^\circ$$

$$\text{Vậy } \widehat{CBE} = \widehat{ABC} + \widehat{ABE} = 85^\circ + 20^\circ = 105^\circ.$$

Câu 11. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ năm 2021 - 2022)

Cho $\triangle ABC$ có độ dài ba cạnh là $BC = a, AC = b, AB = c$ thỏa mãn: $a^2 + b^2 > 5c^2$.

Chứng minh rằng: $\widehat{C} < 60^\circ$

Lời giải

Trong $\triangle ABC$: Giả sử $c \geq a > 0 \Rightarrow c^2 \geq a^2$

$$\text{Mà } a^2 + b^2 > 5c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 > 5a^2 \Rightarrow b^2 > 4a^2 \Rightarrow b > 2a \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Vì } c^2 \geq a^2 \Rightarrow c^2 + b^2 \geq a^2 + b^2 \text{ mà } a^2 + b^2 > 5c^2 \\ \Rightarrow c^2 + b^2 > 5c^2 \Rightarrow b^2 \geq 4c^2 \Rightarrow b > 2c \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 2b > 2a + 2c \Rightarrow b > a + c$ (vô lý vì a, b, c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác).

Vậy $c < a$

Lập luận tương tự có $c < b$

Suy ra c là cạnh ngắn nhất $\Rightarrow \widehat{C}$ nhỏ nhất

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{C} < \widehat{A} \\ \widehat{C} < \widehat{B} \end{cases} \Rightarrow 3\widehat{C} < \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow 3\widehat{C} < 180^\circ \Rightarrow \widehat{C} < 60^\circ$$

Vậy $\widehat{C} < 60^\circ$

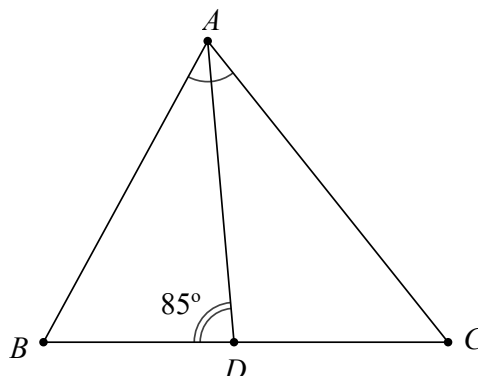
Câu 12. (HSG 7 huyện Quốc Oai 2016 - 2017)

Cho $\triangle ABC$, tia phân giác của \widehat{A} cắt BC tại D . Biết $\widehat{ADB} = 85^\circ$.

a) Tính $\widehat{B} - \widehat{C}$

b) Tính các góc của $\triangle ABC$ nếu $4\widehat{B} = 5\widehat{C}$

Lời giải



a) Xét $\triangle ADC$ có \widehat{ADB} là góc ngoài tại D

$$\text{Suy ra } \widehat{ADB} = \widehat{C} + \widehat{DAC} = 85^\circ \quad (1)$$

Xét $\triangle ADB$ có \widehat{ADC} là góc ngoài tại D

$$\text{Suy ra } \widehat{ADC} = \widehat{B} + \widehat{BAD} = 180^\circ - 85^\circ = 95^\circ$$

Mà $\widehat{DAC} = \widehat{BAD}$ (vì AD là tia phân giác của \widehat{A}), suy ra $\widehat{B} + \widehat{DAC} = 95^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{B} - \widehat{C} = 95^\circ - 85^\circ = 10^\circ$

b) Ta có $4.\widehat{B} = 5.\widehat{C}$, suy ra $\frac{\widehat{B}}{5} = \frac{\widehat{C}}{4}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{\widehat{B}}{5} = \frac{\widehat{C}}{4} = \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{5 - 4} = 10^\circ \quad (\text{Vì } \widehat{B} - \widehat{C} = 10^\circ)$$

$$\text{Suy ra: } \widehat{B} = 5.10^\circ = 50^\circ; \widehat{C} = 4.10^\circ = 40^\circ$$

Xét $\triangle ABC$ có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ (Định lí tổng ba góc trong tam giác)

$$\text{Suy ra } \widehat{A} = 180^\circ - \widehat{B} - \widehat{C} = 180^\circ - 50^\circ - 40^\circ = 90^\circ.$$

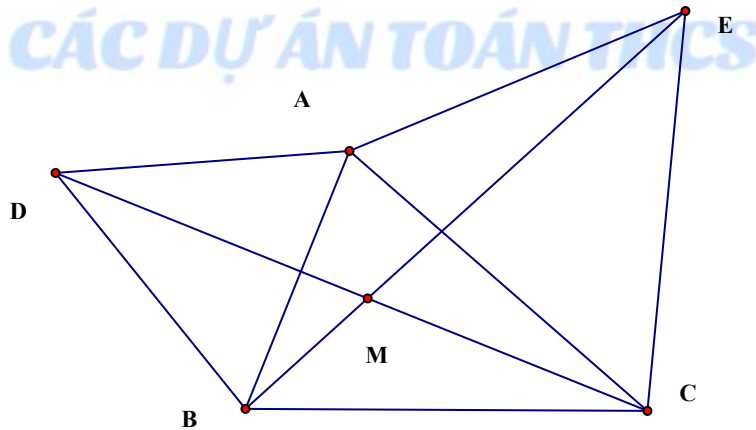
Câu 13. (HSG 7 huyện 2022 - 2023)

Cho tam giác nhọn ABC . Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE . Gọi M là giao điểm của DC và BE .

a) Chứng minh $\triangle ABE = \triangle ADC$

b) Tính số đo \widehat{BMC}

Lời giải



Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ADC$ có:

$$AD = AB \quad (\triangle ABD \text{ đều})$$

$$AC = AE \quad (\triangle ACE \text{ đều})$$

$$\widehat{BAE} = \widehat{DAC} \quad (= 60^\circ + \widehat{BAC})$$

$$\Rightarrow \triangle ABE = \triangle ADC \quad (\text{c.g.c})$$

$$\widehat{BMC} = \widehat{MCE} + \widehat{CEM} = \widehat{MCA} + \widehat{ACE} + \widehat{CEM}$$

$$= \widehat{AEM} + \widehat{ACE} + \widehat{CEM} = \widehat{AEC} + \widehat{ACE} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$$

Câu 14. (HSG 7 thị xã Kỳ Anh 2022 - 2023)

Tính số đo bằng độ của góc tạo bởi kim phút và kim giờ của một chiếc đồng hồ vào lúc đồng hồ chỉ 12 giờ 20 phút?

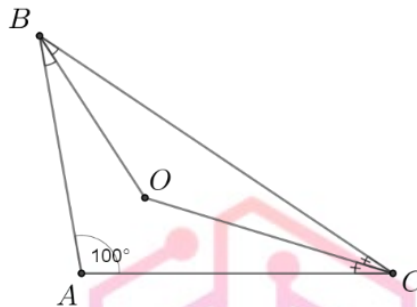
Lời giải

Tính từ 12 giờ đúng đến 12 giờ 20 thì kim phút quay được 120° , kim giờ quay được 10° .
 Vậy số đo của góc tạo bởi kim phút và kim giờ của một chiếc đồng hồ chỉ 12 giờ 20 phút là:
 $120^\circ - 10^\circ = 110^\circ$.

Câu 15. (HSG 7 thị xã Kỳ Anh 2022 - 2023)

Tam giác ABC có số đo góc A bằng 100° . Tia phân giác của góc ABC và tia phân giác của góc ACB cắt nhau tại O. Tính số đo của góc BOC?

Lời giải



Ta có $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$ (tổng ba góc trong một tam giác)

$$100^\circ + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$$

$$\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

Ta lại có: $\widehat{OBC} = \frac{\widehat{ABC}}{2}$ (vì BO là tia phân giác của \widehat{ABC})

$$\widehat{CBO} = \frac{\widehat{ACB}}{2} \text{ (tia CO là tia phân giác của } \widehat{ACB} \text{)}$$

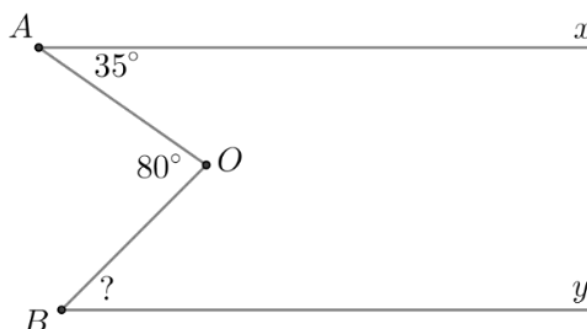
$$\text{Suy ra } \widehat{OBC} + \widehat{CBO} = \frac{\widehat{ABC}}{2} + \frac{\widehat{ACB}}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$

$$\widehat{OBC} + \widehat{CBO} + \widehat{BOC} = 180^\circ \text{ (tổng ba góc trong một tam giác)}$$

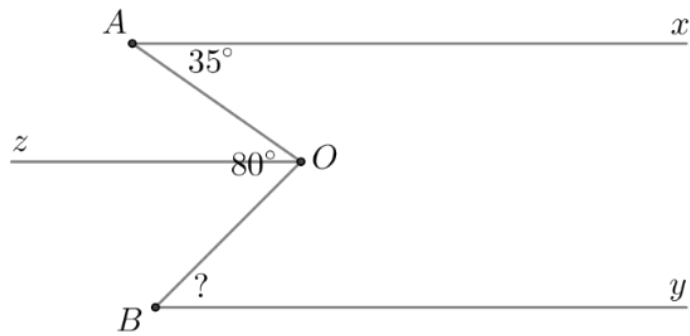
$$\text{Suy ra } \widehat{BOC} = 180^\circ - (\widehat{OBC} + \widehat{CBO}) = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ.$$

Câu 16. (HSG 7 huyện Yên Bình 2022 - 2023)

Trong hình bên, cho $Ax \parallel By$; Biết $\widehat{A} = 35^\circ$ và $\widehat{O} = 80^\circ$. Tính góc B.



Lời giải



Qua O kẻ $Oz \parallel Ax$

Vì $Oz \parallel Ax$ nên $\widehat{A} = \widehat{AOz} = 35^\circ$ (hai góc so le trong)

Mà $\widehat{AOz} + \widehat{BOz} = \widehat{AOB}$

$$\Rightarrow 35^\circ + \widehat{BOz} = 80^\circ \Rightarrow \widehat{BOz} = 45^\circ$$

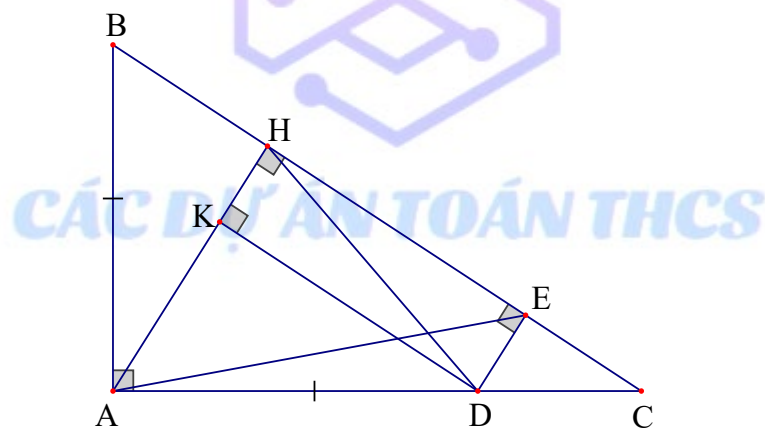
Do $Oz \parallel Ax$ mà $Ax \parallel By$ nên $Oz \parallel By$

$$\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{BOz} = 45^\circ \text{ (2 góc so le trong).}$$

Câu 17. (HSG 7 huyện Anh Sơn 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB < AC$. Vẽ $AH \perp BC$ ($H \in BC$), trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Vẽ $DE \perp BC$. Tính số đo góc AEC .

Lời giải



Kẻ $DK \perp AH, (K \in AH)$

Ta có: $DE \perp BC$; $KH \perp BC \Rightarrow DE \parallel KH$.

Xét tam giác KHD và tam giác EDH có :

$$\left. \begin{array}{l} AD \text{ chung} \\ \widehat{DHK} = \widehat{EDH} \text{ (slt)} \\ \widehat{DKH} = \widehat{HED} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta KHD = \Delta EDH \text{ (cạnh huyền- góc nhọn)}$$

Nên $DK = EH$.

$$\text{Vi: } \widehat{DAK} + \widehat{HAB} = 90^\circ; \widehat{HAB} + \widehat{HBA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DAK} = \widehat{HBA}$$

Xét tam giác ADK và tam giác AHB có :

$$\left. \begin{array}{l} AD = AB \\ \widehat{DAK} = \widehat{ABH} (\text{cmt}) \\ \widehat{DKA} = \widehat{AHB} = (90^\circ) \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ADK = \Delta BAH \text{ (cạnh huyền- góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow DK = AH \text{ mà } DK = EH \Rightarrow EH = HA.$$

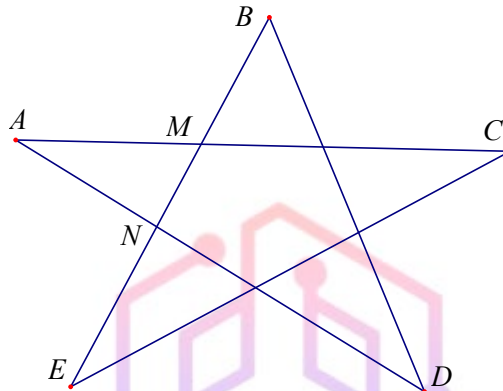
Xét ΔAHE có $\widehat{H} = 90^\circ$, $EH = AH$ nên ΔAHE vuông cân tại $H \Rightarrow \widehat{AEH} = 45^\circ$.

Mà $\widehat{AEH} + \widehat{CEA} = 180^\circ$ (hai góc kề bù) suy ra $\widehat{AEC} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

Câu 18. (HSG 7 huyện Nghi Xuân 2022-2023)

Trong hình bên, tính $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} + \widehat{E}$?

Lời Giải



Gọi giao điểm của BE và AC , AD lần lượt là M , N .

Ta có \widehat{AMN} là góc ngoài của tam giác $MCE \Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{C} + \widehat{E}$

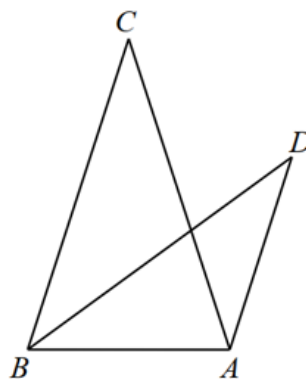
\widehat{ANM} là góc ngoài của tam giác $BND \Rightarrow \widehat{ANM} = \widehat{B} + \widehat{D}$

Xét ΔAMN có $\widehat{A} + \widehat{AMN} + \widehat{ANM} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} + \widehat{E} = 180^\circ$

Vậy $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} + \widehat{E} = 180^\circ$

Câu 19. (HSG 7 Đức Thọ, Hà Tĩnh 2021 – 2022)

Cho hình vẽ bên. Biết $BC \parallel AD$, $CA = CB$, $AB = AD$ và $\widehat{C} = \widehat{D}$. Tính số đo \widehat{BAC} .



Lời giải

Vì $BC \parallel AD$ nên $\widehat{C} = \widehat{CAD}$ (2 góc so le trong) (1)

Vì $CA = CB$ nên ΔCAB cân tại C suy ra $\widehat{CAB} = \frac{180^\circ - \widehat{C}}{2}$ (tính chất tam giác cân) (2)

Vì $AB = AD$ nên ΔDAB cân tại D suy ra $\widehat{ABD} = \widehat{D}$ (tính chất tam giác cân)

$$\text{Mà } \widehat{ABD} + \widehat{D} + \widehat{BAD} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2\widehat{D} + \widehat{BAD} = 180^\circ \Rightarrow 2\widehat{C} + \widehat{BAC} + \widehat{CAD} = 180^\circ \text{ (vì } \widehat{C} = \widehat{D} \text{) (3)}$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) suy ra } 2\widehat{C} + \frac{180^\circ - \widehat{C}}{2} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow 5\widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 36^\circ$$

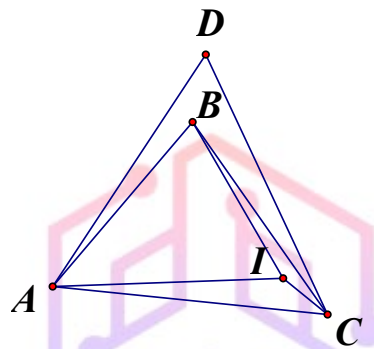
$$\Rightarrow \widehat{CAB} = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$$

$$\text{Vậy } \widehat{BAC} = 72^\circ$$

Câu 20. (HSG 7 Yên Mỹ, Hưng Yên 2021 – 2022)

Cho ΔABC cân tại B , có $\widehat{ABC} = 80^\circ$. Lấy điểm I nằm trong tam giác sao cho $\widehat{IAC} = 10^\circ$ và $\widehat{ICA} = 30^\circ$. Tính số đo \widehat{AIB} .

Lời giải



Do ΔABC cân tại B , có $\widehat{ABC} = 80^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BCA} = \frac{180^\circ - \widehat{ABC}}{2} \text{ (Số đo góc ở đáy của một tam giác cân)}$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BCA} = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ$$

Vì $\widehat{IAC} = 10^\circ$ và $\widehat{ICA} = 30^\circ$ nên $\widehat{IAB} = 40^\circ$ và $\widehat{ICB} = 20^\circ$

Vẽ tam giác đều ACD như hình vẽ

$$\text{Suy ra: } \widehat{BAD} = \widehat{BCD} = 10^\circ$$

Xét ΔABD và ΔDBC có:

$$\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = 10^\circ; AB = BC; AD = DC$$

$$\text{Nên } \Delta ABD = \Delta CBD \text{ (c-g-c)} \Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{CDB} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

Xét ΔABD và ΔAIC có: $AD = AC; \widehat{BAD} = \widehat{IAC} = 10^\circ; \widehat{BDA} = \widehat{ICA} = 30^\circ$

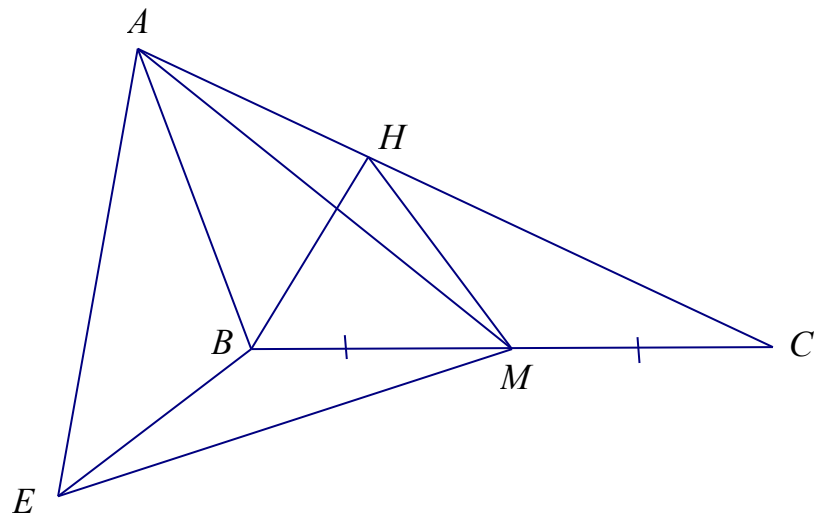
Nên $\Delta ABD = \Delta AIC$ (g-c-g) $\Rightarrow AB = AI$ (Hai cạnh tương ứng)

$$\text{Nên } \Delta AIB \text{ cân tại } A \text{ do đó: } \widehat{AIB} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 60^\circ$$

Câu 21. (HSG 7 Bắc Ninh 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC , đường trung tuyến AM , $\widehat{MAB} = 30^\circ$, $\widehat{C} = 30^\circ$. Tính số đo \widehat{ABC} biết \widehat{ABC} là góc tù.

Lời giải



Kẻ BH vuông góc với AC tại H suy ra $\Rightarrow \Delta BHC$ là tam giác nửa đều

$$\text{Có } BH = \frac{BC}{2}.$$

Có ΔBHC vuông tại H có trung tuyến $HM \Rightarrow HM = \frac{BC}{2} = BM$

Suy ra $MB = BH = MH$ (1) và ΔBMH đều $\Rightarrow \widehat{BMH} = 60^\circ$ hay $\widehat{BMA} + \widehat{HMA} = 60^\circ$ (*)

Vẽ ΔMAE đều (E và M khác phía đối với AB) $\Rightarrow \widehat{AME} = 60^\circ$ hay $\widehat{BME} + \widehat{AMB} = 60^\circ$ (**)

Từ (*) và (**) có $\widehat{BME} = \widehat{HMA}$

Do $\widehat{MAB} = 30^\circ$ suy ra AB vừa là phân giác vừa là trung trực của $EM \Rightarrow MB = EB$ (2)

Xét ΔAMH và ΔEMB có: $MH = MB$ (cmt), $\widehat{HME} = \widehat{BMA}$ (cmt), $MA = ME$ (cmt)

Suy ra $\Delta AMH = \Delta EMB$ (c.g.c) nên $AH = EB$ (3)

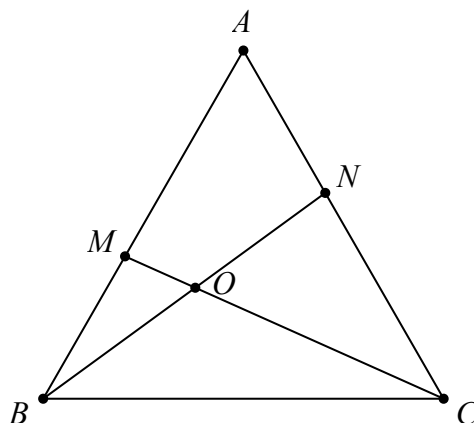
Từ (1), (2) và (3) suy ra $AH = BH \Rightarrow \Delta AHB$ vuông cân tại H nên $\widehat{ABH} = 45^\circ$

Từ đó $\widehat{ABC} = \widehat{ABH} + \widehat{HBC} = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ$.

Câu 22. (HSG 7 Điện Bàn 2022 - 2023).

Cho tam giác đều ABC . Trên các cạnh AB và AC lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho $AM = CN$ ($M \neq A, M \neq B; N \neq A, N \neq C$). Gọi O là giao điểm của BN và CM . Chứng tỏ rằng tổng $\widehat{MAN} + \widehat{MON}$ có giá trị không đổi.

Lời giải



Ta có: $AC = CB$ (vì $\triangle ABC$ đều)

$$\widehat{BCN} = \widehat{CAM} \text{ (} \triangle ABC \text{ đều)}$$

$$AM = CN \text{ (gt)}$$

Suy ra: $\triangle CBN = \triangle ACM$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{CBO} = \widehat{ACM}$

$$\Rightarrow \widehat{CBO} + \widehat{OCB} = \widehat{ACO} + \widehat{OCB} = \widehat{ACB} = 60^\circ$$

Trong tam giác BOC có $\widehat{BOC} = 180^\circ - (\widehat{CBO} + \widehat{OCB}) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$,

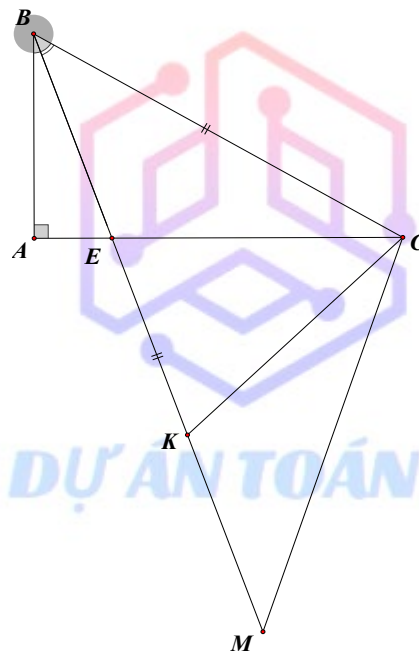
suy ra $\widehat{MON} = \widehat{BOC} = 120^\circ$ (đối đỉnh)

Từ đó ta có: $\widehat{MAN} + \widehat{MON} = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$ (không đối).

Câu 23. (HSG 7 huyện Hà Trung, tỉnh Thanh Hóa 2021 - 2022)

Cho tam giác ABC vuông tại A . Trên AC lấy điểm E sao cho $\widehat{EBC} = 2\widehat{ABE}$. Trên tia BE lấy điểm M sao cho $EM = BC$. So sánh \widehat{MBC} và \widehat{BMC} .

Lời giải



Trên tia BE lấy điểm K sao cho $BK = BC$ (1) suy ra $\triangle BKC$ cân tại B

$$\Rightarrow \widehat{BKC} = \widehat{BCK} = \frac{180^\circ - \widehat{CBK}}{2} = \frac{180^\circ}{2} - \frac{\widehat{CBK}}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{EBC} = 90^\circ - \widehat{ABE} = \widehat{AEB}$$

Mà $\widehat{AEB} = \widehat{CEK}$ (đối đỉnh)

$$\Rightarrow \widehat{BKC} = \widehat{CEK} \Rightarrow \triangle CKE \text{ cân tại } C \Rightarrow CE = CK \text{ và } \widehat{CEK} = \widehat{CKE}$$

$\Rightarrow \widehat{CEB} = \widehat{CKM}$ (cùng bù với hai góc bằng nhau).

Mà $BK = EM$ nên $BE = KM$

Xét $\triangle CEB$ và $\triangle CKM$ có

$$CE = CK \text{ (} \triangle CKE \text{ cân tại } C)$$

$$\widehat{CEB} = \widehat{CKM} \text{ (cmt)}$$

$$BE = KM \text{ (cmt)}$$

Do đó $\triangle CEB = \triangle CKM$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{MBC} = \widehat{BMC}$ (hai góc tương ứng)

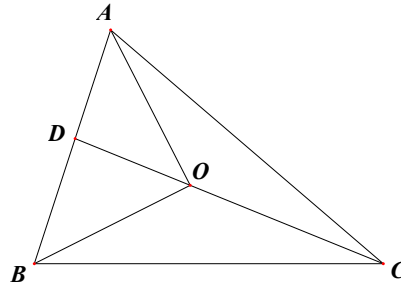
Câu 24. (HSG 7 huyện Tam Dương, tỉnh Vĩnh Phúc năm học 2021 - 2022)

Cho tam giác ABC , O là điểm nằm trong tam giác.

a) Chứng minh rằng $\widehat{BOC} = \widehat{A} + \widehat{ABO} + \widehat{ACO}$.

b) Biết $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}$ và tia BO là tia phân giác của \widehat{ABC} . Chứng minh rằng tia CO là tia phân giác của \widehat{ACB} .

Lời giải



a) Chứng minh rằng $\widehat{BOC} = \widehat{A} + \widehat{ABO} + \widehat{ACO}$.

Gọi D là giao điểm của CO và cạnh AB

Xét $\triangle BOD$ có $\widehat{BOC} = \widehat{DBO} + \widehat{BDO}$ (tính chất góc ngoài của tam giác)

$\triangle ADC$ có $\widehat{BDC} = \widehat{A} + \widehat{ACO}$ (tính chất góc ngoài của tam giác)

Hay $\widehat{BDO} = \widehat{A} + \widehat{ACO}$

Suy ra $\widehat{BOC} = \widehat{DBO} + \widehat{BDO} = \widehat{DBO} + \widehat{A} + \widehat{ACO}$

Vậy $\widehat{BOC} = \widehat{A} + \widehat{ABO} + \widehat{ACO}$.

b) Nếu $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}$ thì $\widehat{BOC} = \widehat{A} + 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$.

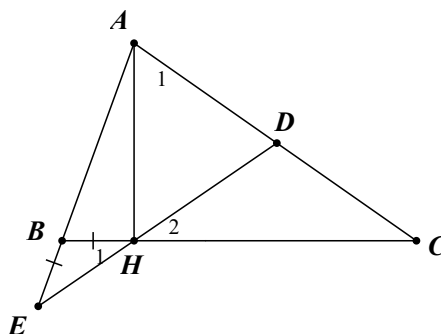
Xét $\triangle BOC$ ta có:

$$\widehat{OCB} = 90^\circ - \frac{\widehat{A} + \widehat{ABC}}{2} = 90^\circ - \frac{180^\circ - \widehat{ACB}}{2} = \frac{\widehat{ACB}}{2}.$$

Câu 25. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2017- 2018)

Cho tam giác ABC có $\widehat{B} < 90^\circ$ và $\widehat{B} = 2\widehat{C}$. Kẻ đường cao AH . Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $BE = BH$. Đường thẳng HE cắt AC tại D . Chứng minh $\widehat{BEH} = \widehat{ACB}$

Lời giải



Tam giác BEH cân tại B nên $\widehat{E} = \widehat{H}_1$

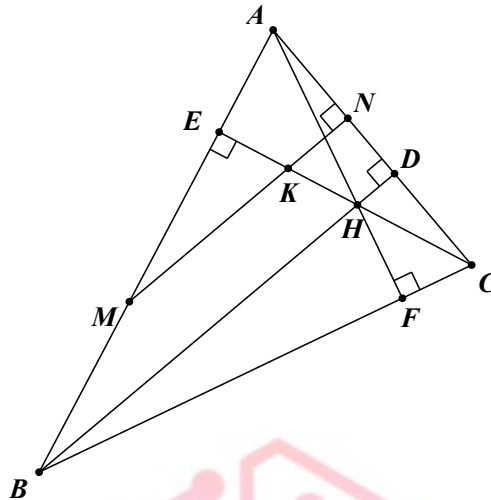
mà $2\widehat{C} = \widehat{ABC} = \widehat{E} + \widehat{H}_1 = 2\widehat{E}$

Nên $\widehat{BEH} = \widehat{ACB}$

Câu 26. (HSG 7 trường Trần Hưng Đạo 2017- 2018)

Cho tam giác nhọn ABC có $AB > AC$, ba đường cao BD , CE và AF cắt nhau tại H . Lấy điểm M trên cạnh AB sao cho $AM = AC$. Gọi N là hình chiếu của M trên AC ; K là giao điểm của MN và CE . Chứng minh hai góc KAH và MCB bằng nhau.

Lời giải



ΔAMC có 2 đường cao MN và CE cắt nhau tại K

Nên K là trực tâm của ΔAMC

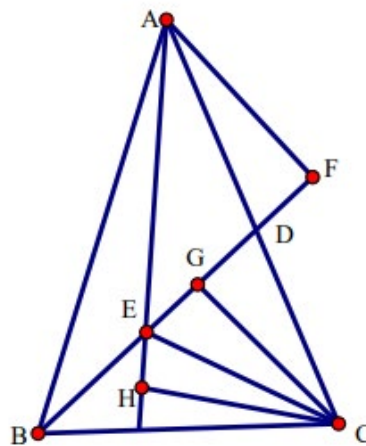
Suy ra AK là đường cao thứ 3

hay $AK \perp MC \Rightarrow \widehat{KAH} = \widehat{MCB}$.

Câu 27. (HSG 7 Vĩnh Phúc- năm học 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC cân tại A , gọi D là trung điểm của AC . Trên đoạn BD lấy điểm E sao cho $\widehat{DAE} = \widehat{ABD}$. Chứng minh rằng $\widehat{DAE} = \widehat{ECB}$.

Lời giải



Vẽ $AF \perp DB$; $CG \perp DB$; $CH \perp AE$

Xét ΔABF và ΔCAH có: $\widehat{AFB} = \widehat{AHC} = 90^\circ$, $AB = AC$ (gt), $\widehat{ABF} = \widehat{CAH}$ (gt)

Suy ra: $\Delta ABF = \Delta CAH$ (cạnh huyền – góc nhọn) suy ra $AF = CH$.

Xét ΔADF và ΔCDG có: $\widehat{AFD} = \widehat{CGD} = 90^\circ$, $AD = DC$ (gt), $\widehat{ADF} = \widehat{CDG}$ (đối đỉnh)

Suy ra $\Delta ADF = \Delta CDG$ (cạnh huyền – góc nhọn) Suy ra $AF = CG$.

Từ đó ta có $CH = CG$

Xét $\triangle CEH$ và $\triangle CEG$ có : $\widehat{CHE} = \widehat{CGE} = 90^\circ$, CE là cạnh chung, $CH = CG$ (cmt)

Suy ra $\triangle CEH = \triangle CEG$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông) $\Rightarrow \widehat{CEH} = \widehat{CEG}$

Mà $\widehat{CEG} = \widehat{EBC} + \widehat{ECB}$; $\widehat{CEH} = \widehat{EAC} + \widehat{ECA}$

Do đó $\widehat{EBC} + \widehat{ECB} = \widehat{EAC} + \widehat{ECA}$ (1)

Mặt khác: $\widehat{EBA} + \widehat{EBC} = \widehat{ECB} + \widehat{ECA}$ (2)

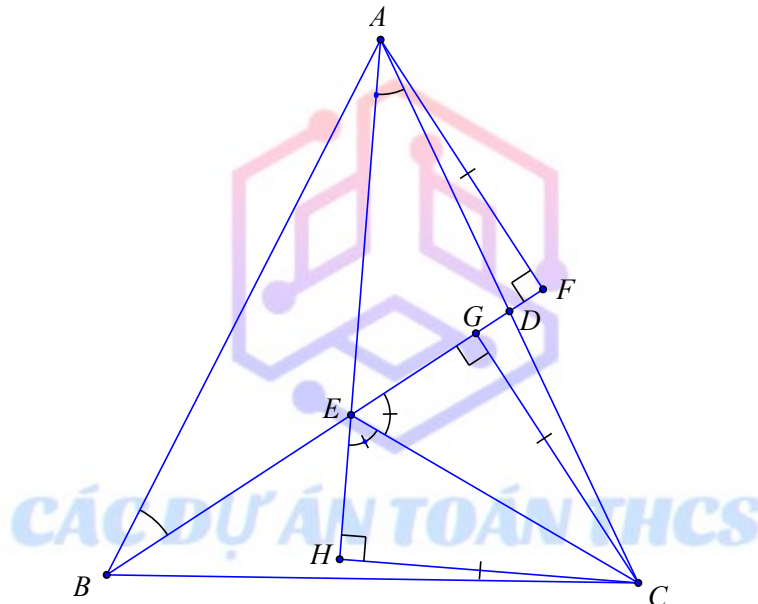
Lấy (1) trừ (2) theo vế ta có: $\widehat{ECB} - \widehat{EBA} = \widehat{EAC} - \widehat{ECB} = \widehat{EBA} - \widehat{ECB} \Rightarrow \widehat{EBA} = \widehat{ECB}$

Mà $\widehat{DAE} = \widehat{ABD}$ nên $\widehat{DAE} = \widehat{ECB}$

Câu 28. (HSG 7 huyện Lục Nam năm 2020 - 2021)

Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Trên đường trung tuyến BD lấy điểm E sao cho $\widehat{DAE} = \widehat{ABD}$ (E nằm giữa B và D). Chứng minh rằng $\widehat{DAE} = \widehat{ECB}$.

Lời giải



Vẽ AF vuông góc BC , CG vuông góc AB , CH vuông góc với AB . Ta có

$\triangle ABF = \triangle CAH$ (cạnh huyền – góc nhọn). Suy ra: $AF = CH$.

$\triangle ADF = \triangle CDG$ (ch – gn) suy ra $AF = CG$.

Từ đó ta có $CH = CG$.

$\triangle CEH = \triangle CEG$ (ch-cgv)

$\Rightarrow \widehat{CEH} = \widehat{CEG}$

Mà $\widehat{CEG} = \widehat{EBC} + \widehat{ECB}$; $\widehat{CEH} = \widehat{EAC} + \widehat{ECA}$;

Do đó: $\widehat{EBC} + \widehat{ECB} = \widehat{EAC} + \widehat{ECA}$ (1)

Mặt khác: $\widehat{EBA} + \widehat{EBC} = \widehat{ECB} + \widehat{ECA}$

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta có: $\widehat{EBC} + \widehat{ECB} - \widehat{EBA} - \widehat{EBC} = \widehat{EAC} + \widehat{ECA} - \widehat{ECB} - \widehat{ECA}$

$\widehat{ECB} - \widehat{EBA} = \widehat{EAC} - \widehat{ECB} \Rightarrow \widehat{ECB} - \widehat{EBA} = \widehat{EBA} - \widehat{ECB}$

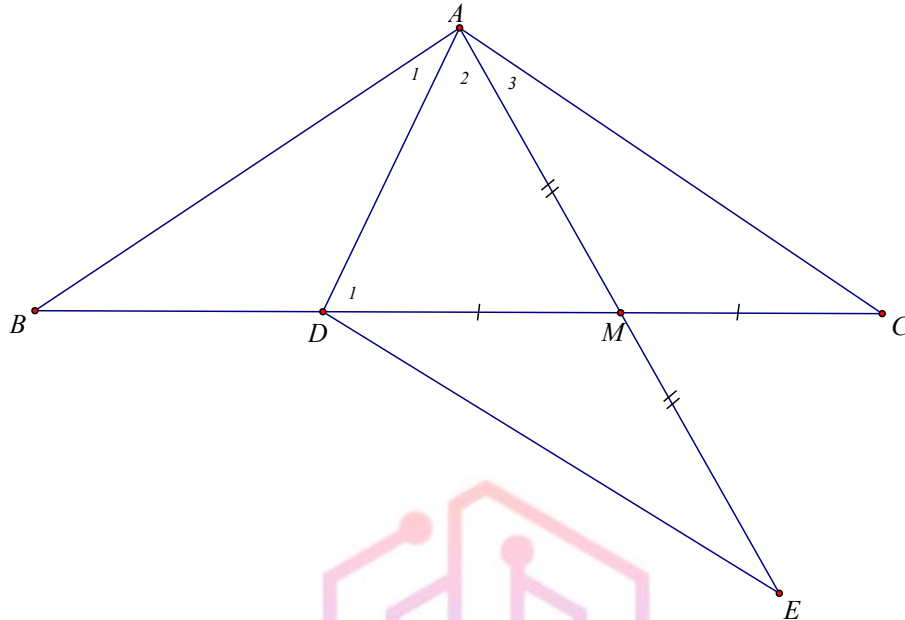
$\Rightarrow \widehat{EBA} = \widehat{ECB}$

$\Rightarrow \widehat{DAE} = \widehat{ECB}$ (đpcm).

Câu 29. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc, năm học 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC cân. Trên cạnh đáy BC lấy điểm D sao cho $CD = 2BD$. Chứng minh rằng $\widehat{BAD} < \frac{1}{2}\widehat{CAD}$

Lời giải



Gọi M là trung điểm của DC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $MA = ME$

Ta có hai tam giác AMC và EMD bằng nhau

Vì $MD = MC$, $MA = ME$, $\widehat{AMC} = \widehat{EMD}$

Nên $DE = DC$, $\widehat{A_3} = \widehat{DEM}$

Mặt khác: $\widehat{D_1} = \widehat{B}$ (tính chất góc ngoài của tam giác)

Mà $\widehat{B} = \widehat{C}$ (vì $\triangle ABC$ cân, đáy BC) nên $\widehat{D_1} > \widehat{C} \Rightarrow AC > AD$

Từ đó $DE > DA$

$\Rightarrow \widehat{A_2} > \widehat{DEM}$

$\Rightarrow \widehat{A_2} > \widehat{A_3}$

Vì $\widehat{A_1} = \widehat{A_3}$ (do $\triangle ABD = \triangle ACM$)

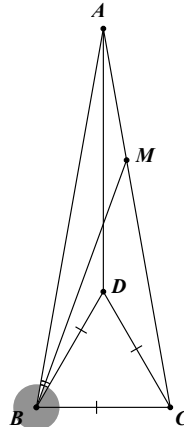
Nên $\widehat{A_2} + \widehat{A_3} > \widehat{A_1} + \widehat{A_3}$ hay $2\widehat{A_1} < \widehat{A_2} + \widehat{A_3}$

$\Rightarrow \widehat{BAD} < \frac{1}{2}\widehat{CAD}$.

Câu 30. (HSG 7 Huyện 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} = 20^\circ$, vẽ tam giác đều DBC (D nằm trong $\triangle ABC$). Tia phân giác của \widehat{ABD} cắt AC tại M . Chứng minh tia AD là phân giác của \widehat{BAC} .

Lời giải



Chứng minh $\triangle ADB = \triangle ADC$ (c.c.c)

$$\Rightarrow \widehat{DAB} = \widehat{DAC}, \text{ do đó } \widehat{DAB} = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ$$

Vậy tia AD là phân giác của \widehat{BAC} .



CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS

CD14: PHẦN HÌNH HỌC

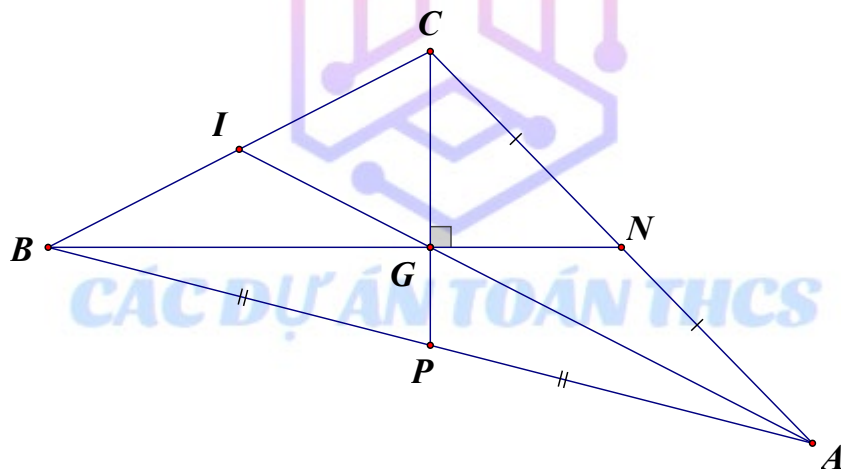
Dạng toán: Tính số đo góc, chứng minh góc bằng nhau, so sánh góc
Dạng toán: Tính độ dài đoạn thẳng, chứng minh đoạn thẳng bằng nhau
Dạng toán: Chứng minh tam giác bằng nhau
Dạng toán: Chứng minh ba điểm thẳng hàng
Dạng toán: Bất đẳng thức tam giác
Dạng toán: Chứng minh song song, vuông góc
Dạng toán: Hình khối trong thực tiễn
Dạng toán: Bài toán chứng minh tổng hợp

Dạng toán: Tính độ dài đoạn thẳng, chứng minh đoạn thẳng bằng nhau

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Cho hình vẽ, biết $\triangle ABC$ có hai đường trung tuyến BN, CP vuông góc với nhau tại G . Tia AG cắt BC tại I . $BC = 5\text{cm}$. Độ dài GA là:



- A. 10cm B. 2,5cm C. 5cm D. 3cm

Lời giải

Chọn C

Theo đề ta có tam giác BCG vuông tại G và I là trung điểm BC .

$$\text{Nên } IC = IB = IG = \frac{BC}{2}$$

Mà AI là trung tuyến nên $GA = 2 \cdot IG = BC = 5\text{cm}$

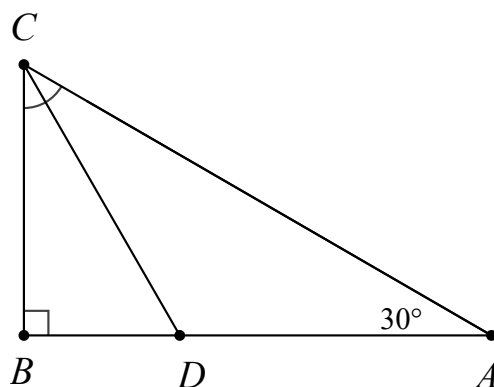
Câu 2. (HSG 7 huyện Tân An 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC vuông tại B , $AB = 6$, $\hat{A} = 30^\circ$. Phân giác góc C cắt AB tại D . Khi đó độ dài đoạn thẳng BD và AD lần lượt là:

- A. 2; 4 B. 3; 3 C. 4; 2 D. 1; 5

Lời giải

Chọn A



+) Xét $\triangle ABC$ vuông tại B có $\widehat{ABC} = 30^\circ$

$$\Rightarrow CB = \frac{1}{2} AC$$

hay $AC = 2CB$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B có $AC^2 = BC^2 + AB^2$ (định lí pythagore)

$$\Rightarrow (2BC)^2 = BC^2 + 6^2$$

$$4BC^2 - BC^2 = 36$$

$$3BC^2 = 36$$

$$BC^2 = 12$$

+) Xét $\triangle ABC$ vuông tại B có $\widehat{BAC} + \widehat{BCA} = 90^\circ$

$$30^\circ + \widehat{BCA} = 90^\circ$$

$$\widehat{BCA} = 60^\circ$$

Vì CD là phân giác của \widehat{BCA} (gt)

$$\Rightarrow \widehat{BCD} = \frac{1}{2} \widehat{BCA} = 30^\circ$$

+) Xét $\triangle DBC$ vuông tại B có $\widehat{BCD} = 30^\circ$

$$\Rightarrow BD = \frac{1}{2} CD$$

hay $CD = 2BD$

+) Xét $\triangle DBC$ vuông tại B có $CD^2 = BC^2 + BD^2$ (định lí pythagore)

$$\Rightarrow (2BD)^2 = 12^2 + BD^2$$

$$4BD^2 - BD^2 = 12$$

$$3BD^2 = 12$$

$$BD^2 = 4$$

$$BD = 2 \quad (BD > 0)$$

Vì: $BD + DA = AB$

$$\Rightarrow 2 + AD = 6$$

$$\Rightarrow AD = 4$$

Vậy $BD = 2$; $AD = 4$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Tân An 2017 - 2018)

Cho tam giác DEF có $\widehat{E} = \widehat{F}$. Tia phân giác của góc D cắt EF tại I . Ta có:

A. $\triangle DIE = \triangle DIF$

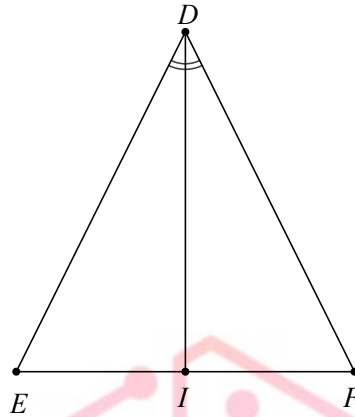
B. $DE = DF, \widehat{IDE} = \widehat{IDF}$

C. $IE = IF, DI = EF$

D. Cả A, B đều đúng

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\widehat{E} = \widehat{F}$ (gt) $\Rightarrow \triangle DEF$ cân tại D

Xét $\triangle DIE$ và $\triangle DIF$ có:

DI : cạnh chung

$DE = DF$ ($\triangle DEF$ cân tại D)

$\widehat{EDI} = \widehat{FDI}$ (DI là tia phân giác)

$\Rightarrow \triangle DIE = \triangle DIF$ (c - g - c)

$\Rightarrow IE = IF$ (hai cạnh tương ứng)

Câu 4. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ cân tại A , trên cạnh BC lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho $BM = MN = NC$. Gọi H là trung điểm của BC . Biết $AB = 5\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$, độ dài AM là:

A. $\sqrt{17}$ cm

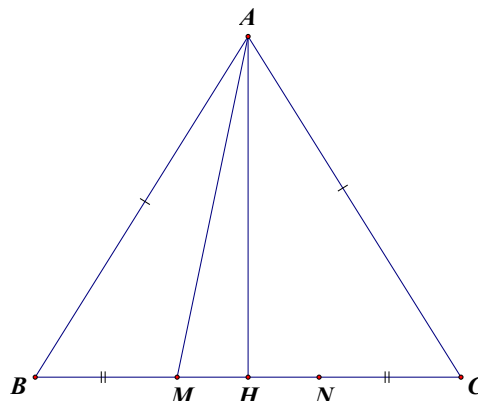
B. 4 cm

C. $\sqrt{15}$ cm

D. $\sqrt{14}$ cm

Lời giải

Chọn C



Tam giác ABH vuông tại H , nên $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = 4$

Mặt khác $BH = \frac{BC}{2}$ và $BM = \frac{BC}{3}$ nên $MH = \frac{BH}{3} = \frac{BC}{6} = \frac{6}{6} = 1$

Tam giác AMH vuông tại H , nên $AM = \sqrt{AH^2 + MH^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$

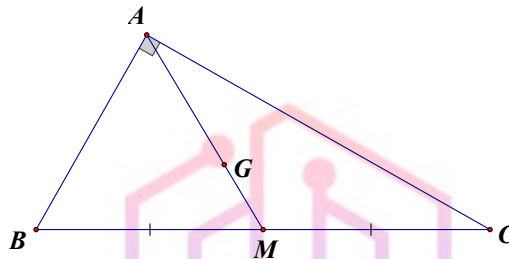
Câu 5. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Cho ΔABC vuông tại A , $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$. Gọi G là trọng tâm của tam giác. Độ dài AG là:

- A. $\frac{11}{3}$ cm B. 5cm C. $\frac{10}{3}$ cm D. 3cm

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm của BC , nên AM là trung tuyến

Mà tam giác ABC vuông tại A

Suy ra $AM = \frac{BC}{2}$

Theo Pitago: $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 36 + 64 = 100$

Suy ra $BC = 10$

Mặt khác G là trọng tâm của tam giác ABC , nên từ đó ta có:

$$AG = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{BC}{2} = \frac{10}{3}$$

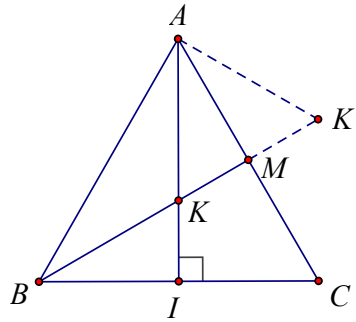
Câu 6. (HSG 7 huyện Sơn Động, 2022 - 2023)

Cho ΔABC đều độ dài cạnh là 6 cm. Kẻ AI vuông góc với BC tại I , đường thẳng BM ($M \in AC$) cắt AI tại K . biết $MA = 3$ cm và $KI = \sqrt{3}$ cm. Độ dài cạnh AI là

- A. $3\sqrt{2}$ cm. B. 3 cm. C. $2\sqrt{3}$ cm. D. $6\sqrt{3}$ cm.

Lời giải

Chọn C



Vì $\triangle ABC$ đều độ dài cạnh là 6 cm mà $M \in AC$ và $MA = 3$ cm nên M là trung điểm AM .

Suy ra $BM \perp AC$. Ta dễ dàng chứng minh được $\triangle AMK = \triangle BIK$ (g-c-g).

Do đó: $KM = KI = \sqrt{3}$ cm.

Xét $\triangle AMK$ vuông tại M có $\widehat{MAK} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$.

Suy ra $\triangle AMK$ chính là nửa tam giác đều (lấy K' trên tia đối của tia MK sao cho $MK' = MK$ ta được ngay $\triangle AKK'$ đều). Do đó: $AK = 2KM = 2\sqrt{3}$ cm.

Vậy $AI = AK + IK = 3\sqrt{3}$ cm.

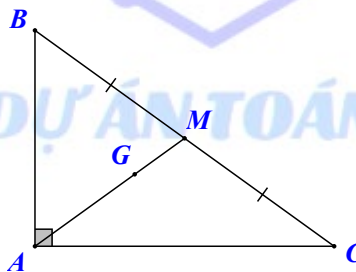
Câu 7. (HSG 7 huyện Tam Nông, 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC vuông tại A , trọng tâm G , $BC = 6$ cm. Khi đó AG bằng

- A. 1,5cm. B. 2cm. C. 1cm. D. 3cm.

Lời giải

Chọn B



Do tam giác ABC vuông tại A nên $AM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ (cm)

Suy ra $AG = \frac{2}{3} \cdot AM = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2$ (cm)

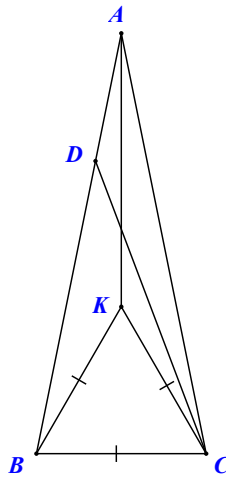
Câu 8. (HSG 7 huyện Tam Nông, 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC cân tại A , $AB = AC = x$, $BC = 2$ và $\widehat{A} = 20^\circ$. Trên cạnh AB lấy D sao cho $\widehat{ACD} = 10^\circ$. Độ dài AD bằng

- A. $\frac{x}{2}$. B. \sqrt{x} . C. 1. D. 2

Lời giải

Chọn D



Vẽ điểm K nằm cùng phía với A đối với BC sao cho tam giác KBC là tam giác đều.

$$\text{Vì } \widehat{A} = 20^\circ \text{ nên } \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ$$

Suy ra $\widehat{KCB} < \widehat{ACB}$ ($60^\circ < 80^\circ$) do đó K nằm trong tam giác ABC

Kẻ AK .

Xét $\triangle AKB$ và $\triangle AKC$ có: $AB = AC (= x)$, $BK = CK$ (cạnh của tam giác đều), KA là cạnh chung.

$$\Rightarrow \triangle AKB = \triangle AKC \text{ (c.c.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{KAB} = \widehat{KAC} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = 10^\circ$$

$$\text{Ta có } \widehat{KCA} = \widehat{KCB} - \widehat{ACB} = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$$

Xét $\triangle ADC$ và $\triangle CKA$: AC là cạnh chung, $\widehat{DAC} = \widehat{KCA} (= 20^\circ)$, $\widehat{ACD} = \widehat{KAC} (= 10^\circ)$

$$\Rightarrow \triangle ADC = \triangle CKA \text{ (g.c.g)}$$

$$\text{Do đó } AD = CK \Rightarrow AD = BC = 2$$

Câu 9. (HSG 7 Tam Nông, Phú Thọ 2021-2022)

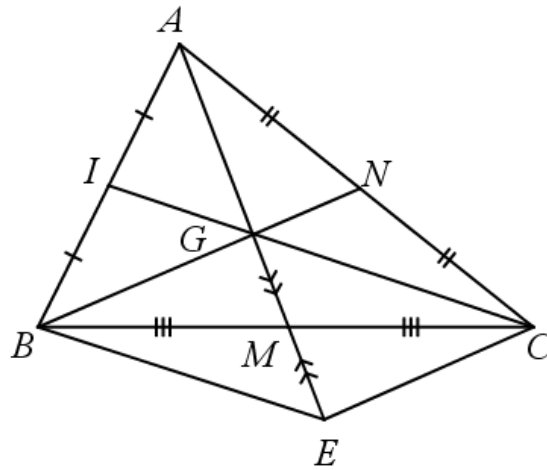
Tam giác ABC có ba đường trung tuyến AM, BN, CP . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E

sao cho $ME = \frac{1}{3}AM$. Khi đó giá trị $\frac{EB + EC + EA}{PC + BN + 2AM}$ là

- A. 2. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Tam giác ABC có ba đường trung tuyến AM, BN, CP , gọi G là trọng tâm của ΔABC

Suy ra $GC = \frac{2}{3}PC$, $GB = \frac{2}{3}BN$, $GA = \frac{2}{3}AM$, $GM = \frac{1}{3}AM$

+) Có $GA = \frac{2}{3}AM$, $GM = \frac{1}{3}AM$, $ME = \frac{1}{3}AM \Rightarrow GM = ME$ và $AE = 2AG = \frac{2}{3} \cdot 2AM$ (1)

+) Xét ΔBME và ΔCMG có
 $BM = MC$ (vì M là trung điểm BC)

$\widehat{BME} = \widehat{CMG}$ (hai góc đối đỉnh)

$ME = GM$ (GT)

Suy ra $\Delta BME = \Delta CMG$ (c.g.c) $\Rightarrow BE = GC$ (hai cạnh tương ứng)

mà $GC = \frac{2}{3}PC \Rightarrow BE = \frac{2}{3}PC$ (2)

+) Xét ΔBGM và ΔCEM có

$BM = MC$ (vì M là trung điểm BC)

$\widehat{BMG} = \widehat{CME}$ (hai góc đối đỉnh)

$ME = GM$

Suy ra $\Delta BMG = \Delta CME$ (c.g.c) $\Rightarrow BG = EC$ (hai cạnh tương ứng)

mà $GB = \frac{2}{3}BN \Rightarrow EC = \frac{2}{3}BN$ (3)

+) Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{EB}{PC} = \frac{EC}{BN} = \frac{AE}{2AM} = \frac{2}{3}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta được:

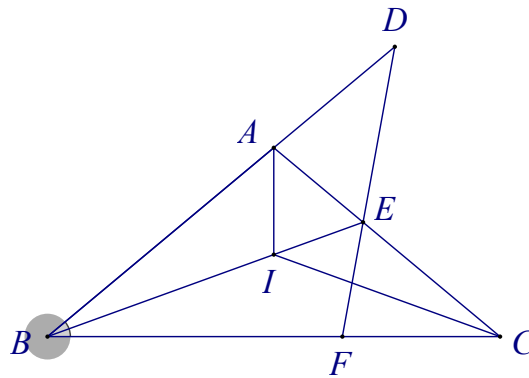
$$\frac{EB}{PC} = \frac{EC}{BN} = \frac{AE}{2AM} = \frac{EB + EC + EA}{PC + BN + 2AM} = \frac{2}{3}$$

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Lập Thạch – Vĩnh Phúc 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC cân tại A , có $\hat{A} = 100^\circ$ và I là giao điểm các đường phân giác trong của tam giác ABC . Trên tia BA lấy điểm D sao cho $BD = BC$. Đường thẳng BI cắt AC tại E , DE cắt BC tại F . Chứng minh rằng $FB = FD$.

Lời giải



$$\Delta ABC \text{ cân tại } A \text{ có } \widehat{A} = 100^\circ \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = 40^\circ \quad (1)$$

Xét ΔBED và ΔBEC có

BE chung

$$\widehat{EBC} = \widehat{EBD} \text{ (do } BE \text{ là phân giác } \widehat{B} \text{)}$$

$$BD = BC \text{ (gt)}$$

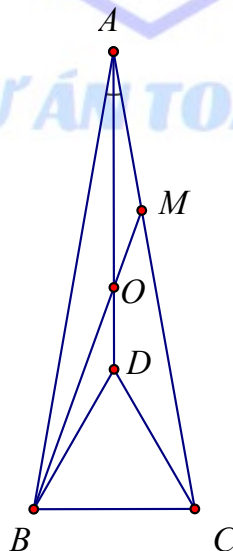
$$\text{Do đó } \Delta BED = \Delta BEC \text{ (c.g.c) suy ra } \widehat{BDE} = \widehat{BCE} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BDE} = \widehat{EBD} (= 40^\circ)$. Suy ra ΔFBD cân tại F suy ra $FB = FD$

Câu 2. (HSG 7 huyện Sơn Động 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 20^\circ$. Vẽ tam giác đều BCD sao cho điểm D nằm trong tam giác ABC . Tia phân giác của \widehat{ABD} cắt AC tại M . Chứng minh $AM = BC$.

Lời giải



Xét ΔADB và ΔADC có:

$AB = AC$ (do ΔABC cân tại A), $BD = CD$ (do ΔBCD đều), AD chung.

Suy ra: $\Delta ADB = \Delta ADC$ (c.c.c). Suy ra $\widehat{DAB} = \widehat{DAC}$ (hai góc tương ứng).

Do đó: $\widehat{DAB} = 20^\circ : 2 = 10^\circ$.

Vì ΔABC cân tại A , mà $\widehat{BAC} = 20^\circ$ (giả thiết) nên $\widehat{ABC} = (180^\circ - 20^\circ) : 2 = 80^\circ$.

Vì ΔBCD là tam giác đều nên $\widehat{DBC} = 60^\circ$.

Tia BD nằm giữa hai tia BA và BC suy ra $\widehat{ABD} = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$.

Tia BM là phân giác của \widehat{ABD} nên $\widehat{ABM} = 10^\circ$.

Xét tam $\triangle ABM$ và $\triangle BAD$ có:

$$\widehat{ABM} = \widehat{DAB} = 10^\circ$$

AB cạnh chung

$$\widehat{BAM} = \widehat{ABD} = 20^\circ.$$

Suy ra: $\triangle ABM = \triangle BAD$ (g.c.g).

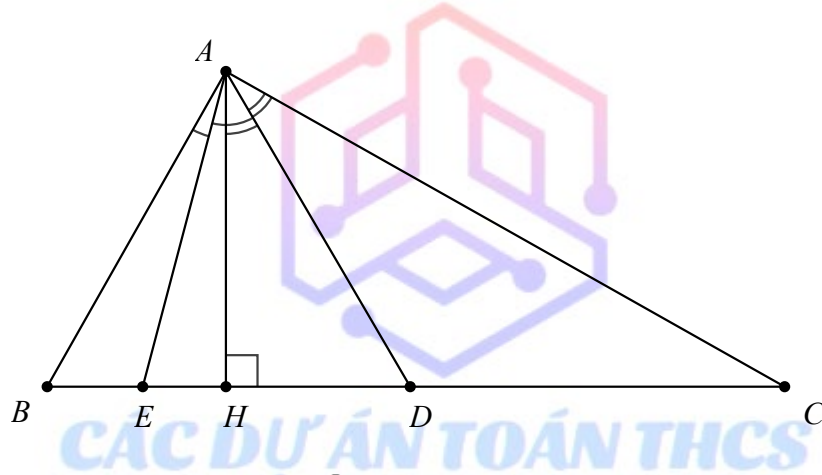
Suy ra $AM = BD$, mà $BD = BC$ (do $\triangle ABC$ đều) nên $AM = BC$.

Câu 3. (HSG 7 trường Bùi Hữu Duyên, huyện Hưng Hà; trường Đồng Xuân, huyện Phúc Yên 2022 - 2023; huyện Lục Nam 2018 - 2019)

Cho $\triangle ABC$ có $\hat{A} = 90^\circ$. Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Tia phân giác của \widehat{HAC} cắt cạnh BC ở điểm D và tia phân giác của \widehat{HAB} cắt cạnh BC ở E .

Chứng minh rằng $AB + AC = BC + DE$.

Lời giải



+ Vì \hat{B} và \widehat{HAC} cùng phụ với \widehat{BAH} nên $\hat{B} = \widehat{HAC}$

$$\text{Suy ra } \widehat{AEC} = \widehat{ABC} + \widehat{BAE} = (\widehat{HAD} + \widehat{DAC}) + \widehat{EAH} = \widehat{EAC}$$

Suy ra $\triangle AEC$ cân tại $C \Rightarrow AC = CE$ (*)

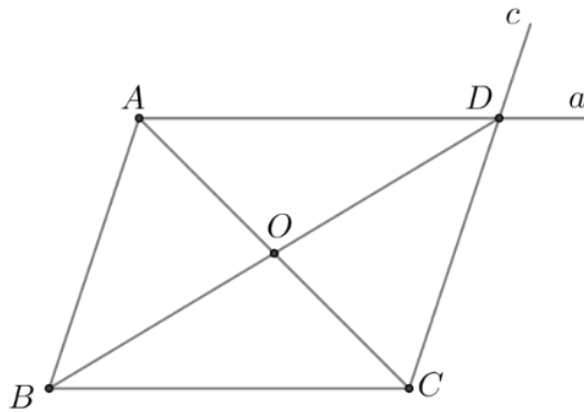
+ Tương tự chứng minh được $AB = BD$ (**)

+ Từ (*) và (**) $\Rightarrow AB + AC = BD + EC = ED + BC$

Câu 4. (HSG 7 trường THCS-THPT Tri Thức 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC , qua A kẻ đường thẳng a song song với BC , qua C kẻ đường thẳng c song song với AB , a cắt c tại D . Gọi O là giao điểm của AC và BD . Chứng minh $OC = OA$.

Lời giải



Xét $\triangle ABD$ và $\triangle CDB$ có:

$$\widehat{ABD} = \widehat{CDB} \text{ (so le trong vì } c // AB \text{)}$$

BD cạnh chung

$$\widehat{ADB} = \widehat{CBD} \text{ (so le trong vì } a // BC \text{)}$$

Suy ra $\triangle ABD = \triangle CDB$ (g - c - g)

$$\Rightarrow AB = CD \text{ (2 cạnh tương ứng)}$$

Xét $\triangle AOB$ và $\triangle COD$ có:

$$\widehat{OAB} = \widehat{OCD} \text{ (so le trong vì } a // BC \text{)}$$

$$AB = CD \text{ (cmt)}$$

$$\widehat{OBA} = \widehat{OCD} \text{ (so le trong vì } c // AB \text{)}$$

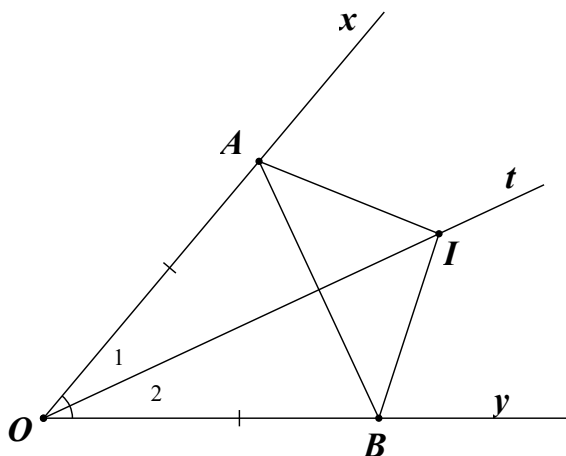
Suy ra $\triangle AOB = \triangle COD$ (g - c - g)

$$\Rightarrow OA = OC \text{ (2 cạnh tương ứng)}$$

Câu 5. (HSG 7 huyện Như Thanh, tỉnh Thanh Hóa năm học 2021 - 2022)

Cho góc nhọn xOy . Gọi Ot là tia phân giác của góc xOy . Lấy các điểm A, B, I lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Ot (A, B, I khác O) sao cho $OA = OB < OI$. Chứng minh: $IA = IB$ và $OI \perp AB$.

Lời giải



+) Xét $\triangle AOI$ và $\triangle BOI$ có:

$$OA = OB \text{ (gt)}$$

$$\widehat{O_1} = \widehat{O_2} \text{ (vì } Ot \text{ là tia phân giác của góc } xOy \text{)}$$

OI cạnh chung

Vậy $\triangle AOI = \triangle BOI$ (c-g-c)

$\Rightarrow IA = IB$ (hai cạnh tương ứng)

+) Ta có $OA = OB$ (gt)

$IA = IB$ (cmt)

Suy ra: O, I cách đều hai điểm A và B

Hay OI là đường trung trực AB hay $OI \perp AB$.

Câu 6. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường THCS Dân Chủ 2022 - 2023)

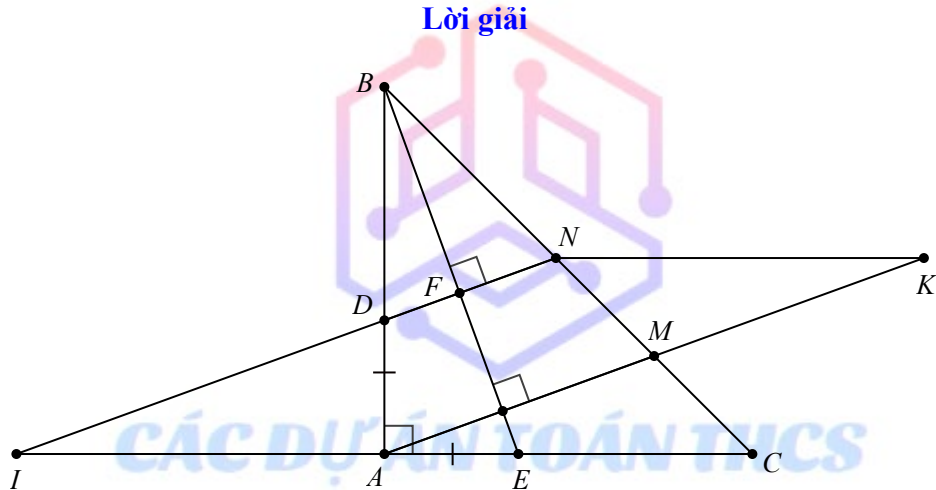
Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , $AB = AC$. Trên AB và AC lần lượt lấy điểm D và E sao cho $AD = AE$. Qua A và D kẻ đường vuông góc với BE cắt BC lần lượt tại M và N . Tia ND cắt tia CA tại I . Chứng minh rằng:

a) A là trung điểm của CI .

b) $CM = MN$.

c) $AM = \frac{1}{2}NI$.

Lời giải



a) Gọi F là giao điểm của DN với BE .

Xét $\triangle ADI$ vuông tại A có: $\widehat{IDA} + \widehat{I} = 90^\circ$ (định lí)

Xét $\triangle FIE$ vuông tại F có: $\widehat{I} + \widehat{FEI} = 90^\circ$ (định lí)

$\Rightarrow \widehat{IDA} = \widehat{FEI}$

Xét $\triangle ABE$ vuông tại A và $\triangle ADI$ vuông tại A có:

$AE = AD$ (gt)

$\widehat{IDA} = \widehat{FEI}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \triangle ABE = \triangle AID$ (cạnh góc vuông- góc nhọn kề)

$\Rightarrow AB = AI$ (hai cạnh tương ứng)

Mà $AB = AC$ (gt)

$\Rightarrow AC = AI$

Vậy A là trung điểm của CI .

b) Ta có: $BE \perp DN; BE \perp MA$ (gt)

$\Rightarrow DN \parallel AM$ (Quan hệ giữa tính vuông góc với tính song song)

Hay $NI \parallel AM$

Từ N kẻ đường thẳng song song với AC cắt AM tại K .

Chứng minh được: $\triangle ANI = \triangle NAK$ (g.c.g)

$\Rightarrow AI = NK$ (hai cạnh tương ứng)

Mà $AC = AI$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow AC = NK$

Chứng minh được: $\triangle MNK = \triangle MCA$ (g.c.g)

$\Rightarrow MN = MC$ (hai cạnh tương ứng)

c) Ta có: $\triangle MNK = \triangle MCA$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow MK = MA$ (hai cạnh tương ứng)

Do đó: M là trung điểm của AK

Nên: $AM = \frac{1}{2} AK$.

Mà $AK = NI$ ($\triangle ANI = \triangle NAK$ - chứng minh trên)

Do đó: $AM = \frac{1}{2} NI$.

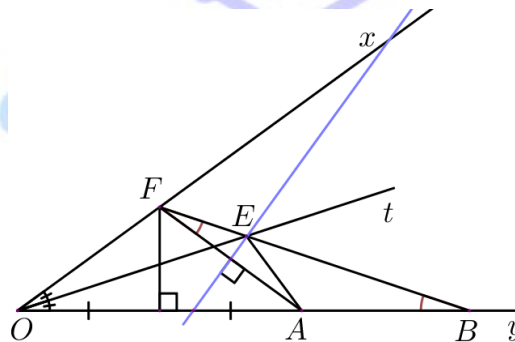
Câu 7. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Vị Thanh 2018 - 2019)

Cho góc nhọn xOy và tia phân giác Ot . Trên tia Oy lấy điểm A . Đường trung trực của OA cắt tia Ox tại F . Trên tia Ay lấy điểm B sao cho $AB = AF$, BF cắt Ot tại E .

a) Chứng minh E thuộc đường trung trực của FA

b) So sánh EF và EB

Lời giải



a) F thuộc đường trung trực của $OA \Rightarrow FO = FA \Rightarrow \triangle OFA$ cân tại F

$$\Rightarrow \widehat{FOA} = \widehat{FAO} = 2 \cdot \widehat{EOB} = 2 \cdot \widehat{FOE}$$

Do $AF = AB \Rightarrow \triangle FAB$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{AFB} = \widehat{ABF} \Rightarrow \widehat{FAO} = 2 \widehat{FBA}$

$$\Rightarrow \widehat{EOB} = \widehat{EBO}$$

Vậy $OE = EB$

$$\triangle OFE = \triangle BAE \left(OF = AB, OE = EB, \widehat{FOE} = \widehat{EBO} \right)$$

$$\Rightarrow EF = EA$$

$\Rightarrow E$ thuộc đường trung trực của FA .

b) $\widehat{FOA} < 90^\circ \Rightarrow \widehat{FOE} < 45^\circ$

$$\triangle OFE \text{ có } \widehat{OFE} = 180^\circ - 3\widehat{FOE} = 3(60^\circ - \widehat{FOE}) > 3(60^\circ - 45^\circ) = 45^\circ > \widehat{FOE}$$

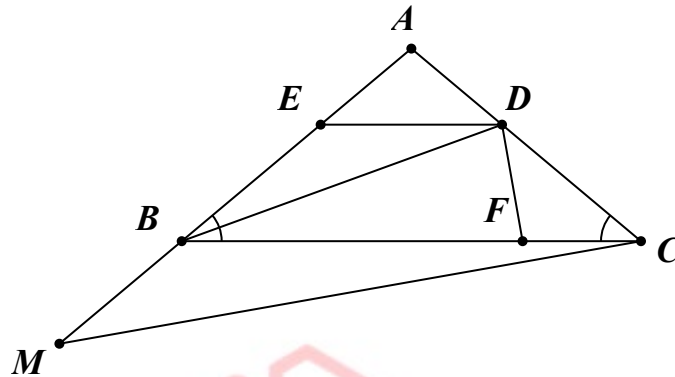
Nên $EF < OE$ mà $OE = EB$

Do đó $EF < EB$

Câu 8. (HSG 7 huyện Việt Yên 2017- 2018)

Cho tam giác ABC cân tại A ($\widehat{B} = \widehat{C} = 40^\circ$). Kẻ phân giác BD ($D \in AC$). Trên tia AB lấy điểm M sao cho $AM = BC$. Chứng minh $BD + AD = BC$.

Lời giải



Từ D kẻ $DE \parallel BC$, trên BC lấy điểm F sao cho $BD = BF$ (1)

Chứng minh được $DE = BE$ (tam giác BED cân)

Do tam giác AED cân nên $AD = AE \Rightarrow BE = CD \Rightarrow DE = CD$

Tam giác BDF cân có $\widehat{DBF} = 20^\circ$ nên $\widehat{BFD} = 80^\circ \Rightarrow \widehat{DFC} = 100^\circ$

$\Rightarrow \widehat{DFC} = \widehat{EAD} = 100^\circ$

Vậy $\triangle DFC$ có $\widehat{FDC} = 40^\circ$

Chứng minh được $\triangle ADE = \triangle FCD$ (g.c.g)

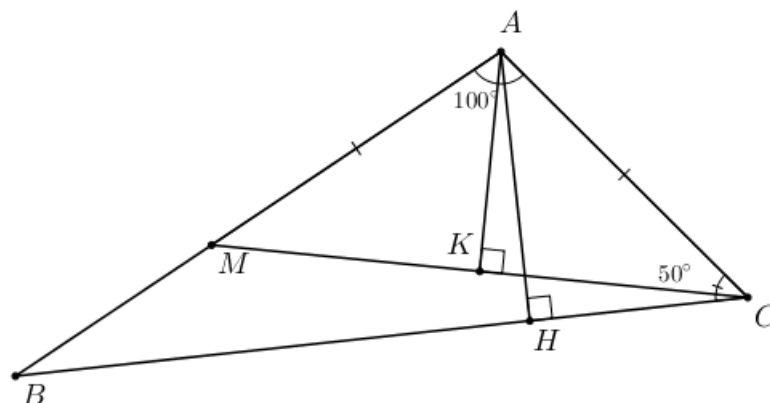
$\Rightarrow AD = CF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BD + AD = BC$.

Câu 9. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 100^\circ, \widehat{C} = 50^\circ$. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $MA = AC$. Chứng minh rằng: $CM = AB$.

Lời giải



+ Kẻ $AH \perp BC$ tại H , $AK \perp MC$ tại K

+ Xét $\triangle ABC$ có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{C}) = 180^\circ - (100^\circ + 50^\circ) = 30^\circ$

+ $\triangle AHB$ vuông tại H có $\widehat{HBA} = 30^\circ$, lập luận được $AB = 2AH$ (1)

+ Chứng minh $\triangle AKM = \triangle AKC$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow KM = KC = \frac{1}{2}CM \Rightarrow CM = 2KC$ (2)

Vì $\triangle AKM = \triangle AKC \Rightarrow \widehat{KAM} = \widehat{KAC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \cdot 100^\circ = 50^\circ$

Xét $\triangle KAC$ và $\triangle HCA$ có :

$\widehat{KAC} = \widehat{HCA} = 50^\circ$

$\widehat{AKC} = \widehat{CHA} = 90^\circ$

AC chung.

$\Rightarrow \triangle KAC = \triangle HCA$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow KC = AH$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $CM = AB$.

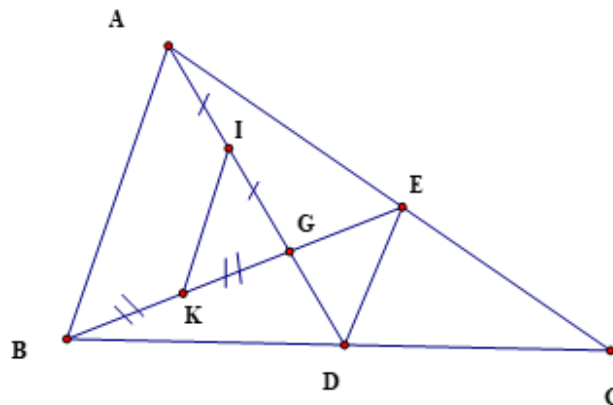
Câu 10. (HSG 7 huyện 2022 - 2023; trường Hiền Quan 2018 - 2019)

Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AD . Kẻ đường trung tuyến BE cắt AD ở G . Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của GA, GB . Chứng minh rằng:

a) $IK \parallel DE; IK = DE$

b) $AG = \frac{2}{3}AD$

Lời giải



a) $\triangle ABC$ có hai trung tuyến AD và BE cắt nhau tại G

$\Rightarrow G$ là trọng tâm $\triangle ABC$

$\Rightarrow GD = \frac{1}{2}AG$ và $GE = \frac{1}{2}BG$

Mà $GI = \frac{1}{2}AG$ và $GK = \frac{1}{2}BG$ (I, K lần lượt là trung điểm của AG và BG)

$\Rightarrow GD = GI$ và $GE = GK$

Xét $\triangle GED$ và $\triangle GKI$ có:

$GD = GI$ (chứng minh trên)

$GE = GK$ (chứng minh trên)

$\widehat{EGD} = \widehat{IGK}$ (hai góc đối đỉnh)

$$\Rightarrow \Delta GED = \Delta GKI \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{GED} = \widehat{GKI} \text{ (hai góc tương ứng)}$$

Mà \widehat{GED} và \widehat{GKI} ở vị trí so le trong

$$\Rightarrow IK // ED$$

Từ $\Delta GED = \Delta GKI$

$$\Rightarrow IK = ED$$

b) ΔABC có hai trung tuyến AD và BE cắt nhau tại G .

$\Rightarrow G$ là trọng tâm ΔABC

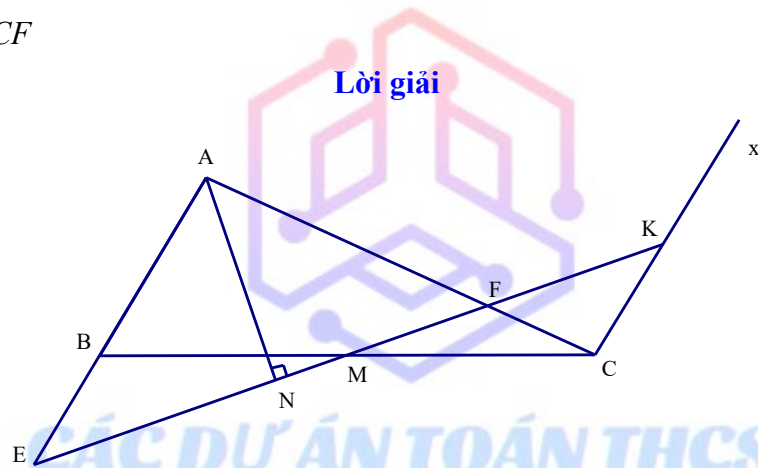
$$\Rightarrow AG = \frac{2}{3} AD$$

Câu 11. (HSG 7 Lai Châu - năm học 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của BC , từ M kẻ đường thẳng vuông góc với tia phân giác của góc BAC tại N và cắt tia AB tại E và cắt tia AC tại F . Chứng minh rằng:

1) $AE = AF$

2) $BE = CF$



Lời giải

1) Xét ΔANE và ΔANF có: $\widehat{ANE} = \widehat{ANF} = 90^\circ$, AN chung, $\widehat{EAN} = \widehat{FAN}$ (gt)

Suy ra: $\Delta ANE = \Delta ANF$ (g - c - g). Vậy $AE = AF$ (2 cạnh tương ứng)

2) Từ C kẻ tia $Cx // AB$, cắt tia EF tại K

Xét ΔBME và ΔCMK có: $MB = MC$ (gt), $\widehat{BME} = \widehat{CMK}$ (đối đỉnh), $\widehat{EBM} = \widehat{KCM}$ (so le trong)

Suy ra: $\Delta BME = \Delta CMK$ (g.c.g) $\Rightarrow BE = CK$ (2 cạnh tương ứng) (1)

Vì $AE = AF$ nên tam giác AEF cân tại A , suy ra: $\widehat{E} = \widehat{F}_1$

Mà: $\widehat{F}_1 = \widehat{F}_2$ (đối đỉnh) và $\widehat{E} = \widehat{K}$ (so le trong)

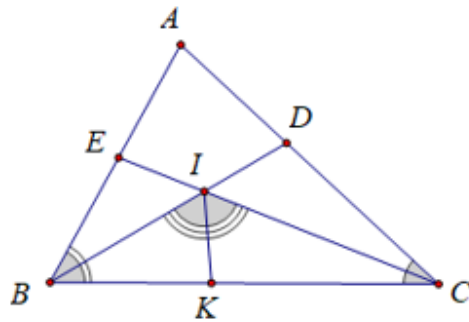
Suy ra: $\widehat{F}_2 = \widehat{K} \Rightarrow$ tam giác CFK cân tại $C \Rightarrow CF = CK$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $BE = CF$ (đpcm)

Câu 12. (Đề khảo sát HSG 7 huyện Sông Lô, Vĩnh Phúc năm học 2022 - 2023)

Cho ΔABC có $\widehat{A} = 60^\circ$. Hai tia phân giác BD, CE của các \widehat{ABC} và \widehat{ACB} cắt nhau ở I ($D \in AC, E \in AB$). Chứng minh rằng $ID = IE$.

Lời giải



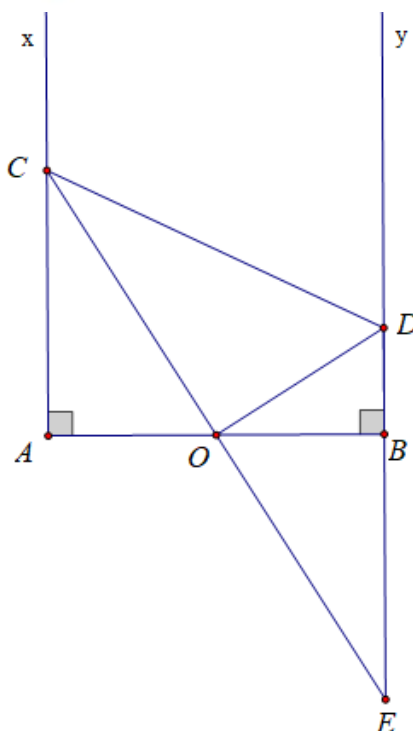
- + Kẻ tia phân giác IK của góc BIC
- + Xét $\triangle ABC$ có: $\widehat{A} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 120^\circ$
- + Vì BD, CE là các tia phân giác của \widehat{ABC} và \widehat{ACB}
- $\Rightarrow \widehat{IBC} + \widehat{ICB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BIC} = 120^\circ$
- $\Rightarrow \widehat{BIE} = \widehat{DIC} = 60^\circ$ (góc kề bù với góc BIC)
- + Chứng minh được: $\triangle IBE = \triangle IBK$ (g - c - g) $\Rightarrow IE = IK$ (1)
- + Chứng minh tương tự được $ID = IK$ (2)
- Từ (1) và (2) ta có $ID = IE$.

Câu 13. (HSG 7 huyện Yên Thế 2022 - 2023; trường Đào Duy Từ, huyện Hoài Nhon 2018 - 2019)

- 1) Cho đoạn thẳng AB , O là trung điểm của AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các tia $Ax; By$ vuông góc với AB . Gọi C là một điểm thuộc tia Ax . Đường vuông góc với OC tại O cắt tia By ở D . Chứng minh $CD = AC + BC$.
- 2) Cho tam giác ABC . Gọi O là giao điểm các đường phân giác của tam giác đó. Từ O kẻ OD, OE, OF lần lượt vuông góc với BC, AC, AB . Trên tia đối của các tia AC, BA, CB lấy theo thứ tự ba điểm M, N, P sao cho $AM = BC, BN = AC, CP = AB$. Chứng minh $EM = FN = DP$.

Lời giải

1)



Giả sử đường thẳng CO cắt BD tại E

Chứng minh được $\triangle ACO = \triangle BEO$ (g.c.g)

$\Rightarrow CO = OE; AC = BE$.

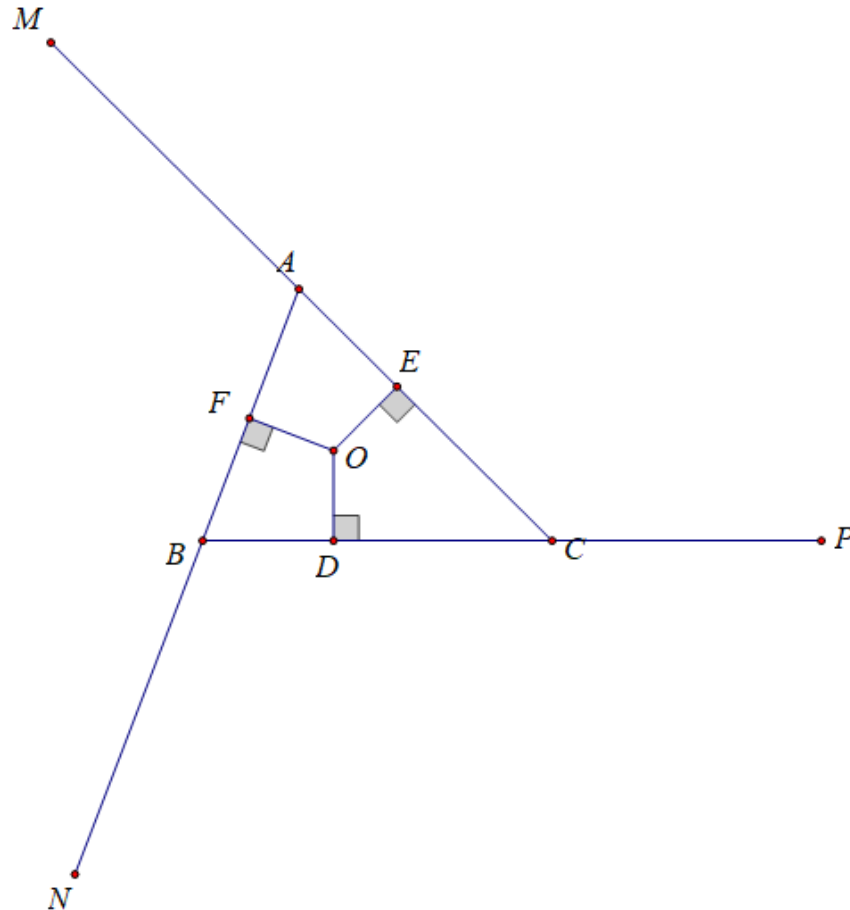
Chứng minh $\triangle OCD = \triangle OED$ (c - g - c)

hoặc chứng minh $\triangle CDE$ cân tại D (DO vừa là đường cao, vừa là trung tuyến)

$\Rightarrow CD = DE$.

Có $CD = DE = BD + BE = BD + AC$ (đpcm).

2)



Ta có O là giao điểm các đường phân giác $\Rightarrow OD = OE = OF$

$\Rightarrow AE = AF; BD = BF; CD = CE$.

Đặt $BC = a, CA = b, AB = c$

Xét $b + c - a = AB + AC - BC = AF + BF + AE + CE - BD - CD = 2AE$

$\Rightarrow AE = \frac{b+c-a}{2}$.

Tương tự $BF = \frac{a+c-b}{2}; CD = \frac{a+b-c}{2}$.

Ta có $EM = AE + AM = \frac{b+c-a}{2} + a = \frac{a+b+c}{2}$;

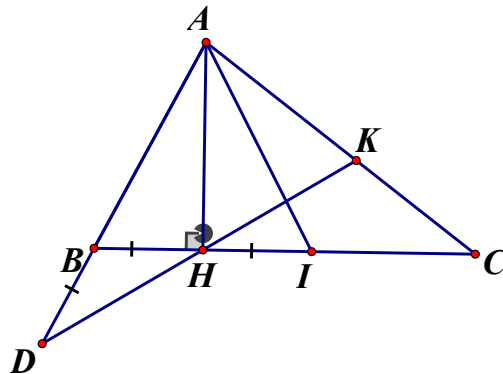
$FN = BF + BN = \frac{a+c-b}{2} + b = \frac{a+b+c}{2}$; $DP = \frac{a+b+c}{2}$.

$\Rightarrow EM = FN = DP$.

Câu 14. (HSG 7 Thường Xuân 2022 - 2023; huyện Hoài Nhon 2018 - 2019)

Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = 2\widehat{C} < 90^\circ$ vẽ AH vuông góc với BC tại H . Trên tia AB lấy điểm D sao cho $AD = HC$. Chứng minh đường thẳng DH đi qua trung điểm của đoạn thẳng AC .

Lời giải



Gọi giao điểm của DH với AC là F .

Vì $\widehat{B} = 2\widehat{C} < 90^\circ$ nên $AC > BA$, suy ra: $HC > HB$

Trên HC lấy E sao cho $HB = HE$ (1)

Xét $\triangle AHB$ và $\triangle AHE$ có:

AH chung

$$\widehat{AHB} = \widehat{AHE} = 90^\circ$$

$$HB = HE$$

$$\Rightarrow \triangle AHB = \triangle AHE \text{ (c - g - c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{AEH} \text{ và } AB = AE$$

$$\text{Mà: } \widehat{B} = 2\widehat{C} \Rightarrow \widehat{AEH} = 2\widehat{ACB}$$

$$\text{Mặt khác: } \widehat{AEH} = \widehat{ACB} + \widehat{CAE} \text{ (góc ngoài tam giác)}$$

$$\text{Do đó: } \widehat{ACB} = \widehat{CAE}, \text{ suy ra: } \triangle ACE \text{ cân tại } E \text{ nên } EA = EC \Rightarrow AB = EC$$

$$\text{Mà: } AD = HC$$

$$\Rightarrow AB + BD = HE + EC \Rightarrow BD = EH \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2), suy ra: $BD = BH$

do đó $\triangle BDH$ cân tại B

$$\Rightarrow \widehat{BDH} = \widehat{BHD} = \frac{\widehat{ABC}}{2} = \widehat{ACB}$$

$$\Rightarrow \widehat{AHF} = \widehat{FAH} \text{ (cùng phụ với hai góc bằng nhau)}$$

$$\text{Suy ra: } \triangle AFH \text{ cân tại } F \Rightarrow FA = FH$$

$$\text{Lại có: } \triangle HFC \text{ cân tại } F \Rightarrow FH = FC$$

$$\Rightarrow FC = FA \text{ nên } F \text{ là trung điểm của } AC.$$

Vậy đường thẳng DH đi qua trung điểm của đoạn thẳng AC .

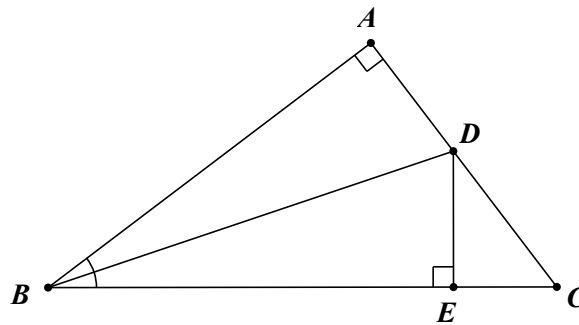
Câu 15. (HSG 7 huyện Tam Nông, trường THCS Hiền Quan 2017- 2018)

Cho tam giác ABC vuông tại A , tia phân giác \widehat{ABC} cắt AC tại D . Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = BA$. Chứng minh rằng:

a) $DA = DE$.

b) $DA < DC$.

Lời giải



a) Chứng minh được $\triangle ABE = \triangle EBD$ (c.g.c)

$$\Rightarrow DA = DE$$

b) $\triangle ABE = \triangle EBD$ (cmt)

$$\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{E} = 90^\circ$$

Trong $\triangle EDC$ có $DE < DC$ hay $AD < DC$.

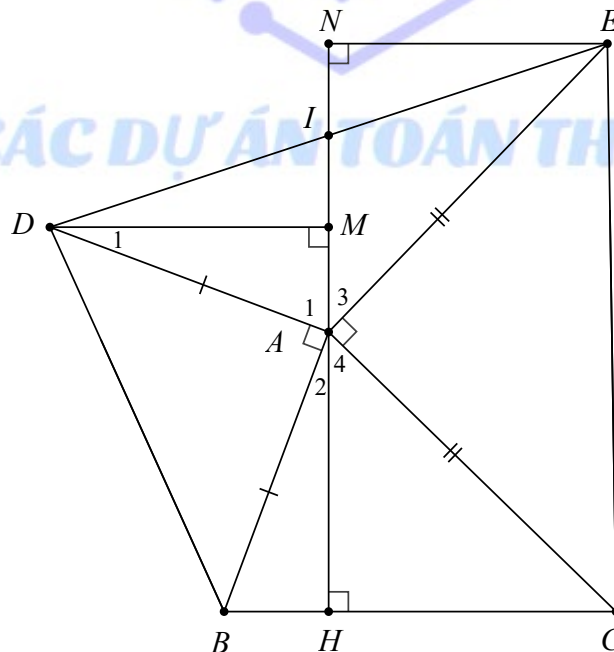
Câu 16. (HSG 7 huyện Hoàng Hóa 2017 - 2018)

Cho tam giác nhọn ABC . Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác vuông tại A : $\triangle ABD$, $\triangle ACE$ sao cho $AB = AD$, $AE = AC$. Kẻ AH vuông góc với BC , DM vuông góc với AH , EN vuông góc với AH .

a) Chứng minh: $DM = AH$.

b) Chứng minh MN đi qua trung điểm của DE .

Lời giải



a) Xét $\triangle MAD$ và $\triangle HBA$ có:

$$\widehat{AMD} = \widehat{BHA} = 90^\circ \text{ (gt)}$$

$$AD = AB \text{ (gt)}$$

$$\widehat{D}_1 = \widehat{A}_2 \text{ (cùng phụ với } \widehat{A}_1)$$

$$\Rightarrow \triangle MAD = \triangle HBA \text{ (cạnh huyền - góc nhọn)}$$

$\Rightarrow DM = AH$ (hai cạnh tương ứng) (đpcm).

b) Chứng minh tương tự câu a $\Rightarrow EN = AH$

Gọi giao điểm của MN và DE là I .

Chứng minh được: $\triangle MID = \triangle NIE$ (cạnh góc vuông – góc nhọn)

$\Rightarrow ID = IE$

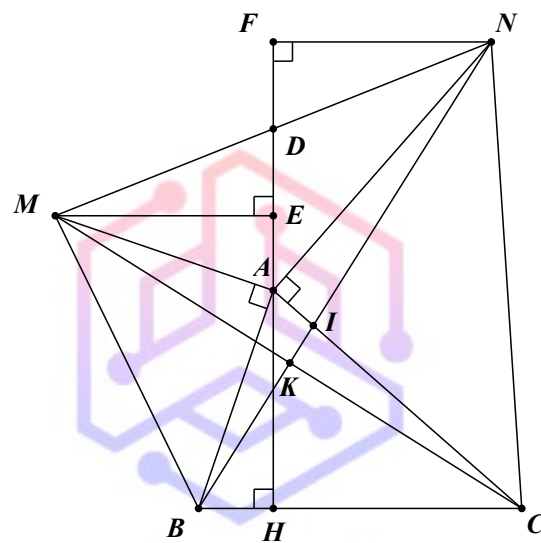
$\Rightarrow I$ là trung điểm của DE .

$\Rightarrow MN$ đi qua trung điểm I của DE (đpcm).

Câu 17. (HSG 7 Huyện Vị Thanh, 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC có góc A nhỏ hơn 90° . Vẽ ra ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại A là $\triangle ABM$ và $\triangle ACN$. Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Chứng minh AH đi qua trung điểm của MN .

Lời giải



Xét $\triangle AMC$ và $\triangle ABN$ có: $AM = AB$ ($\triangle AMB$ vuông cân)

$AC = AN$ ($\triangle ACN$ vuông cân)

$\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{NAC} (= 90^\circ + \widehat{BAC}) \Rightarrow \triangle AMC = \triangle ABN$ (c.g.c)

Gọi I là giao điểm của BN, AC . K là giao điểm của BN, MC

Xét $\triangle KIC$ và $\triangle AIN$ có: $\widehat{ANI} = \widehat{KCI}$ ($\triangle AMC = \triangle ABN$)

$\widehat{AIN} = \widehat{KIC}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{IKC} = \widehat{NAI} = 90^\circ$, do đó: $MC \perp BN$

Kẻ $ME \perp AH$ tại E , $NF \perp AH$ tại F . Gọi D là giao điểm của MN và AH

Ta có: $\widehat{BAH} + \widehat{MAE} = 90^\circ$ ($\widehat{MAB} = 90^\circ$)

Lại có: $\widehat{MAE} + \widehat{AME} = 90^\circ$ nên $\widehat{AME} = \widehat{BAH}$

Xét $\triangle MAE$ và $\triangle ABH$ vuông tại E và H ta có:

$\widehat{AME} = \widehat{BAH}$

$MA = AB$

$\Rightarrow \triangle MAE = \triangle ABH$ (ch – gn)

$\Rightarrow ME = AH$

Chứng minh tương tự ta có $\Delta AFN = \Delta CHA \Rightarrow FN = AH$

Xét ΔMED vuông tại E và ΔNFD vuông tại F có:

$$ME = NF (= AH)$$

$$\widehat{EMD} = \widehat{FND} \text{ (cùng phụ với } \widehat{MDE} \text{ và } \widehat{FDN} \text{ mà } \widehat{MDE} = \widehat{FDN})$$

$$\Rightarrow \Delta MED = \Delta NFD$$

$$\Rightarrow BD = ND$$

Vậy AH đi qua trung điểm của MN .

