

CHỦ ĐỀ 1: HỆ THỨC LIÊN HỆ TRONG Δ VUÔNG

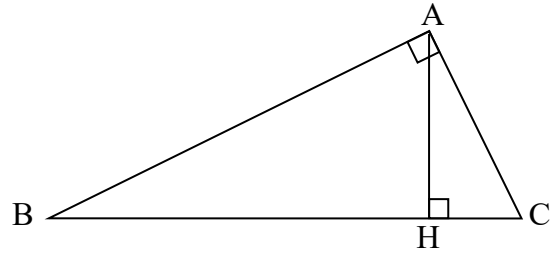
Cạnh góc vuông – Cạnh huyền – Đường cao – Hình chiếu cạnh góc vuông

Cạnh huyền: BC

Cạnh góc vuông AB, có hình chiếu lên cạnh huyền là BH

Cạnh góc vuông AC, có hình chiếu lên cạnh huyền là CH

Đường cao AH.



1/ Hệ thức: Cạnh góc vuông – cạnh huyền (Định lý Pitago).

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Trong tam giác vuông, bình phương độ dài cạnh huyền bằng tổng bình phương độ dài hai cạnh góc vuông.

2/ Hệ thức: Cạnh góc vuông – cạnh huyền – hình chiếu của cạnh góc vuông

$$AB^2 = BC \cdot BH$$

$$AC^2 = BC \cdot CH$$

Trong tam giác vuông, bình phương độ dài mỗi cạnh góc vuông bằng tích độ dài cạnh huyền với hình chiếu của cạnh góc vuông đó lên cạnh huyền.

3/ Hệ thức: Đường cao – hình chiếu của cạnh góc vuông.

$$AH^2 = BH \cdot CH$$

Trong tam giác vuông, bình phương độ dài đường cao bằng tích độ dài hình chiếu của hai cạnh góc vuông lên cạnh huyền.

4/ Hệ thức: Đường cao – cạnh góc vuông.

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

Trong tam giác vuông, nghịch đảo bình phương độ dài đường cao bằng tổng nghịch đảo bình phương độ dài hai cạnh góc vuông.

4/ Hệ thức: Đường cao – cạnh góc vuông – cạnh huyền.

$$AB \cdot AC = BC \cdot AH$$

Trong tam giác vuông, tích độ dài hai cạnh góc vuông bằng tích độ dài cạnh huyền với đường cao tương ứng.

CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1: Tính độ dài CẠNH – ĐƯỜNG CAO – HÌNH CHIẾU trong tam giác vuông.

I/ Phương pháp.

Đây là những bài toán chúng ta sẽ tính toán trực tiếp trong một tam giác vuông cho trước. Để giải bài toán này ta làm như sau:

- Xác định bài yêu cầu tính: “cạnh góc vuông” hay “đường cao” hay “hình chiếu của cạnh góc vuông”?

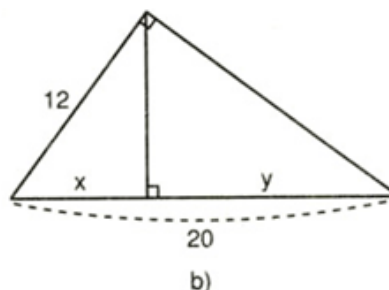
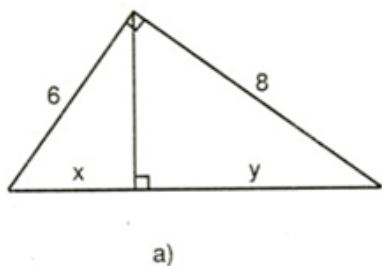
- Kiểm tra bài đã cho đủ kiện nào.

- Xác định hệ thức liên hệ giữa cái đã cho và cái cần tính.

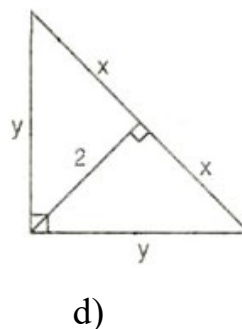
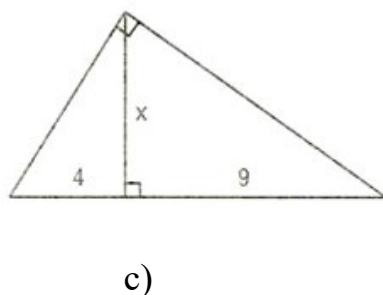
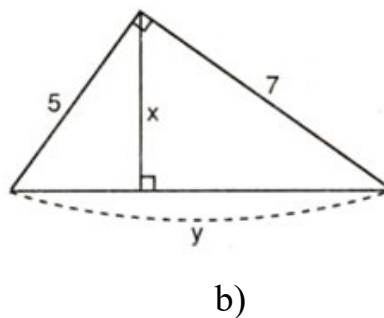
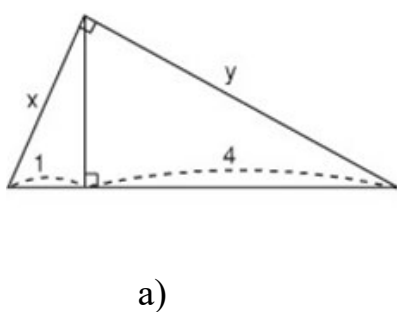
II/ Bài tập vận dụng.

* Bài tập cho trước hình vẽ:

Bài 1: (Trang 68 SGK – Toán 9): Tìm x và y trong mỗi hình sau:



Bài 2: (Trang 68, 69 SGK – Toán 9): Tìm x và y trong hình sau:



* Bài tập không cho hình vẽ.

Bài 3.

a) Biết tỉ số các cạnh góc vuông của một tam giác vuông là 5:6 ; cạnh huyền 122cm. Tính độ dài hình chiếu của mỗi cạnh góc vuông lên cạnh huyền.

a) Biết tỉ số các cạnh góc vuông của một tam giác vuông là 3:7 ; đường cao ứng với cạnh huyền là 12cm. Tính độ dài hình chiếu của mỗi cạnh góc vuông lên cạnh huyền.

Bài 4. Cho ΔABC vuông tại A, kẻ đường cao AH. Biết $AB = 4\text{cm}$, $AC = 7,5\text{cm}$. Tính HB, HC.

Bài 5. Cho ΔABC vuông tại A, kẻ đường cao AH. Biết $AB = 15\text{cm}$, $HC = 16\text{cm}$. Tính BC, AC, AH.

Bài 6. Cho ΔABC vuông tại A, kẻ đường cao AH. Biết $AH = 12\text{cm}$, $BC = 25\text{cm}$. Tính AB, AC.

Bài 7. Cho ΔABC vuông tại A, kẻ đường cao AH. Biết $AB = 6\text{cm}$, $BH = 3\text{cm}$. Tính AH, AC, CH.

Bài 8. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Tính diện tích ΔABC biết $AH = 12\text{cm}$, $BH = 9\text{cm}$.

Bài 9. Cho tam giác vuông, biết tỉ số giữa các cạnh góc vuông là $\frac{5}{12}$, cạnh huyền là 26. Tính độ dài các cạnh góc vuông và hình chiếu các cạnh góc vuông trên cạnh huyền.

Bài 10. Cho ΔABC vuông tại A. Biết $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{7}$. Đường cao $AH = 15\text{cm}$. Tính HB, HC.

Bài 11. Cho ΔABC vuông tại A. Kẻ đường cao AH, tính chu vi ΔABC biết $AH = 14\text{cm}$, $\frac{HB}{HC} = \frac{1}{4}$.

DẠNG 2: Tam giác vuông liên quan tới các đường: phân giác, trung tuyến, trung trực.

I/ Phương pháp.

- Trong tam giác vuông, các hệ thức của tam giác vuông vẫn được áp dụng.

- Chú ý:

+ Đường phân giác \Rightarrow Tỉ lệ đoạn thẳng theo tính chất đường phân giác

+ Đường trung tuyến liên quan tới trung điểm

+ Đường trung trực thì liên quan tới vuông góc tại trung điểm.

II/ Bài tập vận dụng.

Bài 1. Cho ΔABC vuông tại A, $AB = 12\text{cm}$, $AC = 16\text{cm}$, phân giác AD, đường cao AH. Tính HD, HB, HC.

Bài 2. Cho ΔABC vuông tại A, phân giác AD, $\frac{BD}{BC} = \frac{3}{7}$, $BC = 20$. Tính AB, AC.

