CHƯƠNG IV

SỐ PHỨC

I LÝ THUYẾT.

1. ĐỊNH NGHĨA

- Một số phức là một biểu thức dạng $z = a + bi$ với $a,b \in \mathbb{R}$ và $i^2 = -1$.
- i được gọi là đơn vị ảo, a được gọi là phần thực và b được gọi là phần ảo của số phức $z = a + bi$.

  Tập hợp các số phức được kí hiệu là $\mathbb{C}$.

  $\mathbb{C} = \left\{a + bi \,/\, a,b \in \mathbb{R}; i^2 = -1\right\}$.
- Chú ý: - Khi phần ảo $b = 0 \Leftrightarrow z = a$ là số thực.

  - Khi phần thực $a = 0 \Leftrightarrow z = bi \Leftrightarrow z$ là số thuần ảo.

  - Số $0 = 0 + 0i$ vừa là số thực, vừa là số ảo.
- Hai số phức bằng nhau: $a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$ với $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.
- Hai số phức $z_1 = a + bi$; $z_2 = -a - bi$ được gọi là hai số phức đối nhau.

2. SỐ PHỨC LIÊN HỢP

Số phức liên hợp của $z = a + bi$ với $a,b \in \mathbb{R}$ là $a - bi$ và được kí hiệu bởi $\overline{z}$.

Một số tính chất của số phức liên hợp:

a) $\overline{\overline{z}} = z$ b) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ c) $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$

c) $\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$ d) $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

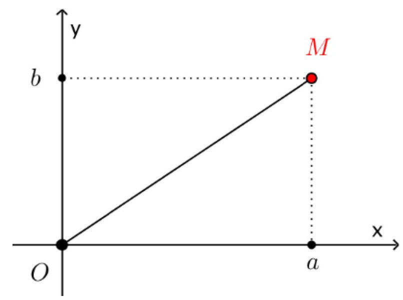
z là số thực $\Leftrightarrow z = \overline{z}$; z là số thuần ảo $\Leftrightarrow z = -\overline{z}$

3. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA SỐ PHỨC

Trong mặt phẳng phức Oxy (Ox là trục thực, Oy là trục ảo), số phức $z = a + bi$ với $a,b \in \mathbb{R}$ được biểu diễn bằng điểm $M\left(a;b\right)$.

4. MODULE CỦA SỐ PHỨC

- Môđun của số phức $z = a + bi$ $\left(a, b \in \mathbb{R}\right)$ là $\bar{z} = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Như vậy, môđun của số phức z là $\bar{z}$ chính là khoảng cách từ điểm M biểu diễn số phức $z = a + bi$ $\left(a, b \in \mathbb{R}\right)$ đến gốc tọa độ O của mặt phẳng phức là: $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$.
- Một số tính chất của môđun:
  - $|z| \geq 0; |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0;$
  - $\left|z^2\right| = |z|^2, \ \left|-z\right| = |z|, \ \left|\bar{z}\right| = |z|$
  - $\left|z_1 + z_2\right| \leq \left|z_1\right| + \left|z_2\right|$
  - $\left||z| - |z'|\right| \leq |z - z'| \leq |z| + |z'|$
  - $\left|z_1.z_2\right| = \left|z_1\right|.\left|z_2\right|$
  - $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{\left|z_1\right|}{\left|z_2\right|}$



5. CÁC PHÉP TOÁN VỚI SỐ PHỨC: CỘNG – TRỪ – NHÂN – CHIA SỐ PHỨC

Cho hai số phức $z = a + bi$; $z' = a' + b'i$ với $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ và số $k \in \mathbb{R}$.

- Tổng hai số phức: $z + z' = a + a' + (b + b')i$.
- Hiệu hai số phức: $z + z' = a - a' + (b - b')i$.
- Số đối của số phức $z = a + bi$ là $-z = -a - bi$.
- Nếu $\vec{u}, \overrightarrow{u'}$ theo thứ tự biểu diễn các số phức z, z' thì

  $\vec{u} + \overrightarrow{u'}$ biểu diễn số phức $z + z'$.

  $\vec{u} - \overrightarrow{u'}$ biểu diễn số phức $z - z'$.
- Nhân hai số phức:

  $z.z' = \left(a + bi\right)\left(a' + b'i\right) = \left(a.a' - b.b'\right) + \left(a.b' + a'.b\right)i$.
- Số phức nghịch đảo: $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\bar{z}$.
- Chia hai số phức:

  Nếu $z \neq 0$ thì $\frac{z'}{z} = \frac{z'.\bar{z}}{|z|^2}$, nghĩa là nếu muốn chia số phức z' cho số phức $z \neq 0$ thì ta nhân cả tử và mẫu của thương $\frac{z'}{z}$ cho $\bar{z}$.

