

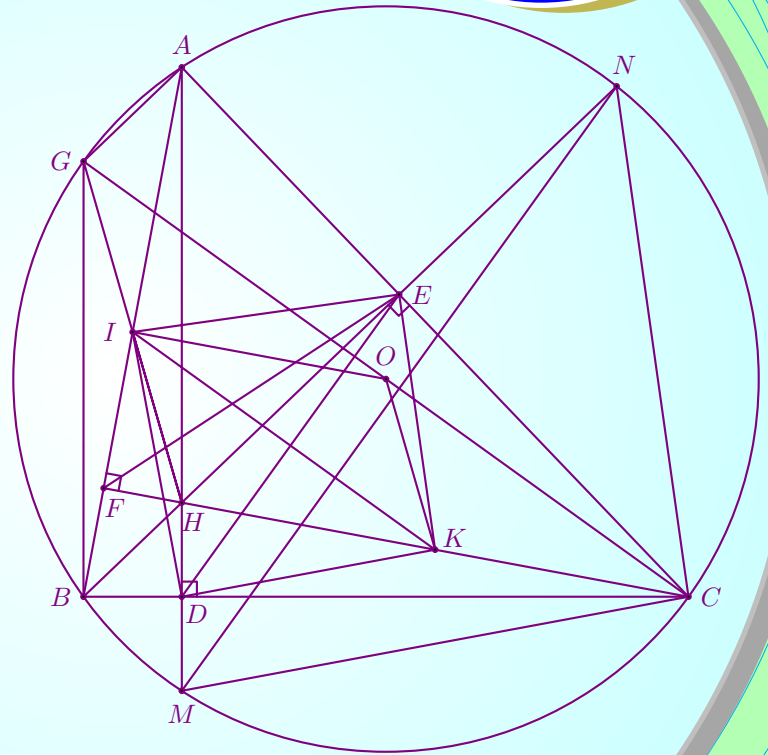
# TOÁN

## PHÂN DẠNG VÀ BÀI TẬP

# 9

$$\frac{A+B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C}$$

(với  $C \neq 0$ )



**TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ**  
**NĂM HỌC 2022-2023**

# MỤC LỤC

<b>I ĐẠI SỐ</b>	<b>1</b>
<b>CHƯƠNG 1. CĂN THỨC</b>	<b>2</b>
<b>BÀI 1. CĂN BẬC HAI – CĂN THỨC BẬC HAI</b>	<b>2</b>
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	2
Dạng 1. Tìm điều kiện để $\sqrt{A}$ có nghĩa.....	2
Dạng 2. Tính giá trị biểu thức.....	3
Dạng 3. Rút gọn biểu thức.....	3
Dạng 4. Giải phương trình.....	4
<b>BÀI 2. LIÊN HỆ GIỮA PHÉP KHAI PHƯƠNG VÀ PHÉP NHÂN, PHÉP CHIA</b>	<b>6</b>
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	6
(B) Bài tập tự luận.....	6
Dạng 1. Thực hiện phép tính.....	6
Dạng 2. Rút gọn biểu thức và tính giá trị biểu thức.....	7
Dạng 3. Giải phương trình.....	7
Dạng 4. Chứng minh bất đẳng thức.....	7
<b>BÀI 3. BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI</b>	<b>9</b>
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	9
(B) Bài tập tự luận.....	9
Dạng 1. Thực hiện phép tính.....	9
Dạng 2. Rút gọn biểu thức.....	10
Dạng 3. Giải phương trình.....	10
Dạng 4. Chứng minh đẳng thức.....	10
<b>BÀI 4. RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI</b>	<b>11</b>
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	11
(B) Bài tập tự luận.....	11
<b>BÀI 5. CĂN BẬC BA</b>	<b>14</b>
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	14
(B) Bài tập tự luận.....	14
Dạng 1. Thực hiện phép tính.....	14
Dạng 2. Chứng minh đẳng thức.....	14
Dạng 3. So sánh hai số.....	14

<i>Dạng 4. Giải phương trình</i> .....	15
<b>BÀI 6. ÔN TẬP CHƯƠNG I</b>	<b>16</b>
<b>CHƯƠNG 2. HÀM SỐ BẬC NHẤT</b>	<b>18</b>
<b>BÀI 1. KHÁI NIỆM HÀM SỐ</b>	<b>18</b>
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	18
(B) Bài tập tự luận.....	18
<b>BÀI 2. HÀM SỐ BẬC NHẤT</b>	<b>20</b>
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	20
(B) Bài tập tự luận.....	20
<b>BÀI 3. ÔN TẬP CHƯƠNG II</b>	<b>23</b>
<b>CHƯƠNG 3. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN</b>	<b>25</b>
<b>BÀI 1. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN</b>	<b>25</b>
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	25
(B) Bài tập tự luận.....	25
<b>BÀI 2. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN</b>	<b>27</b>
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	27
(B) Bài tập tự luận.....	27
<b>BÀI 3. GIẢI HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN</b>	<b>29</b>
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	29
(B) Bài tập tự luận.....	29
<b>BÀI 4. GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN</b>	<b>31</b>
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	31
<i>Dạng 1. Toán về quan hệ giữa các số</i> .....	31
<i>Dạng 2. Toán làm chung công việc</i> .....	31
<i>Dạng 3. Toán chuyển động</i> .....	31
<i>Dạng 4. Toán có nội dung hình học</i> .....	32
<i>Dạng 5. Các dạng khác</i> .....	32
<b>BÀI 5. ÔN TẬP CHƯƠNG III</b>	<b>34</b>
<b>CHƯƠNG 4. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI</b>	<b>37</b>
<b>BÀI 1. HÀM SỐ <math>y = ax^2</math> (<math>a \neq 0</math>)</b>	<b>37</b>
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	37
(B) Bài tập tự luận.....	37

<b>BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN</b>	<b>39</b>
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	39
(B) Bài tập tự luận.....	40
<b>BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI</b>	<b>44</b>
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	44
(B) Bài tập tự luận.....	45
<b>BÀI 4. GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH</b>	<b>47</b>
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	47
(B) Bài tập tự luận.....	47
📁 Dạng 1. Toán về quan hệ giữa các số.....	47
📁 Dạng 2. Toán chuyển động.....	47
📁 Dạng 3. Toán làm chung công việc.....	48
📁 Dạng 4. Toán có nội dung hình học.....	48
📁 Dạng 5. Các dạng toán khác.....	48
<b>BÀI 5. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI</b>	<b>50</b>
📁 Dạng 1. Hệ bậc hai giải bằng phương pháp thế hoặc cộng đại số.....	50
📁 Dạng 2. Hệ đối xứng loại 1.....	51
📁 Dạng 3. Hệ đối xứng loại 2.....	51
<b>BÀI 6. ÔN TẬP CHƯƠNG IV</b>	<b>53</b>
<b>II HÌNH HỌC</b>	<b>55</b>
<b>CHƯƠNG 1. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG</b>	<b>56</b>
<b>BÀI 1. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG</b>	<b>56</b>
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	56
(B) Bài tập tự luận.....	56
<b>BÀI 2. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN</b>	<b>58</b>
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	58
(B) Bài tập tự luận.....	58
<b>BÀI 3. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG</b>	<b>60</b>
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	60
(B) Bài tập tự luận.....	60
<b>BÀI 4. ÔN TẬP CHƯƠNG I</b>	<b>61</b>
<b>CHƯƠNG 2. ĐƯỜNG TRÒN</b>	<b>64</b>

<b>BÀI 1. SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN. TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN</b>	<b>64</b>
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	64
(B) Bài tập tự luận.....	64
<b>BÀI 2. DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN</b>	<b>66</b>
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	66
(B) Bài tập tự luận.....	66
<b>BÀI 3. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN</b>	<b>68</b>
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	68
(B) Bài tập tự luận.....	68
<b>BÀI 4. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN</b>	<b>70</b>
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	70
(B) Bài tập tự luận.....	70
<b>BÀI 5. ÔN TẬP CHƯƠNG II</b>	<b>72</b>
<b>CHƯƠNG 3. GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN</b>	<b>77</b>
<b>BÀI 1. GÓC Ở TÂM. SỐ ĐO CUNG</b>	<b>77</b>
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	77
(B) Bài tập tự luận.....	77
<b>BÀI 2. LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY</b>	<b>79</b>
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	79
(B) Bài tập tự luận.....	79
<b>BÀI 3. GÓC NỘI TIẾP</b>	<b>81</b>
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	81
(B) Bài tập tự luận.....	81
<b>BÀI 4. GÓC TẠO BỞI TIA TIẾP TUYẾN VÀ DÂY CUNG</b>	<b>83</b>
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	83
(B) Bài tập tự luận.....	83
<b>BÀI 5. GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN TRONG ĐƯỜNG TRÒN. GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN</b>	<b>85</b>
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	85
(B) Bài tập tự luận.....	85
<b>BÀI 6. CUNG CHỨA GÓC</b>	<b>86</b>
(A) Tóm tắt lí thuyết.....	86

Ⓑ	Bài tập tự luận .....	86
<b>BÀI 7.</b>	<b>TỨ GIÁC NỘI TIẾP</b>	<b>88</b>
Ⓐ	Tóm tắt lí thuyết .....	88
Ⓑ	Bài tập tự luận .....	88
<b>BÀI 8.</b>	<b>ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP. ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP</b>	<b>90</b>
Ⓐ	Tóm tắt lí thuyết .....	90
Ⓑ	Bài tập tự luận .....	90
<b>BÀI 9.</b>	<b>ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN, CUNG TRÒN</b>	<b>92</b>
Ⓐ	Tóm tắt lí thuyết .....	92
Ⓑ	Bài tập tự luận .....	92
<b>BÀI 10.</b>	<b>DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN, HÌNH QUẠT TRÒN</b>	<b>93</b>
Ⓐ	Tóm tắt lí thuyết .....	93
Ⓑ	Bài tập tự luận .....	93
<b>BÀI 11.</b>	<b>ÔN TẬP CHƯƠNG III</b>	<b>94</b>







## BÀI 1. CĂN BẬC HAI – CĂN THỨC BẬC HAI

### A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### 1. Căn bậc hai số học

- Căn bậc hai của một số không âm  $a$  là số  $x$  sao cho  $x^2 = a$ .
- Số dương  $a$  có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau: Số dương kí hiệu là  $\sqrt{a}$ , số âm kí hiệu là  $-\sqrt{a}$ .
- Số 0 có đúng một căn bậc hai là chính số 0, ta viết  $\sqrt{0} = 0$ .
- Với số dương  $a$ , số  $\sqrt{a}$  đgl căn bậc hai số học của  $a$ . Số 0 cũng đgl căn bậc hai số học của 0.
- Với hai số không âm  $a, b$ , ta có:  $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$ .

#### 2. Căn thức bậc hai

- Với  $A$  là một biểu thức đại số, ta gọi  $\sqrt{A}$  là căn thức bậc hai của  $A$ .  
 $\sqrt{A}$  xác định (hay có nghĩa) khi  $A$  lấy giá trị không âm.
- $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$

#### Dạng 1. Tìm điều kiện để $\sqrt{A}$ có nghĩa

- $\sqrt{A}$  có nghĩa  $\Leftrightarrow A \geq 0$ .
- $\sqrt{\frac{1}{A}}$  có nghĩa  $\Leftrightarrow A > 0$ .

**Bài 1.** Với giá trị nào của  $x$  thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

- |                    |                    |                     |
|--------------------|--------------------|---------------------|
| a. $\sqrt{-3x}$ .  | b. $\sqrt{4-2x}$ . | c. $\sqrt{-3x+2}$ . |
| d. $\sqrt{3x+1}$ . | e. $\sqrt{9x-2}$ . | f. $\sqrt{6x-1}$ .  |

**Bài 2.** Với giá trị nào của  $x$  thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

- |                                   |                                   |                                     |
|-----------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|
| a. $\frac{x}{x-2} + \sqrt{x-2}$ . | b. $\frac{x}{x+2} + \sqrt{x-2}$ . | c. $\frac{x}{x^2-4} + \sqrt{x-2}$ . |
| d. $\sqrt{\frac{1}{3-2x}}$ .      | e. $\sqrt{\frac{4}{2x+3}}$ .      | f. $\sqrt{\frac{-2}{x+1}}$ .        |

**Bài 3.** Với giá trị nào của  $x$  thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

- |                         |                      |                         |
|-------------------------|----------------------|-------------------------|
| a. $\sqrt{x^2+1}$ .     | b. $\sqrt{4x^2+3}$ . | c. $\sqrt{9x^2-6x+1}$ . |
| d. $\sqrt{-x^2+2x-1}$ . | e. $\sqrt{- x+5 }$ . | f. $\sqrt{-2x^2-1}$ .   |



a.  $x + 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$  ( $x \leq 3$ ).

b.  $\sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2}$  ( $-2 \leq x \leq 0$ ).

c.  $\frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}$  ( $x > 1$ ).

d.  $|x - 2| + \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2}$  ( $x < 2$ ).

**Bài 11.** Rút gọn các biểu thức sau:

a.  $\sqrt{1 - 4a + 4a^2} - 2a$ .

b.  $x - 2y - \sqrt{x^2 - 4xy + 4y^2}$ .

c.  $x^2 + \sqrt{x^4 - 8x^2 + 16}$ .

d.  $2x - 1 - \frac{\sqrt{x^2 - 10x + 25}}{x - 5}$ .

e.  $\frac{\sqrt{x^4 - 4x^2 + 4}}{x^2 - 2}$ .

f.  $\sqrt{(x - 4)^2} + \frac{x - 4}{\sqrt{x^2 - 8x + 16}}$ .

**Bài 12.** Cho biểu thức  $A = \sqrt{x^2 + 2\sqrt{x^2 - 1}} - \sqrt{x^2 - 2\sqrt{x^2 - 1}}$ .a. Với giá trị nào của  $x$  thì  $A$  có nghĩa?b. Tính  $A$  nếu  $x \geq \sqrt{2}$ .**Bài 13.** Cho 3 số dương  $x, y, z$  thỏa điều kiện:  $xy + yz + zx = 1$ . Tính:

$$A = x\sqrt{\frac{(1 + y^2)(1 + z^2)}{1 + x^2}} + y\sqrt{\frac{(1 + z^2)(1 + x^2)}{1 + y^2}} + z\sqrt{\frac{(1 + x^2)(1 + y^2)}{1 + z^2}}.$$

**Dạng 4. Giải phương trình****Áp dụng:**  $\sqrt{A^2} = |A|$ ,  $A^2 = B^2 \Leftrightarrow A = \pm B$ .

•  $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \text{ (hay } B \geq 0) \\ A = B \end{cases}$ .

•  $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} A < 0 \\ A = -B \end{cases}$ .

•  $|A| = |B| \Leftrightarrow A = B \text{ hay } A = -B$

•  $\sqrt{A} + \sqrt{B} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$ .

•  $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$ .

•  $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \text{ hay } A = -B \end{cases}$

•  $|A| + |B| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$ .

**Bài 14.** Giải các phương trình sau:

a.  $\sqrt{(x - 3)^2} = 3 - x$ .

b.  $\sqrt{4x^2 - 20x + 25} + 2x = 5$ .

c.  $\sqrt{1 - 12x + 36x^2} = 5$ .

d.  $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} = 2$ .

e.  $\sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} = \sqrt{x - 1} - 1$ .

f.  $\sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}} = \frac{1}{4} - x$ .

**Bài 15.** Giải các phương trình sau:

a.  $\sqrt{2x + 5} = \sqrt{1 - x}$ .

b.  $\sqrt{x^2 - x} = \sqrt{3 - x}$ .

c.  $\sqrt{2x^2 - 3} = \sqrt{4x - 3}$ .

d.  $\sqrt{2x - 1} = \sqrt{x - 1}$ .

e.  $\sqrt{x^2 - x - 6} = \sqrt{x - 3}$ .

f.  $\sqrt{x^2 - x} = \sqrt{3x - 5}$ .

**Bài 16.** Giải các phương trình sau:

a.  $\sqrt{x^2 + x} = x$ .

b.  $\sqrt{1 - x^2} = x - 1$ .

c.  $\sqrt{x^2 - 4x + 3} = x - 2$ .

d.  $\sqrt{x^2 - 1} - x^2 + 1 = 0$ .

e.  $\sqrt{x^2 - 4} - x + 2 = 0$ .

f.  $\sqrt{1 - 2x^2} = x - 1$ .

**Bài 17.** Giải các phương trình sau:

a.  $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = x^2 - 1$ .

b.  $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = x - 1$ .

c.  $\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} = x - 1$ .

d.  $\sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}} = x$ .

e.  $\sqrt{x^4 - 8x^2 + 16} = 2 - x$ .

f.  $\sqrt{9x^2 + 6x + 1} = \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$ .

**Bài 18.** Giải các phương trình sau:

a.  $|3x + 1| = |x + 1|$ .

b.  $|x^2 - 3| = |x - \sqrt{3}|$ .

c.  $\sqrt{9x^2 - 12x + 4} = \sqrt{x^2}$ .

d.  $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{4x^2 - 12x + 9}$ .

**Bài 19.** Giải các phương trình sau:

a.  $|x^2 - 1| + |x + 1| = 0$ .

b.  $\sqrt{x^2 - 8x + 16} + |x + 2| = 0$ .

c.  $\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x + 1} = 0$ .

d.  $\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 0$ .

# BÀI 2. LIÊN HỆ GIỮA PHÉP KHAI PHƯƠNG VÀ PHÉP NHÂN, PHÉP CHIA

## A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Khai phương một tích:  $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} (A \geq 0, B \geq 0)$ .
- Nhân các căn bậc hai:  $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{A \cdot B} (A \geq 0, B \geq 0)$ .
- Khai phương một thương:  $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} (A \geq 0, B > 0)$ .
- Chia hai căn bậc hai:  $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}} (A \geq 0, B > 0)$ .

## B – BÀI TẬP TỰ LUẬN

### Dạng 1. Thực hiện phép tính

**Bài 1.** Thực hiện các phép tính sau:

- a.  $\sqrt{12} + 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75} - 9\sqrt{48}$ .    b.  $2\sqrt{3}(\sqrt{27} + 2\sqrt{48} - \sqrt{75})$ .    c.  $(2\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$ .  
 d.  $(1 + \sqrt{3} - \sqrt{2})(1 + \sqrt{3} + \sqrt{2})$ .    e.  $(\sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{5})^2$ .    f.  $(\sqrt{\sqrt{11} + \sqrt{7}} - \sqrt{\sqrt{11} - \sqrt{7}})^2$ .

**Bài 2.** Thực hiện các phép tính sau:

- a.  $\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ .    b.  $\sqrt{21 - 12\sqrt{3}} - \sqrt{3}$ .  
 c.  $(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - 2)\sqrt{\sqrt{3} + 2}$ .    d.  $(4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$ .  
 e.  $\sqrt{13 - \sqrt{160}} - \sqrt{53 + 4\sqrt{90}}$ .    f.  $\sqrt{6 - 2\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{12} + \sqrt{18} - \sqrt{128}}}$ .

**Bài 3.** Thực hiện các phép tính sau:

- a.  $2\sqrt{5} - \sqrt{125} - \sqrt{80} + \sqrt{605}$ .    b.  $\sqrt{15 - \sqrt{216}} + \sqrt{33 - 12\sqrt{6}}$ .    c.  $\sqrt{8\sqrt{3}} - 2\sqrt{25\sqrt{12}} + 4\sqrt{\sqrt{192}}$ .  
 d.  $\sqrt{2 - \sqrt{3}}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ .    e.  $\sqrt{3 - \sqrt{5}} + \sqrt{3 + \sqrt{5}}$ .    f.  $(\sqrt{2} + 1)^3 - (\sqrt{2} - 1)^3$ .

**Bài 4.** Thực hiện các phép tính sau:

- a.  $\frac{10 + 2\sqrt{10}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} + \frac{8}{1 - \sqrt{5}}$ .    b.  $\frac{2\sqrt{8} - \sqrt{12}}{\sqrt{18} - \sqrt{48}} - \frac{\sqrt{5} + \sqrt{27}}{\sqrt{30} + \sqrt{162}}$ .  
 c.  $\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}}$ .    d.  $\frac{\sqrt{3 - \sqrt{5}} \cdot (3 + \sqrt{5})}{\sqrt{10} + \sqrt{2}}$ .  
 e.  $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$ .    f.  $\frac{(\sqrt{5} + 2)^2 - 8\sqrt{5}}{2\sqrt{5} - 4}$ .

**Bài 5.** Thực hiện các phép tính sau:

- a.  $A = \sqrt{12 - 3\sqrt{7}} - \sqrt{12 + 3\sqrt{7}}$ .    b.  $B = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$ .  
 c.  $C = \sqrt{3 - \sqrt{5}} + \sqrt{3 + \sqrt{5}}$ .

## Dạng 2. Rút gọn biểu thức và tính giá trị biểu thức

**Bài 6.** Rút gọn các biểu thức:

a.  $\frac{\sqrt{15} - \sqrt{6}}{\sqrt{35} - \sqrt{14}}$ .

b.  $\frac{\sqrt{10} + \sqrt{15}}{\sqrt{8} + \sqrt{12}}$ .

c.  $\frac{2\sqrt{15} - 2\sqrt{10} + \sqrt{6} - 3}{2\sqrt{5} - 2\sqrt{10} - \sqrt{3} + \sqrt{6}}$ .

d.  $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + \sqrt{16}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}$ .

e.  $\frac{x + \sqrt{xy}}{y + \sqrt{xy}}$ .

f.  $\frac{\sqrt{a} + a\sqrt{b} - \sqrt{b} - b\sqrt{a}}{ab - 1}$ .

**Bài 7.** Rút gọn các biểu thức sau:

a.  $\frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$ .

b.  $\sqrt{\frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{x + 2\sqrt{x} + 1}} \quad (x \geq 0)$ .

c.  $\frac{x - 1}{\sqrt{y} - 1} \sqrt{\frac{(y - 2\sqrt{y} + 1)^2}{(x - 1)^4}} \quad (x \neq 1, y \neq 1, y > 0)$ .

**Bài 8.** Rút gọn và tính:

a.  $\sqrt{\frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{b} + 1}} : \sqrt{\frac{\sqrt{b} - 1}{\sqrt{a} + 1}}$  với  $a = 7, 25; b = 3, 25$ .

b.  $\sqrt{15a^2 - 8a\sqrt{15} + 16}$  với  $a = \sqrt{\frac{3}{5}} + \sqrt{\frac{5}{3}}$ .

c.  $\sqrt{10a^2 - 4a\sqrt{10} + 4}$  với  $a = \sqrt{\frac{2}{5}} + \sqrt{\frac{5}{2}}$ .

d.  $\sqrt{a^2 + 2\sqrt{a^2 - 1}} - \sqrt{a^2 - 2\sqrt{a^2 - 1}}$  với  $a = \sqrt{5}$ .

## Dạng 3. Giải phương trình

**Bài 9.** Giải các phương trình sau:

a.  $\sqrt{\frac{2x - 3}{x - 1}} = 2$ .

b.  $\frac{\sqrt{2x - 3}}{\sqrt{x - 1}} = 2$ .

c.  $\sqrt{4x^2 - 9} = 2\sqrt{2x + 3}$ .

d.  $\frac{9x - 7}{\sqrt{7x + 5}} = \sqrt{7x + 5}$ .

e.  $\sqrt{4x - 20} + 3\sqrt{\frac{x - 5}{9}} - \frac{1}{3}\sqrt{9x - 45} = 4$ .

## Dạng 4. Chứng minh bất đẳng thức

**Bài 10.** So sánh các số:

a.  $\sqrt{7} - \sqrt{2}$  và 1.

b.  $\sqrt{8} + \sqrt{5}$  và  $\sqrt{7} + \sqrt{6}$ .

c.  $\sqrt{2005} + \sqrt{2007}$  và  $\sqrt{2006}$ .

**Bài 11.** Cho các số không âm  $a, b, c$ . Chứng minh:

a.  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ .

b.  $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$ .

c.  $a+b+\frac{1}{2} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ .

d.  $a+b+c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$ .

e.  $\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$ .

**Bài 12.** Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a.  $A = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$ .

b.  $B = \sqrt{6-x} + \sqrt{x+2}$ .

c.  $C = \sqrt{x} + \sqrt{2-x}$ .

# BÀI 3. BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

## A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Với  $A \geq 0$  và  $B \geq 0$  thì  $\sqrt{A^2B} = A\sqrt{B}$ .
- Với  $A \geq 0$  và  $B \geq 0$  thì  $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$ .
- Với  $A.B \geq 0$  và  $B \neq 0$  thì  $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|}$ .
- Với  $A \geq 0$  và  $A \neq B^2$  thì  $\frac{C}{\sqrt{A} \pm B} = \frac{C(\sqrt{A} \mp B)}{A - B^2}$ .
- Với  $A \geq 0, B \geq 0$  và  $A \neq B$  thì  $\frac{C}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} \mp \sqrt{B})}{A - B}$ .
- Với  $A < 0$  và  $B \geq 0$  thì  $\sqrt{A^2B} = -A\sqrt{B}$ .
- Với  $A < 0$  và  $B \geq 0$  thì  $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B}$ .
- Với  $B > 0$  thì  $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$ .

## B – BÀI TẬP TỰ LUẬN

### Dạng 1. Thực hiện phép tính

**Bài 1.** Thực hiện các phép tính sau:

a.  $\sqrt{125} - 4\sqrt{45} + 3\sqrt{20} - \sqrt{80}$ .

b.  $(\sqrt{99} - \sqrt{18} - \sqrt{11})\sqrt{11} + 3\sqrt{22}$ .

c.  $2\sqrt{\frac{27}{4}} - \sqrt{\frac{48}{9}} - \frac{2}{5}\sqrt{\frac{75}{16}}$ .

d.  $3\sqrt{\frac{9}{8}} - \sqrt{\frac{49}{2}} + \sqrt{\frac{25}{18}}$ .

e.  $\left(1 + \frac{5 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}}\right) \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} + 1\right)$ .

f.  $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ .

**Bài 2.** Thực hiện các phép tính sau:

a.  $\frac{\sqrt{7} - 5}{2} - \frac{6 - 2\sqrt{7}}{4} + \frac{6}{\sqrt{7} - 2} - \frac{5}{4 + \sqrt{7}}$ .

b.  $\frac{2}{\sqrt{6} - 2} + \frac{2}{\sqrt{6} + 2} + \frac{5}{\sqrt{6}}$ .

c.  $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5}}$ .

d.  $\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{3}} - \frac{5}{\sqrt{5}}\right) : \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$ .

e.  $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{5}{12} - \frac{1}{\sqrt{6}}}$ .

f.  $\frac{2\sqrt{3 - \sqrt{3 + \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$ .



### Dạng 2. Rút gọn biểu thức

**Bài 3.** Rút gọn và tính giá trị biểu thức:

a.  $A = \frac{x - 11}{\sqrt{x - 2} - 3}, x = 23 - 12\sqrt{3}.$

b.  $B = \frac{1}{2(1 + \sqrt{a})} + \frac{1}{2(1 - \sqrt{a})} - \frac{a^2 + 2}{1 - a^3}, a = \sqrt{2}.$

c.  $C = \frac{a^4 - 4a^2 + 3}{a^4 - 12a^2 + 27}, a = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$

d.  $D = \frac{1}{\sqrt{h + 2\sqrt{h - 1}}} + \frac{1}{\sqrt{h - 2\sqrt{h - 1}}}, h = 3.$

e.  $E = \frac{\sqrt{2x + 2\sqrt{x^2 - 4}}}{\sqrt{x^2 - 4} + x + 2}, x = 2(\sqrt{3} + 1).$

f.  $F = \left( \frac{3}{\sqrt{1+a}} + \sqrt{1-a} \right) : \left( \frac{3}{\sqrt{1-a^2}} + 1 \right), a = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}.$

### Dạng 3. Giải phương trình

**Bài 4.** Giải các phương trình sau:

a.  $\sqrt{x - 1} + \sqrt{4x - 4} - \sqrt{25x - 25} + 2 = 0.$       b.  $\frac{1}{2}\sqrt{x - 1} - \frac{3}{2}\sqrt{9x - 9} + 24\sqrt{\frac{x - 1}{64}} = -17.$

c.  $\sqrt{9x^2 + 18} + 2\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{25x^2 + 50} + 3 = 0.$       d.  $2x - x^2 + \sqrt{6x^2 - 12x + 7} = 0.$

e.  $(x + 1)(x + 4) - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 6.$

### Dạng 4. Chứng minh đẳng thức

**Bài 5.** Cho biểu thức:  $S_n = (\sqrt{2} + 1)^n + (\sqrt{2} - 1)^n$  (với  $n$  nguyên dương).

a. Tính  $S_2; S_3.$

b. Chứng minh rằng: Với mọi  $m, n$  nguyên dương và  $m > n$ , ta có:  $S_{m+n} = S_m \cdot S_n - S_{m-n}.$

c. Tính  $S_4.$

**Bài 6.** Cho biểu thức:  $S_n = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^n + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^n$  (với  $n$  nguyên dương).

a. Chứng minh rằng:  $S_{2n} = S_n^2 - 2.$

b. Tính  $S_2, S_4.$

**Bài 7.** Cho biểu thức:  $S_n = (2 - \sqrt{3})^n + (2 + \sqrt{3})^n$  (với  $n$  nguyên dương).

a. Chứng minh rằng:  $S_{3n} + 3S_n = S_n^3.$

b. Tính  $S_3, S_9.$

# BÀI 4. RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

## A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Để rút gọn biểu thức có chứa căn thức bậc hai, ta cần biết vận dụng thích hợp các phép biến đổi đơn giản như: đưa thừa số ra ngoài dấu căn, đưa thừa số vào trong dấu căn, khử căn ở mẫu và trục căn thức ở mẫu để làm xuất hiện các căn thức bậc hai có cùng một biểu thức dưới dấu căn.

## B – BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Cho biểu thức:  $A = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} + \frac{2 + 5\sqrt{x}}{4 - x}$ .

