CHƯƠNG 1: CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

I. Định nghĩa

Trên mặt phẳng Oxy cho đường tròn lượng giác tâm O bán kính R=1 và điểm M trên đường tròn lượng giác mà sđ $\overset{\frown}{AM} = \beta$ với $0 \le \beta \le 2\pi$

Đặt $\alpha = \beta + k2\pi, k \in Z$

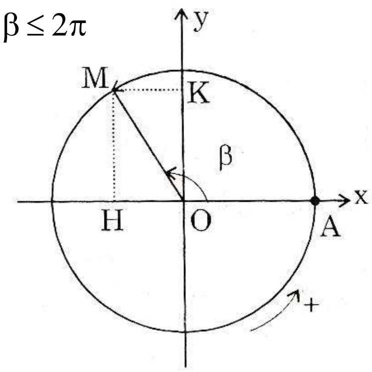
Ta định nghĩa:

$\sin\alpha = \overline{OK}$

$\cos\alpha = \overline{OH}$

$tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ với $\cos\alpha \neq 0$

$\cot g\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ với $\sin\alpha \neq 0$



II. Bảng giá trị lượng giác của một số cung (hay góc) đặc biệt

Góc α / Giá trị	$0(0^o)$	$\frac{\pi}{6}(30^o)$	$\frac{\pi}{4}(45^o)$	$\frac{\pi}{3}(60^o)$	$\frac{\pi}{2}(90^o)$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ǁ
$\cot g\alpha$	ǁ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

III. Hệ thức cơ bản

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ với $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi(k \in Z)$

$t + \cot g^2 = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ với $\alpha \neq k\pi(k \in Z)$

IV. Cung liên kết (Cách nhớ: cos đối, sin bù, tang sai π; phụ chéo)

a. Đối nhau: α và $-\alpha$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$tg(-\alpha) = -tg(\alpha)$

$\cot g(-\alpha) = -\cot g(\alpha)$

b. Bù nhau: α và $\pi-\alpha$

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha\\ \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha\\ \mathrm{tg}(\pi-\alpha)=-\mathrm{tg}\alpha\\ \mathrm{cotg}(\pi-\alpha)=-\mathrm{cotg}\alpha\end{array}}$$

c. Sai nhau π: α và $\pi+\alpha$

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha\\ \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha\\ \mathrm{tg}(\pi+\alpha)=\mathrm{tg}\alpha\\ \mathrm{cotg}(\pi+\alpha)=\mathrm{cotg}\alpha\end{array}}$$

d. Phụ nhau: α và $\frac{\pi}{2}-\alpha$

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha\\ \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\mathrm{cotg}\alpha\\ \mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\mathrm{tg}\alpha\end{array}}$$

e.Sai nhau $\frac{\pi}{2}$: α và $\frac{\pi}{2}+\alpha$

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha\\ \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\mathrm{cotg}\alpha\\ \mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\mathrm{tg}\alpha\end{array}}$$

f.

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin(x+k\pi)=(-1)^k\sin x, k\in Z \\ \cos(x+k\pi)=(-1)^k\cos x, k\in Z \\ tg(x+k\pi)=tgx, k\in Z \\ \cot g(x+k\pi)=\cot gx \end{array}}$$

V. Công thức cộng

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\sin b\cos a \\ \cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\sin a\sin b \\ tg(a\pm b)=\dfrac{tga\pm tgb}{1\mp tgatgb} \end{array}}$$

VI. Công thức nhân đôi

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin 2a=2\sin a\cos a \\ \cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=1-2\sin^2 a=2\cos^2 a-1 \\ tg2a=\dfrac{2tga}{1-tg^2a} \\ \cot g2a=\dfrac{\cot g^2a-1}{2\cot ga} \end{array}}$$

VII. Công thức nhân ba:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a \\ \cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a \end{array}}$$

