MỤC LỤC

CHƯƠNG 3 NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG 1

1 NGUYÊN HÀM 1

A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM 1

1 Nguyên hàm và tính chất 1

1.1 Nguyên hàm 1
1.2 Tính chất 1

2 Phương pháp tính nguyên hàm 1

2.1 Phương pháp tính nguyên hàm đổi biến số 1
2.2 Phương pháp tính nguyên hàm từng phần 1
2.3 Bảng nguyên hàm cơ bản 2
2.4 Bảng nguyên hàm mở rộng 2

3 Các dạng toán và bài tập 3

3.1 Tính nguyên hàm bằng bảng nguyên hàm 3
3.1.1 Bài tập vận dụng 3
3.2 Tìm nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến số 22
3.2.1 Bài tập áp dụng 23
3.3 Nguyên hàm từng phần 35
3.3.1 Ví dụ và bài tập 35

4 Phương pháp đổi biến số 39

B CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM 39

1 Nhận biết 39

1.1 ĐÁP ÁN 54

2 Thông hiểu 54

2.1 ĐÁP ÁN 69

3 Vận dụng thấp 69

3.1 ĐÁP ÁN 81

4 Vận dụng cao 81

4.1 ĐÁP ÁN 86

2 TÍCH PHÂN 87

A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM 87

1 Khái niệm tích phân 87

1.1 Định nghĩa tích phân 87
1.2 Tính chất của tích phân 87

2 PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN 87

2.1 Phương Pháp Đổi Biến Số 87

2.2 Phương Pháp Tích Phân Từng Phần . . . 88
3 Các dạng toán và bài tập 88
3.1 Tích phân cơ bản và tính chất tính phân . . . 88
3.1.1 Ví dụ và bài tập . . . 88
3.2 Tích phân hàm số phân thức hữu tỉ . . . 93
3.2.1 Ví dụ và bài tập . . . 93
3.3 Tính chất của tích phân . . . 95
3.3.1 Ví dụ và bài tập . . . 96
3.4 Tích phân hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối $\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ . . . 107
3.4.1 Ví dụ và bài tập . . . 107
3.5 Phương pháp đổi biến số . . . 109
3.5.1 Ví dụ và bài tập . . . 109
3.6 Tích phân từng phần . . . 140
3.6.1 Ví dụ và bài tập . . . 140
B CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM 150
1 Nhận biết 150
1.1 ĐÁP ÁN . . . 161
2 Thông hiểu 161
2.1 ĐÁP ÁN . . . 191
3 Vận dụng thấp 192
3.1 ĐÁP ÁN . . . 227
4 Vận dụng cao 228
4.1 ĐÁP ÁN . . . 246
3 ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN 247
A TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG 247
1 Hình phẳng giới hạn bởi một đường cong và trục hoành 247
2 Hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong 247
B TÍNH THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY 247
C Dạng toán và bài tập 248
1 Diện tích hình phẳng và bài toán liên quan 248
1.1 Diện tích hình phẳng . . . 248
1.2 Tìm vận tốc, gia tốc, quãng đường trong vật lí . . . 251
2 Thể tích 254
2.1 Thể tích của vật thể . . . 254
2.2 Tính thể tích của vật thể tròn xoay . . . 256

D CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM 259

1 Nhận biết 259

1.1 ĐÁP ÁN 277

2 Thông hiểu 277

2.1 ĐÁP ÁN 286

3 Vận dụng thấp 287

3.1 ĐÁP ÁN 297

4 Vận dụng cao 297

4.1 ĐÁP ÁN 302

CHƯƠNG 3

NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

BÀI 1. NGUYÊN HÀM

A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1 NGUYÊN HÀM VÀ TÍNH CHẤT

1.1 Nguyên hàm

Định nghĩa 1. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathscr{K}$. Hàm số $F(x)$ được gọi là **nguyên hàm** của hàm số $f(x)$ trên $\mathscr{K}$ nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in \mathscr{K}$.

