Chương 4

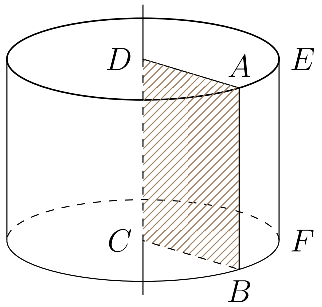
Hình trụ - Hình nón - Hình cầu

§1 Hình trụ. Diện tích xung quanh và thể tích hình trụ

1 Tóm tắt lí thuyết

1 Hình trụ

Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ một vòng quay cạnh CD cố định, ta được một hình trụ (h.73). Khi đó:
- Hai đáy là hai hình tròn (C) và (D) bằng nhau và nằm trên hai mặt phẳng song song.
- Đường thẳng CD là trục của hình trụ.
- AB là một đường sinh. Đường sinh vuông góc với hai mặt phẳng đáy. Độ dài đường sinh là chiều cao hình trụ.



Hình 73

2 Diện tích xung quanh của hình trụ
$S_{\text{xq}} = 2\pi Rh$.
$S_{\text{tp}} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$.

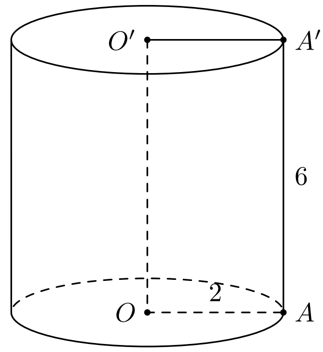
3 Thể tích hình trụ
$V = Sh = \pi R^2 h$ (R là bán kính đáy, h là chiều cao, S là diện tích đáy).

2 Các ví dụ

Ví dụ 1. Một hình trụ có bán kính đường tròn đáy là 2 cm, chiều cao là 6 cm. Hãy tính:

1. Diện tích xung quanh của hình trụ.
2. Diện tích toàn phần của hình trụ.
3. Thể tích hình trụ.

Lời giải.



1. Diện tích xung quanh của hình trụ là
   $S_{\text{xq}} = 2\pi Rh = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 6 = 24\pi \approx 24 \cdot 3,14 = 75,36$ (cm^2)

2. Diện tích toán phần của hình trụ là

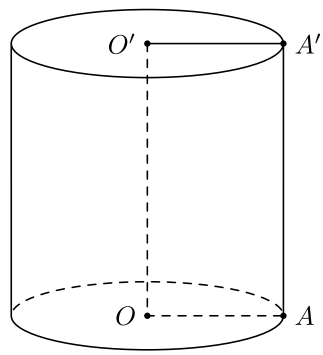
$$\begin{aligned} S_{\text{tp}} &= 2\pi Rh + 2\pi R^2 \\ &= 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 6 + 2 \cdot \pi \cdot 2^2 \\ &= 24\pi + 8\pi = 32\pi \approx 32 \cdot 3,14 = 100,48 \text{ (cm}^2\text{)}. \end{aligned}$$

3. Thể tích hình trụ là:
   $V = \pi R^2 h = \pi \cdot 2^2 \cdot 6 = 24\pi \approx 24 \cdot 3.14 = 75,36$ (cm^3)

□

Ví dụ 2. Một hình trụ có diện tích xung quanh là 20π cm^2 và diện tích toàn phần là 28π cm^2 . Tính thể tích của hình trụ đó.

Lời giải.

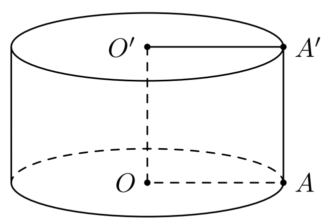


Ta có $S_{\text{đ}} = \dfrac{S_{\text{tp}} - S_{\text{xq}}}{2} = \dfrac{28\pi - 20\pi}{2} = 4\pi$ (cm^2).
Mà $S_{\text{đ}} = \pi R^2 \Leftrightarrow \pi R^2 = 4\pi \Leftrightarrow R = 2$ (cm).
Ta có $S_{\text{xq}} = 2\pi Rh \Rightarrow h = \dfrac{20\pi}{2\pi R} = \dfrac{10}{2} = 5$ (cm).
Thể tích của hình trụ đó là
$V = \pi R^2 h = \pi \cdot 2^2 \cdot 5 = 20\pi \approx 62,8$ (cm^3).

□

Ví dụ 3. Một hình trụ có chiều cao bằng 5 cm. Biết diện tích toàn phần gấp đôi diện tích xung quanh. Tính thể tích hình trụ.

Lời giải.



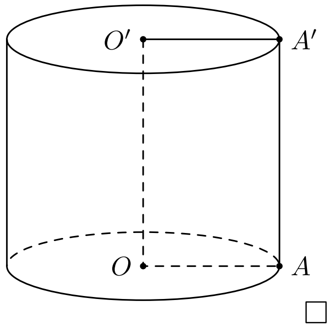
Vì diện tích toàn phần bằng hai lần diện tích xung quanh nên
$2\pi Rh + 2\pi R^2 = 4\pi Rh \Leftrightarrow 2\pi R^2 = 2\pi Rh \Leftrightarrow R = h$.
Vậy bán kính đáy là 5 cm.
Thể tích của hình trụ là $V = \pi R^2 h = \pi \cdot 5^2 \cdot 5 = 125\pi$ (cm^3).

□

Ví dụ 4. Một thùng phuy hình trụ có số đo diện tích xung quanh (tính bằng mét vuông) đúng bằng số đo thể tích (tính bằng mét khối). Tính bán kính đáy của hình trụ.

Lời giải.

Gọi bán kính đáy và chiều cao hình trụ lần lượt là R và h.
Ta có $S_{xq} = 2\pi Rh$ (m^2); $V = \pi R^2 h$ (m^3).
Theo đề bài hai số đo trên bằng nhau nên ta có $2\pi Rh = \pi R^2 h$ suy ra $R = 2$ (m).

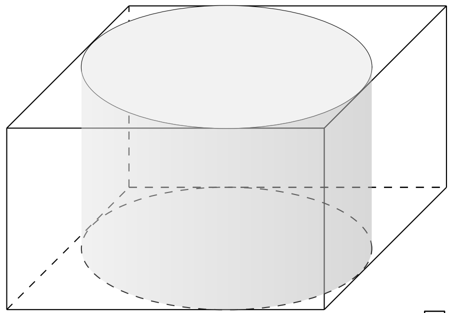


□

Ví dụ 5. Một lọ hình trụ được "đặt khít" trong một hộp giấy hình hộp chữ nhật. Biết thể tích của lọ hình trụ là 270 cm^3, tính thể tích của hộp giấy.

Lời giải.

Gọi bán kính và chiều cao của hình trụ lần lượt là R và h.
Khi đó hình hộp chữ nhật có cạnh đáy là $2R$ và chiều cao là h.
Gọi V_1 và V_2 lần lượt là thể tích của hình trụ và hình hộp.
Ta có $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\pi R^2 h}{4R^2 h}$. Do đó $\dfrac{270}{V_2} = \dfrac{\pi}{4}$.
Suy ra $V_2 = \dfrac{270 \cdot 4}{\pi} \approx 344$ (cm^3).
Vậy thể tích hình hộp là 344 (cm^3).



□

Ví dụ 6. Cho hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 2a, BC = a$. Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh AB một vòng thì được hình trụ có thể tích V_1 và khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh BC một vòng thì được hình trụ có thể tích V_2. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

Lời giải.

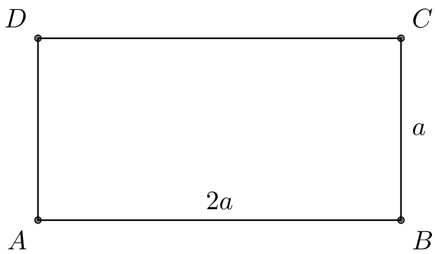
Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh AB một vòng thì được hình trụ có chiều cao $h = AB = 2a$, bán kính đáy $R = BC = a$ nên có thể tích

$$V_1 = \pi R^2 h = \pi a^2 \cdot 2a = 2\pi a^3 (\text{đvtt})$$

Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh BC một vòng thì được hình trụ có chiều cao $h' = BC = a$, bán kính đáy $R' = CD = 2a$ nên có thể tích

$$V_2 = \pi R'^2 h' = \pi (2a)^2 \cdot a = 4\pi a^3 (\text{đvtt})$$

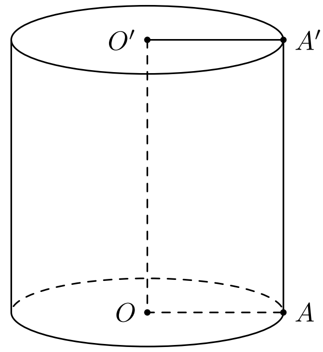
. Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{2\pi a^3}{4\pi a^3} = \dfrac{1}{2}$.



□

Ví dụ 7. Một hộp sữa hình trụ có chiều cao hơn đường kính là 3 cm. Biết diện tích vỏ hộp (kể cả nắp) là $292,5\pi\text{cm}^2$. Tính thể tích của hộp sữa đó.

Lời giải.



Gọi R là bán kính đáy của hộp sữa, h là chiều cao của nó.
Ta có $h = 2R + 3$.
Vì diện tích toàn phần của hộp sữa là $292,5\pi\text{cm}^2$ nên

$$\begin{aligned} & 2\pi R(h+R) = 292,5\pi \\ \Leftrightarrow\ & 2\pi R(h+R) = 292,5\pi \\ \Leftrightarrow\ & 2\pi R(2R+3+R) = 292,5\pi \\ \Leftrightarrow\ & R(R+1) = 48,75 \\ \Leftrightarrow\ & R^2 + R - 48,75 = 0 \end{aligned}$$

Giải ra được $R_1 = 6,5$ (chọn); $R_2 = -7,5$ (loại). Vậy bán kính đáy hộp sữa là $6,5$ cm.
Chiều cao hộp sữa là 16 cm. Thể tích hộp sữa là
$V = \pi R^2 h = \pi \cdot (6,5)^2 \cdot 16 = 676\pi\ (\text{cm}^3)$

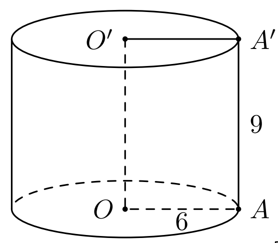
□

3 Luyện tập

Bài 1. Một hình trụ có bán kính đường tròn đáy là 6 cm, chiều cao là 9 cm. Hãy tính

1. Diện tích xung quanh của hình trụ.
2. Thể tích của hình trụ.

Lời giải.

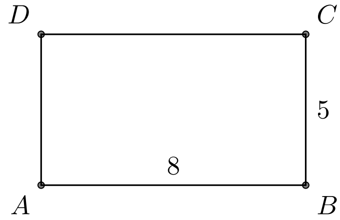


1. Diện tích xung quanh của hình trụ là $2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 9 = 108\pi\ (\text{cm}^2)$.
2. Thể tích của hình trụ là $\pi \cdot 6^2 \cdot 9 = 324\pi\ (\text{cm}^3)$.

□

Bài 2. Một hình chữ nhật có chiều dài và chiều rộng lần lượt là 8 cm, 5 cm. Quay hình chữ nhật đó một vòng quanh chiều dài hay chiều rộng thì thể tích lớn hơn.

Lời giải.



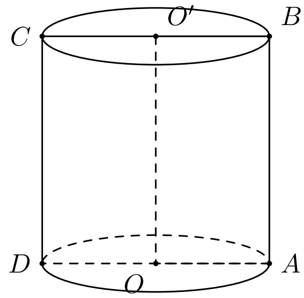
Khi quay quanh chiều dài thì $R = 5$, $h = 8$ (cm).
$V_1 = \pi \cdot 5^2 \cdot 8 = 200\pi\ (\text{cm}^3)$.
Khi quay quanh chiều rộng thì $R = 8$, $h = 5$ (cm).
$V_2 = \pi \cdot 8^2 \cdot 5 = 320\pi\ (\text{cm}^3)$.
Vì $V_2 > V_1$ nên khi quay quanh chiều rộng thì thể tích sẽ lớn hơn khi quay quanh chiều dài.

□

Bài 3. Người ta cắt hình trụ bằng một mặt phẳng chứa trục. Biết thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng 36 cm^2. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ.

Lời giải.

Độ dài mỗi cạnh của thiết diện là $a = \sqrt{35} = 6$ (cm).
Vậy chiều cao của hình trụ là $h = 6$ (cm),
bằng đường kính của đáy hình trụ. Ta có $2R = 6$ do đó $R = 3$ (cm).



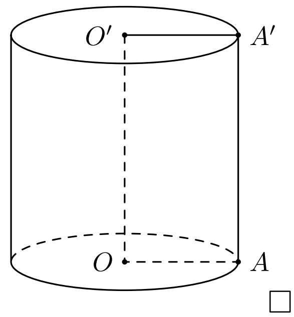
- Diện tích xung quanh của hình trụ là
$S_{\text{xq}} = 2\pi Rh = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 6 \approx 113,4$ (cm^2).
- Thể tích của hình trụ là
$V = \pi R^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 6 \approx 169,56$ (cm^3).

□

Bài 4. Một hình trụ có chu vi đáy là 24π cm và diện tích toàn phần là 768πcm^2. Tính thể tích của hình trụ.

Lời giải.

Ta có $C = 2\pi R$, suy ra
$R = \dfrac{C}{2\pi} = \dfrac{24\pi}{2\pi} = 12$ (cm). Vì dện tích toàn phần của hình trụ là 768π cm^2
nên $2\pi R(h + R) = 768\pi$, hay $2\pi \cdot 12(h + 12) = 768\pi \Rightarrow h + 12 = 32$
$\Rightarrow h = 20$ (cm).
Vậy thể tích của hình trụ là
$V = \pi R^2 h = \pi \cdot 12^2 \cdot 20 = 2880\pi$ (cm^3).

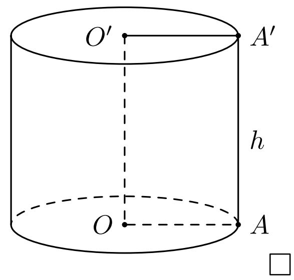


□

Bài 5. Tỉ số giữa diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của một hình trụ là $\dfrac{3}{5}$. Biết bán kính đáy là 6 cm, tính chiều cao của hình trụ.

Lời giải.

Gọi bán kính đáy và chiều cao của hình trụ lần lượt là R và h. ta có
$S_{\text{xq}} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 6h = 12\pi h$.
$S_{\text{tp}} = 2\pi R(h + R) = 2\pi \cdot 6(h + 6)$. Theo đề bài ta có $\dfrac{S_{\text{xq}}}{S_{\text{xq}}} = \dfrac{3}{5}$.
Suy ra $\dfrac{12\pi h}{12\pi(h + 6)} = \dfrac{3}{5}$. Giải ra ta được $h = 9$ (cm).

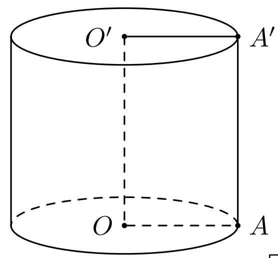


□

Bài 6. Một hình trụ có thể tích là 300 cm^3 và diện tích xung quanh là 120 cm^2. Tính diện tích toàn phần của hình trụ đó.

Lời giải.

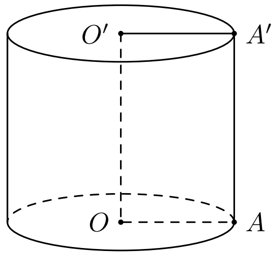
Gọi bán kính đáy và chiểu cao của hình trụ lần lượt là R và h.
Ta có $V = \pi R^2 h = 300$ (cm^3).
$S_{\text{xq}} = 2\pi Rh = 120$ (cm^2).
Do đó $\dfrac{\pi R^2 h}{2\pi Rh} = \dfrac{300}{120} \Rightarrow R = 5$ (cm).
$S_{\text{tp}} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 120 + 157 = 277$ (cm^2).



□

Bài 7. Một hình trụ có diện tích xung quanh là 24π cm^2 và diện tích toàn phần là 42π cm^2. Tính thể tích của hình trụ đó.

Lời giải.

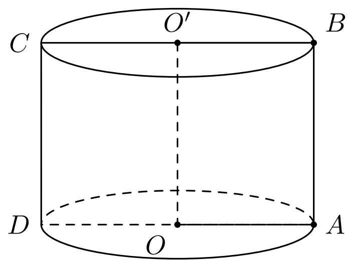


Gọi bán kính đáy và chiều cao của hình trụ lần lượt là R và h.
Ta có
$S_{\text{đ}} = \dfrac{S_{\text{tp}} - S_{\text{xq}}}{2} = \dfrac{42\pi - 24\pi}{2} = 9\pi$ (cm^2).
$S_{\text{đ}} = 9\pi \Leftrightarrow \pi R^2 = 9\pi \Leftrightarrow R = 3$ (cm).
Ta có $S_{\text{xq}} = 2\pi R h \Rightarrow h = \dfrac{S_{\text{xq}}}{2\pi R} = 4$ (cm).
Do đó thể tích của hình trụ là $V = \pi R^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 36\pi$ (cm^3).

□

Bài 8. Một hình trụ có bán kính đáy bằng chiều cao, thiết diện đi qua trục có diện tích bằng 72 cm^2. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình trụ.

Lời giải.



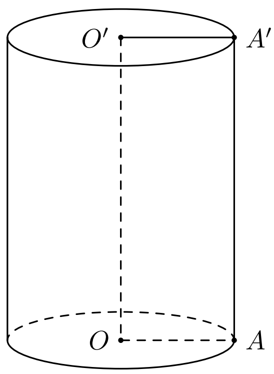
Gọi bán kính đáy là R, chiều cao là h.
Theo đề bài ta có $R = h$ và $2Rh = 72 \Leftrightarrow R^2 = 36 \Leftrightarrow R_1 = 6$ (thỏa mãn), $R_2 = -6$ (loại). Do đó $R = h = 6$ cm.

- Diện tích xung quanh bằng
  $2\pi Rh = 2\pi \cdot Rh = 2\pi \cdot 6 \cdot 6 = 72\pi$ (cm^2).
- Diện tích toàn phần bằng
  $2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi \cdot 6 \cdot 6 + 2\pi \cdot 6^2 = 144\pi$ (cm^2).
- Thể tích của hình trụ bằng $\pi R^2 h = \pi \cdot 6^2 \cdot 6 = 216\pi$ (cm^3).

□

Bài 9. Một hình trụ có chiều cao là 18 cm và diện tích toàn phần là 176 cm^2. Chứng minh rằng diện tích xung quanh hình trụ bằng 9 lần diện tích đáy.

Lời giải.



Gọi bán kính đáy và chiều cao của hình trụ lần lượt là R và h.
Vì diện tích toàn phần bằng 176π cm^2 nên ta có

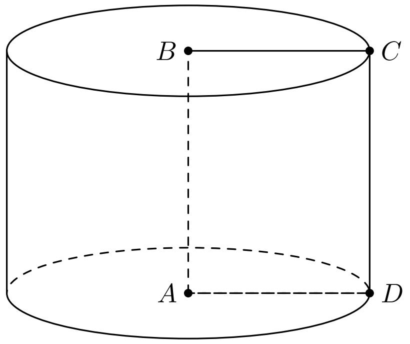
$$\begin{aligned} & 2\pi R(h + R) = 176\pi \\ \Leftrightarrow\ & 2\pi R(18 + R) = 176\pi \\ \Leftrightarrow\ & R^2 + 18R - 88 = 0 \end{aligned}$$

Giải ra được $R_1 = 4$ (chọn); $R_2 = -22$ (loại).
Vậy diện tích đáy hình trụ là $S_{\text{đ}} = \pi R^2 = 16\pi$ (cm^2).
Diện tích xung quanh hinh tru là
$S_{\text{xq}} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 4 \cdot 18 = 144\pi$ (cm^2). Do đó $\dfrac{S_{\text{xq}}}{S_{\text{đ}}} = \dfrac{144\pi}{16\pi} = 9$ (lần).

□

Bài 10. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB > BC$. Biết diện tích hình chữ nhật là 48 cm^2, chu vi là 28 cm. Cho hình chữ nhật quay quanh cạnh AB một vòng ta được một hình trụ. Tính dện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình trụ này.

Lời giải.



Từ đề bài ta có $\begin{cases} AB + BC = 14 \\ AB \cdot BC = 48. \end{cases}$

Suy ra AB, BC là nghiệm của phương trình: $x^2 - 14x + 48 = 0$.
Giải phương trình ta được $x_1 = 6$, $x_2 = 8$.
Do $AB > BC$ nên $AB = 8$; $BC = 6$.

1. Diện tích xung quanh của hình trụ là
$S_{\text{xq}} = 2 \cdot \pi \cdot BC \cdot AB = 2\pi \cdot 6 \cdot 8 = 96\pi$ (cm^2).

2. Diện tích toàn phần của hình trụ là
$S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + 2S_{\text{đ}} = 96\pi + 2\pi R^2 = 96\pi + 2\pi \cdot 6^2 = 168\pi$ (cm^2).

3. Thể tích của hình trụ là
$V = \pi \cdot BC^2 \cdot AB = \pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 288\pi$ (cm^3).

□

§2 Hình nón - Hình nón cụt - Diện tích xung quanh và thể tích của hình nón, hình nón cụt

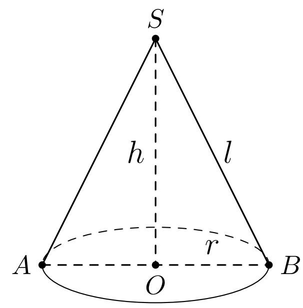
1 Tóm tắt lí thuyết

- Mô tả hình nón

+) Đáy của hình nón là hình tròn (O);

+) SA là một đường sinh;

+) S là đỉnh, SO là đường cao.



- Diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón

$$\begin{aligned} S_{\text{xq}} &= \pi r l \\ S_{\text{tp}} &= \pi r l + \pi r^2 \end{aligned}$$

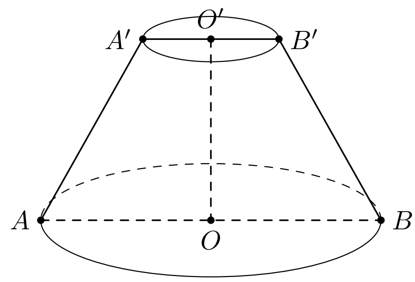
(r, l lần lượt là bán kính đáy và độ dài đường sinh của hình nón).

- Thể tích hình nón

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \text{ (h là chiều cao).}$$

- Hình nón cụt

Khi cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đáy thì phần mặt phẳng bị giới hạn bởi hình nón là một hình tròn. Phần hình tròn nằm giữa mặt phẳng nói trên và đáy là một hình nón cụt.



- Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình nón cụt

$$\begin{aligned} S_{\text{xq}} &= \pi(R + r)l \\ S_{\text{tp}} &= \pi(R + r)l + \pi R^2 + \pi r^2 \end{aligned}$$

R, r lần lượt là bán kính hai đáy, l là độ dài đường sinh của hình nón cụt).

- Thể tích hình nón cụt:

$$V = \frac{\pi}{3}h(R^2 + r^2 + Rr)$$

(h là đường cao của hình nón cụt).

35. Hình khai triển mặt xung quanh của một hình nón là một hình quạt.

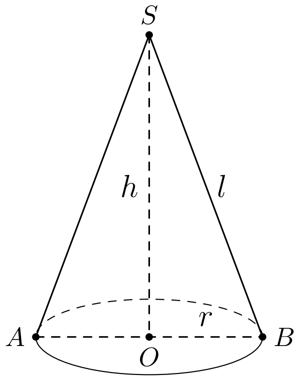
36. Một hình nón được xác định khi biết 2 trong 3 yếu tố: bán kính đáy, chiều cao, đường sinh.

2 Các ví dụ

Ví dụ 1. Một hình nón có bán kính đáy bằng r, diện tích xung quanh gấp đôi diện tích đáy. Tính theo r

1. Diện tích xung quanh của hình nón;
2. Thể tích của hình nón.

Lời giải.

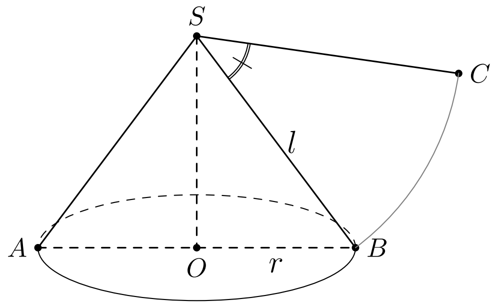


1. Diện tích xung quanh gấp đôi diện tích đáy nên $\pi r l = 2\pi r^2$ suy ra $l = 2r$.
   Vậy $\pi r l = \pi r \cdot 2r = 2\pi r^2$. Diện tích xung quanh bằng $2\pi r^2$.
2. Xét tam giác SOA vuông tại O, ta có $h^2 = l^2 - r^2 = (2r)^2 - r^2 = 3r^2$ nên $h = r\sqrt{3}$.
   Thể tích hình nón bằng $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi r^2 \cdot r\sqrt{3} = \dfrac{\pi r^3\sqrt{3}}{3}$.

□

Ví dụ 2. Một hình nón có bán kính đáy bằng r, đường sinh bằng l. Khai triển mặt xung quanh hình nón ta được một hình quạt. Tính số đo cung của hình quạt theo r và l.

Lời giải.



Khi cắtmặt xung quanh của một hình nón theo một đường sinh và trải phẳng ra thành một hình quạt. Khi đó bán kính hình quạt tròn SBC bằng độ dài đường sinh $SB = l$ và độ dài $\overset{\frown}{BC}$ bằng chu vi đáy. Độ dài $\overset{\frown}{BC}$ của hình quạt bằng chu vi đáy của hình nón bằng $2\pi r$.
Độ dài đường tròn $(S;\ SA)$ bằng $2\pi l$.
Ta có $S_{\text{quạt}} = \dfrac{2\pi \cdot l^2 \cdot n}{360} = l \cdot 2\pi \cdot r \Rightarrow \dfrac{2\pi \cdot l^2 \cdot n}{360} = l \cdot 2\pi \cdot r$
$\Rightarrow \dfrac{l \cdot n}{360} = r$. Do đó, số đo cung AB của hình quạt là

$$n^\circ = 360^\circ \cdot \frac{2\pi r}{2\pi l} = 360^\circ \cdot \frac{r}{l}.$$

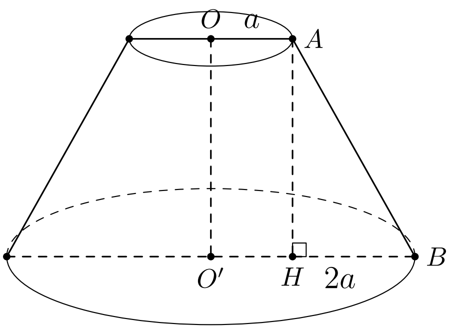
□

Ví dụ 3. Một hình nón cụt có các bán kính đáy bằng a và $2a$, chiều cao bằng a.

1. Tính diện tích xung quanh của hình nón cụt;
2. Tính thể tích của hình nón cụt.

Lời giải.

1. Trong mặt phẳng $OABO'$, kẻ $AH \perp O'B$. Ta có $O'H = OA = a$ nên $HB = a$. Tam giác AHB vuông cân nên $AB = HB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.
   Ta có $S_{\text{xq}} = \pi(r_1 + r_2)l = \pi(a + 2a) \cdot a\sqrt{2} = 3\pi a^2\sqrt{2}$.
2. Tính thể tích của hình nón cụt:
$$V = \frac{1}{3}\pi a[a^2 + (2a)^2 + a \cdot 2a] = \frac{7}{3}\pi a^3.$$

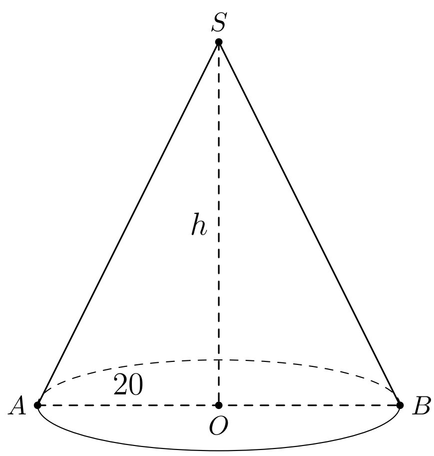


□

Ví dụ 4. Một hình nón có bán kính đáy bằng 20 cm, số đo thể tích (tính bằng cm^2) bằng bốn lần số đo diện tích xung quanh (tính bằng cm^2). Tính chiều cao của hình nón.

Lời giải.

Gọi h là chiều cao của hình nón. Thể tích của hình nón bằng
$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 20^2 \cdot h = \frac{400}{3}\pi h.$$
Đường sinh SA bằng $\sqrt{h^2 + 20^2}$.
Diện tích xung quanh của hình nón bằng
$S_{\text{xq}} = \pi \cdot 20\sqrt{h^2 + 400}$.
Do $V = 4S_{\text{xq}}$ nên
$$\begin{aligned} \frac{400}{3}\pi h &= 4 \cdot 20\pi\sqrt{h^2 + 400} \\ \Leftrightarrow\ & 5h = 3\sqrt{h^2 + 400} \Leftrightarrow 25h^2 = 9(h^2 + 400) \\ \Leftrightarrow\ & h^2 = 225 \Leftrightarrow h = 15. \end{aligned}$$



Vậy chiều cao của hình nón bằng 15 cm

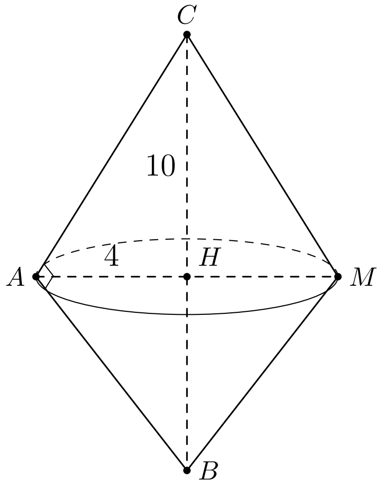
□

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC vuông tại A, $BC = 10$ cm, đường cao $AH = 4$ cm. Quay tam giác ABC một vòng quanh cạnh BC. Tính thể tích hình tạo thành.

Lời giải.

Khi quay tam giác ABC một vòng quanh cạnh BC, hình tạo thành gồm hai hình nón có đường cao theo thứ tự là HB và HC. Thể tích của hình tạo thành bằng

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\pi\cdot AH^2\cdot BH+\frac{1}{3}\pi\cdot AH^2\cdot CH &= \frac{1}{3}\pi\cdot AH^2(BH+CH)\\ &= \frac{1}{3}\pi\cdot AH^2\cdot BC\\ &= \frac{1}{3}\pi\cdot 4^2\cdot 10=\frac{160}{3}\pi(\text{cm}^3).\end{aligned}$$

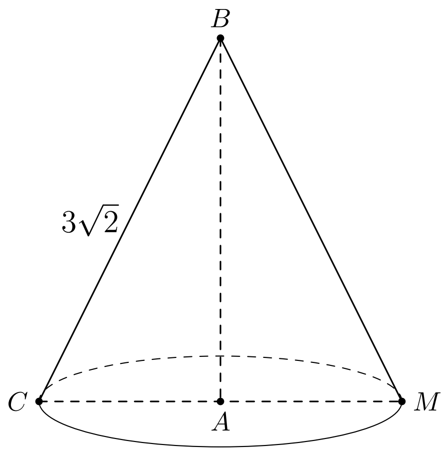


□

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC vuông cân, $\widehat{A}=90^\circ$, $BC=3\sqrt{2}$ cm. Quay tam giác ABC một vòng quanh cạnh góc vuông AB cố định. Tính diện tích xung quanh và thể tích hình tạo thành.

Lời giải.

Quay tam giác vuông cân ABC một vòng quanh cạnh góc vuông AB cố định, ta được hình nón đỉnh B, đường sinh BC, bán kính đường tròn đáy là AC.
Tam giác ABC vuông cân tại A, theo định lý Pitago ta có $AB^2+AC^2=BC^2$ hay $2AC^2=(3\sqrt{2})^2=18$, suy ra $AC^2=9$, do đó $AC=3$ (cm).
Diện tích xung quanh của nón là $S_{\text{xq}}=\pi\cdot AC\cdot BC=\pi\cdot 3\cdot 3\sqrt{2}=9\sqrt{2}\pi\approx 39,85$ (cm^2).
Thể tích hình nón là $V=\dfrac{1}{3}AC^2\cdot AB=\dfrac{1}{3}\cdot AC^3=\dfrac{1}{3}\cdot 3^3=9$ (cm^3).



□

3 Luyện tập

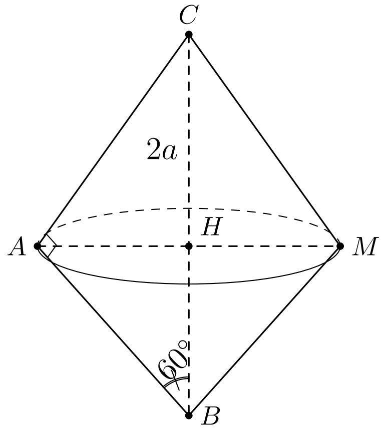
Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{B}=60^\circ$ và $BC=2a$ (đơn vị độ dài). Quay xung quanh tam giác một vòng quanh cạnh huyền BC. Tìm diện tích xung quanh và thể tích hình tạo thành.

Lời giải.

Khi quay tam giác vuông ABC một vòng xung quanh cạnh huyền BC, ta được hai hình nón có các đáy úp vào nhau, bán kính đường tròn đáy bằng đường cao AH kẻ từ A đến cạnh huyền BC. Ta có $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (đơn vị độ dài).

Diện tích xung quanh hình tạo thành là $S = \pi \cdot AH(AB + AC) = \dfrac{\pi a^2(3+\sqrt{3})}{2}$ (đơn vị diện tích).

Thể tích hình tạo thành là $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot AH^2 \cdot BC = \dfrac{\pi a^3}{2}$ (đơn vị thể tích).



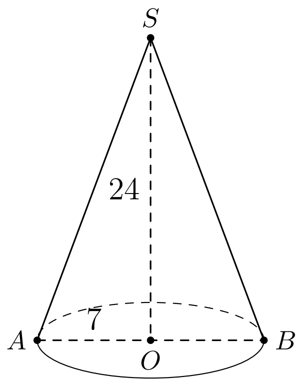
□

Bài 2. Một hình nón có bán kính đáy bằng 7 cm, chiều cao bằng 24 cm.

1. Tính số đo cung hình quạt khi khai triển mặt xung quanh của hình nón;
2. Tính diện tích toàn phần của hình nón;
3. Tính thể tích của hình nón.

Lời giải.

1. Đường sinh bằng $l = 25$ cm. Số đo cung của hình quạt là $n^\circ = 360^\circ \cdot \dfrac{r}{l} = 360^\circ \cdot \dfrac{7}{25} = 100,8^\circ$.
2. Diện tích toàn phần của hình nón $S_{\text{tp}} = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l+r) = 224\pi$.
3. Tính thể tích của hình nón $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 7^2 \cdot 27 = 392\pi$.



□

Bài 3. Một hình nón có bán kính đáy bằng 6 cm, đường sinh bằng 10 cm.

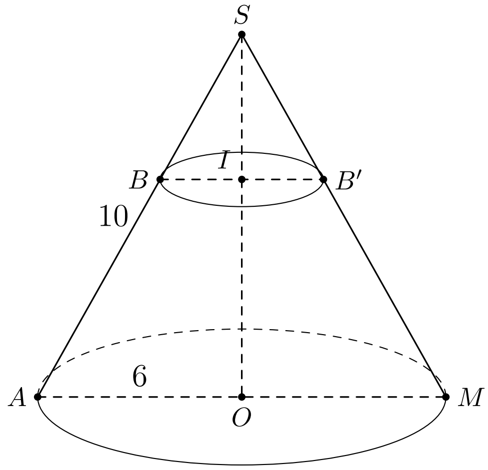
1. Tính diện tích xung quanh của hình nón;
2. Tính thể tích của hình nón;
3. Một mặt phẳng đi qua trung điểm của đường cao và song song với đáy hình nón chia hình nón thành một hình nón nhỏ và một hình nón cụt. Tính thể tích hình nón cụt.

Lời giải.

1. Diện tích xung quanh của hình nón
   $S_{\text{xq}} = \pi r l = 60\pi$ (cm^2).

2. Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông SAO, ta có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = 8$. Thể tích của hình nón
   $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi$ (cm^3).

3. Trong $\triangle SOA$, ta có $SI = IO$, $IB \parallel OA$ nên $IB = \dfrac{1}{2}OA = 3$ cm. Thể tích hình nón nhỏ bằng
   $\dfrac{1}{3}\pi \cdot r'^2 \cdot h' = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi$ (cm^3).



□

Bài 4. Một hình nón cụt có bán kính đáy lớn bằng 8 cm, chiều cao bằng 12 cm và đường sinh bằng 13 cm.

1. Tính bán kính đáy nhỏ của hình nón cụt;

2. Tính diện tích xung quanh của hình nón cụt;

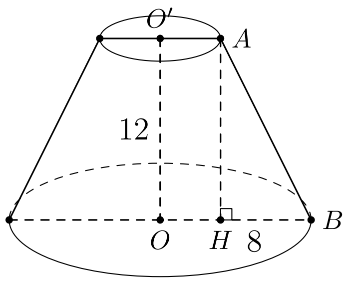
3. Tính thể tích của hình nón cụt.

Lời giải.

1. Vẽ $AH \perp OB$ ta được $OH = O'A = r$,
   $HB = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ (cm),
   suy ra $r = 8 - 5 = 3$ (cm).

2. Tính diện tích xung quanh của hình nón cụt
   $S_{\text{xq}} = \pi r l = 143\pi$ (cm^2).

3. Tính thể tích của hình nón cụt $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = 388\pi$ (cm^3).



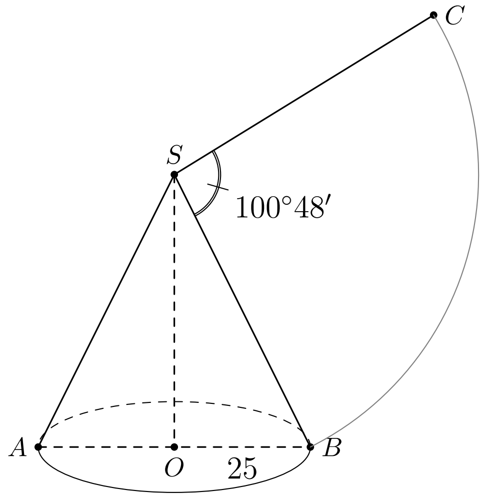
□

Bài 5. Mặt xung quanh của một hình nón khai triển thành một hình quạt $100^\circ 48'$, bán kính 25 cm.

1. Tính diện tích toàn phần của hình nón;

2. Tính thể tích của hình nón.

Lời giải.



1. Độ dài cung AB của hình quạt là

$$l = \frac{\pi \cdot 25 \cdot 100,8}{180} = 14\pi \text{ (cm)}.$$

Chu vi của hình tròn đáy là 14π (cm).

Bán kính của hình tròn đáy là $R = \dfrac{14\pi}{2\pi} = 7$ (cm).

Chiều cao của hình nón là

$h = SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$ (cm).

Diện tích toàn phần của hình nón là

$S_{\text{tp}} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi \cdot 7 \cdot 25 + \pi \cdot 7^2 = 224\pi$ (cm^2).

2. Tính thể tích của hình nón là

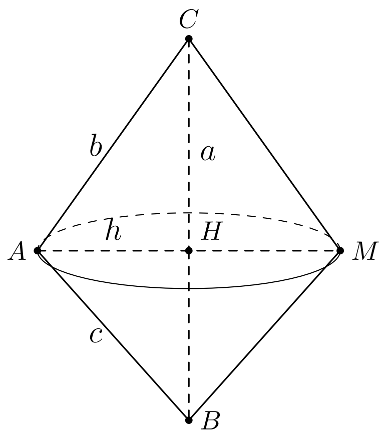
$V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 7^2 \cdot 27 = 392\pi$ (cm^3).

□

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi $V_1,\ V_2,\ V_3$ theo thứ tự là thể tích của các hình sinh ra khi quay tam giác ABC một vòng xung quanh các cạnh $BC,\ AB,\ AC$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{V_1^2} = \frac{1}{V_2^2} + \frac{1}{V_3^2}.$$

Lời giải.



Gọi độ dài các cạnh của tam giác là $AC = b,\ BC = a,\ AB = c$ và $AH = h$ là chiều cao dựng từ đỉnh A xuống cạnh huyền BC.

Ta có $h = \dfrac{bc}{a}$. Theo giả thiết ta có:

$V_1 = \dfrac{1}{3}\pi \cdot AH^2 \cdot HC + \dfrac{1}{3}\pi \cdot AH^2 \cdot HB = \dfrac{1}{3}\pi AH^2 \cdot BC = \dfrac{\pi b^2 c^2}{3a}$,

suy ra $\dfrac{1}{V_1^2} = \dfrac{9a^2}{\pi^2 b^4 c^4}$.

Tương tự ta có $\dfrac{1}{V_2^2} = \dfrac{9}{\pi^2 b^4 c^2}$ và $\dfrac{1}{V_3^2} = \dfrac{9}{\pi^2 b^2 c^4}$, do đó $\dfrac{1}{V_2^2} + \dfrac{1}{V_3^2} =$

$\dfrac{9}{\pi^2 b^4 c^2} + \dfrac{9}{\pi^2 b^2 c^4} = \dfrac{9(b^2 + c^2)}{\pi^2 b^4 c^4} = \dfrac{9a^2}{\pi^2 b^4 c^4}$.

Vậy $\dfrac{1}{V_1^2} = \dfrac{1}{V_2^2} + \dfrac{1}{V_3^2}$.

□

§3 Hình cầu - Diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu

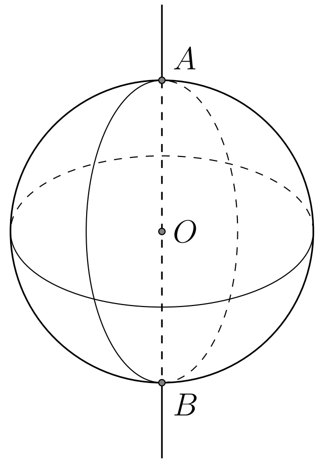
1 Tóm tắt lí thuyết

1.1 Hình cầu

Định nghĩa 13. Khi quay nửa hình tròn $(0; R)$ một vòng quanh đường kính AB cố định, ta được một hình cầu.

- Nửa hình tròn khi quay quét nên mặt cầu.
- Điểm O gọi là tâm, R là bán kính của hình cầu hay mặt cầu.

Khi cắt hình cầu bởi một mặt phẳng thì mặt cắt là một hình tròn.



1.2 Diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu

- Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2$ hay $S = \pi d^2$, với R là bán kính; d là đường kính.
- Thể tích hình cầu $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

2 Các ví dụ

Ví dụ 1. Một phao cơ hình cầu tự động đóng nước chảy vào bể khi bể đầy. Biết diện tích bề mặt của phao là 804 cm^2, tính bán kính của phao.

Lời giải.

Từ công thức $S = 4\pi R^2 \Rightarrow R = \sqrt{\dfrac{S}{4\pi}}$.

Bán kính của phao là $R = \sqrt{\dfrac{804}{4\pi}} \approx 8$ cm. □

Ví dụ 2. Phần trên của một chiếc cốc chân cao có dạng nửa hình cầu. Biết cốc này có thể chứa được $56,5$ ml nước. Tính đường kính của miệng cốc.

Lời giải.

Vì dung dích của cốc là 56,5 ml nên thể tích của cốc là 56,5 cm^3.
Ta có $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ do đó có thể tích của nửa hình cầu là $\frac{2}{3}\pi R^3$.
Theo đề bài, ta có $\frac{2}{3}\pi R^3 = 56{,}5 \Rightarrow R^3 = \frac{3 \cdot 56 \cdot 5}{2\pi} \approx 27\ \text{cm}^3$, suy ra $R = 3$ cm.
Vậy đường kính của miệng cốc là $3 \cdot 2 = 6$ cm. □

Ví dụ 3. Một trái dưa có dạng hình cầu. Bổ đôi trái dưa này ra thì mặt cắt có diện tích là 314 cm^2. Tính thể tích của trái dưa đó.

Lời giải.

Khi bổ đôi trái dưa thì mặt cắt là một hình tròn.
Ta có: $S = \pi R^2 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \approx \sqrt{\frac{314}{3{,}14}} = 10$ cm.
Vậy bán kính của trái dưa là 10 cm.
Thể tích của trái dưa là:
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 10^3 \approx 4187\ \text{cm}^3.$$
□

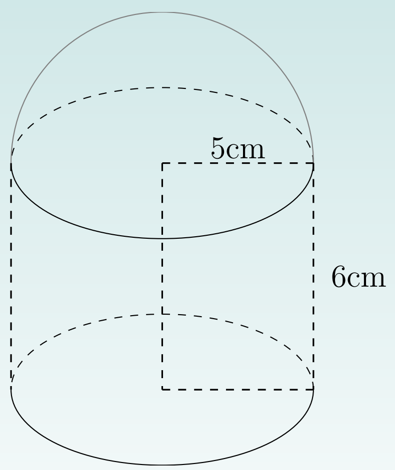
Ví dụ 4. Trái đất có bán kính 6400 km. Diện tích biển và đại dương chiếm $\frac{3}{4}$ bề mặt trái đất. Hãy tính diện tích biển và đại dương của trái đất (làm tròn đến triệu km^2).

Lời giải.

Diện tích bề mặt trái đất là $S = 4\pi R^2 = 4 \cdot \pi \cdot 6400^2 \approx 514457600\ \text{km}^2$.
Diện tích các biển và đại dương là $514457600 \cdot \frac{3}{4} \approx 386000000\ \text{km}^2$. □

Ví dụ 5.
Hình bên minh họa bộ phận lọc của một bình nước. Bộ phận này gồm một hình trụ và một nửa hình cầu với kích thước ghi trên hình. Hãy tính

1. Thể tích của bộ phận đó;
2. Diện tích mặt ngoài của bộ phận này.



Lời giải.

1. Thể tích phần hình trụ là $V_1 = \pi R^2 h = \pi \cdot 5^2 \cdot 6 = 150\pi\ \text{cm}^3$.
   Thể tích nửa hình cầu:
$$V_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot 5^3 = \frac{250}{3}\pi\ \text{cm}^3.$$

Thể tích bộ phận lọc là:

$$V = V_1 + V_2 = 150\pi + \frac{250}{3}\pi = \frac{700}{3}\pi \text{ cm}^3 \approx 733 \text{ cm}^3.$$

2. Diện tích xung quanh của hình trụ là:

$$S_1 = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 5 \cdot 6 = 60\pi \text{ cm}^2.$$

Diện tích đáy hình trụ là:

$$S_2 = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi \text{ cm}^3.$$

Diện tích nửa mặt cầu là:

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot 4\pi R^2 = 2\pi \cdot 5^2 = 50\pi \text{ cm}^3.$$

Diện tích mặt ngoài của bộ phận lọc:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 60\pi + 25\pi + 50\pi = 135\pi \text{ cm}^2 \approx 424 \text{ cm}^2.$$

□

3 Luyện tập

Bài 1. Cho hình cầu có bán kính $R = \dfrac{5a\sqrt{2}}{2}$.

1. Tính diện tích mặt cầu.
2. Tính thể tích của khối cầu tương ứng.

Lời giải.

1. Ta có $S = 4\pi \left(\dfrac{5a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 50\pi a^2$ đvdt.
2. $V = \dfrac{4}{3}\pi \left(\dfrac{5a\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \dfrac{125a^3\sqrt{2}}{3}$đvtt.

□

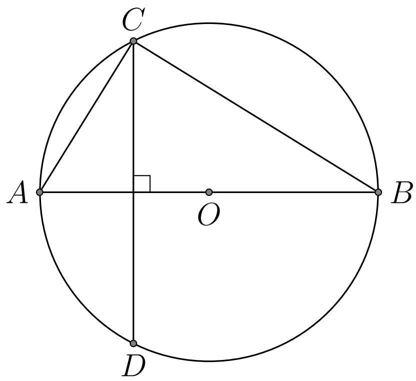
Bài 2. Cho đường tròn (O) đường kính AB, dây $CD \perp AB$ tại H. Cho biết $CD = 12$ cm và $AH = 4$ cm. Quay đường tròn này một vòng quanh AB. Tính diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu được tạo thành.

Lời giải.

Vẽ các đoạn thẳng CA, CB ta được: $\widehat{ACB} = 90^\circ$.
Vì $AB \perp CD$ nên $HD = HC = 6$ cm.
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có

$$CH^2 = HA \cdot HB.$$

Suy ra: $HB = \dfrac{CH^2}{HA} = \dfrac{6^2}{4} = 9$ cm.
Do đó, bán kính của đường tròn là $(4+9) : 2 = 6{,}5$ cm, bán kính hình cầu là $6{,}5$ cm.
Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 4 \cdot \pi \cdot (6{,}5)^2 \approx 531$ cm^2.
Diện tích hình cầu là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot (6{,}5)^3 \approx 1150$ cm^3.



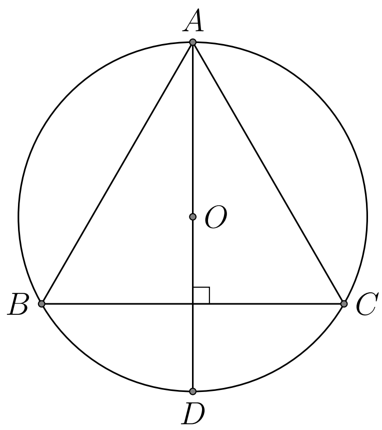
□

Bài 3. Cho đường tròn $(O; R)$ ngoại tiếp tam giác đều ABC. Quay đường tròn này một vòng quanh đường kính AOD ta được một hình cầu ngoại tiếp một hình nón. Tính thể tích phần bên trong hình cầu và bên ngoài hình nón.

Lời giải.

Độ dài cạnh của tam giác đều là $AB = R\sqrt{3}$.
Bán kính đáy hình tròn là $r = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.
Chiều cao của hình nón là $h = \dfrac{R\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \dfrac{3R}{2}$.
Thể tích hình cầu là $V_1 = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.
Thể tích hình nón là

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{2}R = \frac{3}{8}\pi R^3.$$



Thể tích phần cần tìm là

$$V = V_1 - V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{3}{8}\pi R^3 = \frac{23}{24}\pi R^3.$$

□

Bài 4. Bạn An lấy thước dây đo vòng theo đường xích đạo của quả địa cầu trong thư viện được độ dài $94{,}2$ cm. Hãy tính

1. Diện tích mặt ngoài của quả địa cầu.
2. Thể tích của quả địa cầu.

Lời giải.

Ta có chu vi của đường tròn xích đạo là $94{,}2$ cm nên

$$R = \frac{C}{2\pi} \approx \frac{94{,}2}{2 \cdot 3{,}14} = 15 \text{ cm}.$$

Do đó

1. Diện tích mặt ngoài của quả địa cầu là $S = 4\pi R^2 = 900\pi$ cm^2.

2. Thể tích của quả địa cầu $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = 4500\ \text{cm}^3$.

□

Bài 5. Quả bóng bàn có số đo diện tích bề mặt (tính bằng cm^2) gấp 1,5 lần số đo thể tích của nó (tính bằng cm^3). Tính bán kính, diện tích và thể tích của quả bóng bàn.

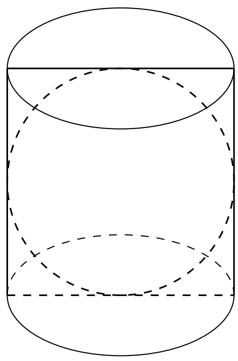
Lời giải.

Theo đề bài, ta có $4\pi R^2 = 1{,}5 \cdot \dfrac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R = 2$ cm.
Do đó, diện tích quả bóng là $S = 4\pi R^2 = 16\pi\ \text{cm}^2$.
Thể tích của quả bóng là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{32}{3}\pi\ \text{cm}^3$. □

Bài 6. Một hình cầu đặt vừa khít trong một hình trụ có chiều cao là 18 cm. Tính thể tích phần không gian nằm trong hình trụ nhưng nằm bên ngoài hình cầu.

Lời giải.

Vì hình cầu đặt vừa khít trong hình trụ nên chiều cao của hình trụ bằng đường kính đáy và bằng đường kính của hình cầu.
Bán kính đáy của hình cầu là 9 cm.
Khi đó, thể tích hình trụ là $V_1 = \pi R^2 h = \pi \cdot 9^2 \cdot 18 = 1458\ \text{cm}^3$.
Thể tích hình cầu là $V_2 = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = 972\pi\ \text{cm}^3$.
Vậy thể tích cần tính là $V = V_1 - V_2 = 486\pi \approx 1526\ \text{cm}^3$.



□

Bài 7. Một trái bưởi hình cầu có đường kính 18 cm. Lớp vỏ dày 1 cm. Tính thể tích của lớp vỏ bưởi.

Lời giải.

Bán kính trái bưởi là $R = 9$ cm. Bán kính trái bưởi sau khi gọt hết vỏ là $r = 9 - 1 = 8$ cm. Khi đó, thể tích lớp vỏ bưởi là

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(R^3 - r^3\right) = \frac{4}{3}\pi\left(9^3 - 8^3\right) \approx 909\ \text{cm}^3.$$

□

Bài 8. Một hình cầu có số đo diện tích mặt cầu (tính bằng cm^2) đúng bằng số đo thể tích của nó (tính bằng cm^3). Tính bán kính của hình cầu đó.

Lời giải.

Theo đề bài, ta có $4\pi R^2 = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R = 3$ cm. □

Bài 9. Một hình cầu có diện tích bề mặt là $100\pi\ \text{m}^2$. Tính thể tích của hình cầu đó.

Lời giải.

Theo đề bài, ta có $4\pi R^2 = 100\pi \Rightarrow R = 5$ m. Vậy thể tích hình cầu là $V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 5^3 = \dfrac{500\pi}{3}\ \text{m}^3$.
□

Bài 10. Cho tam giác đều ABC cạnh a, đường cao AH. Ta quay nửa đường tròn nội tiếp và nửa đường tròn ngoại tiếp tam giác đều này một vòng quanh AH. Tính

1. Tỉ số diên tích hai mặt cầu nội tiếp, ngoại tiếp hình nón.
2. Tỉ số thể tích của hai hình cầu nói trên.
3. Tính thể tích phần không gian giới hạn bởi hình nón và hình cầu ngoại tiếp hình nón.

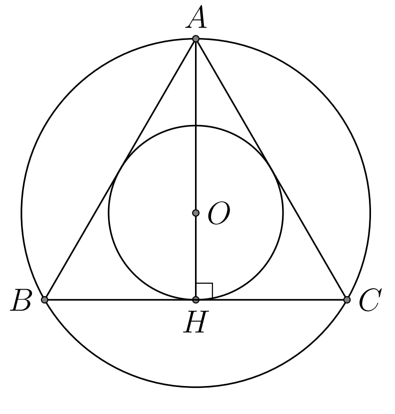
Lời giải.

Gọi R và r lần lượt là các bán kính đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp tam giác đều. Ta có $R = 2r$.
Vì $BC = a$ nên $HC = \dfrac{a}{2}$. Và $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $OA = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

1. Tỉ số diện tích hai mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp hình nón là
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4\pi r^2}{4\pi R^2} = \frac{r^2}{(2r)^2} = \frac{1}{4}.$$

2. Tỉ số thể tích hai hình cầu nội tiếp và ngoại tiếp hình nón là
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{r^3}{(2r)^3} = \frac{1}{8}.$$

3. Thể tích hình cầu ngoại tiếp là
$$V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{27} \text{ đvdt.}$$
Thể tích hình nón là
$$V_3 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{q\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{24} \text{ đvdt.}$$
Thể tích phần không gian giới hạn bởi hình nón và hình cầu ngoại tiếp là
$$V = V_2 - V_3 = \frac{23\sqrt{3}\pi a^3}{216} \approx 0{,}58a^3 \text{ đvdt.}$$



□

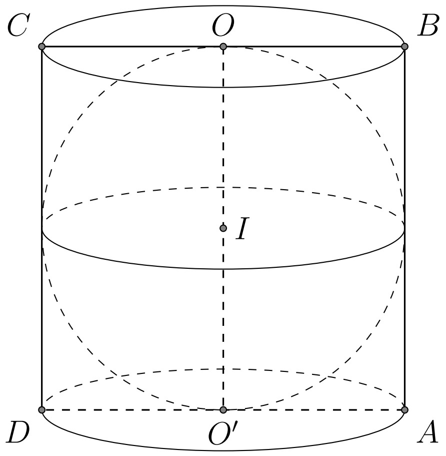
§4 Ôn tập chương IV

1 Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình tròn $(I, 1\,\text{cm})$ nội tiếp hình vuông $ABCD$.

1. Tính thể tích và diện tích của hình cầu tạo thành khi quay hình tròn $(I, 1\,\text{cm})$ quanh một đường kính của nó.
2. Tính thể tích và diện tích toàn phần của hình trụ tạo thành khi quay hình vuông $ABCD$ quanh OO', với O, O' lần lượt là trung điểm BC và AD.

Lời giải.



1. Hình cầu tạo thành khi quay hình tròn $(I, 1\,\text{cm})$ quanh một đường kính của nó cũng có tâm là I và bán kính $R = 1$ cm. Do đó, thể tích của khối cần là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4\pi}{3}$ cm^3 và diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 4\pi$ cm^2.
2. Hình trụ tạo thành khi quay hình vuông $ABCD$ quanh OO' có hai đáy là hai hình tròn (O, OB) và $(O', O'A)$.
   Vì hình vuông $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn $(I, 1$ cm$)$ nên $AB = BC = 2$ cm.
   Do đó $OB = 1$ cm.
   Suy ra, thể tích hình trụ là $V = \pi \cdot OB^2 \cdot AB = 2\pi$ cm^3. Diện tích toàn phần của hình trụ là $S_{\text{tp}} = 2\pi \cdot OB \cdot AB + 2\pi \cdot OB^2 = 6\pi$ cm^2.

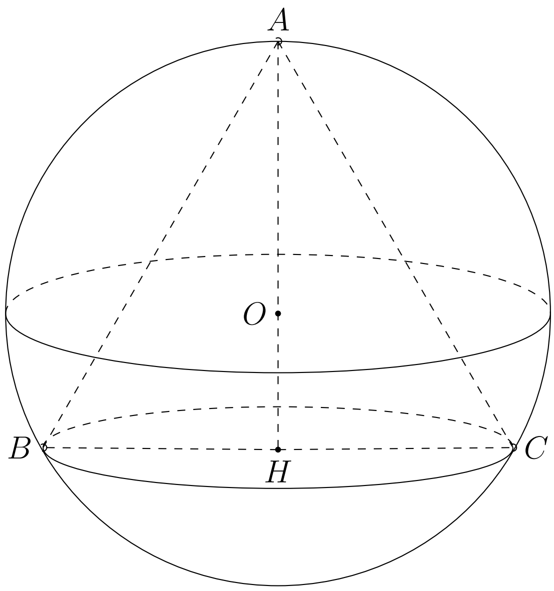
□

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh a, đường cao AH, nội tiếp đường tròn tâm O.

1. Tính thể tích hình nón và hình cầu tạo thành khi quay $\triangle ABC$ và đường tròn (O) quanh trục AH, biết $a = 2$ cm.
2. Tính tỉ số diện tích xung quanh hình nón và diện tích mặt cầu tạo thành khi quay

$\triangle ABC$ và đường tròn (O) quanh trục AH.

Lời giải.



1. Hình nón tạo thành khi quay $\triangle ABC$ quanh trục AH tạo thành hình nón có đáy là hình tròn tâm O bán kính HB, chiều cao AH.
   Hình cầu tạo thành khi quay hình tròn tâm O ngoại tiếp $\triangle ABC$ quanh trục AH là hình cầu tâm O bán kính OA.
   Lại có $a = 2$ cm, $AH = AB\sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ cm, $HB = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a}{2} = 1$ cm. Do $\triangle ABC$ đều nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp đồng thời là trọng tâm $\triangle ABC$, suy ra $OA = \dfrac{2}{3}AH = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ cm.
   Khi đó thể tích hình nón là
   $$V_{\text{nón}} = \frac{1}{3}\cdot AH\cdot\pi\cdot HB^2 = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\ \text{cm}^3.$$
   Thể tích hình cầu
   $$V_{\text{cầu}} = \frac{4}{3}\pi\cdot OA^3 = \frac{32\pi\sqrt{3}}{27}\ \text{cm}^3.$$
2. Đường sinh của hình nón là $AB = a$. Diện tích xung quanh hình nón là
   $$S_1 = \pi\cdot HB\cdot AB = \frac{a^2\pi}{2}.$$
   Diện tích mặt cầu là
   $$S_2 = 4\pi\cdot OA^2 = \frac{4a^2\pi}{2}.$$
   Do đó tỉ số diện tích xung quanh hình nón và diện tích mặt cầu là
   $$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a^2\pi}{2} : \frac{4a^2\pi}{2} = \frac{1}{4}.$$

□

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $AB = \sqrt{3}$ cm, $\widehat{B} = 60^\circ$.

1. Tính AC, BC và AH.
2. Tính thể tích khối tạo thành khi quay $\triangle ABC$ quanh trục AC.
3. Tính thể tích khối tạo thành khi quay $\triangle ABC$ quanh trục BC.

Lời giải.

1.

Ta có $\triangle ABC$ vuông nên

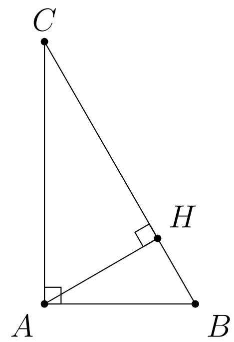
$$AC = AB \cdot \tan B = \sqrt{3} \cdot \tan 60^\circ = 3 \text{ cm}.$$

Theo định lí Pi-ta-go lại có

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Mặt khác $\triangle AHB$ vuông tại H nên

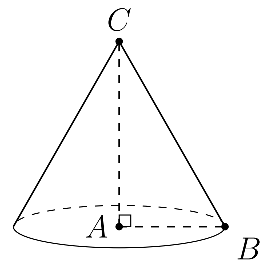
$$AH = AB \cdot \sin B = \frac{3}{2} \text{ cm}.$$



2.

Khi quay $\triangle ABC$ quanh trục AC tạo thành khối nón đỉnh C đáy là hình tròn tâm A bán kính AB. Thể tích khối nón là

$$V_{\text{nón}} = \frac{1}{3} \cdot AC \cdot \pi \cdot AB^2 = 3\pi \text{ cm}^3.$$



3.

Khi quay $\triangle ABC$ quanh trục BC tạo thành hai khối nón đỉnh B và đỉnh C chung đáy là hình tròn tâm H, bán kính HA (hình vẽ).

Lại có $AC^2 = CH \cdot BC \Rightarrow CH = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ cm $\Rightarrow BH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ cm.

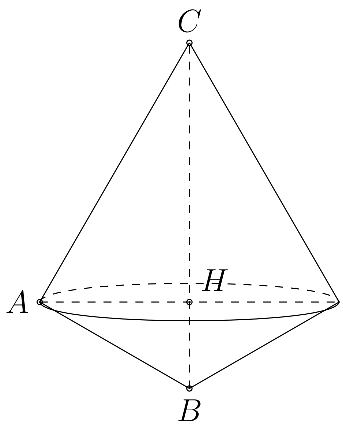
Khi đó thể tích khối nón đỉnh C, đáy hình tròn (H, HA) là

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot CH \cdot \pi \cdot AH^2 = \frac{9\pi\sqrt{3}}{8} \text{ cm}^3.$$

Thể tích khối nón đỉnh B, đáy hình tròn (H, HA) là

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot BH \cdot \pi \cdot AH^2 = \frac{3\pi\sqrt{3}}{8} \text{ cm}^3.$$

Vậy thể tích khối cần tính là $V = V_1 + V_2 = \dfrac{3\pi\sqrt{3}}{2}$ cm^3.



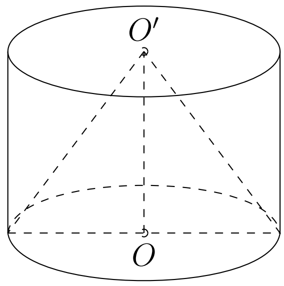
□

Ví dụ 4. Cho hình trụ (T) có hai đáy là hình tròn $(O;R)$ và (O',R) và hình nón (N) có đỉnh là O', đáy là hình tròn (O,R).

1. Từ miếng xốp hình trụ (T), người ta gọt bỏ để tạo thành khối xốp hình nón (N). Tính thể tích phần bị gọt bỏ đi. Biết $R = 3$ cm và $OO' = 4$ cm.

2. Nếu tăng gấp đôi bán kính R thì thể tích hình trụ (T) và hình nón (N) thay đổi như nào?

Lời giải.



1. Thể tích khối xốp hình trụ là $V_{\text{trụ}} = OO' \cdot \pi \cdot R^2 = 36\pi$ cm^3.
   Thể tích khối xốp hình nón là $V_{\text{nón}} = \dfrac{1}{3} \cdot OO' \cdot \pi \cdot R^2 = 12\pi$ cm^3.
   Vậy thể tích phần xốp bị gọt bỏ là $V = V_{\text{trụ}} - V_{\text{nón}} = 24\pi$ cm^3.

2. Thể tích hình trụ với bán kính R là $V_1 = OO' \cdot \pi \cdot R^2$.
   Thể tích hình trụ với bán kính $R' = 2R$ là $V_1 = OO' \cdot \pi \cdot (2R)^2 = 4 \cdot OO' \cdot \pi \cdot R^2$.
   Khi đó ta có $\dfrac{V_1}{V_1'} = \dfrac{1}{4}$.
   Vậy khi tăng gấp đôi bán kính R thì thể tích hình trụ tăng lên 4 lần.
   Thể tích hình nón với bán kính R là $V_2 = \dfrac{1}{3} \cdot OO' \cdot \pi \cdot R^2$.
   Thể tích ình nón với bán kính $R' = 2R$ là $V_2 = \dfrac{1}{3} \cdot OO' \cdot \pi \cdot (2R)^2 = \dfrac{4}{3} \cdot OO' \cdot \pi \cdot R^2$.
   Khi đó ta có $\dfrac{V_2}{V_2'} = \dfrac{1}{4}$.
   Vậy khi tăng gấp đôi bán kính R thì thể tích hình nón tăng lên 4 lần.

□

Ví dụ 5. Cho một cái phễu chứa nước hình nón ngược. Miệng phễu là đường tròn đường kính 6 dm. Khoảng cách từ đáy phễu đến một điểm bất kì trên miệng phễu bằng 5 dm.

1. Tính lượng nước để đổ đầy phễu (giả thiết rằng thành phễu có độ dày không đáng kể).

2. Người ta đổ đầy nước vào phễu rồi rút ra sao cho chiều cao của lượng nước còn lại chỉ bằng một nửa lượng nước ban đầu. Tính thể tích lượng nước còn lại trong phễu.

Lời giải.

1.

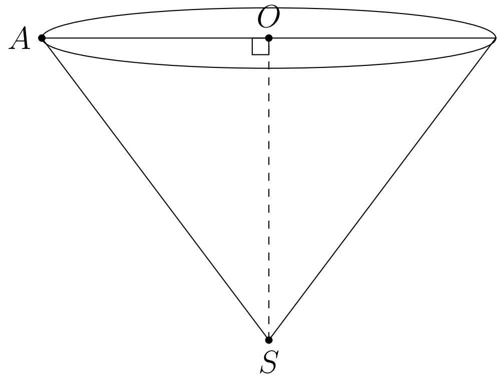
Gọi O là tâm đường tròn đáy của cái phễu và A là một điểm trên đường tròn ấy, khi đó $SA = 5$ dm, $OA = 3$ dm và $SO \perp OA$.
Suy ra, chiều cao của cái phễu là

$$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = 4 \text{ dm}.$$

Thể tích của cái phễu là

$$V = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot \pi \cdot OA^2 = 12\pi \text{ dm}^3.$$

Lượng nước đổ đầy phễu cũng chính là thể tích của cái phễu, tức là 12π dm^3.



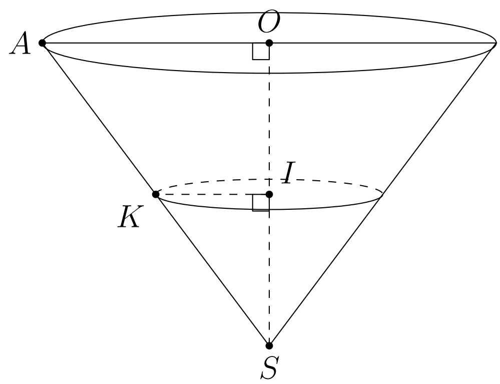
2.

Gọi I là trung điểm SO, K là trung điểm SA thì phần nước còn lại trong phễu cũng là một khối nón đỉnh S đáy là hình tròn tâm I bán kính IK.
Ta có IK là đường trung bình $\triangle SOA$ nên

$$IK = \frac{OA}{2} = \frac{3}{2} \text{ dm}.$$

Do đó thể tích phần nước còn lại trong phễu là

$$V = \frac{1}{3} \cdot SI \cdot \pi \cdot IK^2 = \frac{3\pi}{2} \text{ dm}.$$



□

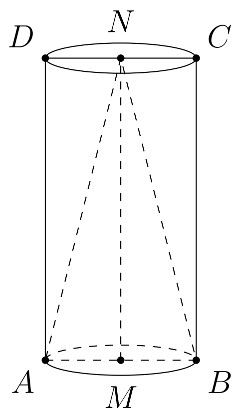
2 Luyện tập

Bài 1. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1$ cm và $AD = 2$ cm. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD.

1. Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh trục MN thì được khối gì? Tính thể tích của khối đó.

2. Khi quay $\triangle NAB$ quanh trục MN thì được khối gì? Tính diện tích xung quanh của khối đó.

Lời giải.



1. Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh trục MN thì được khối trụ có đáy là hình tròn tâm M bán kính $MA = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{1}{2}$ và hình tròn tâm N bán kính ND có thể tích là
$$V = AD \cdot \pi \cdot MA^2 = \frac{\pi}{2}\ \text{cm}^3.$$
2. Khi quay $\triangle NAB$ quanh trục MN thì được khối nón đỉnh N đáy là hình tròn (M, AM), độ dài đường sinh là $AN = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$ và có diện tích xung quanh là
$$S = \pi \cdot AM \cdot AN = \frac{\pi\sqrt{17}}{4}\ \text{cm}^2.$$

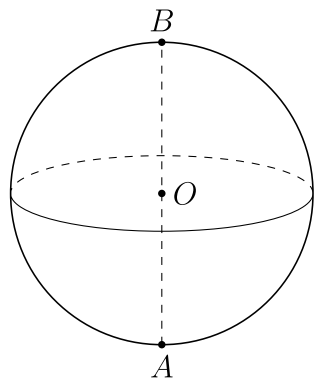
□

Bài 2. Cho hình tròn (O, R) có diện tích bằng 4π. Quay hình tròn quanh một đường kính ta được hình cầu tâm O bán kính R.

1. Tính thể tích hình cầu.
2. Nếu diện tích hình tròn giảm một nửa thì diện tích của mặt cầu sẽ thay đổi như nào?

Lời giải.

1.



Diện tích hình tròn là
$$\pi \cdot R^2 = 4\pi \Leftrightarrow R = 2.$$
Do đó thể tích hình cầu là
$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{32\pi}{3}.$$

2. Diện tích mặt cầu là
$$S = 4\pi \cdot R^2 = 16\pi.$$
Nếu diện tích hình tròn giảm một nửa thì được tròn bán kính R' và
$$\pi \cdot R'^2 = 2\pi \Leftrightarrow R' = \sqrt{2}.$$
Khi đó diện tích của mặt cầu mới là
$$S' = 4\pi \cdot R'^2 = 8\pi.$$
Suy ra $\dfrac{S}{S'} = 2$. Vậy diện tích mặt cầu cũng giảm đi một nửa.

□

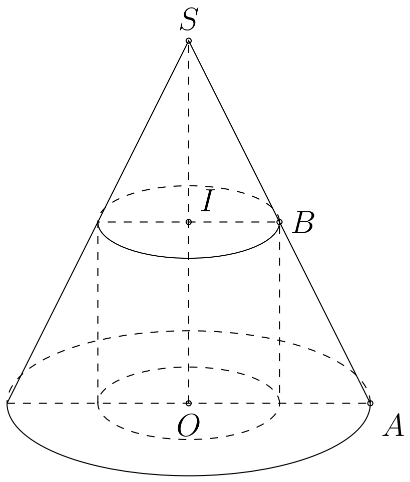
Bài 3. Cho một khối xốp hình nón có đường kính đáy bằng 18 cm và độ dài từ đỉnh đến một điểm trên đường tròn đáy bằng 15 cm.

1. Tính chiều cao và thể tích của hình nón đó.

2. Cắt chỏm của khối xốp sao cho phần còn lại là hình nón cụt có chiều cao bằng một nửa chiều cao của hình nón ban đầu. Tính thể tích của phần bị cắt bỏ đi.

3. Tiếp tục cắt khối nón cụt trên để tạo thành hình trụ có đáy là đáy nhỏ của hình nón cụt. Tính thể tích của hình trụ mới tạo thành.

Lời giải.



1. Giả sử hình nón có đỉnh là điểm S đáy là đường tròn tâm O, A là một điểm trên đường tròn đáy. Khi đó bán kính đáy hình nón là $OA = \dfrac{18}{2} = 9$ cm và chiều cao của hình nón là
$$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12 \text{ cm}.$$
Thể tích của hình nón là
$$V = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot \pi \cdot OA^2 = 324 \text{ cm}^3.$$

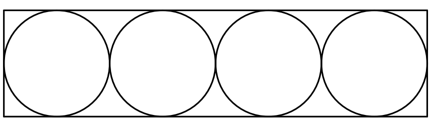
2. Gọi I là trung điểm SO, B là trung điểm SA. Phần bị cắt bỏ đi cũng là khối nón có đỉnh S đáy là hình tròn (I, IB).
IB là đường trung bình của $\triangle SOA$ nên $IB = \dfrac{OA}{2} = \dfrac{9}{2}$. Thể tích khối nón bị cắt là
$$\frac{1}{3} \cdot SI \cdot \pi \cdot IB^2 = \frac{81\pi}{2} \text{ cm}^3.$$

3. Khối trụ có đáy là hình tròn (I, IB) chiều cao IO nên có thể tích là
$$V' = IO \cdot \pi \cdot IB^2 = \frac{243\pi}{2} \text{ cm}^3.$$

□

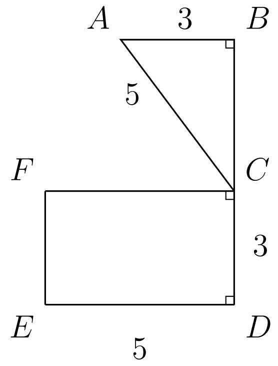
Bài 4. Một cái hộp hình trụ chứa vừa khít 4 quả ten-nít. Biết diện tích toàn phần của hộp là 597cm^2. Tính đường kính và thể tích của mỗi quả ten-nít.

Lời giải.



Gọi R là bán kính của mỗi quả ten-nít thì bán kính đáy hộp là R, chiều cao của trụ là $8R$.
Ta có $S_{\text{dttp}} = 2 \cdot S_{\text{đáy}} + S_{\text{xq}} = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot 8R = 18\pi R^2$.
Ta lại có diện tích xung quanh đề bài cho là $597\text{cm}^2 \Rightarrow R \approx 3,25\text{cm}$.
Vậy $V = \dfrac{4}{3}\pi R \approx \dfrac{4}{3}\pi \cdot (3,25)^3 \approx 144\text{cm}^3$. □

Bài 5.
Cho hình vẽ bên. Tính tổng thể tích của các khối tạo thành khi quay hình bên quanh trục BD.



Lời giải.

Tam giác ABC quay quanh trục BD sẽ tạo thành hình nón với bán kính đáy bằng cạnh AB và đường cao là BC.
Thể tích hình nón này là

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{3}\pi \cdot AB^2 \cdot BC \\ &= \frac{1}{3}\pi \cdot AB^2 \cdot \sqrt{AC^2 - BC^2} \\ &= \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot \sqrt{5^2 - 3^2} \\ &= 12\pi \text{ (đvtt)}. \end{aligned}$$

Hình chữ nhật $CDEF$ quay quanh trục BD sẽ tạo thành hình trụ với bán kính đáy bằng cạnh DE và đường cao là CD.
Thể tích hình trụ này là

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \cdot DE^2 \cdot CD \\ &= \pi \cdot 5^2 \cdot 3 \\ &= 75\pi \text{ (đvtt)}. \end{aligned}$$

Thể tính khối tạo thành khi quay hình trên quanh trục BD là

$$V = V_1 + V_2 = 87\pi \text{ (đvtt)}.$$

□

Bài 6. Một hình nón có đỉnh là tâm một hình cầu và có đáy là hình tròn tạo bởi một mặt phẳng cắt hình cầu. Biết diện tích đáy hình nón là $144\pi\text{cm}^2$ và diện tích xung quanh của nó là $180\pi\text{cm}^2$. Tính thể tích phần không gian bên trong hình cầu và bên ngoài hình nón.

Lời giải.

Tính bán kính đáy hình nón là

$$\pi \cdot IM^2 \cdot 144\pi \Leftrightarrow r = IM = 12\text{cm}.$$

Tính đường sinh hình nón là

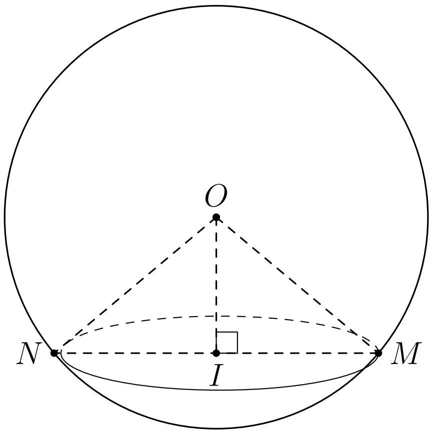
$$S_{\text{xq}} = 180\pi \Leftrightarrow \pi \cdot r \cdot l = 180\pi \Leftrightarrow l = OM = 15\text{cm}.$$

Chiều cao hình nón là

$$h = OI = \sqrt{OM^2 - IM^2} = \sqrt{l^2 - r^2} = 9\text{cm}.$$

Tính hiệu thể tích giữa hình cầu và hình nón được

$$V = V_{\text{cầu}} - V_{\text{nón}} = \frac{4}{3}\pi \cdot OM^3 - \frac{1}{3}\pi \cdot IM^2 \cdot h = 4068\pi\text{cm}^3.$$



□

Bài 7. Tam giác đều ABC có độ dài cạnh là a, ngoại tiếp một đường tròn. Cho hình quay một vòng xung quanh đường cao AH của tam giác đó, ta được một hình nón ngoại tiếp hình cầu. Tính thể tích phần hình nón nằm ngoài hình cầu.

Lời giải.

Gọi I là tâm của tam giác ABC. Bán kính hình cầu là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC, nghĩa là IH.

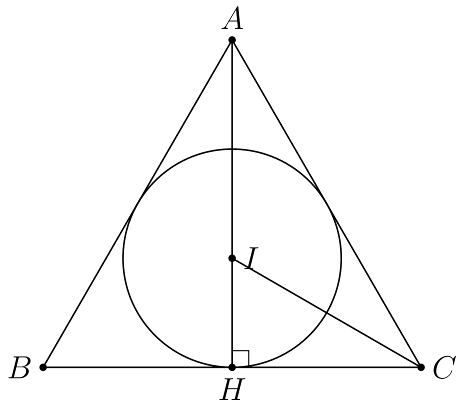
Ta có $AH^2 = CA^2 - CH^2 = \dfrac{3a^2}{4} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $R = IH = \dfrac{1}{3} \cdot AH = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Do đó thể tích hình cầu là $V_c = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{54}$ (đvtt).

Thể tích hình nón là

$$V_n = \frac{1}{3}\pi \cdot AH \cdot HB^2 = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{8} \text{ (đvtt).}$$



Vậy phần thể tích hình nón nằm ngoài hình cầu là $V' = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8} - \dfrac{a^3\sqrt{3}}{54} = \dfrac{23a^3\sqrt{3}}{216}$ (đvtt). □

Bài 8. Một hình nón cụt có bán kính đáy lớn là 9 cm và bán kính đáy bé là 6 cm, chiều cao bằng 4 cm.

1. Tính diện tích xung quanh hình nón cụt.

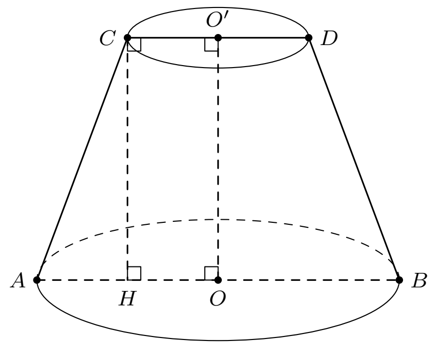
2. Tính thể tích của hình nón sinh ra hình nón cụt đó.

Lời giải.

1.

Kẻ $CH \perp AB$ (tại H). Khi đó $CH = OO' = 4$ (cm).
Mặt khác, $HA = OA - OH = OA - O'C = 3$ (cm).
Vậy $l = CA = \sqrt{CH^2 + HA^2} = 5$ (cm).
Diện tích xung quanh hình nón cụt là

$$S_{xq} = \pi(r_1 + r_2)l = 75\pi.$$



2. Gọi giao điểm của OO' và CA là S.
   Theo hệ quả của định lý Ta-lét, ta có $\dfrac{SO'}{CO'} = \dfrac{SO}{AO}$.
   Gọi $SO' = x$ (cm) $(x > 0)$ thì từ đẳng thức trên ta có

$$\frac{x}{6} = \frac{x+4}{9}.$$

   Giải phương trình này ta có nghiệm $x = 8$ (nhận).
   Vậy chiều cao của hình nón sinh ra hình nón cụt đó là $h = SO = SO' + OO' = 12$ (cm).
   Thể tích cần tìm là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 9^2 \cdot 12 = 324\pi$ (đvtt).

□

Bài 9. Cho hình chữ nhật $ABCD$ $(AB > AD)$ có chu vi là diện tích lần lượt là 6 cm và 2 cm^2.

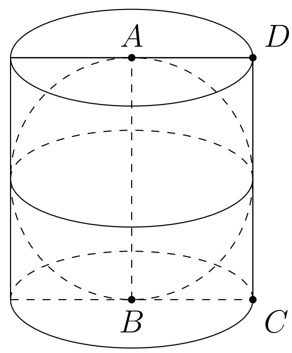
1. Tính thể tích và diện tích hình trụ được sinh ra khi quay hình chữ nhật quanh cạnh AB.
2. Hình trụ này có thể chứa vừa khít một khối cầu bán kính R. Tính R và phần thể tích giữa hình trụ và khối cầu.

Lời giải.

1.

   Ta có

$$\begin{cases} 2(AB + AD) = 6 \\ AB \cdot AD = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB + AD = 3 \\ AB \cdot AD = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = 2\,(\text{cm}) \\ AD = 1\,(\text{cm}). \end{cases}$$



   Thể tích của hình trụ

$$V = AB \cdot \pi AD^2 = 2\pi\,(\text{cm}^3).$$

   Diện tích của hình trụ

$$S = AB \cdot 2\pi AD + 2 \cdot \pi AD^2 = 4\pi + 2\pi = 6\pi\,(\text{cm}^2).$$

2. Ta có bán kính khối cầu

$$R = \frac{AB}{2} = 1\,(\text{cm}).$$

   Thể tích khối cầu

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi}{3}\,(\text{cm}^3).$$

Phần thể tích giữa khối trụ và khối cầu bằng

$$V - V_1 = \frac{14}{3}\pi\,(\mathrm{cm}^3).$$

□

Bài 10. Cho ba điểm A, O, B thẳng hàng theo thứ tự đó và $OA = a$, $OB = b$. Vẽ hai tia Ax, By vuông góc với AB. Qua O vẽ hai tia vuông góc với nhau tại O và lần lượt cắt Ax, By tại C, D. Cho $\widehat{COA} = 30^\circ$.

1. Tính tỉ số thể tích của các hình do tam giác AOC và BOD tạo thành khi quay hình này quanh trục AB.
2. Giả sử $\widehat{BDC} = 60^\circ$. Tính thể tích hình nón cụt được tạo thành khi quay hình vẽ quanh trục AB.

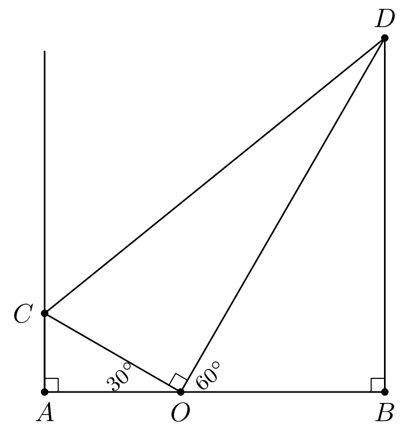
Lời giải.

1.

Quay $\triangle AOC$ quanh trục AB ta được hình nón có

+ Chiều cao $h = OA = a$.

+ Bán kính đáy $r = AC = OA \cdot \tan 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.



Khi đó thể tích của hình nón này là

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi a^3}{9}.$$

Quay $\triangle BOD$ quanh trục AB ta được hình nón có

+ Chiều cao $h = OB = b$.

+ Bán kính đáy $r = BD = OB \cdot \tan 60^\circ = b\sqrt{3}$.

Khi đó thể tích của hình nón này là

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \pi b^3.$$

Vậy thể tích cần tìm là $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{a^3}{9b^3}$.

2. Quay hình vẽ quanh trục AB ta được hình nón cụt có

+ Bán kính đáy lớn $R = BD = b\sqrt{3}$.

+ Bán kính đáy nhỏ $r = AC = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

+ Chiều cao $h = AB = OA + OB = a + b$.

Suy ra thể tích của hình nón cụt cần tìm là

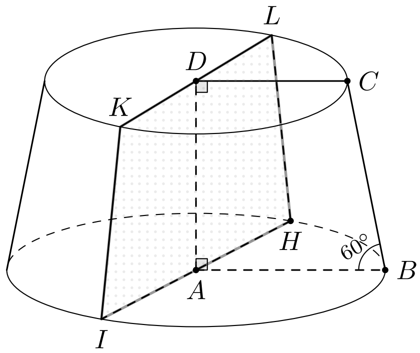
$$V = \frac{1}{3}\pi h\left(R^2 + r^2 + rR\right) = \frac{1}{3}\pi(a+b)\left(3b^2 + \frac{1}{3}a^2 + ab\right).$$

□

Bài 11. Cho hình thang vuông $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $BC = 4$ cm, $CD = 2$ cm, $\widehat{B} = 60^\circ$. Khi quay hình thang vuông $ABCD$ quanh trục AD tạo thành một hình nón cụt.

1. Tính thể tích của hình nón cụt.
2. Cắt hình nón cụt trên bởi một mặt phẳng qua trục AD thì mặt cắt tạo thành là hình gì? Tính diện tích của hình đó.

Lời giải.



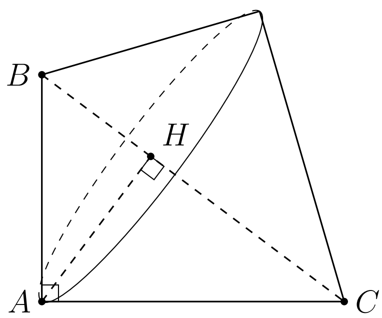
1. Ta có $r = CD = 2$ (cm), $R = AB$, $h = AD$.
   $h = AD = \sin 60^\circ \cdot BC = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 2\sqrt{3}$ (cm).
   $R = AB = DC + \cos 60^\circ \cdot BC = 2 + \dfrac{1}{2} \cdot 4 = 3$ (cm).
   Vậy $V = \dfrac{1}{3}\pi h\left(r^2 + R^2 + rR\right) = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2\sqrt{3} \cdot (2^2 + 3^2 + 2 \cdot 3) = \dfrac{38\pi\sqrt{3}}{3}$ $\left(\text{cm}^3\right)$.
2. Cắt hình nón cụt trên bởi một mặt phẳng qua trục AD thì mặt cắt tạo thành là hình thang cân có độ dài 2 đáy lần lượt là $2r$ và $2R$ và chiều cao là h.
   Diện tích của hình thang này là
   $$S = \frac{h(2r + 2R)}{2} = h(r + R) = 2\sqrt{3} \cdot (2 + 3) = 10\sqrt{3}\ (\text{cm}^2).$$

□

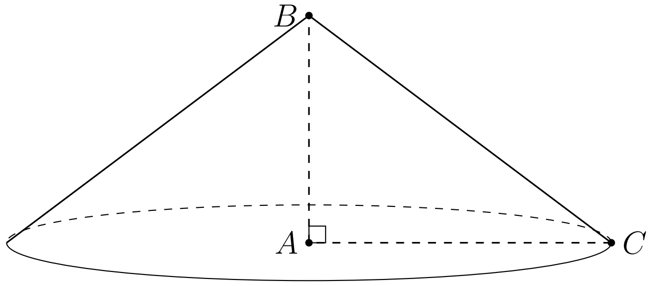
Bài 12. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi V_1, V_2, V_3 theo thứ tự là thể tích của những hình sinh ra khi quay tam giác ABC một vòng xung quanh các cạnh BC, AB, AC. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{V_1^2} = \frac{1}{V_2^2} + \frac{1}{V_3^2}.$$

Lời giải.

Gọi H là chân đường cao xuất phát từ A. Khi quay ΔABC quanh cạnh BC, ta thu được hai hình nón có bán kính đáy chung là HA, chiều cao lần lượt là HB và HC.
Thể tích của hình sinh ra là tổng thể tích hai hình nón này.
Vậy $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi(CH \cdot AH^2 + BH \cdot AH^2) = \dfrac{1}{3}\pi BC \cdot AH^2$.



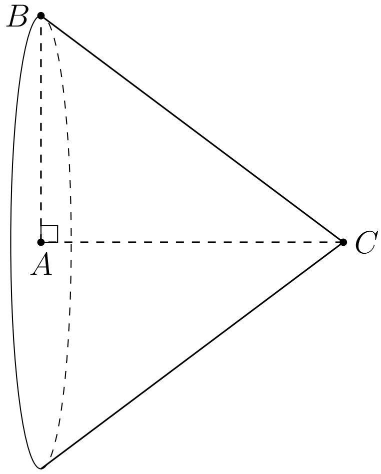
Khi quay ΔABC quanh cạnh AB, ta thu được hình nón có bán kính đáy AC, chiều cao AB. Vậy $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi AB \cdot AC^2$.



Khi quay ΔABC quanh cạnh AC, ta thu được hình nón có bán kính đáy AB, chiều cao AC. Vậy $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi AC \cdot AB^2$.

Do đó

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V_2^2}+\frac{1}{V_3^2} &= \frac{9}{\pi^2}\cdot\frac{1}{AB^2\cdot AC^2}\cdot\left(\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}\right)\\
&= \frac{9}{\pi^2}\cdot\frac{1}{AB^2\cdot AC^2}\cdot\frac{1}{AH^2}\\
&= \frac{9}{\pi^2}\cdot\frac{AB^2+AC^2}{AB^2\cdot AC^2}\cdot\frac{1}{AH^2}\cdot\frac{1}{AB^2+AC^2}\\
&= \frac{9}{\pi^2}\cdot\left(\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}\right)\cdot\frac{1}{AH^2}\cdot\frac{1}{BC^2}\\
&= \frac{9}{\pi^2}\cdot\frac{1}{AH^2}\cdot\frac{1}{AH^2}\cdot\frac{1}{BC^2} = \frac{9}{\pi^2}\cdot\frac{1}{AH^4}\cdot\frac{1}{AH^2}\cdot\frac{1}{BC^2} = \frac{1}{V_1^2}.
\end{aligned}$$



□

Bài 13. Cho nửa đường tròn $(O;R)$, đường kính AB.

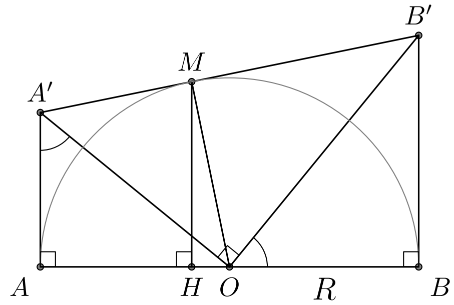
1. Trên AB lấy điểm H sao cho $\dfrac{HA}{HB} = \dfrac{2}{3}$. Tính HA, HB theo R.

2. Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt nửa đường tròn $(O;R)$ tại M; tiếp tuyến tại M với nửa đường tròn cắt các tiếp tuyến tại A, B lần lượt tai A', B'. Chứng minh rằng tam giác $A'OB'$ vuông và $AA' \cdot BB' = R^2$.

3. Đặt $AA' = x; BB' = y$. Tính x, y theo R.

4. Cho nửa hình tròn $(O;R)$ quay một vòng quanh cạnh AB được một hình có thể tích là V_1; cho hình thang vuông $ABB'A'$ quay quanh AB ta được một hình có thể tích là V_2. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

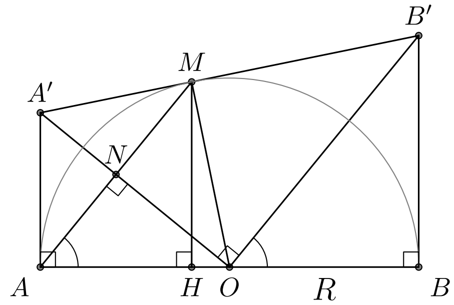
Lời giải.



1. Ta có $\dfrac{HA}{HB} = \dfrac{2}{3}$
$\Rightarrow \dfrac{HA}{2} = \dfrac{HB}{3} = \dfrac{HA + HB}{5} = \dfrac{AB}{5} = \dfrac{2}{5}R$
$\Rightarrow \begin{cases} HA = \dfrac{4}{5}R \\ HB = \dfrac{6}{5}R. \end{cases}$

b) Hai tam giác OAA' và $B'BO$ có
$\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ \\ \widehat{AOA'} = \widehat{BB'O} \quad \text{(cặp góc có cạnh tương ứng vuông góc)} \end{cases}.$
Suy ra $OAA' \backsim \triangle B'BO$.
Do đó $\widehat{AA'O} = \widehat{B'OB}$.
Mà $\widehat{AA'O} + \widehat{A'OA} = 90^\circ$.
Suy ra $\widehat{B'OB} + \widehat{A'OA} = 90^\circ$.
Vậy $\widehat{A'OB'} = 90^\circ$ hay tam giác $A'OB'$ là tam giác vuông.
Mặt khác, do $\triangle OAA' \backsim \triangle B'BO$ nên $\dfrac{AA'}{BO} = \dfrac{OA}{BB'} \Leftrightarrow AA' \cdot BB' = OA \cdot OB = R^2$.

Cách khác:



Gọi N là giao điểm của AM và OA'.
Ta có $\widehat{MAB} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AM}$.
Mà $\widehat{B'OB} = \dfrac{1}{2}\widehat{BOM} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AM}$.
Suy ra $\widehat{MAB} = \widehat{B'OB}$.
Tam giác vuông AON có
$\widehat{NAO} + \widehat{NOA} = 90^\circ$ hay $\widehat{MAB} + \widehat{A'OA} = 90^\circ$.
Do đó $\widehat{B'OB} + \widehat{A'OA} = 90^\circ$.
Suy ra $\widehat{A'OB'} = 180^\circ - \left(\widehat{B'OB} + \widehat{A'OA}\right) = 90^\circ$.
Vậy tam giác $A'OB'$ là tam giác vuông.
Mặt khác, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông $OA'B'$, ta có $OM^2 = A'M \cdot B'M$.
Mà theo tính chất của tiếp tuyến thì $\begin{cases} AA' = A'M \\ BB' = B'M \end{cases}.$
Suy ra $AA' \cdot BB' = OM^2 = R^2$.

c) Ta có $OH = OA - AH = R - \dfrac{4}{5}R = \dfrac{R}{5}$
$\Rightarrow MH = \sqrt{OM^2 - OH^2} = \sqrt{R^2 - \left(\dfrac{R}{5}\right)^2} = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}R.$
$\Rightarrow AM = \sqrt{MH^2 + AH^2} = \sqrt{\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{5}R\right)^2 + \left(\dfrac{4}{5}R\right)^2} = \dfrac{2\sqrt{10}}{5}R.$

$\Rightarrow AN = \dfrac{AM}{2} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}R.$

$\Rightarrow ON = \sqrt{OA^2\triangle - AN^2} = \sqrt{R^2 - \left(\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}R.$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OAA', ta có

$OA^2 = ON.OA' \Rightarrow OA' = \dfrac{OA^2}{ON} = \dfrac{R^2}{\frac{\sqrt{15}}{5}R} = \dfrac{\sqrt{15}}{3}R.$

$\Rightarrow AA' = x = \sqrt{OA'^2 - OA^2} = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{15}}{3}R\right)^2 - R^2} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}R.$

Mặt khác, ta đã chứng minh được

$AA' \cdot BB' = R^2 \Rightarrow BB' = y = \dfrac{R^2}{AA'} = \dfrac{R^2}{\frac{\sqrt{6}}{3}R} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}R.$

Vậy $x = \dfrac{\sqrt{6}}{3}R$ và $y = \dfrac{\sqrt{6}}{2}R.$

d) Nửa hình tròn $(O;R)$ quay một vòng quanh cạnh AB được hình cầu bán kính R có thể tích là

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Hình thang vuông $ABB'A'$ quay quanh AB được hình nón cụt với hai bán kính đáy lần lượt bằng AA', BB' và chiều cao bằng AB có thể tích là

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{1}{3}\pi \cdot AB \cdot (AA'^2 + BB'^2 + AA' \cdot BB') \\ &= \frac{1}{3}\pi \cdot 2R \cdot \left[\left(\frac{\sqrt{6}}{3}R\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}R\right)^2 + R^2\right] \\ &= \frac{19}{9}\pi R^3. \end{aligned}$$

Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{12}{19}.$

□