

# MỤC LỤC

## PHẦN I GIẢI TÍCH

Chương 1. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ	3
Chương 2. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM	59
Chương 3. NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN	77
Chương 4. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN	95

## PHẦN II HÌNH HỌC

Chương 5. VECTƠ VÀ HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN	118
Chương 6. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN	140



PHẦN

# GIẢI TÍCH



# ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

## Câu 1

Một vật có chuyển động thẳng được xác định bởi phương trình  $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t + 2$  với  $t > 0$ ,  $t$  tính bằng giây và  $s$  tính bằng mét. Bắt đầu từ thời điểm nào (giây) thì vận tốc của vật tăng?  
KQ:

👉 Lời giải.

.....

.....

.....

.....

## Câu 2

Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt khoảng cách là 300 km. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước yên là  $v$  km/h thì năng lượng tiêu hao của cá trong  $t$  giờ được cho bởi công thức  $E(v) = cv^3t$ , trong đó  $c$  là hằng số và  $E$  tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là bao nhiêu thì năng lượng tiêu hao của cá bắt đầu tăng dần?  
KQ:

👉 Lời giải.

.....

.....

.....

.....

## Câu 3

Thể tích  $V$  (cm<sup>3</sup>) của 1 kg nước tại nhiệt độ  $T$  ( $0 \leq T \leq 30$ ) đơn vị °C được tính theo công thức

$$V(T) = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000679T^3.$$

Thể tích nước  $V(T)$  giảm trong khoảng nhiệt độ  $(a; b)$  với  $b$  làm tròn đến hàng đơn vị. Tính tổng  $a + b$ .  
KQ:

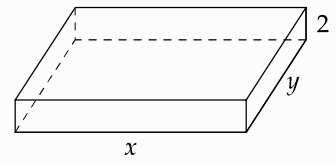
👉 Lời giải.

.....

.....

**Câu 4**

Người ta muốn xây một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật, thể tích  $1800 \text{ m}^3$  và chiều sâu  $2 \text{ m}$  (tham khảo hình vẽ). Biết rằng chi phí xây mỗi đơn vị diện tích của đáy bể gấp hai lần so với thành bể. Gọi  $x$  và  $y$  là kích thước bể như hình vẽ. Khảo sát mối quan hệ giữa chi phí xây dựng bể  $f(x)$  và kích thước  $x$  ta thu được bảng biến thiên như sau:



$x$	$0$	$a$	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$+\infty$		$f(a)$	$+\infty$

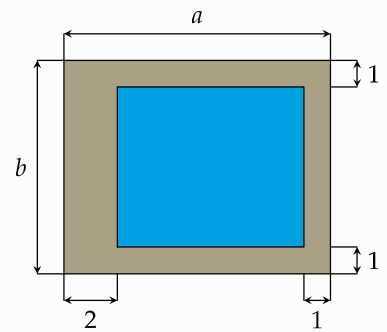
Tính giá trị  $2a$ .

KQ:

**Lời giải.**

**Câu 5**

Người ta muốn thiết kế một lồng nuôi cá có bề mặt hình chữ nhật bao gồm phần mặt nước có diện tích bằng  $54 \text{ m}^2$  và phần đường đi xung quanh có thiết kế như hình vẽ (đơn vị: mét). Khi kích thước  $a$  thay đổi trong khoảng  $(3; +\infty)$  thì giá trị hàm số mô tả diện tích lối đi theo kích thước  $a$  sẽ giảm đến giá trị  $S_0$  rồi tăng lên. Xác định giá trị  $S_0$ .



KQ:

**Lời giải.**

## Câu 6

Hằng ngày mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu  $h$  (m) của mực nước trong kênh tại thời điểm  $t$  (giờ) ( $0 \leq t \leq 24$ ) trong ngày được xác định bởi công thức  $h = 2 \cos\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3}\right) + 5$ . Gọi  $(a; b)$  là khoảng thời gian lớn nhất trong ngày mà độ sâu của mực nước trong kênh tăng dần. Tính giá trị của  $a + b$ . KQ:

👉 Lời giải.