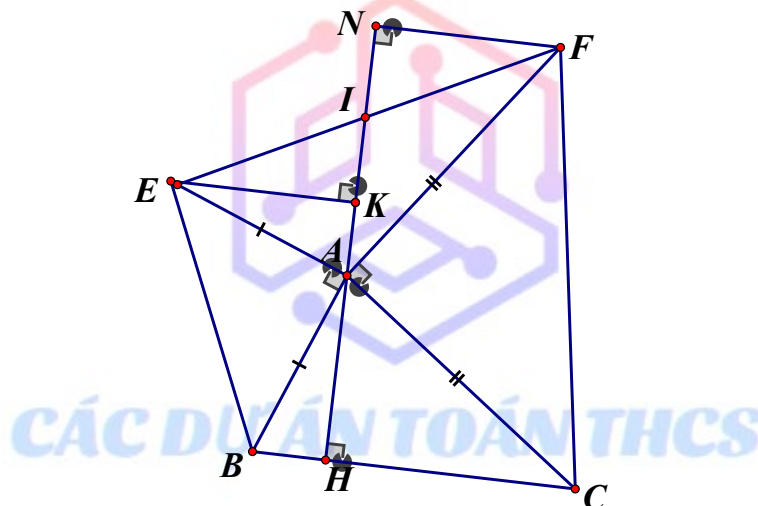
Câu 18. (HSG 7 trường Hiền Quan 2015 - 2016)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao AH . Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác ABE và ACF vuông cân tại A . Từ E và F kẻ đường vuông góc EK và FN với đường thẳng HA .

a) Chứng minh rằng: $EK = FN$.

b) Gọi I là giao điểm của EF với đường thẳng HA . Tìm điều kiện của tam giác ABC để $EF = 2AI$.

Lời giải



a) Xét hai tam giác vuông ΔKAE và ΔHBA có $AE = AB$ (gt), $\widehat{KEA} = \widehat{HAB}$ (cùng phụ với \widehat{KAE})

$$\Rightarrow \Delta KAE = \Delta HBA \text{ (cạnh huyền - góc nhọn)} \Rightarrow EK = AH$$

Tương tự $\Delta NFA = \Delta AHC$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow FN = AH$

Suy ra $EK = FN$

b) Ta có $\Delta KEI = \Delta NFI$ (cạnh góc vuông - góc nhọn kề) $\Rightarrow EI = FI = \frac{1}{2} EF$

$$\text{Mà } AI = \frac{EF}{2} \text{ (gt)} \Rightarrow AI = EI = FI \Rightarrow \widehat{IEA} = \widehat{IAE} \text{ và } \widehat{IAF} = \widehat{IFA}$$

$$\Rightarrow \widehat{EAF} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ$$

Vậy $EF = 2AI$ khi tam giác ABC vuông tại A .

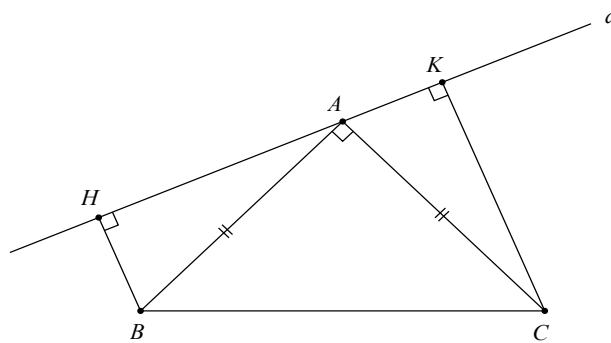
Câu 19. (HSG 7 Trường THCS Tào Sơn 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^\circ$, $AB = AC$. Qua A vẽ đường thẳng d sao cho B và C nằm cùng phía đối với đường thẳng d . Kẻ BH và CK vuông góc với d . Chứng minh rằng:

a) $AH = CK$.

b) $HK = BH + CK$.

Lời giải



a) Xét $\triangle AHB$ và $\triangle CKA$ có:

$$\widehat{AHB} = \widehat{CKA} (= 90^\circ)$$

$$AB = AC \text{ (gt)}$$

$$\widehat{HAB} = \widehat{KCA} \text{ (cùng phụ với } \widehat{KAC} \text{)}$$

$$\Rightarrow \triangle AHB = \triangle CKA \text{ (g - c - g)}$$

$$\Rightarrow AH = CK \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

b) Vì $\triangle AHB = \triangle CKA$ (cmt)

$$\Rightarrow BH = AK \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

Vậy $KH = AH + AK = BH + CK$.

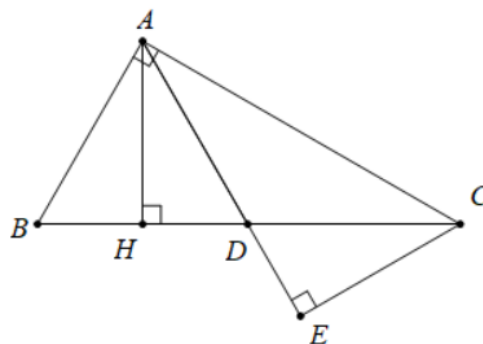
Câu 20. (HSG 7 huyện Chương Mỹ 2018 - 2019)

Cho tam giác ABC vuông tại A , $\widehat{C} = \frac{1}{2}\widehat{B}$, kẻ AH vuông góc với BC tại H . Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HB$. Từ C kẻ đường thẳng CE vuông góc với đường thẳng AD .

a) Tam giác ABD là tam giác gì? Vì sao?

b) Chứng minh rằng $AD = CD$; $DE = DH$.

Lời giải



a) Ta có: $\triangle ABC$ vuông tại A , suy ra $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$

$$\text{Mà } \widehat{C} = \frac{1}{2}\widehat{B} \text{ nên } \widehat{C} = 30^\circ; \widehat{B} = 60^\circ$$

Chứng minh $\triangle AHB = \triangle AHD$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = AD$ nên $\triangle ABD$ cân tại A ,

Mà $\widehat{B} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABD$ là tam giác đều.

b) Chứng minh $\triangle AHD = \triangle CED$ (cạnh huyền – góc nhọn)

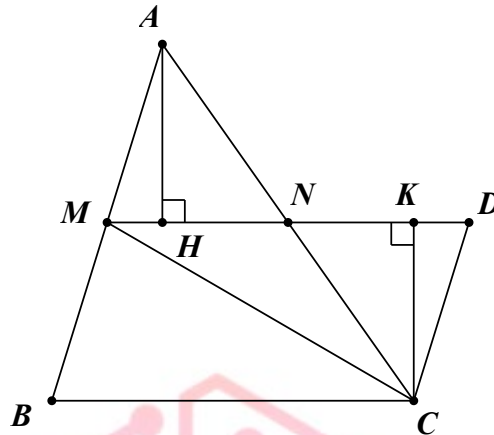
Suy ra $DH = DE$

Câu 21. (HSG 7 trường Thực hành Sài Gòn 2017- 2018)

Cho tam giác có ba góc đều nhọn. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, AC . Kẻ $AH \perp MN$ tại H và CK vuông góc với đường thẳng MN tại K . Chứng minh:

- a) $AH = CK$
- b) $BC = 2MN$

Lời giải



a) Xét ΔNHA và ΔNKC có:

$$AN = CN \text{ (gt)}$$

$$\widehat{HNA} = \widehat{KNC} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\widehat{AHN} = \widehat{CKN} (= 90^\circ)$$

Nên $\Delta NHA = \Delta NKC$

$$\Rightarrow AH = CK$$

b) Trên tia đối của tia NM lấy D sao cho $ND = NM$

Xét ΔNAM và ΔNCD có:

$$AN = CN$$

$$\widehat{ANM} = \widehat{CND}$$

$$NM = ND$$

Từ đó $\Delta NAM = \Delta NCD$ (c.g.c)

$$\Rightarrow AM = CD \text{ và } \widehat{NAM} = \widehat{NCD}$$

Do đó $AM \parallel CD$

Mà $\widehat{CBM}, \widehat{MCD}$ ở vị trí so le trong nên $\widehat{CMB} = \widehat{MCD}$

Xét ΔMCB và ΔCMD có:

$$BM = CD$$

$$\widehat{CMB} = \widehat{MCD}$$

MC chung

Nên $\Delta MCB = \Delta CMD$ (c.g.c)

$$\Rightarrow BC = MD$$

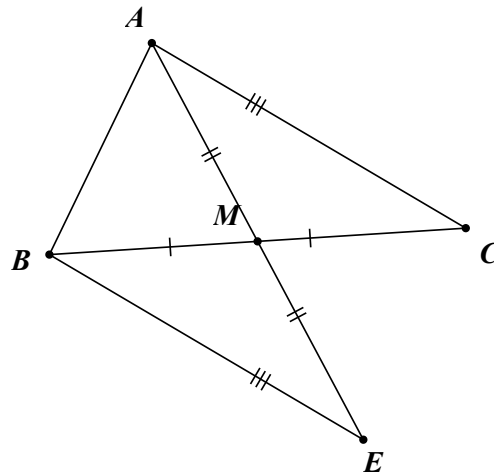
Mà $MD = 2MN$

Nên $BC = 2MN$.

Câu 22. (HSG 7 huyện 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC , M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Chứng minh rằng: $AC = EB$.

Lời giải



Xét $\triangle AMC$ và $\triangle EMB$ có:

$$AM = EM \text{ (gt)}$$

$$\widehat{AMC} = \widehat{EMB} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$BM = MC \text{ (gt)}$$

Nên $\triangle AMC = \triangle EMB$ (c.g.c)

$$\Rightarrow AC = EB$$

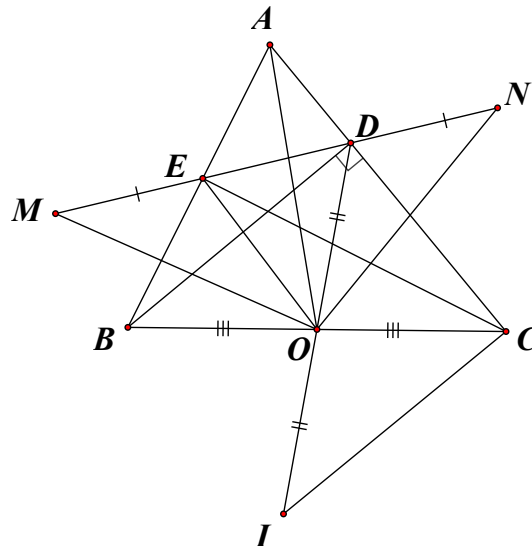
Câu 23. (HSG 7 huyện Giao Thủy 2016 - 2017)

Cho tam giác ABC , O là trung điểm của BC . Từ B kẻ BD vuông góc với AC (D thuộc AC). Từ C kẻ CE vuông góc với AB ($E \in AB$)

a) Chứng minh rằng: $OD = \frac{1}{2} BC$

b) Trên tia đối của tia DE lấy điểm N , trên tia đối của tia ED lấy điểm M sao cho $DN = EM$. Chứng minh rằng: Tam giác OMN là tam giác cân

Lời giải



a) Chứng minh $OD = \frac{1}{2}BC$

Trên tia đối của tia OD lấy điểm I sao cho $OI = OD$. Nối I với C
 Chứng minh được $\triangle OBD = \triangle OCI$ (c.g.c)

$$\Rightarrow BD = CI$$

Và $\widehat{BDO} = \widehat{OIC}$, mà hai góc này ở vị trí so le trong

$$\Rightarrow DB \parallel CI$$

Mà $CD \perp BD$

$$\Rightarrow CD \perp CI$$

$$\Rightarrow \widehat{CDI} = 90^\circ$$

Xét $\triangle BDC$ và $\triangle ICD$ có:

$$BD = CI \text{ (cmt)}$$

$$\widehat{CDB} = \widehat{CDI} = 90^\circ$$

DC chung

$$\triangle BDC = \triangle ICD \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow BC = DI$$

Mà O là trung điểm của BC .

$$\Rightarrow OD = \frac{1}{2}BC$$

b) Nối O với E

Chứng minh tương tự câu a có: $OE = \frac{1}{2}BC$

$$\Rightarrow OD = OE$$

$$\Rightarrow \triangle OED \text{ cân tại } O$$

Chứng minh được: $\widehat{OEM} = \widehat{ODN}$

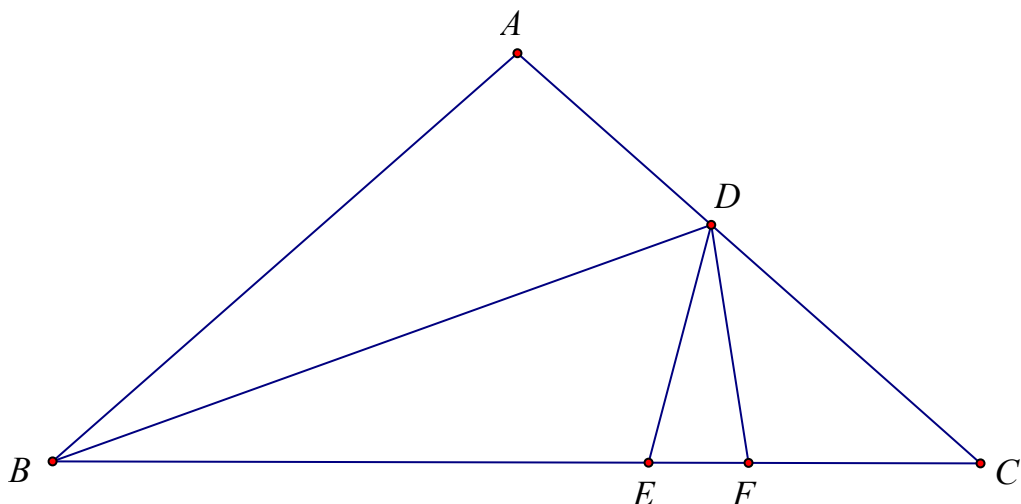
Chứng minh được: $\triangle OEM = \triangle ODN$ (c.g.c)

$$\Rightarrow OM = ON$$

Câu 24. (HSG 7 huyện 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ cân tại A , có $\widehat{A} = 100^\circ$ tia phân giác của góc \widehat{ABC} cắt AC tại D . Chứng minh :
 $AD + BD = BC$

Lời giải



Trên cạnh BC lấy 2 điểm E, F sao cho: $BE = BA, BF = BD$.

Học sinh chứng minh được $AD = DE$

Học sinh chứng minh được $\triangle DFE$ cân tại D

$$\Rightarrow DE = DF$$

Chứng minh được $\triangle DFC$ cân tại F

$$\Rightarrow DF = FC$$

$$\Rightarrow DE = FC$$

Suy ra $AD + BD = BC$

Câu 25. (HSG 7 trường Nguyễn Bảo Phương; huyện Thanh Thủy; huyện Phù Ninh 2018 - 2019; huyện Nam Sách 2017 - 2018; huyện Ngọc Lặc; huyện Tân Lạc 2015 - 2016)

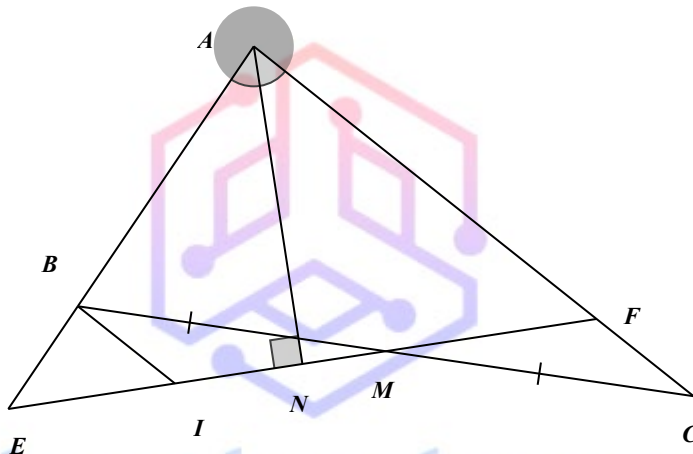
Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của BC , từ M kẻ đường thẳng vuông góc với phân giác của góc A , cắt tia này tại N , cắt tia AB tại E và cắt tia AC tại F . Chứng minh rằng:

a) $BE = CF$

b) $AE = \frac{AB + AC}{2}$

c) Tính AE, BE theo $AC = b, AB = c$

Lời giải



a) Chứng minh: $BE = CF$.

Qua B kẻ đường thẳng song song với AC , cắt EF tại I .

Xét $\triangle MBI$ và $\triangle MCF$ có:

$$\widehat{IBM} = \widehat{FCM} \text{ (so le trong); } MB = MC \text{ (gt), } \widehat{BMI} = \widehat{CMF} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\text{Do đó: } \triangle MBI = \triangle MCF \text{ (c.g.c), } \Rightarrow BI = CF \quad (1)$$

Mặt khác $\triangle AEF$ có AN vừa là đường cao, vừa là đường phân giác nên $\triangle AEF$ cân tại A

$$\Rightarrow \widehat{E} = \widehat{MFA} \text{ mà } \widehat{BIE} = \widehat{MFA} \text{ (đồng vị) nên } \widehat{BIE} = \widehat{E}$$

Do đó $\triangle BIE$ cân tại B , suy ra $BI = BE$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BE = CF$ (đpcm).

b) Chứng minh: $AE = \frac{AB + AC}{2}$.

Ta có: $\triangle AEF$ cân tại A (cmt). $\Rightarrow AE = AF$

$$2AE = AE + AF = (AB + BE) + (AC - CF) = (AB + BI) + (AC - CF) \text{ (Vì } BE = BI)$$

$$\Rightarrow 2AE = (AB + AC) + (BI - CF) = AB + AC \text{ (Vì } BI = CF)$$

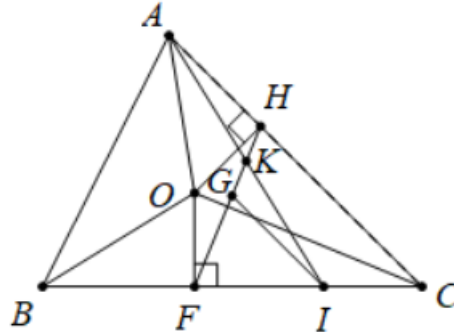
$$\text{Vậy } AE = \frac{AB + AC}{2}.$$

c) Từ câu b $\Rightarrow AE = \frac{b+c}{2}$, chứng minh được: $BE = \frac{AC - AB}{2} \Rightarrow BE = \frac{b-c}{2}$

Câu 26. (HSG 7 trường THCS Nhơn Trí 2018 - 2019)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC < BC$. Các tia phân giác của góc A và góc C cắt nhau tại O . Gọi F là hình chiếu của O trên BC ; H là hình chiếu của O trên AC . Lấy điểm I trên đoạn FC sao cho $FI = AH$. Gọi K là giao điểm của FH và AI . Chứng minh tam giác FCH cân và $AK = KI$

Lời giải



Chứng minh $\triangle CHO = \triangle CFO$ (ch-gn)

Suy ra $CH = CF \Rightarrow \triangle FCH$ cân tại C .

Vẽ $IG \parallel AC$ ($G \in FH$), chứng minh $\triangle FIG$ cân tại I

Suy ra $AH = IG$ và $\widehat{IGK} = \widehat{AHK}$

Chứng minh $\triangle AHK = \triangle IGK$ (g.c.g)

Suy ra $AK = KI$

Câu 27. (HSG 7 huyện Rạch Giá 2018 - 2019)

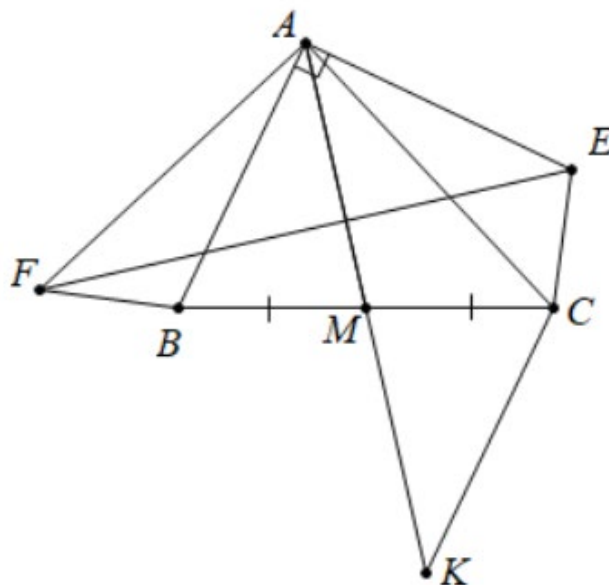
Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh C bờ là đường thẳng AB dựng đoạn AE vuông góc với AB và $AE = AB$. Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh B bờ là đường thẳng AC dựng đoạn AF vuông góc với AC và $AF = AC$. Chứng minh rằng:

a) $FB = EC$

b) $EF = 2AM$

CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS

Lời giải



a) Ta có $\triangle ABF = \triangle AEC \Rightarrow FB = EC$

b) Trên tia đối của tia MA lấy K sao cho $AK = 2AM$.

Ta có: $\triangle ABM = \triangle KCM \Rightarrow CK \parallel AB$

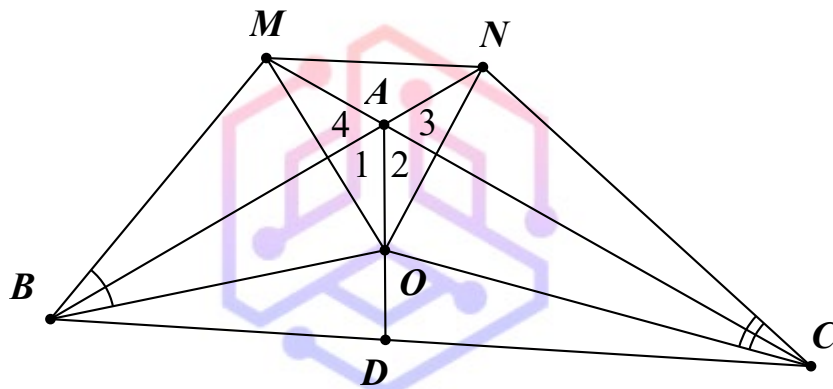
$$\begin{aligned} &\Rightarrow \widehat{ACK} + \widehat{CAB} = \widehat{EAF} + \widehat{CAB} = 180^\circ \\ &\Rightarrow \widehat{ACK} = \widehat{EAF} \\ &\Delta EAF \text{ và } \Delta KCA \text{ có } AE = AB = CK; \\ &AF = AC \text{ (gt)} \\ &\widehat{ACK} = \widehat{EAF} \\ &\Rightarrow \Delta EAF = \Delta KCA \\ &\Rightarrow EF = AK = 2AM \end{aligned}$$

Câu 28. (HSG 7 huyện Bồ Trạch 2017 - 2018; huyện Triệu Sơn 2015 - 2016)

Cho ΔABC có $\widehat{B} + \widehat{C} = 60^\circ$, phân giác AD . Trên AD lấy điểm O , trên tia đối của tia AC lấy điểm M sao cho $\widehat{ABM} = \widehat{ABO}$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm N sao cho $\widehat{ACN} = \widehat{ACO}$. Chứng minh rằng

- $AM = AN$
- ΔMON là tam giác đều.

Lời giải



a) ΔABC có $\widehat{B} + \widehat{C} = 60^\circ$ nên $\widehat{A} = 120^\circ$
 Do AD là tia phân giác nên $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = 60^\circ$ ta lại có $\widehat{A}_3 = \widehat{A}_4 = 180^\circ - \widehat{A} = 60^\circ$
 Suy ra $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \widehat{A}_3 = \widehat{A}_4 (= 60^\circ) \Rightarrow \begin{cases} \Delta ABM = \Delta ABD(g.c.g) \Rightarrow AM = AO(1) \\ \Delta ACN = \Delta ACO(g.c.g) \Rightarrow AN = AO(2) \end{cases}$

Từ (1) và (2) suy ra $AM = AN$

$$b) \Delta AOM = \Delta ON(c.g.c) \Rightarrow OM = ON \quad (3)$$

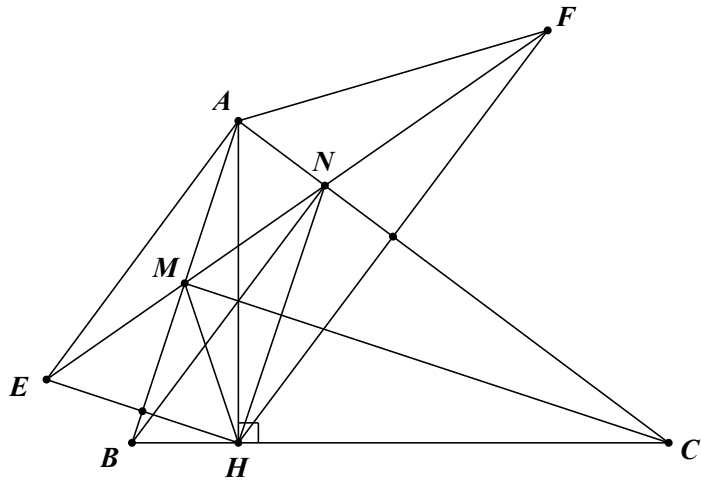
$$\Delta AOM = \Delta AMN(c.g.c) \Rightarrow OM = NM \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $OM = ON = NM \Rightarrow \Delta MON$ là tam giác đều.

Câu 29. (HSG 7 Huyện Hương Sơn, 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC ($\widehat{BAC} < 90^\circ$) đường cao AH . Gọi E, F lần lượt là điểm đối xứng của H qua AB, AC đường thẳng EF cắt AB, AC lần lượt tại M và N . Chứng minh rằng $AE = AF$.

Lời giải



Vì AB là trung trực của EH nên ta có: $AE = AH$ (1)

Vì AC là trung trực của HF nên ta có: $AH = AF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AE = AF$.

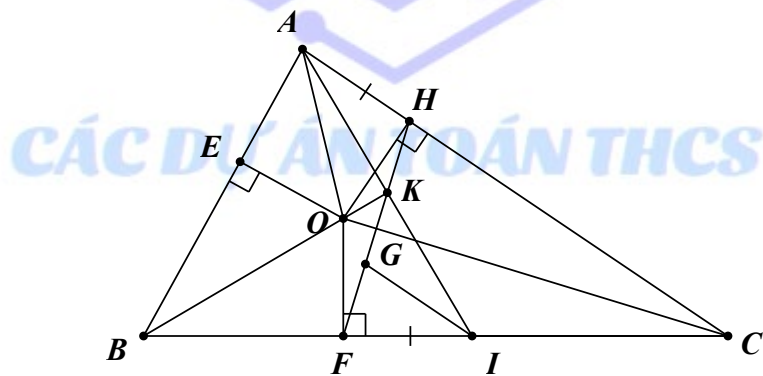
Câu 30. (HSG 7 trường Lý Thường Kiệt 2017 - 2018)

Cho ΔABC có 3 góc nhọn, $AB < AC < BC$. Các tia phân giác của góc A và góc C cắt nhau tại O . Gọi F là hình chiếu của O trên BC ; H là hình chiếu của O trên AC . Lấy điểm I trên đoạn FC sao cho $FI = AH$. Gọi K là giao điểm của FH và AI .

a) Chứng minh ΔFCH cân

b) Chứng minh $AK = KI$

Lời giải



Ta có $\widehat{CHO} = \widehat{CFO} = 90^\circ$ (vì $OH \perp AC$, $OF \perp BC$)

Xét ΔCHO vuông và ΔCFO vuông có:

OC chung

$\widehat{HCO} = \widehat{FCO}$ (OC là phân giác \widehat{C})

Vậy $\Delta CHO = \Delta CFO$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow CH = CF$ (hai cạnh tương ứng).

Vậy ΔFCH cân tại C .

Qua I vẽ $IG \parallel AC$ ($G \in FH$)

Ta có ΔFCH cân tại C (cmt) $\Rightarrow \widehat{CHF} = \widehat{CFH}$ (1)

Mà $\widehat{CHF} = \widehat{FGI}$ (đồng vị, $IG \parallel AC$) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{CFH} = \widehat{FGI}$ hay $\widehat{IFG} = \widehat{IGF}$

Vậy $\triangle IFG$ cân tại I

$$\Rightarrow FI = GI$$

Mặt khác: $FI = AH$ nên $GI = AH (= FI)$

Ta lại có: $\widehat{IGK} = \widehat{AHK}$; $\widehat{HAK} = \widehat{GIK}$ (so le trong, $IG \parallel AC$)

Xét $\triangle AHK$ và $\triangle IGK$ có:

$$\widehat{IGK} = \widehat{AHK} \text{ (cmt)}$$

$$GI = AH \text{ (cmt)}$$

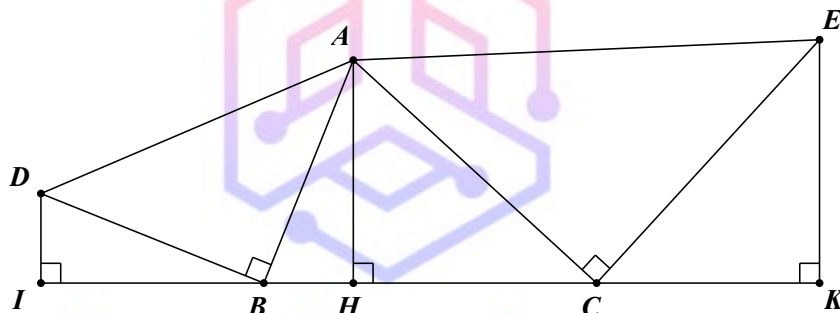
$$\widehat{HAK} = \widehat{GIK} \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \triangle AHK = \triangle IGK \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AK = KI \text{ (đpcm)}$$

Câu 31. (HSG 7 Thị xã Sầm Sơn 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC có góc B và C nhọn. Dựng ra ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại các đỉnh B và C . Vẽ AH , DI và EK cùng vuông góc với đường thẳng BC ($H, I, K \in BC$). Chứng minh: $\triangle BDI = \triangle ABH$ và $DI + EK = BC$.

Lời giải



$\triangle BDI$ vuông tại I có $\widehat{IDB} + \widehat{IBD} = 90^\circ$

Mà $\widehat{ABH} + \widehat{IBD} = 90^\circ$ Nên $\widehat{IDB} = \widehat{ABH}$

Tương tự $\widehat{ACH} = \widehat{CEK}$

Chứng minh $\triangle BDI = \triangle ABH$; $\triangle CKE = \triangle AHC$ (ch - gn)

Từ đó suy ra: $DI + EK = BH + HC = BC$.

Câu 32. (HSG 7 trường THCS Nguyệt Án 2022 - 2023)

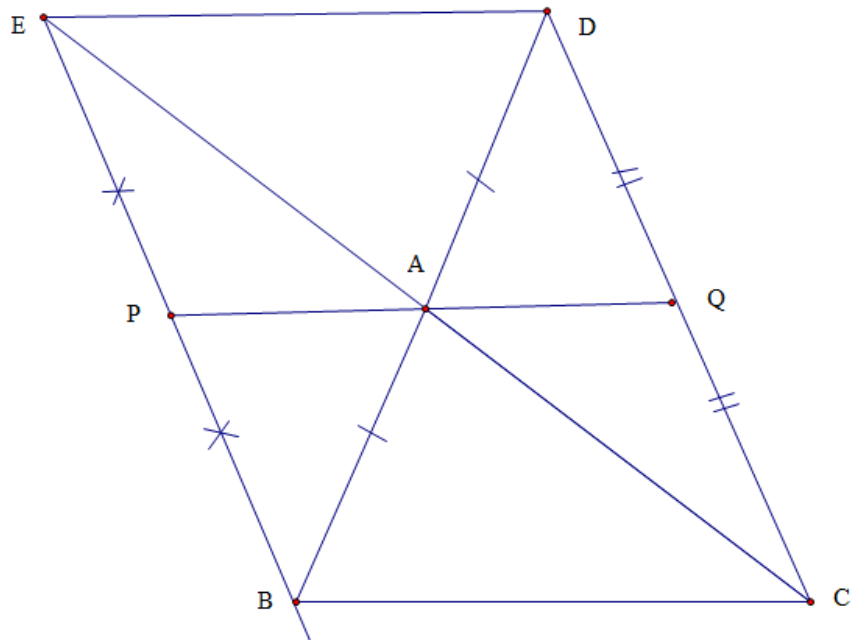
Cho $\triangle ABC$ nhọn có $AB < AC$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AB = AD$. Qua B kẻ đường thẳng song song với CD và cắt đường thẳng AC tại E .

a) Chứng minh rằng: $BE = CD$; $ED = BC$

b) Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của BE, CD . Chứng minh rằng A là trung điểm của PQ

c) Gọi M là điểm bất kì nằm trong $\triangle ABC$. Xác định vị trí của M để biểu thức $MA \cdot BC + MB \cdot AC + MC \cdot AB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải



a) Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ADC$ có

$$\widehat{BAE} = \widehat{DAC} \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

$$AB = AD \text{ (gt)}$$

$$\widehat{ABE} = \widehat{ADC} \text{ (do } BE \parallel CD)$$

Suy ra $\triangle ABE = \triangle ADC$ (g-c-g)

Suy ra: $BE = CD$ (hai cạnh tương ứng). (đpcm)

Và $AE = AC$ (hai cạnh tương ứng) suy ra A là trung điểm của EC

Ta có:

Xét $\triangle ADE$ và $\triangle ABC$ có

$$AE = AC \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\widehat{EAD} = \widehat{CAB} \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

$$AB = AD \text{ (gt)}$$

Suy ra $\triangle ADE = \triangle ABC$ (c-g-c)

Suy ra: $ED = BC$ (hai cạnh tương ứng). (đpcm)

b) Vì P là trung điểm của BE và A là trung điểm của EC

suy ra PA là đường trung bình của tam giác BEC

$$\text{Suy ra: } PA \parallel BC \text{ và } PA = \frac{1}{2} BC$$

Chứng minh tương tự: QA là đường trung bình của tam giác BCD

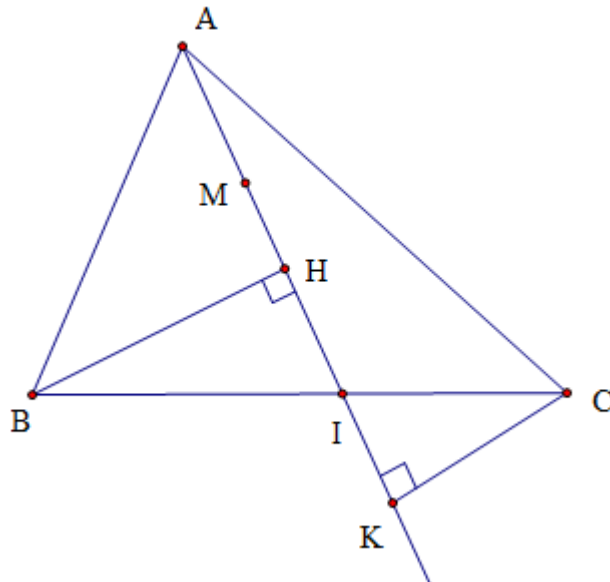
$$\text{Suy ra: } QA \parallel BC \text{ và } QA = \frac{1}{2} BC$$

Vì $PA \parallel BC$ và $QA \parallel BC$ suy ra: P, A, Q thẳng hàng (theo Tiên đề Euclid) (1)

$$\text{Vì } PA = \frac{1}{2} BC \text{ và } QA = \frac{1}{2} BC \text{ suy ra } PA = QA \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: A là trung điểm của PQ (đpcm).

c)



Kẻ BH và CK cùng vuông góc với AM , ta có:

$$S_{MAB} + S_{MAC} = \frac{1}{2} AM \cdot BH + \frac{1}{2} AM \cdot CK = \frac{1}{2} AM \cdot (BH + CK) \quad (1)$$

Mặt khác: $BH \leq BI$; $CK \leq CI$

$$\text{Suy ra: } BH + CK \leq BI + CI \Leftrightarrow BH + CK \leq BC \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } S_{MAB} + S_{MAC} = \frac{1}{2} AM \cdot (BH + CK) \leq \frac{1}{2} AM \cdot BC \quad (3)$$

Dấu “=” xảy ra khi $AM \perp BC$

Chứng minh tương tự ta được:

$$S_{MBC} + S_{MAB} \leq \frac{AC \cdot BM}{2} \quad (4)$$

$$S_{MBC} + S_{MAC} \leq \frac{AB \cdot MC}{2} \quad (5)$$

Từ (3), (4) và (5) ta được:

$$2[S_{MAB} + S_{MBC} + S_{MAC}] \leq \frac{BC \cdot AM}{2} + \frac{AC \cdot BM}{2} + \frac{AB \cdot MC}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot S_{ABC} \leq MA \cdot BC + MB \cdot CA + MC \cdot AB$$

Dấu “=” xảy ra khi: $AM \perp BC, BM \perp AC, CM \perp AB$ Hay M là trực tâm của ΔABC .

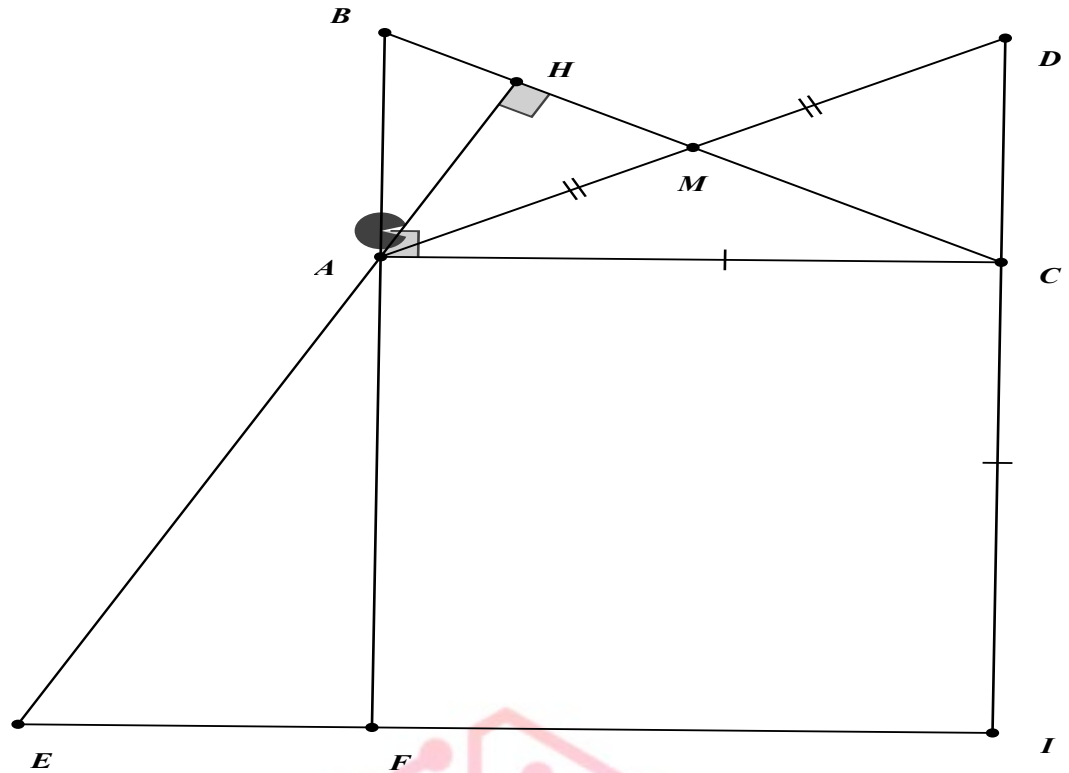
$$\text{Vậy min } MA \cdot BC + MB \cdot CA + MC \cdot AB = 4 \cdot S_{ABC}$$

Xảy ra khi: $AM \perp BC, BM \perp AC, CM \perp AB$ Hay M là trực tâm của ΔABC .

Câu 33. (HSG 7 Trường Hoàng Quỳnh huyện Thanh Oai năm 2018 – 2019)

Cho ΔABC vuông tại A , đường cao AH , trung tuyến AM . Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $DM = MA$. Trên tia đối của tia CD , lấy điểm I sao cho $CI = CA$. Qua I vẽ đường thẳng song song với AC cắt đường thẳng AH tại E . Chứng minh $AE = BC$.

Lời giải



Gọi giao của AB và EI là F

$$\Delta ABM = \Delta DCM \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{C_1} \Rightarrow BF \parallel DI$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{ACI} = 90^\circ \Rightarrow ID \perp AC$$

$$BF \parallel DI \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{I_1}; IF \parallel AC \Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{I_2}$$

$$\Rightarrow \Delta CAI = \Delta FIA \text{ (g.c.g)} \Rightarrow IC = AF = AC$$

$$\text{Mà } \widehat{EAF} = \widehat{BAH} \text{ (đối đỉnh)} \Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{ACB} \text{ (cùng phụ với } \widehat{ABC})$$

$$\Rightarrow \widehat{EAF} = \widehat{ACB} \Rightarrow \Delta AFE = \Delta CAB \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AE = BC$$

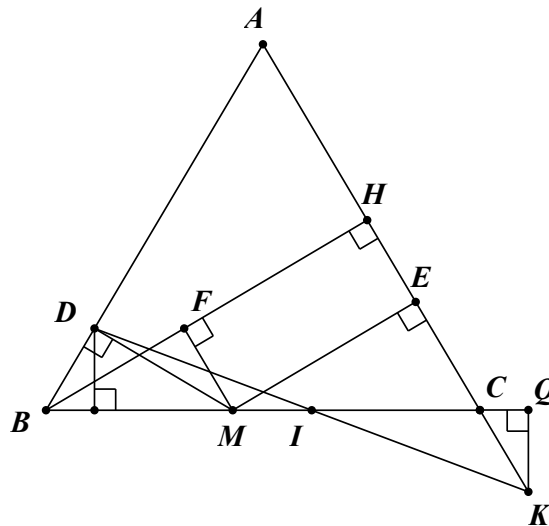
Câu 34. (HSG 7 huyện Mô Cày 2017- 2018)

Cho tam giác ABC cân tại A , BH vuông góc với AC tại H . Trên cạnh BC lấy điểm M bất kỳ (khác B và C). Gọi D, E, F là chân đường vuông góc hạ từ M đến AB, AC, BH .

a) Chứng minh khi M chạy trên cạnh BC thì tổng $MD + ME$ có giá trị không đổi.

b) Trên tia đối của tia CA lấy điểm K sao cho $CK = EH$. Chứng minh BC đi qua trung điểm của DK .

Lời giải



a) Chứng minh được $\triangle DBM = \triangle FMB$ (ch - gn)

Ta có: $\triangle DBM = \triangle FMB$ (ch - gn)

$$\Rightarrow MD = BF \quad (1)$$

Chứng minh $\triangle MFH = \triangle HEM$

$$\Rightarrow ME = FH \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $MD + ME = BF + FH = BH$

BH không đổi $\Rightarrow MD + ME$ không đổi (đpcm)

b) Vẽ $DP \perp BC$ tại P , $KQ \perp BC$ tại Q , gọi I là giao điểm của DK và BC .

Chứng minh $BD = FM = EH = CK$

Chứng minh $\triangle BDP = \triangle CKQ$ (ch - gn) $\Rightarrow DP = KQ$ (hai cạnh tương ứng)

Chứng minh $\widehat{IDP} = \widehat{IKQ}$

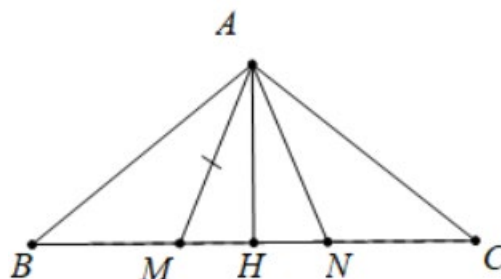
$$\Rightarrow \triangle DPI = \triangle KQI \text{ (c.g.c)}$$

Suy ra $ID = IK$ (đpcm).

Câu 35. (HSG 7 trường Đáp Cầu năm học 2018 - 2019)

Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A , trên cạnh BC lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho $BM = MN = NC$. Gọi H là trung điểm của BC . Chứng minh $AM = AN$ và $AH \perp BC$.

Lời giải

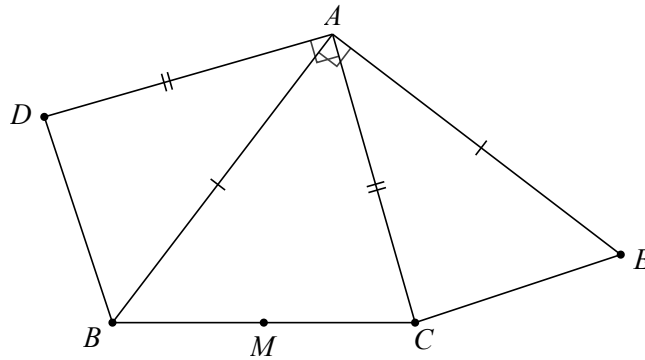


Chứng minh $\triangle ABM = \triangle ACN$ (c.g.c) $\Rightarrow AM = AN$

Chứng minh $\triangle ABH = \triangle ACH$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AHB} = \widehat{AHC} = 90^\circ \Rightarrow AH \perp BC$

Câu 36. (HSG 7 huyện Quốc Oai 2016 - 2017)

Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn, trung tuyến AM . Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm C , vẽ đoạn thẳng AE vuông góc và bằng AB . Trên nửa mặt phẳng bờ AC chứa điểm B , vẽ đoạn thẳng AD vuông góc và bằng AC . Chứng minh $BD = CE$.



Ta có $\widehat{BAD} + \widehat{BAC} = 90^\circ$; $\widehat{CAE} + \widehat{BAC} = 90^\circ$

Suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$ (cùng phụ \widehat{BAC})

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ có:

$AD = AC$ (GT)

$\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$ (cmt)

$AE = AB$ (GT)

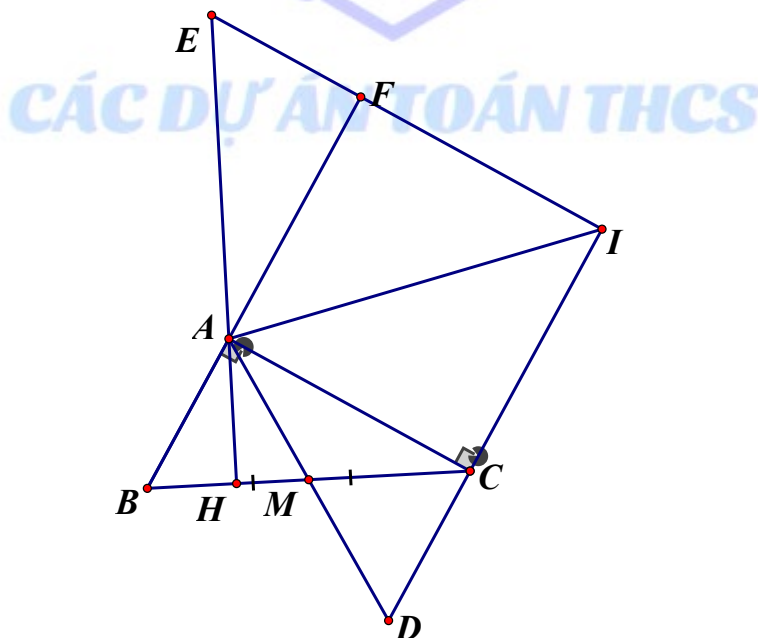
Do đó $\triangle ABD = \triangle AEC$ (c.g.c)

Suy ra $BD = CE$ (hai cạnh tương ứng)

Câu 37. (HSG 7 huyện 2016 - 2017)

Cho tam giác vuông ABC ($\hat{A} = 90^\circ$), đường cao AH , trung tuyến AM . Trên tia đối tia MA lấy điểm D sao cho $DM = MA$. Trên tia đối tia CD lấy điểm I sao cho $CI = CA$, qua I vẽ đường thẳng song song với AC cắt đường thẳng AH tại E . Chứng minh $AE = BC$.

Lời giải



Đường thẳng AB cắt EI tại F

$\triangle ABM = \triangle DCM$ vì $AM = DM$ (gt); $MB = MC$ (gt), $\widehat{AMB} = \widehat{DMC}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CDM} \Rightarrow FB \parallel ID \Rightarrow ID \perp AC$ và $\widehat{FAI} = \widehat{CIA}$ (so le trong) (1)

$IE \parallel AC$ (gt) $\Rightarrow \widehat{FIA} = \widehat{CAI}$ (so le trong) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle CAI = \triangle FIA$ (AI chung) $\Rightarrow IC = AC = AF$ (3)

Và $\widehat{EFA} = 90^\circ$ (4),

mặt khác $\widehat{EAF} = \widehat{BAH}$ (đối đỉnh), $\widehat{BAH} = \widehat{ACB}$ (cùng phụ với \widehat{ABC})

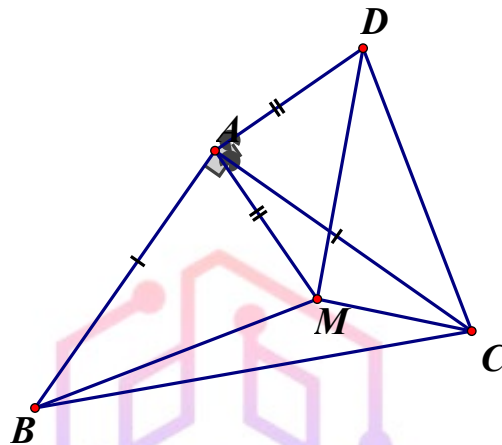
$\Rightarrow \widehat{EAF} = \widehat{ACB}$ (5)

Từ (3), (4) và (5) $\Rightarrow \Delta AFE = \Delta CAB \Rightarrow AE = BC$

Câu 38. (HSG 7 huyện Tam Dương, tỉnh Vĩnh Phúc 2016 - 2017)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Điểm M nằm bên trong tam giác sao cho $MA = 2\text{cm}$, $MB = 3\text{cm}$, $\widehat{AMC} = 135^\circ$. Tính MC .

Lời giải



Dựng tam giác ADM vuông cân tại A , (D, B khác phía đối với AM)

+ Xét ΔABM và ΔACD có:

$AD = AM$ (ΔAMD vuông cân tại A)

$\widehat{MAB} = \widehat{CAD}$ (cùng phụ với \widehat{CAM})

$AB = AC$ (gt)

$\Rightarrow \Delta ABM = \Delta ACD$ (c.g.c)

$\Rightarrow CD = BM = 3\text{cm}$ (hai cạnh tương ứng)

+ ΔADM vuông cân tại A

nên $MD^2 = AD^2 + AM^2 = 8$ và $\widehat{AMD} = 45^\circ$

mà $\widehat{AMC} = 135^\circ$ nên $\widehat{CMD} = 90^\circ \Rightarrow \Delta CMD$ vuông tại M

$\Rightarrow MC^2 = CD^2 - MD^2 = 9 - 8 = 1 \Rightarrow CD = 1$

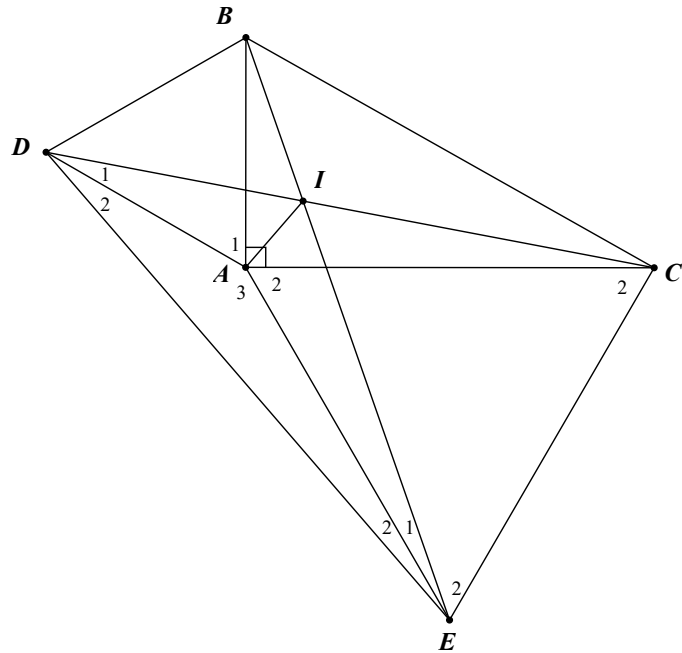
Câu 39. (HSG 7 huyện Thạch Thành 2017- 2018)

Cho tam giác ABC vuông tại A . Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE . Gọi I là giao điểm của BE và CD . Chứng minh rằng

a) $BE = CD$.

b) ΔBDE là tam giác cân.

Lời giải



a) Ta có:
$$\begin{cases} \widehat{DAC} = \widehat{A}_1 + 90^\circ = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \\ \widehat{BAE} = \widehat{A}_2 + 90^\circ = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{BAE}$$

Xét $\triangle DAC$ và $\triangle BAE$ có

$$DA = BA \text{ (gt)}$$

$$\widehat{DAC} = \widehat{BAE} \text{ (cmt)}$$

$$AC = AE \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \triangle DAC = \triangle BAE \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow BE = CD \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

b) Ta có: $\widehat{A}_3 + \widehat{A}_1 + \widehat{BAC} + \widehat{A}_2 = 360^\circ$

$$\Leftrightarrow \widehat{A}_3 + 60^\circ + 90^\circ + 60^\circ = 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{A}_3 = 150^\circ = \widehat{DAC}$$

Xét $\triangle DAE$ và $\triangle BAE$ có

$$DA = BA \text{ (gt)}$$

$$\widehat{A}_3 = \widehat{DAC} \text{ (cmt)}$$

AE chung

$$\Rightarrow \triangle DAE = \triangle BAE \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow DE = BE$$

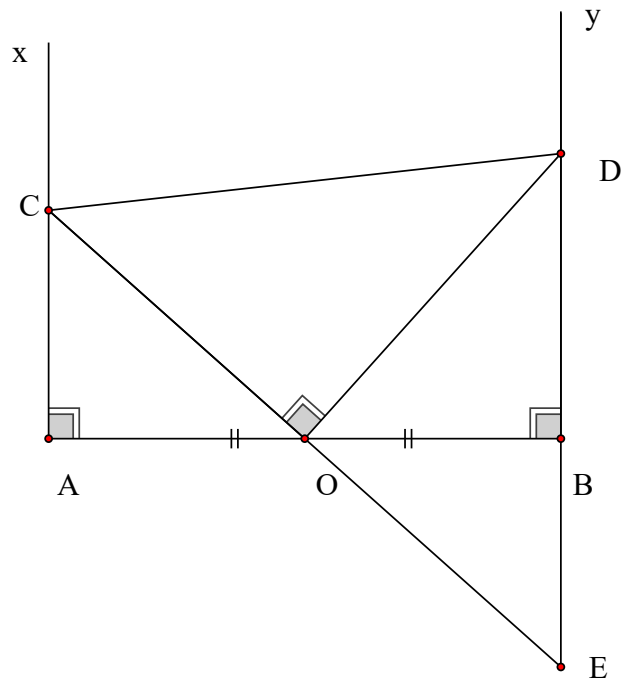
Vậy $\triangle BDE$ cân tại E .

Câu 40. (HSG 7 trường THCS Phan Đình Phùng 2017 - 2018; huyện Tân An 2017 - 2018)

Cho đoạn thẳng AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB vẽ hai tia Ax, By lần lượt vuông góc với AB tại A và B . Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Trên tia Ax lấy điểm C và trên tia By lấy điểm D sao cho góc $\widehat{COD} = 90^\circ$. Chứng minh rằng $AC + BD = CD$.

Lời giải



Gọi E là giao điểm của CO và BD

Xét $\triangle AOC$ và $\triangle BOE$ có:

$$\widehat{OAC} = \widehat{OBE} = 90^\circ; OA = OB(gt); \widehat{AOC} = \widehat{BOE} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \triangle AOC = \triangle BOE \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AC = BE \\ CO = EO \end{cases}$$

Xét $\triangle DOC$ và $\triangle DOE$ có:

$$OC = OE \text{ (cmt)}, \widehat{COD} = \widehat{DOE} = 90^\circ, OD \text{ là cạnh chung}$$

$$\Rightarrow \triangle DOC = \triangle DOE \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow CD = ED$$

$$\text{Mà } ED = EB + BD = AC + BD$$

$$\Rightarrow CD = AC + BD$$

Vậy $CD = AC + BD$.

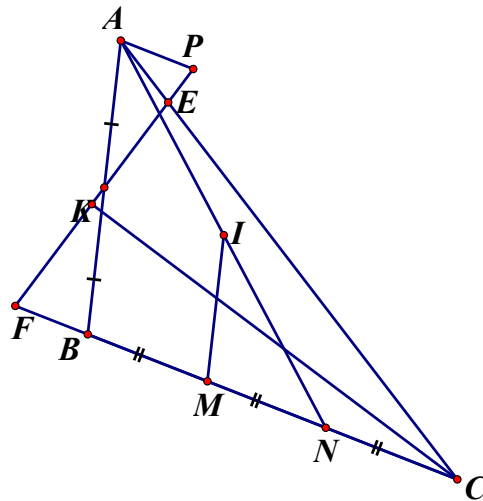
Câu 41. (HSG 7 huyện Đức Thọ 2015 - 2016)

Cho tam giác ABC ($CA < CB$), trên BC lấy các điểm M và N sao cho $BM = MN = NC$. Qua điểm M kẻ đường thẳng song song với AB cắt AN tại I .

a) Chứng minh I là trung điểm của AN .

b) Qua K là trung điểm của AB kẻ đường thẳng vuông góc với đường phân giác góc \widehat{ACB} cắt đường thẳng AC tại E , đường thẳng BC tại F . Chứng minh $AE = BF$.

Lời giải



a) Từ I kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB tại H . Nối MH
 Ta có: $\Delta BHM = \Delta IMH$ vì: $\widehat{BHM} = \widehat{IMH}$; $\widehat{BMH} = \widehat{IHM}$; HM chung
 $\Rightarrow BM = IH = MN$

$\Delta AHI = \Delta IMN$ vì: $IH = MN$ (cmt); $\widehat{AHI} = \widehat{IMN}$ ($= \widehat{ABC}$); $\widehat{AIH} = \widehat{INM}$ (đồng vị)
 $\Rightarrow AI = IN$ (đpcm)

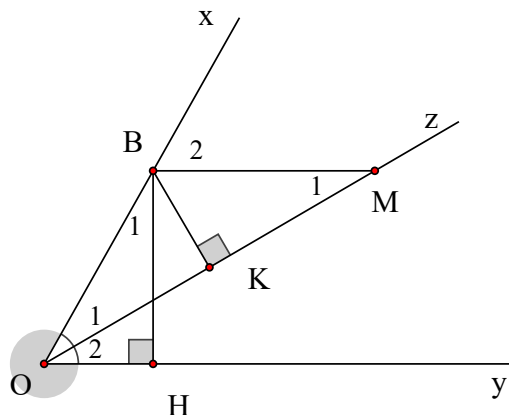
b) Từ A kẻ đường thẳng song song với BC cắt EF tại P . $\Delta PKA = \Delta FKB$ vì:
 $\widehat{PKA} = \widehat{FKB}$ (đối đỉnh); $\widehat{APK} = \widehat{BFK}$ (so le trong); $AK = KB \Rightarrow AP = BF$ (1)
 $\widehat{EPA} = \widehat{KFC}$ (đồng vị); $\widehat{CEF} = \widehat{KFC}$ (ΔCFE cân)
 $\Rightarrow \widehat{EPA} = \widehat{CEF} \Rightarrow \Delta APE$ cân $\Rightarrow AP = AK$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AE = BF$ (đpcm)

Câu 42. (HSG 7 huyện Tam Dương 2016 - 2017)

Cho \widehat{xOy} bằng 60° . Tia Oz là phân giác của \widehat{xOy} . Từ điểm B bất kỳ trên tia Ox kẻ BH, BK lần lượt vuông góc với Oy, Oz tại H và K . Qua B kẻ đường song song với Oy cắt Oz tại M . Chứng minh rằng: $BH = MK$.

Bài giải



Ta có: $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 = \frac{\widehat{xOy}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$ (Vì Oz là phân giác của \widehat{xOy})

$\widehat{O}_2 = \widehat{M}_1$ (hai góc so le trong do $BM \parallel Oy$)

$$\Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{M}_1 = 30^\circ$$

Xét $\triangle BOM$ có $\widehat{O}_1 = \widehat{M}_1 = 30^\circ$

$\Rightarrow \triangle BOM$ cân tại B

BK là đường cao của tam giác cân BMO nên K là trung điểm của OM

$$\Rightarrow KM = KO \quad (1)$$

Xét $\triangle OBH$ vuông tại H có $\widehat{BOH} = \widehat{xOy} = 60^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{B}_1 = 90^\circ - \widehat{BOH} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

Xét $\triangle BKO$ và $\triangle OHB$ có:

$$\widehat{BKO} = \widehat{BHO} (= 90^\circ)$$

OB là cạnh chung

$$\widehat{B}_1 = \widehat{O}_1 (= 30^\circ)$$

$$\Rightarrow \triangle BKO = \triangle OHB \quad (ch - gn)$$

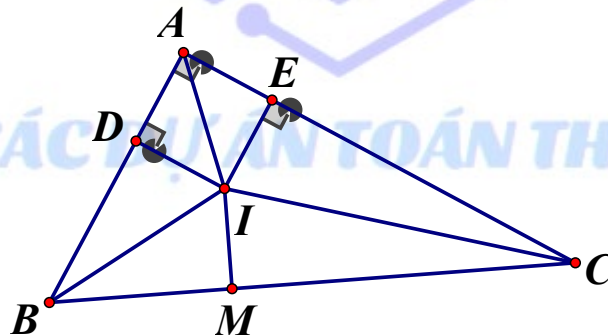
$$\Rightarrow BH = OK \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $BH = MK$ (đpcm).

Câu 43. (HSG 7 huyện Thiệu Hóa 2016 - 2017)

Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AB = 3\text{ cm}$; $AC = 4\text{ cm}$. Điểm I nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh của tam giác ABC . Gọi M là chân đường vuông góc kẻ từ I đến BC . Tính MB .

Lời giải



Vì I nằm trong tam giác ABC cách đều ba cạnh nên I là giao điểm ba đường phân giác trong của tam giác ABC .

Tam giác ABC vuông tại A nên tính $BC = 5\text{ cm}$

Xét $\triangle CEI$ và $\triangle CMI$ có:

$$\widehat{CEI} = \widehat{CMI} = 90^\circ$$

CI cạnh chung

$$\widehat{ECI} = \widehat{MCI} \quad (CI \text{ là phân giác của } \widehat{ACB})$$

$$\Rightarrow \triangle CEI = \triangle CMI \quad (\text{cạnh huyền - góc nhọn})$$

$$\Rightarrow CM = CE \quad (\text{hai cạnh tương ứng})$$

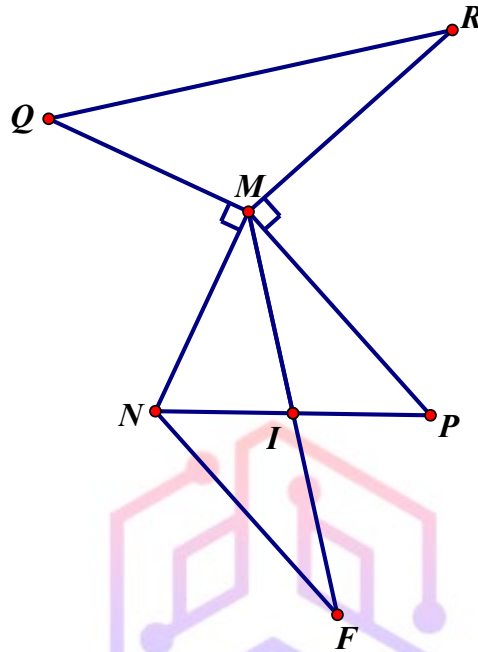
Chứng minh tương tự ta có: $AE = AD$; $BD = BM$

$$\text{Suy ra } MB = \frac{BC + AB - AC}{2} = 2$$

Câu 44. (HSG 7 Bình Lục 2022 - 2023)

Cho tam giác MNP có $\widehat{NMP} < 90^\circ$. Vẽ ra phía ngoài tam giác MNP hai đoạn thẳng MQ vuông góc và bằng MN , MR vuông góc và bằng MP . Gọi I là trung điểm của NP . Chứng minh $MI = \frac{1}{2}QR$.

Lời giải



Trên tia đối của tia IM , lấy điểm F sao cho $IF = IM$

Dễ dàng chứng minh được $\triangle PIM = \triangle NIF$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{IMP} = \widehat{IFN} \Rightarrow \begin{cases} MP \parallel NF \\ MP = NF \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widehat{MNF} + \widehat{NMP} = 180^\circ \quad (1)$$

$$\text{Và } \widehat{QMR} + \widehat{NMP} = 180^\circ \text{ (vì } \widehat{QMN} + \widehat{RMP} = 180^\circ \text{ (gt))} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } \Rightarrow \widehat{MNF} = \widehat{QMR}$$

Chứng minh được $\triangle MNF = \triangle QMR$ (c.g.c)

$$\Rightarrow MF = QR = 2MI$$

$$\Rightarrow MI = \frac{1}{2}QR$$

CD14: PHẦN HÌNH HỌC

Dạng toán: Tính số đo góc, chứng minh góc bằng nhau, so sánh góc
Dạng toán: Tính độ dài đoạn thẳng, chứng minh đoạn thẳng bằng nhau
Dạng toán: Chứng minh tam giác bằng nhau
Dạng toán: Chứng minh ba điểm thẳng hàng
Dạng toán: Bất đẳng thức tam giác
Dạng toán: Chứng minh song song, vuông góc
Dạng toán: Hình khối trong thực tiễn
Dạng toán: Bài toán chứng minh tổng hợp

Dạng toán: Chứng minh tam giác bằng nhau

A. Trắc nghiệm

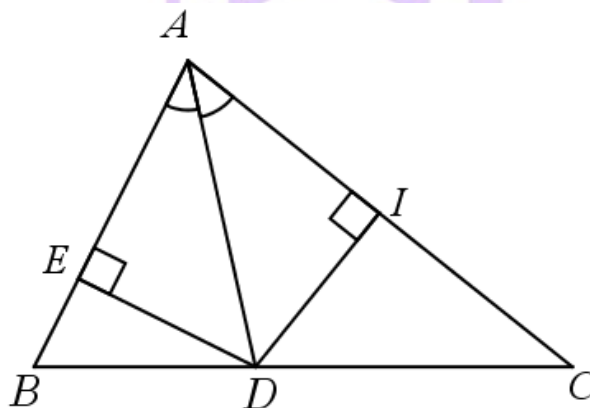
Câu 1. (HSG 7 Tam Nông, Phú Thọ 2021-2022)

Cho tam giác ABC ($AB < AC$). AD là tia phân giác góc A ($D \in BC$). Kẻ $DE \perp AB$ ($E \in AB$), $DI \perp AC$ ($I \in AC$). Khẳng định nào đúng?

- A.** $\triangle AED = \triangle AID$. **B.** $\triangle BED = \triangle CID$. **C.** $\triangle ADB = \triangle ADC$. **D.** $\triangle AED = \triangle BED$.

Lời giải

Chọn A



+ Vì $DE \perp AB$ ($E \in AB$), $DI \perp AC$ ($I \in AC$)
 suy ra $\triangle AED$ vuông tại E và $\triangle AID$ vuông tại I
 + Xét $\triangle AED$ vuông tại E và $\triangle AID$ vuông tại I có
 AD là cạnh chung
 $\widehat{EAD} = \widehat{IAD}$ (vì AD là tia phân giác góc A)
 Do đó $\triangle AED = \triangle AID$ (cạnh huyền – góc nhọn)

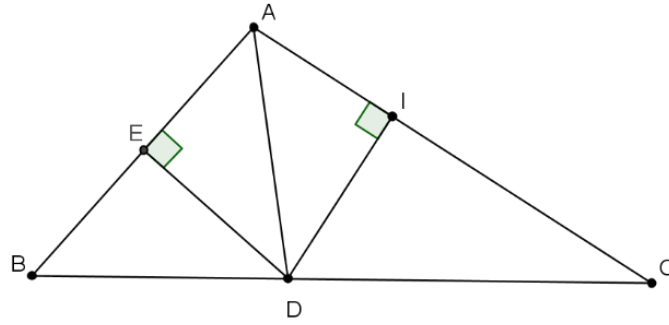
Câu 2. (HSG 7 huyện Thảo Lâm, 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ có ($AB < AC$). Vẽ AD là tia phân giác của góc A ($D \in BC$). Gọi E và I lần lượt là các hình chiếu của D trên cạnh AB ; AC . Khẳng định nào sau đây là đúng.

- A.** $\triangle AED = \triangle AID$. **B.** $\triangle BED = \triangle CID$. **C.** $\triangle ADB = \triangle ADC$. **D.** $\triangle AED = \triangle BED$.

Lời giải

Chọn A



vì E và I lượt là các hình chiếu của D trên cạnh AB ; AC .

$$\widehat{AED} = 90^\circ; \widehat{AID} = 90^\circ$$

Xét 2 tam giác $\triangle EAD$ và $\triangle AID$ có

AD : cạnh huyền chung

$$\widehat{EAD} = \widehat{IAD} \text{ (} AD \text{ là phân giác của } \widehat{BAC} \text{)}$$

Suy ra $\triangle AED = \triangle AID$

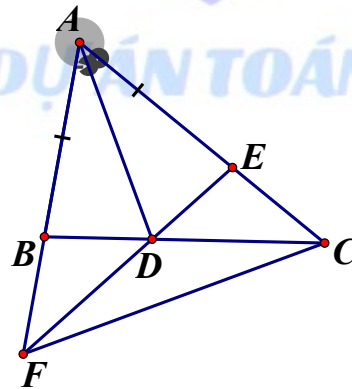
B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 trường Ân Tường Đông 2014 - 2015)

Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$. Kẻ tia phân giác AD của \widehat{BAC} ($D \in BC$). Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$, trên tia AB lấy điểm F sao cho $AF = AC$. Chứng minh rằng:

- $\triangle ADB = \triangle ADE$
- $\triangle BDF = \triangle EDC$

Lời giải



a) Xét $\triangle ADB$ và $\triangle ADE$ có:

$$\widehat{DAB} = \widehat{DAE}$$

$$AB = AE$$

AD chung

$$\Rightarrow \triangle ADB = \triangle ADE \text{ (c.g.c).}$$

b) Từ a) ta có: $\triangle ADB = \triangle ADE$ suy ra $BD = DE$

Xét $\triangle ADF$ và $\triangle ADC$ có:

$$\widehat{DAF} = \widehat{DAC}$$

$$AF = AC$$

AD chung

$$\Rightarrow \triangle ADF = \triangle ADC \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow DF = DC$$

Xét $\triangle BDF$ và $\triangle EDC$ có:

$$\widehat{BDF} = \widehat{EDC}$$

$$BD = DF$$

$$DF = DC$$

$$\triangle BDF = \triangle EDC \text{ (c.g.c)}.$$

Câu 2. (HSG 7 trường THCS Thạch Bình 2017 - 2018)

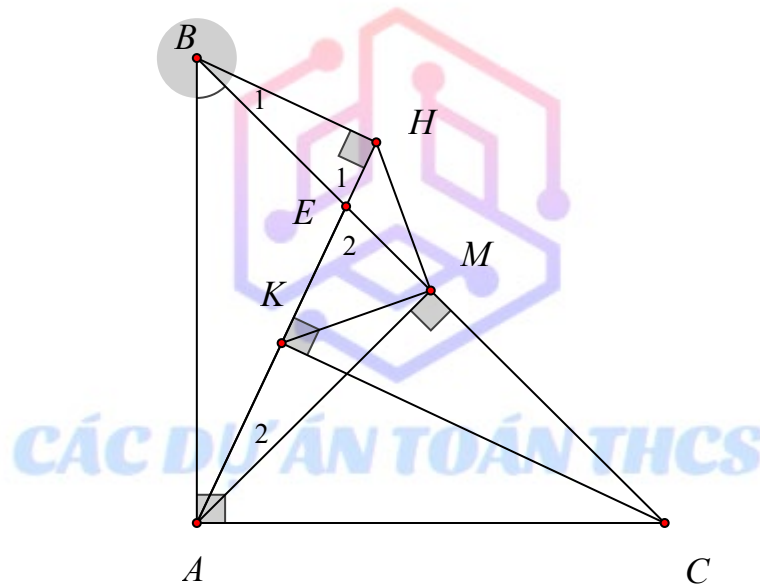
Cho tam giác ABC vuông cân tại A , trung tuyến AM . Lấy $E \in BC$, kẻ $BH \perp AE$, $CK \perp AE$ ($H, K \in AE$).

a) Chứng minh: $\triangle ACK = \triangle BAH$.

b) Chứng minh: $\triangle AMK = \triangle BMH$.

c) Chứng minh: $\triangle MHK$ cân.

Lời giải



a) Chứng minh: $\triangle ACK = \triangle BAH$.

Xét $\triangle ABH$ và $\triangle CAK$ có:

$$\Rightarrow \widehat{AHB} = \widehat{CKA} (= 90^\circ)$$

$$AB = AC \text{ (gt)}$$

$$\widehat{BAH} = \widehat{ACK} \text{ (cùng phụ với } \widehat{KAC})$$

$$\Rightarrow \triangle ACK = \triangle BAH \text{ (g.c.g) (đpcm)}$$

b) Chứng minh: $\triangle AMK = \triangle BMH$.

Ta có: $\triangle BHE$ vuông tại H .

$$\Rightarrow \widehat{B}_1 + \widehat{E}_1 = 90^\circ$$

$\triangle AEM$ vuông tại M (Vì $\triangle ABC$ vuông cân, AM là đường trung tuyến đồng thời là đường cao).

$$\Rightarrow \widehat{A}_2 + \widehat{E}_2 = 90^\circ$$

Mà: $\widehat{E}_1 = \widehat{E}_2$ (đối đỉnh). $\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{A}_2$.

Xét $\triangle AMK$ và $\triangle BMH$ có:

$BH = AK$ (Vì $\triangle ACK = \triangle BAH$ (cmt))

$\widehat{B}_1 = \widehat{A}_2$

$$BM = AM \left(= \frac{1}{2} BC \right)$$

$\Rightarrow \triangle AMK = \triangle BMH$ (c.g.c).

c) Chứng minh: $\triangle MHK$ cân.

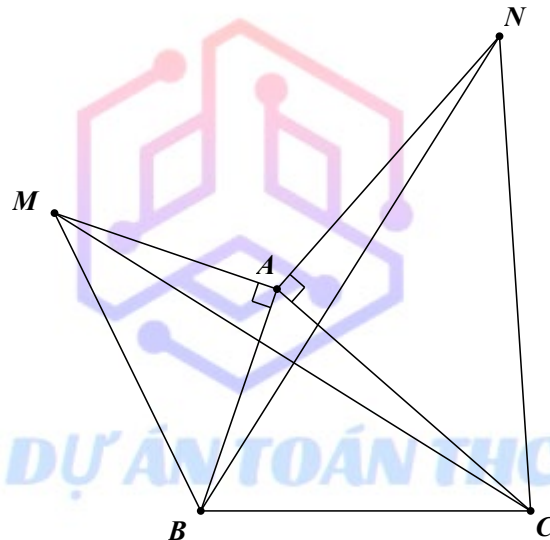
Ta có: $\triangle AMK = \triangle BMH$ (cmt) $\Rightarrow MK = MH$

Xét $\triangle MHK$ có: $MK = MH \Rightarrow \triangle MHK$ cân tại M .

Câu 3. (HSG 7 Huyện Vị Thanh, 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC có góc A nhỏ hơn 90° . Vẽ ra ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại A là $\triangle ABM$ và $\triangle ACN$. Chứng minh rằng: $\triangle AMC = \triangle ABN$.

Lời giải



Xét $\triangle AMC$ và $\triangle ABN$ có:

$AM = AB$ ($\triangle ABM$ vuông cân)

$AC = AN$ ($\triangle ACN$ vuông cân)

$$\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{NAC} \left(= 90^\circ + \widehat{BAC} \right)$$

$\Rightarrow \triangle AMC = \triangle ABN$ (c.g.c).

CD14: PHẦN HÌNH HỌC

Dạng toán: Tính số đo góc, chứng minh góc bằng nhau, so sánh góc
Dạng toán: Tính độ dài đoạn thẳng, chứng minh đoạn thẳng bằng nhau
Dạng toán: Chứng minh tam giác bằng nhau
Dạng toán: Chứng minh ba điểm thẳng hàng
Dạng toán: Bất đẳng thức tam giác
Dạng toán: Chứng minh song song, vuông góc
Dạng toán: Hình khối trong thực tiễn
Dạng toán: Bài toán chứng minh tổng hợp

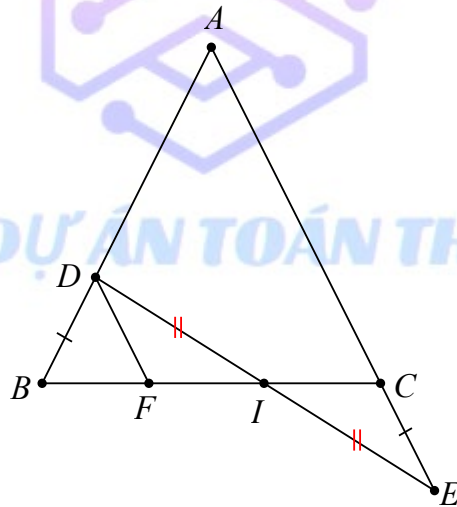
Dạng toán: Chứng minh ba điểm thẳng hàng

Câu 1. (HSG 7 huyện 2016 - 2017)

Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A . Trên cạnh AB lấy điểm D , trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Gọi I là trung điểm của DE .

Chứng minh ba điểm B, I, C thẳng hàng

Lời giải



Kẻ $DF \parallel AC$ ($F \in AC$)

$\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{DFB}$ (đồng vị)

$\Rightarrow \widehat{DFB} = \widehat{B} (= \widehat{ACB}) \Rightarrow \triangle DBF$ cân tại D

$\Rightarrow DF = BD = CE$

Xét $\triangle IDF$ và $\triangle IEC$ có:

$DF = CE$ (gt)

$\widehat{IDF} = \widehat{IEC}$ (so le trong)

$DI = IE$

Suy ra $\triangle IDF = \triangle IEC$ (c - g - c)

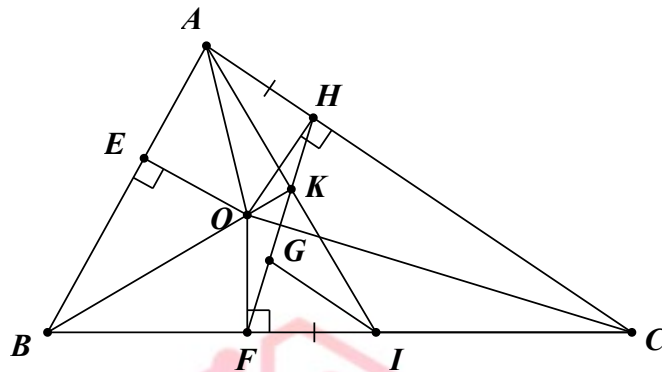
$$\Rightarrow \widehat{DIF} = \widehat{EIC}$$

$\Rightarrow F, I, C$ thẳng hàng $\Rightarrow B, I, C$ thẳng hàng.

Câu 2. (HSG 7 trường Lý Thường Kiệt 2017- 2018)

Cho ΔABC có 3 góc nhọn, $AB < AC < BC$. Các tia phân giác của góc A và góc C cắt nhau tại O . Gọi F là hình chiếu của O trên BC ; H là hình chiếu của O trên AC . Lấy điểm I trên đoạn FC sao cho $FI = AH$. Gọi K là giao điểm của FH và AI . Chứng minh 3 điểm B, O, K thẳng hàng.

Lời giải



Ta có $\widehat{CHO} = \widehat{CFO} = 90^\circ$ (vì $OH \perp AC, OF \perp BC$)

Xét ΔCHO vuông và ΔCFO vuông có:

OC chung

$$\widehat{HCO} = \widehat{FCO} \text{ (} OC \text{ là phân giác } \widehat{C}\text{)}$$

Vậy $\Delta CHO = \Delta CFO$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$$\Rightarrow CH = CF \text{ (hai cạnh tương ứng).}$$

Vậy ΔFCH cân tại C .

Qua I vẽ $IG \parallel AC$ ($G \in FH$)

$$\text{Ta có } \Delta FCH \text{ cân tại } C \text{ (cmt)} \Rightarrow \widehat{CHF} = \widehat{CFH} \text{ (1)}$$

$$\text{Mà } \widehat{CHF} = \widehat{FGI} \text{ (đồng vị, } IG \parallel AC\text{)} \text{ (2)}$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \widehat{CFH} = \widehat{FGI} \text{ hay } \widehat{IFG} = \widehat{IGF}$$

Vậy ΔIFG cân tại I

$$\Rightarrow FI = GI$$

Mặt khác: $FI = AH$ nên $GI = AH (= FI)$

Ta lại có: $\widehat{IGK} = \widehat{AHK}$; $\widehat{HAK} = \widehat{GIK}$ (so le trong, $IG \parallel AC$)

Xét ΔAHK và ΔIGK có:

$$\widehat{IGK} = \widehat{AHK} \text{ (cmt)}$$

$$GI = AH \text{ (cmt)}$$

$$\widehat{HAK} = \widehat{GIK} \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \Delta AHK = \Delta IGK \text{ (g-c-g)}$$

$$\Rightarrow AK = KI \text{ (đpcm)}$$

Vẽ $OE \perp AB$ tại E,

ΔABC có 2 tia phân giác AO và CO cắt nhau tại O

Nên BO là tia phân giác thứ ba của \widehat{ABC} (*)

$\Delta AOB = \Delta IOB$ (g.c.g) nên $AB = BI$

Chứng minh được: $\Delta ABK = \Delta IBK$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{ABK} = \widehat{IBK}$

Từ đó suy ra BK là tia phân giác của \widehat{ABC} (**)

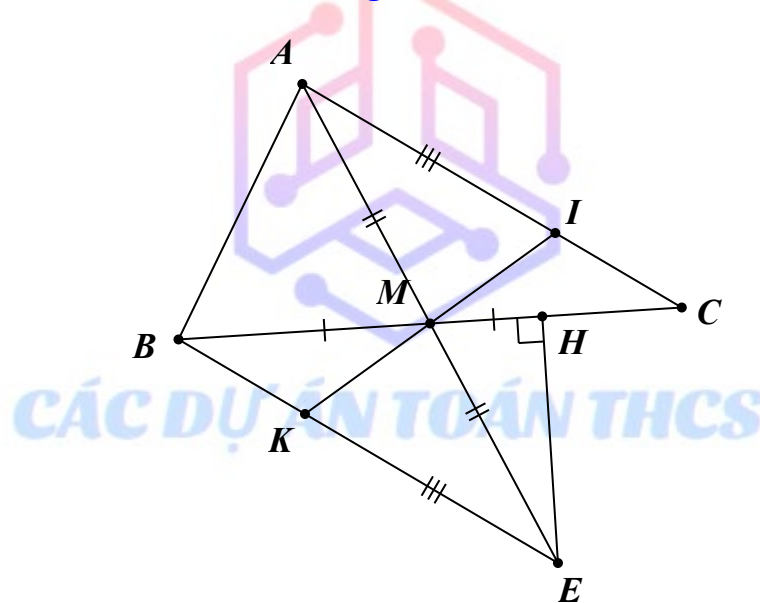
Từ (*) và (**) suy ra tia BK, BO trùng nhau

Hay B, O, K là ba điểm thẳng hàng.

Câu 3. (HSG 7 huyện 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC , M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Gọi I là một điểm trên AC , K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$. Chứng minh ba điểm I, M, K thẳng hàng

Lời giải



Xét ΔAMC và ΔEMB có:

$AM = EM$ (gt)

$\widehat{AMC} = \widehat{EMB}$ (đối đỉnh)

$BM = MC$ (gt)

Nên $\Delta AMC = \Delta EMB$ (c.g.c)

$\Rightarrow AC = EB$

Vì $\Delta AMC = \Delta EMB \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MEB}$

mà 2 góc ở vị trí so le trong được tạo bởi đường thẳng AC, EB cắt đường thẳng AE)

$\Rightarrow AC \parallel BE$

Xét ΔAMI và ΔEMK có: $AM = EM$ (gt)

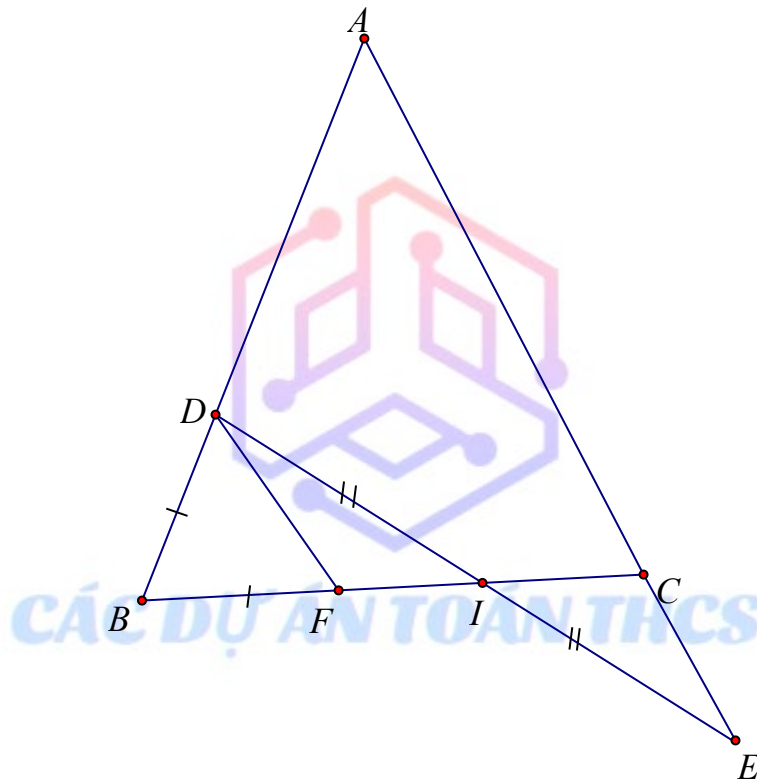
$\widehat{MAI} = \widehat{MEK}$ ($\Delta AMC = \Delta EMB$)

$AI = EK$ (gt)
 $\Rightarrow \Delta AMI = \Delta EMK$ (c.g.c)
 $\Rightarrow \widehat{AMI} = \widehat{EMK}$
 Mà $\widehat{AMI} + \widehat{IME} = 180^\circ$ (Kề bù)
 $\Rightarrow \widehat{EMK} + \widehat{IME} = 180^\circ$
 Vậy ba điểm I, M, K thẳng hàng.

Câu 4. (HSG 7 huyện 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC cân tại A , trên cạnh AB lấy điểm D , trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho $CE = BD$. Gọi I là trung điểm của DE . Chứng minh ba điểm B, I, C thẳng hàng.

Lời giải



Kẻ $DF \parallel AC$ ($F \in BC$)
 $\widehat{DFB} = \widehat{ACB}$ (hai góc đồng vị)
 Mà $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ (tam giác ABC cân)
 $\Rightarrow \widehat{DFB} = \widehat{ABC}$
 $\Rightarrow \Delta DBF$ cân tại D
 Ta có: $DB = DF$
 Mà $DF = CE$ (gt)
 $\Rightarrow DF = CE$
 $\Rightarrow \Delta IDF = \Delta IEC$ (c.g.c)
 $\Rightarrow \widehat{DIF} = \widehat{EIC}$
 Vậy ba điểm B, I, C thẳng hàng (vì ba điểm D, I, E thẳng hàng)

CD14: PHẦN HÌNH HỌC

Dạng toán: Tính số đo góc, chứng minh góc bằng nhau, so sánh góc
Dạng toán: Tính độ dài đoạn thẳng, chứng minh đoạn thẳng bằng nhau
Dạng toán: Chứng minh tam giác bằng nhau
Dạng toán: Chứng minh ba điểm thẳng hàng
Dạng toán: Bất đẳng thức tam giác
Dạng toán: Chứng minh song song, vuông góc
Dạng toán: Hình khối trong thực tiễn
Dạng toán: Bài toán chứng minh tổng hợp

Dạng toán: Bất đẳng thức tam giác

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Ba 2021 - 2022)

Cho ΔABC có $\hat{A} = 45^\circ$; $2\hat{B} = 3\hat{C}$. Bất đẳng thức nào sau đây đúng

A. $BC < AC < AB$.

B. $AC < AB < BC$.

C. $AC < BC < AB$.

D. $BC < AB < AC$.

Lời giải

Chọn A

Cho ΔABC có $\hat{A} = 45^\circ$; $2\hat{B} = 3\hat{C}$.

Suy ra $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} = 135^\circ$

$$\Rightarrow 2\hat{B} + 2\hat{C} = 270^\circ$$

$$\Rightarrow 3\hat{C} + 2\hat{C} = 270^\circ$$

$$\Rightarrow 5\hat{C} = 270^\circ \Rightarrow \hat{C} = 54^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{B} = 81^\circ$$

Do đó $\hat{A} < \hat{B} < \hat{C} \Rightarrow BC < AC < AB$

Câu 2. (HSG 7 huyện Sơn Động, 2022 - 2023)

Cho ΔABC có $AB = 5$ cm, $AC = 10$ cm. Biết độ dài cạnh BC (đơn vị cm) là một số nguyên.

Hỏi độ dài cạnh BC có thể nhận được bao nhiêu giá trị?

A. 10.

B. 8.

C. 11.

D. 9.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng bất đẳng thức tam giác vào ΔABC ta được:

$$AC - AB < BC < AC + AB.$$

Suy ra: $10 - 5 < BC < 10 + 5$ hay $5 < BC < 15$.

Mà Biết độ dài cạnh BC (đơn vị cm) là một số nguyên nên BC có thể nhận một trong 9 giá trị 6 cm, 7 cm, 8 cm, ..., 14cm.

Câu 3. (HSG 7 huyện Vĩnh Tường 2015 - 2016)

Cho tam giác ABC có $\widehat{A} + 4\widehat{B} + 10\widehat{C} = 360^\circ$ và $3\widehat{B} + 9\widehat{C} = 180^\circ$ thì khẳng định nào sau đây là đúng:

- A.** $AB < BC < AC$. **B.** $AB < AC < BC$. **C.** $BC > AC > AB$. **D.** $AB = BC = AC$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } 3\widehat{B} + 9\widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{B} + 3\widehat{C} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 60^\circ - 3\widehat{C} \Rightarrow \widehat{B} < 60^\circ \text{ (vì } \widehat{C} > 0) \text{ (1)}$$

$$\text{Lại có } 3\widehat{C} = 60^\circ - \widehat{B} \Rightarrow \widehat{C} < 20^\circ \text{ (vì } \widehat{B} > 0) \text{ (2)}$$

$$\begin{aligned} \widehat{A} + 4\widehat{B} + 10\widehat{C} = 360^\circ &\Rightarrow \widehat{A} = 360^\circ - 4\widehat{B} - 10\widehat{C} \Rightarrow \widehat{A} = 360^\circ - 4(60^\circ - 3\widehat{C}) - 10\widehat{C} \\ &\Rightarrow \widehat{A} = 120^\circ + 2\widehat{C} \Rightarrow \widehat{A} \text{ là góc lớn nhất} \end{aligned} \text{ (3)}$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{C} < \widehat{B} < \widehat{A} \Rightarrow AB < AC < BC$

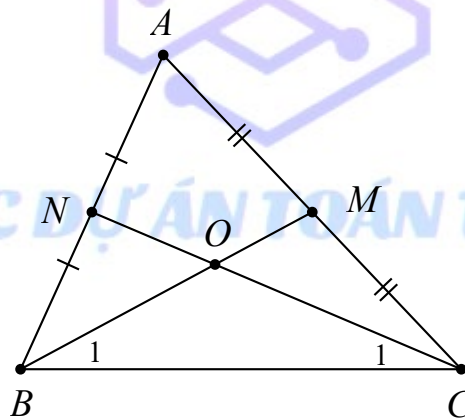
Câu 4. (HSG 7 huyện Tân An 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC , hai đường trung tuyến BM , CN . Biết $AC > AB$. Khi đó độ dài hai đoạn thẳng BM và CN là:

- A.** $BM \leq CN$ **B.** $BM > CN$ **C.** $BM < CN$ **D.** $BM = CN$

Lời giải

Chọn C



Gọi O là giao điểm của BM và CN .

Xét $\triangle ABC$ có: $AC > AB$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} > \widehat{ACB} \text{ (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện)}$$

$$\Rightarrow \widehat{B}_1 > \widehat{C}_1$$

Xét $\triangle OBC$ có: $\widehat{B}_1 > \widehat{C}_1$ (cmt)

$$\Rightarrow OC > OB \text{ (quan hệ giữa góc và cạnh đối diện)}$$

$$\text{mà } OC = \frac{2}{3}CN, OB = \frac{2}{3}BM \text{ (O là trọng tâm của } \triangle ABC)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}CN > \frac{2}{3}BM$$

$$\Rightarrow CN > BM \text{ hay } BM < CN$$

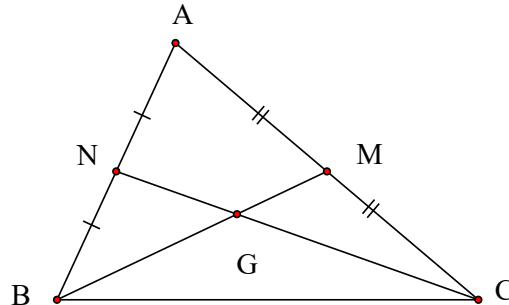
Câu 6. (HSG 7 huyện Thanh Sơn, 2022 - 2023)

Cho ΔABC , hai đường trung tuyến BM, CN . Biết $AC > AB$. Chọn khẳng định đúng.

- A. $BM \leq CN$. B. $BM > CN$. C. $BM < CN$. D. $BM = CN$.

Lời giải

Chọn C



Xét ΔABC có $AC > AB$ nên $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$

\Rightarrow Chiều cao từ A đến BM lớn hơn chiều cao từ A đến CN

Mặt khác $S_{AMB} = S_{ANC} = \frac{1}{2} S_{ABC}$

Do đó $CN > BM$.

Vậy $CN > BM$.

Câu 7. (HSG 7 huyện Sơn Động, 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có $4\widehat{A} = 6\widehat{B} = 3\widehat{C}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $AC > AB > BC$. B. $AC > BC > AB$. C. $AB > BC > AC$. D. $AB > AC > BC$.

Lời giải

Chọn C

Vì $3\widehat{C} = 4\widehat{A} = 6\widehat{B}$ nên $\widehat{C} > \widehat{A} > \widehat{B}$.

Do đó: $AB > BC > AC$ (mối quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong ΔABC).

Câu 8. (HSG 7 huyện Tam Nông, 2022 - 2023)

Tam giác ABC cân có $AB = 8\text{cm}, AC = 5\text{cm}$ thì chu vi tam giác đó bằng:

- A. 21cm. B. 18cm.
C. 21cm hoặc 18cm. D. 20cm hoặc 18cm.

Lời giải

Chọn C

Theo bất đẳng thức tam giác ta có: $8 - 5 < BC < 8 + 5 \Rightarrow 2 < BC < 13$

Suy ra $BC = 5\text{cm}$ hoặc $BC = 8\text{cm}$

Do đó chu vi tam giác ABC bằng: $5 + 5 + 8 = 18(\text{cm})$ hoặc $5 + 8 + 8 = 21(\text{cm})$

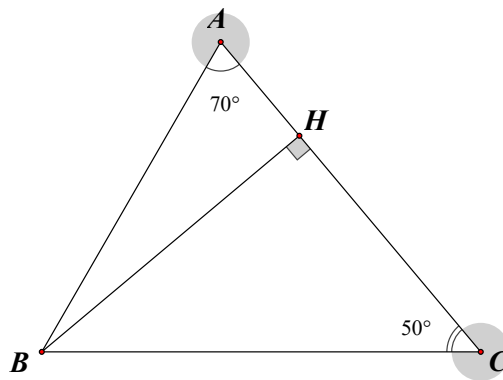
Câu 9. (HSG 7 huyện 2022 - 2023)

Cho ΔABC có $\widehat{A} = 70^\circ; \widehat{ACB} = 50^\circ$. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ B . Khẳng định nào sau đây đúng.

- A. $HB < HC$ B. $HB > HC$ C. $HB = HC$ D. $\widehat{BAC} = 70^\circ$

Lời giải

Chọn B



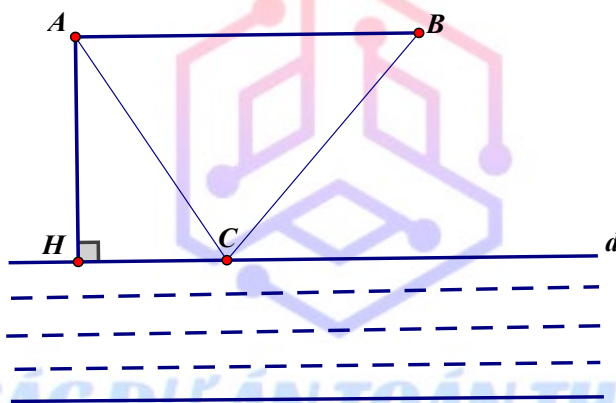
Ta có ΔBHC vuông tại H .

Và $\widehat{ACB} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{HCB} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{HBC} = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$

$\Rightarrow \widehat{HCB} > \widehat{HBC} \Rightarrow HB > HC$ (Quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác)

Câu 10. (HSG 7 Tam Nông, Phú Thọ 2021-2022)

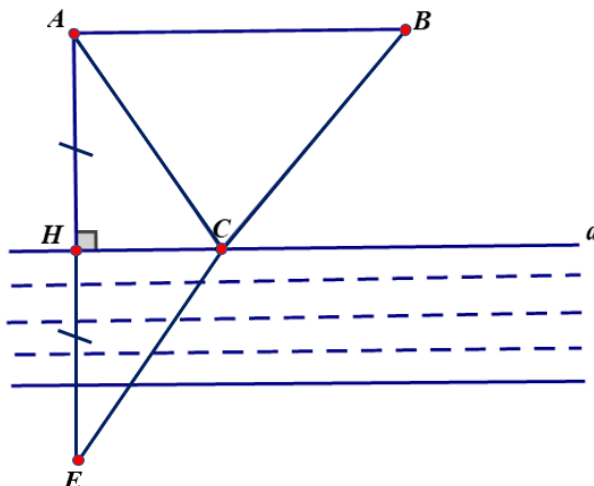
Một người đi từ điểm A đến điểm C (nào đó) trên bờ sông d , lấy nước rồi mang về điểm B . Biết AB song song d và khoảng cách từ A đến bờ sông d là AH . Quãng đường đi lấy nước $AC + CB$ ngắn nhất khi



- A. E, C, H thẳng hàng
- B. H, C, B thẳng hàng
- C. E, H, B thẳng hàng
- D. E, C, B thẳng hàng

Lời giải

Chọn D



Trên tia đối của tia HA lấy điểm E sao cho $EH = HA$
 Xét ΔAHC vuông tại H và ΔEHC vuông tại H có

HC chung

$$EH = HA$$

Do đó $\triangle AHC = \triangle EHC$ (c.g.c)

$$\Rightarrow AC = EC \text{ (2 cạnh tương ứng)}$$

$$\Rightarrow AC + CB = EC + CB$$

Xét $\triangle EBC$ có $EC + BC \geq EB$ (Bất đẳng thức trong tam giác).