❖ ***Chú ý:***

$$i^{4k} = 1; \ i^{4k+1} = i; \ i^{4k+2} = -1; \ i^{4k+3} = -i \ \ \left(\mathrm{k} \in \mathbb{Z}\right).$$

6. CĂN BẬC HAI CỦA SỐ PHỨC

Cho số phức w. Mỗi số phức z thỏa mãn $z^2 = w$ được gọi là một căn thức bậc 2 của w.
Mỗi số phức $w \neq 0$ 0 có hai căn bậc hai là hai số phức đối nhau $\left(z \text{ và } -z\right)$.

- Trường hợp w là số thực ($w = a \in \mathbb{R}$)

  + Khi $a > 0$ thì w có hai căn bậc hai là $\sqrt{a}$ và $-\sqrt{a}$.

  + Khi $a < 0$ nên $a = (-a)i^2$, do đó w có hai căn bậc hai là $\sqrt{-a}.i$ và $-\sqrt{-a}.i$.

  Ví dụ: Hai căn bậc 2 của -1 là i và $-i$.

  Hai căn bậc 2 của $-a^2$ $(a \neq 0)$ là ai , $-ai$.

- Trường hợp $w = a + bi$ $(a,b \in \mathbb{R}; b \neq 0)$.

  Cách 1:

  Gọi $z = x + yi$ $(x,y \in \mathbb{R})$ là căn bậc 2 của w khi và chỉ khi $z^2 = w$, tức là:

  $$(x+yi)^2 = a + bi$$
  $$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \to x = ...; y = ...$$

  Mỗi cặp số thực $\left(x;y\right)$ nghiệm đúng hệ phương trình đó cho ra một căn bậc hai $z = x + yi$ của số phức $w = a + bi$.

  Cách 2:

  Có thể biến đổi w thành bình phương của một tổng, nghĩa là $w = z^2$. Từ đó kết luận căn bậc hai của w là z và -z.

7. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI TRÊN TẬP SỐ PHỨC

Cho phương trình bậc 2: $Az^2 + Bz + C = 0$ (1) trong đó A, B, C là những số phức $A \neq 0$.

Xét biệt thức $\boxed{\Delta = B^2 - 4AC}$

- Nếu $\Delta \neq 0$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt:

$$\boxed{z_1 = \frac{-B+\sigma}{2A}; \qquad z_2 = \frac{-B-\sigma}{2A}}$$

Trong đó σ là một căn bậc 2 của Δ.

- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình (1) có nghiệm kép: $\boxed{z_1 = z_2 = \frac{-B}{2A}}$

<u>CHÚ Ý:</u>

- Mọi phương trình bậc n: $A_0z^n + A_1z^{n-1} + ... + A_{n-1}z + A_n = 0$ luôn có n nghiệm phức (không nhất thiết phân biệt).
- Hệ thức Vi-ét đối với phương trình bậc 2 số phức hệ số thực:

  Cho phương trình bậc 2 : $Az^2 + Bz + C = 0$ $(A, B, C \in \mathbb{R}; A \neq 0)$ có 2 nghiệm phân biệt (thực hoặc phức). Ta có: $\begin{cases} S = z_1 + z_2 = \dfrac{-B}{A} \\ P = z_1z_2 = \dfrac{C}{A} \end{cases}$

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TỔNG QUÁT

- Bước 1: Gọi số phức z cần tìm là $z = a + bi\ \left(a, b \in \mathbb{R}\right)$.
- Bước 2: Biến đổi theo điều kiện cho trước của đề bài (thường liên quan đến môđun, biểu thức có chứa $z, \overline{z}, \left|z\right|, \ldots$) để đưa về phương trình hoặc hệ phương trình 2 ẩn theo a và b nhờ tính chất 2 số phức bằng nhau (phần thực bằng nhau và phần ảo bằng nhau), rồi từ đó suy ra a và b và suy ra được số phức z cần tìm.

Câu 1. Tìm phần thực, phần ảo, số phức liên hợp và tính môđun của số phức z:

$a)\ \ z = \left(2 + 4i\right) + 2i\left(1 - 3i\right)$. $\qquad$ $b)\ z = \left(2 - 4i\right)\left(5 + 2i\right) + \dfrac{4 - 5i}{2 + i}$.

