Mục lục

Chương 1

PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1 PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1.1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1.1.1 Khái niệm

Phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là hệ thức dạng

$$ax + by = c \quad (1)$$

trong đó a, b, c là các số đã biết ($a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$).

Ví dụ 1. Các phương trình $2x - y = 1$, $3x + 4y = 0$, $0x + 2y = 4$, $x + 0y = 5$ là những phương trình bậc nhất hai ẩn.

Trong phương trình (1), nếu giá trị của vế trái tại $x = x_0$ và $y = y_0$ bằng vế phải thì cặp số $(x_0; y_0)$ được gọi là **một nghiệm của phương trình (1)**.

Ví dụ 2. $(3; 5)$ là một nghiệm của phương trình $2x - y = 1$ (vì $2 \cdot 3 - 5 = 1$).

Chú ý 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, mỗi nghiệm của phương trình (1) được biểu diễn bởi một điểm. Nghiệm $(x_0; y_0)$ được biểu diễn bởi điểm có tọa độ $(x_0; y_0)$.

1.1.2 Tập nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn

Phương trình bậc nhất hai ẩn

$$ax + by = c \quad (1)$$

luôn có vô số nghiệm.
Tập nghiệm của nó được biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ Oxy bởi đường thẳng $ax + by = c$.
Kí hiệu $(d) : ax + by = c$.

- Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$ thì đường thẳng (d) chính là đồ thị của hàm số bậc nhất $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.
  Khi đó, $\left(x; -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}\right)$ với $x \in \mathbb{R}$ hoặc $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \end{cases}$ gọi là nghiệm tổng quát của phương trình (1).

- Nếu $a = 0$ và $b \neq 0$ thì phương trình trở thành $by = c$ hoặc $y = \frac{c}{b}$, và đường thẳng (d) song song hoặc trùng với trục hoành.
  Khi đó, $\left(x; \frac{c}{b}\right)$ với $x \in \mathbb{R}$ hoặc $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{c}{b} \end{cases}$ gọi là nghiệm tổng quát của phương trình (1).

- Nếu $a \neq 0$ và $b = 0$ thì phương trình trở thành $ax = c$ hoặc $x = \frac{c}{a}$, và đường thẳng (d) song song hoặc trùng với trục tung.
  Khi đó, $\left(\frac{c}{a}; y\right)$ với $y \in \mathbb{R}$ hoặc $\begin{cases} x = \frac{c}{a} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$ gọi là nghiệm tổng quát của phương trình (1).

Ví dụ 3. Hãy viết công thức nghiệm tổng quát và biểu diễn tập nghiệm trên mặt phẳng tọa độ Oxy của các phương trình sau

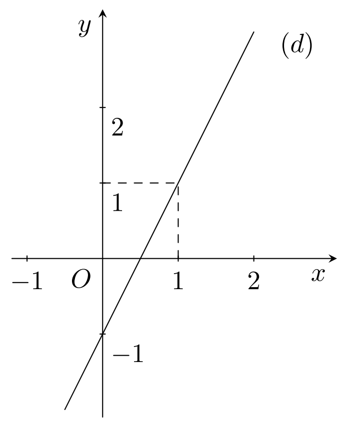
a) $2x - y = 1$

b) $-5x - 0y + 3 = 0$.

Lời giải.

a)

$2x - y = 1 \Leftrightarrow y = 2x - 1$.
Phương trình có nghiệm tổng quát là $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2x - 1 \end{cases}$.
Tập nghiệm của phương trình được biểu diễn bởi đường thẳng $(d) : y = 2x - 1$.
Cho $x = 0 \Rightarrow y = -1$; $x = 1 \Rightarrow y = 1$. Đường thẳng $y = 2x - 1$ đi qua hai điểm $(0; -1)$ và $(1; 1)$.



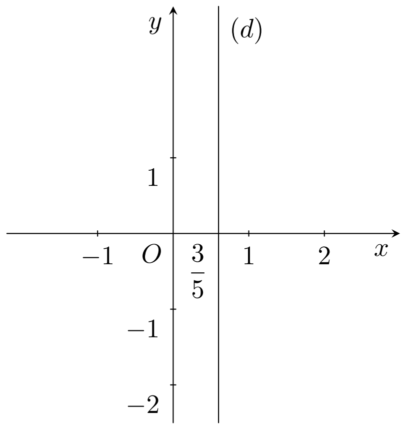
b)

$-5x - 0y + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{5}$.

Phương trình có nghiệm tổng quát là $\begin{cases} x = \dfrac{3}{5} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$.

Tập nghiệm của phương trình được biểu diễn bởi đường thẳng $(d) : x = \dfrac{3}{5}$.

Đường thẳng $x = \dfrac{3}{5}$ đi qua điểm $\left(\dfrac{3}{5}; 0\right)$ và song song với trục tung.



□

1.2 BÀI TẬP

Bài 1. Trong các cặp số $(-2; 1)$, $(0; 2)$, $(-1; 0)$ và $(4; -3)$, cặp số nào là nghiệm của phương trình?

a) $5x + 4y = 8$

b) $3x + 5y = -3$.

Lời giải.

a)
- Cặp $(-2; 1)$ không là nghiệm của phương trình $5x + 4y = 8$ vì $5 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 \neq 8$.
- Cặp $(0; 2)$ là nghiệm của phương trình $5x + 4y = 8$ vì $5 \cdot 0 + 4 \cdot 2 = 8$.
- Cặp $(-1; 0)$ không là nghiệm của phương trình $5x + 4y = 8$ vì $5 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 \neq 8$.
- Cặp $(4; -3)$ là nghiệm của phương trình $5x + 4y = 8$ vì $5 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) = 8$.

b)
- Cặp $(-2; 1)$ không là nghiệm của phương trình $3x + 5y = -3$ vì $3 \cdot (-2) + 5 \cdot 1 \neq -3$.
- Cặp $(0; 2)$ không là nghiệm của phương trình $3x + 5y = -3$ vì $3 \cdot 0 + 5 \cdot 2 \neq -3$.
- Cặp $(-1; 0)$ là nghiệm của phương trình $3x + 5y = -3$ vì $3 \cdot (-1) + 5 \cdot 0 = -3$.
- Cặp $(4; -3)$ là nghiệm của phương trình $3x + 5y = -3$ vì $3 \cdot 4 + 5 \cdot (-3) = -3$.

□

Bài 2. Viết công thức nghiệm tổng quát của các phương trình sau và biểu diễn hình học của tập nghiệm đó.

a) $3x - y = \dfrac{1}{2}$

b) $2y - x = 3$

c) $\sqrt{2}x = -2$

d) $-\dfrac{3}{4}y = -\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

a)

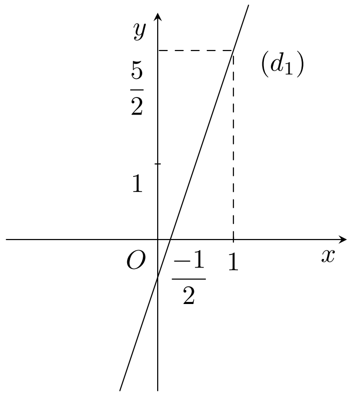
$3x - y = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow y = 3x - \dfrac{1}{2}$.

Phương trình có nghiệm tổng quát là $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 3x - \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Tập nghiệm của phương trình được biểu diễn bởi đường thẳng $(d_1): y = 3x - \dfrac{1}{2}$.

Cho $x = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2}$; $x = 1 \Rightarrow y = \dfrac{5}{2}$.

Đường thẳng $y = 3x - \dfrac{1}{2}$ đi qua hai điểm $\left(0; -\dfrac{1}{2}\right)$ và $\left(1; \dfrac{5}{2}\right)$.



b)

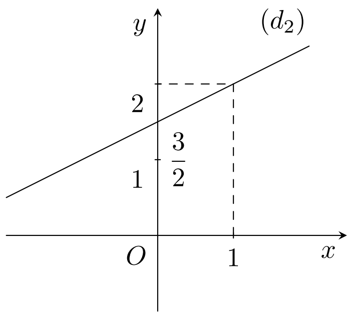
$2y - x = 3 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$.

Phương trình có nghiệm tổng quát là $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2} \end{cases}$.

Tập nghiệm của phương trình được biểu diễn bởi đường thẳng $(d_2): y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$.

Cho $x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{3}{2}$; $x = 1 \Rightarrow y = 2$.

Đường thẳng $y = 2x - 1$ đi qua hai điểm $\left(0; \dfrac{3}{2}\right)$ và $(1; 2)$.



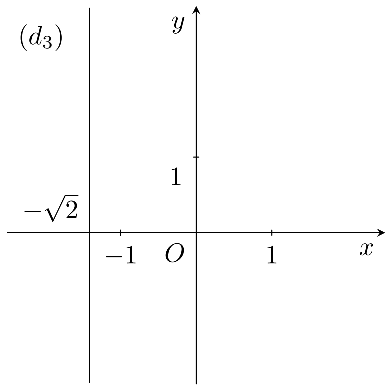
c)

$\sqrt{2}x = -2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$.

Phương trình có nghiệm tổng quát là $\begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$.

Tập nghiệm của phương trình được biểu diễn bởi đường thẳng $(d_3): x = -\sqrt{2}$.

Đường thẳng $x = -\sqrt{2}$ đi qua điểm $\left(-\sqrt{2}; 0\right)$ và song song với trục tung.



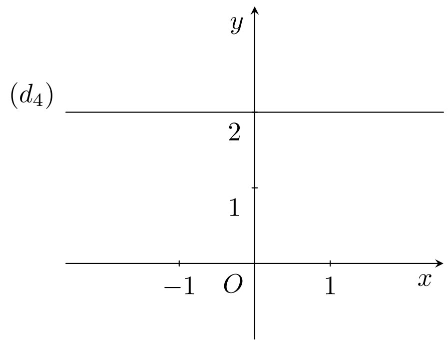
d)

$-\dfrac{3}{4}y = -\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow y = 2.$

Phương trình có nghiệm tổng quát là $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2 \end{cases}.$

Tập nghiệm của phương trình được biểu diễn bởi đường thẳng $(d_4) : y = 2$.

Đường thẳng $y = 2$ đi qua điểm $(0; 2)$ và song song với trục hoành.



□

Bài 3. Xác định hệ số góc và tung độ gốc của đường thẳng biểu diễn tập ngiệm của các phương trình bậc nhất sau

a) $3x + 3y = -6$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}x - \dfrac{1}{2}y = -2$

c) $\sqrt{3} = 2x - 3y$.

Lời giải.

a)

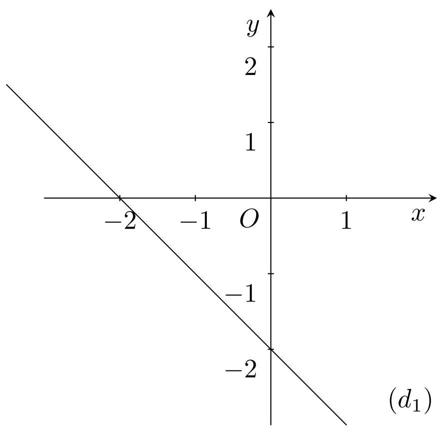
$3x + 3y = -6 \Leftrightarrow y = -x - 2.$

Tập nghiệm của phương trình được biểu diễn bởi đường thẳng $(d_1) : y = -x - 2$.

Đường thẳng $y = -x - 2$ có hệ số góc là -1, tung độ gốc -2.

Cho $x = 0 \Rightarrow y = -2$; $y = 0 \Rightarrow x = -2$.

Đường thẳng (d_1) đi qua điểm $(0; -2)$ và $(-2; 0)$.



b)

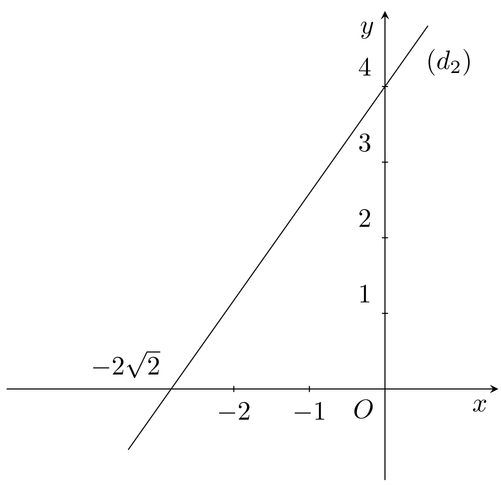
$\dfrac{1}{\sqrt{2}}x - \dfrac{1}{2}y = -2 \Leftrightarrow y = \sqrt{2}x + 4.$

Tập nghiệm của phương trình được biểu diễn bởi đường thẳng $(d_2) : y = \sqrt{2}x + 4$.

Đường thẳng $y = \sqrt{2}x + 4$ có hệ số góc là $\sqrt{2}$, tung độ gốc 4.

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 4$; $y = 0 \Rightarrow x = -2\sqrt{2}$.

Đường thẳng (d_2) đi qua điểm $(0; 4)$ và $\left(-2\sqrt{2}; 0\right)$.



c)

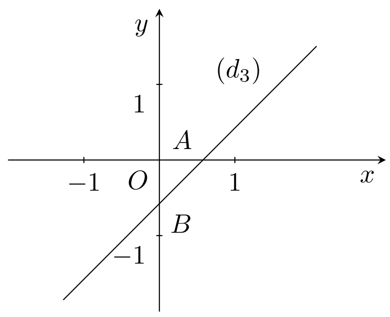
$\sqrt{3} = 2x - 3y \Leftrightarrow y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Tập nghiệm của phương trình được biểu diễn bởi đường thẳng $(d_3) : y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Đường thẳng $y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ có hệ số góc là $\dfrac{2}{3}$, tung độ gốc $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Cho $x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{-\sqrt{3}}{3}$; $y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Đường thẳng (d_3) đi qua điểm $B\left(0; \dfrac{-\sqrt{3}}{3}\right)$ và $A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$.



□

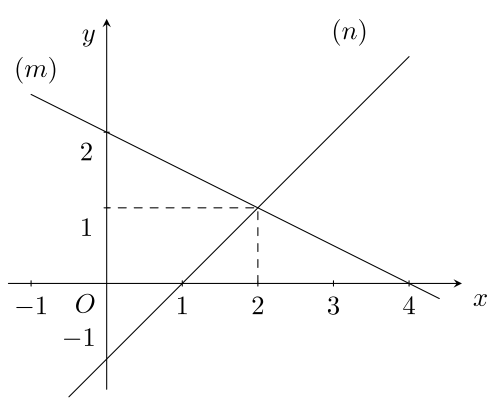
Bài 4. Cho hai phương trình $x + 2y = 4$ và $x - y = 1$. Vẽ hai đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của hai phương trình đó trên cùng một mặt phẳng tọa độ. Xác định tọa độ giao điểm của hai đường thẳng đó bằng đồ thị và cho biết nó là nghiệm của phương trình nào?

Lời giải.

- $x + 2y = 4 \Leftrightarrow y = \dfrac{-1}{2}x + 2$.
  Tập nghiệm của phương trình $x + 2y = 4$ là đường thẳng $(m) : y = \dfrac{-1}{2}x + 2$.
  Cho $x = 0 \Rightarrow y = 2$; $y = 0 \Rightarrow x = 4$.
  Đường thẳng (m) đi qua hai điểm $(0; 2)$ và $(4; 0)$.

- $x - y = 1 \Leftrightarrow y = x - 1$.
  Tập nghiệm của phương trình $x - y = 1$ là đường thẳng $(n) : y = x - 1$.
  Cho $x = 0 \Rightarrow y = -1$; $y = 0 \Rightarrow x = 1$.
  Đường thẳng (n) đi qua hai điểm $(0; -1)$ và $(1; 0)$.

-
  Hai đường thẳng (m) và (n) cắt nhau tại điểm $(2; 1)$. Tọa độ $(2; 1)$ là nghiệm của các phương trình $x + 2y = 4$ và $x - y = 1$.



□

Bài 5. Định a để các cặp số sau là nghiệm của phương trình $3x - y = -5$

a) $(a; -2a)$

b) $\left(-\dfrac{1}{a}; \dfrac{1}{a}\right)$

c) $\left(a\sqrt{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

a) Cặp $(a; -2a)$ là nghiệm của phương trình $3x - y = -5 \Rightarrow 3a + 2a = -5 \Rightarrow a = -1$.
Vậy với $a = -1$ thì cặp số trên là nghiệm của phương trình $3x - y = -5$.

b) Cặp $\left(-\dfrac{1}{a}; \dfrac{1}{a}\right)$ là nghiệm của phương trình $3x - y = -5$
$\Rightarrow 3 \cdot \left(-\dfrac{1}{a}\right) - \dfrac{1}{a} = -5 \Rightarrow \dfrac{-4}{a} = -5 \Rightarrow a = \dfrac{5}{4}$.
Vậy với $a = \dfrac{5}{4}$ thì cặp số trên là nghiệm của phương trình $3x - y = -5$.

c) Cặp $\left(a\sqrt{2}; \dfrac{1}{2}\right)$ là nghiệm của phương trình $3x - y = -5$
$\Rightarrow 3 \cdot a\sqrt{2} - \dfrac{1}{2} = -5 \Rightarrow 3 \cdot a\sqrt{2} = \dfrac{-9}{2} \Rightarrow a = \dfrac{-3\sqrt{2}}{4}$.
Vậy với $a = \dfrac{-3\sqrt{2}}{4}$ thì cặp số trên là nghiệm của phương trình $3x - y = -5$.

□

Bài 6. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau

a) $x + 3y = 2$

b) $4x - 5y = 24$

c) $5x + 7y = 9$.

Lời giải.

a) $x + 3y = 2 \Leftrightarrow y = \dfrac{-x + 2}{3}$.
Để y nguyên thì $-x + 2 \,\vdots\, 3 \Rightarrow -x + 2 = 3m$ $(m \in \mathbb{Z})$ hay $x = 2 - 3m$. Khi đó $y = \dfrac{3m}{3} = m$.
Vậy phương trình có nghiệm nguyên là $\begin{cases} x = 2 - 3m \\ y = m \end{cases}$ với m là số nguyên.

b) $4x - 5y = 24 \Leftrightarrow y = \dfrac{4x - 24}{5}$.
Để y nguyên thì $4x - 24 \,\vdots\, 5 \Rightarrow x - 6 \,\vdots\, 5$ (do 4, 5 là các số nguyên tố cùng nhau)
$\Rightarrow x - 6 = 5k$ $(k \in \mathbb{Z})$ hay $x = 5k + 6$. Khi đó $y = \dfrac{4 \cdot 5k}{5} = 4k$.
Vậy phương trình có nghiệm nguyên là $\begin{cases} x = 5k + 6 \\ y = 4k \end{cases}$ với k là số nguyên.

c) $5x + 7y = 9 \Leftrightarrow y = \dfrac{9-5x}{7} = 2 - \dfrac{5x+5}{7}$.

Để y nguyên thì $5x + 5 \,\vdots\, 7 \Rightarrow x + 1 \,\vdots\, 7$ (do 7, 5 là các số nguyên tố cùng nhau)

$\Rightarrow x + 1 = 7t$ $(t \in \mathbb{Z})$ hay $x = 7t - 1$. Khi đó $y = 2 - \dfrac{5 \cdot 7t}{7} = 2 - 5t$.

Vậy phương trình có nghiệm nguyên là $\begin{cases} x = 7t - 1 \\ y = 2 - 5t \end{cases}$ với t là số nguyên.

□

2 HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

2.1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

2.1.1 Khái niệm

Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng

$$(I) \quad \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c'. \end{cases}$$

- Nếu hai phương trình trong (I) có nghiệm chung $(x_0; y_0)$ thì $(x_0; y_0)$ được gọi là một nghiệm của hệ (I).
- Nếu hai phương trình đã cho không có nghiệm chung thì ta nói hệ (I) vô nghiệm.
- Giải hệ phương trình là tìm tất cả các nghiệm (tìm tập nghiệm) của nó.

2.1.2 Hệ phương trình tương đương

Hai hệ phương trình được gọi là tương đương với nhau nếu chúng có cùng tập nghiệm.

Ta dùng kí hiệu "$\Leftrightarrow$" để chỉ sự tương đương của hai hệ phương trình, chẳng hạn ta viết

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x = 2y - 1. \end{cases}$$

2.1.3 Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế

Quy tắc thế dùng để biến đổi một hệ phương trình thành hệ phương trình tương đương.

Quy tắc thế gồm hai bước sau

- Bước 1. Dùng quy tắc thế biến đổi hệ phương trình đã cho để được hệ phương trình mới, trong đó có một phương trình một ẩn.
- Bước 2. Giải phương trình một ẩn vừa có, rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ -2x + 5y = 1. \end{cases}$

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ -2x + 5y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + 2 \\ -2(3y+2) + 5y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -13 \\ y = -5. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(-13; -5)$. □

2.1.4 Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

Quy tắc cộng đại số dùng để biến đổi một hệ phương trình thành hệ phương trình tương đương.

Quy tắc cộng đại số gồm ba bước sau

- Bước 1. Nhân hai vế của mỗi phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ bằng nhau hoặc đối nhau.
- Bước 2. Áp dụng quy tắc cộng đại số để được hệ phương trình mới, trong đó có một phương trình mà hệ số của một trong hai ẩn bằng 0 (tức là phương trình một ẩn).
- Bước 3. Giải phương trình một ẩn vừa thu được, rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.

Ví dụ 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x + 3y = 3. \end{cases}$

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 4y = 14 \\ 6x + 9y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 4y = 14 \\ 5y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 4 \cdot (-1) = 14 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(3; -1)$. □

2.2 BÀI TẬP

Bài 7. Giải hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} 0{,}3x + 1{,}3y = -1 \\ 1{,}8x - 3{,}2y = 4. \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 1 \\ 5\sqrt{2}x - 4\sqrt{3}y = 8. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + (\sqrt{3} - 1)y = 1 \\ (\sqrt{3} + 1)x - 3y = 5. \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{3x}{4} + \dfrac{7y}{3}y = 41 \\ \dfrac{5x}{2} - \dfrac{3y}{5}y = 11. \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+y=\dfrac{4x-3}{5} \\ x+3y=\dfrac{15-9y}{14}. \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dfrac{2x-5y-1}{11}+\dfrac{x-2y}{3}=16 \\ \dfrac{7x+y}{5}+\dfrac{2x-2}{3}=31. \end{cases}$

g) $\begin{cases} (x-2)(y+3)=xy \\ (x+2)^2-(y-4)^2=(x-y)(x+y). \end{cases}$

h) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{y+3}{y+1} \\ 3x+2y+2=0. \end{cases}$

Lời giải.

a)

$$\begin{cases} 0{,}3x+1{,}3y=-1 \\ 1{,}8x-3{,}2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1{,}8x+7{,}8y=-6 \\ 1{,}8x-3{,}2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11y=-10 \\ 1{,}8x-3{,}2y=4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{10}{11} \\ 1{,}8x-3{,}2\cdot\left(-\dfrac{10}{11}\right)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{20}{33} \\ y=-\dfrac{10}{11}. \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\left(\dfrac{20}{33};-\dfrac{10}{11}\right)$.

b) $\begin{cases} \sqrt{2}x-\sqrt{3}y=1 \\ 5\sqrt{2}x-4\sqrt{3}y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\sqrt{2}x-5\sqrt{3}y=5 \\ 5\sqrt{2}x-4\sqrt{3}y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\sqrt{2}x-5\sqrt{3}y=5 \\ \sqrt{3}y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\sqrt{2} \\ y=\sqrt{3}. \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\left(2\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$.

c)

$$\begin{cases} 4x+(\sqrt{3}-1)y=1 \\ (\sqrt{3}+1)x-3y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(\sqrt{3}+1)x+2y=\sqrt{3}+1 \\ 4(\sqrt{3}+1)x-12y=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(\sqrt{3}+1)x+2y=\sqrt{3}+1 \\ 14y=\sqrt{3}-19 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(\sqrt{3}+1)x+2\left(\dfrac{\sqrt{3}-19}{14}\right)=\sqrt{3}+1 \\ y=\dfrac{\sqrt{3}-19}{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-2+5\sqrt{3}}{14} \\ y=\dfrac{\sqrt{3}-19}{14}. \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\left(\dfrac{-2+5\sqrt{3}}{14};\dfrac{\sqrt{3}-19}{14}\right)$.

d)

$$\begin{cases} \dfrac{3x}{4}+\dfrac{7y}{3}y=41 \\ \dfrac{5x}{2}-\dfrac{3y}{5}y=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x+28y=492 \\ 25x-6y=110 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 225x+700y=12300 \\ 225x-54y=990 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 225x+700y=12300 \\ 754y=11310 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 225x + 700 \cdot 15 = 12300 \\ y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 15. \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(8; 15)$.

e)

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{4x-3}{5} \\ x + 3y = \dfrac{15-9y}{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5y = -3 \\ 14x + 51y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x + 70y = -42 \\ 14x + 51y = 15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 14x + 70y = -42 \\ 19y = -57 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x + 70 \cdot (-3) = -42 \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = -3. \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(12; -3)$.

f)

$$\begin{cases} \dfrac{2x-5y-1}{11} + \dfrac{x-2y}{3} = 16 \\ \dfrac{7x+y}{5} + \dfrac{2x-2}{3} = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17x - 37y = 531 \\ 31x + 3y = 475 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 51x - 111y = 1593 \\ 1147x + 111y = 17575 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1198x = 19168 \\ 1147x + 111y = 17575 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ 1147 \cdot 16 + 111y = 17575 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = -7. \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(16; -7)$.

g)

$$\begin{cases} (x-2)(y+3) = xy \\ (x+2)^2 - (y-4)^2 = (x-y)(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 4x + 8y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 8y = 24 \\ 4x + 8y = 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 8y = 24 \\ 4x + 8y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x = 36 \\ 4x + 8y = 12 \end{cases} \begin{cases} x = \dfrac{9}{4} \\ 4 \cdot \dfrac{9}{4} + 8y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{9}{4} \\ y = \dfrac{3}{8}. \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\left(\dfrac{9}{4}; \dfrac{3}{8}\right)$.

h) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{y+3}{y+1} \\ 3x + 2y + 2 = 0. \end{cases}$

Điều kiện $x \neq 1$, $y \neq -1$.

Hệ trở thành

$$\begin{cases} (x+1)(y+1) = (y+3)(x-1) \\ 3x + 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y = -4 \\ 3x + 2y = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 2 \\ 3x + 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{5} \\ 3 \cdot \dfrac{2}{5} + 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{5} \\ y = -\dfrac{8}{5}. \end{cases}$$

So sánh điều kiện, hệ có nghiệm duy nhất $\left(\dfrac{2}{5}; -\dfrac{8}{5}\right)$.

□

Bài 8. Giải hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} \dfrac{2}{x-5} + \dfrac{3}{y+2} = -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{-1}{x-5} + \dfrac{6}{y+2} = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{4}{x+y-1} - \dfrac{5}{2x-y+3} = \dfrac{5}{2} \\ \dfrac{3}{x+y-1} + \dfrac{1}{2x-y+3} = \dfrac{7}{5}. \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{4}{\sqrt{x}} + \dfrac{3}{\sqrt{y}} = \dfrac{13}{36} \\ \dfrac{6}{\sqrt{x}} + \dfrac{10}{\sqrt{y}} = 1. \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{10}{\sqrt{12x-3}} + \dfrac{5}{\sqrt{4y+1}} = 1 \\ \dfrac{7}{\sqrt{12x-3}} + \dfrac{8}{\sqrt{4y+1}} = 1. \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = -1 \\ 3x^2 + 2y^2 = 18. \end{cases}$

f) $\begin{cases} (x+2)^2 + (y-1)^2 = 2 \\ 2(x+2)^2 - 3(y-1)^2 = -1. \end{cases}$

Lời giải.

a) $\begin{cases} \dfrac{2}{x-5} + \dfrac{3}{y+2} = -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{-1}{x-5} + \dfrac{6}{y+2} = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Điều kiện $x \neq 5$, $y \neq -2$.

Đặt $a = \dfrac{1}{x-5}$, $b = \dfrac{1}{y+2}$, hệ trở thành

$$\begin{cases} 2a + 3b = -\dfrac{1}{2} \\ -a + 6b = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b = -\dfrac{1}{2} \\ -2a + 12b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b = -\dfrac{1}{2} \\ 15b = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{3}{10} \\ b = \dfrac{1}{30}. \end{cases}$$

Khi đó $\begin{cases} \dfrac{1}{x-5} = -\dfrac{3}{10} \\ \dfrac{1}{y+2} = \dfrac{1}{30} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 = -\dfrac{10}{3} \\ y + 2 = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{3} \\ y = 28. \end{cases}$

So sánh điều kiện, hệ có nghiệm duy nhất $\left(\dfrac{5}{3}; 28\right)$.

b) $\begin{cases} \dfrac{4}{x+y-1} - \dfrac{5}{2x-y+3} = \dfrac{5}{2} \\ \dfrac{3}{x+y-1} + \dfrac{1}{2x-y+3} = \dfrac{7}{5}. \end{cases}$

Điều kiện $x+y-1 \neq 0$, $2x-y+3 \neq 0$.

Đặt $a = \dfrac{1}{x+y-1}$, $b = \dfrac{1}{2x-y+3}$, hệ trở thành

$$\begin{cases} 4a-5b = \dfrac{5}{2} \\ 3a+b = \dfrac{7}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a-5b = \dfrac{5}{2} \\ 15a+5b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 19a = \dfrac{19}{2} \\ 4a-5b = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{1}{10}. \end{cases}$$

Khi đó $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y-1} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2x-y+3} = -\dfrac{1}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-1 = 2 \\ 2x-y+3 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 3 \\ 2x-y = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{10}{3} \\ y = \dfrac{19}{3}. \end{cases}$

So sánh điều kiện, hệ có nghiệm duy nhất $\left(-\dfrac{10}{3}; \dfrac{19}{3}\right)$.

c) $\begin{cases} \dfrac{4}{\sqrt{x}} + \dfrac{3}{\sqrt{y}} = \dfrac{13}{36} \\ \dfrac{6}{\sqrt{x}} + \dfrac{10}{\sqrt{y}} = 1. \end{cases}$

Điều kiện $x > 0$, $y > 0$.

Đặt $a = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $b = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$, với $a > 0$, $b > 0$.

Hệ trở thành

$$\begin{cases} 4a+3b = \dfrac{13}{36} \\ 6a+10b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12a+9b = \dfrac{13}{12} \\ 12a+20b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12a+20b = 2 \\ 11b = \dfrac{11}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{36} \\ b = \dfrac{1}{12}. \end{cases}$$

Khi đó $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{36} \\ \dfrac{1}{\sqrt{y}} = \dfrac{1}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 36 \\ \sqrt{y} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1296 \\ y = 144. \end{cases}$

So sánh điều kiện, hệ có nghiệm duy nhất $(1296; 144)$.

d) $\begin{cases} \dfrac{10}{\sqrt{12x-3}} + \dfrac{5}{\sqrt{4y+1}} = 1 \\ \dfrac{7}{\sqrt{12x-3}} + \dfrac{8}{\sqrt{4y+1}} = 1. \end{cases}$

Điều kiện $x > \dfrac{1}{4}$, $y > -\dfrac{1}{4}$.

Đặt $a = \dfrac{1}{\sqrt{12x-3}}$, $b = \dfrac{1}{\sqrt{4y+1}}$, với $a > 0$, $b > 0$.

Hệ trở thành

$$\begin{cases} 10a+5b = 1 \\ 7a+8b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 70a+35b = 7 \\ 70a+80b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 70a+35b = 7 \\ 45b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{15} \\ b = \dfrac{1}{15}. \end{cases}$$

Khi đó $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{12x-3}} = \dfrac{1}{15} \\ \dfrac{1}{\sqrt{4y+1}} = \dfrac{1}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{12x-3} = 15 \\ \sqrt{4y+1} = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x-3 = 225 \\ 4y+1 = 225 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 19 \\ y = 56. \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(19; 56)$.

e) $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = -1 \\ 3x^2 + 2y^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - 9y^2 = -3 \\ 6x^2 + 4y^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - 9y^2 = -3 \\ 13y^2 = 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3}. \end{array}\right. \end{cases}$

Vậy hệ có 4 nghiệm $(2; \sqrt{3})$, $(2; -\sqrt{3})$, $(-2; \sqrt{3})$, $(-2; -\sqrt{3})$.

f) $\begin{cases} (x+2)^2 + (y-1)^2 = 2 \\ 2(x+2)^2 - 3(y-1)^2 = -1. \end{cases}$

Đặt $a = (x+2)^2$, $b = (y-1)^2$,với $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Hệ trở thành

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a - 3b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 - b \\ 2(2-b) - 3b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1. \end{cases}$$

Khi đó $\begin{cases} (x+2)^2 = 1 \\ (y-1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -3 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 2. \end{array}\right. \end{cases}$

Vậy hệ có 4 nghiệm $(-1; 0)$, $(-1; 2)$, $(-3; 0)$, $(-3; 2)$.

□

3 GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 9. Tìm hai số tự nhiên, biết rằng tổng của chúng bằng 1006 và nếu lấy số lớn chia cho số nhỏ thì được thương là 2 và số dư là 124.

Lời giải.

Gọi hai số cần tìm lần lượt là a, b (với $a, b \in \mathbb{N}$ và $a > b$).

Theo đề bài, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b = 1006 \\ a = 2b + 124 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1006 - b \\ 1006 - b = 2b + 124 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1006 - b \\ 3b = 882 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 712 \\ b = 294. \end{cases}$$

Vậy hai số cần tìm là 712 và 294. □

Bài 10. Giải bài toán cổ sau

Quýt, cam mười bảy quả tươi
Đem chia cho một trăm người cùng vui.
Chia ba mỗi quả quýt rồi
Còn cam mỗi quả chia mười vừa xinh.
Trăm người, trăm miếng ngọt lành.
Quýt, cam mỗi loại tính rành là bao?

Lời giải.

Gọi số quả cam và số quả quýt lần lượt là x, y (với $x, y \in \mathbb{N}$).

Theo đề bài, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y=17 \\ 10x+3y=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=17-y \\ 10(17-y)+3y=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=17-y \\ -7y=-70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=10. \end{cases}$$

Vậy có 7 quả cam và 10 quả quýt. □

Bài 11. Một ô tô đi từ A và dự định đến B lúc 12 giờ trưa. Nếu xe chạy với vận tốc 35 km/h thì sẽ đến B chậm 2 giờ so với dự định. Nếu xe chạy với vận tốc 50 km/h thì sẽ đến B sớm 1 giờ so với dự định. Tính độ dài quãng đường AB và thời điểm xuất phát của ô tô tại A.

Lời giải.

Gọi độ dài quãng đường AB là x km, thời gian xe dự định đi từ A đến B là t giờ.

Điều kiện x, $t > 0$.

Thời gian xe đi từ A đến B với vận tốc 35 km/h là $t_1 = \dfrac{x}{35}$ giờ.

Thời gian xe đi từ A đến B với vận tốc 50 km/h là $t_2 = \dfrac{x}{50}$ giờ.

Suy ra $t = t_1 - 2 = t_2 + 1$. Khi đó ta có phương trình

$$\frac{x}{35} - 2 = \frac{x}{50} + 1 \Leftrightarrow x\left(\frac{1}{35} - \frac{1}{50}\right) = 3 \Leftrightarrow x = 350.$$

Thời gian xe dự định đi từ A đến B là $t = \dfrac{350}{35} - 2 = 8$ giờ.

Vậy độ dài quãng đường AB là 350 km, thời điểm xuất phát của ô tô tại A là 2 giờ sáng. □

Bài 12. Cho đa thức $f(x) = -(n+m)x^3 + (3n-4m)x^2 - mx + m + n + 1$. Biết đa thức $f(x)$ chia hết cho $(x-a)$ khi và chỉ khi $f(a) = 0$. Tìm m, n biết $f(x)$ chia hết cho đa thức x^2+4x+3.

Lời giải.

Ta có $x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3)$.

Vì $f(x)$ chia hết cho đa thức $x^2 + 4x + 3$ nên

$$\begin{cases} f(x) \vdots (x+1) \\ f(x) \vdots (x+3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) = 0 \\ f(-3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -(n+m)(-1)^3 + (3n-4m)(-1)^2 - (-1)m + m + n + 1 = 0 \\ -(n+m)(-3)^3 + (3n-4m)(-3)^2 - (-3)m + m + n + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m + 5n = -1 \\ -5m + 55n = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{5}{3} \\ n = \dfrac{2}{15}. \end{cases}$$

Vậy $m = \dfrac{5}{3}$ và $n = \dfrac{2}{15}$. □

Bài 13. Tìm một số có hai chữ số biết tổng hai chữ số đó bằng 13 và nếu đổi chỗ hai chữ số đó cho nhau thì được một số lớn hơn số đã cho là 27 đơn vị.

Lời giải.

Gọi số cần tìm là $\overline{ab}$ với $a, b \in \mathbb{N}$ và $a \neq 0$.

Ta có $\overline{ba} = \overline{ab} + 27 \Leftrightarrow 10b + a = 10a + b + 27 \Leftrightarrow 9b - 9a = 27$.

Từ đây ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b = 13 \\ 9b - 9a = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 13 - b \\ 9b - 9(13 - b) = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 8. \end{cases}$$

Vậy số cần tìm là 58. □

Bài 14. Tìm một số có hai chữ số biết tổng của hai chữ số đó là một số nguyên tố nhỏ nhất có hai chữ số và chữ số hàng chục kém hai lần chữ số hàng đơn vị là 1.

Lời giải.

Gọi số cần tìm là $\overline{ab}$ với $a, b \in \mathbb{N}$ và $a \neq 0$.

Theo đề bài, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b = 11 \\ b - a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 6. \end{cases}$$

Vậy số cần tìm là 56. □

Bài 15. Tìm diện tích một hình chữ nhật biết rằng tổng của nửa chu vi với chiều rộng của hình chữ nhật là 39 cm và hiệu của chu vi và chiều rộng hình chữ nhật là 42 cm.

Lời giải.

Gọi chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là a, b m. Điều kiện $a, b > 0$.

Chu vi hình chữ nhật là $2(a + b)$ m.

Theo giả thiết đề bài, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} (a + b) + b = 39 \\ 2(a + b) - b = 42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 39 \\ 2a + b = 42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 15 \\ b = 12. \end{cases}$$

Vậy diện tích của hình chữ nhật là $15 \cdot 12 = 180$ m^2. □

Bài 16. Tìm diện tích một hình chữ nhật biết rằng diện tích không thay đổi nếu tăng chiều dài 6 m và giảm chiều rộng 3 m hoặc giảm chiều dài 3 m và tăng chiều rộng 2,4 m.

Lời giải.

Gọi chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là a, b m. Điều kiện $a, b > 0$.

Diện tích ban đầu của hình chữ nhật là ab m^2.

Theo đề bài, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}(a+6)(b-3)=ab\\(a-3)(b+2{,}4)=ab\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3a+6b=18\\2{,}4a-3b=7{,}2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=18\\b=12.\end{cases}$$

Vậy diện tích hình chữ nhật là $18 \cdot 12 = 216$ m^2. □

Bài 17. Tìm diện tích một hình chữ nhật biết rằng nếu tăng chiều dài 2 m và giảm chiều rộng 3 m thì diện tích giảm đi 30 m^2 và nếu giảm chiều dài đi 4 m và tăng chiều rộng 5 m thì diện tích tăng thêm 10 m^2.

Lời giải.

Gọi chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là a, b m. Điều kiện $a, b > 0$.

Diện tích ban đầu của hình chữ nhật là ab m^2.

Theo đề bài, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}(a+2)(b-3)=ab-30\\(a-4)(b+5)=ab+10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3a+2b=-24\\5a-4b=30\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=18\\b=15.\end{cases}$$

Vậy diện tích hình chữ nhật là $18 \cdot 15 = 270$ m^2. □

Bài 18. Một người đi xe máy trên quãng đường dài 90 km. Khi đi được 20 phút thì xe hư nên phải đi tiếp bằng ô tô trong 50 phút nữa thì hết quãng đường. Tính vận tốc xe máy biết rằng vận tốc xe máy kém vận tốc ô tô là 15 km/giờ.

Lời giải.

Gọi vận tốc xe máy và vận tốc ô tô lần lượt là x, y km/h. Điều kiện $x, y > 0$.

Quãng đường xe máy đi được trong 20 phút là $\dfrac{x}{3}$ km.

Quãng đường ô tô đi được trong 50 phút là $\dfrac{5y}{6}$ km.

Theo đề bài, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{x}{3}+\dfrac{5y}{6}=90\\x=y-15\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{465}{7}\\y=\dfrac{570}{7}.\end{cases}$$

Vậy vận tốc xe máy là $\dfrac{465}{7}$ km/h, vận tốc ô tô là $\dfrac{570}{7}$ km/h. □

Bài 19. Tìm vận tốc của xe ô tô và quãng đường AB, biết rằng nếu xe tăng vận tốc thêm 12 km/giờ thì sẽ đến B sớm hơn 1 giờ, nếu xe giảm vận tốc đi 12 km/giờ thì đến B trễ hơn 2 giờ.

Lời giải.

Gọi vận tốc xe ô tô là v km/h, thời gian dự định đi từ A đến B là t giờ. Điều kiện $v, t > 0$.

Quãng đường AB là vt km.

Theo đề bài, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}(v+12)(t-1)=vt\\(v-12)(t+2)=vt\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-v+12t=12\\2v-12t=24\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=36\\t=4.\end{cases}$$

Vậy vận tốc của ô tô là 36 km/h, quãng đường AB là $36\cdot 4=144$ km. □

Bài 20. Một chiếc thuyền xuôi dòng và ngược dòng trên một khúc sông dài 40 km mất tổng cộng 4 giờ 30 phút. Cho biết thời gian thuyền xuôi dòng 4 km sẽ bằng thời gian thuyền ngược dòng 2 km. Tính vận tốc thuyền và vận tốc dòng nước.

Lời giải.

Gọi vận tốc thuyền và vận tốc dòng nước lần lượt là x, y km/h. Điều kiện $x > y > 0$.

Thời gian thuyền xuôi dòng trên khúc sông 40 km là $\dfrac{40}{x+y}$ giờ.

Thời gian thuyền ngược dòng trên khúc sông 40 km là $\dfrac{40}{x-y}$ giờ.

Thời gian thuyền xuôi dòng trên khúc sông dài 4 km là $\dfrac{4}{x+y}$ giờ.

Theo đề bài, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{40}{x+y}+\dfrac{40}{x-y}=4{,}5\\\dfrac{4}{x+y}=\dfrac{2}{x-y}\end{cases}$$

Đặt $\dfrac{1}{x+y}=a$, $\dfrac{1}{x-y}=b$, điều kiện a, $b>0$. Khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases}40a+40b=4{,}5\\4a=2b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{3}{80}\\b=\dfrac{3}{40}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{3}{80}\\\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{3}{40}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=\dfrac{80}{3}\\x-y=\dfrac{40}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=20\\y=\dfrac{20}{3}.\end{cases}$$

Vậy vận tốc thuyền là 20 km/h, vận tốc dòng nước là $\dfrac{20}{3}$ km/h. □

Bài 21. Hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể cạn thì trong 6 giờ 40 phút sẽ đầy bể. Nếu mở vòi thứ nhất chảy trong 4 giờ và vòi thứ hai chảy trong 5 giờ thì đầy $\dfrac{2}{3}$ bể. Hỏi mỗi vòi chảy một mình thì bao lâu mới đầy bể?

Lời giải.

Gọi x, y giờ lần lượt là thời gian vòi thứ nhất và vòi thứ hai một mình chảy đầy bể.

Điều kiện $x, y > 0$.

Trong 1 giờ, vòi thứ nhất chảy được $\dfrac{1}{x}$ bể.

Trong 1 giờ, vòi thứ hai chảy được $\dfrac{1}{y}$ bể.

Trong 1 giờ, cả hai vòi chảy được $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ bể.

Đổi 6 giờ 40 phút $=\dfrac{20}{3}$ giờ.

Theo đề bài, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{20}\\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{y}=\dfrac{2}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{12}\\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{15}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=12\\ y=15.\end{cases}$$

Vậy thời gian vòi thứ nhất chảy một mình đầy bể là 12 giờ, thời gian vòi thứ hai chảy một mình đầy bể là 15 giờ. □

Bài 22. Hai đội công nhân cùng sửa một con đường. Nếu đội A làm nửa con đường rồi giao cho đội B làm phần con đường còn lại thì mất tổng cộng 8 giờ sẽ xong. Nếu hai đội làm chung với nhau thì chỉ sau 3 giờ đã xong con đường. Hỏi mỗi đội làm riêng thì mất bao lâu mới làm xong con đường?

Lời giải.

Gọi x, y (giờ) lần lượt là thời gian đội A và đội B làm riêng để hoàn thành con đường.

Điều kiện $x, y > 0$.

Trong 1 giờ, đội A làm được $\dfrac{1}{x}$ (con đường).

Trong 1 giờ, đội B làm được $\dfrac{1}{y}$ (con đường).

Trong 1 giờ, cả hai đội làm được $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ (con đường).

Theo đề bài, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=8\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=16\\ \dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=16\\ xy=48.\end{cases}$$

x, y là nghiệm của phương trình $X^2-16X+48=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}X=12\\ X=4.\end{array}\right.$

Vậy thời gian hoàn thành con đường của mỗi đội là 12 giờ và 4 giờ. □

Bài 23. Hai đội A và B cùng đào một con mương. Nếu đội A đào trong 8 giờ rồi đội B mới vào cùng đào thì 4 giờ nữa mới xong con mương. Nếu đội A đào trong 10 giờ 30 phút rồi đội B mới vào cùng đào thì chỉ mất 3 giờ nữa đào xong con mương. Hỏi mỗi đội đào riêng trong bao lâu sẽ đào xong con mương?

Lời giải.

Gọi x, y (giờ) lần lượt là thời gian đội A và đội B làm riêng để hoàn thành con mương.
Điều kiện $x, y > 0$.
Trong 1 giờ, đội A làm được $\dfrac{1}{x}$ (con mương).
Trong 1 giờ, đội B làm được $\dfrac{1}{y}$ (con mương).
Trong 1 giờ, cả hai đội làm được $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ (con mương).
Theo đề bài, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{8}{x} + 4 \cdot \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) = 1 \\ \dfrac{10{,}5}{x} + 3 \cdot \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{12}{x} + \dfrac{4}{y} = 1 \\ \dfrac{13{,}5}{x} + \dfrac{3}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{18} \\ \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 18 \\ y = 12. \end{cases}$$

Vậy thời gian đội A đào xong con mương là 18 giờ, thời gian đội B đào xong con mương là 12 giờ. □

Bài 24. Hai người thợ cùng làm chung một công việc dự định trong 12 giờ sẽ xong. Họ làm được với nhau trong 8 giờ thì người thợ thứ nhất bận việc nên nghỉ, người thợ thứ hai tiếp tục làm. Do tăng năng suất gấp đôi nên công việc còn lại người thợ thứ hai làm trong 3 giờ 20 phút thì xong. Hỏi nếu mỗi người thợ làm một mình với năng suất dự định ban đầu thì phải mất bao lâu mới xong công việc?

Lời giải.

Gọi x, y (giờ) lần lượt là thời gian người thợ thứ nhất và người thợ thứ hai làm một mình để hoàn thành công việc.
Điều kiện $x, y > 0$.
Trong 1 giờ, người thợ thứ nhất làm được $\dfrac{1}{x}$ (công việc).
Trong 1 giờ, người thợ thứ hai làm được $\dfrac{1}{y}$ (công việc).
Trong 1 giờ, cả hai người thợ làm được $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ (công việc).
Đổi 3 giờ 20 phút $= \dfrac{10}{3}$ giờ.
Theo đề bài, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{12} \\ 8 \cdot \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) + \dfrac{10}{3} \cdot \dfrac{2}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{12} \\ \dfrac{8}{x} + \dfrac{44}{3y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{30} \\ \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 20. \end{cases}$$

Vậy người thợ thứ nhất hoàn thành công việc trong 30 giờ, người thợ thứ hai hoàn thành công việc trong 20 giờ. □

Bài 25. Theo kế hoạch, để hoàn thành một lô hàng trong thời hạn dự định, mỗi ngày xưởng sản xuất 50 cái áo. Nhưng thực tế, mỗi ngày xưởng sản xuất hơn kế hoạch 6 cái áo. Do vậy, xưởng vượt trước thời hạn 3 ngày và làm vượt số lượng sản phẩm là 120 cái áo so với kế hoạch. Vậy theo kế hoạch phải làm bao nhiêu cái áo và trong bao nhiêu ngày?

Lời giải.

Gọi số chiếc áo cần làm là x (cái), số ngày để hoàn thành theo kế hoạch là y (ngày).

Theo đề bài, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 50y = x \\ 56(y-3) = x + 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 50y - x = 0 \\ 56y - x = 288 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2400 \\ y = 48. \end{cases}$$

Vậy theo kế hoạch thì xưởng cần làm 2400 chiếc áo và làm trong 48 ngày. □

Chương 2

HÀM SỐ $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ - PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

1 HÀM SỐ $Y = AX^2\,(A \neq 0)$

1.1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

a) Hàm số $y = ax^2$.

Tính chất của hàm số $y = ax^2\,(a \neq 0)$:

- Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến khi $x < 0$ và đồng biến khi $x > 0$.
- Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến khi $x < 0$ và nghịch biến khi $x > 0$.

b) Đồ thị hàm số $y = ax^2$.

Đồ thị hàm số $y = ax^2\,(a \neq 0)$ là một đường cong đi qua gốc toạ độ và nhận trục Oy làm trục đối xứng. Đường cong đó gọi là một parabol với đỉnh O.

- Nếu $a > 0$ thì đồ thị nằm phía trên trục hoành, O là điểm thấp nhất của đồ thị.
- Nếu $a < 0$ thì đồ thị nằm phía dưới trục hoành, O là điểm cao nhất của đồ thị.

1.2 VÍ DỤ

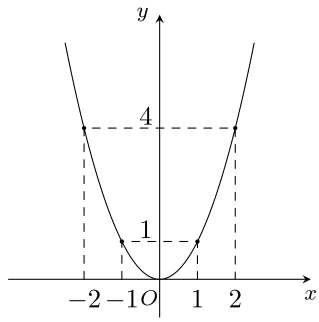
Ví dụ 6. Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2$.

Lời giải.

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Đồ thị (Hình 1)



Hình 1

□

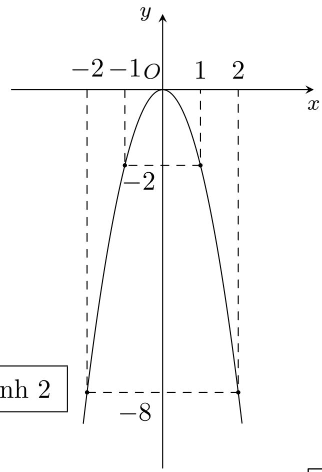
Ví dụ 7. Vẽ đồ thị hàm số $y = -2x^2$.

Lời giải.

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = -2x^2$	-8	-2	0	-2	-8

Đồ thị (Hình 2)



Hình 2

□

1.3 BÀI TẬP

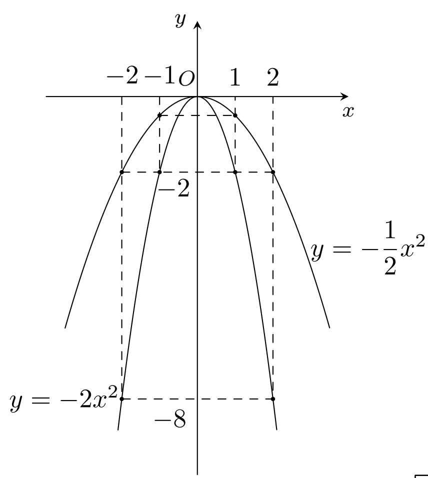
Bài 26. Vẽ đồ thị hàm số $y = -\dfrac{1}{2}x^2$ và $y = -2x^2$ trên cùng một hệ trục tọa độ.

Lời giải.

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = -\dfrac{1}{2}x^2$	-2	$-\dfrac{1}{2}$	0	$-\dfrac{1}{2}$	-2

x	-2	-1	0	1	2
$y = -2x^2$	-8	-2	0	-2	-8



□

Bài 27. Cho hàm số $y = ax^2$ có đồ thị đi qua điểm $A(2; 4)$.

a) Tìm a và vẽ đồ thị hàm số đó.

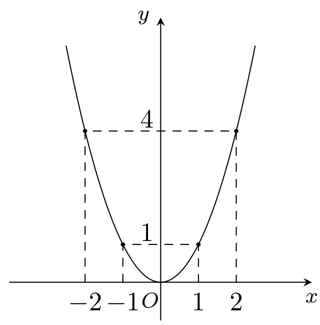
b) Dựa vào đồ thị, tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số đó với $-2 \leq x \leq 1$.

Lời giải.

a) Thay $x = 2$ và $y = 4$ vào hàm số $y = ax^2 \Rightarrow 4 = 4a \Rightarrow a = 1$.
Khi đó ta có hàm số $y = x^2$.

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4



b) Với $-2 \leq x \leq 1$ từ hình vẽ ta thấy

- Giá trị nhỏ nhất của hàm số là 0 tại $x = 0$.
- Giá trị lớn nhất của hàm số là 4 khi $x = -2$.

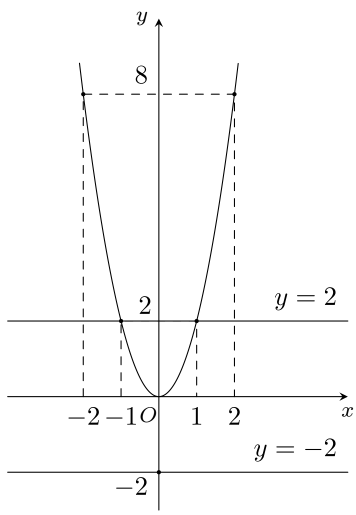
□

Bài 28. Trên cùng một hệ trục tọa độ, vẽ các đồ thị hàm số sau: $y = 2x^2, y = 2, y = 0$ và $y = -2$. Parabol $y = 2x^2$ cắt các đồ thị hàm số còn lại tại bao nhiêu điểm? Xác định tọa độ các giao điểm đó.

Lời giải.

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8



- Parabol $y = 2x^2$ không cắt đường thẳng $y = -2$
- Parabol $y = 2x^2$ tiếp xúc đường thẳng $y = 0$ tại 1 điểm.
- Parabol $y = 2x^2$ cắt đường thẳng $y = 2$ tại 2 điểm.

Vậy parabol $y = 2x^2$ cắt các đồ thị hàm số còn lại tại 3 điểm $(-1; 2)$, $(1; 2)$ và $(0; 0)$. □

Bài 29. Cho parabol $(P)\colon y = \dfrac{1}{4}x^2$ và đường thẳng d qua 2 điểm $A, B \in (P)$ có hoành độ lần lượt là 2, -4.

a) Vẽ (P).

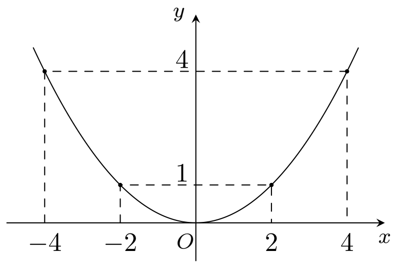
b) Tìm phương trình đường thẳng d.

Lời giải.

a) Vẽ (P).

Bảng giá trị:

x	-4	-2	0	2	4
$y = \dfrac{1}{4}x^2$	4	1	0	1	4



b) Thay $x = 2$ và $x = -4$ lần lượt vào $(P)\colon y = \dfrac{1}{4}x^2$ ta được $y = 1$ và $y = 4$.
Vậy tọa độ giao điểm là $A(2; 1)$ và $B(-4; 4)$.
Đường thẳng AB có dạng $y = ax + b$.
Thay tọa độ $A(2; 1)$ và $B(-4; 4)$ vào $y = ax + b$ ta được $\begin{cases} 2a + b = 1 \\ -4a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = 2. \end{cases}$
Vậy phương trình đường thẳng AB là $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$.

□

Bài 30.

a) Vẽ $(P)\colon y = x^2$

b) Biết các điểm $A, B \in (P)$ và lần lượt có hoành độ bằng 1 và $-\dfrac{3}{2}$. Tính tung độ của chúng.

c) Viết phương trình đường thẳng AB.

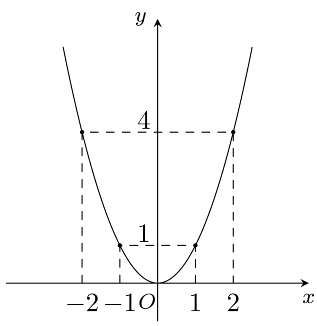
d) Viết phương trình đường thẳng (D) song song với AB cắt (P) tại điểm có hoành độ là -2.

Lời giải.

a) Vẽ $(P)\colon y = x^2$

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4



b) Thay $x = 1$ và $x = -\dfrac{3}{2}$ lần lượt vào $(P)\colon y = x^2$ ta được $y = 1$ và $y = \dfrac{9}{4}$.

c) Theo câu b ta có $A(1; 1)$ và $B\left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{9}{4}\right)$.
Phương trình đường thẳng AB có dạng $y = ax + b$.
Thay tọa độ $A(1; 1)$ và $B\left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{9}{4}\right)$ vào $y = ax + b$ ta được $\begin{cases} a + b = 1 \\ -\dfrac{3}{2}a + b = \dfrac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$
Vậy phương trình đường thẳng AB là $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$.

d) Vì đường thẳng (D) song song với AB nên phương trình có dạng $y = -\dfrac{1}{2}x + b$ với $(b \neq \dfrac{3}{2})$.
Vì (D) cắt (P) tại điểm có hoành độ là -2 nên thay $x = -2$ vào $(P)\colon y = x^2$ ta được $y = 4$.
Thay $x = -2$ và $y = 4$ vào $y = -\dfrac{1}{2}x + b$ ta được $b = 3$.
Vậy phương trình đường thẳng (D) là $y = -\dfrac{1}{2}x + 3$.

□

Bài 31. Cho đường thẳng $(D)\colon y = \dfrac{x-2}{4}$ và parabol $(P)\colon y = -\dfrac{1}{4}x^2$ và $M(0; 4)$.

a) Tìm giao điểm giữa (P) và (D).

b) Viết phương trình đường thẳng (d) qua M và tiếp xúc với (P).

Lời giải.

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D)
$-\dfrac{1}{4}x^2 = \dfrac{x-2}{4} \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \Rightarrow y = -1 \\ x = 1 \Rightarrow y = -\dfrac{1}{4}. \end{array}\right.$
Vậy tọa độ giao điểm giữa (P) và (D) là $A(-2; -1)$ và $B\left(1; -\dfrac{1}{4}\right)$.

b) Phương trình đường thẳng (d) có dạng $y = ax + b$.
Đường thẳng (d) qua $M(0; 4)$ nên $b = 4 \Rightarrow (d)\colon y = ax + 4$.
Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P)

$$-\frac{1}{4}x^2 = ax + 4 \Leftrightarrow x^2 + 4ax + 16 = 0.$$

Vì (d) tiếp xúc với (P) nên $\Delta' = 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 2$.
Vậy phương trình đường thẳng (d) là $y = \pm 2x + 4$.

□

Bài 32. Cho $(P)\colon y = ax^2$ và 2 điểm $A(2; 3)$, $B(-1; 0)$.

a) Tìm a biết rằng (P) đi qua $M(1;2)$. Vẽ (P) với a vừa tìm được.

b) Tìm phương trình đường thẳng AB và tìm giao điểm của AB với (P).

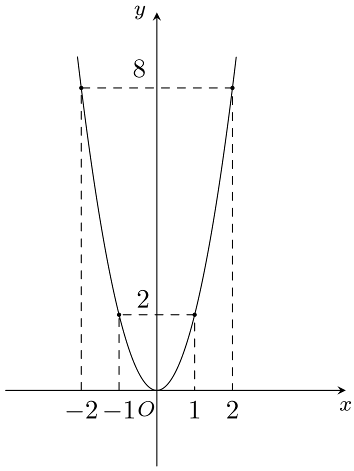
c) Gọi C là giao điểm của AB với (P) có hoành độ dương. Viết phương trình đường thẳng qua C và có với (P) một điểm chung duy nhất.

Lời giải.

a) Thay $M(1;2)$ vào $(P)\colon y = ax^2$ ta được $a = 2$.
Vậy ta có $(P)\colon y = 2x^2$.

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8



b) Phương trình đường thẳng AB có dạng $y = ax + b$.
Thay $A(2;3)$ và $B(-1;0)$ vào $y = ax + b$ ta được $\begin{cases} 2a + b = 3 \\ -a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1. \end{cases}$
Vậy phương trình đường thẳng AB là $y = -x + 1$.
Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (AB)

$2x^2 = -x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = \dfrac{1}{2} \\ x = -1 \Rightarrow y = 2. \end{array}\right.$

Vậy tọa đồ giao điểm giữa (P) và (D) là $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$ và $(-1;2)$.

c) Vì C là giao điểm của AB với (P) có hoành độ dương nên $C\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.
Phương trình đường thẳng (d) qua C có dạng $y = ax + b$.
Thay $C\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$ vào $y = ax + b$ ta có $\dfrac{1}{2}a + b = \dfrac{1}{2} \Rightarrow a = 1 - 2b$.
Suy ra phương trình đường thẳng (d) có dạng $y = (1 - 2b)x + b$.
Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d)

$$2x^2 = (1 - 2b)x + b \Leftrightarrow 2x^2 - (1 - 2b)x - b = 0. \quad (*)$$

Đường thẳng (d) có với (P) một điểm chung duy nhất khi $(*)$ có nghiệm kép khi $\Delta = 0 \Leftrightarrow (1-2b)^2 + 8b = 0 \Leftrightarrow 4b^2 + 4b + 1 = 0 \Leftrightarrow (2b+1)^2 = 0 \Leftrightarrow b = -\dfrac{1}{2}$.
Vậy phương trình đường thẳng (d) là $y = 2x - \dfrac{1}{2}$.

□

Bài 33. Trong cùng hệ trục tọa độ, gọi (P) và (D) lần lượt là đồ thị các hàm số $y = \dfrac{1}{4}x^2$ và $y = -x - 1$.

a) Vẽ (P) và (D).

b) Dùng đồ thị để giải phương trình $x^2 + 4x + 4 = 0$ và kiểm tra lại bằng phép toán.

c) Viết phương trình đường thẳng (d) song song với (D) và cắt (P) tại điểm có hoành độ là 4.

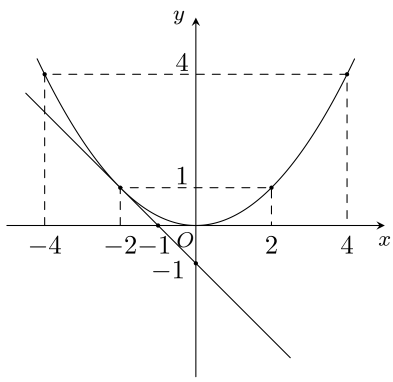
Lời giải.

a) Vẽ (P) và (D).

Bảng giá trị:

x	-4	-2	0	2	4
$y = \dfrac{1}{4}x^2$	4	1	0	1	4

x	0	-1
$y = -x - 1$	-1	0



b) Ta có

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftarrow x^2 = -4x - 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 = -x - 1.$$

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D) nên từ hình vẽ cho ta nghiệm $x = -2$.
Bằng phép toán ta có $x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

c) Phương trình đường thẳng (d) song song với (D) có dạng $y = -x + b$ với $(b \neq -1)$.
Đường thẳng (d) cắt (P) tại điểm có hoành độ là 4 nên thay $x = 4$ vào $y = \dfrac{1}{4}x^2$ ta có $y = 4$.
Thay $x = 4$ và $y = 4$ vào $y = -x + b$ ta được $b = 8$.
Vậy phương trình đường thẳng (d) là $y = -x + 8$.

□

Bài 34. Cho parabol $(P)\colon y = ax^2$ và đường thẳng $(D)\colon y = 2m - x + 1$ cắt nhau tại điểm $A(-1; 1)$.

a) Tìm a và m. Vẽ (P) và (D) trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Tìm giao điểm còn lại của (P) và (D) bằng phép toán.

c) Viết phương trình đường thẳng song song với (D) và cắt (P) tại điểm B có hoành độ bằng tung độ (B khác gốc O).

d) Tam giác OAB là tam giác gì? Tính diện tích của tam giác OAB.

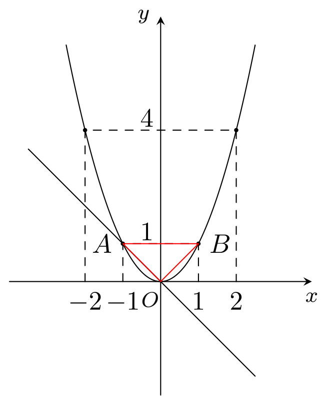
Lời giải.

a) Thay $A(-1; 1)$ vào $(P)\colon y = ax^2$ ta được $a = 1$.
Thay $A(-1; 1)$ vào $(D)\colon y = 2m - x + 1$ ta được $2m + 1 + 1 = 1 \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}$.
Khi đó ta có $(P)\colon y = x^2$ và $(D)\colon y = -x$.
$\star$ Vẽ (P) và (D) trên cùng một hệ trục tọa độ.

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

x	0	-1
$y = -x$	0	1



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D) là

$$x^2 = -x \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = -1 \Rightarrow y = 1. \end{array}\right.$$

Vậy giao điểm còn lại của (P) và (D) là $O(0; 0)$.

c) Gọi d là đường thẳng cần tìm.
Vì d là đường thẳng song song với $(D)\colon y = -x$ nên phương trình đường thẳng có dạng $y = -x + b$ (với $b \neq 0$).
Vì (d) cắt (P) tại điểm B có hoành độ bằng tung độ nên $B(x_B; x_B)$.
Do $B \in (d) \Rightarrow x_B = -x_B + b \Rightarrow x_B = \dfrac{b}{2} \Rightarrow B\left(\dfrac{b}{2}; \dfrac{b}{2}\right)$.
Mặt khác $B \in (P)\colon y = x^2 \Rightarrow \dfrac{b}{2} = \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \dfrac{b}{2} \cdot \left(\dfrac{b}{2} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{b}{2} = 0 \\ \dfrac{b}{2} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \text{ (loại)} \\ b = 2 \text{ (nhận)}. \end{array}\right.$
Vậy phương trình đường thẳng $(d)\colon y = -x + 2$

d) Ta có $OA = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, $OB = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow OA = OB \Rightarrow \triangle OAB$ cân tại O.
Ta có $A(-1;1)$ và $B(1;1)$ suy ra $S_{\triangle OAB} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 1$ (đvdt).

□

Bài 35.

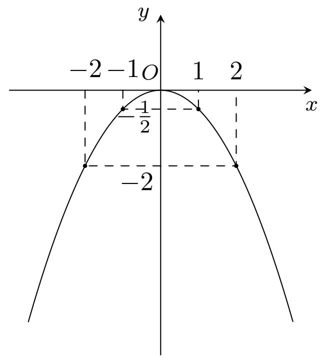
a) Định m để $(P)\colon y = mx^2$ đi qua điểm $M(-2;-2)$. Vẽ (P) với m vừa tìm được.

b) Chứng minh rằng mọi đường thẳng qua điểm $A(0;-1)$ và không song song với hai trục đều cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.

Lời giải.

a) Thay $M(-2;-2)$ vào $(P)\colon y = mx^2$ ta được $4m = -2 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$.
Khi đó $(P)\colon y = -\frac{1}{2}x^2$.
Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = -\frac{1}{2}x^2$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2



b) Gọi (d) là đường thẳng qua điểm $A(0;-1)$ và không song song với hai trục tọa độ, suy ra phương trình đường thẳng (d) có dạng $y = ax - 1$ với $a \neq 0$.
Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d)

$$-\frac{1}{2}x^2 = ax - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2ax - 2 = 0. \quad (*)$$

Ta có $\Delta' = a^2 + 2 > 0, \forall a$ nên (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi a.
Vậy mọi đường thẳng (d) đều cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.

□

Bài 36. Cho parabol $(P)\colon y = 2x^2$ và đường thẳng $(D)\colon y = (m+1)x - 2$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là $\frac{2}{3}$.

a) Tìm m. Vẽ (P) và (D) trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Xác định vị trí tương đối của (P) và (D). Tìm giao điểm của chúng.

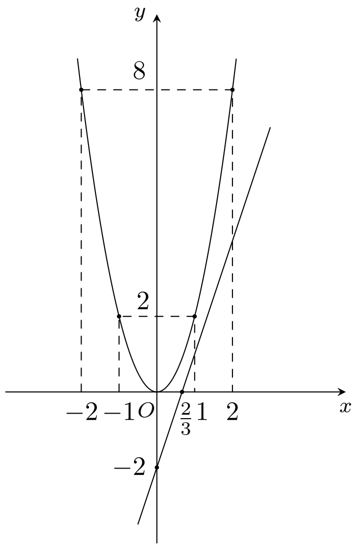
Lời giải.

a) Đường thẳng $(D)\colon y = (m+1)x - 2$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là $\dfrac{2}{3}$ nên thay $x = \dfrac{2}{3}$ và $y = 0$ vào $(D)\colon y = (m+1)x - 2$ ta được $(m+1)\cdot\dfrac{2}{3} - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$.
Khi đó ta có $(D)\colon y = 3x - 2$.
$\star$ Vẽ (P) và (D) trên cùng một hệ trục tọa độ.

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8

x	0	$\dfrac{2}{3}$
$y = 3x - 2$	-2	0



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d)

$$2x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (*)$$

Ta có $\Delta = 9 - 4\cdot 2\cdot 2 = -7 < 0 \Rightarrow (*)$ vô nghiệm.
Vậy (D) và (P) không có điểm chung.

$\square$

Bài 37. Cho đồ thị hàm số $(P)\colon y = ax^2$ và đường thẳng $(D)\colon y = mx + n$ đều đi qua $A(-2;-4)$ và (D) cắt trục tung tại điểm có tung độ là -2.

a) Xác định (P) và (D). Vẽ (P) và (D) trên cùng một hệ trục toạ độ.

b) Tìm giao điểm B còn lại của (P) và (D) bằng phép toán.

c) Tính khoảng cách giữa hai giao điểm đó. Tính diện tích $S_{\triangle OAB}$.

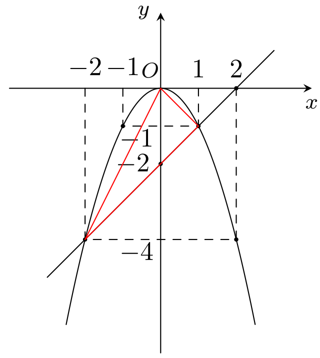
Lời giải.

a) Thay $A(-2;-4)$ vào $(P)\colon y = ax^2$ ta được $4a = -4 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow (P)\colon y = -x^2$.
Thay $A(-2;-4)$ vào $(D)\colon y = mx + n$ ta được $-2m + n = -4$ (1).
(D) cắt trục tung tại điểm có tung độ là -2 nên thay $x = 0$ và $y = -2$ vào $(D)\colon y = mx + n$ ta được $n = -2$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} m = 1 \\ n = -2 \end{cases} \Rightarrow (D)\colon y = x - 2$.
$\star$ Vẽ (P) và (D) trên cùng một hệ trục tọa độ.

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4

x	0	2
$y = x - 2$	-2	0



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D)

$$-x^2 = x - 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = -1 \\ x = -2 \Rightarrow y = -4. \end{array}\right.$$

Vậy tọa độ giao điểm B còn lại của (P) và (D) là $B(1;-1)$.

c) Ta có $A(-2;-4)$ và $B(1;-1) \Rightarrow AB = \sqrt{(1+2)^2 + (-1+4)^2} = 3\sqrt{2}$.
Diện tích $S_{\triangle OAB} = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 + \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 3$ (đvdt).

$\square$

Bài 38.

a) Cho $(P)\colon y = 3x^2$, $(D_1)\colon y = 3$ và $(D_2)\colon y = mx + 1$. Định m để $(P), (D_1)$ và (D_2) cắt nhau tại một điểm.

b) Cho $(P)\colon y = x^2, (D_1)\colon y = 4a^2$ và $(D_2)\colon y = ax + a$ $(a \neq 0)$. Định a để (P), (D_1) và (D_2) cắt nhau tại một điểm.

Lời giải.

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D_1)

$$3x^2 = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$$

Suy ra tọa độ giao điểm của (P) và (D_1) là $A(1;3)$ và $B(-1;3)$.
Trường hợp 1: $(P), (D_1)$ và (D_2) cắt nhau tại một điểm $A(1;3)$.
Thay $A(1;3)$ vào $(D_2)\colon y = mx + 1 \Rightarrow m + 1 = 3 \Rightarrow m = 2$.
Trường hợp 2: $(P), (D_1)$ và (D_2) cắt nhau tại một điểm $B(-1;3)$.
Thay $B(-1;3)$ vào $(D_2)\colon y = mx + 1 \Rightarrow -m + 1 = 3 \Rightarrow m = -2$.
Vậy $m = \pm 2$ là giá trị cần tìm.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D_1)

$$x^2 = 4a^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2a \\ x = -2a. \end{array}\right.$$

Suy ra tọa độ giao điểm của (P) và (D_1) là $A(2a; 4a^2)$ và $B(-2a; 4a^2)$.

Trường hợp 1: $(P), (D_1)$ và (D_2) cắt nhau tại một điểm $A(2a; 4a^2)$.

Thay $A(2a; 4a^2)$ vào (D_2): $y = ax + a \Rightarrow 2a^2 + a = 4a^2 \Leftrightarrow 2a^2 - a = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

Trường hợp 2: $(P), (D_1)$ và (D_2) cắt nhau tại một điểm $B(-2a; 4a^2)$.

Thay $B(-2a; 4a^2)$ vào (D_2): $y = ax + a \Rightarrow -2a^2 + a = 4a^2 \Leftrightarrow 6a^2 - a = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = \dfrac{1}{6}. \end{array}\right.$

Vậy $a = 0$, $a = \dfrac{1}{2}$, $a = \dfrac{1}{6}$ là giá trị cần tìm.

□

3 PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN SỐ

3.1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

a) Phương trình bậc hai một ẩn (hay phuong trình bậc hai) là phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$; trong đó x là ẩn số; a, b, c là những số cho trước gọi là các hệ số và $a \neq 0$.

b) Công thức nghiệm : Tính $\Delta = b^2 - 4ac$

- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}. \end{cases}$
- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$.
- $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Chú ý 2. Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có a và c trái dấu thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

c) Công thức nghiệm thu gọn:
Nếu $b = 2b'$, đặt $\Delta' = b'^2 - ac$

- Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} \\ x_2 = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}. \end{cases}$

- Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\dfrac{b'}{a}$.
- $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

3.2 BÀI TẬP

Bài 14. Giải phương trình

a) $5x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0$.

b) $2x^2 - 7x + 6 = 0$.

c) $x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$.

d) $\sqrt{2}x^2 + \sqrt{2}x + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = 0$.

e) $x^2 - \left(2 + \sqrt{3}\right)x + 2\sqrt{3} = 0$.

f) $x^2 - \left(\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)x - \sqrt{15} = 0$.

g) $5x^2 + 5\sqrt{2}x + 2{,}5 = 0$.

h) $4x^2 + 12x - 7 = 0$.

Lời giải.

a) $5x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0$.
$a = 5$, $b = \sqrt{3}$, $c = -1$.
$\Delta = b^2 - 4ac = \left(\sqrt{3}\right)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-1) = 23 > 0$.
Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\left\{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-\sqrt{3} - \sqrt{23}}{10} \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-\sqrt{3} + \sqrt{23}}{10}. \end{array}\right.$

b) $2x^2 - 7x + 6 = 0$.
$a = 2$, $b = -7$, $c = 6$.
$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 1 > 0$.
Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\left\{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{7 - 1}{4} = \dfrac{3}{2} \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{7 + 1}{4} = 2. \end{array}\right.$

c) $x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$.
$a = 1$, $b = -\sqrt{5}$, $c = 1$.
$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-\sqrt{5}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 > 0$.
Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\left\{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}. \end{array}\right.$

d) $\sqrt{2}x^2 + \sqrt{2}x + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = 0$.
$a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$, $c = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

$\Delta = b^2 - 4ac = \left(\sqrt{2}\right)^2 - 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = 0.$

Phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{2}.$

e) $x^2 - \left(2 + \sqrt{3}\right)x + 2\sqrt{3} = 0.$

$a = 1,\ b = -(2 + \sqrt{3}),\ c = 2\sqrt{3}.$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac = \left[-(2+\sqrt{3})\right]^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2\sqrt{3}\\ &= 4 + 4\sqrt{3} + 3 - 8\sqrt{3} = 4 - 4\sqrt{3} + 3\\ &= \left(2 - \sqrt{3}\right)^2 > 0.\end{aligned}$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2 + \sqrt{3} - (2 - \sqrt{3})}{2} = \sqrt{3} \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}}{2} = 2. \end{cases}$

f) $x^2 - \left(\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)x - \sqrt{15} = 0.$

$a = 1,\ b = -(\sqrt{3} - \sqrt{5}),\ c = -\sqrt{15}.$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac = \left[-(\sqrt{3} - \sqrt{5})\right]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\sqrt{15})\\ &= 3 - 2\sqrt{15} + 5 + 4\sqrt{15} = 3 + 2\sqrt{15} + 5\\ &= \left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)^2 > 0.\end{aligned}$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{5} - (\sqrt{3} + \sqrt{5})}{2} = -\sqrt{5} \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{2} = \sqrt{3}. \end{cases}$

g) $5x^2 + 5\sqrt{2}x + 2{,}5 = 0.$

$a = 5,\ b = 5\sqrt{2},\ c = 2{,}5.$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac = \left(5\sqrt{2}\right)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2{,}5\\ &= 50 - 50 = 0.\end{aligned}$$

Phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-5\sqrt{2}}{2 \cdot 5} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

h) $4x^2 + 12x - 7 = 0.$

$a = 4,\ b = 12,\ c = -7.$

$\Delta' = b'^2 - ac = 6^2 - 4 \cdot (-7) = 64 > 0.$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \dfrac{-6 - \sqrt{64}}{4} = -\dfrac{7}{2} \\ x_2 = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \dfrac{-6 + \sqrt{64}}{4} = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

□

Bài 15. Cho phương trình $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m - 2 = 0$.

a) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

b) Giải phương trình với $m = 5$.

Lời giải.

a) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt.
$a = m - 1$, $b = -2(m+1)$, $c = m - 2$.

$$\begin{aligned}\Delta' &= b'^2 - ac = [-(m+1)]^2 - (m-1)(m-2) \\ &= m^2 + 2m + 1 - (m^2 - 2m - m + 2) = 5m - 1.\end{aligned}$$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ 5m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > \dfrac{1}{5}. \end{cases}$

b) Với $m = 5$.
Ta có phương trình $4x^2 - 12x + 3 = 0$.
$a = 4$, $b = -12$, $c = 3$.
$\Delta' = b'^2 - ac = (-6)^2 - 4 \cdot 3 = 24 > 0$.
Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \dfrac{6 - \sqrt{24}}{4} = \dfrac{3 - \sqrt{6}}{2} \\ x_2 = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \dfrac{6 + \sqrt{24}}{4} = \dfrac{3 + \sqrt{6}}{2}. \end{cases}$

□

Bài 16. Tìm m để các phương trình sau có nghiệm kép. Tính giá trị nghiệm kép đó.

a) $x^2 + 2x + m = 0$.

b) $4x^2 - mx + 2m + 9 = 0$.

c) $(m-1)x^2 + m - 2 = 0$.

d) $(m+2)x^2 + 6mx + 4m + 1 = 0$.

Lời giải.

a) $x^2 + 2x + m = 0$.
$a = 1$, $b = 2$, $c = m$.
$\Delta' = b'^2 - ac = 1^2 - 1 \cdot m = 1 - m$.
Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1$.
Khi đó nghiệm kép là $x_1 = x_2 = -\dfrac{b'}{a} = -\dfrac{1}{1} = -1$.

b) $4x^2 - mx + 2m + 9 = 0$.
$a = 4$, $b = -m$, $c = 2m + 9$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-m)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (2m + 9)$$

$$\begin{aligned} &= m^2 - 32m - 144 \\ &= (m+4)(m-36). \end{aligned}$$

Phương trình có nghiệm kép

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow (m+4)(m-36) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &m+4=0 \\ &m-36=0 \end{aligned}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &m=-4 \\ &m=36. \end{aligned}\right. \end{aligned}$$

- Với $m = -4$. Khi đó nghiệm kép là $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{m}{8} = -\dfrac{1}{2}$.
- Với $m = 36$. Khi đó nghiệm kép là $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{m}{8} = \dfrac{9}{2}$.

c) $(m-1)x^2 + m - 2 = 0$.
$a = m-1$, $b = 0$, $c = m-2$.

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot (m-1) \cdot (m-2) \\ &= -4(m-1)(m-2). \end{aligned}$$

Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \neq 0 \\ (m-1)(m-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m-2=0 \Leftrightarrow m = 2.$

Khi đó nghiệm kép là $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{0}{2(m-1)} = 0$.

d) $(m+2)x^2 + 6mx + 4m + 1 = 0$.
$a = m+2$, $b = 6m$, $c = 4m+1$.

$$\begin{aligned} \Delta' &= b'^2 - ac = (3m)^2 - (m+2) \cdot (4m+1) \\ &= 9m^2 - (4m^2 + m + 8m + 2) \\ &= 5m^2 - 9m - 2 \\ &= (m-2)(5m+1). \end{aligned}$$

Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 \neq 0 \\ (m-2)(5m+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &m = 2 \\ &m = -\dfrac{1}{5}. \end{aligned}\right.$

- Với $m = 2$. Khi đó nghiệm kép là $x_1 = x_2 = -\dfrac{b'}{a} = -\dfrac{3m}{m+2} = -\dfrac{6}{4} = -\dfrac{3}{2}$.
- Với $m = -\dfrac{1}{5}$. Khi đó nghiệm kép là $x_1 = x_2 = -\dfrac{b'}{a} = -\dfrac{3m}{m+2} = \dfrac{1}{3}$.

$\square$

Bài 17. Tìm m để các phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt.

a) $2x^2 - 6x + m + 7 = 0$.

b) $mx^2 - 2(m-1)x + m + 1 = 0$.

Lời giải.

a) $2x^2 - 6x + m + 7 = 0$.
$a = 2$, $b = -6$, $c = m + 7$.
$\Delta' = b'^2 - ac = (-3)^2 - 2 \cdot (m+7) = -5 - 2m$.
Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow -5 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < -\dfrac{5}{2}$.

b) $mx^2 - 2(m-1)x + m + 1 = 0$.
$a = m$, $b = -2(m-1)$, $c = m + 1$.
$\Delta' = b'^2 - ac = [-(m-1)]^2 - m \cdot (m+1) = m^2 - 2m + 1 - m^2 - m = -3m + 1$.
Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -3m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

$\square$

Bài 18. Tìm m để các phương trình sau vô nghiệm.

a) $5x^2 - 2x + m = 0$.

b) $m^2x^2 + mx + 4 = 0$.

Lời giải.

a) $5x^2 - 2x + m = 0$.
$a = 5$, $b = -2$, $c = m$.
$\Delta' = b'^2 - ac = (-1)^2 - 5 \cdot m = 1 - 5m$.
Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow 1 - 5m < 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{1}{5}$.

b) $m^2x^2 + mx + 4 = 0$.
$a = m^2$, $b = m$, $c = 4$.
$\Delta = b^2 - 4ac = m^2 - 4 \cdot m \cdot 4 = m^2 - 16m = m(m-16)$.

Trường hợp 1: $a = 0 \Leftrightarrow m = 0$.
Khi đó phương trình trở thành $4 = 0$ (vô nghiệm).
Nhận $m = 0$.

Trường hợp 2: $a \neq 0 \Leftrightarrow m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.
Khi đó phương trình vô nghiệm
$\Leftrightarrow \Delta' < 0$
$\Leftrightarrow m(m-16) < 0$.

- $\begin{cases} m < 0 \\ m - 16 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 16 \end{cases}$ (không thỏa).
- $\begin{cases} m > 0 \\ m - 16 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < 16 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 16.$

□

Bài 19. Tìm m để phương trình sau có nghiệm.

a) $x^2 + 2(m-1)x + m^2 + 1 = 0.$ b) $(m^2-1)x^2 + 2(m+1)x + 1 = 0.$

Lời giải.

a) $x^2 + 2(m-1)x + m^2 + 1 = 0.$
$a = 1$, $b = 2(m-1)$, $c = m^2 + 1$.
$\Delta' = b'^2 - ac = (m-1)^2 - 1 \cdot (m^2+1) = m^2 - 2m + 1 - m^2 - 1 = -2m.$
Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -2m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 0.$

b) $(m^2-1)x^2 + 2(m+1)x + 1 = 0.$
$a = m^2 - 1$, $b = 2(m+1)$, $c = 1$.
$\Delta' = b^2 - ac = (m+1)^2 - (m^2-1) \cdot 1 = m^2 + 2m + 1 - m^2 + 1 = 2m + 2.$

Trường hợp 1: $a = 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -1. \end{array}\right.$

- Với $m = 1$. Khi đó phương trình trở thành $4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{4}$.
  Nhận $m = 1$.
- Với $m = -1$. Khi đó phương trình trở thành $1 = 0$ (vô nghiệm).
  Loại $m = -1$.

Trường hợp 2: $a \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -1. \end{cases}$
Khi đó phương trình có nghiệm
$\Leftrightarrow \Delta' \geq 0$
$\Leftrightarrow 2m + 2 \geq 0$
$\Leftrightarrow m \geq -1.$
So điều kiện đang xét, ta có $\begin{cases} m > -1 \\ m \neq 1. \end{cases}$

Kết hợp 2 trường hợp ta được phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m > -1$.

□

Bài 20. Chứng minh phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của a

a) $x^2 - 2(a+1)x + a - 4 = 0$.

b) $(a+1)x^2 - 2(a+3)x + 2 = 0$.

Lời giải.

a) $x^2 - 2(a+1)x + a - 4 = 0$.

Ta có

$$\begin{aligned}\Delta' &= (a+1)^2 - 1\cdot(a-4)\\ &= a^2 + 2a + 1 - a + 4\\ &= a^2 + a + 5\\ &= \left(a+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 5\\ &= \left(a+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} > 0, \forall a.\end{aligned}$$

Vậy phương trình luôn có nghiệm với mọi a.

b) $(a+1)x^2 - 2(a+3)x + 2 = 0$.

- Trường hợp 1: $a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1$.
  Khi đó phương trình trở thành $-4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.
  Do đó $a = -1$ phương trình có nghiệm.
- Trường hợp 2: $a + 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -1$.
  Ta có

$$\begin{aligned}\Delta' &= (a+3)^2 - (a+1)\cdot 2\\ &= a^2 + 6a + 9 - 2a - 2\\ &= a^2 + 4a + 7\\ &= (a+2)^2 - 4 + 7\\ &= (a+2)^2 + 3 > 0, \forall a.\end{aligned}$$

  Với $a \neq -1$ phương trình luôn có nghiệm với mọi a.

Vậy phương trình luôn có nghiệm với mọi a.

□

4 HỆ THỨC VI-ÉT VÀ ỨNG DỤNG

4.1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

4.1.1 Hệ thức Vi-ét

Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 thì

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

★ **Áp dụng.**

- Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có $a + b + c = 0$ thì phương trình có hai nghiệm là $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{c}{a}$.
- Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có $a - b + c = 0$ thì phương trình có hai nghiệm là $x_1 = -1$, $x_2 = -\dfrac{c}{a}$.

Ví dụ 8. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{7}x^2 - \left(\sqrt{2} - \sqrt{5} + \sqrt{7}\right)x + \left(\sqrt{2} - \sqrt{5}\right) = 0.$

b) $\sqrt{3}x^2 - \left(\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{3}\right)x - \left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right) = 0.$

Lời giải.

a) $a = \sqrt{7}$, $b = -\left(\sqrt{2} - \sqrt{5} + \sqrt{7}\right)$, $c = \sqrt{2} - \sqrt{5}$.
Do $a + b + c = 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm là

$$x_1 = 1 \text{ và } x_2 = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{14} - \sqrt{35}}{7}.$$

b) $a = \sqrt{3}$, $b = -\left(\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{3}\right)$, $c = -\sqrt{2} - \sqrt{5}$.
Do $a - b + c = 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm là

$$x_1 = -1 \text{ và } x_2 = -\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{15}}{3}.$$

□

4.1.2 Tìm hai số biết tổng và tích của chúng

- Nếu hai số có tổng là S và tích bằng P thì hai số đó là nghiệm của phương trình

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

- Điều kiện để có hai số đó là $S^2 - 4P \geq 0$.

Ví dụ 9. Tìm hai số có tổng bằng 7 và tích bằng 2.

Lời giải.

Hai số cần tìm là nghiệm của phương trình $x^2 - 7x + 2 = 0$.

Xét $\Delta = 7^2 - 4 \cdot 2 = 41 > 0$. Khi đó phương trình trên có hai nghiệm là

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 + \sqrt{41}}{2} \text{ và } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 - \sqrt{41}}{2}.$$

Vậy hai số cần tìm là $\dfrac{7 + \sqrt{41}}{2}$ và $\dfrac{7 - \sqrt{41}}{2}$. □

4.2 BÀI TẬP

Bài 21. Cho phương trình $x^2 - 2x - 15 = 0$. Không giải phương trình, hãy tính

a) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$. b) $x_1^2 + x_2^2$. c) $|x_1 - x_2|$.

Lời giải.

Hệ số $a = 1$, $b = -2$, $c = -15$, khi đó $ac < 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa định lý Vi-ét

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = 2 \\ P = x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} = -15. \end{cases}$$

a) Ta có $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \dfrac{S}{P} = -\dfrac{2}{15}$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= \left(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2\right) - 2x_1x_2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \\ &= 2^2 - 2(-15) \\ &= 34. \end{aligned}$$

c) Đặt $C = |x_1 - x_2|$ với $C \geq 0$. Ta có

$$C^2 = |x_1 - x_2|^2$$

$$\begin{aligned} &= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \\ &= \left(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2\right) - 4x_1x_2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \\ &= 2^2 - 4(-15) \\ &= 64 \\ \Rightarrow C &= \sqrt{64} = 8. \end{aligned}$$

□

Bài 22. Cho phương trình $x^2 - \sqrt{3}x - 2 + \sqrt{6} = 0$. Số $\sqrt{2}$ có là nghiệm của phương trình đã cho không? Nếu có, tìm nghiệm còn lại.

Lời giải.

Thay $x = \sqrt{2}$ vào phương trình $x^2 - \sqrt{3}x - 2 + \sqrt{6} = 0$ ta có

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} - 2 + \sqrt{6} = 0 \text{ (luôn đúng)}.$$

Do đó $x = \sqrt{2}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 + x_2 = -\dfrac{-\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$.

Do $x_1 = \sqrt{2}$ nên $x_2 = \sqrt{3} - x_1 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

Vậy nghiệm còn lại của phương trình đã cho là $\sqrt{3} - \sqrt{2}$. □

Bài 23. Dùng điều kiện $a + b + c = 0$ hoặc $a - b + c = 0$ để nhẩm nghiệm của các phương trình:

a) $3x^2 - 8x + 5 = 0$.

b) $-\sqrt{7}x^2 + \left(\sqrt{7} - 2\right)x + 2 = 0$.

c) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}x^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3} + 1\right)x + 1 = 0$.

d) $x^2 - \left(\sqrt{2} - 5\right)x - \sqrt{2} + 4 = 0$.

e) $\left(3 - 2\sqrt{2}\right)x^2 + \left(2\sqrt{2} - 1\right)x - 2 = 0$.

f) $\left(\sqrt{5} - 1\right)^2 x^2 - \left(2\sqrt{5} - 1\right)x - 5 = 0$.

Lời giải.

a) Ta có $a = 3$, $b = -8$, $c = 5$.

Do $a + b + c = 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm là

$$x_1 = 1 \text{ và } x_2 = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}.$$

b) Ta có $a = -\sqrt{7}$, $b = \sqrt{7} - 2$, $c = 2$.

Do $a + b + c = 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm là

$$x_1 = 1 \text{ và } x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{-\sqrt{7}} = -\frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

c) Ta có $a = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $b = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + 1$, $c = 1$.

Do $a - b + c = 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm là

$$x_1 = -1 \text{ và } x_2 = -\frac{c}{a} = -\sqrt{3}.$$

d) Ta có $a = 1$, $b = -\sqrt{2} + 5$, $c = -\sqrt{2} + 4$.

Do $a - b + c = 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm là

$$x_1 = -1 \text{ và } x_2 = -\frac{c}{a} = 4 - \sqrt{2}.$$

e) Ta có $a = 3 - 2\sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{2} - 1$, $c = -2$.

Do $a + b + c = 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm là

$$x_1 = 1 \text{ và } x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-2}{3 - 2\sqrt{2}} = \frac{-2(3 + 2\sqrt{2})}{9 - 8} = -6 - 4\sqrt{2}.$$

f) Ta có $a = \left(\sqrt{5} - 1\right)^2 = 6 - 2\sqrt{5}$, $b = -2\sqrt{5} + 1$, $c = -5$.

Do $a - b + c = 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm là

$$x_1 = -1 \text{ và } x_2 = -\frac{c}{a} = \frac{5}{6 - 2\sqrt{5}} = \frac{5(6 + 2\sqrt{5})}{36 - 20} = \frac{30 + 10\sqrt{5}}{16}.$$

□

Bài 24. Cho phương trình $2x^2 + 8x + k = 0$ có một nghiệm bằng 3. Định k và tìm nghiệm còn lại của phương trình đã cho.

Lời giải.

Thay $x = 3$ vào phương trình $2x^2 + 8x + k = 0$ ta có

$$2 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 + k = 0 \Rightarrow k = -42.$$

Khi $k = -42$ phương trình đã cho trở thành $2x^2 + 8x - 42 = 0$.

Xét $\Delta = 8^2 - 4 \cdot 2(-42) = 400 > 0$. Khi đó phương trình đã cho có hai nghiệm là

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + 20}{2 \cdot 2} = 3 \text{ và } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - 20}{2 \cdot 2} = -7.$$

Vậy $k = -42$ và nghiệm còn lại của phương trình đã cho là -7. □

Bài 25. Xác định k để phương trình $x^2 + 5x + k = 0$ có hai nghiệm mà hiệu của chúng bằng 1.

Lời giải.

Hệ số $a = 1$, $b = 5$, $c = k$.

Ta có $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4k = 25 - 4k$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 25 - 4k \geq 0 \Leftrightarrow k \leq \dfrac{25}{4}$. $(*)$

Với $k \leq \dfrac{25}{4}$ phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa định lý Vi-ét $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = -5 \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = k. \end{cases}$

Giả sử $x_1 > x_2$, theo giả thiết $x_1 - x_2 = 1 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 1$.

Ta có

$$\begin{aligned} & (x_1 - x_2)^2 = 1 \\ \Leftrightarrow\ & x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 1 \\ \Leftrightarrow\ & (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1 \\ \Leftrightarrow\ & (-5)^2 - 4k = 1 \\ \Leftrightarrow\ & k = 6. \end{aligned}$$

So sánh với $(*)$ nhận $k = 6$ là giá trị cần tìm. □

Bài 26. Xác định k để phương trình $x^2 + 2x + k = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa:

a) $x_1 + x_2 = 0$.

b) $x_1x_2 = 1$.

Lời giải.

Hệ số $a = 1$, $b = 2$, $c = k$. Xét $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4k = 4 - 4k$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4 - 4k \geq 0 \Leftrightarrow k \leq 1$. $(*)$

Với $k \leq 1$ phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa định lý Vi-ét $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = -2 \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = k \end{cases}$.

a) Theo giả thiết $x_1 + x_2 = 0$ mà theo định lý Vi-ét $x_1 + x_2 = 2$.
Do đó không tìm được k thỏa mãn đề bài.

b) Theo giả thiết $x_1x_2 = 1 \Leftrightarrow k = 1$.
So sánh với $(*)$ nhận $k = 1$ là giá trị cần tìm.

□

Bài 27. Cho phương trình $x^2 - 4x + m + 1 = 0$.

a) Định m để phương trình đã cho có nghiệm.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

Lời giải.

Hệ số $a = 1$, $b = -4$, $c = m + 1$. Xét $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(m + 1) = -4m + 12$.

a) Phương trình đã cho có hai nghiệm khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -4m + 12 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 3$.
Vậy khi $m \leq 3$, phương trình đã cho có hai nghiệm. $(*)$

b) Với $m \leq 3$ phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa định lý Vi-ét $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = 4 \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = m + 1. \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} & x_1^2 + x_2^2 = 10 \\ \Leftrightarrow\ & (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10 \\ \Leftrightarrow\ & 4^2 - 2(m+1) = 10 \\ \Leftrightarrow\ & -2m + 14 = 10 \\ \Leftrightarrow\ & m = 2. \end{aligned}$$

So sánh với $(*)$ nhận $m = 2$ là giá trị cần tìm.

□

Bài 28. Tìm hai số m, n biết tổng S, tích P của chúng là:

a) $S = \dfrac{7}{6}$, $P = \dfrac{1}{3}$.

b) $S = -2\sqrt{3}$, $P = -1$.

Lời giải.

a) Hai số cần tìm là nghiệm của phương trình $x^2 - \dfrac{7}{6}x + \dfrac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 7x + 2 = 0$.
Xét $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 1 > 0$.
Khi đó phương trình trên có hai nghiệm là

$$x_1 = \frac{7+1}{2 \cdot 6} = \frac{2}{3} \text{ và } x_2 = \frac{7-1}{2 \cdot 6} = \frac{1}{2}.$$

Vậy hai số cần tìm là $m = \dfrac{2}{3}$ và $n = \dfrac{1}{2}$.

b) Hai số cần tìm là nghiệm của phương trình $x^2 + 2\sqrt{3}x - 1 = 0$.
Xét $\Delta = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 4(-1) = 16 > 0$.
Khi đó phương trình trên có hai nghiệm là

$$x_1 = \frac{-2\sqrt{3} + 4}{2 \cdot 1} = -\sqrt{3} + 2 \text{ và } x_2 = \frac{-2\sqrt{3} - 4}{2 \cdot 1} = -\sqrt{3} - 2.$$

Vậy hai số cần tìm là $m = -\sqrt{3} + 2$ và $n = -\sqrt{3} - 2$.

□

Bài 29. Lập một phương trình bậc hai có hai nghiệm là:

a) $\sqrt{3}$ và $\sqrt{5}$.

b) $\dfrac{3+2\sqrt{5}}{3}$ và $\dfrac{3-2\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải.

a) Ta có tổng $S = \sqrt{3} + \sqrt{5}$ và tích $P = \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15}$.
Khi đó $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0$.
Phương trình bậc hai cần tìm là $x^2 - \left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right) x + \sqrt{15} = 0$.

b) Ta có tổng $S = \dfrac{3+2\sqrt{5}}{3} + \dfrac{3-2\sqrt{5}}{3} = 2$.
Tích $P = \left(\dfrac{3+2\sqrt{5}}{3}\right)\left(\dfrac{3-2\sqrt{5}}{3}\right) = \dfrac{3^2 - (2\sqrt{5})^2}{9} = -\dfrac{11}{9}$.
Khi đó $\dfrac{3+2\sqrt{5}}{3}$, $\dfrac{3-2\sqrt{5}}{3}$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0$.
Phương trình bậc hai cần tìm là $x^2 - 2x - \dfrac{11}{9} = 0$.

□

Bài 30. Cho phương trình $x^2 + mx + 2 = 0 \quad (1)$ có các nghiệm là x_1, x_2. Lập một phương trình bậc hai có các nghiệm y_1, y_2 thỏa:

a) $y_1 = 2x_1$ và $y_2 = 2x_2$.

b) là số đối các nghiệm của phương trình (1).

c) $x_1 \cdot y_1 = 0$ và $x_2 \cdot y_2 = 1$.

Lời giải.

Phương trình (1) có $\Delta = m^2 - 8 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 \geq 8$.

Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa định lý Vi-ét $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1x_2 = 2. \end{cases}$

a) Với $y_1 = 2x_1$, $y_2 = 2x_2$. Khi đó ta có $\begin{cases} S = y_1 + y_2 = 2\left(x_1 + x_2\right) = -2m \\ P = y_1y_2 = 4x_1x_2 = 4 \cdot 2 = 8. \end{cases}$
Ta có y_1, y_2 là nghiệm của phương trình bậc hai $y^2 - Sy + P = 0$.
Vậy phương trình bậc hai cần tìm là $y^2 + 2my + 8 = 0$.

b) Với $y_1 = -x_1$, $y_2 = -x_2$. Khi đó ta có $\begin{cases} S = y_1 + y_2 = -\left(x_1 + x_2\right) = m \\ P = y_1y_2 = x_1x_2 = 2. \end{cases}$
Ta có y_1, y_2 là nghiệm của phương trình bậc hai $y^2 - Sy + P = 0$.
Vậy phương trình bậc hai cần tìm là $y^2 - my + 2 = 0$.

c) Với $y_1 = \dfrac{1}{x_1}$, $y_2 = \dfrac{1}{x_2}$. Khi đó ta có $\begin{cases} S = y_1 + y_2 = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\dfrac{m}{2} \\ P = y_1 y_2 = \dfrac{1}{x_1 x_2} = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Ta có y_1, y_2 là nghiệm của phương trình bậc hai $y^2 - Sy + P = 0$.

Vậy phương trình bậc hai cần tìm là $y^2 + \dfrac{m}{2} y + \dfrac{1}{2} = 0$.

□

Bài 31. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x - m = 0$. (1)

a) Chứng minh phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m.

b) Với $m = 1$, tìm một phương trình bậc hai có hai nghiệm là $x_1 + \dfrac{1}{x_2}$ và $x_2 + \dfrac{1}{x_1}$.

Lời giải.

a) Hệ số $a = 1$, $b = -2(m-1)$, $c = -m$.

Ta có $\Delta = b^2 - 4ac = 4(m-1)^2 - 4(-m) = 4m^2 - 4m + 4 = (2m-1)^2 + 3 > 0$, với mọi m.

Do đó phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m.

b) Với $m = 1$, phương trình (1) trở thành $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Hay phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = -1$.

Khi đó $y_1 = x_1 + \dfrac{1}{x_2} = 0$ và $y_2 = x_2 + \dfrac{1}{x_1} = 0$. Suy ra $\begin{cases} S = y_1 + y_2 = 0 \\ P = y_1 y_2 = 0 \end{cases}$.

y_1, y_2 là nghiệm của phương trình bậc hai $y^2 - Sy + P = 0$.

Vậy phương trình bậc hai cần tìm là $y^2 = 0$.

□

Bài 32. Cho phương trình $x^2 - 2x + m + 2 = 0$. (1)

a) Tìm điều kiện của m để phương trình (1) có nghiệm.

b) Tìm m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa:

- $x_1^2 + x_2^2 = 10$.
- $x_2 - x_1 = 2$.
- $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} = -\dfrac{10}{3}$.
- $x_1 x_2 - (x_1^2 + x_2^2) = -4$.

Lời giải.

a) Hệ số $a = 1$, $b = -2$, $c = m + 2$.

Ta có $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(m+2) = -4m - 4$.

Phương trình (1) luôn có nghiệm khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -4m - 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -1$. $(*)$

b) Với $m \leq -1$, phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa định lý Vi-ét

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = 2 \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = m + 2. \end{cases}$$

- Ta có

$$\begin{aligned} & x_1^2 + x_2^2 = 10 \\ \Leftrightarrow\ & (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10 \\ \Leftrightarrow\ & 2^2 - 2(m+2) = 10 \\ \Leftrightarrow\ & -2m = 10 \\ \Leftrightarrow\ & m = -5. \end{aligned}$$

  So sánh với $(*)$ ta nhận giá trị $m = -5$.

  Chú ý: Ta sử dụng $x_1^2 + x_2^2 = -2m$ cho các câu dưới.

- Ta có

$$\begin{aligned} & \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = -\frac{10}{3} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = -\frac{10}{3} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{-2m}{m+2} = -\frac{10}{3}\ (m \neq -2) \\ \Leftrightarrow\ & 6m = 10m + 20 \\ \Leftrightarrow\ & m = -5 \end{aligned}$$

  So sánh với $(*)$ ta nhận giá trị $m = -5$.

- Ta có

$$\begin{aligned} & (x_2 - x_1)^2 = 4 \\ \Leftrightarrow\ & (x_2 - x_1)^2 = 4 \\ \Leftrightarrow\ & x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 4 \\ \Leftrightarrow\ & x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 4 \\ \Leftrightarrow\ & -2m - 2(m+2) = 4 \\ \Leftrightarrow\ & -4m - 4 = 4 \\ \Leftrightarrow\ & m = -2. \end{aligned}$$

  So sánh với $(*)$ ta nhận giá trị $m = -2$.

- Ta có

$$\begin{aligned}
& x_1x_2 - \left(x_1^2 + x_2^2\right) = -4 \\
\Leftrightarrow\ & m + 2 - (-2m) = -4 \\
\Leftrightarrow\ & 3m = -6 \\
\Leftrightarrow\ & m = -2.
\end{aligned}$$

So sánh với $(*)$ ta nhận giá trị $m = -2$.

□

Bài 33. Cho phương trình $x^2 + 2(m-1)x - 2m + 5 = 0$. (1)

a) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm.

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $2x_1 + 3x_2 = -5$.

c) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 và $A = 12 - 10x_1x_2 - (x_1^2 + x_2^2)$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

a) Hệ số $a = 1$, $b = 2(m-1)$, $c = -2m + 5$.
Ta có $\Delta = b^2 - 4ac = 4(m-1)^2 - 4 \cdot (-2m+5) = 4m^2 - 16$.
Phương trình (1) có nghiệm khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 16 \geq 0 \Leftrightarrow 4(m-2)(m+2) \geq 0$
$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 \geq 0 \\ m + 2 \geq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} m - 2 \leq 0 \\ m + 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 2$ hoặc $m \leq -2$. $(*)$

b) Với điều kiện $(*)$, phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa định lý Vi-ét

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = -2(m-1) & (2) \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = -2m + 5. & (3) \end{cases}$$

Theo giả thiết,

$$\begin{aligned}
& 2x_1 + 3x_2 = -5 \\
\Leftrightarrow\ & 2(x_1 + x_2) + x_2 = -5 \\
\Leftrightarrow\ & -4(m-1) + x_2 = 5 \\
\Leftrightarrow\ & x_2 = 4m - 9. \quad (4)
\end{aligned}$$

Từ (4) suy ra $2x_1 = -5 - 3(4m-9) = -12m + 22 \Rightarrow x_1 = -6m + 11$.
Thế x_1, x_2 vào (3) ta được

$(-6m+11)(4m-9) = -2m+5 \Leftrightarrow 24m^2 - 100m + 104 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{13}{6} \\ m = 2. \end{array}\right.$

So sánh với $(*)$ ta nhận các giá trị $m = 2$, $m = \dfrac{13}{6}$ là các giá trị cần tìm.

c) Ta có

$$\begin{aligned}
A &= 12 - 10x_1x_2 - \left(x_1^2 + x_2^2\right) \\
&= 12 - 10P - \left(S^2 - 2P\right) \\
&= -S^2 - 8P + 12 \\
&= -4(m-1)^2 - 8(-2m+5) + 12 \\
&= -4(m^2 - 2m + 1) + 16m - 40 + 12 \\
&= -4m^2 + 24m - 32 \\
&= -(4m^2 - 2 \cdot 2m \cdot 6 + 36) + 4 \\
&= -(2m-6)^2 + 4 \leq 4
\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $2m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 3$. (thỏa $(*)$)

Vậy A đạt giá trị lớn nhất khi $m = 3$.

□

Bài 34. Cho phương trình $x^2 - (k-3)x + 2k + 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Tìm hệ thức giữa x_1, x_2 độc lập với k.

Lời giải.

Hệ số $a = 1$, $b = -(k-3)$, $c = 2k+1$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm thỏa định lý Vi-ét $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = k - 3 \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = 2k + 1. \end{cases}$

Ta có $2(x_1 + x_2) - x_1x_2 = 2k - 6 - 2k - 1 = -7$.

Vậy hệ thức cần tìm là $2(x_1 + x_2) - x_1x_2 = -7$. □

Bài 35. Cho phương trình $x^2 - 2(m-3)x - 2(m-1) = 0$.

a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình đã cho. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$.

c) Tìm hệ thức giữa x_1, x_2 không phụ thuộc m.

Lời giải.

a) Hệ số $a = 1$, $b = -2(m-3)$, $c = -2(m-1)$.
Ta có

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 4(m-3)^2 - 4[-2(m-1)] \\ &= 4m^2 - 16m + 28 \\ &= (4m^2 - 2\cdot 2m\cdot 4 + 16) + 12 \\ \Rightarrow \Delta &= (2m-4)^2 + 12 > 0, \forall m. \end{aligned}$$

Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Theo câu trên phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa định lý Vi-ét

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = 2(m-3) \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = -2(m-1). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A &= x_1^2 + x_2^2 \\ &= (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 \\ &= 4(m-3)^2 - 2[-2(m-1)] \\ &= 4m^2 - 20m + 32 \\ &= (4m^2 - 2\cdot 2m\cdot 5 + 25) + 7 \\ &= (2m-5)^2 + 7 \geq 7. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $2m - 5 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{5}{2}$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng 7 khi $m = \dfrac{5}{2}$.

c) Xét $x_1 + x_2 + x_1x_2 = 2(m-3) - 2(m-1) = 2m - 6 - 2m + 2 = -4$.
Vậy $x_1 + x_2 + x_1x_2 = -4$ là hệ thức cần tìm.

$\square$

Bài 36. Cho phương trình $x^2 - 2(m+4)x + m^2 - 8 = 0$. Định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho:

a) $x_1 + x_2 - x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất.

b) $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

c) Tìm hệ thức giữa x_1, x_2 không phụ thuộc m.

Lời giải.

Hệ số $a = 1$, $b = -2(m+4)$, $c = m^2 - 8$.

Ta có $\Delta = b^2 - 4ac = 4(m+4)^2 - 4(m^2-8) = 32m + 96$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 32m + 96 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -3$. $(*)$

Với $m \geq -3$, phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa định lý Vi-ét

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = 2(m+4) \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = m^2 - 8. \end{cases}$$

a) Đặt $A = x_1 + x_2 - x_1x_2$. Ta có

$$\begin{aligned} A &= 2m + 8 - m^2 + 8 \\ &= -m^2 - 2m + 16 \\ &= -\left(m^2 + 2m + 1\right) + 17 \\ &= -(m+1)^2 + 17 \leq 17. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$. (thỏa $(*)$)

Vậy giá trị lớn nhất của A bằng 17 khi $m = -1$.

b) Đặt $B = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$. Ta có

$$\begin{aligned} B &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - x_1x_2 \\ &= 4(m+4)^2 - 3\left(m^2 - 8\right) \\ &= m^2 + 32m + 88 \\ &= \left(m^2 + 2 \cdot m \cdot 16 + 16^2\right) - 16^2 + 88. \\ &= (m+16)^2 - 168. \end{aligned}$$

Theo $(*)$ ta có $m \geq -3 \Rightarrow m + 16 \geq 13 \Rightarrow (m+16)^2 \geq 13^2 \Rightarrow B \geq 1$.

Dấu "=" xảy ra khi $m = -3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của B bằng 1 khi $m = -3$.

c) Ta có $x_1 + x_2 = 2m + 8 \Rightarrow x_1 + x_2 - 8 = 2m$.

Khi đó $(x_1 + x_2 - 8)^2 - 4x_1x_2 = 4m^2 - 4(m^2 - 8) = 32$.

Vậy $(x_1 + x_2 - 8)^2 - 4x_1x_2 = 32$ là hệ thức cần tìm.

□

Bài 37. Cho phương trình $(m-1)x^2 - 2mx + m + 1 = 0$.

a) Chứng minh phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi $m \neq 1$.

b) Xác định m để $x_1x_2 = 5$, từ đó tính tổng $x_1 + x_2$.

c) Tìm m để x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} + \dfrac{5}{2} = 0$.

Lời giải.

Hệ số $a = m - 1$, $b = -2m$, $c = m + 1$.

a) Với $m \neq 1$, ta có $\Delta = b^2 - 4ac = 4m^2 - 4(m-1)(m+1) = 4m^2 - 4(m^2 - 1) = 4$.
Khi đó $\Delta > 0$ với mọi $m \neq 1$. Nên phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

b) Với $m \neq 1$, phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa định lý Vi-ét

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{2m}{m-1} \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{m+1}{m-1}. \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} & x_1x_2 = 5 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{m+1}{m-1} = 5 \\ \Leftrightarrow\ & m + 1 = 5(m-1) \\ \Leftrightarrow\ & 4m = 6 \\ \Leftrightarrow\ & m = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Với $m = \dfrac{3}{2}$ thì $x_1 + x_2 = 6$.

c) Ta có

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{5}{2} &= \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} + \frac{5}{2} \\ &= \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} + \frac{5}{2} \\ &= \frac{4m^2}{(m-1)^2} \cdot \frac{m-1}{m+1} - 2 + \frac{5}{2} \\ &= \frac{4m^2}{m^2 - 1} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{9m^2 - 1}{m^2 - 1}. \end{aligned}$$

Theo giả thiết với điều kiện $m \neq 1$ và $m \neq -1$ ta có

$\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} + \dfrac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{9m^2 - 1}{m^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{1}{3} \\ m = -\dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$

Vậy $m = \dfrac{1}{3}$ và $m = -\dfrac{1}{3}$ là các giá trị cần tìm.

$\square$

Bài 38. Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 2m + 10 = 0$. Tìm m sao cho phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

a) $10x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) $x_1 - 3x_2 = 4$.

c) $x_1^2 + 2(m+1)x_2 = 12$.

Lời giải.

Hệ số $a = 1$, $b = -2(m+1)$, $c = 2m + 10$.

Ta có $\Delta = b^2 - 4ac = 4(m+1)^2 - 4(2m+10) = 4m^2 - 36$.

Phương trình có hai nghiệm khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4(m-3)(m+3) \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 3$ hoặc $m \leq -3$. $(*)$

Theo định lý lý Vi-ét

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = 2(m+1) & (1) \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = 2m + 10. & (2) \end{cases}$$

a) Đặt

$$\begin{aligned} 10x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2 &= 10x_1x_2 + (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \\ &= 4(m+1)^2 + 8(2m+10) \\ &= 4m^2 + 24m + 84 \\ &= \left(4m^2 + 2 \cdot 2m \cdot 6 + 36\right) + 48 \\ &= (2m+6)^2 + 48 \geq 48. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $2m + 6 = 0 \Leftrightarrow m = -3$. (thỏa $(*)$)

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng 48 khi $m = -3$.

b) Ta có $x_1 - 3x_2 = 4 \Leftrightarrow x_1 = 3x_2 + 4$. (3)

Thế (3) vào (1) ta được $3x_2 + 4 + x_2 = 2m + 2 \Rightarrow 4x_2 = 2m - 2 \Rightarrow x_2 = \dfrac{1}{2}m - \dfrac{1}{2}$.

Từ (3) suy ra $x_1 = 3x_2 + 4 = \dfrac{3}{2}m + \dfrac{5}{2}$.

Thay x_1, x_2 vào (2) ta được

$\left(\dfrac{3}{2}m + \dfrac{5}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}m - \dfrac{1}{2}\right) = 2m + 10 \Leftrightarrow 3m^2 - 6m - 45 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 5 \\ m = -3. \end{array}\right.$

So sánh với $(*)$ nhận $m = 5$ và $m = -3$ là các giá trị cần tìm.

c) Ta có

$$x_1^2 + 2(m+1)x_2 = 12$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ x_1^2 + (x_1 + x_2)\, x_2 = 12 \\
&\Leftrightarrow\ x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 = 12 \\
&\Leftrightarrow\ 4(m+1)^2 - 2m - 10 = 12 \\
&\Leftrightarrow\ 4m^2 + 6m - 19 = 0 \\
&\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m = \dfrac{3}{2}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

So sánh với $(*)$ loại $m = \dfrac{3}{2}$, nhận $m = -3$ là giá trị cần tìm.

□

5 PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

5.1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

5.1.1 Phương trình trùng phương

Phương trình trùng phương là phương trình có dạng

$$ax^4 + bx^2 + c = 0\ (a \neq 0)$$

Đặt $x^2 = t$, phương trình trên trở thành: $at^2 + bt + c = 0$.

Ví dụ 10. Giải phương trình: $2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$.

Lời giải.

Đặt $x^2 = t$ $(t \geq 0)$ thì phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{aligned}
&\quad 2t^2 - 7t - 4 = 0 \\
&\Leftrightarrow\ (t-4)(2t+1) = 0 \\
&\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l} t - 4 = 0 \\ 2t + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \text{ (thỏa mãn)} \\ t = \dfrac{-1}{2} \text{ (loại)}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Với $t = 4$ thì $x^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 2; x = -2$. □

5.1.2 Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Khi giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức, ta làm như sau:

- Bước 1: Tìm điều kiện xác định của phương trình;
- Bước 2: Quy đồng mẫu thức hai vế rồi khử mẫu thức;
- Bước 3: Giải phương trình vừa nhận được;
- Bước 4: So với điều kiện để nhận hoặc loại nghiệm.

Ví dụ 11. Giải phương trình: $\dfrac{2}{x^2-4} - \dfrac{1}{x(x-2)} + \dfrac{x-4}{x(x+2)} = 0.$

Lời giải.

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x(x-2)} + \frac{x-4}{x(x+2)} = 0 \qquad (\text{ĐK: } x \neq \pm 2; x \neq 0) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{2x}{x(x+2)(x-2)} - \frac{x+2}{x(x-2)(x+2)} + \frac{(x-4)(x-2)}{x(x+2)(x-2)} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{2x-(x+2)+(x-4)(x-2)}{x(x+2)(x-2)} = 0 \\
\Rightarrow\ & 2x - x - 2 + x^2 - 6x + 8 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \text{ (thỏa mãn)} \\ x = 2 \text{ (loại).} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 3$. □

5.1.3 Phương trình tích

Ví dụ 12. Giải phương trình: $(x-2)\left(x^2+4x-1\right) = 0$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
& (x-2)\left(x^2+4x-1\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ x^2 + 4x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 + \sqrt{5} \\ x = -2 - \sqrt{5}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là $x = 2; x = -2 + \sqrt{5}; x = -2 - \sqrt{5}$. □

5.2 BÀI TẬP

Bài 39. Giải các phương trình sau:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;

b) $2x^4 - 3x^2 - 2 = 0$;

c) $3x^4 + 10x^2 + 3 = 0$;

d) $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$;

e) $5x^4 + 2x^2 - 16 = 10 - x^2$;

f) $0,3x^4 + 1,8x^2 + 1,5 = 0$;

g) $2x^2 + 1 = \dfrac{1}{x^2} - 4$.

Lời giải.

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Đặt $x^2 = t$ $(t \geq 0)$ thì phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{aligned} & t^2 - 5t + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (t-1)(t-4) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} & t - 1 = 0 \\ & t - 4 = 0 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & t = 1 \text{ (thỏa mãn)} \\ & t = 4 \text{ (thỏa mãn)}. \end{aligned}\right. \end{aligned}$$

- Với $t = 1 \Rightarrow \left[\begin{aligned} & x = 1 \\ & x = -1. \end{aligned}\right.$
- Với $x = 4 \Rightarrow \left[\begin{aligned} & x = 2 \\ & x = -2. \end{aligned}\right.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \pm 1; x = \pm 2$.

b) $2x^4 - 3x^2 - 2 = 0$

Đặt $x^2 = t$ $(t \geq 0)$ thì phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{aligned} & 2t^2 - 3t - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (t-2)(2t+1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} & t = 2 \text{ (thỏa mãn)} \\ & t = \frac{-1}{2} \text{ (loại)}. \end{aligned}\right. \end{aligned}$$

Với $t = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \pm\sqrt{2}$.

c) $3x^4 + 10x^2 + 3 = 0$

Ta có $3x^4 + 10x^2 \geq 0$ với mọi x.

