HƯỚNG DẪN CÁCH SỬ DỤNG SÁCH

Trước khi đưa ra các hướng sử dụng sách Công Phá Toán 2 hiệu quả, chúng tôi xin được nhắc lại tổng thể nội dung cuốn sách. Cuốn sách chúng tôi viết được chia thành 3 phần chính như sau:

- Hệ thống lý thuyết, kiến thức cần thiết ở mỗi chủ đề.
- Hệ thống tư duy, phương pháp giải các dạng toán thông qua các ví dụ cụ thể.
- Hệ thống các bài tập rèn luyện theo từng dạng bài, từng chuyên đề.

Cách học như thế nào cho hiệu quả?

Để sử dụng cuốn sách hiệu quả, các em nên có một kế hoạch cụ thể. Khi có kế hoạch cụ thể thì chúng ta mới đo lường được hiệu quả sử dụng sách. Ngoài ra, các em cũng nên chuẩn bị một bộ sách giáo khoa Toán bên cạnh để tra cứu khi cần thiết. Ở đây, chúng tôi xin phép được chia học sinh thành 3 đối tượng sử dụng sách:

Đối tượng 1: Mới bắt đầu học chương trình lớp 11 (các em chuẩn bị lên lớp 11)

Trong trường hợp này, cách duy nhất chúng tôi khuyên là các em nên học theo trình tự đã được sắp xếp ở trong sách, cứ lần lượt học: Đầu tiên đọc kĩ lý thuyết, phương pháp, tiếp theo đọc vào ví dụ minh họa và cuối cùng là luyện tập các bài tập rèn luyện. Tuy nhiên khi đọc lý thuyết hay phương pháp mà vẫn mơ màng, các em có thể bỏ qua, đọc tiếp vào phần Ví dụ minh họa. Trong một số trường hợp, thông qua lời giải và phân tích ở phần Ví dụ minh họa sẽ giúp các em hiểu ra và nắm vững phần lý thuyết, phương pháp hơn. Sau khi kết thúc mỗi chủ đề, các em bấm thời gian 90 phút để hoàn thiện các bài kiểm tra.

Đối tượng 2: Học xong chương trình lớp 11 (hoặc chuẩn bị thi THPT quốc gia)

Các em xem phần nào còn yếu, chưa chắc chắn thì đánh dấu lại, xem kĩ phần ví dụ minh họa. Sau khi xem xong các em luyện hết mọi bài trong phần Bài tập rèn luyện. Trong quá trình làm bài tập rèn luyện, nhớ đối chiếu ngược trở lại phần lý thuyết và ví dụ minh họa để khắc sâu kiến thức. Ngoài ra, các em cũng có thể làm ngay phần bài tập rèn luyện ở cuối mỗi chủ đề trước khi đọc kĩ nội dung. Việc nắm bắt xem mình đang ở mức độ nào trong các chủ đề trước khi đọc sẽ giúp các em có những định hướng, điều chỉnh tốc độ đọc sách hợp lí hơn. Sau khi nghiền ngẫm thật kĩ các chủ đề và làm nhuần nhuyễn 11 bài kiểm tra chủ đề, nhớ luyện kĩ thêm 25 đề trong "Bộ đề tinh tuý 2018" để vận dụng kiến thức trong đề thi thực tế hiệu quả hơn, tối ưu hơn.

Đối tượng 3: Các em xuất sắc hẳn

Đối với các em có mức học giỏi trở lên thì chỉ cần tập trung 2 việc chính. Thứ nhất, các em chỉ cần lưu ý đặc biệt tới các phần STUDY TIP và hệ thống bài tập rèn luyện. Những bài đã quá quen thuộc rồi thì có thể bỏ qua. Ngoài ra, riêng đối với các em học sinh thuộc đối tượng 2 và đối tượng 3, các em nên tham khảo thêm các bài toán lớp 11 trong 25 đề trong "Bộ đề tinh tuý 2018" để củng cố thật chắc kiến thức lớp 11. Các bài tập lớp 11 trong "Bộ đề tinh tuý 2018" được chọn lọc rất kĩ nên việc luyện tập trong cuốn sách này sẽ giúp các em củng cố chắc chắn hơn những gì đã học ở Công Phá Toán 2.

