CHƯƠNG 2

TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

BÀI 1. CÁC QUY TẮC ĐẾM CƠ BẢN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa 1 (Quy tắc cộng). Một công việc X được thực hiện theo một trong k phương án $A_1, A_2, \ldots, A_k$, trong đó

① Phương án A_1 có n_1 cách thực hiện;

② Phương án A_2 có n_2 cách thực hiện;

③ ...

④ Phương án A_k có n_k cách thực hiện.

Khi đó số cách hoàn thành công việc X là $n(X) = n_1 + n_2 + \cdots + n_k = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i$ cách.

Định nghĩa 2 (Quy tắc nhân). Giả sử một nhiệm vụ X nào đó được hoàn thành lần lượt qua k *giai đoạn* $A_1, A_2, \ldots, A_k$:

① Giai đoạn A_1 có n_1 cách làm;

② Giai đoạn A_2 có n_2 cách làm;

③ ...

④ Giai đoạn A_k có n_k cách làm.

Khi đó công việc X có số cách thực hiện là $n(X) = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k = \prod\limits_{i=1}^{k} n_i$ cách.

Định nghĩa 3 (Quy tắc bù trừ). Đối tượng x cần đếm được chứa trong một đối tượng X gồm x và $\overline{x}$ đối lập nhau. Nếu X có m cách chọn, $\overline{x}$ có n cách chọn. Vậy x có $(m-n)$ cách chọn.
Về mặt thực hành, đề cho đếm những đối tượng thỏa a và b. Ta cần làm:

— Bài toán 1: Đếm những đối tượng thỏa a.

— Bài toán 2: Đếm những đối tượng thỏa a, không thỏa b.

Do đó, kết quả bài toán = kết quả bài toán 1 − kết quả bài toán 2.

!

— Nếu bài toán chia ra từng **trường hợp** không trùng lặp để hoàn thành công việc thì dùng **qui tắc cộng**, nếu bài toán chia ra từng **giai đoạn** thực hiện thì ta dùng **quy tắc nhân**. Trong nhiều bài toán, ta không chỉ kết hợp giữa hai quy tắc này lại với nhau để giải mà cần phân biệt khi nào cộng, khi nào nhân, khi nào trừ.

— "Nếu cho tập hợp hữu hạn bất kỳ A và B giao nhau khác rỗng. Khi đó thì số phần tử của $A \cup B$ bằng số phần tử của A cộng với số phần tử của B rồi trừ đi số phần tử của $A \cap B$, tức là $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$". Đó là quy tắc cộng mở rộng. Do đó khi giải các bài toán đếm liên quan đến tìm số sao cho các số đó là **số chẵn, số lẻ, số chia hết** ta nên ưu tiên việc thực hiện **(chọn) chúng trước** và nếu **chứa số** 0 **nên chia** 2 **trường hợp** nhằm tránh trùng lặp với nhau.

— Dấu hiệu chia hết:
Gọi $N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ là số tự nhiên có $n+1$ chữ số ($a_n \neq 0$). Khi đó:

+ $N \,\vdots\, 2 \Leftrightarrow a_0 \,\vdots\, 2 \Leftrightarrow a_0 \in \{0;2;4;6;8\}$.

+ $N \,\vdots\, 5 \Leftrightarrow a_0 \,\vdots\, 5 \Leftrightarrow a_0 \in \{0;5\}$.

+ $N \,\vdots\, 4$ (hay 25) $\Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \,\vdots\, 4$ (hay 25).

+ $N \,\vdots\, 8$ (hay 125) $\Leftrightarrow \overline{a_2 a_1 a_0} \,\vdots\, 8$ (hay 125).

+ $N \,\vdots\, 3$ (hay 9) $\Leftrightarrow a_0 + a_1 + \cdots + a_n \,\vdots\, 3$ (hay 9).

B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

1 VÍ DỤ

DẠNG 1.1. Bài toán sử dụng quy tắc cộng

VÍ DỤ 1. Trong một cuộc thi tìm hiểu về đất nước Việt Nam, ban tổ chức công bố danh sách các đề tài bao gồm: 8 đề tài về lịch sử, 7 đề tài về thiên nhiên, 10 đề tài về con người và 6 đề tài về văn hóa. Hỏi mỗi thí sinh có bao nhiêu cách chọn đề tài? **ĐS:** 31

Lời giải

Mỗi thí sinh có các 4 phương án chọn đề tài:

— *Chọn đề tài về lịch sử có 8 cách chọn.*

— *Chọn đề tài về thiên nhiên có 7 cách chọn.*

— *Chọn đề tài về con người có 10 cách chọn.*

— *Chọn đề tài về văn hóa có 6 cách chọn.*

Theo quy tắc cộng, có $8 + 7 + 10 + 6 = 31$ *cách chọn đề tài.* □

VÍ DỤ 2. Giả sử từ tỉnh A đến tỉnh B có thể đi bằng các phương tiện: ô tô, tàu hỏa hoặc máy bay. Mỗi ngày có 10 chuyến ô tô, 5 chuyến tàu hỏa và 3 chuyến máy bay. Hỏi có bao nhiêu cách lựa chọn chuyến đi từ tỉnh A đến tỉnh B? **ĐS:** 18

Lời giải

Để đi từ A đến B có 3 phương án lựa chọn:

— *Đi bằng ô tô có* 10 *cách chọn.*

— *Đi bằng tàu hỏa có* 5 *cách chọn.*

— *Đi bằng máy bay có* 3 *cách chọn.*

Theo quy tắc cộng, có $10 + 5 + 3 = 18$ *cách chọn.* □

DẠNG 1.2. Bài toán sử dụng quy tắc nhân

VÍ DỤ 1. An đến nhà Bình để cùng Bình đến chơi nhà Cường. Từ nhà An đến nhà Bình có 4 con đường đi, từ nhà Bình đến nhà Cường có 6 con đường đi. Hỏi An có bao nhiêu cách chọn đường đi từ nhà mình đến nhà Cường? **ĐS:** 24

Lời giải

Để đi từ nhà An đến nhà Cường cần thực hiện 2 *giai đoạn*

— *Đi từ nhà An đến nhà Bình có* 4 *cách.*

— *Đi từ nhà Bình đến nhà Cường có* 6 *cách.*

Theo quy tắc nhân, có $4 \cdot 6 = 24$ *cách chọn đường đi.* □

VÍ DỤ 2. Lớp 11A có 30 học sinh. Tập thể lớp muốn bầu ra một lớp trưởng, một lớp phó và một thủ quỹ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một ban cán sự lớp như trên, biết rằng một bạn chỉ có thể làm tối đa một vai trò? **ĐS:** 24360

Lời giải

Để bầu ra một ban cán sự lớp cần thực hiện 3 *giai đoạn*

— *Bầu lớp trưởng có* 30 *cách*

— *Bầu phó có* 29 *cách*

— *Bầu thủ quỹ có* 28 *cách*

Theo quy tắc nhân, có $30 \cdot 29 \cdot 28 = 24360$ *cách chọn.* □

DẠNG 1.3. Bài toán sử dụng quy tắc bù trừ

VÍ DỤ 1. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau mà không bắt đầu bởi 12? **ĐS:** 26880

Lời giải

Gọi $a_1a_2a_3a_4a_5$ là số cần lập.
Để lập được số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau, ta thực hiện các bước lần lượt:

— *Chọn a_1 có 9 cách.*

— *Chọn a_2 có 9 cách.*

— *Chọn a_3 có 8 cách.*

— *Chọn a_4 có 7 cách.*

— *Chọn a_5 có 6 cách.*

Do đó có $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216$ số có năm chữ số khác nhau. Để lập được số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau bắt đầu bằng 12, ta thực hiện các bước lần lượt:

— *Chọn a_1a_2 có 1 cách.*

— *Chọn a_3 có 8 cách.*

— *Chọn a_4 có 7 cách.*

— *Chọn a_5 có 6 cách.*

Do đó có $1 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ số có năm chữ số khác nhau. Theo quy tắc bù trừ, có $27216 - 336 = 26880$ số có năm chữ số khác nhau không bắt đầu bởi 12. □

VÍ DỤ 2. Trong một hộp có 6 bi đỏ, 5 bi trắng và 4 bi vàng. Có bao nhiêu cách lấy 3 viên bi từ hộp này sao cho chúng không đủ ba màu? **ĐS:** 335

Lời giải

Số cách lấy 3 bi bất kỳ từ 15 bi là $C_{15}^3 = 455$.
Số cách lấy 3 bi từ 15 bi mà đủ ba màu là $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.
Theo quy tắc bù trừ, số cách lấy 3 viên bi không đủ ba màu là $455 - 120 = 335$. □

1 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Một hộp có 12 viên bi trắng, 10 viên bi xanh và 8 viên bi đỏ. Một em bé muốn chọn 1 viên bi để chơi. Hỏi có bao nhiêu cách chọn? **ĐS:** 30 cách

Lời giải.

Để chọn 1 viên bi để chơi có các phương án

+ Chọn 1 viên bi trắng có 12 cách.

+ Chọn 1 viên bi xanh có 10 cách.

+ Chọn 1 viên bi đỏ có 8 cách.

Theo quy tắc cộng, số cách để chọn 1 viên bi để chơi là $12 + 10 + 8 = 30$ cách. □

BÀI 2. Chợ Bến Thành có 4 cổng ra vào. Hỏi một người đi chợ:

a) Có mấy cách vào và ra chợ? **ĐS:** 16

b) Có mấy cách vào và ra chợ bằng 2 cổng khác nhau? **ĐS:** 12

Lời giải.

a) Để vào và ra chợ ta thực hiện liên tiếp các bước

— Vào chợ có 4 cách.

— Ra chợ có 4 cách

Theo quy tắc nhân, có $4 \cdot 4 = 16$ cách vào và ra chợ.

b) Để vào và ra chợ bằng 2 cổng khác nhau ta thực hiện liên tiếp các bước

— Vào chợ có 4 cách.

— Ra chợ bằng cổng khác có 3 cách

Theo quy tắc nhân, có $4 \cdot 3 = 12$ cách vào và ra chợ bằng hai cổng khác nhau.

□

BÀI 3. Có 8 quyển sách Toán, 7 quyển sách Lí, 5 quyển sách Hóa. Một học sinh chọn 1 quyển trong bất kỳ 3 loại trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn? **ĐS:** 20 cách

Lời giải.

Để chọn 1 quyển sách trong 3 loại sách, ta có các phương án

+ Chọn 1 quyển sách Toán có 8 cách.

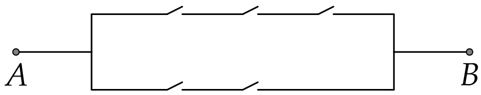
+ Chọn 1 quyển sách Lí có 7 cách.

+ Chọn 1 quyển sách Hóa có 5 cách.

Theo quy tắc cộng, số cách để chọn 1 viên bi để chơi là $8 + 7 + 5 = 20$ cách. □

BÀI 4.

Cho sơ đồ mạch điện như hình vẽ bên cạnh. Hỏi có bao nhiêu cách đóng - mở 5 công tắc để có được dòng điện đi từ A đến B. **ĐS:** 12 cách



Lời giải.

Để dòng điện đi từ A đến B có 2 phương án

— Phương án 3 công tắc phía trên đóng. Khi đó có $2^2 = 4$ trạng thái của các công tắc phía dưới.

— Phương án 2 công tắc phía dưới đóng. Khi đó có $2^3 = 8$ trạng thái của các công tắc phía trên.

Theo quy tắc cộng, có $4 + 8 = 12$ cách để dòng điện đi từ A đến B. □

BÀI 5. Đề thi học kỳ môn Hóa gồm hai phần: trắc nghiệm và tự luận. Trong ngân hàng đề thi có 15 đề trắc nghiệm và 8 đề tự luận. Hỏi có bao nhiêu cách ra đề? **ĐS:** 120 cách

Lời giải.

Để tạo được một đề thi, cần thực hiện hai bước liên tiếp

— Chọn đề trắc nghiệm có 15 cách.

— Chọn đề tự luận có 8 cách.

Theo quy tắc nhân, có $15 \cdot 8 = 120$ cách ra đề. □

BÀI 6. Một ca sĩ có 30 cái áo và 20 cái quần, trong đó có 18 cái áo màu xanh và 12 cái áo màu đỏ; 12 quần xanh và 8 quần đỏ. Có bao nhiêu cách chọn một bộ quần áo khác màu để người ca sĩ này đi trình diễn? **ĐS:** 240 cách

Lời giải.
Để chọn một bộ quần áo khác màu, ta có các phương án

— Áo màu xanh và quần màu đỏ có $18 \cdot 8 = 144$ cách.

— Áo màu đỏ và quần màu xanh có $12 \cdot 8 = 96$ cách.

Theo quy tắc cộng, số cách chọn quần áo là $144 + 96 = 240$ cách. □

BÀI 7. Trong lớp $11A$ có 39 học sinh trong đó có học sinh tên Chiến, lớp $11B$ có 32 học sinh trong đó có học sinh tên Tranh. Có bao nhiêu cách chọn một tổ gồm 2 học sinh khác lớp mà không có mặt Chiến và Tranh cùng lúc? **ĐS:** 1247 cách

Lời giải.
Để chọn một tổ gồm 2 học sinh khác lớp, có $39 \cdot 32 = 1248$ cách.
Trong đó có 1 cách chọn tổ có mặt cả Chiến và Tranh.
Do đó số cách chọn một tổ không có mặt Chiến và Tranh cùng lúc là $1248 - 1 = 1247$ cách. □

BÀI 8. Trong lớp $11A$ có 50 học sinh, trong đó có 2 học sinh tên Ưu và Tiên. Có bao nhiêu cách chọn ra 2 học sinh đi thi mà trong đó có mặt ít nhất 1 trong 2 học sinh tên Ưu và tên Tiên? **ĐS:** 97 cách

Lời giải.
Có 3 phương án chọn.

— Phương án 1: Chọn chỉ có Ưu 1 cách, chọn một bạn khác Tiên có 48 cách nên có $1 \cdot 48 = 48$ cách trong trường hợp này

— Phương án 2: Chọn chỉ có Tiên 1 cách, chọn một bạn khác Tiên có 48 cách nên có $1 \cdot 48 = 48$ cách trong trường hợp này

— Phương án 3: Có cả Ưu và Tiên: 1 cách trong trường hợp này.

Vậy số cách chọn thỏa yêu cầu đề bài là $48 + 48 + 1 = 97$ cách thỏa yêu cầu. □

BÀI 9. Có 20 bông hoa trong đó có 8 bông hồng, 7 bông cúc, 5 bông đào. Chọn ngẫu nhiên 4 bông, hỏi có bao nhiêu cách chọn để trong đó hoa được chọn có đủ cả ba loại? **ĐS:** 2380 cách

Lời giải.
Có 3 phương án chọn.

— Phương án 1: Chọn 2 bông hồng, 1 bông cúc, 1 bông đào có $\dfrac{8 \cdot 7}{2!} \cdot 7 \cdot 5 = 980$ cách trong trường hợp này.

— Phương án 2: Chọn 1 bông hồng, 2 bông cúc, 1 bông đào có $7 \cdot \dfrac{7 \cdot 6}{2!} \cdot 5 = 840$ cách trong trường hợp này.

— Phương án 3: Chọn 1 bông hồng, 1 bông cúc, 2 bông đào có $8 \cdot 7 \cdot \dfrac{8 \cdot 7}{2!} = 560$ cách trong trường hợp này.

Vậy số cách chọn thỏa yêu cầu đề bài là $980 + 840 + 560 = 2380$ cách thỏa yêu cầu. □

BÀI 10. Có 12 học sinh giỏi gồm 3 học sinh khối 12, 4 học sinh khối 11, 5 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 6 học sinh sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh ? **ĐS:** 805 cách

Lời giải.

Có 4 phương án chọn.

— Số cách chọn 6 học sinh bất kỳ từ 12 học sinh có $\dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{6!} = 924$ cách.

— Số cách chọn 6 học sinh trong đó không có học sinh lớp 12 có $\dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{6!} = 84$ cách.

— Số cách chọn 6 học sinh trong đó không có học sinh lớp 11 có $\dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6!} = 28$ cách.

— Số cách chọn 6 học sinh trong đó không có học sinh lớp 10 có $\dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6!} = 7$ cách.

Do đó số cách chọn thỏa mãn yêu cầu là $924 - (84 + 28 + 7) = 805$ cách. □

BÀI 11. Có bao nhiêu biển số xe gồm hai chữ cái ở đầu (26 chữ cái) và 4 chữ số theo sau (chữ số đầu không nhất thiết khác 0 và chữ số cuối khác 0), sao cho:

① Chữ cái tùy ý và bốn chữ số tùy ý tạo thành một số chia hết cho 2 theo sau. **ĐS:** 2704000 cách

② Chữ cái khác nhau và 4 chữ số đôi một khác nhau tạo thành một số chia hết cho 5 tiếp theo sau. **ĐS:** 291200 cách

Lời giải.

① Có 3 bước chọn.

— Chọn 2 chữ cái 26^2 cách.

— Chọn 3 chữ số tiếp theo có 10^3 cách.

— Chọn chữ số cuối cùng thuộc $\{2; 4; 6; 8\}$ có 4 cách.

Vậy có tất cả $26^2 \cdot 10^3 \cdot 4 = 2704000$ cách.

② Có 3 bước chọn.

— Chọn 2 chữ cái có $26 \cdot 25 = 650$ cách.

— Chữ số cuối có 1 cách chọn số 5.

— Chọn 3 chữ số còn lại $8 \cdot 8 \cdot 7 = 448$ cách.

Vậy có tất cả $26 \cdot 25 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 291200$ cách.

□

BÀI 12. Người ta có thể ghi nhãn cho những chiếc ghế trong một giảng đường Đại học bằng một chữ cái (26 chữ cái) và một số nguyên dương theo sau mà không vượt quá 100. Bằng cách ghi như vậy, nhiều nhất có bao nhiêu chiếc ghế có thể được ghi nhãn khác nhau? **ĐS:** 2600 cách

Lời giải.

Có 26 chữ cái và 100 số thỏa mãn.

Vậy số cách ghi nhiều nhất là $26 \cdot 100 = 2600$ cách. □

BÀI 13. Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số được lấy từ tập A, sao cho các chữ số này:

① Tùy ý. **ĐS:** 90000 số

② Khác nhau từng đôi một. **ĐS:** 27216 số

③ Khác nhau từng đôi một và năm chữ số này tạo thành một số lẻ. **ĐS:** 13440 số

④ Khác nhau từng đôi một và năm chữ số này tạo thành một số chia hết cho 5. **ĐS:** 5712 số

⑤ Khác nhau từng đôi một và năm chữ số này tạo thành một số chia hết cho 2. **ĐS:** 13776 số

Lời giải.
Gọi $\overline{abcde}$ là số cần tìm.

①

— a có 9 cách chọn.
— b có 10 cách chọn.
— c có 10 cách chọn.
— d có 10 cách chọn.
— e có 10 cách chọn.

Vậy có $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90000$ số thỏa yêu cầu.

②

— a có 9 cách chọn.
— b có 9 cách chọn.
— c có 8 cách chọn.
— d có 7 cách chọn.
— e có 6 cách chọn.

Vậy có $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216$ số thỏa mãn yêu cầu.

③

— e có 5 cách chọn.
— a có 8 cách chọn.
— b có 8 cách chọn.
— c có 7 cách chọn.
— d có 6 cách chọn.

Vậy có $5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 13440$ số thỏa mãn yêu cầu.

4. Có 2 trường hợp:
Trường hợp 1:

— $e = 0$ có 1 cách chọn.
— a có 9 cách chọn.
— b có 8 cách chọn.
— c có 7 cách chọn.
— d có 6 cách chọn.

Vậy có $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 1 = 3024$ số trong trường hợp này.
Trường hợp 2:

— $e = 5$ có 1 cách chọn.
— a có 8 cách chọn.
— b có 8 cách chọn.
— c có 7 cách chọn.
— d có 6 cách chọn.

Vậy có $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 1 = 2688$ số trong trường hợp này.
Vậy có tất cả: $3024 + 2688 = 5712$ số thỏa mãn yêu cầu.

5. Có 2 trường hợp:
Trường hợp 1:

— $e = 0$ có 1 cách chọn.
— a có 9 cách chọn.
— b có 8 cách chọn.
— c có 7 cách chọn.
— d có 6 cách chọn.

Vậy có $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 1 = 3024$ số trong trường hợp này.
Trường hợp 2:

— $e \in \{2; 4; 6; 8\}$ có 4 cách chọn.
— a có 8 cách chọn.
— b có 8 cách chọn.
— c có 7 cách chọn.
— d có 6 cách chọn.

Vậy có $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 = 10752$ số trong trường hợp này.
Vậy có tất cả $3024 + 10752 = 13776$ số thỏa mãn yêu cầu.

□

BÀI 14. Từ các chữ số $0, 1, 2, \ldots, 9$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm năm chữ số khác nhau đôi một và chữ số chính giữa luôn là số 2? **ĐS:** 1218 số

Lời giải.

Gọi $A = \overline{ab2cd}$ $(a \neq 0)$.

— Xét $A = \overline{ab2cd}$, a bất kì, $d \in \{0; 4; 6; 8\}$
Có 4 cách chọn d, 8 cách chọn a, 7 cách chọn b, 6 cách chọn c, nên có $4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 1344$ cách.

— Xét $A = \overline{ab2cd}$, $d \in \{4; 6; 8\}$ và $a = 0$.

Có 3 cách chọn d, 7 cách chọn b, 6 cách chọn c, nên có $3 \cdot 7 \cdot 6 = 126$ cách.
Vậy số cách chọn thỏa yêu cầu bài toán là $1344 - 126 = 1218$ số. □

BÀI 15. Cho tập hợp $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau đôi một từ X, sao cho một trong ba chữ số đầu tiên phải bằng 1. **ĐS:** 2280 số

Lời giải.
Đặt số cần tìm là $\overline{abcde}$ $(a \neq 0)$.
+ Xét trường hợp a bất kỳ.

— Xếp số 1 vào một trong ba vị trí a, b, c có 3 cách.

— Xếp các số còn lại lần lượt vào vị trí tiếp theo có $7, 6, 5, 4$ cách.

Do đó có $3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 2520$ cách xếp.
+ Xét trường hợp $a = 0$.

— Xếp số 1 vào một trong hai vị trí b, c có 2 cách.

— Xếp các số còn lại lần lượt vào vị trí tiếp theo có $6, 5, 4$ cách.

Do đó có $2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 240$ cách.
Vậy có tất cả $2520 - 240 = 2280$ số xếp thỏa yêu cầu. □

BÀI 16. Cho sáu chữ số $1; 2; 3; 4; 5; 6$. Có thể tạo ra bao nhiêu số gồm bốn chữ số khác nhau? Trong đó có bao nhiêu số chia hết cho 5? **ĐS:** 360 số và 60 số

Lời giải.
Gọi số cần tìm là $\overline{abcd}$

— a có 6 cách chọn.

— b có 5 cách chọn.

— c có 4 cách chọn.

— d có 3 cách chọn.

Do đó có tất cả $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ số có 4 chữ số khác nhau.
Trong đó, các số cha hết cho 5 có dạng $\overline{abc5}$.

— d có 1 cách chọn.

— a có 5 cách chọn.

— b có 4 cách chọn.

— c có 3 cách chọn.

Do đó có $1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ số thỏa yêu cầu. □

BÀI 17. Cho tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Có bao nhiêu số gồm sáu chữ số có nghĩa đôi một khác nhau chia hết cho 5 và luôn có chữ số 0 được lấy từ tập A? **ĐS:** 4680 số

Lời giải.
Gọi $x = \overline{abcdef}$
+ Xét số x có dạng $\overline{abcde0}$ có $1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$ số.
+ Xét số x có dạng $\overline{abcde5}$.

— Xếp số 0 vào 1 trong 5 vị trí có 5 cách.

— Xác vị trí còn lại lần lượt có $6, 5, 4, 3$ cách.

Do đó có $5 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1800$ cách.
+ Xét số x dạng $\overline{0bcde5}$ có $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ cách.
Vậy có tất cả $2520 + 1800 - 360 = 3960$ số thỏa mãn yêu cầu. □

BÀI 18. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số đôi một khác nhau, trong đó chữ số 1 phải có mặt một trong hai vị trí đầu? **ĐS:** 5712 số

Lời giải.
Gọi số cần tìm là $x = \overline{abcde}$
+ Xét x dạng $\overline{1bcde}$ có $1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ số.
+ Xét x dạng $\overline{a1cde}$

— Với a bất kỳ có $9 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ số.

— Với $a = 0$ có $1 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ số.

Do đó có $3024 - 336 = 2688$ số.
Vậy có tất cả $3024 + 2688 = 5712$ số thỏa mãn yêu cầu. □

BÀI 19. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số mà trong đó có hai chữ số chẵn đứng liền nhau, còn chữ số còn lại lẻ? **ĐS:** 225 số

Lời giải.
Gọi số cần tìm là $\overline{abc}$.

— TH1: a, b chẵn, c lẻ có $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ số.

— TH2: a lẻ, b, c chẵn có $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ số.

Vậy có tất cả $100 + 125 = 225$ số thỏa yêu cầu. □

BÀI 20. Từ các chữ số $1; 2; 3; 4; 5$ có thể lập được bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau nằm trong khoảng $(300; 500)$? **ĐS:** 24 số

Lời giải.
Gọi số cần tìm là $\overline{abc}$.

— a có 2 cách chọn ($a = 4$ hoặc $a = 3$).

— b có 4 cách chọn.

— c có 3 cách chọn.

Vậy có $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ số thỏa mãn yêu cầu. □

BÀI 21. Cho các chữ số $1; 2; 5; 7; 8$, có bao nhiêu cách lập ra một số gồm ba chữ số khác nhau từ năm chữ số trên sao cho số tạo thành là một số nhỏ hơn 278? **ĐS:** 20 số

Lời giải.
Gọi số cần tìm là $\overline{abc}$.

Trường hợp 1:

— $a = 1$ có 1 cách chọn.

— b có 4 cách chọn.

— c có 3 cách chọn.

Vậy có $4 \cdot 3 \cdot 1 = 12$ số trong trường hợp này.

Trường hợp 2:

— $a = 2$ có 1 cách chọn.

— $b < 7$ có 2 cách chọn.

— c có 3 cách chọn.

Vậy có $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ số trong trường hợp này.

Trường hợp 3:

— $a = 2$ có 1 cách chọn.

— $b = 7$ có 1 cách chọn.

— $c \in \{1; 5\}$ có 2 cách chọn.

Vậy có $1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$ số trong trường hợp này.
Vậy có tất cả $12 + 6 + 2 = 20$ số thỏa mãn yêu cầu. □

BÀI 22. Từ các chữ số $0; 1; 2; 3; 4; 5; 6$ có thể lập được bao nhiêu số lẻ có ba chữ số khác nhau nhỏ hơn 400? **ĐS:** 35 số

Lời giải.
Gọi số cần tìm là: $\overline{abc}$ ($a \in \{1; 2; 3\}$).
Trường hợp 1:

— $a \in \{1; 3\}$ có 2 cách chọn.

— c có 2 cách chọn.

— b có 5 cách chọn.

Vậy có $2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$ số trong trường hợp này.

Trường hợp 2:

— $a = 2$ có 1 cách chọn.

— c có 3 cách chọn.

— b có 5 cách chọn.

Vậy có $3 \cdot 5 \cdot 1 = 15$ số trong trường hợp này.
Vậy có tất cả $20 + 15 = 35$ số thỏa mãn yêu cầu. □

BÀI 23. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn có năm chữ số khác nhau và nhỏ hơn 34000? **ĐS:** 3570 số

Lời giải.
Trường hợp 1: Số được lập bắt đầu bởi một trong các giá trị sau: $13; 15; 17; 19; 31$.

— Có 5 cách chọn hai chữ số đầu tiên.

— Có 5 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

— Có 7 cách chọn chữ số hàng chục.

— Có 6 cách chọn chữ số hàng trăm.

Vậy có $5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 6 = 1050$ số có 5 chữ số thoả mãn trong trường hợp này.
Trường hợp 2: Số được lập bắt đầu bởi một trong các giá trị sau: $10; 12; 14; 16; 18; 21; 23; 25; 27; 29; 30; 32$.

— Có 12 cách chọn hai chữ số đầu tiên.

— Có 4 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

— Có 7 cách chọn chữ số hàng chục.

— Có 6 cách chọn chữ số hàng trăm.

Vậy có $12 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 6 = 2016$ số có 5 chữ số thoả mãn trong trường hợp này.
Trường hợp 3: Số được lập bắt đầu bởi một trong các giá trị sau: $20; 24; 26; 28$.

— Có 4 cách chọn hai chữ số đầu tiên.

— Có 3 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

— Có 7 cách chọn chữ số hàng chục.

— Có 6 cách chọn chữ số hàng trăm.

Vậy có $4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 6 = 504$ số có 5 chữ số thoả mãn trong trường hợp này.
Vậy có tổng cộng $1050 + 2016 + 504 = 3570$ số có 5 chữ số thoả mãn. □

BÀI 24. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau mà không bắt đầu bởi 12? **ĐS:** 26880 số

Lời giải.
Trước hết ta đếm số các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau.

— Có 9 cách chọn chữ số hàng chục nghìn.

— Có 9 cách chọn chữ số hàng nghìn.

— Có 8 cách chọn chữ số hàng trăm.

— Có 7 cách chọn chữ số hàng chục.

— Có 6 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

Vậy có tất cả $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216$ số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau.
Tiếp theo, ta đếm số các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau mà bắt đầu bởi 12.

— Có 8 cách chọn chữ số hàng trăm.

— Có 7 cách chọn chữ số hàng chục.

— Có 6 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

Vậy có tất cả $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau mà bắt đầu bởi 12.
Vậy có $27216 - 336 = 26880$ số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau mà không bắt đầu bởi 12. □

BÀI 25. Cho tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau đôi một được lấy từ tập A và trong đó có chứa chữ số 4? **ĐS:** 1560 số

Lời giải.
Trường hợp 1: Chữ số 4 ở vị trí hàng chục nghìn.

— Có 6 cách chọn chữ số hàng nghìn.

— Có 5 cách chọn chữ số hàng trăm.

— Có 4 cách chọn chữ số hàng chục.

— Có 3 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

Vậy có $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ số thoả mãn trong trường hợp này.
Trường hợp 2: Chữ số 4 không nằm ở vị trí hàng chục nghìn.

— Có 4 cách chọn vị trí cho chữ số 4.

— Có 5 cách chọn chữ số hàng chục nghìn.

— Có 5 cách chọn chữ số thứ ba.

— Có 4 cách chọn chữ số thứ tư.

— Có 3 cách chọn chữ số thứ năm.

Vậy có $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1200$ số thoả mãn trong trường hợp này.
Vậy có tổng cộng $360 + 1200 = 1560$ số có 5 chữ số thoả mãn. □

BÀI 26. Hỏi từ 10 chữ số $0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$ có thể lập được bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau, sao cho trong các chữ số đó có mặt số 0 và số 1? **ĐS:** 50400 số

Lời giải.

— Có 6 cách chọn vị trí cho chữ số 0.

— Có 5 cách chọn vị trí cho chữ số 1.

— Có 8 cách chọn giá trị cho chữ số thứ ba.

— Có 7 cách chọn giá trị cho chữ số thứ tư.

— Có 6 cách chọn giá trị cho chữ số thứ năm.

— Có 5 cách chọn giá trị cho chữ số thứ sáu.

Vậy có $6 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 50400$ số có 6 chữ số khác nhau thoả mãn. □

BÀI 27. Từ các chữ số $0; 1; 2; 3; 6; 7; 8; 9$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm có sáu chữ số đôi một khác nhau, trong đó phải có mặt chữ số 7? **ĐS:** 13320 số

Lời giải.
Trường hợp 1: Chữ số 7 ở vị trí hàng trăm nghìn.

— Có 7 cách chọn chữ số hàng chục nghìn.

— Có 6 cách chọn chữ số hàng nghìn.

— Có 5 cách chọn chữ số hàng trăm.

— Có 4 cách chọn chữ số hàng chục.

— Có 3 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

Vậy có $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$ số thoả mãn trong trường hợp này.
Trường hợp 2: Chữ số 7 không nằm ở vị trí hàng trăm nghìn.

— Có 5 cách chọn vị trí cho chữ số 7.

— Có 6 cách chọn chữ số hàng trăm nghìn.

— Có 6 cách chọn chữ số thứ ba.

— Có 5 cách chọn chữ số thứ tư.

— Có 4 cách chọn chữ số thứ năm.

— Có 3 cách chọn chữ số thứ sáu.

Vậy có $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 10800$ số thoả mãn trong trường hợp này.
Vậy có tổng cộng $2520 + 10800 = 13320$ số có 6 chữ số thoả mãn. □

BÀI 28. Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$, từ A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau, trong đó nhất thiết phải có chữ số 0 và 3? **ĐS:** 480 số

Lời giải.

— Có 5 cách chọn vị trí cho chữ số 0.

— Có 4 cách chọn vị trí cho chữ số 3.

— Có 4 cách chọn giá trị cho chữ số thứ ba.

— Có 3 cách chọn giá trị cho chữ số thứ tư.

— Có 2 cách chọn giá trị cho chữ số thứ năm.

Vậy có $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 480$ số có 5 chữ số khác nhau thoả mãn. □

BÀI 29. Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$, từ các chữ số thuộc tập A lập được bao nhiêu số tự nhiên có năm chữ số và số đó chia hết cho 3? **ĐS:** 216 số

Lời giải.
Vì số được lập chia hết cho 3 nên các chữ số của số đó là $1; 2; 3; 4; 5$ hoặc $0; 1; 2; 4; 5$.
Trường hợp 1: Các chữ số của số được lập là $1; 2; 3; 4; 5$.

— Có 5 cách chọn chữ số hàng chục nghìn.

— Có 4 cách chọn chữ số hàng nghìn.

— Có 3 cách chọn chữ số hàng trăm.

— Có 2 cách chọn chữ số hàng chục.

— Có 1 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

Vậy có $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ số thoả mãn trong trường hợp này.
Trường hợp 2: Các chữ số của số được lập là $0; 1; 2; 4; 5$.

— Có 4 cách chọn chữ số hàng chục nghìn.

— Có 4 cách chọn chữ số hàng nghìn.

— Có 3 cách chọn chữ số hàng trăm.

— Có 2 cách chọn chữ số hàng chục.

— Có 1 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

Vậy có $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$ số thoả mãn trong trường hợp này.
Vậy có tổng cộng $120 + 96 = 216$ số có 5 chữ số thoả mãn. □

BÀI 30. Từ các chữ số $0; 1; 2; \ldots; 9$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm năm chữ số khác nhau đôi một và chữ số chính giữa luôn là số 2? **ĐS:** 1218 số

Lời giải.
Trường hợp 1: Chữ số hàng đơn vị là 0.

— Có 1 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

— Có 1 cách chọn chữ số hàng trăm.

— Có 8 cách chọn chữ số hàng chục nghìn.

— Có 7 cách chọn chữ số hàng nghìn.

— Có 6 cách chọn chữ số hàng chục.

Vậy có $1 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ số thoả mãn trong trường hợp này.
Trường hợp 2: Chữ số hàng đơn vị khác 0.

— Có 3 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

— Có 1 cách chọn chữ số hàng trăm.

— Có 7 cách chọn chữ số hàng chục nghìn.

— Có 7 cách chọn chữ số hàng nghìn.

— Có 6 cách chọn chữ số hàng chục.

Vậy có $3 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 = 882$ số thoả mãn trong trường hợp này.
Vậy có tổng cộng $336 + 882 = 1218$ số có 5 chữ số thoả mãn. □

BÀI 31. Trong một trường THPT A, khối 11 mỗi học sinh tham gia một trong hai câu lạc bộ Toán và Tin học. Có 160 em tham gia câu lạc bộ Toán, 140 em tham gia câu lạc bộ Tin học, 50 em tham gia cả hai câu lạc bộ. Hỏi khối 11 có bao nhiêu học sinh? **ĐS:** 250 học sinh

Lời giải.
Số học sinh khối 11 là $160 + 140 - 50 = 250$ học sinh. □

BÀI 32. Một lớp có 40 học sinh, đăng ký chơi ít nhất một trong hai môn thể thao là bóng đá và cầu lông. Có 30 em đăng ký môn bóng đá, 25 em đăng ký môn cầu lông. Hỏi có bao nhiêu em đăng ký cả hai môn thể thao? **ĐS:** 15 học sinh

Lời giải.
Số em học sinh đăng ký cả hai môn thể thao là $30 + 25 - 40 = 15$ học sinh. □

BÀI 33. Có 5 học sinh, trong đó có An và Bình. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 5 học sinh này lên một đoàn tàu gồm 8 toa, biết rằng:

① 5 học sinh lên cùng một toa. **ĐS:** 8 cách

② 5 học sinh lên 5 toa đầu và mỗi toa một người. **ĐS:** 120 cách

③ 5 học sinh lên 5 toa khác nhau. **ĐS:** 6720 cách

④ An và Bình lên cùng toa đầu tiên. **ĐS:** 512 cách

⑤ An và Bình lên cùng một toa, ngoài ra không có học sinh nào khác lên toa này. **ĐS:** 2744 cách

Lời giải.

① Có 8 cách chọn toa tàu để cả 5 học sinh cùng lên toa tàu đó. Vậy có 8 cách sắp xếp để 5 học sinh lên cùng một toa.

② — Có 5 cách chọn học sinh lên toa đầu tiên.
— Có 4 cách chọn học sinh lên toa thứ hai.
— Có 3 cách chọn học sinh lên toa thứ ba.
— Có 2 cách chọn học sinh lên toa thứ tư.
— Có 1 cách chọn học sinh lên toa thứ năm.
Vậy có $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ cách sắp xếp để 5 học sinh lên 5 toa đầu và mỗi toa một người.

③ — Có 8 cách chọn toa tàu cho học sinh đầu tiên.

- Có 7 cách chọn toa tàu cho học sinh thứ hai.
- Có 6 cách chọn toa tàu cho học sinh thứ ba.
- Có 5 cách chọn toa tàu cho học sinh thứ tư.
- Có 4 cách chọn toa tàu cho học sinh thứ năm.

Vậy có $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$ cách sắp xếp để 5 học sinh lên 5 toa khác nhau.

④
- Có 1 cách chọn toa tàu cho An và Bình.
- Có 8 cách chọn toa tàu cho học sinh thứ ba.
- Có 8 cách chọn toa tàu cho học sinh thứ tư.
- Có 8 cách chọn toa tàu cho học sinh thứ năm.

Vậy có $1 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$ cách sắp xếp để An và Bình lên cùng toa đầu tiên.

⑤
- Có 8 cách chọn toa tàu cho An và Bình.
- Có 7 cách chọn toa tàu cho học sinh thứ ba.
- Có 7 cách chọn toa tàu cho học sinh thứ tư.
- Có 7 cách chọn toa tàu cho học sinh thứ năm.

Vậy có $8 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2744$ cách sắp xếp để An và Bình lên cùng một toa, ngoài ra không có học sinh nào khác lên toa này.

□

BÀI 34. Có bao nhiêu số tự nhiên có đúng năm chữ số, sao cho trong mỗi số đó chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng liền trước? **ĐS:** 126 số

Lời giải.

Vì chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng liền trước nên các chữ số phải khác 0. Trước tiên ta sẽ đếm số các số có 5 chữ số đôi một khác nhau và khác 0.

- Có 9 cách chọn chữ số hàng chục nghìn.
- Có 8 cách chọn chữ số hàng nghìn.
- Có 7 cách chọn chữ số hàng trăm.
- Có 6 cách chọn chữ số hàng chục.
- Có 5 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

Vậy có $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120$ có 5 chữ số đôi một khác nhau và khác 0.
Nhận thấy, với một bộ 5 chữ số nào đó thì sẽ có $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ cách sắp xếp vị trí cho các chữ số đó, tuy nhiên chỉ có 1 cách xếp các chữ số thoả mãn.
Vậy số các số thoả mãn bài toán là $\dfrac{15120}{120} = 126$ số. □

BÀI 35. Có 20 thẻ đựng trong hai hộp khác nhau, mỗi hộp chứa 10 thẻ được đánh số liên tiếp từ 1 đến 10. Có bao nhiêu cách chọn hai thẻ (mỗi hộp một thẻ) sao cho tích hai số ghi trên hai thẻ là một số chẵn. **ĐS:** 75 cách

Lời giải.

Có 10 cách chọn tấm thẻ ở hộp thứ nhất và có 10 cách chọn tấm thẻ ở hộp thứ hai, nên có $10 \cdot 10 = 100$ cách chọn hai thẻ, mỗi hộp một thẻ.
Có 5 cách chọn tấm thẻ có số lẻ ở hộp thứ nhất và có 5 cách chọn tấm thẻ có số lẻ ở hộp thứ hai, nên có $5 \cdot 5 = 25$ cách chọn hai thẻ, mỗi hộp một thẻ và tích hai số ghi trên hai thẻ là một số lẻ.
Vậy có $100 - 25 = 75$ cách chọn hai thẻ, mỗi hộp một thẻ và tích hai số ghi trên hai thẻ là một số chẵn. □

BÀI 36. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm hai chữ số phân biệt khác nhau được lấy từ tập $A = \{0;1;2;3;4;5;6\}$. Hỏi S có bao nhiêu phần tử? Có bao nhiêu cách lấy hai phần tử từ tập S sao cho tích của hai phần tử này là một số chẵn? **ĐS:** 1050 cách

Lời giải.

— Có 6 cách chọn chữ số hàng chục.

— Có 6 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

Vậy tập S có $6 \cdot 6 = 36$ phần tử.
Ta sẽ đếm xem trong tập S có bao nhiêu số lẻ.

— Có 3 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

— Có 5 cách chọn chữ số hàng chục.

Vậy trong tập S có $3 \cdot 5 = 15$ số lẻ.
Có $36 \cdot 35 = 1260$ cách chọn ra hai số từ tập S và có $15 \cdot 14 = 210$ cách chọn ra hai số từ tập S có tích là số lẻ nên có $1260 - 210 = 1050$ cách chọn ra hai số từ tập S có tích là số chẵn. □

BÀI 37. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm tám chữ số phân biệt sao cho tổng của tám chữ số này chia hết cho 9. **ĐS:** 181440 số

Lời giải.
Vì số được lập chia hết cho 9 nên tổng hai chữ số không xuất hiện trong số được lập phải bằng 9.
Trường hợp 1: Hai chữ số 0 và 9 không xuất hiện trong số được lập.

— Có 8 cách chọn chữ số hàng chục triệu.

— Có 7 cách chọn chữ số hàng triệu.

— Có 6 cách chọn chữ số hàng trăm nghìn.

— Có 5 cách chọn chữ số hàng chục nghìn.

— Có 4 cách chọn chữ số hàng nghìn.

— Có 3 cách chọn chữ số hàng trăm.

— Có 2 cách chọn chữ số hàng chục.

— Có 1 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

Vậy có $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$ số có 8 chữ số thoả mãn trong trường hợp này.
Trường hợp 21: Hai chữ số không xuất hiện trong số được lập là $(1;8)$ hoặc $(2;7)$ hoặc $(3;6)$ hoặc $(4;5)$.

— Có 4 cách chọn hai chữ số không xuất hiện.

— Có 7 cách chọn chữ số hàng chục triệu.

— Có 7 cách chọn chữ số hàng triệu.

— Có 6 cách chọn chữ số hàng trăm nghìn.

— Có 5 cách chọn chữ số hàng chục nghìn.

— Có 4 cách chọn chữ số hàng nghìn.

— Có 3 cách chọn chữ số hàng trăm.

— Có 2 cách chọn chữ số hàng chục.

— Có 1 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

Vậy có $4 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 141120$ số có 8 chữ số thoả mãn trong trường hợp này.
Vậy có tổng cộng $40320 + 141120 = 181440$ số có 8 chữ số thoả mãn. □

BÀI 2. HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP - TỔ HỢP

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa 1 (Giai thừa). Cho số tự nhiên $n \geq 1$, ta định nghĩa n giai thừa, ký hiệu bởi $n!$, là

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1.$$

Tính chất 1. Giai thừa có các tính chất sau đây:

① $n! = n \cdot (n-1)! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1.$

② Quy ước $0! = 1$.

Định nghĩa 2 (Hoán vị). Cho tập hợp A có n phần tử ($n \geq 1$).

① Ta nói mỗi cách sắp xếp thứ tự của n phần tử tập hợp A là *một hoán vị* của n phần tử này.

② *Số các hoán vị* của n phần tử tập hợp A được ký hiệu bởi P_n.

⚠ *Các hoán vị khác nhau chỉ khác nhau về thứ tự sắp xếp các phần tử.*
Ví dụ: Hoán vị của 3 phần tử a, b, c gồm: a, b, c; a, c, b; b, a, c;...

Định lí 1 (Số các hoán vị). *Số các hoán vị của n phần tử được tính theo công thức:*

$$\mathrm{P}_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1.$$

Định nghĩa 3 (Chỉnh hợp). Cho tập hợp S gồm n phần tử ($n \geq 1$). Kết quả của việc lấy k phần tử khác nhau từ n phần tử của tập hợp S và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử đã cho.

Định lí 2. *Số các chỉnh hợp chập k của n phần tử* $(1 \leq k \leq n)$ *là:*

$$\mathrm{A}_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

⚠ *Khi giải bài toán chọn trên một tập X có n phần tử, ta sẽ dùng chỉnh hợp nếu có 2 dấu hiệu sau:*

— *Chỉ chọn k phần tử trong n phần tử của X* $(1 \leq k < n)$.

— *Có sắp thự tự các phần tử đã chọn.*

Định nghĩa 4 (Tổ hợp). Cho tập hợp A có n ($n \geq 1$) phần tử và số nguyên k với $1 \leq k \leq n$. Mỗi tập con của A có k phần tử được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử của A (hay một tổ hợp chập k của A). Ký hiệu C_n^k.

Định lí 3. *Số tổ hợp chập k của một tập hợp có n phần tử* $(1 \leq k \leq n)$ *là*

$$\mathrm{C}_n^k = \frac{\mathrm{A}_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

⚠ *Với quy ước* $\mathrm{C}_n^0 = 1$ *thì với mọi số nguyên k thỏa* $0 \leq k \leq n$ *ta có*

$$\mathrm{C}_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Tính chất 2. $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}$ với $0 \leq k \leq n$.

Tính chất 3 (Công thức Pascal). $\mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_n^{k+1} = \mathrm{C}_{n+1}^{k+1}$ với $1 \leq k \leq n$.

B VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1. Giả sử muốn xếp 3 bạn A, B, C ngồi vào bàn dài có 3 ghế. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho mỗi bạn ngồi một ghế? **ĐS:** $P_3 = 3! = 6$

Lời giải

Mỗi cách xếp chỗ cho 3 bạn trên được gọi là một hoán vị vị trí của 3 bạn.
Như vậy ta có số cách xếp chỗ là $P_3 = 3! = 6$ cách. □

VÍ DỤ 2. Có 5 quyển sách Toán, 4 quyển sách Lý và 3 quyển sách Hóa. Hỏi có bao nhiêu cách xếp số sách đó lên một kệ dài trong mỗi trường hợp sau

1. Các quyển sách được xếp tùy ý? **ĐS:** P_{12}
2. Các quyển sách cùng môn được xếp cạnh nhau? **ĐS:** $\mathrm{P}_5 \cdot \mathrm{P}_4 \cdot \mathrm{P}_3 \cdot \mathrm{P}_3$

Lời giải

1. Số cách xếp các quyển sách tùy ý là một hoán vị của 12 phần tử, nên ta có P_{12} cách xếp.
2. Vì các quyển sách cùng môn được xếp cạnh nhau nên ta coi các môn là một phần tử, như vậy ta có P_3 cách xếp.
   Ngoài ra trong từng môn, ta cũng có hoán vị của từng cuốn sách, do đó ta có $\mathrm{P}_5 \cdot \mathrm{P}_4 \cdot \mathrm{P}_3$ cách xếp.
   Vậy ta có $\mathrm{P}_5 \cdot \mathrm{P}_4 \cdot \mathrm{P}_3 \cdot \mathrm{P}_3$ cách xếp sách thỏa mãn yêu cầu đề bài.

□

VÍ DỤ 3. Giả sử muốn chọn 3 bạn trong 5 bạn A, B, C, D, E và sắp 3 bạn này vào một bàn dài. Hỏi có bao nhiêu cách? **ĐS:** A_5^3

Lời giải

Mỗi cách xếp 3 bạn trong 5 bạn vào một bàn dài là một chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử, nên ta có A_5^3 cách. □

VÍ DỤ 4. Cho tập $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số, sao cho

1. Đôi một khác nhau? **ĐS:** A_7^4
2. Số tự nhiên lẻ và đôi một khác nhau? **ĐS:** $4 \cdot \mathrm{A}_6^3$

Lời giải

1. Mỗi cách chọn 4 số khác nhau từ 7 số là một chỉnh hợp chập 4 của 7 phần tử. Do đó ta có A_7^4 số được tạo thành.

② Để số cần lập là số tự nhiên lẻ thì chữ số tận cùng là số lẻ, khi đó ta có 4 cách chọn chữ số tận cùng.
Mỗi cách chọn 3 chữ số còn lại là một chỉnh hợp chập 3 của 6 phần tử nên ta có A_6^3 cách.
Vậy có $4 \cdot A_6^3$ số được tạo thành.

□

VÍ DỤ 5. Có bao nhiêu cách lập một ban chấp hành gồm 3 người trong một chi đoàn có 14 đoàn viên?

ĐS: C_{14}^3

Lời giải

Mỗi cách lập một ban chấp hành gồm 3 người là một tổ hợp chập 3 của 14 nên ta có C_{14}^3 cách. □

VÍ DỤ 6. Vòng chung kết bóng đá Euro có 24 đội bóng thi đấu. Hỏi có bao nhiêu cách dự đoán 4 đội bóng vào chung kết? **ĐS:** C_{24}^4

Lời giải

Mỗi cách dự đoán 4 đội vào chung kết là một tổ hợp chập 4 của 24 nên ta có C_{24}^4 cách. □

VÍ DỤ 7. Một lớp học có 30 học sinh, cần lập ra một tổ công tác gồm 5 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách? **ĐS:** C_{30}^5

Lời giải

Mỗi cách lập ra tổ công tác là một tổ hợp chập 5 của 30 nên ta có C_{30}^5 cách. □

VÍ DỤ 8. Trong không gian, cho tập hợp X gồm 10 điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi:

① Có bao nhiêu đường thẳng được tạo thành? **ĐS:** C_{10}^2

② Có bao nhiêu tam giác được tạo thành? **ĐS:** C_{10}^3

Lời giải

① Để tạo thành đường thẳng, ta chọn 2 điểm trong 10 điểm nên số đường thẳng được tạo thành là C_{10}^2.

② Để tạo thành tam giác, ta chọn 3 điểm trong 10 điểm nên số tam giác được tạo thành là C_{10}^3.