Bài 3. Cho ΔABC vuông tại A, phân giác AD, gọi E, F lần lượt là hình chiếu của D lên AB và AC. Biết $BD = 3$, $DC = 4$. Chứng minh ADEF là hình vuông, tính diện tích của nó?

Bài 4. Cho ΔABC vuông tại A, góc $B > C$. Trong góc \widehat{ABC} kẻ tia Bx tạo với BA một góc bằng góc \widehat{C} . Tia Bx cắt AC tại M. Gọi E là hình chiếu của M lên BC. Phân giác góc \widehat{MEC} cắt MC tại D. Biết $\frac{MD}{DC} = \frac{3}{4}$ và $MC = 15\text{cm}$.

a) Tính ME, CE.

b) Chứng minh $AB^2 = AM.AC$

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 24$, $AC = 32$. Đường trung trực BC cắt AC, BC theo thứ tự tại D và E. Tính DE?

Bài 6. Trong một tam giác vuông tỉ số giữa đường cao và đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh góc vuông là 40:41. Tính tỉ số độ dài các cạnh góc vuông của tam giác vuông đó?

Bài 7. Trong một tam giác vuông, phân giác của góc nhọn chia cạnh đối diện thành hai phần tỉ lệ với 4:5 và 3:5. Biết chu vi tam giác bằng 72. Tính các cạnh của tam giác đó?

Bài 8. Trong một tam giác vuông, phân giác của góc vuông chia cạnh huyền thành hai phần có độ dài 1cm và 3cm. Hỏi đường cao tương ứng với cạnh huyền chia cạnh huyền theo tỉ số nào?

Bài 9. Tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác BD. Tia phân giác của góc A cắt BD ở I. Biết $IB = 10\sqrt{5}\text{ cm}$, $ID = 5\sqrt{5}\text{ cm}$, tính diện tích tam giác ABC.

Hướng dẫn

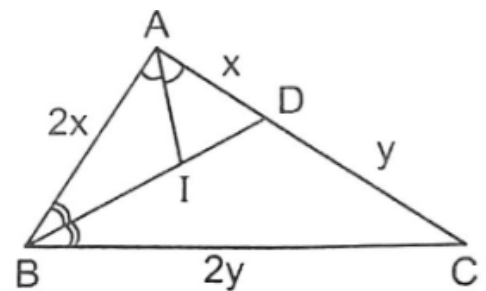
Tính chất phân giác: $\frac{AB}{AD} = \frac{BI}{ID} = 2$; $\frac{BC}{CD} = \frac{AB}{AD} = 2$

Đặt $AD = x$, $CD = y \Rightarrow AB = 2x$; $BC = 2y$

$\Delta_{\text{v}}ADB$ có $BD^2 = AB^2 + AD^2 \Rightarrow x$

$\Delta_{\text{v}}ABC$ có $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow y$

Từ đó $\Rightarrow AB, AC \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC$



DẠNG 3: Nhận biết tam giác vuông rồi dùng hệ thức tam giác vuông để tính.

I/ Phương pháp.

- Tính bình phương các cạnh của tam giác, nếu tổng bình phương hai cạnh bằng bình phương cạnh còn lại \Rightarrow tam giác đó vuông.

- Áp dụng các hệ thức của tam giác vuông để tính.

II/ Bài tập vận dụng.

Bài 1. Cho ΔABC biết $BC = 7.5\text{cm}$, $AC = 4.5\text{cm}$, $AB = 6\text{cm}$.

a) ΔABC là tam giác gì? Tính đường cao AH của ΔABC .

b) Tính độ dài các cạnh BH , HC .

Bài 2. Cho ΔABC biết $BC = 50\text{cm}$, $AC = 14\text{cm}$, $AB = 48\text{cm}$. Tính độ dài phân giác góc C ?

DẠNG 4: Kết hợp tỉ số đồng dạng và hệ thức lượng để tìm độ dài đoạn thẳng.

I/ Phương pháp.

- Có thể gọi ẩn độ dài các đoạn thẳng cần tính.

- Từ tam giác đồng dạng \Rightarrow Tỉ số độ dài \Rightarrow liên hệ giữa các ẩn độ dài (1)

- Từ hệ thức lượng \Rightarrow Liên hệ giữa các ẩn độ dài (2)

- Từ (1) và (2), giải hệ tìm ra các ẩn độ dài.

II/ Bài tập vận dụng.

Bài 1: Cho tam giác ABC vuông tại A , $BC = 5\sqrt{2}\text{ cm}$. Hình vuông $ADEF$ cạnh 2cm có D thuộc AB , E thuộc BC , F thuộc AC . Tính các độ dài AC , AB .

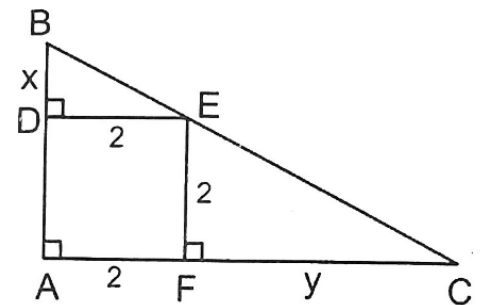
Hướng dẫn

$$\text{Đặt } x = BD, y = FC. \Delta BDE \sim \Delta EFC \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{2}{y}$$

$$\text{Lại có } AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow (2 + x)^2 + (2 + y)^2 = 50$$

Từ hai phương trình trên giải tìm được x, y

$\Rightarrow AC, AB$



Bài 2: Cho tam giác ABC cân tại A , đường cao ứng với cạnh đáy có độ dài $15,6\text{cm}$, đường cao ứng với cạnh bên dài 12cm . Tính độ dài cạnh đáy BC .

Hướng dẫn

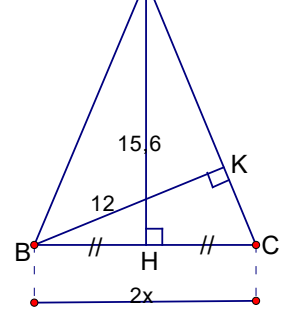
Đặt $BC = 2x$, từ tính chất của tam giác cân ta suy ra $CH = x$

$$\text{Áp dụng định lí Pitago tính được } AC = \sqrt{15,6^2 + x^2}$$

Từ $\triangle KBC \sim \triangle HAC$

$$\Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{KB}{AH} \text{ hay } \frac{2x}{\sqrt{15,6^2 + x^2}} = \frac{12}{15,6}$$

Đưa về phương trình $15,6^2 + x^2 = 6,76x^2 \Rightarrow x$



Bài 3: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Đường cao AH, kẻ HE, HF lần lượt vuông góc với AB, AC.

a) Chứng minh $\frac{EB}{FC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^3$

b) Chứng minh $BC \cdot BE \cdot CF = AH^3$

Hướng dẫn

a) Trong $\triangle AHB$ có $HB^2 = BE \cdot BA$ (1) ;

$\triangle AHC$ có $HC^2 = CF \cdot CA$ (2)

Từ (1) và (2) có : $\frac{HB^2}{HC^2} = \frac{BE \cdot AB}{FC \cdot AC}$. (1)

Trong $\triangle ABC$ có: $AB^2 = BH \cdot BC$ và $AC^2 = HC \cdot BC$

$\Rightarrow \frac{HB}{HC} = \frac{AB^2}{AC^2} \Leftrightarrow \left(\frac{HB}{HC}\right)^2 = \left(\frac{AB}{AC}\right)^4$ (2)

Từ (1) và (2). Ta có : $\frac{EB}{FC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^3$.

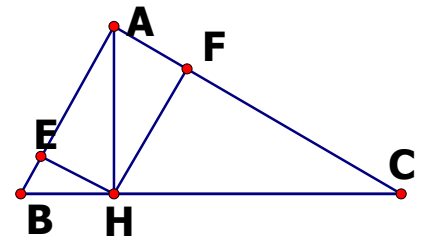
b) $\triangle ABC \sim \triangle EBH \Rightarrow \frac{BE}{BA} = \frac{BH}{BC}$.

Thay $BH = \frac{AB^2}{BC} \rightarrow BE = \frac{AB^3}{BC^2}$ (3)

Tương tự ta cũng có $CF = \frac{AC^3}{BC^2}$ (4).

Từ (3) và (4) Ta có : $BE \cdot CF = \frac{AB^3 \cdot AC^3}{BC^4}$.