Không quan trọng điểm xuất phát của các em như thế nào, chỉ cần các em thực sự tập trung đọc một cách nghiêm túc cuốn sách này và các cuốn sách Giáo Khoa bổ trợ cùng nữa, chúng tôi tin tưởng chắc chắn rằng, các em sẽ phá vỡ giới hạn của bản thân và dành kết quả cao trong kì thi THPT Quốc gia.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Trần Văn Hạo (Tổng Chủ biên), Vũ Tuấn (Chủ biên), Đào Ngọc Nam, Lê Văn Tiến, Vũ Viết Yên, *Đại số và Giải tích 11*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2007.

2. Vũ Tuấn (Chủ biên), Đào Ngọc Nam, Lê Văn Tiến, Vũ Viết Yên, *Bài tập Đại số và Giải tích 11*, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2011.

3. Đoàn Quỳnh (Tổng Chủ biên), Nguyễn Huy Đoan (Chủ biên), Nguyễn Xuân Liêm, Nguyễn Khắc Minh, Đặng Hùng Thắng, *Đại số và Giải tích nâng cao 11*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2007.

4. Đoàn Quỳnh, Phạm Khắc Ban, Văn Như Cương, Nguyễn Đăng Phất, Lê Bá Khánh Trình, *Tài liệu chuyên toán hình học 11*, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam 2011.

5. Nguyễn Huy Đoan (Chủ biên), Nguyễn Xuân Liêm, Nguyễn Khắc Minh, Đoàn Quỳnh, Ngô Xuân Sơn, Đặng Hùng Thắng, Lưu Xuân Tình, *Bài tập Đại số và Giải tích nâng cao 11*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2007.

6. Đoàn Quỳnh (Chủ biên), Trần Nam Dũng, Nguyễn Vũ Lương, Đặng Hùng Thắng, *Tài liệu chuyên Toán Đại số và Giải tích 11*, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2011.

7. Đoàn Quỳnh (Chủ biên), Trần Nam Dũng, Nguyễn Vũ Lương, Đặng Hùng Thắng, *Tài liệu chuyên Toán Bài tập Đại số và Giải tích 11*, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2010.

8. Trần Phương, *Tuyển tập các chuyên đề luyện thi đại học môn Toán* (*Hàm số*), Nhà xuất bản Hà Nội, 2007.

9. V.A.KRETSMAR, *Bài tập Đại số sơ cấp tập II* (Người dịch: Vũ Dương Thụy, Nguyễn Duy Thuận), Nhà xuất bản Giáo dục, 1976.

10. Trần Đức Huyên, Trần Lưu Thịnh, Đặng Phương Thảo, *Giải bài tập và câu hỏi trắc nghiệm Đại số và Giải tích 11*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2008.

11. Nguyễn Hải Châu (Chủ biên), Nguyễn Thế Thạch, Phạm Đức Quang, *Câu hỏi và bài tập trắc nghiệm Toán 11*, Nhà xuất bản Hà Nội, 2007.

12. Bộ Giáo dục và Đào tạo, *Những vấn đề chung về đổi mới giáo dục Trung học phổ thông môn Toán*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2007.

13. Trần Phương, Tuyển tập các chuyên đề luyện thi đại học môn toán (*Phương trình lượng giác*), Nhà xuất bản ĐHQGHN.

14. Phan Huy Khải, Trần Hữu Nam, Phan Doãn Thoại, *Bài tập chọn lọc hình học 11*

15. Nguyễn Anh Trường, Nguyễn Tấn Siêng, *Chuyên đề giải toán hình học không gian*, Nhà xuất bản Tổng hợp TP Hồ Chí Minh

16. Nhóm Cự Môn, *Bài giảng chuyên sâu toán THPT Đại số và Giải tích 11*, Nhà xuất bản Hà Nội 2011.

17. Nhóm Cự Môn, *Bài giảng chuyên sâu toán THPT Hình học 11*, Nhà xuất bản Hà Nội 2011.

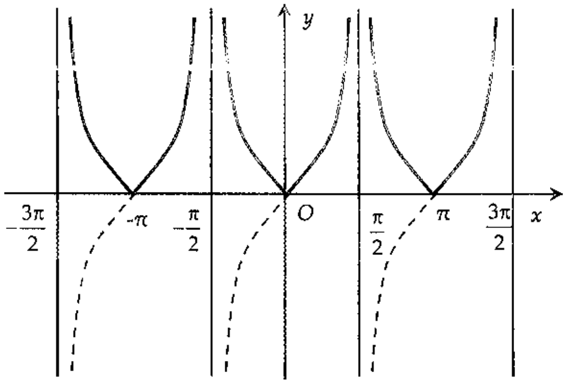
18. Trần Anh Dũng, Nguyễn Thành Dũng, *Bài tập trắc nghiệm Hình học 11*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2007.