Suy ra $AC + CB$ ngắn nhất khi và chỉ khi $AC + CB = EB \Rightarrow E, C, B$ thẳng hàng

Câu 11. (HSG 7 trường THCS Phan Đình Phùng 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC , hai đường trung tuyến BM , CN cắt nhau tại G . Biết $\widehat{GBC} > \widehat{GCB}$. Khi đó độ dài hai đoạn thẳng BM và CN là:

A. $BM \leq CN$

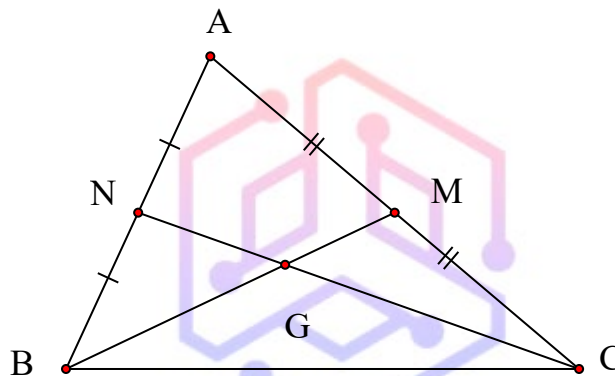
B. $BM > CN$

C. $BM < CN$

D. $BM = CN$

Lời giải

Chọn C



Xét $\triangle GBC$ có $\widehat{GBC} > \widehat{GCB}$ nên $GC > GB$ (cạnh đối diện với góc lớn hơn thì lớn hơn).

Do G là trọng tâm của $\triangle ABC$ nên $CG = \frac{2}{3}CN$, $BG = \frac{2}{3}BM$.

Khi đó $\frac{2}{3}CN > \frac{2}{3}BM$.

Do đó $CN > BM$.

Vậy $CN > BM$.

B. Tự luận

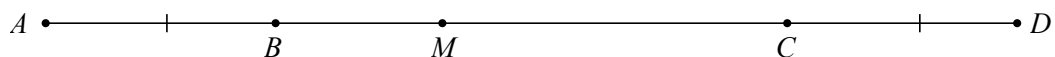
Câu 1. (HSG 7 huyện Tam Hưng 2013 - 2014)

Cho hai điểm B và C nằm trên đoạn thẳng AD sao cho $AB = CD$. Lấy điểm M tùy ý trong mặt phẳng. Chứng minh rằng $MA + MD \geq MB + MC$

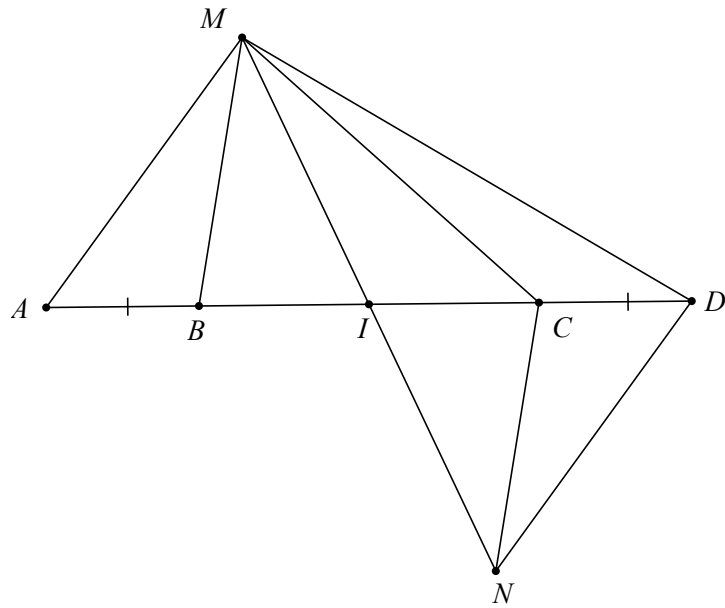
Lời giải

Xét 2 trường hợp

* Trường hợp điểm $M \in AD$ thì ta có: $MA + MD > MB + MC$



* Trường hợp $M \notin AD$, Gọi I là trung điểm của BC



Trên tia đối của tia IM lấy điểm N sao cho $IM = IN$ và ta có $IB = IC$

$$\text{Vì } \frac{AB = CD}{AB + IB = IC + CD} \Rightarrow AI = ID$$

*Chứng minh được $\triangle IMA = \triangle IND$ (c.g.c) $\Rightarrow MA = ND$

- Điểm C nằm trong $\triangle MDN$ chứng minh được $ND + MD > NC + MC$

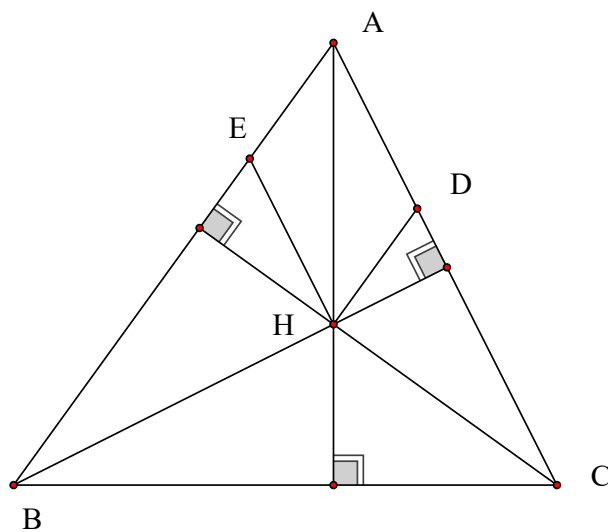
- Chứng minh $\triangle IBM = \triangle ICN$ (c.g.c) suy ra $MA + MD > MB + MC$

Câu 2. (HSG 7 huyện Yên Định 2022 - 2023; huyện Hoài Nhơn 2018 - 2019; huyện Tân An; trường THCS Phan Đình Phùng 2017 - 2018; huyện Lâm Thao 2016 - 2017)

Cho tam giác nhọn ABC , trực tâm H .

Chứng minh rằng: $HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + AC + BC)$.

Lời giải



Qua H kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC tại D , kẻ đường thẳng song song với AC cắt AB tại E .

Xét $\triangle AHD$ và $\triangle HAE$ có:

$$\widehat{HAD} = \widehat{AHE} \text{ (So le trong, } AD \parallel HE \text{)}$$

AH chung

$$\widehat{AHD} = \widehat{HAE} \text{ (So le trong, } AE // HD \text{)}$$

Suy ra $\Delta AHD = \Delta HAE$ (g.c.g)

Suy ra $AD = HE$; $HD = AE$ (Hai cạnh tương ứng)

Xét ΔAHD có $HA < HD + AD$ (Theo bất đẳng thức tam giác)

Suy ra $HA < AE + AD$ (1)

Ta có $BH \perp AC$; $HE // AC$

Suy ra $HE \perp BH$

Do đó ΔHBE vuông tại H , suy ra $HB < BE$ (2)

Chứng minh tương tự ta có $HC < CD$ (3)

Từ (1); (2) và (3) suy ra $HA + HB + HC < AE + AD + BE + CD$

Suy ra $HA + HB + HC < AB + AC$

Chứng minh tương tự ta có $HA + HB + HC < AB + BC$

$HA + HB + HC < BC + AC$

Từ đó suy ra $HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + AC + BC)$ (đpcm).

Câu 3. (HSG 7 huyện 2022 - 2023)

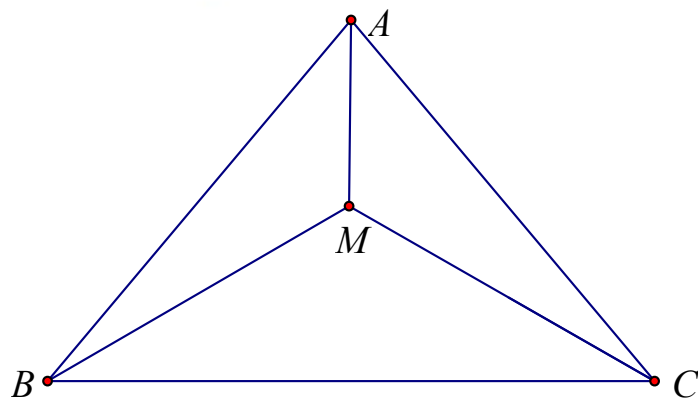
a) Cho tam giác ABC . M là điểm bất kỳ trong tam giác. Chứng minh:

$$2(MA + MB + MC) > AB + AC + BC$$

b) Cho tam giác ABC . AN, BP, CQ là ba trung tuyến. Chứng minh:

$$\frac{4}{3}(AN + BP + CQ) > AB + AC + BC$$

Lời giải



a) Tam giác MBC có : $MB + MC > BC$

Tương tự : $MC + MA > AC$; $MA + MB > AB$

$$\Rightarrow 2MA + 2MB + 2MC > AB + AC + BC$$

$$\Rightarrow 2(MA + MB + MC) > AB + AC + BC$$

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác. Áp dụng câu a ta có:

$$2(GA + GB + GC) > AB + AC + BC$$

$$\text{Có: } GA = \frac{2}{3} AN; GB = \frac{2}{3} BP; GC = \frac{2}{3} CQ$$

Thay vào trên được:

$$2\left(\frac{2}{3} AN + \frac{2}{3} BP + \frac{2}{3} CQ\right) > AB + AC + BC$$

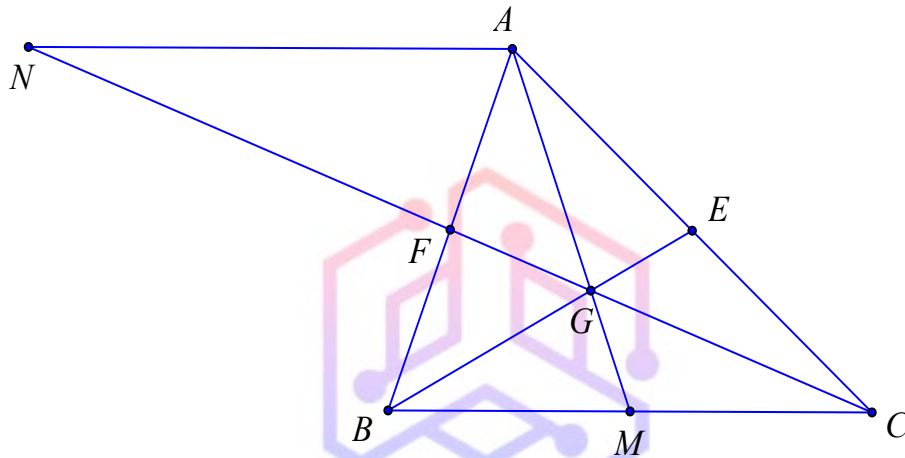
$$\Rightarrow \frac{4}{3}(AN + BP + CQ) > AB + AC + BC.$$

Câu 4. (HSG 7 huyện An Nhơn năm 2021 - 2022)

Cho tam giác ABC , trung tuyến AM và BE cắt nhau tại G .

Chứng minh rằng nếu $\widehat{AGB} \leq 90^\circ$ thì $AC + BC > 3AB$.

Lời giải



Vẽ trung tuyến CF , trên tia đối tia FC lấy điểm N sao cho $NF = CF$.

Xét $\triangle AFN$ và $\triangle BFC$ có:

$$AF = BF; \widehat{AFN} = \widehat{BFC}; NF = CF;$$

$$\Rightarrow \triangle AFN = \triangle BFC \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow AN = BC$$

Xét $\triangle ACN$ có $AN + AC > NC$ (BĐT tam giác)

$$\text{Hay } BC + AC > NC \quad (1)$$

Lại có G là trọng tâm của tam giác ABC

$$\Rightarrow CF = 3GF \Rightarrow NC = 6GF \quad (2)$$

Ta chứng minh nếu $\widehat{AGB} \leq 90^\circ$ thì $GF \geq \frac{AB}{2}$

Thật vậy, giả sử $GF < \frac{AB}{2} = AF = BF$

Thì $\widehat{FAG} < \widehat{AGF}$ và $\widehat{FBG} < \widehat{BGF}$

suy ra $\widehat{FAG} + \widehat{FBG} < \widehat{AGF} + \widehat{BGF} = \widehat{AGB} \leq 90^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{FAG} + \widehat{FBG} + \widehat{AGB} < 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \text{ (Vô lý)}$$

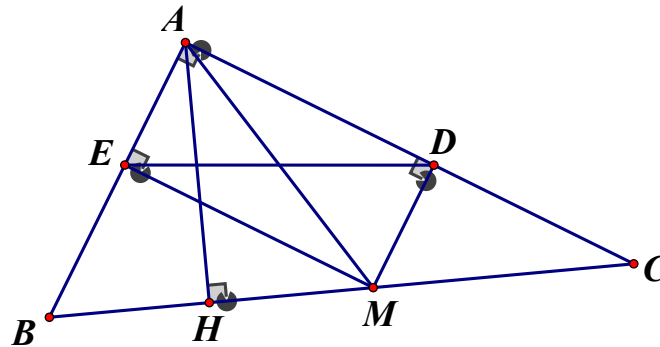
$$\text{Vậy } GF \geq \frac{AB}{2} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) } \Rightarrow NC \geq 3AB \Rightarrow AC + BC > 3AB$$

Câu 5. (HSG 7 huyện Triệu Sơn 2015 - 2016)

Cho tam giác ABC vuông ở A , điểm M nằm giữa B và C . Gọi D, E thứ tự là hình chiếu của M trên AC, AB . Tìm vị trí của M để DE có độ dài nhỏ nhất.

Lời giải



Để thấy $\triangle AEM = \triangle MDA$ (cạnh huyền-góc nhọn)

$\Rightarrow EM = AD$ (2 cạnh tương ứng)

$\Rightarrow \triangle AEM = \triangle EAD$ (2 cạnh góc vuông)

$\Rightarrow AM = ED$ (2 cạnh tương ứng)

Kẻ $AH \perp BC$ tại H

Theo quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên ta có:

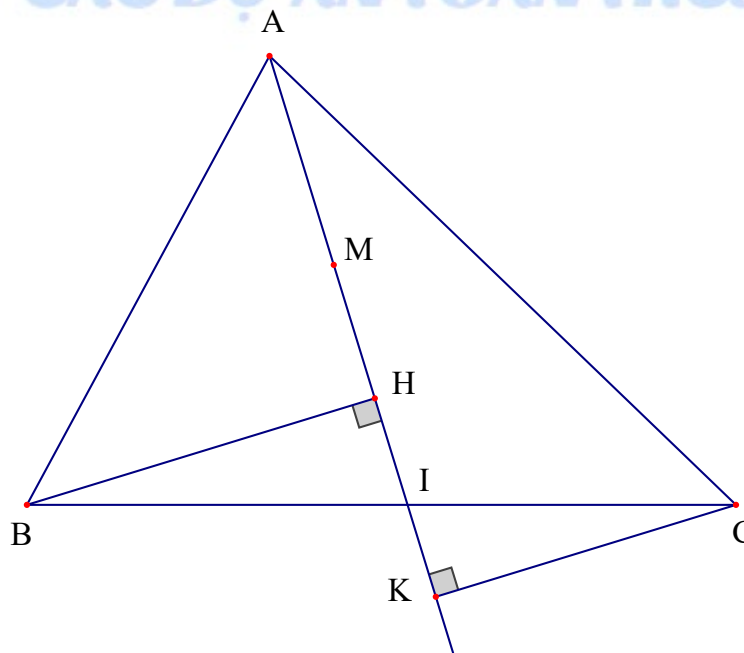
$DE = AM \geq AH$ (AH là đường cao của $\triangle ABC$)

Vậy DE nhỏ nhất khi AM nhỏ nhất $\Rightarrow M$ trùng với H .

Câu 6. (HSG 7 huyện Yên Phong 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ nhọn. Gọi M là một điểm bất kì nằm trong tam giác, xác định vị trí của M để biểu thức: $MA \cdot BC + MB \cdot AC + MC \cdot AB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải



Kẻ BH và CK cùng vuông góc với AM , ta có:

$$S_{MAB} + S_{MAC} = \frac{1}{2} AM \cdot BH + \frac{1}{2} AM \cdot CK = \frac{1}{2} AM \cdot (BH + CK) \quad (1)$$

Mặt khác: $BH \leq BI; CK \leq CI$

Suy ra: $BH + CK \leq BI + CI$ hay $BH + CK \leq BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $S_{MAB} + S_{MAC} = \frac{1}{2} AM \cdot (BH + CK) \leq \frac{1}{2} AM \cdot BC$ (3)

Dấu “=” xảy ra khi $AM \perp BC$

Chứng minh tương tự ta được: $S_{MBC} + S_{MAB} \leq \frac{AC \cdot BM}{2}$ (4)

$S_{MBC} + S_{MAC} \leq \frac{AB \cdot MC}{2}$ (5)

Từ (3), (4) và (5) ta được: $2[S_{MAB} + S_{MBC} + S_{MAC}] \leq \frac{BC \cdot AM}{2} + \frac{AC \cdot BM}{2} + \frac{AB \cdot MC}{2}$

hay $4 \cdot S_{ABC} \leq MA \cdot BC + MB \cdot CA + MC \cdot AB$

Dấu “=” xảy ra khi: $AM \perp BC, BM \perp AC, CM \perp AB$ Hay M là trực tâm của ΔABC .

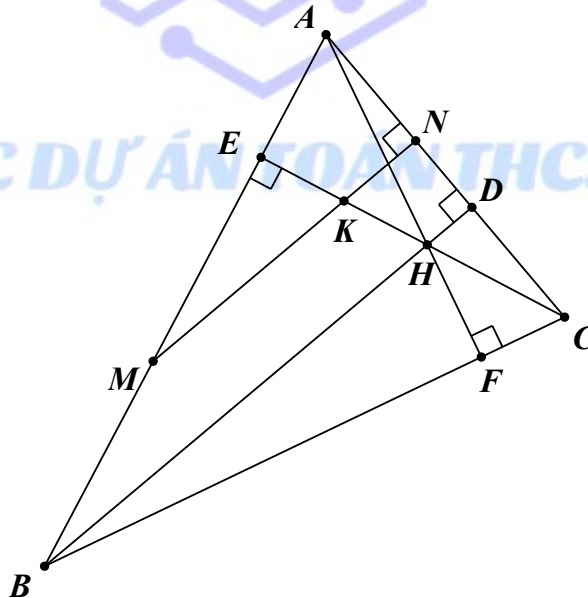
Vậy giá trị nhỏ nhất của $MA \cdot BC + MB \cdot CA + MC \cdot AB = 4 \cdot S_{ABC} = 4 \cdot S_{ABC}$

Xảy ra khi: $AM \perp BC, BM \perp AC, CM \perp AB$ hay M là trực tâm của ΔABC .

Câu 7. (HSG trường Tôn Đức Thắng 2018 - 2019; trường Trần Hưng Đạo 2017 - 2018)

Cho tam giác nhọn ABC có $AB > AC$, ba đường cao BD, CE và AF cắt nhau tại H . Lấy điểm M trên cạnh AB sao cho $AM = AC$. Gọi N là hình chiếu của M trên AC ; K là giao điểm của MN và CE . Chứng minh $AB + CE > AC + BD$.

Lời giải



Ta có $\Delta AEC = \Delta ANM$ (c.g.c) nên $CE = MN$

Giả sử $AB + CE > AC + BD$

Suy ra $AB - AC > BD - CE \Rightarrow AB - AM > BD - MN \Rightarrow BM > BD - MN$

Vẽ $MI \perp BD \Rightarrow BM > BI$ (BM là cạnh huyền) (luôn đúng)

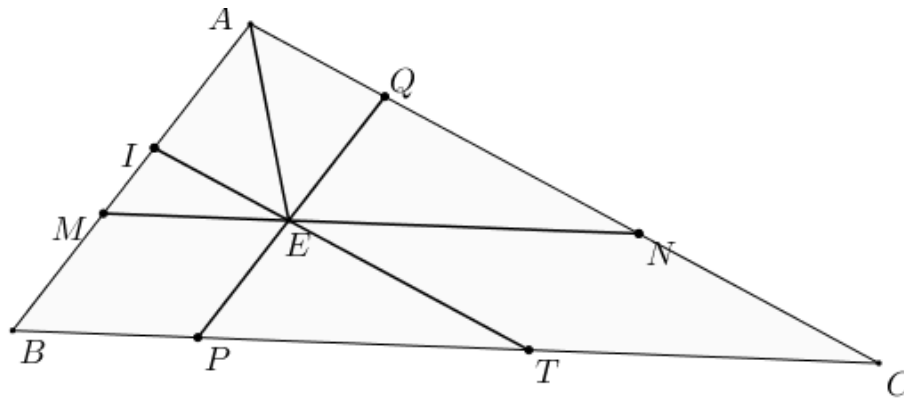
Vậy $AB + CE > AC + BD$.

Câu 88. (HSG 7 huyện Hiệp Hòa 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có $AB < AC < BC$. Điểm E nằm trong tam giác.

Chứng minh $EA + EB + EC < AC + BC$.

Lời giải



Từ E kẻ các đường thẳng MN, PQ, IT theo thứ tự song song với BC, AB, AC

Kết hợp với $AB < AC < BC$ ta xét trong $\Delta PET, \Delta QEN$ ta cũng có $PT > ET > EP$ và $EN > QN > EQ$ (2)

Trong $\Delta BEP, \Delta AEQ, \Delta CET$, ta có :

$$\begin{cases} EA < EQ + AQ \\ EB < BP + TC \\ EC < ET + TC \end{cases} \text{ và do (2) ta có : } \begin{cases} EA < QN + AQ \\ EB < BP + PT \\ EC < TC + NC \end{cases}$$

Lại có $EC = NC$ (hai đoạn thẳng song song chắn giữa hai đường thẳng song song)

$$\Rightarrow EA + EB + EC < QN + AQ + NC + BP + PT + TC$$

Nên $EA + EB + EC < BC + AC$

Vậy $EA + EB + EC < BC + AC$.

CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS

CD14: PHẦN HÌNH HỌC

Dạng toán: Tính số đo góc, chứng minh góc bằng nhau, so sánh góc
Dạng toán: Tính độ dài đoạn thẳng, chứng minh đoạn thẳng bằng nhau
Dạng toán: Chứng minh tam giác bằng nhau
Dạng toán: Chứng minh ba điểm thẳng hàng
Dạng toán: Bất đẳng thức tam giác
Dạng toán: Chứng minh song song, vuông góc
Dạng toán: Hình khối trong thực tiễn
Dạng toán: Bài toán chứng minh tổng hợp

Dạng toán: Chứng minh song song, vuông góc

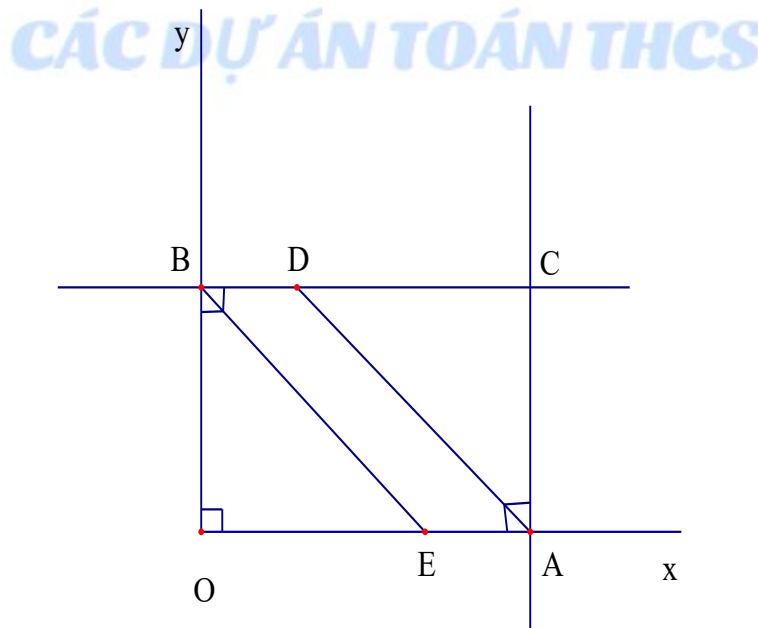
Câu 1. (HSG 7 huyện Ninh Giang 2022 - 2023)

Cho góc vuông xOy , trên tia Ox lấy điểm A , trên tia Oy lấy điểm B sao cho $OA > OB$. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với Ox , qua B kẻ đường thẳng vuông góc với Oy . Hai đường thẳng này cắt nhau ở C .

a) Chứng minh $AC \perp BC$.

b) Kẻ phân giác của \widehat{OAC} cắt BC tại D , kẻ phân giác của \widehat{OBC} cắt OA tại E . Chứng minh $AD \parallel BE$.

Lời giải



a) Ta áp dụng quan hệ vuông góc song song có $\begin{cases} AC \perp Ox \\ OB \perp Ox \end{cases} \Rightarrow AC \parallel OB$

Có $\begin{cases} AC \parallel OB \\ OB \perp BC \end{cases} \Rightarrow AC \perp BC$

b) Có AD là phân giác của \widehat{OAC} nên $\widehat{DAO} = \frac{1}{2}\widehat{CAO} = 45^\circ$ (1)

BE là phân giác của \widehat{OBC} nên $\widehat{EBO} = \frac{1}{2}\widehat{CBO} = 45^\circ$

Mà $\triangle OBE$, có $\widehat{O} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{OBE} + \widehat{BEO} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BEO} = 45^\circ$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \widehat{BEO} = \widehat{DAO}$

Hai góc này ở vị trí đồng vị nên $AD \parallel BE$.

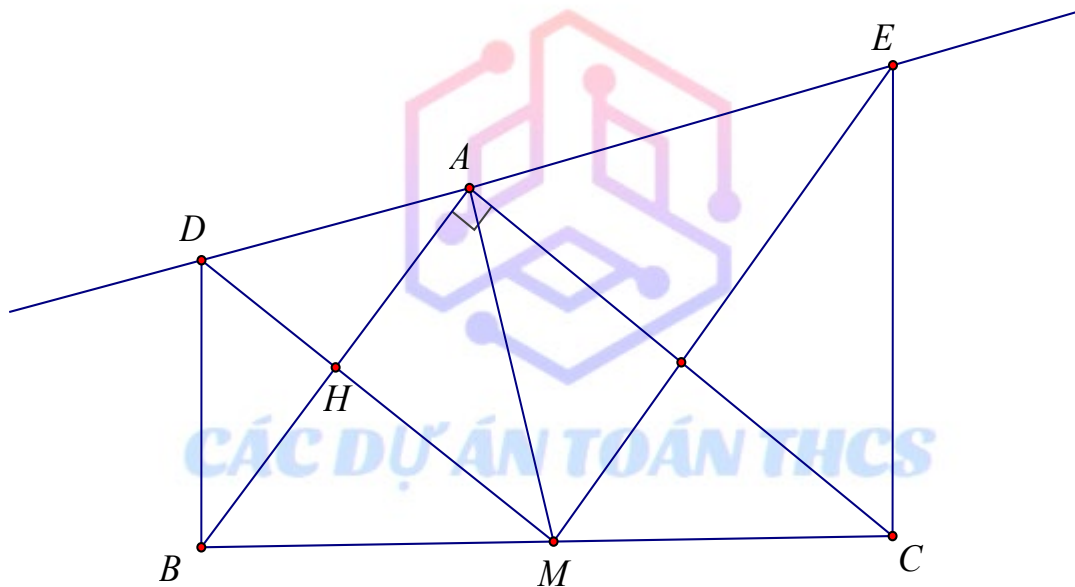
Câu 2. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc, năm học 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC vuông tại A , đường trung tuyến AM . Qua A kẻ đường thẳng d vuông góc với AM . Qua M kẻ các đường vuông góc với AB, AC chúng cắt d theo thứ tự ở D và E . Chứng minh rằng :

a) $BD \parallel CE$

b) $DE = BD + CE$

Lời giải



a) Theo tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông: $MA = MB$

Gọi H là giao điểm của MD và AB

$\triangle AMB$ cân tại M có MH đường cao ứng với đáy

nên là đường trung trực, suy ra $DA = DB$.

Chứng minh được $\triangle MBD = \triangle MAD$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{MBD} = \widehat{MAD} = 90^\circ$

Do đó: $DB \perp BC$

Tương tự ta có: $EC \perp BC$

Vậy $BD \parallel CE$ (cùng vuông góc với BC) (đpcm)

b) Theo câu a) ta có $DB = DA$.

Tương tự: $EC = EA$

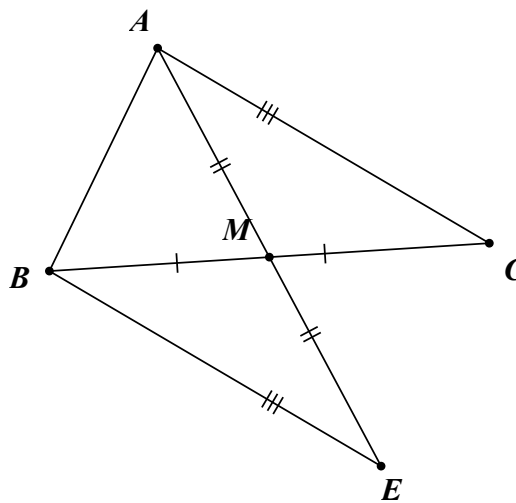
Suy ra $DE = DA + AE = BD + CE$

Vậy $DE = BD + CE$

Câu 3. (HSG 7 Huyện 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC , M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Chứng minh rằng $AC \parallel BE$.

Lời giải



Xét $\triangle AMC$ và $\triangle EMB$ có:

$$AM = EM \text{ (gt)}$$

$$\widehat{AMC} = \widehat{EMB} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$BM = MC \text{ (gt)}$$

$$\text{Nên } \triangle AMC = \triangle EMB \text{ (c.g.c)} \Rightarrow AC = EB$$

Vì $\triangle AMC = \triangle EMB \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MEB}$, 2 góc ở vị trí so le trong được tạo bởi đường thẳng AC, EB cắt đường thẳng AE)

$$\Rightarrow AC \parallel BE$$

Câu 4. (HSG 7 huyện Tân Tạo; huyện Phú Khánh 2018 - 2019; huyện Minh An 2016 – 2017)

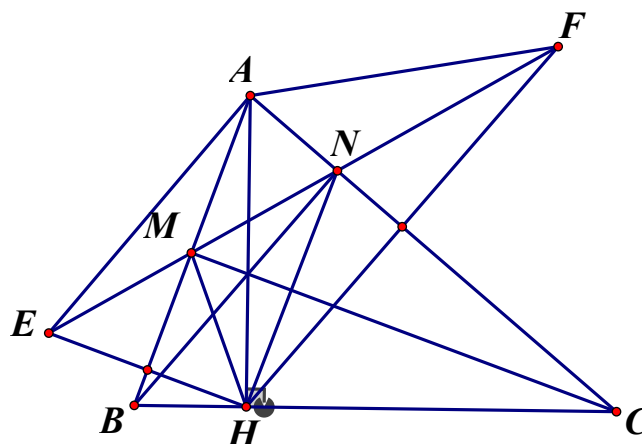
Cho tam giác ABC ($\widehat{BAC} < 90^\circ$), đường cao AH . Gọi E, F lần lượt là điểm đối xứng của H qua AB, AC , đường thẳng EF cắt AB, AC lần lượt tại M và N . Chứng minh rằng:

a) $AE = AF$.

b) HA là phân giác của \widehat{MHN} .

c) Chứng minh $CM \parallel EH, BN \parallel FH$.

Lời giải



a) Vì AB là trung trực của EH nên ta có: $AE = AH$ (1)

Vì AC là trung trực của HF nên ta có: $AH = AF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AE = AF$

b) Vì $M \in AB$ nên MB là phân giác \widehat{EMH}

$\Rightarrow MB$ là phân giác ngoài góc M của tam giác MNH

Vì $N \in AC$ nên NC là phân giác $\widehat{FNH} \Rightarrow NC$ là phân giác ngoài \widehat{N} của tam giác MNH

Do $MB \cap NC$ tại A nên HA là phân giác trong của ΔHMN hay HA là phân giác của \widehat{MHN} .

c) Ta có: $AH \perp BC(gt)$ mà HM là phân giác \widehat{MHN}

$\Rightarrow HB$ là phân giác ngoài của \widehat{H} của tam giác HMN

MB là phân giác ngoài của \widehat{M} của tam giác $\widehat{HMN}(cmt) \Rightarrow NB$ là phân giác trong góc N của

tam giác $HMN \Rightarrow BN \perp AC$ (hai đường phân giác của hai góc kề bù thì vuông góc với nhau)

$\Rightarrow BN \parallel HF$ (cùng vuông góc với AC)

Chứng minh tương tự ta có: $EH \parallel CM$.

Câu 5. (HSG 7 huyện Sơn Dương 2016 - 2017)

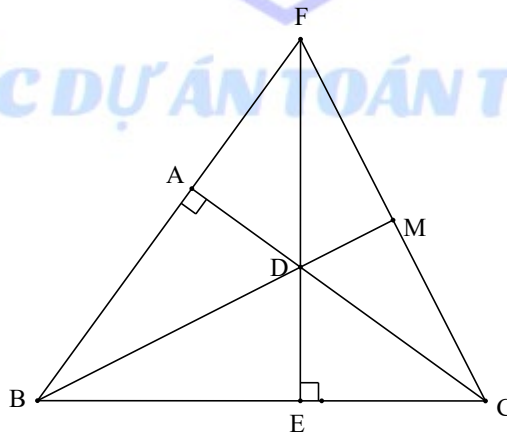
Cho tam giác ABC vuông góc tại A . Phân giác trong của B cắt cạnh AC tại điểm D . Từ D kẻ DE vuông góc với BC ($E \in BC$). Tia ED và tia BA cắt nhau tại F .

a) So sánh DA và DC

b) Chứng minh $BD \perp FC$

c) Chứng minh $AE \parallel FC$

Lời giải



a) Ta có $\Delta ABD = \Delta EDB$ (ch-gn) vì có BD chung; $\widehat{ABD} = \widehat{EBD}$; $\widehat{A} = \widehat{E} = 90^\circ$

cho ta

$$\Rightarrow DA = DE \quad (1)$$

Trong tam giác vuông EDC thì $DE < DC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $DA < DC$

b) $\Delta ABD = \Delta EDB$ nên $AB = BE$ (hai cạnh tương ứng)

Ta có $\Delta EFB = \Delta ACB$ (g-c-g) vì có $\widehat{A} = \widehat{E} = 90^\circ$; $AB = BE$ và \widehat{B} chung, suy ra $BF = BC$

$\Rightarrow \Delta FBC$ cân tại B

Mà BM là phân giác của \widehat{B} nên cũng là đường cao, suy ra $BM \perp FC$ (3) hay $BD \perp FC$

c) Ta dễ dàng thấy $BD \perp AE$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $AE \parallel FC$

Câu 6. (Đề minh họa HSG 7 trường Lý Nam Đế- Hưng Hà 2022 - 2023)

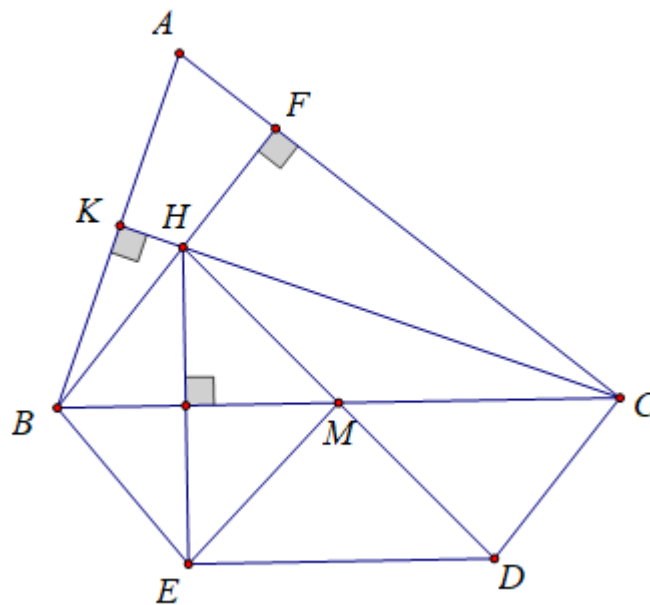
Cho tam giác ABC nhọn. Kẻ BF vuông góc với AC (F thuộc AC), kẻ CK vuông góc với AB (K thuộc AB), BF cắt CK tại H . Gọi M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MH lấy điểm D sao cho $MD = MH$

a) Chứng minh $DC \parallel BH$

b) Từ H kẻ HI vuông góc với BC (I thuộc BC), trên tia đối của tia IH lấy điểm E sao cho $IE = IH$. Chứng minh rằng: $BE = DC$

c) Chứng minh: $DE \parallel BC$

Lời giải



a) Chỉ ra $\triangle BHM = \triangle CMD$ (c - g - c)

Suy ra $\widehat{HBM} = \widehat{DCM}$ (hai góc tương ứng)

Mà hai góc này ở vị trí so le trong suy ra $DC \parallel BH$.

b) $\triangle BHM = \triangle CMD$ (cmt)

Suy ra $CD = BH$ (1)

Chứng minh $\triangle BIH = \triangle BIE$ (c - g - c)

Suy ra $BH = BE$ (2)

Từ (1) và (2) $BE = DC$.

c) Chứng minh $\triangle MIH = \triangle MIE$ (c - g - c)

Suy ra $MH = ME$, mà $MH = MD$ (gt) nên $ME = MD$.

Vì $MH = ME$ suy ra $\triangle MEH$ cân tại M

Suy ra $\widehat{MHE} = \widehat{MEH}$ (3)

Vì $ME = MD$ suy ra $\triangle MDE$ cân tại M

Suy ra $\widehat{MDE} = \widehat{MED}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{MEH} + \widehat{MDE} = \widehat{MEH} + \widehat{MED} = \widehat{DEH}$

+) ΔHDE có $\widehat{MHE} + \widehat{MDE} + \widehat{DEH} = 180^\circ$

$\Rightarrow 2\widehat{DEH} = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{DEH} = 90^\circ \Rightarrow ED \perp EH$ (5)

Mà $BC \perp EH$ (6). Từ (5) và (6) suy ra $DE \parallel BC$.

Câu 7. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường THCS Trần Đức Thông 2022 - 2023)

Cho ΔABC nhọn. Kẻ $BF \perp AC$ ($F \in AC$), kẻ $CK \perp AB$ ($K \in AB$), BF cắt CK tại H . Gọi M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MH lấy điểm D sao cho $MD = MH$.

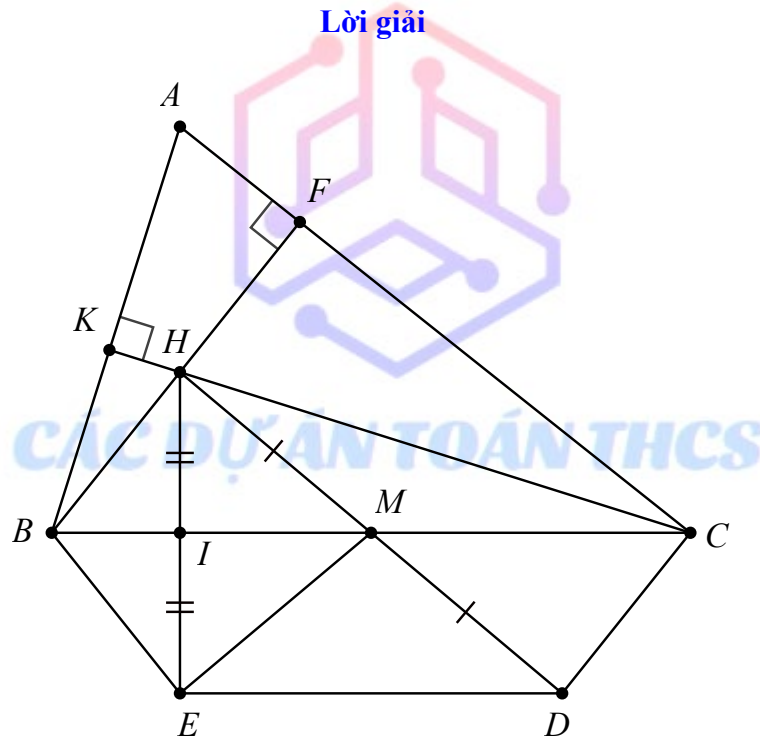
1. Chứng minh $DC \parallel BH$.

2. Từ H kẻ $HI \perp BC$ ($I \in BC$), trên tia đối của tia IH lấy điểm E sao cho $IE = IH$. Chứng minh rằng:

a) $BE = DC$.

b) $DE \parallel BC$.

Lời giải



1. Chỉ ra $\Delta BMH = \Delta CMD$ (c.g.c)

Suy ra $\widehat{HBM} = \widehat{DCM}$ (hai góc tương ứng)

mà hai góc này ở vị trí so le trong suy ra $CD \parallel BH$

2.

a) Từ $\Delta BMH = \Delta CMD$ (cmt)

Suy ra $CD = BH$ (1)

Chứng minh $\Delta BIH = \Delta BIE$ (c.g.c)

Suy ra $BE = BH$ (2)

Từ (1) và (2) $CD = BE$

b) Chứng minh $\Delta MIH = \Delta MIE$ (c.g.c)

Suy ra $MH = ME$, mà $MH = MD$ (gt) nên $ME = MD$

Vì $ME = MH$ suy ra $\triangle MEH$ cân tại M

Suy ra $\widehat{MHE} = \widehat{MEH}$ (3)

Vì $MD = ME$ suy ra $\triangle MDE$ cân tại M

Suy ra $\widehat{MDE} = \widehat{MED}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{MEH} + \widehat{MDE} = \widehat{MEH} + \widehat{MED} = \widehat{DEH}$

Trong $\triangle HDE$ có $\widehat{MHE} + \widehat{MDE} + \widehat{DEH} = 180^\circ$ (Tổng ba góc trong của một tam giác)

$\Rightarrow 2.\widehat{DEH} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{DEH} = 90^\circ$

Suy ra $DE \perp HE$

Mà $BC \perp HE$ nên $DE \parallel BC$.

Câu 8. (HSG 7 trường Ân Tường Đông 2014 - 2015)

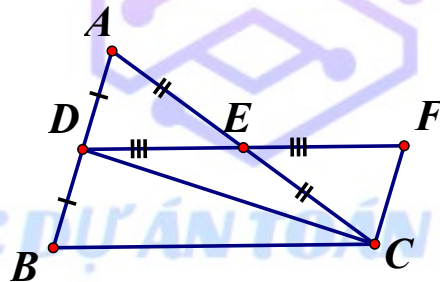
Cho tam giác ABC , D là trung điểm của AB , E là trung điểm của AC . Vẽ điểm F sao cho E là trung điểm của DF . Chứng minh rằng:

a) $AD = FC$ và $AB \parallel FC$

b) $\triangle BDC = \triangle FCD$

c) $DE \parallel BC$ và $DE = \frac{1}{2}BC$

Lời giải



a) Xét $\triangle ADE$ và $\triangle CFE$ có:

$AE = CE$ (gt)

$\widehat{AED} = \widehat{CEF}$ (đối đỉnh)

$DE = FE$ (gt)

$\Rightarrow \triangle ADE = \triangle CFE$ (c.g.c) $\Rightarrow AD = FC$ và $\widehat{DAE} = \widehat{ECF}$, mà 2 góc ở vị trí so le trong

$\Rightarrow AB \parallel FC$

b) Xét $\triangle BDC$ và $\triangle FCD$ có:

$BD = FC$ (cùng bằng AD)

$\widehat{BDC} = \widehat{FCD}$ (so le trong)

Cạnh DC chung

$\Rightarrow \triangle BDC = \triangle FCD$ (c.g.c)

c) $\triangle BDC = \triangle FCD \Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{EDC}$ mà 2 góc này ở vị trí so le trong

$\Rightarrow DE \parallel BC \Rightarrow DE = \frac{1}{2}DF = \frac{1}{2}BC$

Câu 9. (HSG 7 huyện 2017 - 2018)

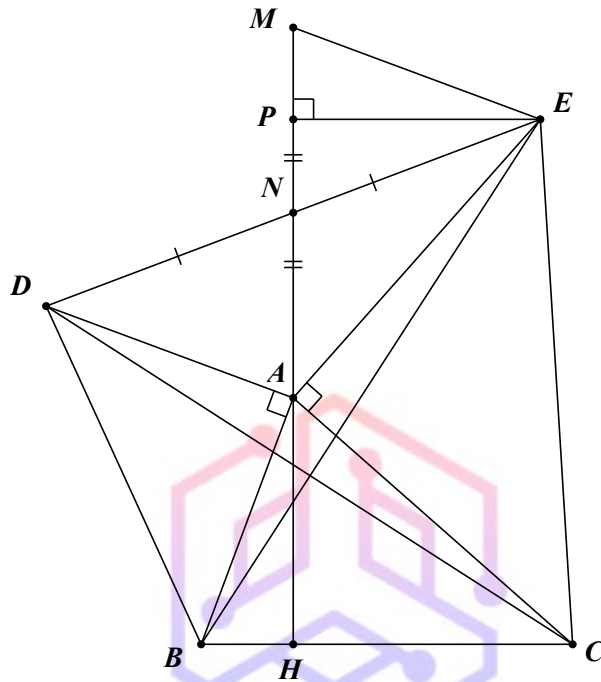
Cho tam giác ABC có $\widehat{A} < 90^\circ$. Vẽ ra phía ngoài tam giác đó hai đoạn thẳng AD vuông góc và bằng AB ; AE vuông góc và bằng AC .

a) Chứng minh $DC \perp BE$.

b) Gọi N là trung điểm của DE . Trên tia đối của tia NA lấy M sao cho $NA = NM$. Chứng minh $AB = ME$, $\triangle ABC = \triangle EMA$.

c) Chứng minh $MA \perp BC$.

Lời giải



a) Xét $\triangle ADC$ và $\triangle BAE$ ta có

$$DA = AB \text{ (gt)}$$

$$AE = AC \text{ (gt)}$$

$$\widehat{DAC} = \widehat{BAE} (= 90^\circ + \widehat{BAC})$$

$$\Rightarrow \triangle DAC = \triangle BAE \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow DC = BE$$

Xét $\triangle AIE$ và $\triangle TIC$ có:

$$\widehat{I}_1 = \widehat{I}_2 \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\widehat{E}_1 = \widehat{C}_1 \text{ (}\triangle DAC = \triangle BAE\text{)}$$

$$\Rightarrow \widehat{EAI} = \widehat{CTI}$$

$$\Rightarrow \widehat{CTI} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow DC \perp BE$$

b) Ta có: $\triangle MNE = \triangle AND$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{MEN}, AD = ME$$

mà $AD = AB$ (gt)

$$\Rightarrow AB = ME \text{ (đpcm) (1)}$$

Vì $\widehat{D}_1 = \widehat{MEN} \Rightarrow DA \parallel ME$

$$\Rightarrow \widehat{DAE} + \widehat{AEM} = 180^\circ \text{ (trong cùng phía)}$$

$$\text{Mà } \widehat{BAC} + \widehat{DAE} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{AEM} \text{ (2)}$$

$$\text{Ta lại có } AC = AE \text{ (3)}$$

Từ (1),(2),(3) suy ra $\Delta ABC = \Delta EMA$ (đpcm).

c) Kéo dài MA cắt BC tại H . Từ E hạ $EP \perp MH$

Xét ΔAHC và ΔEPA có:

$$\widehat{CAH} = \widehat{AEP} \text{ (cùng phụ với } \widehat{PAE} \text{)}$$

$$AE = CA \text{ (gt)}$$

$$\widehat{PAE} = \widehat{HCA} \text{ (do } \Delta ABC = \Delta EMA \text{)}$$

$$\Rightarrow \Delta AHC = \Delta EPA$$

$$\Rightarrow \widehat{EPA} = \widehat{AHC}$$

$$\Rightarrow \widehat{AHC} = 90^\circ$$

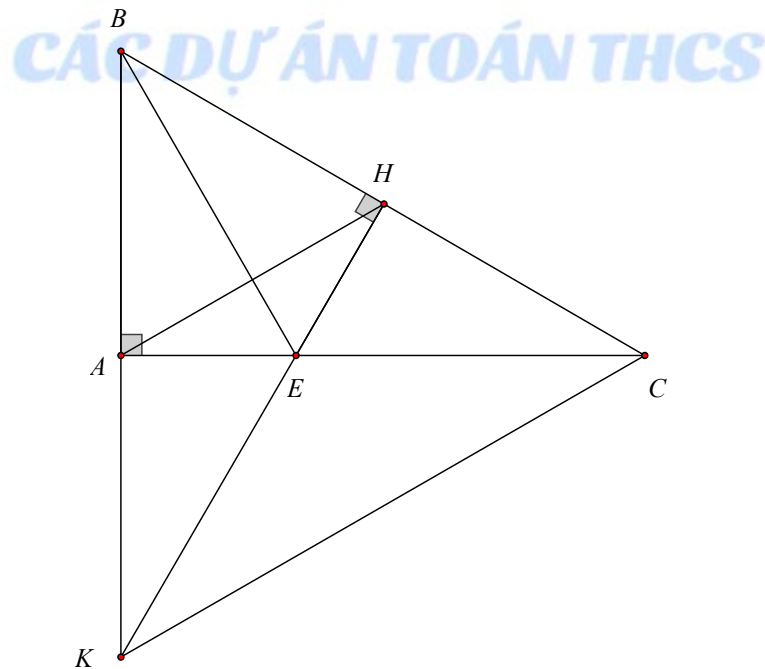
Vậy $MA \perp BC$ (đpcm).

Câu 10. (HSG 7 huyện Tư Nghĩa, tỉnh Quảng Ngãi 2017 - 2018)

Cho ΔABC vuông tại A , đường phân giác BE . Kẻ $EH \perp BC$ ($H \in BC$), gọi K là giao điểm của AB và EH . Chứng minh rằng:

- BE là đường trung trực của đoạn thẳng AH .
- $BE \perp CK$.

Lời giải



a) Chứng minh rằng: BE là đường trung trực của đoạn thẳng AH .

Xét ΔABE và ΔHBE có:

BE là cạnh chung

$$\widehat{BAC} = \widehat{BHE} (= 90^\circ)$$

$\widehat{ABE} = \widehat{EBH}$ (Vì BE là đường phân giác của \widehat{ABC}).

$\Rightarrow \Delta ABE = \Delta HBE$ (Cạnh huyền – góc nhọn).

$\Rightarrow BA = BH, EA = EH$

$\Rightarrow B, E$ nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AH .

$\Rightarrow BE$ là đường trung trực của đoạn thẳng AH .

b) Chứng minh rằng: $BE \perp CK$.

Xét ΔBCK có:

$CA \perp BK, KH \perp BC$ (gt)

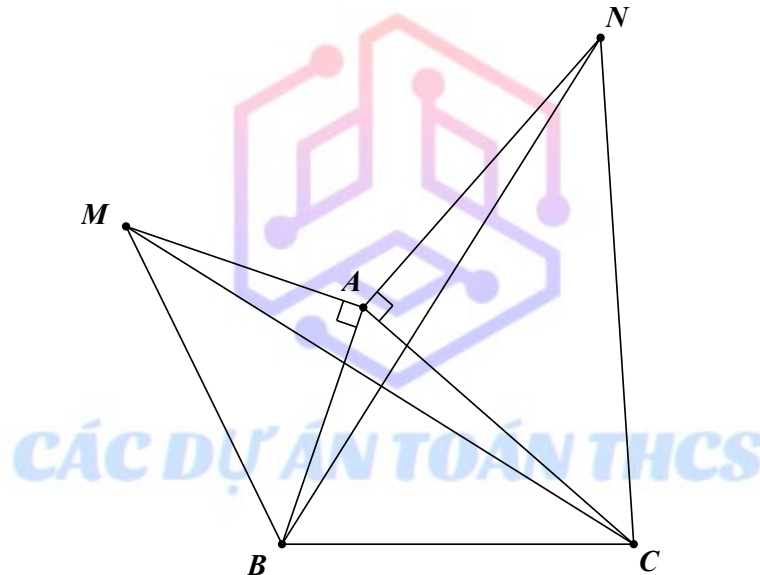
Mà KH cắt CA tại E .

$\Rightarrow E$ là trực tâm ΔBKC , do đó BE là đường cao thứ ba nên $BE \perp CK$.

Câu 11. (HSG 7 Huyện Vị Thanh, 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC có góc A nhỏ hơn 90° . Vẽ ra ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại A là ΔABM và ΔACN . Chứng minh $BN \perp CM$.

Lời giải



Xét ΔAMC và ΔABN có: $AM = AB$ (ΔAMB vuông cân)

$AC = AN$ (ΔACN vuông cân)

$\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{NAC} (= 90^\circ + \widehat{BAC}) \Rightarrow \Delta AMC = \Delta ABN$ (c.g.c)

Gọi I là giao điểm của BN, AC . K là giao điểm của BN, MC

Xét ΔKIC và ΔAIN có: $\widehat{ANI} = \widehat{KCI}$ ($\Delta AMC = \Delta ABN$)

$\widehat{AIN} = \widehat{KIC}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{IKC} = \widehat{NAI} = 90^\circ$, do đó: $MC \perp BN$.

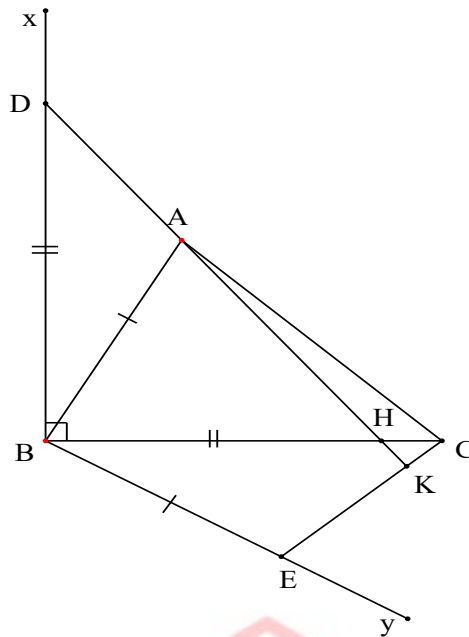
Câu 12. (HSG 7 trường Hiệp Thạnh 2016 - 2017)

Cho tam giác ABC có $\widehat{B} < 90^\circ$. Trên nửa mặt phẳng có chứa A bờ BC , vẽ tia Bx vuông góc với BC , trên tia đó lấy điểm D sao cho $BD = BC$. Trên nửa mặt phẳng có chứa C bờ AB , vẽ tia By vuông góc với BA , trên đó lấy điểm E sao cho $BE = BA$. Chứng minh rằng:

a) $DA = BC$

b) $DA \perp EC$

Lời giải



a) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle EBC$ có: $AB = BE$ (gt) $\widehat{ABD} = \widehat{EBC}$ (cùng phụ \widehat{ABC}) $BD = BC$ (gt)
 $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle EBC$ (c.g.c) $\Rightarrow DA = EC$

b) Gọi giao điểm của DA với BC và EC theo thứ tự là H và K

Ta có: $\triangle ABD = \triangle EBC$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ECB} \Rightarrow \widehat{BDH} = \widehat{CKH}$

$\triangle DBH$ và $\triangle CKH$ có: $\widehat{BDH} = \widehat{CKH}$, $\widehat{DHB} = \widehat{CHK} \Rightarrow \widehat{DBH} = \widehat{CKH}$

Do $\widehat{DBH} = 90^\circ$ nên $\widehat{CKH} = 90^\circ$. Vậy $DA \perp EC$

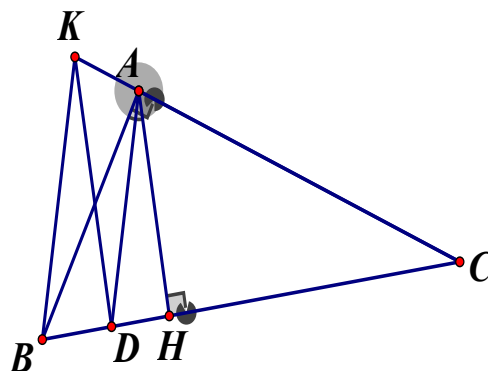
Câu 13. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2014 - 2015)

Cho tam giác ABC vuông ở A có $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$ và đường cao AH . Tia phân giác của \widehat{BAH} cắt BH tại D . Trên tia CA lấy điểm K sao cho $CK = BC$.

a) Chứng minh $KB \parallel AD$.

b) Chứng minh $KD \perp BC$.

Lời giải



a) Chứng minh: $KB \parallel AD$.

Xét tam giác ABC vuông ở A có $\widehat{BAC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BAD} + \widehat{CAD} = 90^\circ$

Có $AH \perp BC$ (gt) $\Rightarrow \triangle AHD$ vuông ở H

$$\Rightarrow \widehat{HAD} + \widehat{ADH} = 90^\circ \text{ mà } \widehat{BAD} = \widehat{HAD} \text{ (vì } AD \text{ là phân giác của } \widehat{BAH}\text{)}$$

$$\text{Nên } \widehat{CAD} = \widehat{ADH}, \Rightarrow \Delta ACD \text{ cân ở } C \Rightarrow \widehat{CAD} = \frac{180^\circ - \widehat{C}}{2}$$

$$CK = BC \text{ (gt)}, \Rightarrow \Delta CBK \text{ cân ở } C \Rightarrow \widehat{CKB} = \frac{180^\circ - \widehat{C}}{2}$$

$$\text{Do đó } \Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{CKB}, \Rightarrow KB // AD \text{ (đpcm)}$$

b) Chứng minh: $KD \perp BC$

$$\text{Ta có: } \Delta ACD \text{ cân ở } C \text{ (cmt)} . \Rightarrow AC = CD$$

$$\Delta CBK \text{ cân ở } C \text{ (cmt)}, \Rightarrow CK = BC$$

$$\Rightarrow DB = KA$$

$$+ \Delta CBK \text{ cân ở } C \Rightarrow \widehat{DBK} = \widehat{AKB}$$

Xét ΔBKD và ΔKBA có:

$$DB = KA$$

$$\widehat{DBK} = \widehat{AKB}$$

KB là cạnh chung

$$\Rightarrow \Delta BKD = \Delta KBA \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{BDK} = \widehat{KAB} = 90^\circ$$

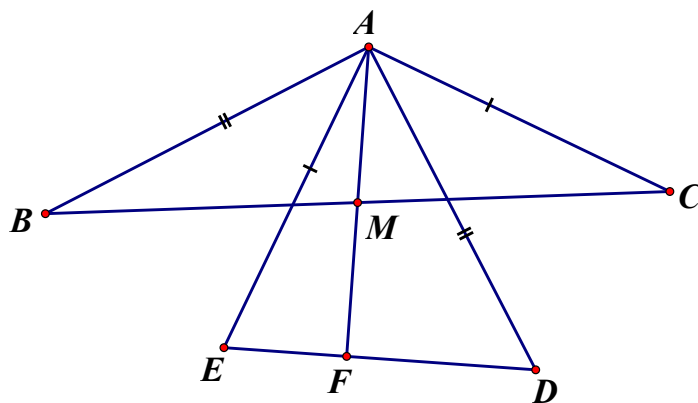
$$\Rightarrow KD \perp BC \text{ (đpcm)}$$

Câu 14. (HSG 7 huyện Phù Cát 2017 - 2018; huyện Hoài Nhơn 2014 - 2015)

Cho tam giác ABC có \widehat{A} tù. Kẻ $AD \perp AB$ và $AD = AB$ (tia AD nằm giữa hai tia AB và AC). Kẻ $AE \perp AC$ và $AE = AC$ (tia AE nằm giữa hai tia AB và AC). Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng $AM \perp DE$.

Lời giải

Cách 1:



Trên tia đối của tia MA lấy điểm F sao cho $MF = MA \Rightarrow \Delta AMB = \Delta FMC$ (c.g.c)

$$\Rightarrow AB = AD = CF(1); \widehat{ABM} = \widehat{FCM} \quad (2)$$

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow CF // AB \Rightarrow \widehat{FCA} + \widehat{BAC} = 180^\circ \quad (3)$$

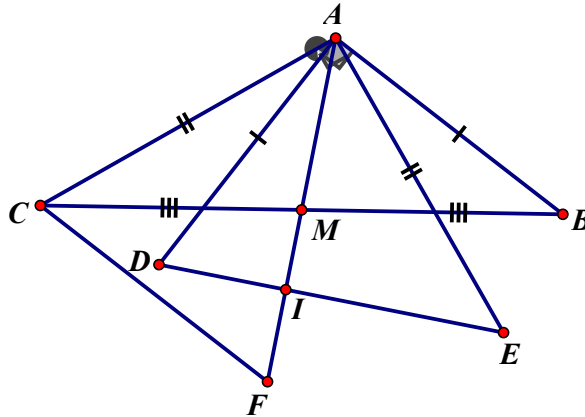
$$AD \perp AB \Rightarrow \widehat{BAE} + \widehat{EAD} = \widehat{BAD} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BAE} + \widehat{EAD} + \widehat{CAD} + \widehat{EAD} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{EAD} = 180^\circ \quad (4)$$

Từ (3), (4) $\Rightarrow \widehat{FCA} = \widehat{EAD} \Rightarrow \triangle ADE = \triangle CFA$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{CAF}$

Mà $\widehat{CAF} + \widehat{FAE} = \widehat{CAE} = 90^\circ$ nên $\Rightarrow \widehat{AED} + \widehat{FAE} = 90^\circ$ hay $\widehat{AEF} + \widehat{FAE} = 90^\circ$
 $\Rightarrow \triangle AFE$ vuông tại $F \Rightarrow AM \perp DE$

Cách 2:



Gọi I là giao điểm của DE và AM . Trên tia đối của tia MA lấy điểm F sao cho $MA = MF$
 Xét hai tam giác MAB và MFC có: $MB = MC$ (gt);

$MA = MF$ (theo cách vẽ); $\widehat{AMB} = \widehat{FMC}$ (hai góc đối đỉnh) do đó $\triangle MAB = \triangle MFC$ (c.g.c)

suy ra: $CF = AB = AD$; $\widehat{MBA} = \widehat{MCF}$ $AB \parallel CF$ (hai góc so le trong bằng nhau)

$\Rightarrow \widehat{FCA} + \widehat{CAB} = 180^\circ$ (1)

Mặt khác: $\widehat{CAE} + \widehat{DAB} = \widehat{CAF} + \widehat{FAE} + \widehat{BAF} + \widehat{FAD} = \widehat{FAE} + \widehat{FAD} + \widehat{CAB} = 180^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{FCA} = \widehat{FAE} + \widehat{FAD} = \widehat{DAE}$

Xét hai tam giác $\triangle ACF$ và $\triangle EAD$ có:

$CF = AD$; $\widehat{FCA} = \widehat{DAE}$ (theo chứng minh trên); $CA = AE$ (gt)

do đó: $\triangle ACF = \triangle EAD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{AEI} = \widehat{CAF}$

mà $\widehat{CAF} + \widehat{FAE} = \widehat{CAE} = 90^\circ$

nên $\widehat{AEI} + \widehat{IAE} = 90^\circ$ do đó trong tam giác AIE

ta có: $\widehat{AIE} = 180^\circ - (\widehat{AEI} + \widehat{IAE}) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

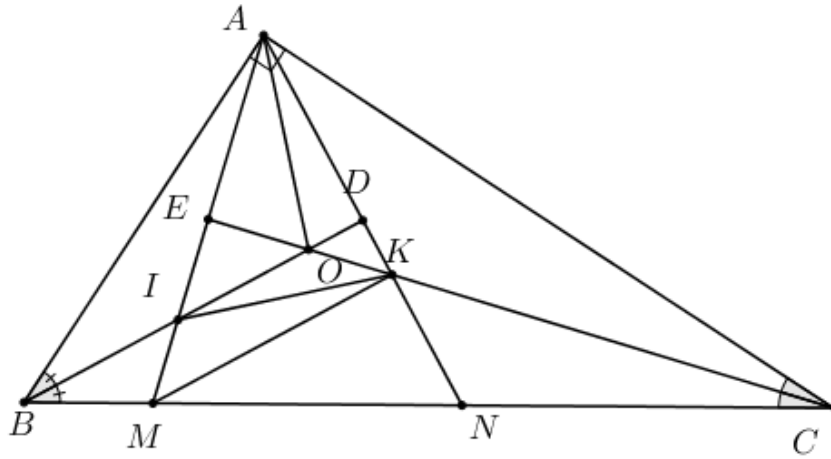
Vậy $DE \perp AM$

Câu 15. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , có $AB < AC$. Trên cạnh BC lấy điểm M và N sao cho $MC = CA, NB = BA$. Tia phân giác của góc B cắt AM tại I và cắt AN tại D , tia phân giác góc C cắt AN tại K và cắt AM tại E . Gọi O là giao điểm của BD và CE .

1. Tính góc BOC .
2. Chứng minh: $BD \perp AN$ và $BD \parallel MK$.

Lời giải



1. Vì BD là tia phân giác của góc $B \Rightarrow \widehat{DBC} = \widehat{DBA} = \frac{1}{2} \widehat{ABC}$

+ Vì CE là tia phân giác của góc $C \Rightarrow \widehat{ECB} = \widehat{ECA} = \frac{1}{2} \widehat{ACB}$

$$\Rightarrow \widehat{DBC} + \widehat{ECB} = \frac{1}{2} (\widehat{ABC} + \widehat{ACB})$$

+ Vì $\triangle ABC$ vuông tại A nên $(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) = 90^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{DBC} + \widehat{ECB} = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ \text{ hay } \widehat{OCB} + \widehat{OBC} = 45^\circ$$

Xét $\triangle OBC$ có $\widehat{BOC} + \widehat{OCB} + \widehat{OBC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BOC} = 180^\circ - (\widehat{OCB} + \widehat{OBC})$

Mà $\widehat{OCB} + \widehat{OBC} = 45^\circ$ nên $\widehat{BOC} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$. Vậy $\widehat{BOC} = 135^\circ$

2. Xét $\triangle ABD$ và $\triangle NBD$ có :

$$BA = BN$$

$$\widehat{DBA} = \widehat{DBN}$$

BD chung

$$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle NBD \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{NDB}$$

Mà $\widehat{ADB} + \widehat{NDB} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{NDB} = 90^\circ \Rightarrow BD \perp AN \text{ tại } D$$

+ Xét $\triangle MCK$ và $\triangle ACK$ có: $MC = CA$; $\widehat{MCK} = \widehat{ACK}$; CK chung.

$$\Rightarrow \triangle MCK = \triangle ACK \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{KMC} = \widehat{KAC}$$

+ Vì $NB = BA \Rightarrow \triangle BNA$ cân tại $B \Rightarrow \widehat{BNA} = \widehat{BAN}$

$$\Rightarrow \widehat{KMC} + \widehat{BNA} = \widehat{KAC} + \widehat{BAN} = \widehat{BAC} = 90^\circ \text{ hay } \widehat{KMN} + \widehat{KNM} = 90^\circ$$

+ Xét $\triangle KMN$ có $\widehat{MKN} + \widehat{KMN} + \widehat{KNM} = 180^\circ$

$$\text{mà } \widehat{KMN} + \widehat{KNM} = 90^\circ$$

nên $\widehat{MKN} = 90^\circ \Rightarrow MK \perp AN$ tại K

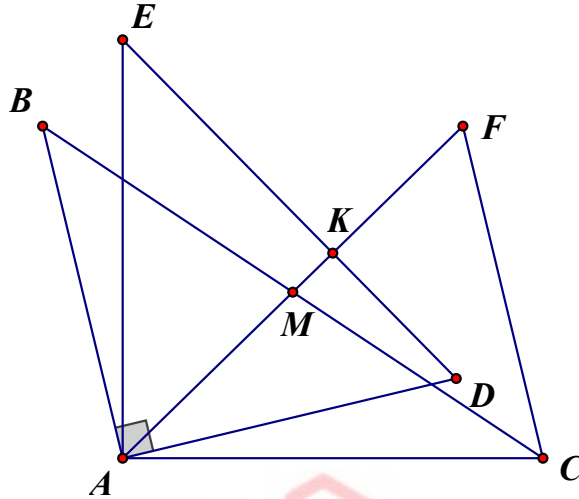
Mà $BD \perp AN$

$$\Rightarrow BD \parallel MK.$$

Câu 16. (HSG 7 thành phố Ninh Bình 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có góc A tù. Kẻ $AD \perp AB$ và $AD = AB$ (tia AD nằm giữa hai tia của AB và AC). Kẻ $AE \perp AC$ và $AE = AC$ (tia AE nằm giữa hai tia của AB và AC). Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng: $AM \perp DE$.

Lời giải



Trên tia đối của tia MA lấy điểm F sao cho $AM = FM$

Gọi K là giao điểm của AF và ED .

Xét $\triangle AMB$ và $\triangle FMC$, có

$BM = CM$ (gt); $\widehat{AMB} = \widehat{CMF}$ (đối đỉnh); $AM = MF$ (cách vẽ)

$\Rightarrow \triangle AMB = \triangle FMC$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = AD = CF$ (1) và $\widehat{ABM} = \widehat{FCM}$ (2)

Từ (2) $\Rightarrow CF \parallel AB \Rightarrow \widehat{FCA} + \widehat{BAC} = 180^\circ$ (3)

$AD \perp AB \Rightarrow \widehat{BAE} + \widehat{EAD} = \widehat{BAD} = 90^\circ$

$AE \perp AC \Rightarrow \widehat{CAD} + \widehat{EAD} = \widehat{CAE} = 90^\circ$

Do đó $\widehat{BAE} + \widehat{EAD} + \widehat{CAD} + \widehat{EAD} = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{EAD} = 180^\circ$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \widehat{FCA} = \widehat{EAD}$

Xét $\triangle ADE$ và $\triangle CFA$, có

$AD = CF$ (gt); $\widehat{FCA} = \widehat{EAD}$ (cmt); $AC = AE$ (gt)

$\Rightarrow \triangle ADE = \triangle CFA$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{CAF}$

mà $\widehat{CAF} + \widehat{FAE} = \widehat{CAE} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{AED} + \widehat{FAE} = 90^\circ$ hay $\widehat{AEK} + \widehat{KAE} = 90^\circ$

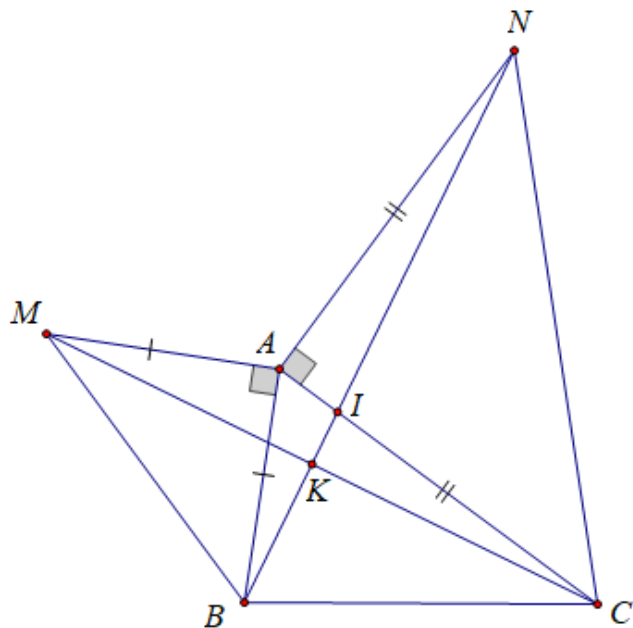
$\Rightarrow \triangle AKE$ vuông tại $K \Rightarrow AM \perp DE$

Câu 17. (HSG 7 huyện Sông Lô 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ có góc A nhỏ hơn 90° . Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C lấy điểm M sao cho $\triangle ABM$ vuông cân tại A . Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B lấy điểm N sao cho $\triangle ACN$ vuông cân tại A . Gọi K là giao điểm của BN và CM .

Chứng minh $\triangle AMC = \triangle ABN$ và $BN \perp CM$.

Lời giải



Chứng minh được $\widehat{MAC} = \widehat{NAB} (= 90^\circ + \widehat{BAC})$

Xét $\triangle AMC$ và $\triangle ABN$, có:

+ $AM = AB$ ($\triangle ABM$ vuông cân)

+ $AC = AN$ ($\triangle ACN$ vuông cân)

+ $\widehat{MAC} = \widehat{NAB}$

Suy ra $\triangle AMC = \triangle ABN$ (c.g.c)

Gọi I là giao điểm của BN với AC

Xét $\triangle KIC$ và $\triangle AIN$, có:

$\widehat{ANI} = \widehat{KCI}$ ($\triangle AMC = \triangle ABN$)

$\widehat{AIN} = \widehat{KIC}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{IKC} = \widehat{NAI} = 90^\circ$

Do đó: $BN \perp CM$ tại K .

CD14: PHẦN HÌNH HỌC

Dạng toán: Tính số đo góc, chứng minh góc bằng nhau, so sánh góc
Dạng toán: Tính độ dài đoạn thẳng, chứng minh đoạn thẳng bằng nhau
Dạng toán: Chứng minh tam giác bằng nhau
Dạng toán: Chứng minh ba điểm thẳng hàng
Dạng toán: Bất đẳng thức tam giác
Dạng toán: Chứng minh song song, vuông góc
Dạng toán: Hình khối trong thực tiễn
Dạng toán: Bài toán chứng minh tổng hợp

Dạng toán: Hình khối trong thực tế, chu vi và diện tích

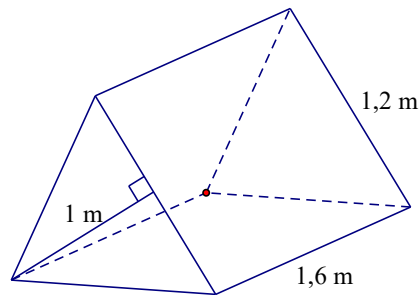
A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 huyện Sơn Động, 2022 - 2023)

Để xúc cát lên các xe tải, người ta dùng một máy xúc với gàu xúc (Hình 1) có dạng gần như một lăng trụ đứng tam giác kích thước như Hình 2. Nếu coi dung tích của gàu xúc đúng bằng thể tích của hình lăng trụ đứng tam giác thì muốn xúc 60 m^3 cát xe phải múc ít nhất bao nhiêu gàu?



Hình 1



Hình 2

- A. 62 . B. 63 . C. 64 . D. 60 .

Lời giải

Chọn B

Dung tích gàu xúc là: $\frac{1 \cdot 1,2}{2} \cdot 1,6 = 0,96 \text{ (m}^3\text{)}$.

Vì $60 : 0,96 = 62,5$ nên xe phải múc ít nhất 63 gàu.

Câu 2.

Cho một tam giác cân có độ dài hai cạnh là 3 cm và 21 cm. Chu vi của tam giác đó bằng:

- A. 39 cm . B. 27 cm . C. 45 cm . D. 46 cm .

Lời giải

Chọn C

Gọi độ dài cạnh còn lại là x (cm)

Áp dụng BĐT trong tam giác ta có $21 - 3 < x < 21 + 3 \Rightarrow 18 < x < 24$

Mà tam giác đã cho cân nên ta có $x = 21$ (cm)

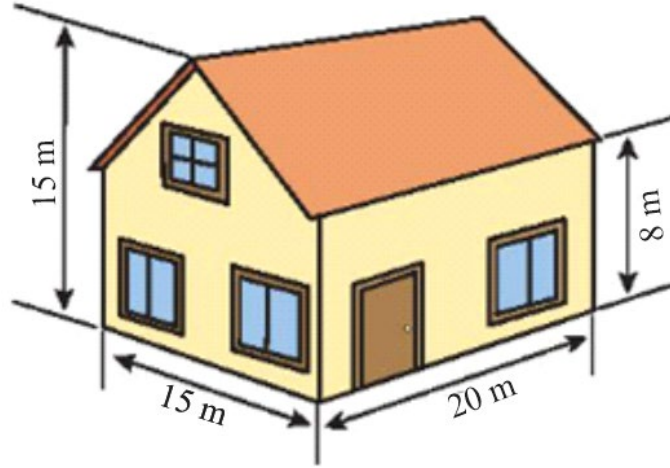
Vậy chu vi tam giác là $21 + 21 + 3 = 45$ (cm)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Ngọc Lặc, trường THCS Nguyệt Án 2022 - 2023)

Một ngôi nhà có kích thước như hình vẽ (Hình 1). Tính thể tích của ngôi nhà. Khi đó phải cần bao nhiêu lít sơn để sơn phủ được tường mặt ngoài ngôi nhà (không sơn cửa)?

Biết 1lít sơn bao phủ được 4 m^2 và tổng diện tích các cửa là 9 m^2 .



Hình 1

Lời giải

Thể tích ngôi nhà là:

$$V = 15.20.8 + \frac{15.(15-8)}{2}.20 = 3450(m^3)$$

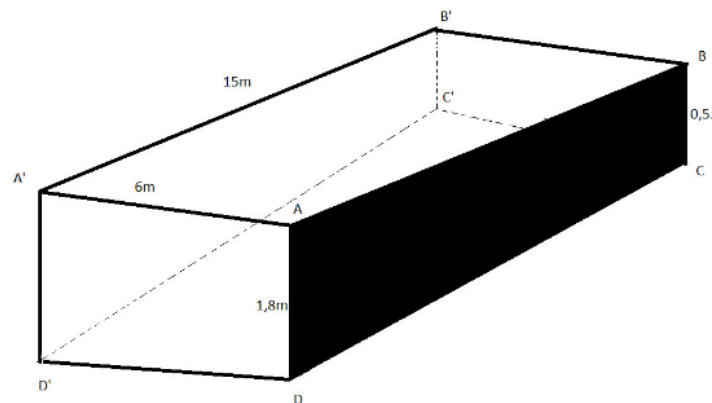
- Diện tích tường mặt ngoài ngôi nhà là:

$$S_1 = (15 + 20).2.8 + 2.(15 - 8). \frac{15}{2} = 665(m^2)$$

- Diện tích tường cần sơn là : $S_2 = 665 - 9 = 656(m^2)$

Số lít sơn cần là: $656 : 4 = 164$ (lít).

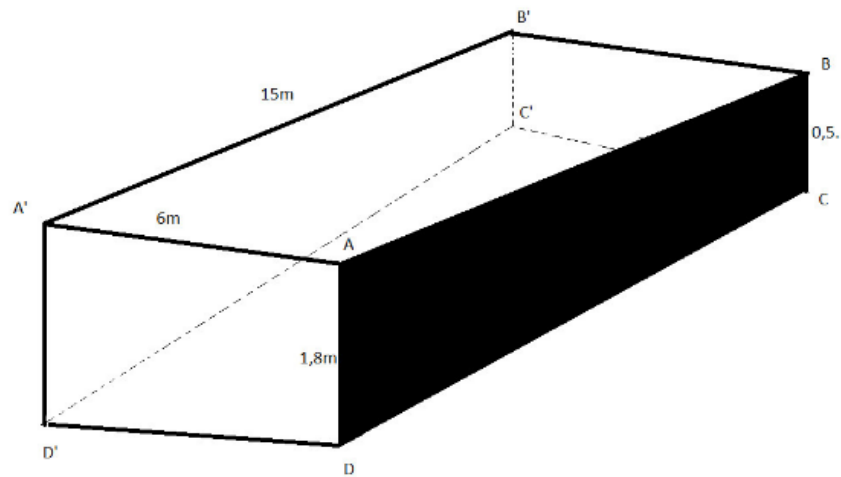
Câu 2. (HSG 7 huyện Tam Điệp, 2022 - 2023)



Hồ bơi của một trường THCS có dạng hình lăng trụ đứng tứ giác $ABCD A' B' C' D'$ với hai đáy là $ABCD$ và $A' B' C' D'$ là hình thang vuông, $A' B'$ (chiều dài hồ) là đường cao của hình thang $ABCD$. Hãy tính:

- a) Diện tích đáy $ABCD$ của lăng trụ?
- b) Thể tích của nước chứa trong hồ?

Lời giải



- a) Diện tích đáy hình lăng trụ là: $\frac{(1,8 + 0,5) \cdot 15}{2} = 17,25 \text{ (m}^2\text{)}$
 b) Thể tích của nước chứa trong hồ: $17,25 \cdot 6 = 103,5 \text{ (m}^3\text{)}$

Câu 3. (HSG 7 huyện Tam Điệp, 2022 - 2023)

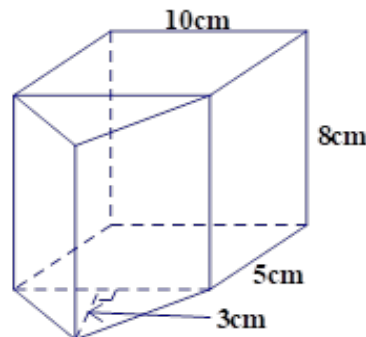
Một gia đình xây bể chứa nước hình hộp chữ nhật, phần trong lòng bể có đáy là hình vuông cạnh 1,5 m, chiều cao bể là 1 m. Sau đó họ dùng các viên gạch men kích thước 20x30 cm, dày 1 cm để ốp xung quanh thành bể và đáy bể. Hỏi gia đình đó cần ít nhất bao nhiêu viên gạch ốp?

Lời giải

Diện tích đáy của bể là: $1,5 \cdot 1,5 = 2,25 \text{ (m}^2\text{)}$
 Diện tích xung quanh của bể là: $S_{xq} = C \cdot h = 1,5 \cdot 4 \cdot 1 = 6 \text{ (m}^2\text{)}$
 Diện tích xung quanh và đáy bể là: $2,25 + 6 = 8,25 \text{ (m}^2\text{)}$
 Diện tích một viên gạch là: $20 \cdot 30 = 600 \text{ (cm}^2\text{)} = 0,06 \text{ (m}^2\text{)}$
 Ta có: $8,25 : 0,06 = 137,5$
 Như vậy cần ít nhất 138 viên gạch ốp.

Câu 4. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Tính thể tích vật thể có cấu trúc và kích thước được mô tả như hình vẽ sau:



Lời giải

Thể tích của hình hộp chữ nhật là: $5 \cdot 10 \cdot 8 = 400 \text{ (cm}^3\text{)}$
 Thể tích hình lăng trụ đứng tam giác là: $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10 \cdot 8 = 120 \text{ (cm}^3\text{)}$
 Thể tích của vật thể đó là: $V = 400 + 120 = 520 \text{ (cm}^3\text{)}$

Câu 5. (HSG 7 huyện Đức Thọ, 2022 - 2023)

Diện tích ba mặt của một hình hộp chữ nhật là 30 cm^2 , 40 cm^2 và 75 cm^2 . Hỏi thể tích của hình hộp đó bằng bao nhiêu cm^3 ?

Lời giải

Gọi kích thước ba cạnh của hình hộp chữ nhật lần là a, b, c ($a, b, c > 0, \text{cm}$)

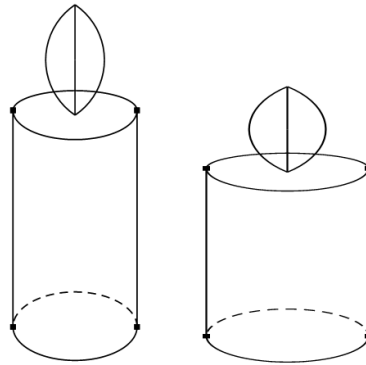
Vì các mặt là các hình chữ nhật, nên diện tích ba mặt lần lượt là:

$$\begin{cases} ab = 30 \\ bc = 40 \Rightarrow (abc)^2 = 30 \cdot 40 \cdot 75 \Rightarrow abc = 300. \\ ac = 75 \end{cases}$$

Vậy thể tích của hình hộp chữ nhật là: $V = abc = 300 \text{ cm}^3$.

Câu 6. (HSG 7 huyện Quế Võ 2022 - 2023)

Hai ngọn nến hình trụ có chiều cao và đường kính khác nhau được đặt thẳng đứng trên mặt bàn. Ngọn nến thứ nhất cháy hết trong 6 giờ, ngọn nến thứ hai cháy hết trong 8 giờ. Hai ngọn nến được thắp sáng cùng lúc, sau 3 giờ chúng có cùng chiều cao.



- Tìm tỉ lệ chiều cao lúc đầu của hai ngọn nến.
- Biết tổng chiều cao lúc đầu của hai ngọn nến là 63 cm . Tính chiều cao lúc đầu của mỗi ngọn nến.

Lời giải

a) Gọi chiều cao ban đầu ngọn nến thứ nhất là $x \text{ cm}$

Chiều cao ban đầu ngọn nến thứ hai là $y \text{ cm}$

Điều kiện: $x > 0, y > 0$

Giả sử tốc độ tiêu hao của hai cây nến khi cháy là không đổi.

Mỗi giờ cây nến thứ nhất giảm $\frac{x}{6} \text{ cm}$

\Rightarrow Sau 3 giờ chiều cao cây nến thứ nhất còn: $x - 3 \cdot \frac{x}{6} = \frac{x}{2} \text{ cm}$.

Mỗi giờ cây nến thứ hai giảm $\frac{y}{8} \text{ cm}$

\Rightarrow Sau 3 giờ chiều cao cây nến thứ hai còn: $y - 3 \cdot \frac{y}{8} = \frac{5y}{8} \text{ cm}$.

Vì sau 3 giờ cháy, hai cây nến có cùng chiều cao nên ta có: $\frac{x}{2} = \frac{5y}{8} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{5}{4}$.

Vậy tỉ lệ chiều cao ban đầu của hai ngọn nến là $\frac{x}{y} = \frac{5}{4}$.

b) Vì tổng chiều cao lúc đầu của hai ngọn nến là 63 cm nên $x + y = 63$.

Theo câu a ta có: $\frac{x}{y} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{4}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có: $\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{x+y}{5+4} = \frac{63}{9} = 7$

Suy ra: $x = 5.7 = 35$ (nhận)

$y = 4.7 = 28$ (nhận)

Vậy chiều cao ban đầu của cây nến thứ nhất là 35 cm ;

chiều cao ban đầu cây nến thứ hai là 28 cm .

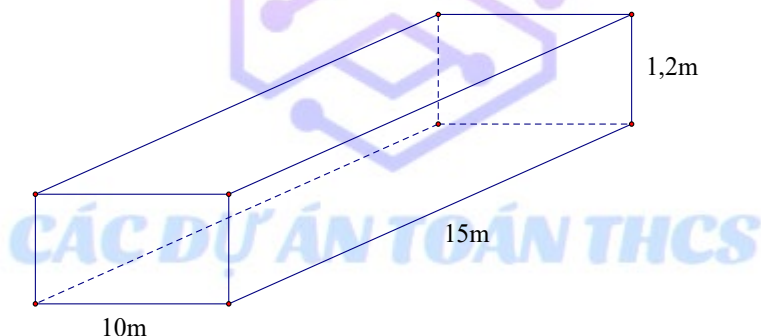
Câu 7. (HSG 7 Tp. Chí Linh 2022 - 2023)

Một trường THCS làm bể tập bơi cho học sinh có dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài 15 m , chiều rộng 10 m , chiều sâu 1,2 m . Người ta lát gạch men các mặt xung quanh và đáy của bể (Coi mạch ghép giữa các viên gạch men không đáng kể).

a) Tính diện tích gạch men cần dùng để lát bể bơi đó?

b) Cần phải bơm bao nhiêu mét khối nước vào bể để mực nước trong bể thấp hơn mép trên của bể là 20 cm (Ban đầu bể không có nước)?

Lời giải



a) Diện tích xung quanh bể là: $2.(15 + 10).1,2 = 60(\text{m}^2)$

Diện tích đáy bể là: $15.10 = 150(\text{m}^2)$

Diện tích gạch men dùng để lát là: $150 + 60 = 210(\text{m}^2)$

b) Đổi $20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}$

Chiều cao của mực nước trong bể cần bơm là: $1,2 - 0,2 = 1(\text{m})$

Thể tích nước cần bơm vào bể là: $15.10.1 = 150(\text{m}^3)$

Câu 8. (HSG 7 huyện Lục Ngạn 2022 - 2023)

Một bể cá hình hộp chữ nhật có chiều dài 60 cm , chiều rộng 25 cm và chiều cao 50 cm . Để nuôi cá, người ta đổ 45 lít nước và một tiểu cảnh bằng đá vào bể (nước ngập hết tiểu cảnh). Biết khi đó chiều cao mực nước trong bể là 34 cm . Hãy tính thể tích tiểu cảnh.

Lời giải

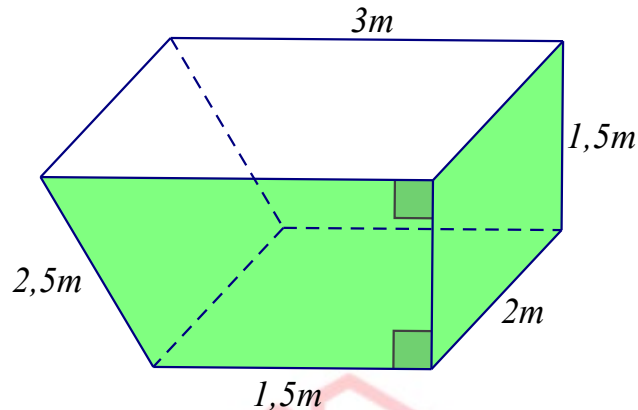
Phần thể tích của bể cá chứa 45 l và tiểu cảnh là: $60.25.34 = 51000 \text{ cm}^3 = 51 \text{ dm}^3 = 51(\text{l})$.

Thể tích của tiểu cảnh là : $51 - 45 = 6(1) = 6 \text{ dm}^3$

Vậy thể tích tiểu cảnh là 6 dm^3 .

Câu 9. (HSG 7 trường THCS-THPT Tri Thức 2022 - 2023)

Thùng một chiếc máy nông nghiệp có dạng hình lăng trụ đứng tứ giác như hình vẽ. Đáy của hình lăng trụ đứng này (mặt bên của thùng) là một hình thang vuông có các kích thước đáy lớn 3 m , đáy nhỏ $1,5 \text{ m}$. Người ta muốn sơn vỏ bên ngoài chiếc thùng bằng màu xanh, em hãy tính diện tích cần sơn?



Lời giải

Diện tích xung quanh của cái thùng dạng hình lăng trụ đứng là:

$$(2,5 + 1,5 + 1,5 + 3) \cdot 2 = 17(m^2)$$

Diện tích hai đáy thùng hình thang là: $2 \cdot \frac{3 + 1,5}{2} \cdot 1,5 = 6,75(m^2)$

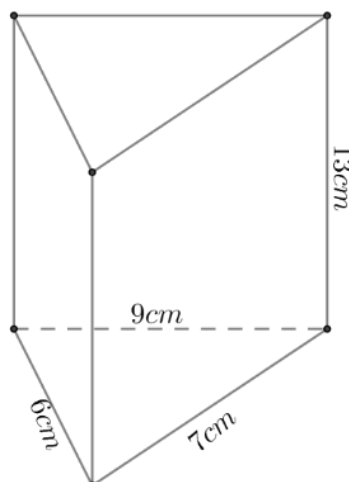
Diện tích phần miệng thùng là: $3 \cdot 2 = 6(m^2)$

Diện tích cần sơn là: $17 + 6,75 - 6 = 17,75(m^2)$.

Câu 10. (HSG 7 thị xã Kỳ Anh 2022 - 2023)

Một lăng trụ đứng có đáy là tam giác; độ dài các cạnh của tam giác đáy là 6 cm , 7 cm , 9 cm . Độ dài cạnh bên lăng trụ bằng 13 cm . Diện tích xung quanh của lăng trụ bằng bao nhiêu cm^2 ?

Lời giải

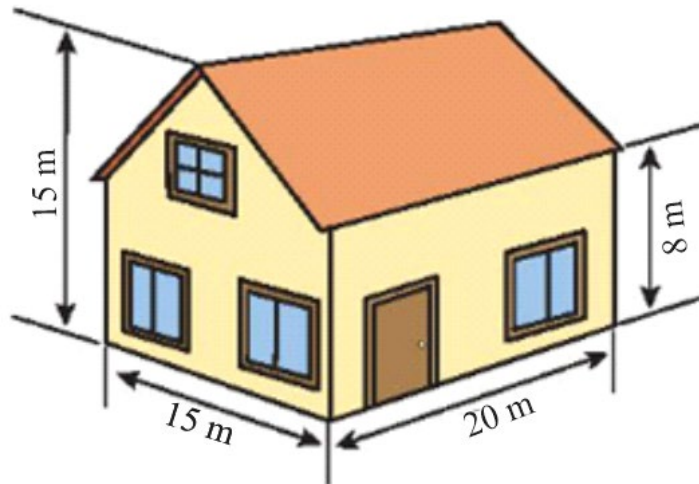


Diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng là:

$$13 \cdot (6 + 7 + 9) = 286(\text{cm}^2).$$

Câu 11. (HSG 7 huyện Yên Bình 2022 - 2023)

Một ngôi nhà có các kích thước như hình vẽ.



- a) Tính thể tích phần không gian được giới hạn bởi ngôi nhà.
 b) Hỏi phải dùng bao nhiêu lít sơn để sơn phủ được mặt ngoài ngôi nhà? Biết rằng 1 lít sơn bao phủ được $8 m^2$ tường (không sơn cửa) và tổng diện tích các cửa là $25 m^2$.

Lời giải

$$a) S_d = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 15 + 8 \cdot 15 = 172,5 (m^2)$$

$$V = 172,5 \cdot 20 = 3450 (m^3)$$

$$b) S_{xq} = 2S_1 + S_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 15 + 2(15 + 20) \cdot 8 = 665 (m^2)$$

$$\text{Diện tích tường phải sơn: } 665 - 25 = 640 (m^2)$$

$$\text{Số lít sơn cần mua: } 640 : 8 = 80 (l).$$

Câu 12. (HSG 7 huyện Thanh Trì 2022 - 2023)

Cho ba hình chữ nhật, biết diện tích hình thứ nhất và hình thứ hai tỉ lệ với 4 và 5, diện tích hình thứ hai và hình thứ ba tỉ lệ với 7 và 8. Hình thứ nhất và hình thứ hai có cùng chiều dài và tổng các chiều rộng của chúng là 27m, hình thứ hai và hình thứ ba có cùng chiều rộng, chiều dài của hình thứ ba là 24m. Tính diện tích mỗi hình chữ nhật đó.

Lời giải

Cách 1

Gọi diện tích ba hình chữ nhật lần lượt là S_1, S_2, S_3

Chiều dài, chiều rộng của ba hình tương ứng là $d_1, r_1, d_2, r_2, d_3, r_3$

Theo đề bài, ta có:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{5}; \frac{S_2}{S_3} = \frac{7}{8}; d_1 = d_2; r_1 + r_2 = 27; r_2 = r_3; d_3 = 24$$

$$\text{Từ } \frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{d_1 \cdot r_1}{d_2 \cdot r_2} = \frac{4}{5}$$

$$\text{Mà } d_1 = d_2 \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{r_1}{4} = \frac{r_2}{5}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{r_1}{4} = \frac{r_2}{5} = \frac{r_1 + r_2}{4 + 5} = \frac{27}{9} = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_1 = 12 \\ r_2 = 15 \end{cases}$$

Lại có: $\frac{S_2}{S_3} = \frac{7}{8} \Rightarrow \frac{d_2 \cdot r_2}{d_3 \cdot r_3} = \frac{7}{8}$

Mà $r_2 = r_3 \Rightarrow \frac{d_2}{d_3} = \frac{7}{8}$

Mà $d_3 = 24 \Rightarrow d_2 = \frac{7}{8} \cdot 24 = 21$

$$\Rightarrow \begin{cases} d_1 = d_2 = 21; d_3 = 24 \\ r_1 = 12; r_2 = r_3 = 15 \end{cases}$$

Diện tích hình chữ nhật thứ nhất là: $21 \cdot 12 = 252 \text{ (m}^2\text{)}$

Diện tích hình chữ nhật thứ hai là: $21 \cdot 15 = 315 \text{ (m}^2\text{)}$

Diện tích hình chữ nhật thứ ba là: $24 \cdot 15 = 360 \text{ (m}^2\text{)}$

Cách 2

Gọi chiều rộng của ba hình chữ nhật thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là a, b, c , ($a, b, c > 0$)

Gọi chiều dài của ba hình chữ nhật thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là a', b', c' , ($a', b', c' > 0$).

Gọi diện tích của ba hình chữ nhật thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là S_1, S_2, S_3 .

* Vì biết diện tích của hình chữ nhật thứ nhất và diện tích của hình chữ nhật thứ hai tỉ lệ với 4 và 5 nên $\frac{S_1}{4} = \frac{S_2}{5}$.

Vì hình thứ nhất và hình thứ hai có cùng chiều dài và tổng các chiều rộng của chúng là 27 cm nên $a' = b'$; $a + b = 27$.

$$\frac{S_1}{4} = \frac{S_2}{5} \Rightarrow \frac{a \cdot a'}{4} = \frac{b \cdot b'}{5} \Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{a + b}{4 + 5} = \frac{27}{9} = 3.$$

$$\Rightarrow a = 12, b = 15.$$

* Vì diện tích của hình chữ nhật thứ hai và diện tích hình chữ nhật thứ ba tỉ lệ với 7 và 8 nên

$$\frac{S_2}{7} = \frac{S_3}{8}.$$

Hình thứ hai và hình thứ ba có cùng chiều rộng, chiều dài của hình chữ nhật thứ ba là 24 cm nên $b = c$, $c' = 24$.

$$\text{Ta có: } \frac{S_2}{7} = \frac{S_3}{8} \Rightarrow \frac{b \cdot b'}{7} = \frac{c \cdot c'}{8} \Rightarrow \frac{b'}{7} = \frac{c'}{8} \Rightarrow \frac{b'}{7} = \frac{24}{8} = 3$$

Suy ra: $b' = 21$.

Ta được: $S_2 = 15 \cdot 21 = 315 \text{ cm}^2$; $S_1 = 252 \text{ cm}^2$; $S_3 = 360 \text{ cm}^2$.