$\Rightarrow 3x^4 + 10x^2 + 3 \geq 3$ với mọi x.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

d) $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$

Đặt $x^2 = t$ $(t \geq 0)$ thì phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{aligned} & 9t^2 - 10t + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (t-1)(9t-1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} & t = 1 \text{ (thỏa mãn)} \\ & t = \frac{1}{9} \text{ (thỏa mãn)}. \end{aligned}\right. \end{aligned}$$

- Với $t = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.
- Với $t = \dfrac{1}{9} \Rightarrow x = \pm\dfrac{1}{3}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \pm 1; x = \pm\dfrac{1}{3}$.

e) $5x^4 + 2x^2 - 16 = 10 - x^2 \Leftrightarrow 5x^4 + 3x^2 - 26 = 0$

Đặt $x^2 = t$ $(t \geq 0)$ thì phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{aligned} & 5t^4 + 3t - 26 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (t-2)(5x+13) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} t = 2 \text{ (thỏa mãn)} \\ t = \dfrac{-13}{5} \text{ (loại)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Với $t = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \pm\sqrt{2}$.

f) $0{,}3x^4 + 1{,}8x^2 + 1{,}5 = 0$

Đặt $x^2 = t$ $(t \geq 0)$ thì phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{aligned} & 0,3t^2 + 1,8t + 1,5 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & t^2 + 6t + 5 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (t+1)(t+5) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = -5 \text{ (loại)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

g) $2x^2 + 1 = \dfrac{1}{x^2} - 4$

- Xét $x = 0$.

  Thay $x = 0$ vào phương trình đã cho ta thấy $x = 0$ không là nghiệm.

- Xét $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} & 2x^2 + 1 = \frac{1}{x^2} - 4 \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2 + 5 - \frac{1}{x^2} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2x^4 + 5x^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Đặt $x^2 = t$ $(t \geq 0)$ thì phương trình trên trở thành:

$$2t^2 + 5t - 1 = 0$$

$$\Delta = 5^2 - 4\cdot 2\cdot(-1) = 33 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-5+\sqrt{33}}{4} \text{ (thỏa mãn)} \\ t = \dfrac{-5-\sqrt{33}}{4} \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

Với $t = \dfrac{-5+\sqrt{33}}{4} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{-5+\sqrt{33}}{4}}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \pm\sqrt{\dfrac{-5+\sqrt{33}}{4}}$.

□

Bài 40. Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{(x+3)(x-3)}{3} + 2 = x(1-x)$;

b) $\dfrac{x(x-7)}{3} - 1 = \dfrac{x}{2} - \dfrac{x-4}{3}$;

c) $\dfrac{x+2}{x-5} + 3 = \dfrac{6}{2-x}$;

d) $\dfrac{4}{x+1} = \dfrac{-x^2-x+2}{(x+1)(x+2)}$;

e) $\dfrac{14}{x^2-9} = 1 - \dfrac{1}{3-x}$;

f) $\dfrac{2x}{x+1} = \dfrac{x^2-x+8}{(x+1)(x+4)}$.

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned} & \frac{(x+3)(x-3)}{3} + 2 = x(1-x) \qquad (\text{ĐK: } x \in \mathbb{R}) \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 9 + 6 = 3x - 3x^2 \\ \Leftrightarrow\ & 4x^2 - 3x - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3+\sqrt{57}}{8} \text{ (thỏa mãn)} \\ x = \dfrac{3-\sqrt{57}}{8} \text{ (thỏa mãn)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \dfrac{3+\sqrt{57}}{8}; x = \dfrac{3-\sqrt{57}}{8}$.

b)

$$\begin{aligned} & \frac{x(x-7)}{3} - 1 = \frac{x}{2} - \frac{x-4}{3} \qquad (\text{ĐK: } x \in \mathbb{R}) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{2x(x-7)}{6} - \frac{6}{6} = \frac{3x}{6} - \frac{2(x-4)}{6} \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2 - 14x - 6 = 3x - 2x + 8 \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2 - 15x - 14 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{15+\sqrt{337}}{4} \text{ (thỏa mãn)} \\ x = \dfrac{15-\sqrt{337}}{4} \text{ (thỏa mãn)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \dfrac{15+\sqrt{337}}{4}; x = \dfrac{15-\sqrt{337}}{4}$.

c)

$$\begin{aligned}
& \frac{x+2}{x-5}+3=\frac{6}{2-x} \qquad (\text{ĐK: } x \neq 5; x \neq 2)\\
\Leftrightarrow\ & \frac{(x+2)(x-2)}{(x-5)(x-2)}+\frac{3(x-5)(x-2)}{(x-5)(x-2)}+\frac{6(x-5)}{(x-2)(x-5)}=0\\
\Rightarrow\ & x^2-4+3x^2-21x+30+6x-30=0\\
\Leftrightarrow\ & 4x^2-15x-4=0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} &x=4 \text{ (thỏa mãn)}\\ &x=\frac{-1}{4} \text{ (thỏa mãn).}\end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 4; x = \dfrac{-1}{4}$.

d)

$$\begin{aligned}
& \frac{4}{x+1}=\frac{-x^2-x+2}{(x+1)(x+2)} \qquad (\text{ĐK: } x \neq -1; x \neq -2)\\
\Leftrightarrow\ & \frac{4}{x+1}=\frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+2)}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{4}{x+1}=\frac{x-1}{x+1}\\
\Rightarrow\ & 4=x-1 \Leftrightarrow x=5 \text{ (thỏa mãn).}
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 5$.

e)

$$\begin{aligned}
& \frac{14}{x^2-9}=1-\frac{1}{3-x} \qquad (\text{ĐK: } x \neq 3; x \neq -3)\\
\Leftrightarrow\ & \frac{14}{(x+3)(x-3)}=\frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)(x-3)}+\frac{(x+3)}{(x-3)(x+3)}\\
\Rightarrow\ & 14=x^2-9+x+3\\
\Leftrightarrow\ & x^2+x-20=0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} &x=4 \text{ (thỏa mãn)}\\ &x=-5 \text{ (thỏa mãn).}\end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 4; x = -5$.

f)

$$\begin{aligned}
& \frac{2x}{x+1}=\frac{x^2-x+8}{(x+1)(x+4)} \qquad (\text{ĐK: } x \neq -1; x \neq -4)\\
\Rightarrow\ & 2x(x+4)=x^2-x+8\\
\Leftrightarrow\ & 2x^2+8x=x^2-x+8\\
\Leftrightarrow\ & x^2+9x-8=0
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-9+\sqrt{113}}{2} \text{ (thỏa mãn)} \\ x = \dfrac{-9-\sqrt{113}}{2} \text{ (thỏa mãn).} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \dfrac{-9+\sqrt{113}}{2}; x = \dfrac{-9-\sqrt{113}}{2}$.

□

Bài 41. Giải các phương trình:

a) $(3x^2 - 5x + 1)(x^2 - 4) = 0$;

b) $\left(2x^2 + x - 4\right)^2 - (2x - 1)^2 = 0$;

c) $(x - 3)^2 + (x + 4)^2 = 23 - 3x$.

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned} & \left(3x^2 - 5x + 1\right)\left(x^2 - 4\right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} 3x^2 - 5x + 1 = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2 - 5x + 1 = 0 \\ (x+2)(x-2) = 0 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5+\sqrt{13}}{6} \\ x = \dfrac{5-\sqrt{13}}{6} \\ x = 2 \\ x = -2. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \pm 2; x = \dfrac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$.

b)

$$\begin{aligned} & \left(2x^2 + x - 4\right)^2 - (2x - 1)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \left(2x^2 + x - 4\right)^2 = (2x - 1)^2 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{\left(2x^2 + x - 4\right)^2} = \sqrt{(2x - 1)^2} \\ \Leftrightarrow & |2x^2 + x - 4| = |2x - 1| \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} 2x^2 + x - 4 = 2x - 1 \\ 2x^2 + x - 4 = -2x + 1 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} 2x^2 - x - 3 = 0 \\ 2x^2 + 3x - 5 = 0 \end{array}\right. \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2} \\ x = -1 \\ x = 1 \\ x = \dfrac{-5}{2}. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \pm 1; x = \dfrac{3}{2}; x = \dfrac{-5}{2}$.

c)

$$\begin{aligned} & (x-3)^2 + (x+4)^2 = 23 - 3x \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 6x + 9 + x^2 + 8x + 16 - 23 + 3x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2 + 5x + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1}{2} \\ x = -2. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \dfrac{-1}{2}; x = -2$.

□

Bài 42. Giải phương trình bằng cách đưa về phương trình tích:

a) $(3x^2 - 7x - 10)\left[2x^2 + (1 - \sqrt{5})x + \sqrt{5} - 3\right] = 0$;

b) $x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0$;

c) $(x^2 - 1)(0,6x + 1) = 0,6x^2 + x$;

d) $(x^2 + 2x - 5)^2 = (x^2 - x + 5)^2$.

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned} & \left(3x^2 - 7x - 10\right)\left[2x^2 + (1 - \sqrt{5})x + \sqrt{5} - 3\right] = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 3x^2 - 7x - 10 = 0 \\ 2x^2 + (1 - \sqrt{5})x + \sqrt{5} - 3 = 0 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} (3x - 10)(x + 1) = 0 \\ 2x^2 + (1 - \sqrt{5})x + \sqrt{5} - 3 = 0 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{10}{3} \\ x = -1 \\ 2x^2 + (1 - \sqrt{5})x + \sqrt{5} - 3 = 0. \quad (*) \end{array}\right. \end{aligned}$$

Giải $(*)$: $\Delta = (x-\sqrt{5})^2 - 4\cdot 2\cdot(\sqrt{5}-3) = 30 - 10\sqrt{5} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = -1; x = \dfrac{10}{3}; x = 1; x = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$.

b)

$$\begin{aligned} & x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2\cdot(x+3) - 2\cdot(x+3) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x+3)\cdot(x^2-2) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x+3=0 \\ x^2-2=0 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=\pm\sqrt{2}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = -3; x = \pm\sqrt{2}$.

c)

$$\begin{aligned} & \left(x^2-1\right)(0,6x+1) = 0,6x^2 + x \\ \Leftrightarrow\ & (x^2-1)(0,6x+1) - x(0,6x+1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (0,6x+1)(x^2-1-x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 0,6x+1=0 \\ x^2-x-1=0 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-5}{3} \\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \dfrac{-5}{3}; x = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

d)

$$\begin{aligned} & \left(x^2+2x-5\right)^2 = \left(x^2-x+5\right)^2 \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{\left(x^2+2x-5\right)^2} = \sqrt{\left(x^2-x+5\right)^2} \\ \Leftrightarrow\ & |x^2+2x-5| = |x^2-x+5| \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x^2+2x-5 = x^2-x+5 \\ x^2+2x-5 = -x^2+x-5 \end{array}\right. \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x = 10\\ 2x^2 + x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{10}{3}\\ x = 0\\ x = \dfrac{-1}{2}.\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \dfrac{10}{3}; x = 0; x = \dfrac{-1}{2}$.

□

Bài 43. Giải phương trình bằng cách đặt ẩn phụ:

a) $3\left(x^2 + x\right)^2 - 2\left(x^2 + x\right) - 1 = 0$;

b) $\left(x^2 - 4x + 2\right)^2 + x^2 - 4x - 4 = 0$;

c) $x - \sqrt{x} = 5\sqrt{x} + 7$;

d) $\dfrac{x}{x+1} - 10 \cdot \dfrac{x+1}{x} = 3$.

Lời giải.

a) $3\left(x^2 + x\right)^2 - 2\left(x^2 + x\right) - 1 = 0$

Đặt $x^2 + x = t$ thì phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} & 3t^2 - 2t - 1 = 0\\ \Leftrightarrow\ & (t-1)(3t+1) = 0\\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}t = 1\\ t = \dfrac{-1}{3}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

- Với $t = 1 \Rightarrow x^2 + x = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\\ x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}.\end{array}\right.$
- Với $t = \dfrac{-1}{3}$:
  $\Rightarrow x^2 + x = \dfrac{-1}{3} \Leftrightarrow x^2 + x + \dfrac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot x \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{12} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{12} = 0.$
  Phương trình này vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

b) $\left(x^2 - 4x + 2\right)^2 + x^2 - 4x - 4 = 0$

Đặt $x^2 - 4x + 2 = t$ thì phương trình đã cho trở thành:

$$t^2 + t - 6 = 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow\ (t-2)(t+3)=0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-3. \end{array}\right. \end{aligned}$$

- Với $t=2 \Rightarrow x^2-4x+2=2 \Leftrightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4. \end{array}\right.$
- Với $t=-3 \Rightarrow x^2-4x+2=-3 \Leftrightarrow x^2-4x+5=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+1=0$
  Phương trình này vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=0; x=4$.

c)

$$\begin{aligned} & x-\sqrt{x}=5\sqrt{x}+7 \qquad (\text{ĐK: } x \geq 0) \\ \Leftrightarrow\ & x-6\sqrt{x}-7=0. \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{x}=t$ $(t \geq 0)$ thì phương trình đã cho có dạng:

$$\begin{aligned} & t^2-6t-7=0 \\ \Leftrightarrow\ & (t-7)(t+1)=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} t=7 \text{ (thỏa mãn)} \\ t=-1 \text{ (loại).} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Với $t=7 \Rightarrow x^2=7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{7} \text{ (thỏa mãn)} \\ x=-\sqrt{7} \text{ (loại).} \end{array}\right.$
Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=\sqrt{7}$.

d)

$$\begin{aligned} & \frac{x}{x+1}-10\cdot\frac{x+1}{x}=3 \qquad (\text{ĐK: } x \neq -1; x \neq 0) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x}{x+1}-10:\frac{x}{x+1}-3=0 \end{aligned}$$

Đặt $\dfrac{x}{x+1}=t$ $(t \neq 0)$ thì phương trình trên có dạng

$$\begin{aligned} & t-\frac{10}{t}-3=0 \\ \Leftrightarrow\ & t^2-10-3t=0 \\ \Leftrightarrow\ & (t-5)(t+2)=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} t=5 \text{ (thỏa mãn)} \\ t=-2 \text{ (thỏa mãn).} \end{array}\right. \end{aligned}$$

- Với $t = 5 \Rightarrow \dfrac{x}{x+1} = 5 \Rightarrow x = 5x + 5 \Leftrightarrow x = \dfrac{-5}{4}$. (thỏa mãn)
- Với $t = -2 \Rightarrow \dfrac{x}{x+1} = -2 \Rightarrow x = -2x - 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{-2}{3}$. (thỏa mãn)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \dfrac{-5}{4}; x = \dfrac{-2}{3}$.

□

Bài 44. Giải các phương trình sau:

a) $x^4 + 80x^2 - 81 = 0$;

b) $2x^4 - 452x^2 + 450 = 0$;

c) $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16$;

d) $2x^4 + (1-2x)^4 = \dfrac{1}{27}$;

e) $(x^2+5x)^2 - 2(x^2+5x) - 24 = 0$;

f) $(2-x^2)^2 + 3(2-x^2) + 2 = 0$;

g) $(x^2+x+6)(x^2+x+3) = 6$;

h) $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12) = 4x^2$;

i) $(x-7)(x-5)(x-4)(x-2) = 72$;

j) $x^3 + \dfrac{1}{x^3} + x^2 + \dfrac{1}{x^2} + x + \dfrac{1}{x} = 6$.

Lời giải.

a) $x^4 + 80x^2 - 81 = 0$

Đặt $x^2 = t$ $(t \geq 0)$ thì phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned}
& t^2 + 80t - 81 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (t-1)(t+81) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} t = 1 \text{ (thỏa mãn)} \\ t = -81 \text{ (loại).} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Với $t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \pm 1$.

b) $2x^4 - 452x^2 + 450 = 0$

Đặt $x^2 = t$ $(t \geq 0)$ thì phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned}
& 2t^2 - 452t + 450 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & t^2 - 226t + 225 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (t-1)(t-225) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} t = 1 \text{ (thỏa mãn)} \\ t = 225 \text{ (thỏa mãn).} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

- Với $t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

- Với $t = 225 \Rightarrow x^2 = 225 \Leftrightarrow x = \pm 15$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \pm 1; x = \pm 15$.

c) $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16$

Đặt $x + 4 = t$ thì phương trình đã cho có dạng

$$\begin{aligned}
& (t-1)^4 + (t+1)^4 = 16 \\
\Leftrightarrow\ & (t^2 - 2t + 1)^2 + (t^2 + 2t + 1)^2 = 16 \\
\Leftrightarrow\ & t^4 + 4t^2 + 1 - 4t^3 + 2t^2 - 4t + t^4 + 4t^2 + 1 + 4t^3 + 2t^2 + 4t = 16 \\
\Leftrightarrow\ & 2t^4 + 8t^2 + 2 + 4t^2 = 16 \\
\Leftrightarrow\ & t^4 + 6t^2 - 7 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (t^2 + 7)(t^2 - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} t^2 + 7 = 0 \text{ (Vô nghiệm)} \\ t^2 - 1 = 0 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} t - 1 = 0 \\ t + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

- Với $t = 1 \Rightarrow x + 4 = 1 \Leftrightarrow x = -3$.
- Với $t = -1 \Rightarrow x + 4 = -1 \Leftrightarrow x = -5$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = -3; x = -5$.

d)

$$\begin{aligned}
& 2x^4 + (1-2x)^4 = \frac{1}{27} \\
\Leftrightarrow\ & 3x^4 - x^4 + (1-2x)^4 = \frac{1}{27} \\
\Leftrightarrow\ & 3\left(x^4 - \frac{1}{81}\right) = x^4 - (1-2x)^4 \\
\Leftrightarrow\ & 3\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x^2 + \frac{1}{9}\right) = \left[x^2 - (1-2x)^2\right]\left[x^2 + (1-2x)^2\right] \\
\Leftrightarrow\ & 3\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x^2 + \frac{1}{9}\right) = (-3x^2 + 4x - 1)\left[x^2 + (1-2x)^2\right] \\
\Leftrightarrow\ & 3\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x^2 + \frac{1}{9}\right) = -(x-1)(3x-1)\left[x^2 + (1-2x)^2\right] \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 3\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \\ \left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x^2 + \frac{1}{9}\right) = (1-x)\left[x^2 + (1-2x)^2\right] \quad (*) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Giải $(*)$:

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x^2 + \frac{1}{9}\right) = (1-x)\left[x^2 + (1-2x)^2\right]$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow x^3+\frac{x}{9}+\frac{x^2}{3}+\frac{1}{27}=(1-x)(5x^2+1-4x)\\
&\Leftrightarrow x^3+\frac{x}{9}+\frac{x^2}{3}+\frac{1}{27}=5x^2+1-4x-5x^3-x+4x^2\\
&\Leftrightarrow 6x^3-\frac{26x^2}{3}+\frac{46x}{9}-\frac{26}{27}=0\\
&\Leftrightarrow x^3-\frac{13x^2}{9}+\frac{23x}{27}-\frac{13}{81}=0\\
&\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x^2-\frac{10x}{9}+\frac{13}{27}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{1}{3}=0\\ x^2-\frac{10x}{9}+\frac{13}{27}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{3}\\ \left(x-\frac{5}{9}\right)^2+\frac{14}{81}=0.\ \text{(Vô nghiệm)}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \frac{1}{3}$.

e) $(x^2+5x)^2 - 2(x^2+5x) - 24 = 0$

Đặt $x^2 + 5x = t$ thì phương trình đã cho có dạng

$$\begin{aligned}
&t^2-2t-24=0\\
\Leftrightarrow\ &(t-6)(t+4)=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} t=6\\ t=-4.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

- Với $t = 6 \Rightarrow x^2+5x=6 \Leftrightarrow (x-1)(x+6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\\ x=-6.\end{array}\right.$
- Với $t = -4 \Rightarrow x^2+5x=-4 \Leftrightarrow (x+1)(x+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\\ x=-4.\end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \pm 1; x = -6; x = -4$.

f) $(2-x^2)^2 + 3(2-x^2) + 2 = 0$

Đặt $2 - x^2 = t$ thì phương trình đã cho có dạng

$$\begin{aligned}
&t^2+3t+2=0\\
\Leftrightarrow\ &(t+1)(t+2)=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} t=-1\\ t=-2.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

- Với $t = -1 \Rightarrow 2-x^2=-1 \Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$.
- Với $t = -2 \Rightarrow 2-x^2=-2 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \pm\sqrt{3}; x = \pm 2$.

g) $(x^2 + x + 6)(x^2 + x + 3) = 6$
Đặt $x^2 + x + 3 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} = t$ $(t > 0)$ thì phương trình đã cho có dạng

$$\begin{aligned} & (t+3)\cdot t = 6 \\ \Leftrightarrow\ & t^2 + 3t - 6 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-3+\sqrt{33}}{2} \text{ (thỏa mãn)} \\ t = \dfrac{-3-\sqrt{33}}{2} \text{ (loại).} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Với $t = \frac{-3+\sqrt{33}}{2} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} = \frac{-3+\sqrt{33}}{2} \Leftrightarrow 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{17}{2} - \sqrt{33} = 0$. (VN)
Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

h)

$$\begin{aligned} & (x+2)(x+3)(x+8)(x+12) = 4x^2 \\ \Leftrightarrow\ & [(x+2)(x+12)]\cdot[(x+3)(x+8)] = 4x^2 \\ \Leftrightarrow\ & (x^2 + 14x + 24)\cdot(x^2 + 11x + 24) = 4x^2. \end{aligned}$$

Ta thấy $x = 0$ không là nghiệm nên chia 2 vế của phương trình cho x^2 ta được

$$(x + 14 + \frac{24}{x})\cdot(x + 11 + \frac{24}{x}) = 4$$

Đặt $x + \frac{24}{x} = t$ thì phương trình trên có dạng

$$\begin{aligned} & (t+14)(t+11) = 4 \\ \Leftrightarrow\ & t^2 + 25t + 150 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (t+10)(t+15) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} t = -10 \\ t = -15. \end{array}\right. \end{aligned}$$

- Với $t = -10 \Rightarrow x + \frac{24}{x} = -10 \Leftrightarrow x^2 + 10x + 24 = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x+6) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = -6. \end{array}\right.$
- Với $t = -15 \Rightarrow x + \frac{24}{x} = -15 \Leftrightarrow x^2 + 15x + 24 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-15+\sqrt{129}}{2} \\ x = \dfrac{-15-\sqrt{129}}{2}. \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = -4; x = -6; x = \frac{-15 \pm \sqrt{129}}{2}$.

i)

$$\begin{aligned}
&(x-7)(x-5)(x-4)(x-2) = 72 \\
\Leftrightarrow\ &[(x-7)(x-2)] \cdot [(x-5)(x-4)] = 72 \\
\Leftrightarrow\ &(x^2-9x+14)(x^2-9x+20) = 72.
\end{aligned}$$

Đặt $x^2 - 9x + 14 = t$ thì phương trình trên có dạng

$$\begin{aligned}
&t(t+6) = 72 \\
\Leftrightarrow\ &t^2 + 6t - 72 = 0 \\
\Leftrightarrow\ &(t-6)(t+12) = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} t = 6 \\ t = -12. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

- Với $t = 6 \Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 6 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 8. \end{array}\right.$
- Với $t = -12 \Rightarrow x^2 - 9x + 14 = -12 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 26 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \dfrac{9}{2}\right)^2 + \dfrac{23}{4} = 0$. (VN)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 1; x = 8$.

j)

$$\begin{aligned}
&x^3 + \frac{1}{x^3} + x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = 6 \\
\Leftrightarrow\ &\left(x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x + \frac{3}{x}\right) - 3x - \frac{3}{x} + \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) = 6 \\
\Leftrightarrow\ &\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 8 = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 8 = 0.
\end{aligned}$$

Đặt $\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = t$ thì phương trình trên có dạng

$$\begin{aligned}
&t^3 + t^2 - 2t - 8 = 0 \\
\Leftrightarrow\ &(t-2)(t^2+3t+4) = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t^2 + 3t + 4 = 0 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} t = 2 \\ \left(t + \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{4} = 0. \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Với $t = 2 \Rightarrow x + \dfrac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 1$.

□

6 GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

6.1 VÍ DỤ

Ví dụ 13. Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc. Thời gian để đội I làm một mình xong công việc ít hơn thời gian để đội II làm một mình xong công việc đó là 4 giờ. Tổng thời gian này gấp 4,5 lần thời gian hai đội cùng làm chung để xong công việc đó. Hỏi mỗi đội làm một mình thì phải bao lâu mới xong?

Lời giải.

Gọi x là số giờ để đội I một mình làm xong công việc $(x > 0)$. Khi đó, thời gian đội II làm một mình xong việc là $x + 4$ giờ.

Nếu hai đội làm chung thì mỗi giờ làm được $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+4}$ khối lượng công việc. Suy ra, thời gian để hai đội làm chung xong công việc đó là

$$1 : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4}\right) = \frac{x^2 + 4x}{2x + 4}.$$

Do tổng thời gian cả hai đội làm một mình xong công việc gấp 4,5 lần thời gian cả hai đội làm chung xong công việc nên

$$\frac{x + x + 4}{4{,}5} = \frac{x^2 + 4x}{2x + 4} \Leftrightarrow 0{,}5x^2 + 2x - 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = 4 \\ &x = -8. \end{aligned}\right.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 4$. Như vậy, nếu làm một mình thì hai đội I và II lần lượt mất 4 giờ và 8 giờ để hoàn thành công việc. □

6.2 BÀI TẬP

Bài 45. Tìm hai số biết rằng số lớn hơn số bé 5 đơn vị và tổng các bình phương của chúng bằng 4153.

Lời giải.

Gọi số lớn là x thì số bé là $x - 5$. Khi đó, theo giả thiết, ta có

$$x^2 + (x-5)^2 = 4153 \Leftrightarrow 2x^2 - 10x - 4128 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = 48 \\ &x = -43. \end{aligned}\right.$$

Vậy hai số cần tìm là 48 và 43 hoặc -43 và -48. □

Bài 46. Một trường dự tính phát đều 280 quyển vở cho học sinh tiên tiến. Nhưng khi phát có 3 học sinh vắng mặt. Vì vậy mỗi học sinh nhận được nhiều hơn 12 quyển vở. Hỏi số học sinh dự tính lúc đầu là bao nhiêu em?

Lời giải.

Gọi x là số học sinh dự tính lúc ban đầu ($x \in \mathbb{N}^*$). Khi đó, số quyển vở mỗi học sinh nhận được như dự tính và thực tế lần lượt là $\dfrac{280}{x}$ và $\dfrac{280}{x-3}$. Theo giả thiết, ta có

$$\begin{aligned}\frac{280}{x-3} - \frac{280}{x} = 12 &\Leftrightarrow 70x - 70(x-3) = 3x(x-3)\\ &\Leftrightarrow 3x^2 - 9x - 210 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10 \\ x = -7. \end{array}\right.\end{aligned}$$

Dựa vào điều kiện, số học sinh cần tìm là 10. □

Bài 47. Một mảnh đất hình chữ nhật có hiệu hai cạnh là 12 m. Tính chu vi của mảnh đất đó biết rằng diện tích của nó là 640 m^2.

Lời giải.

Gọi chiều dài của mảnh đất là x m ($x > 12$). Khi đó, chiều rộng và diện tích mảnh đất lần lượt là $x - 12$ m và $x(x-12)$ m^2. Do đó, ta có phương trình

$$x(x-12) = 640 \Leftrightarrow x^2 - 12x - 640 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 32 \\ x = -20. \end{array}\right.$$

Dựa vào điều kiện, ta có chiều dài và chiều rộng của mảnh đất lần lượt là 32 m và 20 m. Suy ra chu vi mảnh đất là $2(20+32) = 104$ m. □

Bài 48. Một tam giác vuông có chu vi là 36. Cạnh huyền là 15. Tính độ dài hai cạnh góc vuông.

Lời giải.

Gọi độ dài một cạnh góc vuông là x ($x > 0$). Độ dài cạnh góc vuông còn lại $36 - 15 - x = 21 - x$. Theo định lí Pythagoras, ta có

$$x^2 + (21-x)^2 = 15^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 42x + 216 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 12 \\ x = 9. \end{array}\right.$$

Vậy độ dài hai cạnh góc vuông lần lượt là 9 và 12. □

Bài 49. Một thửa ruộng hình tam giác có diện tích là 180 m^2. Tính cạnh đáy của thửa ruộng biết rằng nếu tăng cạnh đáy đó thêm 4 m và giảm chiều cao tương ứng đi 1 m thì diện tích thửa ruộng không thay đổi.

Lời giải.

Gọi x m là độ dài cạnh đáy của thửa ruộng ($x > 0$). Khi đó, $\dfrac{360}{x}$ m là độ dài chiều cao tương ứng. Do tăng cạnh đáy đó thêm 4 m và giảm chiều cao tương ứng đi 1 m thì diện tích thửa ruộng không thay đổi nên

$$\frac{1}{2}(x+4)\left(\frac{360}{x} - 1\right) = 180 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 1440 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 36 \\ x = -40. \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện, ta được cạnh đáy của thửa ruộng là 36 m. □

Bài 50. Một khu vườn hình chữ nhật có diện tích 600 m^2. Tính các kích thước của khu vườn biết rằng nếu giảm bớt mỗi cạnh đi 4 m thì diện tích còn lại là 416 m^2.

Lời giải.

Gọi x m là một kích thước của khu vườn $(x > 0)$. Khi đó, kích thước còn lại là $\dfrac{600}{x}$. Do giảm bớt mỗi cạnh đi 4 m thì diện tích còn lại là 416 m^2 nên

$$(x-4)\left(\frac{600}{x}-4\right)=0 \Leftrightarrow 4x^2-200x+2400=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=30 \\ x=20. \end{array}\right.$$

Vậy các kích thước của khu vườn là 30 m và 20 m. □

Bài 51. Một lâm trường dự định trồng 75 ha rừng trong một số tuần lễ. Do mỗi tuần trồng vượt mức 5 ha so với kế hoạch nên đã trồng được 80 ha và hoàn thành sớm hơn một tuần so với dự định. Hỏi lâm trường dự định mỗi tuần trồng bao nhiêu ha rừng.

Lời giải.

Gọi x là số ha mà lâm trường dự định trồng mỗi tuần $(x > 0)$. Khi đó, thời gian để hoàn thành theo dự tính là $\dfrac{75}{x}$ tuần. Tuy nhiên, thực tế mỗi tuần lâm trường trồng được $x+5$ ha và thời gian hoàn thành là $\dfrac{80}{x+5}$, sớm hơn dự tính 1 tuần. Do đó

$$\frac{80}{x+5}+1=\frac{75}{x} \Leftrightarrow x^2+10x-375=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=15 \\ x=-25. \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện, ta được 15 là số ha mà lâm trường dự định trồng mỗi tuần. □

Bài 52. Hai công nhân làm chung thì hoàn thành một công việc trong 4 ngày. Người thứ nhất làm được nửa công việc và sau đó người thứ hai làm hết công việc còn lại thì toàn bộ công việc làm xong trong 9 ngày. Hỏi mỗi người nếu làm riêng sẽ hoàn thành toàn bộ công việc đó trong bao lâu?

Lời giải.

Gọi x (ngày) là thời gian để người thứ nhất tự mình hoành thành công việc $(x > 4)$. Khi đó, mỗi ngày người này hoàn thành được $\dfrac{1}{x}$ công việc và mất $\dfrac{x}{2}$ ngày để làm được một nửa công việc. Do hai người làm chung trong 4 ngày thì xong việc nên mỗi ngày người thứ hai làm được $\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-4}{4x}$ khối lượng công việc. Kéo theo, một nửa công việc còn lại, người này làm trong $\dfrac{1}{2}:\dfrac{x-4}{4x}=\dfrac{2x}{x-4}$ ngày. Từ đó, ta có phương trình

$$\frac{1}{2x}+\frac{2x}{x-4}=9 \Leftrightarrow x^2-18x+72=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=12 \\ x=6. \end{array}\right.$$

Nếu $x=12$ thì $\dfrac{x-4}{4x}=\dfrac{1}{6}$, do đó người thứ nhất và người thứ hai lần lượt tự mình hoàn thành công việc trong 12 ngày và 6 ngày.

Nếu $x = 6$ thì $\dfrac{x-4}{4x} = \dfrac{1}{12}$, do đó người thứ nhất và người thứ hai lần lượt tự mình hoàn thành công việc trong 6 ngày và 12 ngày. □

Bài 53. Một ca nô xuôi một khúc sông dài 50 km rồi ngược dòng sông về lại vị trí ban đầu hết 5 giờ. Tính vận tốc của ca nô biết rằng vận tốc dòng nước là 4 km/h.

Lời giải.

Gọi x km/h là vận tốc của ca nô ($x > 4$). Khi đó, thời gian để ca nô đi xuôi dòng và ngược dòng trên khúc sông đó lần lượt là $\dfrac{50}{x+4}$ giờ và $\dfrac{50}{x-4}$ giờ. Do tổng thời gian di chuyển là 5 giờ nên

$$\frac{50}{x+4} + \frac{50}{x-4} = 5 \Leftrightarrow 5x^2 - 100x - 80 = 0 \Leftrightarrow x = 10 \pm 2\sqrt{29}.$$

Kết hợp với điều kiện, ta được vận tốc của ca nô là $10 + 2\sqrt{29}$ km/h. □

Bài 54. Một xe đi từ A đến B cách nhau 24 km. Khi đi từ B về A, do ngược gió nên vận tốc giảm đi 4 km/h và thời gian về lâu hơn thời gian đi là 1 giờ. Tính vận tốc của xe lúc đi.

Lời giải.

Gọi x km/h là vận tốc của xe lúc đi ($x > 4$). Thời gian để xe đi từ A đến B và từ B về A lần lượt là $\dfrac{24}{x}$ và $\dfrac{24}{x-4}$. Do thời gian về lâu hơn 1 giờ nên

$$\frac{24}{x} + 1 = \frac{24}{x-4} \Leftrightarrow x^2 - 4x - 96 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 12 \\ x = -8. \end{array}\right.$$

Vậy vận tốc của xe lúc đi là 12 km/h. □

7 MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TẾ

Bài 55 (Đề thi HKI – Quận 3 – Năm học 2016 – 2017).

Gia đình ông Sáu gồm 4 người, trong tháng 11 năm 2020, sẽ sử dụng 27 m^3 nước. Biết rằng định mức tiêu thụ nước của mỗi người là 4 m^3/người/tháng và đơn giá được tính theo bảng sau:

Khối lượng sử dụng (m^3)	**Giá cước** (đồng/m^3)
Đến 4 m^3/người/tháng	5 300
Trên 4 đến 6 m^3/người/tháng	10 200
Trên 6 m^3/người/tháng	11 400

Biết số tiền phải trả trong hóa đơn đã bao gồm 5% thuế giá trị gia tăng và 10% phí bảo vệ môi trường. Hỏi tháng 11 năm 2020, gia đình ông Sáu phải trả theo hóa đơn là bao nhiêu tiền?

Lời giải.

Gia đình ông Sáu gồm 4 người và sử dụng 27 m^3 nước, do đó trung bình mỗi người đã sử dụng $6,75$ m^3 nước.

Khi đó số tiền nước của mỗi người là $4 \cdot 5300 + 2 \cdot 10200 + 0,75 \cdot 11400 = 50150$ đồng.
Vậy số tiền nước nhà ông Sáu phải trả tính luôn cả 15% thuế là

$$4 \cdot 50150\,(1 + 15\%) = 230690 \text{ đồng.}$$

□

Bài 56. Hai hãng xe taxi A và B đưa ra bảng giá vận chuyển hành khách của hai hãng taxi A và B như sau:

- Hãng taxi A đưa ra giá cước là 10 ngàn đồng/km và phụ thu thêm 15 ngàn đồng.
- Hãng taxi B đưa ra giá cước là 12 ngàn đồng/km.

a) Viết công thức và vẽ đồ thị về giá cước của hai hãng taxi trên.

b) Đi quãng đường dài bao nhiêu thì giá tiền của hai hãng taxi bằng nhau?

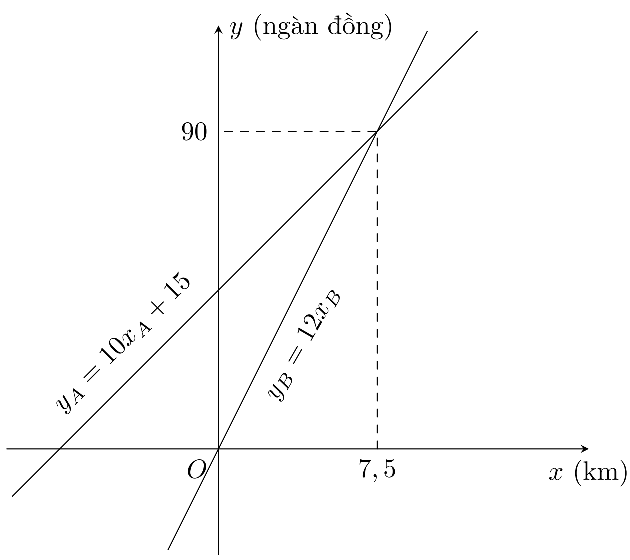
c) Với quãng đường dài 50km thì khách hàng nên chọn hãng taxi nào có lợi hơn?

Lời giải.

Gọi x là số km khách hàng đã đi taxi và y là số tiền khách hàng phải trả cho taxi.

a)

Số tiền khách hàng phải trả khi đi hãng taxi A: $y_A = 10x_A + 15$ (ngàn đồng).
Số tiền khách hàng phải trả khi đi hãng taxi B: $y_B = 12x_B$ (ngàn đồng).
Khi đó ta có đồ thị:



b) Dựa vào đồ thị ta thấy nếu đi với khoảng cách $x = 7{,}5$ km thì giá tiền phải trả của hai hãng taxi là bằng nhau.

c) Dựa vào đồ thị, nếu đi với khoảng cách $> 7{,}5$ km thì số tiền phải trả của hãng A thấp hơn hãng B. Do đó nếu đi với khoảng cách 50 km thì hãng A có lợi hơn.

□

Bài 57. Cho bảng biểu thuế lũy tiến từng phần như sau:

Bậc	Thu nhập tính thuế/tháng	Thuế suất
1	Đến 5 triệu đồng	5%
2	Trên 5 trđ đến 10 trđ	10%
3	Trên 10 trđ đến 18 trđ	15%
4	Trên 18 trđ đến 32 trđ	20%
5	Trên 32 trđ đến 52 trđ	25%
6	Trên 52 trđ đến 80 trđ	30%
7	Trên 80 trđ	35%

a) Hỏi trong tháng 1 ông A có thu nhập tính thuế là 70 triệu đồng thì ông A phải đóng thuế bao nhiêu?

b) Trong tháng 2 ông A đóng thuế 17 triệu đồng. Hỏi ông A trong tháng 2 có thu nhập tính thuế là bao nhiêu?

Lời giải.

a) Nếu thu nhập 70 triệu đồng thì số tiền thuế ông A phải đóng là

$$5 \cdot 5\% + 5 \cdot 10\% + 8 \cdot 15\% + 14 \cdot 20\% + 20 \cdot 25\% + 18 \cdot 30\% = 15{,}15 \text{ (triệu đồng.)}$$

b)

Nếu với thu nhập đến 52 triệu đồng thì tiền thuế là 9,75 triệu đồng.
Nếu với thu nhập đến 80 triệu đồng thì tiền thuế là 18,15 triệu đồng.
Do đó với tiền thuế phải đóng là 17 triệu đồng thì thu nhập của ông A trong tháng 2 là trong khoảng từ 52 đến 80 triệu đồng. Khi đó thu nhập của ông A được tính bởi

$$52 + \frac{17 - 9{,}75}{30\%} = 76{,}17 \text{ triệu đồng.}$$

□

Bài 58. Chị Lan vay ngân hàng 400 triệu đồng và trả góp trong vòng 15 năm với lãi suất là 0,42% mỗi tháng. Hỏi:

a) Hàng tháng chị Lan phải trả nợ bao nhiêu tiền?

b) Một ngân hàng khác đề nghị cho vay 400 triệu đồng, trả góp trong 10 năm và mỗi tháng chị Lan cần trả 4,5 triệu đồng. Hỏi ngân hàng đó đưa ra lãi suất bao nhiêu mỗi tháng (lãi suất không thay đổi trong thời gian vay)?

Lời giải.

a) Tổng số tiền chị Lan phải trả khi vây trong 15 năm với lãi suất 0,42% mỗi tháng là

$$S = 400(1 + 15 \cdot 12 \cdot 0{,}42\%) = 702{,}4 \text{ triệu đồng.}$$

Vậy số tiền hàng tháng chị Lan phải trả trong 15 năm là $\dfrac{702{,}4}{12 \cdot 15} = 3{,}902$ triệu đồng.

b) Nếu mỗi tháng chị Lan phải trả 4,5 triệu đồng thì trong 10 năm số tiền chị phải trả là

$$S = 10 \cdot 12 \cdot 4{,}5 = 540 \text{ triệu đồng.}$$

Khi đó số tiến lãi chị Lan đã trả là $540 - 400 = 140$ triệu đồng.
Số tiền lãi suất mà ngân hàng đó đã đưa ra là $r = \dfrac{140}{10 \cdot 12 \cdot 400} \cdot 100\% = 0{,}29\%$.

□

Bài 59. Anh A cần 30kg sơn màu xám để sơn tường và cửa, nhưng trong kho chỉ còn lại sơn màu đen và sơn màu trắng. Anh A nảy ra ý tưởng pha sơn màu đen và sơn màu trắng để được sơn màu xám và anh ấy tìm được thành phần của mỗi loại sơn màu như sau:

Sơn màu đen = 20% bột màu đen + 80% chất phụ gia;

Sơn màu trắng = 30% bột màu trắng + 70% chất phụ gia;

Sơn màu xám = 5% bột màu đen + 15% bột màu trắng + 80% chất phụ gia (các thành phần tính theo đơn vị kg).

Hỏi anh A cần pha bao nhiêu kg sơn màu đen, sơn màu trắng và chất phụ gia để đáp ứng yêu cầu?

Lời giải.

Theo thành phần thì trong 30 kg sơn màu xám bao gồm:

Bột màu đen: $5\% \cdot 30 = 1{,}5$ kg.

Bột màu trắng: $15\% \cdot 30 = 4{,}5$ kg.

Phụ gia: $30 - 0{,}5 - 1{,}5 = 24$ kg.

Khi đó: Để có được 1,5 kg bột màu đen thì cần dùng $\dfrac{1{,}5}{20\%} = 7{,}5$ kg sơn màu đen.

Để có được 4,5 kg bột màu trắng thì cần dùng $\dfrac{4{,}5}{30\%} = 15$ kg sơn màu trắng.

Vậy để có được 30 kg sơn màu xám thì cần dùng:

$$7{,}5 \text{ kg sơn màu đen} + 15 \text{ kg sơn màu trắng} + 7{,}5 \text{ kg phụ gia.}$$

□

Bài 60. Mẹ của Hoa đi siêu thị mua một món hàng đang có chương trình khuyến mãi giảm giá 20%. Do có thẻ "khách hàng thân thiết" của siêu thị nên mẹ của Hoa được giảm thêm 2% trên giá đã giảm, do đó mẹ của Hoa chỉ phải trả 196.000 đồng cho món hàng đó.

a) Hỏi giá ban đầu của món hàng đó nếu không khuyến mãi là bao nhiêu?

b) Nếu mẹ của Hoa không có thẻ "khách hàng thân thiết "nhưng món hàng đó được giảm giá 22%. Hỏi số tiền mà mẹ Hoa được giảm có bằng lúc đầu không?

Lời giải.

a) Giá của sản phẩm nếu không khuyến mãi 2% là:

$$\frac{196000}{100\% - 2\%} = 200000 \text{ đồng.}$$

Giá gốc của sản phẩm trước khi khuyến mãi 20% là:

$$\frac{200000}{100\% - 20\%} = 250000 \text{ đồng.}$$

b) Số tiền mẹ Hoa phải trả nếu mua món hàng khi được giảm giá 22% là:

$$250000\,(100\% - 22\%) = 195000 \text{ đồng.}$$

Như vậy mẹ Hoa được giảm nhiều hơn lúc đầu là 1000 đồng.

□

Bài 61. Nhân dịp lễ 30-4, siêu thị điện máy Nguyễn Kim đã giảm giá nhiều mặt hàng để kích cầu mua sắm. Giá niêm yết một tivi và một máy giặt có tổng số tiền là 25,4 triệu đồng, nhưng trong đợt này giá một tivi giảm 40% giá bán và giá một máy giặt giảm 25% giá bán nên bác Hai đã mua một tivi và một máy giặt trên với tổng số tiền là 16,77 triệu đồng. Hỏi giá mỗi món đồ khi chưa giảm giá là bao nhiêu tiền?

Lời giải.

Gọi x, y lần lượt là giá ban đầu của tivi và máy giặt $(x, y > 0)$.

Vì giá niêm yết một tivi và một máy giặt có tổng số tiền là 25,4 triệu đồng, nên ta có $x + y = 25,4$

triệu.
Một tivi giảm 40% và một máy giặt giảm 25% tương ứng với tổng số tiền bán ra là 16,77 triệu đồng, nên ta có: $60\%x + 75\%y = 16{,}77$ triệu.
Khi đó, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 25{,}4 \\ 60\%x + 75\%y = 16{,}77. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta được $x = 15{,}2$ và $y = 10{,}2$ (thỏa mãn).
Vậy giá tiền ban đầu của tivi và tủ lạnh lần lượt là 15,2 triệu và 10,2 triệu. □

Bài 62. Để thực hiện chương trình ngày "Black Friday", một cửa hàng điện tử thực hiện giảm giá 50% trên 1 tivi cho lô hàng tivi gồm có 40 cái với giá bán lẻ trước đó là 6500000 đồng/cái. Đến trưa cùng ngày thì cửa hàng đã bán được 20 cái. Khi đó cửa hàng quyết định giảm thêm 10% nữa thì bán hết số tivi còn lại.

a) Tính số tiền mà cửa hàng thu được khi bán hết lô hàng tivi.

b) Biết rằng giá vốn một tivi là 100000000 đồng. Hỏi cửa hàng có lời hay lỗ khi bán hết lô hàng tivi đó?

Lời giải.

a) Số tiền của hàng thu được khi bán 20 cái tivi đầu:

$$20 \cdot 50\% \cdot 6500000 = 65000000 \text{ đồng}.$$

Số tiền cửa hàng thu được khi bán 20 cái tivi cuối cùng:

$$20 \cdot 60\% \cdot 6500000 = 52000000 \text{ đồng}.$$

Tổng số tiền của hàng thu được khi bán hết 40 cái tivi là

$$65000000 + 52000000 = 117000000 \text{ đồng}.$$

b) Vì số tiền bán ra lớn hơn số tiền vốn ban đầu do đó cửa hàng đã lời khi bán hết lô hàng tivi đó.

□

Bài 63. Bạn Bình đi nhà sách và mang theo một số tiền vừa đủ để mua 5 quyển tập và 3 cây viết. Nhưng khi mua, giá một quyển tập mà bạn Bình định mua đã tăng lên 800 đồng, còn giá tiền một cây viết thì giảm đi 1000 đồng. Hỏi để mua 5 quyển tập và 3 cây viết như dự định ban đầu thì bạn Bình còn dư hay thiếu bao nhiêu tiền?
Lời giải.

Giả sử a và b lần lượt là giá tiền ban đầu của mỗi quyển tập và cây viết $(a > 0, b > 100)$.
Bình mang theo một số tiền vừa đủ để mua 5 quyển tập và 3 cây viết, nên số tiền Bình có là

$$5a + 3b \quad (1)$$

Số tiền Bình phải mua 5 quyển tập và 3 cây viết sau khi đã thay đổi giá là

$$5(a + 800) + 3(b - 1000) \quad (2)$$

Lấy (1)-(2) ta được $(5a + 3b) - [5(a + 800) + 3(b - 1000)] = -1000$ đồng.
Vậy Bình thiếu 1000 đồng để mua được số tập và viết như đã định. □

Bài 64. Một người cần mua một cái tủ lạnh. Anh ấy đến một cửa hàng để mua. Ở đó, có hai loại tủ lạnh:

Loại A: 3 triệu đồng/cái, tiêu thụ 500 kW/năm.

Loại B: 4 triệu đồng/cái, tiêu thụ 400 kW/năm.

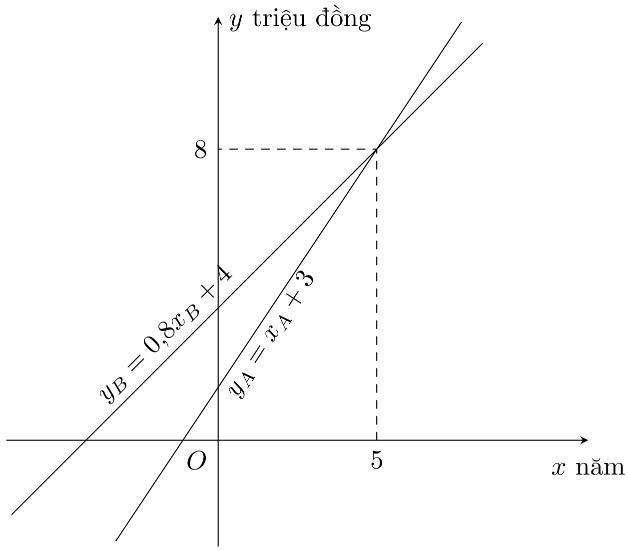
Hỏi dùng thời gian bao lâu thì dùng tủ lạnh loại A có lợi, dùng thời gian bao lâu thì dùng tủ lạnh loại B có lợi? Biết rằng giá tiền cho mỗi kW điện là 2000 đồng.

Lời giải.

Gọi x là số năm sử dụng $(x \in \mathbb{N}^*)$ và y là tổng số tiền phải trả tương ứng với x $(y > 0)$. Khi đó, số tiền phải trả của hai loại tủ lạnh được tính theo công thức sau:

- Loại A: $y_A = x_A + 3$ triệu đồng.
- Loại B: $y_B = 0{,}8x_B + 4$ triệu đồng.

Ta có đồ thị sau:



Theo đồ thị ta thấy, nếu sử dụng ít hơn 5 năm thì Loại A lãi hơn, tuy nhiên nếu sử dụng nhiều hơn 5 năm thì loại B lãi hơn. □

Bài 65. Theo quyết định Bộ Công Thương ban hành, giá bán lẻ điện sinh hoạt sẽ dao động trong khoảng từ 1484 đến 2587 đồng mỗi kWh tùy bậc thang. Dưới đây là bảng so sánh biểu giá điện trước điều chỉnh và giá sau điều chỉnh:

Mức sử dụng trong tháng (kWh)	Giá mới	Giá hiện tại
0 – 50	1484	1388
51 – 100	1533	1433
101 – 200	1786	1660
201 – 300	2242	2082
301 – 400	2503	2324
401 trở lên	2587	2399

Đơn vị: Đồng/kWh

a) Nếu hộ A trung bình mỗi tháng tiêu thụ 120 kWh thì theo giá mới số tiền phải trả tăng lên bao nhiêu trong một tháng?

b) Hộ B trong tháng 2 đã trả tiền sử dụng điện là 194170 đồng. Hỏi lượng điện mà hộ B tiêu thụ trong tháng 2 là bao nhiêu?

c) Giả sử hộ C trong nửa tháng đầu được tính theo giá cũ, trong nửa tháng sau được tính theo giá mới với mức sử dụng thực tế (bao gồm cả nửa tháng đầu) và lượng điện tiêu thụ ở mỗi nửa tháng là bằng nhau. Số tiền cuối tháng hộ C phải trả là 116350 đồng. Hỏi lượng điện mà hộ C tiêu thụ trong tháng là bao nhiêu? Biết rằng lượng điện tiêu thụ không vượt quá 100kWh.

Lời giải.

a) Số tiền hộ A phải trả theo giá cũ

$$50 \cdot 1388 + 50 \cdot 1433 + 20 \cdot 1660 = 174250 \text{ đồng}.$$

Số tiền hộ A phải trả theo giá mới

$$50 \cdot 1484 + 50 \cdot 1533 + 20 \cdot 1786 = 186570 \text{ đồng}.$$

Số tiền tăng lên

$$186570 - 174250 = 12320 \text{ đồng}.$$

b) $50 \cdot 1388 + 50 \cdot 1433 = 141050; 50 \cdot 1388 + 50 \cdot 1433 + 100 \cdot 1660 = 307050$.
Do $141050 < 194170 < 307050$ nên hộ B tiêu thụ từ 101 đến 200 kWh.
Lượng điện tháng 2 mà hộ B tiêu thụ :

$$(194170 - 141050) : 16604 - 100 = 132 \text{ kWh}.$$

c) Số tiền điện của hộ C khi sử dụng 50 kWh đầu tiên

$$\frac{50}{2}(1484 + 1388) = 71800 \text{ đồng}.$$

Số tiền điện của hộ C được tính theo mức 2 (từ 51 đến 100)

$$116350 - 71800 = 44550 \text{ đồng}.$$

Số kWh điện mà hộ C đã sử dụng trong tháng

$$50 + \frac{2 \cdot 44550}{1533 + 1433} = 80 \text{ kWh}.$$

□

Bài 66. Theo quy định về sân bóng đá cỏ nhân tạo mini 5 người thì: "Sân hình chữ nhật, trong mọi trường hợp, kích thước chiều dọc sân phải lớn hơn kích thước chiều ngang sân. Chiều ngang tối đa là 25 m và tối thiểu là 15 m, chiều dọc tối đa là 42 m và tối thiểu là 25 m". Thực hiện đúng quy định kích thước sân 5 người là điều quan trọng để quản lý sân bóng và việc thi đấu của các cầu thủ. Sân bóng đá mini cỏ nhân tạo Bến Bính có chiều dọc dài hơn chiều ngang 22 m, diện tích sân là 779 m^2. Hỏi kích thước sân này có đạt tiêu chuẩn đã quy định hay không?

Lời giải.

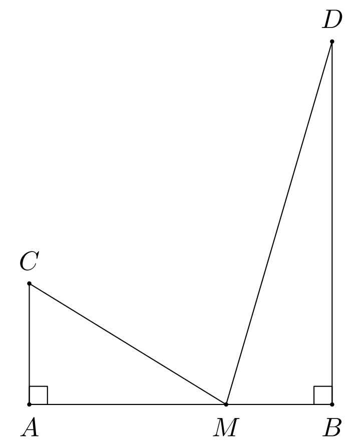
Gọi x (m) là chiều ngang của sân ($x > 0$).
$\Rightarrow$ Chiều dọc của sân là: $x + 22$.
Ta có phương trình

$$\begin{aligned} x \cdot (x + 22) = 779 &\Leftrightarrow x^2 + 22x - 779 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 41x - 19x - 779 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 19)(x + 41) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 19 \\ x = -41. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vì $x > 0$ nên $x = 19$ thỏa mãn. Suy ra, chiều dọc sân là $19 + 22 = 41$ m.
Vậy kích thước sân này có đạt tiêu chuẩn đã quy định. □

Bài 67.

Có hai chiếc cọc cao 10 m và 30 m lần lượt đặt tại hai vị trí A và B. Biết khoảng cách giữa hai cọc bằng 24 m. Người ta cần chọn một vị trí M ở trên mặt đất nằm giữa hai chân cột để giang dây nối đến hai đỉnh cột như hình vẽ. Xác định vị trí của M sao cho tổng độ dài hai sợi dây nối là ngắn nhất.



Lời giải.

Gọi C' là điểm đối xứng với C qua đường thẳng AB

$\Rightarrow MC' = MC$.

Khi đó $MC + MD = MC' + MD$.

$MC + MD$ ngắn nhất khi và chỉ khi $MC' + MD$ ngắn nhất khi C', M, D thẳng hàng.

Đặt $AM = x \Rightarrow MB = 24 - x$ với $0 < x < 24$.

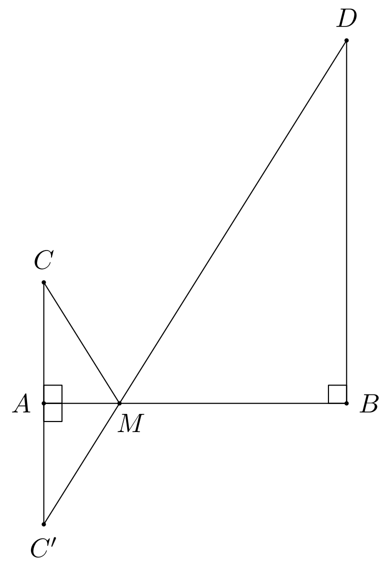
Xét $\triangle MC'A$ và $\triangle MDB$ có

$\begin{cases} \widehat{C'MA} = \widehat{DMB} \text{ (đối đỉnh)} \\ \widehat{MAC'} = \widehat{MBD} = 90^\circ \end{cases}$

$\Rightarrow \triangle MC'A \backsim \triangle MDB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{C'A}{DB} \Leftrightarrow \dfrac{x}{24 - x} = \dfrac{10}{30} \Leftrightarrow 3x = 24 - x \Leftrightarrow x = 8$.

Vậy để $MC + MD$ ngắn nhất thì $M \in AB$ sao cho $MA = 8$ m.



□

Bài 68. Một cột đèn cao 7 m có bóng trên mặt đất dài 4 m. Gần đấy có một tòa nhà cao tầng có bóng trên mặt đất là 80 m. Em hãy cho biết tòa nhà đó có bao nhiêu tầng, biết rằng mỗi tầng cao 2 m?

Lời giải.

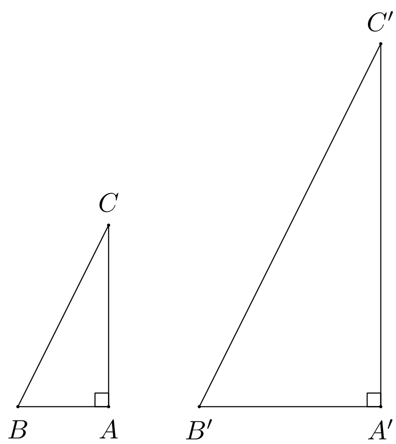
Gọi chiều cao của cột đèn là $AC = 7$ m; bóng của cột đèn trên mặt đất là $AB = 4$ m; chiều cao của tòa nhà là $A'C'$ và bóng của tòa nhà là $A'B' = 80$ m.

Ta có $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ (g.g)

Suy ra

$\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} \Leftrightarrow \dfrac{4}{80} = \dfrac{7}{A'C'} \Leftrightarrow A'C' = \dfrac{80 \cdot 7}{4} = 140$ m.

Vậy số tầng của tòa nhà là $140 : 2 = 70$ tầng.



□

Bài 69. Máy kéo nông nghiệp có hai bánh sau to hơn hai bánh trước. Khi bơm căng, bánh xe sau có đường kính là 1,672 m và bánh xe trước có đường kính là 88 cm. Hỏi khi xe chạy trên đoạn đường thẳng, bánh xe sau lăn được 10 vòng thì xe di chuyển được bao nhiêu mét và bánh xe trước lăn được mấy vòng?

Lời giải.

Chu vi của bánh xe sau là $1{,}672\pi$ m.

Chu vi của bánh xe trước là 88π cm$=0{,}88\pi$ m.

Đoạn đường xe đi được là $1{,}672\pi \cdot 10 = 167{,}2\pi$ m.

Số vòng bánh xe trước lăn được là $\dfrac{167{,}2\pi}{0{,}88\pi} = 190$ vòng.

Vậy khi xe chạy trên đoạn đường thẳng, bánh xe sau lăn được 10 vòng thì xe di chuyển được 167,2 mét và bánh xe trước lăn được 190 vòng. □

Bài 70. Để phục vụ cho một Hội nghị quốc tế, ban tổ chức huy động 30 cán bộ phiên dịch tiếng Anh, 25 cán bộ phiên dịch tiếng Pháp, trong đó có 12 cán bộ phiên dịch được cả 2 thứ tiếng Anh và Pháp. Hỏi

a) Ban tổ chức đã huy động bao nhiêu cán bộ phiên dịch cho Hội nghị đó?

b) Có bao nhiêu cán bộ chỉ dịch được tiếng Anh, chỉ dịch được tiếng Pháp?

Lời giải.

a) Số cán bộ phiên dịch cho Hội nghị là $30 + 25 - 12 = 43$ cán bộ.

b) Số cán bộ chỉ dịch được tiếng Anh là $30 - 12 = 18$ cán bộ.
Số cán bộ chỉ dịch được tiếng Pháp là $25 - 12 = 13$ cán bộ.

□

Bài 71. Một công ty bất động sản có 60 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2000000 đồng/tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ tăng thêm 100000 đồng/căn hộ/tháng thì sẽ có 2 căn hộ bị bỏ trống (nghĩa là nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2100000 đồng/tháng thì sẽ có 2 căn hộ bị bỏ trống, nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2200000 đồng/tháng thì sẽ có 4 căn hộ bị bỏ trống, ...). Hỏi muốn có thu nhập cao nhất thì công ty đó phải cho thuê mỗi căn hộ với giá bao nhiêu một tháng?

Lời giải.

Gọi x đồng là số tiền tăng thêm của giá cho thuê mỗi căn hộ trong một tháng $(x \geq 0)$.

Khi đó, số căn hộ bị bỏ trống là $\dfrac{2x}{100000}$ căn hộ.

Số tiền công ty thu được trong một tháng là

$$T = (2000000{+}x)\left(60 - \frac{2x}{100000}\right) = 12000000{-}40x{+}60x{-}\frac{2x^2}{100000} = 12000000{+}\frac{2000000x - 2x^2}{100000}.$$

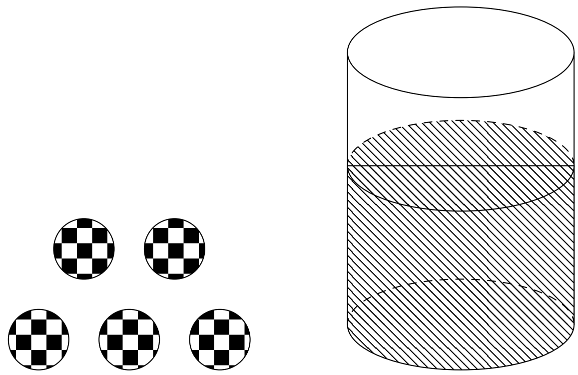
$T_{\max}$ khi $\left(-2x^2 + 2000000x\right)_{\max}$.
Mà $-2x^2 + 2000000x = -2\left(x - 500000\right)^2 + 500000000000 \leq 500000000000$.
Do đó, $T_{\max} = 120000000 + \dfrac{500000000000}{100000} = 125000000$ đồng khi $x = 500000$ đồng.
Vậy muốn có thu nhập cao nhất thì công ty phải cho thuê mỗi căn hộ mỗi tháng với giá

$$2000000 + 500000 = 2500000 \text{ đồng.}$$

□

Bài 72. Một cốc nước hình trụ có chiều cao 9 cm, đường kính 6 cm. Đáy cốc phẳng và dày 1 cm, thành cốc dày 0,2 cm. Đổ vào cốc 120 ml nước, sau đó thả vào cốc 5 viên bi, mỗi viên có đường kính 2 cm. Hỏi mặt nước trong cốc cách mép cốc bao nhiêu cm (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai)?

Lời giải.



Chiều cao phần chứa nước của cốc là $9 - 1 = 8$ cm.
Bán kính phần chứa nước của cốc là $\dfrac{6 - 2 \cdot 0{,}2}{2} = 2{,}8$ cm.
Thể tích của cốc nước không tính thành cốc và đáy cốc là $V = \pi \cdot 2{,}8^2 \cdot 8 = 62{,}72\pi$ cm^3.
Thể tích 5 viên bi là $V_1 = 5 \cdot \dfrac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = \dfrac{20\pi}{3}$ cm^3.
Đổi 120 ml $= 120$ cm^3.
Thể tích phần không chứa nước của cốc là

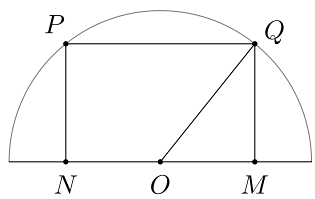
$$V_2 = V - V_1 - 120 = 62{,}72\pi - \frac{20\pi}{3} - 120 \approx 56{,}1 \text{ cm}^3.$$

Mặt nước trong cốc cách mép cốc một khoảng là $h = \dfrac{V_2}{\pi \cdot 2{,}8^2} \approx \dfrac{56{,}1}{\pi \cdot 2{,}8^2} \approx 2{,}28$ cm.

□

Bài 73. Từ một miếng tôn hình bán nguyệt có bán kính $R = 3$ m, người ta muốn cắt ra một miếng tôn hình chữ nhật. Hỏi diện tích lớn nhất của miếng tôn hình chữ nhật là bao nhiêu?

Lời giải.



Gọi tâm của hình bán nguyệt là O và miếng tôn là hình chữ nhật $MNPQ$.
Đặt $OM = x$; $MQ = y$. Khi đó diện tích hình chữ nhật là

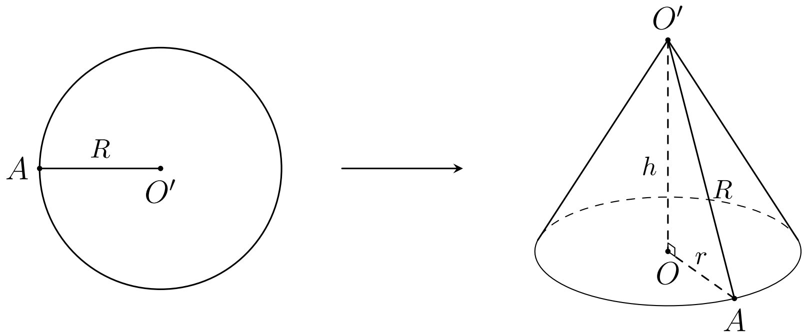
$$S = 2xy \leq x^2 + y^2 = R^2 = 9.$$

Vậy diện tích lớn nhất của miếng tôn là 9, đạt được khi $x = y = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

□

Bài 74. Từ một miếng nhôm hình tròn có bán kính $R = 6$ m, người ta muốn làm một cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của hình tròn này và gấp phần còn lại thành hình nón. Xác định thể tích lớn nhất của hình nón.

Lời giải.



Gọi x $(x > 0)$ là độ dài cung tròn của phần được xếp làm hình nón.

Như vậy bán kính R của đường tròn là đường sinh của hình nón và đường tròn đáy của hình nón sẽ có độ dài là x.

Bán kính r của đáy được xác dịnh bởi công thức $2\pi r = x \Rightarrow r = \dfrac{x}{2\pi}$.

Chiều cao của hình nón là $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \dfrac{x^2}{4\pi^2}}$.

Thể tích của khối nón $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{x}{2\pi}\right)^2 \sqrt{R^2 - \dfrac{x^2}{4\pi^2}}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cosi, ta có

$$V^2 = \frac{4\pi^2}{9} \cdot \frac{x^2}{8\pi^2} \cdot \frac{x^2}{8\pi^2}\left(R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \leq \frac{4\pi^2}{9}\left(\frac{\frac{x^2}{8\pi^2} + \frac{x^2}{8\pi^2} + R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}{3}\right)^3 = \frac{4\pi^2}{9} \cdot \frac{R^6}{27} = \frac{4\pi^2 R^6}{243}.$$

Do đó $V_{\max} = \sqrt{\dfrac{4\pi^2 R^6}{243}} = \dfrac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}} = \dfrac{2\pi 6^3}{9\sqrt{3}} = 16\pi\sqrt{3}$ khi $\dfrac{x^2}{8\pi^2} = R^2 - \dfrac{x^2}{4\pi^2} \Leftrightarrow x = \dfrac{2\pi}{3}R\sqrt{6} = 4\pi\sqrt{6}$.

□

Bài 75. Khi cầu thủ sút bóng thì độ cao h (m) của trái bóng đạt được trong thời gian t (giây) được tính bởi công thức $h = -t(5t - 30)$. Hãy tính thời gian quả bóng di chuyển từ khi được sút cho đến khi chạm đất.

Lời giải.

Thời gian quả bóng di chuyển từ khi được sút đến khi chạm đất là $t > 0$.

Khi quả bóng chạm đất thì $h = 0 \Leftrightarrow -t(5t - 30) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \text{ (loại)} \\ t = 6 \text{ (nhận).} \end{array}\right.$

Khi bắt đầu sút bóng thì $t = 0$ nên thời gian quả bóng di chuyển từ khi được sút cho đến khi chạm đất là $6 - 0 = 6$ giây.

□

Bài 76. Chào mừng ngày thành lập Đoàn 26/3, trường THPT Chuyên Trần Đại Nghĩa tổ chức giải bóng đá cho các học sinh nam khối 9. Các đội thi đấu theo thể thức vòng tròn một lượt tính điểm. Tổng số trận đấu được cho bởi công thức $T = \dfrac{n(n-1)}{2}$, trong đó T là tổng số trận đấu và n là số đội tham gia. Hãy tính xem có bao nhiêu đội tham gia, biết rằng tổng số trận đấu là 66 trận.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{n(n-1)}{2} = 66 \Leftrightarrow n^2 - n - 132 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 12 \\ n = -11. \end{array}\right.$

Vì $n \in \mathbb{N}$ nên $n = 12$.

Vậy có 12 đội bóng tham gia.

□

Bài 77. Một dung dịch gồm có muối và nước. Sau một thời gian, 300 gam nước bị bay hơi và vì vậy tỷ lệ khối lượng nước trong dung dịch giảm từ 98% xuống còn 95%. Hỏi dung dịch ban đầu nặng bao nhiêu gam?

Lời giải.

Gọi x là khối lượng dung dịch ban đầu, (đơn vị gam, $x > 300$).

Khối lượng nước ban đầu là $0{,}98x$ g.

Khối lượng nước lúc sau là $0{,}98x - 300$ g.

Khối lượng dung dịch lúc sau là $\dfrac{100(0{,}98x - 300)}{95}$.

Theo đề ta có phương trình

$$x - \frac{100(0{,}98x - 300)}{95} = 300 \Leftrightarrow 95x - 98x + 30000 = 28500 \Leftrightarrow 3x = 1500 \Leftrightarrow x = 500.$$

Vậy dung dịch ban đầu nặng 500 g. □

Bài 78. Một người mua hai món hàng và phải trả tổng cộng 2,17 triệu đồng, kể cả thuế giá trị gia tăng (VAT) với mức 10% đối với món hàng thứ nhất và 8% đối với món hàng thứ hai. Nếu thuế VAT là 9% đối với cả hai món hàng thì người đó phải trả tổng cộng 2,18 triệu đồng. Hỏi nếu không kể thuế VAT thì người đó phải trả bao nhiêu tiền cho mỗi món hàng?

Lời giải.

Gọi x, y lần lượt là số tiền người mua phải trả cho món hàng thứ nhất và món hàng thứ hai không kể thuế, (đơn vị: triệu đồng, $x, y > 0$).

Theo đề, ta có hệ phương trình $\begin{cases} 1{,}1x + 1{,}08y = 2{,}17 \\ 1{,}09x + 1{,}09y = 2{,}18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0{,}5 \\ y = 1{,}5. \end{cases}$

Vậy nếu không kể thuế VAT, số tiền người mua phải trả cho sản phẩm thứ nhất là 0,5 triệu đồng; sản phẩm thứ hai là 1,5 triệu đồng. □

Bài 79. Người ta trộn 8 g chất lỏng này với 6 g chất lỏng khác có khối lượng riêng lớn hơn nó là $0{,}2$ g/cm^3 để được hỗn hợp có khối lượng riêng $0{,}7$ g/cm^3. Tìm khối lượng riêng của mỗi chất lỏng, biết rằng công thức tính khối lượng riêng của vật là $D = \dfrac{m}{V}$, trong đó D là khối lượng riêng (đơn vị: g/cm^3), m là khối lượng (đơn vị: g), V là thể tích (đơn vị: cm^3).

Lời giải.

Gọi khối lượng riêng của chất lỏng thứ nhất là x g/cm^3, ($x > 0{,}2$).
Khối lượng riêng của chất lỏng thứ hai là $x + 0{,}2$ g/cm^3.
Thể tích của chất lỏng thứ nhất là $\dfrac{8}{x}$ cm^3.
Thể tích của chất lỏng thứ hai là $\dfrac{6}{x+0{,}2}$ cm^3.
Thể tích của hỗn hợp là $\dfrac{8+6}{0{,}7}$ cm^3.
Theo đề, ta có phương trình

$$\frac{8}{x} + \frac{6}{x+0{,}2} = \frac{8+6}{0{,}7} \Leftrightarrow 10x^2 - 5x - 0{,}8 = 0 \Leftrightarrow x \approx 0{,}63.$$

Vậy khối lượng riêng của chất lỏng thứ nhất là 0,63 g/cm^3; của chất lỏng thứ hai là

$$0{,}63 + 0{,}2 = 0{,}83 \text{ g/cm}^3.$$

□

Bài 80. Một người chơi phi tiêu đã ghi được tổng cộng 85 điểm vào các ô 8, 9 và 10 với 10 lần ném. Biết rằng số điểm của lần ném vào ô 8 điểm lớn hơn số điểm vào ô 9 điểm là 21 điểm, và số lần ném hơn số lần ném vào ô 10 điểm là 5 lần. Tính tổng số điểm vào mỗi ô.

Lời giải.

Gọi x là số lần người chơi phi tiêu ném trúng ô 8 điểm, $(0 < x < 10)$.
Số điểm người chơi ghi được ở ô 8 điểm là $8x$ điểm.
Số điểm người chơi ghi được ở ô 9 điểm là $8x - 21$ điểm.
Số lần người chơi ném vào ô 10 điểm là $x - 5$ lần.
Số điểm người chơi ghi được ở ô 10 điểm là $10(x-5)$ điểm.
Theo đề ra, ta có $8x + 8x - 21 + 10(x-5) = 85 \Leftrightarrow 26x = 156 \Leftrightarrow x = 6$.
Vậy người chơi ghi được ở ô 8 điểm là 48 điểm, ở ô 9 điểm là 27 điểm và ở ô 10 điểm là 10 điểm.

□

Bài 81. Học kì I lớp A có các học sinh trung bình, khá và giỏi. Số học sinh giỏi gấp 12 lần số học sinh khá và có 1 học sinh trung bình. Sang đầu học kì II có 5 học sinh chuyển và học sinh trung bình (học kì I) giờ đã xếp học lực khá, 5 học sinh mới có khá lẫn giỏi, khiến số học sinh giỏi hiện giờ gấp 8 lần số học sinh khá. Nếu số học sinh chuyển vào là khá hết thì số học sinh giỏi gấp 4 lần số học sinh khá. Tính số học sinh giỏi, số học sinh khá.

Lời giải.

Gọi số học sinh khá ở học kì I là x học sinh, $(x > 0)$.
Số học sinh giỏi ở học kì I là $12x$ học sinh.
Số học sinh khá mới chuyển vào là y học sinh, $(0 < y < 5)$.
Số học sinh giỏi mới chuyển vào là $5 - y$ học sinh.

Nếu số học sinh chuyển vào là khá hết thì số học sinh giỏi gấp 4 lần số học sinh khá nên

$$12x = 4(x + 1 + 5) \Leftrightarrow x = 3 \text{ (thỏa điều kiện)}.$$

Suy ra số học sinh giỏi ở học kì I là 36 học sinh và số học sinh khá là 3 học sinh.
Nếu 5 học sinh mới chuyển vào có khá lẫn giỏi thì số học sinh giỏi hiện giờ gấp 8 lần số học sinh khá nên

$$36 + 5 - y = 8(3 + 1 + y) \Leftrightarrow y = 1 \text{ (thỏa điều kiện)}.$$

Do đó có 1 học sinh khá và 4 học sinh giỏi mới chuyển vào.
Vậy lớp A có $36 + 4 = 40$ học sinh giỏi và $3 + 1 + 1 = 5$ học sinh khá. □

Bài 82. Một cậu bé thích sưu tầm bi và để chúng ngăn nắp vào những chiếc hộp thiếc bé xinh. Nếu để 20 viên bi vào mỗi hộp thì cậu không có đủ số hộp chứa, còn nếu mỗi hộp chứa 23 viên bi thì sẽ dư ra 1 hộp. Sau một hồi tính nhẩm thì cậu bé nhận thấy rằng: nếu cất vào mỗi hộp 21 viên bi mà đủ hộp để chứa số bi thì tổng số viên bi theo giả thiết ấy cộng với tổng số viên bi thực tế cậu có là 500 viên bi. Tính số bi và số hộp thực tế.

Lời giải.

Gọi số bi và số hộp thực tế lần lượt là x và y (với x, $y \in \mathbb{N}$).
Nếu để 20 viên bi mỗi hộp thì không đủ số hộp chứa, tức là $\dfrac{x}{20} > y$.
Nếu để 23 viên bi mỗi hộp thì sẽ dư ra một hộp, tức là $\dfrac{x}{23} \leq y - 1$.
Nếu cất mỗi hộp 21 viên bi mà đủ số hộp để chứa thì tổng số bi theo giả thiết cộng với tổng số bi theo thực tế là 500, tức là

$$21y + x = 500.$$

Từ đó ta có hệ

$$\begin{cases} \dfrac{x}{20} > y \\ \dfrac{x}{23} \leq y - 1 \\ 21y + x = 500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 20y \\ x \leq 23(y-1) \\ x = 500 - 21y \end{cases} \Rightarrow 20y < 500 - 21y \leq 23y - 23 \Leftrightarrow \frac{523}{44} \leq y < \frac{500}{41}.$$

Vì $y \in \mathbb{N}$ nên $y = 12$ suy ra $x = 248$.
Vậy số bi thực tế là 248 viên bi và số hộp thực tế là 12 hộp. □

Bài 83. Một bài kiểm tra gồm 60 câu trắc nghiệm. Mỗi câu làm đúng được 2 điểm, làm sai trừ 1 điểm còn không làm được 0 điểm. Bạn Bình làm bài và đạt được 4 điểm. Số câu bạn bỏ bằng với số câu bạn làm đúng. Hỏi bạn làm đúng bao nhiêu câu?

Lời giải.

Gọi số câu bạn Bình làm đúng là x câu, $(0 < x < 60)$.
Suy ra số câu bạn Bình bỏ là x câu và số câu bạn Bình làm sai là $60 - 2x$ câu.

Mỗi câu làm đúng được 2 điểm, làm sai trừ 1 điểm còn không làm được 0 điểm nên

$$2x - (60 - 2x) = 4 \Leftrightarrow x = 16.$$

Vậy bạn Bình làm đúng 16 câu. □

Bài 84. Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài gấp ba chiều rộng. Nếu chiều dài tăng thêm $\frac{1}{10}$ lần và chiều rộng tăng $\frac{1}{5}$ lần thì diện tích lúc sau lớn hơn diện tích lúc đầu 96 m^2. Tính diện tích mảnh đất lúc đầu.

Lời giải.

Gọi chiều rộng mảnh đất lúc đầu là x m, $(x > 0)$.

Chiều dài mảnh đất lúc đầu là $3x$ m.

Chiều dài mảnh đất lúc sau là $\left(1 + \frac{1}{10}\right) 3x = \frac{33x}{10}$ m.

Chiều rộng mảnh đất lúc sau là $\left(1 + \frac{1}{5}\right) x = \frac{6x}{5}$ m.

Vì diện tích lúc sau lớn hơn diện tích lúc đầu 96 m^2 nên

$$\frac{33x}{10} \cdot \frac{6x}{5} = x \cdot 3x + 96 \Leftrightarrow 99x^2 = 75x^2 + 2400 \Leftrightarrow x^2 = 100 \Leftrightarrow x = 10 \text{ (thỏa điều kiện)}.$$

Vậy diện tích mảnh đất lúc đầu là $10 \cdot 3 \cdot 10 = 300$ m^2. □

8 ÔN TẬP HỌC KÌ II

Bài 85. Tìm các điểm nằm trên đồ thị hàm số $y = \frac{3}{2}x^2$ biết:

a) Hoành độ là -2.

b) Tung độ là 6.

c) Hoành độ bằng tung độ.

d) Tung độ (khác 0) gấp đôi hoành độ.

Lời giải.

a) Với $x = -2 \Rightarrow y = \frac{3}{2} \cdot (-2)^2 = 6$.
Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu là $(-2; 6)$.

b) Với $y = 6 \Rightarrow 6 = \frac{3}{2}x^2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2. \end{array}\right.$
Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu là $(2; 6)$ và $(-2; 6)$.

c) Với $x = y \Rightarrow x = \frac{3}{2}x^2 \Rightarrow \frac{3}{2}x^2 - x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}. \end{array}\right.$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu là $(0;0)$ và $\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

d) Với $y = 2x$ và $y \neq 0$, ta có:

$$2x = \frac{3}{2}x^2 \Rightarrow \frac{3}{2}x^2 - 2x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ (loại)} \\ x = \frac{4}{3} \Rightarrow y = \frac{8}{3}. \end{array}\right.$$

Vậy tọa độ điểm thỏa yêu cầu là $\left(\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$.

□

Bài 86. Cho parabol $(P)\colon y = -x^2$ và đường thẳng $(D)\colon y = 2x - 3$.

a) Vẽ (P) và (D) trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Xác định vị trí tương đối của (P) và (D). Tìm tọa độ giao điểm nếu có.

c) Viết phương trình đường thẳng (d) song song với đường thẳng (D) và tiếp xúc với (P).

Lời giải.

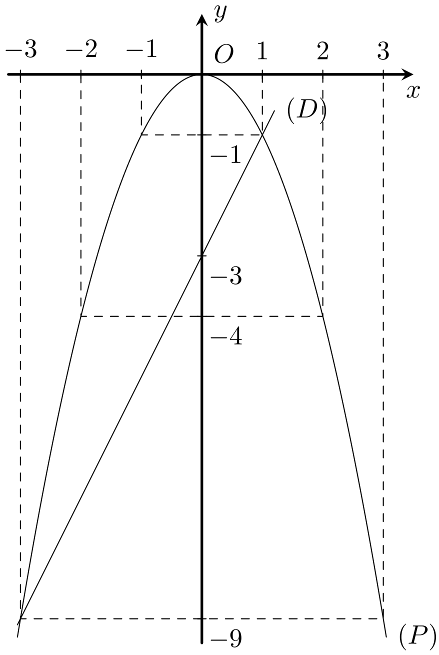
a) • Bảng giá trị của (P)

x	-2	-1	0	1	2
$y = -x^2$	-4	-1	0	1	4

• Bảng giá trị của (D)

x	1	2
$y = 2x - 3$	-1	1

• Đồ thị



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D)

$$-x^2 = 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0. \quad (1)$$

Ta có $a + b + c = 1 + 2 - 3 = 0 \Rightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

Do đó (P) cắt (D) tại hai điểm phân biệt, với (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = -1 \\ x = -3 \Rightarrow y = -9. \end{array}\right.$

Vậy tọa độ giao điểm là $(1; -1)$ và $(-3; -9)$.

c) Gọi $(d)\colon y = ax + b$. Vì $(d) \parallel (D) \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b \neq -3 \end{cases} \Rightarrow (d)\colon y = 2x + b$ với $b \neq -3$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là $-x^2 = 2x + b \Leftrightarrow x^2 + 2x + b = 0$. (2)

Vì (P) tiếp xúc với (d) nên phương trình (2) có nghiệm kép, nghĩa là

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow 1^2 - 1 \cdot b = 0 \Leftrightarrow 1 - b = 0 \Leftrightarrow b = 1 \text{ (nhận)}.$$

Vậy $(d)\colon y = 2x + 1$.

□

Bài 87. Cho đường thẳng $(D)\colon y = 2x - 1$ và parabol $(P)\colon y = x^2$.

a) Vẽ (P) và (D) trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Chứng tỏ (D) tiếp xúc với (P) tại điểm A có hoành độ bằng tung độ.

c) Gọi điểm B đối xứng với điểm A qua trục tung. Viết phương trình đường thẳng (d) qua B và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là 2.

d) Tìm giao điểm thứ hai C của (d) và (P).

e) Tính S_{ABC}.

Lời giải.

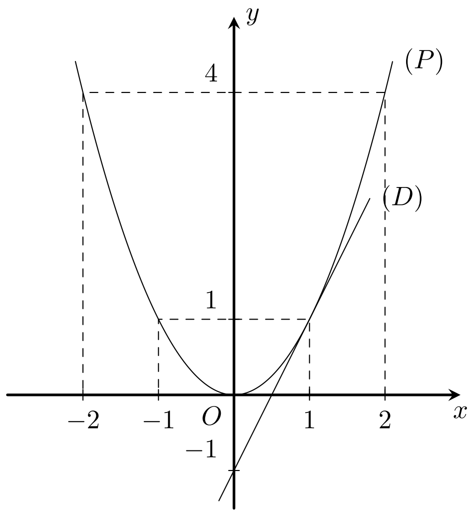
a) • Bảng giá trị của (P)

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

• Bảng giá trị của (D)

x	0	1
$y = 2x - 1$	-1	1

• Đồ thị



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D) là

$$x^2 = 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0. \quad (2)$$

Ta có $\Delta' = (-1)^2 - 1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ phương trình (2) có nghiệm kép, nghĩa là (P) tiếp xúc với (D) tại điểm có hoành độ là $x = \dfrac{1}{1} = 1 \Rightarrow y = 1$.
Vậy (P) tiếp xúc với (D) tại $A(1; 1)$.

c) • Vì A đối xứng với B qua trục tung nên $B(-1; 1)$.

• Gọi (d): $y = ax + b$. Vì $B(-1; 1) \in (d) \Rightarrow 1 = -a + b$. (3)

• Vì (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là 2 nên giao điểm là $C(2; 0)$.

• Vì $C(2; 0) \in (d) \Rightarrow 0 = 2a + b$. (4)

- Từ (3) và (4) ta tìm được $\begin{cases} a = -\dfrac{1}{3} \\ b = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$

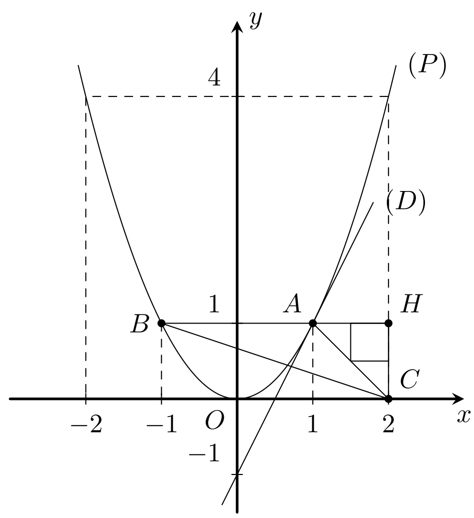
  Vậy $(d)\colon y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$.

d) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là

$$x^2 = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{3} \Rightarrow y = \dfrac{4}{9} \\ x = -1 \Rightarrow y = 1. \end{array}\right.$$

Vậy tọa độ giao điểm thứ hai $C\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{4}{9}\right)$.

e) Gọi H là hình chiếu của C lên $AB \Rightarrow CH = 1$.



Ta có

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1 \text{ (đvdt)}.$$

□

Bài 88. Cho parabol $(P)\colon y = 2x^2$ và đường thẳng $(D)\colon y = mx + 3m - 2$ $(m \neq 0)$ cắt nhau tại điểm A có hoành độ là 2.

a) Tìm m. Vẽ (P) và (D) trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Tìm giao điểm B còn lại của (P) và (D).

c) Tìm S_{OAB}.

d) Viết phương trình đường thẳng (d) qua gốc tọa độ và song song với đường thẳng (D).

e) Tìm giao điểm thứ hai của (P) và (d).

Lời giải.

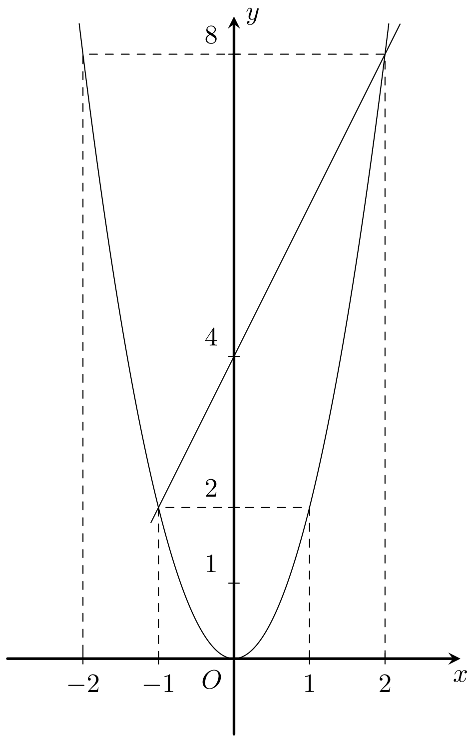
a)
- Vì $A\,(2; y_A) \in (P) \Rightarrow y_A = 2 \cdot (x_A)^2 = 2 \cdot 2^2 = 8 \Rightarrow A(2; 8)$.
  Vì $A(2; 8) \in (D) \Rightarrow 8 = 2m + 3m - 2 \Leftrightarrow 5m = 10 \Leftrightarrow m = 2$ (nhận).
  Vậy $(D)\colon y = 2x + 4$.
- Bảng giá trị của (P)

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8

- Bảng giá trị của (D)

x	-2	-1
$y = 2x + 4$	0	2

- Đồ thị

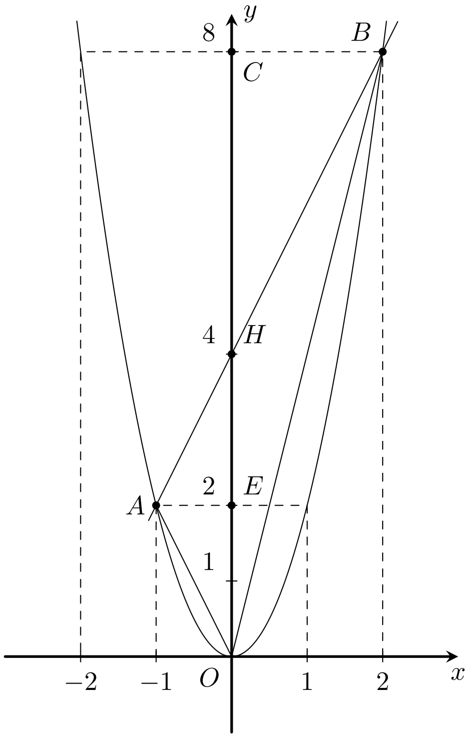


b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D) là

$$2x^2 = 2x + 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow y = 2 \\ x = 2 \Rightarrow y = 8. \end{array}\right.$$

Vậy tọa độ $B(-1; 2)$.

c) Gọi $C(0, 8)$, $H(0, 4)$ và $E(0, 2)$.



$S_{OAH} = \dfrac{1}{2}OH \cdot AE = \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 = 2$ (đvdt).

$S_{BHO} = S_{OBC} - S_{BCH} = \dfrac{1}{2}BC \cdot OC - \dfrac{1}{2}CH \cdot BC = \dfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 - \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$ (đvdt).

Vậy $S_{OAB} = 2 + 4 = 6$ (đvdt).

d) Gọi $(d)\colon y = ax + b$. Vì $(d) \parallel (D)\colon y = 2x + 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b \neq 4 \end{cases} \Rightarrow (d)\colon y = 2x + b$.

Vì $O(0; 0) \in (d) \Rightarrow 0 = 2 \cdot 0 + b \Rightarrow b = 0$ (nhận).

Vậy $(d)\colon y = 2x$.

e) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là

$$2x^2 = 2x \Leftrightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 1 \Rightarrow y = 2. \end{array}\right.$$

Vậy tọa độ giao điểm thứ hai là $(1; 2)$.

□

Bài 89. Cho parabol $(P)\colon y = 4x^2$ và điểm A (khác gốc tọa độ) có hoành độ bằng tung độ nằm trên (P).

a) Tìm tọa độ điểm A.

b) Viết phương trình đường thẳng (D) tiếp xúc với (P) tại A.

c) Viết phương trình đường thẳng (D') qua A và cắt trục tung tại điểm có tung độ là 2. Tìm giao điểm thứ hai của (D') và (P).

d) Vẽ (P), (D) và (D') trên cùng một hệ trục tọa độ.

Lời giải.

a) Ta có $A\left(x_A; y_A\right)$. Vì $x_A = y_A$ nên $A\left(x_A; x_A\right)$.

Do $A \in (P) \Rightarrow x_A = 4 \cdot \left(x_A\right)^2 \Leftrightarrow 4 \cdot \left(x_A\right)^2 - x_A = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_A = 0 \Rightarrow y_A = 0 \text{ (loại)} \\ x_A = \dfrac{1}{4} \Rightarrow y_A = \dfrac{1}{4} \text{ (nhận).} \end{array}\right.$

Vậy tọa độ điểm $A\left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{4}\right)$.

b) Gọi $(D)\colon y = ax + b$. Ta có $A\left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{4}\right) \in (D) \Rightarrow \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}a + b \Rightarrow b = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}a$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D)

$$4x^2 = ax + b \Leftrightarrow 4x^2 - ax - b = 0. \quad (1)$$

Yêu cầu bài toán, ta có phương trình (1) có nghiệm kép, nghĩa là

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (-a)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-b) = 0 \Leftrightarrow a^2 + 16b = 0. \quad (2)$$

Thay $b = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}a$ vào (2), ta có

$a^2 + 16 \cdot \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}a\right) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 4 = 0 \Leftrightarrow (a-2)^2 = 0 \Leftrightarrow a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow b = -\dfrac{1}{4}$.

Vậy $(D)\colon y = 2x - \dfrac{1}{4}$.

c) Gọi $(D')\colon y = ax + b$. Theo đề, ta có $A\left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{4}\right)$ và gọi B là giao điểm của trục tung và (D') nên $B(0; 2)$.

- Với $B(0; 2) \in (D') \Rightarrow 2 = 0 \cdot a + b \Rightarrow b = 2$.
- Với $A\left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{4}\right) \in (D') \Rightarrow \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}a + b \Rightarrow a = -7$.

Vậy $(D')\colon y = -7x + 2$. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D')

$$4x^2 = -7x + 2 \Leftrightarrow 4x^2 + 7x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{4} \Rightarrow y = \dfrac{1}{4} \\ x = -2 \Rightarrow y = 16. \end{array}\right.$$

Vậy tọa độ giao điểm thứ hai là $(-2; 16)$.

d)
- Vì $A\left(2; y_A\right) \in (P) \Rightarrow y_A = 2 \cdot \left(x_A\right)^2 = 2 \cdot 2^2 = 8 \Rightarrow A(2; 8)$.
  Vì $A(2; 8) \in (D) \Rightarrow 8 = 2m + 3m - 2 \Rightarrow 5m = 10 \Rightarrow m = 2$ (nhận).
  Vậy $(D)\colon y = 2x + 4$.
- Bảng giá trị của (P)

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$y = 4x^2$	4	1	0	1	4

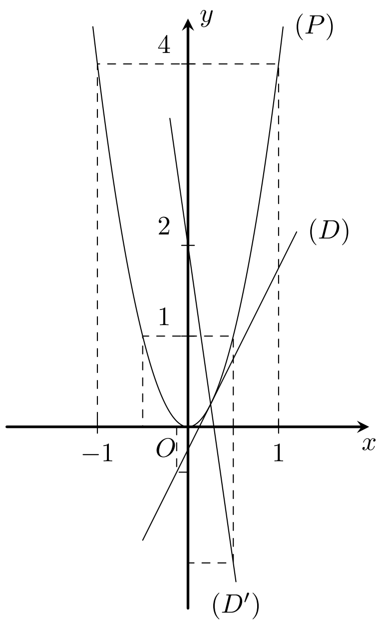
- Bảng giá trị của (D)

x	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$y = 2x - \frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0

- Bảng giá trị của (D')

x	0	$\frac{1}{2}$
$y = -7x + 2$	2	$-\frac{3}{2}$

- Đồ thị



□

Bài 90. Cho parabol (P): $y = 4x^2$ và điểm $M(0; 2)$. Chứng minh rằng mọi đường thẳng (D) có dạng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ qua M đều cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Lời giải.

- Vì $M(0; 2) \in (D) \Rightarrow 2 = 0 \cdot a + b \Rightarrow b = 2 \Rightarrow (D)\colon y = ax + 2$.

- Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D) là

$$4x^2 = ax + 2 \Leftrightarrow 4x^2 - ax - 2 = 0. \quad (1)$$

Ta có

$$\Delta = (-a)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-2) = a^2 + 32 \geq 32 > 0\ \forall a \in \mathbb{R}.$$

Vậy phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt, từ đó ta có điều phải chứng minh.

□

Bài 91. Giải các phương trình sau:

a) $3x^2 - 2x - 5 = 0$.

b) $-2x^2 + 5x - 4 = 0$.

c) $4x^2 - 2\sqrt{5}x + 1 = 0$.

d) $\frac{1}{2}x^2 - \sqrt{7}x + \frac{3}{2} = 0$.

e) $\sqrt{3}x^2 - 5x - \sqrt{12} = 0$.

f) $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{6}x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$.

g) $x^2 + 2\left(\sqrt{3} + 1\right)x + 4\sqrt{3} = 0$.

h) $x^2 - 2\left(\sqrt{3} - 1\right)x - 2\sqrt{3} = 0$.

i) $x^2 + \left(\sqrt{5} + 2\right)x + \sqrt{5} = 0$.

j) $2x^2 - 2\left(\sqrt{7} + \sqrt{2}\right)x + \sqrt{14} = 0$.

k) $3x^2 - \left(\sqrt{5} - 3\right)x + \sqrt{5} = 0$.

l) $\sqrt{2}x^2 - \left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)x + \sqrt{5} = 0$.

m) $2\sqrt{3}x^2 + x + 1 = \sqrt{3}(x + 1)$.

n) $x^2 + 2\sqrt{2}x + 4 = 3(x + \sqrt{2})$.

Lời giải.

a) $3x^2 - 2x - 5 = 0$. Vì $a - b + c = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \frac{5}{3}. \end{array}\right.$

Vậy $S = \left\{-1; \frac{5}{3}\right\}$.

b) $-2x^2 + 5x - 4 = 0$. Vì $\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-4) = -7 < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

c) $4x^2 - 2\sqrt{5}x + 1 = 0$. Ta có

$$\Delta' = \left(-\sqrt{5}\right)^2 - 4 \cdot 1 = 1 > 0.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \text{ hoặc } x = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

d) $\frac{1}{2}x^2 - \sqrt{7}x + \frac{3}{2} = 0$. Ta có

$$\Delta = \left(-\sqrt{7}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = 4 > 0.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x = \frac{2 + \sqrt{7}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 2 + \sqrt{7} \text{ hoặc } x = \frac{-2 + \sqrt{7}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = -2 + \sqrt{7}.$$

e) $\sqrt{3}x^2 - 5x - \sqrt{12} = 0$. Ta có

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(-\sqrt{12}\right) = 49 > 0.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x = \frac{5+7}{2 \cdot \sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \text{ hoặc } x = \frac{5-7}{2 \cdot \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

f) $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{6}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$. Ta có

$$\Delta = \left(-\sqrt{6}\right)^2 - 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Vậy phương trình có nghiệm kép

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

g) $x^2 + 2\left(\sqrt{3}+1\right)x + 4\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2\sqrt{3}x + 4\sqrt{3} = 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow x(x+2) + 2\sqrt{3}(x+2) = 0\\
&\Leftrightarrow (x+2)\left(x+2\sqrt{3}\right) = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2=0 \\ x+2\sqrt{3}=0 \end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-2\sqrt{3}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy $S = \left\{-2\sqrt{3}; -2\right\}$.

h) $x^2 - 2\left(\sqrt{3}-1\right)x - 2\sqrt{3} = 0$. Ta có

$$\Delta' = \left(\sqrt{3}-1\right)^2 - 1 \cdot \left(-2\sqrt{3}\right) = 4 > 0.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x = \frac{1-\sqrt{3}+2}{1} = 1+\sqrt{3} \text{ hoặc } x = \frac{1-\sqrt{3}-2}{1} = -3+\sqrt{3}.$$

i) $x^2 + \left(\sqrt{5}+2\right)x + \sqrt{5} = 0$. Ta có

$$\Delta = \left(\sqrt{5}+2\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \sqrt{5} = 9 > 0.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x = \frac{-\sqrt{5}-2+3}{2 \cdot 1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ hoặc } x = \frac{-\sqrt{5}-2-3}{2 \cdot 1} = \frac{-5-\sqrt{5}}{2}.$$

j) $2x^2 - 2(\sqrt{7}+\sqrt{2})x + \sqrt{14} = 0$. Ta có

$$\Delta' = \left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)^2 - 2\cdot\sqrt{14} = 9 > 0.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}+3}{2} \text{ hoặc } x = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}-3}{2}.$$

k) $3x^2 - \left(\sqrt{5}-3\right)x + \sqrt{5} = 0$. Ta có

$$\Delta = \left(\sqrt{5}-3\right)^2 - 4\cdot 3\cdot\sqrt{5} = 14 - 18\sqrt{5} < 0$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

l) $\sqrt{2}x^2 - \left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)x + \sqrt{5} = 0$. Vì $a+b+c=0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$x = 1 \text{ hoặc } x = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

m) $2\sqrt{3}x^2 + x + 1 = \sqrt{3}(x+1) \Leftrightarrow 2\sqrt{3}x^2 + \left(1-\sqrt{3}\right)x + 1 - \sqrt{3} = 0$. Ta có

$$\Delta = \left(1-\sqrt{3}\right)^2 - 4\cdot 2\sqrt{3}\cdot\left(1-\sqrt{3}\right) = 28 - 10\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 5 - \sqrt{3} > 0.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x = \frac{-1+\sqrt{3}+5-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ hoặc } x = \frac{-1+\sqrt{3}-5+\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$

n) $x^2 + 2\sqrt{2}x + 4 = 3\left(x+\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow x^2 + \left(2\sqrt{2}-3\right)x + 4 - 3\sqrt{2} = 0$. Ta có

$$\Delta = \left(2\sqrt{2}-3\right)^2 - 4\cdot 1\cdot\left(4-3\sqrt{2}\right) = 1 > 0$$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x = \frac{-2\sqrt{2}+3+1}{2} = -\sqrt{2}+2 \text{ hoặc } x = \frac{-2\sqrt{2}+3-1}{2} = -\sqrt{2}+1.$$

□

Bài 92. Giải các phương trình sau:

a) $2x^4 - 5x^2 - 7 = 0$.

b) $4x^4 + 5x + 2 = 0$.

c) $\left(x^2-2x\right)^2 - 14\left(x^2-2x\right) - 15 = 0$.

d) $\left(x^2-x+1\right)\left(x^2-x+3\right) = 15$.

e) $\left(6x^2-7x\right)^2 - 2\left(6x^2-7x\right) = 3$.

f) $2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2 - 9\left(x+\dfrac{1}{x}\right) + 10 = 0$.

g) $x - 2 - 2\sqrt{x-2} = 8$.

h) $x - 9 - 2\sqrt{x-1} = 0$.

i) $\dfrac{x}{x-2} = \dfrac{10-2x}{x^2-2x}$.

j) $\dfrac{x+0{,}5}{3x+1} = \dfrac{7x+2}{9x^2-1}$.

k) $\dfrac{x-2}{x} + \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{11}{6} = 0$.

l) $\dfrac{30}{x^2-1} - \dfrac{13}{x^2+x+1} = \dfrac{18x+7}{x^3-1}$.

m) $x^3 - 6x^2 + 6x - 1 = 0$.

n) $(2x^2-5x+1)^2 - (x^2-5x+6)^2 = 0$.

Lời giải.

a) $2x^4 - 5x^2 - 7 = 0$. Đặt $t = x^2$ $(t \geq 0)$. Khi đó phương trình đã cho trở thành $2t^2 - 5t + 7 = 0$.

Ta có $a - b + c = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = \dfrac{7}{2} \text{ (nhận)}. \end{array}\right.$

Với $t = \dfrac{7}{2} \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{7}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\sqrt{14}}{2} \\ x = \dfrac{-\sqrt{14}}{2}. \end{array}\right.$

Vậy $S = \left\{\dfrac{-\sqrt{14}}{2}; \dfrac{\sqrt{14}}{2}\right\}$.

b) $4x^4 + 5x^2 + 2 = 0$. Đặt $t = x^2$ $(t \geq 0)$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành $4t^2 + 5t + 2 = 0$. (1)

Ta có $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = -7 < 0$ nên phương trình (1) vô nghiệm.

Vậy phương trình đề cho vô nghiệm.

c) $(x^2-2x)^2 - 14(x^2-2x) - 15 = 0$. Đặt $t = x^2 - 2x$.

Khi đó phương trình đề cho trở thành $t^2 - 14t - 15$. Vì $a - b + c = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 15. \end{array}\right.$

- Với $t = -1 \Leftrightarrow x^2 - 2x = -1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
- Với $t = 15 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 15 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 5. \end{array}\right.$

Vậy $S = \{-3; 1; 5\}$.

d) $(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 3) = 15$.

Đặt $t = x^2 - x + 1 \Rightarrow t + 2 = x^2 - x + 3$. Khi đó phương trình đề cho trở thành

$$t \cdot (t+2) = 15 \Leftrightarrow t^2 + 2t = 15 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -5. \end{array}\right.$$

- Với $t = 3 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 3 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2. \end{array}\right.$

- Với $t = -5 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = -5 \Leftrightarrow x^2 - x + 6 = 0$ (vô nghiệm).

Vậy $S = \{-1; 2\}$.

e) $(6x^2 - 7x)^2 - 2(6x^2 - 7x) = 3 \Leftrightarrow (6x^2 - 7x)^2 - 2(6x^2 - 7x) - 3 = 0$. Đặt $t = 6x^2 - 7x$.

Khi đó phương trình đề cho trở thành $t^2 - 2t - 3 = 0$. Vì $a - b + c = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 3. \end{array}\right.$

- Với $t = -1 \Leftrightarrow 6x^2 - 7x = -1 \Leftrightarrow 6x^2 - 7x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{1}{6}. \end{array}\right.$
- Với $t = 3 \Leftrightarrow 6x^2 - 7x = 3 \Leftrightarrow 6x^2 - 7x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2} \\ x = -\dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$

Vậy $S = \left\{-\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{6}; 1; \dfrac{3}{2}\right\}$.

f) $2\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 9\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + 10 = 0.$ $(*)$

Điều kiện xác định: $x \neq 0$.

Đặt $t = x + \dfrac{1}{x}$. Khi đó phương trình $(*) \Leftrightarrow 2t^2 - 9t + 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{5}{2} \\ t = 2 \end{array}\right.$.

- Với $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow x^2 - \dfrac{5}{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ (nhận).
- Với $x + \dfrac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (nhận).

Vậy $S = \left\{\dfrac{1}{2}; 1; 2\right\}$.

g) $x - 2 - 2\sqrt{x - 2} = 8.$ $(*)$

Điều kiện xác định: $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

$(*) \Leftrightarrow x - 2 - 2\sqrt{x - 2} - 8 = 0.$ (1)

Đặt $t = \sqrt{x - 2} \geq 0$.

Khi đó phương trình (1) $\Leftrightarrow t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \text{ (nhận)} \\ t = -2 \text{ (vô lý)}. \end{array}\right.$

Với $t = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x - 2} = 4 \Leftrightarrow x - 2 = 16 \Leftrightarrow x = 18$ (nhận).

Vậy $S = \{18\}$.

h) $x - 9 - 2\sqrt{x - 1} = 8.$ $(*)$

Điều kiện xác định: $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

$(*) \Leftrightarrow x - 1 - 2\sqrt{x-1} - 8 = 0.$ (1)

Đặt $t = \sqrt{x-1} \geq 0$. Khi đó phương trình (1) $\Leftrightarrow t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \text{ (nhận)} \\ t = -2 \text{ (vô lý)}. \end{array}\right.$

Với $t = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 4 \Leftrightarrow x - 1 = 16 \Leftrightarrow x = 17$ (nhận).

Vậy $S = \{17\}$.

i) $\dfrac{x}{x-2} = \dfrac{10-2x}{x^2-2x} \Leftrightarrow \dfrac{x^2-10+2x}{x(x-2)} = 0.$ (1)

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2. \end{cases}$

(1) $\Rightarrow x^2 + 2x - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 + \sqrt{11} \\ x = -1 - \sqrt{11} \end{array}\right.$ (nhận).

Vậy $S = \left\{-1 - \sqrt{11}; -1 + \sqrt{11}\right\}$.

j) $\dfrac{x + 0{,}5}{3x+1} = \dfrac{7x+2}{9x^2-1} \Leftrightarrow \dfrac{(x+0{,}5)(3x-1) - 7x - 2}{(3x+1)(3x-1)} = 0.$ (1)

Điều kiện xác định $\begin{cases} 3x - 1 \neq 0 \\ 3x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \neq 1 \\ 3x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{-1}{3} \\ x \neq \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned}
(1) \Rightarrow (x+0{,}5)(3x-1) - 7x - 2 = 0 &\Leftrightarrow 3x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} - 7x - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow 3x^2 - \frac{13}{2}x - \frac{5}{2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{2} \text{ (nhận)} \\ x = -\dfrac{1}{3} \text{ (loại)}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy $S = \left\{\dfrac{5}{2}\right\}$.

k) $\dfrac{x-2}{x} + \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{11}{6} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{6(x-2)(x-1) + 6x^2 - 11x(x-1)}{6x(x-1)} = 0.$ (1)

Điều kiện xác định $\begin{cases} x \neq 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1. \end{cases}$

(1) $\Rightarrow 6x^2 - 18x + 12 + 6x^2 - 11x^2 + 11x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 3 \end{array}\right.$ (nhận).

Vậy $S = \{3; 4\}$.

l)

$$\frac{30}{x^2-1} - \frac{13}{x^2+x+1} = \frac{18x+7}{x^3-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{30\left(x^2+x+1\right)-13(x-1)(x+1)-(18x+7)(x+1)}{(x+1)(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=0. \quad (1)$$

Điều kiện xác định $\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 1. \end{cases}$

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\Rightarrow \quad 30\left(x^2+x+1\right)-13(x-1)(x+1)-(18x+7)(x+1)=0 \\
&\Leftrightarrow \quad 30x^2+30x+30-13x^2+13-18x^2-25x-7=0 \\
&\Leftrightarrow \quad -x^2+5x+36=0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x=9 \\ x=-4 \end{array}\right. \text{ (nhận).}
\end{aligned}$$

Vậy $S=\{-4;9\}$.

m) $x^3-6x^2+6x-1=0 \Leftrightarrow x^3-1-6x^2-6x=0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x+1\right)-6x(x-1)=0 \\
&\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x+1-6x\right)=0 \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x^2-5x+1=0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{5+\sqrt{21}}{2} \\ x=\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy $S=\left\{\dfrac{5-\sqrt{21}}{2};1;\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}\right\}$.

n) Ta có

$$\begin{aligned}
&\left(2x^2-5x+1\right)^2-\left(x^2-5x+6\right)^2=0 \\
\Leftrightarrow \quad &\left(2x^2-5x+1+x^2-5x+6\right)\left(2x^2-5x+1-x^2+5x-6\right)=0 \\
\Leftrightarrow \quad &\left[\begin{array}{l} 3x^2-10x+7=0 \\ x^2-5=0 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow \quad &\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{7}{3} \\ x=\sqrt{5} \\ x=-\sqrt{5}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy $S=\left\{-\sqrt{5};1;\sqrt{5};\dfrac{7}{3}\right\}$.

$\square$

Bài 93. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} |4x-2|+|y+1|=0 \\ 2x-y=2. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+3|y|=13 \\ 3x-y=3. \end{cases}$

c) $\begin{cases} y-2|x|+3=0 \\ |y|+x-3=0. \end{cases}$

d) $\begin{cases} |x+y|=1 \\ |x|+|y|=1. \end{cases}$

Lời giải.

a) Có $|A(x)| \geq 0\ \forall x$ nên $|4x-2|+|y+1|=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-2=0 \\ y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=-1 \end{cases}$.

Thay vào phương trình $2x-y=2$ ta có: $2\cdot\dfrac{1}{2}-(-1)=2$ (luôn đúng).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{1}{2};-1\right)$.

b) Trường hợp 1: $y \geq 0 \Rightarrow |y|=y$.

Hệ phương trình ban đầu tương đương với $\begin{cases} 2x+3y=13 \\ 3x-y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ (Thỏa mãn).

Trường hợp 2: $y<0 \Rightarrow |y|=-y$.

Hệ phương trình ban đầu tương đương với $\begin{cases} 2x-3y=13 \\ 3x-y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{4}{7} \\ y=-\dfrac{33}{7} \end{cases}$ (Thỏa mãn).

Vậy hệ phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left\{(2;3),\left(-\dfrac{4}{7};-\dfrac{33}{7}\right)\right\}$.

c) Trường hợp 1: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x|=x \\ |y|=y. \end{cases}$

Hệ phương trình ban đầu tương đương với $\begin{cases} y-2x+3=0 \\ y+x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ (Thỏa mãn).

Trường hợp 2: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x|=x \\ |y|=-y. \end{cases}$

Hệ phương trình ban đầu tương đương với $\begin{cases} y-2x+3=0 \\ -y+x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases}$ (Thỏa mãn).

Trường hợp 3: $\begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x|=-x \\ |y|=y. \end{cases}$

Hệ phương trình ban đầu tương đương với $\begin{cases} y+2x+3=0 \\ y+x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-6 \\ y=9 \end{cases}$ (Thỏa mãn).

Trường hợp 4: $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| = -x \\ |y| = -y. \end{cases}$

Hệ phương trình ban đầu tương đương với $\begin{cases} y + 2x + 3 = 0 \\ -y + x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}$ (Không thỏa mãn).

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm $S = \{(2; 1), (0; -3), (-6, 9)\}$.

d) Có $|x| + |y| = 1 \Rightarrow 0 \leq |x|, |y| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x, y \leq 1$.

Theo bất đẳng thức chứa dấu trị tuyệt đối $|x + y| \geq |x| + |y|$.

Theo đề bài $|x + y| = |x| + |y| = 1 \Rightarrow xy \geq 0$.

Trường hợp 1: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$

Hệ phương trình ban đầu tương đương với $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq x \geq 0 \\ y = 1 - x. \end{cases}$

Trường hợp 2: $\left[\begin{array}{l} x < 0 \\ y < 0. \end{array}\right.$

Hệ phương trình ban đầu tương đương với $\begin{cases} -(x + y) = 1 \\ -x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 0 \\ y = -1 - x. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm $S = \{(1 \geq x \geq 0; y = 1 - x), (-1 \leq x < 0; y = -1 - x)\}$.

□

Bài 94. Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} x - y = xy \\ x + y = 5xy. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ 3y + 2z = 9 \\ 4x + 7y + 5z = 5. \end{cases}$

Lời giải.

a) $\begin{cases} x - y = xy \\ x + y = 5xy. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 5y = 5xy \\ x + y = 5xy. \end{cases} \Rightarrow 5x - 5y = x + y \Leftrightarrow 4x = 6y.$

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}y \\ \dfrac{3}{2}y - y = \dfrac{3}{2}y \cdot y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2}y \\ \dfrac{1}{2}y = \dfrac{3}{2}y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2}y \\ \dfrac{1}{2}y(1 - 3y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2}y \\ \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = \dfrac{1}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x; y) = (0; 0) \\ (x; y) = \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{3}\right). \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{(0; 0), \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{3}\right)\right\}$.

b) $\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ 3y + 2z = 9 \\ 4x + 7y + 5z = 5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 3y \\ z = \dfrac{-3}{2}y \\ 3y + 7y + 5 \cdot \dfrac{-3}{2}y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3y}{4} \\ z = \dfrac{-3}{2}y \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = 2 \\ z = -3. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y; z) = \left(\dfrac{3}{2}; 2; -3\right)$.

□

Bài 95. Biết mỗi phương trình sau có một nghiệm là x_1. Tìm nghiệm còn lại.

a) $12x^2 - 8x + 1 = 0$, $x_1 = \dfrac{1}{2}$.

b) $2x^2 - 7x - 39 = 0$, $x_1 = -3$.

c) $x^2 + x - 2 + \sqrt{2} = 0$, $x_1 = -\sqrt{2}$.

d) $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$, $x_1 = 2$ (m là tham số).

Lời giải.

Các phương trình trong bài đều là phương trình bậc hai có nghiệm, nên áp dụng định lí Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_1 = \dfrac{-b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$

a) $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{1}{12} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \cdot x_2 = \dfrac{1}{12} \Leftrightarrow x_2 = \dfrac{1}{6}$.

b) $x_1 \cdot x_2 = -\dfrac{39}{2} \Leftrightarrow -3 \cdot x_2 = -\dfrac{39}{2} \Leftrightarrow x_2 = \dfrac{13}{2}$.

c) $x_1 + x_2 = -1 \Leftrightarrow -\sqrt{2} + x_2 = -1 \Leftrightarrow x_2 = -1 + \sqrt{2}$.

d) Vì phương trình có nghiệm $x_1 = 2$ nên $2^2 - 2m \cdot 2 + 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Phương trình trở thành $x^2 - 2x = 0$.

$x_1 + x_2 = 2 \Leftrightarrow 2 + x_2 = 2 \Leftrightarrow x_2 = 0$.

□

Bài 96. Tìm hai số u, v trong mỗi trường hợp sau

a) $u + v = 12$, $uv = 28$ và $u > v$.

b) $u + v = 3$, $uv = 6$.

Lời giải.

a) u, v là nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - 12x + 28 = 0 \Leftrightarrow x = 6 \pm 2\sqrt{2}$.

Vì $u > v$ nên $u = 6 + 2\sqrt{2}$, $v = 6 - 2\sqrt{2}$.

b) u, v là nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - 3x + 6 = 0$.
Phương trình vô nghiệm vì $\Delta < 0$.

□

Bài 97. Tìm m để các phương trình sau có nghiệm kép. Tìm nghiệm kép đó.

a) $2x^2 - (2m+1) + 2m^2 = 0$.

b) $(m-1)x^2 + 2(m+1)x + m = 0$.

Lời giải.
Phương trình bậc hai có nghiệm kép khi và chỉ khi $\Delta = 0$.

a) $\Delta = (2m+1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2m^2 = 0 \Leftrightarrow -12m^2 + 4m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{1}{2} \\ m = -\dfrac{1}{6}. \end{array}\right.$

Vậy với $m = \dfrac{1}{2}$ và $m = -\dfrac{1}{6}$ thì phương trình có nghiệm kép.

b) Với $m = 1$, phương trình là phương trình bậc nhất nên không có nghiệm kép.
Với $m \neq 1$, $\Delta' = (m+1)^2 - (m-1)m = 0 \Leftrightarrow 3m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{-1}{3}$ (Thỏa mãn).
Vậy với $m = -\dfrac{1}{3}$, phương trình có nghiệm kép.

□

Bài 98. Tìm m để các phương trình sau vô nghiệm

a) $3x^2 - 2(m-1)x + m^2 - m = 0$.

b) $(m-2)x^2 - 2(m+2)x + m - 1 = 0$.

Lời giải.
Phương trình bậc hai vô nghiệm khi và chỉ khi $\Delta < 0$.

a) $\Delta' = (m-1)^2 - 3(m^2 - m) < 0 \Leftrightarrow -2m^2 + m + 1 < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -\dfrac{1}{2} \\ m > 1. \end{array}\right.$

Vậy với $m > 1$ hoặc $m < -\dfrac{1}{2}$ thì phương trình vô nghiệm.

b) Với $m = 2$, phương trình trở thành $-8x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{8}$ nên $m = 2$ không là giá trị cần tìm.
Với $m \neq 2$, $\Delta' = (m+2)^2 - (m-2)(m-1) < 0 \Leftrightarrow 7m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{2}{7}$ (thỏa mãn).
Vậy $m = \dfrac{-2}{7}$ là giá trị cần tìm.

□

Bài 99. Tìm m để các phương trình sau có hai nghiệm phân biệt

a) $x^2 - 2(m-2)x + m^2 - 3m = 0$.

b) $(m+1)x^2 - 2mx + m - 2 = 0$.

Lời giải.

Phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta > 0$.

a) $\Delta' = (m-2)^2 - (m^2 - 3m) > 0 \Leftrightarrow -m + 4 > 0 \Leftrightarrow m < 4$.
Vậy $m < 4$ là giá trị cần tìm.

b) Với $m = -1$, phương trình trở thành phương trình bậc nhất, không thể có hai nghiệm phân biệt nên loại.
Với $m \neq -1$, $\Delta' = m^2 - (m+1)(m-2) > 0 \Leftrightarrow m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -2$.
Vậy với $m > -2$ và $m \neq -1$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

□

Bài 100. Tìm m để các phương trình sau có nghiệm

a) $x^2 - (2m+1)x + m^2 + m + 2 = 0$.

b) $mx^2 - 2mx + m - 3 = 0$.

Lời giải.

Phương trình bậc hai có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta \geq 0$.

a) $\Delta = (2m+1)^2 - (m^2+m+2) \geq 0 \Leftrightarrow 3m^2 + 3m - 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \dfrac{-3+\sqrt{21}}{6}, m \leq \dfrac{-3-\sqrt{21}}{6}$.
Vậy với $m \geq \dfrac{-3+\sqrt{21}}{6}$, $m \leq \dfrac{-3-\sqrt{21}}{6}$ thì phương trình có nghiệm.

b) Với $m = 0$, phương trình trở thành $-3 = 0$, vô nghiệm nên $m = 0$ không thỏa mãn.
Với $m \neq 0$, $\Delta' = m^2 - m(m-3) \geq 0 \Leftrightarrow 3m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$.
Vậy với $m > 0$ thì phương trình có nghiệm.