19. Nguyễn Tất Thu, *Giải toán theo chuyên đề trọng điểm Hình Học 11*, Nhà xuất bản ĐHQGHN.

20. Nguyễn Hải Châu (Chủ biên), Nguyễn Thế Thạch, Phạm Đức Quang, *Câu hỏi và bài tập trắc nghiệm Toán 11*, Nhà xuất bản Hà Nội 2007.

21. Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, Nhà xuất bản Giáo dục.

MỤC LỤC



STUDY TIP

Với bài toán này ta có thể không suy diễn đồ thị mà làm theo hướng tư duy sau:

- Với A: $y=|\tan x|$ không xác định tại $x=\pm\frac{\pi}{2}$ nên không thể đồng biến trên $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.
- Từ B suy ra C; D sai.

Ta được đồ thị như hình trên. Ta thấy hàm số $y=|\tan x|$ nghịch biến trên $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$ và đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Nên ta loại A và D.

Với B ta có $f(-x)=|\tan(-x)|=|\tan x|=f(x)\Rightarrow$ hàm số $y=|\tan x|$ là hàm số chẵn.

Với C ta thấy đồ thị hàm số đã cho không đối xứng qua gốc tọa độ, từ đây ta chọn **B**.

Dạng 4 Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số lượng giác

* Các kiến thức về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên miền $D\subset\mathbb{R}$.

1. Số thực M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên D nếu

$$\begin{cases} f(x)\le M,\ \forall x\in D \\ \exists x_0\in D, f(x_0)=M \end{cases}$$

2. Số thực N được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên D nếu

$$\begin{cases} f(x)\ge m, \forall x\in D \\ \exists x_0\in D, f(x_0)=m \end{cases}$$

Một số kiến thức ta sử dụng trong các bài toán này:

1. Tính bị chặn của hàm số lượng giác.
2. Điều kiện có nghiệm của phương trình bậc nhất giữa sin và cos.
3. Bảng biến thiên của hàm số lượng giác.
4. Kỹ thuật sử dụng máy tính cầm tay.

Ví dụ 1: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y=2017\cos\left(8x+\frac{10\pi}{2017}\right)+2016.$$

A. $\min y=1;\max y=4033.$ B. $\min y=-1;\max y=4033.$

C. $\min y=1;\max y=4022.$ D. $\min y=-1;\max y=4022.$

Đáp án B.

Phân tích

Ta có các bước để giải quyết bài toán như sau:

Bước 1: Chỉ ra $f(x)\le M,\ \forall x\in D.$

Bước 2: Chỉ ra $x_0\in D$ sao cho $f(x_0)=M.$

Kết luận: $\max\limits_D f(x)=M.$

Tương tự với tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Lời giải

Cách 1: Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $-1\le\cos\left(8x+\frac{10\pi}{2017}\right)\le 1,\ \forall\in\mathbb{R}.$

$\Leftrightarrow -2017\le 2017\cos\left(8x+\frac{10\pi}{2017}\right)\le 2017,\ \forall\in\mathbb{R}.$

$\Leftrightarrow -1\le 2017\cos\left(8x+\frac{10\pi}{2017}\right)+2016\le 4033,\ \forall\in\mathbb{R}.$

Ta có $y=-1$ khi $\cos\left(8x+\frac{10\pi}{2017}\right)=-1;$ $y=4033$ khi $\cos\left(8x+\frac{10\pi}{2017}\right)=1.$

Vậy $\min y=-1;\max y=4033.$

***Cách 2:* Sử dụng máy tính cầm tay.**

Trong bốn phương án chỉ có hai giá trị max là $4022;4033.$

Chỉ có hai giá trị min là $1;-1.$

STUDY TIP

Với bài toán trên ta chỉ đơn giản sử dụng tính bị chặn đơn giản của hàm số lượng giác. Với $k\in\mathbb{Z}$ ta có

$-1\le\sin^{2k+1}\left[f(x)\right]\le 1$

$-1\le\cos^{2k+1}\left[f(x)\right]\le 1$

$\left|\sin\left[f(x)\right]\right|\le 1;$

$\left|\cos\left[f(x)\right]\right|\le 1$

$0\le\sin^{2k}\left[f(x)\right]\le 1$

$0\le\cos^{2k}\left[f(x)\right]\le 1.$

STUDY TIP

Khi bài toán không yêu cầu tìm min, max trên tập cụ thể nào thì ta hiểu rằng tìm GTLN, GTNN trên tập xác định.

