TÍCH PHÂN

I. Khái niệm tích phân

1. Diện tích hình thang cong .

- Giới thiệu cho học sinh về cách tính diện tích của một hình thang cong
- Từ đó suy ra công thức : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{S(x) - S(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$

2. Định nghĩa tích phân

- Cho hàm f liên túc trên một khoảng K và a, b là hai số bất kỳ thuộc K. Nếu F là một nguyên hàm của f trên K thì hiệu số : F(b)-F(a) được gọi là tích phân của f đi từ a đến b , ký hiệu là : $\int\limits_a^b f(x)dx$
- Có nghĩa là : $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
- Gọi F(x) là một nguyên hàm của f(x) và $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ thì :

  $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$
- Trong đó :

  - a : là cận trên , b là cận dưới
  - f(x) gọi là hàm số dưới dấu tích phân
  - dx : gọi là vi phân của đối số
  -f(x)dx : Gọi là biểu thức dưới dấu tích phân

II. Tính chất của tích phân

Giả sử cho hai hàm số f và g liên tục trên K , a,b,c là ba số bất kỳ thuộc K . Khi đó ta có :

1. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$. (Gọi là tích chất đổi cận)
3. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$
4. $\int\limits_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$. (Tích phân củ một tổng hoặc hiệu hai tích phân bằng tổng hoặc hiệu hai tích phân) .
5. $\int\limits_a^b kf(x)dx = k.\int\limits_a^b f(x)dx$. (Hằng số k trong dấu tích phân , có thể đưa ra ngoài dấu tích phân được)

Ngoài 5 tính chất trên , người ta còn chứng minh được một số tính chất khác như :

6 . Nếu f(x) $\geq 0 \forall x \in [a;b]$ thì : $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0 \forall x \in [a;b]$

7. Nếu : $\forall x \in [a;b] : f(x) \geq g(x) \quad \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b g(x)dx$. (Bất đẳng thức trong tích phân)

8. Nếu : $\forall x \in [a;b]$ và với hai số M,N ta luôn có : $M \le f(x) \le N$. Thì :

$M(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le N(b-a)$. (Tính chất giá trị trung bình của tích phân)

III. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

A. PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH

1.Trong phương pháp này , chúng ta cần :

- Kỹ năng : Cần biết phân tích f(x) thành tổng , hiệu , tích , thương của nhiều hàm số khác , mà ta có thể sử dụng được trực tiếp bảng nguyên hàm cơ bản tìm nguyên hàm của chúng .
- Kiến thức : Như đã trình bày trong phần " Nguyên hàm " , cần phải nắm trắc các kiến thức về Vi phân , các công thức về phép toán lũy thừa , phép toán căn bậc n của một số và biểu diễn chúng dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ .

2. Ví dụ áp dụng

Ví dụ 1: Tính các tích phân sau

a/ $\int_1^2 \frac{x\left(2\sqrt{x^4-1}+1\right)}{\sqrt{x^2+1}}dx$ b/ $\int_0^1 \frac{x^2}{(x+1)^3}dx$

c/ $\int_1^3 \frac{2x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)}dx$ d/ $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{x^3+x^2-x+1}{x^4-2x^2+1}dx$

Giải

a/ $\int_1^2 \frac{x\left(2\sqrt{x^4-1}+1\right)}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_1^2\left(\frac{2x\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx = \int_1^2\left(2x\sqrt{x^2-1}+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx$

$\Rightarrow \int_1^2 \sqrt{x^2-1}d\left(\sqrt{x^2-1}\right)+\int_1^2 d\left(\sqrt{x^2+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2\Big|_1^2+\sqrt{x^2+1}\Big|_1^2=\frac{3}{2}+\sqrt{5}-\sqrt{2}$

b/

$\int_0^1 \frac{x^2}{(x+1)^3}dx = \int_0^1 \frac{(x+1-1)^2}{(x+1)^3}dx = \int_0^1\left[\frac{(x+1)^2}{(x+1)^3}-2\frac{x+1}{(x+1)^3}+\frac{1}{(x+1)^3}\right]dx = \int_0^1\left[\frac{1}{x+1}-2\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^3}\right]dx$

