CHUYÊN ĐỀ 1 ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Mục tiêu

❖ **Kiến thức**

+ Biết, hiểu công thức, quy tắc tính đạo hàm
+ Nắm vững tính đơn điệu của hàm số.
+ Thấy được mối liên hệ về sự biến thiên của hàm số thông qua đạo hàm của nó
+ Biết quy tắc xét dấu đã học ở lớp 10.
+ Nhận biết được mối liên hệ của hàm số khi biết bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$, $y=f(u(x))$ khi biết bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$, đồ thị hàm số $y=f(x)$ hoặc đồ thị hàm số $y=f'(x)$.

❖ **Kĩ năng**

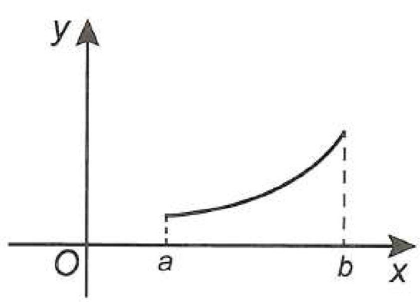
+ Biết áp dụng công thức, các quy tắc tính đạo hàm vào các hàm số cơ bản
+ Nhận diện được bảng biến thiên, đồ thị của hàm số đơn điệu trên một khoảng cụ thể.
+ Vẽ được bảng biến thiên, đồ thị các hàm số cơ bản, các hàm chứa trị tuyệt đối.
+ Vận dụng được tính chất của các hàm số trùng phương, hàm số bậc ba, các hàm hữu tỷ vào giải nhanh toán trắc nghiệm.
+ Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y=f(x)$, $y=f(u(x))$, $y=f(u(x)\pm h(x))$ khi biết bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm số $y=f(x)$ ($y=f'(x)$).

I. LÍ THUYẾT TRỌNG TÂM

Định nghĩa

Cho hàm số f xác định trên khoảng (đoạn hoặc nửa khoảng) K.

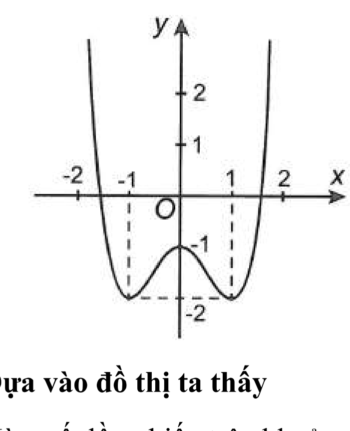
Hàm số f gọi là đồng biến (tăng) trên K nếu $\forall x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.



Hàm số đồng biến

Hàm số f gọi là nghịch biến (giảm) trên K nếu

Ví dụ 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



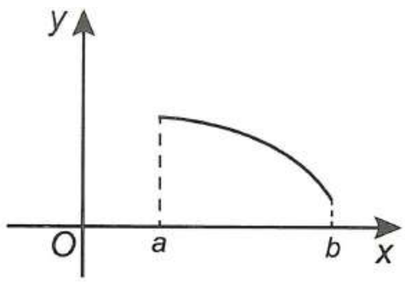
Dựa vào đồ thị ta thấy

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y=f(x)$. Ta có bảng xét

$\forall x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



Hàm số nghịch biến

Định lí thuận

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K.

Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K.

Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng K.

Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số không đổi trên khoảng K.

Định lí đảo

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K.

Nếu hàm số f đồng biến trên khoảng K thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$.

Nếu hàm số f nghịch biến trên khoảng K thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$.

Lưu ý:

- Hàm số $f(x)$ đồng biến trên K thì đồ thị hàm số là đường đi lên từ trái sang phải, biểu diễn trong bảng biến thiên là dấu mũi tên hướng lên từ trái sang phải.

- Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K thì đồ thị hàm số là đường đi xuống từ trái sang phải, biểu diễn trong bảng biến thiên là dấu mũi tên hướng xuống từ trái sang phải.

Xét dấu tam thức bậc hai $g(x) = ax^2 + bx + c$

dấu như sau:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta thấy

Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right); (1; +\infty)$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$

Ví dụ 3: Cho hàm số $g(x) = 2x^2 - 5x + 6$.

Hàm số có $\begin{cases} a = 2 > 0 \\ \Delta = (-5)^2 - 4.2.6 = -23 < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Chú ý: Định lí thuận dạng "mở rộng":

$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in K$ và dấu "=" tại hữu hạn điểm trên K thì hàm số nghịch biến trên K.