STUDY TIP

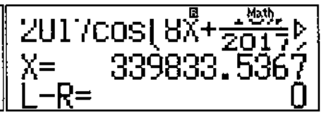
Trong bài toán ta chọn thử hai giá trị trên vì 4033 là giá trị lớn hơn và -1 là giá trị nhỏ hơn nên ta thử trước. Nếu phương trình không có nghiệm thì sẽ là trường hợp còn lại.

Lúc này ta sử dụng chức năng SHIFT CALC (SHIFT SOLVE) để thử giá trị:

Ví dụ ta nhập vào màn hình $2017\cos\left(8X+\frac{10\pi}{2017}\right)+2016=4033$ ta thấy phương trình có nghiệm.

Tương tự nhập $2017\cos\left(8X+\frac{10\pi}{2017}\right)+2016=-1$ thấy phương trình có nghiệm.

Trường hợp thử max là 4033



Trường hợp thử min là -1

Từ đây ta chọn B.

Ví dụ 2: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y=2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+1.$$

A. $\min y=0;\max y=4.$ **B.** $\min y=1-\sqrt{3};\max y=3+\sqrt{3}.$

C. $\min y=-4;\max y=0.$ **D.** $\min y=-1+\sqrt{3};\max y=3+\sqrt{3}.$

Đáp án A.

Lời giải

Để sử dụng tính bị chặn của hàm số ở trong **STUDY TIP** ta đưa ra ở trên, ta sẽ đưa $y=2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+1$ về theo $\sin u(x)$ hoặc $\cos u(x)$.

Ta có

$y=2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+1=2\cos^2 x-1-\sqrt{3}\sin 2x+2$

$=\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x+2\ (*)$

$=2\left(\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)+2=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+2$

STUDY TIP

Ở dòng thức tư bước biến đổi ta sử dụng công thức lượng giác cộng.

Mặt khác $-1\le\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\le 1,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow -2\le 2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\le 2,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 0\le 2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+2\le 4,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 0\le y\le 4,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Ta có bài toán tổng quát:

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=a\sin u+b\cos u$ trên $\mathbb{R}$. Với $a;b\in\mathbb{R};a^2+b^2>0$.

Lời giải tổng quát

$y=a\sin u+b\cos u\Rightarrow y=\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin u+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos u\right)\sqrt{a^2+b^2}.$

Vì $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1\Rightarrow\exists\alpha\in\mathbb{R}$ sao cho $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ và $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\Rightarrow y=\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin u.\cos\alpha+\cos u.\sin\alpha\right)\Rightarrow y=\sqrt{a^2+b^2}.\sin(u+\alpha)$

Vì $-1\le\sin(u+\alpha)\le 1\Rightarrow -\sqrt{a^2+b^2}\le y\le\sqrt{a^2+b^2}$

Ngoài ra ta có thể mở rộng bài toán như sau:

STUDY TIP

Ngoài cách nhớ công thức ở bài toán tổng quát phía bên phải ta có thể nhớ theo điều kiện có nghiệm của phương trình bậc nhất theo sin và cos như sau:

Tìm giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của hàm số

$y=a.\sin\left[f(x)\right]+b\cos\left[f(x)\right]+c.$

$a.\sin\left[f(x)\right]+b\cos\left[f(x)\right]+c-y=0$

điều kiện có nghiệm $a^2+b^2\ge(c-y)^2$. Từ đây ta tìm được min, max của y.

$y = a.\sin\left[f(x)\right] + b\cos\left[f(x)\right] + c$. Ta có $-\sqrt{a^2+b^2}+c \le y \le \sqrt{a^2+b^2}+c$.

Từ bài toán tổng quát trên ta có thể giải quyết nhanh bài toán ví dụ 2 từ dòng $(*)$ như sau: Ta có $-\sqrt{1+3}+2 \le y \le \sqrt{1+3}+2 \Leftrightarrow 0 \le y \le 4$.

Ví dụ 3: Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số

$y = \dfrac{\sin x + 2\cos x + 3}{2+\cos x}$.

A. $\min y = -\frac{2}{3}; \max y = 2$. B. $\min y = \frac{2}{3}; \max y = 2$.

C. $\min y = \frac{1}{2}; \max y = \frac{3}{2}$. D. $\min y = -\frac{1}{2}; \max y = \frac{3}{2}$.

Đáp án B.