- Tìm  $x$  để biểu thức  $A$  có nghĩa.
- Rút gọn biểu thức  $A$ .
- Tìm  $x$  để  $A = 2$ .

**Bài 2.** Cho biểu thức:  $A = \left( \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 1} - \frac{\sqrt{x} + 2}{x + 2\sqrt{x} + 1} \right) \cdot \frac{(1 - x)^2}{2}$ .

- Rút gọn  $A$  nếu  $x \geq 0, x \neq 1$ .
- Tìm  $x$  để  $A$  dương.
- Tìm giá trị lớn nhất của  $A$ .

**Bài 3.** Cho biểu thức:  $A = \frac{2\sqrt{x} - 9}{x - 5\sqrt{x} + 6} - \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2\sqrt{x} + 1}{3 - \sqrt{x}}$ .

- Rút gọn  $A$ .
- Tìm  $x$  để  $A < 1$ .

**Bài 4.** Cho biểu thức:  $A = \frac{a\sqrt{a} - 1}{a - \sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a} + 1}{a + \sqrt{a}} + \left[ \sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right] \left[ \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} + \frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} \right]$ .

- Rút gọn  $A$ .
- Tìm  $a$  để  $A = 7$ .
- Tìm  $a$  để  $A > 6$ .

**Bài 5.** Cho biểu thức:  $A = \frac{15\sqrt{x} - 11}{x + 2\sqrt{x} - 3} + \frac{3\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x} + 3}{3 + \sqrt{x}}$ .

- Rút gọn  $A$ .
- Tìm  $x$  để  $A = \frac{1}{2}$ .

**Bài 6.** Cho biểu thức:  $A = \left[ 1 - \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \right] : \left[ \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} + \frac{\sqrt{x} + 2}{3 - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x} + 2}{x - 5\sqrt{x} + 6} \right]$ .

- Rút gọn  $A$ .

b. Tìm  $x$  để  $A < 0$ .

**Bài 7.** Cho biểu thức:  $A = \frac{a^2 + \sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1} - \frac{2a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1$ .

a. Rút gọn  $A$ .

b. Tìm  $a$  để  $A = 2$ .

c. Tìm giá trị nhỏ nhất của  $A$ .

**Bài 8.** Cho biểu thức:  $A = \left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)$ .

a. Rút gọn  $A$ .

b. Tìm  $a$  để  $A < 0$ .

c. Tìm  $a$  để  $A = -2$ .

**Bài 9.** Cho biểu thức:  $A = 1 + \left(\frac{2a + \sqrt{a} - 1}{1 - a} - \frac{2a\sqrt{a} - \sqrt{a} + a}{1 - a\sqrt{a}}\right) \cdot \frac{a - \sqrt{a}}{2\sqrt{a} - 1}$ .

a. Rút gọn  $A$ .

b. Tìm  $a$  để  $A = \frac{\sqrt{6}}{1 + \sqrt{6}}$ .

c. Chứng minh rằng  $A > \frac{2}{3}$ .

**Bài 10.** Cho biểu thức:  $A = \left(\frac{x - 5\sqrt{x}}{x - 25} - 1\right) : \left(\frac{25 - x}{x + 2\sqrt{x} - 15} - \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 5} + \frac{\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} - 3}\right)$ .

a. Rút gọn  $A$ .

b. Tìm  $x$  để  $A < 1$ .

**Bài 11.** Cho biểu thức:  $A = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1}\right)$

a. Rút gọn  $A$ .

b. Tìm  $a$  để  $A > \frac{1}{6}$ .

**Bài 12.** Cho biểu thức:  $A = \left[\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}\right] : \left[\frac{2}{x^2-1} - \frac{x}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right]$ .

a. Rút gọn  $A$ .

b. Tính giá trị của  $A$  khi  $x = \sqrt{3} + \sqrt{8}$ .

c. Tìm  $x$  để  $A = \sqrt{5}$ .

**Bài 13.** Cho biểu thức:  $B = \left[\sqrt{x} + \frac{y - \sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right] : \left[\frac{x}{\sqrt{xy} + y} + \frac{y}{\sqrt{xy} - x} - \frac{x+y}{\sqrt{xy}}\right]$ .

a. Rút gọn  $B$ .

b. Tính giá trị của  $B$  khi  $x = 3, y = 4 + 2\sqrt{3}$ .

**Bài 14.** Cho biểu thức:  $B = \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{xy} - 2y} - \frac{2x}{x + \sqrt{x} - 2\sqrt{xy} - 2\sqrt{y}} \cdot \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$ .

a. Rút gọn  $B$ .

b. Tìm tất cả các số nguyên dương  $x$  để  $y = 625$  và  $B < 0, 2$ .

**Bài 15.** Cho biểu thức:  $B = \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right] : \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3}}$ .

a. Rút gọn  $B$ .

b. Cho  $x \cdot y = 16$ . Xác định  $x, y$  để  $B$  có giá trị nhỏ nhất.

**Bài 16.** Cho biểu thức:  $B = \left( \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{3\sqrt{ab}}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}} \right) \cdot \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{3\sqrt{ab}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} \right) : \frac{a-b}{a + \sqrt{ab} + b} \right]$ .

a. Rút gọn  $B$ .

b. Tính  $B$  khi  $a = 16, b = 4$ .

**Bài 17.** Cho biểu thức:  $B = \left( \frac{x-y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3}}{y-x} \right) : \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + \sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ .

a. Rút gọn  $B$ .

b. Chứng minh  $B \geq 0$ .

**Bài 18.** Cho biểu thức:  $B = \left( \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{ab} + 1} + \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{a}}{\sqrt{ab} - 1} - 1 \right) : \left( \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{ab} + 1} - \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{a}}{\sqrt{ab} - 1} + 1 \right)$ .

a. Rút gọn  $B$ .

b. Tính giá trị của  $B$  nếu  $a = 2 - \sqrt{3}$  và  $b = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}}$ .

c. Tìm giá trị nhỏ nhất của  $B$  nếu  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 4$ .

# BÀI 5. CĂN BẬC BA

## A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Căn bậc ba của một số  $a$  là số  $x$  sao cho  $x^3 = a$ .
- Mọi số  $a$  đều có duy nhất một căn bậc ba.
- $A < B \Leftrightarrow \sqrt[3]{A} < \sqrt[3]{B}$ .
- $\sqrt[3]{A \cdot B} = \sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{B}$ .
- Với  $B \neq 0$  ta có:  $\sqrt[3]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{B}}$ .

## B – BÀI TẬP TỰ LUẬN

### Dạng 1. Thực hiện phép tính

Áp dụng:  $\sqrt[3]{a^3} = a$ ;  $(\sqrt[3]{a})^3 = a$ .  
 và các hằng đẳng thức:  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ,  $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ .  
 $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ ,  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ .

**Bài 1.** Thực hiện các phép tính sau:

- a.  $\sqrt[3]{(\sqrt{2} + 1)(3 + 2\sqrt{2})}$ .      b.  $\sqrt[3]{(4 - 2\sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)}$ .      c.  $\sqrt[3]{-64} - \sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{216}$ .  
 d.  $(\sqrt[3]{4} + 1)^3 - (\sqrt[3]{4} - 1)^3$ .      e.  $(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})$ .

**Bài 2.** Thực hiện các phép tính sau:

- a.  $A = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$ .      b.  $B = \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}}$ .  
 c.  $C = (2 - \sqrt{3}) \cdot \sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}}$ .      d.  $D = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}$ .

### Dạng 2. Chứng minh đẳng thức

**Bài 3.** Chứng minh rằng, nếu:  $ax^3 = by^3 = cz^3$  và  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$  thì  $\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$ .

**Bài 4.** Chứng minh đẳng thức:

$$x + y + z - 3\sqrt[3]{xyz} = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}) [(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})^2 + (\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z})^2 + (\sqrt[3]{z} - \sqrt[3]{x})^2].$$

### Dạng 3. So sánh hai số

Áp dụng:  $A < B \Leftrightarrow \sqrt[3]{A} < \sqrt[3]{B}$ .

**Bài 5.** So sánh:

- a.  $A = 2\sqrt[3]{3}$  và  $B = \sqrt[3]{23}$ .      b.  $A = 33$  và  $B = 3\sqrt[3]{133}$ .      c.  $A = 5\sqrt[3]{6}$  và  $B = 6\sqrt[3]{5}$ .

**Bài 6.** So sánh:  $A = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$  và  $B = 2\sqrt{5}$ .

### Dạng 4. Giải phương trình

Áp dụng:  $\sqrt[3]{A} = B \Leftrightarrow A = B^3$ .

**Bài 7.** Giải các phương trình sau:

a.  $\sqrt[3]{2x+1} = 3$ .

b.  $\sqrt[3]{2-3x} = -2$ .

c.  $\sqrt[3]{x-1} + 1 = x$ .

d.  $\sqrt[3]{x^3+9x^2} = x+3$ .

e.  $\sqrt[3]{5+x} - x = 5$ .

**Bài 8.** Giải các phương trình sau:

a.  $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$ .

b.  $\sqrt[3]{13-x} + \sqrt[3]{22+x} = 5$ .

c.  $\sqrt[3]{x+1} = \sqrt{x-3}$ .

## BÀI 6. ÔN TẬP CHƯƠNG I

**Bài 1.** Rút gọn các biểu thức sau:

a.  $\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72}$ .

b.  $(\sqrt{28} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7})\sqrt{7} + \sqrt{84}$ .

c.  $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 - \sqrt{120}$ .

d.  $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{4}{5}\sqrt{200}\right) : \frac{1}{8}$ .

**Bài 2.** Rút gọn các biểu thức sau:

a.  $\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$ .

b.  $\frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$ .

c.  $\frac{1}{2 + \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} - \frac{2}{3 + \sqrt{3}}$ .

**Bài 3.** Chứng minh các đẳng thức sau:

a.  $2\sqrt{2}(\sqrt{3} - 2) + (1 + 2\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6} = 9$ .

b.  $\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{6}$ .

c.  $\sqrt{\frac{4}{(2 - \sqrt{5})^2}} - \sqrt{\frac{4}{(2 + \sqrt{5})^2}} = 8$ .

d.  $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} = 6$ .

**Bài 4.** So sánh (không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi):

a.  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  và  $\sqrt{10}$ .

b.  $\sqrt{2003} + \sqrt{2005}$  và  $2\sqrt{2004}$ .

c.  $\sqrt{5\sqrt{3}}$  và  $\sqrt{3\sqrt{5}}$ .

**Bài 5.** Cho biểu thức:  $A = \frac{2x}{x+3} - \frac{x+1}{3-x} - \frac{3-11x}{x^2-9}$  với  $x \neq \pm 3$ .

a. Rút gọn biểu thức  $A$ .

b. Tìm  $x$  để  $A < 2$ .

c. Tìm  $x$  nguyên để  $A$  nguyên.

**Bài 6.** Cho biểu thức:  $A = \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{x^2-4x-1}{x^2-1}\right) \cdot \frac{x+2003}{x}$ .

a. Tìm điều kiện để biểu thức  $A$  có nghĩa.

b. Rút gọn  $A$ .

c. Tìm  $x$  nguyên để  $A$  nhận giá trị nguyên.

**Bài 7.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:  $A = \frac{1}{x - \sqrt{x+1}}$ .

**Bài 8.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:  $A = \sqrt{1 - 6x + 9x^2} + \sqrt{9x^2 - 12x + 4}$ .

**Bài 9.** Tìm  $x$  nguyên để biểu thức sau nhận giá trị nguyên:  $A = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}}$ .

**Bài 10.** Cho biểu thức:  $Q = \left(\frac{\sqrt{x+2}}{x+2\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x-2}}{x-1}\right) \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$ .

a. Rút gọn  $Q$ .

b. Tìm số nguyên  $x$  để  $Q$  có giá trị nguyên.

**Bài 11.** Cho biểu thức  $M = \left(\frac{1}{a - \sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a} - 1}\right) : \frac{\sqrt{a} + 1}{a - 2\sqrt{a} + 1}$  với  $a > 0, a \neq 1$ .

- a. Rút gọn biểu thức  $M$ .
- b. So sánh giá trị của  $M$  với 1.

**Bài 12.** Cho biểu thức  $P = \left( \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} - \frac{x-3}{\sqrt{x-1} - \sqrt{2}} \right) \left( \frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{2x} - x} \right)$ .

- a. Tìm điều kiện để  $P$  có nghĩa.
- b. Rút gọn biểu thức  $P$ .
- c. Tính giá trị của  $P$  với  $x = 3 - 2\sqrt{2}$ .

**Bài 13.** Cho biểu thức:  $B = \left( \frac{2x+1}{\sqrt{x^3-1}} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) \cdot \left( \frac{1+\sqrt{x^3}}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)$  với  $x \geq 0$  và  $x \neq 1$ .

- a. Rút gọn  $B$ .
- b. Tìm  $x$  để  $B = 3$ .

**Bài 14.** Cho biểu thức:  $A = \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right] : \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3}}$  với  $x > 0, y > 0$ .

- a. Rút gọn  $A$ .
- b. Biết  $xy = 16$ . Tìm các giá trị của  $x, y$  để  $A$  có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị đó.

**Bài 15.** Cho biểu thức:  $P = \frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{x}{\sqrt{x}-x}$ .

- a. Rút gọn  $P$ .
- b. Tính giá trị của biểu thức  $P$  khi  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

a. **Bài 16.**  $\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72}$ .

b.  $(\sqrt{28} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7})\sqrt{7} + \sqrt{84}$ .

c.  $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 - \sqrt{120}$ .

d.  $\left( \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{4}{5}\sqrt{200} \right) : \frac{1}{8}$ .



# HÀM SỐ BẬC NHẤT

## BÀI 1. KHÁI NIỆM HÀM SỐ

### A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### 1. Khái niệm hàm số

- Nếu đại lượng  $y$  phụ thuộc vào đại lượng thay đổi  $x$  sao cho với mỗi giá trị của  $x$ , ta luôn xác định được một và chỉ một giá trị tương ứng của  $y$  thì  $y$  đgl hàm số của  $x$ ,  $x$  đgl biến số.  
Ta viết:  $y = f(x), y = g(x), \dots$
- Giá trị của  $f(x)$  tại  $x_0$  kí hiệu là  $f(x_0)$ .
- Tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số  $y = f(x)$  là tập hợp các giá trị của  $x$  sao cho  $f(x)$  có nghĩa.
- Khi  $x$  thay đổi mà  $y$  luôn nhận một giá trị không đổi thì hàm số  $y$  đgl hàm hằng.

#### 2. Đồ thị của hàm số

Đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  là tập hợp tất cả các điểm  $M(x; y)$  trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  sao cho  $x, y$  thoả mãn hệ thức  $y = f(x)$ .

#### 3. Hàm số đồng biến, nghịch biến

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên tập  $\mathbb{R}$ .

- $y = f(x)$  đồng biến trên  $\mathbb{R} \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$ .
- $y = f(x)$  nghịch biến trên  $\mathbb{R} \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$ .

### B – BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Cho hai hàm số  $f(x) = x^2$  và  $g(x) = 3 - x$ .

- Tính  $f(-3), f\left(-\frac{1}{2}\right), f(0), g(1), g(2), g(3)$ .
- Xác định  $a$  để  $2f(a) = g(a)$ .

**Bài 2.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$ .

- Tìm tập xác định của hàm số.
- Tính  $f(4 - 2\sqrt{3})$  và  $f(a^2)$  với  $a < -1$ .
- Tìm  $x$  nguyên để  $f(x)$  là số nguyên.
- Tìm  $x$  sao cho  $f(x) = f(x^2)$ .

**Bài 3.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{|x+1| + |x-1|}{|x+1| - |x-1|}$ .

- Tìm tập xác định  $\mathcal{D}$  của hàm số.
- Chứng minh rằng  $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathcal{D}$ .

**Bài 4.** Tìm tập xác định của các hàm số sau:

- $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$ .
- $y = \frac{x-1}{(x+1)(x-3)}$ .
- $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 3}$ .
- $y = \frac{3\sqrt{x-1}}{|x|-2}$ .
- $y = \sqrt{x-5} - \sqrt{x+3}$ .
- $y = \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x}$ .

**Bài 5.** Chứng tỏ rằng hàm số  $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$  nghịch biến trong khoảng  $(-\infty; 2)$  và đồng biến trong khoảng  $(2; +\infty)$ .

**Bài 6.** Chứng tỏ rằng hàm số  $y = f(x) = x^3$  luôn luôn đồng biến.

**Bài 7.** Chứng tỏ rằng hàm số  $y = f(x) = \frac{x+1}{x-2}$  nghịch biến trong từng khoảng xác định của nó.

**Bài 8.** Chứng tỏ rằng hàm số  $y = f(x) = \sqrt{3-x+2\sqrt{2-x}}$  nghịch biến trong khoảng xác định của nó.

**Bài 9.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x) = -x^3 + x^2 - x + 6$  trên đoạn  $[0; 2]$ .

**Bài 10.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x) = \frac{x-2}{x+1}$  trong đoạn  $[-3; -2]$ .

**Bài 11.** Vẽ đồ thị của hai hàm số  $y = -\frac{2}{3}x; y = -\frac{2}{3}x + 1$  trên cùng một hệ trục tọa độ. Có nhận xét gì về hai đồ thị này.

**Bài 12.** Cho hàm số  $y = f(x) = \sqrt{x}$ .

- Chứng minh rằng hàm số đồng biến.
- Trong các điểm  $A(4; 2), B(2; 1), C(9; 3), D(8; 2\sqrt{2})$ , điểm nào thuộc và điểm nào không thuộc đồ thị của hàm số.

## BÀI 2. HÀM SỐ BẬC NHẤT

### A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### 1. Khái niệm hàm số bậc nhất

Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức  $y = ax + b$  với  $a \neq 0$ .

#### 2. Tính chất

Hàm số bậc nhất  $y = ax + b$  xác định với mọi  $x$  thuộc  $\mathbb{R}$  và có tính chất sau:

- Đồng biến trên  $\mathbb{R}$  nếu  $a > 0$ .
- Nghịch biến trên  $\mathbb{R}$  nếu  $a < 0$ .

#### 3. Đồ thị

- Đồ thị của hàm số  $y = ax + b$  ( $a \neq 0$ ) là một đường thẳng:
  - Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng  $b$ .
  - Song song với đường thẳng  $y = ax$  nếu  $b \neq 0$ ; trùng với đường thẳng  $y = ax$  nếu  $b = 0$ .
- Cách vẽ đồ thị hàm số  $y = ax + b$  ( $a \neq 0$ ):
  - Khi  $b = 0$  thì  $y = ax$ . Đồ thị của hàm số  $y = ax$  là đường thẳng đi qua gốc toạ độ  $O(0; 0)$  và điểm  $A(1; a)$ .
  - Nếu  $b \neq 0$  thì đồ thị  $y = ax + b$  là đường thẳng đi qua các điểm  $A(0; b)$ ,  $B(-\frac{b}{a}; 0)$ .

#### 4. Đường thẳng song song và đường thẳng cắt nhau

Cho hai đường thẳng  $(d) : y = ax + b$  và  $(d') : y = a'x + b'$  ( $a, a' \neq 0$ ):

- $(d) \parallel (d') \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$
- $(d) \perp (d') \Leftrightarrow a \cdot a' = -1$
- $(d) \equiv (d') \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$
- $(d)$  cắt  $(d') \Leftrightarrow a \neq a'$ .

#### 5. Hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$ ( $a \neq 0$ )

- Đường thẳng  $y = ax + b$  có hệ số góc là  $a$ .
- Gọi  $\alpha$  là góc tạo bởi đường thẳng  $y = ax + b$  ( $a \neq 0$ ) với tia  $Ox$ :
  - $\alpha < 90^\circ$  thì  $a > 0$ .
  - $\alpha > 90^\circ$  thì  $a < 0$ .
- Các đường thẳng có cùng hệ số góc thì tạo với trục  $Ox$  các góc bằng nhau.

### B – BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc nhất? Với các hàm số bậc nhất, hãy cho biết hàm số đó đồng biến hay nghịch biến?

a.  $y = 5 - 2x$ .

b.  $y = x\sqrt{2} - 1$ .

c.  $y = 2(x + 1) - 2x$ .

d.  $y = 3(x - 1) - x$ .

e.  $y = -\frac{2}{3}x$ .

f.  $y = x + \frac{1}{x}$ .

**Bài 2.** Cho hàm số  $y = (3 - \sqrt{2})x + 2$ .

a. Hàm số trên là đồng biến hay nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ ?

b. Tính các giá trị tương ứng của  $y$  khi  $x$  nhận các giá trị sau:  $0; 1; 3 + \sqrt{2}; 3 - \sqrt{2}$ .

c. Tính các giá trị tương ứng của  $x$  khi  $y$  nhận các giá trị sau:  $0; 1; 5 + \sqrt{2}; 5 - \sqrt{2}$ .

**Bài 3.** Cho các hàm số  $y = x$  ( $d_1$ ),  $y = 2x$  ( $d_2$ ),  $y = -x + 3$  ( $d_3$ ).

a. Vẽ trên cùng một hệ trục các đồ thị ( $d_1$ ), ( $d_2$ ), ( $d_3$ ).

b. Đường thẳng ( $d_3$ ) cắt các đường thẳng ( $d_1$ ), ( $d_2$ ) lần lượt tại  $A$  và  $B$ . Tính tọa độ các điểm  $A, B$  và diện tích tam giác  $OAB$ .

**Bài 4.** Cho hàm số  $y = (a - 1)x + a$ .

a. Chứng minh rằng đồ thị hàm số luôn đi qua điểm  $A(-1; 1)$  với mọi giá trị của  $a$ .

b. Xác định  $a$  để đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3. Vẽ đồ thị hàm số trong trường hợp này.

c. Xác định  $a$  để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng  $-2$ . Tính khoảng cách từ gốc tọa độ  $O$  đến đường thẳng đó.

**Bài 5.** Vẽ đồ thị các hàm số:

a.  $y = |x|$ .

b.  $y = |2x - 1|$ .

c.  $y = |x - 2| - 1$ .

**Bài 6.** Cho hàm số  $y = |x - 1| + 2|x|$ .

a. Vẽ đồ thị hàm số trên.

b. Dựa vào đồ thị, biện luận theo  $m$  số nghiệm của phương trình:  $|x - 1| + 2|x| = m$ .

**Bài 7.** Tìm các cặp đường thẳng song song và các cặp đường thẳng cắt nhau trong số các đường thẳng sau:

a.  $y = \sqrt{3}x - 1$ .

b.  $y = 2 - x$ .

c.  $y = -0,3x$ .

d.  $y = -0,3x - 1$ .

e.  $y = 3 + \sqrt{3}x$ .

f.  $y = -x + 3$ .

**Bài 8.** Cho hàm số  $y = mx - 3$ . Xác định  $m$  trong mỗi trường hợp sau:

a. Đồ thị hàm số song song với đường thẳng  $y = -3x$ .

b. Khi  $x = 1 + \sqrt{3}$  thì  $y = \sqrt{3}$ .

**Bài 9.** Xác định hàm số  $y = ax + b$ , biết đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 5 và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng  $-3$ .

**Bài 10.** Cho đường thẳng  $y = (a + 1)x + a$ .

a. Xác định  $a$  để đường thẳng đi qua gốc tọa độ.

b. Xác định  $a$  để đường thẳng song song với đường thẳng  $y = (\sqrt{3} + 1)x + 4$ .

**Bài 11.** Xác định hàm số trong mỗi trường hợp sau, biết đồ thị của nó là đường thẳng đi qua gốc tọa độ và:

- Đi qua điểm  $A(2; 4)$ .
- Có hệ số góc  $a = -\sqrt{2}$ .
- Song song với đường thẳng  $y = 5x - 1$ .

**Bài 12.** Viết phương trình đường thẳng qua gốc tọa độ và:

- đi qua điểm  $A(-3; 1)$ .
- có hệ số góc bằng  $-2$ .
- song song với đường thẳng  $y = 2x - 1$ .

**Bài 13.** Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm  $B(-1; -4)$  và:

- có hệ số góc bằng  $\frac{1}{2}$ .
- song song với đường thẳng  $y = -3x + 1$ .
- có hệ số góc bằng  $k$  cho trước.

**Bài 14.** Cho hàm số  $y = mx + 3m - 1$ .

- Định  $m$  để đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ.
- Tìm tọa độ của điểm mà đường thẳng luôn đi qua với mọi  $m$ .

**Bài 15.** Cho 2 điểm  $A(1; -2), B(-4; 3)$ .

- Tìm hệ số góc của đường thẳng  $AB$ .
- Lập phương trình đường thẳng  $AB$ .

## BÀI 3. ÔN TẬP CHƯƠNG II

**Bài 1.** Cho hai hàm số:  $y = x$  và  $y = 3x$ .

- Vẽ đồ thị của hai hàm số đó trên cùng một hệ trục tọa độ  $Oxy$ .
- Đường thẳng song song với trục  $Ox$ , cắt trục  $Oy$  tại điểm có tung độ bằng 6, cắt các đồ thị trên lần lượt ở  $A$  và  $B$ . Tìm tọa độ các điểm  $A$  và  $B$ . Tính chu vi và diện tích tam giác  $OAB$ .

**Bài 2.** Cho hai hàm số  $y = -2x$  và  $y = \frac{1}{2}x$ .

- Vẽ đồ thị của hai hàm số đó trên cùng một hệ trục tọa độ  $Oxy$ .
- Qua điểm  $(0; 2)$  vẽ đường thẳng song song với trục  $Ox$ , cắt các đồ thị trên lần lượt tại  $A$  và  $B$ . Chứng minh tam giác  $AOB$  là tam giác vuông và tính diện tích của tam giác đó.

**Bài 3.** Cho hàm số:  $y = (m + 4)x - m + 6$  ( $d$ ).

- Tìm các giá trị của  $m$  để hàm số đồng biến, nghịch biến.
- Tìm các giá trị của  $m$ , biết rằng đường thẳng ( $d$ ) đi qua điểm  $A(-1; 2)$ . Vẽ đồ thị của hàm số với giá trị tìm được của  $m$ .
- Chứng minh rằng khi  $m$  thay đổi thì các đường thẳng ( $d$ ) luôn luôn đi qua một điểm cố định.

**Bài 4.** Cho hàm số:  $y = (3m - 2)x - 2m$ .

- Xác định  $m$  để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2.
- Xác định  $m$  để đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2.
- Xác định tọa độ giao điểm của hai đồ thị ứng với giá trị của  $m$  tìm được ở câu a, câu b.

**Bài 5.** Cho ba đường thẳng  $(d_1) : y = -x + 1$ ,  $(d_2) : y = x + 1$  và  $(d_3) : y = -1$ .

- Vẽ ba đường thẳng đã cho trên cùng một hệ trục tọa độ  $Oxy$ .
- Gọi giao điểm của hai đường thẳng  $(d_1)$ ,  $(d_2)$  là  $A$ , giao điểm của đường thẳng  $(d_3)$  với hai đường thẳng  $(d_1)$ ,  $(d_2)$  theo thứ tự là  $B$  và  $C$ . Tìm tọa độ các điểm  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .
- Tam giác  $ABC$  là tam giác gì? Tính diện tích tam giác  $ABC$ .

**Bài 6.** Cho các hàm số sau:  $(d_1) : y = -x - 5$ ;  $(d_2) : y = \frac{1}{4}x$ ;  $(d_3) : y = 4x$ .

- Vẽ đồ thị của các hàm số đã cho trên cùng một hệ trục tọa độ  $Oxy$ .
- Gọi giao điểm của đường thẳng  $(d_1)$  với đường thẳng  $(d_2)$  và  $(d_3)$  lần lượt là  $A$  và  $B$ . Tìm tọa độ các điểm  $A$ ,  $B$ .
- Tam giác  $AOB$  là tam giác gì? Vì sao? Tính diện tích tam giác  $AOB$ .

**Bài 7.** Cho hàm số:  $(d_1) : y = 2x + 2$ ,  $(d_2) : y = -\frac{1}{2}x - 2$ .

- Vẽ đồ thị của hai hàm số đã cho trên cùng một hệ trục tọa độ  $Oxy$ .
- Gọi giao điểm của đường thẳng  $(d_1)$  với trục  $Oy$  là  $A$ , giao điểm của đường thẳng  $(d_2)$  với trục  $Ox$  là  $B$ , còn giao điểm của đường thẳng  $(d_1)$ ,  $(d_2)$  là  $C$ . Tam giác  $ABC$  là tam giác gì? Tìm tọa độ các điểm  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

c. Tính diện tích tam giác  $ABC$ .

**Bài 8.** Cho hai đường thẳng:  $(d_1) : y = x + 3$  và  $(d_2) : y = 3x + 7$ .

- Vẽ đồ thị của các hàm số đã cho trên cùng một hệ trục tọa độ  $Oxy$ .
- Gọi giao điểm của đường thẳng  $(d_1)$  và  $(d_2)$  với trục  $Oy$  lần lượt là  $A$  và  $B$ . Tìm tọa độ trung điểm  $I$  của đoạn  $AB$ .
- Gọi  $J$  là giao điểm của hai đường thẳng  $(d_1)$  và  $(d_2)$ . Chứng minh tam giác  $OIJ$  là tam giác vuông. Tính diện tích của tam giác đó.

**Bài 9.** Cho đường thẳng  $(d) : y = -2x + 3$ .

- Xác định tọa độ giao điểm  $A$  và  $B$  của đường thẳng  $(d)$  với hai trục  $Ox, Oy$ . Tính khoảng cách từ điểm  $O(0; 0)$  đến đường thẳng  $(d)$ .
- Tính khoảng cách từ điểm  $C(0; -2)$  đến đường thẳng  $(d)$ .