$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{d(x+1)}{x+1}-2\int_0^1\frac{d(x+1)}{(x+1)^2}+\int_0^1\frac{d(x+1)}{(x+1)^3}=\ln|x+1|\Big|_0^1+2\frac{1}{x+1}\Big|_0^1-\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}\Big|_0^1=\ln 2+\frac{3}{8}$

c/

$\int_1^3 \frac{2x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)}dx = \int_1^3\left[\frac{x-1}{\left(1+\sqrt{x}\right)}+\frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)}\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]dx = \int_1^3\left[\left(\sqrt{x}-1\right)+\frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)2\sqrt{x}}\right]dx$

$\Rightarrow I = \int_1^3\left(\sqrt{x}-1\right)dx+\int_1^3\frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{1+\sqrt{x}}d\left(1+\sqrt{x}\right)=\left[\frac{2}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3-x\right]\Big|_1^3+\ln^2\left(1+\sqrt{x}\right)\Big|_1^3=$

$=2\sqrt{3}-4+\ln^2\left(1+\sqrt{3}\right)-\ln^2 2$

d/ $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{x^3+x^2-x+1}{x^4-2x^2+1}dx = \int_{\sqrt{2}}^2\left[\frac{1}{4}\frac{4\left(x^3-x\right)dx}{x^4-2x^2+1}\right]+\int_{\sqrt{2}}^2\frac{1}{\left(x^2-1\right)}dx+\int_{\sqrt{2}}^2\frac{2dx}{\left(x^2-1\right)^2}$

$$=\frac{1}{4}\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{d\left(x^4-2x^2+1\right)}{\left(x^4-2x^2+1\right)}+\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx+2\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)^2 dx$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\left(x^2-1\right)^2\right|\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2}+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2}=$$

Ví dụ 2. Tính các tích phân sau

a/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\left(\sin^2 x-1\right)}{1+\cos x}dx$ b/ $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 2x}{2\sin^2 x+3\cos^2 x}dx$

c/ $\int_{-1}^{1}\frac{1}{4-x^2}\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)dx$ d/ $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\sqrt{1+\tan x}}{\cos^2 x}dx$

Ví dụ 3. Tính các tích phân sau

a/ $\int_e^{e^2}\frac{\ln^3 x+1}{x\ln^3 x}dx$ b/ $\int_1^2\frac{x^2-1}{2x\left(x^2+1\right)}dx$

c/ $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{4+\sin^3 2x}{\sin^2 2x}dx$ d/ $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin 3x.\cos x dx$

B. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

I. Phương pháp đổi biến số dạng 1.

Để tính tích phân dạng này , ta cần thực hiện theo các bước sau

1/ Quy tắc :

- Bước 1: Đặt x=v(t)
- Bước 2: Tính vi phân hai vế và đổi cận
- Bước 3: Phân tích f(x)dx=f(v(t))v'(t)dt
- Bước 4: Tính $\int_a^b f(x)dx=\int_{v(a)}^{v(b)}g(t)dt=G(t)\Big|_{v(a)}^{v(b)}$
- Bước 5: Kết luận : I=$G(t)\Big|_{v(a)}^{v(b)}$

2/ Nhận dạng : (Xem lại phần nguyên hàm)

*** Chú ý :**

a. Các dấu hiệu dẫn tới việc lựa chọn ẩn phụ kiểu trên thông thường là :

Dấu hiệu	Cách chọn
$\sqrt{a^2-x^2}$	$\left[\begin{array}{l} x=\lvert a\rvert\sin t\leftrightarrow -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2} \\ x=\lvert a\rvert\cos t\leftrightarrow 0\le t\le\pi\end{array}\right.$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\lvert a\rvert}{\sin t}\leftrightarrow t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \\ x=\frac{\lvert a\rvert}{\cos t}\leftrightarrow t\in\left[0;\pi\right]\backslash\left\{\frac{\pi}{2}\right\}\end{array}\right.$

$\sqrt{a^2+x^2}$	$\left[\begin{array}{l} x=\lvert a\rvert\tan t \leftrightarrow t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \\ x=\lvert a\rvert\cot t \leftrightarrow t\in(0;\pi) \end{array}\right.$
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \vee \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	x=a.cos2t
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	x=a+$(b-a)\sin^2 t$

b. Quan trọng nhất là các em phải nhận ra dạng :

- Ví dụ : Trong dạng phân thức hữu tỷ :

$$*\int_\alpha^\beta \frac{1}{ax^2+bx+c}dx(\Delta<0)=\int_\alpha^\beta \frac{1}{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right]}dx=\frac{1}{a}\int_\alpha^\beta \frac{1}{u^2+k}du$$

Với : $\left(u=x+\frac{b}{2a}, k=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}, du=dx\right)$.

