HÀM SỐ PHƯƠNG TRÌNH

LƯỢNG GIÁC

$$\sin x = \frac{a}{c}$$

$$\cos x = \frac{b}{c}$$

$$tg\,x = \frac{a}{b} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$ctg\,x = \frac{b}{a} = \frac{1}{tg\,x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$tg^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$ctg^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}$$

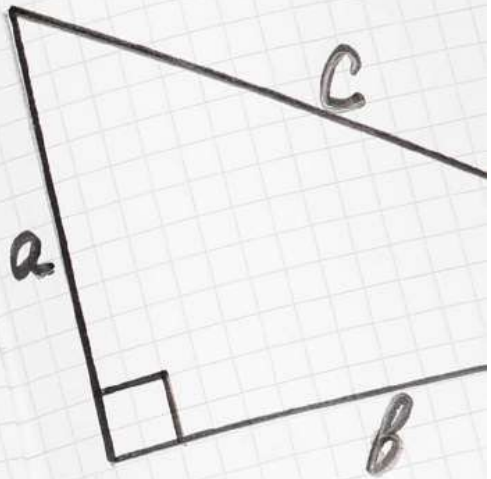
$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x = \frac{2\,tg\,x}{1 + tg^2 x}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \frac{1 - tg^2 x}{1 + tg^2 x}$$

$$tg\,2x = \frac{2\,tg\,x}{1 - tg^2 x}$$

$$ctg\,2x = \frac{1 - tg^2 x}{2\,tg\,x} = \frac{ctg^2 x}{2\,ctg\,x}$$

TÁC GIẢ
TOÁN TỪ TÂM



TOÁN TỪ TÂM

MỤC LỤC

Bài 1. GÓC LƯỢNG GIÁC

A. Lý thuyết

1. Đường tròn định hướng và cung lượng giác 4
2. Góc lượng giác. 5
3. Đơn vị Radian. 5
4. Đường tròn lượng giác 6
5. Độ dài cung tròn. 6

B. Các dạng bài tập

Dạng 1. Mối liên hệ giữa độ và rađian 7
Dạng 2. Độ dài cung lượng giác 9
Dạng 3. Biểu diễn góc lượng giác trên đường tròn lượng giác 11

C. Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm 14
B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai 16
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn 19

Bài 2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA 1 GÓC LƯỢNG GIÁC

A. Lý thuyết

1. Giá trị lượng giác của một góc lượng giác 21
2. Hệ thức cơ bản giữa các giá trị lượng giác của một góc lượng giác 22
3. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc đối nhau 22
4. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau 22
5. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc phụ nhau 22
6. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc hơn kém 22

B. Các dạng bài tập

Dạng 1. Tính giá trị lượng giác của 1 góc lượng giác 24
Dạng 2. Tính giá trị lượng giác liên quan góc đặc biệt 26
Dạng 3. Rút gọn biểu thức lượng giác 28
Dạng 4. Giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất 30

C. Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm 32
B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai 34
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn 37

Bài 3. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A. Lý thuyết

1. Công thức cộng 40

2. Công thức nhân đôi 40
3. Công thức biến đổi tích thành tổng 40
4. Công thức biến đổi tổng thành tích 41

B. Các dạng bài tập
Dạng 1. Công thức cộng 42
Dạng 2. Công thức nhân đôi 44
Dạng 3. Công thức biến đổi tích thành tổng 46
Dạng 4. Công thức biến đổi tổng thành tích 48

C. Luyện tập
A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm 50
B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai 51
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn 53

Bài 4. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. Lý thuyết
1. Định nghĩa hàm số lượng giác 55
2. Hàm số chẵn, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn 55
3. Đồ thị & tính chất hàm số y=sinx và y=cosx 56
4. Đồ thị & tính chất hàm số y=tanx và y=cotx 57

B. Các dạng bài tập
Dạng 1. Tập xác định 59
Dạng 2. Tính chẵn – lẻ 61
Dạng 3. Tính tuần hoàn 64
Dạng 4. Giá trị lớn nhất – nhỏ nhất 66

C. Luyện tập
A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm 68
B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai 71
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn 73

Bài 5. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

A. Lý thuyết
1. Khái niệm phương trình tương đương 76
2. Phương trình sinx = a 76
3. Phương trình cosx = a 77
4. Phương trình tanx = a & cotx = a 77