Mà $AB \cdot AC = BC \cdot AH$ nên $BC \cdot BE \cdot CF = \frac{AB^3}{BC^2} \cdot \frac{AC^3}{BC^2} \cdot BC = \left(\frac{AB \cdot AC}{BC}\right)^3 = AH^3$



DẠNG 5: Kẻ thêm đường phụ để tạo yếu tố đặc biệt có liên quan.

I/ Phương pháp.

- Yếu tố đặc biệt thường gặp khi kẻ thêm hình:
- + Tam giác cân (đều) có chứa cạnh cần tính.
- + Tam giác vuông có chứa cạnh đã biết và cạnh cần tính.

II/ Bài tập vận dụng.

Bài 1: Tam giác ABC vuông tại A, gọi I là giao điểm của các đường phân giác. Biết AB = 5cm, IC = 6cm. Tính độ dài BC.

Bài 2: Tam giác ABC vuông tại A, gọi I là giao điểm của các đường phân giác. Biết IB = $\sqrt{5}$ cm, IC = $\sqrt{10}$ cm. Tính các độ dài AB, AC.

Hướng dẫn bài 1, bài 2 chung một hình vẽ.

Từ C kẻ đường thẳng vuông góc với BI tại H và cắt AB tại D

Bài 1: Có $\triangle CBD$ cân tại B $\Rightarrow BC = BD$

Góc HIC = góc IBC + góc ICB = 45° (góc ngoài tại I)

\Rightarrow Tính được HC \Rightarrow Tính được DC = 2HC =

Gọi x = BC = BD $\Rightarrow AD = x - 5$

Ta có: $AC^2 = x^2 - 25$ và $DC^2 = AD^2 + AC^2 \Rightarrow x =$

Bài 2: Có $\triangle CBD$ cân tại B $\Rightarrow HC = HD$

Góc HIC = góc IBC + góc ICB = 45° (góc ngoài tại I)

\Rightarrow Tính được HC = HI = HD \Rightarrow Tính được DC = 2HC và BH = IB + HI

$\triangle DHB \sim \triangle DAC \Rightarrow$ Tính được $\frac{DA}{AC} \Rightarrow AC$ theo AD

Có $AC^2 + AD^2 = CD^2 \Rightarrow AC =$

Có $BC^2 = BH^2 + HC^2 = BA^2 + AC^2 \Rightarrow AB =$

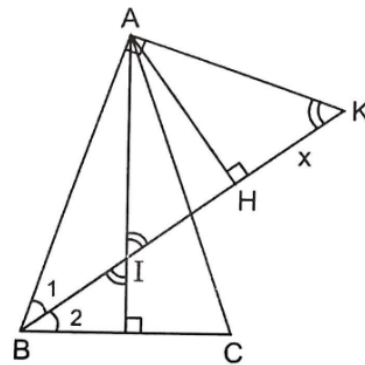
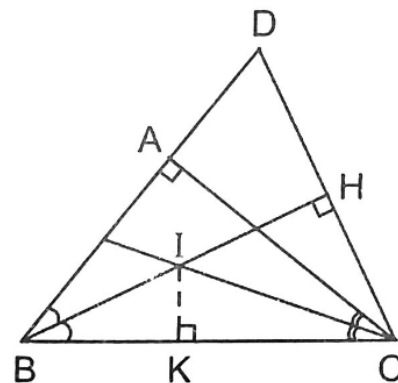
Bài 3: Tam giác ABC cân tại A, gọi I là giao điểm của các đường phân giác của góc A và góc B. Biết IA = $2\sqrt{5}$ cm, IB = 3cm. Tính độ dài AB.

Hướng dẫn

Ở bài này: Nếu kẻ AH \perp phân giác BI tại H thì $\triangle AHI$ không phải là \triangle cân như bài 1, bài 2 ở trên, Nhưng nếu kẻ đường vuông góc với AB tại A và cắt BI tại K thì $\triangle IAK$ cân tại A.

$\triangle IAK$ cân tại A $\Rightarrow AK = AI = 2\sqrt{5}$

Đặt x = HK $\Rightarrow IK = 2HK = 2x \Rightarrow BK = BI + IK = 3 + 2x$



$$\Delta_{\text{v}}AKB \text{ có } AK^2 = KH.KB \Rightarrow x.(3 + 2x) = 20 \Rightarrow x \Rightarrow BH \text{ và } BK$$

$$AB^2 = BH.KB =$$

DẠNG 6: Các bài toán về tứ giác có dùng hệ thức của tam giác vuông để tính toán, chứng minh.

Bài 1. Cho hình chữ nhật ABCD, qua A kẻ đường vuông góc với BD tại H. Biết AB = 20, AH = 12. Tính chu vi hình chữ nhật ABCD.

Bài 2. Cho hình vuông ABCD, $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$, AB = 15cm, áp dụng các đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại O, tính:

a) OB, OD, AC

c) Diện tích hình vuông ABCD.

Bài 3. Cho hình thang ABCD vuông tại A và D. Biết AB = 45cm, cạnh đáy CD = 10cm, BC = 37cm. Tính chiều cao và diện tích hình thang.

Bài 4. Cho hình thang ABCD có chu vi là 52cm, đáy nhỏ AB bằng cạnh bên AD và BC, đáy lớn DC = 22cm. Tính chiều cao hình thang.

Bài 5. Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau.

$$\text{Chứng minh: } AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$$

Bài 6. Cho hình thang ABCD có $\hat{B} = \hat{C} = 90^\circ$. Hai đường chéo vuông góc với nhau tại H. Biết AB = $3\sqrt{5}$ cm, HA = 3cm. Chứng minh:

a) HA : HB : HC : HD = 1 : 2 : 4 : 8

b) $\frac{1}{AB^2} - \frac{1}{CD^2} = \frac{1}{HB^2} - \frac{1}{HC^2}$

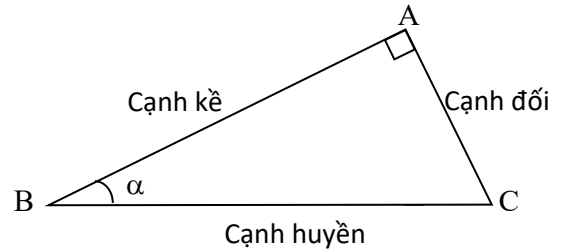
CHỦ ĐỀ 2: TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN TRONG TAM GIÁC VUÔNG.

Xét góc nhọn α trong tam giác vuông ABC

Cạnh AB **kề** với góc α

Cạnh AC **đối** diện góc α

Cạnh **huyền** BC.



1/ Tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông.

* Có bốn tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông:

$$\sin \alpha = \frac{\text{đối}}{\text{huyền}} \qquad \cos \alpha = \frac{\text{kề}}{\text{huyền}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{đối}}{\text{kề}} \qquad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\text{kề}}{\text{đối}}$$

* **Chú ý:**

- Tỉ số lượng giác của góc nhọn luôn dương.

- Muốn có tỉ số lượng giác của góc nhọn α phải tạo ra tam giác vuông chứa góc nhọn α

- Nếu biết một góc nhọn và một cạnh của tam giác vuông sẽ tính được góc nhọn và cạnh còn lại theo tỉ số lượng giác.

2/ Hệ thức liên hệ giữa các tỉ số lượng giác góc nhọn.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 1 \qquad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

GIÁ TRỊ LG GÓC NHỌN ĐẶC BIỆT			
	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

3/ Tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau.

* Gọi α và β là hai góc phụ nhau trong tam giác vuông. Ta có: $\alpha + \beta = 90^\circ$

$$\sin \alpha = \cos \beta \qquad \cos \alpha = \sin \beta$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \beta \qquad \operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$$

* **Chú ý**

$$1^\circ = 60'$$

$$90^\circ = 89^\circ 60'$$

CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1: Tính cạnh và góc nhọn chưa biết trong tam giác vuông.

I/ Phương pháp.

- Nếu biết góc và cần tính cạnh: Xác định cạnh cần tìm là **cạnh đối** hay **cạnh kề** của góc nhọn hay **cạnh huyền** từ đó lựa chọn dùng tỉ số lượng giác nào của góc nhọn để tính.

- Nếu biết cạnh và cần tính góc: Dùng tỉ số lượng giác của góc nhọn liên quan tới cạnh đã biết (**kề** hoặc **đối** hoặc **huyền**) và góc nhọn cần tính.