## Câu 7

Xí nghiệp  $A$  sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết rằng hàm tổng chi phí sản xuất là  $TC = x^3 - 77x^2 + 1000x + 40000$  và hàm doanh thu là  $TR = -2x^2 + 1312x$ , với  $x$  là số sản phẩm. Lợi nhuận của xí nghiệp  $A$  được xác định bằng hàm số  $f(x) = TR - TC$ , cực đại lợi nhuận của xí nghiệp  $A$  khi đó đạt bao nhiêu sản phẩm? KQ:

👉 Lời giải.

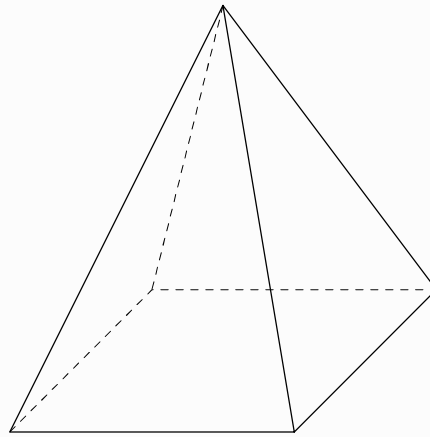
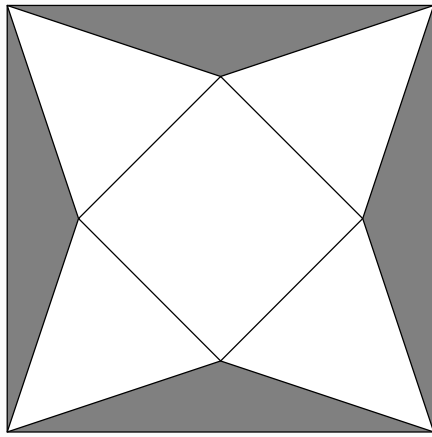
## Câu 8

Khi loại thuốc  $A$  được tiêm vào bệnh nhân, nồng độ mg/l của thuốc trong máu sau  $x$  phút được xác định bởi công thức  $C(x) = \frac{30x}{x^2 + 2}$ . Để đưa ra những lời khuyên và cách xử lý phù hợp cho bệnh nhân, ta cần tìm khoảng thời gian mà nồng độ của thuốc trong máu đang tăng. Em hãy cho biết hàm nồng độ thuốc trong máu  $C(x)$  đạt giá trị cực đại là bao nhiêu trong khoảng thời gian 6 phút sau khi tiêm (làm tròn đến hàng phần mười)? KQ:

👉 Lời giải.

## Câu 9

Một tấm bạt hình vuông cạnh 20 m như hình vẽ dưới đây. Người ta dự tính cắt phần tô đậm của tấm bạt rồi gập và may lại, nhằm mục đích phủ lên tháp đèn trang trí để tránh hư hại tháp khi trời mưa.



Biết khối chóp hình thành sau khi gập và may lại cần thể tích lớn nhất thì mới phủ kín tháp đèn. Hỏi phần diện tích tấm bạt bị cắt là bao nhiêu để đảm bảo yêu cầu trên?

KQ:

**Lời giải.**

.....

.....

.....

**Câu 10**

Người ta thấy rằng trong vòng 3 năm tính từ đầu năm 2020, giá thành  $P$  của một loại sản phẩm vào tháng thứ  $t$  thay đổi theo công thức

$$P(t) = 80t^3 - 3600t^2 + 48000t + 100000 \text{ (đồng) với } 0 \leq t \leq 36.$$

Biết giá thành đạt cực đại vào thời điểm  $t_1$  và giá thành đạt cực tiểu vào thời điểm  $t_2$ . Khi đó, giá trị của  $2t_1 + t_2$  bằng bao nhiêu?

KQ:

**Lời giải.**

.....

.....

.....

**Câu 11**

Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 500 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất  $x$  sản phẩm ( $1 \leq x \leq 500$ ) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là  $F(x) = x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000$  (đồng), trong khi chi phí sản xuất bình quân cho một sản phẩm là  $G(x) = x + 1000 + \frac{250000}{x}$  (đồng). Doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

KQ:

📌 Lời giải.

.....

.....

.....

.....

