CHƯƠNG II

HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

BÀI 1. LŨY THỪA

I LÝ THUYẾT.

1. Lũy thừa với số mũ nguyên

- **Lũy thừa với số mũ nguyên dương:** Cho $a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó

$$a^n = a.a...a \text{ (} n \text{ thừa số } a\text{)}.$$

- **Lũy thừa với số mũ nguyên âm, lũy thừa với số mũ 0:** Cho $a \neq 0$. Khi đó

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n};\ a^0 = 1.$$

- Lũy thừa với số mũ nguyên có các tính chất tương tự tính chất của lũy thừa với số mũ nguyên dương.
- 0^0 và 0^{-n} không có nghĩa.

2. Căn bậc n.

- Cho số thực b và số nguyên dương $n \geq 2$.

- Số a được gọi là căn bậc n của số b nếu $a^n = b$.

- Khi n lẻ, $b \in \mathbb{R}$: Có duy nhất một căn bậc n của b, ký hiệu là $\sqrt[n]{b}$.

- Khi n chẵn và:

+ $b < 0$: Không tồn tại căn bậc n của b.

+ $b = 0$: Có một căn bậc n của b là $\sqrt[n]{0} = 0$.

+ $b > 0$: Có hai căn bậc n của b kí hiệu là $\sqrt[n]{b}$ và $-\sqrt[n]{b}$.

3. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ

Cho số thực $a > 0$ và số hữu tỉ $r = \frac{m}{n}$, trong đó $m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$. Khi đó

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Một số tính chất của căn bậc n

Với $a, b \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

- $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|, \forall a$
- $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a, \forall a$
- $\sqrt[2n]{ab} = \sqrt[2n]{|a|} \cdot \sqrt[2n]{|b|}, \forall ab \geq 0$

- $\sqrt[2n+1]{ab} = \sqrt[2n+1]{a} \cdot \sqrt[2n+1]{b}, \forall a, b$
- $\sqrt[2n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[2n]{|a|}}{\sqrt[2n]{|b|}}, \forall ab \geq 0, b \neq 0$
- $\sqrt[2n+1]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[2n+1]{a}}{\sqrt[2n+1]{b}}, \forall a, \forall b \neq 0$
- $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m, \forall a > 0$, n nguyên dương, m nguyên
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}, \forall a \geq 0$, n, m nguyên dương
- Nếu $\dfrac{p}{n} = \dfrac{q}{m}$ thì $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q}, \forall a > 0, m, n$ nguyên dương p, q nguyên

  Đặc biệt: $\sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^m}$

4. Lũy thừa với số mũ vô tỉ: Cho số thực $a > 0$, α là một số vô tỉ và (r_n) là một dãy số hữu tỉ sao cho

$\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = \alpha$. Khi đó $a^\alpha = \lim\limits_{n \to +\infty} a^{r_n}$.

5. Các tính chất

- Cho hai số dương a, b và các số α, $\beta \in \mathbb{R}$. Khi đó:

$$a^\alpha . a^\beta = a^{\alpha+\beta}; \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta};$$

$$(ab)^\alpha = a^\alpha . b^\alpha; \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha};$$

$$\left(a^\alpha\right)^\beta = \left(a^\beta\right)^\alpha = a^{\alpha.\beta}.$$

- Nếu $a > 1$ thì $a^\alpha > a^\beta$ khi và chỉ khi $\alpha > \beta$.

  Nếu $0 < a < 1$ thì $a^\alpha > a^\beta$ khi và chỉ khi $\alpha < \beta$.

II HỆ THỐNG BÀI TẬP.

DẠNG 1: TÍNH TOÁN

Câu 1

Tính giá trị biểu thức $\left(5^{-\frac{2}{3}}\right)^{-3} + \left((0,2)^{\frac{3}{5}}\right)^{-5}$.

Câu 2

Tính giá trị biểu thức $81^{-0.75} + \left(\dfrac{1}{625}\right)^{-\frac{1}{4}} - \left(\dfrac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}}$.

Câu 3

Tính giá trị biểu thức $\sqrt{\sqrt{5}.\left(\sqrt[4]{\sqrt{5}}:\sqrt{\sqrt[5]{5}}\right)^{10}}$.

