CHUYÊN ĐỀ .CHỮ SỐ TẬN CÙNG

A.TRỌNG TÂM CẦN ĐẠT

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tìm 1 chữ số tận cùng

Tính chất 1:

a) Các số có chữ số tận cùng là $0,\ 1,\ 5,\ 6$ khi nâng lên lũy thừa bậc bất kì thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.

b) Các số có chữ số tận cùng là $4,\ 9$ khi nâng lên lũy thừa bậc lẻ thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.

c) Các số có chữ số tận cùng là $3,\ 7,\ 9$ khi nâng lên lũy thừa bậc $4n\quad n\in\mathbb{N}$ thì chữ số tận cùng là 1.

d) Các số có chữ số tận cùng là $2,\ 4,\ 8$ khi nâng lên lũy thừa bậc $4n\quad n\in\mathbb{N}$ thì chữ số tận cùng là 6.

Chú ý: Muốn tìm chữ số tận cùng của số tự nhiên $x=a^m$, trước hết ta xác định chữ số tận cùng của a:

- Nếu chữ số tận cùng của a là $0,\ 1,\ 5,\ 6$ thì x cũng có chữ số tận cùng là $0,\ 1,\ 5,\ 6$.

- Nếu chữ số tận cùng của a là $3,\ 7,\ 9$:

Phân tích: $a^m=a^{4n+r}=a^{4n}.a^r$ với $r=0, 1, 2, 3$

Từ tính chất $1c \Rightarrow$ chữ số tận cùng của x chính là chữ số tận cùng của a^r.

- Nếu chữ số tận cùng của a là $2,\ 4,\ 8$: cũng như trường hợp trên

Từ tính chất $1d \Rightarrow$ chữ số tận cùng của x chính là chữ số tận cùng của $6a^r$.

Tính chất 2:

Một số tự nhiên bất kì, khi nâng lên lũy thừa bậc $4n+1\quad n\in\mathbb{N}$ thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.

Chữ số tận cùng của một tổng các lũy thừa được xác định bằng cách tính tổng các chữ số tận cùng của từng lũy thừa trong tổng.

Tính chất 3:

a) Số có chữ số tận cùng là 3 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n+3$ sẽ có chữ số tận cùng là 7; số có chữ số tận cùng là 7 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n+3$ sẽ có chữ số tận cùng là 3.

b) Số có chữ số tận cùng là 2 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n+3$ sẽ có chữ số tận cùng là 8; số có chữ số tận cùng là 8 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n+3$ sẽ có chữ số tận cùng là 2.

c) Các số có chữ số tận cùng là $0,\ 1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 9$ khi nâng lên lũy thừa bậc $4n+3$ sẽ không thay đổi chữ số tận cùng.

Tính chất 4:

Nếu $a \in \mathbb{N}$ và $(a, 5) = 1$ thì $a^{100} - 1$ chia hết cho 125.

Chứng minh:

Do $a^{20} - 1$ chia hết cho 25 nên $a^{20},\ a^{40},\ a^{60},\ a^{80}$ khi chia cho 25 có cùng số dư là 1

$\Rightarrow a^{20} + a^{40} + a^{60} + a^{80} + 1$ chia hết cho 5.

Vậy $a^{100} - 1 = (a^{20} - 1)(a^{80} + a^{60} + a^{40} + a^{20} + 1)$ chia hết cho 125.

*** Phương pháp dùng cấu tạo số để tìm chữ số tận cùng của số $A = n^k$ với $n, k \in N$.**

- Giả sử $A = 10q + r$. Khi đó, $A^k = (10q + r)^k = 10^t p + r^k$ với $r \in \mathbb{N}; 0 \le r \le 9$

Suy ra, chữ số cuối cùng của A chính là chữ số cuối cùng của số r^k.

- Nếu $A = 100a + \overline{bc} = \overline{abc}$ thì $\overline{bc}$ là hai chữ số cuối cùng của A.