Định lí 1. *Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathscr{K}$ thì với mỗi hằng số C, hàm số $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathscr{K}$.*

Định lí 2. *Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathscr{K}$ thì mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathscr{K}$ đều có dạng $F(x) + C$, với C là một hằng số.*

Định lí 3. *Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathscr{K}$ đều có nguyên hàm trên $\mathscr{K}$.*

1.2 Tính chất

Tính chất 1.

$$\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C$$

Tính chất 2.

$$\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x \quad (k \text{ là một hằng số khác } 0).$$

Tính chất 3.

$$\int \left[f(x) \pm g(x)\right]\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

2 PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM

2.1 Phương pháp tính nguyên hàm đổi biến số

Định lí 4. *Nếu $\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì*

$$\int f(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x = F(u(x)) + C.$$

2.2 Phương pháp tính nguyên hàm từng phần

Định lí 5. *Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathscr{K}$ thì*

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nhận xét. *Vì $v'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}v, u'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$ nên đẳng thức trên còn được viết ở dạng $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$.*

Để tính nguyên hàm $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng từng phần ta làm như sau:

Bước 1: Chọn u, v sao cho $f(x)\,\mathrm{d}x = u\,\mathrm{d}v$ (chú ý $\mathrm{d}v = v'(x)\,\mathrm{d}x$). Sau đó tính $v = \int \mathrm{d}v$ và $\mathrm{d}u = u'\cdot\mathrm{d}x$.

Bước 2: Thay vào công thức $(*)$ và tính $\int v\,\mathrm{d}u$. Chú ý. Cần phải lựa chọn u và dv hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int v\,\mathrm{d}u$ dễ tính hơn $\int u\,\mathrm{d}v$. Ta thường gặp các dạng sau

① **Dạng 1:** $I=\int P(x)\begin{bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{bmatrix}\mathrm{d}x$. Với dạng này, ta đặt $\begin{cases}u=P(x)\\ \mathrm{d}v=\begin{bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{bmatrix}\mathrm{d}x\end{cases}$

② **Dạng 2:** $I=\int P(x)\mathrm{e}^{ax+b}\,\mathrm{d}x$, trong đó $P(x)$ là đa thức. Với dạng này, ta đặt $\begin{cases}u=P(x)\\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^{ax+b}\,\mathrm{d}x.\end{cases}$

③ **Dạng 3:** $I=\int P(x)\ln(mx+n)\,\mathrm{d}x$, trong đó $P(x)$ là đa thức. Với dạng này, ta đặt $\begin{cases}u=\ln(mx+n)\\ \mathrm{d}v=P(x)\,\mathrm{d}x.\end{cases}$

④ **Dạng 4:** $I=\int\begin{bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{bmatrix}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$. Với dạng này ta đặt $\begin{cases}u=\begin{bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{bmatrix}\\ \mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\end{cases}$

2.3 Bảng nguyên hàm cơ bản

Nguyên hàm của hàm sơ cấp	**Nguyên hàm của hàm hợp** $u=u(x)$
① $\int 0\,\mathrm{d}x=C$	① $\int 0\,\mathrm{d}u=C$
② $\int 1\,\mathrm{d}x=x+C$	② $\int 1\,\mathrm{d}u=u+C$
③ $\int x^\alpha\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	③ $\int u^\alpha\,\mathrm{d}u=\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$
④ $\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln\lvert x\rvert+C$	④ $\int \dfrac{1}{u}\,\mathrm{d}u=\ln\lvert u\rvert+C$
⑤ $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}e^x+C$	⑤ $\int \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u=\mathrm{e}^u+C$
⑥ $\int a^x\,\mathrm{d}x=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$	⑥ $\int a^u\,\mathrm{d}u=\dfrac{a^u}{\ln a}+C$
⑦ $\int \cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$	⑦ $\int \cos u\,\mathrm{d}u=\sin u+C$
⑧ $\int \sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$	⑧ $\int \sin u\,\mathrm{d}u=-\cos u+C$
⑨ $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\tan x+C$	⑨ $\int \dfrac{1}{\cos^2 u}\,\mathrm{d}u=\tan u+C$
⑩ $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=-\cot x+C$	⑩ $\int \dfrac{1}{\sin^2 u}\,\mathrm{d}u=-\cot u+C$
⑪ $\int \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\sqrt{x}+C$	⑪ $\int \dfrac{1}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u=\sqrt{u}+C$

2.4 Bảng nguyên hàm mở rộng

① $\int (ax+b)^\alpha\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}\dfrac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C(\alpha\neq-1)$	⑩ $\int \dfrac{1}{ax+b}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert+C$
② $\int \mathrm{e}^{ax+b}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{ax+b}+C$	⑪ $\int \cos(ax+b)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)+C$
③ $\int \sin(ax+b)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)+C$	⑫ $\int \dfrac{1}{\cos^2(ax+b)}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}\tan(ax+b)+C$