**Bài 10.** Tìm giá trị của  $k$  để ba đường thẳng sau đồng quy:

$$(d_1) : y = 2x + 7, (d_2) : y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}, (d_3) : y = -\frac{2}{k}x - \frac{1}{k}.$$

**Bài 11.** Cho hai đường thẳng:  $(d_1) : y = (m + 1)x - 3$  và  $(d_2) : y = (2m - 1)x + 4$ .

- Chứng minh rằng khi  $m = -\frac{1}{2}$  thì hai đường thẳng đã cho vuông góc với nhau.
- Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để hai đường thẳng đã cho vuông góc với nhau.

**Bài 12.** Xác định hàm số  $y = ax + b$  trong mỗi trường hợp sau:

- Khi  $a = \sqrt{3}$ , đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng  $-\sqrt{3}$ .
- Khi  $a = -5$ , đồ thị hàm số đi qua điểm  $A(-2; 3)$ .
- Đồ thị hàm số đi qua hai điểm  $M(1; 3)$  và  $N(-2; 6)$ .
- Đồ thị hàm số song song với đường thẳng  $y = \sqrt{7}x$  và đi qua điểm  $(1; 7 + \sqrt{7})$ .

**Bài 13.** Cho đường thẳng:  $y = 4x$  ( $d$ ).

- Viết phương trình đường thẳng  $(d_1)$  song song với đường thẳng  $(d)$  và có tung độ gốc bằng 10.
- Viết phương trình đường thẳng  $(d_2)$  vuông góc với đường thẳng  $(d)$  và cắt trục  $Ox$  tại điểm có hoành độ bằng  $-8$ .
- Viết phương trình đường thẳng  $(d_3)$  song song với đường thẳng  $(d)$  cắt trục  $Ox$  tại  $A$ , cắt trục  $Oy$  tại  $B$  và diện tích tam giác  $AOB$  bằng 8.

**Bài 14.** Cho hai đường thẳng:  $y = (k - 3)x - 3k + 3$  ( $d_1$ ) và  $y = (2k + 1)x + k + 5$  ( $d_2$ ). Tìm các giá trị của  $k$  để:

- $(d_1)$  và  $(d_2)$  cắt nhau.
- $(d_1)$  và  $(d_2)$  cắt nhau tại một điểm trên trục tung.
- $(d_1)$  và  $(d_2)$  song song.

**Bài 15.** Cho hàm số  $(d) : y = (m + 3)x + n$  ( $m \neq -3$ ). Tìm các giá trị của  $m, n$  để đường thẳng  $(d)$ :

- Đi qua các điểm  $A(1; -3)$  và  $B(-2; 3)$ .
- Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng  $1 - \sqrt{3}$ , cắt trục hoành tại điểm có hoành độ  $3 + \sqrt{3}$ .
- Cắt đường thẳng  $3y - x - 4 = 0$ .
- Song song với đường thẳng  $2x + 5y = -1$ .

# HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

## BÀI 1. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

### A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### 1. Khái niệm phương trình bậc nhất hai ẩn

- Phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  là hệ thức dạng:  $ax + by = c$  (1).  
trong đó  $a, b, c$  là các số đã biết ( $a \neq 0$  hoặc  $b \neq 0$ ).
- Nếu  $x_0, y_0$  thỏa (1) thì cặp số  $(x_0; y_0)$  đgl một nghiệm của phương trình (1).
- Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , mỗi nghiệm của (1) được biểu diễn bởi một điểm. Nghiệm  $(x_0; y_0)$  được biểu diễn bởi điểm  $(x_0; y_0)$ .

#### 2. Tập nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn

- Phương trình bậc nhất hai ẩn  $ax + by = c$  luôn có vô số nghiệm. Tập nghiệm của nó được biểu diễn bởi đường thẳng  $ax + by = c$  ( $d$ ).
- Nếu  $a \neq 0$  và  $b \neq 0$  thì đường thẳng ( $d$ ) là đồ thị của hàm số  $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ .
- Nếu  $a \neq 0$  và  $b = 0$  thì phương trình trở thành  $ax = c \Leftrightarrow x = \frac{c}{a}$  và đường thẳng ( $d$ ) song song hoặc trùng với trục tung.
- Nếu  $a = 0$  và  $b \neq 0$  thì phương trình trở thành  $by = c \Leftrightarrow y = \frac{c}{b}$  và đường thẳng ( $d$ ) song song hoặc trùng với trục hoành.

### B – BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Trong các cặp số  $(0; 4), (-1; 3), (1; 1), (2; 3), (4; 6)$ , cặp số nào là nghiệm của phương trình:

a.  $5x - 3y = 2$ .

b.  $2x + y = 7$ .

c.  $2x - y = 2$ .

**Bài 2.** Tìm nghiệm tổng quát và vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của nó:

a.  $3x - y = 1$ .

b.  $x - 2y = 5$ .

c.  $2x - 3y = 5$ .

d.  $3y + x = 2$ .

e.  $4x + 0y = 12$ .

f.  $0x - 3y = 6$ .

**Bài 3.** Cho đường thẳng ( $d$ ) có phương trình:  $(m - 1)x + (3m - 4)y = -2m - 5$ . Tìm  $m$  để:





# BÀI 2. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

## A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

### 1. Khái niệm hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

Cho hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn: 
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} (I).$$

- Nếu hai phương trình trên có nghiệm chung  $(x_0; y_0)$  thì  $(x_0; y_0)$  đgl một nghiệm của hệ  $(I)$ .
- Nếu hai phương trình trên không có nghiệm chung thì ta nói hệ  $(I)$  vô nghiệm.
- Giải hệ phương trình là tìm tập nghiệm của nó.

### 2. Minh họa hình học tập nghiệm của hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

Tập nghiệm của hệ phương trình  $(I)$  được biểu diễn bởi tập hợp các điểm chung của hai đường thẳng  $(d_1) : a_1x + b_1y = c_1$  và  $(d_2) : a_2x + b_2y = c_2$ .

- Nếu  $(d_1)$  cắt  $(d_2)$  thì hệ  $(I)$  có một nghiệm duy nhất.
- Nếu  $(d_1) \parallel (d_2)$  thì hệ  $(I)$  vô nghiệm.
- Nếu  $(d_1) \equiv (d_2)$  thì hệ  $(I)$  có vô số nghiệm.

### 3. Hệ phương trình tương đương

Hai hệ phương trình đgl tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm.

## B – BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Đoán nhận số nghiệm của mỗi hệ phương trình sau và giải thích vì sao:

a. 
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

b. 
$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$

c. 
$$\begin{cases} 3x + 0y = 6 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

d. 
$$\begin{cases} x - y = 4 \\ 0x - y = 2 \end{cases}$$

e. 
$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$$

f. 
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

**Bài 2.** Bằng đồ thị chứng tỏ các hệ phương trình sau luôn có nghiệm duy nhất với bất kì giá trị nào của  $a$ :

a. 
$$\begin{cases} x = a \\ x + y = 1 \end{cases}$$

b. 
$$\begin{cases} x - y = 3 \\ y = a \end{cases}$$

**Bài 3.** Bằng đồ thị chứng tỏ hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ ax + 2y = 3 \end{cases}$$

- a. Có nghiệm duy nhất với  $a = -2$ .
- b. Vô nghiệm với  $a = -6$ .

**Bài 4.** Bằng đồ thị chứng tỏ hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 3x - 2y = a \\ 15x - 10y = 5 \end{cases}$$

- a. Có vô số nghiệm với  $a = 1$ .  
b. Vô nghiệm với  $a \neq 1$ .

**Bài 5.** Xác định  $m$  để hệ phương trình sau 
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \\ mx - y = 2m \end{cases}$$
 có nghiệm duy nhất.

**Bài 6.** Xác định  $a$  để hai hệ phương trình sau là tương đương:

- a. 
$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x + y = 3 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 12x + 3y = a \end{cases}$$
- b. 
$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 2ax - 2y = 1 \\ x + ay = 2 \end{cases}$$

# BÀI 3. GIẢI HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

## A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

### 1. Phương pháp thế

- Bước 1: Từ một phương trình của hệ đã cho (coi là PT (1)), ta biểu diễn một ẩn theo ẩn kia, rồi thế vào phương trình thứ hai (PT (2)) để được một phương trình mới (chỉ còn một ẩn).
- Bước 2: Dùng phương trình mới ấy để thay thế cho PT (2) trong hệ (PT (1) cũng thường được thay thế bởi hệ thức biểu diễn một ẩn theo ẩn kia).

### 2. Phương pháp cộng đại số

- Cộng hay trừ từng vế hai phương trình của hệ phương trình đã cho để được một phương trình mới.
- Dùng phương trình mới ấy thay thế cho một trong hai phương trình của hệ (giữ nguyên phương trình kia).

Chú ý:

- Trong phương pháp cộng đại số, trước khi thực hiện bước 1, có thể nhân hai vế của mỗi phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ là bằng nhau hoặc đối nhau.
- Đôi khi ta có thể dùng phương pháp đặt ẩn phụ để đưa hệ phương trình đã cho về hệ phương trình với hai ẩn mới, rồi sau đó sử dụng một trong hai phương pháp giải ở trên.

## B – BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế:

$$\text{a. } \begin{cases} 4x + y = 2 \\ 8x + 3y = 5 \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 4x - 5y = 3 \end{cases}$$

$$\text{c. } \begin{cases} 5x - 4y = 3 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

$$\text{d. } \begin{cases} x + y = \frac{4x - 3}{5} \\ x + 3y = \frac{15 - 9y}{14} \end{cases}$$

$$\text{e. } \begin{cases} \frac{x + y}{5} = \frac{x - y}{3} \\ \frac{x}{4} = \frac{y}{2} + 1 \end{cases}$$

$$\text{f. } \begin{cases} \frac{5x}{3} - \frac{2y}{5} = 19 \\ 4x + \frac{3y}{2} = 21 \end{cases}$$

**Bài 2.** Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a. } \begin{cases} -x + 2y = -4(x - 1) \\ 5x + 3y = -(x + y) + 8 \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} 9x - 6y = 4 \\ 3(4x - 3y) = -3x + y + 7 \end{cases}$$

$$\text{c. } \begin{cases} 3(x + 1) + 2y = -x \\ 5(x + y) = -3x + y - 5 \end{cases}$$

$$\text{d. } \begin{cases} 2(2x + 3y) = 3(2x - 3y) + \\ 4x - 3y = 4(6y - 2x) + 3 \end{cases}$$

$$\text{e. } \begin{cases} ((\sqrt{3} - \sqrt{2})x + y = \sqrt{2} \\ x + (\sqrt{3} + \sqrt{2})y = \sqrt{6} \end{cases}$$

$$\text{f. } \begin{cases} (x + 5)(y - 2) = (x + 2)(y - 1) \\ (x - 4)(y + 7) = (x - 3)(y + 4) \end{cases}$$

**Bài 3.** Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a. } \begin{cases} 2x + 3|y| = 13 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} 3\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = -2 \\ 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \end{cases}$$

$$\text{c. } \begin{cases} 2\sqrt{x-1} - \sqrt{y-1} = 1 \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 2 \end{cases}$$

$$\text{d. } \begin{cases} \frac{4}{x+y-1} - \frac{5}{2x-y+3} = \frac{5}{2} \\ \frac{3}{x+y-1} + \frac{1}{2x-y+3} = \frac{7}{5} \end{cases}$$

$$\text{e. } \begin{cases} \frac{2}{x+y} + \frac{1}{x-y} = 3 \\ \frac{1}{x+y} - \frac{3}{x-y} = 1 \end{cases}$$

$$\text{f. } \begin{cases} (x-1)^2 - 2y = 2 \\ 3(x-1)^2 + 3y = 1 \end{cases}$$

**Bài 4.** Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

$$\text{a. } \begin{cases} mx - y = 2m \\ 4x - my = m + 6 \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} mx + y = 3m - 1 \\ x + my = m + 1 \end{cases}$$

**Bài 5.** Tìm  $m$  nguyên để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất là nghiệm nguyên:

$$\text{a. } \begin{cases} mx + 2y = m + 1 \\ 2x + my = 2m - 1 \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} (m+1)x - 2y = m - 1 \\ m^2x - y = m^2 + 2m \end{cases}$$

**Bài 6.** Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số:

$$\text{a. } \begin{cases} 4x + 3y = 13 \\ 5x - 3y = -31 \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} 7x + 5y = 19 \\ 3x + 5y = 31 \end{cases}$$

$$\text{c. } \begin{cases} 7x - 5y = 3 \\ 3x + 10y = 62 \end{cases}$$

$$\text{d. } \begin{cases} x + 5y = -5 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases}$$

$$\text{e. } \begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 4x - 3y = -12 \end{cases}$$

$$\text{f. } \begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ 3x - 2y = -3 \end{cases}$$

**Bài 7.** Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a. } \begin{cases} 3(x+1) + 2y = -x \\ 5(x+y) = -3x + y - 5 \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} 2x + 5 = -(x+y) \\ 6x + 3y = y - 10 \end{cases}$$

$$\text{c. } \begin{cases} x + y = -2(x-1) \\ 7x + 3y = x + y + 5 \end{cases}$$

$$\text{d. } \begin{cases} \sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 1 \\ x + \sqrt{3}y = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{e. } \begin{cases} x - 2\sqrt{2}y = \sqrt{5} \\ \sqrt{2}x + y = 1 - \sqrt{10} \end{cases}$$

$$\text{f. } \begin{cases} (\sqrt{2}-1)x - y = \sqrt{2} \\ x + (\sqrt{2}+1)y = 1 \end{cases}$$

**Bài 8.** Xác định  $a$  và  $b$  để đồ thị của hàm số  $y = ax + b$  đi qua hai điểm  $A$  và  $B$  trong mỗi trường hợp sau:

$$\text{a. } A(2; 1), B(1; 2).$$

$$\text{b. } A(1; 3), B(3; 2).$$

$$\text{c. } A(1; -3), B(2; 3).$$

$$\text{d. } A(-1; 1), B(2; 3).$$

$$\text{e. } A(2; -2), B(-1; -2).$$

$$\text{f. } A(1; 0), B(1; -6).$$

**Bài 9.** Chứng tỏ rằng khi  $m$  thay đổi, các đường thẳng có phương trình sau luôn đi qua một điểm cố định:

$$\text{a. } (-5m + 4)x + (3m - 2)y + 3m - 4 = 0.$$

$$\text{b. } (2m^2 + m + 4)x - (m^2 - m - 1)y - 5m^2 - 4m - 13 = 0.$$

# BÀI 4. GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

## A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Bước 1: Lập hệ phương trình:
  - + Chọn hai ẩn và đặt điều kiện thích hợp cho chúng.
  - + Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo các ẩn và các đại lượng đã biết.
  - + Lập hai phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.
- Bước 2: Giải hệ hai phương trình nói trên.
- Trả lời: Kiểm tra xem trong các nghiệm của hệ phương trình, nghiệm nào thích hợp với bài toán (thỏa mãn điều kiện ở bước 1) và kết luận.

### Dạng 1. Toán về quan hệ giữa các số

**Bài 1.** Tìm một số tự nhiên có hai chữ số sao cho tổng của hai chữ số của nó bằng 11, nếu đổi chỗ hai chữ số hàng chục và hàng đơn vị cho nhau thì số đó tăng thêm 27 đơn vị.

**Bài 2.** Tìm một số tự nhiên có ba chữ số sao cho tổng các chữ số bằng 17, chữ số hàng chục là 4, nếu đổi chỗ các chữ số hàng trăm và hàng đơn vị cho nhau thì số đó giảm đi 99 đơn vị.

**Bài 3.** Tìm một số tự nhiên có ba chữ số chia hết cho 11, biết rằng khi chia số đó cho 11 thì được thương bằng tổng các chữ số của số bị chia.

**Bài 4.** Tìm hai số biết rằng tổng của hai số đó bằng 17 đơn vị. Nếu số thứ nhất tăng thêm 3 đơn vị, số thứ hai tăng thêm 2 đơn vị thì tích của chúng bằng 105 đơn vị.

### Dạng 2. Toán làm chung công việc

**Bài 5.** Hai vòi nước cùng chảy vào một bể sau 4 giờ 48 phút thì đầy bể. Nếu vòi I chảy trong 4 giờ, vòi II chảy trong 3 giờ thì cả hai vòi chảy được  $\frac{3}{4}$  bể. Tính thời gian để mỗi vòi chảy riêng một mình đầy bể.

**Bài 6.** Để hoàn thành một công việc, hai tổ phải làm chung trong 6 giờ. Sau 2 giờ làm chung thì tổ II được điều đi làm việc khác, tổ I đã hoàn thành công việc còn lại trong 10 giờ. Hỏi nếu mỗi tổ làm riêng thì sau bao lâu sẽ xong công việc đó?

**Bài 7.** Hai lớp 9A và 9B cùng tham gia lao động vệ sinh sân trường thì công việc được hoàn thành sau 1 giờ 20 phút. Nếu mỗi lớp chia nhau làm nửa công việc thì thời gian hoàn tất là 3 giờ. Hỏi nếu mỗi lớp làm một mình thì phải mất bao nhiêu thời gian?

### Dạng 3. Toán chuyển động

**Bài 8.** Một ô tô đi từ tỉnh A đến tỉnh B với một vận tốc đã định. Nếu vận tốc tăng thêm 20 km/h thì thời gian đi được sẽ giảm 1 giờ. Nếu vận tốc giảm bớt 10 km/h thì thời gian đi sẽ tăng thêm 1 giờ. Tính vận tốc và thời gian dự định của ô tô.

**Bài 9.** Hai địa điểm A và B cách nhau 85 km. Cùng lúc, một canô đi xuôi dòng từ A đến B và một canô đi ngược dòng từ B đến A, sau 1 giờ 40 phút thì gặp nhau. Tính vận tốc thật của mỗi canô, biết rằng vận tốc canô đi xuôi dòng lớn hơn vận tốc canô đi ngược dòng là 9 km/h và vận tốc dòng nước là 3 km/h (vận tốc thật của các canô không đổi).

**Bài 10.** Quãng đường AB dài 200 km. Cùng lúc một xe máy đi từ A đến B và một ô tô đi từ B đến A. Xe máy và ô tô gặp nhau tại điểm C cách A 120 km. Nếu xe máy khởi hành sau ô tô 1 giờ thì gặp nhau tại điểm D cách C 24 km. Tính vận tốc của ô tô và xe máy.

**Bài 11.** Một xe khách và một xe du lịch khởi hành đồng thời từ A để đi đến B. Biết vận tốc của xe du lịch lớn hơn vận tốc xe khách là 20 km/h. Do đó xe du lịch đến B trước xe khách 50 phút. Tính vận tốc mỗi xe, biết quãng đường AB dài 100 km.

**Bài 12.** Một người đi xe máy từ A đến B. Vì có việc gấp phải đến B trước thời gian dự định là 45 phút nên người đó tăng vận tốc lên mỗi giờ 10 km. Tính vận tốc mà người đó dự định đi, biết quãng đường AB dài 90 km.

**Bài 13.** Một người đi xe máy từ A tới B. Cùng một lúc một người khác cũng đi xe máy từ B tới A với vận tốc bằng  $\frac{4}{5}$  vận tốc của người thứ nhất. Sau 2 giờ hai người gặp nhau. Hỏi mỗi người đi cả quãng đường AB hết bao lâu?

**Bài 14.** Một canô ngược dòng từ bến A đến bến B với vận tốc 20 km/h, sau đó lại xuôi từ bến B trở về bến A. Thời gian canô ngược dòng từ A đến B nhiều hơn thời gian canô xuôi dòng từ B trở về A là 2 giờ 40 phút. Tính khoảng cách giữa hai bến A và B. Biết vận tốc dòng nước là 5 km/h, vận tốc riêng của canô lúc xuôi dòng và lúc ngược dòng bằng nhau.

#### Dạng 4. Toán có nội dung hình học

**Bài 15.** Một tam giác có chiều cao bằng  $\frac{3}{4}$  cạnh đáy. Nếu chiều cao tăng thêm 3 dm và cạnh đáy giảm đi 3 dm thì diện tích của nó tăng thêm 12 dm<sup>2</sup>. Tính chiều cao và cạnh đáy của tam giác.

**Bài 16.** Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi bằng 48 m. Nếu tăng chiều rộng lên bốn lần và chiều dài lên ba lần thì chu vi của khu vườn sẽ là 162 m. Hãy tìm diện tích của khu vườn ban đầu.

**Bài 17.** Người ta muốn làm một chiếc thùng tôn hình trụ không nắp có bán kính đáy là 25 cm, chiều cao của thùng là 60 cm. Hãy tính diện tích tôn cần dùng (không kể mép nối). Thùng tôn đó khi chứa đầy nước thì thể tích nước chứa trong thùng là bao nhiêu?

**Bài 18.** Một thửa ruộng hình chữ nhật có diện tích là 100 m<sup>2</sup>. Tính độ dài các cạnh của thửa ruộng. Biết rằng nếu tăng chiều rộng của thửa ruộng lên 2 m và giảm chiều dài của thửa ruộng đi 5 m thì diện tích của thửa ruộng sẽ tăng thêm 5 m<sup>2</sup>.

#### Dạng 5. Các dạng khác

**Bài 19.** Hai giá sách có 450 cuốn. Nếu chuyển 50 cuốn từ giá thứ nhất sang giá thứ hai thì số sách trên giá thứ hai bằng  $\frac{4}{5}$  số sách ở giá thứ nhất. Tính số sách trên mỗi giá.

**Bài 20.** Hai xí nghiệp theo kế hoạch phải làm tổng cộng 360 dụng cụ. Thực tế, xí nghiệp I vượt mức kế hoạch 10%, xí nghiệp II vượt mức kế hoạch 15%, do đó cả hai xí nghiệp đã làm được 404 dụng cụ. Tính số dụng cụ mỗi xí nghiệp phải làm theo kế hoạch.

**Bài 21.** Một công nhân dự định làm 72 sản phẩm trong một thời gian đã định. Nhưng thực tế xí nghiệp lại giao 80 sản phẩm. Mặc dù người đó mỗi giờ đã làm thêm một sản phẩm so với dự kiến, nhưng thời gian hoàn thành công việc vẫn chậm so với dự định là 12 phút. Tính số sản phẩm dự kiến làm trong 1 giờ của người đó. Biết mỗi giờ người đó làm không quá 20 sản phẩm.

**Bài 22.** Theo kế hoạch, một công nhân phải hoàn thành 60 sản phẩm trong thời gian nhất định. Nhưng do cải tiến kĩ thuật nên mỗi giờ người công nhân đó đã làm thêm được 2 sản phẩm. Vì vậy, chẳng những hoàn thành kế hoạch sớm hơn dự định 30 phút mà còn vượt mức 3 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch, mỗi giờ người đó phải làm bao nhiêu sản phẩm?

**Bài 23.** Một đội công nhân hoàn thành một công việc với mức 420 ngày công thợ (nghĩa là nếu công việc đó chỉ có một người làm thì phải mất 420 ngày). Hãy tính số công nhân của đội biết rằng nếu đội tăng thêm 5 người thì số ngày để đội hoàn thành công việc sẽ giảm đi 7 ngày.

**Bài 24.** Một đội xe vận tải phải vận chuyển 28 tấn hàng đến một địa điểm qui định. Vì trong đội có 2 xe phải điều đi làm việc khác nên mỗi xe phải chở thêm 0,7 tấn hàng nữa. Tính số xe của đội lúc đầu.

**Bài 25.** Người ta dự kiến trồng 300 cây trong một thời gian đã định. Do điều kiện thuận lợi nên mỗi ngày trồng được nhiều hơn 5 cây so với dự kiến, vì vậy đã trồng xong 300 cây ấy trước 3 ngày. Hỏi dự kiến ban đầu mỗi ngày trồng bao nhiêu cây? (Giả sử số cây dự kiến trồng mỗi ngày là bằng nhau).



## BÀI 5. ÔN TẬP CHƯƠNG III

**Bài 1.** Giải các hệ phương trình sau:

a. 
$$\begin{cases} 5x - 4y = 3 \\ 7x - 9y = 8 \end{cases}$$

b. 
$$\begin{cases} 2x + y = 11 \\ 5x - 4y = 8 \end{cases}$$

c. 
$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x - 2y = 5 \end{cases}$$

d. 
$$\begin{cases} (\sqrt{2} + 1)x + y = \sqrt{2} - 1 \\ 2x - (\sqrt{2} - 1)y = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

e. 
$$\begin{cases} \frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y = 16 \\ \frac{5}{2}x - \frac{3}{5}y = 11 \end{cases}$$

f. 
$$\begin{cases} \sqrt{3}x - y = 1 \\ 5x + \sqrt{2}y = \sqrt{3} \end{cases}$$

**Bài 2.** Giải các hệ phương trình sau:

a. 
$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{8}{y} = 18 \\ \frac{5}{x} + \frac{4}{y} = 51 \end{cases}$$

b. 
$$\begin{cases} \frac{10}{x-1} + \frac{1}{y+2} = 1 \\ \frac{25}{x-1} + \frac{3}{y+2} = 2 \end{cases}$$

c. 
$$\begin{cases} \frac{27}{2x-y} + \frac{32}{x+3y} = 7 \\ \frac{45}{2x-y} - \frac{48}{x+3y} = -1 \end{cases}$$

d. 
$$\begin{cases} 2|x-6| + 3|y+1| = 5 \\ 5|x-6| - 4|y+1| = 1 \end{cases}$$

e. 
$$\begin{cases} 2|x+y| - |x-y| = 9 \\ 3|x+y| + 2|x-y| = 17 \end{cases}$$

f. 
$$\begin{cases} 4|x+y| + 3|x-y| = 8 \\ 3|x+y| - 5|x-y| = 6 \end{cases}$$

**Bài 3.** Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

a. 
$$\begin{cases} mx + (m-1)y = m+1 \\ 2x + my = 2 \end{cases}$$

b. 
$$\begin{cases} mx + (m-2)y = 5 \\ (m+2)x + (m+1)y = 2 \end{cases}$$

c. 
$$\begin{cases} (m-1)x + 2y = 3m-1 \\ (m+2)x - y = 1-m \end{cases}$$

d. 
$$\begin{cases} (m+4)x - (m+2)y = 4 \\ (2m-1)x + (m-4)y = m \end{cases}$$

e. 
$$\begin{cases} (m+1)x - 2y = m-1 \\ m^2x - y = m^2 + 2m \end{cases}$$

f. 
$$\begin{cases} mx + 2y = m+1 \\ 2x + my = 2m+5 \end{cases}$$

**Bài 4.** Trong các hệ phương trình sau hãy:

i. Giải và biện luận.

ii. Tìm  $m \in \mathbb{Z}$  để hệ có nghiệm duy nhất là nghiệm nguyên.

a. 
$$\begin{cases} (m+1)x - 2y = m-1 \\ m^2x - y = m^2 + 2m \end{cases}$$

b. 
$$\begin{cases} mx - y = 1 \\ x + 4(m+1)y = 4m \end{cases}$$

c. 
$$\begin{cases} mx + y - 3 = 3 \\ x + my - 2m + 1 = 0 \end{cases}$$

**Bài 5.** Trong các hệ phương trình sau hãy:

i. Giải và biện luận.

ii. Khi hệ có nghiệm  $(x; y)$ , tìm hệ thức giữa  $x, y$  độc lập đối với  $m$ .

a. 
$$\begin{cases} mx + 2y = m+1 \\ 2x + my = 2m+5 \end{cases}$$

b. 
$$\begin{cases} 6mx + (2-m)y = 3 \\ (m-1)x - my = 2 \end{cases}$$

c. 
$$\begin{cases} mx + (m-1)y = m+1 \\ 2x + my = 2 \end{cases}$$

**Bài 6.** Giải các hệ phương trình sau:

a. 
$$\begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ 2x - y + 2z = 5 \\ x - 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

b. 
$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 8 \\ 2x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 6 \end{cases}$$

c. 
$$\begin{cases} x - 3y + 2z = -7 \\ -2x + 4y + 3z = 8 \\ 3x + y - z = 5 \end{cases}$$

**Bài 7.** Một khu vườn hình chữ nhật, chiều dài lớn hơn chiều rộng 5 m, diện tích bằng 300 m<sup>2</sup>. Tính chiều dài và chiều rộng của khu vườn.

**Bài 8.** Cho một hình chữ nhật. Nếu tăng độ dài mỗi cạnh của nó lên 1 cm thì diện tích của hình chữ nhật sẽ tăng thêm  $13 \text{ cm}^2$ . Nếu giảm chiều dài đi 2 cm, chiều rộng đi 1 cm thì diện tích của hình chữ nhật sẽ giảm  $15 \text{ cm}^2$ . Tính chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật đã cho.

**Bài 9.** Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi 80 m. Nếu tăng chiều dài thêm 3 m, chiều rộng thêm 5 m thì diện tích của mảnh đất tăng thêm  $195 \text{ m}^2$ . Tính chiều dài, chiều rộng của mảnh đất.

**Bài 10.** Một tam giác có chiều cao bằng  $\frac{2}{5}$  cạnh đáy. Nếu chiều cao giảm đi 2 dm và cạnh đáy tăng thêm 3 dm thì diện tích của nó giảm đi  $14 \text{ dm}^2$ . Tính chiều cao và cạnh đáy của tam giác.

**Bài 11.** Hai xe máy khởi hành cùng một lúc từ hai tỉnh A và B cách nhau 90 km, đi ngược chiều và gặp nhau sau 1,2 giờ (xe thứ nhất khởi hành từ A, xe thứ hai khởi hành từ B). Tìm vận tốc của mỗi xe. Biết rằng thời gian để xe thứ nhất đi hết quãng đường AB ít hơn thời gian để xe thứ hai đi hết quãng đường AB là 1 giờ.

**Bài 12.** Một xe lửa đi từ ga Hà Nội vào ga Trị Bình (Quảng Ngãi). Sau đó 1 giờ, một xe lửa khác đi từ ga Trị Bình ra ga Hà Nội với vận tốc lớn hơn vận tốc của xe thứ nhất là 5 km/h. Hai xe gặp nhau tại một ga ở chính giữa quãng đường. Tìm vận tốc của mỗi xe lửa, biết quãng đường sắt Hà Nội – Trị Bình dài 900 km.