□

Bài 101. Chứng tỏ phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.

a) $x^2 + (2m+1)x + 2m = 0$.

b) $x^2 - 2(m-2)x + 2m - 5 = 0$.

Lời giải.

a) Đây là phương trình bậc hai có $a - b + c = 1 - (2m+1) + 2m = 0$ nên có nghiệm $x = -1$ với mọi giá trị của m.

b) Đây là phương trình bậc hai có $a + b + c = 1 - 2(m-2) + 2m - 5 = 0$ nên có nghiệm $x = 1$ với mọi giá trị của m.

□

Bài 102. Giải và biện luận các phương trình

a) $2x^2 + mx + m^2 = 0$.

b) $mx^2 - m + 1 = 0$.

Lời giải.

a) $\Delta = m^2 - 4 \cdot 2 \cdot m^2 = -7m^2 \leq 0\ \forall m$.
Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta > 0 \Leftrightarrow -7m^2 > 0 \Leftrightarrow m \in \emptyset$.
Phương trình có nghiệm kép khi và chỉ khi $\Delta = 0 \Leftrightarrow -7m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$.
Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $\Delta < 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.
Vậy không có m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.
$m = 0$ thì phương trình có nghiệm kép.
$m \neq 0$ thì phương trình vô nghiệm.

b) Với $m = 0$, phương trình trở thành $1 = 0$, vô nghiệm.
Với $m \neq 0$ thì $\Delta = m^2 - 4m = m(m-4)$.
Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 4 \\ m < 0. \end{array}\right.$
Phương trình có nghiệm kép khi và chỉ khi $\Delta = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$.
Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $\Delta < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$.
Vậy khi $m > 4$ hoặc $m < 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.
$m = 0$, $m = 4$ thì phương trình có nghiệm kép.
$0 \leq m < 4$ thì phương trình vô nghiệm.

□

Bài 103. Tìm nghiệm của phương trình sau $(a-b)x^2 + (b-c)x + c - a = 0$.

Lời giải.

Với $a = b$, phương trình trở thành $(a-c)x + c - a = 0$.

Với $c \neq a = b$, phương trình có nghiệm $x = -1$.

Với $a = b = c$, phương trình có vô số nghiệm.

Với $a \neq b$, $(a-b)x^2 + (b-c)x + c - a = 0$ có tổng các hệ số bằng 0 nên có nghiệm $x = 1$ và $x = \dfrac{c-a}{a-b}$. □

Bài 104. Chứng minh rằng phương trình có nghiệm với mọi a, b, c.

a) $(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$.

b) $a(b-c)x^2 + b(c-a)x + c(a-b) = 0$.

Lời giải.

a) $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2(a+b+c) + (ab+bc+ac) = 0$.
Phương trình có

$$\begin{aligned}\Delta' &= (a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ac) = a^2+b^2+c^2-ab-bc+ac \\ &= \frac{1}{2}\left((a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\right) \geq 0\end{aligned}$$

Vậy phương trình luôn có nghiệm với mọi a, b, c.

b) Phương trình có tổng các hệ số là $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b) = 0$ nên có nghiệm $x = 1$ với mọi a, b, c.

□

Bài 105. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác không có góc vuông. Chứng minh rằng các phương trình sau có nghiệm

a) $(b^2+c^2-a^2)x^2 - 4bcx + (b^2+c^2-a^2) = 0$.

b) $a^2x^2 + (a^2+b^2-c^2)x + b^2 = 0$

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned}\Delta' &= 4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2 \\ &= (2bc-b^2-c^2+a^2)(2bc+b^2+c^2-a^2) \\ &= (a^2-(b-c)^2)((b+c)^2-a^2) \\ &= (a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)(b+c+a)\end{aligned}$$

Do a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác không vuông nên chúng đều dương và thỏa mãn bất đẳng thức tam giác $\begin{cases} a+b-c>0 \\ a-b+c>0 \\ b+c-a>0 \end{cases}$.

Khi đó $\Delta' > 0$ và phương trình có nghiệm.

b)

$$\begin{aligned}
\Delta &= (a^2+b^2-c^2)^2 - 4a^2b^2 \\
&= \left(a^2+b^2-c^2+2ab\right)\left(a^2+b^2-c^2-2ab\right) \\
&= \left((a+b)^2-c^2\right)\left((a-b)^2-c^2\right) \\
&= (a+b+c)(a+b-c)(a-b-c)(a-b+c)
\end{aligned}$$

Do a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác không vuông nên chúng đều dương và thỏa mãn bất đẳng thức tam giác $\begin{cases} a+b-c>0 \\ a-b+c>0 \\ -b-c+a<0 \end{cases}$.

Khi đó $\Delta < 0$ và phương trình vô nghiệm.

□

Bài 106. Cho phương trình $3x^2 - 5x - 2 = 0$. Tính

a) $x_1^2 + x_2^2$.

b) $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1}$.

c) $x_1^3 + x_2^3$.

Lời giải.

Phương trình này có $ac < 0$ nên có hai nghiệm phân biệt.

Khi đó, theo định lí Vi-ét, có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{5}{3} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{-2}{3} \end{cases}$.

a) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\dfrac{5}{3}\right)^2 - 2 \cdot \dfrac{-2}{3} = \dfrac{37}{9}$.

b) $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \dfrac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} = \dfrac{\frac{37}{9}}{-\frac{2}{3}} = -\dfrac{37}{6}$.

c)

$$\begin{aligned}
x_1^3 + x_2^3 &= (x_1+x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) \\
&= (x_1+x_2)((x_1+x_2)^2 - 3x_1x_2) \\
&= \frac{5}{3} \cdot \left(\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 3 \cdot \frac{-2}{3}\right) = \frac{215}{27}
\end{aligned}$$

□

Bài 107. Cho phương trình $x^2 + 2(m+1)x + m^2 - m + 3 = 0$

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

b) Tìm m để $x_1^3 + x_2^3 = -28$.

c) Tìm m để $x_1 - 2x_2 = -1$.

d) Tìm giá trị lớn nhất của $B = x_1 + x_2 - x_1x_2$.

Lời giải.

a) Phương trình có hai nghiệm phân biệt
$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - (m^2 - m + 3) > 0 \Leftrightarrow 3m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{2}{3}$.
Vậy với $m > \dfrac{2}{3}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b) Với $m > \dfrac{2}{3}$, theo định lí Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(m+1) \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 - m + 3. \end{cases}$

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) \\ &= (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) \\ &= -2(m+1)\left(4(m+1)^2 - 3(m^2 - m + 3)\right) \\ &= -2m^3 - 24m^2 - 12m + 10. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 = 28 &\Leftrightarrow -2m^3 - 24m^2 - 12m + 10 = -28 \\ &\Leftrightarrow -2(m^2 + 13m + 19)(m-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \text{ (Thỏa mãn)} \\ m = \dfrac{-13 \pm \sqrt{93}}{2} \text{ (Không thỏa mãn)} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

c) Có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(m+1) \\ x_1 - 2x_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_2 = -2m - 1 \\ x_1 + x_2 = -2(m+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-4m-5}{3} \\ x_2 = \dfrac{-2m-1}{3} \end{cases}$.

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 = m^2 - m + 3 &\Leftrightarrow \frac{-4m-5}{3} \cdot \frac{-2m-1}{3} = m^2 - m + 3 \\ &\Leftrightarrow 8m^2 + 14m + 5 = 9m^2 - 9m + 27 \\ &\Leftrightarrow m^2 - 23m + 22 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 22 \end{array}\right. \text{(Thỏa mãn).} \end{aligned}$$

Vậy $m = 1$ và $m = 22$ là giá trị cần tìm.

d) $B = x_1 + x_2 - x_1x_2 = -2(m+1) - (m^2 - m + 3) = -m^2 - m - 5 = -\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{19}{4} \leq \frac{-19}{4}$.
Vậy $\max B = \frac{-19}{4}$ đạt được tại $x = -\frac{1}{2}$.

□

Bài 108. Cho phương trình $x^2 - 2(m-2)x + 2m - 3 = 0$.

a) Chứng tỏ rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Tìm m để $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{10}{9}$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của $B = x_1^2 + x_2^2$.

d) Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m.

Lời giải.

a) $\Delta' = (m-2)^2 - (2m-3) = m^2 - 6m + 7$.
Phương trình không thể luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Theo định lí Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-2) \\ x_1 \cdot x_2 = 2m - 3. \end{cases}$
Vì x_1, x_2 ở mẫu thức nên $x_1 \cdot x_2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{3}{2}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{10}{9} &\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = \frac{10}{9} \cdot x_1^2x_2^2 \\ &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{10}{9} \cdot (x_1x_2)^2 \\ &\Leftrightarrow 4(m-2)^2 - 2(2m-3) = \frac{10}{9}(2m-3)^2 \\ &\Leftrightarrow m^2 + 60m - 108 = 0 \\ &\Leftrightarrow m = \frac{-15 \pm 3\sqrt{37}}{2} \text{ (Thỏa mãn)} \end{aligned}$$

Vậy $m = \frac{-15 \pm 3\sqrt{37}}{2}$ là giá trị cần tìm.

c)

$$\begin{aligned} B &= x_1^2 + x_2^2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \\ &= 4(m-2)^2 - 2(2m-3) \\ &= 4m^2 - 20m + 22 \\ &= 4\left(m - \frac{5}{2}\right)^2 - 3 \geq -3\ \forall m \end{aligned}$$

Vậy $\min B = -3$ đạt được tại $x = \frac{5}{2}$.

d) Theo định lí Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-2) \\ x_1 \cdot x_2 = 2m - 3. \end{cases}$

Lấy vế trừ vế, ta có: $x_1 + x_2 - x_1x_2 = -1$, không phụ thuộc vào m.

Vậy hệ thức liên hệ là $x_1 + x_2 - x_1x_2 = -1$.

□

Bài 109. Tìm hai số biết rằng số lớn lớn hơn số bé 3 đơn vị và tổng các bình phương của hai số đó là 369.

Lời giải.

Gọi a, b lần lượt là hai số cần tìm $(a > b)$.

Vì số lớn lớn hơn số bé 3 đơn vị nên $a - b = 3$. (1)

Vì tổng các bình phương của hai số đó là 369 nên $a^2 + b^2 = 369$. (2)

Từ (1) và (2) ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} a - b = 3 \\ a^2 + b^2 = 369 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 3 \\ (b+3)^2 + b^2 = 369 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 3 \\ \left[\begin{array}{l} b = -15 \\ b = 12 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = -15 \\ a = -12 \end{cases} \\ \begin{cases} b = 12 \\ a = 15. \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hai số cần tìm là $(a; b) \in \{(-12; -15), (15; 12)\}$. □

Bài 110. Hai cạnh của một hình chữ nhật hơn kém nhau 10 m. Tính chu vi hình chữ nhật đó biết diện tích của nó là 1200 m^2.

Lời giải.

Gọi a, b (m) lần lượt là chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật $(a > b > 0)$.

Vì hai cạnh của một hình chữ nhật hơn kém nhau 10 m nên $a - b = 10$ (1).

Vì diện tích của hình chữ nhật là 1200 m^2 nên $a \cdot b = 1200$ (2).

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a - b = 10 \\ a \cdot b = 1200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 10 \\ (b+10) \cdot b = 1200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 10 \\ \left[\begin{array}{l} b = 30 \\ b = -40 \text{ (loại)} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 30 \\ a = 40. \end{cases}$$

Vậy chu vi của hình chữ nhật là $(40 + 30) \cdot 2 = 140$ (m). □

Bài 111. Một hình chữ nhật có chu vi là 120 cm. Nếu giảm chiều dài đi 3 cm và tăng chiều rộng thêm 5 cm thì hình chữ nhật có diện tích là 925 cm^2. Tìm kích thước ban đầu của hình chữ nhật?

Lời giải.

Gọi a, b (cm) lần lượt là chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật ($a > b > 0$).

Vì hình chữ nhật có chu vi là 120 cm nên $(a+b) \cdot 2 = 120$ (1).

Vì khi giảm chiều dài đi 3 cm và tăng chiều rộng thêm 5 cm thì hình chữ nhật có diện tích là 925 cm^2 nên ta có $(a-3) \cdot (b+5) = 925$ (2).

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} (a+b) \cdot 2 = 120 \\ (a-3) \cdot (b+5) = 925 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 60 - b \\ (60 - b - 3) \cdot (b+5) = 925 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 60 - b \\ \left[\begin{array}{l} b = 20 \\ b = 32 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = 32 \\ a = 28 \end{cases} \\ \begin{cases} b = 20 \\ a = 40. \end{cases} \end{array}\right.$$

Vì $a > b$ nên $a = 40$ và $b = 20$.

Vậy kích thước ban đầu của hình chữ nhật là 40 m và 20 m. □

Bài 112. Một đoàn xe ô tô cần chở 30 tấn hàng theo dự định, mỗi xe chở như nhau. Khi bắt đầu khởi hành thì có thêm 2 ô tô đến nữa nên mỗi xe chở ít hơn 0,5 tấn so với dự định. Hỏi lúc đầu đoàn xe có bao nhiêu ô tô?

Lời giải.

Gọi a (xe) là số xe ô tô lúc đầu ($a \in \mathbb{N}^*$).

Gọi b (tấn) là số tấn hàng mỗi xe phải chở ($b > 0{,}5$).

Vì đoàn xe ô tô cần chở 30 tấn hàng nên $a \cdot b = 30$ (1).

Vì khi bắt đầu khởi hành thì có thêm 2 ôtô đến nữa nên mỗi xe chở ít hơn 0,5 tấn so với dự định nên $(a+2) \cdot (b - 0{,}5) = 30$ (2).

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a \cdot b = 30 \\ (a+2) \cdot (b - 0{,}5) = 30 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a \cdot b = 30 \\ -0{,}5a + 2b = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a \cdot b = 30 \\ a = 4b - 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (4b-2) \cdot b = 30 \\ a = 4b - 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a = 4b - 2 \\ \left[\begin{array}{l} b = 3 \\ b = -\dfrac{5}{2} \text{ (loại)} \end{array}\right. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 10. \end{cases}$$

Vậy đoàn xe ban đầu có 10 xe. □

Bài 113. Một phân xưởng dự định dệt 3000 tấm thảm. Trong 8 ngày đầu, họ đã thực hiện đúng kế hoạch đề ra mỗi ngày, những ngày còn lại họ dệt vượt mức mỗi ngày 10 tấm thảm nên hoàn thành kế hoạch trước 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch, phân xưởng phải dệt mỗi ngày bao nhiêu tấm thảm?

Lời giải.

Gọi a (tấm thảm/ngày) là năng suất mỗi ngày của phân xưởng ($a > 0$).

Gọi b (ngày) là thời gian để phân xưởng sản xuất ($b > 0$).

Ta có bảng sau

	Tổng sản phẩm (tấm thảm)	Năng suất (tấm thảm/ngày)	Thời gian (ngày)
Kế hoạch	3000	a	b
Thực tế	$8 \cdot a$	a	8
	$(a+10)\cdot(b-10)$	$a+10$	$b-8-2=b-10$

Ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} a \cdot b = 3000 \\ (a+10)\cdot(b-10) = 3000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot b = 3000 \\ -a + b = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot (10 + a) = 3000 \\ b = 10 + a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = 50 \\ a = -60 \text{ (loại)} \end{array}\right. \\ b = 10 + a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 50 \\ b = 60. \end{cases}$$

Vậy theo kế hoạch, phân xưởng phải dệt mỗi ngày 50 tấm thảm. □

Bài 114. Lúc 7 giờ 30 phút, một ô tô khởi hành từ A đến B, ô tô nghỉ 30 phút rồi đi tiếp, đến C lúc 9 giờ 30 phút. Biết quãng đường AB dài 30 km, quãng đường BC dài 50 km và vận tốc đi trên quãng đường AB lớn hơn vận tốc đi trên quãng đường BC là 10 km/giờ. Tính vận tốc đi trên quãng đường AB, BC.

Lời giải.

Gọi a, b (km/h) lần lượt là vận tốc của ô tô đi trên quảng trường AB, BC ($a > b > 0$ và $a > 10$).

Thời gian ô tô đi từ A đến B là 9 giờ 30 phút $-$ 7 giờ 30 phút $=$ 2 giờ.

Đổi 30 phút $=$ 0,5 giờ.

Thời gian đi trên quảng đường AB là $\dfrac{30}{a}$ giờ. Thời gian đi trên quảng đường BC là $\dfrac{50}{b}$ giờ.

Vì vận tốc đi trên AB lớn hơn vận tốc đi trên BC là 10 km/giờ nên ta có $a - b = 10$ (1).

Vì tổng thời gian đi từ A đến B hết 2 giờ nên ta có $\dfrac{30}{a} + \dfrac{50}{b} + 0{,}5 = 2$ (2).

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} a - b = 10 \\ \dfrac{30}{a} + \dfrac{50}{b} + 0{,}5 = 2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 10 \\ 50a + 30b = 1{,}5ab \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 10 \\ 50(b + 10) + 30b = 1{,}5(b + 10)b \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 10 \\ 3b^2 - 130b - 1000 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 10 \\ \left[\begin{array}{l} b = 50 \\ b = -\dfrac{20}{3} \text{ (loại)} \end{array}\right. \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 60 \\ b = 50. \end{cases}$$

Vậy vận tốc đi trên quãng đường AB là 60 km/h và vận tốc đi trên quãng đường BC là 50 km/h.

□

Bài 115. Một người đi xe đạp từ tỉnh A đến tỉnh B dài 36 km. Lúc về người ấy tăng vận tốc thêm 3 km/h, do đó thời gian về ít hơn thời gian đi là 36 phút. Tính vận tốc lúc đi của người đó.

Lời giải.

Gọi a (km/h) là vận tốc lúc đi của người đi xe đạp ($a > 0$).

Gọi b (giờ) là thời gian đi của người đi xe đạp ($b > 0$).

Quảng đường đi từ A đến B là 36 km nên $a \cdot b = 36$ (1).

Đổi 36 phút $=$ 0,6 giờ.

Vì lúc về người ấy tăng vận tốc thêm 3 km/h, do đó thời gian về ít hơn thời gian đi là 36 phút nên ta có $(a + 3) \cdot (b - 0{,}6) = 36$ (2).

Từ (1) và (2) ta có

$$\begin{cases} ab = 36 \\ (a+3)(b-0{,}6) = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 36 \\ a - 5b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (5b-3)b = 36 \\ a = 5b - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} b = 3 \\ b = -\dfrac{12}{5} \text{ (loại)} \end{array}\right. \\ a = 5b - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 12. \end{cases}$$

Vậy vận tốc lúc đi của người đó là 12 km/h.

□

Bài 116. Hai ô tô khởi hành cùng một lúc tại hai điểm A, B và đi ngược chiều nhau. Sau khi khởi hành 2 giờ thì hai xe gặp nhau tại một địa điểm cách trung điểm AB là 15 km. Nếu vận tốc ô tô chạy nhanh giảm đi một nửa vận tốc ban đầu thì hai xe sẽ gặp nhau sau khi khởi hành 2 giờ 48 phút. Tìm vận tốc mỗi xe.

Lời giải.

Gọi a, b (km/h) lần lượt là vận tốc hai ô tô ($a > b > 0$).

Quãng đường ô tô thứ 1 đi trong 2 giờ là $2a$ km.

Quãng đường ô tô thứ 2 đi trong 2 giờ là $2b$ km.

Điểm gặp nhau cách trung điểm AB là 15 km nên $2a - 2b = 2 \cdot 15 \Leftrightarrow a - b = 15$ (1).

Quảng đường AB là $2a + 2b$ km.

Vận tốc ô tô chạy nhanh giảm một nữa vận tốc thì 2 giờ 48 phút hai xe gặp nhau.

Đổi: 2 giờ 48 phút = 2,8 giờ.

Quảng đường xe thứ nhất đi được trong 2,8 giờ là $\frac{a}{2} \cdot 2{,}8 = 1{,}4a$ km.

Quảng đường xe thứ hai đi được trong 2,8 giờ là $2{,}8b$ km.

Vì quảng đường AB dài $2a + 2b$ km nên $1{,}4a + 2{,}8b = 2a + 2b \Leftrightarrow a = \frac{4b}{3}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a - b = 15 \\ a = \dfrac{4b}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 60 \\ b = 45. \end{cases}$$

Vậy vận tốc của hai xe lần lượt là 60 (km/h), 45 (km/h). □

Bài 117. Cho 3 bình đựng nước. Nếu rót $\frac{1}{3}$ lượng nước từ bình thứ nhất sang bình thứ hai, rồi rót $\frac{1}{4}$ lượng nước hiện có từ bình thứ hai sang bình thứ ba và cuối cùng rót $\frac{1}{10}$ lượng nước hiện có từ bình thứ ba sang bình thứ nhất thì trong mỗi bình đều có 9 lít nước. Hỏi lúc đầu mỗi bình chứa bao nhiêu lít nước?

Lời giải.

Gọi a, b, c lần lượt là số lít nước của bình thứ nhất, thứ hai và thứ ba ($a, b, c > 0$).

Số lít nước còn lại sau mỗi lần đổ nước là

- Lần 1: $\begin{cases} a - \dfrac{1}{3}a \text{ (Bình 1)} \\ b + \dfrac{1}{3}a \text{ (Bình 2).} \end{cases}$

- Lần 2: $\begin{cases} b + \dfrac{1}{3}a - \dfrac{1}{4}\left(b + \dfrac{1}{3}a\right) \text{ (Bình 2)} \\ c + \dfrac{1}{4}\left(b + \dfrac{1}{3}a\right) \text{ (Bình 3).} \end{cases}$

- Lần 3: $\begin{cases} c + \dfrac{1}{4}\left(b + \dfrac{1}{3}a\right) - \dfrac{1}{10}\left[c + \dfrac{1}{4}\left(b + \dfrac{1}{3}a\right)\right] \text{ (Bình 3)} \\ a - \dfrac{1}{3}a + \dfrac{1}{10}\left[c + \dfrac{1}{4}\left(b + \dfrac{1}{3}a\right)\right] \text{ (Bình 1).} \end{cases}$

Vì lúc sau mỗi bình đều chứa 9 lít nước nên ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} b + \dfrac{1}{3}a - \dfrac{1}{4}\left(b + \dfrac{1}{3}a\right) = 9 \\ c + \dfrac{1}{4}\left(b + \dfrac{1}{3}a\right) - \dfrac{1}{10}\left[c + \dfrac{1}{4}\left(b + \dfrac{1}{3}a\right)\right] = 9 \\ a - \dfrac{1}{3}a + \dfrac{1}{10}\left[c + \dfrac{1}{4}\left(b + \dfrac{1}{3}a\right)\right] = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 9b = 108 \\ 9a + 27b + 108c = 1080 \\ 81a + 3b + 12c = 1080 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 12 \\ b = 8 \\ c = 7. \end{cases}$$

Vậy số lít nước của mỗi bình lần lượt là $12; 8; 7$ (lít). □

Bài 118. Một xí nghiệp đã chi 26 500 000 đồng thưởng cho 11 công nhân. Giải thưởng gồm các loại: 1 500 000 đồng, 2 500 000 đồng, 3 500 000 đồng, 4 000 000 đồng và 5 000 000 đồng. Hỏi số người được thưởng loại 1 500 000 đồng, biết rằng tất cả các loại giải thưởng đều được trao cho ít nhất một công nhân?

Lời giải.

Vì tất cả các loại giải thưởng đều được trao ít nhất một công nhân nên có 5 công nhân mỗi người nhận 1 loại.

Do đó, tổng tiền của 5 công nhân đó là

$$1\,500\,000 + 2\,500\,000 + 3\,500\,000 + 4\,000\,000 + 5\,000\,000 = 16\,500\,000 \text{đồng}.$$

Suy ra tổng số tiền của 6 người còn lại là $26\,500\,000 - 16\,500\,000 = 10\,000\,000$ đồng.

Và số công nhân chưa được nhận giải thưởng là $11 - 5 = 6$ người.

Ta xét các trường hợp sau

- Nếu 1 người nhận 5 000 000 đồng thì 5 người còn lại nhận số tiền 5 000 000 đồng (vô lý).
- Nếu 1 người nhận 4 500 000 đồng thì 5 người còn lại nhận số tiền 5 500 000 đồng (vô lý).
- Nếu 1 người nhận 3 500 000 đồng thì 5 người còn lại nhận số tiền 6 500 000 đồng (vô lý).

- Nếu 1 người nhận 2 500 000 đồng thì 5 người còn lại nhận số tiền 7 500 000 đồng $\Rightarrow$ mỗi người nhận 1 500 000 đồng.

Vậy có 6 người nhận được giải thưởng 1 500 000 đồng. □

Bài 119. Một vận động viên thi bắn súng. Vận động viên đã bắn hơn 11 viên và đều bắn vào các vòng $8, 9$ và 10 điểm. Tổng số điểm mà vận động viên đạt được là 100 điểm. Hỏi vận động viên đó đã bắn bao nhiêu viên và kết quả bắn vào từng vòng ra sao?

Lời giải.

Gọi a, b, c lần lượt là số lần bắn đúng vào các vòng $8, 9$ và 10 điểm $(a, b, c \in \mathbb{N}^*)$.

Vì vận động viên đã bắn hơn 11 và đạt được là 100 điểm nên ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} a + b + c > 11 \\ 8a + 9b + 10c = 100. \end{cases}$$

Ta thấy $8a + 8b + 8c < 8a + 9b + 10c = 100 \Rightarrow a + b + c \leq 12$.

Do đó $a + b + c = 12$.

Ta xét hệ phương trình sau $\begin{cases} a + b + c = 12 \\ 8a + 9b + 10c = 100 \end{cases} \Leftrightarrow b + 2c = 4 \Rightarrow b = 4 - 2c.$

Với $b \geq 1 \Rightarrow 4 - 2c \geq 1 \Leftrightarrow c \leq 1{,}5$. Do đó $c = 1$.

Suy ra $b = 4 - 2 \cdot 1 \Rightarrow a = 12 - b - c = 12 - 2 - 1 = 9$.

Vậy vận động viên đó đã bắn 12 viên và số lần bắn trúng vòng $8; 9; 10$ lần lượt là $9; 2; 1$.

□

Bài 120. Tìm một số có ba chữ số biết rằng tổng của chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị lớn hơn chữ số hàng trăm là 10 đơn vị. Tích của chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị nếu bớt đi 1 thì bằng 10 lần chữ số hàng trăm.

Lời giải.

Gọi $\overline{abc}$ là số cần tìm $(a, b, c \in [0; 9]; a \neq 0; a, b, c \in \mathbb{N})$.

Vì tổng của chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị lớn hơn chữ số hàng trăm là 10 đơn vị, và tích của chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị nếu bớt đi 1 thì bằng 10 lần chữ số hàng trăm nên ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} b + c - a = 10 \\ bc - 1 = 10a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + c - 10 \\ bc - 1 = 10(b + c - 10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + c - 10 & (1) \\ bc - 1 = 10(b + c - 10) & (2). \end{cases}$$

Từ (2) $\Rightarrow (b - 10) \cdot (c - 10) = 1$. Mà $b; c \in [0; 9]$

Suy ra $\begin{cases} c - 10 = -1 \\ b - 10 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 9. \end{cases}$

Thay $b = 9, c = 9$ vào (1), ta có $a = 9 + 9 - 10 = 8$.

Vậy số cần tìm là 899. □

Bài 121. Tìm số có ba chữ số biết rằng tổng của 3 chữ số là 14, chữ số hàng đơn vị bằng $\frac{3}{4}$ tổng của hai chữ số kia và nếu cộng thêm 99 vào số đó ta được một số có 3 chữ số theo thứ tự ngược lại.

Lời giải.

Gọi $\overline{abc}$ là số cần tìm $(a, b, c \in [0; 9]; a \neq 0; a, b, c \in \mathbb{N})$.

Vì tổng của 3 chữ số là 14, chữ số hàng đơn vị bằng $\frac{3}{4}$ tổng của hai chữ số kia và nếu cộng thêm 99 vào số đó ta được một số có 3 chữ số theo thứ tự ngược lại nên ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} a+b+c=14 \\ c=\dfrac{3}{4}(a+b) \\ \overline{abc}+99=\overline{cba} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=14 \\ 4c=3a+3b \\ 100a+10b+c+99=100c+10b+a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=14 \\ 3a+3b-4c=0 \\ 99a-99c=-99 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=3 \\ c=6. \end{cases}$$

Vậy số cần tìm là 536. □

Bài 122. Một ca nô chạy xuôi dòng 96 km và ngược dòng 16 km mất tổng cộng 4 giờ. Nếu ca nô đó chạy xuôi dòng 75 km và ngược dòng 30 km thì cũng mất thời gian bằng thời gian như trên. Hỏi vận tốc ca nô và vận tốc dòng nước là bao nhiêu?

Lời giải.

Gọi vận tốc thực của ca nô là a (km/h), vận tốc của dòng nước là b (km/h) $(a > b > 0)$.

Vận tốc xuôi dòng là $a+b$ (km/h), vận tốc ngược dòng là: $a-b$ (km/h).

Vì thời gian xuôi dòng 96 km và ngược dòng 16 km hết 4 giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{96}{a+b}+\frac{16}{a-b}=4 \qquad (1).$$

Vì thời gian xuôi dòng 75 km và ngược dòng 30 km hết 4 giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{75}{a+b}+\frac{30}{a-b}=4 \qquad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{96}{a+b}+\dfrac{16}{a-b}=4 \\ \dfrac{75}{a+b}+\dfrac{30}{a-b}=4. \end{cases}$

Đặt $X=\dfrac{1}{a+b}; Y=\dfrac{1}{a-b}$.

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 96X+16Y=4 \\ 75X+30Y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=\dfrac{1}{30} \\ Y=\dfrac{1}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{a+b}=\dfrac{1}{30} \\ \dfrac{1}{a-b}=\dfrac{1}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=30 \\ a-b=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=25 \\ b=5. \end{cases} \text{(thoả mãn)}$$

Vậy vận tốc thực của ca nô là 25 (km/h), vận tốc của dòng nước là 5 (km/h). □

Bài 123. Một người đi xe đạp từ tỉnh A đến tỉnh B cách nhau 36 km. Lúc từ B quay về A người ấy đi bộ nên vận tốc lúc về giảm đi 9 km/giờ so với vận tốc lúc đi. Biết vận tốc lúc đi lớn hơn vận tốc trung bình của cả chuyến đi và về là 7,2 km/giờ. Tìm vận tốc trung bình của cả chuyến đi.

Lời giải.

Gọi a, b (giờ) lần lượt là thời gian lúc đi và lúc về ($a, b > 0$).
Vận tốc lúc đi $\dfrac{36}{a}$ (km/h). Vận tốc lúc về $\dfrac{36}{b}$ (km/h).
Vận tốc trung bình của cả chuyến đi là $\dfrac{36 \cdot 2}{a+b} = \dfrac{72}{a+b}$ (km/h).
Vì từ B quay về A người ấy đi bộ nên vận tốc lúc về giảm đi 9 km/giờ so với vận tốc lúc đi nên

$$\frac{36}{a} - \frac{36}{b} = 9 \qquad (1).$$

Vì vận tốc lúc đi lớn hơn vận tốc trung bình của cả chuyến đi và về là 7,2 km/giờ nên

$$\frac{36}{a} - \frac{72}{a+b} = 7{,}5 = \frac{36}{5} \qquad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \dfrac{36}{a} - \dfrac{36}{b} = 9 \\ \dfrac{36}{a} - \dfrac{72}{a+b} = \dfrac{36}{5} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 4(b-a) = ab \\ 5(b-a) = a(a+b) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 4(b-a) = ab \\ b = 4a \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 4(4a-a) = a \cdot 4a \\ b = 4a \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = 3 \\ a = 0 \text{ (loại)} \end{array}\right. \\ b = 4a \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a = 3 \\ b = 12. \end{cases} \end{aligned}$$

Thời gian lúc đi là 3 giờ. Thời gian lúc về là 12 giờ.
Vận tốc trung bình trên cả đoạn đường là: $\dfrac{72}{3+12} = 4{,}8$ (km/giờ).

□

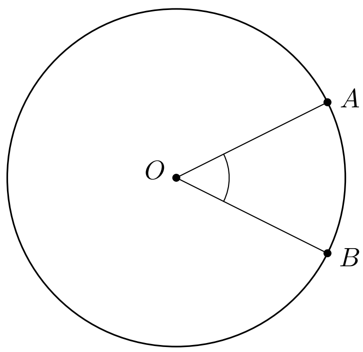
Chương 3

GÓC VÀ ĐƯỜNG TRÒN

1 GÓC Ở TÂM, SỐ ĐO CUNG

1.1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1.1.1 Góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn gọi là góc ở tâm.



$\widehat{AOB}$: góc ở tâm của (O)

1.1.2 Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó ($\widehat{AOB} = \text{sđ}\overset{\frown}{AB}$).

a) Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa $360°$ và số đo của cung nhỏ.

b) Số đo của nửa đường tròn bằng $180°$.

Chú ý. Cung nhỏ có số đo nhỏ hơn $180°$, cung lớn có số đo lớn hơn $180°$

1.1.3 Trong một đường tròn hay hai đường tròn bằng nhau:

a) Hai cung được gọi là bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau.

b) Trong hai cung, cung nào có số đo lớn hơn được gọi là cung lớn hơn.

1.1.4 Nếu C là một điểm nằm trên cung AB thì:

$$\text{sđ}\overset{\frown}{AB} = \text{sđ}\overset{\frown}{AC} + \text{sđ}\overset{\frown}{CD}$$

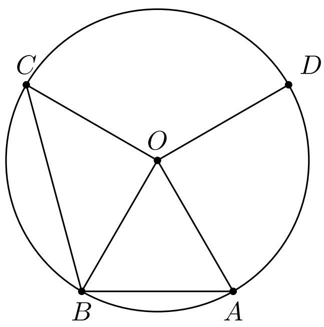
Ví dụ 14. Cho đường tròn $(O; R)$, trên (O) lấy các điểm A, B, C sao cho $AB = R$, $BC = R\sqrt{2}$, tia BO nằm giữa hai tia BA và BC.

a) Tính số đo $\widehat{BOC}$.

b) Tính số đo các cung $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{AC}$.

c) Cho điểm D là điểm nằm trên cung lớn $\overset{\frown}{AC}$ sao cho sđ$\overset{\frown}{CD} = 120°$. Tính số đo cung AD.

Lời giải.



a) Xét $\triangle BOC$ có $\begin{cases} BC^2 = 2R^2 \\ OB^2 + OC^2 = 2R^2 \end{cases} \Rightarrow BC^2 = OB^2 + OC^2$.
$\Rightarrow \triangle OBC$ vuông tại $O \Rightarrow \widehat{BOC} = 90°$.

b) Xét $\triangle AOB$ có $OA = OB = AB = R \Rightarrow \triangle AOB$ đều $\Rightarrow \widehat{BOA} = 60°$.
$\Rightarrow$ sđ$\overset{\frown}{AB} = \widehat{AOB} = 60°$ (góc ở tâm bằng số đo cung bị chắn).
Ta có sđ$\overset{\frown}{BC} = \widehat{BOC} = 90°$ (góc ở tâm bằng số đo cung bị chắn).
Ta có $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = \widehat{AOC} = 150°$.
$\Rightarrow$ sđ$\overset{\frown}{AC} = \widehat{AOC} = 150°$ (góc ở tâm bằng số đo cung bị chắn).

c) Vì điểm D là điểm nằm trên cung lớn $\overset{\frown}{AC}$ nên

$$\begin{aligned} & \text{sđ}\overset{\frown}{CA} + \text{sđ}\overset{\frown}{CD} + \text{sđ}\overset{\frown}{DA} = 360° \\ \Leftrightarrow\ & 150° + 120° + \text{sđ}\overset{\frown}{CD} = 360° \\ \Leftrightarrow\ & \text{sđ}\overset{\frown}{CD} = 90° \end{aligned}$$

□

1.2 BÀI TẬP

Bài 124. Cho $\triangle ABC$ cân tại A có $\widehat{A} = 70°$. Vẽ đường tròn $(A; AB)$, D là điểm trên (A) sao cho sđ$\overset{\frown}{CD} = 30°$. Tính số đo $\widehat{BAD}$.

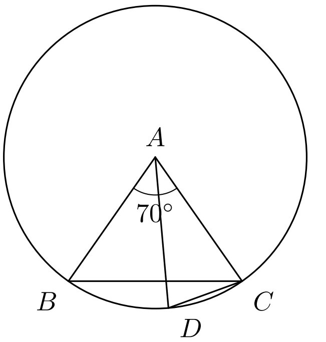
Lời giải.

Ta có $\widehat{CAD} =$ sđ$\overset{\frown}{CD} = 30°$ (góc ở tâm chắn cung $\overset{\frown}{CD}$).

- **Trường hợp 1:**

  D nằm trong cung BC

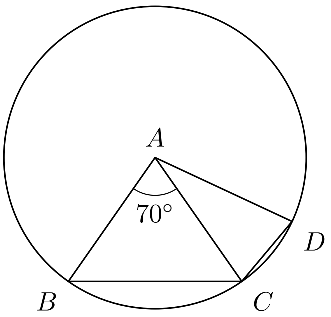
  $\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{BAC} - \widehat{CAD} = 40°$.



- **Trường hợp 2:**

  D nằm ngoài cung BC

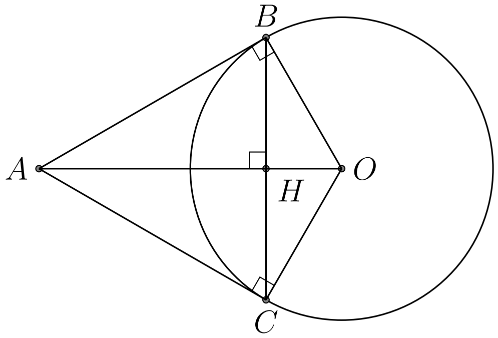
  $\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{BAC} + \widehat{CAD} = 100°$.



□

Bài 125. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn $(O; R)$, $OA = 2R$. Vẽ AB, AC là các tiếp tuyến của đường tròn (O). Tính sđ$\overset{\frown}{BC}$, độ dài cạnh BC theo R.

Lời giải.



$\triangle ABO$ vuông tại B có $\cos\widehat{BOA} = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BOA} = 60^\circ$.

Tương tự ta được $\widehat{COA} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BOC} = \widehat{BOA} + \widehat{AOC} = 120^\circ$.

$\Rightarrow$ sđ$\overset{\frown}{BC} = 120^\circ$ ($\widehat{BOC}$ là góc ở tâm chắn cung $\overset{\frown}{BC}$).

Gọi H là giao điểm của AO và BC.

Ta có $\begin{cases} OB = OC = R \\ AB = AC \text{ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)} \end{cases}$

$\Rightarrow OA$ là đường trung trực của BC.

$\Rightarrow OA \perp BC$ tại H và H là trung điểm của BC.

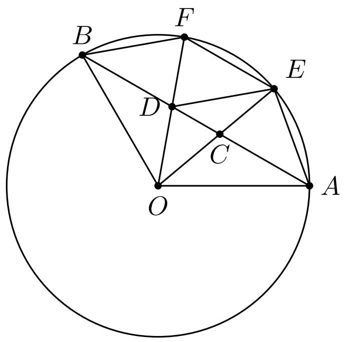
Xét $\triangle OBH$ có $\sin\widehat{HOB} = \dfrac{BH}{OB} \Rightarrow BH = OB \cdot \sin\widehat{HOB} = R\sin 60^\circ = R\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Vì H là trung điểm của BC nên $BC = R\sqrt{3}$.

□

Bài 126. Cho đường tròn $(O; R)$, AB là dây cung ($AB \neq 2R$). Trên cung nhỏ AB lấy các điểm E, F sao cho sđ$\overset{\frown}{AE}$ = sđ$\overset{\frown}{EF}$ = sđ$\overset{\frown}{FB}$. Bán kính OE, OF cắt AB lần lượt tại C và D. Chứng minh rằng $AC = BD > CD$.

Lời giải.



$\triangle AOB$ có $OA = OB$ nên $\triangle AOB$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA}$.

Ta có $\begin{cases} \widehat{BOF} = \text{sđ}\overset{\frown}{BF} \\ \widehat{FOE} = \text{sđ}\overset{\frown}{EF} \\ \widehat{AOE} = \text{sđ}\overset{\frown}{AE} \\ \text{sđ}\overset{\frown}{AE} = \text{sđ}\overset{\frown}{EF} = \text{sđ}\overset{\frown}{FB} \end{cases} \Rightarrow \widehat{BOF} = \widehat{FOE} = \widehat{AOE}$.

Xét $\triangle OCA$ và $\triangle ODB$ có

$\begin{cases} \widehat{AOC} = \widehat{BOD} \\ OA = OB (= R) \\ \widehat{OAC} = \widehat{OBD} \end{cases} \Rightarrow \triangle AOC = \triangle BOD \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AC = BD.$

Xét $\triangle ODE$ và $\triangle ODB$ có

$\begin{cases} OD \text{ chung} \\ \widehat{EOD} = \widehat{BOD} \text{(cmt)} \\ OE = OB (= R) \end{cases} \Rightarrow \triangle ODE = \triangle ODB \text{ (c.g.c)} \Rightarrow DE = BD.$

$\triangle AOC = \triangle BOD \Rightarrow OC = OD \Rightarrow \triangle DOC$ cân tại O

$\Rightarrow \widehat{OCD} < 90^\circ \Rightarrow \widehat{DCE} > 90^\circ \Rightarrow \widehat{DCE} > \widehat{CDE}$.

Xét $\triangle CDE$ có $\widehat{DCE} > 90^\circ \Rightarrow \widehat{CDE} < 90^\circ \Rightarrow \widehat{DCE} > \widehat{CED} \Rightarrow DE > CD$.

Mà $DE = DB \Rightarrow BD > DC$.

Vậy $AC = BD > DC$. □

Bài 127. Cho đường tròn $(O; R)$, AB là dây cung ($AB \neq 2R$). Trên dây AB lấy hai điểm C và D sao cho $AC = CD = DB$. Vẽ bán kính OE qua C, bán kính OF qua D. Chứng minh rằng

a) $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BF}$.

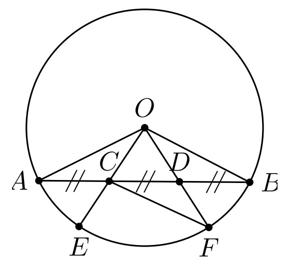
b) $\overset{\frown}{AE} < \overset{\frown}{EF}$.

Lời giải.

a) Tam giác cân AOB có $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$.
Mặt khác, $\triangle AOC = \triangle BOD$ (c.g.c) vì có $OA = OB$, $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$, $AC = BD$.
Từ đó suy ra $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$ suy ra $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{FB}$.

b)

Tam giác OCD là tam giác cân ($OC = OD$ do $\triangle AOC = \triangle BOD$) nên $\widehat{ODC} < 90^\circ$, từ đó suy ra $\widehat{CDF} > 90^\circ$.
Mặt khác, trong tam giác CDF có $\widehat{CDF} > \widehat{CFD}$ suy ra $CF > CD$ hay $CF > CA$.
Xét $\triangle AOC$ và $\triangle COF$ có $OA = OF$, OC chung, nhưng $CF > AC$ suy ra $\widehat{COD} > \widehat{AOC}$. Từ đó suy ra $\overset{\frown}{EF} > \overset{\frown}{AE}$.



□

2 LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY

2.1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1) Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay hai đường tròn bằng nhau:

a) Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau.

b) Hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau.

2) Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay hai đường tròn bằng nhau:

a) Cung lớn hơn căng dây lớn hơn.

b) Dây lớn hơn căng cung lớn hơn.

3) Đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì đi qua trung điểm của dây căng cung ấy.

4) Đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì đi qua điểm chính giữa của cung căng dây ấy.

5) Đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì vuông góc với dây căng cung ấy và ngược lại.

6) Trong một đường tròn, hai cung bị chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau.

Ví dụ 15. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$ $(AB < BC)$. Vẽ dây BD của (O) và $BD \perp OA$. So sánh $\overset{\frown}{AD}$ và $\overset{\frown}{BC}$.

Lời giải.

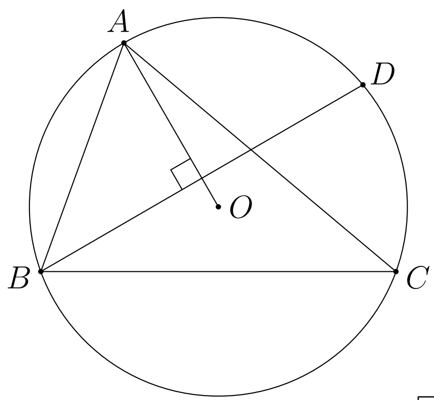
Xét (O) có $\begin{cases} BD \text{ là dây cung} \\ OA \perp BD \text{ (gt)}. \end{cases}$

$\Rightarrow A$ là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{BD}$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây).

$\Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AB}$.

Mà $AB < BC$ (gt) nên $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$.

Suy ra $\overset{\frown}{AD} < \overset{\frown}{BC}$.



□

Ví dụ 16. Cho $(O; R)$ và A, B thuộc (O) sao cho sđ$\overset{\frown}{AB} = 120°$, C là điểm thuộc cung AB sao cho $AC = R$. Chứng minh rằng $OC \perp AB$.

Lời giải.

Xét $\triangle OAC$, ta có $OC = OA = AC = R$.

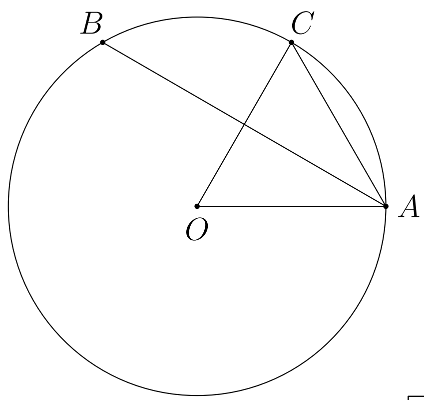
$\Rightarrow \triangle OAC$ đều $\Rightarrow \widehat{AOC} = 60° \Rightarrow$ sđ$\overset{\frown}{AC} = 60°$.

Mà sđ$\overset{\frown}{AB} = 120°$, suy ra sđ$\overset{\frown}{AC} = \dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AB}$.

$\Rightarrow C$ là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{AB}$.

Xét (O), ta có $\begin{cases} AB \text{ là dây cung} \\ C \text{ là điểm chính giữa của } \overset{\frown}{AB} \text{ (cmt)}. \end{cases}$

$\Rightarrow OC \perp AB$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây).



□

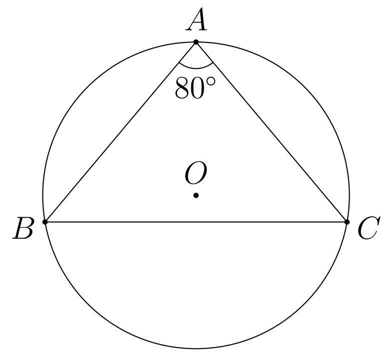
2.2 BÀI TẬP

Bài 128. Cho $\triangle ABC$ cân tại A nội tiếp $(O; R)$ có $\widehat{A} = 80°$. So sánh các cung $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$.

Lời giải.

Xét $\triangle ABC$ cân tại A có

$$\widehat{B} = \widehat{C} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2} = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ.$$



Xét $\triangle ABC$ có $\widehat{A} > \widehat{B}$ $(80^\circ > 50^\circ)$.

$\Rightarrow BC > AB \Rightarrow \overset{\frown}{BC} > \overset{\frown}{AB}$.

Ta có $AB = AC$ ($\triangle ABC$ cân tại A).

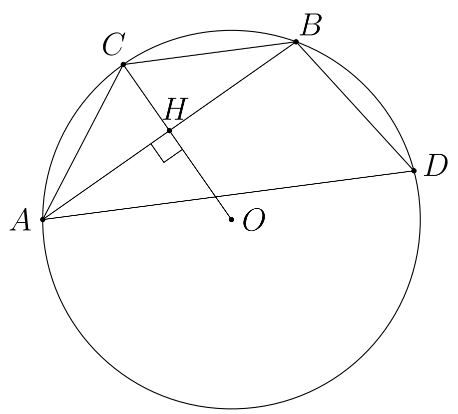
$\Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$.

Do đó $\overset{\frown}{BC} > \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$ (liên hệ giữa cung và dây).

□

Bài 129. Cho AB là dây cung của đường tròn $(O; R)$ $(AB \neq 2R)$. Vẽ $OH \perp AB$ tại H. Tia OH cắt đường tròn (O) ở C. Vẽ dây AD của (O) và $AD \parallel BC$. Chứng minh rằng $AC = BC = BD$.

Lời giải.



Xét (O) có $AD \parallel BC$ (gt) và AD, BC là dây cung.

$\Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$ (định lý 2 dây cung song song).

$\Rightarrow AC = BD$ (liên hệ giữa cung và dây) (1).

Ta có OC là bán kính, $OC \perp BA$ tại H (gt).

$\Rightarrow C$ là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{AB}$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây).

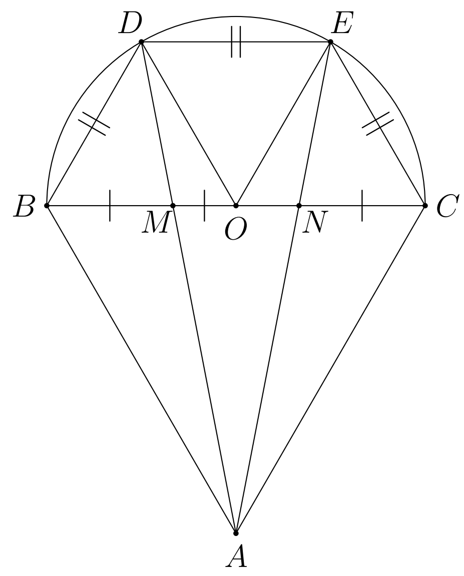
$\Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC} \Rightarrow AC = BC$ (liên hệ giữa cung và dây) (2).

Từ (1) và (2), ta suy ra $AC = BC = BD$.

□

Bài 130. Cho nửa đường tròn $(O; R)$. Các điểm M, N thuộc đường kính BC sao cho $BM = MN = NC$. Các điểm D, E thuộc $\overset{\frown}{BC}$ sao cho $BD = DE = EC$. Gọi A là giao điểm của DM và EN. Chứng minh $\triangle ABC$ đều.

Lời giải.



Ta có $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EC} = \dfrac{1}{3}\overset{\frown}{BC}$ (gt).

$\Rightarrow$ sđ$\overset{\frown}{BD}$ = sđ$\overset{\frown}{DE}$ = sđ$\overset{\frown}{EC}$ = $\dfrac{1}{3}$sđ$\overset{\frown}{BC}$.

$\Rightarrow \widehat{BOD} = \widehat{DOE} = \widehat{EOC} = 60^\circ$.

Xét $\triangle DOE$ có $OD = OE = R \Rightarrow \triangle DOE$ cân tại O.

Mà $\widehat{DOE} = 60^\circ$ (cmt) $\Rightarrow \triangle DOE$ đều $\Rightarrow OE = ED$.

Chứng minh tương tự, ta cũng có, $OB = BD$.

Mà $OB = OE = R$ (gt) nên $OB = BD = DE = OE$.

Xét tứ giác $OBDE$ có $OB = BD = DE = OE = R$ (cmt).

$\Rightarrow OBDE$ là hình thoi (tứ giác có 4 cạnh bằng nhau).

$\Rightarrow OB \parallel DE$ hoặc $MN \parallel DE$.

Áp dụng định lý Talet, ta có $\dfrac{MN}{DE} = \dfrac{AN}{AE}$.

Mà $\dfrac{MN}{DE} = \dfrac{2R}{3} : R = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{AN}{AE} = \dfrac{2}{3}$.

Mà N nằm giữa A và E nên $\dfrac{AN}{NE} = 2$.

Lại có $BN = 2NC$ (gt) $\Rightarrow \dfrac{BN}{NC} = 2$. Do đó, $\dfrac{AN}{NE} = \dfrac{BN}{NC}$.

Xét $\triangle ABN$ và $\triangle ECN$ có $\begin{cases} \widehat{ANB} = \widehat{ENC} & \text{(đối đỉnh)} \\ \dfrac{AN}{NE} = \dfrac{BN}{NC} & \text{(cmt).} \end{cases}$

$\Rightarrow \triangle ABN \sim \triangle ECN \Rightarrow \dfrac{AB}{EC} = \dfrac{BN}{CN} = 2 \Rightarrow AB = 2EC$.

Mà $CE = R$ nên $AB = 2R$.

Chứng minh tương tự, ta cũng có, $AC = 2R$.

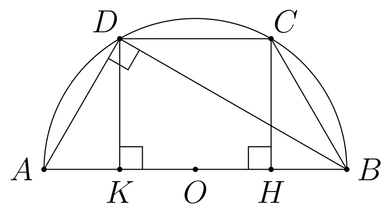
Xét $\triangle ABC$ có $AB = BC = AC = 2R$ (cmt)

Suy ra $\triangle ABC$ đều (tam giác có 3 cạnh bằng nhau).

□

Bài 131. Cho nửa đường tròn $(O; R)$, đường kính $AB = 4$cm. Dây $CD \parallel AB$ (D thuộc $\overset{\frown}{AC}$). Cho biết chu vi của hình thang $ABCD$ bằng 10cm. Tính độ dài các cạnh của hình thang $ABCD$.

Lời giải.



Xét nửa (O), ta có $CD \parallel AB$; AB, CD là dây cung.

$\Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$ (định lý 2 dây cung song song).

$\Rightarrow AD = BC = x$ (liên hệ giữa cung và dây).

$\Rightarrow CD = 10 - AB - 2AD = 10 - 4 - 2x = 6 - 2x$.

Dựng CH và DK lần lượt vuông góc với AB tại H, K.

Ta có $BH = AK = \dfrac{AB - CD}{2} = \dfrac{4 - (6 - 2x)}{2} = \dfrac{2x - 2}{2} = x - 1$.

Ta có $\triangle ABD$ nội tiếp đường tròn tâm (O) đường kính AB.

$\Rightarrow \triangle ABD$ vuông tại D.

Áp dụng hệ thức lượng trong $\triangle ABD$ vuông tại D có đường cao DK, ta được

$$\begin{aligned} AD^2 = AK \cdot AB &\Leftrightarrow x^2 = 4(x-1) \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2. \end{aligned}$$

Do đó, $AB = 4$cm, $AD = DC = CB = 2$cm.

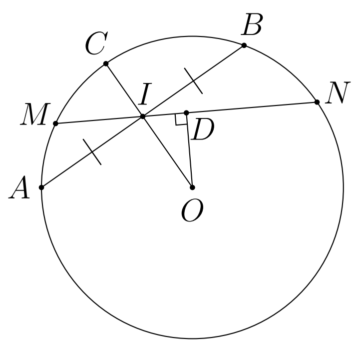
□

Bài 132. Cho AB là dây cung của đường tròn $(O; R)$ $(AB \neq 2R)$, I là trung điểm của dây AB, tia OI cắt (O) ở C

a) So sánh $\overset{\frown}{AC}$ và $\overset{\frown}{BC}$.

b) Vẽ dây MN qua I. So sánh $\overset{\frown}{MN}$ và $\overset{\frown}{AB}$.

Lời giải.



a) Xét (O) ta có I là trung điểm của dây AB (gt) $\Rightarrow OI \perp AB$.

Mà O, I, C thẳng hàng nên $OC \perp AB$ tại I (cmt).

$\Rightarrow C$ là điểm chính giữa $\overset{\frown}{AB}$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây).

$\Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$ (liên hệ giữa cung và dây).

b) Dựng $OD \perp MN$ tại D.

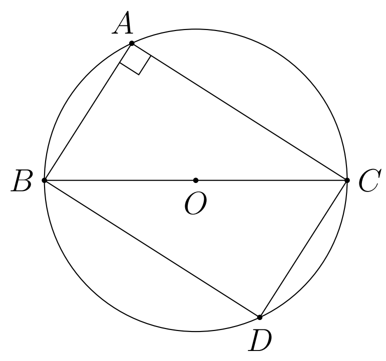
Xét $\triangle ODI$ vuông tại D, có $OD \leq OI$ (quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên).

$\Rightarrow MN \geq AB$ (liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây) $\Rightarrow \overset{\frown}{MN} \geq \overset{\frown}{AB}$ (liên hệ giữa cung và dây).

□

Bài 133. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, nội tiếp $(O; R)$. Qua B vẽ dây cung $BD \parallel AC$. Chứng minh rằng tứ giác $ABDC$ là hình chữ nhật.

Lời giải.



Ta có $BD \parallel AC$ (gt).

Mà $AC \perp AB$ ($\triangle ABC$ vuông tại A) $\Rightarrow BD \perp AB$.

Ta có $\triangle BCD$ nội tiếp đường tròn tâm O đường kính BC.

$\Rightarrow \triangle BCD$ vuông tại D.

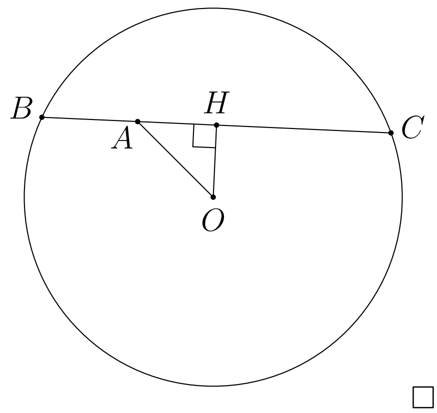
Xét tứ giác $ABDC$ có $\begin{cases} \widehat{BAC} = 90^\circ & (\triangle ABC \text{ vuông tại } A) \\ \widehat{ABD} = 90^\circ & (BD \perp AB) \\ \widehat{BDC} = 90^\circ & (\triangle BCD \text{ vuông tại } D). \end{cases}$

$\Rightarrow ABDC$ là hình chữ nhật (tứ giác có 3 góc vuông).

$\square$

Bài 134. Cho điểm A cố định nằm trong đường tròn $(O; R)$ $(A \neq O)$. BC là dây cung di động qua A. Xác định vị trí của dây BC để cung BC nhỏ nhất.

Lời giải.



Dựng $OH \perp BC$ với $H \in BC$.

Xét $\triangle OAH$ vuông tại H, có $OH \leq OA$ (quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên).

Mà OA cố định nên BC nhỏ nhất khi và chỉ khi OH lớn nhất, nghĩa là $H \equiv A$.

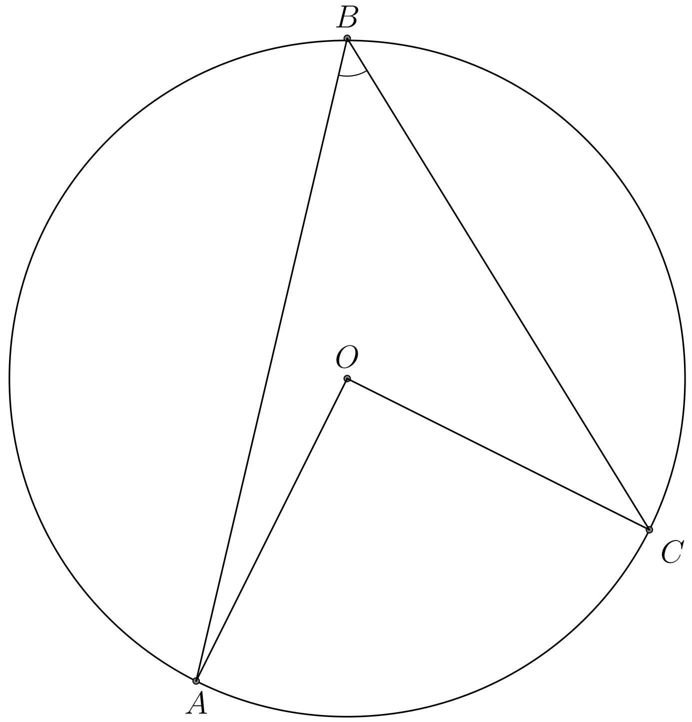
Do đó, khi dây $BC \perp OA$ tại A thì BC nhỏ nhất, dẫn đến $\overset{\frown}{BC}$ nhỏ nhất.

$\square$

3 GÓC NỘI TIẾP

3.1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa 1. Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó.



Định lí 1. Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.

$$\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AC}$$

Hệ quả. Trong một đường tròn:

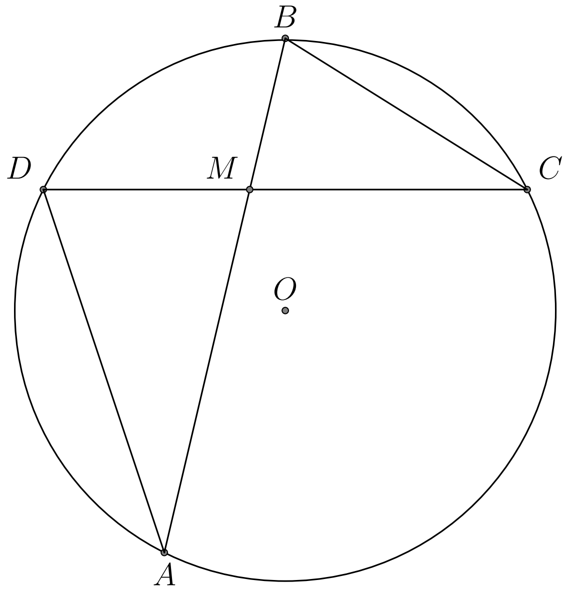
a) Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.

b) Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.

c) Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90°) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.

d) Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

Ví dụ 17. Cho điểm M nằm trong đường tròn (O). Qua M vẽ hai dây cung AB, CD. Chứng minh rằng $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.



Lời giải.

Xét $\triangle AMD$ và $\triangle MCB$, ta có

$\widehat{AMD} = \widehat{CMB}$

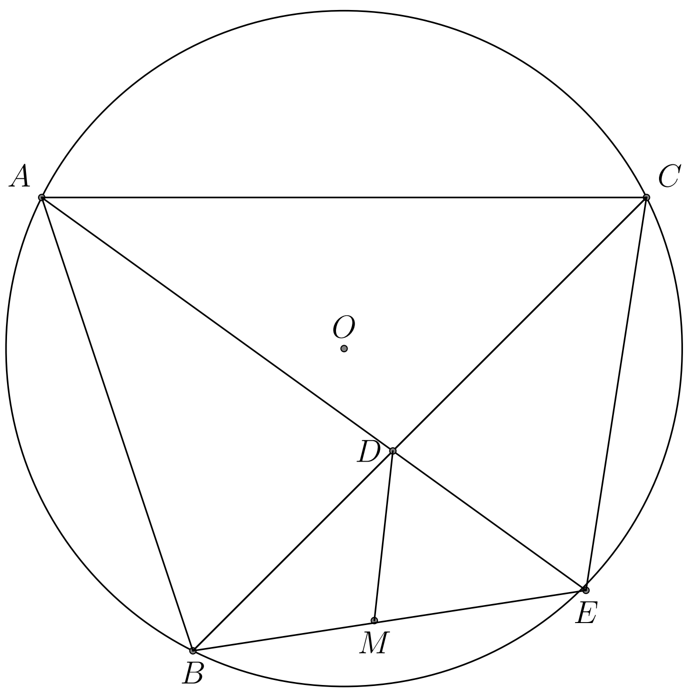
$\widehat{MAD} = \widehat{MCB}$(Cùng chắn cung BD)

$\Rightarrow \triangle AMD \sim \triangle CMB$(g-g)

$\Rightarrow \dfrac{AM}{CM} = \dfrac{MD}{MB}$

$\Rightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD.$ □

Ví dụ 18. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O), E là điểm chính giữa cung BC không chứa A. Gọi D là giao điểm của AE và BC. Đường thẳng qua D song song với CE cắt BE ở M. Chứng minh rằng $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BM}{EM}$.



Lời giải.

Ta có: E nằm giữa cung BC.

$\Rightarrow \overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CE}$

$\Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{CAE}$

$\Rightarrow AD$ là phân giác $\widehat{BAC}$

Xét $\triangle ABC$, có AD là phân giác $\widehat{BAC}$.

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{DC}$.

Xét $\triangle BEC$, ta có: $DM \parallel CE$.

$\Rightarrow \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BM}{ME}$.

Do đó $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BM}{EM}$. □

3.2 BÀI TẬP

Bài 135. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Gọi đường tròn $(I; r)$ là đường tròn nội tiếp tam giác ABC, H là tiếp điểm của AB với đường tròn (I), D là giao điểm của AI với đường tròn (O), DK là đường kính của đường tròn (O). Gọi d là độ dài của OI. Chứng minh rằng:

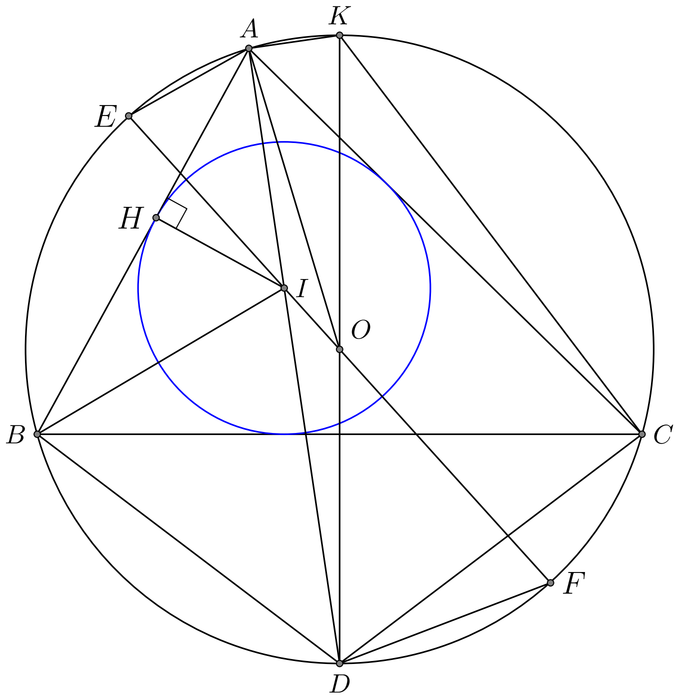
a) $\triangle AHI \backsim \triangle KCD$.

b) $DI = BD = DC$.

c) $IA \cdot ID = R^2 - d^2$.

d) $d^2 = R^2 - 2Rr$ (định lí Euler).

Lời giải.



a) Chứng minh $\triangle AHI \backsim \triangle KCD$.

Ta có $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$ (Vì AD là phân giác của $\widehat{BAC}$).

Mà $\widehat{DAC} = \widehat{DKC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung CD của (O)).

Suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{DKC}$. Hay $\widehat{HAI} = \widehat{DKC}$.

Vì DK là đường kính của đường tròn (O) và $C \in (O)$ nên $\widehat{DCK} = 90°$.

Xét $\triangle AHI$ và $\triangle KCD$ có

$$\begin{cases} \widehat{BAD} = \widehat{DKC} \text{ (cmt)} \\ \widehat{AHI} = \widehat{DCK} = 90° \end{cases}.$$

Suy ra $\triangle AHI \backsim \triangle KCD$ (g-g).

b) Chứng minh rằng $DI = BD = DC$.

Ta có $\widehat{BID} = \widehat{ABI} + \widehat{BAD}$ (Tính chất góc ngoài của $\triangle ABI$).

Mà $\widehat{ABI} = \widehat{IBC}$ (BI là phân giác của $\widehat{ABC}$) và $\widehat{BAD} = \widehat{DAC} = \widehat{DBC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung CD).

Nên $\widehat{BID} = \widehat{IBC} + \widehat{DBC} = \widehat{IBD}$.

Suy ra $\triangle BID$ cân tại $D \Rightarrow BD = DI$ (1)

Ta lại có $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$ (Vì AD là phân giác của $\widehat{BAC}$) $\Rightarrow BD = DC$. (2).

Từ (1) và (2) suy ra $DI = BD = DC$.

c) Chứng minh rằng $IA \cdot ID = R^2 - d^2$.

Kéo dài OI, cắt đường tròn (O) tại hai điểm E và F.

Xét $\triangle EIA$ và $\triangle DIF$ có
$\begin{cases} \widehat{AIE} = \widehat{DIF} \text{ (hai góc đối đỉnh)} \\ \widehat{AEI} = \widehat{IDF} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn cung AF).} \end{cases}$

Suy ra $\triangle EIA \backsim \triangle DIF$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{IA}{IF} = \dfrac{IE}{ID}$.

$\Rightarrow IA \cdot ID = IE \cdot IF. = (OE - OI)(OI + OF) = OE^2 - OI^2 = R^2 - d^2$.

d) Chứng minh $d^2 = R^2 - 2Rr$ (định lí Euler).

Ta có : $\triangle AIH \backsim \triangle KCD$ (chứng minh ở câu a).

$\Rightarrow \dfrac{IA}{KD} = \dfrac{HI}{CD} \Rightarrow IA \cdot CD = KD \cdot HI \Rightarrow IA \cdot ID = 2OD \cdot HI = 2Rr$.

Mà $IA \cdot ID = R^2 - d^2$ (chứng minh ở câu c).

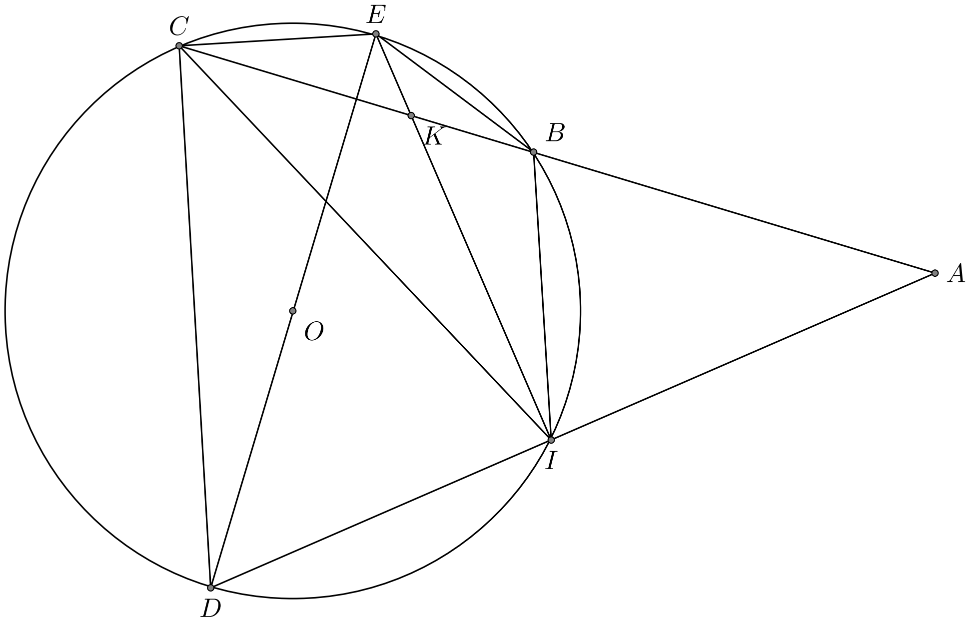
Suy ra $2Rr = R^2 - d^2 \Leftrightarrow d^2 = R^2 - 2Rr$.

□

Bài 136. Qua điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O) vẽ cát tuyến ABC. Gọi E là điểm chính giữa cung BC, DE là đường kính của đường tròn, AD cắt đường tròn tại I, IE cắt BC tại K. Chứng minh rằng $AC \cdot BK = AB \cdot KC$.

Lời giải.

□



Ta có $\begin{cases} \widehat{CIE} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{CE} \text{ (góc nội tiếp chắn cung CE)} \\ \widehat{EIB} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BE} \text{ (góc nội tiếp chắn cung BE)} \end{cases}$.

Mà $CE = BE$ (vì E là điểm chính giữa cung BC).

Suy ra $\widehat{CIE} = \widehat{EIB} \Rightarrow\ IE$ là tia phân giác của $\widehat{CIB}$. (1)

Suy ra $\dfrac{IB}{IC} = \dfrac{BK}{KC}$ (3)

Ta có DE là đường kính của đường tròn (O) và $I \in (O)$ nên $\widehat{DIE} = 90^\circ \Rightarrow EI \perp AD$.

Hay $EI \perp IA$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra IA là phân giác ngoài của $\widehat{CIB}$ (phân giác trong và phân giác ngoài của một góc thì vuông góc).

Suy ra $\dfrac{IB}{IC} = \dfrac{AB}{AC}$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\dfrac{BK}{KC} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow AC \cdot BK = AB \cdot KC$.

Bài 137. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$.Vẽ đường kính AK. Gọi H là trực tâm, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác.

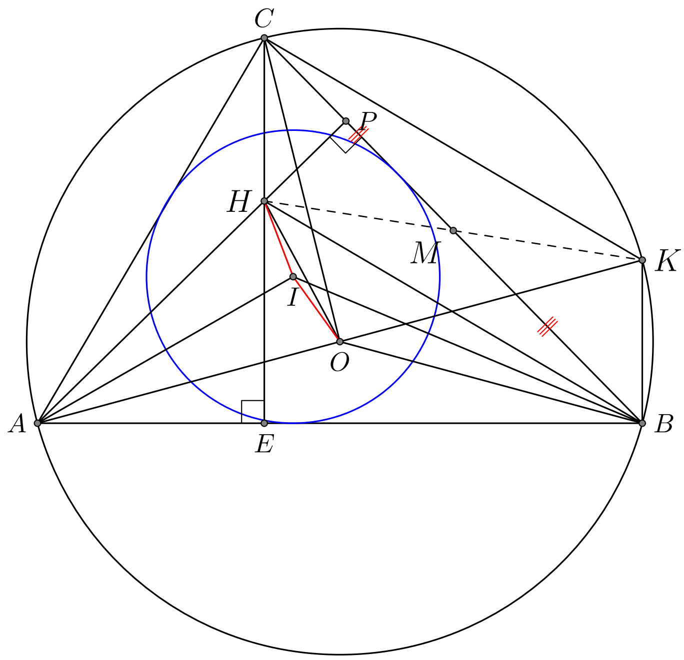
a) Chứng minh rằng AI là tia phân giác của $\widehat{OAH}$.

b) Chứng minh rằng $BHCK$ là hình bình hành.

c) Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh rằng H, M, K thẳng hàng và $AH = 2OM$.

d) Cho $\widehat{BAC} = 60°$. Chứng minh rằng $OI = IH$.

Lời giải.



a) Chứng minh rằng AI là tia phân giác của $\widehat{OAH}$.

Gọi P là giao điểm của AH và $CB \Rightarrow AP \perp CB$.

Ta có AK là đường kính của đường tròn (O).

Mà $C \in (O)$.

Suy ra $\widehat{ACK} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ACB} + \widehat{BCK} = 90^\circ$.

Mặt khác $\widehat{BCK} = \widehat{AKB}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BK).

Suy ra $\widehat{ACB} + \widehat{AKB} = 90^\circ$. (1)

Xét $\triangle ACP$ vuông tại P ($AP \perp CB$).

$\Rightarrow \widehat{ACP} + \widehat{CAP} = 90^\circ$ (phụ nhau).

Hay $\widehat{ACB} + \widehat{CAP} = 90^\circ$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{CAP} = \widehat{BAK}$. (3)

Mà $\widehat{CAI} = \widehat{BAI}$ (AI là phân giác của $\widehat{BAC}$). (4)

Lấy (3) $-$ (4) vế theo vế ta được $\widehat{CAI} - \widehat{CAP} = \widehat{BAI} - \widehat{BAK}$.

Suy ra $\widehat{PAI} = \widehat{KAI}$.

Vậy AI là tia phân giác của $\widehat{OAH}$.

b) Chứng minh rằng $BHCK$ là hình bình hành.

Ta có AK là đường kính của đường tròn (O).

Mà $B \in (O)$.

Suy ra $\widehat{ABK} = 90^\circ$. Hay $AB \perp BK$.

Mà $CH \perp AB$ (H là trực tâm của $\triangle ABC$).

Suy ra $BK \parallel CH$.

Ta lại có $\begin{cases} BH \perp AC \text{ } (H \text{ là trực tâm của } \triangle ABC) \\ CK \perp AC \text{ } (\widehat{ACK} = 90^\circ). \end{cases}$

Suy ra $BH \parallel CK$.

Xét tứ giác $BHCK$ có $\begin{cases} BK \parallel CH \text{ (cmt)} \\ BH \parallel CK \text{ (cmt)}. \end{cases}$

Suy ra $BHCK$ là hình bình hành.

c) Chứng minh rằng H, M, K thẳng hàng và $AH = 2OM$.

Ta có $\begin{cases} BHCK \text{ là hình bình hành (câu b)} \\ M \text{ là trung điểm của } CB \text{ } (gt) \\ HK,\ CB \text{ là 2 đường chéo của hình bình hành.} \end{cases}$

Suy ra M cũng là trung điểm của HK.

Suy ra $H,\ M,\ K$ thẳng hàng.

Xét $\triangle AHK$ có $\begin{cases} M \text{ là trung điểm của } HK \text{ (cmt)} \\ O \text{ là trung điểm của } AK \text{ } (AK \text{ là đường kính của } (O)). \end{cases}$

Suy ra MO là đường trung bình của $\triangle AHK \Rightarrow MO = \dfrac{1}{2}AH$ hay $AH = 2OM$.

d) Chứng minh rằng $OI = IH$.

Xét $\triangle BOC$ cân tại O có OM là đường cao ($OM \perp BC$).

Suy ra OM cũng là đường phân giác.

Suy ra $\widehat{BOM} = \dfrac{1}{2}\widehat{BOC} = \widehat{BAC} = 60^\circ$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung BC).

Khi đó $OA = OB = \dfrac{OM}{\cos\widehat{BOM}} = \dfrac{OM}{\cos 60^\circ} = 2OM$.

Mà $AH = 2OM$ (chứng minh ở câu c).

Suy ra $OA = AH \Rightarrow \triangle OAH$ cân tại A.

Mà AI là đường phân giác của $\widehat{OAH}$ (I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$).

Suy ra AI cũng là đường trung trực của OH.

Vậy $IH = IO$.

□

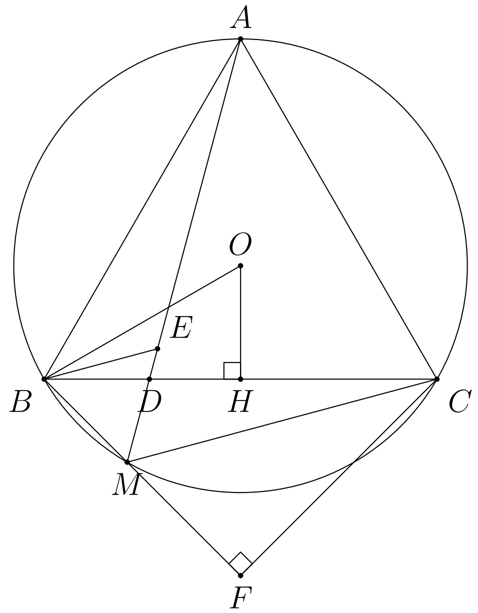
Bài 138. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Gọi M là một điểm bất kì thuộc cung BC.

a) Chứng minh rằng $MA = MB + MC$.

b) Gọi D là giao điểm của MA và BC. Chứng minh rằng $\dfrac{MD}{MB} + \dfrac{MD}{MC} = 1$.

c) Tính tổng $MA^2 + MB^2 + MC^2$ theo R.

Lời giải.



a) Chứng minh $MA = MB + MC$.

Lấy điểm E thuộc đoạn MA sao cho $MB = ME \Rightarrow \triangle MBE$ cân tại M.

Lại có $\widehat{BME} = \widehat{BCA} = 60^\circ$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

Suy ra $\triangle MBE$ đều.

Lại có $\widehat{ABC} = \widehat{MBE} = 60^\circ$.

Do đó $\widehat{ABC} - \widehat{EBC} = \widehat{MBE} - \widehat{EBC}$.

Nên $\widehat{ABE} = \widehat{CBM}$.

Xét $\triangle ABE$ và $\triangle CBM$ có $\begin{cases} AB = CB \,(\text{vì } \triangle ABC \text{ đều}) \\ \widehat{ABE} = \widehat{CBM}\,(\text{cmt}) \\ BE = BM\,(\triangle MBE \text{ đều}). \end{cases}$

Nên $\triangle ABE = \triangle CBM$ (c-g-c).

Do đó $EA = MC$.

Suy ra $MB + MC = ME + EA = MA$.

Vậy $MB + MC = MA$.

b) Chứng minh $\dfrac{MD}{MB} + \dfrac{MD}{MC} = 1$.

Xét $\triangle MAB$ và $\triangle MCD$, ta có

$\begin{cases} \widehat{MAB} = \widehat{MCD}\,(\text{cùng chắn cung } BM) \\ \widehat{AMB} = \widehat{CMD} = 60^\circ. \end{cases}$

Suy ra $\triangle MAB \backsim \triangle MCD$ (g-g).

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MC} = \dfrac{MB}{MD} \Rightarrow \dfrac{MA \cdot MD}{MB \cdot MC} = 1 \Rightarrow \dfrac{(MB + MC) \cdot MD}{MB \cdot MC} = 1 \Rightarrow \dfrac{MD}{MB} + \dfrac{MD}{MC} = 1.$

Vậy $\dfrac{MD}{MB} + \dfrac{MD}{MC} = 1$.

c) Tính tổng $MA^2 + MB^2 + MC^2$ theo R.

Kẻ $OH \perp BC$ tại $H \Rightarrow H$ là trung điểm BC.

BO là tia phân giác của $\widehat{ABC}$ nên $\widehat{OBH} = 30^\circ$.

Xét $\triangle OBH$ vuông tại H có $BH = OB \cdot \cos 30^\circ = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $BC = 2BH = R\sqrt{3}$.

Kẻ $CF \perp BM$.

Ta có $\widehat{BMC} = \text{sđ}\overset{\frown}{BAC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{CMF} = 60^\circ$.

Xét $\triangle CMF$ vuông tại F có $MF = MC \cdot \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}MC$.

Lại có

$$\begin{aligned} BC^2 &= BF^2 + CF^2 = (MB + MF)^2 + CF^2 \\ &= MB^2 + 2MB \cdot MF + MF^2 + CF^2 = MB^2 + 2MB \cdot MF + MC^2 \\ &= MB^2 + MB \cdot MC + MC^2. \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} P &= MA^2 + MB^2 + MC^2 = (MB + MC)^2 + MB^2 + MC^2 \\ &= 2MB^2 + 2MB \cdot MC + MC^2 = 2\left(MB^2 + MB \cdot MC + MC^2\right) \\ &= 2BC^2 = 2\left(R\sqrt{3}\right)^2 = 6R^2. \end{aligned}$$

Vậy $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$.

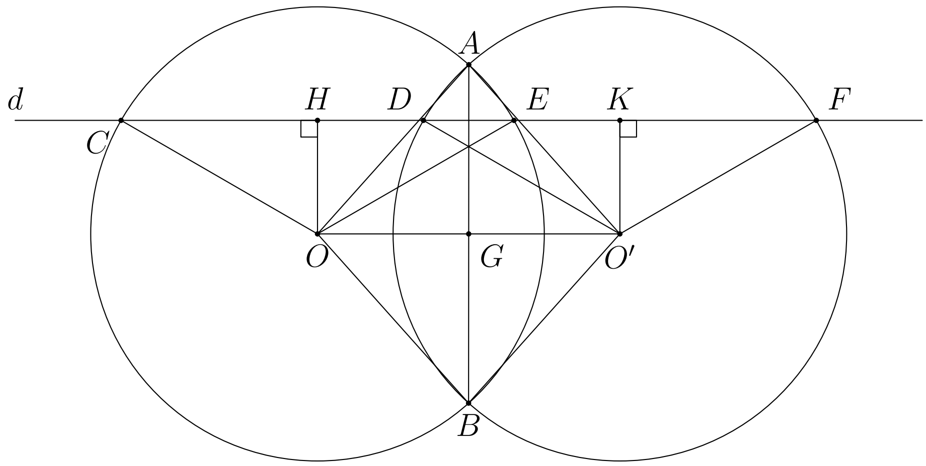
□

Bài 139. Hai đường tròn tâm O và O' cùng bán kính R cắt nhau ở A và B. Một đường thẳng d song song với OO' và cắt các đường tròn trên tại C, D, E, F theo thứ tự trên d (C, $E \in (O)$, $D, F \in (O')$).

a) Chứng minh rằng $CDO'O$ là hình bình hành.

b) Tính độ dài CD, biết $AB = a$.

Lời giải.



a) Chứng minh $CDO'O$ là hình bình hành.

Ta có $OO' \parallel d$.

Kẻ $OH \perp d$ tại H, $O'K \perp d$ tại K.

Suy ra tứ giác $OHKO'$ là hình chữ nhật.

Suy ra $OH = O'K$.

Xét $\triangle OCH$ vuông tại H và $\triangle O'DK$ vuông tại K, ta có

$$\begin{cases} OH = O'K \text{ (cmt)} \\ OC = O'D = R. \end{cases}$$

Nên $\triangle OCH = \triangle O'DK$ (ch-cgv).

Suy ra $\widehat{OCH} = \widehat{O'DK}$ (hai góc tương ứng)

Mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $OC \parallel O'D$.

Lại có $CD \parallel OO'$ (gt)

Vậy $CDO'O$ là hình bình hành.

b) Tính độ dài CD.

Vì $CDO'O$ là hình bình hành nên $OO' = CD$.

Gọi G là giao điểm của OO' và AB.

Ta có $OA = OB = O'A = O'B = R \Rightarrow OAO'B$ là hình thoi.

Do đó $OO' \perp AB$ tại G và G là trung điểm của AB và OO'.

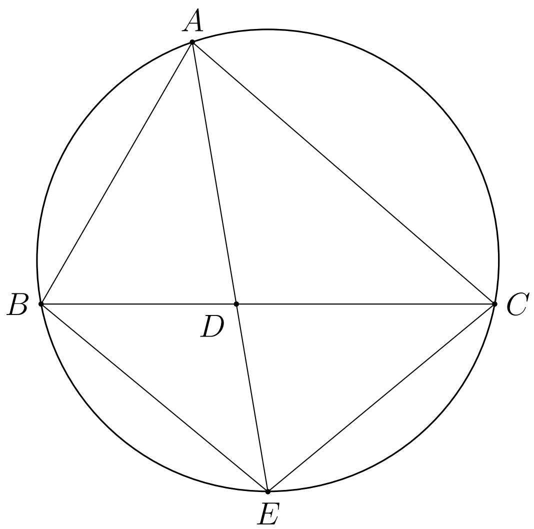
Xét $\triangle OGA$ vuông tại G ta có

$$\begin{aligned}
& OA^2 = OG^2 + AG^2 \text{ (định lí Py-ta-go)} \\
\Leftrightarrow\ & R^2 = \left(\frac{OO'}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \Leftrightarrow R^2 = \frac{OO'^2}{4} + \frac{AB^2}{4} \\
\Leftrightarrow\ & R^2 = \frac{CD^2}{4} + \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow CD^2 = 4R^2 - a^2 \\
\Leftrightarrow\ & CD = \sqrt{4R^2 - a^2}
\end{aligned}$$

□

Bài 140. Cho tam giác ABC, phân giác AD. Chứng minh rằng $AD^2 = AB \cdot AC - DB \cdot DC$.

Lời giải.



Vẽ đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$, tia phân giác AD cắt đường tròn tại điểm E.

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle AEC$, ta có

$$\begin{cases} \widehat{BAD} = \widehat{EAC} \text{ (}AD\text{ là tia phân giác)} \\ \widehat{ABD} = \widehat{AEC} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn cung }AC\text{).} \end{cases}$$

Suy ra $\triangle ABD \backsim \triangle AEC$ (g-g).

Suy ra $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AD}{AC} \Rightarrow AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle CED$ có

$$\begin{cases} \widehat{ABD} = \widehat{CED} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn cung }AC\text{)} \\ \widehat{ADB} = \widehat{CDE} \text{ (hai góc đối đỉnh).} \end{cases}$$

Suy ra $\triangle ABD \backsim CED$ (g-g).

Suy ra $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{DB}{DE} \Rightarrow AD \cdot DE = DB \cdot DC$.

Ta có

$$\begin{aligned} & AD \cdot DE = DB \cdot DC \\ \Leftrightarrow\ & AD(AE - AD) = DB \cdot DC \Leftrightarrow AD \cdot AE - AD^2 = DB \cdot DC \\ \Leftrightarrow\ & AD^2 = AD \cdot AE - DB \cdot DC \Leftrightarrow AD^2 = AB \cdot AC - DB \cdot DC \end{aligned}$$

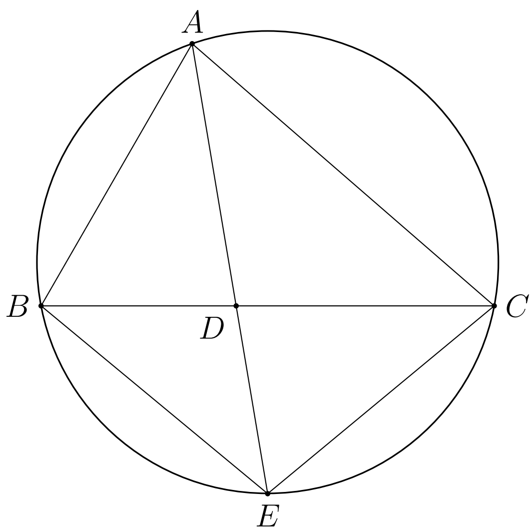
□

Bài 141. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn. Gọi D là một điểm trên cạnh BC, tia AD cắt cung BC tại E. Chứng minh rằng

a) Chứng minh $\widehat{AEC} > \widehat{AEB}$.

b) Chứng minh $AD \cdot CE = AB \cdot CD$.

Lời giải.



a) Chứng minh $\widehat{AEC} > \widehat{AEB}$.

Do $AB < AC$ nên sđ$\overset{\frown}{AB} <$ sđ$\overset{\frown}{AC}$

$\Rightarrow \widehat{AEB} < \widehat{AEC}$.

Vậy $\widehat{AEC} > \widehat{AEB}$.

b) Chứng minh $AD \cdot CE = AB \cdot CD$.

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle CED$, ta có

$\begin{cases} \widehat{ABD} = \widehat{CED} \text{ (cùng chắn } \overset{\frown}{AC}) \\ \widehat{ADB} = \widehat{CDE} \text{ (hai góc đối đỉnh).} \end{cases}$

$\Rightarrow \triangle ABD \backsim \triangle CED$ (g-g).

$\Rightarrow \dfrac{AB}{CE} = \dfrac{AD}{CD}$.

Vậy $AD \cdot CE = AB \cdot CD$.

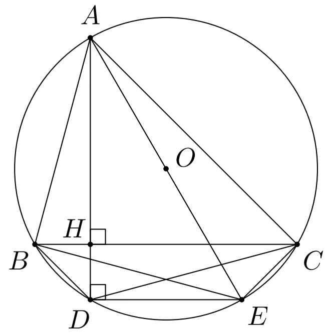
□

Bài 142. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), đường cao AH cắt đường tròn ở D, tia AO cắt đường tròn ở E. Chứng minh rằng:

a) $DE \parallel BC$.

b) $BCED$ là hình thang cân.

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{ADE} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)).
Suy ra $AD \perp DE$.
Ta lại có $AH \perp BC$ hay $AD \perp BC$.
Suy ra $BC \parallel DE$ (từ vuông góc đến song song).

b) Ta có $BC \parallel DE \Rightarrow \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CE} \Rightarrow \overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{CE} + \overset{\frown}{DE}$.
Hay $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CD} \Rightarrow BE = CD$ (hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau).
Ta có $BC \parallel DE \Rightarrow BCED$ là hình thang.
Vậy hình thang $BCED$ có $BE = CD$ nên $BCED$ là hình thang cân.

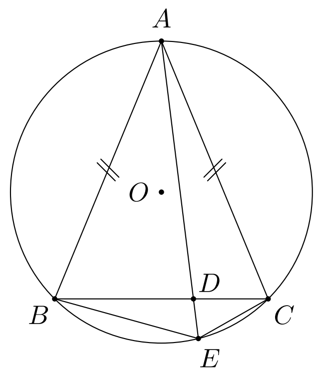
□

Bài 143. Cho $\triangle ABC$ cân ở A nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là một điểm trên cạnh BC, tia AD cắt cung BC ở E. Chứng minh rằng:

a) EA là tia phân giác của góc $\widehat{BEC}$.

b) $\triangle AEB \backsim \triangle ABD$, suy ra $AE \cdot AD = AB^2$.

Lời giải.



a) Ta có $AB = AC$ (giả thiết), suy ra $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} \Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{AEC}$ (các góc nội tiếp chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau).
Vậy EA là phân giác của góc $\widehat{BEC}$.

b) Ta có
- $\widehat{AEB} = \widehat{ACB}$ (các góc nội tiếp cùng chắn cung AB);
- $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ ($\triangle ABC$ cân tại A);

Suy ra $\widehat{AEB} = \widehat{ABD}$.
Xét $\triangle AEB$ và $\triangle ABD$, có
- $\widehat{DAB} = \widehat{BAE}$ (góc chung).
- $\widehat{AEB} = \widehat{ABD}$ (cmt).

Do đó $\triangle AEB \backsim \triangle ABD$ (g-g).
Suy ra $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AB}{AD} \Leftrightarrow AB^2 = AE \cdot AD$.

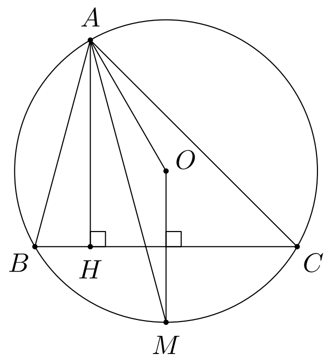
□

Bài 144. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O), đường cao AH $(H \in BC)$. Gọi M là điểm chính giữa cung BC. Chứng minh rằng:

a) $OM \parallel AH$.

b) AM là tia phân giác của $\widehat{OAH}$.

Lời giải.



a) Ta có

- M là điểm chính giữa cung BC (giả thiết), suy ra $OM \perp BC$.
- $AH \perp BC$ (giả thiết)

Suy ra $AH \parallel OM$.

b) Ta có $OA = OM$ (bán kính (O))

$\Rightarrow \triangle OAM$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OAM} = \widehat{OMA}$.

Ta có

- $AH \parallel OM$, suy ra $\widehat{HAM} = \widehat{OMA}$ (so le trong);
- $\widehat{OAM} = \widehat{OMA}$ (cmt);

Suy ra $\widehat{HAM} = \widehat{OAM}$ hay AM là phân giác của $\widehat{OAH}$.

□

Bài 145. Cho hai đường tròn (O) và (O') có bán kính bằng nhau, tiếp xúc ngoài tại A. Qua A kẻ đường thẳng cắt đường tròn (O) ở B cắt đường tròn (O') ở C.

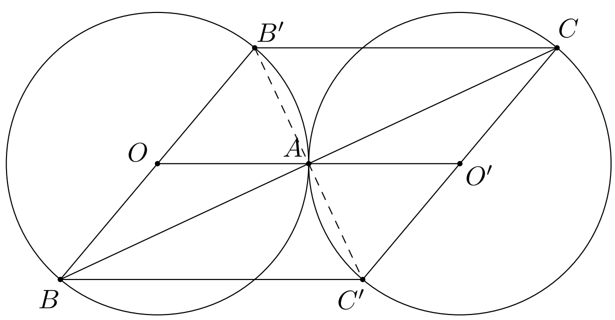
a) Chứng minh rằng $OB \parallel O'C$.

b) Tia BO cắt đường tròn (O) ở B', tia CO' cắt đường tròn (O') ở C'. Chứng minh rằng ba điểm $B'; A; C'$ thẳng hàng.

c) Tứ giác $BB'CC'$ là hình gì? Vì sao?

Lời giải.

a)



Ta có

- Do O, A, O' thẳng hàng, $\Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{O'AC}$ (đối đỉnh);
- $OA = OB \Rightarrow \triangle OAB$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA}$;
- $O'A = O'C \Rightarrow \triangle O'AC$ cân tại $O' \Rightarrow \widehat{O'CA} = \widehat{O'AC}$;

Suy ra $\widehat{O'CA} = \widehat{OBA} \Rightarrow OB \parallel O'C$ (cặp góc ở vị trí so le trong).

b) Ta có

- $\widehat{BAB'} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa (O)), suy ra $B'A \perp BC$.

• $\widehat{CAC'} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa (O')),

suy ra $C'A \perp BC$.

Suy ra ba điểm B', A, C' thẳng hàng.

c) Ta có $2OB = 2O'C' \Rightarrow BB' = CC'$.

Do $OB \parallel O'C \Rightarrow BB' \parallel CC'$.

Vậy tứ giác $BB'CC'$ có $BB' = CC'$ và $BB' \parallel CC'$ nên $BB'CC'$ là hình bình hành.

□

Bài 146. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O), trực tâm H nằm trong tam giác. Tia AH cắt đường (O) ở D. Chứng minh rằng:

a) BC là tia phân giác của góc $\widehat{HBD}$.

b) D và H đối xứng nhau qua BC.

Lời giải.

a)

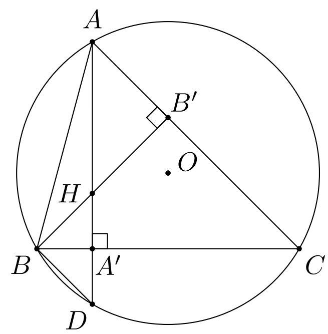
Trong $\triangle ABC$ kẻ các đường cao AA', BB' cắt nhau tại H.

Ta có

• $\widehat{DBC} = \widehat{DAC}$ (các góc nội tiếp chắn cung CD);

• $\widehat{A'BH} = \widehat{B'AH}$ (hai góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc);

Suy ra $\widehat{DBC} = \widehat{A'BH}$ hay BC là phân giác của góc $\widehat{HBD}$.



b) Trong $\triangle BDH$ có BA' vừa là đường cao (do $HD \perp BC$), vừa là đường phân giác của góc DBH nên $\triangle BDH$ cân tại B.

Vì $\triangle BDH$ cân tại B nên đường cao BA' cũng là đường trung tuyến,

suy ra $HA' = A'D$.

Vậy BC vuông góc với HD tại trung điểm A' của HD nên H và D đối xứng nhau qua BC.

□

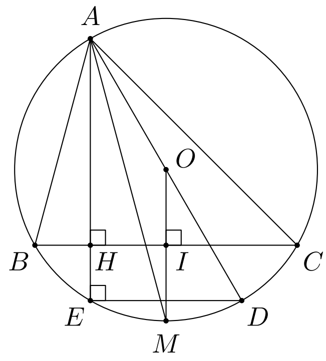
Bài 147. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O) có đường cao AH, AD là đường kính, M là điểm chính giữa cung BC không chứa điểm A. Chứng minh:

a) $\widehat{BAH} = \widehat{CAD}$; $\widehat{BAD} = \widehat{CAH}$.

b) Tia AM là tia phân giác góc $\widehat{HAD}$.

Lời giải.

a)



Kẻ AH cắt (O) tại E. Ta có $\widehat{AED} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)), suy ra $AE \perp DE$.

Ta lại có $AH \perp BC$ hay $AE \perp BC$.

Suy ra $BC \parallel DE \Rightarrow \overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CD}$ (các cung bị chắn bởi hai dây song song).

Suy ra $\widehat{BAH} = \widehat{CAD}$ (các góc nội tiếp chắn các cung bằng nhau).

Suy ra $\widehat{BAH} + \widehat{EAD} = \widehat{CAD} + \widehat{EAD}$ hay $\widehat{BAD} = \widehat{CAH}$.

b) Ta có

- M là điểm chính giữa cung BC (giả thiết), suy ra $OM \perp BC$.
- $AH \perp BC$ (giả thiết)

Suy ra $AH \parallel OM$.

Suy ra $\widehat{HAM} = \widehat{OMA}$ (so le trong).

Ta có $\widehat{OAM} = \widehat{OMA}$ (tam giác OAM cân tại O);

Suy ra $\widehat{HAM} = \widehat{OAM}$ hay AM là phân giác của $\widehat{OAH}$.

□

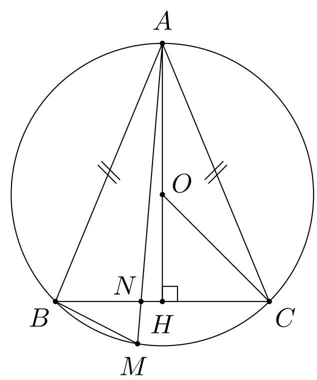
Bài 148. Cho $\triangle ABC$ cân tại A có góc $\widehat{A}$ nhọn, nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Ta kẻ dây AM cắt dây BC ở N. Chứng minh:

a) $\triangle ABN \backsim \triangle AMB$.

b) Tích $AM \cdot AN$ không phụ thuộc vị trí điểm M và tính tích đó theo R và đường cao h của $\triangle ABC$ kẻ từ A.

Lời giải.

a)



Ta có

- $\widehat{AMB} = \widehat{ACB}$ (các góc nội tiếp cùng chắn cung AB);
- $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ ($\triangle ABC$ cân tại A);

Suy ra $\widehat{AMB} = \widehat{ABC}$.

Xét $\triangle ABN$ và $\triangle AMB$, có

- $\widehat{MAB} = \widehat{BAN}$ (góc chung);
- $\widehat{AMB} = \widehat{ABC}$ (cmt);

Do đó $\triangle ABN \backsim \triangle AMB$ (g-g).

b) Ta có $\triangle ABN \backsim \triangle AMB$ (cmt),
Suy ra $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AN}{AB} \Leftrightarrow AB^2 = AM \cdot AN$.
Vì AB không đổi nên $AM \cdot AN$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M.
Ta có $OA = OC = R$ và $AH = h$, suy ra $OH = h - R$.
Trong $\triangle OHC$ vuông tại H nên $HC^2 + OH^2 = OC^2$ (định lí Py-ta-go).
Suy ra $HC^2 = OC^2 - OH^2 = R^2 - (h - R)^2 = 2Rh - h^2$.
Trong $\triangle AHC$ vuông tại H nên $HC^2 + AH^2 = AC^2$ (định lí Py-ta-go).
Suy ra $AC^2 = HC^2 + AH^2 = 2Rh - h^2 + h^2 = 2Rh$.
Ta có $\triangle ABN \backsim \triangle AMB$ (cmt).
Suy ra $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AN}{AB} \Leftrightarrow AB^2 = AM \cdot AN$.
Mà $AB = AC$ (giả thiết) nên $AM \cdot AN = AB^2 = 2Rh$.
Vậy $AM \cdot AN = 2Rh$.

□

Bài 149. Tứ giác $ABCD$ có bốn đỉnh nằm trên đường tròn $(O;\, R)$ có $\widehat{AOB} = 60^\circ$; $\widehat{BOC} = 90^\circ$; $\widehat{COD} = 120^\circ$.

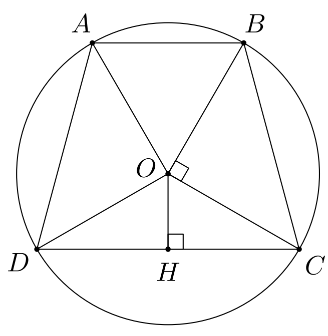
a) Tính độ dài các cạnh của tứ giác theo R.

b) So sánh các góc C và D của tứ giác.

c) Chứng tỏ tứ giác $ABCD$ là hình thang cân.

Lời giải.

a)



Trong $\triangle OAB$ cân tại O có $\widehat{AOB} = 60^\circ$ nên $\triangle OAB$ đều, suy ra $AB = OA = OB = R$.
Trong $\triangle OBC$ vuông cân tại O nên

$$BC^2 = OB^2 + OC^2 \text{ (định lí Py-ta-go)},$$

suy ra $BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}$.
Ta có
- sđ $\overset{\frown}{AB} = \widehat{AOB} = 60^\circ$ (góc ở tâm chắn cung AB);
- sđ $\overset{\frown}{BC} = \widehat{BOC} = 90^\circ$ (góc ở tâm chắn cung BC);
- sđ $\overset{\frown}{CD} = \widehat{COD} = 120^\circ$ (góc ở tâm chắn cung CD);

Mà sđ $\overset{\frown}{AB}$ + sđ $\overset{\frown}{BC}$ + sđ $\overset{\frown}{CD}$ + sđ $\overset{\frown}{DA} = 360^\circ$, suy ra sđ $\overset{\frown}{AD} = 90^\circ$
$\Rightarrow \widehat{AOD} = 90^\circ$ (góc ở tâm chắn cung AD).
Trong $\triangle OAD$ vuông cân tại O nên $AD^2 = OA^2 + OD^2$ (định lí Py-ta-go),

suy ra $AD = \sqrt{OA^2 + OA^2} = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}$.

Kẻ $OH \perp CD$ tại H.

Trong $\triangle OCD$ cân tại O có AH là đường cao nên cũng là đường phân giác,

suy ra $\widehat{COH} = \widehat{HOD} = \dfrac{1}{2}\widehat{COD} = \dfrac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$.

Trong $\triangle OHC$ vuông tại H, ta có

$$HC = OC \cdot \sin\widehat{COH} = R \cdot \sin 60^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Do $OH \perp CD$ tại H, suy ra $CD = 2CH = 2 \cdot \dfrac{R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$.

b) Ta có

- $\triangle OAB$ đều nên $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = 60^\circ$.
- $\triangle OBC$ vuông cân tại O nên $\widehat{OBC} = \widehat{OCB} = 45^\circ$.
- $\triangle OCD$ cân tại O có $\widehat{COD} = 120^\circ$ nên $\widehat{OCD} = \widehat{ODC} = 30^\circ$.
- $\triangle OAD$ vuông cân tại O nên $\widehat{OAD} = \widehat{ODA} = 45^\circ$.

Ta có

- $\widehat{BCD} = \widehat{BCO} + \widehat{OCD} = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$.
- $\widehat{ADC} = \widehat{ADO} + \widehat{ODC} = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$.

Vậy $\widehat{BCD} = \widehat{ADC} = 75^\circ$. (1)

c) Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{ABO} + \widehat{OBC} = 60^\circ + 45^\circ = 105^\circ$.

Suy ra $\widehat{ABC} + \widehat{BCD} = 105^\circ + 75^\circ = 180^\circ$, suy ra $AB \parallel CD$ (vì cặp góc trong cùng phía bù nhau)

Suy ra $ABCD$ là hình thang. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $ABCD$ là hình thang cân.

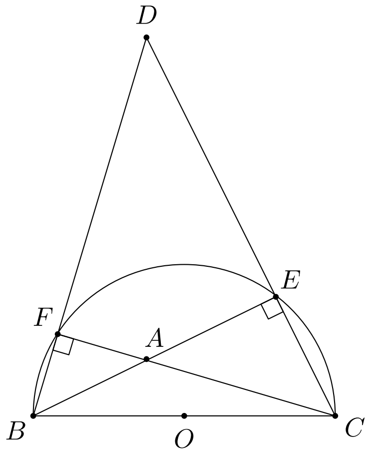
□

Bài 150. Cho điểm A nằm bên trong đường tròn đường kính BC (A không thuộc BC). Kẻ các dây BE và CF qua A. Các đường thẳng BF và CE cắt nhau ở D.

a) A là điểm đặc biệt gì của $\triangle BCD$; D là điểm đặc biệt gì của $\triangle ABC$?

b) Chứng minh rằng khi đường kính BC quay xung quanh tâm của đường tròn thì AD luôn vuông góc với BC.

Lời giải.



a) Các điểm E, F nằm trên đường tròn đường kính BC suy ra

$$\begin{cases}\widehat{BEC} = 90^\circ \\ \widehat{BFC} = 90^\circ\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BE \perp CD \\ CF \perp BD.\end{cases}$$

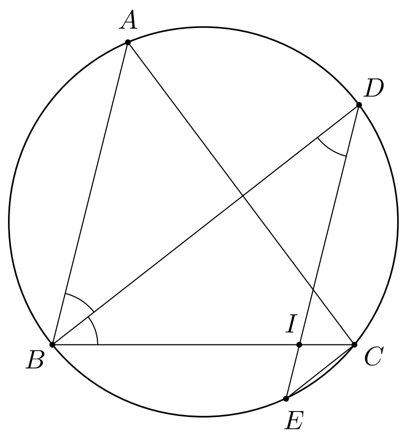
Do đó BE, CF là đường cao của tam giác BCD, suy ra A là trực tâm tam giác BCD. Dễ thấy BF, CE là các đường cao của tam giác ABC. Hai đường cao này cắt nhau tại D nên D là trực tâm của tam giác ABC.

b) Theo chứng minh trên, A là trực tâm của tam giác BCD nên AD là đường cao của tam giác ABC, do đó AD luôn vuông góc với BC.

□

Bài 151. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O). D là điểm chính giữa cung AC không chứa B. Kẻ dây DE song song với cạnh AB, cắt BC ở I. Chứng tỏ các tam giác ICE và IBD cân.

Lời giải.



D là điểm chính giữa cung AC $\Rightarrow$ sđ$\overset{\frown}{DA}$ = sđ$\overset{\frown}{DC}$

$\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{CBD}$. (1)

Ta lại có $AB \parallel DE \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{EDB}$ (So le trong). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{CBD} = \widehat{EDB}$, do đó $\widehat{IBD} = \widehat{IDB}$.

Vậy tam giác IBD cân tại I.

Ta có $\widehat{BCE} = \widehat{EDB}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{BE}$). (3)

$\widehat{DEC} = \widehat{CBD}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{CD}$). (4)

Từ (3), (4) và $\widehat{CBD} = \widehat{EDB}$ suy ra $\widehat{BCE} = \widehat{DEC}$

hay $\widehat{ICE} = \widehat{IEC}$.

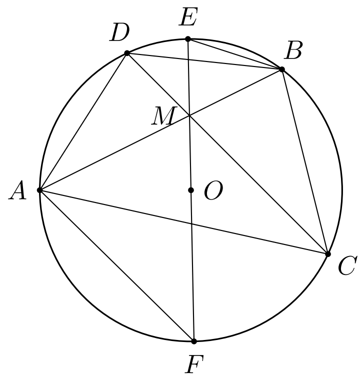
Vậy tam giác ICE cân tại I.

□

Bài 152. Hai dây AB và CD của một đường tròn $(O;R)$ cắt nhau ở M. Chứng minh rằng

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD = R^2 - OM^2.$$

Lời giải.



Xét hai tam giác MAC và MDB có

$$\begin{cases} \widehat{AMC} = \widehat{DMB} \text{ (đối đỉnh)} \\ \widehat{MAC} = \widehat{MDB} \text{ (cùng chắn cung } \overset{\frown}{BC}). \end{cases}$$

Suy ra $\triangle MAC \backsim \triangle MDB$ (g.g), do đó

$$\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB} \Leftrightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD. \quad (1)$$

Qua M dựng đường kính EF.

Xét hai tam giác MAF và MEB có

$$\begin{cases} \widehat{AMF} = \widehat{EMB} \text{ (đối đỉnh)} \\ \widehat{MAF} = \widehat{MEB} \text{ (cùng chắn cung } \overset{\frown}{BF}). \end{cases}$$

Suy ra $\triangle MAF \backsim \triangle MEB$ (g.g), do đó

$$\begin{aligned} & \frac{MA}{ME} = \frac{MF}{MB} \Leftrightarrow MA \cdot MB = ME \cdot MF \\ \Leftrightarrow\ & MA \cdot MB = (OE - OM)(OF + OM) \\ \Leftrightarrow\ & MA \cdot MB = (R - OM)(R + OM) \\ \Leftrightarrow\ & MA \cdot MB = R^2 - OM^2. \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra $MA \cdot MB = MC \cdot MD = R^2 - OM^2$. □

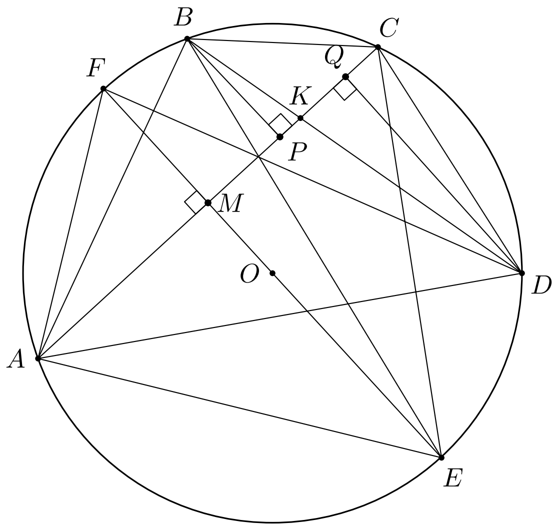
Bài 153. Tứ giác $ABCD$ có 4 đỉnh nằm trên đường tròn $(O;R)$ $(A, C$ cố định), 2 đỉnh còn lại di chuyển trên hai cung tròn nhận A và C làm hai đầu mút.

a) Chứng tỏ các tia phân giác của các góc $\widehat{B}$ và $\widehat{D}$ đi qua hai điểm cố định E và F.

b) Chứng minh rằng đường thẳng EF là đường trung trực của dây AC.

c) Với vị trí nào của hai đỉnh B và D thì tứ giác $ABCD$ có diện tích lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất của diện tích đó khi sđ$\overset{\frown}{ABC} = 120°$.

Lời giải.



a) Gọi E là giao điểm của tia phân giác góc $\widehat{B}$ và cung $\overset{\frown}{ADC}$, F là giao điểm của tia phân giác góc $\widehat{D}$ và cung $\overset{\frown}{ABC}$.

BE là tia phân giác góc $\widehat{ABC}$ nên $\widehat{ABE} = \widehat{CBE} \Rightarrow$ sđ$\overset{\frown}{EA} =$ sđ$\overset{\frown}{EC}$, do đó E là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{ADC}$.

DF là tia phân giác góc $\widehat{ADC}$ nên $\widehat{ADF} = \widehat{CDF} \Rightarrow$ sđ$\overset{\frown}{FA} =$ sđ$\overset{\frown}{FC}$, do đó F là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{ABC}$.

Hai điểm A, C cố định nên E, F là các điểm cố định.

b) E, F là điểm chính giữa các cung $\overset{\frown}{ADC}$ và $\overset{\frown}{ABC}$ nên $EA = EC$ và $FA = FC$, do đó đường thẳng EF là đường trung trực của dây AC.

c) Gọi K là giao điểm của AC và BD, M là trung điểm của AC; P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, D lên đường thẳng AC.

Ta có

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2}BP \cdot AC + \frac{1}{2}DQ \cdot AC = \frac{1}{2}(BP + DQ)AC. \quad (1)$$

Dễ thấy $BP \leq BK$, $DQ \leq DK$ suy ra $BP + DQ \leq BD$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $S_{ABCD} \leq \frac{1}{2}AC \cdot BD \leq \frac{1}{2}AC \cdot 2R = AC \cdot R$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $B \equiv F$ và $D \equiv E$.

Vậy diện tích tứ giác $ABCD$ lớn nhất bằng $AC \cdot R$ khi $B \equiv F$ và $D \equiv E$.

Khi sđ$\overset{\frown}{ABC} = 120° \Rightarrow \widehat{AEC} = 60°$, mà tam giác ACE cân nên tam giác ACE đều.
Suy ra $\widehat{AOM} = 60°$. Khi đó $AC = 2AM = 2AO\sin 60° = R\sqrt{3}$.
Vậy khi sđ$\overset{\frown}{ABC} = 120°$, diện tích tứ giác $ABCD$ lớn nhất bằng $R^2\sqrt{3}$.

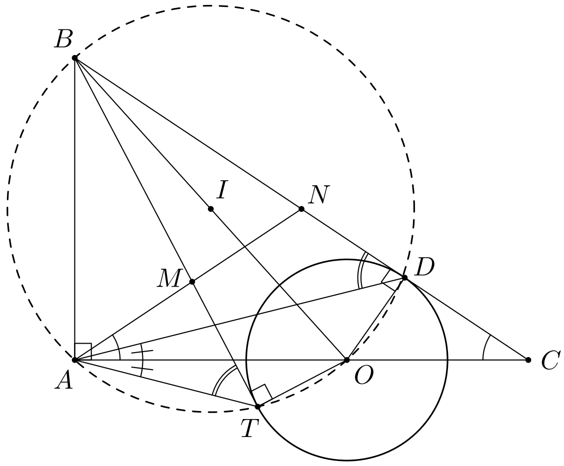
□

Bài 154. Tam giác ABC vuông tại A, có AN là trung tuyến. Ta vẽ đường tròn tâm O thuộc cạnh AC và tiếp xúc với BC ở D. Từ B ta kẻ tiếp tuyến BT (khác BC) có T là tiếp điểm, tiếp tuyến này cắt AN ở M.

a) Chứng minh: 5 điểm A, B, D, O, T cùng thuộc một đường tròn.

b) So sánh MA với MT.

Lời giải.



a) Gọi I là trung điểm của BO. Ta có $\widehat{BAO} = \widehat{BTO} = \widehat{BDO} = 90°$ nên các tam giác BAO, BTO, BDO vuông suy ra $IA = IB = IT = ID = IO$, do đó 5 điểm A, B, D, O, T cùng thuộc đường tròn tâm I, bán kính IB.

b) Ta có $\widehat{ATB} = \widehat{ADB}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AB}$), (1)
$OT = OD \Rightarrow \overset{\frown}{OT} = \overset{\frown}{OD}$, do đó $\widehat{TAC} = \widehat{DAC}$ (cùng chắn hai cung bằng nhau). (2)
Tam giác ABC vuông tại A có trung tuyến AN nên tam giác NAC cân tại N, do đó $\widehat{NAC} = \widehat{NCA}$. (3)
Mặt khác ta lại có $\widehat{ADB} = \widehat{NCA} + \widehat{DAC}$ (tính chất góc ngoài tam giác). (4)
Từ (1), (2), (3) và (4) suy ra

$$\widehat{NAT} = \widehat{NAC} + \widehat{TAC} = \widehat{NCA} + \widehat{DAC} = \widehat{ADB} = \widehat{ATB}.$$

Do đó tam giác MAT cân tại M suy ra $MA = MT$.

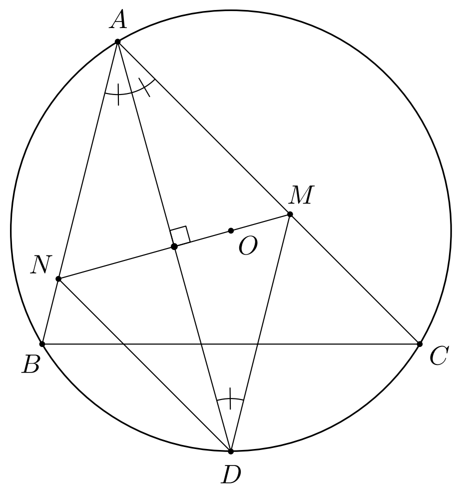
□

Bài 155. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là điểm chính giữa cung BC không chứa A. Qua D kẻ các đường song song với AB và AC, chúng cắt AC ở M và AB ở N.

a) Chứng minh AD vuông góc với MN.

b) $\triangle ABC$ phải thỏa mãn điều kiện gì để tứ giác $AMDN$ là hình vuông?

Lời giải.



a) D là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BC}$ nên $\overset{\frown}{DB} = \overset{\frown}{DC} \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CAD}$. (1)
$MD \parallel AB \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{ADM}$ (so le trong). (2)
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{CAD} = \widehat{ADM}$ do đó tam giác MAD cân tại $M \Rightarrow MA = MD$.
Mặt khác tứ giác $AMDN$ có các cặp cạnh đối song song do đó tứ giác $AMDN$ là hình thoi. Từ đó suy ra $AD \perp MN$.

b) Hình thoi $AMDN$ là hình vuông khi và chỉ khi $\widehat{BAC} = 90^\circ$ hay tam giác ABC vuông tại A.

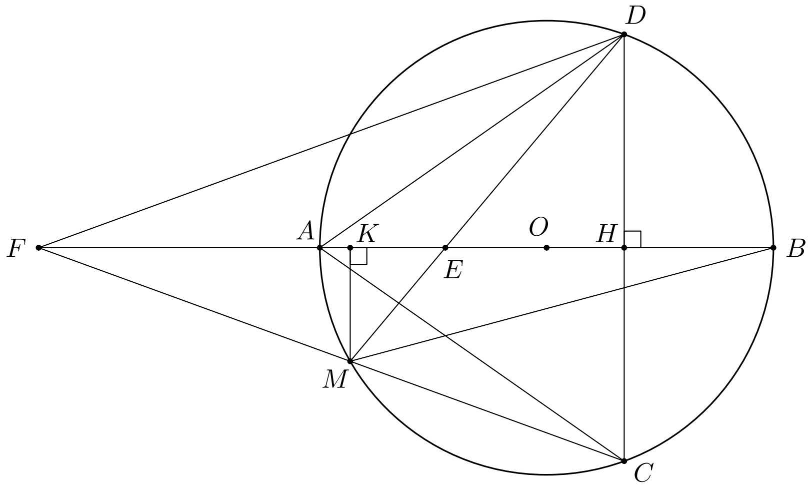
□

Bài 156. Cho đường tròn tâm O đường kính AB, dây CD vuông góc với AB tại H; lấy điểm M tùy ý trên đường tròn. Hai đường thẳng CM và AB cắt nhau tại F, hai đường thẳng DM và AB cắt nhau tại E.

a) Chứng minh: $\triangle EMB \backsim \triangle EAD$.

b) Chứng minh: $\dfrac{EB}{EA} = \dfrac{FB}{FA}$.