- Có thể vận dụng kết hợp hệ thức liên hệ “**cạnh góc vuông, cạnh huyền và đường cao**” trong tam giác vuông để tính cạnh.

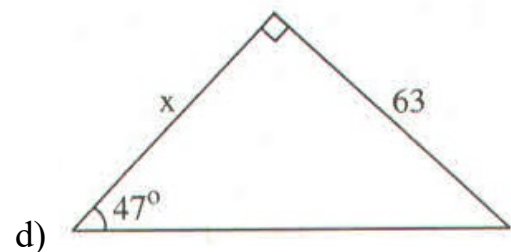
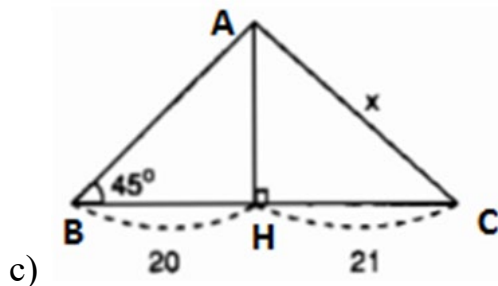
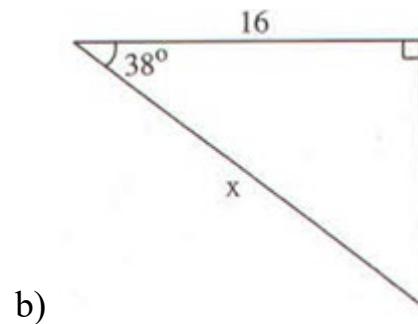
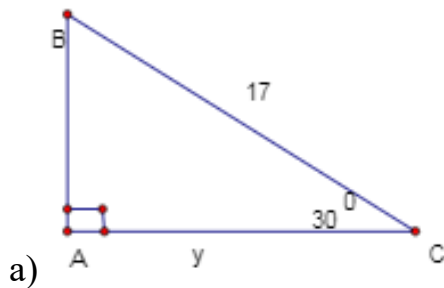
II/ Bài tập vận dụng.

Bài 1: Cho tam giác ABC vuông tại A. Góc B bằng 30° , BC = 10cm. Hãy tính cạnh AB?

Bài 2: Cho tam giác ABC vuông tại A. Góc B bằng α , biết $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, AB = 8cm. Hãy tính cạnh

AC và BC?

Bài 3: Tính giá trị x ; y trong hình. Biết $\operatorname{tg}47^\circ = 1,072$ và $\cos38^\circ = 0,788$.

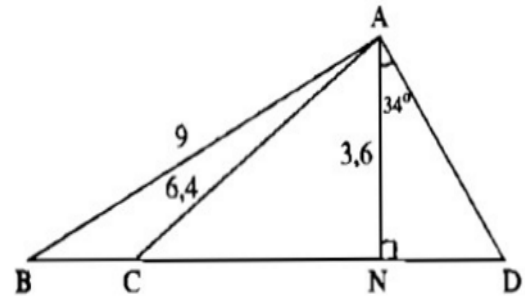


Bài 4: (SBT toán 9 – trang 107) Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường cao AH. Tính sinB và sinC trong mỗi trường hợp sau:

a) $AB = 13$; $BH = 5$.

b) $BH = 3$; $CH = 4$.

Bài 5: (SBT toán 9 – trang 111) Cho hình vẽ. Biết $AB = 9\text{cm}$; $AC = 6,4\text{cm}$; $AN = 3,6\text{cm}$; góc AND bằng 90° ; góc DAN bằng 34° . Hãy tính: CN ; góc ABN ; góc CAN và AD?

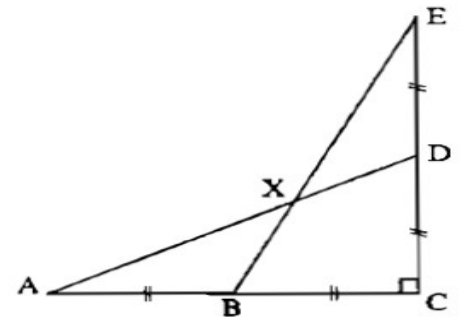


Bài 6: (SBT toán 9 – trang 111) Cho hình vẽ bên. Biết $AB = BC = CD = DE = 2\text{cm}$. Hãy tính:

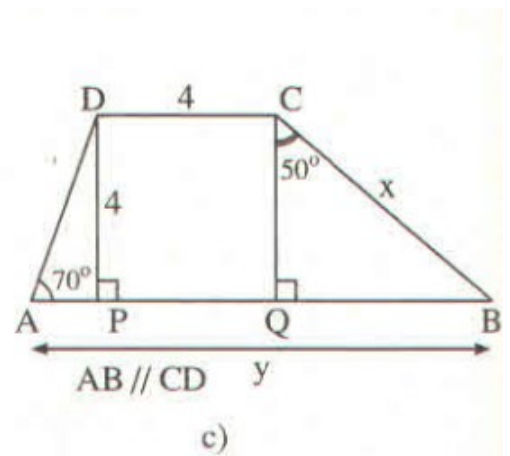
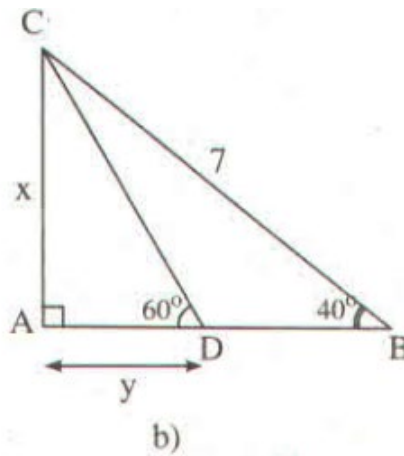
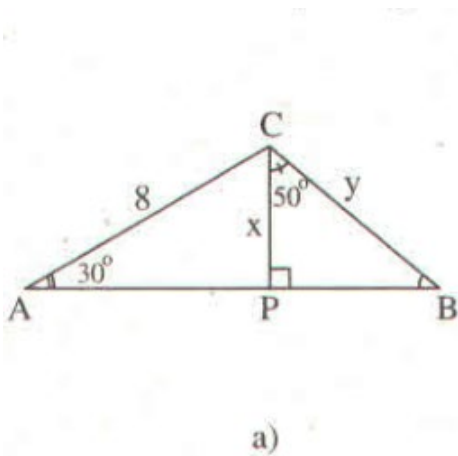
a) AD ; BE

b) góc DAC

c) góc BXD



Bài 7: (SBT toán 9 – trang 114) Tìm x ; y trong các hình sau:



DẠNG 2: Tính cạnh và góc nhọn chưa biết trong tam giác thường.

I/ Phương pháp.

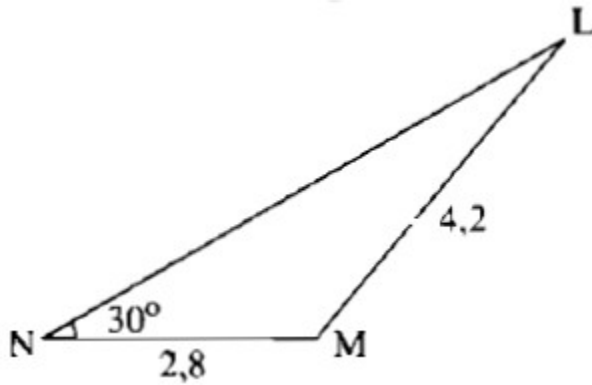
- Nếu tam giác đã cho là tam giác thường, ta phải dựng thêm đường cao của tam giác để có được tam giác vuông.

- Đường cao dựng sao cho tam giác vuông tạo ra phải chứa yếu tố góc nhọn và một cạnh đã biết.

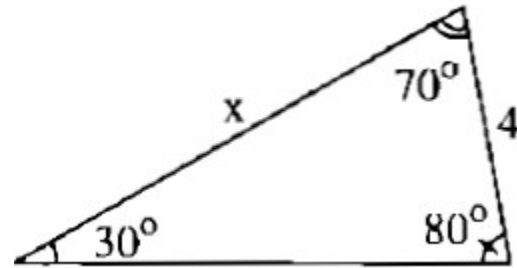
- Áp dụng tỉ số lượng giác góc nhọn tương ứng trong tam giác vuông vừa tạo.

II/ Bài tập vận dụng.

Bài 1: (SBT toán 9 – trang 108) Tính $\sin L$ trong Hình 1 ở dưới. Biết $\sin 30^\circ = 0,5$.



