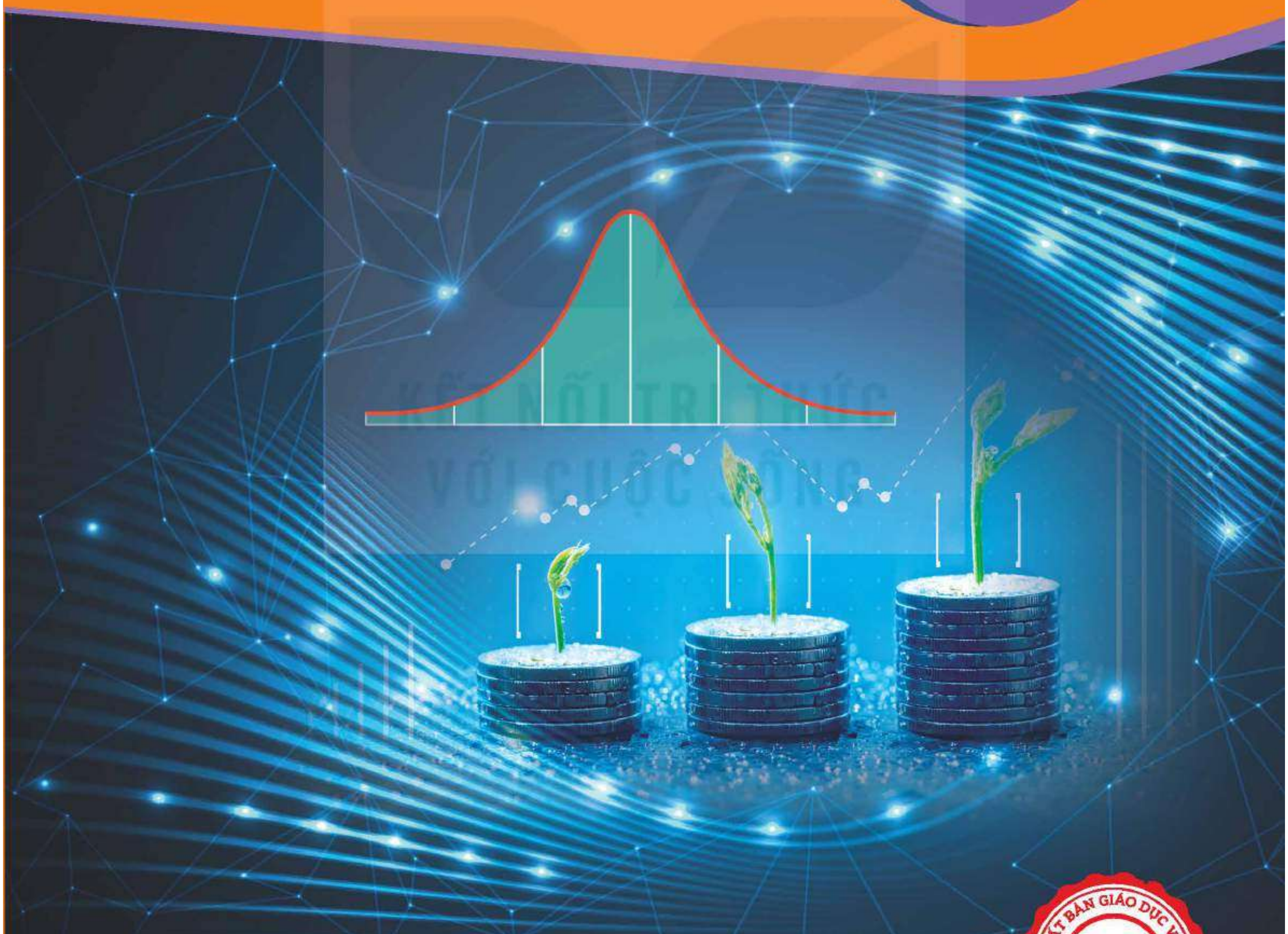
KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

HÀ HUY KHOÁI (Tổng Chủ biên)
CUNG THẾ ANH – ĐẶNG HÙNG THẮNG (đồng Chủ biên)
NGUYỄN ĐẠT ĐĂNG – NGUYỄN THỊ KIM SƠN

CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP
TOÁN 12



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM
BẢN MẪU
Tháng 1 - 2024

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

HỘI ĐỒNG QUỐC GIA THẨM ĐỊNH SÁCH GIÁO KHOA

Môn: Toán – Lớp 12

(Theo Quyết định số 1882/QĐ-BGDĐT ngày 29 tháng 6 năm 2023
của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo)