□

C DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

DẠNG 2.1. Giải phương trình, bất phương trình, hệ phương trình

— ***Bước 1.*** *Tìm điều kiện. Ta có các điều kiện thường gặp sau:*

Các kí hiệu và công thức	*Điều kiện*
$\circ\ n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$	$n\in\mathbb{N}$
$\circ\ \mathrm{P}_n = n!$	$n\in\mathbb{N}$
$\circ\ \mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$\begin{cases} n,k\in\mathbb{N}\\ 1\le k\le n\end{cases}$
$\circ\ \mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$	$\begin{cases} n,k\in\mathbb{N}\\ 0\le k\le n\end{cases}$
$\circ\ \mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}$	$\begin{cases} n,k\in\mathbb{N}\\ 0\le k\le n\end{cases}$
$\circ\ \mathrm{C}_{n+1}^k = \mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_n^{k-1}$	$\begin{cases} n,k\in\mathbb{N}\\ 1\le k\le n\end{cases}$

— ***Bước 2.*** *Thu gọn dựa vào những công thức trên và đưa về phương trình đại số. Giải phương trình đại số này tìm được biến.*

— ***Bước 3.*** *So với điều kiện để nhận những giá trị cần tìm.*

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Thu gọn biểu thức $D = \dfrac{7!4!}{10!}\left(\dfrac{8!}{3!5!} - \dfrac{9!}{2!7!}\right)$. **ĐS:** $D = \dfrac{2}{3}$

Lời giải

$$D = \frac{7!4!}{10!}\left(\frac{8!}{3!5!} - \frac{9!}{2!7!}\right) = \frac{4!}{8\cdot 9\cdot 10}\left(\frac{6\cdot 7\cdot 8}{3!} - \frac{8\cdot 9}{2!}\right) = \frac{4\cdot 6\cdot 7}{9\cdot 10} - \frac{3\cdot 4}{10} = \frac{28}{15} - \frac{6}{5} = \frac{2}{3}.$$

□

VÍ DỤ 2. Giải phương trình $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = 72$. **ĐS:** $n = 8$

Lời giải

Điều kiện: $n\ge 1, n\in\mathbb{N}$.

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 72 \Leftrightarrow (n+1)n = 72 \Leftrightarrow n^2+n-72 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 8 \text{ (nhận)}\\ n = -9 \text{ (loại)}.\end{array}\right.$$

□

VÍ DỤ 3. Giải các phương trình sau:

① $P_2 \cdot x^2 - P_3 \cdot x = 8$; **ĐS:** $x = -1$ hoặc $x = 4$
② $C_{2n}^3 = 20C_n^2$; **ĐS:** $n = 8$

③ $C_x^x + 2C_x^{x-1} + C_x^{x-2} = C_{x+2}^{2x-3}$; **ĐS:** $x = 3$
④ $\dfrac{P_x - P_{x-1}}{P_{x+1}} = \dfrac{1}{6}$; **ĐS:** $x = 3$

⑤ $72A_x^1 - A_{x+1}^3 = 72$. **ĐS:** $x = 8$

Lời giải

①

$$P_2 \cdot x^2 - P_3 \cdot x = 8 \Leftrightarrow 2! \cdot x^2 - 3! \cdot x - 8 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 4. \end{array}\right.$$

② Điệu kiện: $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

$$C_{2n}^3 = 20C_n^2 \Leftrightarrow \frac{(2n)!}{3!(2n-3)!} = 20 \cdot \frac{n!}{2!(n-2)!} \Leftrightarrow \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} = \frac{20n(n-1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow (2n-1)(2n-2) = 30(n-1) \left(\text{vì } n \geq \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow 2n^2 - 36n + 32 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 8 \text{ (nhận)} \\ n = 1 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

③ Điều kiện: $x \leq 5, x \in \mathbb{N}$.

$$C_x^x + 2C_x^{x-1} + C_x^{x-2} = C_{x+2}^{2x-3} \Leftrightarrow C_x^x + C_x^{x-1} + C_x^{x-1} + C_x^{x-2} = C_{x+2}^{2x-3} \Leftrightarrow C_{x+1}^x + C_{x+1}^{x-1} = C_{x+2}^{2x-3}$$

$$\Leftrightarrow C_{x+2}^x = C_{x+2}^{2x-3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2x - 3 \\ x = x + 2 - (2x-3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \text{ (nhận)} \\ x = \dfrac{5}{2} \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

④ Điều kiện: $x \geq 1, x \in \mathbb{N}$.

$$\frac{P_x - P_{x-1}}{P_{x+1}} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{x!}{(x+1)!} - \frac{(x-1)!}{(x+1)!} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)x} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

⑤ Điều kiện: $x \geq 2, x \in \mathbb{N}$.

$$72A_x^1 - A_{x+1}^3 = 72 \Leftrightarrow 72 \cdot \frac{x!}{(x-1)!} - \frac{(x+1)!}{(x-2)!} = 72 \Leftrightarrow 72x - (x+1)x(x-1) = 72 \Leftrightarrow x^3 - 73x + 72 =$$

□

VÍ DỤ 4. Giải phương trình $\dfrac{5}{C_5^x} - \dfrac{2}{C_6^x} = \dfrac{14}{C_7^x}$. **ĐS:** $x = 3$

Lời giải

Điều kiện: $x \le 5, x \in \mathbb{N}$.

$$\frac{5}{C_5^x} - \frac{2}{C_6^x} = \frac{14}{C_7^x} \Leftrightarrow \frac{5}{\frac{5!}{x!(5-x)!}} - \frac{2}{\frac{6!}{x!(6-x)!}} = \frac{14}{\frac{7!}{x!(7-x)!}} \Leftrightarrow \frac{5}{1} - \frac{2}{\frac{6}{(6-x)}} = \frac{14}{\frac{6\cdot 7}{(6-x)(7-x)}}$$

$$\Leftrightarrow 5 - \frac{2(6-x)}{6} = \frac{14(7-x)(6-x)}{6\cdot 7} \Leftrightarrow 15-(6-x) = (7-x)(6-x) \Leftrightarrow x^2 - 14x + 33 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 11 \text{ (l} \\ x = 3 \text{ (nh} \end{array}\right.$$

□

VÍ DỤ 5. Giải các bất phương trình sau:

① $A_n^3 + 15 < 15n$; **ĐS:** $n = 3$ hoặc $n = 4$ ② $A_n^3 + 5A_n^2 < 21n$; **ĐS:** $n = 3$

③ $2C_{x+1}^2 + 3A_x^2 - 20 < 0$. **ĐS:** $x = 2$

Lời giải

① Điều kiện: $n \ge 3, n \in \mathbb{N}$.

$$A_n^3 + 15 < 15n \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-3)!} + 15 < 15n \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) + 15 < 15n$$

$$\Leftrightarrow n^3 - 3n^2 - 13n + 15 < 0 \Leftrightarrow (n-5)(n+3)(n-1) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n < -3 \\ 1 < n < 5. \end{array}\right.$$

Giao với điều kiện ta được $3 \le n < 5, n \in \mathbb{N}$ hay $n = 3$ hoặc $n = 4$.

② Điều kiện: $n \ge 3, n \in \mathbb{N}$.

$$A_n^3 + 5A_n^2 < 21n \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-3)!} + 5\cdot\frac{n!}{(n-2)!} < 21n \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) + 5n(n-1) < 21n$$

$$\Leftrightarrow n^3 + 2n^2 - 24n < 0 \Leftrightarrow n(n-4)(n+6) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n < -6 \\ 0 < n < 4. \end{array}\right.$$

Giao với điều kiện ta được $3 \le n < 4, n \in \mathbb{N}$ hay $n = 3$.

③ Điều kiện: $x \ge 2, x \in \mathbb{N}$.

$$2C_{x+1}^2 + 3A_x^2 - 20 < 0 \Leftrightarrow 2\cdot\frac{(x+1)!}{2!(x-1)!} + 3\cdot\frac{x!}{(x-2)!} - 20 < 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+1) + 3x(x-1) - 20 < 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 2x - 20 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < \frac{5}{2}.$$

Giao với điều kiện ta được $2 \le x < \frac{5}{2}$, $x \in \mathbb{N}$ hay $x = 2$.

□

VÍ DỤ 6. Giải các hệ phương trình sau:

① $\begin{cases} 2A_x^y + 5C_x^y = 90 \\ 5A_x^y - 2C_x^y = 80 \end{cases}$; **ĐS:** $x = 5; y = 2$ ② $\dfrac{C_{x+1}^y}{6} = \dfrac{C_x^{y+1}}{5} = \dfrac{C_x^{y-1}}{2}$; **ĐS:** $x = 8; y = 3$

③ $\begin{cases} 5C_x^{y-2} = 3C_x^{y-1} \\ C_x^y = C_x^{y-1} \end{cases}$. **ĐS:** $x = 7; y = 4$

Lời giải

① Điều kiện: $x \geq y \geq 0$ và $x, y \in \mathbb{N}$.

$$\begin{cases} 2A_x^y + 5C_x^y = 90 \\ 5A_x^y - 2C_x^y = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_x^y = 20 \\ C_x^y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x!}{(x-y)!} = 20 \\ \dfrac{x!}{y!(x-y)!} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x!}{(x-y)!} = 20 \\ \dfrac{20}{y!} = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) = 20 \\ y! = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 20 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases} \text{(nhận)} \vee \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases} \text{(loại).}$$

② Điều kiện: $x \geq y + 1, y \geq 0$ và $x, y \in \mathbb{N}$.

$$\frac{C_{x+1}^y}{6} = \frac{C_x^{y+1}}{5} = \frac{C_x^{y-1}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+1)!}{6 \cdot y!(x-y+1)!} = \dfrac{x!}{5(y+1)!(x-y-1)!} \\ \dfrac{(x+1)!}{6 \cdot y!(x-y+1)!} = \dfrac{x!}{2(y-1)!(x-y+1)!} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{6(x-y+1)(x-y)} = \dfrac{1}{5(y+1)} \\ \dfrac{x+1}{3y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3y-1+1}{6(3y-1-y+1)(3y-1-y)} = \dfrac{1}{5(y+1)} \\ x = 3y - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 1 \\ \dfrac{1}{2 \cdot 2(2y-1)} = \dfrac{1}{5(y+1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 1 \\ 8y - 4 = 5y + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 3 \end{cases} \text{(nhận).}$$

③ Điều kiện: $x \geq y, y \geq 2, x, y \in \mathbb{N}$.

$$\begin{cases} 5C_x^{y-2} = 3C_x^{y-1} \\ C_x^y = C_x^{y-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \cdot \dfrac{x!}{(y-2)!(x-y+2)!} = 3 \cdot \dfrac{x!}{(y-1)!(x-y+1)!} \\ \dfrac{x!}{y!(x-y)!} = \dfrac{x!}{(y-1)!(x-y+1)!} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5}{x-y+2} = \dfrac{3}{y-1} \\ \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{x-y+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 8y = -11 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases} \text{(nhận)}$$

□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Thu gọn biểu thức $D = \dfrac{2011!}{2010! - 2009!} \cdot \dfrac{2009}{2011}$. **ĐS:** $D = 2010$

Lời giải.

$$D = \frac{2011!}{2010! - 2009!} \cdot \frac{2009}{2011} = \frac{2011 \cdot 2010 \cdot 2009!}{2009!(20010-1)} \cdot \frac{2009}{2011} = 2010.$$

□

BÀI 2. Giải phương trình $\dfrac{x!-(x-1)!}{(x+1)!}=\dfrac{1}{6}$. **ĐS:** $x=3$ hoặc $x=2$

Lời giải.

Điều kiện: $x\ge 1$, $x\in\mathbb{N}$.

Khi đó, phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{(x-1)!(x-1)}{(x+1)!}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow\frac{x-1}{x(x+1)}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow 6x-6=x^2+x\Leftrightarrow x^2-5x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=2\end{array}\right.\text{(nhận)}.$$

□

BÀI 3. Giải phương trình $\dfrac{1}{C_4^x}-\dfrac{1}{C_5^x}=\dfrac{1}{C_6^x}$. **ĐS:** $x=2$

Lời giải.

Điều kiện: $0\le x\le 4$ và $x\in\mathbb{N}$.

Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x!(4-x)!}{4!}-\frac{x!(5-x)!}{5!}=\frac{x!(6-x)!}{6!}\Leftrightarrow\frac{x!(4-x)!}{4!}\left[1-\frac{5-x}{5}-\frac{(6-x)(5-x)}{6.5}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow 30-6(5-x)-(6-x)(5-x)=0\Leftrightarrow -x^2+17x-30=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\text{ (nhận)}\\x=15\text{ (loại)}\end{array}\right..$$

□

BÀI 4. Giải các phương trình sau:

① $A_n^3=20n$; **ĐS:** $n=6$

② $4C_x^8=5C_{x-1}^7$; **ĐS:** $x=10$

③ $A_n^3+5A_n^2=2(n+15)$; **ĐS:** $n=3$

④ $2C_{x-1}^2-C_x^1=79$; **ĐS:** $x=11$

⑤ $2A_x^2+50=A_{2x}^2$. **ĐS:** $x=5$

Lời giải.

① Điều kiện: $n\ge 3$ và $n\in\mathbb{N}$.
Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{n!}{(n-3)!}=20n\Leftrightarrow n(n-1)(n-2)=20n$$

$$\Leftrightarrow n(n^2-3n+2-20)=0\Leftrightarrow n(n^2-3n-18)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=0\text{ (loại)}\\n=6\text{ (nhận)}\\n=-3\text{ (loại)}\end{array}\right..$$

② Điều kiện: $x\ge 8$ và $x\in\mathbb{N}$.
Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$4\cdot\frac{x!}{8!(x-8)!}=5\cdot\frac{(x-1)!}{7!(x-8)!}\Leftrightarrow 4\cdot\frac{x}{8}=5\Leftrightarrow x=10\text{ (nhận)}.$$

③ Điều kiện: $n\ge 3$ và $n\in\mathbb{N}$.
Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{n!}{(n-3)!}+5\cdot\frac{n!}{(n-2)!}=2(n+15)\Leftrightarrow n(n-1)(n-2)+5n(n-1)=2n+30$$

$$\Leftrightarrow n^3+2n^2-5n-30=0\Leftrightarrow(n-3)(n^2+5n+10)=0\Leftrightarrow n=3\text{ (nhận)}.$$

④ Điều kiện: $x \geq 3$ và $x \in \mathbb{N}$.
Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$2 \cdot \frac{(x-1)!}{2!(x-3)!} - x = 79 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) - x = 79 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 77 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 11 \text{ (nhận)} \\ x = -7 \text{ (loại)} \end{array}\right. .$$

⑤ Điều kiện: $x \geq 2$ và $x \in \mathbb{N}$.
Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$2 \cdot \frac{x!}{(x-2)!} + 50 = \frac{(2x)!}{(2x-2)!} \Leftrightarrow 2x(x-1) + 50 = 2x(2x-1) \Leftrightarrow 2x^2 - 50 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \text{ (nhận)} \\ x = -5 \text{ (loại)} \end{array}\right. .$$

□

BÀI 5. Giải các bất phương trình sau:

① $A_n^3 < A_n^2 + 12$; **ĐS:** $n = 3$ ② $2C_{x+1}^2 + 3A_x^2 < 30$; **ĐS:** $x = 2$

③ $\frac{1}{2}A_{2x}^2 - A_x^2 \leq \frac{6}{x}C_x^3 + 10$. **ĐS:** $x = 3$ hoặc $x = 4$

Lời giải.

① Điều kiện: $n \geq 3$ và $n \in \mathbb{N}$.
Khi đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{n!}{(n-3)!} < \frac{n!}{(n-2)!} + 12 \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) < n(n-1) + 12$$
$$\Leftrightarrow n^3 - 4n^2 + 3n - 12 < 0 \Leftrightarrow (n-4)(n^2+3) < 0 \Leftrightarrow n < 4.$$

Kết hợp với điều kiện suy ra $3 \leq n < 4$, hay $n = 3$.

② Điều kiện: $x \geq 2$ và $x \in \mathbb{N}$.
Khi đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$2 \cdot \frac{(x+1)!}{2!(x-1)!} + 3 \cdot \frac{x!}{(x-2)!} < 30 \Leftrightarrow x(x+1) + 3x(x-1) < 30 \Leftrightarrow 4x^2 - 2x - 30 < 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} < x < 3.$$

Kết hợp với điều kiện suy ra $2 \leq x < 3$, hay $x = 2$.

③ Điều kiện: $x \geq 3$ và $x \in \mathbb{N}$.
Khi đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(2x)!}{(2x-2)!} - \frac{x!}{(x-2)!} \leq \frac{6}{x} \cdot \frac{x!}{3!(x-3)!} + 10 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2x(2x-1) - x(x-1) \leq (x-1)(x-2) + 1$$
$$\Leftrightarrow x(2x-1) - x^2 + x \leq x^2 - 3x + 2 + 10 \Leftrightarrow 3x \leq 12 \Leftrightarrow x \leq 4.$$

Kết hợp với điều kiện suy ra $3 \leq x \leq 4$, hay $x = 3$ hoặc $x = 4$.

□

BÀI 6. Giải các hệ phương trình sau:

① $\begin{cases}2A_x^y + C_x^y = 180\\ A_x^y - C_x^y = 36\end{cases}$; **ĐS:** $x = 9; y = 2$

② $C_{n+1}^{m+1} : C_{n+1}^{m} : C_{n+1}^{m-1} = 5 : 5 : 3$; **ĐS:** $m = 3; n = 6$

③ $\begin{cases}7A_{5x}^{y-3} = A_{5x}^{y-2}\\ 4C_{5x}^{y-2} = 7C_{5x}^{y-3}\end{cases}$. **ĐS:** $x = 2; y = 6$

Lời giải.

① Điều kiện: $y \le x$ và $x, y \in \mathbb{N},\ x \ge 1$.
Khi đó hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases}A_x^y = 72\\ C_x^y = 36\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}C_x^y \cdot y! = 72\\ C_x^y = 36\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y! = 2\\ C_x^y = 36\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = 2\\ C_x^2 = 36\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = 2\\ x = 9\end{cases} \text{(nhận).}$$

② Điều kiện: $n \ge m \ge 1$ và $n, m \in \mathbb{N}$.
Khi đó hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases}C_{n+1}^{m+1} : C_{n+1}^{m} = 1\\ C_{n+1}^{m} : C_{n+1}^{m-1} = \dfrac{5}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{(n+1)!}{(m+1)(n-m)!} \cdot \dfrac{m!(n-m+1)!}{(n+1)!} = 1\\ \dfrac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!} \cdot \dfrac{(m-1)!(n+2-m)!}{(n+1)!} = \dfrac{5}{3}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{n-m+1}{m+1} = 1\\ \dfrac{n+2-m}{m} = \dfrac{5}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}n - m + 1 = m + 1\\ 3n + 6 - 3m = 5m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}n - 2m = 0\\ 3n - 8m = -6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m = 3\\ n = 6\end{cases} \text{(nhận).}$$

③ Điều kiện: $5x \ge y - 2$, $y \ge 3$ và $x, y \in \mathbb{N},\ x \ge 1$.
Khi đó hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases}7 \cdot \dfrac{(5x)!}{(5x-y+3)!} = \dfrac{(5x)!}{(5x-y+2)!}\\ 4 \cdot \dfrac{(5x)!}{(5x-y+2)!(y-2)!} = 7 \cdot \dfrac{(5x)!}{(5x-y+3)!(y-3)!}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{7}{(5x-y+3)} = 1\\ \dfrac{4}{(y-2)} = \dfrac{7}{(5x-y+3)}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}5x - y + 3 = 7\\ 4(5x - y + 3) = 7(y-2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x - y = 4\\ 20x - 11y = -26\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 2\\ y = 6\end{cases} \text{(nhận).}$$

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 7. Thu gọn các biểu thức sau:

① $D = \dfrac{5!}{m(m+1)} \cdot \dfrac{(m+1)!}{(m-1)!3!}$; **ĐS:** $D = 20$

② $D = \dfrac{7!}{(m^2+m)} \cdot \dfrac{(m+2)!}{4!(m-1)!}$; **ĐS:** $D = 210(m+2)$

③ $D = \dfrac{6!}{m(m+1)} \cdot \dfrac{(m+1)!}{4!(m-1)!}$; **ĐS:** $D = 30$

④ $D = \dfrac{(n+1)C_n^2}{n\,(n^2-1)}$. **ĐS:** $D = \dfrac{1}{2}$

BÀI 8. Giải các phương trình sau:

① $\dfrac{n!}{(n-2)!}-\dfrac{n!}{(n-1)!}=3$; **ĐS:** $n=3$
② $n^3+\dfrac{n!}{(n-2)!}=10$. **ĐS:** $n=2$

BÀI 9. Giải các phương trình sau:

① $\mathrm{C}_{10+x}^{x+4}=\mathrm{C}_{10+x}^{2x-10}$; **ĐS:** $x=14\vee x=8$
② $\mathrm{C}_{14}^{k}+\mathrm{C}_{14}^{k+2}=2\mathrm{C}_{14}^{k+1}$; **ĐS:** $k=4$
③ $\mathrm{A}_n^3+2\mathrm{C}_n^2=16n$; **ĐS:** $n=5$
④ $\mathrm{A}_x^3+\mathrm{C}_x^{x-2}=14x$; **ĐS:** $x=5$
⑤ $\mathrm{A}_{x-2}^2+\mathrm{C}_x^{x-2}=101$; **ĐS:** $x=10$
⑥ $2\mathrm{C}_{x-1}^2-\mathrm{C}_x^1=79$; **ĐS:** $x=11$
⑦ $\dfrac{\mathrm{P}_{n+2}}{\mathrm{A}_{n-1}^{n-4}\cdot\mathrm{P}_3}=210$; **ĐS:** $n=5$
⑧ $\dfrac{\mathrm{C}_{28}^{2x}}{\mathrm{C}_{24}^{2x-4}}=\dfrac{225}{11}$; **ĐS:** $n=7$
⑨ $x^2-\mathrm{C}_4^x\cdot x+\mathrm{C}_3^2\cdot\mathrm{C}_3^1=0$; **ĐS:** $x\in\varnothing$
⑩ $\mathrm{C}_{x+1}^{x-2}+2\mathrm{C}_{x-1}^3=7(x-1)$; **ĐS:** $x=5$
⑪ $6\mathrm{C}_x^2+6\mathrm{C}_x^3=7x^2-7x$; **ĐS:** $x=6$
⑫ $\mathrm{C}_x^1+6\mathrm{C}_x^2+6\mathrm{C}_x^3=9x^2-14x$; **ĐS:** $x=7$
⑬ $2\left(\mathrm{A}_n^3+3\mathrm{A}_n^2\right)=\mathrm{P}_{n+1}$; **ĐS:** $x=4$
⑭ $2\mathrm{P}_n+6\mathrm{A}_n^2-\mathrm{P}_n\cdot\mathrm{A}_n^2=12$. **ĐS:** $x=3$ hoặc $x=2$

BÀI 10. Giải các phương trình sau:

① $\dfrac{1}{\mathrm{C}_x^1}-\dfrac{1}{\mathrm{C}_{x+1}^2}=\dfrac{7}{6\mathrm{C}_{x+4}^1}$; **ĐS:** $x=8$ hoặc $x=3$
② $\mathrm{C}_{n-1}^4-\mathrm{C}_{n-1}^3-\dfrac{5}{4}\mathrm{A}_{n-2}^2=0$; **ĐS:** $x=11$ hoặc $x=3$
③ $\mathrm{C}_x^1+\mathrm{C}_x^2+\mathrm{C}_x^3=\dfrac{7}{2}x$; **ĐS:** $x=4$
④ $\mathrm{C}_x^{x-1}+\mathrm{C}_x^{x-2}+\mathrm{C}_x^{x-3}+\cdots\mathrm{C}_x^{x-10}=1023$. **ĐS:** $x=20$

BÀI 11. Giải các bất phương trình sau:

① $4\le n!+(n+1)!<50$; **ĐS:** $n=2$ hoặc $n=3$
② $72\mathrm{A}_x^1-\mathrm{A}_{x+1}^3\le 72$; **ĐS:** $n\in[-2;1]\cup[8;+\infty]$
③ $n^3+\dfrac{n!}{(n-2)!}\le 10$; **ĐS:** $x=2$
④ $\dfrac{\mathrm{A}_{n+4}^4}{(n+2)!}<\dfrac{15}{(n-1)!}$; **ĐS:** $n\in(2;6)$
⑤ $\dfrac{\mathrm{A}_{x+4}^4}{(x+1)!}\le\dfrac{42}{\mathrm{P}_x}$; **ĐS:** $x=0$
⑥ $\dfrac{\mathrm{P}_{n+5}}{(n-k)!}\le 60\mathrm{A}_{n+3}^{k+2}$; **ĐS:** $\forall n\in\mathbb{N}$
⑦ $\dfrac{12}{x}\mathrm{C}_x^3-3\mathrm{A}_x^2\ge\dfrac{1}{2}\mathrm{A}_{2x}^2-81$; **ĐS:** $x\in[3;5]$
⑧ $\mathrm{C}_{x-1}^4-\mathrm{C}_{x-1}^3-\dfrac{5}{4}\mathrm{A}_{x-2}^2<0$; **ĐS:** $x\in[5;11]$
⑨ $\dfrac{\mathrm{A}_{n+1}^{n-2}}{\mathrm{C}_{n-1}^2}\ge 2\mathrm{P}_n$; **ĐS:** $n\in\varnothing$
⑩ $\dfrac{\mathrm{A}_{n+2}^4}{\mathrm{P}_{n+2}}-\dfrac{143}{4\mathrm{P}_{n-1}}<0$. **ĐS:** $n\in[2;+\infty)$

BÀI 12. Giải các hệ phương trình sau:

① $\begin{cases} \dfrac{A_y^x}{P_{x+1}} + C_y^{y-x} = 147 \\ P_{x+1} = 720 \end{cases}$; **ĐS:** $x = 5; y = 9$

② $C_{x+1}^y : C_x^{y+1} : C_x^{y-1} = 6 : 5 : 2$; **ĐS:** $x = 8; y = 3$

③ $\begin{cases} C_y^x : C_{y+2}^x = \dfrac{1}{3} \\ C_y^x : A_y^x = \dfrac{1}{24} \end{cases}$; **ĐS:** $x = 4; y = 8$

④ $\begin{cases} C_{n+1}^{m+1} = C_{n+1}^m \\ \dfrac{C_{n+1}^m}{C_{n+1}^{m-1}} = \dfrac{5}{3} \end{cases}$; **ĐS:** $m = 3; n = 6$

⑤ $\begin{cases} \dfrac{A_y^{x+1}}{P_x} + C_y^{y-x-1} = 126 \\ P_{x+2} = 720 \end{cases}$; **ĐS:** $x = 4; y = 7$

⑥ $\begin{cases} C_{n-1}^4 - C_{n-1}^3 < \dfrac{5}{4} A_{n-2}^2 \\ C_{n+1}^{n-4} \geq \dfrac{7}{15} A_{n+1}^3 \end{cases}$; **ĐS:** $n = 1$

⑦ $\begin{cases} C_x^y - C_x^{y+1} = 0 \\ 4C_x^y - 5C_x^{y-1} = 0 \end{cases}$; **ĐS:** $x = 17; y = 8$

⑧ $\begin{cases} \left(C_x^{x-1}\right)^2 + 2\left(C_y^{y-1}\right)^2 = 3A_x^{x-1} \cdot C_y^{y-1} \\ 2\left(C_x^{x-1}\right)^3 = A_y^{y-1} + 1 \end{cases}$. **ĐS:** $x = 1; y = 1$

DẠNG 2.2. Các bài toán sử dụng hoán vị

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Có bao nhiêu cách xếp 5 bạn học sinh A, B, C, D, E vào một ghế dài sao cho:

① Bạn C ngồi chính giữa? **ĐS:** 24

② Hai bạn A và E ngồi ở hai đầu ghế? **ĐS:** 12

Lời giải

① Xếp bạn C ngồi chính giữa: có 1 cách.
Xếp 4 bạn còn lại vào 4 vị trí còn lại: có 4! cách.
Vậy có $1 \times 4! = 24$ cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán.

② Xếp hai bạn A và E ở hai đầu ghế: có 2! cách.
Xếp 3 bạn còn lại vào 3 vị trí còn lại: có 3! cách.
Vậy có $2! \times 3! = 12$ cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

VÍ DỤ 2. Có bao nhiêu cách sắp xếp 12 học sinh đứng thành một hàng để chụp ảnh lưu niệm, biết rằng trong đó phải có 5 em định trước đứng kề nhau? **ĐS:** 4838400

Lời giải

Chưa kể thứ tự giữa 5 em trong nhóm "định trước", để xếp 5 em này đứng kề nhau ta có 8! cách xếp;
Lại có 5! cách xếp 5 em này.
Vậy có tất cả $5! \times 8! = 4838400$ cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

VÍ DỤ 3. Trên một kệ sách dài có 5 quyển sách Toán, 4 quyển sách Lí, 3 quyển sách Văn. Các quyển sách đều khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các quyển sách trên:

① Một cách tùy ý. **ĐS:** 479001600

② Theo từng môn? **ĐS:** 103680

③ Theo từng môn và sách Toán nằm ở giữa? **ĐS:** 34560

Lời giải

① Trên kệ có tất cả $5+4+3=12$ quyển sách.
Mỗi cách xếp thứ tự 12 quyển sách chính là một hoán vị của 12 phần tử.
Do đó có tất cả $12! = 479001600$ cách xếp.

② Xem mỗi loại sách là một khối thống nhất, ta có $3!$ cách xếp 3 khối này.
Có $5!$ cách xếp sách toán, có $4!$ cách xếp sách Lí và có $3!$ cách xếp sách Văn.
Vậy có tất cả $3! \times 5! \times 4! \times 3! = 103680$ cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán.

③ Xem mỗi loại sách là một khối thống nhất, ta có $2!$ cách xếp hai môn còn lại ở hai bên sách Toán;
Ứng với mỗi cách, có $5!$ cách xếp sách Toán; có $4!$ cách xếp sách Lí và có $3!$ cách xếp sách Văn.
Do đó có $2! \times 5! \times 4! \times 3! = 34560$ cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

VÍ DỤ 4. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 6 cặp vợ chồng ngồi xung quanh một chiếc bàn tròn sao cho:

① Nam và nữ ngồi xen kẽ nhau? **ĐS:** 86400

② Mỗi bà đều ngồi cạnh chồng của mình? **ĐS:** 7680

Lời giải

① Cố định một người, có $5!$ cách xếp 5 người cùng giới còn lại vào 5 vị trí còn lại;
Có $6!$ cách xếp 6 người khác giới còn lại vào các vị trí xen kẽ.
Vậy có tất cả $5! \times 6! = 86400$ cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán.

② Ta tiến hành theo hai công đoạn:
Công đoạn 1: Xếp 6 người chồng xung quanh một bàn tròn: có $5!$ cách.
Công đoạn 2: Xếp vợ ngồi gần chồng và hai vợ chồng có thể đổi vị trí cho nhau: có 2^6 cách.
Vậy có tất cả $5! \times 2^6 = 7680$ cách.

□

VÍ DỤ 5. Cho tập hợp $E = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số khác nhau, biết rằng tổng của ba chữ số số này bằng 9? **ĐS:** 18

Lời giải

Các bộ ba số khác nhau trong E có tổng bằng 9 là

— Trường hợp 1: $1+2+6=9$.

— Trường hợp 2: $1+3+5=9$.

— Trường hợp 3: $2+3+4=9$.

Mỗi bộ số đó lập được $3!$ số tự nhiên gồm ba chữ số khác nhau.
Vậy có $3\times 3! = 18$ số. □

VÍ DỤ 6. Từ các chữ số $1,2,3,4,5,6$ thiết lập tất cả các số có sáu chữ số khác nhau. Hỏi trong các số đã thiết lập được, có bao nhiêu số mà hai chữ số 1 và 6 không đứng cạnh nhau? **ĐS:** 480

Lời giải

Có $6! = 720$ số có sáu chữ số khác nhau được lập từ các chữ số đã cho.
Ta xác định các số có 6 chữ số mà 1 và 6 đứng cạnh nhau.

— Có 5 cách chọn 2 vị trí cạnh nhau trong 6 vị trí.

— Có $2!$ cách sắp xếp hai chữ số 1 và 2 vào 2 vị trí đó.

— Có $4!$ cách sắp xếp 4 chữ số còn lại vào 4 vị trí còn lại.

Suy ra có $5\times 4!\times 2! = 240$ các số mà hai chữ số 1 và 6 đứng cạnh nhau.
Vậy số các số mà hai chữ số 1 và 6 không đứng cạnh nhau là $720-240=480$. □

VÍ DỤ 7. Cho các số $0,1,2,3,4,5$. Có thể lập được bao nhiêu số gồm tám chữ số trong đó chữ số 5 lặp lại ba lần, các chữ số còn lại có mặt đúng một lần? **ĐS:** 5880

Lời giải

Xét dãy số $0,1,2,3,4,5,5,5$.
Nếu coi như dãy gồm các chữ số khác nhau thì ta lập được $7\times 7! = 35280$ số.
Ba chữ số 5 có số lần các số lặp lại là $3!$.
Vậy có $\dfrac{35280}{3!} = 5880$ số gồm tám chữ số trong đó chữ số 5 lặp lại ba lần, các chữ số còn lại có mặt đúng một lần. □

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Có hai dãy ghế, mỗi dãy 5 ghế. Xếp 5 nam, 5 nữ vào 2 dãy ghế trên. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho:

① Nam và nữ được xếp tùy ý? **ĐS:** $10!$

② Nam một dãy ghế, nữ một dãy ghế? **ĐS:** 28800

Lời giải.

① Có cả thảy 10 người gồm nam và nữ.
Do đó có $10!$ cách xếp tùy ý 10 người này vào 10 ghế.

② Chưa kể thứ tự giữa các nam và thứ tự giữa các nữ, có 2! cách xếp nam vào một dãy và nữ vào một dãy.
Có 5! cách xếp nam, 5! cách xếp nữ.
Vậy có $2! \times 5! \times 5! = 28800$ cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

BÀI 2. Cho một bàn dài có 10 ghế và 10 học sinh trong đó có 5 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho 10 học sinh sao cho:

① Nam và nữ ngồi xen kẽ nhau? **ĐS:** 28800

② Những học sinh cùng giới thì ngồi cạnh nhau? **ĐS:** 28800

Lời giải.

① Có 2! cách lựa chọn nam hoặc nữ đứng ngoài cùng tính từ bên trái tính qua phải (hoặc từ phải qua trái);
Có 5! cách xếp 5 học sinh nam, có 5! cách xếp 5 học sinh nữ.
Vậy có $2! \times 5! \times 5! = 28800$ cách.

② Chưa kể thứ tự giữa các học sinh cùng giới thì có 2! cách xếp;
Ứng với mỗi cách xếp trên, có 5! cách xếp nam và 5! cách xếp nữ.
Vậy có $2! \times 5! \times 5! = 28800$ cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

BÀI 3. Cho tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số khác nhau được lấy từ tập A sao cho tổng các chữ số này bằng 14? **ĐS:** 72

Lời giải.

Các bộ bốn số khác nhau trong A có tổng bằng 14 là

— Trường hợp 1: $1 + 2 + 5 + 6 = 14$.

— Trường hợp 2: $1 + 3 + 4 + 6 = 14$.

— Trường hợp 3: $2 + 3 + 4 + 5 = 14$.

Mỗi bộ số đó lập được 4! số tự nhiên gồm bốn chữ số khác nhau.
Vậy có $3 \times 4! = 72$ số. □

BÀI 4. Cho hai tập $A\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Có bao nhiêu số gồm sáu chữ số phân biệt sao cho:

① Hai chữ số 1 và 6 đứng cạnh nhau được lập từ tập A? **ĐS:** 240

② Chữ số 2 đứng cạnh chữ số 3 được lập từ tập B? **ĐS:** 192

Lời giải.

① Mỗi số có 6 chữ số khác nhau được lập từ A là một cách sắp xếp 6 chữ số của A vào 6 vị trí.

— Có 5 cách chọn 2 vị trí cạnh nhau trong 6 vị trí.

— Có 2! cách sắp xếp hai chữ số 1 và 2 vào 2 vị trí đó.

— Có 4! cách sắp xếp 4 chữ số còn lại vào 4 vị trí còn lại.

Suy ra có $5 \times 4! \times 2! = 240$ các số mà hai chữ số 1 và 6 đứng cạnh nhau.

② Coi hai chữ số 2, 3 đứng cạnh nhau như một chữ số là x.

— Từ 5 chữ số $0, 1, x, 4, 5$ lập được $4 \times 4! = 96$ số.

— Có 2 cách đổi vị trí hai chữ số $2, 3$.

Vậy có $2 \times 4 \times 4! = 192$ số.

□

BÀI 5. Từ tập hợp $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, lập được bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 5, gồm năm chữ số đôi một khác nhau sao cho trong đó luôn có mặt các chữ số $1, 2, 3$ và chúng đứng cạnh nhau? **ĐS:** 66

Lời giải.

Xét các trường hợp sau:

① Trường hợp chữ số 0 đứng cuối.

— Có 2 cách chọn vị trí cho bộ ba chữ số $1, 2, 3$.

— Có $3!$ cách xếp vị trí cho ba chữ số $1, 2, 3$.

— Có 3 cách chọn thêm một số trong ba số $4, 5, 6$ và xếp vào vị trí còn lại.

Suy ra có $2 \times 3! \times = 36$ số.

② Trường hợp chữ số 5 đứng cuối. Coi 3 chữ số $1, 2, 3$ đứng cạnh nhau là một chữ số x. Khi đó số cần lập là số có 3 chữ số dạng $\overline{ab5}$ trong đó có chữ số x.

— Nếu $a = x$ thì có 3 cách chọn $b \in \{0, 4, 6\}$.

— Nếu $b = x$ thì có 2 cách chọn $a \in \{4, 6\}$.

Suy ra có 5 chữ số sao cho luôn có mặt chữ số x và chữ số 5 đứng cuối.
Có $3!$ cách xếp vị trí cho ba chữ số $1, 2, 3$.
Do đó có $5 \times 3! = 30$ số.

Vậy có $36 + 30 = 66$ số thỏa mãn. □

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 6. Một trường trung học phổ thông có 4 học sinh giỏi khối 12, có 5 học sinh giỏi khối 11, có 6 học sinh giỏi khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 20 học sinh trên thành một hàng ngang để đón đoàn đại biểu, nếu:

① Các học sinh được xếp bất kì? **ĐS:** 15!

② Các học sinh trong cùng một khối phải đứng kề nhau? **ĐS:** 12441600

BÀI 7. Xếp 6 học sinh A, B, C, D, E, F vào một ghế dài, có bao nhiêu cách sắp xếp nếu:

① 6 học sinh này ngồi bất kì? **ĐS:** 720

② A và F luôn ngồi ở hai đầu ghế? **ĐS:** 48

③ A và F luôn ngồi cạnh nhau? **ĐS:** 240

④ A, B, C luôn ngồi cạnh nhau? **ĐS:** 144

⑤ A, B, C, D luôn ngồi cạnh nhau? **ĐS:** 144

BÀI 8. Một hội nghị bàn tròn có phái đoàn của các nước gồm: Mỹ 5 người, Nga 5 người, Anh 4 người, Pháp 6 người, Đức 4 người. Hỏi có bao nhiêu cách xếp cho mọi thành viên sao cho người cùng quốc tịch ngồi gần nhau? **ĐS:** $4! \times 5! \times 5! \times 4! \times 6! \times 4!$

BÀI 9. Xét các số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Hỏi trong các số đó có bao nhiêu số:

① Bắt đầu bằng chữ số 5? **ĐS:** 4!

② Không bắt đầu bằng chữ số 1? **ĐS:** $5! - 4!$

③ Bắt đầu bằng 23? **ĐS:** 3!

④ Không bắt đầu bằng 234? **ĐS:** $5! - 2!$

BÀI 10. Cho tập $X = \{1;2;3;4;7\}$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số đôi một khác nhau chia hết cho 3 được lập từ X? **ĐS:** 24

BÀI 11. Cho tập hợp $E = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số khác nhau, biết rằng tổng của ba chữ số số này bằng 18. **ĐS:** $3! \times 6$

DẠNG 2.3. Các bài toán sử dụng chỉnh hợp

Sử dụng phối hợp quy tắc nhân, quy tắc cộng và công thức tính chỉnh hợp $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{k!}{(n-k)!}$.

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Trong không gian cho bốn điểm A, B, C, D. Từ các điểm trên ta lập các véc-tơ khác $\vec{0}$. Hỏi có thể có được bao nhiêu véc-tơ? **ĐS:** A_4^2

Lời giải

Chọn một cách có thứ tự 2 trong 4 điểm A, B, C, D ta được một véc-tơ.
Do đó số cách chọn véc-tơ từ các điểm trên là A_4^2 cách. □

VÍ DỤ 2. Một nhóm học sinh có 7 em nam và 3 em nữ. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 10 em này trên một hàng ngang, sao cho hai vị trí đầu và cuối hàng là các em nam và không có 2 em nữ nào ngồi cạnh nhau? **ĐS:** $7! \cdot \mathrm{A}_6^3$

Lời giải

Giả sử các em nam ở vị trí | như hình sau:

$$| * | * | * | * | * | * |$$

Khi đó ta cần sắp xếp các em nữ vào 3 trong 6 vị trí $*$ để thỏa yêu cầu bài toán.
Do đó số cách sắp xếp 3 em nữ là A_6^3.
Số cách sắp xếp 7 em nam là 7!.
Vậy số cách sắp xếp 10 em này là $7! \cdot \mathrm{A}_6^3$. □

VÍ DỤ 3. Có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ cho 4 bạn nữ và 6 bạn nam vào 10 ghế mà không có hai bạn nữ nào ngồi cạnh nhau, nếu:

① Ghế xếp thành hàng ngang? **ĐS:** $6! \cdot \mathrm{A}_5^4$

② Ghế xếp quanh một bàn tròn? **ĐS:** $5! \cdot \mathrm{A}_6^4$

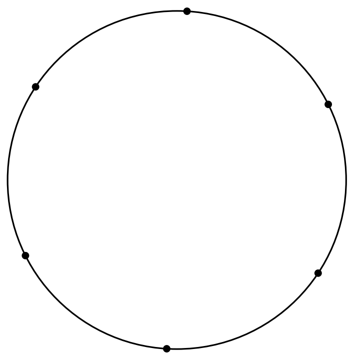
Lời giải

① Giả sử các em nam ở vị trí | như hình sau:

$$|*|*|*|*|*|$$

Khi đó ta cần sắp xếp các em nữ vào 4 trong 5 vị trí $*$ để thỏa yêu cầu bài toán.
Do đó số cách sắp xếp 4 em nữ là A_5^4.
Số cách sắp xếp 6 em nam là $6!$.
Vậy số cách sắp xếp 10 em này là $6! \cdot A_5^4$.

②



Sắp xếp em nữ vào 4 trong 6 vị trí khoảng giữa hai dấu chấm để thỏa yêu cầu bài toán.
Do đó số cách sắp xếp 4 em nữ là A_6^4.
Số cách xếp em nam thứ nhất vào bàn là 1 (vì xếp em này ngồi ở ghế nào cũng như nhau).
Số cách xếp em nam thứ hai vào bàn là 5 vì còn lại 5 ghế.
Số cách xếp em nam thứ ba vào bàn là 4.
Số cách xếp em nam thứ tư vào bàn là 3.
Số cách xếp em nam thứ năm vào bàn là 2.
Số cách xếp em nam thứ sáu vào bàn là 1.
Do đó số cách xếp các em nam vào bàn tròn là $5!$.
Vậy số cách sắp xếp 10 em này là $5! \cdot A_6^4$.

□

VÍ DỤ 4. Cho tập $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau được lập từ X mà chia hết cho 5? **ĐS:** 1560

Lời giải

Xét số tự nhiên gồm năm chữ số $x = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$, $a_1 \neq 0$ thỏa yêu cầu bài toán.

— **Trường hợp 1:** $a_5 = 0$.
Số cách chọn a_1 là 7 cách.
Số cách chọn bộ số còn lại là A_6^3 cách.
Do đó số cách chọn trong trường hợp này là $1 \cdot 7 \cdot A_6^3 = 840$ cách.

— **Trường hợp 2:** $a_5 = 5$.
Số cách chọn a_1 là 6 cách.
Số cách chọn bộ số còn lại là A_6^3 cách.
Do đó số cách chọn trong trường hợp này là $1 \cdot 6 \cdot A_6^3 = 720$ cách.

Vậy số cách chọn các số x thỏa yêu cầu bài toán là $840 + 720 = 1560$ cách. □

VÍ DỤ 5. Cho tập $X = \{0;1;\ldots;9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau được lập từ X và bé hơn 475? **ĐS:** 268

Lời giải

Xét số tự nhiên gồm ba chữ số $x = \overline{a_1a_2a_3}$, $a_1 \neq 0$ thỏa yêu cầu bài toán.

— **Trường hợp 1:** $a_1 < 4 \Rightarrow a_1 \in \{1;2;3\}$.
Số cách chọn 2 chữ số còn lại là A_9^2.
Do đó số cách chọn các số x trong trường hợp này là $3 \cdot \mathrm{A}_9^2 = 216$ cách.

— **Trường hợp 2:** $a_1 = 4$, $a_2 = 7$.
Khi đó $a_3 \in \{0;1;2;3\}$.
Do đó số cách chọn các số x trong trường hợp này là $1 \cdot 1 \cdot 4 = 4$ cách.

— **Trường hợp 3:** $a_1 = 4$, $a_2 \in \{0;1;2;3;5;6\}$.
Số cách chọn a_3 là 8 cách.
Do đó số cách chọn các số x trong trường hợp này là $1 \cdot 6 \cdot 8 = 48$ cách.

Vậy số cách chọn các số x thỏa yêu cầu bài toán là $216 + 4 + 48 = 268$ cách. □

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Từ 20 học sinh cần chọn ra một ban đại diện lớp gồm 1 lớp trưởng, 1 lớp phó và 1 thư kí. Hỏi có mấy cách chọn? **ĐS:** A_{20}^3

Lời giải.

Chọn một cách có thứ tự 3 học sinh trong 20 học sinh ta chọn ra được một ban đại diện lớp.
Do đó số cách chọn một ban đại diện lớp là A_{20}^3 cách. □

BÀI 2. Có 6 nam, 6 nữ trong đó có ba bạn tên A, B, C. Hỏi có bao nhiêu cách xếp thành một hàng dọc để vào lớp sao cho:

1. Các bạn nữ không ai đứng cạnh nhau. **ĐS:** $6! \cdot \mathrm{A}_7^6$
2. Đầu hàng và cuối hàng luôn là nam. **ĐS:** $10! \cdot \mathrm{A}_6^2$
3. Đầu hàng và cuối hàng luôn cùng phái. **ĐS:** $2 \cdot 10! \cdot \mathrm{A}_6^2$
4. Đầu hàng và cuối hàng luôn khác phái. **ĐS:** $2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 10!$
5. A, B, C luôn đứng cạnh nhau. **ĐS:** $10! \cdot 3!$
6. A, B đứng cách nhau đúng một người. **ĐS:** $10 \cdot 10! \cdot 2!$

Lời giải.

1. Đặt tùy ý các bạn nam có $6!$ cách.
Giữa các bạn nam này lại có A_7^6 cách chọn các bạn nữ.
Vậy số cách xếp thỏa yêu cầu bài toán là $6! \cdot \mathrm{A}_7^6$ cách.

2. Chọn có thứ tự 2 bạn nam ở đầu hàng và cuối hàng có A_6^2 cách.
Số cách sắp xếp 10 bạn còn lại là $10!$ cách.
Vậy số cách sắp xếp thỏa yêu cầu bài toán là $10! \cdot \mathrm{A}_6^2$ cách.

③ **Trường hợp 1:** Đầu hàng và cuối hàng luôn là nam.
Theo câu trên ta có $10! \cdot \mathrm{A}_6^2$ cách xếp cho trường hợp này.
Trường hợp 2: Đầu hàng và cuối hàng luôn là nữ.
Chọn có thứ tự 2 bạn nữ ở đầu hàng và cuối hàng có A_6^2 cách.
Số cách sắp xếp 10 bạn còn lại là 10! cách.
Do đó có $10! \cdot \mathrm{A}_6^2$ cách xếp cho trường hợp này.
Vậy số cách sắp xếp thỏa yêu cầu bài toán là $2 \cdot 10! \cdot \mathrm{A}_6^2$.

④ **Trường hợp 1:** Đầu hàng là nam, cuối hàng là nữ thì có 6 cách chọn vị trí đầu hàng và 6 cách chọn vị trí cuối hàng.
Số cách sắp xếp 10 bạn còn lại là 10! cách.
Do đó có $6 \cdot 6 \cdot 10!$ cách xếp cho trường hợp này.
Tương tự cho trường hợp đầu hàng là nữ, cuối hàng là nam ta có $6 \cdot 6 \cdot 10!$ cách xếp.
Vậy số cách sắp xếp thỏa yêu cầu bài toán là $2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 10!$ cách.

⑤ Coi A, B, C là một nhóm người.
Khi đó cách sắp xếp 9 người và nhóm người trên là 10! cách.
Hoán vị A, B, C ta có 3! cách.
Do đó số cách sắp xếp thỏa yêu cầu bài toán là $10! \cdot 3!$ cách.

⑥ Coi A, B và người ở giữa là một nhóm.
Khi đó số cách chọn người ở giữa A và B là 10 cách.
Số cách xếp 9 người còn lại và nhóm trên là 10! cách.
Hoán vị A và B ta có 2! cách.
Vậy số cách sắp xếp thỏa yêu cầu bài toán là $10 \cdot 10! \cdot 2!$ cách.

□

BÀI 3. Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 bạn nam và 3 bạn nữ ngồi xung quanh một chiếc bàn tròn sao cho không có 2 bạn nữ nào ngồi cạnh nhau? **ĐS:** $4! \cdot \mathrm{A}_5^3$

Lời giải.
Khoảng giữa 5 bạn nam có 5 vị trí. Sắp xếp các em nữ vào vị trí này để thỏa yêu cầu bài. Do đó số cách sắp xếp 3 em nữ là A_5^3 cách.
Số cách xếp em nam thứ nhất vào bàn là 1 (vì xếp em này ngồi ở ghế nào cũng như nhau).
Số cách xếp em nam thứ hai vào bàn là 4 (vì còn lại 4 ghế).
Số cách xếp em nam thứ ba vào bàn là 3.
Số cách xếp em nam thứ tư vào bàn là 2.
Số cách xếp em nam thứ năm vào bàn là 1.
Do đó số cách xếp các em nam vào bàn tròn là 4! cách.
Vậy số cách xếp thỏa yêu cầu bài toán là $4! \cdot \mathrm{A}_5^3$ cách. □

BÀI 4. Cho tập $X = \{0; 1; \ldots; 9\}$. Cho bao nhiêu số tự nhiên có năm chữ số được lập từ X sao cho:

① Các chữ số ấy khác nhau từng đôi một? **ĐS:** $9 \cdot \mathrm{A}_9^4$

② Các chữ số ấy khác nhau từng đôi một và số đó là số lẻ? **ĐS:** $5 \cdot 8 \cdot \mathrm{A}_8^3$

③ Các chữ số ấy khác nhau từng đôi một và phải có đủ 3 chữ số $1; 2; 3$? **ĐS:** $\mathrm{A}_5^3 \cdot \mathrm{A}_7^2 - 6 \cdot \mathrm{A}_4^3$

Lời giải.
Xét số cần tìm là $x = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$, $a_1 \neq 0$.

① Số cách chọn a_1 là 9 cách (vì $a_1 \neq 0$).
Số cách chọn bộ số còn lại là A_9^4 cách.
Vậy số cách chọn các số x thỏa yêu cầu bài là $9 \cdot \mathrm{A}_9^4$ cách.

② Số cách chọn a_5 là 5 cách. (vì $a_5 \in \{1;3;5;7;9\}$.
Số cách chọn a_1 là 8 cách (vì $a_1 \neq 0$ và $a_1 \neq a_5$)).
Số cách chọn cho bộ số còn lại là A_8^3 cách.
Vậy số cách chọn các số x thỏa yêu cầu bài là $5 \cdot 8 \cdot \mathrm{A}_8^3$ cách.

