

# CHỦ ĐỀ 1: CĂN BẬC HAI

**DẠNG 1: Tìm căn bậc hai số học, căn bậc hai của một số dương.**

**So sánh các căn bậc hai số học.**

## Phương pháp

- Với số  $a$  không âm  $\Rightarrow$  căn bậc hai số học của  $a$  là  $\sqrt{a}$

- Với số  $a$  không âm  $\Rightarrow$  căn bậc hai của số  $a$  là  $\pm\sqrt{a}$

- Nếu  $x^2 = a > 0$  thì  $x = \pm\sqrt{a}$

- Với hai số  $a$  và  $b$  không âm, ta có:  $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$

**Bài 1:** Tìm căn bậc hai số học và căn bậc hai của các số sau:

a) 16                      b) 144                      c) 25

d) 17                      e) 19

**Bài 2:** Tìm số  $x$  thỏa mãn:

a)  $x^2 = 16$               b)  $x^2 = 8$                       c)  $x^2 = 0,01$

d)  $x^2 = 1,5$               e)  $x^2 = 5$

**Bài 3:** Tìm số  $x$  không âm biết

a)  $\sqrt{x} = 3$               b)  $\sqrt{x} = \sqrt{7}$                       c)  $\sqrt{x} = -5$

d)  $\sqrt{x} = 0$               e)  $\sqrt{x} = 6,25$

**Bài 4:** So sánh các số sau.

a)  $2\sqrt{27}$  và  $\sqrt{147}$                       b)  $-3\sqrt{5}$  và  $-5\sqrt{3}$

c)  $21, 2\sqrt{7}, 15\sqrt{3}, -\sqrt{123}$  (sắp xếp theo thứ tự tăng dần)

d)  $2\sqrt{15}$  và  $\sqrt{59}$                       e)  $2\sqrt{2} - 1$  và  $2$                       f)  $6$  và  $\sqrt{41}$

g)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  và  $1$                       h)  $-\frac{\sqrt{10}}{2}$  và  $-2\sqrt{5}$                       i)  $\sqrt{6} - 1$  và  $3$

j)  $2\sqrt{5} - 5\sqrt{2}$  và  $1$                       k)  $\frac{\sqrt{8}}{3}$  và  $\frac{3}{4}$

l)  $6\sqrt{\frac{1}{4}}, 4\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{132}, 2\sqrt{3}, \sqrt{\frac{15}{5}}$  (Sắp xếp theo thứ tự giảm dần)

**Bài tập làm thêm:** SGK: Bài 1 ; ; 2 ; 3 ; 4 trang 6 ; 7

SBT: Bài 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; ; 5 ; 6 ; 7 trang 5 ; 6

## DẠNG 2: Tìm ĐIỀU KIỆN XÁC ĐỊNH của các biểu thức chứa căn.

### PHƯƠNG PHÁP

Phương pháp tìm điều kiện:  $\sqrt{A}$  xác định khi  $A \geq 0$

Cần lưu ý: Phân thức  $\frac{A}{B}$  xác định khi  $B \neq 0$

### BÀI TẬP VẬN DỤNG

1)  $\sqrt{x^2 - 9}$       2)  $\sqrt{(3x+2)(x-1)}$       3)  $\sqrt{3x-2} \cdot \sqrt{x-1}$

Bài tập làm thêm: SGK: Bài 12 trang 11

SBT: Bài 12 ; 16 trang 7 và 8

## DẠNG 3: Liên hệ PHÉP NHÂN với PHÉP KHAI PHƯƠNG.

Liên hệ PHÉP CHIA với PHÉP KHAI PHƯƠNG.

### PHƯƠNG PHÁP

\* Phép nhân và phép khai phương: Với hai số A và B không âm thì:  $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$

\* Phép nhân và phép khai phương: Với hai số A không âm và B > 0 thì:  $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$

### BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1: Áp dụng quy tắc khai phương một tích, hãy tính:

a,  $\sqrt{0,25 \cdot 0,36}$       b,  $\sqrt{2^4 \cdot (-5)^2}$       c,  $\sqrt{1,44 \cdot 100}$       d,  $\sqrt{3^4 \cdot 5^2}$

Bài 2: Áp dụng quy tắc khai phương một tích, hãy tính:

a,  $\sqrt{2,25 \cdot 400 \cdot \frac{1}{4}}$       b,  $\sqrt{0,36 \cdot 100 \cdot 81}$       c,  $\sqrt{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{20} \cdot 3 \cdot 27}$       d,  $\sqrt{0,001 \cdot 360 \cdot 3^2 \cdot (-3)^2}$

Bài 3: Áp dụng quy tắc nhân căn thức bậc hai, hãy tính:

a,  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$       b,  $\sqrt{5} \cdot \sqrt{45}$       c,  $\sqrt{11} \cdot \sqrt{44}$       d,  $2\sqrt{2}(4\sqrt{8} - \sqrt{32})$

Bài 4: Tính

a)  $A = \sqrt{37^2 - 12^2}$       b)  $B = \sqrt{21,8^2 - 18,2^2}$       c)  $C = \sqrt{100(6,5^2 - 1,6^2)}$

Bài 5: Thực hiện phép tính:

a,  $A = ((\sqrt{3} + 4)^2 + (\sqrt{3} - 1)^2)$

b,  $B = (\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{10} + 1)^2$

c,  $C = (\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3}) - (\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})$

Bài 6: Phân tích đa thức thành nhân tử (với các căn thức đã cho đều có nghĩa)

a.  $A = x - y - 3(\sqrt{x} + \sqrt{y})$

b.  $B = x - 4\sqrt{x} + 4$

$$c. C = \sqrt{x^3} - \sqrt{y^3} + \sqrt{x^2y} - \sqrt{xy^2}$$

$$d. D = 5x^2 - 7x\sqrt{y} + 2y$$

**Bài 7:** Rút gọn

$$a. A = \sqrt{27.48(1-a^2)} \text{ với } a > 1;$$

$$b. B = \frac{1}{a-b} \sqrt{a^4(a-b)^2} \text{ với } a > b;$$

$$c. C = \sqrt{5a} \cdot \sqrt{45a} - 3a \text{ với } a \geq 0$$

$$d. D = (3-a)^2 - \sqrt{0,2} \cdot \sqrt{180a^2} \text{ với } a \text{ tùy ý.}$$

**Bài 8:** Thực hiện phép tính:

$$a. \sqrt{\frac{121}{144}}; \sqrt{\frac{0,99}{0,81}}; \sqrt{1\frac{17}{64}}$$

$$b. \sqrt{\frac{0,01}{0,0004}}; \sqrt{\frac{(1+\sqrt{3})^2}{4}}; \sqrt{\frac{48}{75}}$$

$$c. \sqrt{1\frac{9}{16} \cdot 5\frac{4}{9} \cdot 0,01}; \sqrt{1,44 \cdot 1,21 - 1,44 \cdot 0,4}; \sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}}; \sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 394^2}}$$

**Bài 9:** Thực hiện phép tính

$$a. \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{192}}{\sqrt{12}}$$

$$b. \frac{\sqrt{a-2\sqrt{ab}+b}}{\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}} \text{ (với } a > b > 0)$$

$$c. \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{3}}}; \frac{\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} \text{ (với } x > 9)$$

**Bài 10:** thực hiện phép tính

$$a. A = (3\sqrt{18} + 2\sqrt{50} - 4\sqrt{72}) : 8\sqrt{2}$$

$$b. B = (-4\sqrt{20} + 5\sqrt{500} - 3\sqrt{45}) : \sqrt{5}$$

$$c. C = \left( \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \right) : \sqrt{48}$$

**Bài 11:** Rút gọn biểu thức

$$a. A = \frac{y}{x} \sqrt{\frac{x^2}{y^4}} \text{ với } x > 0; y \neq 0$$

$$b. B = 2y^2 \sqrt{\frac{x^4}{4y^2}} \text{ với } y < 0;$$

$$c. C = 5xy \sqrt{\frac{25x^2}{y^6}} \text{ với } x < 0; y > 0$$

$$d. D = \frac{x-2}{\sqrt{y-1}+1} \cdot \frac{\sqrt{y+2\sqrt{y-1}}}{\sqrt{(x-2)^4}} \text{ với } x \neq 2; y > 1$$

**Bài 12:** Giải phương trình

$$a. \sqrt{2}x - \sqrt{50} = 0$$

$$b. \sqrt{3} \cdot x + \sqrt{3} = \sqrt{12} + \sqrt{27}$$

$$c. \sqrt{3}x^2 - \sqrt{12} = 0$$

$$d. \frac{x^2}{\sqrt{5}} - \sqrt{20} = 0$$

$$e. \sqrt{25x^2} = 100$$

$$f. (\sqrt{3} - \sqrt{2})x = \sqrt{27} - \sqrt{18}$$

$$g. \sqrt{(x-3)^2} = 9$$

**Bài 13:** Rút gọn:

$$a. A = \sqrt{11-2\sqrt{30}} : \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\right)$$

$$b. B = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$$

## DẠNG 4: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH $\sqrt{A} = B$ và $\sqrt{A^2} = B$

### PHƯƠNG PHÁP

$$\text{Phương trình: } \sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình: } \sqrt{A^2} = B \Leftrightarrow |A| = B$$

**Chú ý:** Nếu A và B là các phân thức thì phải có điều kiện **Mẫu thức**  $\neq 0$

### BÀI TẬP VẬN DỤNG

$$1) \sqrt{3x-1} = 4$$

$$2) \sqrt{-3x+4} = 12$$

$$3) \sqrt{2x^2-9} = -x$$

$$4) \sqrt{(\sqrt{x}-7)(\sqrt{x}+7)} = 2$$

$$5) \sqrt{x^2-8x+16} = 4$$

$$6) \sqrt{9(x-1)} = 21$$

$$7) \sqrt{\frac{12x+5}{3}} = 2$$

$$8) \sqrt{\frac{1}{4}-2a} = 3$$

$$9) \sqrt{2-3x} = 10$$

$$10) \sqrt{4x} = \sqrt{5}$$

$$11) \sqrt{5x+3} = \sqrt{3-\sqrt{2}}$$

$$12) \sqrt{-4x^2+25} = x$$

$$13) \sqrt{4-5x} = 12$$

$$14) \sqrt{4(1-x)^2} - \sqrt{3} = 0$$

$$15) \sqrt{16x} = 8$$

$$16) \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3x}} = \sqrt{8+2\sqrt{15}}$$

$$17) \sqrt{\frac{-3}{2+x}} = 2$$

$$18) \sqrt{3x^2-5} = 2$$

$$19) \sqrt{(x-3)^2} = 3$$

$$20) \sqrt{\frac{-6}{1+x}} = 5$$

$$21) \sqrt{4x-20} - 3\sqrt{\frac{x-5}{9}} = \sqrt{1-x}$$

$$22) \sqrt{4x+8} + 2\sqrt{x+2} - \sqrt{9x+18} = 1$$

$$23) \sqrt{x^2-6x+9} + x = 11$$

$$24) \sqrt{3x^2-4x+3} = 1-2x$$

$$25) \sqrt{16(x+1)} - \sqrt{9(x+1)} = 4$$

$$26) \sqrt{9x+9} + \sqrt{4x+4} = \sqrt{x+1}$$

**Bài tập làm thêm:** Bài 9 SGK trang 11 và Bài 17 SBT trang 8.



## CHỦ ĐỀ 2: RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN DẠNG SỐ.

**DẠNG I: Biểu thức số trong căn có dạng hằng đẳng thức:**

### PHƯƠNG PHÁP

**Chú ý các hằng đẳng thức sau:**

$$a^2 \pm 2a\sqrt{b} + b = (a \pm \sqrt{b})^2 \quad \text{với } b > 0$$

$$a \pm 2\sqrt{ab} + b = (\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2 \quad \text{với } a > 0 \text{ và } b > 0$$

$$a^2 - b = (a - \sqrt{b})(a + \sqrt{b}) \quad \text{với } b > 0$$

$$a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \quad \text{với } a > 0 \text{ và } b > 0$$

Sau khi nhận dạng, tách số hạng và viết được dưới dạng hằng đẳng thức trên thì áp dụng

$$\sqrt{A^2} = |A| \quad \text{hay} \quad \begin{cases} \sqrt{A^2} = A & \text{neu } A > 0 \\ \sqrt{A^2} = -A & \text{neu } A < 0 \end{cases}$$

\* **Chú ý:** Một số biểu thức khi ở trong căn chưa có dạng hằng đẳng thức  $(a \pm \sqrt{b})^2$  hoặc  $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2$ , và khi đó ta cần nhân thêm một số căn bên ngoài vào căn đó thì mới xuất hiện dạng hằng đẳng thức  $(a \pm \sqrt{b})^2$  hoặc  $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2$ , lúc đó ta mới phá được căn.

### BÀI TẬP VẬN DỤNG

**Bài 1:** Tính giá trị các biểu thức sau.

a)  $\sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$

b)  $\sqrt{3 + \sqrt{8}}$

c)  $\sqrt{11 + 4\sqrt{6}}$

d)  $\sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$

e)  $\sqrt{22 - 8\sqrt{6}}$

f)  $\sqrt{16 - 6\sqrt{7}}$

l)  $\sqrt{\frac{9}{4} - \sqrt{2}}$

m)  $\sqrt{\frac{129}{16} + \sqrt{2}}$

o)  $\sqrt{\frac{289 + 4\sqrt{72}}{16}}$

q)  $\sqrt{2}\sqrt{7 - 3\sqrt{5}}$

u)  $\sqrt{\frac{59}{25} + \frac{6}{5}\sqrt{2}}$

z)  $\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{2})$

a')  $(\sqrt{21} + 7) \cdot \sqrt{10 - 2\sqrt{21}}$

**Bài 2:** Tính giá trị biểu thức sau: (Nhân thêm số **căn** vào biểu thức để làm xuất hiện hằng đẳng thức  $(a \pm \sqrt{b})^2$  hoặc  $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2$  rồi Phá Căn)

a)  $2 \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{4 + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}$

HD: Nhân  $\sqrt{2}$  với  $\sqrt{4 + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}$

$$b) (4\sqrt{2} + \sqrt{30})(\sqrt{5} - \sqrt{3})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$$

$$\text{HD: Nhân } \sqrt{2} \text{ với } \sqrt{4 - \sqrt{15}}$$

$$c) \frac{\sqrt{3}+1}{2} \cdot \sqrt{8-2\sqrt{3}}$$

$$\text{HD: Nhân } 1/\sqrt{2} \text{ với } \sqrt{8-2\sqrt{3}}$$

## DẠNG II: Biến đổi biểu thức bằng cách đưa thừa số ra ngoài hoặc vào trong dấu căn.

### PHƯƠNG PHÁP

Đưa thừa số ra ngoài căn:  $\sqrt{A^2 \cdot B} = |A| \cdot \sqrt{B}$  với  $B \geq 0$

Nếu  $A \geq 0$  thì:  $\sqrt{A^2 \cdot B} = A \cdot \sqrt{B}$

Nếu  $A < 0$  thì:  $\sqrt{A^2 \cdot B} = -A \cdot \sqrt{B}$

Đưa thừa số vào trong căn:

Nếu  $A \geq 0$  và  $B \geq 0$  thì:  $A \cdot \sqrt{B} = \sqrt{A^2 \cdot B}$

Nếu  $A < 0$  và  $B \geq 0$  thì:  $A \cdot \sqrt{B} = -\sqrt{A^2 \cdot B}$

### BÀI TẬP VẬN DỤNG

$$A = \sqrt{112} - 7\sqrt{\frac{1}{7}} - 14\sqrt{\frac{1}{28}} - \frac{21}{\sqrt{7}}$$

$$B = 3\sqrt{2}(4 - \sqrt{2}) + 3(1 - 2\sqrt{2})^2$$

$$C = 2\sqrt{27} + 5\sqrt{12} - 3\sqrt{48}$$

$$D = \sqrt{147} + \sqrt{54} - 4\sqrt{27}$$

$$E = (\sqrt{15} - 2\sqrt{3})^2 + 12\sqrt{5}$$

$$F = 3\sqrt{50} - 7\sqrt{8} + 12\sqrt{18}$$

$$G = 2\sqrt{80} - 2\sqrt{245} + 2\sqrt{180}$$

$$H = \sqrt{28} - 4\sqrt{63} + 7\sqrt{112}$$

$$M = \sqrt{20} - 2\sqrt{10} + \sqrt{45}$$

$$N = 2\sqrt{12} - \sqrt{48} + 3\sqrt{27} - \sqrt{108}$$

## DẠNG III: Rút gọn biểu thức số dạng phân số.

### PHƯƠNG PHÁP

Với loại toán này ta thường sử dụng các kĩ năng sau:

- Rút gọn thừa số chung của tử và mẫu nếu có.

- Sử dụng hằng đẳng thức để đưa biểu thức số ra khỏi căn.

- Nếu mẫu số chứa căn thì nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp mẫu để triệt tiêu căn ở mẫu.

- Quy đồng mẫu nếu cần để rút gọn.

**Chú ý: Một số biểu thức liên hợp**

$$\sqrt{a} + b \text{ liên hợp với } \sqrt{a} - b$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} \text{ liên hợp với } \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

### BÀI TẬP VẬN DỤNG

$$\mathbf{A} = \frac{1}{5 + 2\sqrt{6}} - \frac{1}{5 - 2\sqrt{6}}$$

$$\mathbf{C} = \frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$$

$$\mathbf{G} = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\mathbf{I} = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - 1} - \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$$

$$\mathbf{U} = \left( \frac{1}{2 - \sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \right) : \frac{1}{\sqrt{21 - 12\sqrt{3}}}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{3} + 2} - \frac{1}{\sqrt{3} - 2}$$

$$\mathbf{D} = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{12}}{\sqrt{5} - 2} - \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$$

$$\mathbf{F} = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} - (\sqrt{5} + \sqrt{3})$$

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{4}{(2 - \sqrt{5})^2}} - \sqrt{\frac{4}{(2 + \sqrt{5})^2}}$$

$$\mathbf{J} = \left( 1 + \frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right) \cdot \left( 1 - \frac{2 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} \right)$$

$$\mathbf{W} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{5} - \sqrt{3}} - \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{3}}$$



# CHUYÊN ĐỀ 3: GIẢI PT & BPT CÓ CHỨA BIỂU THỨC RÚT GỌN.

## PHƯƠNG PHÁP

\* **Đề giải dạng toán này:** Ta cần nắm vững kỹ năng giải một số phương trình, bất phương trình có chứa căn thức bậc 2; phương trình, bất phương trình có chứa ẩn ở mẫu; phương trình, bất phương trình có chứa dấu giá trị tuyệt đối. **Các kiến thức này** thầy sẽ hướng dẫn các em trong chuyên đề “CÁC DẠNG PHƯƠNG TRÌNH, BPT chương trình THCS”.

**Chú ý:** Phải dựa vào điều kiện xác định của biểu thức rút gọn và điều kiện của phương trình (Bất phương trình) để kết luận nghiệm (tập hợp giá trị) x phù hợp.

\* **Một số câu hỏi lạ:**

- ① Tìm x để  $|A| = A$ ? tức là ta phải đi tìm x để  $A \geq 0$
- ② Tìm x để  $|A| = -A$ ? tức là ta phải đi tìm x để  $A \leq 0$
- ③ Tìm x để  $|A| > -A$ ? tức là tìm x để  $A < 0$

## BÀI TẬP VẬN DỤNG

\* **Loại bài tập dễ.**

**Bài 1:** Cho biểu thức:  $P = \left( \frac{\sqrt{x}-1}{3\sqrt{x}-1} - \frac{1}{3\sqrt{x}+1} + \frac{8\sqrt{x}}{9x-1} \right) : \left( 1 - \frac{3\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}+1} \right)$

a/ Rút gọn P

b/ Tìm các giá trị của x để  $P = \frac{6}{5}$

**Bài 2:** Cho biểu thức:  $P = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$

a/ Rút gọn P

b/ Tìm các giá trị của x để  $P = \frac{1}{2}$

c/ Chứng minh  $P \leq \frac{2}{3}$

**Bài 3:** Cho biểu thức:  $P = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+m} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-m} - \frac{m^2}{4x-4m^2}$  với  $m > 0$

a/ Rút gọn P

b/ Tính x theo m để  $P = 0$ .

**Bài 4:** Cho biểu thức:  $P = \frac{a^2 + \sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1} - \frac{2a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1$

a/ Rút gọn P

b/ Tìm a để  $P = 2$

**Bài 5:** Cho biểu thức:  $P = \frac{a\sqrt{a} - 1}{a - \sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a} + 1}{a + \sqrt{a}} + \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) \left(\frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} + \frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1}\right)$

a/ Rút gọn P

b) Với giá trị nào của a thì  $P = 7$

**Bài 6:** Cho biểu thức:  $P = \left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1}\right)$

a/ Rút gọn P

b) Tìm các giá trị của a để  $P < 0$

c) Tìm các giá trị của a để  $P = -2$

**Bài 7:** Cho biểu thức :  $P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}}\right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$

a/ Rút gọn P

b) Chứng minh rằng  $P > 0 \quad \forall x \neq 1$

**Bài 8:** Cho biểu thức:  $P = 1 : \left(\frac{1}{2+\sqrt{x}} + \frac{\frac{3x}{2}}{4-x} - \frac{2}{4-2\sqrt{x}}\right) : \frac{1}{4-2\sqrt{x}}$

a/ Rút gọn P

b) Tìm giá trị của x để  $P = 20$

**Bài 9:** Cho biểu thức :  $P = \left(\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}}{y-x}\right) : \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + \sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

a/ Rút gọn P

b) Chứng minh  $P \geq 0$

**Bài 10:** Cho biểu thức:  $P = \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+3} - \frac{5}{a+\sqrt{a}-6} + \frac{1}{2-\sqrt{a}}$

a/ Rút gọn P

b/ Tìm giá trị của a để  $P < 1$

**Bài 11:** Cho biểu thức:  $P = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right)$

a) Rút gọn P

b) Tìm giá trị của x để  $P < 0$

\* Loại bài nâng cao.

**Bài 12: (Hà Nội 2014 – 2015):** Biểu thức  $P = \left(\frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}\right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$  với  $x > 0$  và  $x \neq 1$

a) Rút gọn P.

b) Tìm các giá trị của x để  $2P = 2\sqrt{x} + 5$

**Bài 13: (Chuyên Amsterdam):** Cho biểu thức

$$A = \frac{3}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-3}{x-1} \quad B = \frac{x+2}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \quad \text{với } x > 0 \text{ và } x \neq 1$$

a) Rút gọn A và B

b) Tìm x để  $A = \frac{8}{3} \cdot B$

**Bài 14: (Chuyên Nguyễn Huệ):** Cho biểu thức

$$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5} \quad B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4} - \frac{x+12\sqrt{x}}{x-16} \quad \text{với } x > 0 \text{ và } x \neq 1$$

a) Rút gọn A và B

b) Tìm x để  $\frac{A}{B} = \frac{5}{6}$

**Bài 15: (Hà Nội năm 2017 - 2018):** Cho biểu thức

$$A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5} \quad B = \frac{3}{\sqrt{x}+5} + \frac{20-\sqrt{x}}{x-25} \quad \text{với } x \geq 0 \text{ và } x \neq 25$$

a) Rút gọn B

b) Tìm x để  $A = B \cdot |x-4|$

**Bài 16:** Cho biểu thức  $C = \frac{1}{2\sqrt{x}-2} - \frac{1}{2\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}}{1-x}$

a) Rút gọn biểu thức C.

c) Tính giá trị của x để  $|C| = \frac{1}{3}$ .

**Bài 17:** Với  $x \geq 0, x \neq 9$  cho hai biểu thức

$$A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} \text{ và } B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+3}{x-9}$$

a) Rút gọn biểu thức B

b) Tìm các giá trị của x để  $B/A < -1/3$

## CHUYÊN ĐỀ 4: CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC CĂN.

### SO SÁNH HAI BTRG hoặc SO SÁNH BTRG với MỘT SỐ

#### I/ PHƯƠNG PHÁP

##### 1/ Chứng minh đẳng thức căn

- Thường chọn vế phức tạp để biến đổi sao cho bằng vế còn lại
- Thực chất của việc làm này là rút gọn biểu thức chứa căn dạng số hoặc dạng chữ

##### 2/ So sánh hai biểu thức rút gọn.

\* Để so sánh hai biểu thức đã rút gọn, ta có thể xét một trong hai cách sau

<p>* Xét tỉ số <math>\frac{A}{B}</math></p> <p>- Nếu <math>\frac{A}{B} &gt; 1</math> thì <math>A &gt; B</math> nếu A, B cùng dấu (+), còn <math>A &lt; B</math> nếu A, B cùng dấu (-)</p> <p>- Nếu <math>\frac{A}{B} &lt; 1</math> thì <math>A &lt; B</math> nếu A, B cùng dấu (+), còn <math>A &gt; B</math> nếu A, B cùng dấu (-)</p>	<p>* Xét hiệu <math>A - B</math></p> <p>- Nếu <math>A - B &gt; 0 \Rightarrow A &gt; B</math></p> <p>- Nếu <math>A - B &lt; 0 \Rightarrow A &lt; B</math></p>
---	--

\* Để so sánh biểu thức rút gọn A với một số k, ta xét hiệu:  $A - k$

+ Nếu  $A - k > 0$  thì  $A > k$

+ Nếu  $A - k < 0$  thì  $A < k$

\* So sánh biểu thức rút gọn A với  $\sqrt{A}$

+ Xác định điều kiện của x để  $A > 0$  (nếu A chưa phải biểu thức dương)

+ So sánh A với 1

- Nếu  $0 < A < 1$  thì  $\sqrt{A} > A$  với điều kiện x

- Nếu  $A > 1$  thì  $\sqrt{A} < A$  với điều kiện x

#### II/ BÀI TẬP VẬN DỤNG

**Bài 1:** Chứng minh các đẳng thức sau:

a) 
$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + 4} = \sqrt{2} - 1$$

b) 
$$\sqrt{21 - 6\sqrt{6}} + \sqrt{9 + 2\sqrt{18}} - 2\sqrt{6 + 3\sqrt{3}} = 0$$

c) 
$$\sqrt{6 + 2\sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}} = 1 + \sqrt{3}$$

$$d) \sqrt{\sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}}} = 3$$

$$e) \frac{(5 + 2\sqrt{6})(49 - 20\sqrt{6})\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}}{9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}} = 1$$

$$f) \left( \frac{x\sqrt{x} + 27y\sqrt{y}}{3\sqrt{x} + 9\sqrt{y}} - \sqrt{xy} \right) \cdot \frac{(3\sqrt{x} + 9\sqrt{y})^2}{(x - 9y)^2} > 2\sqrt{2}$$

$$g) \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} : \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = a - b$$

$$h) \frac{1}{\sqrt{25} + \sqrt{24}} + \frac{1}{\sqrt{24} + \sqrt{23}} + \frac{1}{\sqrt{23} + \sqrt{22}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} = 4$$

$$i) \left( \frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \cdot \frac{(1 - \sqrt{a})^2}{(1 - a)^2} = 1$$

$$j) (4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{16})\sqrt{4 - \sqrt{15}} = 2$$

$$k) \frac{2}{7 + 4\sqrt{3}} + \frac{2}{7 - 4\sqrt{3}} = 28$$

$$l) \sqrt{12 - 3\sqrt{7}} - \sqrt{12 + 3\sqrt{7}} = -\sqrt{6}$$

**Bài 2:** Xét biểu thức  $A = \frac{a^2 + \sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1} - \frac{2a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1$ .

a) Rút gọn A.

b) Biết  $a > 1$ , hãy so sánh A với  $|A|$ .

**Bài 3:** Xét biểu thức  $H = \left( \frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3}}{x - y} \right) : \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + \sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

a) Rút gọn H.

c) So sánh H với  $\sqrt{H}$ .

**Bài 4:** Cho biểu thức:  $M = \left( \frac{1}{a - \sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a} - 1} \right) : \frac{\sqrt{a} + 1}{a - 2\sqrt{a} + 1}$  với  $a > 0$  và  $a \neq 1$ .

a) Rút gọn biểu thức.

b) So sánh M với 1.

**Bài 5:** Cho biểu thức:  $P = \frac{2x + 2}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x} - 1}{x - \sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x}}$

a) Rút gọn biểu thức.

b) So sánh P với 5.

# CHUYÊN ĐỀ 5: TÌM $x$ ĐỂ BIỂU THỨC RÚT GỌN LÀ SỐ NGUYÊN

I/ BTRG có dạng  $A = \frac{a}{cx+d}$  hoặc  $A = \frac{a}{c\sqrt{x+d}}$

LOẠI 1: Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  để  $A \in \mathbb{Z}$

\* Nếu  $A = \frac{a}{cx+d}$  thì ta làm như sau:

+ Lập luận:  $A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$  Mẫu thức là  $U(a)$

+ Liệt kê  $U(a)$

+ Lập bảng: Mẫu thức bằng  $U(a)$  tìm ra  $x$

\* Nếu  $A = \frac{a}{c\sqrt{x+d}}$  thì ta làm như sau:

+ Với điều kiện của  $x$ , ta xét hai trường hợp xảy ra:

+ Trường hợp 1: Nếu  $x$  không là số chính phương  $\Rightarrow c\sqrt{x+d}$  là số vô tỉ  $\Rightarrow A = \frac{a}{c\sqrt{x+d}}$

là số vô tỉ  $\Rightarrow A \notin \mathbb{Z}$  (loại trường hợp này)

+ Trường hợp 2: Nếu  $x$  là số chính phương  $\Rightarrow A = \frac{a}{c\sqrt{x+d}} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow c\sqrt{x+d} \in U(a)$ . Khi

đó lập bảng  $U(a)$  và tìm giá trị  $x$  thỏa mãn

**Chú ý:** Giá trị  $x \in \mathbb{Z}$  tìm được phải thỏa mãn điều kiện của biểu thức rút gọn mới nhận.

**VD:** Cho  $A = \frac{3}{2\sqrt{x+1}}$ . Tìm  $x$  nguyên để  $A$  nguyên.

+ Điều kiện  $x \geq 0$

+ Trường hợp 1: Nếu  $x$  không là số chính phương  $\Rightarrow 2\sqrt{x+1}$  là số vô tỉ  $\Rightarrow A = \frac{3}{2\sqrt{x+1}}$

là số vô tỉ  $\Rightarrow A \notin \mathbb{Z}$  (loại trường hợp này)

+ Trường hợp 2: Nếu  $x$  là số chính phương  $\Rightarrow A = \frac{3}{2\sqrt{x+1}} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} \in U(3)$ .

$2\sqrt{x+1}$	-3	1	1	3
$\sqrt{x}$	-2	-1	0	1
$x$	$\emptyset$	$\emptyset$	T/M	T/M

**LOẠI 2:** Tìm  $x$  để  $A \in \mathbb{Z}$  thường áp dụng với biểu thức rút gọn  $A = \frac{a}{c\sqrt{x+d}}$ .

**Phương pháp:**

- + Xuất phát từ điều kiện  $\sqrt{x} \geq 0$  rồi suy ra miền bị chặn của  $A$  ( $m \leq A \leq r$ )
- + Chọn các giá trị nguyên  $a_1$  thuộc miền chặn rồi giải phương trình  $A = a_1$  để tìm  $x$ .
- + Kết luận giá trị  $x$  thoả mãn.

**VD1:** Cho  $A = \frac{7}{2\sqrt{x+3}}$ . Tìm  $x$  để  $A \in \mathbb{Z}$ .

ĐK:  $x \geq 0 \Rightarrow 2\sqrt{x+3} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{7}{2\sqrt{x+3}} \leq \frac{7}{3}$ . Do đó  $0 < A \leq \frac{7}{3}$  mà  $A \in \mathbb{Z} \Rightarrow A \in \{1; 2\}$

Với  $A = 1 \Rightarrow \frac{7}{2\sqrt{x+3}} = 1 \Rightarrow 2\sqrt{x+3} = 7 \Rightarrow x = 4$

Với  $A = 2 \Rightarrow \frac{7}{2\sqrt{x+3}} = 2 \Rightarrow 2\sqrt{x+3} = \frac{7}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{16}$

**VD2:** Cho  $A = \frac{-5}{2\sqrt{x+1}}$ . Tìm  $x$  để  $A \in \mathbb{Z}$ .

ĐK:  $x \geq 0 \Rightarrow 2\sqrt{x+1} \geq 1 \Rightarrow \frac{-5}{2\sqrt{x+1}} \geq -5$

Do đó  $-5 \leq A < 0$  mà  $A \in \mathbb{Z} \Rightarrow A \in \{-5; -4; -3; -2; -1\}$ .

Giải phương trình  $A =$  giá trị nguyên  $\Rightarrow$  Tìm được  $x$

**II/ Biểu thức rút gọn có dạng  $A = \frac{a\sqrt{x+b}}{c\sqrt{x+d}}$**

**Phương pháp tách phần nguyên:**

+ Lấy tử chia cho mẫu được thương là số  $k \in \mathbb{Z}$  và dư số  $m \in \mathbb{Z}$

+ Ta có:  $A = \frac{k(c\sqrt{x+d}) + m}{c\sqrt{x+d}} = k + \frac{m}{c\sqrt{x+d}}$

+ Việc tìm  $x$  để  $A$  nguyên quy về bài toán tìm  $x$  để  $\frac{m}{c\sqrt{x+d}}$  nguyên như phần I)

**VD1:** Cho  $A = \frac{2\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+3}}$  tìm  $x \in \mathbb{Z}$  để  $A \in \mathbb{Z}$

Ta có  $A = \frac{2(\sqrt{x+3}) - 2}{\sqrt{x+3}} = 2 - \frac{2}{\sqrt{x+3}}$

Với  $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x+3}} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sqrt{x+3} \in U(2)$  và  $x$  là số chính phương  $\Rightarrow x$ .



**VD2:** Cho  $A = \frac{2\sqrt{x+7}}{\sqrt{x+1}}$ . Tìm  $x$  để  $A \in \mathbb{Z}$

$$\text{Ta có } A = \frac{2(\sqrt{x+1})+6}{\sqrt{x+1}} = 2 + \frac{6}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{6}{\sqrt{x+1}} \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Với } \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow 0 < \frac{6}{\sqrt{x+1}} \leq 6 \Rightarrow \frac{6}{\sqrt{x+1}} \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow x$$

## BÀI TẬP VẬN DỤNG

**Bài 1:** Cho biểu thức  $A = \frac{2x}{x^2 - 3x} + \frac{2x}{x^2 - 4x + 3} + \frac{x}{x-1}$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm  $x$  nguyên để A nguyên.

**Bài 2:** Cho biểu thức:  $P = \frac{\sqrt{a+2}}{\sqrt{a+3}} - \frac{5}{a+\sqrt{a}-6} + \frac{1}{2-\sqrt{a}}$       ĐS:  $P = \frac{\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}-2}$

a/ Rút gọn P

b/ Tìm  $a \in \mathbb{Z}$  để P nguyên.