Vậy $S_1 = 252 \text{ cm}^2$, $S_2 = 15 \cdot 21 = 315 \text{ cm}^2$, $S_3 = 360 \text{ cm}^2$.

CĐ14: PHẦN HÌNH HỌC

Dạng toán: Tính số đo góc, chứng minh góc bằng nhau, so sánh góc
Dạng toán: Tính độ dài đoạn thẳng, chứng minh đoạn thẳng bằng nhau
Dạng toán: Chứng minh tam giác bằng nhau
Dạng toán: Chứng minh ba điểm thẳng hàng
Dạng toán: Bất đẳng thức tam giác
Dạng toán: Chứng minh song song, vuông góc
Dạng toán: Hình khối trong thực tiễn
Dạng toán: Bài toán chứng minh tổng hợp

Dạng toán: Bài toán chứng minh tổng hợp

A. Trắc nghiệm

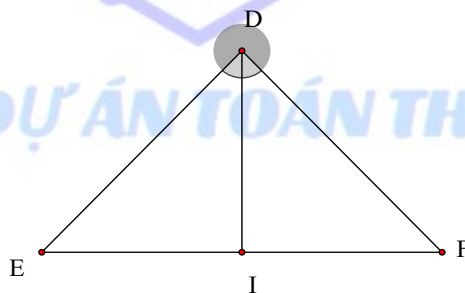
Câu 1. (HSG 7 trường Phan Đình Phùng; huyện Tân An 2017 - 2018)

Cho tam giác DEF có $\widehat{E} = \widehat{F}$. Tia phân giác của góc D cắt EF tại I . Ta có:

- A. $\triangle DIE = \triangle DIF$.
- B. $DE = DF, \widehat{IDE} = \widehat{IDF}$.
- C. $IE = IF, \widehat{DIE} = \widehat{DIF} = 90^\circ$.
- D. Cả A, B, C đều đúng.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\triangle DEF$ có $\widehat{E} = \widehat{F} \Rightarrow \triangle DEF$ cân tại D .

$$\Rightarrow \widehat{DEF} = \widehat{DFE}$$

$$\Rightarrow DE = DF$$

$\widehat{EDI} = \widehat{FDI}$ (Vì DI là tia phân giác của góc \widehat{EDF}). \Rightarrow Đáp án B đúng.

Xét $\triangle DIE$ và $\triangle DIF$ có:

$$DE = DF \text{ (cmt)}$$

$$\widehat{EDI} = \widehat{FDI} \text{ (Vì } DI \text{ là tia phân giác của góc } \widehat{EDF} \text{)}$$

DI là cạnh chung.

$$\Rightarrow \triangle DIE = \triangle DIF \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \text{Đáp án A đúng.}$$

$$\Rightarrow IE = IF \text{ (2 cạnh tương ứng).}$$

$$\Rightarrow \widehat{DIE} = \widehat{DIF} \text{ (2 cạnh tương ứng).}$$

$$\text{Mà } \widehat{DIE} + \widehat{DIF} = 180^\circ; \Rightarrow \widehat{DIE} = \widehat{DIF} = 90^\circ$$

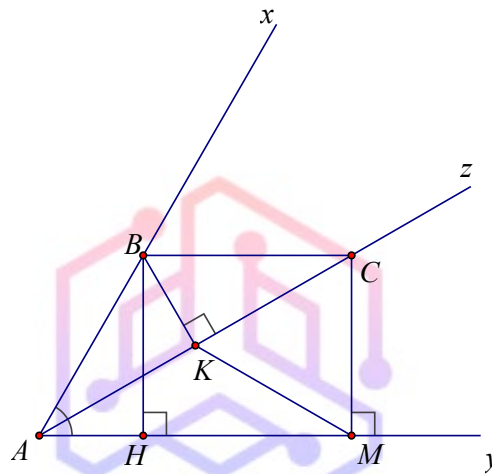
B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 Thị xã Hương Trà 2022 - 2023; huyện Kim Sơn 2021 - 2022; huyện Lộc Hà; trường Phong Đạt; trường Lý Tự Trọng 2018 - 2019; trường Thanh Văn, huyện Thanh Oai 2017 - 2018)

Cho $\widehat{xAy} = 60^\circ$ có tia phân giác Az . Từ điểm B trên Ax kẻ BH vuông góc với Ay tại H , Kẻ BK vuông góc với Az và Bt song song với Ay , Bt cắt Az tại C . Từ C kẻ CM vuông góc với Ay tại M . Chứng minh:

- K là trung điểm của AC .
- ΔKMC là tam giác đều.
- Cho $BK = 2\text{cm}$, tính các cạnh của ΔAKM .

Lời giải



a) $\widehat{CAB} = \widehat{CAM}$ (vì Az là tia phân giác của \widehat{xAy})

$Bt \parallel Ay$ nên $\widehat{ACB} = \widehat{MAC}$ (hai góc so le trong)

Nên $\widehat{CAB} = \widehat{ACB} (= \widehat{MAC})$

Suy ra ΔABC cân tại B

BK là đường cao của ΔABC

Có $\widehat{CAB} = \widehat{ACB} (= \widehat{MAC})$, từ đó suy ra $\widehat{ABK} = \widehat{CBK}$

Xét ΔABK và ΔCBK có

$AB = BC$ (vì ΔABC cân tại B)

$\widehat{CAB} = \widehat{ACB}$

$\widehat{ABK} = \widehat{CBK}$

$\Rightarrow \Delta ABK = \Delta CBK$ (g - c - g)

$\Rightarrow AK = KC$

b) $\left. \begin{array}{l} BH \perp Ay \\ CM \perp Ay \end{array} \right\} \Rightarrow BH \parallel CM \Rightarrow \widehat{BHC} = \widehat{MCH}$ (hai góc so le trong)

$BC \parallel HM$ ($Bt \parallel Ay$) $\Rightarrow \widehat{MHC} = \widehat{HCB}$ (hai góc so le trong)

Xét ΔCHB và ΔHCM có:

HC là cạnh chung

$$\widehat{BHC} = \widehat{MCH} \text{ (cmt)}$$

$$\widehat{HCB} = \widehat{MHC} \text{ (cmt)}$$

Do đó $\Delta CHB = \Delta HCM$ (g - c - g)

Suy ra $BH = CM$ (hai cạnh tương ứng)

Xét ΔAHB vuông tại H và ΔBKA vuông tại K có:

AB là cạnh chung

$$\widehat{HAB} = \widehat{KBA} = 60^\circ$$

Do đó $\Delta AHB = \Delta BKA$ (cạnh huyền-góc nhọn)

$\Rightarrow AK = BH$ (hai cạnh tương ứng)

Mà $AK = KC$ (câu a) và $BH = CM$ (cmt) nên $KC = MC$ (1)

Mặt khác $\widehat{MCA} = 90^\circ$ và $\widehat{ACB} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{MCK} = \widehat{MCA} - \widehat{ACB} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta MKC$ đều.

c) ΔABK vuông tại K mà $\widehat{KAB} = 30^\circ \Rightarrow AB = 2BK = 4cm$

Theo định lý Py-ta-go có $AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{12}$

Mà $KC = \frac{1}{2}AC \Rightarrow KC = AK = \sqrt{12}$, ΔKCM đều $\Rightarrow KC = KM = \sqrt{12}$

Theo câu b: $AB = BC = 4cm, AH = BK = 2, HM = BC$

$$AM = AH + HM = 6cm$$

Câu 2. (HSG 7 trường Lê Quý Đôn – Tứ Kỳ 2016 - 2017; huyện Việt Yên 2012 - 2013)

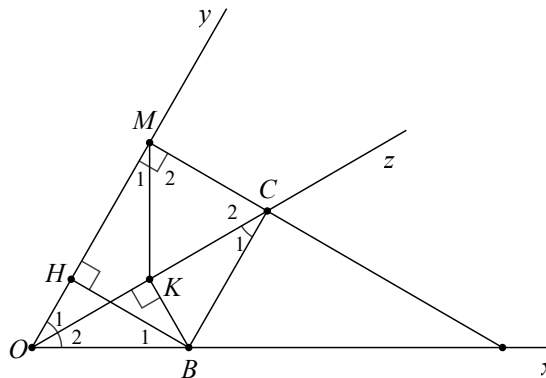
Cho Oz là tia phân giác của $\widehat{xOy} = 60^\circ$. Từ một điểm B trên tia Ox vẽ đường thẳng song song với tia Oy cắt Oz tại điểm C . Kẻ $BH \perp Oy$, $CM \perp Oy$, $BK \perp Oz$ ($H, M \in Oy; K \in Oz$). MC cắt Ox tại P . Chứng minh:

a) K là trung điểm của OC .

b) ΔKMC là tam giác đều.

c) $OP > OC$.

Lời giải



a) ΔABC có $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ (Oz là tia phân giác của \widehat{xOy}), $\widehat{O}_1 = \widehat{C}_1$ so le trong do ($Oy \parallel BC$),

$\Rightarrow \widehat{O}_2 = \widehat{C}_1 \Rightarrow \Delta OBC$ cân tại $B \Rightarrow BO = BC$ mà $BK \perp OC$ tại K .

$\Rightarrow BK$ là đường cao cũng là trung tuyến của ΔOBC

Suy ra K là trung điểm OC .

b) Ta có $\triangle OMC$ vuông tại M và MK là trung tuyến nên $MK = MC$
 $\Rightarrow \triangle KMC$ cân tại M .

Mặt khác $\triangle OMC$ có $\widehat{M} = 90^\circ$, $\widehat{O} = 30^\circ$

$\Rightarrow \widehat{MKC} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ \Rightarrow \triangle AMC$ đều.

c) Ta có $\triangle OMC$ vuông tại $M \Rightarrow \widehat{MCO}$ nhọn $\Rightarrow \widehat{OCP}$ tù (hai góc \widehat{MCO} , \widehat{OCP} bù nhau)

Xét trong $\triangle OCP$ có \widehat{OCP} tù nên $OP > OC$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2018 - 2019; trường Hồng Dương, Thanh Oai 2017 - 2018)

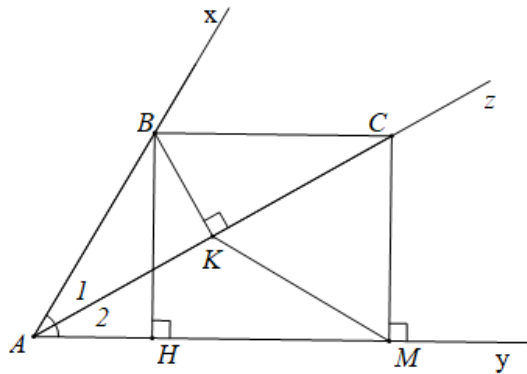
Cho góc $\widehat{xAy} = 60^\circ$ vẽ tia phân giác Az của góc đó. Từ một điểm B trên Ax vẽ đường thẳng song song với Ay cắt Az tại C . Vẽ $BH \perp Ay$, $CM \perp Ay$, $BK \perp AC$. Chứng minh rằng:

a) K là trung điểm của AC

b) $BH = \frac{AC}{2}$

c) $\triangle KMC$ đều

Lời giải



a) $\triangle ABC$ có $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (Az là tia phân giác của \widehat{A}); $\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1$ ($Ay \parallel BC$, so le trong)

$\Rightarrow \widehat{A}_2 = \widehat{C}_1 \Rightarrow \triangle ABC$ cân tại B

Mà $BK \perp AC \Rightarrow BK$ là đường cao vừa là đường trung tuyến của $\triangle ABC$ cân

Hay K là trung điểm của AC

b) Xét \triangle vuông ABH và \triangle vuông BAK có: AB là cạnh huyền;

$$\widehat{A}_2 = \widehat{B}_1 (= 30^\circ) \text{ do } \begin{cases} \widehat{A}_2 = \frac{\widehat{A}}{2} = 30^\circ \\ \widehat{B}_1 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle ABH = \triangle BAK \Rightarrow BH = AK \text{ mà } AK = \frac{AC}{2} \Rightarrow BH = \frac{AC}{2}$$

c) $\triangle AMC$ vuông tại M có $AK = KC = \frac{AC}{2}$ (1)

$$\Rightarrow MK \text{ là trung tuyến thuộc cạnh huyền } \Rightarrow KM = \frac{AC}{2} \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow KM = KC \Rightarrow \triangle KMC$ cân

Mặt khác $\triangle AMC$ có $\widehat{M} = 90^\circ$; $\widehat{A} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{MKC} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ \Rightarrow \triangle AMC$ đều.

Câu 4. (HSG 7 trường Nguyễn Trung Trực; trường Nguyễn Trãi 2018 - 2019; trường Thanh Văn, huyện Thanh Oai 2017 - 2018)

1) Cho tam giác ABC cân tại A , $\widehat{B} = 50^\circ$. Gọi K là điểm trong tam giác sao cho $\widehat{KBC} = 10^\circ$, $\widehat{KCB} = 30^\circ$.

a) Chứng minh $BA = BK$

b) Tính số đo \widehat{BAK}

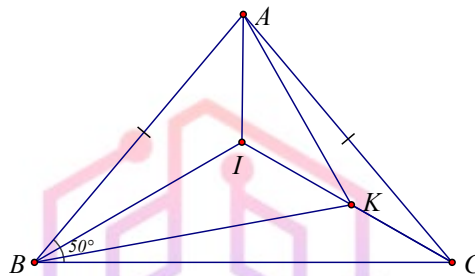
2) Cho $\widehat{xAy} = 60^\circ$ có tia phân giác Az . Từ điểm B trên Ax kẻ $BH \perp Ay$ tại H . Kẻ $BK \perp Az$ và Bt song song với Ay , Bt cắt Az tại C . Từ C kẻ CM vuông góc với Ay tại M .

a) Chứng minh: K là trung điểm của AC

b) Chứng minh: ΔKMC là tam giác đều

Lời giải

1)



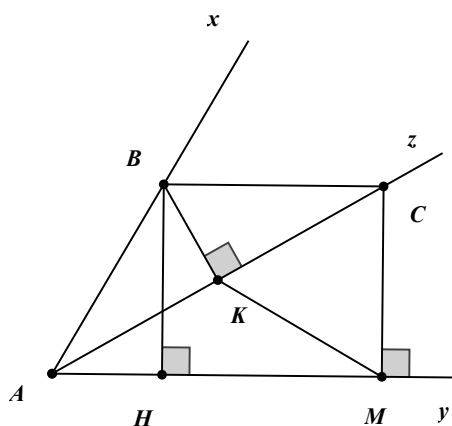
a) Vẽ tia phân giác \widehat{ABK} cắt CK ở I , ta có: ΔIBC cân nên $IB = IC$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow \Delta BIA = \Delta CIA$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{BIA} = \widehat{CIA} = 120^\circ$,

do đó $\Delta BIA = \Delta BIK$ (c.g.c) $\Rightarrow BA = BK$

b) Từ phần a ta tính được $\widehat{BAK} = 70^\circ$.

2)



a) ΔABC cân tại B do $\widehat{CAB} = \widehat{ACB} (= \widehat{MAC})$ và BK là đường cao nên BK là đường trung tuyến $\Rightarrow K$ là trung điểm của AC .

b) $\Delta ABH = \Delta BAK$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow BH = AK$ mà $AK = \frac{1}{2} AC \Rightarrow BH = \frac{1}{2} AC$

Ta có: $BH = CM$ (tính chất đoạn chắn) mà $CK = BH = \frac{1}{2} AC$

$\Rightarrow CM = CK \Rightarrow \Delta MKC$ là tam giác cân (1)

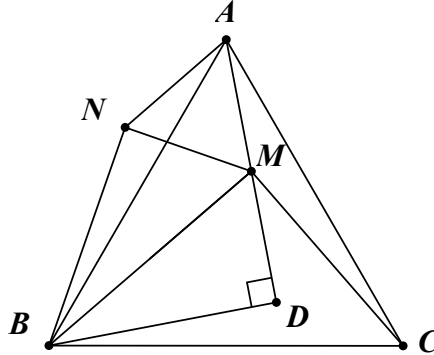
Mặt khác: $\widehat{MCB} = 90^\circ$ và $\widehat{ACB} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{MCK} = 60^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta MKC$ là tam giác đều

Câu 5. (HSG 7 Thị xã Sầm Sơn, 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC là tam giác đều. Lấy điểm M nằm trong tam giác ABC sao cho $MA = 1$; $MB = 2$; $MC = \sqrt{3}$. Tính độ dài cạnh AB và số đo góc AMB .

Lời giải



Vẽ tam giác đều AMN và kẻ $BD \perp AM$

$\Delta AMC = \Delta ANB$ (c.g.c)

$\Rightarrow MN = 1; BN = \sqrt{3}; BM = 2$

Dùng Pytago đảo chứng minh $\widehat{BNM} = 90^\circ$, $BM = 2NM$ nên $\widehat{NMB} = 60^\circ$

Vậy $\widehat{AMB} = 120^\circ$

$\widehat{MBD} = 30^\circ \Rightarrow MB = 2MD$

Vậy $AD = 2; BD = \sqrt{3}$

Từ đó tính được: $AB = \sqrt{7}$.

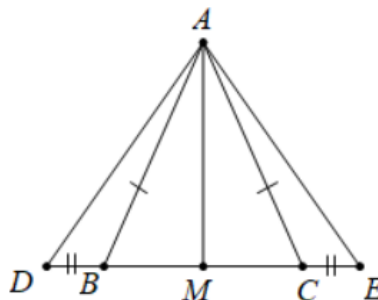
Câu 6. (HSG 7 trường Lê Hồng Phong, huyện Yên Mỹ 2018 - 2019)

Cho tam giác cân ABC , $AB = AC$. Trên tia đối của các tia BC , CB lấy theo thứ tự hai điểm D và E sao cho $BD = CE$.

1) Chứng minh tam giác ADE là tam giác cân.

2) Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh AM là tia phân giác của \widehat{DAE} .

Lời giải



1) ΔABC cân nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{ACE}$

Xét ΔABD và ΔACE có:

$AB = AC$ (gt); $\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$ (cmt); $DB = CE$ (gt)

$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta ACE$ (c.g.c) $\Rightarrow AD = AE \Rightarrow \Delta ADE$ cân tại A

2) Xét ΔAMD và ΔAME có:

$MD = ME$ ($DB = CE, MB = MC$);

AM chung; $AD = AE$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta AMD = \Delta AME$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{MAD} = \widehat{MAE}$

Vậy AM là tia phân giác của \widehat{DAE}

Câu 7. (HSG 7 trường Lê Hồng Phong, Yên Mỹ; huyện Tiên Phước 2018 - 2019; trường Nguyễn Văn Trỗi; trường Ngô Gia Tự 2017 - 2018; trường Võ Thị Sáu; trường Đáp Cầu, Bắc Ninh 2016 - 2017)

Cho tam giác cân ABC , $AB = AC$. Trên tia đối của các tia BC , CB lấy theo thứ tự hai điểm D và E sao cho $BD = CE$.

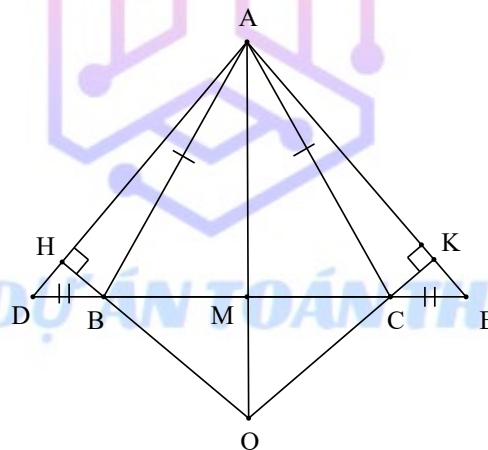
a) Chứng minh tam giác ADE là tam giác cân.

b) Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh AM là tia phân giác của \widehat{DAE} .

c) Từ B và C vẽ BH, CK theo thứ tự vuông góc với AD, AE . Chứng minh: $BH = CK$.

d) Chứng minh: 3 đường thẳng AM, BH, CK gặp nhau tại một điểm.

Lời giải



a) Chứng minh: tam giác ADE là tam giác cân.

Ta có: ΔABC cân nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$, $\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{ACE}$

Xét ΔABD và ΔACE có: $AB = AC$ (gt), $\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$ (cmt), $DB = CE$ (gt)

$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta ACE$ (c.g.c)

$\Rightarrow AD = AE \Rightarrow \Delta ADE$ cân tại A .

b) Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh AM là tia phân giác của \widehat{DAE} .

Xét ΔAMD và ΔAME có:

$MD = ME$ (Vì $DB = CE$; $MB = MC$)

AM chung; $AD = AE$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta AMD = \Delta AME$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{MAD} = \widehat{MAE}$.

Vậy AM là tia phân giác của \widehat{DAE} .

c) Từ B và C vẽ BH, CK theo thứ tự vuông góc với AD, AE . Chứng minh $BH = CK$

Vì $\triangle ADE$ cân tại A (cm câu a) nên $\widehat{ADE} = \widehat{AED}$

Xét $\triangle BHD$ và $\triangle CKE$ có:

$$\widehat{BHD} = \widehat{CKE} = 90^\circ$$

$$\widehat{BDH} = \widehat{CEK} \text{ (vì } \widehat{ADE} = \widehat{AED}\text{)}$$

$$DB = CE \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \triangle BHD = \triangle CKE \text{ (cạnh huyền - góc nhọn)} \Rightarrow BH = CK.$$

d) Chứng minh 3 đường thẳng AM, BH, CK gặp nhau tại 1 điểm.

Gọi giao điểm của BH và CK là O .

Xét $\triangle AHO$ và $\triangle AKO$ có:

$$\widehat{AHO} = \widehat{AKO} = 90^\circ$$

OA cạnh chung;

$$AH = AK \text{ (} AD = AE, DH = KE \text{ (do } \triangle BHD = \triangle CKE)\text{)}$$

$$\Rightarrow \triangle AHO = \triangle AKO \text{ (cạnh huyền - cạnh góc vuông)}.$$

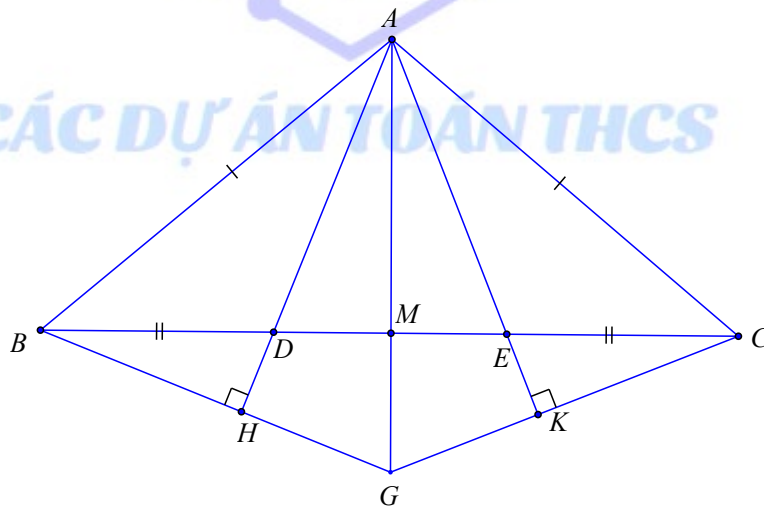
Câu 8. (HSG 7 huyện Lục Ngạn năm 2021 - 2022)

Cho $\triangle ABC$ cân tại A ($\widehat{A} > 90^\circ$), trên cạnh BC lấy hai điểm D và E sao cho $BD = DE = EC$. Kẻ $BH \perp AD, CK \perp AE$ ($H \in AD, K \in AE$), BH cắt CK tại G .

a) Chứng minh: $\triangle ADE$ cân và $BH = CK$.

b) Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh 3 điểm A, M, G thẳng hàng.

Lời giải



a) Chứng minh: $\triangle ADE$ cân và $BH = CK$.

* Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ có:

$$\widehat{ABD} = \widehat{ACE} \text{ (do } \triangle ABC \text{ cân tại } A\text{)}$$

$$AB = AC \text{ (do } \triangle ABC \text{ cân tại } A\text{)}$$

$$BD = CE \text{ (giả thiết)}$$

$$\text{Do đó: } \triangle ABD = \triangle ACE \text{ (c.g.c)} \Rightarrow AD = AE \Rightarrow \triangle ADE \text{ cân tại } A.$$

Vậy $\triangle ADE$ cân tại A .

* Xét $\triangle HBA$ và $\triangle KCA$ có:

$$AB = AC \text{ (do } \triangle ABC \text{ cân tại } A)$$

$$\widehat{BHA} = \widehat{CKA} = 90^\circ \text{ (do } HA \perp BG; CK \perp AK)$$

$$\widehat{BAH} = \widehat{CAK} \text{ (vì } \triangle ABD = \triangle ACE \text{ theo phần a)}$$

$$\text{Do đó } \triangle HBA = \triangle KCA \text{ (cạnh huyền - góc nhọn)} \Rightarrow BH = CK \text{ (cạnh tương ứng)}$$

$$\text{b) Vì } AB = AC \text{ nên } A \text{ nằm trên đường trung trực của } BC \quad (1)$$

$$\text{Vì } \widehat{ABH} = \widehat{ACK} \text{ (do } \triangle HBA = \triangle KCA) \text{ mà } \widehat{ABC} = \widehat{ACB} \text{ (do } \triangle ABC \text{ cân tại } A) \text{ nên}$$

$$\widehat{ABH} - \widehat{ABC} = \widehat{ACK} - \widehat{ACB}$$

$$\text{Hay } \widehat{GBC} = \widehat{GCB} \Rightarrow \triangle BGC \text{ cân tại } G$$

$$\text{Suy ra } GB = GC, \text{ Suy ra } G \text{ nằm trên đường trung trực của } BC \quad (2)$$

$$\text{Vì } M \text{ là trung điểm của } BC \text{ nên } M \text{ nằm trên đường trung trực của } BC \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra A, M, G nằm trên đường trung trực của BC

Do đó: A, M, G thẳng hàng.

Câu 9. (HSG 7 trường Liên Trường 2022 - 2023; đề thi vòng 4 - 2018 - 2019)

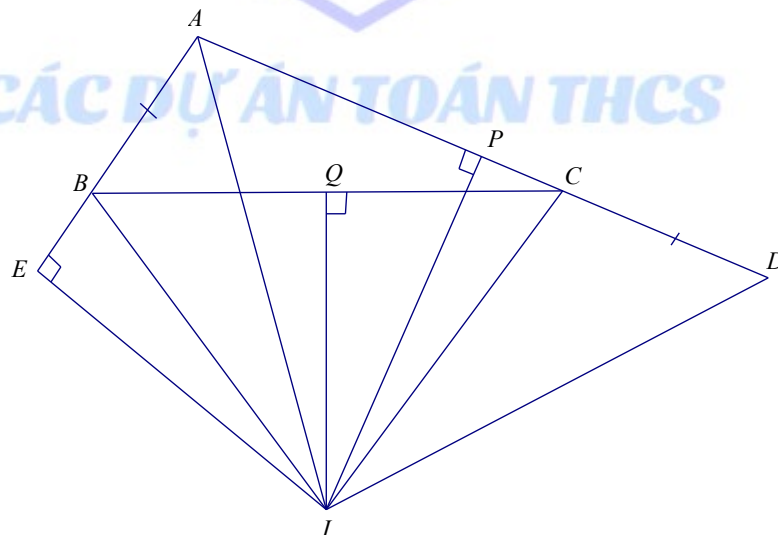
Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Trên tia đối của tia CA lấy điểm D sao cho $CD = AB$. Gọi P, Q là trung điểm của AD, BC và I là giao điểm các đường vuông góc với AD và BC tại P và Q .

a) Chứng minh $\triangle AIB = \triangle DIC$

b) Chứng minh AI là tia phân giác của góc BAC .

c) Kẻ IE vuông góc với AB , chứng minh $AE = \frac{1}{2} AD$.

Lời giải



a) Vì I là giao điểm các đường trung trực của BC và AD

$$\Rightarrow IB = IC \text{ và } IA = ID$$

Xét $\triangle AIB$ và $\triangle DIC$ có:

$$IB = IC; IA = ID; AB = CD$$

$$\Rightarrow \triangle AIB = \triangle DIC \text{ (c.c.c.)}$$

b) Ta có: $IA = ID \Rightarrow \triangle AID$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{DAI} = \widehat{ADI}$

$$\text{Mà } \widehat{BAI} = \widehat{ADI}$$

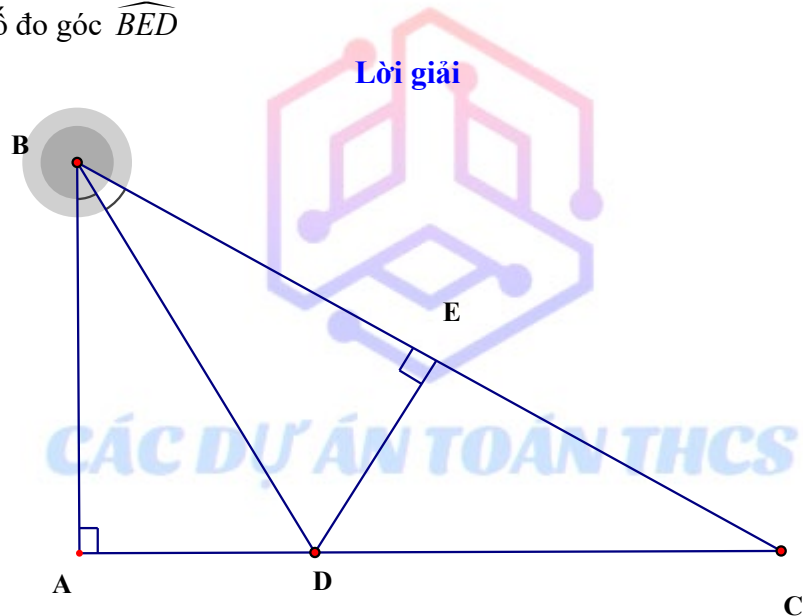
$\Rightarrow \widehat{DAI} = \widehat{BAI} \Rightarrow AI$ là tia phân giác của \widehat{BAC}
 c) Kẻ $IP \perp AD$
 Xét $\triangle AIE$ (vuông tại E) và $\triangle AIP$ (vuông tại P) có:
 AI là cạnh chung
 $\widehat{EAI} = \widehat{PAI}$ (AI là tia phân giác của góc BAC)
 $\Rightarrow \triangle AIE = \triangle AIP$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow AE = AP$
 mà $AP = \frac{AD}{2}$ (vì P là trung điểm của AD)
 $\Rightarrow AE = \frac{1}{2}AD$

Câu 10. (HSG 7 huyện 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^\circ$, trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = BA$. Tia phân giác của \widehat{B} cắt AC ở D .

a) So sánh các độ dài DA và DE .

b) Tính số đo góc \widehat{BED}



a) Xét $\triangle ABD$ (vuông tại A) và $\triangle EBD$ (vuông tại E) có:

BD là cạnh chung

$\widehat{ABD} = \widehat{EBD}$ (BD là tia phân giác của góc B)

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle EBD$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow DA = DE$ (hai cạnh tương ứng)

b) Xét $\triangle ABD = \triangle EBD$ (theo câu a)

$\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{BED}$ mà $\widehat{A} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BED} = 90^\circ$

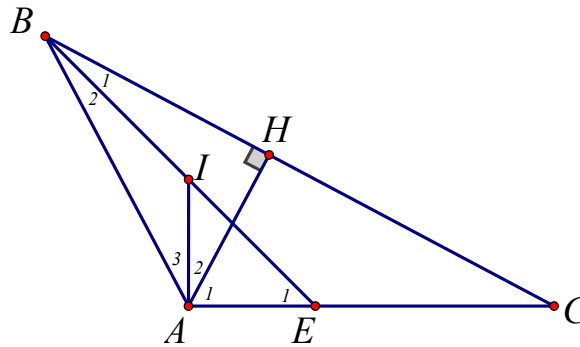
Câu 11. (HSG 7 trường Nghĩa Điền, Tư Nghĩa 2017 - 2018)

Cho $\triangle ABC$, $\widehat{A} > 90^\circ$, đường cao AH , $\widehat{BAH} = 2\widehat{C}$. Tia phân giác của \widehat{B} cắt AC ở E , tia phân giác của \widehat{BAH} cắt BE ở I .

a) So sánh: AB với EB .

b) Chứng minh: $\triangle AIE$ là tam giác vuông cân.

Lời giải



a) So sánh: AB với EB .

$\triangle ABE$, $\widehat{A} > 90^\circ \Rightarrow AB < EB$ (quan hệ góc – cạnh đối diện)

b) Chứng minh: $\triangle AIE$ là tam giác vuông cân.

Có $\widehat{A}_1 + \widehat{C} = 90^\circ$

$$\widehat{A}_2 = \widehat{A}_3 = \frac{1}{2} \widehat{BAH} \text{ (AI là phân giác)}$$

$$\widehat{C} = \frac{1}{2} \widehat{BAH} \text{ (gt)}$$

Do đó $\widehat{A}_2 = \widehat{A}_3 = \widehat{C}$

$$\Rightarrow \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 90^\circ \Rightarrow AI \perp AC \Rightarrow \widehat{E}_1 + \widehat{AIE} = 90^\circ$$

Mà $\widehat{E}_1 = \widehat{B}_1 + \widehat{C}$ (góc ngoài của $\triangle BEC$)

$$\widehat{AIE} = \widehat{A}_3 + \widehat{B}_2 \text{ (góc ngoài của } \triangle ABI)$$

$$\Rightarrow \widehat{E}_1 + \widehat{AIE} = \widehat{B}_1 + \widehat{C} + \widehat{A}_3 + \widehat{B}_2$$

$$\Rightarrow \widehat{E}_1 + \widehat{AIE} = 2\widehat{B}_1 + 2\widehat{C} = \widehat{ABC} + \widehat{BAH} = 90^\circ \text{ (}\widehat{B}_2 = \widehat{B}_1 = \frac{1}{2} \widehat{ABC}; \widehat{A}_2 = \widehat{A}_3 = \widehat{C}\text{)}$$

$$\Rightarrow \widehat{B}_1 + \widehat{C} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{E}_1 = 45^\circ$$

Do đó $\triangle AIE$ vuông cân tại A .

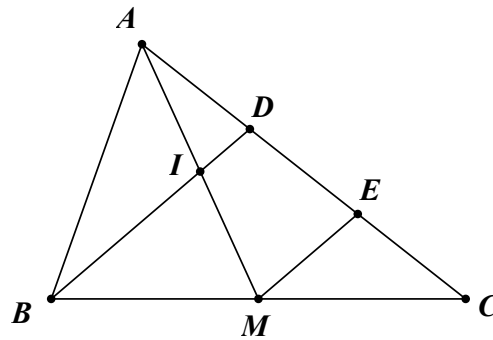
Câu 12. (HSG 7 trường THCS Hương Điền – Nam Hương 2017- 2018)

Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AM , BI cắt cạnh AC tại D .

a) Chứng minh $AC = 3AD$.

b) Chứng minh: $ID = \frac{1}{4}BD$.

Lời giải



a) Gọi E là trung điểm CD trong tam giác BCD nên ME là đường trung bình
 $\Rightarrow ME \parallel BD$.

Trong tam giác MAE có I là trung điểm của cạnh AM (gt)

Mà $ID \parallel ME$ (gt)

Nên D là trung điểm của $AE \Rightarrow AD = DE$ (1)

Vì E là trung điểm của $DC \Rightarrow DE = EC$ (2)

So sánh (1) và (2) $\Rightarrow AD = DE = EC$

Suy ra $AC = 3AD$.

b) Trong tam giác MAE , ID là đường trung bình (theo a) $\Rightarrow ID = \frac{1}{2}ME$ (1)

Trong $\triangle BCD$, ME là đường trung bình $\Rightarrow ME = \frac{1}{2}BD$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow ID = \frac{1}{4}BD$.

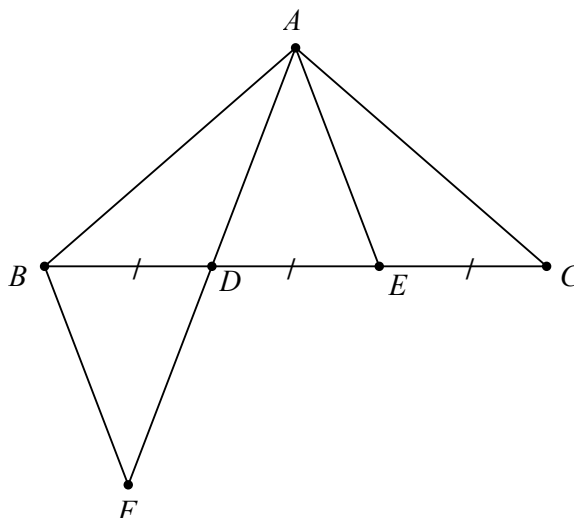
Câu 13. (HSG 7 Điện Bàn 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh đáy BC lần lượt lấy hai điểm D và E sao cho $BD = DE = EC$.

a) Chứng minh $AD = AE$

b) So sánh số đo các góc \widehat{BAD} và \widehat{DAE} .

Lời giải



a) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ ta có:

$$AB = AC \text{ (} \triangle ABC \text{ cân tại } A \text{)}$$

$$\widehat{ABD} = \widehat{ACE} \text{ (} \triangle ABC \text{ cân tại } A \text{)}$$

$$BD = EC \text{ (giả thiết)}$$

$$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle ACE \text{ (c.g.c)} \Rightarrow AD = AE \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

b) So sánh số đo các góc \widehat{BAD} và \widehat{DAE} .

Dựng điểm F sao cho D là trung điểm của AF

Xét $\triangle ADE$ và $\triangle FDB$ ta có:

$$DB = DE \text{ (Giả thiết)}$$

$$\widehat{BDF} = \widehat{EDA} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$DA = DF \text{ (cách dựng)}$$

$$\Rightarrow \triangle ADE = \triangle FDB \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{DAE} = \widehat{DFB} \text{ (1)}$$

Xét $\triangle ADE$ có $AD = AE$ (cmt) suy ra $\triangle ADE$ cân tại A ; suy ra \widehat{ADE} nhọn.

Mà \widehat{ADE} và \widehat{ADB} kề bù

$$\text{Suy ra } \widehat{ADB} > 90^\circ \Rightarrow \widehat{ADB} > \widehat{ABD} \text{ từ đó suy ra trong tam giác } ADB \text{ thì } AB > AD \\ \Rightarrow AB > AE$$

$$\text{Mà } \triangle ADE = \triangle FDB \text{ (cmt)} \Rightarrow AE = BF$$

$$\text{Từ đó ta có } AB > BF, \text{ do đó trong tam giác } ABF \text{ có } \widehat{DFB} > \widehat{BAD} \text{ (2)}$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \widehat{BAD} < \widehat{DAE}.$$

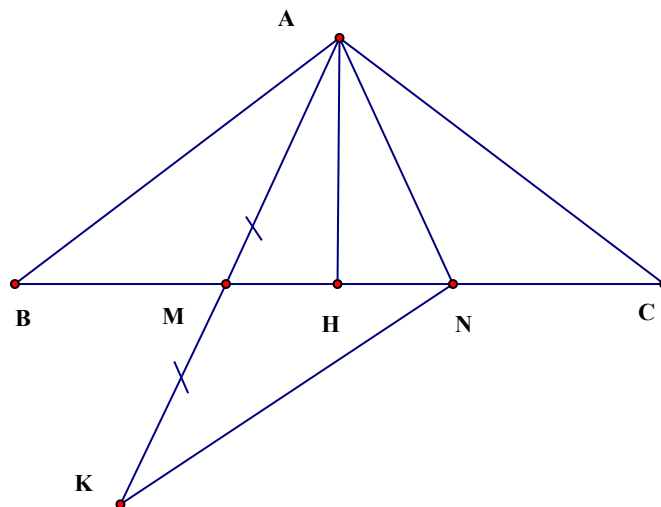
Câu 14. (HSG 7 huyện 2022 - 2023; trường Đáp Cầu; trường Thanh Mai 2018 - 2019)

Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A , trên cạnh BC lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho $BM = MN = NC$. Gọi H là trung điểm của BC .

a) Chứng minh: $AM = AN$ và $AH \perp BC$.

b) Chứng minh: $\widehat{MAN} > \widehat{BAM} = \widehat{CAN}$

Lời giải



a) Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ACN$ có:

$$AB = AC \text{ (} \triangle ABC \text{ cân tại } A \text{)}$$

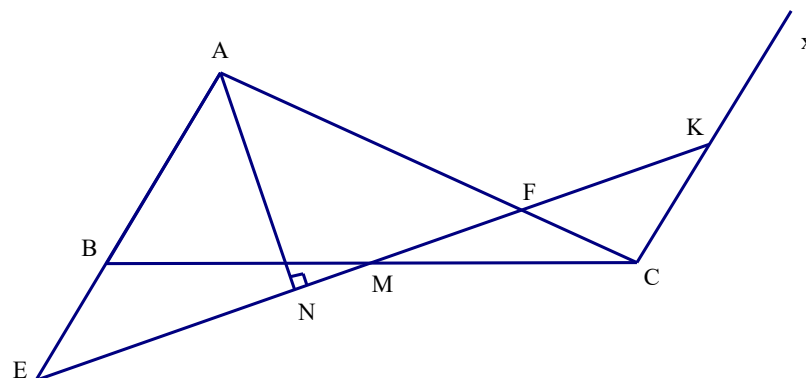
$\widehat{B} = \widehat{C}$ ($\triangle ABC$ cân tại A)
 $BM = CN$ (gt)
 $\Rightarrow \triangle ABM = \triangle ACN$ (c.g.c)
 $\Rightarrow AM = AN$ (hai cạnh tương ứng)
 $\triangle ABC$ cân tại A , có AH là đường trung tuyến
 $\Rightarrow AH$ đồng thời là đường cao của $\triangle ABC \Rightarrow AH \perp BC$
 b) Trên tia AM lấy điểm K sao cho $AM = MK$
 Xét $\triangle AMB$ và $\triangle KMN$ có:
 $AM = MK$; $BM = MN$; $\widehat{AMB} = \widehat{KMN}$ (hai góc đối đỉnh)
 $\Rightarrow \triangle AMB = \triangle KMN$ (c.g.c)
 $\Rightarrow AB = KN$
 Lại có: $AM = AN$
 Mà $AB > AM$ ($AB = 5\text{cm} = \sqrt{25} > AM = \sqrt{17}\text{cm}$)
 $\Rightarrow KN > AN$
 Xét $\triangle AKN$ có: $KN > AN$
 $\Rightarrow \widehat{KAN} = \widehat{MKN}$
 Mà $\widehat{MKN} = \widehat{MAB}$ ($\triangle ABM = \triangle KNC$)
 $\widehat{MAB} = \widehat{NAC}$ ($\triangle ABM = \triangle ACN$)
 $\Rightarrow \widehat{KAN} = \widehat{NAC}$

Câu 15. (HSG 7 (Triệu Sơn - năm học 2022 - 2023))

Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của BC , từ M kẻ đường thẳng vuông góc với tia phân giác của \widehat{BAC} tại N và cắt tia AB tại E , cắt AC tại F .

- a) Chứng minh rằng $\triangle ANE = \triangle ANF$.
 b) Chứng minh rằng $AE = \frac{AB + AC}{2}$.

Lời giải



- a) Xét $\triangle ANE$ và $\triangle ANF$, ta có:
 $\widehat{EAN} = \widehat{FAN}$ (do AN là tia phân giác của \widehat{BAC})
 AN chung
 $\widehat{ANE} = \widehat{ANF} = 90^\circ$ ($MN \perp AN$)
 $\Rightarrow \triangle ANE = \triangle ANF$ (g.c.g)

b) Từ C kẻ tia $Cx \parallel AB$ và cắt EF tại K hay $BE \parallel CK$ suy ra $\widehat{BEM} = \widehat{CKM}$ (so le trong)
 Xét $\triangle BME$ và $\triangle CMK$, ta có:

$$\widehat{BME} = \widehat{CKM} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$MB = MC \text{ (M là trung điểm của BC)}$$

$$\widehat{BEM} = \widehat{CKM} \text{ (so le trong)}$$

$$\Rightarrow \triangle BME = \triangle CMK \text{ (g.c.g)} \Rightarrow BE = CK \text{ (2 cạnh tương ứng) (1)}$$

Ta có: $\triangle ANE = \triangle ANF$ (cmt) $\Rightarrow AE = AF \Rightarrow \triangle AEF$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{AFE}$

Mà $\widehat{AFE} = \widehat{KFC}$ (đối đỉnh) và $\widehat{AEF} = \widehat{FKC}$ (so le trong) $\Rightarrow \widehat{KFC} = \widehat{FKC}$

$$\Rightarrow \triangle CFK \text{ cân tại C} \Rightarrow CF = CK \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2), suy ra: $BE = CF$

$$\text{Ta có: } AE = AB + BE, AF = AC - FC$$

$$\Rightarrow AE + AF = AB + BE + AC - FC$$

$$\Rightarrow 2AE = AB + AC \text{ (vì } AE = AF \text{ và } BE = CF)$$

$$\Rightarrow AE = \frac{AB + AC}{2} \text{ (đpcm)}$$

Câu 16. (HSG 7 huyện Xuân Trường 2018 - 2019)

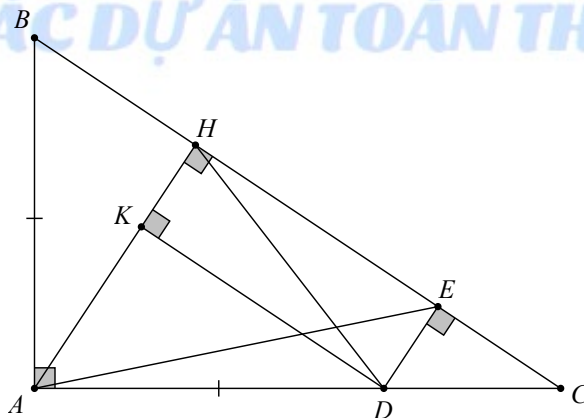
Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB < AC$. Kẻ AH vuông góc với BC ($H \in BC$). Lấy điểm D trên AC sao cho $AD = AB$. Kẻ DE và DK lần lượt vuông góc với BC và AH ($E \in BC, K \in AH$).

a) So sánh độ dài BH và AK

b) Tính số đo góc \widehat{HAE}

Lời giải

CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS



a) Chứng minh $\widehat{BAH} = \widehat{ADK}$ (cùng phụ với \widehat{KAD})

Xét $\triangle ABH$ và $\triangle DAK$ có: $\widehat{AHB} = \widehat{DKA} = 90^\circ$; $BA = DA$ (gt); $\widehat{BAH} = \widehat{ADK}$ (cmt)

$$\Rightarrow \triangle ABH = \triangle DAK \text{ (ch - gn)} \Rightarrow BH = AK$$

b) Chứng minh $KD \parallel HE \Rightarrow \widehat{KDH} = \widehat{EHD}$ (hai góc so le trong)

Xét $\triangle KDH$ và $\triangle EHD$ có: $\widehat{DKH} = \widehat{HED} = 90^\circ$; DH chung; $\widehat{KDH} = \widehat{EHD}$ (cmt)

$$\Rightarrow \triangle KDH = \triangle EHD \text{ (ch - gn)} \Rightarrow KD = EH \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

Mà $HA = KD$ ($\triangle ABH = \triangle DAK$) $\Rightarrow HE = HA \Rightarrow \triangle AHE$ vuông cân tại H

Từ đó tính được $\widehat{HAE} = 45^\circ$

Câu 17. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường THCS Lưu Khánh Đàm 2022 - 2023)

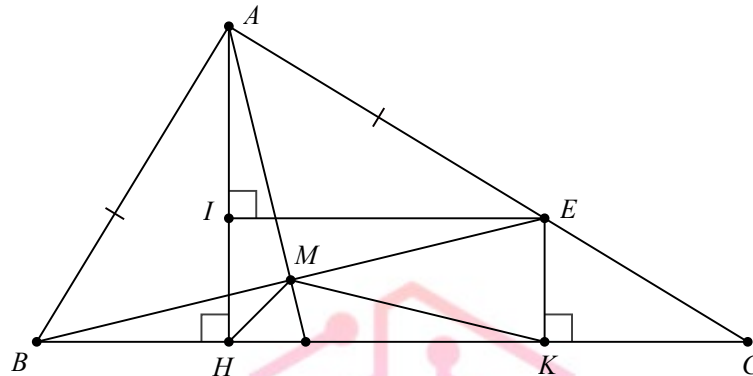
Cho ΔABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH . Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$. Kẻ EI vuông góc với AH tại I , tia phân giác của \widehat{BAC} cắt BE tại M .

1) Chứng minh: ΔABM vuông cân.

2) Chứng minh: $AH = EI$.

3) Chứng minh: $\widehat{AHM} = 45^\circ$.

Lời giải



1) Theo giả thiết ta có $\widehat{BAC} = 90^\circ$ và $AB = AE \Rightarrow \Delta ABE$ cân tại A .

$$\Rightarrow \widehat{ABE} = 45^\circ$$

mà $\widehat{MAB} = 45^\circ$ (vì AM là phân giác \widehat{BAC})

$\Rightarrow \Delta ABM$ vuông cân tại M .

2) Xét ΔABH và ΔEAI có:

$$\widehat{AHB} = \widehat{AIE} = 90^\circ$$

$$\widehat{HAB} = \widehat{IEA} (= 90^\circ - \widehat{IAE})$$

$$AB = AE \text{ (gt)}$$

$\Rightarrow \Delta ABH = \Delta EAI$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$$\Rightarrow AH = EI.$$

3) Vì ΔABE cân tại A , mà AM là đường phân giác của ΔABE

$\Rightarrow AM$ là trung tuyến của $\Delta ABE \Rightarrow M$ là trung điểm của BE

$$\text{Từ đó suy ra } AM = \frac{1}{2} BE$$

- Kẻ EK vuông góc với BC tại K .

$$\text{Từ đó suy ra } KM = \frac{1}{2} BE \Rightarrow KM = AM$$

- c/m được $\Delta IHE = \Delta KEH$ (g.c.g)

$$\Rightarrow KH = EI$$

$$\text{Mà } AH = EI \Rightarrow KH = AH$$

- c/m được $\Delta AHM = \Delta KHM$ (c.c.c)

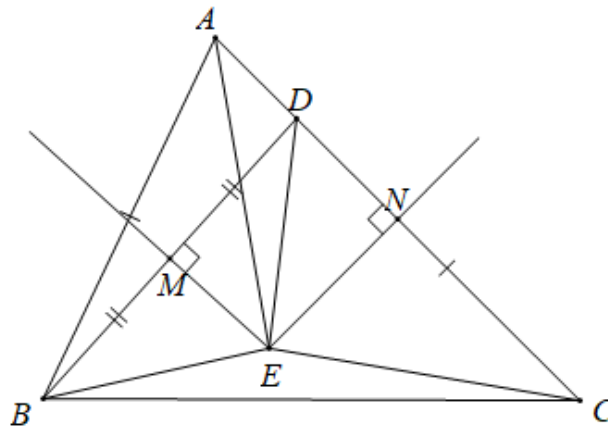
$$\Rightarrow \widehat{AHM} = \widehat{KHM} = \frac{1}{2} \widehat{AHK} = 45^\circ$$

Câu 18. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Hưng Vũ 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $CD = AB$. Hai đường trung trực của BD, AC cắt nhau tại E . Chứng minh rằng:

- $\triangle AEB = \triangle CED$
- AE là tia phân giác trong tại đỉnh A của $\triangle ABC$.

Lời giải



- Xét $\triangle BEM$ và $\triangle DEM$ có: $BM = DM$ (gt) ME cạnh chung
 $\Rightarrow \triangle BEM = \triangle DEM$ (c.g.c) $\Rightarrow BE = DE$ (1)
 Xét $\triangle AEN$ và $\triangle CEN$ có: $AN = CN$ (gt); NE chung $\Rightarrow \triangle AEN = \triangle CEN$ (c.g.c) $\Rightarrow AE = CE$ (2)
 và $AB = CD$ (gt) (3)
 Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \triangle AEB = \triangle CED$ (c.c.c)

b) Vì $\widehat{EAN} = \widehat{ECN}$

Mà $\widehat{BAE} = \widehat{ECN}$ do $(\triangle AEB = \triangle CED)$ nên $\widehat{BAE} = \widehat{EAN}$

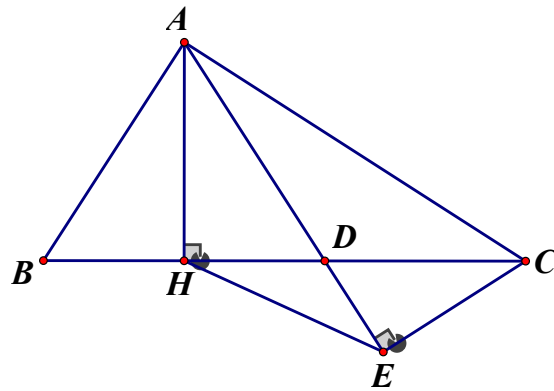
Mặt khác: AE nằm giữa hai tia AB, AN nên AE là tia phân giác của góc trong tại đỉnh A của $\triangle ABC$

Câu 19. (HSG 7 huyện Thanh Oai 2022 - 2023; huyện Mỹ Đức 2021 - 2021; huyện Bích Hòa 2013 - 2014)

Cho tam giác ABC vuông ở A , có góc $C = 30^\circ$, đường cao AH . Trên đoạn HC lấy điểm D sao cho $HD = HB$. Từ C kẻ CE vuông góc với AD . Chứng minh:

- Tam giác ABD là tam giác đều
- $AH = CE$
- EH song song với AC

Lời giải



a) Tam giác ABD có AH vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên tam giác ABD cân ở A

Lại có $\widehat{B} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ nên tam giác ABD là tam giác đều

b) $\widehat{EAC} = \widehat{BAC} - \widehat{BAD} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ = \widehat{ACH} \Rightarrow \Delta AHC = \Delta CEA$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Do đó: $AH = CE$

c) $\Delta AHC = \Delta CEA$ (cmt) nên $HC = EA$

ΔADC cân ở D vì có $\widehat{ADC} = \widehat{DCA} (= 30^\circ)$ nên $DA = DC$

Suy ra $DE = DH$. Tam giác DEH cân ở D .

Hai tam giác cân ADC và DEH có: $\widehat{ADC} = \widehat{EDH}$ (hai góc đối đỉnh) do đó

$\widehat{ACD} = \widehat{DHE}$ ở vị trí so le trong, suy ra $EH \parallel AC$

Câu 20. (HSG 7 huyện Mỹ Đức 2020 - 2021)

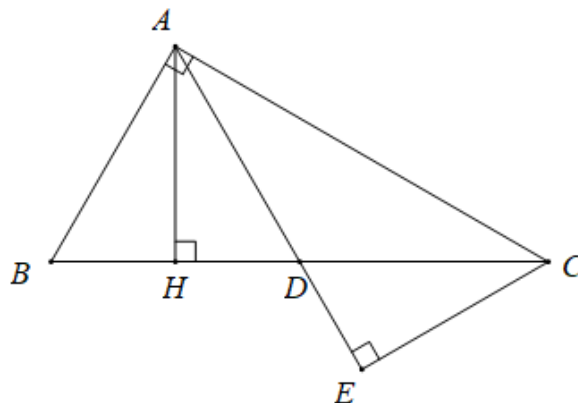
Cho tam giác ABC vuông tại A , có $\widehat{C} = \frac{1}{2}\widehat{B}$. Kẻ $AH \perp BC$ tại H . Trên tia CH lấy điểm

D sao cho $HD = HB$. Từ C kẻ đường thẳng CE vuông góc với đường thẳng AD tại E .

a) Tam giác ABD là tam giác gì? Vì sao?

b) Chứng minh rằng: $AD = CD; DE = DH; HE \parallel AC$.

Lời giải



a) Ta có tam giác ABC vuông tại $A \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$

Mà $\widehat{C} = \frac{1}{2}\widehat{B} \Rightarrow \widehat{C} = 30^\circ; \widehat{B} = 60^\circ$

Xét ΔAHB và ΔAHD có:

$HD = HB$; $\widehat{AHB} = \widehat{AHD} = 90^\circ$; AH là cạnh chung

Do đó $\triangle ABH = \triangle ADH$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = AD$ (hai cạnh tương ứng) $\Rightarrow \triangle ABD$ cân tại A

Có $\widehat{B} = 60^\circ$ nên $\triangle ABD$ đều

b) Ta có $\triangle ABD$ đều nên suy ra $\widehat{BAD} = 60^\circ$; $AB = AD = BD$.

Mặt khác $\widehat{CAD} = \widehat{BAC} - \widehat{BAD} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

$\triangle ADC$ có $\widehat{CAD} = \widehat{ACD} = 30^\circ \Rightarrow \triangle ACD$ cân tại $D \Rightarrow AD = DC$

Xét $\triangle ADH$ và $\triangle CED$ có: $AD = DC$; $\widehat{ADH} = \widehat{CDE}$

$\Rightarrow \triangle ADH = \triangle CED$ (cạnh huyền-góc nhọn) $\Rightarrow DH = DE$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow \widehat{ADC} = 180^\circ - 2 \cdot \widehat{DCA} = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ$

Mà $\widehat{ADC} = \widehat{HDE}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{HDE} = 120^\circ$

Mà $\triangle HDE$ cân tại $D \Rightarrow \widehat{DHC} = \widehat{DEH} = (180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ$

$\Rightarrow \widehat{DHE} = \widehat{DCA} = 30^\circ$ mà hai góc này ở vị trí so le trong $\Rightarrow HE \parallel AC$

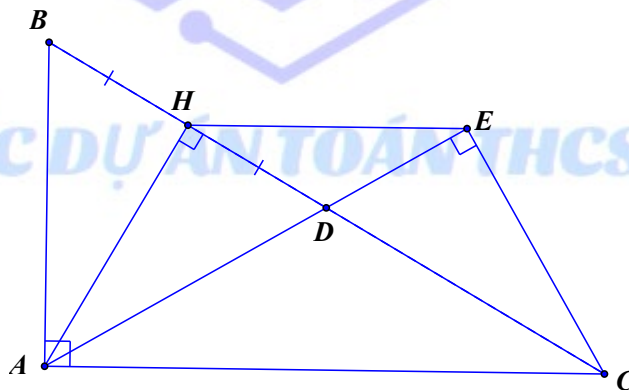
Câu 21. (HSG 7 huyện Lục Nam năm 2020 - 2021)

Cho tam giác ABC vuông tại A , có $\widehat{B} = 60^\circ$. Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Trên HC lấy điểm D sao cho $HD = HB$. Từ C kẻ CE vuông góc với AD .

a) Chứng minh tam giác ADB đều.

b) Chứng minh: $DA = DC$ và EH vuông góc với AB .

Lời giải



a) Xét $\triangle AHB$ và $\triangle AHD$ có:

$\widehat{AHB} = \widehat{AHD} = 90^\circ$;

$HB = HD$ (gt);

AH là cạnh chung

Do đó: $\triangle AHB = \triangle AHD$ (hai cạnh góc vuông)

$\Rightarrow AB = AD \Rightarrow \triangle ABD$ cân tại A .

Mà $\widehat{B} = 60^\circ$ nên tam giác ADB đều.

b) Ta có: $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} + \widehat{DAC} \Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{BAC} - \widehat{BAD} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

Ta lại có: $\widehat{BAC} = \widehat{ABC} + \widehat{BCA} \Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{BAC} - \widehat{ABC} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{DAC} = 30^\circ$ hay $\widehat{DCA} = \widehat{DAC} = 30^\circ$

Xét $\triangle ADC$ có: $\widehat{DCA} = \widehat{DAC} = 30^\circ$ nên $\triangle ADC$ là tam giác cân $\Rightarrow DA = DC$ (đpcm)

$\triangle CEA = \triangle AHC$ (ch-gn) $\Rightarrow AH = CE$

$\triangle AHD = \triangle CED$ (ch-gn) $\Rightarrow DH = DE$

Hai tam giác cân ADC và EDH có góc ở đỉnh bằng nhau nên: $\widehat{AEH} = \widehat{EAC}$

Mà hai góc ở vị trí so le trong nên $EH \parallel AC$.

Mà $AC \perp AB$ (gt)

$\Rightarrow EH \perp AB$ (đpcm)

Câu 22. (HSG 7 thị xã Kỳ Anh 2022 - 2023)

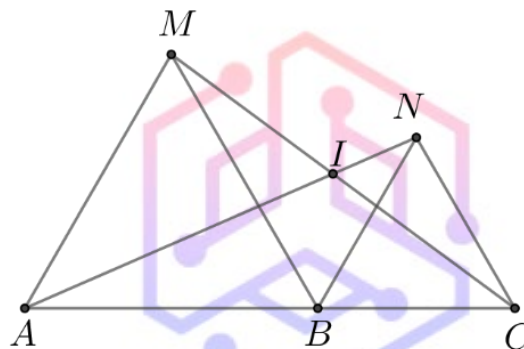
Cho 3 điểm A, B, C thẳng hàng (B nằm giữa A và C). M và N nằm cùng phía với nhau so với đường thẳng AB sao cho $\triangle MAB$ và $\triangle NBC$ là các tam giác đều; AN và MC cắt nhau ở I .

a) Chứng minh rằng AM song song với BN .

b) Chứng minh rằng $AN = MC$.

c) Tính số đo góc AIC .

Lời giải



a) Ta có: $\triangle MAB$ và $\triangle NBC$ là các tam giác đều nên $\widehat{MAB} = \widehat{NBC} (= 60^\circ)$

Mà hai góc trên là cặp góc đồng vị nên $AM \parallel BN$

b) $\triangle MAB$ và $\triangle NBC$ là các tam giác đều và A, B, C thẳng hàng nên:

$\widehat{MBA} = \widehat{NBC} = \widehat{MBN} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ABN} = \widehat{MBC}$ (cùng bằng 120°)

$\triangle ABN$ và $\triangle MBC$ có:

$\widehat{ABN} = \widehat{MBC}$ (cmt); $AB = MB$; $BN = BC$ ($\triangle NBC$ đều)

$\Rightarrow \triangle ABN = \triangle MBC$ (c - g - c) $\Rightarrow AN = MC$

c) $\triangle ABN = \triangle MBC$ (câu b) $\Rightarrow \widehat{NAB} = \widehat{CMB}$

mà $\widehat{CMB} + \widehat{MCB} = 60^\circ$ nên $\widehat{NAB} + \widehat{MCB} = 60^\circ$. Hay $\widehat{IAC} + \widehat{ICA} = 60^\circ$

$\triangle AIC$ có $\widehat{IAC} + \widehat{ICA} + \widehat{AIC} = 180^\circ$

Suy ra $\widehat{AIC} = 180^\circ - (\widehat{IAC} + \widehat{ICA}) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Câu 23. (HSG 7 trường Phương Trung 2018 - 2019)

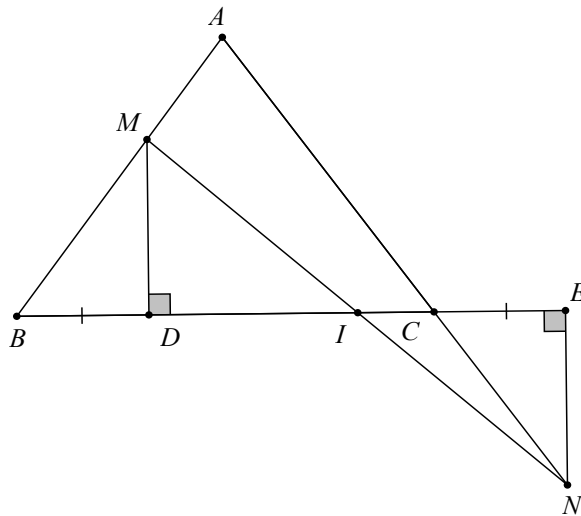
Cho tam giác cân $ABC, AB = AC$. Trên cạnh BC lấy điểm D . Trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = BE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB và AC lần lượt ở M và N . Chứng minh:

a) $DM = ED$

b) Đường thẳng BC cắt MN tại điểm I là trung điểm của MN .

c) Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên BC .

Lời giải



a) $\triangle MDB = \triangle NEC \Rightarrow DN = EN$

b) $\triangle MDI = \triangle NEI \Rightarrow IM = IN \Rightarrow BC$ cắt MN tại điểm I là trung điểm của MN .

c) Gọi H là chân đường cao vuông góc kẻ từ A xuống BC .

Ta có: $\triangle AHB = \triangle AHC \Rightarrow \widehat{HAB} = \widehat{HAC}$

Gọi O là giao AH với đường thẳng vuông góc với MN kẻ từ I thì

$\triangle OAB = \triangle OAC(c.g.c) \Rightarrow \widehat{OBA} = \widehat{OCA} \quad (1)$

Có: $\triangle OIM = \triangle OIN \Rightarrow OM = ON \Rightarrow \triangle OBN = \triangle OCN(c.c.c) \Rightarrow \widehat{OBM} = \widehat{OCM}(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{OCA} = \widehat{OCN} = 90^\circ \Rightarrow OC \perp AC$

Vậy điểm O cố định.

Câu 24. (HSG 7 huyện Tam Điệp năm 2021 - 2022)

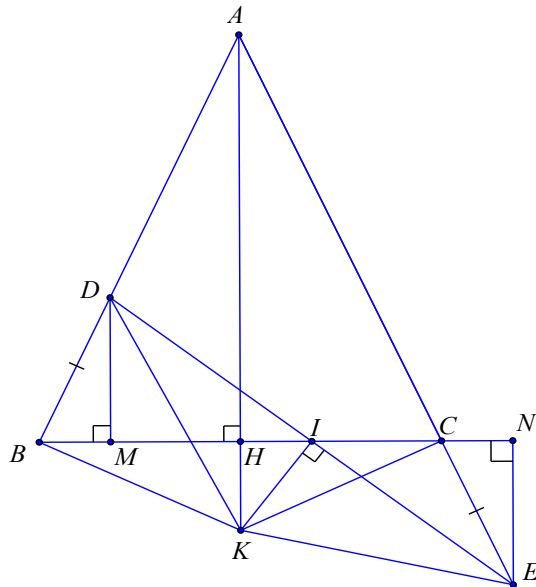
Cho $\triangle ABC$ cân tại A . Trên cạnh AB lấy điểm D , trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Qua D và E kẻ các đường thẳng vuông góc với BC lần lượt tại M và N .

a) Chứng minh rằng: $BM = CN$.

b) Gọi I là giao điểm của BC và DE . Chứng minh $DE = 2ID$.

c) Kẻ AH vuông góc với BC tại H . Đường thẳng đi qua I và vuông góc với DE cắt AH tại K . Tính số đo góc DBK .

Lời giải



a) Vì $\triangle ABC$ cân tại A nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ hay $\widehat{DBM} = \widehat{ECN}$.

Mà $\widehat{ECN} = \widehat{ACB}$ (2 góc đối đỉnh)

Suy ra $\widehat{DBM} = \widehat{ECN}$

Do đó $\triangle MDB = \triangle NEC$ (ch-gn) $\Rightarrow BM = CN$

b) Ta có $MD = NE$ (vì $\triangle MDB = \triangle NEC$)

Ta có $\triangle DMI$ vuông tại $M \Rightarrow \widehat{MDI} + \widehat{MID} = 90^\circ$

$\triangle ENI$ vuông tại $N \Rightarrow \widehat{NEI} + \widehat{NIE} = 90^\circ$

Mà $\widehat{MID} = \widehat{NIE}$ (2 góc đối đỉnh)

Suy ra $\widehat{MDI} = \widehat{NEI}$

$\Rightarrow \triangle MDI = \triangle NEI$ (g.c.g) $\Rightarrow DI = EI$ (2 cạnh tương ứng)

$\Rightarrow I$ là trung điểm của $DE \Rightarrow DE = 2 \cdot DI$

c) Vì $\triangle ABC$ cân tại A nên đường cao AH đồng thời là đường trung trực ứng với cạnh BC

Mà K thuộc AH nên $KB = KC$

Vì I là trung điểm của DE và KI vuông góc với DE tại I nên KI là đường trung trực của đoạn thẳng DE . Suy ra: $KD = KE$

Xét $\triangle BDK$ và $\triangle CEK$, có:

$BD = CE$ (gt); $KB = KC$ (cmt); $KD = KE$ (cmt)

$\Rightarrow \triangle BDK = \triangle CEK$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{DBK} = \widehat{ECK}$ (2 góc tương ứng) (1)

Xét $\triangle ABK$ và $\triangle ACK$, có:

$BK = CK$; $AB = AC$; AK là cạnh chung

Do đó $\triangle BDK = \triangle CEK$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{ABK} = \widehat{ACK}$ hay $\widehat{DBK} = \widehat{ACK}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ECK} = \widehat{ACK}$

Mà $\widehat{ECK} + \widehat{ACK} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{ACK} = 180^\circ : 2 = 90^\circ$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $\widehat{DBK} = 90^\circ$

Câu 25. (HSG 7 huyện Triệu Sơn 2017 - 2018)

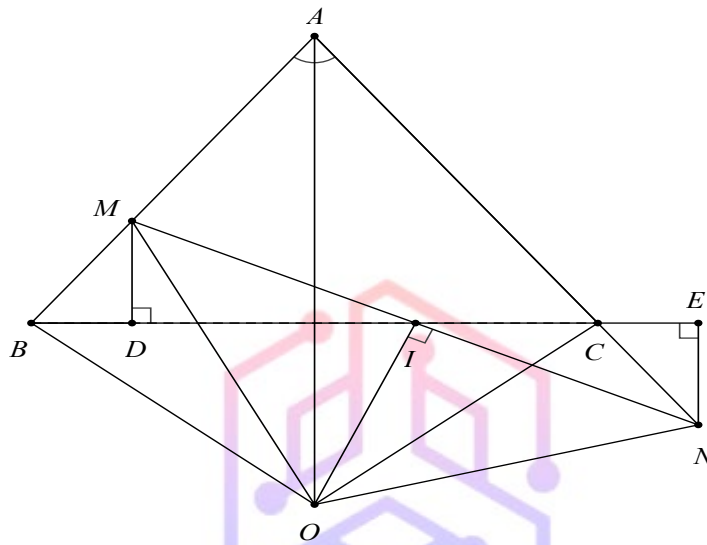
Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh BC lấy điểm D (D khác B, C). Trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $CE = BD$. Đường vuông góc với BC kẻ từ D cắt AB tại M . Đường vuông góc với BC kẻ từ E cắt đường thẳng AC tại N , MN cắt BC tại I .

a) Chứng minh: $DM = EN$.

b) Chứng minh: $IM = IN, BC < MN$.

c) Gọi O là giao của đường phân giác \widehat{A} và đường thẳng vuông góc với MN tại I . Chứng minh rằng $\triangle BMO = \triangle CNO$.

Lời giải



a) Tam giác ABC cân tại A nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$

$\widehat{NCE} = \widehat{ACB}$ (đối đỉnh)

Do đó: $\triangle MDB = \triangle NEC$ (g - c - g) $\Rightarrow DM = EN$ (đpcm).

b) Ta có: $\triangle MDI = \triangle NEI$ (c - g - c) $\Rightarrow MI = NI$

Vì $BD = CE$ nên $BC = DE$

Lại có: $DI < MN, IE < IN$ nên $DE = DI + IE < MI + NI = MN$

Suy ra: $BC < MN$ (đpcm).

c) Ta chứng minh được:

$\triangle ABO = \triangle ACO$ (c - g - c) $\Rightarrow OC = OB, \widehat{ABO} = \widehat{ACO}$

$\triangle MIO = \triangle NIO$ (c - g - c) $\Rightarrow OM = ON$

Ta lại có: $BM = CN$

$\Rightarrow \triangle BMO = \triangle CNO$ (c - c - c)

Câu 26. (HSG 7 huyện Tam Nông; Quận Hoàng Mai; trường Minh Khai; trường Văn Lang; huyện Hà Trung; huyện Nghĩa Đàn; huyện Thanh Thủy 2022 - 2023; huyện Hiệp Đức; huyện Như Xuân 2018 - 2019)

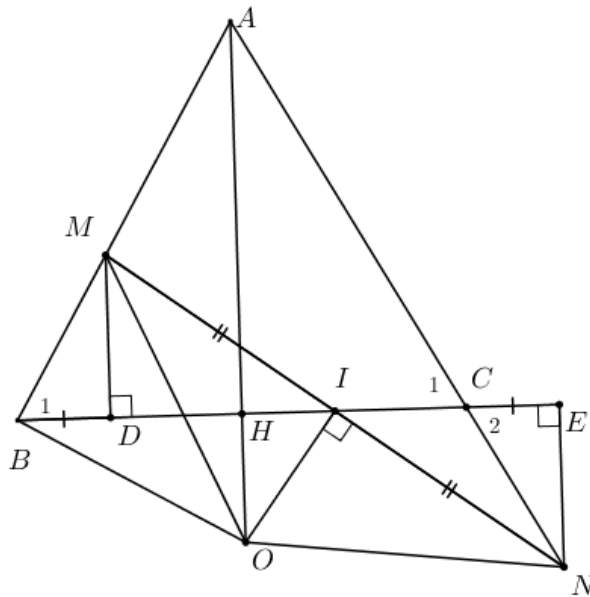
Cho tam giác ABC $AB = AC$. Trên cạnh BC lấy điểm D , trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB và AC lần lượt M và N . Đường thẳng BC cắt MN tại điểm I . Chứng minh rằng:

a) Chứng minh rằng: $DM = EN$.

b) I là trung điểm của đoạn thẳng MN .

c) Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC .

Lời giải



a) Ta có $\widehat{MBD} = \widehat{ACB}$ (do $\triangle ABC$ cân tại A) và $\widehat{ACB} = \widehat{NCE}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{MBD} = \widehat{NCE}$.

Xét $\triangle MBD$ và $\triangle NCE$ có:

$$BD = CE$$

$$\widehat{BDM} = \widehat{NEC} = 90^\circ$$

$$\widehat{MBD} = \widehat{NCE}$$

$\Rightarrow \triangle MBD = \triangle NEC$ (góc – cạnh – góc)

$\Rightarrow DM = EN$ (2 cạnh tương ứng).

b) Ta có $\widehat{MBD} = \widehat{ACB}$ (2 góc đáy của tam giác cân)

$$\widehat{NCE} = \widehat{ACB} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \widehat{MBD} = \widehat{NCE}$$

Xét $\triangle MDB$ và $\triangle NEC$ có: $\widehat{MBD} = \widehat{NCE}$ (cmt), $BD = CE$ (gt), $\widehat{MDB} = \widehat{NEC} (= 90^\circ)$

Suy ra $\triangle MDB = \triangle NEC$ (g.c.g)

Suy ra $DN = BM$ (hai cạnh tương ứng), $ND = NE$ (hai cạnh tương ứng)

Ta có $\widehat{MIB} = \widehat{NIC}$ (đối đỉnh) mà $\widehat{DMI} + \widehat{MIB} = \widehat{INE} + \widehat{NIC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DMI} = \widehat{INE}$

Xét $\triangle MDI$ và $\triangle NEI$ có: $\widehat{DMI} = \widehat{INE}$ (cmt), $ND = NE$ (cmt), $\widehat{MDI} = \widehat{NEI} (= 90^\circ)$

Suy ra $\triangle MDI = \triangle NEI$ (g.c.g)

Suy ra $MI = NI$ (hai cạnh tương ứng)

Do đó I là trung điểm của đoạn thẳng MN .

c) Kẻ AH vuông góc với BC .

$\triangle ABC$ cân ở A nên AH cũng là đường trung trực của BC .

Gọi đường thẳng vuông góc với MN tại I cắt AH ở O .

Vì I là trung điểm của MN nên OI là đường trung trực của MN .

Xét $\triangle ABO$ và $\triangle ACO$ có:

$AB = AC$ (gt), OA là cạnh chung, $OB = OC$ (tính chất điểm thuộc đường trung trực)

Suy ra $\triangle ABO = \triangle ACO$ (c.c.c)

Suy ra $\widehat{ABO} = \widehat{ACO}$ (hai góc tương ứng) (1)

Xét $\triangle NCO$ và $\triangle MBO$ có:

$CN = BM$, $ON = OM$ (OI là đường trung trực của MN), $OB = OC$ (cmt)

Suy ra $\triangle NCO = \triangle MBO$ (c.c.c)

Suy ra $\widehat{NCO} = \widehat{MBO}$ (hai góc tương ứng) $\Rightarrow \widehat{NCO} = \widehat{ABO}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{NCO} = \widehat{ACO}$

Mà $\widehat{NCO} + \widehat{ACO} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$$\Rightarrow \widehat{NCO} = \widehat{ACO} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$\Rightarrow OC \perp AC$

Mà A, B, C cố định nên O cố định.

Vậy đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn luôn đi qua điểm cố định O khi D thay đổi trên cạnh BC .

Câu 27. (HSG 7 huyện 2022 - 2023; huyện Hoài Nhơn 2015 - 2016)

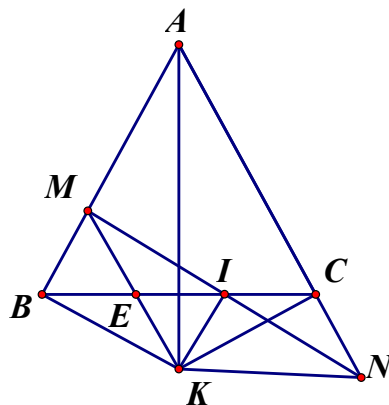
Cho tam giác ABC cân ở A . Trên cạnh AB lấy điểm M , trên tia đối của tia CA lấy điểm N sao cho $AM + AN = 2AB$

a) Chứng minh rằng: $BM = CN$

b) Chứng minh rằng: BC đi qua trung điểm của đoạn thẳng MN

c) Đường trung trực của MN và tia phân giác của \widehat{BAC} cắt nhau tại K . Chứng minh rằng: $KC \perp AC$

Lời giải



a) Theo giả thiết, ta có: $2AB = AB + AB = AB + AM + BM$

$$\Rightarrow AM + AN = AM + AC + CN$$

Mà $AM + AN = 2AB$

$$\Rightarrow 2AB = AM + AC + CN$$

$$\begin{aligned} \Delta ABC \text{ cân ở } A &\Rightarrow AB = AC \\ \Rightarrow 2AB &= AM + AC + CN = AM + AB + CN \\ \Rightarrow AB &= AM + CN \\ \Rightarrow AM + BM &= AM + CN \\ \Rightarrow BM &= CN \end{aligned}$$

b) Qua M kẻ $ME \parallel AC$ ($E \in BC$)

$$\begin{aligned} \Delta ABC \text{ cân ở } A \\ \Rightarrow \widehat{ABC} &= \widehat{ACB} \\ \text{Mà } \widehat{MEB} &= \widehat{ACB} \text{ (} ME \parallel AC \text{, hai góc đồng vị)} \\ \Rightarrow \widehat{ABC} &= \widehat{MEB} \\ \Rightarrow \Delta BME \text{ cân ở } M \\ \Rightarrow ME &= BM \text{ mà } BM = CN \\ \Rightarrow ME &= CN \end{aligned}$$

Xét ΔMEI và ΔNCI có:

$$\begin{aligned} ME &= CN \text{ (chứng minh trên)} \\ \widehat{MEI} &= \widehat{NCI} \text{ (} ME \parallel AC \text{, hai góc so le trong)} \\ \widehat{EMI} &= \widehat{CNI} \text{ (} ME \parallel AC \text{, hai góc so le trong)} \\ \Rightarrow \Delta MEI &= \Delta NCI \text{ (g.c.g)} \\ \Rightarrow IM &= IN \end{aligned}$$

Vậy BC đi qua trung điểm của MN

c) K thuộc đường trung trực của MN

$$\Rightarrow KM = KN$$

Xét ΔABK và ΔACK có:

$$\begin{aligned} AB &= AC \text{ (tam giác } ABC \text{ cân tại } A) \\ \widehat{BAK} &= \widehat{CAK} \text{ (} AK \text{ là tia phân giác của góc } A) \\ AK &\text{ là cạnh chung} \\ \Rightarrow \Delta ABK &= \Delta ACK \text{ (c.c.c)} \\ \Rightarrow KB &= KC \end{aligned}$$

Xét ΔBMK và ΔCNK có:

$$\begin{aligned} BM &= CN \text{ (chứng minh trên)} \\ KB &= KC \text{ (chứng minh trên)} \\ KM &= KN \text{ (chứng minh trên)} \\ \Rightarrow \Delta BMK &= \Delta CNK \text{ (c.c.c)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \widehat{MBK} = \widehat{NCK}$$

Mà $\widehat{NCK} + \widehat{ACK} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$$\Rightarrow \widehat{MBK} + \widehat{ACK} = 180^\circ \text{ (} \widehat{MBK} = \widehat{NCK} \text{)}$$

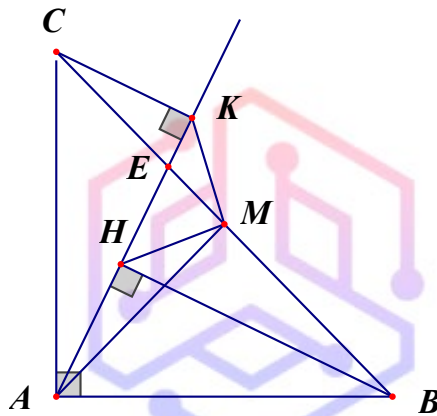
$$\begin{aligned} \text{Mà } \widehat{MBK} &= \widehat{ACK} (\Delta ABK = \Delta ACK) \\ \Rightarrow \widehat{ACK} + \widehat{ACK} &= 180^\circ (\widehat{MBK} = \widehat{NCK}) \\ \Rightarrow 2\widehat{ACK} &= 180^\circ \\ \Rightarrow \widehat{ACK} &= 90^\circ \Rightarrow KC \perp AN \end{aligned}$$

Câu 28. (HSG 7 huyện Đồng Xuân; huyện Phúc Yên; huyện Vũ Thư 2022 - 2023)

Cho ΔABC vuông cân tại A . Gọi M là trung điểm của BC . Lấy điểm E nằm giữa hai điểm C và M . Kẻ BH và CK lần lượt vuông góc với đường thẳng AE (H, K thuộc đường thẳng AE).

- a) Chứng minh: $BH = AK$;
b) Chứng minh: $\Delta AHM = \Delta CKM$.

Lời giải



a) Do BH và CK lần lượt vuông góc với đường thẳng AE (H, K thuộc AE) (giả thiết) nên ΔKCA và ΔHAB lần lượt là các tam giác vuông tại K và H

Ta có: $\widehat{KCA} + \widehat{KAC} = 90^\circ$ (ΔKCA vuông tại K) và $\widehat{HAB} + \widehat{KAC} = 90^\circ$ (ΔHAB vuông tại H). Nên $\widehat{KCA} = \widehat{HAB}$

Xét ΔKCA vuông tại K và ΔHAB vuông tại H có:

$$AC = AB \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\widehat{KCA} = \widehat{HAB} \text{ (chứng minh trên)}$$

Suy ra $\Delta KCA = \Delta HAB$ (cạnh huyền- góc nhọn)

$$\Rightarrow BH = AK$$

b) Ta có $\Delta KCA = \Delta HAB$ (chứng minh trên) $\Rightarrow KC = HA$ (hai cạnh tương ứng)

- Do ΔABC vuông cân tại A , M là trung điểm của BC (giả thiết) nên AM là đường trung tuyến, đường cao, đường phân giác của ΔABC (học sinh phải chứng minh kết quả này).

$$\Rightarrow AM = CM \text{ và } AM \perp BC$$

- Ta có \widehat{KCE} và \widehat{CEK} là hai góc phụ nhau, \widehat{AEM} và \widehat{EAM} là hai góc phụ nhau

$$\text{mà } \widehat{CEK} = \widehat{AEM} \text{ (hai góc đối đỉnh) nên } \widehat{KCE} = \widehat{EAM} .$$

- Xét ΔAHM và ΔCKM có:

$KC = HA$ (chứng minh trên)
 $\widehat{KCE} = \widehat{EAM}$ (chứng minh trên)
 $AM = CM$ (chứng minh trên)
 Do đó $\triangle AHM = \triangle CKM$ (c.g.c).

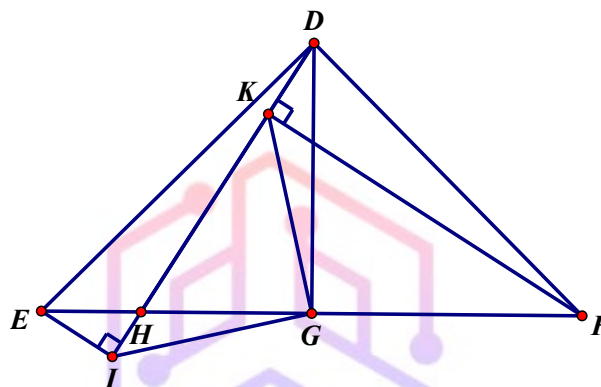
Câu 29. (HSG 7 Bình Lục 2022 - 2023)

Cho tam giác DEF vuông cân tại D . Gọi G là trung điểm của EF .

a) Chứng minh $\widehat{EDG} = \widehat{DFG}$

b) Lấy điểm H thuộc đoạn thẳng EG (H khác E và G). Kẻ các đường thẳng EI, FK lần lượt vuông góc với đường thẳng DH tại I và K . Chứng minh $EI = DK$ và tam giác GIK vuông cân.

Lời giải



a) Chứng minh $\widehat{EDG} = \widehat{DFG}$

Ta có $\triangle DEF$ vuông cân tại $D \Rightarrow \widehat{DEF} = \widehat{DFE} = 45^\circ$

Lại có DG là đường trung tuyến trong tam giác cân

$\Rightarrow DG$ là đường cao, đường phân giác của $\triangle DEF$

$\Rightarrow \widehat{EDG} = \widehat{FDG} = 45^\circ$

$\Rightarrow \widehat{EDG} = \widehat{DFG}$ (đpcm)

b) Lấy điểm H thuộc đoạn thẳng EG (H khác E và G). Kẻ các đường thẳng EI, FK lần lượt vuông góc với đường thẳng DH tại I và K . Chứng minh $EI = DK$ và tam giác GIK vuông cân.

* Chứng minh $EI = DK$

Chỉ ra $\widehat{EDI} = \widehat{DFK}$ (cùng phụ \widehat{KDF})

Chứng minh được $\triangle EDI = \triangle DFK$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$EI = DK$ (2 cạnh tương ứng)

* Tam giác GIK vuông cân

Chứng minh được $DG \perp FG$

Chứng minh được $DG = FG$

Chứng minh được $\widehat{IDG} = \widehat{KFG}$

Chứng minh được $\triangle IDG = \triangle KFG$ (c.g.c) $\Rightarrow IG = KG$ (*)

$$\text{Do } \triangle IDG = \triangle KFG \Rightarrow \widehat{IGD} = \widehat{KGF} \Rightarrow \widehat{IGK} = \widehat{DGF} = 90^\circ (**)$$

Từ (*) và (**) $\Rightarrow \triangle GIK$ vuông cân

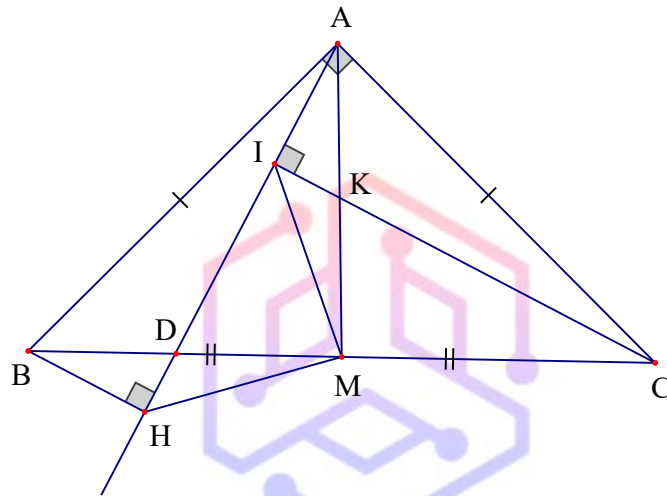
Câu 30. (HSG 7 huyện Yên Phong; trường Bùi Hữu Diên, huyện Hưng Hà; huyện Lập Thạch; Tp Thủ Đức 2022 - 2023; HSG 7 huyện 2017 - 2018)

Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A , gọi M là trung điểm của BC . Lấy điểm D bất kì thuộc đoạn BM (D không trùng với B và M). Gọi H và I theo thứ tự là hình chiếu của B và C xuống đường thẳng AD ; AM cắt CI tại K .

a) Chứng minh: $BH = AI$ và $\widehat{BAM} = \widehat{ACM}$.

b) Chứng minh: $\triangle HMI$ vuông cân.

Lời giải



a) Lập luận $\widehat{BAM} = \widehat{CAM} = 45^\circ$

Tính ra được $\widehat{ACM} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{ACM}$

Xét $\triangle AHB$ và $\triangle CIA$ có:

$$\widehat{AHB} = \widehat{AIC} \text{ (cùng bằng } 90^\circ)$$

$$AB = AC \text{ (do } \triangle ABC \text{ vuông cân tại } A)$$

$$\widehat{BAH} = \widehat{ACI} \text{ (cùng phụ với } \widehat{IAC})$$

$$\Rightarrow \triangle AHB = \triangle CIA \text{ (cạnh huyền - góc nhọn)} \Rightarrow BH = AI \text{ (hai cạnh tương ứng) (đpcm)}$$

b) Vì $\triangle ABC$ vuông cân tại A nên AM vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao của $\triangle ABC$. Suy ra $AM \perp BC$ tại M .

Xét $\triangle IAK$ và $\triangle MCK$ có:

$$\widehat{AIK} = \widehat{KMC} (= 90^\circ); \widehat{AKI} = \widehat{MKC} \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

$$\text{Suy ra: } 180^\circ - (\widehat{AIK} + \widehat{IAK}) = 180^\circ - (\widehat{KMC} + \widehat{MKC}) \Rightarrow \widehat{IAM} = \widehat{ICM} \text{ (1)}$$

$$\text{Mặt khác: } \left. \begin{array}{l} BH \perp AD \\ CI \perp AD \end{array} \right\} \Rightarrow BH \parallel CI \Rightarrow \widehat{ICM} = \widehat{HBM} \text{ (hai góc so le trong) (2)}$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \Rightarrow \widehat{HBM} = \widehat{IAM}$$

Xét $\triangle HBM$ và $\triangle IAM$ có:

$$MB = MA$$

$$\widehat{HBM} = \widehat{IAM}$$

$$BH = AI \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\text{Suy ra: } \triangle HBM = \triangle IAM \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow MH = MI \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

$$\text{Suy ra: } \triangle HMI \text{ cân tại } M. \quad (4)$$

$$\text{Mặt khác: } \triangle HBM = \triangle IAM \Rightarrow \widehat{HMB} = \widehat{IMA} \text{ (hai góc tương ứng)}$$

$$\text{Suy ra: } \widehat{HMB} + \widehat{IMB} = \widehat{AMI} + \widehat{IMB} = \widehat{AMB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HMI} = 90^\circ \quad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra $\triangle HMI$ vuông cân tại M (đpcm).

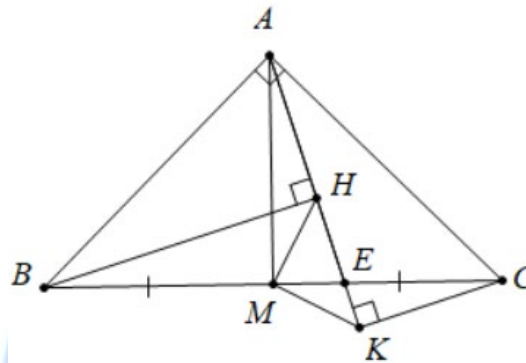
Câu 31. (HSG 7 trường Cù Chính Lan năm học 2018 - 2019)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A có trung tuyến AM . E là điểm thuộc cạnh BC . Kẻ BH, CH vuông góc với AE (H, K thuộc AE)

a) Chứng minh $BH = AK$

b) Cho biết MHK là tam giác gì? Vì sao?

Lời giải



a) Xét $\triangle ABH$ và $\triangle CAK$ có:

$$\widehat{AHB} = \widehat{CKA} = 90^\circ;$$

$$AB = AC \text{ (do } \triangle ABC \text{ cân tại } A),$$

$$\widehat{ABH} = \widehat{CAE} \text{ (cùng phụ với } \widehat{BAH})$$

$$\Rightarrow \triangle ABH = \triangle CAK \text{ (ch-gn)}$$

$$\Rightarrow BH = AK \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

b) Ta có: $MA = MB = MC$ (tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền)

$$\triangle ABC \text{ cân tại } A \Rightarrow AM \text{ vừa là trung tuyến vừa là đường cao} \Rightarrow AM \perp BC$$

$$\Rightarrow \triangle AMB \text{ và } \triangle AMC \text{ vuông cân tại } M$$

$$\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{ACM} = 45^\circ$$

$$\text{Ta có: } \triangle ABH = \triangle CAK \text{ (câu a)} \Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{ACK} \text{ (hai góc tương ứng)}$$

$$\text{Mặt khác: } \left. \begin{array}{l} \widehat{BAH} = \widehat{BAM} + \widehat{MAH} \\ \widehat{ACK} = \widehat{ACM} + \widehat{MCK} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \widehat{BAH} = 45^\circ + \widehat{MAH} \\ \widehat{ACK} = 45^\circ + \widehat{MCK} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{MAH} = \widehat{MCK}$$

Xét $\triangle AMH$ và $\triangle CMK$ có:

$$\widehat{AMH} = \widehat{CMK} \text{ (cùng phụ với } \widehat{HMC} \text{)}$$

$$MA = MC \text{ (cmt)}, \widehat{MAH} = \widehat{MCK} \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \Delta AMH = \Delta CMK \text{ (g.c.g)} \Rightarrow MH = MK \Rightarrow \Delta MHK \text{ cân tại } M.$$

$$\text{Ta có } \widehat{AMH} + \widehat{HMC} = 90^\circ; \widehat{AMH} = \widehat{CMK}$$

$$\Rightarrow \widehat{CMK} + \widehat{HMC} = \widehat{HMK} = 90^\circ \Rightarrow \Delta HMK \text{ vuông cân tại } M.$$

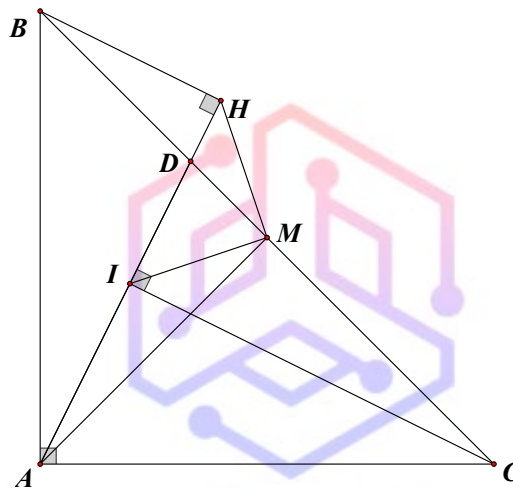
Câu 32. (HSG 7 huyện Chương Mỹ, Thành phố Hà Nội năm học 2020 - 2021)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A , M là trung điểm BC . Lấy điểm D bất kì thuộc cạnh BM . Gọi H và I thứ tự là hình chiếu của điểm B và điểm C xuống đường thẳng AD .

a) Chứng minh rằng $BH = AI$.

b) Tia IM có là phân giác của góc HIC không? Vì sao?

Lời giải



a) Chứng minh rằng $BH = AI$.

Ta có ΔABC vuông cân tại A nên $AB = AC$; $\widehat{ABC} = 90^\circ$

Mà ΔABH vuông tại H

Do đó $\widehat{ABH} = \widehat{CAI}$ (cùng phụ \widehat{BAH})

Xét ΔAIC và ΔBHA có:

$$+ \widehat{BHA} = \widehat{CIA} = 90^\circ$$

$$+ AB = AC \text{ (chứng minh trên)}$$

$$+ \widehat{ABH} = \widehat{CAI} \text{ (chứng minh trên)}$$

Do đó $\Delta AIC = \Delta BHA$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$$\Rightarrow BH = AI \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

b) Tia IM có là phân giác của góc HIC không? Vì sao?

Có ΔABC vuông cân tại A và M là trung điểm BC suy ra AM là đường trung trực của BC

Do đó $AM \perp BC \Rightarrow \Delta AMD$ vuông tại $M \Rightarrow \widehat{IAM} + \widehat{ADM} = 90^\circ$

Ta có ΔBHD vuông tại $H \Rightarrow \widehat{HBD} + \widehat{BDH} = 90^\circ$

Mà $\widehat{BDH} = \widehat{ADM}$ (đối đỉnh)

Suy ra $\widehat{IAM} = \widehat{DBH}$

Mặt khác $CI \perp AD$ và $BH \perp AD$ nên $BH \parallel CI$

$\Rightarrow \widehat{BCI} = \widehat{CIH}$ (so le trong) $\Rightarrow \widehat{IAM} = \widehat{DBH} = \widehat{CIH}$

Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \widehat{BIC} + \widehat{ICA} = \widehat{DAM} + \widehat{BAD} = \widehat{BAM}$

$\Rightarrow \Delta MAB$ cân tại M ($\widehat{CBA} = \widehat{BAM}$) $\Rightarrow MA = MB$

Xét ΔBHM và ΔAIM có:

$BH = HI$; $\widehat{HBD} = \widehat{IAM}$; $MB = MA$

Do đó $\Delta BHM = \Delta AIM$ (c.g.c) $\Rightarrow HM = MI$ và $\widehat{BMH} = \widehat{IMA}$

mà: $\widehat{IMA} + \widehat{BMI} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BMH} + \widehat{BMI} = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta HMI$ vuông cân tại $M \Rightarrow \widehat{HIM} = 45^\circ$

mà: $\widehat{HIC} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{HIM} = \widehat{MIC} = 45^\circ \Rightarrow IM$ là phân giác \widehat{HIC}

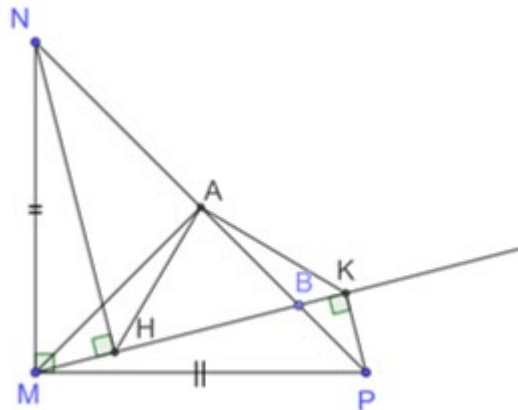
Câu 33. (HSG 7 huyện Lục Ngạn 2022 - 2023)

Cho tam giác MNP vuông cân tại M , A là trung điểm của NP . Điểm B nằm giữa hai điểm A và P . Kẻ NH và PK vuông góc với MB lần lượt tại H và K .

a) Chứng minh: $\Delta HMN = \Delta KPM$.

b) Chứng minh: ΔMAP là tam giác cân và $AH \perp AK$.