Hình 1

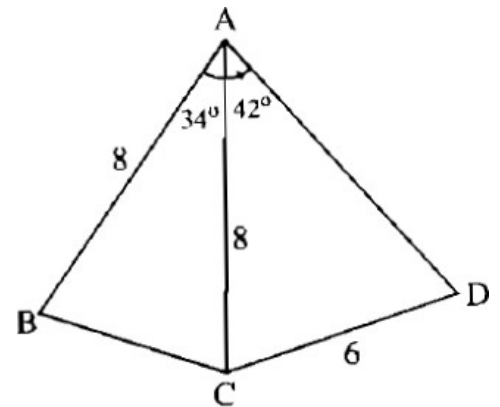


Hình 2

Bài 2: (SBT toán 9 – trang 108). Tính x trong Hình 2 ở trên.

Bài 3: (SBT toán 9 – trang 115) Cho Hình 3. Hãy tính

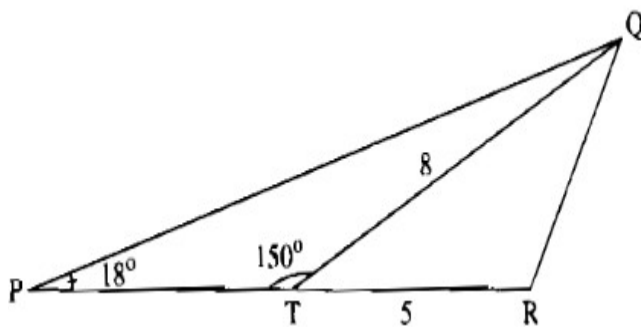
- a) Độ dài cạnh BC
- b) góc ADC
- c) Khoảng cách từ điểm B đến cạnh AD



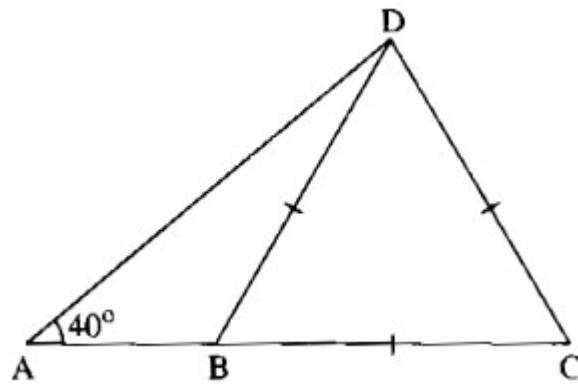
Hình 3

Bài 4: (SBT toán 9 – trang 113) Cho Hình 4. Hãy tính

- a) Độ dài cạnh PT
- b) Diện tích tam giác PQR



Hình 4



Hình 5

Bài 5: (SBT toán 9 – trang 115). Cho Hình 5, tam giác BCD là tam giác đều cạnh 5cm và góc DAB bằng 40° . Hãy tính AD và AB.

Bài 6: (SBT toán 9 – trang 115) Cho tam giác ABC có $BC = 12\text{cm}$, góc B bằng 60° ; góc C bằng 40° . Tính:

- a) Đường cao CH và cạnh AC.

b) Diện tích tam giác ABC.

Bài 7: Hình bình hành ABCD có $AB = 20\text{cm}$ và $BD = 15\text{cm}$, góc tạo bởi hai cạnh AB và BD là 110° . Tính diện tích hình bình hành ABCD.

Bài 8: Hình thang cân ABCD ($AB \parallel DC$). Biết $AB = 15\text{cm}$ và $DC = 20\text{cm}$. Góc ở đáy bằng 75° . Tính diện tích hình thang cân ABCD.

DẠNG 3: Tỷ số lượng giác của hai góc phụ nhau.

I/ Phương pháp.

* Nếu α và β là hai góc phụ nhau ($\alpha + \beta = 90^\circ$):

$$\sin\alpha = \cos\beta \qquad \cos\alpha = \sin\beta$$

$$\tan\alpha = \cot\beta \qquad \cot\alpha = \tan\beta$$

* **Chú ý:** $1^\circ = 60'$ $90^\circ = 89^\circ 60'$

Ví dụ: Góc $20^\circ 35'$ phụ với góc $69^\circ 25'$ vì $20^\circ 35' + 69^\circ 25' = 89^\circ 60'$

* **Vận dụng:**

- Xác định tỷ số lượng giác của góc nhọn nhỏ hơn 45° khi biết tỷ số lượng giác của góc lớn hơn 45° (hoặc ngược lại).

- Rút gọn (hoặc tính) các biểu thức liên quan tới góc phụ nhau.

II/ Bài tập vận dụng.

Bài 1: Đổi tỷ số lượng giác của các góc nhọn sau đây thành tỷ số lượng giác của góc nhỏ hơn 45° .

$$\sin 82^\circ; \cos 47^\circ; \sin 48^\circ; \cos 55^\circ; \sin 47^\circ 20'; \tan 62^\circ; \cot 82^\circ 45'$$

Bài 2: Cho tam giác ABC. Biết $AB = 21\text{cm}$, $AC = 28\text{cm}$, $BC = 35\text{cm}$.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông;

b) Tính $\sin B$, $\sin C$.

Bài 4: Đơn giản biểu thức: $A = \sin(90^\circ - x)\sin(180^\circ - x)$

$$B = \cos(90^\circ - x)\cos(180^\circ - x)$$

Bài 5: Tính kết quả của biểu thức

a) $A = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \sin^2 80^\circ + \sin^2 70^\circ + \sin^2 60^\circ$.

b) $B = \cos^2 12^\circ + \cos^2 78^\circ + \cos^2 1^\circ + \cos^2 89^\circ$

c) $C = \sin^2 3^\circ + \sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 87^\circ$.

d) $D = \cos 45^\circ \cdot \cos^2 23^\circ + \sin 45^\circ \cdot \cos^2 67^\circ$.

$$e) E = \frac{\operatorname{tg}64^\circ}{\operatorname{cotg}26^\circ} - 1$$

DẠNG 4: Chứng minh đẳng thức. Rút gọn biểu thức theo góc α .

I/ Phương pháp.

Vận dụng các hệ thức liên hệ sau để biến đổi một vế đẳng thức cho bằng vế còn lại (rút gọn biểu thức)

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

HỆ THỨC MỞ RỘNG:

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha$$

II/ Bài tập vận dụng.

Bài 1: Chứng minh các hằng đẳng thức:

- $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cdot \cos x$
- $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2\sin x \cdot \cos x$
- $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$
- $\sin x \cos x (1 + \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{cotg} x) = 1 + 2\sin x \cdot \cos x$

Bài 2: Chứng minh các đẳng thức sau:

- $\frac{1}{1 + \operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{1 + \operatorname{cotg} \alpha} = 1$
- $\sin^4 x - \cos^4 x = 2\sin^2 x - 1$
- $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x + 2$
- $\frac{1 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = 1 + 2\operatorname{tg}^2 \alpha$

f) Cho α, β là hai góc nhọn. Chứng minh rằng:

$$\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}$$

Bài 3: Rút gọn biểu thức:

a) $A = \sin^6 x + 3\sin^4 x \cdot \cos^2 x + 3\sin^2 x \cdot \cos^4 x + \cos^6 x$

b) $B = (1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha) - \sin^2 \alpha$

Bài 4: Đơn giản các biểu thức:

$$A = \cos y + \sin y \cdot \operatorname{tg} y$$

$$B = \sqrt{1 + \cos b} \cdot \sqrt{1 - \cos b}$$

$$C = \sin a \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}$$

Bài 5: (Nâng cao) Cho các góc α, β nhọn, $\alpha < \beta$. Chứng minh rằng:

a) $\cos(\beta - \alpha) = \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha$

b) $\sin(\beta - \alpha) = \sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta$.

Bài 6: (Nâng cao) Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh rằng:

a) $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$

b) $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$.

Bài 7: (Nâng cao) Cho tam giác ABC nhọn có ba cạnh là a, b, c. Chứng minh rằng:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \quad (AB = c, BC = a, CA = b).$$

DẠNG 5: Biết một tỉ số lượng giác của góc α tính các tỉ số lượng giác còn lại.

I/ Phương pháp.

Vận dụng các hệ thức liên hệ sau để biến đổi một vế đẳng thức cho bằng vế còn lại (rút gọn biểu thức)

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

HỆ THỨC MỞ RỘNG:

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha$$

Chú ý: Các tỉ số lượng giác góc nhọn luôn dương.

