

## CHỦ ĐỀ 1. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

### VẤN ĐỀ 1. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

#### A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

##### 1. Khái niệm phương trình bậc nhất hai ẩn

\* Phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  là phương trình có dạng:

$$ax + by = c$$

Trong đó  $a, b, c$  là các số cho trước,  $a \neq 0$  hoặc  $b \neq 0$

Nếu các số thực  $x_0, y_0$  thỏa mãn  $ax + by = c$  thì cặp số  $(x_0; y_0)$  được gọi là nghiệm của phương trình  $ax + by = c$ .

\* Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , mỗi nghiệm  $(x_0; y_0)$  của phương trình  $ax + by = c$  được biểu diễn bởi điểm có tọa độ  $(x_0; y_0)$ .

##### 2. Tập nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn

Phương trình bậc nhất hai ẩn  $ax + by = c$  luôn có vô số nghiệm.

Tập nghiệm của phương trình được biểu diễn bởi đường thẳng

$$d: ax + by = c$$

\* Nếu  $a \neq 0$  và  $b = 0$  thì phương trình có nghiệm  $\begin{cases} x = \frac{c}{a} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$  và đường thẳng  $d$  song song hoặc trùng với trục tung.

\* Nếu  $a = 0$  và  $b \neq 0$  thì phương trình có nghiệm  $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{c}{b} \end{cases}$  và đường thẳng  $d$  song song hoặc trùng với trục hoành.

\* Nếu  $a \neq 0$  và  $b \neq 0$  thì phương trình có nghiệm  $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \end{cases}$  và đường thẳng  $d$  là đồ thị hàm số  $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ .

#### B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

##### Dạng 1. Xét xem một cặp số cho trước có là nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn hay không?

*Phương pháp giải:* Nếu cặp số thực  $(x_0; y_0)$  thỏa mãn  $ax + by = c$  thì nó được gọi là nghiệm của phương trình  $ax + by = c$ .

\* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

**Bài 1.1.** Trong các cặp số  $(12; 1)$ ,  $(1; 1)$ ,  $(2; -3)$ ,  $(1; -2)$ , cặp số nào là nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn  $2x - 5y = 19$ .

**Bài 1.2.** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để cặp số  $(2; -1)$  là nghiệm của phương trình

$$mx - 5y = 3m - 1.$$

**Bài 1.3.** Viết phương trình bậc nhất hai ẩn có các nghiệm là  $(2; 0)$  và  $(-1; -2)$ .

\* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

**Bài 1.4.** Cặp số  $(-2; 3)$  là nghiệm của phương trình nào trong các phương trình sau:

- a)  $x - y = 1$ ;      b)  $2x + 3y = 5$ ;      c)  $2x + y = -4$ ;  
d)  $2x - y = -7$       e)  $x - 3y = 10$ ;      g)  $2x - y = 2$ ;

**Bài 1.5.** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để phương trình bậc nhất hai ẩn  $\sqrt{m+1}x - 2y = m + 1$  có 1 nghiệm là  $(1; -1)$ .

**Bài 1.6.** Cho biết  $(0; -2)$  và  $(2; -5)$  là các nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn. Hãy tìm phương trình bậc nhất hai ẩn đó.

**Dạng 2. Viết công thức nghiệm tổng quát của phương trình bậc nhất hai ẩn và biểu diễn tập nghiệm trên mặt phẳng tọa độ.**

*Phương pháp giải:* Xét nghiệm phương trình bậc nhất hai ẩn:  $ax + by = c$ .

1. Để viết công thức nghiệm tổng quát của phương trình, trước tiên ta biểu diễn  $x$  theo  $y$  (hoặc  $y$  theo  $x$ ) rồi đưa ra kết luận về công thức nghiệm tổng quát.
2. Để biểu diễn tập nghiệm của phương trình trên mặt phẳng tọa độ, ta vẽ đường thẳng  $d$  có phương trình  $ax + by = c$ .

\* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:

**Bài 1.7.** Viết công thức nghiệm tổng quát và biểu diễn tập nghiệm của các phương trình sau trên mặt phẳng tọa độ:

- a)  $2x - 3y = 5$ ;      b)  $4x + 0y = 12$ ;      c)  $0x - 3y = 6$ ;

\* Học sinh tự luyện bài tập sau tại lớp:

**Bài 1.8.** Viết công thức nghiệm tổng quát và biểu diễn tập nghiệm của các phương trình sau trên mặt phẳng tọa độ:

- a)  $2x - y = 3$ ;      b)  $5x + 0y = 20$ ;      c)  $0x - 8y = 16$ .

**Dạng 3. Tìm điều kiện của tham số để đường thẳng  $ax + by = c$  thỏa mãn điều kiện cho trước**

*Phương pháp giải:* Ta có thể sử dụng một số lưu ý sau đây khi giải dạng toán này:

1. Nếu  $a \neq 0$  và  $b = 0$  thì phương trình đường thẳng  $d: ax + by = c$  có dạng  $d: x = \frac{c}{a}$ . Khi đó  $d$  song song hoặc trùng với  $Oy$ .

2. Nếu  $a = 0$  và  $b \neq 0$  thì phương trình đường thẳng  $d: ax + by = c$  có dạng  $d: y = \frac{c}{b}$ . Khi đó  $d$  song song hoặc trùng với  $Ox$ .

3. Đường thẳng  $d: ax + by = c$  đi qua điểm  $M(x_0; y_0)$  khi và chỉ khi  $ax_0 + by_0 = c$ .

\* *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

**Bài 1.9.** Cho đường thẳng  $d$  có phương trình:

$$(m - 2)x + (3m - 1)y = 6m - 2$$

Tìm các giá trị của tham số  $m$  để:

a)  $d$  song song với trục hoành;                      b)  $d$  song song với trục tung;

c)  $d$  đi qua gốc tọa độ;                              d)  $d$  đi qua điểm  $A(1; -1)$ .

\* *Học sinh tự luyện bài tập sau tại lớp:*

**Bài 1.10.** Cho đường thẳng  $d$  có phương trình :

$$(2m - 1)x + 3(m - 1)y = 4m - 2.$$

Tìm các giá trị của tham số  $m$  để:

a)  $d$  song song với trục hoành;                      b)  $d$  song song với trục tung;

c)  $d$  đi qua gốc tọa độ;                              d)  $d$  đi qua điểm  $A(2; 1)$ .

**Dạng 4. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình bậc nhất hai ẩn**

*Phương pháp giải:* Để tìm các nghiệm nguyên của phương trình bậc nhất hai ẩn:  $ax + by = c$ , ta làm như sau:

Bước 1. Tìm một nghiệm nguyên  $(x_0; y_0)$  của phương trình.

Bước 2. Đưa phương trình về dạng  $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$  từ đó dễ dàng tìm ra được các nghiệm nguyên của phương trình đã cho.

\* *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 1.11.** Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình  $3x - 2y = 5$ .

**Bài 1.12.** Cho phương trình  $11x + 18y = 120$ .

a) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình.

b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình.

\* *Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 1.13.** Tìm tất cả các nghiệm nguyên của các phương trình sau:

a)  $5x - 11y = 4;$

b)  $7x + 5y = 143;$

**Bài 1.14.** Cho phương trình  $11x + 8y = 73$ .

- a) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình.
- b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình.

**C. BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 1.15.** Trong các cặp số  $(0; 2)$ ,  $(-1; -8)$ ,  $(1; 1)$ ,  $(3; -2)$ ,  $(1; -6)$ , cặp số nào là nghiệm của phương trình  $3x - 2y = 13$  ?

**Bài 1.16.** Viết công thức nghiệm tổng quát và biểu diễn tập nghiệm của các phương trình sau trên mặt phẳng tọa độ:

- a)  $x - 3y = 6$ ;
- b)  $3y - 2x = 3$ ;
- c)  $7x + 0y = 14$ ;
- d)  $0x - 4y = 8$ ;
- e)  $2x - y = 5$ ;
- g)  $3y + x = 0$ ;

**Bài 1.17.** Cho đường thẳng  $d$  có phương trình:

$$(2m - 3)x + (3m - 1)y = m + 2.$$

Tìm các giá trị của tham số  $m$  để:

- a)  $d$  song song với trục hoành;
- b)  $d$  song song với trục tung;
- c)  $d$  đi qua gốc tọa độ;
- d)  $d$  đi qua điểm  $A(-3; -2)$ .

**Bài 1.18.** Tìm phương trình đường thẳng  $d$  biết rằng  $d$  đi qua hai điểm phân biệt  $M(2; 1)$  và  $N(5; -1)$ .

**Bài 1.19.** Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình:

- a)  $2x - 3y = 7$ ;
- b)  $2x + 5y = 15$ ;

**Bài 1.20.** Cho phương trình:  $5x + 7y = 112$ .

- a) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình.
- b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình.

VẤN ĐỀ 2. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

- Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn là hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$$

Trong đó  $a, b, c, a', b', c'$  là các số thực cho trước,  $x$  và  $y$  là ẩn số.

- Nếu hai phương trình (1) và (2) có nghiệm chung  $(x_0; y_0)$  thì  $(x_0; y_0)$  được gọi là nghiệm của hệ phương trình. Nếu phương trình (1) và (2) không có nghiệm chung thì hệ phương trình vô nghiệm.

- Giải hệ phương trình là tìm tất cả các nghiệm của nó.

- Hai hệ phương trình nay được gọi là tương đương nếu nó có cùng tập nghiệm.

2. Minh họa hình học tập nghiệm của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

- Tập nghiệm của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn được biểu diễn bởi tập hợp các điểm chung của hai đường thẳng  $d: ax + by = c$  và  $d': a'x + b'y = c'$ .

Trường hợp 1.  $d \cap d' = A(x_0; y_0) \Leftrightarrow$  Hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $(x_0; y_0)$ ;

Trường hợp 2.  $d \parallel d' \Leftrightarrow$  Hệ phương trình vô nghiệm;

Trường hợp 3.  $d \equiv d' \Leftrightarrow$  Hệ phương trình có vô số nghiệm.

- Chú ý:

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $\Leftrightarrow \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ ;

Hệ phương trình vô nghiệm  $\Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ ;

Hệ phương trình có vô số nghiệm  $\Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ ;

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

**Dạng 1. Không giải hệ phương trình, đoán nhận số nghiệm của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn**

Phương pháp giải: Xét hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

1. Hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $\Leftrightarrow \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ ;

2. Hệ phương trình vô nghiệm  $\Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ ;

3. Hệ phương trình có vô số nghiệm  $\Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ ;

\* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:

**Bài 2.1.** Dựa vào các hệ số  $a, b, c, a', b', c'$ , dự đoán số nghiệm của các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ -6x + 4y = -8 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} -2x + y = -3 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases};$$

$$c) \begin{cases} \sqrt{2}x - 2y = 3 \\ 3\sqrt{2}x - 6y = -7 \end{cases};$$

$$d) \begin{cases} 2x - 5y = -11 \\ 3x - 0y = 2\sqrt{3} \end{cases};$$

**Bài 2.2.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} x + y = 1 \\ mx + y = 2m \end{cases}$ . Xác định các giá trị của tham số  $m$  để hệ phương trình:

- a) Có nghiệm duy nhất;
- b) Vô nghiệm;
- c) Vô số nghiệm

\* Học sinh tự luyện bài tập sau tại lớp:

**Bài 2.3.** Không giải hệ phương trình, dự đoán số nghiệm của các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 0x + 4y = -8 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} 0x - 5y = -11 \\ 2x - 0y = 2\sqrt{3} \end{cases};$$

$$c) \begin{cases} -2x + y = \frac{1}{2} \\ -3x + \frac{3}{2}y = \frac{3}{4} \end{cases};$$

$$d) \begin{cases} 2\sqrt{2}x = 4y = 3 \\ -\sqrt{2}x - 2y = \frac{3}{2} \end{cases};$$

**Bài 2.4.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} mx - y = 1 \\ x - my = m^2 \end{cases}$ . Xác định các giá trị của tham số  $m$  để hệ phương trình:

- a) Có nghiệm duy nhất;
- b) Vô nghiệm;
- c) Vô số nghiệm

**Dạng 2. Kiểm tra một cặp số cho trước có phải là nghiệm của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn hay không?**

Phương pháp giải: Cặp số  $(x_0; y_0)$  là nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$  khi và chỉ khi nó thỏa mãn cả hai phương trình của hệ.

\* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

**Bài 2.5.** Kiểm tra xem cặp số  $(-4; 5)$  là nghiệm của hệ phương trình nào trong các hệ phương trình sau đây:

$$a) \begin{cases} 2x + y = -3 \\ -3x + 2y = 21 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} \frac{1}{2}x - 2y = -12 \\ x + \frac{1}{3}y = -\frac{7}{3} \end{cases};$$

**Bài 2.6.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} -mx + y = -2m \\ x - m^2y = -7 \end{cases}$ . Tìm các giá trị của tham số  $m$  để hệ phương trình nhận cặp số  $(1; 2)$  làm nghiệm.

\* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

**Bài 2.7.** Hãy kiểm tra xem mỗi cặp số sau có là nghiệm của hệ phương trình tương ứng không:

a)  $(1; 2)$  và  $\begin{cases} 3x - 5y = -7 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ ;                      b)  $(-2; 5)$  và  $\begin{cases} 2x - 3y = -19 \\ -3x + 2y = 7 \end{cases}$ .

**Bài 2.8.** Cho hệ phương trình:  $\begin{cases} 2mx + y = m \\ x - my = -1 - 6m \end{cases}$ . Tìm các giá trị của tham số  $m$  để cặp số  $(-2; 1)$  là nghiệm của phương trình đã cho.

**Dạng 3. Giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp đồ thị**

*Phương pháp giải:* Để giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$  bằng phương pháp đồ thị ta làm như sau:

Bước 1: Vẽ hai đường thẳng  $d: ax + by = c$  và  $d': a'x + b'y = c'$  trên cùng 1 hệ trục tọa độ.

Bước 2. Xác định nghiệm của hệ phương trình dựa vào đồ thị đã vẽ ở Bước 1.

\* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:

**Bài 2.9.** Cho hai phương trình đường thẳng:  $d_1 : 2x - y = 5$  và  $d_2 : x - 2y = 1$ .

- a) Vẽ hai đường thẳng  $d_1$  và  $d_2$  trên cùng một hệ trục tọa độ.
- b) Từ đồ thị của  $d_1$  và  $d_2$ , tìm nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

- c) Cho đường thẳng  $d_3 : mx + (2m - 1)y = 3$ . Tìm các giá trị của tham số  $m$  để ba đường thẳng  $d_1, d_2$  và  $d_3$  đồng quy.

\* Học sinh tự luyện bài tập sau tại lớp:

**Bài 2.10.** Cho ba đường thẳng:

$$d_1 : x + 2y = 5 ; d_2 : 2x + y = 4 \text{ và } d_3 : 2mx + (m - 1)y = 3m + 1.$$

- a) Vẽ hai đường thẳng  $d_1$  và  $d_2$  trên cùng một hệ trục tọa độ.
- b) Từ đồ thị của  $d_1$  và  $d_2$ , tìm nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

- c) Tìm các giá trị của tham số  $m$  để ba đường thẳng  $d_1, d_2$  và  $d_3$  đồng quy.

**C. BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 2.11.** Không giải hệ phương trình, xác định số nghiệm của các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} x - 4y = 3 \\ 2x - y = 4 \end{cases}; b) \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}; c) \begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases};$$

$$d) \begin{cases} 0x - 2y = 4 \\ 2x + \frac{1}{2}y = 1 \end{cases}; e) \begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}; g) \begin{cases} x - y = 4 \\ 0x - y = 2 \end{cases};$$

**Bài 2.12.** Hãy kiểm tra xem mỗi cặp số sau có là nghiệm của hệ phương trình tương ứng không:

$$a) (1; 1) \text{ và } \begin{cases} -2x + y = 3 \\ x + y = 7 \end{cases}; b) (-2; 1) \text{ và } \begin{cases} 2x + y = -3 \\ x + 3y = 1 \end{cases}.$$

**Bài 2.13.** Cho hệ phương trình:  $\begin{cases} 3mx + y = -2m \\ -3x - my = -1 + 3m \end{cases}$ .

Xác định các giá trị của tham số  $m$  để hệ phương trình:

- a) Có nghiệm duy nhất  
 b) Vô nghiệm  
 c) Vô số nghiệm  
 d) Nhận  $(1; 2)$  làm nghiệm.

**Bài 2.14.** Cho hai đường thẳng:

$$d_1 : 2x + y = 3 \text{ và } d_2 : x - 4y = 6.$$

- a) Vẽ hai đường thẳng  $d_1$  và  $d_2$  trên cùng một hệ trục tọa độ.  
 b) Từ đồ thị của  $d_1$  và  $d_2$ , tìm nghiệm của hệ phương trình:  

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 4y = 6 \end{cases}$$
  
 c) Cho đường thẳng  $d_3 : (2m + 1)x + my = 2m - 3$ . Tìm các giá trị của tham số  $m$  để ba đường thẳng  $d_1$ ,  $d_2$  và  $d_3$  đồng quy.



**VẤN ĐỀ 3: GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP THẾ**

**A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

Để giải một hệ phương trình, ta biến đổi hệ đã cho thành hệ phương trình tương đương đơn giản hơn. Phương pháp thế là một trong những cách biến đổi tương đương một hệ phương trình, ta sử dụng *quy tắc thế*, bao gồm hai bước sau đây:

Bước 1. Từ một phương trình của hệ phương trình đã cho (coi là phương trình thứ nhất), ta biểu diễn một ẩn theo ẩn kia rồi thế vào phương trình thứ hai để được một phương trình mới (chỉ còn một ẩn).

Bước 2. Dùng phương trình mới ấy để thay thế cho phương trình thứ hai trong hệ phương trình và giữ nguyên phương trình thứ nhất, ta được hệ phương trình mới tương đương với hệ phương trình đã cho.

**B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN**

**Dạng 1. Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế**

*Phương pháp giải:* Căn cứ vào *quy tắc thế*, để giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp thế, ta làm như sau:

*Bước 1.* Rút x hoặc y từ một phương trình của hệ phương trình, thay vào phương trình còn lại, ta được phương trình mới chỉ còn một ẩn.

*Bước 2.* Giải phương trình một ẩn vừa có, rồi từ đó suy ra nghiệm của hệ phương trình đã cho.

*Chú ý.* Để lời giải được đơn giản, ta thường chọn phương trình có các hệ số có giá trị tuyệt đối không quá lớn (thường là 1 hoặc -1) và rút x hoặc y có hệ số có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn qua ẩn còn lại.

\* *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

**Bài 3.1.** Giải các hệ phương trình:

$$a) \begin{cases} 3x - y = 5 \\ 5x + 2y = 23 \end{cases}; b) \begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 4x - 5y = 3 \end{cases};$$

$$c) \begin{cases} x\sqrt{2} - y\sqrt{3} = 1 \\ x + y\sqrt{3} = \sqrt{2} \end{cases}; d) \begin{cases} (\sqrt{2} - 1)x - y = \sqrt{2} \\ x + (\sqrt{2} + 1)y = 1 \end{cases}.$$

\* *Học sinh tự luyện bài tập sau tại lớp:*

**Bài 3.2.** Giải các hệ phương trình

$$a) \begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x - y = -8 \end{cases}; b) \begin{cases} 2x - 11y = -7 \\ 10x + 11y = 31 \end{cases};$$

$$c) \begin{cases} x + \sqrt{7}y = -2\sqrt{3} \\ -2x - 2\sqrt{7}y = \sqrt{11} \end{cases}; d) \begin{cases} -x - \sqrt{2}y = \sqrt{3} \\ \sqrt{2}x + 2y = -\sqrt{6} \end{cases}$$

**Dạng 2. Giải hệ phương trình quy về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn**

*Phương pháp giải:* Ta thực hiện theo hai bước sau:

Bước 1. Biến đổi hệ phương trình đã cho về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

Bước 2. Giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp thế như ở dạng 1.

\* *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

**Bài 3.3.** Giải các hệ phương trình:

$$a) \begin{cases} 3(y - 5) + 2(x - 3) = 0 \\ 7(x - 4) + 3(x + y - 1) - 14 = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} (x + 1)(y - 1) = (x - 2)(y + 1) - 1 \\ 2(x - 2)y - x = 2xy - 3 \end{cases}$$

\* *Học sinh tự luyện bài tập sau tại lớp:*

**Bài 3.4.** Giải các hệ phương trình:

$$a) \begin{cases} 5(x + 2y) - 3(x - y) = 99 \\ x - 3y = 7x - 4y - 17 \end{cases}; \quad b) \begin{cases} (x + 1)(y - 1) = xy - 1 \\ (x - 3)(y - 3) = xy - 3 \end{cases}$$

**Dạng 3. Giải hệ phương trình bằng cách đặt ẩn phụ**

*Phương pháp giải:* Ta thực hiện theo hai bước sau:

Bước 1. Đặt ẩn phụ cho các biểu thức chung trong các phương trình của hệ phương trình đã cho để được hệ phương trình bậc nhất hai ẩn mới.

Bước 2. Giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp thế như ở Dạng 1 từ đó tìm được nghiệm của hệ phương trình đã cho.

\* *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

**Bài 3.5.** Giải các hệ phương trình:

$$a) \begin{cases} \frac{15}{x} - \frac{7}{y} = 9 \\ \frac{4}{x} + \frac{9}{y} = 35 \end{cases}; \quad b) \begin{cases} \frac{4}{x+y-1} - \frac{5}{2x-y+3} = \frac{5}{2} \\ \frac{3}{x+y-1} + \frac{1}{2x-y+3} = \frac{7}{5} \end{cases}$$

\* *Học sinh tự luyện bài tập sau tại lớp:*

**Bài 3.6.** Giải các hệ phương trình:

$$a) \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1 \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 5 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} \frac{4}{2x-3y} + \frac{5}{3x+y} = -2 \\ \frac{3}{3x+y} - \frac{5}{2x-3y} = 21 \end{cases}.$$

**Dạng 4. Tìm điều kiện của tham số để hệ phương trình thỏa mãn điều kiện cho trước.**

*Phương pháp giải:* Ta thường sử dụng các kiến thức sau:

1. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$  có nghiệm

$$(x_0; y_0) \Leftrightarrow \begin{cases} ax_0 + by_0 = c \\ a'x_0 + b'y_0 = c' \end{cases}.$$

2. Đường thẳng  $d : ax + by = c$  đi qua điểm  $M(x_0; y_0) \Leftrightarrow ax_0 + by_0 = c$ .

\* *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 3.7.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} 2x + by = -4 \\ bx - ay = 4 \end{cases}$ .

Tìm các giá trị của a và b, biết rằng hệ phương trình:

a) Có nghiệm là  $(1; -2)$ ;

b) Có nghiệm  $(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ .

**Bài 3.8.** Tìm các giá trị của m và n để đường thẳng  $mx + 2y = n$  đi qua điểm  $A(3; -2)$  và đi qua giao điểm của hai đường thẳng  $d_1: 2x - y = 3$ ;  $d_2: 3x + 2y = 5$ .

\* *Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 3.9.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} (3a + b)x + (4a - b + 1)y = 35 \\ bx + 4ay = 29 \end{cases}$ .

Tìm các giá trị của a và b để hệ phương trình có nghiệm  $(1; -3)$ .

**Bài 3.10.** Cho hai đường thẳng:

$$d_1: mx - 2(3n + 2)y = 6 \quad \text{và} \quad d_2: (3m - 1)x + 2ny = 56.$$

Tìm các giá trị của m và n để  $d_1, d_2$  cắt nhau tại điểm  $I(2; -5)$ .

**Bài 3.11.** Cho hai đường thẳng

$$d_1: 5x - 4y = 8 \quad \text{và} \quad d_2: x + 2y = m + 1.$$

Tìm các giá trị của m để  $d_1, d_2$  cắt nhau tại điểm  $Oy$ .

Vẽ hai đường thẳng này trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

**Bài 3.12.** Cho hai đường thẳng

$$d_1: 5x - 2y = a - 3 \quad \text{và} \quad d_2: x + by = 1 - b.$$

Tìm giao điểm của  $d_1, d_2$  biết rằng  $d_1$  đi qua điểm  $M(5; -1)$  và  $d_2$  đi qua điểm  $N(-7; 3)$ .

**C. BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 3.13.** Giải các hệ phương trình:

$$a) \begin{cases} x - y = 3 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} \frac{1}{3}x - y = \frac{1}{2}; \\ 2x - 3y = 2 \end{cases};$$

$$c) \begin{cases} \frac{1}{3}x - y = \frac{2}{3}; \\ x + 3y = 2 \end{cases};$$

$$d) \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1 \\ 5x - 8y = 3 \end{cases}.$$

**Bài 3.14.** Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} 2(x + y) + 3(x - y) = 4 \\ (x + y) + 2(x - y) = 5 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} (x + 1)(y - 1) = xy - 1 \\ (x - 3)(y + 3) = xy - 3 \end{cases}.$$

**Bài 3.15.** Giải các phương trình sau:

$$a) \begin{cases} \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2y-1} = 2 \\ \frac{2}{x-2} - \frac{3}{2y-1} = 1 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} \frac{1}{2x+y} + \frac{1}{x-2y} = \frac{5}{8} \\ \frac{1}{2x+y} - \frac{1}{x-2y} = -\frac{3}{8} \end{cases}.$$

**Bài 3.16.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} (3a - 2)x + 2(2b + 1)y = 30 \\ (a + 2)x - 2(3b - 1)y = -20 \end{cases}$ .

Tìm các giá trị của a và b để hệ phương trình có nghiệm là (3; -1).

**Bài 3.17.** Cho hai đường thẳng

$$d_1: 2mx + 3y = 10 - m \quad \text{và} \quad d_2: 2x - 2y = 3.$$

Tìm các giá trị của m để  $d_1, d_2$  cắt nhau tại điểm  $Ox$ . Vẽ hai đường thẳng này trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

**Bài 3.18.** Cho hai đường thẳng

$$d_1: 2x + ay = -3 \quad \text{và} \quad d_2: bx - 2ay = 8.$$

Tìm giao điểm của  $d_1, d_2$  biết rằng  $d_1$  đi qua điểm  $A(-1; 2)$  và  $d_2$  đi qua điểm  $B(3; 4)$ .

**Bài 3.19.** Tìm a và b để đường thẳng  $y = ax + b$  đi qua hai điểm  $M(3; -5)$  và  $N(-1; \frac{3}{2})$ .

**Bài 3.20.** Cho hai đường thẳng:

$$d_1: mx - 2(3n + 2)y = 18 \quad \text{và} \quad d_2: (3m - 1)x + 2ny = -37.$$

Tìm các giá trị của m và n để  $d_1, d_2$  cắt nhau tại điểm  $I(-5; 2)$ .

**VẤN ĐỀ 4. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP CỘNG ĐẠI SỐ**

**A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

Để giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp cộng đại số, ta sử dụng *quy tắc cộng đại số*, bao gồm hai bước, sau đây:

Bước 1. Cộng hay trừ từng vế của hai phương trình của hệ phương trình đã cho để được một phương trình mới.

Bước 2. Dùng phương trình mới ấy thay thế cho một trong hai phương trình của hệ phương trình và giữ nguyên phương trình kia ta được một hệ mới tương đương với hệ đã cho.

**B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN**

**Dạng 1. Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số**

*Phương pháp giải:* Căn cứ vào *quy tắc cộng đại số*, để giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp cộng đại số, ta làm như sau:

Bước 1. Nhân hai vế của mỗi phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình bằng nhau hoặc đối nhau;

Bước 2. Cộng hay trừ từng vế hai phương trình của hệ phương trình đã cho để thu được một phương trình mới (chỉ có một ẩn).

Bước 3. Giải phương trình một ẩn vừa thu được từ đó suy ra nghiệm của hệ phương trình đã cho.

\* *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

**Bài 4.1.** Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{ll}
 a) \begin{cases} 4x + 7y = 16 \\ 4x - 3y = 24 \end{cases}; & b) \begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 4x - 5y = 3 \end{cases}; \\
 c) \begin{cases} x + \sqrt{7}y = -2\sqrt{3} \\ -2x - 2\sqrt{7}y = \sqrt{11} \end{cases}; & d) \begin{cases} 3\sqrt{5}x - 4y = 15 - 2\sqrt{7} \\ 2\sqrt{5}x + 8\sqrt{7}y = 18 \end{cases}.
 \end{array}$$

\* *Học sinh tự luyện bài tập sau tại lớp:*

**Bài 4.2.** Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{ll}
 a) \begin{cases} 2x - 11 = -7 \\ 10x + 11y = 31 \end{cases}; & b) \begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ -3x + 4y = 2 \end{cases}; \\
 c) \begin{cases} x\sqrt{2} - y\sqrt{3} = 1 \\ x + y\sqrt{3} = \sqrt{2} \end{cases}; & d) \begin{cases} (\sqrt{2} - 1)x - y = \sqrt{2} \\ x + (\sqrt{2} + 1)y = 1 \end{cases}.
 \end{array}$$

**Dạng 2. Giải hệ phương trình quy về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn**

*Phương pháp giải:* Ta thực hiện theo hai bước sau:

Bước 1. Biến đổi hệ phương trình đã cho về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

Bước 2. Giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp cộng đại số như ở Dạng 1.

\* *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

**Bài 4.3.** Giải các hệ phương trình:

$$a) \begin{cases} 5(x + 2y) - 3(x - y) = 99 \\ x - 3y = 7x - 4y - 17 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} (x + y)(x - 1) = (x - y)(x + 1) + 2xy \\ (y - x)(y + 1) = (y + x)(y - 2) - 2xy \end{cases}.$$

\* *Học sinh tự luyện bài tập sau tại lớp:*

**Bài 4.4.** Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} x + y = \frac{4x - 3}{5} \\ x + 3y = \frac{15 - 9y}{14} \end{cases}; \quad b) \begin{cases} (x - 3)(2y + 5) = (2x + 7)(y - 1) \\ (4x + 1)(3y - 6) = (6x - 1)(2y + 3) \end{cases}.$$

### **Dạng 3. Giải hệ phương trình bằng cách đặt ẩn phụ**

*Phương pháp giải:* Ta thực hiện theo hai bước sau:

Bước 1. Đặt ẩn phụ cho các biểu thức chung trong các phương trình của hệ phương trình đã cho để được hệ phương trình bậc nhất hai ẩn mới.

Bước 2. Giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp cộng đại số như ở Dạng 1 từ đó tìm được nghiệm của hệ phương trình đã cho.

\* *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

**Bài 4.5.** Giải các hệ phương trình:

$$a) \begin{cases} \frac{3}{x-1} + \frac{1}{y+2} = 4 \\ \frac{2}{x-1} - \frac{1}{y+2} = 1 \end{cases}; \quad b) \begin{cases} \frac{7}{x-y+2} - \frac{5}{x+y-1} = 4,5 \\ \frac{3}{x-y+2} + \frac{2}{x+y-1} = 4 \end{cases}.$$

\* *Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 4.6.** Giải các hệ phương trình:

$$a) \begin{cases} \frac{15}{x} - \frac{7}{y} = 9 \\ \frac{4}{x} + \frac{9}{y} = 35 \end{cases}; \quad b) \begin{cases} 3\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y} = 13 \\ 2\sqrt{x-1} - \sqrt{y} = 4 \end{cases}.$$

**Dạng 4. Tìm điều kiện của tham số để hệ phương trình thỏa mãn điều kiện cho trước.**

*Phương pháp giải:* Ta thường sử dụng các kiến thức sau:

3. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$  có nghiệm

$$(x_0; y_0) \Leftrightarrow \begin{cases} ax_0 + by_0 = c \\ a'x_0 + b'y_0 = c' \end{cases}$$

4. Đường thẳng  $d: ax + by = c$  đi qua điểm  $M(x_0; y_0) \Leftrightarrow ax_0 + by_0 = c$ .

\* *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 4.7.** Cho đường thẳng  $d: y = (2m + 1)x + 3n - 1$ .

- Tìm các giá trị  $m$  và  $n$  để  $d$  đi qua điểm  $M(-1; -2)$  và cắt  $Ox$  tại điểm có hoành độ bằng  $\sqrt{2}$ .
- Cho biết  $m, n$  bất kỳ thỏa mãn  $2m - n = 1$ , chứng minh  $d$  luôn đi qua điểm cố định. Tìm điểm cố định đó.

**Bài 4.8.** Cho ba đường thẳng:

$$d_1: 5x - 17y = 8, \quad d_2: 15x + 7y = 82 \quad \text{và} \quad d_3: (2m - 1)x - 2my = m + 2.$$

Tìm các giá trị của  $m$  để ba đường thẳng đồng quy.

\* *Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 4.9.** Cho đường thẳng  $d: 2ax - (3b + 1)y = a - 1$ . Tìm các giá trị của  $a$  và  $b$  để  $d$  đi qua hai điểm  $M(-7; 6)$  và  $N(4; -3)$ .

**Bài 4.10.** Cho đường thẳng  $d: y = (2m + 3)x - 3m + 4$ . Tìm các giá trị của tham số  $m$  để  $d$  đi qua giao điểm của hai đường thẳng  $d_1: 2x - 3y = 12$  và  $d_2: 3x + 4y = 1$ .

**C. BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 4.11.** Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ -3x + 4y = 2 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} x + 4y = 6 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases};$$

$$c) \begin{cases} \frac{x+y}{5} = \frac{x-y}{3} \\ \frac{x}{4} = \frac{y}{2} + 1 \end{cases};$$

$$d) \begin{cases} \frac{x+y}{2} = \frac{x-y}{4} \\ \frac{x}{3} = \frac{y}{5} + 1 \end{cases}.$$

**Bài 4.12.** Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} 5(x + 2y) = 3x - 1 \\ 2x + 4 = 3(x - 5y) - 12 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} 2(x + 1) - 5(y - 1) = 8 \\ 2(x + 1) - 3(y + 1) = 1 \end{cases}$$

**Bài 4.13.** Giải các phương trình sau:

$$a) \begin{cases} 2(x + y) + 3(x - y) = 9 \\ 5(x + y) - 7(x - y) = 8 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} (x - 1)(y + 3) = xy + 27 \\ (x - 2)(y + 1) = xy + 8 \end{cases};$$

$$c) \begin{cases} 4(x + y) - 7(x - y) = 31 \\ 2(x + y)(x - y) = 3 \end{cases};$$

$$d) \begin{cases} x + y = \frac{4x - 3}{5} \\ x + 3y = \frac{y - 1}{2} \end{cases}$$

**Bài 4.14.** Giải hệ phương trình:

$$a) \begin{cases} x + y = \frac{x - 3}{2} \\ x + 2y = \frac{2 - 4y}{15} \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -1 \\ \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = 7 \end{cases};$$

$$c) \begin{cases} \sqrt{x + 3} - 2\sqrt{y + 1} = 2 \\ 2\sqrt{x + 3} + \sqrt{y + 1} = 4 \end{cases};$$

$$d) \begin{cases} \frac{7}{\sqrt{x} - 7} - \frac{4}{\sqrt{y} + 6} = \frac{5}{3} \\ \frac{5}{\sqrt{x} - 7} + \frac{3}{\sqrt{y} + 6} = 2\frac{1}{6} \end{cases}$$

**Bài 4.15.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} x + by = -2 \\ bx - ay = -3 \end{cases}$ . Xác định hệ số a và b, biết rằng hệ phương trình:

a) Có nghiệm là  $(1; -2)$ ;

b) Có nghiệm là  $(\sqrt{2} - 1; \sqrt{2})$ ;

**Bài 4.16.** Cho đường thẳng  $d : mx - ny = -3$ . Tìm các giá trị của m và n để  $4m - 5n = 3$  và  $d$  đi qua điểm  $I(-5; 6)$ .

**Bài 4.17.** Tìm các giá trị của m để nghiệm của m để nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{2x + 1}{3} - \frac{y + 1}{4} = \frac{4x - 2y + 2}{5} \\ \frac{2x - 3}{4} - \frac{y - 4}{3} = -2x + 2y - 2 \end{cases}$$

cũng là nghiệm của phương trình  $6mx - 5y = 2m - 4$ .



**VẤN ĐỀ 5. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN CHỨA THAM SỐ**

**A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

Cho hệ phương trình bậc nhất hai ẩn  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} (*)$ .

1. Để giải hệ phương trình (\*), ta thường dùng phương pháp thế hoặc phương pháp cộng đại số.
2. Từ hai phương trình của hệ phương trình (\*), sau khi dùng phương pháp thế hoặc phương pháp cộng đại số, ta thu được một phương pháp mới (một ẩn). Khi đó *số nghiệm của phương trình mới bằng số nghiệm của hệ phương trình đã cho.*

**B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN**

**Dạng 1. Giải và biện luận hệ phương trình**

*Phương pháp giải:* Để giải và biện luận hệ phương trình (\*), ta làm như sau:

Bước 1. Từ hai phương trình của (\*), sau khi dùng phương pháp thế hoặc cộng đại số, ta thu được một phương trình mới (chỉ còn một ẩn).

Bước 2. Giải và biện luận phương trình mới, từ đó đi đến kết luận về giải và biện luận hệ phương trình đã cho.

\* *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 5.1.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} x + my = 2m \\ mx + y = 1 - m \end{cases}$  ( $m$  là tham số).

- a) Tìm các giá trị của  $m$  để hệ phương trình:
  - i. Có nghiệm duy nhất. Tìm nghiệm duy nhất đó;
  - ii. Vô nghiệm;
  - iii. Vô số nghiệm.
- b) Trong trường hợp hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $(x,y)$ ,
  - i. Hãy tìm các giá trị  $m$  nguyên để  $x$  và  $y$  cùng nguyên.
  - ii. Tìm hệ thức liên hệ giữa  $x$  và  $y$  không phụ thuộc  $m$ .

**Bài 5.2.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} 2mx + y = 2 \\ 8x + my = m + 2 \end{cases}$  ( $m$  là tham số).

- a) Giải và biện luận hệ phương trình đã cho theo  $m$ .
- b) Trong trường hợp hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $(x,y)$ ,
  - i. Tìm hệ thức liên hệ giữa  $x$  và  $y$  không phụ thuộc  $m$ ;
  - ii. Tìm giá trị của  $m$  để:  $4x + 3y = 7$ .

\* *Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 5.3.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} mx - y = 2m \\ 4x - my = m + 6 \end{cases}$

- a) Giải và biện luận hệ phương trình đã cho theo  $m$ .

- b) Trong trường hợp hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $(x,y)$ :
- Chứng minh rằng  $2x + y = 3$  với mọi giá trị của  $m$ ;
  - Tìm giá trị của  $m$  để:  $6x - 2y = 13$ .

**Bài 5.4.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ mx - y = m \end{cases}$ .

- Giải và biện luận hệ phương trình đã cho theo  $m$ .
- Trong trường hợp hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $(x,y)$ :
  - Tìm hệ thức liên hệ giữa  $x$  và  $y$  không phụ thuộc vào  $m$ ;
  - Tìm điều kiện của  $m$  để  $x > 1$  và  $y > 0$ .

**Dạng 2. Tìm điều kiện của tham số để hệ phương trình thỏa mãn điều kiện cho trước**

*Phương pháp giải:* Một số bài toán thường gặp của dạng toán này là:

Bài toán 1: Tìm điều kiện nguyên của tham số để hệ phương trình có nghiệm  $(x,y)$ , trong đó  $x$  và  $y$  cùng là những số nguyên.

Bài toán 2. Tìm điều kiện của tham số để hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $(x,y)$  thỏa mãn hệ thức cho trước.

\* *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 5.5.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} 2mx - 5y = -2 \\ 5x - 2my = 3 - 2m \end{cases}$ . Tìm các giá trị nguyên của  $m$  để hệ phương trình có nghiệm nguyên. Tìm nghiệm nguyên đó.

**Bài 5.6.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} mx + y = 3 \\ 4x + my = 6 \end{cases}$ . Tìm điều kiện của tham số  $m$  để hệ phương trình có nghiệm  $(x,y)$  thỏa mãn điều kiện:  $x > 1$  và  $y > 0$ .

**Bài 5.7.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} (m - 1)x - my = 3m - 1 \\ 2x - y = m + 5 \end{cases}$ . Tìm các giá trị của tham số  $m$  để hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $(x,y)$  sao cho biểu thức:  $S = x^2 + y^2$  đạt giá trị nhỏ nhất.

\* *Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 5.8.** Cho hệ phương trình:  $\begin{cases} -2mx + y = 5 \\ mx + 3y = 1 \end{cases}$ .

- Giải hệ phương trình khi  $m = 1$ .
- Tìm các giá trị của tham số  $m$  để hệ phương trình có nghiệm  $(x,y)$  thỏa mãn  $x - y = 2$ .

**Bài 5.9.** Cho hệ phương trình:  $\begin{cases} 2mx + y = 2 \\ x + my = 4 - 4m \end{cases}$ . Tìm các giá trị  $m$  nguyên để hệ phương trình nghiệm duy nhất  $(x,y)$  sao cho  $x$  và  $y$  nguyên.

**Bài 5.10.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} mx - y = 5 \\ 2x + 3my = 7 \end{cases}$ . Tìm các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm thỏa mãn điều kiện  $x > 0$  và  $y < 0$ .

**C. BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 5.11.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} mx + y = 3m - 1 \\ x + my = m + 1 \end{cases}$ . Tìm các giá trị tham số của m để hệ phương trình:

- a) Có nghiệm duy nhất;
- b) Vô nghiệm;
- c) Vô số nghiệm.

**Bài 5.12.** Cho hệ phương trình:  $\begin{cases} x - (m + 1)y = 1 \\ 4x - y = -2 \end{cases}$ . Tìm các giá trị m nguyên để hệ phương trình nghiệm duy nhất  $(x,y)$  sao cho x và y nguyên.

**Bài 5.13.** Cho hệ phương trình:  $\begin{cases} x - my = 4 - m \\ mx + y = 1 \end{cases}$ . Tìm các giá trị m nguyên để hệ phương trình nghiệm duy nhất  $(x,y)$  sao cho x và y nguyên.

**Bài 5.14.** Cho hệ phương trình:  $\begin{cases} mx - y = 2 \\ 2x + my = 5 \end{cases}$

- a) Giải và biện luận hệ phương trình đã cho.
- b) Tìm điều kiện của tham số m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $(x,y)$  thỏa mãn  $x + y = 1 - \frac{m^2}{m^2+2}$ .

**Bài 5.15.** Cho hệ phương trình:  $\begin{cases} mx + 2my = m + 1 \\ x + (m + 1)y = 2 \end{cases}$

- a) Giải và biện luận hệ phương trình đã cho.
- b) Trong trường hợp hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $(x,y)$ , Gọi  $M(x,y)$  là điểm tương ứng với nghiệm  $(x,y)$  của hệ phương trình.
  - i. Chứng minh M luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi m thay đổi.
  - ii. Tìm các giá trị của m để M thuộc góc phần tư thứ nhất;
  - iii. Xác định giá trị của m để M thuộc đường tròn có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng  $\sqrt{5}$ .

**VẤN ĐỀ 6. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH (PHẦN I)**

**A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

Các bước giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình:

Bước 1: Lập hệ phương trình:

- Chọn các ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho các ẩn số;
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo các ẩn và các đại lượng đã biết;
- Lập hệ phương trình biểu thị sự tương quan giữa các đại lượng.

Bước 2: Giải hệ phương trình vừa thu được.

Bước 3: Kết luận

- Kiểm tra xem trong các nghiệm của hệ phương trình, nghiệm nào thỏa mãn điều kiện của ẩn.
- Kết luận bài toán.

**B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG BÀI TOÁN**

**Dạng 1. Toán về quan hệ giữa các số**

Phương pháp giải: Ta sử dụng một số kiến thức liên quan sau đây:

1. Biểu diễn số có hai chữ số  $\overline{ab} = 10a + b$  trong đó  $a$  là chữ số hàng chục và  $0 < a \leq 9, a \in N, b$  là chữ số hàng đơn vị và  $0 \leq b \leq 9, b \in N$

2. Biểu diễn số có ba chữ số  $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ , trong đó  $a$  là chữ số hàng trăm và  $0 < a \leq 9, a \in N, b$  là chữ số hàng chục và  $0 < b \leq 9, b \in N, c$  là chữ số hàng đơn vị và  $0 \leq c \leq 9, c \in N$ .

*\*Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 6.1.** Cho một số có hai chữ số. Nếu đổi chỗ hai chữ số của nó thì được một số lớn hơn số đã cho là 63. Tổng của số đã cho và số mới tạo thành bằng 99. Tìm số đã cho.

**Bài 6.2.** Tìm số tự nhiên có hai chữ số biết chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 2, nếu viết xen chữ số 0 vào giữa chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị thì số đó tăng thêm 630 đơn vị.

\* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

**Bài 6.3.** Chữ số hàng chục của một số có hai chữ số lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 5. Nếu đổi chỗ hai chữ số cho nhau ta được một số bằng  $\frac{3}{8}$  số ban đầu. Tìm số ban đầu.

**Bài 6.4.** Tìm một số tự nhiên có hai chữ số, biết chữ số hàng chục kém chữ số hàng đơn vị là 4 đơn vị và tổng các bình phương của hai chữ số là 80.

**Dạng 2. Toán làm chung công việc (Toán năng suất)**

Phương pháp giải: Một số lưu ý khi giải bài toán về làm chung công việc:

1. Có ba đại lượng tham gia là: Toàn bộ công việc, phần công việc làm được trong một đơn vị thời gian (năng suất) và thời gian.
2. Nếu một đội làm xong công việc trong  $x$  ngày thì một ngày đội đó làm được  $\frac{1}{x}$  công việc.
3. Xem toàn bộ công việc là 1.

*\* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 6.5.** Hai bạn A và B cùng làm chung một công việc thì hoàn thành sau 6 ngày. Hỏi nếu A làm một mình 3 ngày rồi nghỉ thì B hoàn thành nốt công việc trong thời gian bao lâu? Biết rằng nếu làm một mình xong công việc thì B làm lâu hơn A là 9 ngày.

**Bài 6.6.** Hai vòi nước cùng chảy vào một bể thì sau 4 giờ 48 phút bể đầy. Nếu vòi I chảy trong 4 giờ, vòi II chảy trong 3 giờ thì cả hai vòi chảy được  $\frac{3}{4}$  bể. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể.

*\* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 6.7.** Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 2 giờ 55 phút đầy bể. Nếu để chảy một mình thì vòi thứ nhất chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai là 2 giờ. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình mà đầy bể.

**Bài 6.8.** Hai đội xe chở cát để san lấp một khu đất. Nếu hai đội cùng làm thì trong 18 ngày xong công việc. Nếu đội thứ nhất làm 6 ngày, sau đó đội thứ hai làm tiếp 8 ngày nữa thì được 40% công việc. Hỏi mỗi đội làm một mình bao lâu xong công việc?

### **Dạng 3. Toán chuyển động**

Phương pháp giải: Một số lưu ý khi giải bài toán về chuyển động:

1. Có ba đại lượng tham gia là quãng đường ( $s$ ), vận tốc ( $v$ ) và thời gian ( $t$ ).
2. Ta có công thức liên hệ giữa ba đại lượng  $s$ ,  $v$  và  $t$  là:  $s = v.t$

*\* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 6.9.** Một ô tô đi quãng đường  $AB$  với vận tốc 50 km/h, rồi đi tiếp quãng đường  $BC$  với vận tốc 45 km/h. Biết quãng đường tổng cộng dài 165 km và thời gian ô tô đi trên quãng đường  $AB$  ít hơn thời gian đi trên quãng đường  $BC$  là 30 phút. Tính thời gian ô tô đi trên mỗi đoạn đường.

**Bài 6.10.** Một ô tô dự định đi từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu xe chạy mỗi giờ nhanh hơn 10 km thì đến nơi sớm hơn dự định 3 giờ, còn nếu xe chạy chậm lại mỗi giờ 10 km thì đến nơi chậm mất 5 giờ. Tính vận tốc của xe lúc đầu, thời gian dự định và chiều dài quãng đường  $AB$ .

**Bài 6.11.** Một ca nô chạy trên sông trong 7 giờ, xuôi dòng 108 km và ngược dòng 63 km. Một lần khác cũng trong 7 giờ ca nô xuôi dòng 81 km và ngược dòng 84 km. Tính vận tốc nước chảy và vận tốc ca nô.

*\* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 6.12.** Một khách du lịch đi trên ô tô 4 giờ, sau đó đi tiếp bằng tàu hỏa trong 7 giờ được quãng đường 640 km. Hỏi vận tốc của tàu hỏa và ô tô, biết rằng mỗi giờ tàu hỏa đi nhanh hơn ô tô 5 km?

**Bài 6.13.** Hai người khách du lịch xuất phát đồng thời từ hai thành phố cách nhau 38 km. Họ đi ngược chiều và gặp nhau sau 4 giờ. Hỏi vận tốc của mỗi người, biết rằng khi gặp nhau, người thứ nhất đi được nhiều hơn người thứ hai là 2 km?

**Bài 6.14.** Một chiếc ca nô đi xuôi dòng theo một khúc sông trong 3 giờ và đi ngược dòng trong vòng 4 giờ, được 380 km. Một lần khác ca nô đi xuôi dòng trong 1 giờ và ngược dòng trong vòng 30 phút được 85 km. Hỏi tính vận tốc thật (lúc nước yên lặng) của ca nô và vận tốc của dòng nước (vận tốc thật của ca nô và vận tốc của dòng nước ở hai lần là như nhau).

### **C. BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 6.15.** Hai vòi nước cùng chảy chung vào một bể không có nước trong 12 giờ thì đầy bể. Nếu vòi thứ nhất chảy một mình trong 5 giờ rồi khóa lại và mở tiếp vòi hai chảy một mình trong 15 giờ thì được 75% thể tích của bể. Hỏi mỗi vòi chảy một mình thì trong bao lâu sẽ đầy bể?

**Bài 6.16.** Hai công nhân làm chung thì hoàn thành một công việc trong 4 ngày. Người thứ nhất làm một nửa công việc, sau đó người thứ hai làm nốt công việc còn lại thì toàn bộ công việc sẽ được hoàn thành trong 9 ngày. Hỏi nếu mỗi người làm riêng thì sẽ hoàn thành công việc trong bao nhiêu ngày?

**Bài 6.17.** Để hoàn thành một công việc, hai tổ phải làm chung trong 6 giờ. Sau 2 giờ làm chung thì tổ II được điều đi làm việc khác, tổ I đã hoàn thành công việc còn lại trong 10 giờ. Hỏi nếu mỗi tổ làm riêng thì sau bao lâu sẽ làm xong công việc đó?

**Bài 6.18.** Một người đi xe máy từ A tới B. Cùng một lúc một người khác cũng đi xe máy từ B tới A với vận tốc bằng  $\frac{4}{5}$  vận tốc của người thứ nhất. Sau 2 giờ hai người đó gặp nhau. Hỏi mỗi người đi cả quãng đường AB hết bao lâu?

**Bài 6.19.** Một ca nô ngược dòng từ bến A đến bến B với vận tốc 20 km/h sau đó lại xuôi từ bến B trở về bến A. Thời gian ca nô ngược dòng từ A đến B nhiều hơn thời gian ca nô xuôi dòng từ B trở về A là 2 giờ 40 phút. Tính khoảng cách giữa hai bến A và B. Biết vận tốc dòng nước là 5 km/h, vận tốc riêng của ca nô lúc xuôi dòng và lúc ngược dòng bằng nhau.

**Bài 6.20.** Hai xe máy khởi hành cùng một lúc từ hai tỉnh A và B cách nhau 90 km, đi ngược chiều và gặp nhau sau 1,2 giờ (xe thứ nhất khởi hành từ A, xe thứ hai khởi hành từ B). Tìm vận tốc của mỗi xe. Biết rằng thời gian để xe thứ nhất đi hết quãng đường AB ít hơn thời gian để xe thứ hai đi hết quãng đường AB là 1 giờ.

**Bài 6.21.** Hai địa điểm A và B cách nhau 200 km. Cùng một lúc có một ô tô đi từ A và một xe máy đi từ B. Xe máy và ô tô gặp nhau tại C cách A một khoảng bằng 120 km. Nếu ô tô khởi hành sau xe máy 1 giờ thì sẽ gặp nhau tại D cách C một khoảng 24 km. Tính vận tốc của xe máy và ô tô.

## **VẤN ĐỀ 7. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH (PHẦN II)**

### **A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

Các bước giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình:

Bước 1: Lập hệ phương trình:

- Chọn các ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho các ẩn số;
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo các ẩn và các đại lượng đã biết;
- Lập hệ phương trình biểu thị sự tương quan giữa các đại lượng.

Bước 2: Giải hệ phương trình vừa thu được.

Bước 3: Kết luận

- Kiểm tra xem trong các nghiệm của hệ phương trình, nghiệm nào thỏa mãn điều kiện của ẩn.
- Kết luận bài toán.

### **B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN**

#### **Dạng 4. Toán phần trăm**

Phương pháp giải: Nếu gọi số sản phẩm là  $x$  thì số sản phẩm đó khi vượt mức  $a\%$  là  $(100 + a)\%x$ .

*\*Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 7.1.** Hai xí nghiệp thoe kế hoạch phải làm tổng cộng 360 dụng cụ. Trên thực tế, xí nghiệp I vượt mức 12%, xí nghiệp II vượt mức 10% do đó cả hai xí nghiệp làm tổng cộng 400 dụng cụ. Tính số dụng cụ mỗi xí nghiệp phải làm.

*\* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 7.2.** Trong tuần đầu hai tổ sản xuất được 1500 bộ quần áo. Sang tuần thứ hai, tổ A vượt mức 25%, tổ B giảm mức 18% nên trong tuần này, cả hai tổ sản xuất được 1617 bộ. Hỏi trong tuần đầu mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu.

#### **Dạng 5. Toán có nội dung hình học**

Phương pháp giải:

- Với hình chữ nhật:

$$\text{Diện tích} = \text{Chiều dài} \times \text{Chiều rộng}$$

$$\text{Chu vi} = (\text{Chiều dài} + \text{Chiều rộng}) \times 2$$

- Với tam giác:

$$\text{Diện tích} = (\text{Đường cao} \times \text{Cạnh đáy}) : 2$$

$$\text{Chu vi} = \text{Tổng độ dài ba cạnh.}$$

*\*Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 7.3.** Một tam giác có chiều cao bằng  $\frac{3}{4}$  cạnh đáy. Nếu chiều cao tăng thêm 3 dm và cạnh đáy giảm đi 3 dm thì diện tích của nó tăng thêm  $12 \text{ dm}^2$ . Tính chiều cao và cạnh đáy của tam giác.

*\* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 7.4.** Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi bằng 48 m. Nếu tăng chiều rộng lên bốn lần và chiều dài lên ba lần thì chu vi của khu vườn sẽ là 162 m. Hãy tính diện tích của khu vườn ban đầu.

### **Dạng 6. Toán về sự thay đổi các thừa số của tích**

*\*Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 7.5.** Một ô tô đi từ A đến B với vận tốc và thời gian dự định. Nếu ô tô tăng vận tốc 8 km/h thì đến B sớm hơn dự định 1 giờ. Nếu ô tô giảm vận tốc 4 km/h thì đến B chậm hơn dự định 40 phút. Tính vận tốc và thời gian dự định.

*\* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 7.6.** Trong một hội trường có số băng ghế, mỗi băng ghế quy định ngồi số người như nhau. Nếu bớt hai băng ghế và mỗi băng ghế ngồi thêm 1 người thì thêm được 8 chỗ. Nếu thêm 3 băng ghế và mỗi băng ghế ngồi bớt 1 người thì giảm 8 chỗ. Tính số băng ghế trong hội trường.

### **Dạng 7. Các dạng khác.**

*\*Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 7.7.** Hai giá sách có 450 cuốn. Nếu chuyển 50 cuốn từ giá thứ nhất sang giá thứ hai thì số sách trên giá thứ hai bằng  $\frac{4}{5}$  số sách ở giá thứ nhất. Tính số sách trên mỗi giá.

**Bài 7.8.** Hai anh An và Bình góp vốn kinh doanh. Anh An góp 13 triệu đồng, anh Bình góp 15 triệu đồng. Sau một thời gian kinh doanh được lãi 7 triệu đồng. Lãi được chia theo tỉ lệ góp vốn. Tính số tiền lãi mà mỗi anh được hưởng.

*\* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 7.9.** Một công nhân dự định làm 72 sản phẩm trong một thời gian đã định. Nhưng thực tế xí nghiệp lại giao 80 sản phẩm. Mặc dù người đó mỗi giờ đã làm thêm một số sản phẩm so với dự kiến, nhưng thời gian hoàn thành công việc vẫn chậm hơn so với dự kiến là 12 phút. Tính số sản phẩm dự kiến làm trong 1 giờ của người đó, biết mỗi giờ người đó làm không quá 20 sản phẩm.

**Bài 7.10.** Trên một cánh đồng cấy 60 ha lúa giống mới và 40 ha lúa giống cũ. Thu hoạch được tất cả 460 tấn thóc. Hỏi năng suất mỗi loại lúa trên một ha là bao nhiêu, biết rằng 3 ha trồng lúa mới thu hoạch được ít hơn 4 ha trồng lúa cũ là 1 tấn.

## **C. BÀI TẬP VỀ NHÀ**



**Bài 7.11.** Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài bằng  $\frac{7}{4}$  chiều rộng và có diện tích bằng  $1792 \text{ m}^2$ . Tính chu vi của khu vườn ấy.

**Bài 7.12.** Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích là  $720 \text{ m}^2$ , nếu tăng chiều dài thêm  $6 \text{ m}$  và giảm chiều rộng đi  $4 \text{ m}$  thì diện tích mảnh vườn không đổi. Tính các kích thước của mảnh vườn.

**Bài 7.13.** Có hai phân xưởng, phân xưởng thứ I làm trong  $20$  ngày, phân xưởng thứ II làm trong  $15$  ngày được  $1600$  dụng cụ. Biết số dụng cụ phân xưởng thứ I làm trong  $4$  ngày bằng số dụng cụ phân xưởng I làm trong  $5$  ngày. Tính số dụng cụ mỗi phân xưởng đã làm.

**Bài 7.14.** Trong một kì thi hai trường A, B có tổng cộng  $350$  học sinh dự thi. Kết quả hai trường đó là  $338$  học sinh trúng tuyển. Tính ra thì trường A có  $97\%$  và trường B có  $96\%$  số học sinh trúng tuyển. Hỏi mỗi trường có bao nhiêu học sinh dự thi.

**Bài 7.15.** Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi bằng  $28\text{m}$ . Đường chéo hình chữ nhật là  $10\text{m}$ . Tính độ dài hai cạnh của mảnh đất hình chữ nhật.

**Bài 7.16.** Một hình chữ nhật. Nếu tăng chiều dài thêm  $2\text{m}$  và chiều rộng  $3 \text{ m}$  thì diện tích tăng  $100 \text{ m}^2$ . Nếu cùng giảm chiều dài và chiều rộng  $2\text{m}$  thì diện tích giảm  $68 \text{ m}^2$ . Tính diện tích thửa ruộng đó.

**Bài 7.17.** Người ta trộn  $4 \text{ kg}$  chất lỏng loại I với  $3 \text{ kg}$  chất lỏng loại II thì được một hỗn hợp có khối lượng riêng là  $700 \text{ kg/m}^3$ . Biết khối lượng riêng của chất lỏng loại I lớn hơn khối lượng riêng của chất lỏng loại II là  $200 \text{ kg/m}^3$ . Tính khối lượng riêng của mỗi chất.

**Bài 7.18.** Trong một buổi liên hoan văn nghệ, phòng họp chỉ có  $320$  chỗ ngồi, nhưng số người tới dự hôm đó là  $420$  người. Do đó phải đặt thêm  $1$  dãy ghế và thu xếp để mỗi dãy ghế thêm được  $4$  người ngồi nữa mới đủ. Hỏi lúc đầu trong phòng có bao nhiêu ghế.

-----

ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 1 (PHẦN I)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình bậc nhất hai ẩn

- Phương trình bậc nhất hai ẩn là phương trình có dạng  $ax + by = c$  trong đó  $a, b, c$  là các số cho trước,  $a$  và  $b$  không đồng thời bằng 0,  $x$  và  $y$  là các ẩn số.
- Phương trình bậc nhất hai ẩn luôn có vô số nghiệm. Tập nghiệm của phương trình  $ax + by = c$  được biểu diễn bởi đường thẳng  $d: ax + by = c$  trên mặt phẳng tọa độ.

2. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

- Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn là hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Trong đó  $a, b, c, a', b', c'$  là các số cho trước,  $x$  và  $y$  là các ẩn số.

- Ta có thể giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp thế hoặc phương pháp cộng đại số, trong đó:

+ Để giải bằng phương pháp thế, ta rút  $x$  hoặc  $y$  từ một trong hai phương trình và thế vào phương trình còn lại.

+ Để giải bằng phương pháp cộng đại số, ta nhân hai vế của từng phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn ( $x$  hoặc  $y$ ) trong hai phương trình bằng nhau hoặc đối nhau, sau đó trừ (hoặc cộng) hai phương trình đó cho nhau để thu được một phương trình mới chỉ còn một ẩn.

B. BÀI TẬP CÀ CÁC DẠNG TOÁN

**Dạng 1. Giải và biện luận hệ phương trình bậc nhất hai ẩn**

\*Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

**Bài 8.1.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} mx - y = 2 \\ 3x + my = 5 \end{cases}$

- a) Chứng minh rằng hệ phương trình có nghiệm duy nhất với mọi giá trị của tham số  $m$ .
- b) Gọi  $(x; y)$  là nghiệm duy nhất của hệ phương trình. Tìm các giá trị của  $m$  để:

$$\text{i) } x + y = 1 - \frac{m^2}{m^2 + 3} \qquad \text{ii) } \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

**Bài 8.2.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ mx + y = 4 \end{cases}$

- a) Giải và biện luận hệ phương trình đã cho theo tham số  $m$ .
- b) Trong trường hợp hệ có nghiệm duy nhất  $(x; y)$ , tìm các giá trị của  $m$  để:

i)  $x$  và  $y$  trái dấu

ii)  $x = |y|$ .

**Bài 8.3.** Cho hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x + my = m + 1 \\ mx + y = 2m \end{cases}$$

- Giải và biện luận hệ phương trình đã cho theo tham số  $m$ .
- Tìm các giá trị  $m$  nguyên để hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $(x;y)$  với  $x$  và  $y$  là những số nguyên.
- Tìm hệ thức liên hệ giữa  $x$  và  $y$  không phụ thuộc  $m$ .

\* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

**Bài 8.4.** Cho hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 3x + 2y = m \\ x + my = 3 \end{cases}$$

- Giải hệ phương trình với  $m = -3$
- Giải và biện luận hệ phương trình đã cho.
- Tìm các giá trị của  $m$  để hệ phương trình đã cho có nghiệm  $(x; y)$  thỏa mãn điều kiện  $3x + 4y = -5$

**Bài 8.5.** Cho hệ phương trình 
$$\begin{cases} x + my = 4 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

- Giải hệ phương trình với  $m = 3$ ;
- Tìm các giá trị của tham số  $m$  để hệ phương trình đã cho:
  - Có nghiệm duy nhất;
  - Vô nghiệm;
  - Vô số nghiệm.

**Bài 8.6.** Cho hệ phương trình 
$$\begin{cases} mx - y = 2 \\ 2x + my = 4 \end{cases}$$

- Giải và biện luận hệ phương trình đã cho
- Tìm các giá trị của  $m$  để hệ phương trình có nghiệm  $(x;y)$  thỏa mãn

$$2x - y + \frac{2+m}{2+m^2} = 1$$

### C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

**Bài 8.7.** Cho hệ phương trình 
$$\begin{cases} mx + y = 10 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases}$$

- Giải hệ phương trình với  $m = 1$
- Giải và biện luận hệ phương trình đã cho.

**Bài 8.8.** Cho hệ phương trình 
$$\begin{cases} 2x + 3y = m \\ -5x + y = -1 \end{cases}$$

- Giải hệ phương trình với  $m = 3$ ;

- b) Tìm các giá trị của  $m$  để nghiệm  $(x;y)$  của hệ phương trình thỏa mãn điều kiện  $x > 0;$   
 $y > 0$ .

**Bài 8.9.** Cho hệ phương trình: 
$$\begin{cases} (a-1)x + y = a \\ x + (a-1)y = 2 \end{cases}$$

- a) Giải và biện luận hệ phương trình đã cho theo tham số  $a$ ;  
b) Trong trường hợp hệ có nghiệm duy nhất  $(x;y)$ ,  
i) Tìm hệ thức liên hệ giữa  $x$  và  $y$  không phụ thuộc  $a$ .  
ii) Tìm các giá trị của  $a$  để  $x$  và  $y$  thỏa mãn  $6x^2 - 19y = 5$

**Bài 8.10.** Cho hệ phương trình 
$$\begin{cases} 2x - 3y = 2\sqrt{m} + 6 \\ x - y = \sqrt{m} + 2 \end{cases}$$
 với  $m$  là tham số không âm.

- a) Giải hệ phương trình với  $m = 4$ ;  
b) Tìm các giá trị của  $m$  sao cho biểu thức  $P = x + y$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Bài 8.11.** Cho hệ phương trình 
$$\begin{cases} mx + 4y = 10 - m \\ x + my = 4 \end{cases}$$
 ( $m$  là tham số)

- a) Giải hệ phương trình khi  $m = \sqrt{2}$ ;  
b) Giải và biện luận hệ phương trình đã cho theo tham số  $m$ .  
c) Trong trường hợp hệ có nghiệm duy nhất  $(x;y)$ , tìm các giá trị của  $m$  để:  
i)  $y - 5x = 4$                               ii)  $x < 1$  và  $y > 0$ .

**Bài 8.12.** Cho hệ phương trình 
$$\begin{cases} 2mx + y = 2 \\ 2x + my = m + 1 \end{cases}$$

- a) Giải và biện luận hệ phương trình đã cho theo tham số  $m$ .  
b) Trong trường hợp hệ có nghiệm duy nhất  $(x; y)$ , tìm hệ thức liên hệ giữa  $x, y$  không phụ thuộc  $m$ .
-

## ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 1 (PHẦN II)

### A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Để giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình, ta thực hiện các bước sau đây:

Bước 1: Lập hệ phương trình:

- Chọn các ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho các ẩn số;
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo các ẩn và các đại lượng đã biết;
- Lập hệ phương trình biểu thị sự tương quan giữa các đại lượng.

Bước 2: Giải hệ phương trình vừa thu được.

Bước 3: Kết luận

- Kiểm tra xem trong các nghiệm của hệ phương trình, nghiệm nào thỏa mãn điều kiện của ẩn.
- Kết luận bài toán.

### B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

#### Dạng 2. Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình

*Phương pháp giải: Xem trong phần tóm tắt lý thuyết*

*\*Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 9.1.** Một hình chữ nhật có chu vi là 110m. Hai lần chiều dài hơn ba lần chiều rộng là 10m. Tính diện tích hình chữ nhật.

**Bài 9.2.** Hai người cùng làm một công việc trong 7 giờ 12 phút thì xong công việc. Nếu người thứ nhất làm trong 4 giờ, người thứ hai làm trong 3 giờ thì được 50% công việc. Hỏi mỗi người làm một mình trong mấy giờ thì xong công việc?

**Bài 9.3.** Một ca nô xuôi từ A đến B với vận tốc xuôi dòng là 30km/h, sau đó lại đi ngược từ B về A. Thời gian xuôi ít hơn thời gian ngược 1 giờ 20 phút. Tính khoảng cách giữa hai bến A và B biết rằng vận tốc dòng nước là 5 km/h và vận tốc riêng của ca nô khi xuôi và ngược là bằng nhau.

**Bài 9.4.** Hai đội bóng bàn của hai trường phổ thông thi đấu với nhau. Mỗi đấu thủ của đội này phải đấu với một đấu thủ của đội kia một trận. Biết rằng tổng số trận đấu bằng 4 lần tổng số đấu thủ của hai đội và số đấu thủ của ít nhất một trong hai đội là số lẻ. Hỏi mỗi đội có bao nhiêu đấu thủ?

*\* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 9.5.** Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi 280m. Người ta làm một lối đi xung quanh vườn (thuộc đất của vườn) rộng 2m, diện tích còn lại là 4256 m<sup>2</sup>. Tính các kích thước của khu vườn.

**Bài 9.6.** Một đội xe vận tải phải chuyên 28 tấn hàng đến một địa điểm quy định. Vì trong đội có 2 xe phải điều đi làm việc khác nên mỗi xe phải chở thêm 0,7 tấn hàng nữa. Tính số xe của đội lúc đầu?

**Bài 9.7.** Một ca nô chạy trên sông trong 8 giờ, xuôi dòng 81 km và ngược dòng 105 km. Một lần khác cũng chạy trên khúc sông đó, ca nô này chạy trong 4 giờ, xuôi dòng 54 km và ngược dòng 42 km. Hãy tính vận tốc khi xuôi dòng và ngược dòng của ca nô, biết vận tốc dòng nước và vận tốc riêng của ca nô không đổi.

**Bài 9.8.** Tháng thứ nhất hai tổ sản xuất được 900 chi tiết máy. Tháng thứ hai tổ I vượt mức 15%, tổ hai vượt mức 10% so với tháng thứ nhất. Vì vậy hai tổ đã sản xuất được 1010 chi tiết máy. Hỏi tháng thứ nhất mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy?

### **C. BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 9.9.** Tìm hai số biết tổng của chúng là 17, tổng bình phương mỗi số là 157.

**Bài 9.10.** Một thửa ruộng hình chữ nhật có diện tích là  $100\text{m}^2$ . Tính độ dài các cạnh của thửa ruộng, biết rằng nếu tăng chiều rộng của thửa ruộng lên 2m và giảm chiều dài của thửa ruộng đi 5 m thì diện tích của thửa ruộng sẽ tăng thêm  $5\text{m}^2$ .

**Bài 9.11.** Một hình chữ nhật có chu vi 90m. Nếu tăng chiều rộng lên gấp đôi và giảm chiều dài đi 15m thì ta được hình chữ nhật mới có diện tích bằng diện tích hình chữ nhật ban đầu. Tính các cạnh của hình chữ nhật đã cho.

**Bài 9.12.** Một thửa ruộng hình tam giác có diện tích  $180\text{ m}^2$ . Tính chiều dài cạnh đáy của thửa ruộng biết rằng nếu tăng cạnh đáy thêm 4m và chiều cao giảm đi 1m thì diện tích không đổi.

**Bài 9.13.** Để hoàn thành một công việc hai tổ phải làm trong 6 giờ. Sau 2 giờ làm chung thì tổ hai bị điều đi làm việc khác, tổ một đã hoàn thành nốt công việc trong 10 giờ. Hỏi nếu mỗi tổ làm riêng thì sau bao lâu sẽ hoàn thành công việc.

**Bài 9.14.** Một người đi xe máy từ A đến B cách nhau 120 km với vận tốc dự định trước. Sau khi đi được  $\frac{1}{3}$  quãng đường AB người đó tăng vận tốc lên 10 km/h trên quãng đường còn lại. Tính vận tốc dự định và thời gian lăn bánh trên đường, biết rằng người đó đến B sớm hơn dự định 24 phút.

**Bài 9.15.** Một người dự định đi xe đạp từ A đến B cách nhau 96 km trong thời gian nhất định. Sau khi đi được một nửa quãng đường, người đó dừng lại 18 phút. Do đó để đến B đúng hẹn, người đó đã tăng vận tốc thêm 2km/h trên quãng đường còn lại. Tính vận tốc ban đầu và thời gian xe lăn bánh trên đường.

**Bài 9.16.** Một công nhân dự định làm 150 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Sau khi làm được 2 giờ với năng suất dự kiến, người đó cải tiến các thao tác nên đã tăng năng suất được 2 sản phẩm mỗi giờ và vì vậy đã hoàn thành 150 sản phẩm sớm hơn dự kiến 30 phút. Hãy tính năng suất dự kiến ban đầu.

**Bài 9.17.** Cho một số có hai chữ số. Tổng hai chữ số của chúng bằng 10. Tích hai chữ số ấy nhỏ hơn số đã cho là 12. Tìm số đã cho.

**Bài 9.18.** Có hai loại quặng chứa 75% sắt và 50% sắt. Tính khối lượng của mỗi loại quặng đem trộn để được 25 tấn quặng chứa 66% sắt.

**Bài 9.19.** Hai năm trước đây, tuổi của anh gấp đôi tuổi của em, còn 8 năm trước đây, tuổi của anh gấp 5 lần tuổi em. Hỏi hiện nay anh và em bao nhiêu tuổi.

**Bài 9.20.** Người ta trộn 8 g chất lỏng này với 6 g chất lỏng khác có khối lượng riêng nhỏ hơn nó là  $0,2\text{g/cm}^3$  để được hỗn hợp có khối lượng riêng  $0,7\text{g/cm}^3$ . Tìm khối lượng riêng của mỗi chất lỏng.

**Bài 9.21.** Có ba thùng chứa tất cả 80 lít dầu. Thùng thứ nhất chứa nhiều hơn thùng thứ hai 10 lít. Nếu đổ 26 lít từ thùng thứ nhất sang thùng thứ ba thì số dầu ở thùng thứ hai và thùng thứ ba bằng nhau. Hỏi số dầu ban đầu ở thùng thứ nhất và thùng thứ hai?

**Bài 9.22.** Trong một phòng họp có một số ghế dài. Nếu xếp mỗi ghế 5 người thì có 9 người không có chỗ ngồi. Nếu xếp ghế 6 người thì thừa 1 ghế. Hỏi trong phòng họp có bao nhiêu ghế và có bao nhiêu người dự họp?

**Bài 9.23.** Bạn Tuấn vào cửa hàng bách hóa mua một đôi giày và một bộ quần áo thể thao, giá tiền tổng cộng là 148.000 đồng. Một tuần sau trở lại giá mỗi đôi giày giảm 20%, giá mỗi bộ quần áo thể thao đã giảm 40%. Bạn Tuấn đưa cho cô bán hàng 11.000 đồng, cô bán hàng trả lại bạn Tuấn 8.900 đồng. Hỏi giá tiền một đôi giày, giá tiền một bộ quần áo thể thao khi chưa giảm giá là bao nhiêu?

**CHỦ ĐỀ 2. HÀM SỐ  $y = ax^2 (a \neq 0)$ . PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN**

**VẤN ĐỀ 1. HÀM SỐ  $y = ax^2 (a \neq 0)$  VÀ ĐỒ THỊ (PHẦN I)**

**A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

1. Sự đồng biến và nghịch biến của hàm số
  - a) Nếu  $a > 0$  thì hàm số nghịch biến khi  $x < 0$  và đồng biến khi  $x > 0$
  - b) Nếu  $a < 0$  thì hàm số đồng biến khi  $x < 0$  và nghịch biến khi  $x > 0$
2. Đồ thị của hàm số

Đồ thị của hàm số  $y = ax^2 (a \neq 0)$  là một parabol đi qua gốc tọa độ O, nhận Oy làm trục đối xứng (O là đỉnh của Parabol).

- Nếu  $a > 0$  thì đồ thị nằm phía trên trục hoành, O là điểm thấp nhất của đồ thị.
- Nếu  $a < 0$  thì đồ thị nằm phía dưới trục hoành, O là điểm cao nhất của đồ thị.

**B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN**

**Dạng 1. Tính giá trị của hàm số tại một điểm cho trước**

Phương pháp giải: Giá trị của hàm số  $y = ax^2 (a \neq 0)$  tại điểm  $x = x_0$  là  $y_0 = ax_0^2$

*\*Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 1.1.** Cho hàm số  $y = f(x) = -2x^2$

- a) Tìm giá trị của hàm số lần lượt tại -2; 0 và  $3 - 2\sqrt{2}$ .
- b) Tìm các giá trị của a, biết rằng  $f(a) = -10 + 4\sqrt{6}$ .
- c) Tìm điều kiện của b, biết rằng  $f(b) \geq 4b + 6$ .

**Bài 1.2.** Cho hàm số  $y = (2m + 1)x^2$ . Tìm các giá trị của tham số m để:

- a) Đồ thị hàm số đi qua điểm  $A\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$ ;
- b) Đồ thị hàm số đi qua điểm  $(x_0; y_0)$  là nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x^2 - 2y = 2 \end{cases}$

**Bài 1.3.** Một vật rơi ở độ cao so với mặt đất là 100 m. Quãng đường chuyển động S (đơn vị tính bằng mét) của vật rơi phụ thuộc vào thời gian t (đơn vị tính bằng giây) được cho bởi công thức  $S = 4t^2$

- a) Hỏi sau các khoảng thời gian lần lượt là 3 giây, 5 giây, vật này cách mặt đất các khoảng là bao nhiêu mét?
- b) Sau thời gian bao lâu thì vật tiếp đất?

*\* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 1.4.** Cho hàm số  $y = f(x) = 3x^2$



- a) Tính giá trị của hàm số lần lượt tại  $-3$ ;  $2\sqrt{2}$  và  $1 - 2\sqrt{3}$ .
- b) Tìm a biết  $f(a) = 12 + 6\sqrt{3}$
- c) Tìm b biết  $f(b) \geq 6b + 12$

**Bài 1.5.** Cho hàm số  $y = (2m - 1)x^2$

- a) Tìm giá trị của m để  $y = -2$  khi  $x = -1$ .
- b) Tìm giá trị của m biết (x;y) thỏa mãn:

$$\text{i)} \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \qquad \text{ii)} \begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 - 2y = -4 \end{cases}$$

**Bài 1.6.** Một khách du lịch chơi trò Bungee từ đỉnh tòa tháp Maca cao 234 m so với mặt đất. Quỹ đạo chuyển động S (đơn vị tính bằng mét) của người rơi phụ thuộc vào thời gian t (đơn vị tính bằng giây) được cho bởi công thức:  $S = \frac{13}{2}t^2$

- a) Hỏi sau khoảng thời gian 4 giây người du khách cách mặt đất là bao nhiêu mét?
- b) Sau khoảng thời gian bao lâu thì người du khách cách mặt đất 71,5 mét?

**Dạng 2. Xét tính đồng biến và nghịch biến của hàm số**

Phương pháp giải: Xét hàm số  $y = ax^2 (a \neq 0)$ . Ta có:

- Nếu  $a > 0$  thì hàm số nghịch biến khi  $x < 0$  và đồng biến khi  $x > 0$
- Nếu  $a < 0$  thì hàm số đồng biến khi  $x < 0$  và nghịch biến khi  $x > 0$

*\*Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 1.7.** Cho hàm số  $y = (3m + 2)x^2$  với  $m \neq -2$ . Tìm các giá trị của tham số m để hàm số:

- a) Đồng biến với mọi  $x < 0$ ;
- b) Nghịch biến với mọi  $x < 0$ ;
- c) Đạt giá trị nhỏ nhất là 0;
- d) Đạt giá trị lớn nhất là 0.

*\* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 1.8.** Cho hàm số  $y = (3m - 4)x^2$  với  $m \neq \frac{4}{3}$ . Tìm các giá trị của tham số m để hàm số:

- a) Nghịch biến với mọi  $x > 0$ ;
- b) Đồng biến với mọi  $x > 0$ ;
- c) Đạt giá trị lớn nhất là 0;
- d) Đạt giá trị nhỏ nhất là 0.

**Bài 1.9.** Cho hàm số  $y = (-m^2 - 2m - 3)x^2$

- a) Chứng minh với mọi tham số  $m$ , hàm số luôn nghịch biến với mọi  $x > 0$  và đồng biến với mọi  $x < 0$ ;
- b) Tìm các giá trị của tham số  $m$  để khi  $x = \pm \frac{1}{2}$  thì  $y = -\frac{11}{4}$ .

**Bài 1.10.** Cho hàm số  $y = (\sqrt{2m-3} - 2)x^2$ . Tìm các giá trị của tham số  $m$  để hàm số đồng biến với mọi  $x > 0$  và nghịch biến với mọi  $x < 0$ .

### **C. BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 1.11.** Không vẽ đồ thị hãy tìm tọa độ các giao điểm của các đồ thị hàm số sau:

- a)  $y = x^2$  và  $y = \frac{1}{2}x$ ;                      b)  $y = x^2$  và  $y = 2x - 1$
- c)  $y = x^2$  và  $y = 2x - 3$ ;                      d)  $y = \frac{1}{2}x^2$  và  $y = mx + \frac{1}{2}m^2 - 8$

**Bài 1.12.** Cho hàm số  $y = \frac{1}{4}x^2$ . Xác định giá trị của  $m$  để các điểm sau nằm trên đồ thị hàm số:

- a)  $A(2; m)$ ;                      b)  $B(-\sqrt{2}; m)$ ;                      c)  $C\left(m; \frac{3}{4}\right)$ .

**Bài 1.13.** Cho hàm số  $y = (m^2 + 2m + 3)x^2$

- a) Chứng minh hàm số luôn nghịch biến với mọi  $x < 0$  và đồng biến với mọi  $x > 0$ ;
- b) Tìm các giá trị của  $m$  biết khi  $x = \pm 1$  thì  $y = 4$ .

**Bài 1.14.** Cho hàm số  $y = (\sqrt{3m+4} - 3)x^2$ . Tìm các giá trị của tham số  $m$  để hàm số:

- a) Nghịch biến với mọi  $x > 0$ ;
- b) Đồng biến với mọi  $x > 0$ .

**Bài 1.15.** Cho hàm số  $y = (3m + 1)x^2$ . Tìm các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số:

- a) Đi qua  $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ ;
- b) Đi qua điểm  $B(x_0; y_0)$  với  $(x_0; y_0)$  là nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ -4x + 3y = -5 \end{cases}$

**Bài 1.16.** Một con cá heo biểu diễn nhảy lên khỏi mặt nước một khoảng là 4m. Quỹ đạo nhảy lên  $s$  (đơn vị bằng mét) của cá heo phụ thuộc vào thời gian  $t$  (đơn vị tính bằng giây) được cho bởi công thức:  $S = t^2$

- a) Hỏi sau khoảng thời gian 1,5 giây, cá heo cách mặt nước bao nhiêu mét?

b) Sau thời gian bao lâu thì cá heo tiếp nước.

-----

**VẤN ĐỀ 2. HÀM SỐ  $y = ax^2 (a \neq 0)$  VÀ ĐỒ THỊ (PHẦN II)**

**A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

1. Sự đồng biến và nghịch biến của hàm số
  - a) Nếu  $a > 0$  thì hàm số nghịch biến khi  $x < 0$  và đồng biến khi  $x > 0$
  - b) Nếu  $a < 0$  thì hàm số đồng biến khi  $x < 0$  và nghịch biến khi  $x > 0$
2. Đồ thị của hàm số

Đồ thị của hàm số  $y = ax^2 (a \neq 0)$  là một parabol đi qua gốc tọa độ  $O$ , nhận  $Oy$  làm trục đối xứng ( $O$  là đỉnh của Parabol).

- Nếu  $a > 0$  thì đồ thị nằm phía trên trục hoành,  $O$  là điểm thấp nhất của đồ thị.
- Nếu  $a < 0$  thì đồ thị nằm phía dưới trục hoành,  $O$  là điểm cao nhất của đồ thị.

**B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN**

**Dạng 3. Vẽ đồ thị của hàm số**

*Phương pháp giải:* Ta thực hiện các bước sau:

*Bước 1.* Lập bảng giá trị đặc biệt tương ứng giữa  $x$  và  $y$  của hàm số  $y = ax^2 (a \neq 0)$ .

*Bước 2.* Biểu diễn các điểm đặc biệt trên mặt phẳng tọa độ và vẽ đồ thị dạng Parabol của hàm số đi qua các điểm đặc biệt đó.

*\*Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 2.1.** Cho hàm số  $y = ax^2 (a \neq 0)$  có đồ thị parabol  $(P)$

- a) Xác định  $a$  để  $(P)$  đi qua điểm  $A(-\sqrt{2}; -4)$ .
- b) Với giá trị  $a$  vừa tìm được ở trên hãy:
  - i) Vẽ  $(P)$  trên mặt phẳng tọa độ;
  - ii) Tìm các điểm trên  $(P)$  có tung độ bằng  $-2$ ;
  - iii) Tìm các điểm trên  $(P)$  cách đều hai trục tọa độ.

*\* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 2.2.** Cho hàm số  $y = (m - 1)x^2 (m \neq 1)$  có đồ thị là  $(P)$ .

- a) Xác định  $m$  để  $(P)$  đi qua điểm  $A(-\sqrt{3}; 1)$ ;
- b) Với giá trị của  $m$  vừa tìm được ở trên, hãy:
  - i) Vẽ  $(P)$  trên mặt phẳng tọa độ;
  - ii) Tìm các điểm trên  $(P)$  có hoành độ bằng  $1$ ;
  - iii) Tìm các điểm trên  $(P)$  có tung độ gấp đôi hoành độ.

**Dạng 4. Tọa độ giao điểm của parabol và đường thẳng**

*Phương pháp giải:* Cho parabol  $(P): y = ax^2 (a \neq 0)$  và đường thẳng  $d: y = mx + n$ . Để tìm tọa độ giao điểm (nếu có) của  $(P)$  và  $d$  ta làm như sau:

*Bước 1.* Xét phương trình hoành độ giao điểm của  $(P)$  và  $d$ :

$$ax^2 = mx + n \quad (*)$$

*Bước 2.* Giải phương trình  $(*)$  ta tìm được nghiệm (nếu có). Từ đó ta tìm được tọa độ giao điểm của  $(P)$  và  $d$ .

*Chú ý:* Số nghiệm của  $(*)$  bằng đúng số giao điểm của  $(P)$  và  $d$ .

- Nếu  $(*)$  vô nghiệm thì  $d$  không cắt  $(P)$
- Nếu  $(*)$  có nghiệm kép thì  $d$  tiếp xúc với  $(P)$
- Nếu  $(*)$  có hai nghiệm phân biệt thì  $d$  cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt.

*\*Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 2.3.** Cho hàm số  $y = ax^2 (a \neq 0)$  có đồ thị parabol  $(P)$

- a) Tìm hệ số  $a$  biết rằng  $(P)$  đi qua điểm  $M(-2; 4)$ .
- b) Viết phương trình đường thẳng  $d$  đi qua gốc tọa độ và điểm  $N(2;4)$ .
- c) Vẽ  $(P)$  và  $d$  tìm được ở các câu a) và b) trên cùng một hệ trục tọa độ.
- d) Tìm tọa độ giao điểm của  $(P)$  và  $d$  ở các câu a) và b).

**Bài 2.4.** Cho  $(P): y = x^2$  và  $d: y = \frac{1}{2}x$ .

- a) Vẽ  $(P)$  và  $d$  trên cùng một hệ trục tọa độ;
- b) Xác định tọa độ giao điểm của  $(P)$  và  $d$ ;
- c) Dựa vào đồ thị, hãy giải bất phương trình  $x^2 > \frac{1}{2}x$

*\* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 2.5.** Cho hàm số  $y = x^2$  có đồ thị là parabol  $(P)$

- a) Vẽ  $(P)$  trên hệ trục tọa độ;
- b) Trong các điểm  $A(1;1); B(-1;-1); C(10;-200)$  điểm nào thuộc  $(P)$ , điểm nào không thuộc  $(P)$ ?

**Bài 2.6.** Cho hàm số  $y = 2x^2$  có đồ thị là  $(P)$

- a) Vẽ  $(P)$  trên hệ trục tọa độ;

b) Tìm các điểm thuộc  $(P)$  và:

i) Có tung độ bằng 4;

ii) Cách đều hai trục tọa độ.

c) Dựa vào đồ thị, biện luận số nghiệm của phương trình  $2x^2 - 2m + 3 = 0$

**C. BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 2.7.** Cho hàm số  $y = -2x^2$  có đồ thị là  $(P)$

a) Vẽ  $(P)$  trên hệ trục tọa độ;

c) Trong các điểm  $A(1;2); B(-1;-2); C(10;-200)$  điểm nào thuộc  $(P)$ , điểm nào không thuộc  $(P)$ ?

**Bài 2.8.** Cho parabol  $(P): y = 2x^2$  và đường thẳng  $d: y = x + 1$ .

a) Vẽ  $(P)$  và  $d$  trên cùng một hệ trục tọa độ;

b) Xác định tọa độ giao điểm của  $(P)$  và  $d$ ;

c) Dựa vào đồ thị, hãy giải bất phương trình  $2x^2 - x - 1 < 0$ .

**Bài 2.9.** Cho  $(P): y = 2x^2$  và  $d: y = \frac{3}{2}x$ .

a) Vẽ  $(P)$  và  $d$  trên cùng một hệ trục tọa độ;

b) Xác định tọa độ giao điểm của  $(P)$  và  $d$ ;

c) Dựa vào đồ thị, hãy giải bất phương trình  $2x^2 \leq \frac{3}{2}x$ .

**Bài 2.10.** Cho parabol  $(P): y = \frac{1}{2}x^2$

a) Vẽ  $(P)$  trên mặt phẳng tọa độ

b) Dựa vào đồ thị hãy biện luận theo  $m$  số nghiệm của phương trình  $x^2 - 2m + 4 = 0$ .

-----

**VẤN ĐỀ 3. CÔNG THỨC NGHIỆM  
CỦA PHƯƠNG TRÌNH CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI (PHẦN I)**

**A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

**1. Phương trình bậc hai một ẩn**

- *Phương trình bậc hai một ẩn* (hay gọi tắt là *phương trình bậc hai*) là phương trình có dạng:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

Trong đó  $a, b, c$  là các số thực cho trước,  $x$  là ẩn số.

- Giải phương trình bậc hai một ẩn là đi tìm tập nghiệm của phương trình bậc hai một ẩn đó.

**2. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai**

Xét phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) và biệt thức  $\Delta = b^2 - 4ac$

*Trường hợp 1.* Nếu  $\Delta < 0$  thì phương trình vô nghiệm.

*Trường hợp 2.* Nếu  $\Delta = 0$  thì phương trình có nghiệm kép:  $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

*Trường hợp 3.* Nếu  $\Delta > 0$  thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

**B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN**

**Dạng 1. Không dùng công thức nghiệm, giải phương trình bậc hai một ẩn cho trước**

*Phương pháp giải:* Ta có thể sử dụng một trong các cách sau:

*Cách 1.* Đưa phương trình đã cho về dạng tích.

*Cách 2.* Đưa phương trình đã cho về phương trình mà vế trái là một bình phương còn vế phải là một hằng số.

- Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

**Bài 3.1.** Giải các phương trình:

a)  $5x^2 - 7x = 0$

b)  $-3x^2 + 9 = 0$

c)  $x^2 - 6x + 5 = 0$

d)  $3x^2 + 12x + 1 = 0$

**Bài 3.2.** Với giá trị nào của  $m$  thì phương trình  $4x^2 + m^2x + 4m = 0$  có nghiệm  $x = 1$ ?

- Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

**Bài 3.3.** Giải các phương trình:

a)  $-\sqrt{3}x^2 + 6x = 0$

b)  $-\frac{3}{5}x^2 - \frac{7}{2} = 0$

c)  $x^2 - x - 9 = 0$

d)  $3x^2 + 6x + 5 = 0$

**Bài 3.4.** Cho phương trình  $4mx^2 - x - 10m^2 = 0$ . Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình có nghiệm  $x = 2$ .

**Dạng 2. Giải phương trình bậc hai bằng cách sử dụng công thức nghiệm**

*Phương pháp giải:* Xét phương trình bậc hai:

$ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ )

*Bước 1.* Xác định các hệ số  $a, b, c$  và tính các biệt thức  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

*Bước 2.* Kết luận

- Nếu  $\Delta < 0$  thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu  $\Delta = 0$  thì phương trình có nghiệm kép:  $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
- Nếu  $\Delta > 0$  thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 3.5.** Xác định các hệ số  $a, b, c$  và tính biệt thức  $\Delta$  rồi tìm nghiệm của các phương trình:

- |                         |                         |
|-------------------------|-------------------------|
| a) $2x^2 - 3x - 5 = 0$  | b) $x^2 - 6x + 8 = 0$   |
| c) $9x^2 - 12x + 4 = 0$ | d) $-3x^2 + 4x - 4 = 0$ |

**Bài 3.6.** Giải các phương trình sau:

- |  |                                 |
|--|---------------------------------|
| a) $x^2 + \sqrt{5}x - 1 = 0$               | b) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$  |
| b) $\sqrt{3}x^2 - (1 - \sqrt{3})x - 1 = 0$ | d) $-3x^2 + 4\sqrt{6}x + 4 = 0$ |

- *Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 3.7.** Xác định các hệ số  $a, b, c$  và tính biệt thức  $\Delta$  rồi tìm nghiệm của các phương trình:

- |                         |                                |
|-------------------------|--------------------------------|
| a) $x^2 - x - 11 = 0$   | b) $x^2 - 4x + 4 = 0$          |
| c) $-5x^2 - 4x + 1 = 0$ | d) $3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$ |

**Bài 3.8.** Giải các phương trình sau:

- |  |                                |
|--|--------------------------------|
| a) $2x^2 + 2\sqrt{11}x - 7 = 0$            | b) $152x^2 - 5x + 1 = 0$       |
| c) $x^2 - (2 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} = 0$ | c) $3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$ |

**Dạng 3. Xác định số nghiệm của phương trình bậc hai:**

*Phương pháp:* Xét phương trình dạng bậc hai:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

1. Phương trình có nghiệm kép  $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$
2. Phương trình có hai nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$
3. Phương trình có đúng một nghiệm  $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, b \neq 0 \\ a \neq 0, \Delta = 0 \end{cases}$
4. Phương trình vô nghiệm  $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, b = 0, c \neq 0 \\ a \neq 0, \Delta < 0 \end{cases}$

- *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 3.9.** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để các phương trình sau có hai nghiệm phân biệt:

- |                               |                             |
|-------------------------------|-----------------------------|
| a) $-x^2 + 2mx - m^2 - m = 0$ | b) $(m + 1)x^2 + x + 1 = 0$ |
|-------------------------------|-----------------------------|

**Bài 3.10.** Với giá trị nào của  $m$  thì các phương trình sau có nghiệm kép:

- |                           |                             |
|---------------------------|-----------------------------|
| a) $x^2 + mx - m - 3 = 0$ | b) $(m + 5)x^2 + x - 1 = 0$ |
|---------------------------|-----------------------------|



**Bài 3.11.** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để các phương trình sau vô nghiệm:

a)  $x^2 + (1 - m)x - 3 = 0$

b)  $(m + 2)x^2 + 2x + m = 0$

**Bài 3.12.** Cho phương trình  $mx^2 - 2(m - 1)x + m - 3 = 0$ . Tìm các giá trị của  $m$  để các phương trình:

a) Có hai nghiệm phân biệt

b) Có nghiệm kép

c) Vô nghiệm

d) Có đúng một nghiệm

e) Có nghiệm

• *Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 3.13.** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để các phương trình sau có hai nghiệm phân biệt:

a)  $x^2 + x + m = 0$

b)  $x^2 + x + m - 2 = 0$

**Bài 3.14.** Với giá trị nào của  $m$  thì các phương trình sau có nghiệm kép:

a)  $x^2 + (3 - m)x - 2m = 0$

b)  $x^2 - 7x - m - 3 = 0$

**Bài 3.15.** Với giá trị nào của  $m$  thì các phương trình sau vô nghiệm

a)  $x^2 + (2 - m)x - 5 = 0$

b)  $x^2 - 11x - m - 9 = 0$

**C. BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 3.16.** Xác định các hệ số  $a, b, c$  rồi giải các phương trình sau:

a)  $3x^2 - 5x + 8 = 0$

b)  $5x^2 - 3x + 15 = 0$

c)  $3x^2 + 7x + 2 = 0$

d)  $5x^2 - \frac{10}{7}x + \frac{5}{49} = 0$

**Bài 3.17.** Giải các phương trình sau:

a)  $2x^2 - (1 - 2\sqrt{2})x - \sqrt{2} = 0$

b)  $3x^2 + 3 = 2(x + 1)$

c)  $(2x - \sqrt{2})^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$

d)  $\frac{1}{2}x(x + 1) = (x - 1)^2$

**Bài 3.18.** Với giá trị nào của  $m$  thì các phương trình sau có hai nghiệm phân biệt:

a)  $3x^2 - 3x + m - 2 = 0$

b)  $(m - 5)x^2 - x + 1 = 0$

**Bài 3.19.** Với giá trị nào của  $m$  thì các phương trình sau có nghiệm kép:

a)  $x^2 + (3 - m)x - m - 1 = 0$

b)  $-x^2 - 3x - m - 3 = 0$

**Bài 3.20.** Cho phương trình  $2x^2 - (4m + 3)x + 2m^2 - 1 = 0$ . Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình

a) Có hai nghiệm phân biệt

b) Có nghiệm kép

c) Vô nghiệm

d) Có đúng một nghiệm

e) Có nghiệm

-----

**VẤN ĐỀ 4. CÔNG THỨC NGHIỆM  
CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI (PHẦN II)**

**A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

**1. Nhắc lại khái niệm phương trình bậc hai một ẩn**

- *Phương trình bậc hai một ẩn* (hay gọi tắt là *phương trình bậc hai*) là phương trình có dạng:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

Trong đó  $a, b, c$  là các số thực cho trước,  $x$  là ẩn số.

- *Giải phương trình bậc hai một ẩn* là đi tìm tập nghiệm của phương trình bậc hai một ẩn đó.

**2. Nhắc lại công thức nghiệm của phương trình bậc hai**

Xét phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$

và biệt thức  $\Delta = b^2 - 4ac$

*Trường hợp 1.* Nếu  $\Delta < 0$  thì phương trình vô nghiệm.

*Trường hợp 2.* Nếu  $\Delta = 0$  thì phương trình có nghiệm kép:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

*Trường hợp 3.* Nếu  $\Delta > 0$  thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

**3. Công thức nghiệm thu gọn của phương trình bậc hai**

Xét phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$  với  $b = 2b'$ . Gọi biệt thức  $\Delta' = b'^2 - ac$ .

*Trường hợp 1.* Nếu  $\Delta' < 0$  thì phương trình vô nghiệm.

*Trường hợp 2.* Nếu  $\Delta' = 0$  thì phương trình có nghiệm kép:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$$

*Trường hợp 3.* Nếu  $\Delta' > 0$  thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$$

*Chú ý:* Để giải phương trình bậc hai, về bản chất có thể sử dụng biệt thức  $\Delta$  hoặc  $\Delta'$ . Tuy nhiên trong trường hợp hệ số  $b$  có dạng  $2b'$  ta nên sử dụng  $\Delta'$  để giải phương trình cho lời giải ngắn gọn hơn.

**B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN**

**Dạng 4. Giải phương trình bậc hai bằng cách sử dụng công thức nghiệm thu gọn**

*Phương pháp giải:* Xét phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) với  $b = 2b'$

*Bước 1.* Xác định các hệ số  $a, b', c$  và tính các biệt thức  $\Delta' = b'^2 - ac$ .

*Bước 2.* Kết luận

- Nếu  $\Delta < 0$  thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu  $\Delta = 0$  thì phương trình có nghiệm kép:  $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$
- Nếu  $\Delta > 0$  thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$$

- *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 4.1.** Xác định các hệ số  $a, b', c$  và tính các biệt thức  $\Delta'$  rồi tìm nghiệm của các phương trình sau:

- |                         |                                 |
|-------------------------|---------------------------------|
| a) $x^2 - 6x + 8 = 0$   | b) $9x^2 - 12x + 4 = 0$         |
| c) $-3x^2 + 4x - 4 = 0$ | d) $-3x^2 + 4\sqrt{6}x + 4 = 0$ |

- *Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 4.2.** Sử dụng công thức nghiệm thu gọn, giải các phương trình sau:

- |                                |                                 |
|--------------------------------|---------------------------------|
| a) $x^2 - 4x + 4 = 0$          | b) $-5x^2 - 4x + 1 = 0$         |
| c) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ | d) $2x^2 + 2\sqrt{11}x - 7 = 0$ |

**Dạng 5. Sử dụng công thức nghiệm thu gọn, xác định số nghiệm của phương trình bậc hai**

*Phương pháp giải:* Xét phương trình dạng bậc hai:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ với } b = 2b'$$

5. Phương trình có nghiệm kép  $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases}$

6. Phương trình có hai nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$

7. Phương trình có đúng một nghiệm  $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, b' \neq 0 \\ a \neq 0, \Delta' = 0 \end{cases}$

8. Phương trình vô nghiệm  $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, b' = 0, c \neq 0 \\ a \neq 0, \Delta' < 0 \end{cases}$

- Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

**Bài 4.3.** Cho phương trình  $mx^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$ . Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình:

- |                            |                       |
|----------------------------|-----------------------|
| a) Có hai nghiệm phân biệt | b) Có nghiệm kép      |
| c) Vô nghiệm               | d) Có đúng một nghiệm |
| e) Có nghiệm               |                       |

- Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

**Bài 4.4.** Cho phương trình  $(m-2)x^2 - 2(m+1)x + m = 0$ . Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình:

- |                            |                       |
|----------------------------|-----------------------|
| a) Có hai nghiệm phân biệt | b) Có nghiệm kép      |
| c) Vô nghiệm               | d) Có đúng một nghiệm |
| e) Có nghiệm               |                       |

**Dạng 6. Giải và biện luận phương trình dạng bậc hai**

*Phương pháp giải:*

- Giải và biện luận phương trình dạng bậc hai theo tham số  $m$  là tìm tập nghiệm của phương trình tùy theo sự thay đổi của  $m$ .
- Xét phương trình dạng bậc hai

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac \text{ (hoặc } \Delta' = b'^2 - ac)$$

*Trường hợp 1.* Nếu  $\Delta < 0$  (hoặc  $\Delta' < 0$ ) thì phương trình vô nghiệm.

*Trường hợp 2.* Nếu  $\Delta = 0$  (hoặc  $\Delta' = 0$ ) thì phương trình có nghiệm kép:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} \text{ (hoặc } x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a})$$

*Trường hợp 3.* Nếu  $\Delta > 0$  (hoặc  $\Delta' > 0$ ) thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ (hoặc } x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a})$$

**Bài 4.5.** Giải và biện luận các phương trình sau:

a)  $x^2 + (1-m)x - m = 0$

b)  $(m - 3)x^2 - 2mx + m - 6 = 0$

- Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

**Bài 4.6.** Giải và biện luận các phương trình sau:

a)  $mx^2 + (2m - 1)x + m + 2 = 0$

b)  $(m - 2)x^2 - 2(m + 1)x + m = 0$

**Dạng 7. Một số bài toán liên quan đến tính có nghiệm của phương trình bậc hai; nghiệm chung của các phương trình có dạng bậc hai; hai phương trình dạng bậc hai tương đương**

*Phương pháp giải:*

1. Phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) có nghiệm  $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$  (hoặc  $\Delta' \geq 0$ )
2. Muốn tìm điều kiện của tham số để hai phương trình dạng bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0$  và  $a'x^2 + b'x + c' = 0$  có nghiệm chung ta làm như sau:  
*Bước 1.* Gọi  $x_0$  là nghiệm chung của hai phương trình. Từ đó thay  $x_0$  vào hai phương trình để tìm được điều kiện của tham số.  
*Bước 2.* Với giá trị của tham số vừa tìm được, thay trở lại để kiểm tra xem hai phương trình có nghiệm chung hay không và kết luận.
3. Muốn tìm điều kiện của tham số để hai phương trình dạng bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0$  và  $a'x^2 + b'x + c' = 0$  tương đương, ta xét hai trường hợp:

*Trường hợp 1.* Hai phương trình cùng vô nghiệm

*Trường hợp 2.* Hai phương trình cùng có nghiệm. Khi đó:

- Điều kiện cần để hai phương trình tương đương là chúng có nghiệm chung. Từ đó tìm được điều kiện của tham số.
- Với giá trị của tham số vừa tìm được, thay trở lại để kiểm tra xem hai phương trình tập nghiệm bằng nhau hay không và kết luận.

- Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

**Bài 4.7.** Cho  $a, b, c$  là ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh phương trình  $b^2x^2 - (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$  luôn vô nghiệm.

**Bài 4.8.** Cho hai phương trình  $x^2 + ax + b = 0$  và  $x^2 + cx + d = 0$ . Chứng minh nếu hai phương trình trên có nghiệm chung thì:

$$(b - d)^2 + (a - c)(ad - bc) = 0$$

**Bài 4.9.** Cho hai phương trình  $x^2 + x - m = 0$  và  $x^2 - mx + 1 = 0$ . Tìm các giá trị của tham số  $m$  để:

- Hai phương trình có nghiệm chung.
- Hai phương trình tương đương.

- Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

**Bài 4.10.** Cho phương trình  $x^2 + (a + b + c)x + (ab + bc + ca) = 0$  với  $a, b, c$  là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh phương trình luôn vô nghiệm.

**Bài 4.11.** Cho hai phương trình  $x^2 + ax + b = 0$  và  $x^2 + bx + a = 0$  trong đó  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$ .

Chứng minh ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm.

**Bài 4.12.** Cho hai phương trình  $x^2 - 2ax + 3 = 0$  và  $x^2 - x + a = 0$ . Với giá trị nào của  $a$  thì:

- a) Hai phương trình có nghiệm chung.
- b) Hai phương trình tương đương.

**C. BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 4.13.** Giải các phương trình sau:

a)  $3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$

b)  $5x^2 - \frac{10}{7}x + \frac{5}{49} = 0$

c)  $3x^2 + 3 = 2(x + 1)$

d)  $(2x - \sqrt{2})^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$

**Bài 4.14.** Cho phương trình  $mx^2 - 4(m - 1)x + 4m + 8 = 0$ . Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình:

- a) Có hai nghiệm phân biệt
- b) Có nghiệm kép
- c) Vô nghiệm
- d) Có đúng một nghiệm
- e) Có nghiệm

**Bài 4.15.** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để các phương trình sau có hai nghiệm phân biệt:

a)  $x^2 + 2x + m = 0$

b)  $-x^2 + 2mx - m^2 - m = 0$

**Bài 4.16.** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để các phương trình sau vô nghiệm:

a)  $3x^2 - 2x - m - 3 = 0$

b)  $(m + 5)x^2 + 2x - m = 0$

**Bài 4.17.** Với giá trị nào của  $m$  thì phương trình sau có nghiệm kép:

a)  $5x^2 + 2mx - 2m + 15 = 0$

b)  $mx^2 - 4(m - 1)x - 8 = 0$

**Bài 4.18.** Cho hai phương trình  $x^2 + mx + 2 = 0$  và  $x^2 + 2x + m = 0$ . Xác định các giá trị của  $m$  để hai phương trình:

- a) Có nghiệm chung.
- b) Tương đương.

-----

**VẤN ĐỀ 5. HỆ THỨC VI-ÉT VÀ ỨNG DỤNG (PHẦN I)**

**A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

**1. Hệ thức Vi-ét**

Cho phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ). Nếu  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của

phương trình thì:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

**2. Ứng dụng của hệ thức Vi-ét**

- a) Xét phương trình bậc hai:  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ).

- Nếu phương trình có  $a + b + c = 0$  thì phương trình có một nghiệm là  $x_1 = 1$ , nghiệm kia là  $x_2 = \frac{c}{a}$ .

- Nếu phương trình có  $a - b + c = 0$  thì phương trình có một nghiệm là  $x_1 = -1$ , nghiệm kia là  $x_2 = -\frac{c}{a}$ .

b) Tìm hai số biết tổng và tích của chúng: Nếu hai số có tổng bằng  $S$  và tích bằng  $P$  thì hai số đó là nghiệm của phương trình  $X^2 - SX + P = 0$ .

## B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

### Dạng 1. Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức đối xứng giữa các nghiệm

*Phương pháp giải:* Ta thực hiện theo các bước sau:

*Bước 1:* Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm:  $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$ . Từ đó áp dụng hệ thức Vi-

ét ta có:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \text{ và } P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

*Bước 2:* Biến đổi biểu thức đối xứng giữa các nghiệm của đề bài theo tổng  $x_1 + x_2$  và tích  $x_1 \cdot x_2$  sau đó áp dụng *Bước 1*.

*Chú ý:* Một số biểu thức đối xứng giữa các nghiệm thường gặp là:

- $A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = S^2 - 2P$
- $B = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 \cdot x_2 (x_1 + x_2) = S^3 - 3PS$
- $C = x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 \cdot x_2^2 = [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2]^2 - 2(x_1 \cdot x_2)^2$   
 $= (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$
- $D = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2}$
- *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 5.1.** Gọi  $x_1, x_2$  là nghiệm của phương trình  $x^2 - 5x + 3 = 0$ . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của các biểu thức sau:

a)  $A = x_1^2 + x_2^2$

b)  $B = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

c)  $C = x_1^3 + x_2^3$

d)  $D = \frac{1}{x_1^4} + \frac{1}{x_2^4}$

e)  $E = |x_1 - x_2|$

g)  $G = \frac{x_1^2}{x_1 + 2x_2} + \frac{x_2^2}{x_2 + 2x_1}$

**Bài 5.2.** Cho phương trình  $x^2 - 2(m - 2)x + 2m - 5 = 0$

a) Tìm điều kiện của  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$ .

b) Với  $m$  tìm được ở trên, tìm biểu thức liên hệ giữa  $x_1, x_2$  không phụ thuộc vào  $m$ .

- Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

**Bài 5.3.** Cho phương trình  $-3x^2 - 5x - 2 = 0$ . Với  $x_1, x_2$  là nghiệm của phương trình, Không giải phương trình, hãy tính:

a)  $M = x_1 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + x_2$

b)  $N = \frac{1}{x_1 + 3} + \frac{1}{x_2 + 3}$

c)  $P = \frac{x_1 - 3}{x_1^2} + \frac{x_2 - 3}{x_2^2}$

d)  $Q = \frac{x_1}{x_2 + 2} + \frac{x_2}{x_1 + 2}$

**Bài 5.4.** Cho phương trình  $x^2 + (m + 2)x + 2m = 0$ . Với giá trị nào của tham số  $m$ , phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$ ? Khi đó, hãy tìm biểu thức liên hệ giữa  $x_1, x_2$  không phụ thuộc vào  $m$ .

**Dạng 2. Giải phương trình bằng cách nhẩm nghiệm**

*Phương pháp giải:* Xét phương trình bậc hai:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0).$$

1. Nếu phương trình có  $a + b + c = 0$  thì phương trình có một nghiệm là  $x_1 = 1$ , nghiệm

kia là  $x_2 = \frac{c}{a}$ .

2. Nếu phương trình có  $a - b + c = 0$  thì phương trình có một nghiệm là  $x_1 = -1$ ,

nghiệm kia là  $x_2 = -\frac{c}{a}$ .

3. Nếu  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình thì:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

- Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

**Bài 5.5.** Xét tổng  $a + b + c$  hoặc  $a - b + c$  rồi tính nhẩm các nghiệm của phương trình sau:

a)  $15x^2 - 17x + 2 = 0$

b)  $1230x^2 - 4x - 1234 = 0$

c)  $(2 - \sqrt{3})x^2 + 2\sqrt{3}x - (2 + \sqrt{3}) = 0$

d)  $\sqrt{5}x^2 - (2 - \sqrt{5})x - 2 = 0$

**Bài 5.6.** Cho phương trình  $(m - 2)x^2 - (2m + 5)x + m + 7 = 0$  với tham số  $m$ .

a) Chứng minh phương trình luôn có một nghiệm không phụ thuộc tham số  $m$ .

b) Tìm các nghiệm của phương trình đã cho theo tham số  $m$ .

**Bài 5.7.** Cho phương trình  $mx^2 - 3(m + 1)x + m^2 - 13m - 4 = 0$ . Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình có một nghiệm là  $-2$ . Tìm các nghiệm còn lại.

- Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

**Bài 5.8.** Nhẩm nghiệm của các phương trình sau:

a)  $7x^2 - 9x + 2 = 0$

b)  $23x^2 - 9x - 32 = 0$

c)  $1975x^2 + 4x - 1979 = 0$

d)  $31,1x^2 - 50,9x + 19,8 = 0$

**Bài 5.9.** Cho phương trình  $(2m - 1)x^2 + (m - 3)x - 6m - 2 = 0$



a) Chứng minh phương trình đã cho luôn có nghiệm  $x = -2$ .

b) Tìm các nghiệm của phương trình đã cho theo tham số  $m$ .

**Bài 5.10.** Tìm giá trị của  $m$  để phương trình  $x^2 + 3mx - 108 = 0$  có một nghiệm là 6. Tìm nghiệm kia.

**Dạng 3. Tìm hai số khi biết tổng và tích**

*Phương pháp giải:* Để tìm hai số  $x, y$  khi biết tổng  $S = x + y$  và tích  $P = x.y$ , ta làm như sau:

*Bước 1:* Giải phương trình  $X^2 - SX + P = 0$  để tìm các nghiệm  $X_1, X_2$ .

*Bước 2:* Khi đó các số  $x, y$  cần tìm là  $x = X_1, y = X_2$  hoặc  $x = X_2, y = X_1$ .

• *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 5.11.** Tìm hai số  $u$  và  $v$  trong mỗi trường hợp sau:

a)  $u + v = 15, uv = 36$

b)  $u^2 + v^2 = 13, uv = 6$

**Bài 5.12.** Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là hai số  $2 + \sqrt{3}$  và  $2 - \sqrt{3}$ .

**Bài 5.13.** Cho phương trình  $x^2 + 5x - 3m = 0$

a) Tìm điều kiện của  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$ .

b) Với điều kiện  $m$  vừa tìm được ở câu a), hãy lập một phương trình bậc hai có hai nghiệm là  $\frac{2}{x_1^2}$  và  $\frac{2}{x_2^2}$ .

• *Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 5.14.** Tìm hai số  $u$  và  $v$  trong mỗi trường hợp sau:

a)  $u + v = 4, uv = 7$

b)  $u + v = -12, uv = 20$

**Bài 5.15.** Tìm phương trình bậc hai biết nó nhận các số 7 và -11 là nghiệm.

**Bài 5.16.** Cho phương trình  $3x^2 + 5x - m = 0$ . Với giá trị nào của tham số  $m$ , phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$ ? Khi đó, hãy viết phương trình bậc hai có hai nghiệm  $\frac{x_1}{x_2 + 1}$  và

$$\frac{x_2}{x_1 + 1}$$

**Dạng 4. Phân tích tam thức bậc hai thành nhân tử**

*Phương pháp giải:* Nếu tam thức bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thì nó được phân tích thành nhân tử:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

• *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 5.17.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a)  $x^2 - 7x + 6$

b)  $30x^2 - 4x - 34$

c)  $x - 5\sqrt{x} + 6$

d)  $2x - 5\sqrt{x} + 3$

• *Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 5.18.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a)  $4x^2 - 5x + 1$

b)  $21x^2 - 5x - 26$

c)  $4x - 7\sqrt{x} + 3$

c)  $12x - 5\sqrt{x} - 7$

**C. BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 5.19.** Cho phương trình  $-3x^2 + x + 1 = 0$ . Với  $x_1, x_2$  là nghiệm của phương trình, không giải phương trình, hãy tính:

a)  $A = x_1^2 + \frac{2}{x_1} + x_2^2 + \frac{2}{x_2}$

b)  $B = \frac{x_2}{x_1 + 3} + \frac{x_1}{x_2 + 3}$

c)  $C = \frac{2x_1 - 5}{x_1} + \frac{2x_2 - 5}{x_2}$

d)  $D = \frac{x_1 - 1}{x_1^4} + \frac{x_2 - 1}{x_2^4}$

**Bài 5.20.** Cho phương trình  $x^2 - (m - 3)x + 2m + 1 = 0$

a) Tìm điều kiện của  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$ .

b) Khi phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$ , tìm biểu thức liên hệ giữa  $x_1, x_2$  không phụ thuộc vào  $m$ .

**Bài 5.21.** Cho phương trình  $4x^2 - 2(m - 3) - 2m + 1 = 0$

a) Chứng minh rằng với mọi  $m$ , phương trình luôn có hai nghiệm  $x_1, x_2$ .

b) Tìm biểu thức liên hệ giữa  $x_1, x_2$  không phụ thuộc vào  $m$ .

**Bài 5.22.** Xét tổng  $a + b + c$  hoặc  $a - b + c$  rồi tính nhẩm các nghiệm của phương trình sau:

a)  $16x^2 - 17x + 1 = 0$

b)  $2x^2 - 4x - 6 = 0$

c)  $2x^2 - 40x + 38 = 0$

d)  $1230x^2 - 5x - 1235 = 0$

**Bài 5.23.** Tìm hai số  $u$  và  $v$  trong mỗi trường hợp sau:

a)  $u + v = -8, uv = -105$

b)  $u + v = 9, uv = -90$

**Bài 5.24.** Cho phương trình  $x^2 - (2a - 1)x - 4a - 3 = 0$

a) Chứng minh với mọi tham số  $a$ , phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào  $a$ .

c) Tìm các giá trị của  $a$  để hiệu hai nghiệm bằng  $\sqrt{13}$ .

-----  
**VẤN ĐỀ 6. HỆ THỨC VI-ÉT VÀ ỨNG DỤNG (PHẦN II)**

**A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

**1. Hệ thức Vi-ét**

Cho phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ). Nếu  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của

phương trình thì:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

**2. Ứng dụng của hệ thức Vi-ét**

a) Xét phương trình bậc hai:  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ).

- Nếu phương trình có  $a + b + c = 0$  thì phương trình có một nghiệm là  $x_1 = 1$ , nghiệm

kia là  $x_2 = \frac{c}{a}$ .

- Nếu phương trình có  $a - b + c = 0$  thì phương trình có một nghiệm là  $x_1 = -1$ ,

nghiệm kia là  $x_2 = -\frac{c}{a}$ .

b) Tìm hai số biết tổng và tích của chúng: Nếu hai số có tổng bằng  $S$  và tích bằng  $P$  thì hai số đó là nghiệm của phương trình

$$X^2 - SX + P = 0.$$

**B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN**

**Dạng 5. Xét dấu các nghiệm của phương trình bậc hai**

*Phương pháp giải:* Xét phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ). Khi đó:

1. Phương trình có hai nghiệm trái dấu  $\Leftrightarrow ac < 0$ .

2. Phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng dấu  $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$

3. Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt  $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

4. Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt  $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

5. Phương trình có hai nghiệm trái dấu mà nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương  $\Leftrightarrow \begin{cases} ac < 0 \\ S < 0 \end{cases}$

*Chú ý:* Phương trình có hai nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow \Delta > 0$

Phương trình có hai nghiệm  $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$ .

• *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 6.1.** Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình:

a)  $x^2 - 2(m - 1)x + m + 1 = 0$  có hai nghiệm trái dấu.

b)  $x^2 - 8x + 2m + 6 = 0$  có hai nghiệm phân biệt.

c)  $x^2 - 2(m - 3)x + 8 - 4m = 0$  có hai nghiệm phân biệt cùng âm.

d)  $x^2 - 6x + 2m + 1 = 0$  có hai nghiệm phân biệt cùng dương.

e)  $x^2 - 2(m-1)x - 3 - m = 0$  có đúng một nghiệm dương.

• *Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 6.2.** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để phương trình:

a)  $2x^2 - 3(m+1)x + m^2 - m - 2 = 0$  có hai nghiệm trái dấu.

b)  $3mx^2 + 2(2m+1)x + m = 0$  có hai nghiệm âm.

c)  $x^2 + mx + m - 1 = 0$  có hai nghiệm lớn hơn  $m$ .

d)  $mx^2 - 2(m-2)x + 3(m-2) = 0$  có hai nghiệm cùng dấu.

**Dạng 6. Xác định điều kiện của tham số để phương trình bậc hai có nghiệm thỏa mãn hệ thức cho trước**

*Phương pháp giải:*

*Bước 1.* Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm  $\Delta \geq 0$ .

*Bước 2.* Từ hệ thức đã cho và hệ thức Vi-ét, tìm được điều kiện của tham số.

*Bước 3.* Kiểm tra điều kiện của tham số xem có thỏa mãn điều kiện ở bước 1 hay không rồi kết luận.

• *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 6.3.** Cho phương trình  $x^2 - 5x + m + 4 = 0$ . Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  và thỏa mãn:

a)  $x_1^2 + x_2^2 = 23$

b)  $x_1^3 + x_2^3 = 35$

c)  $|x_1 - x_2| = 3$

d)  $|x_1| + |x_2| = 4$

e)  $3x_1 + 4x_2 = 6$

g)  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = -3$

h)  $x_1(1 - 3x_2) + x_2(1 - 3x_1) = m^2 - 23$

• *Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 6.4.** Cho phương trình  $x^2 - mx - m - 1 = 0$  ( $m$  là tham số). Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình:

a) Có một nghiệm bằng 5. Tìm nghiệm còn lại.

b) Có hai nghiệm âm phân biệt.

c) Có hai nghiệm trái dấu, trong đó nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương.

d) Có hai nghiệm cùng dấu.

e) Có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1^3 + x_2^3 = -1$ .

f) Có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $|x_1 - x_2| \geq 3$ .

g) Có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $2x_1 - 5x_2 = -2$ .

h) Có hai nghiệm  $x_1, x_2$ . Từ đó, hãy lập lập phương trình bậc hai có  $u$  và  $v$  là nghiệm

biết rằng  $u = x_1 + \frac{1}{x_2}$  và  $v = x_2 + \frac{1}{x_1}$

**C. BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 6.5.** Cho phương trình  $x^3 + 3x - m = 0$ . Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $2x_1 + 3x_2 = 13$ .

**Bài 6.6.** Cho phương trình  $x^2 + (4m + 1)x + 2(m - 4) = 0$ . Tìm giá trị của  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  và

a) Thỏa mãn  $x_2 - x_1 = 17$ .

b) Biểu thức  $A = (x_1 - x_2)^2$  có giá trị nhỏ nhất.

c) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào  $m$ .

**Bài 6.7.** Cho phương trình bậc hai:  $(m + 2)x^2 - 2(m + 1)x + m - 4 = 0$ . Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình:

a) Có hai nghiệm trái dấu.

b) Có hai nghiệm dương phân biệt.

c) Có hai nghiệm trái dấu trong đó nghiệm dương nhỏ hơn giá trị tuyệt đối của nghiệm âm.

d) Có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $3(x_1 + x_2) = 5x_1x_2$ .

**Bài 6.8.** Cho phương trình  $x^2 - 2(m - 1)x + 2m - 6 = 0$ .

a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình có hai nghiệm trái dấu, trong đó nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương.

c) Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.

d) Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình có hai nghiệm và nghiệm này gấp ba lần nghiệm kia.

e) Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = x_1^2 + x_2^2.$$

**Bài 6.9.** Cho phương trình  $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m - 6 = 0$ .

a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình có hai nghiệm âm phân biệt.

c) Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = x_1^2 + x_2^2.$$

d) Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $|x_1^3 + x_2^3| = 19$ .

**Bài 6.10.** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để các nghiệm  $x_1, x_2$  của phương trình  $x^2 + (m - 2)x + m + 5 = 0$  thỏa mãn  $x_1^2 + x_2^2 = 10$ .

**Bài 6.11.** Cho phương trình  $x^2 - 2(m - 2)x + 2m - 5 = 0$ .

a) Chứng minh phương trình luôn có nghiệm với mọi  $m$ .

b) Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình. Tìm  $m$  để  $x_1, x_2$  thỏa mãn:

$$x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_1) < 4.$$

**Bài 6.12.** Cho phương trình  $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 3m = 0$ .

a) Giải phương trình khi  $m = -2$ .

- b) Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình có nghiệm là  $x = -2$ . Tìm nghiệm còn lại.  
 c) Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt.  
 d) Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn  

$$x_1^2 + x_2^2 = 8$$
  
 e) Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  

$$A = x_1^2 + x_2^2$$

## VẤN ĐỀ 7. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

### A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### 1. Phương trình trùng phương

- Phương trình trùng phương là phương trình có dạng:  

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0)$$
- Cách giải: Đặt ẩn phụ  $t = x^2 \quad (t \geq 0)$  để đưa phương trình về phương trình bậc hai:  

$$at^2 + bt + c = 0 \quad (a \neq 0).$$

#### 2. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Để giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức, ta có các bước giải như sau:

*Bước 1.* Tìm điều kiện xác định của ẩn của phương trình.

*Bước 2.* Quy đồng mẫu thức hai vế rồi khử mẫu.

*Bước 3.* Giải phương trình vừa nhận được ở bước 2.

*Bước 4.* So sánh các nghiệm tìm được ở bước 3 với điều kiện xác định và kết luận.

#### 3. Phương trình đưa về dạng tích.

Để giải phương trình đưa về dạng tích, ta có các bước giải như sau:

*Bước 1.* Phân tích vế trái thành nhân tử, vế phải bằng 0.

*Bước 2.* Xét từng nhân tử bằng 0 để tìm nghiệm.

### B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

#### Dạng 1. Giải phương trình trùng phương

*Phương pháp giải:* Xét phương trình trùng phương

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

*Bước 1.* Đặt ẩn phụ  $t = x^2 \quad (t \geq 0)$  ta được phương trình bậc hai:

$$at^2 + bt + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

*Bước 2.* Giải phương trình bậc hai ẩn  $t$  từ đó ta tìm được các nghiệm của phương trình trùng phương đã cho.

