

# Mục lục

<b>1</b>	<b>PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN</b>	<b>2</b>
1	PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN . . . . .	2
1.1	TÓM TẮT LÝ THUYẾT . . . . .	2
1.2	BÀI TẬP . . . . .	4
2	HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN . . . . .	9
2.1	TÓM TẮT LÝ THUYẾT . . . . .	9
2.2	BÀI TẬP . . . . .	10
3	GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH . . . . .	15
<b>2</b>	<b>HÀM SỐ <math>y = ax^2</math> (<math>a \neq 0</math>) - PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN</b>	<b>23</b>
1	HÀM SỐ $Y = AX^2$ ( $A \neq 0$ ) . . . . .	23
1.1	TÓM TẮT LÝ THUYẾT . . . . .	23
1.2	VÍ DỤ . . . . .	23
1.3	BÀI TẬP . . . . .	24
3	PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN SỐ . . . . .	34
3.1	TÓM TẮT LÝ THUYẾT . . . . .	34
3.2	BÀI TẬP . . . . .	35
4	HỆ THỨC VI-ÉT VÀ ỨNG DỤNG . . . . .	42
4.1	TÓM TẮT LÝ THUYẾT . . . . .	42
4.2	BÀI TẬP . . . . .	43
5	PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI . . . . .	57
5.1	TÓM TẮT LÝ THUYẾT . . . . .	57
5.2	BÀI TẬP . . . . .	58
6	GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH . . . . .	73
6.1	VÍ DỤ . . . . .	73
6.2	BÀI TẬP . . . . .	73
7	MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TẾ . . . . .	76

8	ÔN TẬP HỌC KÌ II . . . . .	92
<b>3</b>	<b>GÓC VÀ ĐƯỜNG TRÒN</b>	<b>127</b>
1	GÓC Ở TÂM, SỐ ĐO CUNG . . . . .	127
1.1	TÓM TẮT LÝ THUYẾT . . . . .	127
1.2	BÀI TẬP . . . . .	129
2	LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY . . . . .	131
2.1	TÓM TẮT LÝ THUYẾT . . . . .	131
2.2	BÀI TẬP . . . . .	132
3	GÓC NỘI TIẾP . . . . .	136
3.1	TÓM TẮT LÝ THUYẾT . . . . .	136
3.2	BÀI TẬP . . . . .	139
4	GÓC TẠO BỞI TIA TIẾP TUYẾN VÀ DÂY CUNG . . . . .	164
4.1	LÝ THUYẾT . . . . .	164
4.2	BÀI TẬP . . . . .	165
5	GÓC CÓ ĐỈNH BÊN TRONG ĐƯỜNG TRÒN, GÓC CÓ ĐỈNH BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN . . . . .	171
5.1	TÓM TẮT LÝ THUYẾT . . . . .	171
5.2	BÀI TẬP . . . . .	172
6	CUNG CHỨA GÓC . . . . .	179
6.1	TÓM TẮT LÝ THUYẾT . . . . .	179
6.2	BÀI TẬP . . . . .	181
7	TỨ GIÁC NỘI TIẾP . . . . .	186
7.1	TÓM TẮT LÝ THUYẾT . . . . .	186
7.2	BÀI TẬP . . . . .	189
8	ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP. ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP . . . . .	240
8.1	TÓM TẮT LÝ THUYẾT . . . . .	240
8.2	BÀI TẬP . . . . .	241
9	ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN, CUNG TRÒN . . . . .	252
10	DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN, HÌNH QUẠT TRÒN . . . . .	252
10.1	TÓM TẮT LÝ THUYẾT . . . . .	252
10.2	BÀI TẬP . . . . .	253
<b>4</b>	<b>HÌNH TRỤ - HÌNH NÓN - HÌNH CẦU</b>	<b>258</b>
1	HÌNH TRỤ . . . . .	258
1.1	TÓM TẮT LÝ THUYẾT . . . . .	258
1.2	BÀI TẬP . . . . .	259

