TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

CÁC BÀI TOÁN

NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

CHINH PHỤC OLYMPIC TOÁN

LỜI GIỚI THIỆU

Trong đề thi thử của các trường hay trong đề thi THPT Quốc Gia thì các bài toán về chủ đề nguyên hàm tích phân chiếm khoảng 7 câu từ dễ đến khó, nhằm giúp bạn đọc phần nào có cái nhìn toàn diện về các câu hỏi liên quan tới vấn đề này trong các đề thi của năm vừa rồi và đồng thời có thêm nhiều kiến thức hay và khó khác thì trong chuyên đề này mình đã đề cập tới rất nhiều các vấn đề khó như các bài toán liên quan tới phương trình vi phân, bất đẳng thức tích phân… Để có thể viết nên được chuyên đề này không thể không có sự tham khảo từ các nguồn tài liệu của các các group, các khóa học, tài liệu của các thầy cô mà tiêu biểu là

1. Thầy Lã Duy Tiến – Giáo viên trường THPT Bình Minh
2. Group Nhóm toán: https://www.facebook.com/groups/nhomtoan/
3. Group Hs Vted.vn: https://www.facebook.com/groups/vted.vn/
4. Group Nhóm Toán và Latex: https://www.facebook.com/groups/toanvalatex/
5. Website Toán học Bắc – Trung – Nam: http://toanhocbactrungnam.vn/
6. Website Toanmath: https://toanmath.com/
7. Anh Phạm Minh Tuấn: https://www.facebook.com/phamminhtuan.2810
8. Thầy Lê Phúc Lữ - Công tác tại phòng R&D Công ty Fsoft thuộc tập đoàn FPT.
9. Thầy Đặng Thành Nam – Giảng viên Vted
10. Thầy Huỳnh Đức Khánh
11. Thầy Nguyễn Thanh Tùng
12. Bạn Nguyễn Quang Huy – Sinh viên đại học bách khoa Hà Nội

Trong bài viết mình có sưu tầm từ nhiều nguồn nên có thể sẽ có những câu hỏi chưa hay hoặc chưa phù hợp mong bạn đọc bỏ qua. Trong quá trình biên soạn không thể tránh khỏi những thiếu sót, mong bạn đọc có thể góp ý trực tiếp với mình qua địa chỉ sau:

Nguyễn Minh Tuấn

Sinh viên K14 – Khoa học máy tính – Đại học FPT

Facebook: https://www.facebook.com/tuankhmt.fpt

Email: tuangenk@gmail.com

Blog: https://lovetoan.wordpress.com/

CÁC BÀI TOÁN NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

Nguyễn Minh Tuấn

Nguyên hàm tích phân có thể được coi là một phần toán tương đối hay và khó luôn xuất hiện trong đề thi THPT Quốc Gia, để cùng mở đầu về chương này, mình xin giới thiệu và khái quát đôi nét về lịch sử của các bài toán nguyên hàm và tích phân và sơ qua về chương trình ta sẽ học sắp tới.

GIỚI THIỆU ĐÔI NÉT VỀ LỊCH SỬ

Các ý tưởng giúp hình thành môn vi tích phân phát triển qua một thời gian dài. Các nhà toán học Hi Lạp là những người đã đi những bước tiên phong. Leucippus, Democritus và Antiphon đã có những đóng góp vào phương pháp "vét cạn" của Hi Lạp, và sau này được Euxodus, sống khoảng 370 trước Công Nguyên, nâng lên thành lí luận khoa học. Sở dĩ gọi là phương pháp "vét cạn" vì ta xem diện tích của một hình được tính bằng vô số hình, càng lúc càng lấp đầy hình đó. Tuy nhiên, chỉ có Archimedes (Ac-xi-met), (287-212 B.C), mới là người Hi Lạp kiệt xuất nhất. Thành tựu to lớn đầu tiên của ông là tình được diện tích giới hạn bởi tam giác cong parabol bằng 4/3 diện tích của tam giác có cùng đáy và đỉnh và bằng 2/3 diện tích của hình bình hành ngoại tiếp. Để tìm ra kết quả này, Ác-xi-met dựng một dãy vô tận các tam giác, bắt đầu với tam giác có diện tích bằng A và tiếp tục ghép thêm các tam giác mới nằm xen giữa các tam giác đã có với đường parabol. Hình parabol dần dần được lấp đầy bởi các tam giác có tổng diện tích là:

$$\mathrm{A},\mathrm{A}+\frac{\mathrm{A}}{4},\mathrm{A}+\frac{\mathrm{A}}{4}+\frac{\mathrm{A}}{16},\mathrm{A}+\frac{\mathrm{A}}{4}+\frac{\mathrm{A}}{16}+\frac{\mathrm{A}}{64}....$$