II/ Bài tập vận dụng.

Bài 1: Biết rằng $\sin \alpha = 0,6$. Tính $\cos \alpha$ và $\operatorname{tg} \alpha$.

Bài 2: Biết rằng $\cos \alpha = 0,7$. Tính $\sin \alpha$ và $\operatorname{tg} \alpha$.

Bài 3: Biết rằng $\operatorname{tg} \alpha = 0,8$. Tính $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$.

Bài 4: Biết $\cos x = \frac{1}{2}$, tính $P = 3\sin^2 x + 4\cos^2 x$.

Bài 5:

a) Cho góc nhọn β mà $\sin \beta = \frac{1}{4}$. Tính $\cos \beta$ và $\operatorname{tg} \beta$.

b) Cho góc α mà $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$. Tính $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ và $\operatorname{cot} \alpha$.

c) Cho $\operatorname{tg} x = 2\sqrt{2}$. Tính $\sin x$ và $\cos x$.

Bài 6: Hãy tính $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ nếu:

a) $\cos \alpha = \frac{12}{13}$

b) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$

Bài 7: Biết rằng $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. Tính tỉ số lượng giác của góc 15° .

Dạng 6: Tính khoảng cách - Tính chiều cao - Tính diện tích tam giác - Tính độ dài đoạn thẳng - C/m các hệ thức trong tam giác: Bằng cách áp dụng tỉ số LG góc nhọn.

Bài 1: Cho tam giác ABC có $AB = 26\text{cm}$, $AC = 25\text{cm}$, đường cao $AH = 24\text{cm}$. Tính cạnh BC.

Bài 2: Cho tam giác ABC cân ($AB = AC$) và đường tròn tâm O tiếp xúc với hai cạnh AB và AC lần lượt ở B và C. Từ điểm M trên cung nhỏ BC (M khác B và C) kẻ MD, ME, MF lần lượt vuông góc với các đường thẳng BC, CA, AB.

a) Chứng minh các tứ giác MDBF, MBCE nội tiếp.

b) Chứng minh các tam giác DBM và ECM đồng dạng.

c) Cho góc $BAC = 60^\circ$ và $AB = 2$, tính bán kính đường tròn tâm O.

Bài 3:

a) Cho tam giác ABC có A nhọn. Chứng minh rằng: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$.

Gợi ý: Vẽ BH là đường cao của tam giác ABC.

$$BH = AB \sin BAH; \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} BH \cdot AC.$$

b) Cho tứ giác ABCD có AC cắt BD tại O và AOB nhọn. Chứng minh rằng:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin AOB.$$

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác AD. Chứng minh rằng:

a) $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{AD}$

b) $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \leq \frac{1}{AD^2}.$

Bài 5: Cho hình thang ABCD có hai cạnh bên là AD và BC bằng nhau, đường chéo AC vuông góc với cạnh bên BC. Biết $AD = 5a$, $AC = 12a$.

a) Tính $\frac{\sin B + \cos B}{\sin B - \cos B}$

b) Tính chiều cao của hình thang ABCD.

Bài 6: Cho hình thang ABCD. Biết đáy $AB = a$ và $CD = 2a$; cạnh bên $AD = a$, góc $A = 90^\circ$

a) Chứng minh $\operatorname{tg} C = 1$;

b) Tính tỉ số diện tích tam giác DBC và diện tích hình thang ABCD ;

c) Tính tỉ số diện tích tam giác ABC và diện tích tam giác DBC.

Bài 7: Gọi AM, BN, CL là ba đường cao của tam giác ABC.

a) Chứng minh: $\Delta ANL \sim \Delta ABC$;

b) Chứng minh: $AN \cdot BL \cdot CM = AB \cdot BC \cdot CA \cdot \cos A \cos B \cos C.$

CHỦ ĐỀ 3: SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN.

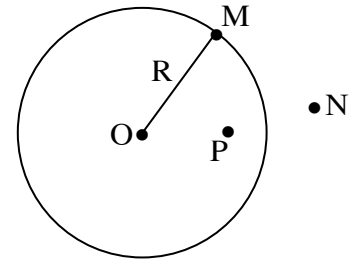
ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN.

I/ SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN.

1. Định nghĩa đường tròn.

* Đường tròn tâm O bán kính R là hình gồm các điểm cách O một khoảng bằng R.

* Kí hiệu: $(O ; R)$ hoặc (O) .



2. Điểm thuộc và không thuộc đường tròn.

* Điểm $M \in (O ; R)$ hay M nằm trên đường tròn hay (O) đi qua M $\Leftrightarrow OM = R$.

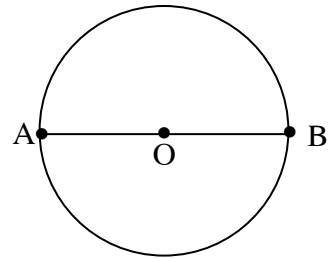
* Điểm N nằm ngoài đường tròn $\Leftrightarrow ON > R$

* Điểm P nằm trong đường tròn $\Leftrightarrow OP < R$

3. Đường kính của đường tròn.

Đoạn thẳng nối hai điểm trên đường tròn và đi qua tâm O gọi là đường kính của đường tròn tâm O.

Tâm O của đường tròn là trung điểm của đường kính.



4. Cách xác định đường tròn.

Một đường tròn xác định khi biết tâm và bán kính hoặc biết đường kính.

5. Chú ý.

* Qua ba điểm không thẳng hàng A, B, C ta vẽ được một đường tròn duy nhất có tâm là giao điểm ba đường trung trực của ΔABC .

* Qua hai điểm A, B cho trước ta vẽ được vô số đường tròn có tâm nằm trên đường trung trực của đoạn AB.

* Không vẽ được đường tròn nào đi qua ba điểm thẳng hàng.

6. Tâm đối xứng và trục đối xứng của đường tròn.

* Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.

* Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn đó

\Rightarrow Một đường tròn chỉ có duy nhất một tâm đối xứng và có vô số trục đối xứng.

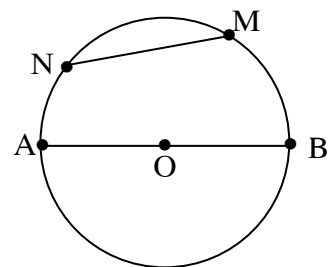
II/ ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN.

1. Dây của đường tròn.

Đoạn thẳng nối hai điểm bất kì trên đường tròn gọi là dây của đường tròn đó.

Ví dụ: Dây MN của (O)

Đường kính AB cũng được gọi là dây của (O).



2. So sánh độ dài đường kính và dây.

Định lý 1: Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

3. Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây.

Định lý 2: Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây đó.

Định lý 3: Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây đó.

BÀI TẬP CHUYÊN ĐỀ 3

I/ PHƯƠNG PHÁP.

* Trong một đường tròn **đường kính** là dây lớn nhất.

* Trong một đường tròn:

+ Đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây đó.

+ Đường kính đi qua trung điểm của dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây đó.

* Để chứng minh các điểm thuộc một đường tròn: **cần nhớ:**

+ Trong tam giác vuông trung điểm cạnh huyền là tâm vòng tròn ngoại tiếp

+ Trong tam giác đều, tâm vòng tròn ngoại tiếp là trọng tâm tam giác đó.

+ Trong tam giác thường:

- Tâm vòng tròn ngoại tiếp là giao điểm của 3 đường trung trực của 3 cạnh tam giác đó

- Tâm vòng tròn nội tiếp là giao điểm 3 đường phân giác trong của tam giác đó

- Các đỉnh của hình chữ nhật cùng thuộc đường tròn tâm là giao điểm hai đường chéo.

- Các đỉnh của hình vuông cùng thuộc đường tròn tâm là giao điểm hai đường chéo.

=> **PHƯƠNG PHÁP:** Để chứng minh các điểm A_1, A_2, \dots, A_n cùng thuộc một đường tròn ta

chứng minh các điểm A_1, A_2, \dots, A_n cách đều điểm O cho trước.

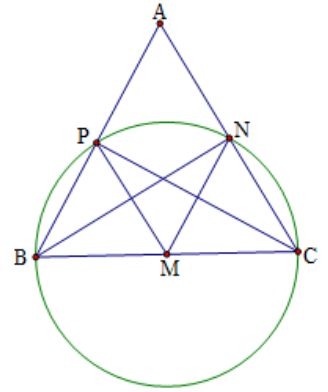
II/ BÀI TẬP MẪU.