Câu 2. Cho số phức $z = 3 + 2i$. Tìm môđun số phức $w = zi + \overline{z}\left(1 + 2i\right)$.

Câu 3. Tìm phần thực, phần ảo của số phức sau: $1 + \left(1 + i\right) + \left(1 + i\right)^2 + \left(1 + i\right)^3 + \ldots + \left(1 + i\right)^{20}$

Câu 4. Tính $S = 1009 + i + 2i^2 + 3i^3 + \ldots + 2017i^{2017}$.

Câu 5. Cho số phức $z = -\dfrac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$. Tính $w = \left(1 + z\right)\left(1 + z^2\right)\left(1 + z^3\right)\ldots\left(1 + z^{2017}\right)$.

Câu 6. Tìm số z sao cho: $z + (2 + i)\overline{z} = 3 + 5i$.

Câu 7. Tìm số phức z khi nó thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau: $\left|z - (2 + i)\right| = \sqrt{10}$ và $z.\overline{z} = 25$.

Câu 8. Cho z và $\bar{z}$ là số phức liên hợp của z. Biết $\dfrac{z}{\left(\overline{z}\right)^2} \in \mathbb{R}$ và $\left|z - \overline{z}\right| = 2\sqrt{3}$ .Tìm $\left|z\right|$

Câu 9. Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện: $\left|z + 1 - 2i\right| = \left|\overline{z} + 3 + 4i\right|$ và $\dfrac{z - 2i}{\overline{z + i}}$ là một số thuần ảo.

Câu 10. Cho số phức z có môđun bằng 2018 và w là số phức thỏa mãn biểu thức $\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{w} = \dfrac{1}{z + w}$.

Môđun của số phức w bằng?

Câu 11. Cho số phức z, w khác 0 sao cho $\left|z - w\right| = 2\left|z\right| = \left|w\right|$. Phần thực của số phức $u = \dfrac{z}{w}$ là ?

Câu 12. Tính môđun của số phức z biết $z \neq \left|z\right|$ và $\dfrac{1}{\left|z\right| - z}$ có phần thực bằng 4.

SỬ DỤNG MÁY TÍNH CASIO 570 VN-PLUS ĐỂ GIẢI VỀ SỐ PHỨC

> Để thực hiện các phép toán trên tập số phức, ta chuyển qua chế độ CMPLX bằng cách bấm w2.
> - Bấm đơn vị ảo i bằng cách bấm phím b.
> - Tính môđun của số phức bấm qc.
> - Để bấm số phức liên hợp của z bấm q22để hiện Conjg (liên hợp).

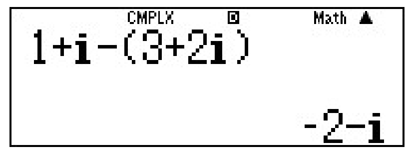
1. PHÉP CỘNG, TRỪ, NHÂN, CHIA

Câu 1. Tính $z = 1 + i - (3 + 2i)$.

<u>Hướng dẫn:</u>

Ta lần lượt bấm các phím như sau: 1+bp(3+2b)

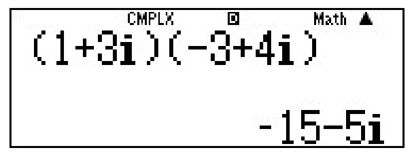
Và ta được kết quả là:



Câu 2. Tính $z = (1 + 3i)(-3 + 4i)$.

<u>Hướng dẫn:</u>

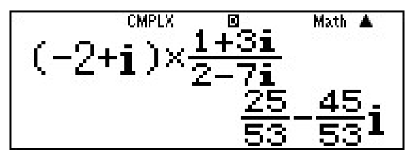
Ta lần lượt bấm các phím tương tự như trên và ta thu được kết quả như sau:



Câu 3. Tính $z = (-2 + \mathrm{i})\dfrac{1+3i}{2-7i}$

<u>Hướng dẫn:</u>

Ta lần lượt nhập biểu thức $z = (-2 + \mathrm{i})\dfrac{1+3i}{2-7i}$ vào máy ta thu được kết quả:



Câu 4. Cho số phức $z = a + bi$. Số phức z^2 có phần ảo là :

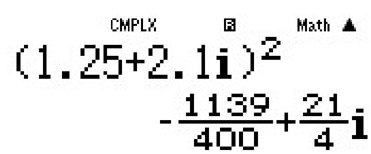
A. a^2b^2 **B.** $2a^2b^2$ **C.** $2ab$ **D.** ab

<u>Hướng dẫn:</u>

- Vì đề bài cho ở dạng tổng quát nên ta tiến hành "cá biệt hóa" bài toán bằng cách chọn giá trị cho a, b (lưu ý nên chọn các giá trị lẻ để tránh xảy ra trường hợp đặc biệt).

