BÀI GIẢNG MÔN: TOÁN CAO CẤP

CHƯƠNG 1: MA TRẬN- ĐỊNH THỨC

I/ MA TRẬN

1. Các khái niệm cơ bản về ma trận:

a) Khái niệm ma trận:

Định nghĩa 1.1: *Ma trận A cấp mxn (hoặc cỡ mxn) là một bảng số chữ nhật có m hàng, n cột và được viết:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ hay } A=(a_{ij})_{mxn}$$

- Các số a_{ij} (i=1,2…m; j=1,2..n) là phần tử nằm ở hàng i và cột j của ma trận A.

Ví dụ: Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$. A là một ma trận cỡ 2x3 với các phần tử :

$a_{11}=2$; $a_{12}=-1$; $a_{13}=0$; $a_{21}=3$; $a_{22}=4$; $a_{23}=-2$.

b) ***Hai ma trận bằng nhau:***

Định nghĩa 1.2: *Hai ma trận A, B được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi chúng cùng cỡ và các phần tử ở vị trí tương ứng của chúng đôi một bằng nhau và ta viết A=B.*

Như vậy nếu $A=(a_{ij})_{mxn}$; $B=(b_{ij})_{mxn}$

$A=B \leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}$ Với i=1…m, j=1…n.

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2-a & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 2m \\ & & \end{bmatrix}$. Tìm a và m để A=B

c) Ma trận đối:

Định nghĩa 1.3: *Cho ma trận A cỡ mxn, $A=(a_{ij})_{mxn}$. Ma trận đối của ma trận A kí hiệu –A và được xác định $-A= (-a_{ij})_{mxn}$.*

Ví dụ : Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ thì $-A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 2 \end{bmatrix}$

d) Ma trận chuyển vị:

Định nghĩa 1.4: *Cho ma trận $A=(a_{ij})_{mxn}$. Chuyển vị của ma trận A là ma trận $A^{'}=(a^{'}_{ij})_{mxn}$ trong đó $(a^{'}_{ij})=(a_{ji})$ với $i=1..m; j=1..n$.*

Như vậy ma trận chuyển vị $A^{'}$ nhận được bằng cách chuyển cột của ma trận thành hàng và chuyển hàng thành cột.

Ví dụ: Cho ma trận $A=\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}_{2x3} \rightarrow A^{'}=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}_{3x2}$

Ta cũng có thể chứng minh được các tính chất sau:

i. $(A^{'})^{'}=A$

ii. $(A+B)^{'}=A^{'}+B^{'}$

iii. $(AB)^{'}=B^{'}A^{'}$

2.Các dạng ma trận đặc biệt:

Ma trận không:

Ma trận không là ma trận có tất cả các phần tử bằng 0.

Kí hiệu: O_{mxn}

Ví dụ: $O_{3x2}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ma trận hàng: *Ma trận hàng là ma trận chỉ có một hàng hay ma trậncỡ 1xn.*

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \end{bmatrix}$$

Ma trận cột: *Ma trận cột là ma trận chỉ có 1 cột hay ma trận cỡ mx1.*

$$A=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ a_m \end{bmatrix}$$

Ma trận vuông: *Ma trận vuông là ma trận có số hàng bằng số cột hay ma trận cỡ nxn.*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Trong ma trận vuông A đường thẳng qua a_{ii}(i=1,2…n) gọi là đường chéo chính của ma trận A. Đường thẳng qua $a_{1,n}$, $a_{2,n-1}$,…, $a_{n,1}$ gọi là đường chéo phụ của ma trận A.

VD: $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ -7 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Ma trận tam giác:

Ma trận tam giác là ma trận vuông có tất cả các phần tử nằm chỉ về một phía của đường chéo chính bằng 0.

Như vậy ta sẽ có hai loại ma trận tam giác.

Ma trận tam giác trên:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ma trận tam giác dưới:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ma trận đường chéo:

Ma trận đường chéo là ma trận vuông có tất cả các phần tử nằm ngoài đường chéo chính bằng 0.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ma trận đơn vị:

Ma trận đơn vị là ma trận đường chéo có tất cả các phần tử thuộc đường chéo chính bằng 1. Kí hiệu: E

Như vậy ma trận đơn vị là ma trận có dạng:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Ma trận bậc thang.

Khái niệm: *Ma trận $A=(a_{ij})_{mxn}$ được gọi là ma trận bậc thang nếu:*

i) *Các hàng 0 (nếu có) luôn nằm ở phía dưới các hàng khác 0.*

ii) *Đối với các hàng khác 0: hai hàng khác 0 liền nhau thì phần tử khác 0 đầu tiên ở hàng dưới luôn nằm bên phải phần tử khác 0 đầu tiên ở hàng liền kề.*

Ví dụ: Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ là một ma trận bậc thang.

3. Các phép toán trên ma trận:

a . Phép cộng ma trận.

Cho A, B là hai ma trận cùng cỡ $A=(a_{ij})_{mxn}$; $B=(b_{ij})_{mxn}$. Tổng của hai ma trận A và B là một ma trận cùng cỡ với A và B, kí hiệu A+B và được định nghĩa:

$$A+B=C=(c_{ij}) \text{ với } c_{ij}= a_{ij}+ b_{ij}$$

Như vậy phép cộng hai ma trận chỉ thực hiện được khi chúng cùng cỡ.

Ví dụ 1:

Cho hai ma trận:

$$A=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 0\\ 1 & 4 & -2\end{bmatrix}_{2x3} \quad và \quad B=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\\ 1 & -4 & 2\end{bmatrix}_{2x3}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}(-2)+(-1) & (-1)+(-1) & 0+0\\ 1+1 & 4+(-4) & (-2)+2\end{bmatrix}_{2x3}=\begin{bmatrix}-3 & -2 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}_{2x3}$$

b*. *Phép nhân một số với một ma trận:

Phép nhân một số thực k với ma trận $A=(a_{ij})_{mxn}$ là một ma trận cùng cỡ với ma trận A Kí hiệu kA và được xác định: $kA=(ka_{ij})_{mxn}$

Ví dụ 2:

Cho ma trận: $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 1 & -2\\ 5 & 0 & -3\end{bmatrix}$

Ta có:

$$2A=2\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 1 & -2\\ 5 & 0 & -3\end{bmatrix}=2.\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 1 & -2\\ 5 & 0 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -2 & 4\\ 6 & 2 & -4\\ 10 & 0 & -6\end{bmatrix}$$

Từ định nghĩa ma trận đối ta có –A=(-1)A

Do đó ta có định nghĩa phép trừ hai ma trận:

A-B=A+(-B)

Như vậy phép trừ hai ma trận cùng cỡ là một ma trận cùng cỡ

$A-B=C=(c_{ij})_{mxn}$ với $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$

Ví dụ 3:

Cho hai ma trận:

$$A=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 0\\ 1 & 4 & -2\end{bmatrix}_{2x3} \quad và \quad B=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\\ 1 & -4 & 2\end{bmatrix}_{2x3}$$

$$A-B=\begin{bmatrix}(-2)-(-1) & (-1)-(-1) & 0-0\\ 1-1 & 4-(-4) & (-2)-2\end{bmatrix}_{2x3}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 8 & -4\end{bmatrix}_{2x3}$$