③ Chọn 3 trong 5 vị trí của 3 chữ số 1; 2; 3 (kể cả khi $a_1 = 0$) có A_5^3 cách chọn.
Chọn 2 chữ số còn lại có A_7^2 cách chọn.
Trường hợp $a_1 = 0$: chọn 3 trong 4 vị trí của 3 chữ số 1; 2; 3 có A_4^3 cách.
Số cách chọn số còn lại có 6 cách chọn.
Vậy số cách chọn x thỏa yêu cầu bài là $\mathrm{A}_5^3 \cdot \mathrm{A}_7^2 - 6 \cdot \mathrm{A}_4^3$ cách.

□

BÀI 5. Cho tập $X = \{0;1;2;3;5;7;8\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số đôi một khác nhau chia hết cho 5 và không lớn hơn 4000 được lập từ X? **ĐS:** 120

Lời giải.
Xét số cần tìm là $x = \overline{a_1a_2a_3a_4}$, $a_1 \neq 0$.
Do x chia hết cho 5 nên $a_4 \in \{0;5\}$.
Do $x < 4000$ nên $a_1 \in \{1;2;3\}$.
a_2 có 5 cách chọn.
a_3 có 4 cách chọn.
Vậy số cách chọn x thỏa yêu cầu bài là $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ cách. □

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 6. Một khay tròn đựng bánh kẹo ngày Tết có 6 ngăn hình quạt với màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách bày 6 loại bánh kẹo vào 6 ngăn đó? **ĐS:** 5!

BÀI 7. Có 6 học sinh lớp 11 và 3 học sinh lớp 12 sẽ ngồi trên một hàng ngang có 9 ghế. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho 9 học sinh đó sao cho mỗi học sinh lớp 12 ngồi giữa hai học sinh lớp 11? **ĐS:** $6! \cdot \mathrm{A}_5^3$

BÀI 8. Từ các số $1;3;5;6;7$ có thể lập được bao nhiêu số có các chữ số khác nhau và lớn hơn số 6000? **ĐS:** $2 \cdot \mathrm{A}_4^3 + \mathrm{A}_5^5$

BÀI 9. Cho tập $X = \{0;1;\ldots;9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên lẻ gồm năm chữ số khác nhau đôi một được tạo từ X và lớn hơn 70000? **ĐS:** 4368

BÀI 10. Có thể lập được bao nhiêu số điện thoại di động có 10 chữ số bắt đầu là 0908, các chữ số còn lại khác nhau từng đôi một, đồng thời khác với 4 chữ số đầu và nhất thiết phải có mặt chữ số 6? **ĐS:** $6 \cdot \mathrm{A}_6^5$

BÀI 11. Từ sáu chữ số $0;1;3;5;7;9$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số đôi một khác nhau và không chia hết cho 5? **ĐS:** $4 \cdot 4 \cdot \mathrm{A}_4^2$

BÀI 12. Với sáu chữ số $0;1;2;3;4;5$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau thỏa điều kiện:

① Số đó là số chẵn? **ĐS:** 312

② Số đó bắt đầu bởi 24? **ĐS:** 24

③ Số đó bắt đầu bởi 345? **ĐS:** 6

BÀI 13. Cho tập hợp $X = \{0;1;2;3;4;5;6;7\}$. Có thể lập được bao nhiêu số n gồm 5 chữ số khác nhau đôi một lấy từ X trong các trường hợp sau:

① n là số chẵn? **ĐS:** 3000

② Một trong ba chữ số đầu tiên phải là số 1? **ĐS:** 2280

BÀI 14. Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số khác nhau từng đôi một, trong đó chữ số 2 đứng liền giữa hai chữ số 1 và 3? **ĐS:** 7440

BÀI 15. Cho tập $E = \{1;2;3;4;7\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số:

① Đôi một khác nhau? **ĐS:** A_5^3

② Đôi một khác nhau và chia hết cho 3? **ĐS:** 24

BÀI 16. Cho tập $A = \{0;1;2;3;4;5\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau mà phải có chữ số 0 và chữ số 3? **ĐS:** $\mathrm{A}_5^2 \cdot \mathrm{A}_4^3 - 4 \cdot \mathrm{A}_4^3$

DẠNG 2.4. Các bài toán sử dụng tổ hợp

Sử dụng phối hợp quy tắc nhân, quy tắc cộng và công thức tính tổ hợp $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{k!}{k! \cdot (n-k)!}$.

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Ông X có 11 người bạn. Ông muốn mời 5 người trong số họ đi chơi xa. Trong 11 người đó có có 2 người không muốn gặp nhau. Hỏi ông X có bao nhiêu phương án mời 5 người bạn? **ĐS:** 378

Lời giải

— ***Cách 1:*** Giả sử hai người không muốn gặp nhau là A, B.
Nếu chọn ra 5 người trong đó không có cả A và B thì có C_9^5 cách.
Nếu chọn ra 5 người trong đó có một trong hai người A, B thì có $\mathrm{C}_9^4 \cdot 2$ cách.
Theo quy tắc cộng, số cách thỏa mãn yêu cầu bài toán là $2\mathrm{C}_9^4 + \mathrm{C}_9^5 = 378$ cách.

— ***Cách 2:*** Chọn 5 người bất kì có C_{11}^5 cách.
Chọn 5 người trong đó có cả A và B có C_9^3 cách.
Vậy có $\mathrm{C}_{11}^5 - \mathrm{C}_9^3 = 378$ cách chọn thỏa yêu cầu bài toán.

□

VÍ DỤ 2. Một nhóm có 6 học sinh nữ và 7 học sinh nam. Có bao nhiêu cách chọn ra một tổ học tập có 5 học sinh, trong đó có một tổ trưởng, một tổ phó, một thủ quỹ và hai tổ viên, biết rằng tổ trưởng phải là nam và thủ quỹ phải là nữ. **ĐS:** $\mathrm{C}_7^1 \cdot \mathrm{C}_6^1 \cdot \mathrm{C}_{11}^1 \cdot \mathrm{C}_{10}^2$

Lời giải

Chọn 1 bạn nam làm tổ trưởng, có C_7^1 cách.
Chọn 1 nữ làm thủ quỹ, có C_6^1 cách.

Chọn 1 bạn trong 11 bạn còn lại làm tổ phó, có C_{11}^1 cách.
Chọn 1 bạn trong 10 bạn còn lại làm tổ viên, có C_{10}^1 cách.
Theo quy tắc nhân có $C_7^1 \cdot C_6^1 \cdot C_{11}^1 \cdot C_{10}^1$ cách thỏa mãn. □

VÍ DỤ 3. Một lớp có 20 học sinh trong đó có 14 nam, 6 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập 1 đội gồm 4 học sinh trong đó có:

① Số nam và số nữ bằng nhau? **ĐS:** $C_{14}^2 \cdot C_6^2$

② Ít nhất một nữ? **ĐS:** 3844

Lời giải

① Chọn ngẫu nhiên 2 học sinh nam, có C_{14}^2 cách.
Chọn ngẫu nhiên 2 học sinh nữ, có C_6^2 cách.
Khi đó, theo quy tắc nhân có $C_{14}^2 \cdot C_6^2$ cách thỏa mãn.

② Chọn 4 học sinh bất kì có C_{20}^4 cách.
Chọn 4 học sinh trong đó không có học sinh nữ có C_{14}^4 cách.
Vậy có $C_{20}^4 - C_{14}^4 = 3844$ cách lập đội thỏa yêu cầu bài toán.

□

VÍ DỤ 4. Một lớp có 50 học sinh được chia thành 5 tổ, mỗi tổ có 10 học sinh. Có bao nhiêu cách chia tổ?

ĐS: $C_{50}^{10} \cdot C_{40}^{10} \cdot C_{30}^{10} \cdot C_{20}^{10} \cdot C_{10}^{10}$

Lời giải

Chọn 10 học sinh xếp vào tổ 1 có C_{50}^{10} cách.
Chọn 10 học sinh xếp vào tổ 2 có C_{40}^{10} cách.
Chọn 10 học sinh xếp vào tổ 3 có C_{30}^{10} cách.
Chọn 10 học sinh xếp vào tổ 4 có C_{20}^{10} cách.
Chọn 10 học sinh xếp vào tổ 5 có C_{10}^{10} cách.
Theo quy tắc nhân, số cách thỏa mãn yêu cầu bài toán là $C_{50}^{10} \cdot C_{40}^{10} \cdot C_{30}^{10} \cdot C_{20}^{10} \cdot C_{10}^{10}$. □

VÍ DỤ 5. Từ 5 bông hồng vàng, 3 bông hồng trắng, 4 bông hồng đỏ (các bông hồng xem như đôi một khác nhau). Người ta muốn chọn ra 1 bó hoa hồng gồm 7 bông. Có bao nhiêu cách chọn:

① 1 bó hoa trong đó có đúng một bông hồng đỏ. **ĐS:** 112

② 1 bó hoa trong đó có ít nhất 3 bông hồng vàng và ít nhất 3 bông hồng đỏ. **ĐS:** 150

Lời giải

① Số cách chọn một bông hồng đỏ là C_4^1.
Số cách chọn 6 bông hồng không phải màu đỏ là C_8^6.
Theo quy tắc nhân, số cách chọn thỏa mãn yêu cầu là $C_4^1 \cdot C_8^6 = 112$.

② Bó hoa 7 bông thỏa mãn yêu cầu bài toán có thể có các trường hợp:
∘ 3 bông vàng, 3 bông đỏ, 1 bông trắng: có $C_5^3 \cdot C_4^3 \cdot C_3^1$ cách chọn.
∘ 3 bông vàng, 4 bông đỏ: có $C_5^3 \cdot C_4^4$ cách chọn.
∘ 4 bông vàng, 3 bông đỏ: có $C_5^4 \cdot C_4^3$ cách chọn.
Theo quy tắc cộng, số cách thỏa mãn yêu cầu bài toán là $C_5^3 \cdot C_4^3 \cdot C_3^1 + C_5^3 \cdot C_4^4 + C_5^4 \cdot C_4^3 = 150$.

□

VÍ DỤ 6. Cho tập $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Từ tập X có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau và trong mỗi số đó có đúng hai chữ số chẵn và ba chữ số lẻ? **ĐS:** 2592

Lời giải

Trong tập X có 4 số chẵn, 4 số lẻ.
Giả sử số có 5 chữ số, đôi một khác nhau là $\overline{abcde}$ $(a \neq 0)$.
Chọn 2 chữ số chẵn có C_4^2 cách.
Chọn 2 vị trí trong 5 vị trí để xếp số chẵn có A_5^2 cách.
Chọn 3 chữ số lẻ và sắp vào 3 vị trí còn lại có A_4^3 cách.
Suy ra có $C_4^2 \cdot A_5^2 \cdot A_4^3 = 2880$ cách chọn số có đúng 2 chữ số chẵn và 3 chữ số lẻ.
Tương tự, ta chọn các số có dạng $\overline{0bcde}$ với $\overline{bcde}$ thỏa mãn có đúng 1 chữ số chẵn, 3 chữ số lẻ có $C_3^1 \cdot A_4^1 \cdot A_4^3 = 288$ số.
Vậy ta có $2880 - 288 = 2592$ số thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Một đội văn nghệ gồm 20 người, trong đó có 10 nam, 10 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 người, sao cho:

① Có đúng 2 nam trong 5 người đó? **ĐS:** 5400

② Có ít nhất 2 nam, ít nhất 1 nữ trong 5 người đó? **ĐS:** 12900

Lời giải.

① Chọn 2 nam và 3 nữ có $C_{10}^2 \cdot C_{10}^3 = 5400$ cách.

② Các trường hợp chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán:
∘ Chọn 2 nam và 3 nữ, có $C_{10}^2 \cdot C_{10}^3$ cách.
∘ Chọn 3 nam và 2 nữ, có $C_{10}^3 \cdot C_{10}^2$ cách.
∘ Chọn 4 nam và 1 nữ, có $C_{10}^4 \cdot C_{10}^1$ cách.
Theo quy tắc cộng, số cách thỏa mãn yêu cầu bài toán là $C_{10}^2 \cdot C_{10}^3 + C_{10}^3 \cdot C_{10}^2 + C_{10}^4 \cdot C_{10}^1 = 12900$.

□

BÀI 2. Một tổ có 8 học sinh đi trồng cây. Khi trồng cây cần có 2 em học sinh. Có bao nhiêu cách chia tổ thành những cặp như vậy? **ĐS:** 2520

Lời giải.
Chọn 2 học sinh cho tổ 1 có C_8^2 cách.
Chọn 2 học sinh cho tổ 2 có C_6^2 cách.
Chọn 2 học sinh cho tổ 3 có C_4^2 cách.
Chọn 2 học sinh cho tổ 4 có C_2^2 cách.
Khi đó, số cách thỏa mãn yêu cầu bài toán là $C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 = 2520$. □

BÀI 3. Một hộp đựng 15 viên bi khác nhau gồm 4 bi đỏ, 5 bi trắng và 6 bi vàng. Tính số cách chọn 4 viên bi từ hộp đó sao cho không có đủ 3 màu. **ĐS:** 645

Lời giải.
Chọn 4 bi bất kì trong 15 b, có $C_{15}^4 = 1365$ cách.
Các trường hợp chọn 4 bi có đủ ba màu:
∘ 2 bi đỏ, 1 bi trắng, 1 bi vàng: có $C_4^2 \cdot C_5^1 \cdot C_6^1$ cách.
∘ 1 bi đỏ, 2 bi trắng, 1 bi vàng: có $C_4^1 \cdot C_5^2 \cdot C_6^1$ cách.
∘ 1 bi đỏ, 1 bi trắng, 2 bi vàng: có $C_4^1 \cdot C_5^1 \cdot C_6^2$ cách.
Vậy có $C_4^2 \cdot C_5^1 \cdot C_6^1 + C_4^1 \cdot C_5^2 \cdot C_6^1 + C_4^1 \cdot C_5^1 \cdot C_6^2 = 720$ cách.
Khi đó, số cách chọn 4 bi không có đủ ba màu là $1365 - 720 = 645$ cách. □

BÀI 4. Một hộp đựng 11 viên bi được đánh số từ 1 đến 11. Có bao nhiêu cách chọn ra 4 viên bi sao cho tổng các số trên 4 bi là số lẻ? **ĐS:** 160

Lời giải.
Trong 11 bi đã cho, có 6 bi được đánh số lẻ, 5 bi được đánh số chẵn.
Lấy ra 4 bi, để tổng các số trên 4 bi là lẻ thì các cách có thể chọn:
∘ 1 bi lẻ, 3 bi chẵn: có $C_6^1 C_5^3$ cách.
∘ 3 bi lẻ, 1 bi chẵn: có $C_6^3 C_5^1$ cách.
Khi đó, số cách chọn thỏa mãn là $C_6^1 \cdot C_5^3 + C_6^3 \cdot C_5^1 = 160$. □

BÀI 5. Cho 10 điểm trong không gian, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng.

① Có bao nhiêu đường thẳng được tạo thành? **ĐS:** C_{10}^2

② Có bao nhiêu véctơ được tạo thành? **ĐS:** A_{10}^2

③ Có bao nhiêu tam giác được tạo thành? **ĐS:** C_{10}^3

④ Nếu trong 10 điểm trên không có 4 điểm nào đồng phẳng, thì có bao nhiêu tứ diện được tạo thành? **ĐS:** C_{10}^4

Lời giải.

① 2 điểm xác định được một đường thẳng nên số đường thẳng được tạo thành là C_{10}^2.

② 2 điểm (có kể thứ tự điểm đầu, điểm cuối) xác định một véc-tơ nên số véc-tơ được tạo thành là A_{10}^2.

③ 3 điểm không thẳng hàng xác định một tam giác nên số tam giác có thể tạo thành là C_{10}^3.

④ Bốn điểm không đồng phẳng xác định một tứ diện nên số tứ diện tạo thành là C_{10}^4.

□

BÀI 6. Trong một hộp có 100 viên bi được đánh số từ 1 đến 100. Có bao nhiêu cách chọn ra ba viên bị sao cho:

① Ba viên bi bất kì? **ĐS:** C_{100}^3

② Tổng ba số trên ba bi chia hết cho 2? **ĐS:** $C_{50}^3 + C_{50}^1 \cdot C_{50}^2$

Lời giải.

① Chọn 3 viên bất kì trong 100 viên có C_{100}^3 cách.

② Trong 100 bi, có 50 bi đánh số chẵn, 50 bi đánh số lẻ.
Để chọn ra 3 bi có tổng các số trên đó chia hết cho 2 thì có thể chọn:
∘ 3 bi đều đánh số chẵn: có C_{50}^3 cách.
∘ 2 bi đánh số lẻ và 1 bi đánh số chẵn: có $C_{50}^1 \cdot C_{50}^2$ cách.
Khi đó, số cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán là $C_{50}^3 + C_{50}^1 \cdot C_{50}^2$.

□

BÀI 7. Cho hai đường thẳng $a \parallel b$. Trên đường thẳng a có 5 điểm phân biệt và trên đường thẳng b có 10 điểm phân biệt. Hỏi có thể tạo được bao nhiêu tam giác có các đỉnh là các điểm trên hai đường thẳng a và b đã cho? **ĐS:** 325

Lời giải.
3 điểm không thẳng hàng xác định một tam giác nên ta có thể chọn:
∘ 1 điểm thuộc đường thẳng a và 2 điểm thuộc đường thẳng b: có $\mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_{10}^2$ cách.
∘ 2 điểm thuộc đường thẳng a và 1 điểm thuộc đường thẳng b: có $\mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_{10}^1$ cách.
Vậy số tam giác thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_{10}^2 + \mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_{10}^1 = 325$. □

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 8. Một lớp học có 40 học sinh, trong đó gồm 25 nam và 15 nữ. Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn một ban cán sự lớp gồm 4 em. Hỏi có bao nhiêu cách chọn, nếu:

① Gồm 4 học sinh tuỳ ý? **ĐS:** C_{40}^4

② Có 1 nam và 3 nữ? **ĐS:** $\mathrm{C}_{25}^1 \cdot \mathrm{C}_{15}^3$

③ Có 2 nam và 2 nữ? **ĐS:** $\mathrm{C}_{25}^2 \cdot \mathrm{C}_{15}^2$

④ Có ít nhất 1 nam? **ĐS:** $\mathrm{C}_{40}^4 - \mathrm{C}_{15}^4$

⑤ Có ít nhất 1 nam và 1 nữ? **ĐS:** $\mathrm{C}_{40}^4 - \mathrm{C}_{25}^4 - \mathrm{C}_{15}^4$

BÀI 9. Một lớp học có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn 5 học sinh lập thành một đoàn đại biểu để tham gia tổ chức lễ khai giảng. Hỏi có bao nhiêu cách:

① Chọn ra 5 học sinh, trong đó có không quá 3 nữ? **ĐS:** $\mathrm{C}_{40}^5 - \mathrm{C}_{25}^1 \cdot \mathrm{C}_{15}^4 - \mathrm{C}_{15}^5$

② Chọn ra 5 học sinh, trong đó có 3 nam và 2 nữ? **ĐS:** $\mathrm{C}_{15}^2 \cdot \mathrm{C}_{25}^3$

③ Chọn ra 5 học sinh, trong đó có ít nhất một nam? **ĐS:** $\mathrm{C}_{40}^5 - \mathrm{C}_{15}^5$

④ Chọn ra 5 học sinh, trong đó anh A và chị B không thể cùng tham gia cùng đoàn đại biểu? **ĐS:** $\mathrm{C}_{38}^3 + \mathrm{C}_{38}^5$

BÀI 10. Một đội cảnh sát giao thông gồm 15 người trong đó có 12 nam. Hỏi có bao nhiêu cách phân đội cảnh sát giao thông đó về 3 chốt giao thông sao cho mỗi chốt có 4 nam và 1 nữ? **ĐS:** $\mathrm{C}_{12}^4 \cdot \mathrm{C}_3^1 \cdot \mathrm{C}_8^4 \cdot \mathrm{C}_2^1 \cdot \mathrm{C}_4^4 \cdot \mathrm{C}_1^1$

BÀI 11. Có 9 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ, 4 bi vàng có kích thước đôi một khác nhau. Có bao nhiêu cách chọn ra 6 viên bi sao cho:

① Có đúng 2 viên bi màu đỏ? **ĐS:** $\mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_{13}^4$

② Số bi xanh bằng số bi đỏ? **ĐS:** $\mathrm{C}_9^1 \cdot \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_4^4 + \mathrm{C}_9^2 \cdot \mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_4^2 + \mathrm{C}_9^3 \cdot \mathrm{C}_5^3$

BÀI 12. Trong ngân hàng đề kiểm tra 30 phút môn Vật Lí có 10 câu hỏi, trong đó có 4 câu lý thuyết và 6 bài tập. Người ta cấu tạo thành các đề thi. Biết rằng trong mỗi đề thi phải gồm 3 câu hỏi, trong đó nhất thiết phải có ít nhất 1 câu lý thuyết và 1 bài tập. Hỏi có thể tạo ra bao nhiêu đề thi có dạng như trên? **ĐS:** $\mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_6^1 + \mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_6^2$

BÀI 13. Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau và nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi (khó, trung bình, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2?

ĐS: $\mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_{10}^1 \cdot \mathrm{C}_{15}^3 + \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_{10}^2 \cdot \mathrm{C}_{15}^2 + \mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_{10}^1 \cdot \mathrm{C}_{15}^2$

BÀI 14. Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy? **ĐS:** $\mathrm{C}_{12}^4 - \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_3^2 - \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_3^1 - \mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_3^1$

BÀI 15. Hội đồng quản trị của một công ty TNHH A gồm 12 người, trong đó có 5 nữ. Từ hội đồng quản trị đó người ta bầu ra 1 chủ tịch hội đồng quản trị, 1 phó chủ tịch hội đồng quản trị và 2 ủy viên. Hỏi có mấy cách bầu sao cho trong 4 người được bầu nhất thiết phải có nữ? **ĐS:** $\mathrm{A}_{12}^2 \cdot \mathrm{C}_{10}^2 - \mathrm{A}_7^2 \cdot \mathrm{C}_5^2$

BÀI 16. Giải bóng truyền VTV Cup gồm 9 đội bóng tham dự, trong đó có 6 đội nước ngoài và 3 đội Việt Nam. Ban tổ chức bốc thăm chia làm 3 bảng đấu A, B, C. Hỏi có bao nhiêu cách chia sao cho:

① Mỗi bảng ba đội? **ĐS:** $\mathrm{C}_9^3 \cdot \mathrm{C}_6^3 \cdot \mathrm{C}_3^3$

② Mỗi bảng ba đội và 3 đội bóng của Việt Nam ở ba bảng khác nhau? **ĐS:** $\mathrm{C}_3^1 \cdot \mathrm{C}_6^2 \cdot \mathrm{C}_2^1 \cdot \mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_1^1 \cdot \mathrm{C}_2^2$

BÀI 17. Trong cuộc thi "Rung chuông vàng", đội X có 20 bạn lọt vào vòng chung kết, trong đó có 5 bạn nữ và 15 bạn nam. Để sắp xếp vị trí chơi, ban tổ chức chia các bạn thành 4 nhóm A, B, C, D, mỗi nhóm có 5 bạn. Việc chia nhóm được thực hiện bằng cách bốc thăm ngẫu nhiên. Hỏi có bao cách chia nhóm, sao cho:

① Thành viên trong nhóm là bất kì? **ĐS:** $\mathrm{C}_{20}^5 \cdot \mathrm{C}_{15}^5 \cdot \mathrm{C}_{10}^5 \cdot \mathrm{C}_5^5$

② Năm bạn nữ ở cùng một nhóm? **ĐS:** $4 \cdot \mathrm{C}_{15}^5 \cdot \mathrm{C}_{10}^5 \cdot \mathrm{C}_5^5$

BÀI 18. Trong một hộp có 50 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 50. Có bao nhiêu cách lấy ra ba thẻ sao cho có đúng 2 thẻ mang số chia hết cho 8? **ĐS:** $\mathrm{C}_6^2 \cdot \mathrm{C}_{44}^1$

BÀI 19. Có 30 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 30. Có bao nhiêu cách chọn ra 10 tấm thẻ sao cho có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng một tấm thẻ mang số chia hết cho 10? **ĐS:** $\mathrm{C}_{15}^5 \cdot \mathrm{C}_3^1 \cdot \mathrm{C}_{12}^4$

BÀI 20. Trong một hộp có 20 viên bi được đánh số từ 1 đến 20. Có bao nhiêu cách lấy ra 5 viên bi sao cho có đúng 3 viên bi mang số lẻ, 2 viên bi mang số chẵn trong đó có đúng một viên bi mang số chia hết cho 4? **ĐS:** $\mathrm{C}_{10}^3 \cdot \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_5^1$

BÀI 21. Trong một hộp có 40 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 40. Có bao nhiêu cách chọn 3 tấm thẻ trong hộp đó thỏa:

① Ba tấm thẻ bất kì? **ĐS:** C_{40}^3

② Tổng ba số ghi trên ba thẻ chia hết cho 3? **ĐS:** $\mathrm{C}_{13}^3 + \mathrm{C}_{14}^3 + \mathrm{C}_{13}^3 + \mathrm{C}_{13}^1 \cdot \mathrm{C}_{14}^1 \cdot \mathrm{C}_{13}^1$

BÀI 22. Cho hai đường thẳng song song d_1, d_2. Trên d_1 lấy 17 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 20 điểm phân biệt. Tính số tam giác có các đỉnh là 3 điểm trong số 37 điểm đã chọn trên d_1 và d_2? **ĐS:** $\mathrm{C}_{17}^2 \cdot \mathrm{C}_{20}^1 + \mathrm{C}_{17}^1 \cdot \mathrm{C}_{20}^2$

BÀI 23. Cho hai đường thẳng song song d_1 và d_2. Trên đường thẳng d_1 có 10 điểm phân biệt, trên đường thẳng d_2 có n điểm phân biệt ($n \geq 2$). Biết rằng có 2800 tam giác có đỉnh là các điểm đã cho. Tìm n. **ĐS:** $n = 20$

BÀI 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho 10 đường thẳng song song lần lượt cắt 8 đường thẳng song song khác. Hỏi có bao nhiêu hình bình hành được tạo thành từ các đường thẳng trên? **ĐS:** $\mathrm{C}_{10}^2 \cdot \mathrm{C}_8^2$

BÀI 25. Cho 2 đường thẳng $d_1 \parallel d_2$. Trên đường thẳng d_1 có 10 điểm phân biệt, trên đường thẳng d_2 có n điểm phân biệt ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$). Biết rằng có 1725 tam giác có đỉnh là các điểm đã cho. Hãy tìm n. **ĐS:** $n = 15$

BÀI 26. Trong không gian cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Trên mỗi đường thẳng lấy 5 điểm cách đều nhau một khoảng bằng x. Hỏi có thể thành lập được bao nhiêu hình bình hành tạo thành từ 10 điểm trên? **ĐS:** 30

BÀI 27. Cho tập $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số có nghĩa, biết rằng chữ số 2 có mặt đúng 2 lần, chữ số 3 có mặt đúng 3 lần, các chữ số còn lại có mặt không quá một lần? **ĐS:** $\mathrm{C}_7^2 \cdot \mathrm{C}_5^3 \cdot \mathrm{A}_8^2 - 7 \cdot \mathrm{C}_6^2 \cdot \mathrm{C}_4^3$

BÀI 3. NHỊ THỨC NEWTON

A NHỊ THỨC NEWTON

Cho a, b là các số thực và $n \in \mathbb{N}^*$. Ta có

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^{n-k} b^k = \mathrm{C}_n^0 a^n + \mathrm{C}_n^1 a^{n-1} b + \mathrm{C}_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} a b^{n-1} + \mathrm{C}_n^n b^n.$$

VÍ DỤ 1. Khai triển các nhị thức sau

① $(x+1)^4$

② $(x+2y)^5$

③ $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^6$

④ $\left(2x - \dfrac{1}{x}\right)^6$

Lời giải

① $(x+1)^4 = \mathrm{C}_4^0 \cdot x^4 + \mathrm{C}_4^1 \cdot x^3 \cdot 1 + \mathrm{C}_4^2 \cdot x^2 \cdot 1^2 + \mathrm{C}_4^3 \cdot x \cdot 1^3 + \mathrm{C}_4^4 \cdot 1^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1.$

②
$$\begin{aligned}(x+2y)^5 &= \mathrm{C}_5^0 x^5 + \mathrm{C}_5^1 x^4 (2y) + \mathrm{C}_5^2 x^3 (2y)^2 + \mathrm{C}_5^3 x^2 (2y)^3 + \mathrm{C}_5^4 x (2y)^4 + \mathrm{C}_5^5 (2y)^5 \\ &= x^5 + 10x^4 y + 40x^3 y^2 + 80x^2 y^3 + 80xy^4 + 32y^5.\end{aligned}$$

③
$$\begin{aligned}\left(x+\frac{1}{x}\right)^6 &= \mathrm{C}_6^0 x^6 + \mathrm{C}_6^1 x^5 \left(\frac{1}{x}\right) + \mathrm{C}_6^2 x^4 \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \mathrm{C}_6^3 x^3 \left(\frac{1}{x}\right)^3 + \mathrm{C}_6^4 x^2 \left(\frac{1}{x}\right)^4 + \mathrm{C}_6^5 x \left(\frac{1}{x}\right)^5 + \mathrm{C}_6^6 \left(\frac{1}{x}\right)^6 \\ &= x^6 + 6x^4 + 15x^2 + 20 + \frac{15}{x^2} + \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6}.\end{aligned}$$

④
$$\begin{aligned}\left(2x-\frac{1}{x}\right)^6 &= \mathrm{C}_6^0 (2x)^6 + \mathrm{C}_6^1 (2x)^5 \left(-\frac{1}{x}\right) + \mathrm{C}_6^2 (2x)^4 \left(-\frac{1}{x}\right)^2 + \mathrm{C}_6^3 (2x)^3 \left(-\frac{1}{x}\right)^3 + \mathrm{C}_6^4 (2x)^2 \left(-\frac{1}{x}\right)^4 \\ &\quad + \mathrm{C}_6^5 (2x) \left(-\frac{1}{x}\right)^5 + \mathrm{C}_6^6 \left(-\frac{1}{x}\right)^6 \\ &= 64x^6 - 192x^4 + 240x^2 - 160 + \frac{60}{x^2} - \frac{12}{x^4} + \frac{1}{x^6}.\end{aligned}$$

□

Nhận xét.

— *Trong khai triển* $(a \pm b)^n$ *có* $n+1$ *số hạng và các hệ số của các cặp số hạng cách đều số hạng đầu và số hạng cuối thì bằng nhau. Tức là* $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}$.

— *Số hạng tổng quát là* $T_{k+1} = \mathrm{C}_n^k a^{n-k} b^k$ *và số hạng thứ N thì* $k = N - 1$.

— *Trong khai triển* $(a-b)^n$ *thì dấu đan nhau, nghĩa là* $+$, *rồi* $-$, *rồi* $+, \ldots$

— *Số mũ của a giảm dần, số mũ của b tăng dần nhưng tổng số mũ của a và b bằng n.*

— *Nếu trong khai triển nhị thức Newton, ta gán cho a và b những giá trị đặc biệt thì sẽ thu được những công thức đặc biệt. Chẳng hạn như*

- $(a+b)^n = \mathrm{C}_n^0 a^n + \mathrm{C}_n^1 a^{n-1} b + \cdots + \mathrm{C}_n^n b^n \xRightarrow{a=1,\ b=1} \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \cdots + \mathrm{C}_n^n = 2^n$.
- $(a-b)^n = \mathrm{C}_n^0 a^n - \mathrm{C}_n^1 a^{n-1} b + \cdots + (-1)^n \mathrm{C}_n^n b^n \xRightarrow{a=1,\ b=1} \mathrm{C}_n^0 - \mathrm{C}_n^1 + \cdots + (-1)^n \mathrm{C}_n^n = 0$.

B TAM GIÁC PASCAL

Các hệ số của các khai triển $(a+b)^0, (a+b)^1, (a+b)^2, \ldots, (a+b)^n$ có thể xếp thành một tam giác gọi là tam giác Pascal.

$$\begin{array}{lllllllll}
n=0: & 1 \\
n=1: & 1 & 1 \\
n=2: & 1 & 2 & 1 \\
n=3: & 1 & 3 & 3 & 1 \\
n=4: & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
n=5: & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
n=6: & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
n=7: & 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1
\end{array}$$

HẰNG ĐẲNG THỨC PASCAL

$$\mathrm{C}_{n-1}^{k-1} + \mathrm{C}_{n-1}^k = \mathrm{C}_n^k.$$

VÍ DỤ 2. Viết đầy đủ dạng khai triển của các nhị thức sau

① $(a+b)^6$ ② $(a+b)^7$

Lời giải

① $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$.

② $(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$.

□

C DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

DẠNG 3.1. Tìm hệ số hoặc số hạng thỏa mãn điều kiện cho trước

Phương pháp giải

Bước 1. Viết công thức số hạng tổng quát.

Bước 2. Dùng các tính chất của lũy thừa để rút gọn số hạng tổng quát.

Bước 3. Dựa vào điều kiện cho trước để tìm số hạng thỏa mãn bài toán.

Chú ý

— *Với* $n \in \mathbb{N}^*$ *và* $x \neq 0$ *thì* $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$.

— *Với* $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ *và* $x > 0$ *thì* $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$.

— *Với các điều kiện xác định thì*

- $a^m a^n = a^{m+n}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
- $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$

— *Tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng:* $x\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} x a_k$.

1 VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1. Tìm hệ số của số hạng trong khai triển

① $(2x-3y)^{17}$ chứa x^8y^9. **ĐS:** $-2^8 3^9 C_{17}^9$

② $(3x-x^2)^{12}$ chứa x^{15}. **ĐS:** $-3^9 C_{12}^3$

③ $\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^{10}, \forall x \neq 0$ chứa x^{11}. **ĐS:** $-2^3 C_{10}^3$

④ $\left(\sqrt[3]{x^{-2}}+x\right)^7$ chứa x^2. **ĐS:** C_7^4

Lời giải

① Số hạng tổng quát trong khai triển $(2x-3y)^{17}$ là $C_{17}^k(2x)^{17-k}(-3y)^k = C_{17}^k 2^{17-k}(-3)^k x^{17-k} y^k$.
Để có số hạng chứa x^8y^9 thì $k = 9$.
Vậy hệ số của số hạng chứa x^8y^9 là $C_{17}^9 \cdot 2^8 \cdot (-3)^9 = -2^8 3^9 C_{17}^9$.

② Số hạng tổng quát trong khai triển $(3x-x^2)^{12}$ là

$$C_{12}^k(3x)^{12-k}\left(-x^2\right)^k = C_{12}^k 3^{12-k}(-1)^k x^{12-k}\left(x^2\right)^k = C_{12}^k 3^{12-k}(-1)^k x^{12+k}.$$

Để có số hạng chứa x^{15} thì $12 + k = 15 \Leftrightarrow k = 3$.
Vậy hệ số của số hạng chứa x^{15} là $-3^9 C_{12}^3$.

③ Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^{10}$ là

$$C_{10}^k\left(x^2\right)^{10-k}\left(-\frac{2}{x}\right)^k = C_{10}^k(-2)^k x^{20-2k} x^{-k} = (-2)^k C_{10}^k x^{20-3k}.$$

Để có số hạng chứa x^{11} thì $20-3k=11 \Leftrightarrow k=3$.
Vậy hệ số của số hạng chứa x^{11} là $-2^3\mathrm{C}_{10}^3$.

④ Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x^{-2}}+x\right)^7$ là

$$\mathrm{C}_7^k\left(\sqrt[3]{x^{-2}}\right)^{7-k}x^k=\mathrm{C}_7^k\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^{7-k}x^k=\mathrm{C}_7^k x^{\frac{-14+5k}{3}}.$$

Để có số hạng chứa x^2 thì $\dfrac{-14+5k}{3}=2 \Leftrightarrow -14+5k=6 \Leftrightarrow k=4$.
Vậy hệ số của số hạng chứa x^2 là C_7^4.

□

VÍ DỤ 2. Tìm hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển $\left(1+x+3x^2\right)^{10}$. **ĐS:** 1695

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned}\left(1+x+3x^2\right)^{10} &= \left[1+\left(x+3x^2\right)\right]^{10}\\ &= \sum_{k=0}^{10}\left(\mathrm{C}_{10}^k 1^{10-k}\left(x+3x^2\right)^k\right)\\ &= \sum_{k=0}^{10}\left(\mathrm{C}_{10}^k\sum_{j=0}^{k}\mathrm{C}_k^j x^{k-j}\left(3x^2\right)^j\right)\\ &= \sum_{k=0}^{10}\left(\sum_{j=0}^{k}3^j\mathrm{C}_{10}^k\mathrm{C}_k^j x^{k+j}\right).\end{aligned}$$

Để có số hạng chứa x^4 thì

$$\begin{cases}k+j=4\\ 0\le j\le k\le 10\end{cases} \Leftrightarrow (j;k)\in\{(0;4),(1;3),(2;2)\}.$$

Do đó, số hạng chứa x^4 là $3^0\mathrm{C}_{10}^4\mathrm{C}_4^0x^4+3^1\mathrm{C}_{10}^3\mathrm{C}_3^1x^4+3^2\mathrm{C}_{10}^2\mathrm{C}_2^2x^4=1695x^4$.
Vậy hệ số của số hạng chứa x^4 là 1695. □

VÍ DỤ 3. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển $\left(1+x+x^2+x^3\right)^5$. **ĐS:** 101

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned}\left(1+x+x^2+x^3\right)^5 &= \left[(1+x)\left(1+x^2\right)\right]^5=(1+x)^5\left(1+x^2\right)^5\\ &= \left(\sum_{k=0}^{5}\mathrm{C}_5^k1^{5-k}x^k\right)\left(\sum_{j=0}^{5}\mathrm{C}_5^j1^{5-j}\left(x^2\right)^j\right)\\ &= \sum_{k=0}^{5}\left(\mathrm{C}_5^kx^k\sum_{j=0}^{5}\mathrm{C}_5^jx^{2j}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{5}\left(\sum_{j=0}^{5}\mathrm{C}_5^k\mathrm{C}_5^jx^{k+2j}\right)\end{aligned}$$

Để có số hạng chứa x^{10} thì

$$\begin{cases} k+2j=10 \\ 0 \le k \le 5 \\ 0 \le j \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow (j;k) \in \{(3;4),(4;2),(5;0)\}.$$

Do đó, số hạng chứa x^{10} là $C_5^4C_5^3x^{10} + C_5^2C_5^4x^{10} + C_5^0C_5^5x^{10} = 101x^{10}$.
Vậy hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển là 101. □

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Tìm hệ số của số hạng trong khai triển

① $(x+y)^{25}$ chứa $x^{12}y^{13}$ **ĐS:** C_{25}^{13}

② $(x-3)^9$ chứa x^4 **ĐS:** $-3^5C_9^5$

③ $(1-3x)^{11}$ chứa x^6 **ĐS:** $3^6C_{11}^6$

④ $\left(x^2-2x\right)^{10}$ chứa x^{16} **ĐS:** $2^8C_{10}^8$

⑤ $\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)^{40}, \forall x \neq 0$ chứa x^{31} **ĐS:** C_{40}^3

⑥ $\left(2+\sqrt{x}-3x^2\right)^5, \forall x \neq 0$ chứa x^2 **ĐS:** -230

Lời giải.

① Số hạng tổng quát trong khai triển $(x+y)^{25}$ là $C_{25}^kx^{25-k}y^k$.
Để có số hạng chứa $x^{12}y^{13}$ thì $k=13$.
Vậy hệ số của số hạng chứa $x^{12}y^{13}$ là C_{25}^{13}.

② Số hạng tổng quát trong khai triển $(x-3)^9$ là $C_9^kx^{9-k}(-3)^k = C_9^k(-3)^kx^{9-k}$.
Để có số hạng chứa x^4 thì $9-k=4 \Leftrightarrow k=5$.
Vậy hệ số của số hạng chứa x^4 là $-3^5C_9^5$.

③ Số hạng tổng quát trong khai triển $(1-3x)^{11}$ là $C_{11}^k1^{11-k}(-3x)^k = C_{11}^k(-3)^kx^k$.
Để có số hạng chứa x^6 thì $k=6$.
Vậy hệ số của số hạng chứa x^6 là $3^6C_{11}^6$.

④ Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(x^2-2x\right)^{10}$ là

$$C_{10}^k\left(x^2\right)^{12-k}(-2x)^k = C_{10}^k(-2)^kx^{24-2k}x^k = C_{10}^k(-2)^kx^{24-k}.$$

Để có số hạng chứa x^{16} thì $24-k=16 \Leftrightarrow k=8$.
Vậy hệ số của số hạng chứa x^{16} là $2^8C_{10}^8$.

⑤ Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)^{40}$ là

$$C_{40}^kx^{40-k}\left(\frac{1}{x^2}\right)^k = C_{40}^kx^{40-k}x^{-2k} = C_{40}^kx^{40-3k}.$$

Để có số hạng chứa x^{31} thì $40-3k=31 \Leftrightarrow k=3$.
Vậy hệ số của số hạng chứa x^{31} là C_{40}^3.

⑥ Ta có

$$\begin{aligned}\left(2+\sqrt{x}-3x^2\right)^5 &= \left[2+\left(\sqrt{x}-3x^2\right)\right]^5\\ &= \sum_{k=0}^{5} C_5^k 2^{5-k}\left(x^{\frac{1}{2}}-3x^2\right)^k\\ &= \sum_{k=0}^{5}\left(2^{5-k}C_5^k\sum_{j=0}^{k}C_k^j\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{k-j}\left(-3x^2\right)^j\right)\\ &= \sum_{k=0}^{5}\left(\sum_{j=0}^{k}2^{5-k}(-3)^jC_5^kC_k^jx^{\frac{k+3j}{2}}\right)\end{aligned}$$

Để có số hạng chứa x^2 thì

$$\begin{cases}\dfrac{k+3j}{2}=2\\ 0\le j\le k\le 5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k+3j=4\\ 0\le j\le k\le 5\end{cases}\Leftrightarrow (j;k)\in\{(0;4),(1;1)\}.$$

Do đó, số hạng chứa x^2 là $2^1(-3)^0C_5^4C_4^0x^2+2^4(-3)^1C_5^1C_1^1x^2=-230x^2$.
Vậy hệ số của số hạng chứa x^2 là -230. □

BÀI 2. Tìm số hạng không chứa x (độc lập với x) trong khai triển của nhị thức

① $\left(2x^2-\dfrac{3}{x}\right)^9$ với $x\neq 0$ **ĐS:** $2^33^6C_9^6$

② $\left(xy^2-\dfrac{1}{xy}\right)^8$ với $xy\neq 0$ **ĐS:** $C_8^4y^4$

③ $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\sqrt[4]{x^3}\right)^{17}$ với $x>0$ **ĐS:** C_{17}^8

Lời giải.

① Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(2x^2-\dfrac{3}{x}\right)^9$ là

$$C_9^k\left(2x^2\right)^{9-k}\left(-\frac{3}{x}\right)^k=C_9^k2^{9-k}(-3)^kx^{18-2k}x^{-k}=2^{9-k}(-3)^kC_9^kx^{18-3k}.$$

Để có số hạng không chứa x thì $18-3k=0\Leftrightarrow k=6$.
Vậy số hạng không chứa x là $2^33^6C_9^6$.

② Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(xy^2-\dfrac{1}{xy}\right)^8$ là

$$C_8^k\left(xy^2\right)^{8-k}\left(-\frac{1}{xy}\right)^k=C_8^k(-1)^kx^{8-k}y^{16-2k}x^{-k}y^{-k}=(-1)^kC_8^kx^{8-2k}y^{16-3k}.$$

Để có số hạng không chứa x thì $8-2k=0\Leftrightarrow k=4$.
Vậy số hạng không chứa x là $(-1)^4C_8^4y^4=C_8^4y^4$.

③ Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\sqrt[4]{x^3}\right)^{17}$ là

$$\mathrm{C}_{17}^{k}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^{17-k}\left(\sqrt[4]{x^3}\right)^{k}=\mathrm{C}_{17}^{k}x^{-\frac{2}{3}\cdot(17-k)}x^{\frac{3}{4}\cdot k}=\mathrm{C}_{17}^{k}x^{\frac{-136+17k}{12}}.$$

Để có số hạng không chứa x thì $\dfrac{-136+17k}{12}=0\Leftrightarrow -136+17k=0\Leftrightarrow k=8.$
Vậy số hạng không chứa x là C_{17}^{8}.

□

BÀI 3. Tìm số hạng chứa x^5 trong khai triển $x(1-2x)^5+x^2(1+3x)^{10}$. **ĐS:** $3310x^5$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}x(1-2x)^5+x^2(1+3x)^{10} &= x\sum_{j=0}^{5}\mathrm{C}_5^j1^{5-j}(-2x)^j+x^2\sum_{k=0}^{10}\mathrm{C}_{10}^{k}1^{10-k}(3x)^k\\ &= \sum_{j=0}^{5}(-2)^j\mathrm{C}_5^jx^{j+1}+\sum_{k=0}^{10}3^k\mathrm{C}_{10}^kx^{k+2}.\end{aligned}$$

Để có số hạng chứa x^5 thì $\begin{cases}j+1=5\\k+2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}j=4\\k=3.\end{cases}$

Vậy số hạng chứa x^5 là $(-2)^4\mathrm{C}_5^4x^5+3^3\mathrm{C}_{10}^3x^5=3310x^5$. □

BÀI 4. Tìm hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $(2x+1)^4+(2x+1)^5+(2x+1)^6+(2x+1)^7$. **ĐS:** 896

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}(2x+1)^4+(2x+1)^5+(2x+1)^6+(2x+1)^7 &= \sum_{k=4}^{7}(2x+1)^k\\ &= \sum_{k=4}^{7}\left(\sum_{j=0}^{k}\mathrm{C}_k^j1^{k-j}(2x)^j\right)=\sum_{k=4}^{7}\left(\sum_{j=0}^{k}2^j\mathrm{C}_k^jx^j\right).\end{aligned}$$

Để có số hạng chứa x^5 thì $\begin{cases}j=5\\0\le j\le k\le 7\end{cases}\Leftrightarrow (j;k)\in\{(5;5),(5;6),(5;7)\}$.

Do đó, số hạng chứa x^5 là $2^5\mathrm{C}_5^5x^5+2^5\mathrm{C}_6^5x^5+2^5\mathrm{C}_7^5x^5=896x^5$.

Vậy hệ số của số hạng chứa x^5 là 896. □

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 5. Tìm hệ số của số hạng trong khai triển

① $(2x+y)^{13}$ chứa x^6y^7 **ĐS:** $2^6\mathrm{C}_{13}^7$

② $(x^3-xy)^{15}$ chứa $x^{25}y^{10}$ **ĐS:** C_{15}^{10}

③ $\left(\sqrt{xy}+\dfrac{x}{y}\right)^{10}$ với $xy\ge 0$ và $y\ne 0$ chứa x^6y^2 **ĐS:** C_{10}^2

④ $(1+x+2x^2)^{10}$ chứa x^{17} **ĐS:** $2^7\mathrm{C}_{10}^{10}\mathrm{C}_{10}^7+2^8\mathrm{C}_{10}^9\mathrm{C}_9^8$

⑤ $\left(x^2+x-1\right)^5$ chứa x^3 **ĐS:** $C_5^1C_1^0+C_5^3C_3^3$

⑥ $\left(1+x^2-x^3\right)^8$ chứa x^8 **ĐS:** $C_8^4C_4^0+C_8^3C_3^2$

⑦ $\left(1-x^4-\dfrac{1}{x}\right)^{12}, x\neq 0$ chứa x^8 **ĐS:** $-C_{12}^4C_4^1-C_{12}^8C_8^4-C_{12}^{12}C_{12}^7$

BÀI 6. Tìm số hạng không chứa x (độc lập với x) trong khai triển của nhị thức

① $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{12}$, với $x\neq 0$ **ĐS:** C_{12}^6

② $\left(x^3-\dfrac{1}{x^2}\right)^{5}$, với $x\neq 0$ **ĐS:** $-C_5^3$

③ $\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^{10}$, với $x\neq 0$ **ĐS:** $-2^5C_{10}^5$

④ $\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x}\right)^{12}$, với $x\neq 0$ **ĐS:** C_{12}^6

⑤ $\left(\dfrac{1}{x^3}+x^2\right)^{10}$, với $x\neq 0$ **ĐS:** C_{10}^6

⑥ $\left(x+\dfrac{2}{x^3}\right)^{12}$, với $x\neq 0$ **ĐS:** $2^3C_{12}^3$

⑦ $\left(x^3-\dfrac{2}{x^2}\right)^{5}$, với $x\neq 0$ **ĐS:** $-2^3C_5^3$

⑧ $\left(2\sqrt{x}+\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{20}$, với $x>0$ **ĐS:** $2^83^{12}C_{20}^{12}$

⑨ $\left(\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}\right)^{12}$, với $x>0$ **ĐS:** C_{12}^8

⑩ $\left(2x+\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^{18}$, với $x>0$ **ĐS:** C_{18}^{15}

⑪ $\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{7}$, với $x>0$ **ĐS:** C_7^4

DẠNG 3.2. Tìm hệ số trong khai triển nhị thức Niu-tơn $(a+b)^n$

— *Sử dụng số hạng tổng quát của khai triển là* $C_n^ka^{n-k}b^k$.

— *Từ giả thiết tìm ra được giá trị k.*

Nhị thức Niu-tơn

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n\\ &=\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^{n-k}b^k.\end{aligned}$$

Hệ quả

— *Với $a = b = 1$, ta có $2^n = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n$.*

— *Với $a = 1; b = -1$, ta có $0^n = C_n^0 - C_n^1 + \cdots + (-1)^k C_n^k + \cdots + (-1)^n C_n^n$.*

— *Nếu $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ thì tổng các hệ số trong khai triển là $P(1)$.*

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1.

① Tìm số hạng chứa x^{10} trong khai triển $\left(x^3 - \dfrac{1}{x^2}\right)^n$, $x \neq 0$ biết $C_n^4 = 13C_n^2$. **ĐS:** $-6435x^{10}$

② Tìm số hạng chứa x^2 trong khai triển $\left(x^3 + \dfrac{1}{x^2}\right)^n$, $x \neq 0$, biết $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 11$. **ĐS:** $6x^2$

③ Tìm số hạng chứa x^8 trong khai triển $(x^2 + 2)^n$, biết $A_n^3 - 8C_n^2 + C_n^1 = 49$. **ĐS:** $280x^8$

Lời giải

① Tìm số hạng chứa x^{10} trong khai triển $\left(x^3 - \dfrac{1}{x^2}\right)^n$, $x \neq 0$ biết $C_n^4 = 13C_n^2$.

Điều kiện $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$. Khi đó

$$\begin{aligned} C_n^4 = 13C_n^2 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = 13 \cdot \frac{n(n-1)}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad n^2 - 5n - 150 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} n = -10 & \text{(loại)} \\ n = 15 & \text{(nhận).} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $C_{15}^k (x^3)^{15-k} \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)^k = C_{15}^k (-1)^k x^{45-5k}$.

Số hạng chứa x^{10} ứng với $45 - 5k = 10 \Leftrightarrow k = 7$.
Vậy số hạng chứa x^{10} trong khai triển là $C_{15}^7 (-1)^7 x^{10} = -6435x^{10}$.

② Tìm số hạng chứa x^2 trong khai triển $\left(x^3+\dfrac{1}{x^2}\right)^n$, $x\neq 0$, biết $C_n^0+C_n^1+C_n^2=11$.

Điều kiện $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. Khi đó

$$\begin{aligned} C_n^0+C_n^1+C_n^2=11 &\Leftrightarrow 1+n+\frac{n(n-1)}{2}=11\\ &\Leftrightarrow n^2+n-20=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} n=-5 & \text{(loại)}\\ n=4 & \text{(nhận)}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $C_4^k(x^3)^{4-k}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^k=C_4^kx^{12-5k}$.

Số hạng chứa x^2 ứng với $12-5k=2\Leftrightarrow k=2$.
Vậy số hạng chứa x^2 trong khai triển là $C_4^2x^2=6x^2$.