* áp dụng để giải bài toán tổng quát : $\int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^{2k+1}}}(k\in Z)$.

* $\int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{2+2x-x^2}}dx=\int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2-(x-1)^2}}dx$. Từ đó suy ra cách đặt : $x-1=\sqrt{3}\sin t$

3/ Một số ví dụ áp dụng :

Ví dụ 1: Tính các tích phân sau a/ $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ b/ $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-2x^2}}dx$ c/ $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$

Giải

a/ Đặt x=sint với : $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

- Suy ra : dx=costdt và : $\begin{cases} x=0\leftrightarrow \sin t=0\to t=0 \\ x=1\leftrightarrow \sin t=1\to t=\frac{\pi}{2} \end{cases}$
- Do đó : f(x)dx= $\sqrt{1-x^2}dx=\sqrt{1-\sin^2 t}\text{costdt}=\cos^2 t dt=\frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt$
- Vậy : $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\cos 2t)dt}{2}=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi-1}{4}$

b/ Đặt : x = $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \quad t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

- Suy ra : dx =$\frac{1}{\sqrt{2}}\text{costdt} \quad \Rightarrow \begin{cases} x=0\leftrightarrow \sin t=0\to t=0 \\ x=\frac{1}{\sqrt{2}}\leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\to t=\frac{\pi}{2} \end{cases}$

- Do đó :
$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{1-2x^2}}dx=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-x^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}}\frac{1}{\sqrt{2}}\text{costdt}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

c/ Vì : $3+2x-x^2=4-(x-1)^2$. Cho nên :

- Đặt : $x-1=2\sin t\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\leftrightarrow \sin t=\frac{x-1}{2}(*)$
- Suy ra : dx= 2 costdt và : $\begin{cases} x=1\leftrightarrow \sin t=\frac{1-1}{2}=0\to t=0\\ x=2\leftrightarrow \sin t=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}\to t=\frac{\pi}{6}\end{cases}\Rightarrow t\in\left[0;\frac{\pi}{6}\right]\to \text{cost}>0$
- Do đó : f(x)dx=$\frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{4(1-\sin^2 t)}}2\cos t dt=dt$
- Vậy : $\int_1^2 f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}dt=t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}$

Ví dụ 2: Tính các tích phân sau

a/ $\int_1^2\sqrt{12x-4x^2-5}dx$

b/ $\int_0^1\frac{1}{x^2+x+1}dx$

c/ $\int_2^5\frac{1}{x^2-4x+7}dx$

d/ $\int_0^b\frac{a-x^2}{(a+x^2)^2}dx$

***** Chú ý : Để tính tích phân dạng có chứa $\left(\sqrt{x^2+a},\sqrt{a^2-x^2}\right)$, ta còn sử dụng phương pháp đổi biến số : u(x)=g(x,t)

Ví dụ 1 : Tính tích phân sau $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$

Giải :

- Đặt : $\sqrt{x^2+1}=x-t\Rightarrow x=\frac{t^2-1}{2t}$
- Khi đó : $\begin{cases} x=0\to t=-1; x=1\to t=1-\sqrt{2}\\ dx=\frac{t^2+1}{2t^2}\end{cases}$
- Do vậy : $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_{-1}^{1-\sqrt{2}}\frac{-2t}{t^2+1}.\frac{t^2+1}{2t^2}dt=\int_{-1}^{1-\sqrt{2}}\frac{dt}{t}=\ln|t|\Big|_{-1}^{1-\sqrt{2}}=-\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$

Ví dụ 2: Tính tích phân : $I=\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$

Giải

- Đặt : t=sinx , suy ra dt=cosxdx và khi x=0,t=0 ; Khi x=1 , t= $\frac{\pi}{2}$

- Do đó : f(x)dx=$x^2\sqrt{1-x^2}dx=\sin^2 t.\sqrt{1-\sin^2 t}$costdt=$\sin^2 t\cos^2 tdt=\frac{1}{4}\left(\frac{1-\cos4t}{2}\right)dt$
- Vậy : I=$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos4t)dt=\frac{1}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{8}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{16}$

