CHƯƠNG I

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

BÀI 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

I. LÝ THUYẾT.

1. GÓC LƯỢNG GIÁC

a. Khái niệm góc lượng giác và số đo của góc lượng giác

Trong mặt phẳng cho hai tia $Ou,\ Ov$. Xét tia Om cùng nằm trong mặt phẳng này. Nếu tia Om quay điểm O, theo một chiều nhất định từ Ou đến Ov, thì ta nói nó quét một **góc lượng giác** với tia đầu Ou, tia cuối Ov và kí hiệu là $(Ou,\ Ov)$.

Góc lượng giác $(Ou,\ Ov)$ chỉ được xác định khi ta biết được chiều chuyển động quay của tia Om từ tia đầu Ou đến tia cuối Ov. Ta quy ước: chiều quay ngược với chiều quay của kim đồng hồ là chiều dương, chiều quay cùng với chiều quay của kim đồng hồ là chiều âm.

Khi tia Om quay góc $\alpha°$ thì ta nói góc lượng giác mà tia đó quét nên có số đo $\alpha°$. Số đo của **góc lượng giác** với tia đầu Ou, tia cuối Ov được kí hiệu là $sd(Ou,\ Ov)$.

Cho hai tia $Ou,\ Ov$ thì có vô số **góc lượng giác** tia đầu Ou, tia cuối Ov. Mỗi **góc lượng giác** như thế đều kí hiệu là $(Ou,\ Ov)$. Số đo của các góc lượng giác này sai khác nhau một bội nguyên của $360°$.

b. Hệ thức Chasles: với 3 tia $Ou,\ Ov,\ Ow$ bất kì ta có:

$$sd(Ou,Ov)+sd(Ov,Ow)=sd(Ou,Ow)+k.360° \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Từ đó suy ra: $sd(Ou,Ov)=sd(Ou,Ow)-sd(Ov,Ow)+k.360° \quad (k\in\mathbb{Z})$

2. ĐƠN VỊ ĐO GÓC VÀ ĐỘ DÀI CUNG TRÒN

a. Đơn vị đo góc và cung tròn

Đơn vị độ:

Đơn vị radian: Cho đường tròn (O) tâm O bán kính R và một cung AB trên (O). Ta nói cung AB có số đo bằng 1 radian nếu độ dài của nó đúng bằng bán kính R. Khi đó ta cũng nói rằng góc $\widehat{AOB}$ có số đo bằng 1 radian và viết $\widehat{AOB}=1\ radian$

b) Quan hệ giữa độ và radian

$$1^0=\frac{\pi}{180}\text{rad} \text{ và } 1\text{rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^0.$$

b. Độ dài của một cung tròn

Một cung của đường tròn bán kính R có số đo α rad thì có độ dài là $\ell=R\alpha$.

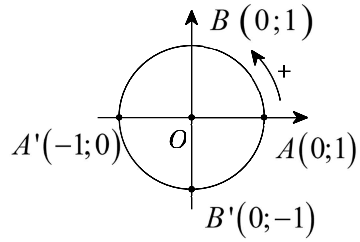
3. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC

a. Đường tròn lượng giác

Đường tròn lượng giác là đường tròn có tâm tại gốc tọa độ, bán kính bằng 1, được định hướng và lấy điểm $A(1;0)$ làm gốc của đường tròn.

Đường tròn này cắt hai trục tọa độ tại bốn điểm $A(1;0)$ $A'(-1;0)$, $B(0;1)$, $B'(0;-1)$.

Điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo α là điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho $sd(OA,\ OM)=\alpha$.



b. Giá trị lượng giác của góc lượng giác

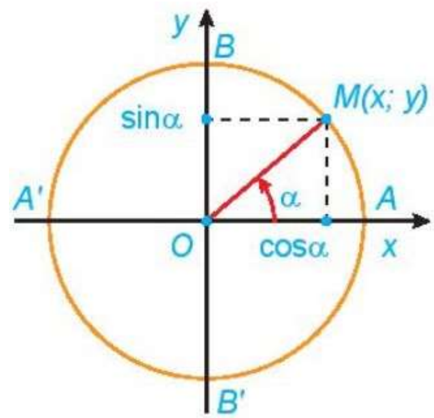
Giả sử $M(x;y)$ là điểm trên đường tròn lượng giác, biểu diễn góc lượng giác có số đo α.