③ Tìm số hạng chứa x^8 trong khai triển $\left(x^2+2\right)^n$, biết $A_n^3-8C_n^2+C_n^1=49$.
Điều kiện $n\in\mathbb{N}, n\geq 3$. Khi đó

$$\begin{aligned} A_n^3-8C_n^2+C_n^1=49 &\Leftrightarrow n(n-1)(n-2)-8\cdot\frac{n(n-1)}{2}+n=49\\ &\Leftrightarrow n^3-7n^2+7n-49=0\Leftrightarrow n=7 \quad \text{(nhận)}.\end{aligned}$$

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $C_7^k(x^2)^{7-k}\left(2\right)^k=C_7^k2^kx^{14-2k}$.
Số hạng chứa x^8 ứng với $14-2k=8\Leftrightarrow k=3$.
Vậy số hạng chứa x^8 trong khai triển là $C_7^32^3x^8=280x^8$.

□

VÍ DỤ 2. Xác định số nguyên dương n để trong khai triển $(1+x^2)^n$ có hệ số của x^8 bằng 6 lần hệ số của x^4. **ĐS:** $n=11$

Lời giải

Điều kiện $n\in\mathbb{N}, n\geq 4$.
Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $C_n^k\left(x^2\right)^k=C_n^kx^{2k}$.
Hệ số của x^8 là C_n^4. Hệ số của x^4 là C_n^2.
Do hệ số của x^8 bằng 6 lần hệ số của x^4 nên

$$\begin{aligned} C_n^4=6C_n^2 &\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}=6\cdot\frac{n(n-1)}{2!}\\ &\Leftrightarrow n^2-5n-66=0\left[\begin{array}{ll} n=-6 & \text{(loại)}\\ n=11 & \text{(nhận)}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy $n=11$ là giá trị cần tìm. □

VÍ DỤ 3.

① Biết tổng các hệ số trong khai triển $(1+x^2)^n$ là 1024. Tìm hệ số của x^{12}. **ĐS:** 210

② Tìm hệ số của x^6 trong khai triển $\left(\dfrac{1}{x}+x^3\right)^n$ với n là số nguyên dương và biết rằng tổng các hệ số trong khai triển bằng 1024. **ĐS:** 120

Lời giải

① Biết tổng các hệ số trong khai triển $(1+x^2)^n$ là 1024. Tìm hệ số của x^{12}.
Đặt $P(x)=(1+x^2)^n$. Tổng các hệ số trong khai triển $P(x)$ là $P(1)=2^n$.
Do tổng các hệ số trong khai triển $(1+x^2)^n$ là 1024 nên $2^n=1024 \Leftrightarrow n=10$.
Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $\mathrm{C}_{10}^k\left(x^2\right)^k=\mathrm{C}_{10}^k x^{2k}$.
Số hạng chứa x^{12} ứng với $2k=12 \Leftrightarrow k=6$.
Vậy hệ số của x^{12} là $\mathrm{C}_{10}^6=210$.

② Tìm hệ số của x^6 trong khai triển $\left(\dfrac{1}{x}+x^3\right)^n$ với n là số nguyên dương và biết rằng tổng các hệ số trong khai triển bằng 1024.
Đặt $P(x)=\left(\dfrac{1}{x}+x^3\right)^n$. Tổng các hệ số trong khai triển $P(x)$ là $P(1)=2^n$.
Do tổng các hệ số trong khai triển là 1024 nên $2^n=1024 \Leftrightarrow n=10$.
Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $\mathrm{C}_{10}^k\left(\dfrac{1}{x}\right)^k\left(x^3\right)^k=\mathrm{C}_{10}^k x^{2k}$.
Số hạng chứa x^6 ứng với $2k=6 \Leftrightarrow k=3$.
Vậy hệ số của x^6 là $\mathrm{C}_{10}^3=120$.

□

VÍ DỤ 4. Cho $P(x)=(1+2x)^n, n\in\mathbb{N}^*$. Khai triển $P(x)$ ta được $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$. Tính n và a_{11} biết rằng $a_0+\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\dfrac{a_3}{2^3}+\cdots+\dfrac{a_n}{2^n}=4096$. **ĐS:** 24576

Lời giải

Điều kiện $n\in\mathbb{N}, n\geq 11$.
Ta có $P\left(\dfrac{1}{2}\right)=2^n$.
Mặt khác $P\left(\dfrac{1}{2}\right)=a_0+\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\dfrac{a_3}{2^3}+\cdots+\dfrac{a_n}{2^n}=4096 \Leftrightarrow 2^n=4096 \Leftrightarrow n=12$.
Khi đó, số hạng tổng quát trong khai triển $P(x)$ là $\mathrm{C}_{12}^k(2x)^k=\mathrm{C}_{12}^k(2)^kx^k$.
Ta suy ra $a_{11}=\mathrm{C}_{12}^{11}2^{11}=24576$.
Vậy $n=12, a_{11}=24576$. □

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1.

① Tìm hệ số của x^4 trong khai triển $\left(\dfrac{2}{x}-x^3\right)^n, \forall x\neq 0$, biết $\mathrm{C}_{n-4}^{n-6}+n\cdot\mathrm{A}_n^2=454$. **ĐS:** -1792

② Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\dfrac{2}{n-5}\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^n, x>0$, biết $\mathrm{C}_n^3=5\mathrm{C}_n^1$. **ĐS:** 35

③ Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x+\dfrac{3}{x^3}\right)^n$, với $n\in\mathbb{N}^*, x\neq 0$, biết $\mathrm{A}_{n+1}^2+\mathrm{C}_{n+1}^2=18\mathrm{P}_3$. **ĐS:** 252

④ Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển $\left(2x^3-\dfrac{3}{x^2}\right)^n, \forall x\neq 0$, biết $3\mathrm{C}_n^2+2\mathrm{A}_n^2=3n^2+15$. **ĐS:** 1088640

Lời giải.

① Tìm hệ số của x^4 trong khai triển $\left(\dfrac{2}{x}-x^3\right)^n, \forall x\neq 0$, biết $\mathrm{C}_{n-4}^{n-6}+n\cdot\mathrm{A}_n^2=454$.
Điều kiện $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. Khi đó

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_{n-4}^{n-6}+n\cdot\mathrm{A}_n^2=454 \;&\Leftrightarrow\; \frac{(n-4)(n-5)}{2}+n\cdot n(n-1)=454\\ &\Leftrightarrow\; 2n^3-n^2-9n-888=0\Leftrightarrow n=8\quad(\text{nhận}).\end{aligned}$$

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $\mathrm{C}_8^k\left(\dfrac{2}{x}\right)^{8-k}\left(-x^3\right)^k=\mathrm{C}_8^k2^{8-k}(-1)^kx^{4k-8}$.
Số hạng chứa x^4 ứng với $4k-8=4\Leftrightarrow k=3$.
Vậy hệ số của x^4 trong khai triển là $\mathrm{C}_8^3 2^5(-1)^3=-1792$.

② Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\dfrac{2}{n-5}\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^n, x>0$, biết $\mathrm{C}_n^3=5\mathrm{C}_n^1$.
Điều kiện $n\in\mathbb{N}, n\geq 3$. Khi đó

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_n^3=5\mathrm{C}_n^1 \;&\Leftrightarrow\; \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}=5n\\ &\Leftrightarrow\; n^3-3n^2-28n=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}n=-4 & (\text{loại})\\ n=0 & (\text{loại})\\ n=7 & (\text{nhận}).\end{array}\right.\end{aligned}$$

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $\mathrm{C}_7^k\left(\sqrt[3]{x}\right)^{7-k}\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^k=\mathrm{C}_7^kx^{\frac{28-7k}{12}}$.
Số hạng không chứa x ứng với $\dfrac{28-7k}{12}=0\Leftrightarrow k=4$.
Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là $\mathrm{C}_7^4=35$.

③ Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x+\dfrac{3}{x^3}\right)^n$, với $n\in\mathbb{N}^*$, $x\neq 0$, biết $\mathrm{A}_{n+1}^2+\mathrm{C}_{n+1}^2=18\mathrm{P}_3$.
Điều kiện $n\in\mathbb{N}, n\geq 1$. Khi đó

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_{n+1}^2+\mathrm{C}_{n+1}^2=18\mathrm{P}_3 \;&\Leftrightarrow\; (n+1)n+\frac{n(n+1)}{2!}=18\cdot 3!\\ &\Leftrightarrow\; n^2+n-72=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}n=-9 & (\text{loại})\\ n=8 & (\text{nhận}).\end{array}\right.\end{aligned}$$

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $\mathrm{C}_8^k\,(x)^{8-k}\left(\dfrac{3}{x^3}\right)^k=\mathrm{C}_8^k3^kx^{8-4k}$.
Số hạng không chứa x ứng với $8-4k=0\Leftrightarrow k=2$.
Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là $\mathrm{C}_8^2 3^2=252$.

④ Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển $\left(2x^3 - \dfrac{3}{x^2}\right)^n$, $\forall x \neq 0$, biết $3\mathrm{C}_n^2 + 2\mathrm{A}_n^2 = 3n^2 + 15$.

Điều kiện $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Khi đó

$$\begin{aligned} 3\mathrm{C}_n^2 + 2\mathrm{A}_n^2 = 3n^2 + 15 \quad &\Leftrightarrow \quad 3 \cdot \frac{n(n-1)}{2!} + 2 \cdot n(n-1) = 3n^2 + 15 \\ &\Leftrightarrow \quad n^2 - 7n - 30 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} n = -3 & (\text{loại}) \\ n = 10 & (\text{nhận}). \end{array}\right. \end{aligned}$$

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $\mathrm{C}_{10}^k \left(2x^3\right)^{10-k} \left(-\dfrac{3}{x^2}\right)^k = \mathrm{C}_{10}^k 2^{10-k}(-3)^k x^{30-5k}$.

Số hạng chứa x^{10} ứng với $30 - 5k = 10 \Leftrightarrow k = 4$.

Vậy hệ số của x^{10} trong khai triển là $\mathrm{C}_{10}^4 2^6(-3)^4 = 1088640$.

□

BÀI 2. Tính A_{2016}^n biết hệ số của x^2 trong khai triển $(1 + 3x)^n$ là 90. **ĐS:** A_{2016}^5

Lời giải.

Điều kiện $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $\mathrm{C}_n^k (3x)^k = \mathrm{C}_n^k 3^k x^k$.

Hệ số của x^2 là $\mathrm{C}_n^2 3^2$.

Do hệ số của x^2 bằng 90 nên

$$\begin{aligned} \mathrm{C}_n^2 3^2 = 90 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{n(n-1)}{2!} = 10 \\ &\Leftrightarrow \quad n^2 - n - 20 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} n = -4 & (\text{loại}) \\ n = 5 & (\text{nhận}). \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy $\mathrm{A}_{2016}^n = \mathrm{A}_{2016}^5$. □

BÀI 3. Trong khai triển nhị thức $(1 + 2ax)^n$, $(x \neq 0)$ ta có được số hạng đầu là 1, số hạng thứ hai là $48x$, số hạng thứ ba là $1008x^2$. Tìm n và a. **ĐS:** $n = 8, a = 3$

Lời giải.

Điều kiện $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $\mathrm{C}_n^k (2ax)^k = \mathrm{C}_n^k (2a)^k x^k$.

— Số hạng đầu là 1 nên $\mathrm{C}_n^0 = 1$.

— Số hạng thứ hai là $48x$ nên $\mathrm{C}_n^1(2a) = 48$.

— Số hạng thứ ba là $1008x^2$ nên $\mathrm{C}_n^2(2a)^2 = 1008$.

Ta suy ra

$$\begin{aligned} \begin{cases} \mathrm{C}_n^1(2a) = 48 \\ \mathrm{C}_n^2(2a)^2 = 1008 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} an = 24 \\ n(n-1)a^2 = 2016 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} an = 24 \\ an(an - a) = 504 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} an = 24 \\ a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 8 \\ a = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $\begin{cases} n = 8 \\ a = 3. \end{cases}$ □

BÀI 4. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^n$, biết hiệu hệ số của số hạng thứ ba và thứ hai bằng 35. **ĐS:** 252

Lời giải.

Điều kiện $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $\mathrm{C}_n^k x^{n-k}\left(\dfrac{1}{x}\right)^k = \mathrm{C}_n^k x^{n-2k}$.

— Hệ số của số hạng thứ ba là C_n^2.

— Hệ số của số hạng thứ hai là C_n^1.

Do hiệu hệ số của số hạng thứ ba và thứ hai bằng 35 nên

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_n^2-\mathrm{C}_n^1=35 &\Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2}-n=35\\ &\Leftrightarrow n^2-3n-70=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} n=-7 & \text{(loại)}\\ n=10 & \text{(nhận)}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Khi đó số hạng không chứa x là $\mathrm{C}_{10}^5=252$. □

BÀI 5. Cho n là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\mathrm{C}_n^3+\cdots+\mathrm{C}_n^n=2047$.Tìm số hạng chứa $x^{10}y^6$ trong khai triển $(2x^2+y)^n$. **ĐS:** $14784x^{10}y^6$

Lời giải.

Do $\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\mathrm{C}_n^3+\cdots+\mathrm{C}_n^n=2^n-1=2047 \Leftrightarrow n=11$.

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $\mathrm{C}_{11}^k\left(2x^2\right)^{11-k}y^k=\mathrm{C}_{11}^k 2^{11-k}x^{22-2k}y^k$.

Ta suy ra số hạng chứa $x^{10}y^6$ trong khai triển là $\mathrm{C}_{11}^6 2^5 x^{10}y^6=14784x^{10}y^6$.

□

BÀI 6. Cho khai triển nhị thức: $(1-2x+x^3)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_{3n}x^{3n}$. Xác định n và tìm a_6, biết rằng: $a_0+\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\cdots+\dfrac{a_{3n}}{2^{3n}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{15}$. **ĐS:** -31

Lời giải.

Đặt $P(x)=(1-2x+x^3)^n$. Suy ra $P\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3n}$.

Mặt khác $P\left(\dfrac{1}{2}\right)=a_0+\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\cdots+\dfrac{a_{3n}}{2^{3n}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{15} \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3n}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{15} \Leftrightarrow n=5$.

Khi đó $P(x)=\sum\limits_{k=0}^{5}\mathrm{C}_5^k\left(x^3\right)^{5-k}(1-2x)^k=\sum\limits_{k=0}^{5}\mathrm{C}_5^k x^{15-3k}\sum\limits_{i=0}^{k}\mathrm{C}_k^i(-2x)^i=\sum\limits_{k=0}^{5}\sum\limits_{i=0}^{k}\mathrm{C}_k^i(-2)^i(x)^{15-3k+i}$.

Ta suy ra $a_6=\mathrm{C}_4^3(-2)^3+\mathrm{C}_5^0(-2)^0=-31$.

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 7. Tìm hệ số của một số hạng hoặc tìm một số hạng

① Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^n$, $x>0$, biết $\mathrm{C}_n^6+3\mathrm{C}_n^7+3\mathrm{C}_n^8+\mathrm{C}_n^9=2\mathrm{C}_{n+2}^8$. **ĐS:** 320320

② Cho n là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện: $6\mathrm{C}_{n+1}^{n-1}=\mathrm{A}_n^2+160$. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển $(1-2x^3)(2+x)^n$. **ĐS:** -2224

③ Cho $n \in \mathbb{N}^*$ và a, b $(b > 0)$. Biết trong khai triển nhị thức Niu-tơn $\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}} + b\right)^n$ có hạng tử chứa a^4b^9, tìm số hạng chứa tích a và b với số mũ bằng nhau. **ĐS:** $5005a^6b^6$

④ Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $\mathrm{C}_n^{n-3} - \mathrm{C}_{n-1}^2 = \mathrm{C}_{n-1}^1\mathrm{C}_{n+3}^{n+2}$. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{11} trong khai triển $x^3\left(x^{n-8} - \dfrac{n}{3x}\right)^n, x \neq 0$. **ĐS:** 32440320

Lời giải.

① Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^n, x > 0$, biết $\mathrm{C}_n^6 + 3\mathrm{C}_n^7 + 3\mathrm{C}_n^8 + \mathrm{C}_n^9 = 2\mathrm{C}_{n+2}^8$.
Điều kiện $n \in \mathbb{N}, n \geq 9$. Khi đó

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}_n^6 + 3\mathrm{C}_n^7 + 3\mathrm{C}_n^8 + \mathrm{C}_n^9 = 2\mathrm{C}_{n+2}^8 &\Leftrightarrow \mathrm{C}_n^6 + \mathrm{C}_n^7 + 2\left(\mathrm{C}_n^7 + \mathrm{C}_n^8\right) + \mathrm{C}_n^8 + \mathrm{C}_n^9 = 2\mathrm{C}_{n+2}^8\\
&\Leftrightarrow \mathrm{C}_{n+1}^7 + 2\mathrm{C}_{n+1}^8 + \mathrm{C}_{n+1}^9 = 2\mathrm{C}_{n+2}^8\\
&\Leftrightarrow \mathrm{C}_{n+1}^7 + \mathrm{C}_{n+1}^8 + \mathrm{C}_{n+1}^8 + \mathrm{C}_{n+1}^9 = 2\mathrm{C}_{n+2}^8\\
&\Leftrightarrow \mathrm{C}_{n+2}^8 + \mathrm{C}_{n+2}^9 = 2\mathrm{C}_{n+2}^8\\
&\Leftrightarrow \mathrm{C}_{n+2}^9 = \mathrm{C}_{n+2}^8\\
&\Leftrightarrow \frac{(n+2)!}{9!(n-7)!} = \cdot\frac{(n+2)!}{8!(n-6)!}\\
&\Leftrightarrow n - 6 = 9 \Leftrightarrow n = 15 \quad \text{(nhận)}.
\end{aligned}$$

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $\mathrm{C}_{15}^k\left(\sqrt[3]{x}\right)^{15-k}\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^k = \mathrm{C}_{15}^k 2^k x^{\frac{5(6-k)}{6}}$.
Số hạng không chứa x ứng với $\dfrac{5(6-k)}{6} = 0 \Leftrightarrow k = 6$.
Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là $\mathrm{C}_{15}^6 2^6 = 320320$.

② Cho n là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện: $6\mathrm{C}_{n+1}^{n-1} = \mathrm{A}_n^2 + 160$. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển $(1-2x^3)(2+x)^n$.
Điều kiện $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Khi đó

$$\begin{aligned}
6\mathrm{C}_{n+1}^{n-1} = \mathrm{A}_n^2 + 160 &\Leftrightarrow 6 \cdot \frac{(n+1)n}{2!} = n(n-1) + 160\\
&\Leftrightarrow n^2 + 2n - 80 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} n = -10 & \text{(loại)}\\ n = 8 & \text{(nhận)}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là

$$(1-2x^3)\mathrm{C}_8^k 2^{8-k}x^k = \mathrm{C}_8^k 2^{8-k}x^k - \mathrm{C}_8^k 2^{9-k}x^{k+3}.$$

Vậy hệ số của x^7 trong khai triển là $2\mathrm{C}_8^7 - 2^5\mathrm{C}_8^4 = -2224$.

③ Cho $n \in \mathbb{N}^*$ và a, b $(b > 0)$. Biết trong khai triển nhị thức Niu-tơn $\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}} + b\right)^n$ có hạng tử chứa a^4b^9, tìm số hạng chứa tích a và b với số mũ bằng nhau. **ĐS:** $5005a^6b^6$
Điều kiện $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$.

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $C_n^k\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}}\right)^{n-k}b^k = C_n^k a^{n-k} b^{\frac{3k-n}{2}}$.

Trong khai triển có hạng tử chứa a^4b^9 nên $\begin{cases} n-k=4 \\ \dfrac{3k-n}{2}=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=15 \\ k=11. \end{cases}$

Khi đó số hạng tổng quát là $C_{15}^k a^{15-k} b^{\frac{3k-15}{2}}$.

Số hạng chứa a và b với số mũ bằng nhau khi $15-k=\dfrac{3k-15}{2} \Leftrightarrow k=9$.

Vậy số hạng chứa a và b với số mũ bằng nhau là $C_{15}^9 a^6b^6 = 5005a^6b^6$.

④ Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^{n-3} - C_{n-1}^2 = C_{n-1}^1 C_{n+3}^{n+2}$. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{11} trong khai triển $x^3\left(x^{n-8}-\dfrac{n}{3x}\right)^n, x \neq 0$.

Điều kiện $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Khi đó

$$\begin{aligned} C_n^{n-3} - C_{n-1}^2 = C_{n-1}^1 C_{n+3}^{n+2} &\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} - \frac{(n-1)(n-2)}{2!} = (n-1)\cdot(n+3) \\ &\Leftrightarrow n^3-12n^2-n+12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} n=-1 & \text{(loại)} \\ n=1 & \text{(loại)} \\ n=12 & \text{(nhận).} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $x^3C_{12}^k\left(x^4\right)^{12-k}\left(-\dfrac{4}{x}\right)^k = C_{12}^k(-4)^kx^{51-5k}$.

Số hạng chứa x^{11} ứng với $51-5k=11 \Leftrightarrow k=8$.

Vậy hệ số của x^{11} trong khai triển là $C_{12}^8(-4)^8 = 32440320$.

□

BÀI 8. Trong khai triển nhị thức $(1+ax)^n$, ta có số hạng đầu bằng 1, số hạng thứ hai bằng $24x$, số hạng thứ ba bằng $252x^2$. Tìm n và a. **ĐS:** $n=8, a=3$

Lời giải.

Điều kiện $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $C_n^k(ax)^k = C_n^k a^k x^k$.

— Số hạng đầu là 1 nên $C_n^0 = 1$.

— Số hạng thứ hai là $48x$ nên $C_n^1 a = 24$.

— Số hạng thứ ba là $252x^2$ nên $C_n^2 a^2 = 252$.

Ta suy ra

$$\begin{aligned} \begin{cases} C_n^1 a = 24 \\ C_n^2 a^2 = 252 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} an=24 \\ n(n-1)a^2=504 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} an=24 \\ a=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=8 \\ a=3. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $\begin{cases} n=8 \\ a=3. \end{cases}$ □

BÀI 9. Biết hệ số của x^{n-2} trong khai triển $(x-2)^n$ bằng 220. Tìm hệ số của x^2. **ĐS:** 67584

Lời giải.

Điều kiện $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $C_n^k x^{n-k}(-2)^k$.
Do hệ số của x^{n-2} trong khai triển bằng 220 nên

$$\begin{aligned} C_n^2(-2)^2 = 220 &\Leftrightarrow n(n-1) = 110 \\ &\Leftrightarrow n^2 - n - 110 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} n = -10 & \text{(loại)} \\ n = 11 & \text{(nhận)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Khi đó hệ số của x^2 là $C_{12}^{10}(-2)^{10} = 67584$. □

BÀI 10. Biết hệ số của x^{n-2} trong khai triển $\left(x - \frac{1}{4}\right)^n$ bằng 31. Tìm số nguyên dương n. **ĐS:** $n = 32$

Lời giải.
Điều kiện $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $C_n^k x^{n-k}\left(-\frac{1}{4}\right)^k$.
Do hệ số của x^{n-2} trong khai triển bằng 31 nên

$$\begin{aligned} C_n^2\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 31 &\Leftrightarrow n(n-1) = 992 \\ &\Leftrightarrow n^2 - n - 992 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} n = -31 & \text{(loại)} \\ n = 32 & \text{(nhận)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy $n = 32$. □

BÀI 11. Trong khai triển của nhị thức $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^n$ cho biết tổng hệ số của ba số hạng đầu tiên trong khai triển trên bằng 97. Tìm hệ số của số hạng có chứa x^4. **ĐS:** 1120

Lời giải.
Điều kiện $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $C_n^k\left(x^2\right)^{n-k}\left(-\frac{2}{x}\right)^k = C_n^k(-2)^k x^{2n-3k}$.
Do tổng hệ số của ba số hạng đầu tiên trong khai triển trên bằng 97 nên

$$\begin{aligned} C_n^0 + C_n^1(-2) + C_n^2(-2)^2 = 97 &\Leftrightarrow 1 - 2n + 2n(n-1) = 97 \\ &\Leftrightarrow 2n^2 - 4n - 96 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} n = -6 & \text{(loại)} \\ n = 8 & \text{(nhận)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Khi đó hệ số của x^4 trong khai triển là $C_8^4(-2)^4 = 1120$. □

BÀI 12. Tìm hệ số của một số hạng hoặc tìm một số hạng

① Biết n nguyên dương thỏa mãn điều kiện $C_n^1 + C_n^2 + \cdots\cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = 4095$. Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển $P(x) = \left(\frac{2}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$ với $x > 0$. **ĐS:** 14784

② Biết rằng n là số nguyên dương thỏa $3^n C_n^0 - 3^{n-1}C_n^1 + 3^{n-2}C_n^2 - 3^{n-3}C_n^3 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 2048$.Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển nhị thức $(2+x)^n$, **ĐS:** 1320

③ Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển $\left(\sqrt{x} - 3x^2\right)^n$, $(x > 0)$, biết rằng n là số nguyên dương và tổng các hệ số trong khai triển bằng -2048. **ĐS:** -4455

④ Cho n là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $\mathrm{C}_{2n+1}^{1}+\mathrm{C}_{2n+1}^{3}+\mathrm{C}_{2n+1}^{5}+\cdots+\mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}=1024$. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển đa thức $(2-3x)^{2n}$. **ĐS:** -2099520

Lời giải.

① Biết n nguyên dương thỏa mãn điều kiện $\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\cdots\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}+\mathrm{C}_n^n=4095$. Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển $P(x)=\left(\dfrac{2}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^n$ với $x>0$.
Do $\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}+\mathrm{C}_n^n=2^n-1=4095\Leftrightarrow n=12$.
Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $\mathrm{C}_{12}^k\left(\dfrac{2}{x^3}\right)^{12-k}\left(\sqrt{x^5}\right)^k=\mathrm{C}_{12}^k2^{12-k}x^{\frac{-72+11k}{2}}$.
Số hạng chứa x^8 trong khai triển ứng với $\dfrac{-72+11k}{2}=8\Leftrightarrow k=8$.
Ta suy ra hệ số của x^8 trong khai triển là $\mathrm{C}_{12}^8 2^4=7920$.

② Biết rằng n là số nguyên dương thỏa $3^n\mathrm{C}_n^0-3^{n-1}\mathrm{C}_n^1+3^{n-2}\mathrm{C}_n^2-3^{n-3}\mathrm{C}_n^3+\cdots+(-1)^n\mathrm{C}_n^n=2048$.Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển nhị thức $(2+x)^n$.
Ta có $(a+b)^n=\mathrm{C}_n^0a^n+\mathrm{C}_n^1a^{n-1}b+\mathrm{C}_n^2a^{n-2}b^2+\mathrm{C}_n^3a^{n-3}b^3+\cdots+\mathrm{C}_n^nb^n$.
Cho $a=3$, $b=-1$ ta được

$$3^n\mathrm{C}_n^0-3^{n-1}\mathrm{C}_n^1+3^{n-2}\mathrm{C}_n^2-3^{n-3}\mathrm{C}_n^3+\cdots+(-1)^n\mathrm{C}_n^n=2^n=2048\Leftrightarrow n=11.$$

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $\mathrm{C}_{11}^k2^{11-k}x^k$.
Ta suy ra hệ số của x^8 trong khai triển là $\mathrm{C}_{11}^8 2^3=1320$.

③ Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển $\left(\sqrt{x}-3x^2\right)^n$, $(x>0)$, biết rằng n là số nguyên dương và tổng các hệ số trong khai triển bằng -2048.
Đặt $P(x)=\left(\sqrt{x}-3x^2\right)^n$. Tổng các hệ số trong khai triển $P(x)$ là $P(1)=(-2)^n$.
Do tổng các hệ số trong khai triển là -2048 nên $(-2)^n=-2048\Leftrightarrow n=11$.
Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $\mathrm{C}_{11}^k\left(\sqrt{x}\right)^{11-k}\left(-3x^2\right)^k=\mathrm{C}_{11}^k(-3)^kx^{\frac{11+3k}{2}}$.
Số hạng chứa x^{10} ứng với $\dfrac{11+3k}{2}=10\Leftrightarrow k=3$.
Vậy hệ số của x^{10} là $\mathrm{C}_{11}^3(-3)^3=-4455$.

④ Cho n là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $\mathrm{C}_{2n+1}^{1}+\mathrm{C}_{2n+1}^{3}+\mathrm{C}_{2n+1}^{5}+\cdots+\mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}=1024$.
Tìm hệ số của x^7 trong khai triển đa thức $(2-3x)^{2n}$.
Ta có $(a+b)^{2n+1}=\mathrm{C}_{2n+1}^0a^{2n+1}+\mathrm{C}_{2n+1}^1a^{2n}b+\mathrm{C}_{2n+1}^2a^{2n-1}b^2+\mathrm{C}_{2n+1}^3a^{2n-2}b^3+\cdots+\mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}b^{2n+1}$.
Cho $a=1$, $b=1$ ta được $\mathrm{C}_{2n+1}^0+\mathrm{C}_{2n+1}^1+\mathrm{C}_{2n+1}^2+\mathrm{C}_{2n+1}^3+\cdots+\mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}=2^{2n+1}$ (1).
Cho $a=1$, $b=-1$ ta được $\mathrm{C}_{2n+1}^0-\mathrm{C}_{2n+1}^1+\mathrm{C}_{2n+1}^2-\mathrm{C}_{2n+1}^3+\cdots-\mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}=0$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $\mathrm{C}_{2n+1}^1+\mathrm{C}_{2n+1}^3+\mathrm{C}_{2n+1}^5+\cdots+\mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1}=2^{2n}=1024\Leftrightarrow n=5$.
Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là $\mathrm{C}_{10}^k(2)^{10-k}(-3x)^k$.
Ta suy ra hệ số của x^7 trong khai triển là $\mathrm{C}_{10}^7 2^3(-3)^7=-2099520$.

□

DẠNG 3.3. Chứng minh hoặc tính tổng

- $(a+b)^n=\mathrm{C}_n^0a^n+\mathrm{C}_n^1a^{n-1}b+\mathrm{C}_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}ab^{n-1}+\mathrm{C}_n^nb^n$.
- $\mathrm{C}_n^k=\mathrm{C}_n^{n-k}$.
- $\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\cdots+\mathrm{C}_n^n=2^n$.
- $\mathrm{C}_n^0-\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\cdots+(-1)^n\mathrm{C}_n^n=0$.

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Chứng minh

① $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} = 4^n$.

② $C_n^0 \cdot 3^n - C_n^1 \cdot 3^{n-1} + \cdots + (-1)^n C_n^n = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n$.

Lời giải

① Xét nhị thức

$$(x+1)^{2n} = C_{2n}^0 x^{2n} + C_{2n}^1 x^{2n-1} + C_{2n}^2 x^{2n-2} + C_{2n}^3 x^{2n-3} + \cdots + C_{2n}^{2n-1} x + C_{2n}^{2n}.$$

Thay $x = 1$ ta được

$$C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} = 2^{2n}.$$

Vậy $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} = 4^n$.

② Xét nhị thức $(x-1)^n = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^n C_n^n$.
Thay $x = 3$ ta được

$$C_n^0 \cdot 3^n - C_n^1 \cdot 3^{n-1} + \cdots + (-1)^n C_n^n = 2^n.$$

Lại có $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$.
Vậy $C_n^0 \cdot 3^n - C_n^1 \cdot 3^{n-1} + \cdots + (-1)^n C_n^n = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n$.

□

VÍ DỤ 2. Tính các tổng sau

① $S = C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + \cdots + C_5^5$. **ĐS:** $S = 32$.

② $S = 2C_{2010}^1 + 2^3C_{2010}^3 + 2^5C_{2010}^5 + \cdots + 2^{2009}C_{2010}^{2009}$. **ĐS:** $S = \dfrac{3^{2010}-1}{2}$.

Lời giải

① Ta có $S = C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + \cdots + C_5^5 = 2^5 = 32$.

② Xét nhị thức

$$(1+x)^{2010} = C_{2010}^0 + C_{2010}^1 x + C_{2010}^2 x^2 + C_{2010}^3 x^3 + \cdots + C_{2010}^{2009} x^{2009} + C_{2010}^{2010} x^{2010}.$$

Thay $x = 2$ ta được

$$C_{2010}^0 + 2C_{2010}^1 + 2^2C_{2010}^2 + 2^3C_{2010}^3 + \cdots + 2^{2009}C_{2010}^{2009} + 2^{2010}C_{2010}^{2010} = 3^{2010}. \quad (1)$$

Thay $x = -2$ ta được

$$C_{2010}^0 - 2C_{2010}^1 + 2^2C_{2010}^2 - 2^3C_{2010}^3 + \cdots - 2^{2009}C_{2010}^{2009} + 2^{2010}C_{2010}^{2010} = 1. \quad (2)$$

Trừ hai vế (1) và (2) suy ra

$$2\left(2C_{2010}^1 + 2^3C_{2010}^3 + 2^5C_{2010}^5 + \cdots + 2^{2009}C_{2010}^{2009}\right) = 3^{2010} - 1.$$

Vậy $S = \dfrac{3^{2010}-1}{2}$.

□

VÍ DỤ 3. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn các điều kiện sau

① $C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n=4095$. **ĐS:** $n=12$.

② $C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^3+C_{2n+1}^5+C_{2n+1}^7+\cdots+C_{2n+1}^{2n+1}=1024$. **ĐS:** $n=5$.

Lời giải

① Ta có

$$\begin{aligned}
& C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n=4095\\
\Leftrightarrow\ & C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n=4095+C_n^0\\
\Leftrightarrow\ & 2^n=4096=2^{12}\Leftrightarrow n=12.
\end{aligned}$$

② Ta có $\begin{cases}C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+C_{2n+1}^3+\cdots+C_{2n+1}^{2n}+C_{2n+1}^{2n+1}=2^{2n+1}\\ C_{2n+1}^0-C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2-C_{2n+1}^3+\cdots+C_{2n+1}^{2n}-C_{2n+1}^{2n+1}=0.\end{cases}$

Trừ hai vế ta được

$$\begin{aligned}
& 2\left(C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^3+\cdots+C_{2n+1}^{2n}-C_{2n+1}^{2n+1}\right)=2^{2n+1}\\
\Leftrightarrow\ & C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^3+\cdots+C_{2n+1}^{2n}-C_{2n+1}^{2n+1}=2^{2n}\\
\Leftrightarrow\ & 2^{2n}=1024=2^{10}\Leftrightarrow n=5.
\end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 4. Chứng minh

① $C_n^k=C_n^{n-k}$. ② $k(k-1)C_n^k=n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$.

Lời giải

① Ta có $C_n^k=C_n^{n-k}\Leftrightarrow\dfrac{n!}{(n-k)!k!}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ (luôn đúng). Suy ra điều phải chứng minh.

② Ta có

$$\begin{aligned}
k(k-1)C_n^k=n(n-1)C_{n-2}^{k-2}\ &\Leftrightarrow\ k(k-1)\cdot\frac{n!}{(n-k)!k!}=n(n-1)\cdot\frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!}\\
&\Leftrightarrow\ \frac{k(k-1)n!}{(n-k)!k(k-1)(k-2)!}=\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!}\\
&\Leftrightarrow\ \frac{n!}{(n-k)!(k-2)!}=\frac{n!}{(n-k)!(k-2)!}\ \text{(luôn đúng)}.
\end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

□

VÍ DỤ 5. Cho khai triển $\left(\frac{1}{3}+\frac{2x}{3}\right)^{11}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{11}x^{11}$. Hãy tìm hệ số lớn nhất trong các số a_0, a_1,...,a_{11}? **ĐS:** $a_7=\frac{C_{11}^7\cdot 2^7}{3^{11}}$, $a_8=\frac{C_{11}^8\cdot 2^8}{3^{11}}$

Lời giải

Số hạng tổng quát của khai triển $\left(\frac{1}{3}+\frac{2x}{3}\right)^{11}$ là

$$T_{k+1}=C_{11}^k\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{11-k}\cdot\left(\frac{2x}{3}\right)^k=C_{11}^k\cdot\frac{2^k}{3^{11}}\cdot x^k.$$

Do đó hệ số của số hạng tổng quát là $a_k=C_{11}^k\cdot\frac{2^k}{3^{11}}=\frac{C_{11}^k\cdot 2^k}{3^{11}}$.

Xét $\frac{a_k}{a_{k+1}}<1\Leftrightarrow\frac{C_{11}^k\cdot 2^k}{C_{11}^{k+1}\cdot 2^{k+1}}<1\Leftrightarrow\frac{k+1}{2(11-k)}<1\Leftrightarrow k<7$. Suy ra $a_0<a_1<\cdots<a_6<a_7$.

Tương tự $\frac{a_k}{a_{k+1}}>1\Leftrightarrow k>7$. Suy ra $a_8>a_9>\cdots>a_{11}$.

Lại có $\frac{a_7}{a_8}=\frac{8}{8}=1\Rightarrow a_7=a_8$, nên $a_0<a_1<\cdots<a_6<a_7=a_8>\cdots>a_{11}$.

Vậy hệ số lớn nhất là $a_7=\frac{C_{11}^7\cdot 2^7}{3^{11}}$ và $a_8=\frac{C_{11}^8\cdot 2^8}{3^{11}}$. □

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Chứng minh

1. $C_{2n}^0+C_{2n}^2+\cdots+C_{2n}^{2n}=C_{2n}^1+C_{2n}^3+\cdots+C_{2n}^{2n-1}=2^{2n-1}$.

2. $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\cdots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$, $\forall n\geq 2$, $n\in\mathbb{N}$.

Lời giải.

1. Ta có $\begin{cases}C_{2n}^0+C_{2n}^1+C_{2n}^2+C_{2n}^3+\cdots+C_{2n}^{2n-1}+C_{2n}^{2n}=2^{2n} & (1)\\ C_{2n}^0-C_{2n}^1+C_{2n}^2-C_{2n}^3+\cdots-C_{2n}^{2n-1}+C_{2n}^{2n}=0. & (2)\end{cases}$

Cộng hai vế (1) và (2) ta được

$$2\left(C_{2n}^0+C_{2n}^2+\cdots+C_{2n}^{2n}\right)=2^{2n}\Leftrightarrow C_{2n}^0+C_{2n}^2+\cdots+C_{2n}^{2n}=2^{2n-1}.$$

Trừ hai vế (1) và (2) ta được

$$2\left(C_{2n}^1+C_{2n}^3+\cdots+C_{2n}^{2n-1}\right)=2^{2n}\Leftrightarrow C_{2n}^1+C_{2n}^3+\cdots+C_{2n}^{2n-1}=2^{2n-1}.$$

Vậy $C_{2n}^0+C_{2n}^2+\cdots+C_{2n}^{2n}=C_{2n}^1+C_{2n}^3+\cdots+C_{2n}^{2n-1}=2^{2n-1}$.

② Xét nhị thức $(1+x)^{2n} = \mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^1 x + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^n x^n + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n} x^{2n}$.
Trong khai triển trên thì hệ số của x^n là C_{2n}^n. (1)
Mặt khác

$$\begin{aligned}(1+x)^{2n} &= (1+x)^n \cdot (x+1)^n \\ &= \left(\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^n\right) \cdot \left(\mathrm{C}_n^0 x^n + \mathrm{C}_n^1 x^{n-1} + \mathrm{C}_n^2 x^{n-2} + \cdots + \mathrm{C}_n^0\right).\end{aligned}$$

Hệ số của x^n trong tích trên là $(\mathrm{C}_n^0)^2 + (\mathrm{C}_n^1)^2 + (\mathrm{C}_n^2)^2 + \cdots + (\mathrm{C}_n^n)^2$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra

$$(\mathrm{C}_n^0)^2 + (\mathrm{C}_n^1)^2 + (\mathrm{C}_n^2)^2 + \cdots + (\mathrm{C}_n^n)^2 = \mathrm{C}_{2n}^n.$$

□

BÀI 2. Tính các tổng sau

① $S = \mathrm{C}_{2010}^0 + 2\mathrm{C}_{2010}^1 + 2^2\mathrm{C}_{2010}^2 + \cdots + 2^{2010}\mathrm{C}_{2010}^{2010}$. **ĐS:** $S = 3^{2010}$.

② $S = \mathrm{C}_{10}^6 + \mathrm{C}_{10}^7 + \mathrm{C}_{10}^8 + \mathrm{C}_{10}^9 + \mathrm{C}_{10}^{10}$. **ĐS:** $S = 386$.

Lời giải.

① Xét nhị thức

$$(1+x)^{2010} = \mathrm{C}_{2010}^0 + \mathrm{C}_{2010}^1 x + \mathrm{C}_{2010}^2 x^2 + \cdots + \mathrm{C}_{2010}^{2010} x^{2010}.$$

Thay $x = 2$ ta được

$$\mathrm{C}_{2010}^0 + 2\mathrm{C}_{2010}^1 + 2^2\mathrm{C}_{2010}^2 + \cdots + 2^{2010}\mathrm{C}_{2010}^{2010} = 3^{2010}.$$

Vậy $S = 3^{2010}$.

② Xét $S_1 = \mathrm{C}_{10}^0 + \mathrm{C}_{10}^1 + \mathrm{C}_{10}^2 + \cdots + \mathrm{C}_{10}^{10} = 2^{10}$.
Áp dụng công thức $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}$, ta có

$$S = \mathrm{C}_{10}^6 + \mathrm{C}_{10}^7 + \mathrm{C}_{10}^8 + \mathrm{C}_{10}^9 + \mathrm{C}_{10}^{10} = \mathrm{C}_{10}^4 + \mathrm{C}_{10}^3 + \mathrm{C}_{10}^2 + \mathrm{C}_{10}^1 + \mathrm{C}_{10}^0.$$

Do đó $S_1 = 2S + \mathrm{C}_{10}^5 \Rightarrow S = \dfrac{S_1 - \mathrm{C}_{10}^5}{2} = 386$.

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 3. Chứng minh

① $\mathrm{C}_{2n}^0 - \mathrm{C}_{2n}^1 + \mathrm{C}_{2n}^2 - \mathrm{C}_{2n}^3 + \cdots - \mathrm{C}_{2n}^{2n-1} + \mathrm{C}_{2n}^{2n} = 0$.

② $3^{16}\mathrm{C}_{16}^0 - 3^{15}\mathrm{C}_{16}^1 + 3^{14}\mathrm{C}_{16}^2 - \cdots 3\mathrm{C}_{16}^{15} + \mathrm{C}_{16}^{16} = 2^{16}$.

③ $\mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^2 \cdot 3^2 + \mathrm{C}_{2n}^4 \cdot 3^4 + \cdots + \mathrm{C}_{2n}^{2n} \cdot 3^{2n} = 2^{2n-1} \cdot (2^{2n} + 1)$.

④ $\mathrm{C}_{2001}^0 + 3^2\mathrm{C}_{2001}^2 + 3^4\mathrm{C}_{2001}^4 + \cdots + 3^{2000}\mathrm{C}_{2001}^{2000} = 2^{2000} \cdot (2^{2001} - 1)$.

⑤ $2^n\mathrm{C}_n^0 + 2^{n-2}\mathrm{C}_n^2 + 2^{n-4}\mathrm{C}_n^4 + \cdots + \mathrm{C}_n^n = \dfrac{3^n + 1}{2}$.

BÀI 4. Tính các tổng sau

① $S = C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2C_5^2 + \cdots + 2^5C_5^5$. **ĐS:** $S = 3^5$

② $S = 4^0C_8^0 + 4^1C_8^1 + 4^2C_8^2 + \cdots + 4^8C_8^8$. **ĐS:** $S = 5^8$

③ $S = C_{2010}^0 + C_{2010}^1 + C_{2010}^2 + \cdots + C_{2010}^{2010}$. **ĐS:** $S = 2^{2010}$

④ $S = C_{100}^0 + C_{100}^2 + C_{100}^4 + \cdots + C_{100}^{100}$. **ĐS:** $S = 2^{99}$

⑤ $S = \dfrac{1}{2! \cdot 2012!} + \dfrac{1}{4! \cdot 2010!} + \cdots + \dfrac{1}{2012! \cdot 2!} + \dfrac{1}{2014!}$. **ĐS:** $S = \dfrac{2^{2013} - 1}{2014!}$

BÀI 5. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn các điều kiện

① $3^nC_n^0 - 3^{n-1}C_n^1 + 3^{n-2}C_n^2 - 3^{n-3}C_n^3 + \cdots + (-1)^nC_n^n = 2048$. **ĐS:** $n = 11$

② $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + C_{2n}^6 + \cdots + C_{2n}^{2n} = 512$. **ĐS:** $n = 5$

③ $C_{2014}^2 + C_{2014}^4 + C_{2014}^6 + C_{2014}^8 + \cdots + C_{2014}^{1006} = 2^{503n} - 1$. **ĐS:** $n = 4$

④ $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^3 + \cdots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$. **ĐS:** $n = 10$

BÀI 6. Chứng minh rằng

① $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.

② $C_n^k + 3C_n^{k+1} + 3C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = C_{n+3}^{k+3}$.

③ $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.

④ $k^2C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2} + nC_{n-1}^{k-1}$.

BÀI 7. Cho khai triển $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, với các hệ số a_0, a_1,...,a_n thỏa mãn $a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \cdots + \dfrac{a_n}{2^n} = 4096$. Hãy tìm số lớn nhất trong các số a_0, a_1,...,a_n? **ĐS:** $n = 12$, $a_8 = C_{12}^8 \cdot 2^8$

BÀI 4. BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

A PHÉP THỬ

Định nghĩa 1. Phép thử ngẫu nhiên là phép thử mà ta không đoán trước được kết quả của phép thử đó mặc dù biết tập tất cả các kết quả của phép thử đó.

VÍ DỤ 1. Phép thử "Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất". Tìm không gian mẫu của phép thử.

Lời giải

Không gian mẫu của phép thử là $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$ □

VÍ DỤ 2. Xét phép thử "Gieo hai đồng xu phân biệt". Nếu ký hiệu S là mặt sấp, N là mặt ngửa. Tìm không gian mẫu của phép thử.

Lời giải

Không gian mẫu $\Omega = \{NN, SN, NS, SS\}$. □

VÍ DỤ 3. Xét phép thử T "Gieo 3 đồng xu phân biệt". Tính số phần tử của không gian mẫu.
ĐS: 8

Lời giải

Mỗi đồng xu có hai khả năng xuất hiện mặt S hay $N \Rightarrow$ không gian mẫu của phép thử là

$$\Omega = \{NNN, NSN, SNN, SSN, NNS, NSS, SNS, SSS\}.$$

Do vậy số phần tử của không gian mẫu là $n\left(\Omega\right) = 8$. □

B BIẾN CỐ

Định nghĩa 2. Biến cố là một tập con của không gian mẫu.

VÍ DỤ 4. Xét phép thử T "Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất". Gọi A là biến cố "Số chấm trên mặt xuất hiện là số chấm chẵn". Liệt kê tất cả các kết quả thuận lợi của biến cố A.

Lời giải

Biến cố $A = \{2; 4; 6\}$. □

!

① Biến cố A liên quan đến phép thử T là biến cố mà việc xảy ra hay không xảy ra của A tùy thuộc vào kết quả của T.

② Mỗi kết quả của phép thử T làm cho A xảy ra gọi là một kết quả thuận lợi của A.

③ Biến cố A có ngoài cách cho bằng mô tả, có thể cho A dưới dạng liệt kê tất cả các kết quả thuận lợi của A.

C XÁC SUẤT

Định nghĩa 3. Xét phép thử T có không gian mẫu Ω là một tập hữu hạn kết quả đồng khả năng. Biến cố A liên quan đến phép thử, $A \subset \Omega$. Xác suất của biến cố A là

$$\mathrm{P}\left(A\right) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

!

① Với mọi biến cố A của phép thử có không gian mẫu là Ω. Ta luôn có $0 \leq \mathrm{P}\left(A\right) \leq 1$.

② $\mathrm{P}\left(A\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{A}\right)$, trong đó $\overline{A}$ là biến cố đối của biến cố A.

③ Với A, B là hai biến cố ta có $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

VÍ DỤ 5. Xét phép thử T: "Gieo đồng thời hai con súc sắc cân đối và đồng chất". Tập các kết quả là tập hợp gồm tất cả các cặp số cho bởi bảng sau

Số chấm	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	$(1;1)$	$(1;2)$	$(1;3)$	$(1;4)$	$(1;5)$	$(1;6)$
2	$(2;1)$	$(2;2)$	$(2;3)$	$(2;4)$	$(2;5)$	$(2;6)$
3	$(3;1)$	$(3;2)$	$(3;3)$	$(3;4)$	$(3;5)$	$(3;6)$
4	$(4;1)$	$(4;2)$	$(4;3)$	$(4;4)$	$(4;5)$	$(4;6)$
5	$(5;1)$	$(5;2)$	$(5;3)$	$(5;4)$	$(5;5)$	$(5;6)$
6	$(6;1)$	$(6;2)$	$(6;3)$	$(6;4)$	$(6;5)$	$(6;6)$

Không gian mẫu của phép thử là $\Omega = \{(i;j) | i, j = \overline{1;6}\}$.

— Số phần tử của không gian mẫu là 36.

— Biến cố A: "Tổng số chấm xuất hiện trên mặt bằng 7".
Ta có $A = \{(1;6); (2;5); (3;4); (4;3); (5;2); (6;1)\} \Rightarrow n(A) = 6$.
Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{6}$.

VÍ DỤ 6. Gieo ngẫu nhiên một con súc sắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất của các biến cố

① A: "Mặt có số chấm lẻ xuất hiện". **ĐS:** $\dfrac{1}{2}$

② B: "Mặt xuất hiện có số chấm chia hết cho 3". **ĐS:** $\dfrac{1}{3}$

③ C: "Mặt xuất hiện có số chấm lớn hơn 2". **ĐS:** $\dfrac{2}{3}$

Lời giải

① A: "Mặt có số chấm lẻ xuất hiện".
Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 6$.
Biến cố $A = \{1;3;5\} \Rightarrow n(A) = 3$.
Xác suất của A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{2}$

② B: "Mặt xuất hiện có số chấm chia hết cho 3"
. Biến cố $B = \{6;3\} \Rightarrow n(B) = 2$.
Xác suất của biến cố B là $\mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{3}$.

③ C: "Mặt xuất hiện có số chấm lớn hơn 2".
Biến cố $C = \{3;4;5;6\} \Rightarrow \mathrm{P}(C) = \dfrac{n(C)}{n(\Omega)} = \dfrac{2}{3}$.

□

VÍ DỤ 7. Từ một hộp chứa 4 quả cầu trắng, 3 quả cầu đỏ và 2 quả cầu xanh. Lấy ngẫu nhiên một quả cầu từ hộp. Tính xác suất để

① lấy được quả màu trắng. **ĐS:** $\dfrac{4}{9}$ ② lấy được quả cầu xanh. **ĐS:** $\dfrac{1}{3}$

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 9$.

① Quả cầu được lấy có màu trắng, số cách lấy là 4.
Xác suất lấy quả cầu trắng là $\dfrac{4}{9}$.

② Quả cầu được lấy có màu đỏ, số cách lấy là 3.
Xác suất lấy được quả cầu đỏ là $\dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$.