Câu 4

Tính giá trị biểu thức $\sqrt[3]{\frac{2}{5}.\sqrt[7]{\frac{2}{5}.\sqrt[3]{\frac{2}{5}}}}.\left(\frac{2}{5}\right)$.

Câu 5

Cho a, b là 2 số thực khác 0. Biết $\left(\frac{1}{125}\right)^{a^2+4ab}=\left(\sqrt[3]{625}\right)^{3a^2-10ab}$. Tính tỉ số $\frac{a}{b}$.

Câu 6

Tích $(2017)!\left(1+\frac{1}{1}\right)^1\left(1+\frac{1}{2}\right)^2...\left(1+\frac{1}{2017}\right)^{2017}$ được viết dưới dạng a^b, khi đó $(a,\ b)$ là bộ số nào ?

Câu 7

Cho biểu thức $f(x)=\frac{1}{2018^x+\sqrt{2018}}$. Tính tổng sau

$$S=\sqrt{2018}\left[f(-2017)+f(-2016)+...+f(0)+f(1)+...+f(2018)\right].$$

Câu 8

Có tất cả bao nhiêu bộ ba số thực (x,y,z) thỏa mãn đồng thời các điều kiện dưới đây

$2^{\sqrt[3]{x^2}}.4^{\sqrt[3]{y^2}}.16^{\sqrt[3]{z^2}}=128$ và $\left(xy^2+z^4\right)^2=4+\left(xy^2-z^4\right)^2$.

DẠNG 2:RÚT GỌN

Câu 1

Cho số thực dương a. Hãy rút gọn biểu thức $P=\dfrac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}}+a^{-\frac{1}{4}}\right)}$.

Câu 2

Cho số thực dương x. Rút gọn biểu thức: $T=\left(\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)$.

Câu 3

Cho các số thực dương a và b. Hãy rút gọn biểu thức: $P=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b}+b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}-\sqrt[3]{ab}$.

Câu 4

Rút gọn biểu thức $P=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x...\sqrt{x}}}}$ với n dấu căn và x là số thực dương.

Câu 5

Rút gọn biểu thức sau với $a>0,\ b>0,\ a\neq b$

$$P=\left[\frac{\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}-\frac{a+b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}\right].\left(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}\right)^{-1}+\sqrt[6]{a}.$$

DẠNG 3: SO SÁNH CÁC LŨY THỪA

Câu 1

So sánh các số: a. $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2019}$ và $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2020}$ b. π^{1015} và $3,14^{1015}$.

Câu 2

So sánh các số: a. 2^{1200} và 3^{900} b. $\left(\sqrt{7}\right)^{85}$ và 3^{-150}.

Câu 3

So sánh các số : a. $\sqrt[3]{15}$ và $\sqrt[4]{20}$ b. $\sqrt[3]{7}+\sqrt{15}$ và $\sqrt{10}+\sqrt[3]{28}$.

Câu 4

Có thể kết luận gì về số a nếu: a. $(2-a)^{\frac{3}{4}}>(2-a)^2$ b. $(1-a)^{-\frac{1}{3}}>(1-a)^{-\frac{1}{2}}$.

Câu 5

Cho $U=2.2019^{2020}$, $V=2019^{2020}$, $\text{W}=2018.2019^{2019}$, $X=5.2019^{2019}$ và $Y=2019^{2019}$. Trong các số sau đây, số nào bé nhất $X-Y$; $U-V$; $V-\text{W}$; $\text{W}-X$?

Câu 6

So sánh hai số $1^1+2^2+3^3+...+1000^{1000}$ và $2^{2^{2^{2^2}}}$.

DẠNG 4: ĐIỀU KIỆN CHO CÁC BIỂU THỨC CHỨA LŨY THỪA

Câu 1

[Mức độ 1] Tìm x để biểu thức $P(x)=(2x-1)^{-\frac{5}{3}}$ có nghĩa.

Câu 2

[Mức độ 1] Tìm x để biểu thức $P(x)=\left(-x^2+6x-8\right)^{\sqrt{2}}$ có nghĩa.