- *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 7.1.** Giải các phương trình sau

a)  $x^4 + 5x^2 - 6 = 0$

b)  $(x+1)^4 - 5(x+1)^2 - 84 = 0$

- Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

**Bài 7.2.** Giải các phương trình sau

a)  $4x^4 - 25x^2 + 6 = 0$

b)  $4x^4 + 8x^2 - 12 = 0$

c)  $6x^4 - 7x^2 + 1 = 0$

d)  $2x^4 + 7x^2 + 5 = 0$

**Dạng 2. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức**

*Phương pháp giải:* Để giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức, ta có các bước giải như sau:

*Bước 1.* Tìm điều kiện xác định của ẩn của phương trình.

*Bước 2.* Quy đồng mẫu thức hai vế rồi khử mẫu.

*Bước 3.* Giải phương trình vừa nhận được ở bước 2.

*Bước 4.* So sánh các nghiệm tìm được ở bước 3 với điều kiện xác định và kết luận.

- Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

**Bài 7.3.** Giải các phương trình sau

a)  $\frac{2x-1}{x+1} + \frac{3x-1}{x+2} = \frac{x-7}{x-1} + 4$

b)  $\frac{x+5}{3} - \frac{x-3}{5} = \frac{5}{x-3} - \frac{3}{x+5}$

c)  $\frac{1}{3x^2-27} + \frac{3}{4} = 1 + \frac{1}{x-3}$

d)  $\left(\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x}\right) : \left(\frac{1+x}{1-x} - 1\right) = \frac{3}{14-x}$

- Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

**Bài 7.4.** Giải các phương trình sau

a)  $\frac{2x-5}{x-1} = \frac{3x}{x-2}$

b)  $\frac{4x}{x+2} = \frac{x+1}{x-2}$

c)  $\frac{x^2-3x+5}{x^2-x-6} = \frac{1}{x-3}$

d)  $\frac{2x}{x-2} - \frac{5}{x-3} = \frac{5}{x^2-5x+6}$

**Dạng 3. Phương trình đưa về dạng tích**

*Phương pháp giải:* Để giải phương trình đưa về dạng tích, ta có các bước giải như sau:

*Bước 1.* Phân tích vế trái thành nhân tử, vế phải bằng 0.

*Bước 2.* Xét từng nhân tử bằng 0 để tìm nghiệm.

- Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

**Bài 7.5.** Giải các phương trình sau

a)  $x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0$

b)

$(x-1)^3 + x^3 + (x+1)^3 - (x+2)^3 = 0$

c)  $x^3 + 2x^2 + 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} = 0$

d)  $(x^2 + 2x - 5)^2 = (x^2 - x + 5)^2$

- Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

**Bài 7.6.** Giải các phương trình sau bằng cách đưa về phương trình tích.

a)  $2x^3 - 7x^2 + 4x + 1 = 0$

b)  $(3x^2 + 2)^2 - 15x^3 - 10x = 0$

c)  $3x^3 + 3x^2 + 5x + 5 = 0$

d)  $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 4 = 0$

**Dạng 4. Giải bằng phương pháp đặt ẩn phụ**

*Phương pháp giải:*

*Bước 1.* Đặt điều kiện xác định (nếu có).

*Bước 2.* Đặt ẩn phụ và giải phương trình theo ẩn mới.

*Bước 3.* Tìm nghiệm ban đầu và so sánh với điều kiện xác định ở Bước 1 để kết luận nghiệm.

- Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

**Bài 7.7.** Giải các phương trình sau

a)  $x(x+1)(x+2)(x+3) = 8$

b)  $(x^2 + 16x + 60)(x^2 + 17x + 60) = 6x^2$

c)  $x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0$

d)  $\frac{2x}{3x^2 - x + 2} - \frac{7x}{3x^2 + 5x + 2} = 1$

- Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

**Bài 7.8.** Giải các phương trình sau

a)  $(x^2 - 3x)^2 - 6(x^2 - 3x) - 7 = 0$

b)  $x^6 + 61x^3 - 8000 = 0$

c)  $(x^2 - 3x + 1)(x^2 - 3x + 2) = 2$

d)  $\frac{x}{x+1} - 10\frac{x+1}{x} = 3$

**Dạng 5. Phương trình chứa biểu thức trong dấu căn**

*Phương pháp giải:* Làm mất dấu căn bằng cách đặt ẩn phụ hoặc lũy thừa hai vế.

*Chú ý:*  $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$

- Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

**Bài 7.9.** Giải các phương trình sau

a)  $\sqrt{2}x^3 + 3x^2 - 2 = 0$

b)  $\sqrt{x^2 + x + 1} = 3 - x$

- Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

**Bài 7.10.** Giải các phương trình sau

a)  $x^2 - 3x + 2 = (1-x)\sqrt{3x-2}$

b)  $\sqrt{x-1} + \sqrt{7x+1} = \sqrt{14x-6}$

**Dạng 6. Một số dạng khác**

*Phương pháp giải:* Có thể dùng hằng đẳng thức, thêm bớt hạng tử hoặc đánh giá hai vế... để giải phương trình.

- Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

**Bài 7.11.** Giải các phương trình sau bằng phương pháp thêm bớt hạng tử:



a)  $x^4 = 24x + 32$

b)  $x^3 = -3x^2 + 3x - 1$

**Bài 7.12.** Giải các phương trình sau bằng phương pháp đánh giá:

a)  $\sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{x} = 1$

b)  $\sqrt{4x^2 - 4x + 5} + \sqrt{12x^2 - 12x + 19} = 6$

• Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

**Bài 7.13.** Giải các phương trình sau bằng phương pháp dung hằng đẳng thức:

a)  $(x^2 - 6x)^2 - 2(x - 3)^2 = 81$

b)  $x^4 - x^2 + 2x - 1 = 0$

**Bài 7.14.** Giải các phương trình sau:

a)  $4x^2 - 4x - 6|2x - 1| + 7 = 0$

b)  $x^2 + \frac{25x^2}{(x+5)^2} = 11$

**C. BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 7.15.** Giải các phương trình sau:

a)  $x^4 - 6x^2 - 16 = 0$

b)  $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$

c)  $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6} = 0$

d)  $(x+1)^4 + (x+1)^2 - 20 = 0$

**Bài 7.16.** Giải các phương trình sau:

a)  $\frac{x+2}{x-1} = \frac{4x^2 - 11x - 2}{(1-x)(x+2)}$

b)  $\frac{x^2 + 14x}{x^3 + 8} = \frac{x}{x+2}$

c)  $\frac{x}{x+4} + \frac{2x}{2-x} = \frac{8(x+1)}{(2-x)(x+4)}$

d)  $\frac{1}{2x-2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{1-x^2}$

**Bài 7.17.** Giải các phương trình sau:

a)  $x^6 - x^3 - 6 = 0$

b)  $(x+1)(x-3)(x^2 - 2x) = -2$

c)  $(x^2 + x)(x^2 + x + 1) = 6$

d)  $(6x+5)^2(3x+2)(x+1) = 3$

**Bài 7.18.** Giải các phương trình sau:

a)  $(x^2 + 5x + 8)(x^2 + 6x + 8) = 2x^2$

b)  $\frac{x}{\sqrt{4x-1}} + \frac{\sqrt{4x-1}}{x} = 2$

**Bài 7.19.** Giải các phương trình sau:

a)  $x^3 - x^2 - 8x - 6 = 0$

b)  $x^3 - x^2 - x = \frac{1}{3}$

-----

## VẤN ĐỀ 8. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH (PHẦN I)

### A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

*Các bước giải bài toán bằng cách lập phương trình:*

*Bước 1. Lập phương trình*

- + Chọn ẩn số và đặt điều kiện cho ẩn số
- + Biểu thị các dữ kiện chưa biết qua ẩn số
- + Lập phương trình biểu thị tương quan giữa ẩn số và các dữ kiện đã biết.

*Bước 2. Giải phương trình*

*Bước 3. Đối chiếu nghiệm của phương trình (nếu có) với điều kiện của ẩn số và với đề bài để đưa ra kết luận.*

### B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

#### **Dạng 1. Toán về năng suất lao động**

*Phương pháp giải:* Năng suất được tính bằng tỉ số giữa Khối lượng công việc và Thời gian hoàn thành.

*\*Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 8.1.** Một công nhân dự định làm 120 sản phẩm trong một thời gian dự định. Sau khi làm được 2 giờ với năng suất dự kiến, người đó đã cải tiến các thao tác hợp lý hơn nên đã tăng năng suất được thêm 3 sản phẩm mỗi giờ và vì vậy người đó đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn dự định 1 giờ 36 phút. Hãy tính năng suất dự kiến.

**Bài 8.2.** Một nhóm thợ đặt kế hoạch sản xuất 1200 sản phẩm. Trong 12 ngày đầu họ đã làm theo đúng kế hoạch đề ra, những ngày còn lại họ đã làm vượt mức mỗi ngày 20 sản phẩm, nên hoàn thành sớm hơn kế hoạch 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày nhóm thợ cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm.

**Bài 8.3.** Một tổ sản xuất dự định sản xuất 360 máy nông nghiệp. Khi làm do tổ chức quản lý tốt nên mỗi ngày họ đã làm được nhiều hơn dự định 1 máy, vì thế tổ đã hoàn thành trước thời hạn 4 ngày. Hỏi số máy dự định sản xuất trong mỗi ngày là bao nhiêu?

*\* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 8.4.** Một tổ may áo theo kế hoạch mỗi ngày phải may 30 áo. Nhờ cải tiến kĩ thuật, tổ đã may được mỗi ngày 40 áo nên đã hoàn thành trước thời hạn 3 ngày, ngoài ra còn may thêm được 20 chiếc áo nữa. Tính số áo mà tổ đó phải may theo kế hoạch.

**Bài 8.5.** Một phân xưởng theo kế hoạch phải dệt 3000 tấm thảm. Trong 8 ngày đầu họ đã thực hiện theo đúng kế hoạch, những ngày còn lại họ đã dệt vượt mức mỗi ngày 10 tấm nên đã hoàn thành kế hoạch trước 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày phân xưởng phải dệt bao nhiêu tấm.

**Bài 8.6.** Tháng đầu hai tổ sản xuất làm được 720 dụng cụ. Sang tháng 2 tổ 1 làm vượt mức 12% , tổ 2 vượt mức 15% nên cả hai tổ đã làm được 819 dụng cụ. Hỏi mỗi tháng mỗi tổ làm được bao nhiêu dụng cụ?

**Dạng 2. Toán về công việc làm chung, làm riêng.**

*Phương pháp giải:* Ta chú ý rằng:

- Thường coi khối lượng công việc là 1 đơn vị công việc.
- Năng suất 1 + Năng suất 2 = Tổng năng suất.

\* *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau :*

**Bài 8.7.** Hai tổ sản xuất cùng làm chung công việc thì hoàn thành trong 2 giờ. Hỏi nếu làm riêng một mình thì mỗi tổ phải hết bao nhiêu thời gian mới hoàn thành công việc, biết rằng khi làm riêng tổ 1 hoàn thành sớm hơn tổ 2 là 3 giờ.

**Bài 8.8.** Hai công nhân nếu làm chung thì trong 12 giờ sẽ hoàn thành công việc. Họ làm chung trong 4 giờ thì người thứ nhất chuyển đi làm việc khác, người thứ hai làm nốt công việc trong 10 giờ. Hỏi người thứ hai làm một mình thì bao lâu hoàn thành công việc.

\* *Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 8.9.** Hai người cùng làm chung một công việc thì 15 giờ sẽ xong. Hai người làm được 8 giờ thì người thứ nhất được điều đi làm công việc khác, người thứ hai tiếp tục làm việc trong 21 giờ nữa thì xong công việc. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao lâu mới xong công việc.

**Bài 8.10.** Hai người cùng làm chung một công việc trong 24 giờ thì xong. Năng suất người thứ nhất bằng  $\frac{3}{2}$  năng suất người thứ hai. Hỏi nếu mỗi người làm cả công việc thì hoàn thành sau bao lâu?

**Dạng 3. Toán về quan hệ các số.**

\* *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 8.11.** Tìm hai số biết rằng hai lần số thứ nhất hơn ba lần số thứ hai là 9 và hiệu các bình phương của chúng bằng 119 .

**Bài 8.12.** Tìm hai số biết rằng tổng chúng là 17 và tổng lập phương của chúng bằng 1241.

\* *Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 8.13.** Tích của hai số tự nhiên liên tiếp lớn hơn tổng của chúng là 109 . Tìm hai số đó.

**Bài 8.14.** Cho một số có hai chữ số. Tổng hai chữ số của chúng bằng 10. Tích hai chữ số ấy nhỏ hơn số đã cho là 12. Tìm số đã cho.

**Dạng 4. Toán có nội dung hình học**

\* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

**Bài 8.15.** Một thửa ruộng hình tam giác có diện tích  $180m^2$ . Tính chiều dài cạnh đáy thửa ruộng, biết rằng nếu tăng cạnh đáy thêm  $4m$  và chiều cao giảm đi  $1m$  thì diện tích không đổi.

**Bài 8.16.** Một thửa ruộng hình chữ nhật, nếu tăng chiều dài thêm  $2m$  và chiều rộng  $3m$  thì diện tích tăng  $100m^2$ . Nếu cùng giảm chiều dài và chiều rộng  $2m$  thì diện tích giảm  $68m^2$ . Tính diện tích thửa ruộng đó.

\* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

**Bài 8.17.** Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi  $280m$ . Người ta làm một lối đi xung quanh vườn (thuộc đất của vườn) rộng  $2m$ , diện tích còn lại là  $4256m^2$ . Tính các kích thước của khu vườn.

**Bài 8.18.** Một tam giác vuông có chu vi là  $30m$ , cạnh huyền là  $13m$ . Tính các cạnh góc vuông của tam giác.

**C. BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 8.19.** Hai người cùng làm chung một công việc trong  $\frac{12}{5}$  giờ thì xong. Nếu mỗi người làm một mình thì người thứ nhất hoàn thành công việc ít hơn người thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao nhiêu thời gian để xong công việc ?

**Bài 8.20.** Năm ngoái, hai đơn vị sản xuất nông nghiệp thu hoạch được 600 tấn thóc. Năm nay, đơn vị thứ nhất làm vượt mức 10%, đơn vị thứ hai làm vượt mức 20% so với năm ngoái. Do đó, cả hai đơn vị thu hoạch được 685 tấn thóc. Hỏi năm ngoái, mỗi đơn vị thu hoạch được bao nhiêu tấn thóc?

**Bài 8.21.** Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 3 giờ đầy bể. Nếu để vòi 1 chảy một mình trong 20 phút, khóa lại rồi mở tiếp vòi 2 chảy trong 30 phút thì cả 2 vòi chảy được  $\frac{1}{8}$  bể. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể.

**Bài 8.22.** Một tổ sản xuất phải làm được 600 sản phẩm trong một thời gian quy định với năng suất quy định. Sau khi làm xong 400 sản phẩm tổ sản xuất tăng năng suất lao động, mỗi ngày làm tăng thêm 10 sản phẩm so với quy định một ngày. Tính xem, theo quy định mỗi ngày tổ sản xuất phải làm bao nhiêu sản phẩm.

- Bài 8.23.** Hai người làm chung một công việc thì sau 16 giờ sẽ xong việc. Nếu người thứ nhất làm một mình trong 3 giờ và người thứ hai làm một mình trong 6 giờ thì cả hai làm được  $\frac{1}{4}$  công việc. Tính thời gian mỗi người làm một mình xong toàn bộ công việc.
- Bài 8.24.** Một cơ sở đánh cá dự định trung bình mỗi tuần đánh bắt được 20 tấn cá, nhưng đã vượt mức 6 tấn mỗi tuần nên chẳng những đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn 1 tuần mà còn vượt mức kế hoạch 10 tấn. Tính mức kế hoạch đã định.
- Bài 8.25.** Một đội xe cần chuyên chở 36 tấn hàng. Trước khi làm việc đội xe đã được bổ sung thêm 3 xe nữa nên mỗi xe chở ít hơn 1 tấn so với dự định. Hỏi đội xe lúc đầu có bao nhiêu xe ? Cho biết số hàng chở trên tất cả các xe có khối lượng bằng nhau.
- Bài 8.26.** Hai tổ sản xuất cùng nhận chung một mức khoán. Nếu làm chung trong 4 giờ thì hoàn thành được  $\frac{2}{3}$  mức khoán. Hỏi nếu để mỗi tổ làm riêng để làm xong mức khoán thì mỗi tổ phải làm trong bao lâu ?
- Bài 8.27.** Hai tổ công nhân làm chung trong 12 giờ sẽ hoàn thành xong công việc đã định. Họ làm chung với nhau trong 4 giờ thì tổ thứ nhất được điều đi làm việc khác, tổ thứ hai làm nốt công việc còn lại trong 10 giờ. Hỏi tổ thứ hai làm một mình thì sau bao lâu sẽ hoàn thành công việc?
- Bài 8.28.** Hai người thợ cùng làm một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm 3 giờ và người thứ hai làm 6 giờ thì họ làm được 25% công việc. Hỏi mỗi người làm công việc đó trong mấy giờ thì xong?
- Bài 8.29.** Một đội thợ mỏ khai thác 216 tấn than trong một thời gian nhất định. Ba ngày đầu, mỗi ngày họ đều khai thác vượt theo đúng định mức. Sau đó, mỗi ngày họ đều khai thác vượt định mức 8 tấn. Do đó họ đã khai thác được 232 tấn và xong trước thời hạn một ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày họ phải khai thác bao nhiêu tấn than?
- Bài 8.30.** Hai đội công nhân cùng làm một công việc thì 12 ngày xong việc. Nếu đội thứ nhất làm một mình hết nửa công việc, rồi đội hai tiếp tục một mình làm nốt công việc còn lại thì hết tất cả 25 ngày. Hỏi mỗi đội làm một mình thì bao lâu xong công việc?
- Bài 8.31.** Một tam giác vuông có chu vi 30 cm, độ dài hai cạnh góc vuông hơn kém nhau 7 cm. Tính độ dài các cạnh của tam giác.
- Bài 8.32.** Tìm số tự nhiên có hai chữ số biết rằng tổng các chữ số của nó bằng 5 và tổng các bình phương hai chữ số của nó bằng 13.

## **VẤN ĐỀ 9. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH (PHẦN II)**

### **A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

*Các bước giải bài toán bằng cách lập phương trình:*

*Bước 1. Lập phương trình*

+Chọn ẩn số và đặt điều kiện cho ẩn số.

+Biểu thị các dữ kiện chưa biết qua ẩn số.

+Lập phương trình biểu thị tương quan giữa ẩn số và các dữ kiện đã biết.

*Bước 2. Giải phương trình.*

*Bước 3. Đối chiếu nghiệm của phương trình ( nếu có) với dữ kiện của ẩn số và với đề bài để trả lời.*

## **II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN**

### **Dạng 5. Toán chuyển động**

*Phương pháp giải:* Chú ý rằng:

$$\text{Quãng đường} = \text{vận tốc} \times \text{Thời gian}$$

*\* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 9.1.** Một người đi xe máy từ A đến B với vận tốc  $25\text{km/h}$ . Lúc về người đó đi với vận tốc  $30\text{km/h}$  nên thời gian về ít hơn thời gian đi là 20 phút. Tính quãng đường AB.

**Bài 9.2.** Một ô tô phải đi qua quãng đường AB dài 60 km trong một thời gian nhất định. Xe đi nửa đầu quãng đường với vận tốc hơn dự định là 10 km/h và đi nửa sau kém hơn dự định 6 km/h. Biết ô tô đã đến đúng như dự định. Tính thời gian người đó dự định đi quãng đường AB.

*\* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp.*

**Bài 9.3.** Lúc 6 giờ, một ô tô xuất phát từ A đến B với vận tốc trung bình 40 km/h. Khi đến B, người lái xe làm nhiệm vụ giao nhận hàng trong 30 phút rồi cho xe quay trở về A với vận tốc trung bình 30 km/h. Tính quãng đường AB biết rằng ô tô về đến A lúc 10 giờ cùng ngày.

**Bài 9.4.** Một ô tô chạy trên quãng đường AB. Lúc đi ô tô chạy với vận tốc 35 km/h, lúc về chạy với vận tốc 42 km/h, vì vậy thời gian về ít hơn thời gian đi nửa giờ. Tính chiều dài quãng đường AB.

### **Dạng 6. Toán về chuyển động ngược chiều.**

*\* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 9.5.** Khoảng cách giữa Hà Nội và Thái Bình là 110 km. Một người đi xe máy từ Hà Nội về Thái Bình với vận tốc 45 km/h. Một người đi xe máy từ Thái Bình lên Hà Nội với vận tốc 30 km/h. Hỏi sau mấy giờ họ gặp nhau?

**Bài 9.6.** Hai người đi bộ khởi hành ở hai địa điểm cách nhau  $4,18 \text{ km}$  đi ngược chiều nhau để gặp nhau. Người thứ nhất mỗi giờ đi được  $5,7 \text{ km}$ . Người thứ hai mỗi giờ đi được  $6,3 \text{ km}$  nhưng xuất phát sau người thứ nhất 4 phút. Hỏi người thứ hai đi trong bao lâu thì gặp người thứ nhất.

*\*Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp.*

**Bài 9.7.** Hai người đi xe đạp cùng lúc, ngược chiều nhau từ hai địa điểm A và B cách nhau  $42 \text{ km}$  và gặp nhau sau 2 giờ. Tính vận tốc của mỗi người, biết rằng người đi từ A mỗi giờ đi nhanh hơn người đi từ B là  $3 \text{ km}$ .

**Bài 9.8.** Hai người cùng đi xe đạp từ hai tỉnh A và B cách nhau  $60 \text{ km}$  đi ngược chiều nhau và gặp nhau sau 2 giờ. Tính vận tốc của mỗi người biết rằng người đi từ A mỗi giờ đi nhanh hơn người đi từ B là  $2 \text{ km}$ .

### **Dạng 7. Toán về chuyển động cùng chiều**

*\* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 9.9.** Hai xe máy khởi hành lúc 7 giờ sáng từ A để đến B. Xe máy thứ nhất chạy với vận tốc  $30 \text{ km/h}$ , xe máy thứ hai chạy với vận tốc lớn hơn vận tốc xe máy thứ nhất là  $6 \text{ km/h}$ . Trên đường đi xe thứ hai dừng lại nghỉ 40 phút rồi lại tiếp tục chạy với vận tốc cũ. Tính chiều dài quãng đường AB, biết cả hai xe đến B cùng lúc.

*\*Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp.*

**Bài 9.10.** Lúc 7 giờ sáng một người đi xe đạp khởi hành từ A với vận tốc  $10 \text{ km/h}$ . Sau đó lúc 8 giờ 40 phút, một người khác đi xe máy từ A cũng đuổi theo với vận tốc  $30 \text{ km/h}$ . Hỏi hai người gặp nhau lúc mấy giờ?

**Bài 9.11.** Một đoàn tàu hỏa từ Hà Nội đi Thành phố Hồ Chí Minh, 1 giờ 48 phút sau, một đoàn tàu hỏa khác khởi hành từ Nam Định cũng đi Thành phố Hồ Chí Minh với vận tốc nhỏ hơn vận tốc của đoàn tàu thứ nhất  $5 \text{ km/h}$ . Hai đoàn tàu gặp nhau ( tại 1 ga nào đó) sau 4 giờ 48 phút kể từ khi đoàn tàu thứ nhất khởi hành. Tính vận tốc của mỗi đoàn tàu, biết rằng Ga Nam Định nằm trên đường từ Hà Nội đi Thành phố Hồ Chí Minh và cách Ga Hà Nội  $87 \text{ km}$ .

### **Dạng 8. Toán về chuyển động trên dòng nước**

*Phương pháp giải:* Ta có chú ý sau:

1. Vận tốc tàu khi xuôi dòng = Vận tốc tàu khi đứng yên + vận tốc dòng nước.
2. Vận tốc tàu khi ngược dòng = Vận tốc tàu khi đứng yên - vận tốc dòng nước.

*\* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 9.12.** Một ca nô tuần tra đi xuôi dòng từ A đến B hết 1 giờ 20 phút và ngược dòng từ B về A hết 2 giờ. Tính vận tốc riêng của ca nô, biết vận tốc dòng nước là  $3 \text{ km/h}$ .

**Bài 9.13.** Quãng đường một ca nô đi xuôi dòng trong 4 giờ bằng 2,4 lần quãng đường một ca nô đi ngược dòng trong 2 giờ. Hỏi vận tốc ca nô khi xuôi dòng. Biết rằng vận tốc ca nô khi nước yên tĩnh là  $15 \text{ km/h}$ .

*\*Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp.*

**Bài 9.14.** Lúc 7 giờ sáng, một chiếc ca nô xuôi dòng từ bến A đến bến B, cách nhau 36 km, rồi ngay lập tức quay trở về và đến bến A lúc 11 giờ 30 phút. Tính vận tốc của ca nô khi xuôi dòng, biết vận tốc của dòng chảy là 6 km/h.

**Bài 9.15.** Một chiếc ca nô khởi hành từ bến A đến bến B dài 120 km rồi từ B quay về A mất tổng cộng 11 giờ. Tính vận tốc của ca nô. Cho biết vận tốc của dòng là 2 km/h và vận tốc thật không đổi.

**Dạng 9. Các dạng khác.**

**Bài 9.16.** Một đoàn xe vận tải dự định điều một số xe cùng loại để vận chuyển 40 tấn hàng. Lúc sắp khởi hành đoàn xe được giao thêm 14 tấn hàng nữa, do đó phải điều thêm 2 xe cùng loại trên và mỗi xe chở thêm 0,5 tấn hàng. Tính số xe ban đầu biết số xe của đội không quá 12 xe.

**Bài 9.17.** Hai lớp 8A và 8B có tổng cộng 94 học sinh biết rằng 25% số học sinh lớp 8A đạt loại giỏi, 20% số học sinh lớp 8B và tổng số học sinh giỏi của hai lớp là 21. Tính số học sinh mỗi lớp.

*\*Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp.*

**Bài 9.18.** Một tổ máy trộn bê tông phải sản xuất  $450 m^3$  bê tông cho đập thủy lợi mất một thời gian quy định. Nhờ tăng năng suất mỗi ngày  $4,5 m^3$  nên 4 ngày trước thời hạn quy định tổ đã sản xuất được 96% công việc. Hỏi thời gian quy định là bao nhiêu ngày?

**Bài 9.19.** Tìm số học sinh của hai lớp 8A và 8B, biết rằng nếu chuyển 3 học sinh lớp 8A sang lớp 8B thì số học sinh hai lớp bằng nhau, nếu chuyển 5 học sinh từ lớp 8B sang lớp 8A thì số học sinh 8B bằng  $\frac{11}{19}$  số học sinh lớp 8A.

**C. BÀI TẬP VỀ NHÀ.**

**Bài 9.20.** Một ca nô chạy xuôi dòng từ A đến B rồi chạy ngược dòng từ B về A hết tất cả 4 giờ. Tính vận tốc ca nô khi nước yên lặng, biết rằng quãng sông AB dài 30 km và vận tốc dòng nước là 4 km/h.

**Bài 9.21.** Một tàu thủy chạy xuôi dòng một khúc sông dài 72 km sau đó chạy ngược dòng khúc sông ấy 54 km hết tất cả 6 giờ. Tính vận tốc riêng của tàu thủy nếu vận tốc dòng nước là 3 km/h.

**Bài 9.22.** Một ô tô chuyển động đều với vận tốc đã định để đi hết quãng đường dài 120 km trong một thời gian đã định. Đi được một nửa quãng đường xe nghỉ 3 phút nên để đến nơi đúng giờ xe phải tăng vận tốc thêm 2 km/h trên nửa quãng đường còn lại. Tính thời gian xe lăn bánh trên đường.

**Bài 9.23.** Một ô tô dự định đi từ A đến B cách nhau 120 km trong một thời gian quy định. Sau khi đi được 1 giờ ô tô bị chặn đường bởi tàu hỏa 10 phút. Do đó, để đến B đúng hạn, xe phải tăng vận tốc thêm 6 km/h. Tính vận tốc lúc đầu của ô tô.



- Bài 9.24.** Một người đi xe đạp từ A đến B trong một thời gian quy định. Khi còn cách B một khoảng 30 km, người đó nhận thấy rằng sẽ đến B chậm nửa giờ nếu giữ nguyên vận tốc đang đi, nhưng nếu tăng vận tốc thêm 5 km/h thì sẽ tới đích sớm hơn nửa giờ. Tính vận tốc của xe đạp trên quãng đường đã đi lúc đầu.
- Bài 9.25.** Hai sân bay Hà Nội và Đà Nẵng cách nhau 600 km. Một máy bay cánh quạt từ Đà Nẵng đi Hà Nội. Sau 10 phút, một máy bay phản lực từ Hà Nội đi Đà Nẵng với vận tốc lớn hơn vận tốc máy bay cánh quạt là 300 km/h. Máy bay phản lực đến Đà Nẵng trước khi máy bay cánh quạt đến Hà Nội 10 phút. Tính vận tốc của mỗi máy bay.
- Bài 9.26.** Hà Nội cách Nam Định 90 km. Hai ô tô khởi hành đồng thời, xe thứ nhất từ Hà Nội, xe thứ hai từ Nam Định và đi ngược chiều nhau. Sau một giờ chúng gặp nhau. Tiếp tục đi, xe thứ hai tới Hà Nội trước xe thứ nhất tới Nam Định là 27 phút. Tính vận tốc của mỗi xe.
- Bài 9.27.** Khoảng cách giữa hai bến sông A và B là 30 km. Một ca nô đi từ A đến B, nghỉ 40 phút ở B, rồi lại trở về bến A. Thời gian kể từ lúc đi đến lúc trở về đến A là 6 giờ. Tính vận tốc của ca nô khi nước yên lặng, biết rằng vận tốc của dòng nước là 3 km/h.
- Bài 9.28.** Năm ngoái, hai đơn vị sản xuất nông nghiệp thu hoạch được 600 tấn thóc. Năm nay, đơn vị thứ nhất làm vượt mức 10%, đơn vị thứ hai làm vượt mức 20% so với năm ngoái. Do đó, cả hai đơn vị thu hoạch được 685 tấn thóc. Hỏi năm ngoái, mỗi đơn vị thu hoạch được bao nhiêu tấn thóc ?
- Bài 9.29.** Một đội xe cần chuyên chở 36 tấn hàng. Trước khi làm việc đội xe đó được bổ sung thêm 3 xe nữa nên mỗi xe chở ít hơn 1 tấn so với dự định. Hỏi đội xe lúc đầu có bao nhiêu xe? Cho biết số hàng chở trên tất cả các xe có khối lượng bằng nhau.
- Bài 9.30.** Người ta trộn 8 gam chất lỏng này với 6 gam chất lỏng khác có khối lượng riêng nhỏ hơn  $0,2 \text{ g/cm}^3$  để được một khối lượng riêng là  $0,7 \text{ g/cm}^3$ . Tìm khối lượng riêng của mỗi chất lỏng.

**VẤN ĐỀ 10. BÀI TOÁN VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ PARABOL**

**A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

Cho đường thẳng  $d : y = mx + n$  và parabol  $(P) : y = ax^2 (a \neq 0)$ . Khi đó: Số giao điểm của  $d$  và  $(P)$  bằng đúng số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm :

$$ax^2 = mx + n$$

Ta có bảng sau đây:

Số giao điểm của $d$ và $(P)$	Biệt thức $\Delta$ của phương trình hoành độ giao điểm của $d$ và $(P)$	Vị trí tương đối của $d$ và $(P)$
0	$\Delta < 0$	$d$ không cắt $(P)$
1	$\Delta = 0$	$d$ tiếp xúc với $(P)$
2	$\Delta > 0$	$d$ cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt

**B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN**

\* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

**Bài 10.1.** Cho parabol  $(P) : y = \frac{x^2}{2}$  và  $d : y = \frac{1}{2}x + n$ .

- a) Với  $n = 1$ , hãy:
  - i) Vẽ  $(P)$  và  $d$  trên cùng một mặt phẳng tọa độ;
  - ii) Tìm tọa độ các giao điểm A và B của  $(P)$  và  $d$ ;
  - iii) Tính diện tích tam giác AOB.
- b) Tìm các giá trị của  $n$  để:
  - i)  $(P)$  tiếp xúc với  $d$ ;
  - ii)  $(P)$  và  $d$  cắt nhau tại hai điểm phân biệt;
  - iii)  $(P)$  và  $d$  cắt nhau tại hai điểm nằm ở hai phía trục tung.

**Bài 10.2.** Viết phương trình đường thẳng  $d$  biết:

- a)  $d$  tiếp xúc với  $(P) : y = \frac{x^2}{3}$  tại điểm  $(3;3)$  ;
- b)  $d$  song song với đường thẳng  $d' : 2y + 4x = 5$  và tiếp xúc với  $(P) : y = x^2$ .
- c)  $d$  đi qua hai điểm A, B có hoành độ lần lượt là -2; 4 và thuộc  $(P) : y = \frac{x^2}{4}$ .

**Bài 10.3.** Cho parabol  $(P) : y = -x^2$  và đường thẳng đi qua điểm  $M(0; -1)$  có hệ số góc là  $k$ .

- a) Viết phương trình đường thẳng  $d$ . Chứng minh rằng với mọi giá trị của  $k$ ,  $d$  luôn cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt A và B.
- b) Gọi hoành độ của A, B là  $x_1, x_2$ . Chứng minh:  $|x_1 - x_2| \geq 2$ .
- c) Chứng minh tam giác AOB vuông.

*\*Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp.*

**Bài 10.4.** Cho parabol  $(P): y = x^2$  và  $d: y = 2x + 3$ .

- a) Vẽ  $(P)$  và  $d$  trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
- b) Tìm tọa độ giao điểm A, B của  $(P)$  và  $d$ . Gọi C, D lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B lên  $Ox$ . Tính diện tích tứ giác ABCD.

**Bài 10.5.** Cho parabol  $(P): y = (2m - 1)x^2$  với  $m \neq \frac{1}{2}$ .

- a) Xác định  $m$  biết đồ thị hàm số đi qua  $A(3; 3)$ . Vẽ đồ thị hàm số với  $m$  vừa tìm được.
- b) Một đường thẳng song song với trục hoành, cắt trục tung tại điểm có tung độ là 4, cắt  $(P)$  vừa vẽ tại 2 điểm A và B. Tính diện tích tam giác AOB.

**Bài 10.6.** Cho parabol  $(P): y = ax^2 (a \neq 0)$  và  $d: y = 2mx - m + 2$

- a) Xác định  $a$  biết  $(P)$  đi qua  $A(1; -1)$ ;
- b) Biện luận số giao điểm của  $(P)$  và  $d$  theo tham số  $m$ ;

**BÀI TẬP VỀ NHÀ.**

**Bài 10.7.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho  $M(1; 2)$  và  $d: y = -3x + 1$ .

- a) Viết phương trình đường thẳng  $d'$  đi qua M và song song  $d$ .
- b) Cho parabol  $(P): y = mx^2 (m \neq 0)$ . Tìm các giá trị của  $m$  để  $d$  và  $(P)$  cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B nằm cùng phía đối với trục tung.

**Bài 10.8.** Trong cùng mặt phẳng tọa độ cho parabol  $(p): y = ax^2$ .

- a) Tìm tọa độ giao điểm A của hai đường thẳng  $d_1: y = x + 1$  và  $d_2: x + 2y + 4 = 0$ .
- b) Tìm giá trị của  $a$  để  $(P)$  đi qua A. Vẽ  $(P)$  với  $a$  vừa tìm được.
- c) Viết phương trình đường thẳng  $d$  biết  $d$  tiếp xúc với  $(P)$  tại A.

**Bài 10.9.** Trong cùng mặt phẳng tọa độ, cho parabol  $(P): y = \frac{1}{4}x^2$  và đường thẳng  $d: y = mx - 2m - 1$ .

- a) Vẽ  $(P)$ .
- b) Tìm giá trị của  $m$  sao cho  $d$  tiếp xúc với  $(P)$ .
- c) Chứng tỏ  $d$  luôn đi qua một điểm cố định A thuộc  $(P)$ .

**Bài 10.10.** Cho parabol  $(P): y = \frac{x^2}{2}$  và đường thẳng  $d: mx + y = 2$ .

- a) Chứng minh  $(P)$  và  $d$  cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B.
- b) Xác định  $m$  để AB nhỏ nhất. Tính diện tích tam giác AOB với  $m$  vừa tìm được.

**Bài 10.11.** Cho  $(P): y = \frac{x^2}{2}$  và đường thẳng  $d$  đi qua  $I(0;2)$  có hệ số góc  $k$ .

- a) Chứng minh  $(P)$  và  $d$  luôn cắt nhau tại 2 điểm phân biệt A và B.
- b) Gọi H và K là hình chiếu vuông góc của A và B trên  $Ox$ . Chứng minh tam giác  $IHK$  vuông tại I.

**Bài 10.12.** Cho parabol  $(p): y = x^2$  và đường thẳng  $d: y = mx - m + 1$ . Tìm các giá trị của  $m$  để  $d$  cắt  $(p)$  tại hai điểm phân biệt A và B có hoành độ  $x_1$  và  $x_2$  thỏa mãn:

- a)  $|x_1| + |x_2| = 4$
- b)  $x_1 = 9x_2$ .

**Bài 10.13.** Cho parabol  $(P)$  có đồ thị đi qua gốc tọa độ và đi qua điểm  $A\left(1; -\frac{1}{4}\right)$ .

- a) Viết phương trình của  $(P)$ .
- b) Với giá trị nào của  $m$  thì đường thẳng  $d: y = -\frac{1}{2}x + m$  cắt  $(P)$  tại hai điểm có hoành độ  $x_1, x_2$  sao cho  $3x_1 + 5x_2 = 5$ ?

**Bài 10.14.** Cho parabol  $(P): y = x^2$  và đường thẳng  $d: y = 2mx - 2m + 3$ .

- a) Tìm tọa độ các điểm thuộc  $(P)$  biết tung độ của chúng bằng 2.
- b) Chứng minh với mọi giá trị của  $m$ ,  $d$  luôn cắt parabol  $(P)$  tại hai điểm phân biệt.
- c) Gọi  $y_1, y_2$  tung độ các giao điểm của  $d$  và  $(P)$ . Tìm giá trị của  $m$  để  $y_1 + y_2 < 9$ .

ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 2

**A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

**1. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai**

Xét phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  và biệt thức  $\Delta = b^2 - 4ac$  :

*Trường hợp 1.* Nếu  $\Delta < 0$  thì phương trình vô nghiệm.

*Trường hợp 2.* Nếu  $\Delta = 0$  thì phương trình có nghiệm kép:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

*Trường hợp 3.* Nếu  $\Delta > 0$  thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

**2. Công thức nghiệm thu gọn của phương trình bậc hai**

Xét phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  với  $b = 2b'$ .

Gọi biệt thức  $\Delta' = b'^2 - ac$  :

*Trường hợp 1.* Nếu  $\Delta' < 0$  thì phương trình vô nghiệm.

*Trường hợp 2.* Nếu  $\Delta' = 0$  thì phương trình có nghiệm kép:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$$

*Trường hợp 3.* Nếu  $\Delta' > 0$  thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$$

**3. Hệ thức Vi-ét**

Cho phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ . Nếu  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

**4. Bài toán về sự tương giao giữa đường thẳng và parabol**

Cho đường thẳng  $d : y = mx + n$  và parabol  $(P) : y = ax^2 (a \neq 0)$ .

Khi đó:

- Số giao điểm của  $d$  và  $(P)$  bằng đúng số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm của chúng:  $a.x^2 = mx + n$ .
- Nghiệm của phương trình  $a.x^2 = mx + n$  (nếu có) chính là hoành độ giao điểm của  $d$  và  $(P)$ .

**B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN**

\* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

**Bài 11.1.** Cho phương trình  $2mx^2 - 2(2m-1)x + 2m - 3 = 0$ . Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình:

- a) Có hai nghiệm phân biệt;
- b) Có nghiệm kép;
- c) Vô nghiệm;
- d) Có đúng 1 nghiệm;
- e) Có nghiệm.

**Bài 11.2.** Cho các phương trình :

$$ax^2 + 2bx + c = 0;$$

$$bx^2 + 2cx + a = 0;$$

$$cx^2 + 2ax + b = 0$$

trong đó  $a, b, c \neq 0$ . Chứng tỏ rằng có ít nhất một trong ba phương trình trên có nghiệm.

**Bài 11.3.** Cho phương trình  $x^2 + (m + 2)x + 2m = 0$ .

- a) Giải và biện luận phương trình.
- b) Biết phương trình có một nghiệm là  $x = 3$ . Tìm  $m$  và nghiệm còn lại.
- c) Tìm  $m$  để phương trình có 2 nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 2.$$

- d) Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình có hai nghiệm đối nhau.
- e) Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình có hai nghiệm cùng dấu. Khi đó hai nghiệm cùng âm hay cùng dương?
- f) Đặt  $A = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 + 4$  với  $x_1, x_2$  là 2 nghiệm của phương trình. Hãy:
  - i. Tìm biểu thức  $A$  theo  $m$ ;
  - ii. Tìm các giá trị của  $m$  để  $A = 8$  ;
  - iii. Tìm giá trị nhỏ nhất của  $A$  và giá trị tương ứng của  $m$ .
- g) Chứng minh biểu thức  $P = 2(x_1 + x_2) + x_1x_2 - 4$  không phụ thuộc vào  $m$ .

**Bài 11.4.** Giải các phương trình:

- a)  $\sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{5-x} = 1$ ;
- b)  $(x-1)^{2016} + (x-2)^{2016} = 1$

**Bài 11.5.** Cho hàm số  $y = -x^2$  và đường thẳng  $d$  đi qua  $N(-1; -2)$  có hệ số góc  $k$ .

- Viết phương trình đường thẳng  $d$ .
- Chứng minh với mọi giá trị của  $k$ ,  $d$  luôn cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$ .
- Tìm các giá trị của  $k$  để  $A, B$  nằm về hai phía của trục tung.
- Gọi  $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ . Tìm giá trị của  $k$  để  $S = x_1 + y_1 + x_2 + y_2$  đạt giá trị lớn nhất.

*\*Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp.*

**Bài 11.6.** Chứng minh phương trình:

$$(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$$

luôn có nghiệm với mọi  $a, b, c$ .

**Bài 11.7.** Cho phương trình:  $x^2 - (2a-1)x - 4a - 3 = 0$ .

- Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.
- Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $A = x_1^2 + x_2^2$ .
- Tìm các giá trị của  $a$  để phương trình có hai nghiệm trái dấu.
- Tìm các giá trị của  $a$  để phương trình có hai nghiệm cùng dương.

**Bài 11.8.** Giải các phương trình:

- $x^3 + 3x^2 + 3x - 2008 = 0$ ;
- $x^4 - 3x^3 + 3x + 1 = 0$ .

**Bài 11.9.** Cho parabol  $(P): y = x^2$  và đường thẳng  $d: y = mx + 1$ .

- Vẽ đồ thị  $(P), d$  khi  $m = 1$ .
- Chứng minh với mọi  $m$ ,  $d$  luôn đi qua một điểm cố định và luôn cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$ .
- Tìm các giá trị của  $m$  để tam giác  $AOB$  có diện tích bằng 2 ( đơn vị diện tích).

**C. BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 11.10.** Cho phương trình:  $x^2 - (2m-6)x + m - 13 = 0$ .

- Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.
- Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $A = x_1x_2 - (x_1^2 + x_2^2)$ .
- Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình có hai nghiệm đối nhau.

**Bài 11.11.** Cho parabol  $(P): y = -x^2$  và đường thẳng  $d: y = mx - 2$ .

- Chứng minh  $d$  luôn cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt  $A$  và  $B$  với mọi  $m$ .

b) Gọi  $x_1, x_2$  là hoành độ của A và B. Tìm giá trị của m để

$$x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = 2014.$$

**Bài 11.12.** Cho parabol  $(P): y = x^2$  và đường thẳng  $d: y = mx + m + 1$ .

- Tìm các giá trị của m để  $(P)$  và  $d$  cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B.
- Gọi  $x_1, x_2$  là hoành độ của A và B. Tìm các giá trị của m để  $|x_1 - x_2| = 2$ .
- Tìm các giá trị của m để  $(P)$  và  $d$  cắt nhau tại hai điểm phân biệt cùng nằm bên trái của trục tung.

**Bài 11.13.** Cho parabol  $(P): y = 2x^2$  và đường thẳng  $d: y = 4x - 2$ .

- Chứng minh  $d$  tiếp xúc  $(P)$  tại điểm  $A(1;2)$ .
- Viết phương trình đường thẳng  $d'$  có hệ số góc  $m$  và đi qua  $A(1;2)$ . Tìm m để  $d'$  cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt mà một trong hai giao điểm đó có hoành độ lớn hơn 3.

**Bài 11.14.** Cho parabol  $(P): y = \frac{1}{2}x^2$  và đường thẳng  $d: y = mx + 2$ .

- Chứng minh với mọi giá trị của m,  $d$  luôn cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt.
- Gọi  $x_1, x_2$  lần lượt là hoành độ các giao điểm của  $d$  và  $(P)$ .

Tìm giá trị của m để  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = -3$ .

**Bài 11.15.** Cho parabol  $(P)$  có đồ thị đi qua gốc tọa độ và đi qua điểm  $A\left(1; -\frac{1}{4}\right)$ .

- Viết phương trình của  $(P)$ .
- Với giá trị nào của m thì đường thẳng  $d: y = -\frac{1}{2}x + m$  cắt  $(P)$  tại hai điểm có hoành độ  $x_1, x_2$  sao cho  $3x_1 + 5x_2 = 5$ ?

**Bài 11.16.** Cho parabol  $(P): y = x^2$  và đường thẳng  $d: y = 2mx - 2m + 3$ .

- Tìm tọa độ các điểm thuộc  $(P)$  biết tung độ của chúng bằng 2.
- Chứng minh với mọi giá trị của m,  $d$  luôn cắt parabol  $(P)$  tại hai điểm phân biệt.

Gọi  $y_1, y_2$  tung độ các giao điểm của  $d$  và  $(P)$ . Tìm giá trị của m để  $y_1 + y_2 < 9$ .



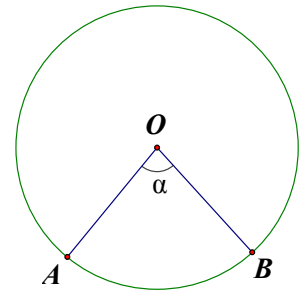
**CHỦ ĐỀ 3. GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN**

**VẤN ĐỀ 1. GÓC Ở TÂM. SỐ ĐO CUNG**

**A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

**1. Góc ở tâm**

- Góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn được gọi là *góc ở tâm*.  
Ví dụ:  $\widehat{AOB}$  là góc ở tâm (Hình 1).
- Nếu  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$  thì cung nằm bên trong góc được gọi là *cung nhỏ*, cung nằm bên ngoài góc gọi là *cung lớn*.
- Nếu  $\alpha = 180^\circ$  thì mỗi cung là một nửa đường tròn.
- Cung nằm bên trong góc được gọi là *cung bị chắn*. Góc bẹt *chắn nửa đường tròn*.



Hình 1

- Kí hiệu cung AB là:  $\widehat{AB}$ .

**2. Số đo cung**

- Số đo của cung  $\widehat{AB}$  được kí hiệu là *sđ*  $\widehat{AB}$ .
- Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó. Ví dụ:  $\widehat{AOB} = \text{sđ} \widehat{AB}$  (góc ở tâm chắn cung  $\widehat{AB}$ ) (Hình 1)
- Số đo của cung lớn bằng *hiệu* của  $360^\circ$  và số đo của cung nhỏ (có chung hai mút với cung lớn).
- Số đo của nửa đường tròn bằng  $180^\circ$ . Cung cả đường tròn có số đo  $360^\circ$ . Cung không có số đo  $0^\circ$  (cung có hai mút trùng nhau).

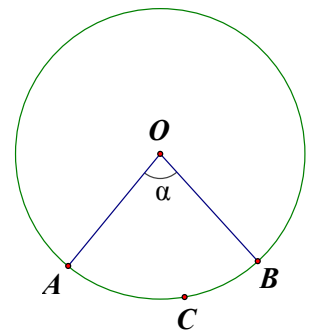
**3. So sánh hai cung**

Trong một đường tròn hay hai đường tròn bằng nhau:

- Hai cung được gọi là bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau.
- Trong hai cung, cung nào có số đo lớn hơn được gọi là cung lớn hơn.

**4. Định lí:** Nếu C là một điểm trên cung AB thì:

$$\text{sđ} \widehat{AB} = \text{sđ} \widehat{AC} + \text{sđ} \widehat{CB} .$$



Hình 2

**B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN**

*Phương pháp giải:* Để tính số đo của góc ở tâm, số đo của cung bị chắn, ta sử dụng các kiến thức sau:

- Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.
- Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa  $360^\circ$  và số đo của cung nhỏ (có chung hai đầu mút với cung lớn).
- Số đo của nửa đường tròn bằng  $180^\circ$ . Cung cả đường tròn có số đo  $360^\circ$ .
- Sử dụng tỉ số lượng giác của một góc nhọn để tính góc.
- Sử dụng quan hệ đường kính và dây cung.

\* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

**Bài 1.1.** Cho hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) cắt nhau tại M, biết  $\widehat{AMB} = 40^\circ$ .

- Tính  $\widehat{AMO}$  và  $\widehat{AOM}$ .
- Tính số đo cung  $\widehat{AB}$  nhỏ và số đo cung  $\widehat{AB}$  lớn.

**Bài 1.2.** Cho đường tròn (O;R), lấy M nằm ngoài (O) sao cho  $OM = 2R$ . Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA và MB với (O) (A,B là các tiếp điểm).

- Tính  $\widehat{AOM}$ ;
- Tính  $\widehat{AOB}$  và số đo cung  $\widehat{AB}$  nhỏ;
- Biết OM cắt (O) tại C. Chứng minh C là điểm chính giữa cung nhỏ  $\widehat{AB}$ .

*\*Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp.*

**Bài 1.3.** Trên cung nhỏ  $\widehat{AB}$  của đường tròn (O), cho hai điểm C và D sao cho cung  $\widehat{AB}$  chia thành ba cung bằng nhau ( $\widehat{AC} = \widehat{CD} = \widehat{DB}$ ). Bán kính OC và OD cắt dây AB lần lượt tại E và F.

- Hãy so sánh các đoạn thẳng AE và FB.
- Chứng minh các đường thẳng AB và CD song song.

**Bài 1.4.** Cho (O;R) và dây cung  $MN = R\sqrt{3}$ . Kẻ Ok vuông góc với MN tại K.

- Tính độ dài OK theo R.
- Tính  $\widehat{MOK}$  và  $\widehat{MON}$ .
- Tính số đo cung nhỏ và cung lớn  $\widehat{MN}$ .

### **C. BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 1.5.** Cho đường tròn (O) đường kính AB, vẽ góc ở tâm  $\widehat{AOC} = 50^\circ$ . Vẽ dây CD vuông góc với AB và dây DE song song với AB.

- Tính số đo cung nhỏ  $\widehat{BE}$ .
- Tính số đo cung CBE. Từ đó suy ra ba điểm C, O, E thẳng hàng.

**Bài 1.6.** Cho đường tròn (O;R). Gọi H là trung điểm của bán kính OB. Dây CD vuông góc với OB tại H. Tính số đo cung nhỏ và cung lớn  $\widehat{CD}$ .

**Bài 1.7.** Cho tam giác ABC cân tại A. Vẽ đường tròn tâm O, đường kính BC. Đường tròn (O) cắt AB và AC lần lượt tại M và N.

- Chứng minh các cung nhỏ  $\widehat{BM}$  và  $\widehat{CN}$  có số đo bằng nhau.
- Tính  $\widehat{MON}$ , biết  $\widehat{BAC} = 40^\circ$ .

**Bài 1.8.** Cho đường tròn (O;R). Vẽ dây  $AB = R\sqrt{2}$ . Tính số đo cung nhỏ và cung lớn  $\widehat{AB}$ .

**Bài 1.9.** Cho  $(O; 5cm)$  và điểm M sao cho  $OM = 10cm$ . Vẽ hai tiếp tuyến MA và MB (A, B là các tiếp điểm). Tính góc ở tâm do hai tia OA và OB tạo ra.

-----

## **VẤN ĐỀ 2. LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY**

### **A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

**1. Định lý 1:** Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:

- a) Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau.
- b) Hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau.

**2. Định lý 2:** Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:

- a) Cung lớn hơn căng dây lớn hơn.
- b) Dây lớn hơn căng cung lớn hơn.

### **3. Bổ sung**

- a) Trong một đường tròn, hai cung bị chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau.
- b) Trong một đường tròn, đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì đi qua trung điểm của dây căng cung đó.

Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây (không đi qua tâm) thì đi qua điểm chính giữa của cung bị căng bởi dây ấy.

- c) Trong một đường tròn, đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì vuông góc với dây căng cung ấy và ngược lại.

### **B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN**

*Phương pháp giải:* Để giải các bài toán liên quan đến cung và dây, cần nắm chắc định nghĩa góc ở tâm và kết hợp với sự liên hệ giữa cung và dây.

\* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

**Bài 2.1.** Chứng minh hai cung bị chắn bởi hai dây song song thì bằng nhau.

**Bài 2.2.** Cho đường tròn  $(O)$  đường kính AB và một cung AC có số đo nhỏ hơn  $90^\circ$ . Vẽ dây CD vuông góc với AB và dây DE song song với AB. Chứng minh  $\widehat{AC} = \widehat{BE}$ .

**Bài 2.3.** Cho đường tròn  $(O)$  đường kính AB và đường tròn  $(O')$  đường kính AO. Các điểm C, D thuộc đường tròn  $(O)$  sao cho  $B \in \widehat{CD}$  và  $\widehat{BC} < \widehat{BD}$ . Các dây cung AC và AD cắt đường tròn  $(O')$  theo thứ tự tại E, F. Hãy so sánh:

- a) Độ dài các đoạn OE và OF;
- b) So sánh số đo các cung  $\widehat{AE}$  và  $\widehat{AF}$  của đường tròn  $(O')$ .

\* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

**Bài 2.4.** Cho đường tròn  $(O; R)$  có hai dây cung AB và CD vuông góc nhau tại I (C thuộc cung nhỏ AB). Kẻ đường kính BE của đường tròn  $(O)$ . Chứng minh:

- $AC = DE$ ;
- $IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 = 4R^2$ ;
- $AB^2 + CD^2 = 8R^2 - 4OI^2$

**Bài 2.5.** Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Vẽ hai dây AM và BN song song với nhau sao cho  $s\grave{a} \widehat{BM} < 90^\circ$ . Vẽ dây MD song song với AB. Dây DN cắt AB tại E. Từ E vẽ đường thẳng song song với AM cắt DM tại C. Chứng minh:

- $AB \perp DN$ ;
- BC là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ .

**Bài 2.6.** Giả sử ABC là tam giác nhọn nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Đường cao AH cắt đường tròn  $(O)$  tại D. Kẻ đường kính AE của đường tròn  $(O)$ . Chứng minh:

- $BC \parallel DE$ ;
- Tứ giác BCED là hình thang cân.

**C. BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 2.7.** Cho đường tròn tâm O đường kính Ab. Từ A và B vẽ hai dây cung AC và BD song song nhau. So sánh hai cung nhỏ  $\widehat{AC}$  và  $\widehat{BD}$ .

**Bài 2.8.** Giả sử AB là một dây cung của đường tròn  $(O)$ . Trên cung nhỏ AB lấy các điểm C và D sao cho  $\widehat{AC} = \widehat{BD}$ . Chứng minh AB và CD song song.

**Bài 2.9.** Cho nửa đường tròn  $(O)$ , đường kính AB và C là điểm chính giữa của nửa đường tròn. Trên các cung CA, CB lần lượt lấy các điểm M và N sao cho  $\widehat{CM} = \widehat{BN}$ . Chứng minh:

- $AM = CN$ ;
- $MN = CA = CB$ .

**Bài 2.10.** Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn tâm O. Hãy so sánh các cung nhỏ AB, AC và BC biết  $\widehat{A} = 50^\circ$ .

**Bài 2.11.** Cho đường tròn  $(O)$  đường kính AB. Trên cùng nửa đường tròn lấy hai điểm C, D. Kẻ CH vuông góc AB, CH cắt  $(O)$  tại điểm thứ hai E. Kẻ AK vuông góc CD, AK cắt  $(O)$  tại điểm thứ hai F. Chứng minh:

- Hai cung nhỏ  $\widehat{CF}$  và  $\widehat{BD}$  bằng nhau;
- Hai cung nhỏ  $\widehat{BF}$  và  $\widehat{BE}$  bằng nhau;
- $BE = DF$ .

VẤN ĐỀ 3. GÓC NỘI TIẾP (PHẦN 1)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

- Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó.

- Cung nằm bên trong góc nội tiếp được gọi là *cung bị chắn*.

2. Định lý: Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.

3. Hệ quả: Trong một đường tròn:

- a) Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.
- b) Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.
- c) Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng  $90^\circ$ ) có số đo bằng nửa số đo góc ở tâm cùng chắn một cung.
- d) Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

**Dạng 1. Chứng minh hai góc bằng nhau, đoạn thẳng bằng nhau, tam giác đồng dạng**

*Phương pháp giải:* Dùng hệ quả để chứng minh hai góc bằng nhau.

- Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

**Bài 3.1.** Cho đường tròn  $(O)$  và điểm  $I$  không nằm trên đường tròn  $(O)$ . Từ điểm  $I$  kẻ hai dây cung  $AB$  và  $CD$  ( $A$  nằm giữa  $I$  và  $B$ ;  $C$  nằm giữa  $I$  và  $D$ ).

- a) So sánh các cặp góc  $\widehat{ACI}$  và  $\widehat{ABD}$ ;  $\widehat{CAI}$  và  $\widehat{CDB}$
- b) Chứng minh các tam giác  $IAC$  và  $IDB$  đồng dạng
- c) Chứng minh  $IA \cdot IB = IC \cdot ID$

**Bài 3.2.** Cho đường tròn  $(O)$  có các dây cung  $AB, BC, CA$ . Gọi  $M$  là điểm chính giữa cung nhỏ  $AB$ . Vẽ dây  $MN$  song song với  $BC$  và gọi  $S$  là giao điểm của  $MN$  và  $AC$ . Chứng minh  $SM = SC$  và  $SN = SA$ .

- Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

**Bài 3.3.** Cho nửa đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$ . Lấy  $M$  là điểm tùy ý trên nửa đường tròn ( $M$  khác  $A$  và  $B$ ). Kẻ  $MH$  vuông góc với  $AB$  ( $H \in AB$ ). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ  $AB$  chứa nửa đường tròn  $(O)$  vẽ hai nửa đường tròn tâm  $O_1$ , đường kính  $AH$  và tâm  $O_2$ , đường kính  $BH$ .  $MA$  và  $MB$  cắt hai nửa đường tròn  $(O_1)$  và  $(O_2)$  lần lượt tại  $P$  và  $Q$ . Chứng minh:

- a)  $MH = PQ$
- b) Các tam giác  $MPQ$  và  $MBA$  đồng dạng

c)  $PQ$  là tiếp tuyến chung của hai đường tròn  $(O_1)$  và  $(O_2)$ .

**Bài 3.4.** Cho tam giác  $ABC$  có ba góc nhọn, đường cao  $AH$  và nội tiếp đường tròn tâm  $O$ , đường kính  $AM$ .

a) Tính  $\widehat{ACM}$

b) Chứng minh  $\widehat{BAH} = \widehat{OCA}$

c) Gọi  $N$  là giao điểm của  $AH$  với đường tròn  $(O)$ . Tứ giác  $BCMN$  là hình gì? Vì sao?

**C. BÀI TẬP VỀ NHÀ.**

**Bài 3.5.** Cho đường tròn  $(O)$  và hai dây song song  $AB, CD$ . Trên cung nhỏ  $AB$  lấy điểm  $M$  tùy ý. Chứng minh:  $\widehat{AMC} = \widehat{BMD}$ .

**Bài 3.6.** Cho đường tròn  $(O)$  và hai dây cung  $AB, AC$  bằng nhau. Qua  $A$  vẽ một cát tuyến cắt dây  $BC$  ở  $D$  và cắt  $(O)$  ở  $E$ . Chứng minh:  $AB^2 = AD.AE$ .

**Bài 3.7.** Cho tam giác  $ABC$  có đường cao  $AH$  và nội tiếp trong đường tròn tâm  $O$ , đường kính  $AD$ . Chứng minh:  $AB.AC = AH.AD$ .

**Bài 3.8.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O; R)$ , đường cao  $AH$ , biết  $AB = 8\text{ cm}$ ;  $AC = 15\text{ cm}$ ;  $AH = 5\text{ cm}$ . Tính bán kính của đường tròn  $(O)$ .

**VẤN ĐỀ 4. GÓC NỘI TIẾP (PHẦN II)**

**A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

**1. Định nghĩa:** Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó. Cung nằm bên trong góc được gọi là *cung bị chắn*.

**2. Định lí.** Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.

**3. Hệ quả.** Trong một đường tròn:

- a) Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.
- b) Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.
- c) Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng  $90^\circ$ ) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.
- d) Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

**B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN**

**Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc, ba điểm thẳng hàng**

*Phương pháp giải:* Dùng hệ quả để chứng minh hai góc bằng nhau.

- Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

**Bài 4.1.** Cho đường tròn  $(O)$  và hai dây  $MA, MB$  vuông góc với nhau. Gọi  $I, K$  lần lượt là điểm chính giữa của các cung nhỏ  $MA$  và  $MB$ .

a) Chứng minh ba điểm  $A, O, B$  thẳng hàng.

b) Gọi  $P$  là giao điểm của  $AK$  và  $BI$ . Chứng minh  $P$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $MAB$ .

**Bài 4.2.** Cho đường tròn  $(O)$ , đường kính  $AB$  và  $S$  là một điểm nằm bên ngoài đường tròn.  $SA$  và  $SB$  lần lượt cắt đường tròn tại  $M, N$ . Gọi  $P$  là giao điểm của  $BM$  và  $AN$ . Chứng minh  $SP \perp AB$ .

**Bài 4.3.** Cho đường tròn  $(O)$ , đường kính  $AB$ , điểm  $D$  thuộc đường tròn. Gọi  $E$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $D$ .

a) Tam giác  $ABE$  là tam giác gì?

b) Gọi  $K$  là giao điểm của  $EB$  với  $(O)$ . Chứng minh rằng  $OD \perp AK$ .