B. Các dạng bài tập
Dạng 1. Phương trình sinx = a 79
Dạng 2. Phương trình cosx = a 81

Dạng 3. Phương trình tanx = a và cotx = a 83
Dạng 4. Phương trình có nghiệm thuộc khoảng – đoạn 85
Dạng 5. Bài toán thực tế liên quan phương trình lượng giác 87

C. Luyện tập

A. Câu hỏi – Trả lời trắc nghiệm 88
B. Câu hỏi – Trả lời Đúng/sai 93
C. Câu hỏi – Trả lời ngắn 96

TOÁN TỪ TÂM

Chương 01

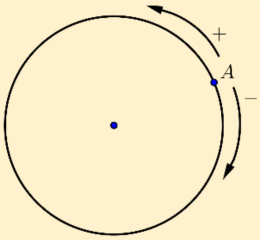
Bài 1. GÓC LƯỢNG GIÁC

A Lý thuyết

1. Đường tròn định hướng và cung lượng giác

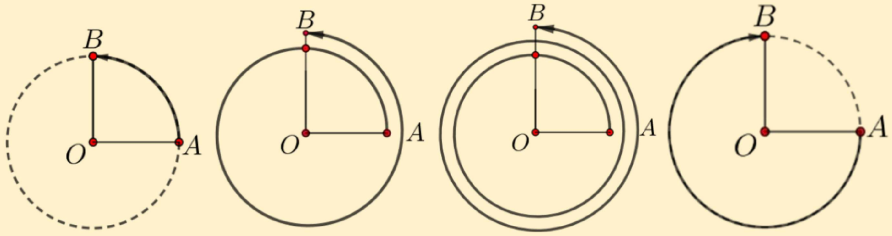
Đường tròn định hướng:

- Đường tròn định hướng là một đường tròn trên đó đã chọn *một chiều chuyển động* gọi là chiều dương, chiều ngược lại là chiều âm.
- Qui ước chọn chiều *ngược* với chiều quay của kim đồng hồ làm chiều dương.



Cung lượng giác:

- Trên đường tròn định hướng cho 2 điểm A, B. Một điểm M di động trên đường tròn luôn theo một chiều từ A đến B tạo nên một *cung lượng giác* có điểm đầu A và điểm cuối B.
- Với 2 điểm A, B đã cho trên đường tròn định hướng ta có *vô số cung lượng giác* có điểm đầu A, điểm cuối B.
- Kí hiệu $\overset{\frown}{AB}$.



Chú ý

Trên một đường tròn định hướng, lấy 2 điểm A, B thì:

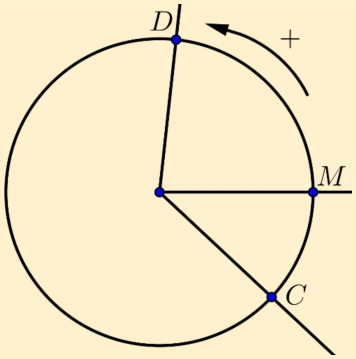
(1) Kí hiệu AB chỉ một cung hình học (lớn hoặc bé) hoàn toàn xác định.

(2) Kí hiệu $\overset{\frown}{AB}$ chỉ một cung lượng giác điểm đầu A, điểm cuối B.

2. Góc lượng giác.

Góc lượng giác:

- Một điểm M chuyển động trên đường tròn từ C đến D tạo nên cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{CD}$.
  Khi đó tia OM quay xung quanh gốc O từ vị trí OC đến OD. Ta nói tia OM tạo nên ***góc lượng giác***, có *tia đầu* OC *và tia cuối* OD.



- Kí hiệu: (OC,OD).
- Ta quy ước: chiều quay
  + *ngược với chiều quay kim đồng hồ* là chiều dương
  + *cùng với chiều quay kim đồng hồ* là chiều âm.
- Khi tia OM quay góc α thì ta nói góc lượng giác mà tia đó quét nên có số đo α.
- Số đo của ***góc lượng giác*** với tia đầu OC, tia cuối OD được kí hiệu là $sd(OC,OD)=\alpha$.

Nhận xét

Số đo của các góc lượng giác có cùng tia đầu OC và tia cuối OD sai khác nhau một bội nguyên của $360°$ nên có công thức tổng quát là: $sd(OC,OD)=\alpha°+k.360°\quad(k\in\mathbb{Z})$

Thường viết là $(OC,OD)=\alpha°+k.360°$

Hệ thức Chasles:

Với 3 tia Oa, Ob, Oc bất kì ta có:

$$(Oa,Ob)+(Ob,Oc)=(Oa,Oc)+k.360°\quad(k\in\mathbb{Z})$$

3. Đơn vị Radian.