- Nếu $A = 1000a + \overline{bcd} = \overline{abcd}$ thì $\overline{bcd}$ là ba chữ số cuối cùng của A.

- Nếu $A = 10^m.a_m + \overline{a_{m-1}...a_0} = \overline{a_m...a_1a_0}$ thì $\overline{a_{m-1}...a_0}$ là m chữ số cuối cùng của A.

2. Tìm hai chữ số tận cùng

Việc tìm hai chữ số tận cùng của số tự nhiên x chính là việc tìm số dư của phép chia x cho 100.

Phương pháp tìm hai chữ số tận cùng của số tự nhiên $x = a^n$:

Trước hết, ta có nhận xét sau:

$2^{20} \equiv 76 \pmod{100}$

$3^{20} \equiv 01 \pmod{100}$

$6^5 \equiv 76 \mod 100$

$7^4 \equiv 01 \mod 100$

Mà: $76^n \equiv 76 \mod 100$ với $n \geq 1$,

$5^n \equiv 25 \mod 100$ với $n \geq 2$.

Suy ra kết quả sau với $k \in \mathbb{N}^*$:

$a^{20k} \equiv 00 \mod 100$ nếu $a \equiv 0 \mod 10$,

$a^{20k} \equiv 01 \mod 100$ nếu $a \equiv 1; 3; 7; 9 \mod 10$,

$a^{20k} \equiv 25 \mod 100$ nếu $a \equiv 5 \mod 10$,

$a^{20k} \equiv 76 \mod 100$ nếu $a \equiv 2; 4; 6; 8 \mod 100$.

Vậy để tìm hai chữ số tận cùng của a^n ta lấy số mũ n chia cho 20.

Dạng 1.

- Các số có tận cùng bằng $01; 25; 76$ nâng lên luỹ thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng $01; 25; 76$

- Các số 3^{20} (hoặc 81^5); 7^4; 51^2 ; 99^2 có tận cùng bằng 01.

- Các số 2^{20}; 6^5; 18^4; 24^2; 68^4; 74^2 có tận cùng bằng 76.

- Số 26^n $n > 1$ có tận cùng bằng 76.

- Các số có chữ số tận cùng là $01;25;76$ khi nâng lên lũy thừa bậc bất kì khác 0 thì hai chữ số tận cùng vẫn không thay đổi. (1)

- Các số $3^{20};7^4;9^{10};51^2;81^5;99^2$ có chữ số tận cùng là 01. (2)

- Các số $4^{10};6^5;18^4;24^2;68^4;74^2$ có chữ số tận cùng là 76. (3)

- Số 26^n $(n > 1)$ có chữ số tận cùng là 76. (4)

Như vậy, muốn tìm chữ số tận cùng của số tự nhiên $x = a^m$, trước hết ta xác định chữ số tận cùng của a.

Dạng 2. CHÚ Ý:

- 4^{10} có 2 chữ số tận cùng là 76.

- 5^2 có 2 chữ số tận cùng là 25.

- 8^{20} có 2 chữ số tận cùng là 76.

- 9^{10} có 2 chữ số tận cùng là 01.

3. Tìm ba chữ số tận cùng trở lên

Việc tìm ba chữ số tận cùng của số tự nhiên x chính là việc tìm số dư của phép chia x cho 1000.

Giả sử $n = 100k + r$ với $0 \leq r < 100$, khi đó: $a^n = a^{100k+r} = \left(a^{100}\right)^k .a^r$.

Giả sử: $a \equiv x \pmod{10}$, $x \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$

Ta có: $a^{100} = \left(10k + x\right)^{100} \equiv x^{100} \pmod{1000}$

Vậy 3 chữ số tận cùng của a^{100} cũng chính là 3 chữ số tận cùng của x^{100}.

Dùng quy nạp với mọi $n \geq 1$, ta có:

$625^n \equiv 625 \pmod{1000}$,

$376^n \equiv 376 \pmod{1000}$.