**Bài 4.4.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ , hai đường cao  $BD$  và  $CE$  cắt nhau tại  $H$ . Vẽ đường kính  $AF$ .

a) Tứ giác  $BFCH$  là hình gì?

b) Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Chứng minh rằng ba điểm  $H, M, F$  thẳng hàng.

c) Chứng minh  $OM = \frac{1}{2}AH$ .

### **C. BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 4.5.** Cho tam giác  $ABC$  ( $AB < AC$ ) nội tiếp trong đường tròn  $(O)$ . Vẽ đường kính  $MN \perp BC$  (điểm  $M$  thuộc cung  $BC$  không chứa  $A$ ). Chứng minh rằng các tia  $AM, AN$  lần lượt là các tia phân giác trong và ngoài tại đỉnh  $A$  của tam giác  $ABC$ .

**Bài 4.6.** Cho nửa  $(O)$  đường kính  $AB = 2R$  và điểm  $C$  nằm ngoài nửa đường tròn.  $CA$  cắt nửa đường tròn ở  $M$ ,  $CB$  cắt nửa đường tròn ở  $N$ . Gọi  $H$  là giao điểm của  $AN$  và  $BM$ .

a) Chứng minh  $CH \perp AB$ .

b) Gọi  $I$  là trung điểm của  $CH$ . Chứng minh  $MI$  là tiếp tuyến của nửa đường tròn  $(O)$ .

**Bài 4.7.** Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  cắt nhau tại  $A$  và  $B$ . Vẽ các đường kính  $AC$  và  $AD$  của hai đường tròn. Chứng minh ba điểm  $C, B, D$  thẳng hàng.

**Bài 4.8.** Cho đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$  và một điểm  $C$  chạy trên một nửa đường tròn. Vẽ đường tròn  $(I)$  tiếp xúc với  $(O)$  tại  $C$  và tiếp xúc với đường kính  $AB$  tại  $D$ , đường tròn này cắt  $CA, CB$  lần lượt tại các điểm thứ hai là  $M, N$ . Chứng minh rằng ba điểm  $M, I, N$  thẳng hàng.

-----

VẤN ĐỀ 5. GÓC TẠO BỞI TIA TIẾP TUYẾN VÀ DÂY (PHẦN I)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. **Định nghĩa:** Cho đường tròn tâm (O) có Ax là tia tiếp tuyến tại tiếp điểm A và dây cung AB. Khi đó, góc  $\widehat{BAx}$  là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung.

2. **Định lý:** Số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo của cung bị chắn.

3. **Hệ quả:** Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

4. **Định lý (bổ sung):**

Nếu góc  $\widehat{BAx}$  với đỉnh A nằm trên nửa đường tròn, một cạnh chứa dây cung AB có số đo bằng nửa số đo cung AB căng dây đó và cung này nằm bên trong góc đó thì cạnh Ax là một tia tiếp tuyến của đường tròn.

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

**Dạng 1. Chứng minh các góc bằng nhau, các đẳng thức hoặc các tam giác đồng dạng.**

**Phương pháp giải:** Để giải các bài toán này, chúng ta vận dụng hệ quả về góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung hoặc hệ quả của hai góc nội tiếp.

\* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

**Bài 5.1.** Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Qua A kẻ tiếp tuyến AB và AC với (O) (B, C là tiếp điểm). Kẻ cát tuyến AMN với (O) (M nằm giữa A và N).

a) Chứng minh  $AB^2 = AM \cdot AN$

b) Gọi H là giao điểm của AO và BC. Chứng minh:

$$AH \cdot AO = AM \cdot AN$$

c) Đoạn AO cắt đường tròn (O) tại I. Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

**Bài 5.2.** Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại P.

a) Chứng minh các tam giác PAC và PBA đồng dạng.

b) Chứng minh  $PA^2 = PB \cdot PC$ ;

c) Tia phân giác trong của góc A cắt BC và (O) lần lượt tại D và M.

Chứng minh  $MB^2 = MA \cdot MD$ .



\* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

**Bài 5.3.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A cắt BC ở I.

a) Chứng minh  $\frac{IB}{IC} = \frac{AB^2}{AC^2}$ ;

b) Tính IA, IC biết rằng  $AB = 20\text{ cm}$ ,  $AC = 28\text{ cm}$ ,  $BC = 24\text{ cm}$ ,

**Bài 5.4.** Cho hình bình hành ABCD,  $\widehat{A} \leq 90^\circ$ . Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD cắt AC ở E. Chứng minh BD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEB.

### C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

**Bài 5.5.** Cho tam giác ABC nội tiếp (O) và At là tia tiếp tuyến với (O). Đường thẳng song song với At cắt AB và AC lần lượt tại M và N. Chứng minh  $AB \cdot AM = AC \cdot AN$ .

**Bài 5.6.** Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Qua A vẽ tiếp tuyến Ax với (O) nó cắt đường tròn (O') tại E. Qua A vẽ tiếp tuyến Ay với (O') nó cắt đường tròn (O) tại D. Chứng minh  $AB^2 = BD \cdot BE$ .

**Bài 5.7.** Cho hình thang ABCD ( $AB \parallel CD$ ) có  $BD^2 = AB \cdot CD$ . Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD tiếp xúc với BC.

**Bài 5.8.** Cho hình vuông ABCD có cạnh dài 2cm. Tính bán kính của đường tròn đi qua A và B biết rằng đoạn tiếp tuyến kẻ từ D đến đường tròn đó bằng 4 cm.

-----

## VẤN ĐỀ 6. GÓC TẠO BỞI TIA TIẾP TUYẾN VÀ DÂY CUNG (PHẦN II)

### A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Định lí:** Số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo cung bị chắn.
- Hệ quả:** Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.
- Định lí (bổ sung):** Nếu góc  $\widehat{BAx}$  với đỉnh A nằm trên đường tròn, một cạnh chứa dây cung AB có số đo bằng nửa số đo của cung AB căng dây đó và cung này nằm bên trong góc đó thì tia Ax là một tia tiếp tuyến của đường tròn.

### B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

**Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng song song, hai đường thẳng vuông góc. Chứng minh một tia là tiếp tuyến của đường tròn.**

*Phương pháp giải:* Để giải các bài toán này, chúng ta vận dụng hệ quả về góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung hoặc hệ quả của hai góc nội tiếp.

\*Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

**Bài 6.1.** Cho các đường tròn  $(O;R)$  và  $(O';R')$  tiếp xúc trong với nhau tại  $A(R > R')$ . Vẽ đường kính  $AB$  của  $(O)$ ;  $AB$  cắt  $(O')$  tại điểm thứ hai  $C$ . Từ  $B$  vẽ tiếp tuyến  $BP$  với đường tròn  $(O')$ ;  $BP$  cắt  $(O)$  tại  $Q$ . Đường thẳng  $AP$  cắt  $(O)$  tại điểm thứ hai  $R$ . Chứng minh:

- $AP$  là phân giác của góc  $\widehat{BAQ}$ .
- $CP \parallel BR$ .

**Bài 6.2.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$  và  $AB < AC$ . Đường tròn  $(I)$  đi qua  $B$  và  $C$ , tiếp xúc với  $AB$  tại  $B$  cắt đường thẳng  $AC$  tại  $D$ . Chứng minh:  $OA \perp BD$ .

*\*Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 6.3.** Cho đường tròn  $(O;R)$  với  $A$  là điểm cố định trên đường tròn. Kẻ tiếp tuyến  $Ax$  với  $(O)$  và lấy  $M$  là điểm bất kì thuộc tia  $Ax$ . Vẽ tiếp tuyến thứ hai  $MB$  với đường tròn  $(O)$ . Gọi  $I$  là trung điểm  $MA$ ,  $K$  là giao điểm của  $BI$  với  $(O)$ .

- Chứng minh:  $\Delta IKA \sim \Delta IAB$ . Từ đó suy ra  $\Delta IKM \sim \Delta IMB$ ;
- Giả sử  $MK$  cắt  $(O)$  tại  $C$ . Chứng minh:  $BC \parallel MA$ .

**Bài 6.4.** Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(I)$  cắt nhau tại  $C$  và  $D$ , trong đó tiếp tuyến chung  $MN$  song song với cát tuyến  $EDF$ ,  $M$  và  $E$  thuộc  $(O)$ ,  $N$  và  $F$  thuộc  $(I)$ ,  $D$  nằm giữa  $E$  và  $F$ . Gọi  $K, H$  theo thứ tự là giao điểm của  $NC, MC$  với  $EF$ . Gọi  $G$  là giao điểm của  $EM, FN$ . Chứng minh:

- Các tam giác  $GMN$  và  $DMN$  bằng nhau.
- $GD$  là đường trung trực của  $KH$ .

### **C. BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 6.5.** Cho nửa đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$  và một điểm  $C$  trên nửa đường tròn. Gọi  $D$  là một điểm trên đường kính  $AB$ ; qua  $D$  kẻ đường vuông góc với  $AB$  cắt  $BC$  tại  $F$ , cắt  $AC$  tại  $E$ . Tiếp tuyến của nửa đường tròn tại  $C$  cắt  $EF$  tại  $I$ . Chứng minh:

- $I$  là trung điểm  $EF$ ;
- Đường thẳng  $OC$  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ECF$ .

**Bài 6.6.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn tâm  $O$ . Phân giác góc  $\widehat{BAC}$  cắt đường tròn  $(O)$  ở  $M$ . Tiếp tuyến kẻ từ  $M$  với đường tròn cắt các tia  $AB$  và  $AC$  lần lượt ở  $D$  và  $E$ . Chứng minh  $BC \parallel DE$ .

**Bài 6.7.** Cho tam giác  $ABC$ . Vẽ đường tròn  $(O)$  đi qua  $A$  và tiếp xúc với  $BC$  tại  $B$ . Kẻ dây  $BD$  song song với  $AC$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $CD$  với đường tròn.

Chứng minh:  $\widehat{IAB} = \widehat{IBC} = \widehat{ICA}$ .

**Bài 6.8.** Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  tiếp xúc ngoài tại A. Qua A kẻ một các tuyến cắt  $(O)$  ở B và cắt  $(O')$  ở C. Kẻ các đường kính  $BOD$  và  $CO'E$  của hai đường tròn trên.

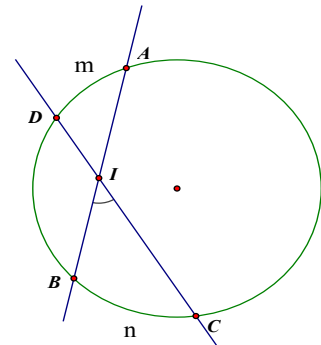
- a) Chứng minh  $BD \parallel CE$ .
- b) Chứng minh ba điểm  $D, A, E$  thẳng hàng.
- c) Nếu  $(O)$  bằng  $(O')$  thì tứ giác  $BDCE$  là hình gì? Tại sao?

**Bài 6.9.** Cho đường tròn  $(O')$  tiếp xúc hai cạnh  $Ox$  và  $Oy$  của  $\widehat{xOy}$  tại A và B. Từ A kẻ tia song song với OB cắt  $(O')$  tại C. Đoạn OC cắt đường tròn  $(O')$  tại E. Hai đường thẳng AE và OB cắt nhau tại K. Chứng minh K là trung điểm của OB.

VẤN ĐỀ 7. GÓC CÓ ĐỈNH BÊN TRONG HAY BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN (PHẦN I)

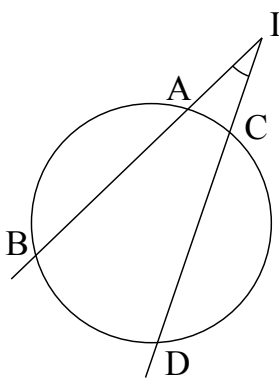
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

**Định nghĩa 1:** Trong hình 1, góc  $\widehat{BIC}$  nằm bên trong đường tròn  $(O)$  được gọi là góc có đỉnh ở bên trong đường tròn.

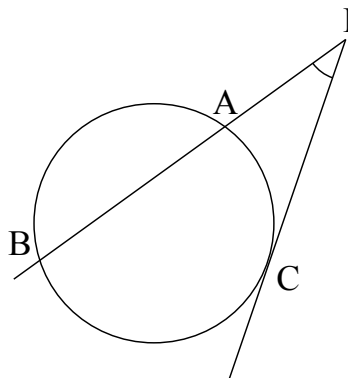


Hình 1

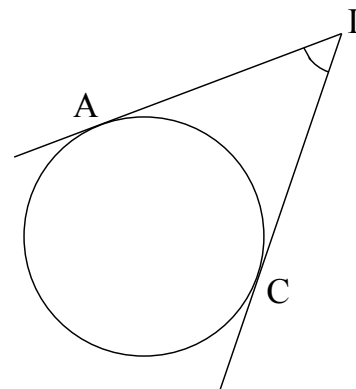
**Định nghĩa 2:** Trong các hình 2, 3, 4 có đặc điểm chung là: đỉnh nằm bên ngoài đường tròn, các cạnh đều có điểm chung với đường tròn. Mỗi góc đó được gọi là góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn.



Hình 2



Hình 3



Hình 4

**Định lý 1:** Số đo của góc có đỉnh ở bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn.

**Định lý 2:** Số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

**Dạng 1: Chứng minh hai góc hoặc hai đoạn bằng nhau**

\* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

**Bài 7.1.** Từ điểm M nằm ngoài đường tròn  $(O)$ , kẻ tiếp tuyến MC tại C và cát tuyến MAB (A nằm giữa M và B). Gọi D là điểm chính giữa của cung AB không chứa C; CD cắt AB tại I. Chứng minh:

- a)  $\widehat{MCD} = \widehat{BID}$ ;
- b)  $MI = MC$ .

**Bài 7.2.** Cho đường tròn  $(O)$  và một điểm P nằm ngoài  $(O)$ . Kẻ cát tuyến PAB và tiếp tuyến PT. Đường phân giác của góc APB cắt AB tại D. Chứng minh  $PT = PD$ .

\* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp

**Bài 7.3.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các tia phân giác của các góc B và C cắt nhau tại I và cắt (O) lần lượt tại D và E. Dây DE cắt các cạnh AB và AC lần lượt tại M và N. Chứng minh:

- a) Các tam giác AMN, EAI và DAI là những tam giác cân;
- b) Tứ giác AMIN là hình thoi.

**Bài 7.4.** Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Các tia AI, BI, CI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D, E, F. Dây EF cắt AB, AC lần lượt tại M và N. Chứng minh:

- a)  $BI = DB$ ;
- b)  $AM = AN$ ;
- c) I là trực tâm tam giác DEF.

**C. BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 7.5.** Từ điểm P nằm ngoài đường tròn (O), kẻ hai cát tuyến PAB và PCD (A nằm giữa P và B, C nằm giữa P và D), các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại Q.

Chứng minh:  $\widehat{P} + \widehat{AQC} = 2\widehat{BCD}$ .

**Bài 7.6.** Từ một điểm A bên ngoài (O), vẽ tiếp tuyến AB và cát tuyến ACD. Tia phân giác của góc BAC cắt BC ở BD lần lượt tại M và N. Vẽ dây BF vuông góc với MN, cắt MN tại H, cắt CD tại E. Chứng minh:

- a) Tam giác BMN cân;
- b)  $FD^2 = FE.FB$ .

**Bài 7.7.** Cho đường tròn (O) bán kính 2cm, các bán kính OA và OB vuông góc với nhau, M là điểm chính giữa của cung AB. Gọi C là giao điểm của AM và OB, H là hình chiếu của M trên OA. Tính diện tích hình thang OHMC.

**Bài 7.8.** Cho tam giác đều MNP nội tiếp (O). Điểm D di chuyển trên  $\widehat{MP}$ . Gọi E là giao điểm của MP và ND, F là giao điểm của MD và NP.

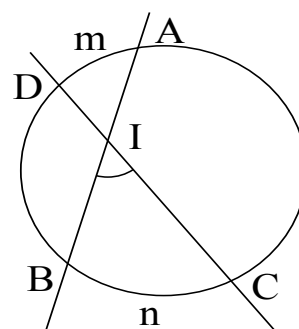
Chứng minh:  $\widehat{MFN} = \widehat{MND}$ .

-----

**VẤN ĐỀ 8. GÓC CÓ ĐỈNH BÊN TRONG HAY BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN (PHẦN II)**

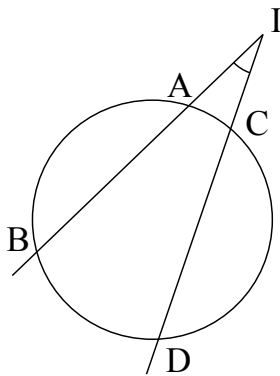
**A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

**Định nghĩa 1:** Trong hình 1, góc BIC nằm bên trong đường tròn (O) được gọi là góc có đỉnh nằm bên trong đường tròn.

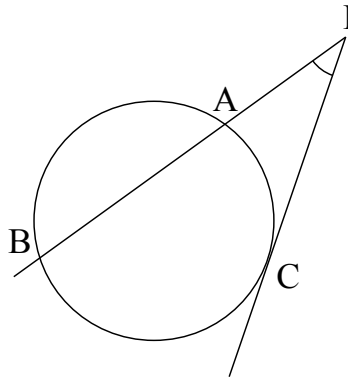


Hình 1

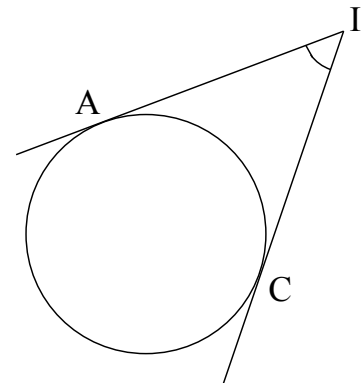
**Định nghĩa 2:** Trong các hình 2, 3, 4 có đặc điểm chung là đỉnh nằm bên ngoài đường tròn, các cạnh đều có điểm chung với đường tròn. Mỗi góc đó được gọi là góc có đỉnh nằm ở bên trong đường tròn.



Hình 2



Hình 3



Hình 4

**Định lý 1:** Số đo của góc có đỉnh ở bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn.

**Định lý 2:** Số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.

**B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN**

**Dạng 2: Chứng minh hai đường thẳng song song, hai đường thẳng vuông góc, chứng minh đẳng thức**

\* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

**Bài 8.1.** Từ điểm P nằm ngoài (O), vẽ tiếp tuyến PA với đường tròn và cát tuyến PBC

- a) Chứng minh  $PA^2 = PB.PC$ ;
- b) Đường phân giác trong của góc A cắt PB tại I.  
Chứng minh tam giác PAI cân tại P.

**Bài 8.2.** Cho tam giác ABC phân giác AD. Vẽ đường tròn (O) đi qua A, D và tiếp xúc với BC tại D. Đường tròn này cắt AB, AC lần lượt tại E và F. Chứng minh:

- a)  $EF \parallel BC$ ;
- b)  $AD^2 = AE.AC$ ;
- c)  $AE.AC = AB.AF$ .

\* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

**Bài 8.3.** Cho (O) có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên đường kính AB lấy điểm E sao cho  $AE = R\sqrt{2}$ . Vẽ dây CF đi qua E. Tiếp tuyến của đường tròn tại F cắt CD tại M, vẽ dây AF cắt CD tại N. Chứng minh:

- a) Tia CF là tia phân giác của góc BCD;
- b) MF và AC song song
- c) MN, OD, OM là độ dài 3 cạnh của một tam giác vuông.

**Bài 8.4.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Các tia phân giác của các góc A và B cắt nhau ở I và cắt đường tròn theo thứ tự ở D và E. Chứng minh:

- a) Tam giác BDI là tam giác cân;
- b) DE là trung trực của IC;

c) IF và BC song song, trong đó F là giao điểm của DE và AC.

**C. BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 8.5.** Trên đường tròn (O) lấy ba điểm A, B và C. Gọi M, N và P lần lượt là điểm chính giữa của các cung AB, BC và AC. BP cắt AN tại I, NM cắt AB tại E. Gọi D là giao điểm của AN và BC. Chứng minh:

- a) Tam giác BNI cân;
- b)  $AE \cdot BN = EB \cdot AN$ ;
- c) EI và BC song song;
- d)  $\frac{AN}{BN} = \frac{AB}{BD}$ .

**Bài 8.6.** Từ điểm M nằm bên ngoài đường tròn (O), vẽ tiếp tuyến MA và cát tuyến MCB. Phân giác góc BAC cắt BC tại D, cắt (O) tại N. Chứng minh:

- a)  $MA = MB$
- b)  $MA^2 = MC \cdot MB$ ;
- c)  $NB^2 = NA \cdot ND$ .

**Bài 8.7.** Tam giác MNP nội tiếp đường tròn tâm (O), các điểm I, K, H là điểm chính giữa của các cung MN, NP, PM. Gọi J là giao điểm của IK và MN, G là giao điểm của HK và MP. Chứng minh JG song song với NP.

-----

## VẤN ĐỀ 9. CUNG CHỨA GÓC

### A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Quỹ tích cung chứa góc: Với đoạn thẳng AB và góc  $\alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ ) cho trước thì quỹ tích các điểm M thỏa mãn  $\widehat{AMB} = \alpha$  là hai cung chứa góc  $\alpha$  dựng trên đoạn AB.

*Chú ý:* Hai cung chứa góc  $\alpha$  nói trên là hai cung tròn đối xứng nhau qua AB. Hai điểm A, B được coi là thuộc quỹ tích.

*Đặc biệt:* Quỹ tích các điểm M nhìn đoạn thẳng AB cho trước dưới một góc vuông là đường tròn đường kính AB.

### 2. Cách vẽ cung chứa góc $\alpha$

- Vẽ đường trung trực d của đoạn thẳng AB;
- Vẽ tia Ax tạo với AB một góc  $\alpha$ ;
- Vẽ đường thẳng Ay vuông góc với Ax. Gọi O là giao điểm của Ay với d.
- Vẽ cung  $\widehat{AmB}$ , tâm O, bán kính OA sao cho cung này nằm ở nửa mặt phẳng bờ AB không chứa tia Ax. Cung  $\widehat{AmB}$  được viết như trên là một cung chứa góc  $\alpha$ .

### 3. Cách giải bài toán quỹ tích

Muốn chứng minh quỹ tích (tập hợp) các điểm M thỏa mãn tính chất T là một hình H nào đó, ta phải chứng minh hai phần:

*Phần thuận:* Mọi điểm có tính chất T đều thuộc hình H.

*Phần đảo:* Mọi điểm thuộc hình H đều có tính chất T.

Từ đó đi đến kết luận quỹ tích các điểm M có tính chất T là hình H.

### B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN.

#### Dạng 1. Quỹ tích là cung chứa góc $\alpha$

Phương pháp giải:

- Tìm đoạn cố định trong hình vẽ.
- Nói điểm phải tìm với hai đầu đoạn thẳng cố định đó, xác định góc  $\alpha$  không đổi;
- Khẳng định điểm phải tìm quỹ tích thuộc cung chứa góc  $\alpha$  dựng trên đoạn cố định.

*\*Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 9.1.** Cho tam giác ABC có BC cố định và góc A bằng  $50^\circ$ . Gọi D là giao điểm của ba đường phân giác trong tam giác. Tìm quỹ tích điểm D.

*\*Học sinh tự luyện bài tập sau tại lớp:*



**Bài 9.2.** Cho tam giác ABC vuông tại A, có cạnh BC cố định. Gọi I là giao điểm của 3 đường phân giác trong. Tìm quỹ tích điểm I khi điểm A thay đổi.

**Dạng 2. Chứng minh nhiều điểm thuộc đường tròn**

*Phương pháp giải:* Chứng minh nhiều điểm cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ là AB và cùng nhìn đoạn cố định AB dưới một góc không đổi.

*\*Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

**Bài 9.3.** Cho nửa đường tròn đường kính AB. Gọi M là điểm chính giữa của cung AB. Trên cung AM lấy điểm N. Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho MD=MB, trên tia đối của tia NB lấy điểm E sao cho NA=NE, trên tia đối của tia MB lấy điểm C sao cho MC=MA. Chứng minh năm điểm A,B,C,D,E cùng thuộc một đường tròn.

*\*Học sinh tự luyện bài tập sau tại lớp:*

**Bài 9.4.** Cho I,O lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của tam giác ABC với  $\hat{A} = 60^\circ$ . Gọi H là trực tâm của  $\Delta ABC$ . Chứng minh các điểm B,C,O,H,I cùng thuộc một đường tròn.

**Dạng 3. Dựng cung chứa góc**

Phương pháp giải: Thực hiện quy trình dựng sau đây:

1. Vẽ đường trung trực d của đoạn thẳng AB;
2. Vẽ tia Ax tạo với AB một góc  $\alpha$ ;
3. Vẽ đường thẳng Ay vuông góc với Ax. Gọi O là giao điểm của Ay với d.
4. Vẽ cung  $\widehat{AmB}$ , tâm O, bán kính OA sao cho cung này nằm ở nửa mặt phẳng bờ AB không chứa tia Ax. Cung  $\widehat{AmB}$  được vẽ như trên là một cung chứa góc  $\alpha$ .

*\* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

**Bài 9.5.** Dựng một cung chứa góc  $55^\circ$  trên đoạn thẳng  $AB = 3\text{ cm}$ .

*\* Học sinh tự luyện bài tập sau tại lớp:*

**Bài 9.6.** Dựng tam giác ABC, biết  $AB = 3\text{ cm}$ ;  $\hat{A} = 50^\circ$  và  $AC = 3,5\text{ cm}$ .

**C. BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 9.7.** Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh BC lấy điểm E, trên tia đối của tia CD lấy điểm F sao cho  $CE = CF$ . Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng DE và BF. Tìm quỹ tích của điểm M khi E di động trên cạnh BC.

**Bài 9.8.** Cho tam giác ABC vuông tại A, phân giác BF. Từ điểm I nằm giữa B và F vẽ đường thẳng song song với AC cắt AB, BC lần lượt tại M và N. Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác BIN cắt AI tại D. Hai đường thẳng DN và BF cắt nhau tại E. Chứng minh:

- a) Bốn điểm  $A, B, D, E$  cùng thuộc một đường tròn.
- b) Năm điểm  $A, B, C, D, E$  cùng thuộc một đường tròn. Từ đó suy ra  $BE \perp CE$ .

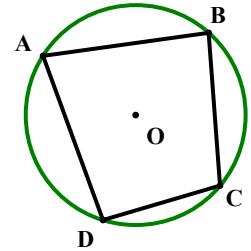
**Bài 9.9.** Dựng cung chứa góc  $45^\circ$  trên đoạn thẳng  $AB = 5 \text{ cm}$ .

-----  
**VẤN ĐỀ 10. TỨ GIÁC NỘI TIẾP (PHẦN I)**

**A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

**1. Định nghĩa**

- Tứ giác nội tiếp đường tròn là tứ giác có bốn đỉnh nằm trên đường tròn đó.
- Trong hình 1, tứ giác  $ABCD$  nội tiếp  $(O)$  và  $(O)$  ngoại tiếp tứ giác  $ABCD$ .



Hình 1

**2. Định lí**

- Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện bằng  $180^\circ$
- Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng  $180^\circ$  thì tứ giác đó nội tiếp đường tròn.

**3. Một số dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp**

- Tứ giác có tổng hai góc đối bằng  $180^\circ$ .
- Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối diện.
- Tứ giác có 4 đỉnh cách đều một điểm (mà ta có thể xác định được). Điểm đó là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác.
- Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc  $\alpha$ .

*Chú ý:* Trong các hình đã học thì hình chữ nhật, hình vuông, hình thang cân nội tiếp được đường tròn.

**B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN**

**Dạng 1. Chứng minh tứ giác nội tiếp**

*Phương pháp giải:* Để chứng minh tứ giác nội tiếp, ta có thể sử dụng một trong các cách sau:

*Cách 1.* Chứng minh tứ giác có tổng hai góc đối bằng  $180^\circ$ .

*Cách 2.* Chứng minh tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc  $\alpha$ .

*Cách 3.* Chứng minh tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện.

*Cách 4.* Tìm được một điểm cách đều 4 đỉnh của tứ giác.

\* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:

**Bài 10.1.** Cho tam giác  $ABC$  nhọn, đường cao  $BM$  và  $CN$  cắt nhau tại  $H$ . Chứng minh các tứ giác  $AMHN$  và  $BNMC$  là những tứ giác nội tiếp.

**Bài 10.2.** Cho tứ giác  $ABCD$  nội tiếp ( $O$ ),  $M$  là điểm chính giữa của cung  $AB$ . Nối  $M$  với  $D$ ,  $M$  với  $C$  cắt  $AB$  lần lượt ở  $E$  và  $P$ . Chứng minh tứ giác  $PEDC$  nội tiếp được đường tròn.

\* Học sinh tự luyện bài tập sau tại lớp:

**Bài 10.3.** Cho điểm  $A$  nằm ngoài đường tròn ( $O$ ), qua  $A$  kẻ hai tiếp tuyến  $AB$  và  $AC$  với đường tròn ( $B, C$  là tiếp điểm). Chứng minh tứ giác  $ABOC$  nội tiếp.

**Bài 10.4.** Cho tam giác  $ABC$  nhọn nội tiếp đường tròn ( $O$ ).  $M$  là điểm thuộc cung nhỏ  $AC$ . Vẽ  $MH$  vuông góc với  $BC$  tại  $H$ , vẽ  $MI$  vuông góc với  $AC$ . Chứng minh tứ giác  $MIHC$  nội tiếp.

**Bài 10.5.** Cho tam giác  $ABC$  nhọn ( $AB < AC$ ), trên cạnh  $AB$  lấy điểm  $E$ , trên cạnh  $AC$  lấy điểm  $F$  sao cho  $AE \cdot AB = AF \cdot AC$ . Chứng minh tứ giác  $BCFE$  nội tiếp.

### **C. BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 10.6.** Cho điểm  $C$  nằm trên nửa đường tròn ( $O$ ) với đường kính  $AB$  sao cho cung  $AC$  lớn hơn cung  $BC$  ( $C \neq B$ ). Đường thẳng vuông góc với  $AB$  tại  $O$  cắt dây  $AC$  tại  $D$ . Chứng minh tứ giác  $BCDO$  nội tiếp.

**Bài 10.7.** Cho đường tròn ( $O$ ) đường kính  $AB$ . Trên đoạn thẳng  $AB$  lấy điểm  $H$  bất kì ( $H$  không trùng  $O, B$ ). Trên đường thẳng vuông góc với  $OB$  tại  $H$ , lấy một điểm  $M$  ở ngoài đường tròn;  $MA$  và  $MB$  thứ tự cắt đường tròn ( $O$ ) tại  $C$  và  $D$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $AD$  và  $BC$ . Chứng minh  $MCID$  là tứ giác nội tiếp.

**Bài 10.8.** Cho hai đường tròn ( $O$ ) và ( $O'$ ) cắt nhau tại  $A, B$ . Kẻ đường kính  $AC$  của ( $O$ ) cắt đường tròn ( $O'$ ) tại  $F$ . Kẻ đường kính  $AE$  của ( $O'$ ) cắt đường tròn ( $O$ ) tại  $G$ . Chứng minh: a) Tứ giác  $GFEC$  nội tiếp ; b)  $GC, FE, AB$  đồng quy.

**Bài 10.9.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ . Đường thẳng  $xy$  song song với  $BC$  cắt  $AB$  tại  $E$ . Kẻ  $HF$  vuông góc  $AC$  tại  $F$ . Chứng minh tứ giác  $EFCE$  nội tiếp.

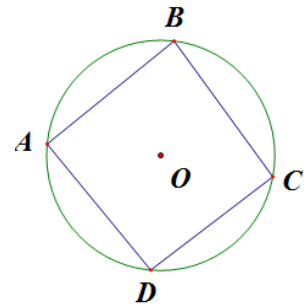
**Bài 10.10.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Kẻ  $HE$  vuông góc với  $AB$  tại  $E$ , kẻ  $HF$  vuông góc  $AC$  tại  $F$ . Chứng minh tứ giác  $BEFC$  nội tiếp.

VẤN ĐỀ 11: TỨ GIÁC NỘI TIẾP ( PHẦN II)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa

- Tứ giác nội tiếp đường tròn là tứ giác có bốn đỉnh nằm trên đường tròn đó.
- Trong Hình 1, tứ giác ABCD nội tiếp (O) và (O') ngoại tiếp tứ giác ABCD.



2. Định lý

- Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện bằng  $180^\circ$ .
- Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng  $180^\circ$  thì tứ giác đó nội tiếp đường tròn

3. Một số dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp

- Tứ giác có tổng hai góc đối bằng  $180^\circ$
  - Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện.
  - Tứ giác có 4 đỉnh cách đều một điểm ( mà ta có xác định được). Điểm đó là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác.
  - Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc  $\alpha$ .
- CHÚ Ý : Trong các hình đã học thì hình chữ nhật, hình vuông, hình thang cân nội tiếp được đường tròn.

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

**Dạng 2. Sử dụng tứ giác nội tiếp để chứng minh các góc bằng nhau, các đoạn thẳng bằng nhau, các đường thẳng song song hoặc đồng quy, các tam giác đồng dạng..**

Phương pháp: Sử dụng tính chất của tứ giác nội tiếp.

\* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

**Bài 11.1** Cho đường tròn (O) đường kính AB. Gọi H là điểm nằm giữa O và B. Kẻ dây CD vuông góc với AB tại H. Trên cung nhỏ AC lấy điểm E, kẻ  $CK \perp AE$  tại K. Đường thẳng DE cắt CK tại F. Chứng minh:

- Tứ giác AHCK nội tiếp.
- $AH \cdot AB = AD^2$ .
- Tam giác ACF là tam giác cân.

**Bài 11.2.** Cho đường tròn (O) đường kính AB, gọi I là trung điểm của OA, dây CD vuông góc với AB tại I. Lấy K tùy ý trên dây cung BC nhỏ, AK cắt CD tại H.

- Chứng minh tứ giác BIHK nội tiếp.
- Chứng minh  $AH \cdot AK$  có giá trị không phụ thuộc vị trí điểm K
- Kẻ  $DN \perp CB$ ,  $DM \perp AC$ . Chứng minh các đường thẳng MN, AB, CD đồng quy.

\* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp.

**Bài 11.3.** Cho nửa (O) đường kính AB. Lấy  $M \in OA$  ( $M \neq O, A$ ). Qua M vẽ đường thẳng d vuông góc với AB. Trên d lấy N sao cho  $ON > R$ . Nối NB cắt (O) tại C. Kẻ tiếp tuyến NE với (O) (E là tiếp điểm, A và E cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ d). Chứng minh:

- Bốn điểm O, E, M, N cùng thuộc một đường tròn;
- $NE^2 = NC \cdot NB$
- $\widehat{NEH} = \widehat{NME}$  (H là giao điểm của AC và d).
- NF là tiếp tuyến (O) với F là giao điểm của HE và (O).

**Bài 11.4.** Cho đường tròn (O;R) và điểm A cố định ngoài đường tròn. Qua A kẻ hai tiếp tuyến AM, AN tới đường tròn (M, N là hai tiếp điểm). Một đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O;R) tại B và C ( $AB < AC$ ). Gọi I là trung điểm BC.

- Chứng minh năm điểm A, M, N, O, I thuộc một đường tròn;
- Chứng minh  $AM^2 = AB \cdot AC$
- Đường thẳng qua B, song song với AM cắt MN tại E. Chứng minh IE và MC song song.
- Chứng minh khi d thay đổi quanh điểm A thì trọng tâm G của tam giác MBC luôn nằm trên một đường tròn cố định.

**C. BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 11.5.** Cho tam giác ABC vuông tại A. Điểm M thuộc cạnh AC. Vẽ đường tròn tâm O đường kính MC cắt BC tại E. Nối Bm cắt đường tròn (O) tại N. Nối AN cắt đường tròn (O) tại D. Lấy I đối xứng với M qua A, lấy K đối xứng với M qua E.

- Chứng minh BANC là tứ giác nội tiếp;
- Chứng minh CA là phân giác của  $\widehat{BCD}$ ;
- Chứng minh ABED là hình thang;
- Tìm vị trí M để đường tròn ngoại tiếp tam giác BIK có bán kính nhỏ nhất.

**Bài 11.6.** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Đường tròn (O;R) có đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại F và E; BE cắt CF tại H.

- Chứng minh tứ giác AFHE nội tiếp. Xác định tâm I của đường tròn ngoại tiếp tứ giác AFHE.
- Tia AH cắt BC tại D. Chứng minh  $HE \cdot HB = 2HD \cdot HI$ .
- Chứng minh bốn điểm D, E, I, F cùng nằm trên một đường tròn.
- Khi K di chuyển trên cung nhỏ BC, chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DHK chạy trên một đường thẳng cố định.

**Bài 11.7.** Cho đường tròn (O;R) và dây CD cố định. Điểm M thuộc tia đối của tia CD. Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA; MB tới đường tròn (A thuộc cung lớn CD). Gọi I là trung điểm CD. Nối BI cắt đường tròn tại E (E khác B). Nối OM cắt AB tại H.

- Chứng minh  $AE \parallel CD$
- Tìm vị trí của M để  $MA \perp MB$
- Chứng minh HB là tia phân giác của  $\widehat{CHD}$

**Bài 11.8.** Cho đường tròn tâm O bán kính R, hai điểm C và D thuộc đường tròn, B là điểm chính giữa của cung nhỏ CD. Kẻ đường kính BA; trên tia đối của tia BA lấy điểm S, nối S với C cắt (O) tại M. MD cắt AB tại K; MB cắt AC tại H. Chứng minh:

- a)  $\widehat{BMD} = \widehat{BAC}$  từ đó suy ra tứ giác AMHK nội tiếp.
- b)  $HK \parallel CD$

**Bài 11.9** Cho hình vuông ABCD, E di động trên đoạn CD (E khác C, D). Tia AE cắt đường thẳng BC tại F, tia Ax vuông góc với AE tại A, cắt đường thẳng DC tại K. Chứng minh:

- a)  $\widehat{CAF} = \widehat{CKF}$
- b) Tam giác KAF vuông cân
- c) Đường thẳng BD đi qua trung điểm I của KF
- d) Tứ giác IMCF nội tiếp với M là giao điểm của BD và AE.

**Bài 11.10** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp (O), M là điểm thuộc cung nhỏ AC. Vẽ MH vuông góc với BC tại H, MI vuông góc AC tại I.

- a) Chứng minh  $\widehat{IHM} = \widehat{ICM}$
- b) Đường thẳng HI cắt đường thẳng AB tại K. Chứng minh MK vuông góc với BK
- c) Chứng minh tam giác MIH đồng dạng với tam giác MAB
- d) Gọi E là trung điểm của IH và F là trung điểm của AB. Chứng minh tứ giác KMEF nội tiếp từ đó suy ra ME vuông góc với EF.

-----

## **VẤN ĐỀ 12. ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN, CUNG TRÒN.**

### **A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

#### **1. Công thức tính độ dài đường tròn ( chu vi đường tròn)**

Độ dài (C) của một đường tròn bán kính R được tính theo công thức:

$$C = 2\pi R \text{ hoặc } C = \pi d \text{ với } d = 2R$$

#### **2. Công thức tính độ dài cung tròn**

Trên đường tròn bán kính R, độ dài l của một cung  $n^\circ$  được tính theo công thức

$$l = \frac{\pi R n}{180}$$

### **B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN**

#### **Dạng 1. Tính độ dài đường tròn, cung tròn**

**Phương pháp giải: Áp dụng công thức trên.**

*Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau*

**Bài 12.1** Lấy giá trị gần đúng của  $\pi$  là 3,14, hãy điền vào ô trống trong bảng sau ( đơn vị độ dài: cm; làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai.

Bán kính $R$ của đường tròn	9		13			
Đường kính $d$ của đường tròn		16		6		
Độ dài $C$ của đường tròn					30	25,12

**Bài 12.2.**

- a) Tính độ dài cung  $60^\circ$  của một đường tròn có bán kính 3dm.
- b) Tính chu vi vành xe đạp có đường kính 600 mm.

**Bài 12.3.** Lấy giá trị gần đúng của  $\pi$  là 3,14, hãy điền vào ô trống trong bảng sau (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất và đến độ):

Bán kính $R$ của đường tròn	12 cm		22 cm	5,2 cm	
Số đo $n^\circ$ của cung tròn	$90^\circ$	$60^\circ$		$31^\circ$	$28^\circ$
Độ dài $l$ của cung tròn		40,6 cm	30,8 cm		8,2 cm

**Bài 12.4.** Cho ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng sao cho  $B$  nằm giữa  $A$  và  $C$ . Chứng minh: độ dài của nửa đường tròn đường kính  $AC$  bằng tổng các độ dài của hai nửa đường tròn đường kính  $AB$  và  $BC$ .

*\* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 12.5.** Lấy giá trị gần đúng của  $\pi$  là 3,14, hãy điền vào ô trống trong bảng sau ( đơn vị độ dài: cm, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Bán kính $R$ của đường tròn		10			8
Đường kính $d$ của đường tròn			5		
Độ dài $C$ của đường tròn	9,42			6,28	

**Bài 12.6.**

- a) Tính độ dài cung  $40^\circ$  của một đường tròn có bán kính 5 dm.
- b) Tính chu vi vành xe đạp có đường kính 400 mm.

**Bài 12.7.** Lấy giá trị gần đúng của  $\pi$  là 3,14, hãy điền vào ô trống trong bảng sau (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất và đến độ):

Bán kính $R$ của đường tròn	14 cm		20 cm	4,2 cm	
Số đo $n^\circ$ của cung tròn	$90^\circ$	$50^\circ$		$35^\circ$	$20^\circ$
Độ dài $l$ của cung tròn		40,6 cm	30,8 cm		4,2 cm

**Dạng 2. Một số bài toán tổng hợp**

**Phương pháp giải:** Áp dụng công thức trên và các kiến thức đã có.

\* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

**Bài 12.8.** Một dây  $AB$  chia đường tròn  $(O; R)$  thành hai cung mà cung này gấp ba lần cung kia.

- a) Tính số đo mỗi cung và độ dài các cung đó;
- b) Tính các góc của tam giác  $OAB$ ;
- c) Tính khoảng cách từ tâm  $O$  đến dây  $AB$ .

**Bài 12.9.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , cạnh  $AB = 5\text{cm}$ ,  $\widehat{B} = 60^\circ$ . Đường tròn tâm  $I$ , đường kính  $AB$  cắt  $BC$  ở  $D$ .

- a) Chứng minh rằng  $AD$  vuông góc với  $BC$
- b) Chứng minh rằng đường tròn tâm  $K$  đường kính  $AC$  đi qua  $D$ ;
- c) Tính độ dài cung nhỏ  $BD$ .

\* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

**Bài 12.10.** Cho nửa đường tròn  $(O; R)$  đường kính  $AB$ . Vẽ dây  $CD = R$  (thuộc cung  $AD$ ). Nối  $AC$  và  $BD$  cắt nhau tại  $M$ .

- a) Chứng minh tam giác  $MCD$  đồng dạng với tam giác  $MBA$ ; tìm tỉ số đồng dạng.
- b) Cho  $\widehat{ABC} = 30^\circ$ ; tính độ dài cung nhỏ  $AC$ .

**C. BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 12.13.** Cho  $\pi = 3,14$ . Hãy điền vào bảng sau:

Bán kính $R$	Đường kính $d$	Độ dài $C$	Diện tích $S$
5			
	6		
		94,2	
			28,26



**Bài 12.12.** Cho đường tròn  $(O)$  bán kính  $OA$ . Từ trung điểm  $M$  của  $OA$  vẽ dây  $BC \perp OA$ . Biết độ dài đường tròn  $(O)$  là  $4\pi(\text{cm})$ . Tính:

- a) Bán kính đường tròn  $(O)$ ;
- b) Độ dài hai cung  $BC$  của đường tròn.

**Bài 12.13.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = AC = 3\text{cm}$ ,  $\widehat{A} = 120^\circ$ . Tính độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

**Bài 12.14.** Cho tứ giác  $ABCD$  ngoại tiếp đường tròn tâm  $(O)$ . Vẽ ra phía ngoài tứ giác này bốn nửa đường tròn có đường kính là lần lượt bốn cạnh của tứ giác. Chứng minh rằng tổng độ dài của hai nửa đường tròn có đường kính là hai cạnh đối diện bằng tổng độ dài của hai nửa đường kính kia.

**Bài 12.15.** Cho tam giác đều  $ABC$  nội tiếp đường tròn tâm  $(O;R)$ . Kẻ đường kính  $AD$  cắt  $BC$  tại  $h$ . Gọi  $M$  là một điểm nằm trên cung nhỏ  $AC$ . Hạ đường kính  $BK \perp AM$  tại  $K$ . Đường thẳng  $BK$  cắt  $CM$  tại  $E$ .

- a, Chứng minh rằng bốn điểm  $A, B, H, K$  thuộc một đường tròn.
- b, Chứng minh tam giác  $MBE$  cân tại  $M$
- c, Tại  $BE$  cắt đường tròn tâm  $(O,R)$  tại  $N$  ( $N$  khác  $B$ ). Tính độ dài cung nhỏ  $MN$  theo  $R$ .

**Bài 12.16.** Cho đường tròn  $(O;R)$  và dây  $BC$  cố định. Điểm  $A$  thuộc cung lớn  $BC$ . Đường phân giác của  $\widehat{BAC}$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $D$ . Các tiếp tuyến của đường tròn  $(O;R)$  tại  $C$  và  $D$  cắt nhau tại  $E$ . Tia  $CD$  cắt  $AB$  tại  $K$ , đường thẳng  $AD$  cắt  $C$  tại  $I$ .

- a, Chứng minh  $BC \parallel DE$
  - b, Chứng minh  $AKIC$  là tứ giác nội tiếp, Cho  $BC = R\sqrt{3}$ . Tính theo  $R$  độ dài cung nhỏ  $BC$  của đường tròn  $(O;R)$ .
-

VẤN ĐỀ 13: DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN , HÌNH QUẠT TRÒN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Công thức tính diện tích hình tròn

Diện tích S của một hình tròn bán kính R được tính theo công thức :

$$S = \pi R^2$$

2. Công thức tính diện tích hình quạt tròn

Diện tích hình quạt tròn bán kính R , cung  $n^\circ$  được tính theo công thức :

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{lR}{2} \quad (l \text{ là độ dài cung } n^\circ \text{ của hình quạt tròn})$$

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG BÀI TOÁN

**Dạng 1. Tính diện tích hình tròn , hình quạt tròn và các đại lượng liên quan**

Phương pháp giải: áp dụng các công thức trên và kiến thức đó .

**Bài 13.1.** Điền vào ô trống bảng sau ( làm tròn đến số thập phân số thứ nhất )

Bán kính đường tròn (R)	Độ dài đường tròn (C)	Diện tích Hình tròn (S)	Số đo của cung tròn ( $n^\circ$ )	Diện tích hình quạt cung tròn $n^\circ$
	12cm		$45^\circ$	
2cm				$12,50cm^2$
		$40cm^2$		$10cm^2$

**Bài 13.2.** Chân một đồng cát đổ trên một nền phẳng nằm ngang là một hình tròn có chu vi 14 m . Hỏi chân đồng cát chiếm diện tích bao nhiêu mét vuông?

**Bài 13.3.** Cho hình vuông có cạnh 4cm nội tiếp đường tròn tâm (O) . Hãy tính độ dài đường tròn tâm (O) và diện tích hình tròn (O).

**Bài 13.4.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O;3cm). Tính diện tích hình quạt giới hạn bởi hai bán kính OA,OC và cung nhỏ AC khi  $\widehat{ABC} = 60^\circ$

**Bài 13.5.** Điền vào ô trống bảng sau ( làm tròn đến số thập phân số thứ nhất )

Bán kính đường tròn (R)	Độ dài đường tròn (C)	Diện tích Hình tròn (S)	số đo của cung tròn ( $n^\circ$ )	diện tích hình quạt cung tròn $n^\circ$
	12cm		$60^\circ$	

cm				$15cm^2$
		$40cm^2$		$16cm^2$

**Bài 13.6.** Cho hình vuông có cạnh là 5 cm và nội tiếp đường tròn (O). Hãy tính độ dài đường tròn (O) và diện tích hình tròn (O).

**Bài 13.7.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O;6 cm). Tính diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi hai bán kính OA,OC tính và cung nhỏ AC khi  $\widehat{ABC} = 40^\circ$

**Dạng 2: Bài toán tổng hợp**

*Phương pháp giải:* Sử dụng linh hoạt các kiến thức đã học để tính góc ở tâm, bán kính đường tròn. Từ đó hãy tính diện tích hình tròn và diện tích hình quạt tròn.

*Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 13.8.** Cho đường tròn (O; R) và một điểm M sao cho  $OM = 2R$ . Từ một điểm M vẽ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm)

- a, Tính độ dài cung nhỏ AB
- b, Tính diện tích giới hạn bởi hai tiếp tuyến AM, MB và cung nhỏ AB

**Bài 13.9.** Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Gọi M là một điểm trên nửa đường tròn, kẻ MH vuông góc với AB. Vẽ vào bên trong nửa đường tròn (O) các nửa đường tròn ( $O_1$ ) đường kính AH, nửa đường tròn ( $O_2$ ) đường kính BH. Tính diện tích giới hạn bởi 3 nửa đường tròn trên biết  $MH = 6cm, BH = 4cm$ .

học sinh luyện tập các bài tập sau:

**Bài 13.10.** Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Lấy điểm M thuộc đoạn AB. Vẽ dây CD vuông góc AB tại M. Giả sử  $AM = 2\text{ cm}, CD = 4\sqrt{3}\text{ cm}$ . Tính

- a, Độ dài đường tròn (O) và diện tích đường tròn (O)
- b, Độ dài cung CAD và diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi bán kính OC,OD và cung nhỏ CD

**C. BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 13.11.** Cho đường tròn tâm (O;R), đường kính AB cố định. Gọi M là trung điểm OB. Dây CD vuông góc AB tại M. Điểm E chuyển động trên cung lớn CD (E khác A). Nối AE cắt CD tại K. Nối BE cắt CD tại H.

- a, Chứng minh 4 điểm B,M, E, K thuộc một đường tròn.
- b, Chứng minh AE.AK không đổi
- c, Tính theo R diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi OB,OC và cung nhỏ BC

**Bài 13.12.** Cho đường tròn tâm  $(O; R)$ , đường kính  $AB$ . Vẽ dây  $CD = R$  ( $C$  thuộc cung nhỏ  $AD$ ). Nối  $AC$  và  $BD$  cắt nhau tại  $M$ .

a, chứng minh tam giác  $MCD$  đồng dạng tam giác  $MBA$ , tính tỉ số đồng dạng

b, Cho  $\widehat{ABC} = 30^\circ$  tính độ dài cung nhỏ  $AC$ , và diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây  $AC$  và cung nhỏ  $AC$ .

**ÔN TẬP THEO CHỦ ĐỀ 3**

**A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

Xem lại trong các vấn đề từ 1 đến 13.

**B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN**

**Bài 14.1.** Cho đường tròn tâm  $(O; R)$ , đường kính  $AB$ . Bán kính  $CO$  vuông góc với  $AB$ ,  $M$  là một điểm bất kỳ trên cung nhỏ  $AC$  ( $M$  khác  $A, C$ );  $BM$  cắt  $AC$  tại  $H$ . Gọi  $K$  là hình chiếu của  $H$  trên  $AB$ .

a, Chứng minh  $CBKH$  là tứ giác nội tiếp

b, Chứng minh  $\widehat{ACM} = \widehat{ACK}$

c, Trên đoạn thẳng  $BM$  lấy điểm  $E$  sao cho  $BE = AM$ . Chứng minh tam giác  $ECM$  là tam giác vuông cân tại  $C$

d, Gọi  $d$  là tiếp tuyến của  $(O)$  tại điểm  $A$ ; Cho  $P$  là một điểm nằm trên  $d$  sao cho điểm  $P, C$  nằm trong một nửa mặt phẳng bờ  $AB$  và  $\frac{AP.MB}{MA} = R$ . Chứng minh đường thẳng  $PB$  đi qua trung điểm của đoạn thẳng  $HK$ .

**Bài 14.2.** Cho nửa đường tròn  $(O)$  và điểm  $M$  nằm ngoài đường tròn. Đường thẳng  $MO$

cắt  $(O)$  tại  $E$  và  $F$  ( $ME < MF$ ). Vẽ cát tuyến  $MAB$  và tiếp tuyến  $MC$  của  $(O)$  ( $C$  là tiếp điểm,  $A$  nằm giữa  $M$  và  $B$ ,  $A$  và  $C$  nằm khác phía đối với đường thẳng  $MQ$ )

a, Chứng minh  $MA.MB = ME.MF$

b, Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của điểm  $C$  trên đường thẳng  $MO$ . Chứng minh  $AHOB$  nội tiếp

c, Trên mặt phẳng bờ  $OM$  có chứa điểm  $A$ , vẽ nửa đường tròn đường kính  $MF$ , nửa đường tròn cắt tiếp tuyến tại  $E$  của  $(O)$  ở  $K$ . Gọi  $S$  là giao điểm của 2 nửa đường tròn  $CO$  và  $KF$ . Chứng minh các đường thẳng  $MS$  và  $KC$  vuông góc với nhau.

d, Gọi  $P$  và  $Q$  lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác  $EFS$  và  $ABS$  và  $T$  là trung điểm của  $KS$ . Chứng minh 3 điểm  $P, Q, T$  thẳng hàng.

*Học sinh tự luyện các bài tập sau đây:*

**Bài 14.3.** Cho tam giác  $ABC$  có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm  $(O)$  ( $AB < AC$ ). Hai tiếp tuyến tại  $B$  và  $C$  cắt nhau tại  $M$ ;  $AM$  cắt đường tròn tâm  $(O)$  tại điểm thứ hai  $D$ ;  $E$  là trung điểm của đoạn  $AD$ ;  $EC$  cắt  $(O)$  tại điểm thứ 2  $F$ . Chứng minh

a, Tứ giác  $OEBM$  nội tiếp

b,  $MB^2 = MA.MD$

c,  $\widehat{BFC} = \widehat{MOC}$

d,  $BF \parallel AM$

**Bài 14.4.** Cho tam giác ABC có hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H. Gọi E' là điểm đối xứng H qua AC, F' là điểm đối xứng H qua AB. chứng minh

a, Tứ giác BCE'F' nội tiếp (O)

b, Năm điểm A, F', B, C, E' cùng thuộc một đường tròn

c, AO và EF vuông góc với nhau

d, Khi A chạy trên (O) thì bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF không đổi

**C. BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 14.5.** Cho nửa đường tròn (O; R) và đường kính BC. Lấy điểm A trên tia đối của tia CB. Kẻ tiếp tuyến AF của nửa đường tròn tâm (O; R) ( F là tiếp điểm ) Tia AF cắt tiếp tuyến Bx của nửa đường tròn tại D, cho biết  $AF = \frac{4R}{3}$

a, Chứng minh tứ giác OBDF nội tiếp. Xác định tâm I đường tròn ngoại tiếp tam giác OBDF

b, tính  $\cos \widehat{DAB}$

c, Kẻ OM vuông góc BC (M thuộc AD). Chứng minh  $\frac{BD}{BM} - \frac{DM}{AM} = 1$

d, Tính diện tích phần hình tứ giác OBDM ở bên ngoài nửa đường tròn (O) theo R

**Bài 14.6.** Cho tam giác ABC nhọn, có H là trực tâm, nội tiếp đường tròn tâm (O) đường kính  $AM = 2R$

a, Chứng minh tứ giác BHCM là hình bình hành

b, Gọi N là điểm đối xứng của M qua AB. Chứng minh tứ giác AHBN nội tiếp được trong một đường tròn

c, Gọi E là điểm đối xứng của M qua AC. Chứng minh ba điểm N, H, E thẳng hàng

d, Giả sử  $AB = R\sqrt{3}$ . Tính diện tích phần chung của đường tròn (O) và đường tròn ngoại tiếp tứ giác AHBN

**Bài 14.7.** Cho tam giác ABC có  $\widehat{BAC} = 45^\circ$ , các góc B và góc C đều là góc nhọn. Đường tròn đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại D và E. Gọi H là giao điểm của CD và BE

a, Chứng minh  $AE = BE$

- b, Chứng minh tứ giác ADHE nội tiếp . Xác định tâm K của đường tròn ngoại tiếp tứ giác ADHE
- c, Chứng minh OE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE
- d, Cho  $BC = 2a$  . Tính diện tích viên phân cung DE của đường tròn tâm (O) theo a

**Bài 14.8.** Cho đường tròn tâm (O) là một dây BC cố định không đi qua O. Trên tia đối của tia BC lấy điểm A bất kì. Vẽ các tiếp tuyến AM, AN tới (O) (M, N là các tiếp điểm). MN cắt các đường AO và BC lần lượt tại H và K. Gọi I là trung điểm của BC.

- a, chứng minh  $AH \cdot AO = AB \cdot AC = AM^2$
- b, chứng minh tứ giác BHOC nội tiếp
- c, Giả sử NI cắt (O) tại O'. Chứng minh  $MP \parallel BC$
- d, Khi A di động trên tia đối BC, chứng minh trọng tâm tam giác MBC chạy trên một đường tròn cố định

**Bài 14.9.** Cho đường tròn (O) và một điểm M nằm ngoài (O). Từ M kẻ 2 tiếp tuyến MA, MB đến (O) (A, B là tiếp điểm) . Qua M kẻ cát tuyến MNP ( $MN < MP$ ) đến (O). Gọi K là trung điểm NP.

- a, Chứng minh các điểm M, A, K, O, B cùng thuộc một đường tròn
- b, Chứng minh tia KM là phân giác góc AKB
- c, Gọi Q là giao điểm thứ 2 của BK với (O), Chứng minh  $AQ \parallel NP$
- d, Gọi H là giao điểm của AB và MO. Chứng minh  $MA^2 = MH \cdot MO = MN \cdot MP$
- e, Chứng minh bốn điểm N, H, O, P cùng thuộc một đường tròn.
- f, Gọi E là giao điểm của AB và KO . Chứng minh  $AB^2 = 4HE \cdot HF$  (F là giao điểm của AB và NP)
- g, Chứng minh KEMH là tứ giác nội tiếp . Từ đó chứng minh  $OK \cdot OE$  không đổi
- h, Gọi I là giao điểm của đoạn thẳng MO với (O). Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB
- i, Chứng minh KE, KF lần lượt là phân giác trong và phân giác ngoài của góc AKB. từ đó suy ra

$$AE \cdot BF = AF \cdot BE$$

- j, chứng minh khi cát tuyến MNP thay đổi thì trọng tâm G của tam giác NAP luôn chạy trên một đường tròn cố định

k, Giả sử  $MO = 2R$ . Tính diện tích hình quạt giới hạn bởi hai bán kính  $OA, OB$  và cung nhỏ  $AB$

**CHỦ ĐỀ 4. HÌNH TRỤ, HÌNH NÓN, HÌNH CẦU**

**VẤN ĐỀ 1. DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH TRỤ**

**A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

Cho hình trụ có bán kính đáy  $R$  và chiều cao  $h$ . Khi đó

1. Diện tích xung quanh  $S_{xq} = 2\pi Rh$
2. Diện tích đáy  $S = \pi R^2$
3. Diện tích toàn phần  $S_{tp} = 2\pi Rh + \pi R^2$
4. thể tích  $V = \pi R^2 h$

**B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN**

**Dạng 1: tính bán kính đáy, chiều cao diện tích xung quanh và diện tích toàn phần và thể tích hình trụ**

*phương pháp giải:* Vận dụng các công thức trên để tính bán kính đáy, diện tích đáy, diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích hình trụ

Bài 1.1. Điền kết quả vào ô trống sau

Hình	Bán kính đáy (cm)	chiều cao (cm)	Chu vi đáy (cm)	Diện tích đáy ( $cm^2$ )	Diện tích xung quanh ( $cm^2$ )	Thể tích ( $cm^3$ )	Diện tích toàn phần ( $cm^2$ )
Hình trụ	1	2					
	5	4					
		10	$8\pi$				
	8				$400\pi$		

**Bài 1.2.** Một hình trụ và đường cao đường kính đáy. Biết thể tích hình trụ là  $128\pi cm^3$ . Tính diện tích xung quanh của hình trụ

*Học sinh tự luyện các bài tập sau*

**Bài 1.3.** Điền kết quả vào ô trống



Hình	Bán kính đáy (cm)	Chiều cao (cm)	Chu vi đáy (cm)	Diện tích đáy ( $cm^2$ )	Diện tích xung quanh ( $cm^2$ )	Thể tích ( $cm^3$ )	Diện tích toàn phần ( $cm^2$ )
Hình trụ	2	3					
	2					$100\pi$	
		8	$3\pi$				
		5			400		

**Bài 1.4.** Một hình trụ có bán kính 3cm. Biết diện tích toàn phần gấp đôi diện tích xung quanh. Tính chiều cao của hình trụ

**Dạng 2. Bài tập tổng hợp**

Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau

**Bài 1.5.** Cho nửa đường tròn đường kính  $AB = 2R$ . Từ A và B kẻ 2 tiếp tuyến Ax, By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ 3 cắt tiếp tuyến Ax, By lần lượt tại C và D.

a, Chứng minh

i,  $AC + BD = CD$

ii,  $\widehat{COD} = 90^\circ$

iii,  $AC \cdot BD = \frac{AB^2}{4}$

b, Gọi E là giao điểm của OC và AM, F là giao điểm của MB và OD. Cho biết  $OC = 2R$ , hãy tính diện tích xung quanh và thể tích hình trụ tạo thành khi EMFO quay quanh EO

*Học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 1.6.** Cho tam giác ABC ( $AB < AC$ ) nội tiếp đường tròn (O; R) đường kính BC. Vẽ đường cao AH của tam giác ABC. Đường tròn tâm K đường kính AH cắt AB, AC lần lượt tại D và E

a, Chứng minh tứ giác ADHE là hình chữ nhật và  $AB \cdot AD = AE \cdot AC$

b, Cho biết  $BC = 25$  cm và  $AH = 12$  cm. Hãy tính diện tích xung quanh và thể tích hình tạo thành bởi khi cho tứ giác ADHE quay quanh AD

**Bài 1.7.** Điền kết quả vào chỗ trống :

Hình	Bán kính đáy (cm)	Chiều cao (cm)	Chu vi đáy	Diện tích đáy	Diện tích xung	Thể tích ( $cm^3$ )	Diện tích toàn phần

			(cm)	( $cm^2$ )	quanh ( $cm^2$ )		( $cm^2$ )
Hình trụ	5	12					
		3			$60\pi$	$100\pi$	
		17	$20\pi$				
					$20\pi$		$28\pi$

**Bài 1.8.** Cho đường tròn (O) đường kính AB, Gọi I là trung điểm OA. Dây CD vuông góc với AB tại I. Lấy K tùy ý trên cung BC nhỏ. AK cắt CD tại H

- a, Chứng minh tứ giác BIHK nội tiếp
- b, Chứng minh AH.AK có giá trị không phụ thuộc vào vị trí điểm K
- c, kẻ  $DN \perp CB, DM \perp AC$  . chứng minh MN,AB, CD đồng quy
- d, Cho BC = 25cm . Hãy tính diện tích xung quanh hình trụ tạo thành khi cho tứ giác MCND quay quanh MD

-----

**VẤN ĐỀ 2: DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH HÌNH NÓN , HÌNH NÓN CỤT**

**A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

**1. Diện tích, thể tích hình nón**

Cho hình nón có bán kính đáy R, đường sinh l , chiều cao h ,khi đó

- a, Diện tích xung quanh  $S_{xq} = \pi Rl$
- b, Diện tích toàn phần  $S_{tp} = \pi Rl + \pi R^2$
- c, Thể tích  $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

**2. Diện tích , thể tích hình nón cụt**

Cho hình nón cụt có bán kính đáy R và r , đường sinh l , chiều cao h ,khi đó

- a, Diện tích xung quanh  $S_{xq} = \pi(R + r)l$
- b, Diện tích toàn phần  $S_{tp} = \pi(R + r)l + \pi R^2 + \pi r^2$

c, Thể tích  $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$

**B. Bài tập và các dạng toán**

**Dạng 1: Tính diện tích, thể tích và các đại lượng hình nón và hình nón cụt**

*học sinh giải các bài tập sau hướng dẫn*

**Bài 2.1.** Cho hình nón có bán kính đáy  $r$ , đường kính  $d$ , chiều cao  $h$ , đường sinh  $l$ , thể tích  $V$ , diện tích xung quanh  $S_{xq}$ , diện tích toàn phần  $S_{tp}$ . Điền các kết quả và ô trống sau:

Bán kính ( $r$ )	Đường kính $d$	Chiều cao $h$	Đường sinh $l$	Thể tích $V$	Diện tích xung quanh $S_{xq}$	Diện tích toàn phần $S_{tp}$
5			10			
		10		$100\pi$		
	10				$65\pi$	

**Bài 2.2.** Một chiếc xô hình nón cụt làm bằng tôn để đựng nước. Các bán kính đáy 10 cm và 5 cm, chiều cao 20cm

- a, Tính dung tích của xô
- b, Tính diện tích tôn để làm xô ( không kể diện tích các chỗ ghép )

**Bài 2.3.** Một dụng cụ hình nón có đường sinh dài 15 cm, và diện tích xung quanh  $135\pi cm^2$

- a, tính chiều cao hình nón
- b, Tính diện tích toàn phần và thể tích hình nón đó
- c, Diện tích của dụng cụ này
- d, Diện tích mặt ngoài của dụng cụ ( không tính nắp)

**Bài 2.4.** Cho hình thang vuông ABCD vuông tại A và B, biết cạnh  $AB = BC = 3cm, AD = 7cm$ . Tính diện tích xung quanh và thể tích hình nón cụt tạo thành khi quay hình thang quanh cạnh AB

**Dạng 2: Bài tập tổng hợp**

**Phương pháp giải:** vận dụng các công thức trên và các kiến thức đã học để tính các đại lượng chưa biết rồi từ đó tính diện tích, thể tích hình nón và hình nón cụt

**Bài 2.5.** Cho 3 điểm A, O, B thẳng hàng  $OA = a, OB = b$  (a,b cùng thuộc đơn vị cm). Qua A và B vẽ theo thứ tự các tia Ax và By cùng vuông góc với AB. Qua O vẽ hai tia vuông góc với nhau và cắt Ax ở C và By ở D.

a, Chứng minh các tam giác đồng dạng AOC và BOD đồng dạng. Từ đó suy ra  $AC \cdot BD$  không đổi

b, Với  $\widehat{COA} = 60^\circ$  hãy:

i, Tính diện tích hình thang ABCD

ii, tính tỉ số thể tích các hình do tam giác AOC và BOD tạo thành khi cho hình vẽ quay xung quanh AB.