**Bài 13.** Hai ô tô khởi hành cùng một lúc trên quãng đường từ A đến B dài 120 km. Mỗi giờ ô tô thứ nhất chạy nhanh hơn ô tô thứ hai là 10 km nên đến B trước ô tô thứ hai là  $\frac{2}{5}$  giờ. Tính vận tốc của mỗi ô tô?.

**Bài 14.** Một canô xuôi dòng từ bến sông A đến bến sông B cách nhau 24 km; cùng lúc đó, cũng từ A về B một bè nửa trôi với vận tốc dòng nước là 4 km/h. Khi đến B canô quay lại ngay và gặp bè nửa tại địa điểm C cách A là 8 km. Tính vận tốc thực của canô.

**Bài 15.** Cùng một thời điểm, một chiếc ô tô  $X_A$  xuất phát từ thành phố A về hướng thành phố B và một chiếc khác  $X_B$  xuất phát từ thành phố B về hướng thành phố A. Chúng chuyển động với vận tốc riêng không đổi và gặp nhau lần đầu tại một điểm cách A là 20 km. Cả hai chiếc xe sau khi đến B và A tương ứng, lập tức quay trở lại và chúng gặp nhau lần thứ hai tại một điểm C. Biết thời gian xe  $X_B$  đi từ C đến B là 10 phút và thời gian giữa hai lần gặp nhau là 1 giờ. Hãy tính vận tốc của từng chiếc ô tô.

**Bài 16.** Một xuồng máy xuôi dòng sông 30 km và ngược dòng 28 km hết một thời gian bằng thời gian mà xuồng đi 59,5 km trên mặt hồ yên lặng. Tính vận tốc của xuồng khi đi trên hồ biết rằng vận tốc của nước chảy trên sông là 3 km/h.

**Bài 17.** Một xe máy đi từ A đến B trong một thời gian dự định. Nếu vận tốc tăng thêm 14 km/gi thì đến sớm 2 giờ, nếu giảm vận tốc đi 4 km/ giờ thì đến muộn 1 giờ. Tính vận tốc dự định và thời gian dự định.

**Bài 18.** Một tàu thủy chạy trên khúc sông dài 120 km, cả đi và về mất 6 giờ 45 phút. Tính vận tốc của tàu thủy khi nước yên lặng, biết rằng vận tốc của dòng nước là 4 km/h.

**Bài 19.** Một canô đi xuôi dòng 48 km rồi đi ngược dòng 22 km. Biết rằng thời gian đi xuôi dòng lớn hơn thời gian đi ngược dòng là 1 giờ và vận tốc đi xuôi lớn hơn vận tốc đi ngược là 5 km/h. Tính vận tốc canô lúc đi ngược dòng.

**Bài 20.** Nếu mở cả hai vòi nước chảy vào một bể cạn thì sau 2 giờ 55 phút bể đầy nước. Nếu mở riêng từng vòi thì vòi thứ nhất làm đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu mở riêng từng vòi thì mỗi vòi chảy bao lâu đầy bể?

**Bài 21.** Nếu hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể không có nước thì sau 12 giờ bể đầy. Sau khi hai vòi cùng chảy 8 giờ thì người ta khoá vòi I, còn vòi II tiếp tục chảy. Do tăng công suất vòi II lên gấp đôi, nên vòi II đã chảy đầy phần còn lại của bể trong 3 giờ rưỡi. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình với công suất bình thường thì phải bao lâu mới đầy bể?

**Bài 22.** Để hoàn thành một công việc, hai tổ phải làm chung trong 6 giờ. Sau 2 giờ làm chung thì tổ II được điều đi làm việc khác, tổ I đã hoàn thành công việc còn lại trong 10 giờ. Hỏi nếu mỗi tổ làm riêng thì sau bao lâu sẽ làm xong công việc đó?

**Bài 23.** Theo kế hoạch hai tổ sản xuất 600 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do áp dụng kỹ thuật mới nên tổ I đã vượt mức 18% và tổ II đã vượt mức 21%. Vì vậy trong thời gian quy định họ đã hoàn thành vượt mức 120 sản phẩm. Hỏi số sản phẩm được giao của mỗi tổ theo kế hoạch?

**Bài 24.** Có 3 đội xây dựng cùng làm chung một công việc. Làm chung được 4 ngày thì đội III được điều động làm việc khác, 2 đội còn lại cùng làm thêm 12 ngày nữa thì hoàn thành công việc. Biết rằng năng suất của đội I cao hơn năng suất của đội II; năng suất của đội III là trung bình cộng của năng suất đội I và năng suất đội II; và nếu mỗi đội làm một mình một phần ba công việc thì phải mất tất ngày xong công việc trên.

**Bài 25.** Nhà trường tổ chức cho 180 học sinh khối 9 đi tham quan di tích lịch sử. Người ta dự tính nếu dùng loại xe lớn chuyên chở một lượt hết số học sinh thì phải điều ít hơn nếu dùng loại xe nhỏ là hai chiếc. Biết rằng mỗi xe lớn có nhiều hơn mỗi xe nhỏ là 15 chỗ ngồi. Tính số xe lớn, nếu loại xe đó được huy động.

## PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

BÀI 1. HÀM SỐ  $Y = AX^2$  ( $A \neq 0$ )

## A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

## 1. Tập xác định của hàm số

Hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) xác định với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

## 2. Tính chất biến thiên của hàm số

- Nếu  $a > 0$  thì hàm số nghịch biến khi  $x < 0$  và đồng biến khi  $x > 0$ .
- Nếu  $a < 0$  thì hàm số đồng biến khi  $x < 0$  và nghịch biến khi  $x > 0$ .

## 3. Đồ thị của hàm số

- Đồ thị của hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) là một đường cong đi qua gốc tọa độ và nhận trục  $Oy$  làm trục đối xứng. Đường cong đó đgl một parabol với đỉnh  $O$ .  
Nếu  $a > 0$  thì đồ thị nằm phía trên trục hoành,  $O$  là điểm thấp nhất của đồ thị.  
Nếu  $a < 0$  thì đồ thị nằm phía dưới trục hoành,  $O$  là điểm cao nhất của đồ thị.
- Vì đồ thị  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) luôn đi qua gốc tọa độ và nhận trục  $Oy$  làm trục đối xứng nên để vẽ đồ thị của hàm số này, ta chỉ cần tìm một điểm ở bên phải trục  $Oy$  rồi lấy các điểm đối xứng với chúng qua  $Oy$ .

## B – BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Cho hàm số  $y = f(x) = x^2$ .

- Chứng minh rằng  $f(a) - f(-a) = 0$  với mọi  $a$ .
- Tìm  $a \in \mathbb{R}$  sao cho  $f(a - 1) = 4$ .

**Bài 2.** Cho hàm số  $y = (m + 2)x^2$  ( $m \neq -2$ ). Tìm giá trị của  $m$  để:

- Hàm số đồng biến với  $x < 0$ .
- Có giá trị  $y = 4$  khi  $x = -1$ .
- Hàm số có giá trị lớn nhất là 0.
- Hàm số có giá trị nhỏ nhất là 0.

**Bài 3.** Cho hàm số  $y = \frac{1}{10}x^2$ .

- Vẽ đồ thị ( $P$ ) của hàm số.

b. Các điểm sau có thuộc đồ thị hay không:  $A\left(3; \frac{9}{10}\right)$ ,  $B\left(-5; \frac{5}{2}\right)$ ,  $C(-10; 1)$ ?

**Bài 4.** Cho parabol  $y = \frac{1}{4}x^2$ . Xác định  $m$  để các điểm sau nằm trên parabol:

a.  $A(\sqrt{2}; m)$ .

b.  $B(-\sqrt{2}; m)$ .

c.  $C\left(m; \frac{3}{4}\right)$ .

**Bài 5.** Xác định  $m$  để đồ thị hàm số  $y = (m^2 - 2)x^2$  đi qua điểm  $A(1; 2)$ . Với  $m$  tìm được, đồ thị hàm số có đi qua điểm  $B(2; 9)$  hay không?

**Bài 6.**

a. Viết phương trình đường thẳng đi qua gốc tọa độ  $O$  và điểm  $M(2; 4)$ .

b. Viết phương trình parabol dạng  $y = ax^2$  và đi qua điểm  $M(2; 4)$ .

c. Vẽ parabol và đường thẳng trên trong cùng một hệ trục tọa độ và tìm tọa độ giao điểm của chúng.

**Bài 7.** Trên cùng một hệ trục tọa độ, vẽ đồ thị các hàm số  $y = f(x) = x^2$  và  $y = g(x) = \frac{1}{2}x$ . Dựa vào đồ thị hãy giải các bất phương trình:

a.  $f(x) < g(x)$ .

b.  $f(x) \geq g(x)$ .

**Bài 8.** Cho hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ).

a. Xác định  $a$  để đồ thị hàm số đi qua điểm  $A(-1; 2)$ .

b. Vẽ đồ thị hàm số vừa tìm được.

c. Tìm các điểm trên đồ thị có tung độ bằng 4.

d. Tìm các điểm trên đồ thị và cách đều hai trục tọa độ.

**Bài 9.** Cho hàm số  $y = 2x^2$ .

a. Vẽ đồ thị ( $P$ ) của hàm số.

b. Dựa vào đồ thị ( $P$ ) hãy biện luận theo  $m$  số nghiệm của phương trình:  $2x^2 + 1 = m$ .

## BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

### A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### 1. Định nghĩa

Phương trình bậc hai một ẩn là phương trình có dạng  $ax^2 + bx + c = 0$ , trong đó  $x$  là ẩn;  $a, b, c$  là những số cho trước gọi là các hệ số và  $a \neq 0$ .

#### 2. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai

Đối với phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  và biệt thức  $\Delta = b^2 - 4ac$ :

- Nếu  $\Delta > 0$  thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt  $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ .
- Nếu  $\Delta = 0$  thì phương trình có nghiệm kép  $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ .
- Nếu  $\Delta < 0$  thì phương trình vô nghiệm.

**Chú ý:** Nếu phương trình có  $a$  và  $c$  trái dấu thì  $\Delta > 0$ . Khi đó phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

#### 3. Công thức nghiệm thu gọn

Đối với phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  và  $b = 2b', \Delta' = b'^2 - ac$ :

- Nếu  $\Delta' > 0$  thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt  $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}; x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$ .
- Nếu  $\Delta' = 0$  thì phương trình có nghiệm kép  $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$ .
- Nếu  $\Delta' < 0$  thì phương trình vô nghiệm.

#### 4. Hệ thức Vi – et

- Định lý Vi – et: Nếu  $x_1, x_2$  là các nghiệm của phương trình  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  thì:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

- Nếu hai số có tổng bằng  $S$  và tích bằng  $P$  thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình:

$$X^2 - SX + P = 0 \text{ (Điều kiện để có hai số đó là: } S^2 - 4P \geq 0\text{)}.$$

#### 5. Dấu nghiệm số của phương trình bậc hai

Cho phương trình bậc hai:  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  (1).

(1) có hai nghiệm trái dấu  $\Leftrightarrow P < 0$ .

(1) có hai nghiệm cùng dấu  $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$ .

$$(1) \text{ có hai nghiệm dương phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$$

$$(1) \text{ có hai nghiệm âm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$$

**Chú ý:** Giải phương trình bằng cách nhẩm nghiệm:

- Nếu nhẩm được:  $x_1 + x_2 = m + n; x_1 x_2 = mn$  thì phương trình có nghiệm  $x_1 = m, x_2 = n$ .
- Nếu  $a + b + c = 0$  thì phương trình có nghiệm  $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}$ .
- Nếu  $a - b + c = 0$  thì phương trình có nghiệm  $x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a}$ .

## B – BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Giải các phương trình sau:

a.  $(x + 1)^2 - 4(x^2 - 2x + 1) = 0$ .

b.  $9(x - 2)^2 - 4(x - 1)^2 = 0$ .

c.  $2x^2 - 3(2x - 3)^2 = 0$ .

d.  $x^2 - 4x + 3 = 0$ .

e.  $x^2 + 6x - 16 = 0$ .

f.  $7x^2 + 12x + 5 = 0$ .

**Bài 2.** Giải các phương trình sau:

a.  $3x^2 - 5x + 8 = 0$ .

b.  $5x^2 - 3x + 15 = 0$ .

c.  $x^2 - 4x + 1 = 0$ .

d.  $3x^2 + 7x + 2 = 0$ .

e.  $5x^2 - \frac{10}{7}x + \frac{5}{49} = 0$ .

f.  $(5 - \sqrt{2})x^2 - 10x + 5 + \sqrt{2} = 0$ .

**Bài 3.** Giải các phương trình sau:

a.  $10x^2 + 17x + 3 = 2(2x - 1) - 15$ .

b.  $x^2 + 7x - 3 = x(x - 1) - 1$ .

c.  $2x^2 - 5x - 3 = (x + 1)(x - 1) + 3$ .

d.  $5x^2 - x - 3 = 2x(x - 1) - 1 + x^2$ .

e.  $-6x^2 + x - 3 = -3x(x - 1) - 11$ .

f.  $-4x^2 + x(x - 1) - 3 = x(x + 3) + 5$ .

g.  $x^2 - x - 3(2x + 3) = -x(x - 2) - 1$ .

h.  $-x^2 - 4x - 3(2x - 7) = -2x(x + 2) - 7$ .

i.  $8x^2 - x - 3x(2x - 3) = -x(x - 2)$ .

j.  $3(2x + 3) = -x(x - 2) - 1$ .

**Bài 4.** Tìm  $m$  để các phương trình sau:

i. có nghiệm.

ii. có 2 nghiệm phân biệt.

iii. có nghiệm kép.

iv. vô nghiệm.

a.  $9x^2 - 6mx + m(m - 2) = 0$ .

b.  $2x^2 - 10x + m - 1 = 0$ .

c.  $5x^2 - 12x + m - 3 = 0$ .

d.  $3x^2 - 4x + 2m = 0$ .

e.  $(m - 2)x^2 - 2(m + 1)x + m = 0$ .

**Bài 5.** Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a. } \begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ y + x^2 = 4x \end{cases} \quad \text{b. } \begin{cases} 3x - 4y + 1 = 0 \\ xy = 3(x + y) - 9 \end{cases} \quad \text{c. } \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ xy + x + y + 6 = 0 \end{cases}$$

**Bài 6.** Cho phương trình:  $x^2 - 2(3m + 2)x + 2m^2 - 3m + 5 = 0$ .

- Giải phương trình với  $m = -2$ .
- Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình có một trong các nghiệm bằng  $-1$ .
- Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình trên có nghiệm kép.

**Bài 7.** Cho phương trình:  $x^2 - 2(m - 2)x + m^2 - 3m + 5 = 0$ .

- Giải phương trình với  $m = 3$ .
- Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình có một trong các nghiệm bằng  $-4$ .
- Tìm các giá trị của  $m$  để phương trình trên có nghiệm kép.

**Bài 8.** Cho phương trình:  $x^2 - 2(m + 3)x + m^2 + 3 = 0$ .

- Giải phương trình với  $m = -1$  và  $m = 3$ .
- Tìm  $m$  để phương trình có một trong các nghiệm bằng  $4$ .
- Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

**Bài 9.** Xác định  $m$  để mỗi cặp phương trình sau có nghiệm chung:

- $x^2 + mx + 2 = 0$  và  $x^2 + 2x + m = 0$ .
- $x^2 - (m + 4)x + m + 5 = 0$  và  $x^2 - (m + 2)x + m + 1 = 0$ .

**Bài 10.** Không giải phương trình, hãy nhắm nghiệm các phương trình sau:

- $x^2 - 10x + 16 = 0$ .
- $x^2 - 15x + 50 = 0$ .
- $x^2 - 6x + 5 = 0$ .
- $x^2 - 7x + 10 = 0$ .
- $x^2 - 3x - 4 = 0$ .
- $x^2 - x - 20 = 0$ .
- $x^2 + 5x - 6 = 0$ .
- $x^2 + 5x + 6 = 0$ .
- $x^2 - 5x + 6 = 0$ .

**Bài 11.** Lập các phương trình bậc hai có các nghiệm là các cặp số sau:

- 10 và 8.
- 10 và  $-8$ .
- 3 và  $\frac{1}{4}$ .
- $-\frac{3}{4}$  và  $-\frac{2}{3}$ .
- $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  và  $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ .
- $\frac{1}{10 - \sqrt{72}}$  và  $\frac{1}{10 + 6\sqrt{2}}$ .

**Bài 12.** Với các phương trình sau, tìm  $m$  để phương trình có một trong các nghiệm bằng  $x_0$ . Tìm nghiệm còn lại:

- $3x^2 + 7x + m = 0; x_0 = 1$ .
- $15x^2 + mx - 1 = 0; x_0 = \frac{1}{3}$ .
- $x^2 - 2(3m + 1)x + 2m^2 - 2m - 5 = 0; x_0 = -1$ .
- $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + 5m - 2 = 0; x_0 = 1$ .

**Bài 13.** Cho phương trình:  $(m + 1)x^2 + 4mx + 4m - 1 = 0$ .

- Giải phương trình với  $m = -2$ .



- b. Với giá trị nào của  $m$  thì phương trình có hai nghiệm phân biệt?  
 c. Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn điều kiện  $x_1 = 2x_2$ .

**Bài 14.** Cho phương trình:  $2x^2 - 6x + m + 7 = 0$ .

- a. Giải phương trình với  $m = -3$ .  
 b. Với giá trị nào của  $m$  thì phương trình có một trong các nghiệm bằng  $-4$ ?  
 c. Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn điều kiện  $x_1 = -2x_2$ .

**Bài 15.** Cho phương trình:  $x^2 - 2(m - 1)x + m + 1 = 0$ .

- a. Giải phương trình với  $m = -4$ .  
 b. Với giá trị nào của  $m$  thì phương trình có hai nghiệm phân biệt?  
 c. Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn điều kiện  $x_1 = 3x_2$ .

**Bài 16.** Giả sử  $x_1, x_2$  là các nghiệm của mỗi phương trình sau. tính giá trị của các biểu thức:

$$A = x_1^2 + x_2^2; B = x_1^3 + x_2^3; C = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}; D = \frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2}.$$

- a.  $x^2 + mx + 1 = 0$ .                      b.  $x^2 + 6x + m = 0$ .                      c.  $x^2 - (m - 3)x + 2m + 1 = 0$ .

**Bài 17.** Cho phương trình:  $x^2 - 2(m + 4)x + m^2 - 8 = 0$ .

- a. Tìm  $m$  để biểu thức  $A = x_1^2 + x_2^2 - x_1 - x_2$  đạt giá trị nhỏ nhất.  
 b. Tìm  $m$  để biểu thức  $B = x_1 + x_2 - 3x_1x_2$  đạt giá trị lớn nhất.  
 c. Tìm  $m$  để biểu thức  $C = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$  đạt giá trị lớn nhất.

**Bài 18.**

- a.  $mx^2 - 2(m - 2)x + m - 3 = 0; x_1^2 + x_2^2 = 1$ .  
 b.  $x^2 - 2(m - 2)x + m^2 + 2m - 3 = 0; \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{5}$ .  
 c.  $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 3m = 0; x_1^2 + x_2^2 = 8$ .

**Bài 19.** Cho phương trình:  $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 3m = 0$ .

- a. Tìm  $m$  để phương trình có một trong các nghiệm bằng  $-2$ . Tìm nghiệm còn lại.  
 b. Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1^2 + x_2^2 = 8$ .  
 c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $A = x_1^2 + x_2^2$ .

**Bài 20.** Cho phương trình:  $x^2 - (2a - 1)x - 4a - 3 = 0$ .

- a. Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của  $a$ .  
 b. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm  $x_1, x_2$  không phụ thuộc vào  $a$ .  
 c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $A = x_1^2 + x_2^2$ .

**Bài 21.** Cho phương trình:  $mx^2 - 2(m + 1)x + m - 4 = 0$ .



# BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

## A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

### 1. Phương trình trùng phương

Phương trình trùng phương là phương trình có dạng  $ax^4 + bx^2 + c = 0 (a \neq 0)$ .

**Cách giải:** Đặt  $t = x^2 (t \geq 0)$ , đưa về phương trình bậc hai  $at^2 + bt + c = 0$ .

### 2. Phương trình bậc bốn dạng: $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = m$ với $a + b = c + d$

**Cách giải:** Cách giải: Đặt  $t = x^2 + (a + b)x$ , đưa về phương trình bậc hai  $(t + ab)(t + cd) = m$ .

### 3. Phương trình bậc bốn dạng: $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$

**Cách giải:** Đặt  $t = x + \frac{a+b}{2}$ , đưa về phương trình trùng phương theo  $t$ .

Chú ý:  $(x \pm y)^4 = x^4 \pm 4x^3y + 6x^2y^2 \pm 4xy^3 + y^4$ .

### 4. Phương trình bậc bốn dạng: $ax^4 + bx^3 + c^2 \pm bx + a = 0$

**Cách giải:**

- Nhận xét  $x = 0$  không phải là nghiệm của phương trình.
- Với  $x \neq 0$ , chia 2 vế của phương trình cho  $x^2$  ta được:  $a \left( x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + b \left( x \pm \frac{1}{x} \right) + c = 0$ .

Đặt  $t = x \pm \frac{1}{x}$ , đưa về phương trình bậc hai theo  $t$ .

### 5. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

**Cách giải:** Thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm điều kiện xác định của phương trình.

Bước 2: Quy đồng mẫu thức hai vế rồi khử mẫu thức.

Bước 3: Giải phương trình vừa nhận được.

Bước 4: Trong các giá trị tìm được của ẩn, loại các giá trị không thoả mãn điều kiện xác định các giá trị thoả mãn điều kiện xác định là nghiệm của phương trình đã cho.

### 6. Phương trình tích

Phương trình tích là phương trình có dạng  $A.B = 0$ .

**Cách giải:**  $A.B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

### 7. Phương trình chứa căn thức

$$\bullet \sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^2 \end{cases}$$

$$\bullet af(x) + b\sqrt{f(x)} + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{f(x)}, t \geq 0 \\ at^2 + bt + c = 0 \end{cases}$$

**8. Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối**

**Cách giải:** Có thể dùng các phương pháp sau để bỏ giá trị tuyệt đối:

- Dùng định nghĩa hoặc tính chất giá trị tuyệt đối.
- Đặt ẩn phụ.

**9. Phương trình dạng  $A^2 + B^2 = 0$** 

**Cách giải:**  $A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$ .

**B – BÀI TẬP TỰ LUẬN**

**Bài 1.** Giải các phương trình sau:

- a.  $4x^4 + 8x^2 - 12 = 0$ .      b.  $12x^4 - 5x^2 + 30 = 0$ .      c.  $8x^4 - x^2 - 7 = 0$ .  
 d.  $5x^4 - 3x^2 + \frac{7}{16} = 0$ .      e.  $4x^4 + 7x^2 - 2 = 0$ .      f.  $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ .  
 g.  $2x^4 + 5x^2 + 2 = 0$ .

**Bài 2.** Giải các phương trình sau:

- a.  $x(x+1)(x+2)(x+3) = 24$ .      b.  $(x+1)(x+4)(x^2+5x+6) = 24$ .  
 c.  $(x+1)^4 + (x+3)^4 = 2$ .      d.  $(x+2)^2(x^2+4x) = 5$ .  
 e.  $3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 16\left(x + \frac{1}{x}\right) + 26 = 0$ .      f.  $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x - \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$ .

**Bài 3.** Giải các phương trình sau:

- a.  $(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 3 = 0$ .      b.  $(x^2 + 4x + 2)^2 + 4x^2 + 16x + 11 = 0$ .  
 c.  $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12 = 0$ .      d.  $(2x + 1)^4 - 8(2x + 1)^2 - 9 = 0$ .  
 e.  $(x^4 + 4x^2 + 4) - 4(x^2 + 2) - 77 = 0$ .      f.  $\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)^2 - 4\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) + 3 = 0$ .

**Bài 4.** Giải các phương trình sau:

- a.  $\frac{2x-5}{x-1} = \frac{3x}{x-2}$ .      b.  $\frac{4x}{x+2} = \frac{x+1}{x-2}$ .  
 c.  $\frac{2x}{x-2} - \frac{5}{x-3} = \frac{5}{x^2-5x+6}$ .      d.  $\frac{1}{3x^2-27} + \frac{3}{4} = 1 + \frac{1}{x-3}$ .  
 e.  $\frac{x}{x-2} + \frac{x+3}{x-1} = 6$ .      f.  $\frac{2x-1}{x} + 3 = \frac{x+3}{2x-1}$ .

**Bài 5.** Giải các phương trình sau:

- a.  $(4x^2 - 25)(2x^2 - 7x - 9) = 0$ .      b.  $(2x^2 - 3)^2 - 4(x-1)^2 = 0$ .  
 c.  $2x(3x-1)^2 - 9x^2 + 1 = 0$ .      d.  $x^3 + 3x^2 + x + 3 = 0$ .  
 e.  $x^3 + 5x^2 + 7x + 3 = 0$ .      f.  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ .

**Bài 6.** Tìm  $m$  để các phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:

a.  $x^3 - (2m + 1)x^2 + 3(m + 4)x - m - 12 = 0.$

b.  $x^3 + (2m - 3)x^2 + (m^2 - 2m + 2)x - m^2 = 0.$

**Bài 7.** Tìm  $m$  để các phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt:

a.  $x^4 - (2m + 1)x^2 + m^2 = 0.$

b.  $(x^2 - 1)(x + 3)(x + 5) = m.$

**Bài 8.** Giải các phương trình sau:

a.  $3x^2 - 14|x| - 5 = 0.$

b.  $|x - 1| + x^2 = x + 3.$

c.  $|x + 2| - 2x + 1 = x^2 + 2x + 3.$

d.  $|x^2 + 1| - \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 3x.$

**Bài 9.** Giải các phương trình sau:

a.  $\sqrt{x - 5} = x - 7.$

b.  $\sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 6} = 2.$

c.  $\sqrt{3x + 7} - \sqrt{x + 1} = 2.$

d.  $x^2 + \sqrt{x^2 - 3x + 5} = 3x + 7.$

e.  $\sqrt{x^2 - 4x} = \sqrt{x + 14}.$

f.  $\sqrt{2x^2 + 6x + 1} = x + 2.$

**Bài 10.** Giải các hệ phương trình sau: (Đưa về dạng  $A^2 + B^2 = 0$ )

a. 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 27 \\ xy + yz + zx = 27 \end{cases}$$

b. 
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 12 \end{cases}$$

# BÀI 4. GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

## A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

**Bước 1:** Lập phương trình.

- Chọn ẩn số và nêu điều kiện thích hợp của ẩn số.
- Biểu thị các dữ kiện chưa biết qua ẩn số.
- Lập phương trình biểu thị tương quan giữa ẩn số và các dữ kiện đã biết.

**Bước 2:** Giải phương trình.

**Bước 3:** Đối chiếu nghiệm của phương trình (nếu có) với điều kiện của ẩn số để trả lời.

## B – BÀI TẬP TỰ LUẬN

### Dạng 1. Toán về quan hệ giữa các số

**Bài 1.** Tìm hai số biết rằng hai lần số thứ nhất hơn ba lần số thứ hai là 9 và hiệu các bình phương của chúng bằng 119.

**Bài 2.** Tìm một số tự nhiên có hai chữ số, tổng các chữ số bằng 11, nếu đổi chỗ hai chữ số hàng chục và hàng đơn vị cho nhau thì số đó tăng thêm 27 đơn vị.

**Bài 3.** Tìm một số có hai chữ số, biết rằng số đó gấp 7 lần chữ số hàng đơn vị của nó và nếu số cần tìm chia cho tổng các chữ số của nó thì được thương là 4 và số dư là 3.

**Bài 4.** Nếu tử số của một phân số được tăng gấp đôi và mẫu số thêm 8 thì giá trị của phân số bằng  $\frac{1}{4}$ . Nếu tử số thêm 7 và mẫu số tăng gấp 3 thì giá trị phân số bằng  $\frac{5}{24}$ . Tìm phân số đó.

**Bài 5.** Nếu thêm 4 vào tử và mẫu của một phân số thì giá trị của phân số giảm 1. Nếu bớt 1 vào cả tử và mẫu thì phân số tăng  $\frac{3}{2}$ . Tìm phân số đó.

### Dạng 2. Toán chuyển động

**Bài 6.** Một canô đi xuôi dòng 45 km, rồi ngược dòng 18 km. Biết rằng thời gian đi xuôi dòng lâu hơn thời gian đi ngược dòng là 1 giờ và vận tốc đi xuôi lớn hơn vận tốc đi ngược là 6 km/h. Tính vận tốc canô lúc đi ngược dòng.

**Bài 7.** Một ô tô đi từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu xe chạy với vận tốc 35 km/h thì đến chậm mất 2 giờ. Nếu xe chạy với vận tốc 50 km/h thì đến sớm hơn 1 giờ. Tính quãng đường AB và thời gian dự định đi lúc đầu.

**Bài 8.** Một người đi xe máy từ A đến B cách nhau 120 km với vận tốc dự định trước. Sau khi được  $\frac{1}{3}$  quãng đường AB, người đó tăng vận tốc thêm 10 km/h trên quãng đường còn lại. Tìm vận tốc dự định và thời gian xe lăn bánh trên đường, biết rằng người đó đến B sớm hơn dự định 24 phút.

**Bài 9.** Một canô xuôi từ bến sông A đến bến sông B với vận tốc 30 km/h, sau đó lại ngược từ B trở về A. Thời gian xuôi ít hơn thời gian đi ngược 1 giờ 20 phút. Tính khoảng cách giữa hai bến A và B. Biết rằng vận tốc dòng nước là 5 km/h và vận tốc riêng của canô lúc xuôi và lúc ngược bằng nhau.

**Bài 10.** Một canô xuôi một khúc sông dài 90 km rồi ngược về 36 km. Biết thời gian xuôi dòng sông nhiều hơn thời gian ngược dòng là 2 giờ và vận tốc khi xuôi dòng hơn vận tốc khi ngược dòng là 6 km/h. Hỏi vận tốc canô lúc xuôi và lúc ngược dòng?