• Hoành độ x của điểm M gọi là côsin của α và kí hiệu là $\cos\alpha$.

$$\cos\alpha = x$$

• Tung độ y của điểm M gọi là sin của α và kí hiệu là $\sin\alpha$.

$$\sin\alpha = y$$



• Nếu $\cos\alpha \neq 0$, tỉ số $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ gọi là tang của α và kí hiệu là $\tan\alpha$ (người ta còn dùng kí hiệu $\text{tg}\,\alpha$): $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

• Nếu $\sin\alpha \neq 0$, tỉ số $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ gọi là côtang của α và kí hiệu là $\cot\alpha$ (người ta còn dùng kí hiệu $\text{cotg}\,\alpha$) : $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Các giá trị $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ được gọi là các **giá trị lượng giác của cung** α.

Chú ý:

a) Ta cũng gọi trục tung là **trục sin**, còn trục hoành là **trục côsin**

b) Từ định nghĩa ta suy ra:

1) $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$ xác định với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$.

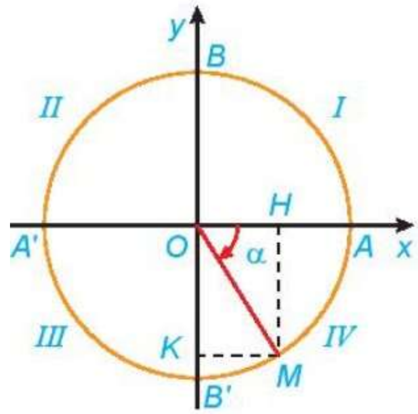
Hơn nữa, ta có:

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha,\ \forall k \in \mathbb{Z};\\ \cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha,\ \forall k \in \mathbb{Z}.\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{l}-1 \le \sin\alpha \le 1\\ -1 \le \cos\alpha \le 1.\end{array}}$$

2) $\tan\alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \; (k \in \mathbb{Z})$.

3) $\cot\alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq k\pi \; (k \in \mathbb{Z})$.

4) Dấu của các giá trị lượng giác của góc α phụ thuộc vào vị trí điểm biểu diễn M trên đường tròn lượng giác.



Bảng xác định dấu của các giá trị lượng giác

Giá trị lượng giác \ Góc phần tư	I	II	III	IV
cos α	+	−	−	+
sin α	+	+	−	−
tan α	+	−	+	−
cot α	+	−	+	−

c. Giá trị lượng giác của các cung đặc biệt

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Không xác định
$\cot\alpha$	Không xác định	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

4. QUAN HỆ GIỮA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

a. Công thức lượng giác cơ bản

Đối với các giá trị lượng giác, ta có các hằng đẳng thức sau

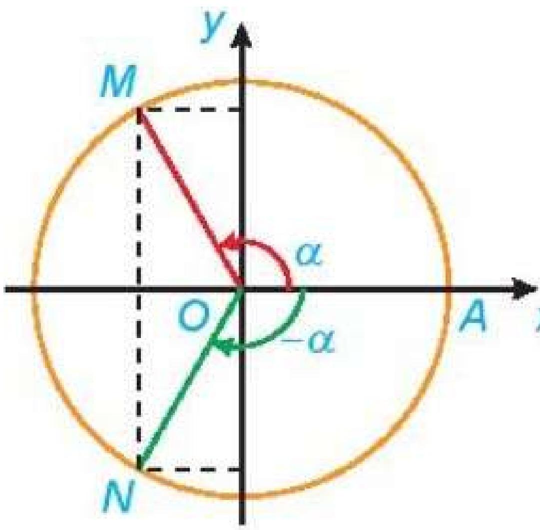
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

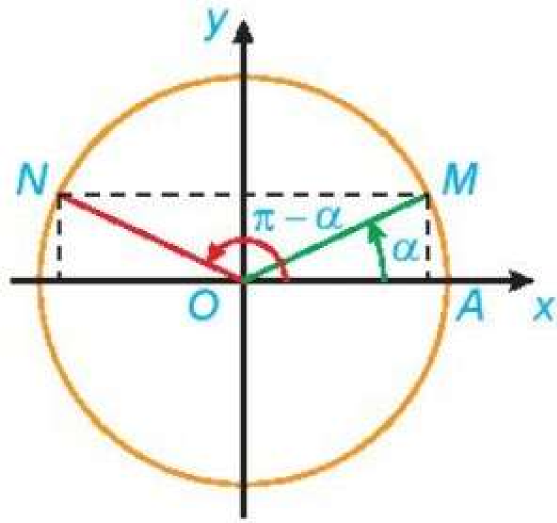
$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha},\ \alpha \ne \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