II. Đổi biến số dạng 2

1. Quy tắc : (Ta tính tích phân bằng phương pháp đổi biến số dạng 2 theo các bước sau :)

- Bước 1: Khéo léo chọn một hàm số u(x) và đặt nó bằng t : t=u(x) .
- Bước 2: Tính vi phân hai vế và đổi cận : dt=u'(x)dx
- Bước 3: Ta phân tích f(x)dx = g[u(x)]u'(x)dx = g(t)dt .
- Bước 4: Tính $\int_a^b f(x)dx=\int_{u(a)}^{u(b)} g(t)dt=G(t)\Big|_{u(a)}^{u(b)}$
- Kết luận : I= $G(t)\Big|_{u(a)}^{u(b)}$

2. Nhận dạng :

TÍCH PHÂN HÀM PHÂN THỨC HỮU TỶ

A. DẠNG : I=$\int_\alpha^\beta \frac{P(x)}{\text{ax+b}}dx \quad (a\neq 0)$

* Chú ý đến công thức : $\int_\alpha^\beta \frac{m}{\text{ax+b}}dx=\frac{m}{a}\ln|\text{ax+b}|\Big|_\alpha^\beta$. Và nếu bậc của P(x) cao hơn hoắc bằng 2 thì ta chia tử cho mẫu dẫn đến

$$\int_\alpha^\beta \frac{P(x)}{\text{ax+b}}dx=\int_\alpha^\beta Q(x)+\frac{m}{\text{ax+b}}dx=\int_\alpha^\beta Q(x)dx+m\int_\alpha^\beta \frac{1}{\text{ax+b}}dx$$

Ví dụ 1 : Tính tích phân : I= $\int_1^2 \frac{x^3}{2x+3}dx$

Giải

Ta có : $f(x)=\frac{x^3}{2x+3}=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{9}{8}-\frac{27}{8}\frac{1}{2x+3}$

Do đó :

$$\int_1^2 \frac{x^3}{2x+3}dx=\int_1^2\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{9}{8}-\frac{27}{8}\frac{1}{2x+3}\right)dx=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{8}x^2+\frac{9}{8}x-\frac{27}{16}\ln|2x+3|\right)\Big|_1^2=-\frac{13}{6}-\frac{27}{16}\ln35$$

Ví dụ 2: Tính tích phân : I= $\int_{\sqrt5}^3 \frac{x^2-5}{x+1}dx$

Giải

Ta có : f(x)=$\frac{x^2-5}{x+1}=x-1-\frac{4}{x+1}$.

Do đó : $\int_{\sqrt5}^3 \frac{x^2-5}{x+1}dx=\int_{\sqrt5}^3\left(x-1-\frac{4}{x+1}\right)dx=\left(\frac{1}{2}x^2-x-4\ln|x+1|\right)\Big|_{\sqrt5}^3=\sqrt5-1+4\ln\left(\frac{\sqrt5+1}{4}\right)$

B. DẠNG : $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{P(x)}{ax^2+bx+c}dx$

1. Tam thức : $f(x)=ax^2+bx+c$ ***có hai nghiệm phân biệt***

Công thức cần lưu ý : $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln|u(x)|\Big|_{\alpha}^{\beta}$

Ta có hai cách

Cách 1: (Hệ số bất định)

Cách 2: (Nhẩy tầng lầu)

Ví dụ 3: Tính tích phân : I= $\int_0^1 \frac{4x+11}{x^2+5x+6}dx$.

Giải

Cách 1: (Hệ số bất định)

Ta có : f(x)=$\frac{4x+11}{x^2+5x+6} = \frac{4x+11}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+2)(x+3)}$

Thay x=-2 vào hai tử số : 3=A và thay x=-3 vào hai tử số : -1= -B suy ra B=1

Do đó : f(x)= $\frac{3}{x+2}+\frac{1}{x+3}$

Vậy : $\int_0^1 \frac{4x+11}{x^2+5x+6}dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{x+2}+\frac{1}{x+3}\right)dx = \left(3\ln|x+2|+\ln|x+3|\right)\Big|_0^1 = 2\ln 3 - \ln 2$

Cách 2: (Nhẩy tầng lầu)

Ta có : f(x)=$\frac{2(2x+5)+1}{x^2+5x+6} = 2.\frac{2x+5}{x^2+5x+6} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} = 2.\frac{2x+5}{x^2+5x+6} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}$

Do đó :

I=$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(2.\frac{2x+5}{x^2+5x+6} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right)dx = \left(2\ln|x^2+5x+6| + \ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right|\right)\Big|_0^1 = 2\ln 3 - \ln 2$

2. Tam thức : $f(x)=ax^2+bx+c$ ***có hai nghiệm kép***

Công thức cần chú ý : $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{u'(x)dx}{u(x)} = \ln(u(x))\Big|_{\alpha}^{\beta}$

Thông thường ta đặt (x+b/2a)=t .

