ThS. TRẦN THANH YÊN

VECTƠ VÀ HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

CHƯƠNG 2

TOÁN 12

Chân trời sáng tạo

(có thể dùng chung cả 3 bộ sách)

- Lý thuyết và bài tập tự luận
- Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn
- Trắc nghiệm đúng sai
- Trắc nghiệm trả lời ngắn

MỤC LỤC

CHƯƠNG 2.

VECTƠ VÀ HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1. VECTƠ VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRONG KHÔNG GIAN

A. LÝ THUYẾT

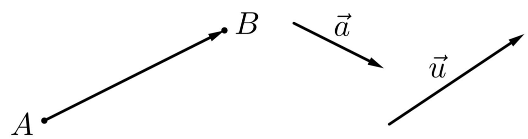
1. Vectơ trong không gian

Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.

Chú ý:

• Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ chỉ vectơ có điểm đầu A, điểm cuối B.

• Nếu không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối thì vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{x}, \vec{y}, \ldots$



Trong không gian, các khái niệm có liên quan đến vectơ như giá của vectơ, độ dài của vectơ, hai vectơ cùng phương, cùng hướng, ngược hướng, bằng nhau, đối nhau; vectơ-không được định nghĩa tương tự như trong mặt phẳng.

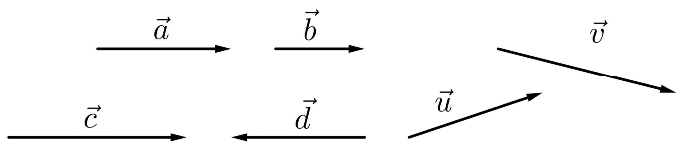
Nhắc lại:

• ***Giá*** của vectơ: là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

• ***Độ dài*** của vectơ: là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

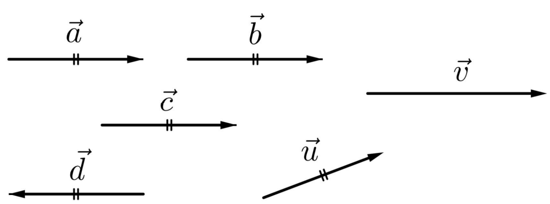
• Hai vectơ ***cùng phương***: giá của chúng song song hoặc trùng nhau. Ngược lại, hai vectơ có giá cắt nhau hoặc chéo nhau được gọi là hai vectơ không cùng phương.

• Hai vectơ cùng phương thì chúng có thể ***cùng hướng*** hoặc ***ngược hướng***.



• Hai vectơ ***bằng nhau***: Nếu chúng cùng hướng và có độ dài bằng nhau.

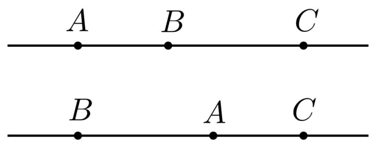
• Hai vectơ ***đối nhau***: Nếu chúng ngược hướng và có độ dài bằng nhau.



• Vectơ-không là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau. Vectơ-không có độ dài bằng 0. Vectơ-không luôn cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ.

Chú ý:

- Trong không gian, cho điểm O và vectơ $\vec{a}$, tồn tại duy nhất điểm M để $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.
- Cho đoạn thẳng MN, ta luôn có $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{NM}$.
- Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

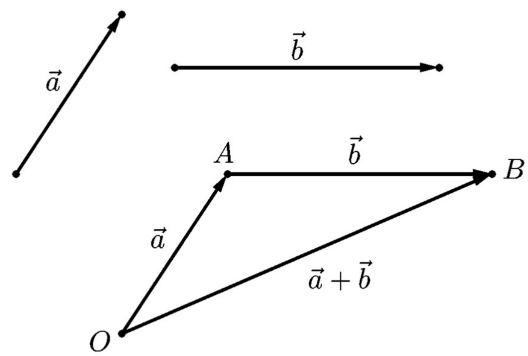


2. Tổng và hiệu của hai vectơ

Tổng của hai vectơ

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Lấy điểm O bất kì và hai điểm A, B sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Ta gọi $\overrightarrow{OB}$ là ***tổng của hai vectơ*** $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} + \vec{b}$.