□

VÍ DỤ 8. Trong một đợt kiểm tra về vệ sinh an toàn thực phẩm của ngành y tế tại chợ X. Ban quản lí chợ lấy ra 15 mẫu thịt lợn trong đó có 4 mẫu ở quầy A, 5 mẫu ở quầy B và 6 mẫu ở quầy C. Mỗi mẫu thịt này có khối lượng như nhau và để trong một hộp kín có kích thước giống hệt nhau. Đoàn kiểm tra lấy ngẫu nhiên ba hộp để phân tích, kiểm tra xem trong thịt lợn có chứa chất tạo nạc (Clenbuterol) hay không. Tính xác suất để cả 3 hộp lấy ra có đủ cả ba loại thịt ở các quầy A, B, C. **ĐS:** $\dfrac{24}{91}$

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{15}^3$.
Gọi X là biến cố "Cả ba của hàng đều có mẫu thịt được lấy".
Số phần tử của X là $n(X) = \mathrm{C}_4^1 . \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_6^1 = 120$.
Xác suất của X là $\mathrm{P}(X) = \dfrac{n(X)}{n(\Omega)} = \dfrac{24}{91}$. □

VÍ DỤ 9. Trong một chiếc hộp có chứa 10 quả cầu có kích thước như nhau, được đánh số từ 1 đến 10. Lấy ngẫu nhiên ra 3 quả cầu trong hộp đó. Tính xác suất để số ghi trên 3 quả cầu lấy được là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông. **ĐS:** $\dfrac{2}{45}$

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{10}^3$.
Giả sử 3 số ghi trên các quả cầu được chọn là a, b, c với $a < b < c$ thỏa mãn $a^2 + b^2 = c^2$.
Có hai khả năng $(a;b;c) = (3;4;5)$ hoặc $(a;b;c) = (6;8;10)$.
Gọi X là biến cố: "3 số ghi trên 3 quả cầu được chọn là độ dài 3 cạnh của một tam giác vuông".

Số phần tử của X là $n(X) = 2$.

Xác suất của biến cố X là $\mathrm{P}(X) = \dfrac{n(X)}{n(\Omega)} = \dfrac{2}{\mathrm{C}_{10}^2} = \dfrac{2}{45}$. □

VÍ DỤ 10. Trong một chiếc hộp 6 viên bi đỏ, 5 viên bi vàng và 4 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên trong hộp ra 4 viên bi. Tính xác suất để trong 4 viên lấy ra không đủ cả ba màu. **ĐS:** $\dfrac{43}{91}$

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{15}^4$.
Gọi A là biến cố: "4 viên lấy ra không đủ ba màu".
Biến cố A xảy ra trong các trường hợp

— **Trường hợp 1:** 4 viên đúng một màu, số cách lấy là $\mathrm{C}_6^4 + \mathrm{C}_5^4 + \mathrm{C}_4^4 = 21$.

— **Trường hợp 2:** 4 viên có đúng hai màu
+ Hai màu đỏ-vàng, có $\mathrm{C}_{11}^4 - \mathrm{C}_6^4 - \mathrm{C}_5^4 = 310$.
+ Hai màu đỏ-trắng, có $\mathrm{C}_{10}^4 - \mathrm{C}_6^4 - \mathrm{C}_4^4 = 194$.
+ Hai màu vàng-trắng, có $\mathrm{C}_9^4 - \mathrm{C}_5^4 - \mathrm{C}_4^4 = 120$.
Tổng số cách lấy 4 viên đúng hai màu là $310 + 194 + 120 = 624$.

Số phần tử của biến cố A là $n(A) = 624 + 21 = 645$.

Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{43}{91}$. □

DẠNG 4.1. Chọn hoặc sắp xếp đồ vật

D LÍ THUYẾT

- **Phương pháp:**

① **Phương pháp 1:** Tính xác suất theo định nghĩa.
Đếm số phần tử của không gian mẫu, số phần tử của biến cố.

$$\mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

② **Phương pháp 2:** Tính xác suất của biến cố đối.

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{A}\right).$$

Phương pháp này nên dùng khi xét trực tiếp có nhiều trường hợp khác nhau.

③ **Phương pháp 3:** Áp dụng quy tắc cộng và qua tắc nhân xác suất.

- **Kiến thức bổ sung:**

① Công thức đếm số phần tử của hợp hai tập hợp

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

② Công thức đếm số phần tử của hợp ba tập hợp

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C).$$

③ Phương pháp đặt song ánh $1-1$.
Khi cần đếm một tập A trực tiếp khó khăn ta có thể chỉ ra tập đó có sự tương ứng $1-1$ với tập B và khi đó chỉ cần đếm B.

E VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Một bình đựng 6 viên bi không giống nhau, trong đó có 2 xanh, 2 vàng và 2 đỏ. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi. Tính xác suất để lấy được

① 2 viên bi xanh. **ĐS:** $\frac{1}{15}$ ② 2 viên bi khác màu. **ĐS:** $\frac{4}{5}$

Lời giải

① Xác suất lấy được 2 viên bi xanh.
Số phần tử của không gian mẫu là $n\left(\Omega\right)=\mathrm{C}_6^2$.
Gọi A là biến cố "2 viên bi lấy được là bi xanh".
Số phần tử của biến cố A là $n(A)=\mathrm{C}_2^2$.
Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}\left(A\right)=\dfrac{n\left(A\right)}{n\left(\Omega\right)}=\dfrac{1}{15}$.

② Xác suất lấy được hai viên bi khác màu.
Gọi B là biến cố "2 viên bi lấy được khác màu".
Biến cố B xảy ra khi 2 viên bi lấy được là 1 xanh - 1 vàng; 1 xanh - 1 đỏ; 1 vàng - 1 đỏ.
Số phần tử của B là $n(B)=\mathrm{C}_3^2\times 2\times 2=12$.
Xác suất của biến cố B là $\mathrm{P}\left(B\right)=\dfrac{n(B)}{n(\Omega)}=\dfrac{4}{5}$.

□

VÍ DỤ 2. Một chiếc hộp đựng 6 quả cầu trắng, 4 quả cầu đỏ, 2 quả cầu đen, các quả cầu khác nhau. Chọn ngẫu nhiên 6 quả cầu. Tính xác suất để chọn được 3 quả cầu trắng, 2 quả cầu đỏ và 1 quả cầu đen. **ĐS:** $\frac{20}{77}$

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu là $n\left(\Omega\right)=\mathrm{C}_{12}^6$.
Gọi A là biến cố "Lấy được 3 quả cầu trắng, 2 quả cầu đỏ và 1 quả cầu đen".
Số phần tử của biến cố A là $n(A)=\mathrm{C}_6^3\cdot\mathrm{C}_4^2\cdot\mathrm{C}_2^1$.
Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}\left(A\right)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{20}{77}$. □

VÍ DỤ 3. Cho một hộp đựng 12 viên bi, trong đó có 7 viên bi đỏ, 5 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên mỗi lần 3 viên bi. Tính xác suất trong 2 trường hợp

① Lấy được 3 viên bi màu đỏ. **ĐS:** $\dfrac{7}{44}$. ② Lấy được ít nhất 2 viên bi màu đỏ. **ĐS:** $\dfrac{7}{11}$.

Lời giải

① Xác suất lấy được 3 viên bi màu đỏ.
Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = \mathrm{C}_{12}^3 = 220$.
Gọi A là biến cố "Lấy được 3 viên bi màu đỏ".
Số phần tử của biến cố A là $n(A) = \mathrm{C}_7^3 = 35$.
Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{7}{44}$.

② Xác xuất lấy được ít nhất 2 viên bi màu đỏ.
Gọi B là biến cố "Lấy được ít nhất hai viên bi màu đỏ".
Số phần tử của biến cố B là $n(B) = \mathrm{C}_7^3 + \mathrm{C}_7^2 \cdot \mathrm{C}_5^1 = 140$.
Xác suất của biến cố B là $\mathrm{P}(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{7}{11}$.

□

VÍ DỤ 4. Một hộp chứa các quả cầu kích thước khác nhau gồm 3 quả cầu đỏ, 6 quả cầu xanh và 9 quả cầu vàng. Chọn ngẫu nhiên 2 quả cầu. Tính xác suất để hai quả cầu được chọn là khác màu. **ĐS:** $\dfrac{11}{17}$

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = \mathrm{C}_{18}^2 = 153$.
Gọi A là biến cố "Hai quả cầu được chọn không cùng màu".
Biến cố đối $\overline{A}$ của A là "2 viên bi được lấy cùng màu".
Ta có $n\left(\overline{A}\right) = \mathrm{C}_3^2 + \mathrm{C}_6^2 + \mathrm{C}_9^2 = 54$.
Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = 1 - n\left(\overline{A}\right) = 1 - \dfrac{n\left(\overline{A}\right)}{n(\Omega)} = \dfrac{11}{17}$.

! Có thể tính trực tiếp $n(A) = \mathrm{C}_3^1 \cdot \mathrm{C}_6^1 + \mathrm{C}_3^1 \cdot \mathrm{C}_9^1 + \mathrm{C}_9^1 \cdot \mathrm{C}_6^1$.

□

VÍ DỤ 5. Một hộp đựng 15 viên bi, trong đó có 7 viên bi xanh và 8 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất để trong 3 viên bi lấy ra có ít nhất một viên bi đỏ. **ĐS:** $\dfrac{12}{13}$

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = \mathrm{C}_{15}^3 = 455$.
Gọi A là biến cố "Có ít nhất một viên bi màu đỏ được lấy".

Biến cố đối của A là $\overline{A}$ "3 viên bi được lấy đều màu xanh".
Số phần tử của $\overline{A}$ là $n\left(\overline{A}\right) = \mathrm{C}_7^3 = 35$.

Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}\left(A\right) = 1 - \dfrac{n\left(\overline{A}\right)}{n(\Omega)} = \dfrac{12}{13}$. □

VÍ DỤ 6. Một hộp đựng 20 viên bi, trong đó có 7 viên bi xanh và 8 viên bi đỏ và 5 viên bi vàng. Lấy ngẫu nhiên 9 viên bi. Tính xác suất trong các trường hợp

① 9 viên bi lấy được có đúng 2 màu. **ĐS:** $\dfrac{297}{8398}$

② 9 viên bi lấy được có đủ 3 màu. **ĐS:** $\dfrac{8101}{8398}$

Lời giải

① Xác suất 9 viên bi lấy được có đúng 2 màu.
Số phần tử của không gian mẫu $n\left(\Omega\right) = \mathrm{C}_{20}^9 = 167960$.
Gọi A là biến cố "9 viên bi được lấy có đúng hai màu".
Do số viên bi của các màu đều nhỏ hơn 9 nên ta có
+ Số cách lấy 9 viên có đúng hai màu xanh - đỏ là C_{15}^9.
+ Số cách lấy 9 viên có đúng hai màu xanh - vàng là C_{12}^9.
+ Số cách lấy 9 viên có đúng hai màu đỏ - vàng là C_{13}^9.
Do đó số phần tử của biến cố A là $n(A) = \mathrm{C}_{15}^9 + \mathrm{C}_{13}^9 + \mathrm{C}_{12}^9 = 5940$.
Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}\left(A\right) = \dfrac{n(A)}{n\left(\Omega\right)} = \dfrac{297}{8398}$.

② Xác suất 9 viên bi lấy được có đủ 3 màu.
Gọi B là biến cố "9 viên bi được lấy có đủ cả 3 màu".
Do số viên bi của các màu đều nhỏ hơn 9 nên không thể xảy ra trường hợp 9 viên một màu.
Do đó số phần tử của B là $n\left(B\right) = n\left(\Omega\right) - n\left(A\right) = 162020$.
Xác suất của B là $\mathrm{P}\left(B\right) = \dfrac{n(B)}{n\left(\Omega\right)} = \dfrac{8101}{8398}$.

□

F BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 1. Một hộp chứa 11 viên bi được đánh số thứ tự từ 1 đến 11. Chọn 6 viên bi một cách ngẫu nhiên rồi cộng các số trên 6 viên bi được rút ra với nhau. Tính xác suất để kết quả thu được là một số lẻ. **ĐS:** $\dfrac{118}{231}$

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu là $n\left(\Omega\right) = \mathrm{C}_{11}^6$.
Gọi m, n lần lượt là số thẻ có ghi số **chẵn**, số thẻ có ghi số **lẻ** được chọn.
Ta có $m + n = 6$. Do tổng của các số trên 6 thẻ là số lẻ nên cặp $(m; n) \in \{(1;5), (3;3), (5;1)\}$.
Gọi A là biến cố "Tổng số ghi trên 6 thẻ là số lẻ".
Ta có $n(A) = \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_6^5 + \mathrm{C}_5^3 \cdot \mathrm{C}_6^3 + \mathrm{C}_5^5 \cdot \mathrm{C}_6^1 = 236$.
Xác suất cần tính bằng $\dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{118}{231}$ □

BÀI 2. Từ một hộp chứa 4 viên bi xanh, 3 viên bi đỏ, 2 viên bi vàng, lấy ngẫu nhiên 2 viên bi. Tính xác suất các biến cố

① A: "hai viên bi được lấy cùng màu xanh". **ĐS:** $\dfrac{1}{6}$

② B: "hai viên bi được lấy cùng màu đỏ ". **ĐS:** $\dfrac{1}{12}$

③ C: "hai viên bi được lấy cùng màu". **ĐS:** $\dfrac{5}{18}$

④ D: "hai viên bi được lấy khác màu". **ĐS:** $\dfrac{13}{18}$

Lời giải.

① A: "hai viên bi được lấy cùng màu xanh".
Số phần tử của không gian mẫu là $n\left(\Omega\right) = \mathrm{C}_9^2$.
Số phần tử của A là $n(A) = \mathrm{C}_4^2$.
Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{6}$.

② B: "hai viên bi được lấy cùng màu đỏ ".
Số phần tử của B là $n(B) = \mathrm{C}_3^2$.
Xác suất của biến cố B là $\mathrm{P}\left(B\right) = \dfrac{n(B)}{n\left(\Omega\right)} = \dfrac{1}{12}$.

③ C: "hai viên bi được lấy cùng màu".
Ta có $n(C) = \mathrm{C}_4^2 + \mathrm{C}_3^2 + \mathrm{C}_2^2 = 10$.
Xác suất của C là $\mathrm{P}\left(C\right) = \dfrac{n(C)}{n(\Omega)} = \dfrac{5}{18}$.

④ D: "hai viên bi được lấy khác màu".
Biến cố đối của D là "Hai bi được lấy cùng màu".
Suy ra xác suất của biến cố D là $\mathrm{P}(D) = 1 - \mathrm{P}\left(C\right) = \dfrac{13}{18}$.

□

BÀI 3. Từ một hộp 13 bóng đèn, trong đó có 6 bóng hỏng, lấy ngẫu nhiên 5 bóng ra khỏi hộp. Tính xác suất sao cho

① Có nhiều nhất hai bóng hỏng. **ĐS:** $\dfrac{84}{143}$

② Có ít nhất một bóng không hỏng. **ĐS:** $\dfrac{427}{429}$

Lời giải.

① Xác suất có nhiều nhất hai bóng hỏng được lấy.
Số phần tử của không gian mẫu $n\left(\Omega\right) = \mathrm{C}_{13}^5$.
Gọi A là biến cố "Có nhiều nhất hai bóng hỏng được lấy".
Số phần tử của biến cố A là $\mathrm{C}_6^1 \cdot \mathrm{C}_7^4 + \mathrm{C}_7^3 \cdot \mathrm{C}_6^2 + \mathrm{C}_6^0 \cdot \mathrm{C}_7^5 = 756$.
Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{84}{143}$.

② Có ít nhất một bóng không hỏng.
Gọi B là biến cố "Có ít nhất một bóng hỏng được lấy trong 5 bóng được lấy ra".
Biến cố đối của B là $\overline{B}$: "Cả 5 bóng đều hỏng".
Số phần tử của $\overline{B}$ là $n\left(\overline{B}\right) = \mathrm{C}_6^5$.
Xác suất của B là $\mathrm{P}\left(B\right) = 1 - \overline{\mathrm{B}} = 1 - \dfrac{n\left(\overline{B}\right)}{n(\Omega)} = \dfrac{427}{429}$.

□

BÀI 4. Trong một hộp có 8 viên bi đỏ và 6 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp trên. Tính xác suất để 4 viên bi được lấy có cả bi xanh và bi đỏ. **ĐS:** $\dfrac{916}{1001}$

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{14}^4$.
Số phần tử của biến cố A: "4 viên bi được lấy có cả bi xanh, bi đỏ" là

$$n(A) = \mathrm{C}_{14}^4 - \mathrm{C}_8^4 - \mathrm{C}_6^4 = 916.$$

Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{916}{1001}$. □

BÀI 5. Trong chiếc hộp có 6 bi đỏ, 5 bi vàng và 4 bi trắng. Lấy ngẫu nhiên trong hộp ra 4 viên bi. Tính xác suất để trong 4 viên bi lấy ra không đủ cả 3 màu. **ĐS:** $\dfrac{48}{91}$

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n\left(\Omega\right) = \mathrm{C}_{15}^4$.
Gọi A là biến cố "4 viên bi lấy được có đủ cả 3 màu".

— **Trường hợp 1:** Có đúng 1 bi đỏ, số cách lấy là $\mathrm{C}_6^1 \cdot \mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_4^1 + \mathrm{C}_6^1 \cdot \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_4^2 = 420$.

— **Trường hợp 2:** Có đúng 2 bi đỏ được chọn, số cách lấy là $\mathrm{C}_6^2 \cdot \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_4^1 = 300$.

Số phần tử của biến cố A là $n(A) = 720$.
Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}\left(A\right) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{48}{91}$.

> **!** Có thể giải bài toán bằng cách gián tiếp. Biến cố đối $\overline{A}$ là "Bốn viên bi được chọn có đúng một màu hoặc đúng hai màu".
> Điều đó có nghĩa ta sẽ đếm số cách chọn 4 bi có đúng một màu; số cách chọn 4 bi có đúng hai màu.
> Cách giải này thể hiện ưu điểm khi số bị chọn lớn.

□

BÀI 6. Một hộp chứa 4 viên bi trắng, 5 viên bi đỏ và 6 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 4 viên bi. Tính xác suất để 4 viên bi được chọn có đủ cả 3 màu và số bi đỏ nhiều nhất. **ĐS:** $\dfrac{16}{91}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n\left(\Omega\right) = \mathrm{C}_{15}^4$.
Gọi A là biến cố: "4 viên bi được chọn có đủ cả 3 màu và số bi đỏ là nhiều nhất".
Số bi đỏ nhiều nhất và trong 4 bi được chọn đủ cả ba màu khi có đúng 2 bi đỏ được chọn.
Do đó, số phần tử của biến cố A là $n(A) = \mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_6^1 \cdot \mathrm{C}_6^1 = 240$.
Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{16}{91}$. □

BÀI 7. Một hộp đựng 3 viên bi xanh, 4 viên bi đỏ và 5 viên bi vàng. Lấy ngẫu nhiên 5 viên bi từ hộp. Tính xác suất để trong 5 bi lấy ra có đủ 3 màu và số bi xanh bằng số bi đỏ. **ĐS:** $\dfrac{35}{132}$

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n\left(\Omega\right) = \mathrm{C}_{12}^5$.
Gọi A là biến cố "5 viên bi được lấy có đủ 3 màu và số bi xanh bằng số bi đỏ".
Biến cố A xảy ra trong các trường hợp

— **Trường hợp 1:** 1 bi đỏ, 1 bi xanh và 3 bi vàng được chọn. Số cách chọn là $\mathrm{C}_3^1 \cdot \mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_5^3 = 120$.

— **Trường hợp 2:** 2 bi đỏ, 2 bi xanh và 1 bi vàng được chọn. Số cách chọn là $\mathrm{C}_3^2 \cdot \mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_5^1 = 90$.

Số phần tử của biến cố A là $120 + 90 = 210$.

Xác suất của biến cố A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{35}{132}$. □

BÀI 8. Cho hai hộp bi, hộp thứ nhất có 4 viên bi đỏ và 3 viên bi trắng. Hộp thứ hai có 2 viên bi đỏ và 4 viên bi trắng. Chọn ngẫu nhiên mỗi hộp 1 viên. Tính xác suất để hai viên bi được chọn ra có cùng màu. **ĐS:** $\dfrac{10}{21}$

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_7^1 \cdot \mathrm{C}_6^1 = 42$.

Gọi A là biến cố: "Hai viên bi được chọn có cùng màu".

Trường hợp 1: Hai bi được chọn đều là màu đỏ: $\mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_2^1 = 8$.

Trường hợp 2: Hai bi được chọn đều là màu trắng: $\mathrm{C}_3^1 \cdot \mathrm{C}_4^1 = 12$.

Số phần tử của biến cố A là: $n(A) = \mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_2^1 + \mathrm{C}_3^1 \cdot \mathrm{C}_4^1 = 20$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{10}{21}$. □

BÀI 9. Để kiểm tra chất lượng sản phẩm từ công ty sữa, người ta đã gửi đến bộ phận kiểm nghiệm 5 hộp sữa cam, 4 sữa dâu và 3 sữa nho. Bộ phận kiểm nghiệm lấy ngẫu nhiên 3 hộp sữa để phân tích mẫu. Tính xác suất để 3 hộp được chọn có cả 3 loại. **ĐS:** $\dfrac{3}{11}$

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{12}^3 = 220$.

Gọi A là biến cố: "3 hộp được chọn có cả 3 loại".

Số phần tử của biến cố A là: $n(A) = \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_3^1 = 60$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{11}$. □

G BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 10. Trong một lô hàng có 12 sản phẩm khác nhau, trong đó có đúng 2 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên 6 sản phẩm từ lô hàng đó. Hãy tính xác suất để trong 6 sản phẩm được lấy ra có không quá một phế phẩm. **ĐS:** $\dfrac{17}{22}$

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{12}^6 = 924$.

Gọi A là biến cố: "6 sản phẩm được lấy ra có không quá một phế phẩm".

Trường hợp 1: 6 sản phẩm được lấy ra không có phế phẩm nào: $\mathrm{C}_{10}^6 = 210$.

Trường hợp 2: 6 sản phẩm được lấy ra có đúng 1 phế phẩm: $\mathrm{C}_2^1 \cdot \mathrm{C}_{10}^5 = 504$.

Số phần tử của biến cố A là: $n(A) = \mathrm{C}_{10}^6 + \mathrm{C}_2^1 \cdot \mathrm{C}_{10}^5 = 714$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{17}{22}$. □

BÀI 11. Trong đợt kiểm tra chất lượng sản xuất sản phẩm tiêu dùng, một đoàn thanh tra lấy ngẫu nhiên 5 sản phẩm từ 1 lô hàng của một công ty để kiểm tra. Tính xác suất để đoàn thanh tra lấy được ít nhất 2 phế phẩm. Biết rằng trong lô hàng đó có 100 sản phẩm, trong đó có 95 chính phẩm và 5 phế phẩm. **ĐS:** $\dfrac{357319}{18821880}$

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{100}^5 = 75287520$.

Gọi A là biến cố: "5 sản phẩm được lấy ra có ít nhất 2 phế phẩm".

Suy ra biến cố đối $\overline{A}$ là biến cố "5 sản phẩm được lấy ra có không quá 1 phế phẩm".

Trường hợp 1: 5 sản phẩm được lấy ra không có phế phẩm nào: $\mathrm{C}_{95}^5 = 57940519$.

Trường hợp 2: 5 sản phẩm được lấy ra có đúng 1 phế phẩm: $\mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_{95}^4 = 15917725$.

Số phần tử của biến cố $\overline{A}$ là: $n(\overline{A}) = \mathrm{C}_{95}^5 + \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_{95}^4 = 73858244$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \dfrac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = \dfrac{357319}{18821880}$. □

BÀI 12. Một đơn vị vận tải có 10 xe ô tô trong đó có 6 xe tốt. Họ điều động ngẫu nhiên 3 xe đi công tác. Tính xác suất sao cho 3 xe điều động đi phải có ít nhất 1 xe tốt. **ĐS:** $\dfrac{29}{30}$

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{10}^3 = 120$.
Gọi A là biến cố: "3 xe điều động đi phải có ít nhất 1 xe tốt".
Suy ra biến cố đối $\overline{A}$ là biến cố "3 xe điều động đi không có xe tốt nào".
Số phần tử của biến cố $\overline{A}$ là: $n(\overline{A}) = \mathrm{C}_4^3 = 4$.

Vậy $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \dfrac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = \dfrac{29}{30}$. □

BÀI 13. Trên giá sách có 5 quyển sách toán học, 4 quyển Vật lý và 3 quyển Hóa học. Lấy ngẫu nhiên 4 quyển. Tính xác suất sao cho:

① ít nhất 1 quyển Toán học. **ĐS:** $\dfrac{92}{99}$

② có đúng 2 quyển Vật lý. **ĐS:** $\dfrac{56}{165}$

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{12}^4 = 495$.

① Gọi A là biến cố: "Lấy ngẫu nhiên 4 quyển sách sao cho có ít nhất 1 quyển Toán học".
Biến cố đối $\overline{A}$ là biến cố "Lấy ngẫu nhiên 4 quyển sách sao cho không có quyển Toán học nào".
Số phần tử của biến cố $\overline{A}$ là: $n(\overline{A}) = \mathrm{C}_7^4 = 35$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \dfrac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = \dfrac{92}{99}$.

② Gọi B là biến cố: "Lấy ngẫu nhiên 4 quyển sách sao cho có đúng 2 quyển Vật lý".
Số phần tử của biến cố B là: $n(B) = \mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_8^2 = 168$.
Vậy $\mathrm{P}(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{56}{165}$.

□

BÀI 14. Trên một kệ sách có 12 quyển sách khác nhau, gồm 4 quyển tiểu thuyết, 6 quyển truyện tranh và 2 quyển truyện cổ tích. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển từ kệ sách. Tính xác suất sao cho sao cho 3 quyển được lấy:

① đôi một khác loại. **ĐS:** $\dfrac{12}{55}$

② đúng 2 quyển cùng một loại. **ĐS:** $\dfrac{37}{55}$

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu. Ta có $n(\Omega) = \mathrm{C}_{12}^3 = 220$.

① Gọi A là biến cố "Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sao cho 3 quyển sách đôi một khác loại".
Số phần tử của biến cố A là: $n(A) = \mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_6^1 \cdot \mathrm{C}_2^1 = 48$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{12}{55}$.

② Gọi B là biến cố "Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách sao cho có đúng 2 quyển cùng loại".
Trường hợp 1: 2 quyển tiểu thuyết, 1 quyển truyện tranh hoặc 1 quyển truyện cổ tích: $C_4^2 \cdot C_8^1 = 48$.
Trường hợp 2: 2 quyển truyện tranh, 1 quyển tiểu thuyết hoặc 1 quyển truyện cổ tích: $C_6^2 \cdot C_6^1 = 90$.
Trường hợp 3: 2 quyển truyện cổ tích, 1 quyển tiểu thuyết hoặc 1 quyển truyện tranh: $C_2^2 \cdot C_{10}^1 = 10$.
Số phần tử của biến cố B là: $n(B) = C_4^2 \cdot C_8^1 + C_6^2 \cdot C_6^1 + C_2^2 \cdot C_{10}^1 = 148$.
Vậy $\mathrm{P}(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{37}{55}$.

□

BÀI 15. Một ngân hàng đề thi gồm có 20 câu hỏi. Mỗi đề thi gồm có 4 câu được lấy ngẫu nhiên từ ngân hàng đề thi. Thí sinh A đã học thuộc 10 câu trong ngân hàng đề thi. Tìm xác suất để thí sinh A rút ngẫu nhiên được một đề thi có ít nhất 2 câu đã học thuộc. **ĐS:** $\dfrac{229}{323}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{20}^4 = 4845$.
Gọi B là biến cố: "Thí sinh A rút ngẫu nhiên được một đề thi có ít nhất 2 câu đã học".
Trường hợp 1: Thí sinh A rút được 2 câu đã học thuộc: $C_{10}^2 \cdot C_{10}^2 = 2025$.
Trường hợp 2: Thí sinh A rút được 3 câu đã học thuộc: $C_{10}^3 \cdot C_{10}^1 = 1200$.
Trường hợp 3: Thí sinh A rút được 4 câu đã học thuộc: $C_{10}^4 = 210$.
Số phần tử của biến cố B là: $n(B) = C_{10}^2 \cdot C_{10}^2 + C_{10}^3 \cdot C_{10}^1 + C_{10}^4 = 3435$.
Vậy $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{229}{323}$. □

BÀI 16. Mỗi đề thi gồm 4 câu được lấy ngẫu nhiên từ 15 câu hỏi trong một ngân hàng đề thi gồm 15 câu hỏi. Bạn Thủy đã học thuộc 8 câu trong ngân hàng đề thi. Tính xác suất để bạn Thủy rút ngẫu nhiên được một đề thi có ít nhất 2 câu đã thuộc. **ĐS:** $\dfrac{10}{13}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{15}^4 = 1365$.
Gọi A là biến cố "Bạn Thủy rút ngẫu nhiên được một đề thi có ít nhất 2 câu đã thuộc".
Trường hợp 1: Bạn Thủy rút được 2 câu đã học thuộc: $C_8^2 \cdot C_7^2 = 588$.
Trường hợp 2: Bạn Thủy rút được 3 câu đã học thuộc: $C_8^3 \cdot C_7^1 = 392$.
Trường hợp 3: Bạn Thủy rút được 4 câu đã học thuộc: $C_8^4 = 70$.
Số phần tử của biến cố A là: $n(A) = C_8^2.C_7^2 + C_8^3.C_7^1 + C_8^4 = 1050$
Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{10}{13}$. □

BÀI 17. Đề cương ôn tập cuối năm môn Lịch sử 12 có 40 câu hỏi khác nhau. Đề thi kiểm tra học kỳ 2 gồm 3 câu hỏi trong 40 câu hỏi đó. Một học sinh chỉ học 20 câu trong đề cương ôn tập. Giả sử các câu hỏi trong đề cương đều có khả năng được chọn làm câu hỏi thi như nhau. Tính xác suất để ít nhất có 2 câu hỏi trong đề thi kiểm tra học kỳ 2 nằm trong số 20 câu hỏi mà em học sinh đã được học. **ĐS:** $\dfrac{1}{2}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{40}^3 = 9880$.
Gọi A là biến cố "ít nhất có 2 câu hỏi trong đề thi kiểm tra học kỳ 2 nằm trong số 20 câu hỏi mà em học sinh đã được học"
Trường hợp 1: Rút được 2 câu hỏi trong số 20 câu đã học: $C_{20}^2 \cdot C_{20}^1 = 3800$.
Trường hợp 2: Rút được 3 câu hỏi trong số 20 câu đã học: $C_{20}^3 = 1140$.

Số phần tử của biến cố A là: $n(A) = C_{20}^2.C_{20}^1 + C_{20}^3 = 4940$

Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{2}$. □

BÀI 18. Một bộ đề thi toán học sinh giỏi lớp 12 mà mỗi đề gồm 5 câu, được chọn từ 15 câu dễ, 10 câu trung bình và 5 câu khó. Một đề thi được gọi là "Tốt" nếu trong đề thi có cả 3 câu dễ, trung bình và khó, đồng thời số câu dễ không ít hơn 2. Lấy ngẫu nhiên một đề thi trong bộ đề trên. Tìm xác suất để đề thi lấy ra là một đề thi "Tốt". **ĐS:** $\dfrac{625}{1566}$

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{30}^5 = 142506$.

Gọi A là biến cố "đề thi lấy ra là một đề thi Tốt".

Vì trong một đề thi Tốt có cả 3 câu dễ, trung bình và khó, đồng thời số câu dễ không ít hơn 2 nên ta có các trường hợp sau đây thuận lợi cho biến cố A.

Trường hợp 1: Đề thi gồm 3 câu dễ, 1 trung bình, 1 khó: $C_{15}^3 \cdot C_{10}^1.C_5^1 = 22750$.

Trường hợp 2: Đề thi gồm 2 câu dễ, 2 trung bình, 1 khó: $C_{15}^2 \cdot C_{10}^2.C_5^1 = 23625$.

Trường hợp 3: Đề thi gồm 2 câu dễ, 1 trung bình, 2 khó: $C_{15}^2 \cdot C_{10}^1.C_5^2 = 10500$.

Số phần tử của biến cố A là: $n(A) = C_{15}^3.C_{10}^1.C_5^1 + C_{15}^2.C_{10}^2.C_5^1 + C_{15}^2.C_{10}^1.C_5^2 = 56875$.

Vậy $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{625}{1566}$. □

BÀI 19. Trong kì thi THPT Quốc Gia, Khoa làm đề thi trắc nghiệm môn Hóa. Đề thi gồm 50 câu hỏi, mỗi câu có 4 phương án trả lời, trong đó chỉ có 1 phương án đúng, trả lời đúng mỗi câu được $0,2$ điểm. Khoa trả lời hết các câu hỏi và chắc chắn đúng 45 câu, 5 câu còn lại Khoa chọn ngẫu nhiên. Tính xác suất để điểm thi Hóa của Khoa không dưới $9,5$ điểm. **ĐS:** $\dfrac{53}{512}$

Lời giải.

Bạn Khoa được không dưới $9,5$ điểm khi và chỉ khi trong 5 câu trả lời ngẫu nhiên, khoa trả lời đúng ít nhất 3 câu.

Xác suất trả lời đúng một câu là $0,25$, trả lời sai là $0,75$

Xác suất Khoa trả lời đúng 3 câu trên 5 câu là: $C_5^3.(0,25)^3.(0,75)^2 = \dfrac{45}{512}$.

Xác suất Khoa trả lời đúng 4 câu trên 5 câu là: $C_5^4.(0,25)^4.(0,75) = \dfrac{15}{1024}$.

Xác suất Khoa trả lời đúng 5 câu là: $C_5^5.(0,25)^5 = \dfrac{1}{1024}$.

Vậy xác suất Khoa được không dưới $9,5$ điểm là: $C_5^3.(0,25)^3.(0,75)^2 + C_5^4.(0,25)^4.(0,75) + C_5^5.(0,25)^5 = \dfrac{53}{512}$.

□

DẠNG 4.2. Chọn hoặc sắp xếp người

H LÍ THUYẾT

I VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Một lớp có 30 học sinh, trong đó có 8 em giỏi, 15 em khá và 7 em trung bình. Chọn ngẫu nhiên 3 em đi dự đại hội. Tính xác suất để:

1. Cả 3 em đều là học sinh giỏi. **ĐS:** $\dfrac{2}{145}$
2. Có ít nhất 1 học sinh giỏi. **ĐS:** $\dfrac{18}{29}$
3. Không có học sinh trung bình. **ĐS:** $\dfrac{253}{580}$

Lời giải

Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{30}^3 = 4060$.

1. Gọi A là biến cố: "Cả 3 em được chọn đều là học sinh giỏi", ta có $n(A) = \mathrm{C}_8^3 = 56$.
   Vậy xác suất của biến cố A là: $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{2}{145}$.
2. Gọi B là biến cố: "Trong cả 3 em được chọn có ít nhất 1 học sinh giỏi".
   Suy ra $\overline{B}$ là biến cố "Trong cả 3 em được chọn không có học sinh giỏi", ta có $n(\overline{B}) = \mathrm{C}_{22}^3 = 1540$.
   Vậy xác suất của biến cố B là: $\mathrm{P}(B) = 1 - \mathrm{P}(\overline{B}) = 1 - \dfrac{n(\overline{B})}{n(\Omega)} = \dfrac{18}{29}$.
3. Gọi C là biến cố: "Trong cả 3 em được chọn không có học sinh trung bình", ta có $n(C) = \mathrm{C}_{23}^3 = 1771$.
   Vậy xác suất của biến cố C là: $\mathrm{P}(C) = \dfrac{n(C)}{n(\Omega)} = \dfrac{253}{580}$.

□

VÍ DỤ 2. Một đội ngũ cán bộ khoa học gồm 8 nhà toán học nam, 5 nhà vật lý nữ và 3 nhà hóa học nữ. Chọn ra từ đó 4 người đi công tác. Tính xác suất trong 4 người được chọn phải có nữ và có đủ cả ba bộ môn. **ĐS:** $\dfrac{3}{7}$

Lời giải

Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{16}^4 = 1820$.
Gọi A là biến cố: "Trong 4 người được chọn phải có nữ và có đủ cả ba bộ môn".
Trường hợp 1: Số cách chọn 4 người trong đó có 2 nhà toán học, 1 nhà vật lý, 1 nhà hóa học là: $\mathrm{C}_8^2 \cdot \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_3^1 = 420$.
Trường hợp 2: Số cách chọn 4 người trong đó có 1 nhà toán học, 2 nhà vật lý, 1 nhà hóa học là: $\mathrm{C}_8^1 \cdot \mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_3^1 = 240$.
Trường hợp 3: Số cách chọn 4 người trong đó có 1 nhà toán học, 1 nhà vật lý, 2 nhà hóa học là: $\mathrm{C}_8^1 \cdot \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_3^2 = 120$.
Số phần tử của biến cố A là: $n(A) = \mathrm{C}_8^2 \cdot \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_3^1 + \mathrm{C}_8^1 \cdot \mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_3^1 + \mathrm{C}_8^1 \cdot \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_3^2 = 780$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{7}$. □

VÍ DỤ 3. Một lớp có 20 nam sinh và 15 nữ sinh. Giáo viên gọi ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được gọi có cả nam và nữ. **ĐS:** $\dfrac{4615}{5236}$

Lời giải

Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{35}^{4} = 52360$.
Gọi A là biến cố: "4 học sinh được gọi lên bảng có cả nam và nữ".
Trường hợp 1: Số cách chọn 4 bạn lên bảng trong đó có 3 học sinh nam, 1 học nữ là: $\mathrm{C}_{20}^{3} \cdot \mathrm{C}_{15}^{1} = 17100$
Trường hợp 2: Số cách chọn 4 bạn lên bảng trong đó có 2 học sinh nam, 2 học nữ là: $\mathrm{C}_{20}^{2} \cdot \mathrm{C}_{15}^{2} = 19950$.
Trường hợp 3: Số cách chọn 4 bạn lên bảng trong đó có 1 học sinh nam, 3 học nữ là: $\mathrm{C}_{20}^{1} \cdot \mathrm{C}_{15}^{3} = 9100$.
Số phần tử của biến cố A là: $n(A) = \mathrm{C}_{20}^{3}.\mathrm{C}_{15}^{1} + \mathrm{C}_{20}^{2}.\mathrm{C}_{15}^{2} + \mathrm{C}_{20}^{1} \cdot \mathrm{C}_{15}^{3} = 46150$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{4615}{5236}$. □

VÍ DỤ 4. Một đội văn nghệ có 15 người gồm 9 nam và 6 nữ. Chọn ngẫu nhiên 8 người đi hát đồng ca. Tính xác suất để trong 8 người được chọn có số nữ nhiều hơn số nam. **ĐS:** $\dfrac{12}{143}$

Lời giải

Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{15}^{8} = 6435$.
Gọi A là biến cố: "8 người được chọn có số nữ nhiều hơn số nam".
Trường hợp 1: 2 học sinh nam và 6 học sinh nữ được chọn: $\mathrm{C}_{9}^{2} \cdot \mathrm{C}_{6}^{6} = 36$.
Trường hợp 2: 3 học sinh nam và 5 học sinh nữ được chọn: $\mathrm{C}_{9}^{3} \cdot \mathrm{C}_{6}^{5} = 504$.
Số phần tử của biến cố A là $n(A) = \mathrm{C}_{9}^{2} \cdot \mathrm{C}_{6}^{6} + \mathrm{C}_{9}^{3} \cdot \mathrm{C}_{6}^{5} = 540$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{12}{143}$. □

VÍ DỤ 5. Cần chọn ngẫu nhiên 5 học sinh trong một lớp học có 15 nam và 10 nữ để tham gia đồng diễn. Tính xác suất sao cho 5 học sinh được chọn có cả nam lẫn nữ và số học sinh nữ ít hơn số học sinh nam. **ĐS:** $\dfrac{325}{506}$

Lời giải

Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{25}^{5} = 53130$.
Gọi A là biến cố: "5 học sinh được chọn có cả nam lẫn nữ và số học sinh nữ ít hơn số học sinh nam".
Trường hợp 1: 1 học sinh nữ và 4 học sinh nam được chọn: $\mathrm{C}_{10}^{1} \cdot \mathrm{C}_{15}^{4} = 13650$.
Trường hợp 2: 2 học sinh nữ và 3 học sinh nam được chọn: $\mathrm{C}_{10}^{2} \cdot \mathrm{C}_{15}^{3} = 20475$.
Số phần tử của biến cố A là: $n(A) = \mathrm{C}_{10}^{1} \cdot \mathrm{C}_{15}^{4} + \mathrm{C}_{10}^{2} \cdot \mathrm{C}_{15}^{3} = 34125$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{325}{506}$. □

J BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 1. Một chi đoàn có 15 đoàn viên, trong đó có 7 nam và 8 nữ. Người ta chọn ra 4 người trong chi đoàn đó để lập một đội thanh niên tình nguyện. Tính xác suất sao cho trong 4 người được chọn có ít nhất một nữ. **ĐS:** $\dfrac{38}{39}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{15}^4 = 1365$.
Gọi A là biến cố: "4 người được chọn có ít nhất một nữ".
Suy ra biến cố đối $\overline{A}$ là biến cố: "4 người được chọn không có nữ nào".
Số phần tử của biến cố $\overline{A}$ là: $n(\overline{A}) = \mathrm{C}_7^4 = 35$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \dfrac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = \dfrac{38}{39}$. □

BÀI 2. Một lớp học có 20 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Thầy giáo chủ nhiệm chọn ra 5 học sinh để lập một tốp ca chào mừng ngày 22 tháng 12. Tính xác suất sao cho trong tốp ca có ít nhất một học sinh nữ. **ĐS:** $\dfrac{2273}{2387}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{35}^5 = 324632$.
Gọi A là biến cố: "5 người được chọn có ít nhất một nữ".
Suy ra biến cố đối $\overline{A}$ là biến cố:"5 người được chọn không có nữ nào".
Số phần tử của biến cố $\overline{A}$ là: $n(\overline{A}) = \mathrm{C}_{20}^5 = 15504$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \dfrac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = \dfrac{2273}{2387}$. □

BÀI 3. Một đội văn nghệ của trường THPT Năng Khiếu gồm 5 học sinh nữ và 10 học sinh nam. Chọn ngẫu nhiên 8 học sinh trong đội văn nghệ để lập một tốp ca. Tính xác suất để tốp ca có ít nhất 3 học sinh nữ. **ĐS:** $\dfrac{82}{143}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{15}^8 = 6435$.
Gọi A là biến cố: "có ít nhất 3 học sinh nữ được chọn"
Suy ra biến cố đối $\overline{A}$ là biến cố:"có không quá 2 học sinh nữ được chọn"
Trường hợp 1: không có học sinh nữ nào được chọn: $\mathrm{C}_{10}^8 = 45$.
Trường hợp 2: 1 học sinh nữ và 7 học sinh nam được chọn: $\mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_{10}^7 = 600$.
Trường hợp 3: 2 học sinh nữ và 6 học nam được chọn: $\mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_{10}^6 = 2100$.
Số phần tử của biến cố $\overline{A}$ là: $n(\overline{A}) = \mathrm{C}_{10}^8 + \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_{10}^7 + \mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_{10}^6 = 2745$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \dfrac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = \dfrac{82}{143}$. □

BÀI 4. Một tổ có 11 học sinh, trong đó có 5 nam và 6 nữ. Giáo viên chọn 5 học sinh làm trực tuần. Tính xác suất để chọn được nhiều nhất 2 học sinh nam. **ĐS:** $\dfrac{281}{462}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{11}^5 = 462$.
Gọi A là biến cố "5 học sinh được chọn có nhiều nhất 2 học sinh nam".
Trường hợp 1: không có học sinh nam nào được chọn: $\mathrm{C}_6^5 = 6$.
Trường hợp 2: 1 học sinh nam và 4 học sinh nữ được chọn: $\mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_6^4 = 75$.
Trường hợp 3: 2 học sinh nam và 3 học nữ được chọn: $\mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_6^3 = 200$.
Số phần tử của biến cố A là: $n(A) = \mathrm{C}_6^5 + \mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_6^4 + \mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_6^3 = 281$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{281}{462}$. □

BÀI 5. Trong kì thi thử TN THPT QG lần I năm 2017 tại trường THPT X có 13 học sinh đạt điểm 9,0 môn Toán, trong đó khối 12 có 8 học sinh nam và 3 học sinh nữ, khối 11 có 2 học sinh nam. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh bất kỳ để trao thưởng, tính xác suất để trong 3 học sinh chọn có cả nam và nữ, có cả khối 11 và khối 12. **ĐS:** $\frac{9}{286}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{13}^3 = 286$.
Gọi A là biến cố "3 học sinh được chọn có cả nam và nữ, có cả khối 11 và khối 12".
Trường hợp 1: 1 học sinh nam khối 11 và 2 học sinh nữ khối 12: $\mathrm{C}_2^1 \cdot \mathrm{C}_3^2 = 6$.
Trường hợp 2: 2 học sinh nam khối 11 và 1 học sinh nữ khối 12 được chọn: $\mathrm{C}_2^2 \cdot \mathrm{C}_3^1 = 3$.
Số phần tử của biến cố A là: $n(A) = \mathrm{C}_2^1 \cdot \mathrm{C}_3^2 + \mathrm{C}_2^2 \cdot \mathrm{C}_3^1 = 9$
Vậy $\mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{9}{286}$. □

BÀI 6. Tổ một có 3 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Tổ hai có 5 học sinh nam và 2 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên mỗi tổ một học sinh đi làm nhiệm vụ. Tính xác suất sao cho chọn được hai học sinh có cả nam và nữ ? **ĐS:** $\frac{26}{49}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu: $n(\Omega) = \mathrm{C}_7^1 \cdot \mathrm{C}_7^1 = 49$.
Gọi A là biến cố: "Hai học sinh được chọn có cả nam và nữ, có cả tổ một và tổ hai "
Trường hợp 1: 1 học sinh nam tổ một và 1 học sinh nữ tổ hai: $\mathrm{C}_3^1 \cdot \mathrm{C}_2^1 = 6$.
Trường hợp 2: 1 học sinh nữ tổ một và 1 học sinh nam tổ hai: $\mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_5^1 = 20$
Số phần tử của biến cố A là: $n(A) = \mathrm{C}_3^1 \cdot \mathrm{C}_2^1 + \mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_5^1 = 26$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{26}{49}$. □

BÀI 7. Trong một tổ của lớp 12A có 12 học sinh gồm có 7 học sinh nam và 5 học sinh nữ, trong đó có A (nam) là tổ trưởng và B (nữ) là tổ phó. Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh trong tổ để tham gia hoạt động tập thể của trường nhân dịp ngày thành lập Đoàn 26 tháng 3. Tính xác suất để sao cho nhóm học sinh được chọn có 3 học sinh nam và 2 học sinh nữ, trong đó phải có bạn A hoặc bạn B nhưng không có cả hai **ĐS:** $P = \frac{85}{396}$.

Lời giải.
Không gian mẫu là $|\Omega| = \mathrm{C}_{12}^5$.
Ta xét hai trường hợp xảy ra cho yêu cầu bài toán là

— **TH1:** Có bạn A nhưng không có bạn B, khi đó ta cần chọn thêm 2 học sinh nam và 2 học sinh nữ. Vậy có $\mathrm{C}_6^2 \times \mathrm{C}_4^2$ cách chọn.

— **TH1:** Có bạn B nhưng không có bạn A, khi đó ta cần chọn thêm 3 học sinh nam và 1 học sinh nữ. Vậy có $\mathrm{C}_6^3 \times \mathrm{C}_4^1$ cách chọn.

Vậy số cách chọn để yêu cầu bài toán thỏa mãn là $|\Omega_A| = \mathrm{C}_6^2 \times \mathrm{C}_4^2 + \mathrm{C}_6^3 \times \mathrm{C}_4^1 = 170$.
Vậy ta suy ra xác suất cần tìm là $P = \frac{170}{\mathrm{C}_{12}^5} = \frac{85}{396}$. □

BÀI 8. Một đồn cảnh sát gồm có 9 người, trong đó có 2 trung tá An và Bình. Trong một nhiệm vụ cần huy động 3 đồng chí thực hiện nhiệm vụ ở địa điểm C, 2 đồng chí thực hiện nhiệm vụ ở địa điểm D và 4 đồng chí còn lại trực ở đồn. Tính xác suất sao cho hai trung tá An và Bình không ở cùng một khu vực làm nhiệm vụ. **ĐS:** $P = \frac{13}{18}$.

Lời giải.
Số cách chia 9 người ra làm việc ở ba địa điểm là $\mathrm{C}_9^3 \times \mathrm{C}_6^2 \times \mathrm{C}_4^4$.
Xét tình huống hai trung tá An và Bình cùng làm việc ở một địa điểm, ta có ba trường hợp

— **TH1:** An và Bình cùng làm việc ở địa điểm C, ta có $C_7^1 \times C_6^2 \times C_4^4$.

— **TH2:** An và Bình cùng làm việc ở địa điểm D, ta có $C_7^3 \times C_4^4$.

— **TH3:** An và Bình cùng làm việc ở địa điểm E, ta có $C_7^3 \times C_4^2 \times C_2^2$.

Vậy xác suất để phân công nhiệm vụ sao cho An và Bình không làm chung ở một địa điểm là

$$P = 1 - \frac{C_7^1 \times C_6^2 \times C_4^4 + C_7^3 \times C_4^4 + C_7^3 \times C_4^2 \times C_2^2}{C_9^3 \times C_6^2 \times C_4^4} = \frac{13}{18}.$$

□

BÀI 9. Bốn bạn nam và bốn bạn nữ, được xếp ngồi ngẫu nhiên vào 8 ghế xếp thành hàng ngang, trong 8 bạn có hai bạn tên An và Bình. Tìm xác suất sao cho

① Nam nữ ngồi xen kẽ nhau. **ĐS:** $P_1 = \frac{1}{35}$.

② Bốn bạn nam luôn ngồi cạnh nhau. **ĐS:** $P_2 = \frac{1}{14}$.

③ Đầu ghế và cuối ghế bắt buộc phải là nam. **ĐS:** $P_3 = \frac{3}{14}$.

④ Tất cả các bạn nữ không ngồi cạnh nhau. **ĐS:** $P_4 = \frac{13}{14}$.

⑤ Hai đầu ghế phải khác giới. **ĐS:** $P_5 = \frac{4}{7}$.

⑥ Các bạn nam luôn ngồi cạnh nhau và các bạn nữ luôn ngồi cạnh nhau. **ĐS:** $P_6 = \frac{1}{35}$.

⑦ An và Bình luôn ngồi gần nhau. **ĐS:** $P_7 = \frac{1}{4}$.

⑧ An và bình không ngồi cạnh nhau. **ĐS:** $P_8 = \frac{3}{4}$.

Lời giải.
Số cách xếp chỗ một cách tùy ý cho 8 bạn là 8! cách.

① Để các bạn nam và nữ ngồi xen kẽ nhau, ta có $2 \times 4! \times 4!$ cách, suy ra xác suất là

$$P_1 = \frac{2 \times 4! \times 4!}{8!} = \frac{1}{35}.$$

② Xem bốn bạn nam là một nhóm, ta xếp nhóm đó với các bạn nữ thì có 5! cách xếp. Trong nhóm bốn bạn nam, có 4! cách đổi chỗ các bạn, nên có tổng cộng $5! \times 4!$ cách xếp để bốn bạn nam luôn ngồi cạnh nhau. Suy ra xác suất là $P_2 = \frac{5! \times 4!}{8!} = \frac{1}{14}$.

③ Để chọn hai bạn nam cho vị trí đầu và cuối, ta có A_4^2 cách, xếp 6 bạn còn lại vào các vị trí ở giữa, ta có 6! cách xếp. Vậy có $A_4^2 \times 6!$ cách, suy ra xác suất là $P_3 = \frac{A_4^2 \times 6!}{8!} = \frac{3}{14}$.

④ Xem bốn bạn nữ là một nhóm, ta xếp nhóm đó với các bạn nam thì có 5! cách xếp. Trong nhóm bốn bạn nữ, có 4! cách đổi chỗ các bạn, nên có tổng cộng $5! \times 4!$ cách xếp để bốn bạn nữ ngồi cạnh nhau. Suy ra xác suất để tất cả các bạn nữ không ngồi cạnh nhau là $P_4 = 1 - \frac{5! \times 4!}{8!} = \frac{13}{14}$.