Diện tích giới hạn bởi parabol là: $\mathrm{A}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+...\right)=\frac{4\mathrm{A}}{3}$

Ác-xi-met cũng dùng phương pháp "vét cạn" để tính diện tích hình tròn. Đây là mô hình đầu tiên của phép tính tích phân, nhờ đó ông đã tìm được giá trị gần đúng của số pi ở khoảng giữa hai phân số 3 10/71 và 3 1/7. Trong tất cả những khám phá của mình, Ac-xi-met tâm đắc nhất là công thức tính thể tích hình cầu. "*Thể tích hình cầu thì bằng 2/3 thể tích hình trụ ngoại tiếp*". Thể theo nguyện vọng lúc sinh thời, sau khi ông mất, người ta cho dựng một mộ bia có khắc hoa văn một hình cầu nội tiếp một hình trụ. Ngoài toán học, Ac-xi-met còn có những phát minh về cơ học, thủy động học. Tất cả học sinh đều quen thuộc với định luật mang tên ông về sức đẩy một vật thể khi nhúng vào một chất lỏng cùng với câu thốt bất hủ "*Eureka! Eureka!*" (Tìm ra rồi! Tìm ra rồi!) khi ông đang tắm. Ông tìm ra các định luật về đòn bẩy cùng câu nói nổi tiếng "*Hãy cho tôi một điểm tựa, tôi sẽ nhấc bổng quả đất*").

Dù ông có vẽ thích toán học hơn vật lí, nhưng Ac-xi-met vẫn là một kỹ sư thiên tài. Trong những năm quân xâm lược La Mã hùng mạnh tấn công đất nước Syracuse quê hương ông, nhờ có những khí tài do ông sáng chế như máy bắn đá, cần trục kéo lật tàu địch, gương parabol đốt cháy chiến thuyền, đã giúp dân thành Syracuse cầm chân quân địch hơn 3 năm. Cuối cùng quân La Mã cũng tràn được vào thành. Dù có lệnh tướng La Mã là Marcus không được giết chết ông, một tên lính La Mã thô bạo xông vào phòng làm việc khi ông đang mê mãi suy nghĩ cạnh một sa bàn một bài toán hình dang dở. Khi thấy bóng của nó đổ lên hình vẽ, ông quát lên: " Đừng quấy rầy đến các đương tròn của ta !". Thế là tên lính nỗi cáu, đâm chết ông. Sau khi ông mất, nền toán học hầu như rơi vào trong bóng tối cho đến thế kỹ thứ 17. Lúc này do nhu cầu kỹ thật, phép tính vi tích phân trở lại để giải quyết những bài tóan về sự biến thiên các đại lượng vật lý. Phép tính vi tích phận được phát triển nhờ tìm ra cách giải quyết được bốn bài toán lớn của thời đại:

1. Tìm tiếp tuyến của một đường cong.
2. Tìm độ dài của một đường cong.
3. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của một đại lượng ; ví dụ tìm khỏang cách gần nhất và xa nhất giữa một hành tinh và mặt trời, hoặc khoảng cách tối đa mà một đạn đạo có thể bay tới theo góc bắn đi của nó.
4. Tìm vận tốc và gia tốc của một vật thể theo thời gian biết phương trình giờ của vật thể ấy.