### **C. BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**Bài 2.6.** Một hình quạt có bán kính 20 cm, và góc ở tâm  $144^\circ$ . Người ta uốn hình quạt này thành một hình nón. Tính số đi nửa góc ở đỉnh của hình nón

**Bài 2.7.** Một hình nón có bán kính bằng 5 cm và diện tích xung quanh là  $65\pi cm^2$ . Tính thể tích hình nón.

**Bài 2.8.** Một chiếc xô hình nón cụt làm bằng tôn để đựng nước. Các bán kính đáy là 14 cm và 9 cm, chiều cao 23 cm

a, Tính dung tích của xô

b, Tính diện tích tôn để làm xô ( không kể diện tích chỗ ghép )

**Bài 2.9.** Từ một khúc gỗ hình trụ cao 15 cm, người ta tiện thành một hình nón có thể tích lớn nhất. Biết phần gỗ bỏ đi có thể tích là  $640\pi cm^3$

a, Tính thể tích khúc gỗ hình trụ

b, Tính diện tích xung quanh hình nón

---

### **VẤN ĐỀ 3: DIỆN TÍCH VÀ THỂ TÍCH MẶT CẦU**

#### **A. Tóm tắt lý thuyết**

##### **1. Hình cầu**

- Khi quay nửa hình tròn tâm O, bán kính R một vòng tròn đường kính AB cố định ta thu được một hình cầu
- Nửa đường tròn phép quay nói trên tạo thành một mặt cầu
- Điểm O là tâm, R là bán kính của hình cầu hay mặt cầu đó

##### **2. Cắt hình cầu bởi một mặt phẳng**

- Khi cắt hình cầu một mặt phẳng ta được một hình tròn
- Khi cắt mặt cầu bán kính R bởi một mặt phẳng ta được một đường tròn trong đó

- + Đường tròn có bán kính R nếu mặt phẳng đi qua tâm ( gọi là đường tròn lớn )
- + Đường tròn có bán kính bé hơn R nếu mặt phẳng không đi qua tâm

**3. Diện tích và thể tích**

Cho hình cầu có bán kính R

Diện tích mặt cầu :  $S = 4\pi R^2$

Thể tích hình cầu:  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

**B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN**

**Dạng 1: Tính diện tích mặt cầu, thể tích hình cầu và các đại lượng liên quan**

**Bài 3.1.** Điền vào các ô trống trong bảng sau :

Bán kính hình cầu	0,4mm	6dm	0,2m	100km	6hm	50dam
Diện tích mặt cầu						
Thể tích hình cầu						

**Bài 3.2.** Dụng cụ thể thao các loại bóng trong bảng đều có dạng hình cầu , Hãy điền các ô trống trong bảng sau ( làm tròn kết quả đến số thập phân thứ 2 )

Loại bóng	Quả bóng gôn	Quả khúc côn cầu	Quả ten-nis	Quả bóng bàn	Quả bia
Đường kính	42,7mm		6,5cm	40mm	61mm
Độ dài đường tròn lớn		23cm			
Diện tích					
Thể tích					

**Bài 3.3.** Một hình cầu có số đo diện tích mặt cầu ( $cm^2$ ) đúng bằng số đo thể tích đó ( $cm^3$ ) . Tính bán kính của hình cầu đó

**Bài 3.4** Một hình cầu có diện tích bề mặt  $100\pi cm^2$  . Tính thể tích của hình cầu đó

**Dạng 2: Bài toán tổng hợp**

Phương pháp giải: Vận dụng các công thức trên để tính xung quanh , diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu

**Bài 3.5.** Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính AB = 2R, Ax và By là hai tiếp tuyến của nửa đường tròn . Lấy trên tia Ax điểm M rồi vẽ tiếp tuyến MP cắt By tại N.

a, Chứng minh rằng MNO và APB là hai tam giác vuông đồng dạng

b, Chứng minh  $AM \cdot AN = R^2$

c, Tính tỉ số  $\frac{S_{MON}}{S_{APB}}$  khi  $AM = \frac{R}{2}$

d, Tính thể tích của hình do nửa đường tròn APB quay quanh AB sinh ra

### **C. Bài tập về nhà**

**Bài 3.6.** Một hình cầu có bán kính 3 cm. Một hình nón cũng có bán kính 3 cm và có diện tích toàn phần bằng diện tích mặt cầu. Tính chiều cao của hình nón

**Bài 3.7.** Cho hình cầu và hình trụ ngoại tiếp nó ( đường kính đáy và chiều cao của hình trụ bằng đường kính của hình cầu ). Tính tỉ số giữa

a, Diện tích mặt cầu và diện tích xung quanh hình trụ

b, thể tích của hình cầu và thể tích hình trụ

**Bài 3.8.** cho một hình cầu và một lập phương ngoại tiếp nó. Tính tỉ số phần trăm giữa

a, Diện tích mặt cầu và diện tích xung quanh của hình lập phương

b, Thể tích hình cầu và thể tích hình lập phương

**Bài 3.9.**

a, Tìm diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu, biết bán kính của hình cầu là 4cm

b, Thể tích của một hình cầu là  $512\pi cm^3$ . Tính diện tích mặt cầu đó

**Bài 3.10.** Cho tam giác ABC vuông tại A có cạnh góc vuông bằng a. Tính diện tích mặt cầu được tạo thành khi quay nửa đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC một vòng quanh cạnh BC

**Bài 3.11.** Cho tam giác đều ABC có cạnh  $AB = 8cm$ , đường cao AH. Khi diện tích mặt cầu được tạo thành khi quay nửa đường tròn nội tiếp tam giác ABC một vòng quanh AH

ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 4

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Xem phần tóm tắt lý thuyết ở vấn đề 1,2,3.

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

**Bài 4.1.** cho một hình nón có bán kính đáy  $r$  (cm) chiều cao  $2r$  (cm) và một hình cầu có bán kính  $r$  (cm), Hãy tính:

a, Diện tích mặt cầu, biết diện tích toàn phần hình nón là  $21,06cm^2$

b, Thể tích hình nón, biết thể tích hình cầu là  $15,8,cm^3$

**Bài 4.2.** Cho hình chữ nhật ABCD. Lần lượt quay hình chữ nhật đó một vòng quay cạnh BC và một vòng quay cạnh CD, ta được hai hình trụ và diện tích toàn phần bằng nhau. Chứng minh tứ giác ABCD là hình vuông

**Bài 4.3.** Một hình nón có chiều cao  $h$ . Hai đường sinh vuông góc với nhau mặt xung quanh của hình nón thành hai phần có tỉ lệ 1: 2. Tính thể tích hình nón đó

**Bài 4.4.** Một hình chữ nhật ABCD có ( $AB > AD$ ), diện tích và chu vi của nó theo thứ tự là  $2a^2$  và  $6a$ . Cho hình vẽ quay xung quanh cạnh AB được một hình trụ. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ này

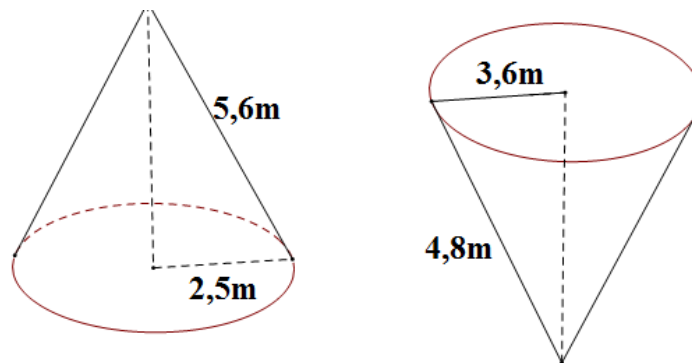
C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

**Bài 4.5.** Cho tam giác ABC vuông tại A,  $AB = c, AC = b (c \neq b)$ . Khi quay tam giác ấy quanh cạnh AB ta được hình nón ( $N_1$ ) khi quay tam giác ấy quanh cạnh AC ta được hình nón ( $N_2$ )

a, Tính diện tích xung quanh hai hình nón ( $N_1$ ) và ( $N_2$ ) có bằng nhau không? vì sao?

b, Thể tích hai hình nón ( $N_1$ ) và ( $N_2$ ) có bằng nhau không? vì sao?

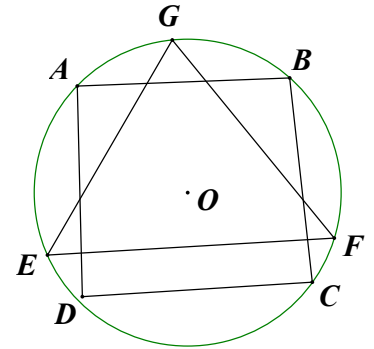
**Bài 4.6.** Hãy tính diện tích toàn phần của các hình tương ứng theo các kích thước đã cho trên các hình vẽ bên



**Bài 4.7.** Cho hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R và GEF là tam giác nội tiếp đường tròn đó, EF là dây song song AB. Cho hình đó quay xung quanh GO. Chứng minh:

a, Bình phương thể tích hình trụ sinh ra bởi hình vuông bằng tích các thể tích hình cầu sinh ra bởi đường tròn và thể tích hình nón do tam giác đều sinh ra

b, Bình phương diện tích toàn phần của hình trụ bằng tích diện tích hình cầu và diện tích toàn phần hình nón



**Bài 4.8.** Cho tam giác ABC vuông tại A có  $\widehat{B} = 30^\circ$ ,  $BC = 4cm$

a, Quay tam giác đó một vòng quanh cạnh AB. Hãy tính diện tích xung quanh và thể tích hình tạo thành

b, Tính diện tích toàn phần hình tạo thành



## HƯỚNG DẪN GỢI Ý ĐÁP ÁN

### CHỦ ĐỀ 1: PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT 2 ẨN

#### VẤN ĐỀ 1: PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

**Bài 1.1.** Xét cặp số (12; 1)

Thay  $x = 12, y = 1$  vào  $2x - 5y = 19$  ta có  $2.12 - 5.1 = 19$  (luôn đúng)

Vậy (12;1)C

Xét cặp số (1; 1) là nghiệm của phương trình  $2x - 5y = 19$

Thay  $x = 1, y = 1$  vào  $2x - 5y = 19$  ta có  $2.1 - 5.1 = 19$  (vô lí)

Vậy (1; 1) không là nghiệm của phương trình  $2x - 5y = 19$

Tương tự như trên, ta có cặp số (2,-3) là nghiệm và (1; -2) không là nghiệm của phương trình

**Bài 1.2.** Để cặp số (2;-1) là nghiệm của phương trình  $mx - 5y = 3m - 1$  ta phải có

$2m - 5.(-1) = 3m - 1 \Leftrightarrow m = 6$  vậy với  $m=6$  thì (2; -1) là nghiệm của phương trình đã cho

**Bài 1.3.** Gọi phương trình cần tìm có dạng  $ax+by=c$ . Thay các nghiệm (2;0) và (-1;-2) vào

$$ax+by=c \text{ ta được } \begin{cases} 2a + 0b = c \\ -a - 2b = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{c}{2} \\ b = \frac{-3}{4}c \end{cases}$$

$$\text{Chọn } c = 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow 2x - 3y = 4$$

$$\text{Chú ý chọn } c = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{loại}$$

Nếu  $c \neq 0$  ta có thể chọn  $c$  tùy ý

**Bài 1.4.** Tương tự như bài 1.1. Ta có (-2;3) là nghiệm của các phương trình b và d

**Bài 1.5.** Tương tự như bài 1.2. Ta có (1;-1) là nghiệm của các phương trình nên

$$\sqrt{m+1} = m-1 \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \geq 0 \\ m+1 = (m-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$$

**Bài 1.6.** Tương tự như bài 1.3. Đáp số  $-3x - 2y = 4$

**Bài 1.7.** a,  $\begin{cases} x \in R \\ y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} \end{cases}$       b,  $\begin{cases} x = 3 \\ y \in R \end{cases}$       c,  $y = \begin{cases} x \in R \\ y = -2 \end{cases}$

1. **Bài 1.8.** Tương tự bài Bài 1.7.

a,  $\begin{cases} x \in R \\ y = 2x - 3 \end{cases}$       b,  $\begin{cases} x = 4 \\ y \in R \end{cases}$       c,  $y = \begin{cases} x \in R \\ y = -2 \end{cases}$

**Bài 1.9.**

a, Song song với Ox  $\Leftrightarrow \begin{cases} m-2 = 0 \\ 3m-1 \neq 0 \\ 6m-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$

a, Song song với Oy  $\Leftrightarrow \begin{cases} m-2 \neq 0 \\ 3m-1 = 0 \\ 6m-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset$

c, d đi qua O(0;0)  $\Leftrightarrow O \in d \Leftrightarrow 6m-2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$

d, d đi qua A(1;-1)  $\Leftrightarrow (m-2) - (3m-1) = 6m-2 \Leftrightarrow m = \frac{1}{8}$

**Bài 1.10.** Tương tự bài Bài 1.9

a,  $m \in \emptyset$       b,  $m = 1$       c,  $m = \frac{1}{2}$       d,  $m = 1$

**Bài 1.11.** cách 1:

Vì (1;-1) là nghiệm của hệ  $3x - 2y = 5$  ta có

$$3(x-1) = 2(y+1) \Leftrightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \end{cases} (t \in Z)$$

Cách 2: Ta có  $3x - 2y = 5 \Rightarrow y = \frac{3x-5}{2} = x + \frac{x-5}{2}$

$$\text{Đặt } \frac{x-5}{2} = t \Rightarrow \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 5 + 3t \end{cases}$$

**Bài 1.12.** a. tương tự như bài 1.11.  $\begin{cases} x = 6 + 18t \\ y = 3 - 11t \end{cases} (t \in \mathbb{Z})$

b, Vì x, y nguyên dương nên ta có

$$-\frac{6}{18} = -\frac{1}{3} < t < \frac{3}{11} \Rightarrow t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$$

**Bài 1.13.**

Tương tự như bài 1.11

$$\text{a, } \begin{cases} x = 3 + 11t \\ y = 1 + 5t \end{cases} (t \in \mathbb{Z})$$

$$\text{b, } \begin{cases} x = 4 + 5t \\ y = 23 - 7t \end{cases} (t \in \mathbb{Z})$$

**Bài 1.14.** . Tương tự như bài 1.12. a,  $\begin{cases} x = 3 - 8t \\ y = 5 + 11t \end{cases} (t \in \mathbb{Z});$  b,  $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$

**Bài 1.15.** Tương tự bài 1.1 đáp số (-1;-8); (3;-2)

**Bài 1.16.** Tương tự bài 1.7.

$$\text{a, } \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{x}{3} - 2 \end{cases} \quad \text{b, } \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{2}{3}x + 1 \end{cases} \quad \text{c, } \begin{cases} x = 2 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{d, } \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -2 \end{cases} \quad \text{e, } \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2x - 5 \end{cases} \quad \text{g, a, } \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -\frac{1}{3}x \end{cases}$$

**Bài 1.17.** Tương tự Bài 1.9,

$$\text{a, } m = \frac{3}{2} \quad \text{b, } m = \frac{1}{3} \quad \text{c, } m = -2 \quad \text{d, } m = \frac{9}{13}$$

**Bài 1.18.** Tương tự bài 1.3.  $2x + 3y = 7$

**Bài 1.19.** Tương tự bài 1.11. a,  $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + 2t \end{cases} (t \in \mathbb{Z})$  a,  $\begin{cases} x = 5t \\ y = 3 - 2t \end{cases} (t \in \mathbb{Z}) \setminus$

**Bài 1.20.** Tương tự bài 1.12

$$a, \begin{cases} x = 14 + 7t \\ y = 6 - 5t \end{cases} (t \in \mathbb{Z})$$

$$b, (x; y) = \{(7; 11), (14; 6), (21; 1)\}$$

**VẤN ĐỀ 2: HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN**

**Bài 2.1.** a, Ta có  $a = 3; b = -2; c = 4; a' = -6; b' = 4; c' = -8$

$$\Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{3}{-6} = \frac{-1}{2}; \frac{b}{b'} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}; \frac{c}{c'} = \frac{4}{-8} = \frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{-1}{2}$$

Suy ra hệ phương trình có vô số nghiệm

b, Ta có  $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ ;  $\frac{b}{b'} = \frac{1}{-2} \Rightarrow \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$  suy ra hệ phương trình có nghiệm duy nhất

c, Ta có  $\frac{a}{a'} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$ ;  $\frac{b}{b'} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$ ;  $\frac{c}{c'} = \frac{-3}{7} \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

suy ra phương trình vô nghiệm

d, vì  $b' = 0$  ta xét  $\frac{a}{a'} = \frac{3}{2}$ ;  $\frac{b}{b'} = \frac{0}{-5} = 0 \Rightarrow \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$

suy ra hệ phương trình có nghiệm duy nhất

**Bài 2.2.**

Xét các tỉ số  $\frac{a'}{a} = \frac{m}{1} = m$ ;  $\frac{b'}{b} = 1$ ;  $\frac{c'}{c} = 2m$  Hệ phương trình

a, có nghiệm duy nhất  $\Leftrightarrow \frac{a'}{a} \neq \frac{b'}{b} \Leftrightarrow m \neq 1$

b, vô nghiệm  $\Leftrightarrow \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} \neq \frac{c'}{c} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m \neq 2m \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$

c, vô số nghiệm  $\Leftrightarrow \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2m \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset$

**Bài 2.3.** Tương tự bài 2.1. hệ phương trình

a, có nghiệm duy nhất

b, có nghiệm duy nhất

c, vô số nghiệm

d, vô nghiệm

**Bài 2.4.**

Xét  $m=0$  : Hệ phương trình có nghiệm duy nhất

Xét  $m \neq 0$  tương tự bài 2.2.

a,  $m \neq \pm 1$

b,  $m = -1$

c,  $m = 1$

**Bài 2.5.**

a, Thay  $x=-4$  và  $y=5$  vào  $-3x + 2y = 21$  ta thấy vô lý

vậy  $(-4,5)$  không là nghiệm của hệ phương trình

b, Thay  $x=-4$  và  $y=5$  vào các phương trình ta thấy đều thỏa mãn

vậy  $(-4,5)$  là nghiệm của hệ phương trình

**Bài 2.6.**

Thay  $x = 1, y = 2$  vào hệ ta được 
$$\begin{cases} -m + 2 = -2m \\ 1 - 2m^2 = -7 \end{cases} \Rightarrow m = -2$$

**Bài 2.7.** a, có ; b, không

**Bài 2.8.** Tương tự bài 2.6.  $m = \frac{1}{5}$

**Bài 2.9.** a, Học sinh tự vẽ hình

b, Từ đồ thị của  $d_1, d_2$  ta xác định tọa độ giao điểm của  $d_1, d_2$  là  $M(3;1)$  suy ra  $(3;1)$  là nghiệm hệ phương trình đã cho

c,  $d_1, d_2$  và  $d_3$  đồng quy  $M(3;1) \in d_3 \Leftrightarrow m = \frac{4}{5}$

**Bài 2.10.** Tương tự bài 2.9

2. a, học sinh tự vẽ hình

3. b,  $(1;2)$

4. c,  $m = 3$

5. **Bài 2.11.** Tương tự bài 2.1. hệ phương trình

- a) Có nghiệm duy nhất;                      b) Vô nghiệm;  
 c) Có nghiệm duy nhất;                      d) Có nghiệm duy nhất;  
 e) Vô số nghiệm;                              g) Có nghiệm duy nhất;

**Bài 2.12.** Tương tự bài 2.5.

- a) Không;                                      b) Có.

**Bài 2.13.** Tương tự Bài 2.2. a)  $m \neq \pm 1$  ; b)  $m = -1$  ; c)  $m = 1$  ; d)  $m = \frac{-2}{5}$  .

**Bài 2.14.** Tương tự bài 2.9. a) Học sinh tự vẽ hình;

- b)  $(2; -1)$                                       c)  $m = -5$

-----

**VẤN ĐỀ 3. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP THÉ**

**Bài 3.1.** a) 
$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 & (1) \\ 5x + 2y = 23 & (2) \end{cases}$$

Từ (1)  $\Rightarrow y = 3x - 5$ . Thay vào (2)  $\Rightarrow 5x + 2(3x - 5) = 23 \Leftrightarrow x = 3$

Thay  $x=3$  vào phương trình (1)  $\Rightarrow y = 4$  .

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $(3; 4)$

Tương tự với câu a) ta có:

b)  $(7; 5)$                       c)  $\left(1; \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{3}\right)$                       d)  $\left(\frac{\sqrt{2} + 3}{2}; \frac{-1}{2}\right)$

**Bài 3.2.** Tương tự Bài 3.1

- a)  $(-3; 2)$                       b)  $(2; 1)$   
 c) vô nghiệm      d) vô số nghiệm

**Bài 3.3.** a) 
$$\begin{cases} 3(y - 5) + 2(x + 3) = 0 \\ 7(x - 4) + 3(x + y - 1) - 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 21 \\ 10x + 3y = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$$

- b) tương tự câu a. Đáp số  $\left(\frac{17}{11}; \frac{4}{11}\right)$

**Bài 3.4.** Tương tự bài 3.3. *Đáp số:* a) (4;7)                      b) (2;2)

**Bài 3.5.** a) Đặt  $\frac{1}{x} = u; \frac{1}{y} = v \Rightarrow \begin{cases} 15u - 7v = 9 \\ 4u + 9v = 35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 3 \end{cases}$

Từ đó nghiệm của HPT ban đầu là:  $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$

b) Tương tự câu a. *Đáp số:*  $\left(\frac{-10}{3}; \frac{19}{3}\right)$

**Bài 3.6.** Tương tự bài 3.5. *Đáp số* a)  $\left(\frac{7}{9}; \frac{7}{2}\right);$                       b)  $\left(\frac{7}{66}; \frac{2}{11}\right)$

**Bài 3.7.** a) Thay  $x = 1, y = -2$  vào HPT ta có:

$$\begin{cases} 2 - 2b = -4 \\ b + 2a = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = -4 \end{cases}$$

b) Tương tự câu a. *Đáp số*  $(a; b) = (2; 2 + 2\sqrt{2})$

**Bài 3.8.** Gọi  $B = d_1 \cap d_2 \Rightarrow B\left(\frac{11}{7}; \frac{1}{7}\right)$ .

$$\text{Vì } d : mx + 2y = n \text{ ãi qua } A, B \Rightarrow \begin{cases} 3m + 2 \cdot (-2) = n \\ \frac{11}{7}m + 2 \cdot \frac{1}{7} = n \end{cases} \Rightarrow m = 3, n = 5$$

**Bài 3.9.** Tương tự Bài 3.7. *Đáp số:*  $(a; b) = (-2; 5)$

**Bài 3.10.** Tương tự Bài 3.7. *Đáp số:*  $(m, n) = (8; -1)$

**Bài 3.11.** Ta có giao điểm của  $d_1$  và trục Oy là  $A(0; -2)$

$$\text{Vì } A \text{ thuộc } d_2 \text{ nên: } 0 + 2 \cdot (-2) = m + 1 \Rightarrow m = -5$$

HS tự vẽ hình.

**Bài 3.12.** Ta có  $d_1 \cap d_2 = A\left(\frac{13}{3}; -\frac{8}{3}\right)$

**Bài 3.13.** Tương tự Bài 3.1

$$a)(10; 7); \quad b)\left(0; \frac{2}{3}\right); \quad c)(2; 0) \quad d)\left(3; \frac{3}{2}\right) .$$

**Bài 3.14.** Tương tự **Bài 3.1.** *Đáp số* a)  $\left(\frac{-1}{2}; \frac{-13}{2}\right)$ ; b) *voâ nghieäm*

**Bài 3.15.** Tương **Bài 3.5.** *Đáp số* a)  $\left(\frac{19}{7}; \frac{4}{3}\right)$ ; b)  $\left(\frac{18}{5}; \frac{4}{5}\right)$

**Bài 3.16.** Tương tự **Bài 3.7.** *Đáp số*  $(a; b) = (2; -5)$

**Bài 3.17.** Tương tự **Bài 3.11.** *Đáp số:*  $m = 2, 5$ . HS tự vẽ hình.

**Bài 3.18.** Tương tự **Bài 3.12.** *Đáp số*  $a = \frac{-1}{2}, b = \frac{4}{3}, I\left(\frac{3}{8}; \frac{15}{2}\right)$

**Bài 3.19.** Thay tọa độ của M, N vào  $y = ax + b$  ta tìm được:  $a = \frac{-13}{8}, b = \frac{-1}{8}$

**Bài 3.10.** Tương tự **Bài 3.7.** *Đáp số:*  $(m, n) = (2; -3)$ .

-----

#### **VẤN ĐỀ 4: GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP CỘNG ĐẠI SỐ**

**Bài 4.1.**

$$a) \begin{cases} 4x + 7y = 16 \\ 4x - 3y = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 7y = 16 \\ 10y = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \end{cases}$$

b)  $(7; 5)$                       c) *voâ nghieäm*                      d)  $\left(\sqrt{5}; \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$

**Bài 4.2.** Tương tự **Bài 4.1.**

*Đáp số:* a)  $(2; 1)$ ; b)  $(14; 11)$ ; c)  $\left(1; \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{3}\right)$ ; d)  $\left(\frac{3 + \sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

**Bài 4.3.**  $\begin{cases} 5(x + 2y) - 3(x - y) = 99 \\ x - 3y = 7 - 4y - 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 13y = 99 \\ 6x - y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 7 \end{cases}$  ; b) *Đáp số:*  $(x; y) = (0; 0)$

**Bài 4.4.** Tương tự **Bài 4.3.** *Đáp số:* a)  $(12; -3)$ ; b)  $\left(\frac{-79}{511}; \frac{-51}{73}\right)$



**Bài 4.5.** a) Đặt  $\frac{1}{x-1} = a, \frac{1}{y+2} = b \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 4 \\ 2a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

b) Tương tự **câu a.** *Đáp số* (1; 2)

**Bài 4.6.** Tương tự Bài 4.5. *Đáp số* a)  $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right);$  b) (10, 4)

**Bài 4.7.** a) Vì d đi qua M(-1; -2) và cắt Ox tại  $N(\sqrt{2}; 0)$

$N(\sqrt{2}; 0) I(x_0, y_0)$

$m = \frac{-3 + 2\sqrt{2}}{2}, n = \frac{2\sqrt{2} - 3}{3}$

$2m - n = 1 \Rightarrow n = 2m - 1 \Rightarrow d : y = (2m + 1)x + 6m - 4$  nên thay tọa độ các điểm M,

$\Rightarrow (2x_0 + 6)m + (x_0 - y_0 - 4), \forall m, \Rightarrow \begin{cases} 2x_0 + 6 = 0 \\ x_0 - y_0 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = -7 \end{cases}$

N vào d tính được:  $m = \frac{-3 + 2\sqrt{2}}{2}, n = \frac{2\sqrt{2} - 3}{3}$

b) Từ  $2m - n = 1 \Rightarrow n = 2m - 1 \Rightarrow d : y = (2m + 1)x + 6m - 4$

Gọi  $I(x_0, y_0)$  là điểm cố định của d

$\Rightarrow (2x_0 + 6)m + (x_0 - y_0 - 4), \forall m, \Rightarrow \begin{cases} 2x_0 + 6 = 0 \\ x_0 - y_0 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = -7 \end{cases}$

Vậy d luôn đi qua điểm cố định (-3; -7)

**Bài 4.8.** Gọi  $M = d_1 \cap d_2 \Rightarrow M(5, 1)$

Ta có  $d_1, d_2$  và  $d_3$  đồng quy  $\Rightarrow M(5; 1) \in d_3 \Rightarrow m = 1$

**Bài 4.9.** Thay tọa độ hai điểm M, N vào d ta được  $a = 3; b = \frac{-25}{9}$

**Bài 4.10.** Tương tự **Bài 4.8.** *Đáp số*  $m = -5$

**Bài 4.11.** a) (14; 11)      b) (2; 1)      c) (8; 2)      d)  $\left(\frac{5}{2}; \frac{-5}{6}\right)$

**Bài 4.12.** a)  $\left(\frac{29}{8}; \frac{-33}{40}\right)$       b)  $\left(\frac{-23}{4}; \frac{-9}{2}\right)$

**Bài 4.13.** a)  $(2; 1)$       b)  $(10; 0)$       c)  $(-3; 2)$       d)  $(2; -1)$

**Bài 4.14.** a)  $(\frac{-53}{2}; \frac{47}{4})$       b)  $(1; -\frac{1}{2})$       c)  $(1; -1)$       d)  $(100; 0)$

**Bài 4.15.** a)  $(\frac{-9}{4}; \frac{3}{2})$       b)  $(\frac{6-\sqrt{2}}{2}; \frac{2-\sqrt{2}}{2})$

**Bài 4.16.** Đáp số:  $m = \frac{51}{73}$        $n = \frac{-3}{73}$

**Bài 4.17.** Tìm được  $(\frac{11}{2}; 7)$  là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Thay vào phương trình  $6mx - 5y = 2m - 4$  ta có:  $m = 1$ .

-----

**VẤN ĐỀ 5: HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT**

**HAI ẨN CHỨA THAM SỐ**

**Bài 5.1.** Thay  $x = 2m - my$  vào phương trình còn lại, ta được:

$$(m^2 - 1)y = 2m^2 + m - 1 \quad (*)$$

Số nghiệm của hệ phương trình ban đầu bằng số nghiệm của (\*)

a) Khi đó hệ phương trình:

i. Có nghiệm duy nhất  $\Leftrightarrow m \neq \pm 1$ . Nghiệm duy nhất là:  $(x; y) = \left( \frac{-m}{m-1}; \frac{2m-1}{m-1} \right)$

ii. Vô nghiệm  $\Leftrightarrow m = 1$

iii. Vô số nghiệm  $\Leftrightarrow m = -1$

b) Với  $\Leftrightarrow m \neq \pm 1$ , hệ phương trình duy nhất  $(x; y) = \left( \frac{-m}{m-1}; \frac{2m-1}{m-1} \right)$

i. Ta có: 
$$\begin{cases} x = \frac{-m}{m-1} = -1 - \frac{1}{m-1} \in Z \\ y = \frac{2m-1}{m-1} = 2 + \frac{1}{m-1} \in Z \end{cases} \Rightarrow m-1 = \pm 1 \Rightarrow m \in \{0; 2\}$$

ii. Hệ thức không phụ thuộc vào m là:  $x + y = 1$ .

**Bài 5.2.** a) Cách 1: làm tương tự bài 1a.

Cách 2: \* Xét  $m = 0 \Rightarrow$  Hệ phương trình có nghiệm duy nhất.  $\left(\frac{1}{4}; 2\right)$

\* Xét  $m \neq 0$ : Với  $\frac{2m}{8} \neq \frac{1}{m}$  : Hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $\left(\frac{1}{2m+4}; \frac{m+4}{m+2}\right)$  Với  $m = 2$ : Hệ phương trình vô số nghiệm. Với  $m = -2$ : Hệ phương trình vô nghiệm.

b) i) Với  $m \neq \pm 2$  : hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

$$(x; y) = \left(\frac{1}{2m+4}; \frac{m+4}{m+2}\right) \Rightarrow y = \frac{2m+8}{2m+4} = 1 + \frac{4}{2m+4} = 1 + 4x$$

$$ii) \quad 4x + 3y = 7 \Leftrightarrow \frac{4}{2m+4} + \frac{3(m+4)}{m+2} = 7 \Leftrightarrow m = 0$$

$$a) m \neq \pm 2; \quad b) m = -2 \quad c) m = 2.$$

$$d) \text{ Vôùi } m \neq \pm 2;$$

**Bài 5.3.** Tương tự bài 5.1. i) Thay  $x = \frac{2m+3}{m+2}; y = \frac{-m}{m+2}$  vào hệ thòuc  $2x + y = 3 \Rightarrow \tilde{n}pcm.$

$$ii) 6x - 2y = 13 \Leftrightarrow 6 \cdot \frac{2m+3}{m+2} - 2 \cdot \frac{-m}{m+2} = 13 \Leftrightarrow m = 8$$

**Bài 5.4.** Tương tự bài 5.1.

a) Với  $m \neq \frac{-1}{2}$  , HPT có nghiệm duy nhất; Với  $m = \frac{-1}{2}$  , HPT vô nghiệm.

$$i) x + 2y = 2$$

$$b) \quad ii) x > 1; y > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2m+1} > 0; \frac{m}{2m+1} > 0 \Leftrightarrow m > 0$$

**Bài 5.5.** Thay  $y = \frac{2mx+2}{5}$  vào phương trình còn lại ta đòc phương trình:

$$(25 - 4m^2)x = 15 - 6m$$

Với  $m \neq \pm \frac{5}{2}$  : Hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $\left(\frac{3}{2m+5}; 1 - \frac{3}{2m+5}\right)$

Khi đó  $x; y \in Z \Leftrightarrow (2m+5)$  nhận giá trị là ước của 3.

$$\Rightarrow m \in \{-4; -3; -2; -1\}$$

Các cặp nghiệm nguyên là:  $\{(-1; 2); (-3; 4); (3; -2); (1; 0)\}$

**Bài 5.6.** Tương tự bài 5.5. Với  $m \neq \pm 2$  : Hệ phương trình có nghiệm duy nhất:

$$\left(\frac{3}{m+2}; \frac{2}{m+2}\right)$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} x > 1 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{m+2} > 1 \\ \frac{2}{m+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 1.$$

**Bài 5.7.** Tương tự **bài 5.5.** Với  $m \neq -1$  : hệ có nghiệm duy nhất:  $(m+1; m-3)$

Khi đó:  $S = x^2 + y^2 = (m+1)^2 + (m-3)^2 = 2(m-1)^2 + 8 \geq 8$   
 $\Rightarrow S_{\min} = 8$  tại  $m = 1$

**Bài 5.8.** a)  $(x; y) = (-2; 1)$  ; b) *Tông tõi* Bài 5.2.  $m = \frac{-2}{3}$

**Bài 5.9.** Tương tự **Bài 5.5**  $(x; y) = \left( \frac{4}{2m+1}; \frac{4}{2m-1} - 2 \right) \Rightarrow m \in \{-1; 0\}$

**Bài 5.10.** Tương tự **bài 5.6.**  $\frac{-7}{15} < m < \frac{10}{7}$

**Bài 5.11.** Tương tự **bài 5.1.** a)  $m \neq \pm 1$ ; b)  $m = -1$ ; c)  $m = 1$

**Bài 5.12.** Tương tự **bài 5.5.**  $m \in \{-1; 0\}$

**Bài 5.13.** Tương tự **bài 5.5.**  $(x; y) = \left( \frac{4}{m^2+1}; \frac{m^2-4m+1}{m^2+1} \right)$

Cách 1:  $x \in Z \Rightarrow \begin{cases} m^2+1=1 \\ m^2+1=2 \end{cases} \Rightarrow m = -1; 0; 1$  thay các giá trị m vừa tìm được vào y đều thỏa

mãn  $y \in Z$

Cách 2:  $(x; y) = \left( \frac{4}{m^2+1}; 1 - \frac{4m}{m^2+1} \right)$  ; khi đó  $x; y \in Z \Leftrightarrow (m^2+1)$

nhận giá trị là ước của 4.

Vậy  $m \in \{-1; 0; 1\}$

**Bài 5.14.** Tương tự **Bài 5.1.** a) với mọi giá trị m, hệ phương trình có nghiệm duy nhất:

$(x; y) = \left( \frac{2m+5}{m^2+2}; \frac{5m-4}{m^2+2} \right);$  b)  $m = \frac{1}{7}$

**Bài 5.15.** a) Tương tự **Bài 5.2**

. Với  $m \neq 0$  và  $m \neq 1$ : HPT có nghiệm duy nhất  $\left( \frac{m-1}{m}; \frac{1}{m} \right)$  . Với  $m = 0$ : HPT vô nghiệm.

Với  $m = 1$ : HPT vô số nghiệm  $(2-2y; y)$  với mọi  $y \in R$

b) i) gợi ý: Từ  $(x; y) = \left( \frac{m-1}{m}; \frac{1}{m} \right)$  ta khử m để tìm được hệ thức giữa

$x, y$  không phụ thuộc m.

ii)  $M(x; y)$  thuộc góc phần tư thứ nhất  $\Leftrightarrow x = y$  . Đáp số:  $m > 1$

iii) Gợi ý:  $M \in (0; \sqrt{5}) \Leftrightarrow OM = \sqrt{5} \Rightarrow m \in \left\{ -1; \frac{1}{2} \right\}$

**VẤN ĐỀ 6. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH (PHẦN I)**

**Bài 6.1.** Gọi số cần tìm là:  $\overline{ab}$   $a \in N^*$ ,  $b \in N$  Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \overline{ba} - \overline{ab} = 63 \\ \overline{ab} + \overline{ba} = 99 \end{cases} \Leftrightarrow \overline{ab} = 18, \overline{ba} = 81$$

Vậy số cần tìm là: 18.

**Bài 6.2.** Tương tự Bài 6.1. Số cần tìm là: 75.

**Bài 6.3.** Số cần tìm là: 72.

**Bài 6.4.** Số cần tìm là: 48.

**Bài 6.5.** Gọi thời gian A, B làm một mình xong công việc lần lượt là  $x, y$  ( $x, y > 0$ , đơn vị :ngày)

Mỗi ngày các bạn A, B lần lượt làm được  $\frac{1}{x}$  và  $\frac{1}{y}$  ( công việc)

Vì hai bạn A và B cùng làm chung công việc thì hoàn thành sau 6 ngày nên ta có:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \quad (1)$$

Do làm một mình xong công việc thì B làm lâu hơn A là 9 ngày nên ta có phương trình:

$$y - x = 9 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ y - x = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 18 \end{cases}$$

Vậy sau 3 ngày A làm một mình rồi nghỉ, B hoàn thành công việc còn lại trong 12 ngày.

**Bài 6.6.** Tương tự Bài 6.5. Đáp số:  $(x, y) = (8, 12)$

**Bài 6.7.** Tương tự Bài 6.5. Đáp số:  $(x, y) = (7, 5)$

**Bài 6.8.** Tương tự Bài 6.6. Đáp số:  $(x, y) = (45, 300)$

**Bài 6.9.** Gọi thời gian ô tô đi trên mỗi đoạn đường lần lượt là  $x, y$  ( $x, y > 0$ , đơn vị: giờ). Ta có phương trình:

$$\begin{cases} 50x + 45y = 165 \\ y - x = 0,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1,5 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy thời gian ô tô đi hết quãng đường AB là 1,5 giờ. Thời gian ô tô đi hết quãng đường BC là 2 giờ.

**Bài 6.10.** Gọi chiều dài quãng đường AB cần tìm là  $x$  ( $x > 0$ , km) và vận tốc theo dự định là  $y$  ( $y > 10$ , km).

Theo bài ra ta có hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \frac{x}{y+10} = \frac{x}{y} - 3 \\ \frac{x}{y-10} = \frac{x}{y} + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 600 \\ y = 40 \end{cases}$$

Vận vận tốc xe lúc đầu là 40 km/h. Thời gian dự định là 15 giờ. Quãng đường AB là 600 km.

**Bài 6.11.** Tương tự Bài 6.10. Vận tốc nước chảy là 3km/h, vận tốc của ô tô là 24 km/h.

**Bài 6.12.** Tương tự Bài 6.10. Vận tốc của tàu hỏa là 60 km/h, vận tốc của ô tô là 55 km/h.

**Bài 6.13.** Tương tự Bài 6.9. Vận tốc của người thứ nhất là 4,5 km/h, vận tốc của người thứ 2 là 5 km/h.

**Bài 6.14.** Tương tự Bài 6.10. Vận tốc của dòng nước là 5 km/h, vận tốc của ca nô là 55 km/h.

**Bài 6.15.** Tương tự Bài 6.6. Thời gian vòi 1 chảy vào đầy bể là 40 giờ, thời gian vòi 2 chảy đầy bể là 40 giờ.

**Bài 6.16.** Tương tự Bài 6.5. Người thứ nhất làm riêng hoàn thành công việc trong 12 ngày, người thứ hai làm riêng hoàn thành công việc trong 6 ngày.

**Bài 6.17.** Tương tự Bài 6.5. Tổ I làm riêng hoàn thành công việc trong 12 giờ, tổ II làm riêng hoàn thành công việc trong 12 giờ.

**Bài 6.18.** Tương tự Bài 6.10. Người đi từ A đến B hết  $\frac{10}{9}$  giờ, người đi từ B đến A hết  $\frac{8}{9}$  giờ.

**Bài 6.19.** Khoảng cách giữa 2 bến A và B là 60 km/h.

**Bài 6.20.** Vận tốc thứ nhất là 45 km/h, vận tốc xe thứ hai là 30 km/h.

**Bài 6.21.** Vận tốc ô tô là 60 km/h, vận tốc xe máy là 40 km/h.

**VẤN ĐỀ 7: GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH ( PHẦN II)**

**Bài 7.1.** Gọi số dụng cụ mỗi xí nghiệp cần làm là: x, y ( $x, y \in N^*, x, y < 360$ , *đường cui* )

Số dụng cụ hai xí nghiệp làm khi vượt mức lần lượt là 112%x và 110%y ( dụng cụ)

Ta có hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x + y = 360 \\ 112\%x + 110\%y = 400 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 200 \\ y = 160 \end{cases}$$

Vậy xí nghiệp 1 phải làm 200 dụng cụ, xí nghiệp 2 phải làm 160 dụng cụ.

**Bài 7.2.** tương tự Bài 7.1. Tổ 1 làm được 900 bộ, tổ 2 làm được 600 bộ.

**Bài 7.3.** Gọi chiều cao tam giác là h, cạnh đáy tam giác là a

(  $h, a \in N^*$  , dm) .Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} h = \frac{3}{4}a \\ \frac{1}{2}(h+3)(a-3) - \frac{1}{2}ah = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 44 \\ h = 33 \end{cases}$$

Vậy chiều cao tam giác bằng 44 dm, cạnh đáy tam giác bằng 33 dm.

**Bài 7.4.** Tương tự Bài 7.3. Chiều dài khu vườn là 15m, chiều rộng khu vườn là 9m, diện tích khu vườn là 135 m<sup>2</sup>

**Bài 7.5.** Gọi vận tốc dự định của ô tô là v (  $v > 0$ , km/h) thời gian dự định là t (  $t > 0$ , giờ), quãng đường AB là s, (  $s > 0$ , km).

Tăng vận tốc ô tô 8km/h thì đến B sớm hơn dự định 1 giờ  $\Rightarrow \frac{s}{v+8} + 1 = t$

Giảm vận tốc ô tô đi 4 km/h thì đến B chậm hơn dự định 40 phút  $\Rightarrow \frac{s}{v-4} - \frac{3}{4} = t$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{s}{v+8} + 1 = t \\ \frac{s}{v-4} - \frac{3}{4} = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 28 \\ t = \frac{9}{2} \\ s = 126 \end{cases}$$

Vậy vận tốc dự định là 28 km/h, thời gian dự định là 4,5 giờ.

**Bài 7.6.** Tương tự bài 7.5. Số băng ghế trong hội trường là 20.

**Bài 7.7.** Gọi số sách trên 2 giá lần lượt là x, y (  $0 < x, y < 450$ , cuốn).

Ta có hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x + y = 450 \\ y + 50 = \frac{4}{5}(x - 50) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 300 \\ y = 150 \end{cases}$$

Vậy số sách trên giá thứ nhất là 300 cuốn, số sách trên giá thứ hai là 150 cuốn.

**Bài 7.8.** Gọi số lãi anh An hưởng là x, số lãi anh Bình hưởng là y (  $0 < x, y < 7$ , triệu đồng).

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ \frac{x}{y} = \frac{13}{15} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3,25 \\ y = 3,75 \end{cases}$$

Vậy anh An hưởng 3,25 triệu tiền lãi, anh Bình hưởng 3,75 triệu tiền lãi.

**Bài 7.9.** Tương tự bài 7.8. Số sản phẩm dự kiến làm trong 1 giờ của người đó là 15 sản phẩm.

**Bài 7.10.** Tương tự Bài 7.7. Năng suất lúa giống mới trên ha là 5 tấn/ ha. Năng suất lúa giống cũ là 4 tấn/ ha.

**Bài 7.11.** Tương tự Bài 7.7. Chiều dài: 56m, chiều rộng: 32m, chu vi: 176m\

**Bài 7.12.** Tương tự Bài 7.7. Chiều dài 30m, chiều rộng: 24m.

**Bài 7.13.** Tương tự Bài 7.7. Số dụng cụ phân xưởng 1 làm là: 1000 sản phẩm, số dụng cụ phân xưởng 2 làm là 600 sản phẩm.

**Bài 7.14.** Tương tự Bài 7.1. Số thí sinh dự thi trường A là 200 thí sin, số thí sinh dự thi trường B là 150 thí sinh.

**Bài 7.15.** Chiều dài 8m, chiều rộng: 6m.

**Bài 7.16.** Tương tự Bài 7.3. Chiều dài: 30m, Chiều rộng: 2m.

**Bài 7.17.** Tương tự bài 7.8. Khối lượng riêng của chất lỏng loại 1 là  $800\text{kg/m}^3$ , của chất lỏng loại 2 là  $600\text{kg/m}^3$ .

**Bài 7.18.** Tương tự Bài 7.5. Lúc đầu trong phòng có 4 ghế hoặc 10 ghế.

-----

**ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 1 ( PHẦN I )**

**Bài 8.1.** a) Từ  $mx - y = 2 \Rightarrow y = mx - 2$ . Thay vào  $3x + my = 5$  ta được:  $(m^2 + 3)x = 5 + 2m$   
Suy ra Hệ phương trình có nghiệm duy nhất:

$$(x; y) = \left( \frac{2m + 5}{m^2 + 3}; \frac{5m - 6}{m^2 + 3} \right) \text{ với mọi } m.$$

**b)** Từ kết quả Câu a), ta có: i)  $m = \frac{4}{7}$ ;                      ii)  $\frac{-5}{2} < m < \frac{6}{5}$

**Bài 8.2.** a) Thay  $x = 5 - 2y$  vào  $mx + y = 4$  ta được:

$$(1 - 2m)y = 4 - 5m$$

\* với  $m \neq \frac{1}{2}$ : HPT có nghiệm duy nhất.

$$(x; y) = \left( \frac{3}{2m - 1}; \frac{5m - 4}{2m - 1} \right);$$

\* Với  $m = \frac{1}{2}$ : HPT vô nghiệm.

b) i)  $x$  và  $y$  trái dấu  $\Leftrightarrow xy < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \neq m < \frac{4}{5}$ .

$$ii) x = |y| \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \pm y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2m - 1} \geq 0 \\ \frac{3}{2m - 1} = \pm \frac{5m - 4}{2m - 1} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{7}{5}$$

**Bài 8.3.** a) Khử  $x$  từ HPT ban đầu ta được:



$$(1 - m^2)y = -m^2 + m$$

\*Với  $m \neq \pm 1$ : HPT có nghiệm duy nhất:

$$(x; y) = \left( \frac{2m-1}{m+1}; \frac{m}{m+1} \right);$$

\*Với  $m = 1$ : HPT có vô số nghiệm;

\*Với  $m = -1$ : HPT vô nghiệm.

b) Với  $m \neq \pm 1$  ta có:

$$\begin{cases} x = \frac{2m+1}{m+1} = 2 - \frac{1}{m+1} \\ y = \frac{m}{m+1} = 1 - \frac{1}{m+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in Z \\ y \in Z \end{cases} \Leftrightarrow m+1 = \pm 1 \Leftrightarrow m \in \{-2; 0\}$$

c) Với  $x = 2 - \frac{1}{m+1}; y = 1 - \frac{1}{m+1} \Rightarrow x - y = 1$ .

**Bài 8.4.** a)  $\left( \frac{-3}{11}; \frac{-12}{11} \right);$

b) \* Với  $m \neq \frac{2}{3}$ : Hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

$$(x, y) = \left( \frac{6 - m^2}{2 - 3m}; \frac{m - 9}{2 - 3m} \right);$$

\* Với  $m = \frac{2}{3}$ : Hệ phương trình vô nghiệm.

c)  $m \in \left( \frac{-8}{3}; 1 \right)$

**Bài 8.5.** Tương tự **Bài 8.4.** a)  $\left( \frac{17}{5}; \frac{1}{5} \right)$

b) i) Với  $m \neq -2$ : Hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

ii) Với  $m = -2$ : Hệ Phương trình vô nghiệm.

iii) Không tồn tại  $m$  để hệ phương trình vô số nghiệm.

**Bài 8.6.** a) Với mọi  $m$ , HPT có nghiệm duy nhất.

$$(x; y) = \left( \frac{2m+4}{m^2+2}; \frac{4m-4}{m^2+2} \right)$$

b)  $m \in \{-3; 4\}$

**Bài 8.7.** Tương tự Bài 8.4. a)  $\left(\frac{36}{5}; \frac{14}{5}\right)$

b) Với  $m \neq \frac{2}{-3}$  : HPT có nghiệm duy nhất.

Với  $m = \frac{-2}{3}$  : HPT vô nghiệm.

**Bài 8.8.** a)  $\left(\frac{6}{17}; \frac{13}{17}\right)$ ; b)  $(x; y) = \left(\frac{m+3}{17}; \frac{15m-6}{51}\right) \Rightarrow m \geq \frac{2}{5}$ .

**Bài 8.9.** Tương tự Bài 8.3. a) Với  $a \neq 0$  và  $a \neq 2$  : HPT có nghiệm duy nhất.

Với  $a = 2$ : HPT có vô số nghiệm, với  $a = 0$ : HPT vô nghiệm.

b) Với  $a \neq 0$ ;  $a \neq 2$  ta có: i)  $x - y = 1$ ; ii)  $a = 1, a = -13$ .

**Bài 8.10.** Tương tự bài 8.1. a) (2; -2)

b) Với  $m \geq 0$  : HPT có nghiệm duy nhất.  $(x; y) = (\sqrt{m}; -2) \Rightarrow P = \sqrt{m} - 2 \geq -2$   
 $\forall m \geq 0 \Rightarrow P_{\min} = -2$  tại  $m = 0$ .

**Bài 8.11.** Tương tự bài 8.1. a)  $\left(9 - 5\sqrt{2}; \frac{10 - 5\sqrt{2}}{2}\right)$

b) Với  $m \neq 2$  : HPT có nghiệm duy nhất  $(x, y) = \left(\frac{8-m}{m+2}; \frac{5}{m+2}\right)$

Với  $m=2$ : HPT vô số nghiệm.

Với  $m = -2$ : HPT vô nghiệm.

c) Với  $m \neq \pm 2$  : i)  $m = 3$ ; ii)  $m > 5$ .

**Bài 8.12.** Tương tự Bài 8.3. a)

$m \neq \pm 1$  : Hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $\left(\frac{1}{2m+2}; \frac{m+2}{m+1}\right)$ ;

Với  $m = 1$  : HPT vô số nghiệm; Với  $m = -1$  : HPT vô nghiệm;

b)  $y - 2x = 1$

---

**ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 1 ( PHẦN II)**

**Bài 9.1.** Gọi chiều dài HCN là  $x$ , chiều rộng HCN là  $y$  ( $0 < x, y < 55; m$ )

$$\text{Ta có HPT: } \begin{cases} 2(x + y) = 110 \\ 2x - 3 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 35 \\ y = 20 \end{cases}$$

Vậy diện tích HCN là:  $20.35 = 700 \text{ m}^2$

**Bài 9.2.** Gọi thời gian người thứ nhất và người thứ hai làm một mình xong công việc lần lượt là  $x$  và  $y$  ( $x, y > 7,2$ ; *giờ*)

$$\text{Ta có HPT: } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{36} \\ \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 18 \end{cases}$$

**Bài 9.3.** Gọi thời gian ca nô xuôi dòng là  $x$ , thời gian ca nô ngược dòng là  $y$  ( $x, y > 0$ ; *giờ*)

Ta có HPT:

$$\begin{cases} x + \frac{4}{3} = y \\ 30x = 20y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ y = 4 \end{cases}$$

Vậy khoảng cách giữa hai bến A và B là 80 km.

**Bài 9.4.** Gọi  $a$  và  $b$  lần lượt là số đầu thủ của hai đội. Từ giả thiết có phương trình:

$$a \cdot \frac{b}{2} = 4(a + b) \Rightarrow a = 8 + \frac{64}{b - 8}$$

Với giả thiết có ít nhất một trong hai đội có số lẻ đầu thủ ta suy ra  $b - 8$  là 1 hoặc 64. Từ đó số đầu thủ của hai đội là 9 và 72.

**Bài 9.5.** Tương tự Bài 9.1. Chiều dài khu vườn là 80m, chiều rộng khu vườn là 60 m.

**Bài 9.6.** Tương tự Bài 9.2. Số xe của đội lúc đầu là 10 xe.

**Bài 9.7.** Vận tốc khi xuôi dòng là 27 km/h, vận tốc khi ngược dòng là 21 km/h.

**Bài 9.8.** Tháng thứ nhất, tổ 1 sản xuất là 400 sản phẩm, tổ 2 sản xuất được 500 sản phẩm.

**bài 9.9.** Đáp số: Hai số đó là 11 và 6.

**Bài 9.10.** Chiều dài thửa ruộng là 20m, chiều rộng thửa ruộng là 5m.

**Bài 9.11.** Chiều dài và chiều rộng HCN lần lượt là 30m và 15m.

**Bài 9.12.** Chiều dài cạnh đáy thửa ruộng là 36m.

**Bài 9.13.** Thời gian tổ 1 làm là 15 giờ, thời gian tổ 2 làm là 10 giờ.

**Bài 9.14.** Vận tốc theo dự định là 40 km/h, thời gian xe lăn bánh là: 2,6 giờ.

**Bài 9.15.** Vận tốc theo dự định là 17 km/h, thời gian xe lăn bánh là:

**Bài 9.16.** Năng suất dự kiến ban đầu là 20 sản phẩm/ giờ.

**Bài 9.17.** Số có 2 chữ số cần tìm là 28.

**Bài 9.18.** KLR mỗi quặng sắt lần lượt là 16 tấn và 9 tấn.

**Bài 9.19.** Hiện nay tuổi anh và em lần lượt là 18 tuổi và 10 tuổi.

**Bài 9.20.** Gọi  $v_1, v_2$  lần lượt là thể tích của chất lỏng này và chất lỏng khác. Từ đó ta có hệ:

$$v_1 + v_2 = 20 \text{ và } \frac{8}{v_1} = \frac{6}{v_2} + 0,2$$

Từ đó giải hệ này ta được khối lượng riêng của hai chất lỏng đó là: 0,8 g/cm<sup>3</sup> và 0,6 g/cm<sup>3</sup>

**Bài 9.21.** Số dầu ban đầu của thùng I và thùng II là 42 và 32 lít.

**Bài 9.22.** Trong phòng họp có 15 ghế và 84 người dự họp.

**Bài 9.23.** Giá tiền 1 đôi giày có 61 500 đồng, 1 bộ quần áo là 86 500 đồng.

**CHỦ ĐỀ 2: HÀM SỐ  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ). PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN.**

**VẤN ĐỀ 1: HÀM SỐ  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) VÀ ĐỒ THỊ ( PHẦN I )**

**Bài 1.1.**

a)  $f(-2) = -8; f(0) = 0; f(3 - 2\sqrt{2}) = -34 + 24\sqrt{2}$

b)  $f(a) = -10 + 4\sqrt{6} \Rightarrow a = \pm(\sqrt{3} + \sqrt{2})$

c) Ta có:  $f(b) \geq 4b + 6 \Rightarrow -2b^2 \geq 4b + 6 \Rightarrow (b + 1)^2 + 2 \leq 0 \Rightarrow b \in \emptyset$

**Bài 1.2.** a) Thay tọa độ  $A(\frac{2}{3}; \frac{4}{3})$  vào hàm số  $y = (2m + 1)x^2 \Rightarrow m = 1$

b) Do  $(-2; 1)$  là nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x^2 - 2y = 2 \end{cases}$  nên tương tự Câu a) ta có:  $-\frac{3}{8}$

**Bài 1.3.** a)  $S(3) = 36(m); S(5) = 100(m)$

$\Rightarrow$  Vật cách mặt đất sau thời gian 3 giây là  $100 - S(3) = 64$  (m)

và sau thời gian 5 giây là: 0 (m)

b)  $4t^2 = 100 \Rightarrow t = 5$  (s)

a)  $f(-3) = 27; f(2\sqrt{2}) = 24;$

$f(1 - 2\sqrt{3}) = 39 - 12\sqrt{3};$

**Bài 1.4.** Tương tự Bài 1.1

b)  $a = \pm(\sqrt{3} + 1)$

c)  $b \geq 1 + \sqrt{5}$  hoặc  $b \leq 1 - \sqrt{5}$

**Bài 1.5.** Tương tự Bài 1.2. a)  $m = \frac{-1}{2};$  b) i)  $m = \frac{5}{8}$  ii) Vôùi  $(x; y) = (0; 2)$

$\Rightarrow m \in \emptyset; Vôùi (x; y) = (-2; 4) \Rightarrow m = 1.$

**Bài 1.6.** Tương tự Bài 1.3. a)  $S(4) = 130m \Rightarrow$  Người cách mặt đất sau 4 giây là 104 mét.

b)  $t = 5$  giây.