LÊ MẬU HẢI (Chủ tịch), CAO THỊ HÀ (Phó Chủ tịch)
PHẠM ĐỨC TÀI (Uỷ viên, Thư kí), PHẠM KHẮC BAN – NGUYỄN HẮC HẢI
NGUYỄN DOÃN PHÚ – NGUYỄN CHIẾN THẮNG – NGUYỄN THỊ VĨNH THUYÊN
ĐINH CAO THƯỢNG – PHẠM ĐÌNH TÙNG – VŨ THỊ NHƯ TRANG (Uỷ viên)

HÀ HUY KHOÁI (Tổng Chủ biên)
CUNG THẾ ANH – ĐẶNG HÙNG THẮNG (đồng Chủ biên)
NGUYỄN ĐẠT ĐĂNG – NGUYỄN THỊ KIM SƠN

Chuyên đề học tập

TOÁN

12

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG SÁCH

1. Mỗi bài học đều được thiết kế theo cấu trúc gồm những phần sau đây.

Thuật ngữ: Điểm tên các đối tượng chính của bài học.

Kiến thức, kĩ năng: Giúp em xác định những nội dung kiến thức, kĩ năng chính cần lĩnh hội và rèn luyện trong bài học.

Mở đầu: Đưa ra tình huống làm nảy sinh nhu cầu học tập; nó có thể là một bài toán thực tế đại diện, hay là một đoạn dẫn nhập. Em không cần trả lời ngay các câu hỏi hay yêu cầu được đặt ra ở phần này, mà sẽ giải quyết chúng trong bài học, sau khi đã lĩnh hội được lượng tri thức và kĩ năng cần thiết.

Mục kiến thức: Sau phần mở đầu, bài học được chia thành các mục theo từng chủ đề. Nhìn chung, mỗi đơn vị kiến thức có cấu trúc sau đây:

> **Hình thành kiến thức:** Em cần tích cực tham gia vào các hoạt động (**HĐ**) để chiếm lĩnh tri thức. Các **HĐ** này cho em cơ hội quan sát và trải nghiệm, tính toán và lập luận để đi tới khung kiến thức một cách tự nhiên.
>
> **Ví dụ:** Em có thể học ở đây phương pháp, cách lập luận và tính toán, cách trình bày lời giải bài toán.
>
> **Luyện tập:** Vận dụng kiến thức đã học, tham khảo ví dụ tương ứng, em hãy luyện tập để củng cố kiến thức và rèn luyện kĩ năng.
>
> **Vận dụng:** Trên nền tảng kiến thức và kĩ năng đã được học, em giải quyết các bài toán gắn với thực tế, kết nối tri thức với các lĩnh vực khác nhau trong học tập, khoa học và cuộc sống.

Em có thể bắt gặp một khung chữ nhằm hỗ trợ hoặc bình luận,... cho nội dung tương ứng được đề cập ở bên cạnh.

Ngoài bốn thành phần cơ bản ở trên, trong một đơn vị kiến thức, em còn có thể có cơ hội tham gia vào ***Khám phá***, ***Trải nghiệm***, ***Thảo luận***, trả lời ?, mở rộng hiểu biết cùng ***Em có biết?***,...

Bài tập: Em chủ động thực hiện ngoài giờ trên lớp, tuy vậy, thầy/cô sẽ dành thời lượng nhất định để cùng em điểm qua các bài tập này.

2. Các bảng tra cứu và giải thích thuật ngữ (được đặt ở cuối sách) cung cấp địa chỉ tra cứu và giải thích một số khái niệm, công thức được phát biểu trong sách.

LỜI NÓI ĐẦU

Các em học sinh yêu quý!

Tập sách nhỏ này gồm ba chuyên đề: "Biến ngẫu nhiên rời rạc. Các số đặc trưng của biến ngẫu nhiên rời rạc"; "Ứng dụng toán học để giải quyết một số bài toán tối ưu" và "Ứng dụng toán học trong một số vấn đề liên quan đến tài chính".

Biến ngẫu nhiên là một chủ đề lớn trong Xác suất, tương tự như chủ đề Hàm số trong Giải tích. Chuyên đề thứ nhất giới thiệu một loại biến ngẫu nhiên đơn giản là biến ngẫu nhiên rời rạc và một trường hợp riêng tiêu biểu của nó là biến ngẫu nhiên có phân bố nhị thức. Các em cũng sẽ được thấy một số áp dụng lí thú của biến ngẫu nhiên rời rạc vào thực tiễn như tìm phương án cho năng suất cao, tìm phương án để rủi ro ít nhất.

