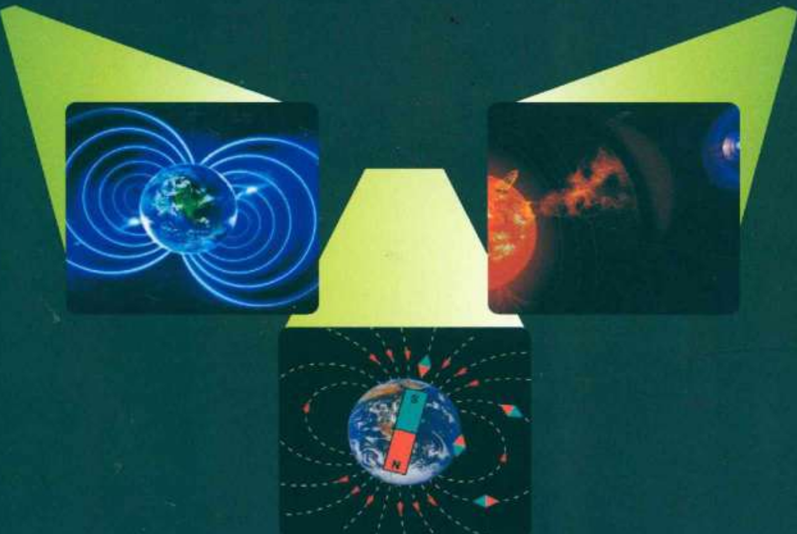
TS. ĐẶNG DANH HOÀNG (Chủ biên)
PGS.TS. LẠI KHẮC LÃI, TS. LÊ THỊ HUYỀN LINH,
ThS. TRẦN THỊ THANH HẢI

GIÁO TRÌNH

LÝ THUYẾT TRƯỜNG ĐIỆN TỪ



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

GIÁO TRÌNH

LÝ THUYẾT TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP

TS. ĐẶNG DANH HOẰNG (Chủ biên)
PGS.TS. LẠI KHẮC LÃI, TS. LÊ THỊ HUYỀN LINH,
ThS. TRẦN THỊ THANH HẢI

GIÁO TRÌNH
LÝ THUYẾT TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

(Dùng cho sinh viên ngành Điện, Điện tử)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
NĂM 2017

MÃ SỐ: $\frac{02 - 146}{ĐHTN - 2017}$

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn giáo trình được biên soạn dựa trên đề cương chi tiết môn học Cơ sở lý thuyết Trường điện từ hiện đang dùng cho sinh viên ngành điện Trường Đại học Kỹ thuật công nghiệp, đồng thời có tham khảo và điều chỉnh cho phù hợp với chương trình đào tạo phần kiến thức cơ sở bắt buộc đối với khối các trường kỹ thuật ngành Điện đã được thông qua hội đồng ngành.

Giáo trình gồm 7 chương với 2 tín chỉ, nội dung chương 1 đề cập đến sự hình thành và phát triển của Trường điện từ, Điện động lực học Maxwell, Điện động lực học cổ điển sau Maxwell, khái quát về mô hình bài toán Mạch và bài toán Trường; Chương 2 trình bày những khái niệm cơ bản của Trường điện từ và môi trường chất; Chương 3 mô tả toán học quy luật tương tác động lực học giữa Trường điện từ và môi trường chất - hệ phương trình Maxwell; Chương 4 đề cập đến các khái niệm và luật cơ bản của điện trường tĩnh; Chương 5 trình bày một số phương pháp giải bài toán điện trường tĩnh (phương trình Laplace - Poisson); Chương 6 và 7 đề cập đến những vấn đề cơ bản của Trường điện từ dừng và Trường điện từ biến thiên.

Cuốn sách do TS. Đặng Danh Hoằng chủ biên và biên soạn chương 1, chương 2 và các câu hỏi ở cuối mỗi chương; PGS.TS. Lại Khắc Lãi biên soạn chương 3, chương 4; TS. Lê Thị Huyền Linh biên soạn chương 5, chương 6; ThS. Trần Thị Thanh Hải biên soạn chương 7.

Chúng tôi chân thành cảm ơn lãnh đạo Đại học Thái Nguyên, Ban Giám hiệu trường Đại học Kỹ thuật công nghiệp, Bộ môn Kỹ thuật Điện - Khoa Điện và các bạn đồng nghiệp đã tạo mọi điều kiện thuận lợi, động viên và đóng góp những ý kiến quý báu để chúng tôi hoàn thành cuốn giáo trình này.

Trong quá trình biên soạn không tránh khỏi còn những thiếu sót, chúng tôi mong muốn nhận được mọi sự góp ý của bạn đọc và đồng nghiệp để giáo trình được hoàn thiện hơn trong lần tái bản sau.

Mọi góp ý xin gửi về địa chỉ Email: hoangktd1977@tnut.edu.vn

Xin chân thành cảm ơn!

Nhóm tác giả

Chương 1

SỰ HÌNH THÀNH VÀ PHÁT TRIỂN BÀI TOÁN TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

Chương này giới thiệu về sự hình thành và phát triển của Trường điện từ, Điện động lực học Maxwell, Điện động lực học cổ điển sau Maxwell, khái quát về mô hình bài toán Mạch và bài toán Trường.

Từ những năm 1660, Isaac Newton đã nghiên cứu và cho ra nhận xét: lực làm cho các hành tinh và các ngôi sao chuyển động là cùng loại lực làm cho các vật trên Trái đất rơi xuống đất - đó là lực vạn vật hấp dẫn mà giữa hai vật chỉ phụ thuộc vào khối lượng của chúng và khoảng cách giữa chúng. Như vậy các hành tinh ở gần Trái đất bị hút với những tốc độ khác nhau bởi lực hấp dẫn của Mặt trời, còn những ngôi sao ở xa vẫn tương đối cố định với nhau. Nhận thức đó của Newton đã thống nhất thế giới vũ trụ giữa bầu trời và mặt đất mà trước đó được xem là hoàn toàn độc lập và không thể hợp nhất. Tập hợp gồm những phương trình có giá trị vạn vật của ông đã tạo nên một khuôn mẫu cho các thế hệ các nhà vật lí kế tiếp phát triển, đồng thời cho phép các kĩ sư tính ra các lực và moment quay cho các động cơ tạo nên cuộc Cách mạng Công nghiệp.

Hơn 200 năm sau, vào thập niên 1860 James Clerk Maxwell cũng dựa trên những lý thuyết mà Newton xây dựng đã chứng minh rằng lực điện và lực từ là hai mặt thể hiện của cùng một lực, đó là lực điện từ. Tập hợp các phương trình thống nhất của Maxwell còn cho thấy ánh sáng là một dạng bức xạ điện từ, một nhận thức làm khai màn cho thời đại điện khí mà chúng ta đang sống ngày nay. Từ hệ phương trình mà Maxwell xây dựng cho phép chúng ta lý giải mọi hoạt động và các mối quan hệ của Trường điện từ và môi trường chất, từ truyền thanh vô tuyến đến điện thoại thông minh... Để hiểu rõ hơn về những đóng góp của Maxwell trong việc tìm ra lý thuyết Trường điện từ và ảnh hưởng của nó ta cần có cái nhìn tổng quát về lịch sử phát triển trường điện từ.

1.1. SỰ HÌNH THÀNH ĐIỆN ĐỘNG LỰC HỌC MAXWELL

Đôi nét về James Clerk Maxwell

James Clerk Maxwell (1831 - 1879) là nhà bác học người Anh. Ông đã tạo ra Điện động lực học vĩ mô cổ điển, được viết bằng những phương trình toán học thuần túy để đưa ra một học thuyết mới về điện từ và ánh sáng, trở thành nhà cách mạng trong Vật lý học, tạo nên bức tranh Điện động lực của thế giới, thay cho bức tranh Cơ học thống trị từ thời Newton.

Năm 10 tuổi, ông được cha gửi vào học ở Viện hàn lâm Edinburg, ông ham hiểu biết, có khả năng toán học rất lớn, đặc biệt say mê môn hình học. Năm 14 tuổi, viết bài báo đầu tay về việc vẽ các đường cong Oval và các đường cong Oval nhiều tiêu điểm, được báo cáo và đăng tóm tắt trong tập công trình của Hội Hoàng gia Edinburg. Năm 1847 (16 tuổi), ông nhập học tại Đại học tổng hợp Edinburg, được nhà Toán học và Vật lý học nổi tiếng Hammilton (1805 - 1865) chăm sóc đặc biệt về toán học và logic học. Năm 1849 (18 tuổi), Maxwell đã công bố một tác phẩm nghiên cứu lý thuyết cân bằng của vật đàn hồi, chứng minh một định luật rất quan trọng trong lý thuyết đàn hồi và cơ học xây dựng, về sau gọi là định luật Maxwell. Năm 1854, tốt nghiệp xuất sắc Đại học Tổng hợp Cambridge, ở lại trường để chuẩn bị phong danh hiệu Giáo sư. Nghiên cứu tự lập về điện học. Đọc các công trình về điện của Michael Faraday. Năm 1857, sau khi đọc kỹ công trình "Những khảo sát thực nghiệm trong lĩnh vực điện học" của Faraday, Maxwell đã tìm thấy trong đó những ý tưởng sâu sắc. Ông cho rằng muốn những tư tưởng đó thắng lợi phải xây dựng cho nó một ngôn ngữ toán học chính xác. Do đó trong thời gian 3 năm (1854 - 1857) ông đã hoàn thành công trình "Về những đường sức của Faraday", trong đó ông đã xây dựng ngôn ngữ toán học chính xác cho lý thuyết điện từ của Faraday bằng các định luật toán học. Ông đã gửi công trình này tới Faraday, khiến Faraday rất cảm động và đánh giá rằng đó chính là sự ủng hộ lớn lao của Maxwell đối với mình. Năm 1856 - 1859, đăng công trình về tính ổn định bền vững của vòng đai Saturn (hành tinh sao Thổ). Công trình được đánh giá là kết quả ứng dụng toán học xuất sắc nhất trong Vật lý học và được trao Giải thưởng Adam (1857). Năm 1860, là Giáo sư vật lý Đại học tổng hợp London nghiên cứu động học chất khí, thiết lập định luật phân bố thống kê các phân tử khí theo vận tốc mang tên gọi phân bố Maxwell. Từ năm 1861 đến năm 1862, Maxwell tiếp tục phát triển lý thuyết của mình về Trường điện từ và ông đã công bố một loạt bài báo dưới tiêu đề chung "Về các đường sức vật lý". Trong công trình này, Maxwell đã xây dựng mô hình phức tạp hơn cho Trường điện từ và đi đến hệ phương trình nổi tiếng mang tên hệ phương trình Maxwell, trong đó thể hiện chính xác mối quan hệ giữa sự biến đổi từ trường và suất điện động do nó gây ra. Ông cũng đã đưa vào điện học một khái niệm rất quan trọng là khái niệm dòng điện chuyển dịch, tuy không phải là dòng điện thực sự nhưng nó cũng tạo ra từ trường như dòng điện dẫn. Maxwell cho rằng Trường điện từ cũng mang năng lượng và ông đã tính được mật độ năng lượng tại từng điểm. Ông cũng tìm ra rằng trong môi trường đàn hồi của Trường điện từ, có những sóng ngang truyền đi với vận tốc bằng với vận tốc ánh sáng. Do đó, theo ông khó mà không kết luận rằng ánh sáng cũng là một dao động ngang của cùng một môi trường sinh ra các hiện tượng điện từ. Từ năm 1864 đến năm 1865, ông công bố công trình "Lý thuyết động lực học của Trường điện từ". Trong công trình này ông cũng nêu rõ: "Lý thuyết mà tôi đề nghị có thể được gọi là lý thuyết Trường điện từ vì rằng nó nghiên cứu không gian bao quanh các vật điện và từ. Nó cũng có thể được gọi là lý thuyết động lực học vì nó thừa nhận rằng trong không gian đó có vật chất đang chuyển động, nhờ nó mà diễn ra các hiện tượng điện từ quan sát được".

Trong tác phẩm này khái niệm Trường điện từ được ông định nghĩa một cách cụ thể. Ông cho rằng: "Trường điện từ là một bộ phận của không gian chứa đựng và bao bọc các vật ở trạng thái điện hoặc trạng thái từ". Cũng trong công trình này Maxwell đã khẳng định rằng Trường điện từ là có thật và mang năng lượng. Như vậy lần đầu tiên trong Vật lý học, khái niệm Trường đã được Maxwell xây dựng một cách trọn vẹn. Năm 1873, ông công bố "Giáo trình điện học và từ học". Đó là một giáo trình rất cơ bản, trong đó ông tổng kết và hệ thống hóa toàn bộ lý thuyết của mình thể hiện rõ hai luận điểm cơ bản. Luận điểm thứ nhất: tại một điểm bất kì trong vùng không gian, nếu có từ trường biến thiên theo thời gian thì vùng không gian đó sẽ xuất hiện điện trường biến thiên và điện trường này mang tính chất xoáy. Luận điểm thứ hai: bất kỳ một điện trường nào biến thiên theo thời gian cũng sinh ra một từ trường biến thiên và từ trường này mang tính chất xoáy. Như vậy lý thuyết của Maxwell cho ta thấy rằng tại một điểm trong không gian có từ trường biến thiên theo thời gian thì vùng không gian đó phải xuất hiện điện trường biến thiên và ngược lại. Cứ như vậy điện từ trường luôn tồn tại đồng thời, chuyển hóa lẫn nhau và lan truyền trong không gian dưới dạng sóng, gọi là sóng điện từ. Trong công trình này, Maxwell đã so sánh hai phương hướng trong lý thuyết các hiện tượng điện và từ: phương hướng dựa trên nguyên lý tác dụng xa của Newton và phương hướng dựa trên nguyên lý tác dụng gần, tức là phương pháp Faraday. Ông tự nhận mình là luật sư biện hộ cho phương pháp Faraday, theo quan điểm thuyết tác dụng gần và lấy khái niệm Trường làm cơ sở. Cũng trong công trình này, ông đã trình bày tỉ mỉ hơn lý thuyết điện từ về ánh sáng. Ông đã rút ra kết luận rằng "Ánh sáng là một loại sóng điện từ do sự kết hợp của vector điện trường và vector từ trường vuông góc với nhau, biến thiên hình sin theo thời gian". Chính kết luận này đã góp phần thắng lợi của lý thuyết sóng ánh sáng ở thế kỷ XIX. Ông còn chỉ ra rằng "ánh sáng sẽ gây áp suất trên các bề mặt vật thể khi nó truyền qua". Ông lưu ý rằng có thể kiểm tra kết luận bằng thực nghiệm. Những năm cuối đời, Maxwvell gắn bó với việc tạo dựng Phòng thí nghiệm Cavendish, biên soạn tuyển tập các công trình của Cavendish (1731 - 1810) về điện học, giảng dạy vật lý, thiết kế chế tạo nhiều loại máy dụng cụ thí nghiệm, viết nhiều loạt bài phổ biến khoa học cho bộ sách kinh điển Encyclopaedia Britanica (Bách khoa toàn thư tổng hợp xuất bản ở London)... Lý thuyết Trường điện từ mà Maxwell đưa ra đã đi trước khá xa so với thực nghiệm lúc bấy giờ. Vì vậy sau khi nó ra đời, phải đợi một phần tư thế kỷ nữa nó mới được thực nghiệm khẳng định một cách trọn vẹn.

Những bằng chứng thực nghiệm khẳng định sự đúng đắn của Điện động lực học Maxwell

Trong lịch sử phát triển của Vật lý học, bất kì một lý thuyết mới nào khi ra đời cũng vấp phải sự chống đối khá mạnh mẽ. Lý thuyết cũ không bao giờ dễ dàng nhường chỗ cho lý thuyết mới. Lý thuyết mới muốn đi đến thắng lợi cần phải trải qua quá trình đấu tranh để khẳng định mình. Chúng ta nhớ lại rằng, từ trước công nguyên đến thế kỉ XVII và bước sang thế kỉ XVIII là một chặng đường dài mà điện - từ không phát triển được gì đáng kể. Có thể coi đây là thời kì tiến hóa yên tĩnh trong lĩnh vực Điện học, thời gian này không có khám phá nào được coi là cách mạng để có thể thay đổi bức tranh điện - từ. Nhưng sau đó, từ năm 1820 thì hàng loạt các công trình, đầu tiên là của Oersted, Ampere, Faraday và cuối cùng là của Maxwell đã làm cho lĩnh vực điện từ có những bước nhảy vọt. Giai đoạn này có thể coi như là thời kì biến đổi cách mạng trong lĩnh vực điện, từ vì các kết quả nghiên cứu đã làm thay đổi hẳn bức tranh điện từ. Bắt đầu từ thí nghiệm của Oersted đến thí nghiệm cảm ứng điện từ của Faraday, vì có cái nhìn tiến bộ, ông không đi theo lối mòn của các nhà bác học trước đó để giải thích hiện tượng. Cuộc cách mạng về phương pháp ông thể hiện ở chỗ ông đã ngoảnh mặt với nguyên lý tác dụng xa, một nguyên lý mà trong vòng suốt 200 năm luôn được coi là kim chỉ nam để giải thích các hiện tượng vật lý. Ông dựa trên nguyên lý tác dụng gần để xây dựng hình ảnh đường sức điện, đường sức từ, khái niệm Trường (dù đó vẫn còn là tư tưởng). Điều khó khăn cho "phương pháp Faraday" là những người bênh vực nguyên lý tác dụng xa lại là những nhà khoa học rất nổi tiếng. Ví dụ như Coulomb, là nhà bác học đã xây dựng định luật về sự tương tác giữa hai điện tích điểm đứng yên là hoàn toàn dựa trên nguyên lý tác dụng xa. Trong lúc khó khăn ấy, chỉ có Maxwell là người đã ủng hộ Faraday. Maxwell đã hoàn toàn dựa trên nguyên lý tác dụng gần trong môi trường giả định để thành lập phương trình của trường điện từ. Trong "Giáo trình điện học và từ học" Maxwell đã phân tích lý thuyết tác dụng xa và nêu lên rằng thuyết tác dụng xa không thể trả lời câu hỏi: "Nếu có một cái gì đó truyền từ xa, từ một hạt này đến một hạt khác, thì khi đã rời khỏi một hạt và chưa đi tới hạt khác, nó sẽ ở trạng thái nào?". Ông cho rằng câu trả lời hợp lý duy nhất là giả thuyết về một môi trường trung gian truyền tác dụng từ hạt này sang hạt khác. Ông cảm thấy quan niệm mới về Trường điện từ sẽ nâng sự hiểu biết về các hiện tượng điện từ lên một mức độ cao hơn. Nhưng mức độ mới đòi hỏi phải chấp nhận khái niệm Trường là một khái niệm không rõ ràng, không cảm giác trực tiếp được và quá xa so với hiểu biết thông thường của chúng ta. Chính điều đó làm cho các nhà khoa học thiếu tin tưởng vào lý thuyết của ông. Vì thế năm 1879, đúng vào năm mất của Maxwell, các nhà khoa học đã đánh giá lĩnh vực Điện động lực học như một hoang mạc không có đường đi.

Trong bối cảnh đó, Heinrich Rudolf Hertz (1857 - 1894) là một nhà Vật lý người Đức, là người làm sáng tỏ và mở rộng lý thuyết điện từ của ánh sáng đã được đề ra bởi Maxwell. Ông là người đầu tiên chứng minh thỏa đáng sự tồn tại của sóng điện từ bằng cách chế tạo một thiết bị để phát và thu sóng vô tuyến VHF hay UHF. Tên của ông được dùng đặt tên cho đơn vị đo tần số Hertz viết tắt là Hz. Hertz luôn có một sự quan tâm sâu sắc đến khí tượng học có lẽ bắt nguồn từ mối quan hệ giữa ông với Wilhelm Von Bezold (giáo sư của Hertz trong một phòng thí nghiệm tại Đại học Kỹ thuật Munich trong mùa hè năm 1878). Tuy nhiên, Hertz đã không đóng góp nhiều đến lĩnh vực này ngoại trừ một số bài báo đầu tay như là một trợ lý của Helmholtz tại Berlin. Trong nghiên cứu Điện: Hertz đã giúp thiết lập hiệu ứng quang điện (mà sau này được giải thích bởi Albert Einstein) khi ông nhận thấy rằng một vật nhiễm điện âm khi được chiếu sáng bởi tia cực tím thì bị giảm bớt điện tích âm. Năm 1887, ông đã nghiên cứu các hiệu ứng quang điện của việc phát và thu sóng điện từ, được xuất bản trong tạp chí Annalen der Physik. Máy thu của ông bao gồm một cuộn dây với một khe phát tia lửa điện, và rồi một tia lửa sẽ được nhìn thấy khi thu sóng điện từ. Ông đặt bộ máy trong một hộp tối để quan sát tia lửa tốt hơn. Ông thấy rằng các tia lửa có chiều dài tối đa đã được giảm khi trong hộp. Một ô kính đặt giữa nguồn phát ra sóng điện từ và máy thu nhận được tia cực tím để đẩy các điện tử nhảy qua khe hở. Khi loại bỏ ô kính, các tia lửa có chiều dài tăng lên. Ông quan sát thấy không có sự giảm chiều dài tia lửa khi ông thay thế thuỷ tinh bằng thạch anh. Sau đó ông không tiếp tục theo đuổi nghiên cứu về hiệu ứng này, và không hề thực hiện bất kỳ nỗ lực nào nhằm giải thích hiện tượng quan sát được. Đầu năm 1886, Hertz đã phát triển thiết bị thu sóng angten Hertz. Đây là tập hợp các thiết bị đầu cuối mà không xây dựng trên các hoạt động điện của nó. Ông cũng phát triển một loại hình truyền của lưỡng cực angten, một phần tử chủ đạo trong việc phát sóng vô tuyến UHF. Các angten này xuất phát từ một quan điểm lý thuyết đơn giản. Năm 1887, Hertz thử nghiệm với sóng vô tuyến trong phòng thí nghiệm của ông. Hertz đã sử dụng một cuộn dây cảm ứng (cuộn dây Ruhmkorff) - hướng khe phóng tia lửa điện và một dâu kim loại dài 1m như một bộ tản nhiệt. Công suất các phần tử được điều chỉnh sao cho có cộng hưởng điện. Máy thu của ông, một tiền thân của angten lưỡng cực, đơn giản là một nửa của angten lưỡng cực dùng để thu sóng ngắn. Qua thử nghiệm, ông đã chứng minh rằng sóng điện từ là sóng ngang và có thể truyền được trong chân không với tốc độ ánh sáng. Điều này đã được dự đoán bởi Maxwell và Faraday. Với cấu tạo thiết bị của ông, điện từ trường sẽ thoát ra khỏi dây, lan truyền vào không gian. Hertz đã gây một dao động khoảng 12m đến một tấm kẽm để tạo sóng dừng. Mỗi làn sóng khoảng 4m. Sử dụng máy dò, ông ghi lại biên độ, hướng của các sóng thành phần. Hertz cũng đo sóng Maxwell và chứng minh rằng vận tốc của sóng vô tuyến bằng vận tốc ánh sáng. Hertz cũng thấy rằng sóng vô tuyến có thể được truyền qua các loại vật liệu, và được phản xạ bởi những vật thể khác, tiền thân của rada. Hertz đã không nhận ra tầm quan trọng trong các thí nghiệm của ông. Ông cho rằng nó không hữu dụng, các thí nghiệm chỉ để chứng tỏ là Maxwell đã đúng. Năm 1892, Hertz đã bắt đầu thử nghiệm và chứng minh rằng tia âm cực có thể xâm nhập lá kim loại rất mỏng (như nhôm). Philipp Lenard, một học sinh của Hertz, tiếp tục những nghiên cứu về hiệu ứng tia sáng. Ông đã phát triển một loại ống catod và nghiên cứu sự xâm nhập của tia X vào các vật liệu khác nhau. Tuy nhiên, Philipp Lenard đã không nhận ra rằng ông đã tạo ra được tia X. Sau đó, Hermann Von Helmholtz xây dựng phương trình toán học cho tia X, trước khi Wilhelm Conrad Rontgen phát hiện được và thông báo về loại tia mới này. Nó được hình thành trên cơ sở lý thuyết điện từ của ánh sáng . Tuy nhiên, ông đã không làm việc một cách thực tế với tia X. Đơn vị quốc tế SI Hertz (Hz) được thành lập để vinh danh ông bởi IEC vào năm 1930 cho tần số - một phép đo số lần mà lặp đi lặp lại của một sự kiện xảy ra trên một đơn vị thời gian hay tần số là số chu kỳ biến thiên trong thời gian một giây.

Hertz cho rằng muốn kiểm tra lại thuyết Maxwell với dòng điện dịch cũng tạo ra từ trường như dòng điện dẫn thì cần phải sử dụng một dòng điện biến thiên rất nhanh. Để tạo ra những dao động điện rất nhanh đó Hertz đã kế thừa những nghiên cứu của các nhà bác học trước đó và kết hợp với các nghiên cứu của mình. Tới năm 1887, Hertz đã chế tạo máy phát dao động điện cao tần, còn gọi là "Bộ rung Hertz", dùng sự phóng điện tạo ra những dao động điện với tần số khoảng 100 triệu Hz trong mạch điện. Bộ rung Hertz gồm hai dây dẫn thẳng, ở mỗi đầu dây dẫn có một vật dẫn hình cầu hoặc hình thon dài, ở đầu kia có một hòn bi kim loại nhỏ. Giữa hai hòn bi là một khe nhỏ để phóng tia điện. Hai dây dẫn được nối với cuộn cảm ứng và khi phóng tia lửa điện ở hai khe nhỏ thì trong mạch xuất hiện những dao động điện có tần số cao. Để phát hiện những dao động điện đó, ông dùng một bộ cộng hưởng là một dây dẫn được uốn thành hình chữ nhật hoặc hình tròn có khe nhỏ để phóng điện. Khi cho tia điện phóng ở khe của bộ rung thì khe ở bộ cộng hưởng cũng xuất hiện các tia điện. Độ lớn của các tia điện ở bộ cộng hưởng phụ thuộc vào kích thước và vị trí của hai mạch điện. Khi tần số riêng của bộ cộng hưởng bằng tần số dao động của bộ rung thì có hiện tượng cộng hưởng và các tia điện là lớn nhất, dễ quan sát nhất. Với thiết bị như trên, ông đã phát hiện ra dòng điện dịch và quá trình cảm ứng do dòng điện dịch gây ra. Ông cũng nghiên cứu được sự ảnh hưởng của điện môi đối với quá trình cảm ứng và xác lập được mối quan hệ giữa các lực điện động lực học và sự phân cực điện môi đúng như lý thuyết Maxwell đã dự đoán. Như vậy lần đầu tiên lý thuyết Maxwell đã được thực nghiệm khẳng định. Tuy nhiên cho đến thời điểm này Hertz vẫn chưa phát hiện ra sóng điện từ trong các thí nghiệm của mình. Vì vậy, năm 1888 ông tiếp tục các thí nghiệm của mình với bộ rung và bộ cộng hưởng ở những khoảng cách lớn hơn và lần này ông đã quan sát được sóng điện từ trong các thí nghiệm. Trong quá trình thí nghiệm, ông thấy rằng nếu bộ thu đặt cách bộ phát dưới 1m thì sự phân bố các lực điện tương tự như đối với Trường của một lưỡng cực điện. Nhưng với khoảng cách lớn hơn 3m thì Trường giảm chậm hơn và theo các phương khác nhau thì biến đổi khác nhau. Theo phương của trục bộ rung, nó giảm nhanh hơn và ở khoảng cách 4m đã là rất yếu. Theo phương vuông góc nó giảm chậm hơn và ở khoảng cách 12m vẫn còn quan sát được. Những kết quả trên hoàn toàn trái ngược với thuyết tác dụng xa. Sau đó, ông phân tích những kết quả thực nghiệm đó trên cơ sở lý thuyết của Maxwell và ông đã viết lại các phương trình Maxwell theo dạng gần giống với dạng thường dùng hiện nay. Khi giải hệ phương trình này, ông tìm ra kết quả là ở gần bộ rung Trường tạo ra giống như Trường tĩnh điện của một lưỡng cực và từ trường của một nguyên tố dòng. Nhưng ở khoảng cách xa Trường là một trường sóng, cường độ của nó giảm tỉ lệ với bình phương khoảng cách. Trường đó lan truyền trong không gian với vận tốc bằng vận tốc của ánh sáng trong chân không. Lưỡng cực bức xạ mạnh nhất theo phương vuông góc với trục của nó và không bức xạ theo phương của trục. Những kết quả nghiên cứu lý thuyết đó hoàn toàn phù hợp với kết quả mà ông đã thu được bằng thực nghiệm. Cuối năm 1888, ông công bố một công trình miêu tả các thí nghiệm về sự lan truyền, phân cực, phản xạ, khúc xạ sóng điện từ. Năm 1891, ông đã tổng kết toàn bộ công trình nghiên cứu của mình và khẳng định sự đúng đắn của lý thuyết Trường điện từ do Maxwell xây dựng. Như vậy Hertz đã xây dựng cơ sở thực nghiệm vững chắc cho lý thuyết của Maxwell. Ông đã tạo ra sóng điện từ như lý thuyết Maxwell tiên đoán và đã chứng minh rằng sóng điện từ và sóng ánh sáng chỉ là một. Ông đã tạo ra cho phương trình Maxwell một hình thức thuận tiện hơn và bổ sung cho lý thuyết Maxwell bằng lý thuyết bức xạ điện từ. Những công trình nghiên cứu của Hertz chính là những bằng chứng thực nghiệm khẳng định sự thắng lợi rực rỡ của lý thuyết Maxwell. Những thí nghiệm của Hertz có tiếng vang mạnh mẽ và thúc đẩy nhiều nhà khoa học khác tiếp tục những khảo sát thực nghiệm để khẳng định lý thuyết Maxwell.

Đặc biệt Lebedev (1866 - 1912), nhà bác học người Nga đã có những đóng góp quan trọng. Năm 1895, Lebedev hoàn thành phương pháp của Hertz và tạo ra được sóng điện từ rất ngắn khoảng 6mm. Lebedev cũng là người đầu tiên đo được bằng thực nghiệm áp suất ánh sáng mà Maxwell đã tiên đoán. Năm 1901, Lebedev đã công bố công trình "Khảo sát thực nghiệm về áp suất ánh sáng". Công trình này đã gây ra một ấn tượng rất mạnh mẽ đối với Thomson. Ông nói: "Tôi suốt đời đã chống lại Maxwell, không công nhận áp suất ánh sáng của Maxwell, thế mà giờ đây Lebedev đã bắt tôi phải quy hàng trước thí nghiệm của ông ta". Cũng cần nói thêm rằng khi tạo ra được sóng điện từ, Hertz không hề nghĩ rằng nó có thể có một ứng dụng nào đó trong kĩ thuật.

Người đầu tiên nhìn thấy khả năng ứng dụng sóng điện từ vào trong kĩ thuật là Popov (1895 - 1906), nhà khoa học người Nga. Năm 1895, Popov đã biểu diễn chiếc máy thu vô tuyến điện đầu tiên của mình trước một cuộc họp của phân ban vật lý Hội Lý Hoá nước Nga. Năm 1896, ông biểu diễn buổi truyền và nhận tin vô tuyến điện đầu tiên với dòng chữ: HEINRICH HERTZ được truyền và nhận trên khoảng cách 250m. Năm 1897, ông đạt được khoảng cách 5km và năm 1899 đạt tới 50km.

Năm 1896, Marconi (1874 - 1937) nhà khoa học người Ý đã đăng kí phát minh về máy phát và thu tín hiệu vô tuyến điện, một năm sau ông được cấp bằng phát minh sáng chế ở Anh. Năm 1901, Marconi đã thực hiện được những cuộc truyền tin vô tuyến điện xuyên qua Đại Tây Dương và năm 1909 ông đã nhận được giải Nobel về những phát minh của mình. Mặc dù Popov là người phát minh ra máy truyền tin vô tuyến điện trước, nhưng ông chỉ thông báo phát minh của mình trong một phạm vi hẹp mà không xin đăng kí phát minh. Do đó về mặt pháp lý thì quyền phát minh thuộc về Marconi. Tuy nhiên các nhà khoa học đã thừa nhận Popov là người đầu tiên phát minh ra kĩ thuật thông tin bằng vô tuyến điện.

Sự phát minh ra vô tuyến điện và việc sử dụng sóng điện từ trong kĩ thuật là tiêu chuẩn tối cao - tiêu chuẩn thực tiễn, khẳng định dứt khoát sự toàn thắng của Điện động lực học Maxwell. Với phát minh vĩ đại của mình, Maxwell đã hoàn thành sứ mạng vinh quang là người hoàn thiện Vật lý học cổ điển, chuẩn bị mảnh đất cho sự phát triển của Vật lý học hiện đại, Vật lý học của thế kỉ XX.

1.2. SỰ PHÁT TRIỂN ĐIỆN ĐỘNG LỰC HỌC CỔ ĐIỂN SAU MAXWELL

Điện động lực học cổ điển sau Maxwell đã phát triển theo nhiều hướng, trong đó có hai hướng cơ bản:

Hoàn chỉnh khía cạnh toán học của lý thuyết Maxwell

Khi xây dựng lý thuyết của mình, Maxwell không dùng những ký hiệu như hiện nay, vì vậy các phương trình của ông còn phức tạp và chưa tạo thành một hệ hoàn chỉnh. Các công thức của Maxwell vào năm 1865 bao gồm 20 phương trình với 20 ẩn số, nhiều phương trình trong đó được coi là nguồn gốc của hệ phương trình Maxwell ngày nay. Các phương trình của Maxwell đã tổng quát hóa các định luật thực nghiệm của những người đi trước phát hiện ra: chỉnh sửa định luật Ampere (3 phương trình cho 3 chiều (x, y, z)), định luật Gauss cho điện tích (1 phương trình), mối quan hệ giữa dòng điện tổng và dòng điện chuyển dịch (3 phương trình (x, y, z)), mối quan hệ giữa từ trường và thế năng vector (3 phương trình (x, y, z), chỉ ra sự không tồn tại của từ tích), mối quan hệ giữa điện trường và thế năng vô hướng cũng như thế năng vetor (3 phương trình (x, y, z), định luật Faraday), mối quan hệ giữa điện trường và trường chuyển dịch (3 phương trình (x, y, z)), định luật Ohm về mật độ dòng điện và điện trường (3 phương trình (x, y, z)), và phương trình cho tính liên tục (1 phương trình). Oliver Heaviside (1850 - 1925) là một nhà Khoa học, nhà Toán học, nhà Vật lý và kỹ sư điện người Anh. Ông đã phát triển các kỹ thuật toán học phức tạp để phân tích mạch điện và giải phương trình vi phân. Oliver Heaviside là người đã phát minh ra kỹ thuật toán học khi giải quyết các khác biệt của phương trình và trình bày lại phương trình Trường Maxwell về điện. Ông đã xây dựng cách phân tích tính vector. Mặc dù mâu thuẫn với các cơ sở khoa học trong suốt cuộc đời của mình, nhưng Heaviside đã làm thay đổi bộ mặt của toán học và khoa học thế giới trong suốt quá trình ông sống và cả sau khi ông đã qua đời. Các phương trình nguyên bản của Maxwell được viết lại bởi Oliver Heaviside và Willard Gibbs vào năm 1884 dưới dạng các phương trình vector. Sự thay đổi này diễn tả được tính đối xứng của các Trường trong cách biểu diễn toán học. Những công thức có tính đối xứng này là nguồn gốc hai bước nhảy lớn trong vật lý hiện đại đó là thuyết tương đối hẹp và vật lý lượng tử. Sau này Heaviside đã nghiên cứu các phương trình của Maxwell trong trường hợp tổng quát nhất và năm 1888 ông đã viết các phương trình Maxwell dưới dạng gần giống như hệ phương trình Maxwell hiện nay. Các phương trình Maxwell bao gồm 4 phương trình, đề ra bởi James Clerk Maxwell, dùng để mô tả Trường điện từ cũng như những tương tác của chúng đối với vật chất. Bốn phương trình Maxwell mô tả lần lượt hệ phương trình Maxwell dưới dạng vi phân, tích phân: Dòng điện tạo ra từ trường như thế nào (định luật Ampere); Từ trường tạo ra điện trường như thế nào (định luật cảm ứng điện từ Faraday); Sự không tồn tại của vật chất từ tích; Điện tích tạo ra điện trường như thế nào (định luật Gauss). Đây cũng chính là nội dung của thuyết Điện từ học Maxwell.

Thống nhất lý thuyết Trường điện từ với lý thuyết cấu tạo vật chất

Việc thống nhất lý thuyết Trường điện từ với lý thuyết cấu tạo vật chất đã dẫn đến sự ra đời của thuyết electron - thuyết dựa vào sự cư trú và di chuyển của electron để giải thích các hiện tượng điện và các tính chất điện của các vật gọi là thuyết electron. Ngay từ đầu thế kỷ XIX, khi nghiên cứu hiện tượng điện phân, nhiều nhà bác học như Faraday, Helmholtz… đã đi đến ý nghĩ cho rằng nguyên tử vật chất đều mang điện tích và điện tích của các vật bao gồm những lượng điện tích nguyên tố như nhau, đóng vai trò như những nguyên tử điện. Trong một công trình công bố năm 1881 về việc lựa chọn các đơn vị vật lý cơ bản, Stoney - một nhà vật lý người Anh, đã đề nghị một hệ đơn vị tự nhiên với các đơn vị cơ bản là: vận tốc ánh sáng, hằng số hấp dẫn và điện tích nguyên tố. Theo ông phải có một điện tích nguyên tố nhỏ nhất không thể phân chia được, gắn liền với nguyên tử vật chất. Ông đề nghị gọi tên nó là "electron". Như vậy tên gọi của electron đã được ra đời trước khi Vật lý học phát hiện ra nó bằng thực nghiệm (vào năm 1911 bởi Millikan, nhà bác học Mỹ).

Năm 1909, Robert Millikan thực hiện thí nghiệm để đo điện tích điện tử. Sử dụng một máy phun hương thơm, Millikan đã phun các giọt dầu vào một hộp trong suốt. Đáy và đỉnh hộp làm bằng kim loại được nối vào nguồn điện một chiều với một đầu là âm (-) và một đầu là dương (+). Millikan quan sát từng giọt rơi một và cho đặt vào điện áp lớn giữa hai tấm kim loại rồi ghi chú lại tất cả những hiệu ứng. Ban đầu, giọt dầu không tích điện, nên nó rơi dưới tác dụng của trọng lực. Tuy nhiên sau đó, Millikan đã dùng một chùm tia Rontgen để ion hóa giọt dầu này, cấp cho nó một điện tích. Vì thế, giọt dầu này đã rơi nhanh hơn, vì ngoài trọng lực, nó còn chịu tác dụng của điện trường. Dựa vào khoảng thời gian chênh lệch khi hai giọt dầu rơi hết cùng một đoạn đường, Millikan đã tính ra điện tích của các hạt tích điện. Xem xét kết quả đo được, ông nhận thấy điện tích của các hạt luôn là số nguyên lần một điện tích nhỏ nhất, được cho là tương ứng với 1 electron, $e = -1,63.10^{-19}C$. Năm 1917, Millikan lặp lại thí nghiệm trên với thay đổi nhỏ trong phương pháp, và đã tìm ra giá trị điện tích chính xác hơn là $e = -1,59.10^{-19}C$. Những đo đạc hiện nay dựa trên nguyên lý của Millikan cho kết quả là $e = -1,602.10^{-19}C$. Lorentz (1853 - 1928) nhà bác học người Hà Lan đã bắt đầu xây dựng thuyết electron từ những năm 1870. Ông cho rằng cần phải bổ sung thêm lý thuyết của Maxwell vì trong đó chưa xét đến cấu trúc vật chất. Theo ông, muốn hiểu sâu các hiện tượng điện phải đề ra một giả thuyết về cơ cấu của các hiện tượng đó. Lorentz cho rằng thế giới gồm các ete là một môi trường không trọng lượng và các vật thể vật chất có trọng lượng. Các phân tử vật chất bao gồm những điện tích nguyên tố. Các vật thể do rất nhiều các hạt mang điện tích dương và âm tạo thành. Tương tác giữa ete và các vật thể làm các hạt điện tích dịch chuyển và sự dịch chuyển đó làm phát sinh các hiện tượng điện. Khi có sóng điện từ truyền tới, chúng có thể bị phân cực và thực hiện những dao động. Năm 1892, ông công bố lý thuyết tổng quát về các hiện tượng điện từ và quang dựa trên thuyết Maxwell và giả định rằng có những hạt điện tích cơ bản gắn với các hạt vật chất. Các hạt điện tích cơ bản này được gọi là "electron" và lý thuyết của Lorentz được gọi là "thuyết electron". Thuyết electron của Lorentz đã đạt được nhiều thành công trong việc giải thích cơ cấu của hiệu ứng Zeeman về sự tách vạch phổ trong từ trường, trong việc xây dựng lý thuyết của các hiện tượng thuận từ, nghịch từ và trong việc giải thích hiện tượng tán sắc ánh sáng. Các phương trình của Maxwell cho phép đoán trước được sự tồn tại của sóng điện từ, có nghĩa là khi có sự thay đổi của một trong các yếu tố như cường độ dòng điện, mật độ điện tích..., sẽ sinh ra sóng điện từ truyền đi được trong không gian. Vận tốc của sóng điện từ là c, được tính bởi phương trình Maxwell, bằng với vận tốc ánh sáng được đo trước đó bằng thực nghiệm. Điều này cho phép kết luận rằng ánh sáng là sóng điện từ. Lý thuyết điện từ của Maxwell đã giải thích sự xuất hiện của sóng điện từ như sau: mọi điện tích khi thay đổi vận tốc (tăng tốc hay giảm tốc), hoặc mọi từ trường biến đổi, đều là nguồn sinh ra các sóng điện từ. Khi từ trường hay điện trường biến đổi tại một điểm trong không gian, theo hệ phương trình Maxwell, các từ trường hay điện trường ở các điểm xung quanh cũng bị biến đổi theo, và cứ như thế sự biến đổi này lan toả ra xung quanh với vận tốc ánh sáng. Biểu diễn toán học về từ trường và điện trường sinh ra từ một nguồn biến đổi chứa thêm các phần mô tả về dao động của nguồn nhưng xảy ra sau một thời gian chậm hơn so với tại nguồn. Đó chính là mô tả toán học của bức xạ điện từ. Tuy trong các phương trình Maxwell, bức xạ điện từ hoàn toàn có tính chất sóng, đặc trưng bởi vận tốc, bước sóng (hoặc tần số), nhưng nó cũng có tính chất hạt theo thuyết lượng tử, với năng lượng liên hệ qua bước sóng. Các nghiên cứu về ánh sáng và sóng điện từ, tiêu biểu là các nghiên cứu của Max Planck về vật đen và của Heinrich Hertz về hiện tượng quang điện đã cho ra đời lý thuyết lượng tử. Khi xem xét các hiện tượng điện từ, nhà vật lý người Hà Lan Hendrik Lorentz đã điều chỉnh phép biến đổi Galileo sao cho phù hợp với tính bất biến của các phương trình Maxwell đối với các hệ quy chiếu quán tính. Chính Einstein đã biến phép biến đổi trên - còn gọi là phép biến đổi Lorentz, trở thành phép biến đổi hệ toạ độ cơ sở cho thuyết tương đối hẹp và dựa vào đó đưa ra những hệ quả nổi tiếng. Sự không phụ thuộc của vận tốc ánh sáng vào chiều và hệ quy chiếu - những kết luận được rút ra từ phương trình Maxwell - là nền tảng của thuyết tương đối. Chú ý rằng khi ta thay đổi hệ quy chiếu, những biến đổi Galileo cổ điển không áp dụng được vào các phương trình Maxwell mà phải sử dụng một biến đổi mới, đó là biến đổi Lorentz. Einstein đã áp dụng biến đổi Lorentz vào cơ học cổ điển và cho ra đời thuyết tương đối hẹp.

Tổng kết

Lý thuyết Trường điện từ của Maxwell thống nhất giữa điện trường và từ trường (công bố vào những năm đầu thập niên 60 của thế kỉ XIX), là một bước phát triển hoàn thiện những hiểu biết của con người về điện, từ. Trước đó, những hiểu biết của con người về điện, từ còn rời rạc; người ta quan niệm rằng điện và từ là hai lĩnh vực không liên quan nhau. Maxwell đã phát triển các ý tưởng của Faraday về điện, từ một cách sâu sắc và đã xây dựng lý thuyết thống nhất giữa điện và từ - lý thuyết Trường điện từ - một cách hoàn hảo. Thuyết Maxwell không những giải thích triệt để các hiện tượng điện từ đã biết mà nó còn cho phép tiên đoán sự tồn tại của sóng điện từ (mà gần 30 năm sau thực nghiệm mới xác định được). Nghiên cứu bằng lý thuyết về các tính chất của sóng điện từ, Maxwell đã khẳng định ánh sáng cũng là sóng điện từ. Với những đóng góp to lớn của mình, Maxwell được đánh giá là một trong những nhà vật lý đi tiên phong, mở ra bước ngoặt trong lịch sử nhận thức của nhân loại.

1.3. KHÁI QUÁT VỀ MÔ HÌNH BÀI TOÁN MẠCH VÀ MÔ HÌNH BÀI TOÁN TRƯỜNG

Mô hình bài toán Mạch và mô hình bài toán Trường

Theo những đặc điểm về Toán học và Vật lý ta tạm chia những mô hình của các lớp hiện tượng vật lý thành hai loại: mô hình bài toán Mạch và mô hình bài toán Trường.

Sự khác nhau giữa mô hình Mạch và mô hình Trường: ở mô hình Mạch, các thông số chỉ phân bố theo thời gian, còn ở mô hình Trường các thông số phân bố trong không gian theo thời gian, song giữa chúng có quan hệ khăng khít với nhau thông qua biểu thức: $u = \int_l Edl$, $i = \oint_l Hdl$

Trong thực tế, phần lớn các thiết bị về kỹ thuật điện, điện tử và viễn thông..., đều có thể mô tả theo mô hình Mạch. Cả những thiết bị thuộc các ngành khác như truyền nhiệt, truyền âm..., cũng có thể mô tả bởi những mô hình Mạch và những phương trình giống của mạch điện. Vì vậy lý thuyết mạch điện có tính chất thực tiễn, phổ biến và là cơ sở lý luận chung cho các ngành về điện cũng như nhiều ngành khác.