Lời giải

STUDY TIP
Nếu hàm số có dạng $y = \dfrac{a_1\sin x + b_1\cos x + c_1}{a_2\sin x + b_2\cos x + c_2}$ ta tìm miền xác định của hàm số rồi quy đồng mẫu số, đưa về dạng phương trình trong STUDY TIP ở BTTQ phía trên, và tiếp tục lời giải.

Cách 1: Ta có $\cos x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$y = \dfrac{\sin x + 2\cos x + 3}{2+\cos x} \Leftrightarrow \sin x + 2\cos x + 3 = 2y + y\cos x$

$\Leftrightarrow \sin x + (2-y)\cos x + 3 - 2y = 0$

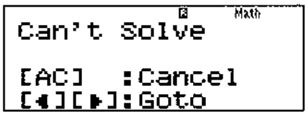
Ta sử dụng điều kiện ở **STUDY TIP** trong bài tổng quát trên.

Ta có $1^2 + (2-y)^2 \ge (3-2y)^2 \Leftrightarrow 4y^2 - 12y + 9 - y^2 + 4y - 4 - 1 \le 0$

$\Leftrightarrow 3y^2 - 8y + 4 \le 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \le y \le 2$.

Cách 2: **Sử dụng máy tính cầm tay**

Trường hợp thử max là 2



Trường hợp thử min là $-\frac{2}{3}$

Tương tự như ở ví dụ 1 thì ta có thể sử dụng SHIFT SOLVE :

$\dfrac{\sin x + 2\cos x + 3}{2+\cos x} = 2$ thì phương trình có nghiệm. Do 2 là số lớn nhất trong các phương án A; B; C; D nên ta không cần thử trường hợp $\max = \frac{3}{2}$.

Lúc này chỉ còn A và B. Thử với $\min y = -\frac{2}{3}$ thì không có nghiệm.

Từ đây chọn B.

Ví dụ 4: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt[4]{\sin x} - \sqrt{\cos x}$.

A. $\min y = -1; \max y = 1$. B. $\min y = 0; \max y = 1$.

C. $\min y = -1; \max y = 0$. D. $\min y = 0; \max y$ không tồn tại.

Đáp án A.

Lời giải

STUDY TIP
Nhiều độc giả không lưu ý đổi dấu của bpt thứ hai của hệ khi nhân các vế với -1 dẫn đến chọn đáp án sai.

Cách 1: Ta có $\begin{cases} 0 \le \sqrt[4]{\sin x} \le 1 \\ 0 \le \sqrt{\cos x} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \sqrt[4]{\sin x} \le 1 \\ -1 \le -\sqrt{\cos x} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le y \le 1$.

Vậy khi $\begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$

và $\min y = -1$ khi $\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = k2\pi; k \in \mathbb{Z}$

Cách 2: **Sử dụng máy tính cầm tay**

Tương tự các ví dụ trên.

Ví dụ 5: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\cot^4 a+\cot^4 b+2\tan^2 a.\tan^2 b+2.$$

A. $\min y=2.$ B. $\min y=6.$

C. $\min y=4.$ D. không tồn tại GTNN của hàm số.

Đáp án B.

Lời giải

$P=\left(\cot^2 a-\cot^2 b\right)^2+2\cot^2 a.\cot^2 b+2\tan^2 a.\tan^2 b+2$

$=\left(\cot^2 a-\cot^2 b\right)^2+2.\left(\cot^2 a.\cot^2 b+\tan^2 a.\tan^2 b-2\right)+6$

$=\left(\cot^2 a-\cot^2 b\right)^2+2.\left(\cot^2 a.\cot^2 b+\tan^2 a.\tan^2 b-2.\cot a.\cot b.\tan a.\tan b\right)+6$

$=\left(\cot^2 a-\cot^2 b\right)^2+2\left(\cot a.\cot b-\tan a\tan b\right)^2+6\geq 6$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}\cot^2 a=\cot^2 b\\ \cot a.\cot b=\tan a.\tan b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cot^2 a=1\\ \cot^2 b=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow a=b=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2},\left(k\in\mathbb{Z}\right).$

STUDY TIP

Với các bài toán tìm GTLN-GTNN của hàm lượng giác ta có thể đưa về dạng $y=A^2(x)+B\geq B.$

Nhưng cần lưu ý xem dấu bằng có xảy ra hay không.