Lời giải



a) Chứng minh: $\Delta HMN = \Delta KPM$.

Vì ΔMNP vuông cân tại M nên: $\begin{cases} MN=MP \\ \widehat{MNP}=\widehat{MPN}=45^\circ \end{cases}$

Ta có $\left. \begin{cases} \widehat{MNH} + \widehat{NMH} = 90^\circ \\ \widehat{PMK} + \widehat{NMH} = 90^\circ \end{cases} \right\} \Rightarrow \widehat{MNH} = \widehat{PMK}$

Xét ΔHMN và ΔKPM có $\begin{cases} MN=MP \\ \widehat{MNH}=\widehat{PMK} \\ \widehat{NHM}=\widehat{MKP}=90^\circ \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta HMN = \Delta KPM$ (cạnh huyền- góc nhọn)

b) Chứng minh: ΔMAP là tam giác cân và $AH \perp AK$.

Vì ΔMNP vuông cân tại M nên trung tuyến MA đồng thời là đường phân giác, đường cao

$$\text{nên: } \begin{cases} MA \perp NP \\ \widehat{NMA} = \widehat{PMA} = \frac{1}{2} \widehat{NMP} = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ \end{cases}$$

Xét ΔMAP có $\widehat{MPA} = \widehat{PMA} (=45^\circ) \Rightarrow \Delta MAP$ là tam giác cân.

Mặt khác theo định lí tổng ba góc của tam giác ta có: $\widehat{MAP} + \widehat{MPA} + \widehat{PMA} = 180^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{MAP} = 180^\circ - (\widehat{MPA} + \widehat{PMA}) = 180^\circ - (45^\circ + 45^\circ) = 90^\circ$$

Vì $\widehat{MAP} = 90^\circ \Rightarrow AM \perp AP$.

$$\text{Xét } \Delta AMB \text{ có: } \widehat{AMB} = 180^\circ - \widehat{MAB} - \widehat{ABM} = 180^\circ - 90^\circ - \widehat{ABM} = 90^\circ - \widehat{ABM} \quad (3)$$

$$\text{Xét } \Delta BKP \text{ có: } \widehat{BPK} = 180^\circ - \widehat{BKP} - \widehat{KBP} = 180^\circ - 90^\circ - \widehat{KBP} = 90^\circ - \widehat{KBP} \quad (4)$$

$$\text{Mặt khác } \widehat{ABM} = \widehat{KBP} \text{ (2 góc đối đỉnh)} \quad (5)$$

$$\text{Từ (3),(4),(5)} \Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{BPK} \text{ hay } \widehat{AMH} = \widehat{APK}$$

$$\text{Xét } \Delta AHM \text{ và } \Delta AKP \text{ có } \begin{cases} AM = AP \\ \widehat{AMH} = \widehat{APK} \\ MH = PK \end{cases} \Rightarrow \Delta AHM = \Delta AKP \text{ (c-g-c)}$$

Suy ra $\widehat{MAH} = \widehat{PAK}$ (hai góc tương ứng)

Lại có $\widehat{MAH} + \widehat{HAP} = 90^\circ$ (do $MA \perp AP$)

$$\Rightarrow \widehat{PAK} + \widehat{HAP} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HAK} = 90^\circ \Rightarrow AH \perp AK$$

Câu 34. (HSG 7 Chư Sê, Gia Lai 2021 - 2022)

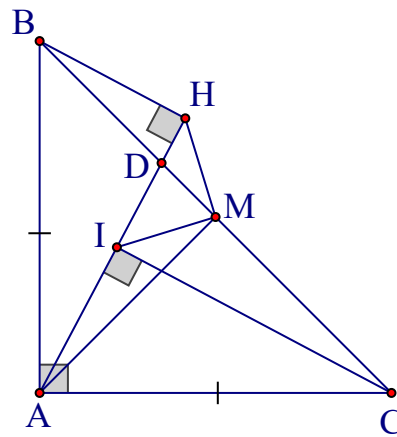
Cho ΔABC vuông cân tại góc A . Tia AM là tia phân giác BAC ($M \in BC$). Lấy D trên BC sao cho D nằm giữa B và M . Gọi H, I theo thứ tự là hình chiếu của B và C xuống đường thẳng AD . Chứng minh:

a) $BH = AI$.

b) $\Delta BHM = \Delta AIM$.

c) IM là tia phân giác \widehat{HIC} .

Lời giải



a) Xét $\triangle ABH$ và $\triangle CAI$ có:

$$\widehat{BHA} = \widehat{AIC} = 90^\circ (gt); AB = AC (\triangle ABC \text{ cân tại } A); \widehat{BAH} = \widehat{ACI} (\text{cùng phụ } \widehat{IAC})$$

Suy ra: $\triangle ABH = \triangle CAI$ (cạnh huyền- góc nhọn)

$$\Rightarrow BH = AI \text{ (hai cạnh tương ứng).}$$

b) $\triangle ABC$ vuông cân tại $A \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = 45^\circ$. AM là tia phân giác \widehat{BAC}

$$\Rightarrow \widehat{BAM} = \frac{1}{2} \widehat{BAC} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{BAM} = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle BAM \text{ cân tại } M \Rightarrow AM = BM$$

$$\text{Lại có: } \widehat{HBM} + \widehat{BDH} = \widehat{IAM} + \widehat{ADM} = 90^\circ$$

$$\text{mà } \widehat{BDH} = \widehat{ADM} (\text{đối đỉnh}) \Rightarrow \widehat{HBM} = \widehat{IAM}$$

Xét $\triangle BHM$ và $\triangle AIM$ có:

$$BH = AI (cmt); \widehat{HBM} = \widehat{IAM} (cmt); BM = AM (cmt)$$

$$\Rightarrow \triangle BHM = \triangle AIM (c.g.c).$$

c) Theo câu b ta có: $\triangle BHM = \triangle AIM \Rightarrow \widehat{BHM} = \widehat{AIM}$

$$\Rightarrow 90^\circ + \widehat{IHM} = 90^\circ + \widehat{MIC} \Rightarrow \widehat{IHM} = \widehat{MIC}$$

Mặt khác: $\triangle BHM = \triangle AIM \Rightarrow HM = IM$ (hai cạnh tương ứng)

$$\Rightarrow \triangle MIH \text{ cân tại } M \Rightarrow \widehat{IHM} = \widehat{MIH}$$

Suy ra: $\widehat{MIC} = \widehat{MIH} = (\widehat{IHM}) \Rightarrow IM$ là tia phân giác của \widehat{HIC} .

Câu 35. (HSG 7 huyện Tân Kỳ 2021 - 2022)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A . M là trung điểm của BC . Lấy I là một điểm nằm giữa C và M . Từ B và C vẽ BD và CE lần lượt vuông góc với AI . (D và E thuộc AI).

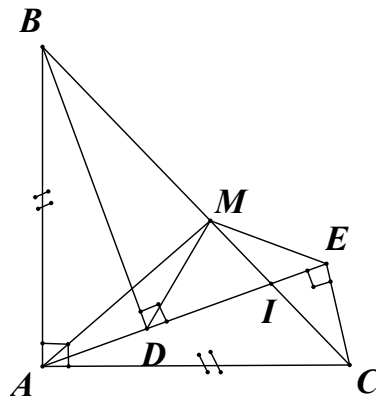
Chứng minh rằng:

a) $BD = AE$

b) $\triangle BAC = \triangle BAC$

c) DM tia phân giác \widehat{BDE}

Lời giải



a) Ta có $\widehat{ABD} = \widehat{CAE}$ (cùng phụ \widehat{BAD})

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle CAE$ có:

$$AB = AC \text{ (gt)}; \widehat{ABD} = \widehat{CAE} \text{ (cmt)}; \widehat{BDA} = \widehat{AEC} (= 90^\circ)$$

$$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle CAE \text{ (ch-gn)} \Rightarrow BD = AE \text{ (2 cạnh tương ứng)}$$

b) Theo giả thiết: $BD \perp AE$ tại D ; $CE \perp AE$ tại $E \Rightarrow BD \parallel EC$ (theo T/c)

Ta có: $\widehat{MAD} = \widehat{DBM}$ (cùng phụ \widehat{AIM})

mà $\widehat{DBC} = \widehat{ICE}$ (so le trong do $BD \parallel EC$)

$$\Rightarrow \widehat{MAD} = \widehat{ICE} \text{ hay } \widehat{MAD} = \widehat{MCE}$$

Xét $\triangle AMD$ và $\triangle CME$ có:

$$AD = CE \text{ (vì } \triangle ABD = \triangle CAE)$$

$$\widehat{MAD} = \widehat{MCE} \text{ (cmt)}$$

$$AM = CM \text{ (do } M \text{ là trung điểm của } \triangle ABC \text{ vuông cân)}$$

Do đó $\triangle AMD = \triangle CME$ (c.g.c)

c) Xét $\triangle ABC$ vuông cân tại A có AM là đường trung tuyến

$$\Rightarrow AM \perp BC \text{ và } AM = MC = \frac{BC}{2}$$

Ta có: $MD = ME$ (vì $\triangle AMD = \triangle CME$ (cmt)) $\Rightarrow \triangle DME$ cân tại M (*)

Mà $\widehat{AMD} = \widehat{CME}$ (vì $\triangle AMD = \triangle CME$ (cmt)) và $\widehat{AMD} + \widehat{DMC} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{DMC} + \widehat{CME} = 90^\circ (**)$$

Từ (*) và (**) $\Rightarrow \triangle DME$ vuông cân tại $M \Rightarrow \widehat{MED} = \widehat{MDE} = 45^\circ$

Mà $\widehat{BDM} + \widehat{MDE} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{MDE} = \widehat{MDB} = 45^\circ \Rightarrow DM \text{ tia phân giác } \widehat{BDE}$$

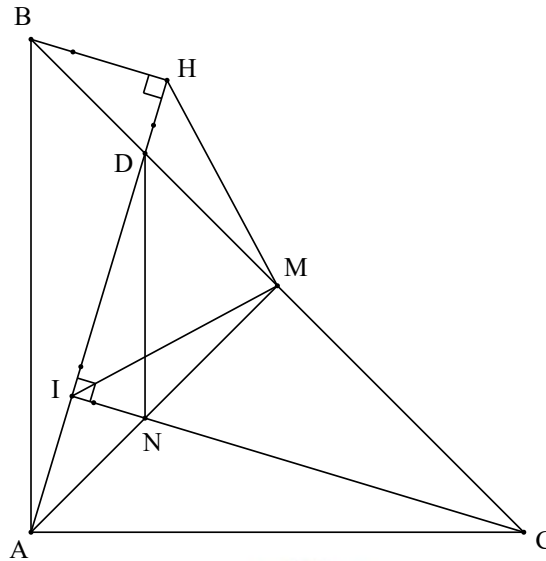
Câu 36. (HSG 7 Đức Thọ, Hà Tĩnh 2021 - 2022)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A ; M là trung điểm của cạnh BC . Lấy điểm D bất kỳ thuộc đoạn thẳng BM . Kẻ BH vuông góc với AD ($H \in AD$), CI vuông góc với AD ($I \in AD$). Đường thẳng AM cắt CI tại N . Chứng minh rằng:

a) DN vuông góc với AC .

- b) $\Delta AHB = \Delta CIA$.
 c) IM là tia phân giác của góc CID .

Lời giải



- a) ΔABC vuông cân tại A có AM là trung tuyến đồng thời là đường cao nên $AM \perp BC$
 ΔADC và IC là đường cao nên N là trực tâm của ΔADC . Suy ra DN vuông góc với AC .

ΔABC vuông cân tại A nên $\widehat{BAH} = \widehat{ACI} = 90^\circ - \widehat{CAH}$

Xét $\Delta AHB = \Delta CIA$ có

$$\widehat{BAH} = \widehat{ACI} \text{ (C/m trên)}$$

$$AB = AC \text{ (}\Delta ABC \text{ vuông cân tại } A \text{)}$$

$$\widehat{BHA} = \widehat{AIC} = 90^\circ$$

Suy ra $\Delta AIC = \Delta BHA$ (c.h-g.n)

- b) Xét ΔBHM và ΔAIM có

$$BH = AI \text{ (}\Delta AIC = \Delta BHA \text{)}$$

$$BM = AM \text{ (}\Delta AMB \text{ vuông cân tại } M \text{)}$$

$$\widehat{HBM} = \widehat{IAM} \text{ (Cùng phụ với } \widehat{BDH} = \widehat{ADM} \text{)}$$

Do đó $\Delta BHM = \Delta AIM$ (c - g - c)

$$\Rightarrow HM = MI \text{ (hai cạnh tương ứng) và } \widehat{BMH} = \widehat{IMA} \text{ (hai góc tương ứng)}$$

$$\text{Mà } \widehat{BMH} + \widehat{IMA} = 90^\circ \text{ (} AM \perp BC \text{)}$$

$$\Rightarrow \widehat{BMH} + \widehat{BMI} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HMI} = 90^\circ$$

$$\Delta HMI \text{ có } \widehat{HMI} = 90^\circ \text{ và } HM = MI$$

$$\Rightarrow \Delta HMI \text{ vuông cân } \Rightarrow \widehat{HMI} = 45^\circ$$

$$\text{Mà } \widehat{HIC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HIM} = \widehat{MIC} = 45^\circ$$

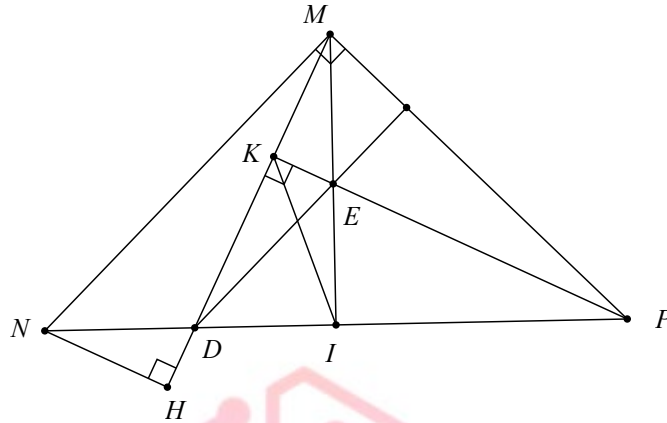
$$\Rightarrow IM \text{ là tia phân giác } \widehat{HIC} .$$

Câu 37. (HSG 7 Nam Đà- Nghệ An 2022 - 2023)

Cho ΔMNP vuông cân tại M , gọi I là trung điểm của NP . Lấy điểm D bất kì trên đoạn thẳng NI (D khác N và I). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của N và P xuống đường thẳng MD .

- Chứng minh $MK = NH$.
- Kẻ MI cắt PK tại E . Chứng minh đường thẳng DE vuông góc với MP .
- Chứng minh KI là phân giác của \widehat{PKD} .

Lời giải



- Chứng minh $MK = NH$.

Xét hai tam giác vuông: ΔPKM và ΔMHN có
 $MP = MN$ (ΔMNP vuông cân)

$\widehat{KPM} = \widehat{HMN}$ (cùng phụ với \widehat{KMP})

$\Rightarrow \Delta PKM = \Delta MHN$ (ch-gn)

$\Rightarrow MK = NH$ (2 cạnh tương ứng)

- Kẻ MI cắt PK tại E . Chứng minh đường thẳng DE vuông góc với MP

Xét ΔMNP vuông cân

\Rightarrow Đường trung tuyến MI cũng là đường cao

$\Rightarrow MI \perp DP$

Xét ΔMDP có: $MI \perp DP; PK \perp MD$

Mà $PK; MI$ cắt nhau tại E

$\Rightarrow E$ là trực tâm $\Delta MDP \Rightarrow DE \perp MP$

- Chứng minh KI là phân giác của \widehat{PKD} .

Ta có ΔMNP vuông cân tại M suy ra ΔMIP vuông cân tại I

$\Rightarrow \widehat{IMP} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{IMP} = \widehat{MNP} = 45^\circ$ (1)

Mà $\widehat{HNM} = \widehat{KMP}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{HNI} = \widehat{KMI}$

Xét ΔNMI và ΔMKI có: $\begin{cases} MI = NI \\ \widehat{HNI} = \widehat{KMI} \\ NH = MK (\Delta NMH = \Delta MKP) \end{cases}$

$$\Rightarrow \Delta NHI = \Delta MKI \Rightarrow \begin{cases} HI = KI \\ \widehat{HIN} = \widehat{KIM} \end{cases}$$

$$\text{Có: } \widehat{KIM} + \widehat{DIK} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{HIN} + \widehat{DIK} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HIK} = 90^\circ$$

Mà $HI = KI$

$$\Rightarrow \Delta HIK \text{ vuông cân} \Rightarrow \widehat{DKI} = 45^\circ$$

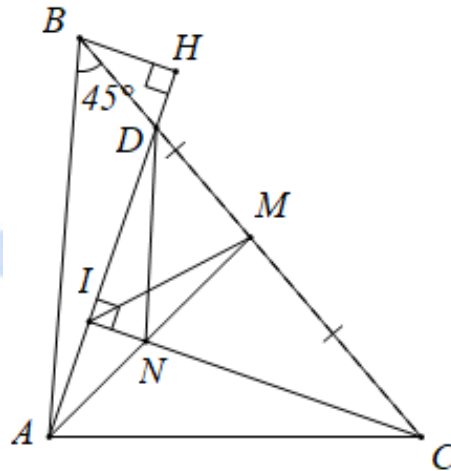
Mà $\widehat{DKP} = 90^\circ \Rightarrow KI$ là phân giác của \widehat{PKD} .

Câu 38. (HSG 7 huyện Phú Lý, trường Lý Tự Trọng 2018 - 2019)

Cho đoạn thẳng BC cố định, M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Vẽ góc CBx sao cho $\widehat{CBx} = 45^\circ$, trên tia Bx lấy điểm A sao cho độ dài đoạn thẳng BM và BA tỉ lệ với 1 và $\sqrt{2}$. Lấy điểm D bất kỳ thuộc đoạn thẳng BM . Gọi H và I lần lượt là hình chiếu của B và C trên đường thẳng AD . Đường thẳng d cắt CI tại N . Chứng minh rằng:

- DN vuông góc với AC
- $BH^2 + CI^2$ có giá trị không đổi khi D di chuyển trên đoạn thẳng BM
- Tia phân giác của góc HIC luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



a) Từ M kẻ tia My vuông góc với BC và cắt tia Bx tại A'

Tam giác BMA' vuông cân tại M nên $MB : BA' = 1 : \sqrt{2}$

Suy ra $A \equiv A'$ nên AM vuông góc với BC

Tam giác ADC có AM và CI là đường cao nên N là trực tâm của tam giác ADC .

Suy ra DN vuông góc với AC

b) Ta có $\Delta AMB = \Delta AMC$ (c.g.c)

$$\Rightarrow AB = AC \text{ và } \widehat{ACB} = 45^\circ$$

Tam giác ABC vuông cân tại A và có $\widehat{BAH} = \widehat{ACI} = 90^\circ - \widehat{CAH}$

H, I là hình chiếu của B và C trên AD nên $\widehat{H} = \widehat{I} = 90^\circ$

Suy ra $\Delta AIC = \Delta BHA$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$\Rightarrow BH = AI$ (hai cạnh tương ứng)
 $BH^2 + CI^2 = BH^2 + AH^2 = AB^2$ (không đổi)
 c) $\Delta BHM = \Delta AIM \Rightarrow HM = MI$ và $\widehat{BMH} + \widehat{BMI} = 90^\circ$
 $\Rightarrow \Delta HMI$ vuông cân $\Rightarrow \widehat{HMI} = 45^\circ$
 Mà $\widehat{HIC} = 90^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{HIM} = \widehat{MIC} = 45^\circ$
 $\Rightarrow IM$ là tia phân giác \widehat{HIC}

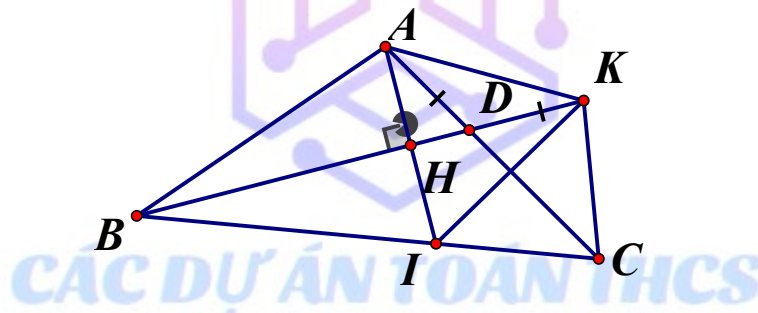
Vậy tia phân giác của \widehat{HIC} luôn đi qua điểm M cố định

Câu 39. (HSG 7 huyện Tam Nông, tỉnh Thanh Hóa, 2018 – 2019)

Cho tam giác ABC có $AB = AC$, $\widehat{A} = 100^\circ$. Tia phân giác của \widehat{B} cắt AC tại D , qua A kẻ đường vuông góc với BD cắt BC ở I .

- Chứng minh $BA = BI$.
- Trên tia đối của tia DB lấy điểm K sao cho $DA = DK$. Chứng minh ΔAIK đều.
- Tính các góc của tam giác BCK .

Lời giải



a) Gọi H là giao điểm của BD và AI
 Xét ΔABH và ΔIBH có: $\widehat{AHB} = \widehat{IHB} = 90^\circ$; BH chung; $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ (gt)
 $\Rightarrow \Delta ABH = \Delta IBH$ (g.c.g) $\Rightarrow BA = BI$ (hai cạnh tương ứng)
 b) Xét ΔABK và ΔIBK có:
 BK cạnh chung; $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$; $BA = BI$ (cmt)
 $\Rightarrow \Delta ABK = \Delta IBK$ (g.c.g) $\Rightarrow AK = IK$ (hai cạnh tương ứng)
 Vì ΔABC cân tại A mà $\widehat{A} = 100^\circ$ nên $\widehat{B} = 40^\circ$
 Vì ΔABI cân tại B mà $\widehat{B} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{BAI} = \widehat{BIA} = 70^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{IAC} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{ADH} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ADK} = 120^\circ$

$\triangle ADK$ cân tại K mà $\widehat{ADK} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{DAK} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{IAK} = 60^\circ$

Suy ra $\triangle AIK$ đều

b) Ta có: $\widehat{B_2} = 20^\circ$

Xét $\triangle AIC$ và $\triangle AKC$ có:

$AI = AK; \widehat{IAC} = \widehat{KAC} = 30^\circ; AC$ chung

$\Rightarrow \triangle AIC = \triangle AKC (c.g.c)$

$\Rightarrow \widehat{AKC} = \widehat{AIC} = 110^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BKC} = 110^\circ - 30^\circ = 80^\circ$

Xét $\triangle BCK$ ta suy ra được $\widehat{BCK} = 80^\circ$.

Câu 40. (HSG 7 huyện Thường Tín năm học 2018 – 2019)

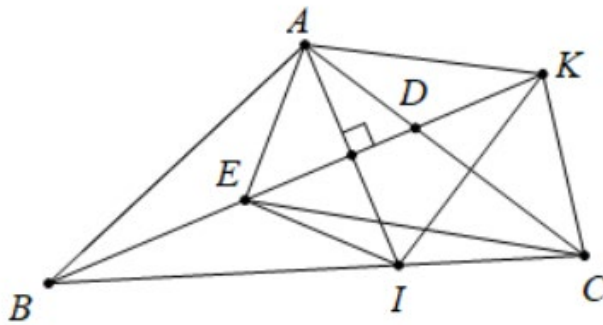
Cho tam giác ABC có $AB = AC, \widehat{A} = 100^\circ$. Tia phân giác của \widehat{B} cắt AC tại D , qua A kẻ đường vuông góc với BD cắt BC ở I .

a) Chứng minh rằng: BD là trung trực của AI

b) Trên tia đối của tia DB lấy K sao cho $DK = DA$. Chứng minh rằng: tam giác AIK đều

c) Chứng minh: $BK = BC$

Lời giải



a) Xét $\triangle BAI$ có BD vừa là phân giác vừa là đường cao nên $\triangle BAI$ cân tại đỉnh B
 $\Rightarrow BD$ là trung trực của AI

b) Từ chứng minh trên $\Rightarrow KA = KI$ (1)

Từ giả thiết $\triangle ABC$ cân đỉnh A ($\widehat{A} = 100^\circ$) $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 40^\circ$

$\triangle BAI$ cân đỉnh B mà $\widehat{ABI} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{BAI} = \widehat{BIA} = 70^\circ$

Từ đó suy ra $\widehat{IAC} = 30^\circ$ (2) và $\widehat{AIC} = 110^\circ$

Xét $\triangle BAD$ có $\widehat{BAD} = 100^\circ, \widehat{ABD} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{ADB} = 60^\circ$

Lại có $\triangle DAK$ cân đỉnh $D \Rightarrow \widehat{DAK} = \widehat{DKA}$

$\Rightarrow \widehat{ADB} = 2\widehat{DAK}$ (tính chất góc ngoài) $\Rightarrow \widehat{DAK} = 30^\circ$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra: $\widehat{IAK} = 60^\circ$ (4)

Từ (1) và (4) suy ra $\triangle AIK$ đều.

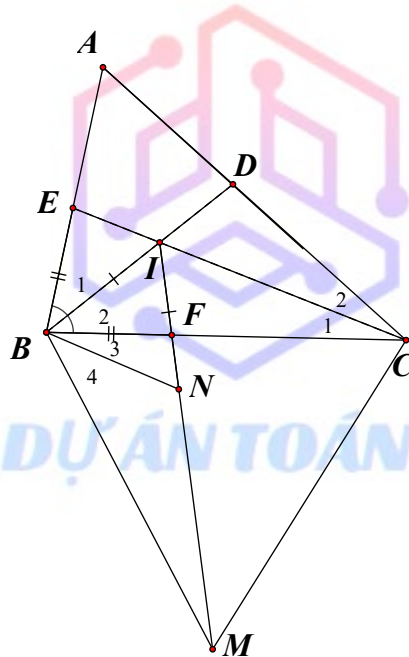
- c) Ta có: $\Delta IAC = \Delta KAC$ (c.g.c)
 $\Rightarrow \widehat{AKC} = \widehat{AIC} = 110^\circ$. mà $\widehat{AKI} = 60^\circ$ (cmt)
 $\Rightarrow \widehat{IKC} = 50^\circ$. Mà $\widehat{DKI} = \widehat{DKA} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{BKC} = 80^\circ$
 Xét ΔBKC có $\widehat{BKC} = 80^\circ$; $\widehat{KBC} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{KCB} = 80^\circ$
 $\Rightarrow \Delta BKC$ cân tại đỉnh $B \Rightarrow BK = BC$.

Câu 41. (HSG 7 Yên Mỹ, Hưng Yên 2021 - 2022; trường Châu Đốc 2018 - 2019; huyện Tiên Hải 2016 - 2017)

Cho ΔABC nhọn có $\widehat{A} = 60^\circ$. Phân giác của \widehat{ABC} cắt AC tại D , phân giác của \widehat{ACB} cắt AB tại E , cắt CE tại I .

- a) Tính số đo \widehat{BIC} .
 b) Trên cạnh BC lấy điểm F sao cho $BF = BE$. Chứng minh $\Delta CID = \Delta CIF$.
 c) Trên tia IF lấy điểm M sao cho $IM = IB + IC$. Chứng minh ΔBCM đều.

Lời giải



a) Vì BD là phân giác của \widehat{ABC} nên: $\widehat{ABD} = \widehat{DBC} = \frac{1}{2} \widehat{ABC}$

CE là phân giác của \widehat{ACB} nên: $\widehat{ACE} = \widehat{ECB} = \frac{1}{2} \widehat{ACB}$

Mà ΔABC có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ (định lí tổng ba góc của tam giác)

$$60^\circ + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{DBC} + \widehat{ECB} = 60^\circ$$

Xét ΔBIC có: $\widehat{BIC} + \widehat{DBC} + \widehat{ECB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BIC} = 120^\circ$

b) Xét ΔBIE có ΔBIF có:

$$BE = BF \text{ (GT)}$$

$$\widehat{EBI} = \widehat{FBI} \text{ (vì } BI \text{ là tia phân giác của } \widehat{B} \text{)}$$

BI chung

$$\text{Do đó } \triangle BIE = \triangle BIF \text{ (c-g-c)} \Rightarrow \widehat{BIF} = \widehat{BIE} \text{ (2 góc tương ứng)}$$

$$\text{Mà: } \widehat{BIC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BIE} = 60^\circ \text{ (hai góc kề bù)}$$

$$\text{Do đó } \widehat{BIF} = \widehat{BIE} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{CIF} = 60^\circ$$

$$\text{Lại có: } \widehat{CID} = \widehat{BIE} \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \widehat{CIF} = \widehat{CID} = 60^\circ$$

Xét $\triangle CID$ và $\triangle CIF$ có

$$\widehat{DCI} = \widehat{FCI} \text{ (vì } CI \text{ là tia phân giác của } \widehat{C} \text{)}$$

CI chung

$$\widehat{CIF} = \widehat{CID} \text{ (cmt)}$$

$$\text{Do đó } \triangle CID = \triangle CIF \text{ (g-c-g)}$$

c) Trên IM lấy điểm N sao cho $IB = IN$

$$\text{mà } IM = IB + IC; IM = IN + NM$$

$$\text{Suy ra: } NM = IC.$$

$$\text{Ta có: } \widehat{BIE} = \widehat{CID} = 60^\circ \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

$$\text{mà } \widehat{BIF} = \widehat{BIE} = 60^\circ; \widehat{CIF} = \widehat{CID} = 60^\circ \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\text{Nên: } \widehat{BIE} = \widehat{CIF} = 60^\circ \text{ mà } \widehat{BIF} + \widehat{CIF} = \widehat{BIC}$$

$$\text{Do đó } IF \text{ là phân giác của } \widehat{BIC} \text{ mà: } \widehat{BIC} = 120^\circ$$

$$\text{Suy ra: } \widehat{BIN} = \widehat{CIN} = 60^\circ. \text{ Lại có } \triangle BIN \text{ cân tại } I \text{ (} IB = IN \text{) nên là tam giác đều.}$$

$$\Rightarrow IB = BN \text{ và } \widehat{BNI} = 60^\circ$$

$$\text{Lại có } \widehat{BNI} \text{ và } \widehat{BNM} \text{ kề bù nên } \widehat{BNM} = 120^\circ$$

Xét $\triangle BNM$ và $\triangle BIC$ có

$$NM = IC \text{ (cmt); } \widehat{BNM} = \widehat{BIC} = 120^\circ; BN = BI \text{ (cmt)}$$

$$\text{Do đó } \triangle BNM = \triangle BIC \text{ (c-g-c)}$$

$$\Rightarrow BM = BC \text{ và } \widehat{MBN} = \widehat{IBC} \Rightarrow \triangle BCM \text{ đều.}$$

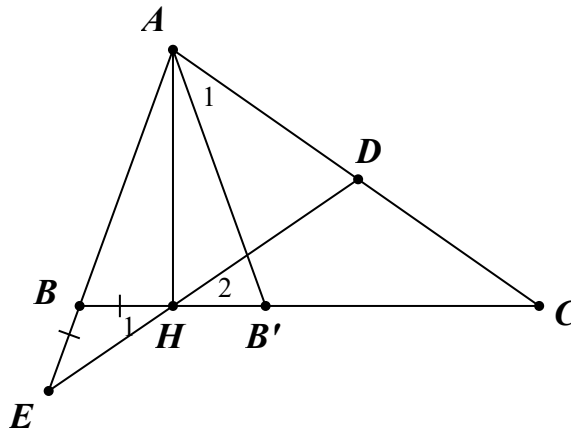
Câu 42. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2017- 2018)

Cho tam giác ABC có $\widehat{B} < 90^\circ$ và $\widehat{B} = 2\widehat{C}$. Kẻ đường cao AH . Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $BE = BH$. Đường thẳng HE cắt AC tại D .

a) So sánh độ dài của ba đoạn thẳng : DH , DC và DA .

b) Lấy B' sao cho H là trung điểm của BB' . Tam giác $AB'C$ là tam giác gì? Vì sao?

Lời giải



a) Tam giác BEH cân tại B nên $\widehat{E} = \widehat{H}_1$

mà $2\widehat{C} = \widehat{ABC} = \widehat{E} + \widehat{H}_1 = 2\widehat{E}$

Nên $\widehat{BEH} = \widehat{ACB}$

Chứng tỏ được $\triangle DHC$ cân tại D nên $DC = DH$ (1)

Chứng minh được $\widehat{DAH} = 90^\circ - \widehat{C}$, $\widehat{DAH} = 90^\circ - \widehat{H}_2$

Suy ra $\widehat{DAH} = \widehat{AHD}$

$\Rightarrow \triangle DAH$ cân tại D nên $DA = DH$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $DC = DH = DA$

b) $\triangle ABB'$ cân tại A nên $\widehat{AB'B} = \widehat{ABB'} = 2\widehat{C}$

mà $\widehat{AB'B} = \widehat{A}_1 + \widehat{C}$

$\Rightarrow 2\widehat{C} = \widehat{A}_1 + \widehat{C}$

$\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{C}$

$\Rightarrow \triangle AB'C$ cân tại B' .

Câu 43. (HSG 7 trường Vị Thanh 2018 - 2019; huyện Kim Sơn; huyện Thái Thụy 2017 - 2018; huyện Hiệp Hòa; huyện Việt Yên 2016 - 2017)

Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 2\widehat{C}$. Kẻ đường cao AH . Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $BE = BH$. Đường thẳng HE cắt AC tại D .

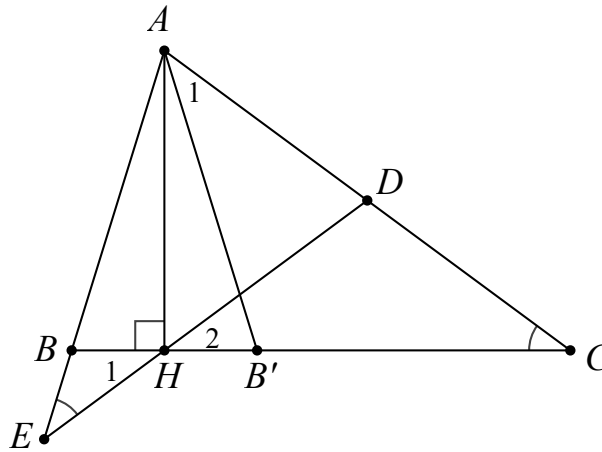
a) Chứng minh: $\widehat{BEH} = \widehat{ACB}$.

b) Chứng minh: $DH = DC = DA$.

c) Lấy B' sao cho H là trung điểm của BB' . Chứng minh $\triangle AB'C$ cân.

d) Chứng minh $AE = HC$.

Lời giải



a) Ta có $\triangle BEH$ cân tại B (do $BE = BH$) nên $\widehat{E} = \widehat{H}_1$
 $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{E} + \widehat{H}_1 = 2\widehat{E}$ (Tính chất góc ngoài tam giác)

mà $\widehat{ABC} = 2\widehat{C}$ nên $\widehat{BEH} = \widehat{ACB}$

b) Ta có $\widehat{E} = \widehat{H}_1 = \widehat{H}_2$ và $\widehat{E} = \widehat{C} \Rightarrow \widehat{H}_2 = \widehat{C}$

Do đó $\triangle DHC$ cân tại D nên $DC = DH$.

Xét $\triangle DAH$ có: $\widehat{DAH} = 90^\circ - \widehat{C}$, $\widehat{DHA} = 90^\circ - \widehat{H}_2 = 90^\circ - \widehat{C}$.

$\Rightarrow \triangle DAH$ cân tại D nên $DA = DH$.

c) Ta có $\triangle ABB'$ cân tại A nên $\widehat{B'} = \widehat{B} = 2\widehat{C}$

Mà $\widehat{B'} = \widehat{A}_1 + \widehat{C}$ nên $2\widehat{C} = \widehat{A}_1 + \widehat{C}$

$\Rightarrow \widehat{C} = \widehat{A}_1 \Rightarrow \triangle AB'C$ cân tại B' .

d) Ta có $AB = AB' = CB'$; $BE = BH = B'H$

Lại có: $AE = AB + BE$, $HC = CB' + B'H$.

Suy ra $AE = HC$.

Câu 44. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Thái Hưng 2022 - 2023; huyện Việt Yên 2018 - 2019)

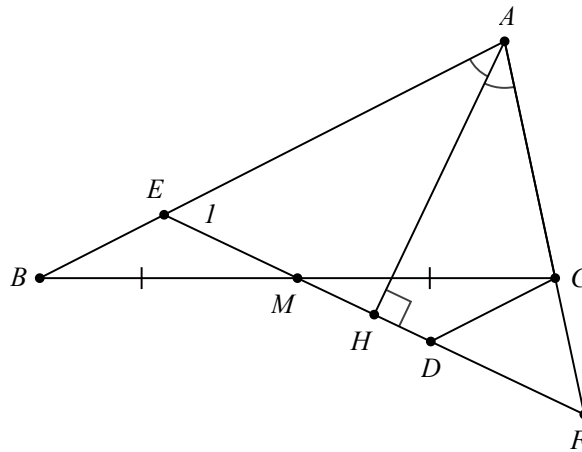
Cho $\triangle ABC$ ($AB > AC$), M là trung điểm của cạnh BC , đường thẳng đi qua trung điểm M và vuông góc với tia phân giác của \widehat{A} tại H , cắt các cạnh AB , AC theo thứ tự tại E và F .

a) Chứng minh: $EH = HF$.

b) Chứng minh: $2 \cdot \widehat{BME} = \widehat{ACB} - \widehat{B}$.

c) Chứng minh: $BE = CF$.

Lời giải



a) Chứng minh: $EH = HF$.

Xét $\triangle AEH$ và $\triangle AFH$

$$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \text{ (Vì } AH \text{ là tia phân giác của góc } \widehat{BAC} \text{)}$$

AH là cạnh chung

$$\widehat{AHE} = \widehat{AHF} \text{ (= } 90^\circ \text{)}$$

$$\Rightarrow \triangle AEH = \triangle AFH \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow EH = HF \text{ (đpcm)}$$

b) Chứng minh: $2\widehat{BME} = \widehat{ACB} - \widehat{B}$.

$$\text{Từ } \triangle AEH = \triangle AFH \Rightarrow \widehat{E}_1 = \widehat{F}$$

Xét $\triangle CMF$ có \widehat{ACB} là góc ngoài suy ra $\widehat{CMF} = \widehat{ACB} - \widehat{F}$

$\triangle BME$ có \widehat{E}_1 là góc ngoài suy ra $\widehat{BME} = \widehat{E}_1 - \widehat{B}$

$$\Rightarrow \widehat{CMF} + \widehat{BME} = (\widehat{ACB} - \widehat{F}) + (\widehat{E}_1 - \widehat{B})$$

$$\text{Vậy } 2\widehat{BME} = \widehat{ACB} - \widehat{B} \text{ (đpcm)}$$

c) Chứng minh: $BE = CF$.

Ta có: $\triangle AHE = \triangle AHF$ (chứng minh trên)

$$\Rightarrow AE = AF; \widehat{E}_1 = \widehat{F}$$

Từ C vẽ $CD \parallel AB$ ($D \in EF$)

Xét $\triangle BME$ và $\triangle CMD$ có:

$$\widehat{BME} = \widehat{CMD} \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

$$BM = MC \text{ (} M \text{ là trung điểm của } BC \text{)}$$

$$\widehat{EBM} = \widehat{DCM} \text{ (so le trong)}$$

$$\Rightarrow \triangle BME = \triangle CMD \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow BE = CD \text{ (1)}$$

Và có $\widehat{E}_1 = \widehat{CDF}$ (cặp góc đồng vị)

Do đó: $\widehat{CDF} = \widehat{F}$
 $\Rightarrow \Delta CDF$ cân
 $\Rightarrow CF = CD$ (2)

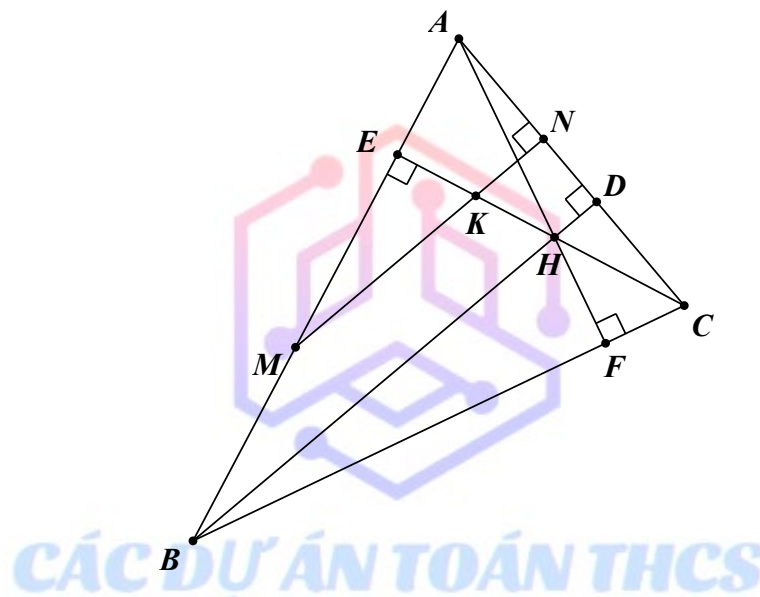
Từ (1) và (2) suy ra: $BE = CF$ (đpcm).

Câu 45. (HSG 7 trường Trần Hưng Đạo 2017- 2018)

Cho tam giác nhọn ABC có $AB > AC$, ba đường cao BD , CE và AF cắt nhau tại H . Lấy điểm M trên cạnh AB sao cho $AM = AC$. Gọi N là hình chiếu của M trên AC ; K là giao điểm của MN và CE .

- a) Chứng minh hai góc KAH và MCB bằng nhau.
 b) Chứng minh $AB + CE > AC + BD$.

Lời giải



a) ΔAMC có 2 đường cao MN và CE cắt nhau tại K
 Nên K là trực tâm của ΔAMC
 Suy ra AK là đường cao thứ 3

hay $AK \perp MC \Rightarrow \widehat{KAH} = \widehat{MCB}$.

b) Ta có $\Delta AEC = \Delta ANM$ (c.g.c) nên $CE = MN$

Giả sử $AB + CE > AC + BD$

Suy ra $AB - AC > BD - CE$

$\Rightarrow AB - AM > BD - MN$

$\Rightarrow BM > BD - MN$

Vẽ $MI \perp BD \Rightarrow BM > BI$ (BM là cạnh huyền) (luôn đúng)

Vậy $AB + CE > AC + BD$.

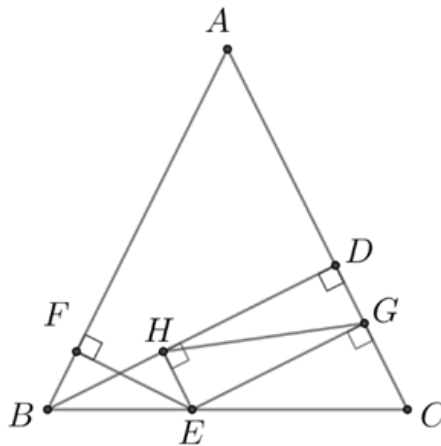
Câu 46. (HSG 7 huyện Sóc Sơn 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC cân tại A . Kẻ BD vuông góc với đường thẳng AC tại D . Lấy điểm E bất kỳ trên cạnh BC (E khác B , khác C). Kẻ EF , EG , EH lần lượt vuông góc với AB , AC , BD .

- 1) Chứng minh: $\Delta HBE = \Delta FEB$.

- 2) Chứng minh rằng $EF + EG = BD$.
 3) Nêu cách xác định vị trí điểm E trên BC để tam giác EGH vuông cân.

Lời giải



1) Chứng minh: $\Delta HBE = \Delta FEB$.

Ta có $HE \parallel AC$ (cùng vuông góc với BD) $\Rightarrow \widehat{BEH} = \widehat{BCA}$ (đồng vị)

$\widehat{BEH} = \widehat{ABC} = \widehat{FBE}$ (ΔABC cân tại A)

Xét ΔHBE và ΔFEB .

Có $\widehat{H} = \widehat{F} = 90^\circ$

$\widehat{BEH} = \widehat{FBE}$ (cmt)

Cạnh BE chung

$\Rightarrow \Delta HBE = \Delta FEB$ (Cạnh huyền – góc nhọn)

2) Chứng minh rằng $EF + EG = BD$.

Có $EF = BH$ (1) ($\Delta HBE = \Delta FEB$)

Ta có $BD \perp AC, EG \perp AC \Rightarrow BD \parallel EG \Rightarrow \widehat{HDE} = \widehat{DEG}$ (hai góc so le trong)

Xét ΔGED vuông tại G và ΔHDE vuông tại H có:

ED là cạnh chung

$\widehat{DEG} = \widehat{HDE}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta GED = \Delta HDE$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow EG = HD$ (2).

Mà $BD = BH + HD$ (3)

Thay (1); (2) vào (3) $\Rightarrow BD = EF + EG$ (đpcm)

3) Nêu cách xác định vị trí điểm E trên BC để tam giác EGH vuông cân.

Ta có $\Delta GED = \Delta HDE$ (câu 2)

$\Rightarrow \widehat{GED} = \widehat{HDE}; \widehat{GDE} = \widehat{HED}$

$\Rightarrow \widehat{GED} + \widehat{HED} = \widehat{HDE} + \widehat{GDE}$

$\widehat{GEH} = \widehat{HDG} = 90^\circ \Rightarrow \Delta GEH$ vuông tại E .

Giả sử $\triangle GEH$ vuông cân thì $EG = EH$ mà $EH = DG$ (cmt) $\Rightarrow EG = DG$
 $\Rightarrow \triangle GED$ vuông cân tại G
 $\Rightarrow \widehat{EDG} = 45^\circ$
 $\Rightarrow DE$ là phân giác của góc BDC

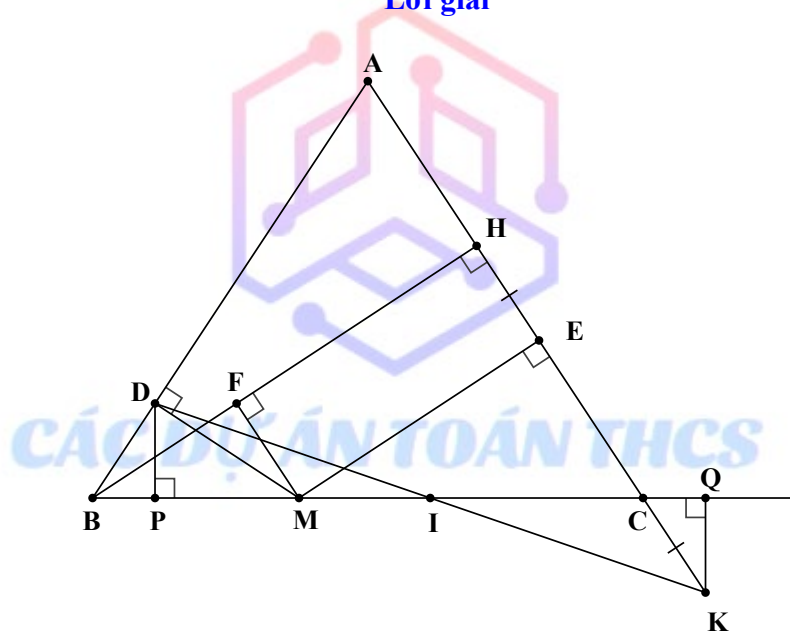
Vậy E là giao điểm của tia phân giác \widehat{BDC} với cạnh BC thì $\triangle GEH$ vuông cân. (đpcm)

Câu 47. (HSG 7 huyện Thanh Thủy 2021 - 2022; huyện Mỏ Cày; huyện Sông Lô 2017- 2018; huyện Thái Thụy 2015 - 2016)

Cho tam giác ABC cân tại A , BH vuông góc với AC tại H . Trên cạnh BC lấy điểm M bất kỳ (khác B và C). Gọi D, E, F là chân đường vuông góc hạ từ M đến AB, AC, BH .

- Chứng minh $\triangle DBM = \triangle FMB$.
- Chứng minh khi M chạy trên cạnh BC thì tổng $MD + ME$ có giá trị không đổi.
- Trên tia đối của tia CA lấy điểm K sao cho $CK = EH$. Chứng minh BC đi qua trung điểm của DK .

Lời giải



- Chứng minh $\triangle DBM = \triangle FMB$.

Ta có $\widehat{BMD} + \widehat{ABC} = 90^\circ$; $\widehat{MBF} + \widehat{ACB} = 90^\circ$. Mà $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ nên $\widehat{BMD} = \widehat{MBF}$

Xét hai tam giác vuông $\triangle DBM$ và $\triangle FMB$, có:

BM là cạnh huyền chung

$\widehat{BMD} = \widehat{MBF}$ (chứng minh trên)

Vậy $\triangle DBM = \triangle FMB$ (cạnh huyền – góc nhọn)

- Chứng minh khi M chạy trên cạnh BC thì tổng $MD + ME$ có giá trị không đổi.

Theo câu

ta có: $\triangle DBM = \triangle FMB \Rightarrow MD = BF$ (2 cạnh tương ứng) (1)

Xét hai tam giác vuông $\triangle MFH$ và $\triangle HEM$, có:

MH là cạnh huyền chung

$$\widehat{FHM} = \widehat{EMH} \text{ (so le trong vì } FH \parallel EM \text{)}$$

Vậy $\triangle MFH = \triangle HEM$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$$\Rightarrow ME = FH \text{ (hai cạnh tương ứng) (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra: $MD + ME = BF + FH = BH$

Mà BH không đổi $\Rightarrow MD + ME$ không đổi (đpcm).

c) Trên tia đối của tia CA lấy điểm K sao cho $CK = EH$. Chứng minh BC đi qua trung điểm của DK .

Vẽ $DP \perp BC$ tại P , $KQ \perp BC$ tại Q . Gọi I là giao điểm của DK và BC .

Ta có $BD = FM$ (vì $\triangle DBM = \triangle FMB$); $FM = EH$ (vì $\triangle MFH = \triangle HEM$) và $EH = CK$ (gt)

$$\Rightarrow BD = FM = EH = CK$$

Xét hai tam giác vuông BDP và CKQ có:

$$BD = CK \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\widehat{DBP} = \widehat{KCQ} \text{ (vì cùng bằng } \widehat{ACB} \text{)}$$

Vậy $\triangle BDP = \triangle CKQ$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$$\Rightarrow DP = KQ \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

Lại có: $DP \perp BC$ và $KQ \perp BC \Rightarrow DP \parallel KQ \Rightarrow \widehat{PDI} = \widehat{QKI}$

Xét $\triangle DPI$ và $\triangle KQI$, có:

$$\widehat{DIP} = \widehat{QIK} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$DP = KQ \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\widehat{PDI} = \widehat{QKI} \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\Rightarrow \triangle DPI = \triangle KQI \text{ (g - c - g)} \Rightarrow ID = IK$$

Vậy BC đi qua trung điểm I của DK .

Câu 48. (HSG 7 huyện Bá Phước, Thanh Hóa 2021 - 2022)

Cho tam giác ABC cân tại A , BH vuông góc với AC tại H . Trên cạnh BC lấy điểm M bất kì (M khác B và C). Gọi D, E, F là chân đường vuông góc hạ từ M đến AB, AC, BH .

a) Chứng minh rằng $\triangle DBM = \triangle FMB$ và $MD + ME = BH$.

b) Trên tia đối của tia CA lấy điểm K sao cho $CK = EH$. Chứng minh rằng BC đi qua trung điểm I của DK .

c) Chứng minh rằng đường vuông góc với DK tại I luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi trên BC .

Lời giải

Ta có $\triangle ABN = \triangle ACN$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow \widehat{BAN} = \widehat{CAN} \Rightarrow \widehat{BAO} = \widehat{CAO}$

Do đó $\triangle ABO = \triangle ACO$ (c-g-c) $\Rightarrow OB = OC, \widehat{ABO} = \widehat{ACO}$ (*)

Do O nằm trên đường trung trực của DK nên $OD = OK$

Xét $\triangle BOD$ và $\triangle CKO$ có

$BD = CK$ (câu a); $OD = OK$ (cmt); $OB = OC$ (cmt)

$\Rightarrow \triangle BOD = \triangle CKO$ (c-c-c)

$\Rightarrow \widehat{DBO} = \widehat{KCO} \Rightarrow \widehat{ABO} = \widehat{KCO}$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $\widehat{ACO} = \widehat{KCO} \Rightarrow CO \perp AK$

Vậy đường thẳng vuông góc với DK tại O luôn đi qua điểm O cố định khi M thay đổi trên BC

Câu 49. (HSG 7 Ứng Hòa – Hà Tây- năm học 2022 - 2023)

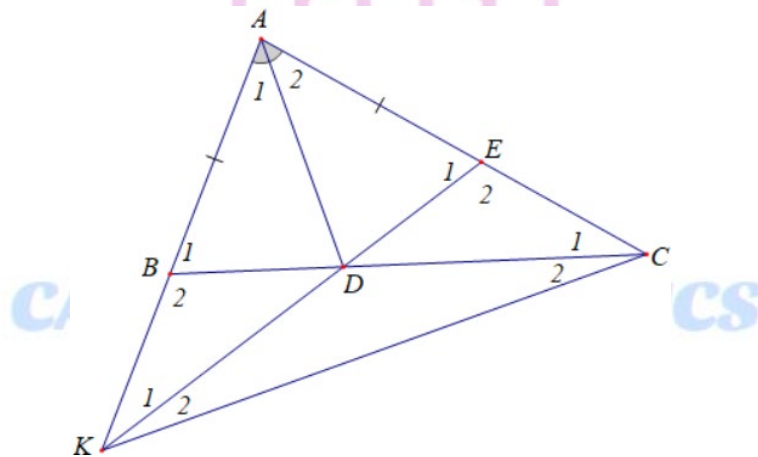
Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$, vẽ đường phân giác AD . Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$.

1) Chứng minh: $BD = DE$

2) Gọi K là giao điểm của AB và ED . Chứng minh rằng: $\triangle DBK = \triangle DEC$.

3) $\triangle ABC$ cần có thêm điều kiện gì để D cách đều ba cạnh của $\triangle AKC$.

Lời giải



1) Xét $\triangle ADB$ và $\triangle ADE$ có:

$AB = AE$ (gt), $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (gt), AD là cạnh chung

$\Rightarrow \triangle ADB = \triangle ADE$ (c.g.c)

$\Rightarrow BD = ED$ (hai cạnh tương ứng)

2) Vì $\triangle ADB = \triangle ADE$ (cmt)

$\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{E}_1$ (hai góc tương ứng)

Mà $\widehat{B}_2 + \widehat{B}_1 = 180^\circ, \widehat{E}_2 + \widehat{E}_1 = 180^\circ \Rightarrow \widehat{B}_2 = \widehat{E}_2$

Xét $\triangle DBK$ và $\triangle DEC$ có:

$\widehat{B}_2 = \widehat{E}_2$ (cmt), $BD = ED$ (theo ý 1), $\widehat{BDK} = \widehat{EDC}$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \triangle DBK = \triangle DEC$ (g.c.g)

3) Để D cách đều ba cạnh của tam giác AKC thì D là giao điểm ba đường phân giác $\triangle AKC$

$\Rightarrow CB$ là đường phân giác $\triangle AKC$.

Ta có $AB = AE$ (gt) và $BK = EC$ (Vì $\triangle DBK = \triangle DEC$ (cmt))

$\Rightarrow AK = AC$ hay $\triangle AKC$ cân tại A

$\Rightarrow \widehat{AKC} = \widehat{ACK}$.

Từ đó suy ra $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 = \widehat{K}_1 = \widehat{K}_2$

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AKC} + \widehat{C}_2 = 2\widehat{C}_1 + \widehat{C}_1 = 3\widehat{C}_1$

Vậy nếu $\triangle ABC$ có thêm điều kiện $\widehat{ABC} = 3\widehat{ACB}$ thì điểm D cách đều ba cạnh của $\triangle AKC$.

Câu 50. (HSG 7 huyện Tiên Du 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$. Tia phân giác của góc A cắt BC tại điểm I . Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $AD = AB$.

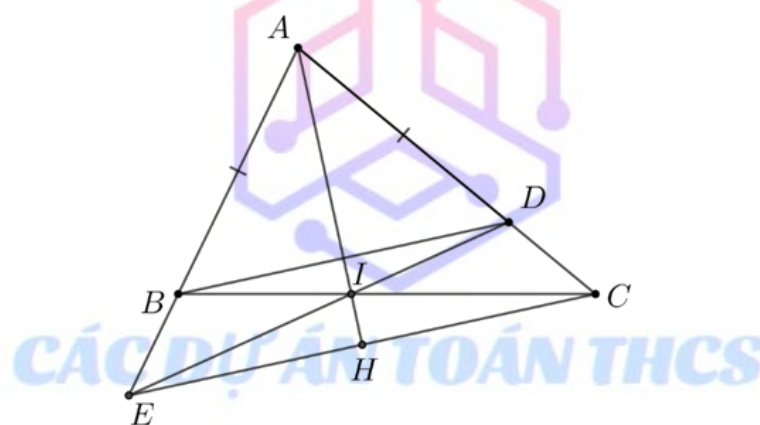
a) Chứng minh rằng $BI = ID$.

b) Tia DI cắt tia AB tại E . Chứng minh rằng $\triangle BEI = \triangle IDC$. Từ đó suy ra $BD \parallel CE$.

c) Gọi H là trung điểm của EC . Chứng minh $AH \perp BD$.

d) Cho $\widehat{ABC} = 2\widehat{ACB}$. Chứng minh $AB + BI = AC$.

Lời giải



a) Xét $\triangle ABI$ và $\triangle ADI$ có:

$AB = AD$ (gt)

AI là cạnh chung

$\widehat{BAI} = \widehat{DAI}$ (vì AI là tia phân giác của \widehat{BAC})

Do đó $\triangle ABI = \triangle ADI$ (c - g - c)

$\Rightarrow BI = ID$ (hai cạnh tương ứng)

b) Ta có: $\triangle ABI = \triangle ADI$ nên $\widehat{ABI} = \widehat{ADI}$

Mà $\widehat{ABI} + \widehat{CBE} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$\widehat{ADI} + \widehat{CDE} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

Do đó: $\widehat{CBE} = \widehat{EDC}$ hay $\widehat{IBE} = \widehat{IDC}$

* Xét $\triangle BIE$ và $\triangle DIC$ có:

$\widehat{BIE} = \widehat{DIC}$ (hai góc đối đỉnh)

$BI = ID$ (chứng minh trên)

$$\widehat{IBE} = \widehat{IDC} \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\text{Do đó } \triangle BIE = \triangle DIC \text{ (g - c - g)} \Rightarrow IE = IC$$

$$* \text{ Vì } IB = ID \Rightarrow \triangle IBD \text{ cân tại } I \Rightarrow \widehat{IBD} = \frac{180^\circ - \widehat{BID}}{2}$$

$$\text{Vì } IE = IC \Rightarrow \triangle IEC \text{ cân tại } I \text{ suy ra } \widehat{ICE} = \frac{180^\circ - \widehat{EIC}}{2}$$

Mà $\widehat{BID} = \widehat{EIC}$ (đối đỉnh) do đó $\widehat{IBD} = \widehat{ICE}$ mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $BD \parallel CE$

c) Ta có $\triangle BIE = \triangle DIC$ (cmt). Suy ra $BE = DC$.

$$\text{Mà } AB = AD \Rightarrow AB = AD$$

$$\Rightarrow AB + BE = AD + DC \Rightarrow AE = AC.$$

Xét $\triangle AEH$ và $\triangle ACH$ có: $AE = AC$ (cmt); $EH = CH$ (gt); AH là cạnh chung

Do đó $\triangle AEH = \triangle ACH$ (c - c - c)

$$\Rightarrow \widehat{AHE} = \widehat{AHC} \text{ (hai góc tương ứng)}$$

$$\text{Mà } \widehat{AHE} + \widehat{AHC} = 180^\circ \text{ (kề bù)}$$

$$\Rightarrow \widehat{AHE} = 90^\circ \Rightarrow AH \perp CE.$$

Lại có $EC \parallel BD$ suy ra $AH \perp BD$.

$$\text{Ta có: } \widehat{ABC} = 2\widehat{ACB} \text{ hay } \widehat{ABI} = 2\widehat{DCI} \text{ mà } \widehat{ABI} = \widehat{ADI} \Rightarrow \widehat{ADI} = 2 \cdot \widehat{DCI} \text{ (1)}$$

$$\text{Lại có: } \widehat{ADI} \text{ là góc ngoài tại } D \text{ của } \triangle DIC \text{ cân tại } D \Rightarrow \widehat{ADI} = \widehat{DCI} + \widehat{DIC}. \text{ (2)}$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \widehat{DCI} = \widehat{DIC} \Rightarrow \triangle DIA \text{ cân tại } D \Rightarrow DI = DC.$$

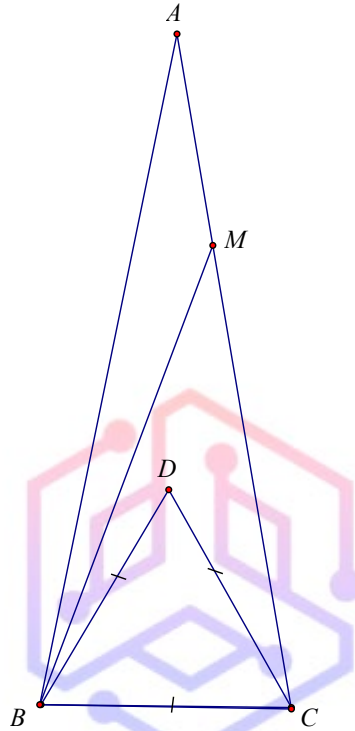
$$\text{Mà } DI = CI; AB = AD \text{ nên } AB + BI = AD + CD = AC \text{ (đpcm).}$$

Câu 51. (HSG 7 huyện Hồng Ngự năm học 2017 - 2018)

Cho $\triangle ABC$ cân tại A có $\widehat{A} = 20^\circ$ vẽ tam giác đều DBC (D nằm trong $\triangle ABC$). Tia phân giác của \widehat{ABD} cắt AC tại M . Chứng minh:

- Tia AD là phân giác của \widehat{ABC}
- $AM = BC$

Lời giải



a) Dễ dàng chứng minh $\triangle ADB = \triangle ADC$ (c.c.c)

$$\Rightarrow \widehat{DAB} = \widehat{DAC}$$

$$\text{Do đó } \widehat{DAB} = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ$$

b) $\triangle ABC$ cân tại A

$$\text{Mà } \widehat{A} = 20^\circ (\text{gt}) \text{ nên } \widehat{ABC} = 80^\circ$$

$$\triangle ABC \text{ đều nên } \widehat{DBC} = 60^\circ$$

$$\text{Tia } BD \text{ nằm giữa hai tia } BA \text{ và } BC \text{ suy ra } \widehat{ADB} = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$$

$$\text{Tia } BM \text{ là phân giác của } \widehat{ABD} \text{ nên } \widehat{ABM} = 10^\circ$$

Xét hai tam giác ABM và BAD có:

AB cạnh chung

$$\widehat{BAM} = \widehat{BAD} = 20^\circ$$

$$\widehat{ABM} = \widehat{DAB} = 10^\circ$$

Vậy $\triangle ABM = \triangle BAD$ (g.c.g)

$$\Rightarrow AM = BD$$

$$\text{Mà } BD = BC (\text{gt})$$

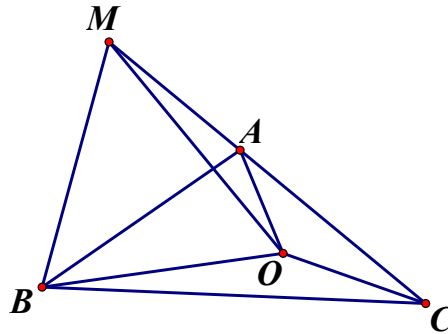
$$\Rightarrow AM = BC$$

Câu 52. (Olympic 7, trường Sương Bình 2017 - 2018; trường Thanh Oai 2018 - 2019)

Cho $\triangle ABC$ cân tại A , có $\hat{A} = 108^\circ$. Gọi O là một điểm nằm trên tia phân giác của \hat{C} sao cho $\widehat{CBO} = 12^\circ$, vẽ tam giác đều BOM (M và A cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ BO).

- a) Chứng minh ba điểm C, A, M thẳng hàng.
 b) Chứng minh tam giác AOB cân.

Lời giải



a) Ta có: $\triangle ABC$ cân tại A , $\hat{A} = 108^\circ \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = 36^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{OCA} = \widehat{OCB} = \frac{\widehat{ACB}}{2} = \frac{36^\circ}{2} = 18^\circ$ (Vì CO là tia phân giác của \widehat{ACB}).

Xét $\triangle BOC$ có $\widehat{BOC} = 180^\circ - (12^\circ + 18^\circ) = 150^\circ$

Xét $\triangle BOM$ là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{BOM} = 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{MOC} = 360^\circ - (150^\circ + 60^\circ) = 150^\circ$

Xét $\triangle BOC$ và $\triangle MOC$ có:

$MO = OB$; $\widehat{BOM} = \widehat{MOC} (= 60^\circ)$; OC là cạnh chung

$\Rightarrow \triangle BOC = \triangle MOC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OCM} = \widehat{OCB} = 18^\circ$

Mà $\widehat{OCA} = 18^\circ$ nên hai tia CM, CA trùng nhau, do đó 3 điểm C, O, M thẳng hàng.

b) $\triangle CBM$ có $CM = CB \Rightarrow \triangle CBM$ cân tại C ; $\hat{C} = 36^\circ$

$\Rightarrow \widehat{CBM} = \widehat{CMB} = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$

Mà $\widehat{BAM} = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{BMA} = 72^\circ \Rightarrow \triangle BAM$ cân tại $B \Rightarrow BA = BM$ (tính chất tam giác cân)

Mà $OM = BM = BO$ ($\triangle BOM$ đều)

$\Rightarrow BA = OB \Rightarrow \triangle AOB$ cân tại B .

Câu 53. (HSG 7 huyện năm 2018 - 2019)

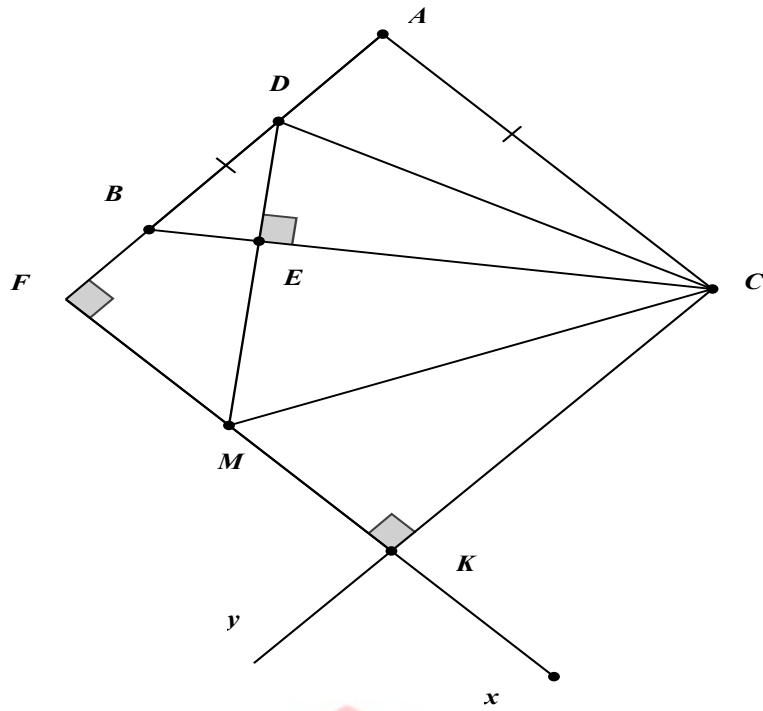
Cho $\triangle ABC$ vuông tại A với $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$ và $BC = 15$ cm. Tia phân giác của \hat{C} cắt AB tại D .

Kẻ $DE \perp BC$ ($E \in BC$)

a) Chứng minh $AC = CE$

b) Trên tia AB lấy điểm F sao cho $AF = AC$. Kẻ tia $Fx \perp FA$ cắt tia DE tại M . Tính \widehat{DCM}

Lời giải



a) Chứng minh được $\Delta ACD = \Delta ECD$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow AC = CE$ (hai cạnh tương ứng)

b) Kẻ $Cy \perp Fx$ cắt nhau tại K

Ta thấy $AC = AF = FK = CK = CE$ và $\widehat{ACK} = 90^\circ$

Chứng minh được $\Delta CEM = \Delta CKM$ (ch – cv)

$\Rightarrow \widehat{ECM} = \widehat{KCM}$ (hai góc tương ứng)

Mà $\widehat{DCM} = \widehat{DCE} + \widehat{ECM} = \frac{1}{2} \widehat{ACK} = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$

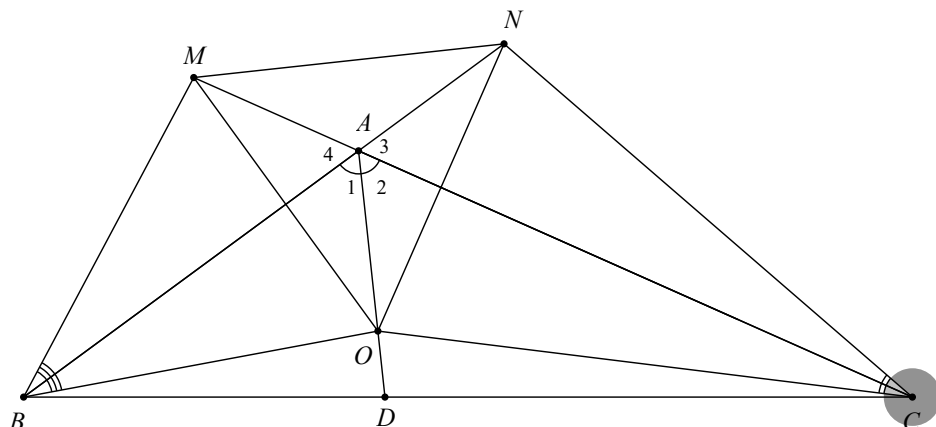
Câu 54. (HSG 7 huyện Cẩm Phả 2017 - 2018)

Cho ΔABC có $\widehat{B} + \widehat{C} = 60^\circ$, phân giác AD . Trên AD lấy điểm O . Trên tia đối của tia AC lấy điểm M sao cho $\widehat{ABM} = \widehat{ABO}$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm N sao cho $\widehat{ACN} = \widehat{ACO}$.

a) Chứng minh $AM = AN$.

b) Chứng minh ΔMON là tam giác đều.

Lời giải



a) ΔABC có $\widehat{B} + \widehat{C} = 60^\circ$ nên $\widehat{A} = 120^\circ$

Do AD là tia phân giác nên $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = 60^\circ$

Ta lại có: $\widehat{A}_3 = \widehat{A}_4 = 180^\circ - \widehat{A} = 60^\circ$

Suy ra: $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \widehat{A}_3 = \widehat{A}_4 = 60^\circ$

$\Rightarrow \Delta ABM = \Delta ABD$ (g - c - g) $\Rightarrow AM = AO$ (1)

và $\Delta ACN = \Delta ACO$ (g - c - g) $\Rightarrow AN = AO$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AM = AN$ (đpcm).

b) $\Delta AOM = \Delta AON$ (c - g - c) $\Rightarrow OM = ON$ (3)

$\Delta AOM = \Delta AMN$ (c - g - c) $\Rightarrow OM = MN$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $OM = ON = MN$

$\Rightarrow \Delta MON$ là tam giác đều (đpcm).

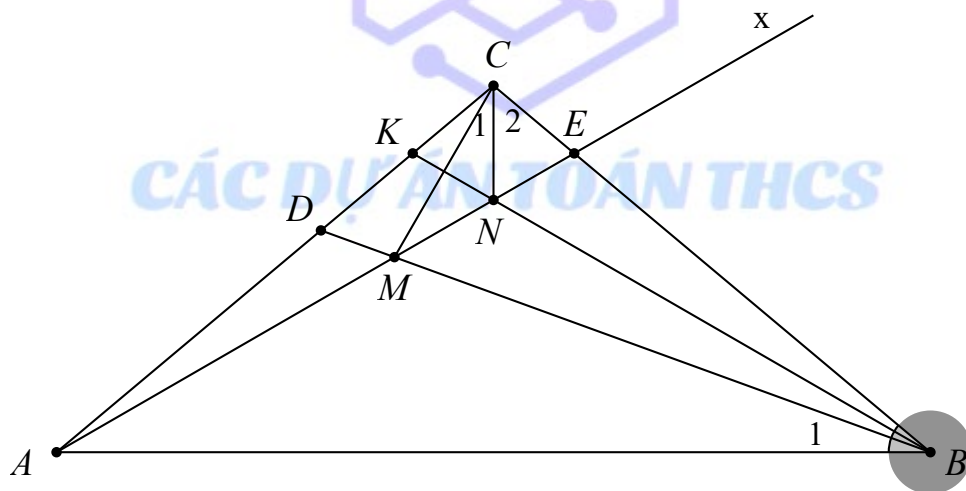
Câu 55. (HSG 7 huyện Thanh Chương 2018 - 2019)

Tam giác ABC cân tại C và $\widehat{C} = 100^\circ$; BD là phân giác của \widehat{B} . Từ A kẻ tia Ax tạo với AB một góc 30° . Tia Ax cắt BD tại M , cắt BC tại E . Vẽ BK là phân giác \widehat{CBD} , BK cắt Ax tại N .

a) Tính số đo \widehat{ACM}

b) So sánh MN và CE .

Lời giải



a) Học sinh chứng minh được: ΔANB cân tại N (có hai góc bằng nhau $= 30^\circ$)

b) $\Rightarrow NA = NB$

Nối CN , chứng minh được $\Delta CAN = \Delta CBN$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{NCA} = \widehat{NCB} = 50^\circ$

\widehat{NMB} là góc ngoài của ΔABM

$\Rightarrow \widehat{NMB} = \widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = 50^\circ$

Từ đó, học sinh chứng minh được: $\Delta BNM = \Delta BNC$ (g.c.g)

$\Rightarrow BC = BM \Rightarrow \Delta CBM$ cân tại B , mà lại có $\widehat{CBM} = 20^\circ$ nên tính được $\widehat{ACM} = 20^\circ$

b) Từ chứng minh trên, ta chứng minh được ΔMNC cân tại N

$$\Rightarrow MN = NC$$

Xét trong tam giác CNE tính được $\widehat{CEN} = 180^\circ - (100^\circ + 10^\circ) = 70^\circ$

Và tính được $\widehat{CNE} = 50^\circ + 10^\circ = 60^\circ$ (góc ngoài của $\triangle CAN$)

$$\Rightarrow \widehat{CEN} > \widehat{CNE} \Rightarrow CN > CE \text{ hay } MN > CE$$

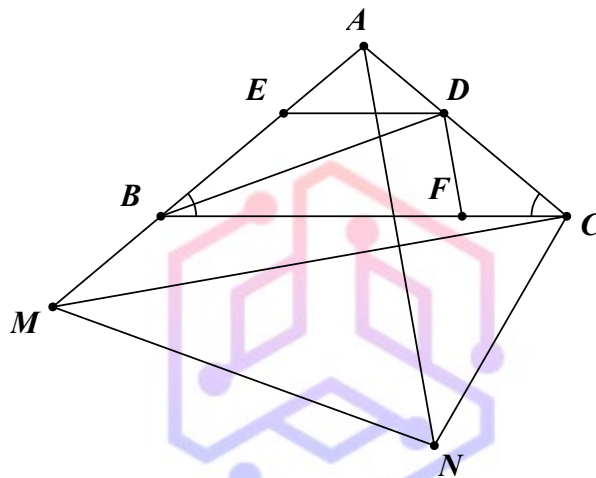
Câu 56. (HSG 7 huyện Việt Yên 2017- 2018)

Cho tam giác ABC cân tại A ($\widehat{B} = \widehat{C} = 40^\circ$). Kẻ phân giác BD ($D \in AC$). Trên tia AB lấy điểm M sao cho $AM = BC$.

a) Chứng minh $BD + AD = BC$.

b) Tính \widehat{AMC} .

Lời giải



a) Từ D kẻ $DE \parallel BC$, trên BC lấy điểm F sao cho $BD = BF$ (1)

Chứng minh được $DE = BE$ (tam giác BED cân)

Do tam giác AED cân nên $AD = AE \Rightarrow BE = CD \Rightarrow DE = CD$

Tam giác BDF cân có $\widehat{DBF} = 20^\circ$ nên $\widehat{BFD} = 80^\circ \Rightarrow \widehat{DFC} = 100^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{DFC} = \widehat{EAD} = 100^\circ$$

Vậy $\triangle DFC$ có $\widehat{FDC} = 40^\circ$

Chứng minh được $\triangle ADE = \triangle FCD$ (g.c.g)

$$\Rightarrow AD = CF \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $BD + AD = BC$.

b) Dựng tam giác đều AMN sao cho N và C ở cùng một phía so với AB

Xét $\triangle BAC$ và $\triangle NCA$ có

AC chung

$$BC = AN (= AM)$$

$$\widehat{ACB} = \widehat{CAN} = 40^\circ$$

Nên $\triangle BAC = \triangle NCA \Rightarrow AC = CN = AB$

Vậy MC là trung trực của AN nên $\widehat{AMC} = \frac{1}{2} \widehat{AMN} = 30^\circ$.

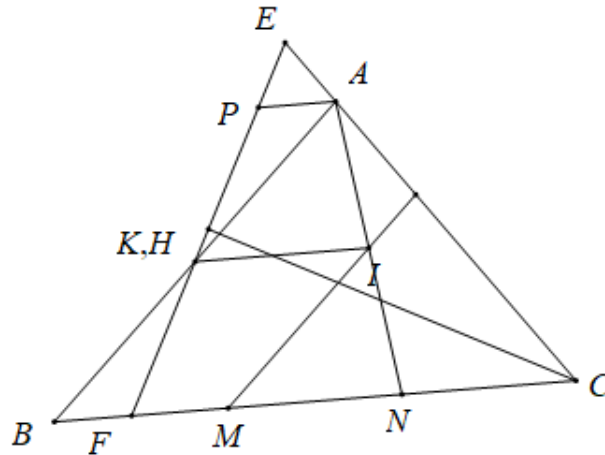
Câu 57. (HSG 7 huyện Đức Thọ 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC ($CA < CB$), trên BC lấy các điểm M và N sao cho $BM = MN = NC$. Qua điểm M kẻ đường thẳng song song với AB cắt AN tại I .

a) Chứng minh : I là trung điểm của AN

b) Qua K là trung điểm của AB kẻ đường thẳng vuông góc với đường phân giác \widehat{ACB} cắt đường thẳng AC tại E , đường thẳng BC tại F . Chứng minh $AE = BF$

Lời giải



a) Từ I kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB tại H . Nối MH

Ta có: $\triangle BHM = \triangle IMH$ vì: $\widehat{BHM} = \widehat{IMH}$ (so le trong);

$\widehat{BMH} = \widehat{IHM}$ (so le trong); cạnh HM chung $\Rightarrow BM = IH = MN$

$\triangle AHI = \triangle IMN$ vì: $IH = MN$ (cmt); $\widehat{AHI} = \widehat{IMN}$ ($= \widehat{ABC}$); $\widehat{AIH} = \widehat{INM}$ (đồng vị)

$\Rightarrow AI = IN$ (dpcm)

b) Từ A kẻ đường thẳng song song với BC cắt EF tại P .

Xét $\triangle PKA$ và $\triangle FKB$ có:

$\widehat{PKA} = \widehat{FKB}$ (đối đỉnh); $\widehat{APK} = \widehat{BFK}$ (so le trong); $AK = KB$ (gt)

$\Rightarrow \triangle PKA = \triangle FKB \Rightarrow AP = BF$ (1)

Có $\widehat{EPA} = \widehat{KFC}$ (đồng vị); $\widehat{CEF} = \widehat{KFC}$ ($\triangle CFE$ cân)

$\Rightarrow \widehat{EPA} = \widehat{CEF} \Rightarrow \triangle APE$ cân $\Rightarrow AP = AF$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AE = BF$

Câu 58. (HSG 7 TP Thanh Thiện 2022 - 2023)

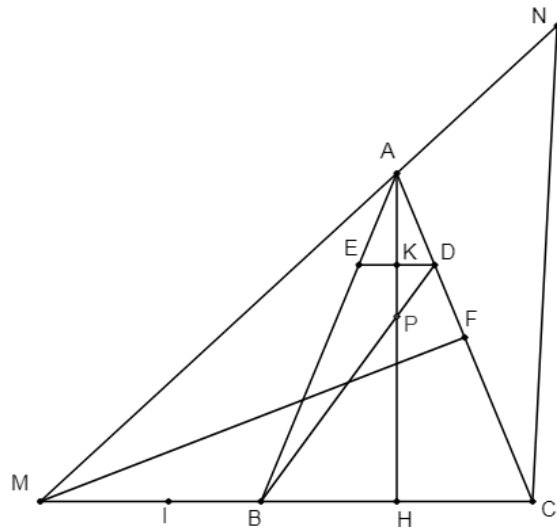
Cho tam giác ABC cân tại A ($AB > BC$). Gọi F là trung điểm của AC , qua F kẻ đường thẳng vuông góc với AC cắt đường thẳng BC tại M . Trên tia đối của tia AM lấy điểm N sao cho $AN = BM$.

a) Chứng minh: $AM = CN$.

b) Chứng minh: $\widehat{AMC} = \widehat{BAC}$.

c) Lấy điểm D trên cạnh AC , điểm E trên cạnh AB sao cho $AD = AE$. Trên tia BM lấy I sao cho $BI = DE$. Chứng minh: $BD > \frac{BC + DE}{2}$.

Lời giải



a) Tam giác ABC cân tại A nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$, $AB = AC$

Tam giác AMC có MF là trung tuyến và đường cao nên $\triangle AMC$ là tam giác cân tại M
 $\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MCA}$.

Suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \widehat{MAC} \Rightarrow 180^\circ - \widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{MAC} \Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{CAN}$

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle CAN$ có $AB = AC$ (cmt), $\widehat{ABM} = \widehat{CAN}$ (cmt), $AN = BM$ (gt)
 $\Rightarrow \triangle ABM = \triangle CAN$ (c.g.c) $\Rightarrow AM = CN$ (cạnh tương ứng).

Vậy $AM = CN$.

b) Tam giác ABC cân tại A nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{BAC} = 180^\circ - 2\widehat{ACB}$.

Tam giác AMC là tam giác cân tại $M \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MCA} \Rightarrow \widehat{AMC} = 180^\circ - 2\widehat{ACB}$.

Do đó $\widehat{AMC} = \widehat{BAC}$.

c) Kẻ đường cao AH cắt ED tại K , BD tại P .

Vì $\triangle ABC$ cân tại A có AH là đường cao nên AH là trung tuyến $\Rightarrow BH = \frac{BC}{2}$.

Vì $\triangle BHP$ vuông tại H nên $BH < BP \Rightarrow BP > \frac{BC}{2}$ (1).

Vì $AD = AE$ (gt) nên $\triangle ADE$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{AED} = \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2}$

mà $\widehat{ABC} = \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{ABC} \Rightarrow ED \parallel BC$

mà $AH \perp BC \Rightarrow AH \perp DE$ tại K nên $\triangle KPD$ vuông tại K nên $DK < DP$

Vì $\triangle ADE$ cân tại A có AK là đường cao nên AK là trung tuyến $\Rightarrow DK = \frac{ED}{2}$

$\Rightarrow DP > \frac{DE}{2}$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $BP + DP > \frac{BC + DE}{2} \Rightarrow BD > \frac{BC + DE}{2}$

Vậy $BD > \frac{BC + DE}{2}$.

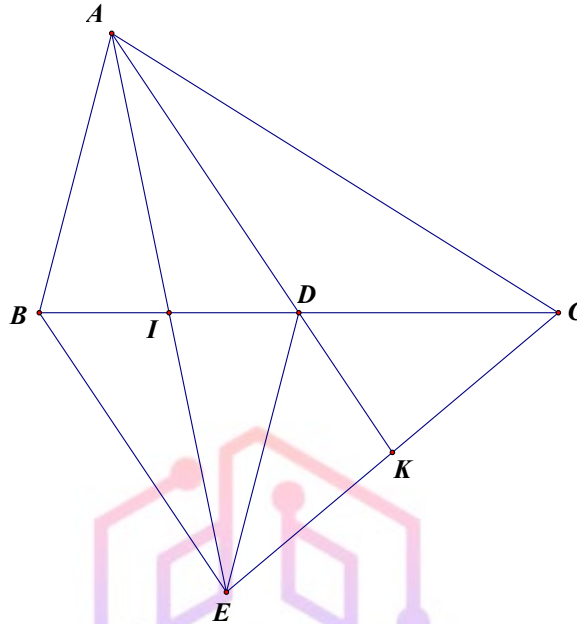
Câu 59. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023; huyện Thanh Sơn 2021 - 2022)

Cho ΔABC có đường trung tuyến AD , đường thẳng qua D và song song với AB cắt đường thẳng qua B song song với AD tại E , AE cắt BD tại I . Gọi K là trung điểm của đoạn EC .

a) Chứng minh rằng: $IA = IE$

b) Chứng minh: Ba điểm A, D, K thẳng hàng.

Lời giải



a) Xét ΔABD và ΔEDB có:

$$\widehat{ABD} = \widehat{EDB} \text{ (2 góc so le trong, } DE // AB \text{)}$$

$$\widehat{ADB} = \widehat{EBD} \text{ (2 góc so le trong, } AD // BE \text{)}$$

BD chung

Do đó $\Delta ABD = \Delta EDB$ (g - c - g)

$$\Rightarrow AD = EB \text{ (2 cạnh tương ứng)}$$

Xét ΔAID và ΔEIB có:

$$AD = BE \text{ (cmt)}$$

$$\widehat{ADI} = \widehat{EBI}$$

$$\widehat{DAI} = \widehat{BEI} \text{ (} AD // BE \text{)}$$

Do đó $\Delta AID = \Delta EIB$ (g - c - g)

$$\Rightarrow IA = IE \text{ (2 cạnh tương ứng), } IB = ID \text{ (2 cạnh tương ứng)}$$

b) Có $\Delta AID = \Delta EIB$ (g - c - g)

$$\Rightarrow IB = ID \text{ (2 cạnh tương ứng)}$$

Ta có: AD là trung tuyến của $\Delta ABC \Rightarrow D$ là trung điểm $BC \Rightarrow DB = DC$

$$\text{Có: } IB = ID = \frac{BD}{2} = \frac{DC}{2} \Rightarrow IB + ID = DC \Rightarrow IB + ID + ID = DC + ID = IC$$

$$\Rightarrow 3ID = IC \Rightarrow ID = \frac{1}{3}IC$$

Xét ΔACE có: I là trung điểm AE ($IA = IE, I \in AE$)

$\Rightarrow CI$ là đường trung tuyến của ΔACE

mà $ID = \frac{1}{3}IC, D \in IC$

Suy ra D là trọng tâm ΔACE

Lại có AK là đường trung tuyến của ΔACE (K là trung điểm EC).

Do đó: $D \in AK$ hay A, D, K thẳng hàng.

Câu 60. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC vuông tại A . Tia phân giác của góc B cắt AC tại điểm M . Lấy điểm D trên cạnh BC sao cho $BD = BA$. Gọi E là giao điểm của hai đường thẳng DM và BA .

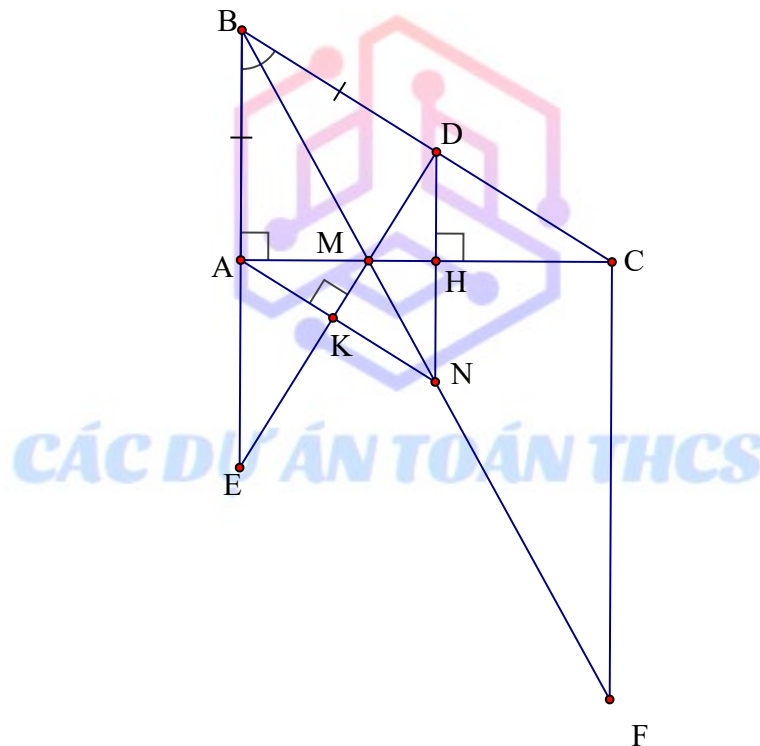
a) Chứng minh: $MA = MD$.

b) Kẻ $DH \perp MC$ ($H \in MC$) và $AK \perp ME$ ($K \in ME$), gọi N là giao điểm của hai tia DH và AK . Chứng minh $\Delta MHN = \Delta MKN$ và ba điểm B, M, N thẳng hàng.

c) Từ C kẻ đường thẳng vuông góc với AC cắt tia BM tại F .

Chứng minh: $AB + AM < CF + CM$.

Lời giải



a) Xét ΔABM và ΔDBM có: $AB = BD$ (gt)

$\widehat{ABM} = \widehat{DBM}$ (Vì BM là tia phân giác của góc B); BM cạnh chung

$\Rightarrow \Delta ABM = \Delta DBM$ (c-g-c) $\Rightarrow MA = MD$ (hai cạnh tương ứng)

b) Vì $MA = MD$ và $\widehat{AMK} = \widehat{DMH}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta MAK = \Delta MDH$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow MK = MH$ (hai cạnh tương ứng)

Do đó $\Delta MHN = \Delta MKN$ (cạnh huyền- cạnh góc vuông)

Vì $\Delta ABM = \Delta DBM$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{DMB} = \frac{\widehat{AMD}}{2}$

Mặt khác $\Delta MHN = \Delta MKN \Rightarrow \widehat{HMN} = \widehat{KMN} = \frac{\widehat{HMK}}{2}$

Mà $\widehat{AMD} = \widehat{KMH}$ (hai góc đối đỉnh)

Suy ra: $\widehat{AMB} = \widehat{HMN}$

Do đó: $\widehat{BMN} = \widehat{AMB} + \widehat{AMN} = \widehat{HMN} + \widehat{AMN} = 180^\circ$

Vậy ba điểm B, M, N thẳng hàng

c) Vì $\triangle ABM = \triangle DBM$ (cmt) nên $\widehat{BDM} = \widehat{BAM} = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle MDC$ vuông tại D nên cạnh huyền MC lớn nhất

$\Rightarrow MC > MD$ mà $MD = MA$

$\Rightarrow MC > MA$ (1)

Mặt khác ta có AB và CF cùng vuông góc với $AC \Rightarrow AB \parallel CF$

$\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{CFB}$ (góc so le trong) mà $\widehat{ABM} = \widehat{DBM}$ (Vì BM là tia phân giác của góc B)

$\Rightarrow \widehat{DBM} = \widehat{CFB}$

Suy ra tam giác BCF cân tại C nên $CF = CB$

Mà $CB > AB$ (Tam giác ABC vuông tại A nên cạnh huyền BC lớn nhất)

Suy ra $CF > AB$ (2)

Từ (1); (2) ta có: $CM + CF > MA + AB$

Câu 61. (HSG 7 trường Trà My 2018 - 2019; huyện Xuân Dương 2013 - 2014)

Cho $\triangle ABC$ vuông ở A có $\widehat{C} = 30^\circ$. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $\widehat{BCM} = \frac{2}{3}\widehat{ACB}$, trên

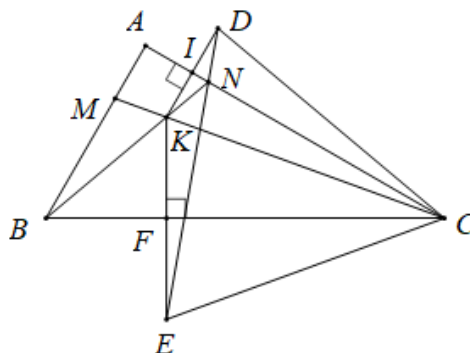
cạnh AC lấy điểm N sao cho $\widehat{CBN} = \frac{2}{3}\widehat{ABC}$. Gọi giao điểm của CM và BN là K .

1) Tính góc CKN .

2) Gọi F và I theo thứ tự là hình chiếu của điểm K trên BC và AC . Trên tia đối của tia IK lấy điểm D sao cho $IK = ID$, trên tia KF lấy điểm E sao cho $KF = FE$ ($E \neq K$). Chứng minh $\triangle DCE$ là tam giác đều.

3) Chứng minh ba điểm D, N, E thẳng hàng.

Lời giải



1) $\widehat{B} = 60^\circ$ (do $\widehat{A} = 90^\circ; \widehat{C} = 30^\circ$)

$\widehat{CBN} = \frac{2}{3}\widehat{ABC} = \frac{2}{3} \cdot 60^\circ = 40^\circ$

$\widehat{BCM} = \frac{2}{3}\widehat{ACB} = \frac{2}{3} \cdot 30^\circ = 20^\circ$

$$\widehat{BKC} = 180^\circ - (\widehat{CBN} + \widehat{BCM}) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{CKN} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \text{ (hai góc kề bù)}$$

$$2) \Delta KIC = \Delta DIC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow CK = CD \text{ và } \widehat{DCI} = \widehat{KCI} \text{ (1)}$$

$$\Delta KFC = \Delta EFC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow CK = CE \text{ và } \widehat{KCF} = \widehat{ECF} \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow CD = CE \Rightarrow \Delta DCE$ cân

$$\text{Có: } \widehat{DCE} = 2 \cdot \widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \Delta DCE \text{ đều}$$

$$3) \text{ Xét tam giác vuông } ANB \text{ có } \widehat{ANB} = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ \Rightarrow \widehat{BNC} = 110^\circ$$

$$\Delta CND = \Delta CNK \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{DNC} = \widehat{KNC} = 110^\circ \Rightarrow \widehat{CDN} = 60^\circ \left(\widehat{NCD} = 10^\circ; \widehat{DNC} = 110^\circ \right)$$

$$\text{Có } \Delta CDE \text{ đều (cmt)} \Rightarrow \widehat{CDE} = 60^\circ$$

$$\text{Do đó } \widehat{CDN} = \widehat{CDE} = 60^\circ$$

Suy ra: Tia DN trùng với tia DE hay 3 điểm D, N, E thẳng hàng

Câu 62. (HSG 7 huyện Gia Viễn – Ninh Bình 2022 - 2023)

Cho ΔABC vuông tại A ($AB < AC$), D là trung điểm của BC , trên tia đối của tia DA lấy điểm E sao cho $DE = DA$. Gọi H và K thứ tự là chân đường vuông góc hạ từ B và C xuống đường thẳng AE , M là chân đường vuông góc hạ từ D xuống AC .

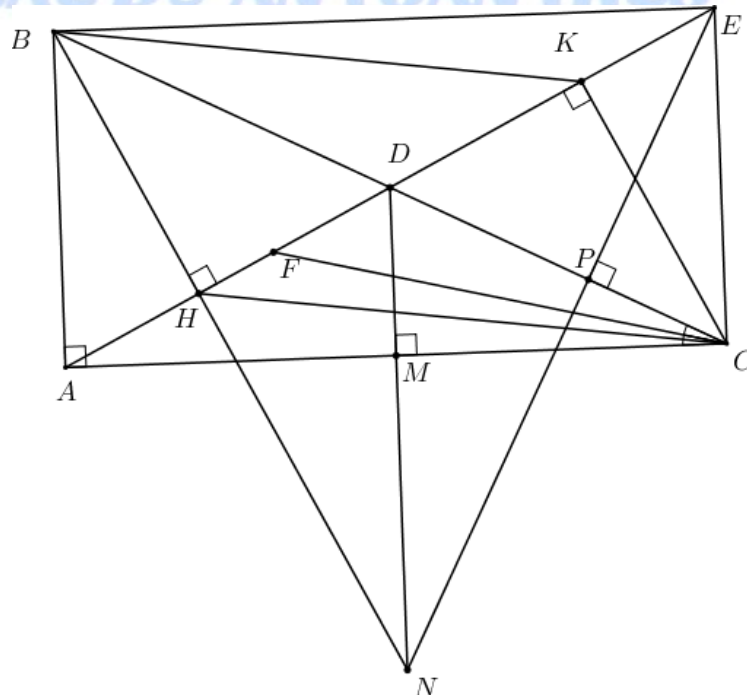
a) Chứng minh $BK = CH$.

b) Chứng minh $CD > KM$.

c) Từ E kẻ đường thẳng vuông góc với BC tại P và cắt BH tại N . Chứng minh ba điểm D, M, N thẳng hàng.

d) Giả sử $\widehat{ACB} = 36^\circ$, tia phân giác của \widehat{ACB} cắt AD tại F . Chứng minh ΔCEF cân.