Tuy nhiên để khảo sát những thiết bị điện, trong nhiều trường hợp lại phải dùng mô hình Trường. Đó là khi cần xét sự phân bố không gian của quá trình tác động trường điện từ lên thiết bị điện, như xét phân bố các trạng thái E, B, J..., phân bố sóng điện từ trong không gian, trong ống dẫn sóng..., bắt buộc phải dùng những mô hình Trường thích hợp. Nội dung giáo trình này là nghiên cứu và vận dụng mô hình Trường của Trường điện từ theo Lý thuyết Maxwell.

Để đơn giản ta có thể lập bảng để thấy được sự khác biệt của mô hình bài toán Mạch và mô hình bài toán Trường như sau:

Mô hình bài toán Mạch	**Mô hình bài toán Trường**
Các thông số trạng thái chỉ phụ thuộc vào thời gian (t)	Các thông số trạng thái phụ thuộc vào cả thời gian và không gian (t, x, y, z)
Các phần tử phân bố tập trung có kết cấu cụ thể: số nút, nhánh, mạch vòng, mắt lưới xác định	Các phần tử rải khắp trong không gian (không đồng đều) và không xác định được kết cấu
Mô hình toán sử dụng các luật Kirchhoff	Mô hình toán sử dụng hệ phương trình Maxwell

Vậy qua bảng so sánh cho thấy bài toán Mạch chỉ là trường hợp riêng của bài toán Trường và trong giáo trình này chúng ta sẽ chứng minh được luật Kirchhoff 1, 2 được dẫn ra từ phương trình Maxwell 1, 2.

Chương 2

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ TRƯỜNG ĐIỆN TỪ VÀ MÔI TRƯỜNG CHẤT

Chương này trình bày khái niệm cơ bản về Trường điện từ và môi trường chất; các thông số biến trạng thái cơ bản, biến trạng thái động lực học và hành vi khác của Trường điện từ và môi trường chất; năng lượng, khối lượng, động lượng của Trường điện từ.

2.1. KHÁI NIỆM CHUNG VỀ TRƯỜNG ĐIỆN TỪ VÀ MÔI TRƯỜNG CHẤT

2.1.1. Định nghĩa Trường điện từ

Trường điện từ là một dạng vật chất cơ bản, một thực thể vật lý chuyển động với vận tốc ánh sáng c trong mọi hệ qui chiếu quán tính đặt trong chân không; nó thể hiện sự tồn tại và vận động thông qua những tương tác với một dạng vật chất khác là những hạt hoặc những môi trường chất mạng điện.

Như vậy:

- Bản chất Trường điện từ là một dạng vật chất, một thực thể vật lý.

- Mô hình tương tác của Trường điện từ là theo hệ thống tương tác trường - hạt hoặc trường - môi trường chất.

2.1.2. Trường điện từ là một dạng vật chất, một thực thể vật lý

Ngay ở Triết học Mác - Lênin đã nêu lên hai thuộc tính cơ bản của vật chất là tồn tại khách quan và vận động khách quan. Nếu xét dạng vật chất ở thế giới vô tri ta gọi chúng là các thực thể vật lý. Mà những dạng vật chất thuộc thế giới vật lý phải đảm bảo có 2 thuộc tính tồn tại khách quan và vận động khách quan. Trong khi Trường điện từ là dạng vật chất thuộc thế giới vật lý, vậy ta cần phải chứng minh Trường điện từ có 2 thuộc tính nêu trên.

- Tính tồn tại khách quan:

Thuộc tính tồn tại khách quan trong không gian và thời gian được hiểu là có khả năng tương tác, trước hết là tương tác động lực học. Tức là ta có thể gắn với một thực thể vật lý các biến trạng thái động lực học như năng lượng, động lượng, khối lượng, điện tích, Spin, moment từ... Các thông số này biểu diễn quá trình động lực học và xác định khách quan trong không gian và thời gian.

Như ta đã biết trong Kỹ thuật Điện, Trường điện từ có khả năng tương tác động lực học lên các vật thể khác. Suy ra nó có năng lượng (w), động lượng (g) là hoàn toàn khách quan. Vậy nó tồn tại khách quan (thông qua các biến trạng thái $\vec{E}$; $\vec{B}$ và các hàm thế $\vec{A}$; φ).

- Tính vận động khách quan:

Thuộc tính vận động khách quan của Trường điện từ được hiểu là Trường điện từ tương tác một cách có qui luật theo những luật như nhau trong những điều kiện như nhau. Cụ thể trong hệ qui chiếu quán tính tương tác đó phải được mô tả bởi những phương trình như nhau.

Ở Trường điện từ thuộc tính vận động thể hiện ở những tác dụng động lực học của Trường với các vật thể, môi trường và sự lan truyền những tác dụng ấy.

Vì Trường điện từ lan truyền tương tác với vận tốc là hữu hạn suy ra để có động lượng (g) thì Trường điện từ phải có khối lượng (m) phân bố và chuyển động trong không gian với mọi hệ qui chiếu quán tính đều được mô tả bởi hệ phương trình Maxwell hoặc hệ phương trình đối với các hàm thế. Hơn nữa khi chuyển động trong chân không thì nó chuyển động với vận tốc ánh sáng c (bất biến) suy ra nó vận động khách quan.

2.1.3. Trường điện từ là một dạng vật chất cơ bản

Dạng vật chất cơ bản là dạng vật chất không thể phân chia được nữa. Thực tế cho thấy, tương tác động lực học của Trường điện từ được phân làm hai loại, theo hai qui luật ứng với hai mặt Điện và Từ của Trường điện từ. Vậy Trường điện từ là một thực thể vật lý có hai mặt thể hiện là điện trường và từ trường.

Song hai mặt điện trường và từ trường của Trường điện từ là hoàn toàn tương đối. Trong các hệ qui chiếu khác nhau, chúng có giá trị khác nhau, thậm chí chuyển hoá qua lại lẫn nhau. Nếu tách riêng rẽ hai mặt đó thì sẽ không miêu tả và cắt nghĩa được phần lớn các hiện tượng trong thực tế, ngay cả các hiện tượng thường gặp như: năng lượng, động lượng, lực điện từ,... Vì vậy, **phải coi Trường điện từ như một thực thể thống nhất không chia cắt được tức là một thực thể cơ bản** mới cắt nghĩa được các điều trên.

Ví dụ: Trường điện từ có tính tương đối trong việc thể hiện hai mặt là ở hệ quy chiếu này thì có E và B nhưng ở hệ quy chiếu khác thì lại chỉ có B.

Tuy nhiên, cũng cần nói thêm rằng, ở những tương tác cực nhanh hoặc ở dải tần cực cao ngoài dải tần vô tuyến điện, thực nghiệm và lý thuyết cho thấy rõ nét một sự đồng nhất giữa hai vận động sóng và hạt photon của Trường điện từ bức xạ, mô tả bởi lý thuyết Điện động lực học lượng tử, một sự mở rộng của lý thuyết Maxwell về Trường điện từ. Ở đó ta coi các hạt photon là cấu trúc cơ bản của Trường điện từ bức xạ, tuy nhiên, vẫn tồn tại các khái niệm E, B nhưng chúng tuân theo luật thống kê. Trong giáo trình này ta quan niệm rằng Trường điện từ là một dạng vật chất có cấu trúc cơ bản.

2.1.4. Mô hình tương tác của Trường điện từ - môi trường chất

Để hiểu rõ cơ chế tương tác của một thực thể vật lý cơ bản ta cần xét nó trong sự tương tác với các thực thể khác. Trong thực tế Trường điện từ tương tác được với nhiều dạng vật chất khác như các vật thể, môi trường, hạt mang điện theo hai hệ thống cơ bản:

- Hệ thống trường - hạt lượng tử

- Hệ thống trường - môi trường chất liên tục

Trong giáo trình này ta không nghiên cứu Trường điện từ theo mô hình hệ tương tác lượng tử hoá trường - hạt mà nghiên cứu hệ trường - môi trường chất liên tục. Theo mô hình này ta chấp nhận quan niệm liên tục hoá môi trường chất và Trường điện từ trong không gian và thời gian, tức là "dàn đều" các hạt chất ra miền lân cận thành một mô hình chất liên tục hoá và trung bình hoá địa phương. Ta gọi mô hình phân bố đó là môi trường chất.

Vì theo cấu trúc thực tế thì:

Hạt có kích thước << Khoảng cách các hạt << Kích thước thường dùng trong Kỹ thuật Điện.

Mà cấu trúc lượng tử của Trường và môi trường chất là gián đoạn, trong khi Kỹ thuật Điện thường lấy giá trị trung bình trong một vùng đủ lớn so với kích thước hạt, hơn nữa ở mỗi vùng đủ lớn đó lại sử dụng mô hình hóa có thể khác nhau. Vì vậy trong giáo trình này ta khảo sát chúng dưới dạng mô hình liên tục hoá, tức là liên tục hoá Trường và môi trường chất theo không gian và thời gian với nghĩa địa phương hay nói cách khác là liên tục hoá trung bình địa phương theo không gian và thời gian.

Vậy ta có định nghĩa Trường (theo quan điểm vật lý) như sau:

Trường điện từ là một dạng vật chất có cấu trúc không giống những môi trường chất thường gặp nhưng tồn tại và có năng lực tương tác động lực học trong không gian và thời gian.

2.1.5. Phương thức tương tác của Trường điện từ và môi trường mang điện

Theo mô hình xây dựng ở trên, cặp tương tác chủ yếu là Trường - môi trường chất, do đó chúng phải tương tác theo phương thức địa phương tức ở lân cận những điểm chúng cùng tồn tại. Do Trường điện từ lan truyền với vận tốc hữu hạn nên ở mỗi thời điểm không phải toàn bộ Trường điện từ tương tác với mỗi miền của môi trường chất, mà chỉ một phần của Trường vừa lan tới đó tương tác mà thôi. Đó là phương thức "tương tác tiếp cận" hoặc "từ gần đến xa", không có tương tác gián cách hoặc tức thời với vận tốc vô cùng lớn.

2.1.6. Hai mặt thể hiện Điện và Từ của Trường điện từ

Trong hệ qui chiếu quán tính, Trường điện từ có hai mặt tương tác lực với hạt hoặc vật nhỏ mang điện (q) tuỳ thuộc cách chuyển động của vật trong hệ.

Ta gọi $\vec{F}_E$ là lực điện trường, lực này chỉ tuỳ thuộc vị trí của vật, không phụ thuộc vận tốc của vật.

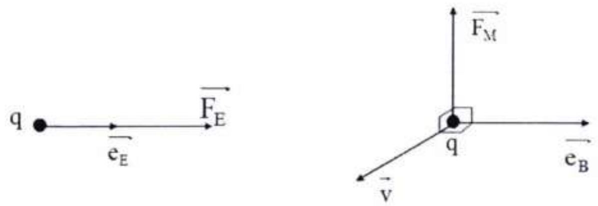
Ta gọi $\vec{F}_M$ là lực từ trường, lực này chỉ tác động khi vận tốc của vật khác không ($\vec{v} \neq 0$). Lực này hướng theo chiều vừa vuông góc với $\vec{v}$ vừa vuông góc với $\vec{e}_B$ (vector đơn vị chỉ phương vuông góc với $\vec{v}$) nào đó tuỳ thuộc từng điểm trong hệ qui chiếu. Các lực này được gọi là các lực Lorentz của Trường điện từ tác động lên vật.

$$\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_M \tag{2.1}$$

Ta định nghĩa hai mặt thể hiện ấy là điện trường và từ trường của trường điện từ. Năng lượng ứng với $\vec{F}_E$ gọi là năng lượng điện trường và năng lượng ứng với $\vec{F}_M$ gọi là năng lượng từ trường của Trường điện từ.

Dễ thấy rằng các lực Lorentz, điện trường, từ trường và năng lượng của chúng chỉ là những khái niệm tương đối vì sự chuyển động của vật mang điện chỉ là tương đối và chỉ xác định cho một hệ qui chiếu cụ thể.

Các lực Lorentz được thể hiện như Hình 2.1:



Hình 2.1: Các lực điện trường và từ trường

2.2. CÁC THÔNG SỐ TRẠNG THÁI ĐỘNG LỰC HỌC CƠ BẢN CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ VÀ MÔI TRƯỜNG CHẤT

Để biểu diễn và mô tả sự tương tác động lực học của Trường điện từ - môi trường chất người ta đưa ra 2 loại thông số: thông số biến trạng thái và thông số biến hành vi (hay còn gọi là thông số đặc trưng).

- Thông số biến trạng thái: Là những biến định nghĩa ra để trực tiếp hoặc gián tiếp biểu diễn, đo trạng thái và quá trình động lực học của hệ, hoặc đo, biểu diễn năng lực tương tác của các thành viên trong hệ, ví dụ mật độ năng lượng, động lượng... Các biến trạng thái thường là những số, những hàm hoặc vector liên tục trong không gian và thời gian.

Thông số biến trạng thái gồm 2 loại: Thông số biến trạng thái cơ bản và thông số biến trạng thái dẫn xuất.

+ Thông số trạng thái cơ bản của vật mang điện là điện tích q. Các thông số trạng thái cơ bản của Trường điện từ là vector cường độ điện trường $\vec{E}$ và vector cường độ từ cảm $\vec{B}$.

+ Thông số biến trạng thái dẫn xuất: Để miêu tả đầy đủ hơn người ta đưa ra các biến trạng thái khác gọi là biến trạng thái dẫn xuất và lập thành các nhóm:

+ Nhóm: $\vec{P}$; $\overrightarrow{M}$; $\overrightarrow{D}$; $\vec{H}$; $\vec{J}$.

+ Nhóm m, g, w.

+ Nhóm các hàm thế $\vec{A}$,φ.

- Thông số về hành vi: Biểu diễn tính qui luật của các hoạt động, hành vi của một thực thể trong quá trình tương tác với thực thể khác, ví dụ hệ số phân cực biểu diễn và đo phản ứng phân cực của điện môi dưới tác dụng của điện trường tĩnh. Trong trường hợp tĩnh thông số hành vi thường là hệ số, hoặc hàm số, trường hợp động nói chung là các toán tử.

Ví dụ: K_P hệ số phân cực điện của điện môi.

K_M là hệ số phân cực từ của từ môi.

ε; μ hằng số điện môi và độ từ thẩm của từ môi.

2.2.1. Biến trạng thái động lực học cơ bản của vật mang điện - điện tích q

Điện tích q của vật mang điện được định nghĩa là một biến trạng thái, nó đo khả năng tương tác lực của vật đối với Trường điện từ, một thuộc tính của vật mang điện.

Thực nghiệm thấy rằng các lực Lorentz không ưu tiên một chiều hay một trục riêng nào của vật mang điện, vậy ta lấy q là số thực. Mặt khác ở cùng một điều kiện về trường, về vị trí và chuyển động, các hạt, vật mang điện chịu lực Lorentz theo hai chiều ngược nhau. Do đó ta chia các hạt, vật mang điện làm hai loại có thông số điện tích trái dấu. Điện tử và những hạt, vật có tính điện tương tự được quy ước có thông số điện tích âm $(q<0)$. Loại còn lại có điện tích dương $(q>0)$. Vật không tương tác lực với Trường điện từ, có điện tích zero $(q=0)$ hay nói cách khác vật đó không mang điện.

Vậy điện tích là một số thực gắn với một vật hoặc hạt để đo khả năng tương tác lực của Trường điện từ.

Trong hệ SI, đơn vị điện tích là Coulomb (C) với điện tích của điện tử: $e=-1{,}6.10^{-19}C$

2.2.2. Các biến trạng thái cơ bản của Trường điện từ $\vec{E}$, $\vec{B}$

a. Vector cường độ điện trường $\vec{E}$

Xét một vật nhỏ mang điện tích Δq đặt tĩnh (đứng yên) ở điểm M trong một hệ qui chiếu quán tính mà ta xét, chịu tác động của một lực $\Delta\vec{F}_E$, ta nói rằng ở lân cận điểm M tồn tại một nguồn năng lượng điện trường. Để biểu diễn và đo khả năng lực Lorentz tác động về điện ở lân cận điểm M của Trường điện ta sử dụng biến trạng thái gọi là vector cường độ điện trường $\vec{E}$ được xác định:

$$\vec{E} = \frac{\Delta\vec{F}_E}{\Delta q} \quad \text{hoặc} \quad \Delta\vec{F} = \Delta q.\vec{E} \tag{2.2}$$

Theo quan niệm liên tục hoá, cường độ điện trường ở điểm M là:

$$\vec{E} = \frac{\partial\vec{F}_E}{\partial q} \quad \text{hay} \quad d\vec{F}_E = dq.\vec{E} \tag{2.3}$$

Vậy cường độ điện trường tại điểm M trong một hệ qui chiếu quán tính được xác định bằng lực điện trường tác dụng lên một đơn vị điện tích thử dương $(q = 1C)$ đặt tĩnh ở điểm đó.

Đơn vị: $$[E] = \frac{[F]}{[q]} = \frac{N}{C} = \frac{Nm}{Cm} = V/m$$

b. Vector cường độ từ cảm $\vec{B}$

Xét một vật nhỏ mang điện tích dq chuyển động với vận tốc $\vec{v}$ trong một hệ qui chiếu quán tính mà ta xét, nếu nó chịu một lực Lorentz về từ $d\vec{F}_M$, khi đó ta nói rằng ở lân cận vật đó tồn tại một từ trường, một mặt biểu hiện của Trường điện từ.

Vật mang điện chuyển động cũng tương đương với dòng điện chảy trong một đoạn dây. Vì vậy, dây dẫn có dòng điện chảy qua, lân cận dây cũng tồn tại một từ trường. Nam châm đặt ở vùng đó cũng chịu lực Lorentz về từ.

Lực $d\vec{F}_M$ hướng theo chiều vừa vuông góc với vận tốc $\vec{v}$ của vật vừa vuông góc với $\vec{e}_B$ xác định cho mỗi điểm trong hệ qui chiếu. Ta thấy chiều $\vec{e}_B$ trùng chiều lực Lorentz tác dụng lên cực bắc kim nam châm, vậy nó là chiều đặc trưng riêng của Trường điện từ về mặt tác dụng lực Lorentz từ.

Ta biểu diễn và đo khả năng lực Lorentz từ tác dụng của Trường điện từ ở lân cận mỗi điểm trong hệ qui chiếu bằng một vector trạng thái gọi là cường độ từ cảm $\vec{B}$ được xác định:

$$d\vec{F}_M = dq(\vec{v} \wedge \vec{B}) = dq\,(\vec{v} \wedge \vec{e}_B)\vec{B} \tag{2.4}$$

(dấu $\wedge$ là phép nhân tích có hướng của hai vector)

Ta biết lượng $dq\vec{v}$ của vật mang điện đồng nhất với $id\vec{l}$ của đoạn dây dẫn có dòng. Vì dòng $i = \dfrac{dq}{dt}$; vận tốc chảy các hạt trong đoạn dây $\vec{v} = \dfrac{d\vec{l}}{dt}$ do đó:

$$dq\vec{v} = id\vec{l} \quad \rightarrow \quad d\overrightarrow{F_M} = i(d\vec{l} \wedge \vec{B}) = i.B.l.(d\overrightarrow{e_l} \wedge \overrightarrow{e_B}) \tag{2.5}$$

Chiều của $\vec{B}$ xác định tiện nhất bằng cách dùng nam châm thử. Độ lớn của $\vec{B}$ bằng lực tác dụng lên một đoạn dây có idl = 1Am hoặc một vật chuyển động có tích dqv = 1Am với chiều $\vec{v}$ hoặc chiều dòng thử vuông góc với chiều $\vec{B}$.

Đơn vị: $[B] = \dfrac{[F]}{[i.l]} = \dfrac{N}{Am} = \dfrac{Nms}{Cm^2} = \dfrac{Vs}{m^2} = T = 10^4 G$

Trong Kỹ thuật Điện còn dùng Gauss (G): $1T = 10^4$ G

2.2.3. Tính tương đối của $\vec{E}$ và $\vec{B}$

Việc định nghĩa điện trường, từ trường cũng như các biến trạng thái $\vec{E}$, $\vec{B}$ theo vận tốc chuyển động trong hệ qui chiếu xét khiến chúng là những khái niệm tương đối tuỳ thuộc hệ qui chiếu.

Thật vậy, giả thiết trong hệ qui chiếu K, có một hạt điện tích q chuyển động thẳng đều với vận tốc $\vec{v}$. Nó sẽ chịu những lực Lorentz:

$$\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_M = q\,(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Giả sử cho hệ qui chiếu K' chuyển động bằng vận tốc $\vec{v}$ so với hệ K. Trong K' vận tốc hạt sẽ triệt tiêu $\vec{v}\,' = 0$.

Giả sử v << c, để có thể bỏ qua lực quán tính và dùng nguyên lý Galileo cho đơn giản. Khi đó trong hệ K' hạt vẫn chịu lực $\vec{F}' = \vec{F}$ nhưng vì vận tốc $\vec{v}\,'=0$ nên chỉ còn lực Lorentz điện.

$$\vec{F}' = \vec{F}'_E = q.\vec{E}' \tag{2.6}$$

Vì $\vec{F}' = \vec{F}$

Nên $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}$ (2.7)

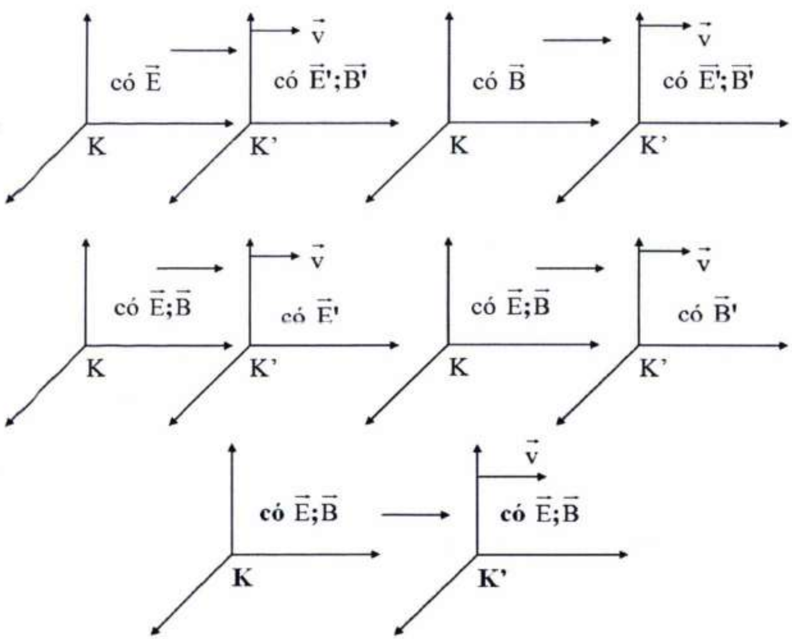
Cũng có thể dẫn ra biểu thức từ cảm $\vec{B}$' xác định trong hệ K' là:

$$\vec{B}' = \vec{B} - \frac{\vec{v} \wedge \vec{E}}{c^2} \tag{2.8}$$

Từ (2.7) và (2.8) suy ra nếu trong hệ K chỉ thể hiện khía cạnh từ trường $\vec{B}$ ($\vec{E}$= 0) thì trong K' thể hiện cả từ trường $\vec{B}$' và $\vec{E}$'. Hoặc nếu trong hệ K chỉ thể hiện điện trường $\vec{E}$ ($\vec{B}$ = 0) thì trong K' cũng có cả điện và từ $\vec{E}$', $\vec{B}$'. Và nói chung, nếu hệ K thể hiện $\vec{E}$ và $\vec{B}$ thì trong hệ K' sẽ thể hiện $\vec{E}$', $\vec{B}$' khác.

Từ đó suy ra rằng, điện trường và từ trường là những thể hiện tương đối của Trường điện từ. Sự thể hiện riêng một mình điện trường hoặc từ trường trong hệ quy chiếu xét là cá biệt. Sự tồn tại Trường điện từ thống nhất là tuyệt đối và phổ biến. Quan hệ có quy luật giữa những thể hiện $\vec{E}$, $\vec{B}$ và $\vec{E}$', $\vec{B}$' là khách quan và tuyệt đối.

Hình 2.2 nêu rõ những điều trên.



Hình 2.2: Tính tồn tại độc lập tương đối của $\vec{E}$ *và* $\vec{B}$

2.3. CÁC THÔNG SỐ KHÁC VỀ TRẠNG THÁI, HÀNH VI CỦA TRƯỜNG VÀ MÔI TRƯỜNG

2.3.1. Các thông số trạng thái và hành vi về phân cực điện

a. Vector phân cực điện $\vec{P}$

Trong nhiều chất điện môi (tức là môi trường chỉ có những hạt mang điện ràng buộc), dưới tác dụng cường độ điện trường $\vec{E}$ các điện tử ràng buộc nhận năng lượng dịch chuyển ra khỏi vị trí cân bằng, tâm quỹ đạo điện tử bị kéo ra xa nút có điện tích dương với một đoạn trung bình địa phương l nào đó, lấy theo chiều từ tâm quỹ đạo đến nút hình thành những lưỡng cực điện.

Khi đặt điện môi nằm trong điện trường $\vec{E}$ thì sẽ xảy ra hiện tượng phân cực điện trong chất điện môi và hình thành các lưỡng cực điện. Đó là hiện tượng phân cực điện môi. Sự phân cực này đặc trưng bởi điện tích q và dịch chuyển l, nên có thể đo bằng vector $\vec{p}$ gọi là vector moment phân cực điện của lưỡng cực.

$$\vec{p} = q\vec{l} \tag{2.9}$$

Nếu ở lân cận mỗi điểm số lưỡng cực tính trung bình cho một đơn vị thể tích là N, tuỳ thuộc từng chất điện môi cụ thể, ta định nghĩa đo trạng thái phân cực ở mỗi điểm bằng moment điện tổng của chúng, gọi là vector phân cực điện, ký hiệu $\vec{P}$:

$$\vec{P} = Nq\vec{l} \qquad \text{hoặc} \qquad \vec{P} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta V} \tag{2.10}$$

Theo môi trường liên tục hoá:

$$\vec{P} = \frac{\partial\vec{p}}{\partial V} \tag{2.11}$$

Như vậy, một cách gián tiếp $\vec{P}$ nói lên trạng thái thế năng đàn hồi, liên quan với sự dịch chuyển của các quỹ đạo điện tử.

b. Hệ số phân cực điện K_p

Để đo mức độ phân cực của từng chất điện môi ta đưa ra khái niệm hệ số phân cực của điện môi K_p. Hệ số phân cực điện thể hiện mối quan hệ giữa $\vec{P}$ và $\vec{E}$ so với môi trường chân không:

$$\vec{P} = K_p.\varepsilon_o \vec{E}\ ;\quad K_p = \frac{\vec{P}}{\varepsilon_o \vec{E}} \tag{2.12}$$

ε_o là hằng số điện môi trong chân không, có đơn vị là $(\frac{F}{m})$

K_P là thông số riêng của môi trường, dùng để đo năng lực phân cực nhiều ít dưới tác dụng của điện trường tĩnh. Do đó K_P là thông số hành vi của điện môi về mặt phân cực điện.

c. Vector dịch chuyển điện $\vec{D}$

Để biểu diễn quá trình phân cực điện phụ thuộc vào $\vec{P}$ và $\vec{E}$, ta định nghĩa vector dịch chuyển điện $\vec{D}$, được xác định theo biểu thức:

$$\vec{D} = \varepsilon_o \vec{E} + \vec{P} \tag{2.13}$$

Từ (2.12) ta suy ra:

$$\vec{D} = \varepsilon_o(1 + K_P)\ \vec{E} = \varepsilon_o\varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E} \tag{2.14}$$

Trong đó:

$\varepsilon_r = 1 + K_P$ là hằng số điện môi tương đối của môi trường so với môi trường chân không.

$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ là hằng số điện môi tuyệt đối của môi trường.

Đối với trường tĩnh thì $\vec{D}$ có ý nghĩa qua biểu thức sau:

$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = q_{td}$ (thông lượng $\vec{D}$ chảy qua mặt kín S bất kỳ thì bằng điện tích tự do). Hay $\mathrm{Div}\vec{D} = \rho_{td}$ (mật độ phân bố điện tích).

d. Đơn vị của các đại lượng

$$[D] = [P] = \frac{[q.l]}{[V]} = \frac{Cm}{m^3} = \frac{C}{m^2}$$

$$[\varepsilon] = \frac{[D]}{[E]} = \frac{C/m^2}{V/m} = \frac{C}{Vm} = \frac{F}{m} = [\varepsilon_0]$$

$[\varepsilon_r] = [K_p] = \dfrac{[\varepsilon]}{[\varepsilon_o]} = 1$, suy ra ε_r và K_P không có thứ nguyên.

Bằng thực nghiệm người ta đã tính được:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2 4\pi.10^{-7}} = \frac{1}{9.10^{16}.4.3,14.10^{-7}} = 8,85.10^{-12}\,F/m$$

2.3.2. Các thông số trạng thái và hành vi về phân cực từ

a. Vector phân cực từ $\vec{M}$

Chất từ môi là những môi trường có dòng phân tử ràng buộc. Trong chất từ môi dưới tác dụng từ trường $\vec{B}$, các spin và các dòng phân tử Ampere, giống những thanh nam châm thường xoay trục lại nhiều ít theo từ cảm $\vec{B}$ hình thành những cực từ nhỏ có chiều thuận hoặc ngược với chiều của $\vec{B}$ "tức là có sự định hướng lại của các mômen từ spin". Có thể nói hiện tượng phân cực từ trong từ môi tương tự như phân cực điện.

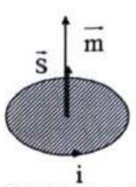
Đối với các chất thuận từ, khi bị phân cực các cực từ đó phụ trợ làm tăng từ trường $\vec{B}$, tức làm tăng năng lượng từ trường.

Đối với các chất nghịch từ, hiện tượng phân cực từ làm giảm từ trường $\vec{B}$, tức làm giảm năng lượng từ trường.

Vậy để đặc trưng cho hiện tượng phân cực từ người ta đưa ra các khái niệm vector mômen từ của cực từ (hay được gọi là mômen từ spin):

Có trị số: $\vec{m} = i.\vec{S}$ (2.15)

Trong đó: i là dòng điện chạy theo một vòng có tiết diện bề mặt S của vật liệu từ. Có chiều được xác định theo quy tắc vặn nút chai thuận theo hướng của S và chiều dòng điện i và được biểu diễn như Hình 2.3:



Hình 2.3: Véc tơ mô men từ

Nếu ta xét trong một miền thể tích V có N cực từ và có các $\vec{m}$ bằng nhau, thì người ta định nghĩa:

$$\vec{M} = N.\vec{m} = N.i.\vec{S} \text{ hoặc } \vec{M} = \frac{\Delta\vec{m}}{\Delta V} \quad (2.16)$$

hoặc $\vec{M}=\frac{\partial \vec{m}}{\partial V}$ (theo quan điểm liên tục hoá) (2.17)

Vector phân cực từ $\vec{M}$ biểu diễn và đo trạng thái phân cực môi trường từ môi ở mỗi điểm, do đó một cách gián tiếp nó liên quan đến trạng thái môi trường trao hoặc nhận năng lượng với từ trường.

b. Vector cường độ từ trường $\vec{H}$

Để tiện biểu diễn và khảo sát, người ta còn định nghĩa một biến trạng thái hỗn hợp là tổ hợp của trạng thái trường $\vec{B}$ và trạng thái phân cực từ môi $\vec{M}$, gọi là cường độ từ trường $\vec{H}$.

$$\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M} \text{ hay } \vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M}) \quad (2.18)$$

μ_o gọi là hệ số từ thẩm trong chân không đơn vị có là $(\frac{H}{m})$

c. Hệ số phân cực từ K_M

Giống như phân cực điện, ta định nghĩa hệ số phân cực từ của từ môi ở trạng thái tĩnh là tỷ số của trạng thái phân cực từ $\vec{M}$ và cường độ trường $\vec{H}$.

$$K_M=\frac{\vec{M}}{\vec{H}} \quad \text{hay} \quad \vec{M}=K_M\,\vec{H} \quad (2.19)$$

K_M gọi là hệ số phân cực từ của từ môi. Nó là thông số riêng của môi trường để đo năng lực phân cực nhiều ít dưới tác dụng của từ trường tĩnh. Do đó K_M là thông số hành vi của từ môi và mặt phân cực từ.

Thay vào biểu thức của $\vec{B}$ ta có:

$$\vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})=\mu_0(1+K_M)\vec{H}=\mu_0\mu_r\,\vec{H}=\mu\vec{H} \quad (2.20)$$

Trong đó:

$\mu_r=1+K_M$ là hằng số từ môi (hệ số từ thẩm) tương đối của môi trường so với môi trường chân không.

$\mu=\mu_0\mu_r$ là hằng số từ môi tuyệt đối của môi trường.

d. Đơn vị của các đại lượng

$$[M] = [H] = \frac{[m]}{[V]} = \frac{[iS]}{[V]} = \frac{Am^2}{m^3} = A/m$$

$$[\mu] = \frac{[B]}{[H]} = \frac{Vs.m}{m^2A} = \frac{Vs}{mA} = H/m = [\mu_o]$$

$[\mu_r] = \dfrac{[\mu]}{[\mu_o]}$ không thứ nguyên, suy ra K_M cũng không có thứ nguyên.

Bằng thực nghiệm người ta đã tính được: $\mu_o = 4\pi.10^{-7}$ H/m

Chú ý: thông thường đối với các môi trường $\mu_r \neq 1$, riêng đối với vật liệu sắt từ μ_r tương đối lớn (10^3 - 10^4) và có hiện tượng từ trễ.

2.3.3. Các thông số trạng thái và hành vi về dòng điện trong vật dẫn

Khi có nguồn nào đó cung cấp năng lượng điện từ một cách liên tục để có thể duy trì được điện trường $\vec{E}$ trong vật dẫn hiểu theo nghĩa là Trường điện từ tác dụng lực và tiếp năng lượng cho các điện tích tự do khiến chúng chuyển động thành dòng. Dòng điện tử chảy và va chạm với mạng tinh thể vật dẫn truyền động năng cho mạng lưới, chuyển thành nhiệt năng tiêu tán đi, không hoàn lại năng lượng nữa. Đối với vật dẫn, thông thường hiện tượng tiêu tán Trường điện từ là chủ yếu. Do đó để đơn giản, ta thường chấp nhận mô hình vật dẫn thuần túy, bỏ qua hiện tượng tàng trữ, phân bố năng lượng điện, tức bỏ qua hệ số điện môi chân không. Trong một dải tần khá rộng, đến 10^{12} Hz điều đó không gây ra những sai lệch đáng kể. Mô hình ấy dẫn đến 2 hệ quả:

- Kèm với dòng điện tử chảy trong vật dẫn, có hiện tượng tiêu tán, không có sự tàng trữ năng lượng điện trường như trong điện môi và chân không.

- Do có tiêu tán nên dưới tác dụng lực của điện trường không đổi $\vec{E}$, dòng điện tử xác lập ở một vận tốc $\vec{v}$ nào đó tùy thuộc lực Lorentz $q\vec{E}$ và tính chất của môi trường dẫn.

Ta có thể đo trạng thái dòng chảy trong vật dẫn bằng vector mật độ dòng dẫn $\vec{J}_d$. Ở mỗi điểm $\vec{J}_d$ có chiều ngược với chiều chuyển động của điện tử tự do và độ lớn bằng lượng điện tích chạy trong một giây, qua một mặt có diện tích

$1m^2$ đặt vuông góc với dòng chảy. Để đo trạng thái dòng điện chuyển động trong vật dẫn người ta đưa ra khái niệm vector mật độ dòng dẫn $\vec{J}_d$ được tính theo biểu thức:

$$\vec{J}_d = \frac{\vec{i}}{\Delta S} \text{ với } \vec{i} = \frac{dq}{dt} = -N.|e|.\Delta S.\vec{v} \tag{2.21}$$

Trong đó: N là số điện tử tự do trong một đơn vị thể tích

e là điện tích của 1 điện tử

v là vận tốc của điện tử dưới tác dụng của điện trường

ΔS là tiết diện ngang của vật dẫn

Vậy $$\vec{J}_d = -N.|e|.\vec{v} \tag{2.22}$$

Khi trường là không đổi thì:

$$\vec{v} = -K_\gamma.\vec{E} \text{ suy ra } \vec{J}_d = N.|e|.K_\gamma.\vec{E} = \gamma\vec{E} \tag{2.23}$$

(K_γ ; γ là hệ số tỷ lệ và độ dẫn điện của vật dẫn)

- Đơn vị của các đại lượng:

Đơn vị của $\vec{J}_d$ và γ : $[J_d] = \dfrac{[i]}{[S]} = A/m^2$

$$[\gamma] = \frac{[J_d]}{[E]} = \frac{A.m}{m^2.V} = \frac{1}{\Omega m} = \frac{s}{m} \text{(Simen/m)}$$

2.4. NĂNG LƯỢNG, KHỐI LƯỢNG VÀ ĐỘNG LƯỢNG CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

Sự tồn tại và vận động của trường điện từ được đặc trưng bởi các thông số dẫn suất w, m, g.

2.4.1. Mật độ năng lượng của Trường điện từ (J/m^3)

Như ta đã biết Trường điện từ có năng lượng phân bố và chuyển động trong không gian, nhờ đó nó có thể trao đổi năng lượng với các môi trường và vật thể để tác động lực hoặc làm chuyển đổi chúng. Khi xét Trường trong điện môi và từ môi, ta quan tâm đến năng lượng của Trường tàng trữ trong không gian và phần năng lượng gắn với trạng thái phân cực của môi trường chất.

Ta biểu diễn và đo trạng thái năng lượng đó bằng mật độ năng lượng, ký hiệu w. Ở mỗi thời điểm, nó bằng năng lượng qui về tàng trữ trong một đơn vị thể tích. Vậy w là một thông số trạng thái động lực học của Trường và môi trường chất. Mật độ năng lượng điện từ gồm 2 thành phần: Mật độ năng lượng điện trường w_E, mật độ năng lượng từ trường w_M tàng trữ trong môi trường chất và được tính theo công thức:

$$w_E = \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} \; ; \; w_M = \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} \qquad (2.24)$$

Mật độ năng lượng điện từ bằng tổng của chúng:

$$w = w_E + w_M \qquad (2.25)$$

2.4.2. Mật độ khối lượng của Trường điện từ (kg/m^3)

Theo Einstein, trường có năng lượng w bao giờ cũng kèm theo có một khối lượng m theo hệ thức:

$$w = mc^2 \qquad (2.26)$$

Điều này phù hợp với hiện tượng Trường điện từ gây áp suất khi va chạm với vận tốc hữu hạn c trên những mặt kim loại. Vậy Trường điện từ cũng có khối lượng (khối lượng động) phân bố trong không gian với mật độ:

$$m = \frac{w}{c^2} \qquad (2.27)$$

2.4.3. Mật độ động lượng của Trường điện từ (kg/m^{2}s)

Mặt khác Trường điện từ lan truyền với khối lượng và vận tốc hữu hạn, hình thành dòng động lượng. Ta đo dòng đó bằng một vector mật độ động lượng $\vec{g}$. Ở mỗi thời điểm, nó có độ lớn bằng tích mật độ khối lượng m và vận tốc chuyển động và có chiều trùng với chiều chuyển động của Trường:

$$\vec{g} = m.\vec{c} = \frac{w}{\vec{c}} \qquad (2.28)$$

Ngoài ra người ta còn dùng thông số đo trạng thái phân bố công suất của Trường điện từ trong không gian gọi là mật độ công suất Trường điện từ P_o. Tại mỗi điểm nó bằng năng lượng Trường điện từ đưa vào một đơn vị thể tích không gian trong một giây. Được xác định bằng biểu thức: $P_o = \dfrac{\partial w}{\partial t}$

CÂU HỎI ÔN TẬP CHƯƠNG 2

2.1. Các thông số biến trạng thái và hành vi về phân cực điện?

2.2. Các thông số biến trạng thái và hành vi về phân cực từ?

2.3. Các thông số biến trạng thái và hành vi trong vật dẫn?

2.4. Cho Trường điện từ có cường độ điện trường E =180 (V/m), hằng số điện môi tương đối so với chân không là 10^{10}. Hỏi dòng dịch chuyển điện trong môi trường chất đó có giá trị bằng bao nhiêu?

2.5. Cho trường điện từ có cường độ điện trường E = 150 (V/m), cường độ từ cảm B = 10π (T) tác động vào môi trường chất có hằng số điện môi tương đối so với chân không là 10^{10} và độ từ thẩm tương đối so với chân không là 10^5. Hỏi cường độ từ trường có giá trị bằng bao nhiêu?

2.6. Đặt một điện trường có E = 200V/m vào một vật dẫn có tiết diện ngang $\Delta S = 0,1\ m^2$, biết số điện tử tự do trong 1 đơn vị thể tích của vật dẫn là 10^{20}, vận tốc của điện tử tự do dưới tác dụng của điện trường là V=50m/s. Hỏi mật độ dòng điện qua vật dẫn có giá trị bằng bao nhiêu? Hỏi dòng điện qua vật dẫn có giá trị bằng bao nhiêu? Hỏi độ dẫn điện của vật dẫn có giá trị bằng bao nhiêu?

2.7. Cho trường điện từ có cường độ điện trường E = 900 (KV/m), cường độ từ cảm B = 10π (T) tác động vào môi trường chất có hệ số phân cực điện của điện môi bằng 99. Hỏi dòng dịch chuyển điện trong môi trường chất đó có giá trị bằng bao nhiêu?

2.8. Hãy viết công thức tính năng lượng, khối lượng, động lượng của trường điện từ trong miền không gian có thể tích V.

Chương 3

MÔ TẢ TOÁN HỌC QUY LUẬT TƯƠNG TÁC CỦA HỆ TRƯỜNG ĐIỆN TỪ - MÔI TRƯỜNG CHẤT LIÊN TỤC

Chương này mô tả toán học quy luật tương tác của hệ Trường điện từ và môi trường chất liên tục; ý nghĩa của hệ phương trình Maxwell; các phương trình mô tả Trường điện từ tĩnh, Trường điện từ dừng, Trường điện từ biến thiên; các khái niệm hàm thế vô hướng và thế vector.

3.1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH MAXWELL VÀ BÀI TOÁN BỜ CÓ SƠ KIỆN

3.1.1. Một số toán tử về giải tích vector

a. Toán tử Nabla ($\vec{\nabla}$)

Xét trong hệ tọa độ Descartes:

Một vector $\vec{F}$ nào đó trong không gian có các thành phần (F_x; F_y; F_z) thì được biểu diễn dưới dạng: $\vec{F} = \vec{e}_x F_x + \vec{e}_y F_y + \vec{e}_z F_z$

Toán tử Nabla là một vector tượng trưng có các thành phần là các đạo hàm riêng trong không gian: $\left(\dfrac{\partial}{\partial x};\dfrac{\partial}{\partial y};\dfrac{\partial}{\partial z}\right)$

Biểu thức của toán tử Nabla trong không gian: $\vec{\nabla} = \vec{e}_x \dfrac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \dfrac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \dfrac{\partial}{\partial z}$

- Hàm Gradient (Grad): Là một phép tích vô hướng (toán tử Nabla $\vec{\nabla}$ và hàm vô hướng φ). Hàm Grad tính độ biến thiên của vector.

$$\text{Grad}\varphi = \vec{\nabla}.\varphi = \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi = \vec{e}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

- Hàm Divergence (Div): Là một phép tích vô hướng của 2 vector (toán tử Nabla $\vec{\nabla}$ và hàm vector $\vec{F}$ nào đó). Hàm Div tính độ tản (độ phân kỳ) của vector.

$$\mathrm{Div}\vec{F} = \vec{\nabla}.\vec{F} = \left(\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\vec{e}_xF_x + \vec{e}_yF_y + \vec{e}_zF_z\right) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

- Hàm Rotational (Rot): Là một phép tích có hướng của 2 vector (toán tử Nabla $\vec{\nabla}$ và hàm vector $\vec{F}$ nào đó). Hàm Rot tính độ xoáy của vector.

$$\mathrm{Rot}\vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_X & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Xét trong hệ toạ độ trụ:

$$\mathrm{Grad}\varphi = \vec{e}_r\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \vec{e}_\alpha\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \vec{e}_z\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$\mathrm{Div}\vec{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r.F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\mathrm{Rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{r}\vec{e}_r & \vec{e}_\alpha & \dfrac{1}{r}\vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_r & rF_\alpha & F_z \end{vmatrix}$$

b. Toán tử Laplace (Δ)

Xét trong hệ tọa độ Descartes:

Toán tử Laplace là toán tử vi phân có các thành phần là các đạo hàm riêng bậc 2 trong không gian: $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2};\dfrac{\partial^2}{\partial y^2};\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$

Biểu thức của toán tử Laplace trong không gian:

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \vec{\nabla}\vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\mathrm{DivGrad}\varphi = \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z}$$

$$\mathrm{DivRot}\vec{F} = 0$$

$$\mathrm{RotGrad}\varphi = 0$$

$$\mathrm{RotRot}\vec{F} = \mathrm{GradDiv}\vec{F} - \mathrm{DivGrad}\vec{F}$$

Hệ toạ độ trụ: $\Delta\varphi = \frac{1}{r}.\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}.\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$

Hệ toạ độ cầu: $\Delta\varphi = \frac{1}{r}.\frac{\partial^2(R\varphi)}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta.\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}\right]$

c. Một số định lý, định luật cơ bản của Trường điện từ

- Định lý Ostrogradsky - Gauss (O - G): $\oint_S \vec{F}d\vec{S} = \int_V \mathrm{Div}\vec{F}dV$

- Định lý Green - Stokes (G - S): $\oint_l \vec{F}d\vec{l} = \int_S \mathrm{Rot}\vec{F}d\vec{S}$

- Nguyên lý liên tục của từ thông: $\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0$

- Biểu thức xác định từ thông: $\phi = \int_S \vec{B}d\vec{S}$

- Định luật cảm ứng điện từ: $e_u = \oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{\partial\phi}{\partial t}$

- Định luật dòng điện toàn phần: $\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_S \vec{J}_d d\vec{S} = \sum i_d$

- Định luật về dòng dẫn: $\oint_S \vec{J}_d d\vec{S} = -\frac{\partial q_{td}}{\partial t}$

- Định luật Gauss: $\oint_S \vec{D}d\vec{S} = q_{td} = \int_V \rho_{td}dV$

3.1.2. Hệ phương trình Maxwell và bài toán bờ có sơ kiện

a. Hệ phương trình Maxwell

Ở chương 1 ta đã biết có thể đo trạng thái của Trường điện từ bằng hai biến trạng thái cơ bản $\vec{E}, \vec{B}$ liên hệ với các biến khác của hệ là $\vec{D}, \vec{H}, \vec{J}$ qua các thông số hành vi (trường hợp đơn giản nhất là hệ số μ, ε, γ).