  Chọn $a = 1.25$ và $b = 2.1$ ta có $z = 1.25 + 2.1i$
- Sử dụng máy tính Casio tính z^2

1 . 2 5 + 2 . 1 b) d =



Vậy phần ảo là $\dfrac{21}{4}$

- Xem đáp số nào có giá trị là $\frac{21}{4}$ thì đáp án đó chính xác. Ta có :

Vậy $2ab = \frac{21}{4} \Rightarrow$ Đáp án **C** là chính xác.

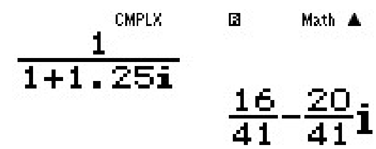
Câu 5. Cho số phức $z = a + bi$. Số phức z^{-1} có phần thực là :

A. $a + b$ **B.** $\frac{a}{a^2 + b^2}$ **C.** $\frac{-b}{a^2 + b^2}$ **D.** $a - b$

Hướng dẫn:

- Vì đề bài mang tính chất tổng quát nên ta phải cá biệt hóa, ta chọn $a = 1; b = 1.25$.
- Với $z^{-1} = \frac{1}{z}$ Sử dụng máy tính Casio

a 1 R 1 + 1 . 2 5 b =



Ta thấy phần thực số phức z^{-1} là : $\frac{16}{41}$ đây là 1 giá trị dương. Vì ta chọn $b > a > 0$ nên ta thấy ngay đáp số **C** và **D** sai.

Thử đáp số **A** có $a + b = 1 + 1.25 = \frac{9}{4} \neq \frac{16}{41}$ vậy đáp số A cũng sai $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **B**

Câu 6. Cho số phức $z = (1+i)^2 + (1+i)^3 + ... + (1+i)^{22}$. Phần thực của số phức z là :

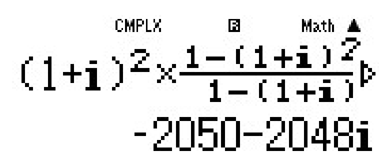
A. -2^{11} **B.** $-2^{11} + 2$ **C.** $-2^{11} - 2$ **D.** 2^{11}

Hướng dẫn:

Dãy số trên là một cấp số nhân với $U_1 = (1+i)^2$, số số hạng là 21 và công bội là $1 + i$. Thu gọn z ta được : $z = U_1.\frac{1-q^n}{1-q} = (1+i)^2.\frac{1-(1+i)^{21}}{1-(1+i)}$

- Sử dụng máy tính Casio tính z

(1+b)dOa1p(1+b)^21R1p(1+b)=



Vậy $z = -2050 - 2048i$

$\Rightarrow$ Phần ảo số phức z là $-2050 = -2^{11} - 2 \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

2. TÍNH MÔĐUN

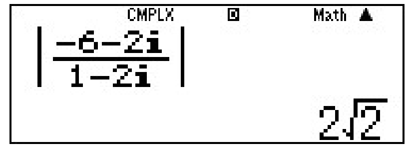
Câu 1. Tìm môđun của số phức $(1-2i)\overline{z} + 2i = -6$.

Hướng dẫn:

$(1-2i)\overline{z}+2i=-6 \Rightarrow \left|z\right|=\left|\overline{z}\right|=\left|\dfrac{-6-2i}{1-2i}\right|$.Nên ta thực hiện bấm như sau:

qcap6p2bR1p2b=

Ta thu được kết quả:

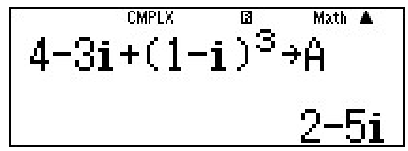


Câu 2. Tìm số phức $\omega = 2.\overline{\overline{z_1}.z_2}$. Biết $z_1 = 4-3i+(1-i)^3,\ z_2 = \dfrac{2+4i-2(1-i)^3}{1+i}$.