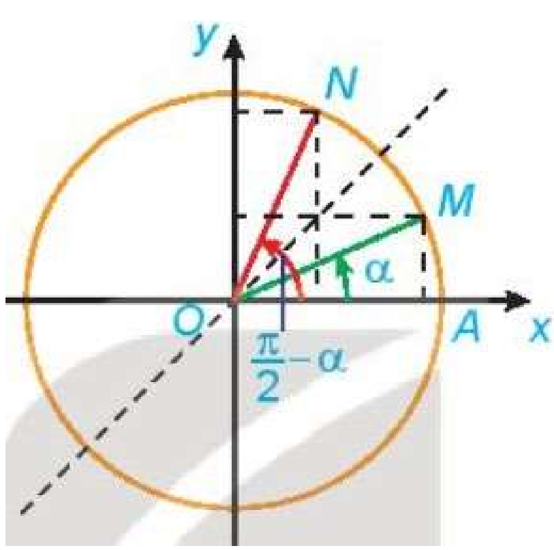
$$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha},\ \alpha \ne k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

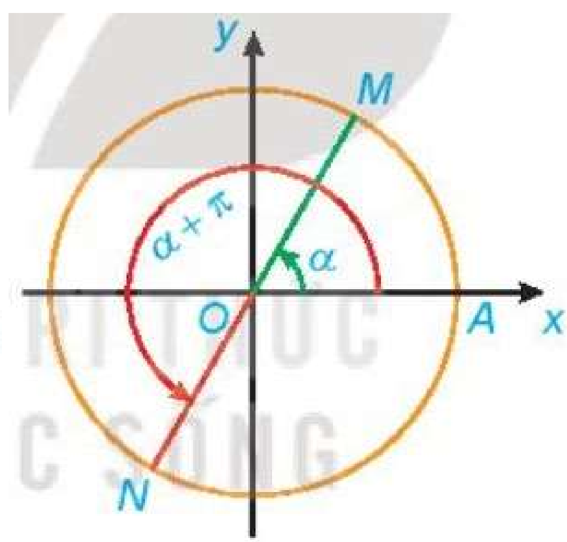
$$\tan\alpha.\cot\alpha = 1,\ \alpha \ne \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

b. Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt









Góc đối nhau	Góc bù nhau	Góc phụ nhau
$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$	$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$
$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$
$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$	$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$
$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$	$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$

Góc hơn kém π	Góc hơn kém $\frac{\pi}{2}$
$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$
$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$
$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$
$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1: XÁC ĐỊNH ĐỘ DÀI CUNG TRÒN

Một cung tròn có số đo a° (hoặc α rad) có độ dài là $l=\frac{a\pi R}{180}$ (hoặc $l=\alpha R$)

Câu 1: Một đường tròn có bán kính 10. Tính độ dài cung tròn có số đo 30^o

Câu 2: Một bánh xe máy có đường kính 60. Nếu xe chạy với vận tốc $50(km/h)$ thì trong 5 giây bánh xe quay được bao nhiêu vòng.

Câu 3: Một đu quay ở công viên có bán kính bằng 10m. Tốc độ của đu quay là 3 vòng/phút. Hỏi mất bao lâu để đu quay quay được góc $270°$?

Câu 4: Một đồng hồ treo tường có kim giờ dài $10,25\,\text{cm}$, kim phút dài $13,25\,\text{cm}$. Trong 30 phút kim giờ vạch nên cung tròn có độ dài bao nhiêu?

DẠNG 2: TÍNH GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC HOẶC MỘT BIỂU THỨC

Sử dụng công thức lượng giác cơ bản trong các bài toán:

1) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

2) $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha},\ \alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

3) $1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha},\ \alpha\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

4) $\tan\alpha.\cot\alpha=1,\ \alpha\neq\dfrac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

5) $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

6) $\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Câu 5: Cho $\cos x=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<0\right)$. Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại.

Câu 6: Cho $\sin x=\dfrac{3}{5}\left(\dfrac{\pi}{2}<x<\pi\right)$. Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại.

Câu 7: Cho $\tan x=\dfrac{3}{4}\left(-\pi<x<-\dfrac{\pi}{2}\right)$. Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại.

Câu 8: Cho $\cot x=\dfrac{3}{4}\left(\pi<x<\dfrac{3\pi}{2}\right)$. Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại.