⑤ Hai đầu ghế khác giới nên có hai trường hợp xảy ra, vậy có $2 \times 4 \times 4$ cách xếp cho hai ghế đầu. Các ghế còn lại có 6! cách xếp, vậy nên có $2 \times 4 \times 4 \times 6!$ cách xếp.
Suy ra xác suất là $P_5 = \frac{2 \times 4 \times 4 \times 6!}{8!} = \frac{4}{7}$.

⑥ Xem bốn bạn nam là một nhóm, bốn bạn nữ là một nhóm, xếp hai nhóm đó ta có 2! cách xếp, ở mỗi nhóm, có 4! cách xếp chỗ các thành viên trong đó, nên tổng cộng có $2! \times 4! \times 4!$ cách xếp.
Suy ra xác suất là $P_6 = \dfrac{2! \times 4! \times 4!}{8!} = \dfrac{1}{35}$.

⑦ Xem hai bạn An và Bình là một nhóm, xếp nhóm đó chung với các bạn còn lại có 7! cách, sau đó hai bạn đổi chỗ với nhau nên có 2! cách xếp. Vậy tổng cộng có $7! \times 2!$ cách xếp, suy ra xác suất là $P_7 = \dfrac{7! \times 2!}{8!} = \dfrac{1}{4}$.

⑧ Xem hai bạn An và Bình là một nhóm, xếp nhóm đó chung với các bạn còn lại có 7! cách, sau đó hai bạn đổi chỗ với nhau nên có 2! cách xếp. Vậy tổng cộng có $7! \times 2!$ cách xếp, suy ra xác suất để An và Bình không ngồi cạnh nhau là $P_8 = 1 - \dfrac{7! \times 2!}{8!} = \dfrac{3}{4}$.

□

BÀI 10. Xếp ngẫu nhiên 3 người đàn ông, 2 người phụ nữ và 1 đứa bé vào ngồi trên 6 cái ghế xếp thành hàng ngang. Tính xác suất sao cho

① Đứa bé ngồi giữa hai người phụ nữ. **ĐS:** $P_1 = \dfrac{1}{15}$.

② Đứa bé ngồi giữa hai người đàn ông. **ĐS:** $P_2 = \dfrac{1}{5}$.

Lời giải.
Số cách xếp chỗ tùy ý cho 6 người là 6! cách.

① Để đứa bé ngồi giữa hai người phụ nữ, ta xem đứa bé và hai người phụ nữ là một nhóm. Ta xếp nhóm đó với 3 người đàn ông, có 4! cách.
Trong nhóm em bé và phụ nữ, ta có 2! cách xếp vị trí cho hai người phụ nữ.
Vậy có $4! \times 2!$ cách, suy ra xác suất để đứa bé ngồi giữa hai phụ nữ là $P_1 = \dfrac{4! \times 2!}{6!} = \dfrac{1}{15}$.

② Để đứa bé ngồi giữa hai người đàn ông, ta xem đứa bé và hai người đàn ông là một nhóm. Để chọn được hai đàn ông đứng hai bên em bé, ta có A_3^2 cách, xếp nhóm đó với 2 người phụ nữ và người đàn ông còn lại, có 4! cách.
Vậy có $\mathrm{A}_3^2 \times 4!$ cách, suy ra xác suất để đứa bé ngồi giữa hai đàn ông là $P_2 = \dfrac{\mathrm{A}_3^2 \times 4!}{6!} = \dfrac{1}{5}$.

□

K BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 11. Trong giờ Thể dục, tổ I lớp 11A có 12 học sinh gồm 7 học sinh nam và 5 học sinh nữ tập trung ngẫu nhiên theo một hàng dọc. Tính xác suất để người đứng ở đầu hàng và cuối hàng đều là học sinh nam. **ĐS:** $P = \dfrac{7}{22}$.

Lời giải.
Số cách xếp chỗ tùy ý cho 12 học sinh đó là 12! cách.
Để người đứng đầu hàng và cuối hàng đều là nam, ta có A_7^2 cách chọn học sinh xếp vào hai vị trí đó.
Các học sinh còn lại được xếp vào giữa, có 10! cách xếp.
Suy ra xác suất để bài toán xảy ra là $P = \dfrac{\mathrm{A}_7^2 \times 10!}{12!} = \dfrac{7}{22}$. □

BÀI 12. Đội tuyển học sinh giỏi của trường THPT X có 8 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Trong buổi lễ trao phần thưởng, các học sinh trên được xếp thành một hàng ngang. Tính xác suất để khi xếp sao cho hai học sinh nữ không đứng cạnh nhau. **ĐS:** $P = \dfrac{14}{55}$.

Lời giải.
Số cách xếp chỗ tùy ý cho 12 học sinh đó là 12! cách.
Ta xếp 8 học sinh nam vào hàng ngang, có 8! cách xếp.
Các học sinh nữ được xếp vào các khe hỡ giữa các bạn nam, có 9 vị trí để các bạn nữ có thể đứng, nên có A_9^4 cách xếp các bạn nữ.
Suy ra xác suất để bài toán xảy ra là $P = \dfrac{8! \times A_9^4}{12!} = \dfrac{14}{55}$. □

BÀI 13. Xếp ngẫu nhiên 3 học sinh nam và 2 học sinh nữ thành một hàng ngang. Tính xác suất để có 2 học sinh nữ đứng cạnh nhau. **ĐS:** $P = \dfrac{2}{5}$.

Lời giải.
Số cách xếp chỗ tùy ý cho 5 học sinh đó là 5! cách.
Ta xem hai học sinh nữ là một nhóm, xếp nhóm đó chung với các bạn nam, ta có 4! cách xếp.
Trong nhóm hai học sinh nữ, hai bạn có 2! cách để đổi chỗ cho nhau.
Suy ra xác suất để bài toán xảy ra là $P = \dfrac{4! \times 2!}{5!} = \dfrac{2}{5}$. □

BÀI 14. Một tổ học sinh có 5 em nữ và 8 em nam được xếp thành một hàng dọc. Tính xác suất để không có hai em nữ nào đứng cạnh nhau? **ĐS:** $P = \dfrac{14}{143}$.

Lời giải.
Số cách xếp chỗ tùy ý cho 13 học sinh đó là 13! cách.
Ta xếp 8 học sinh nam vào hàng ngang, có 8! cách xếp.
Các học sinh nữ được xếp vào các khe hỡ giữa các bạn nam, có 9 vị trí để các bạn nữ có thể đứng, nên có A_9^5 cách xếp các bạn nữ.
Suy ra xác suất để bài toán xảy ra là $P = \dfrac{8! \times A_9^5}{13!} = \dfrac{14}{143}$. □

BÀI 15. Một tổ học sinh có 4 em nữ và 5 em nam được xếp thành một hàng dọc. Tính xác suất để chỉ có hai em nữ A và B đứng cạnh nhau, còn các em nữ còn lại không đứng cạnh nhau và cũng không đứng cạnh A và B. **ĐS:** $P = \dfrac{5}{21}$.

Lời giải.
Số cách xếp chỗ tùy ý cho 9 học sinh đó là 9! cách.
Ta xếp 5 học sinh nam vào hàng ngang, có 5! cách xếp.
Các học sinh nữ được xếp vào các khe hỡ giữa các bạn nam, có 6 vị trí để các bạn nữ có thể đứng.
Xét hai bạn A và B là một nhóm, ta có có A_6^4 cách xếp các bạn nữ. Ở tại vị trí nhóm hai bạn A và B đứng, hai bạn có 2! cách đổi chỗ cho nhau, nên có tất cả $A_6^4 \times 2!$ cách xếp nữ thỏa yêu cầu bài toán.
Suy ra xác suất để bài toán xảy ra là $P = \dfrac{5! \times A_6^4 \times 2!}{9!} = \dfrac{5}{21}$. □

BÀI 16. Xếp ngẫu nhiên 3 người đàn ông, 2 người đàn bà và 1 đứa bé vào ngồi trên 6 cái ghế xếp quanh bàn tròn. Tính xác suất sao cho:

① Đứa bé ngồi giữa hai người đàn bà. **ĐS:** $P_1 = \dfrac{1}{10}$.

② Đứa bé ngồi giữa hai người đàn ông. **ĐS:** $P_2 = \dfrac{3}{10}$.

Lời giải.
Số cách xếp chỗ tùy ý cho 6 người lên bàn tròn là 5! cách.

① Để đứa bé ngồi giữa hai người phụ nữ, ta xem đứa bé và hai người phụ nữ là một nhóm. Ta xếp nhóm đó với 3 người đàn ông vào bàn tròn, có 3! cách.
Trong nhóm em bé và phụ nữ, ta có 2! cách xếp vị trí cho hai người phụ nữ.
Vậy có $3! \times 2!$ cách, suy ra xác suất để đứa bé ngồi giữa hai phụ nữ là $P_1 = \dfrac{3! \times 2!}{5!} = \dfrac{1}{10}$.

② Để đứa bé ngồi giữa hai người đàn ông, ta xem đứa bé và hai người đàn ông là một nhóm. Để chọn được hai đàn ông đứng hai bên em bé, ta có A_3^2 cách, xếp nhóm đó với 2 người phụ nữ và người đàn ông còn lại, có 3! cách.
Vậy có $A_3^2 \times 3!$ cách, suy ra xác suất để đứa bé ngồi giữa hai đàn ông là $P = \dfrac{A_3^2 \times 3!}{5!} = \dfrac{3}{10}$.

□

BÀI 17. Có 5 bạn nam và 5 bạn nữ xếp ngồi ngẫu nhiên quanh một bàn tròn. Tính xác suất sao cho nam, nữ ngồi xen kẽ nhau. **ĐS:** $P = \dfrac{1}{126}$.

Lời giải.
Số cách ngồi tùy ý của 10 bạn là $|\Omega| = 9!$.
Để xếp chỗ cho các bạn nam và nữ ngồi xen kẽ nhau, ta làm qua hai bước là

— Xếp 5 bạn nam vào bàn tròn, ta có 4! cách xếp.

— Để xếp các bạn nữ xen kẽ với các bạn nam, ta xếp các bạn nữ ngồi xen kẽ vào giữa các bạn nam, vì thế có 5! cách xếp các bạn nữ.

Vậy nên ta có $4! \times 5!$ cách xếp thỏa bài toán, suy ra xác suất cần tìm là $P = \dfrac{4! \times 5!}{9!} = \dfrac{1}{126}$. □

BÀI 18. Trong một giải cầu lông kỷ niệm ngày truyền thống học sinh – sinh viên có 8 người tham gia, trong đó có hai bạn tên Việt và Nam. Các vận động viên được chia làm hai bảng A và B, mỗi bảng gồm 4 người. Giả sử việc chia bảng bằng việc bốc thăm ngẫu nhiên. Tính xác suất để cả hai bạn Việt và Nam nằm chung một bảng đấu. **ĐS:** $P = \dfrac{3}{7}$.

Lời giải.
Số cách chia 8 người thành hai bảng đấu một cách tùy ý là $C_8^4 \times C_4^4$.
Để A và B cùng thuộc vào một bảng đấu, ta làm các bước sau

— Chọn bảng đấu có cả A và B trong đó, ta có 2 cách để chọn.

— Trong bảng đã có A và B, chọn thêm hai người nữa, ta có C_6^2 cách chọn.

— Bốn người còn lại ở bảng còn lại nên có 1 cách chọn.

Vậy có $2 \times C_6^2$ cách chia bảng để A và B thuộc cùng một bảng đấu, suy ra xác suất là $P = \dfrac{2 \times C_6^2}{C_8^4 \times C_4^4} = \dfrac{3}{7}$. □

BÀI 19. Chuẩn bị đón tết Bính Thân 2016, đội thanh niên tình nguyện của trường THPT X gồm 9 học sinh, trong đó có 3 học sinh nữ chia thành 3 tổ đều nhau làm công tác vệ sinh môi trường tại nghĩa trang liệt sĩ huyện. Tính xác suất để mỗi tổ có đúng một nữ. **ĐS:** $P = \dfrac{9}{28}$.

Lời giải.
Số cách chia ba nhóm làm việc là $C_9^3 \times C_6^3 \times C_3^3$ cách.
Để chia việc thỏa mãn nhu cầu bài toán thì ta cần chia mỗi tổ hai bạn nam và một bạn nữ.
Vậy nên có $C_6^2 \times C_3^1 \times C_4^2 \times C_2^1 \times C_2^2 \times C_1^1$ cách, suy ra xác suất cần tìm là

$$P = \frac{C_6^2 \times C_3^1 \times C_4^2 \times C_2^1 \times C_2^2 \times C_1^1}{C_9^3 \times C_6^3 \times C_3^3} = \frac{9}{28}.$$

□

BÀI 20. Trong giải bóng truyền VTV Cup gồm 12 đội bóng tham dự, trong đó có 9 đội nước ngoài và 3 đội của Việt Nam. Ban tổ chức cho bốc thăm để chia thành 3 bảng A, B, C, mỗi bảng 4 đội. Tính xác suất để 3 đội bóng Việt Nam ở 3 bảng khác nhau. **ĐS:** $P = \dfrac{16}{55}$.

Lời giải.
Số cách chia 12 đội thành ba bảng đấu một cách tùy ý là $C_{12}^4 \times C_8^4 \times C_4^4$.
Để ba đội bóng Việt Nam thuộc vào ba bảng đấu khác nhau, ta làm các bước sau

— Chia ba đội Việt Nam ra ba bảng đấu, ta có 3! cách chia.

— Trong mỗi bảng chọn thêm ba đội nữa, ta có $C_9^3 \times C_6^3 \times C_3^3$ cách chọn.

Vậy có $3! \times C_9^3 \times C_6^3 \times C_3^3$ cách chia bảng để các đội Việt Nam thuộc ba bảng đấu khác nhau, suy ra xác suất là $P = \dfrac{3! \times C_9^3 \times C_6^3 \times C_3^3}{C_{12}^4 \times C_8^4 \times C_4^4} = \dfrac{16}{55}$. □

BÀI 21. Trong cuộc thi "Tìm kiếm tài năng Việt", có 20 bạn lọt vào vòng chung kết, trong đó có 5 bạn nữ và 15 bạn nam. Để sắp xếp vị trí thi đấu, ban tổ chức chia thành 4 nhóm A, B, C, D, mỗi nhóm có 5 bạn. Việc chia nhóm được thực hiện bằng cách bốc thăm ngẫu nhiên. Tính xác suất để 5 bạn nữ thuộc cùng một nhóm. **ĐS:** $P = \dfrac{1}{3876}$.

Lời giải.
Số cách chia 20 bạn thành bốn nhóm một cách tùy ý là $C_{20}^5 \times C_{15}^5 \times C_{10}^5 \times C_5^5$.
Để cả 5 bạn nữ cùng thuộc một nhóm, ta làm các bước sau

— Ta có 4 cách chọn nhóm cho 5 bạn nữ.

— Chọn thêm ba nhóm nữa, ta có $C_{15}^5 \times C_{10}^5 \times C_5^5$ cách chọn.

Vậy có $4 \times C_{15}^5 \times C_{10}^5 \times C_5^5$ cách chia nhóm để các bạn nữ thuộc cùng một nhóm, suy ra xác suất là $P = \dfrac{4 \times C_{15}^5 \times C_{10}^5 \times C_5^5}{C_{20}^5 \times C_{15}^5 \times C_{10}^5 \times C_5^5} = \dfrac{1}{3876}$. □

BÀI 22. Để chuẩn bị tiêm phòng dịch Sởi – Rubella cho học sinh khối 11 và khối 12. Bệnh viện tỉnh A điều động 12 bác sỹ đến trường THPT B để tiêm phòng dịch gồm 9 bác sỹ nam và 3 bác sỹ nữ. Ban chỉ đạo chia 12 bác sỹ đó thành 3 nhóm, mỗi nhóm 4 bác sỹ làm 3 công việc khác nhau. Tính xác suất để khi chia ngẫu nhiên ta được mỗi nhóm có đúng một bác sỹ nữ. **ĐS:** $P = \dfrac{16}{55}$.

Lời giải.
Số cách chia ba nhóm làm việc là $C_{12}^4 \times C_8^4 \times C_4^4$ cách.
Để chia việc thỏa mãn nhu cầu bài toán thì ta cần chia mỗi tổ ba bác sĩ nam và một bác sĩ nữ.
Vậy nên có $C_9^3 \times C_3^1 \times C_6^3 \times C_2^1 \times C_3^3 \times C_1^1$ cách, suy ra xác suất cần tìm là

$$P = \frac{C_9^3 \times C_3^1 \times C_6^3 \times C_2^1 \times C_3^3 \times C_1^1}{C_{12}^4 \times C_8^4 \times C_4^4} = \frac{16}{55}.$$

□

BÀI 23. Trong một giải thể thao cấp toàn quốc, có 17 thí sinh tham gia và trong đó có 5 thí sinh nữ. Ban tổ chức tiến hành chia thí sinh vào hai bảng A và B, mỗi bảng có 8 thí sinh, còn lại 1 thí sinh được đặc cách vào vòng trong. Tính xác suất để thí sinh được đặc cách là nữ và 4 thí sinh nữ còn lại đều nằm ở bảng A. **ĐS:** $P = \dfrac{5}{442}$.

Lời giải.
Số cách chia bảng tùy ý là $C_{17}^8 \times C_9^8$.
Để yêu cầu bài toán xảy ra, ta thực hiện các bước sau

— Chọn thí sinh được đặc cách, ta có 5 cách chọn.

— Chọn thêm 4 thí sinh cho bảng A, ta có C_{12}^4 cách chọn. Khi đó các thí sinh nam còn lại sẽ vào bảng B.

Vậy có $5 \times C_{12}^4$ cách chia nhóm thỏa bài toán, suy ra xác suất là $P = \dfrac{5 \times C_{12}^4}{C_{17}^8 \times C_9^8} = \dfrac{5}{442}$. □

BÀI 24. Trong một buổi giao lưu văn nghệ, có 5 giáo viên Toán, 3 giáo viên Văn, 2 giáo viên Ngoại Ngữ đăng kí hát song ca. Nhằm tạo không khí giao lưu thân mật, ban tổ chức tiến hành bốc thăm ngẫu nhiên được chia thành 5 cặp được đánh số theo thứ tự từ 1 đến 5. Tính xác suất để cả 5 cặp đều gồm 2 giáo viên dạy khác môn. **ĐS:** $P = \dfrac{1}{945}$.

Lời giải.
Số cách chia thành 5 cặp tùy ý là $C_{10}^2 \times C_8^2 \times C_6^2 \times C_4^2 \times C_2^2$.
Để mỗi cặp đều là hai giáo viên khác môn thì mỗi giáo viên Toán sẽ hát chung với mốn khác. Vậy có 5! cách chia 5 giáo viên môn Văn và Ngoại Ngữ hát chung với 5 giáo viên Toán.
Suy ra xác suất là $P = \dfrac{5!}{C_{10}^2 \times C_8^2 \times C_6^2 \times C_4^2 \times C_2^2} = \dfrac{1}{945}$. □

BÀI 25. Trong một giải quần vợt quốc tế, có 16 vận động viên mà trong đó có 3 vận động viên là các "hạt giống" số 1, 2, 3 của mùa giải. Vận động viên X là một trong số 16 vận động viên đó và không phải là hạt giống. Ban tổ chức chia ngẫu nhiên các vận động viên vào bốn bảng A, B, C, D, và mỗi bảng có 4 vận động viên. Tính xác suất để X không chung bảng với bất kì vận động viên hạt giống nào. **ĐS:** $P = \dfrac{41}{91}$.

Lời giải.
Số cách chia bảng tùy ý là $C_{16}^4 \times C_{12}^4 \times C_8^4 \times C_4^4$.
Để yêu cầu bài toán xảy ra, ta thực hiện các bước sau

— Ta có 4 cách chọn bảng cho thí sinh X.

— Chọn thêm 3 thí sinh cho bảng của thí sinh X, ta có C_{12}^3 cách chọn.

— Ta chia các vận động viên còn lại (có cả A, B, C, D) thành ba nhóm, có $C_{12}^4 \times C_8^4 \times_4^4$ cách chia.

Vậy có $4 \times C_{12}^3 \times C_{12}^4 \times C_8^4 \times_4^4$ cách chia nhóm thỏa bài toán, suy ra xác suất là

$$P = \frac{4 \times C_{12}^3 \times C_{12}^4 \times C_8^4 \times C_4^4}{C_{16}^4 \times C_{12}^4 \times C_8^4 \times C_4^4} = \frac{44}{91}.$$

□

BÀI 26. Một tàu điện gồm 3 toa tiến vào một sân ga, ở đó đang có 12 hành khách chờ lên tàu. Giả sử hành khách lên tàu một cách ngẫu nhiên và độc lập với nhau, mỗi toa còn ít nhất 12 chổ trống. Tìm xác suất xảy ra các tình huống sau

① Tất cả cùng lên toa thứ II. **ĐS:** $P_1 = \dfrac{1}{531441}$.

② Tất cả cùng lên một toa. **ĐS:** $P_2 = \dfrac{1}{177147}$.

③ Toa I có 4 người, toa II có 5 người, còn lại toa III. **ĐS:** $P_3 = \dfrac{3080}{59049}$.

④ Toa I có 4 người. **ĐS:** $P_4 = \dfrac{C_{12}^4 \times 2^8}{3^{12}} \approx 0{,}238$.

⑤ Hai hành khách A và B cùng lên một toa. **ĐS:** $P_5 = \dfrac{1}{3}$.

⑥ Một toa 4 người, một toa 5 người, một toa 3 người. **ĐS:** $P_6 = \dfrac{6160}{19683}$.

Lời giải.
Số cách chọn toa để ngồi một cách tùy ý của các hành khách là 3^{12}.

① Để tất cả cùng lên toa thứ II, ta có đúng 1 cách chọn, suy ra xác suất là $P_1 = \dfrac{1}{3^{12}} = \dfrac{1}{531441}$.

② Để tất cả cùng lên một toa, ta có 3 cách chọn, suy ra xác suất là $P_2 = \dfrac{3}{3^{12}} = \dfrac{1}{177147}$.

③ Ta có C_{12}^4 cách chọn 4 hành khách cho toa I, có C_8^5 cách chọn 5 hành khách cho toa II, còn lại ngồi vào toa thứ III.
Vậy có $C_{12}^4 \times C_8^5$ cách xếp chỗ, suy ra xác suất là $P_3 = \dfrac{C_{12}^4 \times C_8^5}{3^{12}} = \dfrac{3080}{59049}$.

④ Ta có C_{12}^4 cách chọn 4 hành khách cho toa I, các hành khách còn lại ngồi tùy ý ở toa thứ II và thứ III nên có 2^8 cách chọn.
Vậy có $C_{12}^4 \times 2^8$ cách xếp chỗ, suy ra xác suất là $P_4 = \dfrac{C_{12}^4 \times 2^8}{3^{12}}$.

⑤ Để chọn toa cho hai hành khách A và B, ta có 3 cách chọn. Các hành khách còn lại lên tàu một cách tùy ý nên có 3^{10} cách chọn. Suy ra xác suất là $P_5 = \dfrac{3 \times 3^{10}}{3^{12}} = \dfrac{1}{3}$.

⑥ Để chia 12 người ra thành ba nhóm như đề bài, ta có $C_{12}^4 \times C_8^5 \times C_3^3$. Phân phối các nhóm người đó lên ba toa tàu, ta có 3! cách. Suy ra xác suất là $P_6 = \dfrac{C_{12}^4 \times C_8^5 \times C_3^3 \times 3!}{3^{12}} = \dfrac{6160}{19683}$.

□

BÀI 27. Bốn bạn nam và bốn bạn nữ, được xếp ngồi ngẫu nhiên vào 8 ghế xếp thành hai dãy đối diện nhau. Tính xác suất sao cho

① Nam nữ ngồi đối diện nhau. **ĐS:** $P_1 = \dfrac{8}{35}$. ② Nữ ngồi đối diện nhau. **ĐS:** $P_2 = \dfrac{6}{35}$.

Lời giải.
Xem hai dãy ghế đối diện nhau lần lượt là A_1, B_1, C_1, D_1 và A_2, B_2, C_2, D_2.
Số cách xếp tùy ý 8 bạn vào hai dãy ghế là 8! cách.

① — Vị trí A_1 có 8 cách chọn, suy ra vị trí A_2 có 4 cách chọn.
— Vị trí B_1 có 6 cách chọn, suy ra vị trí B_2 có 3 cách chọn.
— Vị trí C_1 có 4 cách chọn, suy ra vị trí C_2 có 2 cách chọn.
— Vị trí D_1 có 2 cách chọn, suy ra vị trí D_2 có 1 cách chọn.

Vậy xác suất là $P_1 = \dfrac{8 \times 4 \times 6 \times 3 \times 4 \times 2 \times 2 \times 1}{8!} = \dfrac{8}{35}$.

② Do nữ ngồi đối diện nhau nên hai nam cũng ngồi đối diện nhau

— Chọn hai cặp vị trí đối diện nhau cho nữ ngồi, ta có A_4^2 cách, sau đó, ta có 4! cách xếp 4 bạn nữ vào 4 vị trí đó.
— Ở các vị trí còn lại là dành cho nam, ta có 4! cách xếp 4 bạn nam vào 4 vị trí đó.

Vậy xác suất là $P_2 = \dfrac{A_4^2 \times 4! \times 4!}{8!} = \dfrac{6}{35}$.

□

DẠNG 4.3. Chọn hoặc sắp xếp số

L LÍ THUYẾT

• **Một số kiến thức liên quan**

① Cho $m \in \mathbb{N}$, ta có $m \vdots 2 \Leftrightarrow$ chữ số hàng đơn vị của m là chữa số chẵn.

② Cho $m \in \mathbb{N}$, ta có $m \vdots 5 \Leftrightarrow$ chữ số hàng đơn vị của m bằng 0 hoặc bằng 5.

③ Cho $m \in \mathbb{N}$, ta có $m \vdots 4 \Leftrightarrow$ hai chữ số cuối tạo thành số chia hết cho 4.

④ Cho $m \in \mathbb{N}$, ta có $m \vdots 3 \Leftrightarrow$ tổng các chữ số của m chia hết cho 3.

⑤ Cho $m \in \mathbb{N}$, ta có $m \vdots 9 \Leftrightarrow$ tổng các chữ số của m chia hết cho 9.

⑥ Cho $m \in \mathbb{N}$, ta có $m \vdots 11 \Leftrightarrow$ tổng các chữ số ở hàng chẵn bằng tổng các chữ số ở hàng lẻ (tính từ trái qua phải).

⑦ Cho $m \in \mathbb{N}$, m được phân tích thành thừa số nguyên tố dạng $m = p_1^{i_1} p_2^{i_2} \cdots p_n^{i_n}$.
Khi đó mỗi ước số của m ứng với một bộ $(j_1; j_2; \ldots; j_n)$ trong đó $0 \leq j_1 \leq i_1; \ldots; 0 \leq j_n \leq i_n$.

⑧ Số nghiệm nguyên dương của phương trình

$$x_1 + x_2 + \cdots x_n = m, (m, n \in \mathrm{N}, n \leq m)$$

là C_{m-1}^{n-1}.

⑨ Mỗi bộ n số thực luôn có duy nhất một cách sắp xếp thứ tự từ bé đến lớn.

⑩ Cho n là số tự nhiên khác 0, tập số tự nhiên N được phân lớp thành các tập:
+ X_0 gồm các số chia m hết cho n, $m = k \cdot n, k \in \mathbb{N}$.
+ X_1 gồm các số tự nhiên m chia n dư 1, $m = k \cdot n + 1, k \in \mathbb{N}$.
...
+ X_{n-1} gồm các số tự nhiên m chia n dư $n-1$, $m = k(n-1), k \in \mathbb{N}$.

M VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Cho tập hợp A gồm tất cả các số tự nhiên có ba chữ số khác nhau đôi một được lập từ các số 1; 2; 3; 4; 5; 6. Chọn ngẫu nhiên một phần tử của A. Tính xác suất để phần tử đó là số chẵn. **ĐS:** $P = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Gọi $\overline{abc}$ là số thuộc vào tập A, ta có $\mathrm{A}_6^3 = 120$ số như vậy.
Vậy số cách chọn tùy ý một số từ tập A là 120 cách.
Gọi $\overline{cde}$ là các số chẵn thuộc vào tập A, ta có $3 \times \mathrm{A}_5^2 = 60$ số như vậy.
Suy ra xác suất để chọn được số thỏa mãn bài toán là $P = \dfrac{60}{120} = \dfrac{1}{2}$. □

VÍ DỤ 2. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm ba chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Xác định số phần tử của S. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để chọn được là số chẵn. **ĐS:** $P = \dfrac{3}{7}$.

Lời giải

Gọi $\overline{abc}$ là số thuộc vào tập S, ta có $\mathrm{A}_7^3 = 210$ số như vậy.
Vậy số cách chọn tùy ý một số từ tập S là 210 cách.
Gọi $\overline{cde}$ là các số thỏa mãn yêu cầu bài toán và thuộc vào tập S, ta có $3 \times \mathrm{A}_6^2 = 90$ số như vậy.
Suy ra xác suất để chọn được số thỏa mãn bài toán là $P = \dfrac{90}{210} = \dfrac{3}{7}$. □

VÍ DỤ 3. Cho tập hợp A gồm tất cả các số tự nhiên có bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ các số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6. Chọn ngẫu nhiên từ A hai phần tử. Tính xác suất để hai phần tử được lấy ra từ A có một số chẵn và một số lẻ. **ĐS:** $P = \dfrac{175}{719}$.

Lời giải

Gọi $\overline{abcd}$ là số thuộc vào tập A, ta có $6 \times \mathrm{A}_6^3 = 720$ số như vậy.
Vậy số cách chọn tùy ý hai số tùy ý từ tập A là A_{720}^2 cách.
Gọi $\overline{cde}$ là các số lẻ thuộc vào tập A, ta có $3 \times 5 \times \mathrm{A}_5^2 = 300$ số, vậy có $720 - 300 = 420$ số chẵn trong tập A.
Suy ra xác suất để chọn được hai số thỏa mãn bài toán là $P = \dfrac{300 \times 420}{\mathrm{A}_{720}^2} = \dfrac{175}{719}$. □

VÍ DỤ 4. Từ một hộp chứa 16 thẻ được đánh số từ 1 đến 16, chọn ngẫu nhiên 4 thẻ. Tính xác suất để 4 thẻ được chọn đều được đánh số chẵn. **ĐS:** $P = \dfrac{1}{26}$.

Lời giải

Số cách chọn tùy ý 4 thẻ là C_{16}^4 cách.
Do có 8 số chẵn trong các số từ 1 đế 16 nên để chọn được 4 thẻ đánh số chẵn, ta có C_8^4 cách.
Suy ra xác suất để chọn được 4 thẻ mang số chẵn là $P = \dfrac{\mathrm{C}_8^4}{\mathrm{C}_{16}^4} = \dfrac{1}{26}$. □

VÍ DỤ 5. Gọi X là tập hợp các số gồm hai chữ số khác nhau được lấy từ 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6. Lấy ngẫu nhiên hai phần tử của X. Tính xác suất để hai số lấy được đều là số chẵn. **ĐS:** $P = \dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Gọi $\overline{ab}$ là số thuộc vào tập X, ta có $6 \times 6 = 36$ số như vậy.
Vậy số cách chọn tùy ý hai số từ tập X là C_{36}^2.
Gọi $\overline{cd}$ là các số chẵn thuộc vào tập X.

— **TH1:** Số có dạng $\overline{c0}$, ta có 6 số như vậy.

— **TH2:** Xét $d \neq 0$, ta có $3 \times 5 = 15$ số như vậy.

Vậy có $6 + 15 = 21$ số chẵn trong tập hợp X.

Suy ra xác suất để chọn được hai số chẵn từ tập X là $P = \dfrac{\mathrm{C}_{21}^2}{\mathrm{C}_{36}^2} = \dfrac{1}{3}$. □

VÍ DỤ 6. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên gồm có 2 chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số từ S. Tính xác suất để số được chọn có chữ số hàng đơn vị và hàng chục đều là chữ số chẵn. **ĐS:** $P = \dfrac{2}{9}$.

Lời giải

Gọi $\overline{ab}$ là số thuộc vào tập S, ta có $9 \times 10 = 90$ số như vậy.
Vậy số cách chọn tùy ý một số từ tập S là 90 cách.
Gọi $\overline{cd}$ là các số thỏa mãn yêu cầu bài toán và thuộc vào tập S, ta có $4 \times 5 = 20$ số như vậy.

Suy ra xác suất để chọn được số thỏa mãn bài toán là $P = \dfrac{20}{90} = \dfrac{2}{9}$. □

VÍ DỤ 7. Cho E là tập hợp các số có 3 chữ số khác nhau đôi một được lấy từ: $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Chọn ngẫu nhiên 1 phần tử của E. Tính xác suất để phần tử được chọn là số có 3 chữ số đều chẵn. **ĐS:** $\dfrac{1}{25}$

Lời giải

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn ngẫu nhiên 1 phần tử của E". Gọi A là biến cố "số được chọn là số có 3 chữ số đều chẵn". Giả sử số có ba chữ số thuộc E có dạng $\overline{abc}$, ta có

— a có 5 cách chọn, b có 5 cách chọn, c có 4 cách chọn. Do đó, số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = 5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$.

— Số được chọn $(\overline{abc})$ có 3 chữ số đều chẵn lấy từ các số $\{0, 2, 4\}$. Do đó a có 2 cách chọn, b có 2 cách chọn và c có 1 cách chọn. Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$.

Suy ra, xác suất cần tìm là

$$P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}.$$

Vậy xác suất để chọn được số có 3 chữ số đều chẵn từ E là $\dfrac{1}{25}$. □

VÍ DỤ 8. Có 20 thẻ đựng trong 2 hộp khác nhau, mỗi hộp chứa 10 thẻ được đánh số liên tiếp từ 1 đến 10. Lấy ngẫu nhiên 2 thẻ từ 2 hộp (mỗi hộp 1 thẻ). Tính xác suất lấy được hai thẻ có tích hai số ghi trên hai thẻ là một số chẵn. **ĐS:** $\dfrac{3}{4}$

Lời giải

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "lấy ngẫu nhiên 2 thẻ từ 2 hộp (mỗi hộp 1 thẻ)". Gọi A là biến cố "lấy được hai thẻ có tích hai số trên hai thẻ là số chẵn". Để có thể lấy được hai thẻ có tích hai số ghi trên hai thẻ là một số chẵn, ta có các trường hợp sau đây:

— Hai thẻ lấy ra đều là thẻ chẵn, có $5 \cdot 5 = 25$ (cách).

— Thẻ lấy ra ở hộp thứ nhất là thẻ chẵn, hộp thứ hai là thẻ lẻ, có $5 \cdot 5 = 25$ (cách).

— Thẻ lấy ra ở hộp thứ nhất là thẻ lẻ, hộp thứ hai là thẻ chẵn, có $5 \cdot 5 = 25$ (cách).

— Do vậy, số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = 25 + 25 + 25 = 75$.

Lại có, số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = 10 \cdot 10 = 100$.
Suy ra, xác suất cần tìm:

$$P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}.$$

Vậy xác suất để lấy được hai thẻ có tích hai số ghi trên hai thẻ là một số chẵn là $\frac{3}{4}$. □

VÍ DỤ 9. Một chiếc hộp gồm có 9 thẻ được đánh số liên tiếp từ 1 đến 9. Rút ngẫu nhiên hai thẻ (không kể thứ tự), rồi nhân hai số ghi trên hai thẻ lại với nhau. Tính xác suất để kết quả nhận được là một số chẵn. **ĐS:** $\frac{13}{18}$

Lời giải

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "rút ngẫu nhiên hai thẻ (không kể thứ tự), rồi nhân hai số ghi trên hai thẻ lại với nhau". Gọi A là biến cố "lấy được hai thẻ có tích các số ghi trên hai thẻ là số chẵn". Ta có

— Số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = C_9^2 = 36$.

Trong hai thẻ lấy ra, ta xét các trường hợp sau đây:

— Một thẻ lẻ và một thẻ chẵn, có $C_5^1 \cdot C_4^1 = 20$ (cách).

— Hai thẻ đều mang số chẵn, có $C_4^2 = 6$ (cách).

— Do vậy, số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = 26$.

Suy ra, xác suất cần tìm là

$$P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}.$$

□

VÍ DỤ 10. Gọi S là tất cả các số tự nhiên gồm 2 chữ số khác nhau lập từ $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Chọn ngẫu nhiên 2 số từ tập S. Tích xác suất để tích 2 số được chọn là số chẵn. **ĐS:** $\frac{5}{6}$

Lời giải

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn ngẫu nhiên 2 số từ tập S". Gọi A là biến cố "tích 2 số được chọn là số chẵn". Giả sử số có hai chữ số thuộc S có dạng $\overline{ab}$. Ta có:

— Số phần tử của S là $n_S = 6 \cdot 6 = 36$.

— Số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = \mathrm{C}_{36}^2 = 630$.

— Số các số chẵn thuộc S (xét hai trường hợp $b = 0$ và $b \neq 0$) là $6 + 5 \cdot 3 = 21$.

— Số các số lẻ thuộc S là $36 - 21 = 15$.

Trong hai số được chọn, ta xét các trường hợp sau:

— Có một số chẵn và một số lẻ, có $\mathrm{C}_{21}^1 \cdot \mathrm{C}_{15}^1 = 315$ (cách).

— Có hai số chẵn, có $\mathrm{C}_{21}^2 = 210$ (cách).

— Do đó, số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = 315 + 210 = 525$.

Xác suất cần tìm là
$$P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{525}{630} = \frac{5}{6}.$$

□

N BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 1. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau được tạo thành từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp S. Tính xác suất để số được chọn chỉ chứa 3 chữ số lẻ. **ĐS:** $\dfrac{10}{21}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn ngẫu nhiên một số từ tập X". Khi đó, số phần tử của không gian mẫu bằng số cách đưa 9 số vào 6 chỗ nên $n_\Omega = \mathrm{A}_9^6 = 60480$. Gọi A là biến cố "số được chọn chỉ chứa 3 chữ số lẻ".

— Chọn 3 số lẻ đôi một từ các số $1, 3, 5, 7, 9$ có C_5^3 (cách).

— Chọn 3 số chẵn đôi một khác nhau từ các số $2, 4, 6, 8$ có C_4^3 (cách).

— Sắp xếp các chữ số trên để được số thỏa mãn biến cố A có $6!$ (cách).

— Do đó, số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = \mathrm{C}_5^3 \cdot \mathrm{C}_4^3 \cdot 6! = 28800$.

Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{28800}{60048} = \dfrac{10}{21}$. □

BÀI 2. Cho 100 tấm thẻ được đánh số liên tiếp từ 1 đến 100, chọn ngẫu nhiên 3 thẻ. Tính xác suất để tổng các số ghi trên 3 thẻ được chọn là một số chia hết cho 2. **ĐS:** $\dfrac{1}{2}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn ngẫu nhiên ba tấm thẻ từ 100 tấm thẻ". Khi đó: $n_\Omega = \mathrm{C}_{100}^3 = 161700$. Gọi A là biến cố "tổng các số ghi trên 3 thẻ được chọn là một số chia hết cho 2". Gọi x, y, z là ba số ghi trên ba thẻ rút được. Khi đó $\begin{cases} 1 \leq x, y, z \leq 100 \\ x + y + z \text{ chia hết cho } 2. \end{cases}$
Từ 1 đến 100 có 50 số chia hết cho 2 (N_1), 50 số chia cho 2 dư 1. Ta xét các trường hợp sau:

— Cả 3 số x, y, z cùng thuộc một loại N_1 có: $\mathrm{C}_{50}^3 = 19600$ (cách).

— Trong 3 số x, y, z có một số chia hết chia 2 và 2 số chia 2 dư 1, có: $\mathrm{C}_{50}^1 \cdot \mathrm{C}_{50}^2 = 61250$ (cách).

$\Rightarrow$ Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = 19600 + 61250 = 80850$.

Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{80850}{161700} = \dfrac{1}{2}$. □

BÀI 3. Trong hộp có 40 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 40, chọn ngẫu nhiên 3 thẻ trong hộp. Tính xác suất để tổng 3 số trên 3 thẻ lấy được là một số chia hết cho 3. **ĐS:** $\dfrac{127}{380}$

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn ngẫu nhiên ba tấm thẻ từ 40 tấm thẻ". Khi đó, số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = C_{40}^3 = 9880$. Gọi A là biến cố "tổng các số ghi trên 3 thẻ được chọn là một số chia hết cho 3".

Gọi x, y, z là ba số ghi trên ba thẻ rút được. Khi đó $\begin{cases} 1 \le x, y, z \le 40 \\ x + y + z \text{ chia hết cho } 3. \end{cases}$

Từ 1 đến 40 có 13 số chia hết cho 3 (N_1), 14 số chia cho 3 dư 1 (N_2), 13 số chia cho 3 dư 2 (N_3). Ta xét các trường hợp sau:

— Cả 3 số x, y, z cùng thuộc một loại N_1, N_2 hoặc N_3 có: $C_{13}^3 + C_{14}^3 + C_{13}^3 = 936$ (cách).

— 3 số x, y, z mỗi số thuộc một loại, có: $C_{13}^1 \cdot C_{14}^1 \cdot C_{13}^1 = 2366$ (cách).

$\Rightarrow$ Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = 936 + 2366 = 3302$.

Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{3302}{9880} = \dfrac{127}{380}$. □

BÀI 4. Trong hộp có 50 viên bi được đánh số từ 1 đến 50, chọn ngẫu nhiên 3 viên bi trong hộp. Tính xác suất để tổng 3 số trên 3 viên bi được chọn là một số chia hết cho 3. **ĐS:** $\dfrac{796}{2450}$

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn ngẫu nhiên ba viên bi từ 50 viên bi". Khi đó, số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = C_{50}^3 = 19600$. Gọi A là biến cố "tổng các số ghi trên 3 viên bi được chọn là một số chia hết cho 3".

Gọi x, y, z là ba số ghi trên ba viên bi chọn được. Khi đó: $\begin{cases} 1 \le x, y, z \le 50 \\ x + y + z \text{ chia hết cho } 3. \end{cases}$

Từ 1 đến 50 có 16 số chia hết cho 3 (N_1), 17 số chia cho 3 dư 1 (N_2), 16 số chia cho 3 dư 2 (N_3). Ta xét các trường hợp sau:

— Cả 3 số x, y, z cùng thuộc một loại N_1, N_2 hoặc N_3 có: $C_{16}^3 + C_{17}^3 + C_{16}^3 = 1800$ (cách).

— 3 số x, y, z mỗi số thuộc một loại, có: $C_{16}^1 \cdot C_{17}^1 \cdot C_{16}^1 = 4352$ (cách).

$\Rightarrow$ Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = 1800 + 4352 = 6152$.

Vậy xác suất cần tính là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{6152}{19600} = \dfrac{796}{2450}$. □

BÀI 5. Gọi X là tập hợp các số tự nhiên gồm có 4 chữ số khác nhau đôi một được tạo thành từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Lấy ngẫu nhiên từ tập X một số. Hãy tính xác suất để lấy được số tự nhiên từ tập X có tổng các chữ số bằng 14. **ĐS:** $\dfrac{1}{5}$

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "lấy ngẫu nhiên từ tập X một số", gọi A là biến cố "số được chọn có tổng các chữ số bằng 14. Ta có

— Số phần tử của tập X là $A_6^4 = 360$.

— Số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = C_{360}^1 = 360$.

— Để tổng các chữ số của số được chọn bằng 14, ta có các bộ số: $\{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{1, 3, 4, 6\}$. Do đó, số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = 4! + 4! + 4! = 72$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{72}{360} = \dfrac{1}{5}$. □

BÀI 6. Chọn ngẫu nhiên 3 số bất kỳ từ tập $S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$. Tính xác suất để tổng 3 số được chọn bằng 12. **ĐS:** $\dfrac{14}{55}$

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn ngẫu nhiên ba số từ tập S". Gọi A là biến cố "tổng các số được được chọn là có tổng bằng 12". Ta có:

— Số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = \mathrm{C}_{11}^3 = 165$.

— Để tổng của ba số được chọn bằng 12, ta có các bộ số: $\{1,2,9\}$, $\{1,3,8\}$, $\{1,4,7\}$, $\{1,5,6\}$, $\{2,3,7\}$, $\{2,4,6\}$, $\{3,4,5\}$. Do đó, số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = 7 \cdot 3! = 42$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{42}{165} = \dfrac{14}{55}$.

□

BÀI 7. Cho tập hợp $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ và M là tập hợp tất cả các số gồm 2 chữ số phân biệt thuộc tập E. Lấy ngẫu nhiên một số thuộc M. Tính xác suất để tổng hai chữ số của số được chọn có giá trị lớn hơn 7. **ĐS:** $\dfrac{2}{5}$

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "lấy ngẫu nhiên một số thuộc M", gọi A là biến cố "tổng của hai chữ số của số được chọn lớn hơn 7". Ta có:

— Số phần tử của M là $\mathrm{A}_6^2 = 30$.

— Số phần tử của không gian mẫu là $\mathrm{C}_{30}^1 = 30$.

— Để tổng các chữ số của số được chọn lớn hơn 7, ta có các bộ số: $\{2,6\}$, $\{3,5\}$, $\{3,6\}$, $\{4,5\}$, $\{4,6\}$, $\{5,6\}$. Do đó, số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = 6 \cdot 2! = 12$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{12}{30} = \dfrac{2}{5}$. □

BÀI 8. E là tập các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được lấy từ các số $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$. Lấy ngẫu nhiên một số trong E tính xác suất để lấy được số chia hết cho 5. **ĐS:** $\dfrac{13}{49}$

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn một số tự nhiên có 5 chữ số lập từ $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$", gọi A là biến cố "số được chọn chia hết cho 5". Gọi số có 5 chữ số thuộc E có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$. Ta có:

— Số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = \mathrm{A}_8^5 - \mathrm{A}_7^4 = 5880$.

— Để số trên chia hết cho 5, ta có:

  - a_5 là 5, a_1 có 6 cách chọn, a_2 có 6 cách chọn, a_3 có 5 cách chọn, a_4 có 4 cách chọn.
  - a_5 là 0, a_1 có 7 cách chọn, a_2 có 6 cách chọn, a_3 có 5 cách chọn, a_4 có 4 cách chọn.

— Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 + 6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 1560$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{1560}{5880} = \dfrac{13}{49}$. □

BÀI 9. Gọi E là tập hợp số tự nhiên gồm 3 chữ số phân biệt được lập từ các số $1,2,3,4,5$. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau thuộc tập E. Tính xác suất để hai số được chọn có đúng một số có chữ số 5. **ĐS:** 0,488

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn ngẫu nhiên hai số tự nhiên có 3 chữ số lập từ $\{1,2,3,4,5\}$", gọi A là biến cố "hai số được chọn có đúng một số có chữ số 5". Gọi số có ba chữ số thuộc E có dạng $\overline{a_1a_2a_3}$. Ta có:

— Số phần tử của E là $A_5^3 = 60$.

— Số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = \mathrm{C}_{60}^2 = 1770$.

— Chọn một trong ba vị trí để đưa số 5 vào có 3 cách chọn. Đưa 4 số còn lại vào 2 vị trí có A_4^2 cách. Do đó, có tất cả $3 \cdot \mathrm{A}_4^2 = 36$ số thuộc E mà có mặt chữ số 5

— Để một số có ba chữ số từ E là số **không** có mặt 5, ta có: a_1, a_2, a_3 là các số thuộc $\{1,2,3,4\}$. Do đó, có tất cả $\mathrm{A}_4^3 = 24$ số.

— Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $\mathrm{C}_{36}^1 \cdot \mathrm{C}_{24}^1 = 864$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{864}{1770} = \dfrac{144}{295} \approx 0{,}488$. □

BÀI 10. Gọi E là tập hợp các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau lập từ các chữ số $1,2,3,4,7$. Tập E có bao nhiêu phần tử? Chọn ngẫu nhiên một phần tử của E, tính xác suất được chọn chia hết cho 3. **ĐS:** $\dfrac{2}{5}$

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau lập từ $\{1,2,3,4,7\}$", gọi A là biến cố "số được chọn chia hết cho 3". Gọi số có ba chữ số thuộc E có dạng $\overline{a_1a_2a_3}$. Ta có:

— Số phần tử của E là $A_5^3 = 60$.

— Số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = \mathrm{C}_{60}^1 = 60$.

Gọi x, y, z là ba số trong số được chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán. Khi đó $\begin{cases} x, y, z \in \{1,2,3,4,7\} \\ x + y + z \text{ chia hết cho } 3. \end{cases}$

Ta có:

— Có 4 bộ số: $\{1,2,3\}$, $\{1,4,7\}$, $\{2,3,4\}$, $\{2,3,7\}$ lập thành số có 3 chữ số chia hết cho 3.

— Đưa mỗi bộ số vào ba chỗ $\overline{a_1a_2a_3}$ có 3! cách. Do đó, số kết quả thuận lợi của biến cố A là $4 \cdot 3! = 24$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{24}{60} = \dfrac{2}{5}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 11. Có 30 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 30. Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm thẻ. Hãy tìm xác suất để có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10. **ĐS:** 0,148

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn ra ngẫu nhiên 10 tấm thẻ từ 30 tấm đã cho", gọi A là biến cố "có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10". Ta có:

— Số phần tử của không gian mẫu là $C_{30}^{10} = 30045015$.

— Trong 30 tấm thẻ đã cho có 15 tấm thẻ lẻ, 12 tấm thẻ chẵn không chia hết cho 10, 3 tấm thẻ chẵn chia hết cho 10.

— Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $C_{15}^{5} \cdot C_{12}^{4} \cdot C_{3}^{1} = 4459455$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{4459455}{300450015} = \dfrac{99}{667} \approx 0{,}148$. □

BÀI 12. Có 40 tấm thẻ đánh số thứ tự từ 1 đến 40. Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm thẻ. Tính xác suất để lấy được 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó có đúng một thẻ mang số chia hết cho 6. **ĐS:** 0,11

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn ra ngẫu nhiên 10 tấm thẻ từ 40 tấm đã cho", gọi A là biến cố "có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 6". Ta có:

— Số phần tử của không gian mẫu là C_{40}^{10}.

— Trong 40 tấm thẻ đã cho có 20 tấm thẻ lẻ, 14 tấm thẻ chẵn không chia hết cho 6, 6 tấm thẻ chẵn chia hết cho 6.

— Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $C_{20}^{5} \cdot C_{14}^{4} \cdot C_{6}^{1}$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{C_{20}^{5} \cdot C_{14}^{4} \cdot C_{6}^{1}}{C_{40}^{10}} = \dfrac{126}{1147} \approx 0{,}11$. □

BÀI 13. Có 20 tấm thẻ được đánh số liên tiếp từ 1 đến 20. Chọn ngẫu nhiên ra 5 tấm thẻ. Tính xác suất để trong 5 tấm thẻ được chọn ra có 3 tấm thẻ mang số lẻ, 2 tấm thẻ mang số chẵn trong đó có đúng một tấm thẻ mang số chia hết cho 4. **ĐS:** 0,193

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn ra ngẫu nhiên 5 tấm thẻ từ 20 tấm đã cho", gọi A là biến cố "có 3 tấm thẻ mang số lẻ, 2 tấm thẻ mang số chẵn trong đó có đúng một tấm thẻ mang số chia hết cho 4". Ta có:

— Số phần tử của không gian mẫu là $C_{20}^{5} = 15504$.

— Trong 20 tấm thẻ đã cho có 10 tấm thẻ lẻ, 5 tấm thẻ chẵn không chia hết cho 4, 5 tấm thẻ chẵn chia hết cho 4.

— Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $C_{10}^{3} \cdot C_{5}^{1} \cdot C_{5}^{1} = 3000$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{3000}{15504} = \dfrac{125}{646} \approx 0{,}193$. □

BÀI 14. Gọi E là tập hợp các số có tám chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập E. Tính xác suất để chọn được một số thuộc E và số đó chia hết cho 9. **ĐS:** $\dfrac{1}{9}$

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử: "Chọn ngẫu nhiên một số từ tập E". Gọi A là biến cố "số chọn được chia hết cho 9". Ta có

— Số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdots 3 = \dfrac{9 \cdot 9!}{2}$.

Do $0 + 1 + \cdots + 9 = 45$ chia hết cho 9. Do đó, để có được số có 8 chữ số đôi một khác nhau chia hết cho 9 thì:

— Trong 10 số từ 0 đến 9 chỉ cần bỏ đi 2 số có tổng bằng 9, cụ thể ta bỏ các cặp số: $\{0,9\}, \{1,8\}, \{2,7\}, \{3,$

— Có 4 bộ số có mặt chữ số 0, mỗi bộ có $7 \cdot 7!$ số.

— Bộ không có số 0 là $(1,2,3,4,5,6,7,8)$ có $8!$ số.

— Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = 4 \cdot 7 \cdot 7! + 8! = 181440$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{181440}{\dfrac{9 \cdot 9!}{2}} = \dfrac{1}{9}$. □

BÀI 15. Cho tập hợp $X = \{0,1,2,4,5,7,8\}$. Ký hiệu G là tập hợp tất cả các số có bốn chữ số đôi một khác nhau lấy từ tập X, chia hết cho 5. Lấy ngẫu nhiên một số trong tập G, tính xác suất để lấy được một số không lớn hơn 4000. **ĐS:** $\dfrac{6}{11}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "lấy ngẫu nhiên một số trong tập G". Gọi A là biến cố "lấy được một số không lớn hơn 4000". Gọi $\overline{abcd}$ là số có 4 chữ số khác nhau đôi một lấy từ các chữ số trên và chia hết cho 5. Ta có:

— Nếu $d = 0$ thì $\overline{abc}$ có $\mathrm{A}_6^3 = 120$ cách chọn.

— Nếu $d = 5$ thì a có 5 cách chọn, b có 5 cách chọn và c có 4 cách chọn $\Rightarrow$ có 100 số.

Do đó, tập G có tất cả 220 số.
Giả sử $\overline{abcd} \in G$ và $\overline{abcd} \leq 4000$. Khi đó:

— $a \in \{1,2,3\}$ nên có 3 cách chọn.

— d có 2 cách chọn.

— $\overline{bc}$ có $\mathrm{A}_5^2 = 20$ cách chọn.

— Vậy nên có tất cả 120 số lấy từ G mà nhỏ hơn 4000.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n\Omega} = \dfrac{120}{220} = \dfrac{6}{11}$. □

BÀI 16. Gọi E là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm bốn chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số: $1,2,3,4,5,6,7$. Chọn ngẫu nhiên một số từ các số mới lập đó. Tính xác suất để số được chọn có chữ số hàng nghìn nhỏ hơn 5. **ĐS:** $\dfrac{4}{7}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn ngẫu nhiên một số từ các số thuộc E". Gọi A là biến cố "số được chọn có chữ số hàng nghìn nhỏ hơn 5". Gọi số thỏa mãn bài toán có dạng $\overline{abcd}$. Ta có:

— Số phần tử của không gian mẫu $n_\Omega = \mathrm{A}_7^4 = 840$.

— Số $a \in \{1,2,3,4\}$ nên có 4 cách chọn. Đưa 6 số còn lại vào 3 vị trí có A_6^3 cách. Do đó, số kết quả thuận lợi của biến cố A là $4 \cdot \mathrm{A}_6^3 = 480$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{480}{840} = \dfrac{4}{7}$. □

BÀI 17. Gọi E là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm bốn chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số: $1,2,3,4,5,6,7$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp E. Tính xác suất để số được chọn là số lớn hơn số 2016. **ĐS:** $\dfrac{6}{7}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp E". Gọi A là biến cố "số được chọn là số lớn hơn số 2016". Ta có:

— Số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = \mathrm{A}_7^4$.

— Số nhỏ hơn 2016 thì số đầu tiên bắt đầu là số 1, số cách đưa các số còn lại vào ba chỗ trống là A_6^3. Do đó, số kết quả thuận lợi của biến cố $\overline{A}$ là $n_{\overline{A}} = \mathrm{A}_6^3$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{n_{\overline{A}}}{n_\Omega} = 1 - \dfrac{\mathrm{A}_6^3}{\mathrm{A}_7^4} = \dfrac{6}{7}$. □

BÀI 18. Từ các chữ số $1,2,3,4,5,6$ lập các số có 4 chữ số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên 1 số trong các số được lập, tính xác suất để số được lấy có 2 chữ số chẵn, 2 chữ số lẻ. **ĐS:** $\dfrac{3}{5}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "lấy ngẫu nhiên một số có 4 chữ số khác nhau lấy từ $\{1,2,3,4,5,6\}$". Gọi A là biến cố "số được lấy có 2 chữ số chẵn, 2 chữ số lẻ". Gọi số có 4 chữ số thỏa mãn bài toán là $\overline{a_1a_2a_3a_4}$. Ta có:

— Số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = \mathrm{A}_6^4 = 360$.

— Chọn ra hai số chẵn từ bộ $\{2,4,6\}$ có $\mathrm{C}_3^2 = 3$ cách. Chọn 2 trong 4 chỗ để đưa hai số chẵn vào có $\mathrm{C}_4^2 = 6$ cách. Đưa hai số chẵn vào hai chỗ có 2! cách. Đưa ba số lẻ từ bộ $\{1,3,5\}$ vào 2 vị trí còn lại có $\mathrm{A}_3^2 = 6$ cách.

— Do đó, số kết quả thuận lợi của biến cố A là $3 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6 = 216$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{216}{360} = \dfrac{3}{5}$. □

BÀI 19. Gọi X là tập các số tự nhiên gồm 4 chữ số phân biệt từ các chữ số: $1,2,3,4,5,6$. Lấy ngẫu nhiên một số từ X. Tính xác suất để lấy được số có mặt chữ số 6. **ĐS:** $\dfrac{2}{3}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "lấy ngẫu nhiên một số từ X". Gọi A là biến cố "số được chọn có mặt chữ số 6".
Ta có số phần tử của X là $\mathrm{A}_6^4 = 360$.
Số kết quả thuận lợi của biến cố $\overline{A} = \mathrm{A}_5^4 = 120$.
Xác suất cần tìm là

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{n_{\overline{A}}}{n_\Omega} = 1 - \frac{120}{360} = \frac{2}{3}.$$

□

BÀI 20. Cho tập X gồm các số có 4 chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số $0,1,2,3,4,5$. Lấy ngẫu nhiên 2 số từ X. Tìm xác suất để 2 số được lấy có ít nhất 1 số chẵn. **ĐS:** 0,77

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "lấy ngẫu nhiên hai số từ X". Gọi A là biến cố "có ít nhất 1 số chẵn trong hai số được chọn".
Ta có, số phần tử của X là $n_X = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$.
Giả sử $\overline{b_1b_2b_3b_4}$ là số lẻ thuộc tập X. Khi đó, b_4 có 3 cách chọn, b_1 có 4 cách chọn, b_2 có 4 cách chọn, b_3 có 3 cách chọn. Suy ra, số phần tử của biến cố $\overline{A}$ là $n_{\overline{A}} = 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 144$.
Suy ra, xác suất để chọn được hai số lẻ là

$$P(\overline{A}) = \frac{n_{\overline{A}}}{n_\Omega} = \frac{\mathrm{C}_{144}^2}{\mathrm{C}_{300}^2} = \frac{132}{575}.$$

Xác suất cần tìm là $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \dfrac{443}{575} \approx 0{,}77$. □

BÀI 21. Gọi E là tập hợp các số tự nhiên gồm 9 chữ số khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số từ E. Tính xác suất để số được chọn có đúng 4 chữ số lẻ và chữ số 0 đứng giữa 2 chữ số lẻ (các chữ liền trước và liền sau của chữ số 0 là các chữ số lẻ). **ĐS:** $\dfrac{5}{54}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn ngẫu nhiên một số từ E", gọi A là biến cố "số được chọn có đúng 4 chữ số lẻ và chữ số 0 đứng giữa 2 chữ số lẻ". Xét các số có 9 chữ số khác nhau, ta có:

— Có 9 cách chọn chữ số ở vị trí đầu tiên.

— Có A_9^8 cách để đưa 9 chữ số còn lại vào 8 vị trí còn lại.

— Do đó, số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = 9 \cdot \mathrm{A}_9^8 = 3265920$.

Xét các số thỏa mãn bài toán:

— Đầu tiên ta xếp vị trí cho chữ số 0, do chữ số 0 không thể đứng đầu và đứng cuối nên có 7 cách sắp xếp.

— Ta có A_5^2 cách chọn 2 số lẻ và đưa vào hai vị trí bên cạnh chữ số 0.

— Chọn hai trong 6 vị trí còn lại có C_6^2 cách. Chọn hai trong 3 số lẻ còn lại đưa vào hai vị trí vừa chọn có A_3^2 cách. Vậy có tất cả $\mathrm{C}_6^2 \cdot \mathrm{A}_3^2 = 90$ cách để chọn ra hai số lẻ và xếp vào hai trong 6 vị trí còn lại.

— Cuối cùng, đưa 4 chữ số chẵn còn lại vào 4 vị trí có 4! cách.

— Do đó, số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = 7 \cdot \mathrm{A}_5^2 \cdot 90 \cdot 4! = 302400$.

Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{302400}{3265920} = \dfrac{5}{54}$. □

BÀI 22. Từ các chữ số $1, 2, 3, 4, 5$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số, trong đó chữ số 3 có mặt đúng 3 lần, các chữ số còn lại có mặt không quá 1 lần. Trong các số tự nhiên nói trên, chọn ngẫu nhiên một số, tìm xác suất để số chọn chia hết cho 3. **ĐS:** $\dfrac{1}{2}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn ngẫu nhiên một số có 5 chữ số theo yêu cầu bài toán". Gọi A là biến cố "số được chọn chia hết cho 3". Ta có:

— Chọn ra ba vị trí để đưa ba chữ số 3 vào có C_5^3 cách.

— Chọn 2 trong 4 số để đưa vào 2 vị trí còn lại có A_4^2 cách.

— Số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = \mathrm{C}_5^3 \cdot \mathrm{A}_4^2 = 120$.

Để số được chọn chia hết cho 3 thì tổng các chữ số phải chia hết cho 3. Do số được chọn luôn có 3 chữ số 3 nên hai số còn lại phải chia hết cho 3. Ta có:

— Chọn ra ba vị trí để đưa ba chữ số 3 vào có C_5^3 cách.

— Hai số còn lại thuộc các bộ số: $(1, 2)$, $(1, 5)$, $(2, 4)$.

— Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $\mathrm{C}_5^3 \cdot 3 \cdot 2! = 60$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{60}{120} = \dfrac{1}{2}$. □

BÀI 23. Từ các chữ số $1,2,3,4,5,6$ có thể lập được bao nhiêu số có 7 chữ số trong đó chữ số 4 có mặt đúng 2 lần, các chữ số còn lại có mặt đúng một lần. Trong các số tự nhiên trên, chọn ngẫu nhiên 1 số, tìm xác suất để số được chọn **không** bắt đầu bởi số 12. **ĐS:** $\dfrac{41}{42}$

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn ngẫu nhiên 1 số từ các số có 7 chữ số lập từ $1,2,3,4,5,6$ thỏa mãn đề bài". Gọi A là biến cố "số được chọn không bắt đầu bởi số 12". Gọi số có 7 chữ số thuộc không gian mẫu có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$, ta có:

— Chọn 2 vị trí để đưa số 4 vào có C_7^2 cách.

— Đưa 5 chữ số còn lại vào 5 vị trí còn lại có $5!$ cách.

— Do đó, số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = \mathrm{C}_7^2 \cdot 5! = 2520$.

Xét trường hợp số có 7 chữ số như trên bắt đầu bằng số 12 thì:

— Đưa số 12 vào 2 vị trí a_1a_2 có 1 cách chọn.

— Chọn 2 vị trí trong 5 vị trí còn lại để đưa hai số 4 vào có C_5^2 cách.

— Đưa 3 số còn lại vào 3 vị trí còn lại có $3!$ cách.

— Do đó, số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = n_\Omega - n_{\overline{A}} = 2520 - \mathrm{C}_5^2 \cdot 3! = 2460$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{2460}{2520} = \dfrac{41}{42}$. □

BÀI 24. Gọi E là tập hợp các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau được thành lập từ các chữ số $\{0,1,2,3,4,5,6\}$. Chọn ngẫu nhiên một phần tử của tập E. Tìm xác suất để phần tử đó là một số không chia hết cho 5. **ĐS:** $\dfrac{11}{36}$

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn một số tự nhiên có 5 chữ số lập từ $\{0,1,2,3,4,5,6\}$", gọi A là biến cố "số được chọn chia hết cho 5". Gọi số cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$. Ta có:

— Số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = \mathrm{A}_7^5 - \mathrm{A}_6^4 = 2160$.

— Để số trên chia hết cho 5, ta có:

  - a_5 là 5, a_1 có 5 cách chọn, a_2 có 5 cách chọn, a_3 có 4 cách chọn, a_4 có 3 cách chọn.
  - a_5 là 0, a_1 có 6 cách chọn, a_2 có 5 cách chọn, a_3 có 4 cách chọn, a_4 có 3 cách chọn.

— Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 660$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{660}{2160} = \dfrac{11}{36}$. □

BÀI 25. Có 12 số tự nhiên khác nhau trong đó có 5 số chẵn và 7 số lẻ, chọn ngẫu nhiên 3 số. Tính xác suất để tổng 3 số được chọn là số chẵn. **ĐS:** $\dfrac{23}{44}$

Lời giải.

Không gian mẫu Ω có tổng số phần tử là $n_\Omega = \mathrm{C}_{12}^3 = 220$. Gọi A là biến cố "tổng ba số được chọn là số chẵn". Ta xét các trường hợp sau:

— Chọn được ba số chẵn, có: $\mathrm{C}_5^3 = 10$ (cách).

— Chọn được một số chẵn và hai số lẻ, có: $\mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_7^2 = 105$ (cách).

Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $10+105=115$.
Xác suất cần tìm là $P(A)=\dfrac{n_A}{n_\Omega}=\dfrac{115}{220}=\dfrac{23}{44}$. □

BÀI 26. Gieo một con súc sắc cân đối đồng chất hai lần. Tính xác suất sao cho:

① Tổng số chấm trong 2 lần gieo bằng 6. **ĐS:** $\dfrac{1}{6}$

② Ít nhất một lần gieo xuất hiện mặt 1 chấm. **ĐS:** $\dfrac{1}{3}$

③ Tổng số chấm bằng 7. **ĐS:** $\dfrac{1}{6}$

④ Tổng số chấm nhỏ hơn 6. **ĐS:** $\dfrac{1}{3}$

⑤ Tổng số chấm chia hết cho 5. **ĐS:** $\dfrac{1}{9}$

⑥ Lần đầu là số nguyên tố, lần sau là số chẵn. **ĐS:** $\dfrac{1}{6}$

⑦ Có đúng 1 mặt 6 chấm xuất hiện. **ĐS:** $\dfrac{5}{18}$

Lời giải.
Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "gieo một con xúc sắc cân đối đồng chất hai lần". Ta có $n_\Omega=6\cdot 6=36$.

① Gọi A là biến cố "tổng số chấm trong 2 lần gieo bằng 6". Ta có:

— Các bộ số có tổng số chấm bằng 6 là: $\{1,5\}$, $\{2,4\}$, $\{3,3\}$.
— Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A=3\cdot 2!=6$.

Xác suất cần tìm là $P(A)=\dfrac{n_A}{n_\Omega}=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$.

② Gọi A là biến cố "ít nhất một lần gieo xuất hiện mặt 1 chấm". Ta có:

— Các bộ số có sự xuất hiện của mặt 1 chấm là: $\{1,1\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{1,5\}$, $\{1,6\}$.
— Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A=6\cdot 2!=12$.

Xác suất cần tìm là $P(A)=\dfrac{n_A}{n_\Omega}=\dfrac{12}{36}=\dfrac{1}{3}$.

③ Gọi A là biến cố "tổng số chấm trong 2 lần gieo bằng 7". Ta có:

— Các bộ số có tổng số chấm bằng 7 là: $\{1,6\}$, $\{2,5\}$, $\{3,4\}$.
— Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A=3\cdot 2!=6$.

Xác suất cần tìm là $P(A)=\dfrac{n_A}{n_\Omega}=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$.

④ Gọi A là biến cố "tổng số chấm trong 2 lần gieo nhỏ hơn 6". Ta có:

— Các bộ số có tổng số chấm nhỏ hơn 6 là: $\{1,1\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,2\}$, $\{2,3\}$.
— Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A=6\cdot 2!=12$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{12}{36} = \dfrac{1}{3}$.

⑤ Gọi A là biến cố "tổng số chấm trong 2 lần gieo chia hết cho 5". Ta có:

— Các bộ số có tổng số chấm chia hết cho 5 là: $\{1,4\}$, $\{2,3\}$.
— Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = 2 \cdot 2! = 4$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$.

⑥ Gọi A là biến cố "lần gieo đầu là số nguyên tố, lần 2 là số chẵn". Ta có:

— Các số nguyên tố nhỏ hơn 6 có ba số là $\{2,3,5\}$.
— Từ 1 đến 6 có tất cả 3 số chẵn.
— Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = 3 \cdot 3 = 6$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.

⑦ Gọi A là biến cố "có đúng một mặt 6 chấm xuất hiện". Ta có:

— Các bộ số có sự xuất hiện của đúng một số 6 là: $\{6,1\}$, $\{6,2\}$, $\{6,3\}$, $\{6,4\}$, $\{6,5\}$.
— Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = 5 \cdot 2 = 10$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$.

□

BÀI 27. Gọi E là tập hợp các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau mà mỗi chữ số đều lớn hơn 4. Hãy xác định số phần tử của tập E. Chọn ngẫu nhiên một phần tử của tập E, tính xác suất để số được chọn có ba chữ số lẻ đứng kề nhau. **ĐS:** $\dfrac{3}{10}$

Lời giải.

Lập một số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau từ bộ 5 số $\{5,6,7,8,9\}$. Số phần tử của E là $5! = 120$. Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "chọn ngẫu nhiên một phần tử thuộc E", gọi A là biến cố "số được chọn có ba chữ số lẻ đứng kề nhau". Xét các số thỏa mãn đề bài có dạng $\overline{abcde}$. Ta xét các trường hợp:

— $\overline{abc}$ là 3 chữ số lẻ. Chọn $\overline{abc}$ có $3! = 6$ cách. Chọn $\overline{de}$ có $2! = 2$. Do đó, số kết quả trong trường hợp này là $6 \cdot 2 = 12$.

— Các trường hợp $\overline{bcd}$ và $\overline{cde}$ là các số lẻ đều có kết quả tương tự trường hợp trên.

— Vậy số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = 12 \cdot 3 = 36$.

— Số phần tử của không gian mẫu là $n_\Omega = C^1_{120} = 120$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{36}{120} = \dfrac{3}{10}$. □

BÀI 28. Cho tập hợp $E = \{1,2,3,4,5,6\}$. Gọi M là tập hợp các số tự nhiên có nhiều nhất ba chữ số, các chữ số đôi một khác nhau được thành lập từ tập E. Lấy ngẫu nhiên một số thuộc tập hợp M. Tính xác suất lấy được một số thuộc tập M, sao cho tổng các chữ số của số đó bằng 10.**ĐS:** $\dfrac{1}{6}$

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "lấy ngẫu nhiên một số thuộc tập M", gọi A là biến cố "tổng các chữ số của số được chọn là 10". Ta có:

— Số phần tử của M là $A_6^3 + A_6^2 + A_6^1 = 156$.

— Số phần tử của không gian mẫu là $C_{156}^1 = 156$.

— Để tổng của các chữ số của số được chọn là 10, ta có các bộ số: $\{4,6\}$, $\{1,3,6\}$, $\{1,4,5\}$, $\{2,3,5\}$, $\{3,4,5\}$. Do đó, số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = 2! + 4 \cdot 3! = 26$.

Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{26}{156} = \dfrac{1}{6}$. □

BÀI 29. Gọi E là tập hợp các số có ba chữ số khác nhau được lập từ các chữ số $1,2,3,4,5$. Chọn ngẫu nhiên ba số từ tập hợp E, tính xác suất để trong ba số được chọn có đúng một số có mặt chữ số 4. **ĐS:** 0,29

Lời giải.

Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử "lấy ngẫu nhiên ba số từ tập E", gọi A là biến cố 'trong ba số được chọn có đúng một số có mặt chữ số 4". Ta có:

— Số phần tử của tập E là $A_5^3 = 60$.

— Số phần tử của không gian mẫu là $C_{60}^3 = 34220$.

— Các số thuộc E không có chữ số 4 là $A_4^3 = 24$.

— Các số thuộc E có mặt chữ số 4 là $60 - 24 = 36$.

— Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n_A = C_{36}^1 \cdot C_{24}^2 = 9936$.

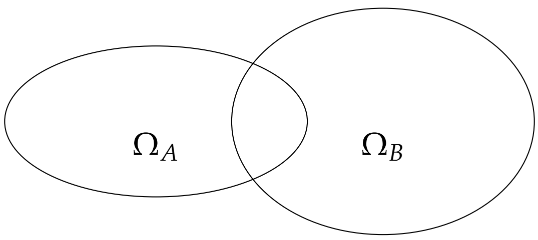
Xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{9936}{34220} \approx 0{,}29$. □

BÀI 5. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

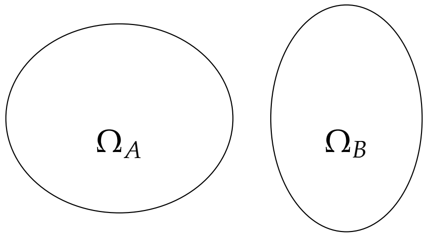
1 QUY TẮC CỘNG XÁC SUẤT

Định nghĩa 1 (Biến cố hợp). Cho hai biến cố A và B. Biến cố "A hoặc B xảy ra", kí hiệu là $A \cup B$ được gọi là hợp của hai biến cố A và B. Khi đó $\Omega_A \cup \Omega_B \subset \Omega$.



VÍ DỤ 1. Chọn ngẫu nhiên một bạn học sinh lớp 11 của trường. Gọi A là biến cố: "Bạn đó là học sinh giỏi toán" và B là biến cố: "Bạn đó là học sinh giỏi Lý".
Khi đó $A \cup B$ là biến cố: "Bạn đó là học sinh giỏi Toán hoặc giỏi Lý".

Định nghĩa 2 (Biến cố xung khắc). Cho hai biến cố A và B. Hai biến cố A và B được gọi là xung khắc nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra. Khi đó $\Omega_A \cap B = \varnothing$.



VÍ DỤ 2. Chọn ngẫu nhiên một học sinh lớp 11 của trường. Gọi A là biến cố: "Bạn đó là học sinh lớp $11C_1$" và B là biến cố: "Bạn đó là học sinh lớp $11C_2$". Khi đó A và B là hai biến cố xung khắc.

Định nghĩa 3 (Quy tắc cộng xác suất hai biến cố xung khắc).

— Nếu A và B là hai biến cố xung khắc thì xác suất biến cố $A \cup B$ là $\mathrm{P}(A+B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.

— Cho n biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ đôi một là các biến cố xung khắc với nhau. Khi đó $\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \mathrm{P}(A_)+ \ldots + \mathrm{P}(A_n)$.

VÍ DỤ 3. Cho một hộp đựng 4 viên bi xanh và 3 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất để có ít nhất 2 viên bi xanh. **ĐS:** $\dfrac{22}{35}$

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = \mathrm{C}_7^3 = 35$.
Gọi A là biến cố: "3 viên bi lấy ra có ít nhất 2 viên bi xanh". Có các trường hợp sau:

— Lấy được 2 viên bi xanh và 1 viên bi đỏ, số cách chọn là $\mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_3^1 = 18$.

— Lấy được 3 viên bi xanh, số cách chọn là $\mathrm{C}_4^3 = 4$.

Theo quy tắc cộng ta có $n(A) = 18 + 4 = 22$.
Vậy xác suất của A là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{22}{35}$. □

VÍ DỤ 4. Trên một kệ sách có 7 quyển sách Toán, 6 quyển sách Lý và 4 quyển sách Hóa. Lấy ngẫu nhiên từ kệ sách đó ra hai quyển sách. Tính xác suất để lấy được hai quyển sách cùng một môn. **ĐS:** $\dfrac{21}{68}$

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = \mathrm{C}_{17}^2 = 136$.
Gọi A là biến cố: "Lấy được hai quyển sách cùng một môn". Có các trường hợp sau:

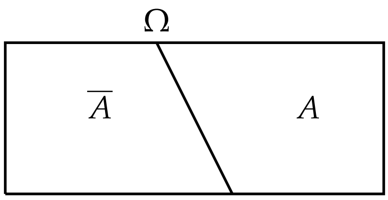
— Lấy được 2 quyển sách Toán, có $\mathrm{C}_7^2 = 21$ cách.

— Lấy được 2 quyển sách Lý, có $\mathrm{C}_6^2 = 15$ cách.

— Lấy được 2 quyển sách Hóa, có $C_4^2 = 6$ cách.

Theo quy tắc cộng ta có $n(A) = 21 + 15 + 6 = 42$.
Vậy xác suất của A là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{42}{136} = \dfrac{21}{68}$. □

Định nghĩa 4 (Biến cố đối). Cho A là một biến cố. Khi đó biến cố "không A", kí hiệu là $\overline{A}$, được gọi là biến cố đối của A. Ta nói A và $\overline{A}$ là hai biến cố đối của nhau.
Khi đó $\Omega_{\overline{A}} = \Omega \setminus \Omega_A \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.



Câu hỏi 1: Hai biến cố đối nhau có phải là hai biến cố xung khắc?

Lời giải.
Hai biến cố đối nhau là hai biến cố xung khắc. □
Câu hỏi 2: Hai biến cố xung khắc có phải là hai biến cố đối?
Lời giải.
Hai biến cố xung khắc không phải là hai biến cố đối. □

VÍ DỤ 5. Một xạ thủ bắn vào bia một viên đạn với xác suất $\dfrac{2}{7}$. Khi đó xác suất bắn trượt là bao nhiêu? **ĐS:** $\dfrac{5}{7}$

Lời giải

Gọi A là biến cố: "Một xạ thủ bắn vào bia một viên đạn" thì $P(A) = \dfrac{2}{7}$. Khi đó xác suất bắn trượt là $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{2}{7} = \dfrac{5}{7}$. □

VÍ DỤ 6. Từ một hộp có 6 quả cầu trắng và 4 quả cầu xanh, lấy ngẫu nhiên cùng một lúc ra 4 quả. Tính xác suất sao cho:

a) Bốn quả lấy ra cùng màu. **ĐS:** $\dfrac{8}{105}$

b) Bốn quả lấy ra có đủ hai màu. **ĐS:** $\dfrac{97}{105}$

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{10}^4 = 210$.

a) Gọi A là biến cố: "Bốn quả lấy ra cùng màu". Có hai trường hợp:

— Bốn quả lấy ra cùng màu trắng, có $C_6^4 = 15$ cách chọn.

— Bốn quả lấy ra cùng màu xanh, có $C_4^4 = 1$ cách chọn.

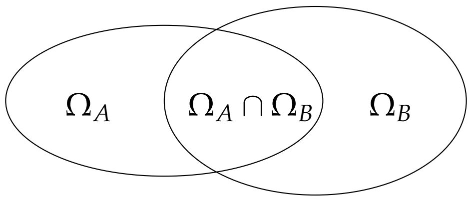
Theo quy tắc cộng thì $n(A) = 15 + 1 = 16$ cách chọn. Vậy xác suất của A là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{16}{210} = \dfrac{8}{105}$.

b) Gọi B là biến cố: "Bốn quả lấy ra có đủ hai màu" thì $B = \overline{A}$.
Suy ra $P(B) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{8}{105} = \dfrac{97}{105}$.

□

2 QUY TẮC NHÂN XÁC SUẤT

Định nghĩa 5 (Biến cố giao). Cho hai biến cố A và B. Biến cố "A và B cùng xảy ra", kí hiệu là $A \cap B$ (hay AB) gọi là giao của hai biến cố A và B.



VÍ DỤ 7. Chọn ngẫu nhiên một học sinh lớp 11 của trường. Gọi A là biến cố: "Bạn đó là học sinh giỏi Toán" và gọi B là biến cố: "Bạn đó là học sinh giỏi Lý".
Khi đó: $A \cap B$ là biến cố: "Bạn đó là học sinh giỏi Toán và giỏi Lý"

Định nghĩa 6 (Hai biến cố độc lập). **VÍ DỤ 8.** Gieo một đồng xu liên tiếp 2 lần. Gọi A là biến cố: "Lần gieo thứ nhất xuất hiện mặt sấp" và gọi B là biến cố: "Lần gieo thứ hai xuất hiện mặt ngửa". Khi đó A và B là 2 biến cố độc lập.

— Hai biến cố được gọi là độc lập với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng xác suất xảy ra của biến cố kia.

— Nếu hai biến cố A và B độc lập với nhau thì A và $\overline{B}$, $\overline{A}$ và B, $\overline{A}$ và $\overline{B}$ cũng là độc lập

Định nghĩa 7 (Quy tắc nhân xác suất hai biến cố độc lập). — Nếu A và B là hai biến cố độc lập với nhau thì ta luôn có: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

— Cho n biến cố $A_1, A_2, A_3 \ldots, A_n$ độc lập với nhau từng đôi một. Khi đó:
$P(A_1A_2A_3 \cdots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdots P(A_n)$ hay $P\left(\prod\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$

VÍ DỤ 9. Một cầu thủ sút bóng vào cầu môn hai lần. Biết rằng xác suất sút vào cầu môn là $\dfrac{3}{8}$. Tính xác suất để cầu thủ đó sút hai lần bóng đều vào được cầu môn.**ĐS:** $\dfrac{9}{64}$

Lời giải

Gọi A là biến cố: "Cầu thủ sút bóng vào cầu môn lần thứ nhất" thì $\mathrm{P}(A) = \dfrac{3}{8}$.
Gọi B là biến cố: "Cầu thủ sút bóng vào cầu môn lần thứ hai" thì $\mathrm{P}(B) = \dfrac{3}{8}$.
Suy ra AB là biến cố: "Cầu thủ sút hai lần bóng đều vào được cầu môn".
Vì A và B là hai biến cố độc lập nên xác suất của AB là $\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) = \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{3}{8} = \dfrac{9}{64}$.
□

VÍ DỤ 10. Có hai xạ thủ bắn bia. Xác suất xạ thủ thứ nhất bắn trúng bia là 0,8. Xác suất xạ thủ thứ hai bắn trúng bia là 0,7. Tính xác suất để:

a) Cả hai xạ thủ đều bắn trúng. **ĐS:** 0,56

b) Cả hai xạ thủ đều không bắn trúng bia. **ĐS:** 0,06

c) Có ít nhất một xạ thủ bắn trúng bia. **ĐS:** 0,94

Lời giải

Gọi A là biến cố: "Xạ thủ thứ nhất bắn trúng" và B là biến cố: "Xạ thủ thứ hai bắn trúng" thì $\mathrm{P}(A) = 0{,}8$ và $\mathrm{P}(B) = 0{,}7$. Ta có A và B là hai biến cố độc lập.

a) Biến cố: "Cả hai xạ thủ đều bắn trúng" là AB nên $\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56$.

b) Biến cố: "Cả hai xạ thủ đều không bắn trúng bia" là $\overline{A}\overline{B}$.
Do A và B là độc lập nên $\overline{A}$ và $\overline{B}$ cũng độc lập. Suy ra $\mathrm{P}(\overline{A}\overline{B}) = \mathrm{P}(\overline{A}) \cdot \mathrm{P}(\overline{B}) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$.

c) Biến cố: "Có ít nhất một xạ thủ bắn trúng bia" là $A \cup B$.
$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB) = 0{,}8 + 0{,}7 - 0{,}56 = 0{,}94$.

□

!

Áp dụng các nguyên tắc tính xác suất để giải bài toán, thường ta làm theo các bước sau:

— **Bước 1.** Gọi A là biến cố cần tính xác suất và A_i, $(i = \overline{1,n})$ là các biến cố liên quan đến A sao cho:

+ Biến cố A biểu diễn theo các biến cố A_i, $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

+ Hoặc xác suất các biến cố A_i tính toán dễ dàng hơn so với A.

— **Bước 2.** Biểu diễn biến cố A theo các biến cố A_i.

— **Bước 3.** Xác định mối liên hệ giữa các biến cố và áp dụng các nguyên tắc:

+ Nếu A_1, A_2 xung khắc $(A_1 \cap A_2 = \varnothing)$ thì $\mathrm{P}(A_1 \cup A_2) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2)$.

+ Nếu A_1, A_2 bất kỳ thì $\mathrm{P}(A_1 \cup A_2) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) - \mathrm{P}(A_1 \cdot A_2)$.

+ Nếu A_1, A_2 độc lập thì $\mathrm{P}(A_1 \cdot A_2) = \mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(A_2$.

+ Nếu A_1, A_2 đối nhau thì $\mathrm{P}(A_1) = 1 - \mathrm{P}(A_2)$.

B BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Một cặp vợ chồng mong muốn sinh bằng được con trai (sinh được con trai rồi thì không sinh nữa, chưa sinh được thì sẽ sinh tiếp). Xác suất sinh được con trai trong mỗi lần sinh là 0,51. Tìm xác suất sao cho cặp vợ chồng đó mong muốn sinh được con trai ở lần sinh thứ 2. **ĐS:** 0,2499

Lời giải.
Xác suất sinh con gái là $1 - 0{,}51 = 0{,}49$.
Xác suất để cặp vợ chồng đó sinh được con trai ở lần sinh thứ 2 là $0{,}49 \cdot 0{,}51 = 0{,}2499$. □

BÀI 2. Ba xạ thủ độc lập cùng bắn vào một cái bia. Xác suất bắn trúng mục tiêu của mỗi xạ thủ là 0,6.

① Tính xác suất để trong 3 xạ thủ bắn có đúng một xạ thủ bắn trúng mục tiêu. **ĐS:** 0,288

② Muốn mục tiêu bị phá hủy hoàn toàn phải có ít nhất hai xạ thủ bắn trúng mục tiêu. Tính xác suất để mục tiêu bị phá hủy hoàn toàn. **ĐS:** 0,648

Lời giải.

① Gọi X_i là xạ thủ thứ i bắn trúng bia. Khi đó $\overline{X_i}$ là xạ thủ thứ i không bắn trúng bia. Ta có $\mathrm{P}(X_i) = 0{,}6; \mathrm{P}(\overline{X_i}) = 0{,}4$.
Gọi A là biến cố "3 xạ thủ bắn có đúng một xạ thủ bắn trúng mục tiêu".
Ta có $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(X_1.\overline{X_2} \cdot \overline{X_3}) + \mathrm{P}(\overline{X_1} \cdot X_2 \cdot \overline{X_3}) + \mathrm{P}(\overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdot X_3) = 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}288$.

② Gọi B là biến cố "mục tiêu bị phá hủy hoàn toàn".
$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(X_1.X_2 \cdot X_3) + \mathrm{P}(X_1.X_2 \cdot \overline{X_3}) + \mathrm{P}(X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot X_3) + \mathrm{P}(\overline{X_1} \cdot X_2 \cdot X_3) = 0{,}6^3 + 3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}648$.

□

BÀI 3. Hai xạ thủ A và B cùng bắn vào tấm bia mỗi người mỗi phát. Xác suất bắn trúng bia của xạ thủ A là 0,7. Tìm xác suất bắn trúng bia của xạ thủ B. Biết xác suất có ít nhất một người bắn trúng bia là 0,94. **ĐS:** 0,8

Lời giải.
Gọi X_A là xạ thủ A bắn trúng bia $\Rightarrow \overline{X_A}$ là xạ thủ A không bắn trúng bia $\Rightarrow \mathrm{P}(X_A) = 0{,}7, \mathrm{P}(\overline{X_A}) = 0{,}3$.
Gọi X_B là xạ thủ B bắn trúng bia $\Rightarrow \overline{X_B}$ là xạ thủ B không bắn trúng bia.
Gọi E là biến cố "có ít nhất một người bắn trúng bia". $\overline{E}$ là biến cố "không ai bắn trúng bia"
$\Rightarrow \mathrm{P}(E) = 0{,}94 \Rightarrow \mathrm{P}(\overline{E}) = 0{,}06$.
Ta có $\mathrm{P}(\overline{E}) = \mathrm{P}(\overline{X_A}) \cdot \mathrm{P}(\overline{X_B}) = 0{,}3 \cdot \mathrm{P}(\overline{X_B}) = 0{,}06 \Rightarrow \mathrm{P}(\overline{X_B}) = 0{,}2 \Rightarrow \mathrm{P}(X_B) = 0{,}8$. □

BÀI 4. Hai người độc lập nhau cùng bắn mỗi người một viên đạn vào bia. Xác suất ban trúng bia của họ lần lượt là $\frac{1}{3}$ và $\frac{1}{5}$ Tính xác suất của các biến cố sau

① A: "cả hai đều bắn trúng". **ĐS:** $\frac{1}{15}$

② B: "cả hai đều bắn trượt". **ĐS:** $\frac{8}{15}$

③ C: "ít nhất một người bắn trúng". **ĐS:** $\frac{7}{15}$

④ D: "có đúng một người bắn trúng". **ĐS:** $\frac{2}{5}$

Lời giải.

① A: "cả hai đều bắn trúng". Khi đó $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{15}$.

② B: "cả hai đều bắn trượt". Khi đó $\mathrm{P}(B) = \left(1 - \dfrac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{15}\right) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{8}{15}$.

③ C: "ít nhất một người bắn trúng". Ta có biến cố B chính là biến cố đối của C. Khi đó $\mathrm{P}(C) = 1 - \mathrm{P}(B) = 1 - \dfrac{8}{15} = \dfrac{7}{15}$.

④ D: "có đúng một người bắn trúng" tức là người thứ nhất bắn trúng người thứ 2 bắn trật hoặc người thứ nhất bắn trật người thứ hai bắn trúng. Ta có $\mathrm{P}(D) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{4}{5} + \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{5} = \dfrac{2}{5}$

□

BÀI 5. Có 3 người cùng đi câu cá; xác suất Câu được cá của người thứ nhất là 0,5; xác suất câu được cá của người thứ hai là 0,4; xác suất câu được cá của người thứ ba là 0,2. Tính xác suất biến cố:

① Có đúng 1 người câu được cá. **ĐS:** 0,46

② Có đúng 2 người câu được cá. **ĐS:** 0,26

③ Người thứ 3 luôn luôn câu được cá. **ĐS:** 0,2

④ Có ít nhất 1 người câu được cá. **ĐS:** 0,76

Lời giải.

① Gọi X_i là người thứ i câu được cá. Khi đó $\overline{X_i}$ là người thứ i không câu được cá. Ta có $\mathrm{P}(X_1) = 0{,}5; \mathrm{P}(X_2) = 0{,}4; \mathrm{P}(X_3) = 0{,}2; \mathrm{P}(\overline{X_1}) = 0{,}5; \mathrm{P}(\overline{X_2}) = 0{,}6; \mathrm{P}(\overline{X_3}) = 0{,}8$.
Gọi A là biến cố "có đúng 1 người câu được cá". Ta có
$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(X_1.\overline{X_2} \cdot \overline{X_3}) + \mathrm{P}(\overline{X_1} \cdot X_2 \cdot \overline{X_3}) + \mathrm{P}(\overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdot X_3) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}46$.

② Gọi B là biến cố "có đúng 2 người câu được cá". Ta có $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(\overline{X_1} \cdot X_2 \cdot X_3 + X_1.\overline{X_2} \cdot X_3) + \mathrm{P}(X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot X_3) + \mathrm{P}(X_1 \cdot X_2 \cdot \overline{X_3}) =$
$= 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}26$.

③ Gọi C là biến cố "người thứ 3 luôn luôn câu được cá". Khi đó $\mathrm{P}(D) = \mathrm{P}(X_3) = 0{,}2$.

④ Gọi D là biến cố "có ít nhất 1 người câu được cá" $\Rightarrow \overline{D}$ là biến cố "không ai câu được cá". Ta có
$\mathrm{P}(D) = 1 - \mathrm{P}(\overline{D}) = \mathrm{P}(\overline{X_1}) \cdot \mathrm{P}(\overline{X_2}) \cdot \mathrm{P}(\overline{X_3}) = 1 - 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 1 - 0{,}24 = 0{,}76$.

□

BÀI 6. Một xạ thủ bắn vào bia 4 lần độc lập; xác suất bắn trúng một lần là 0,3. Tính xác suất biến cố:

① Cả 4 lần đều bắn trượt. **ĐS:** 0,2401

② Có đúng 3 lần bắn trúng. **ĐS:** 0,0756

③ Lần thứ 1 bắn trúng, lần thứ 2 bắn trượt. **ĐS:** 0,21

④ Ít nhất 2 lần bắn trúng. **ĐS:** 0,2601

Lời giải.

① Gọi X_i là xạ thủ bắn trúng bia lần thứ i. Khi đó $\overline{X_i}$ là xạ thủ không bắn trúng bia lần thứ i.
Ta có $\mathrm{P}(X_i) = 0{,}3, \mathrm{P}(\overline{X_i}) = 0{,}7$.
Gọi A là biến cố "Cả 4 lần đều bắn trượt". Ta có $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(\overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} \cdot \overline{X_4}) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}2401$.

② Gọi B là biến cố "Có đúng 3 lần bắn trúng". $\Rightarrow \mathrm{P}(B) = 4.(0{,}7 \cdot 0{,}3^3) = 0{,}0756$.

③ Gọi C là biến cố "Lần thứ 1 bắn trúng, lần thứ 2 bắn trượt". $\Rightarrow \mathrm{P}(C) = 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}21$.

④ Gọi D là biến cố "Ít nhất 2 lần bắn trúng".
$\mathrm{P}(D) = \mathrm{P}(X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4) + \mathrm{P}(B) +$
$+ (\mathrm{P}(X_1 \cdot X_2 \cdot \overline{X_3} \cdot \overline{X_4}) + \mathrm{P}(X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot X_3 \cdot \overline{X_4}) + \mathrm{P}(X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} \cdot X_4) + \mathrm{P}(\overline{X_1} \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \overline{X_4}) +$
$\mathrm{P}(\overline{X_1} \cdot X_2 \cdot \overline{X_3} \cdot X_4) + \mathrm{P}(\overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdot X_3 \cdot X_4))$
$= (0{,}3)^4 + 0{,}0756 + 4.(0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7) = 0{,}2601$.

□

BÀI 7. Có hai hộp đựng thẻ, mỗi hộp đựng 12 thẻ được đánh số từ 1 đến 12. Từ mỗi hộp rút ngẫu nhiên một thẻ. Tính xác suất để trong 2 thẻ rút ra có ít nhất một thẻ đánh số 12. **ĐS:** $\frac{23}{144}$

Lời giải.
Gọi X_i là từ hộp thứ i rút ra được một thẻ được ghi số 12. Khi đó $\overline{X_i}$ là từ hộp thứ i rút ra được một thẻ không ghi số 12. Ta có $\mathrm{P}(X_i) = \dfrac{1}{12} \Rightarrow \mathrm{P}(\overline{X_i}) = \dfrac{11}{12}$.
Gọi A là biến cố "2 thẻ rút ra có ít nhất một thẻ đánh số 12" $\Rightarrow \overline{A}$ là biến cố "2 thẻ rút ra không có thẻ đánh số 12".
Ta có $\mathrm{P}(\overline{A}) = \mathrm{P}(\overline{X_1} \cdot \overline{X_2}) = \dfrac{11}{12} \cdot \dfrac{11}{12} = \dfrac{121}{144} \Rightarrow \mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \dfrac{121}{144} = \dfrac{23}{144}$. □

BÀI 8. Có ba xạ thủ cùng bắn vào một tấm bia. Xác suất trúng đích lần lượt của mỗi người là 0,6; 0,7 và 0,8. Tính xác suất để có ít nhất một người bắn trúng bia. **ĐS:** 0,976

Lời giải.
Gọi X_i là xạ thủ thứ i bắn trúng bia. Khi đó $\overline{X_i}$ là xạ thủ thứ i không bắn trúng bia.
Ta có $\mathrm{P}(X_1) = 0{,}6; \mathrm{P}(X_2) = 0{,}7; \mathrm{P}(X_3) = 0{,}8, \mathrm{P}(\overline{X_1}) = 0{,}4; \mathrm{P}(\overline{X_2}) = 0{,}3; \mathrm{P}(\overline{X_3}) = 0{,}2$.
Gọi A là biến cố "có ít nhất một người bắn trúng bia" $\Rightarrow \overline{A}$ là biến cố không ai bắn trúng bia.
Ta có $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = \mathrm{P}(\overline{X_1}) \cdot \mathrm{P}(\overline{X_2}) \cdot \mathrm{P}(\overline{X_3}) = 1 - 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 1 - 0{,}024 = 0{,}976$. □

BÀI 9. Có một xạ thủ mới tập bắn, bắn vào tấm bia. Xác suất trúng đích là 0,2. Tính xác suất để trong ba lần bắn:

① Ít nhất một lần trúng bia. **ĐS:** 0,488

② Bắn trúng bia đúng lần thứ nhất. **ĐS:** 0,2

Lời giải.

① Gọi X_i là lần thứ i xạ thủ bắn trúng bia. Khi đó $\overline{X_i}$ là lần thứ i xạ thủ không bắn trúng bia.
Ta có
$\mathrm{P}(X_i) = 0{,}2; \mathrm{P}(\overline{X_i}) = 0{,}8$.
Gọi A là biến cố "ít nhất một lần trúng bia" $\Rightarrow \overline{A}$ là biến cố không ai bắn trúng bia. Ta có
$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = \mathrm{P}(\overline{X_1}) \cdot \mathrm{P}(\overline{X_1}) \cdot \mathrm{P}(\overline{X_1}) = 1 - 0{,}8^3 = 1 - 0{,}512 = 0{,}488$.

② Gọi B là biến cố "bắn trúng bia đúng lần thứ nhất". Ta có $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(X_1) = 0{,}2$.

□

BÀI 10. Việt và Nam thi đấu với nhau một trận bóng bàn, người nào thắng trước 3 séc thì thắng trận. Xác suất Nam thắng mỗi séc là 0,4 (giả sử không có séc hòa). Tính xác suất Nam thắng trận?

ĐS: 0,11008

Lời giải.

Xác suất Nam thắng mỗi séc là 0,4, xác suất Nam không thắng mỗi séc là $1 - 0{,}4 = 0{,}6$.
Xác suất Nam thắng cả 3 séc đầu: $0{,}4^3 = 0{,}064$.
Xác suất Nam thắng 3 séc trong 4 séc đầu: $0{,}4^3 \cdot 0{,}6 = 0{,}0384$.
Xác suất Nam thắng cả 3 séc trong 5 séc: $0{,}4^3 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}02304$.
Vậy xác suất Nam thắng trận là: $0{,}064 + 0{,}0384 + 0{,}02304 = 0{,}11008$. □

BÀI 11. Một nhóm xạ thủ gồm có 10 người trong đó có 3 xạ thủ loại I và 7 xạ thủ loại II. Xác suất bắn trúng đích trong mỗi lần bắn của một xạ thủ loại I và loại II lần lượt là 0,9 và 0,8. Chọn ngẫu nhiên một xạ thủ trong 10 người và cho bắn một viên đạn. Tính xác suất để viên đạn trúng đích?

ĐS: 0,83

Lời giải.

Xác suất chọn 1 xạ thủ loại I và bắn trúng là $\dfrac{3}{10} \cdot 0{,}9 = 0{,}27$.
Xác suất chọn 1 xạ thủ loại II và bắn trúng là $\dfrac{7}{10} \cdot 0{,}8 = 0{,}56$.
Vậy xác suất để viên đạn trúng đích là $0{,}27 + 0{,}56 = 0{,}83$. □

BÀI 12. Có ba lô hàng. Người ta lấy một cách ngẫu nhiên từ mỗi lô hàng một sản phẩm. Biết rằng xác suất để được một sản phẩm có chất lượng tốt ở từng lô hàng lần lượt là 0,5; 0,6 và 0,7. Tính xác suất để trong ba sản phẩm lấy ra có ít nhất một sản phẩm có chất lượng tốt? **ĐS:** 0,94

Lời giải.

Gọi X_i là biến cố chọn được sản phẩm có chất lượng tốt ở lô hàng thứ i. Khi đó $\overline{X_i}$ là biến cố chọn được sản phẩm có chất lượng chưa tốt ở lô hàng thứ i.
Ta có $\mathrm{P}(X_1) = 0{,}5, \mathrm{P}(X_2) = 0{,}6, \mathrm{P}(X_3) = 0{,}7, \mathrm{P}(\overline{X_1}) = 0{,}5, \mathrm{P}(\overline{X_2}) = 0{,}4, \mathrm{P}(\overline{X_3}) = 0{,}3$.
Gọi A là biến cố "lấy ra có ít nhất một sản phẩm có chất lượng tốt" $\Rightarrow \overline{A}$ là biến cố "lấy ra có ít nhất một sản phẩm có chất lượng chưa tốt".
Ta có $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = \mathrm{P}(\overline{X_1}) \cdot \mathrm{P}(\overline{X_2}) \cdot \mathrm{P}(\overline{X_3}) = 1 - 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$. □

BÀI 13. Một hộp chứa 11 bi được đánh số từ 1 đến 11. Chọn 6 bi một cách ngẫu nhiên, rồi cộng các số trên 6 bi được rút ra với nhau. Tính xác suất để kết quả thu được là số lẻ. **ĐS:** $\dfrac{118}{231}$

Lời giải.

Từ 1 đến 11 có 6 số lẻ, 5 số chẵn. Số phần tử không gian mẫu $n(\Omega) = \mathrm{C}_{11}^6 = 462$.
Gọi A là biến cố chọn 6 bi một cách ngẫu nhiên, rồi cộng các số trên 6 bi được rút ra với nhau được số lẻ.

① **Trường hợp 1:** 1 số lẻ, 5 số chẵn $\mathrm{C}_6^1 \cdot \mathrm{C}_5^5 = 6$.

② **Trường hợp 2:** 3 số lẻ, 3 số chẵn $\mathrm{C}_6^3 \cdot \mathrm{C}_5^3 = 200$.

③ **Trường hợp 3:** 5 số lẻ, 1 số chẵn $\mathrm{C}_6^5 \cdot \mathrm{C}_5^1 = 30$.

$\Rightarrow n(A) = 6 + 200 + 30 = 236$. Vậy xác suất để kết quả thu được là số lẻ là $\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{118}{231}$.
□

BÀI 14. Một hộp có đựng 4 chính phẩm và 2 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên từng sản phẩm một, không bỏ trở lại để kiểm tra cho đến khi lấy ra hai phế thì thôi. Tính xác suất của biến cố việc kiểm tra chỉ dừng lại ở sản phẩm thứ 2. **ĐS:** $\dfrac{1}{9}$

Lời giải.

Xác suất lấy ra được chính phẩm $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, xác suất lấy ra được phế phẩm $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
Vậy xác suất của biến cố việc kiểm tra chỉ dừng lại ở sản phẩm thứ 2 là $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$. □

BÀI 15. Một thủ kho có một chùm chìa khóa gồm 10 chiếc hình thức giống nhau nhưng trong đó chỉ có 3 chìa là mở được kho. Anh ta mở ngẫu nhiên từng chìa khóa một cho đến khi mở được kho. Tính xác suất để:

① Anh ta mở được kho ở lần thứ 3. **ĐS:** 0,147

② Anh ta mở được kho mà không quá 3 lần mở. **ĐS:** 0,657

Lời giải.

