

TRẦN ĐỨC HUYÊN (Chủ biên)  
NGUYỄN DUY HIẾU - PHẠM THỊ BÉ HIỀN  
(TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG TP. HỒ CHÍ MINH)

# GIẢI TOÁN

## TÍCH PHÂN NGUYÊN HÀM

# 12

DÙNG CHO HỌC SINH LỚP CHUYÊN  
(Tái bản lần thứ hai)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

5

## LỜI NÓI ĐẦU

Trong thời gian vừa qua, được sự giúp đỡ của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, trường Trung học phổ thông chuyên Lê Hồng Phong TP. Hồ Chí Minh đã biên soạn bộ sách "*Giải toán dành cho học sinh lớp chuyên*" theo định hướng bám sát sách giáo khoa, bổ sung các chủ đề nâng cao theo trình độ trường chuyên và các nội dung thi đại học. Bộ sách đã được đông đảo học sinh và giáo viên các trường chuyên sử dụng và tin cậy.

Trong quá trình đổi mới giáo dục, đáp ứng yêu cầu mới của sách giáo khoa chuyên ban, xây dựng phương pháp kiểm tra kết hợp giữa tự luận và trắc nghiệm khách quan, chúng tôi biên soạn lại bộ sách Giải toán dành cho học sinh các trường chuyên và học sinh khá giỏi ở các trường Trung học phổ thông trên toàn quốc. Bộ sách "*Giải toán 12*" được biên soạn nhằm đáp ứng tốt nhất cho các kì thi Tốt nghiệp THPT và đặc biệt là kì thi Tuyển sinh Đại học – Cao đẳng. Bộ sách này gồm năm quyển :

- Giải toán 12 – Hàm số mũ – lôgarit và số phức ;
- Giải toán 12 – Phương pháp tọa độ trong không gian ;
- Giải toán 12 – Khảo sát hàm số ;
- Giải toán 12 – Khối đa diện và khối tròn xoay ;
- Giải toán 12 – Tích phân – nguyên hàm.

Nội dung quyển "*Giải toán 12 – Tích phân – Nguyên hàm*" bám sát theo cấu trúc của sách giáo khoa Giải tích 12 (Nâng cao) và được trình bày theo bốn chương như sau :

- Chương I : Nguyên hàm ;
- Chương II : Tích phân ;
- Chương III : Ứng dụng tích phân để giải toán ;
- Chương IV : Các bài toán tổng hợp.

Trong ba chương đầu, ở mỗi bài học, chúng tôi xây dựng hệ thống bài tập rèn luyện dựa theo các vấn đề cụ thể, một số bài tập là các đề thi đại học để bạn đọc tham khảo, có cung cấp đáp án và hướng dẫn giải sơ lược của một số bài tập tiêu biểu nhằm giúp các bạn đọc ôn tập, nâng cao kiến thức, rèn luyện kĩ năng giải toán. Chương IV là các bài toán tổng hợp, giúp học sinh vận dụng sâu kiến thức đã học, có gợi ý, hướng dẫn giải.

Hi vọng quyển sách này cùng với những quyển sách của Bộ sách Giải toán 12 sẽ giúp ích cho các bạn học sinh trong quá trình học tập, rèn luyện nâng cao kiến thức, rèn kĩ năng môn Toán lớp 12, chủ động và tự tin bước vào kì thi Tuyển sinh Đại học – Cao đẳng để đạt được kết quả tốt nhất ; Bộ sách này cũng là tài liệu hỗ trợ cho giáo viên Toán các trường Trung học phổ thông trong công tác đào tạo học sinh giỏi.

Mọi ý kiến đóng góp xin được gửi về địa chỉ sau :

- *Trường Trung học phổ thông chuyên Lê Hồng Phong, 235 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5, TP. Hồ Chí Minh.*
- *Ban biên tập Toán – Tin, Công ty cổ phần Dịch vụ xuất bản giáo dục Gia Định – Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 231 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5, TP.HCM.*

Trân trọng cảm ơn !

CÁC TÁC GIẢ

## §1. ĐỊNH NGHĨA NGUYÊN HÀM VÀ TÍNH CHẤT CỦA NGUYÊN HÀM

### A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

#### I. KHÁI NIỆM NGUYÊN HÀM

##### 1. Định nghĩa

Cho hàm số  $f$  xác định trên  $K$  ( $K$  là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng nào đó).

Hàm số  $F$  được gọi là một nguyên hàm của hàm số  $f$  trên  $K$  nếu  $F'(x) = f(x)$  với mọi  $x$  thuộc  $K$ .