Đơn vị Radian:

» Trên đường tròn tùy ý, cung có độ dài bằng bán kính được gọi là cung có số đo 1 rad.

Quan hệ giữa độ & radian:

» $1°=\frac{\pi}{180}\text{rad}$ và $1\text{rad}=\frac{180°}{\pi}$.

Chú ý:

Khi viết số đo của một góc (cung) theo đơn vị radian, ta không viết chữ rad sau số đó.

$$\boxed{180°=\pi\to 60°=\frac{\pi}{3}};\boxed{180°=\pi\to 45°=\frac{\pi}{4}}$$

4. Đường tròn lượng giác

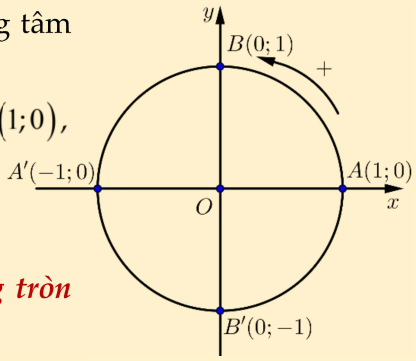
Đường tròn lượng giác:

» Trong mặt phẳng Oxy, vẽ đường tròn định hướng tâm O, bán kính $R=1$.

» Đường tròn này cắt hai trục tọa độ tại bốn điểm $A(1;0)$, $A'(-1;0)$, $B(0;1)$, $B'(0;-1)$.

» Ta lấy $A(1;0)$ làm điểm gốc của đường tròn.

» Đường tròn xác định như trên được gọi là ***đường tròn lượng giác*** (gốc A).



5. Độ dài cung tròn.

» Cung có số đo α rad của đường tròn bán kính R có độ dài $l=R\alpha$.

TOÁN TỪ TÂM

B Các dạng bài tập

Dạng 1. Mối liên hệ giữa độ và radian

Phương pháp

Dùng mối quan hệ giữa độ và radian: $180^\circ = \pi$ rad

» Đổi cung a có số đo từ radian sang độ $a.\dfrac{180^\circ}{\pi}$

» Đổi cung x° có số đo từ độ ra radian $x^\circ.\dfrac{\pi}{180^\circ}$

Ví dụ 1.1.

(1) Đổi số đo của các góc sau ra radian: $72^0, 600^0, -37^0 45' 30''$.

(2) Đổi số đo của các góc sau ra độ: $\dfrac{5\pi}{18}, \dfrac{3\pi}{5}, -4$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 1.2.

Đổi số đo của góc $45^0 32'$ sang đơn vị radian với độ chính xác đến hàng phần nghìn ?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 1.3.

Đổi số đo radian sang số đo độ

(1) $\pi(rad)$ (2) $\frac{\pi}{3}(rad)$ (3) $\frac{\pi}{10}(rad)$

(4) $\frac{22\pi}{3}(rad)$ (5) $-\frac{5\pi}{9}(rad)$ (6) $-\frac{12\pi}{5}(rad)$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 1.4.

Đổi số đo độ sang số đo radian:

(1) $170°$ (2) $1000°$ (3) $3100°$

(4) $-90°$ (5) $-240°$ (6) $-125°$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

TOÁN TỪ TÂM

Dạng 2. Độ dài cung lượng giác

Phương pháp

Cung tròn bán kính R có số đo α $(0 \le \alpha \le 2\pi)$, có số đo độ $a°(0° \le a \le 360°)$ và có độ dài l thì: $l = R\alpha = \frac{\pi a}{180} \cdot R$ do đó $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{a}{180}$

▶ ***Đặc biệt:*** $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0$, $1° = \frac{\pi}{180}\text{rad}$

Ví dụ 2.1.

Một đường tròn có bán kính 36 m. Độ dài của cung trên đường tròn đó có số đo là

(1) $\frac{3\pi}{4}$ (2) 51^0 (3) $\frac{1}{3}$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2.2.

Một hải lí là độ dài cung tròn xích đạo có số đo $\left(\frac{1}{60}\right)^0 = 1'$. Biết độ dài xích đạo là 40.000km, hỏi một hải lí dài bao nhiêu km?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2.3.

Cho hình vuông $A_0A_1A_2A_3$ nội tiếp đường tròn tâm O (các đỉnh được sắp xếp theo chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ). Tính số đo của các cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{A_0A_i}, \overset{\curvearrowright}{A_iA_j} (i, j = 0,1,2,3, i \ne j)$

Lời giải