**Bài 3:** Cho biểu thức:  $P = \left( \frac{3\sqrt{a}}{a+\sqrt{ab}+b} - \frac{3a}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \right) : \frac{(a-1)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{2a+2\sqrt{ab}+2b}$

a/ Rút gọn P

b) Tìm những giá trị nguyên của  $a$  để P có giá trị nguyên

**Bài 4:** Cho biểu thức:  $A = \left( \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} \right) : \frac{2(x-2\sqrt{x}+1)}{x-1}$

1) Rút gọn A.

2) Tìm  $x$  nguyên để A có giá trị nguyên.

**Bài 5:** Cho biểu thức:  $Q = \left( \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ , với  $x > 0$ ;  $x \neq 1$ .

a) Chứng minh rằng  $Q = \frac{2}{x-1}$

b) Tìm số nguyên  $x$  lớn nhất để Q có giá trị nguyên.

**Bài 6:** Cho biểu thức:  $A = \frac{2}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}}{x-4\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

a) Rút gọn A

b) Tìm  $x \in \mathbf{Z}$  để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

**Bài 7.** Cho biểu thức  $P = 2\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1+1}\right) : \frac{\sqrt{x-1}}{x+\sqrt{x-1}-1}$

a) Rút gọn P .

c) Tìm x để P là một số nguyên

**Bài 8\*:** Cho biểu thức  $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}-2}\right) \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$

a) Rút gọn A.

c) Tìm tất cả các giá trị của x để  $B = \frac{7}{3}A$  đạt giá trị nguyên.

# CHUYÊN ĐỀ 6: TÌM GTLN – GTNN CỦA BIỂU THỨC RÚT GỌN

**I/ Biểu thức rút gọn có dạng  $A = ax + b\sqrt{x} + c$  (có thể khuyết  $c$ )**

**Phương pháp:**

+ Biến đổi A về dạng:  $A = \pm(e\sqrt{x} + f)^2 \pm d$ .

+ Dựa vào  $\pm(e\sqrt{x} + f)^2$  để lập luận tìm ra GTLN, GTNN của A.

**VD:** Cho  $A = x - \sqrt{x}$ . Tìm GTNN của A

$$\text{Ta có: } A = \left(x - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$\text{Vì } \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \forall x \geq 0 \Rightarrow A \geq -\frac{1}{4}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow A_{\min} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

**II/ Biểu thức rút gọn có dạng  $A = \frac{a}{c\sqrt{x} + d}$  (với  $c, d$  cùng dấu)**

+ Nếu  $c, d$  mang dấu dương thì:  $c\sqrt{x} + d \geq d \forall x \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{c\sqrt{x} + d} \leq \frac{1}{d}$

Lúc này  $A_{\max}$  hay  $A_{\min}$  tùy thuộc vào dấu của tử số a.

+ Nếu  $c, d$  mang dấu âm thì đổi dấu âm lên tử và làm như trên.

**VD1:** Cho  $A = \frac{3}{2\sqrt{x} + 5}$ . Tìm GTLN của A

$$\text{Ta có } 2\sqrt{x} + 5 \geq 5 \forall x \geq 0 \Rightarrow \frac{-5}{2\sqrt{x} + 5} \leq \frac{3}{5} \Rightarrow A_{\max} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

**VD2:** Cho  $A = \frac{-5}{3\sqrt{x} + 7}$ . Tìm GTNN của A.

$$\text{Ta có } 3\sqrt{x} + 7 \geq 7 \forall x \Rightarrow \frac{-5}{3\sqrt{x} + 7} \geq \frac{-5}{7} \Rightarrow A_{\min} = \frac{-5}{7} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

**III/ Biểu thức rút gọn có dạng  $A = \frac{a}{bx + c\sqrt{x} + d}$**

**Phương pháp:**

+ Đặt  $f(x) = bx + c\sqrt{x} + d$  đưa  $f(x)$  về dạng  $f(x) = \pm k(e\sqrt{x} + f)^2 + h$

+ Lập luận  $\pm k(e\sqrt{x} + f)^2$  rồi suy ra  $\begin{cases} f(x) \geq h \\ f(x) \leq h \end{cases}$

+ Từ đó nghịch đảo biểu thức  $f(x)$  rồi  $\Rightarrow \begin{cases} A \geq \frac{a}{h} \\ A \leq \frac{a}{h} \end{cases}$ .

+ Từ đó tìm được  $A_{max}, A_{min}$ .

**VD:** Cho biểu thức  $A = \frac{2}{-x + \sqrt{x} + 1}$ . Tìm GTNN của A.

Ta có:  $f(x) = -x + \sqrt{x} + 1 = -\left(x - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} + 1 = -\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

Vì  $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0 \forall x \geq 0 \Rightarrow f(x) \leq \frac{3}{4}$

$\Rightarrow A = \frac{2}{f(x)} \geq \frac{8}{3} \Rightarrow A_{min} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ .

**IV/ Biểu thức rút gọn có dạng**  $A = \frac{a\sqrt{x}}{bx + c\sqrt{x} + d}$  (với  $b, c, d$  cùng dấu)

**Phương pháp:** Chia cả tử và mẫu cho  $\sqrt{x}$  được  $A = \frac{a}{b\sqrt{x} + \frac{d}{\sqrt{x}} + c}$

Áp dụng bất đẳng thức Co-si cho  $b\sqrt{x} + \frac{d}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{bd}$

Từ đó suy ra  $A_{max}, A_{min}$ .

## BÀI TẬP VẬN DỤNG

**Bài 1:** Cho biểu thức:  $P = \left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+3}{x-9}\right) : \left(\frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - 1\right)$

a/ Rút gọn P

b/ Tìm giá trị nhỏ nhất của P

**Bài 2:** Cho biểu thức:  $P = \frac{a^2 + \sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1} - \frac{2a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1$

a/ Rút gọn P

b/ Tìm giá trị nhỏ nhất của P

**Bài 3:** Cho biểu thức:  $P = \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right] : \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3}}$

a/ Rút gọn P

b/ Cho  $x \cdot y = 16$ . Xác định  $x, y$  để P có giá trị nhỏ nhất

**Bài 4:** Cho biểu thức  $P = \frac{1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{5}{x - \sqrt{x} - 6} - \frac{\sqrt{x} - 2}{3 - \sqrt{x}}$

a/ Rút gọn P

b/ Tìm GTLN của P.

**Bài 5:** Cho biểu thức:  $P = \left( \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \right) : \left( 1 + \frac{x + y + 2xy}{1 - xy} \right)$

a/ Rút gọn P

b/ Tìm GTLN của P.

**Bài 6:** Cho biểu thức:  $P = \frac{x\sqrt{x} - 3}{x - 2\sqrt{x} - 3} - \frac{2(\sqrt{x} - 3)}{\sqrt{x} + 1} + \frac{\sqrt{x} + 3}{3 - \sqrt{x}}$

a/ Rút gọn P

b/ Tìm giá trị nhỏ nhất của P

**Bài 7:** Xét biểu thức  $P = \left( \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 1} - \frac{\sqrt{x} + 2}{x + 2\sqrt{x} + 1} \right) \cdot \frac{(1 - x)^2}{2}$ .

a) Rút gọn P.

b) Tìm giá trị lớn nhất của P.

**Bài 8:** Xét biểu thức  $A = \frac{a^2 + \sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1} - \frac{2a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1$ .

a) Rút gọn A.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

**Bài 9:** Cho biểu thức  $P = \frac{x - 3}{\sqrt{x - 1} - \sqrt{2}}$

a) Rút gọn P.

b) Tính giá trị nhỏ nhất của P.

**Bài 10:** Cho biểu thức  $A = \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}$  với  $x > 0$

a) Rút gọn A.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của A

## CHUYÊN ĐỀ 7: RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN DẠNG CHỮ.

### TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC.

#### PHƯƠNG PHÁP

##### \* Rút gọn biểu thức.

**B1:** Tìm tập xác định (Nếu bài chưa cho).

+ Điều kiện biểu thức trong căn dương (không âm).

+ Điều kiện mẫu thức khác 0.

**B2:** Sử dụng các phương pháp như: Thừa số chung; hằng đẳng thức; nhân liên hợp; Quy đồng để thu gọn biểu thức.

##### \* Tính giá trị biểu thức

+ Nếu bài cho trước giá trị  $x$  thì chỉ cần thay giá trị  $x$  vào biểu thức rút gọn.

**Chú ý:** Nếu số  $x$  đã cho có dạng hằng đẳng thức thì biến đổi số  $x$  về dạng  $(a \pm b)^2$ , khi đó nếu thay số  $x$  vào căn bậc 2 thì sẽ triệt tiêu được căn.

+ Nếu số  $x$  cho thỏa mãn một phương trình nào đó, thì ta tiến hành giải phương trình để tìm  $x$  (chỉ lấy nghiệm  $x$  thỏa mãn điều kiện xác định của biểu thức và phương trình). Thay giá trị  $x$  tìm được vào biểu thức rút gọn.

#### BÀI TẬP VẬN DỤNG

**Bài 1:** Cho biểu thức:  $P = \left( \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{2x}+1} + \frac{\sqrt{2x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2x}-1} - 1 \right) : \left( 1 + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{2x}+1} - \frac{\sqrt{2x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2x}-1} \right)$

a/ Rút gọn P

b/ Tính giá trị của P khi  $x = \frac{1}{2} \cdot (3 + 2\sqrt{2})$

**Bài 2:** Cho biểu thức:  $P = \left( \frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left( \frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right)$

a/ Rút gọn P

b/ Tính giá trị của P với  $x = 7 - 4\sqrt{3}$

**Bài 3:** Cho biểu thức:  $P = \left( \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1} + \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1} - 1 \right) : \left( \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1} - \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1} + 1 \right)$

a/ Rút gọn P

b/ Tính giá trị của P nếu  $a = 2 - \sqrt{3}$  và  $b = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}}$

**Bài 4:** Cho biểu thức:  $P = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + 4\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \frac{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$

a/ Tìm điều kiện để P có nghĩa.

b) Rút gọn P

c) Tính giá trị của P khi  $a = 2\sqrt{3}$  và  $b = \sqrt{3}$

**Bài 5:** Cho biểu thức :  $P = \left( \frac{2\sqrt{x} + x}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left( 1 - \frac{\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x} + 1} \right)$

a/ Rút gọn P

b) Tính  $\sqrt{P}$  khi  $x = 5 + 2\sqrt{3}$

**Bài 6:** Cho biểu thức:

$$P = \left( \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{3\sqrt{ab}}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}} \right) : \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{3\sqrt{ab}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} \right) : \frac{a - b}{a + \sqrt{ab} + b} \right]$$

a/ Rút gọn P

b) Tính P khi  $a = 16$  và  $b = 4$

**Bài 7:** Cho biểu thức:  $A = \left( \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{a}{b - a} \right) : \left( \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{a}{a + b + 2\sqrt{ab}} \right)$  với  $a > 0, b > 0, a \neq b$ .

a) Rút gọn biểu thức:  $A - \frac{a + b + 2\sqrt{ab}}{b - a}$ .

b) Tính giá trị của A khi  $a = 7 - 4\sqrt{3}$  và  $b = 7 + 4\sqrt{3}$ .

**Bài 8:** Cho  $A = \left( \frac{2 + x}{2 - x} - \frac{2 - x}{2 + x} - \frac{4x^2}{x^2 - 4} \right) : \frac{x - 3}{2x - x^2}$

a/ Rút gọn A.

b/ Tính giá trị của A khi  $|x| = 1$

**Bài 9:** Cho biểu thức:  $D = \frac{1}{2\sqrt{x} - 2} - \frac{1}{2\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x}}{1 - x}$

a) Rút gọn D

b) Tính giá trị của D với  $x = \frac{4}{9}$

# CHUYÊN ĐỀ 8

## PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN BẬC HAI

**I/ DẠNG 1:**  $\sqrt{f(x)} = e$  với  $e \geq 0$  là hằng số.

**1/ Trường hợp:**  $f(x) = ax + b$  hoặc  $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$  thì:

**Bước 1:** Giải điều kiện  $f(x) \geq 0$  để tìm điều kiện của  $x$

**Bước 2:** Bình phương 2 vế phương trình (để làm mất căn).

**Bước 3:** Giải phương trình để tìm nghiệm  $x$  thỏa mãn điều kiện.

**Ví dụ 1:** Giải các phương trình sau:

a)  $\sqrt{2x-1} = 3$       b)  $\sqrt{\frac{x-1}{2x+3}} = 6$       c)  $\sqrt{\frac{2x-3}{x-1}} = 2$       d)  $\frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}} = 2$

**2/ Trường hợp:**  $f(x) = ax^2 + bx + c$  thì kiểm tra biểu thức  $f(x)$

\* **Nếu**  $f(x) = ax^2 + bx + c = (Ax \pm B)^2$  tức là có dạng hằng đẳng thức thì: KHAI CĂN.

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow |Ax \pm B| = e \Leftrightarrow \begin{cases} Ax \pm B = e \\ Ax \pm B = -e \end{cases} \Rightarrow \text{Tìm } x$$

**Ví dụ 2:** Giải các phương trình sau:  $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 3$

Hướng dẫn

Vì  $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ , ta có

$$\text{PT} \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2} = 3 \Leftrightarrow |x-2| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 3 \\ x-2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -1 \end{cases}$$

\* **Nếu**  $f(x) = ax^2 + bx + c$  không có dạng hằng đẳng thức thì: BÌNH PHƯƠNG 2 VẾ.

**Bước 1:** Viết điều kiện  $f(x) \geq 0$ .

**Bước 2:** Bình phương 2 vế phương trình (để làm mất căn).

**Bước 3:** Giải phương trình bậc hai có được bằng cách: Phân tích thành nhân tử, đưa về phương trình tích.

**Ví dụ 3:** Giải phương trình sau:  $\sqrt{x^2 - 4x - 6} = \sqrt{15}$

Hướng dẫn

Nhận xét:  $x^2 - 4x - 6$  không có dạng  $(Ax \pm B)^2$  nên ta không đưa được về phương trình trị tuyệt đối như Ví dụ 2.

Điều kiện:  $x^2 - 4x - 6 \geq 0$



Bình phương hai vế phương trình ta được:

$$x^2 - 4x - 6 = 15 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 21 = 0 \Leftrightarrow (x - 7)(x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 7 \text{ hoặc } x = -3$$

Thay x tìm được vào điều kiện ta thấy cả  $x = 7$  và  $x = -3$  đều thỏa mãn

Vậy phương trình có nghiệm  $x = 7$ ;  $x = -3$

**Ví dụ 4:** Giải phương trình sau:  $\sqrt{(x-2)(x+3)} = 5$

Hướng dẫn

Nhận xét: Nhìn Ví dụ 4 có vẻ khác với dạng Ví dụ 3 nhưng thực ra là cùng một dạng

$$\text{Vì } f(x) = (x-2)(x+3) = x^2 + x - 6$$

Do đó cách giải tương tự Ví dụ 3:

$$\text{Điều kiện: } (x-2)(x+3) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -3 \end{cases}$$

Bình phương hai vế phương trình ta được:

$$(x-2)(x+3) = 25 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 25 \Leftrightarrow x^2 + x - 31 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} - 31 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{125}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{125}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{2} = \frac{15}{2} \\ x + \frac{1}{2} = -\frac{15}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \text{ (t/m)} \\ x = -8 \text{ (t/m)} \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm  $x = 7$ ;  $x = -8$

**II/ DẠNG 2:**  $\sqrt{f(x)} = g(x)$ .

**1/ Phương pháp.**

**Bước 1:** Viết điều kiện của phương trình:  $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

Nếu  $f(x)$  có dạng  $(Ax \pm B)^2$  thì chỉ cần điều kiện  $g(x) \geq 0$

**Bước 2:** Nhận dạng từng loại từng dạng tương ứng với phương pháp giải sau:

\* **LOẠI 1:** Nếu  $f(x)$  có dạng hằng đẳng thức  $(Ax \pm B)^2$  thì **KHAI CĂN** đưa về phương trình trị tuyệt đối để giải.

\* **LOẠI 2:** Nếu  $f(x) = Ax \pm B$  và  $g(x) = Ex \pm D$  thì dùng phương pháp **BÌNH PHƯƠNG HAI VẾ**.

\* **LOẠI 3:** Nếu  $f(x) = Ax^2 + Bx + C$  (không có dạng hằng đẳng thức  $(Ax \pm B)^2$ ) và  $g(x) = Ex \pm D$  thì dùng phương pháp **BÌNH PHƯƠNG HAI VẾ**.

\* **LOẠI 4:** Nếu  $f(x) = Ax^2 + Bx + C$  và  $g(x) = Ex^2 + Dx + F$  thì thử phân tích  $f(x)$  và  $g(x)$  thành nhân tử, nếu chúng có nhân tử chung thì đặt nhân tử chung đưa về phương trình tích.

**Bước 3:** Kiểm tra nghiệm tìm được xem có thỏa mãn điều kiện không, rồi kết luận nghiệm.

## 2/ Các ví dụ.

**Ví dụ 5:** Giải phương trình:  $\sqrt{(2x+3)^2} = x-5$

Hướng dẫn

Điều kiện:  $x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$

$$\text{PT} \Leftrightarrow |2x+3| = x-5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 = x-5 \\ 2x+3 = -(x-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện  $\Rightarrow$  Phương trình vô nghiệm.

**Ví dụ 6:** Giải phương trình:  $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = x + 7$

Hướng dẫn

Nhận xét:  $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$  dạng bình phương một hiệu.

Điều kiện:  $x+7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -7$

$$\text{PT} \Leftrightarrow |x-3| = x+7 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = x+5 \\ x-3 = -(x+5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \emptyset \\ x = -1 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện  $\Rightarrow$  Phương trình có nghiệm  $x = -1$ .

**Ví dụ 7:** Giải phương trình:  $\sqrt{2x-3} = x-1$

Hướng dẫn

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$$

Bình phương hai vế ta có:

$$2x-3 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Theo điều kiện  $\Rightarrow$  Phương trình có nghiệm  $x = 2$ .

**Ví dụ 8:** Giải phương trình:  $\sqrt{x^2 - 5x - 6} = x - 2$

Hướng dẫn

Nhận xét:  $f(x) = x^2 - 5x - 6$  không có dạng hằng đẳng thức  $(Ax \pm B)^2$  nên để phá căn ta dùng phương pháp **BÌNH PHƯƠNG HAI VẾ**.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2 - 5x - 6 \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{PT} \Leftrightarrow x^2 - 5x - 6 = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x = -10$$

Thay  $x = -10$  vào điều kiện thấy không thỏa mãn

Vậy phương trình vô nghiệm.

**3/ Bài tập vận dụng:** Giải các phương trình sau:

a)  $\sqrt{x^2 - 8x + 16} = 4 - x$

b)  $\sqrt{x^2 - 2x} = 2 - x$

c)  $\sqrt{2x + 27} - 6 = x$

**III/ DẠNG 3:**  $\sqrt{[f(x)]^2} \pm \sqrt{[h(x)]^2} = g(x)$ .

**Bước 1:** Nếu bản thân  $f(x)$  và  $g(x)$  có chứa căn bậc hai thì có điều kiện trong căn.

**Bước 2:** Đưa phương trình về dạng phương trình trị tuyệt đối.

$$|f(x)| \pm |h(x)| = g(x)$$

**Bước 3:** Xét dấu trị tuyệt đối và giải phương trình.

**Ví dụ 9:** Giải phương trình  $\sqrt{x+4-4\sqrt{x}} - \sqrt{x+9-6\sqrt{x}} = 1$

Hướng dẫn

Điều kiện:  $x \geq 0$

Với phương trình này ta dễ dàng nhận thấy:

$$x + 4 - 4\sqrt{x} = (\sqrt{x} - 2)^2 \qquad x + 9 - 6\sqrt{x} = (\sqrt{x} - 3)^2$$

$$\text{PT} \Leftrightarrow |\sqrt{x} - 2| - |\sqrt{x} - 3| = 1$$

**TH1:** Nếu  $\begin{cases} \sqrt{x} - 2 \geq 0 \\ \sqrt{x} - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 9$  ta có

$$0 \cdot \sqrt{x} = 0 \Rightarrow \text{Pt có vô số nghiệm } x \geq 0$$

**TH2:** Nếu  $\begin{cases} \sqrt{x}-2 \geq 0 \\ \sqrt{x}-3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x < 9 \end{cases}$  ta có

$$(\sqrt{x}-2)-(3-\sqrt{x})=1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x}=6 \Leftrightarrow x=9 \text{ (Loại)}$$

**TH3:** Nếu  $\begin{cases} \sqrt{x}-2 < 0 \\ \sqrt{x}-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x \geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$

**TH4:** Nếu  $\begin{cases} \sqrt{x}-2 < 0 \\ \sqrt{x}-3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow x < 4$  ta có

$$(2-\sqrt{x})-(3-\sqrt{x})=1 \Leftrightarrow 0.\sqrt{x}=2 \Rightarrow \text{Pt có vô nghiệm}$$

Kết luận: Vậy phương trình có vô số nghiệm  $x \geq 0$

**Ví dụ 10: (HS tự giải)** Giải phương trình:  $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 4$

#### IV/ PHƯƠNG PHÁP ĐẶC BIỆT TRONG GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN.

Trong mục này THẦY sẽ lấy ví dụ cụ thể để các em làm quen, từ đó vận dụng cho việc giải các phương trình tương tự.

#### 1/ PHƯƠNG PHÁP đặt ẩn phụ đưa về phương trình bậc hai hoặc phương trình đơn giản hơn.

**Ví dụ 11:** Giải phương trình  $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$

Hướng dẫn

Điều kiện:  $x \geq 0$

Đặt  $\sqrt{x} = t \geq 0 \Rightarrow x = t^2$ , ta có phương trình:  $t^2 - 5t + 6 = 0$  (Cách giải phương trình bậc 2 chúng ta sẽ được học trong chương sau).

Với phương trình này chúng ta cũng hoàn toàn có thể phân tích vế trái thành nhân tử để đưa về phương trình tích.

**Ví dụ 12:** Giải phương trình:  $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} = 5$

Hướng dẫn

Điều kiện:  $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -1$

Đặt  $\sqrt{x+1} = t \geq 0 \Rightarrow x+1 = t^2$ , ta có phương trình

$$t + \sqrt{t^2 + 5} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{t^2 + 5} = 5 - t \quad (*)$$

Phương trình (\*) thuộc phương trình **LOẠI 3 – DẠNG 2:**

Điều kiện (\*) là:  $5 - t \geq 0 \Leftrightarrow t \leq 5$ , BÌNH PHƯƠNG 2 VẾ của (\*) ta có

$$t^2 + 5 = 25 - 10t + t^2 \Leftrightarrow t = 2 \text{ (thỏa mãn điều kiện của } 0 \leq t \leq 5)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 2 \Leftrightarrow x+1 = 4 \Leftrightarrow x = 3$$

Vậy phương trình có nghiệm  $x = 3$ .

**Ví dụ 13:** Giải phương trình  $x^2 - 2x + 3\sqrt{x^2 - 2x - 3} = 7$

Hướng dẫn

Điều kiện:  $x^2 - 2x - 3 \geq 0$

$$\text{PT} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 + 3\sqrt{x^2 - 2x - 3} - 10 = 0$$

Đặt  $t = \sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 0 \Rightarrow t^2 = x^2 - 2x - 3$  ta có:

$$t^2 + 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow (t - 2)(t + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -5 \end{cases}$$

Với  $t = -5$  (loại)

$$\text{Với } t = 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 = 8 \begin{cases} x - 1 = 2\sqrt{2} \\ x - 1 = -2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\sqrt{2} \\ x = 1 - 2\sqrt{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

**Ví dụ 14: (HS tự giải)** Giải phương trình:  $x^2 - 6x + 3\sqrt{x^2 - 6x + 7} = 5$

## 2/ PHƯƠNG PHÁP đánh giá biểu thức dưới dấu căn lớn hơn hoặc nhỏ hơn một hằng số.

**Áp dụng với phương trình:**  $\sqrt{[f(x)]^2 + c} + \sqrt{[h(x)]^2 + d} = \pm [g(x)]^2 + e$  với  $\begin{cases} c > 0 \\ d > 0 \\ c + d = e \end{cases}$

Thường thì chúng ta chưa nhìn thấy ngay dạng phương trình này, mà đôi khi tách một hệ số nào đó mới có  $[f(x)]^2$ ;  $[h(x)]^2$  và  $[g(x)]^2$

**Ví dụ 15:** Giải phương trình  $\sqrt{3x^2 + 6x + 12} + \sqrt{5x^4 - 10x^2 + 30} = 8$

Hướng dẫn

Nhận xét:

$$3x^2 + 6x + 12 = 3(x^2 + 2x + 1) + 9 = 3(x + 1)^2 + 9 \geq 9 \Rightarrow \sqrt{3x^2 + 6x + 12} \geq 3$$

$$5x^4 - 10x^2 + 30 = 5(x^2 - 2x + 1) + 25 = 5(x - 1)^2 + 25 \geq 25 \Rightarrow \sqrt{5x^4 - 10x^2 + 30} \geq 5$$

$$\text{Do đó: } \sqrt{3x^2 + 6x + 12} + \sqrt{5x^4 - 10x^2 + 30} \geq 8$$

$$\text{Phương trình thỏa mãn} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x^2 + 6x + 12} = 3 \\ \sqrt{5x^4 - 10x^2 + 30} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+1)^2 + 9 = 9 \\ 5(x^2 - 1)^2 + 25 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$$

Vậy phương trình có nghiệm  $x = -1$

**Ví dụ 16:** Giải phương trình:  $\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2$

Hướng dẫn

Nhận xét:

$$3x^2 + 6x + 7 = 3(x^2 + 2x + 1) + 4 = 3(x+1)^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow \sqrt{3x^2 + 6x + 7} \geq 2$$

$$5x^2 + 10x + 14 = 5(x^2 - 2x + 1) + 9 = 5(x+1)^2 + 9 \geq 9 \Rightarrow \sqrt{5x^2 + 10x + 14} \geq 3$$

$$4 - 2x - x^2 = 5 - (x^2 + 2x + 1) = 5 - (x+1)^2 \leq 5$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} \sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} \geq 5 \\ 4 - 2x - x^2 \leq 5 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình thỏa mãn} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x^2 + 6x + 7} = 2 \\ \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 3 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x = -1 \\ 4 - 2x - x^2 = 5 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm  $x = -1$

## CHUYÊN ĐỀ 9: GIẢI PT & BPT CÓ CHỨA BIỂU THỨC RÚT GỌN.

### PHƯƠNG PHÁP

**Đề giải dạng toán này:** Ta cần nắm vững kỹ năng giải một số phương trình, bất phương trình có chứa căn thức bậc 2; phương trình, bất phương trình có chứa ẩn ở mẫu; phương trình, bất phương trình có chứa dấu giá trị tuyệt đối. Các kiến thức này thầy sẽ hướng dẫn các em trong chuyên đề “CÁC DẠNG PHƯƠNG TRÌNH, BPT chương trình THCS”.

**Chú ý:** Phải dựa vào điều kiện xác định của biểu thức rút gọn và điều kiện của phương trình (Bất phương trình) để kết luận nghiệm (tập hợp giá trị) x phù hợp.

### BÀI TẬP VẬN DỤNG

\* Loại bài tập dễ.

**Bài 1:** Cho biểu thức:  $P = \left( \frac{\sqrt{x}-1}{3\sqrt{x}-1} - \frac{1}{3\sqrt{x}+1} + \frac{8\sqrt{x}}{9x-1} \right) : \left( 1 - \frac{3\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}+1} \right)$

a/ Rút gọn P

b/ Tìm các giá trị của x để  $P = \frac{6}{5}$

**Bài 2:** Cho biểu thức:  $P = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$

a/ Rút gọn P

b/ Tìm các giá trị của x để  $P = \frac{1}{2}$

c/ Chứng minh  $P \leq \frac{2}{3}$

**Bài 3:** Cho biểu thức:  $P = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+m} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-m} - \frac{m^2}{4x-4m^2}$  với  $m > 0$

a/ Rút gọn P

b/ Tính x theo m để  $P = 0$ .

**Bài 4:** Cho biểu thức:  $P = \frac{a^2 + \sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1} - \frac{2a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1$

a/ Rút gọn P

b/ Tìm a để  $P = 2$

**Bài 5:** Cho biểu thức:  $P = \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}} + \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} + \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}\right)$

a/ Rút gọn P

b) Với giá trị nào của a thì  $P = 7$

**Bài 6:** Cho biểu thức:  $P = \left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)$

a/ Rút gọn P

b) Tìm các giá trị của a để  $P < 0$

c) Tìm các giá trị của a để  $P = -2$

**Bài 7:** Cho biểu thức :  $P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}}\right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$

a/ Rút gọn P

b) Chứng minh rằng  $P > 0 \quad \forall x \neq 1$

**Bài 8:** Cho biểu thức:  $P = 1 : \left(\frac{1}{2+\sqrt{x}} + \frac{\frac{3x}{2}}{4-x} - \frac{2}{4-2\sqrt{x}}\right) : \frac{1}{4-2\sqrt{x}}$

a/ Rút gọn P

b) Tìm giá trị của x để  $P = 20$

**Bài 9:** Cho biểu thức :  $P = \left(\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}}{y-x}\right) : \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + \sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

a/ Rút gọn P

b) Chứng minh  $P \geq 0$

**Bài 10:** Cho biểu thức:  $P = \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+3} - \frac{5}{a+\sqrt{a}-6} + \frac{1}{2-\sqrt{a}}$

a/ Rút gọn P

b/ Tìm giá trị của a để  $P < 1$

**Bài 11:** Cho biểu thức:  $P = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right)$

a) Rút gọn P

b) Tìm giá trị của x để  $P < 0$



**\* Loại bài nâng cao.**

**Bài 12: (Hà Nội 2014 – 2015):** Biểu thức  $P = \left( \frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$  với  $x > 0$  và  $x \neq 1$

a) Rút gọn P.

b) Tìm các giá trị của x để  $2P = 2\sqrt{x} + 5$

**Bài 13: (Chuyên Amsterdam):** Cho biểu thức

$$A = \frac{3}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-3}{x-1} \quad B = \frac{x+2}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \quad \text{với } x > 0 \text{ và } x \neq 1$$

a) Rút gọn A và B

b) Tìm x để  $A = \frac{8}{3} \cdot B$

**Bài 14: (Chuyên Nguyễn Huệ):** Cho biểu thức

$$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5} \quad B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4} - \frac{x+12\sqrt{x}}{x-16} \quad \text{với } x > 0 \text{ và } x \neq 1$$

a) Rút gọn A và B

b) Tìm x để  $\frac{A}{B} = \frac{5}{6}$

**Bài 15: (Hà Nội năm 2017 - 2018):** Cho biểu thức

$$A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5} \quad B = \frac{3}{\sqrt{x}+5} + \frac{20-\sqrt{x}}{x-25} \quad \text{với } x \geq 0 \text{ và } x \neq 25$$

a) Rút gọn B

b) Tìm x để  $A = B \cdot |x-4|$

**Bài 16:** Cho biểu thức  $C = \frac{1}{2\sqrt{x}-2} - \frac{1}{2\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}}{1-x}$

a) Rút gọn biểu thức C.

c) Tính giá trị của x để  $|C| = \frac{1}{3}$ .

**Bài 17:** Với  $x \geq 0$ ,  $x \neq 9$  cho hai biểu thức

$$A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} \quad \text{và} \quad B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+3}{x-9}$$

a) Rút gọn biểu thức B

b) Tìm các giá trị của x để  $B/A < -1/3$



# CHUYÊN ĐỀ 10: CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM SỐ BẬC NHẤT

## A/ LÝ THUYẾT CƠ BẢN.

### I. Hàm số bậc nhất: $y = ax + b$ ( $a \neq 0$ )

+ TXĐ :  $\mathbb{R}$

+ Chiều biến thiên :  $a > 0$  hàm số đồng biến

$a < 0$  hàm số nghịch biến.

+ Đồ thị: là đường thẳng cắt trục tung tại điểm  $A(0; b)$ , cắt trục hoành tại điểm  $B(-\frac{b}{a}; 0)$

$\Rightarrow$  Để vẽ đồ thị hàm số ta cần xác định điểm  $A(0; b)$  trên Oy và điểm  $B(-\frac{b}{a}, 0)$  trên

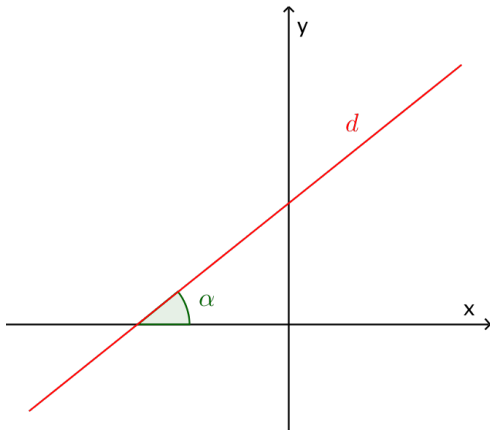
Ox, khi đó đường thẳng đi AB là đồ thị của hàm số  $y = ax + b$ .

+ Hệ số góc:  $a$  gọi là hệ số góc.

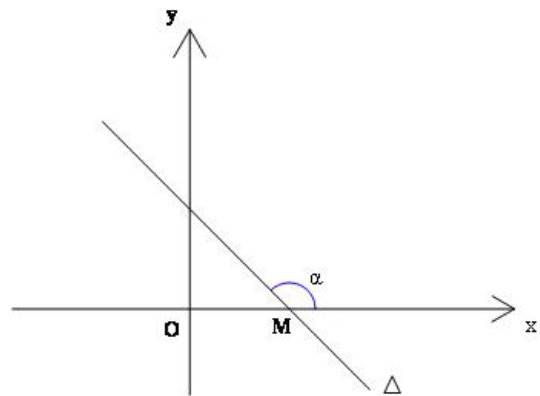
$a = \tan \alpha$  với  $\alpha$  là góc hợp bởi trục hoành Ox với đường thẳng đồ thị

Nếu  $\alpha$  là góc nhọn  $\Rightarrow a > 0$  và hàm số đồng biến

Nếu  $\alpha$  là góc tù  $\Rightarrow a < 0$  và hàm số nghịch biến



$\alpha$  nhọn ( $a > 0$ )



$\alpha$  tù ( $a < 0$ )

\* Do đồ thị hàm số bậc nhất là một đường thẳng, nên chúng ta cũng có thể viết hàm số bậc nhất theo phương trình đường thẳng có dạng :  $Ax + By + C = 0$ .

$\Rightarrow$  Rút về hàm số bậc nhất :  $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$  ( $B \neq 0$ )

### II. Chú ý với hàm số $y = ax + b$ .

\* Nếu  $a = 0$  thì  $y = b$  là **hàm hằng** có đồ thị là đường thẳng song song với trục hoành.

\* Nếu  $a \neq 0, b = 0$  thì ta có hàm số bậc nhất  $y = ax$ , có đồ thị là đường thẳng đi qua gốc tọa độ.