Chuyên đề "Ứng dụng toán học để giải quyết một số bài toán tối ưu" trình bày hai phương pháp cơ bản để giải một số bài toán tối ưu thường gặp trong thực tiễn và trong kinh tế, đó là phương pháp hình học giải bài toán quy hoạch tuyến tính và phương pháp đạo hàm.

Các kiến thức về tài chính là học vấn thiết yếu của mọi công dân thế kỉ XXI. Chuyên đề "Ứng dụng toán học trong một số vấn đề liên quan đến tài chính" sẽ giúp các em làm quen với việc quản lí tài chính cá nhân, đó là biết cách tính lãi suất của các khoản vay, gửi tiết kiệm hay đầu tư, biết thiết lập kế hoạch tài chính cá nhân cho các nhu cầu dài hạn.

Ba chuyên đề ngắn gọn, nhưng sẽ giúp chúng ta rất nhiều khi tìm kiếm vẻ đẹp của Toán học và những ứng dụng phong phú của nó trong thực tiễn.

Chúc các em học tốt!

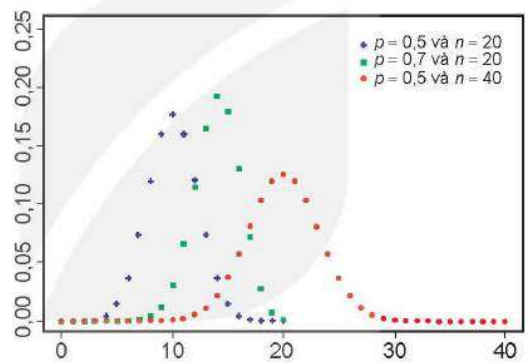
CÁC TÁC GIẢ

MỤC LỤC

CHUYÊN ĐỀ 1
BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC

Chuyên đề này giới thiệu biến ngẫu nhiên rời rạc, công thức Bernoulli (mang tên nhà toán học người Thuỵ Sĩ Jacob Bernoulli) và biến ngẫu nhiên có phân bố nhị thức (gắn với công thức Bernoulli). Chuyên đề cũng nêu ứng dụng của các kiến thức trên vào một số bài toán có nội dung thực tiễn.

Jacob Bernoulli (1655 – 1705)
(Ảnh: wikipedia)



Biến ngẫu nhiên có phân bố nhị thức với tham số p và n

Bài 1 BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC VÀ CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG

THUẬT NGỮ

- Biến ngẫu nhiên rời rạc
- Bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc
- Kì vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên rời rạc

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

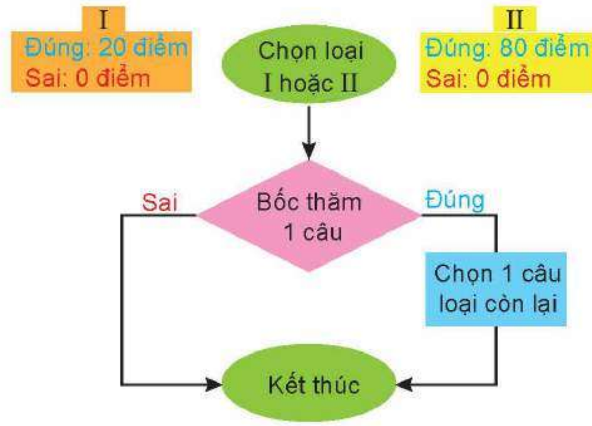
- Nhận biết khái niệm biến ngẫu nhiên rời rạc.
- Biết lập bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc.
- Biết tính kì vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên rời rạc và giải thích ý nghĩa của chúng.

Trong một trò chơi, các câu hỏi gồm hai loại I và II:

- Với câu hỏi loại I: Trả lời đúng được 20 điểm. Trả lời sai không được điểm (0 điểm).
- Với câu hỏi loại II: Trả lời đúng được 80 điểm. Trả lời sai không được điểm (0 điểm).

Ở vòng 1, người chơi được chọn một trong hai loại câu hỏi. Sau khi chọn xong loại câu hỏi, người chơi bốc thăm ngẫu nhiên một câu hỏi trong loại đó. Nếu trả lời sai thì phải dừng cuộc chơi. Nếu trả lời đúng, thí sinh sẽ bước vào vòng 2, bốc ngẫu nhiên một câu hỏi trong loại còn lại. Người chơi trả lời đúng hay sai, cuộc chơi cũng kết thúc tại đây. Giả thiết rằng việc trả lời đúng câu hỏi vòng 1 sẽ không ảnh hưởng đến xác suất trả lời đúng hay sai câu hỏi ở vòng 2.