- Nếu $x = 0$ thì $x^{100} \equiv 000 \pmod{1000}$

- Nếu $x = 5$ thì $x^4 = 5^4 = 625 \Rightarrow x^{100} = \left(5^4\right)^{25} \equiv 625 \pmod{10^3}$

- Nếu $x = 1; 3; 7; 9$ ta có tương ứng:

$x^4 = 1; 81; 2401; 6561 \equiv 1 \pmod{40} \Rightarrow x^{100} = \left(40k + 1\right)^{25} \equiv 1 \pmod{10^3}$

- Nếu $x = 2; 4; 6; 8$ thì $x^{100} \,\vdots\, 2^{100} \,\vdots\, 8$.

Ta có: $\left(x, 125\right) = 1$ nên $x^{100} \equiv 1 \pmod{125}$ (Định lí Euler).

Giả sử 3 chữ số tận cùng của x^{100} là $\overline{abc}$ ta có:

$x^{100} = 1000k + \overline{abc} \Rightarrow \overline{abc} \,\vdots\, 8$ và $\overline{abc} \equiv 1 \pmod{125}$

Trong các số $1; 126; 376; 501; 626; 751; 876$ (các số có 3 chữ số chia cho 125 dư 1) chỉ có duy nhất một số chia hết cho 8 là 376. Vậy $x^{100} \equiv 376 \pmod{1000}$.

Do đó ta có kết quả sau:

$a^{100k} \equiv 000 \pmod{10^3}$ nếu $a \equiv 0 \pmod{10}$

$a^{100k} \equiv 001 \pmod{10^3}$ nếu $a \equiv 1; 3; 7; 9 \pmod{10}$

$a^{100k} \equiv 625 \mod 10^3$ nếu $a \equiv 5 \mod 10$

$a^{100k} \equiv 376 \mod 10^3$ nếu $a \equiv 2; 4; 6; 8 \mod 10$

Vậy để tìm ba chữ số tận cùng của a^n ta tìm 2 chữ số tận cùng của số mũ n.

Dạng 3. Một số trường hợp cụ thể về 3 chữ số tận cùng

- Các số có tận cùng bằng $001; 376; 625$ nâng lên luỹ thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng $001; 376; 625$.

- Các số có tận cùng bằng 0625 nâng lên luỹ thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 0625.

II. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Tìm 1 chữ số tận cùng

Ví dụ 1.1: Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

$a) 32^{40}$ $b) 2018^{2019}$ $c) 27^{50}$ $d) 2019^{2020}$

Phân tích:

- Ta biết rằng các số tận cùng là $2;4;6;8$ khi nâng lên lũy thừa 4n đều cho tận cùng là 6.

Còn các số tận cùng là $1;3;7;9$ khi nâng lên lũy thừa 4n đều cho tận cùng là 1.

- Để đưa về lũy thừa $4n$ thì em cần viết số mũ dưới dạng công thức của phép chia có dư với số chia là 4.

- Để tìm chữ số tận cùng của mỗi lũy thừa trên ta chỉ cần tìm chữ số tận cùng của hàng đơn vị.

Lời giải

a) Để tìm chữ số tận cùng của 32^{40} ta tìm chữ số tận cùng của 2^{40}

Ta xét 2^{40}, ta có $2^{40} = 2^{4.10} = \overline{...6}$

Vậy 32^{40} có chữ số tận cùng là 6.

b) Để tìm chữ số tận cùng của 2018^{2019} ta tìm chữ số tận cùng của 8^{2019}

Ta xét, ta có $8^{2019} = 8^{4.502} \times 8 = \overline{...6} \times 8 = \overline{...8}$

Vậy 2018^{2019} có tận cùng là 8.

c) Chữ số tận cùng của 27^{50} cũng là chữ số tận cùng của 7^{50}

Ta có $7^{50} = 7^{4.12} \times 7^2 = \overline{...1} \times 49 = \overline{...9}$