Lời giải



a) Xét ΔHBD và ΔKCD có:

$$BD = CD \text{ (Vì } D \text{ là trung điểm của } BC \text{)}$$

$$\widehat{BDH} = \widehat{CDK} \text{ (Hai góc đối đỉnh)}$$

$$\widehat{BHD} = \widehat{CKD} = 90^\circ$$

Suy ra $\triangle HBD = \triangle KCD$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Suy ra $HD = KD$ (Hai cạnh tương ứng)

Xét $\triangle DBK$ và $\triangle DCH$ có:

$$BD = CD \text{ (Vì } D \text{ là trung điểm của } BC \text{)}$$

$$\widehat{BDK} = \widehat{CDH} \text{ (Hai góc đối đỉnh)}$$

$$HD = KD \text{ (Chứng minh trên)}$$

Suy ra $\triangle DBK = \triangle DCH$ (c – g – c)

$$\Rightarrow BK = CH \text{ (Hai cạnh tương ứng)}$$

b) Vì $\triangle ABC$ vuông tại A mà $BD = CD$

Suy ra $BD = CD = AD = \frac{1}{2}BC$ nên $AD = DC$ suy ra $\triangle ADC$ cân tại D .

Chứng minh: $\triangle ADC$ cân tại D , có DM là đường cao nên đồng thời là trung tuyến.

Suy ra M là trung điểm của AC .

Xét $\triangle ACK$ vuông tại K , có KM là trung tuyến nên $KM = \frac{1}{2}AC$ (1)

$$\text{Mà } CD = \frac{1}{2}BC \text{ (2)}$$

Lại có $\triangle ABC$ vuông tại A suy ra $BC > AC$ (3)

Từ (1), (2) và (3) Suy ra $CD > KM$.

c) Xét $\triangle ADC$ và $\triangle EDB$ có:

$$BD = CD \text{ (Vì } D \text{ là trung điểm của } BC \text{)}$$

$$\widehat{ADC} = \widehat{EDB} \text{ (Hai góc đối đỉnh)}$$

$$AD = DE \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \triangle ADC = \triangle EDB \text{ (c – g – c)} \Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{DEB} \text{ (hai góc tương ứng)}$$

Mà \widehat{DAC} và \widehat{DEB} là hai góc so le trong Suy ra $BE \parallel AC$

Xét $\triangle BEN$ có hai đường cao PB và EH cắt nhau tại D nên điểm D là trực tâm của $\triangle BEN$ suy ra $ND \perp BE$ (4)

Lại có $DM \perp AC$ (gt), mà $BE \parallel AC \Rightarrow NM \perp BE$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra ba điểm D, M, N thẳng hàng.

d) $\triangle ABC$ vuông tại A , $\widehat{ACB} = 36^\circ$ nên $\widehat{ABC} = 54^\circ$

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ECD$ có:

$$BD = CD \text{ (Vì } D \text{ là trung điểm của } BC \text{)}$$

$$\widehat{ADB} = \widehat{EDC} \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

$$AD = DE \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle ECD \text{ (c – g – c)} \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{ECD} = 54^\circ \text{ (hai góc tương ứng)}$$

$$\text{Do đó } \widehat{ACE} = \widehat{ACB} + \widehat{BCE} = 90^\circ$$

$$\text{Mà } \triangle ACD \text{ cân tại } D \Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{CAE} = 36^\circ$$

Mặt khác, CF là phân giác \widehat{ACB} nên $\widehat{ACF} = \widehat{DCF} = 18^\circ$

\widehat{CFE} là góc ngoài của $\triangle ACE$ nên $\widehat{CFE} = \widehat{ACF} + \widehat{EAC} = 18^\circ + 36^\circ = 54^\circ$

Ta lại có : $BD = AD$ suy ra $\triangle ABD$ cân tại D do đó $\widehat{ABD} = \widehat{BAD} = 54^\circ$

Mà $\triangle ABD = \triangle ECD$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CEF} = 54^\circ$

Do vậy $\widehat{CEF} = \widehat{CFE} = 54^\circ$ hay $\triangle CEF$ cân tại C .

Câu 63. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2017 - 2018)

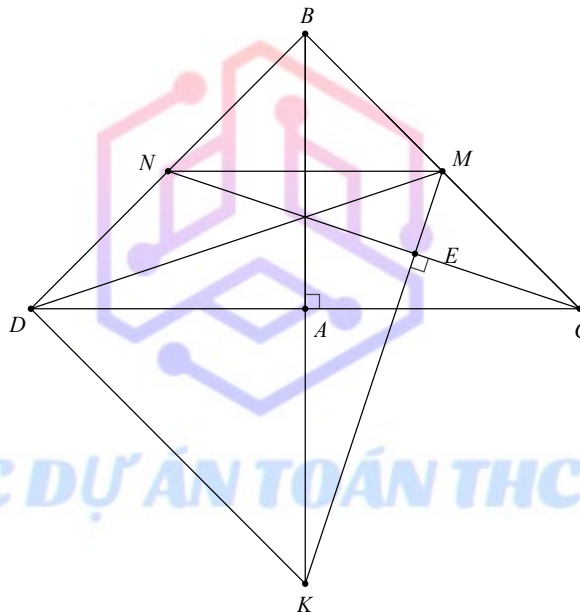
Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A . Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho $AD = AC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, BD .

a) Tam giác BDC là tam giác gì? Vì sao? So sánh DM và CN .

b) Từ M kẻ đường thẳng vuông góc với CN cắt tia BA tại K . Chứng minh: $\triangle BMK = \triangle CMD$.

c) Biết $AB = a$. Tính chu vi tam giác DMK .

Lời giải



a) Chứng minh được $\triangle BAD = \triangle BAC$ (c - g - c)

$\Rightarrow BD = BC$ và $\widehat{DBC} = \widehat{DBA} + \widehat{ABC} = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle BDC$ vuông cân tại B .

Chứng minh được: $\triangle BDM = \triangle BCN \Rightarrow DM = CN$

b) Vì $\triangle BDM = \triangle BCN \Rightarrow \widehat{BNC} = \widehat{BMD}$

$\triangle BNC$ vuông tại B nên $\widehat{BNC} + \widehat{BCN} = 90^\circ$

$\triangle CME$ vuông tại E nên $\widehat{MCE} + \widehat{CME} = 90^\circ$

Từ đó suy ra: $\widehat{CME} = \widehat{BMD} \Rightarrow \widehat{BMK} = \widehat{CMD}$

Chứng minh: $\triangle BMK = \triangle CMD$ (g - c - g)

c) $AB = a$ tính được $BC = a\sqrt{2}$ do áp dụng định lý Pytago với tam giác ABC .

Và cũng tính được $BD = BC = a\sqrt{2}$; $BM = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vì $\triangle BMK = \triangle CMD \Rightarrow MD = MK$

Chu vi $\triangle DMK$ là: $2MD + DK$

Tính được $DM = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ do áp dụng định lý Pytago vào $\triangle BDM$.

Chứng minh được: $\triangle BDK = \triangle BCK \Rightarrow DK = BC = a\sqrt{2}$

Chu vi $\triangle DMK$ là: $2MD + DK = 2a\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} + a\sqrt{2} = a\sqrt{10} + a\sqrt{2} = a(\sqrt{10} + \sqrt{2})$

Câu 64. (HSG 7 Lý Nhân, Hà Nam 2021 - 2022)

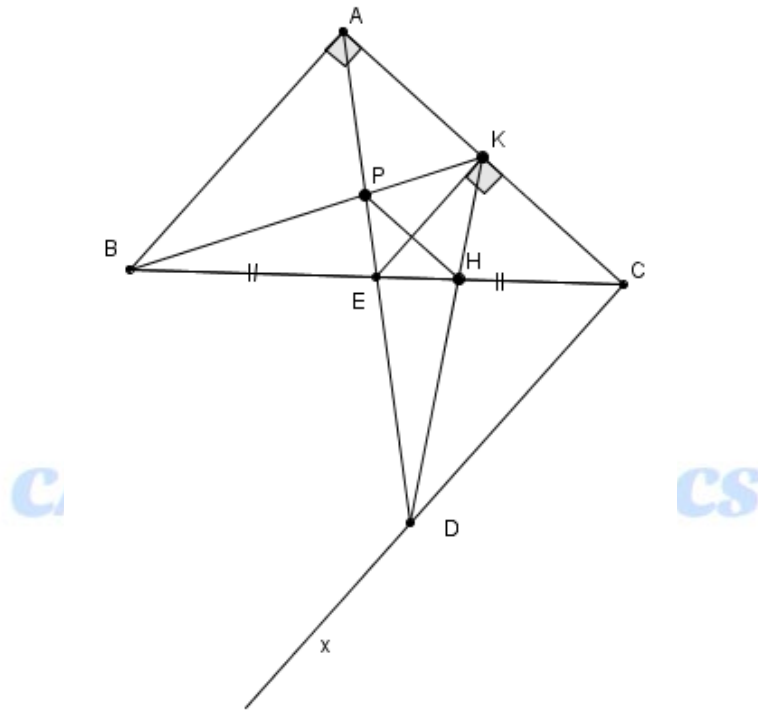
Cho tam giác ABC vuông tại A . Trên nửa mặt phẳng bờ AC chứa điểm B kẻ tia Cx song song với AB . Gọi E là trung điểm BC , tia AE cắt Cx tại D .

a) Chứng minh E là trung điểm của AD .

b) Từ E hạ EK vuông góc với AC (K thuộc AC). Chứng minh $\widehat{CDK} = \widehat{ABK}$.

c) BK cắt AE ở P , DK cắt BC tại H . Chứng minh PH song song với AC .

Lời giải



a) Ta có $DC \parallel AB$ (gt) mà $AB \perp AC$ (gt) nên $DC \perp AC$

Mặt khác tam giác ABC vuông tại A , trung tuyến AE . Suy ra $AE = BE = EC$

Lại có tam giác ACD vuông tại C , và có $E \in AD, EA = EC$ (1)

Xét $\triangle AEB$ và $\triangle DEC$ có $\widehat{AEB} = \widehat{CED}$ (đối đỉnh); $BE = EC$ (cmt); $\widehat{EBA} = \widehat{ECD}$ (so le trong)

Suy ra $\triangle AEB = \triangle DEC$ (g-c-g) $\Rightarrow AE = ED$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra E là trung điểm của AD .

b) Xét $\triangle ABC$ và $\triangle CDA$ có $\widehat{A} = \widehat{C} = 90^\circ$; AC cạnh chung; $BC = DA (= 2EC)$

Do đó $\triangle ABC = \triangle CDA$ (c-g-c) $\Rightarrow AB = CD$ (hai cạnh tương ứng)

Tam giác ABC vuông tại A , E là trung điểm BC . Suy ra $AE = EC = \frac{BC}{2}$

$\Rightarrow \triangle AEC$ cân tại E mà $EK \perp AC \Rightarrow EK$ cũng là trung tuyến AC hay $AK = KC$

Xét $\triangle AKB$ và $\triangle CKD$ có $AK = KC$ (cmt); $\widehat{A} = \widehat{C} = 90^\circ$; $AB = CD$ (cmt)

Suy ra $\triangle AKB = \triangle CKD$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{CDK} = \widehat{ABK}$ (hai góc tương ứng)

c) Vì $\triangle AKB = \triangle CKD$ (cmt) nên $BK = KD$ (cạnh tương ứng); $\widehat{AKB} = \widehat{CKD}$ (góc tương ứng)

Mà $\widehat{AKE} = \widehat{CKE} = 90^\circ$ nên $\widehat{PKE} = \widehat{HKE}$

Mặt khác $\triangle AEC$ cân tại E có EK đường cao đồng thời là phân giác nên $\widehat{PEK} = \widehat{HEK}$

Xét $\triangle EPK$ và $\triangle EHK$ có $\widehat{PEK} = \widehat{HEK}$ (cmt); EK cạnh chung; $\widehat{PKE} = \widehat{HKE}$ (cmt)

Suy ra $\triangle EPK = \triangle EHK$ (g-c-g) $\Rightarrow PE = EH$ (hai cạnh tương ứng)

Suy ra $\triangle PEH$ cân tại $E \Rightarrow \widehat{EHP} = \frac{180^\circ - \widehat{E}}{2}$ (3)

Mặt khác $\triangle AEC$ cân tại $E \Rightarrow \widehat{ECA} = \frac{180^\circ - \widehat{E}}{2}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{EHP} = \widehat{ECA}$ (đồng vị) nên PH song song với AC .

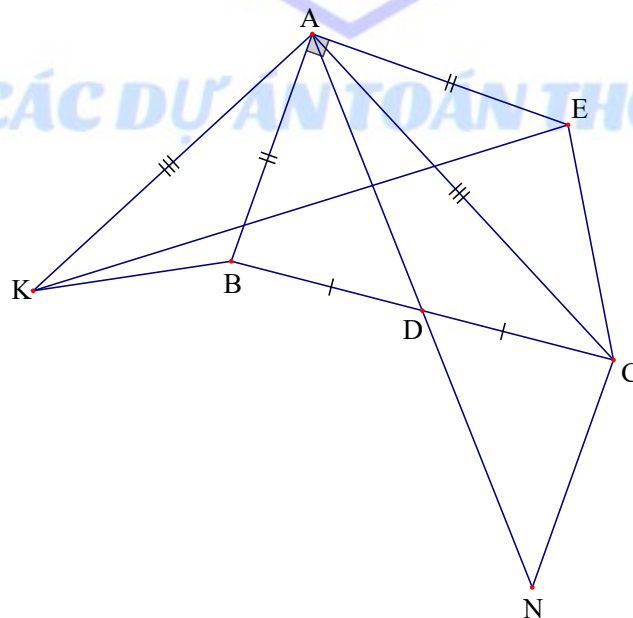
Câu 65. (HSG 7 huyện Anh Sơn 2022 - 2023; huyện Thiệu Hóa 2020 - 2021)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$), D là trung điểm BC . Trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB chứa điểm C , vẽ đoạn thẳng AE vuông góc với AB tại A và $AE = AB$. Trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AC , chứa điểm B vẽ đoạn AK vuông góc với AC tại A và $AK = AC$.

a) Chứng minh rằng: $EC = BK$.

b) Trên tia đối tia DA lấy điểm N sao cho $DN = DA$. Chứng minh $\triangle AKE = \triangle CAN$.

Lời giải



a) Vì $\widehat{KAB} + \widehat{BAC} = 90^\circ$; $\widehat{BAC} + \widehat{CAE} = 90^\circ$ nên $\widehat{KAB} = \widehat{CAE}$

Xét $\triangle KAB$ và $\triangle CAE$ có :

$$\left. \begin{array}{l} AK = AC \\ AB = AE \\ \widehat{KAB} = \widehat{CAE} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle KAB = \triangle CAE \text{ (c.g.c)} \Rightarrow EC = BK \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

b) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle CND$ có:

$$\left. \begin{array}{l} AD = DN \\ BD = DC \\ \widehat{ADB} = \widehat{CDN} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADB = \triangle NDC(\text{c.g.c}) \Rightarrow AB = CN = AE$$

Vì $\triangle ABD = \triangle NCD(\text{cmt}) \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CND}$

Mà chúng ở vị trí so le trong nên $AB \parallel NC$

Ta có: $\left. \begin{array}{l} AB \parallel NC \\ AB \perp AE \end{array} \right\} \Rightarrow NC \perp AE$

Lại có: $\widehat{EAK} = 90^\circ + \widehat{CAE}$

Mà: $AE \perp NC \Rightarrow \widehat{ACN} = \widehat{CAE} + 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{KAE} = \widehat{ACN}$

Xét $\triangle AKE$ và $\triangle ACN$ có: $\left. \begin{array}{l} AK = AC \\ AE = CN \\ \widehat{AKE} = \widehat{ACN} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AKE = \triangle ACN(\text{c.g.c})$

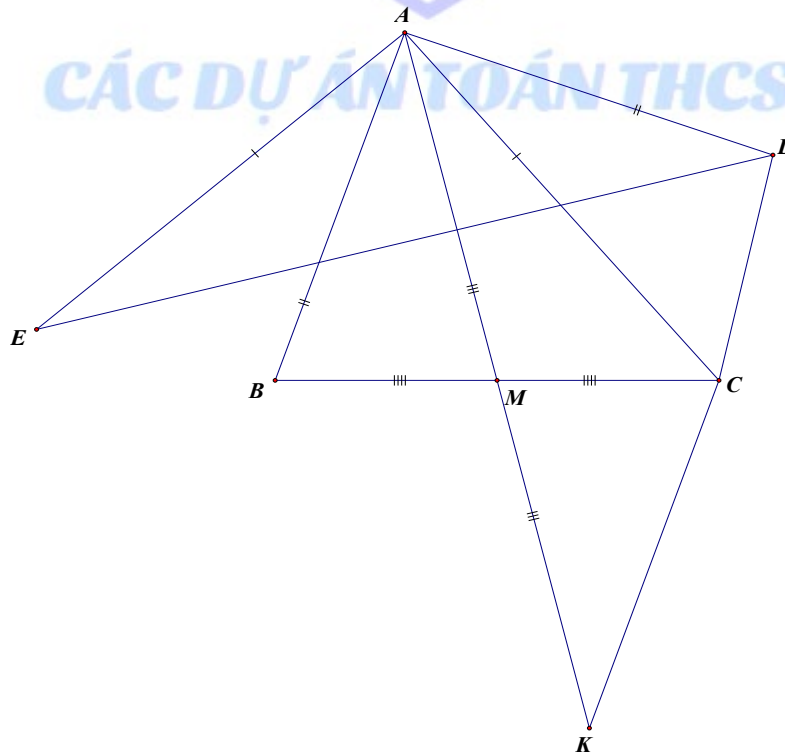
Câu 66. (HSG 7 huyện Nghi Xuân 2022 - 2023)

Cho tam giác nhọn ABC . Trên nửa mặt phẳng chứa C bờ AB vẽ AD vuông góc với AB và $AD = AB$. Trên nửa mặt phẳng chứa B bờ AC vẽ AE vuông góc với AC và $AE = AC$.

a) Chứng minh: $BE = CD$

b) Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh: $AM \perp ED$

Lời giải



a) Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ADC$ có:

$AE = AC; AB = AD; \widehat{BAE} = \widehat{DAC}(= 90^\circ - \widehat{BAC})$

$\Rightarrow \triangle ABE = \triangle ADC \Rightarrow BE = DC$ (cạnh tương ứng)

b) Lấy điểm K sao cho M là trung điểm của AK .

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle KCM$ có:

$$AM = MK; BM = MC; \widehat{BMA} = \widehat{AMC}$$

$$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle KCM \Rightarrow AB = CK; \widehat{BAM} = \widehat{CKM}$$

Mà: $AD = AB \Rightarrow CK = AD$

Xét $\triangle EAD$ và $\triangle ACK$ có: $AE = AC; CK = AD; \widehat{EAD} = \widehat{ACK} (=180^\circ - \widehat{BAC})$

$$\Rightarrow \triangle EAD = \triangle ACK \Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{CAK}$$

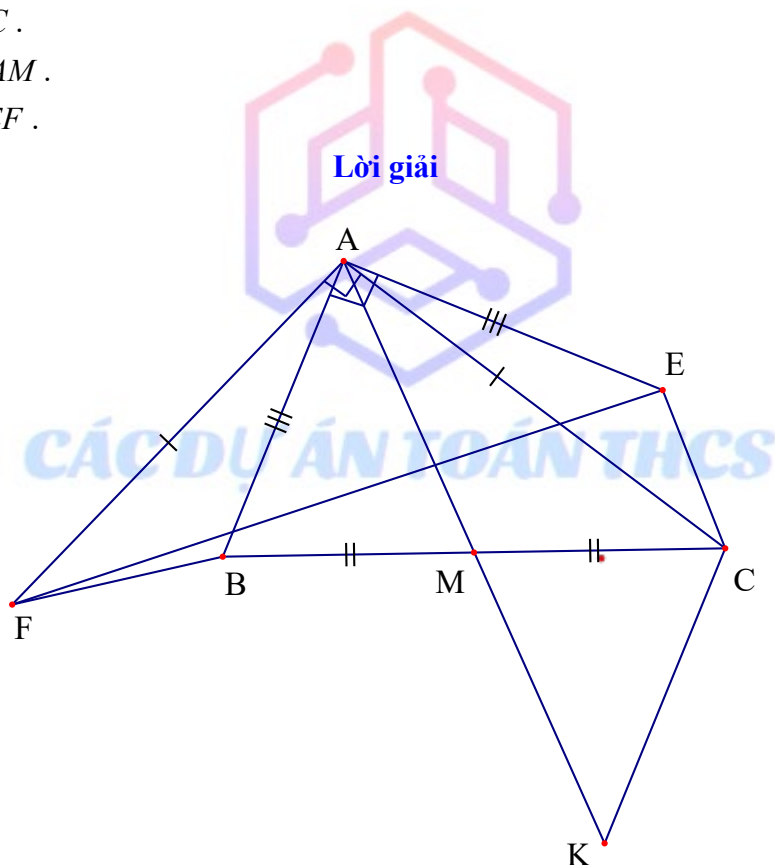
$$\Rightarrow \widehat{EAM} + \widehat{AED} = \widehat{EAM} + \widehat{KAC} = 90^\circ$$

Nên: $AM \perp ED$

Câu 67. (HSG 7 huyện Yên Định 2022 - 2023; huyện Thạch Khê 2018 - 2019; huyện Hương Khê 2017 - 2018; huyện Đất Mũi 2016 - 2017)

Cho $\triangle ABC$, trung tuyến AM . Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh C bờ là đường thẳng AB dựng đoạn AE vuông góc với AB và $AE = AB$. Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh B bờ là đường thẳng AC dựng đoạn AF vuông góc với AC và $AF = AC$. Chứng minh rằng:

- $FB = EC$.
- $EF = 2AM$.
- $AM \perp EF$.



a) Chứng minh $\triangle ABF = \triangle AEC$ (c - g - c) $\Rightarrow FB = EC$

b) Trên tia đối của tia MA lấy K sao cho $AK = 2AM$.

Ta có: $\triangle ABM = \triangle KCM \Rightarrow CK \parallel AB$

$$\Rightarrow \widehat{ACK} + \widehat{CAB} = \widehat{EAF} + \widehat{CAB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{ACK} = \widehat{EAF}$$

Xét $\triangle EAF$ và $\triangle KCA$ có:

$$AE = AB = CK; AF = AC \text{ (gt); } \widehat{ACK} = \widehat{EAF}$$

$$\Rightarrow \triangle EAF = \triangle KCA \text{ (c - g - c)} \Rightarrow EF = AK = 2AM$$

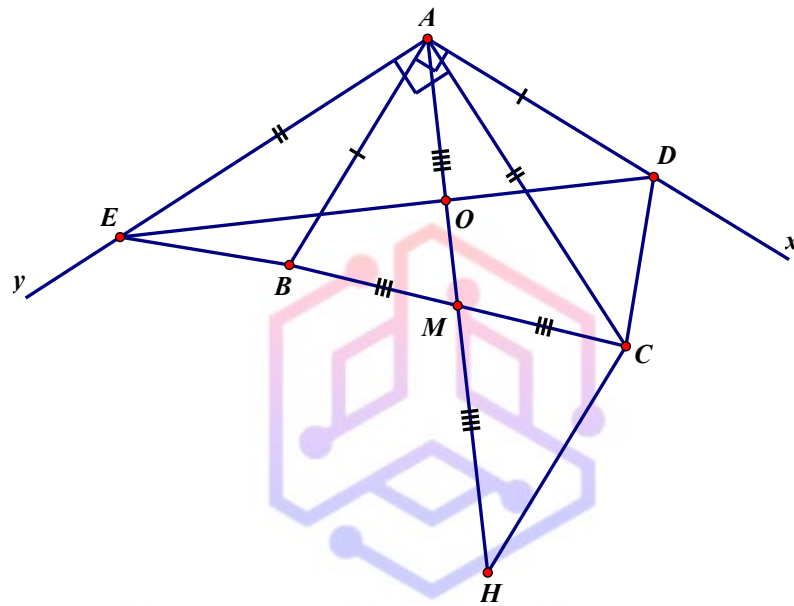
- c) Từ $\triangle EAF = \triangle KCA \Rightarrow \widehat{CAK} = \widehat{AFE}$
 $\Rightarrow \widehat{AFE} + \widehat{FAK} = \widehat{CAK} + \widehat{FAK} = 90^\circ \Rightarrow AK \perp EF$

Câu 68. (HSG 7 Vũ Thư, Thái Bình 2021 – 2022)

Cho $\triangle ABC$ nhọn. Kẻ tia Ax vuông góc với AB (tia AC nằm giữa hai tia Ax và AB), trên tia Ax lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Kẻ tia Ay vuông góc với AC (tia AB nằm giữa hai tia Ay và AC), trên tia Ay lấy điểm E sao cho $AE = AC$.

- a) Chứng minh $BE = CD$.
 b) Gọi M là trung điểm của BC . Lấy điểm H thuộc tia đối của tia MA sao cho $MH = MA$. Chứng minh $\triangle ADE = \triangle CHE$.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{BAE} + \widehat{BAC} = \widehat{yAC} = 90^\circ$ (vì $Ay \perp AC$),
 $\widehat{CAD} + \widehat{BAC} = \widehat{xAB} = 90^\circ$ (vì $Ax \perp AB$)

$\Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{CAD}$ (cùng phụ với \widehat{BAC}).

Xét $\triangle BAE$ và $\triangle DAC$ có:

$AB = AD$,

$AE = AC$ (giả thiết),

$\widehat{BAE} = \widehat{CAD}$ (chứng minh trên)

Do đó $\triangle BAE = \triangle DAC$ (c.g.c) $\Rightarrow BE = CD$ (hai cạnh tương ứng)..

b) Xét $\triangle AMB$ và $\triangle HMC$ có:

$BM = MC$ (vì M là trung điểm BC),

$AM = MH$ (giả thiết),

$\widehat{AMB} = \widehat{HMC}$ (đối đỉnh)

Do đó $\triangle AMB = \triangle HMC$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = CH$, $\widehat{ABM} = \widehat{MCH}$ (tương ứng).

Mà \widehat{ABM} và \widehat{MCH} ở vị trí so le trong so với AB và $CH \Rightarrow AB \parallel CH$

$\Rightarrow \widehat{ACH} + \widehat{BAC} = 180^\circ$ (hai góc trong cùng phía).

Lại có: $\widehat{BAC} + \widehat{EAD} = \widehat{BAC} + \widehat{EAB} + \widehat{BAD} = \widehat{EAC} + \widehat{BAD} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Lại có: $\widehat{BAC} + \widehat{EAD} = \widehat{BAC} + \widehat{EAB} + \widehat{BAD} = \widehat{EAC} + \widehat{BAD} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{EAD} = \widehat{ACH}.$$

Xét $\triangle ADE$ và $\triangle CHA$ có:

$$AE = AC \text{ (giả thiết)}$$

$$AD = AB \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\widehat{EAD} = \widehat{ACH} \text{ (chứng minh trên)}$$

Do đó $\triangle ADE = \triangle CHA$ (c.g.c)

Câu 69. (HSG 7 Phòng GD&ĐT Hoàng Hóa 2018 - 2019)

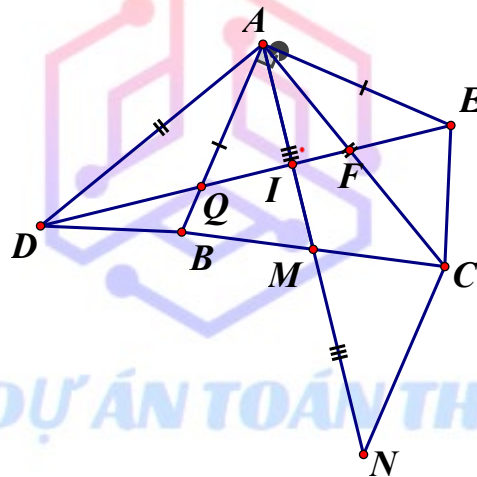
Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn, $AB < AC$, trung tuyến AM . Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm D , vẽ đoạn thẳng AD vuông góc với AB và $AD = AB$. Trên nửa mặt phẳng bờ AC chứa điểm E , vẽ đoạn thẳng AE vuông góc với AC và $AE = AC$.

a) Chứng minh $BD = CE$

b) Trên tia đối của tia MA lấy N sao cho $MN = MA$. Chứng minh: $\widehat{ACN} = 180^\circ - \widehat{BAC}$ và $\triangle ADE = \triangle CAN$

c) Chứng minh: $AP < AQ$

Lời giải



a) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ có:

$$AD = AC(gt)$$

$$AE = AB(gt);$$

$$\widehat{BAD} = \widehat{CAE} \text{ (cùng phụ với } \widehat{BAC} \text{)}$$

$$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle AEC(c.g.c)$$

$$\Rightarrow BD = CE \text{ (2 cạnh tương ứng)}$$

b) Xét $\triangle ABM$ và $\triangle NCM$ có:

$$AM = MN(gt);$$

$$BM = CM(gt);$$

$$\widehat{AMB} = \widehat{NMC} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle NCM(c.g.c)$$

$$\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{NCM} \text{ (hai góc tương ứng)}$$

$$\text{Do đó: } \widehat{ACN} = \widehat{ACB} + \widehat{BCN} = \widehat{ACB} + \widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{BAC}$$

$$+ \text{Ta có: } \widehat{DAE} = \widehat{DAC} + \widehat{BAE} - \widehat{BAC} = 180^\circ - \widehat{BAC}$$

$$\Rightarrow \widehat{DAE} = \widehat{ACN}$$

Xét $\triangle ADE$ và $\triangle ACN$ có:

$$CN = AE \text{ (cùng bằng } AB \text{),}$$

$$AC = AD(gt);$$

$$\widehat{DAE} = \widehat{ACN}(cmt)$$

$$\Rightarrow \triangle ADE = \triangle CAN(cgc)$$

c) Theo tính chất góc ngoài, ta có: $\widehat{AQP} = \widehat{QAD} + \widehat{QDA}$; $\widehat{APQ} = \widehat{PAE} + \widehat{PEA}$

Mà $AB < AC$ nên $AE < AD \Rightarrow \widehat{ADE} < \widehat{AED}$

Theo chứng minh trên ta có: $\widehat{QAD} = \widehat{PAE}$

Từ đó suy ra $\widehat{QAD} + \widehat{QDA} < \widehat{PAE} + \widehat{PEA}$

Hay $\widehat{AQP} < \widehat{APQ} \Rightarrow AP < AQ$

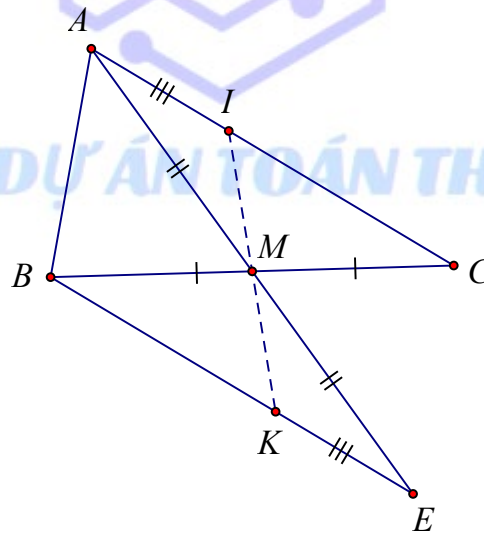
Câu 70. (HSG 7 huyện Sơn Động; huyện Kinh Môn 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có M là trung điểm của cạnh BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $MA = ME$

a) Chứng minh: $AC = EB$; $AC \parallel BE$.

b) Gọi I là một điểm trên đoạn thẳng AC , K là một điểm trên đoạn thẳng EB mà $AI = EK$. Chứng minh ba điểm I, M, K thẳng hàng.

Lời giải



a) Chứng minh: $AC = EB$; $AC \parallel BE$.

Xét $\triangle MAC$ và $\triangle MEB$ có:

$$MC = MB \text{ (do } M \text{ là trung điểm của } BC \text{)}$$

$$\widehat{AMC} = \widehat{EMB} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$MA = ME \text{ (GT)}$$

Do đó $\triangle MAC = \triangle MEB$ (c. g. c)

$\Rightarrow AC = BE$ (các cạnh tương ứng) và $\widehat{MAC} = \widehat{MEB}$ (các góc tương ứng)

Mà 2 góc này ở vị trí so le trong nên $AC \parallel BE$

Vậy $AC = EB$ và $AC \parallel BE$

b) Do $\triangle AMC = \triangle EMB$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \widehat{AMI} = \widehat{EMK}$ (hai góc tương ứng).

Xét $\triangle AMI$ và $\triangle EMK$ có:

$AI = EK$ (giả thiết), $\widehat{IAM} = \widehat{KEM}$ (theo ý a), $MA = ME$ (giả thiết)

$\Rightarrow \triangle AMI = \triangle EMK$ (c.g.c).

Mà $\widehat{AMK} + \widehat{EMK} = 180^\circ$ (hai góc kề bù) nên $\widehat{AMK} + \widehat{IMA} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{IMK} = 180^\circ$

Hay ba điểm I, M, K thẳng hàng.

Câu 71. (HSG 7 huyện Đông Hưng 2022 - 2023)

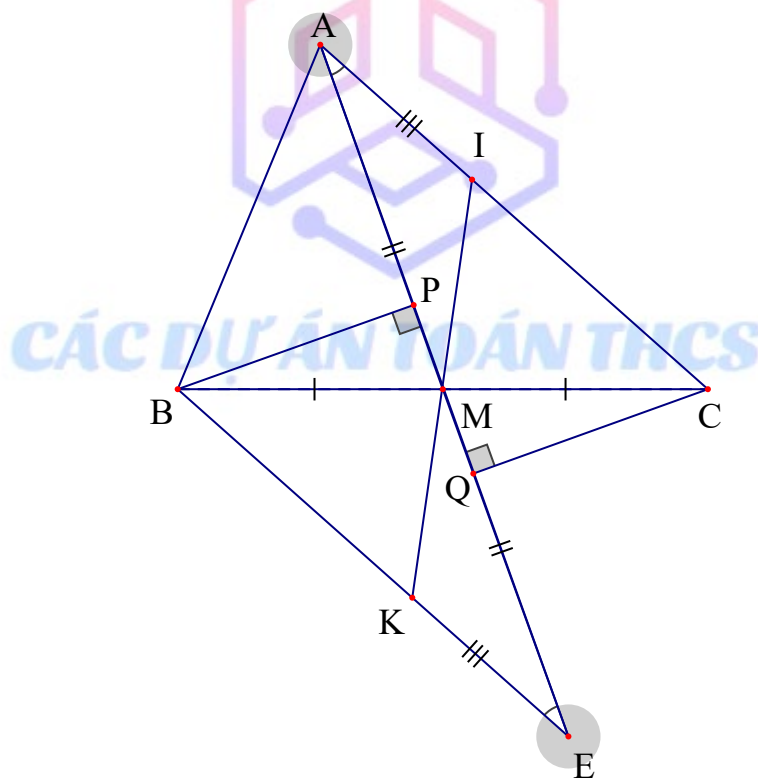
Cho tam giác ABC , M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$

a) Chứng minh rằng: $AC = EB$ và $AC \parallel BE$.

b) Gọi I là một điểm trên AC ; K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$. Chứng minh ba điểm I, M, K thẳng hàng.

c) Từ B kẻ $BP \perp AM$, từ C kẻ $CQ \perp AM$ ($P, Q \in AE$). Chứng minh $AP + AQ = 2AM$.

Lời giải



a) Xét $\triangle AMC$ và $\triangle EMB$ có:

$AM = EM$ (gt)

$\widehat{AMC} = \widehat{EMB}$ (đối đỉnh)

$BM = MC$ (gt)

$\Rightarrow \triangle AMC = \triangle EMB$ (c - g - c) $\Rightarrow AC = EB$ (hai cạnh tương ứng)

Vì $\triangle AMC = \triangle EMB$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MEB}$ (hai góc tương ứng)

mà hai góc này ở vị trí so le trong

nên $AC \parallel BE$

b) Xét $\triangle AMI$ và $\triangle EMK$ có:

$$AM = EM \text{ (gt)}$$

$$\widehat{MAI} = \widehat{MEK} \text{ (}\triangle AMC = \triangle EMB\text{)}$$

$$AI = EK \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \triangle AMI = \triangle EMK \text{ (c - g - c)} \Rightarrow \widehat{AMI} = \widehat{EMK} \text{ (hai góc tương ứng)}$$

$$\text{Mà } \widehat{AMI} + \widehat{IME} = 180^\circ \text{ (hai góc kề bù)}$$

$$\Rightarrow \widehat{EMK} + \widehat{IME} = 180^\circ \Rightarrow \text{Ba điểm } I, M, K \text{ thẳng hàng.}$$

c) Ta có $\triangle BPM = \triangle CQM$ (Vì $\widehat{BPM} = \widehat{CQM} = 90^\circ$; $BM = CM$; $\widehat{PMB} = \widehat{CMQ}$)

$$\Rightarrow PM = QM \Rightarrow AP + AQ = AM - PM + AM + MQ = 2AM$$

Câu 72. (HSG 7 huyện Krông Ana; trường Bắc Sơn, huyện Hưng Hà 2022 - 2023; huyện Thuận Thành, Bắc Ninh 2021 - 2022; trường Nguyễn Chí 2017 - 2018)

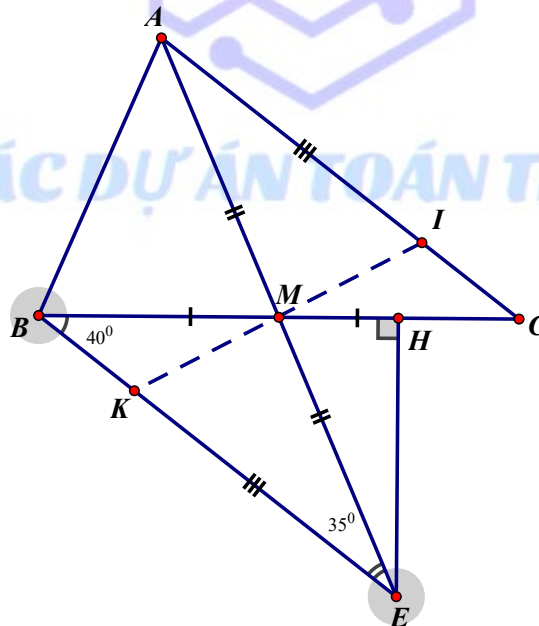
Cho $\triangle ABC$, M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$.

a) Chứng minh rằng: $AC = EB$ và $AC \parallel BE$.

b) Gọi I là một điểm trên AC , K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$. Chứng minh ba điểm I, M, K thẳng hàng.

c) Từ E kẻ $EH \perp BC$ ($H \in BC$). Biết $\widehat{HBE} = 50^\circ$, $\widehat{MEB} = 25^\circ$. Tính \widehat{HEM} và \widehat{BME} .

Lời giải



a) Xét $\triangle AMC$ và $\triangle EMB$ có:

$$AM = EM \text{ (gt)}$$

$$\widehat{AMC} = \widehat{EMB} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$BM = MC \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \triangle AMC = \triangle EMB \text{ (c - g - c)} \Rightarrow AC = EB \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

Vì $\triangle AMC = \triangle EMB$ (cmt)

$$\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MEB} \text{ (hai góc tương ứng)}$$

mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $AC \parallel BE$

b) Xét ΔAMI và ΔEMK có:

$$AM = EM \text{ (gt); } \widehat{MAI} = \widehat{MEK} \text{ (}\Delta AMC = \Delta EMB\text{); } AI = EK \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \Delta AMI = \Delta EMK \text{ (c - g - c)} \Rightarrow \widehat{AMI} = \widehat{EMK} \text{ (hai góc tương ứng)}$$

Mà $\widehat{AMI} + \widehat{IME} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$$\Rightarrow \widehat{EMK} + \widehat{IME} = 180^\circ \Rightarrow \text{Ba điểm } I, M, K \text{ thẳng hàng.}$$

c) Trong tam giác vuông BHE ($\widehat{H} = 90^\circ$) có $\widehat{HBE} = 50^\circ$.

$$\Rightarrow \widehat{HBE} = 90^\circ - \widehat{HBE} = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ \Rightarrow \widehat{HEM} = \widehat{HEB} - \widehat{MEB} = 40^\circ - 25^\circ = 15^\circ$$

\widehat{BME} là góc ngoài tại đỉnh M của ΔHME .

$$\Rightarrow \widehat{BME} = \widehat{HEM} + \widehat{MHE} = 15^\circ + 90^\circ = 105^\circ$$

Câu 73. (HSG 7 trường Hùng Thư 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC , M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Chứng minh rằng:

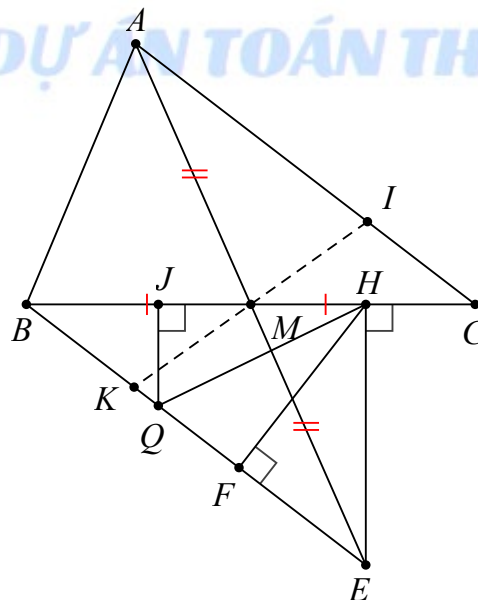
a) $AC = EB$ và $AC \parallel BE$.

b) Gọi I là một điểm trên AC ; K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$. Chứng minh ba điểm I, M, K thẳng hàng.

c) Từ E kẻ $EH \perp BC$ ($H \in BC$). Biết $\widehat{HBE} = 50^\circ$, $\widehat{MEB} = 25^\circ$. Tính \widehat{HEM} và \widehat{BME} .

d) Từ H kẻ $HF \perp BE$ ($F \in BE$). Chứng minh rằng: $HF + BE > BH + HE$.

Lời giải



a) Xét ΔAMC và ΔEMB có:

$$AM = ME \text{ (gt); } \widehat{AMC} = \widehat{EMB} \text{ (đối đỉnh); } BM = MC \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \Delta AMC = \Delta EMB \text{ (c - g - c)}$$

$$\Rightarrow AC = EB \text{ và } \widehat{MAC} = \widehat{MEB}$$

Mà 2 góc \widehat{MAC} và \widehat{MEB} ở vị trí so le trong nên $AC \parallel BE$.

b) Xét ΔAMI và ΔEMK có:

$$AM = EM \text{ (gt); } \widehat{MAI} = \widehat{MEK} \text{ (do } \Delta AMC = \Delta EMB); AI = EK \text{ (gt)}$$

Nên $\Delta AMI = \Delta EMK$ (c - g - c) $\Rightarrow \widehat{AMI} = \widehat{EMK}$ (hai góc tương ứng)

Mà $\widehat{AMI} + \widehat{IME} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$$\Rightarrow \widehat{EMK} + \widehat{IME} = \widehat{AMI} + \widehat{IME} = 180^\circ.$$

Suy ra ba điểm I, M, K thẳng hàng.

c) Trong tam giác vuông BHE ($\widehat{H} = 90^\circ$) có $\widehat{HBE} = 50^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{HEB} = 90^\circ - \widehat{HBE} = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{HEM} = \widehat{HEB} - \widehat{MEB} = 40^\circ - 25^\circ = 15^\circ$$

\widehat{BME} là góc ngoài tại đỉnh M của ΔHEM .

Nên $\widehat{BME} = \widehat{HEM} + \widehat{MHE} = 15^\circ + 90^\circ = 105^\circ$ (định lý góc ngoài của tam giác)

d) Tam giác BHE vuông tại H nên $BE > HE$, $EF < HE$

Do đó trên BE tồn tại điểm Q nằm giữa B và F sao cho $QE = HE$.

Ta có ΔQHE cân tại E nên $\widehat{HQE} = \widehat{QHE}$

$$\text{Mà } \begin{cases} \widehat{BHQ} + \widehat{QHE} = 90^\circ \\ \widehat{HQE} + \widehat{QHF} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{BHQ} = \widehat{QHF}$$

Kẻ $QJ \perp BH$.

Ta có $\Delta QJH = \Delta QFH$ (ch - gn)

$$\Rightarrow HF = JH, BQ > BJ.$$

Do đó $FH + BE = FH + BQ + QE > JH + BJ + HE = HB + HE$.

Vậy $FH + BE > HB + HE$.

Câu 74. (HSG 7 huyện Tam Dương 2022 - 2023)

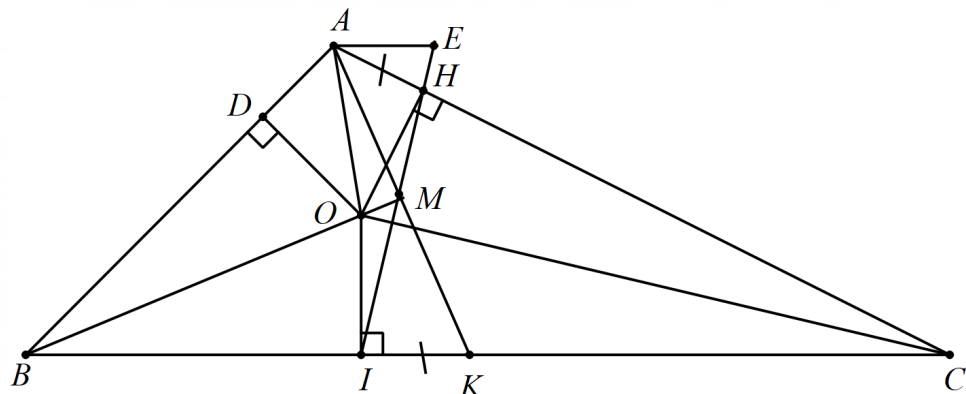
Cho tam giác ABC có $AB < AC < BC$ gọi O là giao điểm của ba đường phân giác của tam giác ABC . Kẻ OH vuông góc với AC tại H , OI vuông góc với BC tại I .

a) Chứng minh ΔCHI là tam giác cân

b) Trên đoạn AC lấy K sao cho $IK = AH$, gọi M là giao điểm của AK và HI . Chứng minh M là trung điểm của AK .

c) Chứng minh B, O, M thẳng hàng

Lời giải



a) Xét $\triangle CIO$ và $\triangle CHO$

Có CO chung

$$\widehat{CIO} = \widehat{CHO} = 90^\circ$$

Nên $\triangle CIO = \triangle CHO \Rightarrow CI = CH \Rightarrow \triangle CHI$ cân tại C

b) Kẻ $AE \parallel BC$ ta có $\widehat{AEH} = \widehat{HIC}$; $\widehat{IHC} = \widehat{AHE}$; $\widehat{IHC} = \widehat{HIC}$

Nên $\widehat{AEH} = \widehat{AHE}$ suy ra $\triangle AEH$ cân tại A

$$\Rightarrow AE = AH = IK$$

Xét $\triangle AEM, \triangle KMI$ có $\widehat{MAE} = \widehat{MIK}$; $AE = IK$; $\widehat{AMI} = \widehat{KMI}$

$$\triangle AEM = \triangle KIM \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AM = KM$$

Vậy M là trung điểm của AK

c) Kẻ $OD \perp AB$, xét $\triangle AOD$ & $\triangle AOH$ có OA chung,

$$\widehat{ADO} = \widehat{AHO} = 90^\circ; \widehat{OAD} = \widehat{OAH} \Rightarrow \triangle OAD = \triangle OAH \Rightarrow OD = OH$$

Ta chứng minh $\triangle BOD = \triangle BOI \Rightarrow BD = BI \Rightarrow BK = BI + IK = BD + AD = BA$

$$\Rightarrow \triangle BKA \text{ cân tại } B \Rightarrow BO \perp AK$$

Chứng minh tương tự ta có $\Rightarrow OM \perp AK$

$$\Rightarrow O, M, B \text{ thẳng hàng}$$

Câu 75. (HSG 7 TP Lào Cai 2022 - 2023)

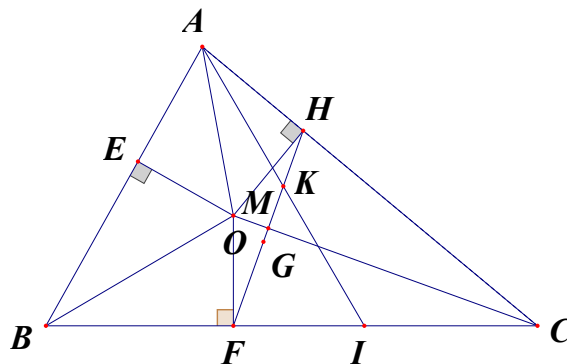
Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn, $AB < AC < BC$. Các tia phân giác của góc A và góc C cắt nhau tại O . Gọi F là hình chiếu của O trên BC ; H là hình chiếu của O trên AC . Lấy điểm I trên đoạn FC sao cho $FI = AH$. Gọi K là giao điểm của FH và AI .

a) Chứng minh $\triangle FCH$ cân; $OA = OI$.

b) Gọi M là điểm trên đoạn thẳng FH sao cho $MI = FI$. Chứng minh $MI \parallel AC$.

c) Chứng minh K là trung điểm của AI và 3 điểm B, O, K thẳng hàng

Lời giải



a) Chứng minh $\triangle FCH$ cân; $OA = OI$.

Xét $\triangle CHO$ và $\triangle CFO$ Có:

$$\widehat{CHO} = \widehat{CFO} = 90^\circ$$

CO là cạnh chung

$$\widehat{HCO} = \widehat{FCO} \text{ (vì } CO \text{ là phân giác } \widehat{FCH} \text{)}$$

Suy ra: $\triangle CHO = \triangle CFO$ (c.h-g.n) $\Rightarrow CH = CF \Rightarrow \triangle FCH$ cân tại C

Xét ΔAHO và ΔIFO có:

$$\widehat{CHO} = \widehat{CFO} = 90^\circ$$

$$AH = FI \text{ (gt)}$$

$OH = OF$ (Tính chất đồng quy của 3 đường phân giác)

$\Delta AHO = \Delta IFO$ (c.g.c) suy ra $OA = OI$ (2 cạnh tương ứng)

b) Xét ΔFMI cân tại I ($MI = FI$ giả thiết) $\Rightarrow \widehat{MFI} = \widehat{FMI}$ (1)

Xét ΔFMC cân tại $C \Rightarrow \widehat{HFC} = \widehat{FHC}$ (2)

$$\text{Từ (1); (2)} \Rightarrow \widehat{MFI} = \widehat{FMI} = \widehat{FHC}$$

$\Rightarrow \widehat{MCH} = \widehat{FIM}$ mà 2 góc ở vị trí đồng vị nên $MI \parallel AC$.

c) +) Qua I vẽ $IG \parallel AC$ ($G \in FH$)

Ta có ΔFCH cân tại $C \Rightarrow \widehat{CHF} = \widehat{CFH}$ (1)

Mà $\widehat{CHF} = \widehat{FGI}$ (đồng vị, $IG \parallel AC$) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{CFH} = \widehat{FGI}$ hay $\widehat{IFG} = \widehat{IGF}$,

Vậy ΔIFG cân tại $I \Rightarrow FI = GI$, mặt khác:

$$FI = AH \text{ nên } GI = AH (= FI)$$

Ta lại có: $\widehat{IGK} = \widehat{AHK}$; $\widehat{HAK} = \widehat{GIK}$ (so le trong, $IG \parallel AC$)

Xét ΔAHK và ΔIGK có:

$$\widehat{IGK} = \widehat{AHK} \text{ (cmt)}; GI = AH \text{ (cmt)}; \widehat{HAK} = \widehat{GIK} \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \Delta AHK = \Delta IGK \text{ (g-c-g)}$$

$$\Rightarrow AK = KI \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

Hay K là trung điểm của AI

+) Vẽ $OE \perp AB$ tại E .

Tương tự câu a, ta có: $\Delta AEH, \Delta BEF$ thứ tự cân tại A, B .

Suy ra $BE = BF$ và $AE = AH$.

$$BA = BE + EA = BF + AH = BF + FI = BI$$

$$\Rightarrow \Delta ABI \text{ cân tại } B.$$

Mà BO là phân giác của \widehat{B} , BK là đường trung tuyến của ΔABI

nên B, O, K là ba điểm thẳng hàng.

Câu 76. (HSG 7 huyện Quan Sơn; huyện Hoàng Hóa; trường Hồng Lĩnh, huyện Hưng Hà 2022 - 2023; trường Lê Hồng Phong; trường Nhon Trí 2018 - 2019; trường Kim An; trường Phú Trường; trường Lý Thường Kiệt 2017- 2018; trường Giao Tân; trường Nguyễn Khuyến 2016 - 2017)

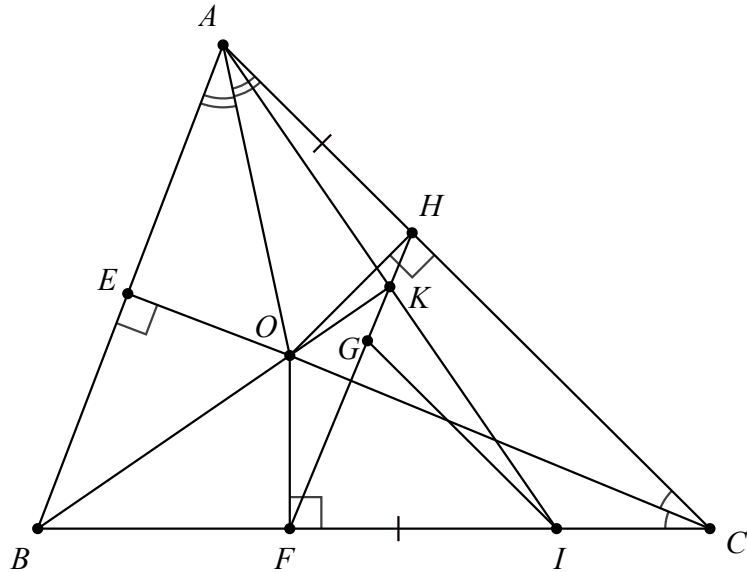
Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC < BC$. Các tia phân giác của \widehat{A} và \widehat{C} cắt nhau tại O . Gọi F là hình chiếu của O trên BC ; H là hình chiếu của O trên AC . Lấy điểm I trên đoạn FC sao cho $FI = AH$. Gọi K là giao điểm của FH và AI .

1) Chứng minh ΔFCH cân.

2) Chứng minh $AK = KI$.

3) Chứng minh ba điểm B, O, K thẳng hàng.

Lời giải



1) Xét ΔCHO và ΔCFO có:

OC là cạnh chung

$\widehat{OCH} = \widehat{OCF}$ (vì CO là tia phân giác của \widehat{ACB})

Do đó $\Delta CHO = \Delta CFO$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Suy ra: $CH = CF$.

Vậy ΔFCH cân tại C .

2) Vẽ $IG \parallel AC$ ($G \in FH$)

Suy ra $\widehat{FIG} = \widehat{FCH}$ và $\widehat{FGI} = \widehat{FHC}$ (hai góc so le trong)

Mà $\widehat{FCH} = \widehat{FHC}$ (vì ΔFCH cân tại C)

Nên $\widehat{FIG} = \widehat{FGI}$

Do đó ΔFIG cân tại I .

$\Rightarrow IG = IF$

Mà $FI = AH$ nên $AH = IG$

Ta có $\widehat{IGK} + \widehat{IGF} = 180^\circ$; $\widehat{AHK} + \widehat{FHC} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

Mà $\widehat{IGF} = \widehat{FHC}$ (cmt)

Nên $\widehat{IGK} = \widehat{AHK}$

ΔAHK có $\widehat{HAK} + \widehat{AKH} + \widehat{AHK} = 180^\circ$

ΔIKG có $\widehat{KIG} + \widehat{IKG} + \widehat{IGK} = 180^\circ$

Mà $\widehat{IGK} = \widehat{AHK}$ (cmt); $\widehat{AKH} = \widehat{IKG}$ (hai góc đối đỉnh)

Nên $\widehat{HAK} = \widehat{KIG}$

Xét ΔAHK và ΔIKG có:

$AH = IG$ (cmt)

$\widehat{HAK} = \widehat{KIG}$ (cmt)

$\widehat{AHK} = \widehat{IGK}$ (cmt)

Do đó $\Delta AHK = \Delta IGK$ ($g - c - g$).

Suy ra $AK = KI$ (hai cạnh tương ứng)

3) - Vẽ $OE \perp AB$ tại E .

Cách 1

Tương tự câu a ta có: $\Delta AEH, \Delta BEF$ thứ tự cân tại A, B . Suy ra: $BE = BF$ và $AE = AH$.

$BA = BE + EA = BF + AH = BF + FI = BI$. Suy ra: ΔABI cân tại B .

Mà BO là phân giác góc B , và BK là đường trung tuyến của ΔABI

Nên: B, O, K là ba điểm thẳng hàng.

Cách 2:

ΔABC có 2 tia phân giác AO và CO cắt nhau tại O

Nên BO là tia phân giác thứ ba của \widehat{ABC} (*)

$\Delta AOB = \Delta IOB$ ($g.c.g$) nên $AB = BI$

Chứng minh được: $\Delta ABK = \Delta IBK$ ($c.c.c$) $\Rightarrow \widehat{ABK} = \widehat{IBK}$

Từ đó suy ra BK là tia phân giác của \widehat{ABC} (**)

Từ (*) và (**) suy ra tia BK, BO trùng nhau

Hay B, O, K là ba điểm thẳng hàng.

Câu 77. (HSG 7 Tp Bắc Giang 2022-2023)

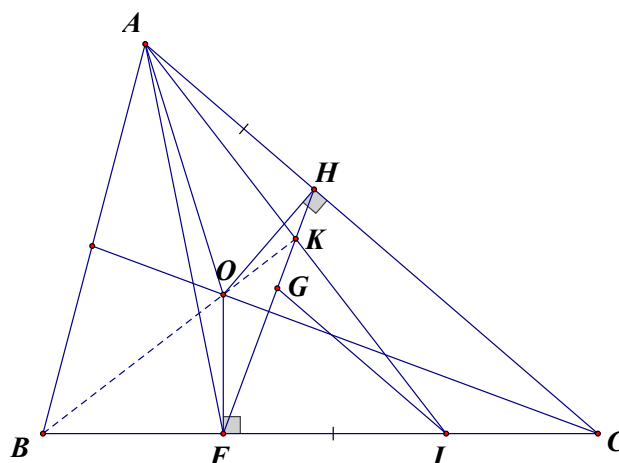
Cho tam giác ABC có ba góc nhọn có $AB < AC$. Các tia phân giác của \widehat{A} và \widehat{C} cắt nhau tại O . Gọi F và H lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ O xuống các cạnh BC và AC .

a) Chứng minh ΔHFC cân tại C .

b) Trên cạnh FC lấy điểm I sao cho $AH = FI$. Qua I kẻ đường thẳng song song AC cắt FH tại G . Gọi K là giao điểm của AI và FH . Chứng minh $\Delta AHK = \Delta IGK$.

c) Chứng minh ba điểm B, O, K thẳng hàng.

Lời giải



a) Ta có $OH \perp AC$ tại H và $OF \perp BC$ tại F nên $\widehat{OHC} = \widehat{OFC} = 90^\circ$

Lại có CO là phân giác của \widehat{ACB} nên $\widehat{OCH} = \widehat{OCF}$

Chỉ ra $\Delta OHC = \Delta OFC$ (cạnh huyền-góc nhọn)

Suy ra $CH = CF \Rightarrow \Delta HCF$ cân tại C (đpcm)

b) Chỉ ra ΔIGF cân tại $I \Rightarrow IG = IF = AH$

Ta có $IG \parallel AC$ nên $\widehat{KIG} = \widehat{KAH}; \widehat{KGI} = \widehat{KHA}$ (hai góc so le trong)

$\Delta AHK = \Delta IGK$. (g-c-g)

c) Kẻ OE vuông góc AB tại E . Chỉ ra $OE = OF$ và $\Delta OBE = \Delta OBF$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông). Từ đó chứng minh được BO là phân giác của \widehat{ABC} (1)

Từ $\Delta AHK = \Delta IGK$ suy ra $KA = KI$ (hai cạnh tương ứng)

Chứng minh $\Delta ABK = \Delta IBK$ (c-c-c)

Chỉ ra BK là phân giác của \widehat{ABC} (2)

Từ (1) và (2) ta có B, O, K thẳng hàng.

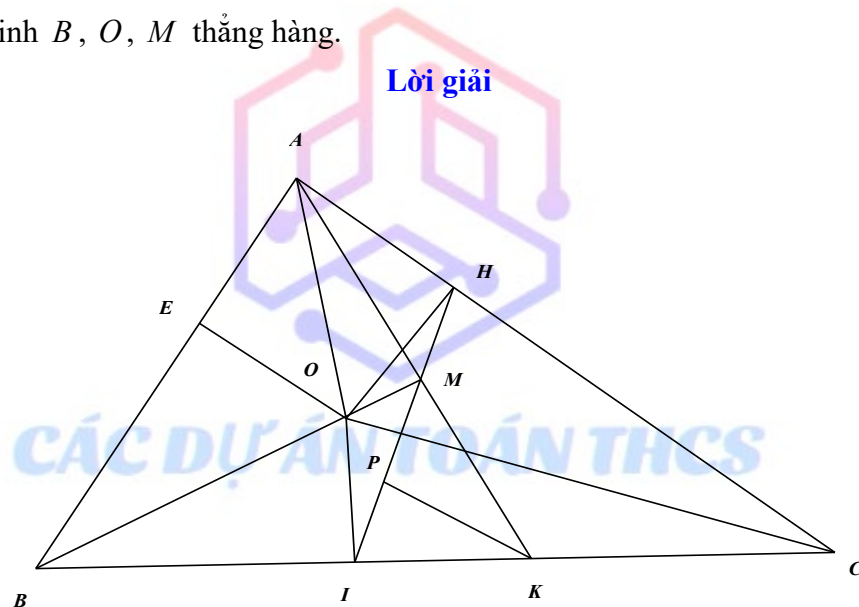
Câu 78. (HSG 7 Thị xã Kinh Môn, tỉnh Hải Dương 2020 – 2021)

Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC < BC$, O là giao điểm ba tia phân giác các góc trong của tam giác. Kẻ OH vuông góc AC tại H , OI vuông góc BC tại I .

1) Chứng minh ΔCHI cân.

2) Trên đoạn IC lấy K sao cho $IK = AH$, gọi M là giao điểm của AK và HI . Chứng minh M là trung điểm của AK .

3) Chứng minh B, O, M thẳng hàng.



1) Xét ΔCHO và ΔCIO có: $\widehat{OHC} = \widehat{OIC} = 90^\circ$, OC chung, $\widehat{OCH} = \widehat{OCI}$ (gt)

$\Rightarrow \Delta CHO = \Delta CIO$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow CH = CI$ (hai cạnh tương ứng)

Suy ra ΔCHI cân tại C .

2) Từ K kẻ đường thẳng song song với AC , cắt HI tại P (1)

Suy ra $\widehat{KPI} = \widehat{CHI}$ (đồng vị)

Mà $\widehat{CHI} = \widehat{CIH}$ (vì ΔCHI cân tại C)

$\Rightarrow \widehat{KPI} = \widehat{KIP} \Rightarrow \Delta KPI$ cân tại K

$\Rightarrow KI = KP$ mà $KI = AH \Rightarrow PK = AH$

Từ (1) suy ra: $\widehat{AHM} = \widehat{KPM}$, $\widehat{MAH} = \widehat{MKP}$ (hai góc so le trong)

Xét ΔAHM và ΔKPM có:

$$AH = PK \text{ (cmt)}, \widehat{AHM} = \widehat{KPM} \text{ (cmt)}, \widehat{MAH} = \widehat{MKP} \text{ (cmt)}$$

Do đó $\triangle AHM = \triangle KPM$ (g-c-g), suy ra $AM = MK$.

3) Kẻ OE vuông góc với AB tại E

Tương tự ý 1 ta chứng minh được $BI = BE$, $AH = AE$

mà $AH = IK$ (gt) nên $IK = AE$

Do đó: $BI + IK = BE + AE$ suy ra $BK = BA \Rightarrow \triangle BAK$ cân tại B

mà M là trung điểm của AK

Do đó $\triangle BAK$ cân tại B có BM là đường trung tuyến

Suy ra BM là tia phân giác của \widehat{ABK}

Mà BO là tia phân giác của \widehat{ABK}

Do đó B, O, M thẳng hàng.

Câu 79. (HSG 7 TP Thái Bình, Thái Bình, Trường Trần Hãn 2021 - 2022)

Cho tam giác $\triangle ABC$ vuông cân tại A . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AB, AC .

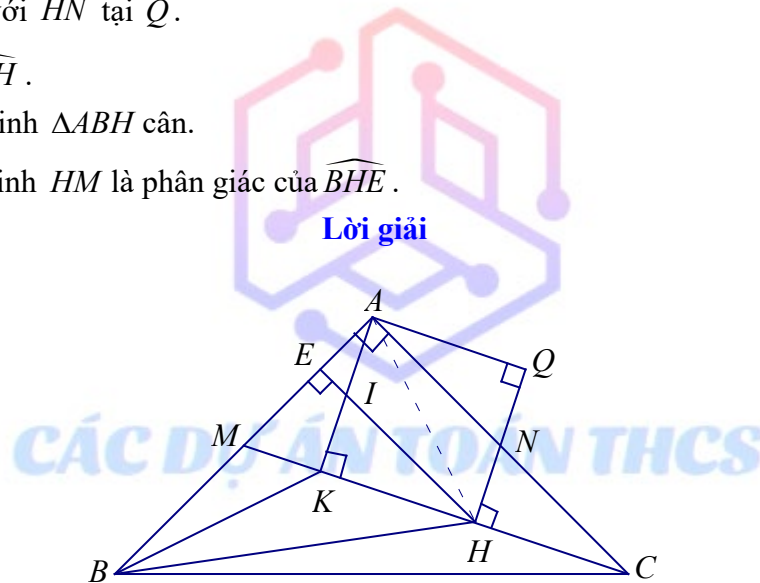
Kẻ NH vuông góc CM tại H, HE vuông góc AB tại E, AK vuông góc CM tại K, AQ vuông góc với HN tại Q .

a) Tính \widehat{BKH} .

b) Chứng minh $\triangle ABH$ cân.

c) Chứng minh HM là phân giác của \widehat{BHE} .

Lời giải



a) Ta có: $AK \parallel QH$ ($AK \perp KH, QH \perp KH$) (1)

Mà: $AQ \perp QH$ và $HK \perp AK$ (gt) $\Rightarrow AQ \parallel HK$ (Từ vuông góc đến song song) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AQ = KH; AK = QH$

Lại có: $AK = AQ$ (gt) $\Rightarrow AK = AQ = QH = HK$

$\Rightarrow \triangle AQH$ vuông cân tại Q nên $\widehat{AHQ} = 45^\circ$

$\Rightarrow \widehat{AHC} = \widehat{AHQ} + \widehat{QHC} = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$ (1)

Ta có $\triangle AKB = \triangle CHA$ (c-g-c) vì:

$AK = CH$ (cmt); $AB = AC$ (gt); $\widehat{BAK} = \widehat{HCA}$ (cùng phụ \widehat{KAC})

$\Rightarrow \widehat{AKB} = \widehat{AHC}$ (hai góc tương ứng)

Mà $\widehat{AHC} = 135^\circ$ (chứng minh trên) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{AKB} = 135^\circ$

Mặt khác $\widehat{AKB} + \widehat{BKH} + \widehat{AKH} = 360^\circ \Rightarrow 135^\circ + \widehat{BKH} + 90^\circ = 360^\circ \Rightarrow \widehat{BKH} = 135^\circ$

b) Xét ΔBKA và ΔBKH có:

BK chung, $\widehat{AKB} = \widehat{BKH}$ ($=135^\circ$), $KA = KH$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta BKA = \Delta BKH$ (c-g-c) $\Rightarrow BA = BH$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow \Delta BAH$ cân tại B

c) Ta có $\widehat{MAK} = \widehat{MHE}$ (cùng phụ với \widehat{AMH}) hay $\widehat{BAK} = \widehat{KHI}$

Vì $\Delta BKA = \Delta BKH \Rightarrow \widehat{BAK} = \widehat{BHK}$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow \widehat{BHK} = \widehat{KHI}$

Mà HM nằm giữa hai tia HE và HB nên HM là tia phân giác của \widehat{BHE} .

Câu 80. (HSG 7 huyện Quảng Xương 2022 - 2023)

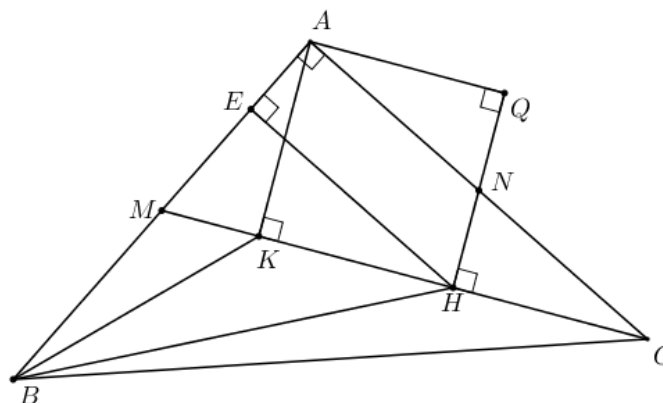
Cho ΔABC vuông cân có đáy là BC . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC . Kẻ NH vuông góc với CM tại H . Kẻ HE vuông góc với AB tại E . Kẻ AK vuông góc với CM tại K . Kẻ AQ vuông góc với HN tại Q .

a) Chứng minh tam giác $\Delta AKM = \Delta CHN = \Delta AQN$

b) Chứng minh ΔABH cân.

c) Gọi F là điểm di động trên tia CA , P là điểm di động trên tia CB . Xác định vị trí các điểm F, P sao cho ΔHFP có chu vi bé nhất.

Lời giải



a) Xét hai tam giác vuông MKA và NHC có:

$$AM = CN \left(= \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} AC \right)$$

$\widehat{MAK} = \widehat{NCH}$ (cùng phụ với \widehat{KAC})

Suy ra $\Delta MKA = \Delta NCH$ (cạnh huyền, góc nhọn)

Tương tự: $\Delta MKA = \Delta NQA$

Suy ra $\Delta MKA = \Delta NCH = \Delta NQA$

b) Từ câu a suy ra $AK = AQ = HC$

Xét hai tam giác vuông AHC và AKB có:

$\widehat{MAK} = \widehat{NCH}$; $AB = AC$; $AK = HC$

Suy ra $\Delta AHC = \Delta BKA$ (*)

Mặt khác ta có $AQHK$ là hình chữ nhật nên $AQ = KH$ suy ra $AK = KH$

Vậy: $\triangle AKH$ vuông cân suy ra $\widehat{AHK} = 45^\circ$.

Khi đó: $\widehat{AHC} = 135^\circ$ nên $\widehat{AKB} = 135^\circ$ suy ra $\widehat{BKH} = 135^\circ$

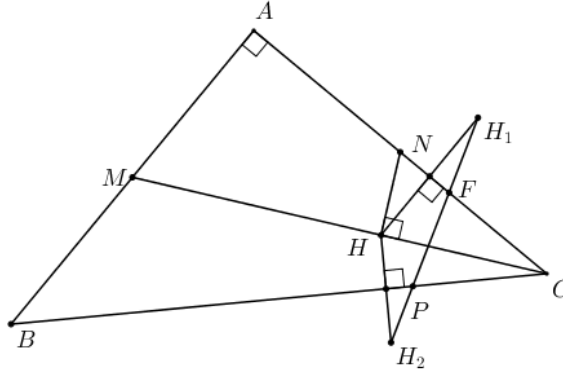
Xét hai tam giác vuông BKH và AKB có

cạnh BK chung ; $AK = KH$; $\widehat{AKB} = \widehat{BKH} = 135^\circ$

Suy ra $\triangle ABK = \triangle HBK$ Suy ra $AB = BH$

Vậy tam giác ABH cân tại B

c)



Gọi H_1 là điểm sao cho AC là đường trung trực của HH_1 ; H_2 là điểm sao cho CB là đường trung trực của HH_2 .

Ta có H_1, H_2 cố định, độ dài đoạn thẳng H_1H_2 không đổi.

Theo tính chất đường trung trực ta có: $HF = FH_1$; $HP = PH_2$

Nên $HF + HP + PF = PH_2 + FH_1 + PF \geq H_1H_2$

Vậy chu vi $d \geq H_1H_2$ do đó d nhỏ nhất bằng H_1H_2 khi $H_1; F; P; H_2$ thẳng hàng

Vậy chu vi $\triangle HFP$ nhỏ nhất khi F là giao điểm của H_1H_2 với AC , P là giao điểm của H_1H_2 với CB .

Câu 81. (HSG 7 huyện Đô Lương 2022 - 2023)

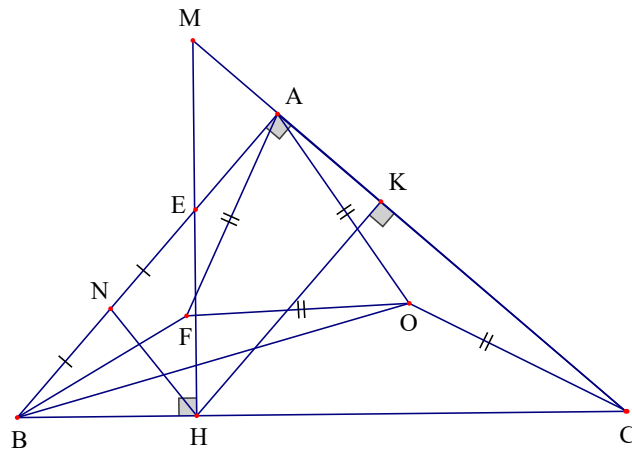
Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Từ điểm E trên cạnh AB vẽ đường thẳng vuông góc với BC cắt các đường thẳng BC và AC thứ tự tại H và M . Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng BE . Từ H vẽ đường thẳng song song với AB cắt đường thẳng AC tại K .

a) Chứng minh tam giác BHE cân.

b) Chứng minh K là trung điểm của đoạn thẳng MC .

c) Cho điểm O nằm trong tam giác ABC sao cho $OA = OC$ và $\widehat{AOC} = 150^\circ$. Chứng minh $AB = OB$.

Lời giải



a) Ta có: $\triangle BHE$ vuông tại H và $\widehat{EBH} = 45^\circ$ ($\triangle ABC$ vuông cân tại A).
Suy ra $\triangle BHE$ vuông cân tại H .

b) Ta có: $\begin{cases} AB \parallel HK \\ AB \perp AC \end{cases} \Rightarrow HK \perp AC \Rightarrow \triangle HKM$ vuông tại K (1)

Mà $\widehat{AEM} = \widehat{BEH} = 45^\circ$ (đối đỉnh) và $\widehat{AEM} = \widehat{KHM}$ (đồng vị) nên $\widehat{KHM} = 45^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle MKH$ vuông cân tại $K \Rightarrow MK = KH$.

Ta lại có: $CK = KH$ (vì $\triangle KHC$ vuông cân tại K) nên suy ra $MK = CK$ hay K là trung điểm của đoạn thẳng MC .

c) Dựng $\triangle AFO$ đều trong tam giác ABC .

Xét $\triangle AOE$ và $\triangle ABF$, ta có:

$$AO = AF; \widehat{OAC} = \widehat{FAB}; AB = AC$$

Suy ra $\triangle AOE = \triangle ABF$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AFB} = \widehat{AOC} = 150^\circ$.

Khi đó: $\widehat{BFO} = 360^\circ - \widehat{AFB} - \widehat{AFO} = 360^\circ - 150^\circ - 60^\circ = 150^\circ$.

Xét $\triangle AFB$ và $\triangle BFO$, ta có:

$$FO = AF; \widehat{AFB} = \widehat{BFO}; BF \text{ là cạnh chung}$$

Suy ra $\triangle AFB = \triangle BFO$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = OB$ (đpcm).

Câu 82. (HSG 7 huyện Thọ Xuân 2022 - 2023)

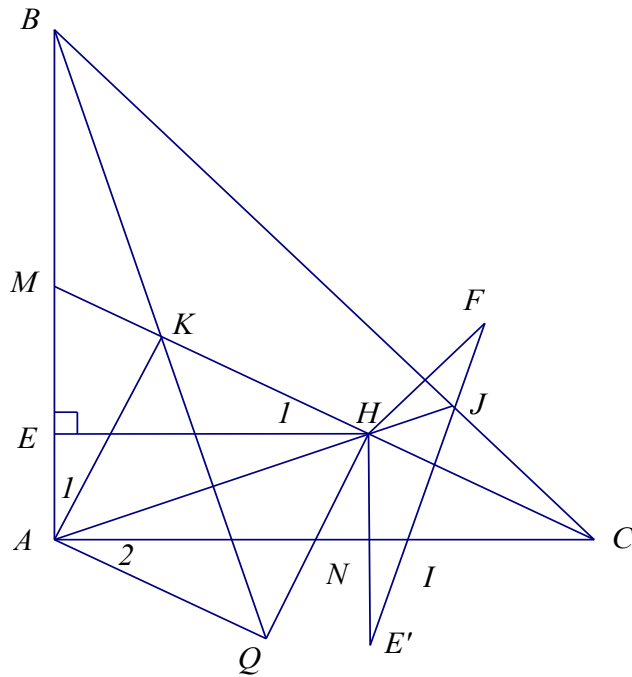
Cho tam giác ABC vuông cân có đáy BC . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC . Kẻ NH vuông góc với CM tại H . Kẻ HE vuông góc với AB tại E . Kẻ AK vuông góc với CM tại K . Kẻ AQ vuông góc với HN tại Q .

1) Chứng minh rằng $AK = HC = AQ$. Tính số đo góc BKA .

2) Chứng minh tam giác ABH cân và HM là tia phân giác của góc BHE .

3) Gọi I là điểm di động trên tia CA , J là điểm di động trên tia CB . Xác định vị trí các điểm I, J sao cho tam giác HJI có chu vi bé nhất.

Lời giải



1) Chứng minh rằng $AK = HC = AQ$. Tính số đo góc BKA .

Ta có: tam giác ABC vuông cân có đáy BC nên $AB = AC$

$$\text{Mà } AM = \frac{1}{2}AB; AN = CN = \frac{1}{2}AC \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow AM = AN = CN$$

Xét $\triangle AKM$ và $\triangle CHN$, có:

$$\widehat{AKM} = \widehat{CHN} = 90^\circ \text{ (Vì } AK \text{ vuông góc với } CM \text{ tại } K, NH \text{ vuông góc với } CM \text{ tại } H)$$

$$AM = CN \text{ (cmt), } \widehat{A_1} = \widehat{C_1} \text{ (cùng phụ với } \widehat{KAC})$$

$$\Rightarrow \triangle AKM = \triangle CHN \text{ (cạnh huyền - góc nhọn)} \Rightarrow AK = CH \text{ (2 cạnh tương ứng).}$$

Xét $\triangle ANQ$ và $\triangle CNH$ có:

$$\widehat{AQN} = \widehat{CHN} = 90^\circ, AN = CN \text{ (gt), } \widehat{ANQ} = \widehat{CNH} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \triangle AQN = \triangle CHN \text{ (cạnh huyền - góc nhọn)} \Rightarrow AQ = CH \text{ (2 cạnh tương ứng).}$$

Do đó suy ra: $AK = HC = AQ$

Ta có: $AK \parallel HN$ (vì cùng vuông góc với CM)

Mà $AQ \perp HN$ nên $AQ \perp AK$ tại A

Suy ra: $\widehat{KAQ} = 90^\circ$ hay $\triangle AKQ$ vuông tại A

Ta lại có $AK = AQ$

$$\Rightarrow \triangle AKQ \text{ vuông cân tại } A \Rightarrow \widehat{AKQ} = 45^\circ$$

$$\text{Vì } \widehat{BKA} \text{ và } \widehat{AKQ} \text{ kề bù nên } \widehat{BKA} = 180^\circ - \widehat{AKQ} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$

2) Vì $AK \parallel HN$ hay $AK \parallel HQ$ nên $\widehat{HOK} = \widehat{AKQ} = 45^\circ$ (Hai góc so le trong)

Xét $\triangle AKQ$ có: $\widehat{KAQ} = 90^\circ, \widehat{AKQ} = 45^\circ$

Suy ra $\triangle AKQ$ vuông cân tại A , suy ra $\widehat{AQK} = 45^\circ$

Xét $\triangle AKQ$ và $\triangle HKQ$ có: $\widehat{KAQ} = \widehat{KHQ} = 90^\circ$, KQ (cạnh chung), $\widehat{AQK} = \widehat{HQK} = 45^\circ$

Suy ra $\triangle AKQ = \triangle HKQ$ (cạnh huyền-góc nhọn) $\Rightarrow AK = HK$ và $\widehat{AKQ} = \widehat{HKQ} = 45^\circ$

Ta có: Vì \widehat{BKH} và \widehat{HKQ} kề bù nên $\widehat{BKH} = 180^\circ - \widehat{HKQ} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

Xét $\triangle BKA$ và $\triangle BKH$ có: $AK = KH$, $\widehat{BKA} = \widehat{BKH} = 135^\circ$ (cmt), BK là cạnh chung

Suy ra: $\triangle BKA = \triangle BKH$ (c.g.c) $\Rightarrow BA = BH$ (hai cạnh tương ứng)

Do đó tam giác ABH cân tại B .

Vì $\triangle BKA = \triangle BKH$ nên $\widehat{A_1} = \widehat{H_1}$ (hai góc tương ứng)

Mà $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ (chứng minh trên);

Ta lại có $AC \parallel HE$ (vì cùng vuông góc với AB) $\Rightarrow \widehat{EHM} = \widehat{C_1}$ (2 góc đồng vị)

Suy ra: $\widehat{H_1} = \widehat{EHM}$ hay HM là tia phân giác của góc BHE .

3) Lấy điểm E' sao cho AC là đường trung trực của HE' , mà I thuộc AC nên $IE' = IH$.

Lấy điểm F sao cho BC là đường trung trực của HF , mà J thuộc BC nên $JF = JH$.

Chu vi tam giác HJI là $HI + IJ + HJ = E'I + IJ + JF \geq E'F$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi các điểm E', I, J, F thẳng hàng hay I, J lần lượt là giao điểm của $E'F$ với AC, BC .

Vậy: Chu vi tam giác HJI khi I, J lần lượt là giao điểm của EF với AC, BC .

Câu 83. (HSG 7 Diễn Châu 2022 - 2023)

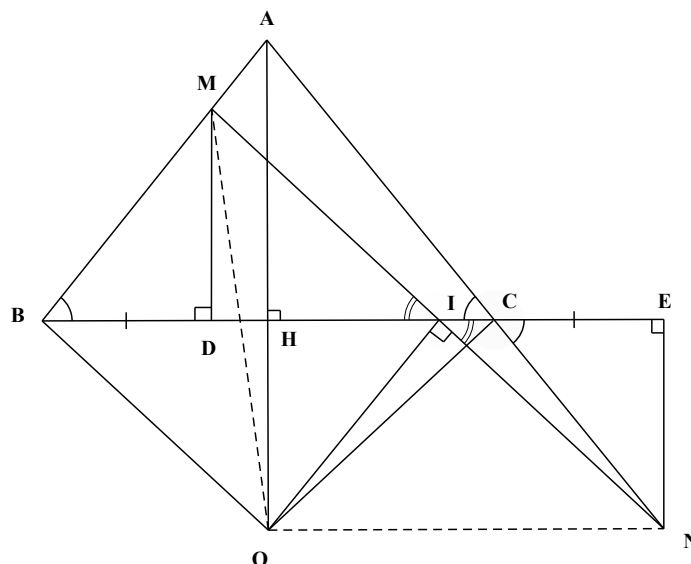
Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh BC lấy D , trên tia đối của CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB và AC lần lượt ở M và N . Chứng minh rằng:

a) $BM = CN$.

b) $BC < MN$.

c) Đường thẳng vuông góc với MN tại giao điểm của MN và BC luôn luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC .

Lời giải



a) Xét $\triangle MDB$ và $\triangle NEC$ có:

$$\widehat{MDB} = \widehat{NEC} (= 90^\circ); BD = CE (gt); \widehat{MBD} = \widehat{NCE} (= \widehat{ACB})$$

$$\Rightarrow \Delta MDB = \Delta NEC (g.c.g) \Rightarrow BM = CN \text{ (hai cạnh tương ứng)} (*)$$

b) Ta có $BC = BD + DC; DE = DC + CE$, mà $BD = CE (gt) \Rightarrow BC = DE$

Gọi I là giao điểm của MN và BC ta có:

$$DE = DI + IE < MI + IN = MN \text{ (quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên)}$$

$$\Rightarrow BC < MN \quad (3)$$

c) Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BC .

$\Rightarrow AH$ vừa là đường cao vừa là đường phân giác của tam giác cân ABC .

Gọi O là giao điểm của AH với đường thẳng vuông góc với MN kẻ từ I .

Xét ΔOAB và ΔOAC có: $AB = AC (gt)$, $\widehat{OAB} = \widehat{OAC} (cmt)$, AO là cạnh chung

$$\Rightarrow \Delta OAB = \Delta OAC (c.g.c) \Rightarrow \widehat{OBA} = \widehat{OCA} \text{ (cặp góc tương ứng)} \quad (**)$$

$$OC = OB \text{ (cặp cạnh tương ứng)} \quad (1)$$

Ta có $MD \perp BC (gt)$, $ME \perp BC (gt)$ suy ra $MD \parallel NE$

suy ra $\widehat{DMI} = \widehat{ENI}$ (so le trong)

Xét ΔMDI và ΔNEI có:

$$\widehat{DMI} = \widehat{ENI} (cmt), MD = NE (\Delta MDB = \Delta NEC), \widehat{IDM} = \widehat{IEN} (gt)$$

$$\text{Suy ra } \Delta MDI = \Delta NEI (g.c.g) \Rightarrow IM = IN \text{ (cặp cạnh tương ứng)} \quad (2)$$

Xét ΔOIM và ΔOIN có:

$$IM = IN (cmt), \widehat{MIO} = \widehat{NIO} = 90^\circ, OI \text{ chung}$$

$$\text{Suy ra } \Delta OIM = \Delta OIN (c.g.c) \Rightarrow OM = ON \text{ (cặp cạnh tương ứng)} \quad (3)$$

Từ (1), (*) và (3) $\Rightarrow \Delta OBM = \Delta OCN (c.c.c)$

$$\Rightarrow \widehat{OBM} = \widehat{OCN} \text{ (cặp góc tương ứng)} \quad (***)$$

Từ (**) và (***) suy ra $\widehat{OCA} = \widehat{OCN} = 90^\circ$, do đó $OC \perp AC$

\Rightarrow Điểm O cố định.

Vậy đường thẳng vuông góc với MN tại giao điểm của MN và BC luôn luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC .

Câu 84. (HSG 7 huyện Than Uyên 2022 - 2023; trường Bến Lức 2018 - 2019)

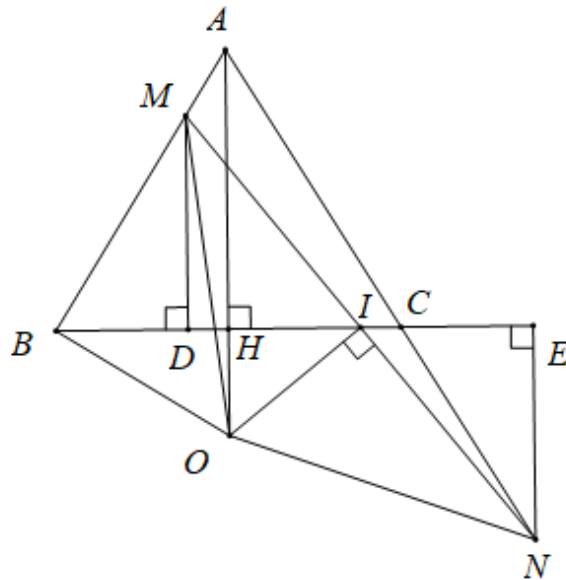
Cho tam giác cân $ABC, AB = AC$. Trên cạnh BC lấy điểm D , trên tia đối của CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB, AC lần lượt ở M, N . Chứng minh rằng:

a) $DM = EN$

b) Đường thẳng BC cắt MN tại điểm I là trung điểm của MN

c) Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC .

Lời giải



a) $\triangle MDB = \triangle NEC$ (g.c.g) $\Rightarrow DM = EN$ (cặp cạnh tương ứng)

$\Rightarrow MB = NC$ (cặp cạnh tương ứng)

b) Ta có: $\triangle MDI$ vuông tại D : $\widehat{DMI} + \widehat{MID} = 90^\circ$ (tổng hai góc nhọn trong tam giác vuông)

$\triangle NEI$ vuông tại E : $\widehat{ENI} + \widehat{NIE} = 90^\circ$ (tổng hai góc nhọn trong tam giác vuông)

Mà $\widehat{MID} = \widehat{NIE}$ (đối đỉnh) nên $\widehat{DMI} = \widehat{ENI}$

$\Rightarrow \triangle MDI = \triangle NEI$ (g.c.g) $\Rightarrow IM = IN$ (cặp cạnh tương ứng)

Vậy BC cắt MN tại điểm I là trung điểm của MN

c) Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BC .

$\triangle AHB = \triangle AHC$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{HAB} = \widehat{HAC}$ (cặp góc tương ứng)

Gọi O là giao điểm của AH với đường thẳng vuông góc với MN kẻ từ I

$\triangle OAB = \triangle OAC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OBA} = \widehat{OCA}$ (cặp góc tương ứng) (1)

$OC = OB$ (cặp cạnh tương ứng)

$\triangle OIM = \triangle OIN$ (c.g.c) $\Rightarrow OM = ON$ (cặp cạnh tương ứng)

$\triangle OBM = \triangle OCN$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{OBM} = \widehat{OCN}$ (cặp góc tương ứng) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{OCA} = \widehat{OCN} = 90^\circ$, do đó $OC \perp AC$

Vậy điểm O cố định

Câu 85. (HSG 7 huyện Kim Sơn năm 2021 - 2022)

Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh BC lấy điểm D ($D \neq B, C$). Trên tia đối của tia CB , lấy điểm E sao cho $CE = BD$. Đường vuông góc với BC kẻ từ D cắt BA tại M . Đường vuông góc với BC kẻ từ E cắt tia AC tại N , MN cắt BC tại I .

a) Chứng minh rằng: $DM = EN$

b) Chứng minh rằng: $IM = IN; BC < MN$

c) Gọi O là giao của đường phân giác góc A và đường thẳng vuông góc với MN tại I . Chứng minh rằng: $\triangle BMO = \triangle CNO$. Từ đó suy ra điểm O cố định.

Lời giải

$$\Rightarrow \Delta MIO = \Delta NIO \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow OM = ON \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

Lại có: $BM = CN$ (vì $\Delta MDB = \Delta NEC$)

$$\text{Do đó: } \Delta BMO = \Delta CNO \text{ (c.c.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{MBO} = \widehat{NCO} \text{ (hai góc tương ứng)}$$

Mặt khác $\widehat{MBO} = \widehat{ACO}$

$$\Rightarrow \widehat{NCO} = \widehat{ACO} \text{ mà đây là hai góc kề bù nên } CO \perp AN$$

Vì tam giác ABC cho trước, O là giao điểm của phân giác góc A và đường vuông góc với AC tại C nên O cố định.

Câu 86. (HSG 7 Thanh Hóa - năm học 2022 - 2023)

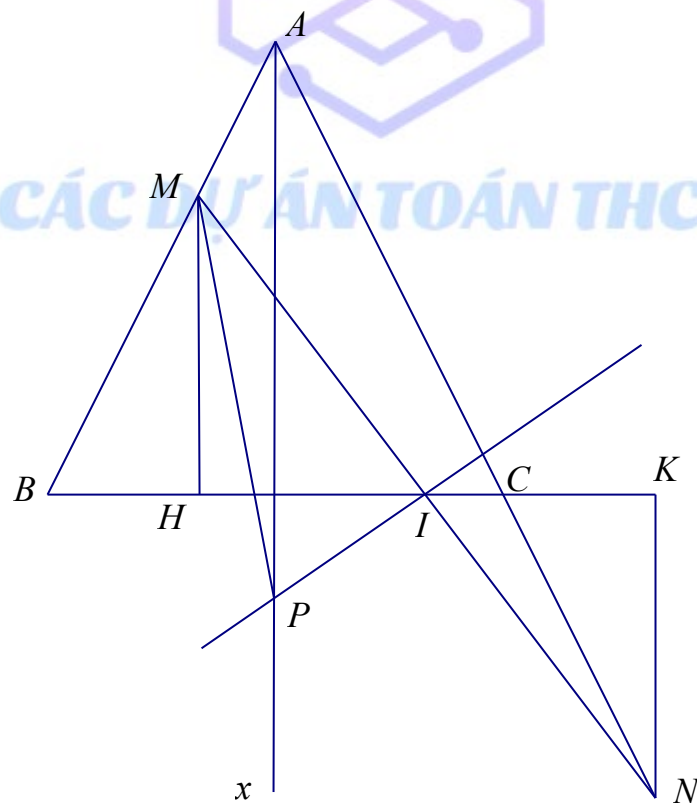
Cho ΔABC cân tại A . Trên cạnh AB lấy điểm M ; trên tia đối của tia CA lấy điểm N sao cho $BM = CN$. Kẻ MH và NK cùng vuông góc với BC ($H, K \in BC$). Gọi I là giao điểm của MN và BC .

a) Chứng minh $\Delta HBM = \Delta KCN$ và I là trung điểm của MN .

b) Đường trung trực của MN cắt tia phân giác Ax của góc BAC tại P . Chứng minh rằng: $\widehat{PMB} = \widehat{PNC}$.

c) Chứng minh rằng: Khi M di động trên AB và N di động trên tia đối của CA đồng thời thỏa mãn $BM = CN$ thì P là một điểm cố định.

Lời giải



a) Xét tam giác vuông: ΔHBM và ΔKCN có:

$$BM = CN \text{ (gt); } \widehat{HBM} = \widehat{KCN} \text{ (vì cùng bằng } \widehat{KCB} \text{)}$$

Suy ra: $\Delta HBM = \Delta KCN$ (cách huyền- góc nhọn) suy ra: $MH = NK$

Xét tam giác vuông: ΔHMI và ΔKNI có:

$MH = NK$ (Chứng minh trên); $\widehat{HIM} = \widehat{KIN}$ (đối đỉnh)

Suy ra: $\Delta HMI = \Delta KNI$ (Cạnh góc vuông- góc nhọn)

Suy ra $MI = NI$ hay I là trung điểm của MN

b) Theo CM trên I là trung điểm của MN nên PI là trung trực của MN suy ra: $MP = NP$

Vì ΔABC cân tại A mà Ax là phân giác nên AP là trung trực .

Suy ra $BP = CP$. Suy ra: $\Delta BMP = \Delta CNP$ (c.c.c) Suy ra $\widehat{BMP} = \widehat{CNP}$ (đpcm)

c) Dễ dàng chứng minh được $\Delta ABP = \Delta ACP$ (c.c.c)

Suy ra: $\widehat{ABP} = \widehat{ACP}$ hay $\widehat{MBP} = \widehat{ACP}$

Lại có: $\widehat{MBP} = \widehat{NCP}$ nên: $\widehat{NCP} = \widehat{ACP} = 180^\circ : 2 = 90^\circ$ (Hai góc kề bù bằng nhau)

Vậy $\widehat{MBP} = 90^\circ$ suy ra: BP vuông góc với AB hay P luôn là điểm cố định .

Câu 87. (HSG 7 trường TH&THCS Kỳ Đồng, Hưng Hà 2022 - 2023)

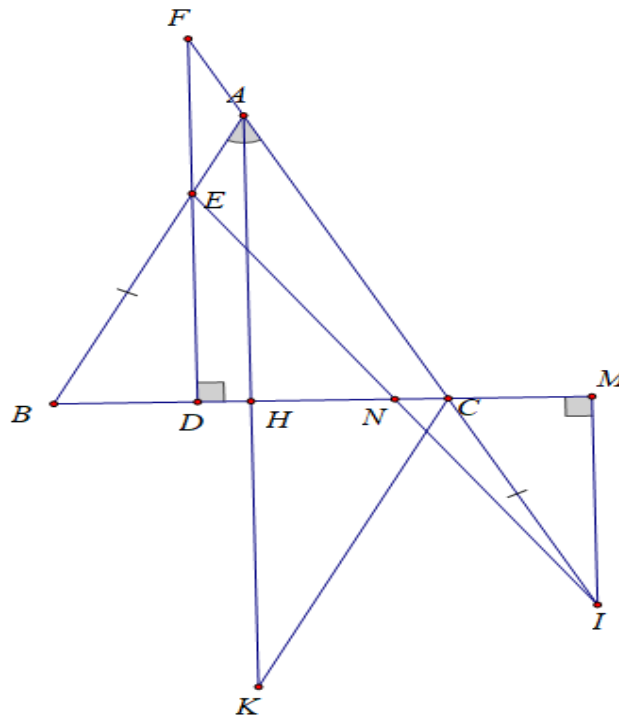
Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $DC = 2BD$. Đường thẳng vuông góc với BC tại D cắt cạnh AB tại E và cắt tia CA tại F . Qua C kẻ đường thẳng song song với AB cắt tia phân giác AH của góc BAC ($H \in BC$) tại K .

a) Chứng minh $\Delta ABH = \Delta KCH$.

b) Chứng minh tam giác AEF là tam giác cân.

c) Trên tia đối của tia CA lấy điểm I sao cho $CI = BE$. Chứng minh BC đi qua trung điểm của EI .