### III. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng.

Xét hai đường thẳng :  $y_1 = a_1 x + b_1$  (d<sub>1</sub>) ;  $y_2 = a_2 x + b_2$  (d<sub>2</sub>)

\*  $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow a_1 \cdot a_2 = -1$ .

\*  $d_1$  cắt  $d_2 \Leftrightarrow a_1 \neq a_2$

\*  $d_1 // d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$

\*  $d_1 \equiv d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$

### B/ CÁC DẠNG TOÁN HÀM SỐ BẬC NHẤT.

#### DẠNG 1: Nhận dạng hàm số bậc nhất.

##### I/ Phương pháp.

\* Hàm số bậc nhất  $y = ax + b$  ( $a \neq 0$ ).

\* Chú ý: Các hàm số đa thức  $y = f(x)$  sau phép biến đổi tương đương mà hàm số được đưa về dạng  $y = ax + b$  thì hàm số  $y = f(x)$  cũng là hàm số bậc nhất.

##### II/ Vận dụng.

**Bài 1 :** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc nhất ? xác định các hệ số **a** và **b**.

a)  $y = \frac{2}{x} + 3$       b)  $y = x^2 - x(x + 2) - 3$

c)  $y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$       d)  $y = (\sqrt{3} - 2)x + \frac{x}{2}$

d)  $y = 2x + 7$       e)  $y = \frac{\sqrt{5}}{3}x + 6$

**Bài 2:** Xác định **k** để hàm số  $y = k((\sqrt{x} - 3)^2 + (k + 1)(\sqrt{x} + 2)^2)$  là hàm số bậc nhất ?

#### DẠNG 2: Vẽ đồ thị hàm số.

##### I/ Phương pháp.

Đề vẽ đồ thị hàm số  $y = ax + b$  ( $a \neq 0$ ) ta cần xác định điểm A(0 ; b) trên Oy và điểm B( $-\frac{b}{a}$ , 0) trên Ox, khi đó đường thẳng nối AB là đồ thị của hàm số  $y = ax + b$ .

##### II/ Vận dụng.

Vẽ đồ thị các hàm số sau :

a)  $y = 2x + 1$       b)  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

c)  $y = -3x + 2$       d)  $y = -\frac{5}{2}x - 1$

### DẠNG 3: Xác định tính đồng biến, nghịch biến của hàm số.

#### I/ Phương pháp.

Hàm số bậc nhất  $y = ax + b$       ( $a \neq 0$ )

+ Đồng biến khi  $a > 0$

+ Nghịch biến khi  $a < 0$

#### II/ Vận dụng.

**Bài 1:** Trong các hàm số sau hàm số nào đồng biến, hàm số nào nghịch biến.

a)  $y = 2x - 1$       b)  $y = -3x + 5$       c)  $y = (\sqrt{3} - \sqrt{2})x$       d)  $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + 1$

**Bài 2:** Cho hàm số:  $y = (m - 1).x + m$  (d). Tìm m để hàm số đồng biến, nghịch biến ?

**Bài 3:** Trong các hàm số sau hàm số nào là bậc nhất ? Với các hàm số bậc nhất xác định các hệ số a, b của chúng và cho biết hàm số đó đồng biến hay nghịch biến ?

a)  $y = 3x + \sqrt{2}$       b)  $y = 1 - \sqrt{2}x$       c)  $y = \frac{-1}{2}x$       d)  $y = \frac{1}{x} + 3$

e)  $y = 2(x + 3) - 4x$       g)  $y = 3(x - 1) - 3x$

**Bài 4:** Cho hàm số  $y = f(x) = 4x + 1 - \sqrt{3}(2x + 1)$

a) Chứng tỏ rằng hàm số là hàm số bậc nhất đồng biến.

b) Tìm x để  $f(x) = 0$ .

**Bài 5:** Cho hàm số  $y = (m^2 - 4)x^2 - (2m + n)(5m - n)x - 3$ . Với giá trị nào của m và n thì hàm số đã cho là hàm số bậc nhất nghịch biến.

**Bài 6:** Cho hàm số  $y = (m^2 - 4)x^2 - (2m + n)(5m - n)x - 3$ . Với giá trị nào của m và n thì hàm số đã cho là hàm số bậc nhất nghịch biến.

### DẠNG 4: Chứng minh một hàm số $y = h(x)$ là hàm số bậc nhất.

#### I/ Phương pháp.

Biến đổi tương đương để đưa hàm số  $y = h(x)$  về dạng  $y = ax + b$  ( $a \neq 0$ ).

⇒ Bài toán được chứng minh.

**Chú ý:** Nếu có hàm số  $y = h(x) \Rightarrow$  hàm số  $y = h(x + a)$  bằng cách trong hàm số  $y = f(x)$  thì vị trí của x được thay bởi  $(x + a)$ .

#### II/ Vận dụng.

**Bài 1:** Cho các hàm số:  $f(x) = mx - 2$  ( $m \neq 0$ ) và  $g(x) = (m^2 + 1)x + 5$ . CMR:

a) Hàm số  $y = f(x) + g(x)$  là hàm số bậc nhất đồng biến.

b) Hàm số  $y = f(x) - g(x)$  là hàm số bậc nhất nghịch biến.

**Bài 2:** Cho hàm số  $f(x) = 3x^2 + 1$ . Chứng minh rằng hàm số  $y = f(x+1) - f(x)$  là một hàm số bậc nhất.

**Bài 3:** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Biết  $f(x - 1) = 3x - 5$ . Chứng minh rằng hàm số  $y = f(x)$  là một hàm số bậc nhất.

## **DẠNG 5: Xác định hệ số góc của đồ thị hàm số $y = ax + b$ ( $a \neq 0$ )**

### **I/ Phương pháp.**

\* Hệ số góc:  $a = \tan \alpha$  với  $\alpha$  là góc hợp bởi trục hoành Ox với đường thẳng đồ thị

Nếu  $\alpha$  là góc nhọn  $\Rightarrow a > 0$  và hàm số đồng biến

Nếu  $\alpha$  là góc tù  $\Rightarrow a < 0$  và hàm số nghịch biến

**Chú ý:** Biết  $a = \tan \alpha$  ta tính góc  $\alpha$  như sau: Bấm máy  $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\tan} \boxed{(} \boxed{a} \boxed{)} \boxed{=}$

+ Nếu máy hiện góc dương  $\beta^\circ \Rightarrow \alpha = \beta^\circ$

+ Nếu máy hiện góc âm  $\beta^\circ \Rightarrow \alpha = \beta^\circ + 180^\circ$

\* Hệ số góc cũng có thể được tính khi biết vị trí tương đối giữa hai đường thẳng:

Xét hai đường thẳng :  $y_1 = a_1 x + b_1$  ( $d_1$ ) ;  $y_2 = a_2 x + b_2$  ( $d_2$ )

+)  $d_1 \perp d_2$  thì  $a_1 \cdot a_2 = -1$ .

+)  $d_1$  cắt  $d_2$  thì  $a_1 \neq a_2$

+)  $d_1 // d_2$  hoặc  $d_1 \equiv d_2$  thì  $a_1 = a_2$

\* Nếu là đường thẳng có dạng :  $Ax + By + C = 0$ .

$\Rightarrow$  Rút về hàm số bậc nhất :  $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$  ( $B \neq 0$ )  $\Rightarrow$  Hệ số góc là  $-\frac{A}{B}$

### **II/ Vận dụng.**

**Bài 1:** Xác định hệ số góc của các hàm số sau.

a)  $y = \sqrt{5}x - 1$       b)  $y = \sqrt{3}x - 2 + x$       c)  $y = \frac{1}{2}(x - 2) + 3$

d)  $y = (a - 2)x + 5$  với  $a \neq 2$

**Bài 2:** Cho hàm số  $y = ax + 1$ . Biết đồ thị hàm số hợp với trục Ox một góc  $45^\circ$ . Tính a và cho biết hàm số này đồng biến hay nghịch biến ?

**Bài 3:** Cho hàm số  $y = (a - 1)x + \sqrt{3}$ . Biết đồ thị hàm số hợp với trục Ox một góc  $120^\circ$ . Tính hệ số góc của hàm số và cho biết hàm số đồng biến hay nghịch biến.

**Bài 4:** Cho hàm số  $y = ax - 1$ . Tính hệ số góc của hàm số biết

- a) Đồ thị hàm số vuông góc với đường thẳng  $y = 2x + 3$
- b) Đồ thị hàm số song song với đường thẳng  $y = -5x + 7$
- c) Đồ thị hàm số trùng với đường thẳng  $y = 5x - 1$

**DẠNG 6: Tìm điều kiện tham số để hàm số  $y = ax + b$  đi qua điểm  $(x_0 ; y_0)$ .**

**I/ Phương pháp.**

Hàm số  $y = ax + b$  với  $a$  và  $b$  là các hệ số phụ thuộc tham số.

Hàm số đi qua điểm  $(x_0, y_0) \Leftrightarrow y_0 = a_1x_0 + b_1 \Rightarrow$  Tham số cần tìm.

**II/ Vận dụng.**

**Bài 1:** Cho hàm số :  $y = (m - 1).x + m$  (d)

- a) Tìm  $m$  để hàm số song song với trục hoành.
- b) Tìm  $m$  để đồ thị hàm số đi qua điểm  $A(-1 ; 1)$
- c) Tìm  $m$  để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm  $A$  có hoành độ  $x = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

**Bài 2:** Cho hàm số  $y = (m - 2).x + n$  (d') trong đó  $m, n$  là tham số

- a) Tìm  $m, n$  để (d') đi qua hai điểm  $A(1 ; -2) ; B(3 ; -4)$
- b) Tìm  $m, n$  để (d') cắt trục tung tại điểm  $M$  có tung độ  $y = 1 - \sqrt{2}$  và cắt trục hoành tại điểm  $N$  có hoành độ  $x = 2 + \sqrt{2}$

**DẠNG 7 : Tìm tham số  $m$  để ĐTHS  $y = ax + b$  cắt, song song, trùng, vuông góc với một đường thẳng đã biết.**

**I/ Phương pháp.**

\* Xét hai đường thẳng :  $y_1 = a_1 x + b_1$  (d<sub>1</sub>) ;  $y_2 = a_2 x + b_2$  (d<sub>2</sub>)

$$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow a_1 \cdot a_2 = -1. \quad d_1 \text{ cắt } d_2 \Leftrightarrow a_1 \neq a_2$$

$$d_1 // d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases} \quad d_1 \equiv d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$$

Giải các điều kiện này nếu có  $\Rightarrow$  giá trị tham số.

**II/ Vận dụng.**

**Bài 1:** Cho hàm số :  $y = (m - 1).x + m$  (d). Tìm  $m$  để đồ thị hàm số song song với đường thẳng có phương trình :  $x - 2y = 1$

**Bài 2:** Cho hàm số  $y = (m - 2).x + n$  (d') trong đó  $m, n$  là tham số

- a) Tìm  $m, n$  để (d') vuông góc với đường thẳng có phương trình :  $x - 2y = 3$  (d')
- b) Tìm  $m, n$  để (d') song song với đường thẳng có phương trình :  $3x + 2y = 1$ .
- c) Tìm  $m, n$  để (d') trùng với đường thẳng có phương trình :  $y - 2x + 3 = 0$

## **DẠNG 8: Tìm tham số m để ba đường thẳng đồng quy.**

### **I/ Phương pháp.**

Tìm giao điểm  $(x_0 ; y_0)$  của hai đường thẳng không phụ thuộc vào  $m$

Để ba đường thẳng đồng quy thì đường thẳng còn lại phải đi qua điểm  $(x_0 ; y_0)$ .

### **II/ Bài tập vận dụng.**

**Bài 1:** Tìm giá trị  $m$  để ba đường thẳng sau đồng quy :

$$(d_1) : y = x - 4$$

$$(d_2) : y = -2x - 1$$

$$(d_3) : y = mx + 2$$

**Bài 2:** Tìm giá trị  $m$  để ba đường thẳng sau đồng quy :

$$(d_1) : y = (m^2 - 1)x + m^2 - 5 \quad (m \neq \pm 1)$$

$$(d_2) : y = x + 1$$

$$(d_3) : y = -x + 3$$

**Bài 3:** Với giá trị nào của  $m$  thì ba đường thẳng  $3x + 2y = 4$ ;  $2x - y = m$ ;  $x + 2y = 3$  đồng quy

**Bài 4:** Định  $m$  để 3 đường thẳng  $3x + 2y = 4$ ;  $2x - y = m$  và  $x + 2y = 3$  đồng quy

**Bài 9:** Định  $m$  để 3 đường thẳng sau đồng quy

$$2x - y = m ;$$

$$x - y = 2m ;$$

$$mx - (m - 1)y = 2m - 1$$

## **DẠNG 9: Tìm điểm cố định thuộc đồ thị hàm số.**

### **I/ Phương pháp.**

- Gọi  $M(x_0 ; y_0)$  là điểm cố định thuộc đồ thị hàm số. Thay điểm  $M$  vào hàm số.

- Biến đổi thành phương trình **ẩn** là tham số  $m$ , hệ số là các biểu thức chứa  $x_0$  và  $y_0$

- Vì  $M$  là điểm cố định nên phương trình thỏa mãn với mọi giá trị của tham số  $m$

$\Leftrightarrow$  Các hệ số của phương trình bằng 0

$\Rightarrow$  Giải hệ phương trình các hệ số bằng 0  $\Rightarrow$  tọa độ  $x_0$  và  $y_0 \Rightarrow$  Tìm được điểm  $M$ .

### **II/ Vận dụng.**

**Bài 1:** Cho hàm số:  $y = (m - 1).x + m$  (d). Tìm điểm cố định thuộc đồ thị hàm số?

**Bài 2:** Chứng minh khi  $k$  thay đổi thì các đường thẳng sau luôn đi qua một điểm cố định

a)  $kx - 2y = 6$

b)  $k(x - 1) + 3y = 1$

**Bài 3:** CMR khi  $a$  thay đổi, các đường thẳng  $ax + 5y = 2$  luôn luôn đi qua một điểm cố định

**Bài 4:** Xét các đường thẳng (d) có phương trình  $(m + 2)x + (m - 3)y - m + 8 = 0$ .



CMR với mọi  $m$ , các đường thẳng  $(d)$  luôn đi qua điểm  $A(-1; 2)$

**Bài 5:** CMR khi  $m$  thay đổi, các đường thẳng  $2x + (m - 1)y = 1$  luôn luôn đi qua một điểm cố định

**Bài 6:** Cho  $(d_1): y = (m^2 - 1)x + m^2 - 5$  ( $m \neq \pm 1$ ). CMR khi  $m$  thay đổi thì  $(d_1)$  luôn đi qua một điểm cố định.

## **DẠNG 10: Viết phương trình đường thẳng (Xác định hàm số) $y = ax + b$**

### **I/ Phương pháp.**

\* Lập phương trình đường thẳng  $y = ax + b$  tức là đi tìm hệ số góc  $a$  và hệ số  $b$ .

\* Để tìm  $a$  và  $b$  ta sử dụng dữ kiện bài cho như :

- Biết ĐTHS đi qua điểm  $A(x_A, y_A)$  và điểm  $B(x_B, y_B)$  thì thay tọa độ của  $A$  và  $B$  vào hàm số  $\Rightarrow$  Các phương trình liên hệ  $a$  và  $b \Rightarrow$  Giải phương trình tìm  $a$  và  $b$ .

- Biết ĐTHS đi qua điểm  $(x_0; y_0)$  và vuông góc (hoặc song song) với một đường thẳng cho trước.

+ Yếu tố vuông góc (hoặc song song) với một đường thẳng cho trước  $\Rightarrow$  hệ số góc  $a$ .

+ Thay điểm  $(x_0; y_0)$  vào hàm số tìm được hằng số  $b$ .

- Biết ĐTHS đi qua điểm  $(x_0; y_0)$  và hợp với trục hoành  $(Ox)$  một góc  $\alpha$ .

+ Yếu tố hợp với trục hoành  $(Ox)$  một góc  $\alpha \Rightarrow$  hệ số góc  $a = \operatorname{tg} \alpha$

+ Thay điểm  $(x_0; y_0)$  vào hàm số tìm được hằng số  $b$ .

\* Nếu  $\Delta$  là đường thẳng trung trực của đoạn  $AB$  thì  $\Delta$  vuông góc với  $AB$  tại trung điểm  $I$  của  $AB$ .

$$\text{Tọa độ trung điểm của } AB \text{ là : } \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

### **II/ Vận dụng.**

**Bài 1:** Xác định hàm số  $y = ax + b$  biết đồ thị của nó đi qua hai điểm  $M(2; 3)$  và điểm  $N(5; 4)$ .

**Bài 2:** Xác định hàm số  $y = ax + b$  biết đồ thị của nó đi qua điểm  $A(1; 2)$  và vuông góc với đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{3}x - 1$ .

**Bài 3:** Xác định hàm số  $y = ax + b$  biết đồ thị của nó đi qua điểm  $M(2; 3)$  và song song với đồ thị hàm số  $y = 3x - 1$ .

**Bài 4:** Xác định hàm số  $y = ax + b$  biết đồ thị của nó đi qua điểm  $B(3 ; 1)$  và tạo với trục hoành một góc  $60^\circ$ .

**Bài 5:** Xác định hàm số  $y = ax + b$  biết đồ thị của nó đi qua điểm  $E\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$  và tạo với trục hoành một góc  $120^\circ$ .

**Bài 6:** Xác định hàm số  $y = ax + b$  biết đồ thị của nó cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2 và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3.

**Bài 7:**

- Lập phương trình đường thẳng đi qua điểm  $A(x_0, y_0)$ , hệ số góc là  $k$ .
- Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm  $M(x_1, y_1)$  và  $N(x_2, y_2)$
- Lập phương trình đường thẳng đi qua điểm  $B(-1 ; 3)$  và :
  - + Song song với đường thẳng :  $3x - 2y = 1$ .
  - + Vuông góc với đường thẳng :  $3y - 2x + 1 = 0$

**Bài 8:** Một đường thẳng đi qua gốc tọa độ và có hệ số góc bằng 5

- Viết phương trình đường thẳng đó
- Các điểm  $M(2;5)$ ,  $N(1;5)$ ,  $P(3;5)$  có thuộc đường thẳng đã cho không ?
- Viết phương trình tổng quát của các đường thẳng song song với đường thẳng nói trong câu a

**Bài 9:** Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng  $y = -2x + 5$  và thỏa mãn một trong các điều kiện :

- Đi qua gốc tọa độ
- Đi qua điểm  $M(1; 1)$

**Bài 10:**

- Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm  $A(4 ; -5)$  và có hệ số góc  $a = -2$
- Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm  $B(0 ; 1)$  và  $C(8 ; -1)$
- Ba điểm sau đây có thẳng hàng hay không :  $M(-2 ; -3)$ ,  $N(-6 ; -5)$ ,  $P(1 ; 1)$

**Bài 11:** Cho điểm  $A(0 ; -1)$  và  $B(-4 ; 3)$ . Viết phương trình đường thẳng  $(d)$  là đường trung trực của  $AB$ . Tính góc  $\alpha$  tạo bởi đường thẳng với tia  $Ox$ ?

**Bài 12:** Cho hàm số  $y = ax + b$ . Tìm  $a$  và  $b$  biết rằng đồ thị của hàm số đã cho song song với đường thẳng  $y = -2x + 3$  và đi qua điểm  $M(2;5)$

## DẠNG 11: Xác định tọa độ điểm đối xứng.

### I/ Phương pháp.

Cho hai điểm  $M(x_M; y_M)$  và  $N(x_N; y_N)$  trong hệ tọa độ Oxy.

\* Hai điểm M và N đối xứng nhau qua trục hoành  $\Leftrightarrow \begin{cases} x_M = x_N \\ y_M = -y_N \end{cases}$

\* Hai điểm M và N đối xứng nhau qua trục tung  $\Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -x_N \\ y_M = y_N \end{cases}$

\* Hai điểm M và N đối xứng nhau qua gốc tọa độ  $\Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -x_N \\ y_M = -y_N \end{cases}$

Cho điểm  $M(x_M; y_M)$  đã biết. Tìm  $N(x_N; y_N)$  đối xứng với M qua đường thẳng  $d: y = ax + b$

B1 : Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng  $d$

B2 : Giải hệ hai đường thẳng  $\begin{cases} d \\ \Delta \end{cases}$  để tìm giao điểm  $I(x_I; y_I)$  của hai đường thẳng.

B3 : Điểm N đối xứng với M qua đường thẳng  $d \Leftrightarrow I$  là trung điểm của MN

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x_M + x_N}{2} \\ y_I = \frac{y_M + y_N}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_N = \\ y_N = \end{cases} \Rightarrow \text{Điểm đối xứng N}$$

### II/ Vận dụng.

Cho điểm A ( 2;1) . Xác định tọa độ các điểm :

- B đối xứng với A qua trục tung
- C đối xứng với A qua trục hoành
- D đối xứng với A qua O
- E đối xứng với A qua đường thẳng  $d: y = 2x - 1$

## DẠNG 12: Tìm tọa độ hình chiếu của điểm M lên đường thẳng d.

### I/ Phương pháp.

- Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  qua M và vuông góc với  $d$ .
- Hình chiếu của M lên  $d$  là điểm  $I = \Delta \cap d$ .
- Nếu điểm  $M(x_0; y_0)$  khi đó tọa độ hình chiếu H của M trên:
  - + Ox sẽ có tọa độ là  $H(x_0; 0)$
  - + Oy sẽ có tọa độ là  $H(0; y_0)$

- Nếu điểm  $M \notin d$  mà bài toán yêu cầu: "Tìm tọa độ điểm  $H \in d$  sao cho  $MH$  ngắn nhất thì tương đương với việc tìm  $H$  là hình chiếu vuông góc của điểm  $M$  trên  $d$ .

## II/ Vận dụng.

**Bài 1:** Cho điểm  $M(3; -1)$  và đường thẳng  $d$  có phương trình:  $3x - 4y + 12 = 0$ .

a) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc  $H$  của điểm  $M$  lên đường thẳng  $d$ .

b) Tìm tọa độ của điểm  $M_1$  là điểm đối xứng với  $M$  qua đường thẳng  $d$ .

**Bài 2:** Tìm hình chiếu vuông góc của điểm  $M(3; 2)$  lên đường thẳng  $\Delta: 5x - 12y + 10 = 0$

## DẠNG 13: CHỨNG MINH CÁC ĐIỂM THẲNG HÀNG. TÌM TỌA ĐỘ ĐIỂM CỦA HÌNH ĐẶC BIỆT.

### I/ Phương pháp

\* Cách chứng minh các điểm thẳng hàng :

- Viết phương trình đường thẳng ( $d$ ) đi qua hai điểm là  $y = ax + b$

- Thay tọa độ các điểm còn lại vào ( $d$ ), nếu tất cả thỏa mãn ( $d$ ) thì các điểm đã cho thẳng hàng.

\* Cách tìm tọa độ đỉnh.

- Viết phương trình cạnh đi qua hai điểm đã biết.

- Dùng yếu tố song song, vuông góc của các cạnh trong hình rồi tìm phương trình các cạnh còn lại.

- Tọa độ đỉnh là giao điểm của hai cạnh của hình.

### II/ Vận dụng.

**Bài 1:** Cho ba điểm  $A(-1, 6)$ ;  $B(-4, 4)$  và  $C(1, 1)$ . Tìm tọa độ đỉnh  $D$  của hình bình hành  $ABCD$ .

**Bài 2:** Cho bốn điểm  $A(0, 5)$ ;  $B(1, 2)$ ;  $C(2, 1)$ ;  $D(2,5; 2,5)$ . Chứng minh rằng bốn điểm  $A, B, C, D$  thẳng hàng.

## DẠNG 14: Tính diện tích TAM GIÁC, diện tích TỨ GIÁC trong hệ tọa độ Oxy

### I/ Phương pháp

- Xác định tọa độ các đỉnh của hình trong hệ tọa độ Oxy

- Vẽ tam giác và tứ giác đó trong hệ tọa độ Oxy.

- Từ hình vẽ trong hệ tọa độ xác định độ dài cạnh, đường cao.

$$+ S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot (\text{cạnh đáy}) \cdot (\text{Đường cao})$$

+  $S_{\text{hình vuông}} = x^2$  với  $x$  là độ dài cạnh hình vuông

+  $S_{\text{hình thoi}} = \text{Tích độ dài hai đường chéo vuông góc}$

+  $S_{\text{hình thang}} = (\text{Đáy lớn} + \text{Đáy bé}) \times (\text{Chiều cao}) : 2$

\* **Kiến thức nâng cao:**

Cho hai điểm  $M(x_M ; y_M)$  và  $N(x_N ; y_N)$  trong hệ tọa độ Oxy.

$$\Rightarrow \text{Độ dài đoạn } MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$$

## II/ Vận dụng.

**Bài 1:** Cho hàm số :  $y = \frac{-1}{2}x + 2$

a) Xác định giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung và trục hoành ?

b) Gọi A , B là thứ tự các giao điểm nói trên . Tính diện tích tam giác OAB (O là gốc tọa độ)

**Bài 2:** Vẽ tam giác ABC trên mặt phẳng tọa độ biết A ( 1;3 ) , B ( -2;0 ) , C ( 2;0 ) . Tính diện tích tam giác ?

**Bài 3:** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ tam giác ABC biết A( 1;2) , B ( -1;0) , C(2;0)

a) Tính diện tích tam giác ABC

b) Tính chu vi tam giác ABC

**Bài 4:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm A( 2 ; 2) . Vẽ B đối xứng A qua Ox, C đối xứng A qua trục Oy , D đối xứng A qua gốc tọa độ .

a) Chứng minh tứ giác ABCD là hình vuông và điểm O là tâm hình vuông đó

b) Tính chu vi và diện tích hình vuông ABCD.

**Bài 5:** Cho hàm số  $y = 2x$  và  $y = -3x + 5$

a) Vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ , đồ thị hai hàm số trên ?

b) Tìm tọa độ giao điểm M của hai hàm số nói trên . gọi A , B lần lượt là giao điểm của đường thẳng  $y = -3x + 5$  với trục hoành và trục tung . Tính diện tích tam giác OAB và tam giác OMA

**Bài 6:** Cho hàm số  $y = -x + 1$  ,  $y = x + 1$  ,  $y = -1$

a) Vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ , đồ thị các hàm số đó.

b) Gọi giao điểm của hai đường thẳng  $y = -x + 1$  và  $y = x + 1$  là A, giao điểm của đường thẳng  $y = -1$  với hai đường thẳng trên là B , C . Chứng tỏ tam giác ABC là tam giác cân . Tính chu vi và diện tích tam giác ?

# CHỦ ĐỀ 11: GIẢI HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH

## I/ Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế.

+ Từ một phương trình rút ẩn này theo ẩn kia, rồi thế vào phương trình còn lại ta được phương trình một ẩn.

+ **Chú ý:** Có những trường hợp, từ một phương trình ta biểu diễn cả một biểu thức theo ẩn kia rồi thế vào phương trình còn lại.

**Bài 1:** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x - 2y = 1. (1) \\ 3x + 2y = 3. (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (1) ta biểu diễn x theo y (gọi là rút x) ta có:  $x = 1 + 2y. (*)$

Thay  $x = 1 + 2y. (*)$  vào phương trình (2) ta được:  $3(1 + 2y) + 2y = 3. (**)$

Thế phương trình (\*\*) vào phương trình hai của hệ ta có: 
$$\begin{cases} x = 1 + 2y \\ 3(1 + 2y) + 2y = 3 \end{cases}$$

Giải hệ: 
$$\begin{cases} x = 1 + 2y \\ 3(1 + 2y) + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2y \\ 3 + 6y + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2y \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có một nghiệm ( $x = 1; y = 0$ ).

## Bài 2/ Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế.

① 
$$\begin{cases} 4x + y = 2 \\ 8x + 3y = 5 \end{cases}$$

② 
$$\begin{cases} x - y = m \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

③ 
$$\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

④ 
$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -4x + 6y = 2 \end{cases}$$

⑤ 
$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x - 4y = 1 \end{cases}$$

⑥ 
$$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

⑦ 
$$\begin{cases} x + 4y = 2 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$$

⑧ 
$$\begin{cases} -x - y = 2 \\ -2x - 3y = 9 \end{cases}$$

⑨ 
$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ -4x + 6y = 2 \end{cases}$$

**Bài 3:** Giải hệ phương trình sau: 
$$\begin{cases} |x - 1| + |y - 2| = 1 & (1) \\ |x - 1| + 3y = 3 & (2) \end{cases}$$

**Gợi ý:** Từ (2) rút ra  $|x - 1| = 3 - 3y$ .

Rồi thay vào (1) được phương trình ẩn y chứa giá trị tuyệt đối.

**Bài 4:** Giải hệ phương trình sau: 
$$\begin{cases} |x - 2| + 2|y - 1| = 9 & (1) \\ x + |y - 1| = -1 & (2) \end{cases}$$

**Gợi ý:** Từ (2) rút ra  $|y - 1| = -1 - x$ .

Rồi thay vào (1) được phương trình ẩn x chứa giá trị tuyệt đối.

**Bài 5:** Giải hệ phương trình sau: 
$$\begin{cases} |x-1|+|y-5|=1 & (1) \\ y=5+|x-1| & (2) \end{cases}$$

Gợi ý: Thay biểu thức (2) vào phương trình (1) ta có:

$$|x-1|+|5+|x-1|-5|=1 \Leftrightarrow 2|x-1|=1.$$

Từ đó ta tìm được x. Việc tìm giá trị của y cũng không có gì khó khăn nữa.

**Bài 6:** Giải hệ phương trình sau: 
$$\begin{cases} x^3+y^3=1 & (1) \\ x^5+y^5=x^2+y^2 & (2) \end{cases}$$

Gợi ý:  $x^5+y^5=(x^3+y^3)(x^2+y^2)-x^2y^2(x+y)$

Thay (1) vào (2) ta được  $x^2y^2(x+y)=0$ . Từ đó tìm được x, y

**Bài 7:** Giải hệ phương trình sau: 
$$\begin{cases} x+y=1 & (1) \\ x^3+y^3=x^2+y^2 & (2) \end{cases}$$

Gợi ý:  $x^3+y^3=(x+y)(x^2+y^2)-xy(x+y)$

Thế (1) vào (2) ta được  $xy(x+y)=0$ . Từ đó tìm được x, y

b) Định a, b biết phương trình  $ax^2-2bx+3=0$  có hai nghiệm là  $x=1$  và  $x=-2$

**Bài 8:** Xác định a, b để đa thức  $f(x)=2ax^2+bx-3$  chia hết cho  $4x-1$  và  $x+3$

### Hướng dẫn

$f(x)=2ax^2+bx-3$  chia hết cho  $4x-1$  và  $x+3$  nên.

Biết nếu  $f(x)$  chia hết cho  $ax+b$  thì  $f(-\frac{b}{a})=0$

$$\begin{cases} f(\frac{1}{4})=0 \\ f(-3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{8}+\frac{b}{4}-3=0 \\ 18a-3b-3=0 \end{cases} \text{ Giải hệ phương trình ta được } a=2; b=11$$

**Bài 9:** Cho biểu thức  $f(x)=ax^2+bx+4$ . Xác định các hệ số a và b biết rằng  $f(2)=6$ ,  $f(-1)=0$

### Hướng dẫn

$$\begin{cases} f(2)=6 \\ f(-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2b=2 \\ a-b=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \end{cases}$$

## II. Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số.

Phương pháp cộng đại số giúp tạo ra một phương trình mới chỉ chứa một ẩn hoặc phương trình mới đơn giản hơn để thấy được sự liên hệ đơn giản giữa các ẩn.

+ *Bước 1: Cộng hay trừ từng vế hai phương trình của hệ của hệ phương trình đã cho để được một phương trình mới.*

+ *Bước 2: Dùng phương trình mới ấy thay thế cho một trong hai phương trình của hệ (và giữ nguyên phương trình kia)*

**Lưu ý:**

- *Khi các hệ số của cùng một ẩn đối nhau thì ta cộng vế theo vế của hệ.*

- *Khi các hệ số của cùng một ẩn bằng nhau thì ta trừ vế theo vế của hệ.*

- *Khi hệ số của cùng một ẩn không bằng nhau cũng không đối nhau thì ta chọn nhân với số thích hợp để đưa về hệ số của cùng một ẩn đối nhau (hoặc bằng nhau).*

**Bài 1:** Giải hệ pt: 
$$\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

Nhận thấy: các hệ số của ẩn y là đối nhau  $\Rightarrow$  **Cộng vế theo vế** hai phương trình của hệ được phương trình mới chỉ chứa ẩn x

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 3 \\ 5x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 3 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

**Bài 2:** Giải hệ pt: 
$$\begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$

Nhận thấy: các hệ số của ẩn x là bằng nhau  $\Rightarrow$  **Trừ vế theo vế** hai phương trình của hệ được phương trình mới chỉ chứa ẩn y

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ 8y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

**Bài 3:** Giải hệ pt: 
$$\begin{cases} -5x + 2y = 4 & (1) \\ 6x - 3y = -7 & (2) \end{cases}$$

Nhận thấy: các hệ số của ẩn x cũng như các hệ số của ẩn y là **không bằng nhau**

**Cách 1: (Cân bằng hệ số của ẩn x)** Nhân 2 vế phương trình (1) với 6, nhân hai vế phương trình (2) với 5  $\Rightarrow$  Được hệ mới có hệ số của ẩn x đối nhau.

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} -30x + 12y = 24 \\ 30x - 15y = -35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -30x + 12y = 24 \\ -3y = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 6y = 4 \\ y = \frac{11}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{11}{3} \end{cases}$$

**Cách 1: (Cân bằng hệ số của ẩn y)** Nhân hai vế phương trình (1) với 3, nhân hai vế phương trình (2) với 2  $\Rightarrow$  Được hệ mới có hệ số của ẩn y đối nhau.



$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} -15x + 6y = 12 \\ 12x - 6y = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -15x + 6y = 12 \\ -3x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 2y = 4 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{11}{3} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

**Bài 4:** Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

❶  $\begin{cases} 2x - 11y = -7 \\ 10x + 11y = 31 \end{cases}$

❷  $\begin{cases} 3x + 2y = -2 \\ 3x - 2y = -3 \end{cases}$

❸  $\begin{cases} 2x - 3y = 11 \\ -4x + 6y = 5 \end{cases}$

❹  $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

❺  $\begin{cases} 2x + 5y = 2 \\ 6x - 15y = 6 \end{cases}$

❻  $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 6x - 4y = 3 \end{cases}$

**Bài 5:** Giải hệ phương trình sau:  $\begin{cases} x^2 - xy = 28 & (1) \\ y^2 - xy = 28 & (2) \end{cases}$

Gợi ý: Trừ đại số triệt tiêu  $xy$  có được phương trình tích.

**Bài 6:** Giải hệ phương trình sau:  $\begin{cases} 2x^2 + xy = 3x & (1) \\ 2y^2 + xy = 3y & (2) \end{cases}$

Gợi ý: Trừ đại số triệt tiêu  $xy$  có được phương trình tích.