### Dạng 3. Toán làm chung công việc

**Bài 11.** Hai đội cùng đào một con mương. Nếu mỗi đội làm một mình cả con mương thì thời gian tổng cộng hai đội phải làm là 25 giờ. Nếu hai đội cùng làm chung thì công việc hoàn thành trong 6 giờ. Tính xem mỗi đội làm một mình xong cả con mương trong bao lâu?

**Bài 12.** Hai người thợ cùng làm chung một công việc trong 7 giờ 12 phút thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 5 giờ và người thứ hai làm trong 6 giờ thì cả hai người chỉ làm được  $\frac{3}{4}$  công việc. Hỏi một người làm công việc đó trong mấy giờ thì xong?

**Bài 13.** Nếu mở cả hai vòi nước chảy vào một bể cạn thì sau 2 giờ 55 phút sẽ đầy bể. Nếu mở riêng từng vòi thì vòi thứ nhất làm đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu mở riêng từng vòi thì mỗi vòi chảy bao lâu đầy bể?

**Bài 14.** Nếu vòi A chảy 2 giờ và vòi B chảy trong 3 giờ thì được  $\frac{4}{5}$  hồ. Nếu vòi A chảy trong 3 giờ và vòi B chảy trong 1 giờ 30 phút thì được  $\frac{1}{2}$  hồ. Hỏi nếu chảy một mình mỗi vòi chảy trong bao lâu mới đầy hồ (giả thiết hồ ban đầu không có nước)?

**Bài 15.** Hai vòi nước cùng chảy vào một bể thì sau 6 giờ đầy bể. Nếu mỗi vòi chảy một mình cho đầy bể thì vòi II cần nhiều thời gian hơn vòi I là 5 giờ. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể?

### Dạng 4. Toán có nội dung hình học

**Bài 16.** Một đa giác lồi có tất cả 170 đường chéo. Hỏi đa giác đó có bao nhiêu cạnh?

**Bài 17.** Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi là 280 m. Người ta làm lối đi xung quanh vườn (thuộc đất trong vườn) rộng 2 m. Tính kích thước của vườn, biết rằng đất còn lại trong vườn để trồng trọt là 4256 m<sup>2</sup>.

**Bài 18.** Cho một hình chữ nhật. Nếu tăng chiều dài lên 10 m, tăng chiều rộng lên 5 m thì diện tích tăng 500 m<sup>2</sup>. Nếu giảm chiều dài 15 m và giảm chiều rộng 9 m thì diện tích giảm 600 m<sup>2</sup>. Tính chiều dài, chiều rộng ban đầu.

**Bài 19.** Cho một tam giác vuông. Nếu tăng các cạnh góc vuông lên 2 cm và 3 cm thì diện tích tam giác tăng 50 cm<sup>2</sup>. Nếu giảm cả hai cạnh đi 2 cm thì diện tích sẽ giảm đi 32 cm<sup>2</sup>. Tính hai cạnh góc vuông.

### Dạng 5. Các dạng toán khác

**Bài 20.** Trong một phòng có 80 người họp, được sắp xếp ngồi đều trên các dãy ghế. Nếu bớt đi hai dãy ghế thì mỗi dãy ghế còn lại phải xếp thêm hai người mới đủ chỗ. Hỏi lúc đầu có mấy dãy ghế và mỗi dãy ghế được xếp bao nhiêu người ngồi?

**Bài 21.** Một phòng học có một số dãy ghế tổng cộng 40 chỗ ngồi. Do phải xếp 55 chỗ nên người ta kê thêm 1 dãy ghế và mỗi dãy ghế thêm 1 chỗ. Hỏi lúc đầu trong phòng có mấy dãy ghế?

**Bài 22.** Trong tháng giêng hai tổ sản xuất được 720 chi tiết máy. Trong tháng hai, tổ I vượt mức 15%, tổ II vượt mức 12% nên sản xuất được 819 chi tiết máy. Tính xem trong tháng giêng mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy?

**Bài 23.** Năm ngoái tổng số dân của hai tỉnh A và B là 4 triệu người. Dân số tỉnh A năm nay tăng 1,2%, còn tỉnh B tăng 1,1%. Tổng số dân của cả hai tỉnh năm nay là 4.045.000 người. Tính số dân của mỗi tỉnh năm ngoái và năm nay?



## BÀI 5. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

### Dạng 1. Hệ bậc hai giải bằng phương pháp thế hoặc cộng đại số

- Từ phương trình bậc nhất rút một ẩn theo ẩn kia.
- Thế vào phương trình bậc hai để đưa về phương trình bậc hai một ẩn.
- Số nghiệm của hệ tùy theo số nghiệm của phương trình bậc hai này.

**Bài 1.** Giải các hệ phương trình sau:

a. 
$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 8 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

b. 
$$\begin{cases} x^2 - xy = 24 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

c. 
$$\begin{cases} (x - y)^2 = 49 \\ 3x + 4y = 84 \end{cases}$$

d. 
$$\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 + 2x + 3y - 6 = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

e. 
$$\begin{cases} 3x - 4y + 1 = 0 \\ xy = 3(x + y) - 9 \end{cases}$$

f. 
$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ xy + x + y + 6 = 0 \end{cases}$$

g. 
$$\begin{cases} y + x^2 = 4x \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

h. 
$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x^2 - y^2 + 2y = 4 \end{cases}$$

i. 
$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases}$$

**Bài 2.** Giải các hệ phương trình sau:

a. 
$$\begin{cases} 2(x + y)^2 - 3(x + y) - 5 = 0 \\ x - y - 5 = 0 \end{cases}$$

b. 
$$\begin{cases} 5(x - y)^2 + 3(x - y) - 2 = 0 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$$

c. 
$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x^2 + xy + 3 = 0 \end{cases}$$

d. 
$$\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ 2y - x^2 = 0 \end{cases}$$

e. 
$$\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

f. 
$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x^2 - y^2 = 40 \end{cases}$$

g. 
$$\begin{cases} 3x + 2y = 36 \\ (x - 2)(y - 3) = 18 \end{cases}$$

h. 
$$\begin{cases} x(x - 8) + 3y(y + 1) = -6 \\ 2x(x - 8) + 5y(y + 1) = -14 \end{cases}$$

**Bài 3.** Giải các hệ phương trình sau:

a. 
$$\begin{cases} 2xy - x^2 + 4x = -4 \\ x^2 - 2xy + y - 5x = 4 \end{cases}$$

b. 
$$\begin{cases} x + 2y + 2xy - 11 = 0 \\ xy + y - x = 4 \end{cases}$$

c. 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy = 1 \\ 2x^2 + 2y^2 - 2xy - y = 0 \end{cases}$$

d. 
$$\begin{cases} xy + x - y = 1 \\ xy - 3x + y = 5 \end{cases}$$

e. 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4y - 8 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x + 4y - 8 = 0 \end{cases}$$

f. 
$$\begin{cases} xy + 2x - y - 2 = 0 \\ xy - 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

### Dạng 2. Hệ đối xứng loại 1

Hệ có dạng: (I)  $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$  (với  $f(x, y) = f(y, x)$  và  $g(x, y) = g(y, x)$ ).

(Có nghĩa là khi ta hoán vị giữa  $x$  và  $y$  thì  $f(x, y)$  và  $g(x, y)$  không thay đổi).

- Đặt  $S = x + y, P = xy$ .
- Đưa hệ phương trình (I) về hệ (II) với các ẩn là  $S$  và  $P$ .
- Giải hệ (II) ta tìm được  $S$  và  $P$ .
- Tìm nghiệm  $(x, y)$  bằng cách giải phương trình:  $X^2 - SX + P = 0$ .

**Bài 4.** Giải các hệ phương trình sau:

a.  $\begin{cases} x + xy + y = 11 \\ x^2 + y^2 - xy - 2(x + y) = -3 \end{cases}$

b.  $\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{cases}$

c.  $\begin{cases} xy + x + y = 5 \\ x^2 + y^2 + x + y = 8 \end{cases}$

d.  $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6} \\ x + y = 6 \end{cases}$

e.  $\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17 \\ x + y + xy = 5 \end{cases}$

f.  $\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 481 \\ x^2 + xy + y^2 = 37 \end{cases}$

**Bài 5.** Giải các hệ phương trình sau:

a.  $\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2 + y^2 + 3(x + y) = 28 \end{cases}$

b.  $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ x^2 + y^2 + xy = 7 \end{cases}$

c.  $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x + xy + y = 2 \end{cases}$

d.  $\begin{cases} xy + x + y = 19 \\ x^2y + xy^2 = 84 \end{cases}$

e.  $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13 \end{cases}$

f.  $\begin{cases} (x + 1)(y + 1) = 8 \\ x(x + 1) + y(y + 1) + xy = 17 \end{cases}$

**Bài 6.** Giải các hệ phương trình sau:

a.  $\begin{cases} (x^2 + 1)(y^2 + 1) = 10 \\ (x + y)(xy - 1) = 3 \end{cases}$

b.  $\begin{cases} x + xy + y = 2 + 3\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 6 \end{cases}$

c.  $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19(x - y)^2 \\ x^2 - xy + y^2 = 7(x - y) \end{cases}$

d.  $\begin{cases} (x - y)^2 - (x - y) = 6 \\ 5(x^2 + y^2) = 5xy \end{cases}$

e.  $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35 \end{cases}$

### Dạng 3. Hệ đối xứng loại 2

Hệ có dạng: (I)  $\begin{cases} f(x, y) = 0 \quad (1) \\ f(y, x) = 0 \quad (2) \end{cases}$

(Có nghĩa là khi hoán vị giữa  $x$  và  $y$  thì (1) biến thành (2) và ngược lại).

- Trừ (1) và (2) về theo về ta được:  $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x, y) - f(y) \\ f(x, y) = 0 \end{cases}$ .
- Biến đổi (3) về phương trình tích:  $(3) \Leftrightarrow (x - y).g(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$ .
- Như vậy  $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ x = y \\ f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$ .
- Giải các hệ trên ta tìm được nghiệm của hệ  $(I)$ .

**Bài 7.** Giải các hệ phương trình sau:

a.  $\begin{cases} x^2 = 3x + 2y \\ y^2 = 3y + 2x \end{cases}$

b.  $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \\ y^2 - 2x^2 = 2y + x \end{cases}$

c.  $\begin{cases} x^2y + 2 = y^2 \\ xy^2 + 2 = x^2 \end{cases}$

d.  $\begin{cases} x^2 + 1 = 3y \\ y^2 + 1 = 3x \end{cases}$

e.  $\begin{cases} x^2 + xy + y = 1 \\ x + xy + y^2 = 1 \end{cases}$

f.  $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \\ y^2 - 2x^2 = 2y + x \end{cases}$

**Bài 8.** Giải các hệ phương trình sau:

a.  $\begin{cases} x^3 + 1 = 2y \\ y^3 + 1 = 2x \end{cases}$

b.  $\begin{cases} x^3 = 3x + 8y \\ y^3 = 3y + 8x \end{cases}$

c.  $\begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x \end{cases}$

d.  $\begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x \end{cases}$

e.  $\begin{cases} x^3 = 7x + 3y \\ y^3 = 7y + 3x \end{cases}$

**Bài 9.** Giải các hệ phương trình sau:

a.  $\begin{cases} 2x + \frac{1}{y} = \frac{3}{x} \\ 2y + \frac{1}{x} = \frac{3}{y} \end{cases}$

b.  $\begin{cases} x - 3y = 4\frac{y}{x} \\ y - 3x = 4\frac{x}{y} \end{cases}$

c.  $\begin{cases} 3y = \frac{y^2 + 2}{x^2} \\ 3x = \frac{x^2 + 2}{y^2} \end{cases}$

d.  $\begin{cases} 2x^2 = y + \frac{1}{y} \\ 2y^2 = x + \frac{1}{x} \end{cases}$

## BÀI 6. ÔN TẬP CHƯƠNG IV

**Bài 1.** Cho phương trình:  $x^2 - 2(m + 1)x + m - 4 = 0$ .

- a. Tìm  $m$  để phương trình 2 có nghiệm trái dấu.
- b. Chứng minh rằng phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  với mọi  $m$ .
- c. Chứng minh biểu thức  $M = x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_1)$  không phụ thuộc vào  $m$ .

**Bài 2.** Tìm  $m$  để phương trình:

- a.  $x^2 - x + 2(m - 1) = 0$  có hai nghiệm dương phân biệt.
- b.  $4x^2 + 2x + m - 1 = 0$  có hai nghiệm âm phân biệt.
- c.  $(m^2 + 1)x^2 - 2(m + 1)x + 2m - 1 = 0$  có hai nghiệm trái dấu.

**Bài 3.** Cho phương trình:  $x^2 - (a - 1)x - a^2 + a - 2 = 0$ .

- a. Chứng minh rằng với mọi  $a$ , phương trình trên có 2 nghiệm trái dấu.
- b. Gọi hai nghiệm của phương trình là  $x_1, x_2$ . Tìm giá trị của  $a$  để  $x_1^2 + x_2^2$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Bài 4.** Cho phương trình:  $x^2 + 4x + m + 1 = 0$ .

- a. Tìm điều kiện của  $m$  để phương trình có nghiệm.
- b. Tìm  $m$  sao cho phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thoả mãn  $x_1^2 + x_2^2 = 10$ .

**Bài 5.** Cho phương trình:  $x^2 - 2(m + 1)x + 2m + 10 = 0$ .

- a. Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$ .
- b. Trong trường hợp phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$ , hãy tìm một hệ thức liên hệ giữa  $x_1, x_2$  mà không phụ thuộc vào  $m$ .
- c. Tìm giá trị của  $m$  để biểu thức  $A = 10x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Bài 6.** Với giá trị nào của  $m$  thì hai phương trình sau có ít nhất một nghiệm chung?

- a. 
$$\begin{cases} 2x^2 - (3m + 2)x + 12 = 0 \\ 4x^2 - (9m - 2)x + 36 = 0 \end{cases}$$
- b. 
$$\begin{cases} x^2 + mx + 1 = 0 \\ x^2 + x + m = 0 \end{cases}$$
- c. 
$$\begin{cases} 2x^2 + (3m + 1)x - 9 = 0 \\ 6x^2 + (7m - 1)x - 19 = 0 \end{cases}$$

**Bài 7.** Cho parabol  $(P) : y = -\frac{x^2}{4}$  và đường thẳng  $(d) : y = x + m$ .

- a. Vẽ parabol  $(P)$ .
- b. Xác định  $m$  để  $(P)$  và  $(d)$  cắt nhau tại hai điểm phân biệt  $A$  và  $B$ .
- c. Xác định phương trình đường thẳng  $(d')$  song song với đường thẳng  $(d)$  và cắt  $(P)$  tại điểm có tung độ bằng  $-4$ .

**Bài 8.** Cho parabol  $(P) : y = -\frac{x^2}{4}$  và điểm  $M(1; -2)$ .

- a. Viết phương trình đường thẳng  $(d)$  đi qua  $M$  và có hệ số góc là  $m$ .
- b. Chứng minh rằng  $(d)$  luôn cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt  $A$  và  $B$  khi  $m$  thay đổi.
- c. Gọi  $x_A; x_B$  lần lượt là hoành độ của  $A$  và  $B$ . Xác định  $m$  để  $x_A^2 x_B + x_A x_B^2$  đạt giá trị nhỏ nhất và tính giá trị đó.

**Bài 9.** Giải các phương trình sau:

- a.  $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$ .
- b.  $x(x^2 - 1)(x + 2) + 1 = 0$ .
- c.  $\frac{x^2}{9} + \frac{16}{x^2} = \frac{10}{3} \left( \frac{x}{3} - \frac{4}{x} \right)$ .
- d.  $\frac{1}{x(x+2)} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{12}$ .
- e.  $2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0$ .
- f.  $x^4 - 2x^3 - x^2 + 8x - 12 = 0$ .
- g.  $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0$ .

**Bài 10.** Giải các phương trình sau:

- a.  $\frac{2}{x+3} - \frac{x+2}{3x-x^2} = \frac{10}{x(x^2-9)}$ .
- b.  $\frac{5}{x-1} - \frac{4}{3-6x+3x^2} = 3$ .

**Bài 11.** Hai ô tô cùng khởi hành một lúc từ hai tỉnh A và B cách nhau 160 km, đi ngược chiều nhau và gặp nhau sau 2 giờ. Tìm vận tốc của mỗi ô tô biết rằng nếu ô tô đi từ A tăng vận tốc thêm 10 km/h sẽ bằng hai lần vận tốc ô tô đi từ B.

**Bài 12.** Một người đi xe đạp từ A đến B với vận tốc 9 km/h. Khi đi từ B về A người ấy đi đường khác dài hơn 6 km, với vận tốc 12 km/h, nên thời gian ít hơn thời gian khi đi là 20 phút. Tính quãng đường AB.

**Bài 13.** Hai ca nô cùng khởi hành từ hai bến A, B cách nhau 85 km, đi ngược chiều nhau và gặp nhau sau 1 giờ 40 phút. Tính vận tốc riêng của mỗi ca nô biết rằng vận tốc của ca nô xuôi dòng lớn hơn vận tốc của ca nô ngược dòng là 9 km/h (có cả vận tốc dòng nước) và vận tốc dòng nước là 3 km/h.

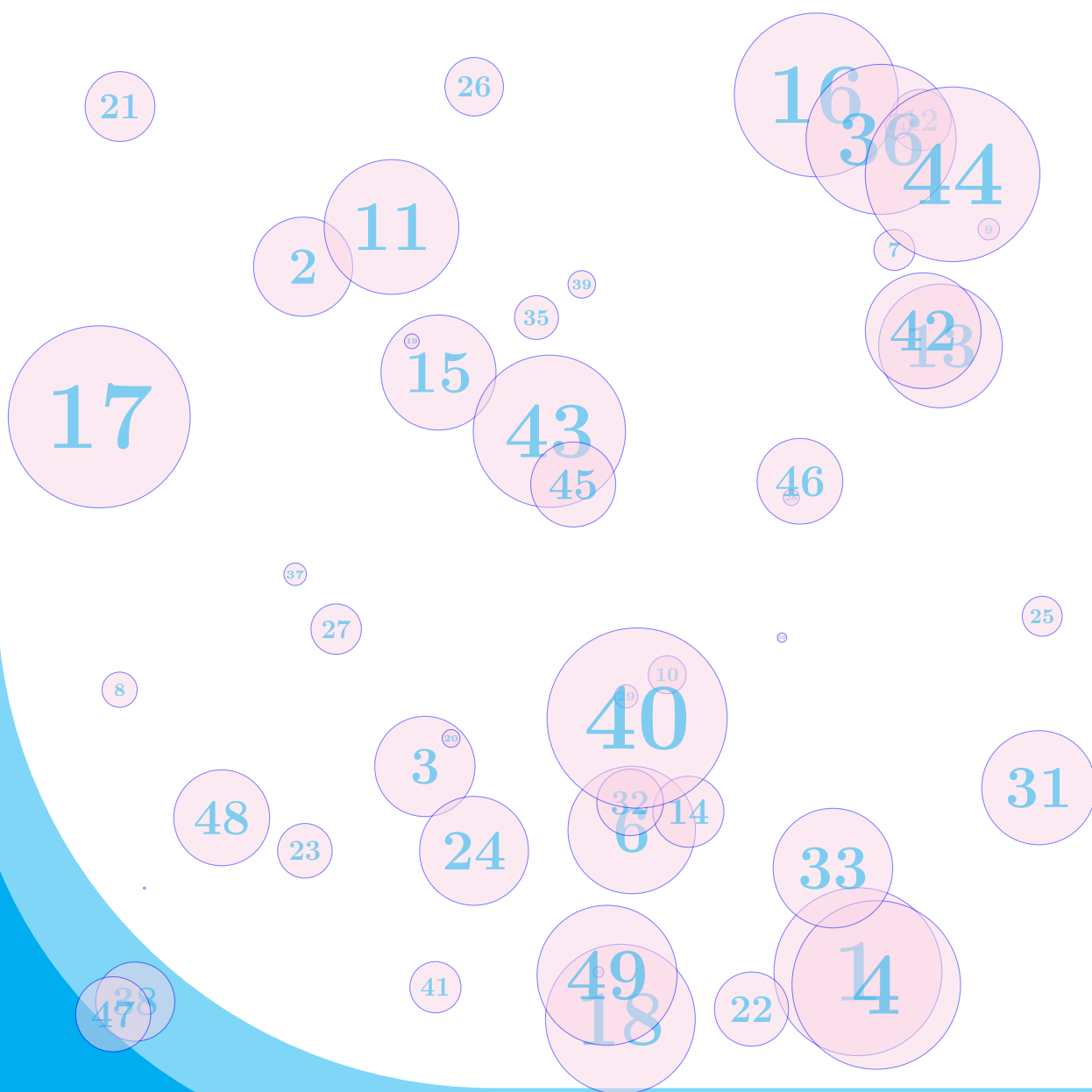
**Bài 14.** Có hai thùng đựng dầu. Thùng thứ nhất có 120 lít, thùng thứ hai có 90 lít. Sau khi lấy ra ở thùng thứ nhất một lượng dầu gấp ba lượng dầu lấy ra ở thùng thứ hai, thì lượng dầu còn lại trong thùng thứ hai gấp đôi lượng dầu còn lại trong thùng thứ nhất. Hỏi đã lấy ra bao nhiêu lít dầu ở mỗi thùng?

**Bài 15.** Hai trường A, B có 250 HS lớp 9 dự thi vào lớp 10, kết quả có 210HS đã trúng tuyển. Tính riêng tỉ lệ đỗ thì trường A đạt 80%, trường B đạt 90%. Hỏi mỗi trường có bao nhiêu HS lớp 9 dự thi vào lớp 10.

**Bài 16.** Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước sau 2 giờ 55 phút thì đầy bể. Nếu chảy riêng thì vòi thứ nhất cần ít thời gian hơn vòi thứ hai là 2 giờ. Tính thời gian để mỗi vòi chảy riêng thì đầy bể.

**Bài 17.** Hai tổ cùng làm chung một công việc hoàn thành sau 15 giờ. Nếu tổ một làm trong 5 giờ, tổ hai làm trong 3 giờ thì được 30% công việc. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi tổ hoàn thành trong bao lâu?

# PHẦN HÌNH HỌC



# HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

## BÀI 1. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG

### A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ .

- $BC^2 = AB^2 + AC^2$ .
- $AH^2 = BH.CH$ .
- $AB^2 = BC.BH$ .
- $AB.AC = BC.AH$ .
- $AC^2 = BC.CH$ .
- $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ .

### B – BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 3$  cm,  $BC = 5$  cm.  $AH$  là đường cao. Tính  $BH$ ,  $CH$ ,  $AC$  và  $AH$ .

**Bài 2.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AC = 10$  cm,  $AB = 8$  cm.  $AH$  là đường cao. Tính  $BC$ ,  $BH$ ,  $CH$ ,  $AH$ .

**Bài 3.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $BC = 12$  cm. Tính chiều dài hai cạnh góc vuông biết  $AB = \frac{2}{3}AC$ .

**Bài 4.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có đường cao  $AH$ . Biết  $BH = 10$  cm,  $CH = 42$  cm. Tính  $BC$ ,  $AH$ ,  $AB$  và  $AC$ .

**Bài 5.** Hình thang cân  $ABCD$  có đáy lớn  $AB = 30$  cm, đáy nhỏ  $CD = 10$  cm và góc  $A$  là  $60^\circ$ .

- a. Tính cạnh  $BC$ .
- b. Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $AB$  và  $CD$ . Tính  $MN$ .

**Bài 6.** Cho tứ giác lồi  $ABCD$  có  $AB = AC = AD = 10$  cm, góc  $B$  bằng  $60^\circ$  và góc  $A$  là  $90^\circ$ .

- a. Tính đường chéo  $BD$ .
- b. Tính các khoảng cách  $BH$  và  $DK$  từ  $B$  và  $D$  đến  $AC$ .
- c. Tính  $HK$ .
- d. Vẽ  $BE \perp DC$  kéo dài. Tính  $BE, CE$  và  $DC$ .

**Bài 7.** Cho đoạn thẳng  $AB = 2a$ . Từ trung điểm  $O$  của  $AB$  vẽ tia  $Ox \perp AB$ . Trên  $Ox$ , lấy điểm  $D$  sao cho  $OD = \frac{a}{2}$ . Từ  $B$  kẻ  $BC$  vuông góc với đường thẳng  $AD$ .

- a. Tính  $AD$ ,  $AC$  và  $BC$  theo  $a$ .
- b. Kéo dài  $DO$  một đoạn  $OE = a$ . Chứng minh bốn điểm  $A, B, C$  và  $E$  cùng nằm trên một đường tròn.

**Bài 8.** Cho tam giác nhọn  $ABC$  có hai đường cao  $BD$  và  $CE$  cắt nhau tại  $H$ . Trên  $HB$  và  $HC$  lần lượt lấy các điểm  $M, N$  sao cho  $\widehat{AMC} = \widehat{ANB} = 90^\circ$ . Chứng minh:  $AM = AN$ .

**Bài 9.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Biết  $\frac{AB}{AC} = \frac{20}{21}$  và  $AH = 420$ . Tính chu vi tam giác  $ABC$ .

**Bài 10.** Cho hình thang  $ABCD$  vuông góc tại  $A$  và  $D$ . Hai đường chéo vuông góc với nhau tại  $O$ . Biết  $AB = 2\sqrt{13}$ ,  $OA = 6$ , tính diện tích hình thang  $ABCD$ .





- a.  $\cos^2 15^\circ + \cos^2 25^\circ + \cos^2 35^\circ + \cos^2 45^\circ + \cos^2 55^\circ + \cos^2 65^\circ + \cos^2 75^\circ$ .
- b.  $\sin^2 10^\circ - \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ - \sin^2 40^\circ - \sin^2 50^\circ - \sin^2 70^\circ + \sin^2 80^\circ$ .
- c.  $\sin 15^\circ + \sin 75^\circ - \cos 15^\circ - \cos 75^\circ + \sin 30^\circ$ .
- d.  $\sin 35^\circ + \sin 67^\circ - \cos 23^\circ - \cos 55^\circ$ .
- e.  $\cos^2 20^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 70^\circ$ .
- f.  $\sin 20^\circ - \tan 40^\circ + \cot 50^\circ - \cos 70^\circ$ .

**Bài 5.** Cho biết một tỉ số lượng giác của góc nhọn  $\alpha$ , tính các tỉ số lượng giác còn lại của  $\alpha$ :

- a.  $\sin \alpha = 0,8$ . b.  $\cos \alpha = 0,6$ .
- c.  $\tan \alpha = 3$ . d.  $\cot \alpha = 2$ .

**Bài 6.** Cho góc nhọn  $\alpha$ . Biết  $\cos \alpha - \sin \alpha = \frac{1}{5}$ . Tính  $\cot \alpha$ .

**Bài 7.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$ . Biết  $\cos A = \frac{5}{13}$ . Tính  $\tan B$ .

**Bài 8.** Rút gọn các biểu thức sau:

- a.  $(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)$ . b.  $1 + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ .
- c.  $\sin \alpha - \sin \alpha \cos^2 \alpha$ . d.  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$ .
- e.  $\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha \tan^2 \alpha$ . f.  $\cos^2 \alpha + \tan^2 \alpha \cos^2 \alpha$ .

**Bài 9.** Chứng minh các hệ thức sau:

- a.  $\frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$ . b.  $\frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - (\sin \alpha - \cos \alpha)^2}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = 4$ .

**Bài 10.** Cho tam giác nhọn  $ABC$ . Gọi  $a, b, c$  lần lượt là độ dài các cạnh đối diện với các đỉnh  $A, B, C$ .

- a. Chứng minh:  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ .
- b. Có thể xảy ra đẳng thức  $\sin A = \sin B + \sin C$  không?

## BÀI 3. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG

### A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $BC = a, AC = b, AB = c$ .

$$b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C, c = a \cdot \sin C = a \cdot \cos B.$$

$$b = c \cdot \tan B = c \cdot \cot C, c = b \cdot \tan C = b \cdot \cot B.$$

### B – BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Giải tam giác vuông  $ABC$ , biết  $\hat{A} = 90^\circ$  và:

a.  $a = 15$  cm;  $b = 10$  cm.

b.  $b = 12$  cm;  $c = 7$  cm.

**Bài 2.** Cho tam giác  $ABC$  có  $\hat{B} = 60^\circ, \hat{C} = 50^\circ, AC = 35$  cm. Tính diện tích tam giác  $ABC$ .

**Bài 3.** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ, \hat{C} = 40^\circ, AB = 4$  cm,  $AD = 3$  cm. Tính diện tích tứ giác.

**Bài 4.** Cho tứ giác  $ABCD$  có các đường chéo cắt nhau tại  $O$ . Cho biết  $AC = 4$  cm,  $BD = 5$  cm,  $\widehat{AOB} = 50^\circ$ . Tính diện tích tứ giác  $ABCD$ .

**Bài 5.** Chứng minh rằng:

- Diện tích của một tam giác bằng nửa tích của hai cạnh nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa hai cạnh ấy.
- Diện tích của một hình bình hành bằng tích của hai cạnh kề nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa hai cạnh ấy.

## BÀI 4. ÔN TẬP CHƯƠNG I

**Bài 1.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 21$  m,  $AC = 28$  m,  $BC = 35$  m.

- a. Chứng minh tam giác  $ABC$  vuông.
- b. Tính  $\sin B, \sin C$ .

**Bài 2.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ , đường phân giác  $AD$ . Cho biết  $HB = 112$ ,  $HC = 63$ .

- a. Tính độ dài  $AH$ .
- b. Tính độ dài  $AD$ .

**Bài 3.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Biết  $AH = 5$ ,  $CH = 6$ .

- a. Tính  $AB, AC, BC, BH$ .
- b. Tính diện tích tam giác  $ABC$ .