Phép lấy tổng của hai vectơ được gọi là ***phép cộng vectơ***.



Nhận xét: Phép cộng vectơ trong không gian cũng có các tính chất như phép cộng vectơ trong mặt phẳng.

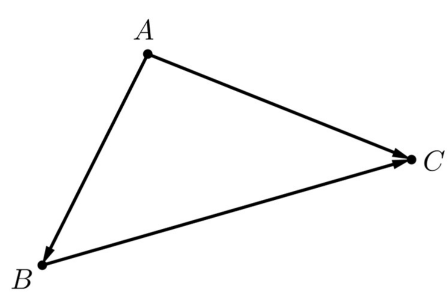
- Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- Tính chất kết hợp: $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$;
- Với mọi vectơ $\vec{a}$, ta luôn có: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

Chú ý: Từ tính chất kết hợp, ta có thể xác định được tổng của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$.

Quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành vẫn đúng với các vectơ trong không gian.

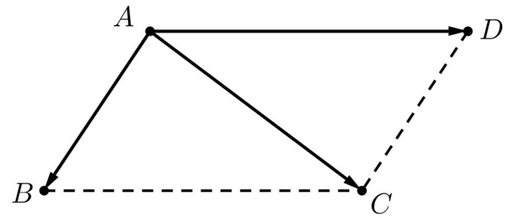
Quy tắc ba điểm

Với ba điểm A, B, C ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



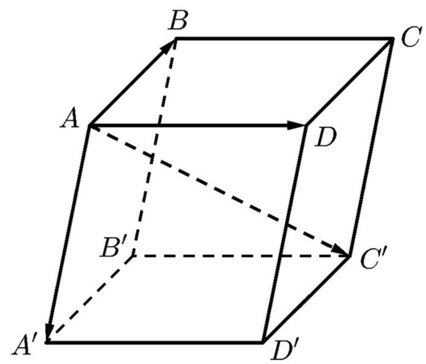
Quy tắc hình bình hành

Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.



Quy tắc hình hộp

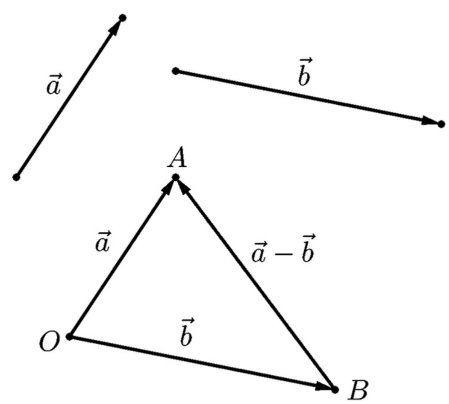
Cho hình hộp $ABCD.A'B'CD'$. Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.



Hiệu của hai vectơ

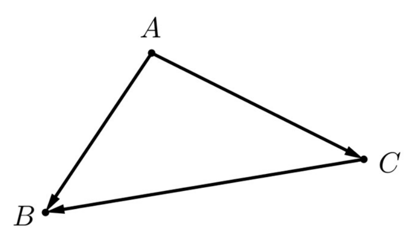
Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Ta gọi $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$ là ***hiệu của hai vectơ*** $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a}-\vec{b}$.

Phép lấy hiệu của hai vectơ được gọi là ***phép trừ vectơ***.



Quy tắc hiệu

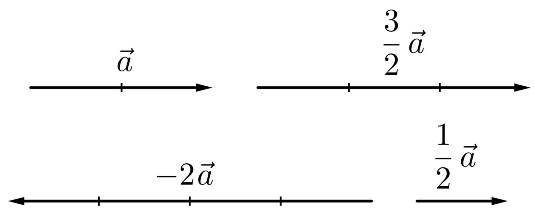
Trong không gian, với ba điểm A, B, C ta có: $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.