Câu 9: Biết $\tan\alpha=2$ và $180^0<\alpha<270^0$. Tính giá trị của biểu thức: $\sin\alpha+cos\alpha$

Câu 10: Cho $\tan\alpha=2$. Tính giá trị của biểu thức: $A=\dfrac{3\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$

Câu 11: Cho $\tan x=3$. Tính $P=\dfrac{2\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$.

Câu 12: Cho $\sin a=\dfrac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $A=\dfrac{\cot a-\tan a}{\tan a+2\cot a}$ bằng

Câu 13: Cho $\tan x=-4$. Giá trị của biểu thức $A=\dfrac{2\sin x-5\cos x}{3\cos x+\sin x}$ là

Câu 14: Cho $\tan\alpha=3$, khi đó giá trị của biểu thức $P=\dfrac{2\sin\alpha-\cos\alpha}{3\sin\alpha-5\cos\alpha}$ là

Câu 15: Cho góc α thỏa mãn $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0$ và $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $P=\sin\alpha+\dfrac{1}{\cos\alpha}$ bằng

Câu 16: Cho $\tan\alpha=2$. Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{\sin^4\alpha-3\sin^3\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+2\cos^2\alpha}$.

Câu 17: Cho $2\tan a-\cot a=1$ với $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0$. Tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{\tan(8\pi-a)+2\cot(\pi+a)}{3\tan\left(\dfrac{3\pi}{2}+a\right)}$

Câu 18: Cho $\sin x+\cos x=m$. Tính giá trị của biểu thức: $M=|\sin x-\cos x|$

Câu 19: Cho $\dfrac{\sin^4\alpha}{a}+\dfrac{\cos^4\alpha}{b}=\dfrac{1}{a+b}$ Tính giá trị của biểu thức: $A=\dfrac{\sin^8\alpha}{a^3}+\dfrac{\cos^8\alpha}{b^3}$

DẠNG 3: GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC GÓC CÓ LIÊN QUAN ĐẶC BIỆT

Câu 20: Tính giá trị của biểu thức: $S = 3 - \sin^2 90° + 2\cos^2 60° - 3\tan^2 45°$

Câu 21: Rút gọn biểu thức $D = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(13\pi + \alpha) - 3\sin(\alpha - 5\pi)$.

Câu 22: Tính giá trị của biểu thức: $\sin^2 10^0 + \sin^2 20^0 + \sin^2 30^0 + ... + \sin^2 70^0 + \sin^2 80^0$

Câu 23: Tính giá trị của biểu thức:

$M = \cos^2 10^0 + \cos^2 20^0 + \cos^2 30^0 + \cos^2 40^0 + \cos^2 50^0 + \cos^2 60^0 + \cos^2 70^0 + \cos^2 80^0 + .$

$+ \cos^2 90^0 + \cos^2 100^0 + \cos^2 110^0 + \cos^2 120^0 + \cos^2 130^0 + \cos^2 140^0 + \cos^2 150^0 + \cos^2 160^0 +$

$+ \cos^2 170^0 + \cos^2 180^0$

DẠNG 4: RÚT GỌN BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC. ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Câu 24: Rút gọn biểu thức $A = (1 - \sin^2 x).\cot^2 x + (1 - \cot^2 x)$

Câu 25: Rút gọn biểu thức $M = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$.

Câu 26: Rút gọn biểu thức $\mathrm{C} = 2(\cos^4 x + \sin^4 x + \cos^2 x \sin^2 x)^2 - (\cos^8 x + \sin^8 x)$

Câu 27: Đơn giản biểu thức $A = \frac{(\sin x - \cos x)^2 - 1}{\tan x - \sin x.\cos x}$

Câu 28: Tính giá trị của biểu thức $A = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$.

Câu 29: Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sqrt{\frac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha}} + \sqrt{\frac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}}$

DẠNG 5: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC

Câu 30: Giá trị lớn nhất của $Q = \sin^6 x + \cos^6 x$ bằng:

Câu 31: Giá trị lớn nhất của biểu thức $M = 7\cos^2 x - 2\sin^2 x$ là.

Câu 32: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \cot^4 a + \cot^4 b + 2\tan^2 a.\tan^2 b + 2$

Câu 33: Tính giá trị lượng giác còn lại của góc x biết:

a. $\sin x = -\frac{3}{5}$ với $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$. **b.** $\cos x = \frac{1}{4}$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

c. $\cos x = \frac{3}{5}$ với $0 < x < 90^0$. **d.** $\cos x = -\frac{5}{13}$ với $180^0 < x < 270^0$.