Lời giải



a) Xét ΔABH và ΔKCH có:

$$\begin{cases} AB = AC (gt) \\ \widehat{BAH} = \widehat{CAH} (gt) \Rightarrow \Delta ABH = \Delta KCH (c - g - c) \\ AH \text{ chung} \end{cases}$$

$\Rightarrow BH = CH$ (cặp cạnh tương ứng)

Vì $CK \parallel AB \Rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{KCH}$ (so le trong)

$$\text{Xét } \triangle ABH \text{ và } \triangle KCH \text{ có: } \begin{cases} \widehat{ABH} = \widehat{KCH} \text{ (cmt)} \\ BH = CH \text{ (cmt)} \\ \widehat{AHB} = \widehat{CHK} \text{ (đđ)} \end{cases}$$

$\Rightarrow \triangle ABH = \triangle KCH$ (g.c.g) (đpcm)

b) Vì $\triangle ABH = \triangle ACH$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{AHB} = \widehat{AHC}$ (cặp góc tương ứng)

Mà $\widehat{AHB} + \widehat{AHC} = 180^\circ$ (kề bù)

$$\Rightarrow \widehat{AHB} = \widehat{AHC} = 90^\circ$$

$\Rightarrow AH \perp BC$

Mà $ED \perp BC$ (gt) $\Rightarrow AH \parallel ED$ (quan hệ từ vuông góc đến song song)

$$\Rightarrow \widehat{BED} = \widehat{BAH} \text{ (đồng vị)} \quad (1)$$

Có $ED \parallel AH \Rightarrow FD \parallel AH \Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{CAH}$ (đồng vị) (2)

$$\text{Mà } \widehat{BED} = \widehat{AEF} \text{ (đđ)}; \widehat{BAH} = \widehat{CAH} \text{ (gt)} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{AEF} \Rightarrow \triangle AEF$ cân tại A .

c) Gọi N là giao điểm của EI và BC

Từ I kẻ $IM \perp BC$ tại M , có $AH \perp BC$ (gt) $\Rightarrow AH \parallel IM$

$$\Rightarrow \widehat{HAC} = \widehat{CIM} \text{ (so le trong)}$$

có $\widehat{HAC} = \widehat{HBC} = \widehat{BED}$ (cmt)

$$\Rightarrow \widehat{BED} = \widehat{CIM}$$

Xét $\triangle BED$ vuông tại D và $\triangle CIM$ vuông tại M có $\begin{cases} BE=CI \text{ (gt)} \\ \widehat{BED} = \widehat{CIM} \text{ (cmt)} \end{cases}$

$$\Rightarrow \triangle BED = \triangle CIM \text{ (cạnh huyền - góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow ED = IM \text{ (cặp cạnh tương ứng)}$$

Mặt khác $EH = IM$ (cùng vuông góc với BC)

$$\Rightarrow \widehat{DEN} = \widehat{MIN} \text{ (so le trong)}$$

Xét $\triangle DEN$ vuông tại D và $\triangle MIN$ vuông tại M có $\begin{cases} ED=MI \text{ (cmt)} \\ \widehat{DEN} = \widehat{MIN} \text{ (cmt)} \end{cases}$

$$\Rightarrow \triangle DEN = \triangle MIN \text{ (cạnh góc vuông- góc nhọn kề)}$$

$$\Rightarrow EN = IN \text{ (cạnh tương ứng)}$$

$\Rightarrow N$ là trung điểm của EI .

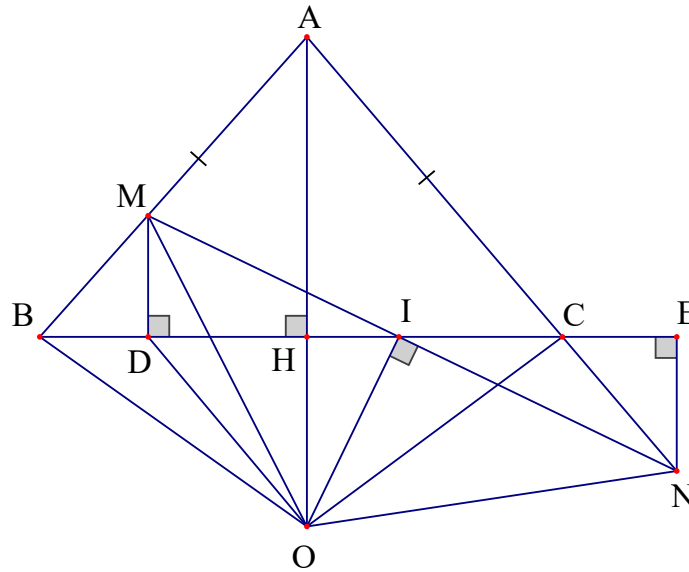
Câu 88. (HSG 7 huyện Nghi Sơn 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh BC lấy điểm D , trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $CE = BD$. Đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D cắt AB tại M . Đường thẳng vuông góc với BE tại E cắt AC tại N .

1) Chứng minh $\triangle MBD = \triangle NCE$

- 2) Cạnh BC cắt MN tại I . Chứng minh I là trung điểm của MN .
- 3) Chứng minh đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua một điểm O cố định khi D thay đổi trên đoạn BC .

Lời giải



1) Ta có tam giác ABC cân tại A (gt) $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$

Mà $\widehat{NCE} = \widehat{ACB}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{NCE} = \widehat{ABC}$

Xét $\triangle MBD$ và $\triangle NCE$ có:

$\widehat{NCE} = \widehat{ABC}$ (cmt); $\widehat{E} = \widehat{D} = 90^\circ$; $CE = BD$

$\Rightarrow \triangle MBD = \triangle NCE$ (g.c.g)

2) Ta có $\triangle MBD = \triangle NCE$ (cmt) $\Rightarrow MD = NE$; $BM = CN$ (cạnh tương ứng)

Lại có $MD \parallel NE$ (cùng vuông góc với BC) $\Rightarrow \widehat{DMI} = \widehat{ENI}$ (so le trong)

Xét $\triangle DMI$ và $\triangle ENI$ có:

$\widehat{DMI} = \widehat{ENI}$ (cmt); $\widehat{E} = \widehat{D} = 90^\circ$; $MD = NE$ (cmt)

$\Rightarrow \triangle DMI = \triangle ENI$ (g.c.g) $\Rightarrow MI = NI$

suy ra I là trung điểm của MN (đpcm)

3) Từ B và C kẻ các đường thẳng vuông góc với AB và AC chúng cắt nhau tại O .

Xét $\triangle ABO$ và $\triangle ACO$ có:

Chung cạnh AO ; $\widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ$; $AB = AC$ ($\triangle ABC$ cân tại A)

$\Rightarrow \triangle ABO = \triangle ACO$ (cạnh huyền- cạnh góc vuông) $\Rightarrow OB = OC$

Xét $\triangle MBO$ và $\triangle NCO$ có:

$OB = OC$ (cmt); $\widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ$; $BM = CN$ (cmt)

$\Rightarrow \triangle MBO = \triangle NCO$ (cạnh huyền- cạnh góc vuông) $\Rightarrow OM = ON$

$\Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của MN

Do đó đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua điểm O cố định khi D thay đổi trên đoạn BC

Câu 89. (HSG 7 huyện Bát Xát 2022 - 2023)

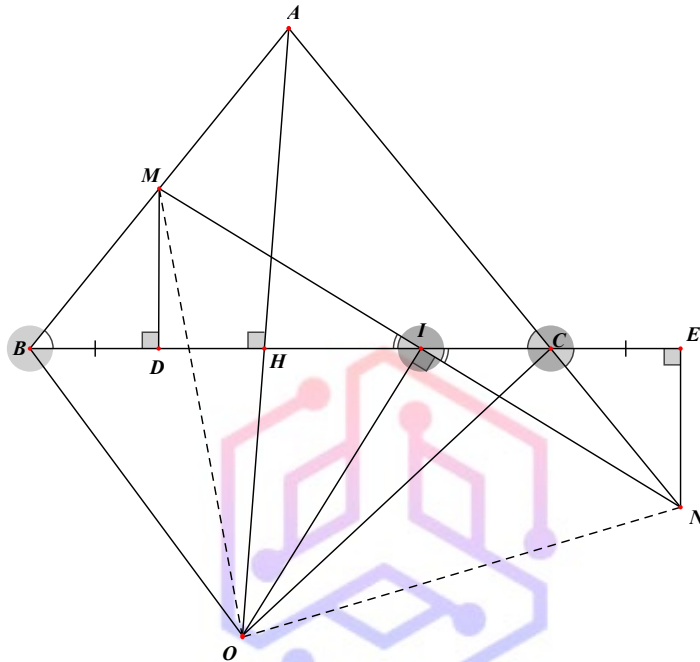
Cho tam giác cân ABC , $AB = AC$. Trên cạnh BC lấy điểm D (D không trùng với B và C), trên tia đối của CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt cạnh AB và tia AC lần lượt tại M và N .

a) Chứng minh: $\triangle MDB = \triangle NEC$.

b) Gọi I là trung điểm MN . Chứng minh: I là trung điểm DE .

c) Chứng minh rằng: Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên BC .

Lời giải



a) Chứng minh: $\triangle MDB = \triangle NEC$

Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ (gt) mà $\widehat{ACB} = \widehat{ECN}$ (đđ)

Nên $\widehat{ABC} = \widehat{ECN}$ hay $\widehat{DBM} = \widehat{ECN}$

Xét $\triangle MDB$ và $\triangle NEC$ có:

$$\widehat{DBM} = \widehat{ECN} \text{ (cmt)}$$

$$BD = CE \text{ (gt)}$$

$$\widehat{D} = \widehat{E} = 90^\circ \text{ (gt)}$$

Suy ra $\triangle MDB = \triangle NEC$ (c-g-c) $\Rightarrow DM = EN$; $MB = NC$ (hai cạnh tương ứng)

b) Chứng minh: I là trung điểm DE .

Gọi I là giao điểm của BC và MN

Ta có $\triangle MDI$ vuông tại D nên $\widehat{DMI} + \widehat{MID} = 90^\circ$ (tổng hai góc nhọn trong tam giác vuông)

$\triangle NEI$ vuông tại E nên $\widehat{ENI} + \widehat{NIE} = 90^\circ$ (tổng hai góc nhọn trong tam giác vuông)

Mà $\widehat{MID} = \widehat{NIE}$ (đđ) nên $\widehat{DMI} = \widehat{ENI}$

Xét $\triangle MDI$ và $\triangle NEI$ có

$$\widehat{DMI} = \widehat{ENI} \text{ (cmt); } DM = EN \text{ (cm câu a); } \widehat{D} = \widehat{E} = 90^\circ \text{ (gt)}$$

Suy ra $\triangle MDI = \triangle NEI$ (c-g-c) $\Rightarrow IM = IN, ID = IE$ (cạnh tương ứng)

Vậy BC cắt MN tại điểm I là trung điểm của MN đồng thời I là trung điểm của DE .

c) Chứng minh rằng: Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên BC .

Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BC .

Xét $\triangle AHB$ và $\triangle AHC$ có

$$AB = AC(gt)$$

$$\widehat{H}_1 = \widehat{H}_2 = 90^\circ$$

$$HB = HC \text{ (vì } \triangle ABC \text{ cân tại } A)$$

Nên $\triangle AHB = \triangle AHC$ (cạnh huyền- cạnh góc vuông) $\Rightarrow \widehat{HAB} = \widehat{HAC}$ (góc tương ứng)

+ Gọi O là giao điểm của AH với đường thẳng vuông góc với MN kẻ từ I .

Xét $\triangle OAB$ và $\triangle OAC$ có

$$AB = AC(gt)$$

$$\widehat{OAB} = \widehat{OAC} \text{ (vì } \triangle ABC \text{ cân tại } A)$$

OA cạnh chung

Nên $\triangle OAB = \triangle OAC$ (c-g-c)

$$\Rightarrow \widehat{OBA} = \widehat{OCA} \text{ (góc tương ứng) (1)}$$

$$\Rightarrow OB = OC \text{ (cạnh tương ứng)}$$

Xét $\triangle OIM$ và $\triangle OIN$ có

$$IM = IN \text{ (} I \text{ là trung điểm } MN \text{)}$$

$$\widehat{OIM} = \widehat{OIN} = 90^\circ$$

OI cạnh chung

Nên $\triangle OIM = \triangle OIN$ (c-g-c) $\Rightarrow OM = ON$ (cạnh tương ứng)

Xét $\triangle OMB$ và $\triangle OCN$ có

$$OM = ON \text{ (cmt)}$$

$$OB = OC \text{ (cmt)}$$

$$MB = NC \text{ (cm câu a)}$$

Nên $\triangle OMB = \triangle OCN$ (c-c-c)

$$\Rightarrow \widehat{OBM} = \widehat{OCN} \text{ (góc tương ứng) (2)}$$

Từ (1);(2) suy ra $\widehat{OCA} = \widehat{OCN} = 90^\circ$ do đó $OC \perp AC$

Vậy O là điểm cố định.

Câu 90. (HSG 7 huyện Chương Mỹ 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ cân tại A , trên cạnh BC lấy điểm D (không trùng với B, C), trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$, các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E theo thứ tự cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại M và N .

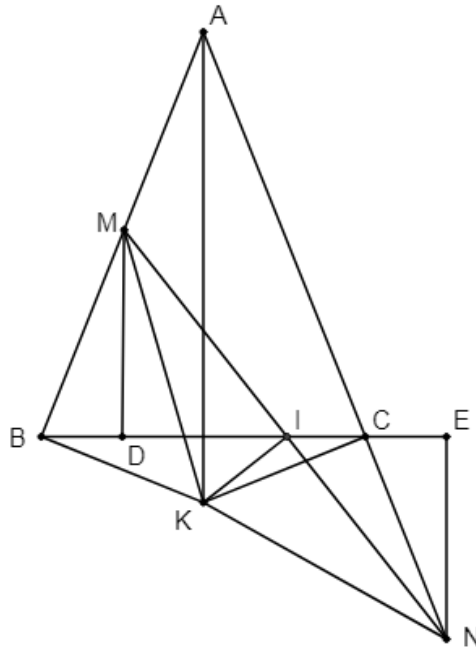
1) Chứng minh rằng $DM = EN$;

2) Đường thẳng BC cắt MN tại I . Chứng minh I là trung điểm của đoạn thẳng MN ;

3) So sánh chu vi của tam giác ABC và chu vi của tam giác AMN ;

4) Chứng minh: Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua điểm cố định khi D thay đổi trên BC .

Lời giải



1) Ta có ΔABC cân tại $A \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB}; AB = AC$

mà $\widehat{ACB} = \widehat{ECN}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ECN}$

Lại có $BD = CE$ (gt), suy ra $\Delta BDM = \Delta CEN$ (g.c.g) $\Rightarrow DM = EN$.

2) Ta có $DM \perp BC, EN \perp BC \Rightarrow DM \parallel EN \Rightarrow \widehat{DMI} = \widehat{ENI}$ (so le trong)

Lại có $MD = EN$ (cmt), suy ra $\Delta DMI = \Delta ENI$ (g.c.g) $\Rightarrow MI = IN$.

Vậy I là trung điểm của đoạn thẳng MN .

3) Vì $\Delta BDM = \Delta CEN$ (cmt) $\Rightarrow BM = CN$.

Chu vi tam giác ABC là $AB + AC + BC = 2AB + BC$ (1)

Chu vi tam giác AMN là

$AM + MN + AN = AB - BM + MI + NI + AC + CN = 2AB + MI + NI$ (do

$BM = CN, AB = AC$) (2)

Xét $\Delta DMI, \Delta ENI$ vuông tại D, E có $MI > DI, NI > IE \Rightarrow MI + NI > DI + IE$

$\Rightarrow MI + NI > DE \Rightarrow MI + NI > DC + CE$

$\Rightarrow MI + NI > DC + BD \Rightarrow MI + NI > BC$ (do $BD = CE$) (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra chu vi của tam giác ABC nhỏ hơn chu vi của tam giác AMN .

4) Gọi giao điểm của đường thẳng vuông góc với MN tại I với đường phân giác góc A là K .

Ta có $IM = IN, KI \perp MN \Rightarrow KI$ là trung trực của đoạn thẳng $MN \Rightarrow KM = KN$

Lại có ΔABC cân tại A , AK là phân giác nên AK là trung trực của $BC \Rightarrow KB = KC$

Ta có $\Delta ABK = \Delta ACK$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{ABK} = \widehat{ACK}$

$\Delta ABK = \Delta NCK$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{ABK} = \widehat{NCK}$

Suy ra $\widehat{ACK} = \widehat{NCK}$ mà $\widehat{ACK} + \widehat{NCK} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{ACK} = \widehat{NCK} = 90^\circ \Rightarrow KC \perp AN$

mà AK cố định nên K cố định.

Vậy đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua điểm cố định K khi D thay đổi trên BC .

Câu 91. (HSG 7 Cửa Lò, Nghệ An 2021 - 2022)

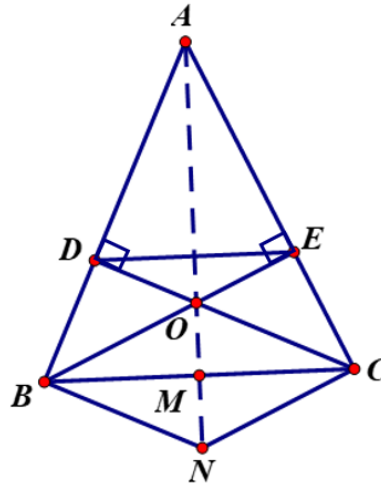
Cho tam giác ABC cân tại A . Kẻ $CD \perp AB$ tại D , $BE \perp AC$ tại E .

a) Chứng minh $\triangle ABE = \triangle ACD$.

b) Chứng minh $DE \parallel BC$.

c) Qua B kẻ đường thẳng song song với DC , qua C kẻ đường thẳng song song với EB , hai đường thẳng này cắt nhau tại N . Gọi O là giao điểm của BE và CD , M là trung điểm của BC . Chứng minh bốn điểm A, O, M, N cùng thuộc một đường thẳng.

Lời giải



a) Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ACD$ có:

\widehat{BAC} chung,

$AB = AC$ (vì tam giác ABC cân tại A),

$\widehat{AEB} = \widehat{ADC} = 90^\circ$ (vì $CD \perp AB$ tại D , $BE \perp AC$ tại E)

Do đó $\triangle ABE = \triangle ACD$ (ch-gn).

b) Vì $\triangle ABE = \triangle ACD$ (chứng minh trên) $\Rightarrow AE = AD$ (2 cạnh tương ứng)

$\Rightarrow \triangle ADE$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{ADE} = \frac{180^\circ - \widehat{DAE}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2}$.

Mà $\triangle ABC$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{ABC} = \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2}$.

Như vậy $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$, mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $DE \parallel BC$.

c) + Xét $\triangle ADO$ và $\triangle AEO$ có:

$\widehat{ADO} = \widehat{AEO} = 90^\circ$,

AO chung

$AD = AE$ (chứng minh trên)

Do đó $\triangle ADO = \triangle AEO$ (ch-cgv)

$\Rightarrow \widehat{DAO} = \widehat{EAO}$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow AO$ là phân giác của \widehat{BAC} . (1)

+ Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ACM$ có:

$AB = AC$ (chứng minh trên),

AM chung,

$MB = MC$ (vì M là trung điểm BC)

Do đó $\triangle ABM = \triangle ACM$ (c-c-c)

$\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CAM}$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow AM$ là phân giác của \widehat{BAC} . (2)

+ Vì $BN \parallel DC$ và $CD \perp AB$ (giả thiết) nên $BN \perp AB$ (từ vuông góc tới song song)

$\Rightarrow \widehat{ABN} = 90^\circ$. Chứng minh tương tự ta có $\widehat{ACN} = 90^\circ$.

Hai tam giác vuông $\triangle ABN$ và $\triangle ACN$ có AN chung, $AB = AC$

nên $\triangle ABN = \triangle ACN$ (ch-gn)

$\Rightarrow \widehat{BAN} = \widehat{CAN}$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow AN$ là phân giác của \widehat{BAC} . (3)

+ Từ (1), (2) và (3) suy ra A, M, O, N cùng nằm trên tia phân giác của \widehat{BAC} hay bốn điểm A, O, M, N cùng thuộc một đường thẳng.

Câu 92. (HSG 7 huyện Cao Lộc, tỉnh Lạng Sơn 2021 - 2022)

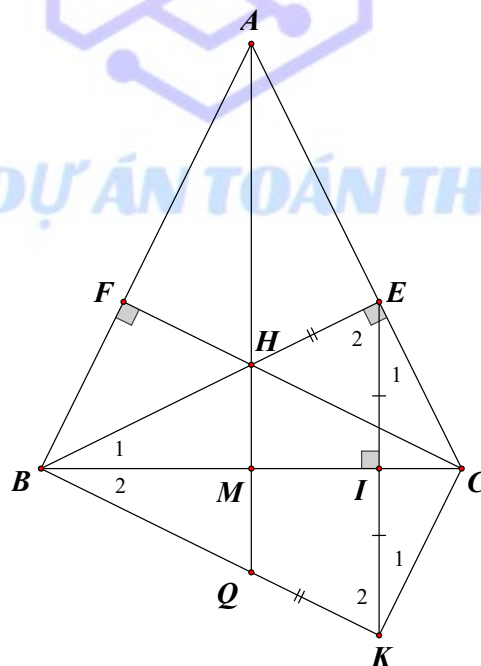
Cho tam giác ABC cân tại A . Kẻ đường cao BE ($E \in AC$). Qua E kẻ đoạn thẳng EK vuông góc với BC tại I sao cho I là trung điểm của EK .

a) Chứng minh BK vuông góc với KC .

b) Chứng minh $\widehat{CKE} = \widehat{EBC}$.

c) Kẻ đường cao CF ($F \in AB$) cắt BE tại H . Trên BK lấy điểm Q sao cho $QK = HE$. Chứng minh ba điểm A, H, Q thẳng hàng.

Lời giải



a) Ta có $\triangle CEK$ có IC là đường cao đồng thời là đường trung tuyến

$\Rightarrow \triangle CEK$ cân tại $C \Rightarrow \widehat{K_1} = \widehat{E_1}$

Tương tự $\triangle BEK$ có BI là đường cao đồng thời là đường trung tuyến

$\Rightarrow \triangle BEK$ cân tại $B \Rightarrow \widehat{K_2} = \widehat{E_2}$

mà $\widehat{E_1} + \widehat{E_2} = 90^\circ$ (gt) $\Rightarrow \widehat{K_1} + \widehat{K_2} = 90^\circ$ hay $CK \perp BK$

b) Có $\widehat{B}_1 + \widehat{E}_2 = 90^\circ$ ($\triangle BIE$ vuông tại I (gt))

$$\widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 = 90^\circ \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \widehat{E}_1 = \widehat{B}_1$$

mà $\widehat{E}_1 = \widehat{K}_1$ (theo cmt)

$$\Rightarrow \widehat{K}_1 = \widehat{B}_1 \text{ hay } \widehat{CKE} = \widehat{EBC}$$

c) Gọi HQ cắt BC tại M

$\triangle BEK$ cân tại B (ý a)

$$\Rightarrow BE = BK; \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$$

$$\Rightarrow BH + HE = BQ + QK$$

mà $HE = QK$ (gt)

$$\Rightarrow BH = BQ$$

$\Rightarrow \triangle BQH$ cân tại B

$\Rightarrow BM$ là phân giác, đường cao của $\triangle BQH$

$$\Rightarrow BM \perp HQ \text{ hay } HQ \perp BC \text{ (1)}$$

Lại có H là trực tâm $\triangle ABC \Rightarrow AH \perp BC$ (2)

từ (1) và (2) $\Rightarrow A, H, Q$ thẳng hàng.

Câu 93. (HSG 7 huyện Tam Điệp, 2022 - 2023)

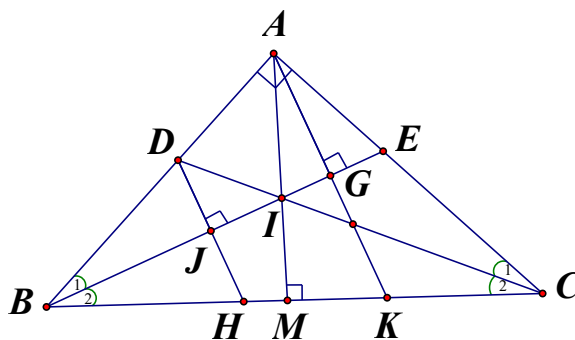
Cho tam giác ABC vuông cân tại A , tia phân giác của góc B và góc C cắt AC và AB lần lượt tại E và D .

a) Chứng minh rằng $BE = CD$; $AD = AE$.

b) Gọi I là giao điểm của BE và CD , AI cắt BC ở M . Chứng minh rằng tam giác MAB vuông cân.

c) Từ A và D vẽ các đường thẳng vuông góc với BE , các đường thẳng này cắt BC lần lượt ở K và H . Chứng minh $KH = KC$.

Lời giải



a) $\triangle ABC$ vuông cân tại $A \Rightarrow AB = AC$ và $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 45^\circ$

$$BE; CD \text{ là các tia phân giác của } \widehat{ABC} \text{ và } \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 = \frac{1}{2} \cdot 45^\circ = 22,5^\circ$$

Xét $\triangle BCE$ và $\triangle CBD$ có:

$$\left. \begin{array}{l} CE = BD \\ \widehat{ABC} = \widehat{ACB} \\ BC \text{ chung} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BCD = \triangle CBE \text{ (c.g.c)}$$

$\Rightarrow BE = CD$ và $BD = CE$ (Hai cạnh tương ứng)

mà $AB = AC$

$$\Rightarrow AB - BD = AC - CE \Rightarrow AD = AE$$

b) Có tia phân giác của góc \widehat{ABC} và góc \widehat{ACB} cắt AC và AB lần lượt tại E và $D \Rightarrow BE$ và CD là hai đường phân giác của $\triangle ABC$ cắt nhau tại I

$\Rightarrow AI$ là đường phân giác thứ ba của tam giác ABC cân tại A

$\Rightarrow AI$ đồng thời là đường cao, đường trung tuyến của tam giác ABC cân tại A

$\Rightarrow AI \perp BC$ tại M và $MB = MC$

Có $\triangle MAB$ vuông tại M có $\widehat{ABM} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{BAM} = 45^\circ$

\Rightarrow tam giác MAB vuông cân tại M .

Từ (1), (2), (3) ta có $\Rightarrow KC = HK$

c) Gọi J và G lần lượt là giao điểm của DH và AK với BE

Xét $\triangle BDH$ có BJ là đường cao đồng thời là phân giác $\Rightarrow \triangle BDH$ cân tại B

$\Rightarrow BD = BH$

Chứng minh tương tự ta có $\triangle BAK$ cân tại $B \Rightarrow BA = BK$

$\Rightarrow BA - BD = BK - BH$ hay $AD = HK$

Mà $AD = AE \Rightarrow AE = HK$ (1)

Có $\triangle BAK$ cân tại B mà $\widehat{ABK} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{BAK} = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67,5^\circ$

$\Rightarrow \widehat{KAC} = 90^\circ - \widehat{BAK} = 90^\circ - 67,5^\circ = 22,5^\circ$

Xét $\triangle AIC$ và $\triangle CKA$ có

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{IAC} = \widehat{KCA} = 45^\circ \\ AC \text{ chung} \\ \widehat{KAC} = \widehat{C_1} = 45^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AIC = \triangle CKA \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AI = KC \text{ (2)}$$

Có $\widehat{IAG} = \widehat{BAG} - \widehat{BAI} = 67,5^\circ - 45^\circ = 22,5^\circ$

Câu 94. (HSG 7 Cẩm Thủy, Thanh Hóa 2021 - 2022; huyện Khoái Châu 2014 - 2015)

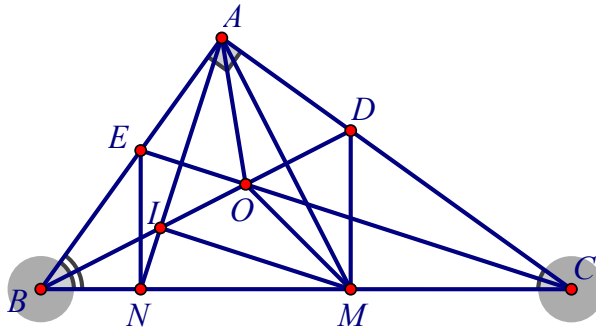
Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^\circ$. Các đường phân giác BD và CE ($D \in AC, E \in AB$) cắt nhau tại O .

a) Tính số đo góc BOC

b) Trên BC lấy hai điểm M và N sao cho $BM = BA, CN = CA$. Chứng minh EN song song với DM .

c) Gọi I là giao điểm của BD và AN . Chứng minh tam giác AIM vuông cân.

Lời giải



a) Vì BD, CE là đường phân giác các góc B và góc C của tam giác ABC nên

$$\widehat{OBC} = \frac{\widehat{ABC}}{2}; \widehat{OCB} = \frac{\widehat{ACB}}{2}$$

Áp dụng định lý tổng ba góc cho ΔBOC ta có $\widehat{BOC} + \widehat{OBC} + \widehat{OCB} = 180^\circ$ hay

$$\widehat{BOC} = 180^\circ - (\widehat{OBC} + \widehat{OCB}) = 180^\circ - \left(\frac{\widehat{ABC}}{2} + \frac{\widehat{ACB}}{2} \right) = 180^\circ - \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2} = 135^\circ$$

b) ΔABM có $BA = BM$ cân tại B nên đường phân giác BD đồng thời là đường trung trực của AM

Xét ΔDAB và ΔDMB có

$$BA = BM \text{ (GT)}$$

$$\widehat{ABD} = \widehat{MBD} \text{ (do } BD \text{ là tia phân giác của góc } B \text{)}$$

BD cạnh chung

Suy ra $\Delta DAB = \Delta DMB$ (c.c.c) suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{BMD} = 90^\circ$ (hai góc tương ứng)

Suy ra $DM \perp BC$ (1)

Chứng minh tương tự ta suy ra $EN \perp BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $EN \parallel DM$ (cùng vuông góc với BC)

c) Vì I nằm trên trung trực BD của đoạn thẳng AM nên $IA = IM \Rightarrow \Delta AIM$ cân tại I (3)

Do CE là trung trực của AN suy ra $EN = EA \Rightarrow \Delta EAN$ cân tại E nên $\widehat{EAN} = \widehat{ENA}$

Xét ΔBIA và ΔBIM có

$$BA = BM \text{ (gt); } BI \text{ cạnh chung; } IA = IM \text{ (do } I \text{ nằm trên trung trực của } AM \text{)}$$

Do đó $\Delta BIA = \Delta BIM$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{EAN} = \widehat{IMN}$ (hai góc tương ứng)

$$\text{Mà } \widehat{ANE} + \widehat{INM} = 90^\circ \text{ do } EN \perp BC$$

$$\Rightarrow \widehat{INM} + \widehat{IMN} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MIN} = 90^\circ$$

$$\text{Mà } \widehat{MIN} + \widehat{MIA} = 180^\circ \text{ (hai góc kề bù) suy ra } \widehat{MIA} = 90^\circ \text{ (4)}$$

Từ (3) và (4) suy ra ΔAIM vuông cân.

Câu 95. (HSG 7 Quỳnh Phụ 2022 - 2023)

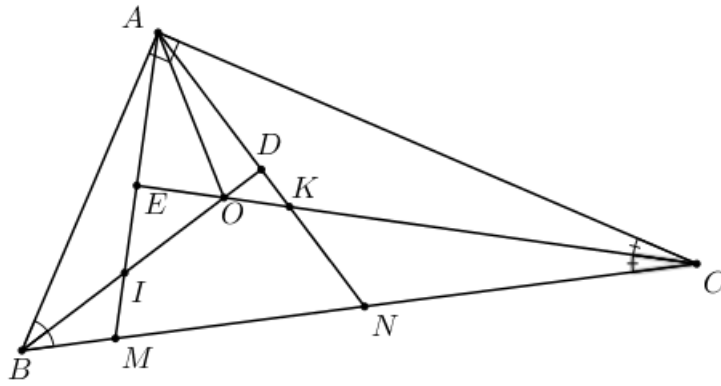
Cho ΔABC vuông tại A , có $AB < AC$. Trên cạnh BC lấy điểm M và N sao cho $MC = CA, NB = BA$. Tia phân giác của góc B cắt AM tại I và cắt AN tại D , tia phân giác góc C cắt AN tại K và cắt AM tại E . Gọi O là giao điểm của BD và CE .

1) Tính góc BOC .

2) Chứng minh: $BD \perp AN$ và $BD \parallel MK$.

3) Chứng minh: $AO = IK$.

Lời giải



1) Vì BD là tia phân giác của góc $B \Rightarrow \widehat{DBC} = \widehat{DBA} = \frac{1}{2} \widehat{ABC}$

+ Vì CE là tia phân giác của góc $C \Rightarrow \widehat{ECB} = \widehat{ECA} = \frac{1}{2} \widehat{ACB}$

$$\Rightarrow \widehat{DBC} + \widehat{ECB} = \frac{1}{2} (\widehat{ABC} + \widehat{ACB})$$

+ Vì $\triangle ABC$ vuông tại A nên $(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) = 90^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{DBC} + \widehat{ECB} = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ \text{ hay } \widehat{OCB} + \widehat{OBC} = 45^\circ$$

Xét $\triangle OBC$ có $\widehat{BOC} + \widehat{OCB} + \widehat{OBC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BOC} = 180^\circ - (\widehat{OCB} + \widehat{OBC})$

Mà $\widehat{OCB} + \widehat{OBC} = 45^\circ$ nên $\widehat{BOC} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$. Vậy $\widehat{BOC} = 135^\circ$

2) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle NBD$ có :

$BA = BN$; $\widehat{DBA} = \widehat{DBN}$; BD chung

$$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle NBD \text{ (c - g - c)} \Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{NDB} \text{ (cặp góc tương ứng).}$$

Mà $\widehat{ADB} + \widehat{NDB} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{NDB} = 90^\circ \Rightarrow BD \perp AN \text{ tại } D$$

+ Xét $\triangle MCK$ và $\triangle ACK$ có:

$MC = CA$; $\widehat{MCK} = \widehat{ACK}$; CK chung.

$$\Rightarrow \triangle MCK = \triangle ACK \text{ (c - g - c)} \Rightarrow \widehat{KMC} = \widehat{KAC} \text{ (cặp góc tương ứng).}$$

+ Vì $NB = BA \Rightarrow \triangle BNA$ cân tại $B \Rightarrow \widehat{BNA} = \widehat{BAN}$

$$\Rightarrow \widehat{KMC} + \widehat{BNA} = \widehat{KAC} + \widehat{BAN} = \widehat{BAC} = 90^\circ \text{ hay } \widehat{KMN} + \widehat{KNM} = 90^\circ$$

+ Xét $\triangle KMN$ có $\widehat{MKN} + \widehat{KMN} + \widehat{KNM} = 180^\circ$

mà $\widehat{KMN} + \widehat{KNM} = 90^\circ$ nên $\widehat{MKN} = 90^\circ$

$$\Rightarrow MK \perp AN \text{ tại } K$$

Mà $BD \perp AN \Rightarrow BD \parallel MK$.

3) Vì $\triangle MCK = \triangle ACK \Rightarrow KA = KM$ mà $MK \perp AN \Rightarrow \triangle KMA$ vuông cân tại K

Suy ra $\widehat{KAM} = 45^\circ$ hay $\widehat{DAI} = 45^\circ$

+ Chứng minh được $\triangle DAI$ vuông cân tại $D \Rightarrow DA = DI$

+ Chứng minh được $\triangle DOK$ vuông cân tại $D \Rightarrow DO = DK$

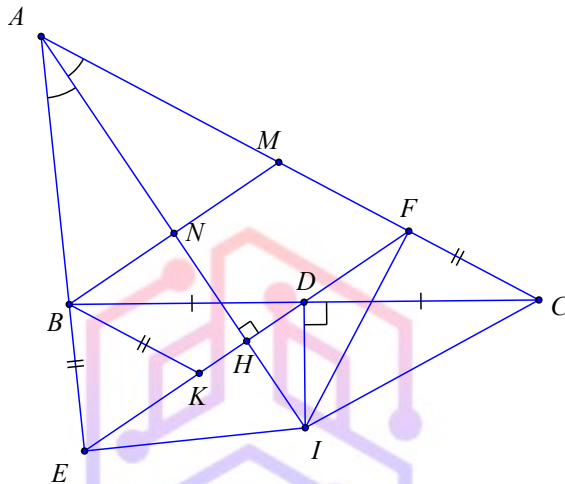
Xét $\triangle DAO$ và $\triangle DIK$ có: $DA = DI$; $\widehat{ADO} = \widehat{IDK} = 90^\circ$; $DO = DK$
 $\Rightarrow \triangle DAO = \triangle DIK$ (c.g.c) $\Rightarrow AO = IK$ (đpcm).

Câu 96. (HSG 7 huyện Hưng Hà năm 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$. Từ trung điểm D của BC vẽ đường vuông góc với tia phân giác của góc A tại H . Đường thẳng này cắt các tia AB tại E và AC tại F . Vẽ tia BM song song với EF ($M \in AC$).

- Chứng minh $\triangle ABM$ cân.
- Chứng minh: $MF = BE = CF$.
- Qua D vẽ đường thẳng vuông góc với BC cắt tia AH tại I . Chứng minh: $IF \perp AC$.

Lời giải



a) Gọi giao điểm của AH và BM là N .

Có $AH \perp EF$ và $BM \parallel EF \Rightarrow AH \perp BM$ hay $AN \perp BM$

$\triangle ABM$ có AN vừa là đường phân giác vừa là đường cao nên $\triangle ABM$ cân tại A

b) Chứng minh $\triangle AEF$ cân tại $A \Rightarrow MF = BE$ (1)

Vẽ $BK \parallel AC$ ($K \in EF$). Chứng minh $\triangle BKD = \triangle CFD \Rightarrow BK = CF$

Chứng minh $\triangle EBK$ cân tại $B \Rightarrow BE = BK$. Do đó $BE = CF$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MF = BE = CF$ (đpcm)

c) Nối IB, IC . Chứng minh được $IB = IC$

Chứng minh được: $\triangle AEI = \triangle AFI \Rightarrow IE = IF$ và $\widehat{AEI} = \widehat{AFI}$ (3)

Chứng minh được: $\triangle BEI = \triangle CFI \Rightarrow \widehat{BEI} = \widehat{CFI}$ (4)

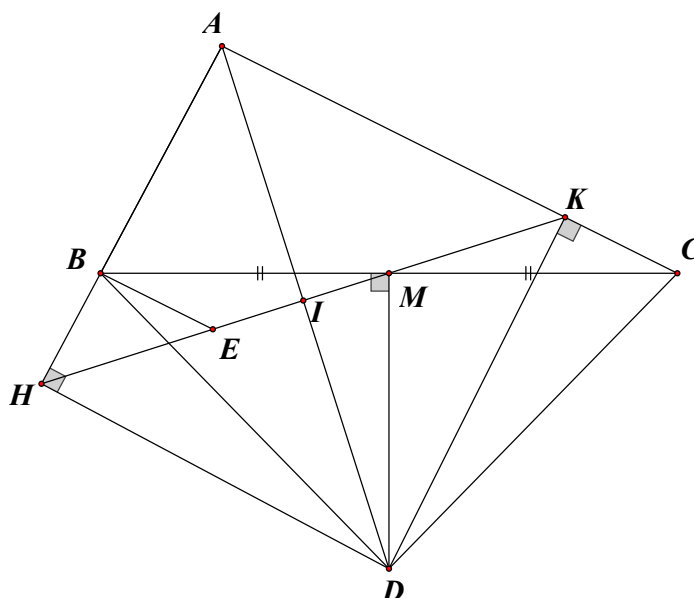
Từ (3) và (4) $\Rightarrow \widehat{AFI} = \widehat{CFI}$, mà 2 góc này kề bù nên $\widehat{AFI} = \widehat{CFI} = 90^\circ \Rightarrow IF \perp AC$

Câu 97. (HSG 7 huyện Thanh Miện, tỉnh Hải Dương năm học 2021 - 2022)

Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$, M là trung điểm của BC . Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với BC , đường thẳng này cắt tia phân giác của góc \widehat{BAC} tại D . Vẽ DH và DK lần lượt vuông góc với đường thẳng AB và đường thẳng AC tại H và K .

- Chứng minh $BD = CD$ và $BH = CK$.
- Chứng minh ba điểm H, M, K thẳng hàng.

Lời giải



a) + Xét $\triangle BMD$ và $\triangle CMD$ có:

$BM = CM$ (M là trung điểm của BC); $\widehat{BMD} = \widehat{CMD} = 90^\circ$ ($MD \perp BC$); MD là Cạnh chung
Do đó $\triangle BMD = \triangle CMD$ (c.g.c) $\Rightarrow BD = CD$ (hai cạnh tương ứng)

+ Xét $\triangle AHD$ và $\triangle AKD$ có:

$\widehat{HAD} = \widehat{KAD}$ (AD là tia phân giác \widehat{BAC})

$\widehat{AHD} = \widehat{AKD} = 90^\circ$ ($HD \perp AB$; $DK \perp AC$)

AD Cạnh chung

Do đó $\triangle AHD = \triangle AKD$ (ch - gn) $\Rightarrow HD = KD$ (hai cạnh tương ứng)

+ Xét $\triangle BHD$ và $\triangle CKD$ có:

$BD = CD$ (cmt); $\widehat{BHD} = \widehat{CKD} = 90^\circ$ ($HD \perp AB$; $DK \perp AC$); $HD = KD$ (cmt)

Do đó $\triangle BHD = \triangle CKD$ (ch- cv) $\Rightarrow HB = CK$ (hai cạnh tương ứng)

b) Kẻ $BE \parallel AC$ cắt HK tại $E \Rightarrow H, K, E$ thẳng hàng (4)

Vì $BE \parallel AC \Rightarrow \widehat{MBE} = \widehat{MCK}$ (hai góc so le trong)

Vì $\triangle AHD = \triangle AKD$ (Chứng minh trên) $\Rightarrow AH = AK$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow \triangle AHK$ cân tại A (định nghĩa tam giác cân)

Mặt khác $BE \parallel AC \Rightarrow \widehat{BEH} = \widehat{AKH}$ (hai góc đồng vị)

$\Rightarrow \widehat{BEH} = \widehat{AKH} = \widehat{AHK} \Rightarrow \triangle BEH$ cân tại $B \Rightarrow BE = BH$

Mà $HB = CK$ (theo câu a)

$\Rightarrow BE = CK$

Nối E với M ; nối K với M

+ Xét $\triangle BME$ và $\triangle CMK$ có:

$BE = CK$ (cmt); $\widehat{MBE} = \widehat{MCK}$ (cmt); $BM = CM$ (M là trung điểm của BC)

Do đó $\triangle BME = \triangle CMK$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BME} = \widehat{CMK}$ (hai góc tương ứng)

Mà $\widehat{BME} + \widehat{EMC} = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{CMK} + \widehat{EMC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{KME} = 180^\circ \Rightarrow E, M, K$ thẳng hàng (5)

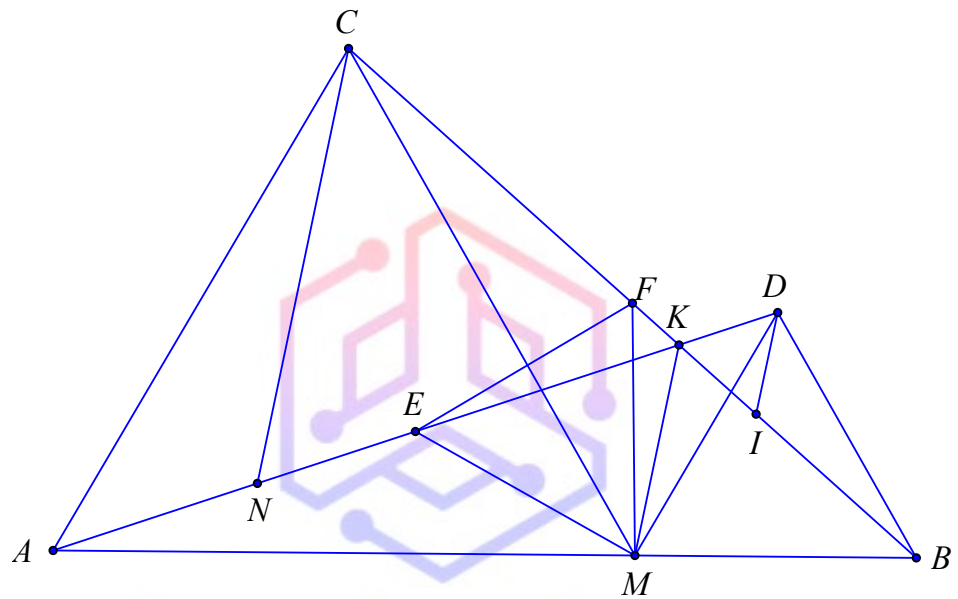
Từ (4) và (5) suy ra H, M, K thẳng hàng.

Câu 98. (HSG 7 huyện Thạch Thành 2022 - 2023; huyện Hưng Hà năm 2021 - 2022)

Cho điểm M thuộc đoạn thẳng AB ($MA > MB$). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB , vẽ các tam giác đều AMC, BMD . Gọi E, F thứ tự là trung điểm của AD, BC . Gọi K là giao điểm AD và BC . Chứng minh rằng:

- $AD = BC$
- $\triangle AEM = \triangle CFM$, từ đó suy ra $\triangle MEF$ là tam giác đều.
- $\frac{AK + BK - CK - DK}{KM} = 2$

Lời giải



+ Ta có: $\triangle AMC, \triangle BMD$ là các tam giác đều (GT)

$$\Rightarrow \begin{cases} AM = CM = AC \\ BM = DM = BD \\ \widehat{AMC} = \widehat{ACM} = \widehat{CAM} = \widehat{BDM} = \widehat{DBM} = \widehat{BMD} = 60^\circ \end{cases}$$

+ Ta có: $\widehat{AMC} = \widehat{BMD} = 60^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{AMC} + \widehat{CMD} = \widehat{BMD} + \widehat{CMD} \Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{BMC}$$

+ Xét $\triangle AMD$ và $\triangle CMB$ có:

$$AM = CM; \widehat{AMD} = \widehat{BMC}; DM = BM$$

$$\Rightarrow \triangle AMD = \triangle CMB (c.g.c)$$

$$\Rightarrow AD = BC \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

$$\text{b) + Ta có: } \triangle AMD = \triangle CMB (cmt) \Rightarrow \widehat{MAD} = \widehat{MCB}$$

$$\text{+ Ta có: } AD = BC (cmt); AE = \frac{AD}{2} (gt); CF = \frac{BC}{2} (gt)$$

$$\Rightarrow AE = CF$$

+ Xét $\triangle AEM$ và $\triangle CFM$ có:

$$AE = CF (cmt); \widehat{MAD} = \widehat{MCB} (cmt); AM = CM (cmt)$$

$$\Rightarrow \Delta AEM = \Delta CFM (c.g.c)$$

Suy ra $ME = MF$ (hai cạnh tương ứng)

$$\widehat{AME} = \widehat{CMF} \text{ (hai góc tương ứng)}$$

$$\Rightarrow \widehat{AME} + \widehat{CME} = \widehat{CMF} + \widehat{CME}$$

$$\Rightarrow \widehat{AMC} = \widehat{EMF} = 60^\circ$$

+ Xét ΔMEF có: $\widehat{EMF} = 60^\circ (cmt); ME = MF (cmt)$

$\Rightarrow \Delta MFE$ là tam giác đều.

c) Trên đoạn thẳng AK lấy điểm N sao cho $KN = KC$; trên đoạn thẳng BK lấy điểm I sao cho $KI = KD$

$$\text{Có } \widehat{CKE} = \widehat{KAB} + \widehat{ABK} = \widehat{MCB} + \widehat{MBC} = 60^\circ$$

$$\text{Suy ra } \widehat{CKN} = \widehat{DKI} = 60^\circ$$

Do đó ΔCKN và ΔDKI là các tam giác đều

$$\Rightarrow KC = KN; KD = DI \text{ và } \widehat{NCK} = \widehat{IDK} = 60^\circ$$

+ Chứng minh được $\widehat{ACN} = \widehat{MCK}$ và $\widehat{KDM} = \widehat{BDI}$

+ Chứng minh $\Delta ACN = \Delta MCK (c.g.c)$ và $\Delta BDI = \Delta MKD (c.g.c)$

$$\Rightarrow AN = KM = BI \text{ (các cạnh tương ứng)}$$

$$\Rightarrow AK = KM + KC \text{ và } BK = KM + KD$$

$$\Rightarrow AK + BK = 2KM + CK + DK$$

$$\Rightarrow \frac{AK + BK - CK - DK}{KM} = 2$$

Câu 99. (HSG 7 trường Trần Thái Tông, huyện Hưng Hà 2022 - 2023; huyện Quảng Trạch, Quảng Bình 2021 - 2022)

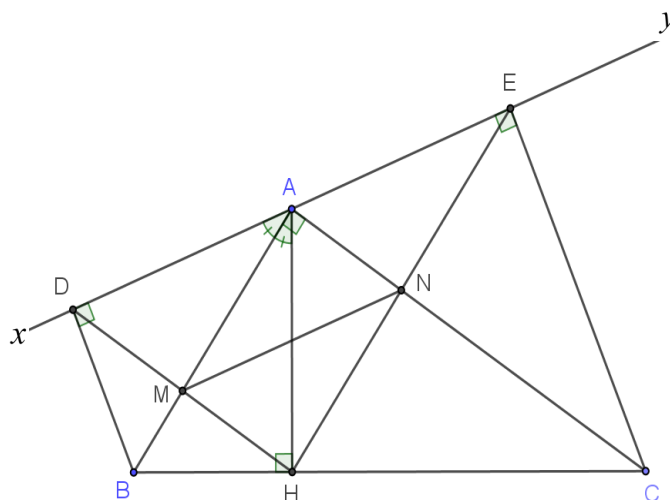
Cho tam giác ABC vuông tại A . Vẽ đường cao AH . Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm H , vẽ tia Ax sao cho $\widehat{BAx} = \widehat{BAH}$. Gọi Ay là tia đối của tia Ax . Vẽ BD và CE vuông góc với đường thẳng xy ($D, E \in xy$). AB cắt DH tại M , AC cắt EH tại N .

a) Chứng minh rằng: Tia AC là phân giác của \widehat{HAE} .

b) Chứng minh rằng: $BD + CE = BC$.

c) Chứng minh rằng: $MN = AH$.

Lời giải



a) Tia AC là phân giác của \widehat{HAE} .

+) Ta có $\widehat{DAB} = \widehat{ACE}$ (Cùng phụ \widehat{EAC}). (1)

$\widehat{BAH} = \widehat{ACH}$ (Cùng phụ \widehat{HAC}). (2)

Mà $\widehat{DAB} = \widehat{BAH}$ (Do giả thiết cho $\widehat{BAx} = \widehat{BAH}$) (3)

Từ (1),(2),(3) $\Rightarrow \widehat{ACE} = \widehat{ACH}$.

+) Xét $\triangle AEC$ và $\triangle AHC$ có

$\widehat{AEC} = \widehat{AHC} = 90^\circ$, Cạnh huyền AC chung, $\widehat{ACE} = \widehat{ACH}$.

Suy ra $\triangle AEC = \triangle AHC$ (Cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow \widehat{EAC} = \widehat{HAC}$ (hai góc tương ứng)

Suy ra AC là phân giác của \widehat{HAE} .

b) Chứng minh $BD + CE = BC$.

+) $\triangle ADB = \triangle AHB$ (cạnh huyền- góc nhọn) nên $BD = BH$.

+) $\triangle AEC = \triangle AHC$ (Cạnh huyền – góc nhọn) nên $CE = HC$ (hai cạnh tương ứng)

+) Do đó $BD + CE = BH + HC = BC$.

c) Chứng minh $MN = AH$.

+) $\triangle ADB = \triangle AHB$ (cạnh huyền- góc nhọn) nên $AD = AH$; $BD = BH$

suy ra AB là đường trung trực của DH hay $AB \perp DH$ tại M .

+) $\triangle AEC = \triangle AHC$ (Cạnh huyền – góc nhọn) nên $CE = HC$; $AH = AE$

Suy ra AC là đường trung trực của EH hay $AC \perp EH$ tại N .

Suy ra $AM \parallel NH$

+) $\triangle ANH = \triangle HMA$ (Cạnh huyền – góc nhọn) nên $AN = MH$

Suy ra $AN = DM$

Do đó $\triangle AMN = \triangle MAD$ (c - g - c) nên $MN = AD$ suy ra $MN = AH$.

Câu 100. (HSG 7 huyện Thanh Trì 2022 - 2023)

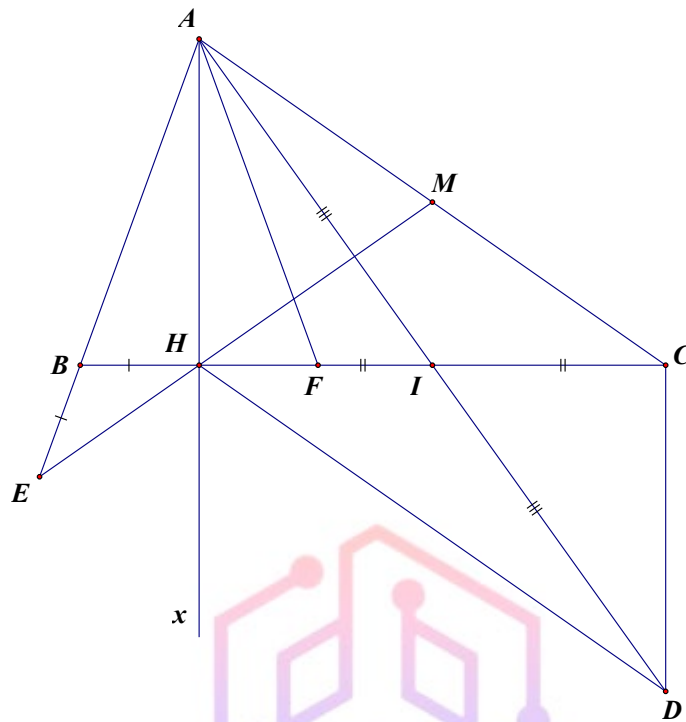
Cho tam giác ABC có $\widehat{B} < 90^\circ, \widehat{B} = 2\widehat{C}$. Kẻ AH vuông góc với BC ($H \in BC$). Trên tia đối tia BA lấy điểm E sao cho $BE = BH$.

a) Chứng minh $\widehat{BEH} = \widehat{ACB}$

b) Lấy I là trung điểm đoạn HC . Trên tia đối tia IA lấy điểm D sao cho $IA = ID$.

- Chứng minh $\Delta ACD = \Delta DHA$ và tia đối tia HA là phân giác của \widehat{EHD} .
- c) Chứng minh tia EH đi qua trung điểm M của đoạn thẳng AC .
- d) Chu vi tam giác ABH lớn hơn độ dài đoạn thẳng AC .

Lời giải



a) Xét ΔBEH có: $BE = EH(gt) \Rightarrow \Delta BEH$ cân tại B (định nghĩa) $\Rightarrow \widehat{BEH} = \widehat{BHE}$ (tính chất)

+ Lại có \widehat{ABC} là góc ngoài tại B của ΔBEH

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{BEH} + \widehat{BHE} \text{ (tính chất góc ngoài tam giác)}$$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = 2\widehat{BEH}$$

$$\text{Mà } \widehat{ABC} = 2\widehat{C}(gt)$$

$$\Rightarrow \widehat{BEH} = \widehat{C}$$

$$\text{b) Chứng minh được } \Delta AIC = \Delta DIH \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{IAC} = \widehat{IDH} \\ AC = HD \\ \widehat{ACI} = \widehat{DHI} \end{cases}$$

+ Chứng minh được $\Delta ACD = \Delta DHA$ (c.g.c)

$$\text{+ Ta có: } \widehat{ACI} = \widehat{DHI} \text{ (cmt)}$$

$$\text{Mà } \widehat{ACI} = \widehat{E} = \widehat{BHE} \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \widehat{BHE} = \widehat{CHD}$$

$$\text{Lại có } \widehat{BHA} = \widehat{AHC} = 90^\circ (AH \perp BC)$$

$$\Rightarrow \widehat{BHE} + \widehat{BHA} = \widehat{CHD} + \widehat{AHC} \Rightarrow \widehat{AHE} = \widehat{AHD} \quad (1)$$

+ Kẻ Hx là tia đối của tia HA

$$\text{Ta có: } \widehat{EHx} + \widehat{EHA} = 180^\circ (kb) \quad (2)$$

$$\widehat{xHD} + \widehat{AHD} = 180^\circ (kb) \quad (3)$$

$$(1)(2)(3) \Rightarrow \widehat{EHx} = \widehat{DHx} \Rightarrow Hx \text{ là tia phân giác của } \widehat{EHD}$$

Vậy tia đối tia HA là tia phân giác của \widehat{EHD} .

c) Giả sử tia EH cắt AC tại điểm M

$$+ \text{ Ta có: } \widehat{BHE} = \widehat{MHC} \text{ (đối đỉnh); } \widehat{BHE} = \widehat{E} = \widehat{ACB} \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \widehat{MHC} = \widehat{ACB} \Rightarrow \Delta MHC \text{ cân tại } M \text{ (dnhb)} \Rightarrow MH = MC \text{ (định nghĩa)}$$

+ Ta có ΔAHC vuông tại H , nên: $\widehat{ACB} + \widehat{HAC} = 90^\circ$

$$\text{Mà } \widehat{MHC} + \widehat{MHA} = 90^\circ; \widehat{MHC} = \widehat{MCH}$$

$$\Rightarrow \widehat{MAH} = \widehat{MHA} \Rightarrow \Delta MAH \text{ cân tại } M \text{ (dnhb)} \Rightarrow MH = MA \text{ (định nghĩa)}$$

Mà $MH = MC$ (cmt)

$$\Rightarrow MA = MC$$

Mà M nằm giữa A và C

$$\Rightarrow M \text{ là trung điểm của đoạn thẳng } AC$$

Vậy tia EH đi qua trung điểm M của đoạn thẳng AC

d) Chu vi tam giác AHB là:

$$\begin{aligned} AB + AH + BH &= AB + AH + BE \text{ (do } BH = BE \text{)} \\ &= AE + AH \text{ (do } B \in AE \text{)} \end{aligned}$$

+ Lấy F thuộc đoạn HC sao cho H là trung điểm BF .

+ Xét ΔABF , có AH vừa là đường cao, vừa là trung tuyến

nên ΔABF cân tại $A \Rightarrow \widehat{ABF} = \widehat{AFB}$

Mà $\widehat{AFB} = \widehat{FAC} + \widehat{ACB}$ (tính chất góc ngoài tam giác)

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{FAC} + \widehat{ACB} \Rightarrow 2 \cdot \widehat{ACB} = \widehat{FAC} + \widehat{ACB}$$

$$\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{FAC} \Rightarrow \Delta FAC \text{ cân tại } F \Rightarrow FA = FC$$

Mà $FA = AB$ (ΔABF cân tại A)

$$\Rightarrow AB = FC$$

Mà $HF = BH = BE$

$$\Rightarrow AB + BE = FC + HF \Rightarrow AE = HC$$

Chu vi tam giác AHB là $AH + HC$

Xét ΔAHC có: $AH + HC > AC$ (Bất đẳng thức tam giác)

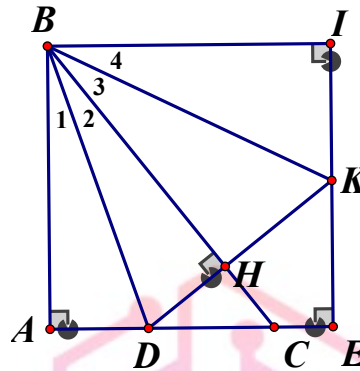
Vậy chu vi tam giác AHB lớn hơn độ dài đoạn thẳng AC .

Câu 101. (HSG 7 huyện Nghĩa Hành 2021 - 2022; trường Cự Khê 2016 - 2017; huyện Thanh Oai 2013 - 2014)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB > AC$). Tia phân giác góc B cắt AC ở D . Kẻ DH vuông góc với BC . Trên tia AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$. Đường thẳng vuông góc với AE tại E cắt tia DH ở K . Chứng minh rằng:

- $BA = BH$
- $\widehat{DBK} = 45^\circ$
- Cho $AB = 4$ cm, tính chu vi tam giác DEK

Lời giải



a) Xét hai tam giác vuông $\triangle ABD$ và $\triangle HBD$ có:

BC chung; $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ (BD là tia phân giác)

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle HBD$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow BA = BH$ (hai cạnh tương ứng)

b) Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với EK , cắt EK tại I

Ta có $AB = BH$ (cmt); $AE = AB$ (gt); $AE = BI$ ($BA \parallel IE$) $\Rightarrow BH = BI$

$\triangle HBK = \triangle IBK$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{B}_3 = \widehat{B}_4$ (hai góc tương ứng)

mà $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$

Lại có $BI \parallel AE$ (Vì cùng vuông góc với IE)

mà $AB \perp AE$ suy ra $AB \perp BI$

Do đó: $\widehat{DBK} = \widehat{B}_2 + \widehat{B}_3 = \frac{1}{2} \widehat{ABI} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{DBK} = 45^\circ$

c) $\triangle ABD = \triangle HBD \Rightarrow AD = DH$

$\triangle HBK = \triangle IBK \Rightarrow HK = KI$

$\Rightarrow KD = DH + HK = AD + KI$

Chu vi tam giác DEK là:

$DE + EK + KD = DE + KE + AD + KI = AE + IE = 2 \cdot AB = 2 \cdot 4 = 8$ (cm)

Câu 102. (HSG 7 trường Nguyễn Khuyến 2017 - 2018)

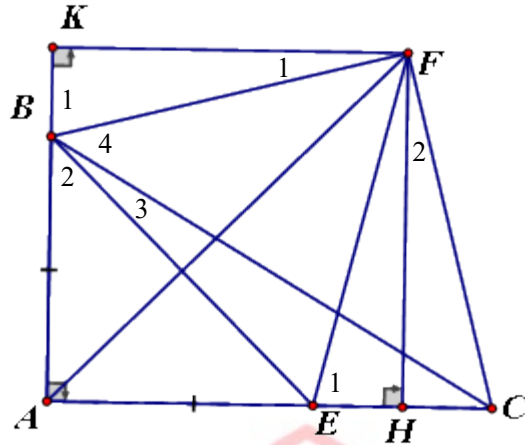
Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$.

Tia phân giác của \widehat{BAC} cắt đường trung trực của CE tại F .

a) Chứng minh tam giác BFC cân.

b) Biết góc $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Chứng minh tam giác BFE đều.

Lời giải



a) Ta có FH là đường trung trực của đoạn EC nên $FC = FE$ (1).

Xét $\triangle ABF$ và $\triangle AEF$ có:

$$AB = AE \text{ (gt);}$$

$$\widehat{BAF} = \widehat{EAF} \text{ (gt)}$$

AF chung

Suy ra $\triangle ABF = \triangle AEF$ (c - g - c)

$$\Rightarrow FB = FE \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra $FB = FC$ nên $\triangle BFC$ cân tại F .

b) Hạ $FK \perp AB \Rightarrow KF \parallel AC$

$$\Rightarrow \widehat{KFH} = \widehat{FHC} = 90^\circ \text{ (so le trong)}$$

Ta có $\triangle ABF = \triangle AEF \Rightarrow \widehat{ABF} = \widehat{AEF}$

$$\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{HEF} \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{HCF} \text{ (do } \triangle BFC \text{ cân tại } F \text{)}$$

Xét $\triangle FKB$ và $\triangle FHC$ có:

$$\widehat{BKF} = \widehat{CHF} = 90^\circ$$

$$FB = FC \text{ (cmt)}$$

$$\widehat{B}_1 = \widehat{HCF} \text{ (cmt)}$$

Suy ra $\triangle FKB = \triangle FHC$ (ch - gn) $\Rightarrow \widehat{F}_1 = \widehat{F}_2$

$$\Rightarrow \widehat{F}_1 + \widehat{BFH} = \widehat{F}_2 + \widehat{BFH} \Rightarrow \widehat{KFH} = \widehat{BFC} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle BFC \text{ vuông cân} \Rightarrow \widehat{B}_4 = 45^\circ \text{ (3)}$$

Ta có $\widehat{ACB} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 60^\circ$

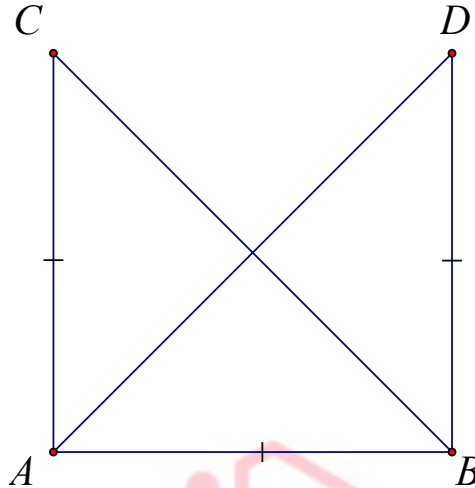
$$\Rightarrow \widehat{B}_3 = 60^\circ - \widehat{B}_2 = 15^\circ \text{ (4)}$$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \widehat{FBE} = \widehat{B}_3 + \widehat{B}_4 = 15^\circ + 45^\circ = 60^\circ$

Tam giác cân $\triangle BFE$ có $\widehat{FBE} = 60^\circ$ nên tam giác BFE đều.

Câu 103. (HSG 7 huyện Triệu Sơn, tỉnh Thanh Hóa năm học 2021 - 2022)

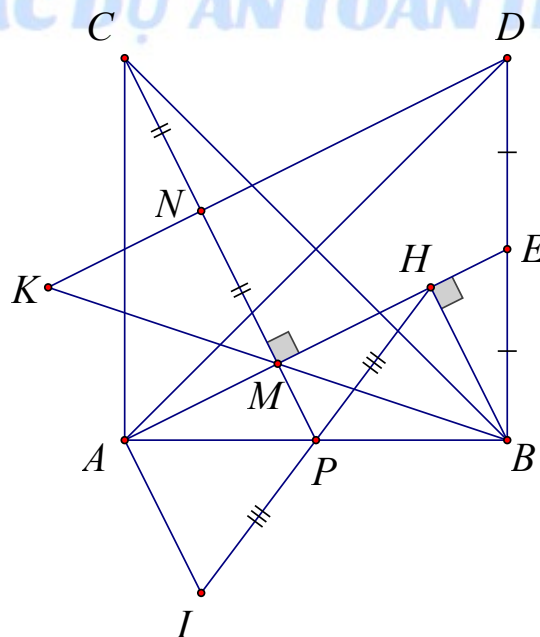
Cho tam giác ABC vuông cân tại A , trên cạnh AB ta vẽ tam giác ABD vuông cân tại B như hình vẽ.



- 1) Gọi E là trung điểm của BD . Đường thẳng qua C vuông góc với AE tại M cắt AB tại P . Chứng minh: $\triangle ABE = \triangle CAP$.
- 2) Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với AE tại H .
 - a) Chứng minh: $MA = MH$.
 - b) Chứng minh tam giác HBM vuông cân.
- 3) Gọi N là trung điểm của CM , đường thẳng BM cắt đường thẳng DN tại K . Tính số đo \widehat{BKD} .

Lời giải

CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS



1) Chứng minh: $\triangle ABE = \triangle CAP$.

Ta có:

$$\widehat{EAB} + \widehat{CAM} = 90^\circ$$

$$\widehat{ACP} + \widehat{CAM} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{EAB} = \widehat{ACP} \text{ (cùng phụ với } \widehat{CAM} \text{)}$$

+ Xét $\triangle ABE$ và $\triangle CAP$, có:

$$\widehat{ABE} = \widehat{CAP} (= 90^\circ)$$

$$AB = AC \text{ (gt)}$$

$$\widehat{EAB} = \widehat{ACP} \text{ (cmt)}$$

Vậy: $\triangle ABE = \triangle CAP$ (cạnh góc vuông – góc nhọn kề)

2) a) Chứng minh: $MA = MH$.

$$\text{Vì } \triangle ABE = \triangle CAP \text{ (cmt)} \Rightarrow AP = BE = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AB \Rightarrow AP = BP$$

Trên tia đối của PH lấy điểm I sao cho $PI = PH$

Ta có $\triangle PAI = \triangle PBH$ (c.g.c) ($PI = PH$, $\widehat{API} = \widehat{BPH}$, $AP = BP$)

Nên $AI = HB$ (hai cạnh tương ứng)

và $\widehat{IAP} = \widehat{HBP}$ (hai góc tương ứng)

Suy ra $AI \parallel HB$ (cùng vuông góc với AH)

Mà $\widehat{AHB} = 90^\circ$ nên $\widehat{IAH} = 90^\circ$ (quan hệ giữa tính song song và vuông góc)

Xét $\triangle AHI$ và $\triangle HAB$ có

$$AI = HB$$

$$\widehat{AHB} = \widehat{IAH} = 90^\circ$$

AH là cạnh chung

Do đó $\triangle AHI = \triangle HAB$ (c.g.c)

$\Rightarrow HI = HB$ (hai cạnh tương ứng)

Mà $PA = PB$ và $PI = PH$ do đó suy ra $PA = PB = PI = PH$

Xét $\triangle MAP$ và $\triangle MHP$ có

$$PA = PH \text{ (cmt)}$$

$$\widehat{AMP} = \widehat{HMP} \text{ (} \triangle PAI = \triangle PBH \text{)}$$

Do đó $\triangle MAP = \triangle MHP$ (Cạnh huyền – góc nhọn)

Suy ra $MA = MH$ (hai cạnh tương ứng)

b) Chứng minh tam giác HBM vuông cân.

Có $MA = MH$ (CM trên) (1)

Xét $\triangle ABH$ và $\triangle CAM$, có:

$$\widehat{AHB} = \widehat{CMA} (= 90^\circ)$$

$$AB = AC \text{ (gt)}$$

$$\widehat{HAB} = \widehat{MCA} \text{ (cùng phụ với } \widehat{CAM} \text{)}$$

Vậy: $\triangle ABH = \triangle CAM$ (ch – gn)

$\Rightarrow HB = MA$ (hai cạnh tương ứng) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow HB = HM$

$\Rightarrow \Delta HBM$ vuông cân tại H .

3) Tính số đo góc BKD .

+ ΔHBM vuông cân tại $H \Rightarrow \widehat{BME} = 45^\circ$.

Xét ΔABH và ΔCAM có

$$\widehat{AMC} = \widehat{AHB} = 90^\circ$$

$$AB = CA$$

$$\widehat{ACM} = \widehat{HAB} \quad (\Delta ABE = \Delta CAP)$$

Do đó $\Delta ABH = \Delta CAM$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow AH = CM$ (hai cạnh tương ứng)

+ Vì $MA = MH; NM = NC \Rightarrow MA = NC$

+ Xét ΔAMC và ΔCND , có:

$$AC = CD \text{ (gt)}$$

$$MA = NC \text{ (cmt)}$$

$$\widehat{CAM} = \widehat{DCN} \text{ (cùng phụ với } \widehat{ACM} \text{)}$$

Vậy: $\Delta AMC = \Delta CND$ (c-g-c)

$\Rightarrow \widehat{AMC} = \widehat{CND} = 90^\circ$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow CP \perp DK$

+ Mặt khác: $CP \perp EA \Rightarrow DK \parallel EA$

$\Rightarrow \widehat{BKD} = \widehat{BME} = 45^\circ$

Vậy $\widehat{BKD} = 45^\circ$.

Câu 104. (HSG 7 huyện Chương Mỹ năm học 2017 - 2018)

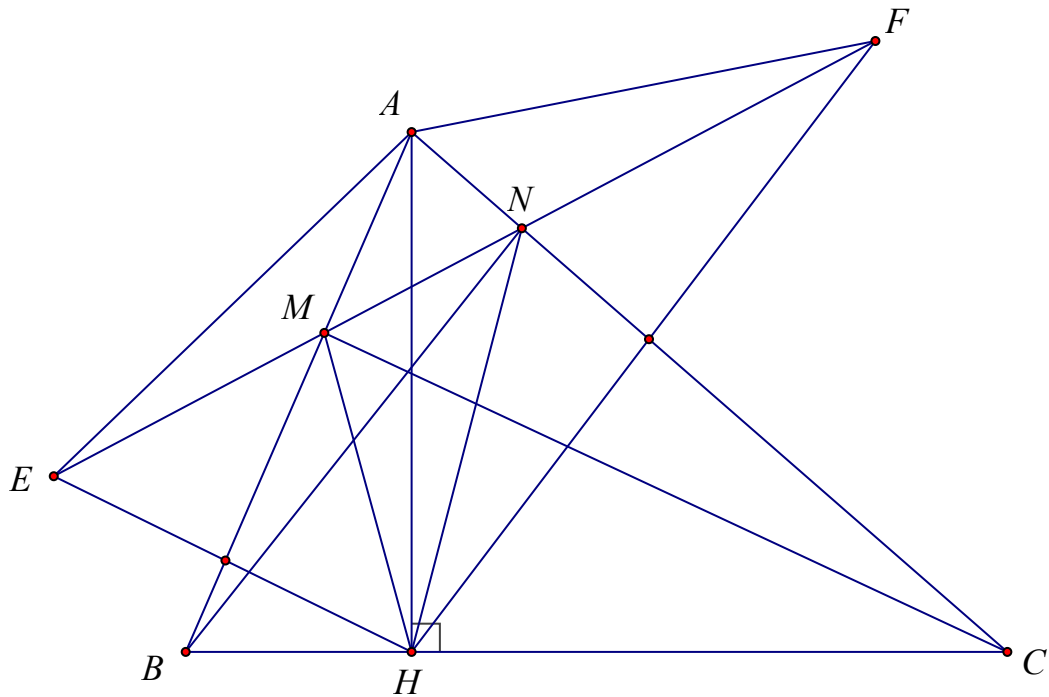
Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} < 90^\circ$, đường cao AH . Gọi E, F lần lượt là điểm đối xứng của H qua AB, AC đường thẳng EF cắt AB, AC lần lượt tại M và N . Chứng minh rằng:

a) $AE = AF$

b) HA là phân giác của \widehat{MHN}

c) $CM \parallel EH, BN \parallel FH$

Lời giải



- a) Vì AB là trung trực của EH nên ta có: $AE = AH$ (1)
 Vì AC là trung trực của HF nên ta có: $AH = AF$ (2)
 Từ (1) và (2) suy ra $AE = AF$
- b) Vì $M \in AB$ nên MB là phân giác \widehat{EMH}
 MB là phân giác ngoài góc M của tam giác MNH
 Vì $N \in AC$ nên NC là phân giác \widehat{FNH}
 $\Rightarrow NC$ là phân giác ngoài \widehat{N} của tam giác MNH
 Do MB, NC cắt nhau tại A nên HA là phân giác trong góc H của tam giác MNH
 Hay HA là phân giác của \widehat{MHN} .
- c) Ta có: $AH \perp BC$ (gt)
 Mà HM là phân giác \widehat{MHN}
 $\Rightarrow HB$ là phân giác ngoài của \widehat{H} của tam giác MNH
 MB là phân giác ngoài của \widehat{M} của tam giác HMN
 $\Rightarrow NB$ là phân giác trong góc N của tam giác MNH
 $\Rightarrow BN \perp AC$ (hai đường phân giác của hai góc kề bù thì vuông góc với nhau)
 $\Rightarrow BN \parallel HF$ (cùng vuông góc với AC)
 Chứng minh tương tự ta có: $EH \parallel CM$.
 $\widehat{IAG} = \widehat{KAC} = 22,5^\circ$
 Xét $\triangle AIE$ có AG là đường cao đồng thời là phân giác của \widehat{IAE}
 $\Rightarrow \triangle AIE$ cân tại $A \Rightarrow AI = AE$ (3)

Câu 105. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường THCS Kim Trung 2022 - 2023)

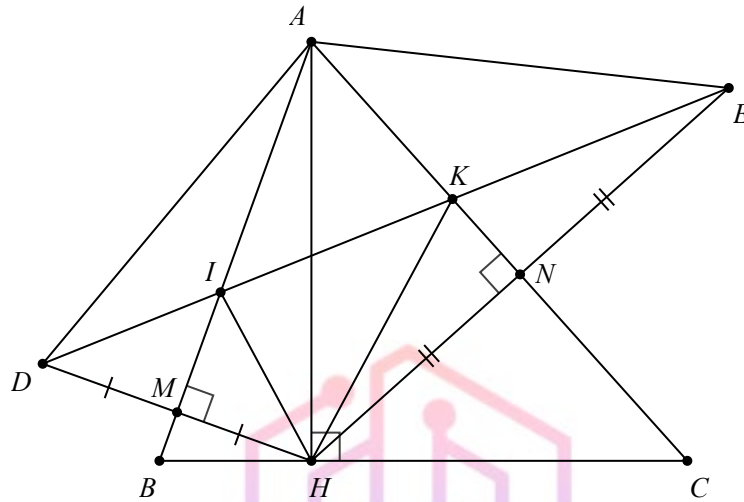
Cho ΔABC nhọn, kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$), lấy các điểm D và E ở ngoài tam giác sao cho AB là đường trung trực của HD và AC là đường trung trực của HE . Đoạn thẳng DE cắt cạnh AB ở I và cắt cạnh AC ở K ; HD cắt AB ở M và HE cắt AC ở N .

a) Chứng minh: ΔADE cân.

b) Chứng minh: HA là tia phân giác của \widehat{IHK} .

c) Chứng minh: $\widehat{BAC} = \widehat{KHC}$.

Lời giải



a) +) c/m: $\Delta AMH = \Delta AMD$ (c.g.c) $\Rightarrow AH = AD$ (1)

+) c/m: $\Delta ANH = \Delta ANE$ (c.g.c) $\Rightarrow AH = AE$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AD = AE$

ΔADE có $AD = AE \Rightarrow \Delta ADE$ cân ở A .

b) +) c/m: $\Delta AIH = \Delta AID$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AHI} = \widehat{ADI}$ (3)

+) c/m: $\Delta AKH = \Delta AKE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AHK} = \widehat{AEK}$ (4)

+) ΔADE cân ở A (cmt) $\Rightarrow \widehat{ADI} = \widehat{AEK}$ (5)

Từ (3), (4), (5) $\Rightarrow \widehat{AHI} = \widehat{AHK} \Rightarrow HA$ là tia phân giác của góc \widehat{IHK}

c) Ta có: $\Delta AMH = \Delta AMD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MAH} = \widehat{MAD}$

$\Delta ANH = \Delta ANE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{NAH} = \widehat{NAE}$

Do đó $\widehat{MAH} + \widehat{NAH} = \widehat{MAD} + \widehat{NAE} \Rightarrow \widehat{DAE} = 2.\widehat{MAN} = 2.\widehat{BAC}$

Ta có: $\widehat{ADE} + \widehat{DAE} + \widehat{AED} = 180^\circ \Rightarrow 2.\widehat{BAC} + 2.\widehat{AED} = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{AED} = 90^\circ$ (6)

Lại có $AH \perp BC$ nên $\widehat{CHK} + \widehat{KHA} = 90^\circ$ (7)

Mà $\Delta AKH = \Delta AKE$ nên $\widehat{AED} = \widehat{AHK}$ (2 góc tương ứng) (8)

Từ (6); (7); (8) $\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{CHK}$

Câu 106. (HSG 7 huyện Tương Dương 2022 - 2023; huyện Thanh Oai 2014 - 2015)

Cho ΔABC nhọn, AD vuông góc với BC tại D . Xác định $I; J$ sao cho AB là trung trực của DI , AC là trung trực của DJ ; IJ cắt AB ; AC lần lượt ở L và K . Chứng minh rằng:

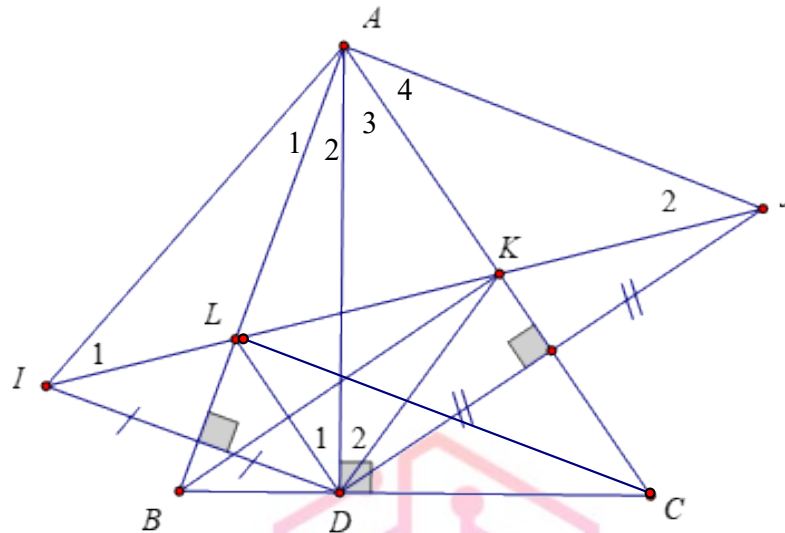
a) ΔAIJ cân

b) DA là tia phân giác của góc LDK

c) $BK \perp AC$; $CL \perp AB$

d) Nếu D là một điểm tùy ý trên cạnh BC . Chứng minh rằng góc IAJ có số đo không đổi và tìm vị trí điểm D trên cạnh BC để IJ có độ dài nhỏ nhất.

Lời giải



a) Do AB là trung trực của DI ; AC là trung trực của DJ nên $AI = AD$, $AD = AJ$

Do đó $AI = AJ$. Suy ra $\triangle AIJ$ cân tại A .

b) Xét $\triangle ALI$ và $\triangle ALD$ có:

$AI = AD$, $LI = LD$ (do AB là trung trực của DI), cạnh AL chung

Do đó $\triangle ALI = \triangle ALD$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{I}_1 = \widehat{D}_1$ (hai góc tương ứng) (1)

Xét $\triangle AKJ$ và $\triangle AKD$ có:

$AJ = AD$, $KJ = KD$ (do AC là trung trực của DJ), cạnh AK chung

$\triangle AKJ = \triangle AKD$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{D}_2 = \widehat{J}_2$ (hai góc tương ứng) (2)

Mà $\triangle AIJ$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{I}_1 = \widehat{J}_2$ (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$

Vậy DA là tia phân giác của góc LDK .

c) Ta có KC là đường trung trực của $\triangle DKJ$ cân tại K do đó KC là phân giác ngoài tại đỉnh K của $\triangle DKL$.

DA là tia phân giác \widehat{LDK} của $\triangle DKL$, $DA \perp DC$ do đó DC là phân giác ngoài tại đỉnh D của $\triangle DKL$.

Suy ra LC là phân giác trong tại đỉnh L của $\triangle DKL$.

Mà AB cũng là phân giác ngoài tại đỉnh L của $\triangle DKL$.

$\Rightarrow CL \perp AB$ tại L .

Tương tự: Ta có LB là đường trung trực của $\triangle DLI$ cân tại L do đó LB là phân giác ngoài tại đỉnh L của $\triangle DLI$.

DA là tia phân giác \widehat{LDK} của $\triangle DKL$, $DA \perp DC$ do đó DB là phân giác ngoài tại đỉnh D của $\triangle DKL$.

Suy ra KB là phân giác trong tại đỉnh K của $\triangle DKL$.

Mà AC cũng là phân giác ngoài tại đỉnh K của $\triangle DKL$.

$\Rightarrow BK \perp AC$ tại K .

Vậy $BK \perp AC$; $CL \perp AB$.

d) Ta có $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (vì $\triangle ALI = \triangle ALD$ chứng minh trên)

Chứng minh tương tự $\widehat{A}_3 = \widehat{A}_4$ (vì $\triangle AKJ = \triangle AKD$)

Ta có $\widehat{IAJ} = \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 + \widehat{A}_4 = 2(\widehat{A}_2 + \widehat{A}_3) = 2\widehat{BAC}$.

Vậy góc IAJ có số đo không đổi.

$\triangle AIJ$ cân tại A có \widehat{IAJ} có số đo không đổi nên cạnh đáy IJ nhỏ nhất nếu cạnh bên AI nhỏ nhất.

Ta có $AI = AD \geq AH$ (AH là đường vuông góc kẻ từ A đến BC)

Dấu bằng xảy ra tức là $AD = AH$ khi $D \equiv H$.

Vậy khi D là chân đường vuông góc hạ từ A xuống BC thì IJ nhỏ nhất.

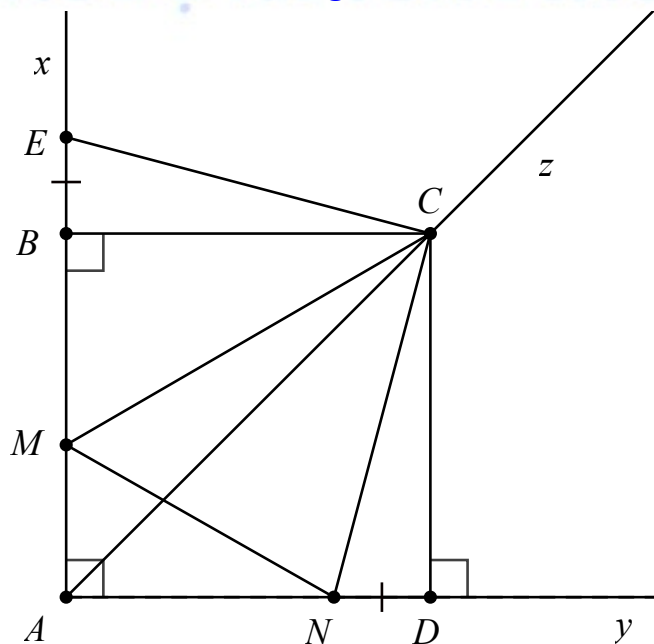
Câu 107. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Tân Tiến 2022 - 2023)

Cho góc vuông \widehat{xAy} , C là một điểm thuộc tia phân giác Az của \widehat{xAy} . Từ C kẻ các đường thẳng vuông góc với Ax và Ay lần lượt tại B, D . Trên các đoạn thẳng AB, AD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho chu vi $\triangle AMN$ bằng $AB + AD$. Trên tia Bx lấy điểm E sao cho $BE = ND$. Chứng minh rằng:

a) $\triangle CBE = \triangle CDN$

b) MC là tia phân giác của \widehat{BMN} .

Lời giải



1) Chứng minh $\triangle ABC = \triangle ADC$ (Cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow BC = DC$ (2 cạnh tương ứng)

Xét $\triangle CBE$ và $\triangle CDN$ có:

$$BE = DN \text{ (gt)}$$

$$\widehat{EBC} = \widehat{NDC} = 90^\circ$$

$$BC = DC \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \triangle CBE = \triangle CDN \text{ (c.g.c)}$$

2) Ta có $\triangle CBE = \triangle CDN$ (cm câu a)

$$\Rightarrow CE = CD \text{ (2 cạnh tương ứng)}$$

Ta có: $AM + AN + MN = AB + AD$ (gt)

$$\text{Mà } AB + AD = AM + MB + AN + ND$$

$$\text{Do đó } AM + AN + MN = AM + NB + AN + ND$$

$$\Rightarrow MN = MB + ND$$

Ta lại có: $BE = ND$ (gt)

$$\Rightarrow MN = MB + BE \Rightarrow MN = PE$$

Xét $\triangle CME$ và $\triangle CMN$ có:

$$ME = MN \text{ (cmt)}$$

$$CE = CD \text{ (cmt)}$$

CM cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle CME = \triangle CMN \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$$

$\Rightarrow PC$ là tia phân giác của \widehat{BMN} .

Câu 108. (HSG 7 huyện Ý Yên năm 2021 - 2022)

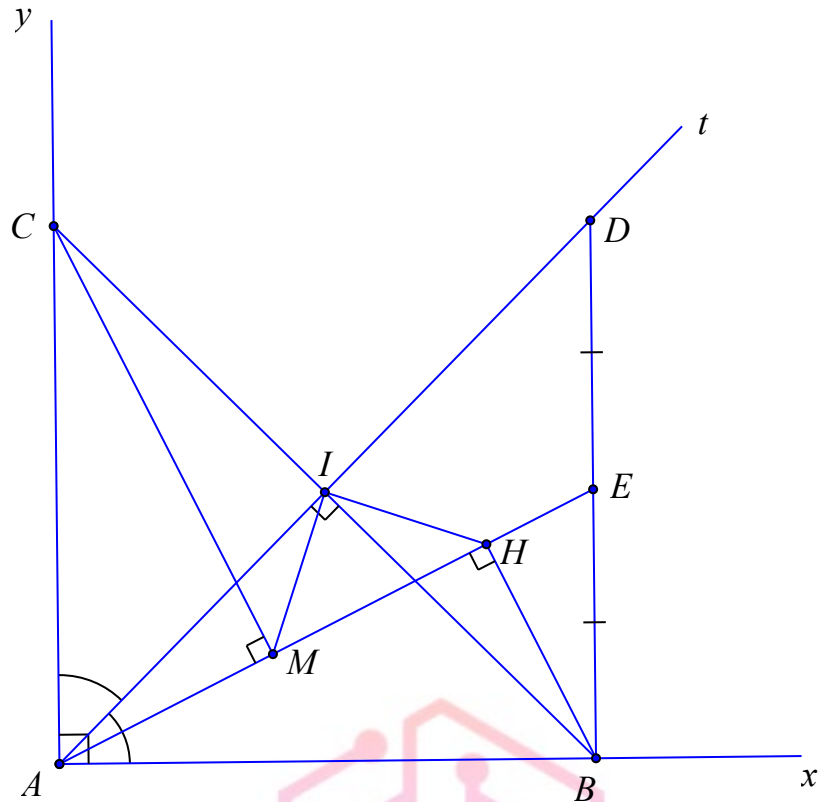
Cho góc xAy vuông, kẻ tia phân giác At của góc xAy . Trên tia At lấy điểm I cố định, qua I kẻ đường thẳng vuông góc với At cắt Ax, Ay lần lượt tại B, C . Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với Ax cắt tia At tại D . Gọi E là trung điểm của BD , gọi M, H lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ C, B xuống AE .

1) Chứng minh $AM = BH$ và $BC = AD$

2) Chứng minh $IH > \frac{MH}{2}$ và tia phân giác của góc EMC luôn đi qua một điểm cố định

3) Gọi N là trung điểm của AC . Đường thẳng BM cắt DN tại K . Tính số đo \widehat{BKN} .

Lời giải



1) Chứng minh $AM = BH$ và $BC = AD$

+ Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có đường phân giác AI đồng thời là đường cao nên $\triangle ABC$ vuông cân tại A . Suy ra $AB = AC$ và $IB = IC$.

Xét $\triangle AHB$ vuông tại H và $\triangle CMA$ vuông tại M có:

$$AB = AC \text{ và } \widehat{HAB} = \widehat{MCA} \text{ (cùng phụ với } \widehat{MAC} \text{)}$$

Do đó $\triangle AHB = \triangle CMA$ (ch-gn),

suy ra $AM = BH$.

+ Xét $\triangle ABC$ và $\triangle BAD$ có

$$\widehat{CAB} = \widehat{DBA} = 90^\circ$$

AB chung

$$\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle BAD \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow BC = AD$$

2) Chứng minh $IH > \frac{MH}{2}$ và tia phân giác của góc EMC luôn đi qua một điểm cố định

+ Vì $\triangle IAB$ vuông cân tại I nên $\widehat{IAM} + \widehat{MAB} = 45^\circ$

Vì $\triangle ABC$ vuông cân tại A nên $\widehat{ABC} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{CBD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{IBH} + \widehat{HBE} = 45^\circ$

Mà $\widehat{MAB} = \widehat{HBE}$ (cùng phụ \widehat{HEB}) nên $\widehat{IAM} = \widehat{IBH}$

Từ đó ta có $\triangle IAM = \triangle IBH$ (c.g.c)

$$\Rightarrow IM = IH$$

Theo bất đẳng thức trong tam giác ta có $IM + IH > MH$

$$\Rightarrow 2.IH > MH \Rightarrow IH > \frac{MH}{2} \text{ (đpcm)}$$

+ Theo chứng minh trên có $\triangle IAM = \triangle IBH \Rightarrow \widehat{AIM} = \widehat{BIH}$

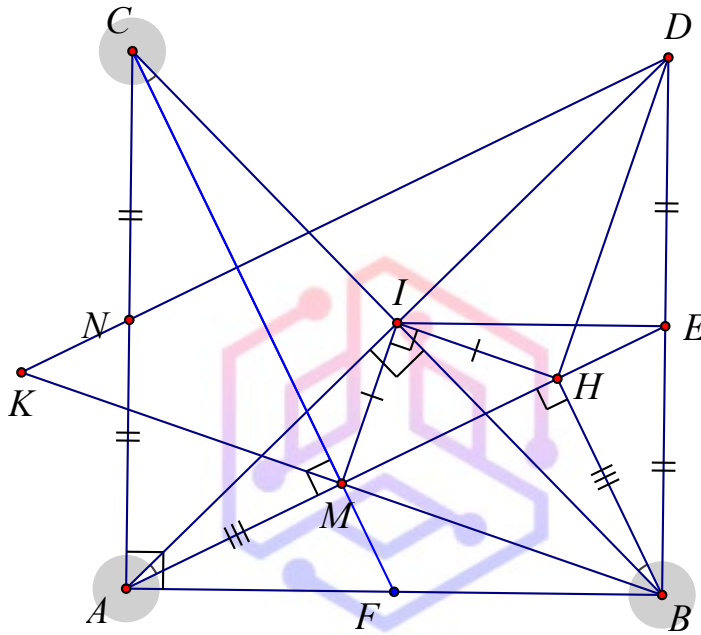
Ta lại có \widehat{AIM} phụ \widehat{MIB} nên \widehat{BIH} phụ \widehat{MIB} , hay $\widehat{HIM} = 90^\circ$

Do đó $\triangle IMH$ vuông cân tại $I \Rightarrow \widehat{HMI} = 45^\circ$

Mà $\widehat{HMI} + \widehat{IMC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{IMC} = 45^\circ \Rightarrow MI$ tia là phân giác của góc EMC

Do đó phân giác của góc EMC luôn đi qua điểm I cố định (đpcm)

3) Gọi N là trung điểm của AC . Đường thẳng BM cắt DN tại K . Tính số đo \widehat{BKN} .



+ Do $AC \parallel BD$ và $AC=BD$, mà N, E lần lượt là trung điểm của AC và BD nên ta chứng minh được $\triangle DNE = \triangle AEN$ (c.g.c), từ đó suy ra $DN \parallel AE \Rightarrow \widehat{BKN} = \widehat{KMA}$ (so le trong)

Gọi N là giao điểm của CM và AB , ta có $\triangle ACF = \triangle BAE$ (g.c.g)

$$\Rightarrow AF = BE$$

$$\text{Mà } BE = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AB$$

$\Rightarrow F$ là trung điểm của AB

Có $CF \parallel BH$, F là trung điểm của AB

$\Rightarrow M$ là trung điểm của AH

$$\Rightarrow AM = MH$$

$$\Rightarrow MH = HB$$

$\Rightarrow \triangle HMB$ vuông cân tại $H \Rightarrow \widehat{HMB} = 45^\circ$

Mà $\widehat{HMI} = 45^\circ$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{BMI} = 90^\circ$

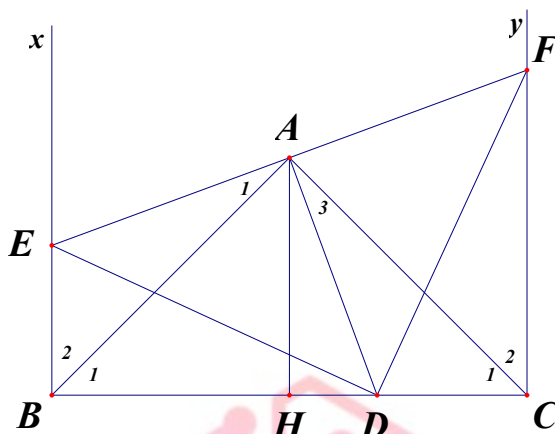
$$\Rightarrow MI \perp KB$$

Xét cặp góc kề bù \widehat{CME} và \widehat{CMA} , ta có MI là phân giác của \widehat{CME} (theo câu b) và $MI \perp KB$ nên MK là phân giác của $\widehat{CMA} \Rightarrow \widehat{BKN} = \widehat{KMA} = 45^\circ$.

Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Vẽ các tia Bx , Cy vuông góc với BC nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A . Gọi D là một điểm nằm giữa B và C . Đường thẳng vuông góc với AD tại A cắt Bx và Cy theo thứ tự tại E và F .

- 1) Chứng minh $\triangle AEB = \triangle ADC$;
- 2) Chứng minh tam giác EDF vuông cân;
- 3) Xác định vị trí điểm D trên BC để EF có độ dài nhỏ nhất.

Lời giải



1) Ta có $\widehat{EAB} + \widehat{BAD} = 90^\circ$, $\widehat{CAD} + \widehat{DAB} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{EAB} = \widehat{DAC}$$

$\triangle ABC$ vuông cân $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 45^\circ$; $\widehat{EBA} = \widehat{ACD} = 45^\circ$

Xét $\triangle AEB$ và $\triangle ADC$ có

$$\widehat{EAB} = \widehat{DAC} \text{ (theo chứng minh trên)}$$

$$AB = AC \text{ (}\triangle ABC \text{ vuông cân)}$$

$$\widehat{EBA} = \widehat{ACD} = 45^\circ \text{ (theo chứng minh trên)}$$

Do đó $\triangle AEB = \triangle ADC$ (g. c. g)

2) Theo chứng minh phần a ta có $\triangle AEB = \triangle ADC \Rightarrow AE = AD$ (hai cạnh tương ứng)

$$\Rightarrow \triangle AED \text{ vuông cân} \Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{ADE} = 45^\circ \text{ (1)}$$

Chứng minh tương tự $\triangle ABD = \triangle ACF \Rightarrow AF = AD$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow \triangle ADF$ vuông cân

$$\Rightarrow \widehat{ADF} = \widehat{AFD} = 45^\circ \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle EDF$ vuông cân.

3) Ta có: $\triangle AEB = \triangle ADC \Rightarrow AE = AD$ (hai cạnh tương ứng)

$$\triangle ABD = \triangle ACF \Rightarrow AD = AF \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

Do đó $AE = AD = AF \Rightarrow EF = 2AD$

Để EF nhỏ nhất thì AD nhỏ nhất. Mà A cố định nên AD nhỏ nhất khi $AD \perp BC$

Mặt khác $\triangle ABC$ vuông cân nên suy ra AD là trung trực của BC

$\Rightarrow D$ là trung điểm của BC hay $D \equiv H$.

Vậy D là trung điểm của BC thì EF nhỏ nhất.

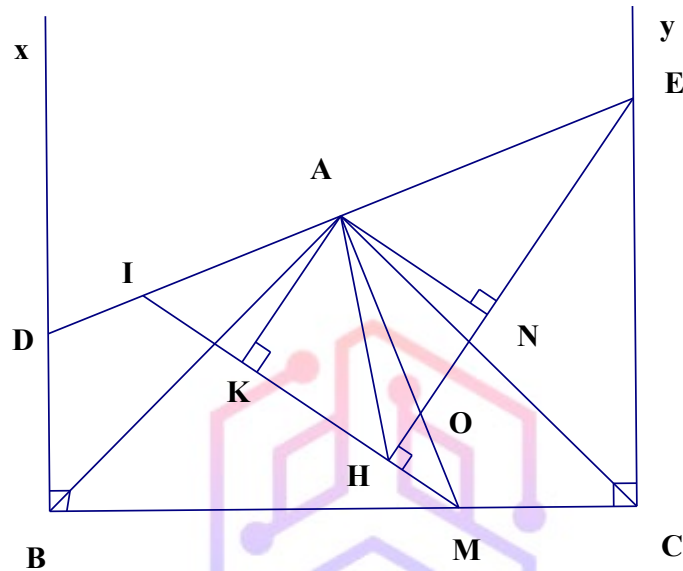
Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Trên cùng nửa mặt phẳng chứa A bờ BC kẻ các tia Bx và Cy vuông góc với BC . Gọi M là điểm thuộc cạnh BC (M không trùng B và C). Đường thẳng vuông góc với AM tại A cắt Bx và Cy theo thứ tự ở D và E .

a) Chứng minh : $AM = AE$

b) Tính số đo góc \widehat{DME}

c) Lấy I nằm giữa A và D . Kẻ HE vuông góc với MI . Chứng minh HA là tia phân giác của góc \widehat{EHI} .