VIII. Công thức hạ bậc:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin^2 a=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2a) \\ \cos^2 a=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2a) \\ tg^2a=\dfrac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a} \end{array}}$$

IX. Công thức chia đôi

Đặt $t=tg\dfrac{a}{2}$ (với $a\neq\pi+k2\pi$)

$$\begin{aligned}
\sin a &= \frac{2t}{1+t^2} \\
\cos a &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\
tga &= \frac{2t}{1-t^2}
\end{aligned}$$

X. Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\begin{aligned}
\cos a + \cos b &= 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \\
\cos a - \cos b &= -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \\
\sin a + \sin b &= 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \\
\sin a - \sin b &= 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \\
tga \pm tgb &= \frac{\sin(a \pm b)}{\cos a \cos b} \\
\cot ga \pm \cot gb &= \frac{\sin(b \pm a)}{\sin a.\sin b}
\end{aligned}$$

XI. Công thức biển đổi tích thành tổng

$$\begin{aligned}
\cos a.\cos b &= \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right] \\
\sin a.\sin b &= \frac{-1}{2}\left[\cos(a+b) - \cos(a-b)\right] \\
\sin a.\cos b &= \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]
\end{aligned}$$

<u>Bài 1</u>: Chứng minh $\dfrac{\sin^4 a + \cos^4 a - 1}{\sin^6 a + \cos^6 a - 1} = \dfrac{2}{3}$

Ta có:

$$\sin^4 a + \cos^4 a - 1 = \left(\sin^2 a + \cos^2 a\right)^2 - 2\sin^2 a\cos^2 a - 1 = -2\sin^2 a\cos^2 a$$

Và:

$$\begin{aligned}
\sin^6 a + \cos^6 a - 1 &= \left(\sin^2 a + \cos^2 a\right)\left(\sin^4 a - \sin^2 a\cos^2 a + \cos^4 a\right) - 1 \\
&= \sin^4 a + \cos^4 a - \sin^2 a\cos^2 a - 1 \\
&= \left(1 - 2\sin^2 a\cos^2 a\right) - \sin^2 a\cos^2 a - 1 \\
&= -3\sin^2 a\cos^2 a
\end{aligned}$$

Do đó: $\dfrac{\sin^4 a+\cos^4 a-1}{\sin^6 a+\cos^6 a-1}=\dfrac{-2\sin^2 a\cos^2 a}{-3\sin^2 a\cos^2 a}=\dfrac{2}{3}$

Bài 2: Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{1+\cos x}{\sin x}=\left[1+\dfrac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x}\right]$

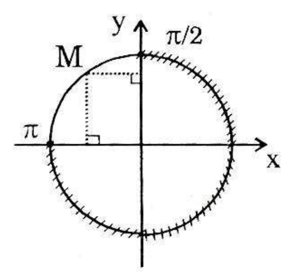
Tính giá trị A nếu $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ và $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$

Ta có: $A=\dfrac{1+\cos x}{\sin x}\left(\dfrac{\sin^2 x+1-2\cos x+\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)$

$\Leftrightarrow A=\dfrac{1+\cos x}{\sin x}.\dfrac{2(1-\cos x)}{\sin^2 x}$

$\Leftrightarrow A=\dfrac{2(1-\cos^2 x)}{\sin^3 x}=\dfrac{2\sin^2 x}{\sin^3 x}=\dfrac{2}{\sin x}$ (với $\sin x\neq 0$)

Ta có: $\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$



Do: $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ nên $\sin x>0$

Vậy $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Do đó $A=\dfrac{2}{\sin x}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

Bài 3: Chứng minh các biểu thức sau đây không phụ thuộc x:

a. $A=2\cos^4 x-\sin^4 x+\sin^2 x\cos^2 x+3\sin^2 x$

b. $B=\dfrac{2}{tgx-1}+\dfrac{\cot gx+1}{\cot gx-1}$

a. Ta có:

$A=2\cos^4 x-\sin^4 x+\sin^2 x\cos^2 x+3\sin^2 x$

$\Leftrightarrow A=2\cos^4 x-(1-\cos^2 x)^2+(1-\cos^2 x)\cos^2 x+3(1-\cos^2 x)$

$\Leftrightarrow A=2\cos^4 x-(1-2\cos^2 x+\cos^4 x)+\cos^2 x-\cos^4 x+3-3\cos^2 x$

$\Leftrightarrow A=2$ (không phụ thuộc x)

b. Với điều kiện $\sin x.\cos x\neq 0, tgx\neq 1$

Ta có: $B=\dfrac{2}{tgx-1}+\dfrac{\cot gx+1}{\cot gx-1}$

$$\Leftrightarrow B=\frac{2}{tgx-1}+\frac{\frac{1}{tgx}+1}{\frac{1}{tgx}-1}=\frac{2}{tgx-1}+\frac{1+tgx}{1-tgx}$$

$$\Leftrightarrow B=\frac{2-(1-tgx)}{tgx-1}=\frac{1-tgx}{tgx-1}=-1 \text{ (không phụ thuộc vào x)}$$

Bài 4: Chứng minh

$$\frac{1+\cos a}{2\sin a}\left[1-\frac{(1-\cos a)^2}{\sin^2 a}\right]+\frac{\cos^2 b-\sin^2 c}{\sin^2 b\sin^2 c}-\cot g^2 b\cot g^2 c=\cot ga-1$$

Ta có:

$$* \ \frac{\cos^2 b-\sin^2 c}{\sin^2 b.\sin^2 c}-\cot g^2 b.\cot g^2 c$$

$$=\frac{\cot g^2 b}{\sin^2 c}-\frac{1}{\sin^2 b}-\cot g^2 b\cot g^2 c$$

$$=\cot g^2 b\left(1+\cot g^2 c\right)-\left(1+\cot g^2 b\right)-\cot g^2 b\cot g^2 c=-1 \quad (1)$$

$$* \ \frac{1+\cos a}{2\sin a}\left[1-\frac{(1-\cos a)^2}{\sin^2 a}\right]$$

$$=\frac{1+\cos a}{2\sin a}\left[1-\frac{(1-\cos a)^2}{1-\cos^2 a}\right]$$

$$=\frac{1+\cos a}{2\sin a}\left[1-\frac{1-\cos a}{1+\cos a}\right]$$

$$=\frac{1+\cos a}{2\sin a}.\frac{2\cos a}{1+\cos a}=\cot ga \quad (2)$$

Lấy (1) + (2) ta được điều phải chứng minh xong.

Bài 5: Cho ΔABC tùy ý với ba góc đều là nhọn.
Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=tgA.tgB.tgC$

Ta có: $A+B=\pi-C$

Nên: $tg(A+B)=-tgC$

$$\Leftrightarrow \frac{tgA+tgB}{1-tgA.tgB}=-tgC$$

$$\Leftrightarrow tgA+tgB=-tgC+tgA.tgB.tgC$$

Vậy: $P=tgA.tgB.tgC=tgA+tgB+tgC$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương tgA, tgB, tgC ta được $tgA + tgB + tgC \geq 3\sqrt[3]{tgA.tgB.tgC}$

$\Leftrightarrow P \geq 3\sqrt[3]{P}$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{P^2} \geq 3$

$\Leftrightarrow P \geq 3\sqrt{3}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} tgA = tgB = tgC \\ 0 < A, B, C < \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$