Câu 34: Tính giá trị lượng giác còn lại của góc x biết

a) $\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$ với $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. b) $\cos x = \frac{4}{5}$ với $270° < x < 360°$.

c) $\sin x = \frac{5}{13}$ với $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ d) $\sin x = -\frac{1}{3}$ với $180° < x < 270°$.

Câu 35: Tính giá trị lượng giác còn lại của góc x biết

a) $\tan x = 3$ với $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$. b) $\tan x = -2$ với $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

c) $\tan x = -\frac{1}{2}$ với $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ d) $\cot x = 3$ với $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

Câu 36: Tính giá trị lượng giác của các biểu thức sau:

a) Cho $\tan x=-2$. Tính: $A_1=\dfrac{5\cot x+4\tan x}{5\cot x-4\tan x}$, $A_2=\dfrac{2\sin x+\cos x}{\cos x-3\sin x}$.

b) Cho $\cot x=\sqrt{2}$. Tính: $B_1=\dfrac{3\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$, $B_2=\dfrac{\sin x-3\cos x}{\sin x+3\cos x}$.

c) Cho $\cot x=2$. Tính: $C_1=\dfrac{2\sin x+3\cos x}{3\sin x-2\cos x}$, $C_2=\dfrac{2}{\cos^2 x-\sin x\cos x}$.

d) Cho $\sin x=\dfrac{3}{5}, 0<x<\dfrac{\pi}{2}$. Tính: $E=\dfrac{\cot x+\tan x}{\cot x-\tan x}$.

e) Cho $\sin x=\dfrac{1}{5}, 90^0<x<180^0$. Tính: $F=\dfrac{8\tan^2 x+3\cot x-1}{\tan x+\cot x}$.

Câu 37: Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\cos^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x$. b) $2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$

c) $3-4\sin^2 x=4\cos^2 x-1$ d) $\sin x\cot x+\cos x\tan x=\sin x+\cos x$

Câu 38: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x.\cos^2 x$ **b.** $\cos^4 x-\sin^4 x=\cos^2 x-\sin^2 x$

c. $4\cos^2 x-3=(1-2\sin x)(1+2\sin x)$ **d.** $(1+\cos x)(\sin^2 x-\cos x+\cos^2 x)=\sin^2 x$

Câu 39: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\sin^4 x-\cos^4 x=1-2\cos^2 x=2\sin^2 x-1$ **b.** $\sin^3 x.\cos x+\sin x.\cos^3 x=\sin x.\cos x$

c. $\tan^2 x-\sin^2 x=\tan^2 x.\sin^2 x$ **d.** $\cot^2 x-\cos^2 x=\cot^2 x.\cos^2 x$

Câu 40: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\tan x+\cot x=\dfrac{1}{\sin x.\cos x}$ **b.** $\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

c. $\dfrac{1}{1+\tan x}+\dfrac{1}{1+\cot x}=1$ **d.** $\left(1-\dfrac{1}{\cos x}\right)\left(1+\dfrac{1}{\cos x}\right)+\tan^2 x=0$

Câu 41: Chứng minh các đẳng thức sau không phụ thuộc vào biến x:

a) $A=-\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2 x$.

b) $B=\sin^4 x+\cos^2 x\sin^2 x+\cos^2 x$.

c) $B=\cos^4 x+\cos^2 x\sin^2 x+\sin^2 x$

CHƯƠNG I

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

BÀI 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

I LÝ THUYẾT.

1. GÓC LƯỢNG GIÁC

a. Khái niệm góc lượng giác và số đo của góc lượng giác

Trong mặt phẳng cho hai tia $Ou,\ Ov$. Xét tia Om cùng nằm trong mặt phẳng này. Nếu tia Om quay điểm O, theo một chiều nhất định từ Ou đến Ov, thì ta nói nó quét một **góc lượng giác** với tia đầu Ou, tia cuối Ov và kí hiệu là $(Ou,\ Ov)$.

Góc lượng giác $(Ou,\ Ov)$ chỉ được xác định khi ta biết được chiều chuyển động quay của tia Om từ tia đầu Ou đến tia cuối Ov. Ta quy ước: chiều quay ngược với chiều quay của kim đồng hồ là chiều dương, chiều quay cùng với chiều quay của kim đồng hồ là chiều âm.

Khi tia Om quay góc $\alpha°$ thì ta nói góc lượng giác mà tia đó quét nên có số đo $\alpha°$. Số đo của **góc lượng giác** với tia đầu Ou, tia cuối Ov được kí hiệu là $sd(Ou,\ Ov)$.