**Bài 4.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Biết  $AH = 16$ ,  $BH = 25$ .

- a. Tính  $AB, AC, BC, CH$ .
- b. Tính diện tích tam giác  $ABC$ .

**Bài 5.** Cho hình thang  $ABCD$  có  $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$  và hai đường chéo vuông góc với nhau tại  $O$ .

- a. Chứng minh hình thang này có chiều cao bằng trung bình nhân của hai đáy.
- b. Cho  $AB = 9$ ,  $CD = 16$ . Tính diện tích hình thang  $ABCD$ .
- c. Tính độ dài các đoạn thẳng  $OA, OB, OC, OD$ .

**Bài 6.** Tính diện tích hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ), biết  $AB = 10$ ,  $CD = 27$ ,  $AC = 12$ ,  $BD = 35$ .

**Bài 7.** Cho biết chu vi của một tam giác bằng 120 cm. Độ dài các cạnh tỉ lệ với 8, 15, 17.

- a. Chứng minh rằng tam giác đó là một tam giác vuông.
- b. Tính khoảng cách từ giao điểm ba đường phân giác đến mỗi cạnh.

**Bài 8.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Biết  $\widehat{A} = 48^\circ$ ;  $AH = 13$  cm. Tính chu vi  $\triangle ABC$ .

**Bài 9.** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB = a$ ,  $AC = 3a$ . Trên cạnh  $AC$  lấy các điểm  $D, E$  sao cho  $AD = DE = EC$ .

- a. Chứng minh  $\frac{DE}{DB} = \frac{DB}{DC}$ .
- b. Chứng minh  $\triangle BDE$  đồng dạng  $\triangle CDB$ .
- c. Tính tổng  $\widehat{AFB} + \widehat{BCD}$ .

**Bài 10.** Cho hình thang  $ABCD$  có hai cạnh bên  $AD$  và  $BC$  bằng nhau, đường chéo  $AC$  vuông góc với cạnh bên  $BC$ . Biết  $AD = 5a$ ,  $AC = 12a$ .

- a. Tính  $\frac{\sin B + \cos B}{\sin B - \cos B}$ .
- b. Tính diện tích hình thang  $ABCD$ .

**Bài 11.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Gọi  $D$  là điểm đối xứng với  $A$  qua điểm  $B$ . Trên tia đối của tia  $HA$  lấy điểm  $E$  sao cho  $HE = 2HA$ . Gọi  $I$  là hình chiếu của  $D$  trên  $HE$ .

- Tính  $AB, AC, HC$ , biết  $AH = 4$  cm,  $HB = 3$  cm.
- Tính  $\widehat{IED}, \widehat{HCE}$ .
- Chứng minh  $\widehat{IED} = \widehat{HCE}$ .
- Chứng minh:  $DE \perp EC$ .

**Bài 12.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  ( $AB < AC$ ), đường cao  $AH$ . Đặt  $BC = a, CA = b, AB = c, AH = h$ . Chứng minh rằng tam giác có các cạnh  $a - h; b - c; h$  là một tam giác vuông.

**Bài 13.** Cho tam giác nhọn  $ABC$ , diện tích bằng 1. Vẽ ba đường cao  $AD, BE, CF$ . Chứng minh rằng:

- $S_{AEF} + S_{BFD} + S_{CDE} = \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$ .
- $S_{DEF} = \sin^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C$ .

**Bài 14.** Cho  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$  có  $\sin C = \frac{1}{4 \cos B}$ . Tính các tỉ số lượng giác của góc  $B$  và  $C$ .

**Bài 15.** Cho tam giác  $ABC$  có ba đường cao  $AM, BN, CL$ . Chứng minh:

- $\Delta ANL \sim \Delta ABC$ .
- $AN \cdot BL \cdot CM = AB \cdot BC \cdot CA \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$ .

**Bài 16.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $\widehat{C} = 15^\circ, BC = 4$  cm.

- Kẻ đường cao  $AH$ , đường trung tuyến  $AM$ . Tính  $\widehat{AMH}, AH, AM, HM, HC$ .
- Chứng minh rằng:  $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ .

**Bài 17.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ , có  $\widehat{A} = 36^\circ, BC = 1$  cm. Kẻ phân giác  $CD$ . Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $D$  trên  $AC$ .

- Tính  $AD, DC$ .
- Kẻ  $CK \perp BD$ . Giải tam giác  $BKC$ .
- Chứng minh rằng  $\cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ .

**Bài 18.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 1, \widehat{A} = 105^\circ, \widehat{B} = 60^\circ$ . Trên cạnh  $BC$  lấy điểm  $E$  sao cho  $BE = 1$ . Vẽ  $ED \parallel AD$  ( $D$  thuộc  $AC$ ). Đường thẳng qua  $A$  vuông góc với  $AC$  cắt  $BC$  tại  $F$ . Gọi  $H$  là hình chiếu của  $A$  trên cạnh  $BC$ .

- Chứng minh rằng tam giác  $ABE$  đều. Tính  $AH$ .
- Chứng minh  $\widehat{EAD} = \widehat{EAF} = 45^\circ$ .
- Tính các tỉ số lượng giác của góc  $AED$  và góc  $AEF$ .
- Chứng minh  $\Delta AED = \Delta AEF$ . Từ đó suy ra  $AD = AF$ .
- Chứng minh rằng  $\frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AF^2} = \frac{4}{3}$ .

**Bài 19.** Giải tam giác  $ABC$ , biết:

- $\widehat{A} = 90^\circ, BC = 10$  cm,  $\widehat{B} = 75^\circ$ .

- b.  $\widehat{BAC} = 120^\circ, AB = AC = 6$  cm.
- c. Trung tuyến ứng với cạnh huyền  $m_a = 5$ , đường cao  $AH = 4$ .
- d. Trung tuyến ứng với cạnh huyền  $m_a = 5$ , một góc nhọn bằng  $47^\circ$ .

**Bài 20.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH, AB = 3$  cm,  $BC = 6$  cm. Gọi  $E, F$  lần lượt là hình chiếu của  $H$  trên cạnh  $AB$  và  $AC$ .

- a. Giải tam giác vuông  $ABC$ .
- b. Tính độ dài  $AH$  và chứng minh:  $EF = AH$ .
- c. Tính:  $EA.EB + AF.FC$ .

## BÀI 1. SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN. TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN

### A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### 1. Đường tròn

Đường tròn tâm  $O$  bán kính  $R$  ( $R > 0$ ) là hình gồm các điểm cách điểm  $O$  một khoảng bằng  $R$ .

#### 2. Vị trí tương đối của một điểm đối với một đường tròn

Cho đường tròn  $(O; R)$  và điểm  $M$ .

- $M$  nằm trên đường tròn  $(O; R) \Leftrightarrow OM = R$ .
- $M$  nằm trong đường tròn  $(O; R) \Leftrightarrow OM < R$ .
- $M$  nằm ngoài đường tròn  $(O; R) \Leftrightarrow OM > R$ .

#### 3. Cách xác định đường tròn

Qua ba điểm không thẳng hàng, ta vẽ được một và chỉ một đường tròn.

#### 4. Tính chất đối xứng của đường tròn

- Đường tròn là hình có tâm đối xứng. Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.
- Đường tròn là hình có trục đối xứng. Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn.

### B – BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^\circ$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BD, DC$  và  $CA$ . Chứng minh rằng bốn điểm  $M, N, P, Q$  cùng nằm trên một đường tròn.

**Bài 2.** Cho hình thoi  $ABCD$  có  $\widehat{A} = 60^\circ$ . Gọi  $E, F, G, H$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, BC, CD, DA$ . Chứng minh 6 điểm  $E, F, G, H, B, D$  cùng nằm trên một đường tròn.

**Bài 3.** Cho hình thoi  $ABCD$ . Đường trung trực của cạnh  $AB$  cắt  $BD$  tại  $E$  và cắt  $AC$  tại  $F$ . Chứng minh  $E, F$  lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác  $ABC$  và  $ABD$ .

**Bài 4.** Cho đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$ . Vẽ đường tròn  $(I)$  đường kính  $OA$ . Bán kính  $OC$  của đường tròn  $(O)$  cắt đường tròn  $(I)$  tại  $D$ . Vẽ  $CH \perp AB$ . Chứng minh tứ giác  $ACDH$  là hình thang cân.

**Bài 5.** Cho hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel CD, AB < CD$ ) có  $\widehat{C} = \widehat{D} = 60^\circ, CD = 2AD$ . Chứng minh 4 điểm  $A, B, C, D$  cùng thuộc một đường tròn.

**Bài 6.** Cho hình thoi  $ABCD$ . Gọi  $O$  là giao điểm hai đường chéo.  $M, N, R$  và  $S$  lần lượt là hình chiếu của  $O$  trên  $AB, BC, CD$  và  $DA$ . Chứng minh 4 điểm  $M, N, R$  và  $S$  cùng thuộc một đường tròn.

**Bài 7.** Cho hai đường thẳng  $xy$  và  $x'y'$  vuông góc nhau tại  $O$ . Một đoạn thẳng  $AB = 6$  cm chuyển động sao cho  $A$  luôn nằm trên  $xy$  và  $B$  trên  $x'y'$ . Hỏi trung điểm  $M$  của  $AB$  chuyển động trên đường nào?

**Bài 8.** Cho tam giác  $ABC$  có các đường cao  $BH$  và  $CK$ .

- a. Chứng minh:  $B, K, H$  và  $C$  cùng nằm trên một đường tròn. Xác định tâm đường tròn đó.
- b. So sánh  $KH$  và  $BC$ .



## BÀI 2. DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN

### A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### 1. Đường tròn

Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

#### 2. Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây

- Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.
- Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

#### 3. Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây

- Trong một đường tròn:
  - Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.
  - Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.
- Trong hai dây của một đường tròn:
  - Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.
  - Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

### B – BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Cho đường tròn  $(O; R)$  và ba dây  $AB, AC, AD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là hình chiếu của  $B$  trên các đường thẳng  $AC, AD$ . Chứng minh rằng  $MN \leq 2R$ .

**Bài 2.** Cho đường tròn  $(O; R)$ . Vẽ hai dây  $AB$  và  $CD$  vuông góc với nhau. Chứng minh rằng:  $S_{ABCD} \leq 2R^2$ .

**Bài 3.** Cho đường tròn  $(O; R)$  và dây  $AB$  không đi qua tâm. Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ . Qua  $M$  vẽ dây  $CD$  không trùng với  $AB$ . Chứng minh rằng điểm  $M$  không là trung điểm của  $CD$ .

**Bài 4.** Cho đường tròn  $(O; R)$  đường kính  $AB$ . Gọi  $M$  là một điểm nằm giữa  $A$  và  $B$ . Qua  $M$  vẽ dây  $CD$  vuông góc với  $AB$ . Lấy điểm  $E$  đối xứng với  $A$  qua  $M$ .

a. Tứ giác  $ACED$  là hình gì? Vì sao?

b. Giả sử  $R = 6,5$  cm,  $MA = 4$  cm. Tính  $CD$ .

c. Gọi  $H$  và  $K$  lần lượt là hình chiếu của  $M$  trên  $CA$  và  $CB$ . Chứng minh:  $MH \cdot MK = \frac{MC^3}{2R}$ .

**Bài 5.** Cho đường tròn  $(O; R)$  và hai dây  $AB, CD$  bằng nhau và vuông góc với nhau tại  $I$ . Giả sử  $IA = 2$  cm,  $IB = 4$  cm. Tính khoảng cách từ tâm  $O$  đến mỗi dây.

**Bài 6.** Cho đường tròn  $(O; R)$ . Vẽ hai bán kính  $OA, OB$ . Trên các bán kính  $OA, OB$  lần lượt lấy các điểm  $M, N$  sao cho  $OM = ON$ . Vẽ dây  $CD$  đi qua  $M, N$  ( $M$  ở giữa  $C$  và  $N$ ).

a. Chứng minh  $CM = DN$ .

b. Giả sử  $\widehat{AOB} = 90^\circ$ . Tính  $OM$  theo  $R$  sao cho  $CM = MN = ND$ .

**Bài 7.** Cho đường tròn  $(O; R)$  đường kính  $AB$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $OA, OB$ . Qua  $M, N$  lần lượt vẽ các dây  $CD$  và  $EF$  song song với nhau ( $C$  và  $E$  cùng nằm trên một nửa đường tròn đường kính  $AB$ ).

- Chứng minh tứ giác  $CDEF$  là hình chữ nhật.
- Giả sử  $CD$  và  $EF$  cùng tạo với  $AB$  một góc nhọn  $30^\circ$ . Tính diện tích hình chữ nhật  $CDFE$ .

**Bài 8.** Cho đường tròn  $(O)$  và một dây  $CD$ . Từ  $O$  kẻ tia vuông góc với  $CD$  tại  $M$ , cắt  $(O)$  tại  $H$ . Tính bán kính  $R$  của  $(O)$  biết:  $CD = 16$  cm và  $MH = 4$  cm.

**Bài 9.** Cho đường tròn  $(O; 12$  cm) có đường kính  $CD$ . Vẽ dây  $MN$  qua trung điểm  $I$  của  $OC$  sao cho góc  $NID$  bằng  $30^\circ$ . Tính  $MN$ .

# BÀI 3. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

## A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

### 1. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

Cho đường tròn  $(O; R)$  và đường thẳng  $\Delta$ . Đặt  $d = d(O, \Delta)$ .

#### (VẼ HÌNH)

Khi đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau thì đường thẳng đgl tiếp tuyến của đường tròn. Điểm chung của đường thẳng và đường tròn đgl tiếp điểm.

### 2. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

- Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.
- Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là tiếp tuyến của đường tròn.

### 3. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

- Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.
- Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
- Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.

### 4. Đường tròn nội tiếp tam giác

- Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác đgl đường tròn nội tiếp tam giác, còn tam giác đgl ngoại tiếp đường tròn.
- Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của các đường phân giác các góc trong tam giác.

### 5. Đường tròn bàng tiếp tam giác

- Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của một tam giác và tiếp xúc với các phần kéo dài của hai cạnh kia đgl đường tròn bàng tiếp tam giác.
- Với một tam giác, có ba đường tròn bàng tiếp.
- Tâm của đường tròn bàng tiếp tam giác trong góc  $A$  là giao điểm của hai đường phân giác các góc ngoài tại  $B$  và  $C$ , hoặc là giao điểm của đường phân giác góc  $A$  và đường phân giác ngoài tại  $B$  (hoặc  $C$ ).

## B – BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Cho tam giác  $ABC$  có hai đường cao  $BD$  và  $CE$  cắt nhau tại  $H$ .

- a. Chứng minh rằng bốn điểm  $A, D, H, E$  cùng nằm trên một đường tròn (gọi tâm của nó là  $O$ ).
- b. Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Chứng minh rằng  $ME$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ .

**Bài 2.** Cho đường tròn  $(O; R)$  đường kính  $AB$ . Vẽ dây  $AC$  sao cho  $\widehat{CAB} = 30^\circ$ . Trên tia đối của tia  $BA$ , lấy điểm  $M$  sao cho  $BM = R$ . Chứng minh rằng:

- a.  $MC$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ .
- b.  $MC^2 = 3R^2$ .

**Bài 3.** Cho tam giác  $ABC$  vuông ở  $A$  có  $AB = 8, AC = 15$ . Vẽ đường cao  $AH$ . Gọi  $D$  là điểm đối xứng với  $B$  qua  $H$ . Vẽ đường tròn đường kính  $CD$ , cắt  $AC$  ở  $E$ .

- a. Chứng minh rằng  $HE$  là tiếp tuyến của đường tròn.
- b. Tính độ dài  $HE$ .

**Bài 4.** Từ một điểm  $M$  ở ngoài đường tròn  $(O)$ , vẽ hai tiếp tuyến  $MA, MB$  với đường tròn. Trên tia  $OB$  lấy điểm  $C$  sao cho  $BC = BO$ . Chứng minh rằng  $\widehat{BMC} = \frac{1}{2}\widehat{BMA}$ .

**Bài 5.** Cho đường tròn  $(O; R)$  và một điểm  $A$  ở ngoài đường tròn. Vẽ các tiếp tuyến  $AB, AC$ . Chứng minh rằng  $\widehat{BAC} = 60^\circ$  khi và chỉ khi  $OA = 2R$ .

**Bài 6.** Từ một điểm  $A$  ở ngoài đường tròn  $(O; R)$ , vẽ hai tiếp tuyến  $AB, AC$  với đường tròn. Đường thẳng vuông góc với  $OB$  tại  $O$  cắt  $AC$  tại  $N$ . Đường thẳng vuông góc với  $OC$  tại  $O$  cắt  $AB$  tại  $M$ .

- a. Chứng minh rằng tứ giác  $AMON$  là hình thoi.
- b. Điểm  $A$  phải cách điểm  $O$  một khoảng bao nhiêu để cho  $MN$  là tiếp tuyến của  $(O)$ ?

**Bài 7.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Các tiếp tuyến của đường tròn vẽ từ  $A$  và  $C$  cắt nhau tại  $M$ . Trên tia  $AM$  lấy điểm  $D$  sao cho  $AD = BC$ . Chứng minh rằng:

- a. Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành.
- b. Ba đường thẳng  $AC, BD, OM$  đồng quy.

**Bài 8.** Cho đường tròn  $(O; r)$  nội tiếp tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Chứng minh rằng  $r = p - a$ , trong đó  $p$  là nửa chu vi tam giác,  $a$  là độ dài cạnh huyền.

**Bài 9.** Chứng minh rằng diện tích tam giác ngoại tiếp một đường tròn được tính theo công thức:  $S = pr$ , trong đó  $p$  là nửa chu vi tam giác,  $r$  là bán kính đường tròn nội tiếp.

**Bài 10.** Cho đường tròn  $(O)$ , dây cung  $CD$ . Qua  $O$  vẽ  $OH \perp CD$  tại  $H$ , cắt tiếp tuyến tại  $C$  của đường tròn  $(O)$  tại  $M$ . Chứng minh  $MD$  là tiếp tuyến của  $(O)$ .

**Bài 11.** Cho nửa đường tròn tâm  $O$ , đường kính  $AB$ . Vẽ các tia  $Ax \perp AB$  và  $By \perp AB$  ở cùng phía nửa đường tròn. Gọi  $I$  là một điểm trên nửa đường tròn. Tiếp tuyến tại  $I$  cắt  $Ax$  tại  $C$  và  $By$  tại  $D$ . Chứng minh rằng  $AC + BD = CD$ .

**Bài 12.** Cho đường tròn  $(O; 5 \text{ cm})$ . Từ một điểm  $M$  ở ngoài  $(O)$ , vẽ hai tiếp tuyến  $MA$  và  $MB$  sao cho  $MA \perp MB$  tại  $M$ .

- a. Tính  $MA$  và  $MB$ .
- b. Qua trung điểm  $I$  của cung nhỏ  $AB$ , vẽ một tiếp tuyến cắt  $OA, OB$  tại  $C$  và  $D$ . Tính  $CD$ .

**Bài 13.** Cho đường tròn  $(O)$ . Từ một điểm  $M$  ở ngoài  $(O)$ , vẽ hai tiếp tuyến  $MA$  và  $MB$  sao cho góc  $\widehat{AMB} = 60^\circ$ . Biết chu vi tam giác  $MAB$  là  $18 \text{ cm}$ , tính độ dài dây  $AB$ .

# BÀI 4. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

## A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

### 1. Tính chất đường nối tâm

- Đường nối tâm của hai đường tròn là trục đối xứng của hình gồm cả hai đường tròn đó.
- Nếu hai đường tròn cắt nhau thì hai giao điểm đối xứng với nhau qua đường nối tâm.
- Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.

### 2. Vị trí tương đối của hai đường tròn

Cho hai đường tròn  $(O; R)$  và  $(O'; r)$ . Đặt  $OO' = d$ .

(VẼ HÌNH)

### 3. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn

- Tiếp tuyến chung của hai đường tròn là đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn đó.
- Tiếp tuyến chung ngoài là tiếp tuyến chung không cắt đoạn nối tâm.
- Tiếp tuyến chung trong là tiếp tuyến chung cắt đoạn nối tâm.

## B – BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Cho hai đường tròn  $(A; R_1)$ ,  $(B; R_2)$  và  $(C; R_3)$  đôi một tiếp xúc ngoài nhau. Tính  $R_1, R_2$  và  $R_3$  biết  $AB = 5$  cm,  $AC = 6$  cm và  $BC = 7$  cm.

**Bài 2.** Cho hai đường tròn  $(O; 5$  cm) và  $(O'; 5$  cm) cắt nhau tại  $A$  và  $B$ . Tính độ dài dây cung chung  $AB$  biết  $OO' = 8$  cm.

**Bài 3.** Cho hai đường tròn  $(O; R)$  và  $(O'; R')$  cắt nhau tại  $A$  và  $B$  với  $R > R'$ . Vẽ các đường kính  $AOC$  và  $AO'D$ . Chứng minh rằng ba điểm  $B, C, D$  thẳng hàng.

**Bài 4.** Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  cắt nhau tại  $A$  và  $B$ . Vẽ cát tuyến chung  $MAN$  sao cho  $MA = AN$ . Đường vuông góc với  $MN$  tại  $A$  cắt  $OO'$  tại  $I$ . Chứng minh  $I$  là trung điểm của  $OO'$ .

**Bài 5.** Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  tiếp xúc ngoài nhau tại  $A$ . Gọi  $M$  là giao điểm một trong hai tiếp tuyến chung ngoài  $BC$  và tiếp tuyến chung trong. Chứng minh  $BC$  là tiếp tuyến của đường tròn đường kính  $OO'$  tại  $M$ .

**Bài 6.** Cho hai đường tròn  $(O; R)$  và  $(O'; R)$  tiếp xúc ngoài nhau tại  $M$ . Hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  cùng tiếp xúc trong với đường tròn lớn  $(O''; R'')$  lần lượt tại  $E$  và  $F$ . Tính bán kính  $R''$  biết chu vi tam giác  $OO'O''$  là 20 cm.

**Bài 7.** Cho đường tròn  $(O; 9$  cm). Vẽ 6 đường tròn bằng nhau bán kính  $R$  đều tiếp xúc trong với  $(O)$  và mỗi đường tròn đều tiếp xúc với hai đường khác bên cạnh nó. Tính bán kính  $R$ .

**Bài 8.** Cho hai đường tròn đồng tâm. Trong đường tròn lớn vẽ hai dây bằng nhau  $AB = CD$  và cùng tiếp xúc với đường tròn nhỏ tại  $M$  và  $N$  sao cho  $AB \perp CD$  tại  $I$ . Tính bán kính đường tròn nhỏ biết  $IA = 3$  cm và  $IB = 9$  cm.

**Bài 9.** Cho ba đường tròn  $(O_1), (O_2), (O_3)$  cùng có bán kính  $R$  và tiếp xúc ngoài nhau từng đôi một. Tính diện tích tam giác có ba đỉnh là ba tiếp điểm.

**Bài 10.** Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  tiếp xúc nhau tại  $A$ . Qua  $A$  vẽ một cát tuyến cắt đường tròn  $(O)$  tại  $B$  và cắt đường tròn  $(O')$  tại  $C$ . Từ  $B$  vẽ tiếp tuyến  $xy$  với đường tròn  $(O)$ . Từ  $C$  vẽ đường thẳng  $uv$  song song với  $xy$ . Chứng minh rằng  $uv$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O')$ .

**Bài 11.** Cho hình vuông  $ABCD$ . Vẽ đường tròn  $(D; DC)$  và đường tròn  $(O)$  đường kính  $BC$ , chúng cắt nhau tại một điểm thứ hai là  $E$ . Tia  $CE$  cắt  $AB$  tại  $M$ , tia  $BE$  cắt  $AD$  tại  $N$ . Chứng minh rằng:

- $N$  là trung điểm của  $AD$ .
- $M$  là trung điểm của  $AB$ .

**Bài 12.** Cho góc vuông  $xOy$ . Lấy các điểm  $I$  và  $K$  lần lượt trên các tia  $Ox$  và  $Oy$ . Vẽ đường tròn  $(I; OK)$  cắt tia  $Ox$  tại  $M$  ( $I$  nằm giữa  $O$  và  $M$ ). Vẽ đường tròn  $(K; OI)$  cắt tia  $Oy$  tại  $N$  ( $K$  nằm giữa  $O$  và  $N$ ).

- Chứng minh hai đường tròn  $(I)$  và  $(K)$  luôn cắt nhau.
- Tiếp tuyến tại  $M$  của đường tròn  $(I)$  và tiếp tuyến tại  $N$  của đường tròn  $(K)$  cắt nhau tại  $C$ . Chứng minh tứ giác  $OMCN$  là hình vuông.
- Gọi giao điểm của hai đường tròn  $(I)$ ,  $(K)$  là  $A$  và  $B$ . Chứng minh ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng.
- Giả sử  $I$  và  $K$  theo thứ tự di động trên các tia  $Ox$  và  $Oy$  sao cho  $OI + OK = a$  (không đổi). Chứng minh rằng đường thẳng  $AB$  luôn đi qua một điểm cố định.

## BÀI 5. ÔN TẬP CHƯƠNG II

**Bài 1.** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ . Vẽ đường phân giác  $BI$ .

- a. Chứng minh rằng đường tròn  $(I; IA)$  tiếp xúc với  $BC$ .
- b. Cho biết  $AB = a$ . Chứng minh rằng  $AI = (\sqrt{2} - 1)a$ . Từ đó suy ra  $\tan 22^\circ 30' = \sqrt{2} - 1$ .

**Bài 2.** Cho đường tròn  $(O; R)$  và một điểm  $A$  cố định trên đường tròn đó. Qua  $A$  vẽ tiếp tuyến  $xy$ . Từ một điểm  $M$  trên  $xy$  vẽ tiếp tuyến  $MB$  với đường tròn  $(O)$ . Hai đường cao  $AD$  và  $BE$  của tam giác  $MAB$  cắt nhau tại  $H$ .

- a. Chứng minh rằng ba điểm  $M, H, O$  thẳng hàng.
- b. Chứng minh rằng tứ giác  $AOBH$  là hình thoi.
- c. Khi điểm  $M$  di động trên  $xy$  thì điểm  $H$  di động trên đường nào?

**Bài 3.** Cho nửa đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$ . Từ một điểm  $M$  trên nửa đường tròn ta vẽ tiếp tuyến  $xy$ . Vẽ  $AD$  và  $BC$  vuông góc với  $xy$ .

- a. Chứng minh rằng  $MC = MD$ .
- b. Chứng minh rằng  $AD + BC$  có giá trị không đổi khi điểm  $M$  di động trên nửa đường tròn.
- c. Chứng minh rằng đường tròn đường kính  $CD$  tiếp xúc với ba đường thẳng  $AD, BC$  và  $AB$ .
- d. Xác định vị trí của điểm  $M$  trên nửa đường tròn  $(O)$  để cho diện tích tứ giác  $ABCD$  lớn nhất.

**Bài 4.** Cho tam giác đều  $ABC$ ,  $O$  là trung điểm của  $BC$ . Trên các cạnh  $AB, AC$  lần lượt lấy các điểm di động  $D, E$  sao cho  $\widehat{DOE} = 60^\circ$ .

- a. Chứng minh rằng tích  $BD \cdot CE$  không đổi.
- b. Chứng minh  $\triangle BOD \sim \triangle OED$ . Từ đó suy ra tia  $DO$  là tia phân giác của góc  $BDE$ .
- c. Vẽ đường tròn tâm  $O$  tiếp xúc với  $AB$ . Chứng minh rằng đường tròn này luôn tiếp xúc với  $DE$ .

**Bài 5.** Cho nửa đường tròn  $(O; R)$  đường kính  $AB$  và một điểm  $E$  di động trên nửa đường tròn đó ( $E$  không trùng với  $A$  và  $B$ ). Vẽ các tia tiếp tuyến  $Ax, By$  với nửa đường tròn. Tia  $AE$  cắt  $By$  tại  $C$ , tia  $BE$  cắt  $Ax$  tại  $D$ .

- a. Chứng minh rằng tích  $AD \cdot BC$  không đổi.
- b. Tiếp tuyến tại  $E$  của nửa đường tròn cắt  $Ax, By$  theo thứ tự tại  $M$  và  $N$ . Chứng minh rằng ba đường thẳng  $MN, AB, CD$  đồng quy hoặc song song với nhau.
- c. Xác định vị trí của điểm  $E$  trên nửa đường tròn để diện tích tứ giác  $ABCD$  nhỏ nhất. Tính diện tích nhỏ nhất đó.

**Bài 6.** Cho đoạn thẳng  $AB$  cố định. Vẽ đường tròn  $(O)$  tiếp xúc với  $AB$  tại  $A$ , đường tròn  $(O')$  tiếp xúc với  $AB$  tại  $B$ . Hai đường tròn này luôn thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ  $AB$  và luôn tiếp xúc ngoài với nhau. Hỏi tiếp điểm  $M$  của hai đường tròn di động trên đường nào?

**Bài 7.** Cho đường tròn  $(O; R)$  nội tiếp  $\triangle ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là tiếp điểm của  $AB, AC, BC$  với  $(O)$ . Chứng minh rằng:  $P_{\triangle ABC} = 2(AM + BP + NC)$ .

**Bài 8.** Cho đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$ . Dây  $CD$  cắt đường kính  $AB$  tại  $I$ . Gọi  $H$  và  $K$  lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ  $A$  và  $B$  đến  $CD$ . Chứng minh  $CH = DK$ .



**Bài 9.** Từ điểm  $M$  ở ngoài đường tròn  $(O)$  vẽ hai tiếp tuyến  $MA$  và  $MB$  ( $A, B$  là tiếp điểm). Cho biết góc  $\widehat{AMB} = 40^\circ$ .

- Tính góc  $\widehat{AOB}$ .
- Từ  $O$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $OA$  cắt  $MB$  tại  $N$ . Chứng minh tam giác  $OMN$  là tam giác cân.