Do đó: $MinP = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$

<u>Bài 6 :</u> Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của

a/ $y = 2\sin^8 x + \cos^4 2x$

b/ $y = \sqrt[4]{\sin x} - \sqrt{\cos x}$

a/ Ta có : $y = 2\left(\dfrac{1 - \cos 2x}{2}\right)^4 + \cos^4 2x$

Đặt $t = \cos 2x$ với $-1 \leq t \leq 1$ thì

$y = \dfrac{1}{8}(1 - t)^4 + t^4$

=> $y' = -\dfrac{1}{2}(1 - t)^3 + 4t^3$

Ta có : $y' = 0 \Leftrightarrow (1 - t)^3 = 8t^3$

$\Leftrightarrow 1 - t = 2t$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{1}{3}$

Ta có y(1) = 1; y(-1) = 3; $y\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{27}$

Do đó : $\underset{x \in \mathbb{R}}{Max}\, y = 3$ và $\underset{x \in \mathbb{R}}{Min}\, y = \dfrac{1}{27}$

b/ Do điều kiện : $\sin x \geq 0$ và $\cos x \geq 0$ nên miền xác định

$D = \left[k2\pi, \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\right]$ với $k \in \mathbb{Z}$

Đặt $t = \sqrt{\cos x}$ với $0 \leq t \leq 1$ thì $t^4 = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Nên $\sin x = \sqrt{1 - t^4}$

Vậy $y = \sqrt[8]{1 - t^4} - t$ trên $D' = [0, 1]$

Thì $y' = \dfrac{-t^3}{2.\sqrt[8]{(1 - t^4)^7}} - 1 < 0 \quad \forall t \in [0; 1)$

Nên y giảm trên [0, 1]. Vậy : $\max\limits_{x \in D} y = y(0) = 1, \ \min\limits_{x \in D} y = y(1) = -1$

Bài 7: Cho hàm số $y=\sqrt{\sin^4 x+\cos^4 x-2m\sin x\cos x}$
Tìm giá trị m để y xác định với mọi x

Xét $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x-2m\sin x\cos x$

$f(x)=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-m\sin 2x-2\sin^2 x\cos^2 x$

$f(x)=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x-m\sin 2x$

Đặt : $t=\sin 2x$ với $t\in[-1,1]$

y xác định $\forall x \Leftrightarrow f(x)\geq 0 \forall x\in R$

$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}t^2-mt\geq 0 \quad \forall t\in[-1,1]$

$\Leftrightarrow g(t)=t^2+2mt-2\leq 0 \quad \forall t\in[-1,1]$

Do $\Delta'=m^2+2>0 \quad \forall m$ nên g(t) có 2 nghiệm phân biệt t_1, t_2

Lúc đó

t		t_1		t_2
g(t)	+	0	-	0

Do đó : yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow t_1\leq -1<1\leq t_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases}1g(-1)\leq 0\\ 1g(1)\leq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2m-1\leq 0\\ 2m-1\leq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}m\geq \frac{-1}{2}\\ m\leq \frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\leq m\leq \frac{1}{2}$

Cách khác :

$g(t)=t^2+2mt-2\leq 0 \quad \forall t\in[-1,1]$

$\Leftrightarrow \max_{t\in[-1,1]} g(t)\leq 0 \Leftrightarrow \max\{g(-1),g(1)\}\leq 0$

$\Leftrightarrow \max\{-2m-1),-2m+1)\}\leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}m\geq \frac{-1}{2}\\ m\leq \frac{1}{2}\end{cases}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\leq m\leq \frac{1}{2}$

Bài 8 : Chứng minh $A=\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}+\sin^4\frac{7\pi}{16}=\frac{3}{2}$

Ta có : $\sin\frac{7\pi}{16}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{16}\right)=\cos\frac{\pi}{16}$

$\sin\frac{5\pi}{16}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{16}\right)=\cos\frac{3\pi}{16}$

Mặt khác : $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$$= 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$$

Do đó : $A = \sin^4\frac{\pi}{16} + \sin^4\frac{7\pi}{16} + \sin^4\frac{3\pi}{16} + \sin^4\frac{5\pi}{16}$

$$= \left(\sin^4\frac{\pi}{16} + \cos^4\frac{\pi}{16}\right) + \left(\sin^4\frac{3\pi}{16} + \cos^4\frac{3\pi}{16}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{8}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8}\right) \quad \left(\text{do } \sin\frac{3\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{8}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