**Bài 7:** Giải hệ phương trình sau:  $\begin{cases} x - 3y = 4\frac{y}{x} & (1) \\ y - 3x = 4\frac{x}{y} & (2) \end{cases}$

Gợi ý: Nhân  $x, y$  lên về trái rồi Trừ đại số triệt tiêu  $3xy$  có được phương trình tích.

**Bài 8:** Giải hệ phương trình sau:  $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y & (1) \\ y^2 - 2x^2 = 2y + x & (2) \end{cases}$

Gợi ý: Trừ đại số được phương trình tích.

**Bài 9:** Giải hệ phương trình sau:  $\begin{cases} x^3 + y^3 = 2 & (1) \\ x^2y + xy^2 = 2 & (2) \end{cases}$

Gợi ý: Trừ đại số, khai triển hằng đẳng thức, đặt nhân tử chung đưa về phương trình tích.

**Bài 10:** Giải hệ phương trình sau:  $\begin{cases} x = \frac{2y}{1-y^2} & (1) \\ y = \frac{2x}{1-x^2} & (2) \end{cases}$

Gợi ý: Nhân mẫu sang về trái ở mỗi phương trình. Sau đó Trừ đại số, đặt nhân tử chung đưa về phương trình tích.

### III. Giải hệ phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ.

#### 1/ Phương pháp.

Việc đặt ẩn phụ giúp tạo ra hệ phương trình mới đơn giản hơn phương trình đã cho, hoặc đưa hệ đã cho về dạng hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

Sau khi giải hệ mới tìm được ẩn phụ, ta thay ẩn phụ vào bước đặt ẩn để giải tìm ra ẩn đã cho.

#### 2/ Bài tập mẫu:

**Ví dụ 1:** Giải hệ phương trình sau: 
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3 \\ \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = -1 \end{cases}$$

#### Hướng dẫn

Đặt  $u = \frac{1}{x}; v = \frac{1}{y}$ . Theo đề bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u + v = 3 \\ 3u - 2v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3 - u \\ 3u - 2(3 - u) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5u = 5 \\ v = 3 - u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases}$$

Từ đó suy ra:  $x = \frac{1}{u} = 1; y = \frac{1}{v} = \frac{1}{2}$ .

**Ví dụ 1:** Giải hệ phương trình sau: 
$$\begin{cases} \frac{x}{x+1} - \frac{y}{y-1} = 3 \\ \frac{x}{x+1} + \frac{3y}{y-1} = -1 \end{cases}$$

#### Hướng dẫn

Đặt  $u = \frac{x}{x+1}; v = \frac{y}{y-1}$ . Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u - v = 3 \\ u + 3v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 + v \\ 3 + v + 3v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 + v \\ 4v = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = -1 \end{cases}$$

Từ đó suy ra: 
$$\begin{cases} \frac{x}{x+1} = 2 \\ \frac{y}{y-1} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x + 2 \\ y = 1 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

**Ví dụ 3:** Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \sqrt{2x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-y}} = 2 \\ 2\sqrt{2x-1} - \frac{1}{\sqrt{x-y}} = 1 \end{cases}$$

**Hướng dẫn**

Điều kiện  $x \geq \frac{1}{2}, x-y > 0$ . Đặt  $\begin{cases} a = \sqrt{2x-1} \\ b = \frac{1}{\sqrt{x-y}} \end{cases}$

Ta có hệ phương trình mới

$$\begin{cases} a+b=2 \\ 2a-b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-1}=1 \\ \frac{1}{\sqrt{x-y}}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất  $x=1; y=0$

**2/ Vận dụng**

**Bài 1:** Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{lll} 1/ \begin{cases} 2(x+y) + 3(x-y) = 4 \\ (x+y) + 2(x-y) = 5 \end{cases} & 2/ \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{5} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \end{cases} & 3/ \begin{cases} \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y-1} = 2 \\ \frac{2}{x-2} - \frac{3}{y-1} = 1 \end{cases} \\ 4/ \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{4}{y-1} = 3 \\ \frac{4}{x} - \frac{2}{1-y} = 5 \end{cases} & 5/ \begin{cases} (x-2)^2 - 2y^3 = 6 \\ 3(x-2)^2 + 5y^3 = 7 \end{cases} & 6/ \begin{cases} \frac{2}{x-y} + \frac{6}{y+x} = 1,1 \\ \frac{4}{x-y} - \frac{9}{y+x} = 0,1 \end{cases} \\ 7/ \begin{cases} \frac{2}{2x-y} + \frac{3}{x-2y} = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{2x-y} - \frac{1}{x-2y} = \frac{1}{18} \end{cases} & 8/ \begin{cases} \sqrt{x+3} - 2\sqrt{y+1} = 2 \\ 2\sqrt{x+3} + \sqrt{y+1} = 4 \end{cases} & 9/ \begin{cases} 2(x+y) + \sqrt{x+1} = 4 \\ (x+y) - 3\sqrt{x+1} = -5 \end{cases} \\ 10/ \begin{cases} \sqrt{x+3} - 2\sqrt{y+1} = 2 \\ 2\sqrt{x+3} + \sqrt{y+1} = 4 \end{cases} & 11/ \begin{cases} 3\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = -1 \\ 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases} & 12/ \begin{cases} 3\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = -1 \\ 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases} \end{array}$$

**Bài 2:** Giải các hệ phương trình sau:

$$1/ \begin{cases} \frac{2x}{x+1} + \frac{y}{y+1} = 3 \\ \frac{x}{x+1} + \frac{3y}{y+1} = -1 \end{cases}$$

$$2/ \begin{cases} \frac{3}{x-2} + \frac{2}{y+1} = \frac{17}{5} \\ \frac{2x-2}{x-2} + \frac{y+2}{y-1} = \frac{26}{5} \end{cases}$$

**Bài 3:** Giải các hệ phương trình sau:  $\begin{cases} 2 \cdot |1 + |x|| - |1 - |x|| = 5 \\ |1 + |x|| + 4 \cdot |1 - |x|| = 7 \end{cases}$       Gợi ý: Đặt :  $\begin{cases} a = |1 + |x|| \geq 0 \\ b = |1 - |x|| \geq 0 \end{cases}$

**Bài 4:** Giải các hệ phương trình sau: (Đưa hệ về tổng  $x + y$  và tích  $x \cdot y$ )

$$1/ \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$$2/ \begin{cases} x^2 + y^2 = 65 \\ (x-1)(y-1) = 18 \end{cases}$$

$$3/ \begin{cases} x^2 y + y^2 x = 6 \\ xy + x + y = 5 \end{cases}$$

**Bài 5:** Giải các hệ phương trình sau:

$$1/ \begin{cases} x^4 + y^4 = 97 \\ xy(x^2 + y^2) = 78 \end{cases}$$

$$2/ \begin{cases} x^2 + y^2 = 65 \\ (x-1)(y-1) = 18 \end{cases}$$

$$3/ \begin{cases} x^2 y + y^2 x = 6 \\ xy + x + y = 5 \end{cases}$$

$$4/ \begin{cases} x - y + \frac{x}{y} = 3 \\ \frac{x}{y}(x - y) = 2 \end{cases}$$

$$5/ \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 13 \end{cases}$$

$$6/ \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{y}{3} = 3 \\ \frac{x}{2} + \frac{3}{y} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

## CHUYÊN ĐỀ 12: HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN THEO THAM SỐ $m$

HPT bậc nhất hai ẩn phụ thuộc tham số: 
$$\begin{cases} a_m x + b_m y = c_m \\ a'_m x + b'_m y = c'_m \end{cases}$$

Trong đó:  $a_m$ ;  $b_m$ ;  $c_m$ ;  $a'_m$ ;  $b'_m$ ;  $c'_m$  là những hệ số phụ thuộc tham số  $m$ .

### A. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

1. Giải và biện luận hệ phương trình : (I) 
$$\begin{cases} a_m x + b_m y = c_m & (1) \\ a'_m x + b'_m y = c'_m & (2) \end{cases}$$

**Bước 1:** Rút ẩn mà hệ số của nó không chứa  $m$  ở một trong hai phương trình (VD rút  $y$ )

$$y = f(m)x + g(m) \quad (1')$$

**Bước 2:** Thay ẩn  $y$  vừa rút vào phương trình còn lại để được phương trình một ẩn.

$$H(m)x = K(m) \quad (2')$$

**Lập luận:** Nhận thấy (1') có nghiệm  $y$  khi (2') có nghiệm  $x$ .

$\Rightarrow$  Hệ có (I) nghiệm, vô số nghiệm hay vô nghiệm PHỤ THUỘC vào (2') có 1 nghiệm  $x$ , vô số nghiệm  $x$  hay vô nghiệm.

\* Xét phương trình (2):

+ Khi  $H(m) = 0 \Leftrightarrow m = m_0$  ta có:

- Nếu  $K(m_0) = 0$  thì (2') có vô số nghiệm  $x$

$\Rightarrow$  (1') có vô số nghiệm  $y$  tương ứng.

$\Rightarrow$  Hệ có vô số nghiệm  $(x, y) = (x, f(m_0)x + g(m_0))$

- Nếu  $K(m_0) \neq 0$  thì (2') vô nghiệm  $\Rightarrow$  (1') vô nghiệm.

$\Rightarrow$  Hệ vô nghiệm.

+ Khi  $H(m) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq m_0$  ta có (2') luôn có nghiệm duy nhất  $x = \frac{K(m)}{H(m)}$

$\Rightarrow$  (1') có nghiệm duy nhất  $y = f(m) \cdot \frac{K(m)}{H(m)} + g(m)$

$\Rightarrow$  Hệ có nghiệm duy nhất khi  $m \neq m_0$

### 2. Điều kiện của tham số $m$ để hệ có nghiệm duy nhất, vô số nghiệm, vô nghiệm.

\* Thường trong bài toán tìm  $m$  để hệ có nghiệm, vô nghiệm còn liên quan đến các ý b), ý c) của bài toán nên ta thường làm theo các bước như bài toán **Giải và biện luận hệ**:

\* Sau đó lập luận để tìm  $m$  theo yêu cầu bài toán.

\* Từ đó cũng tìm được luôn nghiệm  $x, y$  theo  $m$  để làm các ý tiếp theo.

### 3. Điều kiện của tham số $m$ để hệ có nghiệm thỏa mãn điều kiện đã cho.

**Bước 1:** Tìm điều kiện của  $m$  để hệ có nghiệm duy nhất rồi suy ra nghiệm  $x; y$  của hệ theo  $m$

**Bước 2:** Giải điều kiện bài toán:

\* Hệ có nghiệm nguyên:

Viết  $x, y$  của hệ về dạng:  $n + \frac{k}{f(m)}$  với  $n, k$  nguyên

Tìm  $m$  nguyên để  $f(m)$  là ước của  $k$

\* Hệ có nghiệm  $x, y$  dương (âm):

Giải bất phương trình ẩn  $m \Rightarrow$  Tập giá trị của  $m$

\* Hệ có nghiệm  $x, y$  thỏa mãn một hệ thức đã cho:

Thay biểu thức nghiệm  $x, y$  vào hệ thức rồi giải phương trình ẩn  $m$   
 $\Rightarrow$  Giá trị của  $m$

**Bước 4:** Giải điều kiện trên kết hợp với giá trị  $m$  để hệ có nghiệm duy nhất

$\Rightarrow$  Kết luận giá trị  $m$  (tập giá trị  $m$ ) thỏa mãn điều kiện.

### 4. Tìm $m$ để ba đường thẳng đã cho đồng quy.

- Xác định giao điểm của 2 trong 3 đường thẳng (giao điểm của 2 đường thẳng không chứa  $m$ )

- Thay giao điểm tìm được vào đường thẳng còn lại chứa  $m$ , giải phương trình tìm ẩn  $m$ .

### 5. Tìm $m$ để hai đường thẳng cắt nhau tại điểm thỏa mãn điều kiện đã cho:

**Bước 1:** Xét hệ hai đường thẳng

$\Rightarrow$  Điều kiện để hai đường thẳng cắt nhau tại điểm  $M$  chính là điều kiện hệ có nghiệm duy nhất.

**Bước 2:** Giải hệ hai đường thẳng, tìm nghiệm  $x, y$  theo  $m$

**Bước 3:** Giải điều kiện của  $M$

**Bước 4:** Kết luận tập giá trị  $m$  thỏa mãn bài toán.

### 6. Tìm $m$ để hai hệ phương trình tương đương.

**Bước 1:** Tìm điều kiện của  $m$  để mỗi hệ đã cho có nghiệm.

**Bước 2:** Tìm nghiệm  $x; y$  theo  $m$  của mỗi hệ

+ Cho nghiệm  $x$  của hệ này bằng nghiệm  $x$  của hệ kia (1)

+ Cho nghiệm  $y$  của hệ này bằng nghiệm  $y$  của hệ kia (2)

$\Rightarrow$  Giá trị  $m$  cần tìm cùng thỏa mãn (1), (2) và điều kiện của  $m$

## 7. Chứng tỏ nghiệm $(x ; y)$ của hệ luôn nằm trên đường thẳng cố định.

Từ hệ, bằng phương pháp thế, cộng trừ đại số tạo ra một phương trình mới  $f(x,y) = 0$  không phụ thuộc vào  $m$

=> Phương trình biểu thị mối liên hệ  $(x ; y)$  là đường thẳng cố định cần tìm.

### B/ BÀI TẬP VẬN DỤNG.

**Bài 1:** Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

a) 
$$\begin{cases} mx - y = 2m - 1 \\ x - (m+1)y = 2 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} x - 2y = m + 3 \\ mx - 3y = -5 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} ax - y = 2 \\ x - ay = 2 \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} mx - y = m \\ x + y = 2 \end{cases}$$

e) 
$$\begin{cases} ax + y = 3 \\ 4x + ay = 6 \end{cases}$$

f) 
$$\begin{cases} (a+1)x - y = a + 1 \\ x + (a-1)y = 2 \end{cases}$$

g) 
$$\begin{cases} mx - 2my = m + 1 \\ x + (m+1)y = 2 \end{cases}$$

**Bài 2:** Tìm  $m$  để hệ phương trình sau: Vô nghiệm ; Vô số nghiệm: 
$$\begin{cases} x - my = m & (1) \\ mx - 9y = m + 6 & (2) \end{cases}$$

**Bài 3:** Cho hệ phương trình: 
$$\begin{cases} mx + 4y = 9 \\ x + my = 8 \end{cases}$$
. Tìm  $m$  để hệ có nghiệm duy nhất, vô nghiệm.

**Bài 4:** Giải và biện luận hệ phương trình sau: 
$$\begin{cases} x - my = 2 \\ mx - 4y = m - 2 \end{cases}$$

**Bài 5:** Cho hệ phương trình ( $m$  là tham số) : 
$$\begin{cases} mx - y = 3 \\ -x + 2my = 1 \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình khi  $m = 1$ .

b) Tìm giá trị của  $m$  để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

**Bài 6.** Cho hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x - 2y = 5 & (1) \\ mx - y = 4 & (2) \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình với  $m = 2$ .

b) Tìm  $m$  để hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $(x, y)$  trong đó  $x, y$  trái dấu.

c) Tìm  $m$  để hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $(x, y)$  thỏa mãn  $x = |y|$ .

**Bài 7:** Định  $m$  để hệ phương trình 
$$\begin{cases} mx + 4y = 9 \\ x + my = 8 \end{cases}$$
 có nghiệm duy nhất  $(x, y)$  thỏa mãn hệ thức cho trước:

$$2x + y + \frac{38}{m^2 - 4} = 3$$

## Hướng dẫn

- Điều kiện để hệ phương trình có nghiệm duy nhất:  $m \neq \pm 2$

$$\text{- Hệ } \begin{cases} mx + 4y = 9 \\ x + my = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx + 4y = 9 \\ mx + m^2y = 8m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 - 4)y = 8m - 9 \\ x + my = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{8m - 9}{m^2 - 4} \\ x = \frac{9m - 32}{m^2 - 4} \end{cases}$$

- Thay  $x = \frac{9m - 32}{m^2 - 4}$ ;  $y = \frac{8m - 9}{m^2 - 4}$  vào hệ thức đã cho ta được:

$$2 \cdot \frac{9m - 32}{m^2 - 4} + \frac{8m - 9}{m^2 - 4} + \frac{38}{m^2 - 4} = 3$$

$$\Leftrightarrow 18m - 64 + 8m - 9 + 38 = 3m^2 - 12$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 - 26m + 23 = 0 \quad \Leftrightarrow m_1 = 1; m_2 = \frac{23}{3} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

$$\text{Vậy } m = 1; m = \frac{23}{3}$$

**Bài 8:** Cho hệ phương trình:  $\begin{cases} 2x + y = 5m - 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$  ( m là tham số)

a) Giải hệ phương trình với  $m = 1$

b) Tìm m để hệ có nghiệm (x;y) thỏa mãn :  $x^2 - 2y^2 = 1$ .

**Bài 9:** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} x + y = 3m - 2 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$

Tìm giá trị của m để hệ có nghiệm (x;y) sao cho  $\frac{x^2 - y - 5}{y + 1} = 4$ .

**Bài 10.** Cho hệ phương trình :  $\begin{cases} mx + 2y = 18 \\ x - y = -6 \end{cases}$  ( m là tham số ).

a) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm (x ;y) trong đó  $x = 2$ .

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x ;y) thỏa mãn  $2x + y = 9$ .

**Bài 11:** Cho hệ phương trình:  $\begin{cases} x + my = 9 \\ mx - 3y = 4 \end{cases}$

a) Chứng tỏ rằng hệ phương trình luôn luôn có nghiệm duy nhất với mọi m

b) Với giá trị nào của m để hệ có nghiệm (x ; y) thỏa mãn hệ thức:  $x - 3y = \frac{28}{m^2 + 3} - 3$



**Bài 12:** Cho hệ phương trình:  $\begin{cases} mx - y = 2 \\ 3x + my = 5 \end{cases}$ . Tìm giá trị của  $m$  để hệ phương trình đã cho có nghiệm

$(x; y)$  thỏa mãn hệ thức  $x + y = 1 - \frac{m^2}{m^2 + 3}$ .

**Bài 13:** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} 3x - my = -9 \\ mx + 2y = 16 \end{cases}$

a) Chứng tỏ rằng hệ phương trình luôn luôn có nghiệm duy nhất với mọi  $m$

b) Tìm giá trị nguyên của  $m$  để hai đường thẳng của hệ cắt nhau tại một điểm nằm trong góc phần tư thứ IV trên mặt phẳng tọa độ Oxy

c) Với trị nguyên nào của  $m$  để hệ có nghiệm  $(x; y)$  thỏa mãn  $x + y = 7$

**Bài 14:** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} x + (m-1)y = 2 \\ (m+1)x - y = m+1 \end{cases}$

a) Giải hệ với  $m = \frac{1}{2}$

b) Tìm  $m$  để hệ có nghiệm duy nhất  $(x; y)$  thỏa mãn điều kiện  $x > y$

**Bài 15:** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x - y = m \end{cases}$

Tìm  $m$  nguyên sao cho hệ có nghiệm  $(x; y)$  với  $x < 1, y < 1$

**Bài 16:** Cho hệ phương trình:  $\begin{cases} (m-1)x - my = 3m-1 \\ 2x - y = m+5 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình với  $m = 2$

b) Tìm  $m$  để hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $(x; y)$  sao cho  $x^2 - y^2 < 4$

**Bài 17:** Định  $m$  nguyên để hệ có nghiệm duy nhất là nghiệm nguyên:  $\begin{cases} mx + 2y = m+1 \\ 2x + my = 2m-1 \end{cases}$

### Hướng dẫn

$$\begin{aligned} \text{Hệ} &\Leftrightarrow \begin{cases} mx + 2y = m+1 \\ 2x + my = 2m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2mx + 4y = 2m+2 \\ 2mx + m^2y = 2m^2 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 - 4)y = 2m^2 - 3m - 2 \\ 2x + my = 2m-1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 - 4)y = (m-2)(2m+1) & (1) \\ 2x + my = 2m-1 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Hệ có nghiệm duy nhất  $\Leftrightarrow$  Phương trình (1) có nghiệm  $y$  duy nhất

$$\Leftrightarrow m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m^2 \neq 4 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$$

Vậy với  $m \neq \pm 2$  thì hệ có nghiệm duy nhất  $(x, y)$  là:

$$\begin{cases} y = \frac{(m-2)(2m+1)}{m^2-4} = \frac{2m+1}{m+2} = 2 - \frac{3}{m+2} \\ x = \frac{m-1}{m+2} = 1 - \frac{3}{m+2} \end{cases}$$

Để  $x, y$  là những số nguyên thì  $m+2 \in U(3) = \{1; -1; 3; -3\}$

Vậy:  $m+2 = \pm 1, \pm 3 \Rightarrow m = -1; -3; 1; -5$

**Bài 18:** Định  $m$  nguyên để hệ có nghiệm duy nhất là nghiệm nguyên:  $\begin{cases} (m+1)x + 2y = m-1 \\ m^2x - y = m^2 + 2m \end{cases}$

**Bài 19:** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} (2m+1)x + y = 2m-2 \\ m^2x - y = m^2 - 3m \end{cases}$

Trong đó  $m \in \mathbb{Z}; m \neq -1$ . Xác định  $m$  để hệ phương trình có nghiệm nguyên.

**Bài 20:** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} mx - y = 2m \\ x - my = m+1 \end{cases}$

a) Tìm  $m$  để hệ có nghiệm duy nhất

b) Tìm  $m$  để hệ có nghiệm nguyên.

c) Chứng tỏ rằng điểm  $M(x; y)$  (với  $(x; y)$  là nghiệm của hệ đã cho) luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

**Bài 21:** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} mx + 2my = m+1 \\ x + (m+1)y = 2 \end{cases}$

a) Chứng tỏ rằng nếu hệ có nghiệm  $(x; y)$  thì điểm điểm  $M(x; y)$  luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

b) Xác định  $m$  để điểm  $M$  thuộc góc phần tư thứ nhất.

Gợi ý: Điểm  $M$  thuộc góc phần tư thứ nhất  $\Leftrightarrow x > 0$  và  $y > 0$

c) Xác định  $m$  để điểm  $M$  thuộc đường tròn có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng  $\sqrt{5}$ .

Gợi ý: Điểm thuộc đường tròn có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng  $\sqrt{5}$ .

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = (\sqrt{5})^2. \text{ Giải phương trình tìm được } m.$$

**Bài 22:** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} 2x + my = 1 \\ mx + 2y = 1 \end{cases}$

a) Chứng tỏ rằng nếu hệ có nghiệm  $(x; y)$  thì điểm điểm  $M(x; y)$  luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

b) Tìm số nguyên  $m$  để hệ có nghiệm duy nhất  $(x, y)$  với  $x, y$  là các số nguyên.

c) Xác định  $m$  để điểm  $M$  thuộc đường tròn có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Bài 23:** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} mx + 4y = 10 - m \\ x + my = 4 \end{cases}$  ( $m$  là tham số)

a) Xác định các giá trị nguyên của  $m$  để hệ có nghiệm duy nhất  $(x; y)$  sao cho  $x > 0, y > 0$

b) Với giá trị nào của  $m$  thì hệ có nghiệm  $(x; y)$  với  $x, y$  là các số nguyên dương

**Bài 24:** Cho hệ phương trình :  $\begin{cases} (m-1)x - my = 3m - 1 \\ 2x - y = m + 5 \end{cases}$

a) Giải và biện luận hệ phương trình theo  $m$

b) Với giá trị nguyên nào của  $m$  để hai đường thẳng của hệ cắt nhau tại một điểm nằm trong góc phần tư thứ IV của hệ tọa độ Oxy

c) Định  $m$  để hệ có nghiệm duy nhất  $(x; y)$  sao cho  $P = x^2 + y^2$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Bài 25:** Cho hệ phương trình:  $\begin{cases} 2y - x = m + 1 \\ 2x - y = m - 2 \end{cases}$  (1)

a) Giải hệ phương trình (1) khi  $m = 1$ .

b) Tìm giá trị của  $m$  để hệ phương trình (1) có nghiệm  $(x; y)$  sao cho biểu thức  $P = x^2 + y^2$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Bài 26:** Cho hệ phương trình:  $\begin{cases} 2y - x = m + 1 \\ 2x - y = m - 2 \end{cases}$  (1)

a) Giải hệ phương trình (1) khi  $m = 1$ .

b) Tìm giá trị của  $m$  để hệ phương trình (1) có nghiệm  $(x; y)$  sao cho biểu thức  $P = x^2 + y^2$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Bài 27:** Cho hệ phương trình:  $\begin{cases} x + y = 2a - 1 \\ x^2 + y^2 = a^2 + 2a - 3 \end{cases}$

Tìm giá trị của  $a$  để hệ phương trình thỏa mãn tích  $x.y$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Bài 28:** Tìm  $m$  để hai hệ phương trình sau tương đương

a) Hệ (I)  $\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$       Hệ (II)  $\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ x - \frac{1}{2}y = m \end{cases}$

a) Hệ (I)  $\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ 2x + 5y = 9 \end{cases}$       Hệ (II)  $\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ 3x + my = 2 \end{cases}$

# GIẢI TOÁN LẬP PHƯƠNG TRÌNH - HỆ PHƯƠNG TRÌNH

## DẠNG TOÁN TÌM SỐ

\* Công thức liên hệ giữa số bị chia, số chia, thương và số dư

$$\text{Số bị chia} = (\text{số chia}) \times (\text{thương}) + (\text{số dư}); (\text{Số dư} < \text{số chia})$$

\* Cách viết số có hai chữ số dưới dạng một tổng (cấu tạo số)

$$\text{Nếu } a \text{ là chữ số hàng chục, } b \text{ là chữ số hàng đơn vị thì } \overline{ab} = 10a + b$$

$$\text{Với } a, b \in \mathbb{N} \text{ và } 1 \leq a \leq 9; 0 \leq b \leq 9$$

**Bài tập 1:** Tìm hai số tự nhiên, biết rằng tổng của chúng bằng 1006 và nếu lấy số lớn chia cho số nhỏ thì được thương là 2 và dư là 124.

**Giải**

Gọi số lớn hơn là  $x$  và số nhỏ là  $y$  (ĐK:  $x, y \in \mathbb{N}; y > 124$ )

Theo đề bài tổng hai số bằng 1006 nên ta có phương trình  $x + y = 1006$  (1)

Vì lấy số lớn chia cho số nhỏ thì được thương là 2 dư là 124 nên ta có phương trình:  $x = 2y + 124$  (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x + y = 1006 \\ x = 2y + 124 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được: 
$$\begin{cases} x = 712 \\ y = 294 \end{cases} \quad (\text{TMDK})$$

Vậy số lớn là 712; số nhỏ là 294.

**Bài tập 2:** Một số có hai chữ số. Nếu đổi chỗ hai chữ số của nó thì ta được một số mới lớn hơn số đã cho là 63. Biết tổng của số đã cho và số mới tạo thành bằng 99.

**Giải**

Gọi chữ số hàng chục là  $x$  và chữ số hàng đơn vị là  $y$

ĐK:  $x, y \in \mathbb{N}; 1 \leq x, y \leq 9$

Theo đề bài ta có số đã cho là:  $\overline{xy} = 10x + y$

Đổi chỗ hai chữ số cho nhau, ta được số mới là  $\overline{yx} = 10y + x$

Nếu đổi chỗ hai chữ số ban đầu thì ta được một số mới lớn hơn số ban đầu là 63 nên ta có:

$$(10y + x) - (10x + y) = 63 \quad (1)$$

Biết tổng của số đã cho và số mới tạo thành bằng 99 nên ta có:

$$(10x + y) + (10y + x) = 99 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: 
$$\begin{cases} (10y + x) - (10x + y) = 63 \\ (10x + y) + (10y + x) = 99 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được: 
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 8 \end{cases} \quad (\text{TMDK}).$$
 Vậy số đã cho là 18.

**Bài tập 3:** Tìm số tự nhiên có hai chữ số. Biết tổng các chữ số bằng 8, nếu đổi vị trí hai chữ số cho nhau thì số tự nhiên đó tăng lên 18 đơn vị.

**Bài tập 4:** Tìm hai số biết rằng tổng của chúng là 18. Nếu tăng mỗi số thêm hai đơn vị thì tích của chúng sẽ tăng gấp 1,5 lần.

**Bài tập 5:** Cho một số tự nhiên có hai chữ số. Nếu đổi chỗ hai chữ số của nó thì được một số mới lớn hơn số đã cho là 9. Tổng của số mới và số đã cho là 121. Tìm số đã cho?

**Bài tập 6:** Tìm tất cả các số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng chữ số hàng đơn vị nhỏ hơn chữ số hàng chục là 2 và tích của hai chữ số đó của nó luôn lớn hơn tổng hai chữ số của nó là 34.

**Bài tập 7:** Cho một số có hai chữ số. Tìm số đó, biết tổng hai chữ số của nó luôn nhỏ hơn số đó 6 lần. Nếu thêm 25 vào tích của hai chữ số đó sẽ được một số theo thứ tự ngược lại với số đã cho.

**Bài tập 8:** Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 2 và nếu viết thêm chữ số bằng chữ số hàng chục vào bên phải thì được một số lớn hơn số ban đầu là 682.

# GIẢI TOÁN LẬP PHƯƠNG TRÌNH - HỆ PHƯƠNG TRÌNH

## DẠNG TOÁN CHUYỂN ĐỘNG CỦA MỘT VẬT

### I/ VẬT CHỈ CHUYỂN ĐỘNG TỪ A đến B.

Lập bảng dữ liệu, gọi ẩn:

	S	V	t
Dự định			
Thực tế			

\* Thời gian chuyển động = Thời điểm đến – thời điểm xuất phát

\* Thời gian dự định  $t_{\text{dự định}} = S/v_{\text{dự định}}$

\* Thời gian thực tế đi hết quãng đường S là  $t_{\text{thực tế}} = S/v_{\text{thực tế}}$

+ Nếu có nghỉ dọc đường thì  $t_{\text{thực tế}} = S_1/v_{\text{thực tế 1}} + t_{\text{nghỉ}} + S_2/v_{\text{thực tế 2}}$

+ Nếu không có nghỉ mà quãng đường S chia thành hai đoạn đường có vận tốc

khác nhau thì  $t_{\text{thực tế}} = S_1/v_{\text{thực tế 1}} + t_{\text{nghỉ}} + S_2/v_{\text{thực tế 2}}$

\* Liên hệ lập phương trình:

+ Nếu đến sớm hơn dự định thì  $t_{\text{thực tế}} + \text{Khoảng thời gian sớm} = t_{\text{dự định}}$

+ Nếu đến muộn hơn dự định thì  $t_{\text{thực tế}} - \text{Khoảng thời gian muộn} = t_{\text{dự định}}$

\* Với chuyển động của Ca nô (thuyền) trên sông:

$V_{\text{xuôi dòng}} = V_{\text{thuyền}} + V_{\text{nước}}$        $t_{\text{xuôi}} = S/v_{\text{xuôi}}$

$V_{\text{ngược dòng}} = V_{\text{thuyền}} - V_{\text{nước}}$        $t_{\text{ngược}} = S/v_{\text{ngược}}$

**Bài tập 1:** Một ô tô đi từ A và dự định đến B lúc 12 giờ trưa. Nếu xe chạy với vận tốc 35 km/h thì sẽ đến B chậm 2 giờ so với dự định. Nếu xe chạy với vận tốc 50 km/h thì sẽ đến B sớm 1 giờ so với dự định. Tính độ dài quãng đường AB và thời điểm xuất phát của ô tô tại A?

*Hướng dẫn:*

Gọi thời điểm xuất phát của ô tô tại A là x (giờ) ( $0 < x < 12$ )

=> Thời gian dự định đi từ A đến B là  $12 - x$  (giờ)

Độ dài quãng đường AB là y (km) ( $y > 0$ )

	S	V	t
Dự định	Y		12 - x
Thực tế 1	Y	35	y/35

<b>Thực tế 2</b>	<b>y</b>	<b>50</b>	<b>y/50</b>
------------------	----------	-----------	-------------

Phương trình:  $y/35 - (12 - x) = 2$  (1)

$(12 - x) - y/50 = 1$  (2)

**Bài tập 3:** Một xe ô tô dự định đi từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu xe chạy mỗi giờ nhanh hơn 10 km thì đến nơi sớm hơn dự định 3 giờ, nếu xe chạy chậm lại mỗi giờ 10 km thì đến nơi chậm nhất 5 giờ. Tính vận tốc của xe lúc đầu, thời gian dự định và chiều dài quãng đường AB?

*Hướng dẫn:*

	<b>S</b>	<b>V</b>	<b>t</b>
<b>Dự định</b>	<b>x</b>	<b>y</b>	<b>x/y</b>
<b>Thực tế 1</b>	<b>x</b>	<b>y + 10</b>	<b>x/(y + 10)</b>
<b>Thực tế 2</b>	<b>x</b>	<b>y - 10</b>	<b>x/(y - 10)</b>

Phương trình:  $\frac{x}{y} - \frac{x}{y+10} = 3$

$\frac{x}{y+10} - \frac{x}{y} = 5$

**Bài tập 4:** Một người đi xe máy từ A đến B cách nhau 120 km với vận tốc dự định trước. Sau khi được 1/3 quãng đường AB người đó tăng vận tốc thêm 10 km/h trên quãng đường còn lại. Tìm vận tốc dự định và thời gian xe lăn bánh trên đường, biết rằng người đó đến B sớm hơn dự định 24 phút.

*Hướng dẫn: Đổi 24 phút = 2/5 (giờ)*

	<b>S</b>	<b>V</b>	<b>t</b>
<b>Dự định</b>	<b>120</b>	<b>x</b>	<b>120/x</b>
<b>Thực tế 1</b>	<b>120/3 = 40</b>	<b>x</b>	<b>40/x</b>
<b>Thực tế 2</b>	<b>120 - 40 = 80</b>	<b>x + 10</b>	<b>80/(x+10)</b>

Thời gian xe lăn bánh là  $\frac{40}{x} + \frac{80}{x+10}$

Phương trình:  $\frac{120}{x} - \left(\frac{40}{x} + \frac{80}{x+10}\right) = \frac{2}{5}$

**Bài tập 5:** Một ô tô dự định đi từ tỉnh A đến tỉnh B với vận tốc 50km/h. Sau khi đi được 2/3 quãng đường với vận tốc đó, vì đường khó đi nên người lái xe phải giảm vận tốc mỗi giờ 10km trên quãng đường còn lại. Do đó ô tô đến tỉnh B chậm hơn 30 phút so với dự định. Tính quãng đường AB.

**Bài tập 6:** Một ô tô đi từ A đến B với một vận tốc xác định và trong một thời gian đã định. Nếu vận tốc ô tô giảm 10 km/h thì thời gian tăng 45 phút. Nếu vận tốc ô tô tăng 10 km/h thì thời gian giảm 30 phút. Tính vận tốc và thời gian dự định đi của ô tô.