**Câu 12**

Một doanh nghiệp tư nhân  $A$  chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung vào chiến lược kinh doanh xe  $X$  với chi phí mua vào một chiếc là 27 triệu đồng và bán ra với giá 31 triệu đồng. Với giá bán này, số lượng xe mà khách hàng đã mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang bán chạy này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán. Bộ phận nghiên cứu thị trường ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Gọi giá bán mới là  $x$  (triệu đồng) với  $x \in [27; 31]$ .

- Với giá bán mới là 30 triệu thì số xe bán ra là 200 chiếc.
- Lợi nhuận thu được biểu thị qua hàm số  $f(x) = -200x^2 + 12\,200x - 183\,600$ .
- Với giá bán mới là 30 triệu thì lợi nhuận thu được là 24 000 (triệu đồng).
- Giá bán mới là 30,5 triệu đồng thì lợi nhuận thu được là lớn nhất.

📌 Lời giải.

.....

.....

.....

.....

**Câu 13**

Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán với giá 30 000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3 000 chiếc. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhuận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30 000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1 000 đồng mỗi chiếc thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18 000 đồng.

- Nếu cơ sở bán mỗi chiếc khăn với giá 37 000 (đồng) thì số tiền lãi sau 1 tháng là 44 (triệu đồng).
- Sau khi cơ sở tăng giá mỗi chiếc khăn thêm  $x$  (nghìn đồng) thì tổng số lợi nhuận một tháng của cơ sở được tính theo công thức  $f(x) = -100x^2 + 1\,800x + 36\,000$ .
- Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì số khăn bán ra giảm 800 chiếc.
- Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì mỗi chiếc khăn cần bán với giá 39 000 đồng.

📌 Lời giải.

.....

.....

.....

.....

**Câu 14**

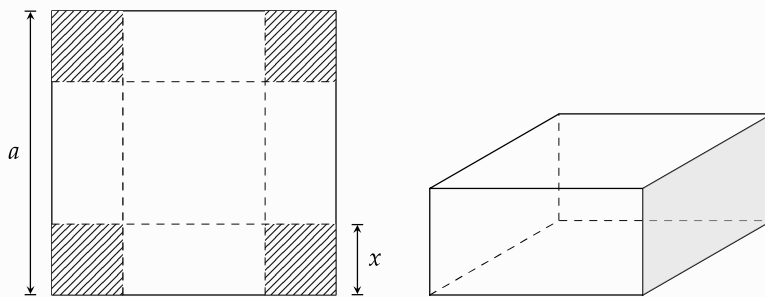
Ông Thanh nuôi cá chim ở một cái ao có diện tích là  $50 \text{ m}^2$ . Vụ trước ông nuôi với mật độ là  $20 \text{ con/m}^2$  và thu được 1,5 tấn cá. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình thì cứ thả giảm đi  $8 \text{ con/m}^2$  thì mỗi con cá khi thu hoạch tăng lên  $0,5 \text{ kg}$ ? Giả sử không có hao hụt khi nuôi.

- a) Số cá giống mà ông thanh đã thả trong vụ vừa qua là 1500 con.
- b) Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phần trong vụ vừa qua là 1,5 (kg).
- c) Tổng trọng lượng cá thu được ở vụ này là  $F(x) = -0,0652x^2 + 16x + 1500$  (kg).
- d) Vụ tới ông Thanh phải thả 488 con cá giống để được tổng năng suất khi thu hoạch là cao nhất.

**Lời giải.**

**Câu 15**

Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh  $a$ . Người ta cắt ở 4 góc 4 hình vuông bằng nhau, rồi gấp tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp.



- a) Thể tích của khối hộp là lớn nhất khi cạnh của hình vuông bị cắt bằng  $\frac{a}{12}$ .
- b) Thể tích của khối hộp là lớn nhất khi cạnh của hình vuông bị cắt bằng  $\frac{a}{6}$ .
- c) Thể tích của khối hộp lớn nhất bằng  $\frac{2a^3}{27}$ .
- d) Thể tích hộp lớn nhất bằng  $\frac{a^3}{27}$ .