Cho hai tia $Ou,\ Ov$ thì có vô số **góc lượng giác** tia đầu Ou, tia cuối Ov. Mỗi **góc lượng giác** như thế đều kí hiệu là $(Ou,\ Ov)$. Số đo của các góc lượng giác này sai khác nhau một bội nguyên của $360°$.

b. Hệ thức Chasles: với 3 tia $Ou,\ Ov,\ Ow$ bất kì ta có:

$$sd(Ou,Ov)+sd(Ov,Ow)=sd(Ou,Ow)+k.360° \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Từ đó suy ra: $sd(Ou,Ov)=sd(Ou,Ow)-sd(Ov,Ow)+k.360° \quad (k\in\mathbb{Z})$

2. ĐƠN VỊ ĐO GÓC VÀ ĐỘ DÀI CUNG TRÒN

a. Đơn vị đo góc và cung tròn

Đơn vị độ:

Đơn vị radian: Cho đường tròn (O) tâm O bán kính R và một cung AB trên (O). Ta nói cung AB có số đo bằng 1 radian nếu độ dài của nó đúng bằng bán kính R. Khi đó ta cũng nói rằng góc $\widehat{AOB}$ có số đo bằng 1 radian và viết $\widehat{AOB}=1\ radian$

b) Quan hệ giữa độ và radian

$$1^0=\frac{\pi}{180}\text{rad và } 1\text{rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^0.$$

b. Độ dài của một cung tròn

Một cung của đường tròn bán kính R có số đo α rad thì có độ dài là $\ell=R\alpha$.

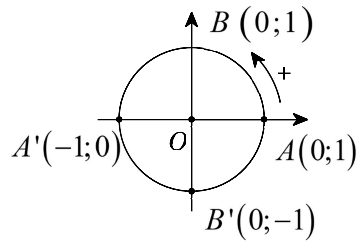
3. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC

a. Đường tròn lượng giác

Đường tròn lượng giác là đường tròn có tâm tại gốc tọa độ, bán kính bằng 1, được định hướng và lấy điểm $A(1;0)$ làm gốc của đường tròn.

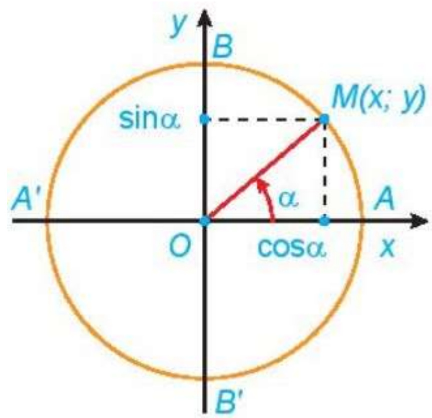
Đường tròn này cắt hai trục tọa độ tại bốn điểm $A(1;0)$ $A'(-1;0)$, $B(0;1)$, $B'(0;-1)$.

Điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo α là điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho $sd(OA,\ OM)=\alpha$.



b. Giá trị lượng giác của góc lượng giác

Giả sử $M(x;y)$ là điểm trên đường tròn lượng giác, biểu diễn góc lượng giác có số đo α.



• Hoành độ x của điểm M gọi là côsin của α và kí hiệu là $\cos\alpha$.

$$\cos\alpha = x$$

• Tung độ y của điểm M gọi là sin của α và kí hiệu là $\sin\alpha$.

$$\sin\alpha = y$$

• Nếu $\cos\alpha \neq 0$, tỉ số $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ gọi là tang của α và kí hiệu là $\tan\alpha$ (người ta còn dùng kí hiệu tgα): $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

• Nếu $\sin\alpha \neq 0$, tỉ số $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ gọi là côtang của α và kí hiệu là $\cot\alpha$ (người ta còn dùng kí hiệu cotgα) : $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Các giá trị $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ được gọi là các **giá trị lượng giác của cung** α.

Chú ý:

a) Ta cũng gọi trục tung là **trục sin**, còn trục hoành là **trục côsin**

b) Từ định nghĩa ta suy ra:

1) $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$ xác định với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$.

Hơn nữa, ta có:

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha,\ \forall k \in \mathbb{Z};\\ \cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha,\ \forall k \in \mathbb{Z}.\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{l}-1 \le \sin\alpha \le 1\\ -1 \le \cos\alpha \le 1.\end{array}}$$