**Bài tập 7:** Một chiếc ca nô dự định đi từ A đến B trong một thời gian dự định, nếu vận tốc ca nô tăng 3 km/h thì đến B sớm hơn 2 giờ, nếu vận tốc ca nô giảm 3 km/h thì đến B chậm hơn 3 giờ. Tính chiều dài khúc sông AB và thời gian dự định đi từ A đến B?

**II/ VẬT ĐI TỪ A đến B, nghỉ ở B (hoặc không), rồi từ B về A.**

\* Thời gian chuyển động  $t = S/v$

\* Liên hệ lập phương trình:

+ Tổng thời gian cả đi lẫn về =  $t_{A \text{ đến } B} + t_{\text{nghỉ ở } B} + t_{\text{từ } B \text{ về } A}$

+ Thời gian về ít hơn (nhiều hơn) thời gian đi một khoảng thời gian  $\Delta t$

\* Với chuyển động của Ca nô (thuyền) trên sông:

$$V_{\text{xuôi dòng}} = V_{\text{thuyền}} + V_{\text{nước}} \quad t_{\text{xuôi}} = S/v_{\text{xuôi}}$$

$$V_{\text{ngược dòng}} = V_{\text{thuyền}} - V_{\text{nước}} \quad t_{\text{ngược}} = S/v_{\text{ngược}}$$

**Lập bảng dữ liệu, gọi ẩn:**

	S	V	t
<b>Lúc đi (A đến B)</b>			
<b>Nghỉ tại B</b>			
<b>Lúc về (B về A)</b>			

**Bài tập 1:** Quãng đường AB gồm một đoạn lên dốc dài 4 km và một đoạn xuống dốc dài 5 km. Một người đi xe đạp từ A đến B hết 40 phút và đi từ B đến A hết 41 phút (vận tốc lên dốc, xuống dốc lúc đi và về như nhau). Tính vận tốc lúc lên dốc, lúc xuống dốc?

*Hướng dẫn: Đổi 40 phút = 2/3 (giờ) ; 41 phút = 41/60 (giờ).*

		S	V	t
<b>Lúc đi</b>	<b>Lên dốc</b>	<b>4 km</b>	<b>x</b>	<b>4/x</b>
	<b>Xuống dốc</b>	<b>5 km</b>	<b>y</b>	<b>5/y</b>
<b>Lúc về</b>	<b>Lên dốc</b>	<b>5 km</b>	<b>x</b>	<b>5/x</b>
	<b>Xuống dốc</b>	<b>4 km</b>	<b>y</b>	<b>4/y</b>

Phương trình:  $\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = \frac{2}{3}$

$$\frac{5}{x} + \frac{4}{y} = \frac{41}{60}$$



**Bài tập 2:** Quãng đường từ A đến B dài 90 km. Một người đi xe máy từ A đến B. Khi đến B, người đó nghỉ 30 phút rồi quay trở về A với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 9 km/h. Thời gian kể từ lúc bắt đầu đi từ A đến lúc trở về đến A là 5 giờ. Tính vận tốc xe máy lúc đi từ A đến B.

*Hướng dẫn: Dõi 30 phút = 1/2 (giờ)*

	S	V	t
Lúc đi	90	x	90/x
Nghỉ tại B			1/2
Lúc về	90	x + 9	90/(x + 9)

*Phương trình:*  $\frac{90}{x} + \frac{90}{x+9} + \frac{1}{2} = 5$

**Bài tập 3:** Một ca nô chạy trên sông trong 7 giờ, xuôi dòng 108 Km và ngược dòng 63 Km. Một lần khác, ca nô đó cũng chạy trong 7 giờ, xuôi dòng 81 Km và ngược dòng 84 Km . Tính vận tốc dòng nước chảy và vận tốc riêng ( thực ) của ca nô?

**Bài tập 4:** Một canô xuôi một khúc sông dài 90 km rồi ngược về 36 km. Biết thời gian xuôi dòng sông nhiều hơn thời gian ngược dòng là 2 giờ và vận tốc khi xuôi dòng hơn vận tốc khi ngược dòng là 6 km/h. Hỏi vận tốc canô lúc xuôi và lúc ngược dòng.

**Bài tập 5.** Một ca nô ngược dòng từ bến A đến bến B với vận tốc 20 km/h, sau đó lại xuôi từ bến B trở về bến A. Thời gian ca nô ngược dòng từ A đến B nhiều hơn thời gian ca nô xuôi dòng từ B trở về A là 2 giờ 40 phút. Tính khoảng cách giữa hai bến A và B. Biết vận tốc dòng nước là 5 km/h, vận tốc riêng của ca nô lúc xuôi dòng và lúc ngược dòng bằng nhau.

**Bài tập 6:** Một canô xuôi từ bến sông A đến bến sông B với vận tốc 30 km/h, sau đó lại ngược từ B trở về A. Thời gian xuôi ít hơn thời gian đi ngược 1 giờ 20 phút. Tính khoảng cách giữa hai bến A và B. Biết rằng vận tốc dòng nước là 5 km/h và vận tốc riêng của canô lúc xuôi và lúc ngược bằng nhau.

**Bài tập 7:** Một ca nô xuôi dòng trên một khúc sông từ bến A đến bến B dài 80 km, sau đó lại ngược dòng đến địa điểm C cách bến B 72 km. Thời gian ca nô xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng là 15 phút. Tính vận tốc riêng của ca nô biết vận tốc của dòng nước là 4km/h.

# GIẢI TOÁN LẬP PHƯƠNG TRÌNH - HỆ PHƯƠNG TRÌNH

## DẠNG TOÁN HAI VẬT CHUYỂN ĐỘNG CÙNG CHIỀU

### I/ HAI VẬT XUẤT PHÁT CÙNG LÚC TỪ A đến B.

\* Nếu hai vật đến B cùng lúc thì thời gian hai vật đi từ A đến B là như nhau.

\* Nếu vật 1 đến B sớm hơn vật 2 một khoảng thời gian  $\Delta t$  thì:

$$t_{\text{vật 2 từ A đến B}} - t_{\text{vật 1 từ A đến B}} = \Delta t$$

Lập bảng dữ liệu, gọi ẩn:

	S	V	t
Vật 1			
Vật 2			

**Bài tập 1.** Một xe khách và một xe Du lịch khởi hành cùng một lúc từ Hà Nội đi Hải Phòng Xe Du lịch có vận tốc lớn hơn vận tốc xe khách là 20 km/h do đó đến Hải phòng trước xe Khách là 25 phút. Tính vận tốc mỗi xe. Biết khoảng cách giữa Hà Nội và Hải phòng là 100 km.

**Bài tập 2.** Một Ô tô khách và một Ô tô tải cùng xuất phát từ địa điểm A đi đến địa điểm B đường dài 180 km do vận tốc của Ô tô khách lớn hơn Ô tô tải 10 km/h nên Ô tô khách đến B trước Ô tô tải 36 phút. Tính vận tốc của mỗi Ô tô. Biết rằng trong quá trình đi từ A đến B vận tốc của mỗi Ô tô không đổi.

**Bài tập 3.** Hai ô tô cùng khởi hành cùng một lúc từ A đến B cách nhau 150 km. Biết vận tốc ô tô thứ nhất lớn hơn vận tốc ô tô thứ hai là 10 km/h và ô tô thứ nhất đến B trước ô tô thứ hai là 30 phút. Tính vận tốc của mỗi ô tô.

**Bài tập 4:** Hai ô tô khởi hành cùng một lúc trên quãng đường từ A đến B dài 120 km. Mỗi giờ ô tô thứ nhất chạy nhanh hơn ô tô thứ hai 10 km nên đến b trước ô tô thứ hai là 2/5 giờ. Tính vận tốc của mỗi xe.

**Bài tập 5:** Một ô tô và xe máy xuất phát cùng một lúc, đi từ địa điểm A đến địa điểm B cách nhau 180 km . Vận tốc của ô tô lớn hơn vận tốc của xe máy là 10 km/h , nên ô tô đã đến B trước xe máy 36 phút. Tính vận tốc của mỗi xe..

**Bài tập 6:** Hai người đi xe máy khởi hành cùng một lúc từ A đến B dài 75 km . Người thứ nhất mỗi giờ đi nhanh hơn người thứ hai 5 km/h nên đến B sớm hơn người thứ hai 10 phút. Tính vận tốc của mỗi người.

**Bài tập 7:** Một xe tải và một xe con cùng khởi hành từ tỉnh A đến tỉnh B. Xe tải với vận tốc 30km/h, xe con đi với vận tốc 45km/h. Sau khi đi được 3/4 quãng đường AB, xe con tăng vận tốc thêm 5km/h trên quãng đường còn lại. Tính quãng đường AB, biết rằng xe con đến tỉnh B sớm hơn xe tải 2 giờ 20 phút.

**Bài tập 8:** Một ô tô và một xe máy cùng khởi hành từ A để đi đến B với vận tốc của mỗi xe không đổi trên toàn bộ quãng đường AB dài 120km. Do vận tốc của xe ô tô lớn hơn vận tốc của xe máy là 10km/h nên ô tô đến B sớm hơn xe máy 36 phút. Tính vận tốc mỗi xe?

**Bài tập 9:** Một xe tải và một xe con cùng khởi hành từ tỉnh A đến tỉnh B. Xe tải với vận tốc 40km/h, xe con đi với vận tốc 60km/h. Sau khi mỗi xe đi được nửa đường thì xe con nghỉ 40 phút rồi đi tiếp đến B; xe tải trên quãng đường còn lại đã tăng vận tốc thêm 10km/h nhưng vẫn đến B chậm hơn xe con nửa giờ. Tính quãng đường AB?

## II/ HAI XE XUẤT PHÁT KHÁC THỜI ĐIỂM TỪ A:

Xe 1 **xuất phát** trước xe 2 một khoảng thời gian  $\Delta t$  và xe 2 đuổi theo xe 1 ( $v_2 > v_1$ ).

$$t_1 \text{ đi AB} = AB/v_1$$

$$t_2 \text{ đi AB} = AB/v_2$$

Khi xe 2 **xuất phát** thì xe 1 đã đi được quãng đường  $S_1 = \Delta t \cdot v_1$

Khi xe 2 đuổi kịp xe 1 (**hai xe gặp nhau**) thì:

$$S_{\text{xe 2 đi từ A} \rightarrow \text{gặp nhau}} = S_{\text{xe 1 đi từ A} \rightarrow \text{gặp nhau}}$$

$$t_{\text{xe 1 từ thời điểm xuất phát tới thời điểm gặp nhau}} - \Delta t = t_{\text{xe 2 từ thời điểm xuất phát tới thời điểm gặp nhau}} \cdot$$

**Lập bảng dữ liệu, gọi ẩn:**

	S	V	t
Xe 1			
Xe 2			

**Bài tập 1:** Lúc 7 giờ một người đi xe máy khởi hành từ A với vận tốc 40 km/h. Sau đó, lúc 8 giờ 30 phút, một người khác cũng đi xe máy từ A đuổi theo với vận tốc 60km/h. Hỏi hai người gặp nhau lúc mấy giờ và điểm gặp nhau cách A bao nhiêu?

*Hướng dẫn: Đồi 8 giờ 30 phút = 17/2 (giờ)*

*Gọi thời điểm hai xe gặp nhau là x (giờ) ( $x > 17/2$ )*

*Khoảng thời gian người 1 đi từ A tới vị trí gặp nhau là  $x - 7$  (giờ)*

*Khoảng thời gian người 2 đi từ A tới vị trí gặp nhau là  $x - 17/2$  (giờ)*

	S	V	t
<b>Người 1</b>	$40(x - 7)$	<b>40</b>	$x - 7$
<b>Người 2</b>	$60(x - 17/2)$	<b>60</b>	$x - 17/2$

Phương trình:  $40(x - 7) = 60(x - 17/2)$

**Bài tập 2.** Một ô tô khởi hành từ A với vận tốc 50 km/h. Qua 1 giờ 15 phút ô tô thứ hai cũng khởi hành từ A đi cùng hướng với ô tô thứ nhất với vận tốc 40 km/h. Hỏi sau mấy giờ thì ô tô gặp nhau, điêm gặp nhau cách A bao nhiêu km?

**Bài tập 3:** Một chiếc xe tải đi từ tỉnh A đến B với vận tốc 40km/h. Sau đó 1giờ 30 phút, một chiếc xe con cũng khởi hành từ tỉnh A để đi đến tỉnh B với vận tốc 60km/h. Hai xe gặp nhau khi chúng đã đi được một nửa quãng đường AB. Tính quãng đường AB.

# GIẢI TOÁN LẬP PHƯƠNG TRÌNH - HỆ PHƯƠNG TRÌNH

## DẠNG TOÁN HAI VẬT CHUYỂN ĐỘNG NGƯỢC CHIỀU

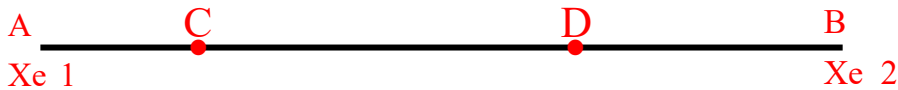
\* Hai xe đi ngược chiều cùng lúc từ hai địa điểm A và B.



=> Khi gặp nhau tại D thì:  $t_{\text{xe 1 đi AD}} = t_{\text{xe 2 đi BD}}$  và  $AD + BD = AB$

\* Hai xe đi ngược chiều khác thời điểm (không cùng lúc)

Giả sử xe 1 đi từ A  $\rightarrow$  B, xe 2 đi từ B  $\rightarrow$  A và xe 1 xuất phát sớm hơn xe 2 một khoảng  $\Delta t$  (h)



+ Khi xe 2 xuất phát thì xe 1 đã đi được quãng đường  $AC = v_1 \cdot \Delta t$  và thời điểm xe 1 tới C cũng là thời điểm xe 2 xuất phát.

+ Khi gặp nhau tại D thì:

$$t_{\text{xe 1 đi CD}} = t_{\text{xe 2 đi BD}}$$

$$AD + BD = AB$$

$$t_{\text{xe 1 đi AD}} = \Delta t + t_{\text{xe 1 đi CD}}$$

$$CD + BD = CB$$

**Bài tập 1:** Đoạn đường AB dài 180 km . Cùng một lúc xe máy đi từ A và ô tô đi từ B, xe máy gặp ô tô tại C cách A 80 km. Nếu xe máy khởi hành sau 54 phút thì chúng gặp nhau tại D cách A là 60 km. Tính vận tốc của ô tô và xe máy ?

**Bài tập 2:** Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 108 km. Cùng lúc đó một ô tô khởi hành từ B đến A với vận tốc hơn vận tốc xe đạp là 18 km/h. Sau khi hai xe gặp nhau xe đạp phải đi mất 4 giờ nữa mới tới B. Tính vận tốc của mỗi xe?

**Bài tập 3:** Một ca nô xuôi dòng từ A đến B cách nhau 100 km. Cùng lúc đó một bè nứa trôi tự do từ A đến B. Ca nô đến B thì quay lại A ngay, thời gian cả xuôi dòng và ngược dòng hết 15 giờ. Trên đường ca nô ngược về A thì gặp bè nứa tại một điểm cách A là 50 km. Tìm vận tốc riêng của ca nô và vận tốc của dòng nước?

**Bài tập 4:** Đoạn đường AB dài 180 km . Cùng một lúc xe máy đi từ A và ô tô đi từ B xe máy gặp ô tô tại C cách A 80 km. Nếu xe máy khởi hành sau 54 phút thì chúng gặp nhau tại D cách A là 60 km. Tính vận tốc của ô tô và xe máy ?

**Bài tập 5:** Hai ô tô A và B khởi hành cùng một lúc từ hai tỉnh, cách nhau 150 km, đi ngược chiều và gặp nhau sau 2 giờ. Tìm vận tốc của mỗi ô tô, biết rằng nếu vận tốc của ô tô A tăng thêm 5km/h và vận tốc của ô tô B giảm đi 5km/h thì vận tốc của ô tô A bằng 2 lần vận tốc của ô tô B.

**Bài tập 6:** Một người đi xe đạp và một người đi xe máy cùng khởi hành từ A đến B dài 57 km. Người đi xe máy đến B nghỉ lại giờ rồi quay trở lại A và gặp người đi xe đạp cách B là 24km. Tính vận tốc mỗi người, biết vận tốc xe máy hơn vận tốc xe đạp là 36 km/h.

**Bài tập 7:** Hai người ở hai địa điểm A và B cách nhau 3,6 km, khởi hành cùng một lúc ngược chiều nhau và gặp nhau ở một điểm cách A là 2 km. Nếu cả hai cùng giữ nguyên vận tốc nhưng người đi chậm hơn xuất phát trước người kia 6 phút thì họ sẽ gặp nhau ở chính giữa quãng đường. Tính vận tốc của mỗi người.

**Bài tập 8.** Một xe lửa đi từ Huế ra Hà Nội. Sau đó 1 giờ 40 phút, một xe lửa khác đi từ Hà Nội vào Huế với vận tốc lớn hơn vận tốc của xe lửa thứ nhất là 5 km/h. Hai xe gặp nhau tại một ga cách Hà Nội 300 km. Tìm vận tốc của mỗi xe, giả thiết rằng quãng đường sắt Huế - Hà Nội dài 645km.

# GIẢI TOÁN LẬP PHƯƠNG TRÌNH - HỆ PHƯƠNG TRÌNH

## DẠNG TOÁN CHUNG, RIÊNG

### I/ Phương pháp.

#### Lập bảng

	Phần CV (thể tích) trong 1h	Thời gian làm (chảy) một mình xong CV (đầy bể)	Phần CV (thể tích) trong thời gian tương ứng.
Cả hai đơn vị			
Đơn vị 1			
Đơn vị 2			

Phương trình liên hệ:

+ CV cả hai làm trong 1 h = Phần CV đơn vị I trong 1h + Phần CV đơn vị II trong 1h

+ Tương tự thiết lập CV cả hai đội, CV đội I, CV đội 2 làm trong x giờ, rồi lập PT theo bài cho.

### II/ Bài tập vận dụng.

**Bài tập 1:** Hai công nhân cùng làm một công việc sau 10 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm một mình trong 1 giờ, sau đó hai người cùng làm tiếp trong 2 giờ thì được 25% công việc. Tính thời gian mỗi người làm một mình xong công việc?

**Bài tập 2:** Hai người thợ cùng làm một công việc. Nếu làm riêng rẽ, mỗi người nửa việc thì tổng số giờ làm việc là 12h 30ph. Nếu hai người cùng làm thì hai người chỉ làm việc đó trong 6 giờ. Như vậy, làm việc riêng rẽ cả công việc mỗi người mất bao nhiêu thời gian? Biết thời gian người một làm một mình lâu hơn người hai.

*ĐS: Người 1 làm một mình trong 15h. Người 2 làm một mình trong 10h.*

**Bài tập 3:** Hai tổ thanh niên tình nguyện cùng sửa một con đường vào bản trong 4 giờ thì xong. Nếu làm riêng thì tổ 1 làm nhanh hơn tổ 2 là 26 giờ. Hỏi mỗi đội làm một mình thì bao lâu sẽ xong việc?

**Bài tập 4:** Hai đội công nhân làm một đoạn đường. Đội 1 làm xong một nửa đoạn đường thì đội 2 đến làm tiếp nửa còn lại với thời gian dài hơn thời gian đội 1 đã làm là 30 ngày. Nếu hai đội cùng làm thì trong 72 ngày xong cả đoạn đường. Hỏi mỗi đội đã làm bao nhiêu ngày trên đoạn đường này?

*ĐS: Đội 1 làm trên đoạn đường 120 ngày. Đội 2 làm trên đoạn đường 180 ngày.*

**Bài tập 5:** Hai người thợ cùng làm một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 3 giờ và người thứ hai làm trong 6 giờ thì họ làm được 25% công việc. Hỏi mỗi người làm công việc đó trong mấy giờ thì xong.

*ĐS: Người 1 làm một mình trong 24h. Người 2 làm một mình trong 48h*

**Bài tập 6:** Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không chứa nước thì sau 6 giờ đầy bể. Nếu vòi thứ nhất chảy trong 2 giờ, vòi thứ 2 chảy trong 3 giờ thì được  $\frac{2}{5}$  bể. Hỏi mỗi vòi chảy một mình trong bao lâu thì đầy bể?

*ĐS: Vòi 1 chảy một mình trong 10h. Vòi 2 chảy một mình trong 15h.*

**Bài tập 7:** Hai đội công nhân đắp đê ngăn triều cường. Nếu hai đội cùng làm thì trong 6 ngày xong việc. Nếu làm riêng thì đội I hoàn thành công việc chậm hơn đội II là 9 ngày. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội đắp xong đê trong bao nhiêu ngày?

Đ S: Đội I làm một mình trong 18 ngày. Đội II làm một mình trong 9 ngày.

**Bài tập 8:** Hai người thợ cùng làm chung một công việc trong 7 giờ 12 phút thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 5 giờ và người thứ hai làm trong 6 giờ thì cả hai người chỉ làm được  $\frac{3}{4}$  công việc. Hỏi một người làm công việc đó trong mấy giờ thì xong?

**Bài tập 9:** Nếu vòi A chảy 2 giờ và vòi B chảy trong 3 giờ thì được  $\frac{4}{5}$  hồ. Nếu vòi A chảy trong 3 giờ và vòi B chảy trong 1 giờ 30 phút thì được  $\frac{1}{2}$  hồ. Hỏi nếu chảy một mình mỗi vòi chảy trong bao lâu mới đầy hồ.

**Bài tập 10:** Hai vòi nước cùng chảy vào một bể thì sau 6 giờ đầy bể. Nếu mỗi vòi chảy một mình cho đầy bể thì vòi II cần nhiều thời gian hơn vòi I là 5 giờ. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể?

**Bài tập 11:** Hai người cùng làm chung một công việc trong  $\frac{12}{5}$  giờ thì xong. Nếu mỗi người làm một mình thì thời gian để người thứ nhất hoàn thành công việc ít hơn người thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao nhiêu giờ để xong công việc?

**Bài tập 12:** Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước và chảy đầy bể trong 4 giờ 48 phút. Nếu chảy riêng thì vòi thứ nhất có thể chảy đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai 1 giờ. Hỏi nếu chảy riêng thì mỗi vòi sẽ chảy đầy bể trong bao lâu?

**Bài tập 13:** Hai người thợ cùng làm một công việc trong 7 giờ 12 phút thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 5 giờ, người thứ 2 làm trong 6 giờ thì cả hai người làm được  $\frac{3}{4}$  công việc. Hỏi mỗi người làm một mình công việc đó thì mấy giờ xong.

**Bài tập 14:** Hai đội công nhân cùng làm một công việc. Nếu hai đội làm chung thì hoàn thành sau 12 ngày. Nếu mỗi đội làm riêng thì đội một sẽ hoàn thành công việc nhanh hơn đội hai là 7 ngày. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội phải làm trong bao nhiêu ngày để hoàn thành công việc đó?

**Bài tập 15:** Hai vòi nước cùng chảy vào một cái bể không có nước thì trong 5 giờ sẽ đầy bể. Nếu vòi thứ nhất chảy trong 3 giờ và vòi thứ 2 chảy trong 4 giờ thì được  $\frac{2}{3}$  bể nước. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì trong bao lâu mới đầy bể.

**Bài tập 16:** Hai người cùng làm chung một công việc thì sau 4 giờ 30 phút họ làm xong. Nếu một mình người thứ nhất làm trong 4 giờ, sau đó một mình người thứ hai làm trong 3 giờ thì cả hai người làm được 75% công việc. Hỏi nếu mỗi người làm một mình thì sau bao lâu sẽ xong công việc? (Biết rằng năng suất làm việc của mỗi người là không thay đổi).



# GIẢI TOÁN LẬP PHƯƠNG TRÌNH - HỆ PHƯƠNG TRÌNH

## DẠNG TOÁN NĂNG SUẤT - %

Tổng sản phẩm dự định làm =	Số sản phẩm dự định làm trong 1 ngày (giờ)	Thời gian hoàn thành
Tổng sản phẩm thực tế làm =	Số sản phẩm thực tế làm trong 1 ngày (giờ)	Thời gian hoàn thành

\* Nếu mỗi ngày thực tế làm nhiều hơn so với dự định  $K$  sản phẩm thì:

$$\text{Số sản phẩm đã làm trong 1 ngày} = \text{Số sản phẩm dự định làm trong 1 ngày} + K$$

\* Nếu thực tế làm được số sản phẩm nhiều hơn dự định  $K$  sản phẩm thì:

$$\text{Tổng sản phẩm thực tế làm} = \text{Tổng sản phẩm dự định} + K$$

\* Nếu tháng II vượt mức  $a\%$  so với tháng I thì:

$$\text{Số sản phẩm của tháng II} = \text{Số sản phẩm tháng I} + a\% \cdot (\text{Số sản phẩm tháng I})$$

### I/ TOÁN VỀ Tổng sản phẩm & Số sản phẩm dự định và thực tế làm trong một ngày.

Lập bảng:

	Tổng sản phẩm	Số sản phẩm (1 ngày – giờ)	Thời gian hoàn thành
Dự định			
Thực tế			

**Bài toán 1:** Một tổ công nhân dự định làm xong 240 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Nhưng khi thực hiện nhờ cải tiến kỹ thuật nên mỗi ngày tổ đã làm tăng thêm 10 sản phẩm so với dự định. Do đó tổ đã hoàn thành công việc sớm hơn dự định 2 ngày. Hỏi khi thực hiện mỗi ngày tổ làm được bao nhiêu sản phẩm?

**Bài toán 2:** Theo kế hoạch một tổ công nhân phải sản xuất 360 sản phẩm. Đến khi làm việc, do phải điều 3 công nhân đi làm việc khác nên mỗi công nhân còn lại phải làm nhiều hơn dự định là 4 sản phẩm. Hỏi lúc đầu tổ có bao nhiêu công nhân? Biết rằng năng suất lao động của mỗi công nhân là như nhau.

**Bài toán 3:** Hai tổ sản xuất cùng may một loại áo. Nếu tổ thứ nhất may trong 3 ngày, tổ thứ hai may trong 5 ngày thì cả hai tổ may được 1310 chiếc áo. Biết rằng trong mỗi ngày tổ thứ nhất may nhiều hơn tổ thứ hai 10 chiếc áo. Hỏi mỗi tổ may trong một ngày được bao nhiêu chiếc áo?

**Bài toán 4:** Một công nhân dự định làm 150 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Sau khi làm được 2 giờ với năng suất dự kiến, người đó đã cải tiến các thao tác nên đã tăng năng suất được 2 sản phẩm mỗi giờ và vì vậy đã hoàn thành 150 sản phẩm sớm hơn dự kiến 30 phút. Hãy tính năng suất dự kiến ban đầu?

**Bài toán 5:** Theo kế hoạch, một công nhân phải hoàn thành 60 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Nhưng do cải tiến kỹ thuật nên mỗi giờ người công nhân đó đã làm thêm 2 sản phẩm. Vì vậy, chẳng những đã hoàn

thành kế hoạch sớm hơn dự định 30 phút mà còn vượt mức 3 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch, mỗi giờ người đó phải làm bao nhiêu sản phẩm?

**Bài toán 6:** Một công nhân dự định làm 72 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Nhưng trong thực tế xí nghiệp lại giao làm 80 sản phẩm. Vì vậy, mặc dù mỗi giờ người đó đã làm mỗi giờ thêm 1 sản phẩm song thời gian hoàn thành công việc vẫn tăng so với dự định 12 phút. Tính năng suất dự kiến? Biết rằng mỗi giờ người đó làm không quá 20 sản phẩm.

## II/ TOÁN VỀ TỔNG SẢN PHẨM & VƯỢT MỨC %

**Lập bảng:**

	Số sản phẩm Năm ngoái (Tháng 1, Quý 1)	Số sản phẩm Năm nay (Tháng 12, Quý 2)
Đơn vị 1 (Tổ 1)		
Đơn vị 2 (Tổ 2)		
Cả hai đơn vị (Cả hai tổ)		

**Bài toán 1:** Trong tháng đầu hai tổ công nhân sản xuất được 800 chi tiết máy. Sang tháng thứ hai tổ vượt mức 15%, tổ II sản xuất vượt mức 20%, do đó cuối tháng cả hai tổ sản xuất được 945 chi tiết máy. Hỏi rằng trong tháng đầu, mỗi tổ công nhân sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy.

### Lời Giải

Gọi số chi tiết sản xuất được trong tháng đầu của Tổ I là  $x$  ( $x$  nguyên dương),  $x < 720$ .

Gọi số chi tiết sản xuất được trong tháng đầu của Tổ II là  $y$  ( $y$  nguyên dương),  $y < 720$ .

Vì trong tháng đầu hai tổ sản xuất được 800 chi tiết máy do đó ta có phương trình (1)

$$x + y = 800$$

Vì trong tháng thứ hai Tổ I vượt mức 15%, Tổ II sản xuất vượt mức 12%, cả hai tổ sản xuất được 945 chi tiết máy do đó ta có phương trình (2) là:  $x + \frac{15x}{100} + y + \frac{20y}{100} = 945 \Leftrightarrow \frac{115}{100}x + \frac{112}{100}y = 945$

Theo bài ra ta có hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x + y = 800 \\ \frac{115}{100}x + \frac{112}{100}y = 945 \end{cases}; \text{ Giải hệ phương trình ta được: } \begin{cases} x = 300 \\ y = 500 \end{cases}$$

Vậy trong tháng đầu tổ I sản xuất được 300 chi tiết máy, tổ II sản xuất được 500 chi tiết máy.

**Bài toán 2:** Năm ngoái dân số của hai tỉnh A và B là 4 triệu người. Dân số tỉnh A năm nay tăng 1,2 % còn tỉnh B tăng 1,1 %, tổng dân số của hai tỉnh năm nay là 4 045 000 người. Tính dân số của mỗi tỉnh năm ngoái và năm nay.

### Lời Giải

Gọi dân số năm ngoái của tỉnh A là  $x$  ( $x$  nguyên dương),  $x < 4$  triệu.

Gọi dân số năm ngoái của tỉnh B là  $y$  ( $y$  nguyên dương),  $y < 4$  triệu

Vì dân số năm ngoái của hai tỉnh năm ngoái là 4 triệu do đó ta có phương trình (1)

$$x + y = 4$$

Vì dân số năm nay của tỉnh A năm nay tăng 1,2%, tỉnh B tăng 1,1 % do đó ta có phương trình (2) là:

$$\frac{1,2x}{100} + \frac{1,1y}{100} = 0,045$$

Theo bài ra ta có hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ \frac{1,2x}{100} + \frac{1,1y}{100} = 0,045 \end{cases}$$
 ;Giải hệ phương trình ta được: 
$$\begin{cases} x = 1012000 \\ y = 3033000 \end{cases}$$

Vậy dân số của tỉnh A năm nay là 1 012 000 người, tỉnh B là 3 033 000 người.

**Bài toán 3:** Trong tháng đầu, hai tổ công nhân sản xuất được 720 chi tiết máy. Sang tháng thứ hai tổ vượt mức 15%, tổ II sản xuất vượt mức 12%, do đó cuối tháng cả hai tổ sản xuất được 819 chi tiết máy. Hỏi rằng trong tháng đầu, mỗi tổ công nhân sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy.

### Lời Giải

Gọi số chi tiết sản xuất được trong tháng đầu của tổ I là x ( x nguyên dương),  $x < 720$ .

Gọi số chi tiết sản xuất được trong tháng đầu của tổ II là y ( y nguyên dương),  $y < 720$ .

Vì trong tháng đầu hai tổ sản xuất được 720 chi tiết máy do đó ta có phương trình (1)

$$x + y = 720$$

Vì trong tháng thứ hai tổ I vượt mức 15%, tổ II sản xuất vượt mức 12%, cả hai tổ sản xuất được 720 chi tiết máy do đó ta có phương trình (2) là: 
$$x + \frac{15x}{100} + y + \frac{12x}{100} = 819 \Leftrightarrow \frac{115}{100}x + \frac{112}{100}y = 819$$

Theo bài ra ta có hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x + y = 720 \\ \frac{115}{100}x + \frac{112}{100}y = 819 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được: 
$$\begin{cases} x = 420 \\ y = 300 \end{cases}$$

Vậy trong tháng đầu tổ I sản xuất được 420 chi tiết máy, tổ II sản xuất được 300 chi tiết máy.

**Bài toán 4:** Năm ngoái, hai đơn vị sản xuất nông nghiệp thu hoạch được 720 tấn thóc. Năm nay, đơn vị thứ nhất làm vượt mức 15%, đơn vị thứ hai làm vượt mức 12% so với năm ngoái. Do đó cả hai đơn vị thu hoạch được 819 tấn thóc. Hỏi năm ngoái mỗi đơn vị thu hoạch được bao nhiêu tấn thóc?

**Bảng phân tích đại lượng.**

	Năm ngoái	Năm nay
<b>Đơn vị 1</b>	x (tấn)	115x% (tấn)
<b>Đơn vị 2</b>	y (tấn)	112 y% (tấn)
<b>Hai đơn vị</b>	720 (tấn)	819 (tấn)

Năm ngoái đội 1 thu hoạch được 420 (tấn) thóc. Đội 2 thu hoạch được 300 (tấn) thóc.

**Bài toán 5:** Hai tổ sản xuất phải hoàn thành 90 sản phẩm. Tổ I vượt mức 15% kế hoạch của tổ. Tổ II vượt mức 12% kế hoạch của tổ. Do đó, cả hai tổ làm được 102 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch mỗi tổ phải làm bao nhiêu sản phẩm.

**Bài toán 6:** Trên một cánh đồng cấy 60 ha lúa giống mới và 40 ha lúa giống cũ. Thu hoạch được tất cả 460 tấn thóc. Hỏi năng suất mỗi loại lúa trên 1 ha là bao nhiêu biết rằng 3 ha trồng lúa mới thu hoạch được ít hơn 4 ha trồng lúa cũ là 1 tấn.

**Hướng dẫn:**

Gọi năng suất trên 1 ha của lúa giống mới là  $x$  (tấn), của lúa giống cũ là  $y$  (tấn) ( $x > 0, y > 0$ )

Thiết lập phương trình:  $60x + 40y = 460$  và  $4y - 3x = 1$

Thiết lập hệ phương trình và giải.

**Bài toán 7:** Theo kế hoạch hai tổ sản xuất 1000 sản phẩm trong một thời gian dự định. Do áp dụng kỹ thuật mới nên tổ I vượt mức kế hoạch 15% và tổ hai vượt mức 17%. Vì vậy trong thời gian quy định cả hai tổ đã sản xuất được tất cả được 1162 sản phẩm. Hỏi số sản phẩm của mỗi tổ là bao nhiêu?