2	HÌNH NÓN - HÌNH NÓN CỤT . . . . .	261
2.1	TÓM TẮT LÝ THUYẾT . . . . .	261
2.2	BÀI TẬP . . . . .	262
3	HÌNH CẦU . . . . .	265
3.1	TÓM TẮT LÝ THUYẾT . . . . .	265
3.2	BÀI TẬP . . . . .	266
4	ÔN TẬP CHƯƠNG . . . . .	267
5	ÔN TẬP HỌC KÌ II . . . . .	275
<b>5</b>	<b>MỘT SỐ ĐỀ THAM KHẢO</b>	<b>322</b>
1	ĐỀ GIỮA HỌC KÌ 2 . . . . .	322
2	ĐỀ HỌC KÌ 2 . . . . .	353

# Chương 1

## PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

### 1 PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

#### 1.1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

##### 1.1.1 Khái niệm

Phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  là hệ thức dạng

$$ax + by = c \quad (1)$$

trong đó  $a, b, c$  là các số đã biết ( $a \neq 0$  hoặc  $b \neq 0$ ).

**Ví dụ 1.** Các phương trình  $2x - y = 1$ ,  $3x + 4y = 0$ ,  $0x + 2y = 4$ ,  $x + 0y = 5$  là những phương trình bậc nhất hai ẩn.

Trong phương trình (1), nếu giá trị của vế trái tại  $x = x_0$  và  $y = y_0$  bằng vế phải thì cặp số  $(x_0; y_0)$  được gọi là **một nghiệm của phương trình (1)**.

**Ví dụ 2.**  $(3; 5)$  là một nghiệm của phương trình  $2x - y = 1$  (vì  $2 \cdot 3 - 5 = 1$ ).

**Chú ý 1.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , mỗi nghiệm của phương trình (1) được biểu diễn bởi một điểm. Nghiệm  $(x_0; y_0)$  được biểu diễn bởi điểm có tọa độ  $(x_0; y_0)$ .

##### 1.1.2 Tập nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn

Phương trình bậc nhất hai ẩn

$$ax + by = c \quad (1)$$

luôn có vô số nghiệm.

Tập nghiệm của nó được biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  bởi đường thẳng  $ax + by = c$ .

Kí hiệu  $(d) : ax + by = c$ .

- Nếu  $a \neq 0$  và  $b \neq 0$  thì đường thẳng  $(d)$  chính là đồ thị của hàm số bậc nhất  $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ .

Khi đó,  $(x; -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b})$  với  $x \in \mathbb{R}$  hoặc  $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \end{cases}$  gọi là nghiệm tổng quát của phương trình (1).

- Nếu  $a = 0$  và  $b \neq 0$  thì phương trình trở thành  $by = c$  hoặc  $y = \frac{c}{b}$ , và đường thẳng  $(d)$  song song hoặc trùng với trục hoành.

Khi đó,  $(x; \frac{c}{b})$  với  $x \in \mathbb{R}$  hoặc  $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{c}{b} \end{cases}$  gọi là nghiệm tổng quát của phương trình (1).

- Nếu  $a \neq 0$  và  $b = 0$  thì phương trình trở thành  $ax = c$  hoặc  $x = \frac{c}{a}$ , và đường thẳng  $(d)$  song song hoặc trùng với trục tung.

Khi đó,  $(\frac{c}{a}; y)$  với  $y \in \mathbb{R}$  hoặc  $\begin{cases} x = \frac{c}{a} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$  gọi là nghiệm tổng quát của phương trình (1).

**Ví dụ 3.** Hãy viết công thức nghiệm tổng quát và biểu diễn tập nghiệm trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  của các phương trình sau

a)  $2x - y = 1$

b)  $-5x - 0y + 3 = 0$ .