**Bài 10.** Cho nửa đường tròn tâm  $O$ , đường kính  $AB$ . Vẽ các tiếp tuyến  $Ax, By$  với nửa đường tròn cùng phía đối với  $AB$ . Từ điểm  $M$  trên nửa đường tròn ( $M$  khác  $A, B$ ) vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt  $Ax$  và  $By$  lần lượt tại  $C$  và  $D$ .

- Chứng minh: Tam giác  $COD$  là tam giác vuông.
- Chứng minh:  $MC \cdot MD = OM^2$ .
- Cho biết  $OC = BA = 2R$ , tính  $AC$  và  $BD$  theo  $R$ .

**Bài 11.** Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  tiếp xúc ngoài với nhau tại  $B$ . Vẽ đường kính  $AB$  của đường tròn  $(O)$  và đường kính  $BC$  của đường tròn  $(O')$ . Đường tròn đường kính  $OC$  cắt  $(O)$  tại  $M$  và  $N$ .

- Đường thẳng  $CM$  cắt  $(O')$  tại  $P$ . Chứng minh:  $OM \parallel BP$ .
- Từ  $C$  vẽ đường thẳng vuông góc với  $CM$  cắt tia  $ON$  tại  $D$ . Chứng minh tam giác  $OCD$  là tam giác cân.

**Bài 12.** Cho hai đường tròn  $(O; R)$  và  $(O'; R')$  cắt nhau tại  $A$  và  $B$  sao cho đường thẳng  $OA$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O'; R')$ . Biết  $R = 12$  cm,  $R' = 5$  cm.

- Chứng minh:  $O'A$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O; R)$ .
- Tính độ dài các đoạn thẳng  $OO', AB$ .

**Bài 13.** Cho đường tròn tâm  $O$  bán kính  $R = 6$  cm và một điểm  $A$  cách  $O$  một khoảng 10 cm. Từ  $A$  vẽ tiếp tuyến  $AB$  ( $B$  là tiếp điểm).

- Tính độ dài đoạn tiếp tuyến  $AB$ .
- Vẽ cát tuyến  $ACD$ , gọi  $I$  là trung điểm của đoạn  $CD$ . Hỏi khi  $C$  chạy trên đường tròn  $(O)$  thì  $I$  chạy trên đường nào?

**Bài 14.** Cho hai đường tròn đồng tâm  $(O; R)$  và  $(O; r)$ . Dây  $AB$  của  $(O; R)$  tiếp xúc với  $(O; r)$ . Trên tia  $AB$  lấy điểm  $E$  sao cho  $B$  là trung điểm của đoạn  $AE$ . Từ  $E$  vẽ tiếp tuyến thứ hai của  $(O; r)$  cắt  $(O; R)$  tại  $C$  và  $D$  ( $D$  ở giữa  $E$  và  $C$ ).

- Chứng minh:  $EA = EC$ .
- Chứng minh:  $EO$  vuông góc với  $BD$ .
- Điểm  $E$  chạy trên đường nào khi dây  $AB$  của  $(O; R)$  thay đổi nhưng luôn tiếp xúc với  $(O; r)$ ?

**Bài 15.** Cho nửa đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$  và một điểm  $M$  nằm trên nửa đường tròn đó.  $H$  là chân đường vuông góc hạ từ  $M$  xuống  $AB$ .

- Khi  $AH = 2$  cm,  $MH = 4$  cm, hãy tính độ dài các đoạn thẳng  $AB, MA, MB$ .
- Khi điểm  $M$  di động trên nửa đường tròn  $(O)$ . Hãy xác định vị trí của  $M$  để biểu thức:  $\frac{1}{MA^2} + \frac{1}{MB^2}$  có giá trị nhỏ nhất.



- c. Tiếp tuyến của  $(O)$  tại  $M$  cắt tiếp tuyến của  $(O)$  tại  $A$  ở  $D$ ,  $OD$  cắt  $AM$  tại  $I$ . Khi điểm  $M$  di động trên nửa đường tròn  $(O)$  thì  $I$  chạy trên đường nào?

**Bài 16.** Cho tam giác  $ABC$  nhọn nội tiếp đường tròn  $(O)$  đường kính  $AD$ . Gọi  $H$  là trực tâm của tam giác.

- Tính số đo góc  $\widehat{ABD}$ .
- Tứ giác  $BHCD$  là hình gì? Vì sao?
- Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ . Chứng minh  $2OM = AH$ .

**Bài 17.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Đường cao  $AH$  cắt đường tròn  $(O)$  ở  $D$ .

- $AD$  có phải là đường kính của đường tròn  $(O)$  không? Vì sao?
- Chứng minh:  $BC^2 = 4AH \cdot DH$ .
- Cho  $BC = 24$  cm,  $AB = 20$  cm. Tính bán kính của đường tròn  $(O)$ .

**Bài 18.** Cho đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$ . Gọi  $H$  là trung điểm  $OA$ . Dây  $CD$  vuông góc với  $OA$  tại  $H$ .

- Tứ giác  $ACOD$  là hình gì? Vì sao?
- Chứng minh các tam giác  $OAC$  và  $CBD$  là các tam giác đều.
- Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ . Chứng minh ba điểm  $D, O, M$  thẳng hàng.
- Chứng minh:  $CD^2 = 4AH \cdot HB$ .

**Bài 19.** Cho đường tròn đường kính 10 cm, một đường thẳng  $d$  cách tâm  $O$  một khoảng bằng 3 cm.

- Xác định vị trí tương đối của đường thẳng  $d$  và đường tròn  $(O)$ .
- Đường thẳng  $d$  cắt đường tròn  $(O)$  tại điểm  $A$  và  $B$ . Tính độ dài dây  $AB$ .
- Kẻ đường kính  $AC$  của đường tròn  $(O)$ . Tính độ dài  $BC$  và số đo góc  $CAB$  (làm tròn đến độ).
- Tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  tại  $C$  cắt tia  $AB$  tại  $M$ . Tính độ dài  $BM$ .

**Bài 20.** Cho tam giác  $ABC$  nhọn. Đường tròn đường kính  $BC$  cắt  $AB$  ở  $N$  và cắt  $AC$  ở  $M$ . Gọi  $H$  là giao điểm của  $BM$  và  $CN$ .

- Tính số đo các góc  $BMC$  và  $BNC$ .
- Chứng minh  $AH$  vuông góc  $BC$ .
- Chứng minh tiếp tuyến tại  $N$  đi qua trung điểm  $AH$ .

**Bài 21.** Cho đường tròn tâm  $(O; R)$  đường kính  $AB$  và điểm  $M$  trên đường tròn sao cho góc  $\widehat{MAB} = 60^\circ$ . Kẻ dây  $MN$  vuông góc với  $AB$  tại  $H$ .

- Chứng minh  $AM$  và  $AN$  là các tiếp tuyến của đường tròn  $(B; BM)$ .
- Chứng minh  $MN^2 = 4AH \cdot HB$ .
- Chứng minh tam giác  $BMN$  là tam giác đều và điểm  $O$  là trọng tâm của nó.

- d. Tia  $MO$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $E$ , tia  $MB$  cắt  $(B)$  tại  $F$ . Chứng minh ba điểm  $N, E, F$  thẳng hàng.

**Bài 22.** Cho đường tròn  $(O; R)$  và điểm  $A$  cách  $O$  một khoảng bằng  $2R$ , kẻ tiếp tuyến  $AB$  tới đường tròn ( $B$  là tiếp điểm).

- Tính số đo các góc của tam giác  $OAB$ .
- Gọi  $C$  là điểm đối xứng với  $B$  qua  $OA$ . Chứng minh điểm  $C$  nằm trên đường tròn  $O$  và  $AC$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ .
- $AO$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $G$ . Chứng minh  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .

**Bài 23.** Từ điểm  $A$  ở ngoài đường tròn  $(O; R)$  kẻ hai tiếp tuyến  $AB, AC$  (với  $B$  và  $C$  là hai tiếp điểm). Gọi  $H$  là giao điểm của  $OA$  và  $BC$ .

- Chứng minh  $OA \perp BC$  và tính tích  $OH \cdot OA$  theo  $R$ .
- Kẻ đường kính  $BD$  của đường tròn  $(O)$ . Chứng minh  $CD \parallel OA$ .
- Gọi  $E$  là hình chiếu của  $C$  trên  $BD$ ,  $K$  là giao điểm của  $AD$  và  $CE$ . Chứng minh  $K$  là trung điểm  $CE$ .

**Bài 24.** Từ điểm  $A$  ở ngoài đường tròn  $(O; R)$  kẻ hai tiếp tuyến  $AB, AC$  (với  $B$  và  $C$  là các tiếp điểm). Kẻ  $BE \perp AC$  và  $CF \perp AB$  ( $E \in AC, F \in AB$ ),  $BE$  và  $CF$  cắt nhau tại  $H$ .

- Chứng minh tứ giác  $BOCH$  là hình thoi.
- Chứng minh ba điểm  $A, H, O$  thẳng hàng.
- Xác định vị trí điểm  $A$  để  $H$  nằm trên đường tròn  $(O)$ .

**Bài 25.** Cho đường tròn  $(O; 3 \text{ cm})$  và điểm  $A$  có  $OA = 6 \text{ cm}$ . Kẻ các tiếp tuyến  $AB$  và  $AC$  với đường tròn ( $B, C$  là các tiếp điểm). Gọi  $H$  là giao điểm của  $OA$  và  $BC$ .

- Tính độ dài  $OH$ .
- Qua điểm  $M$  bất kì thuộc cung nhỏ  $BC$ , kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt  $AB$  và  $AC$  theo thứ tự tại  $D$  và  $E$ . Tính chu vi tam giác  $ADE$ .
- Tính số đo góc  $\widehat{DOE}$ .

**Bài 26.** Cho nửa đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$ . Gọi  $Ax, By$  là các tia vuông góc với  $AB$  ( $Ax, By$  và nửa đường tròn thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ  $AB$ ). Qua điểm  $M$  bất kì thuộc tia  $Ax$  kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt  $By$  ở  $N$ .

- Tính số đo góc  $MON$ .
- Chứng minh  $MN = AM + BN$ .
- Tính tích  $AM \cdot BN$  theo  $R$ .

**Bài 27.** Cho tam giác  $ABC$  vuông ở  $A$ , đường cao  $AH$ . Gọi  $D$  và  $E$  lần lượt là hình chiếu của điểm  $H$  trên các cạnh  $AB$  và  $AC$ .

- Chứng minh  $AD \cdot AB = AE \cdot AC$ .
- Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $BH$  và  $CH$ . Chứng minh  $DE$  là tiếp tuyến chung của hai đường tròn  $(M; MD)$  và  $(N; NE)$ .

- c. Gọi  $P$  là trung điểm  $MN$ ,  $Q$  là giao điểm của  $DE$  và  $AH$ . Giả sử  $AB = 6$  cm,  $AC = 8$  cm. Tính độ dài  $PQ$ .

**Bài 28.** Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  tiếp xúc ngoài tại  $A$ . Kẻ tiếp tuyến chung ngoài  $MN$  với  $M$  thuộc  $(O)$  và  $N$  thuộc  $(O')$ . Gọi  $P$  là điểm đối xứng với  $M$  qua  $OO'$ ,  $Q$  là điểm đối xứng với  $N$  qua  $OO'$ . Chứng minh rằng:

- $MNQP$  là hình thang cân.
- $PQ$  là tiếp tuyến chung của của hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$ .
- $MN + PQ = MP + NQ$ .

# GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

## BÀI 1. GÓC Ở TÂM. SỐ ĐO CUNG

### A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### 1. Góc ở tâm

- Góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn đgl góc ở tâm.
- Nếu  $0^\circ < a < 180^\circ$  thì cung nằm bên trong góc đgl cung nhỏ, cung nằm bên ngoài góc đgl cung lớn.
- Nếu  $a = 180^\circ$  thì mỗi cung là một nửa đường tròn.
- Cung nằm bên trong góc đgl cung bị chắn. Góc bẹt chắn nửa đường tròn.
- Kí hiệu cung  $AB$  là  $\widehat{AB}$ .

#### 2. Số đo cung

- Số đo của cung  $AB$  được kí hiệu là  $sđ\widehat{AB}$ .
- Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.
- Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa  $360^\circ$  và số đo của cung nhỏ (có chung 2 mút với cung lớn).
- Số đo của nửa đường tròn bằng  $180^\circ$ . Cung cả đường tròn có số đo  $360^\circ$ .
- Cung không có số đo  $0^\circ$  (cung có 2 mút trùng nhau).

#### 3. So sánh hai cung

Trong một đường tròn hay hai đường tròn bằng nhau:

- Hai cung đgl bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau.
- Trong hai cung, cung nào có số đo lớn hơn đgl cung lớn hơn.

#### 4. Định lí

Nếu  $C$  là một điểm nằm trên cung  $AB$  thì  $sđ\widehat{AB} = sđ\widehat{AC} + sđ\widehat{CB}$ .

### B – BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Cho đường tròn  $(O; R)$  Vẽ dây  $AB = R\sqrt{2}$ . Tính số đo của hai cung  $AB$ .

**Bài 2.** Cho đường tròn  $(O; R)$ . Vẽ dây  $AB$  sao cho số đo của cung nhỏ  $AB$  bằng  $\frac{1}{2}$  số đo của cung lớn  $AB$ . Tính diện tích của tam giác  $AOB$ .

**Bài 3.** Cho hai đường tròn đồng tâm  $(O; R)$  và  $\left(O; \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)$ . Trên đường tròn nhỏ lấy một điểm  $M$ . Tiếp tuyến tại  $M$  của đường tròn nhỏ cắt đường tròn lớn tại  $A$  và  $B$ . Tia  $OM$  cắt đường tròn lớn tại  $C$ .

a. Chứng minh rằng  $\widehat{CA} = \widehat{CB}$ .

b. Tính số đo của hai cung  $AB$ .

**Bài 4.** Cho  $(O; 5 \text{ cm})$  và điểm  $M$  sao cho  $OM = 10 \text{ cm}$ . Vẽ hai tiếp tuyến  $MA$  và  $MB$ . Tính góc ở tâm do hai tia  $OA$  và  $OB$  tạo ra.

**Bài 5.** Cho tam giác đều  $ABC$ , vẽ nửa đường tròn đường kính  $BC$  cắt  $AB$  tại  $D$  và  $AC$  tại  $E$ . So sánh các cung  $BD$ ,  $DE$  và  $EC$ .

**Bài 6.** Cho hai đường tròn đồng tâm  $(O; R)$  và  $(O; R')$  với  $R > R'$ . Qua điểm  $M$  ở ngoài  $(O; R)$ , vẽ hai tiếp tuyến với  $(O; R')$ . Một tiếp tuyến cắt  $(O; R)$  tại  $A$  và  $B$  ( $A$  nằm giữa  $M$  và  $B$ ); một tiếp tuyến cắt  $(O; R)$  tại  $C$  và  $D$  ( $C$  nằm giữa  $D$  và  $M$ ). Chứng minh hai cung  $AB$  và  $CD$  bằng nhau.

## BÀI 2. LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY

### A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### 1. Định lí 1

Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:

- Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau.
- Hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau.

#### 2. Định lí 2

Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:

- Cung lớn hơn căng dây lớn hơn.
- Dây lớn hơn căng cung lớn hơn.

#### 3. Bổ sung

- Trong một đường tròn, hai cung bị chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau.
- Trong một đường tròn, đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì đi qua trung điểm của dây căng cung ấy.

Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây (không đi qua tâm) thì đi qua điểm chính giữa của cung bị căng bởi dây ấy.

- Trong một đường tròn, đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì vuông góc với dây căng cung ấy và ngược lại.

### B – BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  nội tiếp trong đường tròn  $(O)$ . Biết  $\widehat{A} = 50^\circ$ , hãy so sánh các cung nhỏ  $AB, AC$  và  $BC$ .

**Bài 2.** Cho hai đường tròn bằng nhau  $(O)$  và  $(O')$  cắt nhau tại hai điểm  $A, B$ . Vẽ các đường kính  $AOE, AO'F$  và  $BOC$ . Đường thẳng  $AF$  cắt đường tròn  $(O)$  tại một điểm thứ hai là  $D$ . Chứng minh rằng các cung nhỏ  $AB, CD, CE$  bằng nhau.

**Bài 3.** Cho đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$ . Vẽ hai dây  $AM$  và  $BN$  song song với nhau sao cho  $\widehat{BM} < 90^\circ$ . Vẽ dây  $MD$  song song với  $AB$ . Dây  $DN$  cắt  $AB$  tại  $E$ . Từ  $E$  vẽ một đường thẳng song song với  $AM$  cắt đường thẳng  $DM$  tại  $C$ . Chứng minh rằng:

- $AB \perp DN$ .
- $BC$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ .

**Bài 4.** Cho đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$ . Từ  $A$  và  $B$  vẽ hai dây cung  $AC$  và  $BD$  song song với nhau. Qua  $O$  vẽ đường thẳng vuông góc  $AC$  tại  $M$  và  $BD$  tại  $N$ . So sánh hai cung  $AC$  và  $BD$ .

**Bài 5.** Cho đường tròn  $(O)$  và dây  $AB$  chia đường tròn thành hai cung thỏa:  $\widehat{AmB} = \frac{1}{3}\widehat{AnB}$ .

- Tính số đo của hai cung  $\widehat{AmB}, \widehat{AnB}$ .

b. Chứng minh khoảng cách từ tâm  $O$  đến dây  $AB$  là  $\frac{AB}{2}$ .

**Bài 6.** Trên đường tròn  $(O)$  vẽ hai cung  $AB$  và  $CD$  thỏa:  $\widehat{AB} = 2\widehat{CD}$ . Chứng minh:  $AB < 2 \cdot CD$ .

# BÀI 3. GÓC NỘI TIẾP

## A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

### 1. Định nghĩa

Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó. Cung nằm bên trong góc đgl cung bị chắn.

### 2. Định lí

Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.

### 3. Hệ quả

Trong một đường tròn:

- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.
- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.
- Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng  $90^\circ$ ) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

## B – BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Cho nửa đường tròn ( $O$ ) đường kính  $AB$  và dây  $AC$  căng cung  $AC$  có số đo bằng  $60^\circ$ .

- So sánh các góc của tam giác  $ABC$ .
- Gọi  $M, N$  lần lượt là điểm chính giữa của các cung  $AC$  và  $BC$ . Hai dây  $AN$  và  $BM$  cắt nhau tại  $I$ . Chứng minh rằng tia  $CI$  là tia phân giác của góc  $ACB$ .

**Bài 2.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  ( $\widehat{A} < 90^\circ$ ). Vẽ đường tròn đường kính  $AB$  cắt  $BC$  tại  $D$ , cắt  $AC$  tại  $E$ . Chứng minh rằng:

a. Tam giác  $DBE$  cân.

b.  $\widehat{CBE} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$ .

**Bài 3.** Cho tam giác  $ABC$  ( $AB < AC$ ) nội tiếp trong đường tròn ( $O$ ). Vẽ đường kính  $MN \perp BC$  (điểm  $M$  thuộc cung  $BC$  không chứa  $A$ ). Chứng minh rằng các tia  $AM, AN$  lần lượt là các tia phân giác trong và ngoài tại đỉnh  $A$  của tam giác  $ABC$ .

**Bài 4.** Cho đường tròn ( $O$ ) và hai dây  $MA, MB$  vuông góc với nhau. Gọi  $I, K$  lần lượt là điểm chính giữa của các cung nhỏ  $MA$  và  $MB$ . Gọi  $P$  là giao điểm của  $AK$  và  $BI$ .

- Chứng minh rằng ba điểm  $A, O, B$  thẳng hàng.
- Chứng minh rằng  $P$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $MAB$ .
- Giả sử  $MA = 12$  cm,  $MB = 16$  cm, tính bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác  $MAB$ .

**Bài 5.** Cho đường tròn ( $O$ ) đường kính  $AB$  và một điểm  $C$  di động trên một nửa đường tròn đó. Vẽ đường tròn tâm  $I$  tiếp xúc với đường tròn ( $O$ ) tại  $C$  và tiếp xúc với đường kính  $AB$  tại  $D$ , đường tròn này cắt  $CA$  và  $CB$  lần lượt tại các điểm thứ hai là  $M$  và  $N$ . Chứng minh rằng:



- a. Ba điểm  $M, I, N$  thẳng hàng.
- b.  $ID \perp MN$ .
- c. Đường thẳng  $CD$  đi qua một điểm cố định, từ đó suy ra cách dựng đường tròn ( $I$ ) nói trên.

**Bài 6.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn ( $O$ ), hai đường cao  $BD$  và  $CE$  cắt nhau tại  $H$ . Vẽ đường kính  $AF$ .

- a. Tứ giác  $BFCH$  là hình gì?
- b. Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Chứng minh rằng ba điểm  $H, M, F$  thẳng hàng.
- c. Chứng minh rằng  $OM = \frac{1}{2}AH$ .

**Bài 7.** Cho đường tròn ( $O$ ) đường kính  $AB$ ,  $M$  là điểm chính giữa của một nửa đường tròn,  $C$  là điểm bất kì trên nửa đường tròn kia,  $CM$  cắt  $AB$  tại  $D$ . Vẽ dây  $AE$  vuông góc với  $CM$  tại  $F$ .

- a. Chứng minh rằng tứ giác  $ACEM$  là hình thang cân.
- b. Vẽ  $CH \perp AB$ . Chứng minh rằng tia  $CM$  là tia phân giác của góc  $\widehat{HCO}$ .
- c. Chứng minh rằng  $CD \leq \frac{1}{2}AE$ .

**Bài 8.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn ( $O; R$ ). Biết  $\widehat{A} = a < 90^\circ$ . Tính độ dài  $BC$ .

**Bài 9.** Cho đường tròn ( $O$ ) có hai bán kính  $OA$  và  $OB$  vuông góc. Lấy điểm  $C$  trên đường tròn ( $O$ ) sao cho  $\frac{sđ\widehat{AC}}{sđ\widehat{BC}} = \frac{4}{5}$ . Tính các góc của tam giác  $ABC$ .

**Bài 10.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  và có góc  $A$  bằng  $50^\circ$ . Nửa đường tròn đường kính  $AC$  cắt  $AB$  tại  $D$  và  $BC$  tại  $H$ . Tính số đo các cung  $AD, DH$  và  $HC$ .

**Bài 11.** Cho đường tròn ( $O$ ) có đường kính  $AB$  vuông góc dây cung  $CD$  tại  $E$ . Chứng minh rằng:  $CD^2 = 4AE.BE$ .

# BÀI 4. GÓC TẠO BỞI TIA TIẾP TUYẾN VÀ DÂY CUNG

## A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

### 1. Định lí

Số đo của góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo của cung bị chắn.

### 2. Hệ quả

Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

### 3. Định lí (bổ sung)

Nếu góc  $B\hat{A}x$  (với đỉnh  $A$  nằm trên đường tròn, một cạnh chứa dây cung  $AB$ ), có số đo bằng nửa số đo của cung  $AB$  căng dây đó và cung này nằm bên trong góc đó thì cạnh  $Ax$  là một tia tiếp tuyến của đường tròn.

## B – BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Cho nửa đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$ . Trên tia đối của tia  $AB$  lấy một điểm  $M$ . Vẽ tiếp tuyến  $MC$  với nửa đường tròn. Gọi  $H$  là hình chiếu của  $C$  trên  $AB$ .

- Chứng minh rằng tia  $CA$  là tia phân giác của góc  $MCH$ .
- Giả sử  $MA = a, MC = 2a$ . Tính  $AB$  và  $CH$  theo  $a$ .

**Bài 2.** Cho tam giác  $ABC$  ngoại tiếp đường tròn  $(O)$ . Gọi  $D, E, F$  lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn trên các cạnh  $AB, BC, CA$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là các giao điểm của đường tròn  $(O)$  với các tia  $OA, OB, OC$ . Chứng minh rằng các điểm  $M, N, P$  lần lượt là tâm của đường tròn nội tiếp các tam giác  $ADF, BDE$  và  $CEF$ .

**Bài 3.** Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  cắt nhau tại  $A$  và  $B$ . Một đường thẳng tiếp xúc với đường tròn  $(O)$  tại  $C$  và tiếp xúc với đường tròn  $(O')$  tại  $D$ . Vẽ đường tròn  $(I)$  qua ba điểm  $A, C, D$ , cắt đường thẳng  $AB$  tại một điểm thứ hai là  $E$ . Chứng minh rằng:

- $\widehat{CAD} + \widehat{CBD} = 180^\circ$ .
- Tứ giác  $BCED$  là hình bình hành.

**Bài 4.** Trên một cạnh của góc  $x\hat{M}y$  lấy điểm  $T$ , trên cạnh kia lấy hai điểm  $A, B$  sao cho  $MT^2 = MA \cdot MB$ . Chứng minh rằng  $MT$  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $TAB$ .

**Bài 5.** Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  cắt nhau tại  $A$  và  $B$ . Vẽ dây  $BC$  của đường tròn  $(O)$  tiếp xúc với đường tròn  $(O')$ . Vẽ dây  $BD$  của đường tròn  $(O')$  tiếp xúc với đường tròn  $(O)$ . Chứng minh rằng:

- $AB^2 = AC \cdot AD$ .
- $\frac{BC}{BD} = \sqrt{\frac{AC}{AD}}$ .

**Bài 6.** Cho đường tròn  $(O)$  và một điểm  $M$  ở bên ngoài đường tròn. Tia  $Mx$  quay quanh  $M$ , cắt đường tròn tại  $A$  và  $B$ . Gọi  $I$  là một điểm thuộc tia  $mx$  sao cho  $MI^2 = MA \cdot MB$ . Hỏi điểm di động trên đường nào?

**Bài 7.** Cho đường tròn  $(O)$  và ba điểm  $A, B, C$  trên  $(O)$ . Dây cung  $CB$  kéo dài gặp tiếp tuyến tại  $A$  ở  $M$ . So sánh các góc:  $\widehat{AMC}, \widehat{ABC}, \widehat{ACB}$ .

**Bài 8.** Cho hai đường tròn  $(O, R)$  và  $(O', R')$  ( $R > R'$ ) tiếp xúc ngoài nhau tại  $A$ . Qua  $A$  kẻ hai cát tuyến  $BD$  và  $CE$  ( $B, C \in (O')$ ;  $D, E \in (O)$ ). Chứng minh:  $\widehat{ABC} = \widehat{ADE}$ .

**Bài 9.** Cho đường tròn  $(O, R)$  có hai đường kính  $AB$  và  $CD$  vuông góc. Gọi  $I$  là điểm trên cung  $AC$  sao cho khi vẽ tiếp tuyến qua  $I$  và cắt  $DC$  kéo dài tại  $M$  thì  $IC = CM$ .

a. Tính góc  $AOI$ .

b. Tính độ dài  $OM$ .

# BÀI 5. GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN TRONG ĐƯỜNG TRÒN. GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN

## A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

### 1. Định lí 1

Số đo của góc có đỉnh ở bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn.

### 2. Định lí 2

Số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.

## B – BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp trong đường tròn  $(O)$ . Trên các cung nhỏ  $AB$  và  $AC$  lần lượt lấy các điểm  $I$  và  $K$  sao cho  $\widehat{AI} = \widehat{AK}$ . Dây  $IK$  cắt các cạnh  $AB, AC$  lần lượt tại  $D$  và  $E$ .

- Chứng minh rằng  $\widehat{ADK} = \widehat{ACB}$ .
- Tam giác  $ABC$  phải có thêm điều kiện gì thì tứ giác  $DECB$  là hình thang cân?

**Bài 2.** Cho đường tròn  $(O)$  và một dây  $AB$ . Vẽ đường kính  $CD$  vuông góc với  $AB$  ( $D$  thuộc cung nhỏ  $AB$ ). Trên cung nhỏ  $BC$  lấy một điểm  $N$ . Các đường thẳng  $CN$  và  $DN$  lần lượt cắt đường thẳng  $AB$  tại  $E$  và  $F$ . Tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  tại  $N$  cắt đường thẳng  $AB$  tại  $I$ . Chứng minh rằng:

- Các tam giác  $INE$  và  $INF$  là các tam giác cân.

- $AI = \frac{AE + AF}{2}$ .

**Bài 3.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Các tia phân giác của góc  $B$  và góc  $C$  cắt nhau tại  $I$  và cắt đường tròn  $(O)$  lần lượt tại  $D$  và  $E$ . Dây  $DE$  cắt các cạnh  $AB$  và  $AC$  lần lượt tại  $M$  và  $N$ . Chứng minh rằng:

- Tam giác  $AMN$  là tam giác cân.
- Các tam giác  $EAI$  và  $DAI$  là những tam giác cân.
- Tứ giác  $AMIN$  là hình thoi.

**Bài 4.** Từ một điểm  $M$  ở bên ngoài đường tròn  $(O)$ , ta vẽ hai tiếp tuyến  $MB, MC$ . Vẽ đường kính  $BD$ . Hai đường thẳng  $CD$  và  $MB$  cắt nhau tại  $A$ . Chứng minh rằng  $M$  là trung điểm của  $AB$ .

**Bài 5.** Từ một điểm  $A$  ở bên ngoài đường tròn  $(O)$ , ta vẽ hai cát tuyến  $ABC$  và  $ADE$  ( $B$  nằm giữa  $A$  và  $C$ ;  $D$  nằm giữa  $A$  và  $E$ ). Cho biết  $\widehat{A} = 50^\circ, s\widehat{BD} = 40^\circ$ . Chứng minh  $CD \perp BE$ .

**Bài 6.** Cho 4 điểm  $A, B, C$  và  $D$  theo thứ tự trên đường tròn  $(O)$  sao cho số đo các cung như sau  $s\widehat{AB} = 40^\circ, s\widehat{CD} = 120^\circ$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ .  $M$  là giao điểm của  $DA$  và  $CB$  kéo dài. Tính các góc  $CID$  và  $AMB$ .

**Bài 7.** Cho đường tròn  $(O)$ . Từ một điểm  $M$  ở ngoài  $(O)$ , ta vẽ các cát tuyến  $MAC$  và  $MBD$  sao cho  $\widehat{CMD} = 40^\circ$ . Gọi  $E$  là giao điểm của  $AD$  và  $BC$ . Biết góc  $\widehat{AEB} = 70^\circ$ , tính số đo các cung  $AB$  và  $CD$ .