Ví dụ 4 : Tính tích phân sau : I= $\int_0^3 \frac{x^3}{x^2+2x+1}dx$

Giải

Ta có : $\int_0^3 \frac{x^3}{x^2+2x+1}dx = \int_0^3 \frac{x^3}{(x+1)^2}dx$

Đặt : t=x+1 suy ra : dx=dt ; x=t-1 và : khi x=0 thì t=1 ; khi x=3 thì t=4 .

Do đó : $\int_0^3 \frac{x^3}{(x+1)^2}dx = \int_1^4 \frac{(t-1)^3}{t^2}dt = \int_1^4 \left(t-3+\frac{3}{t}-\frac{1}{t^2}\right)dt = \left(\frac{1}{2}t^2 - 3t + \ln|t| + \frac{1}{t}\right)\Big|_1^4 = 2\ln 2 - \frac{3}{2}$

Ví dụ 5: Tính tích phân sau : I= $\int_0^1 \frac{4x}{4x^2-4x+1}dx$

Giải

Ta có : $\frac{4x}{4x^2-4x+1}=\frac{4x}{(2x-1)^2}$

Đặt : t= 2x-1 suy ra : $dt=2dx\rightarrow dx=\frac{1}{2}dt;\begin{cases}x=0\leftrightarrow t=-1\\x=1\leftrightarrow t=1\end{cases}$

Do đó : $\int_0^1\frac{4x}{4x^2-4x+1}dx=\int_0^1\frac{4x}{(2x-1)^2}dx=\int_{-1}^1\frac{4.\frac{1}{2}(t+1)}{t^2}\frac{1}{2}dt=\int_{-1}^1\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt=\left(\ln|t|-\frac{1}{t}\right)\Big|_{-1}^{1}=-2$

3. Tam thức : $f(x)=\mathrm{ax}^2+bx+c$ ***vô nghiệm :***

Ta viết : f(x)= $\frac{P(x)}{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right]}=\frac{P(x)}{a(u^2+k^2)};\begin{cases}u=x+\frac{b}{2a}\\k=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\end{cases}$

Khi đó : Đặt u= ktant

Ví dụ 6: Tính tích phân : I= $\int_0^2\frac{x}{x^2+4x+5}dx$

Giải

- Ta có : $\int_0^2\frac{x}{x^2+4x+5}dx=\int_0^2\frac{x}{(x+2)^2+1}dx$
- Đặt : x+2=tant , suy ra : dx=$\frac{1}{\cos^2 t}dt;\Rightarrow\begin{cases}x=0\leftrightarrow\tan t=2\\x=2\leftrightarrow\tan t=4\end{cases}$
- Do đó : $\int_0^2\frac{x}{(x+2)^2+1}dx=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\tan t-2}{1+\tan^2 t}\frac{dt}{\cos^2 t}=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\sin t}{\cos t}-2\right)dt=\left(-\ln|\cos t|-2t\right)\Big|_{t_1}^{t_2}(1)$

Từ : $\left[\begin{array}{l}\tan t=2\leftrightarrow 1+\tan^2 t=5\leftrightarrow\cos^2 t=\frac{1}{5}\rightarrow\cos t_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\\\tan t=4\leftrightarrow 1+\tan^2 t=17\leftrightarrow\cos^2 t=\frac{1}{17}\rightarrow\cos t_2=\frac{1}{\sqrt{17}}\end{array}\right.$

- Vậy : $\left(-\ln|\cos t|-2t\right)\Big|_{t_1}^{t_2}=-\left[\left(\ln|\cos t_2|-2t_2\right)-\left(\ln|\cos t_1|-2t_1\right)\right]=-\ln\left|\frac{\cos t_2}{\cos t_1}\right|+2(t_2-t_1)$
- $\Leftrightarrow-\ln\left|\frac{\cos t_2}{\cos t_1}\right|+2(t_2-t_1)=2(\text{arctan4-arctan2})-\ln\left|\frac{1}{\sqrt{17}}.\sqrt{5}\right|=2(\text{arctan4-arctan2})-\frac{1}{2}\ln\frac{5}{17}$