Lời giải.



a) Xét hai tam giác EMB và EAD có

$$\begin{cases} \widehat{AED} = \widehat{MEB} \text{ (đối đỉnh)} \\ \widehat{EAD} = \widehat{EMB} \text{ (cùng chắn cung } \overset{\frown}{BD}). \end{cases}$$

Suy ra $\triangle EMB \backsim \triangle EAD$ (g.g).

b) Gọi K là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng BF.

Ta có $\triangle EMB \backsim \triangle EAD \Rightarrow \dfrac{S_{EMB}}{S_{EAD}} = \left(\dfrac{MB}{AD}\right)^2$. (1)

Mặt khác $\dfrac{S_{EMB}}{S_{EAD}} = \dfrac{EB \cdot MK}{EA \cdot DH}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\left(\dfrac{MB}{AD}\right)^2 = \dfrac{EB \cdot MK}{EA \cdot DH} \Leftrightarrow \dfrac{EB}{EA} = \left(\dfrac{MB}{AD}\right)^2 \cdot \dfrac{DH}{MK}$. (3)

Xét hai tam giác BMF và CAF có $\widehat{F}$ chung và $\widehat{MBF} = \widehat{ACF}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AM}$), do đó $\triangle BMF \backsim \triangle CAF \Rightarrow \dfrac{S_{BMF}}{S_{CAF}} = \left(\dfrac{MB}{AC}\right)^2$. Dễ thấy trong tam giác ACD, AH vừa là trung tuyến vừa là đường cao nên tam giác ACD cân tại A, do đó $AC = AD$.

Suy ra $\dfrac{S_{BMF}}{S_{CAF}} = \left(\dfrac{MB}{AC}\right)^2 = \left(\dfrac{MB}{AD}\right)^2$. (4)

Ta lại có $\dfrac{S_{BMF}}{S_{CAF}} = \dfrac{FB \cdot MK}{FA \cdot DH}$. (5)

Từ (4) và (5) suy ra

$$\left(\frac{MB}{AD}\right)^2 = \frac{FB \cdot MK}{FA \cdot DH} \Leftrightarrow \frac{FB}{FA} = \left(\frac{MB}{AD}\right)^2 \cdot \frac{DH}{MK}. \quad (6)$$

Từ (3) và (6) suy ra $\dfrac{EB}{EA} = \dfrac{FB}{FA}$.

□

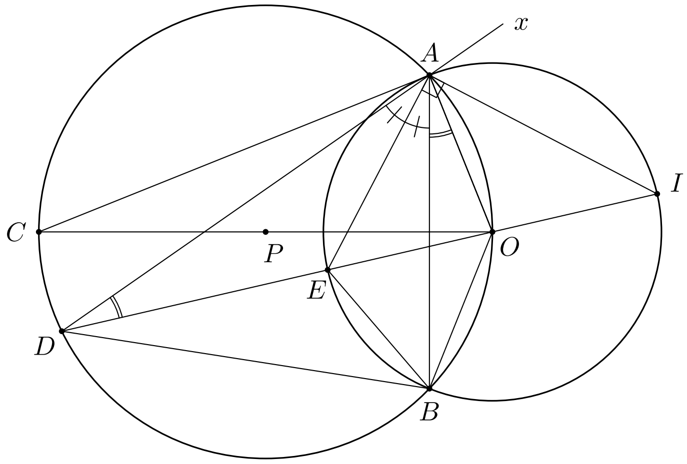
Bài 157. Cho đường tròn (O) và điểm P ở ngoài (O). Vẽ đường tròn (P, PO). Hai đường tròn (O) và (P) cắt nhau tại A và B. Đường thẳng OP cắt đường tròn (P) tại điểm thứ hai C.

a) Chứng minh CA là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) Lấy điểm D thuộc cung $\overset{\frown}{BA}$ của đường tròn (P) (cung chứa điểm C). Chứng minh DO là tia phân giác của $\widehat{ADB}$.

c) Gọi I là giao điểm của đoạn thẳng OD với đường tròn (O). Chứng minh AI là tia phân giác ngoài của $\widehat{BAD}$.

Lời giải.



a) CO là đường kính của đường tròn (P) nên $\widehat{CAO} = 90^\circ$, mà $A \in (O)$, do đó CA là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) A, B cùng thuộc đường tròn (O) nên $OA = OB$, suy ra $\widehat{ODA} = \widehat{ODB}$ (các góc chắn hai dây bằng nhau). Do đó DO là tia phân giác góc $\widehat{ADB}$.

c) Gọi Ax là tia đối của tia AD. Đường thẳng DO cắt (O) tại điểm E khác I.
Tam giác OAE cân tại O nên $\widehat{OAE} = \widehat{OEA} \Rightarrow \widehat{OAB} + \widehat{BAE} = \widehat{OEA}$. (1)
$\widehat{OEA} = \widehat{ODA} + \widehat{EAD}$ (tính chất góc ngoài của tam giác). (2)
Ta lại có $\widehat{ODA} = \widehat{OAB}$ (các góc chắn các dây bằng nhau). (3).
Từ (1), (2), (3) suy ra

$$\widehat{OAB} + \widehat{BAE} = \widehat{ODA} + \widehat{EAD} \Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{EAD}. \quad (4)$$

EI là đường kính đường tròn (O) nên $\widehat{BAE} + \widehat{BAI} = \widehat{EAI} = 90^\circ$. (5)
Suy ra $\widehat{EAD} + \widehat{IAx} = 180^\circ - \widehat{EAI} = 90^\circ$. (6)
Từ (4), (5) và (6) suy ra $\widehat{BAI} = \widehat{IAx}$. Do đó AI là tia phân giác ngoài của $\widehat{BAD}$.

□

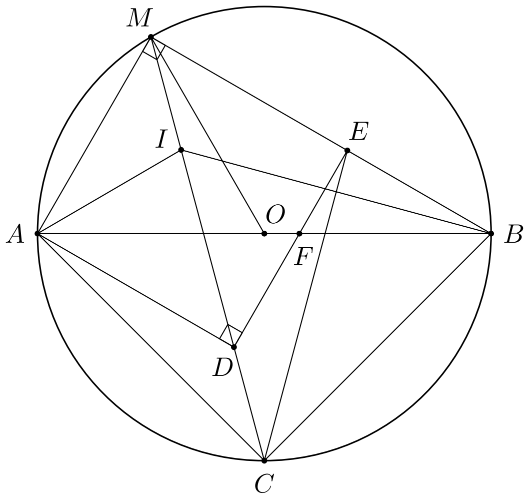
Bài 158. Cho đường tròn đường kính AB. Lấy M trên đường tròn (khác A, B) sao cho $MA < MB$. Lấy MA làm cạnh vẽ hình vuông $MADE$ (E thuộc đoạn thẳng MB). Gọi F là giao điểm của DE và AB.

a) Chứng minh: $\triangle ADF \backsim \triangle BMA$.

b) Lấy C làm điểm chính giữa cung AB (không chứa M). Chứng minh $CA = CE = CB$.

c) Trên đoạn thẳng MC lấy điểm I sao cho $CI = CA$. Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle AMB$.

Lời giải.



a) Ta có M thuộc đường tròn đường kính AB nên $\widehat{AMB} = 90^\circ$.
Hai tam giác vuông ADF và BMA có $\widehat{DAF} = \widehat{MBA}$ (hai góc so le trong).
Suy ra $\triangle ADF \backsim \triangle BMA$.

b) C là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{AB}$ nên $\overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{CB} \Rightarrow CA = CB$. (1)
$MADE$ là hình vuông suy ra $\widehat{MAD} = \widehat{ADE} = 45^\circ$, do đó $\widehat{ADC} = \widehat{EDC} = 135^\circ$.
Hai tam giác ADC và EDC có

$$\begin{cases} AD = ED \\ \widehat{ADC} = \widehat{EDC} \\ DC \text{ chung.} \end{cases}$$

Suy ra $\triangle ADC = \triangle EDC$, do đó $CA = CE$. (2)
Từ (1) và (2) ta có $CA = CE = CB$.

c) Tứ giác $MADE$ là hình vuông suy ra $\widehat{CMA} = \widehat{CMB} = 45^\circ$, do đó MI là tia phân giác góc $\widehat{AMB}$.
Tam giác CAI cân tại C nên $\widehat{CAI} = \widehat{CIA} \Rightarrow \widehat{CAB} + \widehat{BAI} = \widehat{CIA}$. (3)
$\widehat{CIA} = \widehat{IAM} + \widehat{CMA}$ (tính chất góc ngoài của tam giác). (4)
Ta lại có $\widehat{CMA} = \widehat{CMB} = \widehat{CAB}$ (các góc chắn các cung bằng nhau). (5).
Từ (3), (4), (5) suy ra

$$\widehat{CAB} + \widehat{BAI} = \widehat{IAM} + \widehat{CMA} \Rightarrow \widehat{BAI} = \widehat{IAM}.$$

Do đó AI là tia phân giác góc $\widehat{MAB}$. Vậy I là giao của hai đường phân giác của tam giác AMB nên là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AMB.

□

4 GÓC TẠO BỞI TIA TIẾP TUYẾN VÀ DÂY CUNG

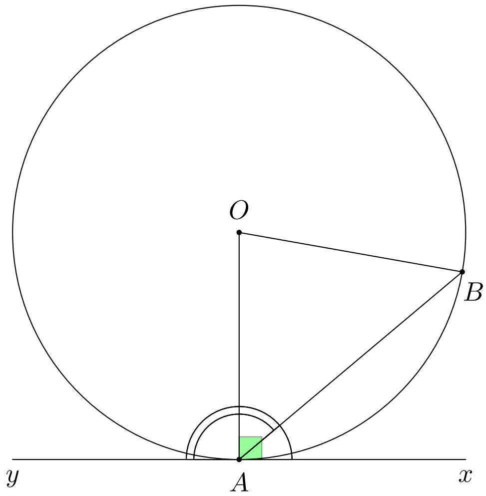
4.1 LÝ THUYẾT

4.1.1 Định nghĩa

Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và một cạnh là một tia tiếp tuyến, còn cạnh kia chứa dây cung của đường tròn đó.

4.1.2 Định lí

Số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo của cung bị chắn.



$\widehat{xAB}$ và $\widehat{yAB}$: là hai góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung của (O).

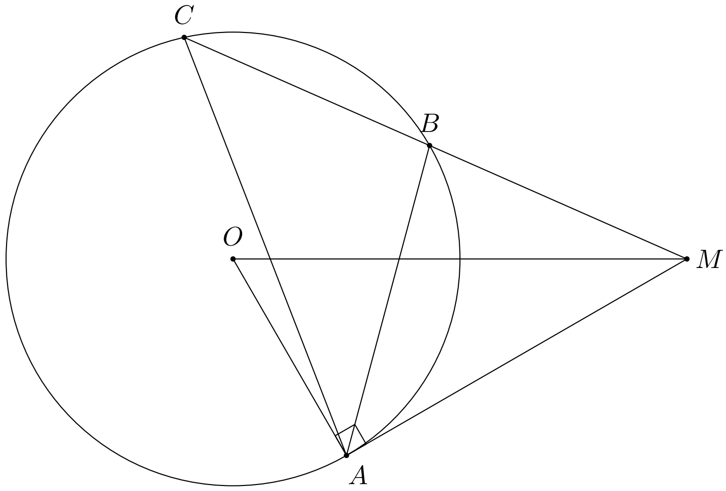
$$\widehat{xAB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AB}.$$

4.1.3 Hệ quả

Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

Ví dụ 19. Cho điểm M nằm ngoài đường tròn $(O; R)$. Vẽ tiếp tuyến MA và cát tuyến MBC. Chứng minh rằng $MA^2 = MB \cdot MC = OM^2 - R^2$.

Lời giải.



- Chứng minh $MA^2 = OM^2 - R^2$.

  Xét tam giác OAM vuông tại A, áp dụng định lý Py-ta-go ta có

$$MA^2 = OM^2 - OA^2 = OM^2 - R^2. \qquad (1)$$

- Chứng minh $MA^2 = MB \cdot MC$.

  Xét $\triangle MAB$ và $\triangle MCA$ có $\begin{cases} \widehat{AMB} \text{ (chung)} \\ \widehat{MAB} = \widehat{MCA} \text{ (Hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung).} \end{cases}$

  Do đó $\triangle MAB \backsim \triangle MCA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{MA}{MC} = \dfrac{MB}{MA} \Rightarrow MA^2 = MB \cdot MC. \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $MA^2 = MB \cdot MC = OM^2 - R^2$. □

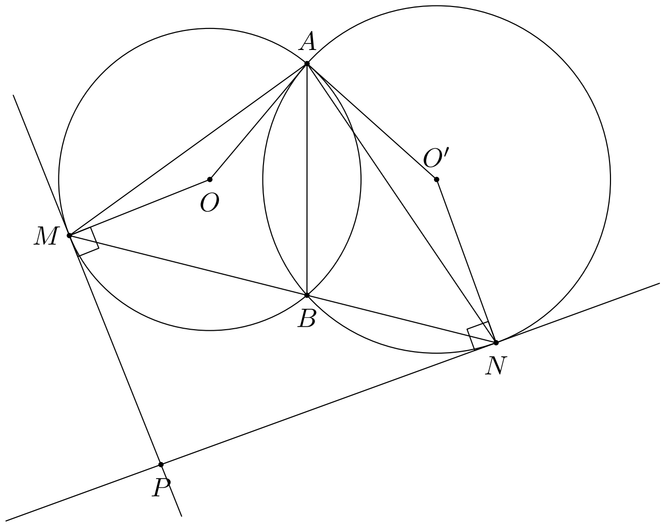
4.2 BÀI TẬP

Bài 159. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng đi qua điểm B và cắt (O) ở M và cắt (O') ở N (M và N khác B). Các tiếp tuyến tại M và N của hai đường tròn cắt nhau ở P.

a) Tính $\widehat{MPN}$ cho biết $\widehat{MAN} = \alpha$.

b) Chứng tỏ rằng: $\triangle MNP$ vuông tại $P \Leftrightarrow \widehat{OAO'} = 90^\circ$.

Lời giải.



a) Xét (O') ta có:
$\widehat{BNP} = \widehat{BAN} = \dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{BN}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn $\overset{\frown}{BN}$) hay $\widehat{MNP} = \widehat{BAN}$. (1)
Xét (O) ta có:
$\widehat{BMP} = \widehat{BAM} = \dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{BN}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn $\overset{\frown}{BN}$) hay $\widehat{NMP} = \widehat{BAM}$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{MNP} + \widehat{NMP} = \widehat{BAN} + \widehat{BAM} = \widehat{MAN} = \alpha$.
Xét $\triangle MNP$ có: $\widehat{MPN} + \widehat{MNP} + \widehat{NMP} = 180^\circ$ (tổng ba góc của một tam giác) hay $\widehat{MPN} + \widehat{MAN} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{MPN} = 180^\circ - \alpha$.

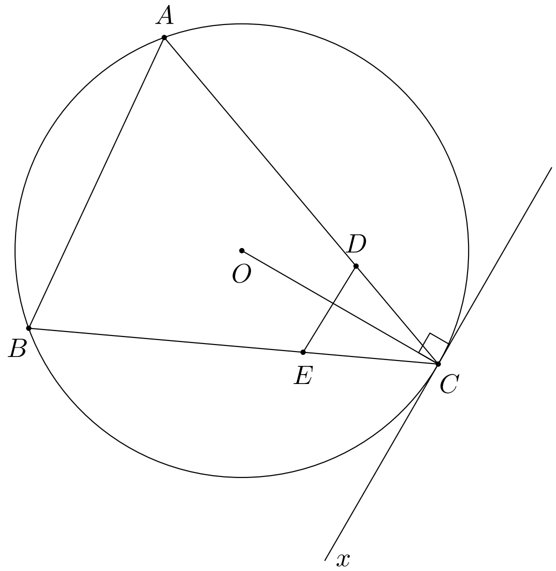
b) Ta có: $\widehat{OMP} = 90^\circ$ (vì MP là tiếp tuyến của (O)).
$\widehat{O'NP} = 90^\circ$ (vì NP là tiếp tuyến của (O')).
Tứ giác $MANP$ có $\widehat{MAN} + \widehat{MPN} = 180^\circ$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \widehat{AMP} + \widehat{ANP} = 180^\circ$.
Không mất tính tổng quát, giả sử $\widehat{AMP}$ là góc tù. Khi đó $\widehat{ANP}$ là góc nhọn
$\widehat{AMP} + \widehat{ANP} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \widehat{AMO} + 90^\circ - \widehat{O'NA} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AMO} = \widehat{O'NA}$. (1)
Lại có: $\triangle AOM$ là tam giác cân tại O (vì $OA = OM = R$) $\Rightarrow \widehat{AMO} = \widehat{MAO}$. (2)
Tương tự ta có $\widehat{ANO'} = \widehat{NAO'}$. (3)
Từ $(1), (2), (3) \Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{NAO'}$.
Khi đó ta có $\widehat{MAN} = \widehat{MAO} + \widehat{OAN} = \widehat{NAO'} + \widehat{OAN} = \widehat{OAO'}$.
$\triangle MNP$ là tam giác vuông tại P

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \widehat{MPN} = 90^\circ\\
&\Leftrightarrow \quad 180^\circ - \widehat{MAN} = 90^\circ\\
&\Leftrightarrow \quad 180^\circ - \widehat{OAO'} = 90^\circ\\
&\Leftrightarrow \quad \widehat{OAO'} = 90^\circ.
\end{aligned}$$

□

Bài 160. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O). Một đường thẳng song song với tiếp tuyến tại C cắt cạnh AC ở D và cạnh BC ở E. Chứng tỏ hai tam giác ABC và EDC đồng dạng và $CA \cdot CD = CB \cdot CE$.

Lời giải.



Vì $ED \parallel Cx$ nên $\widehat{EDC} = \widehat{xCD}$ (2 góc sole trong).
Lại có: $\widehat{xCD} = \widehat{ABC}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$)
$\Rightarrow \widehat{EDC} = \widehat{ABC}$.
Xét $\triangle ABC$ và $\triangle EDC$ có
$\begin{cases} \widehat{ACB} \text{ chung} \\ \widehat{EDC} = \widehat{ABC} \text{ (cmt)} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \backsim \triangle EDC \ (g.g) \Rightarrow \dfrac{CA}{CE} = \dfrac{CB}{CD}$ (tỉ lệ các cạnh tương ứng).
$\Rightarrow CA \cdot CD = CB \cdot CE$. □

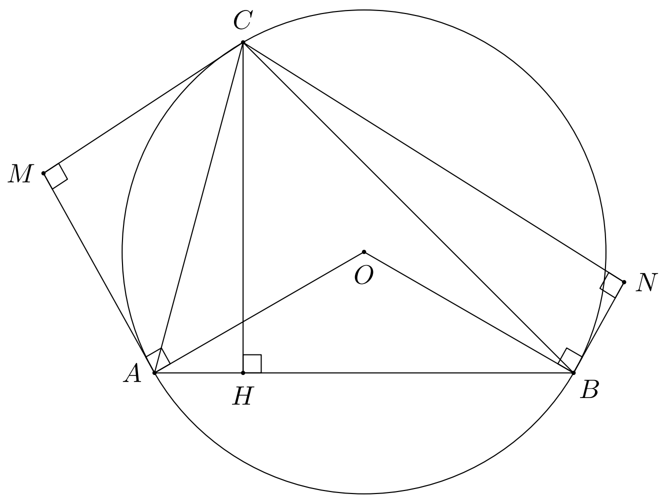
Bài 161. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O) có CH là đường cao; M, N là hình chiếu của đỉnh C lần lượt trên các tiếp tuyến ở A và B của đường tròn.

a) Chứng tỏ $\triangle ACH \backsim \triangle BCN$ và $\triangle BCH \backsim \triangle ACM$.

b) So sánh $CM + CN$ với $2CH$.

c) Tam giác ABC phải thỏa mãn điều kiện gì để $CM + CN = 2CH$.

Lời giải.



a) Chứng tỏ $\triangle ACH \backsim \triangle BCN$ và $\triangle BCH \backsim \triangle ACM$.

Ta có: $\widehat{CAH} = \widehat{CBN}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến cùng chắn $\overset{\frown}{BC}$).

Xét $\triangle ACH$ và $\triangle BCN$ có

$\widehat{AHC} = \widehat{BNC} = 90^\circ$.

$\widehat{CAH} = \widehat{CBN}$ (chứng minh trên).

$\Rightarrow \triangle CAH \backsim \triangle BCN$ (g-g).

Ta có $\widehat{CBH} = \widehat{CAM}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn $\overset{\frown}{AC}$).

Xét $\triangle BCH$ và $\triangle ACM$ có

$\widehat{CHB} = \widehat{CMA} = 90^\circ$.

$\widehat{CBH} = \widehat{CAM}$ (chứng minh trên).

$\Rightarrow \triangle BCH \backsim \triangle ACM$ (g-g).

b) So sánh $CM + CN$ với $2CH$.

Vì $\triangle ACH \backsim \triangle BCN$ (chứng minh trên) nên $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{CN}{CH}$ $(*)$.

$\triangle BCH \backsim \triangle ACM \Rightarrow \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{CM}{CH}$ $(**)$.

Từ $(*), (**)$ suy ra $\dfrac{CN + CM}{CH} = \dfrac{BC}{AC} + \dfrac{AC}{BC}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương ta có

$\dfrac{BC}{AC} + \dfrac{AC}{BC} \geq \sqrt{\dfrac{BC}{AC} \cdot \dfrac{AC}{BC}} = 2$.

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{AC}{BC} \Leftrightarrow AC = BC$.

Vậy $\dfrac{CN + CM}{CH} \geq 2 \Leftrightarrow CM + CN \geq 2CH$.

c) Tam giác ABC phải thỏa mãn điều kiện gì để $CM + CN = 2CH$.

Théo ý b ta có $CM + CN \geq 2CH$.

Dấu "=" xảy ra khi $AC = BC$.

Do đó $CM + CN = 2CH$ khi và chỉ khi tam giác ABC là tam giác cân tại C.

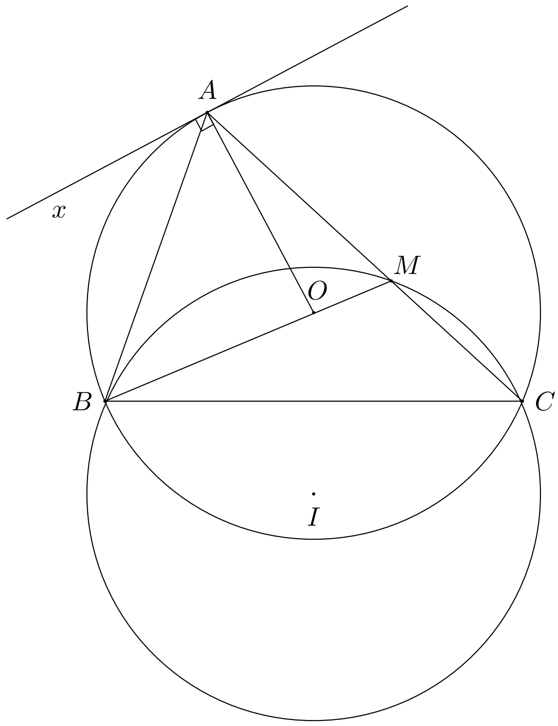
□

Bài 162. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Qua đỉnh B ta kẻ đường thẳng song song với tiếp tuyến tại A của đường tròn, đường thẳng này cắt AC ở M.

a) Chứng minh hệ thức $AB^2 = AC \cdot AM$.

b) Chứng tỏ rằng đường thẳng AB là tiếp tuyến của đường tròn đi qua các điểm B, C và M.

Lời giải.



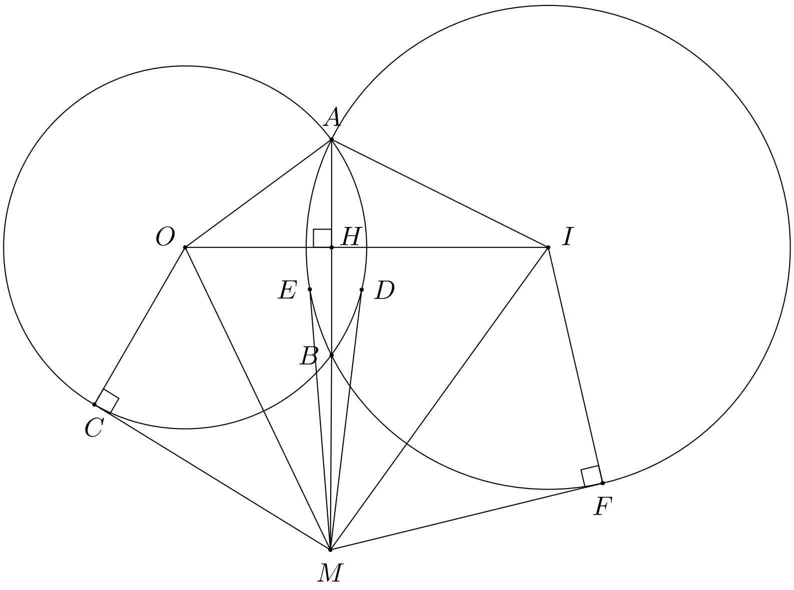
a) Gọi tiếp tuyến kẻ từ điểm A của đường tròn (O) là Ax.
Ta có $\widehat{ABM} = \widehat{BAx}$ (so le trong $Ax \parallel BM$).
$\widehat{ACB} = \widehat{BAx}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung chắn $\overset{\frown}{AB}$).
Xét $\triangle MAB$ và $\triangle BAC$ có $\begin{cases} \widehat{BAM} = \widehat{CAB} \text{ (góc chung)} \\ \widehat{ABM} = \widehat{ACB} = \widehat{BAx}. \end{cases}$
$\Rightarrow \triangle MAB \backsim \triangle BAC$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AM}{AB} \Leftrightarrow AB^2 = AM \cdot AC$.

b) Gọi I là tâm đường tròn đi qua ba điểm B, C và M. Xét đường tròn $(I; IB)$.
Ta có $\widehat{ACB} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BM}$.
Mà $\widehat{ACB} = \widehat{ABM}$ nên suy ra $\widehat{ABM} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BM}$.
Do đó AB là tiếp tuyến của đường tròn đi qua các điểm B, C và M.

□

Bài 163. Cho hai đường tròn cắt nhau ở A và B, M là một điểm thuộc đường thẳng AB và ở ngoài hai đường tròn đã cho. Từ M kẻ các tiếp tuyến MC, MD đến một đường tròn và các tiếp tuyến ME, MF đến đường tròn còn lại. Chứng tỏ bốn điểm C, D, E, F cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.



Gọi H là giao điểm của AB và OI.

Suy ra $AB \perp OI$ tại H.

Ta có $\triangle OHM$ vuông tại H.

Suy ra $OM^2 = OH^2 + MH^2 \Rightarrow MH^2 = OM^2 - OH^2$. (1)

Mà $\triangle IHM$ vuông tại H.

$\Rightarrow IM^2 = IH^2 + MH^2 \Rightarrow MH^2 = IM^2 - IH^2$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OM^2 - OH^2 = IM^2 - IH^2$.

Mặt khác ta có

$OA^2 = OH^2 + AH^2 \Rightarrow OH^2 = OA^2 - AH^2$.

$IA^2 = IH^2 + AH^2 \Rightarrow IH^2 = IA^2 - IH^2$.

Do đó suy ra

$OM^2 - (OA^2 - AH^2) = IM^2 - (IA^2 - AH^2)$.

$\Rightarrow OM^2 - OA^2 + AH^2 = IM^2 - IA^2 + IH^2$.

$\Rightarrow OM^2 - OA^2 = IM^2 - IA^2$.

$\Rightarrow OM^2 - OC^2 = IM^2 - IF^2$.

$\Rightarrow MC^2 = MF^2$.

$\Rightarrow MC = MF$.

Vì MC và MD là hai tiếp tuyến kẻ từ M đến đường tròn tâm O nên $MC = MD$.

Vì ME và MF là hai tiếp tuyến kẻ từ M đến đường tròn tâm I nên $ME = MF$.

Suy ra $MC = MD = ME = MF$.

Do đó bốn điểm C, D, E, F cùng thuộc đường tròn tâm M. □

5 GÓC CÓ ĐỈNH BÊN TRONG ĐƯỜNG TRÒN, GÓC CÓ ĐỈNH BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN

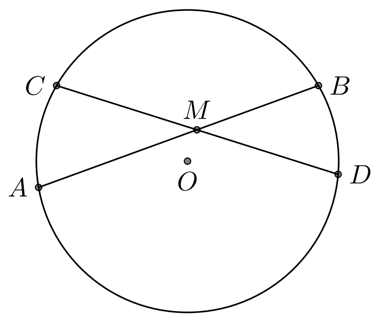
5.1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

5.1.1 Góc có đỉnh bên trong đường tròn

Định lí 2. Số đo của góc có đỉnh bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn.

$\widehat{AMC}, \widehat{CMB}, \widehat{BMD}, \widehat{DMA}$ là góc có đỉnh bên trong đường tròn (O)

$$\widehat{AMC} = \frac{\text{sđ}\overset{\frown}{AC} + \text{sđ}\overset{\frown}{BD}}{2}$$

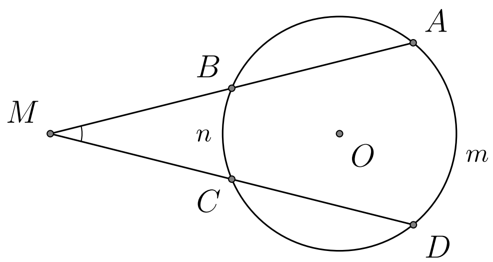


5.1.2 Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn

Định lí 3. Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn có số đo bằng nửa hiệu của số đo hai cung bị chắn giữa hai cạnh của góc.

Ta có minh họa

$$\widehat{AMD} = \frac{\text{sđ}\overset{\frown}{AmD} - \text{sđ}\overset{\frown}{BnC}}{2}.$$



Ví dụ 20. Qua điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O), vẽ các cát tuyến ABC, ADE sao cho BE và CD cắt nhau ở M nằm trong đường tròn (O). Chứng minh rằng

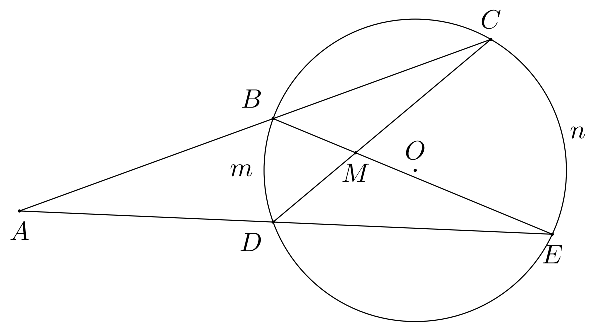
$$\widehat{A} + \widehat{BMD} = 2\widehat{CBE}.$$

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $\widehat{A}$ là góc ngoài đường tròn và $\widehat{A} = \dfrac{\text{sđ}\overset{\frown}{CnE} - \text{sđ}\overset{\frown}{BmD}}{2}$.

$\widehat{BMD}$ là góc trong đường tròn và

$$\widehat{BMD} = \frac{\text{sđ}\overset{\frown}{CnE} - \text{sđ}\overset{\frown}{BmD}}{2}.$$



Suy ra $\widehat{A} + \widehat{BMD} = \overset{\frown}{CnE} = 2\widehat{CBE}$ (Vì $\widehat{CBE}$ là góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{CnE}$).

Vậy ta có $\widehat{A} + \widehat{BMD} = 2\widehat{CBE}$. □

5.2 BÀI TẬP

Bài 43. Cho hai đường kính AB, CD vuông góc của đường tròn (O) và M là điểm thuộc bán kính OA. Kẻ dây DE qua M. Tiếp tuyến tại E cắt AB ở F.

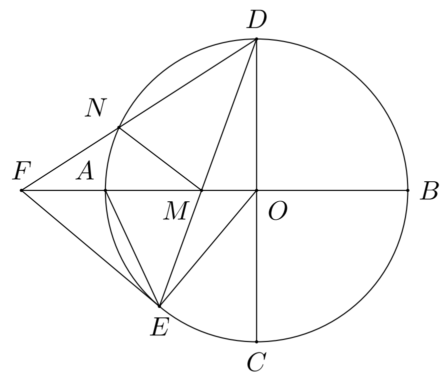
a) Chứng minh $\triangle FME$ cân.

b) Chứng minh $FM^2 = FA.FB$.

c) FD cắt đường tròn (O) tại N. Chứng minh FM tiếp xúc với đường tròn (MDN).

Lời giải.

a) Xét $\triangle FME$, ta có $\widehat{FEM} = \dfrac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{EA} + \text{sđ}\overset{\frown}{AD}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{EA} + \text{sđ}\overset{\frown}{DB}\right) = \widehat{FME}$. Từ đó suy ra $\triangle FME$ cân đỉnh F.



b) Xét $\triangle FBE$ và $\triangle FEA$ có $\widehat{BFE} = \widehat{AFE}$.
Lại có $\widehat{FEA} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{EA} = \widehat{FBE}$ nên $\triangle FBE \sim \triangle FEA$.
Suy ra $\dfrac{FB}{FE} = \dfrac{FE}{FA} \Rightarrow FE^2 = FA \cdot FB$.
Mà $\triangle FME$ cân tại F nên $FE = FM$.
Từ đó suy ra $FM^2 = FA.FB$.

c) Ta có tứ giác $ANDB$ nội tiếp nên $\widehat{FNA} = \widehat{DBF}$ và $\widehat{FAN} = \widehat{FDB}$.

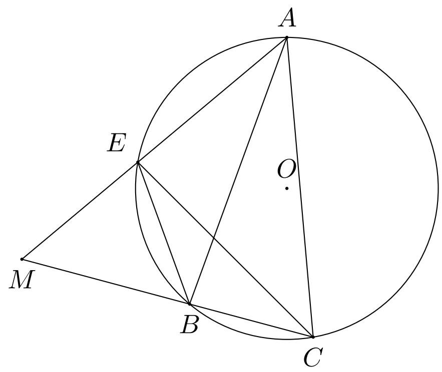
Từ đó suy ra $\triangle FNA \sim \triangle FBD \Rightarrow \dfrac{FN}{FB} = \dfrac{FA}{FD} \Rightarrow FA.FB = FN.FD$.
Kết hợp với phần trên ta suy ra $FN.FD = FA.FB = FM^2$ nên FM chính là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp của $\triangle MDN$. Hay FM tiếp xúc với đường tròn (MDN). □

Bài 44. Cho $\triangle ABC$ cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Ta lấy điểm E trên cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ và gọi M là giao điểm của tia AE với BC.

a) So sánh $\widehat{ECA}$ với $\widehat{EMB}$

b) Chứng minh rằng AB tiếp xúc với đường tròn (MEB), AC tiếp xúc với đường tròn (MCE).

Lời giải.



a) Vì $\triangle ABC$ cân đỉnh A nên sđ$\overset{\frown}{AEB}$ = sđ$\overset{\frown}{AC}$. Từ đó suy ra

$$\widehat{EMB} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AC} - \text{sđ}\overset{\frown}{EB}\right) = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AB} - \text{sđ}\overset{\frown}{EB}\right) = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{EA} = \widehat{ECA}.$$

Vậy $\widehat{ECA} = \widehat{EMB}$.

b) Xét $\triangle ABE$ và $\triangle AMB$ có góc A chung và $\widehat{ABE} = \widehat{ECA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung). Lại theo phần trên ta có $\widehat{ECA} = \widehat{EMB}$ nên $\widehat{ABE} = \widehat{AMB}$.
Từ đó suy ra $\triangle ABE \sim \triangle AMB \Rightarrow \dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AE}{AB} \Rightarrow AB^2 = AE \cdot AM$.
Vậy nên AB chính là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle MEB$ (ta có điều phải chứng minh).
Tương tự, ta có $\triangle ACE \sim \triangle AMC$ (g.g) nên $\dfrac{AC}{AM} = \dfrac{AE}{AC} \Rightarrow AC^2 = AE \cdot AM$ suy ra AC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MCE.

□

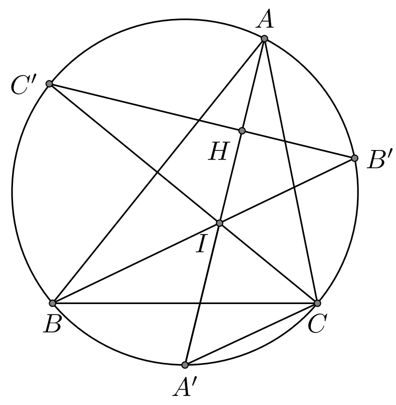
Bài 45. Tam giác ABC có các phân giác đồng quy ở I các tia AI, BI, CI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại A', B', C'. Chứng minh:

a) $A'I = A'B$

b) Lục giác $AB'CA'BC'$ có $AB' = B'C$, $CA' = A'B$, $BC' = C'A$.

c) A', B', C' lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác IBC, ICA và IAB.

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{BIA'} = \dfrac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AB'} + \text{sđ}\overset{\frown}{BA'}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{B'C} + \text{sđ}\overset{\frown}{CA'}\right) = \widehat{IBA'}$.
Từ đó suy ra $\triangle A'BI$ cân đỉnh $A' \Rightarrow A'I = A'B$.

b) Vì BI là tia phân giác của góc B nên $\widehat{ABB'} = \widehat{B'BC}$, hai góc nội tiếp $\widehat{ABB'}$ và $B'BC$ trong cùng đường tròn mà có số đo bằng nhau thì hai cung tương ứng là $\overset{\frown}{AB'}$ và $\overset{\frown}{B'C}$ bằng nhau, suy ra $AB' = B'C$.
Tương tự ta có $CA' = A'B$, $BC' = C'A$.
Vậy lục giác $AB'CA'BC'$ có $AB' = B'C$, $CA' = A'B$, $BC' = C'A$.

c) Ta có
$$\widehat{CIA'} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AC'} + \text{sđ}\overset{\frown}{CA'}\right) = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{BC'} + \text{sđ}\overset{\frown}{BA'}\right) = \widehat{ICA'}.$$
Từ đó ta được $\triangle CA'I$ cân tại A', suy ra $IA' = A'C$
Theo phần trên ta cũng có $BA' = A'I$ nên $BA' = A'I = A'C$. Suy ra A' chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC.
A' là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác IBC.
Tương tự, ta có B', C' lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ICA và IAB.

□

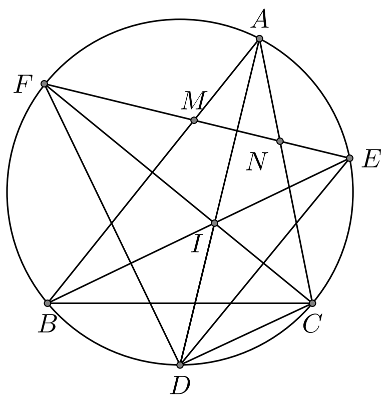
Bài 46. Cho đường tròn (I) nội tiếp $\triangle ABC$. Các tia AI, BI, CI cắt đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ lần lượt tại D, E, F. Dây EF cắt AB, AC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng

a) $DI = DB$

b) $AM = AN$

c) I là trực tâm $\triangle DEF$

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{BID} = \dfrac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AE} + \text{sđ}\overset{\frown}{BD}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{EC} + \text{sđ}\overset{\frown}{CD}\right) = \widehat{IBD}$.
Từ đó suy ra $\triangle DBI$ cân đỉnh $D \Rightarrow DI = DB$.

b) Ta có $\widehat{ANM} = \dfrac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{EC} + \text{sđ}\overset{\frown}{AF}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AE} + \text{sđ}\overset{\frown}{BF}\right) = \widehat{AMN}$.
Từ đó suy ra $\triangle AMN$ cân đỉnh $A \Rightarrow AM = AN$.

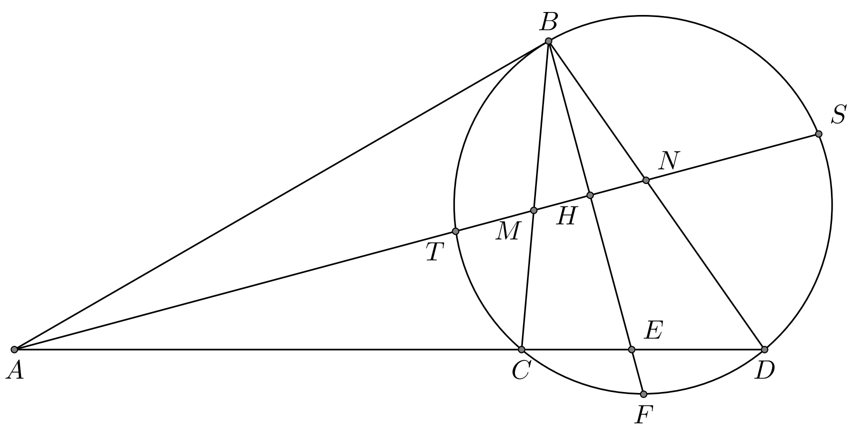
c) Từ phần trên ta thấy AI chính là đường phân giác trong của tam giác cân AMN nên $AI \perp MN$ hay $DI \perp FE$.
Tương tự, ta có $FI \perp DE$.
Vậy I chính là trực tâm của tam giác DEF.

□

Bài 47. Từ một điểm A ở ngoài đường tròn (O) ta vẽ tiếp tuyến AB và cát tuyến ACD. Tia phân giác của BAC cắt BC, BD lần lượt tại M và N. Vẽ dây BF vuông góc MN tại H, cắt CD tại E. Chứng minh rằng

a) $\triangle BMN$ cân

b) $FD^2 = FE \cdot FB$



Lời giải.

a) Tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn (O) tại T và S như hình vẽ.

Theo tính chất của góc ở ngoài đường tròn ta có $\widehat{BAS} = \widehat{DAS}$ nên suy ra

$$\frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{BS} - \text{sđ}\overset{\frown}{BT}\right) = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{DS} - \text{sđ}\overset{\frown}{CT}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{BS} + \text{sđ}\overset{\frown}{CT}\right) = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{DS} + \text{sđ}\overset{\frown}{BT}\right).$$

Từ đó suy ra $\widehat{BNM} = \widehat{BMN}$ nên $\triangle BMN$ cân đỉnh B.

b) Vì BF là đường cao của tam giác cân BMN nên BF chính là đường phân giác của góc $\widehat{CBD}$.

Xét hai tam giác $\triangle BDF$ và $\triangle DEF$, Ta có $\widehat{F}$ chung, $\widehat{DBF} = \widehat{EDF}$.

Do đó: $\triangle BDF \sim \triangle DEF \Rightarrow \dfrac{FD}{FE} = \dfrac{FB}{FD} \Leftrightarrow FD^2 = FE \cdot FB$ đpcm.

□

Bài 48. Cho đường tròn $(O; R)$. Hai đường kính AB và CD vuông góc nhau. Trên đường kính AB lấy điểm E sao cho $AE = R\sqrt{2}$. Vẽ dây CF đi qua E. Tiếp tuyến của đường tròn tại F cắt đường thẳng CD tại M, vẽ dây AF cắt CD tại N. Chứng minh rằng

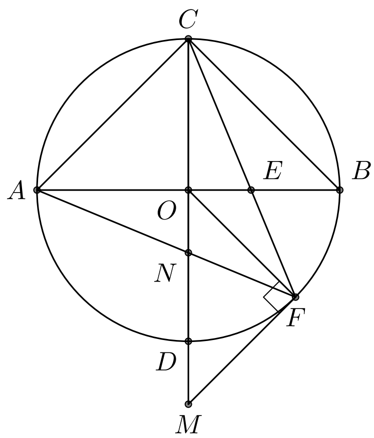
a) $MF \parallel AC$.

b) Tia CF là tia phân giác của $\widehat{BCD}$.

c) MN, OD, OM là độ dài 3 cạnh của một tam giác vuông.

Lời giải.

a)



Ta có sđ$\overset{\frown}{AC}$ = sđ$\overset{\frown}{BC}$. Và $AC = \sqrt{OC^2 + OA^2} = R\sqrt{2}$.

Suy ra $\triangle CAE$ cân tại A. Nên

$$\begin{aligned}\widehat{ACE} = \widehat{AEC} &= \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AC} + \text{sđ}\overset{\frown}{BF}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AD} + \text{sđ}\overset{\frown}{DF}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{DF} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BF}.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\widehat{CAF} = \dfrac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{CB} + \text{sđ}\overset{\frown}{BF}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AD} + \text{sđ}\overset{\frown}{DF}\right) = \widehat{AFM}$ nên $MF \parallel AC$ (so le trong).

b) Ta có $BD \parallel AC$ nên $MF \parallel BD$. Mà $OF \perp MF$ nên $OF \perp BD$.

Mặt khác tam giác OBD cân tại O nên OF là phân giác góc $\widehat{BOD}$. Suy ra F là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BD}$. Vậy CN là tia phân giác của góc $\widehat{BCD}$.

c) Xét $\triangle ANC$ và $\triangle CEA$ có $\widehat{ANC} = \widehat{CEA}, \widehat{ACN} = \widehat{CAE}$, cạnh AC chung nên chúng bằng nhau. Suy ra $CN = AE = AC$.

Ta có $\triangle CAN \sim \triangle MFN$ nên $\dfrac{MN}{MF} = \dfrac{CN}{CA} = 1 \Rightarrow MF = MN$.

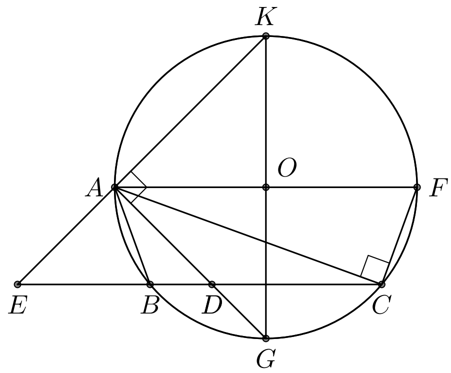
Dễ thấy $\triangle OFM$ vuông tại F nên $OF^2 + FM^2 = OM^2$. Mà $OD = OF = R$ nên $OD^2 + NM^2 = OM^2$.

Vậy ta có OD, MN và OM là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông.

□

Bài 49. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$, đường phân giác trong và ngoài của $\widehat{A}$ cắt đường thẳng BC lần lượt tại D và E. Cho Biết $AD = AE$, $AB = 1{,}4$; $AC = 4{,}8$. Tính R.

Lời giải.



Kẻ đường kính AF, đường thẳng AE cắt $(O; R)$ tại điểm thứ hai là K, AD cắt đường tròn tại điểm thứ hai là G.

Vì hai đường phân giác trong và ngoài của góc A vuông góc nên $\widehat{KAC} = 90^\circ$ nên KG chính là đường kính của đường tròn $(O; R)$.

Vì tam giác ADE vuông cân tại A nên $\widehat{ADB} = 45^\circ \Rightarrow$ sđ$\overset{\frown}{AB}$ + sđ$\overset{\frown}{GC} = 90^\circ$.

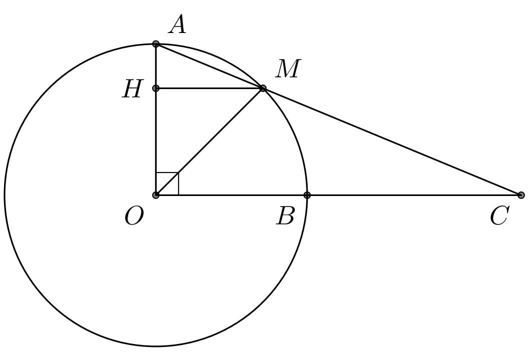
Mặt khác sđ$\overset{\frown}{ABF} = 180^\circ$ nên sđ$\overset{\frown}{GB}$ + sđ$\overset{\frown}{CF} = 90^\circ$.

Mà sđ$\overset{\frown}{GB}$ = sđ$\overset{\frown}{GC}$(do AG là phân giác của góc A) nên sđ$\overset{\frown}{AB}$ = sđ$\overset{\frown}{CF} \Rightarrow CF = AB = 1{,}4$.

Tam giác ACF vuông tại C nên $AF^2 = AC^2 + CF^2 = 25 \Rightarrow AF = 5 \Rightarrow R = 2{,}5$. □

Bài 50. Cho đường tròn $(O; 2\text{cm})$, các bán kính OA và OB vuông góc nhau, M là điểm chính giữa của cung AB. Gọi C là giao điểm của AM và OB, H là hình chiếu của M trên OA. Tính diện tích hình thang $OHMC$.

Lời giải.



Từ giả thiết suy ra $\triangle OHM$ vuông cân đỉnh $H \Rightarrow HO = HM = \sqrt{2}$.

Mà $\triangle AHM \sim \triangle AOC \Rightarrow \dfrac{AH}{AO} = \dfrac{HM}{OC} \Rightarrow OC = \dfrac{AO.HM}{AH} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$.

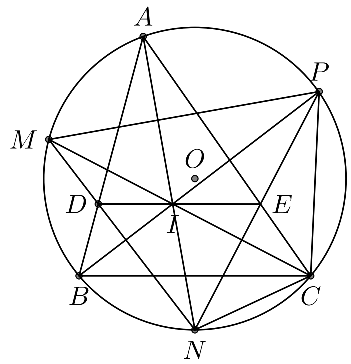
Diện tích hình thang $OHMC$ là $S = \dfrac{1}{2}(HM + OC).HO = \dfrac{4-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\text{cm}^2$. □

Bài 51. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Các điểm M, N, P là điểm chính giữa của các cung AB, BC, CA. Gọi D là giao điểm của MN và AB, E là giao điểm của PN và AC. Chứng minh rằng $DE \parallel BC$.

Lời giải.

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$, ta có

$$\begin{aligned}\widehat{PIC} &= \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{PC} + \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{MB}\\ &= \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AP} + \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AM}\\ &= \widehat{PCI}\end{aligned}$$



Suy ra $\triangle PIC$ cân tại P nên $PI = PC$.

Tương tự $NC = NI$ nên PN là đường trung trực của IC suy ra $\widehat{EIC} = \widehat{ECI}$.

Mà $\widehat{ECI} = \widehat{ICB}$ suy ra $IE \parallel BC$.

Hoàn toàn tương tự $ID \parallel BC$, từ đó ta có D, I, E thẳng hàng và $DE \parallel BC$. □

Bài 52. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Gọi I là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác đó. Gọi M, N, P theo thứ tự là tâm của các đường tròn bàng tiếp trong các góc A, B, C. Gọi K là điểm đối xứng với I qua O. Chứng minh rằng K là tâm của đường tròn ngoại tiếp $\triangle MNP$.

Lời giải.

Dễ thấy I chính là trực tâm của tam giác MNP.

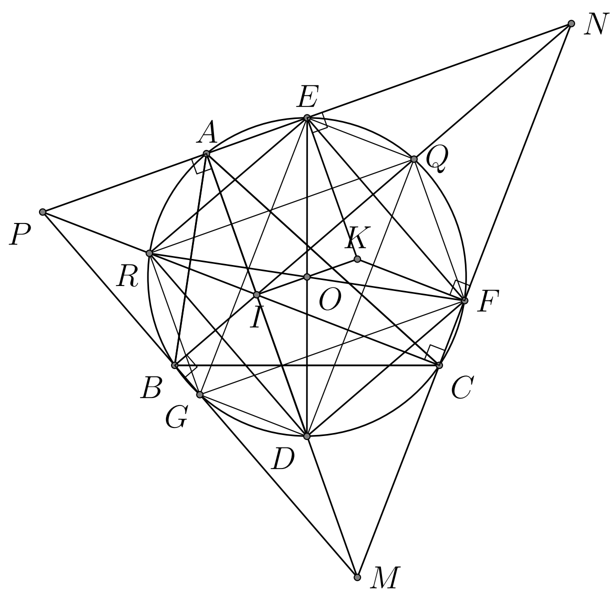
Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của NP, NM và MP.

Gọi R, D, Q lần lượt là trung điểm của PI, IM và IN.

Ta có EF là đường trung bình của $\triangle MNP$ nên $EF \parallel MP$ và $EF = \dfrac{1}{2}MP$.

Ta có DR là đường trung bình của $\triangle MIP$ nên $DR \parallel MP$ và $DG = \dfrac{1}{2}MP$.

Từ đó suy ra $EFDG$ là hình bình hành.



Lại có ER là đường trung bình của $\triangle PIN$ nên $EG \parallel IN$ hay $ER \parallel BN$ nên $ER \perp MP$.
Vậy hình bình hành $EFDG$ là hình chữ nhật.
Ta gọi O là trung điểm của ED, khi đó E, F, D, G cùng thuộc đường tròn tâm O đường kính ED.
Ta có điểm A nhìn ED dưới một góc vuông nên A cũng thuộc đường tròn (O) nói trên.
Tương tự, ta chứng minh được $EQDG$ là hình chữ nhật nên Q và G cũng thuộc đường tròn (O).
Tương tự, ta chứng minh được $QFGR$ là hình chữ nhật nên R và F cũng thuộc đường tròn (O).
Vậy đường tròn (O) có các đường kính là ED, QG và FR.
Do C nhìn RF dưới góc vuông nên C cũng thuộc đường tròn đường kính RF chính là đường tròn (O).
Tương tự, B nhìn QG dưới góc vuông nên B cũng thuộc đường tròn (O).
Vậy đường tròn (O) chính là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, và (O) đi qua các điểm E, Q, F, D, G, R. Gọi K là điểm đối xứng với I qua O. Ta có $\triangle IOD = \triangle KOE$ và $EK \parallel ID$ nên $KE \perp PN$. (1)
Tương tự ta có $\triangle IOR = \triangle KOF$ nên $KF \parallel RI$ và $KF \perp MN$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra K chính là giao của hai đường trung trực của tam giác MNP nên K chính là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác MNP.(ta có điều phải chứng minh) □

6 CUNG CHỨA GÓC

6.1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

6.1.1 Quỹ tích cung chứa góc

Với đoạn thẳng AB và góc $\alpha\,(0° < \alpha < 180°)$ cho trước thì quỹ tích các điểm M thỏa mãn $\widehat{AMB} = \alpha$ là hai cung chứa góc α dựng trên đoạn thẳng AB.

Chú ý 3. a) Hai cung chứa góc α nói trên là hai cung tròn đối xứng với nhau qua AB.

b) Hai điểm A, B thuộc quỹ tích.

c) Khi $\alpha = 90°$, quỹ tích các điểm nhìn đoạn thẳng AB cho trước dưới một góc vuông là đường tròn đường kính AB.

6.1.2 Cách vẽ cung chứa góc α

a) Vẽ đường trung trực d của đoạn thẳng AB.

b) Vẽ tia Ax tạo với AB một góc α.

c) Vẽ đường thẳng $Ay \perp Ax$. Gọi O là giao điểm của Ay và d.

d) Vẽ cung AmB, tâm O, bán kính OA sao cho cung này nằm trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa tia Ax.

6.1.3 Cách giải bài toán quỹ tích

Muốn chứng minh quỹ tích (tập hợp) các điểm M thỏa mãn tính chất T là một hình H, ta phải chứng minh hai phần:

a) Phần thuận: Một điểm có tính chất T thuộc hình H.

b) Phần đảo: Mọi điểm thuộc hình H đều có tính chất T.

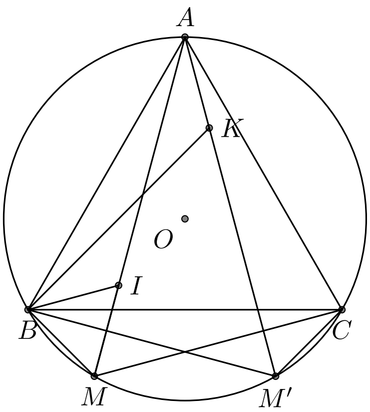
Kết luận: Quỹ tích (hay tập hợp) các điểm M có tính chất T là hình H.

Ví dụ 21. Cho tam giác đều ABC. Tìm tập hợp các điểm M sao cho khoảng cách từ M đến A bằng tổng các khoảng cách từ M đến B và C.

Lời giải.

Phần thuận: Theo đề bài ta có $MA = MB + MC$.

Dựng đường tròn tâm O ngoại tiếp $\triangle ABC$. Vẽ tam giác đều MBI.



Xét $\triangle ABI$ và $\triangle CBM$ có

$$\begin{cases} AB = CB \\ \widehat{ABI} = \widehat{CBM} \text{ cùng cộng với } \widehat{CBI} = 60^\circ \\ BI = BM \end{cases}$$

do đó $\triangle ABI = \triangle CBM$ (c.g.c) suy ra $AI = CM \Rightarrow MC + MB = MI + AI = MA$. Do đó I nằm giữa A và M và ba điểm A, I, M thẳng hàng. Do đó góc $AMB = 60^\circ$ nên M thuộc cung chứa góc 60° dựng trên AB.

Phần đảo. Lấy điểm M' thuộc cung chứa góc 60° dựng trên AB. Ta phải chứng minh $M'A = M'B + M'C$.

Thật vậy, trên cạnh $M'A$ lấy điểm K sao cho $M'K = M'B$.

Do M' thuộc cung chứa góc 60° dựng trên AB nên $\widehat{BM'K} = 60^\circ$ do đó $\triangle BM'K$ đều suy ra $BK = BM' = M'K$ và $\widehat{KBM'} = 60^\circ$ khi đó $\widehat{ABK} = \widehat{M'BC}$ (cùng cộng với góc KBC bằng 60°).

Do đó $\triangle ABK = \triangle M'BC$ (c.g.c) suy ra $AK = M'C$, khi đó $M'B + M'C = M'K + KA = M'A$.

Giới hạn quỹ tích:

Khi M trùng với B và M trùng với C đều thỏa mãn bài toán.

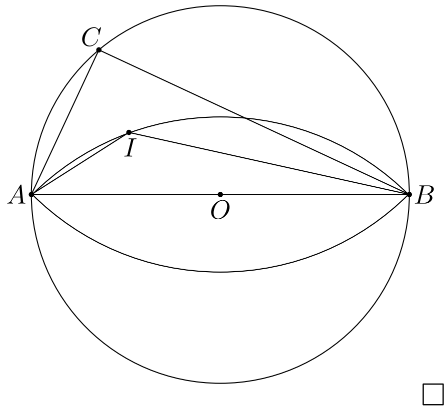
Khi M thuộc cung AC không thỏa mãn bài toán.

Do đó M thuộc cung chứa góc 120° dựng trên cạnh BC. □

6.2 BÀI TẬP

Bài 53. Đường tròn (O) có đường kính AB cố định. C là điểm di động trên đường tròn đó (C khác A và B). Tìm quỹ tích giao điểm ba đường phân giác của tam giác ABC.

Lời giải.



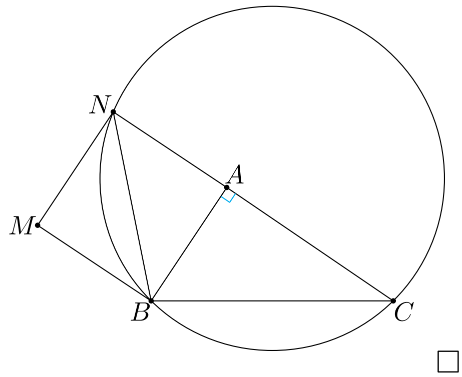
Ta có $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), mà AI và BI là các tia phân giác nên $\widehat{IAB} = \dfrac{1}{2}\widehat{CAB}$ và $\widehat{IBA} = \dfrac{1}{2}\widehat{CBA}$ suy ra $\widehat{IAB} + \widehat{IBA} = \dfrac{1}{2}\left(\widehat{CAB} + \widehat{CBA}\right) = \dfrac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ \Rightarrow \widehat{AIB} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

Do AB không đổi nên I thuộc hai cung chứa góc 135° dựng trên AB.

□

Bài 54. Tam giác vuông ABC có cạnh huyền BC cố định, đỉnh A thay đổi. Ta dựng bên ngoài tam giác đó hình vuông $ABMN$. Tìm quỹ tích điểm N.

Lời giải.



Vì $ABMN$ là hình vuông nên $\widehat{BNA} = 45^\circ$ mà $\widehat{BAN} = 90^\circ$ suy ra $\widehat{BAN} + \widehat{BAC} = 180^\circ \Rightarrow$ ba điểm N; A; C thẳng hàng nên $\widehat{BNC} = 45^\circ$ suy ra điểm N nhìn cạnh BC cố định dưới một góc 45° nên N thuộc hai cung chứa góc 45° dựng trên BC.

□

Bài 55. Cho nửa đường tròn đường kính AB và dây MN có độ dài bằng bán kính (M thuộc cung AN). Các tia AM và BN cắt nhau ở I, các dây AN và BM cắt nhau ở K.

a) Tính $\widehat{MIN}$ và $\widehat{AKB}$.

b) Tìm quỹ tích điểm I và quỹ tích điểm K khi dây MN thay đổi vị trí.

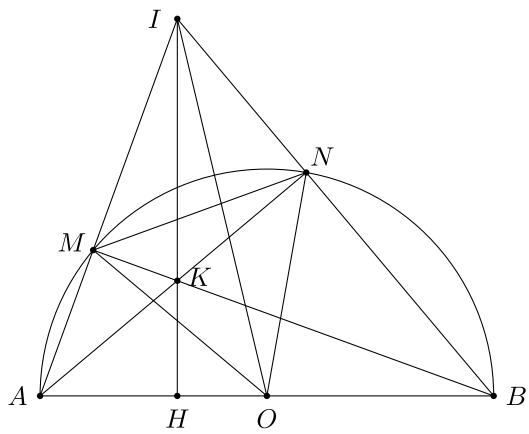
c) Cho biết I là điểm đặc biệt gì của $\triangle AKB$, K là điểm đặc biệt gì của $\triangle ABI$.

d) AB và IK cắt nhau tại H. Chứng tỏ $HA \cdot HB = HI \cdot HK$.

e) Với vị trí nào của dây MN thì tam giác IAB có diện tích lớn nhất? Tính giá trị lớn nhất ấy biết $AB = 2R$.

Lời giải.

a)



Dễ thấy $\triangle MON$ đều suy ra số đo của cung nhỏ MN là 60°.

Khi đó

$$\begin{aligned}\widehat{MIN} &= \widehat{AIB}\\ &= \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AB} - \text{sđ}\overset{\frown}{MN}\right)\\ &= \frac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{AKB} &= \frac{\text{sđ}\overset{\frown}{AB} + \text{sđ}\overset{\frown}{MN}}{2}\\ &= \frac{180^\circ + 60^\circ}{2} = 120^\circ.\end{aligned}$$

b) Ta có $\widehat{AIB} = 60^\circ \Rightarrow I$ thuộc cung chứa góc nhìn cạnh AB dưới góc 60°.

Tương tự $\widehat{AKB} = 120^\circ \Rightarrow K$ thuộc cung chứa góc nhìn cạnh AB dưới góc 120°.

c) Ta có $\begin{cases} AN \perp IB \\ BM \perp AI \end{cases} \Rightarrow K$ là trực tâm $\triangle IAB$.

Suy ra $IK \perp AB \Rightarrow I$ là trực tâm $\triangle AKB$.

d) Xét $\triangle HAK$ và $\triangle HIB$ có $\begin{cases} \widehat{KAH} = \widehat{HIB} \\ \widehat{AHK} = \widehat{IHB} = 90^\circ \end{cases}$.

Suy ra $\triangle HAK \backsim \triangle HIB$(g.g), suy ra $\dfrac{HA}{HK} = \dfrac{HI}{HB} \Rightarrow HA \cdot HB = HI \cdot HK$.

e) Ta có $IH \le IO$ (quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc). Dấu bằng xảy ra khi $H \equiv O$.

Ta có $S_{\triangle IAB} = \dfrac{1}{2} IH \cdot AB$.

Ta có AB là đường kính $\Rightarrow S_{IAB}$ lớn nhất $\Leftrightarrow IH$ lớn nhất $\Leftrightarrow IH = IO \Leftrightarrow H \equiv O$.

Khi đó OI vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao nên $\triangle IAB$ cân tại I.

Mặt khác, vì O là trung điểm của $AB \Rightarrow OM$; ON lần lượt là đường trung bình của $\triangle IAB$.

Suy ra $\begin{cases} ON \parallel IM \\ OM \parallel IN \end{cases} \Rightarrow IMON$ là hình bình hành.

Lại có $OI \perp MN \Rightarrow IMON$ là hình thoi nên $MI = IN = OM = R \Rightarrow IA = 2IM = 2R$.

Do đó $MN \parallel AB$ và $MN = \dfrac{1}{2}AB = R$. Vậy MN song song với AB và $MN = R$ thì diện tích $\triangle IAB$ lớn nhất.

Xét $\triangle AOI$ vuông tại O, ta có $OI = \sqrt{IA^2 - OA^2} = R\sqrt{3}$.

Suy ra $S_{IAB} = \dfrac{1}{2}OI \cdot AB = \dfrac{1}{2} \cdot R\sqrt{3} \cdot 2R = R^2\sqrt{3}$.

□

Bài 56. Tam giác ABC vuông tại A, nội tiếp đường tròn $(O; R)$ có cạnh $AB = R$, DE là đường kính vuông góc với BC (A và D cùng thuộc một mặt phẳng bờ BC). AD, AC, AB lần lượt cắt OB, BE và EC ở M, N và P.

a) Tính các góc $\widehat{AMO}$, $\widehat{CNE}$ và $\widehat{BPC}$.

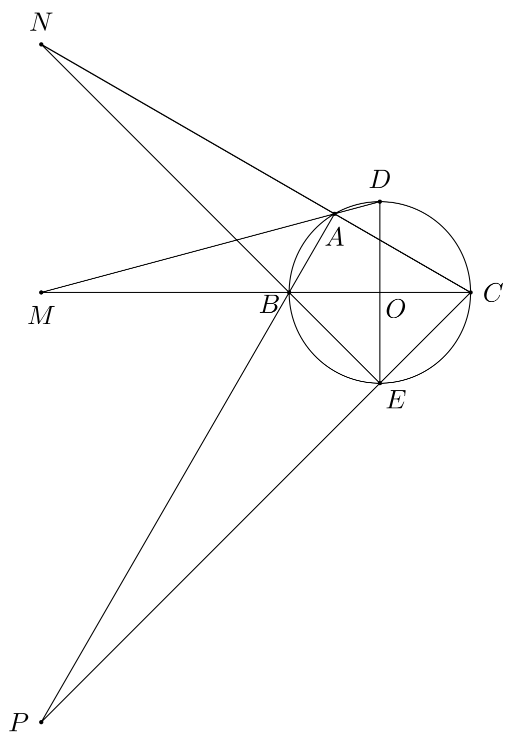
b) Chứng tỏ M, N cùng thuộc một cung chứa góc có hai đầu mút là A và B.

c) Xác định tâm đường tròn đi qua A, B, M và N.

Lời giải.

a)

Xét tam giác ABC có $\sin\widehat{ACB} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1}{2}$.
Suy ra $\widehat{ACB} = 30°$.
Suy ra sđ$\overset{\frown}{AB} = 60°$.
Suy ra $\widehat{AMC} = \dfrac{\text{sđ}\overset{\frown}{DC} - \text{sđ}\overset{\frown}{AB}}{2} = \dfrac{90° - 60°}{2} = 15°$.
Tương tự ta có $\widehat{CNE} = 15°$.
Ta có sđ$\overset{\frown}{AC}$ = sđ$\overset{\frown}{BC}$ − sđ$\overset{\frown}{AB} = 180° - 60° = 120°$.
Suy ra $\widehat{APC} = \dfrac{\text{sđ}\overset{\frown}{AC} - \text{sđ}\overset{\frown}{BE}}{2} = \dfrac{120° - 90°}{2} = 15°$.



b) Vì $\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = 15°$ nên tứ giác $ABMN$ nội tiếp đường tròn.
Suy ra M, N cùng thuộc một cung chứa góc có dây là AB.

c) Vì $\triangle ABN$ vuông tại A nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABN là trung điểm cạnh huyền hay trung điểm cạnh NB. Do đó tâm đường tròn đi qua bốn điểm A, B, M, N là trung điểm cạnh NB.

□

Bài 57. Cho điểm M di chuyển trên cung $\overset{\frown}{AB}$ của một đường tròn (O). Trên tia đối của tia MB ta đặt đoạn $MC = MA$.

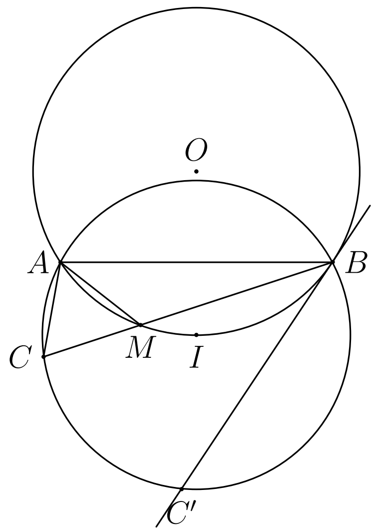
a) Tìm quỹ tích điểm C.

b) Xác định tâm đường tròn đi qua A, B và C.

c) Với giá trị nào của điểm M thì tam giác MAB có chu vi lớn nhất?

Lời giải.

a) Đặt $\alpha = \widehat{AMB}$ không đổi do $\overset{\frown}{AB}$ cố định.



- **Phân tích:** Ta có $MA = MC$ nên $\triangle MAC$ cân tại M, suy ra $\widehat{MAC} = \widehat{MCA}$.
  Mà $\widehat{MAC} + \widehat{MCA} = \widehat{AMB} = \alpha$ hay $\widehat{MCA} = \dfrac{1}{2}\alpha$.
  Do đó, C thuộc cung chứa góc $\dfrac{1}{2}\alpha$ dựng trên cạnh AB.

- **Giới hạn:** Khi $M \equiv A$ thì $C \equiv A$; khi $M \equiv B$ thì $C \equiv C'$ với C' thuộc tia Bx là tiếp tuyến của (O) tại B thỏa $BC' = BA$.

- **Kết luận:** Quỹ tích của điểm C là cung chưa góc $\dfrac{1}{2}\alpha$ dựng trên cạnh AB, tức là cung AC'.

b) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.
Khi đó, $IA = IB$ và $\widehat{AIB} = 2\widehat{ACB} = \widehat{AMB}$.
Suy ra , I là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{AB}$.

c) Ta có chu vi tam giác MAB bằng $AB + MA + MB = AB + MC + MB = AB + BC$.
Mà AB không đổi nên chu vi lớn nhất khi và chỉ khi BC lớn nhất
Điều này xảy ra khi BC là đường kính của (I), khi đó $M \equiv I$.

□

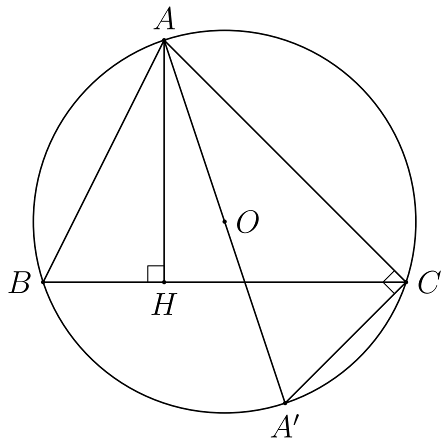
Bài 58. Tam giác ABC nội tiếp đường tròn bán kính R, có đường cao $AH = h$. Chứng minh rằng $AB \cdot AC = 2Rh$.

Lời giải.

Vẽ đường kính AA', thì $AH = h$ và $AA' = 2R$.

Xét $\triangle HAB$ và $\triangle CAA'$ có:

- $\widehat{H} = \widehat{C} = 90°$
- $\widehat{ABH} = \widehat{AA'C}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AC}$)



Do đó, $\triangle HAB \sim \triangle CAA'$ (g-g).

Suy ra

$$\frac{AB}{AH} = \frac{AA'}{AC} \Leftrightarrow AB \cdot AC = AA' \cdot AH = 2Rh.$$

□

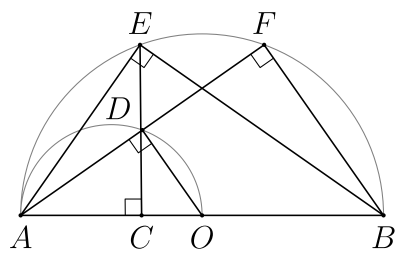
Bài 59. Cho nửa đường tròn đường kính AB, tâm O. Ta dựng nửa đường tròn đường kính AO (hai nửa đường tròn cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AB). Từ một điểm C thuộc đoạn thẳng OA ta kẻ đường vuông góc với OA cắt nửa đường tròn nhỏ ở D và nửa đường tròn lớn ở E.

a) Chứng minh rằng tỉ số $\dfrac{AD^2}{AE^2}$ không phụ thuộc vị trí điểm C và tính tỉ số đó.

b) Chứng tỏ rằng tam giác vuông cân có cạnh huyền AE thì có cạnh bên bằng AD.

Lời giải.

a) Gọi F là giao điểm của tia AD và (O).
Ta có: $\widehat{ADC} = \widehat{AEB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn đường kính).
Suy ra, $OD \parallel BF$, mà O là trung điểm của AB nên D là trung điểm của AF. Xét $\triangle CAD$ và $\triangle FAB$:



- $\widehat{ACD} = \widehat{AFB} = 90°$
- $\widehat{EAC} = \widehat{FAB}$

Do đó, $\triangle CAD \sim \triangle FAB$ (g-g). Suy ra, $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AB}{AF}$. (1)

Tương tự, $\triangle CAE \sim \triangle EAB$. nên $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AB}{AE}$. (2)

Lấy (2) chia (1), ta được: $\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{AF}{AE}$ hay $\dfrac{AE^2}{AD^2} = \dfrac{AF}{AD} = 2$

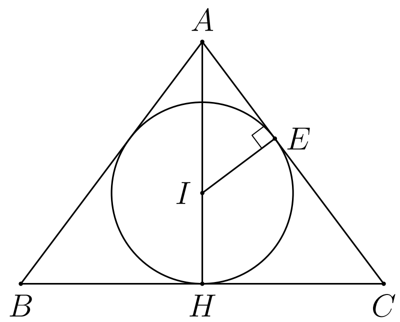
Chứng tỏ tỉ số $\dfrac{AE^2}{AD^2}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm C và $\dfrac{AE^2}{AD^2} = 2$.

Theo câu a), ta có: $AE = \sqrt{2}AD$. Do đó,nếu AE là cạnh huyền của một tam giác vuông cân thì tam giác đó sẽ có cạnh bên bằng AD. □

Bài 60. Trong tam giác cân ABC ta có $AB = AC = 5$cm, $BC = 6$cm. Tính bán kính đường tròn nội tiếp.

Lời giải.

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, H là trung điểm của BC và E là tiếp điểm của (I) với AC, thì IE là bán kính của (I).



- Ta có: $CH = CE = \dfrac{BC}{2} = 3\text{cm}$. Mà $AC = 5\text{cm}$ nên $AE = 2\text{cm}$.
- Tam giác HAC vuông tại H có $AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = 4\text{cm}$
- Tam giác EIA vuông tại E có

$$IE^2 + AE^2 = AI^2 \Leftrightarrow IE^2 + 2^2 = (4 - IE)^2 \Leftrightarrow IE = \frac{3}{2}\text{cm}$$

Vậy bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ bằng $\dfrac{3}{2}$cm.

□

Bài 61. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp một tam giác cân biết rằng cạnh đáy và đường cao tương ứng đều có độ dài bằng 8cm.

Lời giải.

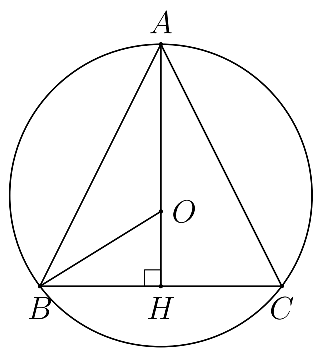
Giả sử ta có tam giác ABC cân tại A, có $BC = AH = 8\text{cm}$, với H là trung điểm của BC; nội tiếp đường tròn (O), thì OB là bán kính của (O).

Tam giác HOB vuông tại H có $OB^2 = OH^2 + HB^2$

$\Leftrightarrow OB^2 = (AH - OB)^2 + \left(\dfrac{BC}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow OB^2 = (8 - OB)^2 + 4^2 \Leftrightarrow OB = 5\text{cm}$

Vậy bán kính cần tìm là 5cm.



□

7 TỨ GIÁC NỘI TIẾP

7.1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

7.1.1 Khái niệm tứ giác nội tiếp

Tứ giác có 4 đỉnh nằm trên một đường tròn gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (gọi tắt là tứ giác nội tiếp).

7.1.2 Định lí

Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối bằng 180°.

7.1.3 Định lí đảo

Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối bằng 180° thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.
Chú ý:

a) Nếu một tứ giác nội tiếp thì nó có góc trong bằng góc đối ngoài.

b) Hình thang nội tiếp được đường tròn là hình thang cân và ngược lại.

c) Hình thang cân, hình chữ nhật, hình vuông nội tiếp được đường tròn.

7.1.4 Dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp

a) Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180° là tứ giác nội tiếp.

b) Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc đối trong là tứ giác nội tiếp.

c) Tứ giác có 4 đỉnh cách đều 1 điểm (mà ta có thể xác định được) là tứ giác nội tiếp.

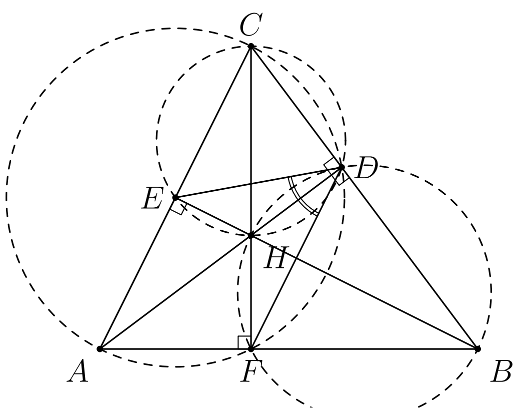
d) Tứ giác có hai đỉnh kề cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc α là tứ giác nội tiếp.

Ví dụ 22. Cho tam giác ABC nhọn có 3 đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng các tứ giác $BFHD$, $AFDC$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng DH là phân giác của $\widehat{FDE}$, từ đó suy ra H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác FDE.

Lời giải.



a) Chứng minh rằng các tứ giác $BFHD$, $AFDC$ nội tiếp.

- Chứng minh $BFHD$ nội tiếp.
  Ta có $\widehat{HFB} = 90^\circ$ và $\widehat{HDB} = 90^\circ$ (giả thuyết).
  Suy ra $\widehat{HFB} + \widehat{HDB} = 180^\circ$.
  Suy ra tứ giác $BFHD$ nội tiếp trong một đường tròn.

- Chứng minh $AFDC$ nội tiếp.
  Ta có $\widehat{ADC} = 90^\circ$ và $\widehat{AFC} = 90^\circ$ (giả thuyết).
  Suy ra tứ giác $AFDC$ có hai đỉnh F và D cùng nhìn AC dưới một góc vuông nên tứ giác $AFDC$ nội tiếp trong một đường tròn.

b) Chứng minh rằng DH là phân giác của $\widehat{FDE}$, từ đó suy ra H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác FDE.

- Xét tứ giác $HCDE$ có $\widehat{CEH} + \widehat{CDH} = 180^\circ$
  Suy ra tứ giác $ACDE$ nội tiếp được trong một đường tròn.
  Suy ra $\widehat{ECH} = \widehat{EDH}$ (cùng chắn cung EH của đường tròn ngoại tiếp $HCDE$). (1)

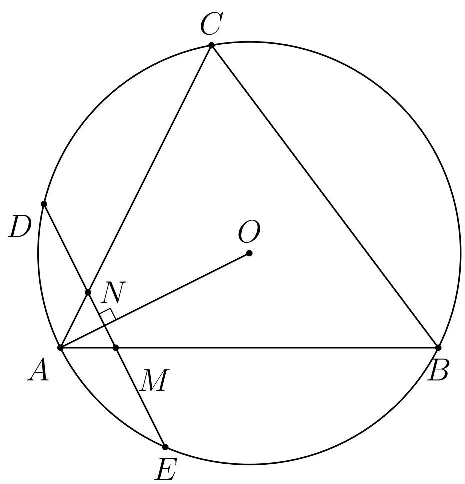
- Lại có $\widehat{ECH} = \widehat{FDH}$ (cùng chắn cung AF của đường tròn ngoại tiếp $ACDF$). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{EDH} = \widehat{HDF}$ suy ra DH là phân giác của $\widehat{FDE}$.
Chứng minh tương tự ta được FH là phân giác của $\widehat{DFE}$
Suy ra H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác EFD.

□

Ví dụ 23. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O), vẽ dây $DE \perp OA$, cắt các cạnh AB, AC lần lượt ở M và N. Chứng minh tứ giác $BMNC$ nội tiếp.

Lời giải.



Ta có dây cung ED vuông góc với bán kính OA nên sđ$\overparen{AE} =$ sđ$\overparen{AD}$.
Suy ra sđ$\widehat{DNC} = \frac{1}{2}$sđ$\overparen{DC} + \frac{1}{2}$sđ$\overparen{AE} = \frac{1}{2}$sđ$\overparen{DC} + \frac{1}{2}$sđ$\overparen{AD} = \frac{1}{2}$sđ$\overparen{DC}$.

Lại có sđ$\widehat{ABC} = \dfrac{1}{2}$sđ$\widehat{DC}$.

Suy ra $\widehat{DNC} = \widehat{ABC}$.

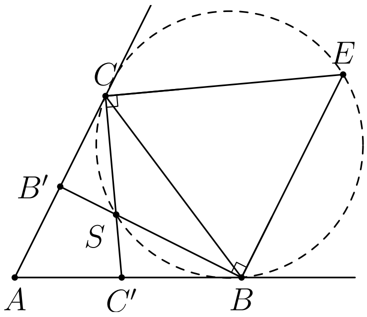
Mặt khác $\widehat{DNC} + \widehat{CNE} = 180^\circ$ suy ra $\widehat{ABC} + \widehat{CNE} = 180^\circ$.

Vậy tứ giác $CNMB$ nội tiếp trong một đường tròn. □

7.2 BÀI TẬP

Bài 62. Cho $\triangle ABC$. Các đường phân giác trong của góc B và góc C cắt nhau tại S và các đường phân giác ngoài của chúng cắt nhau tại E. Chứng minh tứ giác $BSCE$ nội tiếp.

Lời giải.



Ta có $\widehat{SCE} = 90^\circ$(vì $\triangle ABC$ có CS và CE lần lượt là phân giác trong và ngoài của $\widehat{ACB}$).

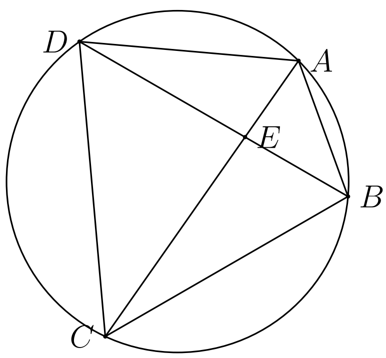
Và $\widehat{SBE} = 90^\circ$(vì $\triangle ABC$ có BS và BE lần lượt là phân giác trong và ngoài của $\widehat{ABC}$).

Suy ra $\widehat{SCE} + \widehat{SBE} = 180^\circ$.

Do đó tứ giác $BCSE$ nội tiếp trong một đường tròn. □

Bài 63. Cho hai đoạn thẳng AC và BD cắt nhau tại E, biết $AE \cdot EC = BE \cdot ED$. Chứng minh rằng 4 điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.



Ta có $AE \cdot EC = BE \cdot ED \Leftrightarrow \dfrac{AE}{ED} = \dfrac{BE}{EC}$.

Xét hai tam giác EAB và EDC có:

- $\dfrac{AE}{ED} = \dfrac{BE}{EC}$.
- $\widehat{AEB} = \widehat{DEC}$ (đối đỉnh).

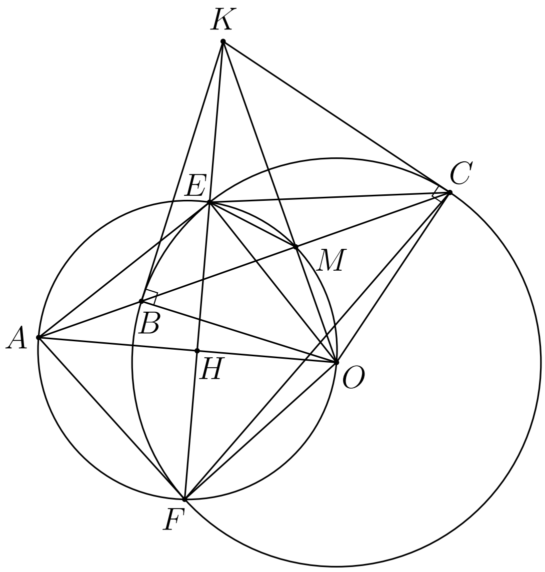
Suy ra $\triangle EAB \backsim \triangle EDC$, do đó $\widehat{EAB} = \widehat{EDC}$ hay $\widehat{CAB} = \widehat{BDC}$.
Suy ra hai điểm A, D cùng nhìn BC dưới một góc bằng nhau nên bốn điểm A, B, C, D nằm trên một đường tròn. □

Bài 64. Qua điểm A ở ngoài đường tròn (O), kẻ cát tuyến ABC với đường tròn. Các tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau ở K. Qua K kẻ đường thẳng vuông góc với AO cắt AO tại H và cắt (O) tại E và F (E nằm giữa K và F). Gọi M là giao điểm của OK và BC. Chứng minh rằng:

a) $EMOF$ nội tiếp.

b) AE, AF là các tiếp tuyến của (O).

Lời giải.



a) $EMOF$ nội tiếp.

Xét hai tam giác KEC và KCF có

- $\widehat{CKF}$ chung.
- $\widehat{KCE} = \widehat{CFK}$ (cùng chắn cung EC của đường tròn (O)).

Suy ra $\triangle KEC \backsim \triangle KCF$
$\Rightarrow \dfrac{KE}{KC} = \dfrac{KC}{KF} \Leftrightarrow KE \cdot KF = KC^2.$ (1)
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác $\triangle KCO$ vuông tại O có CM là đường cao, ta có

$$KM \cdot KO = KC^2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $KE \cdot KF = KM \cdot KO \Leftrightarrow \dfrac{KE}{KO} = \dfrac{KM}{KF}$.
Xét hai tam giác KEM và KOC có

- $\widehat{EKM}$ chung.

- $\dfrac{KE}{KO} = \dfrac{KM}{KF}$.

Nên $\triangle KEM \backsim \triangle KOF$, suy ra $\widehat{EMK} = \widehat{EFO}$.

Mà $\widehat{EMK} + \widehat{EMO} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{EFO} + \widehat{EMO} = 180^\circ$.

Suy ra tứ giác EMOF nội tiếp trong một đường tròn.

b) AE, AF là các tiếp tuyến của (O).

Xét hai tam giác AOM và OKH có

- $\widehat{O}$ chung.
- $\widehat{AMO} = \widehat{AHO} = 90^\circ$.

Nên $\triangle AOM \backsim \triangle KOM \Rightarrow \dfrac{AO}{KO} = \dfrac{OM}{OH} \Rightarrow AO \cdot OH = KO \cdot OM$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OBK ta có $KO \cdot OM = OB^2 = OE^2$.

Suy ra $AO \cdot OH = OE^2 \Leftrightarrow \dfrac{OA}{OE} = \dfrac{OE}{OH}$.

Xét hai tam giác AOE và EOH có $\widehat{O}$ chung và $\dfrac{OA}{OE} = \dfrac{OE}{OH}$, suy ra $\triangle AOE \backsim \triangle EOH$.

Suy ra $\widehat{AEO} = \widehat{EHO} = 90^\circ \Rightarrow AE \perp OE \Rightarrow AE$ là tiếp tuyến của đường tròn (O).

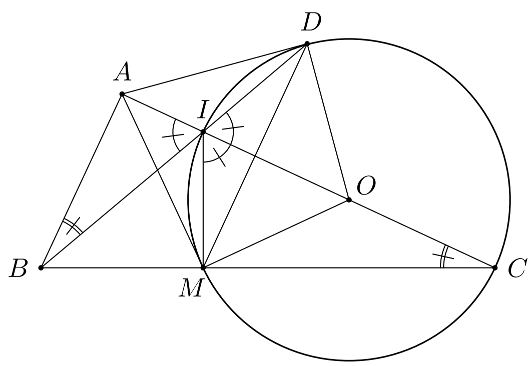
Chứng minh tương tự, ta có AF cũng là tiếp tuyến của đường tròn (O).

□

Bài 65. Cho $\triangle ABC$ vuông tại $A(AB < AC)$. Lấy điểm I thuộc cạnh AC sao cho: $\widehat{ABI} = \widehat{C}$. Đường tròn (O), đường kính IC cắt BI ở D và cắt BC ở M. Chứng minh rằng

a) CI là tia phân giác $\widehat{DCM}$. b) DA là tiếp tuyến của (O).

Lời giải.



a) CI là tia phân giác $\widehat{DCM}$.

Ta có $\widehat{AIM} = \widehat{DIC}$ (đối đỉnh) và $\widehat{BAI} = \widehat{CDI} = 90^\circ$ suy ra $\triangle ABI \backsim \triangle DCI$.

Suy ra $\widehat{ABI} = \widehat{DCI}$.

Mà $\widehat{ABI} = \widehat{ICM}$ (gt).

Suy ra $\widehat{DCI} = \widehat{ICM}$

Do đó IC là tia phân giác $\widehat{DCM}$.

b) DA là tiếp tuyến của (O).

Tứ giác $ABMI$ có $\widehat{BAI} = \widehat{BMI} = 90^\circ$ nên nội tiếp trong đường tròn đường kính BI.

Suy ra $\widehat{ABI} = \widehat{AMI}$. (1)

Mặt khác ta có $\widehat{AIB} = \widehat{MIO} = \widehat{IMO}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AMI} + \widehat{IMO} = \widehat{ABI} + \widehat{AIB} = 90^\circ$ hay $\widehat{AMO} = 90^\circ$.

Vì IC là tia phân giác $\widehat{DCM}$ nên CI cũng là đường trung trực của MD.

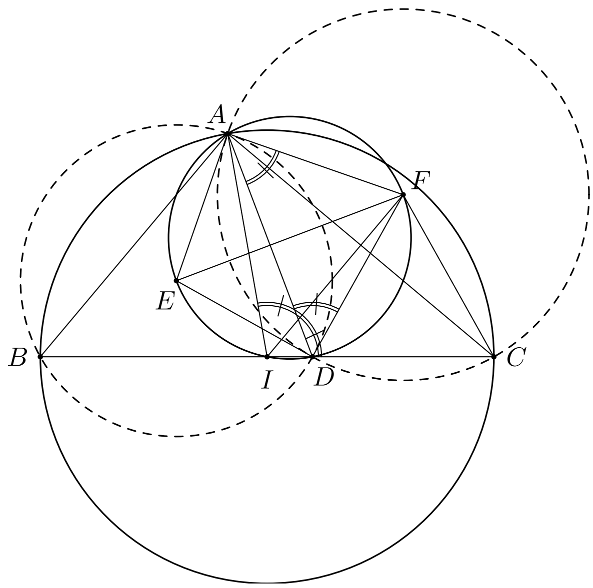
Suy ra $\widehat{ADO} = \widehat{AMO} = 90^\circ$.

Suy ra $AD \perp DO$ hay AD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

□

Bài 66. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, I là trung điểm BC, D là điểm nằm giữa I và C. Gọi E, F lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABD$, $\triangle ACD$ .Chứng minh rằng: E và F nằm trên đường tròn ngoại tiếp $\triangle AID$.

Lời giải.



Hai đường tròn (I) và (F) cắt nhau tại AC nên IF là trung trực của AC.

Ta có $\widehat{ADI} = \widehat{DAC} + \widehat{DCA}$ (tính chất góc ngoài của tam giác) Suy ra 4 điểm A, D, I, F cùng

$$= \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{CD} + \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{DA} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AC}$$

$$= \frac{1}{2}\widehat{AFC}$$

$$= \widehat{AFI} \text{(vì } IF \text{ là đường trung trực của } AC).$$

thuộc một đường tròn.

Chứng minh tương tự ta được 4 điểm A, D, I, E cũng thuộc một đường tròn.

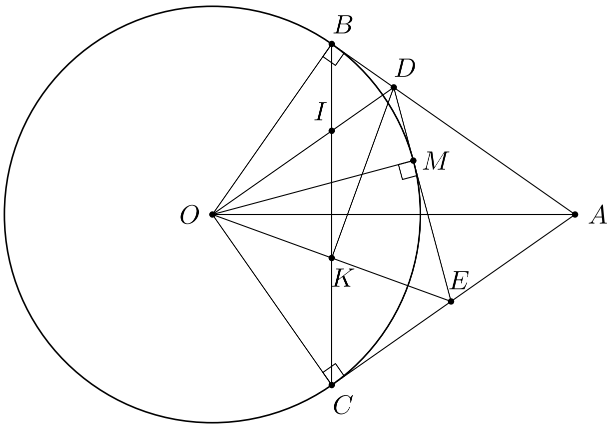
Suy ra 5 điểm A, D, I, F, E cùng thuộc một đường tròn Hay F, E nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AID. □

Bài 67. Cho đường tròn (O) và hai điểm B, C thuộc đường tròn (O). Các tiếp tuyến với đường tròn tại B và C cắt nhau ở A. Gọi M là một điểm thuộc cung nhỏ BC. Tiếp tuyến với đường tròn tại M cắt AB, AC theo thứ tự ở D và E. Gọi giao điểm của OD, OE với BC theo thứ tự là I,K. Chứng minh

a) Tứ giác $OBDK$, $DIKE$ nội tiếp.

b) OM; DK; EI đồng qui.

Lời giải.



a) Tứ giác $OBDK$, $DIKE$ nội tiếp.

- Ta có $\widehat{DOK} = \widehat{DOM} + \widehat{MOK} = \dfrac{1}{2}\widehat{BOM} + \dfrac{1}{2}\widehat{MOC} = \dfrac{1}{2}\widehat{BOC} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BC}$.
  Mà $\widehat{DBK} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$.
  Suy ra $\widehat{DOK} = \widehat{DBK}$ nên tứ giác $OBDK$ nội tiếp trong một đường tròn.
- Xét hai tam giác BID và ODE có
  $\widehat{DBI}$=$\widehat{DOK}$ (chứng minh trên)
  $\widehat{BDI} = \widehat{ODE}$ (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).
  Suy ra $\triangle BID \backsim \triangle OED$ do đó $\widehat{DEO} = \widehat{BID}$.
  Suy ra tứ giác $DIKE$ có góc ngoài bằng góc đối trong nên nội tiếp trong một đường tròn.

b) OM; DK; EI đồng qui.

Tứ giác $OBDK$ nội tiếp nên ta có $\widehat{OBD} + \widehat{OKD} = 180^\circ$ mà $\widehat{OBD} = 90^\circ$ nên $\widehat{OKD} = 90^\circ$.

Suy ra $DK \perp OE$ hay DK là đường cao của $\triangle ODE$. (1)

Tứ giác $DIKE$ nội tiếp suy ra $\widehat{DIE} = \widehat{DKE} = 90°$(do $DK \perp OE$).

Suy ra $EI \perp OD$ hay EI là đường cao của $\triangle ODE$. (2)

Lại có $OM \perp DE$ nên OM cũng là đường cao của $\triangle ODE$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra OM, DK, OI đồng quy.

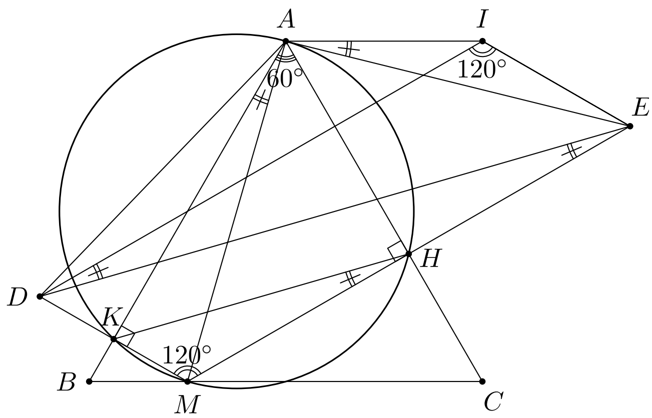
□

Bài 68. Cho tam giác đều ABC, M thuộc cạnh BC. Gọi D là điểm đối xứng của M qua AB, E là điểm đối xứng của M qua AC. Vẽ hình bình hành $DMEI$. Chứng minh rằng:

a) Bốn điểm D, A, I, E cùng thuộc một đường tròn.

b) $AI \parallel BC$.

Lời giải.



a) Bốn điểm D, A, I, E cùng thuộc một đường tròn.

Gọi K, H lần lượt là trung điểm Tứ giác $AKMH$ có $\widehat{AKM} = \widehat{AHM} = 90°$(giả thuyết), nên tứ giác $AKMH$ nội tiếp trong đường tròn.

Suy ra $\widehat{KMH} = 180° - \widehat{KAH} = 180° - 60° = 120°$.

Vì tứ giác $DIEM$ là hình bình hành nên $\widehat{EID} = \widehat{DME} = 120°$.

Lại có $\widehat{DAE} = \widehat{MAD} + \widehat{MAE} = 2\widehat{MAK} + 2\widehat{MAH} = 2\widehat{KAH} = 120°$.

Suy ra $\widehat{EID} = \widehat{DAE}$, hay I, A cùng nhìn DE dưới một góc bằng nhau, nên D, A, I, E cùng thuộc một đường tròn.

b) $AI \parallel BC$.

Ta có $\widehat{IAE} = \widehat{IDM}$(cùng chắn cung ID của đường tròn ngoại tiếp AIED)

$= \widehat{DME}$(so le trong)

$= \widehat{KHM}$(đồng vị vì KH là đường trung bình của $\triangle AME$ nên $KH \parallel DE$)

$= \widehat{KAM}$(cùng chắn cung KM của đương tròn ngoại tiếp $AKMH$).

Suy ra $\widehat{IAH} = \widehat{HAE} + \widehat{EAI} = \widehat{HAM} + \widehat{KAM} = \widehat{KAH} = 60^\circ = \widehat{ACB}$.

Suy ra $AI \parallel BC$.

□

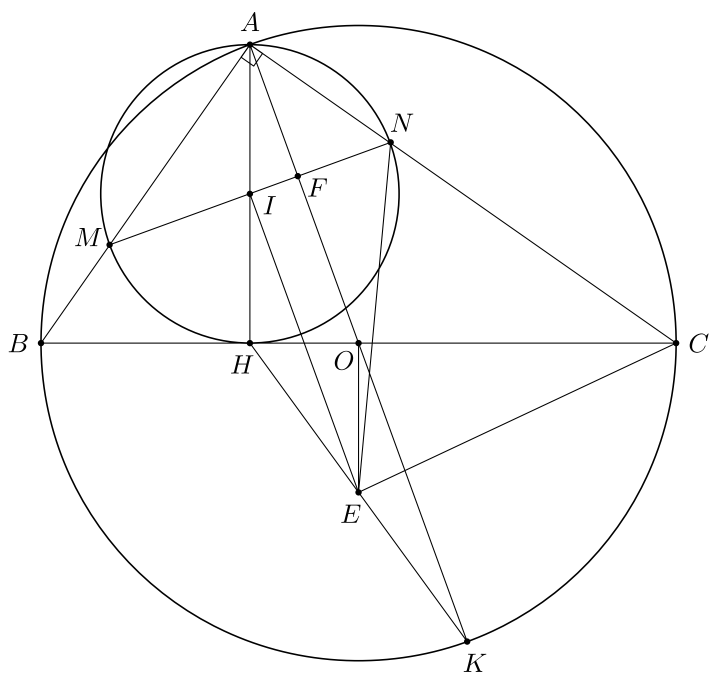
Bài 69. Cho đường tròn (O) đường kính BC, A là một điểm thuộc đường tròn. H là hình chiếu của A trên BC. Vẽ đường tròn (I), đường kính AH cắt AB và AC theo thứ tự ở M và N.

a) Chứng minh rằng $OA \perp MN$

b) Vẽ đường kính AOK của (O). Gọi E là trung điểm của HK. Chứng minh rằng: E là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BMNC$.

c) Cho BC cố định. Xác định vị trí điểm A để bán kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BMNC$ lớn nhất.

Lời giải.



a) Chứng minh rằng: $OA \perp MN$.

Ta có $\widehat{AIF} = \widehat{MIH}$ (đối đỉnh) $= 2\widehat{MAH}$ (cùng chắn cung MH của đường tròn (I))

$= 2\widehat{ACB}$ (cùng phụ với $\widehat{ABH}$) $= \widehat{AOH}$ (cùng chắn cung AB của đường tròn(O))

Xét hai tam giác AIF và AOH có $\widehat{A}$ chung và $\widehat{AIF} = \widehat{AOH}$ (cmt), suy ra $\triangle AIF \backsim \triangle AOH$.

Suy ra $\widehat{AFI} = \widehat{AOH} = 90^\circ$ hay $MN \perp OA$.

b) Vẽ đường kính AOK của (O). Gọi E là trung điểm của HK. Chứng minh rằng: E là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BMNC$.

Ta có $OE \parallel AH$ (Vì OE là đường trung bình của $\triangle AHK$).

Mà $AH \perp BC$ suy ra $OE \perp BC$ tại trung điểm O của BC.Nên OE là đường trung trực của BC, suy ra $EB = EC$. (1)

Lại có EI là đường trung bình của tam giác AHK, suy ra $EI \parallel AK$. Mà $AK \perp MN$ (chứng minh trên), suy ra EI vuông góc với MN tại trung điểm I của MN. Nên EI là đường trung trực của MN, suy ra $EM = EN$. (2)

Ta có $OE = \dfrac{1}{2}AH = IN$(bán kính của đường tròn (I)).

Và $IE = \dfrac{1}{2}IK = ON$ (bán kính của đường tròn (O)).

Xét hai tam giác vuông INE và OEC có $IN = OE$ và $IN = OC$, suy ra $\triangle INE = \triangle OEC$.

Suy ra $EN = EC$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $EN = EM = EC = EB$ hay E là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BMNC$.

c) Cho BC cố định. Xác định vị trí điểm A để bán kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BMNC$ lớn nhất.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp $BMNC$ là $EC = \sqrt{OE^2 + OC^2} = \sqrt{\dfrac{AH^2}{4} + \dfrac{BC^2}{4}}$.

Mà BC không đổi, nên EC lớn nhất $\Leftrightarrow AH$ lớn nhất $\Leftrightarrow H \equiv O \Leftrightarrow A$ là trung điểm cung BC.

□

Bài 70. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH. Gọi (P), (Q) theo thứ tự là đường tròn nội tiếp hai tam giác AHB, AHC. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài (khác BC) của (P) và (Q) cắt AB, AH, AC theo thứ tự ở M, K, N. Chứng minh rằng:

a) $\triangle HPQ \sim \triangle ABC$.

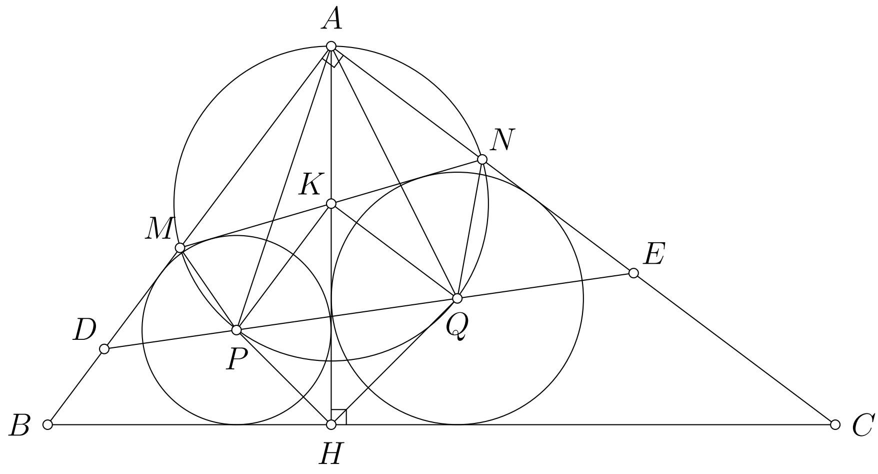
b) $KP \parallel AB$; $KQ \parallel AC$.

c) $BMNC$ nội tiếp.

d) 5 điểm A, M, P, Q, N cùng thuộc một đường tròn.

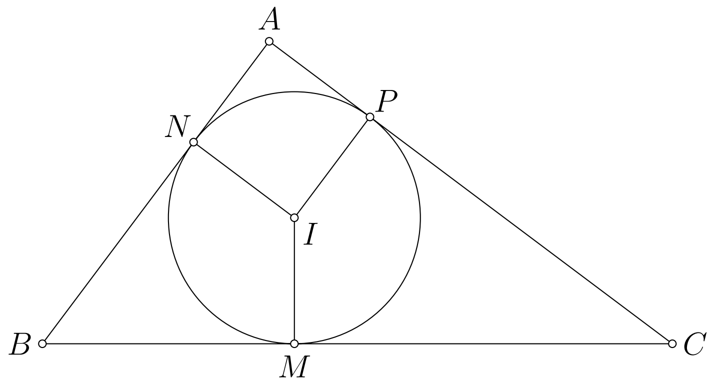
e) $\triangle AED$ vuông cân (D, E lần lượt là giao điểm của PQ với AB và AC).

Lời giải.



Ta chứng minh bộ đề sau: Cho tam giác vuông $\triangle ABC$ với I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Khi đó

$$IA = \sqrt{2}r = \frac{\sqrt{2}}{2}(AB + AC - BC).$$



Gọi M, N, P là các tiếp điểm như hình vẽ trên, ta nhận thấy rằng $APIN$ là hình vuông do đó

$$IA = \sqrt{2}IP = \sqrt{2}r.$$

Xét

$$AB + AC - BC = AN + NB + AP + PC - (MC + MB)$$

$$\begin{aligned}&= (AN + AP) + (PC - MC) + (BN - BM)\\&= 2AP\\&= 2r.\end{aligned}$$

Vậy $IA = \sqrt{2}r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(AB + AC - BC)$.

a) Nhận thấy rằng $\widehat{PHQ} = 90^\circ$ do PH và HQ là hai tia phân giác của cặp góc kề bù. Ta có $\dfrac{PH}{QH} = \dfrac{HA + HB - AB}{HA + HC - AC}$.
Ta sẽ chứng minh

$$\frac{HA + HB - AB}{HA + HC - AC} = \frac{AB}{AC}$$

Thật vậy, đặt $\alpha = \widehat{BAH}$ ta có

$$\begin{aligned}\frac{HA + HB - AB}{HA + HC - AC} = \frac{AB}{AC} &\Leftrightarrow (HA + HB - AB)AC = (HA + HC - AC)AB\\&\Leftrightarrow (HA + HB)AC = (HA + HC)AB\\&\Leftrightarrow (\cos\alpha + \sin\alpha)\, AB \cdot AC = [\cos(90^\circ - \alpha) + \sin(90^\circ - \alpha)]\, AC \cdot AB\\&\Leftrightarrow (\cos\alpha + \sin\alpha)\, AB \cdot AC = (\sin\alpha + \cos\alpha)\, AC \cdot AD.\end{aligned}$$

Đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng vậy $\dfrac{PH}{QH} = \dfrac{AB}{AC}$ suy ra $\triangle HPQ \sim \triangle ABC$.

b) Nhận thấy rằng $\widehat{PKQ} = 90^\circ$ do KP, KQ là hei tia phân giác của cặp góc kề bù. Suy ra $KPQH$ là tứ giác nội tiếp (góc K và góc H là hai góc đối diện bù nhau) nên

$$\widehat{PKH} = \widehat{PQH}.$$

Do $\triangle PHQ \sim \triangle BAC$ nên

$$\widehat{PQH} = \widehat{ACB}.$$

Tam giác vuông $\triangle ABC$ có AH là đường cao nên

$$\widehat{BAH} = \widehat{ACB}.$$

Từ ba đẳng thức trên suy ra $\widehat{BAK} = \widehat{PKH}$ cặp góc nằm ở vị trí đồng vị bằng nhau nên $KP \parallel AB$. Thực hiện tương tự chứng minh trên ta cũng có $KQ \parallel AC$.

c) Ta xét

$$\begin{aligned}\widehat{ANM} &= \widehat{NKQ}\,(\text{Do } AN \parallel KQ)\\&= \widehat{QKH}\,(\text{Do tính chất tiếp tuyến kẻ từ } K)\\&= \widehat{HPQ}\,(\text{Do } HPKQ \text{ là tứ giác nội tiếp})\\&= \widehat{ABC}\,(\text{Do } \triangle PHQ \sim \triangle BAC).\end{aligned}$$

Từ cặp góc trên bằng nhau, ta suy ra $MNCB$ là tứ giác nội tiếp.

d) Ta xét

$$\begin{aligned}
\widehat{AQP} &= \widehat{AQK} + \widehat{KQP} \\
&= \frac{1}{2}\widehat{ABC} + 45^\circ \left(\text{Do } \widehat{AQK} = \frac{1}{2}\widehat{QAN} = \frac{1}{2}\widehat{HAC} \text{ và } \widehat{KQP} = \widehat{KHP}\right) \\
&= \left(45^\circ - \frac{1}{2}\widehat{ACB}\right) + 45^\circ \left(\text{Do } \triangle ABC \text{ vuông}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(180^\circ - \widehat{ACB}\right) \\
&= \frac{1}{2}\widehat{BMN}\,(\text{Do } BMNC \text{ nội tiếp}) \\
&= \widehat{PMD}\,(\text{Tính chất tiếp tuyến kẻ từ } M)
\end{aligned}$$

Từ hai cặp góc trên bằng nhau, ta suy ra $APQN$ là tứ giác nội tiếp.

Làm tương tự $APQN$ cũng là tứ giác nội tiếp và như vậy 5 điểm A, M, P, Q, N cùng thuộc một đường tròn.

e) Vì $\triangle PHQ \sim \triangle BAC$ nên $\widehat{PQH} = \widehat{ACB}$ suy ra tứ giác $QECH$ là tứ giác nội tiếp. Do đó $\widehat{AED} = \widehat{QHC} = 45^\circ$.

Như vậy tam giác $\triangle AED$ là tam giác vuông cân.

□

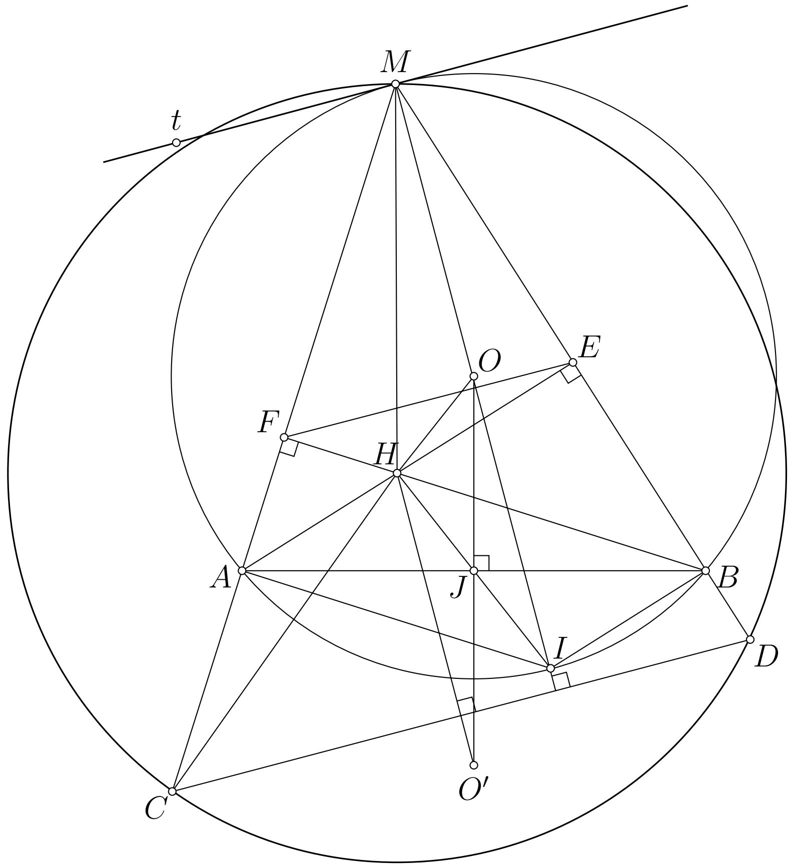
Bài 71. Cho đường tròn (O), dây AB. Điểm M di chuyển trên cung lớn AB. Các đường cao AE, BF của $\triangle ABM$ cắt nhau ở H.

a) Chứng minh rằng $OM \perp EF$.

b) Đường tròn $(H; HM)$ cắt MA, MB theo thứ tự ở C và D. Chứng minh rằng đường thẳng kẻ từ M và vuông góc với CD luôn đi qua một điểm cố định.

c) Chứng minh rằng đường thẳng kẻ từ H và vuông góc với CD cũng đi qua một điểm cố định.

Lời giải.



a) Kẻ tiếp tuyến Mt của đường tròn (O) tại M. Việc chứng minh $MO \perp EF$ tương đương với $EF \parallel Mt$.

Ta có

$$\widehat{tMA} = \widehat{MBA} \left(\text{cùng bằng một nửa số đo cung } MA\right).$$

Tứ giác $FEBA$ là tứ giác nội tiếp do có $\widehat{AFB} = \widehat{AEB}$ là hai góc kề bằng nhau cùng nhìn cạnh AB. Do đó

$$\widehat{MBA} = \widehat{MFE}.$$

Từ hai đẳng thức trên suy ra $\widehat{tMA} = \widehat{MFE}$ hai góc này nằm ở vị trí đồng vị do đó $Mt \parallel EF$.

b) Ta sẽ chứng minh đường thẳng M vuông góc với CD đi qua điểm O cố định điều này tương đương với chứng minh $MO \perp CD$.

Xét đường tròn (H, HM), $HF \perp MC$ suy ra MF là tia phân giác của góc $\widehat{MHC}$. Như vậy ta có đẳng thức

$$\widehat{MDC} = \frac{1}{2}\widehat{MHC} = \widehat{MHF}.$$

Lại có $MEHF$ là tứ giác nội tiếp (do có hai góc đối hiện cộng lại bằng $180°$) nên

$$\widehat{MHF} = \widehat{MEF}.$$

Từ hai đẳng thức trên ta có $\widehat{MDC} = \widehat{MEF}$. Cặp góc này nằm ở vị trí đồng vị nên $EF \parallel CD$ mà $MO \perp EF$ nên $MO \perp CD$.

Như vậy đường thẳng qua M vuông góc với CD đi qua điểm cố định là điểm O.

c) Gọi O' là điểm đối xứng với O qua đường thẳng AB. Ta sẽ chứng minh đường thẳng đi qua H vuông góc với AB đi qua điểm cố định là điểm O'. Điều này tương đương với chứng minh $HO' \perp CD$.

Gọi J là trung điểm của AB và I là điểm đối xứng với điểm M qua O. Ta có hai nhận xét sau

- O, J, O' thẳng hàng. Xét đường tròn (O) ta có J là trung điểm của dây cung AB nên $OJ \perp AB$ hơn nữa $OO' \perp AB$ nên ba điểm O, J, I thẳng hàng.
- H, J, I thẳng hàng. Nhận thấy rằng $HA \parallel IB$ (do HA và IB cùng vuông góc với MB) và $HB \parallel AI$ (do HB và AI cùng vuông góc với MA), như vậy $AHBI$ là hình bình hành mà J là trung điểm của AB nên H, J, I thẳng hàng.

Từ hai nhận xét trên, ta suy ra JO là đường trung bình của tam giác MHO nên $JO = \frac{1}{2}MH$ và $JO \parallel MH$. Do đó $OO' \parallel MH$ và $OO' = MH$ suy ra $MOO'H$ là hình bình hành.

Vậy $MO \parallel HO'$ mà $MO \perp CD$ nên $HO' \perp CD$.

Vậy đường thẳng qua H vuông góc với CD đi qua điểm O' cố định.

□

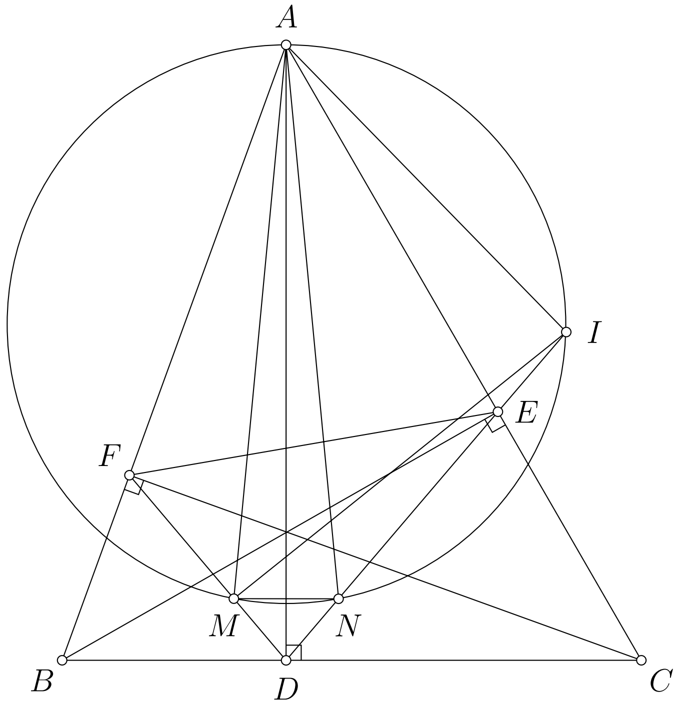
Bài 72. Cho tam giác nhọn ABC. Các đường cao AD, BE, CF. Lấy điểm M bất kì thuộc DF, kẻ $MN \parallel BC$ (N thuộc DE). Lấy điểm I trên đường thẳng DE sao cho $\widehat{MAI} = \widehat{ABC}$. Chứng minh rằng:

a) $\triangle AMN$ là tam giác cân.

b) $AMNI$ là tứ giác nội tiếp.

c) MA là tia phân giác của $\widehat{FMI}$.

Lời giải.



a) Vì AD, BE, CF là các đường cao trong tam giác ABC nên các tứ giác $AFDC$, $BFEC$, $AEDB$ là các tứ giác nội tiếp.

Xét

$$\begin{aligned}\widehat{MND} &= \widehat{EDC}\,(\text{Do } MN \parallel BC)\\ &= \widehat{BAE}\,(\text{Do } BAED \text{ là tứ giác nội tiếp})\\ &= \widehat{FDB}\,(\text{Do } AFDC \text{ là tứ giác nội tiếp})\\ &= \widehat{DMN}\,(\text{Do } MN \parallel BC)\end{aligned}$$

Do đó $\triangle MDN$ là tam giác cân tại D suy ra $MD = ND$. Hơn nữa ta có $AD \perp MN$ (do $MN \parallel BC$ và $AD \perp MN$). Do đó AD là đường trung trực của đoạn MN suy ta tam giác $\triangle AMN$ cân tại A.

b) Từ chứng minh cân a), ta có $\widehat{MND} = \widehat{BAC}$ mà $\widehat{BAC} = \widehat{MAI}$ nên $\widehat{MND} = \widehat{MAI}$. Do đó $AINM$ là tứ giác nội tiếp.

c) Do AD là đường trung trực của đoạn MN nên $\widehat{AMD} = \widehat{AND}$ suy ra $\widehat{AMF} = \widehat{ANE}$.
Từ $AMNI$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{ANE} = \widehat{IMA}$.
Từ hai điều trên, ta có $\widehat{AMF} = \widehat{AMI}$ suy ra MA là tia phân giác của goác FME.

□

Bài 73. Cho hai đường tròn (O) và (O') ở ngoài nhau. Kẻ các tiếp tuyến chung ngoài AB, $A'B'$, tiếp tuyến chung trong CD và EF (A, A', C, E thuộc (O); B, B', D, F thuộc (O')). Gọi M là giao điểm của AB và EF. N là giao điểm của $A'B'$ và CD. H là giao điểm của MN và OO'. Chứng minh rằng:

a) $MN \perp OO'$.