④ $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cot(ax+b)+C$	⑬ $\displaystyle\int \tan(ax+b)\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\ln\lvert\cos(ax+b)\rvert+C$
⑤ $\displaystyle\int \cot(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln\lvert\sin(ax+b)\rvert+C$	⑭ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$
⑥ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert+C$	⑮ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$
⑦ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{\lvert a\rvert} = C$	⑯ $\displaystyle\int \frac{dx}{x.\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\arccos\left\lvert\frac{x}{a}\right\rvert+C$
⑧ $\displaystyle\int \ln(ax+b)\mathrm{d}x = \left(x+\frac{b}{a}\right)\ln(ax+b)-x+C$	⑰ $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$
⑨ $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}(a\cos bx)+b\sin bx}{a^2+b^2}+C$	⑱ $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}(a\sin bx)-b\cos bx}{a^2+b^2}+C$

3 CÁC DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

3.1 Tính nguyên hàm bằng bảng nguyên hàm

Phương pháp giải

① Tích của đa thức hoặc lũy thừa $\xrightarrow{\text{PP}}$ khai triển.

② Tích các hàm mũ $\xrightarrow{\text{PP}}$ khai triển theo công thức mũ.

③ Chứa căn $\xrightarrow{\text{PP}}$ chuyển về lũy thừa.

④ Tích lượng giác bậc một của sin và cosin $\xrightarrow{\text{PP}}$ Sử dụng công thức tích thành tổng.

- $\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$
- $\sin a\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$
- $\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$

⑤ Bậc chẵn của sin và cosin ⇒ Hạ bậc: $\sin^2 x = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2a$, $\cos^2 x = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2a$.

⑥ Nguyên hàm của hàm số hữu tỷ $I = \displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x$, với $P(x)$, $Q(x)$ là các đa thức.

- Nếu bậc của tử số $P(x) \geq$ bậc của mẫu số $Q(x) \xrightarrow{\text{PP}}$ Chia đa thức.
- Nếu bậc của tử số $P(x) <$ bậc của mẫu số $Q(x) \xrightarrow{\text{PP}}$ Phân tích mẫu số $Q(x)$ thành tích số,

rồi sử dụng đồng nhất thức đưa về dạng tổng của các phân số (**PP che**).

- $\dfrac{1}{(x-m)(ax^2+bx+c)} = \dfrac{A}{x-m}+\dfrac{Bx+C}{ax^2+bx+c}$, với $\Delta = b^2-4ac$.
- $\dfrac{1}{(x-a)^2(x-b)^2} = \dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{(x-a)^2}+\dfrac{C}{x-b}+\dfrac{D}{(x-b)^2}$.

Nhận xét. *Nếu mẫu không phân tích được thành tích sẽ tìm hiểu ở phần đổi biến.*

3.1.1 Bài tập vận dụng

Ví dụ 1. Tính nguyên hàm của hàm số

$f(x) = 3x^2+\frac{1}{3}x =$ ....

ĐS: $x^3+\dfrac{x^2}{6}+C$

Lời giải: Ta có $F(x)=\displaystyle\int\left(3x^2+\frac{1}{3}x\right)\mathrm{d}x=x^3+\frac{x^2}{6}+C.$

Bài 1. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ (giả sử điều kiện được xác định), biết

① $f(x)=2x^3-5x^2-4x+7=$ ....

ĐS: $\dfrac{1}{2}x^4-\dfrac{5}{3}x^3-2x^2+7x+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int\left(2x^3-5x^2-4x+7\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^4-\frac{5}{3}x^3-2x^2+7x+C.$ □

② $f(x)=6x^5-12x^3+x^2-8=$ ....

ĐS: $x^6-3x^4+\dfrac{1}{3}x^3-8x+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int\left(6x^5-12x^3+x^2-8\right)\mathrm{d}x=x^6-3x^4+\frac{1}{3}x^3-8x+C.$ □

③ $f(x)=(x^2-3x)(x+1)$ ....

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int(x^2-3x)(x+1)\mathrm{d}x=\int(x^3-2x^2-3x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+C.$ □

④ $f(x)=(x-1)(x^2+2)$ ....