Ví dụ 7: Tính tích phân sau : I= $\int_0^2\frac{x^3+2x^2+4x+9}{x^2+4}dx$

Giải

- Ta có : $\frac{x^3+2x^2+4x+9}{x^2+4}=x+2+\frac{1}{x^2+4}$
- Do đó : $\int_0^2\frac{x^3+2x^2+4x+9}{x^2+4}dx=\int_0^2\left(x+2+\frac{1}{x^2+4}\right)dx=\left(\frac{1}{2}x^2+2x\right)\Big|_0^2+\int_0^2\frac{dx}{x^2+4}=6+J\,(1)$

Tính tích phân J= $\int_0^2\frac{1}{x^2+4}dx$

- Đặt : x=2tant suy ra : dx $=\frac{2}{\cos^2 t}dt;\begin{cases} x=0\to t=0 \\ x=2\to t=\frac{\pi}{4}\end{cases}\leftrightarrow t\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]\to \cos t>0$
- Khi đó : $\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}dx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2 t}\frac{2}{\cos^2 t}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt=\frac{1}{2}t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}$
- Thay vào (1) : $I=6+\frac{\pi}{8}$

C. DẠNG : $\int_\alpha^\beta \frac{P(x)}{ax^3+bx^2+cx+d}dx$

1. Đa thức : f(x)= $ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ ***có một nghiệm bội ba***

Công thức cần chú ý : $\int_\alpha^\beta \frac{1}{x^m}dx=\frac{1}{1-m}.\frac{1}{x^{m-1}}\Big|_\alpha^\beta$

Ví dụ 8: Tính tích phân : I= $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^3}dx$

Giải

Cách 1:

- Đặt : x+1=t , suy ra x=t-1 và : khi x=0 thì t=1 ; khi x=1 thì t=2
- Do đó : $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^3}dx=\int_1^2\frac{t-1}{t^3}dt=\int_1^2\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3}\right)dt=\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\frac{1}{t^2}\right)\Big|_1^2=\frac{1}{8}$

Cách 2:

- Ta có : $\frac{x}{(x+1)^3}=\frac{(x+1)-1}{(x+1)^3}=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3}$
- Do đó : $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^3}dx=\int_0^1\left[\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3}\right]dx=\left[-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}\right]\Big|_0^1=\frac{1}{8}$

Ví dụ 9 : Tính tích phân : I= $\int_{-1}^0 \frac{x^4}{(x-1)^3}dx$.

Giải

- Đặt : x-1=t , suy ra : x=t+1 và : khi x=-1 thì t=-2 và khi x=0 thì t=-1 .
- Do đó : $\int_{-1}^0 \frac{x^4}{(x-1)^3}dx=\int_{-2}^{-1}\frac{(t+1)^4}{t^3}dt=\int_{-2}^{-1}\frac{t^4+4t^3+6t^2+4t+1}{t^3}dt=\int_{-2}^{-1}\left(t+4+\frac{6}{t}+\frac{4}{t^2}+\frac{1}{t^3}\right)dt$
- $\Leftrightarrow \int_{-2}^{-1}\left(t+4+\frac{6}{t}+\frac{4}{t^2}+\frac{1}{t^3}\right)dt=\left(\frac{1}{2}t^2+4t+6\ln|t|-\frac{4}{t}-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2}\right)\Big|_{-2}^{-1}=\frac{33}{8}-6\ln 2$

2. Đa thức : f(x)= $ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ ***có hai nghiệm :***

Có hai cách giải : Hệ số bất định và phương pháp nhẩy tầng lầu

Ví dụ 10 : Tính tích phân sau : I= $\int_2^3 \frac{1}{(x-1)(x+1)^3}dx$

Giải

Cách 1. (Phương pháp hệ số bất định)

- Ta có : $\dfrac{1}{(x-1)(x+1)^2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x+1)}+\dfrac{C}{(x+1)^2}=\dfrac{A(x+1)^2+B(x-1)(x+1)+C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}$
- Thay hai nghiệm mẫu số vào hai tử số : $\begin{cases}1=4A\\1=-2C\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\dfrac{1}{4}\\C=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$. Khi đó (1)