**Bài 8.** Cho đường tròn  $(O)$  và một điểm  $M$  ở ngoài  $(O)$ . Vẽ tiếp tuyến  $MA$  và cát tuyến  $MBC$  đi qua  $O$  ( $B$  nằm giữa  $M$  và  $C$ ). Đường tròn đường kính  $MB$  cắt  $MA$  tại  $E$ . Chứng minh:  $s\widehat{AnC} = s\widehat{BmA} + s\widehat{BkE}$  với  $\widehat{AnC}, \widehat{BmA}$  và  $\widehat{BkE}$  là các cung trong góc  $AMC$ .

## BÀI 6. CUNG CHỨA GÓC

### A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### 1. Quỹ tích cung chứa góc

Với đoạn thẳng  $AB$  và góc  $\alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ ) cho trước thì quỹ tích các điểm  $M$  thoả mãn  $\widehat{AMB} = \alpha$  là hai cung chứa góc  $\alpha$  dựng trên đoạn  $AB$ . **Chú ý:**

- Hai cung chứa góc  $\alpha$  nói trên là hai cung tròn đối xứng nhau qua  $AB$ .
- Hai điểm  $A, B$  được coi là thuộc quỹ tích.
- **Đặc biệt:** Quỹ tích các điểm  $M$  nhìn đoạn thẳng  $AB$  cho trước dưới một góc vuông là đường tròn đường kính  $AB$ .

#### 2. Cách vẽ cung chứa góc $\alpha$

- Vẽ đường trung trực  $d$  của đoạn thẳng  $AB$ .
- Vẽ tia  $Ax$  tạo với  $AB$  một góc  $\alpha$ .
- Vẽ đường thẳng  $Ay$  vuông góc với  $Ax$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $Ay$  với  $d$ .
- Vẽ cung  $AmB$ , tâm  $O$ , bán kính  $OA$  sao cho cung này nằm ở nửa mặt phẳng bờ  $AB$  không chứa tia  $Ax$ .
- $\widehat{AmB}$  được vẽ như trên là một cung chứa góc  $\alpha$ .

#### 3. Cách giải bài toán quỹ tích

Muốn chứng minh quỹ tích (tập hợp) các điểm  $M$  thoả mãn tính chất  $T$  là một hình  $H$  nào đó, ta phải chứng minh hai phần:

- **Phần thuận:** Mọi điểm có tính chất  $T$  đều thuộc hình  $H$ .
- **Phần đảo:** Mọi điểm thuộc hình  $H$  đều có tính chất  $T$ .
- **Kết luận:** Quỹ tích các điểm  $M$  có tính chất  $T$  là hình  $H$ .

### B – BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Cho nửa đường tròn  $(O; R)$  đường kính  $AB$ . Vẽ dây  $MN = R$  (điểm  $M$  ở trên cung  $\widehat{AN}$ ). Hai dây  $AN$  và  $BM$  cắt nhau tại  $I$ . Hỏi khi dây  $MN$  di động thì điểm  $I$  di động trên đường nào?

**Bài 2.** Cho nửa đường tròn đường kính  $AB$  và một dây  $AC$  quay quanh  $A$ . Trên nửa mặt phẳng bờ  $AC$  không chứa  $B$  ta vẽ hình vuông  $ACDE$ . Hỏi:

- Điểm  $D$  di động trên đường nào?
- Điểm  $E$  di động trên đường nào?

**Bài 3.** Cho hình vuông  $ABCD$ . Trên cạnh  $BC$  lấy điểm  $E$ , trên tia đối của tia  $CD$  lấy điểm  $F$  sao cho  $CE = CF$ . Gọi  $M$  là giao điểm của hai đường thẳng  $DE$  và  $BF$ . Tìm quỹ tích của điểm  $M$  khi  $E$  di động trên cạnh  $BC$ .

**Bài 4.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Vẽ hai nửa đường tròn đường kính  $AB$  và  $AC$  ra phía ngoài tam giác. Qua  $A$  vẽ cát tuyến  $MAN$  ( $M$  thuộc nửa đường tròn đường kính  $AB$ ,  $N$  thuộc nửa đường tròn đường kính  $AC$ ).

- Tứ giác  $BMNC$  là hình gì?
- Tìm quỹ tích trung điểm  $I$  của  $MN$  khi cát tuyến  $MAN$  quay quanh  $A$ .

**Bài 5.** Cho nửa đường tròn đường kính  $AB$ . Gọi  $M$  là điểm chính giữa của cung  $AB$ . Trên cung  $AM$  lấy điểm  $N$ . Trên các tia  $AM, AN$  và  $BN$  lần lượt lấy các điểm  $C, D, E$  sao cho  $MC = MA, ND = NB, NE = NA$ . Chứng minh rằng năm điểm  $A, B, C, D, E$  cùng thuộc một đường tròn.

**Bài 6.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường phân giác  $BF$ . Từ một điểm  $I$  nằm giữa  $B$  và  $F$ , vẽ một đường thẳng song song với  $AC$  cắt  $AB$  và  $BC$  lần lượt tại  $M$  và  $N$ . Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BIN$  cắt đường thẳng  $AI$  tại một điểm thứ hai là  $D$ . Hai đường thẳng  $DN$  và  $BF$  cắt nhau tại  $E$ .

- Chứng minh rằng bốn điểm  $A, B, D, E$  cùng nằm trên một đường tròn.
- Chứng minh rằng năm điểm  $A, B, C, D, E$  cùng nằm trên một đường tròn. Từ đó suy ra  $BE \perp CE$ .

**Bài 7.** Cho đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$ , điểm  $C$  di động trên  $(O)$ . Gọi  $M$  là giao điểm ba đường phân giác trong của tam giác  $ABC$ . Điểm  $M$  di động trên đường nào?

**Bài 8.** Dựng tam giác  $ABC$  biết  $BC = 3$  cm,  $\widehat{A} = 50^\circ$ ,  $AB = 3,5$  cm.

**Bài 9.** Dựng tam giác  $ABC$  biết  $BC = 4$  cm, đường cao  $BD = 3$  cm và đường cao  $CE = 3,5$  cm.

# BÀI 7. TỨ GIÁC NỘI TIẾP

## A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

### 1. Định nghĩa

Một tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn đgl tứ giác nội tiếp đường tròn.

### 2. Định lí

- Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện bằng  $180^\circ$ .
- Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng  $180^\circ$  thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.

### 3. Một số dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp

- Tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn là tứ giác nội tiếp đường tròn.
- Tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng  $180^\circ$  thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.
- Tứ giác  $ABCD$  có hai đỉnh  $C$  và  $D$  sao cho  $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$  thì tứ giác  $ABCD$  nội tiếp được.

**Chú ý:** Trong các tứ giác đã học thì hình chữ nhật, hình vuông, hình thang cân nội tiếp được đường tròn.

## B – BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  nội tiếp đường tròn  $(O)$  và  $\widehat{A} = a$  ( $0^\circ < a < 90^\circ$ ). Gọi  $M$  là một điểm tùy ý trên cung nhỏ  $AC$ . Vẽ tia  $Bx \perp AM$ , cắt tia  $CM$  tại  $D$ .

- Tính số đo góc  $\widehat{AMD}$ .
- Chứng minh rằng  $MD = MB$ .

**Bài 2.** Cho tam giác  $ABC$  không có góc tù. Các đường cao  $AH$  và đường trung tuyến  $AM$  không trùng nhau. Gọi  $N$  là trung điểm của  $AB$ . Cho biết  $\widehat{BAH} = \widehat{CAM}$ .

- Chứng minh tứ giác  $AMHN$  nội tiếp.
- Tính số đo của góc  $\widehat{BAC}$ .

**Bài 3.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Điểm  $E$  di động trên cạnh  $AB$ . Qua  $B$  vẽ một đường thẳng vuông góc với tia  $CE$  tại  $D$  và cắt tia  $CA$  tại  $H$ . Chứng minh rằng:

- Tứ giác  $ADBC$  nội tiếp.
- Góc  $\widehat{ADH}$  có số đo không đổi khi  $E$  di động trên cạnh  $AB$ .
- Khi  $E$  di động trên cạnh  $AB$  thì  $BA \cdot BE + CD \cdot CE$  không đổi.

**Bài 4.** Cho nửa đường tròn đường kính  $AB$  và dây  $AC$ . Từ một điểm  $D$  trên  $AC$ , vẽ  $DE \perp AB$ . Hai đường thẳng  $DE$  và  $BC$  cắt nhau tại  $F$ . Chứng minh rằng:

- Tứ giác  $BCDE$  nội tiếp.
- $\widehat{AFE} = \widehat{ACE}$ .

**Bài 5.** Cho nửa đường tròn đường kính  $AB$ . Lấy hai điểm  $C$  và  $D$  trên nửa đường tròn sao cho  $\widehat{AC} = \widehat{CD} = \widehat{DB}$ . Các tiếp tuyến vẽ từ  $B$  và  $C$  của nửa đường tròn cắt nhau tại  $I$ . Hai tia  $AC$  và  $BD$  cắt nhau tại  $K$ . Chứng minh rằng:

- Các tam giác  $KAB$  và  $IBC$  là những tam giác đều.
- Tứ giác  $KIBC$  nội tiếp.

**Bài 6.** Cho nửa đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$  và tia tiếp tuyến  $Bx$  của nửa đường tròn. Trên tia  $Bx$  lấy hai điểm  $C$  và  $D$  ( $C$  nằm giữa  $B$  và  $D$ ). Các tia  $AC$  và  $BD$  lần lượt cắt đường tròn tại  $E$  và  $F$ . Hai dây  $AE$  và  $BF$  cắt nhau tại  $M$ . Hai tia  $AF$  và  $BE$  cắt nhau tại  $N$ . Chứng minh rằng:

- Tứ giác  $FNEM$  nội tiếp.
- Tứ giác  $CDFE$  nội tiếp.

**Bài 7.** Cho tam giác  $ABC$ . Hai đường cao  $BE$  và  $CF$  cắt nhau tại  $H$ . Gọi  $D$  là điểm đối xứng của  $H$  qua trung điểm  $M$  của  $BC$ .

- Chứng minh rằng tứ giác  $ABDC$  nội tiếp được đường tròn. Xác định tâm  $O$  của đường tròn đó.
- Đường thẳng  $DH$  cắt đường tròn  $(O)$  tại điểm thứ hai là  $I$ . Chứng minh rằng năm điểm  $A, I, F, H, E$  cùng nằm trên một đường tròn.

**Bài 8.** Cho tam giác  $ABC$ . Dựng ra ngoài tam giác đó các tam giác đều  $BCD, ACE$  và  $ABF$ . Chứng minh rằng:

- Ba đường tròn ngoại tiếp ba tam giác đều nói trên cùng đi qua một điểm.
- Ba đường thẳng  $AD, BE, CF$  cùng đi qua một điểm.
- Ba đoạn thẳng  $AD, BE, CF$  bằng nhau.

**Bài 9.** Cho tứ giác  $ABCD$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ , hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  cắt nhau tại  $I$ . Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABI$ . Tiếp tuyến của đường tròn này tại  $I$  cắt  $AD$  và  $BC$  lần lượt tại  $M$  và  $N$ . Chứng minh rằng:

- $MN \parallel CD$ .
- Tứ giác  $ABNM$  nội tiếp.

**Bài 10.** Cho góc nhọn  $xOy$ . Trên tia  $Ox$  lấy hai điểm  $A$  và  $B$  sao cho  $OA = 2$  cm,  $OB = 6$  cm. Trên tia  $Oy$  lấy hai điểm  $C$  và  $D$  sao cho  $OC = 3$  cm,  $OD = 4$  cm. Nối  $BD$  và  $AC$ . Chứng minh tứ giác  $ABCD$  nội tiếp.

**Bài 11.** Cho đường tròn  $(O)$  và một điểm  $A$  trên đường tròn  $(O)$ . Từ một điểm  $M$  trên tiếp tuyến tại  $A$ , vẽ cát tuyến  $MBC$ . Gọi  $I$  là trung điểm  $BC$ . Chứng minh tứ giác  $AMIO$  nội tiếp.



# BÀI 8. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP. ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

## A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

### 1. Định nghĩa

- Đường tròn đi qua tất cả các đỉnh của một đa giác đgl đường tròn ngoại tiếp đa giác và đa giác đgl đa giác nội tiếp đường tròn.
- Đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh của một đa giác đgl đường tròn nội tiếp đa giác và đa giác đgl đa giác ngoại tiếp đường tròn.

### 2. Định lí

Bất kì đa giác đều nào cũng có một và chỉ một đường tròn ngoại tiếp, có một và chỉ một đường tròn nội tiếp.

Tâm của hai đường tròn này trùng nhau và đgl tâm của đa giác đều.

Tâm này là giao điểm hai đường trung trực của hai cạnh hoặc là hai đường phân giác của hai góc.

**Chú ý:**

- Bán kính đường tròn ngoại tiếp đa giác là khoảng cách từ tâm đến đỉnh.
- Bán kính đường tròn nội tiếp đa giác là khoảng cách từ tâm  $O$  đến 1 cạnh.
- Cho đa giác đều cạnh  $a$ . Khi đó:
  - Chu vi của đa giác:  $2p = na$  ( $p$  là nửa chu vi).
  - Mỗi góc ở đỉnh của đa giác có số đo bằng  $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$ .
  - Mỗi góc ở tâm của đa giác có số đo bằng  $\frac{360^\circ}{n}$ .
  - Bán kính đường tròn ngoại tiếp:  $R = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}} \Rightarrow a = 2R \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$ .
  - Bán kính đường tròn nội tiếp:  $r = \frac{a}{2 \tan \frac{180^\circ}{n}} \Rightarrow a = 2r \cdot \tan \frac{180^\circ}{n}$ .
  - Liên hệ giữa bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp:  $R^2 - r^2 = \frac{a^2}{4}$ .
  - Diện tích đa giác đều:  $S = \frac{1}{2}nar$ .

## B – BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Một đường tròn có bán kính  $R = 3$  cm. Tính diện tích hình vuông nội tiếp đường tròn đó.

**Bài 2.** Một đa giác đều nội tiếp đường tròn ( $O; 2$  cm). Biết độ dài mỗi cạnh của nó là  $2\sqrt{3}$  cm. Tính diện tích của đa giác đều đó.

**Bài 3.** Cho lục giác đều  $ABCDEF$ , độ dài mỗi cạnh là  $a$ . Các đường thẳng  $AB$  và  $CD$  cắt nhau tại  $M$ , cắt đường thẳng  $EF$  theo thứ tự tại  $N$  và  $P$ .

- Chứng minh  $\triangle MNP$  là tam giác đều.
- Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\triangle MNP$ .

**Bài 4.** Cho ngũ giác đều  $ABCDE$  cạnh  $a$ . Hai đường chéo  $AC$  và  $AD$  cắt  $BE$  lần lượt tại  $M$  và  $N$ .

- Tính tỉ số giữa các bán kính của đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp ngũ giác đó.
- Chứng minh rằng các tam giác  $AMN$  và  $CMB$  là các tam giác cân.
- Chứng minh rằng  $AC \cdot BM = a^2$ .

**Bài 5.** Cho đường tròn  $(O; R)$ . Từ một điểm  $A$  trên đường tròn  $(O)$  vẽ các cung  $AB, AC$  sao cho  $sđ\widehat{AB} = 30^\circ, sđ\widehat{AC} = 90^\circ$  (điểm  $A$  nằm trên cung  $BC$  nhỏ). Tính các cạnh và diện tích của tam giác  $ABC$ .

# BÀI 9. ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN, CUNG TRÒN

## A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

### 1. Công thức tính độ dài đường tròn (chu vi đường tròn)

Độ dài  $C$  của một đường tròn bán kính  $R$  được tính theo công thức:

$$C = 2\pi R \text{ hoặc } C = \pi d \text{ (} d = 2R\text{)}.$$

### 2. Công thức tính độ dài cung tròn

Trên đường tròn bán kính  $R$ , độ dài  $l$  của một cung  $n^\circ$  được tính theo công thức:

$$l = \frac{\pi R n}{180}.$$

## B – BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Cho  $\pi = 3,14$ . Hãy điền vào các bảng sau (**VẼ HÌNH**)

**Bài 2.** Cho đường tròn  $(O)$  bán kính  $OA$ . Từ trung điểm  $M$  của  $OA$  vẽ dây  $BC \perp OA$ . Biết độ dài đường tròn  $(O)$  là  $4\pi$  (cm). Tính:

- Bán kính đường tròn  $(O)$ .
- Độ dài hai cung  $BC$  của đường tròn.

**Bài 3.** Tam giác  $ABC$  có  $AB = AC = 3$  cm,  $\widehat{A} = 120^\circ$ . Tính độ dài đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .

**Bài 4.** Một tam giác đều và một hình vuông có cùng chu vi là 72 cm. Hỏi độ dài đường tròn ngoại tiếp hình nào lớn hơn? Lớn hơn bao nhiêu?

**Bài 5.** Cho hai đường tròn  $(O; R)$  và  $(O'; R')$  tiếp xúc ngoài với nhau tại  $A$ . Một đường thẳng qua  $A$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $B$ , cắt đường tròn  $(O')$  tại  $C$ . Chứng minh rằng nếu  $R' = \frac{1}{2}R$  thì độ dài của cung  $AC$  bằng nửa độ dài của cung  $AB$  (chỉ xét các cung nhỏ  $AC, AB$ ).

**Bài 6.** Cho đường tròn đường kính  $BC = 2R$ . Trên đường tròn lấy một điểm  $A$  sao cho  $AB = R\sqrt{3}$ . Gọi  $P_1, P_2, P_3$  là chu vi các đường tròn có đường kính lần lượt là  $CA, AB, BC$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{P_1^2}{1} = \frac{P_2^2}{3} = \frac{P_3^2}{4}.$$

**Bài 7.** Cho tứ giác  $ABCD$  ngoại tiếp đường tròn  $(O)$ . Vẽ ra phía ngoài tứ giác này bốn nửa đường tròn có đường kính lần lượt là bốn cạnh của tứ giác. Chứng minh rằng tổng độ dài của hai nửa đường tròn có đường kính là hai cạnh đối diện bằng tổng độ dài hai nửa đường tròn kia.

**Bài 8.** Cho nửa đường tròn  $(O; 10$  cm) có đường kính  $AB$ . Vẽ hai nửa đường tròn đường kính  $OA$  và  $OB$  ở trong nửa đường tròn  $(O; 10$  cm). Tính diện tích của phần nằm giữa ba đường tròn.

**Bài 9.** Cho nửa đường tròn  $(O)$  đường kính  $BC$ . Lấy một điểm  $A$  trên  $(O)$  sao cho  $AB < AC$ . Vẽ hai nửa đường tròn đường kính  $AB$  và  $AC$  ở phía ngoài tam giác  $ABC$ . Chứng minh diện tích tam giác  $ABC$  bằng tổng hai diện tích của hai hình trăng khuyết ở phía ngoài  $(O)$ .

# BÀI 10. DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN, HÌNH QUẠT TRÒN

## A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

### 1. Công thức tính diện tích hình tròn

Diện tích  $S$  của một hình tròn bán kính  $R$  được tính theo công thức:  $S = \pi R^2$ .

### 2. Công thức tính diện tích hình quạt tròn

Diện tích hình quạt tròn bán kính  $R$ , cung  $n^\circ$  được tính theo công thức:

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360} \text{ hay } S = \frac{lR}{2} \text{ (} l \text{ là độ dài cung } n^\circ \text{ của hình quạt tròn).}$$

## B – BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài 1.** Một hình vuông và một hình tròn có cùng chu vi. Hỏi hình nào có diện tích lớn hơn?

**Bài 2.** Chứng minh rằng diện tích hình tròn ngoại tiếp hình vuông bằng hai lần diện tích hình tròn nội tiếp hình vuông đó.

**Bài 3.** Tính diện tích hình vành khăn tạo thành bởi đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh 6 cm.

**Bài 4.** Một tam giác đều cạnh  $a$  nội tiếp trong đường tròn  $(O)$ . Tính diện tích hình viên phân tạo thành bởi một cạnh của tam giác và một cung nhỏ căng cạnh đó.

**Bài 5.** Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH = 2$  cm. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ  $BC$  có chứa  $A$  ta vẽ ba nửa đường tròn có đường kính lần lượt là  $BH$ ,  $CH$  và  $BC$ . Tính diện tích miền giới hạn bởi ba nửa đường tròn đó.

## BÀI 11. ÔN TẬP CHƯƠNG III

**Bài 1.** Cho nửa đường tròn  $(O; R)$  đường kính  $AB$ . Từ  $A$  và  $B$  vẽ các tiếp tuyến  $Ax$  và  $By$  với nửa đường tròn. Một góc vuông quay quanh  $O$ , hai cạnh của góc cắt  $Ax$  và  $By$  lần lượt tại  $C$  và  $D$ . Hai đường thẳng  $OD$  và  $Ax$  cắt nhau tại  $E$ . Chứng minh rằng:

- $AC \cdot BD = R^2$ .
- Tam giác  $CDE$  là tam giác cân.
- $CD$  là tiếp tuyến của nửa đường tròn  $(O)$ .

**Bài 2.** Cho đường tròn  $(O; R)$  đường kính  $AB$ , tia tiếp tuyến  $Ax$ . Trên tia  $Ax$  lấy điểm  $M$  sao cho  $AM = R\sqrt{3}$ . Vẽ tiếp tuyến  $MC$  ( $C$  là tiếp điểm). Đường thẳng vuông góc với  $AB$  tại  $O$  cắt tia  $BC$  tại  $D$ .

- Chứng minh rằng  $BD \parallel OM$ .
- Xác định dạng của các tứ giác  $OBDM$  và  $AODM$ .
- Gọi  $E$  là giao điểm của  $AD$  với  $OM$ ,  $F$  là giao điểm của  $MC$  với  $OD$ . Chứng minh rằng  $EF$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ .

**Bài 3.** Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  cắt nhau tại  $A$  và  $B$ . Vẽ các đường kính  $AOC$  và  $AOO'D$ . Đường thẳng  $AC$  cắt đường tròn  $(O')$  tại  $E$ . Đường thẳng  $AD$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $F$ . Chứng minh rằng:

- Ba điểm  $C, B, D$  thẳng hàng.
- Tứ giác  $CDEF$  nội tiếp.
- $A$  là tâm đường tròn nội tiếp (hoặc bàng tiếp) của tam giác  $BEF$ .

**Bài 4.** Từ một điểm  $A$  ở ngoài đường tròn  $(O)$  vẽ tiếp tuyến  $AT$  và cát tuyến  $ABC$  với đường tròn ( $B$  nằm giữa  $A$  và  $C$ ). Gọi  $H$  là hình chiếu của  $T$  trên  $OA$ . Chứng minh rằng:

- $AT^2 = AB \cdot AC$ .
- $AB \cdot AC = AH \cdot AO$ .
- Tứ giác  $OHBC$  nội tiếp.

**Bài 5.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$  ( $AB < AC$ ). Vẽ dây  $AD \parallel BC$ . Tiếp tuyến tại  $A$  và  $B$  của đường tròn cắt nhau tại  $E$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Chứng minh rằng:

- $\widehat{AIB} = \widehat{AOB}$ .
- Năm điểm  $E, A, I, O, B$  cùng nằm trên một đường tròn.
- $IO \perp IE$ .

**Bài 6.** Cho hình vuông  $ABCD$ . Trên hai cạnh  $CB$  và  $CD$  lần lượt lấy hai điểm di động  $M$  và  $N$  sao cho  $CM = CN$ . Từ  $C$  vẽ đường thẳng vuông góc với  $BN$ , cắt  $BN$  tại  $E$  và  $AD$  tại  $F$ .

- Chứng minh tứ giác  $FMCD$  là hình chữ nhật.
- Chứng minh năm điểm  $A, B, M, E, F$  cùng nằm trên một đường tròn. Xác định tâm  $O$  của đường tròn đó.
- Đường tròn  $(O)$  cắt  $AC$  tại một điểm thứ hai là  $I$ . Chứng minh tam giác  $IBF$  vuông cân.
- Tiếp tuyến tại  $B$  của đường tròn  $(O)$  cắt đường thẳng  $FI$  tại  $K$ . Chứng minh ba điểm  $K, C, D$  thẳng hàng.

**Bài 7.** Cho đường tròn  $(O)$ . Vẽ hai dây  $AC$  và  $BD$  bằng nhau và vuông góc với nhau tại  $I$  (điểm  $B$  nằm trên cung nhỏ  $AC$ ). Chứng minh rằng:

- Tứ giác  $ABCD$  là hình thang cân.
- Tổng diện tích hai hình quạt tròn  $AOB$  và  $COD$  bằng tổng diện tích hai hình quạt tròn  $AOD$  và  $BOC$  (các hình quạt tròn ứng với các cung nhỏ).

**Bài 8.** Cho nửa đường tròn đường kính  $BC = 10$  cm và dây  $BA = 8$  cm. Vẽ ra phía ngoài của tam giác  $ABC$  các nửa đường tròn đường kính  $AB$  và  $AC$ .

- Tính diện tích tam giác  $ABC$ .
- Tính tổng diện tích hai hình viên phân.
- Tính tổng diện tích hai hình trăng khuyết.

**Bài 9.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Biết  $BC = 2$  cm,  $\hat{A} = 45^\circ$ .

- Tính diện tích hình tròn  $(O)$ .
- Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây  $BC$  và cung nhỏ  $BC$ .
- Xác định vị trí của điểm  $A$  để diện tích tam giác  $ABC$  là lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó.

**Bài 10.** Cho tam giác  $ABC$  nhọn. Đường tròn đường kính  $BC$  cắt  $AB$  ở  $N$  và cắt  $AC$  ở  $M$ . Gọi  $H$  là giao điểm của  $BM$  và  $CN$ .

- Tính số đo các góc  $BMC$  và  $BNC$ .
- Chứng minh  $AH$  vuông góc  $BC$ .
- Chứng minh tiếp tuyến tại  $N$  đi qua trung điểm  $AH$ .

**Bài 11.** Cho đường tròn tâm  $O$ , đường kính  $AB = 2R$  và điểm  $M$  trên đường tròn sao cho góc  $\widehat{MAB} = 90^\circ$ . Kẻ dây  $MN$  vuông góc với  $AB$  tại  $H$ .

- Chứng minh  $AM$  và  $AN$  là các tiếp tuyến của đường tròn  $(B; BM)$ .
- Chứng minh  $MN^2 = 4AH \cdot HB$ .
- Chứng minh tam giác  $BMN$  là tam giác đều và điểm  $O$  là trọng tâm của nó.
- Tia  $MO$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $E$ , tia  $MB$  cắt  $(B)$  tại  $F$ . Chứng minh ba điểm  $N, E, F$  thẳng hàng.

**Bài 12.** Cho đường tròn  $(O; R)$  và điểm  $A$  cách  $O$  một khoảng bằng  $2R$ , kẻ tiếp tuyến  $AB$  tới đường tròn ( $B$  là tiếp điểm).

- Tính số đo các góc của tam giác  $OAB$ .
- Gọi  $C$  là điểm đối xứng với  $B$  qua  $OA$ . Chứng minh điểm  $C$  nằm trên đường tròn  $O$  và  $AC$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ .
- $AO$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $G$ . Chứng minh  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .

**Bài 13.** Từ một điểm  $A$  ở ngoài đường tròn  $(O; R)$ , kẻ hai tiếp tuyến  $AB, AC$  (với  $B$  và  $C$  là hai tiếp điểm). Gọi  $H$  là giao điểm của  $OA$  và  $BC$ .

- Chứng minh  $OA \perp BC$  và tính tích  $OH \cdot OA$  theo  $R$ .

- b. Kẻ đường kính  $BD$  của đường tròn  $(O)$ . Chứng minh  $CD \parallel OA$ .
- c. Gọi  $E$  là hình chiếu của  $C$  trên  $BD$ ,  $K$  là giao điểm của  $AD$  và  $CE$ . Chứng minh  $K$  là trung điểm  $CE$ .

**Bài 14.** Từ một điểm  $A$  ở ngoài đường tròn  $(O; R)$ , kẻ hai tiếp tuyến  $AB, AC$  (với  $B$  và  $C$  là các tiếp điểm). Kẻ  $BE \perp AC$  và  $CF \perp AB$  ( $E \in AC, F \in AB$ ),  $BE$  và  $CF$  cắt nhau tại  $H$ .

- a. Chứng minh tứ giác  $BOCH$  là hình thoi.
- b. Chứng minh ba điểm  $A, H, O$  thẳng hàng.
- c. Xác định vị trí điểm  $A$  để  $H$  nằm trên đường tròn  $(O)$

**Bài 15.** Cho đường tròn  $(O; 3 \text{ cm})$  và một điểm  $A$  có  $OA = 6 \text{ cm}$ . Kẻ các tiếp tuyến  $AB$  và  $AC$  với đường tròn ( $B, C$  là các tiếp điểm). Gọi  $H$  là giao điểm của  $OA$  và  $BC$ .

- a. Tính độ dài  $OH$ .
- b. Qua điểm  $M$  bất kì thuộc cung nhỏ  $BC$ , kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt  $AB$  và  $AC$  theo thứ tự tại  $E$  và  $F$ . Tính chu vi tam giác  $ADE$ .
- c. Tính số đo góc  $DOE$ .

**Bài 16.** Cho nửa đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$ . Gọi  $Ax, By$  là các tia vuông góc với  $AB$  ( $Ax, By$  và nửa đường tròn thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ  $AB$ ). Qua điểm  $M$  bất kì thuộc tia  $Ax$ , kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt  $By$  ở  $N$ .

- a. Tính số đo góc  $MON$ .
- b. Chứng minh  $MN = AM + BN$ .
- c. Tính tích  $AM \cdot BN$  theo  $R$ .