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{3}x^3+x^2-2x+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int(x-1)(x^2+2)\mathrm{d}x=\int(x^3-x^2+2x-2)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+x^2-2x+C.$ □

⑤ $f(x)=x(x^2+1)^2$ ....

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{6}(x^2+1)^3+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int x(x^2+1)^2\mathrm{d}x=\int(x^2+1)^2\frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{2}=\frac{1}{6}(x^2+1)^3+C.$ □

⑥ $f(x)=(3-x)^3$ ....

ĐS: $F(x)=-\dfrac{1}{4}(3-x)^4+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int(3-x)^3\mathrm{d}x=-\int(3-x)^3\mathrm{d}(3-x)=-\frac{1}{4}(3-x)^4+C.$ □

⑦ $f(x)=(2x+1)^5$ ....

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{12}(2x+1)^6+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int(2x+1)^5\mathrm{d}x=\int(2x+1)^5\frac{\mathrm{d}(2x+1)}{2}=\frac{1}{12}(2x+1)^6+C.$ □

(8) $f(x)=(2x-10)^{2018}$ ....

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{4038}(2x-10)^{2019}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int(2x-10)^{2018}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(2x-10)^{2018}\mathrm{d}(2x-10)=\frac{1}{4038}(2x-10)^{2019}+C.$ □

(9) $f(x)=(3-4x)^{2019}$ ....

ĐS: $F(x)=-\dfrac{1}{8080}(3-4x)^{2020}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int(3-4x)^{2019}\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\int(3-4x)^{2019}\mathrm{d}(3-4x)=-\frac{1}{8080}(3-4x)^{2020}+C.$ □

(10) $f(x)=(2x^2-1)^2$ ....

ĐS: $F(x)=\dfrac{4}{5}x^5-\dfrac{4}{3}x^3+x+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int(2x^2-1)^2\mathrm{d}x=\int\left(4x^4-4x^2+1\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{5}x^5-\frac{4}{3}x^3+x+C.$ □

(11) $f(x)=(x^2+1)^3$ ....

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{7}x^7+\dfrac{3}{5}x^5+x^3+x+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int(x^2+1)^3\mathrm{d}x=\int\left(x^6+3x^4+3x^2+1\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{7}x^7+\frac{3}{5}x^5+x^3+x+C.$ □

Ví dụ 2. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=4x^3-4x+5$ thỏa mãn $F(1)=3$ ....

ĐS: $F(x)=x^4-2x^2+5x-1$

Lời giải: Ta có $F(x)=\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(4x^3-4x+5\right)\mathrm{d}x=x^4-2x^2+5x+C.$

Vì $F(1)=3\Leftrightarrow 1-2+5+C=3\Leftrightarrow C=-1.$

Suy ra $F(x)=x^4-2x^2+5x-1.$

Bài 2. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện $F(x_\circ)=k$.

(1) Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=-x^3+3x^2-2x$ thỏa mãn $F(1)=0$ ....

ĐS: $F(x)=-\dfrac{x^4}{4}+x^3-x^2+\dfrac{1}{4}$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(-x^3+3x^2-2x\right)\mathrm{d}x=-\frac{x^4}{4}+x^3-x^2+C.$

Vì $F(1)=0$ nên $C=\dfrac{1}{4}$. Suy ra $F(x)=-\dfrac{x^4}{4}+x^3-x^2+\dfrac{1}{4}.$ □

(2) Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=3x^3-2x^2+1$ thỏa mãn $F(-2)=3$ ....

ĐS: $F(x)=\dfrac{3x^4}{4}-\dfrac{2x^3}{3}+x-\dfrac{37}{3}$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(3x^3-2x^2+1\right)\mathrm{d}x=\frac{3x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+x+C.$

Vì $F(-2)=3$ nên $C=-\dfrac{37}{3}$. Suy ra $F(x)=\dfrac{3x^4}{4}-\dfrac{2x^3}{3}+x-\dfrac{37}{3}.$ □

③ Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = -5x^4 + 4x^2 - 6$ thỏa mãn $F(3) = 1$. Tính $F(-3)$ . . . . .

ĐS: $F(-3) = 451$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(-5x^4 + 4x^2 - 6\right)\mathrm{d}x = -x^5 + \dfrac{4x^3}{3} - 6x + C$.

Vì $F(3) = 1$ nên $C = 226$. Suy ra $F(x) = -x^5 + \dfrac{4x^3}{3} - 6x + 226$.