# GIẢI TOÁN LẬP PHƯƠNG TRÌNH - HỆ PHƯƠNG TRÌNH

## DẠNG TOÁN CÓ NỘI DUNG HÌNH HỌC

\* Diện tích hình chữ nhật:  $S_{hcn} = a \cdot b$  (a: chiều dài ; b: chiều rộng)

\* Diện tích hình vuông cạnh a là:  $S_{hv} = a^2$

\* Diện tích hình tròn bán kính R là:  $S_{\text{hình tròn}} = \pi \cdot R^2$

\* Diện tích tam giác (có đường cao h ứng với cạnh đáy a) là:  $S_{\Delta} = \frac{1}{2} a \cdot h$

\* Thể tích hình trụ (đáy là hình tròn bán kính R, chiều cao hình trụ là h):

$$V_{\text{trụ}} = S_{\text{đáy}} \cdot h = \pi \cdot R^2 \cdot h$$

\* Chu vi hình tròn bán kính R là:  $C_{\text{hình tròn}} = 2\pi R$

\* Chu vi hình chữ nhật là:  $C_{hcn} = 2(a + b)$

\* Chu vi hình vuông cạnh a là:  $C_{hv} = 4a$

\* Chu vi tam giác ABC là:  $C_{ABC} = AB + BC + AC$

**Bài 1:** Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi bằng 48 m. Nếu tăng chiều rộng lên bốn lần và chiều dài lên ba lần thì chu vi của khu vườn sẽ là 162 m. Hãy tìm diện tích của khu vườn ban đầu.

**Bài 2:** Người ta muốn làm một chiếc thùng tôn hình trụ không có nắp có bán kính đáy là 25 cm, chiều cao của thùng là 60 cm. Hãy tính diện tích tôn cần dùng (không kể mép nối). Thùng tôn đó khi chứa đầy nước thì thể tích nước chứa trong thùng là bao nhiêu.

**Bài 3:** Một tam giác có chiều cao bằng  $\frac{3}{4}$  cạnh đáy. Nếu tăng chiều cao thêm 3 dm, giảm cạnh đáy đi 2 dm thì diện tích của nó tăng thêm 12 dm<sup>2</sup>. Tính chiều cao và cạnh đáy của tam giác.

**Bài 4:** Một thửa ruộng hình chữ nhật có diện tích là 100 m<sup>2</sup>. Tính độ dài các cạnh của thửa ruộng. Biết rằng nếu tăng chiều rộng của thửa ruộng lên 2 m và giảm chiều dài của thửa ruộng đi 5 m thì diện tích của thửa ruộng sẽ tăng thêm 5 m<sup>2</sup>.

**Bài 5:** Một khu vườn hình chữ nhật, chiều dài lớn hơn chiều rộng 5 m, diện tích bằng 300 m<sup>2</sup>. Tính chiều dài và chiều rộng của khu vườn.

**Bài 6:** Cho một hình chữ nhật. Nếu tăng độ dài mỗi cạnh của nó lên 1 cm thì diện tích của hình chữ nhật sẽ tăng thêm 13 cm<sup>2</sup>. Nếu giảm chiều dài đi 2 cm, chiều rộng đi 1 cm thì diện tích của hình chữ nhật sẽ giảm 15 cm<sup>2</sup>. Tính chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật đã cho.

**Bài 7:** Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi 80 m. Nếu tăng chiều dài thêm 3 m, chiều rộng thêm 5 m thì diện tích của mảnh đất tăng thêm 195 m<sup>2</sup>. Tính chiều dài, chiều rộng của mảnh đất.

**Bài 8:** Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài bằng  $\frac{7}{4}$  chiều rộng và có diện tích bằng  $1792 \text{ m}^2$ . Tính chu vi của khu vườn ấy.

**Bài 9:** Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích là  $720 \text{ m}^2$ , nếu tăng chiều dài thêm  $6 \text{ m}$  và giảm chiều rộng đi  $4 \text{ m}$  thì diện tích mảnh vườn không đổi. Tính các kích thước của mảnh vườn.

**Bài 10:** Một tam giác có chiều cao bằng  $\frac{2}{5}$  cạnh đáy. Nếu chiều cao giảm đi  $2 \text{ dm}$  và cạnh đáy tăng thêm  $3 \text{ dm}$  thì diện tích của nó giảm đi  $14 \text{ dm}^2$ . Tính chiều cao và cạnh đáy của tam giác.

**Bài 11:** Một thửa ruộng hình chữ nhật có chu vi  $250 \text{ m}$ . Tính diện tích của thửa ruộng biết rằng nếu chiều dài giảm  $3$  lần và chiều rộng tăng  $2$  lần thì chu vi thửa ruộng vẫn không thay đổi.

**Bài 12:** Một thửa ruộng hình chữ nhật, nếu tăng chiều dài thêm  $2 \text{ m}$ , chiều rộng thêm  $3 \text{ m}$  thì diện tích tăng thêm  $100 \text{ m}^2$ . Nếu giảm cả chiều dài lẫn chiều rộng đi  $2 \text{ m}$  thì diện tích giảm đi  $68 \text{ m}^2$ . Tính diện tích của thửa ruộng đó.

**Bài 13:** Một hình chữ nhật có diện tích  $1200 \text{ m}^2$ . Tính các kích thước của vườn đó, biết rằng nếu tăng chiều dài thêm  $5 \text{ m}$  và giảm chiều rộng đi  $10 \text{ m}$  thì diện tích của vườn giảm đi  $300 \text{ m}^2$ .

**Bài 14:** Một thửa ruộng hình tam giác có diện tích  $180 \text{ m}^2$ . Tính cạnh đáy của thửa ruộng đó, biết rằng nếu tăng cạnh đáy thêm  $4 \text{ m}$  và giảm chiều cao tương ứng đi  $1 \text{ m}$  thì diện tích của nó không đổi.

**Bài 15:** Tính các kích thước của một hình chữ nhật biết rằng nếu tăng chiều dài  $3 \text{ m}$ , giảm chiều rộng  $2 \text{ m}$  thì diện tích không đổi; nếu giảm chiều dài  $3 \text{ m}$ , tăng chiều rộng  $3 \text{ m}$  thì diện tích không đổi.

**Bài 16:** Một hình vườn hình chữ nhật có chu vi  $450 \text{ m}$ . Nếu giảm chiều dài đi  $\frac{1}{5}$  chiều dài cũ, tăng chiều rộng lên  $\frac{1}{4}$  chiều rộng cũ thì chu vi hình chữ nhật không đổi. Tính chiều dài và chiều rộng của vườn.

**Bài 17:** Một vườn hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng  $20 \text{ m}$ , diện tích  $3500 \text{ m}^2$ . Tính độ dài hàng rào xung quanh vườn biết rằng người ta chừa ra  $1 \text{ m}$  để làm cổng ra vào.

**Bài 18:** Một sân hình chữ nhật có diện tích  $720 \text{ m}^2$ . Nếu tăng chiều dài  $6 \text{ m}$ , giảm chiều rộng  $4 \text{ m}$  thì diện tích không đổi. Tính các kích thước của sân.

**Bài 19:** Tìm hai cạnh của một tam giác vuông biết cạnh huyền bằng  $13 \text{ cm}$  và tổng hai cạnh góc vuông bằng  $17$ ?

# GIẢI TOÁN LẬP PHƯƠNG TRÌNH - HỆ PHƯƠNG TRÌNH

## DẠNG TOÁN THÊM BỚT PHẦN TỬ

“phần tử thêm bớt” có thể là số ghế trong phòng, số xe chở hàng, số chữ trong trang sách....

### I/ Phương pháp.

Số ghế trong phòng = (số dãy) x (Số ghế của một dãy)

Số chữ trong một trang = (số dòng) x (Số chữ trong một dòng)

Tổng Số tấn hàng chở = (Số xe) x (tấn hàng của một xe chở)

### II/ Bài tập vận dụng.

**Bài 1:** Một phòng họp có 240 ghế được xếp thành các dãy có số ghế bằng nhau. Nếu mỗi dãy bớt đi một ghế thì phải xếp thêm 20 dãy mới hết số ghế. Hỏi phòng họp lúc đầu được xếp thành bao nhiêu dãy ghế.

**Bài 2:** Hai giá sách có 400 cuốn. Nếu chuyển từ giá thứ nhất sang giá thứ hai 30 cuốn thì số sách ở giá thứ nhất bằng  $\frac{3}{5}$  số sách ở giá thứ hai. Tính số sách ban đầu của mỗi ngăn?

**Bài 3:** Để sửa chữa một quãng đường, cần huy động một số người làm trong một số ngày. Nếu bổ sung thêm 3 người thì thời gian hoàn thành rút được 2 ngày. Nếu rút bớt 3 người thì thời gian hoàn thành phải kéo dài thêm 3 ngày. Tính số người dự định huy động và số ngày dự định hoàn thành công việc.

**Bài 4:** Trong một trang sách, nếu tăng thêm 3 dòng, mỗi dòng bớt 2 chữ thì số chữ của trang không đổi; nếu bớt đi 3 dòng, mỗi dòng tăng thêm 3 chữ thì số chữ của trang cũng không đổi. Tính số chữ trong trang sách.

**Bài 5:** Một câu lạc bộ có một số ghế quy định. Nếu thêm 3 hàng ghế thì mỗi hàng bớt được 2 ghế. Nếu bớt đi ba hàng thì mỗi hàng phải thêm 3 ghế. Tính số ghế của câu lạc bộ.

**Bài 6:** Một phòng họp có một số dãy ghế, tổng cộng 40 chỗ. Do phải xếp 55 chỗ nên người ta kê thêm 1 dãy ghế và mỗi dãy xếp thêm 1 chỗ. Hỏi lúc đầu có mấy dãy ghế trong phòng?

**Bài 7:** Một phòng họp có 100 người được sắp xếp ngồi đều trên các ghế. Nếu có thêm 44 người thì phải kê thêm hai dãy ghế và mỗi dãy ghế phải xếp thêm hai người nữa. Hỏi lúc đầu trong phòng họp có bao nhiêu dãy ghế?

**Bài 8:** Một đội xe vận tải phải vận chuyển 28 tấn hàng đến một địa điểm qui định. Vì trong đội có 2 xe phải điều đi làm việc khác nên mỗi xe phải chở thêm 0,7 tấn hàng nữa. Tính số xe của đội lúc đầu.

**Bài 9:** Ba ô tô chở 100 tấn hàng tổng cộng hết 40 chuyến. Số chuyến thứ nhất chở gấp rưỡi số chuyến xe thứ hai. Mỗi chuyến, xe thứ nhất chở 2 tấn, xe thứ hai chở 2,5 tấn, xe thứ ba chở 3 tấn. Tính xem mỗi ô tô chở bao nhiêu chuyến.

**Bài 10:** Một đoàn xe vận tải dự định điều một số xe cùng loại đi vận chuyển 40 tấn hàng. Lúc sắp khởi hành, đoàn xe được giao thêm 14 tấn nữa. Do đó phải điều thêm 2 xe cùng loại trên và mỗi xe phải chở thêm 0,5 tấn. Tính số lượng xe phải điều theo dự định. Biết rằng mỗi xe chở số hàng như nhau.



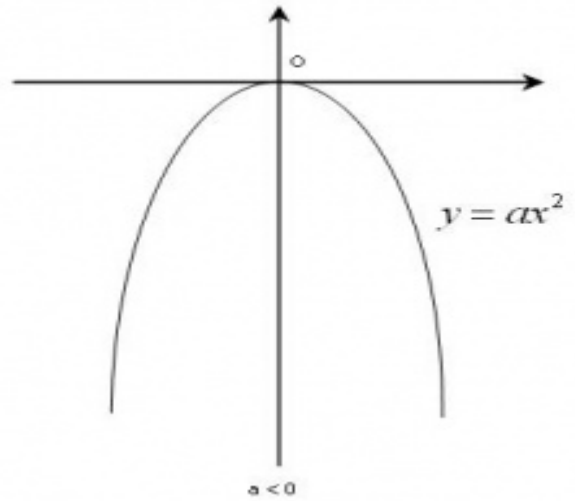
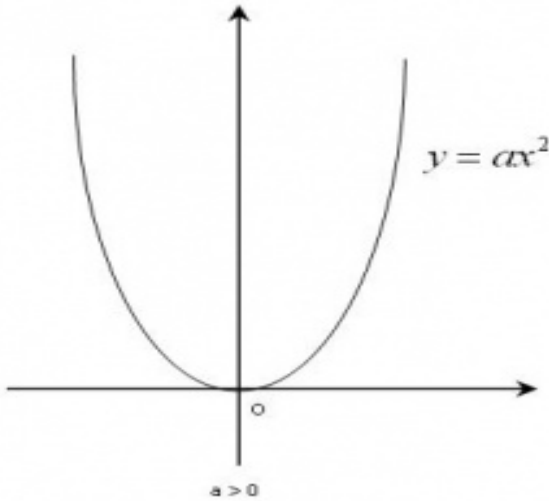
## CHUYÊN ĐỀ 7: HÀM SỐ BẬC HAI $y = ax^2$ ( $a \neq 0$ )

### I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

\*) Hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) có những tính chất sau:

- Nếu  $a > 0$  thì hàm số đồng biến khi  $x > 0$  và nghịch biến khi  $x < 0$ .
- Nếu  $a < 0$  thì hàm số đồng biến khi  $x < 0$  và nghịch biến khi  $x > 0$ .

\*) Đồ thị của hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ):



- Là một Parabol (P) với đỉnh là gốc tọa độ 0 và nhận trục Oy làm trục đối xứng.
- Nếu  $a > 0$  thì đồ thị nằm phía trên trục hoành. 0 là điểm thấp nhất của đồ thị.
- Nếu  $a < 0$  thì đồ thị nằm phía dưới trục hoành. 0 là điểm cao nhất của đồ thị.

\*) Vẽ đồ thị của hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ):

- Lập bảng các giá trị tương ứng của (P).
- Dựa vào bảng giá trị  $\rightarrow$  vẽ (P).

### II/ BÀI TẬP VẬN DỤNG.

**Bài 1:** Vẽ đồ thị các hàm số sau và chỉ ra khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số:

a)  $y = 2x^2$       b)  $y = -\frac{1}{2}x^2$       c)  $y = -5x^2$

**Bài 2:** Cho hàm số  $y = (m+2)x^2$  ( $m \neq -2$ ). Tìm giá trị của  $m$  để:

- Hàm số đồng biến với  $x < 0$ .
- Có giá trị  $y = 4$  khi  $x = -1$ .

**Bài 3:** Cho parabol  $y = \frac{1}{4}x^2$ . Xác định  $m$  để các điểm sau nằm trên parabol:

- a)  $A(\sqrt{2}; m)$       b)  $B(-\sqrt{2}; m)$       c)  $C\left(m; \frac{3}{4}\right)$

**Bài 4:** Xác định  $m$  để đồ thị hàm số  $y = (m^2 - 2)x^2$

- a) đi qua điểm  $A(1; 2)$ . Với  $m$  tìm được, đồ thị hàm số có đi qua điểm  $B(2; 9)$  hay không?  
b) Đồng biến trên  $(0, +\infty)$  và nghịch biến trên  $(-\infty, 0)$

**Bài 5.**

- a) Viết phương trình đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và điểm  $M(2; 4)$ .  
b) Viết phương trình parabol dạng  $y = ax^2$  và đi qua điểm  $M(2; 4)$ .  
c) Vẽ parabol và đường thẳng trên trong cùng một hệ trục tọa độ và tìm tọa độ giao điểm của chúng.

**Bài 6.** Cho hàm số  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ).

- a) Xác định  $a$  để đồ thị hàm số đi qua điểm  $A(-1; 2)$ .  
b) Vẽ đồ thị hàm số vừa tìm được.  
c) Tìm các điểm trên đồ thị có tung độ bằng 4.  
d) Tìm các điểm trên đồ thị và cách đều hai trục tọa độ.

**Bài 7:** Vẽ đồ thị (P) của hàm số  $y = \frac{1}{4}x^2$  và đường thẳng (d):  $y = -\frac{1}{2}x + 2$  trên cùng một hệ trục tọa độ. Xác định tọa độ giao điểm của (P) và (d) trên đồ thị.

# CHỦ ĐỀ 15: PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

## A/ LÝ THUYẾT.

I/ **Dạng phương trình:**  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ )

II/ **Công thức nghiệm:**

Phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) có biệt thức (Đenta):  $\Delta = b^2 - 4ac$

+ Nếu  $\Delta < 0$  thì phương trình vô nghiệm

+ Nếu  $\Delta = 0$  thì phương trình có nghiệm kép:  $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

+ Nếu  $\Delta > 0$  thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt:  $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ;  $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

**Ví dụ 1:** Giải phương trình:  $x^2 + 3x + 3 = 0$

Ta có:  $a = 1$ ;  $b = 3$ ;  $c = 3 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 - 12 = -3 < 0$

$\Rightarrow$  Phương trình vô nghiệm.

**Ví dụ 2:** Giải phương trình:  $x^2 + x - 5 = 0$

Ta có:  $a = 1$ ;  $b = 1$ ;  $c = -5 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1 + 20 = 21 > 0$

$\Rightarrow$  Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}$$

**Ví dụ 3:** Giải phương trình:  $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 = 0$

Ta có:  $a = 1$ ;  $b = 2\sqrt{2}$ ;  $c = 2 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 0$

$\Rightarrow$  Phương trình có nghiệm kép:  $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \sqrt{2}$

**CÔNG THỨC NGHIỆM THU GỌN: Dùng khi hệ số  $b = 2b'$**

Phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) có  $\Delta' = b'^2 - ac$  ( $b = 2b'$ )

+ Nếu  $\Delta' < 0$  thì phương trình vô nghiệm

+ Nếu  $\Delta' = 0$  thì phương trình có nghiệm kép:  $x_1 = x_2 = \frac{-b}{a}$

+ Nếu  $\Delta' > 0$  thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt:  $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta'}}{a}$ ;  $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta'}}{a}$

## III/ Hệ thức Vi-ét.

a) **Định lí Vi-ét:**

Nếu  $x_1; x_2$  là nghiệm của phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) thì :

+) Tổng hai nghiệm:  $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

+) Tích hai nghiệm:  $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

### b) Ứng dụng:

+ Hệ quả 1: Nếu phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) có:  $a + b + c = 0$  thì phương trình có nghiệm:  $x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a}$

+ Hệ quả 2: Nếu phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) có:  $a - b + c = 0$  thì phương trình có nghiệm:  $x_1 = -1; x_2 = \frac{-c}{a}$

### c) Định lí: (đảo Vi-ét)

Nếu hai số  $x_1; x_2$  có  $x_1 + x_2 = S$  ;  $x_1 \cdot x_2 = P$  thì  $x_1; x_2$  là nghiệm của phương trình bậc hai:

$$x^2 - S \cdot x + P = 0 \quad (x_1 ; x_2 \text{ tồn tại khi } \Delta = S^2 - 4P \geq 0)$$

#### Chú ý:

+ Định lí Vi-ét chỉ áp dụng được khi phương trình có nghiệm (tức là  $\Delta \geq 0$ )

+ Nếu **a** và **c** trái dấu thì phương trình luôn có 2 nghiệm trái dấu

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN.

### DẠNG 1: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2.

#### I/ Phương pháp.

- Liệt kê các hệ số **a, b, c** của phương trình bậc hai.

- Nếu có:  $a + b + c = 0$  ;  $a - b + c = 0$  (1)

=> Áp dụng **Hệ quả Viet** suy ra nghiệm của phương trình.

- Nếu không có (1) thì tính  $\Delta = b^2 - 4ac$

=> Áp dụng công thức nghiệm (Công thức nghiệm thu gọn).

#### II/ Bài tập vận dụng.

**Bài 1:** Xác định các hệ số **a, b, c** và giải phương trình bậc hai sau.

a)  $x^2 - 49x - 50 = 0$

b)  $(2 - \sqrt{3})x^2 + 2\sqrt{3}x - 2 - \sqrt{3} = 0$

**Bài 2:** Giải các phương trình sau:

a)  $3x^2 - 7x - 10 = 0$

b)  $x^2 - 3x + 2 = 0$

c)  $3x^2 - 2\sqrt{3}x - 3 = 0$

d)  $x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$

e)  $\sqrt{3}x^2 - (1 - \sqrt{3})x - 1 = 0$

f)  $x^2 - 4x - 5 = 0$

$$g) (2 + \sqrt{3})x^2 - 2\sqrt{3}x - 2 + \sqrt{3} = 0$$

$$h) x^2 - |x| - 6 = 0$$

## DẠNG 2: TÌM HAI SỐ KHI BIẾT TỔNG VÀ TÍCH:.

### I/ Phương pháp:

#### \* Áp dụng định lý (đảo Viet):

Nếu hai số  $x_1; x_2$  có  $x_1 + x_2 = S$  ;  $x_1 \cdot x_2 = P$  thì  $x_1$  và  $x_2$  có thể là hai nghiệm của phương trình bậc hai:  $x^2 - S \cdot x + P = 0$

$$\text{Tính } \Delta = (-S)^2 - 4P = S^2 - 4P = ?$$

+ Nếu  $S^2 - 4P < 0$  thì không tồn tại  $x_1$  và  $x_2$ .

+ Nếu  $S^2 - 4P \geq 0$  thì tồn tại hai nghiệm  $x_1$  và  $x_2$  tính theo công thức nghiệm

### II/ Bài tập vận dụng.

**Bài 1:** Tìm hai số  $u$  và  $v$  biết:  $u + v = 42$  và  $u \cdot v = 441$

Giải

Ta có:  $u + v = 42$  và  $u \cdot v = 441$  nên  $u$  và  $v$  có thể là nghiệm của phương trình bậc hai:

$$x^2 - 42x + 441 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Ta có: } \Delta' = (-21)^2 - 441 = 0$$

Phương trình (\*) có nghiệm  $x_1 = x_2 = 21$

$$\text{Vậy } u = v = 21$$

**Bài 2:** Tìm hai số  $u$  và  $v$  biết:

$$a) u + v = -42 \text{ và } u \cdot v = -400$$

$$b) u - v = 5 \text{ và } u \cdot v = 24$$

$$c) u + v = 3 \text{ và } u \cdot v = -8$$

$$d) u - v = -5 \text{ và } u \cdot v = -10$$

**Bài 3:** Tìm kích thước mảnh vườn hình chữ nhật biết chu vi bằng 22m và diện tích bằng 30m<sup>2</sup>.

## DẠNG 3: PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI.

### I/ Phương pháp.

- Xác định điều kiện của phương trình nếu có (Mẫu thức  $\neq 0$  và Điều kiện biểu thức trong căn bậc hai không âm hoặc dương).

- Quy đồng, biến đổi, đặt ẩn phụ... để đưa về phương trình bậc hai.

### II/ Bài tập vận dụng.

**Bài 1:** Giải các phương trình sau:

$$a) x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0$$

$$b) \frac{2x}{x+1} = \frac{x^2 - x + 8}{(x+1)(x-4)}$$

c)  $5x^4 + 2x^2 - 16 = 10 - x^2$       d)  $3(x^2 + x) - 2(x^2 + x) - 1 = 0$

Giải

a) Giải phương trình  $x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0$       (1)

$$(1) \Leftrightarrow (x^2 - 2)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{2}; x = \sqrt{2}; x = -3$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm  $x = -\sqrt{2}; x = \sqrt{2}; x = -3$

b) Giải phương trình  $\frac{2x}{x+1} = \frac{x^2 - x + 8}{(x+1)(x-4)}$       (2)

Với ĐK:  $x \neq -1; x \neq 4$  thì

$$(2) \Leftrightarrow 2x(x-4) = x^2 - x + 8 \Leftrightarrow x^2 - 7x - 8 = 0 (*)$$

Do  $a - b + c = 1 - (-7) + (-8) = 0$  nên phương trình (\*) có nghiệm  $x_1 = -1$  (không thoả mãn ĐK);  $x_2 = 8$  (thoả mãn ĐK)

Vậy phương trình (2) có nghiệm  $x = 8$

**Bài 2:** Giải các phương trình sau:

1.  $x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$

2.  $(x^2 + 2x - 5)^2 = (x^2 - x + 5)^2$

3.  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

4.  $0,3x^4 + 1,8x^2 + 1,5 = 0$

5.  $x^3 + 2x^2 - (x - 3)^2 = (x-1)(x^2-2)$

6.  $\frac{x}{x+1} - 10 \cdot \frac{x+1}{x} = 3$

7.  $(x^2 - 4x + 2)^2 + x^2 - 4x - 4 = 0$

8.  $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3 = 0$

9.  $\frac{x+2}{x-5} + 3 = \frac{6}{2-x}$

10.  $x + \frac{1}{x+1} + 2 = 0$

# CÁC DẠNG BÀI TẬP TRỌNG TÂM

## PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN $ax^2 + bx + c = 0$ ( $a \neq 0$ )

### DẠNG 1: TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC THEO TỔNG VÀ TÍCH HAI NGHIỆM.

#### I/ Phương pháp.

- Áp dụng định lý Viet, tính tổng và tích hai nghiệm.

- Khai triển biểu thức theo tổng và tích hai nghiệm.

=> Thay giá trị của tổng và tích vào biểu thức => Giá trị của biểu thức.

#### II/ Bài tập vận dụng.

**Bài 1:** Cho phương trình  $x^2 + \sqrt{3}x - \sqrt{5} = 0$  có 2 nghiệm là  $x_1$  và  $x_2$ . Không giải phương trình hãy tính giá trị của biểu thức sau:

$$A = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}; \quad B = x_1^2 + x_2^2; \quad C = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}; \quad D = x_1^3 + x_2^3$$

**Bài 2:** Gọi  $x_1; x_2$  là các nghiệm của phương trình:  $x^2 - 3x - 7 = 0$ . Tính:

$$A = x_1^2 + x_2^2;$$

$$B = |x_1 - x_2|;$$

$$C = \frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1};$$

$$D = (3x_1 + x_2)(3x_2 + x_1);$$

$$E = x_1^3 + x_2^3;$$

$$F = x_1^4 + x_2^4$$

**Bài 3:** Gọi  $x_1; x_2$  là hai nghiệm của phương trình:  $5x^2 - 3x - 1 = 0$ . Không giải phương trình, tính giá trị của các biểu thức sau:

$$A = 2x_1^3 - 3x_1^2x_2 + 2x_2^3 - 3x_1x_2^2;$$

$$B = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1}{x_2 + 1} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_2}{x_1 + 1} - \left( \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right)^2;$$

$$C = \frac{3x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2^2}{4x_1x_2^2 + 4x_1^2x_2}.$$

**Bài 4:** Cho phương trình  $x^2 + 2x - 3 = 0$  có 2 nghiệm là  $x_1$  và  $x_2$ . Không giải phương trình hãy tính giá trị của biểu thức sau:

$$A = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2};$$

$$B = x_1^2 + x_2^2;$$

$$C = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}; \quad D = x_1^3 + x_2^3$$

## DẠNG 2: LẬP PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI. TÌM HAI SỐ KHI BIẾT TỔNG VÀ TÍCH.

### I/ Phương pháp.

\* Để lập phương trình bậc hai có hai nghiệm  $x_1$  và  $x_2$  ta làm như sau:

+ Tính  $S = x_1 + x_2$  và  $P = x_1.x_2$

+ Phương trình bậc hai cần tìm là:  $x^2 - S.x + P = 0$

\* Nếu hai số  $u; v$  có  $u + v = S$ ;  $u.v = P$  thì  $u$  và  $v$  có thể là hai nghiệm của phương trình bậc hai:  $x^2 - S.x + P = 0$

Tính  $\Delta = (-S)^2 - 4P = S^2 - 4P = ?$

+ Nếu  $S^2 - 4P < 0$  thì không tồn tại  $x_1$  và  $x_2$ .

+ Nếu  $S^2 - 4P \geq 0$  thì tồn tại hai nghiệm  $x_1$  và  $x_2$  tính theo công thức nghiệm

### II/ Bài tập vận dụng.

**Bài 1:** Gọi  $x_1$ ;  $x_2$  là các nghiệm của phương trình:  $x^2 - 3x - 7 = 0$ . Lập phương trình bậc hai có các nghiệm là  $\frac{1}{x_1 - 1}$  và  $\frac{1}{x_2 - 1}$ .

**Bài 2:** Lập phương trình bậc hai có 2 nghiệm là  $\frac{1}{10 - \sqrt{72}}$  và  $\frac{1}{10 + 6\sqrt{2}}$ .

**Bài 3:** Cho phương trình  $x^2 - 2(m - 1)x - m = 0$  (với  $m \neq 0$ ). Lập phương trình ẩn  $y$  thoả mãn

$$y_1 = x_1 + \frac{1}{x_2} \text{ và } y_2 = x_2 + \frac{1}{x_1}.$$

**Bài 4:** Cho phương trình  $2x^2 - 4x - 10 = 0$  có hai nghiệm  $x_1$ ;  $x_2$ . Không giải phương trình hãy thiết lập phương trình ẩn  $y$  có hai nghiệm  $y_1$ ;  $y_2$  thoả mãn:  $y_1 = 2x_1 - x_2$ ;  $y_2 = 2x_2 - x_1$

**Bài 5:** Cho phương trình  $2x^2 + 4ax - a = 0$  ( $a$  tham số,  $a \neq 0$ ) có hai nghiệm  $x_1$ ;  $x_2$ . Hãy lập phương trình ẩn  $y$  có hai nghiệm  $y_1$ ;  $y_2$  thoả mãn:  $y_1 + y_2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$  và  $\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = x_1 + x_2$

**Bài 6:** Tìm hai số  $u$  và  $v$  biết:  $u + v = 42$  và  $u.v = 441$

**Bài 7:** Tìm hai số  $u$  và  $v$  biết:

a)  $u + v = -42$  và  $u.v = -400$

b)  $u - v = 5$  và  $u.v = 24$

c)  $u + v = 3$  và  $u.v = -8$

d)  $u - v = -5$  và  $u.v = -10$



### **DẠNG 3: CHỨNG MINH PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI CÓ NGHIỆM, VÔ NGHIỆM.**

#### **I/ Phương pháp.**

- Xác định các hệ số  $a$  ;  $b$  ;  $c$  của phương trình bậc hai (các hệ số này có thể phụ thuộc vào tham số  $m$ )

- Tính biệt thức  $\Delta = b^2 - 4ac$

+ Để chứng minh PT vô nghiệm, ta chứng minh  $\Delta < 0$

+ Để chứng minh PT có nghiệm, ta chứng minh  $\Delta \geq 0$

+ Để chứng minh PT có 2 nghiệm phân biệt, ta chứng minh  $\Delta > 0$

#### **II/ Bài tập vận dụng.**

**Bài 1:** Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm.

a)  $x^2 - 2(m - 1)x - 3 - m = 0$  ;

b)  $x^2 + (m + 1)x + m = 0$  ;

c)  $x^2 - (2m - 3)x + m^2 - 3m = 0$  ;

d)  $x^2 + 2(m + 2)x - 4m - 12 = 0$  ;

**Bài 2:** Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm.

a)  $x^2 - (2m + 3)x + m^2 + 3m + 2 = 0$  ;

b)  $x^2 - 2x - (m - 1)(m - 3) = 0$  ;

c)  $x^2 - 2mx - m^2 - 1 = 0$  ;

d)  $(m + 1)x^2 - 2(2m - 1)x - 3 + m = 0$

**Bài 2:** Cho phương trình  $x^2 - (m^2 + 1)x + m = 2$  . Chứng minh phương trình có hai nghiệm phân biệt với mọi  $m$ .

**Bài 3:** Cho phương trình bậc hai:  $x^2 - 2mx - m^2 - 1 = 0$ . Chứng minh phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của  $m$ .

### **DẠNG 4: ĐIỀU KIỆN CỦA THAM SỐ ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC.**

#### **I/ Phương pháp.**

① Điều kiện phương trình

vô nghiệm:  $\Delta < 0$

có nghiệm kép:  $\Delta = 0$

có hai nghiệm phân biệt  $\Delta > 0$

có nghiệm:  $\Delta \geq 0$

② Phương trình có hai nghiệm trái dấu  $\Leftrightarrow a.c < 0$

③ Phương trình có hai nghiệm (nếu là hai nghiệm phân biệt thì dùng  $\Delta > 0$ ).

$$\text{cùng dấu} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ a.c > 0 \end{cases} \quad \text{cùng dấu dương} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ \frac{-b}{a} > 0 \\ a.c > 0 \end{cases} \quad \text{cùng dấu âm} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ \frac{-b}{a} < 0 \\ a.c > 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \text{ Phương trình bậc hai có ít nhất 1 nghiệm dương } \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P \leq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \text{ Phương trình bậc hai có ít nhất 1 nghiệm âm } \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P \leq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S \leq 0 \\ P \geq 0 \end{cases}$$

$\textcircled{6}$  Phương trình có hai nghiệm thỏa mãn hệ thức  $f(x_1, x_2)$

B1: Xác định điều kiện của  $m$  để phương trình có hai nghiệm (hai nghiệm phân biệt) rồi viết biểu thức Viet theo tham số  $m$ .

B2: Biến đổi hệ thức  $f(x_1, x_2)$  theo tổng và tích hai nghiệm  $x_1 ; x_2$ .

$\textcircled{7}$  Phương trình bậc hai có hai nghiệm  $x_1 ; x_2$  là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền cạnh huyền bằng  $k$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{có hai nghiệm dương } x_1 ; x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 = k^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = k^2 \end{cases}$$

$\textcircled{8}$  Phương trình bậc hai có hai nghiệm  $x_1 ; x_2$  là các nghiệm nguyên (số nguyên) (Chỉ xét khi  $x_1 \cdot x_2 = k$  là một số nguyên đã biết)

+ Phương trình bậc hai có hai nghiệm  $x_1 ; x_2 \Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow m \dots$

$$+ \text{ Hệ thức vi-ét } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} & (1) \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = k \in Z & (2) \end{cases}$$

+ Từ (2) ta có  $x_1 = \frac{k}{x_2}$ , để  $x_1, x_2$  nguyên  $\Leftrightarrow x_2$  phải ước của số nguyên  $k \Rightarrow$  Các cặp giá

trị  $x_1, x_2$  tương ứng.

+ Thay cặp giá trị  $x_1, x_2$  tìm được vào (1) tìm được giá trị  $m$

$\textcircled{9}$  Phương trình bậc hai có hai nghiệm  $x_1 ; x_2$  là độ dài đường cao và cạnh đáy của một tam giác có diện tích bằng  $k$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{pt có hai nghiệm dương } x_1 ; x_2 \\ x_1 \cdot x_2 = 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 = 2k \end{cases}$$

## II/ Bài tập vận dụng.

**Bài 1:** Cho phương trình:  $x^2 - 2(m + 1)x + 4m = 0$

- Xác định  $m$  để phương trình có nghiệm kép. Tìm nghiệm kép đó.
- Xác định  $m$  để phương trình có một nghiệm bằng 4. Tính nghiệm còn lại.
- Với điều kiện nào của  $m$  thì phương trình có hai nghiệm cùng dấu (trái dấu)
- Với điều kiện nào của  $m$  thì phương trình có hai nghiệm cùng dương (cùng âm).
- Định  $m$  để phương trình có hai nghiệm sao cho nghiệm này gấp đôi nghiệm kia.
- Định  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1 ; x_2$  thoả mãn  $2x_1 - x_2 = -2$ .
- Định  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1 ; x_2$  sao cho  $A = 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2$  nhận giá trị nhỏ nhất.