**Bài 1.7**

a)  $3m + 2 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{2}{3};$

b)  $3m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{2}{3};$

$$c) 3m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{-2}{3};$$

$$d) 3m + 2 < 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{-2}{3}.$$

**Bài 1.8.** Tương tự bài 1.7. a)  $m < \frac{4}{3}$ ; b)  $m > \frac{4}{3}$ ; c)  $m < \frac{4}{3}$ ; d)  $m > \frac{4}{3}$

**Bài 1.9.**

$$a) a = -m^2 - 2m - 3 = -(m)^2 - 2 < 0, \forall m \Rightarrow \checkmark \text{pcm.}$$

$$b) \text{Ta có: } (-m^2 - 2m - 3) \cdot \frac{1}{4} = \frac{-11}{4} \Leftrightarrow m \in \{-4; 2\}$$

**Bài 1.10.** Ta có:  $\sqrt{2m-3} - 2 \Leftrightarrow m > \frac{7}{2}$ .

**Bài 1.11.** a) Hai giao điểm là  $O(0;0)$  và  $M(\frac{1}{2}; \frac{1}{4})$ ;

b)  $N(1; 1)$

c) Không tồn tại giao điểm

$$K(-m-4; \frac{-m^2}{2} - 4m - 8)$$

$$d) H(4-m; \frac{-m^2}{2} + 4m - 8).$$

**Bài 1.12.** a)  $m = 1$ ; b)  $m = \frac{1}{2}$  c)  $m = \pm\sqrt{3}$

**Bài 1.13.** Tương tự bài 1.9.

$$a) m^2 + 2m + 3 > 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 + 2 > 0 \text{ (luôn đúng)}$$

$$b) m^2 + 2m + 3 = 4 \Rightarrow m = -1 + \sqrt{2} \text{ hoặc } m = -1 - \sqrt{2}$$

**Bài 1.14.** Tương tự bài 1.8. a)  $\frac{-4}{3} < m < \frac{-1}{3}$ ; b)  $m > \frac{-1}{3}$ .

**Bài 1.15.** Tương tự bài 1.2. a)  $m = 0$ ; b)  $m = \frac{-1}{4}$ .

**Bài 1.16.** Tương tự bài 1.3. a)  $S(1,5) = 2,25 (m) \Rightarrow$  cá heo cách mặt nước sau 1,5 giây là 1,75 mét.

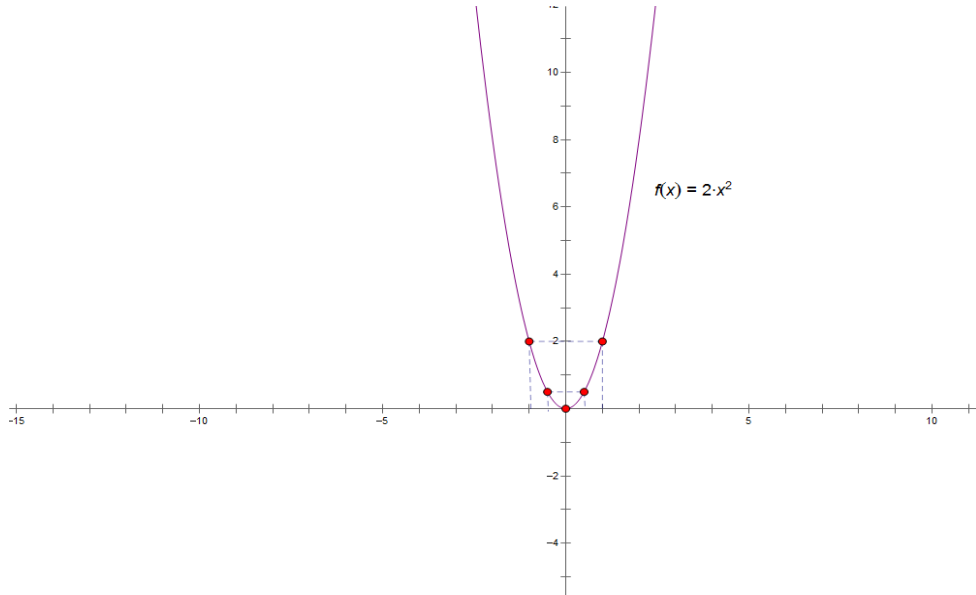
b)  $t = 2$  giây.

-----

**VẤN ĐỀ 2: HÀM SỐ  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) VÀ ĐỒ THỊ ( PHẦN II)**

**Bài 2.1.** a) Parabol ( $P$ ) là đồ thị hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) đi qua  $A(-\sqrt{2}; 4)$

b) i) Đồ thị hàm số  $y = 2x^2$  ( Hình vẽ)



ii) Thay  $y = 2$  vào  $y = 2x^2$  ta tìm được  $x = \pm 1$ .

Vậy ( $P$ ) có các điểm  $(1; 2)$  và  $(-1; 2)$  có tung độ bằng 2.

iii) Gọi  $M(x_0; y_0) \in (P) \Rightarrow y_0 = 2x_0^2$

M cách đều hai trục tọa độ nên:

$$|x_0| = |y_0| \Leftrightarrow x_0 \in \left\{ 0; \frac{1}{2}; \frac{-1}{2} \right\}$$

Vậy các điểm cần tìm là:  $M_1(0; 0); M_2\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right); M_3\left(\frac{-1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ .

**Bài 2.2.** Tương tự bài 2.1.

a)  $m = \frac{4}{3}$

b) i) Học sinh tự làm

ii)  $\left(1; \frac{1}{3}\right)$ ; iii)  $(0; 0)$ ;  $(6; 12)$ ;  $(-6; 12)$

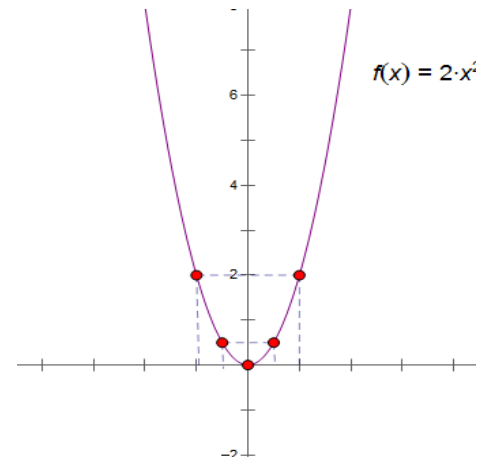
**Bài 2.3.** a)  $a=1$

b)  $d$  đi qua  $O$  nên  $d$ ;  $y = mx$

Vì  $d$  đi qua  $N(2; 4)$  nên  $4 = 2m \Leftrightarrow m = 2$

Vậy  $d$ :  $y = 2x$ .

c) Đồ thị  $(P)$  và  $d$  như hình vẽ.



d) Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^2 = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

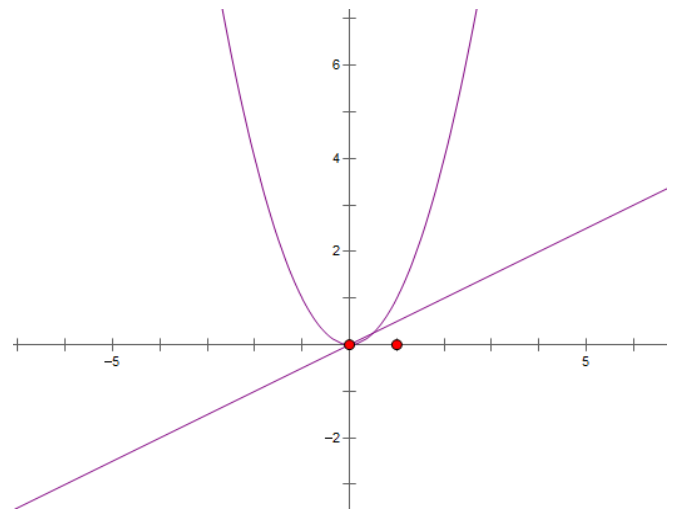
Vậy tọa độ giao điểm của  $(P)$  và  $d$  là:  $(0; 0)$ ,  $(2; 4)$

**Bài 2.4.** a) Đồ thị  $(P)$  và  $d$  như hình vẽ.

b)  $(0; 0)$  và  $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ .

c) Dựa vào đồ thị, ta thấy  $x \leq 0$  hoặc  $x \geq \frac{1}{2}$

là nghiệm của bất phương trình:  $x^2 \geq \frac{1}{2}x$



**Bài 2.5.** a) Học sinh tự làm;

b) Thay  $x = 1$ ,  $y = 1$  vào  $(P)$ , ta được đẳng thức

luôn đúng do đó  $A$  thuộc  $(P)$ . Tương tự ta có  $B(-1; -1)$ ,  $C(10, -200)$  không thuộc  $(P)$ .

**Bài 2.6.** Tương tự bài 2.1. a) HS tự làm

b) i)  $(\sqrt{2}; 4)$ ;  $(-\sqrt{2}; 4)$

ii)  $(0; 0)$ ,  $\left(\frac{-1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

c) Ta có:  $2x^2 = 2m - 3$

Đường thẳng  $d$ :  $y = 2m - 3$  là song song với trục hoành, Dựa vào đồ thị, ta có:



\*Với  $m = \frac{3}{2}$ : Phương trình có nghiệm duy nhất  $x = 0$ ;

\*Với  $m > \frac{3}{2}$ : PT có hai nghiệm  $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2m-3}{2}}$ ;

\*Với  $m < \frac{3}{2}$ : PT vô nghiệm.

**Bài 2.7.** Tương tự Bài 2.5. a) HS tự làm

b) Các điểm B, C thuộc (P), điểm A không thuộc (P).

**Bài 2.8.** Tương tự Bài 2.4. a) Học sinh tự làm

b)  $(1; 2), \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ ; c)  $\frac{-1}{2} < x < 1$ .

**Bài 2.9.** Tương tự Bài 2.4. a) Học sinh tự làm

b)  $(0; 0); \left(\frac{3}{4}; \frac{9}{8}\right)$ ;

c)  $0 \leq x \leq \frac{3}{4}$

**Bài 2.10.** Tương tự Bài 2.4.

a) Học sinh tự vẽ đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{2}x^2$

b) Với  $m = 2$  : Phương trình có nghiệm duy nhất  $x = 0$

Với  $m > 2$  : Phương trình có hai nghiệm  $x_{1,2} = \pm \sqrt{2m-4}$

Với  $m < 2$ : Phương trình vô nghiệm.

**VẤN ĐỀ 3. CÔNG THỨC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI ( PHẦN I)**

**Bài 3.1.**

a)  $5x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow x(5x - 7) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0; \frac{7}{5}\right\}$

b) *Töông töi* :  $x = \pm\sqrt{3}$ ;

c)  $x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 5) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 5\}$ ;

d) *Töông töi* :  $x = \frac{-6 \pm \sqrt{33}}{3}$ .

**Bài 3.2.** Thay  $x = 1$  vào phương trình ta có:  $4 \cdot 1^2 + m^2 + 4m = 0 \Leftrightarrow m = -2$

**Bài 3.3.** Tương tự **bài 3.1.**

a)  $x = 2\sqrt{3}$ ;  $x = 0$ ;

b) *Voá nghieäm* ;

c)  $x = \frac{1 \pm \sqrt{37}}{2}$ ;

d) *Voá nghieäm.*

**Bài 3.4.** Tương tự **Bài 3.2.** đáp số  $m = \frac{4 \pm \sqrt{11}}{5}$

**Bài 3.5.** a) Ta có  $a = 2$ ;  $b = -3$ ;  $c = -5 \Rightarrow \Delta = 49 > 0$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x \in \left\{-1; \frac{5}{2}\right\}$

b) Tương tự câu a)  $x_1 = 4$ ;  $x_2 = 2$ ;

c)  $a = 9$ ;  $b = -12$ ;  $c = 4 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow PT$  có nghiệm kép:  $x_{1,2} = \frac{2}{3}$

d)  $\Delta = -32 < 0 \Rightarrow PT$  vô nghiệm.

**Bài 3.6.** Tương tự **Bài 3.5.**

a)  $x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ ;  $x_2 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$ ;

b)  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; c)  $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $x_2 = -1$ ; d)  $x_1 = \frac{6 + 2\sqrt{6}}{3}$ ,  $x_2 = \frac{-6 + 2\sqrt{6}}{3}$

**Bài 3.7.** Tương tự **bài 3.5.** a)  $x = \frac{1 \pm 3\sqrt{5}}{2}$ , b)  $x = 2$

c)  $x_1 = \frac{1}{5}, x_2 = -1$ . d)  $x \in \emptyset$

**Bài 3.8.** Tương tự **Bài 3.5.** a)  $x_1 = \frac{5 - \sqrt{11}}{2}; x_2 = \frac{-5 - \sqrt{11}}{2};$

b) Vô nghiệm; c)  $x_1 = 2; x_2 = \sqrt{3};$  d)  $x = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

**Bài 3.9.** a) phương trình có hai nghiệm phân biệt:  $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0.$

b) Tổng tối:  $m \neq -1; m < \frac{3}{4}.$

**Bài 3.10.** a) PT có nghiệm kép:  $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ (m+2)^2 + 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \notin \emptyset$

b) tương tự câu a.  $m = \frac{-21}{4}$

**Bài 3.11.**

a) Phương trình vô nghiệm  $\begin{cases} a = 0, b = 0, c \neq 0 \\ a \neq 0, \Delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$

c) Trường hợp 1: nếu  $m = -2$  suy ra: PT có nghiệm  $x = 1$  ( loại)

Trường hợp 2: Nếu  $m \neq -2$ : Muốn phương trình vô nghiệm thì

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow 4 - 4(m+2)m < 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 1 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > \sqrt{2} - 1 \\ m < -\sqrt{2} - 1 \end{cases} \text{ (Thỏa mãn } m \neq -2)$$

Vậy phương trình vô nghiệm  $\Leftrightarrow m > \sqrt{2} - 1$  hoặc  $m < -\sqrt{2} - 1$

**Bài 3.12.** a)  $m \neq 0, m > -1, c < -1;$  d)  $m \in \{-1; 0\};$  e)  $m \geq -1$

**Bài 3.13.** Tương tự **Bài 3.9.** a)  $m < \frac{1}{4};$  b)  $m < \frac{9}{4}.$

**Bài 3.14.** Tương tự **bài 3.10.** a) vô nghiệm b)  $m = \frac{-61}{4}.$

**Bài 3.15.** Tương tự **bài 3.11.** a)  $m \in \emptyset;$  b)  $m < \frac{-157}{4}.$

**Bài 3.16.** Tương tự **Bài 3.5.a)** Vô nghiệm

b) Vô nghiệm

$$c) x \in \left\{ \frac{-1}{3}; -2 \right\}; d) = \frac{1}{7}.$$

**Bài 3.17.** Tương tự **Bài 3.1.**

$$a) x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\sqrt{2}$$

b) Vô nghiệm

$$c) x x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}; d) x_1 = \frac{5 + \sqrt{7}}{2}, x_2 = \frac{5 - \sqrt{7}}{2}.$$

**Bài 3.18.** Tương tự **bài 3.9.** a)  $m < \frac{11}{4}$ ; b)  $5 \neq m < \frac{21}{4}$ .

**Bài 3.1.9.** Tương tự **bài 3.10.**  $m \in \emptyset$ ; b)  $m < \frac{-3}{4}$ .

**Bài 3.20.** Tương tự **bài 3.12**  
 a)  $m > \frac{-17}{4}$ ; b)  $m = \frac{-17}{24}$ ; c)  $m < \frac{-17}{24}$ ; d)  $m = \frac{-17}{24}$ ; e)  $m \geq \frac{-17}{24}$ .

#### VẤN ĐỀ 4: CÔNG THỨC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI ( PHẦN II)

**Bài 4.1.**

$$a = 1, b' = -3, c = 8 \Rightarrow \Delta' = 1 > 0 \Rightarrow PT \text{ có } 2 \text{ nghiệm phân biệt: } x_1 = 4, x_2 = 2;$$

$$b) a = 9, b' = -6, c = 4 \Rightarrow \Delta' = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{2}{3}.$$

$$c) a = -3; b' = 2; c = -4 \Rightarrow \Delta' = -8 < 0.$$

$$d) \text{Tổng tử câu a): } x_1 = \frac{6 + 2\sqrt{6}}{3}; x_2 = \frac{-6 + 2\sqrt{6}}{3}.$$

**Bài 4.2.** Tương tự **Bài 4.1.** Đáp số

a)  $x_1 = x_2 = 2$ ; b)  $x_1 = \frac{1}{5}, x_2 = -1$ ;

c)  $x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; d)  $x_{1,2} = \frac{\pm 5 - \sqrt{11}}{2}$ .

**Bài 4.3.a)** Phương trình có hai nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -1 \end{cases}$ ;

b) PT có nghiệm kép  $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$ ;

c) PT vô nghiệm  $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, b' = 0, c \neq 0 \\ a \neq 0, \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0, m = 1, m \neq 3 \\ \Delta' = m + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1$ ;

d) PT có đúng 1 nghiệm  $\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0, m \neq 1 \\ m \neq 0, \Delta' = m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0 \text{ hoặc } m = -1$ .

e) PT có nghiệm  $\Leftrightarrow m \geq -1$ .

**Bài 4.4.** Tương tự **Bài 4.3.** Đáp số:

a)  $m > -\frac{1}{4}, m \neq 2$ ; b)  $m = -\frac{1}{4}$ ; c)  $m < -\frac{1}{4}$ ; d)  $m = 2$  hoặc  $m = -\frac{1}{4}$

e)  $m = 2$  hoặc  $m \geq -\frac{1}{4}$ .

**Bài 4.5.**

a)  $\Delta = m^2 + 2m + 1 \geq 0, \forall m, \Rightarrow \sqrt{\Delta} = |m + 1|$ .

\*  $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = -1$ : PT nào cho có nghiệm kép:  $x_{1,2} = \frac{m-1}{2}$

\*  $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \neq -1$ : PT có hai nghiệm phân biệt:  $x_1 = 2m, x_2 = -2$

b) Với  $m = 3 \Rightarrow$  PT có dạng:  $-6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ ;

Với  $m \neq 3 \Rightarrow \Delta' = 9m - 18$

\*  $\Delta < 0 \Leftrightarrow m < 2$ : PT vô nghiệm.

\*  $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 2$ : PT có nghiệm kép:  $x_1 = x_2 = \frac{m}{m-3}$ ;

\*  $\Delta > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m > 2 \end{cases}$ : PT có hai nghiệm phân biệt:  $x_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{9m-18}}{m-3}$

**Bài 4.6.** Tương tự **Bài 4.5.**

a) Với  $m = 0 \Rightarrow x = 2$ ; Với  $m \neq 0 \Rightarrow \Delta = -12 + 1$ .

- $\Delta < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{12}$ : Phương trình vô nghiệm;
- $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{12}$ : Phương trình có nghiệm kép:  $x_1 = x_2 = \frac{1-2m}{2m}$ ;
- $\Delta > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m < \frac{1}{12} \end{cases}$ : Phương trình có hai nghiệm phân biệt:  $x_{1,2} = \frac{1-2m \pm \sqrt{1-12m}}{2m}$

b) Với  $m = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ ; Với  $m \neq 2 \Rightarrow \Delta = 4m + 1$

- $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{4}$ : Phương trình vô nghiệm;
- $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{4}$ : Phương trình có nghiệm kép:  $x_1 = x_2 = \frac{m+1}{m-2}$ ;
- $\Delta' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m > -\frac{1}{4} \end{cases}$ : Phương trình có hai nghiệm phân biệt:  $x_{1,2} = \frac{m+1 \pm \sqrt{4m+1}}{m-2}$

**Bài 4.7.** Ta có  $\Delta = (b-c-a)(b-c+a)(b+c-a)(b+c+a)$ . Từ đó chứng minh được  $\Delta < 0$ .

**Bài 4.8.** Gọi  $x_0$  là nghiệm chung của hai phương trình. Ta có:  $(a-c)x_0 = d-b \Leftrightarrow x_0 = \frac{d-b}{a-c}$ .

Thay  $x_0$  vào phương trình ta được ĐPCM.

**Bài 4.9.** a)  $m = -1$  hoặc  $m = 2$ ; b)  $m = -1$

**Bài 4.10.** Ta có  $\Delta = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca$ .

Vì  $a < b+c \Rightarrow a^2 < ab+ca$ . Tương tự:  $b^2 < ab+bc$  và  $c^2 < ca+bc$ .

Từ đó suy ra:  $a^2 + b^2 + c^2 < 2ab + 2bc + 2ac \Rightarrow \Delta < 0$ .

**Bài 4.11**

Ta có:  $\Delta_1 + \Delta_2 = a^2 + b^2 - 4(a+b) < 0$

Từ:  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} \Rightarrow a+b = \frac{1}{2}ab \Rightarrow \Delta_1 + \Delta_2 = a^2 + b^2 - 2ab$

$\Delta_1 + \Delta_2 = (a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow$  ĐPCM.

**Bài 4.12.** Tương tự **Bài 4.9.** a)  $a = -2 \Rightarrow x_0 = -1$ ; b)  $\frac{1}{4} < a < \sqrt{3}$ .

**Bài 4.13.** Tương tự **Bài 4.1.**

a)  $\Delta' = 0 \Rightarrow$  Phương trình có nghiệm kép:  $x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ;

b)  $\Delta' = 0 \Rightarrow$  Phương trình có nghiệm kép:  $x_1 = x_2 = \frac{1}{7}$ ;

c)  $\Delta' = -2 < 0 \Rightarrow$  Phương trình vô nghiệm;

d)  $\Delta' = 2 > 0 \Rightarrow$  Phương trình có hai nghiệm phân biệt:  $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}$ .

**Bài 4.15.** Tương tự **Bài 4.4.** a)  $m < 1$ ; b)  $m < 0$ .

**Bài 4.16.** Tương tự **Bài 4.4.** a)  $m < \frac{-10}{3}$ ; b)  $\frac{-5 - \sqrt{21}}{2} < m < \frac{-5 + \sqrt{21}}{2}, m \neq -5$

**Bài 4.17.** Tương tự **Bài 4.3** b). a)  $m = 5$  hoặc  $m = -15$ ; b)  $m = \emptyset$ .

**Bài 4.18.** Tương tự **Bài 4.9.** a)  $m = 2$  hoặc  $m = -3$ ; b)  $1 < m < 2\sqrt{2}$

-----

**VẤN ĐỀ 5. HỆ THỨC VI-ÉT VÀ ỨNG DỤNG ( PHẦN I)**

**Bài 5.1.** Ta có:  $\Delta = 13 > 0 \Rightarrow$  Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$ . Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có:  $S = x_1 + x_2 = 5$  và  $P = x_1 \cdot x_2 = 3$ .

a)  $A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 5^2 - 2 \cdot 3 = 19$ ;

b)  $B = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{5}{3}$ ;

c)  $C = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 5^3 - 3 \cdot 3 \cdot 5 = 80$ ;

d)  $D = \frac{1}{x_1^4} + \frac{1}{x_2^4} = \frac{x_1^4 + x_2^4}{(x_1x_2)^4} = \frac{[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2]^2 - 2(x_1x_2)^2}{(x_1x_2)^4} = \frac{343}{81}$ ;

e)  $E = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3} = \sqrt{13}$ ;

g)  $G = \frac{x_1^2}{x_1 + 2x_2} + \frac{x_2^2}{x_2 + 2x_1} = \frac{x_1x_2(x_1 + x_2) + 2(x_1^3 + x_2^3)}{5x_1x_2 + 2(x_1^2 + x_2^2)} = \frac{175}{53}$ .

**Bài 5.2.** a)  $\Delta' = (m - 3)^2 \geq 0, \forall m \Rightarrow$  Phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  với mọi  $m$ .

b) Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có:  $x_1 + x_2 = 2m - 4$  và  $x_1x_2 = 2m - 5$ .

Biểu thức liên hệ giữa  $x_1, x_2$  không phụ thuộc vào  $m$  là:  $x_1 + x_2 - x_1x_2 = 1$ .

**Bài 5.3.** Tương tự Bài 5.1.

$$\text{a) } M = -\frac{25}{6}; \quad \text{b) } N = \frac{13}{14}; \quad \text{c) } P = -\frac{49}{4}; \quad \text{d) } Q = -\frac{17}{12}.$$

**Bài 5.4.** Tương tự **Bài 5.2.** Phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  với mọi  $m$ . Biểu thức liên hệ giữa  $x_1, x_2$  không phụ thuộc vào  $m$  là:  $2(x_1 + x_2) + x_1x_2 = -4$ .

**Bài 5.5.** a) Ta có:  $a + b + c = 15 + (-17) + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{2}{15};$

b)  $a - b + c = 1230 - (-4) + (-1234) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = \frac{1234}{1230};$

c)  $a + b + c = (2 - \sqrt{3}) + 2\sqrt{3} + (-2 - \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -7 - 4\sqrt{3};$

d)  $a - b + c = \sqrt{5} - (-2 + \sqrt{5}) + (-2) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}.$

**Bài 5.6.** a) Ta thấy:  $a + b + c = (m - 2) + (-2m - 5) + m + 7 = 0 \Rightarrow$  Phương trình luôn có nghiệm  $x = 1$  không phụ thuộc vào  $m$ .

b) Với  $m = 2$ : Phương trình chỉ có nghiệm  $x = 1$ ;

Với  $m \neq 2$ : Phương trình có hai nghiệm  $x = 1$  và  $x = \frac{m + 7}{m - 2}$ .

**Bài 5.7.** Thay  $x = -2$  vào phương trình ta tìm được:  $m = 1$  hoặc  $m = 2$ .

- Với  $m = 1$ , ta có:  $x^2 - 6x - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = -2 \end{cases}$ .
- Với  $m = 2$ , ta có:  $2x^2 - 9x - 26 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{2} \\ x = -2 \end{cases}$ .

**Bài 5.8.** Tương tự **Bài 5.5.**

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x_1 = 1, x_2 = \frac{2}{7}; & \text{b) } x_1 = -1, x_2 = \frac{32}{23}; \\ \text{c) } x_1 = 1, x_2 = -\frac{1979}{1975}; & \text{d) } x_1 = 1, x_2 = \frac{19,8}{31,1}; \end{array}$$

**Bài 5.9.** a) Thay  $x = -2$  vào phương trình đã cho, ta có:

$$(2m - 1)(-2)^2 + (m - 3)(-2) - 6m - 2 = 0 \text{ (luôn đúng)} \Rightarrow \text{ĐPCM.}$$



- b) Với  $m = \frac{1}{2}$ : Phương trình chỉ có nghiệm  $x = -2$ ; Với  $m \neq \frac{1}{2}$ : Phương trình có hai nghiệm  $x = -2$  và  $x = \frac{-6m-2}{2m-1}$ .

**Bài 5.10.** Tương tự **Bài 5.7.**  $m = 2; x_2 = -18$ .

**Bài 5.11.** a)  $u, v$  là hai nghiệm của phương trình sau:

$$X^2 - 15X + 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 12 \\ X = 3 \end{cases} \Rightarrow (u, v) \in \{(12; 3), (3; 12)\}.$$

- b) Ta có:  $(u+v)^2 = u^2 + v^2 + 2uv = 13 + 2.6 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} u+v = 5 \\ u+v = -5 \end{cases}$

- Với  $u+v = 5$  ta có  $u, v$  là hai nghiệm của phương trình sau:

$$X^2 - 5X + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 2 \\ X = 3 \end{cases}.$$

- Với  $u+v = -5$  ta có  $u, v$  là hai nghiệm của phương trình sau:

$$X^2 + 5X + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = -2 \\ X = -3 \end{cases}.$$

Vậy  $(u, v) \in \{(2; 3), (3; 2), (-2; -3), (-3; -2)\}$ .

**Bài 5.12.** Ta có:  $(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$  và  $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$ . Do đó,  $2+\sqrt{3}$  và  $2-\sqrt{3}$  là hai nghiệm của phương trình sau:  $X^2 - 4X + 1 = 0$ .

**Bài 5.13.** a) Ta có:  $\Delta = 25 + 12m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{25}{12}$ .

- b)  $\frac{2}{x_1^2} + \frac{2}{x_2^2} = \frac{2(x_1^2 + x_2^2)}{(x_1 x_2)^2} = \frac{50 + 12m}{9m^2}$  và  $\frac{2}{x_1^2} \cdot \frac{2}{x_2^2} = \frac{4}{(x_1 x_2)^2} = \frac{4}{9m^2} \Rightarrow \frac{2}{x_1^2}, \frac{2}{x_2^2}$  là các nghiệm của

phương trình sau:

$$X^2 - \frac{50+12m}{9m^2}X + \frac{4}{9m^2} = 0 \text{ (Điều kiện: } 0 \neq m \geq -\frac{25}{12}\text{)} \text{ hay: } 9m^2 X^2 - 2(6m+25)X + 4 = 0.$$

**Bài 5.14.** Tương tự **Bài 5.11.**

- a) Không tồn tại  $u, v$  thỏa mãn vì  $4^2 - 4.7 = -12 < 0$ .

- b)  $(u, v) \in \{(-2; -10), (-10; -2)\}$ .

**Bài 5.15.** Tương tự **Bài 5.12.**  $X^2 + 4X - 77 = 0$ .

**Bài 5.16.** Tương tự **Bài 5.13.** Điều kiện để phương trình có nghiệm là  $m \geq -\frac{25}{12}$ . Phương trình tìm được là:

$$X^2 + \frac{10+6m}{3m+6}X + \frac{m}{m+2} = 0 \text{ (Điều kiện: } -2 \neq m \geq -\frac{25}{12} \text{) hay: } 3(m+2)X + 2(3m+5)X + 3m = 0.$$

**Bài 5.17.** a)  $x^2 - 7x + 6 = (x-1)(x-6)$ ;

b)  $30x^2 - 4x - 34 = 30(x+1)(x - \frac{17}{15})$ ;

c)  $x - 5\sqrt{x} + 6 = (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)$ ;

d)  $2x - 5\sqrt{x} + 3 = 2(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - \frac{3}{2})$ .

**Bài 5.18.** Tương tự **Bài 5.17.**

a)  $4x^2 - 5x + 1 = 4(x-1)(x - \frac{1}{4})$ ;

b)  $21x^2 - 5x - 26 = 21(x+1)(x - \frac{26}{21})$ ;

c)  $4x - 7\sqrt{x} + 3 = 4(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - \frac{3}{4})$ ;

d)  $12x - 5\sqrt{x} - 7 = 12(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + \frac{7}{12})$ .

**Bài 5.19.** Tương tự **Bài 5.1.** a)  $-\frac{11}{9}$ ; b)  $\frac{16}{87}$ ; c) 9; d) -41.

**Bài 5.20.** Tương tự **Bài 5.2.** a)  $m \leq 7 - 2\sqrt{11}$  hoặc  $m \geq 7 + 2\sqrt{11}$ ; b)  $2(x_1 + x_2) - x_1x_2 = -7$ .

**Bài 5.21.** Tương tự **Bài 5.2.** a)  $\Delta' = m^2 + 2m + 5 = (m+1)^2 + 4 > 0, \forall m$ .

b)  $x_1 + x_2 + 4x_1x_2 = -5$ .

**Bài 5.22.** Tương tự **Bài 5.5.** a)  $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{16}$ ; b)  $x_1 = -1, x_2 = 3$ ; c)  $x_1 = 1, x_2 = 19$ ; d)

$x_1 = -1, x_2 = \frac{247}{246}$ .

**Bài 5.23.** Tương tự **Bài 5.11.** a)  $(u, v) \in \{(7; -15), (-15; 7)\}$ ; b)  $(u, v) \in \{(15; -6), (-6; 15)\}$ .

**Bài 5.24.** Tương tự **Bài 5.2.**

a)  $\Delta' = 4a^2 + 12a + 13 = 4(a + \frac{3}{2})^2 + 4 > 0, \forall a$ ;

b)  $2(x_1 + x_2) + x_1x_2 = -5$ ;

c)  $|x_1 - x_2| = \sqrt{13} \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 13 \Leftrightarrow 4a^2 + 12a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -3 \end{cases}$ .

VẤN ĐỀ 6. HỆ THỨC VI-ÉT VÀ ỨNG DỤNG ( PHẦN II)

**Bài 6.1.** a) Phương trình có hai nghiệm trái dấu  $\Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow m < -1$ .

b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow \Delta = 8^2 - 4(2m + 6) > 0 \Leftrightarrow m < 5$ .

c) Phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 8m + 4 > 0 \\ 2(m-3) < 0 \\ 8 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m \neq 1 \end{cases}.$$

d) Phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 32 - 8m > 0 \\ 6 > 0 \\ 2m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-1}{2} < m < 4.$$

e) Vì  $\Delta = 4(m-1)^2 - 4(-3-m) = (2m-1)^2 + 15 > 0, \forall m \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$  Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Phương trình có đúng một nghiệm dương  $\Leftrightarrow ac = -3 - m < 0 \Leftrightarrow m > -3$ .

**Bài 6.2.** Tương tự **Bài 6.1.**

- a)  $-1 < m < 2$ ;                      b)  $m > 0$  hoặc  $m \leq -2 - \sqrt{3}$   
 c)  $m < -1$                               d)  $-1 \leq m < 0$ .

**Bài 6.3.** Ta có:  $\Delta = 5^2 - 4(m+4) = 9 - 4m$ .

Phương trình có hai nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m < \frac{9}{4}$ .

Theo hệ thức Vi-ét ta có:  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 x_2 = m + 4 \end{cases}$ .

a)  $x_1^2 + x_2^2 = 23 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 23 \Leftrightarrow m = -3$ .

b)  $x_1^3 + x_2^3 = 35 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2] = 35 \Leftrightarrow m = 2$

c)  $|x_2 - x_1| = 3 \Leftrightarrow (x_2 + x_1)^2 - 4x_1 x_2 = 9 \Leftrightarrow 4m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ .

d)  $|x_1| + |x_2| = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 2|x_1 x_2| = 16$

$$\Leftrightarrow 2(m+4) - 2|m+4| = 9 \Leftrightarrow 2|m+4| = 2m-1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{1}{2} \\ 2(m+4) = \pm(2m-1) \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset;$$

e)  $3x_1 + 4x_2 = 6 \Leftrightarrow 3(x_1 + x_2) + x_2 = 6 \Leftrightarrow x_2 = -9$ .

Vì  $x = -9$  là nghiệm của phương trình nên:  $(-9)^2 - 5(-9) + m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = -130$ .

g)  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = -3 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 + x_1x_2 = 0 \Leftrightarrow m + 29 = 0 \Leftrightarrow m = -29$ ;

h)  $x_1(1-3x_2) + x_2(1-3x_1) = m^2 - 23 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 6x_1x_2 = m^2 - 23 \Leftrightarrow m^2 + 6m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = -3 \pm \sqrt{13}$ ;  
;

**Bài 6.4.** Tương tự **Bài 6.1**, và **Bài 6.2**.

- a)  $x = -1$ ;                                    b)  $m < -1$  và  $m \neq -2$ ;  
 c)  $-1 < m < 0$ ;                                d)  $m < -1$  và  $m \neq -2$ ;  
 e)  $m = -1$                                         g)  $m \geq 1$  hoặc  $m \leq -5$ ;  
 h)  $m = -1; m = \frac{-9}{2}$ ;                                    i)  $x^2 - \frac{m^2}{m+1}x - \frac{m^2}{m+1} = 0$ .

*Chú ý:* Vì  $\Delta \geq 0 \forall m$  nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm.

Do đó, quá trình giải tất cả các câu trong bài 6.4, ta không cần kiểm tra sự tồn tại nghiệm của câu hỏi.

**Bài 6.5.** Tương tự **Bài 6.3.h**. *Đáp số:*  $m = 418$ .

**Bài 6.6.** a)  $m = \pm 4$ ;                                b)  $A_{\min} = 33 \Leftrightarrow m = 0$ ;                                    c)  $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = -17$ .

**Bài 6.7.** a)  $-1 < m < 4$ ;                                b)  $m > 4$  hoặc  $-\frac{9}{4} < m < -2$ ;  
 c)  $-2 < m < -1$ ;                                        d)  $m \in \emptyset$ .

**Bài 6.8.** a)  $\Delta = (2m-4)^2 + 12 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ ;                                    b)  $m < 1$ ;  
 c)  $m > 3$ ;    d)  $m \in \emptyset$ ;    e)  $A_{\min} = 7 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$ .

**Bài 6.9.** a)  $\Delta = 25 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ ;                                    b)  $m < -3$ ;  
 c)  $A_{\min} = \frac{25}{2} \Leftrightarrow m = \frac{-1}{2}$ ;    d)  $m = -1; m = 0$ .

**Bài 6.10.** Tương tự **Bài 6.3.a**. *Đáp số:*  $m = -2$ .

**Bài 6.11.** a)  $\Delta = 4(m-3)^2 \geq 0, \forall m \in \mathbb{R}$ ;                                    b)  $m > 1$ .

**Bài 6.12.** a) Phương trình vô nghiệm;

b) Với  $m = 0$  thì nghiệm còn lại là  $x = 0$ ; Với  $m = -1$  thì phương trình có nghiệm kép  $x_1 = x_2 = -2$ ;

c)  $m > -1$ ;    d)  $m = 2$ ;    e)  $A_{\min} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$ .

**VẤN ĐỀ 7. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI**

**Bài 7.1.** a) Đặt  $x^2 = t \geq 0$ , ta có:  $t^2 + 5t - 6 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = -6 < 0$  ( loại ) nên  $x = \pm 1$ .

b) Đặt  $(x+1)^2 = t \geq 0$  tương tự câu a)  $x = -1 \pm 2\sqrt{3}$ .

**Bài 7.2.** Tương tự Bài 7.1. Đáp số: a)  $x = \pm\sqrt{6}; x = \pm\frac{1}{2}$ ; b)  $x = \pm 1$ ; c)  $x = \pm 1; x = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$ ; d) Vô nghiệm

**Bài 7.3.** a) Điều kiện:  $x \neq \pm 1, x \neq -2$ . Quy đồng mẫu thức và giải phương trình tìm được:  $x = -\frac{5}{4}, x = 5$

b) Tương tự Câu a)  $x = -17, x = -1 \pm \sqrt{31}$ ;

c)  $x = -2 \pm \frac{\sqrt{21}}{3}$ ; d)  $x = 5$ .

**Bài 7.4.** Tương tự **Bài 7.3.** Đáp số: a)  $x = -3 \pm \sqrt{19}$ ; b)  $x = \frac{11 \pm \sqrt{145}}{6}$ ; c)  $x = 1$ ; d)  $x = \frac{1}{2}, x = 5$ .

**Bài 7.5.** a) Ta có:  $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x \in \{\pm\sqrt{2}; -3\}$ ;

b) Tương tự Câu a)  $x = 4$ ; c)  $x = -\sqrt{2}$ ; d)  $x = -\frac{1}{2}, x = 0, x = \frac{10}{3}$ .

**Bài 7.6.** Tương tự **Bài 7.5.** Đáp số: a)  $x = 1, x = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{4}$ ; b)  $x = \frac{2}{3}, x = 1$ ; c)  $x = -1$ ; d)  $x = 1, x = 2$ .

**Bài 7.7.** a) Ta có:  $x(x+1)(x+2)(x+3) = 8$ . Đặt  $y = x^2 + 3x + 1$ , tìm được:  $y = \pm 3 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$ .

b) Chia hai vế cho  $x^2$ . Đặt  $x + 16 + \frac{60}{x} = y$ , tìm được  $y = 2, y = 3 \Rightarrow x = -15, x = -4$ .

c) Tương tự Câu b) Đáp số:  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, x = 2 \pm \sqrt{5}$ ;

d) *Hướng dẫn:* Chia cả tử và mẫu cho  $x$ . Đặt  $y = 3x + \frac{2}{x} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -11 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-11 \pm \sqrt{97}}{6}$ .

**Bài 7.8.** Tương tự **Bài 7.7.** Đáp số: a)  $x = \frac{3 \pm \sqrt{37}}{2}, x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ ; b)  $x = 4, x = -5$ ;

c)  $x = 3, x = 0$ ;                      d)  $x = -\frac{5}{4}, x = -\frac{2}{3}$ .

**Bài 7.9.** a) Đặt  $x = \sqrt{2}y$ . Phương trình  $\Leftrightarrow 4y^3 + 6y^2 - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 4y^3 + 4y^2 + 2y^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x = -\sqrt{2}, x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

b) Phương trình  $\Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x^2+x+1=9-6x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x = \frac{8}{7} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{8}{7}$ .

**Bài 7.10.** Tương tự **Bài 7.9.** Đáp số: a)  $x = 1$ ;    b)  $x = 1, x = 5$ .

**Bài 7.11.** a)  $x^4 = 24x + 32 \Leftrightarrow x^4 + 4x^2 + 4 = 4x^2 + 24x + 36$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2)^2 = (2x + 6)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2 = 2x + 6 \\ x^2 + 2 = -(2x + 6) \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{5};$$

b) Tương tự Câu a) Đáp số:  $x = \frac{1}{1-\sqrt[3]{2}}$ .

**Bài 7.12.** a) Điều kiện:  $1 \geq x \geq 0 \Rightarrow \sqrt[4]{1-x} \geq 1-x, \sqrt[4]{x} \geq x$

$$\Rightarrow VT \geq 1-x+x=1=VP. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x=0 \\ 1-x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=0 \end{cases};$$

b) Tương tự Câu a) Đáp số:  $x = \frac{1}{2}$ .

**Bài 7.13.** Tương tự Bài 7.11. a)  $x = 3, x = 3 \pm 2\sqrt{5}$ ;    b)  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ .

**Bài 7.14.** a) Trường hợp 1. Nếu  $2x-1 \geq 0$  ta có phương trình:

$$4x^2 - 4x - 12x + 6 + 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{3}}{2};$$

Trường hợp 2. Nếu  $2x-1 \leq 0$  ta có phương trình:

$$4x^2 - 4x + 12x - 6 + 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

b) Ta có:  $x^2 + \frac{25x^2}{(x+5)^2} = 11 \Leftrightarrow (x - \frac{5x}{x+5})^2 + 2x \frac{5x}{x+5} = 11$ .

$$\text{Đặt } \frac{x^2}{x+5} = t \Rightarrow t(t+10) = 11 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-11 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

**Bài 7.15.** Tương tự **Bài 7.1.** Đáp số: a)  $x = \pm 2\sqrt{2}$ , b)  $x = \pm \sqrt{5}$ ; c)  $x = \pm \sqrt{\frac{2 + \sqrt{10}}{3}}$ ; d)  $x = 1, x = -3$ .

**Bài 7.16.** Tương tự **Bài 7.3.** Đáp số: a)  $x = \frac{2}{5}$ ; b)  $x = 0, x = 5$ ; c)  $x \in \emptyset$ ; d)  $x = 5, x = -3$ .

**Bài 7.17.** Tương tự **Bài 7.5.** Đáp số: a)  $x = \sqrt[3]{3}, x = \sqrt[3]{-2}$ ; b)  $x = 1 \pm \sqrt{3}, x = 1 \pm \sqrt{2}$ ;

c)  $x = -1, x = 1$ , d)  $x = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{6}$ .

**Bài 7.18.** Tương tự **Bài 7.7.** Đáp số: a)  $x = \frac{-7 \pm \sqrt{17}}{2}$ ; b)  $x = 2 \pm \sqrt{3}$ .

**Bài 7.19.** Tương tự **Bài 7.5.** Đáp số: a)  $x = -1, x = 1 \pm \sqrt{7}$ ; b)  $x = \frac{1}{\sqrt[3]{4} - 1}$ .

**VẤN ĐỀ 8. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH ( PHẦN I)**

**Bài 8.1.** Gọi năng suất dự định là  $x$  ( $0 < x < 20$ , sản phẩm/ giờ).

Sản phẩm làm được sau 2 giờ là:  $2x$  ( sản phẩm)

Số sản phẩm còn lại là:  $120 - 2x$  ( sản phẩm)

Năng suất sau khi cải tiến là:  $x + 3$  ( sản phẩm/ giờ)

Thời gian làm số sản phẩm còn lại là:  $\frac{120 - 2x}{x + 3}$  ( giờ)

Do sau khi cải tiến người đó hoàn thành sớm hơn dự định 1 giờ 36 phút.

Theo bài ra có phương trình:  $2 + \frac{120 - 2x}{x + 3} + 1,6 = \frac{120}{x}$ .

Giải phương trình ta được:  $x = 12$

Vậy năng suất dự định của công nhân đó là 12 sản phẩm/ giờ.

**Bài 8.2.** Tương tự **Bài 8.1.** Kế hoạch mỗi ngày cần sản xuất là 60 sản phẩm.

**Bài 8.3.** Tương tự **Bài 8.1.** Số máy dự định sản xuất trong mỗi ngày là 9 máy.

**Bài 8.4.** Gọi tổng số áo phải may theo kế hoạch là  $x$ , ( $x \in \mathbb{N}^*$ ) áo; Số áo thực tế là:  $x + 20$  (áo).

Thời gian hoàn thành theo kế hoạch là:  $\frac{x}{30}$  (ngày); Thời gian thực tế là:  $\frac{x+20}{40}$  (ngày).

Do tổ may hoàn thành trước thời hạn 3 ngày, theo bài ra ta có phương trình:  $\frac{x}{30} - 3 = \frac{x+20}{40}$ .

Giải phương trình ta được  $x = 420$ .

**Bài 8.5.** Tương tự **Bài 8.1.** Số tấm thảm phân xưởng phải dệt trong 1 ngày là 100 tấm thảm.

**Bài 8.6.** Mỗi tháng tổ 1 làm được 300 sản phẩm; Tổ 2 làm được 420 sản phẩm.

**Bài 8.7.** Gọi năng suất của tổ 1 là:  $x$ , ( $x > 0$ , phần công việc/ giờ)

Năng suất của tổ 2 là:  $\frac{1}{2} - x$ .

Thời gian tổ 1 làm một mình xong công việc là:  $\frac{1}{x}$  giờ;

Thời gian tổ 2 làm một mình xong công việc là:  $\frac{1}{\frac{1}{2} - x}$  giờ.

Theo bài ra có phương trình:  $\frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{1}{2} - x} - 3$ . Giải phương trình ta được  $x = \frac{1}{3}$ .

Vậy thời gian tổ 1, tổ 2 hoàn thành công việc một mình lần lượt là 3 giờ và 6 giờ.

**Bài 8.8.** Tương tự **Bài 8.7.** Người thứ hai làm một mình xong công việc trong 15 giờ.

**Bài 8.9.** Tương tự **Bài 8.7.** Nếu làm một mình, người thứ nhất làm xong công việc trong 22 giờ 30 phút; Người thứ 2 làm trong 45 giờ.

**Bài 8.10.** Tương tự **Bài 8.7.** Người thứ nhất hoàn thành công việc 1 mình trong 40 giờ; Người thứ 2 hoàn thành công việc 1 mình trong 60 giờ.

**Bài 8.11.** Gọi số thứ nhất là  $a$ ; Số thứ 2 là:  $\frac{2a-9}{3}$ .

Ta có phương trình:  $a^2 - \left(\frac{2a-9}{3}\right)^2 = 119$ . Giải phương trình ta có  $a = 12$ .

Vậy số thứ nhất là 12, số thứ 2 là 5.

**Bài 8.12.** Gọi số thứ nhất là  $a$ ; Số thứ 2 là:  $17 - a$ . Tổng lập phương của chúng bằng 1241 nên  $a^3 + (17 - a)^3 = 1241$ . Giải phương trình ta có  $a = 9$ . Vậy số thứ nhất là 9, số thứ 2 là 8.

**Bài 8.13.** Tương tự **Bài 8.11.** Số thứ nhất là 11; Số thứ 2 là 12.



**Bài 8.14.** Tương tự **Bài 8.11**. Số đã cho là 28.

**Bài 8.15.** Gọi chiều cao thửa ruộng là  $h(m)$ ; Chiều dài cạnh đáy thửa ruộng là:  $\frac{180.2}{h}$

Vì tăng cạnh đáy thêm 4m và chiều cao giảm đi 1m thì diện tích không đổi nên:

$$4 + \frac{180.2}{h} = \frac{180.2}{h-1}.$$

Giải phương trình ta có:  $h = 10(m)$

Vậy chiều dài cạnh đáy thửa ruộng là 36m.

**Bài 8.16.** Tương tự **Bài 8.15**. Diện tích thửa ruộng là  $308 m^2$ .

**Bài 8.17.** Tương tự **Bài 8.15**. Chiều rộng khu vườn là 60 m; Chiều dài khu vườn là 80 m.

**Bài 8.18.** Cạnh góc vuông lần lượt là 12 và 5.

**Bài 8.19.** Tương tự **Bài 8.7**. Người thứ nhất làm một mình trong 4 giờ thì xong công việc; Người thứ hai làm một mình trong 6 giờ thì xong công việc.

**Bài 8.20.** Tương tự **Bài 8.1**. Đơn vị 1 thu hoạch được 350 tấn thóc; Đơn vị 2 thu hoạch được 250 tấn thóc.

**Bài 8.21.** Tương tự **Bài 8.7**. Vòi 1 chảy một mình đầy bể trong thời gian 4 giờ; Vòi 2 chảy một mình đầy bể trong thời gian 12 giờ.

**Bài 8.22.** Tương tự **Bài 8.1**. Theo quy định mỗi ngày tổ sản xuất phải làm 40 sản phẩm.

**Bài 8.23.** Tương tự **Bài 8.1** Người thứ nhất làm một mình trong 24 giờ; Người thứ hai làm một mình trong 48 giờ.

**Bài 8.24.** Tương tự **Bài 8.7**. Mức kế hoạch đã định là 120 tấn.

**Bài 8.25.** Tương tự **Bài 8.7**. Đội xe lúc đầu có 9 xe.

**Bài 8.26.** Tương tự **Bài 8.1**. Mỗi tổ phải làm trong 12 giờ.

**Bài 8.27.** Tương tự **Bài 8.1**. Tổ thứ hai làm một mình trong 15 giờ thì xong công việc.

**Bài 8.28.** Tương tự **Bài 8.1**. Người 1 làm trong 24 giờ; Người 2 làm trong 48 giờ.

**Bài 8.29.** Tương tự **Bài 8.7**. Theo kế hoạch mỗi ngày đội thợ phải khai thác 24 tấn.

**Bài 8.30.** Tương tự **Bài 8.1**. Đội 1 làm một mình trong 20 ngày; Đội 2 làm một mình trong 30 ngày.

**Bài 8.31.** Độ dài các cạnh của tam giác lần lượt là 5 cm, 12 cm và 13 cm.

**Bài 8.32.** Đáp số 23 và 32.

**VẤN ĐỀ 9. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH ( PHẦN II)**

**Bài 9.1.** Gọi thời gian người đó đi từ A đến B là  $t$  giờ.

Vì thời gian về ít hơn thời gian đi là 20 phút nên thời gian về là:  $t - \frac{1}{3}$  và quãng đường đi về là

như nhau nên ta có:  $25t = 30(t - \frac{1}{3})$

Giải phương trình ta được  $t = 2$  (giờ). Vậy quãng đường AB là 50 km.

**Bài 9.2.** Gọi vận tốc ô tô dự định đi là  $v$  (km/h).

Thời gian đi nửa quãng đường đầu là:  $\frac{30}{v+10}$  (h)

Thời gian đi nửa quãng đường sau là:  $\frac{30}{v-6}$  (h)

Theo bài ra ta có:  $\frac{30}{v+10} + \frac{30}{v-6} = \frac{60}{v}$

Giải phương trình ta có  $v = 30$  9km/h)

Vậy thời gian dự định là 2 giờ.

**Bài 9.3.** Tương tự **Bài 9.1.** Đáp số: Quãng đường AB là 60 km.

**Bài 9.4.** Tương tự **Bài 9.1.** Đáp số: Quãng đường AB là 105 km.

**Bài 9.5.** Gọi thời gian hai người tới chỗ gặp nhau là  $t$  ( giờ).

Theo bài ra ta có phương trình  $t.30 + t.45 = 110$ .

Thời gian họ gặp nhau là 1 giờ 28 phút.

**Bài 9.6.** Gọi thời gian người thứ 2 đi là  $t$  ( giờ). Thời gian người thứ nhất đi là  $t + \frac{1}{15}$ . Theo

bài ra ta có phương trình:  $6,3t + 5,7(t + \frac{1}{15}) = 4,18 \Leftrightarrow t = \frac{19}{60}$ .

**Bài 9.7.** Vận tốc người đi từ A đến B là 12 km/h và của người đi từ B đến A là 9 km/h.

**Bài 9.8.** Vận tốc người đi từ A đến B là 16 km/h và của người đi từ B đến A là 14 km/h.

**Bài 9.9.** Gọi quãng đường AB là  $x, (x > 30)$  km

Thời gian xe máy thứ nhất chạy là  $\frac{x}{30}$ ; Thời gian xe máy thứ 2 chạy là  $\frac{x}{36} + \frac{2}{3}$ . Theo bài ra ta

có:  $\frac{x}{30} = \frac{x}{36} + \frac{2}{3}$ . Giải phương trình ta được  $x = 120$ . Vậy quãng đường AB là 120 km.

**Bài 9.10.** Tương tự **Bài 9.9**. Hai người gặp nhau lúc 9 giờ 30 phút.

**Bài 9.11.** Đoàn tàu từ Hà Nội đi Thành phố Hồ Chí Minh với vận tốc 40 km/h; Đoàn tàu từ Nam Định đi Thành phố Hồ Chí Minh với vận tốc 45 km/h.

**Bài 9.12.** Gọi vận tốc riêng của canô là  $v$  (km/h). Theo bài ra ta có:  $(v+3)\frac{4}{3} = (v-3)2$ . Giải phương trình ta được  $v = 15$  (km/h).

**Bài 9.13.** Gọi vận tốc dòng nước là  $v$  (km/h). Theo bài ra ta có:  $(15+v)4 = 2,4 \cdot 2(15-v)$ . Giải phương trình ta có  $v = \frac{15}{11}$ .

Vận vận tốc canô khi xuôi dòng là  $\frac{180}{11}$  km/h.

**Bài 9.14.** Tương tự **Bài 9.12**. Vận tốc canô khi xuôi dòng là 18 km/h.

**Bài 9.15.** Tương tự **Bài 9.12**. Vận tốc canô là 22 km/h.

**Bài 9.16.** Gọi số lượng xe là  $x$  ( $x < 12$ ). Ban đầu mỗi xe chở  $\frac{40}{x}$  ( tấn); Lúc sau mỗi xe chở  $\frac{54}{x+2}$ . Theo bài ra ta có:  $\frac{54}{x+2} = \frac{40}{x} + 0,5$ . Giải phương trình ta có  $x = 10$  xe.

**Bài 9.17.** Gọi số học sinh lớp 8A là  $x$  ( $x > 21$ ); Số học sinh lớp 8B là  $94 - x$ . Theo bài ra ta có:  $\frac{25}{100}x + \frac{20}{100}(94 - x) = 21$ . Giải phương trình ta có  $x = 64$ . Vậy số học sinh lớp 8A là 64 em, 8B là 30 em.

**Bài 9.18.** Thời gian quy định là 20 ngày.

**Bài 9.19.** Số học sinh lớp 8A là 33 em, 8B là 27 em.

**Bài 9.20.** Vận tốc canô khi nước yên lặng là 16 km/h.

**Bài 9.21.** Vận tốc riêng của tàu thủy là 21 km/h.

**Bài 9.22.** Thời gian xe lăn bánh trên đường là 48 giờ.

**Bài 9.23.** Vận tốc lúc đầu của ô tô là 48 km/h.

**Bài 9.24.** Vận tốc của người đi xe đạp trên đoạn đường đi ban đầu là 10 km/h. *Gợi ý:* Từ giả thiết suy ra rằng nếu 30 km còn lại người đi xe đạp đi với vận tốc tăng thêm 5 km/h thì thời gian sẽ giảm đi là 1 giờ.

**Bài 9.25.** Vận tốc của máy bay cánh quạt là 600 km/h; Vận tốc của máy bay phản lực là 900 km/h.

**Bài 9.26.** Vận tốc xe đi từ Hà Nội là 50 km/h; Vận tốc xe đi từ Nam Định là 40 km/h.

**Bài 9.27.** Vận tốc của canô khi nước yên lặng là 12 km/h.

**Bài 9.28.** Đơn vị thứ nhất: 350 tấn; Đơn vị thứ 2: 250 tấn.

**Bài 9.29.** 9 xe

**Bài 9.30.**  $0,8 \text{ g/cm}^3; 0,6 \text{ g/cm}^3$ .

**VẤN ĐỀ 10. BÀI TOÁN VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ PARABOL**

**Bài 10.1.** a) ii)  $A(-1; \frac{1}{2}); B(2; 2);$  iii)  $S_{AOB} = \frac{3}{2};$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là:  $x^2 - x - 2n = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 8n$

Ta có: i)  $n = -\frac{1}{8};$  ii)  $n > -\frac{1}{8};$

iii) (P) và d cắt nhau tại hai điểm nằm ở hai phía trục tung  $ac < 0 \Leftrightarrow n > 0.$

**Bài 10.2.** a) Gọi  $d: y = +b.$  Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là  $x^2 - 3ax - 3b = 0 \Rightarrow \Delta = 9a^2 + 12b.$  Theo bài ra ta có:

$$\begin{cases} \Delta = a^2 + \frac{4}{3}b = 0 \\ 3a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow d: y = 2x - 3.$$

b) d có dạng:  $y = -2x + c$  với  $c \neq \frac{5}{2}.$  Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là

$$x^2 + 2x - c = 0; \text{ d tiếp xúc với (P)} \Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow c = -1 \Rightarrow y = -2x - 1.$$

c) Gọi  $d: y = ax + b.$  Theo bài ra ta có:  $A, B \in (P) \Rightarrow A(-2; 1), B(4; 4)$

$$\text{Do } A, B \in d \Rightarrow \begin{cases} -2a + b = 1 \\ 4a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow d: y = \frac{1}{2}x + 2.$$

**Bài 10.3.** a) Ta có  $d: y = kx - 1.$  Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):  $x^2 + kx - 1 = 0.$

Ta có:  $\Delta = k^2 + 4 > 0$  với mọi  $k \Rightarrow \text{ĐPCM}.$

b) Ta có:  $|x_1 - x_2|^2 = k^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow |x_1 - x_2| \geq 2;$

c) Sử dụng định lí Pitago đảo.

**Bài 10.4.** b)  $A(-1; 1); B(3; 9); S_{ABCD} = 20.$

**Bài 10.5.** a) Thay tọa độ điểm A vào phương trình của (P)  $\Rightarrow m = \frac{2}{3} \Rightarrow (P): y = \frac{1}{3}x^2$

b) Ta có  $B(2\sqrt{3}; 4), A(-2\sqrt{3}; 4) \Rightarrow AB = 4\sqrt{3} \Rightarrow S_{AOB} = \frac{1}{2}AB \cdot 4 = 8\sqrt{3}$  (đvdt)

**Bài 10.6.** a)  $y = -x^2$ ; b) Với  $m > 1$  hoặc  $m < -2$ : d cắt (P) tại hai điểm phân biệt; Với  $m = 1$  hoặc  $m = -2$ : d tiếp xúc với (P); Với  $-2 < m < 1$ : d không cắt (P).

**Bài 10.7.** a)  $(d'): y = -3x + 5$ ; b) Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):  $mx^2 + 3x - 1 = 0$

. Yêu cầu của bài toán  $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9 + 4m > 0 \\ x_1x_2 = -\frac{1}{m} > 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{9}{4} < m < 0$ .

**Bài 10.8.** a)  $A(-2; -1)$ ; b)  $y = -\frac{1}{4}x^2$ ; c) Tương tự Bài 10.2.a.  $y = x + 1$ .

**Bài 10.9.** b) Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$$\frac{x^2}{4} + mx - 2m - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = m^2 + 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1; \text{ c) } A(2; -1).$$

**Bài 10.10.**

a) Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) có dạng  $\frac{1}{2}x^2 + mx - 2 = 0$  (\*) có  $a, c$  trái dấu;

b) Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của (\*)  $\Rightarrow A(x_1; mx_1 - 2), B(x_2; mx_2 - 2)$  và  $x_1 + x_2 = -2m, x_1x_2 = -4$   
 $\Rightarrow AB = \sqrt{(4m^2 + 16)(m^2 + 1)} \Rightarrow AB_{\min} = 4$  tại  $m = 0$ . Từ đó  $S_{AOB} = 1$ .

**Bài 10.11.** a) Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) có  $a, c$  trái dấu;

b) Chứng tỏ:  $IH^2 + IK^2 = HK^2$  và sử dụng định lí Pitago đảo.

**Bài 10.12.** a) Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) có dạng:  $x^2 - mx + m - 1 = 0$ . Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi  $m \neq 2, m = -2$  hoặc  $m = 4$ ;

b) Ta có hệ:  $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = m - 1 \Rightarrow m = 10; m = \frac{10}{9} \\ x_1 = 9x_2 \end{cases}$

**Bài 10.13.** a)  $y = -\frac{1}{4}x^2$ ; b)  $m = -\frac{5}{6}$ .

**Bài 10.14.** a)  $(\sqrt{2}; 2)$  và  $(-\sqrt{2}; 2)$ ; b)  $\Delta' = (m-1)^2 + 2 > 0, \forall m$ ; c)  $-\frac{1}{2} < m < \frac{3}{2}$

ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 2

**Bài 11.1.** Đáp số: a)  $-\frac{1}{2} < m \neq 0$ ;      b)  $m = -\frac{1}{2}$ ;      c)  $m < -\frac{1}{2}, m = 0, m = \frac{1}{2}$ ;

d)  $m = -\frac{1}{2}, m = 0$ ;      e)  $m = 0, m \geq -\frac{1}{2}$ .

**Bài 11.2.** Chứng minh được:  $\Delta'_1 + \Delta'_2 + \Delta'_3 > 0 \Rightarrow \text{ĐPCM}$ .

**Bài 11.3.** a) Với  $m = 2$  thì phương trình có nghiệm kép  $x_1 = x_2 = -2$ ;

Với  $m \neq 2$  thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt là  $x_1 = -2, x_2 = -m$ ;

- b)  $m = -3$  và nghiệm còn lại là  $x = -2$ ;  
 c)  $m = 2$       d)  $m = -2$ ;      e)  $m > 0$  và hai nghiệm cùng âm;  
 g) i)  $A = m^2 - 8m + 8$ ;    ii)  $m = 0$       iii)  $A_{\min} = -8 \Leftrightarrow m = 4$ ;  
 h)  $P = -8$  không phụ thuộc vào  $m$ .

**Bài 11.4.** Đáp số: a)  $x = -3, x = 6$ ;      b)  $x = 2, x = 1$ .

**Bài 11.5.** a)  $d: y = kx + k - 2$ ;

b) Phương trình hoành độ giao điểm của  $d$  và  $(P)$  là  $x^2 + kx + k - 2 = 0$  có  $a, c$  trái dấu  
 $\Leftrightarrow k < 2$ ;

c)  $S_{\min} = -\frac{15}{4} \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$ .

**Bài 11.6.** Ta có:  $\Delta' = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac$ . Chứng minh được  $\Delta' \geq 0 \Rightarrow \text{ĐPCM}$ .

**Bài 11.7.** a) Ta có  $\Delta = (2a + 3)^2 + 4 > 0 \forall a \in \mathbb{R}$       b)  $A_{\min} = 6 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$ ;

c)  $a > -\frac{3}{4}$ ;      d)  $a \in \emptyset$ .

**Bài 11.8.** Đáp số: a)  $x = 1 + 7\sqrt{41}$ ;      b)  $x = 1 \pm \sqrt{2}, x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ .

**Bài 11.9.** a) Học sinh tự làm;      b) Điểm cố định  $M(0;1)$ ; Phương trình hoành độ giao điểm của  $d$  và  $(P)$  có  $a, c$  trái dấu;  
 c)  $m = \pm 2\sqrt{3}$ .