Câu 3

[Mức độ 1] Tìm x để biểu thức $P(x)=\left(9x^2-1\right)^{\frac{1}{5}}$ có nghĩa.

Câu 4

[Mức độ 2] Tìm x để biểu thức $P(x)=\left(x^2-5x+6\right)^{-2019}$ có nghĩa.

Câu 5

[Mức độ 1] Tìm x để biểu thức $P(x)=\left(x^2-3x+2\right)^{\frac{1}{3}}$ có nghĩa.

Câu 6

[Mức độ 2] Tìm điều kiện của x để biểu thức $P(x)=\left(x^3-3x^2+2x\right)^{\sqrt{2}}$ có nghĩa.

Câu 7

[Mức độ 2] Tìm điều kiện của x để biểu thức $P(x)=(x+3)^{\frac{3}{2}}-\sqrt[4]{5-x}$ có nghĩa.

Câu 8

[Mức độ 2] Tìm x để biểu thức $P(x)=\left(\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}\right)^3$ có nghĩa.

Câu 9

[Mức độ 2] Tìm x để biểu thức $P(x)=\left(\sqrt{x-1}+2018\right)^{-\frac{5}{2}}$ có nghĩa.

Câu 10

[Mức độ 2] Tìm x để biểu thức $P(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-3x+2}{3-x}+(2x-5)^{\sqrt{7}+1}-3x-11}$ có nghĩa.

DẠNG 5: CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC, BẤT ĐẲNG THỨC

Câu 1

[Mức độ 1] Chứng minh rằng $x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x}=\sqrt{x}$ với $x>0$.

Câu 2

[Mức độ 1] Chứng minh rằng $\left(a^{\frac{2}{3}}+1\right)\left(a^{\frac{4}{9}}+a^{\frac{2}{9}}+1\right)\left(a^{\frac{2}{9}}-1\right)=a^{\frac{4}{3}}-1$ với a là số thực dương

Câu 3

[Mức độ 2] Cho biểu thức $P=\sqrt{x\sqrt[3]{x^2\sqrt[k]{x^3}}}$ $(x>0)$. Chứng minh luôn tồn tại số tự nhiên k sao cho biểu thức $P=x^{\frac{23}{24}}$.

Câu 4

[Mức độ 2] Chứng minh $\dfrac{a^{\sqrt{3}+1}.a^{2-\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}-a^5=0$ với $a>0$.

Câu 5

[Mức độ 2] Chứng minh $\sqrt{2.\sqrt[3]{2.\sqrt[4]{2}}}=\sqrt[24]{2^5}.\dfrac{1}{\sqrt{2^{-1}}}$.

Câu 6

[Mức độ 2] Chứng minh rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào b

$$B=\left(1-2\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{b}{a}\right):\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^2\ (a>0,b>0)$$

Câu 7

[Mức độ 2] Chứng minh rằng $a^{-2\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{a^{-\sqrt{2}-1}}\right)^{\sqrt{2}+1}=a^3$ với $a>0$.

Câu 8

[Mức độ 3] Chứng minh $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}-\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}=-\sqrt[4]{b}$, với $a>0,\ b>0, a\neq b$.

Câu 9

[Mức độ 3] Cho hàm số $f\left(a\right)=\dfrac{a^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{a^{-2}}-\sqrt[3]{a}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(\sqrt[8]{a^{3}}-\sqrt[8]{a^{-1}}\right)}$, với $a>0,\ a\neq 1$.

Chứng minh rằng $f\left(2019^{2020}\right)=-1-2019^{1010}$.

Câu 10

[Mức độ 3] Cho $P=\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}$ và $Q=2\sqrt{\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\right)^3}$, với x,y, là các số thực khác 0. Chứng minh rằng $P<Q$.

Câu 11

[Mức độ 3] Chứng minh đẳng thức $\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y}+\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}y}\right).\dfrac{x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x+y}-\dfrac{2y}{x-y}=2$

với $x>0,y>0,x\neq y$.

Câu 12

[Mức độ 2] Chứng minh $\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(1-2\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}\right)^{-1}-x=0$ với $x>0,\ y>0,x\neq y$.