Do đó $F(-3) = 451$. □

④ Hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2$ có một nguyên hàm $F(x)$ thỏa $F(2) = 14$. Tính $F(-2)$ . . . .

ĐS: $F(-2) = -10$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(x^3 + 3x^2 + 2\right)\mathrm{d}x = \dfrac{x^4}{4} + x^3 + 2x + C$.

Vì $F(2) = 14$ nên $C = -2$. Suy ra $F(x) = \dfrac{x^4}{4} + x^3 + 2x - 2$.

Do đó $F(-2) = -10$. □

⑤ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = (1-x)^9$ thỏa $10F(2) = 9$ . . . .

ĐS: $F(x) = -\dfrac{(1-x)^{10}}{10} + 1$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left((1-x)^9\right)\mathrm{d}x = -\dfrac{(1-x)^{10}}{10} + C$.

Vì $10F(2) = 9$ nên $C = 1$. Suy ra $F(x) = -\dfrac{(1-x)^{10}}{10} + 1$. □

⑥ Hàm số $f(x) = (2x+1)^3$ có một nguyên hàm là $F(x)$ thỏa $F\left(\dfrac{1}{2}\right) = 4$. Tính $F\left(\dfrac{3}{2}\right)$ . . . .

ĐS: $F\left(\dfrac{3}{2}\right) = 34$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left((2x+1)^3\right)\mathrm{d}x = \dfrac{(2x+1)^4}{8} + C$.

Vì $F\left(\dfrac{1}{2}\right) = 4$ nên $C = 2$. Suy ra $F(x) = \dfrac{(2x+1)^4}{8} + 2$.

Do đó $F\left(\dfrac{3}{2}\right) = 34$. □

⑦ Hàm số $f(x) = (1-2x)^5$ có một nguyên hàm là $F(x)$ thỏa $F\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{3}$. Tính $F(1)$ . . . .

ĐS: $F\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{71}{12}$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left((1-2x)^5\right)\mathrm{d}x = -\dfrac{(1-2x)^6}{12} + C$.

Vì $F\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{3}$ nên $C = 6$. Suy ra $F(x) = -\dfrac{(1-2x)^6}{12} + 6$.

Do đó $F\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{71}{12}$. □

⑧ Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(2x-3)^2$ thỏa $F(0)=\dfrac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P=\log_2[3F(1)-2F(2)]$ ....

ĐS: $P=\log_2[3F(1)-2F(2)]=2$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\left((2x-3)^2\right)\mathrm{d}x=\dfrac{(2x-3)^3}{6}+C$.

Vì $F(0)=\dfrac{1}{3}$ nên $C=\dfrac{29}{6}$. Suy ra $F(x)=\dfrac{(2x-3)^3}{6}+\dfrac{29}{6}\Rightarrow F(1)=\dfrac{13}{3};F(2)=5$.

Do đó $P=\log_2[3F(1)-2F(2)]=2$. □

⑨ Gọi $F_1(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f_1(x)=x(x+2)^2$ thỏa $F_1(0)=1$ và $F_2(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f_2(x)=x^3+4x^2+5$ thỏa $F_2(0)=-2$. Tìm nghiệm của phương trình $F_1(x)=F_2(x)$.......

ĐS: $\left\{1;\dfrac{3}{2}\right\}$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F_1(x)=\displaystyle\int f_1(x)\,\mathrm{d}x=\int x(x+2)^2\,\mathrm{d}x=\int\left(x^3+4x^2+4x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{4x^3}{3}+2x^2+C$.

Vì $F_1(0)=1$ nên $C=1$. Suy ra $F_1(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{4x^3}{3}+2x^2+1$ (1).

Tương tự $F_2(x)=\displaystyle\int f_2(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(x^3+4x^2+5\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{4x^3}{3}+5x+C$.

Vì $F_2(0)=-2$ nên $C=-2$. Suy ra $F_2(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{4x^3}{3}+5x-2$ (2).

Từ (1) và (2), ta có $F_1(x)=F_2(x)\Leftrightarrow 2x^2+1=5x-2\Leftrightarrow 2x^2-5x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\dfrac{3}{2}.\end{array}\right.$ □

⑩ Gọi $F_1(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f_1(x)=(x+1)(x+2)$ thỏa $F_1(0)=0$ và $F_2(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f_2(x)=x^2+x-2$ thỏa $F_2(0)=0$. Biết phương trình $F_1(x)=F_2(x)$ có hai nghiệm là x_1, x_2. Tính $2^{x_1}+2^{x_2}$ ....