**Lời giải.**

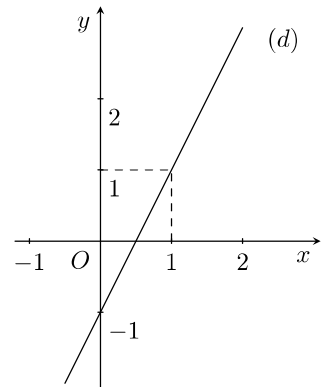
a)

$$2x - y = 1 \Leftrightarrow y = 2x - 1.$$

Phương trình có nghiệm tổng quát là  $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2x - 1 \end{cases}$ .

Tập nghiệm của phương trình được biểu diễn bởi đường thẳng  $(d) : y = 2x - 1$ .

Cho  $x = 0 \Rightarrow y = -1$ ;  $x = 1 \Rightarrow y = 1$ . Đường thẳng  $y = 2x - 1$  đi qua hai điểm  $(0; -1)$  và  $(1; 1)$ .



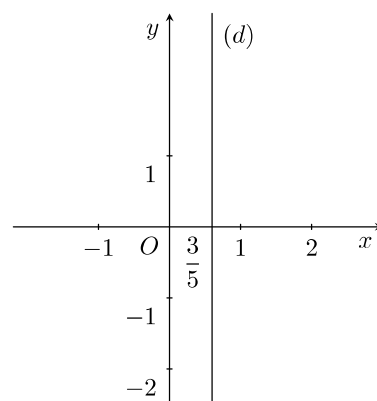
b)

$$-5x - 0y + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}.$$

Phương trình có nghiệm tổng quát là  $\begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$ .

Tập nghiệm của phương trình được biểu diễn bởi đường thẳng  $(d) : x = \frac{3}{5}$ .

Đường thẳng  $x = \frac{3}{5}$  đi qua điểm  $\left(\frac{3}{5}; 0\right)$  và song song với trục tung.



□

## 1.2 BÀI TẬP

**Bài 1.** Trong các cặp số  $(-2; 1)$ ,  $(0; 2)$ ,  $(-1; 0)$  và  $(4; -3)$ , cặp số nào là nghiệm của phương trình?

a)  $5x + 4y = 8$

b)  $3x + 5y = -3$ .

**Lời giải.**

- a)
- Cặp  $(-2; 1)$  không là nghiệm của phương trình  $5x + 4y = 8$  vì  $5 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 \neq 8$ .
  - Cặp  $(0; 2)$  là nghiệm của phương trình  $5x + 4y = 8$  vì  $5 \cdot 0 + 4 \cdot 2 = 8$ .
  - Cặp  $(-1; 0)$  không là nghiệm của phương trình  $5x + 4y = 8$  vì  $5 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 \neq 8$ .
  - Cặp  $(4; -3)$  là nghiệm của phương trình  $5x + 4y = 8$  vì  $5 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) = 8$ .
- b)
- Cặp  $(-2; 1)$  không là nghiệm của phương trình  $3x + 5y = -3$  vì  $3 \cdot (-2) + 5 \cdot 1 \neq -3$ .
  - Cặp  $(0; 2)$  không là nghiệm của phương trình  $3x + 5y = -3$  vì  $3 \cdot 0 + 5 \cdot 2 \neq -3$ .
  - Cặp  $(-1; 0)$  là nghiệm của phương trình  $3x + 5y = -3$  vì  $3 \cdot (-1) + 5 \cdot 0 = -3$ .
  - Cặp  $(4; -3)$  là nghiệm của phương trình  $3x + 5y = -3$  vì  $3 \cdot 4 + 5 \cdot (-3) = -3$ .

□

**Bài 2.** Viết công thức nghiệm tổng quát của các phương trình sau và biểu diễn hình học của tập nghiệm đó.

a)  $3x - y = \frac{1}{2}$

b)  $2y - x = 3$

c)  $\sqrt{2}x = -2$

d)  $-\frac{3}{4}y = -\frac{3}{2}$ .