Vào khoảng giữa thế kỷ 17, những anh tài của thời đại, như Fermat, Roberval, Descartes, Cavalieri lao vào giải các bài toán này. Tất cả cố gắng của họ đã đạt đến đỉnh cao khi Leibniz và Newton hoàn thiện phép tính vi tích phân. Leibniz (1646-1716) Ông là một nhà bác học thiên tài, xuất sắc trên nhiều lãnh vực: một nhà luật học, thần học, triết gia, nhà chính trị. Ông cũng giỏi về địa chất học, siêu hình học, lịch sử và đặc biệt toán học. Leibniz sinh ở Leipzig, Đức. Cha là một giáo sư triết học tại Đại học Leipzig, mất khi ông vừa sáu tuổi. Cậu bé suốt ngày vùi đầu ở thư viện của cha, ngấu nghiến tất cả các quyển sách về đũ mọi vần đề. Và thói quen này đã theo cậu suôt đời. Ngay khi mới 15 tuổi, ông đã được nhận vào học luật tại Đại học Leipzig, và 20 tuổi đã đậu tiến sĩ luật. Sau đó, ông hoạt động trong ngành luật và ngoại giao, làm cố vẩn luật pháp cho các ông vua bà chúa. Trong những chuyến đi công cán ở Paris, Leibnz có dịp gặp gỡ nhiều nhà toán học nổi tiếng, đã giúp niềm say mê toán học của ông thêm gia tăng. Đặc biệt, nhà vật lí học lừng danh Huygens đã dạy ông toán học. Vì không phải là dân toán học chuyên nghiệp, nên có nhiều khi ông khám phá lại những định lí toán học đã được các nhà toán học khác biết trước. Trong đó có sự kiện được hai phe Anh Đức tranh cãi trong suốt 50 năm. Anh thì cho chính Newton là cha đẻ của phép tính vi tích phân trong khi Đức thì nói vinh dự đó phải thuộc về Leibniz. Trong khi hai đương sự thì không có ý kiến gì. Đúng ra là hai người đã tìm được chân lý trên một cách độc lập: Leibniz tìm ra năm 1685, mười năm sau Newton, nhưng cho in ra công trình của mình trước Newton hai mươi năm. Leibniz sống độc thân suốt đời và mặc dù có những đóng góp kiệt xuất, ông không nhận được những vinh quang như Newton. Ông trải qua những năm cuối đời trong cô độc và nổi cay đắng. Newton(1642-1727) - Newton sinh ra tại một ngôi làng Anh Quốc. Cha ông mất trước khi ông ra đời, một tay mẹ nuôi nấng và dạy dỗ trên nông trại nhà. Năm 1661, ông vào học tại trường đại học Trinity ở Cambridge mặc dủ điểm hình học hơi yếu. Tại đây ông được Barrow, nhà toán học tài năng chú ý. Ông lao vào học toán và khoa học, nhưng tốt ngghiệp loại bình thường. Vì bệnh dịch hoành hành khắp châu Âu và lan truyền nhanh chóng đến London, ông phải trở lại làng quê và trú ngụ tại đó trong hai năm 1665, 1666. Chính trong thời gian này, ông đã xây dựng những nền tảng của khoa học hiện đại: khám phá nguyên tắc chuyển động các hành tinh, của trọng lực, phát hiện bản chất của ánh sáng. Tuy thế ông không phổ biến các khám phá của mình. Ông trở lại Cambridge năm 1667 để lấy bằng cao học. Sau khi tốt nghiệp, ông dạy học tại Trinity. Năm 1669, ông giữ chức giáo sư trưởng khoa toán, kế nhiệm giáo sư Barrow, một chức danh vinh dự nhất trong giáo dục. Trong những năm sau đó, ông đã công thức hoá các đinh luật hấp dẫn, nhờ đó giải thích được sự chuyễn động của các hành tinh, mặt trăng và thủy triều.Ông cũng chế tạo ra kình viễn vọng hiện đại đầu tiên. Trong đời ông, ông ít khi chịu cho in các khám phá vĩ đại của mình, chỉ phổ biến trong phạm vi bạn bè đồng nghiệp. Năm 1687, trước sự khuyến khích nhiệt tình của nhà thiên văn học Halley, Newton mới chịu cho xúât bản cuốn Những nguyên tăc toán học. Tác phẩm này ngay lập tức được đánh giá là một trong những tác phẫm có ảnh hưởng lớn lao nhất của nhân loại. Cũng tương tự như thế, chỉ sau khi biết Leibniz đã in công trình của minh, ông mới công bố tác phẩm của mình về phép tính vi tich phân. Vĩ đại như thế, nhưng khi nói về minh ông luôn cho rằng sở dĩ ông có đôi khi nhìn xa hơn kẻ khác vì ông đứng trên vai của các vĩ nhân. Và với những khám phá lớn lao của mình, ông nói: "*Tôi thấy mình như một đứa trẻ chơi đùa trên bãi biển, may mắn gặp được những viên sỏi tròn trịa, hoặc một vỏ sò đẹp hơn bình thường, trong khi trước mặt là một đại dương bao la của chân lí mà tối chưa được biết*".