ĐS: $\dfrac{17}{16}$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F_1(x)=\displaystyle\int f_1(x)\,\mathrm{d}x=\int(x+1)(x+2)\,\mathrm{d}x=\int\left(x^2+3x+2\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3x^3}{2}-2x+C$.

Vì $F_1(0)=0$ nên $C=0$. Suy ra $F_1(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3x^3}{2}-2x$ (1).

Tương tự $F_2(x)=\displaystyle\int f_2(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(x^2+x^2-2\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-2x+C$.

Vì $F_2(0)=0$ nên $C=0$. Suy ra $F_2(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-2x$ (2).

Từ (1) và (2), ta có $F_1(x)=F_2(x)\Leftrightarrow\dfrac{3x^2}{2}+2x=\dfrac{x^2}{2}-2x\Leftrightarrow x^2+4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-4.\end{array}\right.$

Khi đó $2^0+2^{-4}=\dfrac{17}{16}$. □

Ví dụ 3. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ (giả sử điều kiện được xác định). $f(x)=x^2-3x+\dfrac{1}{x}\Rightarrow$

$F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=$..........

ĐS: $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3}{2}x^2+\ln|x|+C$

Lời giải: Ta có $F(x)=\displaystyle\int\left(x^2-3x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+\ln|x|+C$.

Bài 3. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ (giả sử điều kiện được xác định).

① $f(x)=3x^2+\dfrac{1}{x}-2\Rightarrow F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=$ ....

ĐS: $x^3+\ln|x|-2x+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int\left(3x^2+\frac{1}{x}-2\right)\mathrm{d}x=x^3+\ln|x|-2x+C$. □

② $f(x)=3x^2-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}\Rightarrow F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=$ ....

ĐS: $x^3-2\ln|x|+\dfrac{1}{x}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int\left(3x^2-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=x^3-2\ln|x|+\frac{1}{x}+C$. □

③ $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{x}\Rightarrow F(x)=\displaystyle\int\frac{x^2-3x+1}{x}\,\mathrm{d}x=$ ....

$=$ ....

ĐS: $\dfrac{x^2}{2}-3x+\ln|x|+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int\frac{x^2-3x+1}{x}\,\mathrm{d}x=\int\left(x-3+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}-3x+\ln|x|+C$. □

④ $f(x)=\dfrac{2x^4-x^2-3x}{x^2}\Rightarrow F(x)=\displaystyle\int\frac{2x^4-x^2-3x}{x^2}\,\mathrm{d}x=$ ....

$=$ ....

ĐS: $\dfrac{2x^3}{3}-x-3\ln|x|+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int\frac{2x^4-x^2-3x}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int\left(2x^2-1-\frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{2x^3}{3}-x-3\ln|x|+C$. □

⑤ $f(x)=\dfrac{1}{2x-1}$ ....

ĐS: $\dfrac{1}{2}\ln|2x-1|+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int\frac{1}{2x-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(2x-1)}{2x-1}=\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$. □

⑥ $f(x)=\dfrac{1}{3-4x}$ ....

ĐS: $-\dfrac{1}{4}\ln|3-4x|+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\int \dfrac{1}{3-4x}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{4}\int\dfrac{\mathrm{d}(3-4x)}{3-4x}=-\dfrac{1}{4}\ln|3-4x|+C.$ □

⑦ $f(x)=\dfrac{5}{3x+1}$ ....

ĐS: $\dfrac{5}{3}\ln|3x+1|+C.$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\int \dfrac{5}{3x+1}\mathrm{d}x=\dfrac{5}{3}\int\dfrac{\mathrm{d}(3x+1)}{3x+1}=\dfrac{5}{3}\ln|3x+1|+C.$ □

⑧ $f(x)=\dfrac{3}{2-4x}$ ....

ĐS: $-\dfrac{3}{4}\ln|2-4x|+C.$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\int \dfrac{3}{2-4x}\mathrm{d}x=-\dfrac{3}{4}\int\dfrac{\mathrm{d}(2-4x)}{2-4x}=-\dfrac{3}{4}\ln|2-4x|+C.$ □

⑨ $f(x)=\dfrac{2}{5-2x}+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}$ ....