3. Tích của một số với một vectơ

Trong không gian, cho số thực $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu $k\vec{a}$, cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$ và có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$.



Phép lấy tích của một số với một vectơ được gọi là phép nhân một số với một vectơ.

Quy ước: $0.\vec{a} = \vec{0}$ và $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

Nhận xét:

a) Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kì, với mọi số h và k, ta có:

- $k\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = k\vec{a} + k\vec{b}$;
- $\left(h+k\right)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$;
- $h\left(k\vec{a}\right) = \left(hk\right)\vec{a}$;
- $1.\vec{a} = \vec{a}$;
- $\left(-1\right).\vec{a} = -\vec{a}$.

b) $k\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ hoặc $k = 0$.

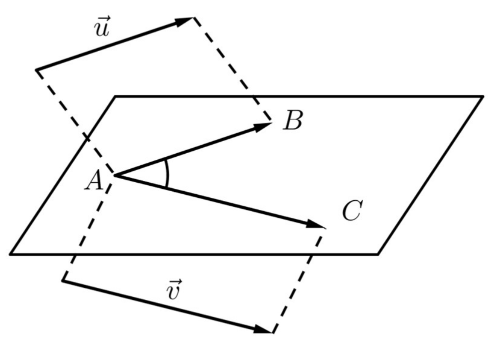
c) Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b}$ khác $\vec{0}$) cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

d) Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số k khác 0 để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

4. Tích vô hướng của hai vectơ

Góc giữa hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm A bất kì, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Khi đó, ta gọi $\widehat{BAC}$ là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, kí hiệu $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$.



Nhận xét:

$0° \leq \left(\vec{u},\vec{v}\right) \leq 180°$;

Nếu $\left(\vec{u},\vec{v}\right) = 90°$ thì ta nói $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau, kí hiệu $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Tích vô hướng của hai vectơ

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$.

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu $\vec{u}.\vec{v}$, được xác định bởi công thức

$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u},\vec{v})$.

Chú ý:

a) Trong trường hợp $\vec{u} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$, ta quy ước $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

b) $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2$; $\vec{u}^2 \geq 0$, $\vec{u}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

c) Với hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$.

d) Với hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$.

Nhận xét: Tương tự như trong mặt phẳng, tích vô hướng của hai vectơ trong không gian cũng có các tính chất sau:

Với ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ và số k, ta có:

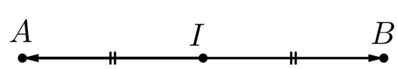
- $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$;
- $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$;
- $(k\vec{a}).\vec{b} = k(\vec{a}.\vec{b}) = \vec{a}.(k\vec{b})$;
- $(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$;
- $(\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$;
- $\vec{a}^2 - \vec{b}^2 = (\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})$;
- $\vec{a}.\vec{b} > 0 \Leftrightarrow (\vec{a},\vec{b})$ là góc nhọn;
- $\vec{a}.\vec{b} < 0 \Leftrightarrow (\vec{a},\vec{b})$ là góc tù;
- $\vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow (\vec{a},\vec{b})$ là góc vuông.

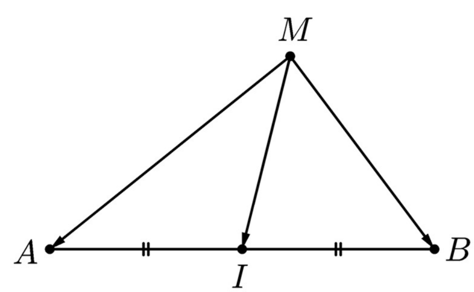
5. Các hệ thức quan trọng thường gặp

Hệ thức trung điểm đoạn thẳng

Trong không gian, cho đoạn thẳng AB và một điểm M tùy ý. Khi đó:

Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

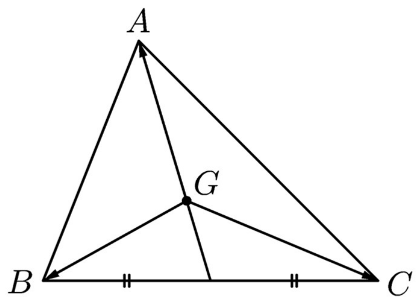


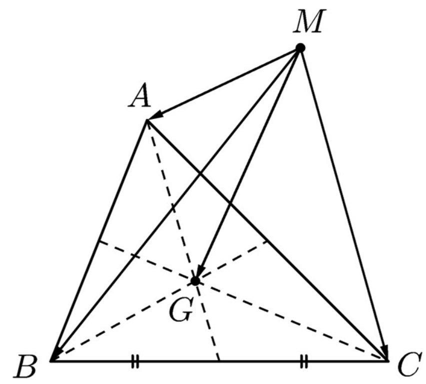


Hệ thức trọng tâm tam giác

Trong không gian, cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý.

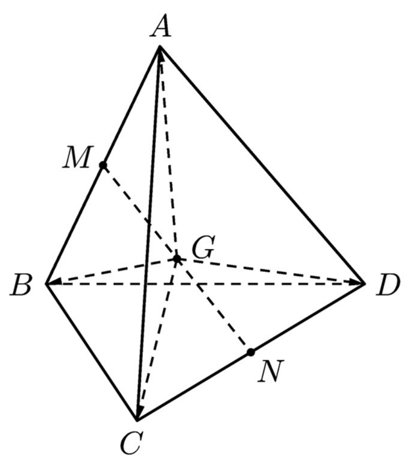
Điểm G là trọng tâm của tam giác $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

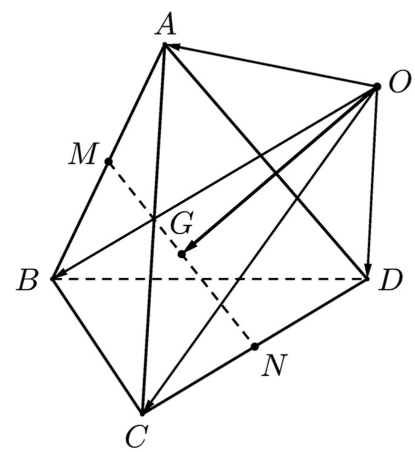




Hệ thức trọng tâm tứ diện

Trong không gian, cho G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ (G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm 2 cạnh đối diện) và điểm O tuỳ ý. Ta có: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OG}$.





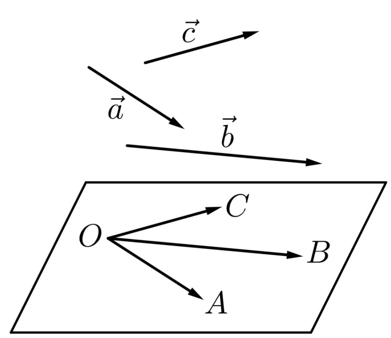
6. Sự đồng phẳng của ba vectơ

Trong không gian, cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (khác $\vec{0}$). Từ một điểm O bất kì ta dựng $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$. Khi đó:

- Nếu các đường thẳng OA, OB, OC không cùng nằm trong một mặt phẳng thì ta nói ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng.
- Nếu các đường thẳng OA, OB, OC cùng nằm trong một mặt phẳng thì ta nói ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

Định nghĩa

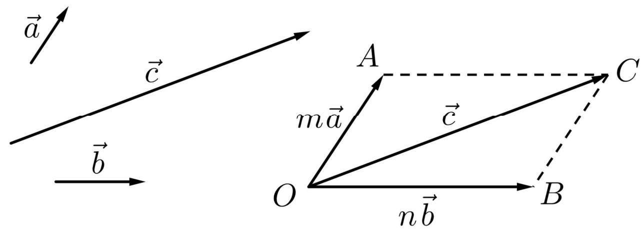
Ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.



Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng

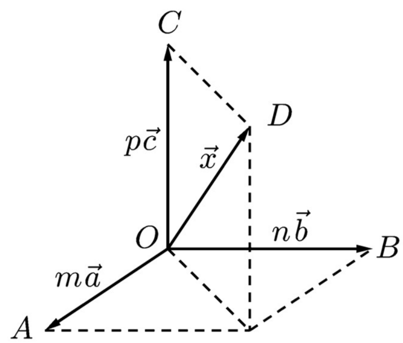
Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, trong đó $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương. Khi đó:

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi tồn tại duy nhất các số $m, n \in \mathbb{R}$ sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.



Phân tích một vectơ theo ba vectơ không đồng phẳng

Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng và vectơ $\vec{x}$ tuỳ ý. Khi đó tồn tại duy nhất các số $m, n, p \in \mathbb{R}$ sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$.



DẠNG TOÁN: CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VECTƠ

- Dựa vào các quy tắc cộng, trừ vectơ, …, các hệ thức và tính chất quan trọng;
- Dựa vào hình vẽ.

Ví dụ 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AC'}$;

b) $\overrightarrow{DB'} + \overrightarrow{D'D} + \overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BB'}$;

c) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{BB'}$;

d) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D} = \vec{0}$;

e) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A} = \vec{0}$.

Ví dụ 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi S là một điểm không thuộc mặt phẳng chứa hình bình hành. Chứng minh rằng $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$.

Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD , BC ; G là trọng tâm của tam giác BCD . Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)$;

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi I là trọng tâm của tam giác ABC và J là trọng tâm tam giác ADC . Chứng minh rằng $2\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 3\left(\overrightarrow{SI} + \overrightarrow{SJ}\right)$.

Ví dụ 5. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{B'C}=\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}$ và $\overrightarrow{BC'}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

DẠNG TOÁN: TÍNH ĐỘ DÀI VECTƠ

- Dựa vào hình vẽ.
- Phương pháp vectơ:

- Phân tích $\overrightarrow{MN}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$ với $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng;

- Khi đó $MN=\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{\overrightarrow{MN}^2}=\sqrt{\left(m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}\right)^2}$.

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh $2a\sqrt{2}$; SA vuông góc với $(ABCD)$, $SA=2a$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A trên các cạnh SB, SD.

a) Tính độ dài vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$;

b) Tính độ dài vectơ $\vec{v}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DB}$;

c) Tính độ dài vectơ $\vec{w}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{SA}$;

d) Gọi E là giao điểm của SC và mặt phẳng (AMN). Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{AE}$.

Ví dụ 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh 2 cm. Tính độ dài của các vectơ sau:

a) $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$;

b) $\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$;

c) $\vec{a}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{D'A}$;

d) $\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{AA'}$.

Ví dụ 8. Có ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc $100°$ và có độ lớn lần lượt là 25 N và 12 N. Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn 4 N. Tính độ lớn của hợp lực của ba lực trên.

Ví dụ 9. Ba lực có điểm đặt tại một đỉnh của hình lập phương, cùng phương với ba cạnh và cùng có cường độ là 5 N. Tính cường độ của hợp lực.

DẠNG TOÁN: PHÂN TÍCH VECTƠ THEO BA VECTƠ KHÔNG ĐỒNG PHẲNG

- Dựa vào các quy tắc cộng, trừ vectơ, …, các hệ thức và tính chất quan trọng;
- Dựa vào hình vẽ.

Ví dụ 10. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{IJ}$ theo 3 vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$.

b) Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{AG}$ theo 3 vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$.

Ví dụ 11. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$. Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{BD'}$, $\overrightarrow{B'D'}$, $\overrightarrow{DB'}$, $\overrightarrow{BC'}$ và $\overrightarrow{AD'}$ theo 3 vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Ví dụ 12. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$.

a) Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{B'C}$, $\overrightarrow{BC'}$ theo 3 vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.