① Gọi X_i là biến cố chọn được chìa khóa thứ i mở được kho. Khi đó $\overline{X_i}$ là biến cố chọn được chìa khóa thứ i không mở được kho. Ta có $\mathrm{P}(X_i) = 0{,}3; \mathrm{P}(\overline{X_i}) = 0{,}7$.
Gọi A là biến cố "mở được kho ở lần thứ 3" $\Rightarrow \overline{A}$ là biến cố không ai bắn trúng bia. Ta có $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(\overline{X_1}) \cdot \mathrm{P}(\overline{X_2}) \cdot \mathrm{P}(X_3) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}147$.

② Gọi B là biến cố "mở được kho mà không quá 3 lần mở".
Ta có $\mathrm{P}(B) = 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}657$.

□

BÀI 16. Một nồi hơi có 3 van bảo hiểm hoạt động độc lập với xác suất hỏng của van 1, van 2, van 3 trong khoảng thời gian t tương ứng là 0,1; 0,2 và 0,3. Nồi hơi hoạt động an toàn nếu ít nhất một van không hỏng. Tìm xác suất để nồi hơi hoạt động an toàn trong khoảng thời gian t? **ĐS:** 0,994

Lời giải.
Gọi X_i là biến cố van thứ i bị hỏng. Khi đó $\overline{X_i}$ là biến cố van thứ i không bị hỏng.
Ta có $\mathrm{P}(X_1) = 0{,}1; \mathrm{P}(X_2) = 0{,}2; \mathrm{P}(X_3) = 0{,}3$.
Gọi A là biến cố "nồi hơi hoạt động an toàn trong khoảng thời gian t" $\Rightarrow \overline{A}$ là biến cố 3 van bị hỏng. Ta có
$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = \mathrm{P}(X_1) \cdot \mathrm{P}(X_2) \cdot \mathrm{P}(X_3) = 1 - 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 1 - 0{,}006 = 0{,}994$. □

BÀI 17. Trong thời gian có dịch bệnh ở vùng dân cư. Cứ 100 người bệnh thì phải có 20 người đi cấp cứu. Xác suất để gặp người đi cấp cứu do mắc phải dịch bệnh của vùng đó là 0,08. Tìm tỉ lệ mắc bệnh của vùng dân cư đó. **ĐS:** 0,016

Lời giải.
Tỉ lệ mắc bệnh của vùng dân cư đó là $\frac{20}{100} \cdot 0{,}08 = 0{,}016$. □

BÀI 18. Một máy bay có 5 động cơ gồm 3 động cơ bên cánh trái và hai động cơ bên cánh phải. Mỗi động cơ bên cánh phải có xác suất bị hỏng là 0,09; mỗi động cơ bên cánh trái có xác suất hỏng là 0,04. Các động cơ hoạt động độc lập với nhau. Máy bay chỉ thực hiện được chuyến bay an toàn nếu ít nhất hai động cơ làm việc. Tính xác suất để máy bay thực hiện được chuyến bay an toàn.
ĐS: 0,9999590464

Lời giải.
Gọi A là biến cố máy bay bay an toàn. Khi đó $\overline{A}$ là biến cố máy bay bay không an toàn.

① **Trường hợp 1:** 5 động cơ hỏng $0{,}09^3 \cdot 0{,}04^2$.

② **Trường hợp 2:** 4 động cơ hỏng $0{,}09^3 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96 + 0{,}09^2 \cdot 0{,}91 \cdot 0{,}04^2$.

$\Rightarrow \mathrm{P}(\overline{A}) = 0{,}09^3 \cdot 0{,}04^2 + 0{,}09^3 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96 + 0{,}09^2 \cdot 0{,}91 \cdot 0{,}04^2$
$\Rightarrow \mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = 0{,}9999590464$. □

BÀI 19. Ba cầu thủ sút phạt luân lưu 11 mét, mỗi người đá một lần với xác suất làm bàn tương ứng là $x; y$ và 0,6 (với $x > y$). Biết xác suất để ít nhất một trong ba cầu thủ ghi bàn là 0,976 và xác suất để ba cầu thủ đều ghi bàn là 0,336. Tính xác suất để có đúng hai cầu thủ ghi bàn? **ĐS:**

Lời giải.

Xác suất để 3 cầu thủ cùng ghi bàn là $x \cdot y \cdot 0{,}6 = 0{,}336 \Leftrightarrow x \cdot y = 0{,}56 \quad (1)$.
Xác suất để không có cầu thủ nào ghi bàn là $(1-x)(1-y)(1-0{,}6) = 1 - 0{,}976 \quad (2)$.

Từ $(1), (2)$ ta có $\begin{cases} x \cdot y = 0{,}56 \\ (1-x)(1-y) = 0{,}06 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0{,}56 \\ -x - y + xy = -0{,}94 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0{,}56 \\ x + y = 1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{5} \\ y = \dfrac{7}{10} \end{cases}$.

□

BÀI 20. Một bài trắc nghiệm có 10 câu hỏi, mỗi câu hỏi có 4 phương án lựa chọn trong đó có 1 đáp án đúng. Giả sử mỗi câu trả lời đúng được 5 điểm và mỗi câu trả lời sai được trừ 2 điểm. Một học sinh không học bài nên đánh hú họa một câu trả lời. Tìm xác suất để học sinh này nhận điểm dưới 1. **ĐS:** $\dfrac{85293}{1048576}$

Lời giải.

Gọi x là số câu trả lời đúng $(0 \leq x \leq 10)$, khi đó số câu trả lời sai là $10 - x$. Để học sinh làm dưới 1 điểm thì số câu trả lời đúng thỏa mãn bất phương trình $5x + (10-x)(-2) < 1 \Leftrightarrow 7x < 21 \Leftrightarrow x < 3 \Rightarrow x \in \{0; 1; 2\}$.

① $x = 0$ không có câu đúng $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{10}$.

② $x = 1$ có 1 câu đúng $\left(\dfrac{1}{4}\right)\left(\dfrac{3}{4}\right)^{9}$.

③ $x = 2$ có 2 câu đúng $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{2}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{8}$.

Vậy xác suất để học sinh này nhận điểm dưới 1 là $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{10} + \left(\dfrac{1}{4}\right)\left(\dfrac{3}{4}\right)^{9} + \left(\dfrac{1}{4}\right)^{2}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{8} = \dfrac{85293}{1048576}$.

□

BÀI 21. Trong một lớp học có 60 sinh viên, trong đó có 40 sinh viên học tiếng Anh, 30 sinh viên học tiếng Pháp và 20 sinh viên học cả hai tiến Anh và Pháp. Chọn ngẫu nhiên một sinh viên. Tính xác suất của các biến cố sau:

① A: "Sinh viên được chọn học tiếng Anh". **ĐS:** $\dfrac{2}{3}$

② B: "Sinh viên được chọn học tiếng Pháp". **ĐS:** $\dfrac{1}{2}$

③ C: "Sinh viên được chọn học cả tiếng Anh lẫn tiếng Pháp". **ĐS:** $\dfrac{1}{3}$

④ D: "Sinh viên được chọn không học tiếng Anh và Tiếng Pháp". **ĐS:** $\dfrac{1}{6}$

Lời giải.

① Theo đề số học sinh học tiếng Anh là 40, số học sinh học tiếng Pháp là 30, số học sinh học cả 2 môn Anh, Pháp là 20, số học sinh không học môn Anh, Pháp là $60 - (40 + 30 - 20) = 10$.
Xác suất chọn được sinh viên học tiếng Anh là $\dfrac{40}{60} = \dfrac{2}{3}$.

② Xác suất chọn được sinh viên học tiếng Pháp là $\frac{30}{60} = \frac{1}{2}$.

③ Xác suất chọn được sinh viên học tiếng Anh là $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$.

④ Xác suất chọn được sinh viên không học tiếng Anh và Tiếng Pháp là $\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$.

□

BÀI 22. Trong kì kiểm tra chất lượng ở hai khối lớp, mỗi khối có 25% học sinh trượt Toán, 15% trượt Lý, 10% trượt cả Lý lẫn Toán. Từ mỗi khối chọn ngẫu nhiên một học sinh. Tính xác suất sao cho:

① Hai học sinh đó trượt Toán. **ĐS:** $\frac{1}{16}$

② Hai học sinh đó đều bị trượt một môn nào đó. **ĐS:** $\frac{1}{4}$

③ Hai học sinh đó không bị trượt môn nào. **ĐS:** $\frac{1}{4}$

④ Có ít nhất một trong hai học sinh bị trượt ít nhất một môn. **ĐS:** $\frac{3}{4}$

Lời giải.

Kí hiệu A_1, A_2, A_3 lần lượt là các biến cố: Học sinh được chọn từ khối I trượt Toán, Lí Hóa; B_1, B_2, B_3, lần lượt là các biến cố: Học sinh được chọn từ khối II trượt Toán, Lí Hóa. Rõ ràng với mọi (i, j), các biến cố A_i và B_j độc lập.

① Ta có $\mathrm{P}(A_1B_1) = \mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(B_1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.

② Xác suất cần tính là

$$\begin{aligned} & \mathrm{P}\left((A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3)\right) \\ = & \mathrm{P}\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3\right) \cdot \left(B_1 \cup B_2 \cup B_3\right) \\ = & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

.

③ Đặt $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$.
Cần tính $\mathrm{P}\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$. Do $\overline{A}$, $\overline{B}$ độc lập, ta có:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) &= \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{B}\right) \\ &= [1 - \mathrm{P}(A)]^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

.

④ Cần tính $\mathrm{P}(A \cup B)$. Ta có:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A \cup B) &= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

.

□

BÀI 23. Trong kì thi THPT Quốc Gia, bạn X làm đề thi trắc nghiệm môn Hóa. Đề thi gồm 50 câu hỏi, mỗi câu có 4 phương án trả lời, trong đó chỉ có 1 phương án đúng, trả lời đúng mỗi câu được 0,2 điểm. Bạn X trả lời hết các câu hỏi và chắc chắn đúng 45 câu, 5 câu còn lại X chọn ngẫu nhiên. Tính xác suất để điểm thi Hóa của X không dưới 9,5 điểm. **ĐS:** $\dfrac{53}{512}$

Lời giải.
Thí sinh X không dưới 9,5 điểm khi và chỉ khi trong 5 câu trả lời ngẫu nhiên có ít nhất 3 câu đúng. Xác suất trả lời đúng 1 câu hỏi là $\dfrac{1}{4}$, trả lời sai là $\dfrac{3}{4}$. Ta có các trường hợp:

— Xác suất thí sinh X trả lời đúng 3 trên 5 câu là $C_5^3\left(\dfrac{1}{4}\right)^3\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^2$.

— Xác suất thí sinh X trả lời đúng 4 trên 5 câu là $C_5^4\left(\dfrac{1}{4}\right)^4\cdot\dfrac{3}{4}$.

— Xác suất thí sinh X trả lời đúng 5 trên 5 câu là $C_5^5\left(\dfrac{1}{4}\right)^5$.

Vậy xác suất cần tính $P=C_5^3\left(\dfrac{1}{4}\right)^3\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+C_5^4\left(\dfrac{1}{4}\right)^4\cdot\dfrac{3}{4}+C_5^5\left(\dfrac{1}{4}\right)^5=\dfrac{53}{512}$. □

BÀI 24. Trong kì thi THPT Quốc Gia, bạn X dự thi hai môn trắc nghiệm môn Hóa và Lí. Đề thi của mỗi câu gồm 50 câu hỏi, mỗi câu hỏi có 4 phương án lựa chọn, trong đó có 1 phương án đúng, làm đúng mỗi câu được 0,2 điểm. Mỗi môn thi bạn X làm hết các câu hỏi và chắc chắn đúng 45 câu, 5 câu còn lại X chọn ngẫu nhiên. Tính xác suất để tổng hai môn thi của X không dưới 19 điểm. **ĐS:** $\dfrac{81922}{4^{10}}$

Lời giải.
Thí sinh X không dưới 19 điểm khi và chỉ khi trong 10 câu trả lời ngẫu nhiên ở cả hai môn Hóa và Lí có ít nhất 5 câu đúng. Xác suất trả lời đúng 1 câu hỏi là $\dfrac{1}{4}$, trả lời sai là $\dfrac{3}{4}$. Ta có các trường hợp:

— Xác suất thí sinh X trả lời đúng 5 trên 10 câu là $C_{10}^5\left(\dfrac{1}{4}\right)^5\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^5$.

— Xác suất thí sinh X trả lời đúng 6 trên 10 câu là $C_{10}^6\left(\dfrac{1}{4}\right)^6\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^4$.

— Xác suất thí sinh X trả lời đúng 7 trên 10 câu là $C_{10}^7\left(\dfrac{1}{4}\right)^7\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^3$.

— Xác suất thí sinh X trả lời đúng 8 trên 10 câu là $C_{10}^8\left(\dfrac{1}{4}\right)^8\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^2$.

— Xác suất thí sinh X trả lời đúng 9 trên 10 câu là $C_{10}^9\left(\dfrac{1}{4}\right)^9\cdot\dfrac{3}{4}$.

— Xác suất thí sinh X trả lời đúng 10 trên 10 câu là $C_{10}^{10}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{10}$.

Vậy xác suất cần tính là
$P=C_{10}^5\left(\dfrac{1}{4}\right)^5\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^5+C_{10}^6\left(\dfrac{1}{4}\right)^6\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^4+C_{10}^7\left(\dfrac{1}{4}\right)^7\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^3+C_{10}^8\left(\dfrac{1}{4}\right)^8\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+C_{10}^9\left(\dfrac{1}{4}\right)^9\cdot\dfrac{3}{4}+C_{10}^{10}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{10}=\dfrac{81922}{4^{10}}$. □

BÀI 6. BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG 2

BÀI 1. Xếp ngẫu nhiên ba người nam và hai người nữ vào một dãy năm ghế kê theo hàng ngang. Tính xác suất để được kiểu xếp mà giữa hai người nam có đúng 1 người nữ. **ĐS:** $\dfrac{1}{10}$

Lời giải.
Số cách xếp 3 nam và 2 nữ vào 5 ghế là 5! cách.
Gọi A là biến cố giữa hai người nam có đúng 1 người nữ:

— Xếp 3 nam vào 3 ghế số 1, 3, 5 là 3! cách.

— Xếp 2 nữ vào vào 2 ghế số 2, 4 là 2! cách.

Suy ra $\mathrm{n}(A) = 3!2!$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{3!2!}{5!} = \dfrac{1}{10}$. □

BÀI 2. Gọi A là tập hợp tất cả các số gồm năm chữ số mà chữ số 3 có mặt đúng 3 lần, hai chữ số còn lại khác nhau và thuộc tập hợp các chữ số 1, 2, 4, 5. Chọn ngẫu nhiên một số từ A. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 3. **ĐS:** $\dfrac{3}{4}$

Lời giải.
Gọi A là tập hợp các số x có dạng $\overline{abcde}$ thỏa yêu cầu. Ta có $\mathrm{n}(\Omega) = \mathrm{C}_5^3\mathrm{A}_4^2$.
Để x chia hết cho 3 thì $(a+b+c+d+e)\vdots 3$, do đó hai chữ số trong năm chữ số được chọn trong 4 bộ số $\{1;2\}$, $\{1;5\}$, $\{2;4\}$, $\{4;5\}$.
Do đó $\mathrm{n}(A) = \mathrm{C}_5^3\mathrm{C}_4^1 2!$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{\mathrm{C}_5^3\mathrm{C}_4^1 2!}{\mathrm{C}_5^3\mathrm{A}_4^2} = \dfrac{3}{4}$. □

BÀI 3. Trong kì thi THTP Quốc Gia, Thành đoàn thành lập tổ công tác gồm 5 người được chọn ngẫu nhiên từ 15 cán bộ đoàn trường học và 10 cán bộ các quận, huyện để tìm các chỗ trọ miễn phí cho những thí sinh có điều kiện khó khăn. Tính xác suất để trong 5 người được chọn có không quá 2 cán bộ đoàn trường. **ĐS:** $\dfrac{381}{1265}$

Lời giải.
Ta có $\mathrm{n}(\Omega) = \mathrm{C}_{25}^5$.
Gọi A là biến cố trong 5 người được chọn có không quá 2 cán bộ đoàn trường, có 3 phương án:

— Trong 5 người được chọn không có cán bộ đoàn trường: C_{10}^5.

— Trong 5 người được chọn có 1 cán bộ đoàn trường: $\mathrm{C}_{10}^4\mathrm{C}_{15}^1$.

— Trong 5 người được chọn có 2 cán bộ đoàn trường: $\mathrm{C}_{10}^3\mathrm{C}_{15}^2$.

Do đó $\mathrm{n}(A) = \mathrm{C}_{10}^5 + \mathrm{C}_{10}^4\mathrm{C}_{15}^1 + \mathrm{C}_{10}^3\mathrm{C}_{15}^2$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{\mathrm{C}_{10}^5 + \mathrm{C}_{10}^4\mathrm{C}_{15}^1 + \mathrm{C}_{10}^3\mathrm{C}_{15}^2}{\mathrm{C}_{25}^5} = \dfrac{381}{1265}$. □

BÀI 4. Trong một dự án nhà ở xã hội gồm có 5 tầng, mỗi tầng gồm có 6 căn hộ loại A và 4 căn hộ loại B. Một người mua nhà rút ngẫu nhiên căn hộ của mình. Tính xác suất để căn hộ anh ta rút được ở tầng 1 hoặc căn hộ loại A. **ĐS:** $\dfrac{17}{30}$

Lời giải.
Kí hiệu A, B, lần lượt là các biến cố: rút được căn hộ ở tầng 1, rút được căn hộ loại A.
Cần tính $\mathrm{P}(A \cup B)$. Ta có: $\mathrm{n}(\Omega) = 60$, $\mathrm{n}(A \cup B) = \mathrm{n}(A) + \mathrm{n}(B) - \mathrm{n}(A \cap B) = 10 + 30 - 6 = 34$.
Vậy $\mathrm{P}(A \cup B) = \dfrac{34}{60} = \dfrac{17}{30}$. □

BÀI 5. Thực đơn ăn sáng tự chọn ở một khách sạn gồm 4 món xúp, 5 món bánh và 2 món cơm. Một khách hàng chọn ngẫu nhiên 3 món. Tính xác suất để 3 món được chọn có cả xúp, bánh và cơm. **ĐS:** $\frac{8}{33}$

Lời giải.
Gọi A là biến cố chọn được 3 món khác nhau.
Ta có số phần tử của không gian mẫu: $\mathrm{n}(\Omega) = \mathrm{C}_{11}^3$.
Số phần tử của biến cố $A:\ \mathrm{n}(A) = \mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_5^1\mathrm{C}_2^1$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_5^1\mathrm{C}_2^1}{\mathrm{C}_{11}^3} = \dfrac{8}{33}$. □

BÀI 6. Trong kì thi THPT Quốc Gia, một hội đồng coi thi có 216 thí sinh tham gia dự thi để xét công nhận tốt nghiệp THPT, trong đó trường X có 65 thí sinh dự thi. Sau buổi thi môn Toán, một phóng viên phỏng vấn ngẫu nhiên 3 học sinh. Tính xác suất để 3 học sinh được phỏng vấn có ít nhất 2 học sinh ở trường X. **ĐS:** $\frac{208}{963}$

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu: $\mathrm{n}(\Omega) = \mathrm{C}_{216}^3$.
Gọi A là biến cố "có ít nhất 2 học sinh trường X".
Số phần tử của biến cố $A:\ \mathrm{n}(A) = \mathrm{C}_{65}^2\mathrm{C}_{151}^1 + \mathrm{C}_{65}^3$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{\mathrm{C}_{65}^2\mathrm{C}_{151}^1 + \mathrm{C}_{65}^3}{\mathrm{C}_{216}^3} = \dfrac{208}{963}$. □

BÀI 7. Có hai đơn vị cung cấp thực phẩm phục vụ ăn trưa cho công nhân của một nhà máy. Đơn vị thứ nhất cung cấp 3 loại thực phẩm, đơn vị thứ hai cung cấp 4 loại thực phẩm. Người phụ trách bếp ăn lấy mỗi loại thực phẩm một mẫu để đi kiểm tra và người kiểm tra chọn 3 mẫu bất kỳ. Tính xác suất để cả hai đơn vị cung cấp đều có mẫu được chọn. **ĐS:** $\frac{6}{7}$

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu: $\mathrm{n}(\Omega) = \mathrm{C}_7^3$.
Gọi A là biến cố "cả hai đơn vị cung cấp đều có mẫu được chọn". Có hai phương án:

— Có 1 loại của đơn vị thứ nhất và 2 loại của đơn vị thứ hai: $\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_4^2$.

— Có 2 loại của đơn vị thứ nhất và 1 loại của đơn vị thứ hai: $\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_4^1$.

Số phần tử của biến cố $A:\ \mathrm{n}(A) = \mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_4^2 + \mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_4^1$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = \dfrac{\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_4^2 + \mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_4^1}{\mathrm{C}_7^3} = \dfrac{6}{7}$. □

BÀI 8. Trong đợt tình nguyện tiếp sức mùa thi, một trường học có 4 em lớp 11A, 5 em lớp 11B, 6 em lớp 11C đăng kí tham dự. Hỏi có bao nhiêu cách cử 7 em làm nhiệm vụ tại cổng trường đại học X sao cho mỗi lớp có ít nhất một em. **ĐS:** $\frac{661}{715}$

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu: $\mathrm{n}(\Omega) = \mathrm{C}_{15}^7$.
Gọi A là biến cố "mỗi lớp có ít nhất một em được chọn".
Thì $\overline{A}$ là biến cố "có ít nhất một lớp không có em nào được chọn".
Do đó $\mathrm{n}(\overline{A}) = \mathrm{C}_9^7 + \mathrm{C}_{10}^7 + \mathrm{C}_{11}^7$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \dfrac{\mathrm{C}_9^7 + \mathrm{C}_{10}^7 + \mathrm{C}_{11}^7}{\mathrm{C}_{15}^7} = \dfrac{661}{715}$. □

BÀI 9. Ban chấp hành Đoàn của một trường THPT cần chọn ra một nhóm học sinh tình nguyện gồm 5 học sinh từ 9 học sinh lớp 10 và 7 học sinh lớp 11. Tính xác suất để trong nhóm được chọn có ít nhất một học sinh lớp 11. **ĐS:** $\frac{101}{104}$

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{16}^5$.
Gọi A là biến cố "có ít nhất một học sinh lớp 11 được chọn".
Thì $\overline{A}$ là biến cố "không có học sinh nào của lớp 11 được chọn".
Do đó $n(\overline{A}) = C_9^5$.
Vậy $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{C_9^5}{C_{16}^5} = \dfrac{101}{104}$. □

BÀI 10. Trong một buổi liên hoan có 10 cặp nam nữ, trong đó có 4 cặp vợ chồng. Chọn ngẫu nhiên ba người để biểu diễn tiết mục văn nghệ. Tính xác suất để 3 người được chọn không có cặp vợ chồng nào. **ĐS:** $\dfrac{89}{95}$

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{20}^3$.
Gọi A là biến cố "không có cặp vợ chồng nào trong 3 người được chọn".
Thì $\overline{A}$ là biến cố "có một cặp vợ chồng trong 3 người được chọn". Cách chọn:

— Bước 1 : Chọn một cặp vợ chồng từ 4 cặp: C_4^1.

— Bước 2 : Chọn người thứ ba từ 18 người còn lại: C_{18}^1.

Do đó $n(\overline{A}) = C_4^1 C_{18}^1$.
Vậy $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{C_4^1 C_{18}^1}{C_{20}^3} = \dfrac{89}{95}$. □

BÀI 11. Một lớp học có 40 học sinh, trong đó có 4 cặp anh em sinh đôi. Trong buổi họp đầu năm, thầy giáo chủ nhiệm lớp muốn chọn ra 3 học sinh để làm cán sự lớp gồm có lớp trưởng, lớp phó và bí thư. Tính xác suất để chọn ra 3 học sinh làm cán sự lớp mà không có cặp anh em sinh đôi nào. **ĐS:** $\dfrac{64}{65}$

Lời giải.
Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{40}^3$ (Có xét hay không xét thứ tự không làm xác suất thay đổi).
Gọi A là biến cố "trong 3 học sinh không có cặp sinh đôi nào".
Thì $\overline{A}$ là biến cố "trong 3 học sinh có 1 cặp sinh đôi". Cách chọn:

— Bước 1 : Chọn một cặp sinh đôi từ 4 cặp: C_4^1.

— Bước 2 : Chọn người thứ ba từ 38 người còn lại: C_{38}^1.

Do đó $n(\overline{A}) = C_4^1 C_{38}^1$.
Vậy $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{C_4^1 C_{38}^1}{C_{40}^3} = \dfrac{64}{65}$. □

BÀI 12. Một người có 10 đôi giày khác nhau và trong lúc đi du lịch vội vã lấy ngẫu nhiên 4 chiếc. Tính xác suất để 4 chiếc giày lấy ra có ít nhất một đôi. **ĐS:** $\dfrac{99}{323}$

Lời giải.
Cách 1:
Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{20}^4$.
Gọi A là biến cố "trong 4 chiếc giày lấy ra có ít nhất một đôi"
Thì $\overline{A}$ là biến cố "không có đôi nào trong 4 chiếc giày được lấy ra". Cách chọn:

— Lấy 4 chiếc giày không có chiếc nào cùng đôi chứng tỏ 4 chiếc đó lấy từ 4 đôi khác nhau đôi một, có C_{10}^4 cách chọn như vậy.

— Mỗi đôi lại có 2 cách chọn một chiếc giày đơn nên 4 đôi có 2^4 cách chọn.

Do đó $\mathrm{n}(\overline{A}) = 2^4\mathrm{C}_{10}^4$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \dfrac{2^4\mathrm{C}_{10}^4}{\mathrm{C}_{20}^4} = \dfrac{99}{323}$.

Cách 2:
Số phần tử của không gian mẫu: $\mathrm{n}(\Omega) = \mathrm{C}_{20}^4 = 4845$.
Gọi A là biến cố "trong 4 chiếc giày lấy ra có ít nhất một đôi".
Thì $\overline{A}$ là biến cố "không có đôi nào trong 4 chiếc giày được lấy ra". Cách chọn:

— Chiếc thứ 1 có 20 cách chọn.

— Chiếc thứ 2 có 18 cách chọn (do đã loại 1 đôi).

— Chiếc thứ 3 có 16 cách chọn (do đã loại 2 đôi).

— Chiếc thứ 4 có 14 cách chọn (do đã loại 3 đôi).

Do cách chọn 4 chiếc giày không xét tính thứ tự nên thực tế $\mathrm{n}(\overline{A}) = \dfrac{20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14}{4!} = 3360$.
Vậy $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \dfrac{3360}{4845} = \dfrac{99}{323}$. □

BÀI 13. Tìm số nguyên dương n để: $\mathrm{C}_n^0 + 2\mathrm{C}_n^1 + 4\mathrm{C}_n^2 + \ldots + 2^n\mathrm{C}_n^0 = 243$. **ĐS:** $n = 5$

Lời giải.
Ta có:

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^k$$

Cho $x = 2$ ta được:

$$3^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k 2^k = \mathrm{C}_n^0 + 2\mathrm{C}_n^1 + 4\mathrm{C}_n^2 + \ldots + 2^n\mathrm{C}_n^0$$
$$\Rightarrow 3^n = 243 = 3^5 \Leftrightarrow n = 5.$$

□

BÀI 14. Cho đa giác đều $A_1A_2\ldots A_{2n}$, $(n > 2,\, n \in \mathbb{Z}^+)$ nội tiếp đường tròn (O). Biết rằng số tam giác có các đỉnh là 3 trong $2n$ điểm $A_1A_2\ldots A_{2n}$ nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong $2n$ điểm $A_1A_2\ldots A_{2n}$. Tìm n? **ĐS:** $n = 8$

Lời giải.
Số tam giác có các đỉnh là 3 trong $2n$ điểm $A_1, A_2\ldots, A_{2n}$ là C_{2n}^3.
Gọi đường chéo của đa giác đều $A_1A_2\ldots A_{2n}$ đi qua tâm đường tròn (O) là đường chéo lớn thì đa giác đã cho có n đường chéo lớn.
Mỗi hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong $2n$ điểm $A_1A_2\ldots A_{2n}$ có các đường chéo là đường chéo lớn. Ngược lại, với mọi cặp đường chéo lớn ta có các đầu mút của chúng là 4 đỉnh của một hình chữ nhật. Vậy số hình chữ nhật nói trên bằng số cặp đường chéo lớn của đa giác $A_1A_2\ldots A_{2n}$ tức C_n^2.
Theo giả thiết thì:

$$\mathrm{C}_{2n}^3 = 20\mathrm{C}_n^2 \Leftrightarrow \frac{(2n)!}{3!(2n-3)!} = 20\frac{n!}{2!(2n-3)!} \Leftrightarrow \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} = 20\frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow 2n-1 = 15 \Leftrightarrow n = 8.$$

□

BÀI 15. Cho khai triển nhị thức: $\left(2^{\frac{x-1}{2}}+2^{-\frac{x}{3}}\right)=C_n^0 2^{\frac{x-1}{2}}+C_n^1 2^{\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-1}}2^{-\frac{x}{3}}+\ldots+C_n^{n-1}2^{\frac{x-1}{2}}\left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^{n-1}+C_n^n 2^{\left(-\frac{x}{3}\right)^n}$ (với n là số nguyên dương), biết rằng trong khai triển đó: $C_n^3=5C_n^1$ và số hạng thứ tư bằng $20n$. Tìm n và x. **ĐS:** $n=7$, $x=4$

Lời giải.

Từ $C_n^3=5C_n^1$ ta có $n\geq 3$ và

$$\frac{n!}{3!(n-3)!}=5\frac{n!}{(n-1)!}\Leftrightarrow\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=5n\Leftrightarrow n^2-3n-28=0$$
$$\Rightarrow n_1=-4\text{ (loại) hoặc } n_2=7.$$

Với $n=7$ ta có

$$C_7^3\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^4\left(2^{\frac{-x}{3}}\right)^3=140\Leftrightarrow 35\cdot 2^{2x-2}\cdot 2^{-x}=140\Leftrightarrow 2^{x-2}=4\Leftrightarrow x=4.$$

□

BÀI 16. Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển nhị thức Newton của $\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^n$, biết rằng $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^n=7(n+3)$, ($n$ là số nguyên dương và $x>0$). **ĐS:** 495

Lời giải.

Ta có

$$\frac{n!}{3!(n-3)!}=5\frac{n!}{(n-1)!}\Leftrightarrow\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=5n\Leftrightarrow n^2-3n-28=0$$
$$\Rightarrow\frac{(n+2)(n+3)}{2!}=7(n+3)\Leftrightarrow n+2=7\cdot 2!=14\Leftrightarrow n=12.$$

□

Số hạng tổng quát của khai triển là $C_{12}^k\left(x^{-3}\right)^k\cdot\left(x^{\frac{5}{2}}\right)^{12-k}=C_{12}^k x^{\frac{60-11k}{2}}$

Ta có $x^{\frac{60-11k}{2}}=x^8\Rightarrow\dfrac{60-11k}{2}=8\Rightarrow k=4$.

Do đó hệ số của số hạng chứa x^8 là $C_{12}^4=\dfrac{12!}{4!(12-4)!}=495$.

BÀI 17. Với n là số nguyên dương, gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $\left(x^2+1\right)^n(x+2)^n$. Tìm n để $a_{3n-3}=26n$. **ĐS:** $n=5$

Lời giải.

Ta có

$$\left(x^2+1\right)^n(x+2)^n=x^{3n}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^n\left(1+\frac{2}{x}\right)^n=x^{3n}\left[\sum_{i=0}^{n}C_n^i\left(\frac{1}{x^2}\right)^2\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{2}{x}\right)^k\right]=x^{3n}\left[\sum_{i=0}^{n}C_n^i x^{-2i}\sum_{k=0}^{n}C$$

Trong khai triển trên, lũy thừa của x là $3n-3$ khi $-2i-k=-3$, hay $2i+k=3$.
Ta chỉ có hai trường hợp thỏa điều kiện này là $i=0,k=3$ hoặc $i=1,k=1$.
Nên hệ số của x^{3n-3} là $a_{3n-3}=C_n^0\cdot C_n^3\cdot 2^3+C_n^1\cdot C_n^1\cdot 2$.

Do đó $a_{3n-3}=26n\Leftrightarrow\dfrac{2n(2n^2-3n+4)}{3}=26n\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=5\\ n=-\dfrac{7}{2}.\end{array}\right.$

Vậy $n=5$ là giá trị cần tìm (vì n nguyên dương). □

BÀI 18. Tìm hệ số của x^8 trong khai triển thành đa thức của $\left[1+x^2(1-x)\right]^8$. **ĐS:** $a_8=238$

Lời giải.

$$\left[1+x^2(1-x)\right]^8 = C_8^0 + C_8^1x^2(1-x) + C_8^2x^4(1-x)^2 + C_8^3x^6(1-x)^3 + C_8^4x^8(1-x)^4 + C_8^5x^{10}(1-x)^5 + C_8^6x^{12}(1-x)^6 + C_8^7x^{14}(1-x)^7 + C_8^8x^{16}(1-x)^8.$$

Bậc của x trong 3 số hạng đầu nhỏ hơn 8, bậc của x trong 4 số hạng cuối lớn hơn 8.
Vậy x^8 chỉ có trong các số hạng thứ tư, thứ năm, với hệ số tương ứng là $C_8^3 \cdot C_3^2$, $C_8^4 \cdot C_4^0$.
Suy ra $a_8 = 168 + 70 = 238$. □

BÀI 19. Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho mỗi đề thi nhất thiết phải có đủ 3 loại (khó, trung bình, dễ) và số câu dễ không ít hơn 2? **ĐS:** 56875

Lời giải.
Mỗi đề kiểm tra phải có số câu dễ là 2 hoặc 3 nên có các trường hợp sau

— Đề có 2 câu dễ, 2 câu trung bình, 1 câu khó thì số các chọn là $C_{15}^2 \cdot C_{10}^2 \cdot C_5^1 = 23625$.

— Đề có 2 câu dễ, 1 câu trung bình, 2 câu khó thì số các chọn là $C_{15}^2 \cdot C_{10}^1 \cdot C_5^2 = 10500$.

— Đề có 3 câu dễ, 1 câu trung bình, 1 câu khó thì số các chọn là $C_{15}^3 \cdot C_{10}^1 \cdot C_5^1 = 22750$.

Vì các cách chọn trên đôi một khác nau nên số đề kiểm tra có thể lập được là $23625 + 10500 + 22750 = 56875$. □

BÀI 20. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$ với $x > 0$. **ĐS:** 35

Lời giải.
Số hạng tổng quát của khai triển là

$$C_7^k(\sqrt[3]{x})^{7-k}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^k = C_7^k x^{\frac{7-k}{3}} x^{\frac{-k}{4}} = C_7^k x^{\frac{28-7k}{12}}, (k \in \mathbb{Z}, 0 \le k \le 7).$$

Số hạng không chứa x là số hạng tương ứng với k, $(k \in \mathbb{Z}, 0 \le k \le 7)$ thỏa mãn:

$$\frac{28-7k}{12} = 0 \Leftrightarrow k = 4.$$

Số hạng không chứa x cần tìm là $C_7^4 = 35$. □

BÀI 21. Tìm số nguyên dương n, biết rằng

$$C_{2n+1}^1 - 2 \cdot 2C_{2n+1}^2 + 3 \cdot 2^2C_{2n+1}^3 - 4 \cdot 2^3C_{2n+1}^4 + \cdots + (2n+1) \cdot 2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1} = 2005.$$

ĐS: 1002

Lời giải.
Ta có $(1+x)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1x + C_{2n+1}^2x^2 + C_{2n+1}^3x^3 + \ldots + C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
Đạo hàm hai vế ta được

$$(2n+1)(1+x)^{2n} = C_{2n+1}^1 + 2C_{2n+1}^2x + 3C_{2n+1}^3x^2 + \ldots + (2n+1)C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thay $x = -2$ ta có

$$C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2C_{2n+1}^3 - 4.2^3C_{2n+1}^4 + \ldots + (2n+1) \cdot 2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1} = 2n+1.$$

Theo giả thiết ta có $2n + 1 = 2005 \Leftrightarrow n = 1002$. □

BÀI 22. Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi, sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ? **ĐS:** 207900
Lời giải.

— Có $C_3^1 C_{12}^4$ cách phân công thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất.

— Với mỗi cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất thì có $C_2^1 C_8^4$ cách phân công thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ hai.

— Với mỗi cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất, thứ hai thì có $C_1^1 C_4^4$ cách phân công thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ ba.

Số cách phân công đội thanh niên tình nguyện về 3 tỉnh thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$$C_3^1 \cdot C_{12}^4 \cdot C_2^1 \cdot C_8^4 \cdot C_1^1 \cdot C_4^4 = 207900.$$

□

BÀI 23. Tính giá trị của biểu thức: $M = \dfrac{A_{n+1}^4 + 3A_n^3}{(n+1)!}$, biết rằng số nguyên dương n thỏa mãn: $C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149$. **ĐS:** $\dfrac{3}{4}$

Lời giải.

Điều kiện $n \geq 3$.

Ta có

$$\begin{aligned}
& C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} + 2\frac{(n+2)!}{2!n!} + 2\frac{(n+3)!}{2!(n+1)!} + \frac{(n+4)!}{2!(n+2)!} = 149 \\
\Leftrightarrow\ & n^2 + 4n - 45 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{ll} n = 5 & \text{(nhận)} \\ n = -9 & \text{(loại).} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Với $n = 5$ ta được $M = \dfrac{A_6^4 + 3A_5^3}{6!} = \dfrac{\dfrac{6!}{2!} + 3 \cdot \dfrac{5!}{2!}}{6!} = \dfrac{3}{4}$. □

BÀI 24. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai triển nhị thức Niutơn của $\left(\dfrac{1}{x^4} + x^7\right)^n$, biết rằng $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^3 + \cdots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$. **ĐS:** 210

Lời giải.

Ta có $C_n^k = C_n^{n-k}$ nên $C_{2n+1}^1 = C_{2n+1}^{2n}, C_{2n+1}^2 = C_{2n+1}^{2n-1}, \ldots, C_{2n+1}^n = C_{2n+1}^{n+1}$.

Suy ra $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \ldots + C_{2n+1}^n = C_{2n+1}^{2n} + C_{2n+1}^{2n-1} + \ldots + C_{2n+1}^{n+1}$.

Ta có

$$\begin{aligned}
(1+x)^{2n+1} &= C_{2n+1}^0 + \left(C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \ldots + C_{2n+1}^n\right) + \left(C_{2n+1}^{2n} + C_{2n+1}^{2n-1} + \ldots + C_{2n+1}^{n+1}\right) + C_{2n+1}^{2n+1} \\
&= 2 + 2\left(C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \ldots + C_{2n+1}^n\right)
\end{aligned}$$

Cho $x = 1$ ta được $2^{2n+1} = 2 + 2\left(2^{20} - 1\right) = 2^{21} \Leftrightarrow n = 10 \Rightarrow \left(\dfrac{1}{x^4} + x^7\right)^{10}$.

Ta có $\left(\dfrac{1}{x^4} + x^7\right)^{10} = \left(x^{-4} + x^7\right)^{10} = \displaystyle\sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \left(x^{-4}\right)^k \left(x^7\right)^{10-k} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k x^{70-11k}$.

Số hạng chứa x^{26} ứng với $70 - 11k = 26 \Leftrightarrow k = 4$.

Vậy hệ số của số hạng chứa x^{26} là $C_{10}^4 = 210$. □

BÀI 25. Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy? **ĐS:** 225

Lời giải.
Số cách chọn 4 học sinh từ 12 học sinh đã cho là $\mathrm{C}_{12}^4 = 495$.
số cách chọn 4 học sinh mà mỗi lớp có ít nhất một em được tính như sau:

— Lớp A có 2 học sinh, các lớp B, C mỗi lớp có 1 học sinh, số cách chọn là $\mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_3^1 = 120$.

— Lớp B có 2 học sinh, các lớp A, C mỗi lớp có 1 học sinh, số cách chọn là $\mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_3^1 = 90$.

— Lớp C có 2 học sinh, các lớp A, B mỗi lớp có 1 học sinh, số cách chọn là $\mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_3^2 = 60$.

Số cách chọn 4 học sinh mà mỗi lớp có ít nhất một học sinh là $120 + 90 + 60 = 270$.
Vậy, số cách chọn phải tìm là $495 - 270 = 225$. □

BÀI 26. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển nhị thức Newton của $(2+x)^n$, biết $3^n \cdot \mathrm{C}_n^0 + 3^{n-1} \cdot \mathrm{C}_n^1 + 3^{n-2} \cdot \mathrm{C}_n^2 - 3^{n-3} \cdot \mathrm{C}_n^3 + \cdots + (-1)^n \cdot \mathrm{C}_n^n = 2048$. **ĐS:** $2\mathrm{C}_{11}^{10}$

Lời giải.
Trong khai triển nhị thức Newton $(a+b)^n$ cho $a = 3, b = -1$ ta được kết quả

$$(3-1)^n = 3^n\mathrm{C}_n^0 - 3^{n-1}\mathrm{C}_n^1 + 3^{n-2}\mathrm{C}_n^2 - 3^{n-3}\mathrm{C}_n^3 + \ldots + (-1)^n\mathrm{C}_n^n = 2048 = 2^{11} \Rightarrow n = 11.$$

Do đó tìm được hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển $(2+x)^{11}$ là $2\mathrm{C}_{11}^{10}$. □

BÀI 27. Tìm hệ số của số x^5 trong khai triển $x \cdot (1-2x)^5 + x^2 \cdot (1+3x)^{10}$. **ĐS:** 3320

Lời giải.
Hệ số của x^5 trong khai triển $x \cdot (1-2x)^5$ là $(-2)^4\mathrm{C}_5^4 = 80$.
Hệ số của x^5 trong khai triển $x^2 \cdot (1+3x)^{10}$ là $3^3\mathrm{C}_{10}^3 = 3240$.
Hệ số của x^5 trong khai triển $x \cdot (1-2x)^5 + x^2 \cdot (1+3x)^{10}$ là $80 + 3240 = 3320$. □

BÀI 28. Cho khai triển $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, trong đó $n \in \mathbb{N}^*$ và các hệ số a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_n thỏa mãn hệ thức $a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \dfrac{a_2}{4} + \cdots + \dfrac{a_n}{2^n} = 4096$. Tìm số lớn nhất trong các hệ số a_0, a_1, $a_2, \ldots, a_n$. **ĐS:** 126720

Lời giải.
Ta có $(1+2x)^n = \mathrm{C}_n^0 + 2\mathrm{C}_n^1x + 2^2\mathrm{C}_n^2x^2 + \ldots + 2^n\mathrm{C}_n^nx^n$.
Theo đề $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ suy ra $a_0 = \mathrm{C}_n^0, \dfrac{a_1}{2} = \mathrm{C}_n^1, \ldots, \dfrac{a_n}{2^n} = \mathrm{C}_n^n$.
Vì thế $a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \ldots + \dfrac{a_n}{2^n} = 4096 \Leftrightarrow \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \ldots + \mathrm{C}_n^n = 4096 \Leftrightarrow 2^n = 2^{12} \Leftrightarrow n = 12$.
Khi đó ta có khai triển $(1+2x)^{12} = \sum\limits_0^{12} \mathrm{C}_{12}^k 2^k x^k \Rightarrow a_k = \mathrm{C}_{12}^k 2^k$.
Xét bất phương trình $a_k < a_{k+1} \Leftrightarrow \mathrm{C}_{12}^k 2^k < \mathrm{C}_{12}^{k+1} 2^{k+1} \Leftrightarrow k < \dfrac{23}{3}$.
Tương tự $a_k > a_{k+1} \Leftrightarrow k > \dfrac{23}{3}$. Do $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 8$.
Do đó $a_0 < a_1 < \ldots < a_7 < a_8 > $ và $a_8 > a_9 > a_{10} > \ldots > a_{12}$.
Vậy hệ số lớn nhất trong các hệ số $a_0, a_1, \ldots, a_n$ là $a_8 = 2^8\mathrm{C}_{12}^8 = 126720$. □

BÀI 29. Tìm số nguyên dương n thỏa $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} = 2048$. **ĐS:** $n = 6$

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned} 0 &= (1-1)^{2n} = \mathrm{C}_{2n}^0 - \mathrm{C}_{2n}^1 + \ldots - \mathrm{C}_{2n}^{2n-1} + \mathrm{C}_{2n}^{2n} \\ 2^{2n} &= (1+1)^{2n} = \mathrm{C}_{2n}^0 + \mathrm{C}_{2n}^1 + \ldots + \mathrm{C}_{2n}^{2n-1} + \mathrm{C}_{2n}^{2n}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathrm{C}_{2n}^1 + \mathrm{C}_{2n}^3 + \ldots + \mathrm{C}_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1}$.
Từ giả thiết suy ra $2^{2n-1} = 2048 \Leftrightarrow n = 6$. □

BÀI 30. Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $5C_n^{n-1} = C_n^3$. Tìm số hạng chứa x^5 trong khai triển nhị thức Newton: $\left(\dfrac{nx^2}{14} - \dfrac{1}{x}\right)^n, \forall x \neq 0$. **ĐS:** $-\dfrac{35}{16}x^5$

Lời giải.

$$5C_n^{n-1} = C_n^3 \Leftrightarrow 5n = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \Leftrightarrow n = 7 \quad (\text{vì } n \text{ nguyên dương}).$$

Khi đó $\left(\dfrac{nx^2}{14} - \dfrac{1}{x}\right)^n = \left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{x}\right)^7 = \sum\limits_{k=0}^{7} C_7^k \left(\dfrac{x^2}{2}\right)^{7-k}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^k = \sum\limits_{k=0}^{7} \dfrac{(-1)^k C_7^k}{2^{7-k}} x^{14-3k}$.

Số hạng chứa x^5 ứng với $14 - 3k = 5 \Leftrightarrow k = 3$.

Do đó số hạng cần tìm là $\dfrac{(-1)^3 \cdot C_7^3}{2^4}x^5 = -\dfrac{35}{16}x^5$. □

BÀI 31. Trong một lớp học gồm có 15 học sinh nam và 10 học sinh nữ. Giáo viên gọi ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được gọi có cả nam và nữ. **ĐS:** $\dfrac{443}{506}$

Lời giải.

Số cách chọn 4 học sinh trong lớp là $C_{25}^4 = 12650$.

Số cách chọn 4 học sinh có cả nam và nữ là $C_{15}^1 \cdot C_{10}^3 + C_{15}^2 \cdot C_{10}^2 + C_{15}^3 \cdot C_{10}^1 = 11075$.

Vậy xác suất cần tính là $P = \dfrac{11075}{12650} = \dfrac{443}{506}$. □

BÀI 32. Gọi S là tập hợp tất cả số tự nhiên gồm ba chữ số phân biệt được chọn từ các số $1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$. Xác định số phần tử của S. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác xuất để số được chọn là số chẵn.

ĐS: $\dfrac{3}{7}$

Lời giải.

Số phần tử của S là $A_7^3 = 210$.

Số cách chọn một số chẵn từ S là $3 \cdot 6 \cdot 5 = 90$.

Xác suất cần tính bằng $\dfrac{90}{210} = \dfrac{3}{7}$. □

BÀI 33. Có hai chiếc hộp chứa bi. Hộp thứ nhất chứa 4 viên bi đỏ và 3 viên bi trắng, hộp thứ hai chứa 2 viên bi đỏ và 4 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra 1 viên bi. Tính xác suất để lấy được hai viên bi cùng màu. **ĐS:** $\dfrac{10}{21}$

Lời giải.

Số cách chọn 2 viên bi, mỗi viên từ một hộp là $7 \cdot 6 = 42$.

Số cách chọn 2 viên bi đỏ, mỗi viên từ một hộp là $4 \cdot 2 = 8$.

Số cách chọn 2 viên bi trắng, mỗi viên từ một hộp là $3 \cdot 4 = 12$.

Xác suất để 2 viên bi được lấy ra có cùng màu là $P = \dfrac{8 + 12}{42} = \dfrac{10}{21}$. □

BÀI 34. Để kiểm tra chất lượng sản phẩm từ công ty sữa, người ta gửi đến bộ phận kiểm nghiệm 5 hộp sữa cam, 4 hộp sữa dâu và 3 hộp sữa nho. Bộ phận kiểm nghiệm chọn ngẫu nhiên 3 hộp sữa để phân tích mẫu. Tính xác suất để 3 hộp sữa được chọn có cả 3 loại. **ĐS:** $\dfrac{3}{11}$

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $C_{12}^3 = 220$.

Số cách chọn 3 hộp sữa có đủ 3 loại là $C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = 60$. Do đó xác suất cần tính là $P = \dfrac{60}{220} = \dfrac{3}{11}$.

□

BÀI 35. Từ một hộp chứa 16 thẻ được đánh số từ 1 đến 16, chọn ngẫu nhiên 4 thẻ. Tính xác suất để 4 thẻ được chọn đều được đánh số chẵn? **ĐS:** $\dfrac{1}{26}$

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $\mathrm{C}_{16}^4 = 1820$.
Gọi E là biến số "4 thẻ được đánh số chẵn".
Số kết quả thuận lợi cho biến cố "4 thẻ được đánh số chẵn" là $\mathrm{C}_8^4 = 70$.
Xác suất cần tính là $\mathrm{P}(E) = \dfrac{n(E)}{n(\Omega)} = \dfrac{70}{1820} = \dfrac{1}{26}$. □

BÀI 36. Trong đợt ứng phó dịch MERS – CoV, Sở Y tế thành phố đã chọn ngẫu nhiên ba đội phòng chống dịch cơ động trong số 5 đội của Trung tâm y tế dự phòng thành phố và 20 đội của các trung tâm y tế cơ sở để kiểm tra công tác chuẩn bị. Tính xác suất để có ít nhất hai đội của các trung tâm y tế cơ sở được chọn. **ĐS:** $\dfrac{209}{230}$

Lời giải.
Không gian mẫu Ω có số phần tử là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{25}^3 = 2300$.
Gọi E là biến cố: có ít nhất hai đội của các trung tâm y tế cơ sở được chọn.
Số kết quả thuận lợi cho biến cố E là $\mathrm{C}_{20}^2 \cdot \mathrm{C}_5^1 + \mathrm{C}_{20}^3 = 2090$.
Vậy $\mathrm{P}(E) = \dfrac{n(E)}{n(\Omega)} = \dfrac{2090}{2300} = \dfrac{209}{230}$. □

BÀI 37. Học sinh A thiết kế bảng điều khiển điện tử mở cửa phòng học của lớp mình. Bảng gồm 10 nút, mỗi nút được ghi một số từ 0 đến 9 và không có hai nút nào được ghi cùng một số. Để mở cửa cần nhấn liên tiếp 3 nút khác nhau sao cho 3 số trên 3 nút đó theo thứ tự đã nhấn tạo thành một dãy số tăng và có tổng bằng 10. Học sinh B không biết quy tắc mở cửa trên, đã nhấn ngẫu nhiên liên tiếp 3 nút khác nhau trên bảng điều khiển. Tính xác suất để B mở được cửa vào phòng học đó. **ĐS:** $\dfrac{1}{90}$

Lời giải.
Không gian mẫu Ω có số phần tử là $n(\Omega) = \mathrm{A}_{10}^3 = 720$.
Gọi E là biến cố: "B mở được cửa phòng học". Ta có

$$E = \{(0;1;9), (0;2;8), (0;3;7), (0;4;6), (1;2;7), (1;3;6), (1;4;5), (2;3;5)\}.$$

Do đó $n(E) = 8$. Vậy $\mathrm{P}(E) = \dfrac{n(E)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{90}$. □