NỘI DUNG CỦA CHUYÊN ĐỀ

1. TÍCH PHÂN TRUY HỒI

Trong bài viết này chủ yếu là các bài toán ở dạng tự luân, mình sẽ giới thiệu qua để có thể không may đề thi thử của các trường có thể ra thì ta có thể xử lý được. Ở phần này ta sẽ cùng tìm hiểu các dạng tích phân truy hồi dạng $I_n=\int_{\alpha}^{\beta}f\left(x,n\right)dx$ với các câu hỏi hay gặp là:

1. Thiết lập công thức truy hồi $I_n=g\left(I_{n\pm k}\right)\left(k=\overline{1;n}\right)$.
2. Chứng minh công thức truy hồi cho trước.

3. Sau khi thiết lập được công thức truy hồi yêu cầu đi tính I_n ứng với một vài giá trị *n* nào đó hoặc tính giới hạn của hàm số hoặc dãy số có liên quan với I_n.

Ta cùng xét các ví dụ sau:

Ví dụ 1: Xét tích phân $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Tìm mối quan hệ giữa I_n, I_{n+2}
2. Tính I_5, I_6.
3. Tìm công thức tổng quát của I_n.
4. Xét dãy số (u_n) cho bởi $u_n = (n+1)I_n.I_{n+1}$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Lời giải

1. Tìm mối quan hệ giữa I_n, I_{n+2}

Ta có: $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\left(1-\cos^2 x\right)dx = I_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.\cos^2 xdx\,(1)$

Sử dụng công thức nguyên hàm từng phần ta đặt $\begin{cases} du = -\sin xdx \\ v = \int \sin^n x.\cos xdx = \dfrac{\sin^{n+1} x}{n+1} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin_n x.\cos^2 xdx = \left.\frac{\cos x \sin^{n+1} x}{n+1}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} xdx = \frac{I_{n+2}}{n+1}(2)$$

Thay (2) vào (1) ta được: $I_{n+2} = I_n - \dfrac{I_{n+2}}{n+1} \Leftrightarrow I_n = \dfrac{n+2}{n+1}I_{n+2}$

2. Tính I_5, I_6.

Sử dụng kết quả ở trên ta được: $\begin{cases} I_5 = \dfrac{4}{5}I_3 = \dfrac{8}{15}I_1 = \dfrac{8}{15}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx = \dfrac{8}{15} \\ I_6 = \dfrac{5}{6}I_4 = \dfrac{15}{24}I_2 = \dfrac{15}{24}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 xdx = \dfrac{15\pi}{96} \end{cases}$

3. Tìm công thức tổng quát của I_n.

Ta có: $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx = 1, I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 xdx = \dfrac{\pi}{4}$

Ta đã có kết quả $I_n = \dfrac{n+2}{n+1}I_{n+2}$, đến đây xét 2 trường hợp:

+ Trường hợp 1: $n = 2k\left(k \in \mathbb{N}^*\right)$. Ta có: $I_2 = \dfrac{4}{3}I_4, I_4 = \dfrac{6}{5}I_6, ..., I_{2k-2} = \dfrac{2k}{2k-1}I_{2k}$.

Nhân theo vế các đẳng thức ta được:

$$I_2 = \frac{4.6...2k}{3.5...(2k-1)}I_{2k} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{4.6...2k}{3.5...(2k-1)}I_{2k} \Leftrightarrow I_{2k} = \frac{3.5...(2k-1)}{4.6...2k}\frac{\pi}{4}$$

+ Trường hợp 2: Với n lẻ hay $n = 2k-1$, ta có: $I_1 = \dfrac{3}{2}I_3, I_3 = \dfrac{5}{4}I_5, ..., I_{2k-3} = \dfrac{2k-1}{2k-3}I_{2k-1}$.