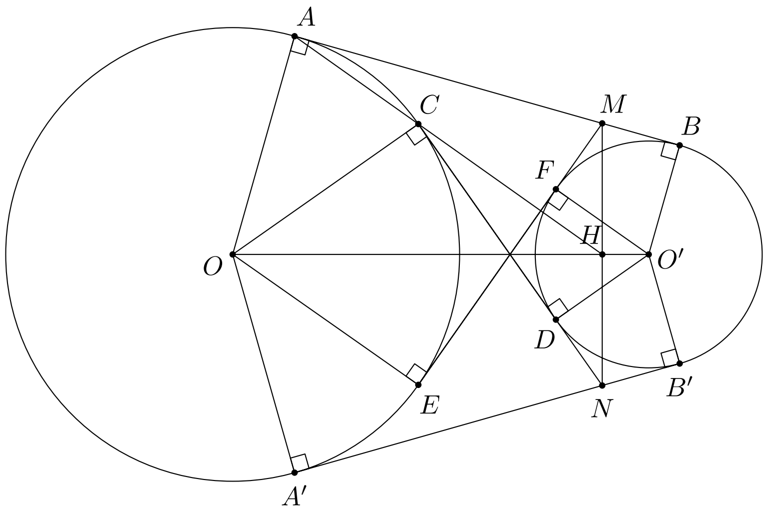
b) 5 điểm O', B, M, H, F cùng thuộc một đường tròn.

c) 5 điểm O, A, M, E, H cùng thuộc một đường tròn.

d) 3 điểm H, D, B thẳng hàng.

e) 3 điểm A, H, C thẳng hàng.

Lời giải.



a) Gọi I' và I là giao điểm của hai tiếp tuyến chung ngoài và chung trong của hai đường tròn (O) và (O'). Ta có hai nhận xét sau

- $AB = A'B'$. Do $I'A = I'A'$ và $I'B = I'B'$ trừ vế theo vế hai đẳng thức trên ta được $AB = A'B'$.
- $EF = CD$. Do $IC = IE$ và $IF = ID$ cộng vế theo vế hai đẳng thức trên ta được $EF = CD$.

Ta xét

$$\begin{aligned}
AB = A'B' &\Leftrightarrow AM + MB = A'N + NB' \\
&\Leftrightarrow MA' + MB = MC + NB' \\
&\Leftrightarrow EF + FM + MB = CD + DN + NB' \\
&\Leftrightarrow EF + 2FM = CD + 2DN \\
&\Rightarrow FM = DN \\
&\Leftrightarrow IF + FM = ID + DN
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow IM = IN.$$

Như vậy $\triangle IMN$ cân tại I mà OO' là tia phân giác trong tam giác $\triangle IMN$ nên $MN \perp OO'$.

b) Tứ giác $HMBO'$ là tứ giác nội tiếp do có hai góc H và B đối diện bù nhau.
Tứ giác $O'MFH$ là tứ giác nội tiếp do có cặp góc $\widehat{MFO'} = \widehat{MHO'}$ cùng nhìn cạnh MO'.
Từ hai điều trên ta suy ra 5 điểm O', B, M, H, F cùng thuộc một đường tròn.

c) Tứ giác $AMHO$ là tứ giác nội tiếp do có hai góc A và H đối diện bù nhau.
Tứ giác $OAHE$ là tứ giác nội tiếp do có hai góc A và E đối diện bù nhau.
Từ hai điều trên ta suy ra 5 điểm O, A, M, E, H cùng thuộc một đường tròn.

d) Điểm F đối xứng với điểm D qua OO' và điểm M đối xứng với điểm N qua OO'. Do đó $\triangle FMH$ đối xứng với $\triangle DNH$ qua OO' nên

$$\widehat{FHM} = \widehat{DHN}$$

Vì tứ giác $FMO'H$ là tứ giác nội tiếp nên

$$\widehat{FHM} = \widehat{FO'M}$$

Theo tính chất tiếp tuyến kẻ từ điểm M đến đường tròn (O')

$$\widehat{FO'M} = \widehat{MO'B}$$

Từ ba điều trên ta suy ra

$$\widehat{DHN} = \widehat{MHB} \Leftrightarrow \widehat{DHN} + \widehat{DHM} = \widehat{MHB} + \widehat{DHM} \Leftrightarrow \widehat{DHB} = 180^\circ.$$

Vậy 3 điểm H, D, B thẳng hàng.

e) Xét tam giác OCH

$$\begin{aligned}
&\widehat{OCH} + \widehat{CHO} + \widehat{COH} = 180^\circ\\
&\Rightarrow \widehat{OCH} + \widehat{AMO} + \widehat{EOH} = 180^\circ (\text{Do } AMHO \text{ là tứ giác nội tiếp và } E, C \text{ đối xứng qua } OO')\\
&\Rightarrow \widehat{OCH} + \widehat{AOE} + \widehat{EMH} = 180^\circ (\text{Do } OMHE \text{ nội tiếp, tiếp tuyến kẻ từ } M \text{ đến } (O))\\
&\Rightarrow \widehat{OCH} + \widehat{OMH} = 180^\circ\\
&\Rightarrow \widehat{OCH} + \widehat{OAC} = 180^\circ (\text{Do } OAMH \text{ nội tiếp})\\
&\Rightarrow \widehat{OCH} + \widehat{ACO} = 180^\circ (\text{Do } \triangle OAC \text{ cân tại } O)\\
&\Rightarrow \widehat{ACH} = 180^\circ.
\end{aligned}$$

Vậy 3 điểm A, C, H thẳng hàng.

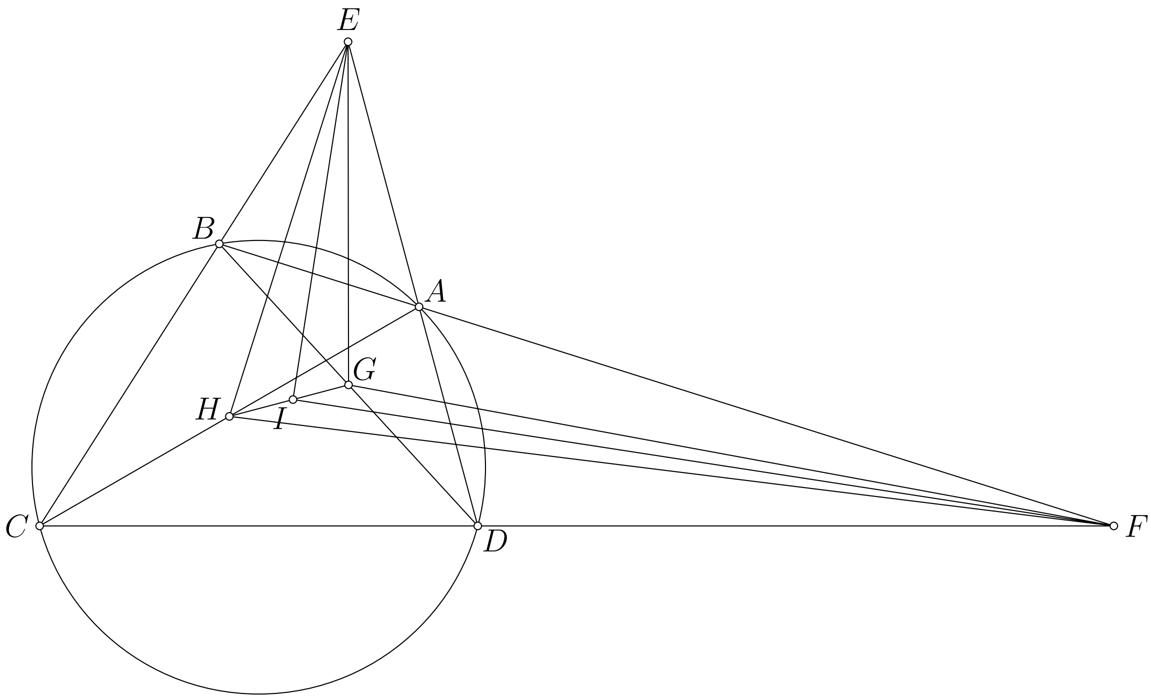
□

Bài 74. Cho $ABCD$ là tứ giác nội tiếp có các cạnh đối không song song. F là giao điểm của AB và CD. E là giao điểm của DA và CB. Gọi H và G theo tứ tự là trung điểm của AC và BD. Chứng minh rằng:

a) Tia phân giác của $\widehat{BED}$ cũng là tia phân giác của góc $\widehat{HEG}$.

b) Các tia phân giác của $\widehat{BED}$ và $\widehat{BFD}$ gặp nhau tại một điểm nằm trên GH.

Lời giải.



a) Gọi EI là tia phân giác của góc $\widehat{BED}$ với I thuộc EI. Ta sẽ chứng minh EI là tia phân giác của góc $\widehat{HEG}$.
Ta có $\triangle EAC \sim \triangle EBD$ do có $\widehat{CED}$ chung của hai tam giác và $\widehat{ECA} = \widehat{EDB}$ (do $ABCD$ là tứ giác nội tiếp). Lại có H và G lần lượt là trung điểm của AC và BD nên $\triangle ECH \sim \triangle EDG$ suy ra $\widehat{CEH} = \widehat{DEG}$.
Do EI là tia phân giác của góc $\widehat{BED}$ nên

$$\widehat{CEI} = \widehat{DEI} \Rightarrow \widehat{CEH} + \widehat{HEI} = \widehat{DEG} + \widehat{GEI}.$$

Hai vế cùng cộng một cặp góc $\widehat{CEH} = \widehat{DEG}$ nên $\widehat{HEI} = \widehat{GEI}$. Do đó EI là tia phân giác góc $\widehat{EHG}$.

b) Bài toán tương đường với việc chứng minh FI là tia phân giác của góc $\widehat{BFD}$.
Chứng minh tương tự câu a), ta có $\triangle FBG \sim \triangle FCH$ suy ta

$$\frac{FG}{FH} = \frac{BG}{CH}.$$

Từ câu a), ta có $\triangle ECH \sim \triangle EDG$ suy ta

$$\frac{EH}{EG} = \frac{HC}{GD}.$$

Vì AI là tia phân giác của tam giác EHG nên

$$\frac{EH}{EG} = \frac{IH}{IG}.$$

Từ 3 tỉ số trên và chú ý $BE = GD$ và $HA = HC$, ta có $\dfrac{IH}{IG} = \dfrac{FG}{FH}$ suy ra IF là tia phân giác của tam giác FHG suy ra

$$\widehat{GFI} = \widehat{HFI}.$$

Từ $\triangle FBG \sim \triangle FCH$ suy ra

$$\widehat{BFG} = \widehat{CFH}.$$

Cộng vế theo vế hai đẳng thức trên ta được $\widehat{IFB} = \widehat{IFC}$. Do đó IF là tia phân giác của góc $\widehat{BFD}$.

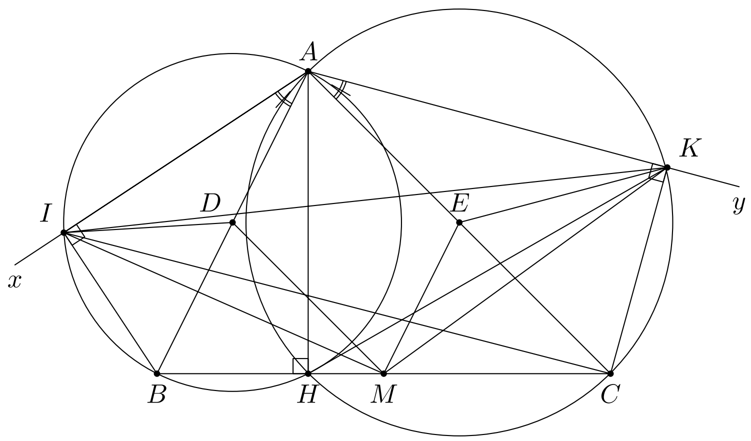
□

Bài 75. Cho $\triangle ABC$, đường cao AH. Kẻ ra ngoài $\triangle ABC$ các tia Ax, Ay theo thứ tự tạo với AB, AC các góc nhọn bằng nhau. Gọi I là hình chiếu của B trên Ax, gọi K là hình chiếu của C trên Ay, M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng

a) $MI = MK$.

b) Bốn điểm I, H, M, K cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.



a) Chứng minh $MI = MK$.

Gọi D, E lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC.

Trong $\triangle BIA$ vuông tại I, ta có $ID = \dfrac{1}{2}AB$ (trung tuyến bằng nửa cạnh huyền).

Trong $\triangle ABC$, ta có $ME = \dfrac{1}{2}AB$ (tính chất đường trung bình).
Suy ra $ID = ME$.
Trong $\triangle CKA$ vuông tại K, ta có $EK = \dfrac{1}{2}AC$ (trung tuyến bằng nửa cạnh huyền).
Trong $\triangle ABC$ ta có $DM = \dfrac{1}{2}AC$ (tính chất đường trung bình).
Suy ra $DM = EK$.
Ta có $\widehat{IDB} = \widehat{AID} + \widehat{IAD} = 2\widehat{IAD}$ (do $\triangle IAD$ cân tại D).
Ta lại có $\widehat{CEK} = \widehat{AEK} + \widehat{AKE} = 2\widehat{EAK}$ (do $\triangle AKE$ cân tại E).
Mà $\widehat{IAD} = \widehat{EAK} \Rightarrow \widehat{IDB} = \widehat{CEK}$. (1)
Mặt khác, ta có $\begin{cases} \widehat{BDM} = \widehat{BAC} & \text{(góc đồng vị, } DM \parallel AC) \\ \widehat{MEC} = \widehat{BAC} & \text{(góc đồng vị, } EM \parallel AB) \end{cases} \Rightarrow \widehat{BDM} = \widehat{BAC}$. (2)
Từ (1), (2) suy ra $\widehat{IDM} = \widehat{MEK}$.
Xét $\triangle IDM$ và $\triangle MEK$, ta có

$$\begin{cases} ID = ME \\ \widehat{IDM} = \widehat{MEK} \\ DM = EK. \end{cases}$$

Vậy $\triangle IDM = \triangle MEK$ (c-g-c).
Suy ra $MI = MK$ (đpcm).

b) <u>Bốn điểm I, H, M, K cùng thuộc một đường tròn.</u>
Xét tứ giác $AHBI$ có $\widehat{AIB} = \widehat{AHB} = 90^\circ$ nên $AHBI$ nội tiếp đường tròn tâm D, đường kính AB.
Xét tứ giác $AHCK$ có $\widehat{AHC} = \widehat{AKC} = 90^\circ$ nên $AHCK$ nội tiếp đường tròn tâm E, đường kính AC.
Ta có $\triangle AIB \backsim \triangle AKC$ (g-g).
Suy ra $\dfrac{AI}{AB} = \dfrac{AK}{AC} \Rightarrow \dfrac{AI}{2ID} = \dfrac{AK}{2AE} \Rightarrow \dfrac{AI}{ID} = \dfrac{AK}{AE}$.
Mà $AE = DM \Rightarrow \dfrac{AI}{ID} = \dfrac{AK}{DM}$.
Mặt khác

$$\begin{cases} \widehat{BDM} = \widehat{BAC} \\ \widehat{IDB} = 2\widehat{IAD} = \widehat{IAD} + \widehat{CAK} \end{cases} \Rightarrow \widehat{IDM} = \widehat{IAK}.$$

Xét $\triangle IAK$ và $\triangle IDM$, ta có

$$\begin{cases} \dfrac{IA}{ID} = \dfrac{AK}{DM} \\ \widehat{IAK} = \widehat{IDM}. \end{cases}$$

Vậy $\triangle IAK \backsim \triangle IDM$ (c-g-c).
Suy ra $\widehat{MID} = \widehat{KIA} \Rightarrow \widehat{AIM} - \widehat{DIA} = \widehat{AIM} - \widehat{MIK} \Rightarrow \widehat{MIK} = \widehat{DIA}$.

Ta lại có $\widehat{DIA} = \widehat{CAK} = \widehat{MHK}$ (do tứ giác $AHCK$ nội tiếp).

Do đó ta được $\widehat{MIK} = \widehat{MHK}$ hay bốn điểm I, H, M, K cùng thuộc một đường tròn.

□

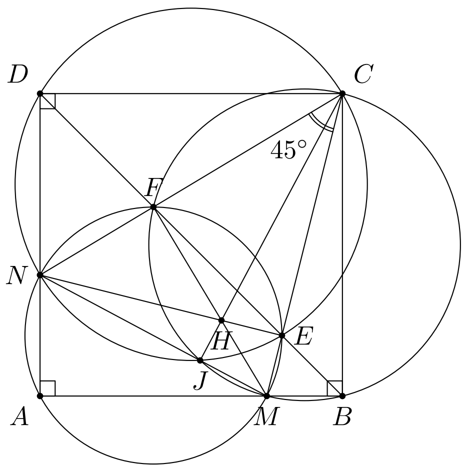
Bài 76. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Lần lượt lấy M, N trên cạnh AB, AD sao cho $\widehat{MCN} = 45°$ (M, N không trùng với đỉnh của hình vuông). CM, CN lần lượt cắt BD tại E và F.

a) Chứng minh rằng các bộ 4 điểm B, C, F, M và C, D, N, E cùng thuộc một đường tròn. Chứng minh rằng E, F, N, M cũng thuộc một đường tròn có đường kính MN.

b) MF, NE cắt nhau tại H. Chứng minh $CH \perp MN$.

c) Chứng minh CM là tia phân giác $\widehat{BCH}$ và MN luôn tiếp xúc đường tròn (C) cố định.

Lời giải.



a) Chứng minh rằng các bộ 4 điểm B, C, F, M và C, D, N, E cùng thuộc một đường tròn. Chứng minh rằng E, F, N, M cũng thuộc một đường tròn có đường kính MN.

- Chứng minh rằng các bộ 4 điểm B, C, F, M cùng thuộc một đường tròn.

  Xét tứ giác $BCFM$, ta có

$$\begin{cases} \widehat{MCF} = 45° \\ \widehat{MBF} = \dfrac{1}{2}\widehat{MBC} = 45° \end{cases} \Rightarrow \widehat{MCF} = \widehat{MBF}.$$

  Nên 4 điểm B, C, F, M cùng thuộc đường tròn, đường kính MC (vì $\widehat{MBC} = 90°$).

- Chứng minh rằng các bộ 4 điểm C, D, N, E cùng thuộc một đường tròn.

  Xét tứ giác $CDNE$, ta có

$$\begin{cases} \widehat{NCE} = 45° \\ \widehat{NDE} = \dfrac{1}{2}\widehat{NDC} = 45° \end{cases} \Rightarrow \widehat{NCE} = \widehat{NDE}.$$

  Nên 4 điểm C, D, N, E cùng thuộc đường tròn, đường kính NC (vì $\widehat{NDC} = 90°$).

- Chứng minh rằng E, F, N, M cũng thuộc một đường tròn có đường kính MN.
  Xét đường tròn đường kính MC, ta có $\widehat{MFC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MFN} = 90^\circ$.
  Xét đường tròn đường kính NC, ta có $\widehat{NEC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{NEM} = 90^\circ$.
  Suy ra E, F, N, M cùng thuộc một đường tròn có đường kính MN.

b) Chứng minh $CH \perp MN$.
Xét $\triangle MNC$, ta có

$$\begin{cases} MF \perp NC \\ NE \perp MC \\ MF \text{ cắt } NE \text{ tại } H \end{cases} \Rightarrow H \text{ là trực tâm } \triangle MNC.$$

Suy ra $CH \perp MN$.

c) Chứng minh CM là tia phân giác $\widehat{BCH}$ và MN luôn tiếp xúc đường tròn (C) cố định.

- Chứng minh CM là tia phân giác $\widehat{BCH}$
  Xét tứ giác nội tiếp $MBCF$ ta có $\widehat{BCM} = \widehat{BFM}$ (cùng chắn BM). (1)
  Xét tứ giác nội tiếp $MNFE$ ta có $\widehat{MFE} = \widehat{MNE}$ (cùng chắn EM). (2)
  Kẻ CH cắt MN tại J suy ra $CJ \perp MN$ (do H là trực tâm $\triangle MNC$).
  Ta có $\widehat{MNE} = \widehat{MCJ}$ (cùng phụ $\widehat{NMC}$). (3)
  Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{MCB} = \widehat{MCH}$ hay CM là tia phân giác $\widehat{BCH}$.
- Chứng minh MN luôn tiếp xúc đường tròn (C) cố định.
  Xét hai tam giá vuông $\triangle MJC$ và $\triangle MBC$ ta có

$$\begin{cases} \widehat{MJC} = \widehat{MNC} = 90^\circ \\ \widehat{MNE} = \widehat{MCJ} \\ MC \text{ là cạnh chung.} \end{cases}$$

  Vậy $\triangle MJC = \triangle MBC$ (ch-gn), suy ra $CJ = CB$.
  Do đó J thuộc đường tròn (C) cố định có tâm là C, bán kính $R = CB$.
  Mặt khác $MN \perp CJ$ tại J nên MN luôn tiếp xúc đường tròn (C) cố định.

□

Bài 77. Cho $\triangle ABC$ $(AB < AC)$ nội tiếp (O) có đường kính BC, AH là đường cao $\triangle ABC$. Đường tròn tâm K, đường kính AH cắt AB, AC và cắt lại (O) lần lượt tại D, E và I. AI cắt BC tại M.

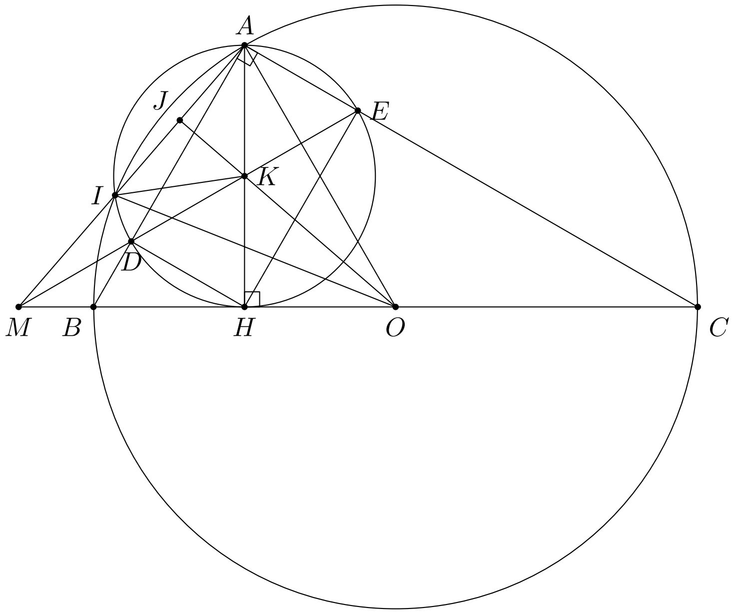
a) Chứng minh rằng tứ giác $AEHD$ là hình chữ nhật.

b) Chứng minh rằng $AB \cdot AD = AE \cdot AC$ và tứ giác $BCED$ nội tiếp được.

c) Chứng minh $OK \perp AM$.

d) Chứng minh rằng $OA \perp DE$. Suy ra 3 điểm M, D, E thẳng hàng.

Lời giải.



a) Chứng minh tứ giác $AEHD$ là hình chữ nhật.

Xét tứ giác $AEHD$ ta có

$$\begin{cases} \widehat{DAE} = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn } (O)) \\ \widehat{ADH} = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn } (K)) \\ \widehat{AEH} = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn } (K)). \end{cases}$$

Vậy tứ giác $AEHD$ là hình chữ nhật.

b) Chứng minh $AB \cdot AD = AE \cdot AC$ và tứ giác $BCED$ nội tiếp được.

- Chứng minh $AB \cdot AD = AE \cdot AC$.

  Ta có

  $$\begin{cases} \widehat{ABH} + \widehat{BAH} = 90^\circ \\ \widehat{ADE} + \widehat{AED} = 90^\circ \\ \widehat{ADE} = \widehat{BAH} \text{ (vì } \triangle AKD \text{ cân tại } K) \end{cases} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AED}.$$

  Xét hai tam giác vuông $\triangle ABC$ và $\triangle AED$ có

  $$\widehat{ABC} = \widehat{AED},\ \widehat{BAC} \text{ là góc chung.}$$

  Nên $\triangle ABC \backsim \triangle AED$ (g-g).

  Suy ra $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AC}{AD} \Rightarrow AB \cdot AD = AE \cdot AC$.

- Chứng minh tứ giác $BCED$ nội tiếp được.

  Xét tứ giác nội tiếp $ADHE$ ta có $\widehat{ADE} = \widehat{ACH}$ (cùng chắn cung AE).

  Mà $\widehat{AHE} = \widehat{ACH}$ (cùng phụ $\widehat{CAH}$).

  Suy ra $\widehat{ADE} = \widehat{ACH}$.

  Xét tứ giác $BCED$ ta có $\widehat{ADE} = \widehat{ACB}$ (góc ngoài bằng góc đối trong).

  Vậy $BCED$ là tứ giác nội tiếp.

c) Chứng minh $OK \perp AM$.

Gọi J là trung điểm AI.

Xét đường tròn tâm K đường kính AH, ta có

$$\begin{cases} \triangle KAI \,(\text{cân tại } K) \\ J \text{ là trung điểm } AI \end{cases} \Rightarrow KJ \perp AI. \qquad (1)$$

Xét đường tròn tâm O đường kính BC, ta có

$$\begin{cases} \triangle OAI \,(\text{cân tại } O) \\ J \text{ là trung điểm } AI \end{cases} \Rightarrow OJ \perp AI. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra O, K, J thẳng hàng hay $OK \perp AI$ (đpcm).

d) Chứng minh rằng $OA \perp DE$. Suy ra 3 điểm M, D, E thẳng hàng.

- Chứng minh $OA \perp DE$.

  Xét tứ giác nội tiếp $BCED$ ta có $\widehat{ABC} = \widehat{AED}$ (góc ngoài bằng góc đối trong).

  Ta lại có $\triangle OAC$ cân tại O suy ra $\widehat{ACO} = \widehat{CAO}$.

  Mà $\widehat{ABC} + \widehat{ACO} = 90^\circ$.

  Suy ra $\widehat{AED} + \widehat{CAO} = 90^\circ$.

  Vậy $OA \perp DE$ (đpcm).

- Suy ra 3 điểm M, D, E thẳng hàng.

  Xét tam giác AMO, ta có

  $$\begin{cases} AH \perp MO \\ OJ \perp AM \\ AH \text{ cắt } OJ \text{ tại } K \end{cases} \Rightarrow K \text{ là trực tâm } \triangle AMO.$$

  Suy ra $MK \perp AO$.

  Mà $MD \perp AO, K \in DE$ (chứng minh trên).

  Do đó 3 điểm M, D, E thẳng hàng (đpcm).

□

Bài 78. Cho điểm A có khoảng cách đến đường thẳng xy là $AB = 2a$. Trên xy lấy hai điểm C và D ở hai bên B sao cho $\widehat{DAB} = 45^\circ$ và $\widehat{CAB} = 30^\circ$. AD, AC cắt đường tròn có đường kính AB lần lượt tại E và F.

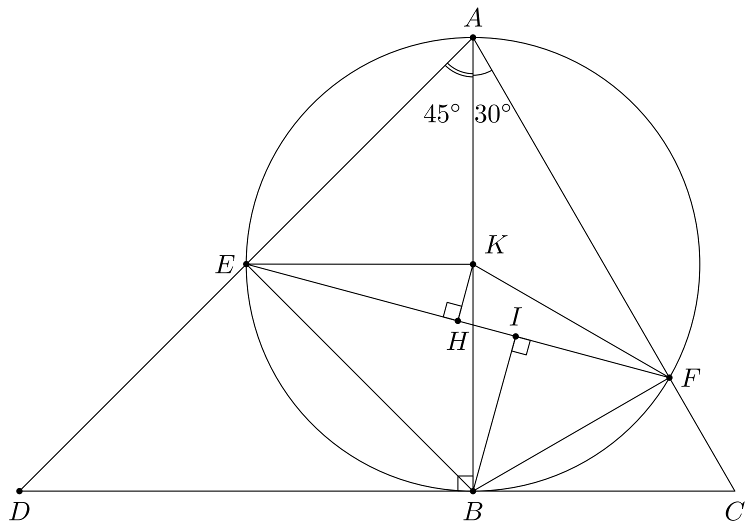
a) Tính các cạnh của ΔACD theo a.

b) Chứng tỏ E là trung điểm AD và 4 điểm E, F, C, D cùng nằm trên đường tròn.

c) Tính các cạnh của $\triangle AEF$ theo a.

d) Tính S_{CDEF} theo a.

Lời giải.



a) Tính các cạnh của ΔACD theo a.

Xét tam giác ABD vuông tại B, ta có

$$\begin{cases} \cos\widehat{BAD} = \dfrac{AB}{AD} \Rightarrow AD = \dfrac{AB}{\cos 45^\circ} = 2a\sqrt{2} \\ \tan\widehat{BAD} = \dfrac{BD}{AB} \Rightarrow BD = AB\cdot\tan 45^\circ = 2a. \end{cases}$$

Xét tam giác ABC vuông tại B, ta có

$$\begin{cases} \cos\widehat{BAC} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow AC = \dfrac{AB}{\cos 30^\circ} = \dfrac{4a\sqrt{3}}{3} \\ \tan\widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AB} \Rightarrow BC = AB\cdot\tan 30^\circ = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

Vậy các cạnh của ΔACD là $AD = 2a\sqrt{2}$, $AC = \dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$ và $DC = DB + BC = \dfrac{2a\left(3+\sqrt{3}\right)}{3}$.

b) Chứng minh E là trung điểm AD và 4 điểm E, F, C, D cùng nằm trên đường tròn.

- Chứng minh E là trung điểm AD.

  Xét $\triangle ABD$ ta có

  $$\begin{cases} \triangle ABD \text{ vuông cân tại } B \,(\text{vì } AB \perp BD,\, \widehat{DAB} = 45^\circ) \\ BE \perp AD \,(\text{góc } \widehat{BEA} \text{ nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm } K). \end{cases}$$

  Suy ra E là trung điểm AD (vì trong tam giác cân, đường cao cũng là đường trung tuyến).

- Chứng minh 4 điểm E, F, C, D cùng nằm trên đường tròn.

  Xét tứ giác nội tiếp $AEBF$ ta có $\widehat{BEF} = \widehat{BAF} = 30^\circ$.

  Suy ra $\widehat{AEF} = 180^\circ - \widehat{DEB} - \widehat{BEF} = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

  Mặt khác $\widehat{FCD} = \widehat{ABD} - \widehat{BAC} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Suy ra $\widehat{AEF} = \widehat{FCD}$.

  Vậy E, F, C, D cùng nằm trên đường tròn (do có góc ngoài bằng góc đối trong).

c) Tính các cạnh của $\triangle AEF$ theo a.

Ta có $AE = \dfrac{AD}{2} = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác ABF vuông tại F, ta có

$$\cos\widehat{BAF} = \frac{AF}{AB} \Rightarrow AF = AB \cdot \cos 30^\circ = a\sqrt{3}.$$

Gọi K, H lần lượt là trung điểm AB, FE.

Xét tứ giác $AEBF$ nội tiếp đường tròn tâm K, đường kính AB.

Ta có $\widehat{EKF} = 2 \cdot \widehat{EAF} = 150^\circ$.

Mặt khác, tam giác KEF cân tại $K \Rightarrow \widehat{KEF} = \widehat{KFE} = \dfrac{1}{2}\left(180^\circ - \widehat{EKF}\right) = 15^\circ$.

Xét $\triangle KEH$ vuông tại H, ta có

$$\cos\widehat{HEK} = \frac{EH}{EK} \Rightarrow EH = EK \cdot \cos 15^\circ = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)a \Rightarrow EF = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)a.$$

d) Tính S_{CDEF} theo a.

Xét tam giác ABF vuông tại F, ta có

$$\sin\widehat{BAF} = \frac{BF}{AB} \Rightarrow BF = AB \cdot \sin 30^\circ = a.$$

Xét tam giác BCF vuông tại F, ta có

$$\cot\widehat{BCF} = \frac{FC}{FB} \Rightarrow FC = FB \cdot \cot 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Diện tích tam giác vuông BDE là

$$S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} \cdot ED \cdot EB = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} = a^2.$$

Diện tích tam giác vuông BCF là

$$S_{\triangle BCF} = \frac{1}{2} \cdot FB \cdot FC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}.$$

Trong $\triangle BEF$, kẻ đường cao BI.

Xét $\triangle EBI$ vuông tại I, ta có

$$\sin \widehat{BEI} = \frac{BI}{EB} \Rightarrow BI = BE \cdot \sin 30^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Diện tích tam giác BEF là

$$S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2} \cdot BI \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right) a = \frac{1+\sqrt{3}}{4} a^2.$$

Vậy diện tích tứ giác $CDEF$ là

$$S_{CDEF} = S_{\triangle BDE} + S_{\triangle BEF} + S_{\triangle BFC} = \left(\frac{15+5\sqrt{3}}{12}\right) a^2.$$

□

Bài 79. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng đi qua B cắt (O) ở M và (O') ở M' (M và M' khác B). Các tiếp tuyến tại M và M' của hai đường tròn cắt nhau ở N. MO và $M'O'$ cắt nhau ở P.

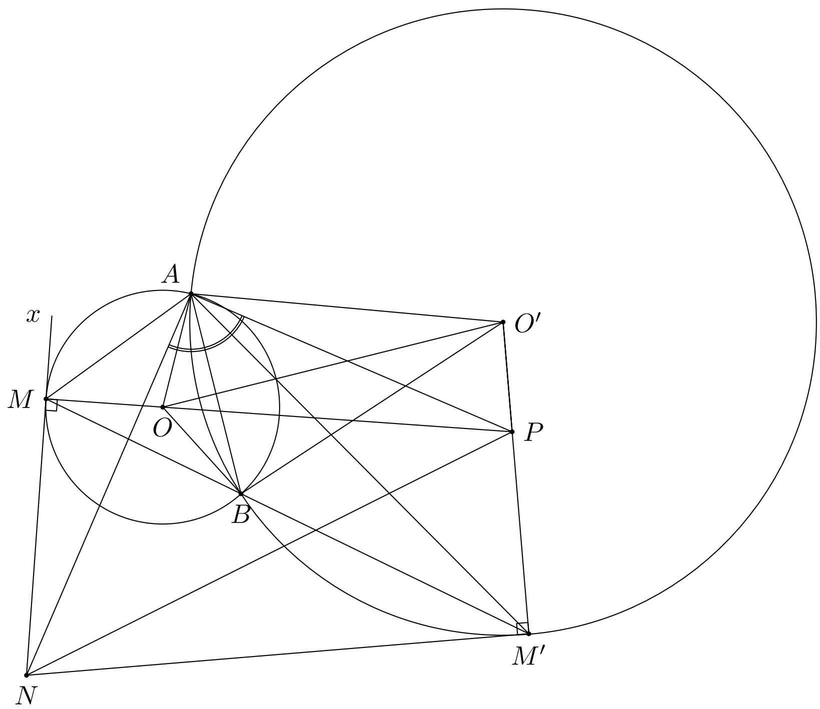
a) Chứng minh rằng các tứ giác $NMPM'$, $NMAM'$ nội tiếp được.

b) Tính $\widehat{PAN}$.

c) Chứng tỏ $\triangle AOO' \backsim \Delta AMM'$.

d) Chứng tỏ 4 điểm O, A, O', P thuộc đường tròn.

Lời giải.



a) Chứng minh rằng các tứ giác $NMPM'$, $NMAM'$ nội tiếp được.

- Chứng minh tứ giác $NMPM'$ nội tiếp.

  Xét tứ giác $NMPM'$ ta có

  $$\begin{cases} \widehat{NMP} = 90^\circ \text{ (vì } NM \text{ là tiếp tuyến của đường tròn } (O)) \\ \widehat{NM'P} = 90^\circ \text{ (vì } NM' \text{ là tiếp tuyến của đường tròn } (O')). \end{cases}$$

  Suy ra $\widehat{NMP} + \widehat{NM'P} = 180^\circ$.

  Vậy tứ giác $NMPM'$ nội tiếp đường tròn đường kính NP.

- Chứng minh tứ giác $NMAM'$ nội tiếp.

  Xét đường tròn tâm O, với tiếp tuyến Mx, ta có $\widehat{AMx} = \widehat{ABM}$. (1)

  Xét đường tròn tâm O', ta có

  $$\begin{cases} \widehat{ABM'} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AM}_{\text{lớn}} \\ \widehat{AM'N} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AM}_{\text{nhỏ}} \end{cases} \Rightarrow \widehat{ABM'} + \widehat{AM'N} = 180^\circ.$$

  Mà $\widehat{ABM'} + \widehat{ABM} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AM'N} = \widehat{ABM}$. (2)

  Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AMx} = \widehat{AM'N}$.

  Vậy tứ giác $NMAM'$ nội tiếp (theo tính chất góc ngoài bằng góc đối trong).

b) Tính $\widehat{PAN}$.

Ta có tứ giác $NMPM'$ nội tiếp đường tròn đường kính NP (đường tròn ngoại tiếp $\triangle NMM'$). (3)

Tứ giác $NMAM'$ nội tiếp đường tròn (đường tròn ngoại tiếp $\triangle NMM'$). (4)

Từ (3) và (4) suy ra 5 điểm N, M, A, P, M' nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam NMM', đường tròn này có đường kính là NP.

Do đó $\widehat{PAN} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

c) Chứng tỏ $\triangle AOO' \backsim \Delta AMM'$.

Xét $\triangle OO'A$ và $\triangle OO'B$ ta có

$$\begin{cases} OA = OB \\ OO' \text{ là cạnh chung} \\ O'A = O'B. \end{cases}$$

Suy ra $\triangle OO'A = \triangle OO'B$ (c-c-c).

Suy ra $\widehat{AO'O} = \widehat{BO'O} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AB}_{\text{nhỏ}}$.

Mà $\widehat{AM'B} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AB}_{\text{nhỏ}}$.

Suy ra $\widehat{AO'O} = \widehat{AM'B}$. (5)

Ta có $\triangle OMA$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OAM} = \widehat{AMO}$. (6)

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMM'P$, ta có $\widehat{AMP} = \widehat{AM'P}$ (cùng chắn cung AP').

Mà $\triangle O'M'A$ cân tại $O' \Rightarrow \widehat{O'M'A} = \widehat{M'AO'}$. (7)

Từ (6) và (7) suy ra $\widehat{MAO} = \widehat{M'AO'}$.

Suy ra $\widehat{MAM'} = \widehat{OAO'}$. (8)

Từ (5) và (8) ta được $\triangle AOO' \backsim \Delta AMM'$ (g-g).

d) <u>Chứng tỏ 4 điểm O, A, O', P thuộc đường tròn.</u>

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMM'P$, ta có $\widehat{MM'A} = \widehat{OPA}$ (cùng chắn cung AM).

Mà $\widehat{OO'A} = \widehat{MM'A}$ (chứng minh trên ở vị trí (5)).

Suy ra $\widehat{OO'A} = \widehat{OPA}$ (cùng chắn AO).

Vậy 4 điểm O, A, O', P thuộc đường tròn.

□

Bài 80. Trên đường kính AB của đường tròn (O) ta lấy một điểm C và M là điểm tùy ý trên đường tròn. Đường vuông góc với CM tại M cắt các tiếp tuyến tại A và B của đường tròn lần lượt ở P và Q. Chứng minh

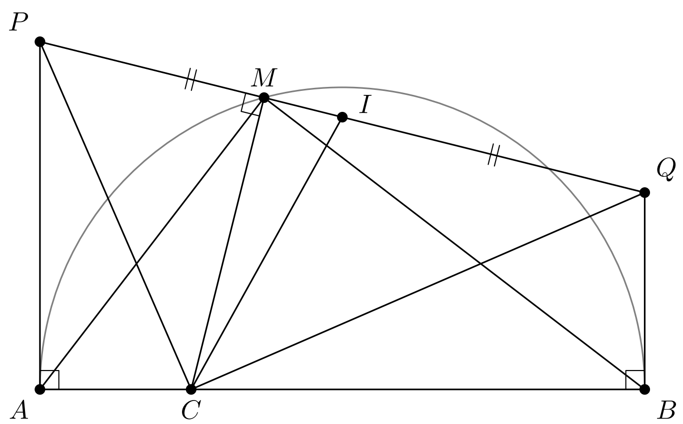
a) Các tứ giác $ACMP$ và $BCMQ$ nội tiếp được.

b) $\widehat{APC} + \widehat{BQC} = \widehat{ACP} + \widehat{BCQ}$.

c) $\widehat{PCQ} = 90^\circ$.

d) $IC = IP = IQ$ (I là trung điểm của PQ).

Lời giải.



a) Do $\widehat{PAC} = \widehat{PMC} = 90^\circ$ (AP là tiếp tuyến của (O)) nên tứ giác $ACMP$ nội tiếp.

Tương tự ta cũng có tứ giác $BCMQ$ nội tiếp.

b) Từ $ACMP$ nội tiếp, ta suy ra $\begin{cases} \widehat{APC} = \widehat{AMC} \\ \widehat{ACP} = \widehat{AMP}. \end{cases}$

Tương tự ta cũng có $\begin{cases} \widehat{BQC} = \widehat{BMC} \\ \widehat{BCQ} = \widehat{BMQ}. \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} \widehat{APC} + \widehat{BQC} = \widehat{AMC} + \widehat{BMC} = \widehat{AMB} \\ \widehat{ACP} + \widehat{BCQ} = \widehat{AMP} + \widehat{BMQ} = 180^\circ - \widehat{AMB}. \end{cases}$

Mà $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Suy ra $\widehat{APC} + \widehat{BQC} = \widehat{ACP} + \widehat{BCQ}$.

c) Do $\triangle APC$ và $\triangle BQC$ lần lượt vuông tại A và B nên $\widehat{APC} + \widehat{ACP} = \widehat{BQC} + \widehat{BCQ} = 90^\circ$.

Mà theo kết quả phần b thì $\widehat{APC} + \widehat{BQC} = \widehat{ACP} + \widehat{BCQ}$.

Suy ra $2\widehat{APC} + \widehat{ACP} + \widehat{BQC} = \widehat{BQC} + \widehat{ACP} + 2\widehat{BCQ}$.

Kéo theo $2\widehat{APC} = 2\widehat{BCQ} \Rightarrow \widehat{APC} = \widehat{BCQ}$.

Dẫn tới $180^\circ - \widehat{PCQ} = \widehat{ACP} + \widehat{BCQ} = \widehat{ACP} + \widehat{APC} = 90^\circ$.

Suy ra $\widehat{PCQ} = 90^\circ$.

d) Do I là trung điểm của PQ và $\widehat{PCQ} = 90^\circ$ nên $\triangle PCQ$ vuông tại C và có đường trung tuyến $CI \Rightarrow IC = IP = IQ = \dfrac{PQ}{2}$.

□

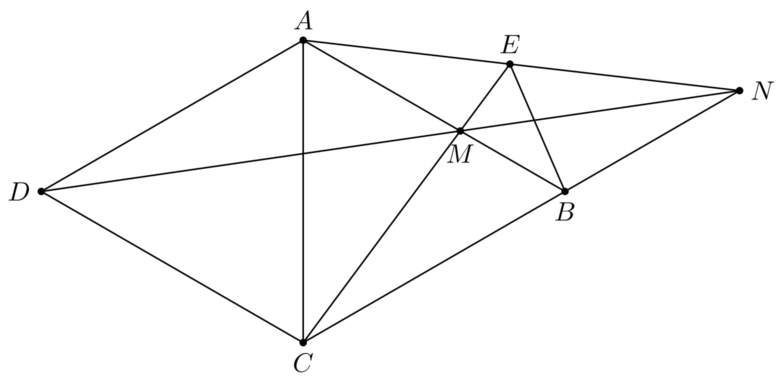
Bài 81. Hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 120^\circ$. M là điểm trên cạnh AB. Các đường thẳng DM và BC cắt nhau ở N.

a) Chứng minh hệ thức $AB^2 = AM \cdot CN$.

b) CM cắt AN ở E. Chứng tỏ tứ giác $AEBC$ nội tiếp.

c) Tìm quỹ tích điểm E khi M di chuyển trên cạnh AB của hình thoi.

Lời giải.



a) Xét $\triangle AMD$ và $\triangle CDN$ có $\begin{cases} \widehat{DAM} = \widehat{DCN} \text{ } (ABCD \text{ là hình thoi}) \\ \widehat{ADM} = \widehat{CND} \text{ } (AD \parallel BC). \end{cases}$

Suy ra $\triangle AMD \backsim \triangle CDN$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{AM}{CD} = \frac{AD}{CN} \Rightarrow AB^2 = AD \cdot CD = AM \cdot CN.$$

b) Do $ABCD$ là hình thoi nên $\widehat{BAC} = \widehat{DAC} = \dfrac{\widehat{BAD}}{2} = 60^\circ$.

Tương tự ta cũng có $\widehat{BCA} = \widehat{DCA} = \dfrac{\widehat{BCD}}{2} = 60^\circ$.

Do $\triangle ABC$ có $\widehat{BAC} = \widehat{BCA} = 60^\circ$ nên $\triangle ABC$ đều

$$AC^2 = AB^2 = AM \cdot CN \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AC}{CN}.$$

Xét $\triangle MAC$ và $\triangle ACN$ có $\begin{cases} \widehat{MAC} = \widehat{ACN} = 60^\circ \\ \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AC}{CN}. \end{cases}$

Suy ra $\triangle MAC \backsim \triangle ACN$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{AMC} = \widehat{CAN}$.

Mà $\begin{cases} \widehat{AMC} = \widehat{MBC} + \widehat{BCM} = 60^\circ + \widehat{BCM} \\ \widehat{CAN} = \widehat{BAC} + \widehat{BAN} = 60^\circ + \widehat{BAN}. \end{cases}$

Suy ra $\widehat{BCM} = \widehat{BAN} \Rightarrow AEBC$ nội tiếp (hai góc cùng nhìn một cạnh dưới một góc bằng nhau).

c) Do $AEBC$ nội tiếp nên $\widehat{AEB} = 180^\circ - \widehat{ACB} = 120^\circ$.

Suy ra quỹ tích điểm E là cung chứa góc 120° dựng trên đoạn AB (cung này và điểm C nằm trên 2 nửa mặt phẳng đối nhau, bờ là đường thẳng AB).

□

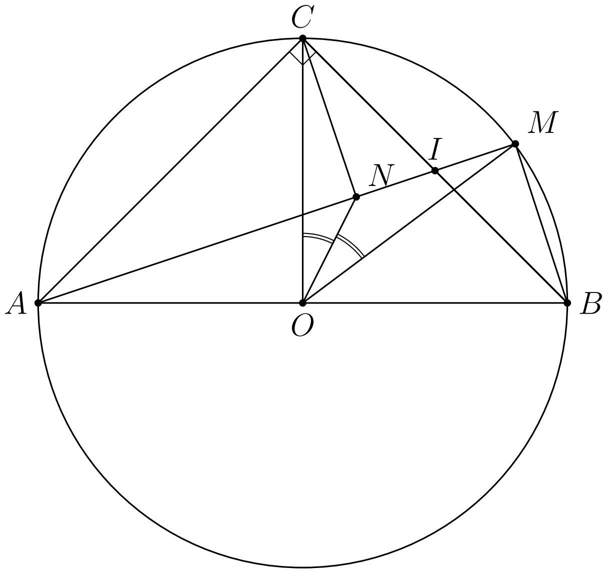
Bài 82. Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại C và M là một điểm thuộc $\overset{\frown}{BC}$ của nửa đường tròn đường kính AB tâm O. Tia phân giác của $\widehat{MOC}$ cắt AM ở N.

a) Tính $\widehat{CNM}$.

b) Tìm quỹ tích điểm N khi M di chuyển trên $\overset{\frown}{BC}$.

c) Tính tỉ số $\dfrac{MA}{MB}$ khi AM đi qua trung điểm I của BC.

Lời giải.



a) Ta có CO là trung tuyến của $\triangle ABC$ vuông tại cân C

$$\begin{cases} OC = OA = OB \Rightarrow C \in (O) \\ CO \perp AB. \end{cases}$$

Xét đường tròn (O) có $\widehat{CAM} = \dfrac{1}{2}\widehat{COM}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn $\overset{\frown}{CM}$).

Mà $\widehat{CON} = \dfrac{1}{2}\widehat{COM}$ (ON là phân giác của $\widehat{COM}$)

Suy ra $\widehat{CAM} = \widehat{CON} \Rightarrow ACNO$ nội tiếp (hai góc cùng nhìn một cạnh dưới một góc bằng nhau).

Dẫn tới $\widehat{CNA} = \widehat{COA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CNM} = 90^\circ$.

b) Do $ACNO$ nội tiếp nên $\widehat{CNO} = 180^\circ - \widehat{CAO} = 135^\circ$.

Suy ra quỹ tích điểm N là cung chứa góc 135° dựng trên đoạn OC (cung này và điểm A nằm trên 2 nửa mặt phẳng đối nhau, bờ là đường thẳng OC).

c) Xét $\triangle OCN$ và $\triangle OMN$ có $\begin{cases} ON \text{ là cạnh chung} \\ \widehat{CON} = \widehat{MON} \\ OC = OM. \end{cases}$

Suy ra $\triangle OCN = \triangle OMN$ (c-g-c) $\Rightarrow CN = MN$. (1)

Ta có $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (chắn nửa đường tròn (O)).

Xét $\triangle ICN$ và $\triangle IBM$ có $\begin{cases} \widehat{INC} = \widehat{IMB} = 90^\circ \\ IC = IB \\ \widehat{CIN} = \widehat{BIM} \text{ (đối đỉnh).} \end{cases}$

Suy ra $\triangle ICN = \triangle IBM$ (ch-gn) $\Rightarrow CN = BM$. (2)

Từ (1) và (2), ta được $BM = CN = MN$.

Mặt khác $\dfrac{CN}{AN} = \tan\widehat{CAN} = \dfrac{IC}{AC} = \dfrac{IC}{AB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow AN = 2CN$.

Suy ra $AM = AN + MN = 3CN = 3BM \Rightarrow \dfrac{MA}{MB} = 3$.

□

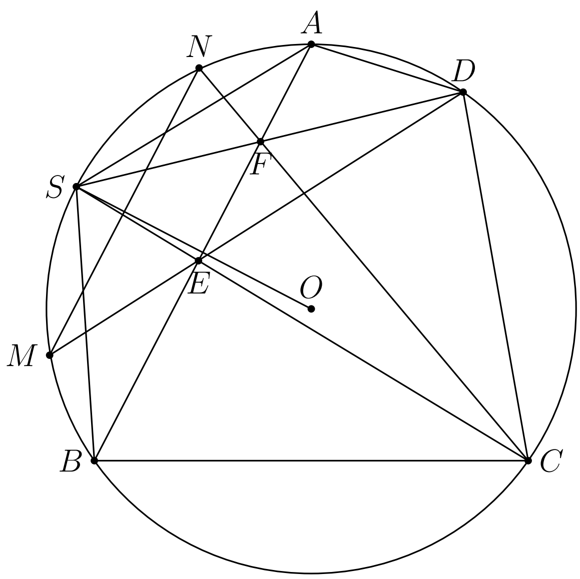
Bài 83. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). S là điểm chính giữa $\overset{\frown}{AB}$. SC và SD cắt AB ở E và F.

a) Chứng minh rằng tứ giác $CDFE$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng SO là phân giác $\widehat{ASB}$.

c) DE và CF kéo dài cắt (O) ở N và M. Chứng tỏ $SO \perp MN$.

Lời giải.



a) Xét đường tròn (O), ta có

$$\widehat{BEC} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{BC} + \text{sđ}\overset{\frown}{SA}\right) = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{BC} + \text{sđ}\overset{\frown}{SB}\right) = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{SC} = \widehat{SDC}.$$

Suy ra tứ giác $CDFE$ nội tiếp (góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối).

b) Ta có $SA = SB$ và $OA = OB$ nên S và O thuộc đường trung trực của AB.
Suy ra SO là đường trung trực của AB.
Mà $\triangle ASB$ cân tại S.
Dẫn tới SO là phân giác $\widehat{ASB}$.

c) Do $CDEF$ và $CDNM$ nội tiếp nên $\widehat{EFC} = \widehat{EDC} = \widehat{MNC}$.
Suy ra $EF \parallel MN$ hay $AB \parallel MN$.
Mà $SO \perp AB$.
Dẫn tới $SO \perp MN$.

□

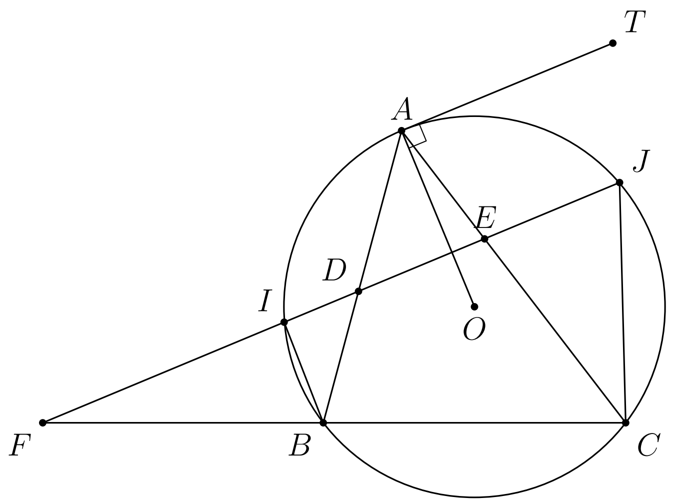
Bài 84. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O). Một đường thẳng song song với tiếp tuyến tại A cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự tại D và E và cắt đường thẳng BC tại F.

a) Chứng minh tứ giác $BDEC$ nội tiếp.

b) Chứng minh $AB \cdot AD = AC \cdot AE$ và $FB \cdot FC = FD \cdot FE$.

c) Đường thẳng FD cắt (O) tại I và J. Chứng minh rằng $FI \cdot FJ = FD \cdot FE$.

Lời giải.



a) Lấy T nằm trên tiếp tuyến kẻ tại A của (O) (T nằm trên nửa mặt phẳng chứa C, bờ là đường thẳng AB).
Khi đó $\widehat{ABC} = \widehat{CAT}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$ của (O)) và $\widehat{DEA} = \widehat{CAT}$ ($DE \parallel AT$).
Suy ra $\widehat{DEA} = \widehat{ABC} \Rightarrow$ tứ giác $BDEC$ nội tiếp (góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối).

b) Xét $\triangle AED$ và $\triangle ABC$ có $\begin{cases} \widehat{DAE} \text{ là góc chung} \\ \widehat{DEA} = \widehat{ABC} \text{ (} BDEC \text{ nội tiếp).} \end{cases}$
Suy ra $\triangle AED \backsim \triangle ABC$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AD}{AC} \Rightarrow AB \cdot AD = AC \cdot AE$.
Tương tự, ta cũng có $FB \cdot FC = FD \cdot FE$.

c) Xét $\triangle FBI$ và $\triangle FJC$ có $\begin{cases} \widehat{BFI} \text{ là góc chung} \\ \widehat{FBI} = \widehat{FJC} \text{ (} BIJC \text{ nội tiếp).} \end{cases}$
Suy ra $\triangle FBI \backsim \triangle FJC$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{FB}{FJ} = \dfrac{FI}{FC} \Rightarrow FI \cdot FJ = FB \cdot FC$.
Mà theo phần b, ta có $FB \cdot FC = FD \cdot FE$.
Suy ra $FI \cdot FJ = FD \cdot FE$.

□

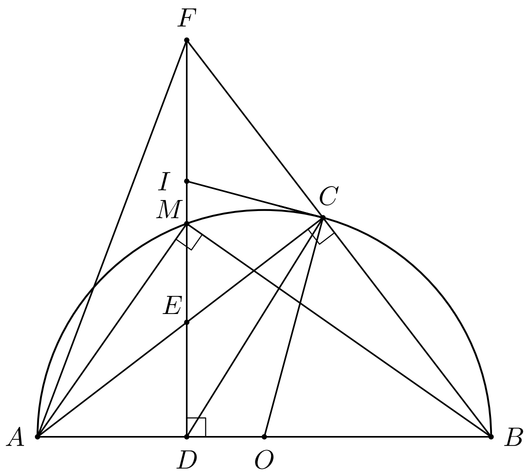
Bài 85. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. M là một điểm bất kỳ trên $\overset{\frown}{AB}$. Kẻ $MD \perp AB$. Qua một điểm C trên $\overset{\frown}{MB}$, kẻ tiếp tuyến Cx cắt DM tại I. DM cắt AC ở E và cắt BC kéo dài ở F. Chứng minh

a) Các tứ giác $BCED$ và $ADCF$ nội tiếp được một đường tròn.

b) $\widehat{MEC} = \widehat{ABC}$.

c) I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle FEC$.

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).
Tứ giác $EDBC$ có $\widehat{ECB} = \widehat{EDB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ECB} + \widehat{EDB} = 180^\circ \Rightarrow BCED$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180°).
Tứ giác $ADCF$ có $\widehat{ADF} = \widehat{ACF} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ADF} + \widehat{ACF} = 180^\circ \Rightarrow ADCF$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180°).

b) Ta có $\widehat{MEC} = \widehat{ABC}$ (cùng phụ với góc $\widehat{EFC}$).

c) Vì CI là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $CI \perp CO$ hay $\widehat{OCI} = 90^\circ$.
Suy ra $\widehat{OCB} = \widehat{ECI}$ (cùng phụ với $\widehat{ECO}$). (1)
Ta có $OC = OB \Rightarrow \triangle OCB$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OCB} = \widehat{OBC}$. (2)
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{ECI}$, mà $\widehat{MEC} = \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{ICE} = \widehat{IEC} \Rightarrow \triangle ICE$ cân tại $I \Rightarrow IC = IE$. (3)

Từ $\begin{cases} \widehat{ICE} + \widehat{ICF} = 90^\circ \\ \widehat{IEC} + \widehat{IFC} = 90^\circ \\ \widehat{IEC} = \widehat{ICE} \end{cases} \Rightarrow \widehat{ICF} = \widehat{IFC} \Rightarrow \triangle ICF$ cân tại $I \Rightarrow IC = IF$. (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow IE = IC = IF \Rightarrow I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle FEC$.

□

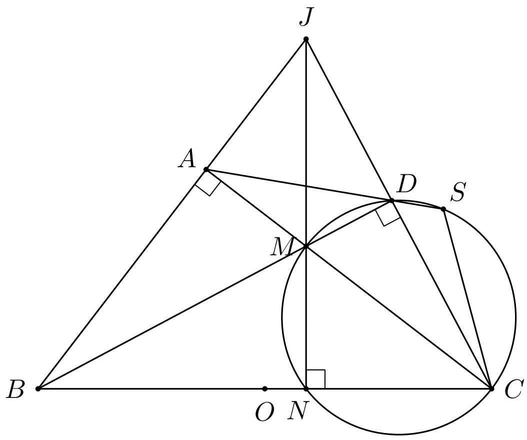
Bài 86. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A và M là một điểm trên AC. Đường tròn đường kính MC cắt BC tại N, BM cắt đường tròn tại D, AD cắt đường tròn tại S.

a) Chứng minh tứ giác $ABCD$ nội tiếp.

b) Chứng minh CA là phân giác $\widehat{SCB}$.

c) CD cắt AB tại J. Chứng minh 3 điểm J, M, N thẳng hàng.

Lời giải.



a) Xét đường tròn đường kính MC có $\widehat{MDC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), suy ra $\widehat{BDC} = 90^\circ$.
Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = 90^\circ \Rightarrow ABCD$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh liên tiếp cùng nhìn 1 cạnh dưới 2 góc bằng nhau).

b) Tứ giác $CMDS$ nội tiếp đường tròn đường kính MC nên $\widehat{SDM} + \widehat{SCM} = 180^\circ$.
$\Rightarrow \widehat{SCM} = \widehat{ADB}$ (cùng bù với $\widehat{SDM}$). (1)
Tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$). (2)
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ACB} = \widehat{ACS}$ hay CA là phân giác $\widehat{SCB}$.

c) Xét $\triangle MBC$ có các đường cao CD và BA cắt nhau tại điểm $J \Rightarrow J$ là trực tâm $\triangle MBC \Rightarrow MJ \perp BC$. (3)
Trong đường tròn đường kính MC có $\widehat{MNC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), suy ra $MN \perp BC$. (4)
Từ (3) và (4), suy ra M, N, J thẳng hàng.

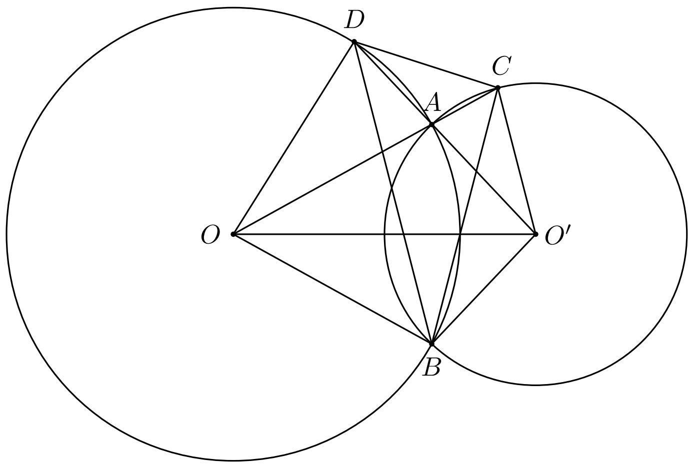
$\square$

Bài 87. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Tia OA cắt đường tròn (O') tại C. Tia $O'A$ cắt đường tròn (O) tại D. Chứng minh rằng

a) Tứ giác $OO'CD$ nội tiếp đường tròn.

b) Năm điểm O, O', B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải.



a) $\triangle OAD$ có $OA = OD \Rightarrow \triangle OAD$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{AOD} = \dfrac{180^\circ - \widehat{ODA}}{2}$.
$\triangle O'AC$ có $O'A = O'C \Rightarrow \triangle O'AC$ cân tại O', suy ra $\widehat{O'AC} = \widehat{O'CA}$ và $\widehat{AO'C} = \dfrac{180^\circ - \widehat{O'AC}}{2}$.

Từ $\begin{cases} \widehat{AOD} = \dfrac{180^\circ - \widehat{OAD}}{2} \\ \widehat{AO'C} = \dfrac{180^\circ - \widehat{O'AC}}{2} \\ \widehat{OAD} = \widehat{O'AC} \end{cases} \Rightarrow \widehat{AOD} = \widehat{AO'C} \Rightarrow \widehat{DOC} = \widehat{DO'C}$.

Tứ giác $OO'CD$ có $\widehat{DOC} = \widehat{DO'C} \Rightarrow OO'CD$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh liên tiếp cùng nhìn 1 cạnh dưới 1 cạnh dưới 2 góc bằng nhau).

b) Xét $\triangle OAO'$ và $\triangle OBO'$ có

$$\begin{cases} OA = OB \\ O'A = O'B \\ OO' \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \triangle OAO' = \triangle OBO' \text{ (c-c-c)} \Rightarrow \widehat{OAO'} = \widehat{OBO'}.$$

Mặt khác $\widehat{O'AC} = \widehat{O'CA} \Rightarrow \widehat{OBO'} + \widehat{O'CO} = \widehat{OBO'} + \widehat{O'CA} = \widehat{OAO'} + \widehat{O'AC} = 180^\circ$.
Suy ra O, B, O', C cùng nằm trên một đường tròn (định lí đảo), mà O, O', C, D cùng nằm trên một đường tròn ($OO'CD$ là tứ giác nội tiếp), suy ra O, O', B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.

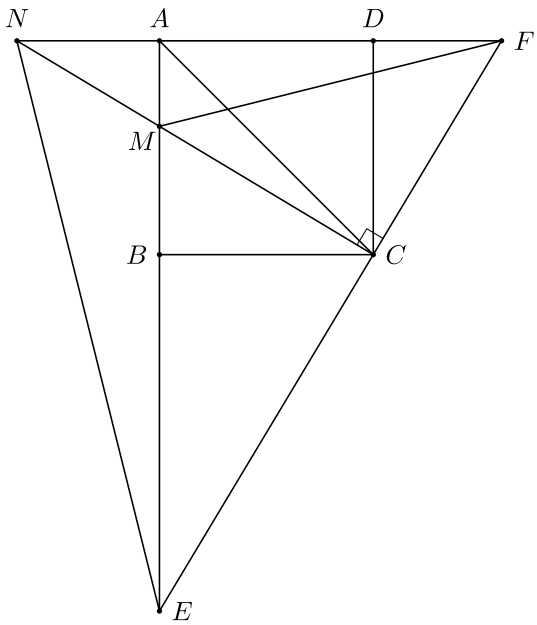
□

Bài 88. Cho hình vuông $ABCD$, điểm M trên cạnh AB. Đường thẳng qua C và vuông góc với CM cắt AB, AD lần lượt tại E và F. Tia CM cắt đường thẳng AD tại N. Chứng minh rằng

a) các tứ giác $AMCF$, $ANEC$ nội tiếp.

b) $CM + CN = EF$.

Lời giải.



a) Tứ giác $AMCF$ có $\widehat{MAF} = \widehat{MCF} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MAF} + \widehat{MCF} = 180^\circ \Rightarrow AMCF$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180°).
Tứ giác $ACEN$ có $\widehat{NAE} = \widehat{NCE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{NAE} + \widehat{NCE} = 180^\circ \Rightarrow ACEN$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180°).

b) Do $ABCD$ là hình vuông nên $\widehat{BAC} = \widehat{DAC} = \dfrac{BAD}{2} = 45^\circ$.
Tứ giác $AMCF$ nội tiếp, suy ra $\widehat{CFM} = \widehat{CAM} = 45^\circ$.
$\triangle CMF$ vuông tại C có $\widehat{CFM} = 45^\circ \Rightarrow \triangle CFM$ vuông cân, suy ra $CM = CF$. (1)
Tứ giác $ANEC$ nội tiếp, suy ra $\widehat{CNE} = \widehat{CAE} = 45^\circ$.
$\triangle CNE$ vuông tại C có $\widehat{CNE} = 45^\circ \Rightarrow \triangle CNE$ vuông cân tại C, suy ra $CN = CE$ (2).
Từ (1) và (2), suy ra $CM + CN = CF + CE = EF$.

□

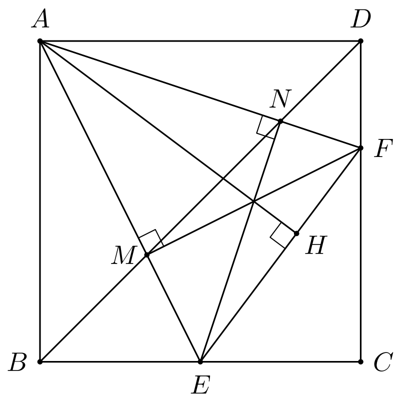
Bài 89. Cho hình vuông $ABCD$. E và F là hai điểm di động theo thứ tự nằm giữa B, C và C, D sao cho $\widehat{EAF} = 45^\circ$. Hai đoạn thẳng AE và AF lần lượt cắt BD tại M và N. Vẽ $AH \perp EF$. Chứng minh rằng

a) 3 đường thẳng AH, FM, EN đồng qui.

b) Đường thẳng EF luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

c) $S_{AMN} = S_{MNFE}$.

Lời giải.



a) Vì BD là đường chéo của hình vuông $ABCD$ nên

$$\widehat{ABD} = \widehat{CBD} = \widehat{ADB} = \widehat{CDB} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

Tứ giác $ABEN$ có A, B là hai đỉnh liên tiếp và $\widehat{EAN} = \widehat{NBE} = 45^\circ \Rightarrow ABEN$ là tứ giác nội tiếp (2 đỉnh liên tiếp cùng nhìn 1 cạnh dưới 2 góc bằng nhau), suy ra

$$\widehat{ANE} + \widehat{ABE} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{ANE} = 90^\circ \Rightarrow EN \perp AF.$$

Tứ giác $ADFM$ có A, D là 2 đỉnh liên tiếp và $\widehat{MAF} = \widehat{MDF} = 45^\circ \Rightarrow ADFM$ là tứ giác nội tiếp (2 đỉnh liên tiếp cùng nhìn 1 cạnh dưới 2 góc bằng nhau), suy ra $\widehat{AMF} + \widehat{ADF} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{AMF} = 90^\circ \Rightarrow FM \perp AE$.

AH, EN và FM là ba đường cao của $\triangle AEF \Rightarrow AH$, EN, FM đồng qui.

b) Tứ giác $MEFN$ có $\widehat{EMF} = \widehat{NEF} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EMF} + \widehat{NEF} = 180^\circ \Rightarrow MEFN$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180°), suy ra $\widehat{MEF} = \widehat{ANB}$. (1)

Từ $ABEN$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{ANB} = \widehat{AEB}$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\widehat{AEB} = \widehat{AEH}$.

Xét $\triangle ABE$ và $\triangle AHE$ có

$$\begin{cases} \widehat{AHE} = \widehat{ABE} = 90^\circ \\ AE \text{ chung} \\ \widehat{AEB} = \widehat{AEH} \text{ (chứng minh trên)} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABE = \triangle AHE \text{ (cạnh huyền-góc nhọn).}$$

Suy ra $AB = AH$.

Như vậy EF luôn tiếp xúc với đường tròn tâm A bán kính AB không đổi.

c) $\triangle ANE$ vuông tại N có $\dfrac{AN}{AE}=\cos\widehat{NAE}=\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\triangle AMF$ vuông tại M có $\dfrac{AM}{AF}=\cos\widehat{MAF}=\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Từ $\begin{cases}\dfrac{S_{AMN}}{S_{AMF}}=\dfrac{AN}{AF}\\ \dfrac{S_{AMF}}{S_{AEF}}=\dfrac{AM}{AE}\end{cases}\Rightarrow\dfrac{S_{AMN}}{S_{AEF}}=\dfrac{S_{AMN}}{S_{AMF}}\cdot\dfrac{S_{AMF}}{S_{AEF}}=\dfrac{AN}{AF}\cdot\dfrac{AM}{AE}=\dfrac{AN}{AE}\cdot\dfrac{AM}{AF}=\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $S_{AEF}=2S_{AMN}\Leftrightarrow S_{AMN}+S_{MNFE}=2S_{AMN}\Leftrightarrow S_{AMN}=S_{MNFE}$.

□

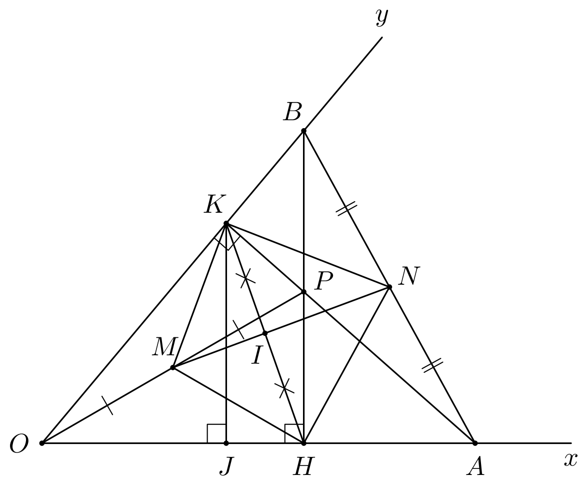
Bài 90. Cho hai điểm O và P cố định. Một góc $\widehat{xOy}$ quay quanh điểm O sao cho P luôn nằm trong góc đó. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của P trên Ox và Oy. Đường thẳng PK cắt Ox tại A, đường thẳng PH cắt Oy tại B.

a) Chứng minh rằng HK và AB có độ dài không đổi.

b) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của OP và AB. Chứng minh rằng tứ giác $MKNH$ nội tiếp đường tròn.

c) Chứng minh rằng trung điểm I của HK di động trên một đường tròn cố định.

Lời giải.



a) Đặt $\widehat{xOy}=\alpha$.

Tam giác OKP và $\triangle OHP$ vuông tại K và H có hai trung tuyến KM, HM ứng với cạnh huyền $OP\Rightarrow MK=MH=MO=MP=\dfrac{OP}{2}\Rightarrow OHPK$ là tứ giác nội tiếp đường tròn $\left(M;\dfrac{OP}{2}\right)$.

Tam giác KAB và $\triangle HAB$ vuông tại K và H có hai trung tuyến KN, HN ứng với cạnh huyền $AB\Rightarrow NK=NH=NA=NB=\dfrac{AB}{2}\Rightarrow ABKH$ là tứ giác nội tiếp đường tròn $\left(N;\dfrac{AB}{2}\right)$.

Vì I là trung điểm của $HK \Rightarrow MI \perp HK$ (tính chất đường kính và dây cung).

$\triangle MHK$ có $MH = MK \Rightarrow \triangle MHK$ cân tại $M \Rightarrow MI$ là đường cao đồng thời là phân giác của kẻ từ M của $\triangle MHK$.

Mà $\widehat{HOK} = \dfrac{1}{2}\widehat{HMK}$ (góc nội tiếp bằng một nửa góc ở tâm).

Suy ra $\widehat{HMI} = \widehat{KMI} = \dfrac{\widehat{MHK}}{2} = \widehat{HOK} = \alpha$.

Ta có $HK = 2KI = 2MK\sin\widehat{IMK} = 2\cdot\dfrac{OP}{2}\cdot\sin\alpha = OP\sin\alpha$.

Vì OP cố định và α không đổi nên HK có độ dài không đổi.

Ta có $\widehat{HNK} = 2\widehat{KAH} = 2\left(90^\circ - \widehat{KOA}\right) = 2\,(90^\circ - \alpha)$.

$\triangle NHK$ cân tại N (do $NH = NK$) có NI là trung tuyến đồng thời là đường cao và phân giác kẻ từ N.

Ta có $\widehat{INK} = \widehat{INH} = \dfrac{\widehat{HNK}}{2} = \dfrac{2(90^\circ - \alpha)}{2} = 90^\circ - \alpha$.

$\triangle NIH$ có $IH = NH\sin\widehat{INH} = \dfrac{AB}{2}\sin\,(90^\circ - \alpha) = \dfrac{AB}{2}\cos\alpha$.

Suy ra $AB = \dfrac{2IH}{\cos\alpha} = \dfrac{HK}{\cos\alpha} = \dfrac{OP\sin\alpha}{\cos\alpha} = OP\tan\alpha$.

Vì O, P cố định và α không đổi nên AB là không đổi.

b) Tứ giác $MHNK$ có $\widehat{KMH} + \widehat{KNH} = 2\alpha + 2\,(90^\circ - \alpha) = 180^\circ \Rightarrow MHNK$ là tứ giác nội tiếp (định lí đảo).

c) $\triangle MIK$ có $MI = MK\cos\widehat{IMK} = \dfrac{OP}{2}\cos\alpha = \dfrac{OP\cos\alpha}{2}$ không đổi.

Vậy trung điểm I của HK di động trên đường tròn tâm M bán kính $\dfrac{OP\cos\alpha}{2}$ là một đường tròn cố định.

⚠Nhận xét.

a) Có thể tính HK như sau. Kẻ $KJ \perp OH$.

- Tứ giác $OHPK$ nội tiếp, suy ra $\widehat{OPK} = \widehat{OHK} \Rightarrow \triangle KJH \backsim \triangle OKP$.
- Suy ra $\dfrac{HK}{OP} = \dfrac{KJ}{OK} \Rightarrow HK = OP\cdot\dfrac{KJ}{OK} = OP\sin\alpha$ không đổi.

b) Có thể tính AB như sau

- Đi chứng minh $\triangle HAB \backsim HPO$.
- Suy ra $\dfrac{AB}{OP} = \dfrac{BH}{OH} \Rightarrow AB = OP\tan\alpha$.

c) M, I, N thẳng hàng do cùng nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng HK.

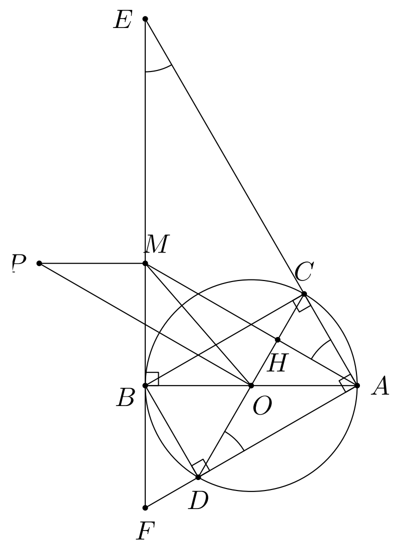
□

Bài 91. Cho đường tròn $(O;R)$, đường kính AB cố định và một đường kính CD quay quanh O. Các đường thẳng AC và AD cắt tiếp tuyến tại B của đường tròn tại E và F.

a) Chứng minh tứ giác $CDFE$ nội tiếp.

b) Gọi P là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDFE$. Chứng minh rằng điểm P di động trên một đường thẳng cố định.

Lời giải.



a) Ta có

$$\widehat{EBA} = 90^\circ \text{ (tính chất tiếp tuyến).}$$
$$\widehat{BCA} = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).}$$
$$\widehat{BDA} = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).}$$

Lại có $\begin{cases} AC \cdot AE = AB^2 \text{ (hệ thức lượng)} \\ AD \cdot AF = AB^2 \text{ (hệ thức lượng).} \end{cases}$

Suy ra $AC \cdot AE = AD \cdot AF$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{AE}{AF} \\ &\Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle AFE \ (c \cdot g \cdot c) \\ &\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{EFD} \\ &\Rightarrow 180^\circ - \widehat{ECD} = \widehat{EFD} \\ &\Rightarrow \widehat{EFD} + \widehat{ECD} = 180^\circ. \end{aligned}$$

Suy ra tứ giác $CDFE$ nội tiếp. (Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180°)

b) Gọi M là trung điểm EF suy ra $PM \perp EF$, mà $AO \perp EF$ nên $PM \parallel AO$. (1)

Đặt H là giao điểm của CD và AM.

Xét $\triangle EAF$ vuông tại A có AM là trung tuyến

$$\Rightarrow ME = MA = MF$$

$$\begin{aligned}
&\text{(tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền)}\\
\Rightarrow\ & \triangle EMA \text{ cân tại M}\\
\Rightarrow\ & \widehat{MEA} = \widehat{MAE}
\end{aligned}$$

Lại có

$$\begin{aligned}
& \widehat{MEA} = \widehat{FEC} = \widehat{CDA} \text{ (do } \triangle ACD \sim \triangle AEF)\\
\Rightarrow\ & \widehat{MAE} = \widehat{CDA}\\
\Leftrightarrow\ & \widehat{HAC} = \widehat{CDA}. \quad (*)
\end{aligned}$$

Lại có $\widehat{DCA} = \widehat{ACH}$, kết hợp với $(*)$ suy ra $\triangle CHA \sim \triangle CAD \Rightarrow \widehat{CHA} = 90°$.
Suy ra $MA \perp CD$, mà $PO \perp CD$ suy ra $MA \parallel PO$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $OAMP$ là hình bình hành, suy ra $MP = OA$.
Vậy P di động trên đường thẳng song song EF và cách EF một đoạn $OA = R$.

□

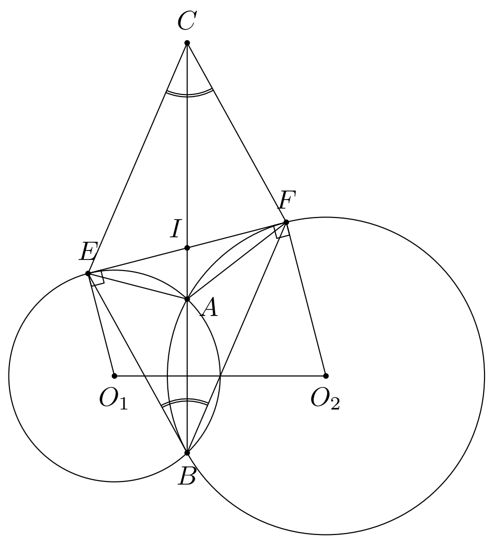
Bài 92. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B. Gọi EF là một tiếp tuyến chung của chúng và AB cắt EF tại I.

a) Chứng minh rằng $\triangle IEA \sim \triangle IBE$.

b) Chứng minh rằng I là trung điểm EF.

c) Gọi C là điểm đối xứng của B qua I. Chứng minh rằng tứ giác $AECF$ nội tiếp.

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{IEA}$ là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung EA.
$\widehat{EBA}$ là góc nội tiếp chắn cung EA.
Suy ra $\widehat{IEA} = \widehat{EBA} = \widehat{EBI}$.
Lại có $\widehat{EIA} = \widehat{EIB}$.
Kết hợp hai ý trên suy ra $\triangle IEA \sim \triangle IBE$. $(g \cdot g)$

b) Do $\triangle IEA \sim \triangle IBE \Rightarrow \dfrac{EI}{AI} = \dfrac{BI}{EI} \Rightarrow IE^2 = IA \cdot IB$. (1)
Ta có $\widehat{IFA} = \widehat{ABF} = \widehat{IBF}$ (cùng chắn cung EA) và $\widehat{AIF} = \widehat{BIF}$.
Suy ra $\triangle IFA \sim \triangle IBF$ $(g \cdot g) \Rightarrow \dfrac{IF}{IA} = \dfrac{IB}{IF} \Rightarrow IF^2 = IA \cdot IB$. (2)
Từ (1), (2) suy ra $IE^2 = IF^2 \Leftrightarrow IE = IF$ hay I là trung điểm EF.

c) Dễ thấy I là trung điểm của hai đường chéo EF và CB trong tứ giác $CEBF$.
Suy ra tứ giác $CEBF$ là hình bình hành nên $\widehat{ECF} = \widehat{EBF}$.
Ta có $\begin{cases} \widehat{FEA} = \widehat{EBA} \\ \widehat{EFA} = \widehat{FBA}. \end{cases}$
Suy ra

$$\begin{aligned} \widehat{EBA} + \widehat{FBA} &= \widehat{FEA} + \widehat{EFA} \\ \widehat{EBF} &= 180^\circ - \widehat{EAF} \\ &\quad \text{(tổng ba góc trong tam giác bằng } 180^\circ\text{)} \\ \widehat{EBF} + \widehat{EAF} &= 180^\circ \\ \widehat{ECF} + \widehat{EAF} &= 180^\circ. \end{aligned}$$

Vậy tứ giác $EAFC$ nội tiếp. (Tứ giác có 2 góc đối có tổng số đo bằng 180°)

□

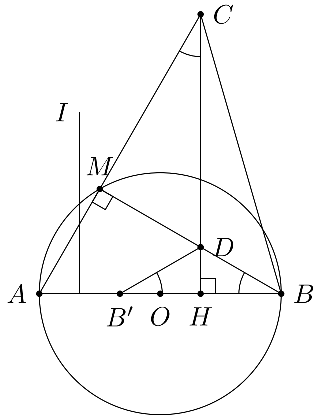
Bài 93. Cho nửa đường tròn đường kính AB và một đường thẳng d vuông góc với AB tại H. M là một điểm di động trên nửa đường tròn. d cắt MA, MB lần lượt tại C và D.

a) Chứng minh rằng $HC \cdot HD = HA \cdot HB$.

b) Gọi B' là điểm đối xứng của B qua H. Chứng minh $ACDB'$ nội tiếp.

c) Khi M di động trên đường tròn (O), tâm I của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ADC$ chạy trên đường nào?

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{AMB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).
Lại có $\widehat{ACH} = 90° - \widehat{CAH} = \widehat{MBA}$.
Xét hai tam giác CHA và BHD ta có
$\begin{cases} \widehat{DHB} = \widehat{CHA} = 90° \\ \widehat{ACH} = \widehat{MBA} = \widehat{DBH} \text{ (chứng minh trên).} \end{cases}$
Suy ra $\triangle CHA \sim \triangle BHD$ $(g \cdot g) \Rightarrow \dfrac{HC}{HA} = \dfrac{HB}{HD}$
$\Leftrightarrow HC \cdot HD = HA \cdot HB$.

b) Do $DH \perp BB'$ tại H và H là trung điểm BB' (đề cho) nên tam giác DBB' cân tại D.
Suy ra $\widehat{DBB'} = \widehat{DB'B} = \widehat{ACD}$ (cmt).
Vậy tứ giác $AB'DC$ nội tiếp. (Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối của đỉnh đó)

c) Do tứ giác $ACDB'$ nội tiếp nên tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $AB'C$ suy ra I thuộc đường trung trực của AB' cố định.

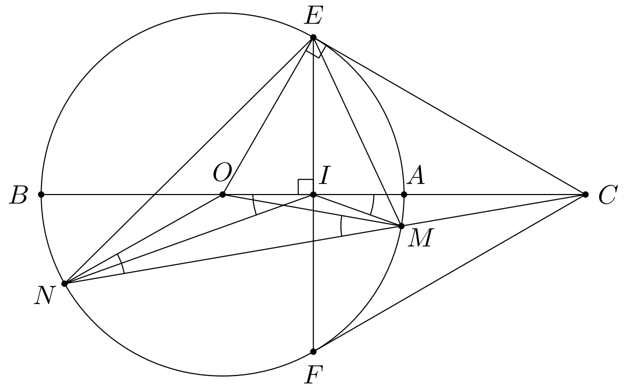
□

Bài 94. Cho đường tròn (O) và một điểm C ở ngoài đường tròn. Từ C kẻ hai tiếp tuyến CE, CF và cát tuyến CMN tới đường tròn. Đường thẳng nối C và O cắt đường tròn tại hai điểm A và B. Gọi I là giao điểm của AB với EF. Chứng minh rằng

a) Bốn điểm O, I, M, N cùng thuộc một đường tròn.

b) $\widehat{AIM} = \widehat{BIN}$.

Lời giải.



a) Ta có $EC^2 = CI \cdot CO$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông OEC). (1)

Xét hai tam giác CEN và CEM, ta có $\begin{cases} \widehat{ECM} = \widehat{ECN} \\ \widehat{MEC} = \widehat{ENM} \text{ (cùng chắn cung } EM). \end{cases}$

Suy ra $\triangle CEM \sim \triangle CNE$ $(g \cdot g) \Rightarrow CE^2 = CM \cdot CN$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $CM \cdot CN = CI \cdot CO \Rightarrow \triangle CMI \sim \triangle CON$ $(g \cdot g) \Rightarrow \widehat{CIM} = \widehat{ONM}$.

Vậy tứ giác $ONMI$ nội tiếp hay bốn điểm O, N, M, I cùng thuộc một đường tròn.

b) Ta có

$$\begin{aligned} \widehat{AIM} &= \widehat{ONM} \\ &= \widehat{OMN} \text{ (tam giác } OMN \text{ cân tại } O) \\ &= \widehat{OIN} \text{ (cùng chắn cung } ON) \\ &= \widehat{BIN}. \end{aligned}$$

□

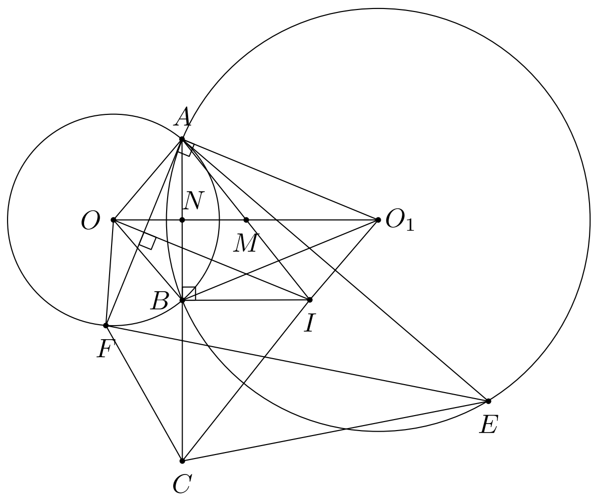
Bài 95. Cho hai đường tròn (O) và (O_1) cắt nhau tại A và B. Các tiếp tuyến tại A của (O) và (O_1) tương ứng cắt (O_1) và (O) lần lượt tại E và F. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle AEF$.

a) Chứng minh rằng tứ giác OAO_1I là hình bình hành và $OO_1 \parallel BI$.

b) Chứng minh rằng bốn điểm O, B, I, O_1 cùng thuộc một đường tròn.

c) Kéo dài AB về phía B một đoạn $CB = AB$. Chứng minh rằng tứ giác $AECF$ nội tiếp.

Lời giải.



a) Ta có $OA = OF$ và $IA = IF$ (giả thiết).

$\Rightarrow OI$ là trung trực của AF.

$\Rightarrow OI \perp AF$ mà $O_1A \perp AF$ (giả thiết)

$\Rightarrow OI \parallel O_1A$. (1)

Lại có $O_1A = O_1E$ và $IA = IE$ (giả thiết).

$\Rightarrow O_1I$ là trung trực của AE.

$\Rightarrow O_1I \perp AE$ mà $OA \perp AE$ (giả thiết)

$\Rightarrow O_1I \parallel OA$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OAO_1I$ là hình bình hành (tứ giác có các cặp cạnh đối song song).

Gọi M là giao điểm của AI và $OO_1 \Rightarrow M$ là trung điểm của AI.

Lại có OO_1 là trung trực của AB.

Gọi N là giao điểm của AB và $OO_1 \Rightarrow N$ là trung điểm của AB.

Xét $\triangle IAB$ có M, N lần lượt là trung điểm của AI, AB.

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của tam giác $ABI \Rightarrow MN \parallel BI \Rightarrow OO_1 \parallel BI$.

b) Ta có $OA = O_1I$ (chứng minh trên) và $OA = OB$ (giả thiết) $\Rightarrow O_1I = OB$.

Mà: $OIBO_1$ là hình thang ($OO_1 \parallel BI$).

$\Rightarrow OIBO_1$ là hình thang cân (hình thang có 2 đường chéo bằng nhau).

$\Rightarrow$ 4 điểm O, B, I, O_1 cùng thuộc một đường tròn.

c) Ta có $OO_1 \parallel BI$ và $OO_1 \perp AB$ (chứng minh trên) $\Rightarrow BI \perp AB$.

$\Rightarrow BI \perp AC$ mà B là trung điểm của AC (giả thiết).

$\Rightarrow BI$ là trung trực của AC.

$\Rightarrow IA = IC$ mà $IA = IE = IF$ (giả thiết).

$\Rightarrow IA = IC = IE = IF$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $AECF$ nội tiếp (tứ giác có 4 đỉnh cùng cách đều một điểm).

□

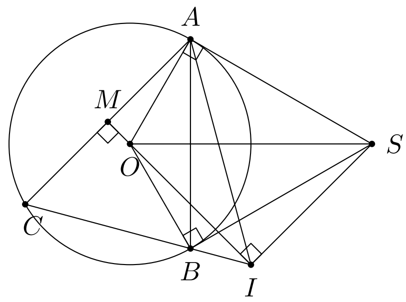
Bài 96. Cho đường tròn (O) và hai tiếp tuyến SA, SB của đường tròn. Kẻ dây cung BC. Đường kính vuông góc với dây AC cắt BC tại I. Chứng minh

a) 4 điểm S, A, I, B nằm trên một đường tròn.

b) Tứ giác $SAOI$ nội tiếp.

c) $SI \parallel AC$.

Lời giải.



a) Gọi M là trung điểm AC suy ra $OM \perp AC$ hay M, O, I thẳng hàng.
Suy ra tam giác IAC là tam giác cân tại I.
Lại có tam giác SAB cân tại S và $\widehat{ACI} = \widehat{BAS}$ (cùng chắn cung AB).
Suy ra hai tam giác cân ASB và AIC đồng dạng $(g{\cdot}g)$ suy ra $\widehat{ASB} = \widehat{CIA} \Rightarrow \widehat{ASB} = \widehat{BIA}$.
Vậy tứ giác $ASIB$ nội tiếp. (Tứ giác có 2 đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc bằng nhau)

b) Ta có $\widehat{OAS} = \widehat{OBS} = 90^\circ$ (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{OAS} + \widehat{OBS} = 180^\circ$.
$\Rightarrow$ Tứ giác $OASB$ nội tiếp (tứ giác có hai góc đối nhau có tổng số đo bằng 180°).
$\Rightarrow$ 4 điểm O, A, S, B nằm trên một đường tròn.
Mà 4 điểm S, A, I, B nằm trên một đường tròn (chứng minh trên).
$\Rightarrow$ 5 điểm S, A, I, O, B nằm trên một đường tròn.
Vậy tứ giác $SAOI$ nội tiếp đường tròn đường kính SO.

c) Ta có OI là trung trực của AC (giả thiết) $\Rightarrow OI \perp AC$.
Lại có $\widehat{OIS} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính OS).
$\Rightarrow SI \perp OI \Rightarrow AC \parallel SI$.

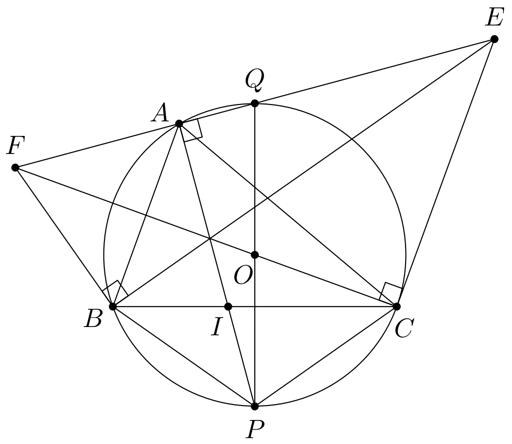
□

Bài 97. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O). Tia phân giác của góc BAC cắt BC tại I, cắt đường tròn (O) tại P. Kẻ đường kính PQ. Các tia phân giác của các góc ABC và ACB cắt AQ theo thứ tự tại E và F. Chứng minh rằng

a) $PC^2 = PI \cdot PA$.

b) 4 điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{PAC} = \widehat{PAB}$ mà $\widehat{PAB} = \widehat{PCI}$ (cùng chắn cung BP).
Suy ra $\widehat{PAC} = \widehat{PCB} = \widehat{PCI}$
Xét $\triangle APC$ và $\triangle CPI$, ta có $\begin{cases} \widehat{PAC} = \widehat{PCI} \\ \widehat{APC} \text{ (chung)} \end{cases}$
$\Rightarrow \triangle APC \sim \triangle CPI$ $(g \cdot g)$.
$\Rightarrow \dfrac{PA}{PC} = \dfrac{PC}{PI}$.
$\Rightarrow PC^2 = PI \cdot PA$.

b) Do QP là đường kính của $(O) \Rightarrow \widehat{QAP} = 90^\circ$
$\Rightarrow AP \perp AQ$.
Lại có AI là phân giác trong của $\widehat{BAC}$.
$\Rightarrow AQ$ là phân giác ngoài của $\widehat{BAC}$.
Tương tự, ta có

AP là phân giác ngoài của $\widehat{BAC}$.

CF là phân giác trong của $\widehat{ACB}$.

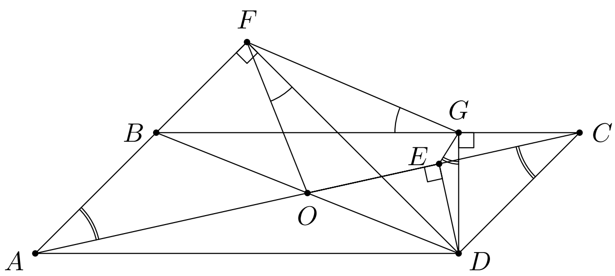
BE là phân giác trong của $\widehat{ABC}$.

$\Rightarrow E$, F lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp đối diện với đỉnh B, C.
$\Rightarrow CE$, BF lần lượt là phân giác ngoài của $\widehat{ACB}$, $\widehat{ABC}$.
$\Rightarrow CE \perp CF$, $BF \perp BE \Rightarrow \widehat{ECF} = \widehat{EBF} = 90^\circ$.
$\Rightarrow$ Tứ giác $BCEF$ có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại một góc bằng nhau.
$\Rightarrow$ Tứ giác $BCEF$ nội tiếp hay 4 điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.

□

Bài 98. Hình bình hành $ABCD$ có góc tù B, gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Vẽ DE vuông góc AC, DF vuông góc AB, DG vuông góc BC. Chứng minh rằng $OEGF$ nội tiếp đường tròn.

Lời giải.



Ta có $\widehat{BFD} = \widehat{BGD} = 90^\circ$ (giả thiết).

$\Rightarrow$ Tứ giác $BDGF$ nội tiếp đường tròn đường kính BD.

(Tứ giác có đỉnh kề nhau cùng nhìn một cạnh chứa hai đỉnh còn lại một góc 90°)

$\Rightarrow \widehat{BGF} = \widehat{BDF}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BF). (1)

Mà hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo (giả thiết).

$\Rightarrow O$ là trung điểm của BD.

$\Rightarrow FO$ là đường trung tuyến của $\triangle BFD$ vuông tại $F \Rightarrow OF = OD \Rightarrow \triangle OFD$ cân tại O

$\Rightarrow \widehat{OFD} = \widehat{ODF}$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{OFD} = \widehat{BGF}$.

Ta có $\widehat{DEC} = \widehat{DGC} = 90^\circ$ (giả thiết).

$\Rightarrow$ Tứ giác $DEGC$ nội tiếp đường tròn đường kính CD.

(Tứ giác có đỉnh kề nhau cùng nhìn một cạnh chứa hai đỉnh còn lại một góc 90°)

$\Rightarrow \widehat{EGD} = \widehat{ECD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung ED).

Mà $\widehat{ECD} = \widehat{OAF}$ (so le trong do $AB \parallel CD$).

$\Rightarrow \widehat{EGD} = \widehat{OAF}$.

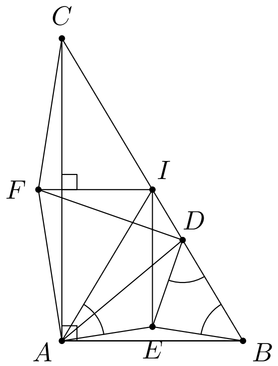
Ta có

$$\begin{aligned}
\widehat{FOE} &= \widehat{OAF} + \widehat{AFO} \\
&= \widehat{DCE} + 90^\circ - \widehat{OFD} \\
&= \widehat{EGD} + 90^\circ - \widehat{FGB} \\
&= 90^\circ - \widehat{EGB} + 90^\circ - \widehat{FGB} \\
&= 180^\circ - (\widehat{EGB} + \widehat{FGB}) \\
&= 180^\circ - \widehat{EGF} \\
\Rightarrow \widehat{FOE} + \widehat{EGF} &= 180^\circ.
\end{aligned}$$

Vậy tứ giác $OEGF$ nội tiếp. (Tứ giác có tổng hai góc đối nhau bằng $180°$) □

Bài 99. Cho tam giác ABC vuông tại A có I là trung điểm BC, D là điểm bất kỳ trên đoạn thẳng BC. Gọi E, F là tâm đường tròn ngoại tiếp ABD, ACD. Chứng minh rằng năm điểm A, E, D, I, F thuộc một đường tròn.

Lời giải.



Ta có $FA = FC$ và $IA = IC$ (giả thiết) $\Rightarrow I$, F cách đều A, C.

$\Rightarrow IF$ là trung trực của AC (chứng minh trên) $\Rightarrow \widehat{ICF} = \widehat{IAF}$.

Mà $\widehat{ICF} = \widehat{CDF}$ ($\triangle FCD$ cân tại F do $FC = FD$).

$\Rightarrow \widehat{IAF} = \widehat{CDF} = \alpha$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $AFID$ nội tiếp.

(Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc α)

$\Rightarrow$ 4 điểm A, F, I, D thuộc một đường tròn.

Ta có $EA = EB$ và $IA = IB$ (giả thiết) $\Rightarrow I$, E cách đều A, B.

$\Rightarrow IE$ là trung trực của AB (chứng minh trên) $\Rightarrow \widehat{EAI} = \widehat{EBI}$.

Mà $\widehat{EBD} = \widehat{EDB}$ ($\triangle EBD$ cân tại E do $EB = ED$).

$\Rightarrow \widehat{IAE} = \widehat{EDB}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AEDI$ nội tiếp.

(Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối diện của đỉnh đó)

$\Rightarrow$ 4 điểm A, E, D, I thuộc một đường tròn.

Mà 4 điểm A, F, I, D thuộc một đường tròn (chứng minh trên).

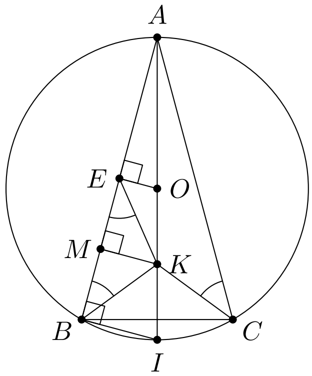
$\Rightarrow$ 5 điểm A, E, D, I, F thuộc một đường tròn. □

Bài 100. Cho $\triangle ABC$ cân tại A nội tiếp đường tròn tâm O đường kính AI. Gọi E là trung điểm AB, K là trung điểm OI.

a) Chứng minh rằng $\triangle EKB$ cân.

b) Chứng minh rằng $AEKC$ nội tiếp đường tròn.

Lời giải.



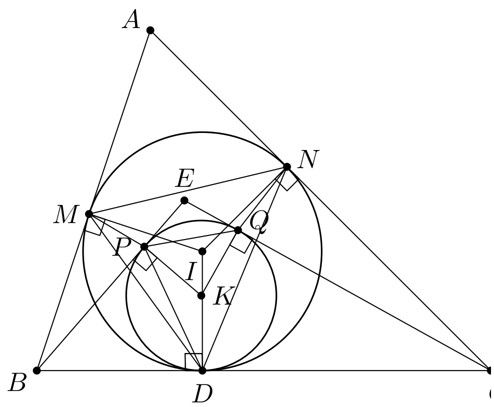
a) Ta có $\widehat{IBA} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) và $OE \perp AB$.
Suy ra $EO \parallel BI \Rightarrow EOIB$ là hình thang.
Gọi M là trung điểm EB, suy ra MK là đường trung bình của hình thang $EOIB$.
Suy ra $MK \parallel EO \Rightarrow MK \perp BE$.
Xét tam giác EKB có MK vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao nên tam giác EKB cân tại K.

b) Do AK nằm trên đường trung trực của BC nên $KB = KC$.
Xét hai tam giác BKA và CKA ta có $\begin{cases} AB = AC \\ KB = KC \\ AK \text{ (là cạnh chung).} \end{cases}$
$\Rightarrow \triangle ABK = \triangle ACK\ (c \cdot c \cdot c) \Rightarrow \widehat{ACK} = \widehat{ABK} = \widehat{BEK}$.
Suy ra tứ giác $AEKC$ nội tiếp.
(Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối của đỉnh đó)

□

Bài 101. Cho $\triangle ABC$ có đường tròn nội tiếp tiếp xúc AB, BC, CA tại M, D, N. Lấy điểm E thuộc miền trong $\triangle ABC$ sao cho đường tròn nội tiếp ΔEBC cũng tiếp xúc với BC tại D và tiếp xúc EB, EC lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng $MNPQ$ nội tiếp đường tròn.

Lời giải.



Ta có

$$\begin{aligned}
\widehat{PMN} &= \widehat{PMI} + \widehat{IMN} \\
&= \frac{1}{2}\widehat{MBP} + \frac{180^\circ - \widehat{MIN}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\widehat{MBD} - \widehat{PBD}\right) + \frac{1}{2}\left[180^\circ - \left(360^\circ - \widehat{MID} - \widehat{DIN}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\widehat{MBD} - \widehat{PBD}\right) + \frac{1}{2}\left[180^\circ - \left(\widehat{MBD} + \widehat{NCD}\right)\right] \\
&= -\frac{1}{2}\widehat{PBD} + 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{NCD} \\
&= 90^\circ - \frac{1}{2}\left(\widehat{PBD} + \widehat{NCD}\right) \\
&= 90^\circ - \frac{1}{2}\left(180^\circ - \widehat{PEQ} - \widehat{ECD} + \widehat{NCD}\right) \\
&= 90^\circ - 90^\circ - \frac{1}{2}\left(-\widehat{PEQ} + \widehat{NCQ}\right) \\
&= \frac{1}{2}\widehat{PEQ} - \frac{1}{2}\widehat{NCQ} \\
&= \frac{1}{2}\widehat{PEQ} - \frac{1}{2}\left(180^\circ - 2\widehat{NQC}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(180^\circ - 2\widehat{EQP}\right) - \frac{1}{2}\left(180^\circ - 2\widehat{NQC}\right) \\
&= -\widehat{EQP} + \widehat{NQC} \\
&= 180^\circ - \widehat{EQN} - \widehat{EQP} \\
&= 180^\circ - \left(\widehat{EQN} + \widehat{EQP}\right) \\
&= 180^\circ - \widehat{PQN} \\
\Rightarrow \widehat{PMN} + \widehat{PQN} &= 180^\circ.
\end{aligned}$$

Vậy tứ giác $MNPQ$ nội tiếp. (Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180°) □

8 ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP. ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

8.1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

8.1.1 Định nghĩa

a) Đường tròn đi qua tất cả các đỉnh của một đa giác được gọi là đường tròn ngoại tiếp đa giác, đa giác đó được gọi là đa giác nội tiếp đường tròn.

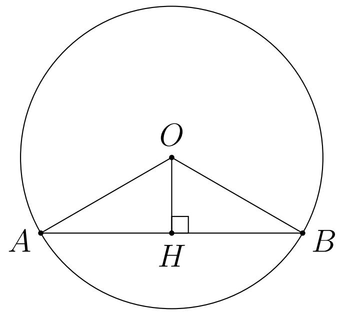
b) Đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh của một đa giác được gọi là đường tròn nội tiếp đa giác, đa giác đó được gọi là đa giác ngoại tiếp đường tròn.

8.1.2 Định lí

Bất kỳ đa giác đều nào cũng có một và chỉ một đường tròn ngoại tiếp, có một và chỉ một đường tròn nội tiếp.

Ví dụ 24. Trên đường tròn $(O;R)$ lấy $\overset{\frown}{AB}$ sao cho sđ $\overset{\frown}{AB} = 120°$. Tính độ dài AB theo R.

Lời giải.



Theo đề có sđ $\overset{\frown}{AB} = 120° \Rightarrow \widehat{AOB} = 120°$.

Kẻ OH là đường cao của ΔOAB mà ΔOAB cân (do $OA = OB = R$) nên OH vừa là trung tuyến, vừa là đường phân giác $\Rightarrow \widehat{HOB} = 60°$.

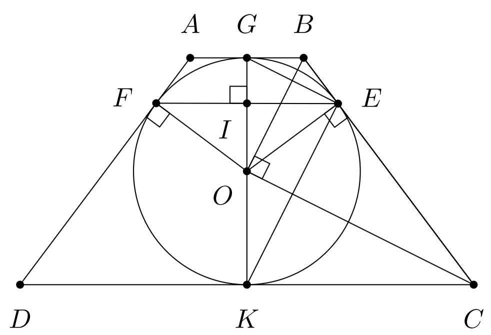
Xét ΔOHB vuông tại H $\sin\widehat{HOB} = \dfrac{HB}{OB} \Rightarrow HB = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Có $AB = AH + HB = 2HB = R\sqrt{3}$. □

8.2 BÀI TẬP

Bài 102. Tính các cạnh của một hình thang cân ngoại tiếp đường tròn $(O;10\text{ cm})$. Biết khoảng cách giữa hai tiếp điểm trên cạnh bên bằng 16 cm.

Lời giải.



Gọi hình thang cân ngoại tiếp hình tròn là $ABCD$.

Gọi F, E lần lượt là hai tiếp điểm đường tròn với AD, BC của hình thang.

Gọi G, K lần lượt là hai tiếp điểm đường tròn với AB, CD.

Ta có $\widehat{AFE} + \widehat{OFE} = 90°$ và $\widehat{BEF} + \widehat{FEO} = 90°$

Mà $\widehat{FEO} = \widehat{OFE}$ (do ΔOFE cân tại O) $\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{BEF}$.

Tứ giác $ABEF$ có $\widehat{AFE} + \widehat{FEB} + \widehat{EBA} + \widehat{BAF} = 360°$ (Tổng các góc trong tứ giác)

$\Leftrightarrow 2(\widehat{AFE}+\widehat{FAB}) = 360^\circ \Leftrightarrow \widehat{AFE}+\widehat{FAB} = 180^\circ$ mà hai góc này trong cùng phía.

$\Rightarrow FE \parallel AB \parallel DC$.

Xét tứ giác $ABEF$ có

$$\begin{cases} FE \parallel AB \\ \widehat{FAB} = \widehat{EBA} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABEF$ là hình thang cân $\Rightarrow FA = BE$.

Có $GB = BE$ (do $\Delta OEB = \Delta OGB$ (c.h - c.g.v)).

Tương tự có $GA = FA$ (do $\Delta OGA = \Delta OFB$ (c.h - c.g.v)) mà $FA = BE \Rightarrow GA = GB$.

Xét ΔFAG và ΔEBG có

$$\begin{cases} FA = BE \\ \widehat{FAB} = \widehat{EBA} \\ GA = GB \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta FAG = \Delta EBG$ (c.g.c) $\Rightarrow FG = EG$.

Gọi I giao điểm của FE và OG.

Do $FG = EG$ và $OF = OE$ nên OG là đường trung trực của $FE \Rightarrow OG \perp FE$ tại I.

Áp dụng định lý Py-ta-go trong ΔOIE vuông tại I có

$OI^2 + IE^2 = OE^2 \Rightarrow OI = 6 \Rightarrow IK = 16$ cm.

Áp dụng định lý Ta-lét trong hình thang $GBCK$ có

$\dfrac{GI}{IK} = \dfrac{BE}{EC} \Leftrightarrow \dfrac{4}{16} = \dfrac{BE}{EC} \Leftrightarrow 4BE = EC$.

$\Rightarrow BC = BE + EC = 4BE + EC = 5BE$.

Có $\widehat{BOE} = \widehat{BOG}$ (do $\Delta OEB = \Delta OGB$) và $\widehat{EOC} = \widehat{COK}$ (do $\Delta OEC = \Delta OKC$).

Mà $\widehat{GOE} + \widehat{KOE} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BOC} = 90^\circ \Rightarrow OB \perp OC$.

Áp dụng định lý Py-ta-go trong ΔBOC vuông tại O có $OC^2 + OB^2 = BC^2$. (1)

Áp dụng định lý Py-ta-go trong ΔBEO vuông tại E và ΔOEC vuông tại E có

$OB^2 = BE^2 + OE^2$ và $OC^2 = OE^2 + EC^2 \Rightarrow OB^2 + OC^2 = 2OE^2 + BE^2 + EC^2$. (2)

Từ (1) và (2)

$\Rightarrow BC^2 = 2OE^2 + CE^2 + BE^2 \Leftrightarrow 25BE^2 = 2OE^2 + 16BE^2 + BE^2 \Leftrightarrow BE^2 = 25 \Rightarrow BE = 5$ cm.

$\Rightarrow BC = AD = 5BE = 25$ cm.

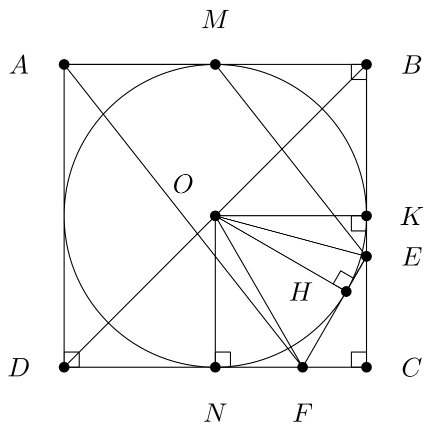
Có $AB = 2GB = 2BE = 10$ cm và $DC = 2KC = 2EC = 2 \cdot 4BE = 40$ cm. □

Bài 103. Đường (O) nội tiếp hình vuông $ABCD$, tiếp điểm trên AB là M. Một tiếp tuyến với đường tròn (O) cắt các cạnh BC, CD lần lượt ở E, F. Chứng minh rằng:

a) $\Delta DFO \backsim \Delta BOE$.

b) $ME \parallel AF$.

Lời giải.



a) Chứng minh $\Delta DFO \backsim \Delta BOE$.

Có $\widehat{EOH} = \widehat{EOK}$ và $\widehat{OEH} = \widehat{OEK}$ (do $\Delta EHO = \Delta EKO$).

Có $\widehat{FON} = \widehat{FOH}$ và $\widehat{OFN} = \widehat{OFH}$ (do $\Delta FNO = \Delta FHO$).

Ta có $\widehat{EOF} = \widehat{EOH} + \widehat{HOF} = \dfrac{1}{2}\left(\widehat{NOH} + \widehat{HOK}\right) = 45^\circ$.

Xét ΔDFO và ΔOFE

$$\begin{cases} \widehat{BDC} = \widehat{EOF} = 45^\circ \\ \widehat{OFN} = \widehat{OFH} \end{cases} \Rightarrow \Delta DFO \backsim \Delta OFE \text{ (g.g).}$$

Xét ΔBOE và ΔOFE

$$\begin{cases} \widehat{DBC} = \widehat{EOF} = 45^\circ \\ \widehat{OEK} = \widehat{OEH} \end{cases} \Rightarrow \Delta BOE \backsim \Delta OFE \text{ (g.g).}$$

$\Rightarrow \Delta DFO \backsim \Delta BOE$ (cùng đồng dạng với ΔOFE).

b) Chứng minh $ME \parallel AF$.

Do $\Delta DFO \backsim \Delta BOE$ (chứng minh câu a) $\Rightarrow \dfrac{DF}{OB} = \dfrac{DO}{BE}$.

Có $\begin{cases} OB = \sqrt{2}BM \\ DO = OB = \sqrt{2}BK = \dfrac{BC}{\sqrt{2}} = \dfrac{DA}{\sqrt{2}} \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{DF}{BM} = \dfrac{AD}{BE}$.

Xét ΔFAD và ΔMEB có

$$\begin{cases} \widehat{CDA} = \widehat{CBA} = 90^\circ \\ \dfrac{DF}{BM} = \dfrac{AD}{BE} \end{cases} \Rightarrow \Delta FAD \backsim \Delta MEB \text{(c.g.c)}$$

$\Rightarrow \widehat{FAD} = \widehat{MEB}$.

Có $\begin{cases} \widehat{FAD} + \widehat{FAB} = 90^\circ \\ \widehat{MEB} + \widehat{EMB} = 90^\circ \end{cases}$

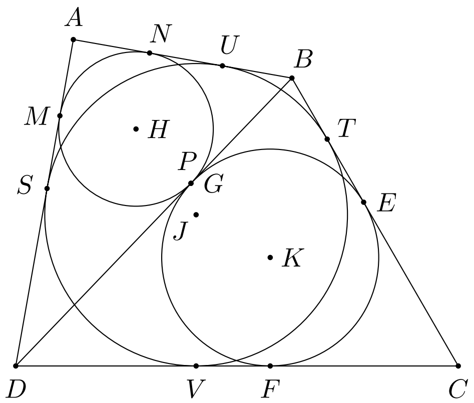
Mà $\widehat{FAD} = \widehat{MEB} \Rightarrow \widehat{FAB} = \widehat{EMB}$.

Do hai góc này ở vị trí đồng vị $\Rightarrow AF \parallel ME$.

□

Bài 104. Cho tứ giác $ABCD$, các đường tròn nội tiếp hai tam giác ABC, ADC tiếp xúc nhau. Chứng minh rằng các đường tròn nội tiếp hai tam giác BAD, BCD tiếp xúc nhau.

Lời giải.



Gọi (J) là đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$ và U, S, V, T lần lượt là các tiếp điểm tại AB, AD, DC, BC.

Gọi (H) là đường tròn nội tiếp ΔBAD và N, M, P lần lượt là các tiếp điểm tại AB, AD, BD.

Gọi (K) là đường tròn nội tiếp ΔBCD và G, F, E lần lượt là các tiếp điểm tại BD, DC, BC.

Áp dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có

$$\begin{aligned} 2DG &= DG + DF \\ &= DB - BG + DC - FC \\ &= DB + DC - (BG + FC) \\ &= DB + DC - (BE + EC) \\ &= DB + DC - BC. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2DP &= DP + DM \\ &= DB - BP + DA - AM \\ &= DB + DA - (BP + AM) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= DB + DA - (BN + AN) \\ &= DB + DA - AB. \end{aligned}$$

Ta có

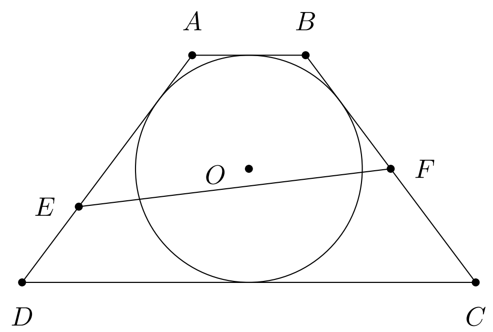
$$\begin{aligned} 2DG - 2DP &= DB + DC - BC - DB - DA + AB \\ &= DC + AB - BC - DA \\ &= DV + VC + AU + UB - BT - TC - AS - SD \\ &= (DV - SD) + (AU - AS) + (UB - BT) + (VC - TC) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow P \equiv G$.

$\Rightarrow$ Hai đường tròn nội tiếp ΔBAD và ΔBCD tiếp xúc nhau. □

Bài 105. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp một đường tròn. Chứng minh rằng nếu một đường thẳng chia tứ giác thành hai phần có diện tích bằng nhau và chu vi bằng nhau thì đường thẳng đó đi qua tâm của đường tròn.

Lời giải.



Gọi $(O; r)$ là đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$.
Gọi E và F lần lượt là giao điểm của đường thẳng hai cạnh AD, BC của tứ giác $ABCD$.
Gọi p_{ABFE}, p_{EFCD} lần lượt là chu vi của tứ giác $ABFE$ và tứ giác $EFCD$.
Theo giả thiết có $p_{ABFE} = p_{EFCD} = p$.
Có

$$\begin{aligned} S_{AEFB} &= S_{EOA} + S_{AOB} + S_{BOF} + S_{EOF} \\ &= \frac{1}{2}r(EA + AB + BF) + S_{EOF} \\ &= \frac{1}{2}r(EA + AB + BF + EF - EF) + S_{EOF} \\ &= \frac{pr}{2} + S_{EOF} - \frac{1}{2}r \cdot EF. \end{aligned}$$

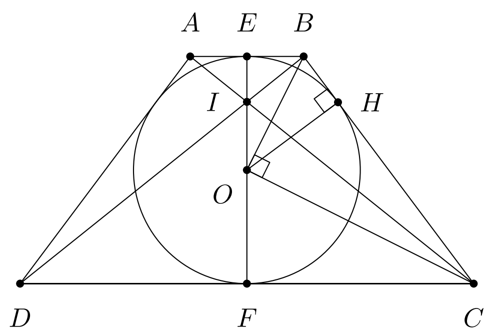
Có

$$\begin{aligned} S_{EFCD} &= S_{EOD} + S_{FOC} + S_{DOC} - S_{EOF} \\ &= \frac{1}{2}r(ED + FC + DC + EF - EF) - S_{EOF} \\ &= \frac{pr}{2} + S_{EOF} - \frac{1}{2}r \cdot EF. \end{aligned}$$

Theo giả thiết $S_{ABFE} = S_{EFCD}$ nên $S_{EOF} = 0 \Rightarrow E, O, F$ thẳng hàng.
Vậy đường thẳng EF đi qua O tức EF đi qua tâm đường tròn. □

Bài 106. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) ngoại tiếp đường tròn (O), tiếp điểm trên AB, CD theo thứ tự là E và F. Chứng minh rằng AC, BD, EF đồng qui.

Lời giải.



Gọi H là tiếp điểm của BC và đường tròn (O).
Ta có $BE = BH$ (vì $\triangle OEB = \triangle OHB$).
$CF = CH$ (vì $\triangle OFC = \triangle OHC$).
Ta có $2\widehat{BOH} + 2\widehat{COH} = 180° \Leftrightarrow \widehat{BOH} + \widehat{COH} = 90° \Leftrightarrow \widehat{BOC} = 90°$
$\Rightarrow \triangle BOC$ vuông tại O.
$\Rightarrow OH^2 = HB \cdot HC$ mà $BE = BH, CF = CH \Rightarrow BE \cdot CF = BH \cdot CH = r^2$ (r là bán kính đường tròn (O)).
Chứng minh tương tự $\Rightarrow AE \cdot DF = r^2$.
$\Rightarrow BE \cdot CF = AE \cdot DF \Rightarrow \dfrac{BE}{DF} = \dfrac{AE}{CF}$.
Gọi I là giao điểm của BD và EF.
Ta có $\dfrac{BE}{DF} = \dfrac{IE}{IF} \Rightarrow \dfrac{AE}{CF} = \dfrac{IE}{IF}$.
Xét $\triangle AIE$ và $\triangle CIF$, ta có

$$\begin{cases} \dfrac{AE}{CF} = \dfrac{IE}{IF} \\ \widehat{EAI} = \widehat{ICF} \end{cases} \Rightarrow \triangle AIE \backsim \triangle ICF \text{ (c.g.c)}$$

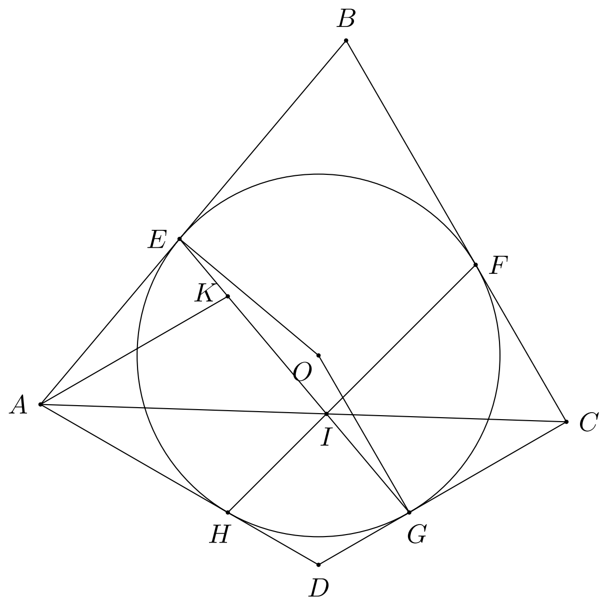
$\Rightarrow \widehat{EIA} = \widehat{FIC}$ (hai góc tương ứng) mà hai góc này nằm vị trí đối đỉnh.