**Bài 2:** Định  $m$  để phương trình có nghiệm thoả mãn hệ thức đã chỉ ra:

- |   |                                   |
|---|-----------------------------------|
| a) $(m + 1)x^2 - 2(m + 1)x + m - 3 = 0 ;$ | $(4x_1 + 1)(4x_2 + 1) = 18$       |
| b) $mx^2 - (m - 4)x + 2m = 0 ;$           | $2(x_1^2 + x_2^2) = 5x_1x_2$      |
| c) $(m - 1)x^2 - 2mx + m + 1 = 0 ;$       | $4(x_1^2 + x_2^2) = 5x_1^2x_2^2$  |
| d) $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + 2 = 0 ;$      | $3x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 7 = 0.$ |

**Bài 3:** Định  $m$  để phương trình có nghiệm thoả mãn hệ thức đã chỉ ra:

- |                                       |                      |
|---------------------------------------|----------------------|
| a) $x^2 + 2mx - 3m - 2 = 0 ;$         | $2x_1 - 3x_2 = 1$    |
| b) $x^2 - 4mx + 4m^2 - m = 0 ;$       | $x_1 = 3x_2$         |
| c) $mx^2 + 2mx + m - 4 = 0 ;$         | $2x_1 + x_2 + 1 = 0$ |
| d) $x^2 - (3m - 1)x + 2m^2 - m = 0 ;$ | $x_1 = x_2^2$        |
| e) $x^2 + (2m - 8)x + 8m^3 = 0 ;$     | $x_1 = x_2^2$        |
| f) $x^2 - 4x + m^2 + 3m = 0 ;$        | $x_1^2 + x_2 = 6.$   |

**Bài 4:** Cho phương trình:  $(m + 2)x^2 - (2m - 1)x - 3 + m = 0$ . Tìm điều kiện của  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1 ; x_2$  sao cho nghiệm này gấp đôi nghiệm kia.

**Bài 5:** Cho phương trình bậc hai:  $x^2 - mx + m - 1 = 0$ . Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1 ; x_2$  sao cho biểu thức  $R = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(1 + x_1x_2)}$  đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

**Bài 6:** Định  $m$  để phương trình  $mx^2 - (m + 3)x + 2m + 1 = 0$  có hiệu hai nghiệm bằng 2.

**Bài 7:** Gọi  $x_1 ; x_2$  là hai nghiệm phân biệt của phương trình:  $x^2 + mx + 25 = 0$ . Chứng minh rằng  $|x_1 + x_2| > 10$ .

**Bài 8:** Cho phương trình:  $x^2 + mx - 5 = 0$ . Tìm giá trị của  $m$  để phương trình có tổng bình phương các nghiệm bằng 11.

**Bài 9:** Tìm  $m$  để phương trình:  $(m - 1)x^2 + 2x + m = 0$  có ít nhất một nghiệm không âm.

**Bài 10:** Cho phương trình:  $x^2 - (m + 2)x - 3 = 0$ . Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  là các số nguyên.

**Bài 11:** Cho phương trình:  $x^2 - (m + 5)x + 3m + 6 = 0$ . Tìm  $m$  để phương trình có 2 nghiệm  $x_1, x_2$  là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng 5

## DẠNG 5: SO SÁNH NGHIỆM CỦA PT BẬC HAI VỚI MỘT SỐ $\alpha$

### I/ Phương pháp.

$$\text{- Phương trình có hai nghiệm } x_1 < x_2 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \\ (x_1 - \alpha) + (x_2 - \alpha) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \\ x_1 + x_2 < 2\alpha \end{cases}$$

$$\text{- Phương trình có hai nghiệm } \alpha < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \\ (x_1 - \alpha) + (x_2 - \alpha) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \\ x_1 + x_2 > 2\alpha \end{cases}$$

$$\text{- Phương trình có hai nghiệm } x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) < 0 \end{cases}$$

Viết các điều kiện trên theo yêu cầu của mỗi bài toán, thay định lý Vi-et vào điều kiện.

### II/ Bài tập vận dụng.

**Bài 1:** Tìm  $m$  để phương trình:  $2x^2 - 4x + 5(m-1) = 0$  có hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn 3.

**Bài 2:** Tìm  $m$  để phương trình:  $x^2 + mx + m - 1 = 0$  có hai nghiệm lớn hơn  $m$ .

**Bài 3:** Tìm  $a$  để phương trình  $x^2 + ax - 1 = 0$  có ít nhất một nghiệm lớn hơn 2

#### Hướng dẫn

$$\text{TH1: Phương trình có hai nghiệm } x_1; x_2 \text{ thỏa mãn } x_1 \leq 2 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{TH2: Phương trình có hai nghiệm } x_1; x_2 \text{ thỏa mãn } 2 < x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \\ x_1 + x_2 > 2\alpha \end{cases}$$

**Bài 4:** Tìm  $k$  để phương trình  $x^2 + (2k + 1)x + k^2 = 0$  có ít nhất một nghiệm lớn hơn hay bằng 1

## DẠNG 6: TÌM HỆ THỨC LIÊN HỆ GIỮA HAI NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI KHÔNG PHỤ THUỘC THAM SỐ.

### I/ Phương pháp.

- Viết hệ thức Vi - ét của phương trình.
- Biến đổi qua lại giữa tổng và tích trong hệ thức Vi - ét sao cho tham số  $m$  bị triệt tiêu, từ đó thu được hệ thức độc lập giữa hai nghiệm.

### II/ Bài tập vận dụng.

**Bài 1:** Cho phương trình:  $x^2 - mx + 2m - 3 = 0$ .

Gọi  $x_1 ; x_2$  là hai nghiệm của phương trình. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm của phương trình không phụ thuộc vào tham số  $m$ .

**Bài 2:** Cho phương trình bậc hai:  $(m - 2)x^2 - 2(m + 2)x + 2(m - 1) = 0$ .

Khi phương trình có nghiệm, hãy tìm một hệ thức giữa các nghiệm không phụ thuộc vào tham số  $m$ .

**Bài 3:** Cho phương trình:  $8x^2 - 4(m - 2)x + m(m - 4) = 0$ .

Định  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1 ; x_2$ . Tìm hệ thức giữa hai nghiệm độc lập với  $m$ , suy ra vị trí của các nghiệm đối với hai số  $-1$  và  $1$ .

**Bài 2:** Cho phương trình bậc hai:  $(m - 1)x^2 - (m - 1)(m + 2)x + m = 0$ .

Khi phương trình có nghiệm, hãy tìm một hệ thức giữa các nghiệm không phụ thuộc vào tham số  $m$ .

**Bài 3:** Cho phương trình:  $x^2 - 2mx - m^2 - 1 = 0$ .

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm  $x_1 , x_2$  với mọi  $m$ .

b) Tìm biểu thức liên hệ giữa  $x_1 ; x_2$  không phụ thuộc vào  $m$ .

c) Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1 ; x_2$  thỏa mãn:  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = -\frac{5}{2}$ .

**Bài 4:** Cho phương trình:  $(m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + m = 0$ .

- Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1 ; x_2$ :

- Tìm một hệ thức giữa  $x_1 ; x_2$  độc lập với  $m$ .

- Tìm  $m$  sao cho  $|x_1 - x_2| \geq 2$ .

**Bài 5:** Cho phương trình  $(m - 4)x^2 - 2(m - 2)x + m - 1 = 0$ . Chứng minh rằng nếu phương trình có hai nghiệm  $x_1 ; x_2$  thì:  $4x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) + 2 = 0$ .

## DẠNG 7: TÌM THAM SỐ $m$ ĐỂ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI CÓ NGHIỆM CHUNG.

### I/ Phương pháp.

Xét hai phương trình bậc hai sau:

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0 \text{ có biệt thức } \Delta_1 = b_1^2 - 4a_1c_1$$

$$a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0 \text{ có biệt thức } \Delta_2 = b_2^2 - 4a_2c_2$$

B1: Giải điều kiện  $\begin{cases} \Delta_1 \geq 0 \\ \Delta_2 \geq 0 \end{cases}$  tìm  $m$  để hai phương trình cùng có nghiệm.

B2: Gọi  $x_0$  là nghiệm chung của hai phương trình, giải hệ:  $\begin{cases} a_1x_0^2 + b_1x_0 + c_1 = 0 \\ a_2x_0^2 + b_2x_0 + c_2 = 0 \end{cases}$

Dùng phương pháp cộng đại số để triệt tiêu  $x_0^2$ , rồi tìm điều kiện để tồn tại  $x_0$

$\Rightarrow$  Nghiệm chung  $x_0$  (có thể theo  $m$  hoặc không phụ thuộc vào  $m$ ).

Thay  $x_0$  vào một trong hai phương trình, giải tìm  $m$  thỏa mãn điều kiện.

### II/ Bài tập vận dụng.

**Bài 1:** Tìm  $m$  để hai phương trình sau có nghiệm chung:

$$x^2 - 2mx - 4m + 1 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + (3m + 1)x + 2m + 1 = 0 \quad (2)$$

#### Hướng dẫn

Điều kiện để cả hai pt có nghiệm:  $\begin{cases} 4m^2 + 16m - 4 \geq 0 \\ 9m^2 - 2m - 3 \geq 0 \end{cases}$

Giả sử  $x_0$  là nghiệm chung của 2 phương trình đã cho, ta có:  $\begin{cases} x_0^2 - 2mx_0 - 4m + 1 = 0 \\ x_0^2 + (3m + 1)x_0 + 2m + 1 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (5m + 1)x_0 + 6m = 0$$

Vì hai phương trình có nghiệm chung nên tồn tại  $x_0 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \neq -\frac{1}{5} \Rightarrow x_0 = -\frac{6m}{5m + 1}$

Thế vào một trong hai pt của hệ trên, ta được:  $\left(-\frac{6m}{5m + 1}\right)^2 - 2m\left(-\frac{6m}{5m + 1}\right) - 4m + 1 = 0$

Giải phương trình trên ta thấy chỉ có:  $m = 1$  là thỏa mãn điều kiện.

Vậy khi  $m = 1$  thì 2 pt đã cho có nghiệm chung.

**Bài 2:** Tìm m để hai phương trình sau có nghiệm chung:

$$2x^2 - (3m + 2)x + 12 = 0$$

$$4x^2 - (9m - 2)x + 36 = 0$$

**Bài 3:** Với giá trị nào của m thì hai phương trình sau có nghiệm chung. Tìm nghiệm chung đó:

a)  $2x^2 + (3m + 1)x - 9 = 0$ ;       $6x^2 + (7m - 1)x - 19 = 0$ .

b)  $2x^2 + mx - 1 = 0$ ;       $mx^2 - x + 2 = 0$ .

c)  $x^2 - mx + 2m + 1 = 0$ ;       $mx^2 - (2m + 1)x - 1 = 0$ .

**Bài 4:** Cho hai phương trình:

$$x^2 + x + a = 0$$

$$x^2 + ax + 1 = 0$$

Tìm các giá trị của a để cho hai phương trình trên có ít nhất một nghiệm chung.

**Bài 5:** Cho hai phương trình:

$$x^2 + mx + 2 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + 2x + m = 0 \quad (2)$$

Định m để hai phương trình có ít nhất một nghiệm chung.

## **DẠNG 8: TÌM THAM SỐ m ĐỂ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI TƯƠNG ĐƯƠNG.**

### **I/ Phương pháp.**

Hai phương trình tương đương  $\Leftrightarrow$  Chúng có cùng tập nghiệm (cùng vô nghiệm).

Xét hai phương trình bậc hai sau:

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0 \text{ có biệt thức } \Delta_1 = b_1^2 - 4a_1c_1; \text{ Tổng } S_1; \text{ Tích } P_1$$

$$a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0 \text{ có biệt thức } \Delta_2 = b_2^2 - 4a_2c_2; \text{ Tổng } S_2; \text{ Tích } P_2$$

Xảy ra hai trường hợp để Hai phương trình tương đương:

- TH1: Trường hợp cả hai phương trình cùng vô nghiệm, tức là:  $\begin{cases} \Delta_{(3)} < 0 \\ \Delta_{(4)} < 0 \end{cases}$

- TH2: Trường hợp cả hai phương trình đều có nghiệm, tương đương  $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(3)} \geq 0 \\ \Delta_{(4)} \geq 0 \\ S_{(3)} = S_{(4)} \\ P_{(3)} = P_{(4)} \end{cases}$

### **II/ Bài tập vận dụng.**

**Bài 1:** Cho hai phương trình:

$$x^2 + x + a = 0$$

$$x^2 + ax + 1 = 0$$

Với những giá trị nào của  $a$  thì hai phương trình trên tương đương.

**Bài 2:** Cho hai phương trình:

$$x^2 + mx + 2 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + 2x + m = 0 \quad (2)$$

Định  $m$  để hai phương trình tương đương.

## **DẠNG 9: CHỨNG MINH MỘT TRONG HAI PT BẬC HAI CÓ NGHIỆM.**

### **I/ Phương pháp.**

Xét hai phương trình bậc hai sau:

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0 \text{ có biệt thức } \Delta_1 = b_1^2 - 4a_1c_1 \quad \text{hoặc } \Delta'_1$$

$$a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0 \text{ có biệt thức } \Delta_2 = b_2^2 - 4a_2c_2 \quad \text{hoặc } \Delta'_2$$

Một trong hai phương trình bậc hai có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta_1 + \Delta_2 \geq 0 \text{ hoặc } \Delta'_1 + \Delta_2 \geq 0 \text{ hoặc } \Delta_1 + \Delta'_2 \geq 0 \text{ hoặc } \Delta'_1 + \Delta'_2 \geq 0$$

Tùy từng bài mà ta dùng một trong bốn hệ thức trên cho đơn giản và phù hợp.

### **II/ Bài tập vận dụng.**

**Bài 1:** Cho  $a, b, c > 0$ ;  $a + 2b + 3c = 1$ . Chứng minh một trong 2 phương trình sau có nghiệm:

$$4x^2 - 4(2a + 1)x + 4a^2 + 192abc + 1 = 0 \quad (1)$$

$$4x^2 - 4(2b + 1)x + 4b^2 + 96abc + 1 = 0 \quad (2)$$

**Bài 2:** Chứng minh rằng ít nhất một trong các phương trình bậc hai sau đây có nghiệm:

$$ax^2 + 2bx + c = 0 \quad (1)$$

$$bx^2 + 2cx + a = 0 \quad (2)$$

**Bài 3:** Cho các phương trình:

$$x^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + cx + b = 0 \quad (2)$$

Trong đó  $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$ . Chứng minh có ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm.



## CHỦ ĐỀ 17

### TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ $y = ax^2$ ( $a \neq 0$ ) VÀ $y = bx + c$ ( $b \neq 0$ )

#### A/ PHƯƠNG PHÁP & CÂU HỎI THƯỜNG GẶP.

Lập phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$$ax^2 = bx + c \text{ Hay } ax^2 - bx - c = 0 \quad (1)$$

#### 1. Tìm giao điểm của hai đồ thị: (P): $y = ax^2$ ( $a \neq 0$ ) và (d): $y = bx + c$ .

Giải (1) tìm hoành độ giao điểm  $x \Rightarrow$  Tung độ giao điểm  $y \Rightarrow$  Tọa độ giao điểm.

#### 2. CÂU HỎI thường gặp khi phương trình (1) có chứa tham số m:

① Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt?

Viết biểu thức  $\Delta$  của phương trình (1)

Biến đổi rồi chỉ ra  $\Delta$  là một biểu thức dương  $\Rightarrow$  Điều phải chứng minh.

② Tìm  $m$  để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt?

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow \text{Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$$

③ Tìm  $m$  để (d) tiếp xúc với (P) (d cắt (P) tại điểm duy nhất)?

(d) tiếp xúc với (P)  $\Leftrightarrow$  Phương trình (1) có nghiệm kép  $\Leftrightarrow \Delta = 0$

④ Tìm  $m$  để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ âm (hai điểm phân biệt nằm bên trái trục tung)?

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ âm

$$\Leftrightarrow \text{Phương trình (1) có hai nghiệm âm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases}$$

⑤ Tìm  $m$  để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương (hai điểm phân biệt nằm bên phải trục tung)?

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương

$$\Leftrightarrow \text{Phương trình (1) có hai nghiệm âm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases}$$

⑥ Tìm  $m$  để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ trái dấu? (hai điểm phân biệt nằm hai phía trục tung)?

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ trái dấu

$$\Leftrightarrow \text{Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ x_1 \cdot x_2 < 0 \end{cases}$$

⑦ *Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm A, B sao cho  $\Delta AOB$  vuông tại O.*

B1: Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm  $A(x_A, y_A)$  và  $B(x_B, y_B)$

$\Rightarrow$  Định lý Viet cho hoành độ giao điểm  $x_A, x_B$

B2: Phương trình đường thẳng OA là  $y = a_1x$  đi qua điểm  $A(x_A, y_A) \Rightarrow a_1 = \frac{y_A}{x_A}$

Phương trình đường thẳng OB là  $y = a_2x$  đi qua điểm  $B(x_B, y_B) \Rightarrow a_2 = \frac{y_B}{x_B}$

B3:  $\Delta AOB$  vuông tại O  $\Rightarrow a_1 \cdot a_2 = -1 \Leftrightarrow \frac{y_A}{x_A} \cdot \frac{y_B}{x_B} = -1$

Từ (P) thay  $y_A; y_B$  vào phương trình, kết hợp Viet  $\Rightarrow m$

⑧ *Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm A, B sao cho  $\Delta AOB$  cân tại O.*

B1: Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm  $A(x_A, y_A)$  và  $B(x_B, y_B)$

$\Rightarrow$  Định lý Viet cho hoành độ giao điểm  $x_A, x_B$

B2: Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A và B lên trục hoành

$$\Delta AOB \text{ cân tại O hay } OA = OB \Leftrightarrow OA^2 = OB^2 \Leftrightarrow AH^2 + OH^2 = BK^2 + OK^2$$

$$\Leftrightarrow x_A^2 + y_A^2 = x_B^2 + y_B^2$$

Từ (P) thay  $y_A; y_B$  vào phương trình, kết hợp Viet  $\Rightarrow m$

⑨ *Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm có hoành độ  $x_1, x_2$  thỏa mãn hệ thức  $f(x_1, x_2)$  ?*

Bước 1: Xét phương trình hoành độ giao điểm (1). Rồi đi tìm m để (1) có hai nghiệm phân biệt.

Bước 2: Với điều kiện m tìm được ở Bước 1, ta viết biểu thức Viet cho  $x_1$  và  $x_2$ .

Bước 3: Biến đổi hệ thức  $f(x_1; x_2)$  theo tổng  $x_1 + x_2$  và tích  $x_1 \cdot x_2$

Bước 4: Thay biểu thức Viet vào hệ thức  $f(x_1; x_2)$ , rồi giải phương trình ẩn m sẽ tìm được tham số m.

## B/ BÀI TẬP VẬN DỤNG

**Bài 1:** Cho Parabol (P):  $y = \frac{1}{2}x^2$  và đường thẳng (d) có phương trình:  $y = 2x - 2$ . Chứng tỏ rằng đường thẳng

(d) và parabol (P) có điểm chung duy nhất. Xác định tọa độ điểm chung đó.

**Bài 2.** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d):  $y = -x + 6$  và parabol (P):  $y = x^2$ .

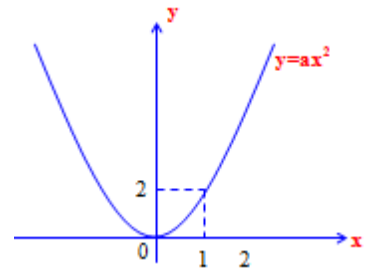
a) Tìm tọa độ các giao điểm của (d) và (P).

b) Gọi A, B là hai giao điểm của (d) và (P). Tính diện tích tam giác OAB.

**Bài 3:** Cho hai hàm số (P):  $y = \frac{1}{4}x^2$  và đường thẳng (d):  $y = -\frac{1}{2}x + 2$

- Vẽ đồ thị (P) và (d) trên cùng một hệ trục tọa độ.
- Tìm tọa độ các giao điểm của (P) và (d).

**Bài 4:** Biết rằng đường cong trong hình vẽ bên là một parabol  $y = ax^2$ .



- Tìm hệ số a.
- Gọi M và N là các giao điểm của đường thẳng  $y = x + 4$  với parabol. Tìm tọa độ của các điểm M và N.

**Bài 5:** Tìm tọa độ giao điểm A và B của đồ thị hai hàm số  $y = 2x + 3$  và  $y = x^2$ . Gọi D và C lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên trục hoành. Tính  $S_{ABCD}$ .

**Bài 6:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Parabol (P) :  $y = x^2$  và đường thẳng (d) :  $y = 2x + 3$

- Chứng minh rằng (d) và (P) có hai điểm chung phân biệt
- Gọi A và B là các điểm chung của (d) và (P) . Tính diện tích tam giác OAB ( O là gốc tọa độ)

**Bài 7:** Cho hàm số  $y = x^2$  có đồ thị (P) và đường thẳng (d) đi qua điểm M (1;2) có hệ số góc  $k \neq 0$ .

- Chứng minh rằng với mọi giá trị  $k \neq 0$ . đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B.
- Gọi  $x_A$  và  $x_B$  là hoành độ của hai điểm A và B. Chứng minh rằng  $x_A + x_B - x_A \cdot x_B - 2 = 0$

**Bài 8.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P):  $y = -x^2$  và đường thẳng (d):  $y = mx + 2$  (m là tham số). Tìm m để (d) cắt (P) tại một điểm duy nhất.

**Bài 9:** Cho Parabol (P):  $y = -\frac{1}{4}x^2$  và đường thẳng (d) có phương trình:  $y = x + m$

- Tìm m để đường thẳng (d) và parabol (P) có điểm chung duy nhất.
- Tìm m để đường thẳng (d) và parabol (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.
- Tìm m để đường thẳng (d) và parabol (P) không có điểm chung

**Bài 10:** Cho Parabol (P):  $y = x^2$  và đường thẳng (d) có phương trình:  $y = ax + b$ . Tìm a và b để đường thẳng (d) và parabol (P) tiếp xúc nhau tại điểm A(1;1)

**Bài 11:** Cho Parabol (P):  $y = \frac{1}{4}x^2$

- Viết phương trình đường thẳng (d) có hệ số góc là k và đi qua điểm M(1,5;-1)
- Tìm k để đường thẳng (d) và Parabol (P) tiếp xúc nhau
- Tìm k để đường thẳng (d) và Parabol (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt

**Bài 12:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d):  $y = mx + 5$

- Chứng minh rằng (d) luôn đi qua điểm A(0; 5) với mọi giá trị của m?
- Tìm tất cả giá trị của m để đường thẳng (d) cắt Parabol (P):  $y = x^2$  tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt  $x_1$  ;  $x_2$  (với  $x_1 < x_2$ ) sao cho  $|x_1| > |x_2|$ ?

**Bài 13:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P):  $y = x^2$ , và đường thẳng (d):  $y = 3x + m^2 - 1$

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt

b) Gọi  $x_1, x_2$  là hoành độ các giao điểm của (d) và (P). Tìm m để:  $(x_1+1)(x_2+1) = 1$

**Bài 14:** Cho parabol (P):  $y = \frac{1}{2}x^2$  và đường thẳng (d):  $y = mx - \frac{1}{2}m^2 + m + 1$

a) Với  $m = 1$ , xác định tọa độ giao điểm A, B của (d) và (P)

b) Tìm các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ  $x_1, x_2$  sao cho:  $|x_1 - x_2| = 2$

**Bài 15:** Cho parabol (P) :  $y = x^2$  và đường thẳng (d) :  $y = 2x - m^2 + 9$ .

a) Tìm tọa độ các giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d) khi  $m = 1$ .

b) Tìm m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm nằm về hai phía của trục tung.

**Bài 16:** Cho Parabol (P):  $y = -x^2$  và đường thẳng (d)  $y = mx - 1$

a) CMR với mọi m thì (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.

b) Gọi  $x_1, x_2$  là các hoành độ giao điểm của (d) và (P). Tìm m để :  $x_1^2x_2 + x_2^2x_1 - x_1x_2 = 3$ .

**Bài 17:** Cho parabol (P):  $y = \frac{1}{4}x^2$  và đường thẳng (d):  $y = mx + 1$

a) Chứng minh với mọi giá trị của m đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Gọi A, B là hai giao điểm của (d) và (P). Tính diện tích tam giác OAB theo m ( O là gốc tọa độ ).

**Bài 18:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d):  $y = 2x - m + 1$  và parabol (P):  $y = \frac{1}{2}x^2$ .

a) Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm A(-1; 3).

b) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có tọa độ  $(x_1; y_1)$ ,  $(x_2; y_2)$  sao cho  $x_1x_2(y_1 + y_2) + 48 = 0$

**Bài 19:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol (P) có phương trình:  $y = x^2$  và đường thẳng (d) có phương trình:  $y = 2mx - 2m + 3$  (m là tham số)

a) Tìm tọa độ các điểm thuộc (P) biết tung độ của chúng bằng 2

b) Chứng minh rằng (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt với mọi m. Gọi  $y_1, y_2$  là các tung độ giao điểm của (P) và (d), tìm m để  $y_1 + y_2 < 9$

**Bài 20:** Cho Parabol (P):  $y = x^2$  và đường thẳng (d):  $y = (m + 2)x - m + 6$ . Tìm m để đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

**Bài 21:** Cho parabol  $y = x^2$  (P) và đường thẳng  $y = mx$  (d), với m là tham số.

1/ Tìm các giá trị của m để (P) và (d) cắt nhau tại điểm có tung độ bằng 9.

2/ Tìm các giá trị của m để (P) và (d) cắt nhau tại 2 điểm, mà khoảng cách giữa hai điểm này bằng  $\sqrt{6}$

**Bài 22:** Cho parabol (P) và đường thẳng (d) có phương trình lần lượt là  $y = mx^2$  và  $y = (m - 2)x + m - 1$  (m là tham số,  $m \neq 0$ ).

a) Với  $m = -1$ , tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P).

b) Chứng minh rằng với mọi  $m \neq 0$  đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt.

**Bài 23:** Cho parabol (P):  $y = x^2$  và đường thẳng (d):  $y = 2x + m^2 + 1$  ( $m$  là tham số).

1/ Xác định tất cả các giá trị của  $m$  để (d) song song với đường thẳng (d'):  $y = 2m^2x + m^2 + m$ .

2/ Chứng minh rằng với mọi  $m$ , (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B.

3/ Ký hiệu  $x_A; x_B$  là hoành độ của điểm A và điểm B. Tìm  $m$  sao cho  $x_A^2 + x_B^2 = 14$ .

**Câu 24:** Cho parabol (P):  $y = \frac{1}{2}x^2$  và đường thẳng (d):  $y = (m - 1)x - 2$  (với  $m$  là tham số).

a) Vẽ (P).

b) Tìm  $m$  để (d) tiếp xúc với (P) tại điểm có hoành độ dương.

c) Với  $m$  tìm được ở câu b), hãy xác định tọa độ tiếp điểm của (P) và (d).

**Câu 25:** Cho parabol (P):  $y = -x^2$  và đường thẳng (d):  $y = (3 - m)x + 2 - 2m$  ( $m$  là tham số).

a) Chứng minh rằng với  $m \neq -1$  thì (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A, B.

b) Gọi  $y_A, y_B$  lần lượt là tung độ các điểm A, B. Tìm  $m$  để  $|y_A - y_B| = 2$ .

**Câu 26:** Cho parabol (P):  $y = 2x^2$  và đường thẳng (d):  $y = x + 2 - 2m$  ( $m$  là tham số). Tìm  $m$  để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác AOB vuông tại O.

## RÚT GỌN BIỂU THỨC VÀ CÂU HỎI PHỤ

**Bài 1:** Cho biểu thức:  $P = \frac{\sqrt{a+2}}{\sqrt{a+3}} - \frac{5}{a+\sqrt{a}-6} + \frac{1}{2-\sqrt{a}}$       ĐS:  $P = \frac{\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}-2}$

a/ Rút gọn P

b/ Tìm giá trị của a để  $P < 1$

c/ Tìm  $a \in \mathbb{Z}$  để P nguyên.

**Bài 2:** Cho biểu thức:  $P = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right) : \left(\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}} + \frac{\sqrt{x+2}}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x+2}}{x-5\sqrt{x}+6}\right)$       ĐS:  $P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+1}}$

a) Rút gọn P

b) Tìm giá trị của x để  $P < 0$

**Bài 3:** Cho biểu thức:  $P = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{3\sqrt{x}-1} - \frac{1}{3\sqrt{x}+1} + \frac{8\sqrt{x}}{9x-1}\right) : \left(1 - \frac{3\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}+1}\right)$       ĐS:  $P = \frac{x+\sqrt{x}}{3\sqrt{x}-1}$

a/ Rút gọn P

b/ Tìm các giá trị của x để  $P = \frac{6}{5}$

**Bài 4:** Cho biểu thức:  $P = \left(1 + \frac{\sqrt{a}}{a+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+\sqrt{a}-a-1}\right)$       ĐS:  $P = \frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}$

a/ Rút gọn P

b/ Tìm giá trị của a để  $P < 1$

c/ Tìm giá trị của P nếu  $a = 19 - 8\sqrt{3}$

**Bài 5:** Cho biểu thức:  $P = \frac{\sqrt{a}(1-a)^2}{1+a} : \left[\left(\frac{1-\sqrt{a^3}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{a^3}}{1+\sqrt{a}} - \sqrt{a}\right)\right]$       ĐS:  $P = \frac{\sqrt{a}}{a+1}$

a/ Rút gọn P

b/ Xét dấu của biểu thức  $M = a \cdot \left(P - \frac{1}{2}\right)$

**Bài 6:** Cho biểu thức:  $P = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{2x}+1} + \frac{\sqrt{2x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2x}-1} - 1\right) : \left(1 + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{2x}+1} - \frac{\sqrt{2x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2x}-1}\right)$       ĐS:  $P = -\sqrt{2x}$

a/ Rút gọn P

b/ Tính giá trị của P khi  $x = \frac{1}{2} \cdot (3 + 2\sqrt{2})$

**Bài 7:** Cho biểu thức:  $P = \left( \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + \sqrt{x} - x - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left( 1 + \frac{\sqrt{x}}{x+1} \right)$  Đ S:  $P = \frac{1 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}$

a/ Rút gọn P

b/ Tìm x để  $P \leq 0$

**Bài 10:** Cho biểu thức:  $P = \left( \frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \left( \frac{1 + a\sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}} - \sqrt{a} \right)$  Đ S:  $P = (a - 1)^2$

a/ Rút gọn P

b/ Tìm a để  $P < 7 - 4\sqrt{3}$

**Bài 11:** Cho biểu thức:  $P = \left( \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} - \frac{3x + 3}{x - 9} \right) : \left( \frac{2\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 3} - 1 \right)$  Đ S:  $P = \frac{-3}{\sqrt{x} + 3}$

a/ Rút gọn P

b/ Tìm x để  $P < \frac{1}{2}$

c/ Tìm giá trị nhỏ nhất của P

**Bài 12:** Cho biểu thức:  $P = \left( \frac{x - 3\sqrt{x}}{x - 9} - 1 \right) : \left( \frac{9 - x}{x + \sqrt{x} - 6} - \frac{\sqrt{x} - 3}{2 - \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 3} \right)$  Đ S:  $P = \frac{3}{\sqrt{x} - 2}$

a/ Rút gọn P

b/ Tìm giá trị của x để  $P < 1$

**Bài 13:** Cho biểu thức:  $P = \frac{15\sqrt{x} - 11}{x + 2\sqrt{x} - 3} + \frac{3\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3}$  Đ S:  $P = \frac{5\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 3}$

a/ Rút gọn P

b/ Tìm các giá trị của x để  $P = \frac{1}{2}$

c/ Chứng minh  $P \leq \frac{2}{3}$

**Bài 14:** Cho biểu thức:  $P = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + m} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - m} - \frac{m^2}{4x - 4m^2}$  với  $m > 0$

a/ Rút gọn P

b/ Tính x theo m để  $P = 0$ .

c/ Xác định các giá trị của m để x tìm được ở câu b thỏa mãn điều kiện  $x > 1$

**Bài 15:** Cho biểu thức:  $P = \frac{a^2 + \sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1} - \frac{2a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1$  Đ S:  $P = a - \sqrt{a}$

a/ Rút gọn P

b/ Biết  $a > 1$  Hãy so sánh P với  $|P|$

c/ Tìm a để  $P = 2$

d/ Tìm giá trị nhỏ nhất của P

**Bài 16:** Cho biểu thức:  $P = \left( \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1} + \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1} - 1 \right) : \left( \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1} - \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1} + 1 \right)$

a/ Rút gọn P

b/ Tính giá trị của P nếu  $a = 2 - \sqrt{3}$  và  $b = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$

c/ Tìm giá trị nhỏ nhất của P nếu  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 4$

**Bài 17:** Cho biểu thức:  $P = \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}} + \left( \sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) \left( \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} + \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} \right)$

a/ Rút gọn P

b) Với giá trị nào của a thì  $P = 7$

c) Với giá trị nào của a thì  $P > 6$

**Bài 18:** Cho biểu thức:  $P = \left( \frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \right)^2 \left( \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} \right)$

a/ Rút gọn P

b) Tìm các giá trị của a để  $P < 0$

c) Tìm các giá trị của a để  $P = -2$

**Bài 19:** Cho biểu thức:  $P = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 + 4\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$

a/ Tìm điều kiện để P có nghĩa.

b) Rút gọn P

c) Tính giá trị của P khi  $a = 2\sqrt{3}$  và  $b = \sqrt{3}$

**Bài 20:** Cho biểu thức :  $P = \left( \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$

Đ S:  $P = \frac{2}{x+\sqrt{x}+1}$

a/ Rút gọn P

b) Chứng minh rằng  $P > 0 \quad \forall x \neq 1$

**Bài 21:** Cho biểu thức :  $P = \left( \frac{2\sqrt{x}+x}{x\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left( 1 - \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} \right)$

Đ S:  $P = \frac{1}{x-1}$



a/ Rút gọn P

b) Tính  $\sqrt{P}$  khi  $x = 5 + 2\sqrt{3}$

**Bài 22:** Cho biểu thức:  $P = 1 : \left( \frac{1}{2 + \sqrt{x}} + \frac{\frac{3x}{2}}{4 - x} - \frac{2}{4 - 2\sqrt{x}} \right) : \frac{1}{4 - 2\sqrt{x}}$

a/ Rút gọn P

b) Tìm giá trị của x để  $P = 20$

**Bài 23:** Cho biểu thức :  $P = \left( \frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3}}{y - x} \right) : \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + \sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

a/ Rút gọn P

b) Chứng minh  $P \geq 0$

**Bài 24:** Cho biểu thức:  $P = \left( \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{3\sqrt{ab}}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}} \right) : \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{3\sqrt{ab}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} \right) : \frac{a - b}{a + \sqrt{ab} + b} \right]$

a/ Rút gọn P

b) Tính P khi  $a = 16$  và  $b = 4$

**Bài 25:** Cho biểu thức:  $P = 1 + \left( \frac{2a + \sqrt{a} - 1}{1 - a} - \frac{2a\sqrt{a} - \sqrt{a} + a}{1 - a\sqrt{a}} \right) : \frac{a - \sqrt{a}}{2\sqrt{a} - 1}$

a/ Rút gọn P

b) Cho  $P = \frac{\sqrt{6}}{1 + \sqrt{6}}$  tìm giá trị của a

c) Chứng minh rằng  $P > \frac{2}{3}$

**Bài 26:** Cho biểu thức:  $P = \left( \frac{x - 5\sqrt{x}}{x - 25} - 1 \right) : \left( \frac{25 - x}{x + 2\sqrt{x} - 15} - \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 5} + \frac{\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} - 3} \right)$

a/ Rút gọn P

b) Với giá trị nào của x thì  $P < 1$

**Bài 27:** Cho biểu thức:  $P = \left( \frac{3\sqrt{a}}{a + \sqrt{ab} + b} - \frac{3a}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \right) : \frac{(a - 1)(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{2a + 2\sqrt{ab} + 2b}$

a/ Rút gọn P

b) Tìm những giá trị nguyên của a để P có giá trị nguyên

**Bài 28:** Cho biểu thức:  $P = \left( \frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) : \left( \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1} \right)$

a/ Rút gọn P

b) Tìm giá trị của a để  $P > \frac{1}{6}$

**Bài 29:** Cho biểu thức:  $P = \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right] : \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3}}$

a/ Rút gọn P

b) Cho  $x.y = 16$ . Xác định x,y để P có giá trị nhỏ nhất

**Bài 30:** Cho biểu thức :  $P = \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{xy} - 2y} - \frac{2x}{x + \sqrt{x} - 2\sqrt{xy} - 2\sqrt{y}} \cdot \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$

a/ Rút gọn P

b) Tìm tất cả các số nguyên dương x để  $y = 625$  và  $P < 0,2$

**Bài 31:** Cho biểu thức:  $A = \left( \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{a}{b-a} \right) : \left( \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{a}{a+b+2\sqrt{ab}} \right)$  với  $a > 0, b > 0, a \neq b$ .

a) Rút gọn biểu thức:  $A - \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{b-a}$ .

b) Tính giá trị của A khi  $a = 7 - 4\sqrt{3}$  và  $b = 7 + 4\sqrt{3}$ .