Bạn Minh tham gia cuộc chơi. Giả sử xác suất để Minh trả lời đúng câu hỏi loại I là 0,8; xác suất để Minh trả lời đúng câu hỏi loại II là 0,6.



Hình 1.1

Hỏi ở vòng 1 Minh nên chọn câu hỏi loại I hay câu hỏi loại II?

1. BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC VÀ BẢNG PHÂN BỐ XÁC SUẤT CỦA NÓ

HĐ1. Hình thành khái niệm biến ngẫu nhiên rời rạc

Gieo một xúc xắc cân đối, đồng chất liên tiếp 6 lần. Gọi X là số lần xúc xắc xuất hiện mặt 6 chấm trong 6 lần gieo liên tiếp đó.

a) Các giá trị có thể của X là gì?

b) Trước khi thực hiện việc gieo xúc xắc đó, ta có khẳng định trước được X sẽ nhận giá trị nào không?

Đại lượng X được gọi là một **biến ngẫu nhiên rời rạc** nếu nó nhận một số hữu hạn các giá trị có thể. Các giá trị đó là các số và không dự đoán được trước khi phép thử được thực hiện.

Ví dụ 1. Tung một đồng xu cân đối, đồng chất liên tiếp 3 lần. Gọi X là số lần đồng xu xuất hiện mặt ngửa.

a) X có là một biến ngẫu nhiên rời rạc hay không?

b) Liệt kê các giá trị có thể của X và tính các xác suất để X nhận các giá trị đó.

Giải

a) Vì X chỉ nhận một số hữu hạn giá trị là 0, 1, 2, 3 và không dự đoán trước được khi tung đồng xu nên X là một biến ngẫu nhiên rời rạc.

b) Các giá trị có thể của biến ngẫu nhiên rời rạc X là một số thuộc tập $A = \{0; 1; 2; 3\}$.

Ta phải tính các xác suất $P(X = 0)$; $P(X = 1)$; $P(X = 2)$; $P(X = 3)$, trong đó:

$P(X = 0)$ là xác suất để không có lần xuất hiện mặt ngửa;

$P(X = 1)$ là xác suất để có đúng 1 lần xuất hiện mặt ngửa;

$P(X = 2)$ là xác suất để có đúng 2 lần xuất hiện mặt ngửa;

$P(X = 3)$ là xác suất để cả ba lần đều xuất hiện mặt ngửa.

Không gian mẫu $\Omega = \{SSN; SNN; NSN; NNN; SSS; SNS; NSS; NNS\}$, $n(\Omega) = 8$.

Biến cố $\{X = 0\}$ là biến cố: "Không có lần nào xuất hiện mặt ngửa".

$\{X = 0\}$ là tập $\{SSS\}$ có 1 phần tử. Vậy $P(X = 0) = \frac{1}{8}$.

Biến cố $\{X = 1\}$ là biến cố: "Có đúng 1 lần xuất hiện mặt ngửa".

$\{X = 1\}$ là tập {SSN; SNS; NSS} có 3 phần tử. Vậy $P(X = 1) = \frac{3}{8}$.

Biến cố $\{X = 2\}$ là biến cố: "Có đúng 2 lần xuất hiện mặt ngửa".

$\{X = 2\}$ là tập {SNN; NSN; NNS} có 3 phần tử. Vậy $P(X = 2) = \frac{3}{8}$.

Biến cố $\{X = 3\}$ là biến cố: "Cả ba lần xuất hiện mặt ngửa".

$\{X = 3\}$ là tập {NNN} có 1 phần tử. Vậy $P(X = 3) = \frac{1}{8}$.

Giả sử X là một biến ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ với các xác suất tương ứng là $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n$, tức là $P\left(X = x_i\right) = p_i \left(i = 1, 2, \dots, n\right)$.

Bảng sau đây được gọi là **bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc** X:

X	x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n
P	p_1	p_2	...	p_{n-1}	p_n

HĐ2. Củng cố khái niệm bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc

Hãy nêu số thích hợp với dấu "?" để hoàn thành bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X trong Ví dụ 1.

X	0	1	2	3
P	?	?	?	?

Trong bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X, ta có:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} + p_n = 1.$$

Ví dụ 2. Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X với bảng phân bố xác suất như sau:

X	1	2	3	4
P	a	a	$3a$	$3a$

Tìm a.

Giải

Ta có $a + a + 3a + 3a = 1$. Suy ra $a = \frac{1}{8}$.