$\Rightarrow A, I, C$ thẳng hàng mà I là giao điểm của BD và EF.

$\Rightarrow AC, BD, EF$ đồng qui. □

Bài 107. Chứng minh rằng trong một tứ giác ngoại tiếp đường tròn, các đường thẳng nối các tiếp điểm trên các cạnh đối đồng qui tại giao điểm các đường chéo của tứ giác.

Lời giải.



Gọi E, F, G, H lần lượt là tiếp điểm của các cạnh AB, BC, CD, AB với đường tròn O.

Gọi I là giao điểm của AC và EG.

Ta kẻ đường thẳng qua A sao cho song song với CD và cắt EG tại K.

Ta có

$$\begin{cases} \widehat{AEK} + \widehat{KEO} = 90^\circ \\ \widehat{IGD} + \widehat{IGO} = 90^\circ \end{cases}$$

mà $\widehat{OEK} = \widehat{OGI}$ (vì $\triangle OEG$ cân).

$\Rightarrow \widehat{AEK} = \widehat{IGD}$ mà $\widehat{AKE} = \widehat{IGD}$ (2 góc đồng vị).

$\Rightarrow \widehat{EKA} = \widehat{AEK} = \widehat{IGD} \Rightarrow AE = AK$ ($\triangle AEK$ cân).

$\Rightarrow \dfrac{IA}{IC} = \dfrac{AK}{CG} = \dfrac{AE}{CG}$ tức là I chia AC theo tỉ số $\dfrac{AE}{CG}$.

Gọi I' là giao điểm của AC và FH.

Chứng minh tương tự $\Rightarrow I'$ chia đoạn AC theo tỉ số $\dfrac{AH}{CF}$.

Nhưng $AE = AH, CG = CF$ nên I và I' chia đoạn AC theo cùng một tỉ số, do đó $I \equiv I'$.

Vậy F, I, H thẳng hàng, do đó AC đi qua giao điểm của EG và FH.

Chứng minh tương tự, BD đi qua I.

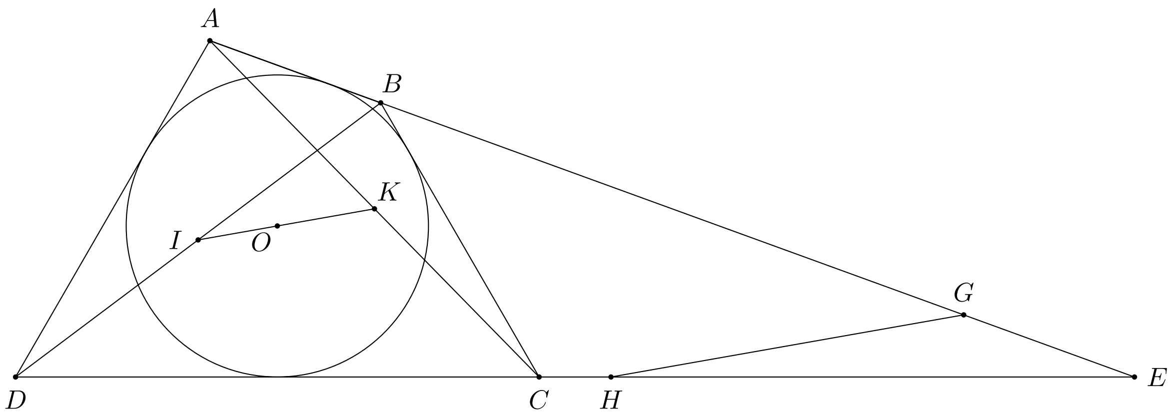
Vậy các đường thẳng nối các tiếp điểm trên các cạnh đối của một tứ giác ngoại tiếp đường tròn đồng qui tại giao điểm các đường chéo của tứ giác. □

Bài 108. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (O). Gọi I và K theo thứ tự là trung điểm của các đường chéo BD và AC. Chứng minh rằng

a) $S_{OAB} + S_{OCD} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD}$.

b) Ba điểm I, O, K thẳng hàng.

Lời giải.



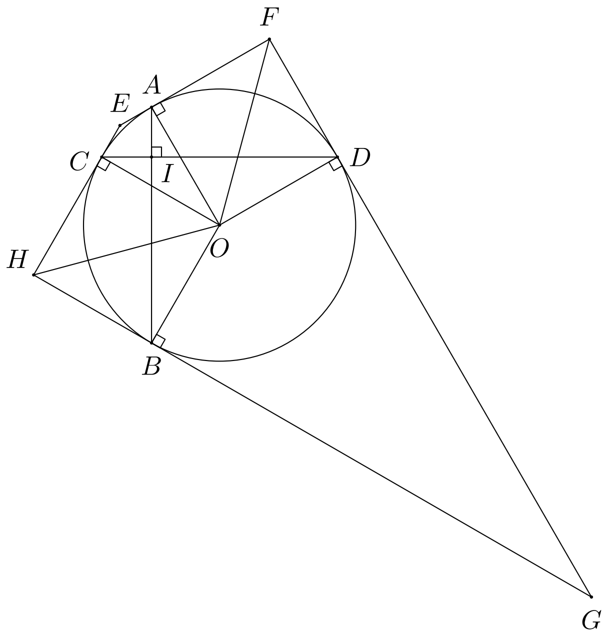
a) Gọi r là bán kính của đường tròn (O).
Ta có $S_{ABCD} = S_{OAB} + S_{OCD} + S_{OAD} + S_{OBC}$.
Mà $S_{OAB} + S_{OCD} = \dfrac{r \cdot (AB + CD)}{2}$; $S_{OAD} + S_{OBC} = \dfrac{r \cdot (BC + AD)}{2}$.
Mà $AB + CD = BC + AD$ (tính chất tứ giác ngoại tiếp).
$\Rightarrow S_{OAB} + S_{OCD} = S_{OAD} + S_{OBC}$.
$\Rightarrow S_{ABCD} = 2 \cdot (S_{OAB} + S_{OCD}) \Rightarrow S_{OAB} + S_{OCD} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD}$.

b) Giả sử AB cắt CD tại E.
Lấy G trên tia EA, H trên ED sao cho $EG = AB; EH = CD$.
Ta có $S_{OEG} + S_{OEH} = S_{OAB} + S_{OCD} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD}$.
$\Rightarrow S_{OHG} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD} - S_{EHG}$. (1)
Chứng minh tương tự
$S_{IAB} + S_{ICD} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD} \Rightarrow S_{IHG} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD} - S_{EHG}$. (2)
$S_{KAB} + S_{KCD} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD} \Rightarrow S_{KHG} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD} - S_{EHG}$. (3)
Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow S_{OHG} = S_{IHG} = S_{KHG} \Rightarrow h_{OHG} = h_{IHG} = h_{KHG}$ (h là đường cao kẻ từ đỉnh O, I, K của ba tam giác).
Để ba đường cao bằng nhau thì ba điểm I, O, K thẳng hàng và đường thẳng qua ba điểm song song với đoạn HG.

□

Bài 109. Cho đường tròn (O). Các dây AB và CD vuông góc nhau. Các tiếp tuyến với đường tròn tại A, B, C, D cắt nhau lần lượt ở E, F, G, H. Chứng minh rằng tứ giác $EFGH$ là tứ giác nội tiếp.

Lời giải.



Gọi I là giao điểm của AB và CD.

Ta có $AB \perp CD$ (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{BIC} = 90^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AD} = 180^\circ$.

Lại có $\begin{cases} \widehat{BOH} = \dfrac{1}{2}\widehat{BOC} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BC} \\ \widehat{AOF} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOD} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AD} \end{cases}$ (tính chất đường kính và dây cung).

$\Rightarrow \widehat{BOH} + \widehat{AOF} = \dfrac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AD}\right) = 90^\circ$

Mà $\widehat{AFO} + \widehat{AOF} = 90^\circ$

Nên $\widehat{BOH} = \widehat{AFO} \Rightarrow \widehat{BOC} = \widehat{AFD}$.

Xét tứ giác $OCHB$ nội tiếp, có $\widehat{BOC} + \widehat{BHC} = 180^\circ$

Mà $\widehat{BOC} = \widehat{AFD}$ (cmt)

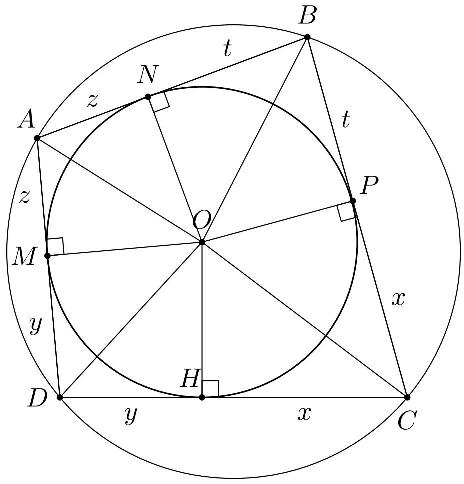
Nên $\widehat{AFD} + \widehat{BHC} = 180^\circ$.

Xét tứ giác $EFGH$, có $\widehat{EFG} + \widehat{EHG} = 180^\circ$

Vậy tứ giác $EFGH$ là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có tổng 2 góc đối là 180° là tứ giác nội tiếp). □

Bài 110. Tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (O), đồng thời nội tiếp một đường tròn khác. Biết $AB = 14$ cm, $BC = 18$ cm, $CD = 26$ cm. Gọi H là tiếp điểm của CD và đường tròn (O). Tính độ dài HC, HD.

Lời giải.



Gọi M, N, P lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (O) và AD, AB, BC.

Đặt $CH = CP = x$, $DH = DM = y$, $AM = AN = z$, $BN = BP = t$, $OH = OP = ON = OM = r$.

Ta có $AB + CD = x + y + z + t = 40 \Rightarrow y + z = 40 - (x + t) \Rightarrow AD = 40 - BC = 22$ cm.

Ta có $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{ADC} + \widehat{ABC} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{ODH} + 2\widehat{OBP} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{ODH} + \widehat{OBP} = 90^\circ$.

Mà $\widehat{ODH} + \widehat{HOD} = 90^\circ$.

Nên $\widehat{HOD} = \widehat{OBP}$.

Xét $\triangle HOD$ và $\triangle PBO$, ta có

$$\begin{cases} \widehat{HOD} = \widehat{OBP} \text{ (cmt)} \\ \widehat{OHD} = \widehat{BPO} = 90^\circ \end{cases}$$

$\Rightarrow \triangle HOD \backsim \triangle PBO$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{OH}{BP} = \dfrac{HD}{PO} \Rightarrow \dfrac{r}{t} = \dfrac{y}{r} \Rightarrow r^2 = yt.$ (1)

Chứng minh tương tự $\triangle NOA \backsim \triangle HCO$ (g.g)$\Rightarrow r^2 = xz$. (2)

Từ $(1), (2)$ suy ra $xz = yt$.

Nhận xét $\begin{cases} x + y = CD = 26 \\ y + z = AD = 22 \\ z + t = AB = 14 \\ t + x = BC = 18. \end{cases}$

Do đó $\dfrac{x}{y} = \dfrac{t}{z} = \dfrac{18 - x}{22 - y}$

$\Rightarrow x(22 - y) = y(18 - x) \Leftrightarrow 22x - 18y = 0.$ (3)

Lại có $x + y = 26$. (4)

Giải hệ phương trình (3) và (4), ta được $\begin{cases} x = 11{,}7 \\ y = 14{,}3. \end{cases}$

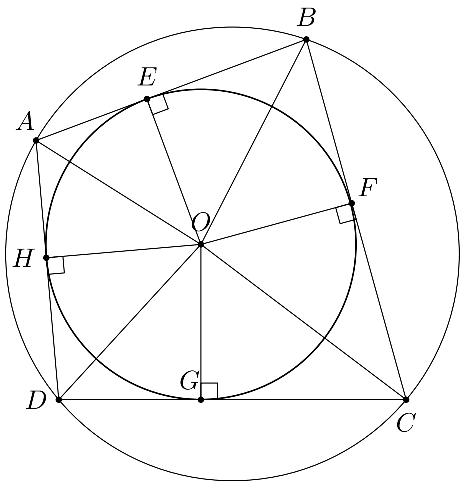
Vậy, $HC = 11,7$ cm, $HD = 14,3$ cm. □

Bài 111. Tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (O, r), đồng thời nội tiếp một đường tròn khác. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là hình chiếu của O trên AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng

a) $r^2 = AE \cdot CG = BF \cdot DH$.

b) $S_{ABCD} = \sqrt{abcd}$ với $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$.

Lời giải.



a) Ta có $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.
$\Rightarrow \widehat{ADC} + \widehat{ABC} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{ODG} + 2\widehat{OBF} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{ODG} + \widehat{OBF} = 90^\circ$.
Mà $\widehat{ODG} + \widehat{GOD} = 90^\circ$ nên $\widehat{GOD} = \widehat{OBF}$.
Xét $\triangle GOD$ và $\triangle FBO$, ta có

$$\begin{cases} \widehat{GOD} = \widehat{FBO} \text{ (cmt)} \\ \widehat{OGD} = \widehat{BFO} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle GOD \backsim \triangle FBO \text{ (g.g)}.$$

$$\Rightarrow \frac{OG}{BF} = \frac{GD}{FO} \Rightarrow \frac{r}{BF} = \frac{GD}{r} \Rightarrow r^2 = BF \cdot GD = BF \cdot DH. \quad (1)$$

Ta có $ABCD$ là tứ giác nội tiếp
$\Rightarrow \widehat{DAB} + \widehat{DCB} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{OAH} + 2\widehat{OCG} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{OAH} + \widehat{OCG} = 90^\circ$
Mà $\widehat{OAH} + \widehat{HOA} = 90^\circ$ nên $\widehat{HOA} = \widehat{OCG}$.
Xét $\triangle HOA$ và $\triangle GCO$, ta có

$$\begin{cases} \widehat{HOA} = \widehat{GCO} \text{ (cmt)} \\ \widehat{AHO} = \widehat{OGC} = 90^\circ \end{cases}$$

$\Rightarrow \triangle HOA \backsim \triangle GCO$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{OH}{CG} = \frac{AH}{OG} \Rightarrow \frac{r}{CG} = \frac{AH}{r} \Rightarrow r^2 = AH \cdot CG = AE \cdot CG. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $r^2 = AE \cdot CG = BF \cdot DH$.

b) Đặt $AE = AH = x$, $BE = BF = y$, $CF = CG = z$, $DG = DH = t$.

Ta có: $AB + CD = AD + BC$ ($ABCD$ là tứ giác nội tiếp).

$a + c = b + d$.

$S_{ABCD} = p \cdot r = \dfrac{a+b+c+d}{2} \cdot r = \dfrac{2(a+c)}{2} \cdot r = (a+c)r$.

Mặt khác,

$$\begin{aligned} abcd &= (x+y)(y+z)(z+t)(x+t) \\ &= (xy+xz+y^2+yz)(xz+zt+xt+t^2) \\ &= (xy+yt+yz+y^2)(yt+zt+xt+t^2) \text{ (do } r^2 = xz = yt \text{ (cmt))} \\ &= y(x+t+z+y) \cdot t(y+z+x+t) \\ &= yt(x+y+z+t)^2 \\ &= r^2(AB+CD)^2 \\ &= r^2(a+c)^2. \end{aligned}$$

Suy ra $\sqrt{abcd} = r(a+c)$.

Mà $S_{ABCD} = r(a+c)$ nên $S_{ABCD} = \sqrt{abcd}$.

□

9 ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN, CUNG TRÒN

10 DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN, HÌNH QUẠT TRÒN

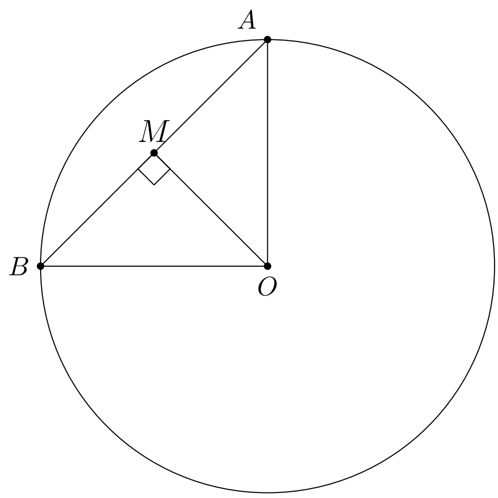
10.1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

a) Diện tích hình tròn: $\boxed{S = \pi \cdot R^2}$

b) Diện tích hình quạt tròn: $\boxed{S_{\text{quạt}} = \dfrac{\pi R^2 n}{360}}$ hay $\boxed{S_{\text{quạt}} = \dfrac{l \cdot R}{2}}$

Ví dụ 25. Cho AB là dây cung của $(O; R), AB = R\sqrt{2}$. Tính diện tích hình viên phân được giới hạn bởi cung AB và dây AB.

Lời giải.



Gọi diện tích hình quạt OAB là S_1.

Diện tích tam giác OAB là S_2.

Diện tích hình viên phân cần tính là S.

Ta có $S = S_1 - S_2$.

Gọi M là trung điểm của AB suy ra $OM \perp AB$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây).

Xét tam giác AOB: $OA = OB = R$ suy ra $\triangle AOB$ cân tại $O \Rightarrow OM$ vừa là đường trung tuyến vừa là đường phân giác trong tam giác AOB.

Xét tam giác vuông AMO có

$\sin \widehat{AOM} = \dfrac{AM}{AO} = \dfrac{AB}{2AO} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra $\widehat{AOM} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 90^\circ$ (OM là đường phân giác của $\triangle AOB$).

Suy ra $S_1 = \dfrac{\pi R^2}{4}$, $S_2 = \dfrac{1}{2} OA^2 = \dfrac{R^2}{2}$.

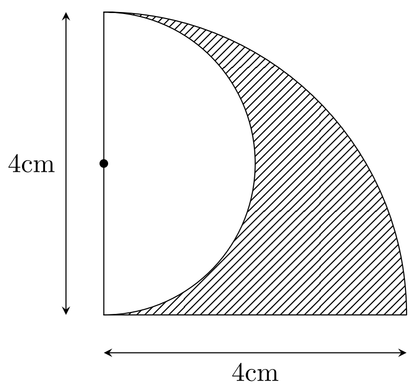
Vậy $S = \dfrac{\pi R^2}{4} - \dfrac{R^2}{2} = \dfrac{(\pi - 2) R^2}{4}$.

□

10.2 BÀI TẬP

Bài 112.

So sánh diện tích hình gạch sọc và hình để trắng trong hình vẽ bên.



Lời giải.

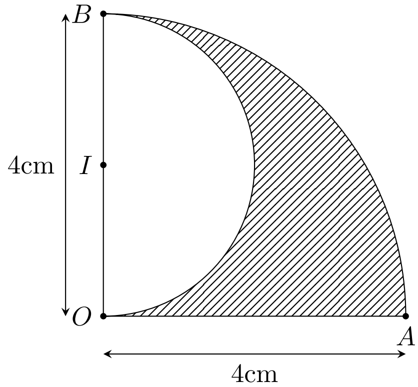
Gọi I là trung điểm OB. Suy ra $OI = 2$ cm.

Diện tích hình để trắng là $S_1 = \dfrac{1}{2} \cdot \pi \cdot OI^2 = 2\pi$ cm^2.

Diện tích hình quạt OAB là $S_2 = \dfrac{1}{4} \cdot \pi \cdot OA^2 = 4\pi$ cm^2.

Diện tích hình bị gạch là $S = S_2 - S_1 = 2\pi$.

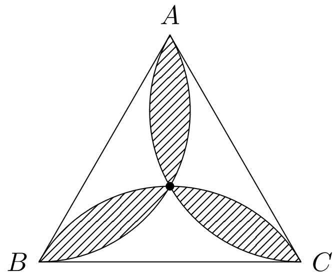
Vậy $S = S_1$.



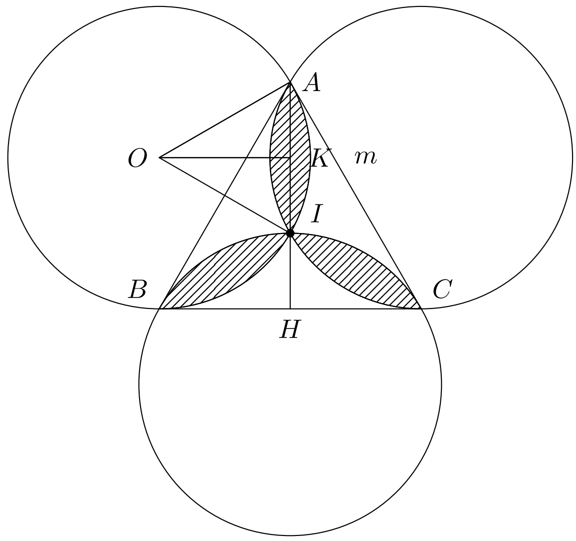
□

Bài 113.

Trong một tam giác đều ABC (hình bên), vẽ những cung tròn đi qua tâm của tam giác và từng cặp đỉnh của nó. Cho biết cạnh tam giác bằng a, tính diện tích hình hoa thị bị gạch sọc.



Lời giải.



Gọi I là trọng tâm tam giác ABC.

Gọi O là tâm đường tròn đi qua ba điểm A, I, B.

Gọi H là trung điểm BC suy ra $AH \perp BC$ ($\triangle ABC$ đều).

Ta có $AH^2 = AB^2 - BH^2 = \dfrac{3a^2}{4}$ suy ra $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $AI = \dfrac{2}{3}AH$ suy ra $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Do I nằm trên cung chứa góc 120° vẽ trên đoạn AB nên sđ$\overset{\frown}{AmI} = 60^\circ$.

Do đó, tam giác AOI là tam giác đều có cạnh $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Diện tích hình hoa thị bằng 6 lần diện tích hình viên phân AmI của đường tròn O.

Gọi S_1 là diện tích hình quạt OAI.

Do $OA = AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, suy ra $S_1 = \dfrac{\pi \cdot OA^2}{6} = \dfrac{\pi \cdot a^2}{18}$.

Xét $\triangle OAI$ đều, gọi K là trung điểm AI

$\Rightarrow OK \perp AI$. Ta có

$OK^2 = OA^2 - AI^2 = \dfrac{a^2}{3} - \dfrac{a^2}{12} = \dfrac{a^2}{4} \Rightarrow OK = \dfrac{a}{2}$.

Diện tích tam giác đều AOI là

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.$$

Diện tích hình viên phân AmI là

$$S_1 - S_2 = \frac{\pi \cdot a^2}{18} - \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.$$

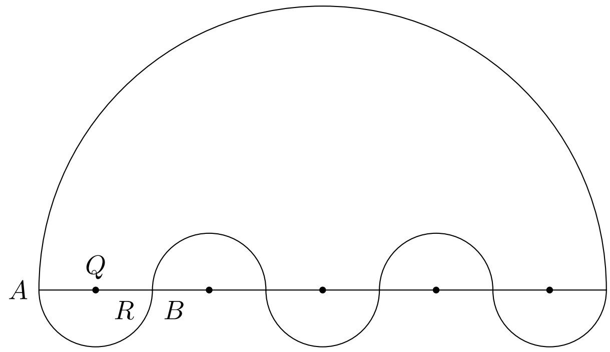
Diện tích hình hoa thị gạch sọc là

$$6 \cdot \left(\frac{\pi \cdot a^2}{18} - \frac{a^2\sqrt{3}}{12}\right) = \frac{a^2}{6}\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right).$$

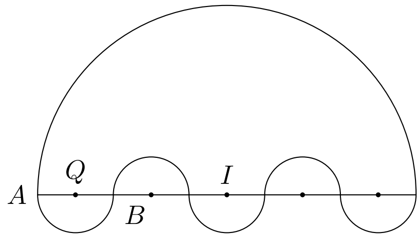
□

Bài 114.

Tính diện tích của hình được giới hạn bởi các đường cong, biết $QA = QB = R > 0$.



Lời giải.



Diện tích hình cần tính bằng diện tích S_1 của nửa hình tròn bán kính IA cộng thêm diện tích S_2 của nửa hình tròn bán kính AQ.

Ta có $IA = 5 \cdot QA = 5R$. Suy ra

$S_1 = \dfrac{\pi \cdot IA^2}{2} = \dfrac{\pi \cdot 25 \cdot R^2}{2} = \dfrac{25\pi R^2}{2}$.

$S_2 = \dfrac{\pi \cdot QA^2}{2} = \dfrac{\pi R^2}{2}$.

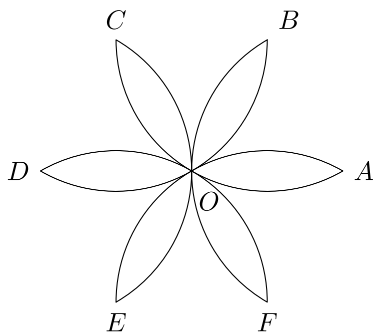
Diện tích hình cần tính là

$S = S_1 + S_2 = 13\pi R^2$.

□

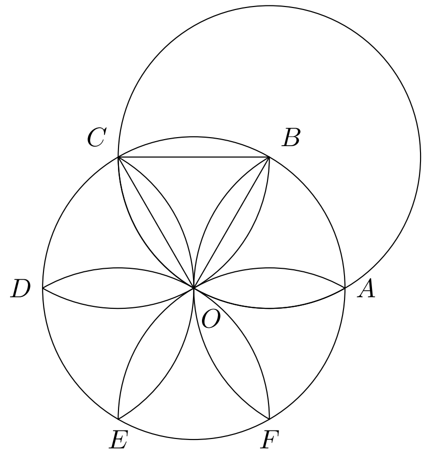
Bài 115.

Tính diện tích của hình cánh hoa, biết các điểm A, B, C, D, E, F cách điểm O một khoảng R không đổi.



Lời giải.

Ta có A, B, C, D, E, F đều cách O một khoảng R không đổi nên A, B, C, D, E, E thuộc đường tròn tâm O bán kính R. Các cung BC, CD, DE, EF, FA, AB bằng nhau nên số đo mỗi cung là 60°.

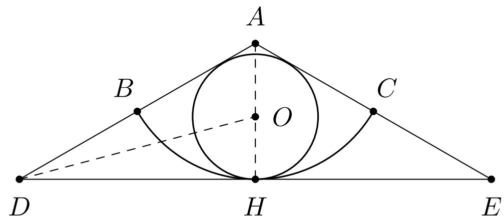


Suy ra $\widehat{BOC} = 60^\circ$, nên tam giác BOC là tam giác đều.
Vẽ đường tròn tâm B bán kính BO.
Diện tích hình cánh hoa bằng 12 lần diện tích hình viên giới hạn bởi cung OC và dây OC của đường tròn $(B; BO)$.
Xét đường tròn $(B; BO)$ ta có
Diện tích hình quạt BOC là $S_1 = \dfrac{\pi \cdot BC^2 \cdot 60}{360} = \dfrac{\pi R^2}{6}$.
Diện tích tam giác đều BOC là $S_2 = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$.
Suy ra diện tích hình viên phân là $S = S_1 - S_2 = \dfrac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12} \cdot R^2$.
Diện tích hình cánh hoa là $12 \cdot S_1 = \left(2\pi - 3\sqrt{3}\right) R^2$.

□

Bài 116. Cho hình quạt tròn có sđ$\widehat{BC} = 120^\circ$, tâm A, bán kính R. Tính độ dài đường tròn nội tiếp hình quạt đó (đường tròn nội tiếp hình quạt là đường tròn tiếp xúc với cung BC và với các bán kính AB, AC).

Lời giải.



Kẻ tiếp tuyến chung tại tiếp điểm H cắt AB, AC tại D và E.
Suy ra đường tròn (O) nội tiếp hình quạt là đường tròn nội tiếp tam giác ADE.
Ta có $AH = R$.
Xét $\triangle AHD$ vuông tại H ta có $AD = \dfrac{AH}{\cos \widehat{DAH}} = \dfrac{R}{\cos 60^\circ} = 2R$.
$DH = AH \cdot \tan \widehat{DAH} = R\sqrt{3}$.
Xét $\triangle ADH$: DO là phân giác của $\widehat{ADH}$ suy ra

$$\begin{aligned}
&\frac{OH}{OA} = \frac{DH}{AD}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{OH}{AH} = \frac{DH}{AD + DH}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{OH}{R} = \frac{R\sqrt{3}}{2R + R\sqrt{3}}\\
\Leftrightarrow\ &OH = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} R = (2\sqrt{3} - 3)R.
\end{aligned}$$

Chu vi đường tròn là $2 \cdot \pi \cdot OH = \pi \left(4\sqrt{3} - 6\right) R$. $\square$

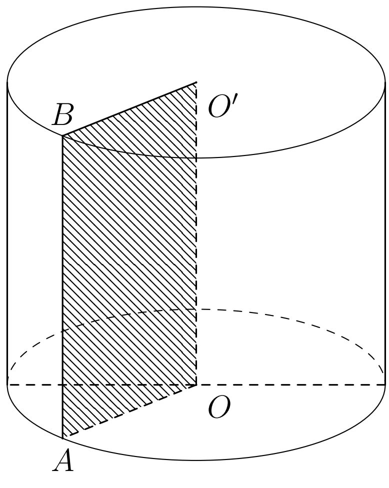
Chương 4

HÌNH TRỤ - HÌNH NÓN - HÌNH CẦU

1 HÌNH TRỤ

1.1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

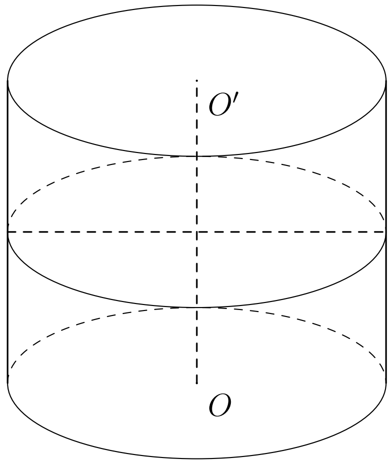
a) **Hình trụ.** Khi quay hình chữ nhật $ABO'O$ một vòng quanh cạnh OO' cố định, ta được một hình trụ.



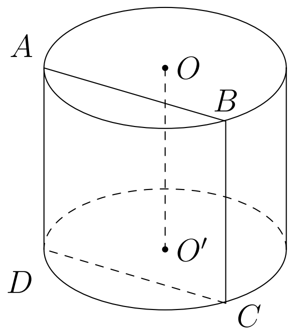
- Hai hình tròn (O) và (O') bằng nhau và nằm trong hai mặt phẳng song song được gọi là hai **đáy** của hình trụ.
- Đường thẳng OO' được gọi là **trục** của hình trụ.
- Mỗi vị trí của AB được gọi là một **đường sinh**. Các đường sinh vuông góc với hai mặt phẳng đáy. **Độ dài của đường sinh là chiều cao của hình trụ**.

b) **Cắt hình trụ bởi một mặt phẳng**

- Khi cắt hình trụ bởi một mặt phẳng song song với đáy, thì phần mặt phẳng nằm trong hình trụ (mặt cắt - thiết diện) là một hình tròn bằng hình tròn đáy.



- Khi cắt hình trụ bởi một mặt phẳng song song với trục OO' thì mặt cắt là một hình chữ nhật.



c) **Diện tích - Thể tích**

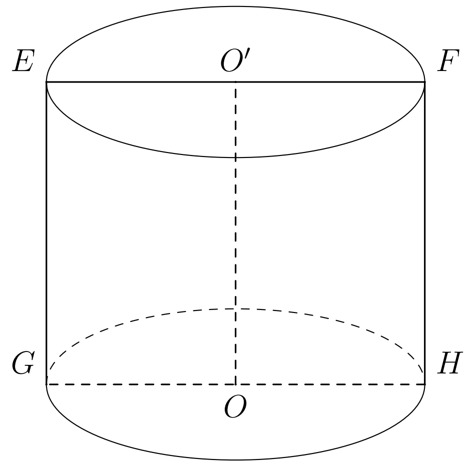
Cho hình trụ có bán kính đáy R và chiều cao h.

- Diện tích xung quanh: $S_{\text{xq}} = 2\pi Rh$.
- Diện tích toàn phần: $S_{\text{tp}} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$.
- Thể tích: $V = \pi R^2 h$.

1.2 BÀI TẬP

Bài 117.

Một hình trụ có bán kính đáy bằng $\frac{1}{4}$ đường cao. Khi cắt hình trụ này bằng một mặt phẳng đi qua trục thì mặt cắt là một hình chữ nhật có diện tích là 50 cm^2. Tính diện tích toàn phần và thể tích hình trụ.



Lời giải.

Gọi đường cao và bán kính đáy của hình trụ lần lượt là h và R $(R, h > 0)$. Ta có $R = \frac{h}{4}$.

Mặt cắt là hình chữ nhật $EFHG$ khi đó $EG = h$ và $GH = 2R$.

Diện tích hình chữ nhật là 50 cm^2, ta có phương trình

$$\begin{aligned} & EG \cdot GH = 50 \\ \Leftrightarrow\ & h \cdot 2R = 50 \\ \Leftrightarrow\ & 2h \cdot \frac{h}{4} = 50 \\ \Leftrightarrow\ & h^2 = 100 \\ \Leftrightarrow\ & h = 10 \Rightarrow R = 2{,}5. \end{aligned}$$

Diện tích toàn phần của hình trụ là $S_{\text{tp}} = 2\pi \cdot R^2 + 2\pi \cdot R \cdot h = 62{,}5\pi$ cm^2.

Thể tích hình trụ là $V = \pi \cdot R^2 \cdot h = 62{,}5\pi$ cm^3. □

Bài 118. Một hình trụ có đường cao bằng đường kính đáy. Biết thể tích của hình trụ là 128π cm^3. Tính diện tích xung quanh của hình trụ.

Lời giải.

Gọi đường cao của hình trụ là h, $(h > 0)$. Suy ra bán kính đáy của hình trụ là $R = \frac{h}{2}$.

Thể tích của hình trụ là 128π cm^3 nên ta có phương trình

$$\pi \cdot R^2 \cdot h = 128\pi \Leftrightarrow \frac{h^3}{4} = 128 \Leftrightarrow h = 8.$$

Suy ra $R = 4$ cm.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{\text{xq}} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h = 64\pi$ cm^2. □

Bài 119. Một hình trụ có bán kính đáy là 3 cm. Biết diện tích toàn phần gấp đôi diện tích xung quanh. Tính chiều cao của hình trụ.

Lời giải.

Gọi chiều cao của hình trụ là h, $(h > 0)$. Bán kính đáy của hình trụ $R = 3$ cm.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{\text{xq}} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h = 6\pi h$ cm^2.

Diện tích toàn phần của hình trụ là $S_{\text{tp}} = 2 \cdot \pi \cdot R^2 + 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h = 18\pi + 6\pi h$.
Theo bài ra ta có phương trình

$$18\pi + 6\pi h = 12\pi h \Leftrightarrow h = 3.$$

Chiều cao của hình trụ là 3 cm. □

Bài 120. Một hình trụ có diện tích xung quanh là 20π cm^2 và diện tích toàn phần là 28π cm^2. Tính thể tích của hình trụ đó.

Lời giải.

Gọi chiều cao và bán kính đáy của hình trụ lần lượt là h và R $(h, R > 0)$.
Theo bài ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h = 20\pi \\ 2 \cdot \pi \cdot R^2 + 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h = 28\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h = 20\pi \\ 2 \cdot \pi \cdot R^2 = 8\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R = 2 \\ h = 5. \end{cases}$$

Thể tích của hình trụ là $V = \pi \cdot R^2 \cdot h = 20\pi$ cm^3. □

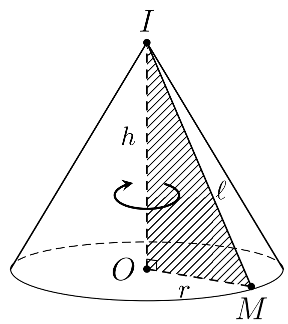
2 HÌNH NÓN - HÌNH NÓN CỤT

2.1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

2.1.1 Hình nón

Cho tam giác IOM vuông tại O. Khi quay tam giác IOM một vòng quanh cạnh góc vuông OI cố định thì ta được một hình nón.

- Điểm I được gọi là **đỉnh** của hình nón.
- Hình tròn (O) được gọi là **đáy** của hình nón.
- Mỗi vị trí của IM được gọi là một **đường sinh** của hình nón.
- Đoạn IO được gọi là **đường cao** của hình nón.



2.1.2 Diện tích - Thể tích hình nón

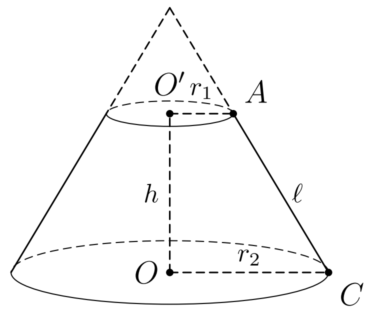
Cho hình nón có bán kính đáy bằng r, đường sinh ℓ và đường cao h.

- Diện tích xung quanh $S_{\text{xq}} = \pi r \ell$.
- Diện tích toàn phần $S_{\text{tp}} = \pi r \ell + \pi r^2$.
- Thể tích $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

2.1.3 Hình nón cụt

Khi cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đáy thì phần hình nón nằm giữa mặt phẳng nói trên và mặt phẳng đáy được gọi là hình nón cụt.

- Hai hình tròn (O) và (O') được gọi là hai **đáy**.
- Đoạn OO' được gọi là **trục**. Độ dài OO' là **chiều cao**.
- Đoạn AC được gọi là **đường sinh**.



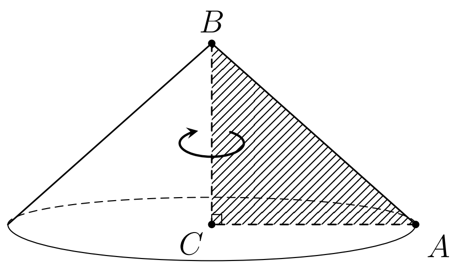
2.1.4 Diện tích - Thể tích hình nón cụt

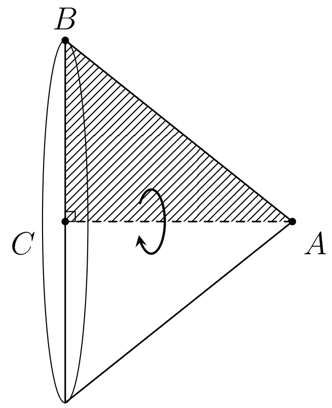
Cho hình nón cụt có các bán kính đáy là r_1 và r_2, chiều cao h và đường sinh ℓ.

- Diện tích xung quanh $S_{\text{xq}} = \pi(r_1 + r_2)\ell$.
- Thể tích $V = \dfrac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$.

2.2 BÀI TẬP

Bài 121. Cho tam giác ABC vuông tại C. Biết $BC = a$ và $AC = b$. Quay tam giác vuông này một vòng lần lượt quanh cạnh BC và AC, được một hình nón đỉnh B và một hình nón đỉnh A. Hãy so sánh tỷ số thể tích của hai hình nón và tỷ số diện tích xung quanh của hai hình nón ấy.





Lời giải.

Gọi V_1, S_1 lần lượt là thể tích và diện tích xung quanh của hình nón có đỉnh là B.

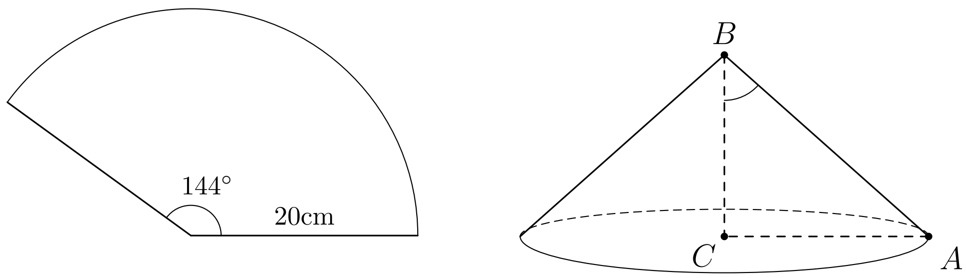
Gọi V_2, S_2 lần lượt là thể tích và diện tích xung quanh của hình nón có đỉnh là A.

Khi đó $\begin{cases} V_1 = \dfrac{1}{3}\pi CA^2 \cdot CB \\ V_2 = \dfrac{1}{3}\pi BC^2 \cdot CA \end{cases} \Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{CA}{BC}$. (1)

$\begin{cases} S_1 = \pi CA \cdot BA \\ S_2 = \pi BC \cdot AB \end{cases} \Rightarrow \dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{CA}{BC}.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{S_1}{S_2}$. □

Bài 122. Một hình quạt tròn có bán kính 20 cm và góc ở tâm là 144°. Người ta uốn hình quạt này thành một hình nón. Tính số đo nửa góc ở đỉnh của hình nón đó.



Lời giải.

Độ dài đoạn $AB = 20$ cm.

Chiều dài cung trong hình quạt tròn là $\dfrac{\pi R n}{180} = \dfrac{\pi \cdot 20 \cdot 144}{180} = 16\pi$ cm.

Do chiều dài cung trong hình quạt tròn bằng với chu vi của hình tròn đáy nên

$$16\pi = 2\pi AC \Rightarrow AC = 8 \text{ cm}.$$

Xét tam giác ABC vuông tại C ta có $\sin \widehat{ABC} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{8}{20} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow \widehat{ABC} = 23{,}6°$. □

Bài 123. Một hình nón có bán kính đáy bằng 5 cm và diện tích xung quanh là 65π cm^2. Tính thể tích của hình nón đó.

Lời giải.

Do hình nón có diện tích xung quanh bằng 65π cm^2 nên

$$\pi r \ell = 65\pi \Leftrightarrow \ell = \frac{65}{r} = \frac{65}{5} = 13 \text{ cm}.$$

Ta có $h = \sqrt{\ell^2 - r^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ cm.

Thể tích hình nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot 12\pi = 100\pi$ cm^3. □

Bài 124. Một hình nón có đường sinh dài 15 cm và diện tích xung quanh là 135π cm^2.

a) Tính chiều cao của hình nón đó.

b) Tính diện tích toàn phần và thể tích hình nón đó.

Lời giải.

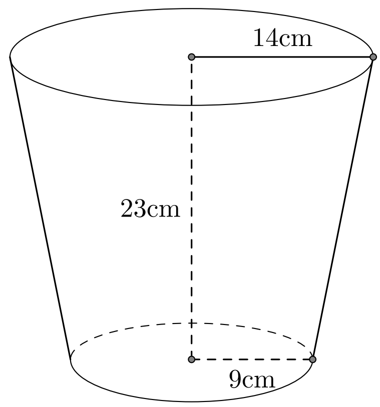
a) Ta có $S_{\text{xq}} = \pi r \ell \Rightarrow \pi r \ell = 135\pi \Leftrightarrow r = \dfrac{135}{15} = 9$ cm.
Chiều cao của hình nón là $h = \sqrt{\ell^2 - r^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$ cm.

b) Diện tích toàn phần của hình nón là $S_{tp} = S_{xq} + \pi r^2 = 135\pi + 9^2\pi = 216\pi$ cm^2.
Thể tích của hình nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3} \cdot 9^2 \cdot 12\pi = 324\pi$ cm^3.

$\square$

Bài 125.

Một cái xô hình nón cụt làm bằng tôn để đựng nước. Các bán kính đáy là 14 cm và 9 cm, chiều cao là 23 cm.



a) Tính dung tích của xô.

b) Tính diện tích tôn để làm xô (không kể diện tích các chỗ ghép).

Lời giải.

Đặt bán kính đáy lớn, đáy bé của xô lần lượt là r_1, r_2. Suy ra $r_1 = 14$ cm và $r_2 = 9$ cm.

a) Dung tích của xô là $V = \dfrac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 23(14^2 + 14 \cdot 9 + 9^2) = \dfrac{9269}{3}\pi$ cm^3.

b) Độ dài đường sinh của xô là $\ell = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{23^2 + 5^2} = \sqrt{554}$ cm.
Diện tích tôn để làm xô là
$S = S_{xq} + \pi r_2^2 = \pi(r_1 + r_2)\ell + \pi r_2^2 = \pi(14 + 9)\sqrt{554} + 9^2\pi \approx 1955{,}19$ cm^2.

$\square$

Bài 126. Từ một khúc gỗ hình trụ cao 15 cm, người ta tiện thành một hình nón có thể tích lớn nhất. Biết phần gỗ bỏ đi có thể tích là 640π cm^3.

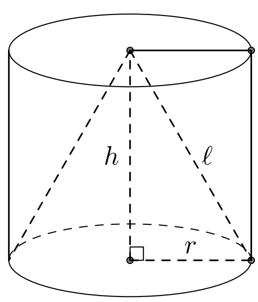
a) Tính thể tích khúc gỗ hình trụ.

b) Tính diện tích xung quanh hình nón.

Lời giải.

Hình nón có thể tích lớn nhất khi đáy của hình nón cũng là đáy của hình trụ và chiều cao hình nón cũng là chiều cao hình trụ.

a) Gọi r là bán kính của hình trụ. Khi đó r cũng là bán kính của hình nón.



Thể tích hình trụ là $V_1 = \pi r^2 h = 15r^2\pi$.
Thể tích hình nón là $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = 5r^2\pi$.
Thể tích gỗ bỏ đi là

$$V_1 - V_2 = 640\pi \Leftrightarrow 15r^2\pi - 5r^2\pi = 640\pi \Leftrightarrow r^2 = 64 \Rightarrow r = 8 \text{ cm}.$$

Vậy thể tích khúc gỗ hình trụ là $V_1 = 15 \cdot 8^2\pi = 960\pi$ cm^3.

b) Độ dài đường sinh của hình nón là $\ell = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$ cm.
Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{\text{xq}} = \pi r \ell = 8 \cdot 17\pi = 136\pi$ cm^2.

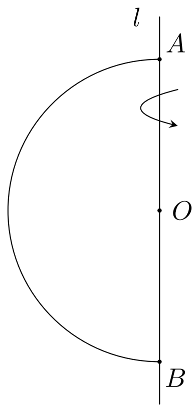
□

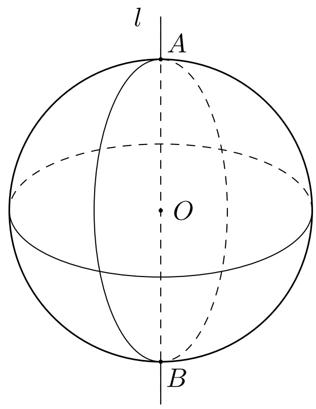
3 HÌNH CẦU

3.1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

3.1.1 Hình cầu

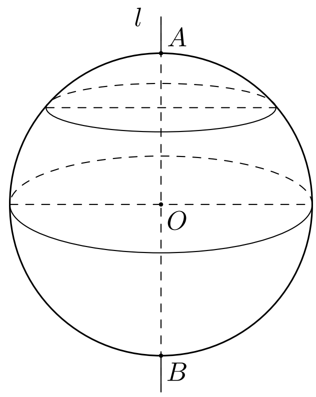
Khi quay nửa hình tròn tâm O bán kính R một vòng quanh đường kính AB cố định thì được một hình cầu.





3.1.2 Cắt hình cầu bởi một mặt phẳng

- Khi cắt hình cầu bởi một mặt phẳng ta được một hình tròn.
- Khi cắt mặt cầu bán kính R bởi một mặt phẳng ta được một đường tròn
  - Đường tròn đó có bán kính R nếu mặt phẳng đi qua tâm (gọi là **đường tròn lớn**).
  - Đường tròn đó có bán kính bé hơn R nếu mặt phẳng không đi qua tâm.



3.1.3 Diện tích - thể tích

Cho hình cầu bán kính R.

- Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2$.
- Thể tích hình cầu: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

3.2 BÀI TẬP

Bài 127. Một hình cầu có số đo diện tích mặt cầu (tính bằng cm^2) đúng bằng số đo thể tích của nó (tính bằng cm^3). Tính bán kính của hình cầu đó.

Lời giải.

Gọi R là bán kính của hình cầu cần tìm ($R > 0$). Khi đó

- Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2$;
- Thể tích hình cầu là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Vì hình cầu có số đo diện tích mặt cầu đúng bằng số đo thể tích nên

$$4\pi R^2 = \frac{4}{3}\pi R^3 \Leftrightarrow R = 3.$$

Vậy bán kính của hình cầu là $R = 3$ cm. □

Bài 128. Một hình cầu có diện tích bề mặt là 100π m^2. Tính thể tích hình cầu đó.

Lời giải.

Gọi R là bán kính của hình cầu cần tìm ($R > 0$).

Vì hình cầu có diện tích bề mặt là 100π nên $4\pi R^2 = 100\pi \Leftrightarrow R^2 = 25 \Leftrightarrow R = 5$.

Vậy thể tích của hình cầu là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 5^3 = \dfrac{500\pi}{3}$ m^2. □

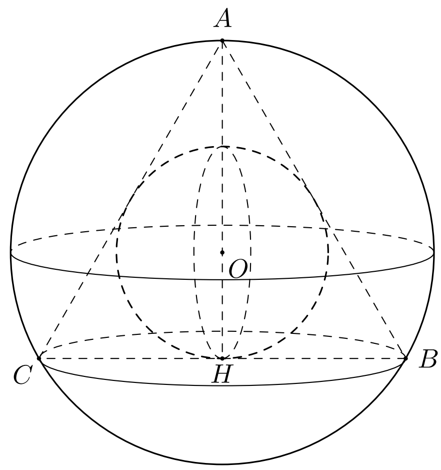
Bài 129.

Cho tam giác đều ABC cạnh a, đường cao AH. Ta quay nửa đường tròn nội tiếp, nửa đường tròn ngoại tiếp tam giác đều này và tam giác vuông ABH một vòng quanh AH, được hai mặt cầu và một hình nón. Tính

a) Tỉ số diện tích hai mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp hình nón.

b) Tỉ số thể tích của hai hình cầu nói trên.

c) Thể tích phần không gian giới hạn bởi hình nón và hình cầu ngoại tiếp hình nón.



Lời giải.

Gọi R, r lần lượt là bán kính của đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC.

Vì AH là đường cao trong tam giác đều ABC nên H là trung điểm BC.

Xét $\triangle ABH$ vuông tại H, ta có

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}.$$

Suy ra $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi O là trọng tâm tam giác ABC.

Vì ABC là tam giác đều nên tâm đường ngoại tiếp và tâm đường tròn nội tiếp tam giác chính là trọng tâm O. Hơn nữa, AH là đường trung tuyến trong tam giác ABC, do đó

- $R = OA = \dfrac{2}{3}AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
- $r = OH = \dfrac{1}{3}AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.
- $R = 2r$.

a) Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp hình nón. Khi đó

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4\pi r^2}{4\pi R^2} = \frac{4\pi r^2}{4\pi(2r)^2} = \frac{1}{4}.$$

b) Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích hình cầu nội tiếp và ngoại tiếp hình nón. Khi đó

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi(2r)^3} = \frac{1}{8}.$$

c) Ta có

- Thể tích hình cầu ngoại tiếp hình nón là $V_2 = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9} = \dfrac{4a^3\sqrt{3}}{27}\pi$.
- Thể tích hình nón là $V_3 = \dfrac{1}{3}\pi \cdot HB^2 \cdot AH = \dfrac{1}{3}\pi \cdot \dfrac{a^2}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}\pi$.

Thể tích phần không gian giới hạn bởi hình nón và hình cầu ngoại tiếp hình nón là

$$V = V_2 - V_3 = \frac{4a^3\sqrt{3}}{27}\pi - \frac{a^3\sqrt{3}}{24}\pi = \frac{23\sqrt{3}\pi a^3}{216}.$$

□

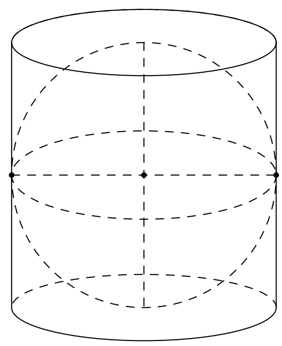
4 ÔN TẬP CHƯƠNG

Bài 130.

Cho một hình cầu nội tiếp trong một hình trụ. Cho biết diện tích mặt cầu là 60 cm^2. Hãy tính:

a) Diện tích toàn phần của hình trụ.

b) Thể tích hình trụ.



Lời giải.

Ta có diện tích mặt cầu $S_{\text{mc}} = 60\text{ cm}^2 \Rightarrow 4\pi R^2 = 60 \Leftrightarrow R = \sqrt{\dfrac{15}{\pi}}$ cm.

Vì hình cầu nội tiếp trong hình trụ nên

- Chiều cao hình trụ là $h = 2R = 2\sqrt{\dfrac{15}{\pi}}$.
- Bán kính đáy của hình trụ là $R_{\text{ht}} = R = \sqrt{\dfrac{15}{\pi}}$.

a) Diện tích toàn phần của hình trụ là

$$S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + 2S_{\text{đ}} = 2\pi\cdot\sqrt{\dfrac{15}{\pi}}\cdot 2\sqrt{\dfrac{15}{\pi}} + 2\pi\cdot\left(\sqrt{\dfrac{15}{\pi}}\right)^2 = 90\text{ cm}^2.$$

b) Thể tích hình trụ là

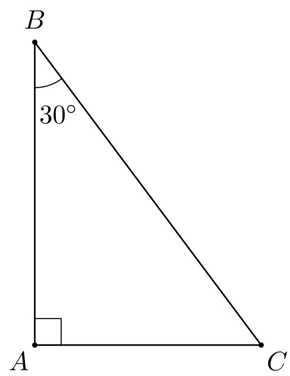
$$V = \pi R_{ht}^2\cdot h = \pi\cdot\left(\sqrt{\dfrac{15}{\pi}}\right)^2\cdot 2\sqrt{\dfrac{15}{\pi}} = 30\sqrt{\dfrac{15}{\pi}}\text{ cm}^3.$$

□

Bài 131. Tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2a$ và $\widehat{B} = 30^\circ$. Quay tam giác vuông này một vòng quanh cạnh AB ta được một hình nón đỉnh B. Chứng minh rằng diện tích toàn phần của hình nón ấy bằng diện tích mặt cầu có đường kính AB.

Lời giải.

Ta có



- Chiều cao hình nón là $h = AB = 2a\cdot\cos 30^\circ = a\sqrt{3}$.
- Bán kính đáy của hình nón là $R = AC = 2a\cdot\sin 30^\circ = a$.
- Diện tích toàn phần của hình nón là

$$S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + S_{\text{đ}} = \pi\cdot a\cdot 2a + \pi\cdot a^2 = 3\pi a^2\ (\text{đvdt}).$$

- Diện tích mặt cầu có đường kính AB là

$$S_{\text{mc}} = 4\pi\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2 = 4\pi\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3\pi a^2\ (\text{đvdt}).$$

Vậy diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích mặt cầu có đường kính AB. □

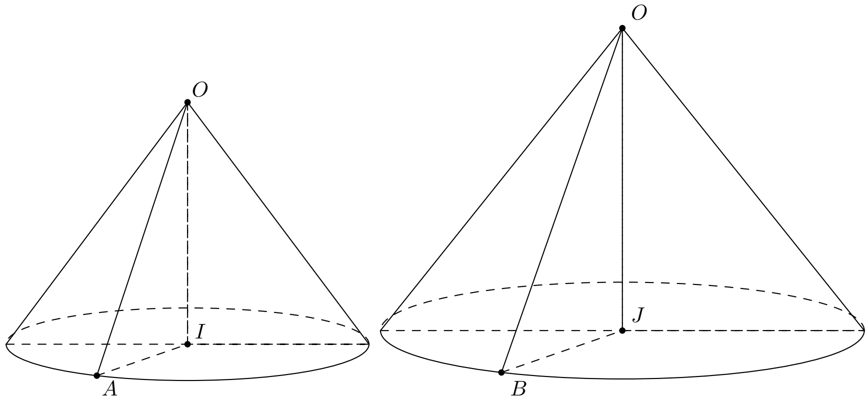
Bài 132. Người ta chia hình tròn $(O; 12\text{ cm})$ thành hai hình quạt có các số đo cung là 120° và 240°. Từ hai hình quạt này người ta uốn lại thành hai hình nón.

a) Tính nửa góc ở đỉnh của mỗi hình nón.

b) Tính thể tích của mỗi hình nón.

c) Tính tỉ số diện tích toàn phần của hai hình nón.

Lời giải.



a) Gọi I, A lần lượt là tâm và một điểm nằm trên đường tròn đáy của hình nón tạo từ hình quạt nhỏ.

Gọi J, B lần lượt là tâm và một điểm nằm trên đường tròn đáy của hình nón tạo từ hình quạt lớn.

Ta có

- Độ dài cung tròn nhỏ là $l = \dfrac{\pi \cdot R \cdot n}{180^\circ} = \dfrac{\pi \cdot 12 \cdot 120^\circ}{180^\circ} = 8\pi$ cm.
- Bán kính đáy của hình nón tạo từ hình quạt nhỏ là $R = \dfrac{l}{2\pi} = \dfrac{8\pi}{2\pi} = 4$ cm.
- Xét $\triangle OIA$ vuông tại I có $\sin \widehat{IOA} = \dfrac{IA}{OA} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \widehat{IOA} \approx 19^\circ 28'$.
  Vậy nửa góc ở đỉnh của hình nón (I) là $\widehat{IOA} \approx 19^\circ 28'$.
- Độ dài cung tròn lớn là $l = \dfrac{\pi \cdot 12 \cdot 240^\circ}{180^\circ} = 16\pi$ cm.
- Bán kính hình nón tạo từ hình quạt lớn là $R = \dfrac{l}{2\pi} = \dfrac{16\pi}{2\pi} = 8$ cm.
- Xét $\triangle OJB$ vuông tại O có $\sin \widehat{JOB} = \dfrac{JB}{BO} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$.
  Suy ra nửa góc ở đỉnh của hình nón tạo từ hình quạt lớn là $\widehat{JOB} \approx 41^\circ 49'$.

b) + Thể tích của hình nhỏ là $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot \sqrt{12^2 - 4^2} = \dfrac{128\pi\sqrt{2}}{3}$ cm^3.

+ Thể tích của hình lớn là $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 8^2 \cdot \sqrt{12^2 - 8^2} = \dfrac{256\pi\sqrt{5}}{3}$ cm^3.

c) + Diện tích toàn phần của hai hình nhỏ là $S_1 = S_{\text{xq}} + S_{\text{đ}} = \pi \cdot 4 \cdot 12 + \pi \cdot 4^2 = 64\pi$ cm^2.

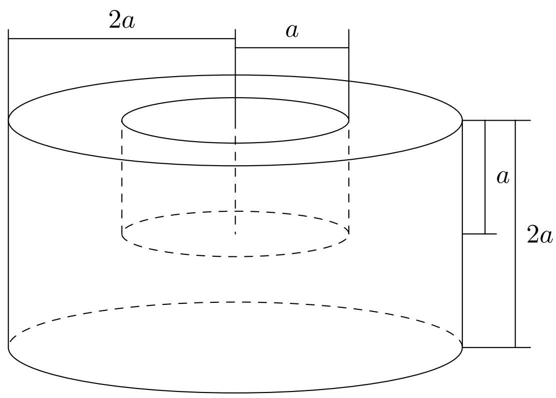
+ Diện tích toàn phần của hai hình lớn là $S_2 = S_{\text{xq}} + S_{\text{đ}} = \pi \cdot 8 \cdot 12 + \pi \cdot 8^2 = 160\pi$ cm^2.

Tỉ số diện tích toàn phần của hai hình nón là $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{64\pi}{160\pi} = \dfrac{2}{5}$.

□

Bài 133.

Một vật thể có dạng hình trụ (H_2) bán kính đường tròn đáy và chiều cao của nó đều bằng $2a$ cm. Người ta khoan một lỗ cũng có dạng hình trụ có bán kính đáy và độ sâu đều bằng a cm.



a) Tính thể tích phần vật thể còn lại.

b) Nếu ta sơn cả bên trong lẫn bên ngoài vật thể thì diện tích vật thể được bao phủ là bao nhiêu?

Lời giải.

Gọi R, r lần lượt là là bán kính hình trụ và lỗ khoan hình trụ. Khi đó ta có $R = 2a$ và $r = \dfrac{R}{2} = a$.

Gọi h, h' lần lượt là chiều cao của hình trụ và lỗ khoan hình trụ. Suy ra $h = 2a$ và $h' = \dfrac{h}{2} = a$.

a) + Thể tích hình trụ (H_2) là $V_1 = \pi \cdot R^2 \cdot h = \pi \cdot 2a \cdot 2a = 4\pi a^2$ cm^3.

+ Thể tích lỗ khoan hình trụ là $V_2 = \pi \cdot r^2 \cdot h' = \pi \cdot a \cdot a = \pi a^2$ cm^3.

+ Thể tích phần vật thể còn lại là $V = V_1 - V_2 = 3\pi a^2$ cm^3.

b) + Diện tích toàn phần của hình trụ (H_2) là

$$\begin{aligned} S_{\text{tp lớn}} &= 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi \cdot 2a \cdot 2a + 2\pi \cdot (2a)^2 \\ &= 16\pi a^2 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

+ Diện tích xung quanh của lỗ khoan hình trụ là

$$S_{\text{xq nhỏ}} = 2\pi r h' = 2\pi \cdot a \cdot a = 2\pi a^2.$$

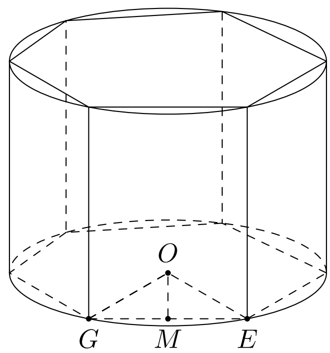
+ Diện tích vật thể được bao phủ là

$$S_{\text{tp lớn}} + S_{\text{xq nhỏ}} = 16\pi a^2 + 2\pi a^2 = 18\pi a^2 \text{ cm}^2.$$

□

Bài 134.

Cho hình lăng trụ đứng có đáy là lục giác đều cạnh a, chiều cao lăng trụ là h. Xét hai hình trụ, một hình có đáy là hình tròn nội tiếp đáy lăng trụ, một hình có đáy là hình tròn ngoại tiếp đáy lăng trụ. Chiều cao của hai hình trụ này đều bằng chiều cao của hình lăng trụ.



a) Tính S_{xq} của hai hình trụ đó.

b) Tính tỷ số thể tích, tỉ số S_{xq} của hai hình trụ. Tìm sự liên hệ giữa hai tỷ số đó.

Lời giải.

a) Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp lục giác đều; M là trung điểm GE.
Xét tam giác OGE có $OG = OE = R$ và $\widehat{GOE} = 60°$.
Suy ra tam giác OGE đều. Do đó $R = GE = a$; $r = OM = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
+ Diện tích xung quanh của hình trụ có đáy là hình tròn nội tiếp đáy lăng trụ là

$$S_1 = 2\pi \cdot r \cdot h = \pi ah\sqrt{3}.$$

+ Diện tích xung quanh của hình trụ có đáy là hình tròn ngoại tiếp đáy lăng trụ là

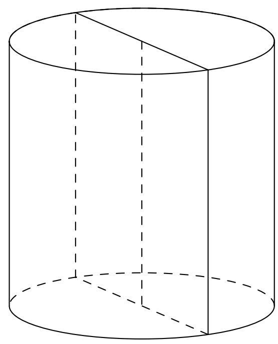
$$S_2 = 2\pi \cdot R \cdot h = 2\pi ah.$$

b) Thể tích của hình trụ có đáy là hình tròn nội tiếp đáy lăng trụ là $V_1 = \pi r^2 h = \dfrac{3\pi a^2 h}{4}$.
Thể tích của hình trụ có đáy là hình tròn ngoại tiếp đáy lăng trụ là $V_2 = \pi R^2 h = \pi a^2 h$.
Suy ra $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\dfrac{3\pi a^2 h}{4}}{\pi a^2 h} = \dfrac{3}{4}$.
Ta có $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{\pi ah\sqrt{3}}{2\pi ah} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Ta thấy tỷ số thể tích của hai hình trụ là bình phương của tỷ số diện tích xung quanh của hai hình trụ đó.

□

Bài 135.

Mặt cắt chứa trục của một hình trụ là một hình vuông. Hình trụ này có số đo diện tích xung quanh (tính bằng m^2), đúng bằng số đo thể tích (tính bằng m^3). Tính diện tích xung quanh của hình trụ này.



Lời giải.

Do mặt cắt chứa trục của hình trụ là một hình vuông nên ta có $h = 2R$.
Diện tích xung quanh của hình trụ là $S = 2\pi Rh = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$ m^2.
Thể tích của hình trụ là $V = \pi R^2 h = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$ m^3.
Theo giả thiết $S = V \Leftrightarrow 4\pi R^2 = 2\pi R^3 \Leftrightarrow R = 2$ m.
Vậy diện tích xung quanh của hình trụ là $S = 4\pi R^2 = 16\pi$ m^2. □

Bài 136. Một hộp bánh hình trụ có chiều cao nhỏ hơn bán kính đáy là 1,5 cm. Biết thể tích của hộp là 850π cm^3, tính diện tích vỏ hộp.

Lời giải.

Gọi h, R (cm) lần lượt là hiều cao, bán kính đáy của hộp bánh hình trụ (h, $R > 0$).
Ta có $h = R - 1{,}5$.
Thể tích của hộp là $V = 850\pi$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \pi R^2 h = 850\pi \quad &\Leftrightarrow \quad \pi R^2(R - 1{,}5) = 850\pi \Leftrightarrow 2R^3 - 3R^2 - 1700 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (2R^3 - 20R^2) + (17R^2 - 170R) + (170R - 1700) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2R^2(R - 10) + 17R(R - 10) + 170(R - 10) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (R - 10)(2R^2 + 17R + 170) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} R = 10 \quad \text{(nhận)} \\ 2R^2 + 17R + 170 = 0 \quad \text{(vô nghiệm do } \Delta = -1071 < 0\text{)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Với $R = 10$ cm ta có $h = 8{,}5$ cm. Vậy diện tích vỏ hộp là

$$S_{\text{tp}} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi \cdot 10 \cdot 8{,}5 + 2\pi .10^2 = 370\pi \text{ cm}^2.$$

□

Bài 137. Một hình trụ có diện tích toàn phần gấp hai lần diện tích xung quanh. Biết bán kính đáy hình trụ là 6 cm. Tính thể tích hình trụ.

Lời giải.

Hình trụ có diện tích toàn phần gấp hai lần diện tích xung quanh nên diện tích hai đáy bằng diện tích xung quanh.
Ta có $2\pi Rh = 2\pi R^2 \Leftrightarrow h = R = 6$ cm.
Vậy thể tích hình trụ là $V = \pi R^2 h = \pi \cdot 6^2 \cdot 6 = 216\pi$ cm^3. □

Bài 138. Một hình trụ có thể tích 200 cm^3. Giảm bán kính đáy đi hai lần và tăng chiều cao lên hai lần ta được một hình trụ mới. Tính thể tích hình trụ này.

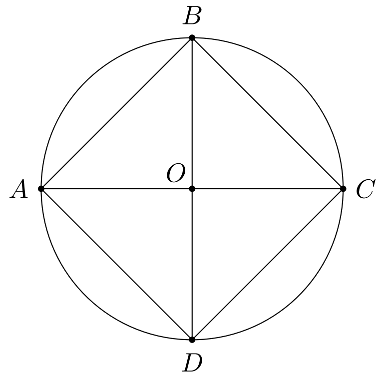
Lời giải.

Ta có $V = \pi R^2 h = 200$ cm^3.
Hình trụ mới có các kích thước là $h' = 2h$, $R' = \dfrac{R}{2}$.
Thể tích hình trụ mới $V' = \pi R'^2 h' = \pi \cdot \left(\dfrac{R}{2}\right)^2 \cdot 2h = \dfrac{\pi R^2 h}{2} = \dfrac{V}{2} = 100$ cm^3. □

Bài 139. Một khúc gỗ hình trụ có đường kính đáy là 4 dm và dài 5 dm. Từ khúc gỗ này người ta xẻ thành một cây cột hình lăng trụ đứng có đáy là hình vuông lớn nhất. Tính thể tích phần gỗ bị loại bỏ đi.

Lời giải.

Vì mặt đáy của hình lăng trụ là hình vuông lớn nhất nên



$$AC = 4 \Rightarrow AB\sqrt{2} = 4 \Rightarrow AB = 2\sqrt{2}\,(\text{dm}).$$

Thể tích gỗ của hình lăng trụ là $V_{LT} = \left(2\sqrt{2}\right)^2 \cdot 5 = 40$ (dm^3).
Thể tích của cây cột là $V = \pi R^2 h = \pi \cdot 2^2 \cdot 5 = 20\pi$ (dm^3).
Thể tích phần gỗ bị loại bỏ là

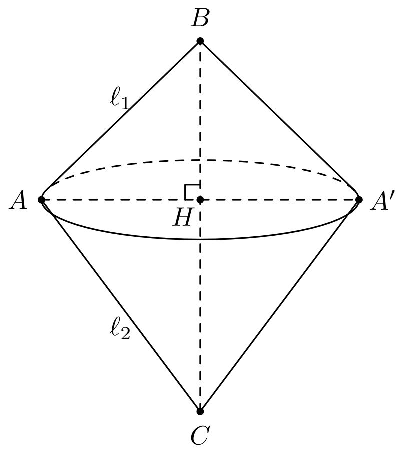
$$V - V_{LT} = 20\pi - 40 \approx 22{,}832\,(\text{dm}^3).$$

□

Bài 140. Cho tamg giác ABC vuông tại A, $AB = 12$ cm, $AC = 16$ cm. Quay tam giác này một vòng quanh cạnh BC. Tính diện tích toàn phần của hình tạo thành.

Lời giải.

Gọi AH là đường cao $\triangle ABC$. Ta có



$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{12^2} + \frac{1}{16^2} = \frac{25}{2304} \Rightarrow AH = \sqrt{\frac{2304}{25}} = \frac{48}{5}.$$

Khi quay tam giác ABC vòng quanh cạnh BC tạo thành hình gồm hai hình nón có đường sinh lần lượt là $\ell_1 = BA$ và $\ell_2 = CA$.
Do đó diện tích toàn phần của hình tạo thành là

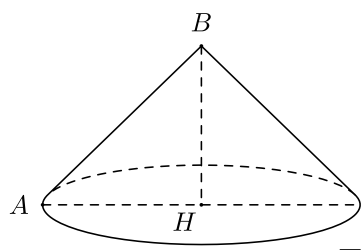
$$\begin{aligned} S_{\text{tp}} &= \pi \cdot AH \cdot \ell_1 + \pi \cdot AH \cdot \ell_2 \\ &= \pi \cdot AH \cdot (\ell_1 + \ell_2) \\ &= \pi \cdot \frac{48}{5} \cdot (12 + 16) = \frac{1344\pi}{5}\ (\text{cm}^2). \end{aligned}$$

□

Bài 141. Một đống cát hình nón có chu vi đáy là 12,56 m. Nếu dùng xe cải tiến để chở thì phải cần 10 chuyến mới chuyển hết đống cát đó. Biết mỗi chuyến xe cải tiến chở được 250 dm^3. Tính chiều cao của đống cát (làm tròn đến dm).

Lời giải.

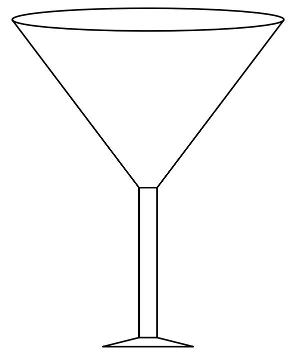
Thể tích của khối cát là $V = 250 \cdot 10 = 2500\ \ \text{dm}^3$.
Bán kính của mặt đáy là $r = \dfrac{12{,}56}{2\pi} \approx 2\text{m} = 20\,\text{dm}$.
Ta có $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow h = \dfrac{3V}{\pi r^2} = \dfrac{3 \cdot 2500}{\pi \cdot 20^2} \approx 5{,}97$ dm.



□

Bài 142.

Martini glass là một loại ly đựng rượu có chân cao, phần đựng rượu là một hình nón. Biết rượu trong một chiếc cốc dạng như trên cao đến $\frac{1}{3}$ chiều cao của cốc. Biết thể tích của rượu trong cốc là 2 cm^3. Tính thể tích của cốc.



Lời giải.

Gọi chiều cao và bán kính của phần hình nón của cốc là h, R.

Khi đó chiều cao của phần rượu trong cốc là $\frac{1}{3}h$, và gọi bán kính là r.

Ta có thể tích phần rượu là $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \frac{1}{3}h = 2 \Rightarrow \pi r^2 h = 18$.

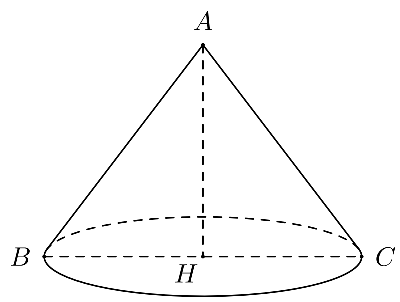
Vì phần rượu cao đến $\frac{1}{3}$ chiều cao của cốc nên $R = 3r$.

Vậy thể tích của cốc là $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}(3r)^2 h = 3\pi r^2 h = 54$ cm^3. □

Bài 143. Một hình nón có mặt cắt chứa trục là một tam giác đều. Chứng minh rằng diện tích xung quanh bằng hai lần diện tích đáy.

Lời giải.

Giả sử tam giác đều có cạnh bằng a. Khi đó ta có đường sinh $\ell = a$ và bán kính đáy $r = \frac{a}{2}$. Suy ra



- Diện tích xung quanh là $S_{\text{xq}} = \pi r \ell = \pi \cdot \frac{a}{2} \cdot a = \frac{a^2\pi}{2}$.
- Diện tích mặt đáy là $S = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2\pi}{4}$.

Suy ra $S_{\text{xq}} = 2S$.

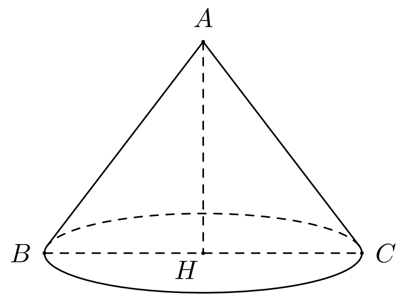
□

Bài 144. Mặt cắt chứa trục của một hình nón là một tam giác đều. Chứng minh rằng diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích mặt cầu có đường kính bằng chiều cao của hình nón.

Lời giải.

Giả sử tam giác đều có cạnh bằng a.

Khi đó hình nón có



- Đường sinh $\ell = a$.
- Bán kính đáy $r = \frac{a}{2}$.
- Chiều cao $h = \sqrt{\ell^2 - r^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích toàn phần của hình nón là

$$S_{\text{tp}} = \pi r\ell + \pi r^2 = \pi \cdot \frac{a}{2} \cdot a + \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2\pi}{4}.$$

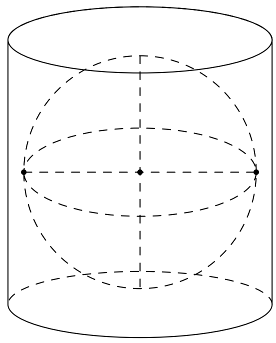
Diện tích của mặt cầu có đường kính bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ là

$$S_{\text{mc}} = \pi d^2 = \pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3a^2\pi}{4}.$$

Vậy $S_{\text{tp}} = S_{\text{mc}}$. □

Bài 145.

Một bình thủy tinh hình trụ chứa nước. Trong bình có một vật rắn hình cầu ngập hoàn toàn trong nước. Khi người ta lấy vật rắn đó ra khỏi bình thì mực nước trong bình giảm đi 48,6 mm. Biết đường kính bên trong của đáy bình là 50 mm, tính bán kính của vật hình cầu.



Lời giải.

Thể tích của hình cầu bằng thể tích của phần hình trụ có mực nước giảm đi 48,6 mm.

Thể tích của hình cầu là $V_{mc} = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Thể tích phần hình trụ có mực nước giảm đi 48,6 mm là

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot \frac{50}{2} \cdot 48{,}6 = 1215\pi.$$

Suy ra

$$1215\pi = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R^3 = \frac{3 \cdot 1215\pi}{4\pi} \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1215\pi}{4\pi}} \approx 9{,}70\,\text{mm}.$$

□

5 ÔN TẬP HỌC KÌ II

Bài 146. Cho đường tròn (O). Từ một điểm M bên ngoài đường tròn vẽ các tiếp tuyến MA, MB (A, B là tiếp điểm) và cát tuyến MCD không đi qua O.

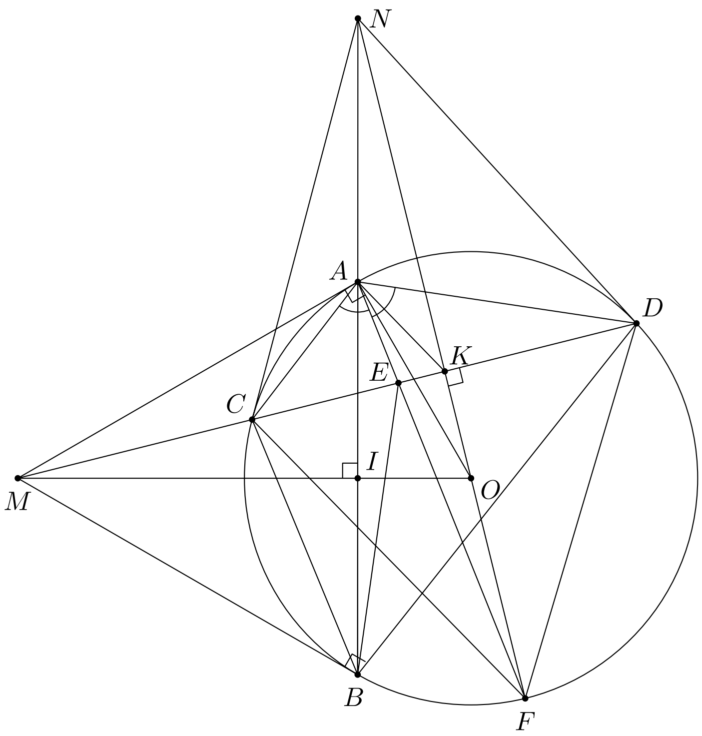
a) Chứng minh rằng: $MA^2 = MC \cdot MD$.

b) Tia phân giác $\widehat{CAD}$ cắt CD tại E và (O) tại F. Chứng minh: $OF \perp CD$, $MA = ME$.

c) Chứng minh rằng: BE là tia phân giác $\widehat{CBD}$.

d) Đường thẳng OF cắt CD tại K và cắt AB kéo dài tại N. Chứng minh: $OK \cdot ON = OA^2$. Suy ra NC, ND là các tiếp tuyến của (O).

Lời giải.



a) Chứng minh rằng: $MA^2 = MC \cdot MD$.

Xét $\triangle MAC$ và $\triangle MDA$, ta có:

- $\widehat{AMC} = \widehat{DMA}$ là góc chung (1).
- Ta có $\widehat{CAM} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AC}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung).

  Mà $\widehat{MDA} = \widehat{CDA} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AC}$ (góc nội tiếp của đường tròn (O)).

  $\Rightarrow \widehat{CAM} = \widehat{CDA}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle MAC \backsim \triangle MDA$ (g-g).
Suy ra $\dfrac{MA}{MC} = \dfrac{MD}{MA} \Rightarrow MA^2 = MC \cdot MD$.

b) Vì AF là tia phân giác $\widehat{CAD}$ nên $\widehat{CAF} = \widehat{DAF} \Rightarrow \text{sđ}\overset{\frown}{CF} = \text{sđ}\overset{\frown}{DF} \Rightarrow CF = DF$.

Mà $OC = OD$.

Suy ra OF là đường trung trực của CD.

Vậy $OF \perp CD$.

Chứng minh $MA = ME$:

Ta có

$\widehat{MAE} = \widehat{MAF} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AF}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung).

$\widehat{ADF} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AF}$ (góc nội tiếp đường tròn (O)).

$\Rightarrow \widehat{MAE} = \widehat{ADF}$ (3).

Xét $\triangle AEC$ và $\triangle ADF$, ta có

- $\widehat{CAE} = \widehat{DAF}$ (AF là tia phân giác góc $\widehat{CAD}$).
- $\widehat{ACE} = \widehat{AFD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AD}$).

$\Rightarrow \triangle AEC \backsim \triangle ADF$ (g-g).
$\Rightarrow \widehat{AEC} = \widehat{ADF}$ (hai góc tương ứng) (4).
Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{AEC} = \widehat{MAE}$.
Suy ra $\triangle MAE$ cân tại M, nên $MA = ME$.

c) Chứng minh rằng: BE là tia phân giác $\widehat{CBD}$.
Ta có $MB = MA = ME \Rightarrow \widehat{MEB} = \widehat{MBE} = \widehat{MBC} + \widehat{CBE}$.
Mặt khác $\widehat{MEB} = \widehat{EBD} + \widehat{EDB}$ (góc ngoài của tam giác $\triangle EBD$).
Mà $\widehat{EDB} = \widehat{MBC}$ (cùng bằng $\dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{BC}$).
$\Rightarrow \widehat{CBE} = \widehat{EBD}$.
Vậy BE là tia phân giác của góc $\widehat{CBD}$.

d) Đường thẳng OF cắt CD tại K và cắt AB kéo dài tại N. Chứng minh: $OK \cdot ON = OA^2$.
Suy ra NC, ND là các tiếp tuyến của (O).
Gọi I là giao điểm của AB và OM. Ta có $OI \perp AB$.
Xét tứ giác $MAKO$, ta có

- $\widehat{MAO} = 90^\circ$ (tiếp tuyến vuông góc với bán kính).
- $\widehat{MKO} = 90^\circ$ (chứng minh câu b).

$\Rightarrow MAKO$ nội tiếp (hai đỉnh kề cùng nhìn cạnh đối diện bằng một góc có số đo bằng nhau).
$\Rightarrow \widehat{KMO} = \widehat{OAK}$.
Mặt khác $\widehat{KMO} = \widehat{ANO}$ (cùng phụ với $\widehat{NOM}$).
$\Rightarrow \widehat{ANO} = \widehat{OAK}$.
Xét $\triangle ANO$ và $\triangle KAO$, ta có $\begin{cases} \widehat{ANO} = \widehat{OAK} \\ \widehat{NOA} = \widehat{AOK} \end{cases} \Rightarrow \triangle ANO \backsim \triangle KAO$ (g-g).
Suy ra $\dfrac{OA}{ON} = \dfrac{OK}{OA} \Rightarrow OK \cdot ON = OA^2$.
$\Rightarrow OC^2 = OK \cdot ON$ (vì $OA = OC$).
Mặt khác CK là đường cao $\triangle OCN$.
Do đó $OC \perp CN \Rightarrow NC$ là tiếp tuyến của (O).
Chứng minh tương tự ND cũng là tiếp tuyến của (O).

□

Bài 147. Từ điểm A ở ngoài đường tròn $(O; R)$, kẻ hai tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (B, C là hai tiếp điểm). Đường thẳng BC cắt AO tại I. Tia AO cắt đường tròn (O) tại M và N. Một cát tuyến qua A cắt (O) lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng:

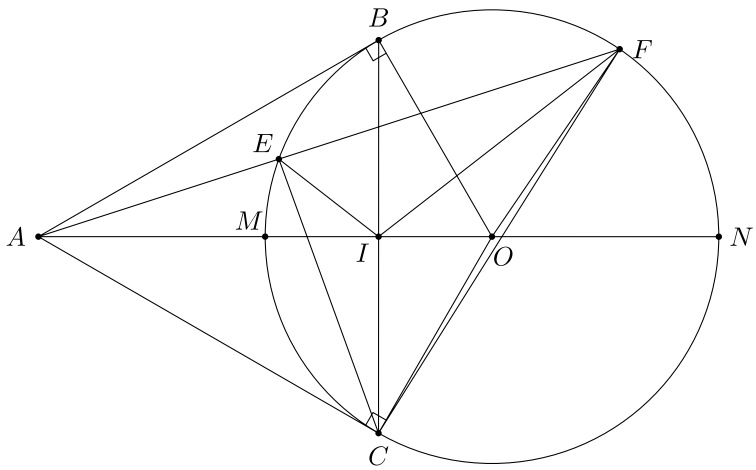
a) $AC^2 = AE \cdot AF$.

b) $AE \cdot AF = AO \cdot AI$.

c) Tứ giác $EIOF$ nội tiếp.

d) $\widehat{MIF} = \widehat{EIN}$.

Lời giải.



a) Xét $\triangle AEC$ và $\triangle ACF$, ta có:

- $\widehat{EAC} = \widehat{CAF}$ (góc chung) (1).
- Ta có $\widehat{ACE} = \dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{EC}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung).
  $\widehat{AFC} = \widehat{EFC} = \dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{EC}$ (góc nội tiếp).
  $\Rightarrow \widehat{ACE} = \widehat{EFC}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle AEC \backsim \triangle ACF$ (g-g).
Suy ra $\dfrac{AC}{AE} = \dfrac{AF}{EC} \Rightarrow AC^2 = AE \cdot AF$.

b) $AE \cdot AF = AO \cdot AI$.

Ta có $\triangle ACO$ vuông tại C, CI là đường cao nên $AC^2 = AI \cdot AO$ (hình chiếu cạnh góc vuông lên cạnh huyền).

Theo câu a, ta có $AC^2 = AE \cdot AF$.

Suy ra $AE \cdot AF = AO \cdot AI$.

c) Tứ giác $EIOF$ nội tiếp.

Ta có $AE \cdot AF = AI \cdot AO \Rightarrow \dfrac{AE}{AI} = \dfrac{AO}{AF}$

$\Rightarrow \triangle AEI \backsim \triangle AOF$

$\Rightarrow \widehat{AIE} = \widehat{AFO}$.

Mà $\widehat{AIE} + \widehat{EIO} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AFO} + \widehat{EIO} = 180^\circ$ hay $\widehat{EFO} + \widehat{EIO} = 180^\circ$.

Suy ra tứ giác $EIOF$ nội tiếp (tổng hai góc đối diện bằng 180°).

d) $\widehat{MIF} = \widehat{EIN}$.

Ta có $\widehat{MIF} = \widehat{EIF} + \widehat{EIM}$, $\widehat{EIN} = \widehat{EIF} + \widehat{FIN}$.

Do $\begin{cases} \widehat{EIM} = \widehat{EFO} \text{ (do } EIOF \text{ nội tiếp, góc trong bằng góc đối ngoài)} \\ \widehat{FIN} = \widehat{FEO} \text{ (cùng chắn cung } FO) \\ \widehat{FEO} = \widehat{EFO} \text{ (tam giác } OFE \text{ cân tại } O). \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{EIM} = \widehat{FIN}$.

Suy ra $\widehat{MIF} = \widehat{EIN}$.

□

Bài 148. Cho đường tròn $(O; R)$. Hai đường kính AB và CD vuông góc nhau. Trên OA lấy điểm M không trùng O. Đường thẳng CM cắt (O) tại điểm thứ hai là N. Đường vuông góc với AB tại M cắt tiếp tuyến với $(O; R)$ tại N là P.

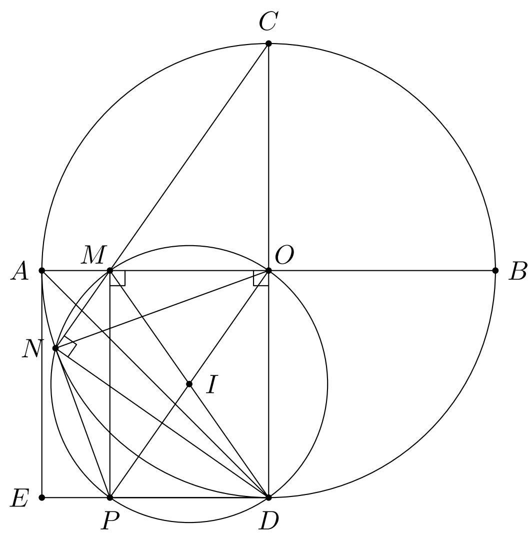
a) Chứng minh tứ giác $OMND$ nội tiếp được trong đường tròn. Xác định tâm và bán kính.

b) Chứng minh rằng: $\triangle COM \backsim \triangle CND$. Tính tích $CM \cdot CN$ theo R.

c) Chứng minh rằng: P thuộc đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OMND$. Từ đó chứng minh $CMPO$ là hình bình hành.

d) Tính theo R phần diện tích giới hạn bởi hai tiếp tuyến AE, DE và cung nhỏ AD.

Lời giải.



a) Chứng minh tứ giác $OMND$ nội tiếp được trong đường tròn. Xác định tâm và bán kính.
Xét tứ giác $OMND$, ta có

- $\widehat{MOD} = 90^\circ$ (hai đường kính vuông góc).
- $\widehat{MND} = \widehat{CND} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow OMND$ nội tiếp.
Vì $\widehat{MOD} = 90^\circ$ nên MD là đường kính của đường tròn, do đó tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OMND$ là trung điểm của MD.

b) Chứng minh rằng: $\triangle COM \backsim \triangle CND$. Tính tích $CM \cdot CN$ theo R.
Xét $\triangle COM$ và $\triangle CND$, ta có

- $\widehat{OCM} = \widehat{NCD}$ (góc chung).
- $\widehat{COM} = \widehat{CDN} = 90^\circ$.

$\Rightarrow \triangle COM \backsim \triangle CND$ (g-g)
$\Rightarrow \dfrac{CM}{CD} = \dfrac{CO}{CN} \Rightarrow CM \cdot CN = CD \cdot CO = 2R \cdot R = 2R^2$.

c) Chứng minh rằng: P thuộc đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OMND$.
Xét tứ giác $OMNP$, ta có

- $\widehat{PMO} = 90^\circ$ (hai đường kính vuông góc).
- $\widehat{PNO} = 90^\circ$ (tiếp tuyến vuông góc với bán kính).

Suy ra $OMNP$ nội tiếp.
Mà tứ giác $OMND$ nội tiếp (chứng minh câu a), nên năm điểm O, M, N, D, P cùng nằm trên một đường tròn.
Vậy điểm P cũng thuộc đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OMND$.
Chứng minh $CMPO$ là hình bình hành:
Ta có $OC \perp AB$ và $MP \perp AB$ nên $OC \parallel MP$ (1).
Xét hai tám vuông $\triangle MOP$ và $\triangle OMD$, ta có

- $OP = MD$ (đường kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OMND$).
- MO là cạnh chung.

$\Rightarrow \triangle MOP = \triangle OMD$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông)
$\Rightarrow MP = OD$.
Mà $OD = OC$ (bán kính đường tròn (O)), do đó $MP = OC$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $CMPO$ là hình bình hành.

d) Tính theo R phần diện tích giới hạn bởi hai tiếp tuyến AE, DE và cung nhỏ AD.
Vì $OA \perp OD$ nên $AE \perp ED$. Do đó tứ giác $OAED$ là hình vuông.
Diện tích hình vuông $OAED$ là $S_2 = OA^2 = R^2$.
Diện tích hình quạt tròn OAD là $S_2 = \dfrac{\pi \cdot R^2 \cdot 90}{360} = \dfrac{\pi R^2}{4}$.
Diện tích cần tìm là $S = S_1 - S_2 = R^2 - \dfrac{\pi R^2}{4} = \dfrac{(4-\pi)R^2}{4}$ (đvdt).

□

Bài 149. Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Đường cao AD của $\triangle ABC$ cắt (O) tại E. Trên đoạn DA lấy điểm H sao cho $DH = DE$. Tia BH cắt cạnh AC tại K và cắt đường tròn (O) tại F.

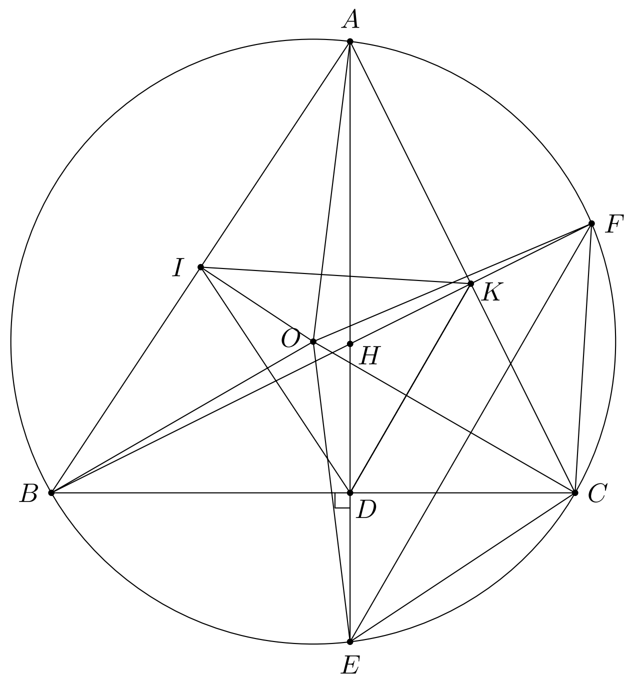
a) Chứng minh Tứ giác $CDHK$ nội tiếp được suy ra H là trực tâm $\triangle ABC$.

b) Chứng minh rằng $DK \parallel EF$.

c) Chứng minh rằng $OC \perp DK$.

d) Cho biết $DK = \dfrac{1}{2}AB$. Tính DK theo R.

Lời giải.



a) Chứng minh Tứ giác $CDHK$ nội tiếp được suy ra H là trực tâm $\triangle ABC$.
Ta có $\begin{cases} DH = DE \text{ (gt)} \\ HE \perp BC \text{ (}AD\text{ là đường cao } \triangle ABC\text{)} \end{cases} \Rightarrow BC$ là đường trung trực của HE.
$\Rightarrow BH = BE \Rightarrow \triangle BHE$ cân tại D, nên $\widehat{BEH} = \widehat{BHE}$ (1).

Ta lại có $\widehat{ACB} = \widehat{AEB} = \dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AB}$ (góc nội tiếp) (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BHE} = \widehat{ACB} = \widehat{HCD}$.

Xét tứ giác $CDHK$, ta có $\widehat{DHK} + \widehat{HCD} = \widehat{DHK} + \widehat{BHE} = 180^\circ$.

Suy ra tứ giác $CDHK$ nội tiếp.

Mà $\widehat{HDC} = 90^\circ$, nên $\widehat{HKC} = 90^\circ$

$\Rightarrow BK \perp AC$.

Khi đó H là giao điểm của hai đường cao AD và BK nên H là trực tâm $\triangle ABC$.

b) Chứng minh rằng $DK \parallel EF$.

Ta có $\widehat{BAE} = \widehat{BFE}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{BE}$).

Xét tứ giác $AKDB$, ta có

- $\widehat{AKB} = 90^\circ$ (BK là đường cao).
- $\widehat{ADB} = 90^\circ$ (AD là đường cao).

Do đó, tứ giác $AKDB$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{BAD} = \widehat{BKD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{BD}$).

Suy ra $\widehat{BFE} = \widehat{BKD}$.

Vậy $DK \parallel EF$ (hai góc đồng vị).

c) Chứng minh rằng: $OC \perp DK$.

Ta có $\widehat{KBC} = \widehat{DAC}$ (cùng phụ với góc $\widehat{ACB}$) $\Rightarrow \overset{\frown}{FC} = \overset{\frown}{EC} \Rightarrow FC = EC$.

Do đó C nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng EF (1).

Lại có $OE = OF = R$ nên O nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng EF (2).

Từ (1) và (2) suy ra OC là đường trung trực của đoạn thẳng $EF \Rightarrow OC \perp EF$.

Suy ra $OC \perp DK$ (vì $EF \parallel DK$).

d) Cho biết $DK = \dfrac{1}{2}AB$. Tính DK theo R. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

$\triangle ABD$ vuông tại D nên $ID = \dfrac{1}{2}AB$ (đường trung tuyến tam giác vuông).

Tương tự $IK = \dfrac{1}{2}AB$.

Do đó $ID = IK = DK \Rightarrow \triangle DIK$ đều $\Rightarrow \widehat{DIK} = 60^\circ$.

Xét tứ giác $ABDK$, ta có

- $\widehat{ADB} = 90^\circ$.
- $\widehat{AKB} = 90^\circ$.

Suy ra $ABDK$ nội tiếp đường tròn tâm I (hai đỉnh kề cùng nhìn cạnh đối diện một góc bằng nhau).

Do đó $\widehat{DAK} = \dfrac{1}{2}\widehat{DIK} = 30^\circ$.

Mà $\triangle ADC$ vuông tại D nên $\widehat{ACD} = 60^\circ$.

Mặt khác $\widehat{AOB} = 2\widehat{ACB} = 2\widehat{ACD} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$.

$\triangle AOB$ cân tại O nên OI là đường trung tuyến cũng là đường cao và đường phân giác, do đó $\widehat{AOI} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOB} = 60^\circ$

$\Rightarrow IA = OA \cdot \sin AOI = R \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Do đó $DK = \dfrac{1}{2}AB = IA = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

□

Bài 150. Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm A ở ngoài đường tròn sao cho $OA = 2R$. Từ A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC đến (O) (B, C là hai tiếp điểm).

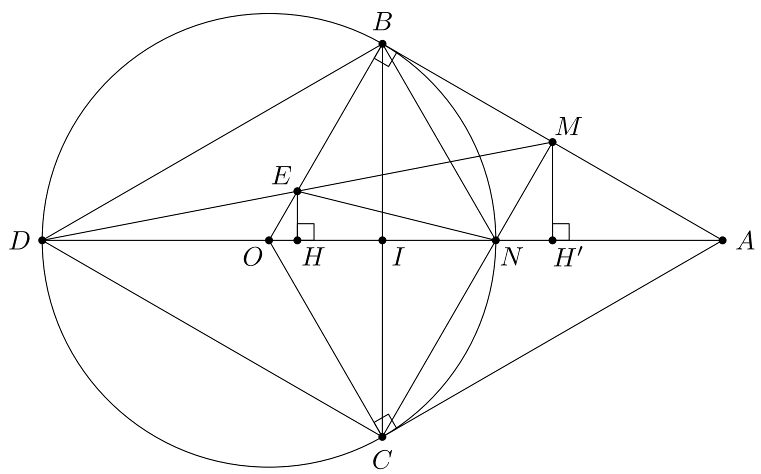
a) Chứng minh rằng tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

b) Gọi M là trung điểm của AB. Đường thẳng CM cắt đường tròn (O) tại N. Chứng minh rằng $MB^2 = MC \cdot MN$.

c) Đường thẳng AN cắt đường tròn (O) tại D, $(D \neq N)$. Chứng minh $ABCD$ là hình thoi.

d) Đường thẳng DM cắt OB tại E. Tính diện tích $\triangle EDN$ theo R.

Lời giải.



a) Ta có AB, AC là hai tiếp tuyến cắt nhau tại A nên $\triangle ABO$ và $\triangle ACO$ là hai tam giác vuông lần lượt tại B và C. Do $\triangle ABO$ và $\triangle ACO$ là hai tam giác vuông cùng cạnh huyền nên tứ giác $ABOC$ nội tiếp đường tròn đường kính AO.

b) Xét $\triangle MBN$ và $\triangle MCB$ ta có $\begin{cases} \widehat{BMN} \text{ chung} \\ \widehat{MBN} = \widehat{MCB} = \dfrac{1}{2}\text{sđ } \overset{\frown}{BN} \end{cases}$.

Vậy $\triangle MBN \sim \triangle MCB$ (g - g). Khi đó $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{MN}{MB} \Rightarrow MB^2 = MC \cdot MN$.

c) Ta có $\sin BAO = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{R}{2R} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAO} = 30^\circ$. Do AO là phân giác $\widehat{BAO}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) nên $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Mà $\triangle ABC$ cân tại A nên $\triangle ABC$ là tam giác đều.
Mặt khác M là trung điểm AB nên CN là phân giác $\widehat{ACB}$ (đường trung tuyến cũng là đường phân giác tam giác đều ABC). Vậy $\widehat{MCA} = \widehat{MCB}$.
Do $\widehat{MBN} = \widehat{MCB}$ nên $\widehat{MCA} = \widehat{MBN}$.
Khi đó sđ $\overset{\frown}{BN} =$ sđ $\overset{\frown}{CN}$ nên $\widehat{BCN} = \widehat{CBN}$ (hai góc chắn hai cung có số đo bằng nhau).
Vậy $\triangle NBC$ cân tại N. Do đó $NB = NC$.
Ta cũng có $AB = AC$(tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau), $OB = OC(= R)$ nên A, O, N thẳng hàng (cùng nằm trên đường trung trực đoạn BC).
Vậy DN là đường kính đường tròn (O).
Từ đây thấy $\widehat{BDA} = \widehat{BCN} = 30^\circ = \widehat{BAD}$.
Suy ra $BA = BD = DC = AC$ (trung trực).
Vậy $ABCD$ là hình thoi (tứ giác có bốn cạnh bằng nhau).

d) Gọi H, H' lần lượt là hình chiếu của E, M lên DA. Khi đó $S_{EDN} = \dfrac{1}{2} \cdot EH \cdot DN$.
Ta có $MH' \parallel BI$ (cùng vuông góc AO) nên $\dfrac{MH'}{BI} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{1}{2}$ (Thales).
Suy ra $MH' = \dfrac{BI}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{OB^2 - OI^2} = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{R^2 - \left(\dfrac{R}{2}\right)^2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{4}$.
Ta có $\begin{cases} CM \perp AB \text{ (trung tuyến tam giác đều)} \\ OB \perp AB \end{cases} \Rightarrow OB \parallel MN \Rightarrow \widehat{NME} = \widehat{OED}$.
Xét $\triangle DOE$ và $\triangle DNM$ ta có $\begin{cases} \widehat{NME} = \widehat{OED} \text{ (cmt)} \\ \widehat{MDN} \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \triangle DOE \sim \triangle DNM$ (g - g).
Khi đó $\dfrac{DE}{DM} = \dfrac{DO}{DN} = \dfrac{1}{2}$.
Ta có $EH \parallel MH'$ nên $\dfrac{DE}{DM} = \dfrac{EH}{MH'} = \dfrac{1}{2}$ (Thales).
Vậy $EH = \dfrac{1}{2}MH' = \dfrac{R\sqrt{3}}{8}$.
Vậy $S_{EDN} = \dfrac{1}{2} \cdot EH \cdot DN = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{R\sqrt{3}}{8} \cdot 2R = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{8}$.

□

Bài 151. Cho đường tròn $(O; R)$. Một điểm T nằm ngoài đường tròn. Kẻ cát tuyến cắt (O) tại A và B (A nằm giữa T và B). Các tiếp tuyến với (O) tại A và B cắt nhau tại M. Hạ $MH \perp OT$, MH cắt AB tại N, K là trung điểm của cạnh AB.

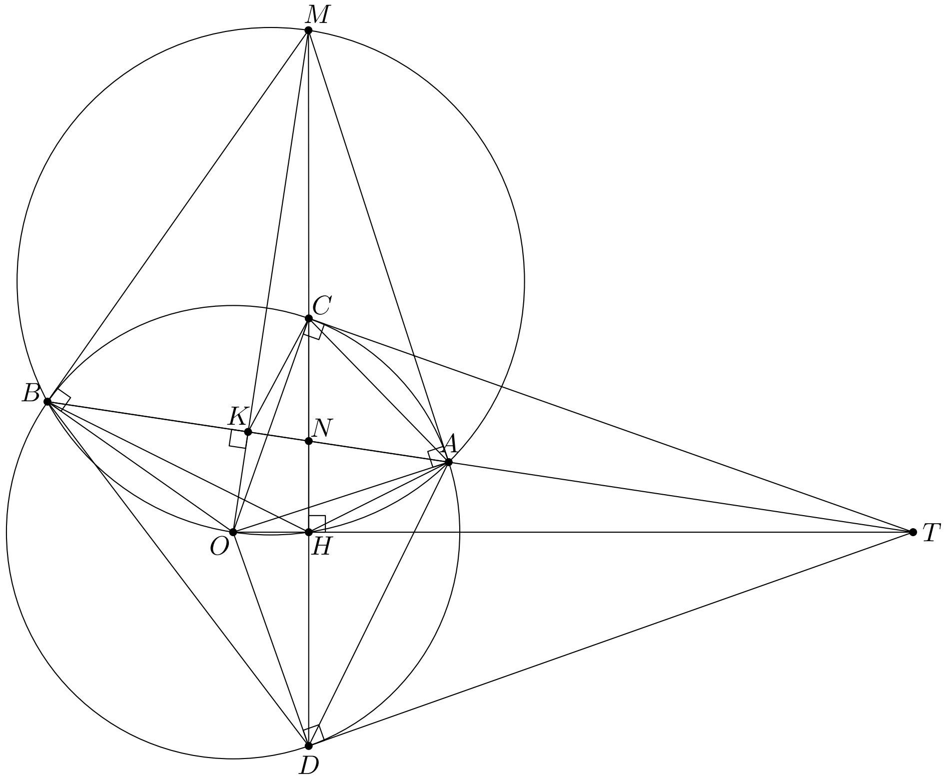
a) Chứng minh rằng tứ giác $OAMB$ nội tiếp và H cũng thuộc đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OAMB$.

b) MN cắt đường tròn tại C và D (C nằm giữa M và D). Chứng minh $\widehat{ADB} = \widehat{AHN}$ và $TA \cdot TB = TK \cdot TN = TH \cdot TO$.

c) Chứng minh rằng tứ giác $CKOD$ nội tiếp.

d) Chứng tỏ TC và TD là tiếp tuyến (O).

Lời giải.



a) Ta có $\triangle OBM$ và $\triangle OAM$ là hai tam giác vuông có cùng cạnh huyền OM (do MB, MA là hai tiếp tuyến của (O)). Vậy tức giác $OAMB$ nội tiếp đường tròn đường kínnh AM.
Ta có $OH \perp OT$ nên $\triangle OMH$ vuông tại H, cạnh huyền OM. Vậy H thuộc đường tròn đường kính OM ngoại tiếp tứ giác $OAMB$.

b) Do H thuộc đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OAMB$ nên $\widehat{AHN} = \widehat{AHM} = \widehat{ABM} = \dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AM}$.
Mặt khác $\widehat{ADB} = \widehat{ABM}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung (O)) nên $\widehat{ADB} = \widehat{AHN}$.
Ta có $\begin{cases} \widehat{THA} + \widehat{AHN} = 90^\circ \\ \widehat{OBT} + \widehat{ABM} = 90^\circ \end{cases}$ mà $\widehat{AHN} = \widehat{ABM}$ (cmt) nên $\widehat{THA} = \widehat{OBT}$.
Xét $\triangle THA$ và $\triangle TBO$ ta có $\begin{cases} \widehat{THA} = \widehat{OBT}\,\text{(cmt)} \\ \widehat{ATH}\,\text{chung} \end{cases} \Rightarrow \triangle THA \sim \triangle TBO$ (g - g).
Khi đó $\dfrac{TH}{TB} = \dfrac{TB}{TO} \Leftrightarrow TA \cdot TB = TH \cdot TO.\quad (1)$
Ta có $\widehat{OKN} = 90^\circ$ do K là trung điểm AB (quan hệ đường kính và dây cung). Vậy$\triangle OKN$ và $\triangle OHN$ là hai tam giác vuông có chung cạnh huyền ON nên tứ giác $OKNH$ nội tiếp.

Suy ra $\widehat{TOK} = \widehat{TNH}$ (góc trong và góc ngoài góc đối diện).

Xét $\triangle TOK$ và $\triangle TNH$ ta có $\begin{cases} \widehat{TOK} = \widehat{TNH} \text{ (cmt)} \\ \widehat{OTN} \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \triangle TOK \sim \triangle TNH$ (g - g).

Khi đó $\dfrac{TN}{TO} = \dfrac{TH}{TK} \Leftrightarrow TK \cdot TN = TH \cdot TO.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $TA \cdot TB = TK \cdot TN = TH \cdot TO$.

c) Ta có $\widehat{MAC} = \widehat{MDA} =$ sđ $\overset{\frown}{AC}$.

Xét $\triangle MCA$ và $\triangle MAD$ ta có $\begin{cases} \widehat{DMA} \text{ chung} \\ \widehat{MAC} = \widehat{MDA} \text{ (cmt)} \end{cases} \Rightarrow \triangle MCA \sim \triangle MAD$ (g -g).

Khi đó $\dfrac{AM}{DM} = \dfrac{CM}{AM} \Rightarrow MC \cdot MD = AM^2.$ (3)

Xét $\triangle OBM$ vuông tại B, đường cao BK, ta có $MK \cdot MO = MB^2$. (4)

Do $MA = MB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Nên từ (3), (4) suy ra $MC \cdot MD = MK \cdot MO \Leftrightarrow \dfrac{MC}{MO} = \dfrac{MK}{MD}$.

Xét $\triangle MCK$ và $\triangle MOD$ ta có $\begin{cases} \widehat{CMK} \text{ chung} \\ \dfrac{MC}{MO} = \dfrac{MK}{MD} \text{ (cmt)} \end{cases} \Rightarrow \triangle MCK \sim \triangle MOD$ (c -g c).

Khi đó $\widehat{CKM} = \widehat{MOD}$. Vậy tứ giác $CKOD$ nội tiếp.

d) Ta có $\triangle OAB$ cân tại O nên $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$.

Mặt khác $\widehat{OAB} = \widehat{OHB} = \dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{OB}$ (tứ giác $OBAH$ nội tiếp). Vậy $\widehat{OBA} = \widehat{OHB}$.

Xét $\triangle OBH$ và $\triangle OTB$ ta có $\begin{cases} \widehat{BOH} \text{ chung} \\ \widehat{OBA} = \widehat{OHB} \text{ (cmt)} \end{cases} \Rightarrow \triangle OBH \sim \triangle OTB$ (g - g).

Khi đó $\dfrac{OH}{OB} = \dfrac{OB}{OT} \Rightarrow OH \cdot OT = OB^2 \xrightarrow{OA=OB=OD=R} \begin{cases} OH \cdot OT = OC^2 \\ OH \cdot OT = OD^2. \end{cases}$

Vậy $\triangle OCT$ và $\triangle ODT$ lần lượt là hai tam giác vuông tại C và D. Suy ra TC và TD là tiếp tuyến (O).

□

Bài 152. Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

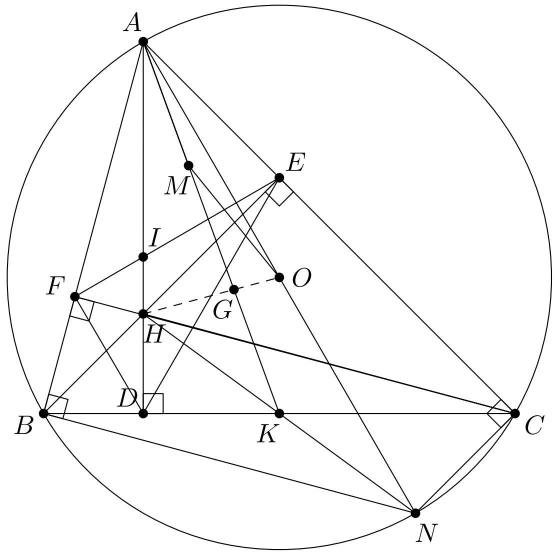
a) Chứng minh rằng tứ giác $ABDE$ nội tiếp và $\widehat{ADE} = \widehat{ABE}$.

b) Vẽ đường kính AN của đường tròn (O). Chứng minh tứ giác $BHCN$ là hình bình hành.

c) Gọi I là giao điểm của AD và EF. Chứng minh rằng $IE \cdot DF = IF \cdot DE$.

d) Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$ và M là trung điểm của AG. Tính diện tích $\triangle AMO$ theo diện tích $\triangle AHN$.

Lời giải.



a) Xét tứ giác $ABDE$ có $\widehat{ADB} = \widehat{AEB} = 90^\circ$.

Suy ra tứ giác $ABDE$ nội tiếp đường tròn đường kín AB.

Khi đó $\widehat{ADE} = \widehat{ABE}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AE}$ của đường tròn đường kính AB).

b) Ta có $\triangle ANB$, $\triangle ANC$ nội tiếp đường tròn tâm O đường kính AN.

Vậy $\triangle ANB$, $\triangle ANC$ lần lượt vuông tại B và C.

Ta có $\begin{cases} HC \perp AB\,(CH \text{ là đường cao } \triangle ABC) \\ AB \perp NB \end{cases} \Rightarrow HC \parallel NB.$

Ta có $\begin{cases} BE \perp AC\,(BE \text{ là đường cao } \triangle ABC) \\ AC \perp NC \end{cases} \Rightarrow BE \parallel NC.$

Vậy $BHCN$ là hình bình hành.

c) Xét tứ giác $BFHD$ có $\widehat{BFH} + \widehat{BDH} = 180^\circ$.

Suy ra tứ giác $BFHD$ nội tiếp đường tròn đường kính HB.

Khi đó $\widehat{FBH} = \widehat{FDH}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{FH}$của đường tròn đường kính HB).

Xét tứ giác $DHEC$ nội tiếp đường tròn đường kính HC.

Ta có $\widehat{HDE} = \widehat{HCE}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{HE}$ của đường tròn đường kính HC).

Ta có $\begin{cases} \widehat{FBE} = \widehat{FDI}; \widehat{IDE} = \widehat{FCE}\,(\text{cmt}) \\ \widehat{FBE} = \widehat{FCE} = \dfrac{1}{2}\text{sđ } \overset{\frown}{FE} \end{cases} \Rightarrow \widehat{FDI} = \widehat{IDE}.$

Vậy DI là đường phân giác $\widehat{FDE}$.

Khi đó $\dfrac{DF}{DE} = \dfrac{IF}{IE}$ (tính chất đường phân giác) nên $IE \cdot DF = IF \cdot DE$.

d) Gọi K là trung điểm BC.

Xét $\triangle ABC$ ta có G là trọng tâm của $\triangle ABC$ nên $G \in AK$ và $AG = \dfrac{2}{3}AK$.

Ta có $BHCN$ là hình bình hành với K là trung điểm của BC.

Suy ra K là trung điểm của HN. Vậy AK là đường trung tuyến của $\triangle AHN$.
Mà $AG = \dfrac{2}{3}AK$ (cmt) nên G là trọng tâm của $\triangle AHN$.
Vậy H, G, O thẳng hàng và HO là đường trung tuyến của $\triangle AHN$.
Ta có $\dfrac{HG}{HO} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}(H; AN)}{\mathrm{d}(G; AN)} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{S_{AHN}}{S_{AGN}} = \dfrac{2}{3}$.
Gọi $S_{AHN} = S \Rightarrow S_{AGN} = \dfrac{3}{2}S$.
Xét thấy MO là đường trung bình của $\triangle AGN$.
Suy ra $\dfrac{AM}{AG} = \dfrac{AO}{AN} = \dfrac{OM}{GN} = \dfrac{1}{2}$ (hệ quả định lý Thales).
Vậy $\triangle AMO \sim \triangle AGN$ (c - c - c). Suy ra $\dfrac{S_{AMO}}{S_{AGN}} = \dfrac{1}{4}$. Vậy $S_{AMO} = \dfrac{1}{4}S_{AGN} = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{3}{2}S = \dfrac{3}{8}S$.

□

Bài 153. Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính AB. Kéo dài BA một đoạn $AE = \dfrac{R}{2}$. Từ E vẽ tiếp tuyến EM của đường tròn (O) (M là tiếp điểm) lần lượt cắt tiếp tuyến Ax và By của (O) tại hai điểm C và D.

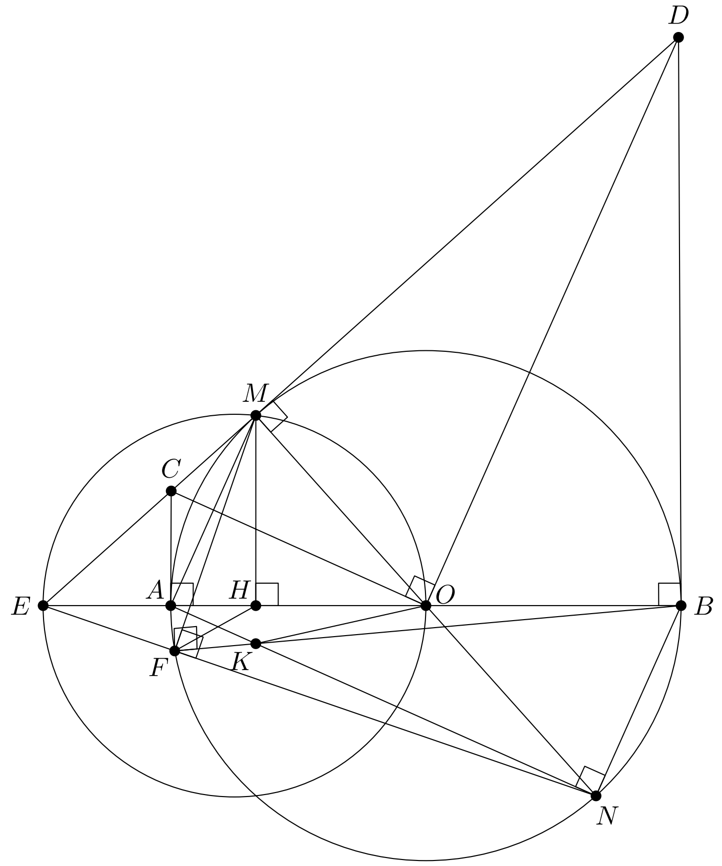
a) Chứng minh rằng $AC + BD = CD$ và $\widehat{COD} = 90^\circ$.

b) Chứng minh rằng $AC \cdot BD = R^2$.

c) Vẽ $MH \perp AB$ và vẽ đường kính MON, EN cắt (O) tại F khác N. Chứng minh rằng tứ giác $MHFE$ nội tiếp.

d) AN cắt BF tại K. Tính $AK \cdot AN + BK \cdot BF$ theo R.

Lời giải.



a) Ta có CA và CM là hai tiếp tuyến của đường tròn (O).

Suy ra $AC = MC$ và OC là tia phân giác $\widehat{MOA}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

Ta có BD và DM là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và M cắt nhau tại D.

Suy ra $DM = DB$ và OD là tia phân giác $\widehat{MOB}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

Ta có $CM + DM = CD$. Mà $DM = DB$ và $AC = MC$ (cmt) nên $AC + BD = CD$.

Ta có A, O, B thẳng hàng nên $\widehat{MOA} + \widehat{MOB} = 180^\circ$ (cmt).

Mà $\begin{cases} \widehat{MOC} = \dfrac{1}{2}\widehat{MOA} \\ \widehat{MOD} = \dfrac{1}{2}\widehat{MOB} \end{cases}$ (OC và OD lần lượt là phân giác $\widehat{MOA}$, $\widehat{MOB}$).

Vậy $\widehat{MOC} + \widehat{MOC} = 90^\circ$ nên $\triangle COD$ vuông tại O.

b) Ta có ED là tiếp tuyến tại M của (O) nên $OM \perp ED$ tại M.

Xét $\triangle COD$ vuông tại O có đường cao OM, ta có $OM^2 = CM \cdot DM$ (hệ thức lượng tam giác vuông).

Lại có $AC = CM$; $BD = DM$ (cmt) nên $OM^2 = AC \cdot BD$. Suy ra $AC \cdot BD = R^2$.

c) Ta có $\triangle MFN$ nội tiếp (O), đường kính MN.

Suy ra $\triangle MFN$ vuông tại F. Suy ra $MF \perp EN$ tại F.

Xét tứ giác $MHFE$ ta có $\widehat{MHE} = \widehat{MFE} = 90^\circ$ ($MH \perp EB$ tại H, $MF \perp EN$ tại F).