**Lời giải.**

a)

$$3x - y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = 3x - \frac{1}{2}.$$

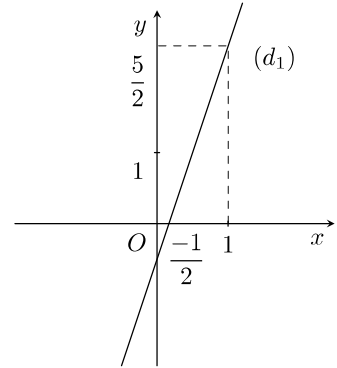
Phương trình có nghiệm tổng quát là 
$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 3x - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Tập nghiệm của phương trình được biểu diễn bởi đường thẳng

$$(d_1) : y = 3x - \frac{1}{2}.$$

Cho  $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$ ;  $x = 1 \Rightarrow y = \frac{5}{2}$ .

Đường thẳng  $y = 3x - \frac{1}{2}$  đi qua hai điểm  $(0; -\frac{1}{2})$  và  $(1; \frac{5}{2})$ .



b)

$$2y - x = 3 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$

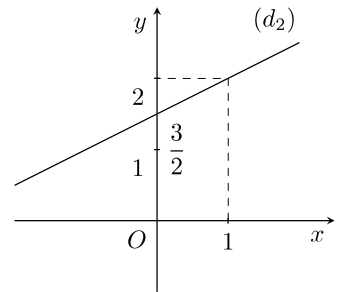
Phương trình có nghiệm tổng quát là 
$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \end{cases}$$

Tập nghiệm của phương trình được biểu diễn bởi đường thẳng

$$(d_2) : y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$

Cho  $x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$ ;  $x = 1 \Rightarrow y = 2$ .

Đường thẳng  $y = 2x - 1$  đi qua hai điểm  $(0; \frac{3}{2})$  và  $(1; 2)$ .



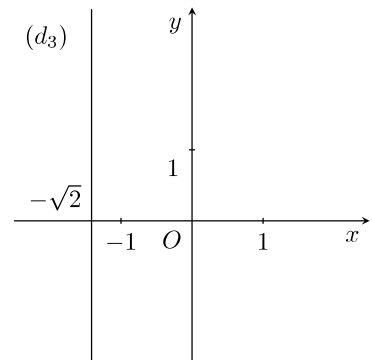
c)

$$\sqrt{2}x = -2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}.$$

Phương trình có nghiệm tổng quát là 
$$\begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Tập nghiệm của phương trình được biểu diễn bởi đường thẳng  $(d_3) : x = -\sqrt{2}$ .

Đường thẳng  $x = -\sqrt{2}$  đi qua điểm  $(-\sqrt{2}; 0)$  và song song với trục tung.



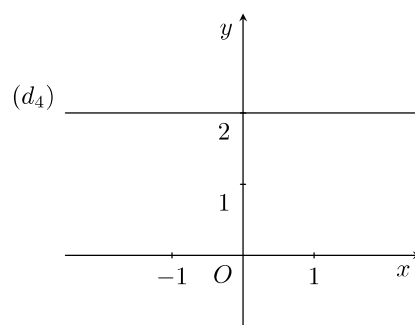
d)

$$-\frac{3}{4}y = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow y = 2.$$

Phương trình có nghiệm tổng quát là  $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2 \end{cases}$ .

Tập nghiệm của phương trình được biểu diễn bởi đường thẳng  $(d_4) : y = 2$ .

Đường thẳng  $y = 2$  đi qua điểm  $(0; 2)$  và song song với trục hoành.



□

**Bài 3.** Xác định hệ số góc và tung độ gốc của đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của các phương trình bậc nhất sau

a)  $3x + 3y = -6$

b)  $\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{2}y = -2$

c)  $\sqrt{3} = 2x - 3y$ .

**Lời giải.**

a)

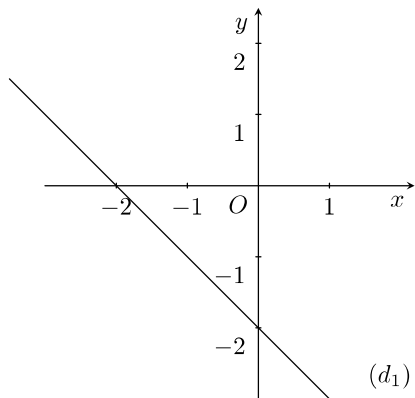
$$3x + 3y = -6 \Leftrightarrow y = -x - 2.$$

Tập nghiệm của phương trình được biểu diễn bởi đường thẳng  $(d_1) : y = -x - 2$ .