$\Leftrightarrow\dfrac{(A+B)x^2+(2A+C)x+A-B-C}{(x-1)(x+1)^2}\Rightarrow A-B-C=1\Leftrightarrow B=A-C-1=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{1}{4}$

- Do đó : $\int_2^3\dfrac{1}{(x-1)(x+1)^2}dx=\int_2^3\left(\dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{(x+1)}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(x+1)^2}\right)dx$

  $\Leftrightarrow I=\left[\dfrac{1}{4}\ln(x-1)(x+1)+\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{(x+1)}\right]\Bigg|_2^3=\dfrac{1}{4}\ln 8=\dfrac{3}{4}\ln 2$

Cách 2:

- Đặt : t=x+1, suy ra : x=t-1 và khi x=2 thì t=3 ; khi x=3 thì t=4 .
- Khi đó : I=$\int_2^3\dfrac{1}{(x-1)(x+1)^2}dx=\int_3^4\dfrac{dt}{t^2(t-2)}=\dfrac{1}{2}\int_3^4\dfrac{t-(t-2)}{t^2(t-2)}dt=\dfrac{1}{2}\left(\int_2^4\dfrac{1}{t(t-2)}dt-\int_3^4\dfrac{1}{t}dt\right)$

  $\Leftrightarrow I=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\int_2^4\left(\dfrac{1}{t-2}-\dfrac{1}{t}\right)dt-\int_3^4\dfrac{1}{t}dt\right)=\left(\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{t-2}{t}\right|-\dfrac{1}{2}\ln|t|\right)\Bigg|_3^4=\dfrac{3}{4}\ln 2$

Hoặc : $\dfrac{1}{t^3-2t^2}=\dfrac{(3t^2-4t)}{t^3-2t^2}-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3t^2-4t-4}{t^3-2t^2}\right)=\left[\dfrac{3t^2-4t}{t^3-2t^2}-\dfrac{1}{4}\dfrac{(3t+2)}{t^2}\right]=\dfrac{3t^2-4t}{t^3-2t^2}-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{t}+\dfrac{2}{t^2}\right)$

- Do đó : I=$\int_3^4\left(\dfrac{3t^2-4t}{t^3-2t^2}-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{t}+\dfrac{2}{t^2}\right)\right)dt=\left(\ln\left|t^3-2t^2\right|-\dfrac{1}{4}\left(3\ln|t|-\dfrac{2}{t}\right)\right)\Bigg|_3^4=\dfrac{3}{4}\ln 2$

Hoặc : $\dfrac{1}{t^2(t-2)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{t^2-(t^2-4)}{t^2(t-2)}\right)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{t-2}-\dfrac{t+2}{t^2}\right)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{t-2}-\dfrac{1}{t}-\dfrac{2}{t^2}\right)$

- Do đó :

  I=$\dfrac{1}{4}\int_3^4\left(\dfrac{1}{t-2}-\dfrac{1}{t}-\dfrac{2}{t^2}\right)dt=\dfrac{1}{4}\left(\ln\left|\dfrac{t-2}{t}\right|+\dfrac{2}{t}\right)\Bigg|_3^4=\dfrac{1}{4}\left(\ln\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\ln\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{1}{4}\left(\ln 3-\ln 2-\dfrac{1}{6}\right)$

Ví dụ 11: Tính tích phân sau : I= $\int_2^3\dfrac{x^2}{(x-1)^2(x+2)}dx$

Giải

Đặt : x-1=t , suy ra : x=t+1 , dx=dt và : khi x=2 thì t=1 ; x=3 thì t=2 .

Do đó : $\int_2^3\dfrac{x^2}{(x-1)^2(x+2)}dx=\int_1^2\dfrac{(t+1)^2}{t^2(t+3)}dt=\int_1^2\dfrac{t^2+2t+1}{t^2(t+3)}dt$

Cách 1; (Hệ số bất định)

Ta có : $\dfrac{t^2+2t+1}{t^2(t+3)}=\dfrac{At+B}{t^2}+\dfrac{C}{t+3}=\dfrac{(At+B)(t+3)+Ct^2}{t^2(t+3)}=\dfrac{(A+C)t^2+(3A+B)t+3B}{t^2(t+3)}$