$(a \neq 0)$

$g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$;

$g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$;

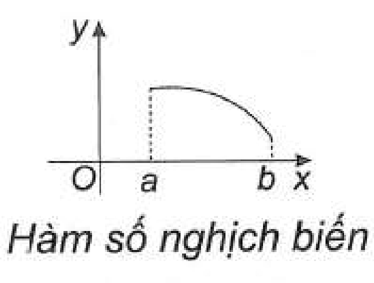
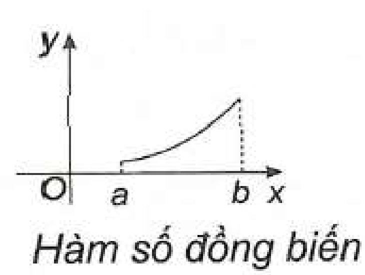
$g(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$;

$g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA

TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Cho hàm số f xác định trên khoảng (đoạn hoặc nửa khoảng) K.

Hàm số nghịch biến	**Hàm số đồng biến**
Định lí thuận - Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng K. **Định lí đảo** - Nếu hàm số f nghịch biến trên khoảng K thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$. **Định lí thuận "mở rộng"** $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ và dấu bằng tại hữu hạn điểm trên K thì hàm số đồng biến trên K.	**Định lí thuận** - Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K. **Định lí đảo** - Nếu hàm số f đồng biến trên khoảng K thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$. **Định lí thuận "mở rộng"** $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$ và dấu bằng tại hữu hạn điểm trên K thì hàm số nghịch biến trên K.
Đồ thị  - Đồ thị hàm số là đường đi xuống từ trái sang phải	**Đồ thị**  - Đồ thị hàm số là đường đi lên từ trái sang phải
Định nghĩa Hàm số f được gọi là nghịch biến trên K nếu	**Định nghĩa** Hàm số f được gọi là đồng biến trên K nếu

$\forall x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.	$\forall x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Xét tính đơn điệu của hàm số không chứa tham số

Bài toán 1. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số cho bởi công thức $y = f(x)$

Phương pháp giải

Thực hiện các bước như sau:

Bước 1. Tìm tập xác định D.

Bước 2. Tính đạo hàm $y' = f'(x)$.

Bước 3. Tìm các giá trị x mà $f'(x) = 0$ hoặc những giá trị làm cho $f'(x)$ không xác định.

Bước 4. Lập bảng biến thiên hoặc xét dấu trực tiếp đạo hàm.

Bước 5. Kết luận tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ (chọn đáp án).

Ví dụ: Hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x - 2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(5;+\infty)$. **B.** $(-\infty;1)$.

C. $(-2;3)$. **D.** $(1;5)$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -x^2 + 6x - 5$

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 6x - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 5 \end{array}\right.$

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{-13}{3}$	$\nearrow$	$\frac{19}{3}$	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(1;5)$.

Chọn D.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 15$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định **sai?**

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$. **B.** Hàm số đồng biến trên $(-9;-5)$.

C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. **D.** Hàm số đồng biến trên $(5;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có $y' = 3x^2 + 6x - 9$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	42	↘	10	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, mệnh đề C sai.

Chọn C.

Ví dụ 2. Các khoảng nghịch biến của hàm số $y=-x^4+2x^2-4$ là

A. $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

C. $(-1;0)$ và $(0;1)$. **D.** $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=-4x^3+4x$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $y=-x^4+2x^2-4$ như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	-3	↘	-4	↗	-3	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Chọn A.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

D. Hàm số đồng biến trên từng khoảng của miền xác định.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Ta có $y'=\dfrac{3}{(x+2)^2}>0, \forall x\in D$ nên hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+2}$ đồng biến trên từng khoảng của miền xác định.

Chọn D.

Ví dụ 4. Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=-x^3-2x$. **B.** $y=\dfrac{x-2}{x-1}$. **C.** $y=x^4+3x^2$. **D.** $y=x^3+3x^2$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y=-x^3-2x \Rightarrow y'=-3x^2-2<0, \forall x\in\mathbb{R}$

Vậy hàm số $y=-x^3-2x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn A.

Ví dụ 5. Cho hàm $y=\sqrt{x^2-6x+5}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D=(-\infty;1]\cup[5;+\infty)$

Ta có $y'=\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}}>0, \forall x\in(5;+\infty)$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$.

Chọn A.

Ví dụ 6. Hàm số $y=x+\dfrac{4}{x}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(-2;2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Ta có $y'=\dfrac{x^2-4}{x^2}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow \dfrac{x^2-4}{x^2}=0\Leftrightarrow x=\pm2$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đồng biến trên $(-\infty;-2)$ và $(2;+\infty)$.

Chọn D.

Ví dụ 7. Cho hàm số $f\left(x\right)=\left(1-x^2\right)^{2019}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;0\right)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty;0\right)$.

D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm $f'\left(x\right)=2019.\left(1-x^2\right)^{2018}.\left(1-x^2\right)'=2019.\left(1-x^2\right)^{2018}.\left(-2x\right)$

Vì $2019.\left(1-x^2\right)^{2018}\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ nên dấu của đạo hàm cùng dấu với $\left(-x\right)$.

Ta có $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm 1\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	
$f\left(x\right)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;0\right)$.

Chọn B.

Chú ý: *Dấu hiệu mở rộng khi kết luận khoảng đồng biến* $\left(-\infty;0\right)$.