Đường thẳng  $y = -x - 2$  có hệ số góc là  $-1$ , tung độ gốc  $-2$ .

Cho  $x = 0 \Rightarrow y = -2$ ;  $y = 0 \Rightarrow x = -2$ .

Đường thẳng  $(d_1)$  đi qua điểm  $(0; -2)$  và  $(-2; 0)$ .



b)

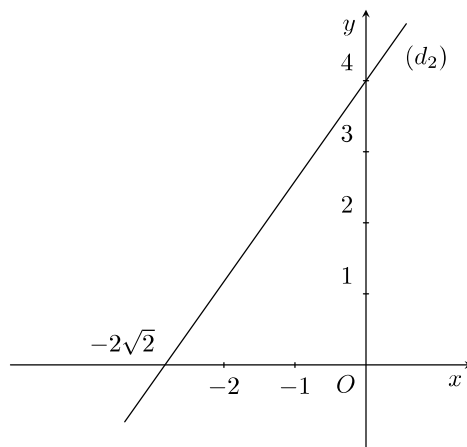
$$\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{2}y = -2 \Leftrightarrow y = \sqrt{2}x + 4.$$

Tập nghiệm của phương trình được biểu diễn bởi đường thẳng  $(d_2) : y = \sqrt{2}x + 4$ .

Đường thẳng  $y = \sqrt{2}x + 4$  có hệ số góc là  $\sqrt{2}$ , tung độ gốc  $4$ .

Cho  $x = 0 \Rightarrow y = 4$ ;  $y = 0 \Rightarrow x = -2\sqrt{2}$ .

Đường thẳng  $(d_2)$  đi qua điểm  $(0; 4)$  và  $(-2\sqrt{2}; 0)$ .





c)

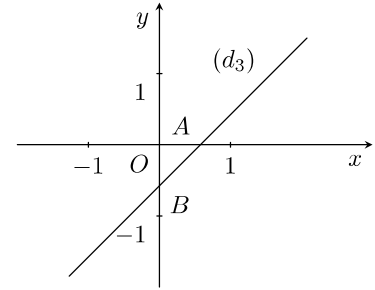
$$\sqrt{3} = 2x - 3y \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Tập nghiệm của phương trình được biểu diễn bởi đường thẳng  $(d_3) : y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}}.$

Đường thẳng  $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}}$  có hệ số góc là  $\frac{2}{3}$ , tung độ góc  $-\frac{1}{\sqrt{3}}.$

$$\text{Cho } x = 0 \Rightarrow y = \frac{-\sqrt{3}}{3}; y = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Đường thẳng  $(d_3)$  đi qua điểm  $B \left(0; \frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$  và  $A \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right).$



□

**Bài 4.** Cho hai phương trình  $x + 2y = 4$  và  $x - y = 1$ . Vẽ hai đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của hai phương trình đó trên cùng một mặt phẳng tọa độ. Xác định tọa độ giao điểm của hai đường thẳng đó bằng đồ thị và cho biết nó là nghiệm của phương trình nào?

**Lời giải.**

- $x + 2y = 4 \Leftrightarrow y = \frac{-1}{2}x + 2.$

Tập nghiệm của phương trình  $x + 2y = 4$  là đường thẳng  $(m) : y = \frac{-1}{2}x + 2.$