Ví dụ 3. Giả sử số vụ vi phạm Luật Giao thông trên một đoạn đường vào tối thứ Bảy là một biến ngẫu nhiên rời rạc X với bảng phân bố xác suất như sau:

X	0	1	2	3	4	5
P	0,1	0,2	0,3	0,2	0,15	0,05

Tính xác suất để tối thứ Bảy:

a) Xảy ra nhiều nhất 1 vụ vi phạm Luật Giao thông;

b) Xảy ra ít nhất 3 vụ vi phạm Luật Giao thông;

c) Xảy ra ít nhất 2 vụ vi phạm Luật Giao thông.

Giải

a) Gọi A là biến cố: "Xảy ra nhiều nhất 1 vụ vi phạm Luật Giao thông vào tối thứ Bảy". Khi đó, A là hợp của hai biến cố xung khắc: $\{X=0\}$ và $\{X=1\}$. Tức là $A=\{X=0\}\cup\{X=1\}$.

Theo quy tắc cộng xác suất, ta có:

$$P(A)=P(X=0)+P(X=1)=0{,}1+0{,}2=0{,}3.$$

b) Gọi B là biến cố: "Xảy ra ít nhất 3 vụ vi phạm Luật Giao thông vào tối thứ Bảy";

C là biến cố: "Xảy ra 4 hoặc 5 vụ vi phạm Luật Giao thông vào tối thứ Bảy".

Khi đó, B là hợp của hai biến cố xung khắc: biến cố $\{X=3\}$ và biến cố C. Theo quy tắc cộng xác suất, ta có:

$$P(B)=P(X=3)+P(C).$$

Biến cố C là hợp của hai biến cố xung khắc: $\{X=4\}$ và $\{X=5\}$. Theo quy tắc cộng xác suất, ta có:

$$P(C)=P(X=4)+P(X=5).$$

Do đó

$$P(B)=P(X=3)+P(C)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=0{,}2+0{,}15+0{,}05=0{,}4.$$

c) Gọi D là biến cố: "Xảy ra ít nhất 2 vụ vi phạm Luật Giao thông vào tối thứ Bảy". Suy ra D là biến cố đối của biến cố A. Vậy $P(D)=1-P(A)=1-0{,}3=0{,}7$.

Ví dụ 4. Một túi đựng 6 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 viên bi từ trong túi. Gọi X là số viên bi xanh trong 3 viên bi lấy ra. Lập bảng phân bố xác suất của X.

Giải

Các giá trị có thể của X thuộc tập $\{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$.

Tiếp theo, ta cần tính $P(X=0)$, $P(X=1)$, $P(X=2)$, $P(X=3)$.

Số kết quả có thể là $C_{10}^3=120$.

- Tính $P(X=0)$: Biến cố $\{X=0\}$ là: "Lấy được 3 viên bi đỏ".
  Số kết quả thuận lợi cho biến cố $\{X=0\}$ là $C_6^3=20$. Do đó $P(X=0)=\dfrac{20}{120}=\dfrac{1}{6}$.
- Tính $P(X=1)$: Biến cố $\{X=1\}$ là: "Lấy được 1 viên bi xanh và 2 viên bi đỏ".
  Có $C_4^1=4$ cách chọn 1 viên bi xanh trong 4 viên bi xanh và $C_6^2=15$ cách chọn 2 viên bi đỏ trong 6 viên bi đỏ.
  Theo quy tắc nhân ta có $4\cdot 15=60$ cách chọn 1 viên bi xanh và 2 viên bi đỏ.
  Số kết quả thuận lợi cho biến cố $\{X=1\}$ là 60. Do đó $P(X=1)=\dfrac{60}{120}=\dfrac{1}{2}$.
- Tính $P(X=2)$: Biến cố $\{X=2\}$ là: "Lấy được 2 viên bi xanh và 1 viên bi đỏ".
  Có $C_4^2=6$ cách chọn 2 viên bi xanh trong 4 viên bi xanh và $C_6^1=6$ cách chọn 1 viên bi đỏ trong 6 viên bi đỏ.
  Theo quy tắc nhân ta có $6\cdot 6=36$ cách chọn 2 viên bi xanh và 1 viên bi đỏ.
  Số kết quả thuận lợi cho biến cố $\{X=2\}$ là 36. Do đó $P(X=2)=\dfrac{36}{120}=\dfrac{3}{10}$.
- Tính $P(X=3)$: Biến cố $\{X=3\}$ là: "Lấy được 3 viên bi xanh".
  Số kết quả thuận lợi cho biến cố $\{X=3\}$ là $C_4^3=4$. Do đó $P(X=3)=\dfrac{4}{120}=\dfrac{1}{30}$.