Hướng dẫn:

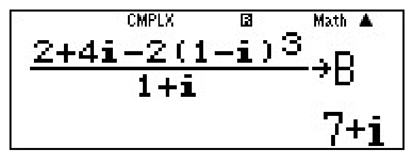
- Tính $z_1 = 4-3i+(1-i)^3$ và lưu vào biến A:

4p3b+(1pb)^3qJz



- Tính $z_2 = \dfrac{2+4i-2(1-i)^3}{1+i}$ và lưu vào biến B

a2+4bp2(1pb)^3R1+bqJx



- Tính $\omega = 2.\overline{\overline{z_1}.z_2}$:

2q22q22Qz)OQx)=

3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

Câu 1. Tìm môđun của số phức z thỏa mãn: $\left(1-3i\right)z+3i=7i-2$.

$A.\left|z\right|=1$ $\quad$ $B.\left|z\right|=4$ $\quad$ $C.\left|z\right|=\sqrt{2}$ $\quad$ $D.\left|z\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

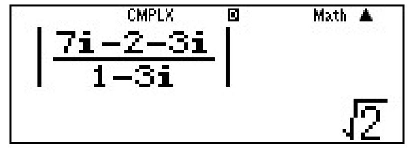
<u>Hướng dẫn:</u>

Ta chuyển z về dạng: $z=\dfrac{7i-2-3i}{1-3i}$ và tìm môđun.

Quy trình bấm máy:

Qca7bp2p3bR1p3b=

Màn hình hiển thị:



>>> **Chọn C**.

Câu 2. Cho số phức z thỏa mãn $(3-i)(z+1)+(2-i)(\overline{z}+3i)=1-i.$ Tìm môđun của số phức $w=\dfrac{i-z}{1+z}$.

$A.\dfrac{\sqrt{82}}{4}$ $\quad$ $B.\dfrac{\sqrt{82}}{8}$ $\quad$ $C.\dfrac{2\sqrt{82}}{9}$ $\quad$ $D.\dfrac{3\sqrt{82}}{5}$

<u>Hướng dẫn:</u>

Ở đây là sẽ cho phím X sẽ là đại diện cho số phức z.

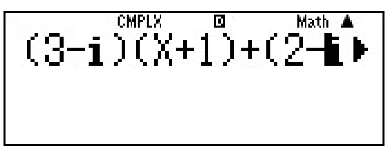
Đây là phương trình bậc nhất của số phức.

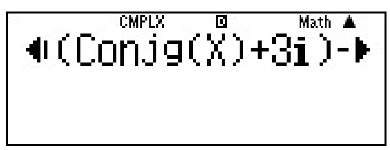
Bước 1: Các em nhập lại phương trình này với máy tính lần lượt như sau:

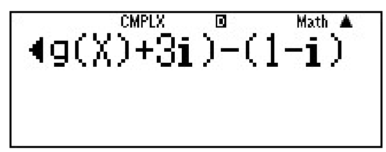
$(3-i)(\mathrm{X}+1)+(2-i)(\mathrm{C\,onj}g(X)+3i)-(1-i)$

(3pb)(Q)+1)+(2pb)(q22Q))+3b)p(1pb)

Màn hình hiển thị:







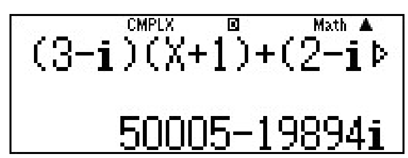
Bước 2:

Tìm số phức $z=a+bi$ nghĩa là đi tìm a và b.

Ta sẽ cho trước a=10000 và b=100 rồi từ đó suy ngược lại mối quan hệ của a và b bằng 1 hệ phương trình 2 ẩn theo a và b, lúc đó tìm được a và b.

Cho $z=10000+100i$ bằng cách nhập r10000+100b=

Màn hình sẽ cho kết quả:



Nghĩa là:

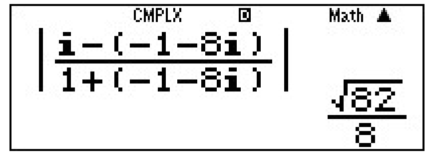
$(3-i)(z+1)+(2-i)(\overline{z}+3i)-(1-i)=50005+19894i=5a+5+(2a-b+6)i$.