*Chú ý* : Nếu  $F$  là nguyên hàm của  $f$  trên khoảng  $(a ; b)$  và hai hàm  $f$  và  $F$  liên tục trên đoạn  $[a ; b]$  thì  $F$  cũng là nguyên hàm của  $f$  trên đoạn  $[a ; b]$ .

##### 2. Định lí

Giả sử hàm số  $F$  là một nguyên hàm của hàm số  $f$  trên  $K$ . Khi đó :

- Với mỗi hằng số  $C$ , hàm số  $y = F(x) + C$  cũng là một nguyên hàm của  $f$  trên  $K$ .
- Ngược lại, với mỗi nguyên hàm  $G$  của  $f$  trên  $K$  thì tồn tại một hằng số  $C$  sao cho  $G(x) = F(x) + C$  với mọi  $x$  thuộc  $K$ .

Như vậy, nếu  $F$  là một nguyên hàm của hàm số  $f$  trên  $K$  thì mọi nguyên hàm của hàm số  $f$  trên  $K$  đều có dạng  $F(x) + C$  với  $C \in \mathbb{R}$ . Khi đó :  $F(x) + C, C \in \mathbb{R}$  được gọi là họ tất cả các nguyên hàm của  $f$  trên  $K$ , kí hiệu là  $\int f(x)dx$ .

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{ với } C \in \mathbb{R}.$$

*Chú ý* :

- $\left( \int f(x)dx \right)' = f(x)$

- Mọi hàm số liên tục trên  $K$  đều có nguyên hàm trên  $K$ .

## II. NGUYÊN HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

$$1) \int 0 dx = C$$

$$2) \int dx = \int 1 dx = x + C$$

$$3) \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$4) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$5) \int \sin x dx = -\cos x + C \quad ; \quad \int \sin kx dx = -\frac{\cos kx}{k} + C \quad (k \neq 0)$$

$$6) \int \cos x dx = \sin x + C \quad ; \quad \int \cos kx dx = \frac{\sin kx}{k} + C \quad (k \neq 0)$$

$$7) \int e^x dx = e^x + C \quad ; \quad \int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + C \quad (k \neq 0)$$

$$8) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$$

$$9) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$$

$$10) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + C$$

## III. MỘT SỐ TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA NGUYÊN HÀM

**Định lí.** Nếu  $f, g$  là hai hàm số liên tục trên  $K$  thì :

$$a) \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$b) \text{ Với } k \in \mathbb{R}^* : \int kf(x) dx = k \int f(x) dx$$

## B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

### ↪ Vấn đề 1

Chứng minh  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$

## 1. PHƯƠNG PHÁP

Để chứng minh  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$  trên  $D$ , ta chứng minh  $F'(x) = f(x), \forall x \in D$ .

## 2. VÍ DỤ

*Ví dụ 1.*

a) Chứng minh rằng hàm số  $F(x) = -\ln|\cos x|$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \tan x$ .

b) Chứng minh rằng hàm số  $F(x) = \ln|\sin x|$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \cot x$ .

c) Chứng minh rằng hàm số  $F(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ .

*Giải*

$$\text{a) Ta có : } F'(x) = \frac{-(\cos x)'}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = f(x)$$

nên  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$ .

$$\text{b) Ta có : } F'(x) = \frac{(\sin x)'}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x = f(x)$$

nên  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$ .

$$\text{c) Ta có : } F'(x) = \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)' = \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = f(x)$$

nên  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$ .

*Ví dụ 2.* Cho  $a \neq 0$ . Chứng minh rằng :

$$\text{a) Hàm số } F(x) = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| \text{ là một nguyên hàm của hàm số } f(x) = \frac{1}{a^2 - x^2}.$$

$$\text{b) Hàm số } F(x) = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| \text{ là một nguyên hàm của hàm số } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

$$\text{c) Hàm số } F(x) = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| \text{ là một nguyên hàm của hàm số } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

*Giải*

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có : } F'(x) &= \frac{1}{2a} \cdot \frac{\left(\frac{a+x}{a-x}\right)'}{\frac{a+x}{a-x}} = \frac{1}{2a} \cdot \frac{2a}{(a-x)^2} \cdot \frac{a-x}{a+x} \\ &= \frac{1}{(a-x)(a+x)} = \frac{1}{a^2 - x^2} = f(x) \end{aligned}$$

nên  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$ .

$$\text{b) Ta có : } F'(x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)'}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} = f(x)$$

nên  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$ .

$$\text{c) Ta có : } F'(x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)'}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} = f(x)$$

nên  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$ .