Ví dụ 8. Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3+x^2+8x+\cos x$. Với hai số thực a,b sao cho $a<b$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $f\left(a\right)=f\left(b\right)$.

B. $f\left(a\right)>f\left(b\right)$.

C. $f\left(a\right)<f\left(b\right)$.

D. $f\left(a\right)\geq f\left(b\right)$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $f'\left(x\right)=3x^2+2x+8-\sin x=\left(3x^2+2x+1\right)+\left(7-\sin x\right)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ Suy ra $f\left(x\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $a<b\Rightarrow f\left(a\right)<f\left(b\right)$.

Chọn C.

Ví dụ 9. Hàm số $y=\left|x^2-2x-3\right|$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;3)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y=\left|x^2-2x-3\right|=\sqrt{\left(x^2-2x-3\right)^2}\Rightarrow y'=\dfrac{(2x-2)\left(x^2-2x-3\right)}{\sqrt{\left(x^2-2x-3\right)^2}}$

$y'=0\Leftrightarrow 2x-2=0\Leftrightarrow x=1$; y' không xác định nếu $x=-1;x=3$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ và $(3;+\infty)$.

Chọn D.

Chú ý: - *Vì $\left|f(x)\right|=\sqrt{f^2(x)}$ nên có thể xét tính đơn điệu của hàm số $y=\sqrt{f^2(x)}$ để suy ra kết quả.*

- Đạo hàm $y'=\dfrac{f'(x).f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$.

Bài toán 2. Xét tính đơn điệu của hàm số $y=f(x)$ khi cho hàm số $y=f'(x)$

Phương pháp giải

Thực hiện theo ba bước như sau:

Bước 1. Tìm các giá trị x mà $f'(x)=0$ hoặc những giá trị làm cho $f'(x)$ không xác định.

Bước 2. Lập bảng biến thiên hoặc xét dấu trực tiếp đạo hàm.

Bước 3. Kết luận tính đơn điệu của hàm số $y=f(x)$ (chọn đáp án).

Ví dụ: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=x^2(x-1)$. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0);(1;+\infty)$.

C. $(0;1)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2(x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Chọn A.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2(x-1)^3(2-x)$

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào, trong các khoảng dưới đây?

A. $(-1;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

Chọn B.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(0;3)$ có tính chất

$f'(x)\geq 0, \forall x\in(0;3)$ và $f'(x)=0$, $\forall x\in(1;2)$.

Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

B. Hàm số $f(x)$ không đổi trên khoảng $(1;2)$.

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$.

Hướng dẫn giải

Vì $f'(x)=0$, $\forall x\in(1;2)$ nên $f(x)$ là hàm hằng trên khoảng $(1;2)$.

Trên các khoảng $(0;2),(1;3),(0;3)$ hàm số $y=f(x)$ thỏa $f(x)\geq 0$ nhưng $f'(x)=0$, $\forall x\in(1;2)$ nên $f(x)$ không đồng biến trên các khoảng này.

Chọn B.

Bài toán 3. Xét tính đơn điệu của hàm số $y=f(x)$ khi cho bảng biến thiên hoặc đồ thị

Phương pháp giải

Khi cho bảng biến thiên:

- Trên khoảng $(a;b)$ nếu $f'(x)$ mang dấu + (dương) thì ta kết luận $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$.

Ví dụ: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

- Trên khoảng $(c;d)$ nếu $f'(x)$ mang dấu − (âm): thì ta kết luận $f(x)$ nghịch biến trên $(c;d)$.

Khi cho đồ thị:

- Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ thì hàm số có đồ thị là đường đi lên từ trái sang phải trên $(a;b)$.

- Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$ thì hàm số có đồ thị là đường đi xuống từ trái sang phải trên $(a;b)$.

- Trong trường hợp: Hàm số $f(x)$ là hàm hằng (không đổi) trên $(a;b)$ thì hàm số có đồ thị là đường song song hoặc trùng với trục Ox trên $(a;b)$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(0;2)$.

C. $(-2;0)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $y'>0, \forall x\in(0;2) \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(0;2)$.

Chọn B.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$f(2)$	$\searrow$	$-\infty$

Hỏi bảng biến thiên trên là bảng biến thiên của hàm số nào trong các hàm số dưới đây?

A. $y=-x^3+6x^2-12x$. **B.** $y=x^3-6x^2+12x$.

C. $y=-x^3+4x^2-4x$. **D.** $y=-x^2+4x-4$.

Hướng dẫn giải

Xét hàm số $y=-x^3+6x^2-12x$

$y'=-3x^2+12x-12=-3(x-2)^2\le 0, \forall x\in\mathbb{R}$, thỏa mãn.

Xét hàm số $y=x^3-6x^2+12x$

$y'=3x^2-12x+12=3(x-2)^2\ge 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, không thoả mãn.

Xét hàm số $y=-x^3+4x^2-4x$