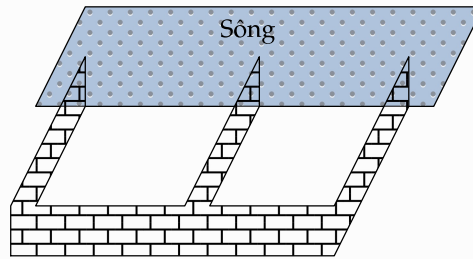
**Lời giải.**

**Câu 16**

Một người nông dân có 15 000 000 đồng muốn làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) để làm một khu đất có hai phần chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60 000 đồng một mét, còn đối với



ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50 000 đồng một mét. Gọi  $x$  là chiều dài 1 mặt hàng rào hình chữ  $E$  (trong ba mặt song song,  $x > 0$ ). Gọi  $y$  là chiều dài mặt hàng rào hình chữ  $E$  song song với bờ sông ( $y > 0$ ).



- Số tiền phải làm là 15 000 000 đồng.
- Diện tích đất  $S = 250x - \frac{5}{2}x^2$ .
- Diện tích lớn nhất của đất rào thu được  $\max_{(0;+\infty)} S = 6\,250$  ( $\text{m}^2$ ).
- Diện tích lớn nhất của đất rào thu được khi chiều dài 1 mặt hàng rào hình chữ  $E$  là 50 m.

👉 Lời giải.

.....

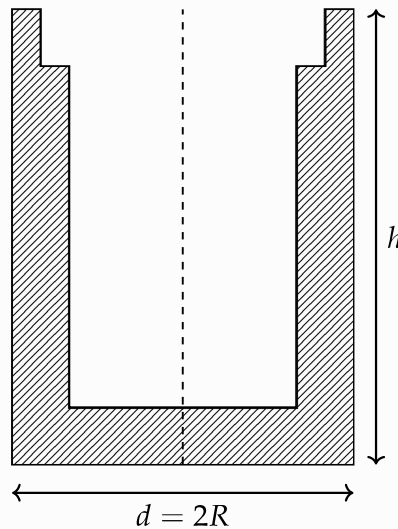
.....

.....

.....

### Câu 17

Bác Nam muốn xây dựng một hồ ga không nắp hình trụ với dung tích  $3\text{m}^3$ . Hãy tính chi phí ít nhất (đơn vị nghìn đồng) mà bác Nam phải bỏ ra xây dựng hồ ga, biết tiền công và vật liệu cho  $1\text{m}^3$  thành bê tông của hồ ga (thành bê tông đáy và thành bê tông xung quanh) là 685000 đồng.



KQ:

👉 Lời giải.

.....

**Câu 18**

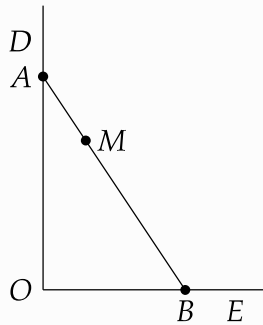
Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 24cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng  $x$  cm, rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ bên để được một cái hộp không nắp. Tìm  $x$  để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.

KQ:

**Lời giải.**

**Câu 19**

Người ta muốn xây một đoạn đường  $AB$  (như hình vẽ) và đoạn đường này phải đi qua điểm  $M$ . Biết rằng vị trí điểm  $M$  cách  $OD$  125m và cách  $OE$  1km. Giả sử chi phí để làm 100m đường là 150 triệu đồng. Chọn vị trí của  $A$  và  $B$  để hoàn thành con đường với chi phí thấp nhất. Hỏi chi phí thấp nhất để hoàn thành được con đường là bao nhiêu ?

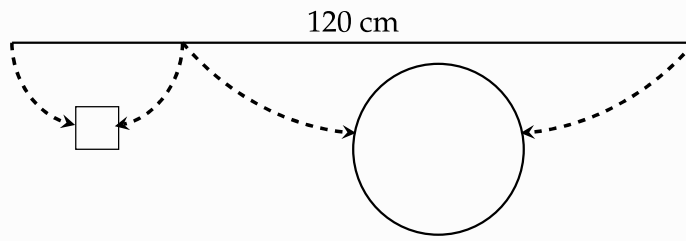


KQ:

**Lời giải.**

**Câu 20**

Một sợi dây kim loại dài 120 cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất được uốn thành hình vuông, đoạn dây thứ hai được uốn thành vòng tròn (tham khảo hình bên dưới).



Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn đạt giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu (làm tròn đến hàng đơn vị)? KQ:

👉 Lời giải.

### Câu 21

Lưu lượng xe ô tô vào đường hầm được cho bởi công thức  $f(v) = \frac{386v}{v^2 + 2v + 5}$  (xe/giây), trong đó  $v$  (km/h) là vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm. Tính vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm sao cho lưu lượng xe là lớn nhất. (làm tròn đến phần trăm)

KQ:

👉 Lời giải.

### Câu 22

Ông Nam cần xây dựng một bể nước mưa có thể tích  $V = 8 \text{ (m}^3\text{)}$  dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài gấp  $\frac{4}{3}$  lần chiều rộng, đáy và nắp đổ bê tông, cốt thép; xung quanh xây bằng gạch và xi măng. Biết rằng chi phí trung bình là  $980\,000 \text{ đ/m}^2$  và ở nắp đổ hờ một khoảng hình vuông có diện tích bằng  $\frac{2}{9}$  diện tích nắp bể. Tính chi phí thấp nhất mà ông Nam phải chi trả (làm tròn đến hàng trăm nghìn đồng). KQ:

👉 Lời giải.

**Câu 23**

Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong  $t$  (giờ) được cho bởi công thức  $c(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$  (mg/L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu (giờ) thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất? KQ:

**Lời giải.**

.....

.....

.....

**Câu 24**

Sự ảnh hưởng khi sử dụng một loại độc tố với vi khuẩn X được một nhà sinh học mô tả bởi hàm số  $P(t) = \frac{t + 1}{t^2 + t + 4}$ , trong đó  $P(t)$  là số lượng vi khuẩn sau  $t$  giờ sử dụng độc tố. Sau bao nhiêu giờ thì số lượng vi khuẩn X bắt đầu giảm? KQ:

**Lời giải.**

.....

.....

.....

**Câu 25**

Một vật chuyển động theo quy luật  $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$  với  $t$  là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và  $s$  là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu? KQ:

**Lời giải.**

.....

.....

.....

**Câu 26**

Một cửa hàng bán vải Thanh Hà với giá bán mỗi kg là 50 000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 25 kg. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm 4 000 đồng cho một kg thì số vải bán được tăng thêm là 50 kg. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về bán đầu mỗi kg là 30 000 đồng.

(làm tròn đến hàng nghìn đồng)

KQ: 

👉 Lời giải.

.....

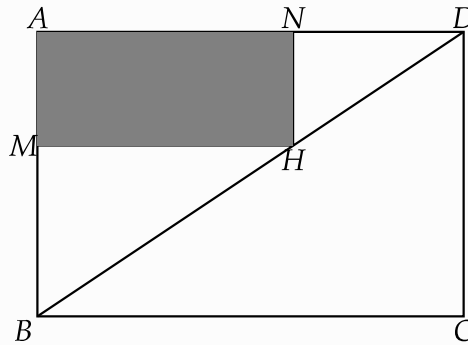
.....

.....

.....

**Câu 27**

Trên mảnh đất hình chữ nhật  $ABCD$  có diện tích  $25 m^2$ , người chủ lấy một phần đất để trồng cỏ. Biết phần đất trồng cỏ này có dạng hình chữ nhật với hai đỉnh đối diện là  $A$  và  $H$ , với  $H$  thuộc cạnh  $BD$ . Hỏi số tiền lớn nhất người chủ cần chuẩn bị để trồng cỏ (miền tô đậm) là bao nhiêu với chi phí trồng cỏ là  $70\,000$  đồng/ $m^2$ ? (làm tròn đến hàng nghìn)

KQ: 

👉 Lời giải.

.....

.....

.....

.....

**Câu 28**

Người ta muốn xây một bể chứa nước dạng hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng  $200 m^3$  đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công xây bể là  $300\,000$  đồng/ $m^2$ . Chi phí thuê nhân công thấp nhất là bao nhiêu (đơn vị triệu đồng, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

KQ: 

👉 Lời giải.

.....

.....

.....

.....