**Bài 11.10.** a)  $\Delta = (2m - 7)^2 + 39 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ ;      b)  $A_{\max} = -\frac{471}{16} \Leftrightarrow m = \frac{27}{8}$ ;      c)  $m = 3$ .

**Bài 11.11.** a) Phương trình hoành độ giao điểm của  $d$  và  $(P)$  có  $a, c$  trái dấu;      b)  $\frac{2014}{2}$ .

**Bài 11.12.** a) ĐK:  $m \neq -2$ ;      b)  $m = 0; m = -4$ ;      c)  $m < -1; m \neq -2$ .

**Bài 11.13.** a) Phương trình hoành độ giao điểm của  $d$  và  $(P)$  có nghiệm kép  $x = 1 \Rightarrow y = 2$ ;

c) ĐK:  $m \neq 4 \Rightarrow m > 8$  (thỏa mãn).

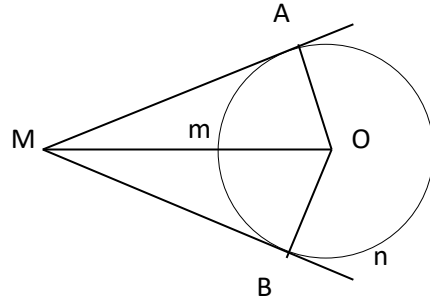
**Bài 11.14.** a) Phương trình hoành độ giao điểm của  $d$  và  $(P)$  có  $a, c$  trái dấu; b)  $m = \pm 1$ .

CHỦ ĐỀ 3. GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

VẤN ĐỀ 1. GÓC Ở TÂM. SỐ ĐO CUNG

Bài 1.1.

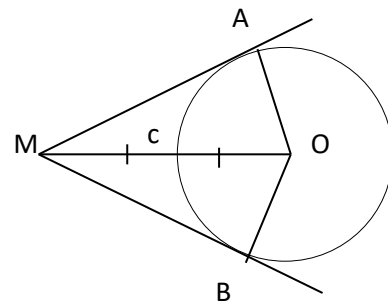
- a)  $\widehat{AMO} = 20^\circ; \widehat{AOM} = 70^\circ$ .  
 b) Số  $\widehat{AmB} = 140^\circ$   
 $\Rightarrow$  số  $\widehat{AnB} = 220^\circ$



Bài 1.1

Bài 1.2.

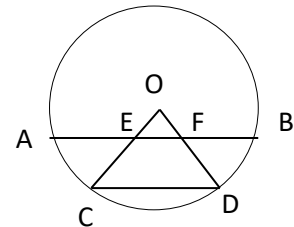
- a)  $\widehat{AOM} = 60^\circ$ ;  
 b)  $\widehat{AOB} = 120^\circ$ , số  $\widehat{AB} = 120^\circ$ ;  
 c)  $\widehat{AOC} = \widehat{BOC} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BC}$ .



Bài 1.2

Bài 1.3.

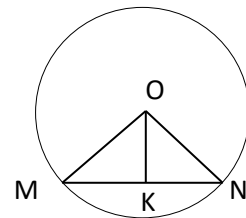
- a)  $\triangle OEA = \triangle OFB \Rightarrow AE = FB$   
 b) Chứng minh:  $\widehat{OEF} = \widehat{OCD}$   
 $\Rightarrow AB \parallel CD$ .



Bài 1.3

Bài 1.4.

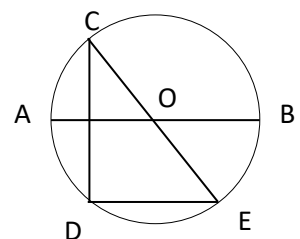
- a)  $OK = \frac{R}{2}$ ;  
 b)  $\widehat{MOK} = 60^\circ; \widehat{MON} = 120^\circ$ ;  
 c) Số  $\widehat{MN} = 120^\circ$   
 $\Rightarrow$  số  $\widehat{MN}$  lớn =  $240^\circ$ .



Bài 1.4

Bài 1.5.

- a) Số  $\widehat{BE} = 50^\circ$ .  
 b) Chứng minh được:  
 Số  $\widehat{CBE} = 180^\circ \Rightarrow C, O, E$  thẳng hàng.



Bài 1.5



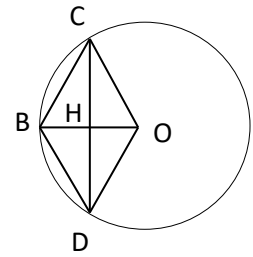
**Bài 1.6.** Chứng minh được:

$\triangle BOC$  và  $\triangle BOD$  đều.

Chứng minh được:

Sđ  $\widehat{CBD} = 120^\circ$

$\Rightarrow$  sđ  $\widehat{CD}$  lớn  $= 140^\circ$ .



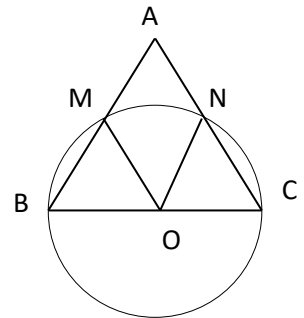
Bài 1.6

**Bài 1.7.** Chứng minh được:

$\triangle BOM = \triangle CON$  (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{BM} = \widehat{CN}$

b)  $\widehat{MON} = 100^\circ$ .



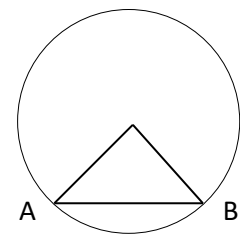
Bài 1.7

**Bài 1.8.**  $\triangle OAB$  vuông tại O

$\Rightarrow \widehat{AOB} = 90^\circ$

$\widehat{AOB} = \text{sđ } \widehat{AB} \Rightarrow \text{sđ } \widehat{AB}$  nhỏ  $= 90^\circ$

$\Rightarrow$  sđ  $\widehat{AB}$  lớn  $= 270^\circ$ .



Bài 1.8

**Bài 1.9.** Tương tự Bài 1.2. Chứng minh được:  $\widehat{AOB} = 120^\circ$

**VẤN ĐỀ 2. LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY**

**Bài 2.1.** Trường hợp 1: Kẻ  $MN \perp AB$

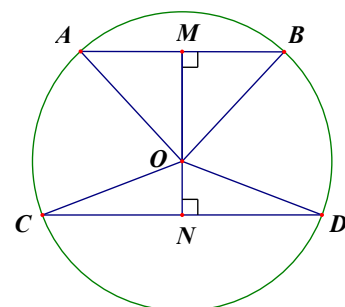
(O nằm giữa M và N) (hình 1a)

$\triangle \perp AMO = \triangle \perp BMO$  (ch - cgc)  $\Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{BOM}$  (1)

Tương tự  $\widehat{COM} = \widehat{DON}$  (2)

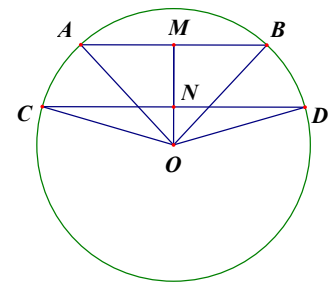
Từ (1) và (2) suy ra:  $\widehat{AOC} = \widehat{BOD} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$

Trường hợp 2: Kẻ  $MN \perp AB$  (N nằm giữa O và M)



Bài 2.1a

Chúng minh tương tự ta cũng được  $\widehat{AOC} = \widehat{BOD} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$

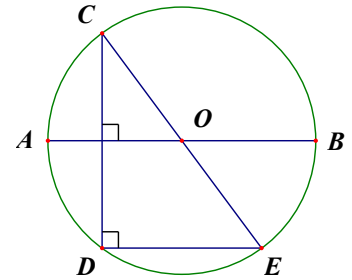


**Bài 2.1a**

**Bài 2.2.** Ta có  $CD \perp AB$  và  $AB \parallel DE$

$\Rightarrow CD \perp DE \Rightarrow CD$  là đường kính (O).

Chúng minh được  $\Delta AOC = \Delta BOE$  (c.g.c)  $\Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BE}$



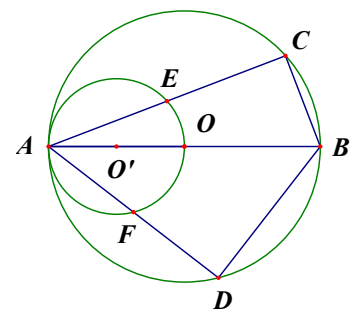
**Bài 2.2**

**Bài 2.3.** a)  $OE \perp AC \Rightarrow E$  là trung điểm  $AC \Rightarrow OE = \frac{1}{2}BC$ .

Tương tự  $OF = \frac{1}{2}DB$  mà  $BC < BD \Rightarrow OE < OF$

b) Dễ thấy  $AE^2 = AD^2 - OE^2$  và

$AF^2 = AO^2 - OE^2 \Rightarrow AE^2 > AF^2 \Rightarrow AE > AF \Rightarrow \text{sđ } \widehat{AE} > \text{sđ } \widehat{AF}$



**Bài 2.3**

**Bài 2.4.** a) Học sinh tự chứng minh

b) Gợi ý:

$$IA^2 + IC^2 = AC^2, IB^2 + ID^2 = BD^2 \text{ và } AC = ED$$

c) Gợi ý: Lấy M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Ta có:

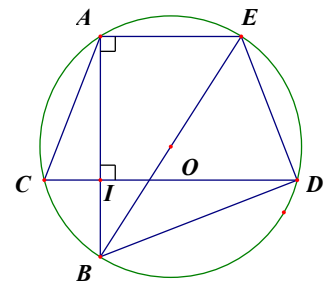
$$AB^2 + CD^2 = 4AM^2 + 4CN^2 = 4(R^2 - OM^2) + 4(R^2 - ON^2)$$

Chú ý:  $OM^2 + ON^2 = OI^2$

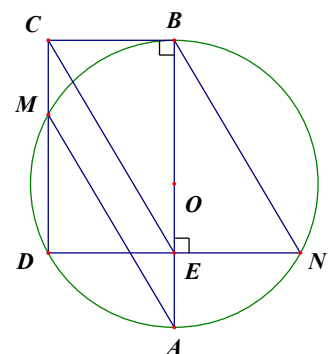
**2.5.** a) Học sinh tự chứng minh

b) Chứng minh được: Tứ giác BCEN là hình bình hành

$$BC \parallel EN, AB \perp BC \Rightarrow AB \perp EN$$



**Bài 2.4**



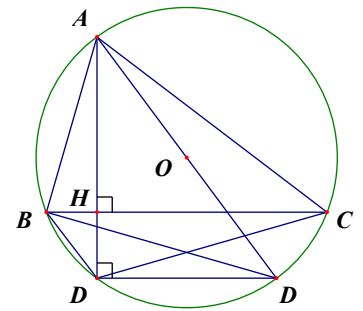
**Bài 2.5**

$\Rightarrow BC$  là tiếp tuyến của (O).

2.6. a) Dễ thấy:  $AD \perp BC \Rightarrow DE // BC$

b) Ta có:  $DE // BC$ . Chứng minh được  $\widehat{BE} = \widehat{CD} \Rightarrow BE = CD$

$\Rightarrow BDEC$  là hình thang cân



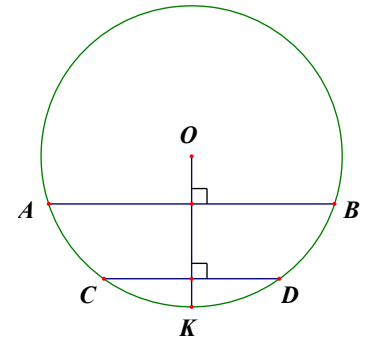
Bài 2.6

2.7. Chứng minh được:  $\Delta ACB = \Delta BDA \Rightarrow AC = BD \Rightarrow \text{ĐPCM}$

Cách 2. Ta có  $\widehat{BC} = \widehat{AD}$  mà  $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$ . Từ hai vế ta được ĐPCM

2.8. Lấy K là điểm chính giữa cung nhỏ  $\widehat{AB}$ . Chứng minh được

$\widehat{CK} = \widehat{KD}$ . Mặt khác:  $OK \perp CD, OK \perp AB \Rightarrow CD // AB$ .



Bài 2.8

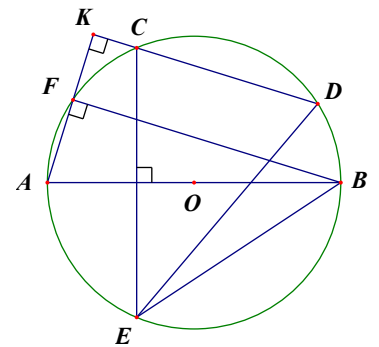
2.9. Học sinh tự chứng minh.

2.10. Gợi ý: Đưa về góc ở tâm. Chú ý xét đủ các trường hợp.

2.11. a) Học sinh tự chứng minh.

b) Do AB là đường trung trực của CE  $\Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{BE} \Rightarrow \widehat{BF} = \widehat{DE}$

c) Sử dụng mối liên hệ cung và dây



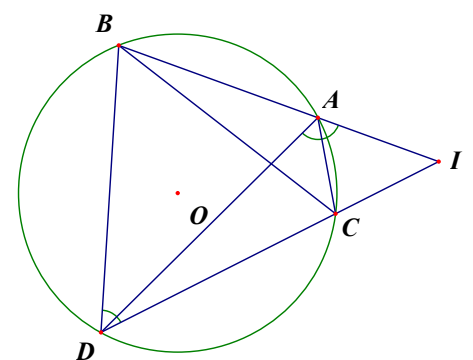
Bài 2.11

### VẤN ĐỀ 3. GÓC NỘI TIẾP (PHẦN I)

3.1.\*) Trường hợp 1: I nằm ngoài O

a)  $\widehat{ACI}$  là góc ngoài của  $\Delta ACD \Rightarrow \widehat{ACI} = \widehat{ADC} + \widehat{DAC}$ . Từ đó chứng minh được:  $\widehat{CAI} = \widehat{CDB}$

b) Học sinh tự làm



Bài 3.1

c)  $\Delta IAC$  đồng dạng với  $\Delta IDB$  (g - g)

$$\Rightarrow \frac{IA}{ID} = \frac{IC}{IB} \Rightarrow IA \cdot IB = IC \cdot ID$$

\*) Trường hợp 2: I nằm trong (O)  $\Rightarrow$  Học sinh làm tương tự.

3.2. Do  $sđ \widehat{MB} = sđ \widehat{NC} \Rightarrow \widehat{NAS} = \widehat{ANS} \Rightarrow SA = SN \Rightarrow SM = SC$

3.3. a) MPHQ là hình chữ nhật  $\Rightarrow MH = PQ$

b)  $MP \cdot MA = MQ \cdot MB \Rightarrow \Delta MPQ$  đồng dạng với  $\Delta MAB$  (c.g.c)

c)  $\widehat{PMH} = \widehat{MBH} \Rightarrow \widehat{PQH} = \widehat{O_2QB} \Rightarrow PQ$  là tiếp tuyến ( $O_2$ )

Tương tự PQ là tiếp tuyến ( $O_1$ )

3.4. a) Ta có  $\widehat{ACM} = 90^\circ$  (góc nội tiếp)

b) Ta có các tam giác vuông:

$\Delta ABH$  và  $\Delta AMC$  đồng dạng (g-g)

$$\Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{OAC}, \widehat{OCA} = \widehat{OAC}$$

$$\Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{OCA}$$

c)  $\widehat{ANM} = 90^\circ \Rightarrow MNBC$  là hình thang

$$\Rightarrow BC // MN \Rightarrow cđ \widehat{CN} = sđ \widehat{CM}$$

$$\Rightarrow sđ \widehat{BM} = sđ \widehat{CN} \Rightarrow BM = CN \Rightarrow MNBC \text{ là hình thang cân}$$

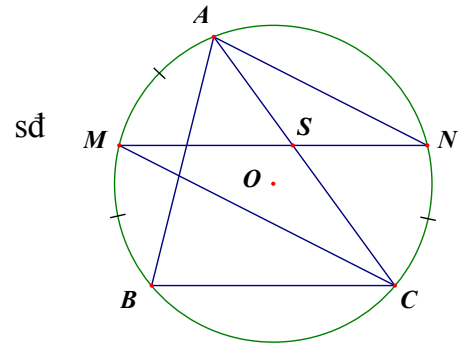
3.5. Do  $AB // CD \Rightarrow sđ \widehat{AC} = sđ \widehat{BD} \Rightarrow \widehat{AMC} = \widehat{BMD}$  (góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

3.6. Chứng minh được:  $\Delta ABD$  đồng dạng  $\Delta AEB$  (g - g)

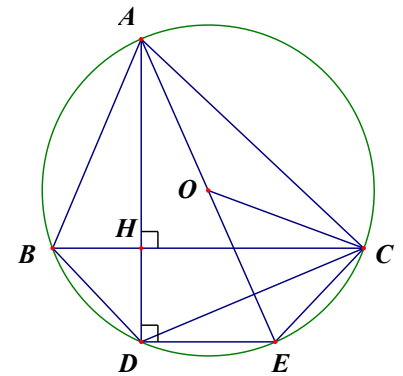
$$\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD \cdot AE$$

3.7. Xét các tam giác đồng dạng để chứng minh

3.8. Gọi P là giao điểm AO và (O). tính được:  $AP = 24cm$  và  $AO = 12cm$



Bài 3.2



Bài 3.5

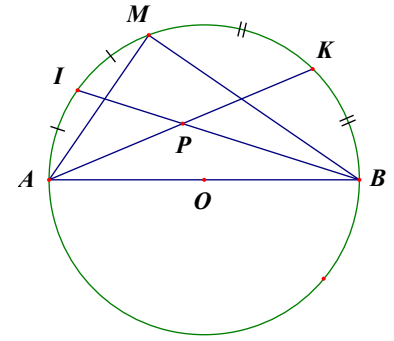
VẤN ĐỀ 4. GÓC NỘI TIẾP (PHẦN II)

4.1. a)  $M, A, B \in (O)$  và  $\widehat{AMB} = 90^\circ$

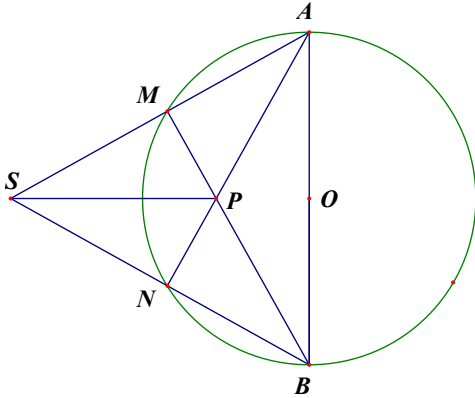
$\Rightarrow AB$  là đường kính  $(O)$

$\Rightarrow A, O, B$  thẳng hàng.

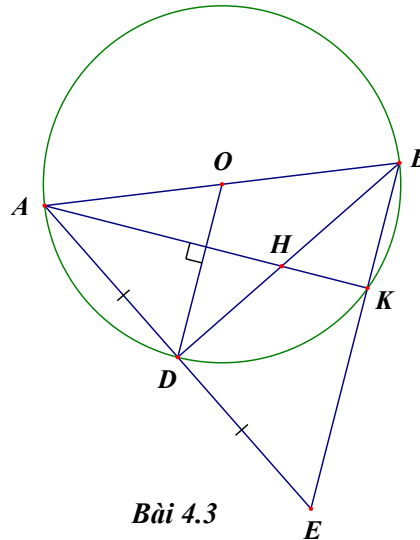
b) Hướng dẫn: Chứng minh  $AK$  và  $BI$  lần lượt là phân giác trong góc  $A, B$  của tam giác  $MAB$ .



Bài 4.1



Bài 4.2



Bài 4.3

**Bài 4.2. Hướng dẫn:** Chứng minh  $P$  là trực tâm tam giác  $SAB$ .

**Bài 4.3. a)** Chứng minh được:  $\triangle BAE$  cân tại  $B$ .

b) Chứng minh được:  $DO \parallel BE$  (tính chất đường trung bình), mà  $AK \perp BE$  ( $\widehat{AKB} = 90^\circ$ )  $\Rightarrow AK \perp DO$  (tính chất từ vuông góc đến song song).

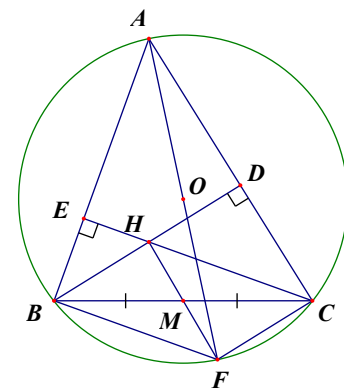
**Bài 4.4. a)** Chứng minh được:  $BFCH$  là hình bình hành.

b) Chứng minh được:  $M$  là trung điểm  $HF$

$\Rightarrow H, M, F$  thẳng hàng.

c)  $OM$  là đường trung bình của  $\triangle AHF$

$$\Rightarrow OM = \frac{1}{2} AH$$



Bài 4.4

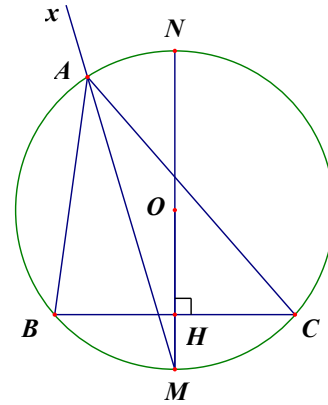
**Bài 4.5.** Chứng minh được:

$$\widehat{BM} = \widehat{MC} \Rightarrow AM \text{ là phân giác trong.}$$

Mặt khác:

$$\widehat{MAN} = 90^\circ = \frac{1}{2} \widehat{MAx}$$

$\Rightarrow AN$  là phân giác ngoài



Bài 4.5

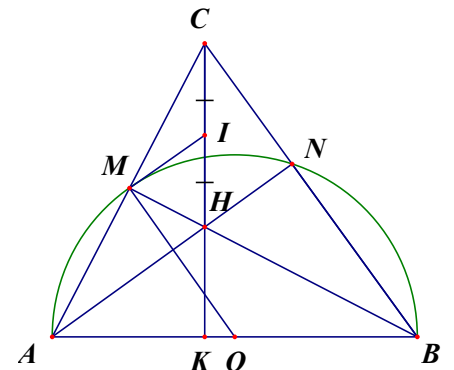
**Bài 4.6.** a) Dễ chứng minh được:  $CH \perp AB$

b) Gọi  $CH \cap AB = K$ . Chứng minh được  $\triangle MIC$  cân tại I

$$\Rightarrow \widehat{ICM} = \widehat{IMC} .$$

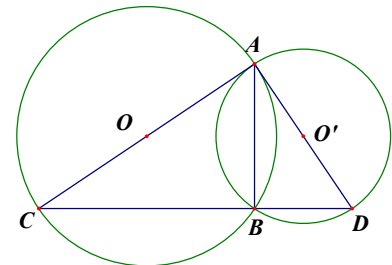
Tương tự  $\widehat{OMA} = \widehat{OAM}$  .

Chứng minh được  $\widehat{IOM} = 90^\circ \Rightarrow MI$  là tiếp tuyến (O).



Bài 4.6

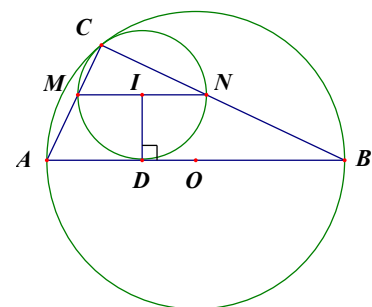
**Bài 4.7.**  $\widehat{ABD} + \widehat{ABC} = 180^\circ \Rightarrow C, B, D$  thẳng hàng.



Bài 4.7

**Bài 4.8.** Chứng minh được:  $\widehat{IMC} = \widehat{OAC}$  ( $= \widehat{ICM}$ )

$\Rightarrow MI \parallel AB, NI \parallel AB \Rightarrow M, I, N$  thẳng hàng.



Bài 4.8

VẤN ĐỀ 5. GÓC TẠO BỞI TIA TIẾP TUYẾN VÀ DÂY (PHẦN I)

**Bài 5.1.** a)  $\widehat{ABM} = \widehat{ANB} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{BM}$ .

Chứng minh được:  $\triangle ABM$  đồng dạng với  $\triangle ANB$  (g - g)

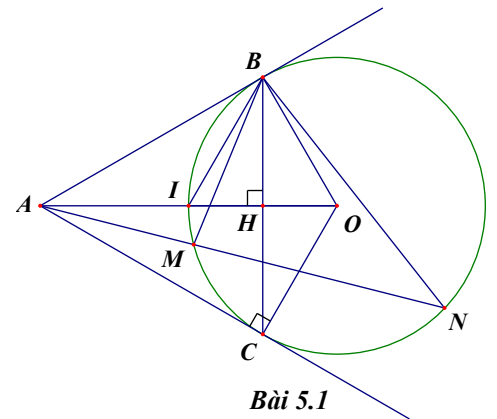
$$\Rightarrow AB^2 = AM \cdot AN.$$

b)  $AO \perp BC$  tại H.  $\triangle ABO$  vuông tại B có BH là đường cao

$$\text{Vậy } AH \cdot AO = AM \cdot AN.$$

c) Chứng minh được  $\widehat{ABI} = \widehat{CBI} \Rightarrow BI$  là phân giác  $\widehat{ABC}$ .

$AO$  là phân giác  $\widehat{BAC} \Rightarrow I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ .

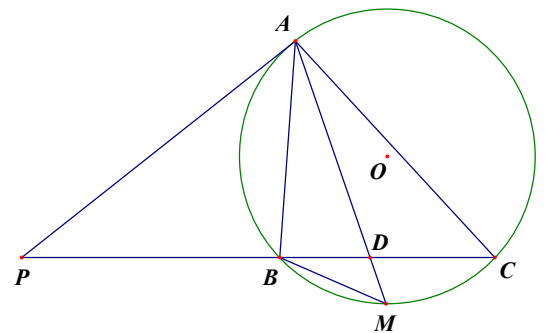


Bài 5.1

**Bài 5.2.** a) Học sinh tự chứng minh

$$b) \frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PA} \Rightarrow PA^2 = PB \cdot PC$$

c) Chứng minh được:  $\widehat{BAM} = \widehat{MBC}$ . Từ đó chứng minh được  $\triangle MAB$  đồng dạng  $\triangle MBD \Rightarrow MB^2 = MA \cdot MD$ .

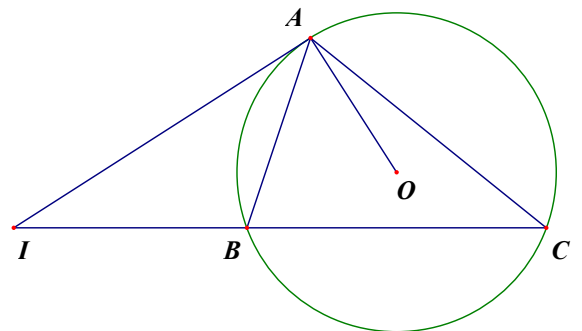


Bài 5.2

**Bài 5.3.** Chứng minh được:  $\triangle BAI$  đồng dạng  $\triangle ACI$  (g - g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{IB}{IA} \Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{IB^2}{IA^2}$$

$$\text{Mặt khác: } IA^2 = IB \cdot IC \Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{IB^2}{IB \cdot IC} = \frac{IB}{IC}.$$

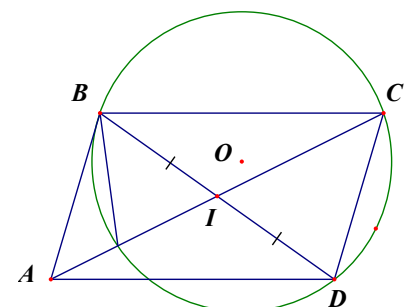


Bài 5.3

b) Do  $\triangle BAI$  đồng dạng  $\triangle ACI$  (g - g)

$$\Rightarrow \frac{AI}{CI} = \frac{BI}{AI} = \frac{AB}{CA}$$

$$\Rightarrow \frac{IA}{IC} = \frac{IC - 24}{IA} = \frac{5}{7} \Rightarrow IA = 35\text{cm}, IC = 49\text{cm}.$$



Bài 5.4

**Bài 5.4.** Gọi  $BD \cap AC = I$ . Ta có:  $\widehat{BAI} = \widehat{ACD}$ ,  $\widehat{ACD} = \widehat{EBD} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{ED}$

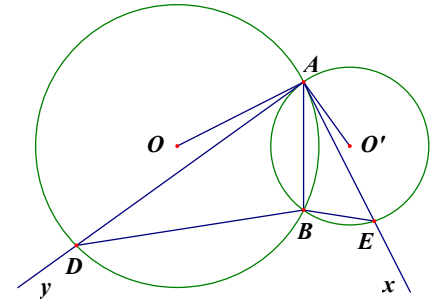
$\Rightarrow \triangle IBE$  đồng dạng với  $\triangle IAB$  (g – g)

$\Rightarrow \text{ĐPCM}$

**Bài 5.5.** Chứng minh được  $\triangle AMN$  đồng dạng với  $\triangle ACB$  (g – g)

$\Rightarrow AB \cdot AM = AC \cdot AN$ .

**Bài 5.6.** Học sinh tự chứng minh.



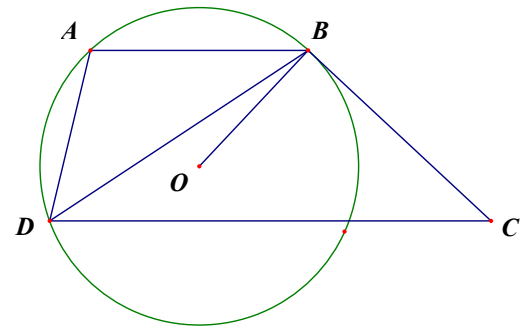
Bài 5.6

**Bài 5.7.** Chứng minh được:  $\triangle ADC$  đồng dạng với  $\triangle BAD$

$\Rightarrow \widehat{DBC} = \widehat{BAD}$

$\Rightarrow \text{sđ} \widehat{DBC} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{BmD}$

$\Rightarrow BC$  là tiếp tuyến của (O).

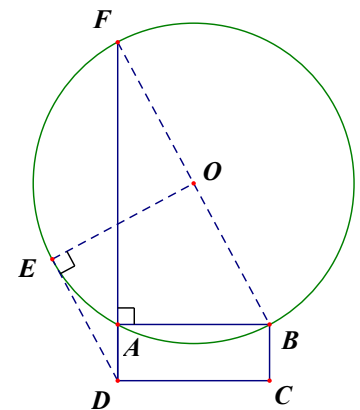


Bài 5.7

**Bài 5.8.** Kẻ đường kính  $BF$  thì  $F, A, D$  thẳng hàng. Gọi  $DE$  là tiếp tuyến

kẻ từ  $D$ . Khi đó ta có:  $DE^2 = DA \cdot DF$

$\Rightarrow AF = 6(\text{cm}) \Rightarrow OB = \sqrt{10} (\text{cm})$ .



Bài 5.8

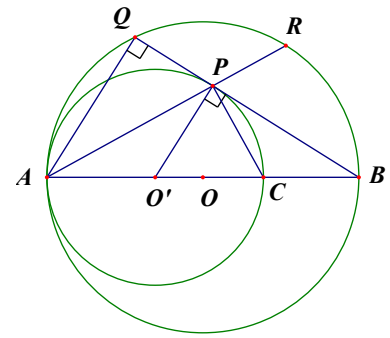
**VẤN ĐỀ 6. GÓC TẠO BỞI TIA TIẾP TUYẾN VÀ DÂY (PHẦN II)**

**Bài 6.1.** a) Chứng minh  $\Rightarrow AQ \parallel O'P$

$\Rightarrow \widehat{QAP} = \widehat{O'AP}$ .



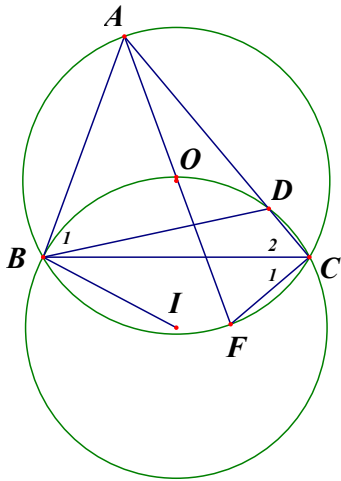
b)  $CP \parallel BR$  ( cùng vuông góc với  $AR$ ).



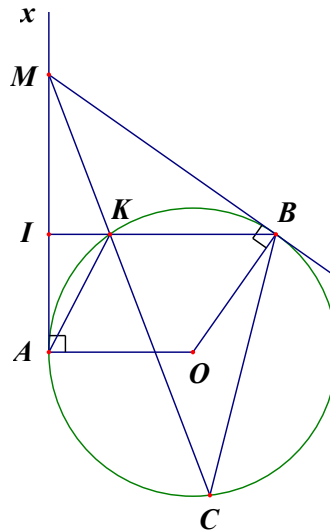
Bài 6.1

**Bài 6.2.** Kẻ đường kính AF. Chứng minh  $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$  và  $\widehat{B_1} = \widehat{C_2}$

$$\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{B_1} = 90^\circ \Rightarrow AO \perp BD.$$



Bài 6.2



Bài 6.3

**Bài 6.3.** a) Các  $\triangle IAK$  và  $\triangle IBA$  đồng dạng  $\Rightarrow \frac{KA}{KB} = \frac{AE}{BE}$ ; mà  $IA = IM$

$$\Rightarrow \frac{IM}{IB} = \frac{IK}{IB} \Rightarrow \triangle IKM \text{ và } \triangle IMB \text{ đồng dạng.}$$

b) Chứng minh được:  $\widehat{IMK} = \widehat{KCB} \Rightarrow BC \parallel MA$ .

**Bài 6.4.** a) Ta có:  $\widehat{DAM} = \widehat{E} = \widehat{GMN}, \widehat{DNM} = \widehat{GNM}$

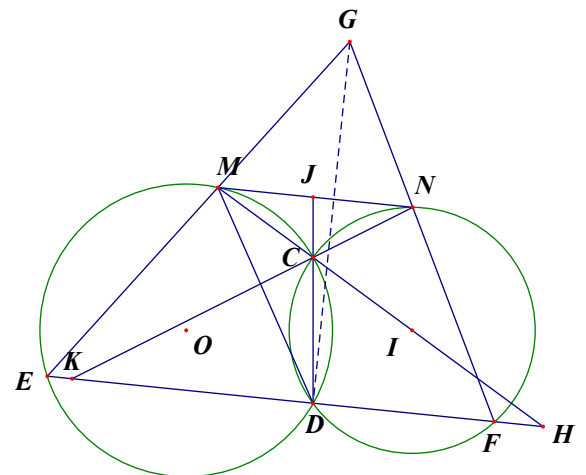
$$\Rightarrow \triangle GMN = \triangle DMN.$$

b) Chứng minh được:  $MN$  là đường trung trực của  $GD$ . Mặt khác:  $MN \parallel EF \Rightarrow GD \perp EF$  (1)

Gọi  $J$  là giao điểm của  $DC$  và  $MN$ .

$$\text{Ta có: } \frac{JM}{DH} = \frac{JN}{DK} \text{ (cùng bằng } = \frac{CJ}{CD} \text{)}$$

$$\text{Lại có: } JM = KN \text{ (cùng bằng } \sqrt{JC \cdot JD} \text{)}$$



Bài 6.4

$\Rightarrow DH = DK$  (2). Từ (1) và (2)  $\Rightarrow ĐPCM$ .

**Bài 6.5.** Học sinh tự chứng minh.

**Bài 6.6.** Do  $\widehat{BAM} = \widehat{CAM}$

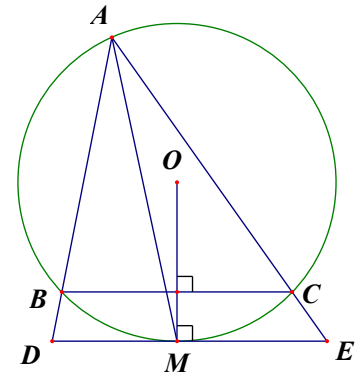
$\Rightarrow \widehat{BM} = \widehat{MC} \Rightarrow OM \perp BC$

$\Rightarrow BC \parallel DE$  (cùng  $\perp OM$ ).

**Bài 6.7.** Học sinh tự làm.

**Bài 6.8.** Học sinh tự làm.

**Bài 6.9.** Học sinh tự làm.



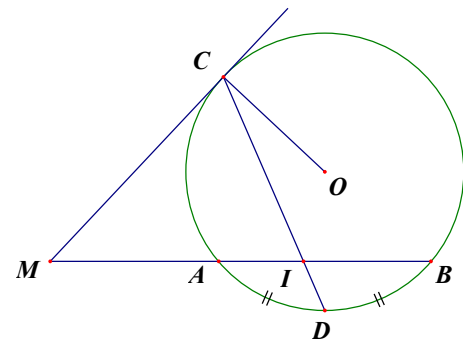
Bài 6.6

### VẤN ĐỀ 7. GÓC CÓ ĐỈNH BÊN TRONG HAY BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN (PHẦN I)

**Bài 7.1.** a) HS tự chứng minh

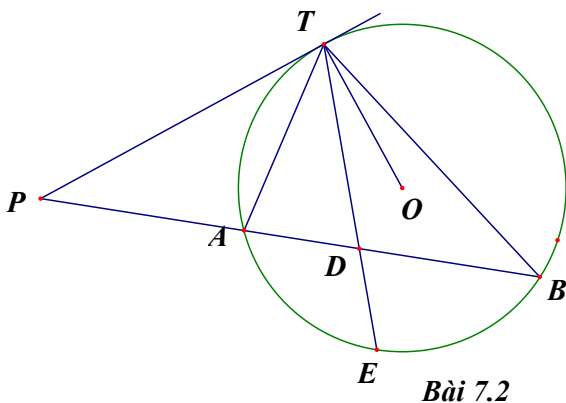
b)  $\triangle MCI$  cân tại  $M$

$\Rightarrow MI = MC$ .

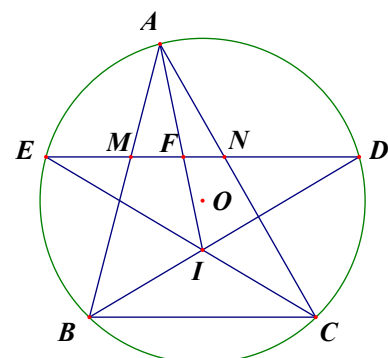


Bài 7.1

**Bài 7.2.** Kéo dài  $TD$  cắt  $\widehat{AB}$  tại  $E$ . Ta có:  $\widehat{AE} = \widehat{EB}$ ;  $\triangle PTD$  cân tại  $P \Rightarrow PT = PD$ .



Bài 7.2



Bài 7.3

**Bài 7.3.** a) Ta có:  $\widehat{AD} = \widehat{DC}$ ,  $\widehat{AE} = \widehat{EB}$

$\Rightarrow \triangle AMN$  cân tại  $A$ . Kéo dài  $AI$  cắt đường tròn (O) tại  $K$ .

$\Rightarrow \widehat{BK} = \widehat{KC}$ . Tương tự học sinh tự chứng minh  $\triangle AIE$  cân tại  $E$  và  $\triangle DIA$  cân tại  $D$ .

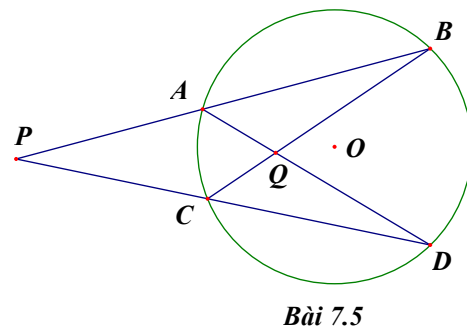
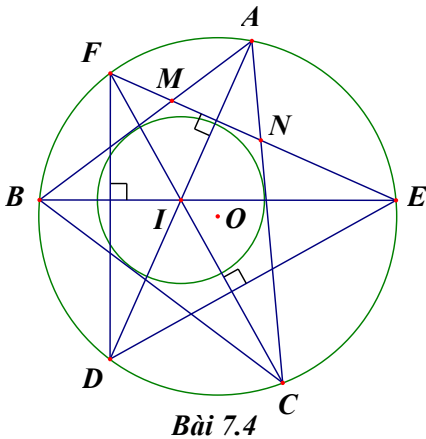
b) Chứng minh được:  $\triangle AMN$  cân tại  $A \Rightarrow$  Phân giác  $AI$  đồng thời là đường trung tuyến và cũng là đường cao  $\Rightarrow AI \perp MN$  tại  $F$  và  $MF = FN$ . Tương tự  $\triangle EAI$  cân tại  $E$  và  $AE = IE$ . Tứ giác  $AMIN$  là hình thoi.

**Bài 7.4.** a) Chứng minh được:  $\triangle DBI$  cân tại  $D \Rightarrow DI = DB$  ;

b) Học sinh tự chứng minh.

c)  $\triangle AMN$  cân tại  $A \Rightarrow$  phân giác  $AI$  là đường cao

$\Rightarrow AI \perp MN \Rightarrow DI \perp EF$ .



**Bài 7.5.** Ta có:  $\widehat{BPD} = \frac{1}{2}(\text{sđ } \widehat{BD} - \text{sđ } \widehat{AC})$

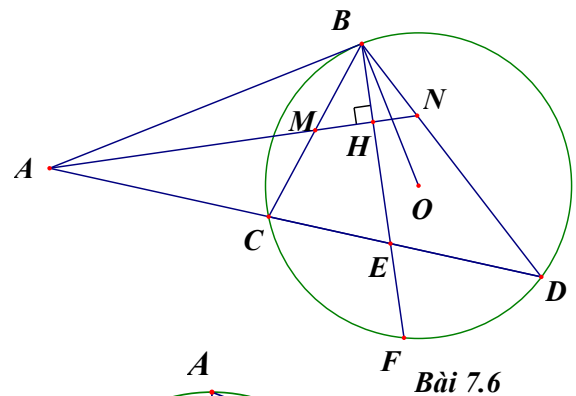
$$\widehat{AQC} = \frac{1}{2}(\text{sđ } \widehat{BD} + \text{sđ } \widehat{AC}) \Rightarrow \widehat{BPD} + \widehat{AQC} = \text{sđ } \widehat{BD}$$

Mà  $\widehat{BCD} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{BD} \Rightarrow \triangle PCM$ .

**Bài 7.6.** a) Học sinh tự chứng minh.

b)  $\triangle EDF$  đồng dạng với  $\triangle DBF$  (g - g)

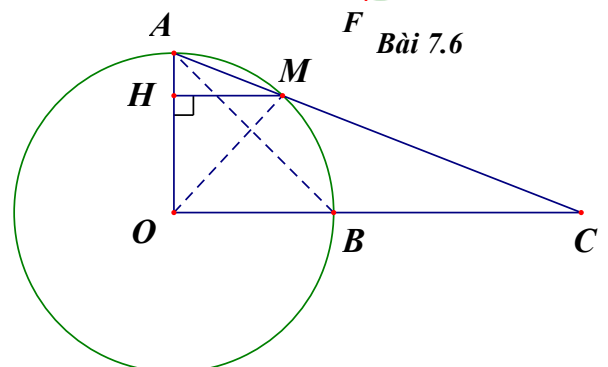
$$\Rightarrow \frac{DF}{BF} = \frac{EF}{DF} \Rightarrow FD^2 = EF \cdot BF.$$



**Bài 7.7.** Vẽ đường kính BOD. Tính được

$\widehat{C} = 22^\circ 30'$ , do  $BC = 2\sqrt{2}$

$$\Rightarrow OC = 2 + 2\sqrt{2}.$$



$\Delta OHM$  vuông cân tại  $H$  nên  $OH = MH$

$$= \frac{OM}{2} = \sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow S_{OHMC} = 3 + \sqrt{2} (cm^2).$$

**Bài 7.8.** Học sinh tự chứng minh.

**VẤN ĐỀ 8. GÓC CÓ ĐỈNH BÊN TRONG HAY BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN (PHẦN II)**

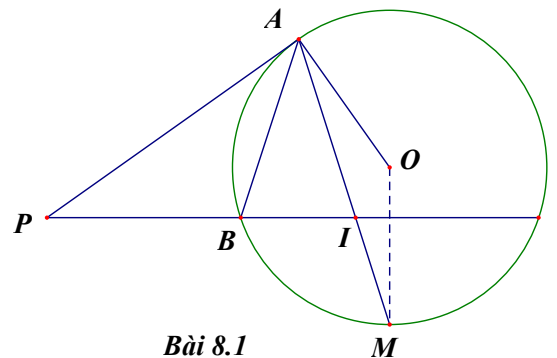
**Bài 8.1.** a) Chứng minh được:  $\widehat{PAB} = \widehat{ACB} \Rightarrow \Delta PAB$  và  $\Delta PCA$

đồng dạng (g - g)  $\Rightarrow \frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PA} \Rightarrow PA^2 = PB.PC$ .

b)  $AM$  là phân giác  $\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CAM} \Rightarrow \widehat{BM} = \widehat{CM}$

$$\Rightarrow \widehat{AIP} = \frac{1}{2} (sđ \widehat{AB} + sđ \widehat{CM}) = \frac{1}{2} (sđ \widehat{AB} + sđ \widehat{BM})$$

$$\frac{1}{2} sđ \widehat{AM} = \widehat{PAM} \Rightarrow \Delta PAI \text{ cân tại P.}$$



Bài 8.1

**Bài 8.2.** a) Học sinh tự chứng minh.

b) Chứng minh  $\Delta ADE$  đồng dạng với  $\Delta ACD$  (g - g)  $\Rightarrow AD^2 = AE.AC$

c) Tương tự:  $\Delta ADF$  đồng dạng với  $\Delta ABD$  (g - g)  $\Rightarrow AD^2 = AB.AF$

Theo câu b)  $AD^2 = AE.AC \Rightarrow AB.AF = AE.AC$ .

**Bài 8.3.** a) Học sinh tự làm.

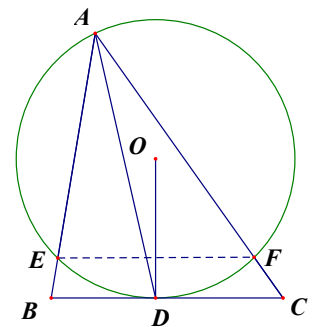
b) Chứng minh  $\widehat{AFM} = \widehat{CAF} \Rightarrow MF \parallel AC$ .

c) Chứng minh được:  $\widehat{MFN} = \widehat{MNF}$

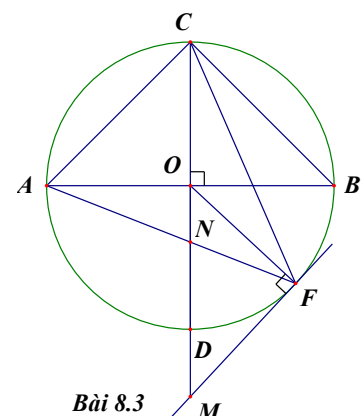
$$\Rightarrow \Delta MNF \text{ cân tại } M \Rightarrow MN = MF$$

Mặt khác:  $OD = OF = R$

Ta có:  $MF$  là tiếp tuyến nên  $\Delta OFM$  vuông  $\Rightarrow \Delta PCM$ .



Bài 8.2



Bài 8.3

**Bài 8.4.** a)  $\widehat{BID} = \frac{1}{2}(sđ\widehat{AE} + sđ\widehat{BD})$

$$= \frac{1}{2}(sđ\widehat{CE} + sđ\widehat{DC}) = \frac{1}{2}sđ\widehat{DE} = \widehat{DBE}$$

$\Rightarrow \Delta BID$  cân ở  $D$ .

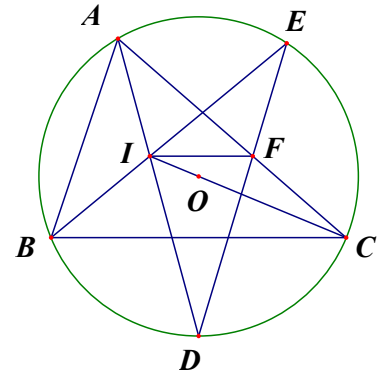
b) Chứng minh tương tự.

$\Delta IEC$  cân ở  $E$ ,  $\Delta DIC$  cân ở  $D$ .

$$\Rightarrow EI = EC \text{ và } DI = DC$$

$\Rightarrow DE$  là đường trung trực của  $CI$ .

c)  $F \in DE$  nên  $FI = FC \Rightarrow \widehat{FIC} = \widehat{FCI} = \widehat{ICB} \Rightarrow IF \parallel BC$ .



**Bài 8.4**

**Bài 8.5.** a) Chứng minh tương tự Bài 8.4.a).

b)  $M$  chính giữa  $\widehat{AB}$   $\widehat{NE}$  là phân giác  $\widehat{BNA}$

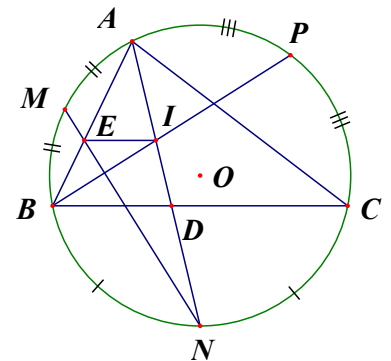
$$\Rightarrow \frac{BN}{AN} = \frac{EB}{EA} \text{ (tính chất phân giác)}$$

$$\Rightarrow BN \cdot AE = NA \cdot BE$$

c) Chứng minh tương tự Bài 8.4.c).

$\Delta NBI$  cân có  $NM$  là phân giác

$\Rightarrow NM$  là trung trực  $BI \Rightarrow EB = EI$  (do  $E \in NM$ ). Từ đó:  $EI \parallel BC$ .



**Bài 8.5**

d) Chứng minh được:  $\Delta ABN$  đồng dạng  $\Delta BDN$  (g - g)

$\Rightarrow \text{ĐPCM}$ .

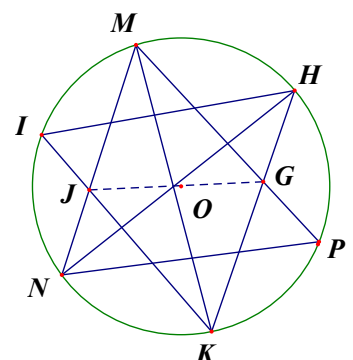
**Bài 8.6.** Học sinh tự làm.

**Bài 8.7.**  $KG$  là đường phân giác của  $\Delta MKP$ .

$$\Rightarrow \frac{MG}{GP} = \frac{MK}{KP} \quad (1)$$

$KJ$  là đường phân giác của  $\Delta MKN$

$$\Rightarrow \frac{MJ}{JN} = \frac{MK}{KN} \quad (2)$$



**Bài 8.7**

Chúng minh được:  $KN = KP$  (3)

Từ (1), (2), (3)  $\Rightarrow \frac{MG}{GP} = \frac{MJ}{JN} \Rightarrow JG \parallel NP$ .

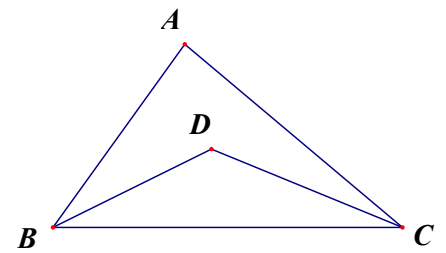
### VẤN ĐỀ 9. CUNG CHỨA GÓC

**Bài 9.1.** Ta có  $\widehat{A} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 130^\circ$

$$\widehat{DBC} + \widehat{DCB} = 65^\circ \Rightarrow \widehat{BDC} = 115^\circ$$

$\Rightarrow$  Quỹ tích của điểm  $D$  là hai cung

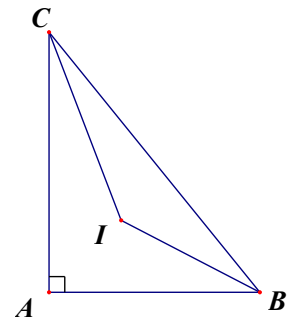
chứa góc  $115^\circ$  dựng trên đoạn  $BC$ .



Bài 9.1

**Bài 9.2.** Tương tự Bài 9.1. Tính được:  $\widehat{BIC} = 135^\circ$

$\Rightarrow$  Quỹ tích của điểm  $I$  là hai cung chứa góc  $135^\circ$  dựng trên đoạn  $BC$ .



Bài 9.2

**Bài 9.3.** Các tam giác  $\triangle ANE, \triangle AMC$

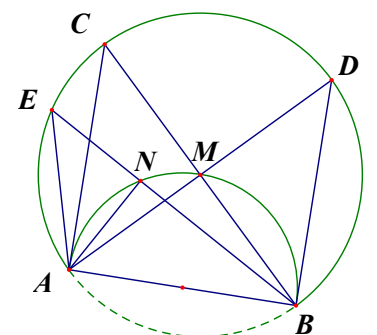
,  $\triangle BMD$  lần lượt vuông cân tại

$$N, M, M \text{ nên } \widehat{AEB} = \widehat{ADB}$$

$$= \widehat{ABC} = 45^\circ \text{ Mà } AB \text{ cố định nên các}$$

điểm  $A, B, C, D, E$  cùng thuộc một

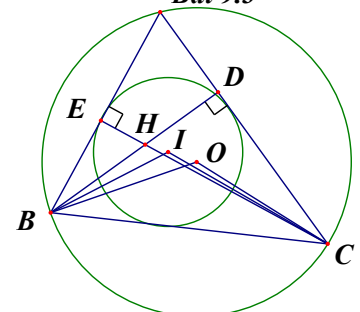
đường tròn.



Bài 9.3

**Bài 9.4.** Chứng minh được  $\widehat{BIC} = 120^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} \text{ (góc nội tiếp và góc}$$

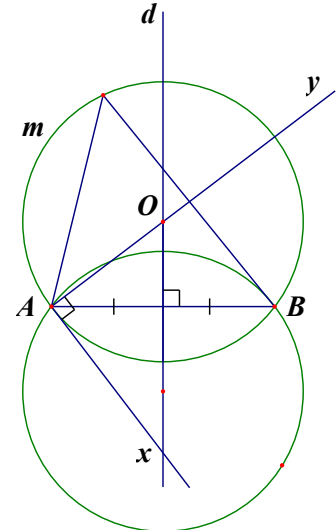


Bài 9.4

ở tâm)  $\Rightarrow H, I, O$  cùng nhìn  $BC$   
 dưới góc  $120^\circ$  nên  $B, C, O, I, H$   
 thuộc một đường tròn.

**Bài 9.5.** Vẽ đoạn thẳng  $AB = 3(cm)$  và

- Dựng trung trực  $d$  của  $AB$ ;
  - Vẽ tia  $Ax$  tạo với  $AB$  góc  $55^\circ$ ;
  - Vẽ  $Ay \perp Ax$  cắt  $d$  ở  $O$ ;
  - Vẽ cung  $\widehat{AmB}$  tâm  $O$ , bán kính  $OA$  sao cho cung này nằm trên nửa mặt phẳng bờ  $AB$  không chứa tia  $Ax$ .
- $\Rightarrow \widehat{AmB}$  là cung cần vẽ.



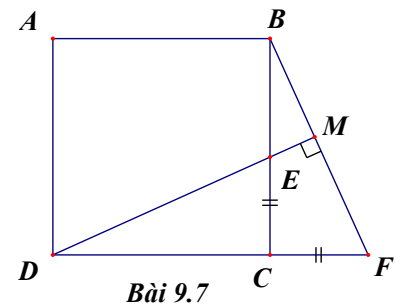
Bài 9.5

**Bài 9.6.** Học sinh tự làm

**Bài 9.7.** Chứng minh được:  $\widehat{CBF} + \widehat{BEM} = \widehat{MDF} + \widehat{DEC} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BMD} = 90^\circ$  nên  $M$  thuộc đường tròn đường kính  $BD$ . Mà  $E \in BC$

nên quỹ tích của điểm  $M$  là cung  $\widehat{BC}$  của đường tròn đường kính  $BD$ .



Bài 9.7

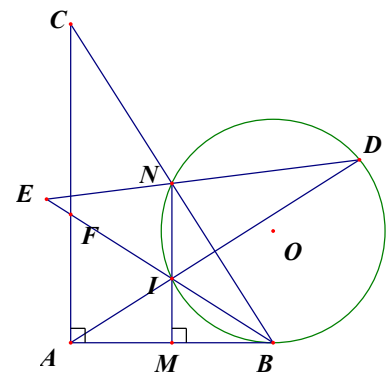
**Bài 9.8.** a) Học sinh tự chứng minh.

b) Chứng minh được:  $\widehat{ACB} = \widehat{BNM}$  (đồng vị)

$\Rightarrow C, D, E$  nhìn  $AB$  dưới góc bằng nhau nên  $A, B, C, D, E$  thuộc một đường tròn.

Mặt khác:  $\widehat{BAC} = 90^\circ \Rightarrow BC$  là đường kính

$\Rightarrow \widehat{BEC} = 90^\circ$  hay  $BE \perp CE$ .

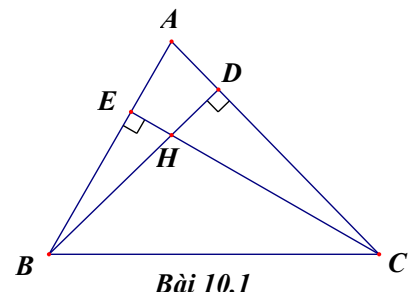


Bài 9.8

**Bài 9.9.** Tương tự Bài 9.5.

**VẤN ĐỀ 10. TỨ GIÁC NỘI TIẾP (PHẦN I)**

**Bài 10.1.**



Bài 10.1

\*) Xét tứ giác AHMN có  $\widehat{AMH} + \widehat{ANH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow$  ĐPCM.

\*) Xét tứ giác BNMC có

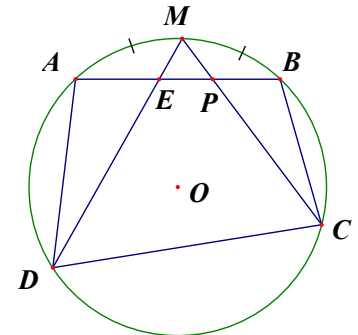
$\widehat{BNC} = \widehat{BMC} = 90^\circ \Rightarrow$  ĐPCM.

**Bài 10.2.** Ta có:

$$\widehat{AED} = \frac{1}{2} (sđ \widehat{AD} + sđ \widehat{MB})$$

$$= \frac{1}{2} sđ \widehat{DM} = \widehat{MCD} \Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{PCD}$$

$\Rightarrow$  PEDC nội tiếp (góc ngoài của một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện).

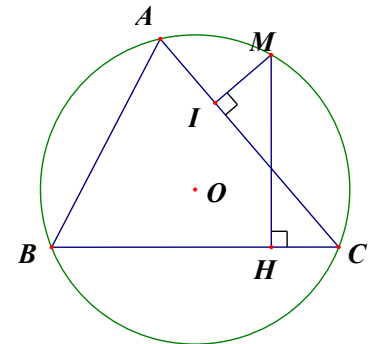


Bài 10.2

**Bài 10.3.** Học sinh tự chứng minh.

**Bài 10.4.**  $\widehat{MIC} = \widehat{CHM} = 90^\circ$

$\Rightarrow$  MIHC nội tiếp (hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc vuông).



Bài 10.4

**Bài 10.5.** Học sinh tự chứng minh.

**Bài 10.6.** Học sinh tự chứng minh.

**Bài 10.7.** Học sinh tự chứng minh.

**Bài 10.8.** Học sinh tự chứng minh.

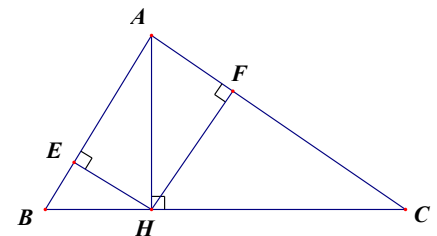
**Bài 10.9.** Chứng minh BEFC là hình thang cân.

**Bài 10.10.**  $\widehat{AFE} = \widehat{AHE}$  (tính chất hình chữ nhật);

$$\widehat{AHE} = \widehat{ABH} \text{ (cùng phụ } \widehat{BHE} \text{)}$$

$$\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{ABC}$$

$\Rightarrow$  BEFC nội tiếp.



Bài 10.10



VẤN ĐỀ 11. TỨ GIÁC NỘI TIẾP (PHẦN II)

**Bài 11.1.** a)  $\widehat{AHC} + \widehat{AKC} = 180^\circ$

$\Rightarrow$  Tứ giác  $AHCK$  nội tiếp.

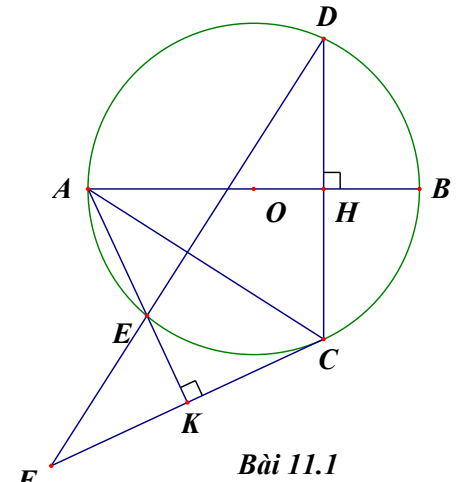
b)  $\triangle ADB$  vuông tại  $D$ , có đường cao  $DH$

$$\Rightarrow AD^2 = AH \cdot AB$$

$$\text{c) } \widehat{EAC} = \widehat{EDC} = \frac{1}{2} sđ \widehat{EC}$$

$\widehat{EAC} = \widehat{KHC}$  (Tứ giác  $AKCH$  nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{EDC} = \widehat{KHC} \Rightarrow DF \parallel HK$  ( $H$  là trung điểm  $DC$  nên  $K$  là trung điểm  $PC \Rightarrow \text{ĐPCM}$ .)