ĐS: $-\ln|5-2x|+2\ln|x|-\dfrac{3}{x}+C.$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\int\left(\dfrac{2}{5-2x}+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)\mathrm{d}x=-\int\dfrac{\mathrm{d}(5-2x)}{5-2x}+2\int\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x+3\int\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\ln|5-2x|+2\ln|x|-\dfrac{3}{x}+C.$ □

⑩ $f(x)=\dfrac{4}{2x+1}+\dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{x^2}$ ....

ĐS: $2\ln|2x+1|+5\ln|x|+\dfrac{2}{x}+C.$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\int\left(\dfrac{4}{2x+1}+\dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x=2\int\dfrac{\mathrm{d}(2x+1)}{2x+1}+5\int\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x-2\int\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=2\ln|2x+1|+5\ln|x|+\dfrac{2}{x}+C.$ □

⑪ $f(x)=\dfrac{12}{(x-1)^2}+\dfrac{2}{2x-3}$ ....

ĐS: $-\dfrac{12}{x-1}+\ln|2x-3|+C.$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\int\left(\dfrac{12}{(x-1)^2}+\dfrac{2}{2x-3}\right)\mathrm{d}x=12\int(x-1)^{-2}\mathrm{d}(x-1)+\int\dfrac{\mathrm{d}(2x-3)}{2x-3}=-\dfrac{12}{x-1}+\ln|2x-3|+C.$ □

⑫ $f(x)=\dfrac{6}{(3x-1)^2}-\dfrac{9}{3x-1}$ ....

ĐS: $-\dfrac{2}{3x-1}-3\ln|3x-1|+C.$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\int\left(\dfrac{6}{(3x-1)^2}-\dfrac{9}{3x-1}\right)\mathrm{d}x=2\int(3x-1)^{-2}\mathrm{d}(3x-1)-3\int\dfrac{\mathrm{d}(3x-1)}{3x-1}=-\dfrac{2}{3x-1}-3\ln|3x-1|+C.$ □

Ví dụ 4. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ (giả sử điều kiện được xác định). $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{(2-x)^2}-2x \Rightarrow F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=$ ....

ĐS: $\ln|x|-\dfrac{1}{x-2}-x^2+C$

Lời giải: Ta có $F(x)=\displaystyle\int\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{(2-x)^2}-2\right)\mathrm{d}x=\ln|x|-\dfrac{1}{x-2}-x^2+C.$

Bài 4. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ (giả sử điều kiện được xác định).

① $f(x)=\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{4}{x^4}\Rightarrow F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=$ ....

ĐS: $-\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{3x^3}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int\left(\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{4}{x^4}\right)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{3x^3}+C.$ □

② $f(x)=\dfrac{2}{(2x-1)^3}\Rightarrow F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=$ ....

ĐS: $-\dfrac{1}{2(2x-1)^2}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int\left(\dfrac{2}{(2x-1)^3}\right)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2(2x-1)^2}+C.$ □

Bài 5. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện $F(x_\circ)=k$.

① Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2x-5}$ thỏa mãn $F(1)=2\ln\sqrt{3}$ ....

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{2}\ln|2x-5|+\dfrac{1}{2}\ln 3$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{2x-5}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln|2x-5|+C.$

Vì $F(1)=2\ln\sqrt{3}$ nên $C=\dfrac{1}{2}\ln 3$. Suy ra $F(x)=\dfrac{1}{2}\ln|2x-5|+\dfrac{1}{2}\ln 3.$ □

② Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{5}{2-10x}$ thỏa mãn $F(2)=3\ln 2$ ....

ĐS: $F(x)=-\dfrac{1}{2}\ln|10x-2|+\dfrac{1}{2}\ln 18+3\ln 2$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{5}{2-10x}\,\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\ln|10x-2|+C.$

Vì $F(2)=3\ln 2$ nên $C=\dfrac{1}{2}\ln 18+3\ln 2$. Suy ra $F(x)=-\dfrac{1}{2}\ln|10x-2|+\dfrac{1}{2}\ln 18+3\ln 2.$ □

③ Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ và $F(2)=1$. Tính $F(3)$ ....

ĐS: $F(3)=\ln 2+1$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x=\ln|x-1|+C.$

Vì $F(2)=1$ nên $C=1$. Suy ra $F(x)=\ln|x-1|+1$. Do đó $F(3)=\ln 2+1.$ □