Nhân theo vế các đẳng thức ta được:

$$I_{2k-1}=\frac{2.4...(2k-2)}{3.5...(2k-1)}I_1=\frac{2.4...(2k-2)}{3.5...(2k-1)}$$

4. Xét dãy số (u_n) cho bởi $u_n=(n+1)I_n.I_{n+1}$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

Ta có: $u_n=(n+1)I_n.I_{n+1}=(n+1).\frac{n+2}{n+1}I_{n+2}I_{n+1}=(n+2)I_{n+1}.I_{n+2}=u_{n+1}$

Vậy $u_{n+1}=u_n=...=u_1=2I_1I_2=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

Ví dụ 2: Xét tích phân $I_n=\int_0^1(1-x^2)^n\,dx$

1. Tính I_n
2. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}$

Lời giải

1. Tính I_n

Đặt $\begin{cases}u=(1-x^2)^n\\dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=n(1-x^2)^{n-1}(-2x)dx\\v=x\end{cases}$

$$\Rightarrow I_n=x(1-x^2)^n\Big|_0^1+2n\int_0^1x^2(1-x^2)^{n-1}dx$$

$$=2n\int_0^1\left(1-(1-x^2)\right)(1-x^2)^{n-1}dx=2n\left(\int_0^1(1-x^2)^{n-1}dx-\int_0^1(1-x^2)^n dx\right)=2n(I_{n-1}-I_n)$$

Vậy $I_n=2n(I_{n-1}-I_n)\Leftrightarrow I_n=\frac{2n}{2n+1}I_{n-1}\,(*)$

Từ $(*)$ ta có $I_n=\frac{2n}{2n+1}I_{n-1}=\frac{2n}{2n+1}.\frac{2n-2}{2n-1}I_{n-2}=\frac{4.6.8...2n}{5.7.9...(2n+1)}I_1$

Mặt khác ta lại có: $I_1=\int_0^1(1-x^2)dx=\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}\Rightarrow I_n=\frac{2.4.6.8...2n}{3.5.7.9...(2n+1)}$.

2. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}$

Ta có: $I_n=\frac{2n}{2n+1}I_{n-1}\Rightarrow I_{n+1}=\frac{2(n+1)}{2(n+1)+1}I_n\Leftrightarrow\frac{I_{n+1}}{I_n}=\frac{2n+2}{2n+3}\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n+2}{2n+3}=1$

Ví dụ 3: Xét tích phân $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$ với $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Chứng minh rằng $I_{n+2}=\frac{1}{n+1}-I_n$
2. Tính I_5,I_6

Lời giải

1. Ta có:

$$I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\left(\tan^{n+2}x+\tan^n x\right)-\tan^n x\right)dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan^n x\left(\tan^2 x+1\right)-\tan^n x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^n x}{\cos^2 x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xd\left(\tan x\right)-I_n=\frac{1}{n+1}-I_n$$

Ta có điều phải chứng minh!

2. Ta có:

- $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\left(\cos x\right)}{\cos x}=\frac{1}{2}\ln 2$
- $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\left(\tan x-x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{4-\pi}{4}$

Áp dụng công thức truy hồi $I_{n+2}=\frac{1}{n+1}-I_n$ ta được:

- $I_5=\frac{1}{4}-I_3=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-I_1\right)=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}$
- $I_6=\frac{1}{5}-I_4=\frac{1}{5}-\left(\frac{1}{3}-I_2\right)=\frac{13}{15}-\frac{\pi}{4}$

Ví dụ 4:

1. Xét tích phân $I_n=\int_0^1\frac{e^{nx}dx}{1+e^x}$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng $I_n=\frac{e^{n-1}-1}{n-1}-I_{n-1}$.
2. Xét tích phân $I_n=\int_0^3\left(3-x\right)^n e^x dx$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng $I_n=-3^n+nI_{n-1}$

Lời giải

1. Ta có:

$$I_n+I_{n-1}=\int_0^1\frac{e^{nx}dx}{1+e^x}+\int_0^1\frac{e^{x(n-1)}dx}{1+e^x}=\int_0^1\frac{e^{x(n-1)}\left(e^x+1\right)dx}{1+e^x}=\frac{e^{x(n-1)}}{n-1}\Bigg|_0^1=\frac{e^{n-1}-1}{n-1}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh!