Câu 13

[Mức độ 4] Cho biểu thức $f(x)=5^{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}}$, (với $x>0$). Biết rằng: $f(1).f(2)...f(2020)=5^{\frac{m}{n}}$ với m,n là các số nguyên dương và phân số $\dfrac{m}{n}$ tối giản.

Chứng minh rằng $m-n^2=-1$.

Câu 14

[Mức độ 4] Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a^2=b^2+c^2$. Chứng minh rằng:

a) $a^m>b^m+c^m$ nếu $m>2$.

b) $a^m<b^m+c^m$ nếu $m<2$.

BÀI 2. HÀM SỐ LŨY THỪA

I LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa

Hàm số lũy thừa là hàm số có dạng $y = x^{\alpha}$, trong đó α là một hằng số tùy ý.
Từ các định nghĩa về lũy thừa ta thấy:

+) Hàm số $y = x^{\alpha}$, với α nguyên dương, xác định $\forall x \in \mathbb{R}$.

+) Hàm số $y = x^{\alpha}$, với α nguyên âm hoặc $\alpha = 0$, xác định $\forall x \neq 0$.

+) Hàm số $y = x^{\alpha}$, với α không nguyên, xác định $\forall x > 0$.

Chú ý:
+) Hàm số lũy thừa liên tục trên tập xác định của nó.

+) Hàm số $y = x^{\frac{1}{n}}$ không đồng nhất với hàm số $y = \sqrt[n]{x}$, $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$.

2. Đạo hàm của hàm số lũy thừa:

+) Hàm số lũy thừa $y = x^{\alpha}$ (với $\alpha \in \mathbb{R}$) có đạo hàm tại mọi điểm $x > 0$ và $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha.x^{\alpha-1}$.

+) Nếu hàm số $u = u(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm trên K thì hàm số $y = u^{\alpha}(x)$ cũng có đạo hàm trên K và $\left[u^{\alpha}(x)\right]' = \alpha.u^{\alpha-1}(x).u'(x)$.

Chú ý:

+) Đạo hàm của hàm số căn bậc n: $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ ($\forall x > 0$ nếu n chẵn và $\forall x \neq 0$ nếu n lẻ).

+) Nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm trên K và thỏa mãn điều kiện $u(x) > 0, \forall x \in K$ khi n chẵn, $u(x) \neq 0, \forall x \in K$ khi n lẻ thì $\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)}{n\sqrt[n]{u^{n-1}(x)}}$, $\left(\forall x \in K\right)$.

3. Sự biến thiên và đồ thị của hàm số lũy thừa:

Tập xác định của hàm số lũy thừa $y = x^{\alpha}$ luôn chứa khoảng $(0;+\infty)$ với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$. Trong trường hợp tổng quát, ta khảo sát hàm số $y = x^{\alpha}$ trên khoảng này.

Đồ thị của hàm số lũy thừa $y = x^{\alpha}$ luôn đi qua điểm $I(1;1)$.

<table>
<tr><td>$y = x^{\alpha}, \alpha > 0.$</td><td>$y = x^{\alpha}, \alpha < 0.$</td></tr>
<tr><td>
1. Tập xác định: $\left(0;+\infty\right)$.
2. Sự biến thiên
$y' = \alpha.x^{\alpha-1} > 0 \quad \forall x > 0.$
Giới hạn đặc biệt:
$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha} = 0, \quad \lim\limits_{x\to +\infty} x^{\alpha} = +\infty.$
Tiệm cận: không có.
3. Bảng biến thiên.
<table>
<tr><td>x</td><td>0 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>y’</td><td>+</td></tr>
<tr><td>y</td><td>0 ↗ $+\infty$</td></tr>
</table>
</td><td>
1. Tập xác định: $\left(0;+\infty\right)$.
2. Sự biến thiên
$y' = \alpha.x^{\alpha-1} < 0 \quad \forall x > 0.$
Giới hạn đặc biệt:
$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha} = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to +\infty} x^{\alpha} = 0.$
Tiệm cận:
Ox là tiệm cận ngang.
Oy là tiệm cận đứng.
3. Bảng biến thiên.
<table>
<tr><td>x</td><td>0 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>y’</td><td>−</td></tr>
<tr><td>y</td><td>$+\infty$ ↘ 0</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Đồ thị của hàm số.