**Bài 32:** Rút gọn biểu thức  $P = \left( \frac{3}{x-\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) \cdot (\sqrt{x}-2)$  với  $x \geq 0$  và  $x \neq 4$ .

**Bài 33:** Cho biểu thức:  $N = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + 4\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \frac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}$ ; ( $x, y > 0$ )

1) Rút gọn biểu thức N.

2) Tìm x, y để  $N = 2 \cdot \sqrt{2005}$ .

**Bài 34:** Cho biểu thức:  $N = \left( 1 + \frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1} \right) \left( 1 - \frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} \right)$

1) Rút gọn biểu thức N.

2) Tìm giá trị của a để  $N = -2004$ .

**Bài 35:** Rút gọn biểu thức:  $A = \left( \frac{x\sqrt{x}+1}{x-1} - \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \right) (x-\sqrt{x})$  với  $x \geq 0, x \neq 1$

**Bài 36:** Rút gọn biểu thức:  $P = \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}+2} - \frac{2}{\sqrt{x}-1}$  ( $x \geq 0; x \neq 1$ ).

**Bài 37:** Cho biểu thức:  $P = \frac{\sqrt{a}+3}{\sqrt{a}-2} - \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+2} + \frac{4\sqrt{a}-4}{4-a}$  ( $a \geq 0; a \neq 4$ )

a) Rút gọn P.

b) Tính giá trị của P với  $a = 9$ .

**Bài 38:** Rút gọn biểu thức sau :  $A = \left( \frac{x\sqrt{x}+1}{x-1} - \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} \right) (x-\sqrt{x})$  với  $x \geq 0, x \neq 1$ .

**Bài 39:** Rút gọn biểu thức :  $A = \left( \frac{1}{\sqrt{a}-3} + \frac{1}{\sqrt{a}+3} \right) \left( 1 - \frac{3}{\sqrt{a}} \right)$  với  $a > 0$  và  $a \neq 9$ .

**Bài 40 :** Rút gọn biểu thức sau :  $A = \frac{2(\sqrt{x}-2)}{x-4} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$  với  $x \geq 0; x \neq 4$

**Bài 41:** Cho biểu thức:  $A = \left( \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} \right) : \frac{2(x-2\sqrt{x}+1)}{x-1}$

1) Rút gọn A.

2) Tìm x nguyên để A có giá trị nguyên.

**Bài 42:** Cho biểu thức:  $A = \left( \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$ , với  $x > 0$  và  $x \neq 1$ .

1) Rút gọn biểu thức A.

2) Chứng minh rằng:  $0 < A < 2$ .

**Bài 43:** Cho biểu thức:  $A = \left( \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{x^2-4x-1}{x^2-1} \right) \cdot \frac{x+2003}{x}$ .

1) Tìm điều kiện đối với x để biểu thức có nghĩa.

2) Rút gọn A.

3) Với  $x \in \mathbb{Z}$  ? để  $A \in \mathbb{Z}$  ?

**Bài 44:** Cho biểu thức  $P = \frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{x}{\sqrt{x}-x}$ , với  $x > 0$  và  $x \neq 1$ .

1) Rút gọn biểu thức sau P.

2) Tính giá trị của biểu thức P khi  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

**Bài 45:** Cho biểu thức:  $Q = \left( \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ , với  $x > 0; x \neq 1$ .

a) Chứng minh rằng  $Q = \frac{2}{x-1}$

b) Tìm số nguyên  $x$  lớn nhất để  $Q$  có giá trị nguyên.

**Bài 46:** Rút gọn biểu thức:  $N = \left(3 + \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1}\right) \cdot \left(3 - \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1}\right)$ , với  $a \geq 0, a \neq 1$

**Bài 47:** Rút gọn biểu thức:  $N = \frac{9\sqrt{a} - \sqrt{25a} + \sqrt{4a^3}}{a^2 + 2a}$  với  $a > 0$

**Bài 48:** Cho biểu thức:  $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) : \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 1}\right)$  (với  $x > 0, x \neq 1$  và  $x \neq 4$ )

a) Rút gọn  $A$ .

b) Tìm giá trị của  $x$  để  $A = 0$ .

c) Tìm các giá trị của  $x$  để  $A < 0$ .

**Bài 49:** Cho biểu thức:  $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 3} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) : \left(\frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 3}\right)$ .

a) Tìm các giá trị của  $x$  để  $Q$  xác định.

b) Rút gọn biểu thức  $Q$ .

c) Tìm tất cả các giá trị của  $x$  để  $Q < 1$

**Bài 50:** Cho biểu thức:  $A = \frac{2}{\sqrt{x} - 3} + \frac{2\sqrt{x}}{x - 4\sqrt{x} + 3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$

a) Rút gọn  $A$

b) Tìm  $x$  để  $A = \sqrt{3}$

c) Tìm  $x \in \mathbf{Z}$  để biểu thức  $A$  nhận giá trị nguyên.

**Bài 51:** Cho biểu thức:  $B = \left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^3} - 1} - \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}\right) \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{x^3}}{1 + \sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)$  Với  $x \geq 0$  và  $x \neq 1$

a) Rút gọn  $B$

b) Tìm  $x$  để  $B = 3$

**Bài 52:** Cho biểu thức:  $C = \left(\frac{\sqrt{x}}{3 + \sqrt{x}} + \frac{x+9}{9-x}\right) : \left(\frac{3\sqrt{x} + 1}{x - 3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$  Với  $x > 0$  và  $x \neq 9$

a) Rút gọn  $C$

b) Tìm  $x$  sao cho  $C < -1$

**Bài 53:** Cho biểu thức:  $D = \frac{1}{2\sqrt{x}-2} - \frac{1}{2\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}}{1-x}$

a) Rút gọn D

b) Tính giá trị của D với  $x = \frac{4}{9}$

c) Tính giá trị của x để  $|D| = \frac{1}{3}$

**Bài 54:**

1) Rút gọn biểu thức  $A = \frac{2}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{3+2\sqrt{2}}$

2) Cho biểu thức  $B = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1}\right)$

a) Rút gọn

b) Tìm x để  $B = 3$

**Bài 55:** Cho biểu thức:  $S = \left(\frac{\sqrt{y}}{x+\sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}}\right) : \frac{2\sqrt{xy}}{x-y}$ ;  $x > 0, y > 0, x \neq y$ .

1. Rút gọn biểu thức trên.

2. Tìm giá trị của x và y để  $S = 1$ .

**Bài 56:** Rút gọn các biểu thức:  $B = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-b} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{ab}-a}\right) \cdot (a\sqrt{b} - b\sqrt{a})$  với  $a > 0, b > 0, a \neq b$

**Bài 57:** Rút gọn các biểu thức sau:  $A = \frac{1}{x+\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}}{x-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}}$  với  $x > 0; x \neq 1$

**Bài 58:** ĐỀ 2012 HÀ NỘI

1) Cho biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}$ . Tính giá trị của A khi  $x = 36$

2) Rút gọn biểu thức  $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} + \frac{4}{\sqrt{x}-4}\right) : \frac{x+16}{\sqrt{x}+2}$  (với  $x \geq 0; x \neq 16$ )

**Bài 59:** ĐỀ 2012 - Hà Tĩnh

Cho biểu thức:  $P = \left(\frac{4a}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}}\right) \cdot \frac{\sqrt{a}-1}{a^2}$  với  $a > 0$  và  $a \neq 1$ .

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Với những giá trị nào của a thì P = 3.

**Bài 60:** (TPHCM ) Thu gọn các biểu thức sau:

$$A = \frac{1}{x + \sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}}{x-1} - \frac{1}{x - \sqrt{x}} \quad \text{với } x > 0; x \neq 1$$

$$B = (2 - \sqrt{3})\sqrt{26 + 15\sqrt{3}} - (2 + \sqrt{3})\sqrt{26 - 15\sqrt{3}}$$

**Bài 61:** Không dùng máy tính bỏ túi, hãy rút gọn các biểu thức sau (Bến Tre)

$$A = \left( \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{6} + \sqrt{3}} \right) (\sqrt{6} - \sqrt{5})$$

$$B = \frac{2x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{x\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}+1}, \quad (\text{với } x > 0)$$

**Bài 62:** Rút gọn biểu thức (Bình Định)

$$A = \frac{5\sqrt{a}-3}{\sqrt{a}-2} + \frac{3\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2} - \frac{a^2+2\sqrt{a}+8}{a-4} \quad \text{với } a \geq 0, a \neq 4$$

$$B = \sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$$

**Bài 63:** Cho biểu thức: (Cần Thơ)  $K = 2 \left( \frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) : \left( \frac{\sqrt{a}+1}{a^2-a} \right)$  (với  $a > 0, a \neq 1$ )

1. Rút gọn biểu thức K.

2. Tìm a để  $K = \sqrt{2012}$ .

**Bài 64:** Rút gọn biểu thức: (ĐacLak)  $A = \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) (x + \sqrt{x})$ ; với  $x \geq 0$ .

**Bài 65:** Tính : (ĐỒNG NAI)  $P = \left( \frac{1}{2-\sqrt{3}} - \frac{1}{2+\sqrt{3}} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{3-\sqrt{3}}$

**Bài 66** Rút gọn biểu thức  $P = \left( \frac{1}{2\sqrt{a}-a} + \frac{1}{2-\sqrt{a}} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-2\sqrt{a}}$  với  $a > 0$  và  $a \neq 4$ .

**Bài 67:** Cho biểu thức:  $C = \frac{5+3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} - (\sqrt{5}+3)$ . Chứng tỏ  $C = \sqrt{3}$

**Bài 68:** (Lạng Sơn)

1. Tính giá trị biểu thức:  $A = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} + 1$        $B = \frac{\sqrt{12} + \sqrt{27}}{\sqrt{3}}$

2. Cho biểu thức  $P = 2 \left( \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1+1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}-1}$       Đ S:  $P = \frac{2}{\sqrt{x}-1}$

- a) Tìm x để biểu thức P có nghĩa;
- b) Rút gọn P .
- c) Tìm x để P là một số nguyên

**Bài 69: (Lào Cai)**

1. Thực hiện phép tính: a)  $\sqrt[3]{2-10} - \sqrt{36+64}$

b)  $\sqrt{(\sqrt{2}-3)^2} + \sqrt[3]{(\sqrt{2}-5)^3}$ .

2. Cho biểu thức:  $P = \frac{2a^2 + 4}{1 - a^3} - \frac{1}{1 + \sqrt{a}} - \frac{1}{1 - \sqrt{a}}$

- a) Tìm điều kiện của a để P xác định
- b) Rút gọn biểu thức P.

**Bài 70:** Cho biểu thức  $A = \left( \frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$

ĐS:  $A = \frac{2}{\sqrt{x}+2}$

- a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn A.
- b) Tìm tất cả các giá trị của x để  $A > \frac{1}{2}$
- c) Tìm tất cả các giá trị của x để  $B = \frac{7}{3}A$  đạt giá trị nguyên.

**Bài 71:** Cho biểu thức:  $A = \left( \frac{x - 2\sqrt{3x} + 3}{x - 3} \right) (\sqrt{4x} + \sqrt{12})$ .

- a) Tìm điều kiện của x để biểu thức A có nghĩa.
- b) Rút gọn biểu thức A.
- c) Tính giá trị của A khi  $x = 4 - 2\sqrt{3}$ .

## TỔNG ÔN CÁC CHUYÊN ĐỀ

### BÀI TOÁN RÚT GỌN BIỂU THỨC

**Bài 1:** Cho biểu thức:  $P = \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+3} - \frac{5}{a+\sqrt{a}-6} + \frac{1}{2-\sqrt{a}}$

ĐS:  $P = \frac{\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}-2}$

a/ Rút gọn P

b/ Tìm giá trị của a để  $P < 1$

c/ Tìm  $a \in \mathbb{Z}$  để P nguyên.

**Bài 2:** Cho biểu thức:  $P = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right)$

Đ S:  $P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$

a) Rút gọn P

b) Tìm giá trị của x để  $P < 0$

**Bài 3:** Cho biểu thức:  $P = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{3\sqrt{x}-1} - \frac{1}{3\sqrt{x}+1} + \frac{8\sqrt{x}}{9x-1}\right) : \left(1 - \frac{3\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}+1}\right)$

Đ S:  $P = \frac{x+\sqrt{x}}{3\sqrt{x}-1}$

a/ Rút gọn P

b/ Tìm các giá trị của x để  $P = \frac{6}{5}$

**Bài 4:** Cho biểu thức:  $P = \left(1 + \frac{\sqrt{a}}{a+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+\sqrt{a}-a-1}\right)$

Đ S:  $P = \frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}$

a/ Rút gọn P

b/ Tìm giá trị của a để  $P < 1$

c/ Tìm giá trị của P nếu  $a = 19 - 8\sqrt{3}$

**Bài 5:** Cho biểu thức:  $P = \frac{\sqrt{a}(1-a)^2}{1+a} : \left[\left(\frac{1-\sqrt{a^3}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{a^3}}{1+\sqrt{a}} - \sqrt{a}\right)\right]$

Đ S:  $P = \frac{\sqrt{a}}{a+1}$

a/ Rút gọn P

b/ Xét dấu của biểu thức  $M = a \cdot \left(P - \frac{1}{2}\right)$

**Bài 6:** Cho biểu thức:  $P = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{2x}+1} + \frac{\sqrt{2x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2x}-1} - 1\right) : \left(1 + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{2x}+1} - \frac{\sqrt{2x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2x}-1}\right)$

Đ S:  $P = -\sqrt{2x}$

a/ Rút gọn P



b/ Tính giá trị của P khi  $x = \frac{1}{2} \cdot (3 + 2\sqrt{2})$

**Bài 7:** Cho biểu thức:  $P = \left( \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + \sqrt{x} - x - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left( 1 + \frac{\sqrt{x}}{x+1} \right)$

Đ S:  $P = \frac{1 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}$

a/ Rút gọn P

b/ Tìm x để  $P \leq 0$

**Bài 10:** Cho biểu thức:  $P = \left( \frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \cdot \left( \frac{1 + a\sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}} - \sqrt{a} \right)$

Đ S:  $P = (a - 1)^2$

a/ Rút gọn P

b/ Tìm a để  $P < 7 - 4\sqrt{3}$

**Bài 11:** Cho biểu thức:  $P = \left( \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} - \frac{3x + 3}{x - 9} \right) : \left( \frac{2\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 3} - 1 \right)$

Đ S:  $P = \frac{-3}{\sqrt{x} + 3}$

a/ Rút gọn P

b/ Tìm x để  $P < \frac{1}{2}$

c/ Tìm giá trị nhỏ nhất của P

**Bài 12:** Cho biểu thức:  $P = \left( \frac{x - 3\sqrt{x}}{x - 9} - 1 \right) : \left( \frac{9 - x}{x + \sqrt{x} - 6} - \frac{\sqrt{x} - 3}{2 - \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 3} \right)$

Đ S:  $P = \frac{3}{\sqrt{x} - 2}$

a/ Rút gọn P

b/ Tìm giá trị của x để  $P < 1$

**Bài 13:** Cho biểu thức:  $P = \frac{15\sqrt{x} - 11}{x + 2\sqrt{x} - 3} + \frac{3\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3}$

Đ S:  $P = \frac{5\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 3}$

a/ Rút gọn P

b/ Tìm các giá trị của x để  $P = \frac{1}{2}$

c/ Chứng minh  $P \leq \frac{2}{3}$

**Bài 14:** Cho biểu thức:  $P = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + m} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - m} - \frac{m^2}{4x - 4m^2}$  với  $m > 0$

a/ Rút gọn P

b/ Tính x theo m để  $P = 0$ .

c/ Xác định các giá trị của m để x tìm được ở câu b thỏa mãn điều kiện  $x > 1$

**Bài 15:** Cho biểu thức:  $P = \frac{a^2 + \sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1} - \frac{2a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1$       ĐS:  $P = a - \sqrt{a}$

a/ Rút gọn P

b/ Biết  $a > 1$  Hãy so sánh P với  $|P|$

c/ Tìm a để  $P = 2$

d/ Tìm giá trị nhỏ nhất của P

**Bài 16:** Cho biểu thức:  $P = \left( \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{ab} + 1} + \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{a}}{\sqrt{ab} - 1} - 1 \right) : \left( \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{ab} + 1} - \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{a}}{\sqrt{ab} - 1} + 1 \right)$

a/ Rút gọn P

b/ Tính giá trị của P nếu  $a = 2 - \sqrt{3}$  và  $b = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}}$

c/ Tìm giá trị nhỏ nhất của P nếu  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 4$

**Bài 17:** Cho biểu thức:  $P = \frac{a\sqrt{a} - 1}{a - \sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a} + 1}{a + \sqrt{a}} + \left( \sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) \left( \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} + \frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} \right)$

a/ Rút gọn P

b) Với giá trị nào của a thì  $P = 7$

c) Với giá trị nào của a thì  $P > 6$

**Bài 18:** Cho biểu thức:  $P = \left( \frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \right)^2 \left( \frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} \right)$

a/ Rút gọn P

b) Tìm các giá trị của a để  $P < 0$

c) Tìm các giá trị của a để  $P = -2$

**Bài 19:** Cho biểu thức:  $P = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + 4\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \frac{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$

a/ Tìm điều kiện để P có nghĩa.

b) Rút gọn P

c) Tính giá trị của P khi  $a = 2\sqrt{3}$  và  $b = \sqrt{3}$

**Bài 20:** Cho biểu thức :  $P = \left( \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$       Đ S:  $P = \frac{2}{x+\sqrt{x}+1}$

a/ Rút gọn P

b) Chứng minh rằng  $P > 0 \quad \forall x \neq 1$

**Bài 21:** Cho biểu thức :  $P = \left( \frac{2\sqrt{x} + x}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left( 1 - \frac{\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x} + 1} \right)$       Đ S:  $P = \frac{1}{x - 1}$

a/ Rút gọn P

b) Tính  $\sqrt{P}$  khi  $x = 5 + 2\sqrt{3}$

**Bài 22:** Cho biểu thức:  $P = 1 : \left( \frac{1}{2 + \sqrt{x}} + \frac{\frac{3x}{2}}{4 - x} - \frac{2}{4 - 2\sqrt{x}} \right) : \frac{1}{4 - 2\sqrt{x}}$

a/ Rút gọn P

b) Tìm giá trị của x để  $P = 20$

**Bài 23:** Cho biểu thức :  $P = \left( \frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3}}{y - x} \right) : \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + \sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

a/ Rút gọn P

b) Chứng minh  $P \geq 0$

**Bài 24:** Cho biểu thức:  $P = \left( \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{3\sqrt{ab}}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}} \right) : \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{3\sqrt{ab}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} \right) : \frac{a - b}{a + \sqrt{ab} + b} \right]$

a/ Rút gọn P

b) Tính P khi  $a = 16$  và  $b = 4$

**Bài 25:** Cho biểu thức:  $P = 1 + \left( \frac{2a + \sqrt{a} - 1}{1 - a} - \frac{2a\sqrt{a} - \sqrt{a} + a}{1 - a\sqrt{a}} \right) : \frac{a - \sqrt{a}}{2\sqrt{a} - 1}$

a/ Rút gọn P

b) Cho  $P = \frac{\sqrt{6}}{1 + \sqrt{6}}$  tìm giá trị của a

c) Chứng minh rằng  $P > \frac{2}{3}$

**Bài 26:** Cho biểu thức:  $P = \left( \frac{x - 5\sqrt{x}}{x - 25} - 1 \right) : \left( \frac{25 - x}{x + 2\sqrt{x} - 15} - \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 5} + \frac{\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} - 3} \right)$

a/ Rút gọn P

b) Với giá trị nào của x thì  $P < 1$

**Bài 27:** Cho biểu thức:  $P = \left( \frac{3\sqrt{a}}{a + \sqrt{ab} + b} - \frac{3a}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \right) : \frac{(a - 1)(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{2a + 2\sqrt{ab} + 2b}$

a/ Rút gọn P

b) Tìm những giá trị nguyên của a để P có giá trị nguyên

**Bài 28:** Cho biểu thức:  $P = \left( \frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) : \left( \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1} \right)$

a/ Rút gọn P

b) Tìm giá trị của a để  $P > \frac{1}{6}$

**Bài 29:** Cho biểu thức:  $P = \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right] : \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3}}$

a/ Rút gọn P

b) Cho  $x.y = 16$ . Xác định x,y để P có giá trị nhỏ nhất

**Bài 30:** Cho biểu thức :  $P = \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{xy} - 2y} - \frac{2x}{x + \sqrt{x} - 2\sqrt{xy} - 2\sqrt{y}} \cdot \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$

a/ Rút gọn P

b) Tìm tất cả các số nguyên dương x để  $y = 625$  và  $P < 0,2$

**Bài 31:** Cho biểu thức:  $A = \left( \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{a}{b-a} \right) : \left( \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{a}{a+b+2\sqrt{ab}} \right)$  với  $a > 0, b > 0, a \neq b$ .

a) Rút gọn biểu thức:  $A - \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{b-a}$ .

b) Tính giá trị của A khi  $a = 7 - 4\sqrt{3}$  và  $b = 7 + 4\sqrt{3}$ .

**Bài 32:** Rút gọn biểu thức  $P = \left( \frac{3}{x-\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) \cdot (\sqrt{x}-2)$  với  $x \geq 0$  và  $x \neq 4$ .

**Bài 33:** Cho biểu thức:  $N = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + 4\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \frac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}$ ; ( $x, y > 0$ )

1) Rút gọn biểu thức N.

2) Tìm x, y để  $N = 2 \cdot \sqrt{2005}$ .

**Bài 34:** Cho biểu thức:  $N = \left( 1 + \frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1} \right) \left( 1 - \frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} \right)$

1) Rút gọn biểu thức N.

2) Tìm giá trị của a để  $N = -2004$ .

**Bài 35:** Rút gọn biểu thức:  $A = \left( \frac{x\sqrt{x} + 1}{x - 1} - \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} \right) (x - \sqrt{x})$  với  $x \geq 0, x \neq 1$

**Bài 36:** Rút gọn biểu thức:  $P = \frac{\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x} + 2} - \frac{2}{\sqrt{x} - 1}$  ( $x \geq 0; x \neq 1$ ).

**Bài 37:** Cho biểu thức:  $P = \frac{\sqrt{a} + 3}{\sqrt{a} - 2} - \frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 2} + \frac{4\sqrt{a} - 4}{4 - a}$  ( $a \geq 0; a \neq 4$ )

a) Rút gọn P.

b) Tính giá trị của P với  $a = 9$ .

**Bài 38:** Rút gọn biểu thức sau :  $A = \left( \frac{x\sqrt{x} + 1}{x - 1} - \frac{x - 1}{\sqrt{x} + 1} \right) (x - \sqrt{x})$  với  $x \geq 0, x \neq 1$ .

**Bài 39:** Rút gọn biểu thức :  $A = \left( \frac{1}{\sqrt{a} - 3} + \frac{1}{\sqrt{a} + 3} \right) \left( 1 - \frac{3}{\sqrt{a}} \right)$  với  $a > 0$  và  $a \neq 9$ .

**Bài 40 :** Rút gọn biểu thức sau :  $A = \frac{2(\sqrt{x} - 2)}{x - 4} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2}$  với  $x \geq 0; x \neq 4$

**Bài 41:** Cho biểu thức:  $A = \left( \frac{x\sqrt{x} - 1}{x - \sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x}} \right) : \frac{2(x - 2\sqrt{x} + 1)}{x - 1}$

1) Rút gọn A.

2) Tìm x nguyên để A có giá trị nguyên.

**Bài 42:** Cho biểu thức:  $A = \left( \frac{x + 2}{x\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} + \frac{1}{1 - \sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x} - 1}{2}$ , với  $x > 0$  và  $x \neq 1$ .

1) Rút gọn biểu thức A.

2) Chứng minh rằng:  $0 < A < 2$ .

**Bài 43:** Cho biểu thức:  $A = \left( \frac{x + 1}{x - 1} - \frac{x - 1}{x + 1} + \frac{x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1} \right) \cdot \frac{x + 2003}{x}$ .

1) Tìm điều kiện đối với x để biểu thức có nghĩa.

2) Rút gọn A.

3) Với  $x \in \mathbb{Z}$  ? để  $A \in \mathbb{Z}$  ?

**Bài 44:** Cho biểu thức  $P = \frac{1}{\sqrt{x} + 1} + \frac{x}{\sqrt{x} - x}$ , với  $x > 0$  và  $x \neq 1$ .

1) Rút gọn biểu thức sau P.

2) Tính giá trị của biểu thức P khi  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

**Bài 45:** Cho biểu thức:  $Q = \left( \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ , với  $x > 0$ ;  $x \neq 1$ .

a) Chứng minh rằng  $Q = \frac{2}{x-1}$

b) Tìm số nguyên x lớn nhất để Q có giá trị nguyên.

**Bài 46:** Rút gọn biểu thức:  $N = \left( 3 + \frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1} \right) \cdot \left( 3 - \frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} \right)$ , với  $a \geq 0$ ,  $a \neq 1$

**Bài 47:** Rút gọn biểu thức:  $N = \frac{9\sqrt{a} - \sqrt{25a} + \sqrt{4a^3}}{a^2 + 2a}$  với  $a > 0$

**Bài 48:** Cho biểu thức:  $A = \left( \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left( \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} \right)$  (với  $x > 0$ ,  $x \neq 1$  và  $x \neq 4$ )

a) Rút gọn A.

b) Tìm giá trị của x để  $A = 0$ .

c) Tìm các giá trị của x để  $A < 0$ .

**Bài 49:** Cho biểu thức:  $Q = \left( \frac{1}{\sqrt{x}-3} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left( \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} \right)$ .

a) Tìm các giá trị của x để Q xác định.

b) Rút gọn biểu thức Q.

c) Tìm tất cả các giá trị của x để  $Q < 1$

**Bài 50:** Cho biểu thức:  $A = \frac{2}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}}{x-4\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

a) Rút gọn A

b) Tìm x để  $A = \sqrt{3}$

c) Tìm  $x \in \mathbf{Z}$  để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

**Bài 51:** Cho biểu thức:  $B = \left( \frac{2x+1}{\sqrt{x^3}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) \cdot \left( \frac{1+\sqrt{x^3}}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)$  Với  $x \geq 0$  và  $x \neq 1$

a) Rút gọn B

b) Tìm x để  $B = 3$

**Bài 52:** Cho biểu thức:  $C = \left( \frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} + \frac{x+9}{9-x} \right) : \left( \frac{3\sqrt{x}+1}{x-3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$  Với  $x > 0$  và  $x \neq 9$

a) Rút gọn C

b) Tìm x sao cho  $C < -1$

**Bài 53:** Cho biểu thức:  $D = \frac{1}{2\sqrt{x}-2} - \frac{1}{2\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}}{1-x}$

a) Rút gọn D

b) Tính giá trị của D với  $x = \frac{4}{9}$

c) Tính giá trị của x để  $|D| = \frac{1}{3}$

**Bài 54:**

1) Rút gọn biểu thức  $A = \frac{2}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{3+2\sqrt{2}}$

2) Cho biểu thức  $B = \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1} \right)$

a) Rút gọn

b) Tìm x để  $B = 3$

**Bài 55:** Cho biểu thức:  $S = \left( \frac{\sqrt{y}}{x+\sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}} \right) : \frac{2\sqrt{xy}}{x-y}$ ;  $x > 0, y > 0, x \neq y$ .

1. Rút gọn biểu thức trên.

2. Tìm giá trị của x và y để  $S = 1$ .

**Bài 56:** Rút gọn các biểu thức:  $B = \left( \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-b} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{ab}-a} \right) \cdot (a\sqrt{b} - b\sqrt{a})$  với  $a > 0, b > 0, a \neq b$

**Bài 57:** Rút gọn các biểu thức sau:  $A = \frac{1}{x+\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}}{x-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}}$  với  $x > 0; x \neq 1$

**Bài 58:** ĐỀ 2012 HÀ NỘI

1) Cho biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}$ . Tính giá trị của A khi  $x = 36$

2) Rút gọn biểu thức  $B = \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} + \frac{4}{\sqrt{x}-4} \right) : \frac{x+16}{\sqrt{x}+2}$  (với  $x \geq 0; x \neq 16$ )

**Bài 59: ĐỀ 2012 - Hà Tĩnh**

Cho biểu thức:  $P = \left( \frac{4a}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}} \right) \cdot \frac{\sqrt{a}-1}{a^2}$  với  $a > 0$  và  $a \neq 1$ .

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Với những giá trị nào của a thì  $P = 3$ .

**Bài 60:** (TPHCM ) Thu gọn các biểu thức sau:

$$A = \frac{1}{x+\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}}{x-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}} \quad \text{với } x > 0; x \neq 1$$

$$B = (2 - \sqrt{3})\sqrt{26 + 15\sqrt{3}} - (2 + \sqrt{3})\sqrt{26 - 15\sqrt{3}}$$

**Bài 61:** Không dùng máy tính bỏ túi, hãy rút gọn các biểu thức sau (Bến Tre)

$$A = \left( \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{3}} \right) (\sqrt{6}-\sqrt{5})$$

$$B = \frac{2x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{x\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}+1}, \quad (\text{với } x > 0)$$

**Bài 62:** Rút gọn biểu thức (Bình Định)

$$A = \frac{5\sqrt{a}-3}{\sqrt{a}-2} + \frac{3\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2} - \frac{a^2+2\sqrt{a}+8}{a-4} \quad \text{với } a \geq 0, a \neq 4$$

$$B = \sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$$

**Bài 63:** Cho biểu thức: (Cần Thơ)  $K = 2 \left( \frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) : \left( \frac{\sqrt{a}+1}{a^2-a} \right)$  (với  $a > 0, a \neq 1$ )

1. Rút gọn biểu thức K.

2. Tìm a để  $K = \sqrt{2012}$ .

**Bài 64:** Rút gọn biểu thức: (ĐacLak)  $A = \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) (x + \sqrt{x})$ ; với  $x \geq 0$ .

**Bài 65:** Tính : (ĐỒNG NAI)  $P = \left( \frac{1}{2-\sqrt{3}} - \frac{1}{2+\sqrt{3}} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{3-\sqrt{3}}$

**Bài 66** Rút gọn biểu thức  $P = \left( \frac{1}{2\sqrt{a}-a} + \frac{1}{2-\sqrt{a}} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-2\sqrt{a}}$  với  $a > 0$  và  $a \neq 4$ .

**Bài 67:** Cho biểu thức:  $C = \frac{5+3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} - (\sqrt{5}+3)$ . Chứng tỏ  $C = \sqrt{3}$



**Bài 68: (Lạng Sơn)**

1. Tính giá trị biểu thức:  $A = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} + 1$        $B = \frac{\sqrt{12} + \sqrt{27}}{\sqrt{3}}$

2. Cho biểu thức  $P = 2\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x-1}+1}\right) : \frac{\sqrt{x-1}}{x+\sqrt{x-1}-1}$       ĐS:  $P = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$

- Tìm x để biểu thức P có nghĩa;
- Rút gọn P.
- Tìm x để P là một số nguyên

**Bài 69: (Lào Cai)**

1. Thực hiện phép tính: a)  $\sqrt[3]{2-10} - \sqrt{36+64}$

b)  $\sqrt{(\sqrt{2}-3)^2} + \sqrt[3]{(\sqrt{2}-5)^3}$ .

2. Cho biểu thức:  $P = \frac{2a^2+4}{1-a^3} - \frac{1}{1+\sqrt{a}} - \frac{1}{1-\sqrt{a}}$

- Tìm điều kiện của a để P xác định
- Rút gọn biểu thức P.

**Bài 70:** Cho biểu thức  $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x-2}}\right) \cdot \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}}$

ĐS:  $A = \frac{2}{\sqrt{x+2}}$

- Tìm điều kiện xác định và rút gọn A.
- Tìm tất cả các giá trị của x để  $A > \frac{1}{2}$
- Tìm tất cả các giá trị của x để  $B = \frac{7}{3}A$  đạt giá trị nguyên.

**Bài 71:** Cho biểu thức:  $A = \left(\frac{x-2\sqrt{3x}+3}{x-3}\right)(\sqrt{4x} + \sqrt{12})$ .

- Tìm điều kiện của x để biểu thức A có nghĩa.
- Rút gọn biểu thức A.
- Tính giá trị của A khi  $x = 4 - 2\sqrt{3}$ .