2. Xét tích phân $I_n=\int_0^3\left(3-x\right)^n e^x dx$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng $I_n=-3^n+nI_{n-1}$

Đặt $\begin{cases}u=\left(3-x\right)^n\\ dv=e^x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-n\left(3-x\right)^{n-1}dx\\ v=e^x\end{cases}\Rightarrow I_n=\left(3-x\right)^n e^x\Big|_0^3+n\int_0^3\left(3-x\right)^{n-1}e^x dx=-3^n+nI_{n-1}$

Từ đây có điều phải chứng minh!

Ví dụ 5: Cho $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Biết $\left(u_n\right)$ là dãy cho bởi $u_n=\frac{I_n}{I_{n+1}}$. Tìm $\lim u_n$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases}u=v^n\\ dv=\sqrt{1-x}\,dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=nx^{n-1}dx\\ v=\int\sqrt{1-x}\,dx=-\frac{2}{3}\left(\sqrt{1-x}\right)^3\end{cases}$

$$\Rightarrow I_n = -\frac{2}{3}x^n\left(\sqrt{1-x}\right)^3\Big|_0^1 + \frac{2}{3}n\int_0^1\left(\sqrt{1-x}\right)^3.x^{n-1}dx$$

$$= \frac{2}{3}n\left(\int_0^1\sqrt{1-x}.x^{n-1}dx - \int_0^1\sqrt{1-x}.x^n dx\right) = \frac{2}{3}n\left(I_{n-1} - I_n\right)$$

Vậy $I_n = \frac{2}{3}n\left(I_{n-1} - I_n\right) \Rightarrow I_n = \frac{2n}{2n+3}I_{n-1} \Rightarrow I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5}I_n \Rightarrow \lim u_n = \lim\frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$

2. NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN HÀM PHÂN THỨC HỮU TỶ

Nguyên hàm phân thức hữu tỷ là một bài toán khá cơ bản, nhưng cũng được phát triển ra rất nhiều bài toán khó, trong mục này ta sẽ tìm hiểu cách giải quyết dạng toán này. Tổng quát với hàm hữu tỉ, nếu bậc của tử lớn hơn hoặc bằng bậc của mẫu thì phải chia tách phần đa thức, còn lại hàm hữu tỉ với bậc tử bé hơn mẫu. Nếu bậc của tử bé hơn bậc của mẫu thì phân tích mẫu ra các thừa số bậc nhất $(x+a)$ hay (x^2+px+q) bậc hai vô nghiệm rồi đồng nhất hệ số theo phần tử đơn giản: $\frac{A}{x+a};\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$. Đồng nhất hệ số ở tử thức thì tính được các hằng số A, B, C, … Kết hợp với các biến đổi sai phân, thêm bớt đặc biệt để phân tích nhanh.

CÁC DẠNG TÍCH PHÂN ĐA THỨC HỮU TỶ.

- $\int_a^b |P(x)|dx$: Chia miền xét dấu $P(x)$,
- $\int_a^b x(mx+n)^{\alpha} dx$: Đặt $u=mx+n$ hoặc phân tích,
- $\int_a^b (mx+n)(px^2+qx+r)^{\alpha} dx$: Đặt $u=px^2+qx+r$,
- $\int_a^b (x+m)^{\alpha}.(x+m)^{\beta} dx$: Nếu $\alpha<\beta$ thì đặt $u=x+n$.

CÁC DẠNG TÍCH PHÂN HÀM PHÂN THỨC

1. Dạng $\int_a^b \frac{1}{px^2+qx+r}dx$. Lập $\Delta=q^2-4pr$.

- Nếu $\Delta=0 \Rightarrow \int_a^b \frac{dx}{(mx+n)^2}$, dùng công thức của hàm đa thức.
- Nếu $\Delta<0 \Rightarrow \int_a^b \frac{dx}{x^2+k^2}$, đặt $x=k\tan t$
- Nếu $\Delta>0 \Rightarrow \int_a^b \frac{dx}{x^2-k^2}$, biến đổi $\frac{1}{x^2-k^2}=\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{x-k}-\frac{1}{x+k}\right)$

2. Dạng $\int_a^b \frac{mx+n}{px^2+qx+r}dx$. Lập $\Delta=q^2-4pr$

- Nếu $\Delta\ge 0 \Rightarrow$ Phân tích và dùng công thức.
- Nếu $\Delta<0 \Rightarrow \frac{mx+n}{px^2+qx+r}=\frac{A(px^2+qx+r)'}{px^2+qx+r}+\frac{B}{(x+\alpha)^2+k^2}$