Các vector cường độ $\vec{E}, \vec{B}$ lập thành các Trường vector trong không gian, theo thời gian. Do đó có thể biểu diễn hệ phương trình Maxwell dưới dạng các phép tính cơ bản đối với các Trường vector, đó là các phép Div, Rot trong không gian, phép $\frac{\partial}{\partial t}$ theo thời gian.

Ta có hệ phương trình Maxwell gồm 4 phương trình:

Phương trình Maxwell 1: $$\mathrm{Rot}\vec{H} = \vec{J}_d + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3.1)$$

Phương trình Maxwell 2: $$\mathrm{Rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.2)$$

Phương trình Maxwell 3: $$\mathrm{Div}\vec{B} = 0 \quad (3.3)$$

Phương trình Maxwell 4: $$\mathrm{Div}\vec{D} = \rho_{td} \quad (3.4)$$

Các biến trạng thái $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}, \vec{J}$ liên hệ với nhau thông qua phương trình mô tả mối quan hệ hành vi của Trường điện từ và môi trường chất là:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}; \quad \vec{B} = \mu\vec{H}; \quad \vec{J}_d = \gamma\vec{E} \quad (3.5)$$

Với ρ_{td} gọi là mật độ điện tích khối tự do (C/m^3).

Mọi hiện tượng trong các thiết bị điện đều thể hiện sự vận động của Trường điện từ, do đó về nguyên tắc việc phân tích tính toán các hiện tượng đó đều có thể dựa trên hệ phương trình Maxwell, đó là hệ phương trình cơ bản nhất phản ánh những qui luật của Trường điện từ theo mô hình liên tục hoá.

Hệ phương trình Maxwell giữ vị trí quan trọng đối với Lý thuyết Trường điện từ giống như các luật Kirchhoff với Lý thuyết Mạch (các luật Kirchhoff chỉ là trường hợp riêng của hệ phương trình Maxwell).

b. Bài toán bờ có sơ kiện

Hệ phương trình Maxwell là hệ phương trình đạo hàm và tích phân theo không gian và thời gian, do đó bài toán Trường điện từ là một bài toán bờ có sơ kiện cả không gian và thời gian. Muốn giải được bài toán này ta phải lập ra điều kiện cho bài toán (các sơ kiện ban đầu để bài toán có nghiệm trên bờ S và mốc thời gian đang xét tức sự phân bố, lan truyền nghiệm bài toán trong không gian và thời gian tuỳ thuộc vào những giá trị nghiệm ở trên bờ của miền xác định bài toán và ở gốc thời gian).

Điều đó được giải thích như sau: Vì các nghiệm $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}, \vec{J}$ liên quan nhau qua hệ phương trình đạo hàm riêng trong không gian, thời gian và ở một môi trường chất cụ thể. Vì vậy giá trị nghiệm ở mỗi điểm (M, t) phải tuỳ thuộc lân cận điểm M, tại một lân cận thời gian trước t và tuỳ thuộc phản ứng địa phương của môi trường chất quanh M. Suy ra nghiệm trong miền V bao bởi bờ S và ở một thời điểm t phải tuỳ thuộc hình dáng bờ, sự phân bố nghiệm trên bờ ở những thời điểm trước t, kể cho đến thời điểm t và tuỳ thuộc sự phân bố môi trường chất trong miền xét các quan hệ trên phản ánh quan hệ giữa Trường và môi trường chất. Đó là quan hệ nhân quả trong không gian và thời gian.

Ví dụ: Đối các bài toán quá độ thì việc tìm các sơ kiện là rất quan trọng vì nghiệm của bài toán phụ thuộc vào các sơ kiện đó.

3.1.3. Quan hệ giữa hệ phương trình Maxwell và các luật Kirchhoff

Các phương trình Maxwell mô tả qui luật của Trường điện từ nên chúng phải bao quát cả các luật Kirchhoff của Mạch, vì mô hình Mạch được coi là mô hình của Trường trong những điều kiện riêng. Từ các phương trình Maxwell ta có thể dẫn ra các luật Kirchhoff.

a. Dẫn ra luật Kirchhoff 1

Để dẫn ra luật Kirchhoff 1 ta xuất phát từ phương trình Maxwell 1:

$$\mathrm{Rot}\vec{H} = \vec{J}_d + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}_{\Sigma} \qquad (3.6)$$

Lấy Div 2 vế với chú ý $\text{DivRot}\vec{H} = \text{Div}\vec{J}_{\sum} = 0$, do đó:

$$\text{Div}\,\vec{J}_{\Sigma} = 0 \text{ hay } \int_V \text{div}\vec{J}_{\Sigma}\text{d}V = 0 \tag{3.7}$$

Áp dụng định lý Ostrogradski - Gauss cho (3.7) ta có:

$$\int_V \text{div}\vec{J}_{\sum}\,\text{d}V = \oint_S \vec{J}_{\sum}\,\text{d}\vec{S} = 0 \tag{3.8}$$

Theo điều kiện mạch hoá bỏ qua dòng rò và dòng dịch ta được luật Kirchhoff 1 đối với một nút (hoặc 1 mặt kín):

$$\Sigma\, i_d = 0 \text{ hay } \oint_S \vec{J}_d\text{d}\vec{S} = \sum i_d = 0 \tag{3.9}$$

b. Dẫn ra luật Kirchhoff 2

Để dẫn ra luật Kirchhoff 2 ta xuất phát từ phương trình Maxwell 2:

$$\text{Rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Lấy tích phân 2 vế theo một mặt S giới hạn bởi một vòng kín đứng yên trong hệ qui chiếu, S không bị biến dạng theo thời gian nên ta có:

$$\int_S \text{Rot}\vec{E}\text{d}\vec{S} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\text{d}\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}\text{d}\vec{S}$$

Mà theo biểu thức xác định của từ thông: $\phi = \int_S \vec{B}\text{d}\vec{S}$ với ϕ là từ thông chảy qua mặt S. Do đó:

$$\int_S \text{Rot}\vec{E}\text{d}\vec{S} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\text{d}\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}\text{d}\vec{S} = -\frac{\partial\phi}{\partial t} \tag{3.10}$$

Theo luật Lenz - Faraday, đó là sức điện động cảm ứng trên vòng kín L bao lấy mặt S. Áp dụng định lý Green - Stokes cho vế trái (3.10) ta có:

$$\int_S \text{Rot}\vec{E}\text{d}\vec{S} = \oint_L \vec{E}\text{d}\vec{l}$$

Vậy:

$$\oint_L \vec{E}\text{d}\vec{l} + \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \tag{3.11}$$

Các số hạng trong (3.11) trên chính là những điện áp kể cả các sức điện động cảm ứng lấy theo vòng kín L. Vậy ta được luật Kirchhoff 2 cho vòng kín:

$$\sum u = 0 \tag{3.12}$$

Tương tự từ phương trình Maxwell 1 và 3 dẫn ra được phương trình liên tục của từ thông và cân bằng từ áp trong mạch từ *(Bạn đọc tự dẫn ra các phương trình này).*

3.2. DẪN RA HỆ PHƯƠNG TRÌNH MAXWELL

Khi đưa ra các phương trình mô tả quy luật tương tác của Trường điện từ, Maxwell đã kết hợp một cách tài tình giữa các thực nghiệm của các nhà vật lý và đưa ra lý thuyết dòng điện chuyển dịch. Với giả thiết như vậy Maxwell dẫn ra các phương trình như sau:

3.2.1. Dẫn ra phương trình Maxwell 2

Phương trình này được dẫn ra từ định luật cảm ứng điện từ Lenz - Faraday. Thật vậy khi từ thông ϕ biến thiên xuyên qua một vòng kín L đứng yên trong không gian thì trong vòng sẽ cảm ứng ra một sức điện động e_u:

$$e_u = \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{3.13}$$

Ở đây $\vec{E}$ là cường độ điện trường cảm ứng. Theo định lý Green - Stokes lưu số $\vec{E}$ theo vòng kín L bằng thông lượng vector $\mathrm{Rot}\vec{E}$ chảy qua mặt S bao bởi đường kín L nên ta có: $\int_S \mathrm{Rot}\vec{E} d\vec{S} = \oint_L \vec{E} d\vec{l}$ (3.14)

Mặt khác từ thông ϕ bằng thông lượng từ cảm $\vec{B}$ chảy qua mặt S theo biểu thức: $\phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$ nên kết hợp (3.13) và (3.14) trở thành:

$$\int_S \mathrm{Rot}\vec{E} d\vec{S} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\oint_S \vec{B} d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \tag{3.15}$$

Với mặt S lấy đủ nhỏ ta suy ra phương trình Maxwell 2:

$$\mathrm{Rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

3.2.2. Dẫn ra phương trình Maxwell 1

a. Dẫn ra phương trình

Phương trình Maxwell 1 được dẫn ra từ định luật dòng điện toàn phần kèm theo sự đề xuất tiên đề về dòng điện dịch của Maxwell.

Theo định luật dòng điện toàn phần Biot - Savart - Ampere thì lưu số vector cường độ từ trường dừng theo một vòng kín L bằng tổng các dòng điện dẫn chảy xuyên qua vòng kín đó.

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_S \vec{J_d}d\vec{S} = i_d \qquad (3.16)$$

Trong đó đã thay dòng dẫn i_d bằng vector mật độ dòng dẫn $\vec{J}_d$ qua mặt S bao bởi vòng L. Áp dụng định lý Green - Stokes cho vế trái ta có: $\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_S \text{Rot}\vec{H}d\vec{S}$. Thay vào biểu thức (3.16) ta có: $\int_S \text{Rot}\vec{H}d\vec{S} = \int_S \vec{J}_d d\vec{S}$

Với vòng L đủ nhỏ ta có: $\text{Rot}\vec{H} = \vec{J}_d$ (3.17)

Tuy nhiên phương trình này chỉ đúng cho Trường điện từ không biến thiên mà không đúng với Trường điện từ biến thiên.

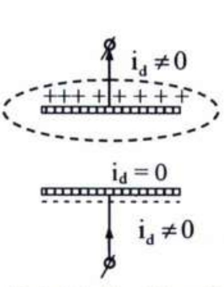
Thật vậy tác động phép Div vào hai vế (3.17) và chú ý $\text{DivRot}\vec{F} = 0$

Ta có: $\text{DivRot}\vec{H} = \text{Div}\vec{J}_d = 0$. Áp dụng định lý Green - Stokes ta được:

$$\oint_S \vec{J}_d d\vec{S} = \int_V \text{Div}\vec{J}_d dV = 0, \text{ do đó ta có: } \oint_S \vec{J}_d d\vec{S} = 0 \qquad (3.18)$$

Tức dòng điện dẫn lẽ ra phải chảy liên tục. Nhưng thực tế trong Trường điện từ biến thiên dòng điện dẫn không liên tục, tức là (3.17) và (3.18) không đúng. Ta hãy xét trường hợp đơn giản nhất là một tụ đang phóng điện như Hình 3.1.

Lấy mặt kín S bao lấy một bản cực tụ điện, dòng dẫn chỉ chảy ra khỏi mặt S ($i_d \neq 0$) mà không có dòng chảy vào mặt S ($i_d = 0$), tức thông lượng dòng dẫn chảy ra khỏi mặt S không liên tục như biểu thức (3.18). Vì vậy ta đi hiệu chỉnh chúng:



Hình 3.1: Tụ phóng điện

Theo định nghĩa dòng điện dẫn, thông lượng dòng dẫn chảy ra khỏi một mặt kín S bằng tốc độ giảm điện tích tự do bao trong mặt ấy, tức:

$$\oint_S \vec{J}_d d\vec{S} = -\frac{\partial q_{td}}{\partial t}$$

Nếu ta lấy một miền V bao bởi mặt S thì theo định luật Gauss ta có:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q_{td} = \int_V \rho_{td} dV$$

Vì S và V không bị biến dạng theo thời gian nên ta có:

$$\oint_S \vec{J}_d d\vec{S} = -\frac{\partial q_{td}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho_{td} dV = -\int_V \frac{\partial \rho_{td}}{\partial t} dV \tag{3.19}$$

Trong đó ρ_{td} là mật độ điện tích tự do trong V.

Áp dụng định lý Ostrogradski - Gauss cho vế trái, ta có:

$$\oint_S \vec{J}_d d\vec{S} = \int_V \mathrm{Div}\vec{J}_d dV = -\int_V \frac{\partial}{\partial t}\rho_{td} dV \tag{3.20}$$

Với V không suy biến, ta thu được:

$$\mathrm{Div}\vec{J}_d = -\frac{\partial \rho_{td}}{\partial t} \tag{3.21}$$

Về mặt toán học cần phải giả thiết rằng vế phải của (3.17) ngoài $\vec{J}_d$ còn phải thêm một lượng nào đó mà Maxwell gọi là dòng điện chuyển dịch $\vec{J}_{cd}$ sao cho tổng $\vec{J}_\Sigma = \vec{J}_d + \vec{J}_{cd}$ thoả mãn điều kiện chảy liên tục và thoả mãn (3.17), tức là:

$$\mathrm{Rot}\vec{H} = \vec{J}_\Sigma = \vec{J}_d + \vec{J}_{cd} \tag{3.22}$$

Khi đó: $\mathrm{Div}\vec{J}_\Sigma = \mathrm{Div}\vec{J}_d + \mathrm{Div}\vec{J}_{cd} = 0$ hay $\mathrm{Div}\vec{J}_d = -\,\mathrm{Div}\vec{J}_{cd}$ (3.23)

So sánh (3.21) và (3.23) ta có:

$$\mathrm{Div}\,\vec{J}_{cd} = -\,\frac{\partial \rho_{td}}{\partial t} \tag{3.24}$$

Đến đây, Maxwell đã mở rộng luật Gauss đối với trường tĩnh và giả thiết nó vẫn đúng với Trường biến thiên. Từ đó áp dụng định lý Ostrogradski - Gauss vào định luật Gauss tạo tiền đề Maxwell về dòng điện chuyển dịch.

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = \int_V Div\vec{D}dV = \int_V \rho_{td}dV \text{ hay } Div\,\vec{D} = \rho_{td} \tag{3.25}$$

Thay (3.25) vào (3.24) ta được:

$$Div\vec{J}_{cd} = \frac{\partial \rho_{td}}{\partial t} = \frac{\partial Div\vec{D}}{\partial t} = Div\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \text{ hay } \vec{J}_{cd} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{3.26}$$

Từ đó Maxwell bổ xung vào (3.17) mật độ dòng điện chuyển dịch $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ và khẳng định rằng mật độ dòng điện toàn phần:

$$\vec{J}_{\Sigma} = \vec{J}_d + \vec{J}_{cd} \tag{3.27}$$

Khi đó (3.17) trở thành dạng phương trình Maxwell 1:

$$Rot\vec{H} = \vec{J}_{\Sigma} = \vec{J}_d + \vec{J}_{cd} = \vec{J}_d + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \text{ hay } Rot\vec{H} = \vec{J}_d + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

b. Ý nghĩa mật độ dòng dịch $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Phương trình Maxwell 1 khẳng định rằng dòng điện toàn phần $\vec{J}_{\Sigma}$ (3.27) là một lượng vật lý tồn tại gắn liền với từ trường biến thiên, nó cũng nói lên rằng $\vec{J}_{cd}$ có vai trò như $\vec{J}_d$ và là một thành phần mật độ dòng điện.

Thay $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ vào biểu thức của $\vec{J}_{cd}$ ta được:

$$\vec{J}_{cd} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \vec{J}_E + \vec{J}_P \tag{3.28}$$

- Vector mật độ dòng $\vec{J_E} = \varepsilon_o\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ không biểu thị sự chuyển động của hạt mang điện nào, mà chỉ ứng với một điện trường biến thiên $\vec{E}$. Tuy nhiên trong thực tiễn thì người ta đều thấy nó có tính chất hoàn toàn giống với mật độ dòng dẫn.

- Vector mật độ dòng $\vec{J}_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \frac{\partial N\vec{p}}{\partial t}$ nên $\vec{J}_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \frac{\partial Nq\vec{l}}{\partial t} = \frac{Nq\partial \vec{l}}{\partial t} = Nq\vec{v}$

Từ các biểu thức cho ta thấy thành phần mật độ dòng điện này là sự chuyển động của các điện tích quanh vị trí cân bằng với vận tốc $\vec{v}$. Vậy bản chất giống như $\vec{J}_d$ tuy nhiên ở đây là sự chuyển động của các điện tích giàng buộc của lưỡng cực còn ở $\vec{J}_d$ là của các điện tích tự do.

Vậy tóm lại dòng điện chuyển dịch $\vec{J}_{cd}$ hoàn toàn giống với $\vec{J}_d$ và là một phần tạo lên mật độ dòng tổng. Thực tiễn đã chứng minh tiên đề về dòng điện chuyển dịch của Maxwell là đúng.

3.2.3. Dẫn ra phương trình Maxwell 3

Từ phương trình Maxwell 2 ta có: $\text{Rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Tác động phép Div vào hai vế ta được:

$$\text{DivRot}\vec{E} = -\text{Div}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \text{ suy ra } \text{DivRot}\vec{E} = -\frac{\partial \text{Div}\vec{B}}{\partial t} = 0 \text{ hay } \frac{\partial}{\partial t}\text{Div}\vec{B} = 0$$

Ta lấy tích phân hai vế theo thời gian t với chú ý Div$\vec{B}$ là hàm của không gian (x, y, z) không phụ thuộc vào thời gian. Div$\vec{B}$ = f(x, y, z), qui luật này phải đúng cho cả khi trường chưa thành lập trong hệ qui chiếu, tức là khi có $\vec{B} = 0$ và Div$\vec{B} = 0$. Cuối cùng ta có phương trình Maxwell 3: Div$\vec{B} = 0$

3.2.4. Dẫn ra phương trình Maxwell 4

Khi dẫn ra phương trình Maxwell 1 ta đã chấp nhận phương trình Maxwell 4, tức tiên đề Maxwell về dòng điện dịch, có nghĩa là phương trình Maxwell 4 phải cùng với phương trình Maxwell 1 làm thành một hệ thống. Song không có nghĩa là phương trình Maxwell 1 chứa phương trình Maxwell 4 như một hệ quả.

Thật vậy, tác động phép Div vào hai vế của phương trình Maxwell 1:

$$\text{Divrot}\vec{H} = \text{Div}\vec{J}_d + \text{Div}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$$

Ta đã chứng minh được biểu thức: $\mathrm{Div}\vec{J}_d = -\frac{\partial \rho_{td}}{\partial t}$ khi dẫn ra phương trình Maxwell 1 nên: $-\frac{\partial}{\partial t}\rho_{td} + \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Div}\vec{D} = 0$ (3.29)

Vậy ta có: $\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Div}\vec{D} = \frac{\partial}{\partial t}\rho_{td}$. Ta tích phân 2 vế theo thời gian và cũng chú ý $\mathrm{Div}\vec{D}$ chỉ phụ thuộc vào không gian mà không phụ thuộc thời gian. $\mathrm{Div}\vec{D} = \rho_{td} + f(x,y,z)$, qui luật này phải đúng cả khi trường chưa thành lập trong hệ qui chiếu và không có phân bố điện tích $\rho_{td} = 0$; $\mathrm{Div}\vec{D} = 0$. Suy ra hàm $f(x,y,z)$ triệt tiêu, ta được phương trình Maxwell 4: $\mathrm{Div}\vec{D} = \rho_{td}$

3.3. Ý NGHĨA HỆ PHƯƠNG TRÌNH MAXWELL

Hệ phương trình Maxwell có ý nghĩa cơ bản và quan trọng bậc nhất trong lý thuyết trường điện từ. Nó mô tả đầy đủ quan hệ giữa các biến $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}, \vec{J}$ của hệ, mô tả hình học của Trường điện từ và mối quan hệ giữa Trường và môi trường chất trong một hệ qui chiếu quán tính ở mọi chế độ: tĩnh, dừng và biến thiên.

3.3.1. Hai phương trình Maxwell 1 và 2 mô tả mối quan hệ giữa hai mặt thể hiện điện và từ của Trường điện từ biến thiên

Thật vậy phương trình Maxwell 1 nêu rõ ở những vùng có điện trường biến thiên tới mật độ dòng điện $\vec{J}_d + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ biến thiên, ở đó có từ trường biến thiên và từ trường đó có tính chất xoáy ($\mathrm{Rot}\,\vec{H} \neq 0$). Mặt khác phương trình Maxwell 2 nêu rõ ở vùng nào có từ trường biến thiên $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$, thì ở đó có điện trường biến thiên (vì $\mathrm{Rot}\,\vec{E}$ biến thiên) và điện trường đó có tính chất xoáy.

Đối với Trường điện từ dừng nghĩa là $\vec{J}_d \neq 0$, $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$ ta thấy từ trường vẫn phụ thuộc sự phân bố dòng $\vec{J}_d$; nhưng quan hệ điện và từ trường đã bớt mật thiết; $\mathrm{Rot}\,\vec{E} = 0 \rightarrow$ điện trường có tính chất thế. Còn $\mathrm{Rot}\,\vec{H} = \vec{J}_d$ từ trường vẫn có tính chất xoáy ở vùng có dòng điện và có tính thế ở vùng không có dòng điện.

Đối với Trường điện từ tĩnh $\mathrm{Rot}\vec{E} = 0$; $\mathrm{Rot}\vec{H} = 0$ (do $\frac{\partial}{\partial t} = 0$; $\vec{J}_d = 0$) đó là trường của nam châm vĩnh cửu và vật mang điện tĩnh. Ở đây điện trường và từ trường không phụ thuộc nhau và đều có tính chất thế.

3.3.2. Hai phương trình Maxwell 3 và 4 mô tả hình học của hai mặt thể hiện điện trường và từ trường

Thật vậy phương trình Maxwell 3 có dạng: $\mathrm{Div}\vec{B} = 0$ hoặc $\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0$ nêu rõ dòng vector từ cảm luôn chảy liên tục, không có vùng nào xuất phát và không có tận cùng, đó là dạng hình học của $\vec{B}$.

Còn phương trình Maxwell 4: $\mathrm{Div}\vec{D} = \rho_{td}$ hoặc $\oint_S \vec{D}d\vec{S} = q_{td}$ nói lên rằng thông lượng vector $\vec{D}$ chảy ra khỏi một mặt kín S bằng lượng điện tích tự do bao trong mặt ấy. Vậy với trường vector $\vec{D}$ có thể có những vùng xuất phát là vùng có phân bố $\rho_{td} > 0$ và vùng tận cùng là nơi có phân bố $\rho_{td} < 0$. Đó là hình học của trường vector $\vec{D}$. Cũng có thể $\vec{D}$ chảy liên tục và khép kín giống như $\vec{B}$ khi $\rho_{td} = 0$.

3.3.3. Các phương trình Maxwell miêu tả quan hệ khăng khít giữa Trường điện từ và môi trường chất

Phương trình Maxwell 1 nêu rõ độ xoáy của từ trường $\mathrm{Rot}\vec{H}$ gắn liền với dòng điện, đường sức $\vec{H}$ xoáy quanh những dòng điện là một dạng chuyển động của chất.

Phương trình Maxwell 4 nêu rõ sự gắn bó giữa điện trường $\vec{D}$ và sự phân bố các hạt mang điện. Đường sức $\vec{D}$ toả ra từ những hạt mang điện ρ_{td} tựa như đó là "nguồn" điện trường (đối với từ trường $\vec{B}$ không có như vậy).

Nhìn chung sự gắn bó Trường - chất thể hiện thông qua những hệ số của phương trình μ, ε, γ, ρ là những biến và thông số hành vi của môi trường phản ánh quy luật tương tác.

Ví dụ 1: Một điện trường biến thiên có dạng $\vec{E} = \vec{e}_x E_m \sin(\omega t - \beta z)$ hãy tìm từ trường $\vec{B}$?

Giải: Vì $\vec{E}$ cho trong bài chỉ có thành phần $E_x = E_m \sin(\omega t - \beta z)$ phụ thuộc riêng z nên 2 thành phần còn lại: $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$; $E_y = E_z = 0$

Từ trường $\vec{B}$ được xác định thông qua phương trình Maxwell 2 ta có:

$\mathrm{Rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{B} = -\int \mathrm{Rot}\vec{E}dt$. Thay trực tiếp vào bài toán ta có:

$$\mathrm{Rot}\,\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial z} E_x$$

$$\mathrm{Rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial z} E_m \sin(\omega t - \beta z) = -\vec{e}_y \beta E_m \sin(\omega t - \beta z + \frac{\pi}{2})$$

Tích phân hai vế theo thời gian ta có:

$$\vec{B} = \vec{e}_y \frac{\beta}{\omega} E_m \sin(\omega t - \beta z) + \vec{F}(x, y, z)$$

Ở đây $\vec{F}(x, y, z)$ là một hàm không gian ứng với một trường tĩnh. Nếu không tồn tại trường tĩnh thì $\vec{F}(x, y, z) = 0$.

Ví dụ 2: Một điện trường có dạng $\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \frac{c}{x^2 + y^2}\left(e_x x + e_y y\right)$. Tìm phân bố điện tích trong không gian?

Giải: Để tìm phân bố điện tích, ta dùng phương trình Maxwell 4:

$$\rho_{td} = \mathrm{div}\vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} = \frac{c}{\left(x^2 + y^2\right)^2}\left[\left(x^2 + y^2 - 2y^2\right) + \left(x^2 + y^2 - 2x^2\right)\right] = 0$$

Vậy điện tích có thể phân bố trên trục x = 0, y = 0 còn khắp nơi đều không có phân bố điện tích.

3.4. CÁC PHƯƠNG TRÌNH CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ TĨNH - THẾ VÔ HƯỚNG

Trường điện từ tĩnh là Trường của các hạt, các vật mang điện đặt tĩnh tại trong không gian ở hệ quy chiếu quán tính mà ta xét. Nó có một số tính chất cơ bản sau:

- Trường điện từ tĩnh không tồn tại dòng điện dẫn tức là không có mật độ dòng dẫn $\vec{J}_d = 0 \Rightarrow \vec{J}_d = \gamma\vec{E} = 0 \Rightarrow \gamma = 0$. Vậy Trường điện từ tĩnh không tồn tại trong môi trường vật dẫn.

- Các thông số biến trạng thái không phụ thuộc vào thời gian $\left(\dfrac{\partial}{\partial t} = 0\right)$

- Mật độ điện tích khối $\rho_{td} \neq 0$ là ở những môi trường chất mang điện ngược lại $\rho_{td} = 0$ là ở những môi trường không mang điện.

3.4.1. Hệ phương trình Maxwell đối với Trường điện từ tĩnh

Từ các tính chất $\vec{J}_d = 0$; $\left(\dfrac{\partial}{\partial t} = 0\right)$ và ρ_{td}, ta có hệ phương trình Maxwell như sau:

$$\begin{cases} \mathrm{Rot}\vec{H} = 0 & (1) \\ \mathrm{Rot}\vec{E} = 0 & (2) \\ \mathrm{Div}\vec{B} = 0 & (3) \\ \mathrm{Div}\vec{D} = \rho_{td} & (4) \end{cases} \qquad (3.30)$$

Với: $\vec{B} = \mu\vec{H}$; $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$

Nhận xét:

- Từ phương trình Maxwell 1 và 2 ta thấy điện trường tĩnh và từ trường tĩnh có quan hệ độc lập với nhau, không có liên hệ gì với nhau. Nghĩa là có từ trường nhưng không sinh ra điện trường và ngược lại.

- Từ trường tĩnh và điện trường tĩnh đều mang tính chất thế (vì có $\mathrm{Rot}\vec{H} = 0$ và $\mathrm{Rot}\vec{E} = 0$).

- Trường điện từ tĩnh chỉ tồn tại ở hai môi trường điện môi và môi trường từ môi.

3.4.2. Khái niệm điện thế vô hướng

Từ hai phương trình $Rot\vec{H} = 0$ và $Rot\vec{E} = 0$, chứng tỏ điện trường tĩnh và từ trường tĩnh đều có tính chất thế. Vì vậy người ta sử dụng một biến trạng thái để mô tả tính chất này gọi là các hàm thế vô hướng φ, tương ứng của điện trường và từ trường là φ_E và φ_M.

3.4.3. Điện trường tĩnh và khái niệm điện thế vô hướng

a. Hệ phương trình Maxwell

$$\begin{cases} Rot\vec{E} = 0 \\ Div\vec{D} = \rho_{td} \end{cases} \qquad (3.31)$$

Với $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$

b. Khái niện điện thế vô hướng φ_E

Giả sử ta có một vật nhỏ mang điện tích q đặt trong một miền có điện trường tĩnh sẽ chịu tác động của một lực điện trường: $\vec{F}_E = q\vec{E}$

Vậy muốn dịch chuyển vật nhỏ mang điện này (với tốc độ đủ chậm để bỏ qua lực quán tính) thì vật nhỏ này phải chịu tác động một lực $-\vec{F}_E$ suy ra phải cần một công A có giá trị:

$$A = \int_L -\vec{F}_E d\vec{l} = -q\int_L \vec{E}d\vec{l} \qquad (3.32)$$

Đối với trường tĩnh nó có tính chất là công dịch chuyển một điện tích từ điểm này đến điểm khác là xác định, và chỉ phụ thuộc vào vị trí 2 điểm mà không phụ thuộc vào đường đi suy ra công dịch chuyển một điện tích theo một vòng khép kín L bằng không.

Thật vậy, nếu dịch chuyển vật đó theo một vòng kín L thì công:

$$A = -q\oint_L \vec{E}d\vec{l}$$

Theo định lý Green - Stokes: $\oint_L \vec{E}d\vec{l} = \int_S Rot\vec{E}d\vec{S}$ với chú ý $Rot\vec{E} = 0$ suy ra: $A = \int_S Rot\vec{E}d\vec{S} = 0$ với S là mặt được bao bởi vòng kín L.

Từ đặc điểm trên nếu chọn một điểm M_0 nào đó làm mốc thì công di chuyển một đơn vị điện tích (q = 1C) từ M_0 đến mọi điểm M sẽ có giá trị xác định và chỉ tuỳ thuộc vị trí điểm M_0 và M.

Ta định nghĩa gọi công dịch chuyển điện tích 1C từ M_0 tới M là thế năng ứng với điểm M(x, y, z) thay đổi là:

$$\varphi_E(x,y,z) = \varphi(M) = A\big|_{(q=1C)} = -\int_{M_0}^{M} \bar{E}d\bar{l} = \int_{L} \bar{E}d\bar{l} \tag{3.33}$$

Vậy hàm thế $\varphi_E(x,y,z)$ là một biến trạng thái của điện trường tĩnh về phương diện năng lượng. Nếu điện tích là dq thì công:

$$dA = \varphi_E(x,y,z)\,dq \tag{3.34}$$

Tức là Trường điện từ tĩnh tích năng lượng điện trong không gian.

Chú ý: Từ biểu thức trên ta thấy tuỳ thuộc vào chọn mốc M_0 mà có các φ_E khác nhau. Vì vậy khi cho một $\varphi_E(x,y,z)$ phải nói rõ mốc chọn, do khi chọn các M_0 tuỳ ý khác nhau sẽ có vô số các $\varphi_E(x,y,z)$ khác nhau. Tuy nhiên hiệu số thế giữa 2 điểm M_1 và M_2 là hoàn toàn xác định. Ta gọi hiệu ấy là điện áp (U_{12}) từ điểm M_1 đến M_2.

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = -\int_{M_0}^{M_1} \bar{E}.d\bar{l} - \left(-\int_{M_0}^{M_2} \bar{E}.d\bar{l}\right)$$

$$\Leftrightarrow U_{12} = \int_{M_1}^{M_0} \bar{E}d\bar{l} + \int_{M_0}^{M_2} \bar{E}d\bar{l} = \int_{M_1}^{M_2} \bar{E}d\bar{l} \tag{3.35}$$

Vậy điện áp U_{12} bằng công dịch chuyển 1C điện tích từ M_1 đến M_2.

c. Biểu diễn $\bar{E}$ qua φ_E

Từ biểu thức (3.33) ta có: $\varphi_E = -\int_{M_0}^{M} \bar{E}d\bar{l} = -\int_{L} \bar{E}d\bar{l}$ ta lấy đạo hàm riêng theo

phương l ta được: $\partial\varphi_E = -E_l.\partial l \Rightarrow E_l = -\dfrac{\partial\varphi_E}{\partial l}$ (3.36)

Trong đó: E_l là thành phần cường độ Trường theo chiều dl suy ra:

Từ công thức (3.36) có thể tìm được các thành phần trực giao của vector $\vec{E}$ trong toạ độ Descartes có:

$$\vec{E} = \vec{e}_x E_x + \vec{e}_y E_y + \vec{e}_z E_z = -\vec{e}_x \frac{\partial \varphi_E}{\partial x} - \vec{e}_y \frac{\partial \varphi_E}{\partial y} - \vec{e}_z \frac{\partial \varphi_E}{\partial z} \qquad (3.37)$$

$$\Rightarrow E_x = -\frac{\partial \varphi_E}{\partial x} \; ; \; E_y = -\frac{\partial \varphi_E}{\partial y} \; ; \; E_z = -\frac{\partial \varphi_E}{\partial z}$$

Vậy: $\vec{E} = -\left(\vec{e}_x \frac{\partial \varphi_E}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial \varphi_E}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial \varphi_E}{\partial z} \right)$

Do đó (3.37) được viết thành: $\vec{E} = -\mathrm{Grad}\varphi_E = -\nabla \varphi_E$ (3.38)

Tức là (3.38) nêu rõ cường độ điện trường ở mỗi điểm bằng vector tốc độ tăng nhanh nhất của hàm thế (grad φ_E) lấy theo chiều ngược lại.

Vậy điện trường tĩnh, thoả mãn $\mathrm{Rot}\vec{E} = 0$ là một trường thế. Nó có thể mô tả bằng một biến trạng thái φ_E, gọi là hàm thế vô hướng, từ đó có thể xác định được $\vec{E}$ theo biểu thức (3.38).

d. Phương trình Laplace - Poisson đối với điện thế

Trong trường tĩnh điện ta thường dùng hàm thế vô hướng φ_E vì nó gọn và đơn giản hơn các phương trình Maxwell viết cho $\vec{E}$ và $\vec{D}$. Để dẫn ra phương trình đối với φ_E ta xuất phát từ phương trình cơ bản Maxwell:

$$\mathrm{Rot}\vec{E} = 0 \; ; \; \mathrm{Div}\vec{D} = \mathrm{Div}\varepsilon\vec{E} = \rho_{td} \qquad (3.39)$$

$$\text{và } \vec{E} = -\mathrm{Grad}\varphi_E \qquad (3.40)$$

Nếu môi trường đồng nhất tuyến tính và đẳng hướng thì: ε = const; từ (3.39) và (3.40) ta có:

$$\mathrm{Div}\varepsilon\vec{E} = \varepsilon\mathrm{Div}\vec{E} = -\varepsilon\mathrm{DivGrad}\varphi_E = \rho_{td}$$

$$\text{hoặc: } \mathrm{DivGrad}\varphi_E = \begin{cases} -\dfrac{\rho_{td}}{\varepsilon} & \text{ở vùng có phân bố điện tích tự do} \\ 0 & \text{ở vùng không có phân bố điện tích tự do} \end{cases} \qquad (3.41)$$

Ký hiệu DivGrad = Δ gọi là toán tử Laplace

Vậy: $$\Delta\varphi_E = \begin{cases} \dfrac{-\rho_{td}}{\varepsilon} & \text{ở vùng có phân bố điện tích tự do} \\ 0 & \text{ở vùng không có phân bố điện tích tự do} \end{cases} \tag{3.42}$$

Biểu thức (3.42) là phương trình Laplapce - Poisson của điện trường tĩnh, nó mô tả quá trình tương tác động lực học của hệ Trường - Chất theo môi trường liên tục hoá ở chế độ tĩnh.

Vậy, ta có thể coi toán tử Δ = DivGrad đặc trưng cho qui luật tương tác, tức hành vi của hệ Trường - Chất trong trường hợp tĩnh.

3.4.4. Từ trường tĩnh và từ thế vô hướng

a. Hệ phương trình Maxwell

Vì từ trường tĩnh không gắn với điện trường tĩnh nên tách được cặp phương trình Maxwell cho từ trường tĩnh:

$$\begin{cases} \mathrm{Rot}\vec{H} = 0 \\ \mathrm{Div}\vec{B} = 0 \end{cases} \tag{3.43}$$

Với $\vec{B} = \mu\vec{H}$

Phương trình Rot $\vec{H}$ = 0 cho thấy từ trường tĩnh có tính chất thế nên giống như điện trường tĩnh ở trên, ta có:

$$\vec{H} = -\mathrm{Grad}\varphi_M \tag{3.44}$$

φ_M biểu diễn trạng thái từ trường tĩnh → gọi là từ thế vô hướng tương tự như φ_E, nó nói lên Trường điện từ tĩnh có phân bố năng lượng từ trong không gian. Vì trong môi trường đồng nhất, tuyến tính và đẳng hướng, cũng có $\mu = \text{const}$ nên phương trình Laplace - Poisson cho từ trường tĩnh có dạng:

$$\Delta\varphi_M = 0 \tag{3.45}$$

3.5. PHƯƠNG TRÌNH CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ DỪNG - HÀM THẾ VÔ HƯỚNG VÀ HÀM THẾ VECTOR

Trường điện từ dừng là Trường gắn với phân bố dòng dẫn $\vec{J}_d$ không đổi theo thời gian (trường hợp riêng $\vec{J}_d = 0$ xảy ra khi cho trường dừng tác động vào tụ điện). Do đó phân bố trường $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}, \vec{J}$ cũng không đổi theo thời gian ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$), hệ phương trình Maxwell như sau:

$$\begin{cases} Rot\vec{H} = \vec{J}_d & (1) \\ Rot\vec{E} = 0 & (2) \\ Div\vec{B} = 0 & (3) \\ Div\vec{D} = 0 & (4) \end{cases} \qquad (3.46)$$

Với: $\vec{B} = \mu\vec{H}$; $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$; $\vec{J}_d = \gamma\vec{E}$

Để thấy được điện trường dừng tồn tại trong môi trường vật dẫn và khi đó dòng dẫn là liên tục được thể hiện qua biến $\vec{J}_d$. Ta cần dẫn ra phương trình mô tả tính chất này bằng cách lấy phép tính Div hai vế phương trình Rot$\vec{H}$ = $\vec{J}_d$:

$$DivRot\vec{H} = Div\,\vec{J}_d$$

Mà theo tính chất toán giải tích vector ta luôn có DivRot$\vec{A}$ = 0 (với $\vec{A}$ là vector bất kỳ), nên suy ra: DivRot$\vec{H}$ = 0. Vậy từ phương trình trên ta được phương trình (có thể được gọi là Maxwell 5):

$$Div\,\vec{J}_d = 0 \qquad (3.47)$$

Vậy ta có thể tách các phương trình trên thành hệ riêng đo điện trường $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{J}_d$. Tức là điện trường dừng độc lập với từ trường dừng.

3.5.1. Điện trường dừng

a. Hệ phương trình Maxwell

$$\begin{cases} Rot\vec{E} = 0 & (2) \\ Div\vec{D} = 0 & (4) \\ Div\vec{J}_d = 0 & (5) \end{cases} \qquad (3.48)$$

Với: $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$; $\vec{J}_d = \gamma\vec{E}$.

- Trong vật dẫn, bỏ qua hiện tượng phân cực: $\gamma \neq 0$ tức $\varepsilon = 0$.

- Trong điện môi, bỏ qua hiện tượng dẫn: $\varepsilon \neq 0$ tức $\gamma = 0$.

Ta có thể tách ra hai vùng: Vùng dẫn có phân bố dòng $\vec{J}_d$, $\vec{E}$ và vùng điện môi có phân bố $\vec{D}$, $\vec{E}$. Các phương trình cho các vùng này là:

- Vật dẫn: $\quad \mathrm{Rot}\,\vec{E} = 0\,;\ \ \mathrm{Div}\,\vec{J}_d = 0\ ;\ \ \vec{J}_d = \gamma\vec{E}$ (3.49)

- Điện môi: $\quad \mathrm{Rot}\,\vec{E} = 0\,;\ \mathrm{Div}\,\vec{D} = 0\ ;\ \ \vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ (3.50)

b. Phương trình điện thế φ_E

Từ phương trình $\mathrm{Rot}\,\vec{E} = 0$, ta có thể đo điện trường dừng trong cả vùng dẫn và điện môi bằng một hàm thế vô hướng φ_E với quan hệ:

$$\vec{E} = -\,\mathrm{Grad}\ \varphi_E \tag{3.51}$$

Ý nghĩa về công và thế năng của φ_E giống trong trường tĩnh điện.

Viết từ hệ phương trình Maxwell điện trường dừng qua hàm thế φ_E ta có phương trình Laplace - Poisson cho điện trường dừng là:

$$\mathrm{DivGrad}\varphi_E = \Delta\varphi_E = 0 \tag{3.52}$$

3.5.2. Từ trường dừng

a. Hệ phương trình Maxwell

$$\begin{cases} \mathrm{Rot}\vec{H} = \vec{J}_d & (1) \\ \mathrm{Div}\vec{B} = 0 & (3) \end{cases} \tag{3.53}$$

Với: $\vec{B} = \mu\vec{H}$

Từ (3.53) ta có nhận xét:

- Từ trường dừng hoàn toàn xác định theo sự phân bố dòng dẫn $\vec{J}_d$. Tức là nó phụ thuộc vào môi trường tương tác. Nếu ở vùng có $\vec{J}_d = 0$, ta có khái niệm từ thế vô hướng φ_M. Ngược lại $\vec{J}_d \neq 0$ thì từ trường dừng có tính chất xoáy khi đó không thể sử dụng được biến trạng thái φ_M.

- Xét khi từ trường dừng có tính chất thế ($\vec{J}_d = 0$). Ta có thể đo từ trường trong vùng này bằng từ thế vô hướng thoả mãn phương trình Laplace - Poisson.

$$\Delta\varphi_M = 0 \quad \text{với:}\ \ \vec{H} = -\,\mathrm{Grad}\ \varphi_M \tag{3.54}$$

b. Khái niệm từ thế vector $\vec{A}_M$

Ở vùng có dòng dẫn $\vec{J}_d \neq 0$, do Rot$\vec{H}$ = $\vec{J}_d \neq 0$ nên không dùng từ thế vô hướng được mà cần phải dùng biến khác.

Ta thấy ở mọi vùng từ cảm $\vec{B}$ luôn luôn chảy liên tục, tức: Div$\vec{B}$ = 0. So sánh biểu thức này với biểu thức: DivRot$\vec{A}_M$ = 0, suy ra có thể đo từ trường bằng hàm vector $\vec{A}_M$, gọi là từ thế vector sao cho:

$$\vec{B} = \mathrm{Rot}\,\vec{A}_M \tag{3.55}$$

Đối với từ trường dừng:

$$\mathrm{DivGrad}\,\vec{A}_M = \Delta\,\vec{A}_M = -\,\mu\,\vec{J}_d \tag{3.56}$$

Vậy có thể giải phương trình (3.56) tìm $\vec{A}_M$ rồi suy ra $\vec{B}$, $\vec{H}$ của từ trường dừng.

3.6. TRƯỜNG ĐIỆN TỪ BIẾN THIÊN - KHÁI NIỆM HÀM THẾ VECTOR $\vec{A}$

3.6.1. Hệ phương trình Maxwell

Trường điện từ biến thiên mang đầy đủ các tính chất của một trường điện từ tổng quát nên ta có hệ phương trình Maxwell mô tả trường điện từ biến thiên như sau:

$$\begin{cases} \mathrm{Rot}\vec{H} = \vec{J}_d + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} & (1) \\ \mathrm{Rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (2) \\ \mathrm{Div}\vec{B} = 0 & (3) \\ \mathrm{Div}\vec{D} = \rho_{td} & (4) \end{cases} \tag{3.57}$$

Với: $\vec{B} = \mu\vec{H}$; $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$; $\vec{J}_d = \gamma\vec{E}$

Từ hệ phương trình trên ta thấy, các biến trạng thái của Trường điện từ biến thiên $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}, \vec{J}$ luôn gắn bó khăng khít nhau không tách rời nhau.

Nghĩa là ở đâu có trường điện từ biến thiên thì ở đó có thể sinh ra từ trường biến thiên và ngược lại.

Vì: Rot $\vec{E} \neq 0$; Rot $\vec{H} \neq 0$ nên điện trường biến thiên và từ trường biến thiên đều có tính chất xoáy, do đó không thể sử dụng được các hàm thế vô hướng φ được mà phải sử dụng khái niệm khác gọi là các hàm thế vector $\vec{A}$ gồm điện thế vector và từ thế vector ($\vec{A}_E$, $\vec{A}_M$).

Về mặt nguyên tắc ta có thể sử dụng một trong 2 khái niệm trên, song do ta đã có khái niệm về từ thế vector $\vec{A}_M$ ở trên, vì vậy ta chỉ cần sử dụng từ thế vector $\vec{A}_M$ (để tiện thường chỉ ký hiệu là $\vec{A}$) để mô tả trường điện từ biến thiên.

3.6.2. Khái niệm từ thế vector $\vec{A}$, biểu diễn $\vec{E}$ qua từ thế vector $\vec{A}$

Như trên ta có: $\vec{B} = \text{Rot}\,\vec{A}$

Như vậy từ $\vec{A}$ có thể tìm được $\vec{B}$, còn cần phải tìm $\vec{E}$. Từ phương trình Maxwell 2:

$$\text{Rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\text{Rot}\vec{A} = -\text{Rot}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

hoặc: $$\text{Rot}(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0 \quad (3.58)$$

Chú ý rằng hằng đẳng thức RotGrad = 0, thêm vào biểu thức (3.58)

$$\text{Rot}(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \text{Grad}\varphi_E) = 0 \quad (3.59)$$

Suy ra: $$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \text{Grad}\varphi_E = F(t) \quad (3.60)$$

Trong đó: F(t) là một hàm vector tuỳ ý chỉ phụ thuộc thời gian và thoả mãn điều kiện Rot F(t) = 0. Để tìm F(t) ta lập luận rằng trước khi có Trường trong không gian: $\vec{E} = 0$; $\vec{B} = 0$; φ = 0; $\vec{A} = 0$ do đó F(t) = 0. Vậy:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{Grad}\varphi_E \quad (3.61)$$

Nếu khắp nơi trong không gian không có phân bố điện tích tự do (như khi xét Trường điện từ biến thiên trong vật dẫn, trong máy điện,...) biểu thức trên sẽ không có thành phần - Grad φ_E . Khi đó:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{3.61}$$

3.6.3. Phương trình truyền song D'Alembert đối với từ thế vectơ $\vec{A}$

Từ hệ phương trình Maxwell, ta có:

$$\begin{cases} \text{Rot}\,\vec{H} = \vec{J}_d + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} & & \text{(a)} \\ \text{Rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{đồng nhất với } \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad}\varphi & \text{(b)} \\ \text{Div}\,\vec{B} = 0 & \text{đồng nhất với } \vec{B} = \text{rot}\,\vec{A} & \text{(c)} \\ \text{Div}\,\vec{D} = \varepsilon\,\text{Div}\,\vec{E} = \rho_{td} & & \text{(d)} \end{cases}$$

Thay (b) (c) vào (a) ta có:

$$\text{rot}\vec{H} = \frac{1}{\mu}\text{rot}\vec{B} = \frac{1}{\mu}\,\text{RotRot}\,\vec{A} = \vec{J}_d + \varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J}_d - \varepsilon\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \varepsilon\,\text{Grad}\frac{\partial \varphi_E}{\partial t}$$

hoặc: $\text{RotRot}\,\vec{A} = \mu\vec{J}_d - \varepsilon\mu\dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \varepsilon\mu\,\text{Grad}\dfrac{\partial \varphi_E}{\partial t}$

Vì có công thức: $\text{RotRot}\,\vec{A} = \text{GradDiv}\,\vec{A} - \text{DivGrad}\,\vec{A}$

Nên có: $\text{Grad}(\text{Div}\,\vec{A} + \mu\varepsilon\dfrac{\partial \varphi_E}{\partial t}) - \text{DivGrad}\,\vec{A} + \mu\varepsilon\dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu\vec{J}_d$

Ta chọn: $\text{Div}\,\vec{A} + \mu\varepsilon\dfrac{\partial \varphi_E}{\partial t} = 0$ hoặc $\text{Div}\,\vec{A} = -\mu\varepsilon\dfrac{\partial \varphi_E}{\partial t}$ (3.63)

Điều kiện (3.63) gọi là điều kiện liên tục của Lorentz, nó phản ánh tính liên tục của dòng điện toàn phần. Cuối cùng ta được phương trình cho thế vector $\vec{A}$ của Trường điện từ biến thiên:

$$\text{DivGrad}\,\vec{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \Delta\vec{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \begin{cases} -\mu\vec{J}_d & \textit{trong vật dẫn} \\ 0 & \textit{trong điện môi} \end{cases} \qquad (3.64)$$

Trường hợp toàn không gian không có điện tích tự do, ta không có khái niệm φ_E. Khi đó:

$$\vec{J}_d = \gamma\vec{E} = -\gamma\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

Ta có dạng: $$\Delta\vec{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \mu\gamma\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

Ta có dạng: $$\Delta\vec{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \begin{cases} \mu\gamma\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} & \text{trong vật dẫn} \\ 0 & \text{trong điện môi} \end{cases}$$

Để thuận tiện ta ký hiệu toán tử D'Alembert $\Box^2\vec{A} = \Delta\vec{A} - \mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$. Vậy ta viết được:

$$\Box^2\vec{A} = \begin{cases} -\mu\vec{J}_d & \text{trong vật dẫn} \\ 0 & \text{trong điện môi} \end{cases}$$

Hoặc $$\Box^2\vec{A} = \begin{cases} \mu\gamma\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} & \text{trong vật dẫn} \\ 0 & \text{trong điện môi} \end{cases} \qquad (3.65)$$

Đây được gọi là phương trình truyền sóng của Trường điện từ biến thiên. Riêng Trường điện từ dừng ($\dfrac{\partial}{\partial t} = 0$) phương trình cho từ thế vector $\vec{A}$ sẽ có dạng phương trình Laplace - Poisson:

$$\Box^2\vec{A} = \Delta\vec{A}_B = -\mu\vec{J}_d \qquad (3.66)$$

Ví dụ: Trong hệ toạ độ Descartes đã tìm được phân bố từ thế vector $\vec{A}$

$\vec{A} = \vec{e}_x A_m\cos(\omega t - \beta z)$. Hãy tìm $\vec{E}$, $\vec{B}$?

Giải: Ta có: $\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{e}_x\,\omega A_m \cos(\omega t - \beta z + \dfrac{\pi}{2})$

Tiếp tục: $\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A} = \vec{e}_y.\dfrac{\partial \vec{A}_x}{\partial z} = \vec{e}_y\,\beta A_m \cos(\omega t - \beta z + \dfrac{\pi}{2})$

Đây là biểu thức của một Trường điện từ phẳng lan truyền theo chiều z.

3.7. HIỆN TƯỢNG LAN TRUYỀN TRƯỜNG ĐIỆN TỪ BIẾN THIÊN

Trường điện từ biến thiên có khả năng lan truyền trong một hệ qui chiếu với vận tốc tuỳ thuộc môi trường chất và được xác định theo biểu thức:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{3.67}$$

Từ phương trình D'Alembert ta có:

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J}_d \tag{3.68}$$

Đây là một phương trình vi phân riêng trong không gian và thời gian, nghiệm $\vec{A}$ của nó lan truyền trong không gian với vận tốc $\vec{v}$. Bình phương vận tốc này bằng nghịch đảo hệ số của số hạng có đạo hàm cấp 2 theo thời gian, tức ta có $\vec{v}$ theo quan hệ (3.67). Điều này nói lên rằng từ thế vector $\vec{A}$ và các lượng $\vec{E}$, $\vec{B}$, năng lượng và tín hiệu của Trường điện từ cũng lan truyền trong điện môi với vận tốc hữu hạn $\vec{v}$, vế phải của phương trình (3.68) coi là nguồn kích thích đến mỗi điểm trong không gian. Điều đó phản ánh phương thức tương tác tiếp cận và địa phương của Trường điện từ.

Mặt khác trong không gian nào đó nếu có điện tích biến thiên, gây nên điện thế φ_E, thì thế cũng lan truyền với vận tốc $\vec{v}$, do đó quá trình viết cho điện thế cũng có dạng:

$$\square^2\varphi = \begin{cases} -\dfrac{\rho_{td}}{\varepsilon} & \text{vùng có phân bố điện tích tự do} \\ 0 & \text{vùng không có phân bố điện tích tự do} \end{cases}$$

Sự lan truyền $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}, \vec{A}$, φ cùng với năng lượng điện từ phân bố trong không gian cũng được lan truyền cùng với một vận tốc, nghĩa là Trường điện từ biến thiên có khả năng truyền năng lượng và tín hiệu trong điện môi với vận tốc $\vec{v}$ để đưa đến tích trữ vào môi trường hoặc bù vào tiêu tán trong các môi trường dẫn.

Thực tế kỹ thuật truyền thanh, truyền hình, viễn thông, thông tin liên lạc vũ trụ, laze,... đã chứng minh cụ thể điều đó. Các kết quả đo lường chính xác cho thấy trong mọi hệ qui chiếu quán tính đặt trong chân không có μ_o, ε_o (cả không khí) đều có:

$$c \approx 3.10^8 \text{ m/s}$$

3.8. DÒNG NĂNG LƯỢNG ĐIỆN TỪ VÀ VECTOR POYNTINH

Qua các phân tích trên ta thấy trường và năng lượng điện từ có khả năng lan truyền trong không gian. Vì vậy nó hình thành một dòng năng lượng điện từ chảy trong không gian. Dòng này toả ra từ các nguồn điện từ, đưa tích vào không gian điện môi, từ môi xung quanh hoặc chảy ngược từ môi trường xung quanh trở về nguồn, đồng thời dòng này chảy vào vật dẫn biến thành nhiệt năng. Dựa vào suy luận trên, Poyntinh đã dẫn ra khái niệm vector mật độ dòng công suất điện từ $\vec{\wp}$ gọi là vector Poyntinh. Nó bằng công suất điện từ chảy qua một đơn vị diện tích đặt thẳng góc với dòng chảy. Ta hãy tìm biểu thức của $\vec{\wp}$:

$$\vec{\wp} = \vec{E} \wedge \vec{H} \qquad (3.68)$$

Vậy vector dòng công suất điện từ $\vec{\wp}$ ở mỗi điểm bằng tích có hướng của $\vec{E}$ và $\vec{H}$ và có độ lớn: $|\vec{\wp}| = E.H\sin(\vec{E}, \vec{H})$.

CÂU HỎI ÔN TẬP CHƯƠNG 3

3. 1. Nêu ý nghĩa của hệ phương trình Maxwell?

3.2. Bài toán Trường có những sơ kiện nào? Khi nào chỉ tồn tại điều kiện bờ?

3. 3. Dẫn ra các luật Kirchhoff 1 và 2?

3. 4. Dẫn ra phương trình Maxwell 1, 2, 3, 4?

3.5. So sánh sự giống và khác nhau giữa: Điện trường tĩnh và Điện trường dừng, Điện trường tĩnh và Điện trường biến thiên, Điện trường biến thiên và Điện trường dừng, Từ trường tĩnh và Từ trường dừng, Từ trường tĩnh và Từ trường biến thiên, Từ trường biến thiên và Từ trường dừng**?**

3.6. Khi cho một Từ trường dừng xuyên qua một vòng dây khép kín thì có hiện tượng gì xảy ra? Tại sao?

3.7. Trường điện từ lan truyền trong không gian như thế nào?

3.8. Cho một điện trường biến thiên có:

$$\vec{E} = \vec{e_x}100\sin(10t - 5xy) + \vec{e_y}\sin(x^2y) + \vec{e_z}(x^2 + z^2)\ \text{V/m}$$

1. Hãy tìm từ trường $\vec{B}$ gắn với điện trường đó?

2. Hãy tìm sự phân bố điện tích tự do trong không gian có ε = 0,5 F/m?

3.9. Cho một điện trường biến thiên: $\vec{E} = \vec{e}_\alpha 50\sin(100t - 10z)$ (V/m) tác động vào môi trường chất có γ = 0,1 S/m và μ = 0,5 H/m.

Hãy tìm vector dịch chuyển điện (cho biết trong mọi biểu thức tính toán ta coi các thành phần hằng số tích phân F(r,α,z) = 0)?

3.10. Cho một điện trường biến thiên có: $\vec{E} = \vec{e_x}100\sin(10t - 30y)$ V/m

Biết điện trường trên tác động vào môi trường: ε = 0,5 F/m và μ = 0,5 H/m.

1. Hãy tìm sự phân bố điện tích tự do trong không gian?

2. Hãy tìm vector mật độ dòng điện dẫn (cho biết trong mọi biểu thức tính toán ta coi các thành phần hằng số tích phân F(x,y,z) = 0)?

3.11. Trong hệ trục toạ độ trụ vector cường độ từ trường có dạng:

$$\vec{H} = \vec{e_\alpha}100(10^r + r^2) + \vec{e_r}100\alpha^3\ \text{A/m}$$

1. Tính vectormật độ dòng tổng ?

2. Hỏi từ trường có tính chất gì?

3.12. Một điện trường có hàm thế vô hướng:

$$\varphi_E = 5x^2 + 1/zx + \sqrt{z}\ (V)$$

1. Hãy tìm sự phân bố cường độ điện trường trong không gian?

2. Điện trường đó có tính chất gì?

3.13. Một từ trường có hàm thế vô hướng:

$$\varphi_M = 5z^2 + 1/yz + \sqrt{z}\ (A)$$

1. Hãy tìm sự phân bố cường độ từ trường trong không gian?

2. Hỏi từ trường có tính chất gì?

3.14. Cho trường điện từ biến thiên có: $\vec{A} = \vec{e_\alpha} 10\sin(t + 5r)$ Vs/m

Hãy tìm vector cường độ từ cảm?

3.15. Cho trường điện từ có hàm từ thế véctơ $\vec{A} = \vec{e_x} 100\sin(10t - 2y)$ Vs/m và hàm điện thế vô hướng $\varphi_E = 10\sin y\ (V)$. Hãy tìm vector cường độ điện trường của trường điện từ?

Chương 4

CÁC KHÁI NIỆM VÀ LUẬT CƠ BẢN VỀ ĐIỆN TRƯỜNG TĨNH

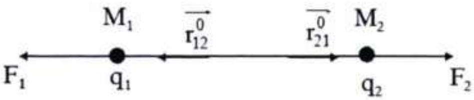
Chương này trình bày các luật cơ bản của Điện trường tĩnh; một số hình thái phân bố điện tích thường gặp của Điện trường tĩnh; hàm thế ứng với một điện tích điểm; bài toán bờ và điều kiện bờ của Điện trường tĩnh; phân bố hình học của Điện trường tĩnh.

4.1. CÁC LUẬT CƠ BẢN CỦA ĐIỆN TRƯỜNG TĨNH

Điện trường tĩnh là một thể hiện của Trường điện từ tĩnh với những môi trường mang điện tĩnh tại trong hệ qui chiếu. Đối với Điện trường tĩnh chỉ có những thể hiện về mặt điện mà không kèm theo thể hiện về từ. Điện trường tĩnh có tính chất thế. Điện trường tĩnh biểu diễn bởi sự phân bố không gian của các vector $\overline{E}$, $\overline{D}$ và φ. Quy luật vận động Điện trường tĩnh được mô tả bởi 3 luật cơ bản là: luật Coulomb; luật Gauss; luật bảo toàn điện tích.

4.1.1. Luật Coulomb

Giả sử có hai điện tích điểm đứng yên ở hai điểm M_1, M_2 trong một hệ qui chiếu quán tính đặt trong chân không mà ta xét như Hình 4.1 thì theo luật Coulomb chúng sẽ tác dụng lực tĩnh điện với nhau (điện tích nọ chịu tác dụng lực điện trường của điện tích kia) theo luật:



Hình 4.1: Tác dụng lực điện từ theo luật Coulomb

$$\begin{cases} \overline{F_1} = q_1 \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}^2}\overline{r_{12}^0} = q_1 \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}^3}\overline{r_{12}} \\ \overline{F_2} = q_1 \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}^2}\overline{r_{21}^0} = q_1 \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}^3}\overline{r_{21}} \end{cases} \qquad (4.1)$$

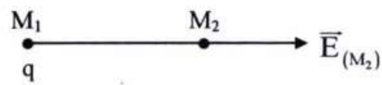
Trong đó: $\overrightarrow{r_{12}^{0}}$; $\overrightarrow{r_{21}^{0}}$ là các vector chỉ phương đơn vị.

$\overrightarrow{r_{12}} = r_{12}\overrightarrow{r_{12}^{0}}$; $\overrightarrow{r_{21}} = r_{21}\overrightarrow{r_{21}^{0}}$ là các vector chỉ phương.

Từ Hình 4.1 ta thấy $r_{12} = r_{21} = \overline{M_1M_2}$, suy ra $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ bằng nhau nhưng ngược chiều và có tính chất đối xứng xuyên tâm.

Từ luật Coulomb suy ra các hệ luận sau:

+ **Hệ luận 1:** Trong chân không, cường độ điện trường tại điểm M_2 ứng với một điện tích điểm q đặt đứng yên tại điểm M_1 có giá trị:



$$\vec{E}_{(M_2)} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r_{21}^2}\overrightarrow{r_{21}^{o}}$$

Hoặc tổng quát:

$$\vec{E}_{(M)} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\overrightarrow{r^{o}} \tag{4.2}$$

+ **Hệ luận 2:** Trong chân không và môi trường tuyến tính thì cường độ điện trường tại một điểm M do n điện tích điểm q_1, q_2, ... q_n tác động bằng xếp chồng các cường độ điện trường do từng điện tích điểm gây ra:

$$\vec{E}_{(M)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_o r_i^2}\overrightarrow{r_i^{o}} \tag{4.3}$$

Đối với trường phân bố điện tích khối có mật độ phân bố điện tích trên một đơn vị thể tích là ρ thì:

$$q_{\Sigma} = \int_V \rho dV \text{ suy ra } \vec{E}_{(M)} = \frac{\int_V \rho dV}{4\pi\varepsilon_o r^2}\overrightarrow{r^{o}} \tag{4.4}$$

Với $\vec{r}^{\,o}$ là vector đơn vị chỉ phương của điểm M so với điểm đặt điện tích khối ρdV.

+ **Hệ luận 3:** Điện trường tĩnh có tính chất thế và có thể mô tả bởi phương trình Maxwell 2, dạng $\mathrm{Rot}\,\vec{E} = 0$.

4.1.2. Luật Gauss

a. Phát biểu 1

Thông lượng của vector cường độ điện trường $\vec{E}$ chảy trong một mặt kín S bất kỳ đặt trong môi trường chân không, bằng tổng các điện tích (tự do và ràng buộc) nằm trong mặt S đó chia cho ε_0.

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{q_\Sigma}{\varepsilon_o} \quad (4.5)$$

b. Phát biểu 2

Thông lượng của vector dịch chuyển điện $\vec{D}$ chảy trong một mặt kín S bất kỳ đặt trong môi trường chân không, bằng tổng các điện tích tự do q_{td} nằm trong mặt kín S đó:

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = \oint_S \varepsilon\vec{E}d\vec{S} = \varepsilon_r q_\Sigma = q_{td} = \int_V \rho_{td}dV \quad (4.6)$$

Dạng (4.6) hay dùng hơn (4.5) vì $\vec{D}$ liên hệ trực tiếp với các điện tích tự do nên dễ xác định hơn.

Luật Gauss dạng tích phân tiện dùng khi trường đối xứng qua trục hoặc đối xứng xuyên tâm. Khi không có điều kiện này, ta dùng dạng vi phân, muốn vậy ta coi mặt S đủ nhỏ quanh điểm xét, khi đó từ (4.6) ta có:

$$\oint_{\Delta S} \vec{D}d\vec{S} = \int_{\Delta S} \rho_{td}dV \simeq \rho_{td}\Delta V$$

Chia hai vế cho ΔV; theo định nghĩa phép Div, có:

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V}\oint Dds = \mathrm{Div}\,\vec{D} = \rho_{td} \quad (4.7)$$

Tương tự từ (4.5) ta rút ra: $\mathrm{Div}\,\vec{E} = \dfrac{\rho_\Sigma}{\varepsilon_o}$ (4.8)

Biểu thức (4.7) chính là phương trình Maxwell 4

4.1.3. Luật bảo toàn điện tích

Điện tích của một hệ cô lập luôn luôn được bảo toàn không đổi (Hệ cô lập là hệ không có trao đổi chất hay năng lượng với bên ngoài).

Hệ luận: Nếu trong một hệ cô lập vốn không có Trường và điện tích, nay thành lập một điện trường thì tổng các điện tích của hệ phải triệt tiêu.

Ví dụ: Khi đặt lên tụ một điện áp thì điện tích ở hai bản cực của tụ phải bằng nhau và trái dấu nhau. Cũng vậy nếu trong không gian xuất hiện một số điện tích đơn độc có điện lượng +q thì trong không gian (kể cả xa vô cùng) cũng phải xuất hiện điện tích - q.

4.2. MỘT SỐ HÌNH THÁI PHÂN BỐ ĐIỆN TÍCH CỦA ĐIỆN TRƯỜNG

Phân bố Trường gắn liền với phân bố môi trường mang điện. Vì vậy để xét Trường trước hết ta phải xét phân bố điện tích và các mô tả toán học của chúng.

4.2.1. Các hình thái phân bố điện tích thường gặp

a. Phân bố điện tích khối

Là dạng phân bố đơn giản nhất trong không gian với mật độ khối ρ là hữu hạn.

$$\rho = \frac{dq}{dv} \tag{4.9}$$

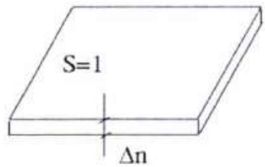
Hiểu là mật độ trung bình hoá địa phương của điện tích các hạt coi là dàn đều và liên tục trong miền lân cận các hạt. Ví dụ phân bố điện tích trong các đèn điện tử...

b. Phân bố điện tích mặt

Trong Trường tĩnh điện, khi tích điện lên vật dẫn, điện tích sẽ phân bố trên lớp mặt ngoài, thường là rải ra trên mặt vật dẫn với mật độ mặt hữu hạn.

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \tag{4.10}$$

Nếu quan niệm điện tích này phân bố trên một lớp mỏng Δn (cỡ kích thước điện tử 10^{-15}m) như Hình 4.2, với mật độ khối ρ nào đó, sao cho trong thể tích dày Δn, đáy S = 1 (tức $\Delta V = \Delta n.1$) chứa một lượng điện tích σ tức:



Hình 4.2: Phân bố điện tích mặt

$\rho\Delta n.1 = \sigma$ thì mật độ đó khá lớn, bằng:

$$\rho = \begin{cases} \sigma / \Delta n \text{ trong lop mong} \\ 0 \quad \text{ngoai lop mong} \end{cases} \tag{4.11}$$

Lý tưởng hoá coi $\Delta n \to dn$, ta có khái niệm mật độ điện tích mặt ứng với khái niệm này ta có khái niệm phân bố điện tích khối tương ứng. Mật độ này có cỡ vô cùng lớn phân bố trong lớp vô cùng mỏng dn một cách nào đó sao cho tổng lượng lấy theo chiều pháp tuyến n, qui về một đơn vị mặt S = 1 (tức $dV = dn.1$) vừa bằng σ.

$$\rho_{(n)} = \text{ sao cho } \int \rho_{(n)} dn = \sigma$$

Cách phân bố như vậy gọi là phân bố Dirac $\delta(n)$ với định nghĩa:

$$\delta_{(n)} = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ \infty & n = 0 \end{cases} \quad \text{sao cho } \int \delta_{(n)} dn = 1$$

Dùng ký hiệu phân bố Dirac $\delta(n)$ vào biểu thức của ρ ta có:

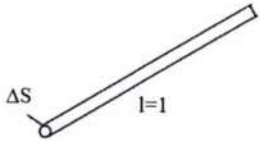
$$\rho(n) = \sigma\delta(n); \text{ Với } \int \rho dv = \int \rho(n).1.dn = \int \sigma.\delta(n) dn = \sigma \tag{4.12}$$

c. Phân bố điện tích đường

Trong thực tế thường gặp các dây dẫn mang điện với mật độ điện tích lấy trên mỗi đơn vị dài là:

$$\tau = \frac{dq}{dl} \tag{4.13}$$

Xét một đoạn dây có tiết diện ΔS và có độ dài $l = 1$ như Hình 4.3:



Hình 4.3: Phân bố điện tích đường

Nếu bán kính khá nhỏ, ta có phân bố điện tích khối tương đương ρ rất lớn trong lân cận một trục cỡ:

$$\rho = \begin{cases} \tau / \Delta S \text{ trong tiet dien day} \\ 0 \quad \text{ngoai tiet dien day} \end{cases} ; \qquad \Delta S \text{ là tiết diện dây}$$

Cho $\Delta S \rightarrow dS$ thì:

$$\rho_{(S)} = \begin{cases} 0 & S \neq 0 \\ \infty & S = 0 \end{cases} \qquad \text{sao cho } \int \rho_{(s)} dS = \tau$$

Cách phân bố như vậy gọi là phân bố Dirac δ(S) với định nghĩa:

$$\delta_{(S)} = \begin{cases} 0 & S \neq 0 \\ \infty & S = 0 \end{cases} \qquad \text{sao cho } \int \delta_{(s)} dS = 1$$

Dùng ký hiệu phân bố Dirac δ(S) vào biểu thức của ρ ta có:

$$\rho(S) = \tau .\delta(S) \text{ với } \int \rho dv = \int \tau .\delta(S) dS = \tau \qquad (4.14)$$

d. Phân bố điện tích điểm

Khi có vật rất bé so với khoảng cách xét, mang điện tích q, điện tích khối tương ứng bằng:

$$\rho = \begin{cases} q / \Delta V \text{ trong V} \\ 0 \quad \text{ngoai V} \end{cases} \qquad (4.15)$$

Lý tưởng hoá coi $\Delta V \rightarrow dV$, thì ta có phân bố điện tích khối tương đương:

$$\rho_{(V)} = \begin{cases} 0 & V \neq 0 \\ \infty & V = 0 \end{cases} \qquad \text{sao cho } \int \rho_{(V)} dV = q$$

Khi đó người ta gọi phân bố này là phân bố Đirac theo hình cầu:

$$\delta_{(V)} = \begin{cases} 0 & V \neq 0 \\ \infty & V = 0 \end{cases} \qquad \text{sao cho} \int \delta_{(V)} dV = 1$$

Ta có phân bố Dirac theo hình cầu δ(V) với:

$$\rho = q.\,\delta(V) \text{ với } \int \rho dV = \int q.\delta(V)\, dv = q \qquad (4.16)$$

e. Phân bố lưỡng cực

Trong môi trường điện môi, khi có một điện trường, nó sẽ tiếp năng lượng và tách những cặp điện tích ra xa nhau, hình thành những lưỡng cực đặc trưng bởi những moment điện hữu hạn $p = q.\Delta l$, đó là những cặp điện tích điểm gần nhau.

Trong tính toán để thuận tiện ta lý tưởng hoá coi $\Delta l \to dl$, nhưng vẫn bảo toàn lượng đặc trưng p không đổi. Muốn vậy phải đưa ra điện tích điểm tương đương $\pm$ Q của lưỡng cực và phân bố điện tích khối tương đương mới. Để p bảo toàn và hữu hạn, điện tích điểm ± Q phải cỡ vô cùng lớn, dạng phân bố Dirac theo không gian một chiều pδ(l) sao cho tổng lượng của nó theo chiều l bằng mô men p

$$Q = p.\,\delta(l) \text{ để cho} \int Qdl = \int p\delta(l)dl = p \qquad (4.17)$$

Ứng với cặp $\pm$ Q, mật độ điện tích khối ρ có cỡ VCL bậc cao hơn (4.17) sao cho tổng lượng mỗi điện tích điểm bằng $Q = p.\delta(l)$:

$$\rho_{(V)} = \begin{cases} 0 & V \neq 0 \\ \infty & V = 0 \end{cases} \qquad \text{Sao cho} \int \rho dV = \int \rho dSdl = p\,\delta(l) \qquad (4.18)$$

Mật độ khối ấy có dq phân bố Dirac hạng 2 theo thể tích, ký hiệu δ'(V) với định nghĩa:

$$\delta'(V) = \begin{cases} \infty \text{ ở } V = 0 \\ 0 \text{ ở } V \neq 0 \end{cases} \qquad \text{với} \int \delta'(v)dV = \delta(l) \qquad (4.19)$$

Vậy: $$\rho = p.\delta'(V) \text{ và} \int \rho dV = \int p\delta'(V)dV = p\delta(l) \qquad (4.20)$$

4.2.2. Phân bố điện tích trong vật dẫn và điện môi

Như vật lý đã nêu, Điện trường tĩnh triệt tiêu bên trong các vật dẫn và điện tích tự do tĩnh chỉ phân bố trên mặt ngoài vật dẫn. Đó là vì trong vật dẫn có các điện tử tự do. Giả sử trong vật dẫn có điện trường, e tự do sẽ nhận năng lượng chuyển động ngược chiều điện trường cho đến bờ vật dẫn, dừng lại và tạo nên thành phần Trường ngược lại. Chúng cứ tiếp tục phân bố lại trên bề mặt, cho đến khi trong vật dẫn không còn Trường, do đó không còn lực di chuyển nữa. Vậy ở vật dẫn đặt trong Trường tĩnh chỉ có phân bố điện tích mặt σ(s) trên mặt ngoài.

Đối với điện môi dưới tác dụng của điện trường các phần tử trong mạng phân tử hoặc tinh thể sẽ phân cực, tức các hạt mang điện bị dịch chuyển hoặc xoay hướng lại quanh vị trí cân bằng. Kết quả trong điện môi có phân bố lưỡng cực.

Phân bố lưỡng cực có thể như sau:

- Trường hợp lượng điện tích âm bằng lượng điện tích dương, suy ra mật độ điện tích khối ràng buộc trung bình ρ_b bằng zero.

- Cũng có thể hai lượng đó khác không trong thể tích nhỏ, nên xuất hiện phân bố điện tích khối ràng buộc với mật độ nào đó liên quan đến E, P hoặc tính chất điện môi.

Ta có: $\mathrm{Div}\varepsilon_0\vec{E} = \mathrm{Div}(\vec{D}-\vec{P}) = \rho_\Sigma = \rho_{td} + \rho_b$

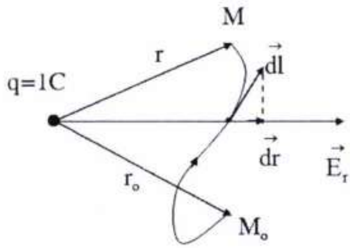
Từ đó rút ra: $-\mathrm{Div}\vec{P} = \rho_b$

Kết quả sự phân cực là bề mặt chất điện môi sẽ tận cùng bằng một lớp điện tích ràng buộc dương hoặc âm. Chỗ giáp hai điện môi tạo nên lớp kép các điện tích mặt trái dấu không đối xứng.

4.3. HÀM THẾ ỨNG VỚI MỘT ĐIỆN TÍCH ĐIỂM - HÀM GREEN

Đây là một hàm cơ bản trong lý thuyết phương trình Laplace - Poisson của điện trường.

Giả sử có một điện tích điểm q = 1C, mật độ ρ của nó là phân bố Đirăc theo thể tích ρ = δ(v) với tổng lượng 1C. Ta tìm hàm thế ứng với phân bố ấy.



Hình 4.4: Sự hình thành điện thế tại điểm M so với mốc M_0 do điện tích q = 1C gây ra

Ta có thể xác định điện thế tại điểm M so với mỗi M_o bằng:

$$\varphi(M) = -\int_{M_o}^{M} \vec{E}d\vec{l}$$

Đặt gốc hệ quy chiếu ở vị trí điện tích điểm, chú ý đến tính chất đối xứng xuyên tân $\vec{E} = \vec{E}_r$ như Hình 4.4.

Ta có: $\varphi_M = -\int_{M_o}^{M} \vec{E}d\vec{l} = -\int_{M_o}^{M} \vec{E_r}d\vec{l} = -\int_{M_o}^{M} E_r dl\cos\theta = -\int_{r_o}^{r} E_r dr = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_{r_o}^{r}\frac{1}{r^2}dr$

Trong đó: θ là góc kẹp giữa $\vec{E}_r$ và dl

Vậy $\varphi(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_o})$

Nếu chọn mốc $\varphi_o = 0$ ở xa vô cùng ($r_o \to \infty$) thì hàm thế ứng với một điện tích điểm đơn vị sẽ có dạng rất đơn giản.

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon r} \qquad (4.21)$$

Chú ý:

- Việc chọn mốc thế ở xa vô cùng có ý nghĩa vật lý là trong môi trường đồng nhất rộng vô hạn, ở đủ xa cường độ trường toả ra đối xứng xuyên tâm từ vị trí điện tích điểm và tận cùng ở xa vô cùng.

- Hàm thế (4.21) chính là nghiệm phương trình Laplace - Poisson ứng với phân bố điện tích khối Dirac ρ(V) với điều kiện bờ ở xa vô cùng triệt tiêu.

Hàm trên, có điều kiện triệt tiêu trên bờ S và $\varphi(S) = 0$, với kích thích là phân bố Dirac đơn vị, gọi là hàm Green của bài toán. Với bờ ở xa vô cùng gọi là hàm Green tối giản, ký hiệu là G(x, y, z). Nó được ứng dụng rộng rãi để giải các bài toán có bờ chọn ở xa vô cùng.

Thật vậy trong môi trường tuyến tính, có phân bố điện tích khối $\rho(x, y, z)$ thì mỗi nguyên tố $\rho(x, y, z)dV$ sẽ gây nên ở một điểm M (u, v, w) cách nguyên tố một quãng $r = \sqrt{(x-u)^2 + (y-u)^2 + (z-w)^2}$ phân lượng điện thế là:

$$d\varphi = \frac{\rho dV}{4\pi\varepsilon r} = G(r)\rho dV$$

Và thế tương ứng với toàn bộ phân bố điện tích là:

$$\varphi = \int_V d\varphi = \int_V G(r)\rho dV$$

Nếu ngoài phân bố điện tích khối $\rho(V)$ còn có phân bố điện tích mặt $\sigma(S)$ trên mặt S và đường $\tau(l)$ trên đường L thì điện thế được xác định:

$$\varphi = \int_V G(r)\rho(V)dV + \int_S G(r)\sigma(s)dS + \int_L G(r)\tau(l)dl$$

- Hàm Grin có nhược điểm là chỉ tiện dùng khi các thể tích V, diện tích S, đường L có dạng đơn giản, khi chúng có dạng phức tạp, việc tính tích phân khó khăn.

4.4. BÀI TOÁN BỜ VÀ ĐIỀU KIỆN BỜ CỦA ĐIỆN TRƯỜNG TĨNH

4.4.1. Phương trình Laplace - Poisson và điều kiện bờ

Điện trường tĩnh được mô tả bởi phương trình Laplace - Poisson, nói lên qua hệ giữa phân bố của Trường và chất ở mỗi điểm:

$$\Delta\varphi = \frac{-\rho_{td}}{\varepsilon} \tag{4.22}$$

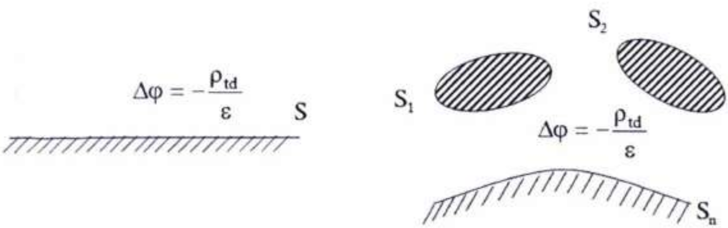
Xét trong hệ trục tọa độ đề các, phương trình nêu lên mối quan hệ giữa $\varphi(x,y,z)$ và $\rho_{td}(x,y,z)$ đây là mối quan hệ giữa trường và chất ở mỗi điểm.

Do Điện trường tĩnh không biến thiên theo thời gian, nên nghiệm bài toán chỉ còn phụ thuộc vào phân bố $\varphi(S)$ trên bờ S bao miền xác định V của bài toán.

Giải bài phương trình (4.22), ta thấy đây là phương trình vi phân bậc 2 nên sẽ tồn tại vô số nghiệm φ sai khác nhau bởi hàm bậc nhất đối với biến x, y, z. Vì vậy để có nghiệm là duy nhất ta phải dựa vào những điều kiện bờ của bài toán.

4.4.2. Điều kiện bờ Dirichlet và Neumann

Nghiệm của phương trình Laplace - Poisson xác định trong một miền V, giới hạn bởi một bờ đơn liên như trong nửa không gian bên trên mặt phẳng dẫn hoặc đa liên như trong không gian giới hạn bởi (bên ngoài) một số điện cực như Hình 4.5 sẽ tồn tại và duy nhất nghiệm nếu thoả mãn một trong hai loại điều kiện sau:



Hình 4.5: Miền V được giới hạn bở các bờ S

a. Điều kiện bờ Dirichlet

Nghiệm của bài toán sẽ là duy nhất nếu cho biết trước giá trị của điện thế φ trên các bờ S. Nghĩa là cho biết: $\varphi(S_1) = C_1, \dots, \varphi(S_n) = C_n$

Vậy nội dung bài toán bờ với điều kiện Dirichlet là tìm sự phân bố thế $\varphi(x, y, z)$ thoả mãn phương trình (4.22) trong miền V và có giá trị $\varphi(S)$ đã cho trên bờ S. Ví dụ tìm φ trong một môi trường điện môi giữa hai vật dẫn điện cực khi đã cho thế hoặc áp trên các cực.

b. Điều kiện bờ Neumann

Nghiệm của bài toán sẽ là duy nhất nếu cho biết sự phân bố của đạo hàm $\varphi(x, y, z)$ theo chiều pháp tuyến n trên bờ S, tức là $\frac{\partial\varphi(S)}{\partial n} = -E_n(S) = -D_n(S)/\varepsilon$.

Trong đó $E_n(S)$ và $D_n(S)$ là thành phần pháp tuyến trên bờ S, nếu S là bờ dẫn thì $E_n(S) = E(S)$; $D_n(S) = D(S)$.

Vậy nội dung bài toán này là tìm phân bố thế $\varphi(S)$ trong miền V nếu biết thành phần pháp tuyến của Trường trên bờ S là ($E_n(S)$ hoặc $D_n(S)$).

4.4.3. Điều kiện bờ hỗn hợp trên mặt S ngăn cách hai môi trường

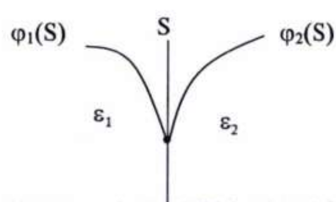
Hai điều kiện bờ Dirichlet và Neumann chỉ áp dụng được cho những bài toán mà toàn bộ miền V được giới hạn bởi các bờ S là đồng nhất ε. Trường hợp khi miền V phân thành những miền nhỏ hơn có những môi trường chất khác nhau. Ví dụ miền vật dẫn và điện môi, hoặc các điện môi khác nhau (ε khác nhau). Đối với mỗi miền vế phải phương trình Laplace - Poisson chứa những hệ số ε_i khác nhau. Nên thực tế là trong mỗi miền ấy có một bài toán bờ riêng và những mặt tiếp giáp hai môi trường hình thành những bờ tự nhiên của các bài toán nhỏ. Vì vậy khi giải bài toán bờ cho toàn bộ miền V, cần biết qui luật chuyển tiếp nghiệm $\varphi(S)$ và các đạo hàm của nghiệm theo phương tiếp tuyến $\frac{\partial\varphi(S)}{\partial\tau}$ và pháp tuyến $\frac{\partial\varphi(S)}{\partial n}$. Đó chính là qui luật chuyển tiếp thế $\varphi(S)$ và các thành phần cường độ Trường $E_n(S)$, $E_\tau(S)$ trên bờ S. Các qui luật này gọi là điều kiện bờ hỗn hợp trên mặt tiếp giáp hai môi trường.

a. Quy luật chuyển tiếp của φ (S)

Nếu bờ S ngăn cách 2 môi trường có bề dày là rất mỏng hoặc là bờ tự nhiên thì nghiệm $\varphi(S)$ chuyển tiếp liên tục trên bờ S. Nghĩa là:

$$\varphi_1(S) = \varphi_2(S) \tag{4.23}$$

Thật vậy khi ta xét hai môi trường điện môi phân cách nhau bởi mặt phẳng S một khoảng Δn rất mỏng như Hình 4.6:



Hình 4.6: Phân bố điện thế tại bờ S rất mỏng ngăn cách 2 môi trường điện môi

Do Δn rất mỏng nên các φ chỉ có đạo hàm cấp 1 là hằng số (cosnt) suy ra các φ là liên tục. Trong trường hợp mặt dẫn là đẳng thế (và đặc biệt bờ S là mặt đất) thì $\varphi_1(S) = \varphi_2(S) = \text{cosnt} = 0$.

b. Quy luật chuyển tiếp đạo hàm cấp một của φ hoặc $E_\tau(S)$ và $E_n(S)$

- Phát biểu 1

Nếu trên bờ S tiếp giáp hai môi trường tồn tại một hàm vector $\vec{F}$ nào đó thoả mãn phương trình Rot$\vec{F}$ hữu hạn, thì thành phần tiếp tuyến của $\vec{F}$ chuyển tiếp liên tục trên bờ S :

$$F_{1\tau}(S) = F_{2\tau}(S) \tag{4.24}$$

Hệ luận: Trường hợp khi trên bờ S tồn tại phân bố điện tích có dạng Đirắc Rot$\vec{F} = A\delta(n)$ thì thành phần tiếp tuyến của $\vec{F}$ sẽ bị gián đoạn loại 1:

$$F_{1\tau} - F_{2\tau} = A\delta(n)dn = A \tag{4.25}$$

- Phát biểu 2

Nếu trên bờ tiếp giáp 2 môi trường có một hàm thế vector $\vec{F}$ nào đó thoả mãn phương trình div$\vec{F}$ bằng hữu hạn thì thành phần pháp tuyến của $\vec{F}$ trên bờ S chuyển tiếp liên tục:

$$F_{1n}(S) = F_{2n}(S) \tag{4.26}$$

Hệ luận: Trường hợp khi trên bờ S tồn tại phân bố điện tích có dạng Đirắc Div$\vec{F} = A\delta(n)$ thì thành phần pháp tuyến của $\vec{F}$ sẽ bị gián đoạn loại 1:

$$F_{2n} - F_{1n} = A \tag{4.27}$$

Nhận xét: Dùng các phát biểu trên để tìm điều kiện bờ hỗn hợp trên các bờ S chuyển tiếp hai môi trường:

- Bờ tiếp giáp vật dẫn - điện môi: Trên bờ S, điện trường thoả mãn các phương trình Maxwell.

$$\text{Rot}\vec{E} = 0; \ \text{Div}\vec{D} = \rho_{td} = \sigma_{td}.\ \delta(n)$$

Vận dụng phát biểu 1 và hệ luận phát biểu 2 ta có:

$$E_{1\tau}(S) = E_{2\tau}(S)\ ;\ D_{2n} - D_{1n} = \sigma_{td} \text{ hay } D_{1n}(S) = D_{2n}(S) - \sigma_{td}$$

Vì ở môi trường 1 là môi trường vật dẫn mà điện trường tĩnh không tồn tại trong vùng vật dẫn nên: $E_{1\tau}(S) = 0$, $D_{1n} = 0$ nên $E_{1\tau}(S) = E_{2\tau}(S) = 0$;$D_{2n}(S) = \sigma_{td}$

- Bờ tiếp giáp điện môi - điện môi: Các phương trình Maxwell:

$$\mathrm{Rot}\,\vec{E} = 0;\ \mathrm{Div}\,\vec{D} = 0$$

Vận dụng phát biểu 1 và phát biểu 2 ta có:

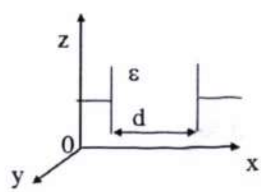
$$E_{1\tau}(S) = E_{2\tau}(S);\ D_{1n}(S) = D_{2n}(S) \text{ hay } \varepsilon_1 E_{1n}(S) = \varepsilon_2 E_{2n}(S)$$

Kết luận:

Phương trình Laplace - Poisson có nghiệm duy nhất trong miền V nếu đã cho các điều kiện bờ Dirichlet, Neumann và điều kiện bờ hỗn hợp chuyển tiếp trên bờ S ngăn cách các môi trường trong miền V.

Ví dụ 1: Một tụ điện phẳng có bề dầy d lấy theo chiều x được đặt vào một điện áp u sao cho: $\varphi(0) = 0$; $\varphi(d) = U$; với giả thiết trong tụ không có phân bố điện tích khối tự do.

Hãy tìm sự phân bố thế và cường độ điện trường trong tụ?



Hình 4.7: tụ điện phẳng 1 lớp điện môi

Giải: Gắn hệ trục toạ độ như Hình 4.7

Ta có phương trình Laplace - Poisson có dạng: $\Delta\varphi = 0$ hay $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0$

Tương đương: $\ddot{\varphi} = 0$; $\dot{\varphi} = C_1$; $\varphi = C_1x + C_2$

Sử dụng điều kiện Dirichlet ta có: $\varphi(0) = C_2 = 0$; $\varphi(d) = C_1 d = U$

$$\rightarrow C_1 = \frac{U}{d} \text{ Vậy } \varphi = \frac{U}{d}x\ ;\ \vec{E} = -\,\mathrm{Grad}\varphi = -\,\vec{e_x}\,\frac{U}{d}$$

Ví dụ 2: Vẫn bài toán trên nhưng giả thiết giữa 2 bản tụ có một phân bố điện tích khối ρ. Môi trường điện môi đặt trong chân không. Hãy tìm sự phân bố thế và cường độ điện trường trong tụ?

Giải: Phương trình Laplace - Poisson có dạng: $\Delta\varphi = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

Nghiệm tổng quát có dạng: $\varphi = -\dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}x^2 + C_1 x + C_2$

Thay các điều kiện bờ vào ta được hệ phương trình:

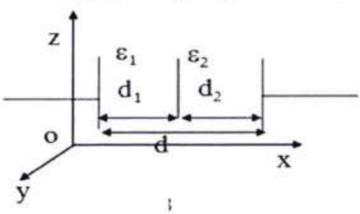
$$\begin{cases} 0 = C_2 \\ u = -\dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}d^2 + C_1 d + C_2 \end{cases}$$

Giải ra ta được: $C_2 = 0$; $C_1 = \dfrac{u}{d} + \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}d$

Vậy $\varphi = -\dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}x^2 + \left(\dfrac{u}{d} + \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}d\right)x$

Phân bố cường độ trường là: $\vec{E} = E_x = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = -\dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}x + \left(\dfrac{u}{d} + \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}d\right)$

Ví dụ 3: Một tụ điện phẳng có bề dầy d lấy theo chiều x, trong tụ có hai lớp điện môi với bề dầy d_1 và d_2 và được đặt vào một điện áp u sao cho: $\varphi(0) = 0$; $\varphi(d) = U$; với giả thiết trong tụ không có phân bố điện tích tự do.



Hình 4.8: Tụ điện phẳng 2 lớp điện môi

Hãy tìm sự phân bố thế và cường độ điện trường trong tụ?

Giải: Đặt hệ trục toạ độ như Hình 4.8

Ta có phương trình Laplace - Poisson: $\Delta\varphi = 0$ hay $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0$

Tương đương: $\ddot{\varphi} = 0$; $\dot{\varphi} = C_1$

Suy ra phương trình có dạng: $\varphi = C_1x + C_2$ song tụ điện có hai lớp điện môi do đó ta không thể sử dụng điều kiện Đirichle và Neumann cho cả miền V của tụ được mà phải tách thành hai miền để xét:

$$\varphi_1 = C_{11}x + C_{21} \quad (x = 0 \div d_1)$$

$$\varphi_2 = C_{12}x + C_{22} \quad (x = d_1 \div d)$$

Tại $x = 0$ thì $\varphi(0) = 0$ suy ra $C_{21} = 0$ (a) điều kiện Dirichlet

Tại $x = d$ có $\varphi(d) = U \rightarrow C_{12}d + C_{22} = U$ (b) điều kiện Dirichlet

Theo điều kiện hỗn hợp $\varphi(1) = \varphi(2)$:

$$C_{11}d_1 + C_{21} = C_{12}d_1 + C_{22} \qquad \text{(c)}$$

Ta có $\mathrm{Div}\,\vec{D} = 0$ theo điều kiên hỗn hợp:

$D_{1x}(d_1) = D_{2x}(d_2) \Leftrightarrow \varepsilon_1 E_{1x}(d_1) = \varepsilon_2 E_{2x}(d_1)$

Mà $E_{1x} = \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}$ và $E_{2x} = \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}$

suy ra $\varepsilon_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \varepsilon_2 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} \Leftrightarrow \varepsilon_1 C_{11} = \varepsilon_2 C_{12}$ (d)

Giải hệ 4 phương trình ta được:

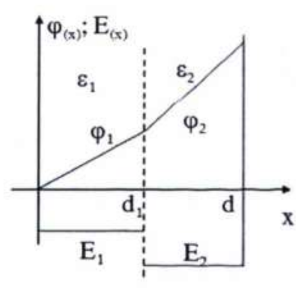
$$C_{21} = 0;\ C_{11} = U\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 d_1 + \varepsilon_2 d_2}$$

$$C_{12} = U\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1};$$

$$C_{22} = Ud_1\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}$$

Tìm phân bố cường độ điện trường:

$$\vec{E_1} = -\vec{e_x}\,C_{11};\ \vec{E_2} = -\vec{e_x}\,C_{12}$$



Hình 4.9: Đồ thị phân bố điện thế φ và cường độ điện trường E

Ta vẽ được đồ thị phân bố điện thế và cường độ điện trường như Hình 4.9.

4.5. MÔ TẢ HÌNH HỌC CỦA ĐIỆN TRƯỜNG - MẶT ĐẲNG THẾ VÀ ỐNG SỨC

Phần này sẽ trình bày cách mô tả hình học sự phân bố Điện trường tĩnh trong không gian thông qua mặt đẳng thế và ống sức.

4.5.1. Mặt đẳng thế

a. Khái niệm

Đối với trường tĩnh ta đã có hàm thế $\varphi(x, y, z)$ là biến trạng thái. Để biểu diễn bằng hình học sự phân bố thế, ta dùng khái niệm mặt đẳng thế. Mặt đẳng thế là tập hợp những điểm trong không gian có thế bằng nhau và bằng giá trị điện thế φ.

Giao tuyến của mặt đẳng thế với một mặt hình học (ví dụ mặt phẳng) là một đường đẳng thế. Công cần để di chuyển một đơn vị điện tích từ mốc đến mọi điểm trên mặt đẳng thế S là bằng nhau và bằng φ. Suy ra công dịch chuyển một điện tích trượt trên mặt đẳng thế đồng nhất bằng zero tức là khi trượt trên mặt đẳng thế, điện tích sẽ không gặp lực tiếp tuyến (F_τ) nào cả, và như vậy cường độ trường ở mọi điểm phải vuông góc với mặt đẳng thế chứa điểm đó.

b. Một số tính chất cơ bản của mặt đẳng thế

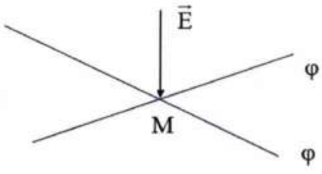
+ Giao tuyến của một mặt đẳng thế với một mặt hình học là một đường đẳng thế (Tập hợp những điểm trên giao tuyến đó có cùng giá trị φ).

+ Công dịch chuyển một đơn vị điện tích điểm từ điểm mốc đến mọi điểm trên mặt đẳng thế đều bằng nhau và bằng φ.

+ Công dịch chuyển một đơn vị điện tích điểm đến các điểm khác nhau trên mặt đẳng thế bằng 0, suy ra thành phần tiếp tuyến của cường độ điện trường (E_t) bị triệt tiêu và chỉ còn thành phần pháp tuyến (E_n).

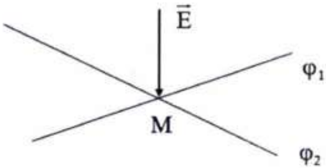
Ở những điểm có cường độ điện trường $\bar{E}$ là xác định thì không thể xảy ra các trường hợp sau:

- Hai mặt đẳng thế có cùng giá trị φ



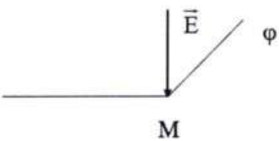
Hình 4.10: Hai mặt đẳng thế có cùng giá trị φ tại M

- Hai mặt đẳng thế có 2 giá trị φ_1 và φ_2 khác nhau



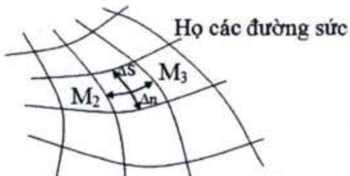
Hình 4.11: Hai mặt đẳng thế có các giá trị φ khác nhau tại M

- Mặt đẳng thế bị gẫy khúc tại M



Hình 4.12: Hai mặt đẳng thế gẫy khúc tại M

Vậy các đẳng thế phải xác định là duy nhất và liên tục ở lân cận mỗi điểm có $\vec{E}$ xác định. Trừ những điểm có cường độ trường $\vec{E}$ triệt tiêu hoặc lớn ∞, ở những điểm $\vec{E}$ có chiều xác định, do tính chất vuông góc giữa cường độ trường và mặt đẳng thế ta suy ra qua cùng một điểm M không tồn tại hai mặt đẳng thế có cùng giá trị φ và cũng không tồn tại hai mặt đẳng thế φ_1 , φ_2 khác nhau. Các mặt đẳng thế cũng không gẫy khúc mà phải xác định trơn tru, liên tục, duy nhất ở lân cạn mỗi điểm có cường độ trường E xác định.



Hình 4.13: Họ đường sức và các đường đẳng thế

+ Các mặt đẳng thế có tính chất trực giao với họ các đường sức và được thể hiện như Hình 4.13.

Từ Hình 4.13 ta thấy nếu biết họ đẳng thế trong một miền nào đó thì ta có thể biết sơ bộ về trị số và chiều của cường độ điện trường tại mỗi điểm.

Thật vậy ta xét 2 đường đẳng thế φ_2 và φ_3 như hình vẽ, thì ta có cường độ điện trường tại điểm M_2 là:

Trị số: $E_{M2} = \dfrac{\varphi_2 - \varphi_3}{M_2M_3} = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta n}$

Có chiều hướng vuông góc từ thế cao đến thế thấp.

Dựa vào tính chất trên ta có thể qui ước vẽ các các đẳng thế sao cho điện áp giữa 2 đẳng thế kề gần nhau là bằng nhau và có giá trị $\Delta\varphi = U$ (tuỳ chọn). Vậy tổng quát:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_3 = \varphi_3 - \varphi_4 = \ldots = U$$

4.5.2. Đường sức và ống sức

a. Đường sức

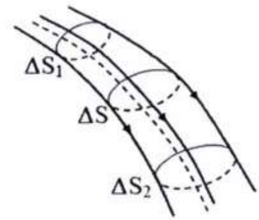
Đường sức là đường mà tiếp tuyến tại mọi điểm trên đường sức đều trùng với phương của cường độ điện trường $\vec{E}$

Đường sức thường được gắn thêm chiều của cường độ trường ở các điểm trên đường. Vậy đường sức là một đường hình học nêu rõ sự phân bố chiều của cường độ trường trong không gian. Đường sức xuất phát từ những miền có hạt mang điện dương, tận cùng ở miền mang điện âm, nên cũng cho biết sơ lược vị trí phân bố các hạt đó.

Về hình học, các đường sức có kết cấu hở và qua một điểm vì chỉ có một giá trị φ, đạo hàm của φ nên chỉ có một giá trị $\vec{E}$ xác định $\rightarrow$ do đó chỉ có một đường sức, vậy là các đường sức thường không cắt nhau.

Các đường sức vuông góc với các đẳng thế, hướng tự đẳng thế cao đến đẳng thế thấp. Từ đó ta thấy nếu biết họ đường sức ta vẽ được họ đẳng thế và ngược lại *b. Ống sức*

Cho một mặt ΔS và vẽ một tập những đường sức tỳ lên chu vi mặt ấy, chúng sẽ làm thành một mặt hình ống bao lấy một miền không gian gọi là ống sức. Giống như đường sức, ống sức cho biết chiều của cường độ trường ở lân cận mỗi điểm, ngoài ra ống sức còn cho biết sự phân bố độ lớn tương đối của các cường độ trường $\vec{E}$, $\vec{D}$ dọc theo ống.



Hình 4.14: Biểu diễn ống sức

Chỗ nào ống sức hẹp $\rightarrow$ cường độ trường lớn và ngược lại. Cường độ trường tỷ lệ nghịch với tiết diện ống.

Thật vậy trên ống sức ta chọn hai tiết diện ngang: ΔS_1, ΔS_2 như Hình 4.14. Nếu trong vùng thành ống và hai đáy không có điện tích tự do, dùng luật Gauss:

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = -D_1\Delta S_1 + D_2\Delta S_2 = 0 \text{ (Nếu } q_{td} = 0)$$

$$\Leftrightarrow D_1\Delta S_1 = D_2\Delta S_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{D_1}{D_2} = \frac{\Delta S_2}{\Delta S_1} = \frac{\varepsilon_1 E_1}{\varepsilon_2 E_2}$$

Ta qui ước vẽ ống sức sao cho thông lượng vector $\vec{D}$ (hoặc $\vec{E}$) trong mỗi ống đều bằng nhau, ví dụ bằng một lượng q tuỳ chọn:

$$D_1\Delta S_1 = D_2\,\Delta S_2 = ... = q \quad \Rightarrow \quad D = \frac{q}{\Delta S};\, E = \frac{q}{\varepsilon\Delta S}$$

Từ đó ta có thể ước lượng chiều và trị số của $\vec{D}$ và $\vec{E}$ở mỗi điểm.

4.6. ĐIỆN DUNG, THÔNG SỐ VỀ ĐIỆN CỦA CÁC VẬT DẪN

Điện dung là một thông số đặc trưng cơ bản cho điện trường của một hệ vật dẫn mang điện và thường xét cho từng cặp vật dẫn.

Trong kỹ thuật điện thường gặp những điện trường mà trong toàn không gian của hệ điện tích tự do chỉ phân bố trên một cặp vật dẫn.

Ví dụ:

- Điện trường của một tụ điện.

- Điện trường của 2 đường dây song song

Thật vậy trong môi trường tuyến tính, ta đặt các vật dẫn 1, 2 dưới những điện thế $\varphi_1(S_1)$; $\varphi_2(S_2)$ tức dưới điện áp $u = \varphi_1 - \varphi_2$ trong không gian sẽ phân bố một hàm điện thế φ_o (x, y, z) nào đó thoả mãn phương trình $\Delta\varphi_o = 0$ và điều kiện bờ Dirichlet $\varphi_1(S_1)$, $\varphi_2(S_2)$. Nghiệm ấy là duy nhất. Ứng với phân bố φ_o, trên mặt vật dẫn có phân bố điện tích mặt $\sigma(S)$ duy nhất bằng $\frac{\varepsilon\partial\varphi_o(S)}{\partial n}$ và trên các vật dẫn sẽ tích các điện tích có giá trị duy nhất +q, - q bằng tổng lượng của phân bố $\sigma(S)$ lấy trên mặt S.

Giả sử nếu bây giờ phân bố thế tăng k lần đến φ (x, y, z) = k . φ_o (x, y, z). Phân bố này cũng là nghiệm duy nhất thoả mãn phương trình Laplace - Poisson với điều kiện bờ k $\varphi_o(S)$, tức điện áp u giữa hai vật tăng lên k lần. Ứng với φ trên mặt vật dẫn sẽ tăng lên k lần so với trước và tổng lượng điện tích cùng tăng k lần và bằng một kết quả.

Trong trường hợp có nhiều vật dẫn như là dây cáp 3 lõi, 4 lõi hay là đường dây 3 dây, 4 dây v.v... Thì ta cần phải tách thành từng cặp vật dẫn để xét. Khi đó trên hai vật dẫn sẽ phân bố những điện tích trái dấu và bằng nhau (+q và -q) "theo luật bảo toàn điện tích". Vậy điện trường của một cặp vật dẫn này sẽ được đặc trưng bởi thông số điện dung C, điện dung được xác định:

$$C = \frac{q}{u}$$

Nếu ta lấy u =1V suy ra C = q tức là điện dung C bằng lượng điện tích nạp lên cặp vật dẫn khi điện áp giữa chúng bằng 1V.

Từ biểu thức tính điện dung ta thấy C phụ thuộc vào phân bố thế φ (vì $q = \sigma_{td}S = \varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n}S$ với S là điện tích bản cực) và phụ thuộc vào hằng số điện môi (môi trường). Vậy C cũng là thông số đặc trưng cho bài toán bờ, do vậy nó có thể diễn tả cả về mặt năng lượng.

Như ta đã biết năng lượng điện trường ứng với một cặp vật dẫn mang điện: $w = qu/2 = C.u^2/2$ hay $C = 2w/u^2$ với $u = 1V$ suy ra $C = 2w$

"Vậy điện dung của một cặp vật dẫn khi điện áp đặt vào là 1V thì bằng năng lượng tích luỹ trong nó"

CÂU HỎI ÔN TẬP CHƯƠNG 4

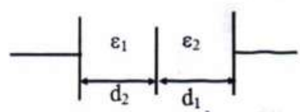
4.1. Hãy nêu định luật Coulomb của điện trường tĩnh?

4.2. Phát biểu định luật Gauss và định luật bảo toàn điện tích của điện trường tĩnh?

4.3. Trình bày một số hình thái phân bố điện tích thường gặp?

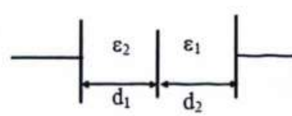
4.4. Trình bày các điều kiện bờ của bài toán bờ trong điện trường tĩnh?

4.5. Một tụ điện phẳng có hai lớp điện môi $\varepsilon_1 = 25.10^4 \mu F/m$ và $\varepsilon_2 = 20.10^4 \mu F/m$; với $d_1 = 50cm$ và $d_2 = 100cm$ (lấy theo chiều y) như hình 4.15. Đặt một điện áp u vào tụ sao cho: $\varphi(0) = 0V$; $\varphi(d_1+d_2) = 500V$; với giả thiết ở môi trường ε_1 có $\rho_{td1} = 10C/m^3$; ε_2 có $\rho_{td2} = 0$ và trên bờ ngăn cách có $\rho_{td} = 10.\delta(n)\ C/m^3$. Hãy tính và vẽ đồ thị phân bố điện thế và cường độ điện trường trong tụ?



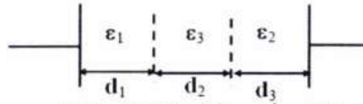
Hình 4.15: Tụ điện phẳng 2 lớp điện môi

4.6. Một tụ điện phẳng có hai lớp điện môi $\varepsilon_1 = 25.10^4 \mu F/m$ và $\varepsilon_2 = 20.10^4 \mu F/m$; với $d_1 = 50cm$ và $d_2 = 100cm$ (lấy theo chiều y) như hình 4.16. Đặt một điện áp u vào tụ sao cho: $\varphi(0) = 100V$; $\varphi(d_1+d_2) = 1000V$; với giả thiết ở môi trường ε_1 có $\rho_{td1} = 10C/m^3$; ε_2 có $\rho_{td2} = 20C/m^3$ và trên bờ ngăn cách có $\rho_{td} = 0$. Hãy tính và vẽ đồ thị phân bố điện thế và cường độ điện trường trong tụ?



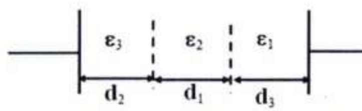
Hình 4.16: Tụ điện phẳng 2 lớp điện môi

4.7. Một tụ điện phẳng có ba lớp điện môi ε_1 = 0,5 F/m; ε_2 = 0,2 F/m và ε_3=1F/m; với bề dày d_1 = 50cm; d_2 =100cm và d_3 = 150cm (lấy theo phương y) như 4.17. Biết đặt một điện áp u vào tụ sao cho: $\varphi(0)$ = 0V; $\varphi(d_1+d_2+d_3)$ = 1000V; với giả thiết môi trường ε_1 có phân bố điện tích khối tự do ρ_{td} =10 C/m^3; còn ε_2; ε_3 và trên các bờ ngăn cách có ρ_{td} = 0. Hãy tính và vẽ đồ thị phân bố điện thế và cường độ điện trường trong tụ?



Hình 4.17: Tụ điện phẳng 3 lớp điện môi

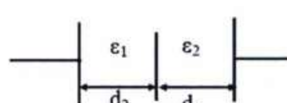
4.8. Một tụ điện phẳng có ba lớp điện môi ε_1 = 0,5 F/m; ε_2 = 0,2 F/m và ε_3 = 1 F/m; với bề dày d_1 = 50cm; d_2 =100cm và d_3 = 150cm (lấy theo phương y) như hình 4.18. Biết đặt một điện áp u vào tụ sao cho: $\varphi(0)$ = 0V; $\varphi(d_1+d_2+d_3)$ = 1000V; với giả thiết môi trường ε_3 có phân bố điện tích khối tự do ρ_{td} =10 C/m^3; còn ε_1; ε_2 và trên các bờ ngăn cách có ρ_{td} = 0. Hãy tính và vẽ đồ thị phân bố điện thế và cường độ điện trường trong tụ?



Hình 4.18: Tụ điện phẳng 3 lớp điện môi

4.9. Một tụ điện phẳng có một lớp điện môi $\varepsilon=10^5\mu$F/m với bề dầy d=10cm lấy theo chiều z, đặt vào một điện áp u sao cho: $\varphi(d)$ = 100V; $D_z(0)$ =-100C/m^2; với giả thiết trong tụ không có phân bố điện tích khối tự do. Hãy tìm sự phân bố thế và cường độ điện trường trong tụ?

4.10. Một tụ điện phẳng có bề dầy d lấy theo chiều y, trong tụ có hai lớp điện môi ε_1=0,1F/m; ε_2=0,2F/m với bề dầy d_1 =10cm và d_2 =20cm như hình 4.19. đặt vào một điện áp u sao cho: $\varphi(0)$ =10V; $E_y(d)$ =50V/m; với giả thiết trong môi trường ε_1, ε_2 và trên mặt phân cách giữa 2 môi trường điện môi không có phân bố điện tích tự do. Hãy tìm sự phân bố điện thế trong tụ?



Hình 4.19: Tụ điện phẳng 2 lớp điện môi

Chương 5

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN ĐIỆN TRƯỜNG TĨNH THƯỜNG GẶP (PHƯƠNG TRÌNH LAPLACE - POISSON)

Chương này trình bày một số phương pháp giải bài toán Điện trường tĩnh thường gặp như phương pháp sử dụng trực tiếp luật Gauss; phương pháp sử dụng hàm Green tối giản; phương pháp soi gương...

Đặt vấn đề

Trong thực tế gặp rất nhiều bài toán khác nhau vì thế tuỳ vào yêu cầu cũng như dữ kiện của bài toán mà ta có thể sử dụng các phương pháp khác nhau để giải bài toán điện trường tĩnh sao cho chính xác và đơn giản nhất. Và ta có các phương pháp sau:

- Phương pháp sử dụng trực tiếp luật Gauss được áp dụng cho các điện trường là đối xứng.

- Phương pháp sử dụng hàm Green tối giản (áp dụng cho các hệ cô lập)

- Phương pháp soi gương (phương pháp thay thế bờ)

- Phương pháp phân ly biến số Furie

- Phương pháp vẽ lưới các đường sức và đẳng thế

- Phương pháp lưới tính gần đúng.

Ngoài ra còn phương pháp biến hình bảo giác và phương pháp mô hình.

5.1. PHƯƠNG PHÁP VẬN DỤNG TRỰC TIẾP LUẬT GAUSS

Phương pháp này rất tiện dùng khi điện trường thể hiện tính chất đối xứng, ví dụ đối xứng xuyên tâm hình cầu, hoặc đối xứng qua trục hình trụ, ta có thể vận dụng ngay luật Gauss để tính điện trường như vậy sẽ tránh được việc giải phương trình vi phân Laplace - Poisson.

5.1.1. Điện trường đối xứng xuyên tâm hình cầu

Điện trường đối xứng xuyên tâm hình cầu là điện trường của quả cầu mang điện hoặc điện trường của vật nhỏ mang điện.

Trong trường hợp điện trường đối xứng xuyên tâm hình cầu $\vec{E}, \vec{D}$ chỉ có thành phần phụ thuộc vào r tức là: $E = E_r$ và $D = D_r$.

Ta lấy một mặt S bất kỳ có bán kính r bao lấy vật, lúc đó ta áp dụng luật Gauss để tính thông lượng của vector dịch chuyển điện qua mặt kín S:

$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = q$ (q là tổng điện tích bọc trong mặt S)

Vì chỉ phụ thuộc vào r (thành phần xuyên tâm) nên ta có:

$\oint_S D_r dS = \oint_S DdS = D\oint_S dS = D4\pi r^2$ với $\oint_S dS = 4\pi r^2$ chính là diện tích xung quanh hình cầu.

Suy ra $D4\pi r^2 = q \rightarrow D = \dfrac{q}{4\pi r^2} \rightarrow E = E_r = \dfrac{D}{\varepsilon} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon r^2}$ (5.1)

Hàm thế ứng với mốc lấy ở xa vô cùng là $r_o = \infty$ và $\varphi(\infty) = 0$, sẽ có dạng:

$$\varphi = -\int_{r_0}^{r} Edr = -\int_{\infty}^{r} E_r dr = -\int_{\infty}^{r} \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2} dr \qquad (5.2)$$

Nếu môi trường đồng nhất tuyến tính ε = const $\rightarrow$ được kết quả:

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon r}$$

Ví dụ: Cho một quả cầu mang điện có bán kính r_c = 1m đặt trong môi trường không có phân bố điện tích tự do với ε = 0.15 F/m, giả sử quả cầu có phân bố điện tích khối $\rho_{td} = 10\ C/m^3$. Hãy tìm thế tại điểm M cách tâm quả cầu d_M = 20m so với điểm mốc M_o cách quả cầu d_{Mo} = 10m môi trường có $\varepsilon = 0.15\ F/m$.

Giải: Điện tích của quả cầu mang điện là: $q_c = \int_V \rho_{td} dV = \rho_{td}\frac{4}{3}\pi r_0^3$

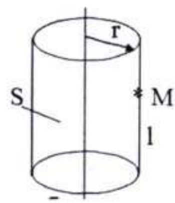
Mặt khác do tính chất đối xứng xuyên tâm nên ta lấy mặt S chính là mặt cầu bao quanh quả cầu và đi qua điểm M và quả cầu đặt trong môi trường không có điện tích tự do cho nên: $q = q_c$

Vậy thế tại điểm M so với M_o là:

$$\varphi_{(M)} = -\int_{r_o}^{r} E dr = -\int_{r_o}^{r} E_r dr = -\int_{d_{Mo}}^{d_M} \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon d_M} - \frac{q}{4\pi\varepsilon d_{Mo}} = \frac{\rho_{td}\pi r_0^3}{3\pi\varepsilon d_M} - \frac{\rho_{td}\pi r_0^3}{3\pi\varepsilon d_{Mo}}$$

5.1.2. Điện trường đối xứng xuyên trục hình trụ

Là trường hợp khi ta xét điện trường của một trục mang điện hoặc của một dây dẫn mang điện như Hình 5.1. Lúc đó điện trường chỉ phụ thuộc vào r là khoảng cách từ điểm xét đến trục tức là:



Hình 5.1: Điện trường xuyên trục hình trụ

$$E = E_r\,; \quad D = D_r$$

Lấy một mặt trụ tròn S có bán kính r, dài l, đồng trục với vật dẫn. Giả sử điện tích phân bố trên trục dẫn với mật độ đường τ, tức điện tích bao trong mặt S bằng τl . Vận dụng luật Gauss cho mặt S:

$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = \tau l \rightarrow \oint_S \vec{D}d\vec{S} = \oint_S D_r dS = D\oint_S dS = D2\pi rl = \tau l$ với $\oint_S dS = 2\pi rl$ là diện tích xung quanh hình trụ.

Vậy ta có: $D(r) = D_r(r) = \dfrac{\tau}{2\pi r}\,;\; E(r) = E_r(r) = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon r}$ (5.3)

Tích phân lên ta được hàm thế so với mặt trụ bán kính r_o nào đó chọn làm mốc: $\varphi(r) = -\displaystyle\int_{r_o}^{r} E dr = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\int_{r_o}^{r} \frac{1}{r} dr$

Nếu môi trường là đồng nhất, tuyến tính ε = const thì:

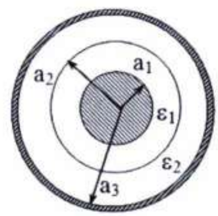
$$\varphi = \varphi(r) = = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\int_{r}^{r_o} \frac{1}{r} dr = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}(\ln r_o - \ln r) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_o}{r} \quad (5.4)$$

Chú ý:

- Có trường hợp toàn bộ bài toán không thể hiện tính đối xứng, ví dụ điện trường của hai điện tích điểm, hai trục mang điện... nhưng nếu có thể tách ra thành nhiều bài toán đối xứng, ta tính riêng rẽ các thành phần trường cho từng bài toán nhỏ đó rồi cộng lại.

- Trong một số trường hợp, có thể vận dụng luật Gauss một cách linh hoạt. Ví dụ vật dẫn có hình khối tuỳ ý, tuy không có tâm đối xứng nhưng khi cần tìm trường ở vùng xa, có thể coi gần đúng vật là một điện tích điểm. Hoặc hình trụ tròn có chiều dài hữu hạn nhưng lớn hơn nhiều so với bán kính ($l >> r$) và khi xét trường ở gần vật dẫn vẫn coi là đối xứng xuyên trục được.

Ví dụ: Một dây cáp đồng trục có 2 lớp cách điện ε_1, ε_2, có bán kính lõi trong a_1, bán kính bờ ngăn cách 2 điện môi là a_2, bán kính vỏ ngoài là a_3, đặt cáp dưới điện áp u như Hình 5.2. Tìm phân bố $\vec{E}_1, \vec{D}_1, \vec{E}_2, \vec{D}_2$ điện tích τ, điện dung C. Tìm điện tích liên kết trên mặt tiếp giáp $r = a_1$, $r = a_2$, $r = a_3$ và xem môi trường có điện tích khối hay không?



Hình 5.2: Mặt cắt ngang dây cáp đồng trục

Giải: Gọi τ là điện tích trên một đơn vị chiều dài dây, ta có: $\tau = C_0u$

Với C_0 là điện dung trên một đơn vị chiều dài dây. Do tính chất đối xứng E, D chỉ có thành phần hướng kính:

$$\vec{D} = D_r = \frac{\tau}{2\pi r}; \quad \vec{E}_1 = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_1} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1 r}; \quad \vec{E}_2 = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_2} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_2 r}$$

Các điện tích ràng buộc được tính theo P: $\rho_b = \mathrm{Div}P$; $\sigma_b = P_{1n} - P_{2n}$

Trong đó: $\vec{P} = k_p\varepsilon_0\vec{E} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\vec{D} = \varepsilon_r\tau\frac{\varepsilon_r - 1}{2\pi\varepsilon_r r} = P_r$

Áp dụng công thức $\mathrm{Div}P_r = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rP_r)$ Rút ra: $\rho_b = \mathrm{Div}P_r = 0$

Điện tích ràng buộc trên bờ tiếp giáp 2 điện môi là ($r = a_2$):

$$\sigma_b(a_2) = P_{1n}(a_2) - P_{2n}(a_2) = D(a_2)\left(\frac{\varepsilon_{r1}-1}{\varepsilon_{r1}} - \frac{\varepsilon_{r2}-1}{\varepsilon_{r2}}\right) = \frac{\tau(\varepsilon_{r1}-\varepsilon_{r2})}{2\pi a_2\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}$$

Trên bề mặt lõi ($r = a_1$) và vỏ ($r = a_2$)

$$\sigma_b(a_1) = -P_{1n}(a_1) = -D(a_1)\frac{\varepsilon_{r1}-1}{\varepsilon_{r1}} = -\frac{\tau(\varepsilon_{r1}-1)}{2\pi a_1\varepsilon_{r1}}$$

$$\sigma_b(a_3) = P_{2n}(a3) = D(a_3)\frac{\varepsilon_{r2}-1}{\varepsilon_{r2}} = \frac{\tau(\varepsilon_{r2}-1)}{2\pi a_3\varepsilon_{r2}}$$

Quan hệ giữa điện áp u và điện tích τ

$$u = \int_{a_1}^{a_3} E dr = \frac{\tau}{2\pi}\left[\int_{a_1}^{a_2}\frac{dr}{\varepsilon_1 r} + \int_{a_2}^{a_3}\frac{dr}{\varepsilon_2 r}\right] = \frac{\tau}{2\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\ln\frac{a_2}{a_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\ln\frac{a_3}{a_2}\right)$$

Điện dung trên một đơn vị dài là:

$$C_0 = \frac{\tau}{u} = \frac{2\pi}{\frac{1}{\varepsilon_1}\ln\frac{a_2}{a_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\ln\frac{a_3}{a_2}}$$

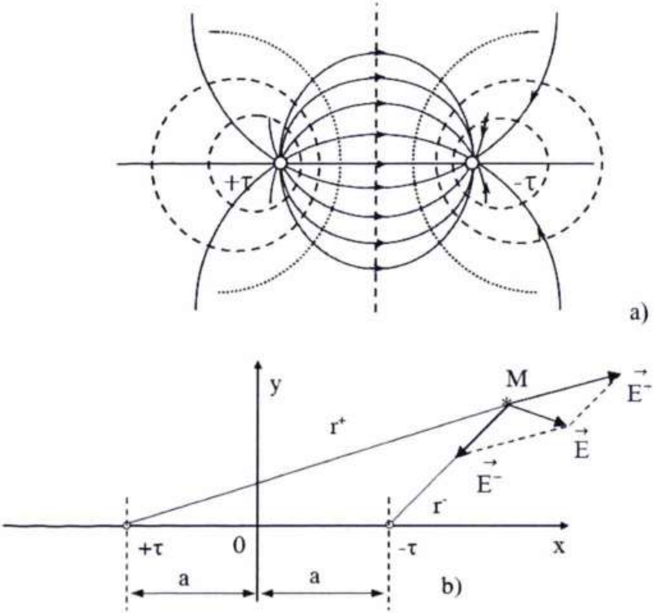
Mật độ điện tích đường là:

$$\tau = C_0 u = \frac{2\pi u}{\frac{1}{\varepsilon_1}\ln\frac{a_2}{a_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\ln\frac{a_3}{a_2}}$$

5.1.3. Điện trường ứng với hai trục dài thẳng song song mang điện

Trong thực tế thường gặp bài toán điện trường một đường dây gồm hai dây dài thẳng song song nạp những điện tích bằng nhau và trái dấu. Nếu bài toán có nhiều dây cũng có thể phân tích đưa về nhiều bài toán hai dây sau đó xếp chồng kết quả lại. Giả sử đường kính dây coi là vô cùng bé (VCB), ta đưa về bài toán hai trục mang điện.

Giả sử một đường dây có hai dây có bán kính r_o và có điện tích phân bố dọc đường dây với mật đường của 2 dây là $\pm\tau$ như Hình 5.3:



Hình 5.3: Điện trường tại điểm M do 2 trục đường dây mang điện gây ra

Tách thành hai trục riêng rẽ và dùng luật Gauss. Giả sử điện tích phân bố đều trên các trục với mật độ đường $\pm\tau$; môi trường tuyến tính đồng nhất và đẳng hướng với ε = const. Vì ở mọi mặt cắt ngang z = const các điều kiện đều như nhau nên trường không phụ thuộc z, tức phân bố giống nhau trên mọi mặt phẳng ngang (gọi là trường song phẳng). Chọn hệ toạ độ như Hình 5.3, vận dụng biểu thức (5.3) ta có thể ở điểm M (r^-, r^+) bất kỳ bằng:

Ta có: $E^+ = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon r^+}$ và $E^- = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon r^-}$

Từ Hình 5.3b ta có thể tìm được điện trường tại M bất kỳ như sau:

$$E = \sqrt{(E^+)^2 + (E^-)^2 + 2E^+E^-\cos(\overrightarrow{E^+}, \overrightarrow{E^-})}$$

Ta đi tìm điện thế ở điểm M bất kỳ, vận dụng biểu thức (5.4)

$$\varphi_M(r^+, r^-) = \frac{+\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_o^+}{r^+} + \frac{-\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_o^-}{r^-} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_o^+ r^-}{r_o^- r^+} \qquad (5.5)$$

Trong đó: r^+_o, r^-_o là toạ độ các điểm mốc có thế bằng zêrô.

Chú ý tính đối xứng của đường dây ta thấy trên mặt phẳng 0y tức tập các điểm có $r^+ = r^-$ đi qua gốc và ăn ra xa ∞; là một mặt đẳng thế. Chọn thế trên mặt đó bằng không và chọn tỷ số $\frac{r_o^-}{r_o^+} = 1$; thì:

$$\varphi_M(r^+, r^-) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r^-}{r^+} \qquad (5.6)$$

Các điểm phía trái mặt phẳng ấy (tức về phía điện tích dương) có thế dương, các điểm phía phải mặt phẳng ấy (tức về phía điện tích âm) có thế âm, thế lớn nhất ở lân cận điện tích dương. Đường đẳng thế có phương trình:

$$\ln\frac{r^-}{r^+} = \text{const} \quad \text{hoặc } r^- = kr^+$$

hay $$(r^-)^2 - k^2(r^+)^2 = 0 \qquad (5.7)$$

Gọi x, y là toạ độ điểm M và 2a = d là khoảng cách giữa hai dây. Ta có:

$$(r^-)^2 = (x + a)^2 + y^2; \quad (r^+)^2 = (x - a)^2 + y^2$$

Thay vào (5.7) ta có: $(x + a)^2 + y^2 - k^2[(x - a)^2 + y^2]$

$$x^2 - 2a\,\frac{k^2+1}{k^2-1}.\,x + y^2 + a^2 = 0$$

Đặt: $K = \frac{(k^2+1)}{k^2-1}$ ta có: $x^2 - 2a\,Kx + y^2 + a^2 = 0$

Hoặc: $$(x - aK)^2 + y^2 + a^2(1 - K^2) = 0 \qquad (5.8)$$

Đây là phương trình một vòng tròn tâm ở (X, 0) với $X = aK = a\,\frac{k^2+1}{k^2-1}$ và bán kính $R^2 = a^2K^2 - a^2 = X^2 - a^2$; $R = \sqrt{X^2 - a^2}$. Từ đó ta vẽ được họ đẳng thế.

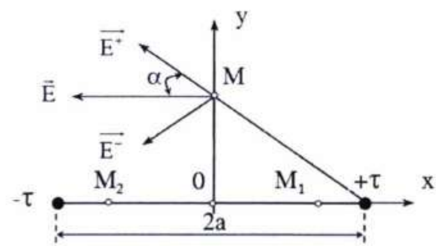
Do tính chất đối xứng của Trường qua (τ, y, z) mà vẽ đẳng thế đối xứng nhau ôm lấy hai trục.

Ví dụ: Hai trục mang điện $\pm\tau$ đặt cách nhau một khoảng 2a như Hình 5.4. Hãy tìm điện áp giữa 2 điểm M_1, M_2 đặt cách 2 trục những đoạn $-\tau M_1 = \tau M_2 = r$. Tìm phân bố cường độ trường trên mặt phẳng trung trực.

Giải: Theo (5.5) Điện thế tại các điểm M_1, M_2 là:

$$\varphi_{M1} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r}{2a-r}$$

$$\varphi_{M2} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{2a-r}{r}$$



Hình 5.4: Điện trường của 2 trục mang điện

Điện áp giữa 2 điểm là:

$$u_{12} = \varphi_{M1} - \varphi_{M2} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\left(\ln\frac{2a-r}{r} - \ln\frac{r}{2a-r}\right) = \frac{\tau}{\pi\varepsilon}\ln\frac{2a-r}{r} \approx \frac{\tau}{\pi\varepsilon}\ln\frac{2a}{r}$$

Dùng luật Gauss ta có thể tìm được cường độ trường ở những điểm M nằm trên trục oy, tại các điểm đó có:

$$E^+ = E^- = \frac{\tau}{2\pi\sqrt{a^2+y^2}}$$

$$E = 2E^+\cos\alpha = 2E^+\frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}} = \frac{\tau a}{\pi\varepsilon\left(a^2+y^2\right)}$$

5.2. PHƯƠNG PHÁP HÀM GREEN TỐI GIẢN

5.2.1. Nội dung phương pháp

Ta đã có dạng hàm Green tối giản G = $\frac{1}{4\pi\varepsilon r}$ của phương trình Laplace - Poisson ứng với một điện tích điểm đơn vị (q = 1C) tức ρ phân bố Dirac theo thể tích và với bờ ở xa vô cùng chọn thế bằng zero. Nếu môi trường tuyến tính với ε = const, theo tính chất xếp chồng nghiệm, môi trường có phân bố một số điện tích đặt trong miền hữu hạn, ta có thể chọn thế ở miền xa vô cùng bằng zero và tính thế tại mọi điểm M bằng:

$$\varphi_M = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon r} dq = \int_q G dq$$

Trong thực tế, các mặt, đường, vùng phân bố điện tích thường có hình dáng phức tạp và đối với các bài toán các vật dẫn sự phân bố q thường là chưa biết. Vì vậy việc tính tích phân trên là khó khăn cho nên phương pháp này chỉ có ý nghĩa về lý thuyết, trong thực tế thường chỉ dùng trong một số trường hợp đơn giản.

5.2.2. Điện trường của những đoạn dây mang điện

Thực tế thường gặp điện trường của các đoan dây dài hữu hạn, ví dụ: điện trường của một đoạn dây anten, đoạn dây nối từ anten đến máy phát, một đoạn dây cung cấp điện trong phân xưởng hay phòng thí nghiệm... Thì trong các trường hợp này do dây dài là hữu hạn vì vậy nó không có tính chất đối xứng. ... Trong những trường hợp này ta không dùng luật Gauss được. Do đó ta phải sử dụng phương pháp sử dụng hàm Green tối giản để tính:

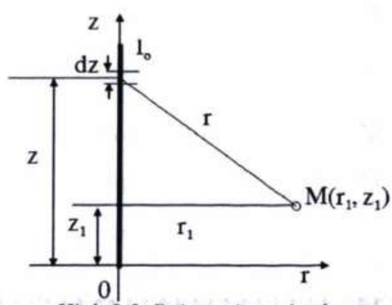
Giả sử ta có một trục thẳng mang điện có độ dài l_o và có phân bố điện tích đường τ . Để đơn giản ta gắn vào trục mang điện một hệ trục toạ độ trụ khi đó điện trường chỉ còn phụ thuộc vào toạ độ r và z (đặc trưng độ dài l) như Hình 5.5. Từ hình vẽ ta có dl = dz ; $l_1 = z_1$; l = z.

Vậy theo hàm Green ta có thể tính được thế φ ở một điểm $M(r_1, z_1)$ tuỳ ý:

$$\varphi(M) = \int_L G\tau dl = \int_0^{l_o} \frac{1}{4\pi\varepsilon r} \tau dz$$

Trong đó dz là vi phân của độ dài l_o trục mang điện và khoảng cách từ điểm M đến vi phân được xác định:

$$r = \sqrt{(z - z_1)^2 + r_1^2}$$



Hình 5.5: Điện trường của đoạn dây mang điện

Vậy:

$$\varphi(M)=\int_0^l \frac{1}{4\pi\varepsilon r}\tau dz=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon}\int_0^l \frac{1}{\sqrt{(z-z_1)^2+r_1^2}}dz=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon}\ln((z-z_1)+\sqrt{(z-z_1)^2+r_1^2})\Big|_0^l$$

5.3. PHƯƠNG PHÁP THAY THẾ BỜ - PHƯƠNG PHÁP SOI GƯƠNG

5.3.1. Khái niệm

Thực tế thường phải giải bài toán điện trường trong miền V_1 thuộc môi trường 1, giới hạn bởi bờ S tiếp giáp với miền V_2 thuộc môi trường 2, với điều kiện bờ Dirichlet, Neumann hoặc hỗn hợp trên bờ S.

Nếu trực tiếp giải bài toán bờ như vậy thường khó khăn (vì điện trường không đối xứng). Trong một số trường hợp khi bờ có hình dáng hình học đơn giản (phẳng trụ, cầu) nhất là khi bờ S là bờ dẫn, tức đẳng thế, người ta dùng phương pháp soi gương điện tích.

Ý tưởng của phương pháp là ta thay toàn bộ miền V_2 bằng miền V_1 hoặc ngược lại khi đó sẽ có bài toán của một môi trường đồng nhất. Đồng thời thêm một số điện tích vào miền V_2 hoặc ngược lại sao cho toàn hệ vẫn thoả mãn điều kiện bờ và nghiệm của bài toán lúc này tìm được cũng là nghiệm của bài toán ban đầu. Với bài toán thay thế này, toàn không gian sẽ đồng nhất nên đơn giản hơn bài toán đầu. Sự thay thế điện tích giống như khi soi gương nên có tên là phương pháp soi gương điện tích.

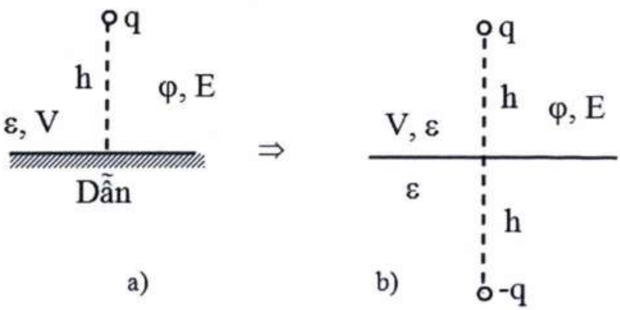
5.3.2. Soi gương điện tích qua một mặt phẳng dẫn

Trong thực tế đường gặp điện trường của những điện tích đặt trong nửa không gian điện môi V, nửa không gian còn lại là môi trường dẫn rộng lớn. Bờ ngăn hai môi trường là phẳng S. Ví dụ điện trường điện tích điểm, vật dẫn, đường dây, anten..., đặt trong không khí trên mặt đất, hoặc vật nhỏ mang điện đặt cạnh một tấm dẫn lớn, một bàn máy, cửa sắt, mái tôn...

Giả sử trong nửa không gian điện môi V có một điện tích điểm q, đặt cách mặt dẫn S một quãng h; trong V có một điện trường. Điều kiện bờ trên mặt S giữa hai môi trường là mặt S đẳng thế và có thế bằng zero.

Ở đây chọn thế trên mặt dẫn bằng 0 vì mặt đẳng thế rộng vô hạn và coi thế ở điểm xa vô cùng triệt tiêu. Điện tích trên mặt S bằng q, vì trong nửa không gian trên có một điện tích q (áp dụng luật bài toán điện tích cho hệ q và mặt dẫn). Vậy điều kiện bờ Dirichlet và Neumann là:

$$\varphi(S) = \text{const} = 0 \quad \text{hoặc} \quad \sum q(S) = \int_S D\, dS = -q \tag{5.8}$$



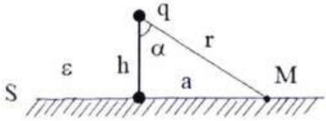
Hình 5.6: Soi gương qua mặt phẳng dẫn S

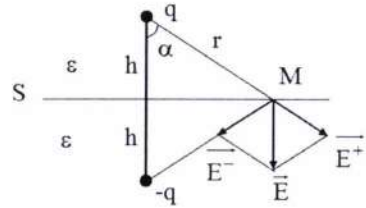
Để giải bài toán này ta sử dụng phương pháp soi gương tức là thay thế toàn bộ miền không gian vật dẫn bằng miền không gian điện môi ε để toàn bộ miền không gian là đồng nhất ε. Để đảm bảo điều kiện bờ (mặt S là đẳng thế) ta phải đặt đối xứng với q qua mặt phẳng dẫn S một điện tích trái dấu - q.

Như vậy sau khi thay thế bờ (soi gương) thì điện trường do điện tích q gây ra trong miền V được tính hoàn toàn giống như điện trường do 2 điện tích điểm q và -q gây ra.

Tóm lại muốn tính điện trường trong miền V ta lấp đầy không gian dẫn bằng miền V và đặt đối xứng với điện tích trong miền V một điện tích có dấu ngược lại. Sau đó tính điện trường trong miền V như là điện trường do 2 điện tích gây ra.

Ví dụ: Hãy tính cường độ điện trường do điện tích điểm q gây ra tại điểm M trên mặt dẫn S, biết h, a, ε, q > 0 như hình 5.7a:





Hình 5.7: Soi gương qua mặt phẳng dẫn

Giải: Ta dùng phương pháp soi gương và được thể hiện như Hình 5.7b.

Lúc này ta có bài toán với 2 điện tích điểm đối xứng xuyên tâm. Cường độ điện trường tác động tại điểm M được xác định bằng tổng cường độ điện trường do điện tích q và -q gây ra: $\vec{E}_M = \vec{E}_M^+ + \vec{E}_M^-$

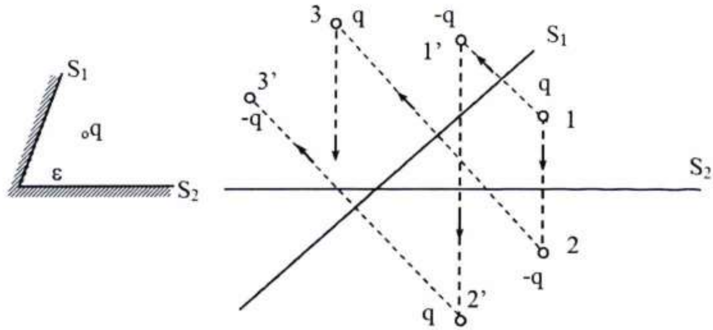
Áp dụng luật Gauss ta có: $E_M^+ = E_M^- = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon r^2} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon(h^2 + a^2)}$

Vậy ta có: $E_M = 2E_M^+ \cos\alpha = \dfrac{2qh}{4\pi\varepsilon r^3} = \dfrac{2qh}{4\pi\varepsilon\sqrt{(h^2 + a^2)^3}}$

5.3.3. Soi gương qua một góc dẫn

Giả sử có một vật mang điện đặt trong một góc nhị diện tạo bởi hai nửa mặt phẳng dẫn, ví dụ trong thùng máy biến áp, phòng thí nghiệm bọc kim... Hai nửa mặt phẳng S_1, S_2 làm thành một bờ S giới hạn miền V trong đó cần tìm điện trường thoả mãn điều kiện bờ.

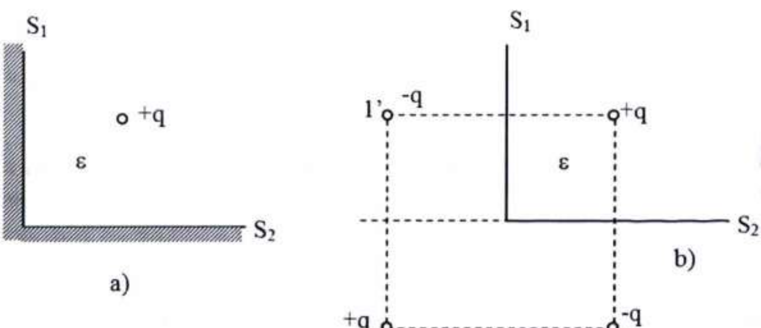
Ta dùng phương pháp soi gương theo lập luận muốn đảm bảo bờ S_1 ta soi gương điện tích q đặt ở vị trí 1 qua S_1, ta có - q đặt ở 1'. Hai điện tích này không đảm bảo điều kiện đẳng thế cho mặt S_2, muốn đảm bảo điều ấy lại phải soi gương 1- 1' qua bờ S_2 $\rightarrow$ được điện tích tại các điểm 2 - 2'. Hai điện tích này lại không đảm bảo đẳng thế cho bờ S_1, do đó phải tiếp tục soi 2- 2' qua S_1 thành 3-3' như Hình 5.8.



Hình 5.8: Soi gương qua góc dẫn bất kỳ

Tiếp tục mãi như vậy có thể gặp hai trường hợp:

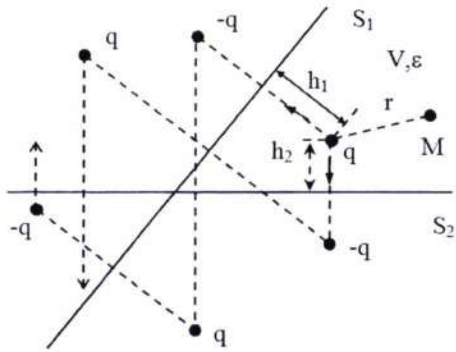
+ **Trường hợp 1:** Soi gương đến một lúc nào đó các điện tích vừa soi gương trùng với các điện tích đã có thì kết thúc quá trình soi gương vì đã đảm bảo cho S_1 và S_2 đẳng thế. Khi đó điện trường trong miền V được xác định bằng cách xếp chồng các điện trường do các điện tích gây ra. Trường hợp này chỉ xảy ra khi góc phẳng kẹp giữa hai bản dẫn vừa bằng một phần nguyên của góc 2π (với n nguyên) như Hình 5.9.



Hình 5.9: Phương pháp soi gương qua góc dẫn 90^0

+ **Trường hợp 2:** Soi gương mãi mà cặp điện tích mới soi không trùng với cặp điện tích trước đó. Đó là trường hợp góc nhị diện không chia hết cho 2π.

Khi đó ta cắt bước soi gương ở bước nào đó để tính gần đúng (tức là coi gần trùng nhau là trùng nhau) như Hình 5.8 hoặc Hình 5.10.



Hình 5.10: Phương pháp soi gương qua góc dẫn bất kỳ

Chú ý:

Nếu gọi h_1 là khoảng cách từ q đến S_1, h_2 là khoảng cách từ q đến S_2, r là khoảng cách từ q đến M, giả sử $h_1 > h_2$:

+ Khi $r < h_2 < h_1$ thì ta không phải soi gương mà áp dụng trực tiếp luật Gass để giải.

+ Khi $h_2 \le r < h_1$ thì ta soi gương qua S_2, không soi gương qua S_1.

+ Khi $h_2 < h_1 \le r$ thì ta soi gương qua cả S_1và S_2.

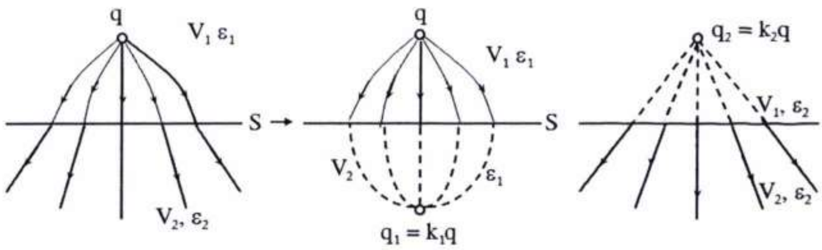
5.3.4. Soi gương qua mặt tiếp giáp giữa 2 môi trường điện môi ε_1 , ε_2

Trong kỹ thuật cũng thường gặp trường hợp một vật mang điện đặt trong không khí cách một sàn sứ hoặc sàn gỗ cách điện... Khi đó, cả hai môi trường ε_1, ε_2 đều tồn tại điện trường $E_1(x, y, z)$, $E_2(x, y, z)$ và điện thế $\varphi_1(x,y,z)$, $\varphi_2(x,y,z)$.

Điều kiện bờ hỗn hợp trên mặt S tiếp giáp hai môi trường là:

$$\varphi_1(S) = \varphi_2(S) \text{ và } \varepsilon_1 \frac{\partial\varphi_1(S)}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial\varphi_2(S)}{\partial n} \tag{5.9}$$

hoặc $E_{1\tau}(S) = E_{2\tau}(S)$ và $D_{1n}(S) = D_{2n}(S)$



Hình 5.11: Phân bố điện trường qua bờ S ngăn cách 2 môi trường và phương pháp soi gương

Ta tìm cách phân tích để giải bài toán bằng phương pháp soi gương. Chú ý rằng dưới tác dụng điện trường, hai điện môi đều bị phân cực với mức độ khác nhau, sự phân cực ấy có tính đối xứng qua một trục hạ từ vật q xuống mặt là S. Do đó tính đối xứng này ta đặt vấn đề khi xét trường trong môi trường 1, đem gộp và thay thế tác dụng của các lưỡng cực trong môi trường 2 bằng một điện tích $q_1 = k_1q$ với hệ số k_1 nào đó đặt đối xứng với q qua mặt S với giả thiết toàn không gian chứa môi trường ε_1. Khi xét trường trong môi trường 2 ta cũng thay tác dụng của điện tích tự do q và lưỡng cực của môi trường 1 bằng một điện tích tự do $q_2 = k_2q$ với hệ số k_2 nào đó đặt ở vị trí của q, với giả thiết toàn không gian là môi trường có ε_2.

Ta đã tìm k_1, k_2 qua điều kiện bờ hỗn hợp (4.9) và được kết quả:

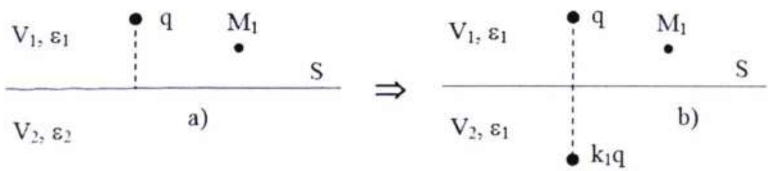
$$k_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}; k_2 = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

Cũng có thể mở rộng phương pháp này cho trường hợp môi trường hai là vật dẫn với điều kiện $\varepsilon_2 = \infty$.

Để dễ hiểu và thuận tiện cho việc giải quyết những bài toán áp dụng phương pháp soi gương qua mặt tiếp giáp giữa 2 môi trường điện môi ε_1, ε_2 ta xét cụ thể với bài toán đặt ra như sau:

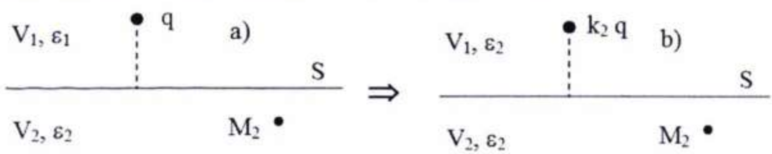
Giả sử có 1 điện tích q đặt trong môi trường ε_1 ngăn cách bởi bờ S tiếp giáp với môi trường ε_2 như Hình 5.12a. Áp dụng phương pháp soi gương khi cần tìm phân bố điện thế và cường độ điện trường tại điểm M_1 thuộc môi trường ε_1 (là môi trường chứa điện tích q hay vật mang điện) ta lấp đầy không gian bài toán bởi môi trường ε_1 và để thoả mãn điều kiện bờ trên S ta phải đặt điện tích

k_1q đối xứng với q qua S. Khi đó điện trường tại M_1 là điện trường do q và k_1q gây ra như Hình 5.12b.



Hình 5.12: Soi gương qua bờ S ngăn cách 2 môi trường điện môi khi M thuộc ε_1

Khi cần tìm điện thế và cường độ điện trường tại điểm M_2 thuộc môi trường ε_2 như Hình 5.13a thì ta lấp đầy không gian bài toán bởi môi trường ε_2 và để thoả mãn điều kiện bờ trên S ta đặt vào vị trí của q một điện tích k_2q (thay q bằng k_2q). Khi đó điện trường tại M_2 do k_2q gây ra như Hình 5.13b.



Hình 5.13: Soi gương qua bờ S ngăn cách 2 môi trường điện môi khi M thuộc ε_2

Chú ý: Nếu khoảng cách từ q đến S lớn hơn khoảng cách từ q đến M_1 thì ta không phải soi gương mà áp dụng trực tiếp luật Gauss để giải.

Ví dụ: Tính cường độ điện trường tại M_1 biết $M_1 \in S$, $M_1 \in \varepsilon_1$, biết a, h và giả thiết $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, q >0 như Hình 5.14a.

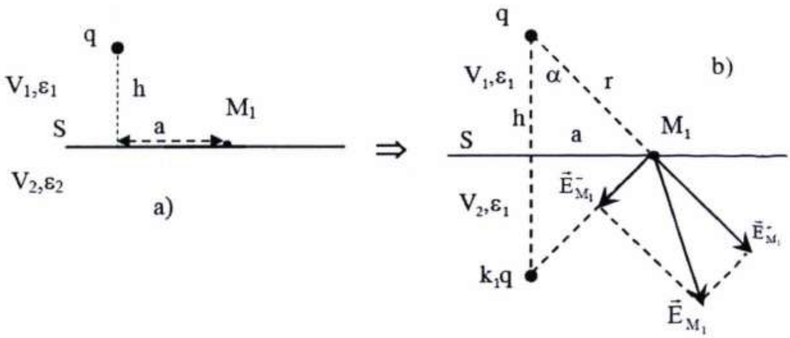
Giải: Áp dụng phương pháp soi gương ta lấp đầy không gian bài toán bởi môi trường ε_1 như Hình 5.14b với: $k_1 = \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} < 0$

Cường độ điện trường tại M_1 được xác định: $\vec{E}_{M_1} = \vec{E}^+_{M_1} + \vec{E}^-_{M_1}$

Trong đó: $$E^+_{M_1} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon(h^2 + a^2)}$$

$$E^-_{M_1} = \frac{|k_1.q|}{4\pi\varepsilon r^2} = \frac{|k_1.q|}{4\pi\varepsilon(h^2 + a^2)}$$

$$E_{M_1} = \sqrt{(E^+_{M_1})^2 + (E^-_{M_1})^2 + 2E^+_{M_1}E^-_{M_1}\cos 2\alpha}$$



Hình 5.14: Soi gương qua bờ S ngăn cách 2 điện môi khi lấp đầy M_1

5.3.5. Soi gương hai mạt trụ tròn dẫn mang điện

Ta đã biết điện trường ứng với 2 trục mang điện trái dấu, các mặt đẳng thế là những mặt trụ tròn ôm lấy 2 trục. Mỗi mặt trụ có bán kính R, tâm X liên hệ với khoảng cách giữa hai trục là 2a theo biểu thức:

$$R^2 = X^2 - a^2$$

Ta sẽ vận dụng kết quả này vào một số bài toán trong thực tế.

a. Điện trường của dây dẫn hình trụ tròn song song mang điện

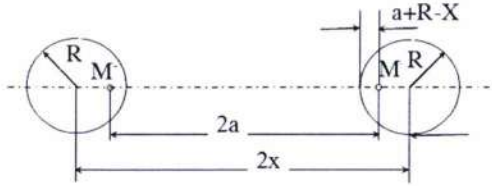
Xét hai vật dẫn hình trụ tròn có bán kính R đặt song song cách nhau khoảng 2X mang điện tích trái dấu $\pm\tau$, ta có một điện trường trong không gian V giới hạn bởi bờ S gồm 2 mặt trụ tròn đẳng thế S_1, S_2. Điều kiện bờ trên S là:

$$\varphi(S_1) = \varphi_1;\ \varphi(S_2) = \varphi_2;\ \oint_{S_{1,2}} D_n dS = \pm\tau \qquad (5.10)$$

Ta đặt vấn đề bỏ hai mặt trụ và lấp đầy không gian bằng môi trường điện môi ε và đặt vào bên trong các mặt hình học S_1, S_2 và hai trục mang điện với mật độ điện tích đường nào đó và cách nhau khoảng 2a nào đó sao cho thoả mãn điều kiện bờ (5.10) trên S_1, S_2. Khi đó trường trong vùng V giới hạn bởi hai mặt S_1, S_2 sẽ đồng nhất với trường của 2 vật trụ tròn.

Từ (5.10) ta thấy phân bố điện tích đường trên các trục bằng $\pm\tau$, khoảng cách 2a giữa 2 trục thay thế là: $2a = 2\sqrt{X^2 + R^2}$

Sau khi thay thế, ta đưa bài toán về dạng đơn giản hơn, đó là bài toán 2 trục mang điện. Từ đó dễ dàng tính được điện áp và điện dung giữa 2 dây.



Hình 5.15: Hai dây dẫn trụ tròn (cùng bán kính) song song mang điện

Dưới tác dụng của 2 trục mang điện, điểm P^+ lấy trên mặt dây, có thế bằng:

$$\varphi_{P^+} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{\overline{P^-M}}{\overline{MP^+}} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{X+a-R}{a-X+R}$$

Do tính đối xứng, điện thế điểm P^- đối xứng với P^+ bằng và ngược dấu với φ_{P^+}. Vậy điện áp giữa 2 dây bằng:

$$u = \varphi_{P^+} - \varphi_{P^-} = 2\varphi_{P^+} = \frac{\tau}{\pi\varepsilon}\ln\frac{\overline{P^-M}}{\overline{MP^+}} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{X+a-R}{a-X+R}$$

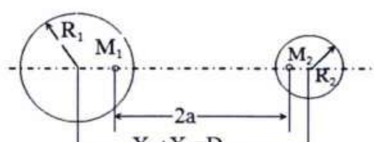
Điện dung giữa 2 dây trên một đơn vị dài là: $C = \dfrac{\tau}{u} = \dfrac{\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{a+X-R}{a-X+R}}$

Ở các đường dây, thông thường $X >> R$, do đó $a \approx X$, khi đó:

$$C = \frac{\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{2X}{R}} = \frac{\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{D}{R}} \qquad \text{với } D = 2X$$

b. Điện trường của hai dây dẫn hình trụ tròn có bán kính khác nhau song song mang điện

Xét 2 dây dẫn hình trụ tròn có bán kính khác nhau ($R_1 \neq R_2$) như Hình 5.16 có 2 trục đặt cách nhau khoảng: $D = X_1 + X_2$. Áp dụng phương pháp soi gương, ta cũng thay thế chúng bằng 2 trục mang điện đặt cách nhau khoảng 2a.



Hình 5.16: Hai dây dẫn trụ tròn khác bán kính song song mang điện

Ta có quan hệ:

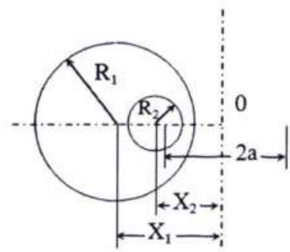
$$\begin{cases} a^2 = X_1^2 - R_1^2 = X_2^2 - R_2^2 \\ X_1 + X_2 = D \end{cases} \quad (5.11)$$

Từ hệ trên ta tìm được các lượng chưa biết, từ đó tìm được khoảng cách giữa 2 trục là 2a và vị trí đặt các trục đó.

c. Điện trường giữa 2 hình trụ không đồng trục lồng lên nhau

Xét 2 hình trụ lồng lên nhau không đồng trục như Hình 5.17, giả thiết bán kính các trụ là $R_1 > R_2$, khoảng cách giữa 2 trục của các trụ là $D = X_1 - X_2$. Áp dụng phương pháp soi gương ta thay thế 2 trụ bằng 2 trục mang điện đặt cách nhau khoảng 2a và có vị trí đặt sao cho 2 mặt trụ là 2 mặt đẳng thế. Ta có các phương trình:

$$a^2 = X_1^2 - R_1^2 = X_2^2 - R_2^2; \quad X_1 - X_2 = D \quad (5.12)$$



Hình 5.17: Hai dây dẫn không đồng trục

Khi biết R_1, R_2, D ta tìm được X_1, X_2, 2a và vị trí đặt các trục. Từ đó có thể tìm được điện áp giữa các dây và điện dung của chúng

Ví dụ: Cho 2 dây dẫn hình trụ tròn có bán kính $R_1 > R_2$ đặt cách nhau khoảng D. Tính điện dung trên một đơn vị chiều dài?

Giải:

Theo phương pháp soi gương, ta phải thay 2 dây dẫn bằng 2 trục cách nhau khoảng 2a. Chọn điểm giữa của đoạn 2a làm gốc, khoảng cách từ gốc 0 đến các trục của dây dẫn là X_1, X_2, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} X_1^2 - X_2^2 = R_1^2 - R_2^2 \\ X_1 + X_2 = D \end{cases}$$

Sau khi biến đổi ta được:

$$X_1 = \frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2D}; X_2 = D - X_1 = \frac{-D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2D}$$

$$a=\sqrt{X_1^2-R_1^2}=\sqrt{X_2^2-R_2^2}=\frac{1}{2D}\sqrt{\left(D^2+R_1^2-R_2^2\right)^2-4R_1^2D^2}$$

Giả thiết các trục mang điện $\pm\tau$, cần tìm thế và áp trên mặt dây. Từ hình vẽ ta có:

$$\overline{1\tau^-}=a+X_1-R_1;\quad \overline{1\tau^+}=2a-\overline{1\tau^-}=a-X_1+R_1$$

$$\overline{2\tau^+}=a+X_2-R_2;\quad \overline{2\tau^-}=2a-\overline{1\tau^+}=a-X_2+R_2$$

Điện thế tại các điểm 1 và 2 là:

$$\varphi_1=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{\overline{1\tau^-}}{\overline{1\tau^+}}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{a+X_1-R_1}{a-X_1+R_1}$$

$$\varphi_2=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{\overline{2\tau^-}}{\overline{2\tau^+}}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{a-X_2+R_2}{a+X_2-R_2}$$

Điện áp: $u_{12}=\varphi_1-\varphi_2=\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\dfrac{\overline{1\tau^-}}{\overline{1\tau^+}}=\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\dfrac{(a+X_1-R_1)(a-X_2+R_2)}{(a-X_1+R_1)(a+X_2-R_2)}$

Điện dung trên một đơn vị chiều dài là:

$$C_0=\frac{\tau}{u}=\frac{2\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{(a+X_1-R_1)(a-X_2+R_2)}{(a-X_1+R_1)(a+X_2-R_2)}}$$

5.3.6. Soi gương qua mặt dẫn hình cầu

Thực tế thường gặp bài toán tính điện trường, điện tích điểm q đặt trước một quả cầu kim loại. Do có quả cầu nên điện trường của điện tích điểm sẽ không còn đối xứng xuyên tâm nữa, mà bị méo đi. Tuy nhiên nó vẫn có tính kinh tuyến và đối xứng qua trục nối giữa điện tích và tâm cầu. Ta xét 3 trường hợp cụ thể sau:

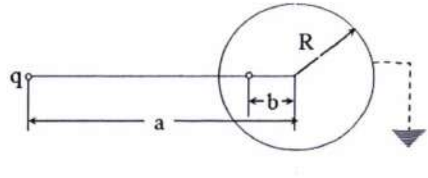
a. Quả cầu nối đất

Khi quả cầu nối đất, điện thế của quả cầu bằng zero, các ống sức xuất phát từ điện tích điểm q sẽ có một phần tận cùng ở vô cùng và một phần tận cùng trên mặt cầu. Khi đó trên mặt cầu sẽ phân bố 1 lượng điện tích q_1 nào đó trái dấu với q (q_1 = - kq).

Giả thiết khoảng cách từ q đến tâm cầu là a, bán kính cầu là R như Hình 5.18.

Điều kiện bờ của bài toán là:

$\varphi(S) = 0$



Hình 5.18: Quả cầu nối đất

hoặc $q_S = \oint_S DdS = -kq$ (với hệ số $k > 0$ chưa biết) (5.13)

Ta thấy rằng hệ số k phụ thuộc vào kích thước quả cầu và khoảng cách từ điện tích điểm đến quả cầu: $k = k(a, R)$.

Để thực hiện bài toán soi gương, ta giả thiết bỏ quả cầu đi, lấp đầy không gian bài toán bằng môi trường đồng nhất ε và đưa thêm vào trong mặt S một điện tích $q_1 = -kq$ có trị số và vị trí đặt sao cho thoả mãn điều kiện bờ. Khi đó, điện trường trong miền V sẽ giống điện trường bài toán ban đầu.

Để tiện ta dùng hệ toạ độ cầu có gốc đặt ở tâm cầu, trục x hướng về phía điện tích q, khi đó điện trường chỉ phụ thuộc vào bán kính r và góc θ. Do tính chất đối xứng nên điên tích q_1 chưa biết cần đặt trên trục z cách tâm cầu một quãng b nào đó cần tìm. Điện thế tại điểm $M(r, \theta)$ ứng với 2 điện tích q và q_1 là:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon r_{qM}} - \frac{kq}{4\pi\varepsilon r_{bM}}$$

Điện thế trên mặt cầu là: $\varphi(S) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_{qM}} - \frac{1}{r_{bM}}\right) = 0$

Hoặc: $kr_{qM} - r_{bM} = k\sqrt{a^2 + R^2 + 2aR\cos\theta} - \sqrt{b^2 + R^2 + 2bR\cos\theta} = 0$

Hoặc $k^2a^2 + k^2R^2 + k^2 2aR\cos\theta = b^2 + R^2 + 2bR\cos\theta$

Phương trình trên đúng với mọi θ bất kỳ nên ta có thể tách thành 2 phương trình:

$$\begin{cases} k^2(a^2 + R^2) = b^2 + R^2 \\ k^2 a = b \end{cases} \quad (5.14)$$

Giải hệ trên ta được k và b cần tìm:

$$k = \frac{R}{a}; \quad b = \frac{R^2}{a} \quad (5.15)$$

b. Bài toán quả cầu không mang điện

Khi quả cầu không nối đất và vốn không mang điện, điện tích trên nó luôn bảo toàn bằng zero và trên mặt cầu có một điện thế nào đó: $\varphi(S) = C \neq 0$. Điều kiện bờ của bài toán là:

$$\varphi(S) = C \text{ hoặc } \oint_S DdS = q_S = 0 \tag{5.16}$$

Theo kết quả ở phân tích trên ta thấy có thể thay thế quả cầu bằng một điện tích $q_1 = -kq$ đặt cách tâm cầu 1 đoạn $b = \frac{R^2}{a}$ và một điện tích $q_2 = -q_1 = kq$ đặt ở tâm quả cầu.

Khi đó, hệ điện tích q, q_1 đảm bảo cho bờ S đẳng thế (bằng zero) điện tích q_2 sẽ xếp chồng thêm một điện thế hằng trên bờ S; các điện tích bọc trong mặt S bằng nhau và trái dấu nhau.

Như vậy, bài toán đã đưa về bài toán đơn giản là tìm cường độ trường trong miền V bên ngoài mặt S ứng với 3 điện tích điểm.

c. Bài toán quả cầu mang điện

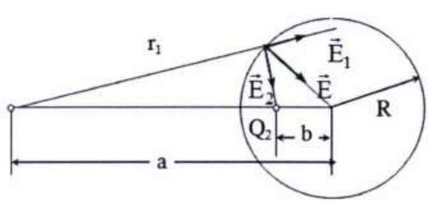
Từ kết quả bài toán quả cầu không mang điện ta suy ra có thể thay thế quả cầu mang điện tích Q, bằng 2 điện tích điểm:

+ Điện tích - kq đặt cách tâm cầu 1 đoạn $b = \frac{R^2}{a}$

+ Điện tích Q + kq đặt ở tâm cầu

Ví dụ: Một điện tích điểm Q_1 đặt cách tâm một quả cầu dẫn có bán kính R một đoạn a, quả cầu được nối đất như Hình 5.19. Tìm phân bố cường độ điện trường trên mặt cầu?

Giải: Thay thế hệ thống bằng cặp điện tích Q_1, $Q_2 = -kQ_1$ với Q_2 cách tâm cầu đoạn $b = \frac{R^2}{a}$. Cường độ trường $\vec{E}$ tại điểm bất kỳ trên mặt cầu bao gồm 2 thành phần E_1,



Hình 5.19: Quả cầu mang điện

E_2 ứng với Q_1, $Q_2 = -kQ_1$ với điều kiện $\vec{E}$ vuông góc với mặt cầu và hướng vào tâm.

Gọi r_1, r_2 là khoảng cách từ M đến Q_1, Q_2 ta có:

$$E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}; \quad E_{21} = \frac{-kQ_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}$$

Vì mặt cầu là đẳng thế nên:

$$\frac{MQ_1}{MQ_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{NQ_1}{NQ_2} = \frac{a-r}{r-b} = \frac{a-r}{r-\frac{r^2}{a^2}} = \frac{a}{r}$$

Sau khi tính toán ta được: $E = \dfrac{Q_1\left(a^2 - r^2\right)}{4\pi\varepsilon_0 r_1^3}$

5.4. PHƯƠNG PHÁP PHÂN LY BIẾN SỐ FOURIER

5.4.1. Nội dung phương pháp

Phương pháp này được ứng dụng để giải các phương trình Laplace - Poisson mô tả bài toán trường nằm trong không gian phụ thuộc vào nhiều biến và ở đó không có phân bố điện tích khối tự do nghĩa là:

Bài toán trường được mô tả bởi phương trình L - P: $\Delta\varphi = 0$ (5.17)

Khi đó ta xét ở từng hệ trục toạ độ:

+ Hệ trục toạ độ Descartes:

$$\Delta\varphi(x,y,x) = 0$$

+ Hệ trục toạ độ trụ:

$$\Delta\varphi(r,\alpha,z) = 0$$

+ Hệ trục toạ độ cầu:

$$\Delta\varphi(r,\alpha,\theta) = 0$$

Để giải các phương trình Laplace - Poisson (phương trình vi phân nhiều biến) trên, theo Fourier ta phân tích:

+ Ở hệ trục toạ độ Descartes:

$$\varphi(x,y,z) = A(x).B(y).C(z) = ABC \quad (5.18)$$

+ Ở hệ trục toạ độ trụ:

$$\varphi(r,\alpha,z) = D(r).E(\alpha).F(z) = DEF \quad (5.19)$$

+ Ở hệ trục toạ độ cầu:

$$\varphi(r,\alpha,\theta) = G(r).H(\alpha).I(\theta) = GHI \quad (5.20)$$

Ví dụ xét ở hệ trục toạ độ Descartes và thay (5.18) vào (5.17) ta được:

$$\frac{\partial^2\varphi(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi(x,y,z)}{\partial z^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 ABC}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 ABC}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 ABC}{\partial z^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow BC\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + AC\frac{\partial^2 B}{\partial y^2} + AB\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} = 0 \quad (5.21)$$

Chia cả 2 vế (5.21) cho ABC ta được:

$$\underbrace{\frac{1}{A}.\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}}_{K_A} + \underbrace{\frac{1}{B}.\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}}_{K_B} + \underbrace{\frac{1}{C}.\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}}_{K_C} = 0$$

$$K_A + K_B + K_C = 0$$

Với các tham số K_A, K_B, K_C phải là các hằng số (giá trị được xác định nhờ dữ liệu của đề bài và điều kiện bờ của bài toán), vậy ta đi giải độc lập 3 phương trình sau:

$$\frac{1}{A}.\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = K_A \quad (5.22)$$

$$\frac{1}{B}.\frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = K_B \quad (5.23)$$

$$\frac{1}{C}.\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} = K_C \quad (5.24)$$

Ta giải phương trình (5.22):

$$\frac{1}{A}\cdot\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = K_A \Leftrightarrow A'' - K_A.A = 0$$

Để giải phương trình này ta lập phương trình đặc trưng:

$k^2 - K_A = 0$ suy ra $k_{1,2} = \pm\sqrt{K_A}$

Suy ra nghiệm của (4.22) có dạng: $A = C_1.e^{+\sqrt{K_A}.x} + C_2.e^{-\sqrt{K_A}.x}$

(với C_1, C_2 được xác định nhờ điều kiện bờ của bài toán)

Tương tự ta giải (5.23) và (5.24) suy ra được B và C. Vậy ta được ngiệm của bài toán: $\varphi(x,y,z) = ABC$

Nhận xét:

- Khi số chiều không gian lớn thì nghiệm sẽ phức tạp.

- Nếu bờ có dạng phức tạp $\rightarrow$ chọn nghiệm và xác định hằng số tích phân rất khó.

Tiện dùng với bài toán có bờ đơn giản, không gian hai chiều mà thôi.

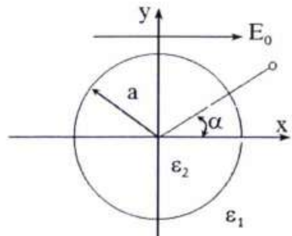
Sau đây ta sẽ sử dụng phương pháp phân ly biến số Fourier để khảo sát một số bài toán thường gặp trong thực tế.

5.4.2. Bài toán ngoại vật hình trụ tròn nằm ngang trong điện trường đều

Đây là bài toán thường gặp trong thực tế, ví dụ một đường dây điện nằm ngang trong điện trường giữa các lớp mây và đất hoặc những sơ dài và mảnh lẫn trong giấy cách điện, trong giấy của tụ điện. Một cách gần đúng ta có thể coi một máy bay, một hoả tiễn, một đoàn tàu đi qua vùng khí quyển hoặc một bọt khí nhỏ, dài lọt vào dầu máy biến áp, trong sứ cách điện... là những ngoại vật trụ tròn.

Khi không có ngoại vật, điện trường trong miền xét là đều và bằng E_0, các mặt đẳng thế song song và phẳng. Khi có ngoại vật thì ở vùng xa ngoại vật, Trường vẫn đều nhưng vùng lân cận và trong ngoại vật Trường không còn đều nữa, có nơi Trường tăng lên, có nơi Trường giảm đi. Mặt đẳng thế không còn song song và phẳng nữa.

Để xét phân bố thế và Trường ở lân cận ngoại vật, ta coi ngoại vật đủ dài, khi đó trên các mặt cắt ngang, sự phân bố Trường là như nhau, ta có Trường song phẳng không phụ thuộc toạ độ trục z của ngoại vật.



Hình 5.20: Ngoại vật hình trụ tròn trong điện trường đều

Giả thiết bán kính của ngoại vật là a, hệ số điện môi của ngoại vật là ε_2 khác với ε_1 của môi trường. Chọn hệ toạ độ trụ tròn như Hình 5.20, phương trình Laplace - Poisson có dạng:

$$\Delta_{r,\alpha}\varphi = \frac{1}{r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} = 0 \qquad (5.24)$$

Theo phương pháp phân ly biến số, ta đặt:

$$\varphi = \Re(r)A(\alpha) \qquad (5.25)$$

Thay (5.25) vào (5.24)

$$\frac{r}{\Re}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Re}{\partial r}\right) + \frac{1}{A}\frac{\partial^2 A}{\partial\alpha^2} = 0 \qquad (5.26)$$

Ta tách được 2 phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{r}{\Re}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial\Re}{\partial r}\right) = n \\ \dfrac{1}{A}\dfrac{\partial^2 A}{\partial\alpha^2} = -n \end{cases} \qquad (5.27)$$

Về mặt vật lý ta thấy nghiệm của bài toán có tính chất chu kỳ đối với góc α với chu kỳ $m2\pi$ (m nguyên):

$$\varphi(r, \alpha) = \varphi(r, \alpha + m2\pi) \qquad (5.28)$$

Muốn vậy, trong phương trình (5.27) n phải có những trị nguyên, dương để nghiệm A có dạng các hàm lượng giác tròn:

$$A(\alpha) = \sum A_p\cos p\alpha + \sum B_p\sin p\alpha \qquad \text{với } p = \pm\sqrt{n} \qquad (5.29)$$

Ngoài ra nghiệm φ của bài toán còn thể hiện tính đối xứng chẵn qua mặt phẳng $\alpha = 0$ và đối xứng lẻ qua mặt phẳng $\alpha = \pi/2$ tức là:

$$\varphi(\alpha) = \varphi(-\alpha) \text{ và } \varphi(\alpha) = -\varphi(\pi - \alpha) \qquad (5.30)$$

Từ các điều kiện trên ta rút ra trong biểu thức (4.29):

$B_P = 0$; $A_P = 0$ với mọi $p \neq 1$

Vậy: $A(\alpha) = A_1\cos\alpha \qquad p = \pm 1; n = 1$

Từ phương trình 1 của hệ (5.27) với n = 1 ta có thể đặt nghiệm $\Re$ cần tìm dưới dạng: $\Re = B_k r^k$. Thay vào (5.27) ta có:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}B_k r^k\right) = k^2 B_k r^k = nB_k r^k$$

Vậy điều kiện của k là: $k^2 = n = 1 \Rightarrow k = \pm 1$

Nghiệm của $\Re$ là: $\Re = B_1^+ r + B_1^- r \qquad (5.31)$

Thay (5.29), (5.31) vào (5.25) ta có:

$$\varphi = A_1 B_1^+ r\cos\alpha + A_1 B_1^- r^{-1}\cos\alpha = C^+ r\cos\alpha + C^- r^{-1}\cos\alpha$$

Gọi thế ở vùng ngoài là φ_1, thế ở vùng trong là φ_2

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1 &= C_1^+ r\cos\alpha + C_1^- r^{-1}\cos\alpha\\ \varphi_2 &= C_2^+ r\cos\alpha + C_2^- r^{-1}\cos\alpha\end{aligned}\right\} \qquad (5.32)$$

Trong đó các hệ số $C_1^+, C_1^-, C_2^+, C_1^-$ được xác định từ điều kiện bờ của bài toán. Ở vùng xa ngoại vật điện trường vẫn đều, $E = E_0$: $\varphi_{1xa} = -E_0 x = -E_0 r\cos\alpha$

Thay vào (5.32) ta được: $C_1^+ = -E_0$

$$\varphi_1 = -E_0 r\cos\alpha + C_1^- r^{-1}\cos\alpha \qquad (5.33)$$

Xét vùng trong và lân cận gốc toạ độ, Trường vẫn hữu hạn, do đó hệ số C_2^- trong biểu thức (5.32) phải triệt tiêu:

$$C_2^- = 0 \Rightarrow \varphi_2 = C_2^+ r\cos\alpha \qquad (5.34)$$

Các điều kiện bờ hỗn hợp trên mặt tiếp giáp 2 môi trường (với r = a) là:

$$\varphi_1(a) = \varphi_2(a) \text{ và } \varepsilon_1 \frac{\partial\varphi_1(a)}{\partial r} = \varepsilon_2 \frac{\partial\varphi_2(a)}{\partial r}$$

Thay vào (5.33) và (5.34) ta có:

$$\begin{cases} \left(-E_0 a + C_1^- a^{-1}\right)\cos\alpha = C_1^+ a \cos\alpha \\ \varepsilon_1\left(-E_0 - C_1^- a^{-2}\right)\cos\alpha = \varepsilon_2 C_2^+ \cos\alpha \end{cases}$$

Hay
$$\begin{cases} \left(-E_0 + C_1^- a^{-2}\right) = C_1^+ \cos\alpha \\ \left(-E_0 - C_1^- a^{-2}\right) = \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} C_2^+ \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được các hằng số tích phân:

$$C_1^- = -E_0 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}; \quad C_2^+ = -E_0 \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

Cuối cùng ta được:

$$\begin{cases} \varphi_1 = -E_0\left(1 - \dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\dfrac{a^2}{r^2}\right) r\cos\alpha \quad \text{Với } r \ge a \\ \varphi_2 = -E_0 \dfrac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} r\cos\alpha \qquad \text{Với } r \le a \end{cases} \tag{5.35}$$

Từ đó ta tính được phân bố cường độ Trường theo quan hệ:

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}; \quad E_\alpha = -\frac{\partial\varphi}{r\partial\alpha}$$

+ Đối với vùng ngoài (r ≥ a) ta có:

$$E_{1r} = E_0\left(1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{a^2}{r^2}\right)\cos\alpha; \quad E_{1\alpha} = -E_0\left(1 - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{a^2}{r^2}\right)\sin\alpha \tag{5.36}$$

+ Đối với vùng trong vật (r ≤ a)

$$E_{2r} = E_0 \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\cos\alpha; \quad E_{1\alpha} = -E_0 \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\sin\alpha \tag{5.37}$$

và do đó:
$$E_2 = E_{2z} = E_0 \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \tag{5.38}$$

Nhận xét: Từ các biểu thức (5.36), (5.38) ta thấy:

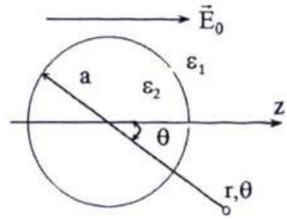
- Bên trong ngoại vật, điện trường phân bố đều và có giá trị lớn hơn điện trường E_0 khi $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, nhỏ hơn E_0 khi $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$.

- Vùng ngoài và gần vật, điện trường bị méo. Ở vùng đủ xa vật (r >> a) điện trường trở nên đều đặn hơn.

5.4.3. Bài toán ngoại vật hình cầu trong điện trường đều

Bài toán này cũng thường gặp trong thực tế. Ví dụ những tạp chất như cát, bụi, bọt khí lẫn vào vật liệu cách điện, dầu biến áp...

Chọn hệ toạ độ cầu có gốc đặt ở tâm ngoại vật và trục z đặt song song với $\vec{E}_0$ như Hình 5.21, khi đó phân bố thế không phụ thuộc vào góc phương vị α mà chỉ phụ thuộc góc tà θ. Vì vậy cường độ trường chỉ có thành phần E_Z, E_θ mà không có thành phần E_α.



Hình 5.21: Ngoại vật hình cầu trong điện trường đều

Phương trình Laplace - Poisson có dạng:

$$\Delta_{r,\theta}\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) = 0$$

hoặc $$\frac{r\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) = 0 \tag{5.39}$$

Để giải bằng phương pháp phân li biến số, ta đặt nghiệm dưới dạng:

$$\varphi = \Re(r)\Theta(\theta) \tag{5.40}$$

Thay vào (5.39) và biến đổi ta được:

$$\frac{r}{\Re}\frac{\partial^2(r\Re)}{\partial r^2} + \frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) = 0$$

Từ đó rút ra:

$$\begin{cases} \dfrac{r\partial^2(r\Re)}{\partial r^2} = -n\Re \\ \dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) = n\Theta\sin\Theta \end{cases} \tag{5.41}$$

Phương trình thứ 2 của hệ (5.41) là một phương trình tuyến tính có hệ số biến thiên, vì vậy ta đặt nghiệm dưới dạng các điều hoà sinkθ, coskθ. Mặt khác ta thấy điện trường có tính đối xứng đổi dấu qua mặt phẳng $\theta = \frac{\pi}{2}$ tức nếu ta đặt $\varphi\left(r, \pi/_2\right) = 0$ thì $\varphi(r\theta) = -\varphi(r, \pi - \theta)$. Vì vậy ta phải loại bỏ nghiệm sinkθ và nghiệm hằng, còn nghiệm coskθ phải loại bỏ các trường hợp $k \neq \pm 1$.

Với $k = \pm 1$ và $\Theta = A\cos\theta$ thay vào (4.41) ta có được: $n = -2$ (5.42)

Thay (5.42) vào (5.41)

$$\frac{r\partial^2(r\Re)}{\partial r^2} = 2\Re \tag{5.43}$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính, đặt $\Re = B_l r^l$, khi đó:

$$\frac{r\partial^2\left(B_l r^{l+1}\right)}{\partial r^2} = B^l(l+1)lr^l \tag{5.44}$$

Ở đây để lấy được đạo hàm cấp 2 theo r thì cần điều kiện: $-2 \leq l \leq 1$

Từ (5.43) và (5.44) ta có: $B^l(l+1)lr^l = 2\Re$

Từ biểu thức $\Re = B_l r^l$ ta rút ra: $(l + 1)l = 2$

Giải ra được $l = 1$ và $l = -2$. Vậy nghiệm của phương trình (5.43) có dạng:

$$\Re = B_1^+ r + B_2^- r^{-2} \tag{5.45}$$

Kết hợp (5.42) và (5.45) ta được nghiệm tổng quát φ của bài toán:

$\varphi(r,\theta) = C^+ r\cos\theta + C^- r^{-2}\cos\theta$

Hàm thế ở vùng ngoài và vùng trong ngoại vật là:

$$\begin{cases} \varphi_1(r,\theta) = C_1^+ r\cos\theta + C_1^- r^{-2}\cos\theta \\ \varphi_2(r,\theta) = C_2^+ r\cos\theta + C_2^- r^{-2}\cos\theta \end{cases} \tag{5.46}$$

Để xác định các hằng số tích phân, cần phải căn cứ các điều kiện bờ ở gốc, ở vùng xa ngoại vật và trên bề mặt ngoại vật.

- Ở gốc ta có phân bố thế là: $\varphi(0)$ = hữu hạn.

- Ở vùng xa vô cùng phân bố thế là: $\varphi = -E_0 r\cos\theta$

- Điều kiện bờ hỗn hợp trên mặt ngoại vật là:

$$\varphi_1(a,\theta) = \varphi_2(a,\theta); \qquad \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1(a,\theta)}{\partial r} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2(a,\theta)}{\partial r}$$

Ta tính được các hằng số tích phân:

$$\begin{cases} C_1^+ = -E_0 \\ C_1^- = E_0 \dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} a^3 \\ C_2^+ = -E_0 \dfrac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} \\ C_2^- = 0 \end{cases}$$

Cuối cùng ta được:

$$\begin{cases} \varphi_1(r,\theta) = -E_0 \left(1 - \dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} \dfrac{a^3}{r^3}\right) r\cos\theta & \text{ở } r \geq a \\ \varphi_2(r,\theta) = -E_0 \dfrac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} r\cos\theta & \text{ở } r \leq a \end{cases}$$

5.5. PHƯƠNG PHÁP VẼ LƯỚI ĐƯỜNG SỨC - ĐẲNG THẾ

Ta đã biết, có thể mô tả Điện trường tĩnh bằng họ các đường sức và đẳng thế. Vì vậy, để tìm được phân bố thế của Trường (hay nói cách khác là để tìm nghiệm của phương trình Laplace - Poisson) ta tìm cách vẽ lưới các đường sức và đẳng thế. Từ lưới đó có thể tìm được các thông số khác của Điện trường tĩnh. Phương pháp này dựa trên những phân tích về lưới các tứ giác vuông cong hợp bởi các đẳng thế và đường sức. Ta xét cho 2 trường hợp đơn giản là điện trường song phẳng và điện trường kinh tuyến.

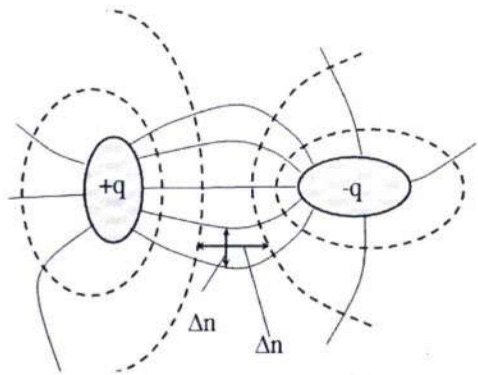
5.5.1. Trường hợp điện trường song phẳng

Điện trường song phẳng là điện trường tạo bởi hai điện cực hình trụ thẳng, dài, song song mang điện. Lưới các tứ giác vuông cong của điện trường song phẳng có các tính chất sau:

+ Mặt trụ dẫn trùng với một đẳng thế và do đó đường sức phải vuông góc với mặt này.

+ Các tứ giác phải đồng dạng nhau, tức tỷ số giữa chiều ngang và chiều dài trung bình $\frac{\Delta S}{\Delta n}$ trong mỗi tứ giác đều bằng nhau.

Đó là kết quả việc qui ước vẽ các đẳng thế cách nhau một lượng Δu như nhau và các đường (ống) sức với thông lượng Δq giống nhau. Thật vậy ở lân cận một điểm M bất kỳ có điện trường E(M), với



Hình 5.22: Điện trường song phẳng

cách vẽ như Hình 5.22 khoảng cách trung bình Δn giữa các đẳng thế thoả mãn $\Delta u = E(M)\Delta n$ và bề ngang ống sức Δs thoả mãn $\varepsilon E(M)\Delta s = \Delta q$.

Do đó với mọi điểm M ta có:

$$\frac{\Delta q}{\Delta n} = \frac{\varepsilon \Delta s}{\Delta n} = \text{const}$$

Dựa vào các tính chất ấy, ta vẽ dần họ các đẳng thế và đẳng sức vẽ một lần rồi căn cứ theo tính chất đồng dạng các tứ giác mà sửa đi sửa lại cho đến khi các đường cong bảo đảm tính chất đã nêu.

Căn cứ theo kết quả vẽ cũng có thể tính điện dung trên đơn vị dài, nó bằng tỷ số giữa điện tích trên đơn vị dài với điện áp hai cực: $C = \frac{\tau}{u}$.

Theo luật Gauss, điện tích trên đơn vị dài bằng thông lượng vector: $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ chảy ra khỏi một đơn vị dài mặt trụ. Nếu gọi $\Delta \Psi_D$ là thông lượng vector $\vec{D}$ trong một ống sức lấy trên một đơn vị dài các điện cực và tất cả vẽ được m ống sức thì: $\tau = m\Delta\Psi_D = m\,\varepsilon E\,\Delta s$.

Gọi Δu là điện áp giữa hai đẳng thế kề nhau, tất cả có n điện áp như vậy thì:

$$u = n\Delta u = nE\Delta n$$

Do đó: $$C = \frac{\tau}{u} = \varepsilon\frac{mE\Delta s}{nE\Delta n} = \varepsilon\frac{m}{n}k \qquad (5.47)$$

Trong đó k là tỷ số các cạnh của tứ giác.

Theo phương trình (5.47) ta chỉ việc đếm số ống sức m, số đẳng thế n và đo tỷ số k là tính được C. Ví dụ cho các thông số: $m = 10$, $n = 4$, $k = 1$, $\varepsilon = \varepsilon_o$

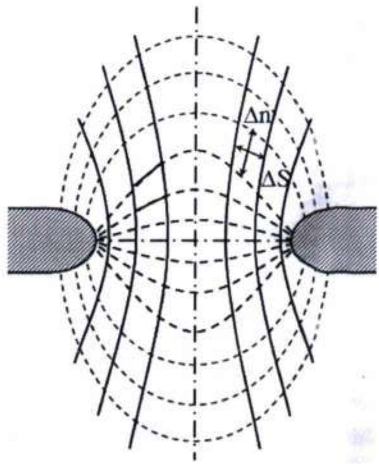
$$\rightarrow C = \frac{10}{4}.1.\,\varepsilon_o \approx 2{,}5.4\pi.10^{-11}\ (F/m)$$

5.5.2. Trường hợp điện trường kinh tuyến

Điện trường kinh tuyến là điện trường tạo bởi 2 điện cực mang điện hình trụ đặt đối diện nhau. Phương pháp vẽ lưới đường sức đẳng thế gần giống như điện trường song phẳng, với các qui tắc:

+ Các mặt dẫn là đẳng thế, các đường sức phải vuông góc mặt điện cực.

+ Khác với Trường song phẳng, Trường kinh tuyến có lưới các tứ giác vuông trên mặt kinh tuyến không đồng dạng nhau. Gọi Δn là khoảng cách trung bình giữa hai đẳng thế lấy ở quanh điểm M với Δs là bề ngang trung bình ống sức ở đó, gọi r là khoảng cách từ M đến trục đối xứng của Trường, ta có quan hệ giữa tỷ số $\frac{\Delta n}{\Delta s}$ và r như sau:



Hình 5.23: Điện trường kinh tuyến

$$\frac{\Delta s}{\Delta n} = \frac{k}{r} \qquad (5.48)$$

Gọi Δu, Δn là điện áp và khoảng cách giữa hai đẳng thế kề nhau ở quanh điểm M(r) và E là cường độ điện trường ở đó, ta có:

$$\Delta u = E.\,\Delta n$$

Gọi $\Delta\Psi$, ΔS là thông lượng dịch chuyển điện và tiết diện ngang của một ống sức hình trụ lấy ở quanh điểm M(r), gọi Δs là bề ngang ống sức, ta có:

$$\Delta\Psi = \varepsilon E.\ \Delta S = \varepsilon E.2\pi r.\Delta s$$

Với qui ước lấy Δu, $\Delta\Psi$ đều đặn, ta có:

$$\text{const} = \frac{\Delta\psi}{\Delta u} = \frac{2\pi\varepsilon r.\Delta s}{\Delta n} \text{ hoặc } \frac{\Delta S}{\Delta n} = \frac{\text{const}}{2\pi\varepsilon r} = \frac{k}{r} \qquad (5.49)$$

Sau khi vẽ và sửa nhiều lần, ta được một lưới các đẳng thế và đường sức. Từ đó cũng có thể tìm được điện dung hai điện cực tính theo số ống sức và đẳng thế.

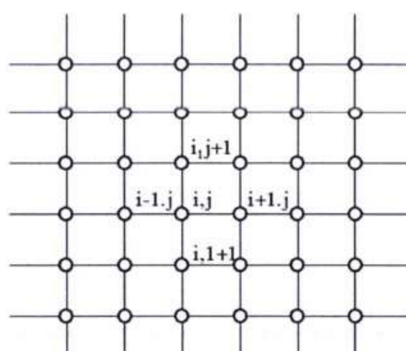
$$C = \frac{\tau}{u} = \frac{m\Delta\psi}{n.\Delta u} = \frac{m}{n} 2\pi r.\varepsilon \frac{\Delta s(r)}{\Delta n} = \frac{m}{n} 2\pi\varepsilon.k \qquad (5.50)$$

Trong đó tỉ số $\dfrac{\Delta s(r)}{\Delta n}$ phải ghi rõ được lấy ở bán kính r nào.

5.6. PHƯƠNG PHÁP LƯỚI TÍNH GẦN ĐÚNG

Phương pháp lưới là một trong những phương pháp quan trọng vì: dễ tính toán; áp dụng được cho các bài toán có bờ phức tạp và tiện lập trình trên máy tính. Nội dung cơ bản của phương pháp là sai phân hoá phương trình Laplace - Poisson, sau đó dùng phương pháp số tính gần đúng dần từng bước sự phân bố thế φ trên các nút lưới.

Có nhiều cách sai phân với độ chính xác khác nhau. Trong hệ toạ độ Descartes cách sai phân đơn giản nhất (kém chính xác nhất) là sai phân theo lưới chữ nhật, tức là thay thế gần đúng vi phân dx, dy, ... trong không gian bằng các sai phân nhỏ $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$; $\Delta y_j = y_{j+1} - y_{j-}$, ...



Hình 5.24: Minh họa phương pháp lưới

Ví dụ trong không gian 2 chiều, hàm liên tục $\varphi(x,y)$ được thay thế gần đúng bằng hàm rời rạc

φ_{ij} phân bố rời rạc ở các nút lưới. Tương ứng các vi phân riêng theo x, y, $d_x\varphi$, $d_y\varphi$ sẽ thay gần đúng bằng các số gia:

$$\Delta_x \varphi_{ij} = \varphi_{i+1,j} - \varphi_{ij}$$

$$\Delta_y \varphi_{ij} = \varphi_{i,j+1} - \varphi_{ij}$$

Các đạo hàm riêng thay bằng thương các số gia:

$$\frac{\Delta\varphi_{ij}}{\Delta x} = \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{ij}}{\Delta x}; \quad \frac{\Delta\varphi_{ij}}{\Delta y} = \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{ij}}{\Delta y};$$

$$\frac{\Delta^2\varphi_{ij}}{\Delta x^2} = \frac{(\varphi_{i+1,j} - \varphi_{ij}) - (\varphi_{ij} - \varphi_{i,j})}{\Delta x^2} = \frac{\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j} - 2\varphi_{ij}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\Delta^2\varphi_{ij}}{\Delta y^2} = \frac{(\varphi_{i,j+1} - \varphi_{ij}) - (\varphi_{ij} - \varphi_{ij-1})}{\Delta y^2} = \frac{\varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{ij}}{\Delta y^2}$$

Chọn $\Delta x = \Delta y = h$ (h gọi là bước sai phân), phương trình Laplace - Poisson không gian hai chiều được thay thế gần đúng bằng:

$$\frac{\Delta^2\varphi_{ij}}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2\varphi_{ij}}{\Delta y^2} = \frac{\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{ij+1} + \varphi_{i,j-1} - 4\varphi_{ij}}{h^2} = 0$$

Biến đổi ta được: $\varphi_{ij} = \frac{1}{4}(\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{1,j+1} + \varphi_{i,j-1})$ (5.51)

Vậy một hàm rời rạc nghiệm gần đúng phương trình sai phân Laplace - Poisson trong hệ toạ độ lưới vuông hai chiều có tính chất tổng các giá trị nghiệm ở 4 nút xung quanh bằng 4 lần giá trị nghiệm ở nút giữa. Trường hợp không gian ba chiều cũng như vậy.

Suy ra nội dung cơ bản của phương pháp lưới là bằng cách nào đó (ví dụ bằng phương pháp lặp) tìm dần ra sự phân bố hàm φ_{ij} trên các nút lưới sao cho hàm rời rạc φ_{ij} thoả mãn (5.51), trên các nút và thoả mãn điều kiện bờ đã cho (cũng rời rạc) theo Dirichlet hoặc Neumann. Đầu tiên theo sự phân bố thế trên bờ 100% và 0% ta cho phỏng chừng một sự phân bố thế ở các nút. Dĩ nhiên số liệu lần đầu φ^1 không đúng ngay (5.51) được. Phải hiệu đính dần cho đến khi sai lệch giữa φ_i ở mỗi nút với giá trị trung bình 4 phía đến giá trị cho phép thì thôi.

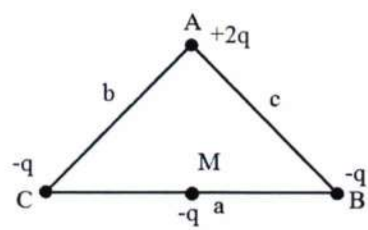
Có thể hiệu đính theo phương pháp lặp. Muốn thế áp dụng (5.51) dùng trị số thế φ^1 lần đầu ghi ở các nút tính ra trị số lần 2. φ_{ij}^2, tiếp tục lần 3: φ_{ij}^3,... Đến lần thứ n nào đó có độ chính xác đủ là được.

Về nguyên tắc có thể chọn tuỳ ý φ_{ij}^1, tuy nhiên nếu chọn càng khéo thì số bước tính sẽ càng ít. Muốn tính chính xác, thông thường lần đầu tiên ta chọn h lớn, về sau chọn h nhỏ đi và tiếp tục cho đến đến khi đạt kết quả mong muốn.

CÂU HỎI ÔN TẬP CHƯƠNG 5

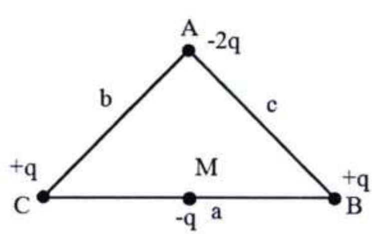
5.1. Các phương pháp giải bài toán điện trường tĩnh (giải phương trình Laplace - Poisson) có thể dùng cho bài toán điện trường dừng hay không? Tại sao?

5.2. Cho 3 điện tích q đặt tại 3 đỉnh của một tam giác cân và một điện tích q đặt tại trung điểm M của cạnh BC như hình 5.25. Biết q = 100C và toàn bộ không gian xét có $\varepsilon = 6.10^5 \mu F/m$; cạnh BC = a = 100cm và góc A = 120^0. Hãy tính vector cường độ điện trường và điện thế tại trọng tâm của tam giác?



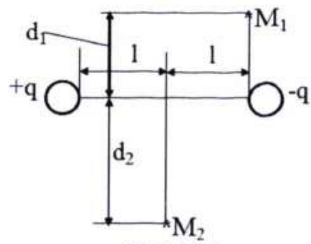
Hình 5.25

5.3. Cho 3 điện tích q đặt tại 3 đỉnh của một tam giác cân và một điện tích q đặt tại trung điểm M của cạnh BC như hình 5.26. Biết q = 500C và toàn bộ không gian xét có $\varepsilon = 4.10^5 \mu F/m$; cạnh AC = b = 100cm và góc A = 120^0. Hãy tính vector cường độ điện trường và điện thế tại trọng tâm của tam giác?



Hình 5.26

5.4. Cho 2 quả cầu điện tích có bán kính r_0 =10cm mang mang điện tích q = 1000C, được đặt trong môi trường có ε = 0,05 F/m như hình 5.27.

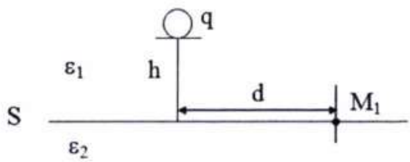


Hình 5.27

1. Hãy tính cường độ điện trường và điện thế tại điểm M_1, biết l = 50cm và d_1 = 30cm.

2. Hãy tính cường độ điện trường và điện thế tại điểm M_2, biết d_2 = 20cm.

5.5. Cho 1 quả cầu điện tích có bán kính r_0 = 6cm mang mang điện tích q = 100C, được đặt trong không gian 2 môi trường điện môi $\varepsilon_1 = 10^5 \mu F/m$ và $\varepsilon_2 = 2.10^5 \mu F/m$ như hình 5.28

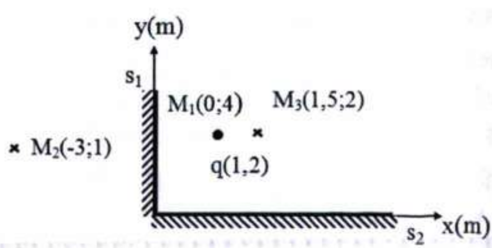


Hình 5.28

1. Hãy tính cường độ điện trường tại điểm M_1 nằm trên bờ S thuộc môi trường ε_1, biết h = 10cm và d = 18cm.

2. Nếu gắn vào hề trục toạ độ xoy thì M_1 có toạ độ: $M_1(d, 0)$. Hãy tính cường độ điện trường tại điểm $M_2(\frac{d}{2}, h)$.

5.6. Cho một điện tích điểm q=100C đặt trong môi trường ε_0. Nếu gắn vào hệ toạ độ xoy thì điện tích q và các điểm M như hình 5.29. Hãy tính cường độ điện trường và điện thế tại M_1; M_2 và M_3



Hình 5.29

Chương 6

TRƯỜNG ĐIỆN TỪ DỪNG

6.1. KHÁI NIỆM

Trường điện từ dừng là Trường điện từ có kèm theo phân bố dòng điện không đổi trong các môi trường dẫn đứng yên trong một hệ qui chiếu. Khi đó các trạng thái của Trường không biến thiên theo thời gian $\left(\partial/\partial t = 0\right)$ nhưng vẫn có dòng điện và quá trình tiêu tán trong môi trường dẫn. Các hệ phương trình Maxwell của Trường điện từ dừng trong các môi trường được viết như sau:

+ Điện trường dừng:

- Trong môi trường dẫn:

$$\text{Rot}\vec{E} = 0, \quad \text{Div}\vec{J}_d = 0, \quad \vec{J}_d = \gamma\vec{E} \tag{6.1}$$

- Trong điện môi:

$$\text{Rot}\vec{E} = 0, \quad \text{Div}\vec{D} = 0, \quad \vec{D} = \varepsilon\vec{E} \tag{6.2}$$

+ Từ trường dừng:

$$\text{Rot}\vec{H} = 0, \quad \text{Div}\vec{B} = 0, \quad \vec{B} = \mu\vec{H} \tag{6.3}$$

Các phương trình trên nêu rõ, điện trường dừng không liên quan đến từ trường dừng (các phân bố của $\vec{E}, \vec{D}$ không phụ thuộc vào sự phân bố của $\vec{B}, \vec{H}$) do đó có thể xét riêng Điện trường dừng. Cũng vậy khi xét Từ trường dừng ta chỉ cần gắn nó với sự phân bố của dòng điện dẫn mà không cần gắn nó với toàn bộ phân bố của Điện trường dừng.

6.2. ĐIỆN TRƯỜNG DỪNG TRONG VẬT DẪN

6.2.1. Điều kiện duy trì điện trường dừng trong vật dẫn

Khác với Điện trường tĩnh là các hạt không chuyển động, Điện trường dừng trong vật dẫn gắn liền với dòng dẫn không đổi nên phải có hai điều kiện:

- Điều kiện về bờ: môi trường dẫn phải khép kín cho một nguồn.

- Điều kiện về nguồn: phải tồn tại các nguồn có khả năng cung cấp năng lượng một cách thường xuyên và không đổi truyền đến tiếp cho các hạt mang điện tự do thuộc kết cấu môi trường dẫn.

6.2.2. Các tính chất của điện trường dừng

Sự tồn tại Điện trường dừng trong vật dẫn thể hiện sự tác động lực và cung cấp năng lượng cho các điện tích tự do chảy trong vật dẫn. Do đó thường kèm theo một quá trình tiêu tán năng lượng điện từ biến thành nhiệt năng.

Công suất tiêu tán năng lượng trong một đơn vị thể tích vật dẫn:

$$p_o = EJ = \gamma E^2 = \frac{J^2}{\gamma}$$

Trong một khối dẫn khi lấy tích phân ta sẽ được: $P = \int_V p_0 dV = ui$

Đối với Điện trường dừng thành phần dòng dịch bằng không, nên dòng dẫn phải chảy liên tục. Đường sức vector mật độ dòng dẫn là những đường cong khép kín không có điểm bắt đầu và điểm tận cùng, được miêu tả bằng phương trình:

$$\mathrm{Div}\,\vec{J}_d = 0$$

Nếu chỉ xét môi trường dẫn là nơi có dòng điện và tiêu tán, không xét đến nguồn, các hạt mang điện luôn chảy thành dòng không đổi theo thời gian từ đầu này đến đầu kia. Điều này nói lên tính chất thế của Điện trường dừng trong vật dẫn và khả năng biểu diễn Điện trường đó bằng một hàm thế vô hướng φ. Về mặt toán học, tính chất thế của Điện trường dừng được miêu tả bởi phương trình:

$$\mathrm{Rot}\,\vec{E} = 0; \qquad \vec{E} = -\,\mathrm{Grad}\varphi$$

Đối với Điện trường dừng trong điện môi bao quanh vật dẫn, về bản chất không khác với Điện trường tĩnh trong điện môi nên về cơ bản các qui luật, hiện tượng, phương trình, phương pháp tính cũng giống như trong Điện trường tĩnh đã khảo sát.

6.2.3. Phương trình cho thế φ và điều kiện bờ

Từ các phương trình (6.1) và (6.2) ta dễ dàng rút ra phương trình tổng quát của Điện trường dừng viết cho thế vô hướng φ là:

$$\text{DivGrad}\ \varphi = \Delta\varphi = 0 \tag{6.4}$$

Tức là nội dung việc tính toán Điện trường dừng thông qua hàm thế φ là giải bài toán bờ theo phương trình Laplace - Poisson (6.4).

Ta tìm điều kiện bờ hỗn hợp trên mặt phân chia hai môi trường dẫn:

- Từ phương trình Rot $\vec{E} = 0$, suy ra:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau} \text{ hay } \frac{\partial\varphi_1(S)}{\partial\tau} = \frac{\partial\varphi_2(S)}{\partial\tau} \tag{6.5}$$

+ Từ phương trình Div $\vec{J} = 0$, suy ra:

$$J_{1n} = J_{2n} \Leftrightarrow \gamma_1 E_{1n} = \gamma_2 E_{2n} \Leftrightarrow \gamma_1 \frac{\partial\varphi_1(S)}{\partial n} = \gamma_2 \frac{\partial\varphi_2(S)}{\partial n} \tag{6.6}$$

Trong trường hợp riêng trên bờ tiếp giáp vật dẫn 1 và điện môi lý tưởng 2 có $\gamma_2 = 0$, $J_2 = 0$ các điều kiện bờ trở thành:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}\ ;\ E_{1n} = 0\ ;\quad J_{1n} = J_{2n} = 0 \tag{6.7}$$

Giống như đối với trường tĩnh có thể chứng minh rằng thành phần pháp của vector dịch chuyển điện trong điện môi lấy trên mặt tiếp giáp với vật dẫn bằng mật độ mặt của điện tích:

$$D_{2n} = \sigma \tag{6.8}$$

6.2.4. Thông số về tiêu tán của một vật dẫn ở điện trường dừng

Trong thực tế nhiều khi chỉ cần biết về quan hệ giữa điện áp u, dòng i và công suất p trên toàn vật dẫn mà không cần biết hoàn toàn về φ(x,y,z) và $\vec{J}(x,y,z)$. Do đó, đặc trưng hành vi toàn cuộc ở Điện trường dừng của một vật dẫn cụ thể đặt giữa hai điện cực cụ thể bằng một thông số toàn cục là điện dẫn g hoặc nghịch đảo của nó là điện trở r: $r = \dfrac{1}{g}$. Theo luật Joule - Lenz ta định nghĩa:

$$r = \frac{p}{i^2} \text{ và } g = \frac{1}{r} = \frac{i^2}{p} \tag{6.9}$$

Trong Trường dừng p = ui = const.

$$r = \frac{u}{i} = \frac{\int_L \vec{E}d\vec{l}}{\int_S \gamma\vec{E}d\vec{S}} \tag{6.10}$$

Ở tử thức tích phân lấy theo một đường L tuỳ ý đi từ cực có thế cao hơn đến cực có thế thấp hơn. Tích phân ở mẫu lấy trên một mặt S tiết diện bất kỳ, cắt mọi đường dòng $\vec{J}$, $\vec{E}$ trong vật dẫn.

6.2.5. Sự tương tự giữa điện trường dừng với điện trường tĩnh

So sánh phương trình và luật bờ của điện trường dừng trong vật dẫn với phương trình và luật bờ của điện trường tĩnh trong điện môi, ta thấy có sự tương tự về toán học, như bảng 5.1:

Phân tích sự giống nhau trên ta suy ra hai kết luận sau:

+ Tất cả các phương pháp tính Điện trường tĩnh đã nêu ở chương 5 đều có thể áp dụng để tính Điện trường dừng.

+ Có thể dùng Điện trường dừng làm mô hình (mô hình toán học) để giải các bài toán về Điện trường tĩnh.

Thông số	**Điện trường dừng trong vật dẫn**	**Điện trường tĩnh trong điện môi**
Thông số	$\vec{E}, \varphi, \gamma, \vec{J} = \gamma\vec{E}$	$\vec{E}, \varphi, \varepsilon, \vec{D} = \varepsilon\vec{E}$
Phương trình	Rot $\vec{E}$ = 0; $\vec{E}$ = - Grad φ	Rot $\vec{E}$ = 0 hay $\vec{E}$ = - Grad φ
	Div $\vec{J}$ = 0	Div $\vec{D}$ = 0
	DivGrad φ = 0	DivGrad φ = 0
Điều kiện bờ	$E_{1\tau} = E_{2\tau}$	$E_{1\tau} = E_{2\tau}$
	$J_{1n} = J_{2n}$	$D_{1n} = D_{2n}$

6.3. ĐIỆN TRỞ CÁCH ĐIỆN

Trên thực tế các vật liệu cách điện đều có điện dẫn suất $\gamma \neq 0$, nên có dòng điện rò chảy qua. Do đó phải tìm điện trở cách điện r hoặc điện dẫn rò g giữa hai vật dẫn: $r = \frac{u}{i}$; $g = \frac{i}{u}$

Với u là điện áp giữa hai vật dẫn; i dòng điện rò giữa chúng.

Việc tính đường dẫn rò giống hệt việc tính điện dung.

$$g = \frac{i}{u} = \frac{\gamma \oint\limits_S \vec{E} d\vec{S}}{\int\limits_L \vec{E} d\vec{l}} \; ; \; C = \frac{q}{u} = \frac{\varepsilon \oint\limits_S \vec{E} d\vec{S}}{\int\limits_L \vec{E} d\ell}$$

Ví dụ: Biết biểu thức điện dung của một tụ hình trụ tròn hai lớp điện môi ε_1, ε_2 có bán kính lõi a_1, bờ tiếp giáp hai điện môi a_2 , bờ tiếp giáp điện môi 2 với vỏ a_3 là:

$$C = 2\pi l = \left(\frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{a_2}{a_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{a_3}{a_2}\right)$$

Ta suy ra điện trở cách điện của một dây cáp hai lớp cách điện hoặc của chính tụ nói trên:

$$r = \frac{1}{g} = \frac{1}{2\pi l} \left(\frac{1}{\gamma_1} \ln \frac{a_2}{a_1} + \frac{1}{\gamma_2} \ln \frac{a_3}{a_2}\right)$$

Nếu chỉ có một lớp cách điện:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma \text{ thì } r = \frac{1}{2\pi l \gamma} \ln \frac{a_3}{a_1}$$

6.4. ĐIỆN TRƯỜNG CÁC VẬT NỐI ĐẤT

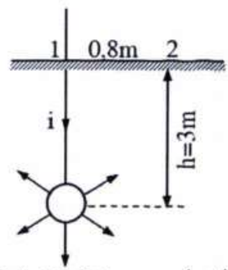
Do những yêu cầu về kỹ thuật người ta thường nối đất các thiết bị điện. Ví dụ trung tính các hệ thống 3 pha, vỏ động cơ biến áp, cột thu lôi... Xung quanh việc nối đất ta cần giải các bài toán Điện trường dừng. Trong kỹ thuật an toàn điện, cần tính điện áp bước (0,8m) để tránh gây nguy hiểm cho người. Ta cũng thường cần tìm quan hệ giữa dòng điện i chảy qua các cực nối đất vào trong đất và điện áp u giữa các cực ấy hoặc giữa cực và miền đủ xa. Muốn vậy ta cần phải tìm điện trở đất hay điện dẫn đất giữa các cực (theo thói quen thường gọi là điện trở nối đất).

$$r = \frac{u}{i} \text{ hoặc } g = \frac{1}{r} = \frac{i}{u}$$

Trong thực tế thường cần tìm điện trở giữa vật nối đất và vùng xa. Khi đó việc tính toán điện dẫn đất sẽ tương tự như việc tính điện dung của vật dẫn cô lập.

Ví dụ: Tính điện áp bước và điện trở đất đối với một điện cực hình cầu như Hình 6.1 có bán kính $a = 0{,}1\text{m}$, dòng chảy vào đất i = 1000A. Điện cực chôn sâu 3m, điện dẫn suất của đất $\gamma = 0{,}03$ S/m.

Giải: Điện cực thường có điện dẫn suất rất lớn so với điện dẫn suất của đất nên coi điện cực là đẳng thế. Mặt khác vì h >> a, nên coi gần đúng điện trường đối xứng cầu. Vậy phương trình điện trường và điều kiện bờ giống như trường tĩnh trong điện môi vô hạn bao quanh quả cầu mang điện tích q khi thay $\vec{E}$, $\vec{J}$, r, i thứ tự bằng $\vec{E}$, $\vec{D}$, ε, q ta được:



Hình 6.1: Điện cực nối đất

Từ biểu thức $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon r}$ ta có phân bố điện thế của Điện trường dừng là:

$$\varphi = \frac{i}{4\pi\gamma r}$$

Điện áp bước là điện áp giữa hai điểm 1 và 2:

$$U_b = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{i}{4\pi\gamma}\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{h^2 + 0{,}8^2}}\right) = 27{,}5\ (\text{V})$$

Từ biểu thức $C = \dfrac{q}{\varphi} = 4\pi\varepsilon a$ của điện ttrường tĩnh ta suy ra điện trở đất đối với điện cực hình cầu chôn sâu dưới đất là:

$$r = \frac{1}{g} = \frac{i}{4\pi\gamma r} = 26{,}5\ \Omega$$

6.5. TỪ TRƯỜNG DỪNG

Như đã biết ở chương 2, ta có thể biểu diễn Từ trường dừng bằng thế vô hướng φ_M và từ thế vector $\vec{A}$. Trước hết ta xét Từ trường dừng bằng thế vô hướng φ_M.

6.5.1. Phương trình và điều kiện bờ

Hệ phương trình Maxwell:

$$\mathrm{Rot}\vec{H} = 0;\ \mathrm{Div}\vec{B} = 0 \tag{6.11}$$

Nếu dùng thế vô hướng φ_M:

$$\mathrm{DivGrad}\,\varphi_M = \Delta\varphi_M = 0 \tag{6.12}$$

$$\vec{H} = -\,\mathrm{Grad}\varphi_M \tag{6.13}$$

Trong tính toán thường không phải trực tiếp tìm $\vec{B}, \vec{H}$ mà tìm φ_M trước sau đó tìm $\vec{H} = -\,\mathrm{Grad}\varphi_M$ và $\vec{B} = \mu\vec{H}$.

Dùng thế vô hướng ta đưa việc tính từ trường ở khu vực không có dòng điện về việc giải bài toán bờ theo phương trình Laplace - Poisson.

Điều kiện bờ:

- Từ phương trình $\mathrm{Rot}\vec{H} = 0$ ta có điều kiện bờ cho các thành phần tiếp tuyến: $H_{1\tau} = H_{2\tau}$

$$\text{hay } \frac{\partial\varphi_{1M}(S)}{\partial\tau} = \frac{\partial\varphi_{2M}(S)}{\partial\tau} \tag{6.14}$$

- Từ phương trình $\mathrm{Div}\vec{B} = 0$ ta có điều kiện bờ cho các thành phần pháp tuyến: $B_{1n} = B_{2n}$

$$\text{hay } \mu_1\frac{\partial\varphi_{1M}(S)}{\partial n} = \mu_2\frac{\partial\varphi_{2M}(S)}{\partial n} \tag{6.15}$$

6.5.2. Sự tương tự giữa Từ trường dừng với Điện trường tĩnh và Điện trường dừng

Về hình thức toán học, ta thấy Từ trường dừng, Điện trường tĩnh và Điện trường dừng giống nhau về biến trạng thái, phương trình và phương pháp giải..., nghĩa là có những điểm tương tự giữa các thông số $\vec{B}$, $\vec{H}$, μ, φ_M của Từ trường dừng với $\vec{D}$, $\vec{E}$, ε, φ_E của Điện trường tĩnh hoặc $\vec{J}$, $\vec{E}$, γ, φ_E của Điện trường dừng.

Thông số	Từ trường dừng ở miền không có dòng điện hoặc Từ trường tĩnh	Điện trường tĩnh ở miền không có điện tích khối
Thông số	$\vec{H}, \vec{B} = \mu\,\vec{H}, \varphi, \varphi_M$	$\vec{E}, \vec{D} = \varepsilon\,\vec{E}, \varepsilon, \varphi_E$
Phương trình	$\text{Rot}\,\vec{H} = 0\,;\ \vec{H} = -\,\text{Grad}\,\varphi_M$	$\text{Rot}\,\vec{E} = 0$ hay $\vec{E} = -\,\text{grad}\,\varphi$
	$\text{Div}\,\vec{B} = 0$	$\text{Div}\,\vec{D} = 0$
	$\text{DivGrad}\,\varphi_M = 0$	$\text{DivGrad}\,\varphi_E = 0$
Điều kiện bờ	$H_{1\tau} = H_{2\tau}$ hay $\dfrac{\partial\varphi_{M1}}{\partial\tau} = \dfrac{\partial\varphi_{M2}}{\partial\tau}$	$E_{1\tau} = E_{2\tau}$ hay $\dfrac{\partial\varphi_{E1}}{\partial\tau} = \dfrac{\partial\varphi_{E2}}{\partial\tau}$
	$B_{1n} = B_{2n}$ hay $\mu_1\dfrac{\partial\varphi_{M_1}}{\partial n} = \mu_2\dfrac{\partial\varphi_{M_2}}{\partial n}$	$D_{1n} = D_{2n}$ hay $\varepsilon_1\dfrac{\partial\varphi_{E1}}{\partial n} = \varepsilon_2\dfrac{\partial\varphi_{E2}}{\partial n}$

6.5.3. Khái niệm về từ trở (từ dẫn)

Từ định nghĩa về điện dung giữa hai vật dẫn:

$$C = \frac{q}{u} = \frac{\oint\limits_S \vec{D}d\vec{S}}{\int\limits_L \vec{E}d\vec{l}} = \frac{\varepsilon\oint\limits_S \vec{E}d\vec{S}}{\int\limits_L \vec{E}d\vec{l}}$$

Thay $\vec{D}$, ε, $\vec{E}$ bằng $\vec{B}$, μ, $\vec{H}$ được:

$$g_M = \frac{\oint\limits_S \vec{B}d\vec{S}}{\int\limits_L \vec{H}d\vec{l}} = \frac{\mu\oint\limits_S \vec{H}d\vec{S}}{\int\limits_L \vec{H}d\vec{l}} = \frac{\varphi}{u_M} \qquad (6.16)$$

g_M gọi là từ dẫn, nghịch đảo của nó gọi là $r_M = \dfrac{1}{g_M}$ từ trở. Khi hình dáng bờ của Điện trường tĩnh và Từ trường dừng giống nhau, giữa C và g_M có quan hệ:

$$\frac{C}{\varepsilon} = \frac{g_M}{\mu}$$

Từ dẫn và từ trở là thông số của một đoạn mạch từ giữa hai cực từ, chúng đo khả năng tích luỹ năng lượng từ trường, giống như điện dung đo khả năng tích luỹ năng lượng điện trường.

Thật vậy: $W_M = \frac{1}{2}\int_V \vec{B}\vec{H}dV$ nếu V giới hạn bởi φ_{M1}, φ_{M2}

$$W_M = \frac{1}{2}\int_K^L \vec{B}d\vec{S}\int_{\varphi_{M_1}}^{\varphi_{M_2}} \vec{H}d\vec{l} = \frac{1}{2}\Phi u_M = \frac{1}{2}g_M u_M^2 = \frac{1}{2}r_M\Phi^2$$

Vậy từ dẫn một đoạn từ môi có trị số bằng hai lần năng lượng từ trường tích luỹ khi hai đầu đoạn từ môi có từ áp 1A.

6.5.4. Kết luận

Từ các phân tích ở trên, ta rút ra kết luận sau:

+ Việc tính Từ trường tĩnh và Từ trường dừng ở miền không có dòng điện hoàn toàn giống như việc tính Điện trường tĩnh ở miền không có điện tích khối (các phương pháp đã học, ...).

+ Có thể làm mô hình Điện trường dừng để giải các bài toán Từ trường dừng ở các miền không có dòng điện và Từ trường tĩnh.

6.6. BÀI TOÁN NGOẠI VẬT TRỤ TRÒN VÀ HÌNH CẦU TRONG TỪ TRƯỜNG ĐỀU - HỆ SỐ KHỬ TỪ - MÀN CHE TỪ

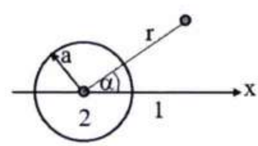
6.6.1. Bài toán ngoại vật hình trụ tròn và hình cầu đặt trong từ trường đều

Trong đo lường từ ta dùng một que nhỏ hoặc một hạt nhỏ bằng chất sắt từ đặt trong từ trường một nam châm hoặc một cuộn dây có dòng điện.

Đối với bài toán ngoại vật trụ tròn đặt trong điện trường đều đã có kết quả tổng quát:

$$\varphi_i = C_i^+ r\cos\alpha + C_i^- r^{-1}\cos\alpha$$

với i = 1,2



Hình 6.2: Ngoại vật hình trụ tròn

Sau khi thay các điều kiện bờ cụ thể của bài toán lấy trên mặt trụ r = a và ở vô cực ta đã làm được hàm thế ở vùng ngoài 1 và ở vùng trong 2 như sau:

$$\begin{cases} \varphi_1 = -E_o\left(1 - \dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\dfrac{a^2}{r^2}\right) r\cos\alpha & \text{với } r \geq a \\ \\ \varphi_2 = E_o\,\dfrac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\, r\cos\alpha & \text{với } r \leq a \end{cases}$$

Thay φ, E, ε bằng φ_M, H, μ ta được hàm thế của bài toán ngoại vật hình trụ tròn đặt trong từ trường đều H_0:

$$\begin{cases} \varphi_{M1} = -H_o\left(1 - \dfrac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2}\dfrac{a^2}{r^2}\right) r\cos\alpha & \text{với } r \geq a \\ \\ \varphi_{M2} = -H_o\,\dfrac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}\, r\cos\alpha & \text{với } r \leq a \end{cases}$$

Tương tự ta có phân bố từ thế của bài toán ngoại vật hình cầu trong từ trường đều.

$$\begin{cases} \varphi_{M1} = -H_o\left(1 - \dfrac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2}\dfrac{a^2}{r^2}\right) R\cos\theta & \text{với } R \geq a \\ \\ \varphi_{M2} = -H_o\,\dfrac{3\mu_1}{\mu_2 + \mu_1}\, R\cos\theta & \text{với } R \leq a \end{cases}$$

Do đó cường độ từ trường bên ngoài và bên trong hình cầu:

$$\begin{cases} H_{1R} = H_0\left(1 + 2\dfrac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + 2\mu_1}\dfrac{a^3}{R^3}\right)\cos\theta \\ H_{1\theta} = -H_0\left(1 - \dfrac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + 2\mu_1}\dfrac{a^3}{R^3}\right)\sin\theta \end{cases}$$

và bên trong cầu:

$$H_2 = H_{2z} = H_o\,\frac{3\mu_1}{\mu_2 + 2\mu_1} = H_o\left(1 - \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + 2\mu_1}\right)$$

6.6.2. Hệ số khử từ

Từ công thức Rot $\vec{H} = 0$; Div $\vec{B} = 0$ ta có nhận xét:

+ Cường độ Trường ở mỗi điểm là xếp chồng của từ trường ngoài $\vec{H}_0$ (khi chưa có quả cầu) với Trường ứng với riêng quả cầu bị phân cực $\vec{H}_P$:

$$\left.\begin{array}{l} H_{1R} = H_{o1R} - H_{P1R} \\ H_{1\theta} = H_{o1\theta} + H_{P1\theta} \\ H_2 = H_{2Z} = H_o - H_{P2} \end{array}\right\} \qquad (6.17)$$

Riêng khu vực bên trong quả cầu khi $\mu_2 = \mu_o \mu_r$ và $\mu_1 = \mu_o$ ta thấy từ trường ban đầu H_o bị giảm một lượng bằng cường độ khử từ H_{P2}.

$$H_{P2} = H_o - H_2 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + 2\mu_1} H_o = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} H_o \qquad (6.18)$$

Từ công thức $\vec{B} = \mu_o \mu_r \vec{H} = \mu_o(\vec{H} + \vec{M})$ ta tính được cường độ từ hoá của quả cầu.

$$\vec{M} = (\mu_r - 1)\ \vec{H}_2 = \frac{3(\mu_r - 1)}{\mu_r + 2} \vec{H}_0 \qquad (6.19)$$

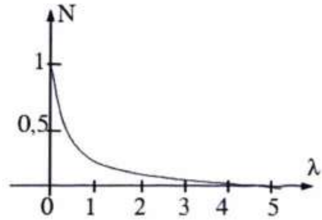
So sánh (6.19) và (6.18) ta thấy thành phần cường độ trường khử từ của ngoại vật H_{P2} tỷ lệ với cường độ từ hoá M với hệ số tỷ lệ $N = \frac{1}{3}$. Hệ số này gọi là hệ số khử từ.

$$N = \frac{H_{P2}}{M} \qquad (6.20)$$

Hệ số khử từ N chỉ phụ thuộc hình dáng của ngoại vật mà không phụ thuộc vật liệu và kích thước cuả chúng. Đối với hình elip tròn xoay.

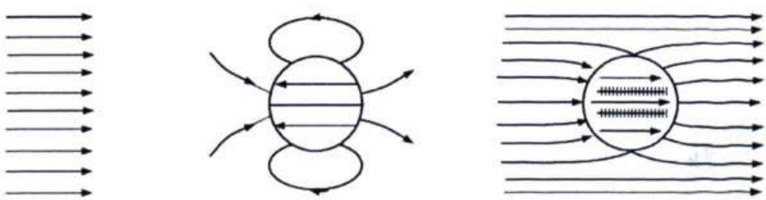
$$N \frac{1}{1-\lambda^2}\left(1 - \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \arccos\lambda\right) = \frac{1}{\lambda^2 - 1}\left[\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \ln\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}\right) - 1\right]$$

Với λ là tỷ số giữa bánh trục của elip đặt theo chiều từ trường với bán trục của elip đặt vuông góc với từ trường. Một thanh trụ tròn đặt theo chiều của từ trường được coi là một trường hợp riêng của elip khi $\lambda \to \infty$, Khi đó hệ số khử từ bằng 0. Một tấm phẳng rộng đặt vuông góc từ trường có thể xem là trường hợp riêng của elip khi $\lambda = 0$; $N = 1$.



Hình 6.3: Quan hệ N(λ)

+ Trường bên trong quả cầu là đều do đó một quả cầu sắt từ đặt trong một Từ trường đều sẽ bị từ hoá đều hay phân cực đều.



Trường ngoài H_o *Trường phân cực của quả cầu* *Trường tổng H*

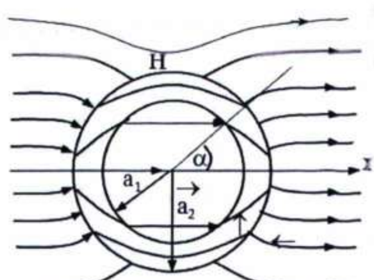
Hình 6.4: Quả cầu đặt trong từ trường đều

6.6.3. Màn che từ

Để bảo vệ các cơ cấu khỏi tác dụng nhiễu của từ trường ngoài, người ta dùng màn che từ. Do đó một hộp hoặc một lớp vỏ bọc (kim loại sắt từ) bề dày đủ lớn bọc lấy cơ cấu cần bảo vệ.

Ta xét trường hợp đơn giản nhất: Màn che từ hình trụ rỗng đặt trong từ trường đều H_o (hình 6.5).

Trường đối xứng mặt ox và phản đối xứng qua mặt oy. Hàm thế φ_i tổng quát:



Hình 6.5: Màn che từ

$$\varphi_i = C^+_i\, r \cos\alpha + C^-_i\, r^{-1} \cos\alpha \; (i = 1, 2, 3)$$

Thay điều kiện bờ tại $r = \infty$; $r = a_1$; $r = a_2$

Ta có:

$$H_3 = H_{3x} = \frac{H_o}{\left[1 + \frac{2}{9}\left(1 - \frac{a_1^2}{a_2^2}\right)\left(\frac{\mu_o}{\mu} + \frac{\mu}{\mu_o} - 2\right)\right]}$$

Nếu giả sử $a_1 = 0{,}8a_2$; $\mu = 1000\mu_o$ thì $H_Z = 0{,}012H_o$. Tức cường độ Trường bên trong màn cho từ yếu đi chỉ còn 1,2 % từ trường ngoài.

6.7. XÉT TỪ TRƯỜNG DỪNG BẰNG TỪ THẾ VECTOR $\vec{A}$

6.7.1. Phương trình và điều kiện bờ

Cách biểu diễn Từ trường dừng bằng từ thế vô hướng φ_M chỉ đúng trong miền không có phân bố dòng dẫn. Ở vùng có phân bố dòng $\vec{J}$, từ trường có tính chất xoáy nên phải biểu diễn bằng từ thế vector.

Từ phương trình Maxwell.

$$\text{Rot}\,\vec{H} = \vec{J}_d \qquad (6.21)$$

$$\text{Div}\,\vec{B} = 0 \qquad (6.22)$$

Ta định nghĩa từ thế vector: $\vec{B} = \text{Rot}\,\vec{A}$ với $\text{Div}\,\vec{A} = 0$. Từ đó có phương trình viết theo $\vec{A}$ cho Từ trường dừng.

$$\text{DivGrad}\,\vec{A} = \Delta\vec{A} = -\mu\vec{J} \qquad (6.23)$$

Vậy ta lại phải giải bài toán bờ theo phương trình Laplace - Poisson. Chú ý đây là một phương trình vi phân riêng cấp 2 viết cho dạng vector, nên có thể chia làm ba phương trình vi phân cho các thành phần A_i.

Trong hệ toạ độ Descartes có:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)A_x = -\mu J_x \qquad (6.24)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)A_y = -\mu J_y \tag{6.25}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)A_z = -\mu J_z \tag{6.26}$$

Trong đó: A_i, J_i là các thành phần chiếu của $\vec{A}$, $\vec{J}$ lên các trục x, y, z.

$$\vec{A} = \vec{e}_x A_x + \vec{e}_y A_y + \vec{e}_z A_z$$

Để tìm các điều kiện bờ của bài toán ta căn cứ vào các nhận xét sau:

+ Hàm $\vec{A}$ thoả mãn phương trình Laplace - Poisson nên phải liên tục khắp nơi kể cả trên mặt S phân chia hai môi trường μ_1 và μ_2:

$$\vec{A}_1(S) = \vec{A}_2(S) \tag{6.27}$$

+ Do Div$\vec{B} = 0$ nên thành phần pháp tuyến của $\vec{B}$ phải liên:

$$B_{1n} = B_{2n} \text{ hoặc } Rot_n \vec{A}_1(S) = Rot_n \vec{A}_2(S) \tag{6.28}$$

+ Rot$\vec{H} = \vec{J}$ là hữu hạn theo nên thành phần tiếp tuyến của $\vec{H}$ phải liên tục:

$$H_{1\tau} = H_{2\tau} \text{ hoặc } \frac{1}{\mu_1} Rot_\tau \vec{A}_1(S) = \frac{1}{\mu_2} Rot_\tau \vec{A}_2(S) \tag{6.29}$$

Điều kiện bờ này chỉ đúng khi mật độ dòng $\vec{J}$ là hữu hạn, nếu $\vec{J}$ có phân bố Dirac mật độ dòng mặt thì $H_{1\tau} - H_{2\tau} = w_o i$ (w_o là số vòng dây, i là dòng điện).

Từ các nhận xét trên, ta rút ra điều kiện bờ trong trường hợp cụ thể, khi môi trường 2 là sắt từ, lý tưởng hoá coi $\mu_2 \to \infty$, môi trường một có μ_1 hữu hạn. Khi đó:

- Vì $B_2 = \mu_2 H_2$ là hữu hạn nên cường độ từ trường trong sắt tự triệt tiêu.

$$H_{1\tau} = H_{2n} = 0$$

- Ở mặt phân chia tại miền có $\vec{J}$ hữu hạn: $H_{1\tau} = 0$ nên đường sức thẳng góc với mặt sắt từ.

- Tại miền có phân bố Dirac của mật độ dòng: $H_{1\tau} = w_o i$; $B_{1n} = B_{2n}$. Đường sức nghiêng với mặt phân chia một góc α nào đó.

6.7.2. Biểu thức của $\vec{A}$ theo $\vec{J}$, i

Ta đã có biểu thức thế φ theo phương trình Laplace - Poisson $\Delta\varphi = -\rho/\varepsilon$

$$\varphi = \int_V \frac{\rho dV}{4\pi\varepsilon r} \text{ thay } \rho, \varepsilon \text{ bằng } J_i, \frac{1}{\mu} \text{ ta được công thức tính } A_i\text{:}$$

$$A_i = \int_V \frac{\mu J_i dV}{4\pi r} \ (i = x, y, z); \ \vec{A} = \int_V \frac{\mu \vec{J} dV}{4\pi r}$$

Trong đó các tích phân lấy theo thể tích V của vật dẫn có dòng điện, r là khoảng cách từ vi phân $\vec{J}\,dV$ đến điểm xét.

Nếu điểm xét cách xa dây dẫn (r >> tiết diện dây dẫn)

$$\vec{A} = \int_L \frac{\mu d\vec{l}}{4\pi r} \int \vec{J} d\vec{S} = \int_L \frac{\mu i d\vec{l}}{4\pi r}$$

Ở đây tích phân dọc theo L của dây dẫn và chiều dl trùng với chiều dòng điện i.

6.7.3. Điện cảm, hỗ cảm các cuộn dây

Bài toán từ trường các cuộn dây được đặc trưng bằng các thông số điện cảm L, hỗ cảm M.

Ta gọi đạo hàm của từ thông theo dòng điện ở một cuộn dây là điện cảm L:

$$L = \frac{\partial \psi}{\partial i}$$

Nếu môi trường tuyến tính: $L = \frac{\psi}{i} = \frac{1}{i} \int \vec{B} d\vec{S}$

Trong đó tích phân lấy theo một mặt căng trên cuộn dây. Khi từ trường ứng với cuộn dây tăng lên một lượng nhỏ, nguồn phải đưa thêm năng lượng dW.

$$dW = i\,d\Psi = i \frac{\partial \psi}{\partial i} di = \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial i} di^2 = \frac{1}{2} L di^2$$

Hay $L = 2 \frac{\partial W}{\partial i^2}$

Vậy điện cảm L là một thông số đo khả năng tích luỹ năng lượng từ của một cuộn dây riêng rẽ. Nó bằng hai lần lượng tăng năng lượng khi bình phương dòng điện tăng $1A^2$.

Cũng vậy, khi dòng điện trong cuộn dây thứ k tăng thêm Δi_K, từ thông qua cuộn l sẽ tăng thêm $\Delta\Psi_K$. Ta gọi lượng:

$$\frac{\partial\psi_{lk}}{\partial i_k} = M_{lk} \text{ là hệ số hỗ cảm của cuộn k đối với l.}$$

Tương tự trên ta có:

$$dW_l = i_l d\Psi_{lk} = i_l \frac{\partial\psi_{lk}}{\partial i_k} di_R = M_{lk} i_l \, di_K$$

Hệ số hỗ cảm M_{lk} là thông số đặc trưng khả năng tích thêm năng lượng vào từ trường ứng với các cuộn dây. Nó bằng lượng tăng năng lượng đưa thêm vào từ trường gắn với cuộn dây l khi dòng cuộn dây k tăng Δi_K và khi tích $i_l \Delta i_K$ bằng $1A^2$.

Ngược lại: $dW_K = M_{kl}\, i_k \, di_l$; M_{kl} hệ số hỗ cảm của l đối với k.

6.7.4. Dùng $\vec{A}$ để tính từ thông

Ta biết từ thông qua mặt S là thông lượng vector hỗ cảm $\vec{B}$ chảy qua mặt ấy: $\Psi = \int_S d\Psi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$

Thay $\vec{B} = \text{Rot}\,\vec{A}$ và theo Green - Stock ta được:

$$\Psi = \int_S \text{Rot}\,\vec{A}\, d\vec{S} = \oint_L \vec{A} d\vec{l}$$

Tích phân này lấy dọc đường L bao quanh mặt S, thường dễ tính hơn tích phân trên.

6.8. TỪ TRƯỜNG SONG PHẲNG - TỪ TRƯỜNG CỦA ĐƯỜNG DÂY

6.8.1. Từ trường song phẳng

a. Phương trình và điều kiện bờ

Thực tế có thể coi từ trường các đường dây (2, 3 dây), giữa các đoạn dây dẫn đủ dài, từ trường trong rãnh và trong khe hở không khí giữa stator và rotor các máy điện quay... là từ trường song phẳng. Vì dòng điện chảy theo các dây dẫn đặt song song với nhau nên thế vector $\vec{A}$ chỉ có một thành phần song song với dây dẫn (chọn là chiều z) và các trạng thái Trường ($\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{H}$, φ_M) chỉ phụ thuộc hai biến x, y hoặc (r, α). Tức:

$$\vec{A} = \vec{e}_z A(x, y)\,; \quad \vec{B} = B(x, y)\,; \quad \vec{H} = H(x, y)$$

Nên phương trình Laplace - Poisson có dạng:

$$\text{DivGrad}\,\vec{A} = \Delta\vec{A} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = -\mu\,\vec{J}$$

Các điều kiện bờ có dạng:

$$\frac{\partial A_1}{\partial \tau} = \frac{\partial A_2}{\partial \tau} \quad \text{và} \quad \frac{1}{\mu_1}\frac{\partial A_1}{\partial n} = \frac{1}{\mu_2}\frac{\partial A_2}{\partial n}$$

b. Phương trình đường sức

Gọi dl là một vi phân dài đường sức từ cảm $\vec{B}$, phương trình đường sức viết theo $\vec{B}$ có dạng ngoại tích: $\vec{B} \times d\vec{l} = 0$

thay $\quad \vec{B} = \text{Rot}\,\vec{A}$ và $\vec{A} = \vec{e}_z A(x + y)$

Ta được: $\quad \text{Rot}\vec{A} \times d\vec{l} = 0$

hay $\quad (\vec{e}_x \dfrac{\partial A}{\partial y} - \vec{e}_y \dfrac{\partial A}{\partial x}) \times (\vec{e}_x dx + \vec{e}_y dy) = 0$

Tích phân lên được: $\vec{A}$ = const là đường sức từ cảm $\vec{B}$.

6.8.2. Từ trường của đường dây

Ta xét một trường hợp riêng thường gặp của đường song phẳng: Từ trường ứng với một đường dây đặt trong một môi trường đồng nhất hoặc không đồng nhất. Các dây dẫn đặt xa nhau, bán kính a của dây rất bé so với khoảng cách d giữa chúng, nên có thể lý tưởng hoá xem đó là từ trường các trục song song có dòng điện. Ta thấy nó có dạng giống Điện trường tĩnh về mặt toán học chỉ việc thay $\vec{A}$, $\vec{J}$; $i = \int_S \vec{J}\,d\vec{S}$, μ thứ tự bằng φ, ρ , $\tau = \int_S \rho dS$; $\dfrac{1}{\varepsilon}$.

Bảng dưới đây cho ta biết sự tương tự từ trường của các trục có dòng điện và điên trường tĩnh của các trục mang điện.

Thông số	Từ trường các trục có dòng điện	Điện trường tĩnh các trục mang điện
Thông số	$\vec{A}$, $\vec{J}$, i, μ	$\varphi, \rho, \tau, \dfrac{1}{3}$
Phương trình	$\Delta\vec{A} = -\mu Jd$	$\Delta\varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon}$
Điều kiện bờ	$B_{1n} = B_{2n}$ hay $\dfrac{\partial A_1}{\partial\tau} = \dfrac{\partial A_2}{\partial\tau}$	$\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\tau} = \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial\tau}$
	$H_{1\tau} = H_{2\tau}$ hay $\dfrac{1}{\mu_1}\dfrac{\partial A_1}{\partial n} = \dfrac{1}{\mu_2}\dfrac{\partial A_2}{\partial n}$	$\varepsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}$

Chú ý:

+ Ở Điện trường tĩnh những đường φ = const là các đẳng thế, còn ở Từ trường dừng song phẳng $\vec{A}$ = const là các đường sức từ cảm. Tức là về hình học, các điện sức của từ cảm đổi thành đẳng thế của điện trường và ngược lại.

+ Sự tương tự trên cho phép ta suy ra lời giải cho các bài toán từ trường theo kết quả của bài toán điện trường.

6.9. LỰC TỪ TRƯỜNG TÁC DỤNG LÊN DÒNG ĐIỆN

6.9.1. Khái niệm

Ta đã biết khi các hạt mang điện chuyển động với vận tốc $\vec{v}$ trong từ trường gắn với một hệ qui chiếu, chúng sẽ chịu tác dụng lực Lorenz: $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Ta xét một phân tố đoạn dây có dòng i nằm trong từ trường, mỗi vi phân dòng $\vec{J}\,dV$ chịu một vi phân lực. Tổng các vi phân lực trên bề mặt gộp thành một lực nén hoặc căng bề mặt và tạo ứng suất bên trong dây. Nếu từ trường phân bố đối xứng trên tiết diện dây, tổng các vi phân lực $d\vec{F}$ sẽ bằng không. Nếu từ trường phân bố không đối xứng, tổng các lực $d\vec{F}$ sẽ tạo hợp lực xu hướng di chuyển dây theo một chiều nào đó.

Tương tự cho một vòng dây cũng có thể chịu lực nén, căng bề mặt, ứng suất, lực đẩy hoặc momen quay...

6.9.2. Lực từ trường tác dụng lên một dây dẫn có dòng

a. Phương trình cân bằng động lực học

Để phân tích lực từ trường tác dụng lên một dây dẫn có dòng, coi là cung cấp bởi một nguồn dòng i, ta dựa vào sự cân bằng động lực học của hệ thống tương tác. Hệ này gồm các nguồn dòng cung cấp các dòng i_k vào các dây, từ trường có năng lượng W_M và các dây khép kín. Tương tự với điều đó dây dẫn có thể chịu một lực nghĩa rộng ứng với một công $F_x dx$, cân bằng với công của các nguồn dòng $d_x A_{ng}$ và lượng tăng năng lượng từ trường $d_x W_M$ khi dây bị dịch chuyển một vi phân dx. Ta có phương trình cân bằng sau:

$$F_x dx = d_x A_{ng} - d_x W_M$$

hoặc:

$$F_x = \frac{\partial A_{ng}}{\partial x} - \frac{\partial W_M}{\partial x} \qquad (6.30)$$

Ta phân thành hai trường hợp: từ thông xuyên qua dây cố định và dòng điện trong vòng dây cố định.

b. Năng lượng từ trường của các dây dẫn có dòng

Giả sử có những vòng dây cung cấp bởi các nguồn dòng i_1, i_2, ... i_n. Quanh các vòng dây có một từ trường $\vec{B}$, $\vec{H}$. Mật độ phân bố năng lượng từ trường bằng:

$$W_M = \frac{1}{2}\vec{B}\,\vec{H} \qquad (6.31)$$

Năng lượng tổng của Trường bằng tích phân W_M trong toàn không gian:

$$W_M = \int_V w_M dV = \frac{1}{2}\int_V \vec{B}\vec{H}\,dV \qquad (6.32)$$

Để tiện lợi, ta dùng hệ toạ độ cong của mạng lưới trực giao các đường sức dl và mặt đẳng thế dS sao cho dV = dl.dS .

Tương tự khi dẫn ra năng lượng điện trường W_E , ta có:

$$W_M = \frac{1}{2}\int_L\int_S \vec{B}\vec{H}d\vec{l}d\vec{S} = \frac{1}{2}\int_L \vec{H}d\vec{l}\int_S \vec{B}d\vec{S} \qquad (6.33)$$

Lần thứ nhất ta tích phân theo một mặt đẳng thế S, trên đó các lượng $\vec{H}d\vec{l}$ là hằng nên được đưa ra ngoài dấu tích phân, lần thứ hai ta tích phân theo một đường sức L khép kín. Theo định nghĩa từ thông và luật dòng điện toàn phần Ampe, đối với một vòng dây kín:

$$W_M = i\,\frac{\psi}{2}$$

Với một hệ các vòng dây: $W_M = \dfrac{\sum i_k.\psi_k}{2}$ (6.34)

c. Công của các nguồn dòng

Giả sử một vòng dây không tiêu tán (ví dụ dòng phân tử trong từ môi) có dòng i vốn móc với từ thông ψ. Nay do một lý do nào đó tăng thêm một lượng dψ trong một vi phân thời gian dt, trong vòng dây xuất hiện sức điện động. Theo luật Lenz - Faraday ta có: $e = -\dfrac{\partial\psi}{dt}$ và nguồn dòng phải làm một công với công suất: $p = \dfrac{dA_{ng}}{dt} = ui = -ei = i\,\dfrac{d\psi}{dt}$

Vậy vi phân công của nguồn dòng để tăng thêm một vi phân từ thông bằng:

$$dA_{ng} = p.\,dt = i\,d\psi \qquad (6.35)$$

d. Lực từ trường lên vòng dây có dòng

Các biểu thức (6.33) và (6.35) giống hệt các biểu thức tương ứng về năng lượng điện trường và công của nguồn áp đối với điện trường, trong đó có sự tương tự giữa cặp biến trạng thái động lực học về điện (φ_E, q) và cặp biến trạng thái về từ (i, ψ). Từ sự tương tự này, ta suy ra công thức tính lực (nghĩa rộng) F_x, do từ trường tác dụng theo một toạ độ (nghĩa rộng) dx lên một dây dẫn có nguồn dòng i:

$$F_x = \frac{\partial W_M}{\partial x}\ (\text{với } i = \text{const}) = -\frac{\partial W_M}{\partial x}\ (\text{với } \psi = \text{const}) \qquad (6.36)$$

Vậy lực F_x từ trường tác dụng lên một dây dẫn khép kín cung cấp bởi một nguồn dòng cố định (i = const), theo một toạ độ nghĩa rộng x nào đó bằng tốc độ tăng năng lượng từ trường khi dịch chuyển theo toạ độ ấy, hoặc bằng tốc độ giảm năng lượng từ trường khi dịch chuyển theo toạ độ ấy, nếu coi từ thông xuyên qua vòng dây không thay đổi.

Khi coi vòng dây là một vật rắn và nhỏ, có thể tìm được lực dịch chuyển vòng dây theo ba toạ độ x, y, z và hợp lại được:

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z = \mathrm{Grad}W_M\ (i = \mathrm{const}) = -\ \mathrm{Grad}W_M\ (\psi = \mathrm{const}) \quad (6.37)$$

Vậy, lực không gian $\vec{F}$ có xu hướng dịch chuyển vòng dây có dòng không đổi về phía nào đó sao cho theo chiều ấy tốc độ tăng năng lượng từ trường là nhanh nhất và có xu hướng dịch chuyển vòng dây có từ thông cố định về một phía nào đó sao cho tốc độ giảm năng lượng từ trường là nhanh nhất.

Ví dụ: Một đường dây hai dây bán kính a, khoảng cách hai dây bằng d, có dòng i. Tìm lực tác dụng lên đường dây.

Giải: Ta có năng lượng từ trường gắn với i, trên một đơn vị dài dây là:

$$W_M = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{i^2}{2\pi}\mu_o \ln\frac{d}{a}$$

Lực này phụ thuộc vào a, d, nên đường dây cũng chịu hai lực theo lực làm tăng d và lực làm giảm a.

$$F_d = \frac{\partial W_M}{\partial d}\ (i = \mathrm{const}) = \mu_o\ \frac{i^2}{2\pi d} > 0$$

$$F_a = \frac{\partial W_M}{\partial a}\ (i = \mathrm{const}) = -\mu_o\ \frac{i^2}{2\pi a} < 0$$

Lực $F_d > 0$ thể hiện 2 dây bị đẩy xa nhau.

$F_a < 0$ thể hiện dây bị nén theo chiều bán kính của nó.

CÂU HỎI ÔN TẬP CHƯƠNG 6

6.1. Phương trình và điều kiện bờ của từ trường dừng viết theo φ_M ở miền không có dòng điện? So sánh với điện trường tĩnh và dừng, từ đó rút ra kết luận gì?

6.2. Một vật hình cầu hoặc elip đặt trong từ trường ngoài đều H_0 sẽ bị phân cực thế nào? Hệ số khử từ là gì? Hệ số khử từ của các mẫu elip tròn xoay và hình cầu bằng bao nhiêu? Trị số lớn nhất và bé nhất bằng bao nhiêu?

6.3. Màn che từ là gì? Về nguyên lý màn che từ khác màn tĩnh điện ở chỗ nào? Bề dày của màn che từ có ảnh hưởng gì đến việc làm yếu từ trường ngoài hay không? Có thể làm màn che từ bằng đồng hoặc nhôm không?

6.4. Phương trình và điều kiện bờ của từ trường dừng theo từ thế vector? Điều kiện bờ trên mặt sắt từ như thế nào? Biểu thức của $\vec{A}$ theo $\vec{J}$ và i?

6.5. Phương trình và điều kiện bờ của từ trường song phẳng? Những đường $\vec{A}$ = const là những đường gì?

6.6. Sự tương tự giữa từ trường và điện trường của các đường dây? Khi bán kính a có thể so được với khoảng cách d có sự tương tự ấy không? Tại sao? Nói về sự tương tự giữa L_0 và C_0?

6.7. Phân tích lực từ và momen từ tác dụng lên một dây dẫn có dòng?

6.8. Tìm cường độ trường H_3 bên trong một màn che từ hình cầu rỗng có độ từ thẩm μ, bán kính trong a_1, bán kính ngoài a_2. Biết từ trường ngoài đều H_0. Tính bằng số $\mu = 1000\,\mu_0$, $a_1 = 0{,}8a_2$.

6.9. Một dây cáp đồng trục dài l = 1km có dòng điện i = 300A. Bán kính lõi a_1 = 1cm, bán kính của vỏ a_2 = 3cm và bán kính ngoài của vỏ a_3 = 3,5cm. Lớp cách điện và lõi có độ thẩm từ μ_0, vỏ có độ thẩm từ $\mu_1 = 50\mu_0$. Hãy tính từ thế vector, từ cảm và năng lượng từ trường trong lõi, cách điện và vỏ.

6.10. Một dây cáp đồng trục có bán kính trong a_0, bán kính ngoài a_1 có từ môi tuyến tính $\mu = \mu_0$. Dòng điện chảy trong cáp bằng i. Hãy phân tích và tìm các lực từ trường tác dụng lên một đơn vị dài dây cáp.

6.11. Một vòng dây tròn bán kính a, có dòng điện i và momen từ nhỏ không đổi. Đặt vòng dây vuông góc với từ trường ngoài đều đủ mạnh $\vec{B}$. Hãy tìm lực tác dụng lên vòng dây?

6.12. Một vòng dây quấn quanh một lõi sắt biến áp hình trụ tròn. Dòng điện trong dây i = 1000A, bán kính tiết diện trụ r = 0,08m, từ cảm trong lõi B = 1,4T. Hãy tìm lực tác dụng lên vòng dây?

Chương 7

TRƯỜNG ĐIỆN TỪ BIẾN THIÊN

7.1. PHƯƠNG TRÌNH LAPLACE ĐẾN ĐIỆN TRƯỜNG BIẾN THIÊN

7.1.1. Phương trình Laplace của điện trường biến thiên trong điện môi thuần tuý

a. Mô hình trường thế

Theo mô hình dùng phương trình Maxwell 2, thông thường điện trường biến thiên luôn có tính chất xoáy $\mathrm{Rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Nhưng trong một số trường hợp cụ thể có thể coi gần đúng: $\mathrm{Rot}\,\vec{E}(x, y, z, t) = 0$ (7.1)

Ví dụ: Trường trong tụ phẳng đặt sát nhau, Trường tần số thấp trong dầu biến áp... ở đây từ trường yếu lại biến thiên chậm nên một cách gần đúng có thể coi $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ triệt tiêu để có như biểu thức (7.1).

Trong trường hợp này, nếu dùng khái niệm hàm thế toán tử $\varphi(p)$ hoặc $\varphi(p_o)$ riêng cho Trường biến thiên hình sin, các hàm này sẽ thoả mãn phương trình Laplace, đơn giản hơn phương trình D'Alembert. Hệ phương trình Maxwell trong điện môi thuần tuý sẽ có dạng:

$$\mathrm{Rot}\,\vec{E}(x, y, z, t) = 0 \qquad (7.2)$$

$$\mathrm{Div}\,\vec{D}(x, y, z, t) = \rho_{td} \qquad (7.3)$$

với $\vec{D} = \varepsilon\,\vec{E} + \vec{P}$ và $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$

b. Phương trình trạng thái của điện môi

Xét cho điện môi thuần tuý lý tưởng, tức là các điện môi chỉ có hiện tượng phân cực $\vec{P}$ mà không dẫn điện $\vec{J}_d = 0$.

Trong điện môi lý tưởng lại chia làm hai loại:

- Loại không nhớt (không trễ) là điện môi mà quán tính các lưỡng cực đủ nhỏ so với tốc độ biến thiên $\vec{E}$, để có thể coi $\vec{P}$ biến thiên kịp theo với điện trường. Do đó $\vec{P}$ tỷ lệ với $\vec{E}$ khiến $\vec{D}$ tỷ lệ với $\vec{E}$ qua hệ số điện môi thực ε:

$$\vec{D} = \varepsilon_o \vec{E}(1 + k) = \varepsilon \vec{E} \tag{7.4}$$

Hệ (7.1), (7.2), (7.3), (7.4) giống hệt trong Điện trường tĩnh và có phương trình Laplace đối với hàm thế $\varphi(x, y, z, t)$:

$$\Delta\varphi = \begin{cases} -\dfrac{\rho_{td}}{\varepsilon} \\ 0 \end{cases} \tag{7.5}$$

- Loại nhớt (hoặc trễ): trường hợp mà quán tính lưỡng cực đủ lớn so với tốc độ biến thiên của Trường, do đó $\vec{P}$ liên hệ với $\vec{E}$ qua một phương trình vi phân hệ số hằng tuỳ thuộc từng môi trường cụ thể. Đơn giản nhất là phương trình vi phân cấp 1 với hằng số thời gian T tuỳ thuộc từng chất.

$$T\frac{d\vec{P}}{dt} + \vec{P} = \varepsilon_o k \vec{E} \tag{7.6}$$

Nói chung $\vec{P}$ liên hệ với $\vec{E}$ là một phương trình:

$$f(\vec{P}, \vec{P}', \vec{P}'', \vec{E}) = 0 \tag{7.7}$$

c. Toán tử hành vi môi trường và phương trình Laplace đối với ảnh

Nếu theo (7.6) sẽ không có phương trình Laplace đối với hàm thế $\varphi(x, y, z, t)$.

Nếu dùng phép biến đổi Laplace và các ảnh $\varphi(p)$, $\vec{E}(p)$, $\vec{D}(p)$, ta dẫn ra phương trình đối với ảnh hàm thế $\varphi(p)$. Chuyển phương trình (7.7) thành phương trình đại số liên hệ $\vec{E}(p)$, $\vec{P}(p)$ và rút ra:

$$\vec{P}(p) = \varepsilon_o \widetilde{k}(p) \vec{E}(p) \text{ với } \widetilde{k}(p) = \frac{\vec{P}(p)}{\varepsilon_o \vec{E}(p)} \tag{7.8}$$

và $$\vec{D}(p) = \varepsilon_o \vec{E}(p)[1 + \widetilde{k}(p)] = \varepsilon(p)\vec{E}(p) \tag{7.9}$$

với $$\widetilde{\varepsilon}(p) = \frac{\vec{D}(p)}{\vec{E}(p)} = \varepsilon_o [1 + \widetilde{k}(p)]$$

$\widetilde{k}(p)$ và $\widetilde{\varepsilon}(p)$ gọi là những toán tử phân cực và toán tử điện môi.

Chuyển hệ phương trình Maxwell sang dạng ảnh ta được:

$$\mathrm{Rot}\,\vec{E}(p) = 0; \quad \text{hoặc } \vec{E}(p) = -\,\mathrm{Grad}\,\varphi(p)$$

$$\mathrm{Div}\,\vec{D}(p) = \rho_{td}(p)\,; \quad \vec{D}(p) = \widetilde{\varepsilon}(p)\,\vec{E}(p) \tag{7.10}$$

Từ đây lại có phương trình Laplace viết dạng ảnh:

$$\Delta\varphi(p) = \begin{cases} -\dfrac{\rho_{td}(p)}{\tilde{\varepsilon}(p)} & \text{nơi có điện tích tự do} \\ 0 & \text{nơi không có điện tích} \end{cases} \tag{7.11}$$

Riêng trường hợp Điện trường biến thiên hình sin, dùng ảnh Fourier:

$$\Delta\dot{\varphi}(j\omega) = \begin{cases} \dfrac{\rho_{td}(j\omega)}{\tilde{\varepsilon}(j\omega)} \\ 0 \end{cases} \tag{7.12}$$

Sau đó giải ra nghiệm dạng ảnh và dùng phép biến đổi ngược để tìm $\varphi(x, y, z, t)$.

d. Điều kiện bờ hỗn hợp trên mặt tiếp giáp giữa hai môi trường

Nếu dùng các khái niệm toán tử điện môi và ảnh điều kiện bờ Dirichlet và Neumann vẫn đúng. Ta được:

$$E_{1\tau}(p) = E_{2\tau}(p)$$

$$D_{1n}(p) = D_{2n}(p) \text{ hoặc } \widetilde{\varepsilon}_1(p).\,E_{1n}(p) = \widetilde{\varepsilon}_2(p).\,E_{2n}(p) \tag{7.13}$$

Dùng biến đổi Fourier hoặc ảnh phức ta được:

$$\dot{E}_{1\tau}(j\omega) = \dot{E}_{2\tau}(j\omega); \ \dot{D}_{1\tau}(j\omega) = \dot{D}_{2\tau}(j\omega)$$

hay $$\widetilde{\varepsilon}_1(j\omega)\,\dot{E}_{1n}(j\omega) = \widetilde{\varepsilon}_2(j\omega)\,\dot{E}_{2n}(j\omega)$$

Điều kiện bờ trên tiết giáp môi trường dẫn 1 và điện môi 2 có dạng:

$$E_{1\tau}(p) = E_{2\tau}(p) = 0; \quad D_{2n}(p) = \sigma_{td}(p)$$

7.1.2. Phương trình Laplace của Điện trường biến thiên ở môi trường dẫn thuần tuý

Gọi môi trường dẫn thuần tuý hoặc lý tưởng là môi trường mà dòng dịch $\vec{J}_{cd} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ rất nhỏ so với dòng dẫn $\vec{J}_d$. Về toán có thể coi $\varepsilon = 0$.

Với môi trường dẫn như vậy có thể dùng mô hình coi $\vec{E}$ không xoáy và có hệ phương trình Maxwell:

$$\begin{cases} \mathrm{Rot}\vec{E}(x, y, z, t) = 0 \\ \mathrm{Div}\vec{J}_d(x, y, z, t) = 0 \end{cases} \tag{7.14}$$

Và dẫn ra biểu diễn trường bằng một hàm thế $\varphi(x, y, z, t)$ sao cho:

$\vec{E}(x, y, z, t) = -\mathrm{Grad}\varphi(x, y, z, t)$

Người ta cũng phân ra hai loại môi trường dẫn nhớt và không nhớt (trễ và không trễ)

- Ở môi trường dẫn không nhớt sự chuyển động các điện tích tự do theo kịp được các biến thiên của trường $\vec{E}$ có thể đặc trưng bằng độ dẫn γ thực:

$$\vec{J}_d = \gamma \vec{E} \text{ với } \gamma = \frac{\vec{J}_d}{\vec{E}} \tag{7.15}$$

Ví dụ: Al, Ag, Cu, ... ở $f = 10^{11}$ Hz vẫn thể hiện tính chất này.

Từ đó có phương trình Laplace đối với $\varphi(x, y, z, t)$:

$$\Delta\varphi\,(x, y, z, t) = 0 \tag{7.16}$$

- Môi trường dẫn nhớt không thể bỏ qua quán tính của những điện tích tự do, do đó dòng dẫn $\vec{J}_d$ biến thiên chậm sau sự biến thiên của trường $\vec{E}$. Hai lượng này liên hệ với nhau trong một quan hệ toán tử tuyến tính cụ thể tuỳ thuộc môi trường.

$$f(\vec{J}, \vec{J}', \dots \vec{E}) = 0 \tag{7.17}$$

Ví dụ các môi trường điện ly, Laplace... Trường hợp này phải sử dụng các ảnh $\varphi(p)$, $\vec{E}(p)$, $\vec{J}_d(p)$. Ta có:

$$\vec{J}_d(p) = \widetilde{\gamma}(p).\ \vec{E}(p) \text{ với } \widetilde{\gamma}(p) = \frac{\vec{J}_d(p)}{\vec{E}(p)} \text{ là độ dẫn toán tử.}$$

và $\quad \vec{E}(p) = -\text{ Grad } \varphi(p)\ ;\ \text{Div}\,\vec{J}_d(p) = 0\ ;\ \vec{J}_d(p) = \widetilde{\gamma}(p).E(p) \qquad (6.18)$

Rút ra phương trình Laplace giống hệt ở Điện trường dừng:

$$\Delta\varphi(p) = 0 \qquad (6.19)$$

Và điều kiện bờ tiết giáp hai môi trường là:

$$E_{1\tau}(p) = E_{2\tau}(p); \qquad J_{1n}(p) = J_{2n}(p)$$

hoặc $\widetilde{\gamma}_1(p).E_{1n}(p) = \widetilde{\gamma}_2(p).E_{2n}(p)$

Nếu Trường biến thiên hình sin thì cũng dùng ảnh phức hoặc Fourien, chỉ việc thay $p = j\omega$ và cũng xây dựng được đặc tính tần của $\widetilde{\gamma}(j\omega)$.

7.1.3. Phương trình Laplace của Điện trường biến thiên ở môi trường bán dẫn

Ta gọi môi trường bán dẫn là môi trường có cả hiện tượng phân cực và dẫn điện dưới tác dụng của điện trường.

Với môi trường bán dẫn không nhớt thì sẽ được đặc trưng bởi hai thông số thực ε, γ. Trường hợp có nhớt ta cũng có kết quả tương tự.

Trong bài toán bờ đặc biệt cũng dùng mô hình $\text{Rot}\,\vec{E} = 0$ và có phương trình Maxwell:

$$\begin{cases} \text{Rot}\vec{E} = 0 \text{ hay } \vec{E} = -\text{Grad}\varphi \\ \text{Div}\vec{J}_\Sigma = \text{Div}(\gamma\vec{E} + \varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}) = 0 \end{cases} \qquad (7.20)$$

Chuyển sang dạng toán tử:

$$\vec{E}(p) = -\text{ Grad } \varphi(p);\ \text{Div}\,\vec{J}(p) = 0$$

với $\quad \vec{J}_\Sigma(p) = (\gamma + p\varepsilon)\,\vec{E}(p) = \widetilde{\gamma}(p)\,\vec{E}(p)$

Và có phương trình Laplace mở rộng: $\Delta\varphi(p) = 0$

Với điều kiện bờ: $E_{1\tau}(p) = E_{2\tau}(p)$

$J_{1n}(p) = J_{2n}(p)$ hoặc $\widetilde{\gamma}_1(p)E_{1n}(p) = \widetilde{\gamma}_2(p)E_{2n}(p)$

7.2. PHƯƠNG TRÌNH LAPLAPCE CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ BIẾN THIÊN

Theo mô hình thông thường, từ trường biến thiên luôn có tính chất xoáy và gắn với Điện trường biến thiên theo phương trình Maxwell 1:

$$\mathrm{Rot}\,\vec{H} = \vec{J}_{\Sigma} = \gamma\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Nhưng do hình dáng bờ của một số bài toán bờ hoặc khi mật độ dòng điện khá nhỏ có thể cho vế phải triệt tiêu để có một mô hình từ trường có tính chất thế: $\mathrm{Rot}\,\vec{H} = 0$.

Ví dụ: Trường hợp Từ trường biến thiên trong một hình xuyến tiết diện nhỏ, trên đó quấn đều đặn những vòng dây kích thích khiến từ trường có thể coi là đều.

Với mô hình từ trường như vậy có thể xây dựng hàm từ thế vô hướng $\varphi_M(x, y, z, t)$ hoặc ảnh của nó $\varphi_M(x, y, z, p)$ và dẫn ra phương trình Laplace đối với chúng:

Ta cũng phân ra hai loại từ môi nhớt và không nhớt, phương trình Maxwell ở đây có dạng:

$$\mathrm{Rot}\,\vec{H}(x, y, z, t) = 0 \;; \qquad \mathrm{Div}\,\vec{B}(x, y, z, t) = 0$$

Với $$\vec{B} = \mu_o\vec{H} + \vec{M}$$

+ Với từ môi không nhớt, tức có thể bỏ qua quán tính của các dòng điện Ampe, $\vec{M}$ tỷ lệ với $\vec{H}$, do đó $\vec{B}$ tỷ lệ với $\vec{H}$ qua hệ số từ thẩm thực μ. Ta có:

$\vec{B} = \mu\vec{H}$ và có ngay phương trình: $\Delta\varphi_M(x, y, z, t) = 0; \vec{H} = -\,\mathrm{grad}\varphi_M$

+ Với từ môi nhớt, phân cực từ $\vec{M}$ biến thiên chậm sau từ trường $\vec{H}$ và liên hệ với nhau qua một phương trình vi phân: $f(\vec{M}, \vec{M}', \ldots \vec{H}) = 0$

Sau khi chuyển qua các ảnh ta có quan hệ tỷ lệ giữa các ảnh:

$$\vec{M}(p) = \mu_o\widetilde{k}(p)\,\vec{H}(p)\;;\;\; \vec{B}(p) = \mu_o\,[1 + \widetilde{k}(p)]\,\vec{H}(p)$$

với toán tử từ thẩm: $$\widetilde{\mu}(p) = \frac{\vec{B}(p)}{\vec{H}(p)} = \mu_o\,[1 + \widetilde{k}(p)]$$

Với cách dùng ảnh phức cũng có $\tilde{\mu}(j\omega)$ và cuối cùng ta cũng đưa về phương trình Laplace cho từ thế vô hướng $\varphi(p)$, $\dot{\varphi}(j\omega)$:

$$\Delta\varphi(p) = 0;\ \vec{H}(p) = -\,\mathrm{Grad}\,\varphi(p)$$

Với điều kiện bờ:

$$H_{1\tau}(p) = H_{2\tau}(p)$$

$$B_{1n}(p) = B_{2n}(p) \text{ hoặc } \tilde{\mu}_1(p)H_{1n}(p) = \tilde{\mu}_2(p)H_{2n}(p)$$

7.3. CÁC PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN SÓNG CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ BIẾN THIÊN

Ta đã có khái niệm về các hàm thế $\vec{A}$, φ của Trường điện từ với:

$$\vec{B} = \mathrm{Rot}\,\vec{A}\ ;\ \vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \mathrm{Grad}\varphi$$

Và qui luật vận động lan truyền của chúng được miêu tả bằng phương trình truyền sóng:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\vec{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J}_d \\ &\Delta\varphi - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial t^2} = -\frac{\rho_{td}}{\varepsilon} \end{aligned}\right\} \qquad (7.21)$$

Các phương trình này miêu tả đầy đủ và gọn sự vận động của Trường và quan hệ giữa Trường với chất (giữa $\vec{A}$ với μ, ε, $\vec{J}_d$, giữa φ với ρ_{td}, μ, ε). Với các hệ số μ, ε, γ, khác nhau chúng mô tả một cách tổng quát và đủ tính chất lan truyền của Trường trong các môi trường khác nhau.

Thật vậy trong môi trường điện môi thuần tuý và không nhớt ta có $\gamma = 0$, ε là số thực, phương trình truyền trong môi trường không tiêu tán có dạng phương trình truyền sóng D'Alembert:

$$\Delta\vec{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0;\ \Delta\varphi - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial t^2} = 0$$

Nó nêu rõ trong môi trường không tiêu tán, Trường và năng lượng truyền với vận tốc như nhau trong mọi hệ qui chiếu quán tính: $U = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

Tức nó phản ánh phương thức tương tác tiếp cận của Trường điện từ và phản ánh tính tương đối của không gian và thời gian.

Trong môi trường dẫn không nhớt, γ là số thực, nếu coi $\varepsilon = \varepsilon_o$ và toàn không gian không có phân bố điện tích tự do ta có $\varphi = 0$ và phương trình cho $\vec{A}$ có dạng:

$$\Delta \vec{A} - \mu\varepsilon_o \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mu\gamma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0 \qquad (7.22)$$

Đây là phương trình truyền có tiêu tán Jul (vì có số lượng đạo hàm cấp 1 theo t) với tốc độ lan truyền hữu hạn tuỳ thuộc μ, ε_o, γ.

Trên cơ sở phân tích phương trình truyền ta đã phán đoán rằng cùng với sự lan truyền Trường, các cường độ Trường cũng phải truyền theo, tức chúng phải nghiệm đúng phương trình truyền. Ta dẫn ra những phương trình truyền đối với $\vec{E}, \vec{H}$ trong một môi trường truyền tính, không có phân bố điện tích tự do. Các phương trình ấy cũng có dạng (7.21), tức:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta \vec{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu\gamma . \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \\ &\Delta \vec{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu\gamma . \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7.23)$$

Chứng minh: Thật vậy từ phương trình Maxwell 1 (M_1) ta thực hiện phép Rot 2 vế và sau đó giải với phương trình Maxwell 2 (M_2) có chú ý đến đẳng thức:

$$\text{RotRot}\,\vec{F} = \text{GradDiv}\,\vec{F} - \text{DivGrad}\,\vec{F}$$

Đối với một môi trường tuyến tính ta có:

$$M_1 \Rightarrow (\text{Rot}\,\vec{H} = \vec{J}_d + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t})$$

$$M_2 \Rightarrow (\text{Rot}\,\vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t})$$

$$\text{RotRot}\,\vec{H} = \text{GradDiv}\,\vec{H} - \text{DivGrad}\,\vec{H} = \gamma\text{Rot}\,\vec{E} - \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\text{Rot}\,\vec{E}$$

$$= -\mu\gamma\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - \mu\varepsilon\,\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$$

Ngoài ra theo phương trình Maxwell 3: $\text{Div}\,\vec{H} = \frac{1}{\mu}\,\text{Div}\,\vec{B} = 0$

Nên $\text{GradDiv}\,\vec{H} = 0$ và được: $\Delta\vec{H} - \mu\gamma\,\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - \mu\varepsilon\,\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0$ (7.24)

Tương tự tác động phép Rot vào hai vế phương trình Maxwell 2, kết hợp giải với phương trình Maxwell 4.

Với $\rho_{td} = 0$, tức $\text{Div}\,\vec{H} = \frac{1}{3}\text{Div}\,\vec{D} = 0$ (7.25)

sẽ được phương trình (7.23).

Tóm lại: Trường điện từ biến thiên trong một môi trường tuyến tính được mô tả bởi các phương trình truyền (7.21) hoặc (7.23). Nó nêu rõ là bài toán Trường điện từ biến thiên là bài toán bờ có sơ kiện. Nghiệm của nó và sự lan truyền sóng, hình dáng sóng phụ thuộc vào điều kiện bờ và điều kiện đầu trong môi trường.

7.4. CÁC PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN SÓNG CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ BIẾN THIÊN DƯỚI DẠNG PHỨC

Trong thực tế thường gặp các lượng vật lý của Trường biến thiên theo qui luật điều hoà. Mặt khác, về nguyên tắc mọi qui luật biến thiên theo thời gian đều có thể phân tích thành phổ các hàm điều hoà (theo chuỗi Fouries hoặc phổ ảnh Fouries). Với các Trường đó, ta biểu diễn các lượng biến thiên điều hoà bằng các ảnh phức và sau đó bằng một phép biến đổi có thể viết hệ phương trình Maxwell và phương trình truyền đối với các lượng phức. Chúng có dạng đơn giản hơn vì các phép đạo hàm riêng theo thời gian ứng với phép nhân ảnh phức với $j\omega$.

Giả sử Trường biến thiên điều hoà tức ở mỗi điểm (x, y, z) các thành phần trực giao theo không gian của $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$, $\vec{H}$, $\vec{J}$ biến thiên theo qui luật điều hoà.

$$\vec{E}\,(x, y, z, t) = \vec{e}_x\, E_{xm}(x, y, z)\, \omega[\omega t + \alpha\,(x, y, z)] +$$
$$+\ \vec{e}_y E_{ym}(x, y, z) \cos[\omega t + \beta(x, y, z)] +$$
$$+\ \vec{e}_z E_{zm}(x, y, z) \cos[\omega t + \gamma(x, y, z)]$$

Trong đó các biên độ E_{xm}, E_{ym}, E_{zm} và góc pha đầu α, β, γ là những hàm của toạ độ không gian, không phụ thuộc thời gian. Ta biểu diễn các thành phần điều hoà bằng các phức $\dot{E}_x$, $\dot{E}_y$, $\dot{E}_z$ gộp chúng lại ta được ảnh phức vector hiệu dụng của Trường tại điểm $\dot{E}(x, y, z)$:

$$\dot{E}(x, y, z) = \vec{e}_x\, \dot{E}_x + \vec{e}_y \dot{E}_y + \vec{e}_z \dot{E}_z = \vec{e}_x\, E_x e^{j\alpha} + \vec{e}_y E_y e^{j\beta} + \vec{e}_z E_z e^{j\gamma}$$

Với cách biểu diễn như vậy các đạo hàm riêng theo thời gian sẽ ứng với phép nhân toán tử $j\omega$ với ảnh phức, ví dụ:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} E_x(t) \leftrightarrow j\omega\, \dot{E}_x\,;\ \ \frac{\partial}{\partial t}\, \vec{E}(x, y, z, t) \leftrightarrow j\omega\, \dot{\vec{E}}(x, y, z) \\ &\frac{\partial^2}{\partial t^2} E_y(t) \leftrightarrow -1\omega^2 \dot{E}_y\,;\ \ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\, \vec{E}(x, y, z, t) \leftrightarrow -\,\omega^2 \dot{\vec{E}}(x, y, z) \end{aligned}\right\} \quad (7.26)$$

Do đó phương trình Maxwell chuyển sang dạng phức như sau:

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{Rot}\,\dot{\vec{H}} = \dot{\vec{J}}_d + j\omega\, \dot{\vec{D}}\ ;\ \mathrm{Rot}\,\dot{\vec{E}} = -\,j\omega\, \dot{\vec{B}} \\ &\mathrm{Div}\,\dot{\vec{B}} = 0 \qquad\qquad ;\ \mathrm{Div}\,\dot{\vec{D}} = \dot{\rho} \end{aligned}\right\} \quad (7.27)$$

với $\quad \dot{\vec{B}} = \tilde{\mu}\, \dot{\vec{H}};\ \dot{\vec{D}} = \tilde{\varepsilon}\, \dot{\vec{E}}\ \ ;\ \dot{\vec{J}}_d = \tilde{\gamma}\, \dot{\vec{E}}$

$\tilde{\mu}$, $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\gamma}$ là các toán tử phức phản ánh hành vi động lực học của môi trường. Từ đó các phương trình truyền đối với ảnh phức (nếu không có điện tích tự do) có dạng:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta \dot{\vec{A}} + (\omega^2 \tilde{\mu}\, \tilde{\varepsilon} - j\,\omega \tilde{\mu}\, \tilde{\gamma})\, \dot{\vec{A}} = 0\,;\ \Delta\dot{\varphi} + \omega^2\, \tilde{\mu}\, \tilde{\varepsilon}\, \dot{\varphi} = 0 \\ &\Delta H + (\omega^2 \tilde{\mu}\, \tilde{\varepsilon} - j\,\omega \tilde{\mu}\, \tilde{\gamma})\, \dot{\vec{H}} = 0;\ \Delta \dot{\vec{E}} + (\omega^2 \tilde{\mu}\, \tilde{\varepsilon} - j\omega \tilde{\mu}\, \tilde{\varepsilon})\, \dot{\vec{E}} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (7.28)$$

Đối với một bài toán cụ thể tuỳ theo điều kiện bờ mà sử dụng phương trình nào trong hệ (7.28). So với các phương trình trong hệ (7.28) viết cho các lượng phức với những phương trình tương ứng viết cho các lượng tức thời, ta thấy chúng đơn giản hơn. Đó là vì ảnh phức không biến thiên theo thời gian, mà chỉ biến thiên theo không gian. Vậy nhờ phép biểu diễn phức bài toán bờ có sơ kiện trở thành bài toán bờ dừng.

Điều kiện bờ tiếp giáp hai môi trường là:

$$\dot{E}_{1\tau} = \dot{E}_{2\tau};\ \dot{H}_{1\tau} = \dot{H}_{2\tau}$$

Thêm ở điện môi: $\dot{D}_{1n} = \dot{D}_{2n}$ hoặc $\tilde{\varepsilon}_1 \dot{E}_{1n} = \tilde{\varepsilon}_2 \dot{E}_{2n}$

Ở vật dẫn: $\dot{J}_{1n} = \dot{J}_{2n}$ tức $\tilde{\gamma}_1 \dot{E}_{1n} = \tilde{\gamma}_2 \dot{E}_{2n}$

Nhờ biểu diễn $\dot{E}$, $\dot{H}$ ta có biểu diễn phức vector Poyntinh: $\tilde{\bar{\wp}}$

$$\tilde{\bar{\wp}} = \dot{E} \times \dot{H} = \wp_1 + j\,\wp_2$$

$\dot{E}, \dot{H}$ là các ảnh phức hiệu dụng của điện trường và liên hiệp H.

Nếu ứng với vector $\bar{\wp}$ thông lượng của nó qua một mặt kín S vào một miền V bằng công suất đưa năng lượng điện từ vào miền ấy, thì ở đây thông lượng véctơ phức $\tilde{\bar{\wp}}$ chảy vào mặt ấy phải bằng công suất thông dụng P và phản kháng Q đưa vào miền V. Tức là:

$$-\oint_S \tilde{\bar{\wp}} dS = -\oint_S (\dot{E} \times \dot{H}) dS = P + jQ$$

CÂU HỎI ÔN TẬP CHƯƠNG 7

7.1. Trong điều kiện nào có thể chấp nhận mô hình coi điện trường hoặc từ trường biến thiên là có tính chất thế để có phương trình Laplace đối với ảnh của hàm thế?

7.2. Một quả cầu nhỏ bằng điện môi nhớt $k_p = 2$, $T_2 = 10^{-8}$s đặt trong một môi trường ngoài $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ vốn có một điện trường ngoài đều, biến thiên điều hòa E_0 ở tần số $\omega = 2.10^8$rad/s. Hãy tìm sự phân bố thế trong và ngoài quả cầu. Tính điện trường E của một điểm sát mặt cầu với $\theta = 45^0$?

7.3. Một que sắt có từ thẩm nhớt $k_M = 98$, $T_2 = 10^{-9}$s đặt trong không khí, bị từ hóa ngang bởi một xung từ trường đều dạng phân bố Dirac $H_0\delta(t)$. Hãy tìm cường độ trường trong thanh sắt?

7.4. Một trường điện từ biến thiên điều hòa trong một môi trường bán dẫn không nhớt, đặc trưng bởi các hệ số μ, ε, γ thực. Hãy dẫn các phương trình Trường đối với các ảnh phức $\dot{E}$, $\dot{H}$?

7.5. Nghiệm ảnh của một bài toán Trường điện từ biến thiên có dạng đơn giản: $\dot{E} = \vec{e}_x E_x \exp[j(\beta z+\psi)]$ hoặc $\dot{E} = \vec{e}_y E_y \exp[-\alpha x - j(\beta z+\psi)]$. Hỏi chúng biểu diễn gì?

7.6. Ở một điểm trên bờ ngoài của vật trụ tròn tìm ra ảnh phức của điện trường bằng $\dot{E} = \vec{e}_r A\exp(\gamma) + \vec{e}_\alpha B\exp(\beta)$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Bình Thành, Nguyễn Trần Quân, Lê Văn Bảng, Cơ sở kỹ thuật điện -Tập 1 - Cơ sở lý thuyết trường điện từ, Nhà xuất bản Đại học và trung học chuyên nghiệp, 1970.

[2] Lê Văn Doanh, Điện động lực của các máy điện, Nhà xuất bản Đại học và trung học chuyên nghiệp, 1995.

[3] Kiều Khắc Lâu, Lý thuyết trường điện từ, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật; Hà nội, 2001

[4] Nathan Ida; Engineering Eiectromagnetics, Springer, 2000.

[5] Constantine A. Balanis, Advanced Engineering Eiectromagnetics, Arizona State University, Second Edition, 2012.