Ví dụ 1. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. AM, BN, CP là các đường trung tuyến. Chứng minh 4 điểm B, P, N, C cùng thuộc một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó

Giải

Vì tam giác ABC đều nên các trung tuyến đồng thời cũng là đường cao .

- $\Rightarrow AM, BN, CP$ lần lượt vuông góc với BC, AC, AB .
- \Rightarrow các tam giác BPC, BNC là tam giác vuông với BC là cạnh huyền
- $\Rightarrow MP = MN = MB = MC$
- \Rightarrow Các điểm B, P, N, C cùng thuộc đường tròn Đường kính $BC = a$, tâm đường tròn là Trung điểm M của BC



Ví dụ 2. Cho tứ giác $ABCD$ có $\hat{C} + \hat{D} = 90^\circ$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BD, DC, CA . Chứng minh 4 điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn. Tìm tâm đường tròn đó

Giải

Kéo dài AD, CB cắt nhau tại điểm T thì tam giác TCD vuông tại T .

+ Có MN là đường trung bình của tam giác $ABD \Rightarrow NM // AD$

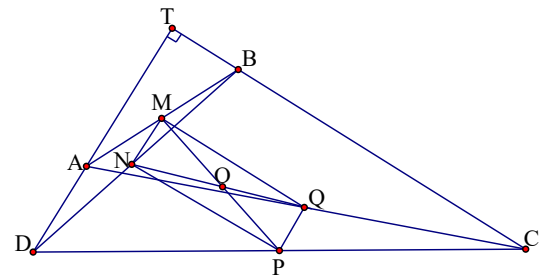
+ MQ là đường trung bình của tam giác $ABC \Rightarrow MQ // BC$.

Mặt khác $AD \perp BC \Rightarrow MN \perp MQ$.

Chứng minh tương tự ta cũng có: $MN \perp NP, NP \perp PQ$.

Suy ra $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Hay các điểm M, N, P, Q thuộc một đường tròn có tâm là giao điểm O của hai đường chéo NQ, MP

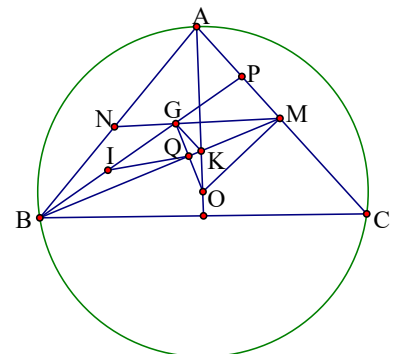


Ví dụ 3. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M là trung điểm của AC ; G là trọng tâm của tam giác ABM . Gọi Q là giao điểm của BM và GO . Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BGQ

Giải

Vì tam giác ABC cân tại A nên tâm O của vòng tròn ngoại tiếp tam giác nằm trên đường trung trực của BC . Gọi K là giao điểm của AO và BM

Đựng các đường trung tuyến MN, BP của tam giác ABM cắt nhau tại trọng tâm G . Do $MN // BC \Rightarrow MN \perp AO$. Gọi K là giao điểm của BM và AO thì K là trọng tâm của tam giác ABC suy ra $GK // AC$.



Mặt khác ta có $OM \perp AC$ suy ra $GK \perp OM$ hay K là trực tâm của tam giác $OMG \Rightarrow MK \perp OG$.

Như vậy tam giác BQG vuông tại Q .

Do đó tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác QGB là trung điểm I của BG .

Ví dụ 4. Cho hình thang vuông $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$. $BC = 2AD = 2a$, Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên AC ; M là trung điểm của HC . Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BDM

Giải

Gọi N là trung điểm của BH thì MN là đường trung bình của tam giác HBC suy ra $MN \perp AB$, mặt khác $BH \perp AM$

$\Rightarrow N$ là trực tâm của tam giác $ABM \Rightarrow AN \perp BM$.

Do $MN \parallel \frac{1}{2}BC \Rightarrow MN \parallel AD$ nên $ADMN$ là hình bình hành

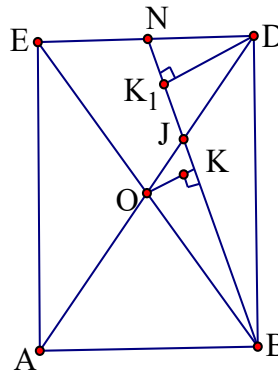
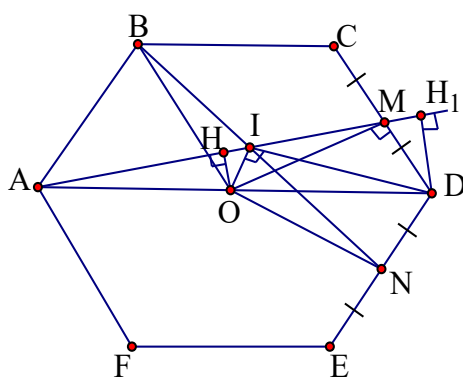
Suy ra $AN \parallel DM$.

Từ đó ta có: $DM \perp BM$ hay tam giác DBM vuông tại M nên tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác DBM là trung điểm O của BD .

$$\text{Ta có } R = MO = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Ví dụ 5. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Gọi M, N là trung điểm của CD, DE . AM cắt BN tại I . Chứng minh rằng các điểm M, I, O, N, D nằm trên một đường tròn

Giải



$ABCDEF$ là lục giác đều $\Rightarrow OM \perp CD, ON \perp DE \Rightarrow M, N, C, D$ nằm trên đường tròn đường kính OD .

Vì tam giác $\triangle OBN = \triangle OAM$ nên điểm O cách đều $AM, BN \Rightarrow OI$ là phân giác trong của góc \widehat{AIN}

$$\text{Kẻ } \begin{cases} OH \perp AM \\ DH_1 \perp AM \end{cases} \Rightarrow DH_1 = 2OH \text{ (Do } OH \text{ là đường trung bình của tam giác } DAH_1$$

$$\text{Kẻ } \begin{cases} OK \perp BN \\ DK_1 \perp BN \end{cases} \Rightarrow DK_1 = 2OK \text{ (Do } \frac{OK}{DK_1} = \frac{JO}{JD} = \frac{1}{2} \text{ với } J = AD \cap NB)$$

$$\text{Do } OK = OH \Leftrightarrow DH_1 = DK_1$$

$\Rightarrow D$ cách đều AM, BN hay ID là phân giác ngoài của $\widehat{AIN} \Rightarrow \widehat{OID} = 90^\circ$.

Vậy 5 điểm M, I, O, N, D cùng nằm trên một đường tròn đường kính OD .

Ví dụ 6. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm BC, N là điểm thuộc đường chéo AC sao cho $AN = \frac{1}{4}AC$. Chứng minh 4 điểm M, N, C, D nằm trên cùng một đường tròn

Giải

Ta thấy tứ giác $MCDN$ có $\widehat{MCD} = 90^\circ$ nên để chứng minh 4 điểm M, N, C, D cùng nằm trên một đường tròn ta sẽ chứng minh $\widehat{MND} = 90^\circ$

Cách 1: Kẻ đường thẳng qua N song song với AB cắt BC, AD tại E, F .

$$\text{Xét } \Delta_{\text{vuông}} NEM \text{ và } \Delta_{\text{vuông}} DFN \text{ có } EM = NF = \frac{1}{4}AB, EN = DF = \frac{1}{4}AB$$

$$\Rightarrow \Delta NEM = \Delta DFN \Rightarrow$$

$$\widehat{NME} = \widehat{DNF}, \widehat{MNE} = \widehat{NDF} \Rightarrow \widehat{MNE} + \widehat{DNF} = 90^\circ \Rightarrow \Delta MND \text{ vuông tại } N.$$

Suy ra 4 điểm M, N, C, D cùng nằm trên đường tròn đường kính MD

Cách 2: Gọi K là trung điểm của ID với I là giao điểm của hai đường chéo.

Để thấy $MCKN$ là hình bình hành nên suy ra $CK // MN$.

Mặt khác do $NK \perp CD, DK \perp CN \Rightarrow K$ là trực tâm của tam giác $CDN \Rightarrow CK \perp ND \Leftrightarrow MN \perp ND$.