Suy ra tứ giác $MHFE$ nội tiếp đường tròn đường kính EM.

d) Chứng minh A, H, K thẳng hàng.

Xét tứ giác $EMHF$ nội tiếp đường tròn đường kính EM ta có $\widehat{EMF} = \widehat{EHF}$.

Mà $\widehat{MBF} = \widehat{EMF}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung chắn $\widehat{MF}$.

Suy ra $\widehat{EHF} = \widehat{MBF}$.

Lại có $MB \parallel KN$ (cùng vuông góc với AN) nên $\widehat{MBF} = \widehat{BKN}$ (so le trong).

Mặt khác $\widehat{BKN} = \widehat{AKF}$ (đối đỉnh) nên $\widehat{EHF} = \widehat{AKF}$. Vậy tứ giác $AHKF$ nội tiếp.

Xét tứ giác $AHKF$ nội tiếp đường tròn ta có $\widehat{AHK} + \widehat{AFK} = 180^\circ$.

Suy ra $\widehat{AHK} = 180^\circ - \widehat{AFK} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Vậy $HK \perp AH$ tại H.

Ta có $\begin{cases} HK \perp AH \text{ tại } H \\ AH \perp MH \text{ tại } H \end{cases} \Rightarrow M$, H, K thẳng hàng.

Tính $AK \cdot AN + BK \cdot BF$ theo R.

Xét $\triangle AHK$ và $\triangle ANB$ ta có $\begin{cases} \widehat{NAB} \text{ chung} \\ \widehat{HK} = \widehat{ANB} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle AHK \sim \triangle ANB$ (g - g).

Khi đó $\dfrac{AH}{AN} = \dfrac{AK}{AB} \Rightarrow AH \cdot AB = AN \cdot AK$. (1)

Xét $\triangle BHK$ và $\triangle BFA$ ta có $\begin{cases} \widehat{FBA} \text{ chung} \\ \widehat{BHK} = \widehat{AFB} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle BHK \sim \triangle BFA$ (g - g).

Khi đó $\dfrac{BH}{BF} = \dfrac{BK}{BA} \Rightarrow BH \cdot BA = BF \cdot BK$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AN \cdot AK + BF \cdot BK = (AH + BH) \cdot AB = AB^2 = 4R^2$.

□

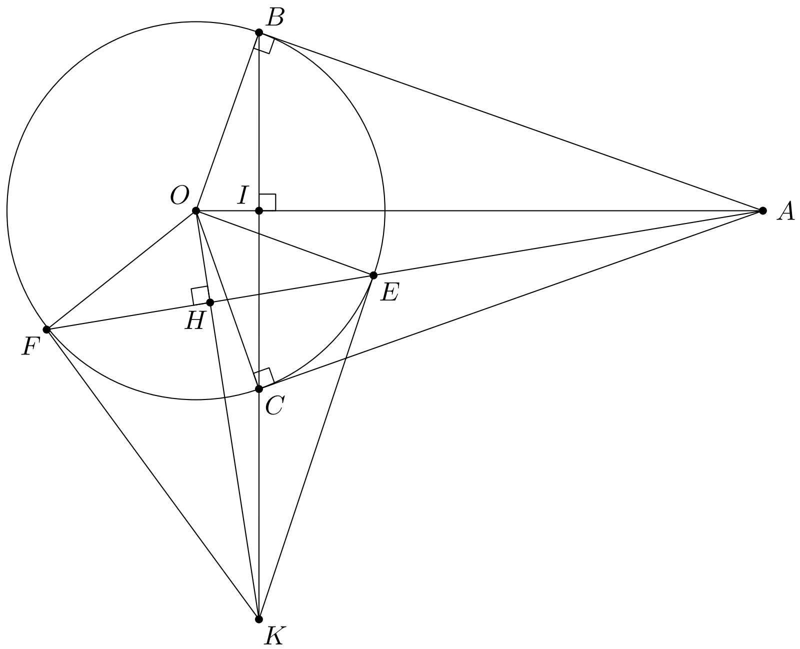
Bài 154. Cho đường tròn $(O; R)$ và đường thẳng (d) với khoảng cách từ (O) đến (d) là $OH = a$ $(0 < a < R)$. Từ điểm A bất kì trên (d) và ở ngoài (O), vẽ các tiếp tuyến AB, AC đến (O) (B, C là các tiếp điểm).

a) Chứng tỏ 5 điểm A, B, C, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

b) BC cắt OA, OH lần lượt tại I và K. Chứng minh $OI \cdot OA = OH \cdot OK = R^2$. Suy ra K cố định và I thuộc về một đường tròn cố định khi A di chuyển.

c) (d) cắt (O) tại E và F. Chứng minh KE, KF là các tiếp tuyến của $(O; R)$.

Lời giải.



a) Ta có $\triangle OAB$ vuông tại B (do AB là tiếp tuyến đường tròn (O)) nên $\triangle OAB$ nội tiếp đường tròn đường kính OA. Vậy O, A, B cùng nằm trên đường tròn đường kính OA. (1)
Ta có $\triangle OAC$ vuông tại C (do AC là tiếp tuyến đường tròn (O)) nên $\triangle OAC$ nội tiếp đường tròn đường kính OA. Vậy O, A, C cùng nằm trên đường tròn đường kính OA. (2)
Ta có $\triangle OAH$ vuông tại H nên $\triangle OAH$ nội tiếp đường tròn đường kính OA. Vậy O, A, H cùng nằm trên đường tròn đường kính OA. (3)
Từ (1), (2), (3) suy ra O, A, B, C, H cùng nằm trên đường tròn đường kính OA.

b) Ta có AB, AC là hai tiếp tuyến tại B, C của đường tròn tâm O cắt nhau tại A. Suy ra $AB = AC$ và AO là tia phân giác $\widehat{BAC}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau). Vậy $\triangle BAC$ cân tại A có đường cao AI.
Ta có $\widehat{OHB} = \widehat{OCB}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung OB của đường tròn đường kính OA).
Mà $\widehat{OCB} = \widehat{OBC}$($\triangle OBC$ cân tại O) nên $\widehat{OHB} = \widehat{OBC}$.
Xét $\triangle OHB$ và $\triangle OBK$ ta có $\begin{cases} \widehat{BOK} \text{ chung} \\ \widehat{OHC} = \widehat{OBC} \text{ (cmt)} \end{cases} \Rightarrow \triangle OHB \sim \triangle OBK$(g - g).
Khi đó $\dfrac{OH}{OB} = \dfrac{OB}{OK} = \dfrac{HB}{BK} \Rightarrow OB^2 = OH \cdot OK$. (4)
Xét $\triangle OAB$ vuông tại B có đường cao BI ($BI \perp OA$), ta có $OB^2 = OI \cdot OA$(hệ thức lượng trong tam giác vuông). (5)
Từ (4), (5) suy ra $OH \cdot OK = OI \cdot OA = OB^2 = R^2$.
Ta có d là đường thẳng cố định cách O một khoảng là $OH = a < R$ nên H cố định , $(O; R)$ cố định và I thuộc đường tròn cố định. Mà $OH \cdot OK = R^2$ nên OK là cố định. Suy ra K cố định khi A thay đổi.

c) Ta có $OH \cdot OK = R^2 \Rightarrow OH \cdot OK = OE^2 \Rightarrow \dfrac{OH}{OE} = \dfrac{OE}{OK}$.

Xét $\triangle OHE$ và $\triangle OEK$ ta có $\begin{cases} \widehat{KOE} \text{ chung} \\ \dfrac{OH}{OE} = \dfrac{OE}{OK} \text{ (cmt)} \end{cases} \Rightarrow \triangle OHE \sim \triangle OEK$(c - g - c) .

Khi đó $\widehat{OHE} = \widehat{OEK}$ mà $\widehat{OHE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{OEK} = 90^\circ$. Suy ra KE là tiếp tuyến của (O).

Ta có $OH. \cdot OK = R^2 \Rightarrow OH \cdot OK = OF^2 \Rightarrow \dfrac{OH}{OF} = \dfrac{OF}{OK}$.

Xét $\triangle OHF$ và $\triangle OFK$ ta có $\begin{cases} \widehat{KOF} \text{ chung} \\ \dfrac{OH}{OF} = \dfrac{OF}{OK} \text{ (cmt)} \end{cases} \Rightarrow \triangle OHF \sim \triangle OFK$(c - g - c).

Khi đó $\widehat{OHF} = \widehat{OFK}$. Mà $\widehat{OHF} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{OFK} = 90^\circ$ nên KF là tiếp tuyến của (O).

□

Bài 155. Cho đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$, Ax là một tiếp tuyến của (O) và AC là một dây cung (C không trùng B), tia phân giác Ay của $\widehat{CAx}$ cắt (O) tại D.

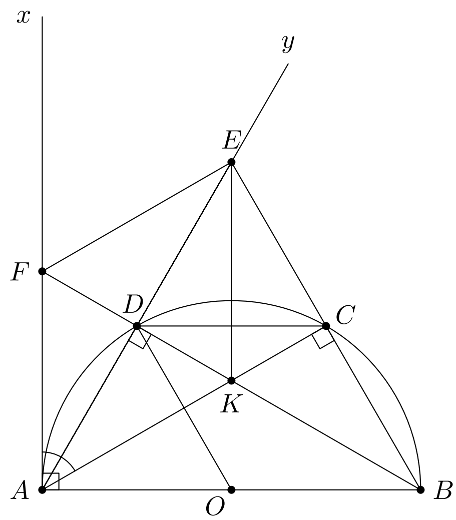
a) Chứng minh rằng $OD \perp AC$ và $OD \parallel BC$.

b) AD và BC cắt nhau tại E. Chứng tỏ $\triangle BAE$ cân tại đỉnh B.

c) BD, AC cắt nhau tại K, BD cắt Ax tại F. Chứng tỏ $AFEK$ là hình thoi. Tính diện tích hình thoi này theo R khi biết $\widehat{xAC} = 60^\circ$.

Lời giải.

a)



Ta có AD là tia phân giác $\widehat{xAC}$ nên $\widehat{xAD} = \widehat{DAC}$.

Suy ra sđ $\overset{\frown}{AD}$ = sđ $\overset{\frown}{DC}$.

Vậy D là điểm chính giữa của cung AC nên D nằm trên đường trung trực của đoạn AC.

Mà O là điểm nằm trên đường trung trực của đoạn AC nên OD là đường trung trực của đoạn AC. Suy ra $OD \perp AC$.

Ta có $\triangle ABC$ nội tiếp (O) đường kính AB.

Suy ra $\triangle ABC$ vuông tại C nên $BC \perp AC$ tại C.

Mà $OD \perp AC$ (cmt) nên $BC \parallel OD$.

b) Ta có $\triangle ABD$ nội tiếp (O) đường kính AB.

Suy ra $\triangle ABD$ vuông tại D. Vậy $BD \perp AE$ tại D.

Xét $\triangle ABE$ ta có BD là đường cao của tam giác ABE (do $BD \perp AE$ tại D).

Mà BD là đường phân giác $\widehat{EBA}$ $\left(\widehat{DBC} = \widehat{DBA}\right)$.

Suy ra $\triangle ABE$ cân tại B. Vậy BD là đường trung trực của AE.

c) Xét $\triangle AFK$ ta có AD là đường cao ($AE \perp FK$ tại D).

Lại có AD là tia phân giác $\widehat{FAK}$ suy ra AD là đường trung tuyến của $\triangle AFK$.

Ta có D là trung điểm của FK (do AD là đường trung tuyến của $\triangle AFK$).

Mà $AE \perp FK$(cmt) nên AE là đường trung trực của đoạn FK. Suy ra $\begin{cases} AK = AF \\ EF = EK. \end{cases}$ (1)

Mặt khác FK cũng là đường trung trực EF (cmt) nên $AK = EK$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AK = AF = EF = EK \Rightarrow AFEK$ là hình thoi.

Với $\widehat{xAC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{DAB} = 60^\circ$ và $\triangle AFK$ là tam giác đều.

Vậy $\triangle AOD$ là tam giác đều $\Rightarrow AD = R$.

Xét $\triangle ADK$ vuông tại D ta có $DK = AD \cdot \tan \widehat{DAK} = R \cdot \tan 30^\circ = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $FK = 2DK = \dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$; $AE = 2AD = 2R$.

Vậy $S_{AFEK} = \dfrac{1}{2} \cdot FK \cdot AE = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2R\sqrt{3}}{3} \cdot 2R = \dfrac{2R^2\sqrt{3}}{3}$.

□

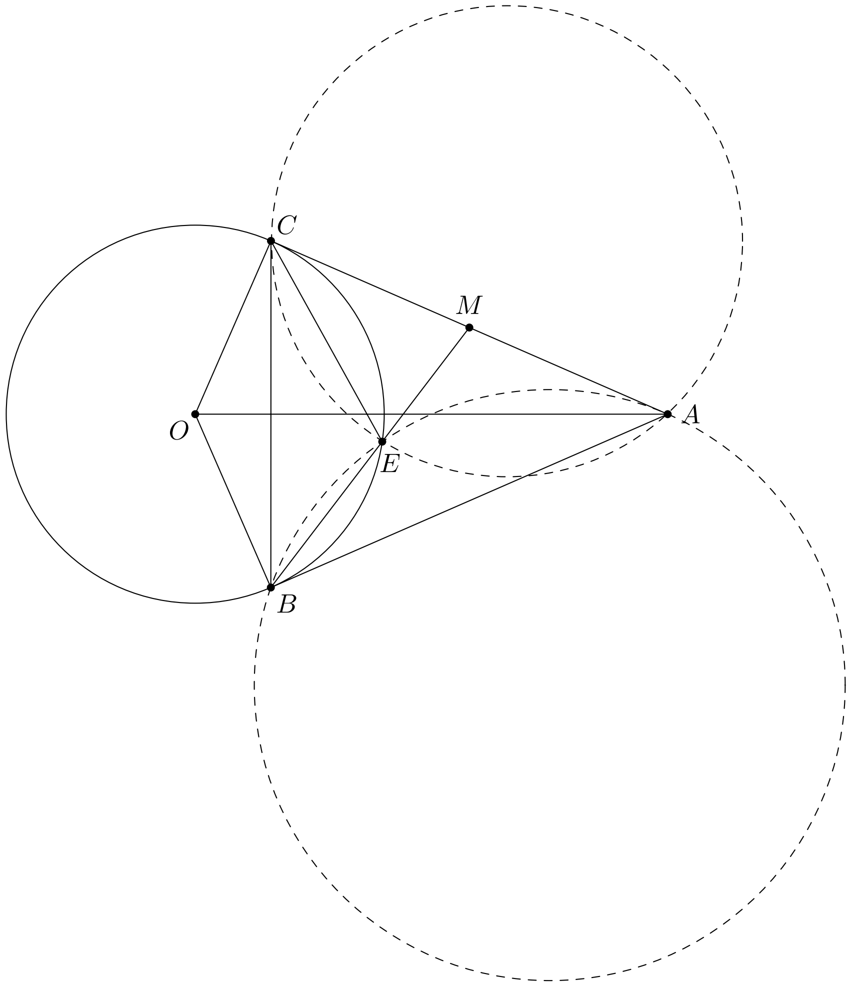
Bài 156. Cho đường tròn tâm O và AB, AC là hai tiếp tuyến (B, C là hai tiếp điểm). Gọi M là trung điểm AC, BM cắt (O) tại B và E. Chứng minh rằng

a) $\triangle MBC \sim \triangle MCE$. Suy ra $MA^2 = MC^2 = ME \cdot MB$.

b) $\triangle MAB \sim \triangle MEA$. Suy ra AM tiếp xúc với đường tròn (ABE).

c) Chứng minh CB là tiếp tuyến của đường tròn (ACE).

Lời giải.



a) Xét $\triangle MCE$ và $\triangle MBC$ ta có $\begin{cases} \widehat{CMB} \text{ chung} \\ \widehat{MBC} = \widehat{MCE} = \dfrac{1}{2}\text{sđ } \overset{\frown}{CE} \end{cases} \Rightarrow \triangle MCE \sim \triangle MBC(\text{g - g})$.

Khi đó $\dfrac{MC}{MB} = \dfrac{CE}{BC} = \dfrac{ME}{MC} \Rightarrow MC^2 = ME \cdot MB$.

Do M là trung điểm của AC nên

$$MA = MC \Rightarrow MA^2 = MC^2 = ME \cdot MB \Leftrightarrow \frac{MA}{ME} = \frac{MB}{MA}.$$

b) Xét $\triangle MAB$ và $\triangle MEA$ ta có $\begin{cases} \widehat{BMA} \text{ chung} \\ \dfrac{MA}{ME} = \dfrac{MB}{MA} \text{ (cmt)} \end{cases} \Rightarrow \triangle MAB \sim \triangle MEA$ (c - g - c).

Khi đó $\widehat{MBA} = \widehat{MAE}$. Với $\widehat{MBA}$ là góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{AE}$ của (ABE) nên MA là tiếp tuyến tại A của đường tròn (ABE).

c) Ta có $\widehat{MBA} = \widehat{MAE}$ (cmt).

Mà $\widehat{MBA} = \widehat{ECB} = \text{sđ } \overset{\frown}{BE}$. Suy ra $\widehat{MAE} = \widehat{ECB}$.

Mặt khác $\widehat{MAE}$ là góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{CE}$ của (ACE).

Suy ra CB là tiếp tuyến tại C của (ACE).

□

Bài 157. Cho $\triangle ABC$ $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O) có đường kính BC, AH là đường cao của $\triangle ABC$. Đường tròn tâm K, đường kính AH cắt AB, AC và (O) lần lượt tại D, E, I; AI cắt BC tại M.

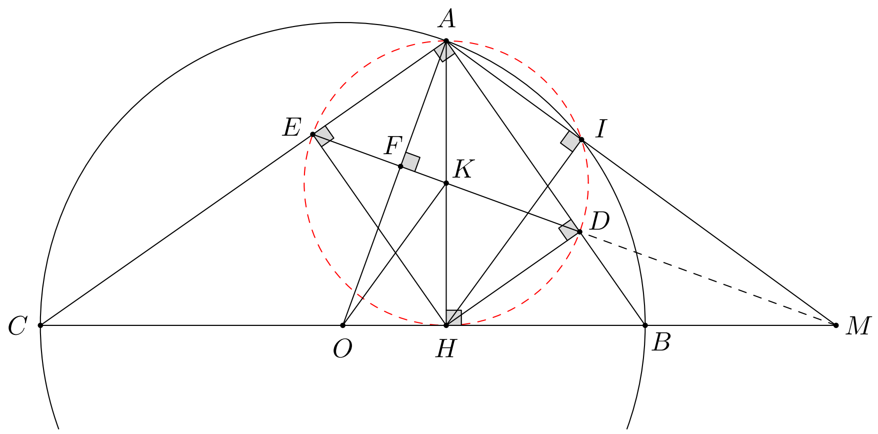
a) Chứng minh rằng tứ giác $AEHD$ là hình chữ nhật.

b) Chứng minh rằng $AB \cdot AD = AE \cdot AC$ và tứ giác $BCED$ nội tiếp được.

c) Chứng tỏ $OK \perp AM$. Suy ra K là trực tâm $\triangle MAO$.

d) Chứng minh rằng $OA \perp DE$. Suy ra 3 điểm M, D, E thẳng hàng.

Lời giải.



a) Chứng minh rằng tứ giác $AEHD$ là hình chữ nhật.

Theo giả thiết, tam giác ABC nội tiếp đường tròn đường kính BC nên $AB \perp AC$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Tương tự với đường tròn đường kính AH, ta có

$$\widehat{AEH} = \widehat{ADH} = 90^\circ (\text{ góc nội tiếp chắn nửa đường tròn}).$$

Từ đó ta được tứ giác $AEHD$ có 3 góc vuông nên nó là hình chữ nhật.

b) Chứng minh rằng $AB \cdot AD = AE \cdot AC$ và tứ giác $BCED$ nội tiếp được.

Xét hai tam giác vuông ACH và ABH có đường cao lần lượt là HE và HD. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta được

$$AH^2 = AD \cdot AB = AE \cdot AC.$$

Ta có $\widehat{AED} + \widehat{DEC} = \widehat{DBC} + \widehat{DEC} = 180^\circ$ nên $DECB$ nội tiếp đường tròn.

c) Chứng tỏ $OK \perp AM$. Suy ra K là trực tâm $\triangle MAO$.

Ta có IA là dây chung của hai đường tròn (O) và (K) nên $OK \perp AM$.

Xét $\triangle OAM$ có K là giao điểm của hai đường cao OK và AH nên K là trực tâm của tam giác OAM.

d) Chứng minh rằng $OA \perp DE$. Suy ra 3 điểm M, D, E thẳng hàng.

Theo kết quả b) thì tứ giác $BCED$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ECB} = \widehat{EDA}$ (góc trong và góc ngoài của tứ giác nội tiếp).

Mặt khác $\triangle OAB$ cân tại O nên $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$.

Ta có $\widehat{ECB} + \widehat{OBA} = \widehat{ADE} + \widehat{OAD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DFA} = 90^\circ$.

Vậy ta được $AO \perp DK$.

Ta lại có K là trực tâm của $\triangle OMA$ nên $MK \perp AO$.

Suy ra $KM \parallel KD \Rightarrow M, K, D$ thẳng hàng hay M, E, D thẳng hàng.

□

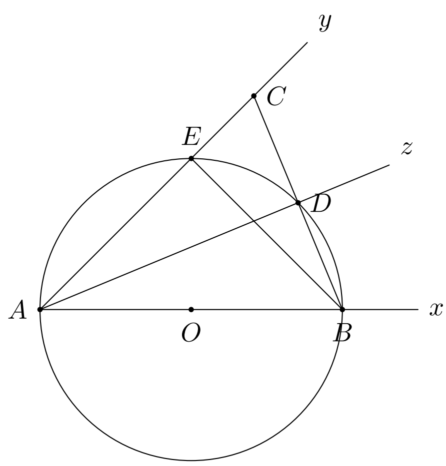
Bài 158. Cho $\widehat{xAy} = 45^\circ$ và tia phân giác Az. Trên Ax lấy đoạn $AB = 2R$. Đường tròn có đường kính AB, tâm O cắt Ay tại E, cắt Az tại D. Đường thẳng BD cắt Ay tại C.

a) Chứng minh rằng $\triangle AEB$ vuông cân. Tính AE, EB theo R.

b) Chứng minh rằng $\triangle ABC$ cân tại A và tính diện tích của tam giác này theo R.

c) Tính diện tích phần của $\triangle ABC$ nằm ngoài hình tròn (O).

Lời giải.



a) Chứng minh rằng $\triangle AEB$ vuông cân. Tính AE, EB theo R.

Ta có $\triangle ABE$ nội tiếp đường tròn tâm O, đường kính AB nên $\triangle ABE$ vuông tại E.

Mặt khác $\widehat{xAy} = \widehat{BAE} = 45^\circ$.

Suy ra $\triangle ABE$ vuông cân tại E.

Từ đó, ta được $AE = BE = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = R\sqrt{2}$.

b) Chứng minh rằng $\triangle ABC$ cân tại A và tính diện tích của tam giác này theo R.

Ta có $\triangle ABD$ nội tiếp (O) nên $\widehat{ADB} = 90^\circ \Rightarrow AD \perp BC$.

Mặt khác AD là phân giác $\widehat{BAC}$.

Xét $\triangle ABC$ có AD vừa là đường cao, vừa là đường phân giác, suy ra $\triangle ABC$ cân tại A.

Ta có $EB \perp AC$ suy ra $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot BE = R^2\sqrt{2}$.

c) Tính diện tích phần của $\triangle ABC$ nằm ngoài hình tròn (O).

Ta có $\widehat{EAD} = \widehat{DAB} \Rightarrow \overset{\frown}{ED} = \overset{\frown}{DB} \Rightarrow ED = DB \Rightarrow$ diện tích hình viên phân giới hạn bởi (O) và dây ED bằng diện tích viên phân giới hạn bởi (O) và dây BD.

Ta có $S_{\text{quạt } OBD} = \dfrac{1}{8} S_{(O)} = \dfrac{\pi R^2}{8}$.

Diện tích $\triangle OBD$ là $S_{\triangle OBD} = \dfrac{1}{2}S_{\triangle ABD} = \dfrac{1}{4}S_{\triangle ABC} = \dfrac{R^2\sqrt{2}}{4}$.
Diện tích viên phân giới hạn bởi (O) và dây BD là

$$S_{\text{vp}} = S_{\text{quạt } OBD} - S_{\triangle OBD} = \frac{\pi R^2}{8} - \frac{R^2\sqrt{2}}{4} = \frac{(\pi - 2\sqrt{2})R^2}{8}.$$

Ta có $EC = AC - AE = 2R - R\sqrt{2} = R(2 - \sqrt{2})$. Khi đó

$$S_{BEC} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot EC = \frac{1}{2} \cdot R\sqrt{2} \cdot R\left(2 - \sqrt{2}\right) = R^2\left(\sqrt{2} - 1\right).$$

Suy ra $S_{DCE} = \dfrac{1}{2} \cdot S_{BEC} = \dfrac{R^2\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}$.
Diện tích cần tìm là $S = S_{DCE} - S_{\text{vp}} = \dfrac{(\sqrt{2}-1)R^2}{2} - \dfrac{(\pi - 2\sqrt{2})R^2}{8} = \dfrac{(6\sqrt{2} - 4 - \pi)R^2}{8}$.

□

Bài 159. Cho đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$. Lấy $M \in (O)$ với $AM < BM$. Trên cạnh MB lấy điểm C sao cho $MC = MA$. Gọi OD là bán kính vuông góc với AB (M và D ở hai bên đường thẳng AB).

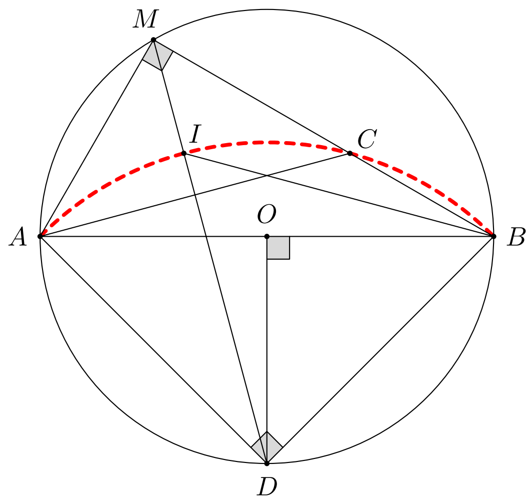
a) Chứng minh: $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Tính theo R độ dài các cạnh của $\triangle ABD$.

b) Chứng tỏ MD là phân giác $\widehat{AMB}$ và $MD \perp AC$.

c) Chứng minh rằng D là tâm của đường tròn (ABC).

d) Đường tròn (ABC) cắt MD tại I. Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle AMB$.

Lời giải.



a) Chứng minh: $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Tính theo R độ dài các cạnh của $\triangle ABD$.
Ta có $\widehat{AMB}$ nhìn đường kính AB của đường tròn (O) nên $\widehat{AMB} = 90^\circ$.
Theo đề ra, ta có $\begin{cases} O \text{ trung điểm } AB \\ OD \perp AB \\ \widehat{ADB} = 90^\circ \end{cases}$
$\Rightarrow \triangle ABD$ vuông cân tại D.
Suy ra $DA = DB = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = R\sqrt{2}$.
Vậy $DA = DB = R\sqrt{2}$ và $AB = 2R$.

b) Chứng tỏ MD là phân giác $\widehat{AMB}$ và $MD \perp AC$.
Theo câu a) ta có $DA = DB \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB} = 45^\circ$

$\Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{DMB}$ (góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau).
Suy ra MD là phân giác $\widehat{AMB}$ (đpcm).
Xét $\triangle AMC$ có $MA = MC$ (giả thiết) $\Rightarrow MD$ là phân giác trong tam giác cân.
Suy ra $MD \perp AC$ (đpcm).

c) Chứng minh rằng D là tâm của đường tròn (ABC).
Theo câu b) ta có MD là phân giác trong tam giác cân AMC nên MD cũng là đường trung trực của AC. Suy ra $DA = DC$.
Mà $DA = DB$ nên $DA = DB = DC \Rightarrow D$ là tâm đường tròn (ABC).

d) Đường tròn (ABC) cắt MD tại I. Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle AMB$.
Ta sẽ chứng minh BI là phân giác trong $\widehat{B}$ trong $\triangle AMB$.
Theo kết quả trên ta có DM là trung trực của AC nên $DI \perp AC$ tại trung điểm AC.
Suy ra I là điểm chính giữa $\overset{\frown}{AC} \Rightarrow \overset{\frown}{AI} = \overset{\frown}{IC}$.
Trong (ABC) ta có $\widehat{IBA} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{IA} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{IC} = \widehat{IBC}$.
Do đó BI là phân giác trong góc $\widehat{B}$. Kết hợp với MI là phân giác $\widehat{AMC}$, suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle AMB$.

□

Bài 160. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc ngoài tại A. Một đường thẳng (D) tiếp xúc với (O_1) tại B và tiếp xúc với (O_2) tại C.

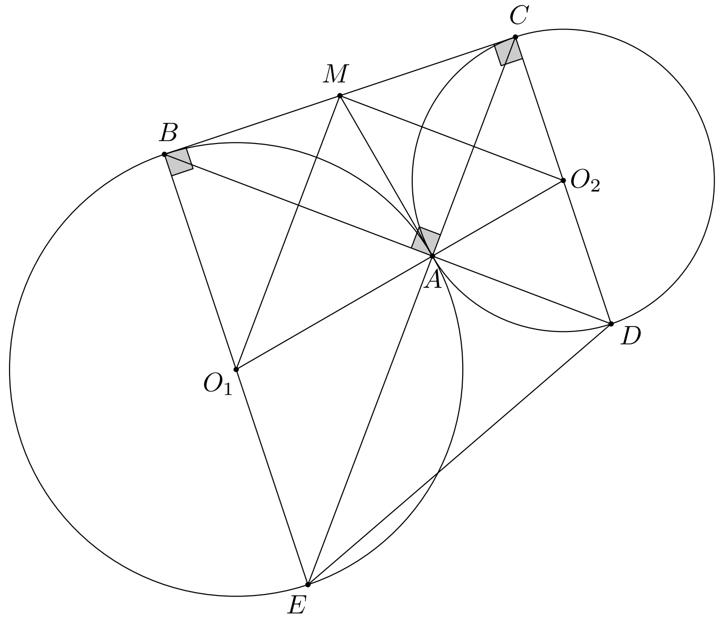
a) Chứng minh rằng $\triangle ABC$ vuông.

b) Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh rằng AM là tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_2).

c) Chứng minh rằng $\widehat{O_1MO_2} = 90°$.

d) Các tia BA, CA lần lượt cắt (O_2), (O_1) tại các giao điểm thứ hai là D và E. Chứng minh rằng $S_{ADE} = S_{ABC}$.

Lời giải.



a) Chứng minh rằng $\triangle ABC$ vuông.

Do BC là tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_2) lần lượt tại B và C nên $\begin{cases} O_1B \perp BC \\ O_2C \perp BC. \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{O_1BC} + \widehat{O_2CB} = 180^\circ$.

Suy ra $\widehat{BO_1A} + \widehat{CO_2A} = 180^\circ$ (tổng góc trong tứ giác bằng 360°).

Ta có $\widehat{CBA} = \dfrac{1}{2}\widehat{BO_1A}$ (góc ở tâm và góc giữa tiếp tuyến và dây cung chắn cùng cung $\overset{\frown}{AB}$).

Tương tự $\widehat{BCA} = \dfrac{1}{2}\widehat{CO_2A}$ (góc ở tâm và góc giữa tiếp tuyến và dây cung chắn cùng cung $\overset{\frown}{AC}$).

Ta được $\widehat{CBA} + \widehat{BCA} = \dfrac{\widehat{BO_1A} + \widehat{CO_2A}}{2} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại A.

b) Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh rằng AM là tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_2).

Kẻ tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_2) tại A, giả sử tiếp tuyến này cắt BC tại M'.

Ta có $M'A = M'B$ (tiếp tuyến chung của (O_1) cắt nhau tại M').

Tương tự ta có $M'A = M'C$ (tiếp tuyến chung của (O_1) cắt nhau tại M').

Suy ra $M'A = M'B = M'C \Rightarrow M'$ là trung điểm của BC nên M' trùng với M. Do đó MA là tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_2).

c) Chứng minh rằng $\widehat{O_1MO_2} = 90^\circ$.

Do MA, MB là tiếp tuyến chung của (O_1) nên $\widehat{O_1MA} = \widehat{O_1MB} = \dfrac{1}{2}\widehat{AMB}$ (1).

Tương tự MA, MC là tiếp tuyến chung của (O_2) nên $\widehat{O_2MA} = \widehat{O_2MC} = \dfrac{1}{2}\widehat{AMC}$ (2).

Khi đó $\widehat{O_1MO_2} = \widehat{O_1MA} + \widehat{O_2MA} = \dfrac{\widehat{AMB} + \widehat{AMC}}{2} = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$.

d) Các tia BA, CA lần lượt cắt (O_2), (O_1) tại các giao điểm thứ hai là D và E. Chứng minh rằng $S_{ADE} = S_{ABC}$.

Ta có $\widehat{CAD} = 90^\circ \Rightarrow CD$ là đường kính (O_2) hay C, O_2, D thẳng hàng.

Tương tự ta có $\widehat{BAE} = 90^\circ \Rightarrow BE$ là đường kính (O_1) hay B, O_1, E thẳng hàng.

Suy ra $\begin{cases} CD \perp BC \\ BE \perp CB \end{cases} \Rightarrow CD \parallel BE.$

Áp dụng định lí Ta-lét ta được

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD} \Leftrightarrow \frac{1}{2}AC \cdot AB = \frac{1}{2}AD \cdot AE \Leftrightarrow \mathrm{S}_{ADE} = \mathrm{S}_{ABC}.$$

□

Bài 161. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A và một điểm D nằm giữa A và B. Đường tròn đường kính BD cắt BC tại E. Các đường thẳng CD, AE lần lượt cắt đường tròn tại các điểm thứ hai là F và G. Chứng minh rằng

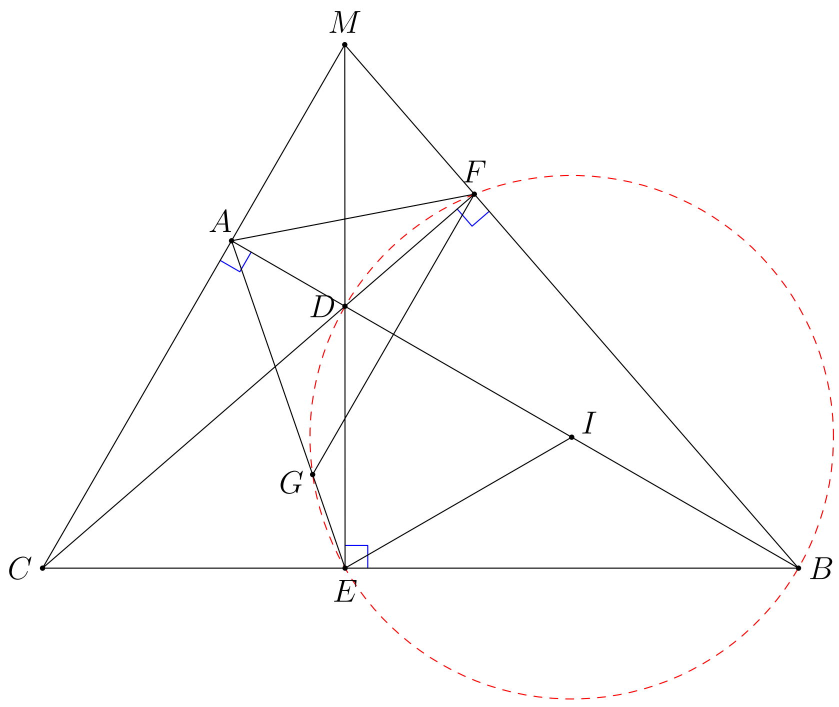
a) $\triangle ABC \backsim \triangle EBD$.

b) Tứ giác $ADEC$, $AFBC$ nội tiếp.

c) $AC \parallel FG$.

d) AC, DE, BF đồng qui.

Lời giải.



Gọi I là tâm đường tròn đường kính BD.

a) Chứng minh $\triangle ABC \backsim \triangle EBD$.

Góc $\widehat{DEB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $\Rightarrow \widehat{DEB} = 90^\circ = \widehat{BAC}$.

Xét hai tam giác ABC và EBD có $\widehat{B}$ chung và $\widehat{DEB} = \widehat{BAC}$ suy ra $\triangle ABC \backsim \triangle EBD$ (g.g).

b) Tứ giác $ADEC$, $BEDF$ nội tiếp.

Dễ thấy $\widehat{CAD} + \widehat{CED} = 180^\circ \Rightarrow ADEC$ nội tiếp.

Tương tự $\widehat{DFB} + \widehat{DEB} = 180^\circ \Rightarrow BEDF$ nội tiếp.

c) Chứng minh $AC \parallel FG$.

Xét đường tròn (I) ta có $\widehat{DFG} = \widehat{DEG}$ (góc nội tiếp chắn cùng cung $\overset{\frown}{DG}$) (3).

Xét đường tròn $(ACED)$, ta có $\widehat{ACD} = \widehat{DEA}$ (góc nội tiếp chắn cùng cung $\overset{\frown}{DA}$) (4).

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{ACF} = \widehat{CFG}$ mà hai góc này nằm ở vị trí so le trong nên $AC \parallel FG$.

d) AC, DE, BF đồng qui.

Xét tam giác BCD có CA, ED, BF là 3 đường cao nên đồng quy.

□

Bài 162. Cho điểm $A \in (O; R)$ và gọi (I) là đường tròn có tâm là I và đường kính AO.

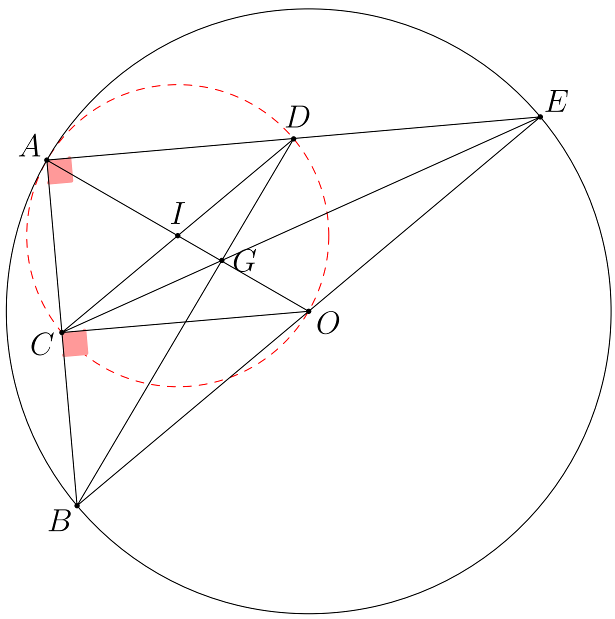
a) Giải thích rõ vị trí tương đối của hai đường tròn (O) và (I).

b) B là điểm bất kỳ trên (O) (B không nằm trên đường thẳng AO); AB cắt (I) tại C. Chứng tỏ C là trung điểm của AB và $IC \parallel OB$.

c) CI cắt (I) tại D, AD cắt (O) tại E. Chứng tỏ B, O, E thẳng hàng.

d) Chứng tỏ 3 đường AO, BD, EC đồng qui tại một điểm. Điểm này là điểm gì của $\triangle ABE$?

Lời giải.



a) Giải thích rõ vị trí tương đối của hai đường tròn (O) và (I).

Ta có $OA - OI = IA \Rightarrow (O)$ và (I) tiếp xúc trong tại A.

b) B là điểm bất kỳ trên (O) (B không nằm trên đường thẳng AO); AB cắt (I) tại C. Chứng tỏ C là trung điểm của AB và $IC \parallel OB$.

Ta có $\widehat{OCA} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow OC \perp AB$.

Suy ra C là trung điểm của AB (bán kính và dây cung).

Trong $\triangle OAB$ có $\begin{cases} C \text{ trung điểm } AB \\ I \text{ trung điểm } OB \end{cases} \Rightarrow IC \parallel OB$ (đường trung bình trong tam giác).

c) CI cắt (I) tại D, AD cắt (O) tại E. Chứng tỏ B, O, E thẳng hàng.

Xét (I) có CD là đường kính $\Rightarrow \widehat{CAD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Suy ra $\widehat{BAE} = 90^\circ$. Mà $B, E \in (O) \Rightarrow BE$ là đường kính.

Suy ra B, O, E thẳng hàng.

d) Chứng tỏ 3 đường AO, BD, EC đồng qui tại một điểm. Điểm này là điểm gì của $\triangle ABE$?

Theo kết quả a) ta có $CI \parallel OB \Rightarrow CD \parallel BE \Rightarrow D$ là trung điểm AE.

Từ đó ta thấy trong $\triangle ABE$ có AO, BD, CE là 3 đường trung tuyến nên đồng quy tại G là trọng tâm $\triangle ABE$.

□

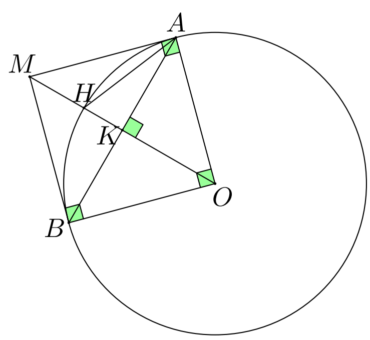
Bài 163. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M với $OM = R\sqrt{2}$. Dựng tiếp tuyến từ M đến (O) (A, B là tiếp điểm).

a) Chứng tỏ $MAOB$ là hình vuông.

b) Gọi H là điểm chính giữa của cung nhỏ AB. Chứng tỏ: M, H, O thẳng hàng và H là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$.

c) Tính bán kính của đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$ theo R.

Lời giải.



a) Chứng tỏ $MAOB$ là hình vuông.

Ta có MA, MB là 2 tiếp tuyến với (O)

$\Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90^\circ$ và $MA = MB$.

Áp dụng định lí Py-ta-go trong tam giác OMA vuông tại A, ta được

$$MA^2 = OM^2 - OA^2 = R^2 \Rightarrow MA = R = OA.$$

Tứ giác $OABM$ có $MA = MB = OA = OB = R$ và $\widehat{OAM} = 90^\circ$ nên $OAMB$ là hình vuông.

b) Gọi H là điểm chính giữa của cung nhỏ AB. Chứng tỏ: M, H, O thẳng hàng và H là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$.

Do H là điểm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{AB} \Rightarrow \overset{\frown}{AH} = \overset{\frown}{BH} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{AOH} = 45^\circ$.

Theo trên ta có $\widehat{AOM} = 45^\circ$. Suy ra O, H, M thẳng hàng.

Xét (O) ta có $\widehat{HAB} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BH} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AH}$ (do $\overset{\frown}{AH} = \overset{\frown}{BH}$).

Mặt khác $\widehat{MAH} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BH}$ (góc giữa tiếp tuyến và dây cung).

Suy ra $\widehat{MAH} = \widehat{HAB}$ hay H là giao hai đường phân giác trong $\triangle MAB$.

Suy ra H là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

c) Tính bán kính của đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$ theo R.

Ta có MA, MB là 2 tiếp tuyến của (O) nên $OM \perp AB$ tại K.

Suy ra K là chân đường phân giác trong tam giác AMB. Do đó bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$ là HK.

Ta có $\triangle ABO$ vuông cân tại $O \Rightarrow OK = \dfrac{1}{2} \cdot AB = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra $HK = R - \dfrac{R\sqrt{2}}{2} = \dfrac{(2-\sqrt{2})R}{2}$.

□

Bài 164. Cho đường tròn $(O; R)$ có đường kính AB. Gọi (d) là tiếp tuyến của (O) tại A; M là điểm bất kỳ trên (d) (M không trùng A); BM cắt (O) tại C.

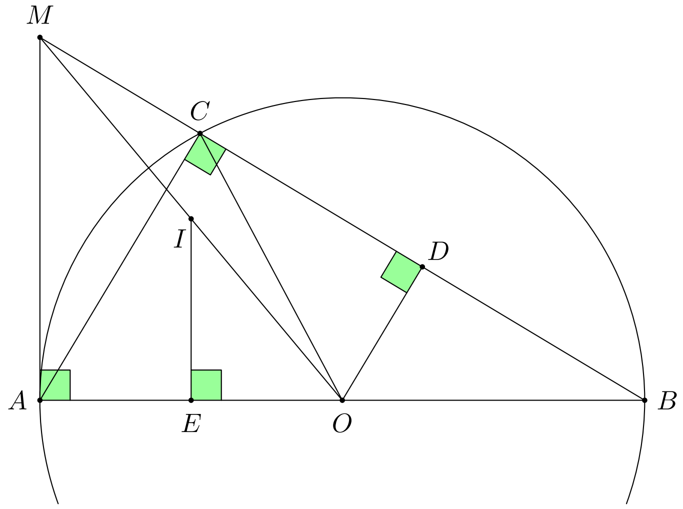
a) Tính $\widehat{BCA}$ và chứng minh rằng $MB \cdot MC = MA^2$.

b) Gọi D là trung điểm của BC. Chứng tỏ 4 điểm A, M, D, O nằm trên cùng một đường tròn. Xác định tâm I của đường tròn này.

c) Tìm tập hợp các điểm D và I khi M di động trên (d) (M không trùng với A).

d) Cho $AM = 2R$. Tính độ dài BC, ID và diện tích phần mặt phẳng giới hạn bởi các đoạn thẳng CM, MA và cung nhỏ AC theo R.

Lời giải.



a) Tính $\widehat{BCA}$ và chứng minh rằng $MB \cdot MC = MA^2$.

Ta có $\triangle ABC$ nội tiếp (O) đường kính AB nên $\widehat{ACB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Xét $\triangle ABM$ vuông tại A có AC là đường cao suy ra $AM^2 = MC \cdot MB$.

b) Gọi D là trung điểm của BC. Chứng tỏ 4 điểm A, M, D, O nằm trên cùng một đường tròn. Xác định tâm I của đường tròn này.

Ta có D trung điểm BC và $OB = OC = R$, suy ra $OD \perp BC$ hay $\widehat{ODC} = 90°$.

Từ đó ta được $\widehat{MAO} + \widehat{MDO} = 180°$, suy ra O, D, M, A nội tiếp đường tròn đường kính OM; tâm I là trung điểm MO.

c) Tìm tập hợp các điểm D và I khi M di động trên (d) (M không trùng với A).

Ta có $\widehat{ODB} = 90°$ (cố định) và luôn nhìn đoạn OB (OB cố định). Suy ra D luôn thuộc đường tròn đường kính OB; M khác O và B.

Gọi E là trung điểm $OA \Rightarrow IE \perp OA$.

Mà OA cố định nên E cố định. Suy ra I nằm trên đường trung trực OA (I khác E).

d) Cho $AM = 2R$. Tính độ dài BC, ID và diện tích phần mặt phẳng giới hạn bởi các đoạn thẳng CM, MA và cung nhỏ AC theo R.

Ta có $AM = 2R = AB \Rightarrow \triangle ABM$ vuông cân tại A, mà $AC \perp MB$

$\Rightarrow AC = \dfrac{BM}{2} = R\sqrt{2} = BC = MC$.

Theo trên ta có I là tâm đường tròn ngoại tiếp O, A, M, D nên $ID = IA = \dfrac{MO}{2}$.

Xét $\triangle OAM$ vuông tại $A \Rightarrow MO^2 = AM^2 + AO^2 = 5R^2 \Rightarrow MO = R\sqrt{5}$.

Vậy $ID = IA = \dfrac{R\sqrt{5}}{2}$.

Diện tích hình quạt AOC là $\mathrm{S}_{\text{quạt } AOC} = \dfrac{\mathrm{S}_{(\mathrm{O})}}{4} = \dfrac{\pi R^2}{4}$.

Diện tích $\triangle AOC$ là $\mathrm{S}_{\triangle OAC} = \dfrac{R^2}{2}$.

Diện tích hình viên phân giới hạn bởi AC và (O) là $\mathrm{S}_{\text{vp}} = \dfrac{(\pi - 2)R^2}{4}$.
Diện tích $\triangle ACM$ là $\mathrm{S}_{\triangle ACM} = \dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot MC = R^2$.
Diện tích cần tìm là $\mathrm{S} = \mathrm{S}_{\triangle ACM} - \mathrm{S}_{\text{vp}} = R^2 - \dfrac{(\pi - 2)R^2}{4} = \dfrac{(6 - \pi)R^2}{4}$.

□

Bài 165. Cho hai đường thẳng $(d) \parallel (d')$ và tiếp xúc với đường tròn $(O; R)$ lần lượt tại A và B cố định. M là điểm bất kỳ trên đường tròn (M khác A và B). Tiếp tuyến tại M của đường tròn cắt (d) và (d') tại C và D.

a) Chứng tỏ AB là đường kính của đường tròn $(O; R)$.

b) Chứng minh rằng $CD = CA + DB$ và $\triangle COD$ vuông.

c) Chứng tỏ $AC \cdot BD$ là hằng số khi M di động trên (O).

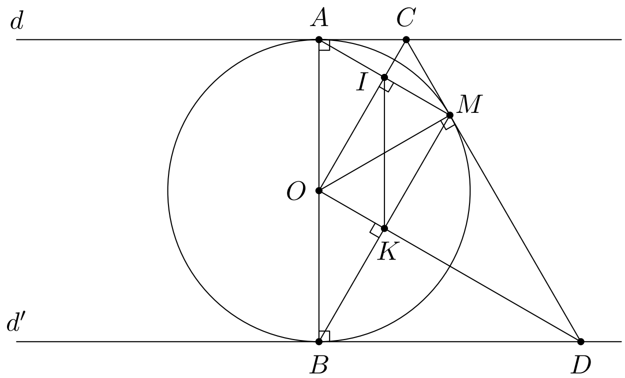
d) OC cắt AM tại I, OD cắt BM tại K. Chứng minh

  (a) IK có độ dài và phương không đổi.

  (b) $OI \cdot OC = OK \cdot OD$ là hằng số.

  (c) Tứ giác $CDKI$ nội tiếp được.

Lời giải.



a) Ta có d và d' lần lượt là các tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) nên
$OA \perp d$ và $OB \perp d'$
mà $d \parallel d'$ nên $OA \parallel OB$.
Suy ra O, A, B thẳng hàng, nghĩa là AB là đường kính của đường tròn (O).

b) Ta có CA, CM là hai tiếp tuyến cắt nhau nên
$CA = CM$ và $\widehat{COA} = \widehat{COM}$.
Tương tự ta DB, DM là hai tiếp tuyến cắt nhau nên

$DB = DM$ và $\widehat{DOB} = \widehat{DOM}$.

Do đó $CD = CM + DM = CA + DB$.

Ngoài ra $\widehat{COA} + \widehat{COM} + \widehat{DOB} + \widehat{DOM} = 180^\circ$

nên $2\widehat{COM} + 2\widehat{DOM} = 180^\circ$. Suy ra $2\widehat{COD} = 180^\circ$ hay $\widehat{COD} = 90^\circ$, nghĩa là $\triangle COD$ vuông tại O.

c) Trong tam giác COD vuông tại O với đường cao OM ta có $MC \cdot MD = OM^2 = R^2$ mà $AC = MC$ và $BD = MD$ suy ra $AC \cdot BD = R^2$ không đổi.

d) (a) Ta có $CA = CM$ và $OA = OM$.

nên OC là trung trực của AM.

Suy ra $IA = IM$.

Ta có $DB = DM$ và $OB = OM$.

nên OD là trung trực của BM. Suy ra $KB = KM$.

Xét $\triangle MAB$ ta có I, K lần lượt là trung điểm AM và BM

$\Rightarrow IK$ là đường trung bình của tam giác MAB

$\Rightarrow IK \parallel AB$ và $IK = \dfrac{AB}{2}$.

(b) Xét $\triangle OAC$ vuông tại A có đường cao AI nên $OI \cdot OC = OA^2 = R^2$.

Xét $\triangle OBD$ vuông tại B có đường cao BK nên $OK \cdot OD = OB^2 = R^2$.

Do đó $OI \cdot OC = OK \cdot OD = R^2$ không đổi.

(c) Xét $\triangle OIK$ và $\triangle ODC$ có

- $\widehat{DOC}$ là góc chung
- $\dfrac{OI}{OD} = \dfrac{OK}{OC}$ (vì $OI \cdot OC = OK \cdot OD$)

Do đó $\triangle OIK \backsim \triangle ODC$ (c-g-c)

$\Rightarrow \widehat{OIK} = \widehat{ODC}$.

Suy ra $IKDC$ là tứ giác nội tiếp.

□

Bài 166. Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn, đường tròn có đường kính BC tâm O, cắt AB tại E, cắt AC tại D.

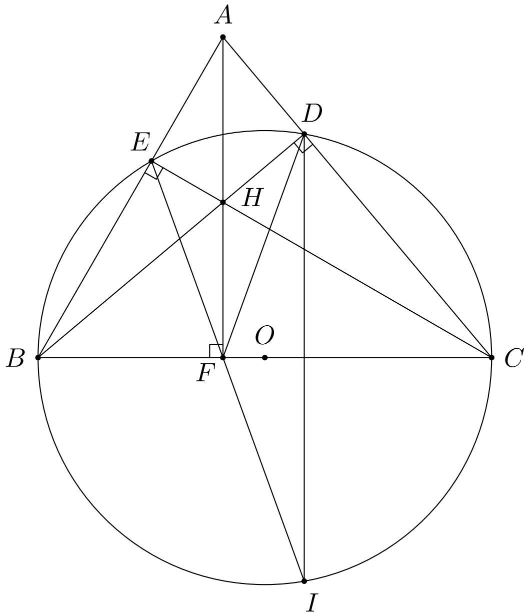
a) Chứng tỏ BD, CE và đường cao AF của $\triangle ABC$ đồng qui tại điểm H. Trong $\triangle ABC$, H được gọi là gì?

b) Chứng tỏ tứ giác $AEHD$ nội tiếp được.

c) Chứng minh rằng $HB \cdot HD = HC \cdot HE = HA \cdot HF$.

d) Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại I. Chứng minh rằng C là điểm chính giữa của cung DI và $DI \parallel AF$.

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{BEC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).
Do đó BD, CE là các đường cao của tam giác ABC.
Suy ra BD, CE và đường cao AF của $\triangle ABC$ đồng qui tại điểm H và H gọi là trực tâm của tam giác ABC.

b) Từ chứng minh trên ta có $\widehat{AEH} = \widehat{ADH} = 90^\circ$ nên $\widehat{AEH} + \widehat{ADH} = 180^\circ$.
Suy ra tứ giác $AEHD$ nội tiếp được.

c) Xét $\triangle HEB$ và $\triangle HDC$ vuông tại E và D có $\widehat{EHB} = \widehat{DHC}$ (đối đỉnh)
nên $\triangle HEB \backsim \triangle HDC$
$\Rightarrow \dfrac{HE}{HD} = \dfrac{HB}{HC} \Rightarrow HB \cdot HD = HC \cdot HE.\quad (1)$
Xét $\triangle HEA$ và $\triangle HFC$ vuông tại E và F có $\widehat{EHA} = \widehat{FHC}$ (đối đỉnh)
nên $\triangle HEA \backsim \triangle HFC$
$\Rightarrow \dfrac{HE}{HF} = \dfrac{HA}{HC} \Rightarrow HA \cdot HF = HC \cdot HE.\quad (2)$
Từ (1) và (2) ta có $HB \cdot HD = HC \cdot HE = HA \cdot HF$.

d) Ta có $\widehat{HEB} + \widehat{HFB} = 180^\circ$ nên $BEHF$ nội tiếp được $\Rightarrow \widehat{BFE} = \widehat{BHE}$.
$\widehat{HDC} + \widehat{HFC} = 180^\circ$ nên $CDHF$ nội tiếp được $\Rightarrow \widehat{CFD} = \widehat{CHD}$.
Hơn nữa $\widehat{BHE} = \widehat{CHD}$ và $\widehat{BFE} = \widehat{CFI}$ (đối đỉnh) nên $\widehat{CFI} = \widehat{CFD}$.
Do đó sđ $\overset{\frown}{CD} =$ sđ $\overset{\frown}{CI}$ hay C là điểm chính giữa cung DI.
Từ đó suy ra $OC \perp DI$ hay $BC \perp DI$
mà $AF \perp BC \Rightarrow DI \parallel AF$.

□

Bài 167. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. M là điểm bất kỳ trên cạnh BC (M khác B, C). Đường tròn tâm I đường kính BM cắt AB tại D. Đường tròn tâm K đường kính CM cắt AC tại E.

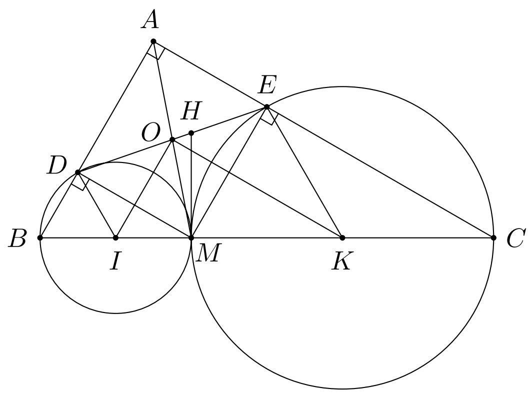
a) Giải thích rõ vị trí tương đối của (I) và (K).

b) Chứng tỏ $ADME$ là hình chữ nhật. Suy ra vị trí của M để DE có độ dài ngắn nhất.

c) Cho M là chân đường cao vẽ từ A của $\triangle ABC$. Chứng minh rằng đường thẳng DE tiếp xúc với cả hai đường tròn (I) và (K). Có vị trí nào khác của M để DE vẫn tiếp xúc với cả hai đường tròn ấy không?

d) Cho $AB = 4a$; $AC = 3a$. Tính chu vi và diện tích tứ giác $DEKI$ theo a.

Lời giải.



a) Ta có B, I, M, K, C thẳng hàng theo thứ tự đó.
Suy ra $IM + KM = IK$.
Do đó (I) và (K) tiếp xúc ngoài tại M.

b) Ta có $\widehat{BDM} = \widehat{MEC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).
Suy ra $\widehat{ADM} = \widehat{MEA} = 90^\circ$.
Hơn nữa $\widehat{DAE} = 90^\circ$ nên $ADME$ là hình chữ nhật.
Suy ra $DE = AM$. Do đó, DE bé nhất khi AM bé nhất $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu của A lên BC.

c) Gọi O là giao điểm của DE và AM. Khi đó $OA = OD = OM = OE$.
Suy ra $\triangle ODM$ và $\triangle OEM$ cân tại O.
$\Rightarrow \widehat{ODM} = \widehat{OMD}$ và $\widehat{OEM} = \widehat{OME}$. (1)
Lại có $\triangle IDM$ cân tại I và $\triangle KEM$ cân tại K.
$\Rightarrow \widehat{IDM} = \widehat{IMD}$ và $\widehat{KEM} = \widehat{KME}$. (2)
Từ (1) và (2) ta có $\widehat{IDE} = \widehat{IMO}$ và $\widehat{KED} = \widehat{KMO}$
$\Rightarrow \widehat{IDE} = \widehat{KED} = 90^\circ$.

Suy ra $ID \perp DE$ và $KE \perp DE$.
Do đó DE là tiếp tuyến chung của (I) và(K).
Ngược lại giả sử DE là tiếp tuyến chung của (I) và(K).
Kẻ tiếp tuyến chung tại M của hai đường tròn trên cắt DE tại H
Ta có $HD = HM = HE$ (tính chất tiếp tuyến cắt nhau)
$\Rightarrow H$ là trung điểm của DE hay $H \equiv O$.
Ta có $HM \perp IK$ nên $AM \perp IK$ hay M là chân đường cao vẽ từ A của $\triangle ABC$.

d) Xét $\triangle ODI$ và $\triangle OMI$ có

- OI chung
- $ID = IM$ (bán kính)
- $OD = OM$ (cmt)

Do đó $\triangle ODI = \triangle OMI$ (c.c.c)
$\Rightarrow S_{ODI} = S_{OMI}$.
Tương tự ta có $S_{OEK} = S_{OMK}$.
Do đó $S_{DEKI} = S_{ODI} + S_{OMI} + S_{OEK} + S_{OMK} = 2S_{OMI} + 2S_{OMK} = 2S_{OIK}$.
Xét $\triangle MAB$ có OI là đường trung bình nên $OI = \dfrac{AB}{2}$ hay $\dfrac{OI}{AB} = \dfrac{1}{2}$.
Tương tự $\dfrac{OK}{AC} = \dfrac{1}{2}$.
Ngoài ra $IK = IM + MK = \dfrac{BM}{2} + \dfrac{CM}{2} = \dfrac{BC}{2}$ nên $\dfrac{IK}{BC} = \dfrac{1}{2}$.
Do đó $\triangle OIK \backsim \triangle ABC$ theo tỉ lệ $\dfrac{1}{2}$.
Suy ra $S_{OIK} = \dfrac{1}{4}S_{ABC} = \dfrac{3a^2}{2}$.
Vậy $S_{DEKI} = 3a^2$.

□

Bài 168. Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O) và $AB > AC$. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Đường thẳng AD cắt (O) tại I. Gọi AK là một đường kính của (O).

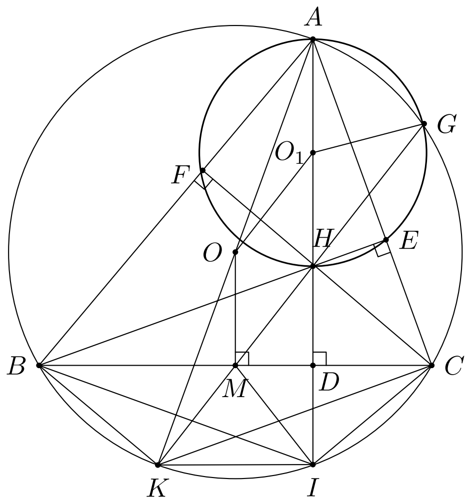
a) Chứng minh rằng BC là đường trung trực của HI và nêu một tính chất tổng quát về điểm đối xứng của trực tâm qua ba cạnh của tam giác.

b) Chứng tỏ $BCIK$ là hình thang cân và $BHCK$ là hình bình hành có tâm (tâm đối xứng) là trung điểm M của BC.

c) Đường thẳng KH cắt (O) tại G. Chứng tỏ năm điểm A, H, E, F, G cùng nằm trên một đường tròn và xác định rõ tâm O_1 của đường tròn này.

d) Chứng tỏ tứ giác $OMIO_1$ là hình thang cân.

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{CBH} = \widehat{CAD}$ (cùng phụ với $\widehat{ACB}$)
mà $\widehat{CBI} = \widehat{CAD}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{CI}$)
$\Rightarrow \widehat{CBI} = \widehat{CBH} \Rightarrow BC$ là phân giác góc $\widehat{HBI}$.
Tam giác HBI có BC vừa là phân giác vừa là đường cao nên tam giác HBI cân tại B.
Suy ra BC cũng là trung trực của HI.
Nhận xét: Điểm đối xứng của trực tâm qua các cạnh tam giác nằm trên đường tròn ngoại tiếp của tam giác đó.

b) Ta có $\widehat{AIK} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
nên $KI \perp AI \Rightarrow KI \parallel BC$ (do $BC \perp AI$)
$\Rightarrow \widehat{BIK} = \widehat{IBC}$ (so le trong)
$\Rightarrow \dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{BK} = \dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{IC}$ hay sđ $\overset{\frown}{BK} =$ sđ $\overset{\frown}{IC}$
$\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{BI} =$ sđ $\overset{\frown}{KC} \Rightarrow BI = CK$
mà $BCIK$ là hình thang (do $KI \parallel BC$)
$\Rightarrow BCIK$ là hình thang cân.
Ta lại có $KC \parallel HB$ (cùng vuông góc với AC)
và $KB \parallel HC$ (cùng vuông góc với AB)
nên $BHCK$ là hình bình hành
mà M là trung điểm BC nên hai đường chéo BC, HK cắt nhau tại trung điểm M của chúng.
Vậy M là tâm của hình bình hành $BHCK$.

c) Ta có $\widehat{AGK} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
hay $\widehat{AGH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AEH} = \widehat{AFH} = \widehat{AGH} = 90^\circ$.

Suy ra A, H, E, F, G cùng nằm trên đường tròn đường kính AH. Hiển nhiên tâm O_1 của đường tròn là trung điểm AH.

d) Ta có $OM \parallel O_1I$ (cùng vuông góc với BC)
$\Rightarrow OMIO_1$ là hình thang. (1)
Mặt khác BC là trung trực HI
$\Rightarrow \widehat{MHI} = \widehat{MIH}$(do tính đối xứng).
Ta lại có OO_1 là đường trung bình của $\triangle AHK$ nên $OO_1 \parallel HK \Rightarrow \widehat{MHI} = \widehat{OO_1I}$ (đồng vị)
$\Rightarrow \widehat{OO_1I} = \widehat{MIH}$. (2)
Từ (1) và (2) ta có $OMIO_1$ là hình thang cân.

□

Bài 169. Cho đường tròn tâm (O) có hai đường kính AB và CD vuông góc nhau. Gọi E là điểm di động trên cung nhỏ BC (E không trùng với B và C).

a) Chứng tỏ tia phân giác của $\widehat{AEB}$ qua điểm cố định D.

b) Trên cạnh EA lấy đoạn $EM = EB$. Chứng tỏ M di động trên một cung tròn cố định bằng hai cách

   (a) Tìm tâm của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABM$.

   (b) Tính $\widehat{AMB}$.

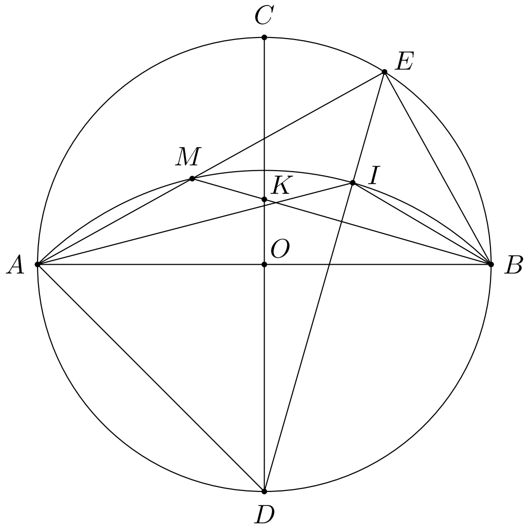
c) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle AEB$. Chứng tỏ I di động trên một cung tròn cố định bằng hai cách

   (a) Tính $\widehat{AIB}$.

   (b) Chứng tỏ các đường phân giác trong của $\triangle AEB$ đồng qui tại một điểm trên đường tròn (ABM).

d) Gọi K là giao điểm của đường thẳng BM và CD. Chứng tỏ bốn điểm A, M, K, D cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải.



a) Ta có $AB \perp CD$ nên sđ $\overset{\frown}{AC} =$ sđ $\overset{\frown}{CB} =$ sđ $\overset{\frown}{BD} =$ sđ $\overset{\frown}{DA} = 90^\circ$.

Do đó $\widehat{AED} = \widehat{BED} = 45^\circ$ hay ED là phân giác góc $\widehat{AEB}$.

Nghĩa là tia phân giác của $\widehat{AEB}$ qua điểm cố định D.

b) 2 cách

(a) Xét $\triangle EMB$ có $EB = EM$ nên tam giác đó cân tại E

mà ED là phân giác nên ED cũng là trung trực của MB.

Suy ra $MD = DB$ hay M thuộc phần cung tròn $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn $(D; DB)$.

(b) Xét $\triangle EMB$ vuông tại E có $EB = EM$ nên tam giác đó vuông cân tại E.

Do đó $\widehat{EMB} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{AMB} = 135^\circ$.

Vậy M thuộc cung chứa góc 135° dựng trên cạnh AB (nằm ở nửa mặt phẳng bờ AB chứa E).

c) 2 cách

(a) Trong tam giác IAB ta có

$\widehat{AIB} = 180^\circ - \widehat{IAB} - \widehat{IBA} = 180^\circ - \dfrac{\widehat{EAB}}{2} - \dfrac{\widehat{EBA}}{2} = 180^\circ - \dfrac{\widehat{EAB} + \widehat{EBA}}{2} = 135^\circ$.

Vậy I thuộc cung chứa góc 135° dựng trên cạnh AB (nằm ở nửa mặt phẳng bờ AB chứa E).

(b) Ta có $\widehat{AID} = \widehat{IAE} + \widehat{IEA}$.

mà $\widehat{IAE} = \widehat{IAB}$; $\widehat{IEA} = \widehat{IEB} = \widehat{DAB}$ nên $\widehat{AID} = \widehat{IAB} + \widehat{DAB} = \widehat{IAD}$.

Suy ra $\triangle DIA$ cân tại D. Từ đó suy ra $DI = DA = DB$

Do đó I thuộc phần cung tròn $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn $(D; DB)$.

d) Ta có $\widehat{AMK} = 135^\circ$ và $\widehat{ADK} = \dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AC} = 45^\circ$

$\Rightarrow \widehat{AMK} + \widehat{ADK} = 180^\circ \Rightarrow AMKD$ là tứ giác nội tiếp.

□

Bài 170. Cho đường tròn $(O; R)$. Từ điểm S cố định ở ngoài đường tròn vẽ tiếp tuyến SM và cát tuyến SPQ bất kỳ (S, P, Q theo thứ tự ấy).

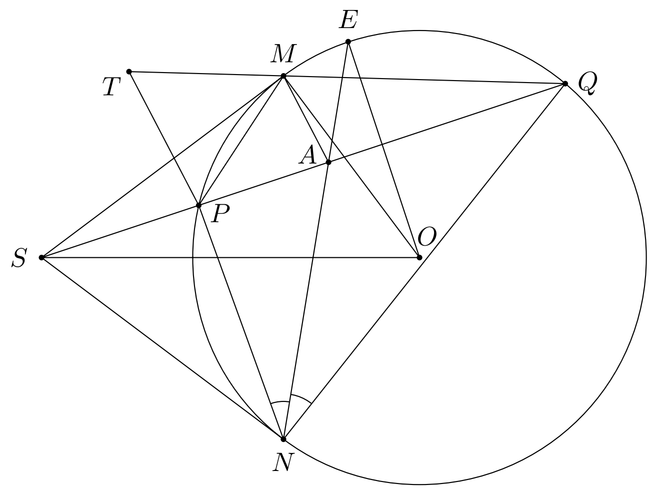
a) Gọi N là điểm trên (O) khác M và $SN = SM$. Hỏi SN có phải là tiếp tuyến của (O) hay không?

b) Chứng minh rằng $SP \cdot SQ = SM^2$ là hằng số. Tính hằng số này theo OS và R.

c) Phân giác $\widehat{PNQ}$ cắt PQ tại A và cắt (O) tại E. Chứng minh: $OE \perp PQ$ và $SA = SM$.

d) Từ P vẽ đường thẳng song song AM, cắt đường thẳng MQ tại T. Chứng tỏ rằng $\dfrac{AP}{AQ} = \dfrac{MP}{MQ}$ và suy ra $\triangle MPT$ cân tại M.

Lời giải.



a) Xét $\triangle SOM$ và $\triangle SON$ có

- OS là cạnh chung
- $OM = ON$ (bán kính)
- $SM = SN$ (giả thiết)

Do đó $\triangle SOM = \triangle SON$ (c-c-c)
$\Rightarrow \widehat{SMO} = \widehat{SNO} \Rightarrow \widehat{SNO} = 90^\circ \Rightarrow SN \perp ON$.
Do đó SN là tiếp tuyến của (O).

b) Xét $\triangle SMP$ và $\triangle SQM$ có

- $\widehat{MSQ}$ là góc chung
- $\widehat{SMP} = \widehat{SQM}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{MP}$)

Do đó $\triangle SMP \backsim \triangle SQM$ (g-g)
$\Rightarrow \dfrac{SM}{SQ} = \dfrac{SP}{SM} \Rightarrow SP \cdot SQ = SM^2 = SO^2 - R^2$.

c) NE là phân giác nên $\overset{\frown}{PE} = \overset{\frown}{QE}$ hay E là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{PQ}$.
Từ đó ta có OE vuông góc với PQ.
Mặt khác, ta có $\widehat{SAN} = \dfrac{1}{2}\left(\text{sđ } \overset{\frown}{NP} + \text{sđ } \overset{\frown}{QE}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\text{sđ } \overset{\frown}{NP} + \text{sđ } \overset{\frown}{PE}\right) = \dfrac{1}{2}\text{sđ } \overset{\frown}{NE} = \widehat{SNE}$.
Do đó $\triangle SNA$ cân tại S
$\Rightarrow SA = SN \Rightarrow SA = SM$.

d) Ta có $\triangle SMP \backsim \triangle SQM \Rightarrow \dfrac{SM}{SQ} = \dfrac{MP}{QM}$.
Tương tự ta cũng có $\dfrac{SN}{SQ} = \dfrac{NP}{QN}$
mà $SM = SN$ nên $\dfrac{MP}{QM} = \dfrac{NP}{QN}$.
Vì NA là phân giác của tam giác NPQ nên $\dfrac{AP}{AQ} = \dfrac{NP}{QN} \Rightarrow \dfrac{AP}{AQ} = \dfrac{MP}{QM}$.
Từ đó suy ra MA là phân giác góc $\widehat{PMQ} \Rightarrow \widehat{AMP} = \widehat{AMQ}$.
Lại có $\widehat{AMP} = \widehat{MPT}$ (so le trong) và $\widehat{AMQ} = \widehat{MTP}$ (đồng vị)
nên $\widehat{MPT} = \widehat{MTP} \Rightarrow \triangle MTP$ cân tại M.

$\square$

Bài 171. Cho nửa đường tròn đường kính AB tâm O, bán kính R, CD là dây cung di động trên nửa đường tròn sao cho $CD = R\sqrt{2}$ với A, C, D theo thứ tự ấy trên nửa đường tròn và C, D không trùng với A, B. Hai tia AC và BD cắt nhau tại E.

a) Tính $\widehat{COD}$.

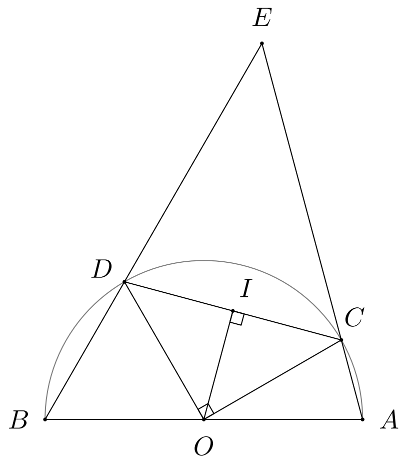
b) Tìm tập hợp các trung điểm của dây cung CD.

c) Tính số đo $\widehat{AEB}$ và suy ra tập hợp các điểm E.

d) Gọi F là giao điểm của CD và AB, K là giao điểm của phân giác $\widehat{AEB}$ và $\widehat{AFC}$. Chứng minh rằng $\widehat{EKF} = 90°$.

Lời giải.

a)



Ta có $OC^2 + OD^2 = 2R^2$ và $CD^2 = 2R^2$.
Suy ra $\triangle COD$ vuông tại O (theo định lí Py-ta-go đảo).
Suy ra $\widehat{COD} = 90^\circ$.

b) Gọi I là trung điểm CD. Mà $\triangle COD$ vuông tại O nên

$$OI = OC = OD = \frac{CD}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

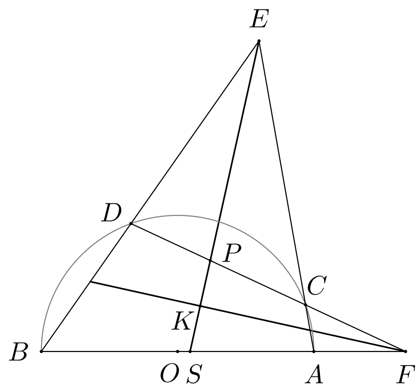
Khi đó, khi dây cung CD di chuyển trên nửa đường tròn đường kính AB thì I di chuyển trên nửa đường tròn tâm O, bán kính $OI = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

c) Ta có

$$\begin{aligned} & 2\widehat{B} + 2\widehat{A} + \widehat{BOD} + \widehat{AOC} = 360^\circ \\ \Leftrightarrow\ & 2\left(\widehat{B} + \widehat{A}\right) + 90^\circ = 360^\circ \\ \Leftrightarrow\ & \widehat{B} + \widehat{A} = 135^\circ. \end{aligned}$$

Xét $\triangle AEB$, ta có $\widehat{E} = 180 - \left(\widehat{B} + \widehat{A}\right) = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$.
Suy ra tập hợp tất cả các điểm E thỏa mãn $\widehat{AEB} = 45^\circ$ là cung chứa góc 45° dựng trên đoạn AB.

d)



Gọi P, S lần lượt là giao điểm của đường phân giác của $\widehat{BEA}$ với CD, AB.
Xét $\triangle BES$, ta có $\widehat{ESF} = \widehat{EBS} + \widehat{BES}$.
Xét $\triangle CEP$, ta có $\widehat{SPF} = \widehat{SEA} + \widehat{ECP}$.
Mà $\widehat{BES} = \widehat{CEP}$ (ES là phân giác của $\widehat{BEA}$).
Và $\widehat{EBS} = \widehat{ECP}$ ($ABDC$ là tứ giác nội tiếp).
Do đó $\widehat{ESF} = \widehat{SPF}$, suy ra $\triangle FSP$ cân tại F.
Lại vì FK là phân giác của $\widehat{DFB}$ nên $FK \perp PS$ hay $EK \perp FK$, suy ra $\widehat{EKF} = 90^\circ$.

□

Bài 172. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B (tâm của đường tròn này ở ngoài đường tròn kia). Gọi AD, AC lần lượt là đường kính của (O) và (O').

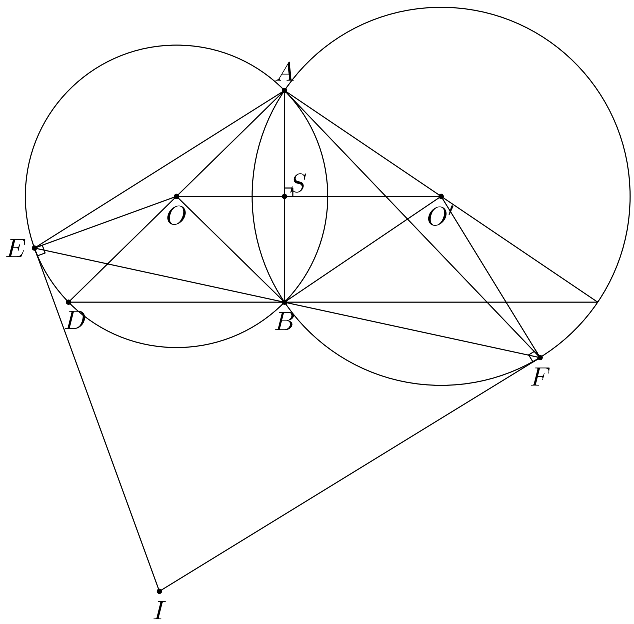
a) Chứng minh $OO' \perp AB$ tại trung điểm của AB.

b) Chứng minh C, B, D thẳng hàng và $CD = 2OO'$.

c) Qua B vẽ đường thẳng cắt (O) tại E, cắt (O') tại F (B nằm giữa E và F). Chứng tỏ số đo $\widehat{EAF}$ luôn không đổi.

d) Tiếp tuyến của (O) tại E và tiếp tuyến của (O') tại F cắt nhau tại I. Chứng tỏ khi cát tuyến BEF quay quanh B thì $\widehat{EIF}$ có số đo không đổi và bốn điểm A, E, I, F luôn nằm trên cùng một đường tròn.

Lời giải.



a) Ta có $OA = OB$ và $O'A = O'B$ nên OO' là đường trung trực của AB.
Suy ra $OO' \perp AB$ tại trung điểm S của AB.

b) Ta có $\widehat{ABD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AD).
Ta cũng có $\widehat{ABC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AC).
Suy ra $\widehat{ABD} + \widehat{ABC} = 180^\circ$ nên D, B, C thẳng hàng.
Xét $\triangle ACD$ có $OA = OD$, $O'A = O'C$ nên OO' là đường trung bình của $\triangle ACD$.
Suy ra $CD = 2OO'$.

c) Xét (O), ta có $\widehat{AEB} = \dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AB}$ (góc nội tiếp chắn cung AB).
Xét (O'), ta có $\widehat{AFB} = \dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AB}$ (góc nội tiếp chắn cung AB).
Mà A, B cố định nên sđ$\overset{\frown}{AB}$ không đổi. Do đó $\widehat{AEB}$ và $\widehat{AFB}$ có số đo không đổi.

Xét $\triangle EAF$, ta có $\widehat{EAF}+\widehat{AEF}+\widehat{AFE}=180^\circ$.
Mà $\widehat{AEB}$ và $\widehat{AFB}$ có số đo không đổi nên số đo $\widehat{EAF}$ luôn không đổi.

d) Xét (O), ta có $\widehat{EAB}=\widehat{BEI}$ (cùng chắn cung nhỏ EB).
Xét (O'), ta có $\widehat{BAF}=\widehat{BFI}$ (cùng chắn cung nhỏ BF).
Khi đó $\widehat{BEI}+\widehat{BFI}=\widehat{EAB}+\widehat{BAF}=\widehat{EAF}$ (không đổi).
Xét $\triangle EIF$, ta có $\widehat{BEI}+\widehat{BFI}+\widehat{EIF}=180^\circ$ (định lí tổng 3 góc trong một tam giác).
Mà $\widehat{BEI}+\widehat{BFI}$ có số đo không đổi nên $\widehat{EIF}$ có số đo không đổi.
Chứng minh bốn điểm A,E,I,F luôn nằm trên cùng một đường tròn.
Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{AEI}+\widehat{AFI} &= \widehat{BEI}+\widehat{AEB}+\widehat{BFI}+\widehat{AFB}\\ &= \widehat{EAB}+\widehat{AEB}+\widehat{ABF}+\widehat{AFB}=180^\circ.\end{aligned}$$

Mà hai góc $\widehat{AEI}$, $\widehat{AFI}$ ở vị trí đối nhau nên tứ giác $AEIF$ là tứ giác nội tiếp, do đó bốn điểm A,E,I,F luôn nằm trên cùng một đường tròn.

□

Bài 173. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ vuông tại A ($AB<AC$). Từ điểm D nằm giữa O và C vẽ đường thẳng vuông góc với BC cắt các đường thẳng AB, AC tại E và F, cắt (O) tại I,K; CE cắt (O) tại J. Chứng minh rằng

a) D là trung điểm của IK và C là điểm chính giữa của cung IK.

b) 3 điểm B,F,J thẳng hàng.

c) $FA\cdot FC=FD\cdot FE=FI\cdot FK$.

d) Hai tiếp tuyến của (O) tại A và J và đường thẳng EF đồng quy tại một điểm, điểm này có vị trí đặc biệt gì trên đoạn EF.

Lời giải.

a)

Ta có $BC \perp IK$, mà BC là đường kính, IK là dây nên D là trung điểm của IK (đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây đó).

Vì $BC \perp IK$ tại trung điểm D của IK nên BC là đường trung trực của IK nên $CI = CK$.

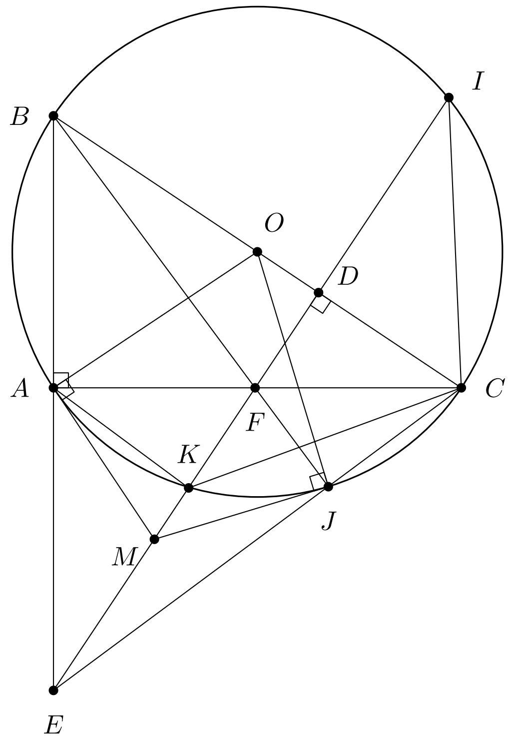
Suy ra $\overset{\frown}{IC} = \overset{\frown}{CK}$ hay C là điểm chính giữa của cung IK.

b) Xét $\triangle EBC$, ta có $CA \perp BE$, $ED \perp BC$ và $ED \cap AC = \{F\}$.

Suy ra F là trực tâm của $\triangle BEC$.

Suy ra $BF \perp EC$.

Mặt khác, ta cũng có $BJ \perp EC$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên B, F, J thẳng hàng.



c) Xét hai tam giác AFE và DFC, ta có

$$\begin{cases} \widehat{FAE} = \widehat{FDC} = 90^\circ \\ \widehat{AFE} = \widehat{CFD} \text{ (đối đỉnh)} \end{cases} \Rightarrow \triangle AFE \backsim \triangle DFC \text{ (g-g)} \Rightarrow FA \cdot FC = FD \cdot FE.$$

Xét hai tam giác ICF và AKF, ta có

$$\begin{cases} \widehat{FIC} = \widehat{FAK} \text{ (góc nội tiếp chắn cung } CK) \\ \widehat{AFK} = \widehat{IFC} \text{ (đối đỉnh)} \end{cases} \Rightarrow \triangle ICF \backsim \triangle AKF \text{ (g-g)}.$$

$\Rightarrow FI \cdot FK = FA \cdot FC$.

Từ đó suy ra $FA \cdot FC = FD \cdot FE = FI \cdot FK$.

d) Giả sử M là trung điểm của EF.

Vì $\triangle FAE$ vuông tại A và $\triangle FJE$ vuông tại J nên $MA = MJ = MF = ME$.

Xét $\triangle OAM$ và $\triangle OJM$, ta có

$$\begin{cases} MA = MJ \\ OA = OJ \\ OM: \text{ cạnh chung} \end{cases} \Rightarrow \triangle OAM = \triangle OJM \text{ (c-c-c)}.$$

$\Rightarrow \widehat{OAM} = \widehat{OJM}$.

Mặt khác, ta có

$$\widehat{OAM} = \widehat{OAF} + \widehat{MAF} = \frac{1}{2}\left(\widehat{CAB} + \widehat{CAE}\right) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ.$$

Suy ra $\widehat{OAM} = \widehat{OJM} = 90^\circ$ hay OA, OJ là các tiếp tuyến tại A, J của đường tròn (O) (đúng với giả thiết ban đầu).

Vậy E là trung điểm EF.

□

Bài 174. Cho đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn $(O; R)$ tại A. Trên d lấy đoạn $AC = R$. Tại C vẽ tiếp tuyến CD đến (O). Gọi AB là đường kính của (O).

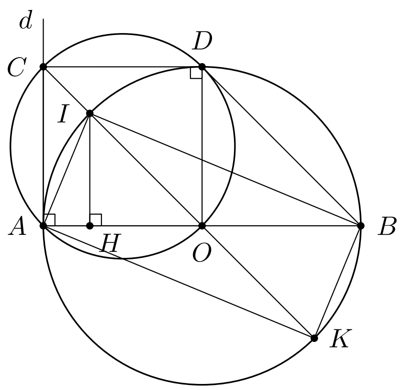
a) Hỏi $ACDO$ là hình gì? D ở vị trí đặc biệt nào trên cung AB.

b) Chứng tỏ $CO \parallel DB$. Tính độ dài CO, DB theo R.

c) OC cắt đường tròn (O) tại K và I (I nằm trên cung nhỏ AD). Tính độ dài AI, AK theo R.

d) Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây cung AI và cung nhỏ AI theo R.

Lời giải.



a) Ta có $OA = OD = R$, $AC = CD$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).
Mà $OA = AC$ (giả thiết) nên suy ra $OA = AC = CD = OD$, do đó $ACDO$ là hình thoi.
Lại có $\widehat{OAC} = 90^\circ$ nên $ACDO$ là hình vuông.
Vì $ACDO$ là hình vuông nên $\widehat{AOD} = 90^\circ$, suy ra sđ$\overset{\frown}{AD} = 90^\circ$.
Lại vì AB là đường kính nên sđ$\overset{\frown}{AB} = 180^\circ$, D nằm trên $\overset{\frown}{AB}$ nên sđ$\overset{\frown}{BD} = 90^\circ$.
Vậy D nằm ở chính giữa trên cung AB.

b) Ta có $\widehat{DBA} = \widehat{AOC}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn $\widehat{AD}$).
Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $CO \parallel BD$.
Áp dụng định lí Py-ta-go vào $\triangle OAC$ vuông tại A, ta có

$$CO = \sqrt{AO^2 + AC^2} = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}.$$

Xét tứ giác $OBDC$, ta có $CO \parallel BD$ (chứng minh trên) và $CD \parallel OB$ (cùng vuông OD) nên $OBDC$ là hình bình hành.
Suy ra $BD = OC = R\sqrt{2}$.

c) Kẻ $IH \perp OA$, vì $\triangle OHI$ vuông cân tại H nên $IH = HO = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$.
Suy ra $AH = AO - HO = R - \dfrac{R}{\sqrt{2}} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}R$.
Áp dụng định lí Py-ta-go vào $\triangle IHA$ vuông tại H, ta có

$$IA = \sqrt{IH^2 + AH^2} = \sqrt{\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}R\right)^2} = R\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Khi đó, vì $\triangle IAK$ vuông tại A (do $\widehat{IAK} = 90^\circ$) nên

$$AK = \sqrt{IK^2 - AI^2} = \sqrt{(2R)^2 - \left[\sqrt{2-\sqrt{2}}R\right]^2} = R\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

d) Diện tích hình quạt tròn IOA là $S_1 = \dfrac{\pi R^2 n}{360} = \dfrac{\pi R^2 \cdot 45}{360} = \dfrac{\pi R^2}{8}$.
Diện tích tam giác AIO là $S_2 = \dfrac{1}{2}IH \cdot OA = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{R}{\sqrt{2}} \cdot R = \dfrac{R^2}{2\sqrt{2}}$.
Vậy, diện tích hình viên phân là $S = S_1 - S_2 = \left(\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)R^2$.

□

Bài 175. Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi d là tiếp tuyến tại A của (O), d' là đường thẳng song song với d cắt cạnh AB, AC lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh rằng $AM \cdot AB = AN \cdot AC$ và tứ giác $BMNC$ nội tiếp.

b) Khi đường thẳng d' di động song song với d, chứng tỏ tâm đường tròn $(BMNC)$ luôn luôn nằm trên một đường cố định.

c) Có vị trí nào của d' để BN, CM là hai đường cao của $\triangle ABC$ không?

d) Ngược lại: nếu hai điểm M, N nằm trên hai cạnh AB, AC sao cho $AM \cdot AB = AN \cdot AC$ thì $BMNC$ có nội tiếp đường tròn không? MN có song song với d không?

Lời giải.

a)

Vì $Md' \parallel Ad$ nên $\widehat{MNA} = \widehat{NAd}$ (so le trong).

Mà $\widehat{ABC} = \widehat{NAd}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$).

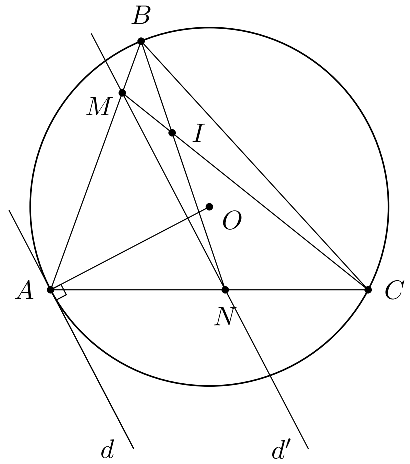
Suy ra $\widehat{MNA} = \widehat{ABC}$.

Xét $\triangle AMN$ và $\triangle ACB$, ta có

$$\begin{cases} \widehat{A} \text{ chung} \\ \widehat{MNA} = \widehat{ABC} \end{cases} \Rightarrow \triangle AMN \backsim \triangle ACB \text{ (g-g)}.$$

$\Rightarrow AM \cdot AB = AN \cdot AC$.

Xét tứ giác $MNCB$, ta có $\widehat{MNA} = \widehat{ABC}$ nên tứ giác $BMNC$ nội tiếp (góc trong tại một đỉnh bằng góc ngoài tại đỉnh đối diện).



b) Ta có $MNCB$ là tứ giác nội tiếp và B, C cố định nên tâm của đường tròn luôn nằm trên đường thẳng cố định là trung trực của BC.

c) Gọi giao điểm của CM và BN là I.

Khi BN, CM là hai đường cao của $\triangle ABC$ thì $CM \perp AB$, $BN \perp AC$.

Suy ra $ANIM$ là tứ giác nội tiếp.

Như vậy, để BN, CM là hai đường cao của $\triangle ABC$ thì $d' \parallel d$ và d' cắt AB, AC lần lượt tại M, N sao cho $AMIN$ là tứ giác nội tiếp.

d) Theo giả thiết, ta có $AM \cdot AB = AN \cdot AC \Rightarrow \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AN}{AB}$.

Xét $\triangle AMN$ và $\triangle ACB$, ta có

$$\begin{cases} \widehat{A} \text{ chung} \\ \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AN}{AB} \end{cases} \Rightarrow \triangle AMN \backsim \triangle ACB \text{ (c-g-c)}.$$

Suy ra $\widehat{ANM} = \widehat{ABC}$ (hai góc tương ứng).

Suy ra $BMNC$ là tứ giác nội tiếp (góc trong tại một đỉnh bằng góc ngoài tại đỉnh đối diện).

Vì $\widehat{CAd} = \widehat{ABC}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung AC) nên $\widehat{CAd} = \widehat{MNA}$, do đó $MN \parallel d$ (vì hai góc so le trong bằng nhau).

□

Chương 5

MỘT SỐ ĐỀ THAM KHẢO

1 ĐỀ GIỮA HỌC KÌ 2

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA KÌ II - Năm học: 2012-2013

Môn: Toán 9 - Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} -3x+2y=25\%x-2 \\ 4x-50\%y=y+\dfrac{21}{4}. \end{cases}$

Lời giải.

$\begin{cases} -3x+2y=25\%x-2 \\ 4x-50\%y=y+\dfrac{21}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+2y=\dfrac{x}{4}-2 \\ 4x-\dfrac{y}{2}=y+\dfrac{21}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{13}{8}x-1 \\ 4x=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{13}{8}x-1\right)+\dfrac{21}{4}. \end{cases}$ (1)

Ta có (1) $\Leftrightarrow 4x=\dfrac{39}{16}x+\dfrac{15}{4} \Leftrightarrow \dfrac{25}{16}x=\dfrac{15}{4} \Leftrightarrow x=\dfrac{12}{5} \Rightarrow y=\dfrac{29}{10}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{12}{5};\dfrac{29}{10}\right)$. □

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{5}{2x-y}-\dfrac{3}{x+y}=0 \\ \dfrac{2}{2x-y}-\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{30}. \end{cases}$

Lời giải.

Đặt $=\dfrac{1}{2x-y}$ và $b=\dfrac{1}{x+y}$ $(a,b\neq 0)$. Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 5a-3b=0 \\ 2a-b=\dfrac{1}{30} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{5a}{3} \\ 2a-\dfrac{5a}{3}=\dfrac{1}{30} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{10} \\ b=\dfrac{1}{6} \end{cases} \text{(thỏa mãn).}$$

Từ đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x-y=10 \\ x+y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=6 \\ 3x=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{16}{3} \\ y=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{16}{3};\dfrac{2}{3}\right)$. □

Bài 3. Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình.
Một hình chữ nhật có chu vi 54 m và tỉ số giữa chiều dài và chiều rộng là $\dfrac{5}{4}$. Tính diện tích hình chữ nhật.

Lời giải.

Gọi chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là a và b (đơn vị: m; điều kiện: $a,b>0$).
Do chu vi của hình chữ nhật là 54 m nên $2a+2b=54 \Leftrightarrow a+b=27$. (1)
Do tỉ số giữa chiều dài và chiều rộng là $\dfrac{5}{4}$ nên $a=\dfrac{5}{4}b$. (2)
Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a+b=27 \\ a=\dfrac{5}{4}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{5}{4}b \\ \dfrac{5}{4}b+b=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=12 \\ a=15 \end{cases} \text{(thỏa mãn).}$$

Vậy diện tích của hình chữ nhật là $12\cdot 15=300\ \text{m}^2$. □

Bài 4. a) Cho hàm số $y=ax^2$ có đồ thị (P) qua điểm $A(2;1)$. Tìm công thức và vẽ đồ thị (P) của hàm số vừa tìm.

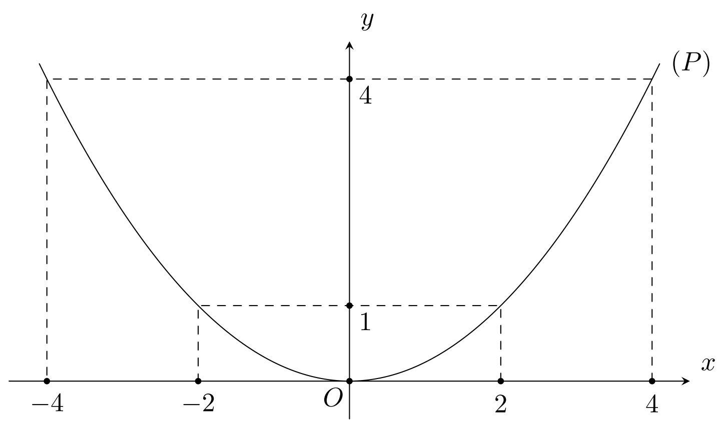
b) Điểm nào sau đây thuộc (P): $B(-2;1)$; $C(4;-4)$; $D\left(0,5;\dfrac{1}{16}\right)$.

Lời giải.

a) Do đồ thị (P) đi qua điểm $A(2;1)$ nên $1=a\cdot 2^2 \Leftrightarrow a=\dfrac{1}{4}$.
Suy ra công thức của hàm số là $y=\dfrac{x^2}{4}$.
Đồ thị (P) là một parabol hướng lên đi qua các điểm được thể hiện trong bảng sau

x	0	2	-2	4	-4
y	0	1	1	4	4

Do đó ta vẽ đồ thị (P) như sau



b) Do $y_B = \dfrac{x_B^2}{4}$, $y_C \neq \dfrac{x_C^2}{4}$ và $y_D = \dfrac{x_D^2}{4}$ nên $B, D \in (P)$, $C \notin (P)$.

□

Bài 5. Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến MA, MB ($A; B$ thuộc (O)). Gọi H là giao điểm của MO và AB. Kẻ dây $BC \parallel MA$, MC cắt đường tròn (O) tại E, BE cắt AM tại F.

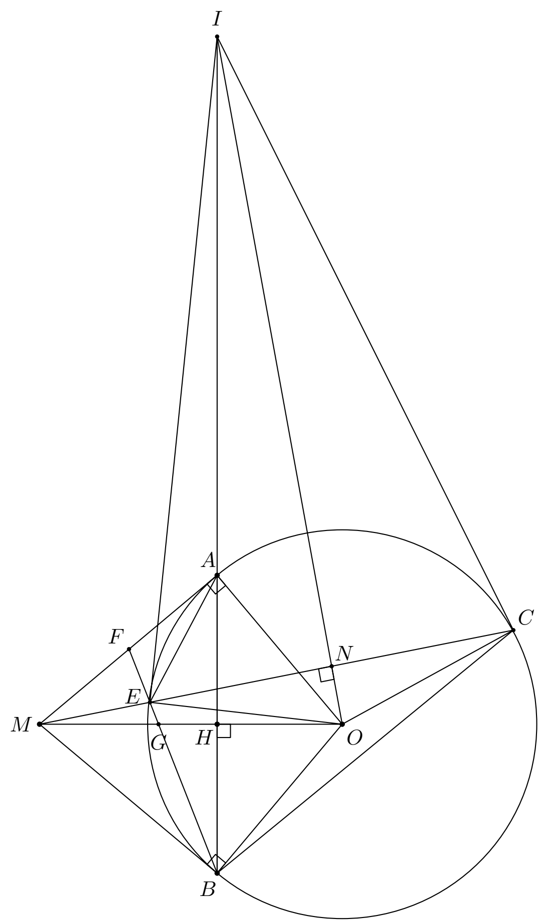
a) Chứng minh rằng $\triangle FBM \backsim \triangle FME$ và $\triangle AEF \backsim \triangle BAF$.

b) Đường tròn qua bốn điểm A, O, B, M cắt CM tại N. Chứng minh rằng ON qua điểm chính giữa cung CE.

c) Chứng minh rằng $FA = FM$, suy ra trọng tâm G của tam giác MAB và hai điểm E, F thẳng hàng.

d) Đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OHEC$ cắt AB tại I (I khác H). Chứng minh rằng IC, IE là hai tiếp tuyến của (O) và O, N, I thẳng hàng.

Lời giải.



a) Theo tính chất góc giữa tiếp tuyến và dây cung ta có $\widehat{MBF} = \widehat{MCB}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{EB}$).
Mà $BC \parallel MA$ nên $\widehat{FME} = \widehat{MCB}$.
Do đó $\widehat{MBF} = \widehat{FME}$, kết hợp với $\widehat{F}$ chung ta được

$$\triangle FME \backsim \triangle FBM \text{ (g-g)}.$$

Theo tính chất góc giữa tiếp tuyến và dây cung ta có $\widehat{FAE} = \widehat{EBA}$.
Kết hợp với góc $\widehat{AFE}$ chung ta được

$$\triangle FAE \backsim \triangle FBA \text{ (g-g)}.$$

b) Do MA, MB là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90°$.
Do đó đường tròn qua bốn điểm A, O, B, M là đường tròn đường kính OM.
Suy ra $\widehat{ONM} = 90°$ hay $ON \perp CE$.
Kết hợp với tam giác OCE cân tại O ta được ON là phân giác góc $\widehat{COE}$.
Vậy ON đi qua điểm chính giữa cung CE.

c) Từ câu a) ta có

- $\triangle FME \backsim \triangle FBM \Rightarrow \dfrac{FM}{FE} = \dfrac{FB}{FM} \Rightarrow FM^2 = FE \cdot FB$;
- $\triangle FAE \backsim \triangle FBA \Rightarrow \dfrac{FA}{FE} = \dfrac{FB}{FA} \Rightarrow FA^2 = FE \cdot FB$.

Suy ra $FA^2 = FM^2$ hay $FA = FM$.

Do đó BF là trung tuyến của tam giác MAB hay E, F, G thẳng hàng với G là trọng tâm tam giác MAB.

d) Do I là giao điểm của đường tròn đi qua bốn điểm E, H, O, C và đường thẳng AB nên $\widehat{IEO} = \widehat{IHO} = 90^\circ$ và $\widehat{ICO} = 180^\circ - \widehat{IHO} = 90^\circ$.

Suy ra IE, IC là các tiếp tuyến của đường tròn (O).

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau thì $IC = IE$ và $OC = OE$ nên OI là đường trung trực của đoạn thẳng EC.

Vậy OI đi qua trung điểm N của CE hay O, N, I thẳng hàng.

$\square$

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA KÌ II - Năm học: 2013-2014

Môn: Toán 9 - Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1. Giải phương trình $5x^2 - 2x - 3 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\Delta' = (-1)^2 + 3 \cdot 5 = 16 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt là

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{\Delta'}}{5} = 1;\ x_2 = \frac{1-\sqrt{\Delta'}}{5} = -\frac{3}{5}.$$

Vậy phương trình có nghiệm $S = \left\{1; -\frac{3}{5}\right\}$. □

Bài 2. Giải phương trình $x^2 + 6x + 2\sqrt{3} + 5 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\Delta' = 3^2 - (2\sqrt{3}+5) = \left(1+\sqrt{3}\right)^2 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt là

$$x_1 = -3 + \sqrt{\Delta'} = -2 + \sqrt{3};\ x_2 = -3 - \sqrt{\Delta'} = -4 - \sqrt{3}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-2+\sqrt{3}; -4-\sqrt{3}\}$. □

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x + y = 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2}x + y = 1. \end{cases}$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} 3x + y = 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2}x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 2\sqrt{2} \\ \left(3+\sqrt{2}\right)x + y = 2\sqrt{2} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2\sqrt{2}-1}{3+\sqrt{2}} = -1 + \sqrt{2} \\ y = 2\sqrt{2} - 3x = 3 - \sqrt{2}. \end{cases}$$

$$\left(\text{Vì } \frac{2\sqrt{2}-1}{3+\sqrt{2}} = \frac{\left(2\sqrt{2}-1\right)\left(3-\sqrt{2}\right)}{3^2-2} = \frac{-7+7\sqrt{2}}{7} = -1+\sqrt{2}.\right)$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = \left(-1+\sqrt{2}; 3-\sqrt{2}\right)$ □

Bài 4. Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình.

Tìm chu vi của hình chữ nhật, biết rằng nếu tăng mỗi cạnh lên 4 m thì diện tích hình chữ nhật tăng thêm 80 m^2, còn nếu giảm chiều rộng 2 m và tăng chiều dài 5 m thì diện tích không thay đổi.

Lời giải.

Gọi chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là a và b (đơn vị: m; điều kiện: $a, b > 0$).

Do nếu tăng mỗi cạnh lên 4 m thì diện tích hình chữ nhật tăng thêm 80 m^2 nên

$$(a+4)(b+4) - ab = 80 \Leftrightarrow a + b = 16. \qquad (1)$$

Do nếu giảm chiều rộng 2 m và tăng chiều dài 5 m thì diện tích không thay đổi nên

$$(a+5)(b-2)-ab=0 \Leftrightarrow -2a+5b=10. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a+b=16 \\ -2a+5b=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=16-a \\ -2a+5(16-a)=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a=70 \\ b=16-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=10 \\ b=6 \end{cases} \text{(thỏa mãn).}$$

Vậy chu vi của hình chữ nhật là $2(a+b)=32$ m. □

Bài 5. Cho $(P)\colon y=-x^2$ và $(d)\colon y=-x-2$.

a) Vẽ (P) và (d) trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy.

b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép toán.

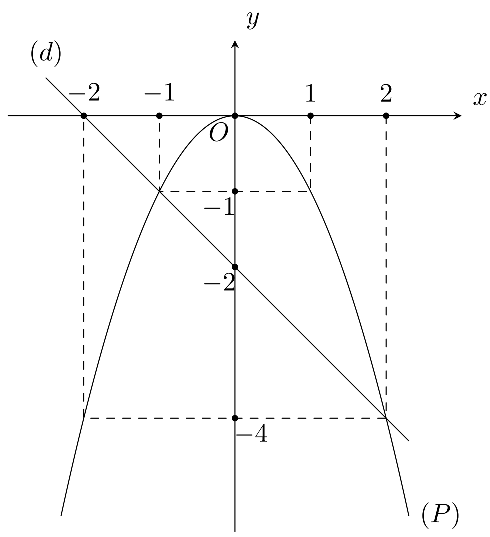
Lời giải.

a) Do $a=-1<0$ nên đồ thị (P) là parabol hướng xuống và đi qua các điểm thể hiện trong bảng sau

x	0	1	-1	2	-2
y	0	-1	-1	-4	4

Đường thẳng (d) đi qua các điểm có tọa độ là $(0;-2)$ và $(-2;0)$ trên mặt phẳng tọa độ.

Do đó ta vẽ đồ thị (P) và đường thẳng (d) trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy như hình bên.



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là

$$-x^2=-x-2 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=1 & \Rightarrow y=-1 \\ x=-2 & \Rightarrow y=-4. \end{array}\right.$$

Vậy (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm có tọa độ là $(-1;-1)$ và $(-2;-4)$. □

Bài 6. Cho phương trình $mx^2-2(m+1)x+m-3=0$.

a) Tìm m để phương trình có nghiệm.

b) Tìm m để phương trình có nghiệm kép. Tìm nghiệm kép đó.

Lời giải.

a) Với $m = 0$, phương trình trở thành $-2x - 3 = 0$ có nghiệm $x = -\dfrac{3}{2}$.
Với $m \neq 0$, phương trình là bậc hai ẩn x có nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta' = (m+1)^2 - m(m-3) \geq 0 \Leftrightarrow 5m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{5}.$$

Từ cả hai trường hợp ta thấy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq -\dfrac{1}{5}$.

b) Phương trình có nghiệm kép khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = (m+1)^2 - m(m-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 5m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{5}.$$

Khi đó phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-2(m+1)}{2m} = -4$.

□

Bài 7. Cho nửa đường tròn tâm (O), đường kính $AB = 2R$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm E. Hai tiếp tuyến EM, Bx của (O) cắt nhau tại D (M thuộc (O)).

a) Chứng minh rằng 4 điểm O, M, D, B cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $\triangle EMA \backsim \triangle EBM$, suy ra $EM^2 = EO^2 - R^2$.

c) Trên đoạn ME lấy điểm C sao cho hai góc $\widehat{CAM}$, $\widehat{EDO}$ bằng nhau. Chứng minh rằng $OC \parallel MB$.

d) Giả sử M là trung điểm đoạn ED. Tính EM theo R.

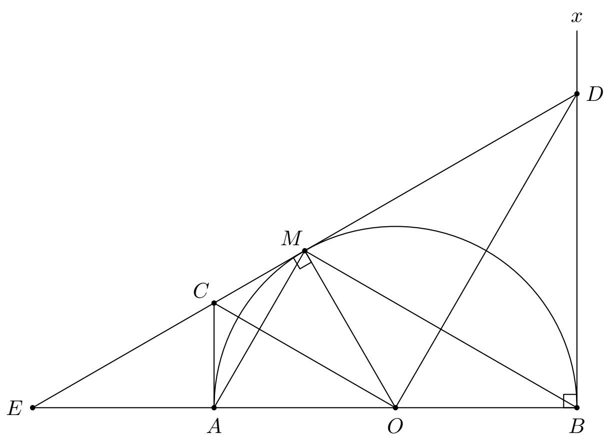
Lời giải.

a) Do DM, DB là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên

$$\widehat{OMD} = \widehat{OBD} = 90^\circ.$$

Suy ra 4 điểm O, M, D, B cùng thuộc đường tròn đường kính OD.

b) Theo tính chất về góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung ta có $\widehat{EMA} = \widehat{MBA}$.



Kết hợp với $\widehat{E}$ chung ta thu được $\triangle EMA \backsim \triangle EBM$ (g-g).
Do EM là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\widehat{OEM} = 90^\circ$.
Suy ra $OE^2 = OM^2 + ME^2 = EM^2 + R^2$ hay $EM^2 = OE^2 - R^2$.
c) Do 4 điểm O, M, D, B cùng thuộc một đường tròn nên

$$\widehat{MBO} = \widehat{MDO} = \widehat{CAM}.$$

Mặt khác $\widehat{AMB} = 90^\circ$ nên $\widehat{MAB} + \widehat{MBO} = 90^\circ$.

Từ đó suy ra $\widehat{CAO} = \widehat{MAB} + \widehat{CAM} = 90^\circ$ hay CA là tiếp tuyến của (O).

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có OC là phân giác góc $\widehat{MOA}$.

Khi đó $\widehat{COA} = \dfrac{1}{2}\widehat{MOA} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AM} = \widehat{MBA}$.

Do đó $OC \parallel MB$.

d) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có $DB = DM$.

Kết hợp với M là trung điểm DE ta có $\sin\widehat{DEB} = \dfrac{DB}{DE} = \dfrac{DB}{2DM} = \dfrac{1}{2}$.

Do đó $\widehat{DEB} = 30^\circ$. Khi đó $EM = OM\cot 30^\circ = R\sqrt{3}$. □

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA KÌ II - Năm học: 2014-2015

Môn: Toán 9 - Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x - y = -9 \\ -4x + 3y = 17. \end{cases}$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} 3x - y = -9 \\ -4x + 3y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 9 \\ -4x + 3(3x+9) = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 9 \\ 5x = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (-2; 3)$. □

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3\sqrt{x-1} + \dfrac{1}{y+1} = 1 \\ \sqrt{x-1} - \dfrac{2}{y+1} = 3. \end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$; $y \neq -1$.

Đặt $\sqrt{x-1} = a$; $\dfrac{1}{y+1} = b$ $(a \geq 0,\ b \neq 0)$. Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 3a + b = 1 \\ a - 2b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 - 3a \\ a - 2(1-3a) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 - 3a \\ 7a = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{5}{7} \\ b = -\dfrac{8}{7} \end{cases} \text{(thỏa mãn).}$$

Suy ra $\begin{cases} \sqrt{x-1} = \dfrac{5}{7} \\ \dfrac{1}{y+1} = -\dfrac{8}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{74}{49} \\ y = -\dfrac{15}{8} \end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = \left(\dfrac{74}{49}; -\dfrac{15}{7}\right)$. □

Bài 3. Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc thì sau 12 ngày hoàn thành. Nếu đội I làm một mình trong 4 ngày rồi nghỉ, đội II làm tiếp trong 6 ngày thì cả hai đội làm được $\dfrac{2}{5}$ công việc. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi đội làm xong công việc đó trong bao lâu?

Lời giải.

Gọi thời gian lần lượt để đội I và đội II làm một mình hoàn thành công việc là x và y (đơn vị: ngày; điều kiện: $x, y \in \mathbb{N}^*$).

Khi đó mỗi ngày đội I và đội II làm một mình lần lượt hoàn thành $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{y}$ công việc.

Do hai đội công nhân cùng làm chung một công việc thì sau 12 ngày hoàn thành nên

$$\frac{12}{x} + \frac{12}{y} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}. \qquad (1)$$

Lại có đội I làm một mình trong 4 ngày rồi nghỉ, đội II làm tiếp trong 6 ngày thì cả hai đội làm được $\frac{2}{5}$ công việc nên

$$\frac{4}{x}+\frac{6}{y}=\frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=\frac{1}{5}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}\\ \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=\frac{1}{5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{2}{x}+\frac{2}{y}=\frac{1}{6}\\ \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=\frac{1}{5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}\\ \frac{1}{y}=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{y}=\frac{1}{30}\\ \frac{1}{x}=\frac{1}{20}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=20\\ y=30\end{cases} \text{(thỏa mãn).}$$

Vậy thời gian lần lượt để đội I và đội II làm một mình hoàn thành công việc là 20 ngày và 30 ngày. □

Bài 4. Cho parabol $(P)\colon y=ax^2$ và đường thẳng $(d)\colon y=x+3$.

a) Tìm a biết (P) và (d) có điểm chung A có hoành độ là -1. Với a vừa tìm được, vẽ (P) trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

b) Tìm giao điểm A, B của (P) và (d) bằng phép toán.

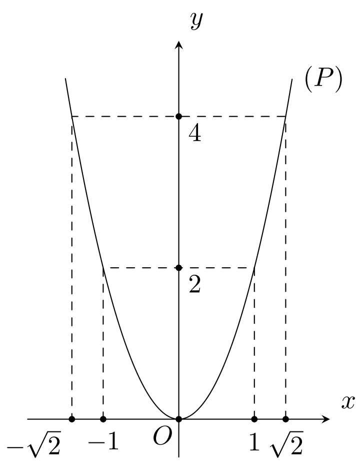
Lời giải.

a)

Do $A\in d$ và $x_A=-1$ nên $y_A=-1+3=2$.
Lại có $A\in(P)$ nên $y_A=a\cdot x_A^2$, suy ra $a=2$.
Với $a=2$ thì (P) là parabol hướng lên và đi qua các điểm thể hiện trong bảng sau

x	0	1	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
y	0	2	2	4	4

Do đó ta vẽ đồ thị (P) trên mặt phẳng tọa độ Oxy như hình bên.



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là

$$2x^2=x+3 \Leftrightarrow (x+1)(2x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=-1 & \Rightarrow y=2\\ x=\frac{3}{2} & \Rightarrow y=\frac{9}{2}.\end{array}\right.$$

Vậy giao điểm của (P) và (d) là $A(-1;2)$ và $B\left(\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right)$.

□

Bài 5. Cho đường tròn $(O;R)$ có đường kính AB. Vẽ đường tròn $(B;r)$ $\left(r < \dfrac{3}{5}R\right)$ cắt đường tròn $(O;R)$ tại C, D. Trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho EB cắt đoạn thẳng AD tại F và cắt $(O;R)$ tại M (M khác B).

a) Chứng minh rằng $EA \cdot EC = EB \cdot EM$.

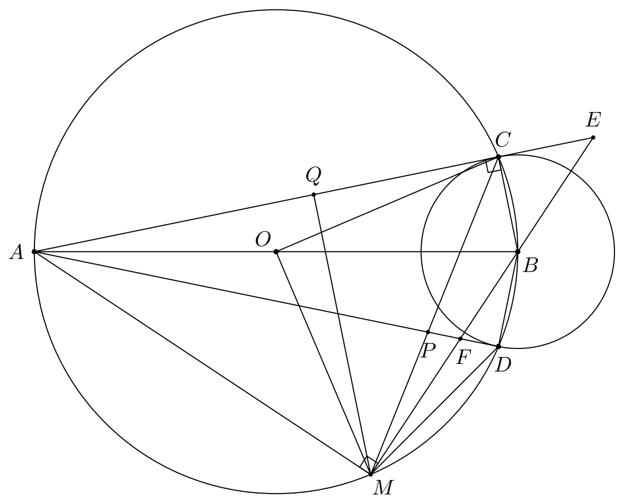
b) Gọi P là giao điểm của AD và MC. Chứng minh rằng MB là tia phân giác của $\widehat{DMC}$ và $FD \cdot AP = AD \cdot FP$.

c) Gọi Q là trung điểm của AE. Chứng minh rằng $\widehat{QMD} = \widehat{ADM}$.

d) Giả sử $BE = r\sqrt{2}$. Chứng minh rằng hai tam giác BCE và MOC đồng dạng và MQ đi qua điểm chính giữa của cung AB.

Lời giải.

a)



Do AB là đường kính của đường tròn (O) nên $\widehat{BCA} = \widehat{BMA} = 90^\circ$.
Kết hợp với $\widehat{E}$ chung ta được

$$\triangle ECB \backsim \triangle EMA \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{EC}{EB} = \frac{EM}{EA}.$$

Do đó $EA \cdot EC = EB \cdot EM$.

b) Do $BC = BD = r$ nên hai cung BC, BD bằng nhau. Do đó

$$\widehat{BMC} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{BC} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{BD} = \widehat{BMC}.$$

Vậy MB là phân giác của góc $\widehat{BMC}$.
Do $\widehat{AMF} = 90^\circ$ nên MA là phân giác ngoài của góc $\widehat{DMP}$.
Theo tính chất phân giác trong tam giác DMP có MF, MA lần lượt là phân giác trong và phân giác ngoài của góc $\widehat{M}$ ta có

$$\frac{FD}{FP} = \frac{MD}{MP} = \frac{AD}{AP} \Rightarrow FD \cdot AP = AD \cdot FP.$$

c) Tam giác AME vuông tại M có Q là trung điểm AE nên $QM = QE$.
Khi đó $\widehat{QME} = \widehat{QEM} = \widehat{QCM} - \widehat{CME} = \widehat{QCM} - \widehat{DMB}$.
Suy ra $\widehat{QCM} = \widehat{QME} + \widehat{DMB} = \widehat{QMD}$.
Mặt khác $\widehat{ACM} = \widehat{ADM}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AM) nên $\widehat{QMD} = \widehat{ACM}$.

d) Tam giác BCE vuông tại C nên $CE = \sqrt{BE^2 - CB^2} = \sqrt{2r^2 - r^2} = r = BC$.
Suy ra tam giác BCE vuông cân tại C nên $\widehat{BEC} = 45^\circ$.
Mặt khác tam giác AME vuông tại M nên $\widehat{MAE} = 90^\circ - \widehat{MEA} = 45^\circ$.
Do đó $\widehat{MOC} = 2\widehat{MAC} = 90^\circ$.
Từ đó hai tam giác MOC và BCE lần lượt vuông cân tại O và C nên $\triangle BCE \backsim \triangle MOC$.
Lại có $QM = QE$ nên $\widehat{QME} = \widehat{QEM} = 45^\circ$.
Do đó MQ là phân giác $\widehat{AMB}$ nên MQ đi qua điểm chính giữa của cung AB.