*Ví dụ 3.*

$$\text{a) Tìm } a \text{ để hàm số } F(x) = \frac{ax+1}{x-5} \text{ là một nguyên hàm của hàm số } f(x) = \frac{1}{(x-5)^2}.$$

$$\text{b) Xác định } a, b, c \text{ sao cho } F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-3} \text{ là một nguyên hàm của hàm số } f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x-3}} \text{ trong } \left(\frac{3}{2}; +\infty\right).$$

*Giải*

$$\text{a) Với mọi } x \neq 5, \text{ ta có : } F'(x) = \frac{-5a-1}{(x-5)^2}$$

$F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$

$$\Leftrightarrow \frac{-5a-1}{(x-5)^2} = \frac{1}{(x-5)^2}, \forall x \neq 5 \Leftrightarrow -5a-1=1 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{5}.$$

$$\text{b) Với mọi } x \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right), \text{ ta có :}$$



$$F'(x) = (2ax + b)\sqrt{2x-3} + (ax^2 + bx + c)\frac{1}{\sqrt{2x-3}}$$

$$= \frac{(2ax + b)(2x - 3) + ax^2 + bx + c}{\sqrt{2x-3}} = \frac{5ax^2 + (3b - 6a)x + c - 3b}{\sqrt{2x-3}}$$

$F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$

$$\Leftrightarrow \frac{5ax^2 + (3b - 6a)x + c - 3b}{\sqrt{2x-3}} = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x-3}}, \quad \forall x \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$$

$$\Leftrightarrow 5ax^2 + (3b - 6a)x + c - 3b = 20x^2 - 30x + 7, \quad \forall x \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a = 20 \\ 3b - 6a = -30 \\ c - 3b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}$$

## ↳ Vấn đề 2

Tìm họ nguyên hàm của hàm số

### 1. PHƯƠNG PHÁP

Tính  $\int f(x)dx$ .

Phân tích  $f(x)$  thành tổng của các hàm cơ bản. Áp dụng các tính chất và công thức nguyên hàm cơ bản.

*Chú ý* : Tìm nguyên hàm của một hàm số được hiểu là tìm nguyên hàm trên tập xác định của hàm số đó.

### 2. VÍ DỤ

*Ví dụ 1.* Tìm các họ nguyên hàm sau :

a)  $\int \frac{(x^3 + 5)(x^5 - 3)}{x^7} dx$ ;

b)  $\int \frac{(\sqrt{x} - 1)^3}{x\sqrt{x}} dx$  trên khoảng  $(0; +\infty)$ ;

c)  $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$  trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

**Giải**

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{(x^3+5)(x^5-3)}{x^7} dx &= \int \frac{x^8+5x^5-3x^3-15}{x^7} dx = \int \left( x + \frac{5}{x^2} - \frac{3}{x^4} - \frac{15}{x^7} \right) dx \\ &= \int (x + 5x^{-2} - 3x^{-4} - 15x^{-7}) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{5}{2x^6} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x\sqrt{x}} dx &= \int \frac{x\sqrt{x}-3x+3\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}} dx = \int \left( 1 - \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) dx \\ &= \int \left( 1 - \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} - x^{-\frac{3}{2}} \right) dx = x - 6\sqrt{x} + 3\ln x + \frac{2}{\sqrt{x}} + C \end{aligned}$$

$$\text{c) } \int \left( \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx = \int \left( x + 2x^{\frac{1}{6}} + x^{-\frac{2}{3}} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{12}{7} x^{\frac{7}{6}} + 3\sqrt[3]{x} + C$$

**Ví dụ 2.** Tìm các họ nguyên hàm sau :

$$\text{a) } \int e^x \left( 15 - \frac{20e^{-x}}{x^5} \right) dx ;$$

$$\text{b) } \int 9^x (5^x + x^7 3^{-2x} + 7^{-x}) dx.$$

**Giải**

$$\text{a) } \int e^x \left( 15 - \frac{20e^{-x}}{x^5} \right) dx = \int \left( 15e^x - \frac{20}{x^5} \right) dx = \int (15e^x - 20x^{-5}) dx = 15e^x + \frac{5}{x^4} + C$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int [9^x (5^x + x^7 3^{-2x} + 7^{-x})] dx &= \int \left[ 45^x + x^7 + \left( \frac{9}{7} \right)^x \right] dx \\ &= \frac{45^x}{\ln 45} + \frac{x^8}{8} + \left( \frac{9}{7} \right)^x \frac{1}{\ln \frac{9}{7}} + C \end{aligned}$$

**Ví dụ 3.** Tìm các họ nguyên hàm sau :

$$\text{a) } \int \cos 5x \cdot \cos 3x \cdot \sin 2x \cdot dx ;$$

$$\text{b) } \int \left( \frac{5 \cos^2 x - 3 \cot^2 x}{\cos^2 x} + \frac{2 \sin^2 x + 4 \tan^2 x}{\sin^2 x} \right) dx ;$$