Bài 11.1

**Bài 11.2.** a)  $\widehat{HIB} + \widehat{HKB} = 180^\circ$

$\Rightarrow$  Tứ giác  $BIHK$  nội tiếp.

b) Chứng minh được:  $\triangle AHI$  đồng dạng  $\triangle ABK$  (g - g)

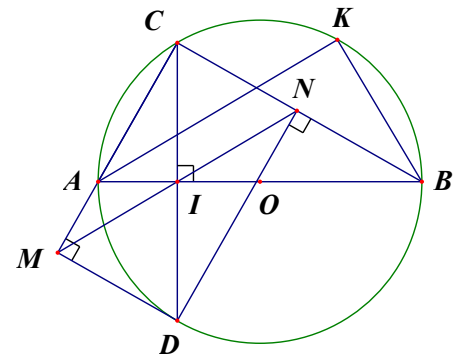
$$\Rightarrow AH \cdot AK = AI \cdot AB \text{ (không đổi)}$$

c)  $MD \parallel CN$  ( $\perp MC$ )

$$\triangle ACI = \triangle OID \text{ (c.g.c)} \Rightarrow AC \parallel DO$$

$\Rightarrow MCND$  là hình bình hành

$\Rightarrow I$  là trung điểm của  $MN \Rightarrow \text{ĐPCM}$ .



Bài 11.2

**Bài 11.3.** a)  $\widehat{NEO} = \widehat{NMO} = 90^\circ \Rightarrow$  Tứ giác  $NEMO$  nội tiếp.

$$\text{b) } \widehat{NEC} = \widehat{CBE} = \frac{1}{2} sđ \widehat{CE}$$

$\Rightarrow \triangle NEC$  đồng dạng  $\triangle NBE$  (g - g)  $\Rightarrow \text{ĐPCM}$ .

c) Tam giác vuông  $\triangle NCH$  và  $\triangle NMB$  đồng dạng (g - g).

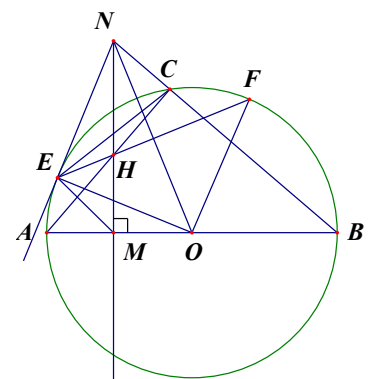
$$\Rightarrow NC \cdot NB = NH \cdot NM$$

$\Rightarrow \triangle NEH$  đồng dạng  $\triangle NME$  (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{NEH} = \widehat{EMN}$$

d)  $\widehat{EMN} = \widehat{EON}$  (Tứ giác  $NEMO$  nội tiếp)

$$\Rightarrow \widehat{NEH} = \widehat{NOE} \Rightarrow EH \perp NO$$



Bài 11.3

$\Rightarrow \triangle OEF$  cân,  $ON$  là phân giác  $\Rightarrow \widehat{EON} = \widehat{NOF} \Rightarrow \widehat{NEF} = \widehat{NOF}$

$\Rightarrow$  Tứ giác  $NEOF$  nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{NFO} = 180^\circ - \widehat{NEO} = 90^\circ$

**Bài 11.4.** a)  $\widehat{AMO} = \widehat{AIO} = \widehat{ANO} = 90^\circ$

b)  $\widehat{AMB} = \widehat{MCB} = \frac{1}{2} sđ \widehat{BC}$

$\Rightarrow \triangle AMB$  đồng dạng  $\triangle ACM$  (g - g)

c)  $AMIN$  nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{AIN}$

$BE \parallel AM \Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{BEN}$

$\Rightarrow \widehat{BEN} = \widehat{AIN} \Rightarrow$  Tứ giác  $BEIN$  nội tiếp

Chúng minh được:  $\widehat{BIE} = \widehat{BCM} \Rightarrow IE \parallel CM$ .

d)  $G$  là trọng tâm  $\triangle MBC \Rightarrow G \in MI$ , Gọi  $K$  là trung

điểm  $AO \Rightarrow MK = IK = \frac{1}{2} AO$ . Từ  $G$  kẻ  $GG' \parallel IK$  ( $G' \in MK$ )

$$\Rightarrow \frac{GG'}{IK} = \frac{MG}{MI} = \frac{MG'}{MK} = \frac{2}{3} \Rightarrow GG' = \frac{2}{3} IK = \frac{1}{3} AO \text{ không đổi}$$

$$MG' = \frac{2}{3} MK \Rightarrow G' \text{ cố định} \Rightarrow G \text{ thuộc } \left( G'; \frac{1}{3} AO \right)$$

**Bài 11.5.** a) b) c) Học sinh tự làm.

d)  $\widehat{BIA} = \widehat{BMA}, \widehat{BMC} = \widehat{BKC}$

$\Rightarrow$  Tứ giác  $BICK$  nội tiếp đường tròn  $(T)$

-  $(T)$  cũng là đường tròn ngoại tiếp

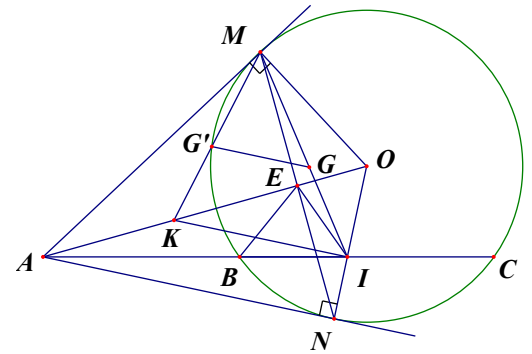
$\triangle BIK$ . Trong  $(T)$ , dây  $BC$  không đổi

mà đường kính của  $(T) \geq BC$  nên nó

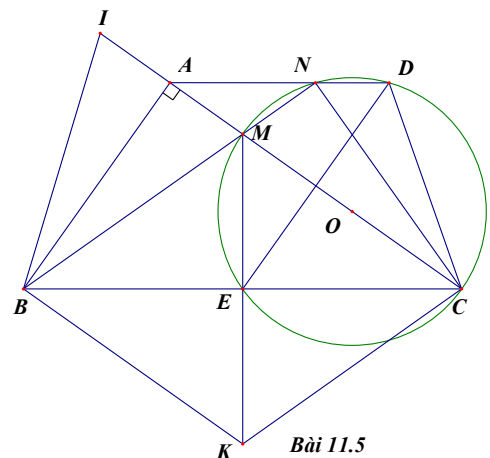
nhỏ nhất bằng  $BC$ . Dấu “=” xảy ra

$$\Leftrightarrow \widehat{BIC} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow I \equiv A, M \equiv A.$$



Bài 11.4



Bài 11.5

**Bài 11.6.** Học sinh tự làm.

**Bài 11.7.** a) Học sinh tự làm.

b) Đáp số:  $OM = R\sqrt{2}$

c)  $MA^2 = MC.MD, MA^2 = MH.MO$

$\Rightarrow MC.MD = MH.MO$

$\Rightarrow \Delta MHC$  đồng dạng  $\Delta MDO$  (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{MHC} = \widehat{MDO} \Rightarrow$  Tứ giác  $CHOD$

nội tiếp

Chúng minh được:  $\widehat{MHC} = \widehat{OHD}$

$\Rightarrow \widehat{CHB} = \widehat{BHD}$  (cùng phụ hai góc

bằng nhau).

**Bài 11.8.** Học sinh tự làm.

**Bài 11.9.** a) b) Học sinh tự làm.

c) Tứ giác  $ACFK$  nội tiếp ( $I$ ) với  $I$  là trung điểm  $KF$ .

$\Rightarrow BD$  là trung trực  $AC$  phải đi qua  $I$ .

d) Học sinh tự làm.

**Bài 11.10.** a) b) c) Học sinh tự làm.

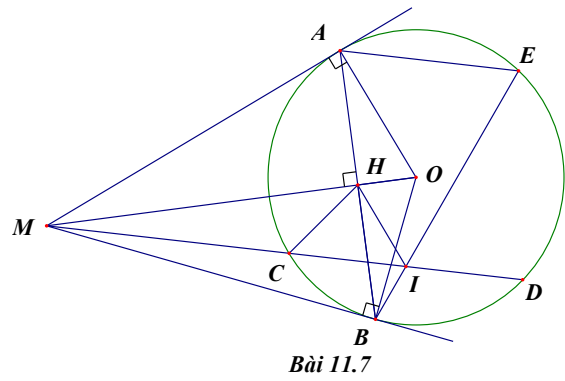
d)  $\Delta MHI$  đồng dạng  $\Delta MAB$

$\Rightarrow \frac{MH}{MB} = \frac{IH}{AB} = \frac{2EH}{2FB} = \frac{EH}{FB}$

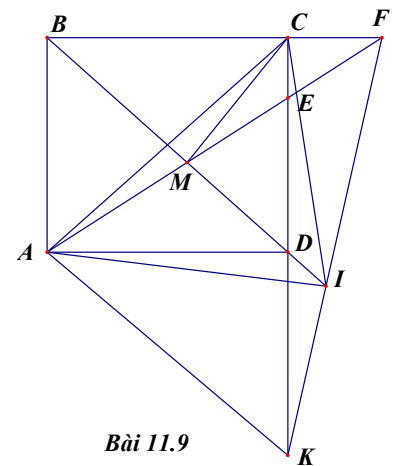
$\Rightarrow \Delta MHE$  đồng dạng  $\Delta MBF$

$\Rightarrow \widehat{MFA} = \widehat{MEK}$  (cùng bù với hai góc bằng nhau)

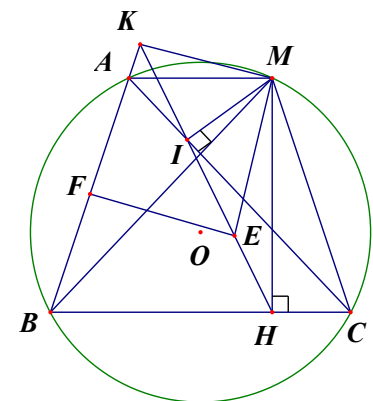
$\Rightarrow KMEF$  nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{MEF} = 90^\circ$ .



Bài 11.7



Bài 11.9



Bài 11.10

**VẤN ĐỀ 12. ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN, CUNG TRÒN**

**Bài 12.1.**

Bán kính R của đường tròn	9	8	3	4,78	4
Đường kính d của đường tròn	18	16	6	9,56	8
Độ dài C của cung tròn	56,25	50,24	18,84	30	25,12

**Bài 12.2.** Đáp số: a)  $l = \pi(dm)$ ; b)  $C = 600\pi(mm)$ .

**Bài 12.3.**

Bán kính R của đường tròn	12 cm	38,8 cm	22 cm	5,2 cm	16,8 cm
Số đo của cung $n^\circ$ tròn	$90^\circ$	$60^\circ$	$80,3^\circ$	$31^\circ$	$28^\circ$
Độ dài l của cung tròn	18,8 cm	40,6 cm	30,8 cm	2,8 cm	8,2 cm

**Bài 12.4.** Ta có:  $\frac{2\pi R_{AB}}{2} + \frac{2\pi R_{BC}}{2} = \frac{2\pi(AB + BC)}{2} = \frac{2\pi AC}{4} = \frac{2\pi R_{AC}}{2}$ .

**Bài 12.5.**

Bán kính R của đường tròn	1,5	10	2,5	1	8	6
Đường kính d của đường tròn	3	20	5	2	16	12
Độ dài C của cung tròn	9,42	62,8	15,7	6,28	50,24	37,68

**Bài 12.6.** Đáp số: a)  $l = \frac{10\pi}{9} dm$ ; b)  $C = 400 mm$ .

**Bài 12.7**

Bán kính R của đường tròn	14 cm	46,5 cm	20	4,2	12,0 cm
Số đo của cung $n^\circ$ tròn	$90^\circ$	$50^\circ$	$88,3^\circ$	$35^\circ$	$20^\circ$
Độ dài l của cung tròn	22,0 cm	40,6 cm	30,8 cm	2,6 cm	4,2 cm

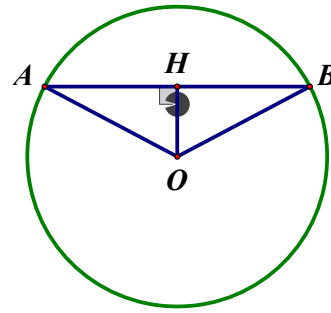
**Bài 12.8.**

a) Cung nhỏ:  $90^\circ = \frac{\pi R}{2}$  (độ dài)

Cung lớn:  $270^\circ = \frac{3\pi R}{2}$  (độ dài).

b)  $\widehat{AOB} = 90^\circ$ ;  $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = 45^\circ$ .

c)  $OH = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{2}R = \frac{\sqrt{2}}{2}R$ .



Bài 12.8

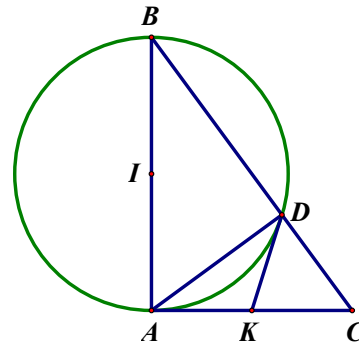
**Bài 12.9**

a) Trung tuyến  $ID = \frac{1}{2}$  cạnh đối diện  $AD \Rightarrow \triangle ABD$  vuông tại  $D \Rightarrow AD \perp BC$ .

b)  $\triangle ADC$  vuông tại  $D$

$$\Rightarrow DK \frac{1}{2}AC = R_{\left(K, \frac{AC}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow D \in \left(K, \frac{AC}{2}\right).$$



Bài 12.9

c)  $\triangle IBD$  cân tại  $I$  có  $\widehat{B} = 60^\circ \Rightarrow \triangle IBD$  đều  $\Rightarrow \widehat{BID} = 60^\circ$

**Bài 12.10.**

a) Xét  $\triangle MCD$  và  $\triangle MBA$ , ta có:

- Chung  $\widehat{M}$

-  $\widehat{MCD} = \widehat{MBA}$  (cùng bù  $\widehat{ACD}$ )  $\Rightarrow \triangle PCM$ . Tỷ số đồng dạng là:  $\frac{CD}{AB} = \frac{1}{2}$ .

b)  $\widehat{ABC} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{AOC} = 60^\circ \Rightarrow l_{AC} = \frac{\pi R}{2}$ .

**Bài 12.11**

Bán kính R	Đường kính d	Độ dài C	Diện tích S
5	10	31,4	78,5
3	6	18,84	28,26

15	30	94,2	706,5
3	6	18,84	28,26

**Bài 12.12**

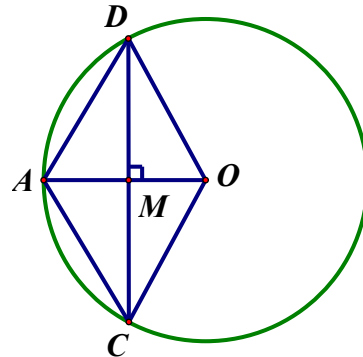
a)  $2\pi R = 4\pi \Rightarrow R = 2(cm)$ .

b)  $\widehat{AOB} = 60^0 (\Delta OAB \text{ đều})$

$\Rightarrow \widehat{BOC} = 120^0$

$\Rightarrow l_{\widehat{BC}} \text{ nhỏ} = \frac{4}{3}\pi(cm)$

$\Rightarrow l_{\widehat{BC}} \text{ lớn} = \frac{8}{3}\pi(cm)$ .



Bài 12.11

**Bài 12.13.**  $\widehat{A} = 120^0 \Rightarrow \widehat{OAC} = 60^0 \Rightarrow \Delta OAC \text{ đều} \Rightarrow R = AC = 3(cm)$

$\Rightarrow C = 2\pi R = 6\pi(cm)$ .

**Bài 12.14.**

$$\frac{C_{(AB)}}{2} = \frac{2\pi \cdot \frac{a+b}{2}}{2}; \quad \frac{C_{(CD)}}{2} = \frac{2\pi \cdot \frac{c+d}{2}}{2};$$

$$\Rightarrow \frac{C_{(AB)}}{2} + \frac{C_{(CD)}}{2} = \frac{2\pi \cdot \frac{a+b+c+d}{2}}{2}.$$

Tương tự:  $\Rightarrow \frac{C_{(AD)}}{2} + \frac{C_{(BC)}}{2} = \frac{2\pi \cdot \frac{a+b+c+d}{2}}{2} \Rightarrow \text{ĐPCM.}$

**Bài 12.15.** Học sinh tự làm

**Bài 12.16.**

a)  $AD$  là phân giác  $\widehat{BAC}$

$\Rightarrow D$  là điểm chính giữa  $\widehat{BC} \Rightarrow OD \perp BC$ .

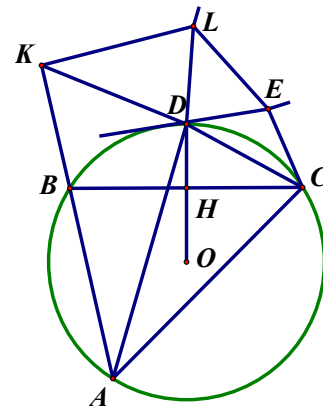
Mà  $DE$  là tiếp tuyến  $\Rightarrow \text{ĐPCM}$ .

b)  $\widehat{ECD} = \frac{1}{2}sd\widehat{CD} = \widehat{DAC} = \widehat{BAD} \Rightarrow \text{ĐPCM}$ .

c)  $HC = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{HOC} = 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BOC} = 120^\circ$

$\Rightarrow l_{\widehat{BC}} = \frac{\pi \cdot R \cdot 120^\circ}{180} = \frac{2}{3}\pi R$ .



Bài 12.16

**VẤN ĐỀ 13. DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN, HÌNH QUẠT TRÒN**

**Bài 13.1**

Bán kính đường tròn (R)	Độ dài đường tròn (C)	Diện tích hình tròn (S)	Số đo của cung tròn ( $n^\circ$ )	Diện tích hình quạt tròn cung $n^\circ$
1,9 cm	12cm	11,5 cm	$45^\circ$	$1,4 \text{ cm}^2$
2 cm	12,6 cm	12,6 cm	$351,1^\circ$	$12,50 \text{ cm}^2$
3,6 cm	22,4 cm	$40 \text{ cm}^2$	$90^\circ$	$10 \text{ cm}^2$

**Bài 13.2.** Đáp số:  $S = 15,6 \text{ m}^2$ .

**Bài 13.3.** Đáp số:  $R = 2\sqrt{2} \text{ cm}$ ,  $C_{(O)} = 17,8 \text{ cm}$ ,  $S_{(O)} = 25,1 \text{ cm}^2$ .

**Bài 13.4.** Đáp số:  $S = 9,4 \text{ cm}^2$ .

**Bài 13.5.**

Bán kính đường tròn (R)	Độ dài đường tròn (C)	Diện tích hình tròn (S)	Số đo của cung tròn ( $n^\circ$ )	Diện tích hình quạt tròn cung $n^\circ$
2,2 cm	14 cm	15,6 cm	$60^\circ$	$2,6 \text{ cm}^2$

4cm	25,1 cm	50,3 cm	107,4 <sup>0</sup>	15 cm <sup>2</sup>
4,4 cm	27,6 cm	60 cm <sup>2</sup>	90 <sup>0</sup>	16 cm <sup>2</sup>

**Bài 13.6.** Đáp số:  $R = 3,54 \text{ cm}$ ,  $C_{(O)} = 22,2 \text{ cm}$ ,  $S_{(O)} = 39,4 \text{ cm}^2$ .

**Bài 13.7.** Đáp số:  $S = 25,1 \text{ cm}^2$ .

**Bài 13.8.** Đáp số: a)  $l = \frac{2\pi R}{3}$ ; b)  $S = \sqrt{3}R^2 - \frac{\pi R^2}{3} = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)R^2$ .

**Bài 13.9.**  $BH = 2\sqrt{13}(\text{cm})$ ,  $AM = 3\sqrt{13}(\text{cm}) \Rightarrow R = \frac{13}{2}(\text{cm})$

$$\Rightarrow AH = 9(\text{cm}); S_{gh} = \frac{\pi\left(\frac{13}{2}\right)^2}{2} - \frac{\pi\left(\frac{9}{2}\right)^2}{2} = 9\pi(\text{cm}^2).$$

**Bài 13.10.**

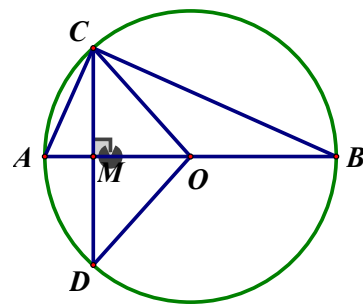
a)  $AC = 4(\text{cm}) \Rightarrow BC = 4\sqrt{3}(\text{cm})$

$$\Rightarrow R = 4(\text{cm}) \Rightarrow C = 8\pi(\text{cm}), S = 16\pi(\text{cm}^2).$$

b)  $\triangle AOC$  đều  $\Rightarrow \widehat{AOC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{COD} = 120^\circ$

$$\Rightarrow l_{\widehat{CAD}} = \frac{\pi \cdot 4 \cdot 120}{180} = \frac{8}{3}\pi(\text{cm}),$$

$$\Rightarrow S = \frac{\frac{8}{3}\pi \cdot 4}{2} = \frac{16}{3}\pi(\text{cm}^2).$$



Bài 13.10

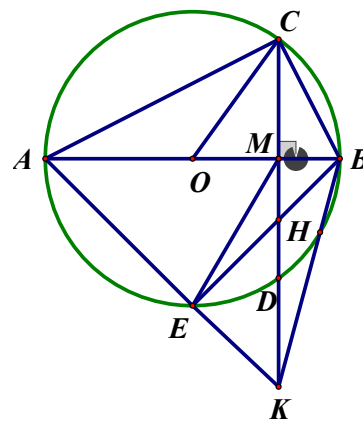
**Bài 13.11.**

a)  $\widehat{MKE} = \frac{1}{2}(sd\widehat{CA} - sd\widehat{DE}) = \frac{1}{2}(sd\widehat{AD} - sd\widehat{DE})$

$$= \frac{1}{2}sd\widehat{AE} = \widehat{MBE} \Rightarrow \text{ĐPCM}$$

b)  $\triangle ABE$  đồng dạng  $\triangle AKM$  (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AE}{AM} = \frac{AB}{AK} \Rightarrow AE \cdot AK = AB \cdot AM \text{ (không đổi)}$$



Bài 13.11



c)  $\triangle OBC$  đều  $\Rightarrow \widehat{BOC} = 60^\circ \Rightarrow S = \frac{\pi R^2}{6}$ .

**Bài 13.12.** a) Xét  $\triangle MCD$  và  $\triangle MBA$ , ta có:

- Chung  $\widehat{M}$

-  $\widehat{MCD} = \widehat{MBA}$  (cùng bù  $\widehat{ACD}$ )  $\Rightarrow$  ĐPCM. Tỷ số đồng dạng là:  $\frac{CD}{AB} = \frac{1}{2}$ .

b)  $\widehat{ABC} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{AOC} = 60^\circ \Rightarrow l_{\widehat{AC}} = \frac{\pi R}{2}$ .

**ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 3**

**Bài 14.1.a)**  $HK \perp AB \Rightarrow \widehat{HKB} = 90^\circ$ ;  $AB$  là đường kính  $\widehat{ACB} = 90^\circ$

$\Rightarrow CBKH$  là tứ giác nội tiếp.

b)  $\widehat{ACK} = \widehat{HBK}$  ( $CBKH$  nội tiếp; mà  $\widehat{ACM} = \widehat{HBK} = \frac{1}{2}sd\widehat{CB} \Rightarrow \widehat{ACM} = \widehat{ACK}$ ).

c) Chứng minh được:  $\Delta MCK = \Delta ECB$  ( $c - g - c$ )  $\Rightarrow MC = CE$

$\Delta MCE$  cân tại  $C$ . Ta có:  $\widehat{CMB} = \widehat{CAB} = \frac{1}{2}sd\widehat{CB} = 45^\circ$

$\Rightarrow \Delta MCE$  vuông cân tại  $C$ .

d)  $PB \cap HK = I$ . Chứng minh được  $\Delta HKB$  đồng dạng với  $\Delta AMB$  ( $g.g$ )

$$\Rightarrow \frac{HK}{KB} = \frac{MA}{MB} = \frac{AP}{R} \Rightarrow HK = \frac{AP \cdot BK}{R}.$$

Mặt khác: Chứng minh được  $\Delta BIK$  đồng dạng với  $\Delta BPA$  ( $g.g$ )

$$\Rightarrow \frac{IK}{PA} = \frac{BK}{BA} \Rightarrow IK = \frac{AP \cdot BK}{AB} = \frac{1}{2}HK \text{ (ĐPCM)}.$$

**Bài 14.2. a)** Học sinh tự làm

b)  $ME \cdot MO = MA \cdot MB (= MC^2)$

$\Rightarrow \Delta MAH \sim \Delta MOB$  ( $c.g.c$ )

$\Rightarrow \widehat{MHA} = \widehat{MBO}$

$\Rightarrow \widehat{MHA} + \widehat{AHO} = \widehat{MBO} + \widehat{AHO} = 180^\circ$

$\Rightarrow AHOB$  nội tiếp

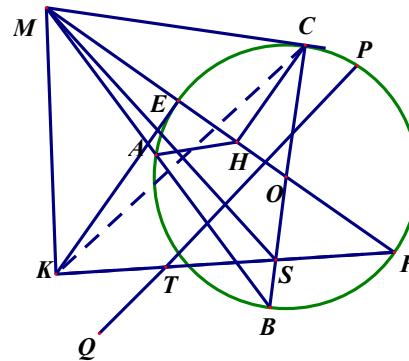
c)  $MK^2 = ME \cdot MF = MC^2 \Rightarrow MK = MC$ .

$\Delta MKS = \Delta MCS$  ( $ch - cv$ )  $\Rightarrow SK = SC \Rightarrow MS$   
là đường trung trực của  $KC$

$\Rightarrow MS \perp KC$  tại trung điểm của  $KC$ .

d)  $MS \cap KC = I$ ;  $MI \cdot MS = ME \cdot MF (= MC^2)$

$\Rightarrow EIFS$  nội tiếp đường tròn tâm  $P \Rightarrow PI = PS$  (1)



Bài 14.2

$$MI \cdot MS = MA \cdot MB (= MC^2) \Rightarrow AI \text{ } SB \text{ nội tiếp đường tròn tâm } Q \Rightarrow QI = QS(2)$$

Mà  $IT = TS = TK (\Delta IKS \text{ vuông tại } I) (3)$

Từ (1)(2)(3)  $\Rightarrow P, T, Q$  thuộc đường trung trực của  $IS \Rightarrow P, T, Q$  thẳng hàng.

**Bài 14.3.**

a)  $\widehat{OBM} = \widehat{OEM} = 90^0 \Rightarrow OEEM$  nội tiếp

b) Chứng minh được

$$\Delta ABM \sim \Delta BDM (g.g) \Rightarrow MB^2 = MA \cdot MD.$$

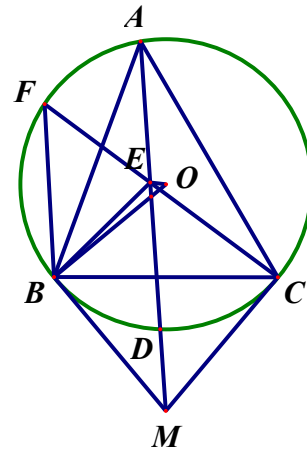
c)  $\Delta OBC$  cân tại  $O$  có  $OM$  vừa là trung trực vừa là phân

giác  $\widehat{MOC} = \frac{1}{2} \widehat{BOC} = \frac{1}{2} sd \widehat{BC}$

Mà  $\widehat{BFC} = \frac{1}{2} sd \widehat{BC} \Rightarrow \widehat{MOC} = \widehat{BFC}$

d)  $\widehat{OEM} = \widehat{OCM} = 90^0 \Rightarrow$  Tứ giác  $EOCM$  nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{MEC} = \widehat{MOC} = \widehat{BFC} \text{ (đồng vị)} \Rightarrow FB // AM.$$



Bài 14.3

**Bài 14.4.**

a)  $\Delta CHE'$  cân tại  $C$

$$\Rightarrow \widehat{CE'H} = \widehat{CHE'}, \Delta BHF' \text{ cân tại } B$$

$$\Rightarrow \widehat{BF'H} = \widehat{BHF'}. \text{ Mà } \widehat{BHE'} = \widehat{BHF'} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \widehat{CE'H} = \widehat{BF'H}$$

$\Rightarrow$  Tứ giác  $BCE'F'$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ .

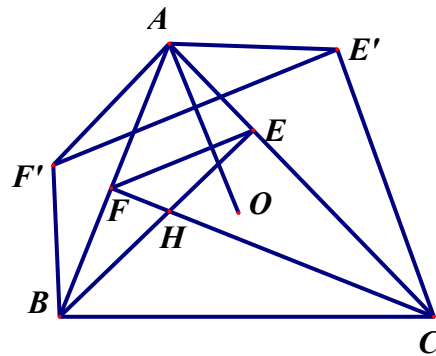
b)  $\Delta AHF'$  cân tại  $A$

$$\Rightarrow \widehat{F'AF} = \widehat{HAF'}, \Delta AHE' \text{ cân tại } A$$

$$\Rightarrow \widehat{E'AE} = \widehat{HAE} \Rightarrow \widehat{F'AE'} = 2\widehat{BAC}$$

$$\Delta CHE' \text{ cân tại } C \Rightarrow \widehat{E'CE} = \widehat{HCE} = \frac{1}{2} \widehat{E'CH}$$

$$\text{Mà } \widehat{BAC} + \widehat{HCE} = 90^0 \Rightarrow \widehat{F'AE'} + \widehat{F'CH} = 180^0$$



Bài 14.4

⇒ Tứ giác  $AE'CF'$  nội tiếp đường tròn

Mà  $E', C, F'$  thuộc đường tròn  $(O) \Rightarrow A \in (O)$ .

c)  $AF' = AE' (= AH) \Rightarrow AO$  là trung trực của  $EF \Rightarrow AO \perp E'F'$

$\triangle HE'F'$  có  $EF$  là đường trung bình  $EF // E'F' \Rightarrow AO \perp EF$

d)  $\widehat{AFH} = \widehat{AEH} = 90^\circ \Rightarrow AFHE$  nội tiếp đường tròn đường kính  $AH$ .

Kẻ đường kính  $AD$ , lấy  $I$  trung điểm  $BC \Rightarrow OI = \frac{1}{2}AH, BC$  cố định  $\Rightarrow OI$  không đổi

⇒ Độ dài  $AH$  không đổi  $\Rightarrow$  Bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\triangle AEF$  không đổi.

**Bài 14.5.** a)  $\widehat{DBO} = \widehat{DFO} = 90^\circ \Rightarrow DBOF$  nội tiếp đường tròn tâm  $I$  là trung điểm của  $DO$ .

b)  $OA = \sqrt{OF^2 + AF^2} = \frac{5R}{3} \Rightarrow \cos \widehat{DAB} = \frac{AF}{AO} = \frac{4}{5}$ .

c)  $\triangle AMO \sim \triangle ADB (g.g) \Rightarrow \frac{DM}{AM} = \frac{OB}{OA}$ ;

$\triangle AFO \sim \triangle AOM (g.g) \Rightarrow \frac{DM}{AM} = \frac{OB}{OA}$ ;

⇒  $DM = OM$

⇒  $\frac{DB}{DM} = \frac{DB}{OM} = \frac{AD}{AM} \Rightarrow \frac{BD}{DM} - \frac{DM}{AM} = \frac{AD - DM}{AM} = 1$ ;

d)  $DB = AB \cdot \tan \widehat{DAB} = \frac{8R}{3} \cdot \frac{3}{4} = 2R \Rightarrow S_{ADB} = \frac{8R^2}{3}$ .

Tương tự:  $S_{AOM} = \frac{25R^2}{24} \Rightarrow S_{OMDB} = \frac{13R^2}{8}$

$S_{OMDB_{quat}} = S_{OMDB} - S_{OMDB_{trong}} = S_{OMDB} - \frac{1}{4}S_{(O,R)} = \frac{R^2}{8}(13 - 2\pi)$ .

**Bài 14.6.**

a)  $BH \perp AC$  và  $CM \perp AC \Rightarrow BH \parallel CM$

$CH \perp AB$  và  $BM \perp AB \Rightarrow CH \parallel BM$

$\Rightarrow BNCM$  là hình bình hành

b)  $BNCM$  là hình bình hành

$\Rightarrow NH \parallel BC \Rightarrow AH \perp NH$

$\Rightarrow \widehat{AHM} = 90^\circ$  mà  $\widehat{ABN} = 90^\circ$

$\Rightarrow$  Tứ giác  $AHBN$  nội tiếp.

c) Tương tự câu b, ta có:

$\Rightarrow HE \parallel BC \Rightarrow AH \perp HE$

Mà  $AH \perp NH \Rightarrow N, H, E$  thẳng hàng

d)  $\widehat{ABN} = 90^\circ \Rightarrow AN$  là đường kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác  $AHBN$ .

$AN = AM = 2R \Rightarrow S_{\widehat{AmB}} = S_{\widehat{AnB}}, AB = R\sqrt{3} \Rightarrow \widehat{AmB} = 120^\circ \Rightarrow S_{\text{quat}AOB} = \frac{\pi R^2}{3} \Rightarrow BM = R,$

$S_{AOB} = \frac{1}{2} S_{ABM} = \frac{R^2 \sqrt{3}}{4}; S_{\widehat{AmB}} = S_{\text{quat}AOB} - S_{AOB} = \frac{R^2}{12} (4\pi - 3\sqrt{3})$

$\Rightarrow S_{\text{canti}} = 2S_{\widehat{AmB}} = \frac{R^2}{6} (4\pi - 3\sqrt{3}).$

**Bài 14.7.** a) b) Học sinh tự làm

c)  $\triangle AEH$  vuông nên ta có:

$KE = KA = \frac{1}{2} AH \Rightarrow \triangle AKE$  cân tại

$A \Rightarrow \widehat{KAE} = \widehat{KEA},$

$\triangle EOC$  cân tại  $O \Rightarrow \widehat{OCE} = \widehat{OEC}.$

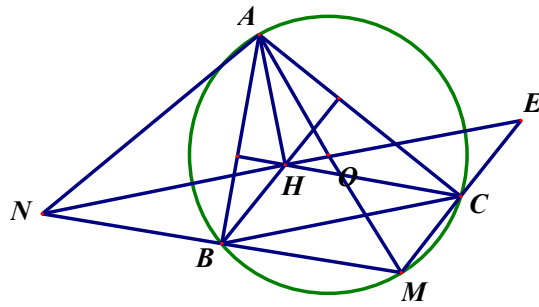
$H$  là trực tâm  $\Rightarrow AH \perp BC$

$\widehat{HAC} + \widehat{ACO} = \widehat{AEK} + \widehat{OEC} = 90^\circ$

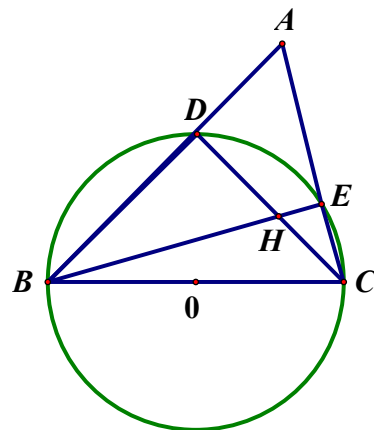
( $K$  là tâm ngoại tiếp)  $\Rightarrow OE \perp KE$

$\Rightarrow OE$  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ADE.$

d)



Bài 14.6



Bài 14.7

$$\widehat{DOE} = 2\widehat{ABE} = 90^\circ \Rightarrow S_{\text{quat } DOE} = \frac{\pi a^2}{4}, S_{DOE} = \frac{1}{2}a^2$$

$$S_{\text{vien phan } DE} = \frac{\pi a^2}{4} - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4}(\pi - 2).$$

**Bài 14.8.** Học sinh tự làm

**Bài 14.9** a) b) c) d) e) Học sinh tự làm

f)  $\triangle OHE$  đồng dạng với  $\triangle FHM$

$$\Rightarrow \frac{OH}{HF} = \frac{HE}{HM} \Rightarrow OH.HM = HE.HF$$

$\triangle MAO$  vuông tại  $A$ ,  $AH \perp MO$

$$\Rightarrow OH.HM = AH^2 = \frac{AB^2}{4}$$

$$\Rightarrow AB^2 = 4HE.HF.$$

g)  $\widehat{MHE} = \widehat{MKE} = 90^\circ$

$\Rightarrow$  Tứ giác  $KEMK$  nội tiếp

h) Do  $\widehat{IB} = \widehat{IA} \Rightarrow \widehat{MBI} = \widehat{ABI} \Rightarrow BI$  là phân giác  $\widehat{ABM}$ , mà  $MI$  là phân giác  $\widehat{AMB} \Rightarrow I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABM$ .

i) Xét đường tròn đi qua 5 điểm  $M, B, O, K, A$  có  $MB = MA$

$$\Rightarrow \widehat{MB} = \widehat{MA} \Rightarrow \widehat{MKB} = \widehat{MKA}$$

$\Rightarrow KM$  là phân giác trong của  $\widehat{BKA}$ , mà  $KE \perp KM$

$$\Rightarrow KE \text{ là phân giác ngoài} \Rightarrow \frac{KA}{KB} = \frac{AE}{BE} \Rightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{AF}{BF} \Rightarrow AE.BF = AF.BE$$

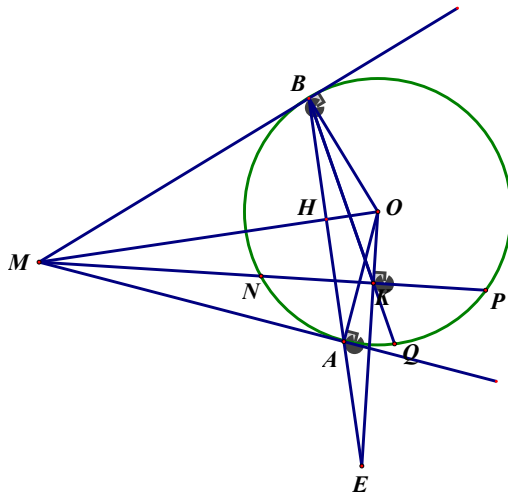
k) Xem bài 14.6. d).

j) Gọi  $J$  là trung điểm  $OM$ . Trên  $AJ$ , lấy  $J'$  sao cho  $\frac{AJ'}{AJ} = \frac{2}{3} \Rightarrow J'$  cố định

$$G \text{ là trọng tâm của } \triangle NAP \Rightarrow \frac{AG}{AK} = \frac{2}{3}.$$

Xét  $\triangle AKJ$  có  $JK = JO$  (không đổi)

$$\Rightarrow J'G = \frac{2}{3}JO \Rightarrow G \text{ thuộc đường tròn } \left( J'; \frac{2}{3}JO \right).$$



CHỦ ĐỀ 4. HÌNH TRỤ, HÌNH NÓN, HÌNH CẦU

VẤN ĐỀ 1. DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH HÌNH TRỤ

**Bài 1.1.** Ta thu được kết quả trong bảng sau:

Hình	Bán kính đáy (cm)	Chiều cao (cm)	Chu vi đáy (cm)	Diện tích đáy (cm <sup>2</sup> )	Diện tích xung quanh (cm <sup>2</sup> )	Thể tích (cm <sup>3</sup> )	Diện tích toàn phần (cm <sup>2</sup> )
Hình trụ	1	2	2π	π	4π	2π	6π
	5	4	10π	25π	40π	100π	90π
	4	10	8π	16π	80π		112π
	8	25	16π	64π	400π	1600π	528π

**Bài 1.2.** Vì  $h = 2R$  nên  $V = \pi R^2 h = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$ .

Mặt khác,  $V = 128\pi \Rightarrow R = 4 \text{ (cm)} \Rightarrow h = 8 \text{ (cm)}$ ;  $S_{xq} = 2\pi Rh = 64\pi \text{ (cm}^2\text{)}$ .

**Bài 1.3.** Tương tự **Bài 1.1.**

Hình	Bán kính đáy (cm)	Chiều cao (cm)	Chu vi đáy (cm)	Diện tích đáy (cm <sup>2</sup> )	Diện tích xung quanh (cm <sup>2</sup> )	Thể tích (cm <sup>3</sup> )	Diện tích toàn phần (cm <sup>2</sup> )
Hình trụ	2	3	4π	4π	12π	12π	20π
	2	25		4π	100π	100π	108π
	1,5	8	3π	2,25π	24π	18π	28,5π
	40	5	80π	1600π	400π	8000π	3600π

**Bài 1.4.** Tương tự **Bài 1.2.** Diện tích toàn phần gấp đôi diện tích xung quanh nên:

$$2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2 \cdot 2\pi R^2 \Rightarrow 2\pi Rh = 2\pi R^2 \Rightarrow R = h.$$

Vậy chiều cao của hình trụ là 3 cm.

**Bài 1.5.** a) i) Sử dụng tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau có  $CA = CM$ ;  $DM = DB$  nên  $AC + BD = CM + DM = CD$ ;

$$\text{ii) } \widehat{COD} = \widehat{COM} + \widehat{MOD} = \frac{1}{2}(\widehat{AOM} + \widehat{MOB}) = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = 90^\circ;$$

$$\text{iii) } \triangle COA \sim \triangle ODB \text{ (g - g)} \Rightarrow AC \cdot BD = OA \cdot OB = \frac{AB^2}{4};$$

b) Với  $OC = 2R$ ;  $OM = r$ , chứng minh được  $\widehat{MCO} = 30^\circ$

$$\text{Từ đó tính được } EM = OM \cdot \sin 60^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{2}; \quad OE = OM \cdot \cos 60^\circ = \frac{R}{2};$$

$$S_{xq} = 2\pi \cdot ME \cdot OE = \frac{\pi R^2 \sqrt{3}}{2} \text{ (đvdt)}; \quad V = \pi \cdot ME^2 \cdot OE = \frac{3\pi R^3}{8} \text{ (đvtt)}.$$

**Bài 1.6.** Tương tự **Bài 1.5.**

a) Tứ giác ADHE là hình chữ nhật vì  $\widehat{AEH} = \widehat{ADH} = \widehat{DAE} = 90^\circ$ .

Ta có:  $AB \cdot AD = AH^2$ ;  $AE \cdot AC = AH^2$  nên  $AB \cdot AD = AE \cdot AC$ .

b)  $HB = 9 \text{ cm}$ ;  $HC = 16 \text{ cm}$  (chú ý  $AB < AC$  nên  $HB < HC$ ).

$$HD = \frac{36}{5} \text{ cm}; HE = \frac{48}{5} \text{ cm}; S_{xq} = \frac{3456\pi}{25} \text{ cm}^2; V = \frac{62208\pi}{125} \text{ cm}^3.$$

**Bài 1.7. Tương tự Bài 1.1.**

Hình	Bán kính đáy (cm)	Chiều cao (cm)	Chu vi đáy (cm)	Diện tích đáy (cm <sup>2</sup> )	Diện tích xung quanh	Thể tích (cm <sup>3</sup> )	Diện tích toàn phần (cm <sup>2</sup> )
Hình trụ	5	12	$10\pi$	$25\pi$	$120\pi$	$300\pi$	$170\pi$
	10	3	$20\pi$	$100\pi$	$60\pi$	$300\pi$	$260\pi$
	10	17	$20\pi$	$100\pi$	$340\pi$	$1700\pi$	$540\pi$
	2	5	$4\pi$	$4\pi$	$20\pi$	$20\pi$	$28\pi$

**Bài 1.8. Tương tự Bài 1.5.**

a) Tứ giác BIHK nội tiếp (tổng 2 góc đối là  $180^\circ$ ).

b) Chứng minh  $AH \cdot AK = AI \cdot AB = R^2$  không đổi.

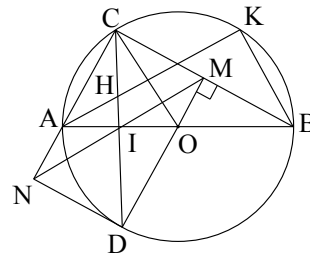
c) MCND là hình chữ nhật

$\Rightarrow MN, AB, CD$  đồng quy tại I là trung điểm của CD.

d)  $\triangle OCA$  đều  $\Rightarrow \widehat{ABC} = 30^\circ$ ;  $\widehat{MCD} = 60^\circ$ .

Tính được  $CD = 2CI = 25 \text{ cm}$ ;  $CM = \frac{25}{2} \text{ cm}$ ;

$$MD = \frac{25\sqrt{3}}{2} \text{ cm}; S_{xq} = 2\pi \cdot CM \cdot MD = \frac{625\sqrt{3}\pi}{2} \text{ cm}^3.$$





**VẤN ĐỀ 2: DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH NÓN, HÌNH NÓN CỤT**

**Bài 2.1.**

Bán kính r	Đường kính d	Chiều cao h	Đường sinh l	Thể tích V	Diện tích xung quanh $S_{xq}$	Diện tích toàn phần $S_{tp}$
5	10	$5\sqrt{3}$	10	$\frac{125\sqrt{3}\pi}{3}$	$50\pi$	$75\pi$
$10\sqrt{3}$	$20\sqrt{3}$	10	20	$1000\pi$	$200\sqrt{3}\pi$	..
5	10	12	13	$100\pi$	$65\pi$	$90\pi$

**Bài 2.2.** Đáp số: a)  $V = \frac{3500\pi}{3}$ ; b)  $S_{tp} = (75\sqrt{17} + 125)\pi$ .

**Bài 2.3.** Đáp số: a)  $h = 12 \text{ cm}$ ; b)  $S_{tp} = 216 \text{ cm}^2$ ,  $V = 324\pi \text{ cm}^3$ ;

c)  $V = 0,49\pi \text{ m}^3$ ; d)  $S \approx 1,78 \text{ m}^2$ .

**Bài 2.4.** Đáp số:  $S_{xq} = 30\sqrt{2}\pi$ ;  $V = 79\pi$ .

**Bài 2.5.** a)  $\widehat{AOC} = \widehat{ODB}$  (cùng phụ với  $\widehat{BOD}$ )

$$\Rightarrow \Delta AOC \sim \Delta BDO \text{ (g - g)} \Rightarrow \frac{AC}{BO} = \frac{AO}{BD} \Rightarrow AC \cdot BD = ab \text{ (không đổi)}$$

b)  $\widehat{COA} = \widehat{ODB} = 60^\circ$ ;  $\widehat{ACO} = \widehat{DOB} = 30^\circ$ ;

$$AC = a\sqrt{3}; BD = \frac{b\sqrt{3}}{3}$$

$$i) S_{ABCD} = \frac{\sqrt{3}(a+b)^2}{6}; ii) V = \pi \left( a^3 + \frac{b^3}{9} \right).$$

**Bài 2.6.** Đáp số:  $\sin \alpha = 0,4 \Rightarrow \alpha \approx 23^\circ 35'$ .

**Bài 2.7.** Đáp số:  $V = 100 \text{ cm}^3$ .

**Bài 2.8.** Đáp số: a)  $V = 9706\pi \text{ cm}^3 \approx 9,71 \left( = \frac{9269}{3} \right)$

$$b) S = \pi(81 + 23\sqrt{554}) \approx 622,36 \text{ cm}^2.$$

Bài 2.9. Đáp số: a)  $V = 960\pi \text{ cm}^3$ ; b)  $S_{xq} = 136 \text{ cm}^3$ .

**VẤN ĐỀ 3: DIỆN TÍCH VÀ THỂ TÍCH CỦA MẶT CẦU**

**Bài 3.1.**

Bán kính hình cầu	0,4 mm	6 dm	0,2 m	100 km	6 hm	50 dam
Diện tích mặt cầu	$\frac{16\pi}{25} mm^2$	$144\pi dm^2$	$\frac{4\pi}{25} m^3$	$40000\pi hm^2$	$144\pi hm^2$	$10000\pi dam^2$
Thể tích hình cầu	$\frac{32\pi}{375} mm^3$		$\frac{4\pi}{375} m^3$	$\frac{4000000\pi}{3} m^3$	$288\pi hm^3$	$\frac{500000\pi}{3} dam^3$

**Bài 3.2.**

Loại bóng	Quả bóng gôn	Quả khúc côn cầu	Quả ten-nit	Quả bóng bàn	Quả bi-a
Đường kính	42,7 mm	7,32 cm	6,5 cm	40 mm	61 mm
Độ dài đường tròn lớn	67,07 mm	23 cm	10,21 cm	62,83 mm	95,82 mm
Diện tích	5728,03 $mm^2$	168,33 $cm^2$	132,73 $mm^2$	5026,55 $mm^2$	11689,87 $mm^2$
Thể tích	..	205,36 $cm^3$	143,79 $cm^3$	33510,32 $mm^3$	118846,97 $mm^3$

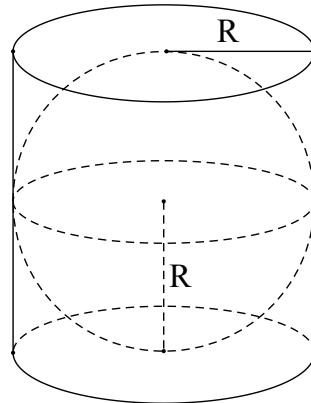
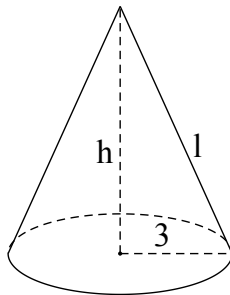
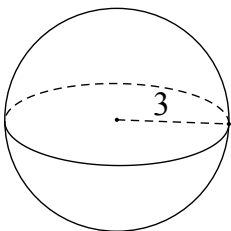
**Bài 3.3.** Đáp số:  $R = 3$  cm.

**Bài 3.4.** Đáp số:  $V = 523,60 m^3$ .

**Bài 3.5.** Đáp số: Học sinh tự chứng minh a) b);

c)  $AM = \frac{R}{2} \Rightarrow \frac{S_{\Delta MON}}{S_{\Delta APB}} = \frac{25}{16}$ ;

d)  $V = \frac{4}{3}\pi R^3.S$



**Bài 3.6.** Đáp số:  $h = 6\sqrt{2}$  cm.

**Bài 3.7.** Đáp án: a)  $\frac{S}{S_{xq}} = \frac{2}{3}$ ; b)  $\frac{V_{hc}}{V_{ht}} = \frac{2}{3}$ .

**Bài 3.8.** Đáp số: a)  $\frac{S}{S_{xq}} = 52,36\%$ ; b)  $\frac{V_{hc}}{V_{hlp}} = 52,36\%$ .

**Bài 3.9.** Đáp số: a)  $S = 64\pi \text{ cm}^2$ ;  $V = \frac{256\pi}{3} \text{ cm}^3$ , b)  $S = 211,32\pi \text{ cm}^2$ .

**Bài 3.10.** Đáp số:  $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ;  $V = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$ .

**Bài 3.11.** Đáp số:  $R_{nt} = \frac{8}{3} \text{ cm}$ ;  $V = 79,43 \text{ cm}^3$ .

ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 4

**Bài 4.1.** a)  $r = 1,44 \text{ cm} \Rightarrow S_{mc} = 4\pi r^2 = 26,03 \text{ cm}^2$ ;

b)  $V_c = \frac{4}{3}\pi R^3 = 15,8 \Rightarrow R = 1,56 \text{ cm} \Rightarrow V_{hn} = \frac{1}{3}\pi R^2 h \approx 2,53 \text{ cm}.$

**Bài 4.2.** Khi quay hình chữ nhật quanh cạnh BC:

$$S_{tp \text{ tru}} = 2\pi AB \cdot AD + 2\pi AB^2 = S_1.$$

Khi quay cạnh CD:  $S_{tp \text{ tru}} = 2\pi \cdot AD \cdot AB + 2\pi \cdot BC^2 = S_2.$

Mặt khác:  $S_1 = S_2 \Leftrightarrow 2\pi \cdot AD \cdot AB + 2\pi AB^2 = 2\pi \cdot AD \cdot AB + 2\pi \cdot BC^2$

$\Leftrightarrow AB = BC \Rightarrow ABCD$  là hình vuông.

**Bài 4.3.** Đáp số:  $V = \frac{2}{3}\pi h^3.$

**Bài 4.4.**  $S_{xq} = 2\pi \cdot BC \cdot AB + 2\pi \cdot BC^2 = 2\pi \cdot 2a \cdot a + 2\pi a^2 = 6\pi a^2.$

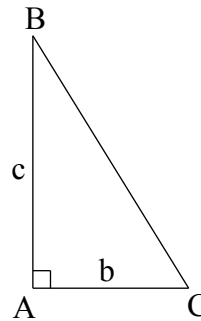
$$V = \pi \cdot BC^2 \cdot AB = \pi \cdot a^2 \cdot 2a = 2\pi a^3.$$

**Bài 4.5.** a)  $S_{xq N_1} = \pi \cdot AC \cdot BC = \pi \cdot b \cdot \sqrt{b^2 + c^2} = S_1;$

$$S_{xq N_2} = \pi \cdot AB \cdot BC = \pi \cdot c \cdot \sqrt{b^2 + c^2} = S_2 \Rightarrow S_1 \neq S_2.$$

b)  $V_{N_1} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot AC^2 \cdot AB = \frac{1}{3} \pi b^2 c;$

$$V_{N_2} = \frac{1}{3} \pi \cdot AB^2 \cdot AC = \frac{1}{3} \pi c^2 b \Rightarrow V_{N_1} \neq V_{N_2}.$$



**Bài 4.6.** a)  $S_{tp} = 20,25\pi \text{ m}^2$ ; b)  $S_{tp} = 30,24\pi \text{ m}^2.$

**Bài 4.7.** a)  $V_{ht \text{ ABCD}} = \pi \cdot \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \cdot BC = \pi \cdot \frac{AB^3}{4} = \pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot R^3$  (1);  $V_{hc} = \frac{4}{3}\pi R^3$  (2),

$$V_{hh} = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{EF}{2}\right)^2 \cdot GH = \frac{1}{8\sqrt{3}} \pi \cdot EF^3. \text{ Tính được } GO = R\sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow V_{hh} = \frac{1}{8\sqrt{3}} \pi \cdot 3\sqrt{3} \cdot R^3 = \frac{3}{8}\pi R^3 \text{ (3).}$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra đpcm.

b)  $S_{tp \text{ ht}} = 3\pi R^2$  (4),  $S_{hc} = 4\pi R^2$  (5),

$$S_{tp \text{ hn}} = \frac{3}{4} \pi \cdot EF^2 = \frac{4}{3} \pi \cdot 3R^2 = \frac{9}{4}\pi R^2 \text{ (6)}$$

Từ (4), (5) và (6) suy ra đpcm.

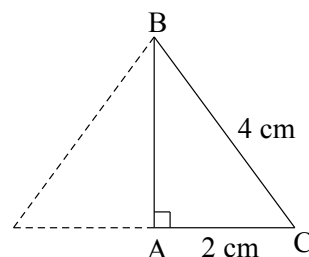
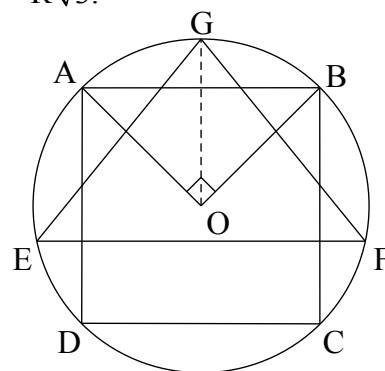
**Bài 4.8.** a) Dễ dàng tính được:

$$AC = 2 \text{ cm}, AB = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$S_{hh} = \pi \cdot AC \cdot BC = 8\pi$$

$$V_{hh} = \frac{4}{3} \pi AC^2 \cdot AB = \frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$$

b)  $S_{tp} = \pi \cdot R \cdot (1 + R) = \pi \cdot 2 \cdot (4 + 2) = 16\pi$



**MỤC LỤC**

CHỦ ĐỀ 1. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN .....	1
VẤN ĐỀ 1. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN.....	1
VẤN ĐỀ 2. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN .....	5
VẤN ĐỀ 3: GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP THẾ.....	9
VẤN ĐỀ 4. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP CỘNG ĐẠI SỐ.....	13
VẤN ĐỀ 5. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN CHỨA THAM SỐ.....	17
VẤN ĐỀ 6. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH (PHẦN I) .....	20
VẤN ĐỀ 7. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH (PHẦN II).....	23
ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 1 (PHẦN I) .....	26
ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 1 (PHẦN II).....	29
CHỦ ĐỀ 2. HÀM SỐ $y = ax^2 (a \neq 0)$ . PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN .....	32
VẤN ĐỀ 1. HÀM SỐ $y = ax^2 (a \neq 0)$ VÀ ĐỒ THỊ (PHẦN I).....	32
VẤN ĐỀ 2. HÀM SỐ $y = ax^2 (a \neq 0)$ VÀ ĐỒ THỊ (PHẦN II) .....	36
VẤN ĐỀ 3. CÔNG THỨC NGHIỆM.....	38
VẤN ĐỀ 4. CÔNG THỨC NGHIỆM.....	42
VẤN ĐỀ 5. HỆ THỨC VI-ÉT VÀ ỨNG DỤNG (PHẦN I).....	46
VẤN ĐỀ 6. HỆ THỨC VI-ÉT VÀ ỨNG DỤNG (PHẦN II).....	50
VẤN ĐỀ 7. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI .....	54
VẤN ĐỀ 8. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH (PHẦN I) .....	58
VẤN ĐỀ 9. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH (PHẦN II).....	62
VẤN ĐỀ 10. BÀI TOÁN VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ PARABOL.....	66
ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 2 .....	69
CHỦ ĐỀ 3. GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN.....	73
VẤN ĐỀ 1. GÓC Ở TÂM. SỐ ĐO CUNG .....	73
VẤN ĐỀ 2. LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY.....	75
VẤN ĐỀ 3. GÓC NỘI TIẾP (PHẦN 1).....	77
VẤN ĐỀ 4. GÓC NỘI TIẾP (PHẦN II) .....	78
VẤN ĐỀ 5. GÓC TẠO BỞI TIA TIẾP TUYẾN VÀ DÂY (PHẦN I) .....	80
VẤN ĐỀ 6. GÓC TẠO BỞI TIA TIẾP TUYẾN VÀ DÂY CUNG (PHẦN II).....	81
VẤN ĐỀ 7. GÓC CÓ ĐỈNH BÊN TRONG HAY BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN (PHẦN I).....	84
VẤN ĐỀ 8. GÓC CÓ ĐỈNH BÊN TRONG HAY BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN (PHẦN II) .....	85
VẤN ĐỀ 9. CUNG CHỨA GÓC.....	88
VẤN ĐỀ 10. TỨ GIÁC NỘI TIẾP (PHẦN I).....	90
VẤN ĐỀ 11: TỨ GIÁC NỘI TIẾP ( PHẦN II) .....	92
VẤN ĐỀ 12. ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN, CUNG TRÒN.....	94

VẤN ĐỀ 13: DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN , HÌNH QUẠT TRÒN .....	98
ÔN TẬP THEO CHỦ ĐỀ 3 .....	101
CHỦ ĐỀ 4. HÌNH TRỤ, HÌNH NÓN, HÌNH CẦU .....	104
VẤN ĐỀ 1. DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH TRỤ .....	104
VẤN ĐỀ 2: DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH HÌNH NÓN , HÌNH NÓN CỤT .....	106
VẤN ĐỀ 3: DIỆN TÍCH VÀ THỂ TÍCH MẶT CẦU.....	108
ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 4 .....	111
HƯỚNG DẪN GỢI Ý ĐÁP ÁN .....	113
CHỦ ĐỀ 1: PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT 2 ẨN .....	113
VẤN ĐỀ 1: PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN .....	113
VẤN ĐỀ 2: HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN .....	116
VẤN ĐỀ 3. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP THỂ .....	118
VẤN ĐỀ 4: GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP CỘNG ĐẠI SỐ .....	120
VẤN ĐỀ 5: HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT .....	122
VẤN ĐỀ 6. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH ( PHẦN I) .....	125
ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 1 ( PHẦN I) .....	128
ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 1 ( PHẦN II).....	131
CHỦ ĐỀ 2: HÀM SỐ $y = ax^2$ ( $a \neq 0$ ). PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN. ....	133
VẤN ĐỀ 2: HÀM SỐ $y = ax^2$ ( $a \neq 0$ ) VÀ ĐỒ THỊ ( PHẦN II) .....	135
VẤN ĐỀ 3. CÔNG THỨC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI ( PHẦN I).....	138
VẤN ĐỀ 4: CÔNG THỨC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI ( PHẦN II).....	140
VẤN ĐỀ 5. HỆ THỨC VI-ÉT VÀ ỨNG DỤNG ( PHẦN I) .....	143
VẤN ĐỀ 6. HỆ THỨC VI-ÉT VÀ ỨNG DỤNG ( PHẦN II).....	147
VẤN ĐỀ 7. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI .....	149
VẤN ĐỀ 8. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH ( PHẦN I) .....	151
VẤN ĐỀ 9. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH ( PHẦN II).....	154
VẤN ĐỀ 10. BÀI TOÁN VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ PARABOL.....	156
ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 2 .....	158
CHỦ ĐỀ 3. GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN.....	160
VẤN ĐỀ 1. GÓC Ở TÂM. SỐ ĐO CUNG .....	160
VẤN ĐỀ 2. LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY .....	161
VẤN ĐỀ 3. GÓC NỘI TIẾP (PHẦN I).....	163
VẤN ĐỀ 4. GÓC NỘI TIẾP (PHẦN II) .....	165
VẤN ĐỀ 5. GÓC TẠO BỞI TIA TIẾP TUYẾN VÀ DÂY (PHẦN I) .....	167
VẤN ĐỀ 6. GÓC TẠO BỞI TIA TIẾP TUYẾN VÀ DÂY (PHẦN II).....	168
VẤN ĐỀ 7. GÓC CÓ ĐỈNH BÊN TRONG HAY BÊN NGOÀI.....	170

VẤN ĐỀ 8. GÓC CÓ ĐỈNH BÊN TRONG HAY BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN (PHẦN II) .....	172
VẤN ĐỀ 9. CUNG CHỨA GÓC.....	174
VẤN ĐỀ 10. TỨ GIÁC NỘI TIẾP (PHẦN I) .....	175
VẤN ĐỀ 11. TỨ GIÁC NỘI TIẾP (PHẦN II) .....	177
VẤN ĐỀ 12. ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN, CUNG TRÒN .....	180
VẤN ĐỀ 13. DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN, HÌNH QUẠT TRÒN.....	183
ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 3 .....	186
CHỦ ĐỀ 4. HÌNH TRỤ, HÌNH NÓN, HÌNH CẦU .....	191
VẤN ĐỀ 1. DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH HÌNH TRỤ .....	191
VẤN ĐỀ 2: DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH NÓN, HÌNH NÓN CỤT .....	193
VẤN ĐỀ 3: DIỆN TÍCH VÀ THỂ TÍCH CỦA MẶT CẦU.....	194
ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 4 .....	196