$\square$

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ II - Năm học: 2015-2016

Môn: Toán 9 - Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} \dfrac{x+2y+3}{3} - \dfrac{y+2x+4}{2} = 7 \\ \dfrac{x-2y-3}{3} + \dfrac{y-2x-4}{2} = 5. \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{2}{3\sqrt{y-1}} = 3 \\ \dfrac{9}{2\sqrt{x}} - \dfrac{5}{3\sqrt{y-1}} = 4. \end{cases}$

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \dfrac{x+2y+3}{3} - \dfrac{y+2x+4}{2} = 7 \\ \dfrac{x-2y-3}{3} + \dfrac{y-2x-4}{2} = 5 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{2y}{3} + 1 - \dfrac{y}{2} - x - 2 = 7 \\ \dfrac{x}{3} - \dfrac{2y}{3} - 1 + \dfrac{y}{2} - x - 2 = 5 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \dfrac{-2x}{3} + \dfrac{y}{6} = 8 \\ \dfrac{-2x}{3} + \dfrac{-y}{6} = 8 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -4x + y = 48 \\ -4x - y = 48 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -8x = 96 \\ -4x + y = 48 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = -12 \\ y = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (-12; 0)$.

b)
- Điều kiện $x > 0$; $y > 1$.
- Đặt $\begin{cases} a = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \\ b = \dfrac{1}{3\sqrt{y-1}} > 0 \end{cases}$. Khi đó ta có

$$\begin{cases} a + 2b = 3 \\ 9a - 5b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \ \text{(thoả mãn)} \\ b = 1 \ \text{(thoả mãn)}. \end{cases}$$

- Thay $a = b = 1$ vào $\begin{cases} a = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ b = \dfrac{1}{3\sqrt{y-1}} \end{cases}$ ta được

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 1 \\ \dfrac{1}{3\sqrt{y-1}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \dfrac{1}{2} \\ \sqrt{y-1} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{4} \text{ (thoả mãn)} \\ y = \dfrac{10}{9} \text{ (thoả mãn)}. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{10}{9}\right)$.

□

Bài 2. Hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể cạn (không có nước) thì sau $9\dfrac{3}{5}$ giờ đầy bể. Nếu lúc đầu chỉ mở vòi I và 18 giờ sau mới mở thêm vòi II thì sau $\dfrac{12}{5}$ giờ nữa mới đầy bể. Hỏi nếu ngay từ đầu chỉ mở vòi II thì bao lâu mới đầy bể?

Lời giải.

Gọi thời gian vòi thứ I chảy một mình đầy bể là x giờ $(x > 0)$.

Gọi thời gian vòi thứ II chảy một mình đầy bể là y giờ $(y > 0)$.

$\Rightarrow$ 1 giờ vòi thứ I chảy được $\dfrac{1}{x}$ bể.

1 giờ vòi thứ II chảy được $\dfrac{1}{y}$ bể.

Vì nếu hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể cạn (không có nước) thì sau $9\dfrac{3}{5}$ giờ đầy bể nên ta có phương trình

$$9\frac{3}{5}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{48}. \qquad (1)$$

Vì nếu lúc đầu chỉ mở vòi I và 18 giờ sau mới mở thêm vòi II thì sau $\dfrac{12}{5}$ giờ nữa mới đầy bể nên ta có phương trình

$$18 \cdot \frac{1}{x} + \frac{12}{5}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{102}{5} \cdot \frac{1}{x} + \frac{12}{5} \cdot \frac{1}{y} = 1. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{48} \\ \dfrac{102}{5} \cdot \dfrac{1}{x} + \dfrac{12}{5} \cdot \dfrac{1}{y} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{24} \\ \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 16. \end{cases}$$

Vậy nếu ban đầu chỉ mở vòi thứ II thì sau 16 giờ đầy bể. □

Bài 3. Cho parabol $(P): y = ax^2$ đi qua điểm $A(-2; 2)$.

a) Xác định a và vẽ (P).

b) Tìm giao điểm của (P) và đường thẳng $(d) : y = \frac{5}{2}x - 2$ bằng phép toán.

Lời giải.

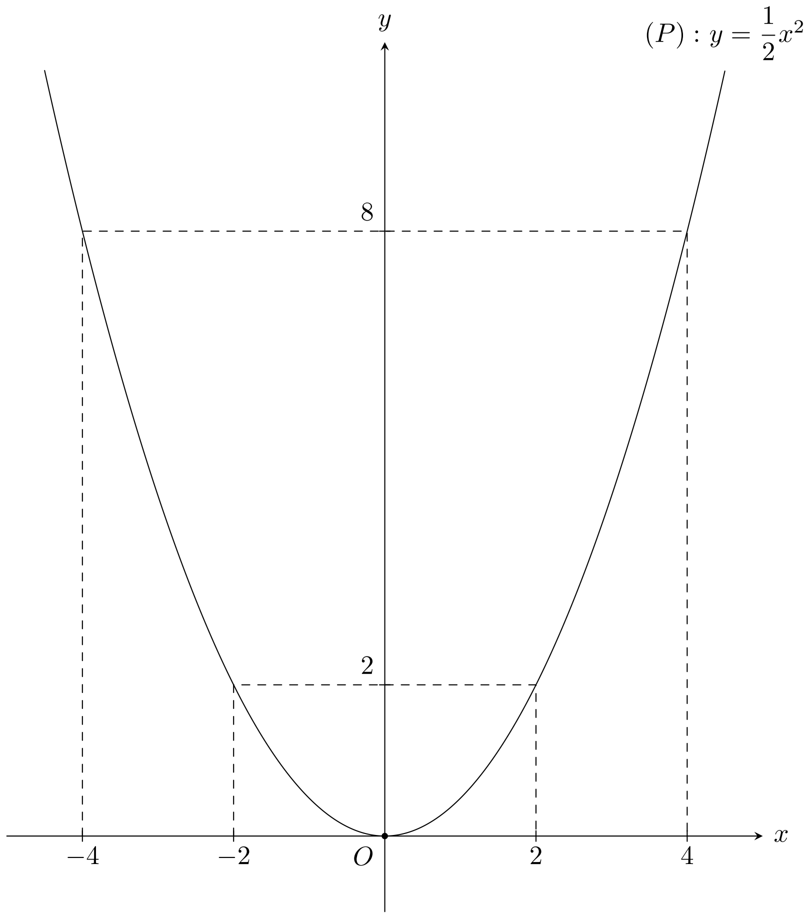
a)
- Vì (P) đi qua A nên ta có

$$2 = a \cdot (-2)^2 \Leftrightarrow 4a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

  $\Rightarrow (P) : y = \frac{1}{2}x^2$.
- Bảng giá trị

x	-4	-2	0	2	4
y	8	2	0	2	8

- Nhận xét: Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ là một Parabol đi qua gốc toạ dộ và các điểm $(-4; 8)$; $(-2; 2)$; $(2; 2)$; $(4; 8)$.



b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) ta có

$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{5}{2}x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \\ x = 4 \Rightarrow y = 8. \end{array}\right.$$

Vậy (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm $\left(1; \frac{1}{2}\right)$ và $(4; 8)$.

□

Bài 4. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ cắt nhau ở A và B $(R > r)$. Vẽ tiếp tuyến chung CD của (O) và (O') (C thuộc (O), D thuộc (O')). Gọi K là giao điểm của AB và CD.

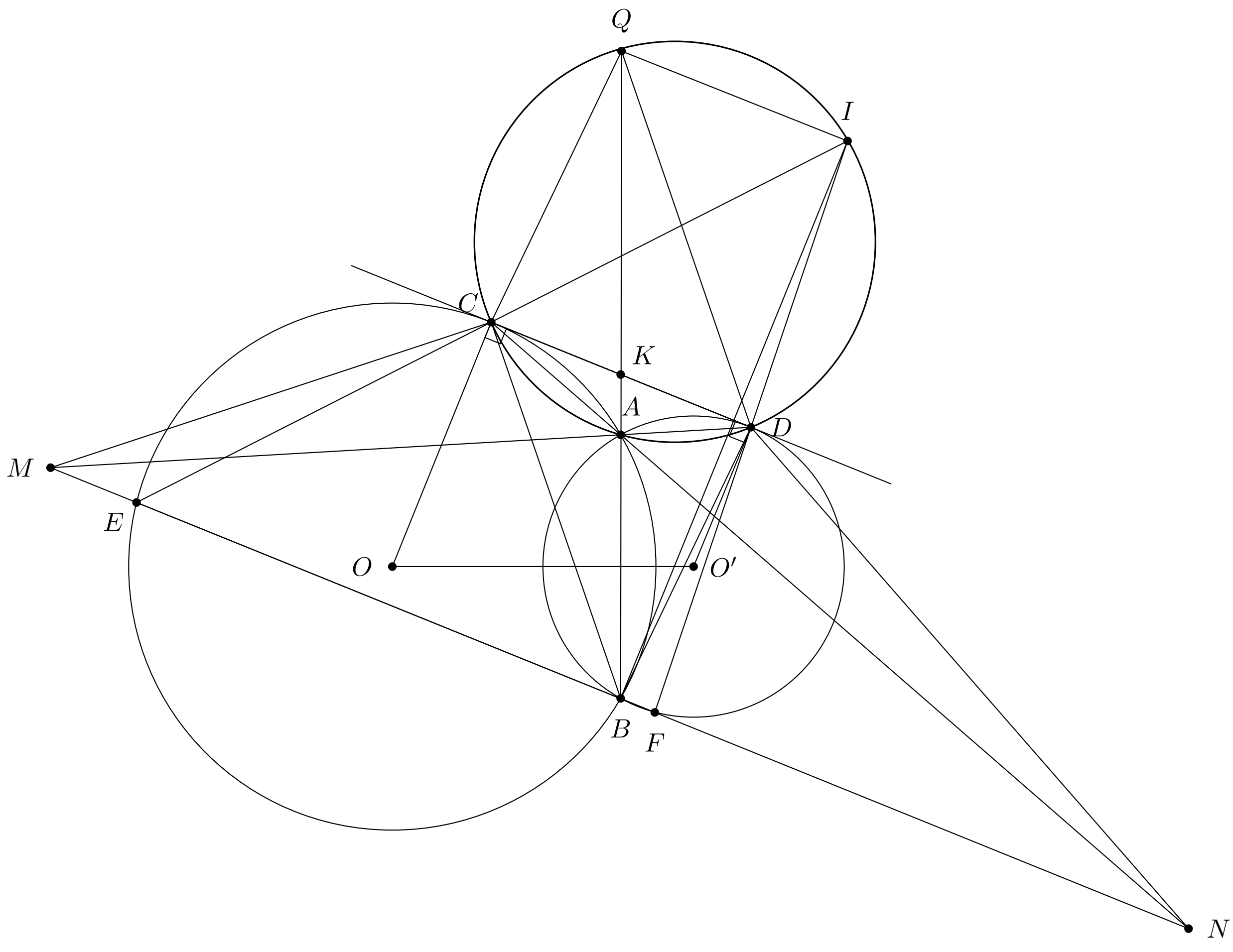
a) Chứng minh $KC^2 = KA \cdot KB$.

b) Vẽ hình bình hành $CBDQ$. Chứng minh ba điểm A; K; Q thẳng hàng.

c) Đường thẳng d đi qua B song song với CD và d cắt (O); (O') lần lượt tại E; F (E thuộc (O); F thuộc (O'); E và F khác B). Gọi I là giao điểm của EC và FD. Chứng minh $IC = CB$.

d) Gọi M; N theo thứ tự là giao điểm của DA; CA với EF. Chứng minh IB là đường trung trực của đoạn thẳng MN.

Lời giải.



a) Xét $\triangle KCA$ và $\triangle KBC$ ta có

- $\widehat{K}$ chung.
- $\widehat{KCA} = \widehat{KBC}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây và góc nội tiếp cùng chắn cung AC).

$\Rightarrow \triangle KCA \backsim \triangle KBC$ (g-g).
$\Rightarrow \dfrac{KC}{KB} = \dfrac{KA}{KC}$.
$\Rightarrow KC^2 = KA \cdot KB$.

b) Ta dễ ràng chứng minh được $KD^2 = KA \cdot KB$.

Từ đó ta sẽ suy ra $KC = KD$.

$\Rightarrow K$ là trung điểm của CD.

Xét hình bình hành $CBDQ$ có K là trung điểm của đường chéo CD.

$\Rightarrow K$ là trung điểm của BQ.

$\Rightarrow A$; K; Q thẳng hàng.

c) Vì $CBDQ$ là hình bình hành nên $\begin{cases} BC = DQ \\ \widehat{CQB} = \widehat{DBQ}. \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{CQA} = \widehat{ABD}$.

Xét đường tròn (O') có $\widehat{ABD} = \widehat{CDA}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cùng chắn cung AD).

$\Rightarrow \widehat{CQA} = \widehat{CDA}$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $CQDA$ nội tiếp.

Chứng minh tương tự ta có tứ giác $CIDA$ nội tiếp.

$\Rightarrow C$; Q; I; D; A cùng thuộc một đường tròn.

Ta chứng minh được $CQID$ là hình thang cân.

$\Rightarrow CI = QD$.

Mà $QD = CB$.

$\Rightarrow CI = CB$.

d) Vì $CD \parallel EF$.

$\Rightarrow CD \parallel MN$.

Vì $CK \parallel BF \Rightarrow \triangle AKM \backsim \triangle ABN$.
$\Rightarrow \dfrac{CK}{BN} = \dfrac{AK}{AB}$.
Chứng minh tương tự ta được $\dfrac{KD}{BM} = \dfrac{AK}{AB}$.
Do đó ta có $\dfrac{CK}{BN} = \dfrac{KD}{BM}$.
Mà $CK = KD$ nên $BM = BN$. Vì $CBDQ$là hình bình hành nên $\widehat{DCB} = \widehat{CDQ}$.
Mà $\widehat{CDQ} = \widehat{ICD}$ ($CQID$ là hình thang cân).
$\Rightarrow \widehat{DCB} = \widehat{DCI}$.
$\Rightarrow CD$ là phân giác $\widehat{BCI}$.
Xét $\triangle CBI$ cân tại C có CD là phân giác $\widehat{BCI}$.
$\Rightarrow CD$ đồng thời là đường cao.

$\Rightarrow CD \perp BI$.

Ta có $\begin{cases} CD \parallel MN \\ BI \perp CD \end{cases} \Rightarrow BI \perp MN$ (từ vuông góc đến song song).

$\Rightarrow BI$ là đường trung trực của MN.

$\square$

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ II - Năm học: 2016-2017

Môn: Toán 9 - Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} x+3y+30=2x-3y \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=5. \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{3}{x-2}-5y^2=-23 \\ \dfrac{-2}{x-2}+y^2=6. \end{cases}$

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{cases} x+3y+30=2x-3y \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=5 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+6y=-30 \\ 2x-3y=30 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+6y=-30 \\ 4x-6y=60 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x=30 \\ 2x-3y=30 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=\dfrac{-10}{3}. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(10;\dfrac{-10}{3}\right)$.

b) Ta có

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x-2}-5y^2=-23 \\ \dfrac{-2}{x-2}+y^2=6 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6}{x-2}-10y^2=-46 \\ \dfrac{-6}{x-2}+3y^2=18 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7y^2=28 \\ \dfrac{-2}{x-2}+y^2=6 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2=4 \\ \dfrac{-2}{x-2}+y^2=6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=-2 \\ y=2 \end{array}\right. \\ \dfrac{-2}{x-2}+y^2=6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=-2 \\ y=2 \end{array}\right. \\ x=1. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(1;-2)$ và $(1;2)$.

□

Bài 2. Giải toán bằng cách lập hệ phương trình
Một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 20 m. Nếu tăng chiều dài thêm 10% và giảm chiều rộng đi 20% thì chu vi mảnh vườn không đổi. Tính diện tích mảnh vườn đó.

Lời giải.

Gọi chiều dài của mảnh vườn là x m $(x>0)$.

Gọi chiều rộng của mảnh vườn là y m $(y>0)$.

Chu vi cuả mảnh vườn ban đầu là $2\,(x+y)$. (1)

Chiều dài của mảnh vườn sau khi tăng chiều dài thêm 10% là $x\,(1+10\%)=1{,}1x$.

Chiều rộng của mảnh vườn sau khi giảm chiều rộng đi 20% là $x\,(1-20\%)=0{,}8y$.

Chu vi của mảnh vườn sau khi tăng chiều dài thêm 10% và giảm chiều rộng đi 20% là $2\,(1{,}1x+0{,}8y)$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $x+y=1{,}1x+0{,}8y \Leftrightarrow 0{,}1x-0{,}2y=0 \Leftrightarrow x-2y=0$. (3)

Vì chiều dài hơn chiều rộng 20m nên ta có $x-y=20$. (4)

Từ (3) và (4) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x-2y=0 \\ x-y=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=40 \\ y=20. \end{cases}$$

Vậy diện tích của mảnh vườn đã cho là $x\cdot y=40\cdot 20=800$ m^2. □

Bài 3. Cho Parabol $(P): y=ax^2$ đi qua điểm $K(-2;4)$.

a) Tìm a và vẽ (P).

b) Tìm những điểm thuộc (P) có hoành độ gấp đôi tung độ.

Lời giải.

a) Vì (P) đi qua K nên ta có

$$4=a\cdot(-2)^2 \Rightarrow a=1.$$

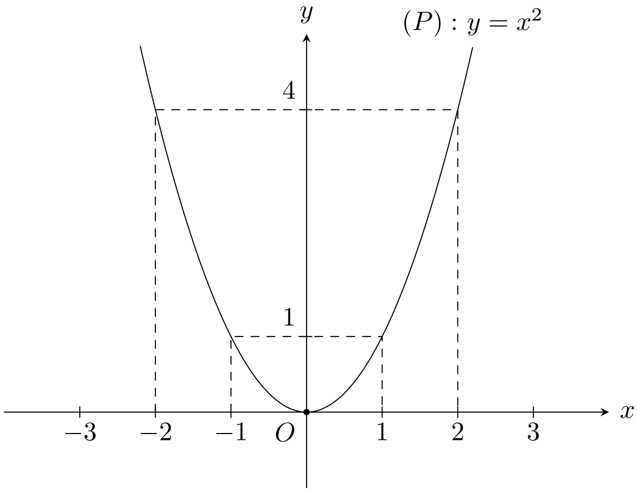
Vậy $(P): y = x^2$.

Vẽ Parabol $(P): y = x^2$.

- Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

- Nhận xét: Đồ thị hàm số $y = x^2$ là một Parabol đi qua gốc toạ độ và các điểm $(-2; 4)$; $(-1; 1)$; $(1; 1)$; $(2; 4)$.



b) Những điểm thuộc (P) có hoành độ gấp đôi tung độ thoả mãn phương trình

$$x = 2x^2 \Leftrightarrow x(2x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = \dfrac{1}{4}. \end{array}\right.$$

Vậy những điểm thuộc (P) có hoành độ gấp đôi tung độ là $(0; 0)$; $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}\right)$.

$\square$

Bài 4. Một hãng taxi tính giá cước như sau

- Giá mở cửa (1 km đầu) 16 000 đồng
- Giá kilomet tiếp theo (từ 1 km đến 30 km) 15 800 đồng/km
- Từ kilomet thứ 31 trở đi 12 500 đồng/km
- Phí thời gian chờ 3 000 đồng cho mỗi 5 phút.

Gia đình bạn An đi Bình Dương cách nhà 35 km bằng hãng taxi trên, trong suốt thời gian đi có 20 phút chờ (đèn đỏ, kẹt xe,...). Hỏi gia đình bạn An phải rả bao nhiêu tiền taxi?

Lời giải.

Số tiền taxi mà gia đình bạn An phải trả là

$$16\,000 + 30 \cdot 15\,800 + 5 \cdot 12\,500 + 20 \cdot 3\,000 = 612\,500 \text{ đồng.}$$

□

Bài 5. Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn tâm (O), có hai đường cao AD và BK cắt nhau tại H. Gọi E là giao điểm của AD và (O) $(E \neq A)$.

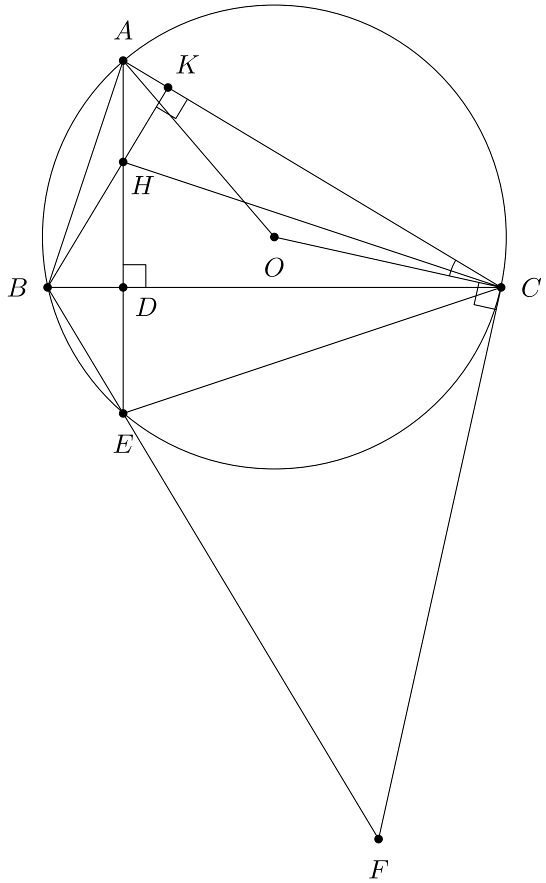
a) Chứng minh rằng H và E đối xứng nhau qua BC.

b) Gọi F là giao điểm của BE và tiếp tuyến vẽ từ C của (O). Chứng minh rằng $FC^2 = FE \cdot FB$.

c) Chứng minh rằng $\widehat{KCO} = \widehat{BCE}$.

d) Tìm điều kiện của tam giác ABC để $\widehat{BFC} = 90°$.

Lời giải.



a) Xét đường tròn tâm (O) có $\widehat{BEA} = \widehat{BCA}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AB).
$\Rightarrow \widehat{BED} = \widehat{DCK}$.
Dễ thấy tứ giác $DCKH$ nội tiếp nên $\widehat{DCK} = \widehat{BHD}$.
Do đó ta có $\widehat{BHD} = \widehat{BED} \Rightarrow \widehat{DBH} = \widehat{DBE}$.
Từ đó ta dễ ràng chứng minh được $\triangle DBH = \triangle DBE$ (cạnh góc vuông - góc nhọn kề).

$\Rightarrow DH = DE$ (hai cạnh tương ứng).

$\Rightarrow H$ và E đối cứng với nhau qua BC.

b) Xét $\triangle FEC$ và $\triangle FCB$ có

- $\widehat{F}$ chung.
- $\widehat{FCE} = \widehat{FBC}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây và góc nội tiếp cùng chắn cung EC).

$\Rightarrow \triangle FEC \backsim \triangle FCB$ (g-g).
$\Rightarrow \dfrac{FE}{FC} = \dfrac{FC}{FB}$.
$\Rightarrow FC^2 = FE \cdot FB$.

c)
- Xét đường tròn (O) ta có $\widehat{AEC} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOC}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung AC).
  $\Rightarrow \widehat{DEC} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOC}$. (1)
- Vì $\triangle OAC$ cân tại O nên ta có $\widehat{AOC} = 180^\circ - 2\widehat{ACO}$. (2)
- Do $\triangle DEC$ vuông nên ta có $\widehat{DEC} = 90^\circ - \widehat{DCE}$. (3)

Từ (1); (2) và (3) ta có

$$90^\circ - \widehat{DCE} = \frac{1}{2}\left(180^\circ - 2\widehat{ACO}\right) \Rightarrow \widehat{DCE} = \widehat{ACO} \Rightarrow \widehat{BCE} = \widehat{KCO}.$$

d) Để $\widehat{BCF} = 90^\circ$ thì $\widehat{BCF} = \widehat{OCF}$.

$\Rightarrow BC$ là đây đường kính.

$\Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ$.

$\Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại A.

$\square$

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ II - Năm học: 2017-2018

Môn: Toán 9 - Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} 9x - 6y = 7 \\ 15x - 5y = \dfrac{40}{3}. \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{x-2}} + \dfrac{7}{\sqrt{y+1}} = 9 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x-2}} + \dfrac{8}{\sqrt{y+1}} = 9. \end{cases}$

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{cases} 9x - 6y = 7 \\ 15x - 5y = \dfrac{40}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 45x - 30y = 35 \\ 45x - 15y = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -15y = -5 \\ 45x - 30y = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(1; \dfrac{1}{3}\right)$.

b)
- Điều kiện $\begin{cases} x > 2 \\ y > -1. \end{cases}$
- Đặt $\begin{cases} a = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}} > 0 \\ b = \dfrac{1}{\sqrt{y+1}} > 0 \end{cases}$. Khi đó ta có

$$\begin{cases} 2a + 7b = 9 \\ a + 8b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 7b = 9 \\ 2a + 16b = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \ \text{(thoả mãn)} \\ b = 1 \ \text{(thoả mãn)}. \end{cases}$$

- Thay $a = b = 1$ vào $\begin{cases} a = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}} \\ b = \dfrac{1}{\sqrt{y+1}} \end{cases}$ ta được

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x-2}} = 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{y+1}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} = 1 \\ \sqrt{y+1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \\ y + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \ \text{(thoả mãn)} \\ y = 0 \ \text{(thoả mãn)}. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (3; 0)$.

□

Bài 2. Giải toán bằng cách lập hệ phương trình
Để hoàn thành một công việc, nếu hai tổ cùng làm chung thì hết 6 giờ. Nhưng sau 4 giờ làm chung thì tổ hai được điều đi làm việc khác, tổ một tiếp tục làm và đã hoàn thành công việc còn lại trong 5 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi tổ sẽ hoàn thành công việc này trong thời gian bao lâu?

Lời giải.

Gọi thời gian đội thứ nhất làm một mình xong công việc là x giờ ($x > 0$).
Gọi thời gian đội thứ hai làm một mình xong công việc là y giờ ($y > 0$).
$\Rightarrow$ 1 giờ đội thứ nhất làm được $\dfrac{1}{x}$ công việc.
1 giờ đội thứ hai làm được $\dfrac{1}{y}$ công việc.
Vì nếu hai tổ cùng làm chung thì hết 6 giờ nên ta có phương trình

$$6 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}. \quad (1)$$

Vì sau 4 giờ làm chung thì tổ hai được điều đi làm việc khác, tổ một tiếp tục làm và đã hoàn thành công việc còn lại trong 5 giờ nên ta có phương trình

$$4 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + 5 \cdot \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow \frac{9}{x} + \frac{4}{y} = 1. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{9}{x} + \dfrac{4}{y} = 1. \end{cases}$
Giải hệ phương trình trên ta được $x = 15$; $y = 10$.
Vậy nếu làm riêng thì thời gian đội thứ nhất và đội thứ hai làm một mình xong công việc lần lượt là 15 giờ và 10 giờ. □

Bài 3. Cho Parabol $(P): y = ax^2$ đi qua $A(-2; -1)$.

a) Tìm a và vẽ Prabol (P).

b) Cho đường thẳng $(d): y = x - \dfrac{5}{4}$. Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép toán.

Lời giải.

a) Vì (P) đi qua $A(-2; -1)$ nên ta có

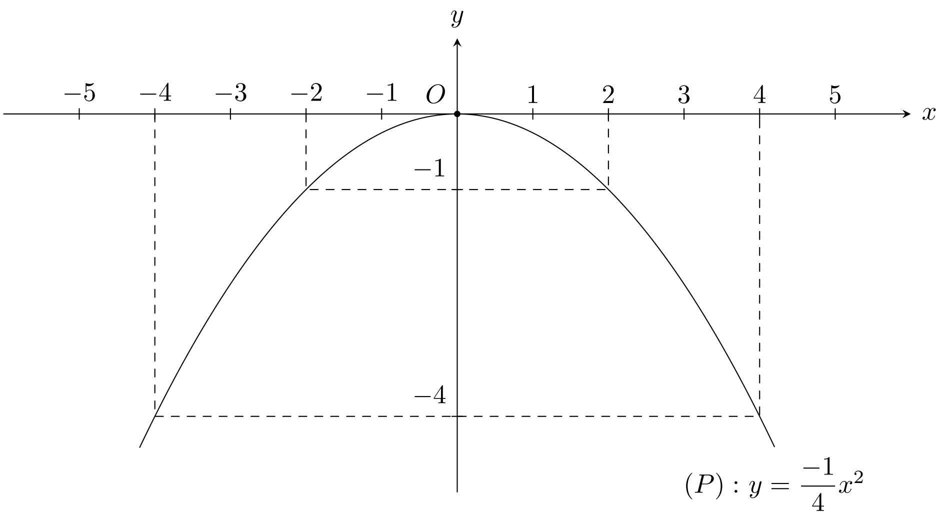
$$-1 = a \cdot (-2)^2 \Leftrightarrow 4a = -1 \Leftrightarrow a = \frac{-1}{4}.$$

Vậy $(P): y = \dfrac{-1}{4}x^2$.
Vẽ Prabol $(P): y = \dfrac{-1}{4}x^2$.

- Bảng giá trị

x	-4	-2	0	2	4
y	-4	-1	0	-1	-4

- Nhận xét: Đồ thị hàm số đã cho là một Parabol đi qua gốc toạ độ và các điểm



□

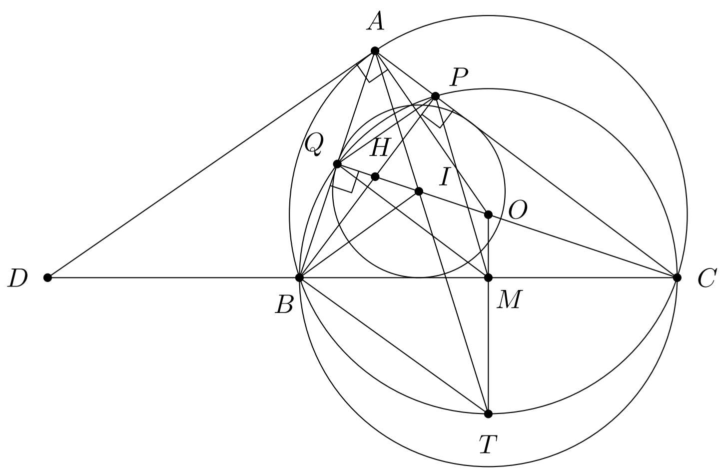
Bài 4. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp $(O; R)$. Tiếp tuyến tại A của $(O; R)$ cắt đường thẳng BC tại D.

a) Chứng minh rằng $AD^2 = BD \cdot DC$.

b) Gọi T là điểm chính giữa cung nhỏ BC. Trên đoạn AT lấy điểm I sao cho $TB = TI$. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

c) Gọi BP; CQ là hai đường cao của tam giác ABC và M là trung điểm của BC. Cho $OM = \dfrac{R}{2}$. Chứng minh rằng tam giác MPQ đều.

Lời giải.



a) Xét $\triangle DAB$ và $\triangle DCA$ có

- $\widehat{D}$ chung.
- $\widehat{DAB} = \widehat{DCA}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cùng chắn cung AB).

$\Rightarrow \triangle DAB \backsim \triangle DCA$ (g-g).
$\Rightarrow \dfrac{DA}{DC} = \dfrac{DB}{DA}$.
$\Rightarrow DA^2 = DB \cdot DC$.

b) Vì T là điểm chính giữa cung BC nên sđ $\overset{\frown}{BT}$ = sđ $\overset{\frown}{TC}$.
$\Rightarrow \widehat{BAT} = \widehat{TAC}$.
$\Rightarrow AT$ là phân giác của $\widehat{BAC}$. (1)
Ta có

- $\widehat{BIT} = \widehat{BAT} + \widehat{ABI}$ (tính chất góc ngoài của tam giác).
- $\widehat{IBT} = \widehat{IBC} + \widehat{CBT} = \widehat{IBC} + \widehat{TAC}$.

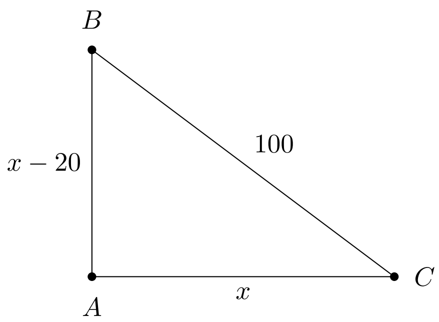
Mà $\widehat{CAT} = \widehat{BAT}$; $\widehat{IBT} = \widehat{BIT}$.
$\Rightarrow \widehat{ABI} = \widehat{IBC}$ (do $\triangle TBI$ cân tại T).
$\Rightarrow BI$ là phân giác góc ABC. (2).
Từ (1) và (2) suy ra I là giao của ba đường phân giác trong $\triangle ABC$.
$\Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

c) Gọi H là trực tâm ABC. Hiển nhiên ta có B; C; P; Q thuộc đường tròn đường kính BC nên $MP = MQ$.
$\Rightarrow \triangle MPQ$ cân.
Do $OM = \dfrac{R}{2}$ nên tỉ số lượng giác tính được $\widehat{BOC} = 120^\circ$.
$\Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ$.
$\Rightarrow \widehat{BHC} = 120^\circ$ (bù với $\widehat{BAC}$).
Ta có $\widehat{BHC} = \dfrac{1}{2}\left(\text{sđ } \overset{\frown}{BC} + \text{sđ } \overset{\frown}{PQ}\right) = 90^\circ + \dfrac{1}{2}\text{sđ } \overset{\frown}{PQ}$.
$\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{PQ} = 60^\circ$.
$\Rightarrow \widehat{PMQ} = 60^\circ$.
$\Rightarrow \triangle MPQ$ là $\triangle$ đều.

$\square$

Bài 5.

Hai xe ô tô khởi hành cùng một lúc từ thành phố A theo hai hướng AB và AC vuông góc nhau (như hình vẽ), biết $BC = 100$ km, $AB = x - 20$ km và $AC = x$ km. Biết rằng mức tiêu thụ xăng bình quân của mỗi xe là $7,8$ lít/ 100 km và giá mỗi lít xăng là 20 950 đồng. Hỏi mỗi xe phải trả bao nhiêu tiền xăng cho quãng đường đã đi AB và AC?



Lời giải.

Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác ABC vuông tại A ta có

$$\begin{aligned} & BC^2 = AB^2 + AC^2 \\ \Rightarrow\ & x^2 + (x-20)^2 = 10\,000 \\ \Rightarrow\ & x^2 - 20x - 300 = 0 \\ \Rightarrow\ & (x+10)(x-30) = 0 \\ \Rightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -10 \ \text{(loại)} \\ x = 30 \ \big(\text{thoả mãn}\big). \end{array}\right. \end{aligned}$$

Từ đó ta có $AB = 10$ km; $AC = 30$ km.

Số lít xăng mà mỗi xe tiêu thụ khi đi 1 km là

$$7{,}8 : 100 = 0{,}078 \text{ lít}.$$

Số tiền xe phải trả khi đi quãng đường AB là

$$10 \cdot 0{,}078 \cdot 20\,950 = 16\,341 \text{ đồng}.$$

Số tiền xe phải trả khi đi quãng đường AC là

$$30 \cdot 0{,}078 \cdot 20\,950 = 49\,023 \text{ đồng}.$$

□

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ II - Năm học: 2018-2019

Môn: Toán 9 - Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 3{,}6x - 4{,}8y = 5{,}4 \\ 6{,}4x - 3{,}2y = 5{,}6 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 3\sqrt{x-2y} - \sqrt{y} = -1 \\ 2\sqrt{x-2y} - 3\sqrt{y} = -3. \end{cases}$

Lời giải.

a) $\begin{cases} 3{,}6x - 4{,}8y = 5{,}4 \\ 6{,}4x - 3{,}2y = 5{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 8y = 9 \\ 16x - 8y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x = 5 \\ y = \dfrac{6x-9}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{-3}{4}. \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y) = \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{-3}{4}\right)$.

b) Điều kiện xác định: $\begin{cases} x - 2y \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2y \\ y \geq 0. \end{cases}$

Đặt $A = \sqrt{x-2y}$ $(A \geq 0)$ và $B = \sqrt{y}$ $(B \geq 0)$ ta có hệ phương trình

$\begin{cases} 3A - B = -1 \\ 2A - 3B = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9A + 3B = 3 \\ 2A - 3B = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7A = 0 \\ B = \dfrac{2A+3}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \text{ (nhận)} \\ B = 1 \text{ (nhận)}. \end{cases}$

Suy ra ta có $\begin{cases} \sqrt{x-2y} = 0 \\ \sqrt{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ (nhận)} \\ y = 1 \text{ (nhận)}. \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y) = (2;1)$.

□

Bài 2. Giải toán bằng cách lập hệ phương trình:

Cho một bể nước có vòi I chảy nước vào được đặt trên cùng của bể còn vòi II chảy ra được đặt ở đáy bể. Biết nếu mở vòi I chảy trong 1 giờ rồi mở tiếp vòi II trong 4 giờ thì được $\dfrac{3}{5}$ bể; nếu mở vòi I chảy 3 giờ rồi mở tiếp vòi II trong 3 giờ thì được $\dfrac{9}{10}$ bể. Tính thời gian vòi I chảy một mình đầy bể cạn và vòi II chảy một mình hết bể nước đầy. (Giả sử lưu lượng nước chảy của mỗi vòi là không đổi tại các thời điểm được mở và ban đầu bể không có nước).

Lời giải.

Gọi x là số phần bể vòi I chảy vào được trong 1 giờ $(x > 0)$, y là số phần bể vòi II chảy ra được trong 1 giờ $(y > 0)$.

Vì mở vòi I chảy trong 1 giờ rồi mở tiếp vòi II trong 4 giờ thì được $\dfrac{3}{5}$ bể nên $5x - 4y = \dfrac{3}{5}$.

Vì mở vòi I chảy 3 giờ rồi mở tiếp vòi II trong 3 giờ thì được $\dfrac{9}{10}$ bể nên $6x - 3y = \dfrac{9}{10}$.

Ta giải hệ phương trình

$\begin{cases} 5x - 4y = \dfrac{3}{5} \\ 6x - 3y = \dfrac{9}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15x - 12y = \dfrac{9}{5} \\ 24x - 12y = \dfrac{36}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x = \dfrac{9}{5} \\ y = \dfrac{5x - \frac{3}{5}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{5} \text{ (nhận)} \\ y = \dfrac{1}{10} \text{ (nhận)}. \end{cases}$

Vậy thời gian vòi I chảy một mình đầy bể là 5 giờ và thời gian để vòi II chảy hết bể là 10 giờ.

□

Bài 3. Cho Parabol $(P) : y = ax^2$ đi qua $A(-2; -4)$.

a) Tìm a và vẽ (P).

b) Tìm những điểm trên (P) có hoành độ gấp 3 lần tung độ.

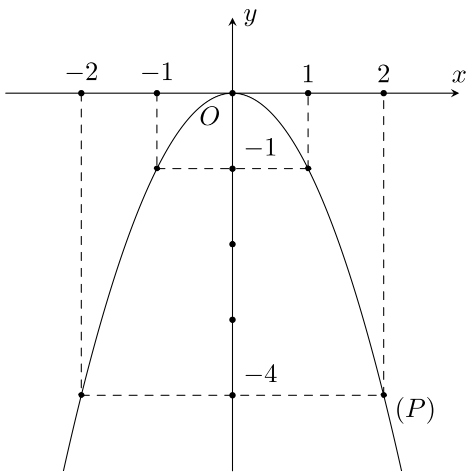
Lời giải.

a) Vì $A(-2; -4) \in (P)$ nên thay tọa độ A vào (P) ta được $-4 = a(-2)^2 \Leftrightarrow a = -1$.

Bảng giá trị của (P).

x	-2	-1	0	1	2
$y = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4

Vẽ (P).



b) Gọi những điểm trên (P) có hoành độ gấp 3 lần tung độ có dạng $(3b; b)$.

Thay tọa độ vào (P) ta được $b = -(3b)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = -\dfrac{1}{9}. \end{array}\right.$

Vậy điểm cần tìm là $(0; 0)$ hay $\left(-\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{9}\right)$.

□

Bài 4. Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O), có AD là đường cao. Tia AD cắt (O) tại T (T khác A). Vẽ đường kính AK của (O).

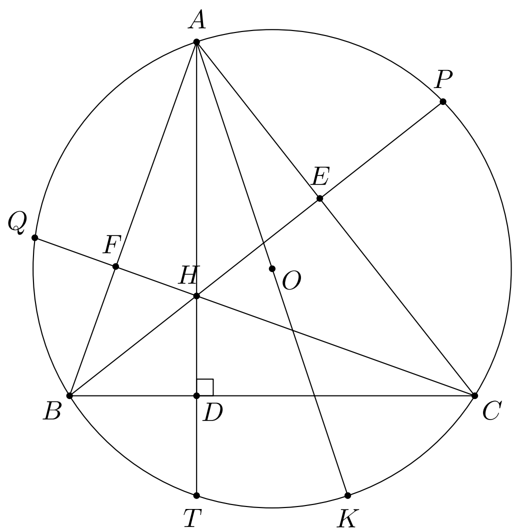
a) Chứng minh rằng: $DA \cdot DT = DB \cdot DC$ và $\widehat{TAB} = \widehat{KAC}$.

b) Gọi H là điểm đối xứng của T qua D. Chứng minh rằng: H là trực tâm của tam giác ABC.

c) Tia CH cắt AB, (O) lần lượt tại F, Q (Q khác C) và tia BH cắt AC, (O) lần lượt tại E, P (P khác B). Tính $\dfrac{DT}{DA} + \dfrac{EP}{EB} + \dfrac{FQ}{FC}$.

Lời giải.

a)



Xét $\triangle BDT$ và $\triangle ADC$ có
$$\begin{cases} \widehat{BDT} = \widehat{ADC} (= 90^\circ) \\ \widehat{DBT} = \widehat{DAC} \text{ (cùng chắn cung } TC) \end{cases}$$
Suy ra $\triangle BDT$ đồng dạng với $\triangle ADC$.
Vậy $\dfrac{DB}{DA} = \dfrac{DT}{DC}$ hay $DA \cdot DT = DB \cdot DC$.
Ta có
$$\begin{cases} \widehat{TAB} + \widehat{ABC} = 90^\circ \\ \widehat{KAC} + \widehat{AKC} = 90^\circ \\ \widehat{ABC} = \widehat{AKC} \text{ (cùng chắn cung } AC) \end{cases}$$
nên $\widehat{TAB} = \widehat{KAC}$.

b) Xét $\triangle BDT$ và $\triangle BDH$ có
$$\begin{cases} BD \text{ cạnh chung} \\ \widehat{BDT} = \widehat{BDH} \ (= 90^\circ) \\ DT = DH \end{cases}$$
Suy ra $\triangle BDT = \triangle BDH$ (c-g-c) suy ra $\widehat{DBT} = \widehat{DBH}$.

Mà $\widehat{DBT} = \widehat{TAC}$ nên $\widehat{DBH} = \widehat{DAC}$.

Lại có $\widehat{DAC} + \widehat{ACD} = 90^\circ$ nên $\widehat{DBH} + \widehat{ACD} = 90^\circ$.

Suy ra $BH \perp AC$ hay H là trực tâm tam giác ABC.

c) Xét $\triangle AEP$ và $\triangle AEH$ có
$$\begin{cases} \widehat{EAB} = \widehat{EAH} \ (= \widehat{CBP}) \\ AE \text{ cạnh chung} \\ \widehat{AEH} = \widehat{AEP} (= 90^\circ) \end{cases}$$
Suy ra $\triangle AEH = \triangle AEP$ (g-c-g) hay $EP = EH$.

Tương tự ta chứng minh được $FQ = FH$.

Ta có

$$\frac{DT}{DA} + \frac{EP}{EB} + \frac{FQ}{FC} = \frac{DH}{DA} + \frac{EH}{EB} + \frac{FH}{FC}$$

$$= \frac{S_{\triangle BHC}}{S_{\triangle ABC}} + \frac{S_{\triangle AHC}}{S_{\triangle ABC}} + \frac{S_{\triangle AHB}}{S_{\triangle ABC}}$$
$$= \frac{S_{\triangle BHC} + S_{\triangle AHC} + S_{\triangle AHB}}{S_{\triangle ABC}}$$
$$= \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABC}} = 1.$$

□

Bài 5. Ngày mùng một tết, mẹ lì xì cho Linh 450 000 đồng và Long 200 000 đồng. Tiền lì xì của Linh gồm hai loại tờ: 20 000 đồng và 50 000 đồng, tiền lì xì của Long gồm hai loại tờ: 10 000 đồng và 20 000 đồng. Biết số tờ loại 20 000 đồng của Linh bằng số tờ loại 10 000 đồng của Long, số tờ loại 50 000 đồng của Linh bằng số tờ loại 20 000 đồng của Long. Tìm số tờ tiền mỗi loại của mỗi bạn.

Lời giải.

Gọi số tờ 20 000 đồng, 50 000 đồng của Linh lần lượt là x và y với x, y là số nguyên dương.

Do số tiền của Linh và Long lần lượt là 450 000 đồng và 200 000 đồng nên ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 20x + 50y = 450 \\ 10x + 20y = 200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20x + 50y = 450 \\ 20x + 40y = 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10y = 50 \\ x = 20 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \text{ (nhận)} \\ y = 5 \text{ (nhận)} \end{cases}.$$
Vậy Linh có 10 tờ 20 000 đồng và 5 tờ 50 000 đồng, Long có 10 tờ 10 000 đồng và 5 tờ 20 000 đồng. □

2 ĐỀ HỌC KÌ 2

ĐỀ KIỂM TRA HỌC KÌ I - Năm học: 2012-2013

Môn: Toán 9 - Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1. Giải các phương trình và hệ phương trình sau

a) $5x^2 + 2x - 7 = 0$;

b) $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$;

c) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$;

d) $\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 3x - y = 5. \end{cases}$

Lời giải.

a) Ta có $a + b + c = 5 + 2 - 7 = 0$ suy ra phương trình $5x^2 + 2x - 7 = 0$ có hai nghiệm $x = 1; x = -\frac{7}{5}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{-\frac{7}{5}; 1\right\}$.

b) Ta có $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3}x - 2\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$.

c) Đặt $t = x^2$ $(t \geq 0)$.

Phương trình trở thành $t^2 - 8t - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 9 \text{ (nhận)} \end{array}\right. \Rightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 3. \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-3; 3\}$.

d) Ta có $\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 3x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 6y = 9 \\ 3x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7y = 14 \\ 3x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = 1. \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $S = \{(1; -2)\}$.

□

Bài 2. Cho phương trình $x^2 - 2x + m - 3 = 0$ (x là ẩn số). Định giá trị m để

a) Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2.

b) Biểu thức $A = x_1^2x_2^2 + x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

a) Phương trình $x^2 - 2x + m - 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 1 - (m + 3) \geq 0 \Leftrightarrow -m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -2.$$

b) Với $m \leq -2$ khi đó phương trình $x^2 - 2x + m - 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2.

Theo Vi-ét, ta có $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 2 \\ P = x_1x_2 = m - 3. \end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned} A &= x_1^2x_2^2 + x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 \\ &= (x_1x_2)^2 + (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 3x_1x_2 \\ &= (m - 3)^2 + 2^2 - 5(m - 3) \\ &= m^2 - 11m + 28 = \left(m - \frac{11}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \geq -\frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $-\dfrac{9}{4}$ khi $m - \dfrac{11}{2} = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{11}{2}$.

□

Bài 3.

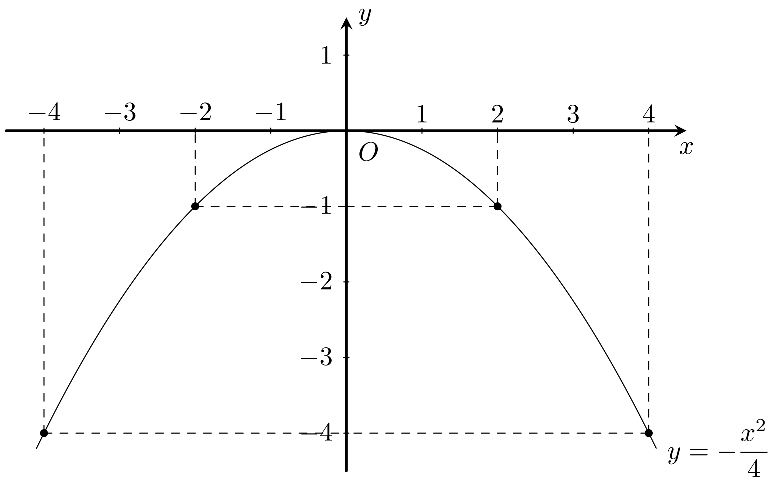
a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = -\dfrac{x^2}{4}$.

b) Tìm những điểm thuộc (P) có hoành độ bằng 2 lần tung độ.

Lời giải.

a) Bảng giá trị

x	-4	-2	0	2	4
$y = -\dfrac{x^2}{4}$	-4	-1	0	-1	-4



b) Gọi $M(x; y)$ là điểm cần tìm, theo đề bài, ta có $y = \dfrac{x}{2}$ nên $M\left(x; \dfrac{x}{2}\right)$.
Do M thuộc đồ thị hàm số nên thay tọa độ M vào hàm số, ta được

$$\frac{x}{2} = -\frac{x^2}{4} \Leftrightarrow x(x+2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = -2 \Rightarrow y = -1. \end{array}\right.$$

Vậy các điểm thỏa yêu cầu đề bài là $M_1(0; 0), M_2(-2; -1)$.

□

Bài 4. Cho tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

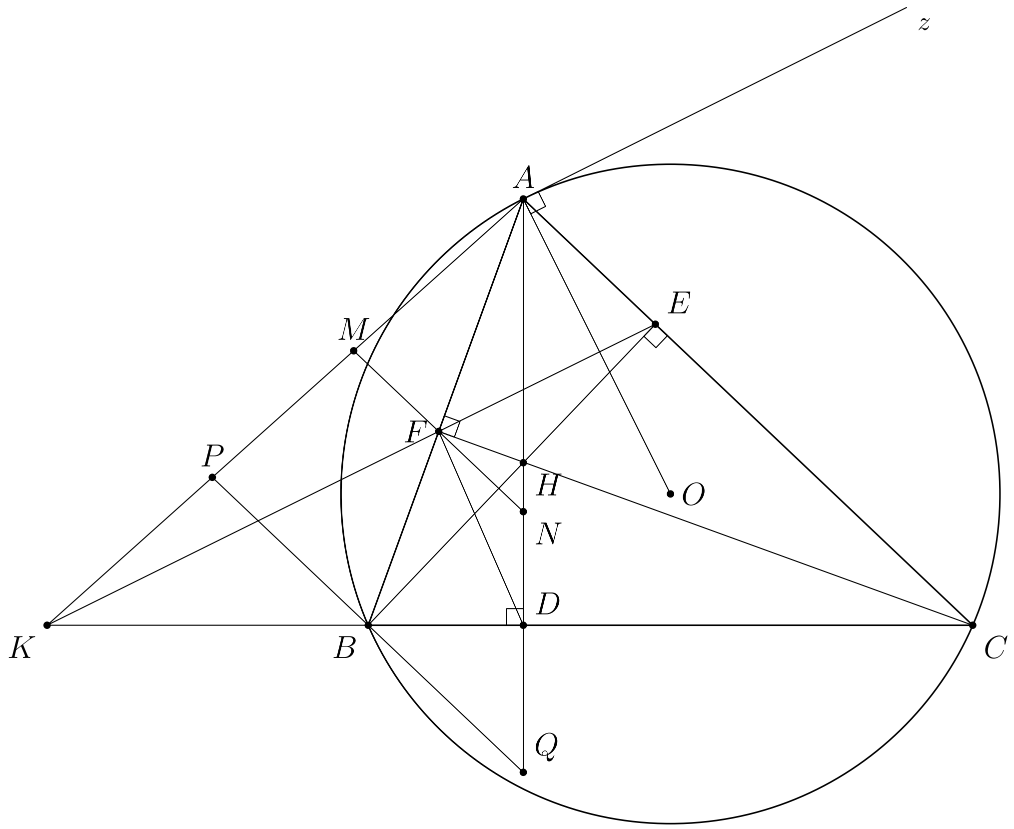
a) Chứng minh rằng $AE \cdot AC = AF \cdot AB$.

b) Chứng minh rằng các tứ giác $BFHD$, $ABDE$ nội tiếp.

c) Vẽ tia Ax là tiếp tuyến của đường tròn (O), tia Ax nằm trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm C. Chứng minh rằng $Ax \parallel EF$. Từ đó suy ra $OA \perp EF$.

d) Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC. Đường thẳng đi qua F song song với AC cắt AK, AD lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng $MF = NF$.

Lời giải.



a) Xét $\triangle AEH$ và $\triangle ADC$ có $\begin{cases} \widehat{AEH} = \widehat{ADC} = 90^\circ \\ \widehat{DAC} \text{ là góc chung} \end{cases}$

$\Rightarrow \triangle AEH \sim \triangle ADC$ (g.g) .

Suy ra $\dfrac{AE}{AH} = \dfrac{AD}{AC} \Rightarrow AE \cdot AC = AH \cdot AD$.

Một cách tương tự, ta cũng có được $\triangle AFH \sim \triangle ADB$ và $AF \cdot AB = AH \cdot AD$.

Do đó $AE \cdot AC = AF \cdot AB$ nên ta được điều cần chứng minh.

b) Xét tứ giác $BFHD$, ta có $\widehat{BFH} + \widehat{HDB} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên $BFHD$ là tứ giác nội tiếp.

Xét tứ giác $ABDE$, ta có $\widehat{ADB} = \widehat{AEB} = 90^\circ$ nên $ABDE$ là tứ giác nội tiếp (hai góc cùng chắn cung AB bằng nhau).

c) Từ kết quả chứng minh của câu a), ta suy ra $\dfrac{AF}{AC} = \dfrac{AE}{AB}$.

Do đó $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ trường hợp c.g.c ($\widehat{BAC}$ chung và $\dfrac{AF}{AC} = \dfrac{AE}{AB}$).

Tù đó suy ra $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$.

Mà $\widehat{ABC} = \widehat{CAz}$ (tính chất của góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung).

Do đó $\widehat{AEF} = \widehat{CAz}$ nên $EF \parallel Az$ (góc đồng vị).

Hơn nữa, do $OA \perp Az$ nên $EF \perp OA$.

Vậy ta được điều cần chứng minh.

d) Kẻ đường thẳng qua B song song với AC, cắt AK và AD lần lượt tại P và Q.
Ta có $\widehat{KFB} = \widehat{ACB} = \widehat{BFD} \Rightarrow FB$ là phân giác $\widehat{KFD}$ nên $\dfrac{FK}{FD} = \dfrac{KB}{BD}$ (1).
Do FC là phân giác ngoài của $\widehat{KFD}$ nên $\dfrac{FK}{FD} = \dfrac{CK}{CD}$ (2).
Từ (1) và (2), ta được $\dfrac{KB}{BD} = \dfrac{CK}{CD} \Rightarrow \dfrac{KB}{KC} = \dfrac{DB}{DC}$ (3).
Do $BP \parallel AC$ nên ta có $\dfrac{KB}{KC} = \dfrac{PB}{AC}$ (4) và $\dfrac{BQ}{AC} = \dfrac{DB}{DC}$ (5).
Từ (3), (4) và (5) ta được $\dfrac{PB}{AC} = \dfrac{BQ}{AC} \Rightarrow PB = BQ$.
Mà ta lại có $MN \parallel PQ \Rightarrow \dfrac{MF}{PB} = \dfrac{FN}{BQ} = \dfrac{AF}{AB}$.
Vậy $MF = FN$ nên ta có điều cần chứng minh.

$\square$

ĐỀ KIỂM TRA HỌC KÌ I - Năm học: 2013-2014

Môn: Toán 9 - Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1. Giải các phương trình và hệ phương trình sau

a) $14x^2 - 7x = 0$.

b) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$.

c) $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$.

d) $\begin{cases} 3x + 2y = -3 \\ 5x + 3y = 10. \end{cases}$

Lời giải.

a) $14x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow 7x(2x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{0; \dfrac{1}{2}\right\}$.

b) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2}x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

c) Đặt $t = x^2$ $(t \geq 0)$.

Phương trình trở thành

$$t^2 - 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(t-5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 5 \text{ (nhận)} \end{array}\right. \Rightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{5} \\ x = -\sqrt{5}. \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\sqrt{5}; -\sqrt{5}\right\}$.

d) Ta có $\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ 5x + 3y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x - 6y = -9 \\ 10x + 6y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ 10x + 6y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = -15. \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $S = \{(11; -15)\}$.

□

Bài 2. Cho phương trình $x^2 + (2m-1)x + m^2 = 0$ (x là ẩn số). Định giá trị m để

a) Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2. Tính $x_1 + x_2$ và x_1x_2 theo m.

b) Biểu thức $A = x_1^2 - (2m-1)x_2 + m^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

a) Phương trình $x^2 + (2m-1)x + m^2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (2m-1)^2 - 4m^2 \geq 0 \Leftrightarrow -4m+1 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{4}.$$

Theo định lí Vi-ét, ta có

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -2m+1 \\ P = x_1x_2 = m^2. \end{cases}$$

b) Với $m \leq \frac{1}{4}$, ta có $x_1^2 = -(2m-1)x_1 - m^2$. Khi đó

$$\begin{aligned} A &= -(2m-1)x_1 - m^2 - (2m-1)x_2 + m^2 \\ &= -(2m-1)(x_1+x_2) \\ &= -(2m-1)(-2m+1) \\ &= (1-2m)^2 \geq \frac{1}{4} \left(\text{với mọi } m \leq \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{1}{4}$ đạt được khi và chỉ khi $m = \frac{1}{4}$.

□

Bài 3.

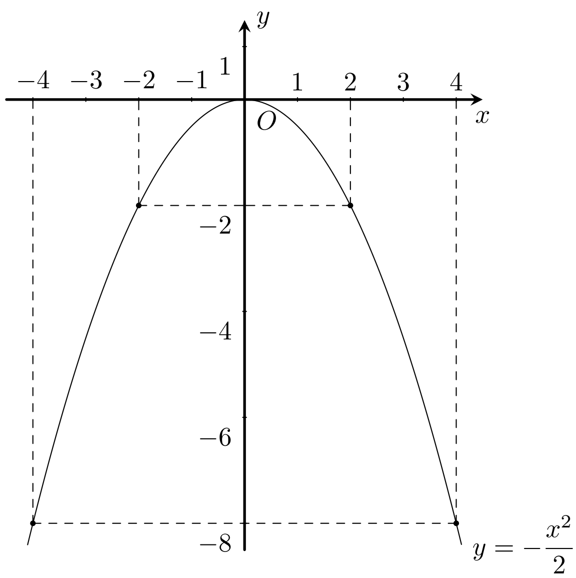
a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = -\frac{x^2}{2}$.

b) Tìm những điểm thuộc (P) có hoành độ bằng 2 lần tung độ.

Lời giải.

a) Bảng giá trị

x	-4	-2	0	2	4
$y = -\frac{x^2}{2}$	-8	-2	0	-2	-8



b) Gọi $M(x;y)$ là điểm cần tìm, theo đề bài, ta có $y=\dfrac{x}{2}$ nên $M\left(x;\dfrac{x}{2}\right)$.
Do M thuộc đồ thị hàm số nên thay tọa độ M vào hàm số, ta được

$$\frac{x}{2}=-\frac{x^2}{2}\Leftrightarrow x(x+1)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\Rightarrow y=0\\ x=-1\Rightarrow y=-\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Vậy các điểm thỏa yêu cầu đề bài là $M_1(0;0), M_2(-1;-\dfrac{1}{2})$.

□

Bài 4. Cho tam giác nhọn ABC $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$, các đường cao BD và CE cắt nhau tại H. AH cắt BC, DE lần lượt tại F và K.

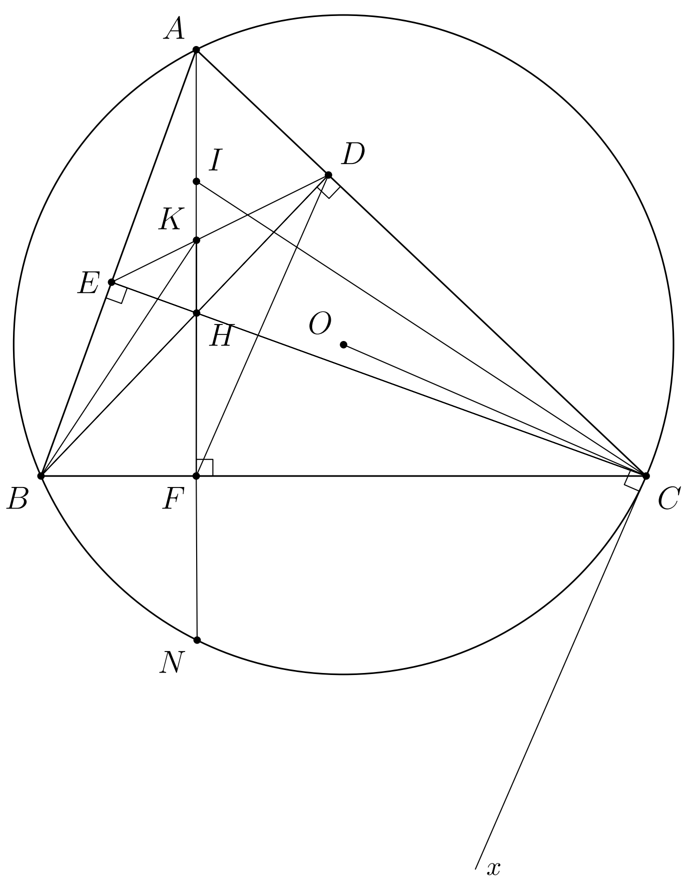
a) Chứng minh rằng tứ giác $ADHE$ nội tiếp và xác định tâm I của đường tròn này.

b) Vẽ tia Cx là tiếp tuyến của đường tròn (O), tia Cx nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC không có chứa điểm A. Chứng minh rằng tứ giác $ADFB$ nội tiếp và $Cx \parallel DF$.

c) Chứng minh DH là tia phân giác của góc EDF và $AF\cdot HK=AK\cdot HF$.

d) Chứng minh $\triangle FBK\sim\triangle FIC$, từ đó suy ra K là trực tâm tam giác BIC.

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{AEH} = \widehat{ADH} = 90^\circ$ suy ra $\widehat{AEH} + \widehat{ADC} = 180^\circ$. Vậy tứ giác $ADHE$ nội tiếp.
Gọi I là trung điểm của AH. Do DI là đường trung tuyến của tam giác vuông ADH nên $ID = IA = IH$. Tương tự ứng với tam giác vuông AEH ta được $ID = IA = IH$.
Khi đó $ID = IA = IH = IE$ nên I là tâm của của đường tròn đi qua 4 điểm A, D, H, E.

b) Chứng minh tứ giác $ADFB$ nội tiếp.
Ta có $\widehat{ADB} = \widehat{AFB} = 90^\circ$. Suy ra tứ giác $ADFB$ nội tiếp (cùng chắn cung AB).
Chứng minh $Cx \parallel DF$.
Ta có $\widehat{BCx} = \widehat{BAC}$ (cùng chắn cung BC) và $\widehat{BAC} = \widehat{DFC}$ (tứ giác $ADFB$ nội tiếp).
Suy ra $\widehat{BCx} = \widehat{DFC}$. Do đó $Cx \parallel DF$.

c) Chứng minh DH là tia phân giác của góc EDF.
Do tứ giác $ADHE$ nội tiếp nên $\widehat{EDH} = \widehat{EAH}$ (cùng chắn cung EH).
Ta lại có tứ giác $ADFB$ nội tiếp nên $\widehat{HDF} = \widehat{BAF}$ (cùng chắn cung BF).
Suy ra $\widehat{EDH} = \widehat{HDF}$ hay DH là tia phân giác của góc EDF.
Chứng minh $AF \cdot HK = AK \cdot HF$.
Ta có DH là tia phân giác của góc EDF nên $\dfrac{HK}{HF} = \dfrac{DK}{DF}$.
Mặt khác $DA \perp DH$ nên DH là đường phân giác ngoài của $\triangle KDF$
suy ra $\dfrac{AK}{AF} = \dfrac{DK}{DF}$. Do đó $\dfrac{HK}{HF} = \dfrac{AK}{AF} \Rightarrow AF \cdot HK = AK \cdot HF$.

d) Chứng minh $\triangle FBK \sim \triangle FIC$.
Ta có $AF \cdot HK = AK \cdot HF \Rightarrow (IA + IF)(IA - IK) = (IA + IK)(IF - IA)$
$\Rightarrow IA^2 = IK \cdot IF$. (1)
Gọi AH cắt (O) tại N. Khi đó $FB \cdot FC = FN \cdot FA = FA \cdot FH$.
Ta chứng minh $FA \cdot FH = FK \cdot FI$. Thật vậy,

$$\begin{aligned} & FA \cdot FH = FK \cdot FI \\ \Leftrightarrow\ & (IF + IA)(IF - IA) = IF(IF - IK) \\ \Leftrightarrow\ & IA^2 = IK \cdot IF. \end{aligned}$$

Từ (1) ta có điều cần chứng minh hay $FA \cdot FH = FK \cdot FI$.
Do đó $FB \cdot FC = FK \cdot FI \Rightarrow \dfrac{FB}{FI} = \dfrac{FK}{FC}$.
Ta lại có $\widehat{BFK} = \widehat{IFC} = 90^\circ$ nên $\triangle FBK \sim \triangle FIC$ (c.g.c).
Chứng minh K là trực tâm tam giác BIC.
Ta có $IK \perp BC$ nên ta cần chứng minh $BK \perp IC$ hay ta chứng minh $\widehat{BKF} + \widehat{KIC} = 90^\circ$.
Mà ta có $\widehat{KBF} = \widehat{KIC}$ ($\triangle FBK \sim \triangle FIC$) nên $\widehat{BKF} + \widehat{KIC} = \widehat{BKF} + \widehat{KBF} = 90^\circ$.
Vậy $BK \perp IC$. Suy ra K là trực tâm tam giác BIC.

□

ĐỀ KIỂM TRA HỌC KÌ II (Phòng GD - ĐT Q.1) - Năm học: 2014 - 2015

Môn: Toán 9 - Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1. Giải phương trình và các hệ phương trình sau

a) $3x^2 + 15 = 0$.

b) $x^2 - (2\sqrt{3} - 1)x - 2\sqrt{3} = 0$.

c) $3x^4 - 10x^2 - 8 = 0$.

d) $\begin{cases} 7x - 5y = 33 \\ 3x - 2y = 15. \end{cases}$

Lời giải.

a) Ta có $3x^2 + 15 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = -15 \Leftrightarrow x^2 = -5$ vô nghiệm vì $x^2 \geq 0$.
Vậy phương trình ban đầu vô nghiệm.

b) $x^2 - (2\sqrt{3} - 1)x - 2\sqrt{3} = 0$.
Ta có $a = 1$; $b = -(2\sqrt{3} - 1)$; $c = -2\sqrt{3}$
Vì $a - b + c = 1 + (2\sqrt{3} - 1) - 2\sqrt{3} = 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm là $x_1 = -1$; $x_2 = -\dfrac{c}{a} = 2\sqrt{3}$.
Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \left\{-1; 2\sqrt{3}\right\}$.

c) $3x^4 - 10x^2 - 8 = 0$
Đặt $t = x^2$ $(t \geq 0)$, khi đó phương trình trở thành $3t^2 - 10t - 8 = 0$.
Ta có $\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-8) = 196 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 14$.
Do đó, phương trình có 2 nghiệm là $t = 4$ (nhận); $t = -\dfrac{2}{3}$ (loại)
Với $t = 4$ thì $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.
Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{\pm 2\}$.

d) Ta có $\begin{cases} 7x - 5y = 33 \\ 3x - 2y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 21x - 15y = 99 \\ 21x - 14y = 105 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 \\ 3x - 2 \cdot 6 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 6. \end{cases}$
Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (9; 6)$.

□

Bài 2. Cho phương trình $x^2 + 3x + m - 1 = 0$ (x là ẩn số).

a) Định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2. Tính $x_1 + x_2$ và x_1x_2 theo m.

b) Định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1(x_1^4 - 1) + x_2(32x_2^4 - 1) = 3$.

Lời giải.

a) Ta có $x^2 + 3x + m - 1 = 0$.
Khi đó $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4(m-1) = -4m + 13$
Để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thì $-4m + 13 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \dfrac{13}{4}$.
Theo định lý Vi-ét, ta có $x_1 + x_2 = -3 \quad (1)$; $x_1 \cdot x_2 = m - 1 \quad (2)$

b) Ta có

$$\begin{aligned} x_1(x_1^4 - 1) + x_2(32x_2^4 - 1) = 3 &\Leftrightarrow x_1^5 - x_1 + 32x_2^5 - x_2 = 3 \\ &\Leftrightarrow x_1^5 + (2x_2)^5 - (x_1 + x_2) = 3 \\ &\Leftrightarrow x_1^5 + (2x_2)^5 + 3 = 3 \\ &\Leftrightarrow x_1^5 = -(2x_2)^5 \\ &\Leftrightarrow x_1 = -2x_2 \quad (3) \end{aligned}$$

Từ (1) và (3), ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \\ x_1 = -2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -6 \\ x_2 = 3 \end{cases}$ (4).

Thế (4) vào (3), ta được $m - 1 = -18 \Leftrightarrow m = -17$ (nhận).
Vậy $m = -17$ là giá trị cần tìm.

$\square$

Bài 3. a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = -\dfrac{x^2}{4}$.

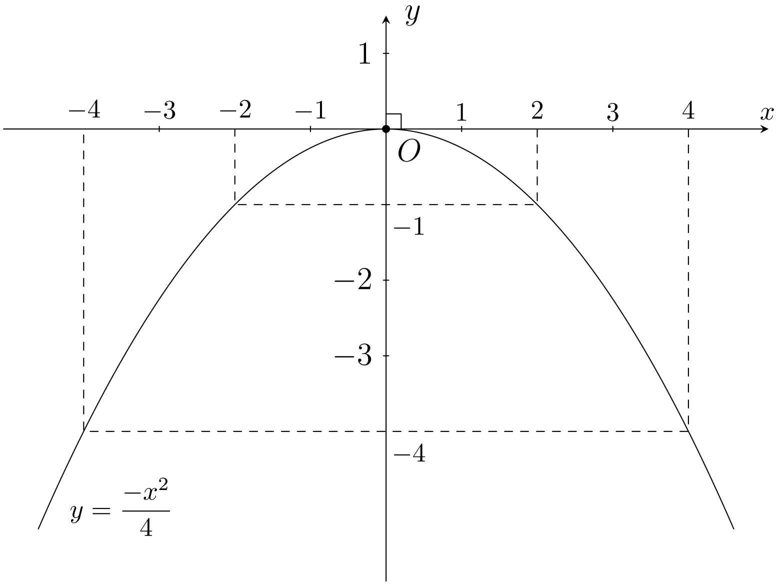
b) Bằng phép tính, tìm tọa độ giao điểm của (P) với đường thẳng $(d)\colon x - 2y = 4$.

Lời giải.

a) Bảng giá trị

x	-4	-2	0	2	4
y	-4	-1	0	-1	-4

Ta có đồ thị sau



b) Ta có $x - 2y = 4 \Leftrightarrow y = \dfrac{x}{2} - 2$.
Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là

$$-\frac{x^2}{4} = \frac{x}{2} - 2 \quad \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Với $x = -4$ thì $y = -4 \Rightarrow A(-4; -4)$.
Với $x = 2$ thì $y = -1 \Rightarrow B(2; -1)$.
Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $A(-4; -4)$ và $B(2; -1)$.

□

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Các tiếp tuyến tại B, tại C của đường tròn (O) cắt nhau tại M.

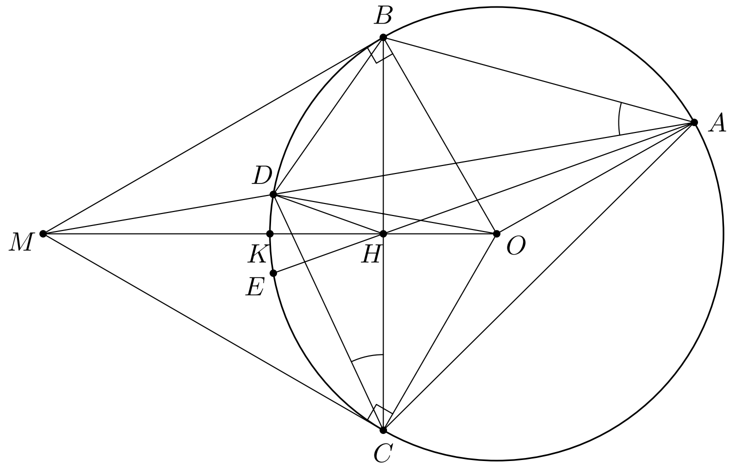
a) Chứng minh rằng tứ giác $OBMC$ nội tiếp đường tròn và xác định tâm K của đường tròn này.

b) Gọi D là giao điểm của MA và đường tròn (O) (D khác A), H là giao điểm của OM và BC. Chứng minh rằng $MB^2 = MD \cdot MA$.

c) Chứng minh rằng tứ giác $OADH$ nội tiếp và $\widehat{AHO} = \widehat{MHD}$.

d) Chứng minh rằng: $\widehat{BAD} = \widehat{CAH}$.

Lời giải.



a) Vì MB, MC là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\widehat{MBO} = 90°$, $\widehat{MCO} = 90°$
$\Rightarrow \widehat{MBO} + \widehat{MCO} = 90° + 90° = 180°$.
$\Rightarrow$ Tứ giác $MBOC$ nội tiếp đường tròn.
Gọi K là trung điểm của MO.
Tam giác OBM vuông tại B có BK là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền MO.
Do đó $KO = KM = KB$.
Tam giác OCM vuông tại C có CK là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền MO.
Do đó $KO = KM = KC$.
$\Rightarrow$ Tứ giác $MBOC$ nội tiếp đường tròn đường kính MO.
$\Rightarrow$ Tâm K của đường tròn là trung điểm của MO.

b) Xét đường tròn (O), ta có $\widehat{MBD} = \widehat{MAB}$ (Góc nội tiếp bằng góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn $\overset{\frown}{BD}$).
Xét $\triangle MBD$ và $\triangle MAB$, ta có
$\widehat{BMA}$ chung
$\widehat{MBD} = \widehat{MAB}$
$\Rightarrow \triangle MBD = \triangle MAB$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{MB}{MA} = \dfrac{MD}{MB}$
$\Rightarrow MB^2 = MD \cdot MA$ (đpcm).

c) Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau tại (O), ta có $MB = MC$.
$\Rightarrow \triangle MBC$ cân tại M
Mặt khác $\triangle MBC$ có MO là đường phân giác.
Nên MO cũng chính là đường cao của $\triangle MBC \Rightarrow MO \perp BC$.
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông MBO, ta có $MB^2 = MH \cdot MO$.
Lại có $MB^2 = MD \cdot MA$ nên $MD \cdot MA = MH \cdot MO \Rightarrow \dfrac{MH}{MD} = \dfrac{MA}{MO}$.
Xét $\triangle MHD$ và $\triangle MOA$, ta có
$\widehat{AMH}$ chung

$\dfrac{MH}{MD} = \dfrac{MA}{MO}$
$\Rightarrow \triangle MHD \backsim \triangle MOA$ (c - g - c)

Vì $\triangle MHD \backsim \triangle MOA$ nên $\widehat{MHD} = \widehat{MAO}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $OADH$ nội tiếp đường tròn (dấu hiệu góc ngoài) $\Rightarrow \widehat{AHO} = \widehat{ADO}$.

Mà $\widehat{ADO} = \widehat{DAO} = \widehat{MHO}$ nên $\widehat{AHO} = \widehat{MHD}$.

d) Kẻ AH cắt (O) tại E.

Ta có $\widehat{DHM} = \widehat{AHO} = \widehat{EHM}$ và $\widehat{BHM} = \widehat{CHM} = 90^\circ$.

$\widehat{BHM} = \widehat{CHM} \Rightarrow \widehat{BHM} - \widehat{MHD} = \widehat{CHM} - \widehat{MHE}$

$\Rightarrow \widehat{BHD} = \widehat{CHE} \Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{BD} =$ sđ $\overset{\frown}{CE}$

$\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CAH}$ (hai góc bằng nhau chắn hai cung bằng nhau).

$\square$

ĐỀ KIỂM TRA HỌC KÌ II (Phòng GD - ĐT Q.1) - Năm học: 2015 - 2016

Môn: Toán 9 - Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1. Giải phương trình và các hệ phương trình sau

a) $x^2 + 7x = 0$.

b) $x^2 + x = 2\sqrt{3}(x+1)$.

c) $-x^4 + 5x^2 + 36 = 0$.

d) $\begin{cases} 2x - 3y = 19 \\ 3x + 4y = -14. \end{cases}$

Lời giải.

a) Ta có $x^2 + 7x = 0 \Leftrightarrow x(x+7) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -7. \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{0; -7\}$.

b) Ta có $x^2 + x = 2\sqrt{3}(x+1) \Leftrightarrow x^2 - (2\sqrt{3} - 1)x - 2\sqrt{3} = 0$.

Ta có $a = 1$; $b = -(2\sqrt{3} - 1)$; $c = -2\sqrt{3}$.

Vì $a - b + c = 1 + (2\sqrt{3} - 1) - 2\sqrt{3} = 0$.

Nên phương trình đã cho có nghiệm là $x_1 = -1$; $x_2 = \dfrac{-c}{a} = 2\sqrt{3}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \left\{-1; 2\sqrt{3}\right\}$.

c) $-x^4 + 5x^2 + 36 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 - 36 = 0$.

Đặt $t = x^2$ $(t \geq 0)$, khi đó phương trình trở thành $t^2 - 5t - 36 = 0$.

Ta có $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36) = 169 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 13$.

Do đó, phương trình có 2 nghiệm là $t = 9$ (nhận); $t = -4$ (loại).

Với $t = 9$ thì $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$ (nhận).

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{\pm 3\}$.

d) Ta có

$$\begin{cases} 2x - 3y = 19 \\ 3x + 4y = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 9y = 57 \\ 6x + 8y = -28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -17y = 85 \\ 2x - 3y = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -5 \\ 2x - 3(-5) = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -5. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (2; -5)$.

□

Bài 2. Cho phương trình $x^2-(m+5)x+2m+6=0$ (x là ẩn số).

a) Chứng minh rằng: phương trình đã cho luôn có hai nghiệm với mọi giá trị của m.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3+x_2^3=35$.

Lời giải.

a) Ta có $x^2-(m+5)x+2m+6=0$.
Khi đó $\triangle = b^2-4ac=[-(m+5)]^2-4(2m+6)=(m+1)^2\geq 0\ \forall m$.
Do đó, phương trình đã cho luôn có hai nghiệm với mọi giá trị của m.

b) Theo định lý Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1+x_2=m+5\\ x_1\cdot x_2=2m+6.\end{cases}$
Ta có

$$\begin{aligned} x_1^3+x_2^3=35 &\Leftrightarrow (x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=35\\ &\Leftrightarrow (m+5)^3-3(2m+6)(m+5)=35\\ &\Leftrightarrow (m+3)^3=3^3\\ &\Leftrightarrow m=0\ \text{(nhận)}.\end{aligned}$$

Vậy $m=0$ là giá trị cần tìm.

□

Bài 3. a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y=-\dfrac{x^2}{2}$.

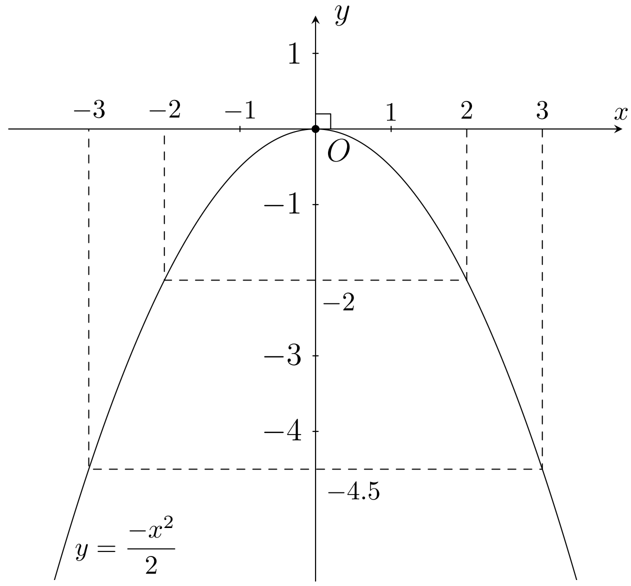
b) Tìm những điểm thuộc (P) có hoành độ bằng 2 lần tung độ.

Lời giải.

a) Bảng giá trị

x	-3	-2	0	3	3
y	-4.5	-2	0	-2	-4.5

Ta có đồ thị sau



b) Gọi $M(a;b)$ là điểm cần tìm.

Vì những điểm có hoành độ gấp 2 lần tung độ nên $a = 2b$.

Vì $M \in (P)$ nên $b = -\frac{(2b)^2}{2} \Leftrightarrow 2b^2 + b = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = -\frac{1}{2}. \end{array}\right.$

Với $b = 0$ thì $a = 0 \Rightarrow M(0;0)$.

Với $b = -\frac{1}{2}$ thì $y = 1 \Rightarrow M'\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$.

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $M(0;0)$ và $M'\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$.

□

Bài 4.

"Cặp lá yêu thương – Trao cơ hội đi học – Cho cơ hội đổi đời"

Trung tâm Tin tức VTV24 chủ trì, phối hợp cùng Văn phòng Bộ - Bộ Lao động - Thương binh và Xã hội, Ngân hàng Chính sách xã hội thực hiện chương trình "Cặp lá yêu thương". Hướng tới hỗ trợ tất cả các hoàn cảnh khó khăn, với trọng tâm là học sinh nghèo học giỏi. Đồng hành cùng với chương trình này vào ngày 4/10/2015, cô hiệu trưởng trường THCS Nguyễn A đến ngân hàng gởi tiết kiệm số tiền là 40.000.000 đồng, gởi kỳ hạn 1 năm, lãi cuối kỳ và lãi nhập gốc và nếu tính đến 4/10/2017, cô hiệu trưởng sẽ nhận được cả tiền gốc lẫn tiền lãi là 44.100.000 đồng, số tiền này được chuyển đến chương trình "Cặp lá yêu thương". Hỏi lãi suất mỗi năm là bao nhiêu phần trăm?

Lời giải.

Tiền lãi có là $44.100.000 - 40.000.000 = 4.100.000$ (đồng).

Gọi lãi suất một năm là $x\%$ ($x > 0$).

Từ 4/10/2015 đến 4/10/2017 cô An được số tiền lãi là

$40.000.000x\% + (40.000.000x\% + 40.000.000) \cdot x\% = 400.000x + 4000x^2 + 400.000$ (đồng).

Theo đề bài, ta có phương trình

$4000x^2 + 400.000x = 4.100.000 \Leftrightarrow x^2 + 200x - 1025 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \quad \text{(nhận)} \\ x = -205 \quad \text{(loại)}. \end{array}\right.$

Vậy lãi suất của mỗi năm là 5%. □

Bài 5. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Vẽ hai tiếp tuyến AB, AC của đường tròn (O) (B, C là hai tiếp điểm). Vẽ cát tuyến ADE của đường tròn (O) (D, E thuộc đường tròn (O); D nằm giữa A và E, tia AD nằm giữa hai tia AB, AO).

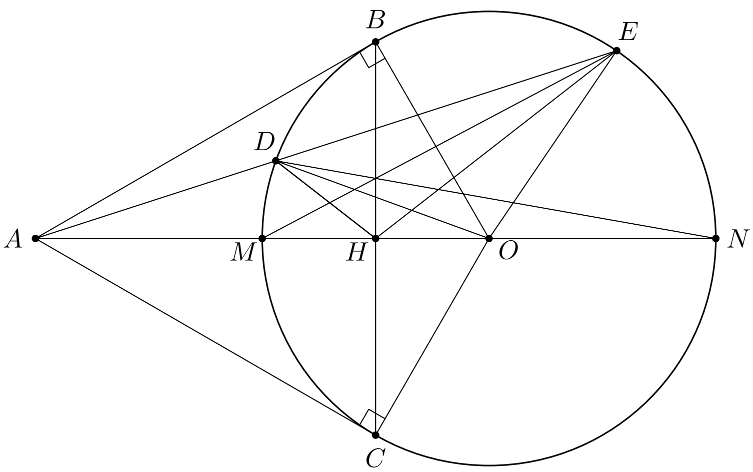
a) Chứng minh rằng A, B, O, C cùng thuộc một đường tròn và xác định tâm của đường tròn này.

b) Chứng minh rằng: $AB^2 = AD \cdot AE$.

c) Gọi H là giao điểm của OA và BC. Chứng minh $\triangle AHD \backsim \triangle AEO$ và tứ giác $DEOH$ nội tiếp.

d) Đường thẳng AO cắt đường tròn (O) tại M, N (M nằm giữa A và O). Chứng minh $\dfrac{EH}{AN} = \dfrac{MH}{AD}$.

Lời giải.



a) Vì AB, AC là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\widehat{ABO} = 90^\circ$, $\widehat{ACO} = 90^\circ$.
$\Rightarrow \widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Vì B, C là hai đỉnh đối nhau của tứ giác $ABOC$ nên tứ giác $ABOC$ nội tiếp đường tròn đường kính OA.
Tâm của đường tròn là trung điểm của OA.

b) Xét đường tròn (O), ta có $\widehat{ABD} = \widehat{BED}$ (Góc nội tiếp bằng góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn $\widehat{BD}$).
Xét $\triangle ABD$ và $\triangle AEB$, ta có
$\widehat{BAD}$ chung
$\widehat{ABD} = \widehat{BED}$
$\Rightarrow \triangle ABD \backsim \triangle AEB \Rightarrow \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AD}{AB}$.
$\Rightarrow AB^2 = AD \cdot AE$ (1).

c) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABO, ta được $AB^2 = AH \cdot AO$.
Từ (1) suy ra $AH \cdot AO = AD \cdot AE \Rightarrow \dfrac{AH}{AD} = \dfrac{AE}{AO}$.
Xét $\triangle AHD$ và $\triangle AEO$, ta có
$\widehat{DAH}$ chung
$\dfrac{AH}{AD} = \dfrac{AE}{AO}$
$\Rightarrow \triangle AHD \backsim \triangle AEO$ (c - g - c).
$\Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{AEO} \Rightarrow$ Tứ giác $DEOH$ nội tiếp đường tròn (Góc trong tứ giác nội tiếp bằng góc ngoài ở đỉnh đối diện).

d) Ta có $\widehat{DEM} = \dfrac{\widehat{DOM}}{2}$ (góc nội tiếp bằng một nửa góc ở tâm cùng chắn cung DM)
Mà $\widehat{DOM} = \widehat{DEH}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung DH của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $DEOH$) nên $\widehat{DEM} = \dfrac{\widehat{DEH}}{2} \Rightarrow \widehat{DEM} = \widehat{MEH}$.
$\Rightarrow EM$ là đường phân giác của $\triangle AEH \Rightarrow \dfrac{EH}{AE} = \dfrac{MH}{AM}$ (2).
Xét $\triangle AEM$ và $\triangle AND$, có
$\widehat{DAM} = 90°$
$\widehat{DEM} = \widehat{DNM}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung DM của đường tròn O)
$\Rightarrow \triangle AEM \backsim \triangle AND$ (g - g) $\Rightarrow \dfrac{AE}{AN} = \dfrac{AM}{AD}$ (3).
Từ (2) và (3), nhân vế theo vế ta được điều phải chứng minh.

□

ĐỀ KIỂM TRA HỌC KÌ II (Phòng GD - ĐT Q.1) - Năm học: 2016 - 2017

Môn: Toán 9 - Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1. Giải các phương trình sau

a) $5x^2 - 8x = 0$.

b) $x^2 + 5x + 4 = \sqrt{2}(x+1)$.

c) $x^4 - 36 = 5x^2$.

Lời giải.

a) Ta có $5x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(5x-8) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{8}{5}. \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \left\{0; \dfrac{8}{5}\right\}$.

b) Ta có $x^2 + 5x + 4 = \sqrt{2}(x+1) \Leftrightarrow x^2 + (5-\sqrt{2})x + 4 - \sqrt{2} = 0$.
Ta có $a = 1$; $b = 5 - \sqrt{2}$; $c = 4 - \sqrt{2}$
Vì $a - b + c = 1 - (5 - \sqrt{2}) + 4 - \sqrt{2} = 0$.
Nên phương trình đã cho có nghiệm là $x_1 = -1$; $x_2 = \dfrac{-c}{a} = \sqrt{2} - 4$.
Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \left\{-1; \sqrt{2} - 4\right\}$.

c) $x^4 - 36 = 5x^2 \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 - 36 = 0$.
Đặt $t = x^2$ $(t \geq 0)$, khi đó phương trình trở thành $t^2 - 5t - 36 = 0 \quad (*)$
Ta có $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36) = 169 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 13$.
Do đó, phương trình có 2 nghiệm là $t = 9$ (nhận); $t = -4$ (loại).
Với $t = 9$ thì $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$ (nhận).
Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{\pm 3\}$.

□

Bài 2. Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x - 4 = 0$ (x là ẩn số).

a) Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có hai nghiệm trái dấu với mọi giá trị của m.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

$$\frac{(x_1^2 - 2x_1 - 4)(x_2^2 - 2x_2 - 4)}{x_1 x_2} = 16.$$

Lời giải.

a) Xét phương trình $x^2 - 2(m+1)x - 4 = 0$.

Khi đó $a \cdot c = 1 \cdot (-4) = -4 < 0\ \forall m$.

Nên phương trình đã cho có 2 nghiệm trái dấu với mọi m.

b) Ta có $x^2 - 2(m+1)x - 4 = 0$.

Vì phương trình đã cho có 2 nghiệm trái dấu với mọi m nên phương trình đã cho luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m.

Theo định lý Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 \cdot x_2 = -4. \end{cases}$

Vì x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình nên ta được

$$\begin{cases} x_1^2 - 2(m+1)x_1 - 4 = 0 \\ x_2^2 - 2(m+1)x_2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 - 2x_1 - 4 = 2mx_1 \\ x_2^2 - 2x_2 - 4 = 2mx_2. \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \frac{(x_1^2 - 2x_1 - 4)(x_2^2 - 2x_2 - 4)}{x_1 x_2} = 16 \Leftrightarrow \frac{2mx_1 \cdot 2mx_2}{-4} = 16$$
$$\Leftrightarrow m^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow m = \pm 2 \text{ (nhận)}.$$

Vậy $m = \pm\ 2$ là các giá trị cần tìm.

□

Bài 3. a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = \dfrac{x^2}{2}$.

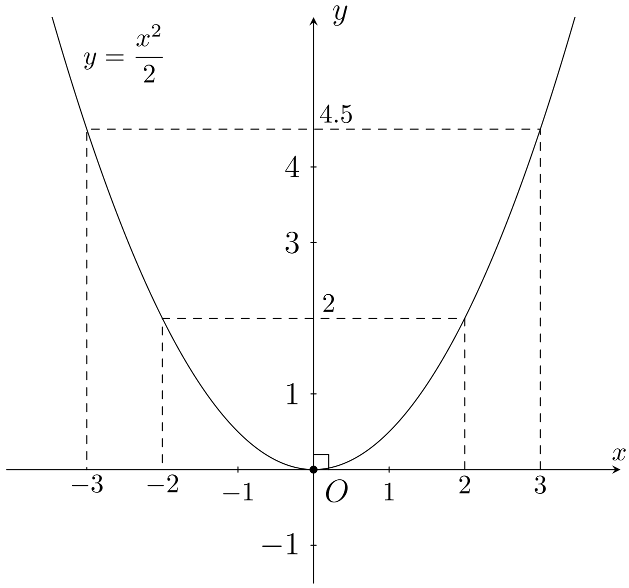
b) Tìm m để (P) cắt đường thẳng $(d) : y = -2x + 1 - 3m$ tại điểm có hoành độ $x = -\ 2$.

Lời giải.

a) Bảng giá trị

x	-3	-2	0	3	3
y	4.5	2	0	2	4.5

Ta có đồ thị sau



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là
$\dfrac{x^2}{2} = -2x + 1 - 3m \Leftrightarrow x^2 + 4x + 6m - 2 = 0.$
Vì (P) cắt (d) tại điểm có hoành độ là $x = -2$ nên ta có
$(-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 6m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1.$
Vậy $m = 1$ là các giá trị cần tìm.

□

Bài 4. Để đặt ống dẫn nước trên một đoạn đường, có thể dùng 100 ống dài hoặc 160 ống ngắn. Do đặt cả hai loại ống nên đã dùng 124 ống. Tính số ống mỗi loại (đơn vị tính độ dài ống là mét).

Lời giải.

Gọi chiều dài của ống dài là d m, số ống dài cần tìm là x ống.
Điều kiện $d > 0, x \in \mathbb{N}^*, x < 124$.
Khi đó, số ống ngắn cần tìm là $124 - x$ ống.
Chiều dài đoạn đường là $100d$ m.
Chiều dài của ống ngắn là $(100d) : 160 = \dfrac{5d}{8}$ m.
Ta có phương trình : $dx + \dfrac{5d}{8}(124 - x) = 100d \Leftrightarrow x = 60$ (thỏa mãn).
Vậy số dài cần tìm là 60 ống. Số ống ngắn cần tìm là $124 - 60 = 64$ ống. □

Bài 5. Cho tam giác nhọn $ABC(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H.

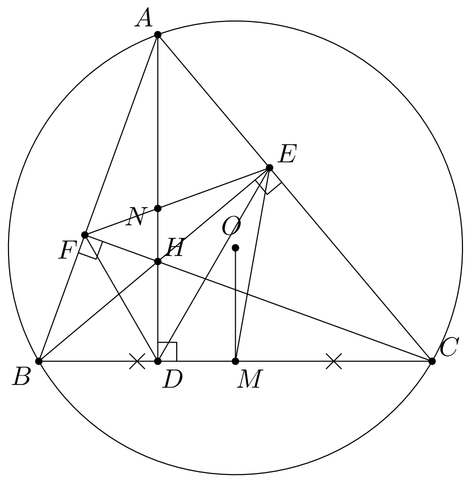
a) Chứng minh rằng các tứ giác $BFHD, BFEC$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh rằng FH là tia phân giác của góc $\widehat{DEF}$ và H là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle DEF$.

c) Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh $OM \parallel AD$ và tứ giác $DMEF$ nội tiếp.

d) Gọi N là giao điểm của AD và EF. Chứng minh $\dfrac{1}{HN}-\dfrac{1}{HD}=\dfrac{2}{AH}$.

Lời giải.



a) Vì AD, CF là các đường cao của tam giác ABC nên $\widehat{BFH}=90^\circ$, $\widehat{BDH}=90^\circ$.
$\Rightarrow \widehat{BFH}+\widehat{BDH}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$.
Mà F, D là hai đỉnh đối nhau của tứ giác $BFHD$ nên tứ giác $BFHD$ nội tiếp đường tròn.
Vì BE, CF là các đường cao của tam giác ABC nên hai góc $\widehat{CFB}=90^\circ$, $\widehat{BEC}=90^\circ$.
Vì E, F kề nhau cùng nhìn đoạn BC dưới một góc vuông nên tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn.

b) Vì tứ giác $BFHD$ nội tiếp đường tròn
nên $\widehat{DBH}=\widehat{DFH}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung DH). (1)
Vì tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn
nên $\widehat{CBE}=\widehat{CFE}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung CE). (2)
Từ (1) và (2), suy ra $\widehat{DFH}=\widehat{EFH} \Rightarrow FH$ là tia phân giác của góc $\widehat{DEF}$ (3).
Chứng minh tương tự, ta cũng có EH là tia phân giác của góc $\widehat{FED}$ (4).
Từ (3) và (4), suy ra H là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle DEF$.

c) Vì M là trung điểm của BC nên $OM \perp BC$.
Mà $AD \perp BC$ nên $AD \parallel OM$ (quan hệ vuông góc với song song).
Ta có $\widehat{EMC}=2\widehat{EFC}$ (Góc nội tiếp bằng một nửa góc ở tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $EFBC$ với M là tâm của đường tròn).
Mà $\widehat{EFD}=2\widehat{EFC}$ nên $\widehat{EFD}=\widehat{EMC}$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $DMEF$ nội tiếp đường tròn (Góc trong tứ giác nội tiếp bằng góc ngoài đỉnh đối diện).

d) Vì EH là đường phân giác trong của ΔDEN và $EH \perp EA$.

$\Rightarrow$ EA là đường phân giác ngoài của ΔDEN.

$\Rightarrow \dfrac{HD}{HN} = \dfrac{AD}{AN} \Rightarrow \dfrac{HD}{HN} = \dfrac{HD + AD}{HN + AN} = \dfrac{AH + 2HD}{AH} = 1 + \dfrac{2HD}{AH}$.

$\Rightarrow \dfrac{1}{HN} = \dfrac{1}{HD} + \dfrac{2}{AH} \Rightarrow \dfrac{1}{HN} - \dfrac{1}{HD} = \dfrac{2}{AH}$.

$\square$

ĐỀ KIỂM TRA HỌC KÌ II (Phòng giáo dục và đào tạo Q.1) - Năm học: 2017-2018

Môn: Toán 9 - Thời gian làm bài: 90 phút

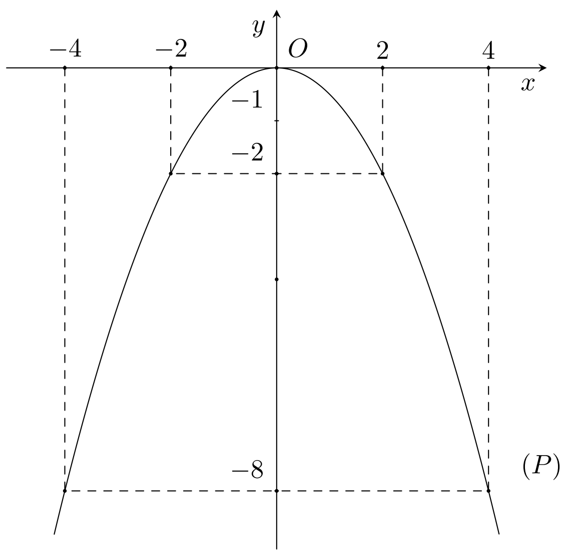
Bài 1. Cho $(P)\colon y = -\dfrac{x^2}{2}$. Vẽ đồ thị (P) trên mặt phẳng Oxy. Tìm tọa độ giao điểm của (P) và đường thẳng $(d)\colon y = \dfrac{x}{2} - 3$.

Lời giải.

a) • Bảng giá trị của (P)

x	-4	-2	0	2	4
y	-8	-2	0	-2	-8

• Đồ thị



b) Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là

$$-\frac{x^2}{2} = \frac{x}{2} - 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -3. \end{array}\right.$$

Với $x = -3 \Rightarrow y = -\dfrac{9}{2}$; với $x = 2 \Rightarrow y = -2$.

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và đường thẳng d là $\left(-3; -\dfrac{9}{2}\right)$, $(2; -2)$.

□

Bài 2. Cho phương trình $x^2 + (m+2)x + m + 1 = 0$ với m là tham số.

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm x_1; x_2 với mọi m.

b) Tìm các giá trị của m để hai nghiệm x_1; x_2 của phương trình thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 26$.

Lời giải.

a) Ta có $\Delta = (m+2)^2 - 4(m+1) = m^2 + 4m + 4 - 4m - 4 = m^2 \geq 0\,, \forall m$.
Do đó phương trình đã cho luôn luôn có nghiệm x_1; x_2 với mọi m.

b) Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1; x_2 thỏa mãn định lý Vi-ét $\begin{cases} x_1 + x_2 = -(m+2) \\ x_1 x_2 = m + 1. \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 = 26 &\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = 26 \\ &\Leftrightarrow (m+2)^2 - 2(m+1) = 26 \\ &\Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 - 2m - 2 - 26 = 0 \\ &\Leftrightarrow m^2 + 2m - 24 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = -6. \end{array}\right. \end{aligned}$$

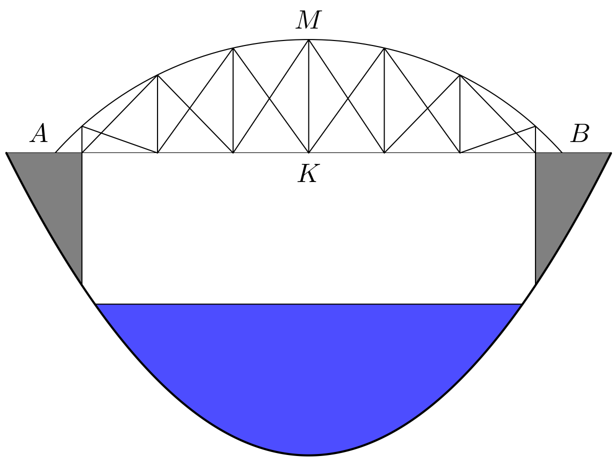
Vậy $m = 4$ hoặc $m = -6$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Bài 3. Lực F của gió khi thổi vuông góc với cánh buồm tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc v của gió, tức là $F = av^2$ với a là hằng số. Biết rằng khi vận tốc gió bằng 2 m/s thì lực tác động lên cánh thuyền buồm của một con thuyền bằng 120 N (Niu-tơn). Tính hằng số a rồi cho biết con thuyền có thể đi được trong bão với vận tốc 90 km/h hay không? Biết rằng cánh buồn có thể chịu một áp lực tối đa là 12000 N.

Lời giải.

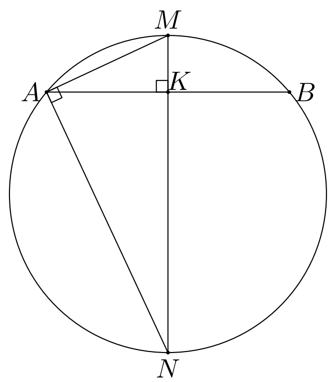
Ta có $F = 120$ N và $v = 2$ m/s nên thay vào công thức $F = av^2$, ta có $120 = 4a \Leftrightarrow a = 30$.
Với tốc độ $v = 90$ km/h $= \dfrac{90}{3{,}6} = 25$ m/s thì lực của gió phải là $F = 30 \cdot 25^2 = 18750$ N.
Do đó con thuyền không thể đi được vì quá giới hạn chịu lực tối đa 12000 N. □

Bài 4. Một chiếc cầu được thiết kế như hình dưới, chiều cao $MK = 6$ m, bán kính của đường tròn chứa cung AMB là 78 m. Tính độ dài AB.



Lời giải.

Gọi $MN = 2 \cdot 78 = 156$ m là đường kính của đường tròn chứa cung AMB.
Khi đó $\triangle AMN$ vuông tại A do nhìn đường kính MN.
Áp dụng hệ thức lượng trong $\triangle AMN$ ta có
$AK^2 = KM \cdot KN = 6 \cdot (156 - 6) = 900 \Rightarrow AK = 30$ m.
Vậy độ dài của cây cầu là $AB = 2AK = 60$ m.



□

Bài 5. Bạn Tuất tiêu thụ 12 ca-lo cho mỗi phút bơi và 8 ca-lo cho mỗi phút chạy bộ. Bạn Tuất tiêu thụ tổng cộng 600 ca-lo trong một giờ với hai hoạt động trên. Vậy bạn Tuất cần bao nhiêu thời gian cho mỗi hoạt động.

Lời giải.

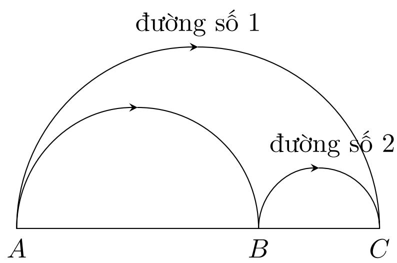
Gọi thời gian bạn Tuất bơi là x phút ($x \geq 0$).
Thời gian bạn Tuất chạy bộ là y phút ($y \geq 0$).
Đổi đơn vị 1 giờ là 60 phút.
Theo đề bài ta có hệ phương trình $\begin{cases} 12x + 8y = 600 \\ x + y = 60. \end{cases}$
Giải hệ phương trình trên

$$\begin{cases} 12x + 8y = 600 \\ x + y = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x + 8y = 600 \\ 8x + 8y = 480 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 120 \\ y = 60 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 30. \end{cases}$$

Vậy mỗi hoạt động bạn Tuất cần 30 phút. □

Bài 6.

Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB vẽ các nửa đường tròn đường kính lần lượt AB, BC, AC như hình vẽ. Hai con robot chạy từ A đến C, con robot thứ nhất chạy theo đường số 1 (nửa đường tròn đường kính AC), con robot thứ hai chạy theo đường số 2 (hai nửa đường tròn đường kính AB, AC).



Biết rằng xuất phát cùng một thời điểm tại A và chạy cùng vận tốc không đổi. Cả hai con robot đến cùng C một lúc. Em hãy giải thích vì sao?

Lời giải.

Đường đi số 1 của con robot chạy bằng với nửa chu vi của đường tròn đường kính AC quãng đường đi theo đường số 1 là $\dfrac{\pi AC}{2}$.

Đường đi số 2 của con robot chạy bằng với tổng nửa chu vi của đường tròn đường kính AB và đường tròn đường kính BC nên quãng đường đi theo đường số 1 là

$$\frac{\pi AB}{2} + \frac{\pi BC}{2} = \frac{\pi(AB + BC)}{2} = \frac{\pi AC}{2}.$$

Do đó hai đường đi có cùng độ dài, mà robot đi cùng vận tốc nên là thời gian di chuyển như nhau và cùng đến C vào một thời điểm. □

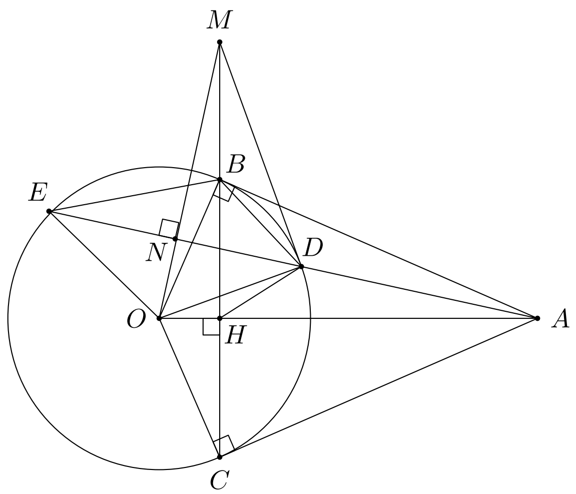
Bài 7. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Vẽ tiếp tuyến AB, AC của đường tròn (O) với B, C là hai tiếp điểm. Vẽ cát tuyến ADE của đường tròn (O) (D, E thuộc đường tròn (O); D nằm giữa A và E, tia AD nằm giữa hai tia AB, AO)

a) Chứng minh rằng $\triangle ABD \backsim \triangle AEB$ và $AB^2 = AD \cdot AE$.

b) Gọi H là giao điểm của AO và BC. Chứng minh rằng $\triangle AHD \backsim \triangle AEO$ và tứ giác $DEOH$ nội tiếp.

c) Tiếp tuyến tại D của đường tròn (O) cắt BC tại M. Gọi N là giao điểm của OM và DE. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{DM^2} + \dfrac{1}{OD^2} = \dfrac{4}{DE^2}$.

Lời giải.



a) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle AEB$ có

$$\begin{cases} \widehat{BAD} = \widehat{BAE} \\ \widehat{ABD} = \widehat{AED} \text{ cùng chắn cung } \overset{\frown}{BD}. \end{cases}$$

Suy ra $\triangle ABD \backsim \triangle AEB$ (góc-góc).

Do đó $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AD}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD \cdot AE. \qquad (1)$

b) AB và AC là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) nên AO là đường trung trực của cạnh BC, suy ra $BH \perp OA$.

Xét $\triangle OAB$ vuông tại B có BH là đường cao nên $AB^2 = OH \cdot OA$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AD \cdot AE = OH \cdot OA \Rightarrow \dfrac{AD}{AO} = \dfrac{AH}{AE}$.

Xét $\triangle AHD$ và $\triangle AEO$, ta có

- $\widehat{HAD} = \widehat{EAO}$.
- $\dfrac{AD}{AO} = \dfrac{AH}{AE}$.

Do đó $\triangle AHD \backsim \triangle AEO$ (c-g-c).

Suy ra $\widehat{AHD} = \widehat{AEO}$. (3)

Mặt khác $\widehat{OHD} + \widehat{AHD} = 180^\circ$ (hai góc kề bù). (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{OHD} + \widehat{AEO} = 180^\circ$, mà H, E là hai đỉnh đối nhau.

Khi đó tứ giác $DEOH$ là tứ giác nội tiếp.

c) Xét tứ giác $MDHO$ có

- $\widehat{MDO} = 90^\circ$ (do MD là tiếp tuyến của đường tròn).
- $\widehat{MHO} = 90^\circ$.

Suy ra $\widehat{MDO} = \widehat{MHO}$ mà D và H là hai đỉnh kề nhau của tứ giác.

Do đó tứ giác $MDHO$ nội tiếp đường tròn, suy ra $\widehat{OMD} = \widehat{AHD}$.

Mà $\widehat{AEO} = \widehat{AHD}$ (do (3)).

Đồng thời $\triangle ODE$ cân tại O nên $\widehat{DEO} = \widehat{ODE}$.

Từ đó suy ra $\widehat{OMD} = \widehat{ODN}$. (5)

Mặt khác $\widehat{ODN} + \widehat{MDN} = 90^\circ$. (6)

Từ (5) và (6), ta có $\widehat{DMN} + \widehat{MDN} = 90^\circ \Rightarrow MN \perp DE$, do đó N là trung điểm ED.

Xét $\triangle ODM$ vuông tại D, ta có $\dfrac{1}{ND^2} = \dfrac{1}{OD^2} + \dfrac{1}{MD^2}$.

Do $ND = \dfrac{DE}{2}$ nên $\dfrac{1}{DM^2} + \dfrac{1}{OD^2} = \dfrac{4}{DE^2}$.

□

ĐỀ KIỂM TRA HỌC KÌ II (Phòng giáo dục và đào tạo Q.1) - Năm học: 2018-2019

Môn: Toán 9 - Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1. Giải các phương trình sau đây

a) $5(x^2+1)-3x(x+3)=10$.

b) $4x^4+11x^2-20=0$.

Lời giải.

a) Ta có $5(x^2+1)-3x(x+3)=10 \Leftrightarrow 5x^2+5-3x^2-9x-10=0 \Leftrightarrow 2x^2-9x-5=0$.
Biệt thức $\Delta=(-9)^2-4\cdot 2\cdot(-5)=121>0 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=11$.
Khi đó phương trình có hai nghiệm $x_1=\dfrac{9+11}{4}=5$; $x_2=\dfrac{9-11}{4}=-\dfrac{1}{2}$.
Vậy phương trình có tập nghiệm là $S=\left\{-\dfrac{1}{2};5\right\}$.

b) Đặt $t=x^2$ với điều kiện $t\geq 0$, khi đó phương trình trở thành $4t^2+11t-20=0$. $(*)$
Ta có $\Delta=11^2-4\cdot 4\cdot(-20)=441>0 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=21$.
Do đó phương trình $(*)$ có nghiệm $t_1=\dfrac{-11-21}{8}=-4$ (loại); $t_2=\dfrac{-11+21}{8}=\dfrac{5}{4}$.
Với $t=\dfrac{5}{4} \Leftrightarrow x^2=\dfrac{5}{4} \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.
Vậy phương trình có tập nghiệm là $S=\left\{\dfrac{\sqrt{5}}{2};-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right\}$.

□

Bài 2. Cho $(P)\colon y=\dfrac{x^2}{2}$.

a) Vẽ đồ thị (P) trên mặt phẳng Oxy.

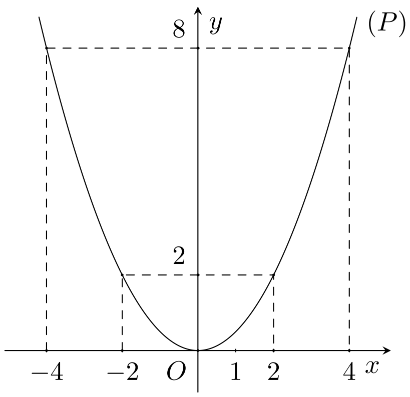
b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và đường thẳng $(d)\colon y=2x+6$ bằng phép toán.

Lời giải.

a) • Bảng giá trị của (P)

x	-4	-2	0	2	4
y	8	2	0	2	8

• Đồ thị



b) Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là

$$\frac{x^2}{2} = 2x + 6 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 6. \end{array}\right.$$

Với $x = -2 \Rightarrow y = 2$; với $x = 6 \Rightarrow y = 18$.
Vậy tọa độ giao điểm của (P) và đường thẳng d là $(-2; 2)$, $(6; 18)$.

□

Bài 3. Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 4 = 0$ với m là tham số.

a) Tìm điều kiện của m để phương trình có nghiệm x_1; x_2.

b) Tính tổng và tích hai nghiệm x_1; x_2 theo m.

c) Tìm các giá trị của m để hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 15$.

Lời giải.

a) Ta có $\Delta' = m^2 - m^2 + 2m - 4 = 2m - 4$.
Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 2m - 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$.

b) Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1; x_2 thỏa mãn định lý Vi-ét $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = m^2 - 2m + 4. \end{cases}$

c) Ta có

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 15 &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 15 \\ &\Leftrightarrow 4m^2 - 3(m^2 - 2m + 4) = 15 \\ &\Leftrightarrow 4m^2 - 3m^2 + 6m - 12 - 15 = 0 \\ &\Leftrightarrow m^2 + 6m - 27 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m = 3 & \text{(Nhận)} \\ m = -9 & \text{(Loại).} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy $m = 3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Bài 4. Để tổ chức đi tham quan hướng nghiệp cho 435 người gồm học sinh khối lớp 9 và giáo viên phụ trách, nhà trường đã thuê 11 chiếc xe gồm hai loại: loại 30 chỗ ngồi và loại 45 chỗ ngồi (không kể tài xế). Hỏi nhà trường cần thuê bao nhiêu xe mỗi loại? Biết rằng không có xe nào còn trống chỗ.

Lời giải.

Gọi số xe loại 30 chỗ và số xe loại 45 chỗ lần lượt lần là x, y (x, $y \in \mathbb{N}^*$).

Theo đề bài ta có hệ phương trình $\begin{cases} 30x + 45y = 435 \\ x + y = 11. \end{cases}$

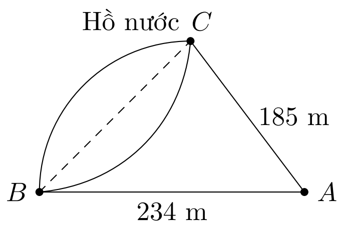
Giải hệ phương trình trên

$$\begin{cases} 30x + 45y = 435 \\ x + y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30x + 45y = 435 \\ 30x + 30y = 330 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15y = 105 \\ x = 11 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 7. \end{cases}$$

Vậy nhà trường cần thuê 4 xe loại 30 chỗ và 7 xe loại 45 chỗ. □

Bài 5.

Tính khoảng cách giữa hai địa điểm B và C, biết rằng từ vị trí A ta đo được $AB = 234$ m, $AC = 185$ m và $\widehat{BAC} = 53^\circ$ (kết quả tính bằng mét và làm tròn đến hàng đơn vị).

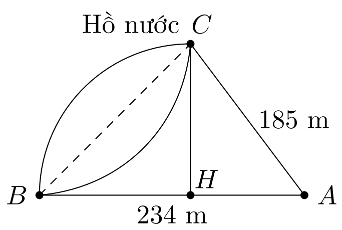


Lời giải.

Kẻ đường cao CH của $\triangle ABC$, ta có

$\sin\widehat{BAC} = \dfrac{CH}{AC} \Rightarrow CH = AC \cdot \sin\widehat{BAC} = 185 \cdot \sin 53^\circ \approx 147{,}7$ m.

$\cos\widehat{BAC} = \dfrac{AH}{AC} \Rightarrow AH = AC \cdot \cos\widehat{BAC} = 185 \cdot \cos 53^\circ \approx 111{,}3$ m.



Khi đó $BH = AB - AH = 234 - 111{,}3 = 122{,}7$ m.

Xét $\triangle BCH$ vuông tại H có

$BC^2 = CH^2 + BH^2 = 147{,}7^2 + 122{,}7^2 = 36870{,}6$.

Do đó $BC \approx 192$ m. □

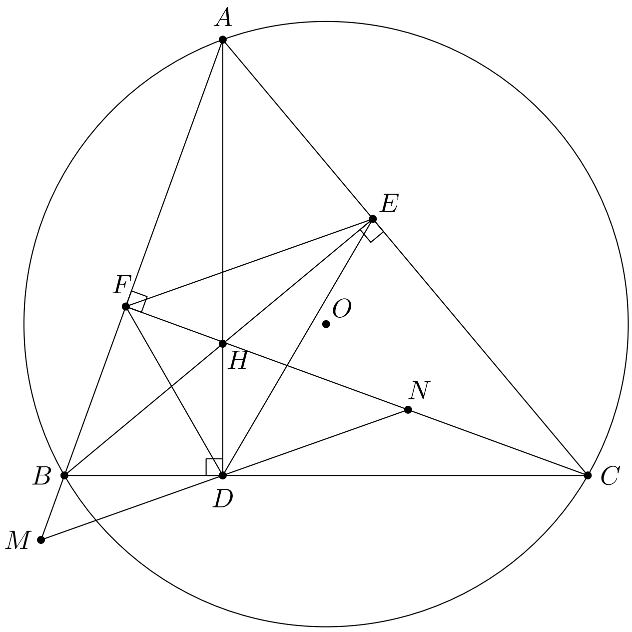
Bài 6. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại H.

a) Chứng minh các tứ giác $BCEF$ và $CDHE$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh EH là tia phân giác của góc $\widehat{DEF}$ và $EB \cdot EH = ED \cdot EF$.

c) Từ D kẻ một đường thẳng song song với EF cắt các đường thẳng AB và CF lần lượt tại M và N. Chứng minh D là trung điểm của MN.

Lời giải.



a) Xét tứ giác $BCEF$ có $\begin{cases} \widehat{BEC} = 90^\circ \\ \widehat{BFC} = 90^\circ. \end{cases}$

Suy ra tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn do có hai đỉnh liền nhau cùng nhìn cạnh BC dưới một góc vuông.

Xét tứ giác $CDHE$ có $\begin{cases} \widehat{CEH} = 90^\circ \\ \widehat{CDH} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{CEH} + \widehat{CDH} = 180^\circ.$

Do đó tứ giác $CDHE$ nội tiếp đường tròn.

Suy ra $\widehat{HCD} = \widehat{HED}$ cùng chắn cung $\overset{\frown}{DH}$. (1)

b) Xét tứ giác $AEHF$ có $\begin{cases} \widehat{AEH} = 90^\circ \\ \widehat{AFH} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 180^\circ.$

Do đó tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn.

Suy ra $\widehat{HEF} = \widehat{HAF}$ cùng chắn cung $\overset{\frown}{FH}$. (2)

Xét tứ giác $ACDF$ có $\begin{cases} \widehat{AFC} = 90^\circ \\ \widehat{ADC} = 90^\circ. \end{cases}$

Do đó tứ giác $ACDF$ nội tiếp đường tròn do có hai đỉnh liền nhau cùng nhìn cạnh AC dưới một góc vuông.

Suy ra $\widehat{HCD} = \widehat{HAF}$ cùng chắn cung $\overset{\frown}{DF}$. (3)

Từ (1), (2), (3) ta có $\widehat{HEF} = \widehat{HED}$ nên EH là tia phân giác của góc $\widehat{DEF}$.

Xét $\triangle HED$ và $\triangle FEB$ có

$\widehat{HED} = \widehat{FEB}$ (chứng minh trên).

$$\begin{cases} \widehat{FBE} = \widehat{FCE} & \text{(cùng chắn cung } \overset{\frown}{EF}\text{)} \\ \widehat{HDE} = \widehat{HCE} & \text{(cùng chắn cung } \overset{\frown}{HE}\text{)} \end{cases} \Rightarrow \widehat{FBE} = \widehat{HDE}.$$

Do đó $\triangle HED \backsim \triangle FEB$ (góc-góc).

Suy ra $\dfrac{HE}{FE} = \dfrac{ED}{EB} \Rightarrow EB \cdot EH = ED \cdot EF$.

c) Chứng minh tương tự ta có FH là tia phân giác của góc $\widehat{DFE}$.

$\Rightarrow \widehat{EFN} = \widehat{DFN}$.

Vì $EF \parallel ND$ nên $\widehat{EFN} = \widehat{FND}$ (so le trong).

Do đó $\widehat{DFN} = \widehat{FND}$ hay $\triangle DNF$ cân tại D, suy ra $DN = DF$. (4)

Ta lại có $\widehat{MFD} = 90^\circ - \widehat{DFH} = 90^\circ - \widehat{HFE} = \widehat{AFE}$.

Mà $\widehat{DMF} = \widehat{AFE}$ (góc đồng vị của hai cạnh $EF \parallel MD$).

Suy ra $\widehat{DMF} = \widehat{MFD}$ hay $\triangle DMF$ cân tại D, suy ra $DM = DF$. (5)

Từ (4) và (5) suy ra $DM = DN$ hay D là trung điểm của MN.

□