Tiếp theo ta có ví dụ 6 là một câu hỏi khác cho ví dụ 2 như sau

Ví dụ 6: Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

$y=2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x.\cos x+1$ trên đoạn $\left[0,\dfrac{7\pi}{12}\right]$ lần lượt là

A. $\min\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y=2;\max\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y=3.$ B. $\min\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y=0;\max\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y=2.$

C. $\min\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y=0;\max\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y=4.$ D. $\min\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y=0;\max\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y=3.$

Đáp án D.

Lời giải

Từ ví dụ 2 ta có $y=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+2$. Đặt $u=2x+\dfrac{\pi}{3}$.

Từ đề bài ta xét $x\in\left[0,\dfrac{7\pi}{12}\right]\Rightarrow u\in\left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{3\pi}{2}\right]$

Ta lập BBT của hàm số $y=2\cos u+2$ trên $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

u	$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
$2\cos u+2$	3	↘	0	↗	2

Từ BBT ta thấy $\min\limits_{\left[\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{2}\right]} f(u)=0$ khi $u=\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{3}.$

$\max\limits_{\left[\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{2}\right]} f(u)=3$ khi $u=\dfrac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=0.$

Hay $\min\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y=0;\max\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y=3.$

STUDY TIP

Với các bài toán tìm min, max của hàm số lượng giác trên một đoạn ta thường phải xét nhanh BBT để giải quyết bài toán. Ở chương trình 11 ta chưa học đạo hàm nên chưa giải quyết được bài toán tìm GTLN, GTNN của hàm số sử dụng đạo hàm. Sau khi học xong đạo hàm ta sẽ giải quyết bài toán này nhanh chóng hơn.

Ví dụ 7: Tìm giá nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sin^2 x-\sin x+2$.

A. $\min y=\frac{7}{4};\max y=4$. B. $\min y=\frac{7}{4},\max y=2$.

C. $\min y=-1,\max y=1$. D. $\min y=\frac{1}{2},\max y=2$.

Đáp án A.

Lời giải

Đặt $\sin x=u,u\in\left[-1;1\right]$.

Xét hàm số $y=u^2-u+2$ trên $\left[-1;1\right]$.

Ta có $-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}\in\left[-1;1\right]$. Từ đây ta có BBT

u	-1	$\frac{1}{2}$	1
y	4 ↘	$\frac{7}{4}$	↗ 2

Ta kết luận $\min\limits_{[-1;1]} f\left(u\right)=\frac{7}{4}\Leftrightarrow u=\frac{1}{2}$ và $\max\limits_{[-1;1]} f\left(u\right)=4\Leftrightarrow u=-1$

Hay $\min y=\frac{7}{4}\Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2}$ và $\max y=4\Leftrightarrow \sin x=-1$.

Ngoài các phương pháp giải bài toán tìm GTLN – GTNN của hàm số lượng giác ta rút ra được từ các ví dụ trên ta còn có phương pháp sử dụng bất đẳng thức cơ bản. Phương pháp này được coi là một phương pháp khó vì đòi hỏi tính sáng tạo và kỹ thuật trong việc sử dụng bất đẳng thức.

Một số bất đẳng thức ta thường dùng:

1. Bất đẳng thức AM – GM

a. Với 2 số:

Cho *a; b* là hai số dương, ta có $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

b. Với n số:

Cho $x_1;x_2;...;x_n$ là các số dương, $n\in\mathbb{N}^*$ ta có $\frac{x_1+x_2+x_3+...+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_1=x_2=...=x_n$.

2. Bất đẳng thức Bunyakovsky

a. Bất đẳng thức Bunyakovsky dạng thông thường

$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)\ge\left(ac+bd\right)^2$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

b. Bất đẳng thức Bunyakovsky cho hai bộ số

* Với hai bộ số $\left(a_1;a_2;...;a_n\right)$ và $\left(b_1;b_2;...;b_n\right)$ ta có:

$\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2+...+b_n^2\right)\ge\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)^2$

STUDY TIP

Ta có thể sử dụng tính chất của tam thức bậc hai để giải các bài toán tìm min max hàm lượng giác như sau:

Cho hàm số $y=ax^2+bx+c,\left(a\ne0\right)$.

* Nếu $a<0$ thì $ax^2+bx+c\le-\frac{\Delta}{4a}$. Dấu bằng xảy ra khi $x=-\frac{b}{2a}$.

* Nếu $a>0$ thì $ax^2+bx+c\ge-\frac{\Delta}{4a}$. Dấu bằng xảy ra khi $x=-\frac{b}{2a}$.

* Nếu hàm số đã cho là hàm bậc hai mà điều kiện không phải $\forall x\in\mathbb{R}$ thì ta phải lập BBT để tìm min, max.