Cho nên:

$$(3-i)(z+1)+(2-i)(\overline{z}+3i)-(1-i)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5a+5=0\\2a-b-6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5a+5=0\\2a-b=6\end{cases}\Rightarrow a=-1,b=8\to z=-1-8i$$

Từ đó tính môđun của w :



>>> **Chọn B.**

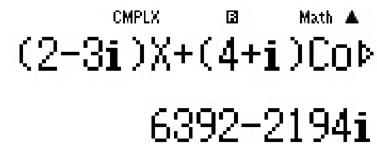
Câu 3. Cho số phức $z = a + bi$ thỏa mãn điều kiện $(2-3i)z+(4+i)\overline{z}=-(1+3i)^2$ .Tìm $P = 2a + b$

A.3 **B**.-1 **C**.1 **D**. Đáp án khác

Giải:

- Phương trình $\Leftrightarrow (2-3i)z+(4+i)\overline{z}+(1+3i)^2=0$
- Nhập vế trái vào máy tính Casio và CALC với $X = 1000 + 100i$

(2 p 3 b) Q) + (4 + b) q 2 2 Q)) + (1 + 3 b) d r 1 0 0 0 + 1 0 0 b =



Vậy vế trái $= 6392 - 2194i$ với

$$\begin{cases} 6392 = 6.1000 + 4.100 - 8 = 6a + 4b - 8 \\ 2194 = 2.1000 + 2.100 - 6 = 2a + 2b - 6 \end{cases}$$

- Để vế trái $= 0$ thì $\begin{cases} 6a + 4b - 8 = 0 \\ 2a + 2b - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -2; b = 5$

Vậy $z = -2 + 5i \Rightarrow P = 2a + b = 1 \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C.**

4. BIỄU DIỄN HÌNH HỌC CỦA SỐ PHỨC

Câu 1. Các điểm M,N,P lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức $z_1=\dfrac{4i}{i-1}; z_2=(1-i)(1+2i)$ $;z_3=-1+2i$

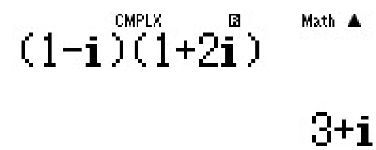
A. Tam giác vuông **B**.Tam giác cân **C**.Tam giác vuông cân **D**.Tam giác

<u>Hướng dẫn:</u>

- Rút gọn z_1 bằng Casio a 4 b R b p 1 =

Ta được $z_1=2-2i$ vậy điểm $M(2;-2)$

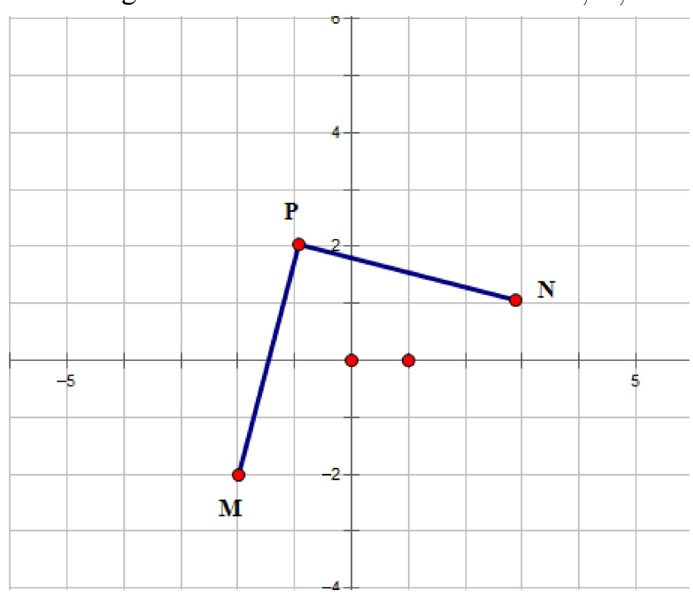
- Rút gọn z_2 bằng Casio (1 p b) (1 + 2 b) =



Ta được $z_2=3+i$ vậy điểm $N(3;1)$

Tương tự $z_2=-1+2i$ và điểm $P(-1;2)$

- Để phát hiện tính chất của tam giác MNP ta nên biểu diễn 3 điểm M,N,P trên hệ trục tọa độ



Dễ thấy tam giác MNP vuông cân tại P $\Rightarrow$ đáp án **C** chính xác

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi M là điểm biểu diễn số phức $z=3-4i$, điểm M' là điểm biểu diễn số phức $z'=\dfrac{1+i}{2}z$. Tính diện tích $\Delta OMM'$