Lời giải



a) Xét $\triangle AMB$ và $\triangle AEC$ có: $AB = AC$; $\widehat{ABM} = \widehat{ACE} = 45^\circ$; $\widehat{MAB} = \widehat{EAC}$ (Vì cùng phụ với \widehat{MAC})

Suy ra: $\triangle AMB = \triangle AEC$. Do đó $AD = AM$

b) Vì $AE = AM$ và $AE \perp AM$ nên $\triangle AME$ vuông cân. Suy ra $\widehat{AME} = 45^\circ$

Chứng minh tương tự có $\widehat{AMD} = 45^\circ$. Do đó $\widehat{DME} = 90^\circ$

c) Từ A kẻ $AK \perp IM$ tại K và $AN \perp HE$ tại N

Gọi O là giao điểm của HE và AM .

Có $\widehat{AEN} = \widehat{EMK}$ (phụ với hai góc đối đỉnh $\widehat{AOE} = \widehat{HOM}$)

Chứng minh được $\triangle AKM = \triangle ANE$ (vì $AM = AE$ (gt); $\widehat{AKM} = \widehat{ANE} = 90^\circ$; $\widehat{KMA} = \widehat{AEN}$ (cùng phụ với $\widehat{HOM} = \widehat{AON}$)

Suy ra $AK = AN$. Hay HA là tia phân giác của \widehat{EHI}

Câu 111. (HSG 7 TP Trục Ninh 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A , lấy điểm D bất kì thuộc cạnh BC (D khác B và C). Trên nửa mặt phẳng chứa điểm A , kẻ tia Bx và Cy vuông góc với BC , đường thẳng vuông góc với AD tại A cắt tia Bx và Cy lần lượt tại E và F . Chứng minh rằng:

1) $\triangle AEB = \triangle ADC$

2) $\triangle DEF$ vuông cân.

3) Từ D kẻ đường thẳng song song với CF , đường thẳng này cắt AC và AB lần lượt tại K và Q . Chứng minh:

$$\Delta DEF \text{ có } \widehat{EDF} = 180^\circ - \widehat{DEF} - \widehat{DFE} = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$$

$$\Delta DEF \text{ vuông tại } D \text{ có } \widehat{FED} = \widehat{DFE} = 45^\circ \text{ (Theo (1) và (2))}$$

$\Rightarrow \Delta DEF$ vuông cân tại D (đpcm).

3) a) Có $DQ \parallel CF$ (gt), $CF \perp BC$ (gt) nên $DQ \perp BC$ tại D .

Xét ΔBCQ có QD, CA là hai đường cao (vì $DQ \perp BC, AC \perp BQ$)

mà DQ cắt CA tại K nên K là trực tâm của ΔBCQ

$\Rightarrow BK \perp QC$ (Theo tính chất đồng quy của ba đường cao trong tam giác) (đpcm)

b) Từ K vẽ $KM \parallel QB$ ($M \in QC$), $KN \parallel QC$ ($N \in QB$).

Chứng minh được $\Delta QNK = \Delta KMQ$ (g.c.g)

$$\Rightarrow QM = NK, KM = NQ \text{ (vì hai cạnh tương ứng)} \quad (3)$$

$$\text{Trong } \Delta QKM \text{ có } QK < QM + KM \text{ (bất đẳng thức trong tam giác)} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) } \Rightarrow QK < QM + QN \quad (5)$$

Có: $KM \parallel BQ$ và $BQ \perp CK$ nên $KM \perp CK$.

$$\Delta CKM \text{ vuông tại } K \Rightarrow CM \text{ là cạnh huyền nên là cạnh lớn nhất } \Rightarrow KC < CM \quad (6)$$

$$\text{Tương tự (6) ta có } BK < BN \quad (7)$$

Từ (5); (6) và (7) ta có $KQ + KC + KB < QM + QN + CM + BN$

$$\Rightarrow KQ + KC + KB < QB + QC$$

Tương tự $KQ + KC + KB < BQ + BC$; $KQ + KC + KB < BC + QC$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta có

$$3(KQ + KC + KB) < 2(QB + QC + BC)$$

$$\Rightarrow (KQ + KC + KB) < \frac{2}{3}(QB + QC + BC) \text{ (đpcm)}$$

Câu 112. (HSG 7 huyện Văn Bàn 2022 - 2023)

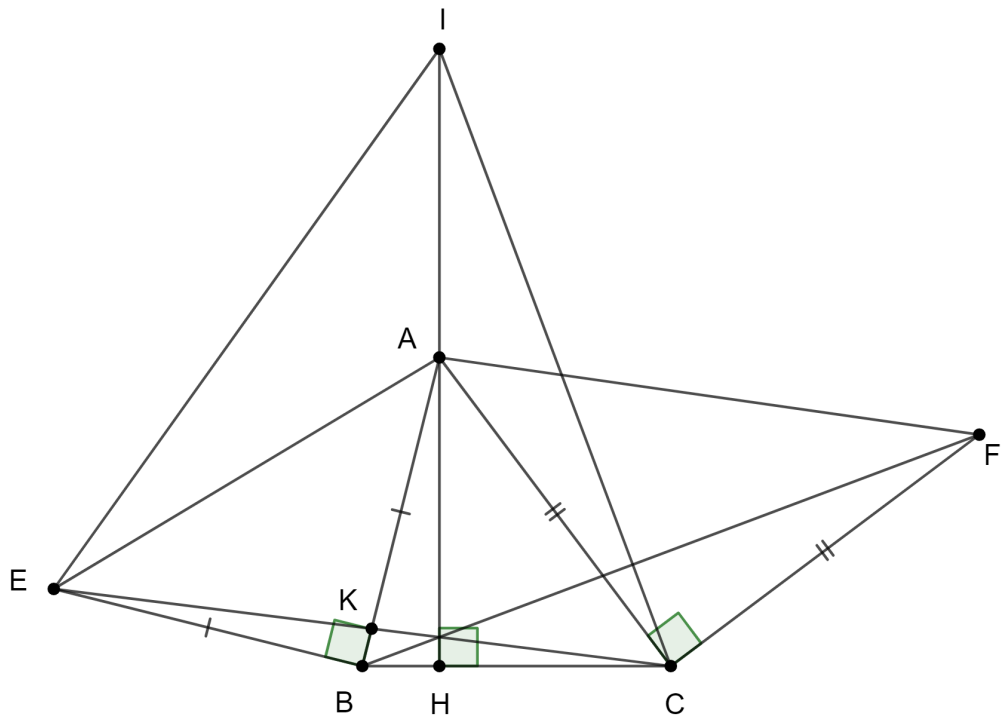
Cho tam giác ABC nhọn, AH là đường cao. Vẽ về phía ngoài của tam giác ABC các tam giác ABE vuông cân ở B và tam giác ACF vuông cân ở C . Trên tia đối của tia AH lấy điểm I sao cho $AI = BC$. Chứng minh:

a) $\Delta ABI = \Delta BEC$.

b) $BI = CE$ và $BI \perp CE$.

c) AH, CE, BF cắt nhau tại một điểm.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{BAI} + \widehat{BAH} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$$\widehat{CBE} + \widehat{BAH} = 90^\circ + \widehat{ABH} + \widehat{BAH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BAI} = \widehat{CBE}$$

Xét $\triangle ABI$ và $\triangle BEC$ có:

$$AB = BE \text{ (giả thiết)}$$

$$\widehat{BAI} = \widehat{EBC} \text{ (chứng minh trên)}$$

$$AI = BC \text{ (giả thiết)}$$

$$\Rightarrow \triangle ABI = \triangle BEC \text{ (c-g-c)}$$

$$\text{b) } \triangle ABI = \triangle BEC \text{ (cmt)} \Rightarrow BI = CE; \widehat{ABI} = \widehat{BEC}$$

$$\triangle BEC \text{ có: } \widehat{EBC} + \widehat{ECB} + \widehat{BEC} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 90^\circ + \widehat{ABH} + \widehat{ECB} + \widehat{IBA} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{ABH} + \widehat{ECB} + \widehat{IBA} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{KBC} + \widehat{ECB} = 90^\circ$$

Suy ra $\triangle BCK$ vuông tại $K \Rightarrow CE \perp BI$.

Chứng minh tương tự $BF \perp CI$.

c) Xét $\triangle BIC$ có $IH \perp BC; CE \perp BI; BF \perp IC$

$\Rightarrow IH; CE; BF$ là ba đường cao của tam giác.

Vậy $IH; CE; BF$ đồng quy.

Câu 113. (HSG 7 Kim Thành 2022 - 2023)

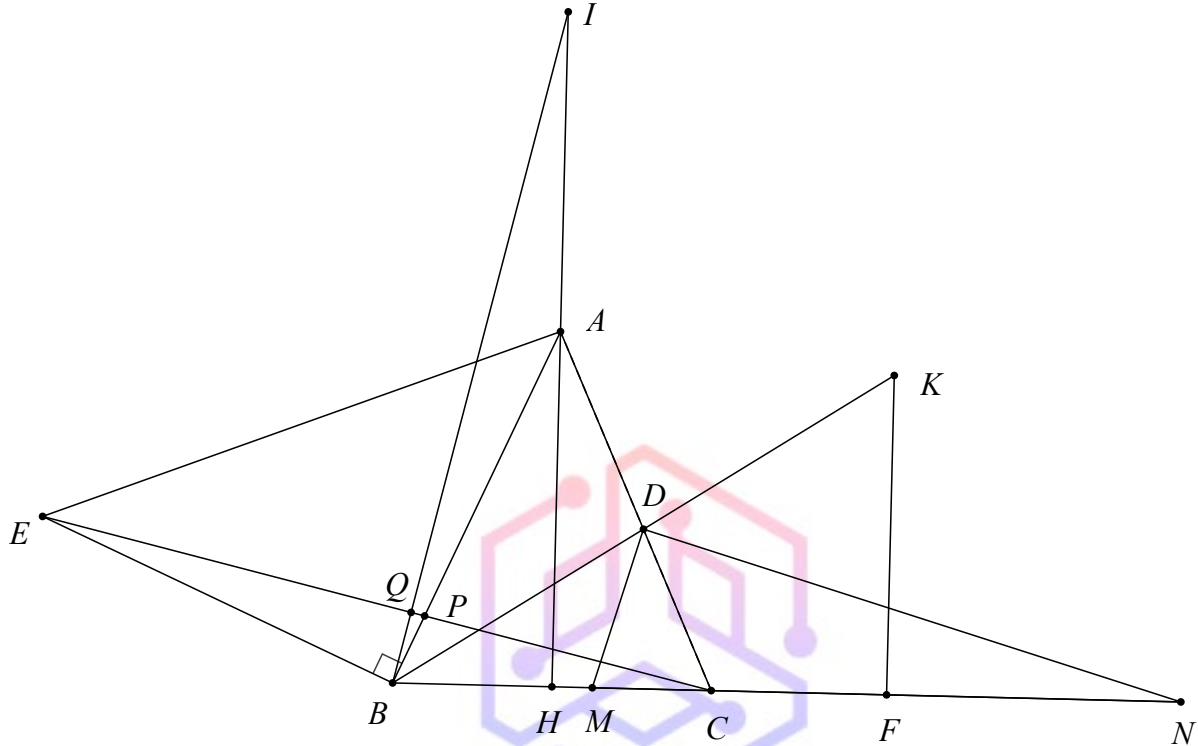
Cho $\triangle ABC$ cân tại A và có ba góc đều là góc nhọn. Vẽ trung tuyến AH .

a) Chứng minh: AH vuông góc với BC .

b) Vẽ $BE = BA$, BE vuông góc với BA (E và C nằm khác phía so với đường thẳng AB). Qua B vẽ đường thẳng vuông góc với EC cắt tia HA tại điểm I . Chứng minh: $BC = AI$

c) Đường phân giác của \widehat{ABC} cắt AC tại D , đường phân giác của \widehat{BDC} cắt BC tại M , đường phân giác của \widehat{ADB} cắt BC tại N . Gọi F là trung điểm của MN . Trên tia đối của tia DB lấy điểm K sao cho $DK = DB$. Chứng minh: $\triangle BFK$ là tam giác vuông.

Lời giải



a) Xét $\triangle ABH$ và $\triangle ACH$ có:

$$AB = AC \text{ (}\triangle ABC \text{ cân tại } A\text{);}$$

$$BH = CH \text{ (gt);}$$

AH chung;

$$\Rightarrow \triangle ABH = \triangle ACH \text{ (c.c.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{AHB} = \widehat{AHC}$$

Mà $\widehat{AHB} + \widehat{AHC} = 180^\circ$ (Kề bù)

$$\Rightarrow \widehat{AHB} = 180^\circ : 2 = 90^\circ$$

$$\Rightarrow AH \perp BC \text{ (đpcm).}$$

b) Xét $\triangle BCE$ và $\triangle AIB$ có

$$BE = AB \text{ (gt)} \tag{1}$$

$$\widehat{IAB} = \widehat{ABH} + \widehat{AHB} = \widehat{ABH} + 90^\circ \text{ (Tính chất góc ngoài } \triangle ABH)$$

$$\widehat{CBE} = \widehat{ABE} + \widehat{ABH} = 90^\circ + \widehat{ABH}$$

$$\Rightarrow \widehat{CBE} = \widehat{IAB} \text{ (= } 90^\circ + \widehat{ABH}) \tag{2}$$

Gọi P và Q lần lượt là giao điểm của AB và IB với CE .

$$\triangle PBE \text{ vuông tại } B \text{ có } \widehat{BEC} = 90^\circ - \widehat{BPQ}$$

$$\begin{aligned} \Delta PBQ \text{ vuông tại } Q \text{ có } \widehat{ABI} &= 90^\circ - \widehat{BPQ} \\ \Rightarrow \widehat{BEC} &= \widehat{ABI} (= 90^\circ - \widehat{BPQ}) \end{aligned} \quad (3)$$

Từ (1); (2); (3) $\Rightarrow \Delta BCE = \Delta AIB$ (g.c.g)

$\Rightarrow BC = AI$ (đpcm)

c) DN là đường phân giác của \widehat{ADB} nên DN là phân giác của \widehat{CDK} .

DM và DN lần lượt là hai tia phân giác của hai góc \widehat{BDC} và \widehat{KDC}

Mà $\widehat{BDC} + \widehat{KDC} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

nên $DM \perp DN$.

ΔMDN vuông tại D có DF là trung tuyến

$\Rightarrow FM = FD = FN$. (học sinh phải chứng minh)

$\widehat{FMD} = \widehat{MBD} + \widehat{BDM}$ (tính chất góc ngoài ΔBDM)

$\widehat{FMD} = \widehat{MBD} + \widehat{CDM}$ ($\widehat{BDM} = \widehat{CDM}$)

$\widehat{MDF} = \widehat{CDF} + \widehat{CDM}$

Mà ΔFDM cân tại F nên $\widehat{FMD} = \widehat{MDF}$

$\Rightarrow \widehat{MBD} = \widehat{CDF}$ hay $\widehat{CBD} = \widehat{CDF}$ (4)

ΔABC cân tại A nên $\widehat{MCD} = \widehat{ABC}$

Mà $\widehat{MCD} = 2 \cdot \widehat{CBD}$ (Do $\widehat{ABC} = 2 \cdot \widehat{CBD}$)

$\Rightarrow \widehat{MCD} = 2 \cdot \widehat{CDF}$ (Do $\widehat{CBD} = \widehat{CDF}$)

Mà $\widehat{MCD} = \widehat{CDF} + \widehat{CFD}$ (tính chất góc ngoài ΔMCD)

$\Rightarrow 2 \cdot \widehat{CDF} = \widehat{CDF} + \widehat{CFD} \Rightarrow \widehat{CDF} = \widehat{CFD}$ (5)

Từ (4) và (5) ta có $\widehat{CBD} = \widehat{CFD}$

$\Rightarrow \Delta BDF$ cân tại D

$\Rightarrow BD = FD$

$\Rightarrow FD = \frac{1}{2} BK$

$\Rightarrow \Delta BKF$ vuông tại F .

Câu 114. (HSG 7 huyện Trục Ninh, tỉnh Nam Định 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB > AC$). Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $BD = AC$.

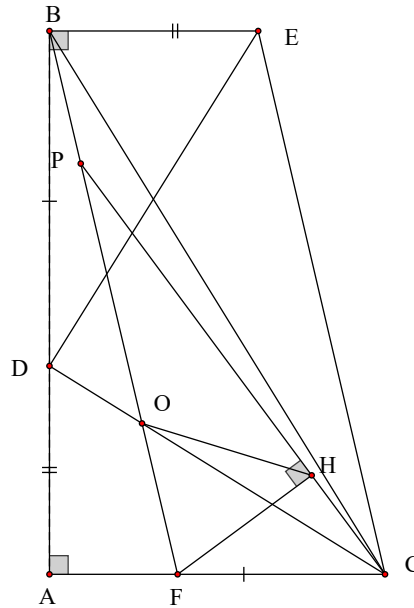
Trên đường vuông góc với AB tại B lấy điểm E sao cho $BE = AD$ (E và C nằm trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB)

1) Tam giác CDE là tam giác gì.

2) Trên cạnh AC lấy điểm F sao cho $CF = AD$. Gọi giao điểm của BF và CD là O . Chứng minh $\widehat{COF} = 45^\circ$.

3) Trên BF lấy điểm P sao cho $\widehat{FCO} = \widehat{OCP}$. Kẻ $FH \perp CP$ ($H \in CP$). Chứng minh: HO là tia phân giác của \widehat{FHP} .

Lời giải



1) Tam giác CDE là tam giác gì.

Xét $\triangle DBE$ và $\triangle CAD$ có:

$$BE = AD$$

$$\widehat{DBE} = \widehat{DAC} = 90^\circ$$

$$BD = AC.$$

$$\Rightarrow \triangle DBE = \triangle CAD \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow DE = DC \quad (1); \quad \widehat{BDE} = \widehat{ACD}; \quad \widehat{DEB} = \widehat{CDA}$$

Mặt khác: $\triangle DBE$ vuông tại B có $\widehat{BDE} + \widehat{DEB} = 90^\circ$

$$\text{Do đó: } \widehat{BDE} + \widehat{CDA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CDE} = 90^\circ \text{ vuông tại } D \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle CDE$ vuông cân tại D.

2) Trên cạnh AC lấy điểm F sao cho $CF = AD$. Gọi giao điểm của BF và CD là O . Chứng minh $\widehat{COF} = 45^\circ$.

Ta có: $\triangle CDE$ vuông cân tại $D \Rightarrow \widehat{DEC} = \widehat{DCE} = 45^\circ$

Có $BE \perp AB$; $AC \perp AB$

$$\Rightarrow BE \parallel AC \Rightarrow \widehat{EBC} = \widehat{FCB} \text{ (so le trong).}$$

Xét $\triangle BEC$ và $\triangle CFB$ có

$$\widehat{EBC} = \widehat{FCB}$$

$$BE = CF \text{ (cùng bằng } AD)$$

BC là cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle BEC = \triangle CFB \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{BCE} = \widehat{CBF} \text{ (góc tương ứng)} \Rightarrow BF \parallel CE$$

Khi đó $\widehat{DCE} = \widehat{COF}$ (vì hai góc so le trong) mà $\widehat{DCE} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{COF} = 45^\circ$

Vậy $\widehat{COF} = 45^\circ$.

3) Trên BF lấy điểm P sao cho $\widehat{FCO} = \widehat{OCP}$. Kẻ $FH \perp CP (H \in CP)$. Chứng minh: HO là tia phân giác của \widehat{FHP} .

Ta có: \widehat{AFH} là góc ngoài tại đỉnh F của ΔHFC nên:

$$\widehat{AFH} = \widehat{FHC} = 90^\circ + 2\widehat{OCF} = 2 \cdot (45^\circ + \widehat{OCF})$$

Mà \widehat{AFO} là góc ngoài tại đỉnh F của ΔOFC

$$\Rightarrow \widehat{AFO} = \widehat{COF} + \widehat{FCO} = 45^\circ + \widehat{FCO},$$

Do đó $\widehat{AFO} = \frac{1}{2} \widehat{AFH}$, hay FO là tia phân giác của \widehat{AFH} .

ΔCFH có đường phân giác của góc C và đường phân giác của góc ngoài tại F cắt nhau tại O , nên đường phân giác của góc ngoài tại đỉnh H của ΔCHF cũng phải đi qua O .

$\Rightarrow HO$ là tia phân giác của \widehat{FHP} .

Câu 115. (HSG 7 huyện Vĩnh Tường 2015 - 2016)

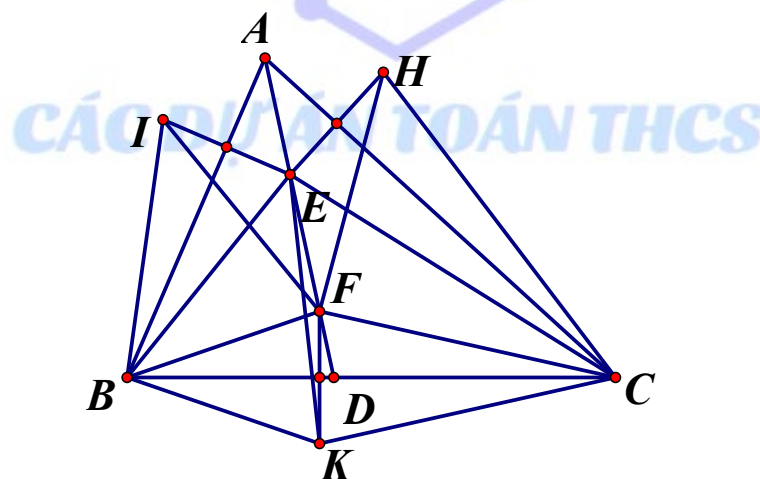
Cho tam giác ABC có đường phân giác AD . Trên đoạn thẳng AD lấy các điểm E và F sao cho $\widehat{ABE} = \widehat{CBF}$. Vẽ các điểm H, K, I sao cho AC, BC, AB theo thứ tự là đường trung trực của các đoạn thẳng EH, FK, EI .

a) Chứng minh rằng: AD là đường trung trực của IH .

b) Chứng minh rằng: $\Delta FBI = \Delta KBE$.

c) Chứng minh rằng: $\widehat{ACE} = \widehat{BCF}$.

Lời giải



a) Ta có $AE = AI, AH = AE$ (tính chất đường trung trực)

$$\Rightarrow AI = AH$$

$\Rightarrow \Delta AIH$ cân tại A

mà AD là tia phân giác của \widehat{IAH}

$\Rightarrow AD$ là đường trung trực của IH

b) Ta có: $BI = BE, \widehat{IBF} = \widehat{EBK}, BF = BK$

$\Rightarrow \Delta FBI = \Delta KBE$ (c.g.c)

c) Ta có: $CH = CE, CF = CK, EH = EK = EI$

$$\Rightarrow \Delta FHC = \Delta KEC(\text{c.c.c})$$

$$\Rightarrow \widehat{HCF} = \widehat{ECK}$$

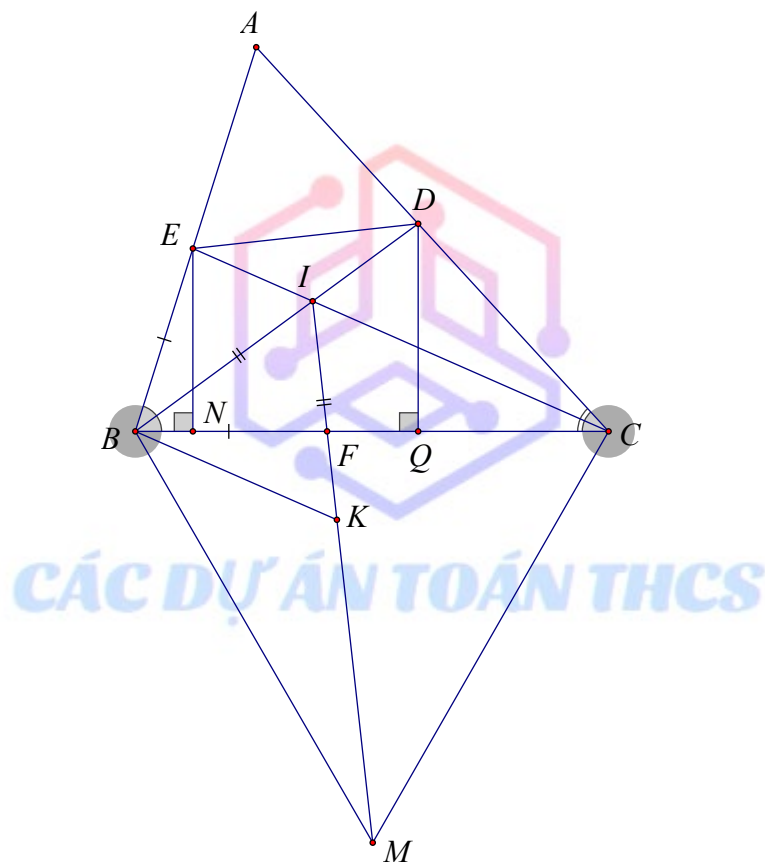
$$\Rightarrow \widehat{ACE} = \widehat{BCF}$$

Câu 116. (HSG 7 huyện Lang Chánh 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$ (góc B và góc C nhọn). Tia phân giác của góc B cắt AC tại D , tia phân giác của góc C cắt AB tại E . BD cắt CE tại I . Trên cạnh BC lấy F sao cho $BF = BE$. Trên tia IF lấy M sao cho $IM = IB + IC$.

- Tính góc \widehat{BIC} và chứng minh $ID = IF$.
- Chứng minh tam giác BCM là tam giác đều.
- Tìm điều kiện của tam giác ΔABC để D và E cách đều đường thẳng BC .

Lời giải



a) ΔABC có $\widehat{A} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 120^\circ$

Vì BD và CE lần lượt là tia phân giác của \widehat{B} và \widehat{C} nên:

$$\Rightarrow \widehat{IBC} + \widehat{ICB} = \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C}) = \frac{1}{2}.120^\circ = 60^\circ$$

Trong ΔBIC ta có:

$$\widehat{IBC} + \widehat{ICB} + \widehat{BIC} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 60^\circ + \widehat{BIC} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BIC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

* Xét ΔBIF và ΔBIE có:

$$BF = BE$$

$$\widehat{BIF} = \widehat{BIE} \text{ (Vì } BD \text{ là tia phân giác của } \widehat{B} \text{)}$$

BI là cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle BIF = \triangle BIE \text{ (c-g-c)} \Rightarrow \widehat{BIF} = \widehat{BIE} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{FIC} = \widehat{DIC} = 60^\circ$$

Xét $\triangle FIC$ và $\triangle DIC$ có:

$$\widehat{FIC} = \widehat{DIC} = 60^\circ$$

IC là cạnh chung

$$\widehat{FCI} = \widehat{DCI} \text{ (Vì } CE \text{ là tia phân giác của } \widehat{C} \text{)}$$

$$\Rightarrow \triangle FIC = \triangle DIC \text{ (g-c-g)} \Rightarrow ID = IF \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

b) Trên đoạn thẳng IM lấy K sao cho $IK = IB \Rightarrow \triangle IBK$ là tam giác đều $\Rightarrow IB = BK$.

$$\triangle IBC = \triangle KBM \text{ (c-g-c)} \Rightarrow BC = BM \text{ (1)}$$

$$\triangle IBK \text{ là tam giác đều} \Rightarrow \widehat{IBK} = 60^\circ \text{ mà } \widehat{IBC} = \widehat{KBM} \Rightarrow \widehat{CBM} = 60^\circ \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle BCM$ là tam giác đều

c) $\triangle BIF = \triangle BIE \Rightarrow IF = IE$, mà $ID = IF \Rightarrow ID = IE$

$$\Rightarrow \triangle IDE \text{ cân tại } I, \text{ mà } \widehat{DIE} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{IDE} = 30^\circ$$

Kẻ $EN \perp BC$ và $DQ \perp BC \Rightarrow EN \parallel DQ$

(vì $\widehat{IDE} = 30^\circ$)

$$EN = DQ \Leftrightarrow ED \parallel BC \Leftrightarrow \widehat{DBC} = 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{ABC} = 60^\circ \Leftrightarrow \triangle ABC \text{ là tam giác đều.}$$

Vậy, để D và E cách đều đường thẳng BC thì tam giác $\triangle ABC$ phải là tam giác đều.

Câu 117. (HSG 7 huyện Thảo Lâm, 2022 - 2023)

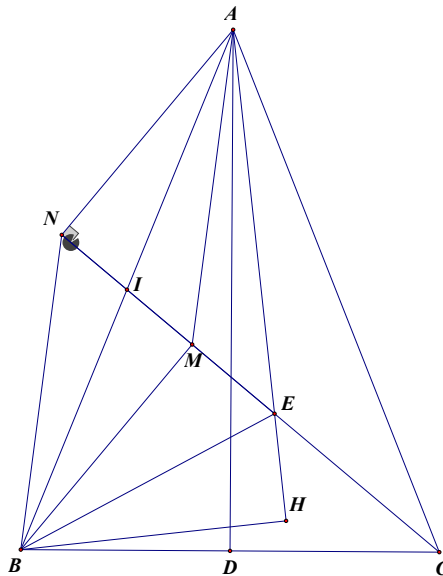
Cho tam giác ABC cân tại A ($\widehat{A} < 90^\circ$). Gọi I là trung điểm của AB , các điểm N, M lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ $A; B$ đến đường thẳng CI . Trên đoạn thẳng CI lấy điểm E sao cho $\widehat{EAB} = \widehat{ECA}$. Kẻ $BH \perp AE$ (H thuộc đường thẳng AE).

a) Chứng minh rằng $\triangle ANI = \triangle MBI$, rồi từ đó suy ra $AM \parallel BN$.

b) Chứng minh rằng BE là phân giác của \widehat{MBH}

c) Chứng minh rằng $\widehat{ECA} = \widehat{EBC}$

Lời giải



a) *) Xét $\triangle ANI$ và $\triangle BMI$ có

$$\widehat{ANI} = \widehat{BMI} (= 90^\circ)$$

$$AI = BI \text{ (} I \text{ là trung điểm của } AB \text{)}$$

$$\widehat{AIN} = \widehat{BIM} \text{ (đổi đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \triangle ANI = \triangle BMI \text{ (ch-gn)}$$

Suy ra $IN = IM$ (hai cạnh tương ứng).

*) Xét $\triangle AMI$ và $\triangle BNI$ có

$$IN = IM \text{ (cm trên)}$$

$$\widehat{AIM} = \widehat{BIN} \text{ (đổi đỉnh)}$$

$$AI = BI \text{ (} I \text{ là trung điểm của } AB \text{)}$$

$$\Rightarrow \triangle AMI = \triangle BNI \text{ (c-g-c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{AMI} = \widehat{BNI}$$

Mà hai góc ở vị trí so le trong

Vậy $AM \parallel BN$.

b) Xét $\triangle NAC$ và $\triangle HBA$ có

$$\widehat{ANC} = \widehat{BHA} (= 90^\circ)$$

$$AC = AB \text{ (} \triangle ABC \text{ cân tại } A \text{)}$$

$$\widehat{ACN} = \widehat{BAH} \text{ (gt)}$$

Suy ra $\triangle NAC = \triangle HBA$ (ch-gn)

Suy ra $AN = BH$ (Hai cạnh tương ứng)

Mà $AN = BM$ ($\triangle ANI = \triangle BMI$).

Suy ra $BH = BM$.

*) Xét $\triangle MBE$ và $\triangle HBE$ có

$$\widehat{BME} = \widehat{BHE} (= 90^\circ)$$

BE là cạnh chung

$$BH = BM \text{ (cm trên)}$$

$$\Rightarrow \triangle MBE = \triangle HBE \text{ (ch-cgv)}$$

$$\Rightarrow \widehat{MBE} = \widehat{HBE}$$

Vậy BE là phân giác của \widehat{MBH} .

c) Ta có $\widehat{ECA} = \widehat{EAB}$ (gt);

$$\text{Nên } \widehat{IEA} = \widehat{EAC} + \widehat{ECA} = \widehat{EAC} + \widehat{EAB} = \widehat{BAC}$$

$$\text{Mặt khác } \widehat{BEH} = \widehat{BEM} \text{ (} \triangle MBE = \triangle HBE \text{)}$$

$$\text{Mà } \widehat{BEM} + \widehat{BEH} + \widehat{IEA} = 180^\circ; \widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ; \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$$

$$\text{Suy ra } \widehat{BEM} = \widehat{ABC}$$

$$\text{Ta lại có } \widehat{BEM} = \widehat{EBC} + \widehat{ECB}; \widehat{ABC} = \widehat{ACE} + \widehat{ECB}$$

$$\text{Suy ra } \widehat{ECA} = \widehat{EBC}.$$

Câu 118. (HSG 7 huyện Quế Võ 2022-2023)

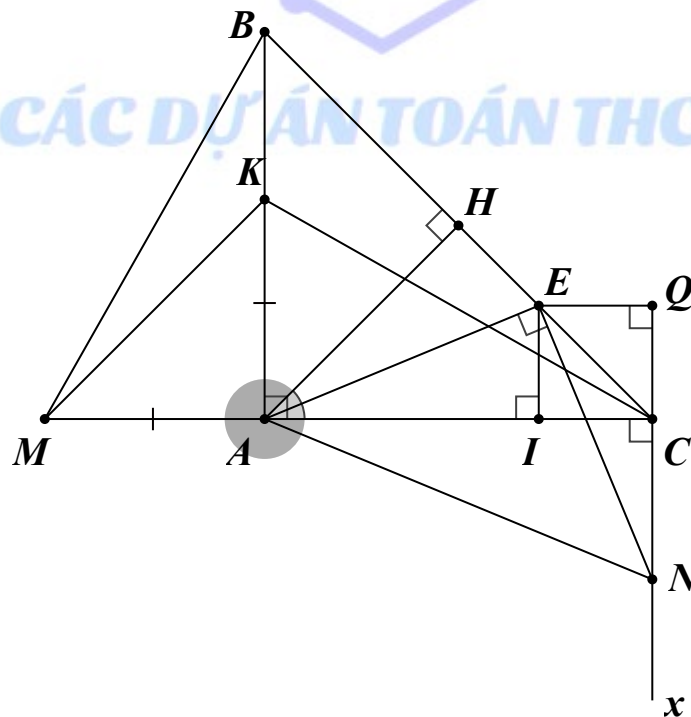
Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A , đường cao AH , AE là phân giác của \widehat{HAC} ($E \in HC$)

a) Kẻ EI vuông góc với AC . Chứng minh rằng $HE = EI$. So sánh HE và EC .

b) Trên cạnh AB lấy điểm K , trên tia đối của tia AC lấy điểm M sao cho $AK = AM$. Chứng minh rằng $CK \perp BM$.

c) Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B vẽ tia Cx vuông góc với AC . Qua E kẻ EN vuông góc với AE ($N \in Cx$). Chứng minh rằng $AE = EN$.

Lời giải



a) * Chứng minh rằng $HE = EI$.

Xét $\triangle HAE$ và $\triangle IAE$, ta có:

$$\widehat{AHE} = \widehat{AIE} = 90^\circ$$

AE là cạnh huyền chung

$\widehat{HAE} = \widehat{IAE}$ (vì AE là tia phân giác)

Vậy $\triangle HAE = \triangle IAE$ (cạnh huyền-góc nhọn)

$\Rightarrow HE = EI$ (Cạnh tương ứng) (1)

* So sánh HE và EC .

Trong tam giác vuông EIC có EC là cạnh huyền, EI là cạnh góc vuông nên $EI < EC$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $HE < EC$

b) Chứng minh rằng $CK \perp BM$.

Ta có: $\widehat{CAH} = 45^\circ$ (vì $\triangle ABC$ vuông cân tại A nên AH là đường cao cũng là đường phân giác)

Lại có $\widehat{AMK} = 45^\circ$ (vì $\triangle AMK$ vuông cân tại A do $\widehat{MAK} = 90^\circ, AM = AK$)

Do đó: $\widehat{CAH} = \widehat{AMK}$ (mà ở vị trí đồng vị) $\Rightarrow MK \parallel AH$

Mà $AH \perp BC$ nên suy ra $MK \perp BC$

* Xét $\triangle MBC$ có hai đường cao MK và BA cắt nhau tại K nên K là trực tâm của tam giác $\Rightarrow CK \perp BM$

c) Chứng minh rằng $AE = EN$.

Gọi Q là hình chiếu của E trên đường thẳng CN

Ta có $EI \perp AC, QC \perp AC \Rightarrow EI \parallel QC \Rightarrow \widehat{ECQ} = \widehat{CEI}$ (so le trong)

Xét hai tam giác vuông EIC và CQE , có:

EC là cạnh chung

$\widehat{ECQ} = \widehat{CEI}$ (chứng minh trên)

Vậy $\triangle EIC = \triangle CQE$ (cạnh huyền góc nhọn)

$\Rightarrow EI = EQ$

Xét hai tam giác vuông IEA và QEN , có:

$EI = EQ$ (chứng minh trên)

$\widehat{AEI} = \widehat{NEQ}$ (cùng phụ với \widehat{IEN})

Vậy $\triangle IEA = \triangle QEN$ (cạnh góc vuông góc nhọn kề)

$\Rightarrow AE = EN$ (đpcm)

Câu 119. (HSG 7 Hưng Hà - năm học 2022 - 2023)

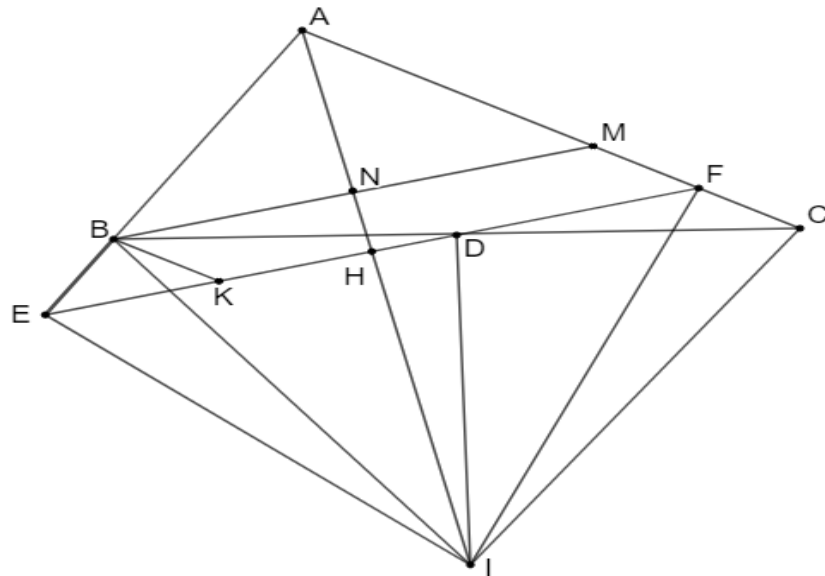
Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Từ trung điểm D của BC vẽ đường vuông góc với tia phân giác của góc A tại H . Đường thẳng này cắt các tia AB tại E và tia AC tại F . Vẽ tia BM song song với EF (M thuộc AC).

a) Chứng minh: $\triangle ABM$ cân.

b) Chứng minh: $BE = CF = MF$

c) Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt tia AH tại I . Chứng minh: $IF \perp AC$

Lời giải



a) Gọi giao điểm của AH và BM là N

Ta có $BM \parallel EF$ (gt), $HA \perp EF$ (gt) $\Rightarrow AH \perp BM$ hay $AN \perp BM$

Xét $\triangle ABN$ và $\triangle AMN$ có:

$\widehat{BAN} = \widehat{MAN}$ (do AH là tia phân giác của góc A)

AN cạnh chung;

$\widehat{BNA} = \widehat{MNA} = 90^\circ$

Suy ra $\triangle ABN = \triangle AMN$ (g.c.g)

$\Rightarrow AB = AM$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow \triangle ABM$ cân tại A

b) Chứng minh tương tự ta được $\triangle AEH = \triangle AFH$ (g.c.g) $\Rightarrow AE = AF$

Mà $AB = AM \Rightarrow AE - AB = AF - AM \Rightarrow BE = MF$ (1)

Vẽ $BK \parallel AC$ ($K \in EF$)

Xét $\triangle BDK$ và $\triangle CDF$ có:

$\widehat{KBD} = \widehat{FCD}$ (so le trong),

$DB = DC$ (gt),

$\widehat{BDK} = \widehat{FDC}$ (đối đỉnh)

Suy ra $\triangle BDK = \triangle CDF$ (g.c.g)

$\Rightarrow BK = FC$ (hai cạnh tương ứng) (2)

Ta có $\widehat{BKE} = \widehat{AFE}$ (hai góc đồng vị $BK \parallel AC$) và $\widehat{AEF} = \widehat{AFE}$ ($\triangle AEF$ cân tại A)

$\Rightarrow \widehat{BEK} = \widehat{BKE} \Rightarrow \triangle BEK$ cân tại $B \Rightarrow BE = BK$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $MF = FC = BE$

c) Nói IB, IC

Xét $\triangle IBD$ và $\triangle ICD$ có:

$DB = DC$ (gt),

$\widehat{BDI} = \widehat{CDI} = 90^\circ$,

DC cạnh chung

Suy ra $\triangle BDC = \triangle CDB$ (c.g.c) suy ra $BC = CB$

Xét $\triangle BAE$ và $\triangle CAF$ có:

$BA = CA$ (cmt)

$\widehat{BAE} = \widehat{CAF}$ (cmt)

AI chung

Suy ra $\triangle BAE = \triangle CAF$ (c.g.c) $\Rightarrow BE = CF, \widehat{BEA} = \widehat{CFE}$ (4)

Xét $\triangle BEI$ và $\triangle CFI$ có:

$BE = CF$ (cmt)

$BI = CI$ (cmt)

$IE = IF$ (cmt)

$\Rightarrow \triangle BEI = \triangle CFI$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{BEI} = \widehat{CFI}$ hay $\widehat{AEI} = \widehat{AFI}$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra $\widehat{CFI} = \widehat{AFI}$

mà $\widehat{CFI} + \widehat{AFI} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow \widehat{CFI} = \widehat{AFI} = 90^\circ \Rightarrow IF \perp AC$

Câu 120. (HSG 7 Thái Thụy 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC vuông tại A và $AB = AC$. Tia phân giác của góc B cắt AC tại D , Trên cạnh AB lấy E sao cho $AE = AD$. Từ A kẻ đường thẳng vuông góc với BD tại K và cắt BC ở H . Từ E kẻ đường thẳng vuông góc với BD tại I và cắt BC tại G . Đường thẳng EG cắt AC tại Q .

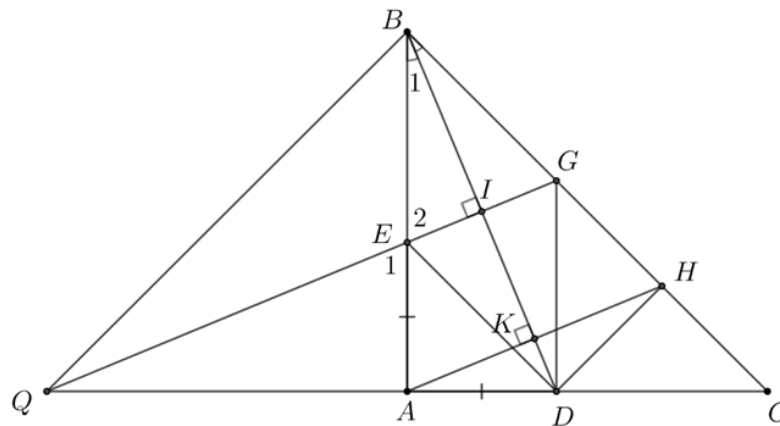
1) Chứng minh: $\widehat{AEQ} = \widehat{ADB}$ và $\triangle ABD = \triangle AQE$.

2) Chứng minh: A là trung điểm của QC và $\triangle QBC$ vuông cân.

3) Chứng minh: DH vuông góc với BC .

4) Chứng minh: $GB = GD$.

Lời giải



1) Chứng minh $\widehat{AEQ} = \widehat{ADB}$ và $\triangle ABD = \triangle AQE$.

Vì $\triangle ABD, \triangle BEI$ là các tam giác vuông tại A và I nên $\widehat{ADB} + \widehat{B}_1 = 90^\circ; \widehat{E}_2 + \widehat{B}_1 = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{E}_2 = \widehat{ADB}$

Mà $\widehat{E}_1 = \widehat{E}_2$ (Hai góc đối đỉnh)

$$\Rightarrow \widehat{E}_1 = \widehat{ADB}.$$

Hay $\widehat{AEQ} = \widehat{ADB}$.

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle AEQ$ có:

$$AD = AE \text{ (gt)}$$

$$\widehat{AEQ} = \widehat{ADB}$$

$$\widehat{DAB} = \widehat{QAE} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle AQE \text{ (g - c - g)}$$

2) Chứng minh: A là trung điểm của QC và $\triangle QBC$ vuông cân.

Từ $\triangle ABD = \triangle AQE$ (câu 1) $\Rightarrow AB = AQ$ (hai cạnh tương ứng)

Mà $AB = AC \Rightarrow AC = AQ \Rightarrow A$ là trung điểm của QC .

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle ABQ$ có:

$$AC = AQ \text{ (câu 1)}$$

AB là cạnh chung

$$\widehat{BAQ} = \widehat{BAC} = 90^\circ$$

Do đó $\triangle ABC = \triangle ABQ$ (c - g - c)

Suy ra $BC = BQ$ (hai cạnh tương ứng) $\Rightarrow \triangle QBC$ cân tại B (1)

$$\widehat{ABC} = \widehat{ABQ} \text{ (hai góc tương ứng)}$$

$$\triangle ABC \text{ vuông cân tại } A \Rightarrow \widehat{ABC} = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{CBQ} = \widehat{CBA} + \widehat{ABQ} = \widehat{CBA} + \widehat{CBA} = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle QBC$ vuông cân tại B .

3) Chứng minh: DH vuông góc với BC .

Xét $\triangle ABK$ và $\triangle HBK$ có:

BK là cạnh chung

$$\widehat{BKA} = \widehat{BKH} = 90^\circ$$

$$\widehat{ABK} = \widehat{HBK} \text{ (vì } BD \text{ là tia phân giác của } \widehat{ABC} \text{)}$$

Do đó $\triangle ABK = \triangle HBK$ (g - c - g)

$$\Rightarrow BA = BH \text{ (2 cạnh tương ứng)}$$

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle HBD$ có:

$$BA = BH \text{ (cmt)}$$

BD là cạnh chung

$$\widehat{ABD} = \widehat{HBD} \text{ (vì } BD \text{ là tia phân giác của } \widehat{ABC} \text{)}$$

Do đó $\triangle ABD = \triangle HBD$ (c - g - c)

$$\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{BHD} = 90^\circ \text{ (2 góc tương ứng)}$$

Suy ra DH vuông góc với BC .

4) Chứng minh: $GB = GD$.

Xét $\triangle EBI$ và $\triangle GBI$ có:

BI là cạnh chung

$\widehat{EBI} = \widehat{GBI}$ (vì BD là tia phân giác của \widehat{ABC})

$\widehat{BIE} = \widehat{BIG} = 90^\circ$

Do đó $\triangle EBI = \triangle GBI$ (g - c - g) $\Rightarrow EI = IG$ (2 cạnh tương ứng)

$\triangle AED$ có $\widehat{AED} = 90^\circ$ và $AE = AD$ nên $\triangle AED$ vuông cân tại A

Suy ra $\widehat{AED} = \widehat{ABC} = 45^\circ$

Mà hai góc này ở vị trí đồng vị

Nên $ED \parallel BC \Rightarrow \widehat{BGI} = \widehat{IED}$ (2 góc so le trong)

Xét $\triangle EDI$ và $\triangle GBI$ có:

$EI = IG$ (cmt)

$\widehat{IED} = \widehat{BGI}$ (cmt)

$\widehat{EID} = \widehat{BIG}$ (hai góc đối đỉnh)

Do đó $\triangle EDI = \triangle GBI$ (g - c - g)

Suy ra $ED = GB$ (2 cạnh tương ứng) (3)

Xét $\triangle EDI$ và $\triangle GDI$ có:

DI là cạnh chung

$EI = IG$ (cmt)

$\widehat{EID} = \widehat{GID} = 90^\circ$

Do đó $\triangle EDI = \triangle GDI$ (c.g.c) $\Rightarrow BE = DE$ (4)

Từ (3); (4) suy ra $GB = GD$.

Câu 121. (HSG 7 huyện Thanh Trì, Thành phố Hà Nội năm học 2021 - 2022)

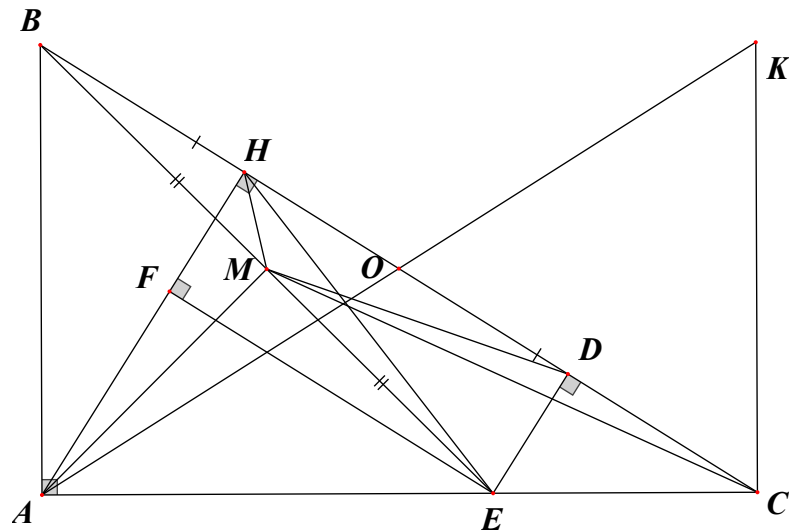
Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), gọi O là trung điểm của đoạn thẳng BC . Trên tia đối của tia OA lấy điểm K sao cho $OA = OK$.

a) Chứng minh $\triangle ABC = \triangle CKA$

b) Vẽ AH vuông góc với BC tại H . Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HA$. Qua điểm D vẽ đường thẳng vuông góc với BC cắt AC tại E . Gọi F là hình chiếu của điểm E trên AH . Chứng minh $AF = HB$.

c) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BE . Tính số đo \widehat{CHM} .

Lời giải



a) Xét $\triangle OAB$ và $\triangle OCK$ có

$$OB = OC \text{ (} O \text{ là trung điểm } BC \text{)}$$

$$\widehat{AOB} = \widehat{COK}$$

$$OA = OK \text{ (GT)}$$

Do đó $\triangle OAB = \triangle OKC$ (c.g.c)

suy ra $AB = CK$ và $\widehat{ABO} = \widehat{KCO}$ nên $\widehat{ACK} = \widehat{KOC} + \widehat{BCA} = \widehat{KCA} = 90^\circ$.

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle CKA$ có AC chung, $\widehat{BAC} = \widehat{KCA} = 90^\circ$ và $AB = CK$ (cmt)

Suy ra $\triangle ABC = \triangle CKA$ (c.g.c).

b) Ta có $EF \parallel HD$ cùng vuông góc với AH nên $\widehat{AEF} = \widehat{ACH} = \widehat{BAH}$ (cặp góc đồng vị).

Xét $\triangle HEF$ và $\triangle EHD$ có

$$\widehat{FHE} = \widehat{HED} \text{ (so le trong)}$$

HE là cạnh chung

$$\widehat{HEF} = \widehat{EHD} \text{ (so le trong)}$$

Do đó $\triangle HEF = \triangle EHD$ (g.c.g) nên $EF = HD$ mà $HD = AH$ nên $AH = EF$.

Xét $\triangle ABH$ và $\triangle EAF$ có $\widehat{AHB} = \widehat{EFA} = 90^\circ$, $AH = EF$ (cmt) và $\widehat{BAH} = \widehat{AEF}$ (cmt)

suy ra $\triangle ABH = \triangle EAF$ (g.c.g) suy ra $BH = AF$ (hai cạnh tương ứng)

c) Vì các tam giác ABE và BDE vuông tại A và D nên $AM = DM = \frac{1}{2} BE$.

Xét $\triangle AHM$ và $\triangle DHM$ có

HM là cạnh chung

$$AM = DM \text{ (cmt)}$$

$$AH = DH \text{ (gt)}$$

Suy ra $\triangle AHM = \triangle DHM$ (c.c.c) nên $\widehat{AHM} = \widehat{DHM} = \frac{1}{2} \widehat{AHD} = 45^\circ$.

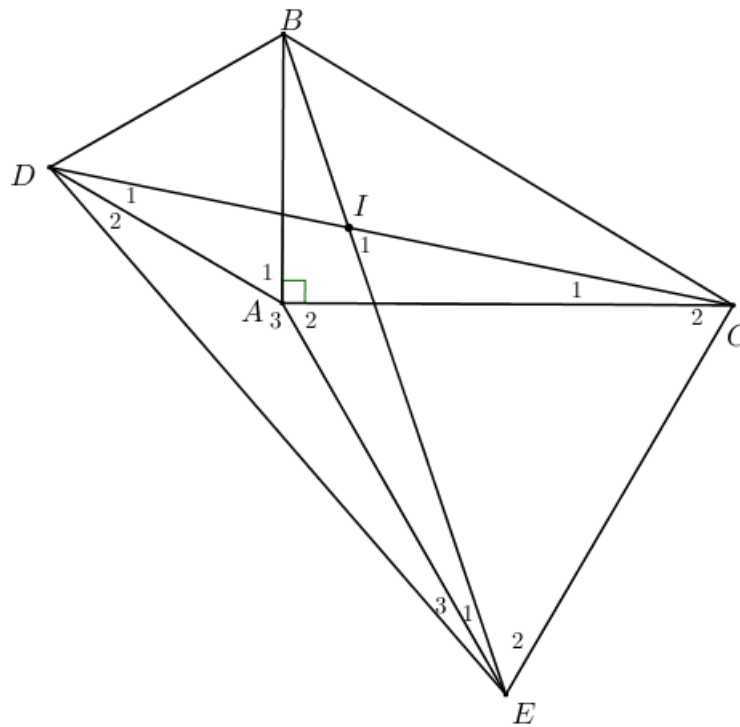
Vậy $\widehat{CHM} = 45^\circ$.

Câu 122. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc 2022 - 2023; huyện Thạch Thành 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC vuông tại A . Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE . Gọi I là giao điểm BE và CD . Chứng minh rằng:

- 1) $\triangle ADC = \triangle ABE$.
- 2) $DE = BE$.
- 3) $\widehat{EIC} = 60^\circ$ và IA là tia phân giác của \widehat{DIE} .

Lời giải



1) Ta có:
$$\begin{cases} \widehat{DAC} = \widehat{A}_1 + 90^\circ = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \\ \widehat{BAE} = \widehat{A}_2 + 90^\circ = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{BAE} .$$

Xét $\triangle ADC$ và $\triangle ABE$ có:

$$DA = BA \text{ (gt)}$$

$$\widehat{DAC} = \widehat{BAE} \text{ (chứng minh trên)}$$

$$AC = AE \text{ (gt)}$$

Suy ra $\triangle ADC = \triangle ABE$ (c - g - c).

2) Ta có: $\widehat{A}_3 + \widehat{A}_1 + \widehat{BAC} + \widehat{A}_2 = 360^\circ$

$$\Leftrightarrow \widehat{A}_3 + 60^\circ + 90^\circ + 60^\circ = 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{A}_3 = 150^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{A}_3 = 150^\circ = \widehat{DAC} = 150^\circ$$

Xét $\triangle DAE$ và $\triangle BAE$ có:

$$DA = BA \text{ (gt)}$$

$$\widehat{A}_3 = \widehat{DAC} \text{ (Chứng minh trên)}$$

AE : Cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle DAE = \triangle BAE \text{ (c - g - c)}.$$

$$\Rightarrow DE = BE \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

3) * Ta có: $\triangle ADC = \triangle ABE$ (theo câu 1)) suy ra $\widehat{E}_1 = \widehat{C}_1$ (hai góc tương ứng)

Lại có: $\widehat{I}_1 + \widehat{E}_2 + \widehat{IEC} = 180^\circ$ (Tổng 3 góc trong $\triangle ICE$)

$$\Leftrightarrow \widehat{I}_1 + (\widehat{AEC} - \widehat{E}_1) + (\widehat{C}_1 + \widehat{C}_2) = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{I}_1 + 60^\circ - \widehat{E}_1 + \widehat{C}_1 + 60^\circ = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{I}_1 + 120^\circ = 180^\circ \text{ (Vi } \widehat{E}_1 = \widehat{C}_1 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{I}_1 = 60^\circ.$$

* Vì $\triangle DAE = \triangle BAE$ (chứng minh câu b) $\Rightarrow \widehat{E}_1 = \widehat{E}_3$ (hai góc tương ứng) $\Rightarrow EA$ là tia phân giác của \widehat{DEI} (1)

Vì $\begin{cases} \triangle DAC = \triangle BAE \\ \triangle DAE = \triangle BAE \end{cases} \Rightarrow \triangle DAC = \triangle DAE \Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$ (Hai góc tương ứng) $\Rightarrow DA$ là tia phân giác của \widehat{EDC} (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow IA$ là đường phân giác thứ ba trong $\triangle DIE$ hay IA là tia phân giác của \widehat{DIE}

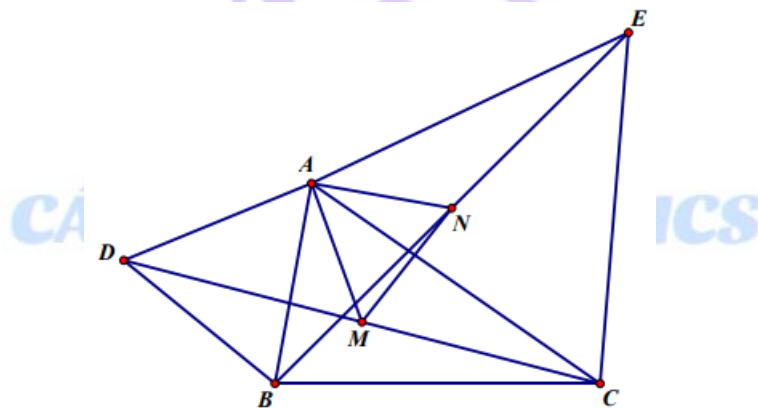
Câu 123. (HSG 7 Vĩnh Phúc 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB \neq AC$). Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE .

a) Chứng minh rằng $DC = BE$

b) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và BE . Chứng minh rằng $\triangle AMN$ đều.

Lời giải



a) Có $\triangle ADB$ đều suy ra $\widehat{DAB} = 60^\circ$ tương tự $\widehat{EAC} = 60^\circ$

Ta có: $AB = AD$ (gt), $\widehat{DAC} = \widehat{BAE}$ ($= \widehat{BAC} + 60^\circ$) và $AC = AE$ (gt)

Suy ra $\triangle ADC = \triangle ABE$ (c.g.c) suy ra $DC = BE$

b) Từ $\triangle ADC = \triangle ABE$ (câu a) $\Rightarrow CM = EN$ và $\widehat{ACM} = \widehat{AEN}$

Xét $\triangle ACM$ và $\triangle AEN$ có: $CM = EN$ (cmt), $\widehat{ACM} = \widehat{AEN}$ (cmt), $CA = EA$ (gt)

Và $\widehat{CAM} = \widehat{EAN} \Rightarrow \widehat{MAN} = \widehat{MAC} + \widehat{CAN} = \widehat{EAN} + \widehat{CAN} = \widehat{CAE} = 60^\circ$ (2)

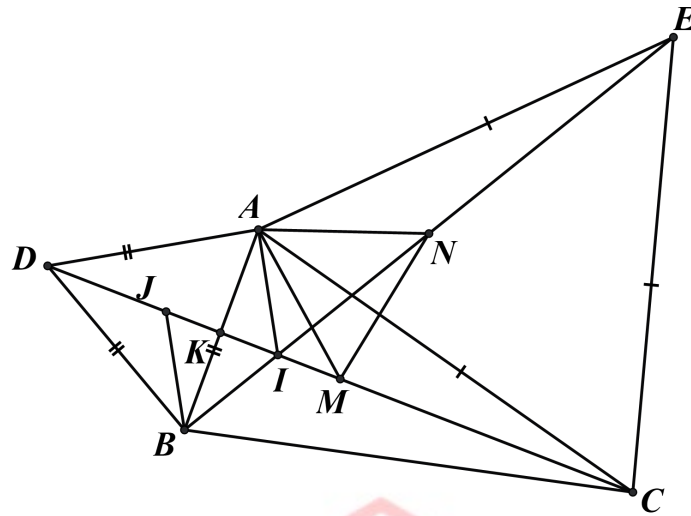
Từ (1) và (2) suy ra $\triangle AMN$ đều

Câu 124. (HSG 7 huyện Kinh Môn, tỉnh Hải Dương; huyện Kim Thành 2018 - 2019; huyện Hoàng Hóa 2016 - 2017)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$). Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE . Gọi I là giao của CD và BE , K là giao của AB, DC .

- 1) Chứng minh rằng: $DC = BE$.
- 2) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và BE . Tính số đo $\widehat{BIK}, \widehat{AMN}$.
- 3) Chứng minh rằng IA là phân giác của \widehat{DIE} .

Lời giải



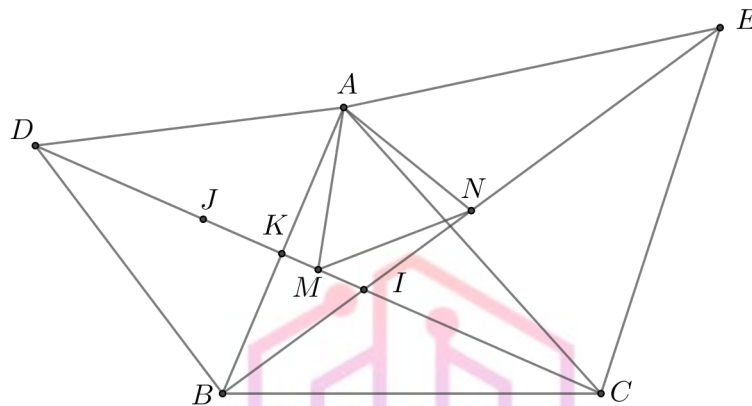
- 1) Ta có $\widehat{DAC} = 60^\circ + \widehat{BAC} = \widehat{EAB}$ (1)
 Xét $\triangle ADC$ và $\triangle ABE$ có: $AD = AB$ ($\triangle ABD$ đều); $\widehat{DAC} = \widehat{EAB}$ (cmt)
 $AC = AE$ ($\triangle EAC$ đều) $\Rightarrow \triangle DAC = \triangle BAE$ (c.g.c) $\Rightarrow DC = BE$
- 2) $\triangle ADC = \triangle ABE$ (cm câu a) $\Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{ADC}$
 Lại có trong $\triangle BIK$: $\widehat{KBI} + \widehat{BKI} + \widehat{KIB} = 180^\circ$
 Ta có trong $\triangle DAK$: $\widehat{ADK} + \widehat{DKA} + \widehat{DAK} = 180^\circ$; $\widehat{BKI} = \widehat{DKA}$ (đối đỉnh)
 $\Rightarrow \widehat{BIK} = \widehat{DAK}$ mà $\widehat{DAK} = 60^\circ$ ($\triangle ABD$ đều) $\Rightarrow \widehat{BIK} = 60^\circ$
 $\triangle ADC = \triangle ABE$ (câu a) $\Rightarrow \widehat{ACM} = \widehat{AEN}$
 Có $DC = BE$ (câu a) $\Rightarrow \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}BE \Rightarrow CM = EN \Rightarrow \triangle ACM = \triangle AEN$ (c.g.c) (1)
 $\Rightarrow \widehat{CAM} = \widehat{EAN} \Rightarrow \widehat{CAM} + \widehat{CAN} = \widehat{EAN} + \widehat{CAN} \Rightarrow \widehat{MAN} = \widehat{EAC}$
 Mà $\triangle EAC$ đều $\Rightarrow \widehat{EAC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{MAN} = 60^\circ$
 (1) $\Rightarrow AM = AN \Rightarrow \triangle AMN$ cân tại $A \Rightarrow \triangle AMN$ đều $\Rightarrow \widehat{AMN} = 60^\circ$
- 3) Trên tia ID lấy T sao cho $IT = IB \Rightarrow \triangle BIT$ cân tại I mà $\widehat{BIK} = 60^\circ$ (cmt)
 $\Rightarrow \triangle BIT$ đều $\Rightarrow BT = BI$; $\widehat{IBT} = 60^\circ$
 Do đó $\widehat{TBI} = \widehat{DBA}$ (cùng bằng 60°)
 $\Rightarrow \widehat{TBI} - \widehat{TBK} = \widehat{DBA} - \widehat{TBK} \Rightarrow \widehat{IBA} = \widehat{TBD}$
 Lại có $BA = BD, BT = BI \Rightarrow \triangle IBA = \triangle TBD$ (c.g.c)
 Mà $\widehat{AIB} = \widehat{DTB} = 120^\circ$, lại có $\widehat{BID} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{DIA} = 60^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{BID} = \widehat{DIA} \Rightarrow IA$ là tia phân giác của \widehat{DIE} .

Câu 125. (HSG 7 trường Duyên Hải, huyện Hưng Hà; trường Tây Đô; trường Phạm Đôn Lễ, huyện Hưng Hà; huyện Văn Lâm; huyện Hậu Lộc; huyện Cẩm Thủy 2022 - 2023; huyện Ứng Hòa 2021 - 2022; huyện Sơn Trà 2018 - 2019; huyện Thiệu Hóa 2016 - 2017)

Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn ($AB < AC$). Vẽ về phía ngoài $\triangle ABC$ các tam giác đều ABD và ACE . Gọi I là giao điểm của CD và BE , K là giao của AB và CD .

- Chứng minh rằng: $\triangle ADC = \triangle ABE$
- Chứng minh rằng: $\widehat{DIB} = 60^\circ$
- Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và BE . Chứng minh rằng $\triangle AMN$ đều.
- Chứng minh rằng IA là phân giác của góc DIE .

Lời giải



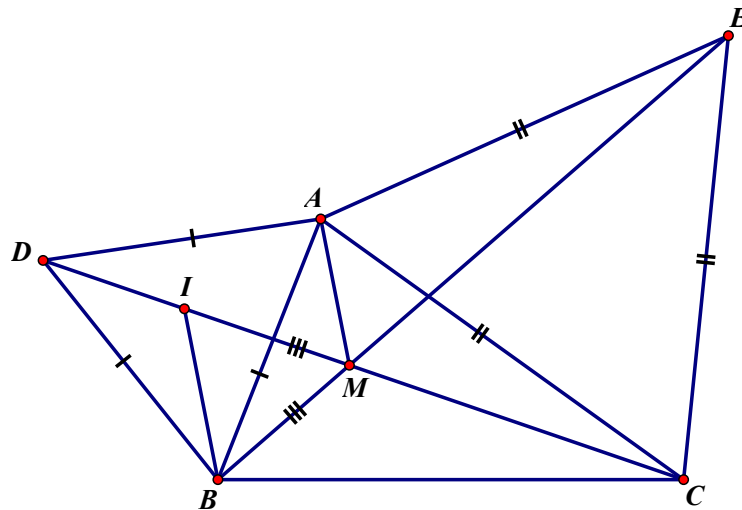
- Ta có : $AD = AB$; $\widehat{DAC} = \widehat{BAE}$ và $AE = AC$ suy ra $\triangle ADC = \triangle ABE$ (c.g.c)
- Từ $\triangle ADC = \triangle ABE$ (câu a) $\Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{ADC}$ mà $\widehat{BKI} = \widehat{AKD}$ (đối đỉnh)
 Khi đó xét $\triangle BIK$ và $\triangle DAK$ suy ra $\widehat{BIK} = \widehat{DAK} = 60^\circ$ (đpcm)
- Từ $\triangle ADC = \triangle ABE$ (câu a) $\Rightarrow CM = EN$ và $\widehat{ACM} = \widehat{AEN}$
 $\Rightarrow \triangle ACM = \triangle AEN$ (c.g.c) $\Rightarrow AM = AN$ và $\widehat{CAM} = \widehat{EAN}$
 $\widehat{MAN} = \widehat{CAE} = 60^\circ$. Do đó $\triangle AMN$ đều
- Trên tia ID lấy điểm J sao cho $IJ = IB \Rightarrow \triangle BIJ$ đều $\Rightarrow BJ = BI$ và
 $\widehat{JBI} = \widehat{DBA} = 60^\circ$ suy ra $\widehat{IBA} = \widehat{JBD}$, kết hợp $BA = BD$
 $\Rightarrow \triangle IBA = \triangle JBC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AIB} = \widehat{DJB} = 120^\circ$ mà $\widehat{BID} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{DIA} = 60^\circ$
 Từ đó suy ra IA là phân giác của góc DIE

Câu 126. (HSG 7 Thị xã Bim Sơn 2022-2023)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) dựng ra phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD, ACE .

- Chứng minh rằng $\triangle ADC = \triangle ABE$
- Gọi M là giao điểm của BE, CD . Tính \widehat{BMC} và chứng minh $MD = MA + MB$.
- Chứng minh rằng $\widehat{AMC} = \widehat{BMC}$.

Lời giải



a) Xét $\triangle ADC$ và $\triangle ABE$ có

$AD = AB$ (vì $\triangle ABD$ đều)

$\widehat{DAC} = \widehat{BAE}$ (vì $\widehat{DAC} = \widehat{DAB} + \widehat{BAC} = 60^\circ + \widehat{BAC}$; $\widehat{BAE} = \widehat{BAC} + \widehat{ACE} = 60^\circ + \widehat{BAC}$)

$AC = AE$ (vì $\triangle ACE$ đều)

Nên $\triangle ADC = \triangle ABE$ (c - g - c)

Suy ra $\widehat{AEB} = \widehat{ACD}$ (góc tương ứng)

b) Gọi M là giao điểm của BE, CD . Ta có \widehat{BMC} là góc ngoài của $\triangle EMC$ nên

$\widehat{BMC} = \widehat{MEC} + \widehat{MCE} = \widehat{MEC} + \widehat{MCA} + \widehat{ACE} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$

Suy ra $\widehat{EMC} = 60^\circ$ (kề bù với \widehat{BMC})

Trên MD lấy I sao cho $MI = MB$ và $\widehat{IMB} = 60^\circ$ (đối đỉnh \widehat{EMC})

Nên $\widehat{IMB} = \widehat{DBA} = 60^\circ$

Xét $\triangle MBA$ và $\triangle IBD$ có

$MI = IB (= MI)$ (do tam giác MIB đều)

$BA = BD$

$\widehat{MBA} = \widehat{IBD}$ (vì $\widehat{MBA} + \widehat{ABI} = 60^\circ = \widehat{IBD} + \widehat{ABI}$)

Nên $\triangle MBA = \triangle IBD$ (c - g - c)

$DI = MA$ (cạnh tương ứng)

Ta có $MD = MI + ID = MB + AM$.

c) Ta có $\triangle MBA = \triangle IBD$ nên $\widehat{AMB} = \widehat{DIB} = 120^\circ$

Suy ra $\widehat{AMC} = \widehat{BMC}$.

Câu 127. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ năm 2021 - 2022)

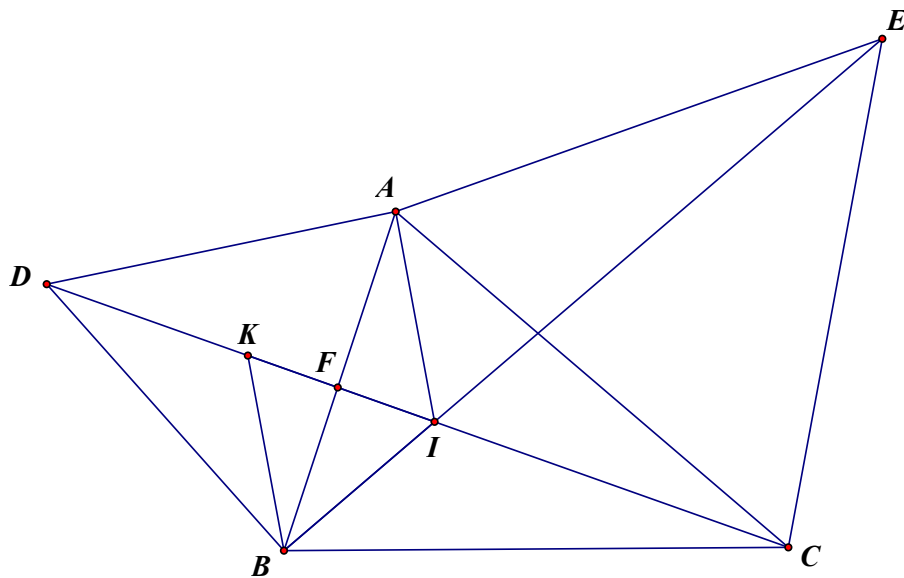
Cho $\triangle ABC$ nhọn. Vẽ về phía ngoài tam giác ấy các tam giác đều ABD và ACE . Gọi I là giao điểm của BE và CD .

1) Chứng minh $BE = CD$.

2) Tính \widehat{BIC} .

3) Chứng minh rằng $IA + IB = ID$.

Lời giải



1) Chứng minh $BE = CD$.

Ta có $\triangle ABC$ đều $\Rightarrow \widehat{CAE} = 60^\circ$; $\triangle ABD$ đều $\Rightarrow \widehat{BAD} = 60^\circ$

Suy ra

$\widehat{BAE} = \widehat{BAC} + \widehat{CAE} = \widehat{BAC} + 60^\circ$ (vì tia AC nằm giữa hai tia AB và AE)

$\widehat{DAC} = \widehat{BAC} + \widehat{BAD} = \widehat{BAC} + 60^\circ$ (vì tia AB nằm giữa hai tia AD và AC)

$\widehat{BAE} = \widehat{DAC}$ (vì cùng bằng $\widehat{BAC} + 60^\circ$)

Xét $\triangle BAE$ và $\triangle DAC$ có

$BA = DA$ ($\triangle ABC$ đều)

$\widehat{BAE} = \widehat{DAC}$

$AE = AC$ ($\triangle ACE$ đều)

$\Rightarrow \triangle BAE = \triangle DAC$ (c.g.c)

$\Rightarrow DE = BC$ (vì 2 cạnh tương ứng)

2) Tính góc BIC .

Gọi F là giao điểm của AB và DC , ta có:

$\triangle BAE = \triangle DAC \Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{ADC}$ hay $\widehat{FBI} = \widehat{FDA}$

Xét $\triangle FBI$ và $\triangle FDA$, lập luận sau ra được $\widehat{FIB} = \widehat{EAD}$

$\triangle ABD$ đều $\Rightarrow \widehat{BAD} = 60^\circ$ hay $\widehat{FIB} = 60^\circ$

$\widehat{BIC} + \widehat{FIB} = 180^\circ$ (vì 2 góc kề bù), mà $\widehat{FIB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BIC} = 120^\circ$

3) Chứng minh rằng $IA + IB = ID$.

$\triangle BID$ có $\widehat{DIB} = 60^\circ$

$\widehat{DBI} > 60^\circ$ do $\widehat{DBI} > \widehat{DBA} = 60^\circ$

Trên cạnh ID lấy K sao cho $IK = IB$

Suy ra $IK < ID$ suy ra K nằm giữa I và D

Xét $\triangle BIK$ có:

$$\begin{cases} IK = IB \\ \widehat{KIB} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta BIK \text{ là tam giác đều } \begin{cases} BK = BI \\ \widehat{KBI} = 60^\circ \end{cases}$$

$$\widehat{DBK} = \widehat{ABI}$$

Suy ra được $\Rightarrow \Delta DBK = \Delta ABI$ (c.g.c) $\Rightarrow DK = AI$

Vì K nằm giữa I và D nên $IK + KD = ID$ mà $IK = IB$, $KD = IA$

Suy ra $IB + IA = ID$

Kết luận: $IB + IA = ID$

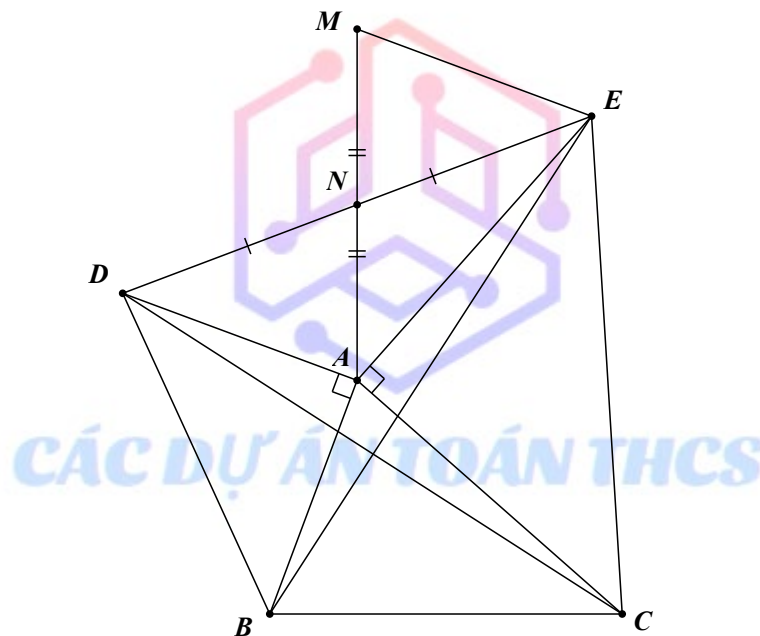
Câu 128. (HSG 7 huyện 2017- 2018)

Cho tam giác ABC có $\hat{A} < 90^\circ$. Vẽ ra phía ngoài tam giác đó hai đoạn thẳng AD vuông góc và bằng AB ; AE vuông góc và bằng AC .

a) Chứng minh $DC = BE$.

b) Gọi N là trung điểm của DE . Trên tia đối của tia NA lấy M sao cho $NA = NM$. Chứng minh $AB = ME$, $\Delta ABC = \Delta EMA$.

Lời giải



a) Xét ΔADC và ΔBAE ta có

$$DA = BC \text{ (gt)}$$

$$AE = AC \text{ (gt)}$$

$$\widehat{DAC} = \widehat{BAE} (= 90^\circ + \widehat{BAC})$$

$$\Rightarrow \Delta DAC = \Delta BAE \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow DC = BE$$

Xét ΔAIE và ΔTIC có:

$$\hat{I}_1 = \hat{I}_2 \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\hat{E}_1 = \hat{C}_1 \text{ (}\Delta DAC = \Delta BAE\text{)}$$

$$\Rightarrow \hat{EAI} = \hat{CTI}$$

$$\Rightarrow \hat{CTI} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow DC \perp BE$$

b) Ta có: $\triangle MNE = \triangle AND$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{MEN}, AD = ME$$

mà $AD = AB$ (gt)

$$\Rightarrow AB = ME \text{ (đfcm) (1)}$$

$$\text{Vì } \widehat{D_1} = \widehat{MEN} \Rightarrow DA \parallel ME$$

$$\Rightarrow \widehat{DAE} + \widehat{AEM} = 180^\circ \text{ (trong cùng phía)}$$

$$\text{Mà } \widehat{BAC} + \widehat{DAE} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{AEM} \text{ (2)}$$

Ta lại có $AC = AE$ (3)

Từ (1),(2),(3) suy ra $\triangle ABC = \triangle EMA$ (đfcm).

Câu 129. (Đề minh họa HSG 7 trường Thái Phương- Hưng Hà năm học 2022 - 2023)

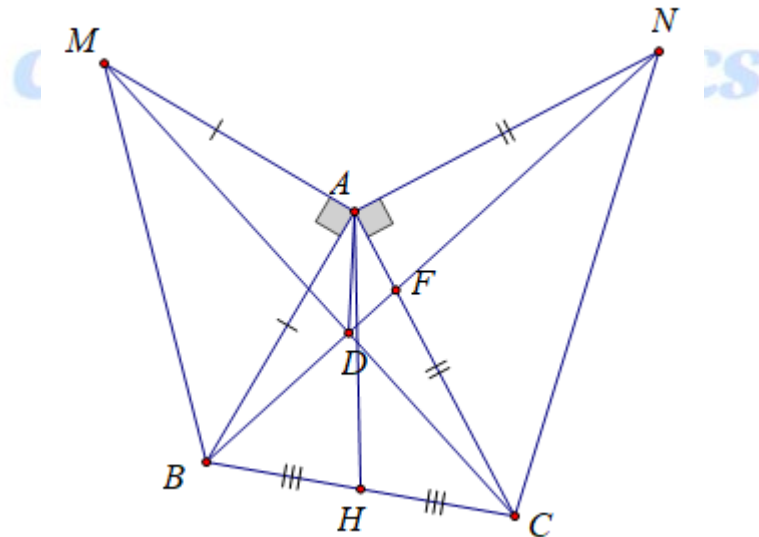
Cho tam giác ABC có góc A nhọn. Vẽ ra phía ngoài tam giác đó các tam giác ABM, ACN vuông cân tại A ; BN và MC cắt nhau tại D .

a) Chứng minh: $\triangle AMC = \triangle ABN$; $BN \perp CM$.

b) Gọi H là trung điểm của BC . Chứng minh: $AH = \frac{1}{2}MN$.

c) Chứng minh rằng DA là phân giác của góc MDN .

Lời giải



a) Chứng minh được $\widehat{MAC} = \widehat{BAN}$ (Cùng bằng $90^\circ + \widehat{BAC}$).

$$MA = AB \text{ (} \triangle MAB \text{ vuông cân tại } A)$$

$$AC = AN \text{ (tam giác } NAC \text{ vuông cân tại } A)$$

$$\Rightarrow \triangle AMC = \triangle ABN \text{ (c - g - c)}$$

Gọi giao điểm của BN với AC là F .

Chỉ ra được $\widehat{AFN} = \widehat{DFC}$ (vì $\triangle AMC = \triangle ABN$)

$$\widehat{ANF} = \widehat{FCD} \text{ (vì } \triangle AMC = \triangle ABN \text{)}$$

$$\text{Từ đó suy ra } \widehat{FDC} = \widehat{FAN} = 90^\circ$$

Do đó: $BN \perp CM$.

b) Trên tia đối của tia HA lấy điểm K sao cho $AH = HK$

$$\Rightarrow AH = \frac{1}{2} AK \text{ (1)}$$

Xét $\triangle AHC$ và $\triangle KHB$ có:

$$AH = HK \text{ (cách vẽ); } \widehat{AHC} = \widehat{KHB} \text{ (đối đỉnh); } HC = BH \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \triangle AHC = \triangle KHB \text{ (c - g - c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{ACH} = \widehat{KBH} \text{ (2 góc tương ứng)}$$

Xét $\triangle ABC$ có $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC} = 180^\circ$ (đ/l)

$$\Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{KBH} = 180^\circ - \widehat{BAC}$$

$$\Rightarrow \widehat{ABK} = 180^\circ - \widehat{BAC} \text{ (*)}$$

Mà $\widehat{MAN} = 180^\circ - \widehat{BAC}$ (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow \widehat{ABK} = \widehat{MAN}$

Xét $\triangle MAN$ và $\triangle ABK$ có

$$MA = AB \text{ (cmt), } \widehat{ABK} = \widehat{MAN} \text{ (cmt); } AN = AC \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \triangle MAN = \triangle ABK \text{ (c - g - c)} \Rightarrow MN = AK \text{ (2 cạnh tương ứng)}$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $AH = \frac{1}{2} MN$ (đpcm).

c) Trên tia BN lấy điểm E , sao cho $BE = MD$

Ta chứng minh được $\triangle AMD = \triangle ABE$ (c - g - c)

$$\Rightarrow \widehat{MAD} = \widehat{BAE} \Rightarrow \widehat{DAE} = \widehat{MAB} = 90^\circ \Rightarrow \triangle ADE \text{ vuông tại } A \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) $\widehat{ADE} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{ADE} = \frac{1}{2} \widehat{MDN}$

$\Rightarrow DA$ là phân giác của \widehat{MDN} .

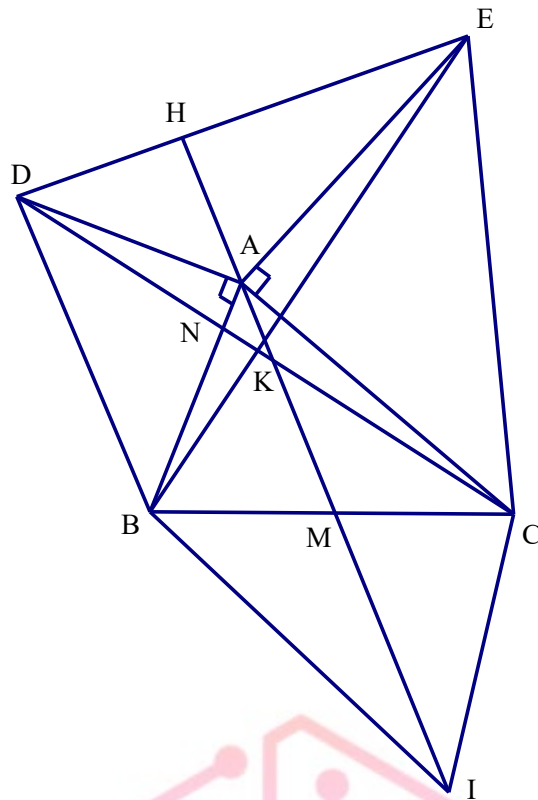
Câu 130. (HSG 7 huyện Bá Thước 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC nhọn; vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại A là tam giác ABD và tam giác ACE .

a) Chứng minh $DC = BE$ và $DC \perp BE$.

b) Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến ED và M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Chứng minh A, M, H thẳng hàng.

Lời giải



a)* Chứng minh $DC = BE$?

Ta có $\widehat{DAC} = \widehat{DAB} + \widehat{BAC} = 90^\circ + \widehat{BAC}$

Tương tự $\widehat{BAE} = 90^\circ + \widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{BAE}$

Xét $\triangle DAC$ và $\triangle BAE$ có: $AD = AB$ ($\triangle ABD$ vuông cân tại A), $\widehat{DAC} = \widehat{BAE}$ (cmt) và $AC = AE$ ($\triangle ACE$ vuông cân tại A) $\Rightarrow \triangle DAC = \triangle BAE$ ((c-g-c))

Suy ra $DC = BE$.

* Chứng minh $DC \perp BE$?

Gọi K, N lần lượt là giao điểm của DC với BE và AB

$\triangle AND$ và $\triangle KNB$ có: $\widehat{AND} = \widehat{KNB}$ (đối đỉnh); $\widehat{ADN} = \widehat{KBN}$ ($\triangle DAC = \triangle BAE$)

$\Rightarrow \widehat{DAN} = \widehat{BKN}$ (định lý tổng 3 góc trong tam giác)

Mà $\widehat{DAN} = 90^\circ$ ($\triangle ABD$ vuông cân tại A)

$\Rightarrow \widehat{BKN} = 90^\circ \Rightarrow DC \perp BE$ tại K

b) Chứng minh A, H, M thẳng hàng?

Trên tia đối của tia MA lấy điểm I sao cho $MI = MA$

Xét $\triangle AMB$ và $\triangle IMC$ có: $MI = MA$ (vẽ thêm), $\widehat{AMB} = \widehat{IMC}$ (đối đỉnh); $MB = MC$ (cmt)

Suy ra $\triangle AMB = \triangle IMC$ (c.g.c) $\Rightarrow CI = AB$ và $CI \parallel AB$

Có $CI = AB$ (cmt) mà $AD = AB \Rightarrow CI = AD$

Có $\widehat{DAE} + \widehat{EAC} + \widehat{DAB} + \widehat{BAC} = 360^\circ$ mà $\widehat{DAB} = 90^\circ$ và $\widehat{EAC} = 90^\circ$ suy ra

Có $CI \parallel AB$ suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{ICB}$

Có $\widehat{BAC} + \widehat{BCA} + \widehat{ABC} = 180^\circ$ mà $\widehat{ABC} = \widehat{ICB}$ suy ra $\widehat{BAC} + \widehat{BCA} + \widehat{ICB} = 180^\circ$ hay $\widehat{BAC} + \widehat{ACI} = 180^\circ$

Suy ra $\widehat{ACI} = \widehat{DAE}$ (cùng bù \widehat{BAC})

Xét $\triangle ACI$ và $\triangle EAD$ có: $CI = AD$ (cmt), $\widehat{ACI} = \widehat{DAE}$ (cmt), $CA = AE$ (cmt)

Suy ra $\triangle ACI = \triangle EAD$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{CAI} = \widehat{AED}$ mà $\widehat{AED} + \widehat{EAH} = 90^\circ$ ($\triangle AHE$ vuông tại H)

$\Rightarrow \widehat{CAI} + \widehat{EAH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MAH} = 180^\circ \Rightarrow M, A, H$ thẳng hàng.

Câu 131. (HSG 7 thị trấn Càng Nàng; trường Nguyễn Tông Quai, huyện Hưng Hà; trường Nguyệt Ân, huyện Ngọc Lặc; huyện Tiên Du 2022 - 2023; huyện Bố Trạch 2017 - 2018)

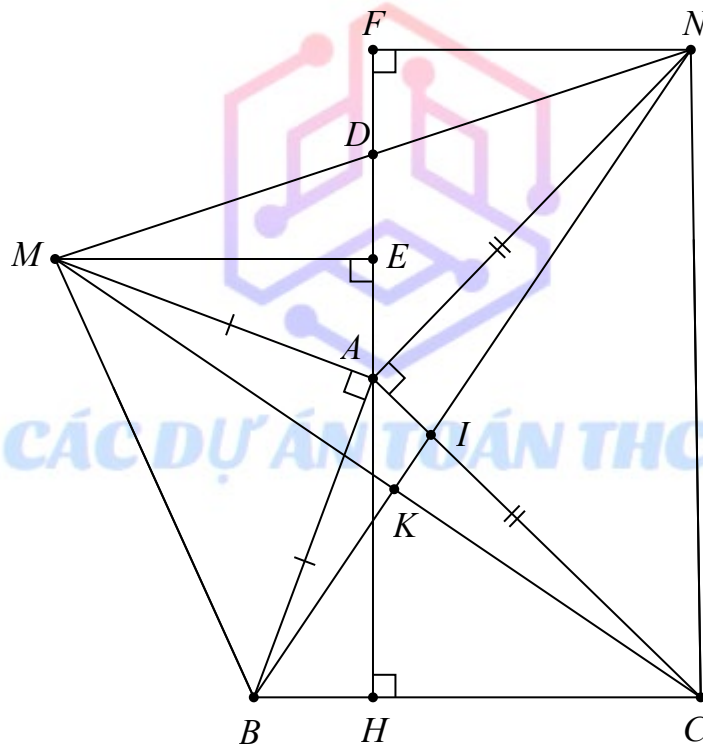
Cho tam giác ABC có góc A nhỏ hơn 90° . Vẽ ra ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại A là $\triangle ABM$ và $\triangle ACN$.

a) Chứng minh rằng: $MC = BN$.

b) Chứng minh: $BN \perp CM$.

c) Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Chứng minh AH đi qua trung điểm của MN .

Lời giải



a) Xét $\triangle AMC$ và $\triangle ABN$, có:

$AM = AB$ ($\triangle AMB$ vuông cân)

$\widehat{MAC} = \widehat{BAN}$ ($= 90^\circ + \widehat{BAC}$)

$AC = AN$ ($\triangle ACN$ vuông cân)

Suy ra $\triangle AMC = \triangle ABN$ (c - g - c) $\Rightarrow MC = BN$ (2 cạnh tương ứng)

b) Gọi I là giao điểm của BN với AC , K là giao điểm của BN với MC .

Vì $\triangle AMC = \triangle ABN$ (c - g - c) $\Rightarrow \widehat{ANI} = \widehat{KCI}$

Mà $\widehat{AIN} = \widehat{KIC}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{KCI} + \widehat{KIC} = \widehat{ANI} + \widehat{AIN} = 90^\circ$

Do đó: $MC \perp BN$

c) Kẻ $ME \perp AH$ tại E , $NF \perp AH$ tại F . Gọi D là giao điểm của MN và AH .

Ta có: $\widehat{BAH} + \widehat{MAE} = 90^\circ$ (vì $\widehat{MAB} = 90^\circ$) (1)

Lại có $\widehat{MAE} + \widehat{AME} = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{AME} = \widehat{BAH}$

Xét $\triangle MAE$ vuông tại E và $\triangle ABH$ vuông tại H có:

$\widehat{AME} = \widehat{BAH}$ (chứng minh trên)

$MA = AB$ ($\triangle AMB$ vuông cân)

Suy ra $\triangle MAE = \triangle ABH$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow ME = AH$

Chứng minh tương tự ta có $\triangle AFN = \triangle CHA$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow FN = AH$

Ta có $ME \parallel NF$ (cùng vuông góc với AH) $\Rightarrow \widehat{EMD} = \widehat{FND}$ (hai góc so le trong)

Xét $\triangle MED$ vuông tại E và $\triangle NFD$ vuông tại F , có:

$ME = NF (= AH)$; $\widehat{EMD} = \widehat{FND}$

$\Rightarrow \triangle MED = \triangle NFD$ (g.c.g)

$\Rightarrow MD = ND$ (hai cạnh tương ứng) $\Rightarrow D$ là trung điểm của MN

Vậy AH đi qua trung điểm của MN .

Câu 132. (HSG 7 huyện Thái Thụy năm 2021 - 2022)

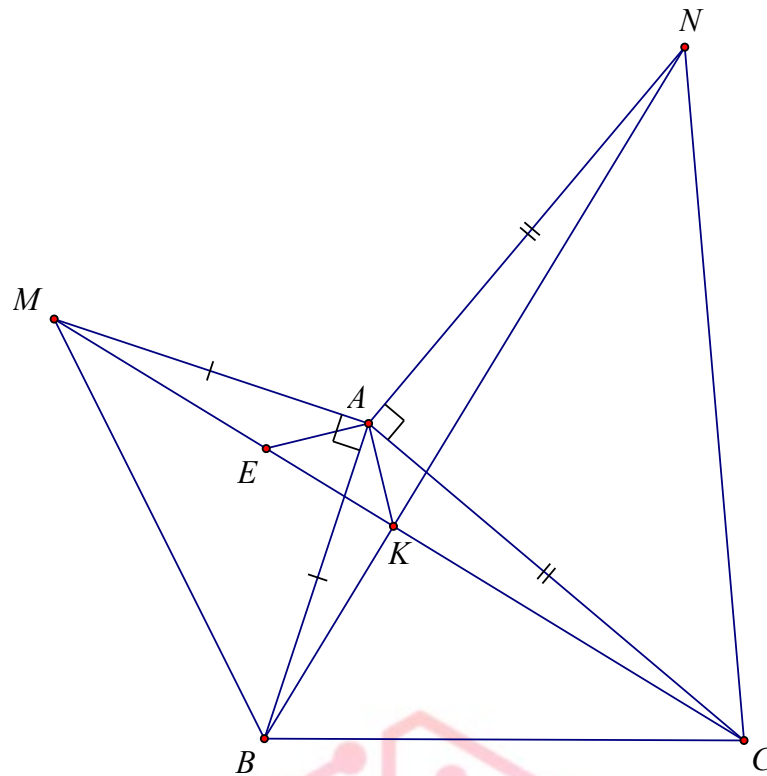
Cho $\triangle ABC$ có góc A nhỏ hơn 90° . Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C lấy điểm M sao cho $\triangle ABM$ vuông cân tại A . Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B lấy điểm N sao cho $\triangle ACN$ vuông cân tại A . Gọi K là giao điểm của BN và CM .

1. Chứng minh $\triangle AMC = \triangle ABN$.

2. Chứng minh $BN \perp CM$.

3. Tính \widehat{AKC}

Lời giải



1) Chứng minh $\triangle AMC = \triangle ABN$.

$$\text{Ta } \widehat{MAC} = \widehat{MAB} + \widehat{BAC} = 90^\circ + \widehat{BAC}$$

$$\widehat{NAB} = \widehat{NAC} + \widehat{CAB} = 90^\circ + \widehat{BAC}$$

$$\text{Nên } \widehat{MAC} = \widehat{NAB}$$

Xét $\triangle AMC$ và $\triangle ABN$ có:

$$+ AM = AB \text{ (vì } \triangle AMB \text{ vuông cân tại } A)$$

$$+ AC = AN \text{ (vì } \triangle ACN \text{ vuông cân tại } A)$$

$$+ \widehat{MAC} = \widehat{NAB}$$

Suy ra $\triangle AMC = \triangle ABN$ (c.g.c)

2) Chứng minh $BN \perp CM$.

Gọi I là giao điểm của BN với AC

$$\widehat{ANI} = \widehat{KCI} \text{ (vì } \triangle AMC = \triangle ABN)$$

$$\widehat{AIN} = \widehat{KIC} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\text{Xét } \triangle KIC \text{ có: } \widehat{KCI} + \widehat{KIC} + \widehat{CKI} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{CKI} = 180^\circ - (\widehat{KCI} + \widehat{KIC})$$

$$\text{Xét } \triangle AIN \text{ có: } \widehat{ANI} + \widehat{AIN} + \widehat{IAN} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{IAN} = 180^\circ - (\widehat{ANI} + \widehat{AIN})$$

Nên $\Rightarrow \widehat{IKC} = \widehat{NAI} = 90^\circ$, do đó: $BN \perp CM$ tại K

3) Tính \widehat{AKC}

Trên cạnh MC lấy điểm E sao cho $ME = BK$

Xét $\triangle ABK$ và $\triangle AME$ ta có:

$$BK = ME; \widehat{ABK} = \widehat{AME}; AB = AM$$

Nên $\triangle ABK = \triangle AME$ (c.g.c) $\Rightarrow AE = AK$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow \triangle AEK$ vuông cân tại A và $\widehat{EKA} = 45^\circ$

Mà $\widehat{EKA} + \widehat{AKC} = 180^\circ$

Nên $\widehat{AKC} = 135^\circ$.



CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS