

CHỦ ĐỀ 1: CĂN BẬC HAI. CĂN BẬC BA

VẤN ĐỀ 1: CĂN BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Căn bậc hai của số thực a không âm là số thực x sao cho $x^2 = a$.

* Chú ý:

+ Số dương a có đúng hai căn bậc hai, là hai số đối nhau:

- Số dương kí hiệu là \sqrt{a}

- Số âm kí hiệu là $-\sqrt{a}$.

+ Căn bậc hai của số 0 là 0.

+ Số âm không có căn bậc hai.

- Với số a không âm, số \sqrt{a} được gọi là căn bậc hai số học của a .
- Ta có $\sqrt{a} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = a \end{cases}$.
- So sánh hai căn bậc hai số học: $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow 0 \leq a < b$.

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tìm căn bậc hai và căn bậc hai số học của một số

Phương pháp giải: Ta sử dụng kiến thức sau:

1. Nếu a là số thực dương, các căn bậc hai của a là \sqrt{a} và $-\sqrt{a}$; căn bậc hai số học của a là \sqrt{a} .
2. Nếu a là số 0 thì căn bậc hai của a và căn bậc hai số học của a cùng bằng 0.
3. Nếu a là số thực âm thì a không có căn bậc hai và do đó không có căn bậc hai số học.

* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

Bài 1. Tìm các căn bậc hai và căn bậc hai số học của các số sau:

- a) 0; b) 64; c) $\frac{9}{16}$; d) 0,04.

Bài 2. Mỗi số sau đây là căn bậc hai số học của số nào?

- a) 12; b) -0,36; c) $2\sqrt{\frac{2}{7}}$; d) $\frac{0,2}{\sqrt{3}}$.

Bài 3. Tính:

- a) $x^2 = \frac{1}{3}$; b) $x^2 + 36 = 0$; c) $\sqrt{x} - 5 = \frac{1}{3}$;
d) $-\sqrt{x} - 8 = 11$; e) $\sqrt{x-1} - 1 = 3$; g) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 1 = 3$.

Dạng 2. So sánh các căn bậc hai số học

Phương pháp giải: Ta có $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow 0 \leq a < b$.

** Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

Bài 11. So sánh:

- a) -2 và $\sqrt{3}$; b) 3 và $2\sqrt{2}$; c) 11 và $\sqrt{99}$;
d) 5 và $\sqrt{17} + 1$; e) 3 và $\sqrt{15} - 1$; g) $1 - \sqrt{3}$ và $\sqrt{0,2}$.

Bài 12. Tìm giá trị của x, biết:

- a) $\sqrt{x} \geq 6$; b) $\sqrt{x} < 1$; c) $\sqrt{-x+1} \geq 6$; d) $\sqrt{2x+1} \leq 2$.

Bài 13. Tìm giá trị của x, biết:

- a) $\sqrt{2x} \geq \sqrt{x}$; b)* $\sqrt{2x} \leq \sqrt{x^2}$.

** Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

Bài 14. So sánh:

- a) 2 và $1 + \sqrt{2}$; b) $3\sqrt{11}$ và 12; c) 1 và $\sqrt{3} - 1$;
d) $\sqrt{3}$ và $2 - \sqrt{5}$; e) -10 và $-2\sqrt{23}$; g) $-3\sqrt{29}$ và -15.

Bài 15. Tìm giá trị của x, biết:

- a) $\sqrt{x+1} \geq 5$; b) $\sqrt{x+1} < 2$; c) $\sqrt{-2x+2} > 8$; d) $\sqrt{2x+1} \leq 3$.

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 16. Tìm các căn bậc hai và căn bậc hai số học của các số sau:

- a) 225; b) 324; c) $\frac{169}{100}$;
d) $\frac{49}{289}$; e) 2,25; g) 0,16.

Bài 17. Mỗi số sau đây là căn bậc hai số học của số nào?

- a) 17; b) $-\left(-\frac{3}{4}\right)$; c) $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$; d) $\frac{0,25}{\sqrt{0,5}}$.

Bài 18. Tính:

a) $\sqrt{\frac{225}{9}}$; b) $\sqrt{\frac{49}{25}}$; c) $-\sqrt{(-111)^2}$;
 d) $\sqrt{13^2}$; e) $(-\sqrt{7})^2$; g) $-\left(\sqrt{\frac{1}{400}}\right)^2$.

Bài 19. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\frac{2}{5}\sqrt{25} - \frac{9}{2}\sqrt{\frac{16}{81}} + \sqrt{144}$; b) $0,5\sqrt{0,09} - 2\sqrt{0,25} + \sqrt{\frac{1}{4}}$;
 c) $\sqrt{1\frac{9}{16}} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{64}{9}}$; d) $-\sqrt{\frac{-289}{-16}} + 10\sqrt{\frac{-0,09}{9}}$.

Bài 20. Tìm giá trị của x, biết:

a) $x^2 - 196 = 0$; b) $x^2 = \frac{1}{15}$; c) $-x^2 + 324 = 0$.
 d) $x^2 + 100 = 0$; e) $\sqrt{x} = \sqrt{7}$; g) $\sqrt{x} - 3 = \frac{1}{3}$.

Bài 21. Tìm giá trị của x, biết:

a) $\sqrt{3x-1} - 4 = 13$; b) $\sqrt{9x^2 - 6x + 1} = 18$; c) $\sqrt{x} + 2 = \frac{1}{2}$;
 d) $-2\sqrt{x} + 3 = 0$; e) $\frac{\sqrt{2x+4}}{2} = 3$; g) $\frac{2}{\sqrt{x-3}} = 4$.

Bài 22. Tìm giá trị của x, biết:

a) $\sqrt{x} + 9 \leq 31$; b) $\sqrt{2x-1} > 6$;
 c) $\sqrt{x+3} \geq 5$; d) $\sqrt{2x-1} + 5 < 2$.

Bài 23. So sánh các số sau:

a) 4 và $1 + \sqrt{7}$; b) $2\sqrt{5}$ và 8; c) -6 và $-2\sqrt{7}$;
 d) 4 và $\sqrt{23} - 1$; e) $\sqrt{0,5}$ và $\sqrt{3} - 2$;
 g) $\sqrt{2015} + \sqrt{2018}$ và $\sqrt{2016} + \sqrt{2017}$.

Bài 24.* Chứng minh $\sqrt{3}$ và $\sqrt{7}$ là các số vô tỉ.

Bài 25.* Cho biểu thức $A = x - 2\sqrt{x+2}$.

a) Đặt $y = \sqrt{x+2}$. Hãy biểu thị A theo y;
 b) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

Bài 26.* So sánh:

a) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}}$ và 10;

b) $\sqrt{4 + \sqrt{4 + \sqrt{4 + \dots + \sqrt{4}}}}$ và 3.

VẤN ĐỀ 2. CĂN THỨC BẬC HAI VÀ HẰNG ĐẲNG THỨC $\sqrt{A^2} = |A|$
(PHẦN I)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Hằng đẳng thức: $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases}$

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính giá trị của biểu thức chứa căn bậc hai

Phương pháp giải:

Sử dụng hằng đẳng thức: $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases}$

* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

Bài 1. Tính:

a) $-\frac{4}{3}\sqrt{(-0,4)^2}$;

b) $4\sqrt{(-3)^6} + 5\sqrt{(-2)^4}$;

c) $\sqrt{144} \cdot \sqrt{\frac{49}{64}} \cdot \sqrt{0,01}$;

d) $72 : \sqrt{3^2 + 4^2} - 3\sqrt{5^2 - 3^2}$.

Bài 2. Rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{5} + \sqrt{(\sqrt{5} - 5)^2}$;

b) $\sqrt{(4 - \sqrt{11})^2} + \sqrt{11}$;

c) $\sqrt{(2\sqrt{2} - 7)^2} + 2\sqrt{2}$;

d) $\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}$.

Bài 3. Chứng minh:

a) $11 + 6\sqrt{2} = (3 + \sqrt{2})^2$;

b) $8 - 2\sqrt{7} = (\sqrt{7} - 1)^2$;

c) $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = 6$;

d) $\sqrt{8 - 2\sqrt{7}} - \sqrt{8 + 2\sqrt{7}} = -2$.

Bài 4. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$;

b) $\sqrt{41 - 12\sqrt{5}} - \sqrt{41 + 12\sqrt{5}}$;

c) $\sqrt{49 - 12\sqrt{5}} + \sqrt{49 + 12\sqrt{5}}$;

d) $\sqrt{29 + 12\sqrt{5}} + \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}$.

* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

Bài 5. Tính:

a) $5\sqrt{\left(\frac{-1}{5}\right)^2}$;

b) $3\sqrt{(-1,5)^2} - 4\sqrt{(-0,5)^2}$;

c) $(\sqrt{0,25} - \sqrt{225} + \sqrt{2,25}) : \sqrt{169}$;

d) $(\sqrt{0,04} + \sqrt{121} - \sqrt{1,44})\sqrt{81}$.

Bài 6. Rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{(3-\sqrt{5})^2} + \sqrt{5}$;

b) $\sqrt{(\sqrt{7}-5)^2} + \sqrt{7}$;

c) $\sqrt{(\sqrt{11}-4)^2} + \sqrt{(\sqrt{11}+4)^2}$;

d) $\sqrt{(2-3\sqrt{3})^2} + \sqrt{(8-3\sqrt{3})^2}$.

Bài 7. Chứng minh:

a) $28 - 10\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 5)^2$;

b) $193 - 132\sqrt{2} = (11 - 6\sqrt{2})^2$;

c) $\sqrt{28 - 10\sqrt{3}} + \sqrt{28 + 10\sqrt{3}} = 10$;

c) $\sqrt{193 - 132\sqrt{2}} + \sqrt{193 + 132\sqrt{2}} = 22$.

Bài 8. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt{10+4\sqrt{6}} - \sqrt{10-4\sqrt{6}}$;

b) $\sqrt{39-12\sqrt{3}} + \sqrt{39+12\sqrt{3}}$;

c) $\sqrt{31-12\sqrt{3}} - \sqrt{31+12\sqrt{3}}$;

d) $\sqrt{21+12\sqrt{3}} + \sqrt{21-12\sqrt{3}}$.

Dạng 2. Rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai

Phương pháp giải: Sử dụng hằng đẳng thức: $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases}$

Bài 9. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $5\sqrt{25a^2} - 25a$ với $a \leq 0$;

b) $\sqrt{49a^2} + 3a$ với $a \geq 0$;

c) $\sqrt{16a^4} + 6a^2$;

d) $3\sqrt{9a^6} - 6a^3$ với $a \leq 0$.

Bài 10. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $4x - \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ với $x \geq 2$;

b) $3x + \sqrt{9 + 6x + x^2}$ với $x \leq -3$;

c) $4\sqrt{x} - \frac{(x + 6\sqrt{x} + 9)(\sqrt{x} - 3)}{x - 9} \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ với $0 \leq x \neq 9$;

d) $\frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x + 2}$ với $x \neq -2$.

* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

Bài 11. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $4\sqrt{16a^2} - 16a$ với $a \leq 0$;

b) $\sqrt{64a^2} + 3a$ với $a \geq 0$;

c) $\sqrt{25a^4} + 6a^2$;

d) $3\sqrt{81a^6} - 6a^3$ với $a \leq 0$.

Bài 12. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $4x - \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ với $x \geq 1$;

b) $3x + \sqrt{9 - 6x + x^2}$ với $x \geq 3$;

c) $5\sqrt{x} - \frac{(x + 10\sqrt{x} + 25)(\sqrt{x} - 5)}{x - 25}$ với $0 \leq x \neq 25$;

d) $\frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2}$ với $x \neq 2$.

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 13. Tính:

a) $-\frac{7}{9}\sqrt{(-0,81)^2}$;

b) $\frac{6}{5}\sqrt{\left(\frac{-1}{36}\right)^2}$;

c) $\sqrt{49} \cdot \sqrt{144} + \sqrt{256} : \sqrt{64}$;

d) $72 : \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 36} - \sqrt{225}$.

Bài 14. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt{(11 - 6\sqrt{2})^2} + \sqrt{(11 + 6\sqrt{2})^2}$;

b) $\sqrt{(10 - 4\sqrt{6})^2} - \sqrt{(10 + 4\sqrt{6})^2}$;

c) $\sqrt{(4 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{5})^2}$;

d) $\sqrt{(7 + \sqrt{2})^2} - \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2}$.

Bài 15. Chứng minh:

a) $7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2$;

b) $6 - 2\sqrt{5} = (\sqrt{5} - 1)^2$;

c) $(5 - \sqrt{2})^2 = 27 - 10\sqrt{2}$;

c) $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} - \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = 4$.

Bài 16. Rút gọn biểu thức:

a) $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$;

b) $\sqrt{8 - 2\sqrt{7}} - \sqrt{8 + 2\sqrt{7}}$;

c) $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$;

d) $\sqrt{17 + 12\sqrt{2}} + \sqrt{17 - 12\sqrt{2}}$.

Bài 17. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{64a^2} + 2a$;

b) $3\sqrt{9a^6} - 6a^3$

Bài 18. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{a^2 + 6a + 9} + \sqrt{a^2 - 6a + 9}$ với $-3 \leq a \leq 3$;

b) $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$ với $1 \leq a < 2$.

Bài 19. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\frac{a\sqrt{a} - 8 + 2a - 4\sqrt{a}}{a - 4}$;

b) $\frac{12\sqrt{6}}{\sqrt{7+2\sqrt{6}} - \sqrt{7-2\sqrt{6}}}$.

VẤN ĐỀ 3. CĂN THỨC BẬC HAI VÀ HẰNG ĐẲNG THỨC $\sqrt{A^2} = |A|$
(PHẦN II)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Hằng đẳng thức: $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases}$

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 3. Tìm điều kiện để biểu thức chứa căn bậc hai có nghĩa

Phương pháp giải: Chú ý rằng biểu thức \sqrt{A} có nghĩa khi và chỉ khi $A \geq 0$.

* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

Bài 1. Với giá trị nào của x thì các căn thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{2x-4}$; b) $\sqrt{7-6x}$; c) $\sqrt{\frac{-2}{3x-1}}$; d) $\sqrt{\frac{3x-2}{x^2-2x+4}}$.

* Chú ý rằng, với a là số dương, ta luôn có:

$$x^2 \geq a^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a \\ x \leq -a \end{cases}$$

$$x^2 \leq a^2 \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

Bài 2. Với giá trị nào của x thì các căn thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{(3-5x)(x-6)}$; b) $\sqrt{\frac{2x-4}{5-x}}$; c) $\sqrt{x^2-8x-9}$; d) $\sqrt{16-x^2}$.

* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

Bài 3. Với giá trị nào của x thì các căn thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{2x-3}$; b) $\sqrt{-7x}$; c) $\sqrt{1-4x}$; d) $\sqrt{3x^2+1}$.

Bài 4. Với giá trị nào của x thì các căn thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{\frac{2}{x-1}}$; b) $\sqrt{\frac{-7-x}{3}}$; c) $\sqrt{\frac{x-3}{4-x}}$; d) $\sqrt{\frac{x^2+2x+4}{2x-3}}$.

Bài 5. Với giá trị nào của x thì các căn thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{(x-2)(x-6)}$; b) $\sqrt{x^2-4x-5}$; c) $\sqrt{x^2-9}$; d) $\sqrt{1-x^2}$.

Dạng 4. Giải phương trình chứa căn thức bậc hai

Phương pháp giải: Ta chú ý một số phép biến đổi tương đương liên quan đến căn thức bậc hai sau đây:

$$* \sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases};$$

$$* \sqrt{A^2} = B \Leftrightarrow |A| = B;$$

$$* \sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \text{ (hay } A \geq 0) \\ A = B \end{cases};$$

$$* \sqrt{A^2} = \sqrt{B^2} \Leftrightarrow |A| = |B| \Leftrightarrow A = \pm B.$$

** Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

Bài 6. Giải các phương trình:

a) $\sqrt{x-6} = 13;$

b) $\sqrt{x^2 - 2x + 4} = x - 1;$

c) $\sqrt{x^2 - 8x + 16} = 9x - 1;$

d) $\sqrt{x^2 - x - 4} = \sqrt{x - 1};$

e) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{4x^2 - 12x + 9};$

g) $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = 2.$

** Học sinh tự luyện bài tập sau tại lớp:*

Bài 7. Giải các phương trình:

a) $\sqrt{x+9} = 3;$

b) $\sqrt{2x^2 + 2} = 3x - 1;$

c) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 19x - 1;$

d) $\sqrt{x^2 - x - 6} = \sqrt{x - 3};$

e) $\sqrt{4x^2 + 4x + 1} = \sqrt{x^2 + 12x + 36};$

g) $\sqrt{x + 4\sqrt{x-4}} = 2.$

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 8. Với giá trị nào của x thì các căn thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{-5x-10};$

b) $\sqrt{x^2 - 2x + 1};$

c) $\sqrt{2x^2 + 4x + 5};$

d) $\sqrt{-x^2 + 4x - 4}.$

Bài 9. Với giá trị nào của x thì các căn thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{\frac{-5}{-x-7}};$

b) $\sqrt{x^2 - 3x + 2};$

c) $\sqrt{\frac{x+3}{5-x}};$

d) $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}.$

Bài 10. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x+9} = 3;$

b) $\sqrt{x^2 - 2x + 4} = x - 1;$

c) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 4 - x;$

d) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 3.$

Bài 11. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2 + 4} = x - 2;$

b) $\sqrt{x^2 - 10x + 25} = 3 - 19x;$

c) $\sqrt{x^2 - 9} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 0;$

d) $\sqrt{2x - 2} + 2\sqrt{2x - 3} + \sqrt{2x + 13} + 8\sqrt{2x - 3} = 5.$

Bài 12*. a) Chứng minh nếu $x^2 + y^2 = 1$ thì $-\sqrt{2} \leq x + y \leq \sqrt{2}.$ b) Cho x, y, z là các số thực dương, chứng minh:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{xz}}.$$

Bài 13*. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} + \sqrt{4x^2 - 12x + 9};$

b) $B = \sqrt{49x^2 - 22x + 9} + \sqrt{49x^2 + 22x + 9}.$

Bài 14*. Tìm các số x, y, z thỏa mãn đẳng thức:

$$x + y + z + 8 = 2\sqrt{x - 1} + 4\sqrt{y - 2} + 6\sqrt{z - 3}.$$

**VẤN ĐỀ 4. LIÊN HỆ PHÉP NHÂN, PHÉP CHIA VỚI PHÉP KHAI PHƯƠNG
(PHẦN I)**

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Khai phương một tích:

$$\text{Với } A \geq 0; B \geq 0 \text{ ta có } \sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}.$$

- Khai phương một thương:

$$\text{Với } A \geq 0; B > 0 \text{ ta có } \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}.$$

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Thực hiện phép tính

Phương pháp giải: Áp dụng các công thức khai phương một tích hoặc khai phương một thương ở trên.

* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

Bài 1. Tính:

a) $\sqrt{45 \cdot 80}$; b) $\sqrt{2,5 \cdot 14,4}$; c) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{40}$; d) $\sqrt{52} \cdot \sqrt{13}$.

Bài 2. Tính:

a) $\sqrt{\frac{9}{169}}$; b) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; c) $\frac{\sqrt{2300}}{\sqrt{23}}$; d) $\frac{\sqrt{12,5}}{\sqrt{0,5}}$.

Bài 3. Thực hiện phép tính:

a) $\left(\sqrt{\frac{9}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \cdot \sqrt{2}$; b) $(\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{3}$;
 c) $\left(\sqrt{\frac{8}{3}} - \sqrt{24} + \sqrt{\frac{50}{3}}\right) \cdot \sqrt{6}$; d) $\left(2\sqrt{6} - 4\sqrt{3} + 5\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{8}\right) \cdot 3\sqrt{6}$.

Bài 4. Thực hiện phép tính:

a) $(\sqrt{45} - \sqrt{20} + \sqrt{5}) : \sqrt{6}$; b) $\left(\sqrt{\frac{1}{7}} - \sqrt{\frac{16}{7}} + \sqrt{7}\right) : \sqrt{7}$;
 c) $(\sqrt{325} - \sqrt{117} + 2\sqrt{208}) : \sqrt{13}$; d) $\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{1}{6}}\right) : \left(\frac{2}{7}\sqrt{\frac{1}{8}}\right)$.

* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

Bài 5. Tính:

a) $\sqrt{32.200}$; b) $\sqrt{\frac{9}{16} : \frac{25}{36}}$; c) $\sqrt{11} \cdot \sqrt{1100}$; d) $\sqrt{13} \cdot \sqrt{52}$.

Bài 6. Tính:

a) $\sqrt{\frac{25}{64}}$; b) $\sqrt{1\frac{16}{9}}$; c) $\sqrt{\frac{-999}{-111}}$; d) $\frac{\sqrt{640} \cdot \sqrt{34.3}}{\sqrt{567}}$.

Bài 7. Thực hiện phép tính:

a) $\left(\sqrt{\frac{16}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}}\right) \cdot \sqrt{3}$; b) $(\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{5}) \cdot \sqrt{5}$;
 c) $\left(\sqrt{\frac{8}{2}} - \sqrt{6} + \sqrt{\frac{50}{3}}\right) \cdot \sqrt{6}$; d) $(\sqrt{6} + 2)(\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

Bài 8. Thực hiện phép tính:

a) $\left(\sqrt{\frac{1}{11}} - \sqrt{\frac{16}{11}} + \sqrt{11}\right) : \sqrt{11}$; b) $(20\sqrt{300} - 15\sqrt{675} + 5\sqrt{75}) : \sqrt{15}$;
 c) $\left(\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{4}{3}} + \sqrt{3}\right) : \sqrt{3}$; d) $\sqrt{3 - \sqrt{5}} : \sqrt{2}$.

Dạng 2. Rút gọn biểu thức

Phương pháp giải: Áp dụng các công thức khai phương một tích hoặc khai phương một thương.

* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

Bài 9. Rút gọn:

a) $\frac{\sqrt{10} - \sqrt{15}}{\sqrt{8} - \sqrt{12}}$; b) $\frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} - 1} - \frac{5 - 2\sqrt{5}}{2\sqrt{5} - 4}$;
 c) $\frac{2\sqrt{8} - \sqrt{12}}{\sqrt{18} - \sqrt{48}} - \frac{\sqrt{5} + \sqrt{27}}{\sqrt{30} + \sqrt{162}}$; d) $\frac{3 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} - (2 + \sqrt{3})$.

Bài 10. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\frac{\sqrt{a} - a}{\sqrt{a} - 1}$; b) $\frac{x - \sqrt{xy}}{x - y}$ với $x \geq 0, y \geq 0, x \neq y$;
 c) $\frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{x + 2\sqrt{xy} + y}$; d) $\frac{3\sqrt{a} - 2a - 1}{4a - 4\sqrt{a} + 1}$.

* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

Bài 11. Tính:

a) $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{\sqrt{35}-\sqrt{14}}$;

b) $\frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$;

c) $\left(\frac{5-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}-2\right)\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}-2\right)$;

d) $\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3\frac{1}{3}}\right)\left(\sqrt{1,2}+\sqrt{2}-4\sqrt{\frac{1}{5}}\right)$.

Bài 12. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\frac{x+\sqrt{xy}}{x-y}$ với $x \geq 0, y \geq 0, x \neq y$;

b) $\frac{\sqrt{a+a}}{\sqrt{a+1}}$;

c) $\frac{a+4\sqrt{a}+4}{\sqrt{a}+2} + \frac{4-a}{\sqrt{a}-2}$;

d) $\frac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{x-2\sqrt{xy}+y}$.

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 13. Tính:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$;

b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{125}$;

c) $\sqrt{\frac{9}{196}}$;

d) $\sqrt{2\frac{7}{81}}$.

Bài 14. Tính:

a) $\sqrt{16} \cdot \sqrt{25} + \sqrt{196} : \sqrt{49}$;

b) $(\sqrt{28} - \sqrt{63} + \sqrt{7}) : \sqrt{7}$;

c) $\sqrt{2,5} \cdot \sqrt{30} \cdot \sqrt{48}$;

d) $\sqrt{3\frac{1}{16} \cdot 2\frac{14}{25} \cdot 2\frac{34}{81}}$.

Bài 15. Thực hiện phép tính:

a) $(\sqrt{12} + 2\sqrt{27})\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{150}$;

b) $(\sqrt{28} - \sqrt{12} - \sqrt{7}) + 2\sqrt{21}$,

c) $(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$;

d) $\sqrt{3}(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

Bài 16. Rút gọn biểu thức sau:

a) $\frac{x^2-3}{x+\sqrt{3}}$;

b) $\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$;

c) $\frac{x^2-2x\sqrt{2}+2}{x^2-2}$;

d) $\frac{x+\sqrt{5}}{x^2+2x\sqrt{5}+5}$.

**VẤN ĐỀ 5. LIÊN HỆ PHÉP NHÂN, PHÉP CHIA VỚI PHÉP KHAI PHƯƠNG
(PHẦN II)**

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Nhắc lại các công thức khai phương ở Vấn đề 4:

- Khai phương một tích:

$$\text{Với } A \geq 0; B \geq 0 \text{ ta có } \sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}.$$

- Khai phương một thương:

$$\text{Với } A \geq 0; B > 0 \text{ ta có } \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}.$$

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 3. Tính giá trị của một biểu thức

* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

Bài 1. Tính:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}; & \text{b) } & \frac{\sqrt{3 - \sqrt{5}} \cdot (3 + \sqrt{5})}{\sqrt{10} + \sqrt{2}}; \\ \text{c) } & \frac{2\sqrt{10} + \sqrt{30} - 2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2\sqrt{10} - 2\sqrt{2}}; & \text{d) } & \sqrt{(1 - \sqrt{2016})^2} \cdot \sqrt{2017 + 2\sqrt{2016}}. \end{aligned}$$

* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

Bài 2. Tính:

$$\text{a) } \sqrt{12,1.360}; \quad \text{b) } \sqrt{0,4} \cdot \sqrt{6,4}; \quad \text{c) } -0,4\sqrt{(-0,4)^2}; \quad \text{d) } \sqrt{2^4 \cdot (-7)^2}.$$

Bài 3. Tính:

$$\text{a) } (\sqrt{15} + 2\sqrt{3})^2 + 12\sqrt{5}; \quad \text{b) } 2\sqrt{5}(2 - 3\sqrt{5}) + (1 - 2\sqrt{5})^2 + 6\sqrt{5}.$$

Dạng 4. Rút gọn biểu thức

Phương pháp giải: Sử dụng hằng đẳng thức: $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases}$

và phép khai phương của một tích hoặc một thương.

* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } \sqrt{27.48(1-a)^2} \text{ với } a < 1; \quad \text{b) } \frac{1}{a-b} \cdot \sqrt{a^4(a-b)^2} \text{ với } a < b;$$

c) $\sqrt{\frac{2a}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3a}{8}}$ với $a \geq 0$;

d) $\sqrt{5a} \cdot \sqrt{45a} - 3a$ với $a \geq 0$.

Bài 5. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3}}{a-b}$ với $a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$;

b) $\frac{2a + \sqrt{ab} - 3b}{2a - 5\sqrt{ab} + 3b}$ với $a \geq 0, b \geq 0, 4a \neq 9b$.

** Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

Bài 6. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $(3-a)^2 - \sqrt{0,2} \cdot \sqrt{180a^4}$;

b) $\sqrt{\frac{27(a-3)^2}{48}}$ với $a < 3$;

c) $\frac{\sqrt{63y^3}}{\sqrt{7y}}$ với $y > 0$;

d) $\frac{\sqrt{16a^4b^6}}{\sqrt{128a^6b^2}}$ với $a < 0, b \neq 0$.

Bài 7. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\frac{\sqrt{a} - 2a}{2\sqrt{a} - 1}$;

b) $\frac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}}$;

c) $\frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$;

d) $\frac{x + \sqrt{x}\sqrt{y}}{x - y}$.

Dạng 5. Giải phương trình

Phương pháp giải: Chú ý rằng:

$$*\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$$

$$*\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \text{ (hay } A \geq 0) \\ A = B \end{cases}$$

** Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

Bài 8. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{\frac{2x-3}{x-1}} = 2$;

b) $\sqrt{4x^2 - 9} = 2\sqrt{2x+3}$;

c) $\sqrt{2-x} - \sqrt{x^2-4} = 0$;

d) $\sqrt{4x-20} + \sqrt{x-5} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} = 4$.

** Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

Bài 9. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2 - 8x + 16} = 5$;

b) $\frac{9x-7}{\sqrt{7x+5}} = \sqrt{7x+5}$;

c) $\sqrt{x-3} - 2\sqrt{x^2-9} = 0$;

d) $2\sqrt{9x-27} - \frac{1}{5}\sqrt{25x-75} - \frac{1}{7}\sqrt{49x-147} = 20.$

Bài 10. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{\frac{x-3}{2x+1}} = 2;$

b) $\frac{10x-7}{\sqrt{3x+5}} = \sqrt{3x+5};$

c) $\sqrt{x-2} - 2\sqrt{x^2-4} = 0;$

d) $\sqrt{x-2} + \sqrt{4x-8} - \frac{1}{2}\sqrt{9x-18} = 2.$

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 11. Tính:

a) $\sqrt{2.80};$

b) $\sqrt{\frac{25}{144}};$

c) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{45};$

d) $\sqrt{2\frac{14}{25}}.$

Bài 12. Thực hiện phép tính:

a) $\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} + \frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}};$

b) $\frac{2\sqrt{8}-\sqrt{12}}{\sqrt{18}-\sqrt{48}} - \frac{\sqrt{5}+\sqrt{27}}{\sqrt{30}+\sqrt{162}};$

c) $(2+\sqrt{5}+\sqrt{3})(2+\sqrt{5}-\sqrt{3});$

d) $\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}.$

Bài 13. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}+1}}$ với $x \geq 0;$

b) $\frac{2}{x^2-y^2} \sqrt{\frac{3x^2+6xy+3y^2}{4}}$ với $x+y > 0;$

c) $\frac{x+\sqrt{7}}{x^2+2x\sqrt{7}+7};$

d) $\frac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{x+2\sqrt{xy}+y}.$

Bài 14. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2-10x+25} = 7;$

b) $\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{2x+1}} = 2;$

c) $\sqrt{25x^2-9} = 2\sqrt{5x-3};$

d) $\sqrt{x-5} + \sqrt{4x-20} - \frac{1}{5}\sqrt{9x-45} = 3.$

Bài 15. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}} = 2;$

b) $\sqrt{\frac{x-3}{2x+1}} = 2;$

c) $\frac{10x-3}{\sqrt{2x+1}} = \sqrt{2x+1};$

d) $\sqrt{4x^2-9} = 2\sqrt{2x-3}.$

Bài 16. Cho x là số thực bất kỳ. Chứng minh ta luôn có:

$$\frac{x^4 + 5}{\sqrt{x^4 + 4}} > 2.$$

VẤN ĐỀ 6. BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Đưa thừa số A^2 ra ngoài dấu căn: $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B}$ với $B \geq 0$.
- Đưa thừa số vào trong dấu căn: $A\sqrt{B} = \begin{cases} \sqrt{A^2B} & \text{khi } A \geq 0 \\ -\sqrt{A^2B} & \text{khi } A < 0 \end{cases}$.
- Khử mẫu của biểu thức dưới dấu căn bậc hai:

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{A.B}{B^2}} = \frac{1}{|B|}\sqrt{A.B} \text{ với } B \neq 0, AB \geq 0.$$

- Trục căn thức ở mẫu:

$$\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A.\sqrt{B}}{B};$$

$$\frac{m}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{m(\sqrt{A} + \sqrt{B})}{A - B};$$

$$\frac{m}{\sqrt{A} - \sqrt{B}} = \frac{m(\sqrt{A} - \sqrt{B})}{A - B}.$$

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn hoặc vào trong dấu căn

Phương pháp giải:

1. Cách đưa thừa số A^2 ra ngoài dấu căn: $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B}$ với $B \geq 0$.
2. Đưa thừa số vào trong dấu căn: $A\sqrt{B} = \begin{cases} \sqrt{A^2B} & \text{khi } A \geq 0 \\ -\sqrt{A^2B} & \text{khi } A < 0 \end{cases}$.

* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

Bài 1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

- a) $\sqrt{7x^2}$ với $x \geq 0$; b) $\sqrt{8y^2}$ với $y \leq 0$;
 c) $\sqrt{25x^3}$ với $x \geq 0$; d) $\sqrt{48y^4}$.

Bài 2. Đưa thừa số vào trong dấu căn:

- a) $x\sqrt{13}$ với $x \geq 0$; b) $x\sqrt{2}$ với $x \leq 0$;
 c) $x\sqrt{\frac{15}{x}}$ với $x > 0$; d) $x\sqrt{\frac{-15}{x}}$ với $x < 0$.

** Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

Bài 3. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

- a) $\sqrt{13x^2}$ với $x \geq 0$; b) $\sqrt{12y^2}$ với $y \leq 0$;
c) $\sqrt{81x^3}$ với $x \geq 0$; d) $\sqrt{48y^8}$.

Bài 4. Đưa các thừa số vào trong dấu căn:

- a) $x\sqrt{13}$ với $x \geq 0$; b) $x\sqrt{3}$ với $x \leq 0$;
c) $2y\sqrt{\frac{7}{y}}$ với $y > 0$; d) $2y\sqrt{\frac{-7}{y}}$ với $y < 0$.

Dạng 2. So sánh các căn bậc hai

Phương pháp giải: Đưa thừa số ra ngoài hoặc vào trong dấu căn rồi so sánh.

** Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

Bài 5. So sánh các số:

- a) $5\sqrt{2}$ và $4\sqrt{3}$; b) $\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{6}}$ và $6\sqrt{\frac{1}{37}}$;
c) $2\sqrt{29}$ và $3\sqrt{13}$; d) $\frac{5}{4}\sqrt{2}$ và $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Bài 6. Sắp xếp theo thứ tự tăng dần:

- a) $3\sqrt{5}$; $2\sqrt{6}$; $\sqrt{29}$; $4\sqrt{2}$; b) $6\sqrt{2}$; $\sqrt{38}$; $3\sqrt{7}$; $2\sqrt{14}$.

** Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

Bài 7. So sánh các số:

- a) $3\sqrt{5}$ và $2\sqrt{7}$; b) $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}$ và $6\sqrt{\frac{1}{14}}$;
c) $3\sqrt{21}$ và $2\sqrt{47}$; d) $\frac{5}{9}\sqrt{3}$ và $\frac{2}{7}\sqrt{14}$.

Bài 8. Sắp xếp theo thứ tự giảm dần:

- a) $7\sqrt{2}$; $2\sqrt{8}$; $\sqrt{28}$; $5\sqrt{2}$; b) $2\sqrt{5}$; $2\sqrt{40}$; $3\sqrt{8}$; $5\sqrt{30}$.

Dạng 3: Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai

Phương pháp giải: Đưa thừa số ra ngoài hoặc vào trong dấu căn rồi rút gọn.

** Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

Bài 9: Rút gọn biểu thức sau:

- a) $5\sqrt{48} - 4\sqrt{27} - 2\sqrt{75} + \sqrt{108}$;

b) $5\sqrt{16a} - 4\sqrt{25a} - 2\sqrt{100a} + \sqrt{169a}$ với $a \geq 0$.

Bài 10: Rút gọn biểu thức sau:

a) $3\sqrt{a^2} - 5a$ với $a \leq 0$;

b) $3\sqrt{4a^6} - 3a^3$ với $a \leq 0$;

c) $\sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}$;

d) $x - 2 - \sqrt{4-4x+x^2}$ với $x > 2$.

* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

Bài 11: Rút gọn biểu thức sau:

a) $2\sqrt{24} - 2\sqrt{54} + 3\sqrt{6} - \sqrt{150}$;

b) $5\sqrt{4a} - 4\sqrt{a^2} - \sqrt{100a}$ với $a > 0$.

Bài 12: Rút gọn biểu thức sau:

a) $\sqrt{4a^2} + 5a$ với $a \geq 0$;

b) $\sqrt{25x^2} + 3x$ với $x \leq 0$;

c) $x - 2 - \sqrt{4-4x+x^2}$ với $x \leq 2$;

d) $3 - x + \sqrt{9+9x+x^2}$ với $x \leq -3$.

Dạng 4: Trục căn thức ở mẫu

Phương pháp giải:

1. Cách khử mẫu của biểu thức dưới dấu căn bậc hai:

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A \cdot B}}{\sqrt{B^2}} = \frac{1}{|B|} \cdot \sqrt{A \cdot B} \text{ với } B \neq 0; AB \geq 0.$$

2. Cách trục căn thức ở mẫu:

$$\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A \cdot \sqrt{B}}{B};$$

$$\frac{m}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{m(\sqrt{A} - \sqrt{B})}{A - B};$$

$$\frac{m}{\sqrt{A} - \sqrt{B}} = \frac{m(\sqrt{A} + \sqrt{B})}{A - B}.$$

* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

Bài 13: Khử mẫu của mỗi biểu thức lấy căn và rút gọn (nếu được):

a) $\sqrt{\frac{2}{3}}$;

b) $\sqrt{\frac{x^2}{5}}$ với $x \geq 0$;

c) $\sqrt{\frac{5a^3}{49b}}$ với $a \geq 0; b > 0$;

d) $-7xy\sqrt{\frac{3}{xy}}$ với $x < 0, y > 0$.

Bài 14: Trục căn thức ở mẫu và rút gọn:

a) $\frac{10+2\sqrt{10}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$;

b) $\frac{2\sqrt{8}-\sqrt{12}}{\sqrt{18}-\sqrt{48}}$;

c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$;

d) $\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$.

Bài 15: Trục căn thức và thực hiện phép tính:

a) $\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1} + \frac{4}{\sqrt{6}-2} - \frac{12}{3-\sqrt{6}}\right) \cdot (\sqrt{6}+11)$;

b) $\frac{1}{3-\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}-1}$;

c) $\frac{1}{\sqrt{5}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}-2} - \frac{1}{3-\sqrt{5}} - \sqrt{5}$;

d) $\frac{1}{5+3\sqrt{2}} + \frac{1}{5-3\sqrt{2}}$.

* Học sinh tự luyện giải các bài tập sau tại lớp:

Bài 16: Khử mẫu của mỗi biểu thức lấy căn và rút gọn (nếu được):

a) $\sqrt{\frac{2}{7}}$;

b) $\sqrt{\frac{x^2}{31}}$ với $x \geq 0$;

c) $\sqrt{\frac{5b^3}{49a}}$ với $a > 0, b \geq 0$;

d) $-7xy\sqrt{\frac{16}{xy}}$ với $x < 0, y < 0$.

Bài 17: Trục căn thức ở mẫu và rút gọn:

a) $\frac{5+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$;

b) $\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{10}}{4\sqrt{3}-2\sqrt{5}}$;

c) $\frac{1}{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}}$;

d) $\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}$.

Bài 18: Trục căn thức và thực hiện phép tính:

a) $\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} - (2-\sqrt{3})$;

b) $\left(1 - \frac{5+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right) \cdot \left(\frac{5-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} - 1\right)$;

c) $\left(\frac{5-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} - 2\right) \cdot \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} - 2\right)$;

d) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} - \frac{2}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 19: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{125} - 2\sqrt{20} - 3\sqrt{80} + 4\sqrt{45}$;

b) $10\sqrt{28} - 2\sqrt{275} - 3\sqrt{343} - \frac{3}{2}\sqrt{396}$;

c) $\frac{1}{7+4\sqrt{3}} + \frac{1}{7-4\sqrt{3}}$;

d) $\frac{1}{2\sqrt{11}-3\sqrt{7}}$.

Bài 20: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{9a^4} + 2a^2$;

b) $\sqrt{9x^2} - 2x$ với $x \geq 0$;

c) $\sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{3}$;

d) $3-x + \sqrt{x^2+6x+9}$ với $x > -3$.

Bài 21: Tính:

a) $(2\sqrt{45} + \sqrt{80} - \sqrt{125}) \cdot \sqrt{5}$;

b) $2\sqrt{\frac{16}{5}} - 3\sqrt{\frac{1}{45}} - 6\sqrt{\frac{4}{20}}$;

c) $3 - \sqrt{7-2\sqrt{6}} - 3\sqrt{6}$;

d) $\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} - \frac{4}{3-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{2}-1}$.

Bài 22: Tính:

a) $\sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{3+\sqrt{5}}$;

b) $2\sqrt{\frac{16}{5}} - 3\sqrt{\frac{1}{27}} - 6\sqrt{\frac{4}{75}}$;

c) $\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{7}} + \sqrt{175} - \frac{6\sqrt{2}-4}{3-\sqrt{2}}$;

d) $\sqrt{10-\sqrt{84}} - \sqrt{34+2\sqrt{189}}$.

Bài 23: Tính:

a) $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1} + \frac{3}{\sqrt{3}-2} + \frac{15}{3-\sqrt{3}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}+5}$;

b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1}$;

c) $\sqrt{\frac{3}{20}} + \sqrt{\frac{1}{60}} - 2\sqrt{\frac{1}{15}}$;

d) $\left(\frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{1-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$.

Bài 24: Giải phương trình:

a) $\sqrt{x-5} + 2\sqrt{25x-125} = 22;$

b) $\sqrt{18x+9} - \sqrt{8x+4} + \frac{1}{3}\sqrt{2x+1} = 4;$

c) $\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-5} = \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-6};$

d) $\sqrt{4x-8} - \frac{1}{2}\sqrt{x-2} + \sqrt{9x-18} = 9.$

Bài 25: Giải phương trình:

a) $\sqrt{4x^2-9} = 2\sqrt{2x+3};$

b) $\sqrt{4x-20} + 3\sqrt{\frac{x-5}{9}} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} = 4;$

c) $\frac{2}{3}\sqrt{9x-9} - \frac{1}{4}\sqrt{16x-16} + 27\sqrt{\frac{x-1}{81}} = 4;$ d)

$5\sqrt{\frac{9x-27}{25}} - 7\sqrt{\frac{4x-12}{9}} - 7\sqrt{x^2-9} + 18\sqrt{\frac{9x^2-81}{81}} = 0.$

Bài 26: Tìm x, y, z biết rằng:

a) $\sqrt{x} + 2\sqrt{y+1} + \sqrt{y} = \sqrt{4y+4};$

b) $\sqrt{x+1} + \sqrt{y-3} + \sqrt{z-1} = \frac{1}{2}(x+y+z).$

Bài 27: Rút gọn:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}.$$

Bài 28: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+2\sqrt{x-1}}.$$

Bài 29: Chứng minh với mọi số tự nhiên n khác 0, ta luôn có:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1}-1).$$

Bài 30: Chứng minh:

$$\frac{2002}{\sqrt{2003}} + \frac{2003}{\sqrt{2002}} > \sqrt{2002} + \sqrt{2003}.$$

VẤN ĐỀ 7: RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Để rút gọn biểu thức có chứa căn thức bậc hai, ta cần biết vận dụng linh hoạt thích hợp các phép biến đổi đơn giản như: Đưa thừa số ra ngoài dấu căn, đưa thừa số vào trong dấu căn, khử căn ở mẫu và trục căn thức ở mẫu để làm xuất hiện các căn thức bậc hai có cùng một biểu thức dưới dấu căn ...

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai

Phương pháp giải:

Bước 1: Vận dụng thích hợp các phép tính và các phép biến đổi đã biết làm xuất hiện căn thức cùng loại;

Bước 2: Cộng, trừ, các căn thức bậc hai cùng loại.

* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

Bài 1: Rút gọn các biểu thức sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sqrt{32} + \sqrt{50} - 2\sqrt{8} + \sqrt{18}; & \text{b) } \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{4,5} + \sqrt{12,5}; \\ \text{c) } \sqrt{(1-2\sqrt{3})^2} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}; & \text{d) } \sqrt{96} - 6\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{3}{3+\sqrt{6}} - \sqrt{10-4\sqrt{6}}. \end{array}$$

Bài 2: Rút gọn các biểu thức sau:

$$\begin{array}{l} \text{a) } 5\sqrt{a} + 6\sqrt{\frac{a}{4}} - a\sqrt{\frac{4}{a}} + \sqrt{5} \text{ với } a > 0; \\ \text{b) } 5\sqrt{a} - 4b\sqrt{25a^3} + 5a\sqrt{16ab^2} - \sqrt{9a} \text{ với } a \geq 0, b \geq 0. \end{array}$$

* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

Bài 3: Rút gọn biểu thức sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 2\sqrt{\frac{27}{4}} - \sqrt{\frac{48}{9}} - \frac{2}{5}\sqrt{\frac{75}{16}}; & \text{b) } (\sqrt{99} - \sqrt{18} - \sqrt{11}) \cdot \sqrt{11} + 3\sqrt{22}; \\ \text{c) } (\sqrt{5} + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{8 - 2\sqrt{15}}; & \text{d) } (\sqrt{48} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{5}) \cdot \sqrt{5} - 2\sqrt{45} : \sqrt{3}. \end{array}$$

Bài 4: Rút gọn các biểu thức sau:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left(\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + 1 \right) \cdot \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2}; \\ \text{b) } 2\sqrt{a} - \sqrt{9a^3} + a^2\sqrt{\frac{4}{a}} + \frac{2}{a^2}\sqrt{25a^5} \text{ với } a > 0. \end{array}$$

Dạng 2: Chứng minh đẳng thức chứa căn thức bậc hai

Phương pháp giải: Thực hiện các phép biến đổi căn thức và các hằng đẳng thức đáng nhớ để thực hiện phép chứng minh.

* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:

Bài 5: Chứng minh đẳng thức sau:

a) $\left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right)\left(\frac{1-\sqrt{a}}{1-a}\right)^2 = 1$ với $a \geq 0, a \neq 1$.

b) $\frac{a+b}{b^2} \sqrt{\frac{a^2b^4}{a^2+2ab+b^2}} = |a|$ với $a+b > 0$ và $b \neq 0$.

* Học sinh tự luyện bài tập sau tại lớp:

Bài 6: Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\left(\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{8}-2} - \frac{\sqrt{216}}{3}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{-3}{2}$;

b) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{a}-2\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2\sqrt{a}+2\sqrt{b}} - \frac{2b}{b-a} = \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ với $a \neq b$ và $a \geq 0, b \geq 0$.

Dạng 3: Rút gọn biểu thức và các bài toán liên quan

* **Phương pháp giải:**

1. Để rút gọn biểu thức, ta thực hiện các phép biến đổi căn thức và các hằng đẳng thức đáng nhớ.

2. Các bài toán liên quan thường gặp là:

- Tính giá trị của biểu thức với giá trị của biến cho trước;
- Giải phương trình hoặc bất phương trình chứa căn bậc hai;
- Tìm giá trị nguyên của biểu thức;
- So sánh biểu thức với một số;
- Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức.

* *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

Bài 7: Cho biểu thức $M = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$.

a) Rút gọn M;

b) Tính giá trị của M khi $x = 11 - 6\sqrt{2}$;

c) Tìm các giá trị thực của x để $M = 2$;

d) Tìm các giá trị thực của x để $M < 1$;

e) Tìm các giá trị x nguyên để M nguyên.

* *Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

Bài 8: Với $x > 0$, cho các biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$.

a) Tính giá trị của A khi $x = 4$;

b) Tìm các giá trị thực của x để $B = \frac{1}{3}$;

c) So sánh B với 1;

d) Đặt $P = A : B$. Tìm x thỏa mãn $P\sqrt{x} + (2\sqrt{5}-1)\sqrt{x} = 3x - 2\sqrt{x-4} + 3$.

Bài 9: Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1}\right) : \left(\frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{x+1}\right)$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn P;

b) Tìm x để $P < \frac{1}{2}$;

c) Tìm x để $P = \frac{1}{3}$;

d) Tìm x nguyên để P nguyên;

e) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 10: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $5\sqrt{27} + 3\sqrt{48} - 2\sqrt{12} - 6\sqrt{3}$;

b) $\left(3 + \frac{3-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right) \left(\frac{\sqrt{21}+\sqrt{7}}{\sqrt{7}} + 2\right)$;

c) $\sqrt{96} - 6\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{3}{3+\sqrt{6}} - \sqrt{10-4\sqrt{6}}$;

d) $\sqrt{\frac{5}{2}-\sqrt{6}} - \sqrt{\frac{11}{2}-2\sqrt{6}}$.

Bài 11: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{\frac{4}{7}} - 10\sqrt{\frac{7}{25}} - 6\sqrt{\frac{1}{28}}$;

b) $(\sqrt{10} + \sqrt{2}) \cdot \sqrt{3-\sqrt{5}}$;

c) $\frac{\sqrt{6+\sqrt{11}} - \sqrt{7-\sqrt{33}}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$;

d) $\frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{2}{4+\sqrt{15}} - \frac{5\sqrt{5}+3\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

Bài 12: Cho biểu thức $Q = \frac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}$.

a) Rút gọn Q;

b) Tính giá trị của Q khi $x = 4 + 2\sqrt{3}$;

c) Tìm các giá trị của x để $Q = 3$;

d) Tìm các giá trị của x để $Q > \frac{1}{2}$;

e) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $Q \in \mathbb{Z}$.

Bài 13: Cho biểu thức $P = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right)$.

a) Rút gọn P;

b) Tính giá trị của P biết $x = \frac{2}{2+\sqrt{3}}$;

c) Tìm x thỏa mãn $P\sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4}$.

Bài 14: Cho biểu thức $P = \left(\sqrt{x} - \frac{x+2}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-4}{1-x}\right)$.

a) Rút gọn P;

b) Tìm các giá trị của x thỏa mãn $P < 0$;

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Bài 15: Cho biểu thức $P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$.

a) Rút gọn P;

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P;

c) Tìm x để biểu thức $Q = \frac{2\sqrt{x}}{P}$ nhận giá trị là số nguyên.

Bài 16: Cho các biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{x+9\sqrt{x}}{x-9}$ và $B = \frac{x+5\sqrt{x}}{x-25}$ với $x \geq 0, x \neq 9, x \neq 25$.

- a) Rút gọn các biểu thức A và B;
- b) Đặt $P = A : B$. So sánh P với 1;
- c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

VẤN ĐỀ 8: CĂN BẬC BA

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- * Căn bậc ba của một số thực a là số thực x sao cho $x^3 = a$, kí hiệu là $\sqrt[3]{a}$.
- * Mọi số thực a đều có duy nhất một căn bậc ba. Căn bậc ba của một số dương là số dương, của số âm là số âm, của 0 là 0.
- * Các công thức liên quan:

$$A < B \Leftrightarrow \sqrt[3]{A} < \sqrt[3]{B};$$

$$\sqrt[3]{A} < \sqrt[3]{B} \Leftrightarrow A < B;$$

$$\sqrt[3]{A \cdot B} = \sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{B};$$

$$\sqrt[3]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{B}} \text{ với } B \neq 0.$$

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Thực hiện phép tính có chứa căn bậc ba

Phương pháp giải: Áp dụng công thức: $\sqrt[3]{a^3} = (\sqrt[3]{a})^3 = a$ và các hằng đẳng thức:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

Bài 1: Tính:

a) $\sqrt[3]{27}$; b) $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$; c) $\sqrt[3]{64a^3}$; d) $\sqrt[3]{-8a^3b^6}$.

Bài 2: Thực hiện các phép tính sau:

a) $2\sqrt[3]{24} - 3\sqrt[3]{81} + 4\sqrt[3]{192}$; b) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-1} - \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$.

Bài 3: Thực hiện các phép tính sau:

a) $A = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$; b) $B = \sqrt[3]{17\sqrt{5} + 38} - \sqrt[3]{17\sqrt{5} - 38}$.

* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

Bài 4: Tính:

a) $\sqrt[3]{729}$; b) $\sqrt[3]{\frac{1}{216}}$; c) $\sqrt[3]{343a^3}$; d) $\sqrt[3]{-512a^3b^6}$.

Bài 5: Thực hiện các phép tính sau:

a) $2\sqrt[3]{27} - 3\sqrt[3]{8} + 4\sqrt[3]{125}$; b) $\sqrt[3]{\frac{-27}{512}} + \sqrt[3]{64} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{1000}$;

c) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}-1} - \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3}$; d) $\sqrt[3]{125x^3 + 75x^2 + 15x + 1}$.

Bài 6: Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt[3]{(\sqrt{5}+1)(6+2\sqrt{5})}$;

b) $\sqrt[3]{(4+2\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}$;

c) $\sqrt[3]{-27} - \sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{216}$

d) $(\sqrt[3]{9}+1)^3 - (\sqrt[3]{9}-1)^3$.

Bài 7: Thực hiện các phép tính sau:

a) $A = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$;

b) $B = \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$;

c) $C = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \cdot (\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}})$;

d) $D = \sqrt[3]{2+10\sqrt{\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{2-10\sqrt{\frac{1}{27}}}$.

Dạng 2: So sánh các căn bậc ba

Phương pháp giải: Ta có $\sqrt[3]{A} < \sqrt[3]{B} \Leftrightarrow A < B$.

* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

Bài 8: So sánh:

a) $A = 2\sqrt[3]{3}$ và $B = \sqrt[3]{23}$;

b) $A = 33$ và $B = 3\sqrt[3]{133}$.

Bài 9: So sánh:

$$A = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} \text{ và } B = 2\sqrt{5}.$$

Bài 10: Tìm x biết:

a) $\sqrt[3]{2x+1} > -5$;

b) $\sqrt[3]{x^3+3x^2+6x+4} > x+1$.

* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

Bài 11: So sánh:

a) $A = 3\sqrt[3]{2}$ và $B = \sqrt[3]{42}$;

b) $A = 22$ và $B = 3\sqrt[3]{122}$;

c) $A = 2\sqrt[3]{6}$ và $B = \sqrt[3]{54}$;

d) $A = 5\sqrt[3]{6}$ và $B = 6\sqrt[3]{5}$.

Bài 12: So sánh:

$$A = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} \text{ và } B = 2.$$

Bài 13: Tìm x biết:

a) $\sqrt[3]{3-2x} > 4$;

b) $\sqrt[3]{-x^3-3x^2+6x-3} > -x-1$.

Dạng 3: Giải phương trình chứa căn bậc ba

Phương pháp giải: Áp dụng $\sqrt[3]{A} = B \Leftrightarrow A = B^3$.

* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

Bài 14: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt[3]{2x+1} = 3$;

b) $\sqrt[3]{2-3x} = -2$.

Bài 15: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$;

b) $\sqrt[3]{13-x} + \sqrt[3]{22+x} = 5$.

* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

Bài 16: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt[3]{x-1} + 1 = x$;

b) $\sqrt[3]{5+x} - x = 5$.

Bài 17: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt{2x+2} = 3$;

b) $\sqrt[3]{12-2x} + \sqrt[3]{23+2x} = 5$.

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 18: Tính:

a) $\sqrt[3]{512}$; b) $\sqrt[3]{\frac{-1}{125}}$; c) $\sqrt[3]{\frac{343a^3b^6}{-216}}$; d) $\sqrt[3]{-64a^6b^6}$;

Bài 19: Tính:

a) $\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{-8} - \frac{1}{5}\sqrt[3]{-125}$; b) $\sqrt[3]{\frac{125}{512}} + \sqrt[3]{125} - \frac{1}{3}\sqrt{27}$;
 c) $\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$; d) $\sqrt[3]{8x^3 + 12x^2 + 6x + 1}$.

Bài 20: Thực hiện các phép tính sau:

a) $\frac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}} - \sqrt[3]{54} \cdot \sqrt[3]{4}$; b)
 $(\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2})$;
 c) $\sqrt[3]{-64} - \sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{216}$; d) $(\sqrt[3]{4} + 1)^3 - (\sqrt[3]{4} - 1)^3$.

Bài 21: Thực hiện các phép tính sau:

a) $A = \sqrt[3]{6\sqrt{3} + 10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3} - 10}$; b) $B = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$;
 c) $C = \sqrt{3 + \sqrt{3}} + \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}$; d) $D = \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} \cdot (\sqrt[6]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}})$.

Bài 22: Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt[3]{(\sqrt{2} + 1)(3 + 2\sqrt{2})}$; b) $\sqrt[3]{(4 - 2\sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)}$;
 c) $(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})$; d) $\sqrt[3]{4 + \frac{5}{3}\sqrt{\frac{31}{3}}} + \sqrt[3]{4 - \frac{5}{3}\sqrt{\frac{31}{3}}}$.

Bài 23: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt[3]{2x + 1} = 1$; b) $\sqrt[3]{2 - 3x} = -3$.

Bài 24: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt[3]{x - 2} + 2 = x$; b) $\sqrt[3]{x^3 + 2x^2} = x + 2$.

Bài 25: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt[3]{x - 2} + \sqrt{x + 8} = 2$; b) $\sqrt[3]{x + 1} + \sqrt[3]{7 - x} = 2$.

ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 1 (PHẦN 1)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Căn bậc hai số học

- * Căn bậc hai của một số không âm a là số x sao cho $x^2 = a$.
- * Số dương a có đúng hai căn bậc hai là \sqrt{a} (gọi là căn bậc hai số học của a) và $-\sqrt{a}$.
- * Số 0 có đúng một căn bậc hai chính là 0 và đó cũng là căn bậc hai số học của số 0.
- * Với hai số không âm a và b, ta có: $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

2. Căn thức bậc hai

- * Với A là một biểu thức đại số, ta gọi \sqrt{A} là căn thức bậc hai của A.
- * \sqrt{A} xác định (hay có nghĩa) khi $A \geq 0$.
- * $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases}$

3. Liên hệ giữa phép nhân, phép chia và phép khai phương

- * Khai phương một tích: $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$ với $A \geq 0, B \geq 0$.
- * Nhân các căn bậc hai: $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{A \cdot B}$ với $A \geq 0, B \geq 0$.
- * Khai phương một thương: $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ với $A \geq 0, B > 0$.
- * Chia hai căn bậc hai: $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}}$ với $A \geq 0, B > 0$.

4. Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn bậc hai

- * Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $\sqrt{A^2 B} = A\sqrt{B}$.
- * Với $A < 0$ và $B \geq 0$ thì $\sqrt{A^2 B} = -A\sqrt{B}$.
- * Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2 B}$.
- * Với $A < 0$ và $B \geq 0$ thì $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2 B}$.
- * Với $AB \geq 0$ và $B \neq 0$ thì $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|}$.
- * Với $B > 0$ thì $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$.
- * Với $A \geq 0$ và $A \neq B^2$ thì $\frac{C}{\sqrt{A \pm B}} = \frac{C(\sqrt{A} \mp B)}{A - B^2}$.
- * Với $A \geq 0, B \geq 0$ và $A \neq B$ thì $\frac{C}{\sqrt{A \pm \sqrt{B}}} = \frac{C(\sqrt{A} \mp \sqrt{B})}{A - B}$.

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Tìm điều kiện cho các biểu thức có nghĩa

Bài 1: Với giá trị nào của x thì các biểu thức sau có nghĩa:

- a) $\sqrt{-3x+2}$; b) $\sqrt{9x^2-6x+1}$; c) $\sqrt{x^2+2x+3}$;
 d) $\sqrt{x^2-x+1}$; e) $\sqrt{\frac{4}{2x+3}}$; g) $\frac{5}{\sqrt{1-\sqrt{x-1}}}$.

Bài 2: Với giá trị nào của x thì các biểu thức sau có nghĩa:

- a) $\sqrt{\frac{2x-1}{2-x}}$; b) $\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{5-x}}$; c) $\sqrt{x^2-4}$;
 d) $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$; e) $\frac{\sqrt{-3x}}{x^2-1}$; g) $\frac{2}{\sqrt{x-2}}$.

Dạng 2: Tính và rút gọn biểu thức

Bài 3: Thực hiện phép tính:

- a) $\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{108}$; b) $3\sqrt{2} - 4\sqrt{18} + \sqrt{32} - \sqrt{50}$;
 c) $\sqrt{27} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{48} - 3\sqrt{75}$; d) $10\sqrt{28} - 2\sqrt{275} - 3\sqrt{343} - \frac{3}{2}\sqrt{396}$.

Bài 4: Thực hiện phép tính:

- a) $\sqrt{8} + \sqrt{18} - 6\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{200}$; b) $\frac{3}{2}\sqrt{6} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{\frac{3}{2}}$;
 c) $6\sqrt{\frac{8}{9}} - 5\sqrt{\frac{32}{25}} + 14\sqrt{\frac{18}{49}}$; d) $2\sqrt{\frac{16}{3}} - 3\sqrt{\frac{1}{27}} - 6\sqrt{\frac{4}{75}}$.

Bài 5: Thực hiện phép tính:

- a) $\left(2\sqrt{\frac{16}{3}} - 3\sqrt{\frac{1}{27}} - 6\sqrt{\frac{4}{75}}\right) \cdot \sqrt{3}$; b) $\left(6\sqrt{\frac{8}{9}} - 5\sqrt{\frac{32}{25}} + 14\sqrt{\frac{18}{49}}\right) \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$;
 c) $(\sqrt{5} + 2\sqrt{2})(\sqrt{5} - 2\sqrt{2})$; d) $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$.

Bài 6: Thực hiện phép tính:

- a) $(20\sqrt{12} - 15\sqrt{27}) : 5\sqrt{3}$; b) $(\sqrt{75} + \sqrt{243} - \sqrt{48}) : \sqrt{3}$;
 c) $(\sqrt{2} + 1)^2 + (\sqrt{2} - 1)^2$; d) $(\sqrt{28} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7}) \cdot \sqrt{7} + \sqrt{84}$.

Bài 7: Trục căn thức ở mẫu:

- a) $\frac{3}{\sqrt{5}}$; b) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; c) $\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$;
 d) $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$; e) $\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}$; g) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}$.

Bài 8: Rút gọn biểu thức:

- a) $\frac{10 + 2\sqrt{10}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} + \frac{8}{1 - \sqrt{5}}$; b) $\frac{2\sqrt{8} - \sqrt{12}}{\sqrt{18} - \sqrt{48}} - \frac{\sqrt{5} + \sqrt{27}}{\sqrt{30} + \sqrt{162}}$;
 c) $2\sqrt{\frac{16}{3}} - 3\sqrt{\frac{1}{27}} - 6\sqrt{\frac{4}{75}}$; d) $\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}}$.

Bài 9: Rút gọn biểu thức:

- a) $\frac{\sqrt{3 - \sqrt{5}} \cdot (3 + \sqrt{5})}{\sqrt{10} + \sqrt{2}}$; b) $\frac{4}{\sqrt{3} + 1} + \frac{1}{\sqrt{3} - 1} + \frac{6}{\sqrt{3} - 3}$;
 c) $\sqrt{4 - \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}$; d) $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$.

Bài 10: Rút gọn biểu thức

a) $\sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{3+\sqrt{5}}$;

b) $(\sqrt{2}+1)^3 - (\sqrt{2}-1)^3$;

c) $\left(1 - \frac{5+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right) \left(\frac{5-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} - 1\right)$;

d) $\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$.

Dạng 3: Giải phương trình và bất phương trình

Bài 11: Giải phương trình:

a) $\sqrt{x-1} + \sqrt{4x-4} - \sqrt{25x-25} + 2 = 0$;

b) $\sqrt{16x+16} - \sqrt{9x+9} + \sqrt{4x+4} + \sqrt{x+1} = 16$;

c) $\sqrt{4x+20} + \sqrt{x+5} - \frac{1}{3}\sqrt{9x+45} = 4$;

d) $\frac{1}{3}\sqrt{2x} - \sqrt{8x} + \sqrt{18x} - 10 = 2$.

Bài 12: Giải phương trình:

a) $\sqrt{x^2-6x+9} = 3$;

b) $\sqrt{x^2-8x+16} = x+2$;

c) $\sqrt{x^2+6x+9} = 3x-6$;

d) $\sqrt{x^2-4x+4} - 2x + 5 = 0$.

Bài 13: Giải phương trình:

a) $\sqrt{x-5} = 3-x$;

b) $\sqrt{4-5x} = 2-5x$;

c) $\sqrt{6-x} = 3x-4$;

d) $\sqrt{5-x} = 9-2x$.

Bài 14: Giải các phương trình:

a) $\sqrt{x-5} = \sqrt{3-x}$;

b) $\sqrt{4-5x} = \sqrt{2-5x}$;

c) $\sqrt{x^2-2x+1} = \sqrt{4x^2-4x+1}$;

d) $\sqrt{x^2-10x+25} = \sqrt{x^2-6x+9}$.

Bài 15: Giải các phương trình:

a) $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} = 3$;

b) $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{1}{2}$;

c) $\frac{\sqrt{x}+10}{\sqrt{x}-2} = -2$;

d) $\frac{3\sqrt{x}+5}{3\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}$.

Bài 16: Giải các phương trình:

a) $x^2 + 4x + 5 = 2\sqrt{2x+3}$;

b) $x^2 + 9x + 20 = 2\sqrt{3x+10}$;

c) $x^2 + 7x + 14 = 2\sqrt{x+4}$;

d) $4\sqrt{x+1} = x^2 - 5x + 14$.

Bài 17: Giải các phương trình:

a) $\sqrt{x-5} + \sqrt{5-x} = 1$;

b) $\sqrt{2x-3} + \sqrt{3-2x} = 0$;

c) $\sqrt{x+3} + \sqrt{y-2} + \sqrt{z-3} = \frac{1}{2}(x+y+z)$;

d) $x+y+4 = 2\sqrt{x} + 4\sqrt{y-1}$.

Bài 18: Giải các phương trình:

a) $4x^2 + 3x = 3 = 4x\sqrt{x+3} + 2\sqrt{2x-1}$;

b) $4\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} = x+7$;

c) $\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x} = x^2 - 10x + 27$;

d) $\sqrt{x+2} + \sqrt{6-x} = x^2 - 4x + 8$.

Bài 19: Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} < 1$;

b) $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} > \frac{1}{2}$;

c) $\frac{\sqrt{x}-10}{\sqrt{x}+2} \geq -2$;

d) $\frac{-3\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} > -\sqrt{x}$.

ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 1 (PHẦN II)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Xem lại Tóm tắt lý thuyết trong Ôn tập Chủ đề 1 (Phần 1)

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 4: Tìm các giá trị nguyên của biến để biểu thức cho trước có giá trị nguyên

Bài 1: Tìm các giá trị nguyên của x biểu thức sau có giá trị nguyên:

a) $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$; b) $\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$.

Bài 2: Tìm các giá trị nguyên của x biểu thức sau có giá trị nguyên:

a) $\frac{\sqrt{x}}{6\sqrt{x}+1}$; b) $\frac{x-2}{\sqrt{x}-3}$.

Dạng 5: Tìm giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất của biểu thức

Bài 3: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{x-4} - 2$; b) $B = x - 4\sqrt{x} + 10$;
 c) $C = x - \sqrt{x}$; d) $D = \sqrt{x^2 - 2x + 4} + 1$.

Bài 4: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

a) $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$; b) $Q = \frac{x+3}{\sqrt{x}+1}$.

Bài 5: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

a) $M = \sqrt{3} - \sqrt{x-1}$; b) $N = 6\sqrt{x} - x - 1$;
 c) $P = \frac{1}{x - \sqrt{x} + 1}$; d) $Q = \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+3}$.

Dạng 6: Rút gọn biểu thức và các bài toán liên quan

Bài 6: Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{3-11\sqrt{x}}{9-x}$; $B = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}$ với $0 \leq x \neq 9$.

- a) Tính giá trị của B khi $x = 36$;
- b) Rút gọn A;
- c) Tìm số nguyên x để $P = A.B$ là số nguyên.

Bài 7: Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{3}{\sqrt{x}+1} - \frac{6\sqrt{x}-4}{x-1}$ với $0 \leq x \neq 1$.

- a) Rút gọn P;
- b) Tìm giá trị của x để $P = -1$;
- c) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $P \in \mathbb{Z}$;
- d) So sánh P với 1;
- e) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Bài 8: Cho biểu thức $E = \frac{x+\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+1} : \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{2-x}{x-\sqrt{x}} \right)$ với $0 \leq x \neq 1$.

- a) Rút gọn E;
- b) Tìm giá trị của x để $E > 1$;
- c) Tìm giá trị nhỏ nhất của E với $x > 1$;
- d) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $E \in \mathbb{Z}$;
- e) Tìm x để $E = \frac{9}{2}$.

Bài 9: Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{(1-x)^2}{2}$ với $0 \leq x \neq 1$.

- Rút gọn P;
- Tính giá trị của P khi $x = 7 - 4\sqrt{3}$;
- Tìm giá trị lớn nhất của P.

Bài 10: Cho biểu thức $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}+1} \right) : \left(2 - \frac{2x-\sqrt{x}}{x+1} \right)$ với $x \geq 0$.

- Rút gọn B;
- Tính giá trị của B khi $x = 6 + 2\sqrt{5}$;
- Tìm giá trị nguyên của x để B nguyên.

Bài 11: Cho biểu thức $P = \frac{x\sqrt{x}+26\sqrt{x}-19}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

- Rút gọn P;
- Tìm giá trị của x khi $P = 4$;
- Tìm giá trị nhỏ nhất của P;
- Tính giá trị của P khi $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

Bài 12: Cho biểu thức $P = \left(\frac{2}{\sqrt{x}-1} - \frac{5}{x+\sqrt{x}-2} \right) : \left(1 + \frac{3-x}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

- Rút gọn P;
- Tính giá trị của P khi $x = 6 - 2\sqrt{5}$;
- Tìm giá trị của x để $P = \frac{1}{\sqrt{x}}$;
- Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $P \in \mathbb{Z}$;
- Tìm x để $P < 1 - \sqrt{x}$;
- Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Bài 13: Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$ với $x > 0$.

- Rút gọn P;
- Tìm x để $P = -1$;
- Tính P tại $x = \frac{8}{\sqrt{5}-1} - \frac{8}{\sqrt{5}+1}$;
- Tìm x để $P > \sqrt{x} + 2$;
- So sánh P với 1;
- Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Bài 14: Cho biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x-\sqrt{x}+3}{x\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{x+2}{x+\sqrt{x}+1}$.

- Tính giá trị B tại $x = 36$;
- Rút gọn A;
- Cho $P = A : (1-B)$. Tìm x để $P \leq 1$.

Bài 15: Cho biểu thức $P = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \right)$.

- Rút gọn P;
- Tính giá trị P tại $x = \frac{2}{2+\sqrt{3}}$;
- Tìm x thỏa mãn $P\sqrt{x} = 6\sqrt{x} - 3 - \sqrt{x-4}$.

Bài 16: Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} + \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{1-\sqrt{xy}} + 1 \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} \right)$.

a) Rút gọn P;

b) Cho $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của P.

Một số bài tập nâng cao

Bài 17: Giải phương trình

a) $\sqrt{x-2} + \sqrt{y+2009} + \sqrt{z-2010} = \frac{1}{2}(x+y+z)$.

b) $x(3 - \sqrt{3x-1}) = \sqrt{3x^2 + 2x - 1} - x\sqrt{x+1} + 1$.

Bài 18: Cho $a, b > 0$; $a^2 + b^2 \leq 16$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = a\sqrt{9b(a+8b)} + b\sqrt{9a(b+8a)}$$

Bài 19: Cho $a, b, c > \frac{25}{4}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{2\sqrt{b}-5} + \frac{b}{2\sqrt{c}-5} + \frac{c}{2\sqrt{a}-5}$$

Bài 20: Cho $a, b, c > 0$ và $ab+bc+ca=1$. Chứng minh:

$$\sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1} + \sqrt{c^2+1} \leq 2(a+b+c)$$

Bài 21: Cho 2 số thực a, b thay đổi thỏa mãn điều kiện $a+b \geq 1$ và $a > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất

của $A = \frac{8a^2+b}{4a} + b^2$.

Bài 22: Cho x, y thỏa mãn $\sqrt{x+2} - y^3 = \sqrt{y+2} - x^3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = x^2 + 2xy - 2y^2 + 2y + 10$$

Bài 23: Với mọi a lớn hơn 1, chứng minh: $a + \frac{1}{a-1} \geq 3$.

CHỦ ĐỀ 2. HÀM SỐ BẬC NHẤT.

VẤN ĐỀ. NHẮC LẠI, BỔ SUNG CÁC KHÁI NIỆM VỀ HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ HÀM SỐ.

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm hàm số

- Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho với mỗi giá trị của x , ta luôn xác định được một và chỉ có một giá trị tương ứng của y thì y gọi là *hàm số* của x (x gọi là *biến số*).

Ta viết: $y=f(x)$, $y=g(x)$...

- Giá trị của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0 , kí hiệu là $f(x_0)$
- Tập xác định D của hàm số $y=f(x)$ là tập hợp các giá trị của x sao cho $f(x)$ có nghĩa.
- Khi x thay đổi mà y luôn nhận một giá trị không đổi thì hàm số $y=f(x)$ gọi là *hàm hằng*.

2. Đồ thị của hàm số

Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ là tập hợp tất cả các điểm $M(x;y)$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy sao cho x,y thỏa mãn hệ thức $y=f(x)$.

3. Hàm số đồng biến, nghịch biến

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập D . Khi đó:

-Hàm số *đồng biến* trên $D \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

-Hàm số *nghịch biến* trên $D \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính giá trị của hàm số tại một điểm

Phương pháp giải: Để tính giá trị y_0 của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0 ta thay $x=x_0$ vào $f(x)$, ta được $y_0=f(x_0)$.

*Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:

Bài 1. Cho hai hàm số $f(x)=x^2$ và $g(x)=3-x$.

- Tính $f(-3)$, $f(\frac{-1}{2})$, $f(0)$, $g(-1)$, $g(-2)$, $g(3)$;
- Xác định giá trị của a để $2f(a)=g(a)$.

*Học sinh tự luyện bài tập sau tại lớp:

Bài 2. Cho hai hàm số $g(x)=-2x^2$ và $h(x)=3x+5$.

- a) Tính $g(-0,4)$, $g(\frac{-3}{4})$, $g(2)$, $h(-1.4)$, $h(-1)$;
b) Xác định các giá trị của m để $\frac{1}{2}g(m) = h(m)$.

Dạng 2. Biểu diễn tọa độ của một điểm trên mặt phẳng tọa độ

Phương pháp giải: Để biểu diễn điểm $M(x_0; y_0)$ trên mặt phẳng tọa độ ta làm như sau:

- Vẽ đường thẳng song song với trục Oy tại điểm có hoành độ $x=x_0$;
- Vẽ đường thẳng song song với trục Ox tại điểm có tung độ $y=y_0$.
- Giao điểm của hai đường thẳng trên chính là điểm $M(x_0; y_0)$.

**Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

Bài 3.

- a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy hãy biểu diễn các điểm sau đây: $A(3;0)$; $B(-2;0)$; $C(0;4)$; $D(3;3)$; $E(2;-2)$; $F(-4;-4)$.
b)Điểm nào trong số các điểm trên thuộc đồ thị hàm số $y=x$.

Bài 4. Cho hàm số $y=-2,5x$.

- a) Xác định vị trí của điểm $A(1;-2,5)$ trên mặt phẳng tọa độ và vẽ đồ thị hàm số/
b) Trong các điểm $B(2;-5)$, $C(3,7)$; $D(1;2,5)$; $E(0;4)$, điểm nào thuộc đồ thị hàm số?
**Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

Bài 5.

- a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy biểu diễn các điểm sau đây: $A(2;0)$; $B(-3;0)$; $C(0;3)$; $D(0;-4)$, $E(1;4)$, $F(-4;2)$.
b) Điểm nào trong các điểm trên thuộc đồ thị hàm số $y=-\frac{1}{2}x$.

Bài 6. Trên mặt phẳng tọa độ vẽ đường thẳng d đi qua điểm $O(0;0)$ và điểm $A(\frac{-1}{2}; \frac{3}{2})$. Hỏi đường thẳng d là đồ thị của hàm số nào?

Dạng 3.Xét sự đồng biến và nghịch biến của hàm số.

Phương pháp giải: ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Tìm tập xác định D của hàm số.

Bước 2. Giả sử $x_1 < x_2$ và $x_1, x_2 \in D$. Xét hiệu $H=f(x_1)-f(x_2)$.

+ Nếu $H<0$ với x_1, x_2 bất kì thì hàm số đồng biến.

+ Nếu $H>0$ với x_1, x_2 bất kì thì hàm số nghịch biến.

**Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

Bài 14. Vẽ các đồ thị hàm số sau trên cùng một mặt phẳng tọa độ:

- a) $y=3x$ và $y=-\frac{1}{3}x$;
- b) * $y=2$ và $y=-3,5$.

Bài 15. Cho các hàm số $y=-x$ và $y=-\frac{1}{2}x$.

- a) Vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy đồ thị của hai hàm số trên;
- b) Qua điểm $H(0;-5)$ vẽ đường thẳng d song song với trục Ox, cắt các đường thẳng $y=-x$ và $y=-\frac{1}{2}x$ lần lượt ở A và B. Tìm tọa độ của các điểm A,B.;
- c) Tính chu vi và diện tích tam giác OAB theo đơn vị đo trên các trục tọa độ là cm.

Bài 16. Cho hàm số $y=(m+1)x$.

- a) Tìm các giá trị của tham số m để hàm số nhận giá trị bằng -5 tại $x=5$;
- b) Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số đi qua điểm $a(2;3)$?
- c) Tìm giá trị nào của m để điểm $B(0;4)$ thuộc đồ thị hàm số.

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 17. Cho các hàm số $y=f(x)=\frac{2}{3}x$ và $y=g(x)=\frac{2}{3}x+3$.

- a) Tính $f(-2)$, $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$ và $g(-2)$, $g(0)$, $g(\frac{1}{2})$;
- b) Có nhận xét gì về giá trị của 2 hàm số đã cho ở trên khi biến x lấy cùng một giá trị?

Bài 18. Cho các hàm số $y=0,5x$ và $y=0,5x+2$.

- a) Tính giá trị của mỗi hàm số theo giá trị đã cho của biến x rồi điền vào bảng sau:

x	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$y=0,5x$											
$y=0,5x+2$											

- b) Có nhận xét gì về các giá trị tương ứng của hai hàm số khi biến x lấy cùng một giá trị?

Bài 19. Cho hàm số $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$.

- a) Tìm các giá trị của x để hàm số xác định.
- b) Tính $f(4-2\sqrt{3})$ và $f(a^2)$ với $a<-1$;
- c) Tìm x nguyên để $f(x)$ là số nguyên;
- d) Tìm x sao cho $f(x)=f(x^2)$.

Bài 20. Cho hàm số $y=f(x)=ax-5$. Xác định a nếu biết:

a) $y=5$ tại $x=-1$

b) $f\left(\frac{1}{2}\right) = -4$

Bài 21. Cho hàm số $y=\frac{12}{5}x$.

a) Xác định vị trí của điểm $A(-1;\frac{12}{5})$ trên mặt phẳng tọa độ và vẽ đồ thị hàm số;

b) Xét xem trong các điểm $B(2;\frac{-24}{5})$, $C(3,7)$, $D(0;2,5)$, $E(-100,0)$, điểm nào thuộc đồ thị hàm số?

Bài 22. Cho điểm $A(2;1)$. Xác định:

- a) Tọa độ điểm B đối xứng với A qua trục tung.
- b) Tọa độ điểm C đối xứng với A qua trục hoành;
- c) Tọa độ điểm D đối xứng với A qua O;
- d)*Diện tích tứ giác ABCD.

Bài 23. Cho hàm số $y=(3-2\sqrt{2})x+\sqrt{2}-1$.

- a) Xét sự đồng biến và nghịch biến của các hàm số trên.
- b) Tính giá trị của y khi $x=3+2\sqrt{2}$;
- c) Tìm các giá trị của x để $y=0$.

Bài 24. Xét sự đồng biến và nghịch biến của các hàm số sau:

a) $y=3x+\sqrt{2}$;

b) $y=1-\sqrt{2}x$;

c) $y=3(x^3 - 1)$.

Bài 25. Cho hàm số $y=3x$.

- a) Vẽ đồ thị hàm số;
- b) Điểm A thuộc đồ thị hàm số có khoảng cách tới gốc tọa độ là $2\sqrt{10}$. Xác định tọa độ điểm A.

Bài 26. Cho hàm số $y=(2m-3)x$.

- a) Tìm m để hàm số nhận giá trị bằng -3 tại $x=2$;
- b) Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-1;5)$?
- c) Tìm m để điểm $B(-5;0)$ thuộc đồ thị hàm số.

VẤN ĐỀ 2: HÀM SỐ BẬC NHẤT.

A.TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức $y=ax+b$ với $a \neq 0$.
- Hàm số bậc nhất $y=ax+b$ xác định với mọi x thuộc \mathbb{R} và có tính chất sau:
 - Đồng biến trên \mathbb{R} nếu $a > 0$;
 - Nghịch biến trên \mathbb{R} nếu $a < 0$.

B.BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Nhận dạng hàm số bậc nhất

Phương pháp giải: hàm số bậc nhất có dạng $y=ax+b$ với $a \neq 0$.

**Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

Bài 1. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc nhất? Hãy xác định hệ số a, b của chúng và xét xem hàm số nào đồng biến, hàm số nào nghịch biến?

- a) $y=1-5x$ b) $y=-0,5x$ c) $y= \sqrt{2}(x-1)+\sqrt{3}$;
- d) $y=2x^2 + 3$ e) $y=2\sqrt{x-1} + 3$; g) $y= 2\sqrt{x^2} + 5$.

Bài 2. Tìm điều kiện của tham số m để các hàm số sau là hàm số bậc nhất?

- a) $y=\sqrt{2m-3}(-x+4)$; b) $y=\frac{4-3m}{2m+5}x+2$.

Dạng 2. Tìm m để hàm số đồng biến, nghịch biến

Phương pháp giải: ta có hàm số bậc nhất $y=ax+b$ với $a \neq 0$

- +Đồng biến trên \mathbb{R} khi $a > 0$
- +Nghịch biến trên \mathbb{R} khi $a < 0$.

**Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

Bài 5. Cho hàm số bậc nhất $y=(2m-3)x+4$. Hãy tìm các giá trị của m để hàm số là hàm số bậc nhất và:

- a) Đồng biến b) Nghịch biến.

Bài 6. Cho hàm số bậc nhất: $y=\sqrt{m-1}-6x+5$. Tìm m để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất và nghịch biến.

Bài 7. Cho hàm số bậc nhất: $y=(m^2 - m + 1)x + m$. Chứng minh với mọi giá trị của m , hàm số đã cho là hàm số bậc nhất và đồng biến.

**Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

Bài 8. Cho hàm số bậc nhất: $y=4-(5m-7)x$. Hãy tìm các giá trị của m để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất và:

a) Đồng biến

b) Nghịch biến.

Bài 9. Cho hàm số bậc nhất : $y=(25-m^2)x + 5$. Hãy tìm các giá trị của m để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất và đồng biến.

Bài 10. Cho hàm số bậc nhất $y=\frac{m+1}{2m-3}x + 2m - 2$. Hãy tìm các giá trị của m để hàm số đã cho ;

b) Đồng biến

b) Nghịch biến.

Bài 11. Cho hàm số bậc nhất $y=(2m^2 + 5m + 7)x + m$. Chứng minh với mọi giá trị của m , hàm số đã cho là hàm số bậc nhất và đồng biến.

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 12. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc nhất? Hãy xác định hệ số a, b của chúng và xem xét hàm số nào là hàm số đồng biến, nghịch biến?

a) $y=5-2x$

b) $y=x\sqrt{2}-1$;

c) $y=-\frac{2}{3}x$;

d) $y=3(x-1)-x$

e) $y=2(x+1)-2x$;

f) $y=x+\frac{1}{x}$.

Bài 13. Với những giá trị nào của m thì mỗi hàm số sau là hàm số bậc nhất?

a) $y=(7m-3)mx+5m$

b) $y=\frac{2m}{m-1}x + 5$.

Bài 14. Cho hàm số $y=\frac{m-1}{m^2-3m+2}x + \sqrt{3}$. Hãy tìm các giá trị của m để hàm số là hàm số bậc nhất và:

a) Đồng biến

b) Nghịch biến.

Bài 15. Cho hàm số $y=(-3m^2 - 6 + 7m)x + m$. Chứng minh với mọi giá trị của m hàm số đã cho là hàm bậc nhất và nghịch biến.

Bài 16. Cho hàm số bậc nhất $y=\frac{-3}{4m-5}x-4$. Hãy tìm các giá trị của m để hàm số:

a) Đồng biến;

b) Nghịch biến.

VẤN ĐỀ 3. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC NHẤT.

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

- Đồ thị của hàm số $y=ax+b$ ($a \neq 0$) là một đường thẳng.
- Cách vẽ đồ thị hàm số $y=ax+b$ ($a \neq 0$):
 - + Nếu $b=0$ ta có hàm số $y=ax$. Đồ thị của $y=ax$ là đường thẳng đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ và điểm $A(1;a)$.
 - + Nếu $b \neq 0$ thì đồ thị $y=ax+b$ là đường thẳng đi qua các điểm $A(0;b)$, $B(-\frac{b}{a}; 0)$.

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Vẽ đồ thị hàm số $y=ax+b$ ($a \neq 0$) và tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng

Phương pháp giải: Ta thường sử dụng các kiến thức sau:

1. Cách vẽ đồ thị hàm số $y=ax+b$ ($a \neq 0$):

Trường hợp 1: Nếu $b=0$ thì đồ thị hàm số là đường thẳng đi qua hai điểm $O(0;0)$ và $A(1;a)$.

Trường hợp 2. Nếu $b \neq 0$ thì đồ thị hàm số là đường thẳng đi qua hai điểm $A(0;b)$, $B(-\frac{b}{a}; 0)$.

2. Cách tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng:

Bước 1: Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đường thẳng đó để tìm hoành độ giao điểm.

Bước 2: Thay hoành độ giao điểm vừa tìm được vào một trong hai phương trình đường thẳng ta tìm được tung độ giao điểm.

**Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

Bài 1. Cho ba đường thẳng $d_1: y = 2x - 2$, $d_2: y = -\frac{4}{3}x - 2$ và $d_3: y = \frac{1}{3}x + 3$,

- a) Vẽ các đường thẳng d_1 , d_2 và d_3 trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
- b) Gọi giao điểm của đường thẳng d_3 với d_1 , d_2 theo thứ tự là A, B. Hãy tìm tọa độ của A và B.

Bài 2. Cho các hàm số $y=x+1$ có đồ thị là d_1 , và $y=-x+3$ có đồ thị là d_2 .

- a) Vẽ đồ thị hai hàm số trên trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
- b) Gọi A, B lần lượt là giao điểm của d_1 , d_2 với trục hoành và c là giao điểm của d_1 , d_2 .
Hãy tìm tọa độ các điểm A, B và C.
- c) Tính chu vi và diện tích của tam giác ABC.

**Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

Bài 3. Cho ba đường thẳng:

$$d_1: y = -2x - 2, d_2: y = -\frac{4}{3}x - 2 \text{ và } d_3: y = \frac{-1}{3}x + 3,$$

- Vẽ các đường thẳng d_1, d_2 và d_3 trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
- Gọi giao điểm của đường thẳng d_3 với d_1, d_2 theo thứ tự là A, B. Hãy tìm tọa độ của A và B.

Bài 4. Cho hai hàm số $y = -x + 1$ có đồ thị là d_1 và $y = x + 3$ có đồ thị là d_2 .

- Vẽ đồ thị hai hàm số trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
- Hai đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau tại C và cắt trục Ox theo thứ tự tại A, B. Tìm tọa độ các điểm A, B và C.
- Tính chu vi và diện tích tam giác ABC.

B. Dạng 2: Xác định các hệ số a, b để đồ thị hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) cắt trục Ox, Oy hay đi qua một điểm nào đó.

Phương pháp giải: Đồ thị hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) đi qua điểm $M(x_M; y_M)$ khi và chỉ khi $y_M = ax_M + b$.

**Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

Bài 5: cho hàm số $y = (m - 2)x + m$

- Xác định giá trị của tham số m để đồ thị hàm số:
 - Cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -3.
 - Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 4.
- Vẽ đồ thị của hai hàm số tương ứng với các giá trị của m tìm được ở trên trên cùng hệ tọa độ Oxy và tìm giao điểm của hai đồ thị vừa vẽ được.

Bài 6: gọi d_1 là đồ thị hàm số $y = mx + 2$ và d_2 là đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x - 1$.

- Với $m = -\frac{1}{2}$, xác định tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 .
- Xác định giá trị của m để $M(-3; 3)$ là giao điểm của d_1 và d_2 .

Bài 7: với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y = -3x + m + 2$ và $y = 4x - 5 - 2m$ cắt nhau tại một điểm trên trục tung?

**học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

Bài 8: cho hàm số $y = (2 - m)x + m + 1$.

- Xác định giá trị của tham số m để đồ thị hàm số:
 - Cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -2.
 - Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -4.
- Vẽ đồ thị của hai hàm số tương ứng với các giá trị của m tìm được ở trên trên cùng hệ trục tọa độ Oxy và tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị vừa vẽ được.

Bài 9: gọi d_1 là đồ thị hàm số $y = mx - 2$ và d_2 là đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x - 1$.

- Với $m = -\frac{1}{3}$, xác định tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 .
- Xác định giá trị của m để $M(-3;3)$ là giao điểm của d_1 và d_2 .

Bài 10: với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y = -2x + m + 2$ và $y = 5x - 5 - 2m$ cắt nhau tại một điểm trên trục tung?

Dạng 3: xét tính đồng quy của ba đường thẳng.

Phương pháp giải: để xét tính đồng quy của ba đường thẳng cho trước, ta làm như sau:

Bước 1: tìm tọa độ giao điểm của 2 đường thẳng trong 3 đường thẳng đã cho.

Bước 2: kiểm tra xem nếu giao điểm vừa tìm được thuộc đường thẳng còn lại thì kết luận là 3 đường thẳng đó đồng quy.

Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

Bài 11: cho ba đường thẳng $d_1: y = -3x$; $d_2: y = 2x + 5$; $d_3: y = x + 4$.

- Gọi A là giao điểm của 2 đường thẳng d_1, d_2 . Tìm tọa độ điểm A.
- Chứng minh 3 đường thẳng d_1, d_2, d_3 đồng quy.

Bài 12: cho ba đường thẳng $d_1: y = 2x$; $d_2: y = -x - 3$; $d_3: y = mx + 5$.

- Gọi A là giao điểm của 2 đường thẳng d_1, d_2 . Tìm tọa độ điểm A.
- Tìm các giá trị của tham số m để 3 đường thẳng d_1, d_2, d_3 đồng quy.

**học sinh tự luyện các bài tập sau:*

Bài 13: cho ba đường thẳng $d_1: y = x - 4$; $d_2: y = -2x + 2$; $d_3: y = 1,2x - 4,4$.

- Gọi I là giao điểm của 2 đường thẳng d_1, d_2 . Tìm tọa độ điểm I.
- Chứng minh 3 đường thẳng d_1, d_2, d_3 đồng quy.

Bài 14: cho ba đường thẳng $d_1: y = 2x + 1$; $d_2: y = 3x - 1$; $d_3: y = x + 3$.

- Chứng minh 3 đường thẳng trên đồng quy.
- Với giá trị nào của điểm m thì đường thẳng $y = (m - 1)x + m$ cũng đi qua giao điểm của tất cả các đường thẳng đó?

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 15: cho các hàm số $y = x$ và $y = 3x + 3$.

- Vẽ đồ thị các hàm số trên trên cùng một hệ trục tọa độ.
- Tìm tọa độ giao điểm M của hai đồ thị trên.

Bài 16: cho ba đường thẳng $d_1: y = x - 2$; $d_2: y = -\frac{1}{3}x - 2$; $d_3: y = \frac{1}{3}x + 3$.

- Vẽ các đường thẳng d_1, d_2, d_3 trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
- Gọi giao điểm của đường thẳng d_3 với d_1 và d_2 lần lượt là A và B. Tìm tọa độ của A và B.

Bài 17: cho hàm số $y = 2x + 1$ có đồ thị là d_1 và $y = -x + 3$ có đồ thị là d_2 .

- Vẽ đồ thị hai hàm số trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
- Hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại C và cắt trục Ox theo thứ tự tại A và B. Tìm tọa độ của các điểm A, B, C.
- Tính chu vi tam giác ABC.

Bài 18: cho hàm số $y = (m + 5)x - m$.

- Xác định giá trị của tham số m để đồ thị hàm số:
 - Cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 3.
 - Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -4.
- Vẽ đồ thị của hai hàm số tương ứng với các giá trị của m tìm được ở trên trên cùng hệ trục tọa độ Oxy và tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị vừa vẽ được.

Bài 19: gọi d_1 là đồ thị hàm số $y = mx + 1$ và d_2 là đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x - 2$.

- Với $m = -\frac{1}{2}$, xác định tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 .
- Xác định giá trị của m để $M(-2; -2)$ là giao điểm của d_1 và d_2 .

Bài 20: với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y = 4x + m + 2$ và $y = -2x - 5 - 2m$ cắt nhau tại một điểm trên trục tung?

Bài 21: cho ba đường thẳng $d_1: y = -2x$; $d_2: y = 1,5x + 7$; $d_3: y = -2mx + 5$.

- Gọi A là giao điểm của 2 đường thẳng d_1, d_2 . Tìm tọa độ điểm A.
- Tìm các giá trị của tham số m để 3 đường thẳng d_1, d_2, d_3 đồng quy.

Bài 22: cho ba đường thẳng $d_1: y = -2x$; $d_2: y = -x - 3$; $d_3: y = mx + 4$.

- Gọi A là giao điểm của 2 đường thẳng d_1, d_2 . Tìm tọa độ điểm A.
- Tìm các giá trị của tham số m để 3 đường thẳng d_1, d_2, d_3 đồng quy.

VẤN ĐỀ 4: VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

Cho hai đường thẳng $d: y = ax + b$ và $d': y = a'x + b'$ ($a, a' \neq 0$). Khi đó ta có:

- $d // d' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$
- $d \equiv d' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$
- $d \text{ cắt } d' \Leftrightarrow a \neq a'$
- $d \perp d' \Leftrightarrow a \cdot a' = -1$

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN.

Dạng 1. Chỉ ra các cặp đường thẳng song song, các cặp đường thẳng cắt nhau.

Phương pháp giải: Cho đường thẳng $d: y = ax + b$ và $d': y = a'x + b'$ ($a, a' \neq 0$).

Khi đó:

- $d // d' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$
- $d \equiv d' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$
- $d \text{ cắt } d' \Leftrightarrow a \neq a'$
- $d \perp d' \Leftrightarrow a \cdot a' = -1$

**giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

Bài 1: hãy chỉ ra các cặp đường thẳng cắt nhau và các cặp đường thẳng song song với nhau trong số các đường thẳng sau:

- a) $y = 1,5x + 2b$
- b) $y = x + 2$
- c) $y = 0,5x - 3$
- d) $y = x - 3$
- e) $y = 1,5x - 1$
- f) $y = 0,5x + 3$

Bài 2: cho hai hàm số $y = 2x + 3k$ và $y = (2m + 1) + 2k - 3$. Tìm điều kiện của m và k để đồ thị của hai hàm số là:

- a) Hai đường thẳng cắt nhau.
- b) Hai đường thẳng song song.
- c) Hai đường thẳng trùng nhau.

Bài 3: với những giá trị nào của m thì đồ thị của các hàm số $y = 2x + m + 3$ và

$$y = 3x + 5 - m:$$

- a) Cắt nhau tại một điểm trên trục tung.
- b) Cắt nhau tại một điểm trên trục hoành.

Bài 4: cho ba đường thẳng:

$$d_1: y = (m^2 - 1)x + (m^2 - 5); d_2: y = x + 1; d_3: y = -x + 3$$

- a) Tìm điểm cố định mà d_1 luôn đi qua.
- b) Chứng minh nếu d_1 song song với d_3 thì d_1 vuông góc với d_2 .
- c) Xác định giá trị của m để 3 đường thẳng trên đồng quy.

**học sinh tự luyện các bài tập sau đây:*

Bài 5: hãy chỉ ra các cặp đường thẳng cắt nhau và các cặp đường thẳng song song với nhau trong số các đường thẳng sau:

- a) $y = \sqrt{3}x - 1$
- b) $y = -x + 2$
- c) $y = -0,3x$

d) $y = -0,3x - 1$

e) $y = \sqrt{3}x + 3$

f) $y = -x + 3$

Bài 6: cho các đường thẳng:

$d_1: y = (2m + 1)x + (2m + 3); d_2: y = (m - 1)x + m.$

Tìm các giá trị của m để:

a) d_1 cắt d_2

b) d_1 song song d_2

c) d_1 vuông góc d_2

d) d_1 trùng với d_2

Bài 7: cho các đường thẳng $d_1: y = mx - 5, d_2: y = -3x + 1$. Xác định giá trị của m để $M(3;-8)$ là giao điểm của d_1 và d_2 .

Bài 8: cho các đường thẳng $d_1: y = 4mx - (m + 5), d_2: y = (3m^2 + 1)x + (m^2 - 4)$.

- Chứng minh khi m thay đổi thì đường thẳng d_1 luôn đi qua 1 điểm A cố định, đường thẳng d_2 luôn đi qua 1 điểm B cố định.
- Với giá trị nào của m thì d_1 song song d_2 ?
- Với giá trị nào của m thì d_1 cắt d_2 ? Tìm tọa độ giao điểm khi $m = 2$.

Dạng 2: xác định phương trình đường thẳng.

Phương pháp giải:

- Ta có $y = ax + b$ với $a, b \neq 0$ là phương trình đường thẳng cắt trục tung tại điểm $A(0;b)$, cắt trục hoành tại điểm $B(-\frac{b}{a}; 0)$.
- Điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đường thẳng $y = ax + b$ khi và chỉ khi $y_0 = ax_0 + b$.

**Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

Bài 9: cho hàm số $y = ax + 3$. Hãy xác định a trong mỗi trường hợp sau:

- Đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = -2x$.
- Khi $x = 2$ thì hàm số có giá trị $y = 7$.
- Đồ thị hàm số $y = ax + 3$ cắt đường thẳng $y = 2x - 1$ tại điểm có hoành độ bằng 2.

Bài 10: cho hàm số $y = 2x + b$. Tìm b biết rằng:

- Với $x = 4$ thì hàm số $y = 2x + b$ có giá trị bằng -5.
- Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -3.
- Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1;5)$

Bài 11: viết phương trình đường thẳng d biết:

- d cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3 và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -2.
- d song song với đường thẳng $y = -5x + 1$ và đi qua điểm $I(-2;3)$.
- d vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{4}x + 3$ và đi qua điểm $K(0,5;4)$.

**học sinh tự luyện các bài tập sau đây:*

Bài 12: cho hàm số $y = 7 - ax$. Hãy xác định hệ số a trong mỗi trường hợp sau:

- a) đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = 4x$.
- b) đồ thị hàm số vuông góc với đường thẳng $y = -3,2x$.
- c) đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = 1,2x + 5$ tại điểm có hoành độ bằng -1 .

Bài 13: cho hàm số $y = (m - 2)x + m + 3$. Tìm giá trị của m để hàm số:

- a) Luôn đồng biến? Luôn nghịch biến?
- b) Có đồ thị song song với đường thẳng $y = 3x - 3 + m$.
- c) Có đồ thị vuông góc với đường thẳng $y = 3x - 3 + m$.
- d) Có đồ thị cắt Ox tại điểm có hoành độ bằng 3 .
- e) Có đồ thị cắt Oy tại điểm có tung độ bằng 3 .
- f) Cùng các hàm số $y = -x + 2; y = 2x - 1$ có đồ thị là ba đường thẳng đồng quy.

Bài 14: viết phương trình đường thẳng d biết:

- a) d cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -5 và đi qua điểm $A(1;3)$.
- b) d song song với đường thẳng $y = -2x + 8$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 5 .
- c) d vuông góc với đường thẳng $y = x + 3$ và cắt đường thẳng $y = 2x + 1$ tại điểm có tung độ bằng 5 .

Bài 15: cho hai đường thẳng

$$d_1: y = mx - 2(m + 2); d_2: (2m - 3)x + (m^2 + 1)$$

Tìm các giá trị của m để:

- a) d_1 cắt d_2
- b) d_1 song song d_2
- c) d_1 vuông góc d_2
- d) d_1 trùng với d_2

Bài 16: cho các đường thẳng

$$d_1: y = -2x + 3; d_2: y = -2x + m; d_3: y = \frac{1}{2}x + 1$$

Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng:

- a) d_1 và d_2
- b) d_2 và d_3

Bài 17: với những giá trị nào của m thì đường thẳng $y = 2x - 1$ và đường thẳng $y = 3x + m$ cắt nhau tại một điểm trên:

- a) trục hoành
- b) trục tung

Bài 18: tìm điểm sao cho các đường thẳng sau luôn đi qua dù m lấy bất kỳ giá trị nào:

- a) $y = 2mx + 1 - m$
- b) $y = mx - 3 - x$
- c) $y = (2m + 5)x + m + 3$
- d) $y = m(x + 2)$

Bài 19: cho hai đường thẳng $d_1: y = (m + 1)x - 3$ và $d_2: y = (2m - 1)x + 4$.

- a) Chứng minh khi $m = -\frac{1}{2}$ thì d_1 và d_2 vuông góc với nhau.
- b) Tìm tất cả các giá trị của m để d_1 và d_2 vuông góc với nhau.

Bài 20: viết hàm số bậc nhất $y = ax + b$ biết:

- a) Hệ số b bằng $\sqrt{3}$ và đồ thị hàm số song song với đường thẳng $d: 2x - y + 1 = 0$.
- b) Đồ thị hàm số đi qua 2 điểm $A(3;2)$ và $B(1;-1)$.
- c) Đồ thị hàm số đi qua điểm $C(2;-1)$ và vuông góc với đường thẳng $d': y = 3x + 1$.

Bài 21: cho 3 đường thẳng: $d_1: y = x + 2$; $d_2: y = 2x + 1$; $d_3: y = (m^2 + 1)x + m$.

- a) Xác định tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 .
- b) Tìm các giá trị của tham số m để:
 - i) d_2 và d_3 song song với nhau.
 - ii) d_1 và d_3 trùng nhau.
 - iii) 3 đường thẳng trên đồng quy.

VẤN ĐỀ 5: HỆ SỐ GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG $y = ax + b$ ($a \neq 0$).

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

Cho đường thẳng d có phương trình $y = ax + b$ ($a \neq 0$). Khi đó:

- Số thực a là hệ số góc của d .
- Gọi α là góc tạo bởi tia Ox và d . ta có:
 - + Nếu $\alpha < 90^\circ$ thì $a > 0$ và $a = \tan \alpha$
 - + Nếu $\alpha > 90^\circ$ thì $a < 0$ và $a = -\tan(180^\circ - \alpha)$

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: xác định hệ số góc của đường thẳng.

Phương pháp giải: đường thẳng d có phương trình $y = ax + b$ ($a \neq 0$), có a là hệ số góc.

**Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

Bài 1: đường thẳng $y = (m - 1)x + 4$ đi qua điểm $A(-2;1)$ có hệ số góc bằng bao nhiêu?

Bài 2: tính hệ số góc của đường thẳng $d: y = (2m - 4)x + 5$, biết nó song song với đường thẳng $d': 2x - y - 3 = 0$. Vẽ đường thẳng d tìm được.

Bài 3 : Tìm hệ số góc của đường thẳng d biết:

- a) d đi qua gốc tọa độ O và đi qua điểm $A(1 ;3)$.
- b) d đi qua hai điểm $M(4 ;5)$, $N(1 ; -1)$.

- Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

Bài 4 : Đường thẳng $y=2(m+1)x -5m-8$ đi qua điểm $A(3;-5)$ có hệ số góc bằng bao nhiêu?

Bài 5. Tìm hệ số góc của đường thẳng $d: y=(3-m)x+2$, biết nó vuông góc với đường thẳng $d': x-2y-6=0$. Vẽ đường thẳng d tìm được.

Bài 6. Tìm hệ số góc của đường thẳng d biết:

- a) d đi qua gốc tọa độ O và đi qua điểm $I(\frac{2}{3};-3)$.
- b) d đi qua giao điểm A của hai đường thẳng $y=-x+3$, $y=2x$ và đi qua điểm $E(-1;3)$.

Dạng 2.Xác định góc tạo với tia Ox và đường thẳng d .

*Phương pháp giải:*Gọi α là góc tạo bởi tia Ox và d . Khi đó:

- + Nếu $\alpha < 90^\circ$ thì $\alpha > 0$ và $a=\tan \alpha$;
- + Nếu $\alpha > 90^\circ$ thì $\alpha < 0$ và $a=-\tan(180^\circ - \alpha)$.

**Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

Bài 7: Tính góc tạo bởi tia Ox và đường thẳng $y=2x+1$.

Bài 8. Cho đường thẳng $d: y= mx+3$. Tính góc tạo bởi tia Ox và d biết d đi qua điểm $A(-\sqrt{3};0)$.

**Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

Bài 9. Tính góc tạo bởi tia Ox và đường thẳng $d: y=4x-\sqrt{5}$.

Bài 10. Cho đường thẳng $d: y=mx+\sqrt{3}$. Tính góc tạo bởi tia Ox và d biết d đi qua điểm $A(-3;0)$.

Dạng 3. Xác định phương trình đường thẳng dựa vào hệ số góc.

Phương pháp giải: Gọi phương trình đường thẳng cần tìm là $y=ax+b$. Ta cần xác định a và b dựa vào các kiến thức về góc và hệ số góc trong phần Tóm tắt lý thuyết ở trên.

* *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

Bài 11. Xác định phương trình đường thẳng d biết rằng:

- a) d đi qua điểm $A(-3;4)$ và có hệ số góc bằng -5 ;
- b) d đi qua điểm $B(-1;2)$ và tạo với trục Ox một góc bằng 45° .

**Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

Bài 12. Xác định phương trình đường thẳng d biết rằng:

- a) d đi qua điểm $M(3;-1)$ và tạo với trục Ox một góc bằng 30° ;
- b) d đi qua điểm $N(0;3)$ và tạo với đường thẳng $y=1$ một góc 60° .

Bài 13. Xác định hàm số $y=ax+b$ có đồ thị là đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau:

- a) d tạo với trục Ox một góc bằng 45° và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $\sqrt{2}$;
- b) d tạo với trục Ox một góc bằng 60° và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -1 .

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ.

Bài 14. Tìm hệ số góc của đường thẳng d biết d đi qua gốc tọa độ O và:

- a) Đi qua điểm $M(3\sqrt{3}; -\sqrt{3})$;
- b) Vuông góc với đường thẳng $y=-\sqrt{2}x+1$.

Bài 15. Chứng tỏ phương trình đường thẳng đi qua $M(x_0; y_0)$ và có hệ số góc k cho trước là $y=k(x-x_0) + y_0$.

Bài 16. Cho hai đường thẳng $d_1: y = x + 5, d_2: y = -\sqrt{3}+3$.

- a) Vẽ d_1, d_2 trên cùng mặt phẳng tọa độ.
- b) Gọi giao điểm của d_1, d_2 là A , giao điểm của d_1, d_2 với trục Ox lần lượt là B, C .
Tính số đo các góc của tam giác ABC .

Bài 17. Vẽ đồ thị các hàm số: $y=x-1; y=\frac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}$ và $y=\sqrt{2}x - \sqrt{2}$ trên cùng một hệ trục tọa độ. Gọi α, β, γ lần lượt là góc tạo bởi các đường thẳng trên với tia Ox . Chứng minh:

$$\tan\alpha = 1; \tan\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}; \tan\gamma = \sqrt{2}.$$

ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 2

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hàm số

- Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho với mỗi giá trị của x , ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là *hàm số* của x , và x được gọi là *biến số*.
- Hàm số thường được cho bằng bảng hoặc công thức.
- Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng $(x; f(x))$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy được gọi là *đồ thị của hàm số* $y = f(x)$.
- Tính đồng biến và nghịch biến của hàm số
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định với mọi giá trị $x \in D$ với x_1, x_2 bất kì thuộc D :
Nếu $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) < f(x_2)$ thì hàm số đồng biến trên D ;
Nếu $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) > f(x_2)$ thì hàm số nghịch biến trên D .

2. Hàm số bậc nhất

- Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức $y = ax + b$ trong đó a, b là các số cho trước và $a \neq 0$
- Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ xác định với mọi giá trị $x \in \mathbb{R}$ và:
+ Đồng biến trên \mathbb{R} khi $a > 0$.
+ Nghịch biến trên \mathbb{R} khi $a < 0$.
- Đồ thị của hàm số bậc nhất $y = ax + b$ ($a \neq 0$) là một đường thẳng và a là *hệ số góc* của đường thẳng.
- Cho hai đường thẳng $d_1 : y = a_1x + b_1$ ($a_1 \neq 0$) và $d_2 : y = a_2x + b_2$ ($a_2 \neq 0$).

Ta có:

a) d_1, d_2 song song $\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$;

b) d_1, d_2 trùng nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$;

c) d_1, d_2 cắt nhau $\Leftrightarrow a_1 \neq a_2$;

d) d_1, d_2 vuông góc nhau $\Leftrightarrow a_1 \cdot a_2 = -1$.

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Viết phương trình đường thẳng

Phương pháp giải: Ta thường gặp các bài toán về viết phương trình đường thẳng sau đây:

Bài toán 1. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cho trước.

Bài toán 2. Viết phương trình đường thẳng đi qua một điểm và có hệ số góc cho trước.

Bài toán 3. Viết phương trình đường thẳng đi qua một điểm và song song với một đường thẳng cho trước.

Bài toán 4. Viết phương trình đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

❖ *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

Bài 1. Xác định hệ số a, b của đường thẳng $y = ax + b$ biết:

- d song song với đường thẳng $y = 3x + 1$ và đi qua $A(2; 5)$.
- d vuông góc với đường thẳng $y = x - 5$ và cắt Ox tại điểm có hoành độ bằng -2 .
- d đi qua hai điểm $A(-1; 2), B(2; -3)$.

Bài 2. Cho hai đường thẳng $d_1 : y = -4x + m + 1, d_2 : y = \frac{4}{3}x + 15 - 3m$.

- Tìm vị trí của m để d_1 cắt d_2 tại điểm C trên trục tung.
- Với m vừa tìm được, hãy tìm giao điểm A, B của d_1, d_2 với Ox .
- Tính chu vi và diện tích tam giác ABC .
- Tính các góc của tam giác ABC .

Bài 3. Tìm m để hai đường thẳng $y = mx + 1$ và $y = 2x - 1$ cắt nhau tại một điểm nằm trên đường phân giác góc phần tư thứ hai trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

Bài 4. Cho ba điểm $A(1; -1), B(2; 1), C(-3; 1)$. Chứng minh đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng AC .

❖ *Học sinh tự luyện những bài tập sau tại lớp:*

Bài 5. Trong hệ tọa độ Oxy cho ba điểm $A(2; 5), B(-1; -1), C(4; 9)$.

- Viết phương trình đường thẳng BC .
- Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Bài 6. Cho hàm số $y = (m^2 - 3)x + 2$ có đồ thị là đường thẳng d .

- Vẽ d khi $m = 2$.
- Tìm m để hàm số đồng biến, nghịch biến.
- Tìm m để d đi qua $A(1; 2)$.
- Tìm m để d đi qua $B(1; 8)$.

Bài 7. Cho hàm số $y = (m - 1)x + m + 1$ có đồ thị d . Tìm m để:

- d cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2 .
- d cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -3 .
- d tạo với trục hoành một góc 45° .

Bài 8. Viết phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm $A(-2;1)$ và điểm M với M nằm trên đường thẳng $d': 2x + y = 3$ và M có hoành độ bằng $\frac{1}{2}$.

Dạng 2. Tìm điểm cố định của đường thẳng

Phương pháp giải: Để tìm điểm cố định của đường thẳng $y = ax + b$ phụ thuộc tham số ta làm như sau:

- Gọi tọa độ điểm cố định là $M(x_0; y_0)$;
- Tìm điều kiện để đẳng thức $y_0 = ax_0 + b$ luôn đúng khi tham số thay đổi.

❖ *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

Bài 9. (Thi vào lớp 10 chọn, trường THPT Phan Đình Phùng, Hà Nội, 1995)

Chứng minh đường thẳng $d: y = 2(m+1)x - m - 1$ luôn đi qua một điểm cố định với mọi tham số m .

❖ *Học sinh tự luyện những bài tập sau tại lớp:*

Bài 10. (Thi vào 10, Thành phố Hồ Chí Minh, 2005)

Cho đường thẳng $d: y = mx + 1$. Chứng minh d luôn đi qua một điểm cố định với mọi tham số m .

Dạng 3. Ba đường thẳng đồng quy

Phương pháp giải: Để tìm điều kiện để ba đường thẳng đồng quy ta xác định giao điểm của hai trong ba đường thẳng và tìm điều kiện để giao điểm này thuộc đường thứ 3.

❖ *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

Bài 11. (Thi vào 10 trường THPT Nguyễn Tất Thành, 2007)

Tìm các giá trị của m để ba đường thẳng $d_1: y = x + 1$, $d_2: y = 5x - 3$, $d_3: y = mx + 4$ cùng đi qua một điểm.

❖ *Học sinh tự luyện những bài tập sau tại lớp:*

Bài 12. Cho các hàm số: $y = x + 3$; $y = -x + 1$; $y = \sqrt{3}x - m - 2$. Tìm m để các đồ thị hàm số trên là các đường thẳng đồng quy.

Dạng 4. Bài toán liên quan đến diện tích

❖ *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

Bài 13. Cho các đường thẳng có phương trình $y = (m-1)x + 2m$. Tìm m để đường thẳng trên cắt hai trục tọa độ và tạo với hai trục một tam giác có diện tích bằng 1 (đơn vị diện tích).

Bài 14. Cho ba hàm số $y = x + 2$; $y = -x - 2$; $y = -2x + 2$ có đồ thị lần lượt là d_1, d_2, d_3 .

- Vẽ đồ thị của ba hàm số trên cùng một hệ trục tọa độ.
- Cho biết $d_1 \cap d_2$ tại A, $d_1 \cap d_3$ tại B, $d_2 \cap d_3$ tại C. Tìm tọa độ các điểm A, B, C.
- Tính diện tích tam giác ABC.

❖ *Học sinh tự luyện những bài tập sau tại lớp:*

Bài 15. Cho hàm số $y = (m - 2)x + m + 3$ có đồ thị là đường thẳng d.

- Chứng minh d luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của tham số m.
- Tìm m để d cắt Ox, Oy tạo thành tam giác có diện tích bằng 2.

Bài 16. Cho đường thẳng d: $y = (2m + 1)x - 2$ với $m \neq -\frac{1}{2}$. Giả sử d cắt Ox tại A, cắt Oy tại B. Tìm m để diện tích tam giác OAB bằng $\frac{1}{2}$.

Dạng 5. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng d

Phương pháp giải: Để tìm khoảng cách từ điểm gốc tọa độ O đến đường thẳng d: $y = ax + b$ với $a \neq 0, b \neq 0$ ta làm như sau:

Bước 1: Tìm tọa độ các điểm A, B lần lượt là giao điểm của d với trục hoành và trục tung của hệ trục tọa độ Oxy.

Bước 2: Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ O đến d. Khi đó:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}.$$

❖ *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

Bài 17. Cho đường thẳng d có phương trình $y = mx + 2$.

- Tìm các giá trị của m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng d bằng 1.
- Tìm các giá trị của m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng d lớn nhất.

❖ *Học sinh tự luyện những bài tập sau tại lớp:*

Bài 18. (Thi vào lớp 10, Thành phố Hà Nội, 2008)

Cho đường thẳng d có phương trình $y = (m - 1)x + 2$. Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng d lớn nhất.

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 19. Viết phương trình đường thẳng d biết d cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3 và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -2.

Bài 20. Cho ba điểm A(0; 2), B(-3; -1), C(2; 4)

- a) Xác định hệ số a, b biết rằng đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua A, B .
- b) Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Bài 21. Xác định phương trình đường thẳng d biết rằng nó song song với đường thẳng d' có phương trình $y = -x + 1$ và đi qua điểm $M(2;1)$.

Bài 22. Cho các đường thẳng:

$$d: y = (m-2)x + 3 \text{ với } m \neq 2 \text{ và } d': y = -m^2x + 1 \text{ với } m \neq 0.$$

- a) Tìm m để d và d' song song với nhau
- b) Tìm m để d cắt Ox tại A , cắt Oy tại B mà $\widehat{OAB} = 60^\circ$.

Bài 23. (Thi vào lớp 10, THPT Nguyễn Tất Thành, 2010)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho điểm $M(-1;1)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua M và tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân

Bài 24. Chứng minh khi m thay đổi thì các đường thẳng có phương trình $y = (m+1)x - 3m + 4$ luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 25. Tìm điều kiện của tham số m để các đường thẳng có phương trình $y + 2x - 1 = 0; y = x + 7$ và $y = (m-1)x - m + 3$ đồng quy.

Bài 26. Cho hai đường thẳng $d_1: y = 2x + 4, d_2: y = -\frac{1}{2}x + 1$. Cho biết d_1 cắt Ox tại A , d_2 cắt Ox tại C , d_1 cắt d_2 tại M .

- a) Chứng minh tam giác MAC vuông tại M .
- b) Tính diện tích tam giác MAC .

Bài 27. Cho hàm số $y = (m^2 - 2m + 2)x + 4$ có đồ thị là đường thẳng d . Tìm m sao cho d cắt Ox tại A , cắt Oy tại B mà diện tích tam giác OAB lớn nhất.

Bài 28. Cho đường thẳng $d: 2(m-1)x + (m-2)y = 2$.

- a) Chứng minh d luôn đi qua một điểm cố định với mọi m .
- b) Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến d là lớn nhất.

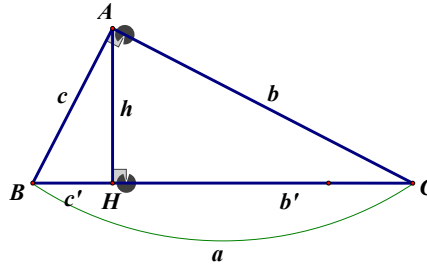
CHỦ ĐỀ 3. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

VẤN ĐỀ 1. HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG (PHẦN I)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Khi đó ta có các hệ thức sau:

- $AB^2 = BH.BC$ hay $c^2 = ac'$
- $AC^2 = CH.BC$ hay $b^2 = ab'$
- $AB.AC = BC.AH$ hay $cb = ah$
- $HA^2 = HB.HC$ hay $h^2 = c'b'$
- $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ hay $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}$
- $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Định lí Pytago)



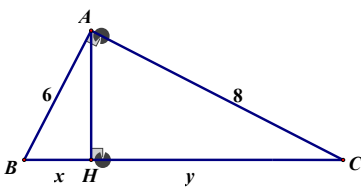
B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính độ dài các đoạn thẳng trong tam giác vuông

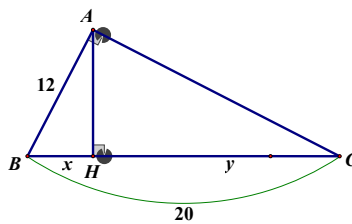
Phương pháp giải: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Nếu biết độ dài hai trong sáu đoạn thẳng AB, AC, BC, HA, HB, HC thì ta tính luôn được bốn đoạn còn lại.

❖ *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

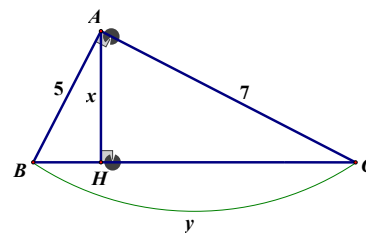
Bài 1. Tính x, y trong mỗi trường hợp sau:



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH.

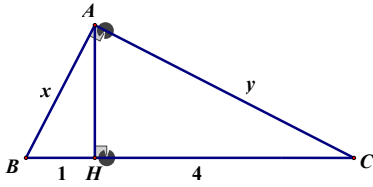
- a) Cho biết $AB = 3\text{ cm}$, $AC = 4\text{ cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng BH, CH, AH, BC.
- b) Cho biết $BH = 9\text{ cm}$, $CH = 16\text{ cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng AB, AC, BC, AH.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Cho biết $AB : AC = 3 : 4$ và $BC = 15\text{ cm}$. Tính độ dài đoạn thẳng BH và HC.

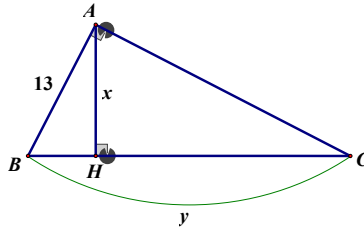
Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Cho biết $AB : AC = 3 : 4$ và $AH = 6$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng BH và CH.

❖ Học sinh tự luyện những bài tập sau tại lớp:

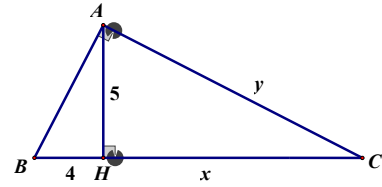
Bài 5. Tính x, y trong mỗi trường hợp sau:



Hình 4



Hình 5



Hình 6

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH.

- Cho biết $AB = 3$ cm, $AC = 5$ cm. Tính độ dài các đoạn thẳng BH, CH, AH, BC.
- Cho biết $AH = 60$ cm, $CH = 144$ cm. Tính độ dài các đoạn thẳng AB, AC, BC, BH.
- Cho biết $AC = 12$ cm, $AH = \frac{60}{13}$ cm. Tính độ dài các đoạn thẳng AB, BC, BH, CH.

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Cho biết $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{6}$ và $BC = 122$ cm.

Tính độ dài đoạn thẳng BH và CH.

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Cho biết $AB : AC = 3 : 4$ và $AH = 12$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng BH và CH.

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Cho biết $AB = 4$ cm, $AC = 7,5$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng BH và HC.

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH.

- Cho biết $AH = 6$ cm, $BH = 4,5$ cm. Tính độ dài các đoạn thẳng AB, AC, BC, HC.
- Cho biết $AB = 6$ cm, $BH = 3$ cm. Tính độ dài các đoạn thẳng AH, AC, CH.

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Tính diện tích tam giác ABC biết $AH = 12$ cm, $BH = 9$ cm.

Bài 12. Cho tam giác ABC, biết $BC = 7,5$ cm, $CA = 4,5$ cm, $AB = 6$ cm.

- Tính đường cao AH của tam giác ABC.
- Tính độ dài BH, CH.

Bài 13. Cho tam giác vuông với các cạnh góc vuông là 7 và 24. Kẻ đường cao ứng với cạnh huyền. Tính độ dài đường cao và các đoạn thẳng mà đường cao đó chia ra trên cạnh huyền.

Bài 14. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Cho biết $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{7}$ và $AH = 15 \text{ cm}$.

Tính độ dài đoạn thẳng HB và HC.

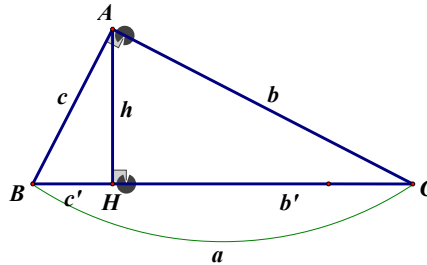
Bài 15. Cho ABCD là hình thang vuông tại A và D. Đường chéo $BD \perp BC$. Biết $AD = 12 \text{ cm}$, $DC = 25 \text{ cm}$. Tính độ dài AB, BC và BD.

VẤN ĐỀ 2. HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG (PHẦN II)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Nhắc lại lý thuyết. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Khi đó ta có các hệ thức sau:

- $AB^2 = BH.BC$ hay $c^2 = ac'$
- $AC^2 = CH.BC$ hay $b^2 = ab'$
- $AB.AC = BC.AH$ hay $cb = ah$
- $HA^2 = HB.HC$ hay $h^2 = c'b'$
- $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ hay $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}$
- $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Định lý Pytago)



B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 2. Chứng minh các hệ thức liên quan đến tam giác vuông

Phương pháp giải: Sử dụng các hệ thức về cạnh và đường cao một cách hợp lý theo hướng:

Bước 1: Chọn các tam giác vuông thích hợp chứa các đoạn thẳng có trong hệ thức.

Bước 2: Tính các đoạn thẳng đó nhờ hệ thức về cạnh và đường cao.

Bước 3: Liên kết các giá trị trên để rút ra hệ thức cần chứng minh.

❖ *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

Bài 1. Cho tam giác CDE nhọn, đường cao CH. Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu của H lên CD, CE. Chứng minh:

- a) $CD.CM = CE.CN$.
- b) $\triangle CMN \sim \triangle CED$.

Bài 2. Cho hình vuông ABCD. Gọi I là một điểm nằm giữa A và B. Tia DI và tia CB cắt nhau ở K. Kẻ đường thẳng qua D, vuông góc với DI, cắt đường thẳng BC tại L. Chứng minh:

- a) Tam giác DIL là tam giác cân;
- b) Tổng $\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2}$ không đổi khi I thay đổi trên cạnh AB.

❖ *Học sinh tự luyện những bài tập sau tại lớp:*

Bài 3. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và AH là đường cao.

- a) Chứng minh $AB^2 + CH^2 = AC^2 + BH^2$;
- b) Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu của H lên AB, AC. Chứng minh: $AM.AB = AN.AC$

Bài 4. Cho hình thoi ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại O. Cho biết khoảng cách từ O tới mỗi cạnh hình thoi là h, AC = m, BD = n. Chứng minh: $\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4h^2}$.

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 5. Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 8 cm, BC = 15 cm.

- a) Tính độ dài đoạn thẳng BD;
- b) Vẽ AH ⊥ BD = H. Tính độ dài đoạn thẳng AH;
- c) Đường thẳng AH cắt BC và DC lần lượt tại I và K. Chứng minh: AH² = HI.HK.

Bài 6. Cho hình thang ABCD vuông tại A và D. Cho biết AB = 15 cm, AD = 20 cm, các đường chéo AC và BD vuông góc với nhau ở O. Tính:

- a) Độ dài các đoạn thẳng OB, OD.
- b) Độ dài đoạn thẳng AC;
- c) Diện tích hình thang ABCD.

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, kẻ HE, HF lần lượt vuông góc với AB, AC. Chứng minh:

- a) $\frac{EB}{FC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^3$
- b) BC.BE.CF = AH³.

Bài 8. Cho tam giác ABC cân tại A có AH và BK là hai đường cao. Kẻ đường thẳng vuông góc với BC tại B cắt tia CA tại D. Chứng minh:

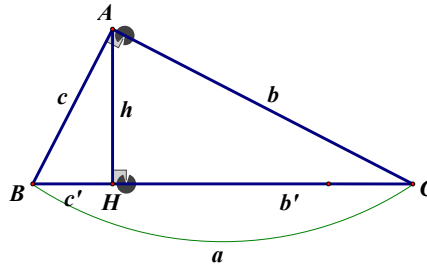
- a) BD = 2AH
- b) $\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{4HA^2}$.

VẤN ĐỀ 3. LUYỆN TẬP HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Nhắc lại lý thuyết. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Khi đó ta có các hệ thức sau:

- $AB^2 = BH.BC$ hay $c^2 = ac'$
- $AC^2 = CH.BC$ hay $b^2 = ab'$
- $AB.AC = BC.AH$ hay $cb = ah$
- $HA^2 = HB.HC$ hay $h^2 = c'b'$
- $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ hay $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}$
- $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Định lý Pytago)



B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

❖ *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Cho biết $BH = 4\text{ cm}$, $CH = 9\text{ cm}$. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H lên các cạnh AB, AC.

- a) Tính độ dài đoạn thẳng DE.
- b) Các đường thẳng vuông góc với DE tại D, E lần lượt cắt BC tại M, N. Chứng minh $MN = \frac{1}{2}BC$.
- c) Tính diện tích của tứ giác DENM.

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H lên các cạnh AB, AC. Chứng minh:

- a) $\frac{AC^2}{AC^2} = \frac{HB}{HC}$;
- b) $\frac{AC^3}{AC^3} = \frac{BD}{EC}$;
- c) $DE^3 = BD.CE.BC$;
- d) $\sqrt[3]{BC^2} = \sqrt[3]{BD^2} + \sqrt[3]{CE^2}$.

❖ *Học sinh tự luyện những bài tập sau tại lớp:*

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH.

- a) Cho biết $AB = 6\text{ cm}$, $AC = 8\text{ cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng BH, CH, AH, BC.
- b) Cho biết $AB = 6\text{ cm}$, $BC = 10\text{ cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng BH, CH, AH, AC.

Bài 4. Tìm độ dài các cạnh của một tam giác vuông nếu đường cao ứng với cạnh huyền có độ dài 48cm và hình chiếu của các cạnh góc vuông trên cạnh huyền theo tỉ lệ 9:16.

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A, phân giác AD, đường cao AH. Cho biết $BD = 15\text{ cm}$, $CD = 20\text{ cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng HB, HC.

Bài 6. Cho hình thang cân ABCD có độ dài cạnh đáy $AB = 26\text{ cm}$ và cạnh bên $AD = 10\text{ cm}$. Cho biết đường chéo AC vuông góc với cạnh bên BC. Tính diện tích của hình thang ABCD.

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH.

- a) Nếu $BH = 2\text{ cm}$, $CH = 8\text{ cm}$. Tính độ dài các đoạn AB, AC, BC, AH.
- b) Nếu $AH = 5\text{ cm}$, $CH = 16\text{ cm}$. Tính độ dài các đoạn AB, AC, BC, BH.

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Cho biết $AB : AC = 3 : 4$ và $AH = 12\text{ cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng BH, CH.

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A, phân giác AD, đường cao AH. Cho biết $BD = 15\text{ cm}$, $CD = 20\text{ cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng HB, HC.

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Tính chu vi của tam giác ABC biết rằng $AH = 14\text{ cm}$, $\frac{HB}{HC} = \frac{1}{4}$.

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Tính diện tích tam giác ABC biết rằng $AH = 12\text{ cm}$, $BH = 9\text{ cm}$.

Bài 12. Cho tam giác ABC vuông tại C, đường cao CK.

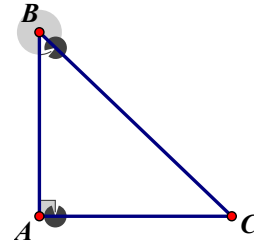
- a) Cho biết $AB = 10\text{ cm}$, $AC = 8\text{ cm}$. Tính BC, CK, BK, AK.
- b) Gọi H và I theo thứ tự là hình chiếu của K lên BC và AC. Chứng minh: $CB \cdot CH = CA \cdot CI$.
- c) Gọi M là chân đường vuông góc kẻ từ K xuống IH. Chứng minh $\frac{1}{KM^2} = \frac{1}{CH^2} + \frac{1}{CI^2}$.
- d) Chứng minh: $\frac{AI}{BH} = \frac{AC^3}{BC^3}$.

VẤN ĐỀ 4. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN (PHẦN I)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Cho góc nhọn $\alpha (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$. Dựng tam giác ABC vuông tại A sao cho $\alpha = \widehat{ABC}$. Từ đó ta có:

$$\cos \alpha = \frac{AB}{BC}; \sin \alpha = \frac{AC}{BC}; \tan \alpha = \frac{AC}{AB}; \cot \alpha = \frac{AB}{AC}.$$



- Với góc nhọn α bất kì, ta luôn có:

$$0 < \sin \alpha < 1; 0 < \cos \alpha < 1.$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1;$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

- Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cosin góc kia, tang góc này bằng cotang góc kia.
- Bảng tỉ số lượng giác của các góc đặc biệt:

	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính tỉ số lượng giác của góc nhọn, tính cạnh, tính góc

Phương pháp giải: Sử dụng kiến thức trong phần Tóm tắt lý thuyết ở trên.

❖ *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại C có $BC = 1,2\text{cm}$, $AC = 0,9\text{cm}$. Tính các tỉ số lượng giác của góc B. Từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc A.

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Hãy tính $\sin B$ và $\sin C$ trong các trường hợp sau (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 4):

a) $AB = 13\text{ cm}$; $BH = 0,5\text{ dm}$

b) $BH = 3\text{ cm}$; $CH = 4\text{ cm}$.

Bài 3. Cho tam giác ABC có $AB = a\sqrt{5}$; $BC = a\sqrt{3}$; $AC = a\sqrt{2}$.

- Chứng minh ABC là tam giác vuông.
- Tính các tỉ số lượng giác của góc B. Từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc A.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, hãy tính các tỉ số lượng giác của góc C biết rằng $\cos B = 0,6$.

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 5$ cm, $\cot B = \frac{5}{8}$. Tính độ dài các đoạn thẳng AC và BC.

❖ *Học sinh tự luyện những bài tập sau tại lớp:*

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A có $BA = 1,6$ cm; $CA = 1,2$ cm. Tính các tỉ số lượng giác của góc B. Từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc C.

Bài 7. Cho tam giác ABC có $CB = a\sqrt{5}$; $BA = a\sqrt{3}$; $AC = a\sqrt{2}$.

- Chứng minh ABC là tam giác vuông.
- Tính các tỉ số lượng giác của góc B. Từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc C.

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A. Cho biết $\cos B = 0,8$. Hãy tính các tỉ số lượng giác của góc C.

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 6$ cm, $\tan B = \frac{5}{12}$. Hãy tính độ dài các đoạn thẳng AC và BC.

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 60$ mm; $AC = 8$ cm. Tính các tỉ số lượng giác của góc B. Từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc C.

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A. Biết $AB = 30$ cm; $\widehat{B} = \alpha$, $\cot \alpha = \frac{5}{12}$. Tính độ dài các cạnh BC, AC.

Bài 12. Tìm $\sin \alpha$, $\cot \alpha$, $\tan \alpha$ biết $\cos \alpha = \frac{1}{5}$.

Bài 13. Cho tam giác ABC vuông tại A. Tính AC, BC biết:

- $AB = 12$ cm, $\tan B = \frac{3}{4}$;
- $AB = 15$ cm, $\cos B = \frac{5}{13}$.

Bài 14. Cho tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{C} = 30^\circ$, $BC = 10$ cm.

- Tính độ dài các cạnh AB, AC.

- b) Kẻ từ A các đường thẳng AM, AN lần lượt vuông góc với các đường phân giác trong và ngoài của góc B. Chứng minh $MN \parallel BC$ và $MN = BC$.
- c) Chứng minh tam giác MAB và ABC đồng dạng. Tìm tỉ số đồng dạng.

VẤN ĐỀ 5. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN (PHẦN II)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Cho góc nhọn $\alpha (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$. Dựng tam giác ABC vuông tại A sao cho $\alpha = \widehat{ABC}$. Từ đó ta có:

$$\cos\alpha = \frac{AB}{BC}; \sin\alpha = \frac{AC}{BC}; \tan\alpha = \frac{AC}{AB}; \cot\alpha = \frac{AB}{AC}.$$

- Với góc nhọn α bất kì, ta luôn có:

$$0 < \sin\alpha < 1; 0 < \cos\alpha < 1.$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}; \tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1;$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; 1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; 1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

- Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cosin góc kia, tang góc này bằng cotang góc kia.
- Bảng tỉ số lượng giác của các góc đặc biệt:

	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 2. Sắp thứ tự dãy các tỉ số lượng giác

Phương pháp giải: Để sắp thứ tự dãy các tỉ số lượng giác cho trước, ta cần làm được hai bước sau:

Bước 1: Đưa về các tỉ số lượng giác trong bài toán cùng loại bằng cách sử dụng tính chất: “Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cos góc kia, tan góc này bằng cot góc kia”.

Bước 2: Với hai góc nhọn α, β , ta có:

$$\sin\alpha < \sin\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta;$$

$$\cos\alpha < \cos\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta;$$

$$\tan\alpha < \tan\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta;$$

$$\cot\alpha < \cot\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta.$$

❖ *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

Bài 1. Không dùng bảng số và máy tính, hãy so sánh:

a) $\sin 20^\circ$ và $\sin 70^\circ$ b) $\cos 60^\circ$ và $\cos 70^\circ$ c) $\tan 73^\circ 20'$ và $\tan 45^\circ$ d) $\cot 20^\circ$ và $\cot 37^\circ 40'$

Bài 2. Sắp xếp tỉ số lượng giác sau theo thứ tự từ lớn đến bé:

a) $\tan 42^\circ, \cot 71^\circ, \tan 38^\circ, \cot 69^\circ 15', \tan 28^\circ$

b) $\sin 32^\circ, \cos 51^\circ, \sin 39^\circ, \cos 79^\circ 13', \sin 38^\circ$.

❖ *Học sinh tự luyện những bài tập sau tại lớp:*

Bài 3. Không dùng bảng số và máy tính, hãy so sánh:

a) $\sin 40^\circ$ và $\sin 70^\circ$ b) $\cos 80^\circ$ và $\cos 50^\circ$ c) $\tan 73^\circ 20'$ và $\tan 65^\circ$ d) $\cot 53^\circ$ và $\cot 37^\circ 40'$

Bài 4. Sắp xếp tỉ số lượng giác sau theo thứ tự từ lớn đến bé:

a) $\tan 12^\circ, \cot 61^\circ, \tan 28^\circ, \cot 79^\circ 15', \tan 58^\circ$

b) $\cos 67^\circ, \sin 56^\circ, \cos 63^\circ 41', \sin 74^\circ, \cos 85^\circ$.

Dạng 3. Dựng góc nhọn α biết tỉ số lượng giác của nó là $\frac{m}{n}$.

Phương pháp giải: Dựng một tam giác vuông có hai cạnh là m và n trong đó m và n là hai cạnh góc vuông hoặc một cạnh góc vuông và một cạnh huyền rồi vận dụng định nghĩa tỉ số lượng giác để nhận ra góc α .

❖ *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

Bài 5. Dựng góc nhọn α biết rằng:

a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ b) $\cos \alpha = \frac{4}{7}$ c) $\tan \alpha = \frac{3}{2}$ d) $\cot \alpha = \frac{5}{6}$.

Bài 6. Dựng góc nhọn α biết rằng:

a) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ b) $\cos \alpha = \frac{2}{5}$ c) $\tan \alpha = \frac{3}{2}$ d) $\cot \alpha = \frac{4}{5}$.

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A. Biết $AB = 30\text{cm}, \widehat{B} = \alpha, \tan \alpha = \frac{5}{12}$. Tính cạnh BC, AC.

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường cao AH. Tính $\sin B, \sin C$ biết rằng:

a) $AB = 13, BH = 5$

b) $BH = 3, CH = 4$.

Bài 9. Dụng góc nhọn α biết rằng:

a) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$

b) $\cos \alpha = \frac{2}{3}$

c) $\tan \alpha = \frac{4}{5}$

d) $\cot \alpha = \frac{3}{4}$.

Bài 10. Sắp xếp tỉ số lượng giác sau theo thứ tự từ lớn đến bé:

a) $\sin 35^\circ, \cos 28^\circ, \sin 34^\circ 72', \cos 62^\circ, \sin 45^\circ$;

b) $\cos 37^\circ, \cos 65^\circ 30', \sin 72^\circ, \cos 59^\circ, \sin 47^\circ$.

Bài 11. Tính giá trị biểu thức:

$$A = \cos^2 52^\circ \sin 45^\circ + \sin^2 52^\circ \cos 45^\circ;$$

$$B = \sin 45^\circ \cos^2 47^\circ + \sin^2 47^\circ \cos 45^\circ.$$

Bài 12. Tìm $\cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ biết $\sin \alpha = \frac{1}{5}$.

Bài 13. Cho tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{C} = 30^\circ, BC = 10 \text{ cm}$.

a) Tính độ dài các cạnh AB, AC.

b) Kẻ từ A các đường thẳng AM, AN lần lượt vuông góc với các đường phân giác trong và ngoài của góc B. Chứng minh $MN \parallel BC$ và $MN = BC$.

c) Chứng minh tam giác MAB đồng dạng với tam giác ABC. Tìm tỉ số đồng dạng.

Bài 14. Không dùng máy tính hoặc bảng số, hãy tính:

a) $A = \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 70^\circ$

b) $B = \sin^2 5^\circ + \sin^2 25^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 65^\circ + \sin^2 85^\circ$.

Bài 15. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB < AC, \widehat{C} = \alpha = 45^\circ$, đường trung tuyến AM, đường cao AH, $MA = MB = MC = a$. Chứng minh:

a) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$;

b) $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$;

c) $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$.

VẤN ĐỀ 6. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG (PHẦN I)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

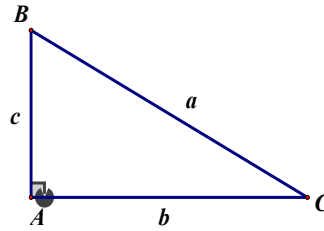
- Cho tam giác ABC vuông tại A, có $BC = a, AC = b, AB = c$. Ta có:

$$b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C;$$

$$c = a \cdot \sin C = a \cdot \cos B;$$

$$b = c \cdot \tan B = c \cdot \cot C;$$

$$c = b \cdot \tan C = b \cdot \cot B.$$



- Trong một tam giác vuông
 Cạnh góc vuông = (cạnh huyền) \times (sin góc đối) = (cạnh huyền) \times (cos góc kề)
 Cạnh góc vuông = (Cạnh góc vuông) \times (tan góc đối) = (cạnh góc vuông còn lại) \times (cot góc kề).

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Giải tam giác vuông

Phương pháp giải:

- Giải tam giác vuông là tính độ dài các cạnh và số đo các góc dựa vào dữ kiện cho trước của bài toán
- Để giải tam giác vuông, ta dùng hệ thức giữa cạnh và các góc của một tam giác vuông và sử dụng máy tính cầm tay hoặc bảng lượng giác để tính các yếu tố còn lại.
- Các bài toán về giải tam giác vuông bao gồm:
 - Giải tam giác vuông khi biết độ dài một cạnh và số đo một góc nhọn.
 - Giải tam giác vuông khi biết độ dài hai cạnh.

❖ *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $BC = a, AC = b, AB = c$. Giải tam giác vuông ABC biết rằng:

a) $b = 10\text{cm}; \hat{C} = 30^\circ$

b) $a = 20\text{cm}; \hat{B} = 35^\circ$.

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $BC = a, AC = b, AB = c$. Giải tam giác vuông ABC biết rằng:

a) $a = 15\text{cm}; b = 10\text{cm}$

b) $b = 12\text{cm}; c = 7\text{cm}$.

❖ *Học sinh tự luyện những bài tập sau tại lớp:*

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $BC = a, AC = b, AB = c$. Giải tam giác vuông ABC biết rằng:

a) $b = 28\text{cm}; c = 21\text{cm}$

b) $a = 10\text{cm}; b = 6\text{cm}$

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $BC = a, AC = b, AB = c$. Giải tam giác vuông ABC biết rằng:

a) $c = 3,8\text{cm}, \hat{B} = 51^\circ$

b) $a = 11\text{cm}; \hat{C} = 60^\circ$.

Dạng 2. Tính các cạnh và góc của tam giác

Phương pháp giải: Làm xuất hiện tam giác vuông để áp dụng các hệ thức lượng trên bằng cách kẻ thêm đường cao.

❖ *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

Bài 5. Cho tam giác ABC có $BC = 11\text{cm}, \widehat{ABC} = 38^\circ$ và $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Gọi N là chân đường vuông góc hạ từ A xuống cạnh BC. Hãy tính:

a) Độ dài đoạn thẳng AN;

b) Độ dài đoạn thẳng AC.

Bài 6. Cho tam giác ABC, có $BC = 6\text{cm}, \hat{B} = 60^\circ, \hat{C} = 40^\circ$. Hãy tính:

a) Chiều cao CH và cạnh AC

b) Diện tích tam giác ABC.

❖ *Học sinh tự luyện những bài tập sau tại lớp:*

Bài 7. Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 60^\circ, \hat{C} = 50^\circ, AC = 3,5\text{cm}$. Tính diện tích tam giác ABC (làm tròn đến hàng đơn vị).

Bài 8. Cho tứ giác ABCD có các đường chéo cắt nhau tại O. Cho biết $AC = 4\text{cm}, BD = 5\text{cm}, \widehat{AOB} = 50^\circ$. Tính diện tích tứ giác ABCD.

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $BC = a, AC = b, AB = c$. Giải tam giác vuông ABC biết rằng:

a) $b = 5,4\text{cm}, \hat{C} = 30^\circ$

b) $c = 10\text{cm}, \hat{C} = 45^\circ$

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $BC = a, AC = b, AB = c$. Giải tam giác vuông ABC biết rằng:

a) $a = 15\text{cm}, b = 10\text{cm}$

b) $b = 12\text{cm}; c = 7\text{cm}$.

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại B. Giải tam giác ABC biết rằng:

a) $\hat{A} = 40^\circ, AC = 8$

b) $\hat{C} = 28^\circ, AB = 5$

c) $AB = 8, BC = 15$

Bài 12. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^\circ, \widehat{C} = 50^\circ, AC = 35\text{cm}$. Tính diện tích tam giác ABC.

Bài 13. Cho tứ giác ABCD có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ, \widehat{C} = 40^\circ, AB = 4\text{cm}, AD = 3\text{cm}$. Tính diện tích tứ giác ABCD.

Bài 14. Cho tam giác ABC vuông tại A, , có đường cao AH; $HB = 9\text{cm}, HC = 16\text{cm}$.

a) Tính AB, AC, AH.

a) Gọi D và E lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB, AC. Tứ giác ADHE là hình gì?

b) Tính chu vi và diện tích của tứ giác ADHE.

Bài 15. Cho tam giác ABC vuông tại A, biết $AB = 3\text{cm}, BC = 5\text{cm}$

a) Giải tam giác vuông ABC (số đo góc làm tròn đến độ)

b) Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với BC, đường thẳng này cắt đường thẳng AC tại D. Tính độ dài các đoạn thẳng AD, BD.

c) Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A, trên BC và BD. Chứng minh $BF \cdot BD = BE \cdot BC$.

VẤN ĐỀ 7. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG (PHẦN II)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

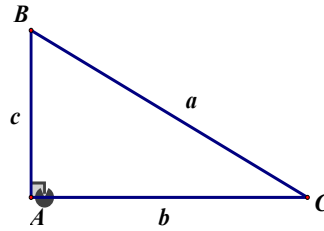
- Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = a, AC = b, AB = c$. Ta có:

$$b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C;$$

$$c = a \cdot \sin C = a \cdot \cos B;$$

$$b = c \cdot \tan B = c \cdot \cot C;$$

$$c = b \cdot \tan C = b \cdot \cot B.$$



- Trong một tam giác vuông
 Cạnh góc vuông = (cạnh huyền) \times (sin góc đối) = (cạnh huyền) \times (cos góc kề)
 Cạnh góc vuông = (Cạnh góc vuông) \times (tan góc đối) = (cạnh góc vuông còn lại) \times (cot góc kề).

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 3. Toán ứng dụng thực tế

Phương pháp giải: Dùng hệ thức liên hệ giữa cạnh và góc trong tam giác vuông để giải quyết tình huống trong thực tế.

- Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

Bài 1. Một cột đèn có bóng trên mặt đất dài $7,5\text{ m}$. Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ bằng 42° . Tính chiều cao của cột đèn.

Bài 2. Một cầu trượt trong công viên có độ dốc là 28° và có độ cao là $2,1\text{ cm}$. Tính độ dài của mặt cầu trượt (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

- Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp.

Bài 3. Một cột đèn có bóng trên mặt đất là 5 m . Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ bằng 50° . Tính chiều cao của cột đèn.

Bài 4. Một cột đèn điện AB cao 6 m có bóng in trên mặt đất là AC dài $3,5\text{ m}$. Hãy tính góc \widehat{BCA} (làm tròn đến phút) mà tia sáng mặt trời tạo với mặt đất.

Dạng 4. Toán tổng hợp

Phương pháp giải: Vận dụng linh hoạt một số hệ thức giữa cạnh và góc trong một tam giác vuông để giải toán.

- Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AC > AB$. Đường cao AH . Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC .

a) Chứng minh $AD \cdot AB = AE \cdot AC$ và tam giác ABC đồng dạng với tam giác AED .

b) Cho biết $BH = 2\text{ cm}$, $HC = 4,5\text{ cm}$. Tính độ dài đoạn thẳng DE .

c) Tính số đo góc \widehat{ABC} (làm tròn đến độ).

d) Tính diện tích tam giác ADE

• *Học sinh tự luyện bài tập sau tại lớp:*

Bài 6. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với đường chéo AC tại H . Gọi E, F, G theo thứ tự là trung điểm của AH, BH, CD .

a) Chứng minh tứ giác $EF CG$ là hình bình hành.

b) Chứng minh $\widehat{BEG} = 90^\circ$.

c) Cho biết $BH = h, \widehat{BAC} = \alpha$. Tính S_{ABCD} theo h và α .

d) Tính độ dài đường chéo AC theo h và α .

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A biết $AB = 21\text{ cm}, \widehat{C} = 60^\circ$. Tính độ dài đường phân giác BD của góc \widehat{ABC} , D nằm trên cạnh AC .

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại $A, \widehat{C} = 30^\circ, BC = 10\text{ cm}$.

a) Tính AB, AC .

b) Kẻ từ A các đường thẳng AM, AN lần lượt vuông góc với các đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc B . Chứng minh MN song song với BC và $2MN = BC$.

c) Chứng minh tam giác MAB đồng dạng với tam giác ABC . Tính tỉ số đồng dạng.

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AC > AB$, đường cao AH . Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC .

a) Chứng minh $AD \cdot AB = AE \cdot AC$ và tam giác ABC đồng dạng với tam giác AED .

b) Cho biết $BH = 2\text{ cm}, HC = 4,5\text{ cm}$. Tính:

i. Độ dài đoạn thẳng DE .

ii. Số đo \widehat{ABC} (làm tròn đến độ).

iii. Diện tích tam giác ADE .

Bài 10. Chứng minh:

a) Diện tích của một tam giác bằng nửa tích của hai cạnh nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa hai cạnh ấy.

b) Diện tích của một hình bình hành bằng tích của hai cạnh kề nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa hai cạnh ấy.

ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 3

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông

Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Khi đó ta có các hệ thức sau:

- $AB^2 = BH.BC$ hay $c^2 = ac'$
- $AC^2 = CH.BC$ hay $b^2 = ab'$
- $AB.AC = BC.AH$ hay $cb = ah$
- $HA^2 = HB.HC$ hay $h^2 = c'b'$
- $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

Hay $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}$

- $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Định lý Pitago)

2. Tỷ số lượng giác của góc nhọn

- Cho góc nhọn α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$). Dựng tam giác vuông BAC sao cho $\alpha = \widehat{ABC}$. Từ đó ta có:

$$\cos \alpha = \frac{AB}{BC}; \sin \alpha = \frac{AC}{BC}; \tan \alpha = \frac{AC}{AB}; \cot \alpha = \frac{AB}{AC}.$$

- Với góc nhọn α bất kỳ ta luôn có:

$$0 < \sin \alpha < 1; 0 < \cos \alpha < 1.$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1;$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

- Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cosin góc kia, tang góc này bằng cotang góc kia.

- **Bảng tỷ số lượng giác của các góc đặc biệt:**

Tỉ số \ α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. Hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông

- Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Ta có:

$$b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C$$

$$c = a \cdot \sin C = a \cdot \cos B$$

$$b = c \cdot \tan B = c \cdot \cot C$$

$$c = b \cdot \tan C = b \cdot \cot B$$

- Trong một tam giác vuông

$$\text{Cạnh góc vuông} = (\text{cạnh huyền}) \times (\sin \text{ góc đối})$$

$$= (\text{cạnh huyền}) \times (\cos \text{ góc kề})$$

$$\text{Cạnh góc vuông} = (\text{cạnh góc vuông}) \times (\tan \text{ góc đối})$$

$$= (\text{cạnh góc vuông}) \times (\cot \text{ góc kề})$$

B. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Trong các đoạn thẳng AB , AC , BC , AH , HB , HC , hãy tính độ dài các đoạn thẳng còn lại nếu biết:

a) $AB = 6 \text{ cm}$ và $AC = 9 \text{ cm}$

b) $AB = 15 \text{ cm}$ và $HB = 9 \text{ cm}$

c) $AC = 44 \text{ cm}$ và $BC = 55 \text{ cm}$

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A , ($AB < AC$) có đường cao AH và $AH = 12 \text{ cm}$; $BC = 25 \text{ cm}$.

a) Tìm độ dài các đoạn thẳng BH , CH , AB và AC .

b) Vẽ trung tuyến AM . Tìm số đo của góc \widehat{AMH} .

c) Tính diện tích tam giác AHM .

Bài 3. Cho tam giác ABC có đường cao CH , $BC = 12 \text{ cm}$, $\widehat{B} = 60^\circ$ và $\widehat{C} = 40^\circ$.

a) Tính độ dài các đoạn thẳng CH và AC .

b) Tính diện tích tam giác ABC .

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH , $AB = 3 \text{ cm}$, $AC = 4 \text{ cm}$.

a) Tính độ dài các đoạn thẳng BC và AH

b) Tính số đo các góc \widehat{B} và \widehat{C} .

c) Đường phân giác trong góc \widehat{A} cắt cạnh BC tại E . Tính độ dài các đoạn thẳng BE và CE .

Bài 5. Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AH . Từ H kẻ HE vuông góc với AB (E thuộc AB) và kẻ HF vuông góc với AC (F thuộc AC).

a) Chứng minh $AE \cdot AB = AF \cdot AC$.

b) Cho biết $AB = 4 \text{ cm}$, $AH = 3 \text{ cm}$. Tính độ dài các đoạn thẳng AE và BE .

c) Cho biết $\widehat{HAC} = 30^\circ$. Tính độ dài đoạn thẳng FC .

Bài 6. Tứ giác $MNEF$ vuông tại M , F , có EF là đáy lớn, hai đường chéo ME và NF vuông góc với nhau tại O .

a) Cho biết $MN = 9 \text{ cm}$ và $MF = 12 \text{ cm}$. Hãy:

i. Giải tam giác MNF .

ii. Tính độ dài các đoạn thẳng MO và FO .

iii. Kẻ NH vuông góc với EF tại H . Tính diện tích tam giác FNE . Từ đó tính diện tích tam giác FOH .

b) Chứng minh $MF^2 = MN.FE$.

Bài 7. Cho tam giác DEF biết $DE = 6\text{ cm}$, $DF = 8\text{ cm}$, $EF = 10\text{ cm}$.

a) Chứng minh tam giác DEF là tam giác vuông.

b) Vẽ đường cao DK . Hãy tính DK , FK .

c) Giải tam giác vuông EDK .

d) Vẽ phân giác trong DM của tam giác DEF . Tính các độ dài các đoạn thẳng ME , MF .

e) Tính $\sin F$ trong các tam giác vuông DFK và DEF . Từ đó suy ra $ED.DF = DK.EF$.

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A , $\hat{B} = 60^\circ$ và $BC = 6\text{ cm}$.

a) Tính độ dài các cạnh AB , AC .

b) Trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho $BD = BC$. Chứng minh $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$.

c) Đường thẳng song song với phân giác góc \widehat{CBD} kẻ từ A cắt CD tại H . Chứng minh

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2}.$$

Bài 9. Cho hình vuông $ABCD$ và điểm E tùy ý trên cạnh BC . Tia Ax vuông góc với AE tại A cắt CD kéo dài tại F . Kẻ trung tuyến AI của tam giác AEF và kéo dài cắt cạnh CD tại K .

a) Chứng minh $AE = AF$.

b) Chứng minh các tam giác AKF , CAF đồng dạng và $AF^2 = KF.CF$.

c) Cho $AB = 4\text{ cm}$, $BE = \frac{3}{4}BC$. Tính diện tích tam giác AEF .

d) AE kéo dài cắt CD tại J . Chứng minh $\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AJ^2}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm E .

Bài 10. Không dùng máy tính, sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự từ bé đến lớn:

a) $\sin 24^\circ$, $\cos 35^\circ$, $\sin 54^\circ$, $\cos 70^\circ$, $\sin 78^\circ$.

b) $\cot 24^\circ$, $\tan 16^\circ$, $\cot 57^\circ 67'$, $\cot 30^\circ$, $\tan 80^\circ$.

Bài 11. Không dùng máy tính, sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự tăng dần:

a) $\sin 40^\circ$, $\cos 28^\circ$, $\sin 65^\circ$, $\cos 88^\circ$, $\cos 20^\circ$.

b) $\tan 32^\circ 48'$, $\cot 28^\circ 36'$, $\tan 56^\circ 32'$, $\cot 67^\circ 18'$.

Bài 12. Cho α là góc nhọn.

a) Tính $\sin \alpha$, $\cot \alpha$, $\tan \alpha$ biết $\cos \alpha = \frac{1}{5}$.

b) Tính $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$ biết $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.

c) Cho $\tan \alpha = 2$. Tính $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\cot \alpha$.

d) Cho $\cot \alpha = 3$. Tính $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$.

Bài 13. Một cột cờ cao 7 m có bóng trên mặt đất dài 4 m . Tính góc α mà các tia sáng mặt trời tạo với mặt đất (làm tròn đến phút).

Bài 14. Một cột đèn có bóng trên mặt đất dài $6,5m$, các tia sáng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ 44° . Tính chiều cao của cột đèn.

Bài 15. a) Tính giá trị của biểu thức $A = \cos^2 20^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 70^\circ$.

b) Rút gọn biểu thức $B = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$.

Bài 16. Cho $0^\circ < x < 90^\circ$. Hãy chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$.

b) $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$.

c) $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2 \cos^2 x$.

Bài 17. Cho $0^\circ < x < 90^\circ$. Hãy chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$

b) $\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin x}$

c) $\frac{\sin x + \cos x - 1}{1 - \cos x} = \frac{2 \cos x}{\sin x - \cos x + 1}$

CHỦ ĐỀ 4. ĐƯỜNG TRÒN

VẤN ĐỀ 1. SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN (PHẦN I)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đường tròn

Tập hợp các điểm cách điểm O cố định một khoảng bằng R không đổi ($R > 0$) là đường tròn tâm O có bán kính R . Kí hiệu: (O) hoặc $(O; R)$.

2. Vị trí tương đối của điểm M và đường tròn $(O; R)$

Vị trí tương đối	Hệ thức
M nằm trên đường tròn (O)	$OM = R$
M nằm trong đường tròn (O)	$OM < R$
M nằm ngoài đường tròn (O)	$OM > R$

3. Định lý (về sự xác định một đường tròn)

- Qua ba điểm không thẳng hàng, ta vẽ được một và chỉ một đường tròn.
- Đường tròn đi qua ba đỉnh của một tam giác gọi là đường tròn ngoại tiếp tam giác. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm của ba đường trung trực của tam giác đó.

4. Tính chất đối xứng của đường tròn

Đường tròn là hình có tâm đối xứng và trục đối xứng. Tâm đối xứng là tâm đường tròn, trục đối xứng là bất kì đường kính nào.

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Chứng minh các điểm cho trước cùng nằm trên một đường tròn.

Phương pháp giải: Ta có các cách sau:

Cách 1. Chứng minh các điểm cho trước cùng cách đều một điểm nào đó.

Cách 2. Dùng định lý: “Nếu một tam giác có một cạnh là đường kính của đường tròn ngoại tiếp thì tam giác đó là tam giác vuông”.

- *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

Bài 1. Chứng minh các định lý sau:

a) Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông là trung điểm của cạnh huyền của tam giác đó.

b) Nếu một tam giác có một cạnh là đường kính của đường tròn ngoại tiếp thì tam giác đó là tam giác vuông.

Bài 2. Cho tam giác ABC có các đường cao BD, CE . Chứng minh bốn điểm B, E, D, C cùng nằm trên một đường tròn. Chỉ rõ tâm và bán kính của đường tròn đó.

Bài 3. Cho tam giác ABC có đường cao AD và trực tâm H . Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BC, AC . Chứng minh:

- Bốn điểm E, F, I, K cùng thuộc một đường tròn.
- Điểm D cũng thuộc đường tròn đi qua bốn điểm E, F, I, K .

- Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

- Bài 4.** Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^\circ$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BD, DC, CA . Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn.
- Bài 5.** Cho bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc đường tròn (O) và điểm M là điểm nằm trong (O) . Chứng minh các trung điểm của các đoạn thẳng MA, MB, MC, MD cùng nằm trên một đường tròn.
- Bài 6.** Cho hình thoi $ABCD$. Đường trung trực của cạnh AB cắt BD tại E và cắt AC tại F . Chứng minh E, F lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và ABD .
- C. CÁC BÀI TẬP VỀ NHÀ**
- Bài 7.** Cho tam giác ABC cân tại A , đường cao $AH = 2\text{cm}, BC = 8\text{cm}$. Đường vuông góc với AC tại C cắt đường thẳng AH ở D .
- Chứng minh các điểm B, C cùng thuộc đường tròn đường kính AD .
 - Tính độ dài đoạn thẳng AD .
- Bài 8.** Cho tam giác nhọn ABC . Vẽ đường tròn (O) có đường kính BC , cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự D, E .
- Chứng minh $CD \perp AB$ và $BE \perp AC$.
 - Gọi K là giao điểm của BE và CD . Chứng minh $AK \perp BC$.
- Bài 9.** Cho đường tròn (O) đường kính AB . Điểm C di động trên đường tròn, H là hình chiếu của C trên AB . Trên OC lấy điểm M sao cho $OM = OH$.
- Hỏi điểm M chạy trên đường nào?
 - Kéo dài BC một đoạn $CD = CB$. Hỏi điểm D chạy trên đường nào?
- Bài 10.** Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh AB cố định. Gọi O là trung điểm của AB , P là giao điểm của CO và BD . Chứng minh P chạy trên một đường tròn khi C, D thay đổi.

VẤN ĐỀ 2. SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN (PHẦN II)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đường tròn

Tập hợp các điểm cách điểm O cố định một khoảng bằng R không đổi ($R > 0$) là đường tròn tâm O có bán kính R . Kí hiệu: (O) hoặc $(O; R)$.

2. Vị trí tương đối của điểm M và đường tròn $(O; R)$

Vị trí tương đối	Hệ thức
M nằm trên đường tròn (O)	$OM = R$
M nằm trong đường tròn (O)	$OM < R$
M nằm ngoài đường tròn (O)	$OM > R$

3. Định lý (về sự xác định một đường tròn)

- Qua ba điểm không thẳng hàng, ta vẽ được một và chỉ một đường tròn.
- Đường tròn đi qua ba đỉnh của một tam giác gọi là đường tròn ngoại tiếp tam giác. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm của ba đường trung trực của tam giác đó.

4. Tính chất đối xứng của đường tròn

Đường tròn là hình có tâm đối xứng và trục đối xứng. Tâm đối xứng là tâm đường tròn, trục đối xứng là bất kì đường kính nào.

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 2. Xác định vị trí tương đối của một điểm với một đường tròn.

Phương pháp giải: Muốn xác định vị trí tương đối của điểm M đối với đường tròn $(O; R)$ ta so sánh khoảng cách OM với bán kính R theo bảng sau:

Vị trí tương đối	Hệ thức
M nằm trên đường tròn (O)	$OM = R$
M nằm trong đường tròn (O)	$OM < R$
M nằm ngoài đường tròn (O)	$OM > R$

- Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:

Bài 1. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy xác định vị trí tương đối của các điểm $A(-1; -1)$, $B(-1; -2)$, $C(\sqrt{2}; \sqrt{2})$ đối với đường tròn tâm O bán kính 2.

- Học sinh tự luyện bài tập sau tại lớp:

Bài 2. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a , các đường cao là BM, CN . Gọi O là trung điểm cạnh BC .

- Chứng minh bốn điểm B, C, M, N cùng thuộc đường tròn tâm O .
- Gọi G là giao điểm của BM, CN . Chứng minh điểm G nằm trong còn điểm A nằm ngoài đối với đường tròn đường kính BC .

Dạng 3. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác và số đo các góc liên quan.

Phương pháp giải:

- Sử dụng tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông.
- Dùng định lý Pitago.
- Dùng hệ thức lượng về cạnh và góc trong tam giác vuông...
- *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông ở A có $AB = 5\text{ cm}$, $AC = 12\text{ cm}$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Bài 4. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 12\text{ cm}$, $BC = 5\text{ cm}$. Chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

- *Học sinh tự luyện bài tập sau tại lớp:*

Bài 5. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng 2 cm . Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Bài 6. Cho góc $\widehat{xAy} = 45^\circ$ và điểm B nằm trên tia Ax sao cho $AB = 3\text{ cm}$.

- a) Vẽ đường tròn (O) đi qua A và B sao cho tâm O nằm trên tia Ay .
- b) Tính bán kính đường tròn (O) .

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ.

Bài 7. Cho đường tròn (O) , đường kính $AD = 2R$. Vẽ cung tâm D bán kính R , cung này cắt đường tròn (O) ở B và C .

- a) Tứ giác $ABCD$ là hình gì? Vì sao?
- b) Tính số đo các góc \widehat{CBD} , \widehat{CBO} , \widehat{OBA} .
- c) Chứng minh tam giác ABC là tam giác đều.

Bài 8. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC . Gọi E là giao điểm CM và DN .

- a) Tính số đo góc \widehat{CEN} .
- b) Chứng minh A, D, E, M cùng thuộc một đường tròn.
- c) Xác định tâm của đường tròn đi qua ba điểm B, D, E .

VẤN ĐỀ 3. ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN (PHẦN I)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. So sánh độ dài của đường kính và dây: Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

2. Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây

- Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.

- Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

3. Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây

- Trong một đường tròn:

+ Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.

+ Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

- Trong hai dây của một đường tròn:

+ Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.

+ Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính độ dài đoạn thẳng

Phương pháp giải: Sử dụng các kiến thức sau đây:

1. Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.

2. Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

3. Dùng định lý Pitago, hệ thức lượng trong tam giác vuông.

• *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

Bài 1. Cho đường tròn tâm O , hai dây AB và CD vuông góc với nhau ở M . Biết $AB = 12\text{ cm}$, $CD = 14\text{ cm}$, $MC = 4\text{ cm}$. Hãy tính:

a) Khoảng cách từ tâm O đến mỗi dây AB và CD .

b) Bán kính của đường tròn (O) .

Bài 2. Cho đường tròn $(O; R)$ có hai dây AB, CD bằng nhau và vuông góc với nhau tại I . Giả sử $IA = 2\text{ cm}$, $IB = 4\text{ cm}$. Tính khoảng cách từ tâm O đến mỗi dây.

• *Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

Bài 3. Cho đường tròn tâm O bán kính 3 cm và hai dây AB và AC . Biết $AB = 5\text{ cm}$, $AC = 2\text{ cm}$. Tính khoảng cách từ O đến mỗi dây.

Bài 4. Cho đường tròn tâm O và dây CD . Từ O kẻ tia vuông góc với CD tại M , cắt (O) tại H . Tính bán kính R của (O) biết $CD = 16\text{ cm}$ và $MH = 4\text{ cm}$.

Bài 5. Cho đường tròn tâm O , đường kính AB ; dây CD cắt AB tại M . Biết $MC = 4\text{ cm}$, $MD = 12\text{ cm}$ và $\widehat{BMD} = 30^\circ$. Hãy tính:

a) Khoảng cách từ O đến CD .

b) Bán kính đường tròn (O).

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ.

Bài 6. Cho đường tròn ($O; 5\text{cm}$). Dây AB và CD song song, có độ dài lần lượt là 8cm và 6cm . Tính khoảng cách giữa hai dây.

Bài 7. Cho đường tròn (O) bán kính $OA = 11\text{cm}$. Điểm M thuộc bán kính AO và cách O một khoảng là 7cm . Qua M kẻ dây CD có độ dài 18cm . Tính độ dài các đoạn thẳng MC , MD .

Bài 8. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 13\text{cm}$, dây CD có độ dài là 12cm vuông góc với AB tại H .

a) Tính HA , HB .

b) Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu của H trên AC, BC . Tính diện tích tứ giác $CMHN$.

Bài 9. Cho đường tròn (O), dây $AB = 24\text{cm}$, dây $AC = 20\text{cm}$, $\widehat{BAC} < 90^\circ$ và O nằm trong góc \widehat{BAC} . Gọi M là trung điểm của AC . Khoảng cách từ M đến AB bằng 8cm .

a) Chứng minh tam giác ABC cân.

b) Tính bán kính của đường tròn.

VẤN ĐỀ 4. ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN (PHẦN II)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. So sánh độ dài của đường kính và dây: Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

2. Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây

- Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.

- Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

3. Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây

- Trong một đường tròn:

+ Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.

+ Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

- Trong hai dây của một đường tròn:

+ Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.

+ Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 2. Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau

Phương pháp giải: Sử dụng các kiến thức sau:

- Trong một đường tròn:

+ Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.

+ Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

- Trong hai dây của một đường tròn:

+ Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.

+ Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

- Dùng phương pháp chứng minh hai tam giác bằng nhau

- Dùng quan hệ giữa cạnh và góc trong tam giác, quan hệ cạnh huyền và cạnh góc vuông...

• *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

Bài 1. Cho nửa đường tròn (O) , đường kính AB và một dây cung CD . Kẻ AE và BF vuông góc với CD lần lượt tại E và F . Chứng minh $CE = DF$.

Bài 2. Cho đường tròn (O) , đường kính AB . Kẻ hai dây AC và BD song song. Chứng minh $AC = BD$.

• *Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

Bài 3. Cho đường tròn (O) , dây cung AB và CD . Giao điểm K của các đường thẳng AB và CD nằm ngoài đường tròn. Vẽ đường tròn $(O; OK)$, đường tròn này cắt KA, KC lần lượt tại M và N . Chứng minh $KM < KN$.

Bài 4. Cho tam giác ABC nhọn và các đường cao BD, CE . Chứng minh:

a) B, D, C, E cùng thuộc một đường tròn.

b) $BC > DE$

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

- Bài 5.** Cho tam giác ABC , trực tâm H , nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD .
- Chứng minh $BHCD$ là hình bình hành.
 - Kẻ đường kính OI vuông góc với BC tại I . Chứng minh ba điểm I, H, D thẳng hàng.
 - Chứng minh $AH = 2OI$.
- Bài 6.** Cho đường tròn (O) có AB là đường kính. Vẽ hai dây AD và BC song song với nhau. Chứng minh:
- $AD = BC$
 - CD là đường kính của (O) .
- Bài 7.** Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và dây CD . Gọi H, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ A và B đến CD . Chứng minh $CH = DK$.
- Bài 8.** Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại trực tâm H .
- Chứng minh bốn điểm B, D, C, E cùng nằm trên một đường tròn. Xác định tâm I của đường tròn này.
 - Chứng minh $AB.AE = AC.AD$.
 - Gọi K là điểm đối xứng với H qua I . Chứng minh tứ giác $BHCK$ là hình bình hành.
 - Xác định tâm O của đường tròn đi qua các điểm A, B, K, C .
 - Chứng minh OI và AH song song.
- Bài 9.** Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn (O) . Điểm M thuộc cung BC không chứa A . Gọi D, E lần lượt đối xứng với M qua AB, AC . Tìm vị trí của M để độ dài đoạn thẳng DE lớn nhất.
- Bài 10.** Cho điểm A nằm trên đường tròn (O) có CB là đường kính, $AB < AC$. Vẽ dây AD vuông góc với BC tại H . Chứng minh:
- Tam giác ABC vuông tại A .
 - H là trung điểm của AD , $AC = CD$ và BC là tia phân giác của góc ABD .
 - $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$.

VẤN ĐỀ 5. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

Cho đường tròn $(O; R)$ và một đường thẳng bất kì. Gọi d là khoảng cách từ tâm O của đường tròn đến đường thẳng đó. Ta có bảng vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn:

Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn	Số điểm chung	Hệ thức giữa d và R
Đường thẳng và đường tròn cắt nhau	2	$d < R$
Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau	1	$d = R$
Đường thẳng và đường tròn không giao nhau	0	$d > R$

2. Định lý

Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Cho biết d, R xác định vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn hoặc ngược lại

Phương pháp giải: So sánh d và R dựa vào bảng vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn đã nêu trong phần Tóm tắt lý thuyết.

- Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:

Bài 1. Điền vào các chỗ trống (...) trong bảng sau (R là bán kính của đường tròn, d là khoảng cách từ tâm đến đường thẳng):

R	d	Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn
5 cm	3 cm
6 cm	Tiếp xúc nhau
4 cm	7 cm	

Bài 2. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(3;4)$. Hãy xác định vị trí tương đối của đường tròn $A(3;4)$ và các trục tọa độ.

Bài 3. Cho a, b là hai đường thẳng song song và cách nhau một khoảng 2 cm . Lấy O trên a và vẽ đường tròn $(O; 2\text{ cm})$. Chứng minh đường tròn này tiếp xúc với đường thẳng b .

- Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

Bài 4. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $B(2;4)$. Hãy xác định vị trí tương đối của đường tròn $(B; 2)$ và các trục tọa độ.

Bài 5. Cho a, b là hai đường thẳng song song và cách nhau một khoảng 3 cm . Lấy điểm O trên a và vẽ đường tròn $(O; 3\text{ cm})$. Chứng minh đường tròn này tiếp xúc với đường thẳng b .

Dạng 2. Xác định vị trí tâm đường tròn có bán kính cho trước và tiếp xúc với một đường thẳng cho trước

Phương pháp giải: Xác định xem tâm đường tròn cách đường thẳng cho trước một khoảng là bao nhiêu rồi sử dụng tính chất điểm cách đều một đường thẳng cho trước một khoảng cho trước.

- *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

Bài 6. Cho đường thẳng xy . Tâm của các đường tròn có bán kính bằng 1 cm và tiếp xúc với đường thẳng xy nằm trên đường nào?

- *Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

Bài 7. Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau, cách nhau một khoảng là h . Một đường tròn (O) tiếp xúc với a và b . Hỏi tâm O di động trên đường nào?

Dạng 3. Bài liên quan đến tính độ dài

Phương pháp giải: Nội tâm với tiếp điểm để vận dụng định lý về tính chất của tiếp tuyến và định lý Pitago.

- *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

Bài 8. Cho đường tròn tâm O bán kính 6 cm và một điểm A cách O là 10 cm . Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn (B là tiếp điểm). tính độ dài AB .

Bài 9. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây $AB = 1,6R$. Vẽ một tiếp tuyến song song với AB , cắt các tia OA, OB lần lượt tại M và N . Tính diện tích tam giác OMN

- *Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

Bài 10. Cho đường tròn $(O; 2\text{ cm})$ và một điểm A chạy trên đường tròn đó. Từ A vẽ tiếp tuyến xy . Trên xy lấy một điểm M sao cho $AM = 2\sqrt{3}\text{ cm}$. Hỏi điểm M di động trên đường nào?

Bài 11. Cho đường tròn $(O; 2\text{ cm})$. Cắt tuyến qua A ở ngoài (O) cắt (O) tại B và C . Cho biết $AB = BC$ và kẻ đường kính COD . Tính độ dài đoạn thẳng AD .

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 12. Cho đường thẳng xy đi qua điểm A nằm trong đường tròn $(O; R)$. Chứng minh đường thẳng xy và đường tròn $(O; R)$ cắt nhau.

Bài 13. Cho đường tròn $(O; 5\text{ cm})$ và điểm A sao cho $OA = 5\text{ cm}$. Đường thẳng xy đi qua điểm A . Chứng minh đường thẳng xy và đường tròn $(O; 5\text{ cm})$ cắt nhau.

Bài 14. Trên cùng mặt phẳng Oxy cho điểm $C(3; 4)$. Hãy xác định vị trí tương đối của đường tròn $(C; 2)$ và các trục tọa độ.

Bài 15. Cho đường thẳng a , tâm I của các đường tròn có bán kính 5 cm và tiếp xúc với đường thẳng a nằm trên đường nào?

Bài 16. Điểm A cách đường thẳng xy là 12 cm .

a) Chứng minh $(A;13\text{cm})$ cắt đường thẳng xy tại hai điểm phân biệt.

b) Gọi hai giao điểm của $(A;13\text{cm})$ với xy là B, C . Tính BC .

Bài 17. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Lấy C là điểm thuộc (O) , tiếp tuyến qua C là d . Kẻ AE, BF vuông góc với d , CH vuông góc với AB . Chứng minh $CE = CF$ và $CH^2 = AE.BF$.

VẤN ĐỀ 6. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN (PHẦN I)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Dấu hiệu 1. Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.

Dấu hiệu 2. Theo định nghĩa tiếp tuyến.

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Chứng minh một đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn

Phương pháp giải: Để chứng minh đường thẳng a là tiếp tuyến của $(O; R)$ tiếp điểm là C ta có thể làm theo các cách sau:

Cách 1: $OC \perp a$ tại C và $C \in (O)$.

Cách 2: Vẽ $OH \perp a$. Chứng minh $OH = OC = R$.

Cách 3: Vẽ tiếp tuyến a' của (O) . Ta chứng minh $a \equiv a'$.

- Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:

Bài 1. Cho tam giác ABC có $AB = 6\text{ cm}$, $AC = 8\text{ cm}$, $BC = 10\text{ cm}$. Vẽ đường tròn $(B; BA)$. Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn.

Bài 2. Cho tam giác ABC cân tại A , đường cao AH và BK cắt nhau tại I . Chứng minh:

- Đường tròn đường kính AI đi qua K .
- HK là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AI .

- Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

Bài 3. Cho tam giác ABC có hai đường cao BD , CE cắt nhau tại H .

- Chứng minh bốn điểm A, D, H, E cùng nằm trên đường tròn (O) .
- Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh ME là tiếp tuyến của (O) .

Bài 4. Cho đường thẳng d , điểm A nằm trên đường thẳng d , điểm B nằm ngoài đường thẳng d . Hãy dựng đường tròn (O) đi qua điểm B và tiếp xúc với đường thẳng d tại A .

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 5. Cho tam giác ABC cân tại A , nội tiếp đường tròn tâm O . Vẽ hình bình hành $ABCD$. Tiếp tuyến tại C của đường tròn cắt đường thẳng AD tại N . Chứng minh:

- Đường thẳng AD là tiếp tuyến của (O)
- Ba đường thẳng AC, BD, ON đồng quy.

Bài 6. Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn $(O; R)$, vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với (O) . Đường thẳng vuông góc với OB tại O cắt tia AC tại N . Đường thẳng vuông góc với OC tại O cắt tia AB tại M .

- Chứng minh tứ giác $AMON$ là hình thoi.
- Điểm A phải cách O một khoảng là bao nhiêu để MN là tiếp tuyến của (O) .

Bài 7. Cho (O) và d không cắt (O) . Dựng tiếp tuyến của (O) sao cho tiếp tuyến đó song song với d .

Bài 8. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Lấy M trên (O) và tiếp tuyến tại M cắt tiếp tuyến tại A và B của (O) ở C và D ; AM cắt OC tại E , BM cắt OD tại F .

a) Chứng minh $\widehat{COD} = 90^\circ$.

b) Tứ giác $MEOF$ là hình gì?

c) Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD .

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A , AH là đường cao. Gọi BD, CE là các tiếp tuyến của đường tròn $(A; AH)$ với D, E là các tiếp điểm. chứng minh:

a) Ba điểm D, A, E thẳng hàng.

b) DE tiếp xúc với đường tròn đường kính BC .

Bài 10. Cho điểm M nằm trên nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Vẽ tiếp tuyến xy . Kẻ AD, BC cùng vuông góc với xy (các điểm D, C nằm trên xy). Xác định vị trí của điểm M trên nửa đường tròn (O) sao cho diện tích tứ giác $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

VẤN ĐỀ 7. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN (PHẦN II)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Nhắc lại lý thuyết:

Dấu hiệu 1. Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.

Dấu hiệu 2. Theo định nghĩa tiếp tuyến.

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 2. Tính độ dài

Phương pháp giải: Nối tâm với tiếp điểm để vận dụng định lý về tính chất của tiếp tuyến và hệ thức lượng trong tam giác vuông.

• *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

Bài 1. Cho đường tròn (O) có dây AB khác đường kính. Qua O kẻ đường vuông góc với AB , cắt tiếp tuyến tại A của (O) ở điểm C .

a) Chứng minh CB là tiếp tuyến của đường tròn.

b) Cho bán kính của (O) bằng 15 cm và dây $AB = 24\text{ cm}$. Tính độ dài đoạn thẳng OC .

Bài 2. Cho đường tròn tâm O có bán kính $OA = R$, dây BC vuông góc với OA tại trung điểm M của OA .

a) Tứ giác $OCAB$ là hình gì? Vì sao?

b) Kẻ tiếp tuyến với đường tròn tại B , cắt đường thẳng OA tại E . Tính độ dài BE theo R .

• *Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

Bài 3. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Vẽ dây AC sao cho $\widehat{CAB} = 30^\circ$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm M sao cho $BM = R$. Chứng minh:

a) MC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

b) $MC^2 = 3R^2$.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông ở A , AH là đường cao, $AB = 8\text{ cm}$, $AC = 15\text{ cm}$. Gọi D là điểm đối xứng với B qua H . Vẽ đường tròn đường kính CD cắt AC ở E .

a) Chứng minh HE là tiếp tuyến của đường tròn.

b) Tính độ dài HE .

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 5. Cho đường tròn $(O; 6\text{ cm})$ và điểm A trên đường tròn. Qua A kẻ tiếp tuyến Ax sao cho $AB = 8\text{ cm}$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng OB .

b) Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với OB , cắt đường tròn (O) tại C . Chứng minh BC là tiếp tuyến của (O) .

Bài 6. Cho đường tròn $(O; 5\text{ cm})$, đường kính AB , tiếp tuyến Bx với đường tròn. Gọi C là một điểm trên đường tròn sao cho $\widehat{CAB} = 30^\circ$, tia AC cắt tia Bx tại E .

a) Chứng minh $BC^2 = AC \cdot CE$.

b) Tính độ dài đoạn BE .

Bài 7. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây $AB = 2a$. Vẽ một tiếp tuyến song song với AB , nó cắt OA và OB theo thứ tự tại M và N . Tính diện tích tam giác MON

VẤN ĐỀ 8. TÍNH CHẤT HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU (PHẦN I)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

- Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.
- Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
- Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm

2. Đường tròn nội tiếp tam giác

- Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác gọi là *đường tròn nội tiếp* tam giác, còn tam giác gọi là *ngoại tiếp* đường tròn.
- Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của các đường phân giác các góc trong tam giác.

3. Đường tròn bàng tiếp tam giác

- Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của một tam giác và tiếp xúc với phần kéo dài của hai cạnh còn lại gọi là *đường tròn bàng tiếp* tam giác.
- Với một tam giác có ba đường tròn bàng tiếp.
- Tâm của đường tròn bàng tiếp tam giác góc A là giao điểm của hai đường phân giác các góc ngoài tại B và C, hoặc là giao điểm của phân giác góc A và đường phân giác ngoài tại B (hoặc C).

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau, hai đường thẳng song song, hai đường thẳng vuông góc

Phương pháp giải: Dùng tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau.

* *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

Bài 1. Hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại A .

- Chứng minh $AO \perp BC$
- Chứng minh AO là đường trung trực của BC
- Vẽ đường kính CD của (O) . Chứng minh BD và OA song song.

Bài 2. Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính AB . Vẽ các tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn cùng phía đối với AB . Từ M trên nửa đường tròn (M khác A, B) vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt Ax và By lần lượt tại C và D .

- Chứng minh COD là tam giác vuông
- Chứng minh $MCMD = OM^2$
- Cho biết $OC = BA = 2R$. Tính AC và BD theo R

* *Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp*

Bài 3. Từ điểm A ở ngoài đường tròn $(O; R)$ kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là các tiếp điểm). Kẻ $BE \perp AC$ và $CF \perp AB$ ($E \in AC; F \in AB$), BE và CF cắt nhau tại H .

- Chứng minh tứ giác $BOCH$ là hình thoi

- b) Chứng minh ba điểm A, H, O thẳng hàng
- c) Xác định vị trí điểm A để H nằm trên đường tròn (O) .

Bài 4. Hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) cắt nhau tại M . Đường thẳng vuông góc với OA cắt MB tại C . Chứng minh $CM = CO$.

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 5. Hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) cắt nhau tại I . Đường thẳng qua I và vuông góc với IA cắt OB tại K . Chứng minh:

- a) $IK // OA$
- b) Tam giác IOK cân.

Bài 6. Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn (O) , kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Qua M thuộc cung nhỏ BC , kẻ tiếp tuyến với đường tròn (O) , nó cắt các tiếp tuyến AB và AC theo thứ tự ở D và E . Chứng minh chu vi tam giác ADE bằng $2AB$.

VẤN ĐỀ 9. TÍNH CHẤT HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU (PHẦN I)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

- Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.
- Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
- Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm

3. Đường tròn nội tiếp tam giác

- Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác gọi là *đường tròn nội tiếp* tam giác, còn tam giác gọi là *ngoại tiếp* đường tròn.
- Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của các đường phân giác các góc trong tam giác.

3. Đường tròn bàng tiếp tam giác

- Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của một tam giác và tiếp xúc với phần kéo dài của hai cạnh còn lại gọi là *đường tròn bàng tiếp* tam giác.
- Với một tam giác có ba đường tròn bàng tiếp.
- Tâm của đường tròn bàng tiếp tam giác của góc A là giao điểm của hai đường phân giác các góc ngoài tại B và C, hoặc là giao điểm của phân giác góc A và đường phân giác ngoài tại B (hoặc C).

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG BÀI TOÁN

Dạng 2. Chứng minh tiếp tuyến, tính độ dài, tính số đo góc

Phương pháp giải: Sử dụng các kiến thức sau:

1. Dùng tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau.
2. Dùng khái niệm đường tròn nội tiếp, bàng tiếp.
3. Dùng hệ thức lượng về cạnh và góc trong tam giác vuông.

* *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

Bài 1. Cho đường tròn (O) . Từ một điểm M ở ngoài (O) , vẽ hai tiếp tuyến MA và MB sao cho góc $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Biết chu vi tam giác MAB là 18 cm, tính độ dài dây AB .

Bài 2. Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm A ở ngoài đường tròn. Vẽ các tiếp tuyến AB, AC . Chứng minh $\widehat{BAC} = 60^\circ$ khi và chỉ khi $OA = 2R$.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 9\text{ cm}$, $AC = 12\text{ cm}$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC , G là trọng tâm của tam giác ABC . Tính độ dài IG .

* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

Bài 4. Cho đường tròn (O) . Từ một điểm M ở ngoài đường tròn (O) , vẽ hai tiếp tuyến ME và MF sao cho $\widehat{EMO} = 30^\circ$. Biết chu vi tam giác MEF là 30 cm, tính độ dài dây EF .

Bài 5. Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm I ở ngoài đường tròn. Vẽ các tiếp tuyến IB, IC .
Chứng minh rằng $\widehat{BIO} = 30^\circ$ khi và chỉ khi $OI = 2R$.

Bài 6. Cho tam giá EBC vuông tại E có $EB = 3\text{cm}$; $EC = 4\text{cm}$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác EBC , G là trọng tâm của tam giác EBC . Tính độ dài IG .

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 7. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài (O) . Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm).

- a) Chứng minh rằng OA vuông góc với BC ;
- b) Vẽ đường kính CD . Chứng minh BD và AO song song.
- c) Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC biết $OB = 2\text{ cm}$; $OA = 4\text{ cm}$.

Bài 8. Cho tam giác ABC cân tại A . I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc A . Gọi O là trung điểm của IK .

- a) Chứng minh bốn điểm B, I, C, K cùng thuộc một đường tròn (O) .
- b) Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn $(O; OK)$.
- c) Tính bán kính đường tròn (O) biết $AB = AC = 20\text{ cm}$; $BC = 24\text{ cm}$.

VẤN ĐỀ 10. LUYỆN TẬP TÍNH CHẤT HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

Nếu hai tiếp tuyến của đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

- Điểm đó cách đều hai tiếp điểm
- Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
- Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.

2. Đường tròn nội tiếp tam giác

- Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác gọi là *đường tròn nội tiếp tam giác* còn tam giác gọi là *ngoại tiếp* đường tròn.
- Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của các đường phân giác các góc trong tam giác.

3. Đường tròn bàng tiếp tam giác

- Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của một tam giác và tiếp xúc với phần kéo dài của hai cạnh còn lại gọi là *đường tròn bàng tiếp tam giác*.
- Với một tam giác có ba đường tròn bàng tiếp.
- Tâm của đường tròn bàng tiếp tam giác góc A là giao điểm của hai đường phân giác các góc ngoài tại B và C , hoặc là giao điểm của đường phân giác góc A và đường phân giác ngoài tại B (hoặc C).

B. BÀI TẬP TẬP LỚP

* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

Bài 1. Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Kẻ hai tiếp tuyến Ax và By (Ax, By nằm cùng phía đối với nửa đường tròn). Gọi M là một điểm thuộc nửa đường tròn (M khác A và B). Tiếp tuyến tại M với nửa đường tròn cắt Ax, By theo thứ tự ở C và D .

- a) Chứng minh $\widehat{COD} = 90^\circ$.
- b) Chứng minh 4 điểm B, D, M, O nằm trên một đường tròn. Chỉ ra bán kính của đường tròn đó.
- c) Chứng minh $CD = AC + BD$.
- d) Chứng minh tích $AC \cdot BD$ không đổi khi M thay đổi trên (O) .
- e) Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD .
- g) Gọi giao điểm của AD và BC là N . Chứng minh MN và AC song song.
- h) Gọi BN' là tia phân giác của \widehat{ABD} (N' thuộc OD). Chứng minh:

$$\frac{1}{BO} + \frac{1}{BD} = \frac{\sqrt{2}}{BN'}$$

* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

Bài 2. Cho đường tròn $(O; R)$. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của BC .

- a) Chứng minh ba điểm A, H, O thẳng hàng và các điểm A, B, C, O cùng thuộc một đường tròn.
- b) Kẻ đường kính BD của (O) . Vẽ $CK \perp BD$. Chứng minh: $AC \cdot CD = CK \cdot AO$.
- c) Tia AO cắt đường tròn (O) tại M (M nằm giữa A và O). Chứng minh M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .
- d) Gọi I là giao điểm của AD và CK . Chứng minh I là trung điểm của CK .

Bài 3. Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính AB . Điểm M bất kì thuộc $(O; R)$. Tiếp tuyến tại M và B cắt nhau tại D . Qua O kẻ đường thẳng song song với MB cắt tiếp tuyến qua M tại C , cắt tiếp tuyến qua B tại N .

- a) Chứng minh rằng tam giác CDN cân;
- b) Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (O) ;
- c) Chứng minh $AC \cdot BD$ không phụ thuộc vào M ;
- d) Gọi H là hình chiếu của M trên AB . Tia phân giác \widehat{HOM} cắt (O) tại K (K khác M).

Xác định vị trí điểm M sao cho $\frac{MH}{HK} = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 4. Cho đường tròn $(O; 3 \text{ cm})$ và điểm A có $OA = 6 \text{ cm}$. Kẻ các tiếp tuyến AB và AC của đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC .

- a) Tính độ dài đoạn thẳng OH ;
- b) Qua điểm M bất kì thuộc cung nhỏ BC , kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt AB và AC theo thứ tự tại E và F . Tính chu vi tam giác ADE ;
- c) Tính số đo góc DOE .

Bài 5. Cho tam giác MBC cân tại M . I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc M . O là trung điểm của IK .

- a) Chứng minh bốn điểm B, I, C, K cùng thuộc một đường tròn (O) ;
- b) Chứng minh MC là tiếp tuyến của đường tròn (O) ;
- c) Tính bán kính của đường tròn (O) biết $MB = MC = 10 \text{ cm}$; $BC = 12 \text{ cm}$.

VẤN ĐỀ 11. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tính chất của đường nối tâm

Đường nối tâm là trục đối xứng của hình tạo bởi hai đường tròn. Từ đó suy ra:

- Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm;
- Nếu hai đường tròn cắt nhau thì đường nối tâm là đường trung trực của dây chung.

2. Sự liên hệ giữa vị trí của hai đường tròn với đoạn nối tâm d và các bán kính R và r

Vị trí tương đối của hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ với $R > r$	Số điểm chung	Hệ thức giữa d, R và r
Hai đường tròn cắt nhau	2	$R - r < d < R + r$
Hai đường tròn tiếp xúc nhau	1	
- Tiếp xúc ngoài		$d = R + r$
- Tiếp xúc trong		$d = R - r$
Hai đường tròn không giao nhau	0	
- Ở ngoài nhau		$d > R + r$
- (O) đựng (O')		$d < R - r$
- (O) và (O') đồng tâm		$d = 0$

B. BÀI TẬP CẢ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Các bài toán có cho hai đường tròn tiếp xúc nhau

* Phương pháp giải:

- Vẽ đường nối tâm và chú ý rằng tiếp điểm nằm trên đường nối tâm, dùng hệ thức $d = R + r$.

- Nếu cần, có thể vẽ tiếp tuyến chung tại tiếp điểm.

* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

Bài 1. Cho đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A . Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC , $B \in (O)$, $C \in (O')$. Tiếp tuyến chung trong tại A cắt tiếp tuyến chung ngoài BC ở I .

- a) Chứng minh $\widehat{BAC} = 90^\circ$;
- b) Tính số đo $\widehat{OIO'}$;
- c) Tính độ dài BC , biết $OA = 9 \text{ cm}$; $OA' = 4 \text{ cm}$.

* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

Bài 2. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ tiếp xúc ngoài với nhau tại A . Vẽ tiếp tuyến chung ngoài BC , $B \in (O)$, $C \in (O')$.

- a) Chứng minh ABC là tam giác vuông;
- b) Tính số đo $\widehat{OMO'}$;
- c) Tính diện tích tứ giác $BCO'O$ theo R và r' ;
- d) Gọi I là trung điểm của OO' . Chứng minh rằng BC là tiếp tuyến của đường tròn $(I; IM)$.

Dạng 2. Các bài toán cho hai đường tròn cắt nhau

* *Phương pháp giải:* Vẽ dây chung của hai đường tròn rồi dùng tính chất đường nối tâm là đường trung trực của dây chung.

* *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

Bài 3. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B , trong đó OA là tiếp tuyến của đường tròn (O') . Tính độ dài dây cung AB biết $OA = 20\text{ cm}$; $O'A = 15\text{ cm}$.

* *Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

Bài 4. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Từ A vẽ đường kính AOC và AOD . Chứng minh ba điểm B, C, D thẳng hàng và vuông góc với AB .

Bài 5. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B . Gọi M là trung điểm của OO' . Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với AM , cắt các đường tròn (O) và (O') ở C và D . Chứng minh $AC = AD$.

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 6. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ tiếp xúc với nhau tại A . Vẽ một cát tuyến qua A cắt hai đường tròn tại B và C . Chứng minh các tiếp tuyến tại B và C song song với nhau.

Bài 7. Cho góc vuông \widehat{Oxy} . Lấy các điểm I và K thứ tự trên các tia Ox và Oy . Vẽ đường tròn $(I; OK)$ cắt tia Ox tại M (I nằm giữa O và M). Vẽ đường tròn $(K; OI)$ cắt tia Oy tại N (K nằm giữa O và N).

- a) Chứng minh hai đường tròn (I) và (K) luôn cắt nhau;
- b) Tiếp tuyến tại M của đường tròn (I) , tiếp tuyến tại N của của (K) cắt nhau tại C . Chứng minh tứ giác $OMCN$ là hình vuông;
- c) Gọi giao điểm của hai đường tròn là A và B . Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng;
- d) Giả sử I và K thứ tự di động trên các tia Ox, Oy sao cho $OI + OK = a$ không đổi. Chứng minh đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 8. Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm trên đường tròn đó. Trên đoạn OA lấy điểm B sao cho $OB = \frac{1}{3}OA$. Vẽ đường tròn đường kính AB .

- a) Chứng minh đường tròn đường kính AB tiếp xúc với đường tròn (O) cho trước.

- b) Vẽ đường tròn đồng tâm (O) với đường tròn (O) cho trước, cắt đường tròn đường kính AB tại C . Tia AC cắt hai đường tròn đồng tâm tại D và E (D nằm giữa C và E).
Chứng minh $AC = CD = DE$.

Bài 9. Cho đường tròn (O) đường kính AB , điểm C nằm giữa A và O . Vẽ đường tròn (I) có đường kính CB .

- a) Xét vị trí tương đối của hai đường tròn (O) và (I) ;
b) Kẻ dây DE của đường tròn (O) vuông góc với AC tại trung điểm H của AC . Tứ giác $ADCE$ là hình gì? Vì sao?
c) Gọi K là giao điểm của DB và đường tròn (I) . Chứng minh ba điểm E, C, K thẳng hàng.
d) Chứng minh HK là tiếp tuyến của đường tròn (I) .

ÔN TẬP CHỦ ĐỀ IV (PHẦN I)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Sự xác định đường tròn, tính chất đối xứng của đường tròn

a) Đường tròn tâm O bán kính R ($R > 0$) là hình gồm các điểm cách điểm O một khoảng bằng R.

b) Vị trí tương đối của một điểm đối với một đường tròn

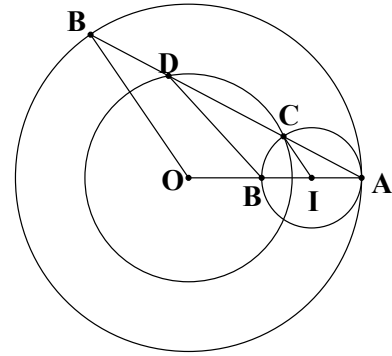
Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm M

- M nằm trên đường tròn $(O; R) \Leftrightarrow OM = R$
- M nằm trong đường tròn $(O; R) \Leftrightarrow OM < R$
- M nằm ngoài đường tròn $(O; R) \Leftrightarrow OM > R$

c) Qua ba điểm không thẳng hàng, ta vẽ được một và chỉ một đường tròn.

d) Tính chất đối xứng của đường tròn

- Đường tròn là hình có *tâm đối xứng*. Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của hình tròn đó.
- Đường tròn là hình có *trục đối xứng*. Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn.



2. Quan hệ đường kính và dây cung

a) So sánh độ dài của đường kính và dây: Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

b) Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây

- Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.
- Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

c) Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây

- Trong một đường tròn:
 - Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.
 - Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.
- Trong hai dây của một đường tròn:
 - Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.
 - Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

3. Vị trí tương đối của đường thẳng d và đường tròn

a) Cho đường tròn $(O; R)$ và đường thẳng a . Đặt $d = d(O; a)$. Ta có:

Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn	Số điểm chung	Hệ thức giữa d và R
Đường thẳng và đường tròn cắt nhau	2	$d < R$
Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau	1	$d = R$
Đường thẳng và đường tròn không giao nhau	0	$d > R$

b) Khi đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau thì đường thẳng gọi là tiếp tuyến của đường tròn. Điểm chung của đường thẳng và đường tròn gọi là tiếp điểm.

4. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến

- Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.
- Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm thì đường thẳng ấy là tiếp tuyến của đường tròn.

5. Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau

a) Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

Nếu hai tiếp tuyến của đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

- Điểm đó cách đều hai tiếp điểm
- Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
- Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.

b) Đường tròn nội tiếp tam giác

- Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác gọi là *đường tròn nội tiếp tam giác* còn tam giác gọi là *ngoại tiếp* đường tròn.
- Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của các đường phân giác các góc trong tam giác.

c) Đường tròn bàng tiếp tam giác.

- Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của một tam giác và tiếp xúc với phần kéo dài của hai cạnh còn lại gọi là *đường tròn bàng tiếp tam giác*.
- Với một tam giác có ba đường tròn bàng tiếp.
- Tâm của đường tròn bàng tiếp tam giác góc A là giao điểm của hai đường phân giác các góc ngoài tại B và C , hoặc là giao điểm của đường phân giác góc A và đường phân giác ngoài tại B (hoặc C).

6. Vị trí tương đối của hai đường tròn

a) Tính chất đường nối tâm

- Đường nối tâm của hai đường tròn là trục đối xứng của hình gồm cả hai đường tròn đó.
- Nếu hai đường tròn cắt nhau thì đường nối tâm là đường trung trực của dây chung.

- Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.

b) Vị trí tương đối của hai đường tròn

Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$. Đặt $OO' = d$. Ta có:

Vị trí tương đối của hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ với $R > r$	Số điểm chung	Hệ thức giữa d, R và r
Hai đường tròn cắt nhau	2	$R - r < d < R + r$
Hai đường tròn tiếp xúc nhau	1	
- Tiếp xúc ngoài		$d = R + r$
- Tiếp xúc trong		$d = R - r$
Hai đường tròn không giao nhau	0	
- Ở ngoài nhau		$d > R + r$
- (O) đựng (O')		$d < R - r$
- (O) và (O') đồng tâm		$d = 0$

c) Tiếp tuyến chung của hai đường tròn

- *Tiếp tuyến chung* của hai đường tròn là đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn đó.
- *Tiếp tuyến chung ngoài* là tiếp tuyến chung không cắt đoạn nối tâm.
- *Tiếp tuyến chung trong* là tiếp tuyến chung cắt đoạn nối tâm.

B. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính AB và dây AC không đi qua tâm O . Gọi H là trung điểm của AC .

- Tính \widehat{ACB} và chứng minh $OH \parallel BC$;
- Tiếp tuyến tại C của (O) cắt OH ở M . Chứng minh đường thẳng AM là tiếp tuyến của (O) tại A ;
- Vẽ CK vuông góc với AB tại K . Gọi I là trung điểm của CK và đặt $\widehat{CAB} = \alpha$. Chứng minh $IK = 2R \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$;
- Chứng minh ba điểm M, I, B thẳng hàng.

Bài 2. Cho đường tròn tâm O . Từ điểm E ở ngoài đường tròn kẻ hai tiếp tuyến EM và EN (M và N là các tiếp điểm). OE cắt MN tại H .

- Chứng minh OE vuông góc với MN ;
- Vẽ đường kính NOB . Chứng minh $OBNH$ là hình thang;
- Cho $ON = 2\text{cm}$ và $OE = 4\text{cm}$. Tính độ dài các cạnh và diện tích tam giác EMN .

Bài 3. Cho đoạn thẳng AB , điểm C nằm giữa A và B . Vẽ về một phía của AB các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự là AB, AC, CB . Đường thẳng vuông góc với AB tại C cắt

nửa đường tròn lớn tại D . DA, DB cắt các đường tròn có đường kính AC, CB theo thứ tự ở M và N .

- Tứ giác $DMCN$ là hình gì? Vì sao?
- Chứng minh hệ thức: $DM \cdot DA = DN \cdot DB$;
- Chứng minh MN là tiếp tuyến chung của các nửa đường tròn có đường kính AC và CB ;
- Điểm C ở vị trí nào trên AB thì MN có độ dài lớn nhất.

Bài 4. Cho đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2R$. Gọi I là trung điểm của BO , qua I kẻ dây CD vuông góc với OB . Tiếp tuyến của (O) tại C cắt AB tại E .

- Tính độ dài OE theo R ;
- Tứ giác $ACED$ là hình gì? Tại sao?
- Chứng minh ED là tiếp tuyến của đường tròn (O) ;
- Chứng minh D là trực tâm của tam giác CDE .

Bài 5. Cho AB và CD là hai đường kính vuông góc với đường tròn $(O; R)$. Trên tia đối của tia CO lấy điểm S . SA cắt đường tròn (O) tại M . Tiếp tuyến tại M với đường tròn (O) cắt CD tại E , BM cắt CD tại F .

- Chứng minh $EM \cdot AM = MF \cdot OA$;
- Chứng minh $ES = EM = EF$;
- Cho SB cắt đường tròn (O) tại I . Chứng minh A, I, F thẳng hàng;
- Cho $EM = R$, tính $FA \cdot SM$ theo R ;
- Kẻ MH vuông góc với AB . Xác định vị trí điểm S sao cho diện tích tam giác MHD đạt giá trị lớn nhất.

ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 4 (PHẦN II)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Xem lại lý thuyết ở Ôn tập chủ đề 4 (Phần I)

B. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Bài 1.** Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài tại A . Kẻ tiếp tuyến chung ngoài DE , $D \in (O)$, $E \in (O')$. Tiếp tuyến chung trong tại A cắt ED tại I . Gọi M là giao điểm của OI với AD , N là giao điểm của AE với $O'I$.
- Tứ giác $AMIN$ là hình gì? Tại sao?
 - Chứng minh hệ thức $IM \cdot IO = IN \cdot IO'$;
 - Chứng minh OO' là tiếp tuyến của đường tròn đường kính DE ;
 - Tính độ dài DE theo R và R' .
- Bài 2.** Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính AB . Qua A và B vẽ lần lượt hai tiếp tuyến (d) và (d') với đường tròn (O) . Một đường thẳng qua O cắt đường thẳng (d) ở M và cắt đường thẳng (d') ở P . Từ O vẽ một tia vuông góc với MP và cắt đường thẳng (d') ở N .
- Chứng minh $OM = OP$ và ΔNMP cân;
 - Hạ $OI \perp MN$. Chứng minh $OI = R$ và MN là tiếp tuyến của đường tròn (O) ;
 - Chứng minh $AM \cdot BN = R^2$;
 - Tìm vị trí của M để diện tích tứ giác $AMNB$ là nhỏ nhất.
- Bài 3.** Cho nửa đường tròn (O) , đường kính $AB = 2R$, điểm C thuộc nửa đường tròn. Kẻ phân giác BI của góc ABC (I thuộc đường tròn (O)), gọi E là giao điểm của AI và BC .
- Tam giác ABE là tam giác gì? Vì sao?
 - Gọi K là giao điểm của AC và BI . Chứng minh $EK \perp AB$;
 - Gọi F là điểm đối xứng với K qua I . Chứng minh rằng AF là tiếp tuyến của đường tròn (O) ;
 - Khi điểm C di chuyển trên đường tròn thì điểm E di chuyển trên đường nào?
- Bài 4.** Cho đường tròn (O) đường kính AB , điểm C nằm giữa A và B . Vẽ đường tròn (I) có đường kính CB .
- Xét vị trí tương đối của đường tròn (O) và (I) ;
 - Kẻ dây DE của đường tròn (O) vuông góc với AC tại trung điểm H của AC . Tứ giác $ADCE$ là hình gì? Vì sao?
 - Gọi K là giao điểm của DB với (I) . Chứng minh rằng ba điểm E, C, K thẳng hàng;
 - Chứng minh rằng HK là tiếp tuyến của đường tròn (I) .
- Bài 5.** Cho đường tròn $(O; R)$. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của BC .
- Chứng minh ba điểm A, H, O thẳng hàng và các điểm A, B, C, O cùng thuộc một đường tròn;
 - Kẻ đường kính BD của đường tròn (O) . Vẽ $CK \perp BD$. Chứng minh $AC \cdot CD = CK \cdot AO$;
 - Tia AO cắt đường tròn (O) tại M (M nằm giữa A và O). Chứng minh M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC ;
 - Gọi I là giao điểm của AD và CK . Chứng minh rằng I là trung điểm của CK .

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông góc tại đỉnh A , đường cao AH . Đường tròn đường kính BH cắt AB tại điểm D và đường tròn đường kính CH cắt cạnh AC tại điểm E . Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng BH, CH .

- Chứng minh bốn điểm A, D, H, E nằm trên một đường tròn. Xác định hình dạng của tứ giác $ADHE$;
- Chứng minh hai đường tròn đường kính BH và CH tiếp xúc ngoài với nhau tại điểm H và AH là tiếp tuyến chung của hai đường tròn;
- Chứng minh DE là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn;
- Cho biết $AB = 6 \text{ cm}$, $AC = 8 \text{ cm}$. Tính độ dài đoạn thẳng DE ?

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

**CHỦ ĐỀ I. CĂN BẬC HAI. CĂN BẬC BA
VẤN ĐỀ 1.**

Bài 1. Căn bậc hai của các số đã cho lần lượt là: $0; \pm 8; \pm \frac{3}{4}; \pm 0,2$

Căn bậc hai số học của các số đã cho lần lượt là: $0; 8; \frac{3}{4}; 0,2$.

Bài 2. a) 144; b) Không tồn tại; c) $\frac{8}{7}$; d) $\frac{1}{75}$;

Bài 3.

a) 3; c) - 3; e) $-\frac{3}{4}$;
b) $\frac{2}{5}$; d) - 6; g) 7.

Bài 4. a) 4; b) 3,1; c) $\frac{1}{6}$; d) - 2.

Bài 5. a) $x = \pm 4$; b) $x = \pm \sqrt{13}$; c) Không có giá trị nào của x ; d) $x = 25$;
e) $x = 36$; g) $x = -3$ hoặc $x = 5$.

Bài 6. Căn bậc hai của các số đã cho lần lượt là: $\pm 9; \pm 0,5; \pm 1,2; \pm \frac{11}{9}$.

Căn bậc hai số học của các số đã cho lần lượt là: $9; 0,5; 1,2; \frac{11}{9}$.

Bài 7. a) 169; b) Không tồn tại; c) $\frac{1}{10}$; d) $\frac{6}{125}$.

Bài 8. a) 11; b) $\frac{4}{5}$; c) - 8; d) 2; e) $-\frac{1}{4}$; g) $\frac{3}{5}$.

Bài 9. a) 1; b) 4,65; c) $-\frac{2}{3}$; d) 6.

Bài 10. a) $x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$; b) $x \in \emptyset$; c) $x = \frac{256}{9}$; d) Không có giá trị nào của x ;
e) $x = 17$; g) $x = 6$ hoặc $x = -2$.

Bài 11.

a) $-2 < \sqrt{3}$; b) $3 > 2\sqrt{2}$; c) $11 > \sqrt{99}$;

d) $25 < 18 + 2\sqrt{17}$; e) $3 > \sqrt{15} - 1$; g) $1 - \sqrt{3} < \sqrt{0,2}$.

Bài 12. a) $x \geq 36$; b) $0 \leq x \leq 1$; c) $x \leq -35$; d) $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$.

Bài 13. a) $\Leftrightarrow 2x \geq x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$; b) $\Leftrightarrow 0 \leq 2x \leq x^2 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x \geq 2$.

Bài 14. a) $2 < 1 + \sqrt{2}$; b) $3\sqrt{11} < 12$; c) $1 > \sqrt{3} - 1$; d) $\sqrt{3} > 2 - \sqrt{5}$;
e) $-10 < -2\sqrt{23}$; g) $-3\sqrt{29} < -15$.

Bài 15. a) $x \geq 24$; b) $-1 \leq x < 3$; c) $x < -31$; d) $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$.

Bài 16. Căn bậc hai của các số đã cho lần lượt là: ± 15 ; ± 18 ; $\pm \frac{13}{10}$; $\pm \frac{7}{17}$; $\pm 1,5$; $\pm 0,4$.

Căn bậc hai số học của các số đã cho lần lượt là: 15 ; 18 ; $\frac{13}{10}$; $\frac{7}{17}$; $1,5$; $0,4$.

Bài 17. a) 49 ; b) $\frac{9}{16}$; c) $\frac{3}{2}$; d) $\frac{1}{8}$.

Bài 18. a) 5 ; b) $\frac{7}{5}$; c) -111 ; d) 13 ; e) 7 ; g) $-\frac{1}{400}$.

Bài 19. a) 12 ; b) $-\frac{7}{20}$; c) $-\frac{11}{4}$; d) $-\frac{13}{4}$.

Bài 20. a) $x = \pm 14$; b) $x = \pm \frac{1}{\sqrt{15}}$; c) $x = \pm 18$; d) Không có giá trị nào của x ;

e) $x = 7$; g) $x = \frac{100}{9}$.

Bài 21. a) $x = \frac{290}{3}$; b) $x = \frac{19}{3}$ hoặc $x = -\frac{17}{3}$; c) Không có giá trị nào của x ;

d) $x = \frac{9}{4}$; e) $x = 16$; g) $x = \frac{13}{4}$.

Bài 22. a) $0 \leq x \leq 484$; b) $x > \frac{37}{2}$; c) $x \geq 22$; d) Không có giá trị nào của x .

Bài 23. a) $4 > 1 + \sqrt{7}$; b) $2\sqrt{5} < 8$; c) $-6 < -2\sqrt{7}$; d) $4 > \sqrt{23} - 1$;
e) $\sqrt{0,5} > \sqrt{3} - 2$;

g) So sánh $(\sqrt{2015} + \sqrt{2018})^2$ và $(\sqrt{2016} + \sqrt{2017})^2$. Từ đó quy về so sánh:

$$\sqrt{2015} \cdot \sqrt{2018} = \sqrt{(2016-1) \cdot 2018} = \sqrt{2016 \cdot 2018 - 2018} \text{ và}$$

$$\sqrt{2016} \cdot \sqrt{2017} = \sqrt{(2018-1) \cdot 2016} = \sqrt{2016 \cdot 2018 - 2016}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2015} + \sqrt{2018} < \sqrt{2016} + \sqrt{2017}$$

Bài 24. Giả sử $\exists m, n \in \mathbb{Z}; (m, n) = 1$ và $\sqrt{3} = \frac{m}{n} \Rightarrow m^2 = 3n^2 \Rightarrow m^2 : 3 \Rightarrow m : 3 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : m = 3k$

$$\Rightarrow 9k^2 = 3n^2 \Rightarrow 3k^2 = n^2 \Rightarrow n^2 : 3 \Rightarrow n : 3 \Rightarrow (m, n) \neq 1. \text{ Vô lý.}$$

Chứng minh tương tự ta được $\sqrt{7}$ là số vô tỷ.

Bài 25.

a) Đặt $y = \sqrt{x+2} \Rightarrow y^2 = x+2 \Rightarrow x = y^2 - 2 \Rightarrow A = y^2 - 2y - 2;$

b) Ta có: $A = (y-1)^2 - 3 \geq -3$. Từ đó tìm được $A_{\min} = -3$ tại $y = 1$ hay $x = -1$.

Bài 26. a) Ta có: $1 > \frac{1}{\sqrt{100}}; \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{100}}; \dots; \frac{1}{\sqrt{99}} > \frac{1}{\sqrt{100}} \Rightarrow \text{đpcm.}$

b) Ta có: $\sqrt{4} < 3 \Rightarrow \sqrt{4+\sqrt{4}} < \sqrt{4+3} < 3$
 $\Rightarrow \sqrt{4+\sqrt{4+\sqrt{4}}} < \sqrt{4+3} < 3$
 $\Rightarrow \sqrt{4+\sqrt{4+\sqrt{4+\dots\sqrt{4}}}} < \sqrt{4+3} < 3$

VẤN ĐỀ 2.

Bài 1. a) $-\frac{8}{15};$ b) 128; c) $\frac{21}{20};$ d) $\frac{12}{5}.$

Bài 2. a) 5; b) 4; c) 7; d) 1.

Bài 3. a) Ta có: $11 + 6\sqrt{2} = 9 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} + 2 = (3 + \sqrt{2})^2;$

b) Ta có: $8 - 2\sqrt{7} = 7 - 2 \cdot \sqrt{7} \cdot 1 + 1 = (\sqrt{7} - 1)^2;$

c) Áp dụng kết quả câu a)

d) Áp dụng kết quả câu b).

Bài 4. a) $2\sqrt{2};$ b) $-2\sqrt{5};$ c) $6\sqrt{5};$ d) $4\sqrt{5};$

Bài 5. a) 1; b) 2,5; c) -1; d) 90.

Bài 6. a) 3; b) 5; c) 8; d) 6.

Bài 7. Tương tự bài 3.

Bài 8. a) 4; b) 12; c) -4 ; d) $4\sqrt{3}$.

Bài 9. a) $-50a$; b) $10a$; c) $10a^2$; d) $-15a^3$.

Bài 10. a) $3x+2$; b) $4x+3$; c) $3\sqrt{x}-3$; d) $\begin{cases} 1 \text{ khi } x > 2 \\ -1 \text{ khi } x < 2 \end{cases}$

Bài 11. a) $-32a$; b) $11a$; c) $11a^2$; d) $-33a^3$.

Bài 12. a) $3x+1$; b) $4x-3$; c) $4\sqrt{x}-5$; d) $\begin{cases} 1 \text{ khi } x > -2 \\ -1 \text{ khi } x < -2 \end{cases}$

Bài 13. a) $-0,63$; b) $\frac{1}{30}$; c) 86; d) -13 .

Bài 14. a) 22; b) $-8\sqrt{6}$; c) 3; d) 8.

Bài 15. Tương tự bài 3.

Bài 16. a) $2\sqrt{5}$; b) -2 ; c) $2\sqrt{2}$; d) 6.

Bài 17. a) $\begin{cases} 10a \text{ khi } a \geq 0 \\ -6a \text{ khi } a < 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3a^3 \text{ khi } a \geq 0 \\ -12a^3 \text{ khi } a < 0 \end{cases}$

Bài 18. a) 6; b) 2.

Bài 19. a) $\sqrt{a}+2$; b) $6\sqrt{6}$.

VẤN ĐỀ 3.

Bài 1. a) $x \geq 2$; b) $x \leq \frac{7}{6}$; c) $x < \frac{1}{3}$; d) $x \geq \frac{2}{3}$.

Bài 2. a) $\frac{3}{5} \leq x \leq 6$; b) $2 \leq x < 5$; c) $x \geq 9; x \leq -1$; d) $-4 \leq x \leq 4$.

Bài 3. a) $x \geq \frac{3}{2}$; b) $x \leq 0$; c) $x \leq \frac{1}{4}$; d) $x \in \mathbb{R}$.

Bài 4. a) $x > 1$; b) $x \leq -7$; c) $3 \leq x < 4$; d) $x > \frac{2}{3}$.

Bài 5. a) $x \leq 2$ hoặc $x \geq 6$; b) $x \leq -1$ hoặc $x \geq 5$;

c) $x \leq -3$ hoặc $x \geq 3$; d) $-1 \leq x \leq 1$.

Bài 6. a) $x = 175$; b) $x \in \emptyset$; c) $x = \frac{1}{2}$; d) $x = 3$;

e) $x = 1$ hoặc $x = \frac{5}{3}$. g) $x = 2$;

Bài 7. a) $x = 0$; b) $x = 1$; c) $x = \frac{1}{10}$; d) $x = 3$;

e) $x = 5$ hoặc $x = -\frac{7}{3}$. g) $x = 4$.

Bài 8. a) $x \leq -2$; b) $x \in \mathbb{R}$; c) $x \in \mathbb{R}$; d) $x = 2$.

Bài 9. a) $x \geq -7$; b) $x \leq 1$ hoặc $x \geq 2$; c) $-3 \leq x < 5$; d) $x < 2$; $x > 3$.

Bài 10. a) $x = 0$; b) $x \in \emptyset$; c) $x = \frac{7}{2}$; d) $x = 0$ hoặc $x = 3$.

Bài 11. a) $x \in \emptyset$; b) $x = -\frac{1}{9}$; c) $x = 3$; d) $x = \frac{3}{2}$.

Bài 12.

a) Cách 1. Ta có:

$$(x + y)^2 = 1 + 2xy \leq 1 + x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow \text{đpcm}$$

Cách 2. Sử dụng BĐT Cauchy – Schwartz:

$$(ab + cd)^2 \leq (a^2 + c^2) \cdot (b^2 + d^2).$$

b) Cách 1. Theo BĐT AM – GM, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z} \right) \geq \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{xz}} \end{aligned}$$

Cách 2. Xét hiệu:

$$\begin{aligned} VT - VP &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{z}} \right)^2 \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{z}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Bài 13. a) $A \geq |2x - 1 + 3 - 2x| = 2$; $A_{\min} = 2$ khi $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}$.

b) Áp dụng $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$. Ta có:

$$B = \sqrt{\left(\frac{11}{7} - 7x\right)^2 + \frac{320}{49}} + \sqrt{\left(\frac{11}{7} + 7x\right)^2 + \frac{320}{49}} \geq 6$$

Từ đó $B_{\min} = 6$ tại $x = 0$.

Bài 14. Ta có: $(\sqrt{x-1}-1)^2 + (\sqrt{y-2}-2)^2 + (\sqrt{z-3}-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2; y = 6; z = 12$.

VẤN ĐỀ 4.

Bài 1. a) 60; b) 6; c) 20; d) 26.

Bài 2. a) $\frac{3}{13}$; b) $\frac{5}{4}$; c) 10; d) 5.

Bài 3. a) 2; b) 12; c) 2; d) $36 - 36\sqrt{2} + 27\sqrt{3}$.

Bài 4. a) $\frac{\sqrt{30}}{3}$; b) $\frac{4}{7}$; c) 10; d) $\frac{7-12\sqrt{3}}{3}$.

Bài 5. a) 80; b) $\frac{9}{10}$; c) 110; d) 26.

Bài 6. a) $\frac{5}{8}$; b) $\frac{5}{3}$; c) 3; d) $\frac{56}{9}$.

Bài 7. a) 3; b) 20; c) $4 + 2\sqrt{6}$; d) $\sqrt{2}$.

Bài 8. a) $\frac{8}{11}$; b) 0; c) $\frac{2}{3}$; d) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Bài 9. a) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; c) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$; d) $\sqrt{2} - 2$.

Bài 10. a) $-\sqrt{a}$; b) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; c) $\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; d) $\frac{1-\sqrt{a}}{2\sqrt{a}-1}$.

Bài 11. a) $\frac{\sqrt{21}}{7}$; b) $\frac{\sqrt{10}}{2}$; c) -1; d) 4.

Bài 12. a) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; b) \sqrt{a} ; c) 0 d) $\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

Bài 13. a) 6; b) 25; c) $\frac{3}{14}$; d) $\frac{13}{9}$.

Bài 14. a) 22; b) 0; c) 60; d) $\frac{196}{45}$.

Bài 15. a) $12 - 5\sqrt{6}$; b) 7; c) $2\sqrt{2}$; d) $4\sqrt{3} - 7\sqrt{2}$.

Bài 16. a) $x - \sqrt{3}$; b) $\frac{1}{\sqrt{x}+2}$; c) $\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}$; d) $\frac{1}{x+\sqrt{5}}$.

VẤN ĐỀ 5.

Bài 1. a) $\frac{\sqrt{10}}{2}$; b) 1; c) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$; d) 2015.

Bài 2. a) 66; b) 1,6; c) $-0,16$; d) 28.

Bài 3. a) $27-24\sqrt{5}$; b) $6\sqrt{5}-9$.

Bài 4. a) $36(1-a)$; b) $-a^2$; c) $\frac{a}{2}$; d) $12a$.

Bài 5. a) $\frac{\sqrt{ab}-2b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; b) $\frac{2\sqrt{a}+3\sqrt{b}}{2\sqrt{a}-3\sqrt{b}}$.

Bài 6. a) $9-6a-5a^2$; b) $\frac{3}{4}(3-a)$; c) $3y$; d) $\frac{-b^2}{2\sqrt{2a}}$.

Bài 7. a) $-\sqrt{a}$; b) $x+\sqrt{2}$; c) $\frac{1}{\sqrt{x+3}}$; d) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

Bài 8. a) $x=\frac{1}{2}$; b) $x=-\frac{3}{2}; x=\frac{7}{2}$; c) $x=2$ hoặc $x=-3$ d) $x=9$.

Bài 9. a) $x=-1$ hoặc $x=9$; b) $x=6$; c) $x=3$ d) $x=28$.

Bài 10. a) $x=-1$; b) $x=\frac{12}{7}$; c) $x=2$; d) $x=\frac{34}{9}$

Bài 11. a) $4\sqrt{10}$; b) $\frac{5}{12}$; c) 15; d) $\frac{8}{5}$.

Bài 12. a) 3; b) $\frac{-\sqrt{6}}{2}$; c) $6+4\sqrt{5}$; d) 4.

Bài 13. a) $\frac{|\sqrt{x}-1|}{\sqrt{x}+1}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{x-y}$; c) $\frac{1}{x+\sqrt{7}}$; d) $\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

Bài 14. a) $x=-2, x=12$; b) $x=-1$; c) $x=\frac{3}{5}$; d) $x=\frac{105}{16}$.

Bài 15. a) Vô nghiệm; b) $x=-1$; c) $x=\frac{1}{2}$; d) $x=\frac{3}{2}$.

Bài 16. Ta có: $x^4+5=(x^4+4)+1 \geq 2\sqrt{x^4+4} \Rightarrow \frac{x^4+5}{\sqrt{x^2+4}} \geq 2$.

Dấu “=” không xảy ra nên ta có đpcm.

VẤN ĐỀ 6.

Bài 1. a) $x\sqrt{7}$; b) $-2y\sqrt{2}$; c) $5x\sqrt{x}$; d) $4y^2\sqrt{3}$.

Bài 2. a) $\sqrt{13x^2}$; b) $-\sqrt{2x^2}$; c) $\sqrt{15x}$; d) $-\sqrt{-15x}$.

Bài 3. a) $13x$; b) $-2y\sqrt{3}$; c) $9x\sqrt{9}$; d) $4y^4\sqrt{3}$.

Bài 4. a) $\sqrt{13x^2}$; b) $-\sqrt{3x^2}$; c) $2\sqrt{7y}$; d) $-2\sqrt{-7y}$.

Bài 5. a) $5\sqrt{2} > 4\sqrt{3}$; b) $\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{6}} > 6\sqrt{\frac{1}{37}}$;

c) $2\sqrt{29} < 3\sqrt{13}$; d) $\frac{5}{4}\sqrt{2} > \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Bài 6. a) $2\sqrt{6}$; $\sqrt{29}$; $4\sqrt{2}$; $3\sqrt{5}$. b) $\sqrt{38}$; $2\sqrt{14}$; $3\sqrt{7}$; $6\sqrt{2}$.

Bài 7. a) $3\sqrt{5} > 2\sqrt{7}$; b) $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} > 6\sqrt{\frac{1}{14}}$;

c) $3\sqrt{21} > 2\sqrt{47}$; d) $\frac{5}{9}\sqrt{3} < \frac{2}{7}\sqrt{14}$.

Bài 8. a) $7\sqrt{2}$; $5\sqrt{2}$; $2\sqrt{8}$; $\sqrt{28}$. b) $5\sqrt{30}$; $2\sqrt{40}$; $3\sqrt{8}$; $2\sqrt{5}$.

Bài 9. a) $4\sqrt{3}$; b) $-7\sqrt{a}$.

Bài 10. a) $-8a$; b) $-9a^3$; c) $2\sqrt{3}$; d) 0.

Bài 11. a) $-4\sqrt{6}$; b) $-4a$.

Bài 12. a) $7a$; b) $-2x$; c) $2x$; d) $-2x$.

Bài 13. a) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; b) $\frac{x\sqrt{5}}{5}$; c) $\frac{a\sqrt{5ab}}{7b}$; d) $7\sqrt{-3xy}$.

Bài 14. a) $2\sqrt{5}$; b) $\frac{-\sqrt{6}}{3}$; c) $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}$; d) $2-\sqrt{3}$.

Bài 15. a) -115 ; b) $\frac{1}{2}$; c) 1; d) $\frac{10}{7}$.

Bài 16. a) $\frac{\sqrt{14}}{7}$; b) $\frac{x\sqrt{31}}{31}$; c) $\frac{b\sqrt{5b}}{7a}$; d) $-7\sqrt{13xy}$.

Bài 17. a) $\sqrt{5}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\frac{-3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{19}$; d) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Bài 18. a) $\sqrt{2}$; b) 4; c) -1; d) $\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-2$.

Bài 19. a) $\sqrt{5}$; b) $-19\sqrt{11}-\sqrt{7}$; c) 14; d) $\frac{-2\sqrt{11}+3\sqrt{7}}{19}$.

Bài 20. a) $5a^2$; b) x ; c) -1; d) 6.

Bài 21. a) 25; b) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; c) $2-2\sqrt{6}$; d) -2.

Bài 22. a) $\sqrt{10}$; b) $\frac{23\sqrt{3}}{15}$; c) $4\sqrt{7}$; d) $\sqrt{48}$.

Bài 23. a) $\frac{1}{2}$; b) 2; c) 0; d) 2.

Bài 24. a) $x=9$; b) $x=4$; c) $x=64$; d) $x=6$.

Bài 25. a) $x=-\frac{3}{2}$; $x=\frac{7}{2}$. b) $x=9$; c) $x=2$; d) $x=3$.

Bài 26. a) $x=y=0$; b) $x=0; y=4; z=2$;

Bài 27. $\sqrt{n}-1$.

Bài 28. $A > |1-\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}+1| = 2$. Dấu “=” xảy ra khi $1 \leq x \leq 2$.

Bài 29. Chú ý: $\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$.

Bài 30. Xét $\left(\frac{2002}{\sqrt{2003}}-\sqrt{2003}\right)+\left(\frac{2003}{\sqrt{2002}}-\sqrt{2002}\right)=\frac{1}{\sqrt{2002}}-\frac{1}{\sqrt{2003}} > 0 \Rightarrow \text{đpcm}$.

VẤN ĐỀ 7.

Bài 1. a) $8\sqrt{2}$; b) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$; c) $\sqrt{3}$; d) 5.

Bài 2. a) $6\sqrt{a}+\sqrt{5}$; b) $2\sqrt{a}$;

Bài 3. a) $\frac{7\sqrt{a}}{6}$; b) 22; c) 2; d) 10.

Bài 1. a) 3; b) $\frac{1}{5}$; c) $4a$; d) $-2ab^2$

Bài 2. a) $11\sqrt[3]{3}$; b) 2

Bài 3. a) $A=1$; b) $B=4$

Bài 5. a) 20; b) 27; c) $\frac{3-\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}}{2}$; d) $5x+1$

Bài 6. a) $\sqrt{5}+1$; b) $\sqrt{3}+1$; c) -1 ; d) $18\sqrt[3]{3}+2$

Bài 7. a) $2\sqrt{2}$; b) 3; c) -1 ; d) 2

Bài 8. a) $A > B$; b) $A > B$

Bài 9: $A < B$

Bài 11. a) $A > B$; b) $A > B$; c) $A < B$; d) $A < B$

Bài 10. a) $x > -63$; b) $x > -1$

Bài 12. $A = B$

Bài 13. a) $x < -\frac{61}{12}$; b) $x > \frac{2}{9}$

Bài 14. a) $x = 13$; b) $x = \frac{10}{3}$

Bài 15. a) $x = 3$; b) $x = -14$; c) $x = 5$

Bài 16. a) $\{0; 1; 2\}$; b) $\{-6; -5; -4\}$

Bài 17. a) $x = 1$; b) $x = -\frac{15}{2}$; c) $x = 2$

Bài 18. a) 8; b) $-\frac{1}{5}$; c) $-\frac{7}{6}ab^2$; d) $-4a^2b^2$

Bài 19. a) 6; b) $\frac{45}{8}-\sqrt{3}$; c) $x+1$; d) $2x+1$

Bài 20. a) 18; b) 7; c) -3 ; d) $6\sqrt[3]{16}+2$

Bài 21. a) 2; b) $2\sqrt{2}$; c) $\sqrt{3}+1$; d) -2

Bài 22. a) $\sqrt{2}+1$; b) $\sqrt{3}-1$; c) 5; d) 1

Bài 23. a) $x = 0$; b) $x = \frac{29}{3}$

Bài 24. a) $\{1; 2; 3\}$; b) $\{-2; -1\}$

Bài 25. a) $x = 1$; b) $x = -2, x = 7$

ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 1 (PHẦN 1)

Bài 1. a) $x \leq \frac{2}{3}$; b) $x \in \mathbb{R}$; c) $x \in \mathbb{R}$; d) $x \in \mathbb{R}$; e) $x > -\frac{3}{2}$; g) $1 \leq x \leq 2$

Bài 2. a) $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$; b) $3 \leq x < 5$; c) $a \leq -2$ hoặc $x \geq 2$; d) $x \geq 0$; e) $x \leq 0$ và $x \neq 1$; g) $x \geq 0$ và $x \neq 4$

Bài 3. a) $5\sqrt{3}$; b) $-10\sqrt{2}$; c) $-6\sqrt{3}$; d) $-19\sqrt{11} - \sqrt{7}$

Bài 4. a) $-8\sqrt{2}$; b) $\frac{\sqrt{6}}{6}$; c) $6\sqrt{2}$; d) $\frac{23\sqrt{3}}{15}$

Bài 5. a) $\frac{23}{5}$; b) 6; c) -3; d) 1

Bài 6. a) -1; b) 10; c) 6; d) 21

Bài 7. a) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$; b) $\sqrt{6}$; c) $7 + 4\sqrt{3}$; d) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$; e) $3 + 2\sqrt{2}$; g) $\frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{2}$

Bài 8. a) -2; b) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$; c) $\frac{23\sqrt{3}}{15}$; d) 4

Bài 9. a) 1; b) -7; c) $\sqrt{2} - 1$; d) $\sqrt{2}$

Bài 10. a) $\sqrt{10}$; b) 14; c) 4; d) $1 + \sqrt{5}$

Bài 11. a) $x - 2$; b) $x = 15$; c) $x = -1$; d) $x = \frac{81}{2}$

Bài 12. a) $x = 0$ hoặc $x = 6$; b) $x = 1$; c) $x = \frac{9}{2}$; d) $x = 3$

Bài 13. a) Vô nghiệm; b) $x = 0$; c) $x = 2$; d) $x = \frac{19}{4}$

Bài 14. a) Vô nghiệm; b) Vô nghiệm; c) $x = 0$ hoặc $x = \frac{2}{3}$; d) $x = 4$

Bài 15. a) $x = \frac{25}{4}$; b) Vô nghiệm; c) Vô nghiệm; d) $x = \frac{25}{9}$

Bài 16. a) $x = -1$; b) $x = -3$; c) $x = -3$; d) $x = 3$

Bài 17. A) Vô nghiệm; b) $x = \frac{3}{2}$; c) $x = -2, y = 3, z = 4$; d) $x = 1, y = 5$

Bài 18. a) $x = 1$; b) $x = 1$; c) $x = 5$; d) $x = 2$

Bài 19. a) $0 \leq x < 4$; b) $x > 1$; c) $x \geq 4$; d) $x \geq 0; x \neq 1$

ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 1 (PHẦN 2)

Bài 1. a) $x \in \{1; 4; 16; 25\}$; b) $\{0; 4; 16; 36; 144\}$

Bài 2. a) $x = 0$; b) $x \in \{4; 16; 100\}$

Bài 3. a) $A_{\min} = -2$ khi $x = 4$; b) $B_{\min} = -6$ khi $x = 4$;

c) $C_{\min} = -\frac{1}{4}$ khi $x = \frac{1}{4}$; d) $D_{\min} = \sqrt{3} + 1$ khi $x = 1$

Bài 4. a) $E_{\min} = -\frac{1}{3}$ khi $x = 0$; b) $F_{\min} = 2\sqrt{2} - 2$ khi $x = 1$

Bài 5. a) $M_{\max} = \sqrt{3}$ khi $x = 1$; b) $N_{\max} = 8$ khi $x = 9$;

c) $P_{\max} = \frac{4}{3}$ khi $x = \frac{1}{4}$; $Q_{\max} = \frac{5}{3}$ khi $x = 0$

Bài 6. a) $B = \frac{3}{7}$; b) $A = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$; c) $x = 0$ hoặc $x = 4$

Bài 7. a) $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$; b) $x = 0$; c) $x = 0$; d) $P < 1$; e) $P_{\max} = -1$ khi $x = 0$

Bài 8. a) $E = \frac{x(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1}$; b) $x > 1$; c) $E_{\min} = 9$ khi $x = 4$; d) $x \in \{4; 0; 9\}$ e) Vô nghiệm

Bài 9. a) $P = -\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)$; b) $P = 3\sqrt{3} - 5$; c) $P_{\max} = \frac{1}{4}$ khi $x = \frac{1}{4}$

Bài 10. a) $B = \frac{\sqrt{x}-1}{2(\sqrt{x}+1)}$; $B = \frac{5-2\sqrt{5}}{2}$; c) $x = 1$

Bài 11. a) $P = \frac{x+16}{\sqrt{3}+x}$; b) $x = 4$; c) $P_{\min} = 4$ khi $x = 4$; d) $\frac{42-22\sqrt{3}}{2}$

Bài 12. a) $P = \frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{x}+1}$; b) $\frac{10-3\sqrt{5}}{5}$; c) $x = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$; d) $x = 0, x = 4$;

e) $0 \leq x \leq \sqrt{3} - 1$; g) $P_{\min} = 1$ khi $x = 0$

Bài 13. a) $P = \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$; b) Vô nghiệm; c) $P = \frac{5}{2}$; d) $0 < x < 1$; e) $P > 1$; f) Không có GTLN

Bài 14. a) $B = \frac{38}{43}$; b) $A = \frac{2}{x+\sqrt{x+1}}$; c) $0 \leq x \leq 1$ hoặc $x \geq 9$

Bài 15. a) $P = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}$; b) $\frac{3+3\sqrt{3}}{2}$; c) $x = 4$

Bài 16. a) $P = \frac{1}{\sqrt{xy}}$; b) $P_{\max} = 9$ khi $x = y = \frac{1}{9}$

Bài 17. a) $x = 3, y = -2008, z = 2011$; b) $(\sqrt{3x-1}-x)(\sqrt{3x-1}-\sqrt{x+1}) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = \frac{2 \pm \sqrt{5}}{2}$

Bài 18. Ta có $M_{\max} = 20736$ khi $a = b = 2\sqrt{2}$

Bài 19. $2\sqrt{a} - 5 = x, 2\sqrt{b} - 5 = y, 2\sqrt{c} - 5 = z$ Biến đổi P theo x, y, z ta được

$P_{\min} = \frac{33}{4}$ khi $a = b = c = 25$

Bài 20. Ta có a) $\sqrt{1+a^2} = \sqrt{ab+bc+ca+a^2} = \sqrt{(a+b)(a+c)} \leq \frac{2a+b+c}{2}$

Áp dụng tương tự với $\sqrt{1+b^2}$ và $\sqrt{1+c^2}$

Bài 21. $A_{\min} = \frac{3}{2}$ khi $a = b = \frac{1}{2}$

Bài 22. $A_{\min} = 9$ khi $x = y = -1$

Bài 23. Ta có $VT = (a-1) + \frac{1}{a-1} + 1$

CHỦ ĐỀ 2. HÀM SỐ BẬC NHẤT
VẤN ĐỀ 1

Bài 1. a) $f(-3) = 9; f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}; f(0) = 0; g(-1) = 4; g(-2) = 5; g(3) = 0$

b) $a = \frac{-3}{2}$ hoặc $a = 1$

Bài 2. a) $g(-0,4) = -0,32; h(-1,4) = 0,6; g(-1) = 2; g(\frac{-3}{4}) = -\frac{9}{8}; g(2) = 8$

b) $m \in \emptyset$

Bài 3. a) Học sinh tự vẽ

b) D và F thuộc đồ thị

Bài 4. a) Học sinh tự vẽ

b) B thuộc đồ thị

Bài 5. a) Học sinh tự vẽ

b) F thuộc đồ thị

Bài 6. $d: y = -3x$

Bài 7. a) Nghịch biến; b) Đồng biến

Bài 8. a) Nghịch biến; b) Đồng biến

Bài 9. a) Đồng biến; b) A, C, D thuộc đồ thị; B không thuộc đồ thị

Bài 10. a) Đồng biến; b) Nghịch biến

Bài 11. a) Nghịch biến; b) Đồng biến

Bài 12. a) Học sinh tự vẽ

b) $y = 3,5x$ đồng biến $y = -3,5x$ nghịch biến

c) Hai đồ thị đối xứng nhau qua trục Ox và trục Oy

Bài 13. a) Học sinh tự vẽ

b) i) $A(2; 4), B(4; 4); ii) C_{OAB} = 2 + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{2}; S_{OAB} = 4$

Bài 14. Học sinh tự vẽ

Bài 15. a) Học sinh tự vẽ

b) $A(5; -5), B(10; -5)$

c) $C_{OAB} = 5(1 + \sqrt{5} + \sqrt{2}); S_{OAB} = \frac{25}{2}$

Bài 16. a) $m = -2$; b) $m = \frac{1}{2}$; c) \emptyset

Bài 17. a) $f(-2) = \frac{-4}{3}; f(0) = 0; f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}; g(-2) = \frac{5}{3}; g(0) = 3; g(\frac{1}{2}) = \frac{10}{3}$

b) Hơn nhau 3 đơn vị

Bài 18. Tương tự bài 17

Bài 19. a) $x > 0, x \neq 1$; b) $-3 - 2\sqrt{3}, \frac{a-1}{a+1}$; c) $x \in \{0; 4; 9\}$; d) $x = 0$

Bài 20. a) $a = -10$; b) $a = 2$

Bài 21. a) Học sinh tự vẽ;

b) không có điểm nào thuộc đồ thị

Bài 22. a) $B(-2; 1)$; b) $C(2; 1)$; c) $D(-2; -1)$; d) $S_{ABCD} = 8$

Bài 23. a) Đồng biến; b) $y = \sqrt{2}$; c) $x = -1 - \sqrt{2}$

Bài 24. a) Đồng biến; b) Nghịch biến; c) Lưu ý: $3(x_1^3 - 1) - 3(x_2^3 - 1) = 2(x_1 - x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)$
nên hàm số đồng biến

Bài 25. a) Học sinh tự vẽ hình; b) $A_1(2; 6); A_2(-2; -6)$

Bài 26. a) $m = \frac{3}{4}$; b) $m = -1$; c) $m = \frac{3}{2}$

VẤN ĐỀ 2

Bài 1. Đồng biến: c; Nghịch biến: a, b.

Bài 2. a) $m < 5$; b) $m \neq \pm 1$

Bài 3. Đồng biến: b; Nghịch biến: a, c.

Bài 4. a) $m > \frac{3}{2}$; b) $m \neq -\frac{5}{2}; m \neq \frac{4}{3}$

Bài 5. a) $m > \frac{3}{2}$; b) $m < \frac{3}{2}$

Bài 6. $1 \leq m \leq 37$

Bài 7. Chú ý $m^2 - m + 1 = (m - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$

Bài 8. a) $m < \frac{7}{5}$; b) $m > \frac{7}{5}$

Bài 9. $-5 < m < 5$

Bài 10. a) $m > \frac{3}{2}, m < 1$; b) $-1 < m < \frac{3}{2}$

Bài 11. Tương tự bài 7

Bài 12. Đồng biến: b, d; Nghịch biến : a, c

Bài 13. a) $m \neq 0, m \neq \frac{3}{7}$; b) $m \neq 0, m \neq 1$

Bài 14. a) $m > 2$; b) $m < 2$

Bài 15. Tương tự bài 7

Bài 16. a) $m < \frac{5}{4}$; b) $m > \frac{5}{4}$

Bài 17. a) $m < 1, m > 4$; b) $m \in \emptyset$

VẤN ĐỀ 3

Bài 1. a) Học sinh tự vẽ; b) $A(3; 4), B(-3; 2)$

Bài 2. a) Học sinh tự vẽ; b) $A(-1; 0), B(3; 0), C(1; 2)$

Bài 3. a) Học sinh tự vẽ; b) $A(-3; 4), B(-5; \frac{14}{3})$

Bài 4. a) Học sinh tự vẽ; b) $A(1; 0), B(-3; 0), C(-1; 2)$; c) $C_{ABC} = 4 + 4\sqrt{2}, S_{ABC} = 4$

Bài 5. a) i) $m = 3$, ii) $m = 4$; b) $I(-1; 2)$

Bài 6. a) $I(3; \frac{1}{2})$; b) $m \in \emptyset$

Bài 7. $m = -\frac{7}{3}$

Bài 8. a) i) $m = 1$, ii) $m = -5$; b) $I(1; 3)$

Bài 9. a) $I(6; -4)$; b) $m \in \emptyset$

Bài 10. $m = -\frac{7}{3}$

Bài 11. a) $A(-1; 3)$; b) $A(-1; 3) = d_1 \cap d_2 \in d_3 \Rightarrow \text{đpcm}$

Bài 12. a) $I(-1; -2)$; b) $m = 7$

Bài 13. a) $I(2; -2)$; b) $I \in d_3$

Bài 14. a) $I(2; 5)$; b) $m = \frac{7}{3}$

Bài 15. a) Học sinh tự vẽ; b) $M\left(\frac{-3}{2}; \frac{-3}{2}\right)$

Bài 16. a) Học sinh tự vẽ; b) $A\left(\frac{15}{2}; \frac{11}{2}\right), B\left(\frac{-15}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Bài 17. a) Học sinh tự vẽ; b) $A\left(-\frac{1}{2}; 0\right), B(3; 0), C\left(\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$; c) $C_{ABC} = \frac{21+7\sqrt{5}+14\sqrt{2}}{6}, S_{ABC} = \frac{49}{18}$

Bài 18. a) i) $m = -\frac{15}{2}$, ii) $m = 4$; b) (1; 5)

Bài 19. a) $I(3; \frac{-1}{2})$; b) $m \in \emptyset$

Bài 20. $m = \frac{-7}{3}$

Câu 21. a) $I = (-2; 4)$; b) $m = -\frac{1}{4}$

Câu 22. a) $I = (1; -2)$; b) $m = -6$

VẤN ĐỀ 4

Bài 1. a và e; b và d; c và g

Bài 2. a) $m \neq \frac{1}{2}$; b) $m = \frac{1}{2}, k \neq 3$; c) $m = \frac{1}{2}, k = -3$

Bài 3. a) $m = 1$; b) $m = \frac{1}{5}$

Bài 4. a) $A(-1; -4)$; b) $d_1 // d_3 \Leftrightarrow m = 0 \Rightarrow d_1 \perp d_2$; c) $m = \pm 2\sqrt{2}$

Bài 5. a và e; b và g; c và d

Bài 6. a) $m \neq 2$; b) $m = -2$; c) $m = 0$ hoặc $m = \frac{1}{2}$; d) $m \in \emptyset$

Bài 7. $m = -1$

Bài 8. a) $\left(\frac{1}{4}; -5\right)$, $B\left(\frac{-1}{3}; \frac{-13}{3}\right)$; b) $m = \frac{1}{3}$ hoặc $m = 1$; c) $m \neq \frac{1}{3}$, $m \neq 1$, $M\left(\frac{-7}{5}; \frac{-91}{5}\right)$

Bài 9. a) $a = -2$; b) $a = 2$; c) $a = 0$

Bài 10. a) $b = -3$; b) $b = -3$; c) $b = 3$

Bài 11. a) (d): $y = \frac{3}{2}x + 3$; b) (d): $y = -5x - 7$; c) (d): $y = 4x + 2$

Bài 12. a) $a = -4$; b) $a = \frac{-5}{16}$; c) $-10,8$

Bài 13. a) Đồng biến khi $m > 2$ nghịch biến khi $m < 2$;

b) $m = 5$; c) $m = \frac{5}{3}$; d) $m = \frac{3}{4}$; e) $m = 0$; g) $m = 0$

Bài 14. a) $y = 8x - 5$; b) $y = -2x - 10$; c) $y = -x + 7$

Bài 15. a) $m \neq 3$; b) $m = 3$; c) $m = \frac{1}{2}$ hoặc $m = 1$; d) $m \in \emptyset$

Bài 16. a) $d_1 // d_2$; b) $d_2 \perp d_3$

Bài 17. a) $m = -\frac{3}{2}$; b) $m = -1$

Bài 18. a) $A\left(\frac{1}{2}; 1\right)$; b) $B(0; -3)$; c) $C\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; d) $D(-2; 0)$

Bài 19. a) $d_1 \perp d_2$; b) $m = -\frac{1}{2}$ hoặc $m = 0$

Bài 20. a) $y = 2x + \sqrt{3}$; b) $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$; c) $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$

Bài 21. a) $I(1; 3)$; b) i) $m = -1$, ii) $m = 1$, iii) $m = -2$

VẤN ĐỀ 5

Bài 1. Hệ số góc $\frac{3}{2}$

Bài 2. Hệ số góc 2

Bài 3. a) Hệ số góc 3 ; b) Hệ số góc 2

Bài 4. Hệ số góc 2

Bài 5. Hệ số góc -2

Bài 6. a) $-\frac{9}{2}$; b) $\frac{-1}{2}$

Bài 7. $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ và $\tan \alpha = 2$

Bài 8. $\alpha = 60^\circ$

Bài 9. $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ và $\tan \alpha = 4$

Bài 10. $\alpha = 30^\circ$

Bài 11. a) $y = -5x - 10$; b) $y = x + 3$

Bài 12. a) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 1 - \sqrt{3}$; b) $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$

Bài 13. a) $y = x + \sqrt{2}$; b) $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$

Bài 14. a) $\frac{-2}{3}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Bài 15. Học sinh tự làm

Bài 16. a) Học sinh tự vẽ hình; b) $45^\circ, 120^\circ, 15^\circ$

Bài 17. Học sinh tự làm

ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 2

Bài 1. a) $a = 3, b = -2$; b) $a = -1, b = 2$; c) $a = -\frac{5}{3}, b = \frac{1}{3}$

Bài 2. a) $m = \frac{7}{2}$; b) $A\left(\frac{9}{8}; 0\right), B\left(-\frac{27}{8}; 0\right); C_{ABC} = \frac{9}{2} + \frac{9\sqrt{17} + 45}{8}, S_{ABC} = \frac{81}{8}$

d) $\widehat{ABC} \approx 53,13^\circ, \widehat{BCA} = 50,91^\circ, \widehat{BAC} = 75,96^\circ$

Bài 3. $m = -4$

Bài 4. Viết phương trình các đường thẳng AB, AC và chứng minh chúng không vuông góc

Cách 2. Tính khoảng cách các đoạn thẳng AB, BC, AC và sử dụng định lý pitago đảo

Bài 5. a) $y = 2x + 1$; b) A thuộc đường thẳng BC

Bài 6. a) Học sinh tự vẽ hình; b) đồng biến khi $m < -\sqrt{3}$ hoặc $m > \sqrt{3}$, nghịch biến khi $|m| < \sqrt{3}$

c) $m = \pm\sqrt{3}$; d) $m = \pm 3$

Bài 7. a) $m = 1$; b) $m = 2$; c) $\{-1; 0; 2\}$

Bài 8. $y = \frac{2}{5}x + \frac{9}{5}$

Bài 9. $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$

Bài 10. $(0; 1)$

Bài 11. $m = -2$

Bài 12. $m = -4 - \sqrt{3}$

Bài 13. $m = -1$ hoặc $m = \frac{1}{2}$

Bài 14. a) Học sinh tự vẽ; b) $A(-2; 0)$, $B(0; 2)$, $C(4; -6)$; c) $S_{ABC} = 12$

Bài 15. a) $M(-1; 5)$; b) $m = -5 \pm 2\sqrt{6}$

Bài 16. $m = -\frac{5}{2}$ hoặc $m = \frac{3}{2}$

Bài 17. a) $m = \pm\sqrt{3}$; b) $m = 0$

Bài 18. $m = 1$

Bài 19. $y = \frac{3}{2}x + 3$

Bài 20. a) $a = 1$, $b = 2$; b) $A \in BC$

Bài 21. $y = -x + 3$

Bài 22. a) $m = -2$ hoặc $m = 1$; b) $m = 2 \pm \sqrt{3}$

Bài 23. $y = x + 2$. Chú ý OM là đường phân giác góc phần tư thứ II. Do đó đường thẳng qua M và tạo với Ox , Oy một tam giác vuông cân khi và chỉ khi đường thẳng đó vuông góc với OM

Bài 24. $M(3; 7)$

Bài 25. $m = 0$

Bài 26. a) Do $d_1 \perp d_2$ nên ΔMAC vuông tại M ; b) $S_{MAC} = \frac{16}{5}$

Bài 27. $S_{OAB} = \frac{8}{(m-1)^2 + 1} \leq 8$

Bài 28. a) $M(1; -2)$; b) $m = \frac{6}{5}$

CHỦ ĐỀ 3. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

VẤN ĐỀ 1

Bài 1. Hình 1: $x = 3,6$; $y = 6,4$; Hình 2: $x = 7,2$; $y = 12,8$; Hình 3: $x = \frac{35\sqrt{74}}{74}$; $y = \sqrt{74}$

Bài 2. a) $BH = 1,8$; $CH = 3,2$; $AH = 2,4$; $BC = 5$

b) $AB = 15$; $AC = 20$; $BC = 25$; $AH = 12$

Bài 3. $BH = 5,4$; $HC = 9,6$

Bài 4. $BH = 4,5$; $CH = 8$

Bài 5. $x = \sqrt{5}$; $y = 2\sqrt{5}$

Bài 6. a) $BH = 1,8 \text{ cm}$; $CH = 3,2 \text{ cm}$; $AH = 2,4 \text{ cm}$; $AC = 4 \text{ cm}$

b) $AB = 65 \text{ cm}$; $AC = 156 \text{ cm}$; $BC = 169 \text{ cm}$; $BH = 25 \text{ cm}$

c) $AB = 5 \text{ cm}$, $BC = 13 \text{ cm}$, $BH = \frac{25}{13} \text{ cm}$, $CH = \frac{144}{13} \text{ cm}$

Bài 7. $BH = 50 \text{ cm}$, $CH = 72 \text{ cm}$

Bài 8. $BH = 9 \text{ cm}$, $CH = 16 \text{ cm}$

Bài 9. $BH = \frac{32}{17} \text{ cm}$, $CH = \frac{225}{34} \text{ cm}$

Bài 10. a) $AB = 7,5 \text{ cm}$; $AC = 10 \text{ cm}$; $BC = 12,5 \text{ cm}$; $HC = 8 \text{ cm}$

b) $AH = 3\sqrt{3} \text{ cm}$; $AC = 6\sqrt{3} \text{ cm}$; $CH = 9 \text{ cm}$

Bài 11. $S = 150 \text{ cm}^2$

Bài 12. a) $AH = 3,6 \text{ cm}$; b) $BH = 4,8 \text{ cm}$; $CH = 2,7 \text{ cm}$

Bài 13. Đường cao: $6,72$; Độ dài hai đoạn chia cạnh huyền: $1,96$; $23,04$

Bài 14. $HB = \frac{75}{7} \text{ cm}$; $HC = 21 \text{ cm}$

Bài 15. $AB = 9 \text{ cm}$; $BC = 20 \text{ cm}$; $BD = 15 \text{ cm}$

VẤN ĐỀ 2

Bài 1. a) $CD \cdot CM = CE \cdot CN (= CH^2)$; b) $\triangle CMN \sim \triangle CDE$ (c.g.c) vì \hat{C} chung và $\frac{CM}{CE} = \frac{CN}{CD}$

Bài 2. a) $\Delta ADI = \Delta CDL$ (g.c.g) $\Rightarrow DI = DL \Rightarrow \Delta DIL$ là tam giác cân

$$b) \frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2} = \frac{1}{DL^2} + \frac{1}{DK^2} = \frac{1}{DC^2}$$

Bài 3. a) $AB^2 + CH^2 = (BH^2 + AH^2) + CH^2 = BH^2 + (AH^2 + CH^2) = BH^2 + AC^2$

b) Làm tương tự câu a) bài 1, có $AM \cdot AB = AN \cdot AC (= AH^2)$

Bài 4. $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{4}{AC^2} + \frac{4}{BD} \Rightarrow$ đpcm

Bài 5. a) $BD = 17$; b) $AH = \frac{120}{17}$

c) $\Delta BHI \sim \Delta KCI$ (g.g) $\Rightarrow \widehat{HBI} = \widehat{IKC} \Rightarrow \Delta HKD \sim \Delta HBI$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{HK}{HB} = \frac{HD}{HI} \Leftrightarrow HK \cdot HI = HD \cdot HB = AH^2$$

Bài 6. a) $OB = 9$ cm, $OD = 16$ cm; b) $OA = 12$, $AC = \frac{100}{3}$; c) $S_{ABC} = \frac{1250}{3}$ cm²

Bài 7. a) $\frac{EB}{FC} = \frac{HB^2}{AB} \cdot \frac{HC^2}{AC} = \left(\frac{AB^2}{BC} \cdot \frac{AC^2}{BC} \right) \cdot \frac{AC}{AB} = \left(\frac{AB}{AC} \right)^4 \cdot \frac{AC}{AB} = \left(\frac{AB}{AC} \right)^3$

b) $BC \cdot BE \cdot CF = BC \cdot \frac{HB^2}{AB} \cdot \frac{HC^2}{AC} = \frac{BC}{AB \cdot AC} \cdot (HB \cdot HC)^2 = \frac{1}{AH} \cdot AH^4 = AH^3$

Bài 8. a) AH là đường trung bình của $\Delta BCD \Rightarrow BD = 2AH$

b) $\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{BD^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{4AH^2}$

VẤN ĐỀ 3.

Bài 1. a) $DE = 6$ cm ; b) Chứng minh M là trung điểm của BH , N là trung điểm của CH

c) $S = 19,5$ cm

Bài 2. a) $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{HB \cdot BC}{HC \cdot BC} = \frac{HB}{HC}$

b) $\frac{BD}{EC} = \frac{HB^2}{AB} \cdot \frac{HC^2}{AC} = \left(\frac{AB^2}{BC} \cdot \frac{AC^2}{BC} \right) \cdot \frac{AC}{AB} = \left(\frac{AB}{AC} \right)^4 \cdot \frac{AC}{AB} = \left(\frac{AB}{AC} \right)^3$

c) $BD \cdot CE \cdot BC = \frac{HB^2}{AB} \cdot \frac{HC^2}{AC} \cdot BC = (HB \cdot HC)^2 \cdot \frac{BC}{AB \cdot AC} = AH^4 \cdot \frac{1}{AH} = AH^3 = DE^3$

$$\begin{aligned}
 d) \sqrt[3]{BC^2} &= \sqrt[3]{BD^2} + \sqrt[3]{CE^2} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{BC^2}{CE^2}} = \sqrt[3]{\frac{BD^2}{CE^2}} + 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{BC^2}{CE^2}} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + 1 \\
 &\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{BC^2}{CE^2}} = \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{BC}{CE}\right) = \left(\frac{BC}{AC}\right)^3 \Leftrightarrow \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \frac{CE}{AC} \\
 &\Leftrightarrow \sin^2 \widehat{ABC} = \frac{CE \cdot AC}{AC^2} = \frac{HC^2}{AC^2} = \cos \widehat{ACB} \quad (\text{dpcm})
 \end{aligned}$$

Bài 3. a) $BH = 3,6 \text{ cm}; CH = 6 \text{ cm}; AH = 4,8 \text{ cm}; BC = 10 \text{ cm}$

b) $BH = 3,6 \text{ cm}; CH = 6,4 \text{ cm}; AH = 4,8 \text{ cm}; AC = 8 \text{ cm}$

Bài 4. Cạnh huyền: 100 cm ; các cạnh góc vuông: 60 cm và 80 cm

Bài 5. $HB = 22 \text{ cm}; HC = 12,6 \text{ cm}$

Bài 6. $S = \frac{34560}{169} \approx 204,5 \text{ cm}^2$

Bài 7. a) $AB = 4 \text{ cm}, AB = 2\sqrt{5} \text{ cm}, AC = 4\sqrt{5} \text{ cm}, BC = 10 \text{ cm}$

b) $AB = \frac{5\sqrt{281}}{16}, AC = \sqrt{281}, BC = \frac{281}{16}, BH = \frac{25}{16}$

Bài 8. $BH = 9 \text{ cm}, CH = 16 \text{ cm}$

Bài 9. Tương tự bài 3

Bài 10. $P = 35 + 21\sqrt{5} \approx 81,95 \text{ cm}$

Bài 11. $S = 150 \text{ cm}^2$

Bài 12. a) $BC = 6 \text{ cm}; CK = 4,8 \text{ cm}; BK = 3,6 \text{ cm}; AK = 6,4 \text{ cm}$

b) $CB \cdot CH = CK^2 = CA \cdot CI$

$$c) \frac{1}{KM^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{KI^2} = \frac{1}{CH^2} + \frac{1}{CI^2}$$

$$d) \frac{AI}{BH} = \frac{KA^2}{AC} : \frac{KB^2}{BC} = \left(\frac{AC^2}{AB} : \frac{BC^2}{AB}\right)^2 \cdot \frac{BC}{AC} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^4 \cdot \frac{BC}{AC} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^3$$

VẤN ĐỀ 4.

BÀI 1. $\sin B = \frac{3}{5}; OK = \sqrt{41}; OH = 3$

Bài 2. a) $\sin B = \frac{12}{13} \approx 0,9231; \sin C = \frac{5}{13} \approx 0,3846$

$$b) \sin B = \sqrt{\frac{4}{7}} \approx 0,7559; \sin C = \sqrt{\frac{3}{7}} \approx 0,6547$$

Bài 3. a) Vì $OK = 2\sqrt{2}$

$$b) \sin B = \cos A = \frac{\sqrt{10}}{5}; \cos B = \sin A = \frac{\sqrt{15}}{5}; \tan B = \cot A = \frac{\sqrt{6}}{3}; \cot B = \tan A = \frac{3}{\sqrt{6}}$$

Bài 4. $\cos C = 0,8; \sin C = 0,6; \cot C = \frac{4}{3}; \tan C = \frac{3}{4}$

Bài 5. $AC = 8; BC = \sqrt{89}$

Bài 6. $\sin B = \cos C = \frac{3}{5}; \cos B = \sin C = \frac{4}{5}; \tan B = \cot C = \frac{3}{4}; \cot B = \tan C = \frac{4}{3}$

Bài 7. a) Vì $HN = \frac{18\sqrt{13}}{13}$

$$b) \sin B = \cos C = \frac{\sqrt{10}}{15}; \cos B = \sin C = \frac{\sqrt{15}}{5}; \tan B = \cot C = \frac{\sqrt{6}}{3}; \cot B = \tan C = \frac{3}{\sqrt{6}}$$

Bài 8. $\sin C = 0,8; \cos C = 0,6; \cot C = \frac{3}{4}; \tan C = \frac{4}{3}$

Bài 9. $AC = \frac{5}{3}; BC = \frac{13}{2}$

Bài 10. $O \in Oy$

Bài 11. $AC = 72; BC = 12\sqrt{61}$

Bài 12. $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}; \tan \alpha = 2\sqrt{6}; \cot \alpha = \frac{\sqrt{6}}{12}$

Bài 13. a) $AC = 9; BC = 15$

b) $AC = 9\sqrt{17}; AC = 5$

Bài 14. a) $AB = 5\sqrt{3}; AC = 5$

b) $ANBM$ là hình chữ nhật vì $AN \parallel BM; AN = BM$

c) $\triangle MAB \cong \triangle ACB (g - g)$

VẤN ĐỀ 5.

Bài 1. a) $\sin 20^\circ < \sin 70^\circ$; b) $\cos 60^\circ > \cos 70^\circ$; c) $\tan 73^\circ 20' > \tan 45^\circ$; d) $\cot 20^\circ > \cot 37^\circ 40'$ **Bài 2.**

a) $\cot 71^\circ (= \tan 19^\circ) < \cot 69^\circ 15' (= \tan 20^\circ 85') < \tan 28^\circ < \tan 38^\circ < \tan 42^\circ$

b) $\cos 79^\circ 13' = \sin 10^\circ 87' < \sin 32^\circ < \sin 38^\circ < \cos 51^\circ = \sin 39^\circ$

Bài 3. a) $\sin 40^\circ < \sin 70^\circ$; b) $\cos 80^\circ < \cos 50^\circ$; c) $\tan 73^\circ 20' > \tan 65^\circ$; d) $\cot 53^\circ < \cot 37^\circ 40'$

Bài 4. a) $\cot 79^\circ 15' = \tan 10^\circ 85' < \tan 12^\circ < \tan 28^\circ < \cot 61^\circ (= \tan 29^\circ) < \tan 58^\circ$

b) $\cos 85^\circ < \cos 67^\circ (= \sin 23^\circ) < \cos 63^\circ 41' = (\sin 26^\circ 59') < \sin 56^\circ < \sin 74^\circ$

Bài 5. Dựng một tam giác vuông có

a) Độ dài cạnh góc vuông là 3, cạnh huyền là 5, góc đối diện với cạnh góc vuông đó là α

b) độ dài cạnh góc vuông là 4, cạnh huyền là 7, góc giữa cạnh góc vuông và cạnh huyền đó là α

c) Độ dài hai cạnh góc vuông là 3 và 2, góc đối diện với cạnh góc vuông có độ dài 3 là α

d) Độ dài hai cạnh góc vuông là 5 và 6, góc đối diện với cạnh góc vuông độ dài 6 là góc α

Bài 6. Dựng một tam giác vuông có

a) Độ dài cạnh góc vuông là 2, cạnh huyền là 3, góc đối diện với cạnh góc vuông đó là góc α

b) Độ dài cạnh góc vuông là 2, cạnh huyền là 5 góc giữa cạnh góc vuông với cạnh huyền đó là góc α

c) Độ dài hai cạnh góc vuông là 3 và 2, góc đối diện với cạnh góc vuông có độ dài 3 là α

d) Độ dài hai cạnh góc vuông là 4 và 5, góc đối diện với cạnh góc vuông độ dài 5 là góc α

Bài 7. $BC = 32,5 \text{ cm}$; $AC = 12,5 \text{ cm}$

Bài 8. a) $\sin B = \frac{12}{13}$; $\sin C = \frac{5}{13}$

b) $\sin B = \frac{2}{\sqrt{7}}$; $\sin C = \frac{\sqrt{21}}{7}$

Bài 9. Dựng một tam giác vuông có

a) Độ dài cạnh góc vuông là 1, cạnh huyền là 2, góc đối diện với cạnh góc vuông đó là α

b) Độ dài cạnh góc vuông là 2, cạnh huyền là 3, góc giữa cạnh góc vuông và cạnh huyền đó là α

c) Độ dài hai cạnh góc vuông là 4 và 5, góc đối diện với cạnh góc vuông có độ dài 4 là góc α

d) Độ dài hai cạnh góc vuông là 4 và 5, góc đối diện với cạnh góc vuông có độ dài 4 là góc α

Bài 10. a) $\cos 62^\circ (= \sin 28^\circ) < \sin 34^\circ < \sin 35^\circ < \sin 45^\circ < \cos 28^\circ (= \sin 62^\circ)$

b) $\cos 65^\circ 30' (= \sin 24^\circ 30') < \cos 59^\circ (= \sin 31^\circ) < \sin 47^\circ < \cos 37^\circ (= \sin 53^\circ) < \sin 72^\circ$

Bài 11. a) $A = \frac{1}{\sqrt{2}}$; b) $B = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Bài 12. $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$; $\tan \alpha = \frac{1}{2\sqrt{6}}$; $\cot \alpha = 2\sqrt{6}$

Bài 13. Tương tự Bài 14, Vấn đề 4

Bài 14. a) $A = 3$; b) $= 2,5$

Bài 15. Góc 2α là góc \widehat{AMH}

$$a) \sin 2\alpha = \frac{AH}{AM} = \frac{2AH}{BC} = 2 \frac{AB \cdot AC}{BC^2} = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$b) 1 + \cos 2\alpha = 1 + \frac{HM}{AM} = \frac{HC}{AM} = \frac{2HC}{BC} = 2 \cdot \frac{AC^2}{BC^2} = 2 \cos^2 \alpha$$

$$c) 1 - \cos 2\alpha = 1 - \frac{HM}{AM} = \frac{HB}{AM} = \frac{2HB}{BC} = 2 \cdot \frac{AB^2}{BC^2} = 2 \sin^2 \alpha$$

VẤN ĐỀ 6.

Bài 1. a) $a = \frac{20\sqrt{3}}{3}$, $c = \frac{10\sqrt{3}}{3}$;

b) $b = 20 \sin 35^\circ \approx 11,48$, $c = 20 \cos 35^\circ \approx 16,38$

Bài 2. a) $c = \sqrt{115}$; $\sin B = \frac{10}{15} \Rightarrow \widehat{B} = 41,8^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 48,2^\circ$

b) $a = \sqrt{193}$; $\tan B = \frac{12}{7} \Rightarrow \widehat{B} \approx 59,7^\circ \Rightarrow \widehat{C} \approx 30,3^\circ$

Bài 3. a) $a = 35$; $\widehat{B} \approx 53,1^\circ$; $\widehat{C} \approx 36,9^\circ$

b) $c = 8$; $\widehat{B} = 41,8^\circ$; $\widehat{C} = 48,2^\circ$

Bài 14. a) $b \approx 2,95$; $a \approx 4,69$; $\widehat{C} \approx 49^\circ$

b) $c \approx 9,53^\circ$; $b = 5,5$; $\widehat{B} = 30^\circ$

Bài 5. $AN \approx 3,65 \text{ cm}$; $AC \approx 7,3 \text{ cm}$

Bài 6. a) $CH = 3\sqrt{3} \text{ cm}$; $AC = 3\sqrt{3} : \sin 80^\circ \approx 5,28 \text{ cm}$

b) $S = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 6,92 \approx 17,98 \text{ cm}^2$

Bài 7. $S \approx 5,09 \text{ cm}^2$

Bài 8. $S = 7,66 \text{ cm}^2$

Bài 9. a) $c \approx 3,12$; $a \approx 6,24$; $\hat{B} = 60^\circ$

b) $a = 10\sqrt{2}$

Bài 10. a) $c = \sqrt{115}$; $\sin \hat{B} = \frac{10}{15} \Rightarrow \hat{B} \approx 41,8^\circ \Rightarrow \hat{C} \approx 48,2^\circ$

b) $a = \sqrt{193}$; $\tan B = \frac{12}{7} \Rightarrow \hat{B} \approx 59,7^\circ \Rightarrow \hat{C} = 30,3^\circ$

Bài 11. a) $a \approx 5,14 \text{ cm}$; $b \approx 6,13 \text{ cm}$; $\hat{C} = 50^\circ$

b) $\hat{A} = 62^\circ$; $a \approx 9,4 \text{ cm}$; $b \approx 10,65 \text{ cm}$

c) $b = 17 \text{ cm}$; $\hat{A} \approx 61,93^\circ$; $\hat{C} \approx 28,07^\circ$

Bài 12. $S \approx 509,08 \text{ cm}^2$

Bài 13. $S = \frac{24 + 9\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$

Bài 14. a) $AB = 15 \text{ cm}$; $AC = 20 \text{ cm}$; $BC = 25 \text{ cm}$; $AH = 12 \text{ cm}$

b) $ADHE$ là hình chữ nhật

c) $S = 69,12 \text{ cm}^2$; $P = 33,6 \text{ cm}$

Bài 15. a) $AC = 4 \text{ cm}$; $\hat{B} = 53,13^\circ$; $\hat{C} = 36,87^\circ$

b) $AD = 2,25 \text{ cm}$; $BD = 3,75 \text{ cm}$

c) $BF \cdot BD = BA^2 = BE \cdot BC$

VẤN ĐỀ 7.

Bài 1. Chiều cao $\approx 6m75 \text{ m}$

Bài 2. Độ dài $\approx \frac{2,1}{\sin 28^\circ} \approx 4,5 \text{ m}$

Bài 3. Chiều cao $= 5 \tan 50^\circ \approx 5,96 \text{ m}$

Bài 4. $\widehat{BCA} = 59^{\circ}44'$

Bài 5. a) $AE.AC = AH^2 = AD.AB \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta AED$ (c.g.c)

b) $DE = 3 \text{ cm}$

c) $\widehat{ABC} = 56^{\circ}$; d) $S_{ADE} = \frac{54}{13} \text{ cm}^2$

Bài 6. a) Vì $EF = CG = \frac{1}{2} AB$; $EF \parallel CG \parallel AB$

b) $CF \perp BE$ mà $EG \parallel CF \Rightarrow EG \perp BE \Rightarrow \widehat{BEG} = 90^{\circ}$

c) $S_{ABCD} = \frac{h^2}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$

d) $AC = \frac{h}{\sin \alpha \cos \alpha}$

Bài 7. $BD = \frac{21}{\cos 22,5^{\circ}} \approx 22,73 \text{ cm}$

Bài 8. a) $AB = 5 \text{ cm}$; $AC = 5\sqrt{3} \text{ cm}$

b) $AMBN$ là hình chữ nhật $\Rightarrow \widehat{CBM} = \widehat{ABM} = \widehat{NMB} \Rightarrow MN \parallel BC$ (so le trong) $\Rightarrow AMBN$ là hình chữ nhật $\Rightarrow MN = AB = \frac{1}{2} BC$

c) $\widehat{CBM} = \widehat{ABM} = \frac{1}{2} \widehat{ABC} = 30^{\circ} = \widehat{ACB} \Rightarrow \Delta MAB \sim \Delta ABC$ (g.g) Tỉ số đồng dạng $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$

Bài 9. Tương tự bài 5

Bài 10. a) Giả sử tam giác ABC có $\widehat{A} < 90^{\circ}$, kẻ đường cao BH ta có

$BH = AB \sin \widehat{A} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} BH.AC \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AB.AC \cdot \sin \widehat{A}$

b) $ABCD$ là hình bình hành có $\widehat{A} < 90^{\circ}$, $\Delta ABD = \Delta CBD \Rightarrow S_{ABCD} = 2S_{ABO} = AB \sin \widehat{A}$

CHỦ ĐỀ 3.

Bài 1. a) $BC = 3\sqrt{13} \text{ cm}; AH = \frac{18\sqrt{13}}{13} \text{ cm}; BH = \frac{12\sqrt{13}}{13} \text{ cm}; CH = \frac{27\sqrt{13}}{13} \text{ cm}$

b) $BC = 25 \text{ cm}; AC = 20 \text{ cm}; HC = 16 \text{ cm}; AH = 12 \text{ cm}$

c) $AB = 33 \text{ cm}; AH = \frac{132}{5} \text{ cm}; BH = \frac{99}{5} \text{ cm}; CH = \frac{176}{5} \text{ cm}$

Bài 2. a) Đặt $BH = 9 \text{ cm}; CH = 16 \text{ cm}; AB = 15 \text{ cm}; AC = 20 \text{ cm}$

b) $\widehat{AMH} \approx 73,4^\circ$; c) $S_{AHM} = 84 \text{ cm}^2$

Bài 3. a) $CH = 6\sqrt{3} \text{ cm}; AC = \frac{6\sqrt{3}}{\sin 80^\circ} \approx 10,55 \text{ cm}$

b) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} 6\sqrt{3}(6+1,83) \approx 40,69 \text{ cm}^2$

Bài 4. a) $BC = 5 \text{ cm}; AH = \frac{12}{5} \text{ cm}$

b) $\widehat{B} \approx 53,13^\circ; \widehat{C} \approx 36,87^\circ$

c) $BE = \frac{15}{7} \text{ cm}; CE = \frac{20}{7} \text{ cm}$

Bài 5. a) $AE \cdot AB = AH^2 = AE \cdot AC$

b) $AE = \frac{9}{4}; BE = \frac{7}{4}$

c) $FC = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ cm}$

Bài 6.

a) i) $NF = 15 \text{ cm}; \widehat{MFN} \approx 48,59^\circ; \widehat{MNF} \approx 41,41^\circ$

ii) $OM = \frac{36}{5}; FO = \frac{48}{5}$

iii) $S_{FNE} = 96 \text{ cm}^2; \frac{S_{\Delta FOH}}{S_{\Delta FNE}} = \frac{FO}{FN} \cdot \frac{FH}{FE} = \frac{9}{25} \Rightarrow S_{\Delta FOH} = 34,56 \text{ cm}^2$

b) $\Delta MFN \sim \Delta FEM \text{ (g - g)} \Rightarrow \frac{MF}{FE} = \frac{MN}{FM} \Leftrightarrow FM^2 = MN \cdot FE$

Bài 7. a) Vì $DE^2 + DF^2 = FE^2$

b) $DK = \frac{24}{5} \text{ cm}; FK = \frac{32}{5} \text{ cm}$

c) $EK = \frac{18}{5} \text{ cm}; \widehat{DKE} = 90^\circ; \widehat{KDE} \approx 36^\circ, 52'; \widehat{KED} \approx 53^\circ 8'$

d) $ME = \frac{30}{7} \text{ cm}; MF = \frac{40}{7} \text{ cm}$

e) $\sin \widehat{DFK} = \frac{DK}{DF}, \sin \widehat{DFE} = \frac{DF}{EF} \Rightarrow \frac{DK}{DF} = \frac{DE}{EF} \Leftrightarrow DE \cdot DF = DK \cdot EF$

Bài 8. a) $AB = 3 \text{ cm}; AC = 6\sqrt{3} \text{ cm}$

b) $\frac{AB}{BD} = \frac{AB}{BC} = \cos \widehat{ABC} = \cos 60^\circ = \cos \widehat{ACD} = \frac{AC}{CD}$

c) $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2}$

Bài 9. a) $\triangle ABE = \triangle ADE$ (g.c.g) $\Rightarrow AE = AF$

b) \widehat{F} chung, $\widehat{FAK} = \widehat{FCA} = 45^\circ \Rightarrow \triangle AKF \sim \triangle CAF$ (g - g) $\Rightarrow \frac{AF}{KF} = \frac{CF}{AF} \Leftrightarrow AF^2 = KF \cdot CF$

c) $S_{AEF} = \frac{93}{2} \text{ cm}^2$

d) $AE = AF \Rightarrow \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AJ^2} = \frac{1}{AF^2} + \frac{1}{AJ^2} = \frac{1}{AD^2} = \text{const}$

Bài 10. a) $\cos 70^\circ (= \sin 20^\circ) < \sin 24^\circ < \sin 45^\circ < \cos 35^\circ (= \sin 55^\circ) < \sin 78^\circ$

b) $\tan 16^\circ (= \cot 74^\circ) < \cot 57^\circ 76' < \cot 30^\circ < \cot 24^\circ < \tan 80^\circ (= \cot 10^\circ)$

Bài 11. a) $\cos 20^\circ < \sin 65^\circ (= \cos 25^\circ) < \cos 28^\circ < \sin 40^\circ (= \cos 50^\circ) < \cos 88^\circ$

b) $\cot 67^\circ 18' (= \tan 22^\circ 42') < \cot 28^\circ 36' (= \tan 61^\circ 24') < \tan 32^\circ 48' < \tan 56^\circ 32'$

Bài 12. a) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{24}}{5}; \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{24}}; \cot \alpha = \sqrt{24}$

b) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}; \tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}; \cot \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$

c) $\cot \alpha = \frac{1}{2}; \cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}; \sin \alpha = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$

$$d) \tan \alpha = \frac{1}{3}; \sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}; \cos \alpha = \pm \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Bài 13. $\tan \alpha = \frac{7}{4} \Rightarrow \alpha \approx 60^\circ 15'$

Bài 14. 6,28 cm

Bài 15. a) $A = 2$; b) $B = 3 \sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha$

Bài 16. a) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

b) $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$

c) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = 1 - 2 \cos^2 \alpha$

Bài 17. a) $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} \Leftrightarrow (1 - \cos x)(1 + \cos x) = \sin^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

b) $VT = \frac{\sin^2 x + (1 + \cos x)^2}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{1 + 2 \cos x}{\sin x(1 + \cos x)} = VP$

c) Biến đổi tương tự câu a

CHỦ ĐỀ 4. ĐƯỜNG TRÒN

VẤN ĐỀ 1.

Bài 1. Gọi O là trung điểm của $BC \Rightarrow O$ là tâm đường tròn đi qua ba điểm A, B, C

b) $OA = OB = OC \Rightarrow OA = \frac{1}{2}BC \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A

bài 2. Gọi O là trung điểm của BC . Chứng minh B, C, D, E nằm trên $\left(O; \frac{BC}{2}\right)$

bài 3. a) $IFEK$ là hình bình hành tâm O có: $CH \perp IK, KE \parallel CH \Rightarrow IK \perp KE \Rightarrow IFEK$ là hình chữ nhật $\Rightarrow I, F, E, K$ cùng thuộc $(O; OI)$

b) Chứng minh $KD \perp DF \Rightarrow \Delta KDF$ vuông

Bài 4. $MNPQ$ là hình chữ nhật tâm $O \Rightarrow M, N, P, Q$ cùng thuộc $(O; OM)$

Bài 5. Gọi E, F, Q, P lần lượt là trung điểm của MA, MB, MC, MD chứng minh tứ giác $EFQP$ có hai góc đối có tổng bằng $180^\circ \Rightarrow E, F, P, Q$ cùng thuộc một đường tròn

Bài 6. Trong hình thoi đường chéo này là trung trực của đường chéo kia. Do đó điểm E là giao điểm của hai đường trung trực của hai cạnh AB và AC . Nên E là tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔABC . Tương tự F là tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔABD

Bài 7. a) Ta có: $\widehat{ACD} = 90^\circ \Rightarrow C$ thuộc đường tròn đường kính AD . Chứng minh $\widehat{ABD} = 90^\circ \Rightarrow B$ thuộc đường tròn đường kính $AD \Rightarrow B, C$ cùng thuộc đường tròn đường kính AD

b) $AD = 10 \text{ cm}$

Bài 8. a) Gọi O là trung điểm của BC mà $D \in \left(O; \frac{1}{2}BC\right) \Rightarrow OB = OD = OC \Rightarrow \Delta BDC$ vuông tại $D \Rightarrow CD \perp AB$. Tương tự $BE \perp AC$

b) Xét ΔABC có K là trực tâm $\Rightarrow AK \perp BC$

Bài 9. a) Gọi EF là đường kính của $\left(O; \frac{AB}{2}\right)$ sao cho $EF \perp AB$. Xét trường hợp C chạy trên nửa đường tròn \widehat{EBF} . Chứng minh $\Delta OMB = \Delta OHC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OMB} = \widehat{OHC} = 90^\circ$ vậy M chạy trên đường tròn đường kính OB

b) Vì $C \in (O) \Rightarrow \widehat{ACB} = 90^\circ$ hay $AC \perp BD$ mà $CD = CB \Rightarrow \Delta ADB$ có AC vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến nên ΔADB cân tại $A \Rightarrow AD = AB$ nên D chạy trên $(A; AB)$

Bài 10. Gọi I là tâm hình thoi. Chứng minh P là trọng tâm của $\triangle ABC$. Kẻ

$$PQ \parallel AI \Rightarrow \frac{BQ}{AB} = \frac{BP}{BI} = \frac{2}{3} \Rightarrow BQ = \frac{2}{3} AB \Rightarrow Q \text{ cố định} \Rightarrow P \text{ thuộc đường tròn đường kính } QB$$

VẤN ĐỀ 2.

Bài 1. $OA = \sqrt{2} < 2 \Rightarrow A(-1; -1)$ nằm trong đường tròn $(O; 2)$; $OB = \sqrt{5} > 2 \Rightarrow B(-1; -2)$ nằm ngoài đường tròn $(O; 2)$; $OC = 2 = R \Rightarrow C(\sqrt{2}; \sqrt{2})$ nằm trên đường tròn $(O; 2)$

Bài 2. a) $\widehat{BNC} = 90^\circ \Rightarrow ON = OB = OC \Rightarrow N \in \left(O; \frac{BC}{2}\right)$

$$\widehat{BMC} = 90^\circ \Rightarrow OM = OB = OC \Rightarrow M \in \left(O; \frac{BC}{2}\right) \Rightarrow B, C, M, N \text{ cùng thuộc đường tròn tâm } O$$

b) $\triangle ABC$ đều có G là trực tâm đồng thời là trọng tâm $\triangle AOB$ vuông tại O có

$$R = ON = \frac{a}{2}. OA = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} > R \Rightarrow A \text{ nằm ngoài } O$$

$$OG = \frac{1}{3} OA = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6} < R \Rightarrow G \text{ nằm trong } (O)$$

Bài 3. Áp dụng định lý pitago cho tam giác vuông ABC ta có $BC = 13 \text{ cm} \Rightarrow R = 6,5 \text{ cm}$

Bài 4. Gọi O là giao điểm của AC và BD ta có $OA = OB = OC = OD \Rightarrow A, B, C, D$ cùng thuộc $(O; R = 6,5 \text{ cm})$

Bài 5. Gọi O là giao của ba đường trung trực của $\triangle ABC$. Khi đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC gọi H là giao điểm của AO và BC ta có $AH = \sqrt{3} \Rightarrow AO = \frac{2}{3} AH = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Bài 6. a) Dựng đường thẳng d là đường trung trực của cắt tia Ay tại O . Dựng $(O; OA)$ là đường tròn cần dựng

Chứng minh: Vì $O \in d$ nên $OA = OB$ do đó $(O; OA)$ đi qua hai điểm A, B mà $O \in Ay$ nên đường tròn (O) thỏa mãn đề bài

$$b) \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$$

Bài 7. a) $OB = OC = BD = CD = R \Rightarrow OBDC$ là hình thoi

$$b) \widehat{CBO} = \widehat{CBD} = \widehat{ABO} = 0^\circ$$

c) $\triangle ABC$ có AO vừa là đường cao vừa là đường trung trực nên $\triangle ABC$ cân tại A

Bài 8. a) Chứng minh $\triangle CMB = \triangle DNC \Rightarrow \widehat{NCE} = \widehat{CDN}$ mà
 $\widehat{CDN} + \widehat{NCE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DCN} + \widehat{NCE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CEN} = 90^\circ$

b) A, D, E, M cùng thuộc đường tròn đường kính DM

c) Gọi I là trung điểm của CD chứng minh $AI \parallel MC \Rightarrow \triangle ADE$ cân tại $A \Rightarrow B, D, E$ cùng thuộc $(A; AB)$

VẤN ĐỀ 3.

Bài 1. a) Gọi H và K là hình chiếu vuông góc của O trên AB và CD . $OK = \sqrt{41}$ cm; $OH = MK = 3$ cm

b) $R = 3\sqrt{10}$

Bài 2. a) Gọi OH, OK là khoảng cách từ O đến mỗi dây ta có $OH = OK = 1$ cm

b) $R = \sqrt{10}$ cm

Bài 3. Gọi OH, OK lần lượt là khoảng cách từ O đến AB, AC ta có $OH = \frac{\sqrt{11}}{2}$; $OK = 2\sqrt{2}$

Bài 4. Gọi $OD = x$ (cm) $\Rightarrow OM = x - 4$ (cm) $\Rightarrow x^2 = 8^2 + (x - 4)^2 \Rightarrow x = 10$ cm

Bài 5. a) Gọi OH là khoảng cách từ O đến CD ; $MH = 4$ cm $\Rightarrow OH = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm

b) $OD = \frac{4\sqrt{39}}{3}$ cm

Bài 6. Gọi HK là đường thẳng qua O và vuông góc với AB và CD , $H \in AB, K \in CD$ ta có $OH = 3, OK = 4 \Rightarrow HK = 7$ cm

Bài 7. Kẻ $OE \perp CD, E \in CD$ ta có

$OC = 11, CE = 9 \Rightarrow OE = 2\sqrt{10}; OM = 7 \Rightarrow ME = 3 \Rightarrow MC = EC - ME = 6$ cm, $MD = 12$ cm

Bài 8. a) $HA = 4$ cm, $HB = 9$ cm

b) $HM = \frac{12\sqrt{13}}{13}$ cm $\Rightarrow S_{CMHN} = \frac{216}{13}$ cm²

Bài 9. a) $\frac{MH}{AM} = \frac{BK}{AB} \Rightarrow BK = 19,2 \Rightarrow AK = 14,4 \Rightarrow KC = 5,6 \Rightarrow BC = 20$ cm

b) CO cắt AB tại $E \Rightarrow CE = 2HM = 16$ cm; $CM \cdot CA = CO \cdot CE \Rightarrow CO = \frac{CM \cdot CS}{CE} = 12,5$ cm

VẤN ĐỀ 4

Bài 1. Gọi I là trung điểm của $CD \Rightarrow IC = ID$. Xét hình thang $AEFB$, I là trung điểm của $EF \Rightarrow IE = IF$ từ đó $CE = DF$

Bài 2. a) B, D, C, E cùng thuộc đường tròn đường kính BC

b) BC là đường kính, ED dây không qua tâm

Bài 5. a) $BD // CH$ (cùng $\perp AB$); $BH // CD$ (cùng $\perp AC$)

b) I là trung điểm của $BC \Rightarrow I$ là trung điểm của HD

c) OI là đường trung bình $\triangle AHD \Rightarrow AH = 2OI$

Bài 6. Chứng minh tương tự Bài 2

Bài 7. Chứng minh tương tự Bài 1

Bài 8. a) B, D, C, E nằm trên đường tròn đường kính BC

b) $\triangle ABD \sim \triangle ACE \Rightarrow AE \cdot AB = AD \cdot AC$

c) $BHCK$ có I là trung điểm của hai đường chéo

d) $\triangle ABK, \triangle ACK$ vuông tại B và C nên A, B, K, C nằm trên đường tròn đường kính AK

e) OI là đường trung bình của $\triangle AHK \Rightarrow OI // AH$

Bài 9. Kẻ $MH \perp DE$ tại H ; $\widehat{DAE} = 2\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{DAH} = \widehat{BAC}$; $DE = 2DH$; $AD = AM = AE$

$DH = AD \sin \widehat{DAH} = AM \sin \widehat{BAC} < d \sin \widehat{BAC}$ (d là đường kính (O))

DE đạt giá trị lớn nhất khi AM là đường kính của (O)

Bài 10. a) $OA = OB = OC \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại A

b) H là trung điểm của AD ; $AC = CD$ (BC là trung trực của AD); BC là tia phân giác góc ABD ($\triangle ABD$ cân tại B có BH là đường cao)

c) $\widehat{BAH} = \widehat{ACH} = \widehat{DAH} \Rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{CDH}$

VẤN ĐỀ 5

Bài 1.

R	d	Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn
-----	-----	--

5 cm	3 cm	Cắt nhau
6 cm	6 cm	Tiếp xúc nhau
4 cm	7 cm	Không giao nhau

Bài 2. $(A; 3)$ không giao với Ox và tiếp xúc với Oy

Bài 3. O thuộc a và $a // b$ nên O cách b một khoảng bằng $2\text{ cm} \Rightarrow (O; 2\text{ cm})$ tiếp xúc b

Bài 4. $(B; 2)$ không giao nhau với O và $(B; 2)$ tiếp xúc với Oy

Bài 5. $O \in a$ và $a // b$ nên O cách b một khoảng bằng $3\text{ cm} \Rightarrow (O; 3\text{ cm})$ tiếp xúc với b

Bài 6. Tâm đường tròn nằm trên hai đường thẳng song song a, b song song với đường thẳng xy và cách xy một khoảng 1 cm

Bài 7. O nằm trên đường thẳng song song với a, b và cách đều a, b một khoảng bằng $\frac{h}{2}$

Bài 8. $AB = 8\text{ cm}$

Bài 9. $S_{OMN} = \frac{4}{3}R^2$

Bài 10. M di chuyển trên $(O; 4\text{ cm})$

Bài 11. $AD = 4\text{ cm}$

Bài 12. Kẻ OH vuông góc với xy suy ra $OH < OA$. Mặt khác A nằm trên đường tròn $(O; R)$ nên $OA < R$

Bài 13. Kẻ OH vuông góc với xy suy ra $OH \leq OA$. Mặt khác A nằm trên đường tròn $(O; R)$ nên $OA \leq R$

Bài 14. $(C; 2)$ không cắt hai trục Ox, Oy

Bài 15. Tâm I thuộc hai đường thẳng song song với a và cách a một khoảng bằng 5 cm

Bài 16. a) Kẻ OH vuông góc với xy thì $OH = 12$ do đó (O) cắt x, y tại hai điểm B, C

b) $BH = 2; CH = 10$

Bài 17. OC là đường trung bình của hình thang $AEFB$ nên C là trung điểm của

EF chú ý rằng $AE = AH, BH = BF$ nên suy ra $CH^2 = HA.HB = AE.BF$

VẤN ĐỀ 6

Bài 1. Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ$

Bài 2. a) $\widehat{BAC} = 90^\circ$

b) Gọi O là trung điểm của AI ta có

$$+ OK = OA \Rightarrow \widehat{OKA} = \widehat{OAK}$$

$$+ \widehat{OAK} = \widehat{HBK} \text{ (cung phụ } \widehat{ACB})$$

$$+ HB = HK \Rightarrow \widehat{HBK} = \widehat{HKB}$$

$$\Rightarrow \widehat{OKA} = \widehat{HKB} = \widehat{HKO} = 90^\circ$$

Nhận xét: Không sử dụng tính chất tam giác cân trong lời giải nên cách làm sẽ không thay đổi nếu giả thiết chỉ chỉ tam giác thường

Bài 3. a) Gọi O là trung điểm của AH thì $OE = OA = OH = OD$

b) Chứng minh tương tự bài 2b

bài 4. Trung trực AB cắt đường thẳng vuông góc với d ở A tại O . đường tròn $(O; OA)$ là đường tròn cần dựng

Bài 5. a) Tam giác ABC cân tại A nội tiếp $(O) \Rightarrow OC \perp BC \Rightarrow OA \perp AD$ (vì $AD \parallel BC$)

b) $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow AC$ cắt BD tại trung điểm I của và CN là tiếp tuyến của cắt AC tại trung điểm I của AC

Bài 6. a) Dễ có $AMON$ là hình bình hành. Ta chứng minh $OM = ON$. Xét tam giác OBM và tam giác OCN có $\widehat{OBM} = \widehat{OCN} = 90^\circ$; $OB = OC = R$ và

$$\widehat{OMB} = \widehat{ONC} = \hat{A} \Rightarrow \Delta OBM = \Delta OCN \Rightarrow OM = ON \Rightarrow AMON \text{ là hình thoi}$$

b) $AMON$ là hình thoi $\Rightarrow OA \perp MN$ và $OA = 2$ lần khoảng cách từ O đến MN do đó MN là tiếp tuyến của khoảng cách từ O đến $MN = R \Leftrightarrow OA = 2R$

Bài 7. Từ O hạ OH vuông góc với d , OH cắt (O) tại A và B . Qua A và B kẻ các đường thẳng vuông góc với OA và OB ta được hai (hoặc 1 nếu d là tiếp tuyến của (O)) tiếp tuyến song song với d

Bài 8. a) M thuộc đường tròn đường kính $AB \Rightarrow \widehat{AMB} = 90^\circ$ hay $\widehat{EMF} = 90^\circ$ tiếp tuyến

$CM, CA \Rightarrow OC \perp AM \Rightarrow \widehat{OFM} = 90^\circ$. Tiếp tuyến $DM, DB \Rightarrow OD \perp BM \Rightarrow \widehat{OEM} = 90^\circ \Rightarrow OEMF$ là hình chữ nhật $\Rightarrow \widehat{EOF} = 90^\circ$ hay $\widehat{COD} = 90^\circ$

b) $MEOF$ là hình chữ nhật

c) Gọi I là trung điểm của CD thì I là tâm đường tròn đường kính CD và $OI = IC = ID$ có $ABDC$ là hình thang vuông tại A, B nên $OI // AC // BD$ và $IO \perp AB$ do đó AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD

Bài 9. a) BH, BD là tiếp tuyến của $(A; AH) \Rightarrow \widehat{HAD} = 2\widehat{HAB}$; CH, CE là tiếp tuyến của $(A; AH) \Rightarrow \widehat{HAE} = 2\widehat{HAC} \Rightarrow \widehat{HAD} + \widehat{HAE} = 2(\widehat{HAB} + \widehat{HAC}) = 180^\circ \Rightarrow D, A, E$ thẳng hàng

b) Tương tự bài 13 c

Bài 10. Có $ABCD$ là hình thang vuông tại C, D mà O là trung điểm của AB và OM vuông góc với CD (CD tiếp tuyến của (O)) $\Rightarrow AD + BC = 2OM = 2R$. Chú ý rằng $CD \leq AB$ (Hình chiếu đường xiên) $\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + BC).CD = R.CD \leq R.AB = 2R^2$. Do đó S_{ABCD} lớn nhất khi $CD = AB$ hay M nằm chính giữa nửa đường tròn đường kính AB

VẤN ĐỀ 7

Bài 1. a) $\triangle OAC = \triangle OBC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OAB} = 90^\circ \Rightarrow \text{ĐPCM}$

b) $OC = 25 \text{ cm}$

Bài 2. a) OA vuông góc với BC tại là trung điểm của $BC \Rightarrow OCAB$ là hình thoi

b) $OE = 2R$

Bài 3. a) OCB là tam giác đều nên $BC = BO = BM = R \Rightarrow \widehat{OCM} = 90^\circ \Rightarrow MC$ là tiếp tuyến của $(O; R)$

b) $OM^2 = OC^2 + MC^2 \Rightarrow MC^2 = OM^2 - OC^2 = 3R^2$

Bài 4. a) Gọi O là trung điểm của CD từ giả thiết suy ra tam giác ABD và tam giác ODE đều $\Rightarrow DE = DH = DO = BC/4 \Rightarrow \widehat{HEO} = 90^\circ \Rightarrow HE$ là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD

b) $HE = 4\sqrt{3} \text{ cm}$

Bài 5. a) $OB = 10 \text{ cm}$

b) $\triangle OBC = \triangle OBA$ (c.g.c) $\Rightarrow BC$ là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Bài 6. a) $\triangle ABE$ vuông tại B đường cao $BC \Rightarrow BC^2 = AC.CE$

b) $BE = \frac{10\sqrt{3}}{3}$

Bài 7. $S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2}OC.MN = \frac{aR}{\sqrt{R^2 - a^2}}$

VẤN ĐỀ 8

Bài 1. a, b) $C AB = AC; OB = OC \Rightarrow AO$ là trung trực của BC

c) $BD // OA$ vì cùng vuông góc với BC

Bài 2. a) $\widehat{DOC} = 90^\circ$

b) $\triangle COM \cong \triangle ODM$

c) $AC = R\sqrt{3}; BM = \frac{R\sqrt{3}}{3}$

Vài 3. a) $BO // HC; OC // BH; OC // BH \Rightarrow OCHB$ là hình thoi

b) $OA \perp BC; HO \perp BC \Rightarrow A, H, O$ thẳng hàng

c) Để $H \in (O)$ thì $OH = OC = CH \Rightarrow \widehat{CAO} = 30^\circ \Rightarrow AO = 2R$

Bài 4. $\widehat{AMO} = \widehat{CMO} \Rightarrow \widehat{CMO} = \widehat{COM}$

Bài 5. a) $IK // OA$ vì cùng vuông góc với IA

b) $\widehat{KOI} = \widehat{AOI}$ và $\widehat{AOI} = \widehat{KIO} \Rightarrow \widehat{KIO} = \widehat{KOI}$

Bài 6. Chu vi tam giác $ADE = AD + DM + AE + EM = AB + AC = 2AB$

VẤN ĐỀ 9

Bài 1. $AB = 6 \text{ cm}$

Bài 2.

$$\widehat{BAC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BAO} = 30^\circ \Rightarrow AO = 2OB = 2R$$

$$AO = 2R = 2OB \Rightarrow \widehat{BAO} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ$$

Suy ra tam giác ABC đều

Bài 3. Gọi D là giao điểm của IG và AB . Tính được $DG = 2/3AM = 4$, D là tiếp điểm của

(I) với AB nên $AD = \frac{AB + AC - BC}{2} = 3 \Rightarrow ID = DA = 3 \Rightarrow IG = DG = ID = 1$

Bài 4. $\triangle MEF$ đều $\Rightarrow EF = 10$

Bài 5. $\triangle OIC$ vuông tại $\widehat{OIC} = 30^\circ \Rightarrow OI = 2R$ xét $\triangle OBI$ có $OI = 2R \Rightarrow \widehat{OIB} = 30^\circ$

Bài 7. a) OA là phân giác \widehat{BOC} , $\triangle OBC$ cân tại $O \Rightarrow OA \perp BC$

b) $\widehat{BDC} = \widehat{COA}$ (cùng phụ với góc OCB) $\Rightarrow DB // OA$

c) ΔABC đều $\Rightarrow AB = BC = AC = 2\sqrt{3}$

Bài 8. a) BI, BK lần lượt là phân giác trong và ngoài góc B nên $BI \perp BK \Rightarrow \widehat{IBK} = 90^\circ$, tương tự $\widehat{ICK} = 90^\circ$

b) $\widehat{ACI} = \widehat{ICB} = \widehat{IBC} = \widehat{IKC}$ mà $\widehat{IKC} + \widehat{KIC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ACI} + \widehat{OCI} = 90^\circ$

c) BC và AK cắt BC tại H ta có $HB = HC$ (AK là trung trực của BC)

$\Rightarrow HC = BC/2 = 12, AH = \sqrt{AC^2 - HC^2} = 16; \Delta ACH \sim \Delta COH$ (tam giác vuông có chung góc nhọn tại O) $\Rightarrow AH // AC = HC // CO \Rightarrow CO = AC.HC // AH = 15$

VẤN ĐỀ 10

Bài 1. a) $\widehat{COA} = \widehat{COM}, \widehat{DOM} = \widehat{DOB} \Rightarrow \widehat{COD} = 90^\circ$

b) $\widehat{OBD} = \widehat{OMD} = 90^\circ \Rightarrow B, D, M, O \in$ đường tròn bán kính $\frac{OD}{2}$

c) $CD = MC + MD = AC + BD$

d) $AC.BD = MC.MD = OM^2 = R^2$

e) Gọi I là trung điểm của $CD \Rightarrow I$ là tâm đường tròn đường kính CD và OI là đường trung bình của hình thang vuông $ACDB$ nên $OI \perp AB = O$

f) $\frac{CM}{MD} = \frac{CA}{BD} = \frac{AN}{ND} \Rightarrow MN // AC$

g) $BN' \cap OI = \{K\} \Rightarrow OB = OK$ ta có $\frac{BO}{BD} = \frac{OK}{BD} = \frac{KN'}{BN'} \Rightarrow \frac{KN'}{BO} = \frac{BN'}{BD}$

$\Rightarrow \frac{BN'}{BD} + \frac{BN'}{BO} = \frac{BK}{BO} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{BO} + \frac{1}{BD} = \frac{\sqrt{2}}{BN'}$

Bài 2. a) OA là trung trực của $BC \Rightarrow A, H, O$ thẳng hàng

$\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 180^\circ \Rightarrow A, B, C, O$ nằm trên đường tròn đường kính AO

b) $\widehat{CDK} = \widehat{COA} \Rightarrow \Delta ACO \sim \Delta CKD$ (g.g) $\Rightarrow AC.CD = CK.AO$

c) AM là phân giác góc A của tam giác ABC . Chứng minh BM là phân giác góc B của $\Delta ABC \Rightarrow M$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC

d) Theo câu b):

$CK = \frac{AC.CD}{AO}; IK // AB \Rightarrow \frac{IK}{AB} = \frac{DK}{BD} \Rightarrow IK = \frac{AB.DK}{BD} = \frac{AC.CD}{2OC} \Rightarrow \frac{CK}{IK} = 2 \frac{CD.OC}{AO.DK} = 2 \Rightarrow I$ là

trung điểm của CK

Bài 3. a) Chứng minh DO vừa là phân giác vừa là đường cao của tam giác $CDN \Rightarrow \triangle DCN$ cân tại D

c) $AC \cdot BD = MC \cdot MD = R^2$

Bài 4. a) $OH = 1,5 \text{ cm}$; b) $P_{ADE} = 6\sqrt{3} \text{ cm}$; c) $\widehat{DOE} = 60^\circ$

Bài 5. a) $\triangle ABC$ có BI, BK lần lượt là phân giác trong phân giác ngoài tại

$B \Rightarrow \widehat{BIK} = 90^\circ \Rightarrow B, I, C, K \in \left(O; \frac{IK}{2}\right)$ ta có $\widehat{MCI} = \widehat{IBC} = \widehat{IKC} = \widehat{OCK}$ mặt khác

$\widehat{OCK} + \widehat{OCI} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MCI} + \widehat{OCI} = 90^\circ \Rightarrow OC \perp CM \Rightarrow MC$ là tiếp tuyến của (O)

c) Gọi D là giao điểm của MO và BC

$\Rightarrow CD = \frac{BC}{2} = 6 \text{ cm}, \frac{1}{CD^2} = \frac{1}{MC^2} + \frac{1}{OC^2} \Rightarrow OC = 7,5 \text{ cm} = R$

VẤN ĐỀ 11

Bài 1. a) Có $IA = IB = IC$ nên tam giác ABC vuông tại A

b) $\widehat{OIO'} = 90^\circ; BC = 12$

Bài 2. a) Từ $MA = MB = MC \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại A

b) $\widehat{OMO'} = 90^\circ; c) S = (R+r)\sqrt{Rr}$

d) $OBCO'$ là thang hình vuông tại B và C có IM là đường trung bình $\Rightarrow IM \perp BC = M$

Bài 3, $AB = 24 \text{ cm}$

Bài 4. Ta có $\widehat{ABC} + \widehat{ABD} = 180^\circ$

Bài 5. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của $AC, AD \Rightarrow AM$ là đường trung bình của hình thang $OPQO' \Rightarrow AP = AQ \Rightarrow AC = AD$

Bài 6. Ta có $\widehat{OBA} = \widehat{OAB} = \widehat{O'AC} = \widehat{O'CA} \Rightarrow OB // O'C \Rightarrow \text{đpcm}$

Bài 7. a) Ta có $KI < OI + OK \Rightarrow (I)$ và (K) luôn cắt nhau

b) Do $OI = NK; OK = IM \Rightarrow OM = ON$ mặt khác $OMCN$ là hình chữ nhật $\Rightarrow OMCN$ là hình vuông

c) Gọi $L = KP \cap MC; P = IB \cap NC \Rightarrow OKBI$ là hình chữ nhật và $BLMI$ là hình vuông

$\Rightarrow \triangle BLC = \triangle OKI \Rightarrow \widehat{LBC} = \widehat{OKI} = \widehat{BIK}$ mà

$\widehat{IBK} + \widehat{IBA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{LBC} + \widehat{IBA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{LBC} + \widehat{IBA} + \widehat{IBL} = 180^\circ$

d) Có $OMCN$ là hình vuông cạnh a cố định $\Rightarrow C$ cố định và AB luôn đi qua C

Bài 8. a) Gọi I là trung điểm của AB ta có $OI = OA = IA$

b) Ta chứng minh được $IC // BD // OE$ mà $OB = BI = IA \Rightarrow AC = CD = DE$

Bài 9. a) (O) và (I) tiếp xúc trong với nhau

b) $ADCE$ là hình thoi

c) Có $CK \perp AB, AD \perp DB \Rightarrow CK // AD$ mà $CE // AD \Rightarrow B, K, D$ thẳng hàng

d) $\widehat{HKD} = \widehat{HDK}; \widehat{IKB} = \widehat{IBK} \Rightarrow \widehat{HKD} + \widehat{IKB} = \widehat{HDK} + \widehat{IBK} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{IKH} = 90^\circ$

ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 4 (PHẦN I)

Bài 1. a) $\widehat{ACB} = 90^\circ, OH$ là đường trung bình của tam giác $ABC \Rightarrow OH // BC$

b) $\triangle AMO = \triangle CMO \Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{MCO} = 90^\circ \Rightarrow MA$ là tiếp tuyến của (O)

c) $IK = \frac{1}{2}CK = \frac{1}{2}AC \sin \alpha = R \cos \alpha \sin \alpha$

d) Giả sử BI cắt AM tại N vì $IK // AM \Rightarrow \frac{IK}{AN} = \frac{BK}{AB} \Rightarrow \frac{IK}{AM} = \frac{BK}{AB} (= \sin 32^\circ) \Rightarrow M \equiv N$

Bài 2. a) Dựa vào tính chất tiếp tuyến chứng minh EO là đường trung bình của $MN \Rightarrow OE \perp MN$

b) Chứng minh $MB // OH \perp MN \Rightarrow OBMN$ là hình thang

c) $EN = EM = 2\sqrt{3} \text{ cm}; MN = 2NH = 2\sqrt{3} \text{ cm}; S_{EMN} = 3\sqrt{3} \text{ cm}^2$

Bài 3. a) Chứng minh $DMCN$ là hình chữ nhật

b) Chứng minh $DM \cdot DA = DC^2; DN \cdot DB = DC^2 \Rightarrow DM \cdot DA = DN \cdot DB$

c) Gọi G, I, C lần lượt là tâm của các nửa đường tròn đường kính AC, AB, CB . Gọi O là tâm của hình chữ nhật $DMCN$ chứng minh $\triangle MGO \cong \triangle CGO \Rightarrow MN \perp MG$ tương tự chứng minh được $MN \perp NH \Rightarrow MN$ là tiếp tuyến chung của các nửa đường tròn đường kính AC, CB

d) Vì $DMCN$ là hình chữ nhật $\Rightarrow MN = DC$. MN lớn nhất khi DC lớn nhất mà $DC \leq DI \Rightarrow MN$ lớn nhất khi $C \equiv I$ hay C là trung điểm của AB

Bài 4. a) $OE = 2R$

b) Chứng minh I là trung điểm của AE ($AI = IE = 1,5R$) từ đó chứng minh $ACDE$ là hình thoi (tính chất hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm mỗi đường)

c) Chứng minh được $\widehat{ODE} = \widehat{OCE} = 90^\circ \Rightarrow ED$ là tiếp tuyến của (O)

d) Từ câu c, có EB là phân giác của \widehat{CED} chứng minh $\widehat{ODE} = \widehat{BCE} = 30^\circ \Rightarrow BE$ là phân giác của $\widehat{ECD} \Rightarrow B$ là trực tâm tam giác CDE

Bài 5. a) Chứng minh $\triangle MEF \sim \triangle MAO \Rightarrow EM \cdot AM = MF \cdot OA$

b) $\triangle MEF \sim \triangle MAO$ mà $AO = OM \Rightarrow ME = MF$; $\triangle MSF$ vuông tại M mà $ME = MF$ từ đó chứng minh được $ME = ES \Rightarrow ES = EM = EF$. Chứng minh F là trực tâm tam giác SAB mà AI là đường cao, chứng minh được A, I, F thẳng hàng

c) $FA \cdot SM = 2R^2$

d) $S_{MNO} = \frac{1}{2} OH \cdot MH$; $OH \cdot MH \leq \frac{1}{2} (OH^2 + MH^2) = \frac{1}{2} OM^2 = \frac{1}{2} R^2 \Rightarrow S_{MNO}$ lớn nhất khi H là trung điểm của $AO \Rightarrow OS - 2MH = R\sqrt{2}$

ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 4 (PHẦN II)

Bài 1. a) Chứng minh $AMIN$ là hình chữ nhật (theo dấu hiệu tứ giác có ba góc vuông)

b) Chứng minh: $IM \cdot IO = IA^2$ và $IN \cdot IO = IA^2 \Rightarrow IM \cdot IO = IN \cdot IO$

c) Chứng minh: I là tâm đường tròn đường kính DE mà $AI \perp OO'$ nên OO' là tiếp tuyến của đường tròn đường kính DE

d) $DE = 2\sqrt{R \cdot R'}$

Bài 2. a) $\triangle MAO = \triangle PBO \Rightarrow MO = OP \Rightarrow \triangle MNP$ cân vì đường cao NO đồng thời là đường trung tuyến

b) $\frac{1}{OI^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{OB^2} \Rightarrow OI = R \Rightarrow MN$ là tiếp tuyến của (O)

c) $AM \cdot BN = MI \cdot IN = OI^2 = R^2$

d) $S_{AMNB} = \frac{(MA + BN) \cdot AB}{2} \Rightarrow S_{AMNB}$ nhỏ nhất khi MN nhỏ nhất $\Leftrightarrow AM = R$

Bài 3. a) $\triangle ABE$ cân vì BI vừa là đường cao vừa là phân giác

b) Chứng minh K là trực tâm tam giác $ABE \Rightarrow EK \perp AB$

c) Chứng minh $\widehat{AFB} + \widehat{ABF} = \widehat{KBC} + \widehat{BKC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{FAB} = 90^\circ \Rightarrow FA$ là tiếp tuyến của (O)

d) C di chuyển trên (O) thì E di chuyển trên $(B; BA)$

Bài 4. a) (O) và (I) tiếp xúc ngoài

b) $ADCE$ là hình thoi (theo dấu hiệu hai đường chéo vuông góc cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường)

c) Chứng minh $EC // AD$ và $CK // AD \Rightarrow E, C, K$ thẳng hàng

d) Chứng minh $\widehat{DFB} = \widehat{DKH} \Rightarrow \widehat{DKH} + \widehat{IKB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HIK} = 90^\circ \Rightarrow HK$ là tiếp tuyến của (I)

Bài 5. a) Chứng minh thẳng hàng. Chứng minh $\triangle ABO$ và $\triangle ACO$ cùng nội tiếp đường tròn đường kính AO nên A, B, O, C cùng thuộc một đường tròn

b) Chứng minh $\triangle CKD \sim \triangle ACO \Rightarrow AC \cdot CD = CK \cdot AO$

c) AM và BM là hai đường phân giác của tam giác $ABC \Rightarrow M$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC

d) Chứng minh $HI // BD$ mà H là trung điểm của BC nên I là trung trực của CK

Bài 6. a) Chứng minh $\triangle ADH$ và $\triangle AHE$ nội tiếp đường tròn đường kính AH nên A, D, H, E cùng thuộc một đường tròn. Tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật

b) Sử dụng định nghĩa để chứng minh đường tròn đường kính BH và đường tròn đường kính CH tiếp xúc ngoài với nhau tại H vì $AH \perp BH$ và CH nên AH là tiếp tuyến chung của hai đường tròn

c) Gọi O là giao điểm của AH và ED . Chứng minh

$\widehat{IDO} = \widehat{AHI} = 90^\circ$ và $\widehat{JEO} = \widehat{AHJ} = 90^\circ \Rightarrow ED$ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn

d) $DE = 4,8 \text{ cm}$

MỤC LỤC

CHỦ ĐỀ 1: CĂN BẬC HAI. CĂN BẬC BA 1

VẤN ĐỀ 1: CĂN BẬC HAI 1

VẤN ĐỀ 2. CĂN THỨC BẬC HAI VÀ HẰNG ĐẲNG THỨC $\sqrt{A^2} = |A|$ 6

VẤN ĐỀ 3. CĂN THỨC BẬC HAI VÀ HẰNG ĐẲNG THỨC $\sqrt{A^2} = |A|$ 10

VẤN ĐỀ 4. LIÊN HỆ PHÉP NHÂN, PHÉP CHIA VỚI PHÉP KHAI PHƯƠNG 13

VẤN ĐỀ 5. LIÊN HỆ PHÉP NHÂN, PHÉP CHIA VỚI PHÉP KHAI PHƯƠNG (PHẦN II) 16

VẤN ĐỀ 6. BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI 20

VẤN ĐỀ 7: RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN BẬC HAI 25

VẤN ĐỀ 8: CĂN BẬC BA 29

ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 1 (PHẦN I)..... 32

ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 1 (PHẦN II)..... 35

CHỦ ĐỀ 2. HÀM SỐ BẬC NHẤT..... 38

VẤN ĐỀ. NHẮC LẠI, BỔ SUNG CÁC KHÁI NIỆM VỀ HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ HÀM SỐ. 38

VẤN ĐỀ 2: HÀM SỐ BẬC NHẤT..... 43

VẤN ĐỀ 3. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC NHẤT..... 45

VẤN ĐỀ 4: VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG 49

VẤN ĐỀ 5: HỆ SỐ GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG $y = ax + b (a \neq 0)$ 53

ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 2 54

CHỦ ĐỀ 3. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG 60

VẤN ĐỀ 1. HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO 60

VẤN ĐỀ 2. HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO 63

VẤN ĐỀ 3. LUYỆN TẬP HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO 65

VẤN ĐỀ 4. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN (PHẦN I) 67

VẤN ĐỀ 5. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN (PHẦN II)..... 70

VẤN ĐỀ 6. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG (PHẦN I) 73

VẤN ĐỀ 7. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG (PHẦN II)..... 76

ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 3 78

CHỦ ĐỀ 4. ĐƯỜNG TRÒN 82

VẤN ĐỀ 1. SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN 82

VẤN ĐỀ 2. SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN (PHẦN II) 84

VẤN ĐỀ 3. ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN 86

VẤN ĐỀ 4. ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN 88

VẤN ĐỀ 5. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG 90

VẤN ĐỀ 6. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN..... 93

VẤN ĐỀ 7. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN.....	95
VẤN ĐỀ 8. TÍNH CHẤT HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU (PHẦN I)	97
VẤN ĐỀ 9. TÍNH CHẤT HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU (PHẦN I)	99
VẤN ĐỀ 10. LUYỆN TẬP TÍNH CHẤT HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU.....	101
VẤN ĐỀ 11. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN	103
ÔN TẬP CHỦ ĐỀ IV (PHẦN I).....	106
ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 4 (PHẦN II).....	110
HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ.....	112
CHỦ ĐỀ 1. CĂN BẬC HAI. CĂN BẬC BA	112
CHỦ ĐỀ 2. HÀM SỐ BẬC NHẤT	126
CHỦ ĐỀ 3. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC	134
CHỦ ĐỀ 3.	142
CHỦ ĐỀ 4. ĐƯỜNG TRÒN.....	145