<u>Bài 9 :</u> Chứng minh : $16\sin 10^o.\sin 30^o.\sin 50^o.\sin 70^o = 1$

Ta có : $A = \frac{A\cos 10^o}{\cos 10^o} = \frac{1}{\cos 10^o}(16\sin 10^o\cos 10^o)\sin 30^o.\sin 50^o.\sin 70^o$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{\cos 10^o}\left(8\sin 20^o\right)\left(\frac{1}{2}\right)\cos 40^o.\cos 20^o$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{\cos 10^o}\left(4\sin 20^0\cos 20^o\right).\cos 40^o$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{\cos 10^o}\left(2\sin 40^o\right)\cos 40^o$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{\cos 10^o}\sin 80^o = \frac{\cos 10^o}{\cos 10^o} = 1$$

<u>Bài 10 :</u> Cho ΔABC. Chứng minh : $\text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2} + \text{tg}\frac{C}{2}\text{tg}\frac{A}{2} = 1$

Ta có : $\frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$

Vậy : $\text{tg}\frac{A+B}{2} = \cot g\frac{C}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{tg}\frac{A}{2} + \text{tg}\frac{B}{2}}{1 - \text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2}} = \frac{1}{\text{tg}\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\text{tg}\frac{A}{2} + \text{tg}\frac{B}{2}\right]\text{tg}\frac{C}{2} = 1 - \text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}=1$$

<u>Bài 11 :</u> Chứng minh : $8+4\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}+2\operatorname{tg}\frac{\pi}{16}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{32}=\operatorname{cotg}\frac{\pi}{32}(*)$

Ta có : (*) $\Leftrightarrow 8=\operatorname{cotg}\frac{\pi}{32}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{32}-2\operatorname{tg}\frac{\pi}{16}-4\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$

Mà : $\operatorname{cotg}a-\operatorname{tg}a=\frac{\cos a}{\sin a}-\frac{\sin a}{\cos a}=\frac{\cos^2 a-\sin^2 a}{\sin a\cos a}$

$$=\frac{\cos 2a}{\frac{1}{2}\sin 2a}=2\operatorname{cotg}2a$$

Do đó :

$$(*)\Leftrightarrow\left[\operatorname{cotg}\frac{\pi}{32}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{32}\right]-2\operatorname{tg}\frac{\pi}{16}-4\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=8$$

$$\Leftrightarrow\left[2\operatorname{cotg}\frac{\pi}{16}-2\operatorname{tg}\frac{\pi}{16}\right]-4\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=8$$

$$\Leftrightarrow 4\operatorname{cotg}\frac{\pi}{8}-4\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=8$$

$$\Leftrightarrow 8\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4}=8 \text{ (hiển nhiên đúng)}$$

<u>Bài :12 :</u> Chứng minh :

a/ $\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)=\frac{3}{2}$

b/ $\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\frac{1}{\sin 8x}+\frac{1}{\sin 16x}=\operatorname{cotg}x-\operatorname{cotg}16x$

a/ Ta có : $\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)$

$$=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)+\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(2x+\frac{4\pi}{3}\right)\right]+\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\frac{4\pi}{3}-2x\right)\right]$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left[\cos 2x+\cos\left(2x+\frac{4\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{3}-2x\right)\right]$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left[\cos 2x+2\cos 2x\cos\frac{4\pi}{3}\right]$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left[\cos 2x+2\cos 2x\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{3}{2}$$

b/ Ta có : $\operatorname{cotg}a-\operatorname{cotg}b=\frac{\cos a}{\sin a}-\frac{\cos b}{\sin b}=\frac{\sin b\cos a-\sin a\cos b}{\sin a\sin b}$