Cho  $x = 0 \Rightarrow y = 2; y = 0 \Rightarrow x = 4.$

Đường thẳng  $(m)$  đi qua hai điểm  $(0; 2)$  và  $(4; 0).$

- $x - y = 1 \Leftrightarrow y = x - 1.$

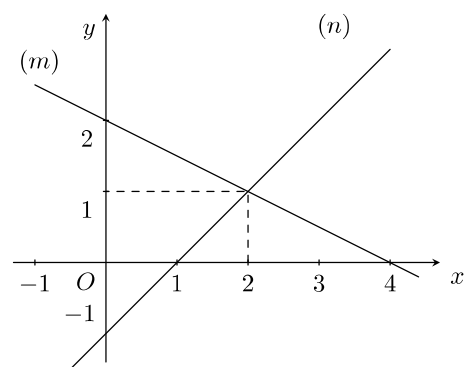
Tập nghiệm của phương trình  $x - y = 1$  là đường thẳng  $(n) : y = x - 1.$

Cho  $x = 0 \Rightarrow y = -1; y = 0 \Rightarrow x = 1.$

Đường thẳng  $(n)$  đi qua hai điểm  $(0; -1)$  và  $(1; 0).$

- 

Hai đường thẳng  $(m)$  và  $(n)$  cắt nhau tại điểm  $(2; 1)$ . Tọa độ  $(2; 1)$  là nghiệm của các phương trình  $x + 2y = 4$  và  $x - y = 1.$



□

**Bài 5.** Định  $a$  để các cặp số sau là nghiệm của phương trình  $3x - y = -5$

- a)  $(a; -2a)$   
 b)  $\left(-\frac{1}{a}; \frac{1}{a}\right)$   
 c)  $\left(a\sqrt{2}; \frac{1}{2}\right)$ .

**Lời giải.**

a) Cặp  $(a; -2a)$  là nghiệm của phương trình  $3x - y = -5 \Rightarrow 3a + 2a = -5 \Rightarrow a = -1$ .

Vậy với  $a = -1$  thì cặp số trên là nghiệm của phương trình  $3x - y = -5$ .

b) Cặp  $\left(-\frac{1}{a}; \frac{1}{a}\right)$  là nghiệm của phương trình  $3x - y = -5$

$$\Rightarrow 3 \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) - \frac{1}{a} = -5 \Rightarrow \frac{-4}{a} = -5 \Rightarrow a = \frac{5}{4}.$$

Vậy với  $a = \frac{5}{4}$  thì cặp số trên là nghiệm của phương trình  $3x - y = -5$ .

c) Cặp  $\left(a\sqrt{2}; \frac{1}{2}\right)$  là nghiệm của phương trình  $3x - y = -5$

$$\Rightarrow 3 \cdot a\sqrt{2} - \frac{1}{2} = -5 \Rightarrow 3 \cdot a\sqrt{2} = \frac{-9}{2} \Rightarrow a = \frac{-3\sqrt{2}}{4}.$$

Vậy với  $a = \frac{-3\sqrt{2}}{4}$  thì cặp số trên là nghiệm của phương trình  $3x - y = -5$ .

□

**Bài 6.** Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau

- a)  $x + 3y = 2$   
 b)  $4x - 5y = 24$   
 c)  $5x + 7y = 9$ .

**Lời giải.**

a)  $x + 3y = 2 \Leftrightarrow y = \frac{-x + 2}{3}.$

Để  $y$  nguyên thì  $-x + 2 : 3 \Rightarrow -x + 2 = 3m$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ) hay  $x = 2 - 3m$ . Khi đó  $y = \frac{3m}{3} = m$ .

Vậy phương trình có nghiệm nguyên là  $\begin{cases} x = 2 - 3m \\ y = m \end{cases}$  với  $m$  là số nguyên.

b)  $4x - 5y = 24 \Leftrightarrow y = \frac{4x - 24}{5}.$

Để  $y$  nguyên thì  $4x - 24 : 5 \Rightarrow x - 6 : 5$  (do 4, 5 là các số nguyên tố cùng nhau)

$$\Rightarrow x - 6 = 5k$$
 ( $k \in \mathbb{Z}$ ) hay  $x = 5k + 6$ . Khi đó  $y = \frac{4 \cdot 5k}{5} = 4k$ .

Vậy phương trình có nghiệm nguyên là  $\begin{cases} x = 5k + 6 \\ y = 4k \end{cases}$  với  $k$  là số nguyên.