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC có trực tâm H . Lấy điểm M, N thuộc tia BC sao cho $MN = BC$ và M nằm giữa B, C . Gọi D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N lên AC, AB . Chứng minh các điểm A, D, E, H cùng thuộc một đường tròn

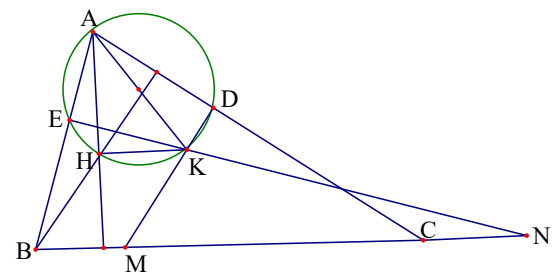
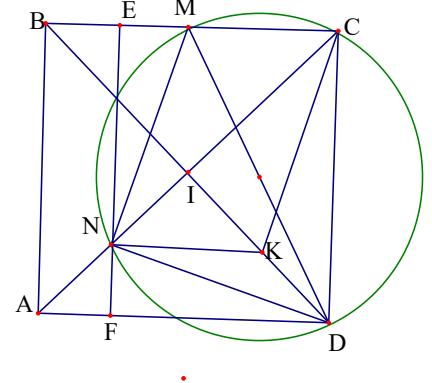
Giải

Giả sử MD cắt NE tại K . Ta có $HB // MK$ do cùng vuông góc với AC suy ra $\widehat{HBC} = \widehat{KMN}$ (góc đồng vị).

Tương tự ta cũng có $\widehat{HCB} = \widehat{KNM}$ kết hợp với giả thiết $BC = MN \Rightarrow \Delta BHC = \Delta KMN \Leftrightarrow S_{\Delta BHC} = S_{\Delta KMN} \Rightarrow HK // BC$.

Mặt khác ta có $BC \perp HA$ nên $HK \perp HA$ hay H thuộc đường tròn đường kính AK .

Để thấy $E, D \in (AK)$ nên các điểm A, D, E, H cùng thuộc một đường tròn.



II/ BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1: Cho tam giác ABC có các đường cao BH và CK.

- Chứng minh: B, K, H và C cùng nằm trên một đường tròn. Xác định tâm đường tròn đó.
- So sánh KH và BC.

Bài 2: Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn. Vẽ (O) đường kính BC, nó cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự ở D và E.

- Chứng minh: $CD \perp AB$; $BE \perp AC$.
- Gọi K là giao điểm của BE và CD. Chứng minh: $AK \perp BC$.

Bài 3: Cho hình thoi ABCD. Gọi O là giao điểm hai đường chéo. M, N, R và S lần lượt là hình chiếu của O trên AB, BC, CD và DA. Chứng minh 4 điểm M, N, R và S cùng thuộc một đường tròn.

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A điểm D thuộc cạnh AB, điểm E thuộc cạnh AC. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của DE, DC, BC, BE. Chứng minh 4 điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

Bài 5: Hình thoi ABCD có $\widehat{A} = 60^\circ$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh 6 điểm E, B, F, G, D, H thuộc cùng một đường tròn.

Bài 6: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Điểm C thuộc đường (O). Đường tròn (I) đường kính OA cắt OC tại D. Vẽ $CH \perp AB$.

- Chứng minh A, C, D, H cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh $OD = OH$. Từ đó chỉ ra $HD \parallel AC$.

Bài 7: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$, $AB < CD$) có $\widehat{C} = \widehat{D} = 60^\circ$, $CD = 2AD$. Chứng minh các điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.

Bài 8: Cho (O) đường kính MN, I thuộc OM, K thuộc ON. Qua I, K vẽ các dây AB và CD vuông góc với MN

- C/m MN là đường trung trực của AB và CD
- C/m ABCD là hình thang cân

Bài 9: Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Gọi M là một điểm nằm trên AB (điểm M khác O). Qua M vẽ dây CD vuông góc với AB. Lấy điểm E đối xứng với A qua M.

- Tứ giác ACED là hình gì? Vì sao?
- Giả sử $R = 6\text{cm}$; $MA = 4\text{cm}$. Tính CD.

c)* Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của M trên CA và CB. Chứng minh: $MH.MK = \frac{MC^3}{2R}$.

Bài 10: Cho đường tròn $(O; R)$. Vẽ hai bán kính OA, OB . Trên các bán kính OA, OB lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $OM = ON$. Vẽ dây CD đi qua M, N (M ở giữa C và N).

a) Chứng minh $CM = DN$.

b) Giả sử $\widehat{AOB} = 90^\circ$. Tính OM theo R sao cho $CM = MN = ND$.

Bài 11: Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OA, OB . Qua M, N lần lượt vẽ các dây CD và EF song song với nhau (C và E cùng nằm trên một nửa đường tròn đường kính AB).

a) Chứng minh tứ giác $CDEF$ là hình chữ nhật.

b) Giả sử CD và EF cùng tạo với AB một góc nhọn 30° . Tính diện tích hình chữ nhật $CDFE$.

Bài 12: Cho hình chữ nhật $ABCD$, kẻ BH vuông góc với AC . Trên AC, CD ta lấy các điểm M, N sao

cho $\frac{AM}{AH} = \frac{DN}{DC}$. Chứng minh 4 điểm M, B, C, N nằm trên một đường tròn.

Gợi ý: $\widehat{BCN} = 90^\circ$, hãy chứng minh $\widehat{BMN} = 90^\circ$

CHUYÊN ĐỀ 4: DÂY – KHOẢNG CÁCH TỪ TÂM TỚI DÂY.

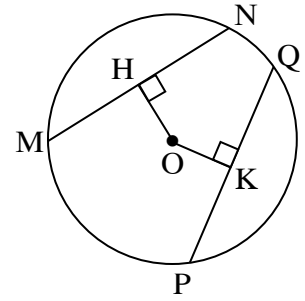
1. Định lý 1: Trong một đường tròn:

- a) Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.
- b) Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

Tóm tắt: Cho (O), hai dây MN và PQ. Kẻ $OH \perp MN$ tại H, $OK \perp PQ$ tại K.

* Nếu $MN = PQ \Rightarrow OH = OK$

* Nếu $OH = OK \Rightarrow MN = PQ$



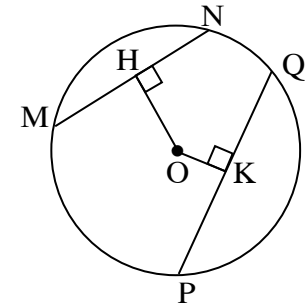
2. Định lý 2. Trong hai dây của một đường tròn:

- a) Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.
- b) Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

Tóm tắt: Cho (O), hai dây MN và PQ. Kẻ $OH \perp MN$ tại H, $OK \perp PQ$ tại K.

* Nếu $PQ > MN \Rightarrow OK < OH$

* Nếu $OK < OH \Rightarrow PQ > MN$



BÀI TẬP CHUYÊN ĐỀ 4

Bài 1: Cho đường tròn (O) và điểm A ở ngoài đường tròn. Vẽ tia Ax cắt (O) tại B, C và tia Ay cắt (O) tại D, E sao cho $\widehat{xAO} > \widehat{yAO}$. So sánh các dây DE và BC.

Hướng dẫn

Kẻ $OI \perp BC$, $OH \perp DE$ thì

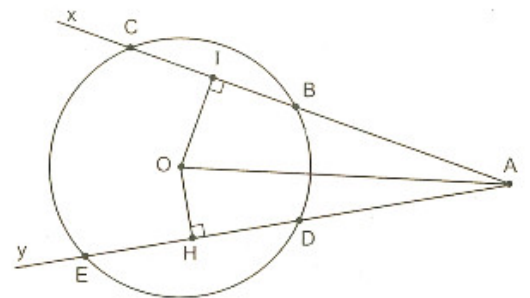
$$OI = OA \cdot \sin \widehat{OAx}$$

$$OH = OA \cdot \sin \widehat{OAy}$$

Mà $\widehat{OAx} > \widehat{OAy}$ nên $\sin \widehat{OAx} > \sin \widehat{OAy}$

$\Rightarrow OI > OH \Rightarrow BC < DE$ (liên hệ giữa dây và khoảng

cách từ tâm đến dây).



Bài 1: Cho (O; 5cm), dây $AB = 8\text{cm}$.

- a) Tính khoảng cách từ tâm O đến dây AB.

b) Gọi I là điểm thuộc dây AB sao cho $AI = 1\text{cm}$. Kẻ dây CD đi qua I và vuông góc với AB. Chứng minh $CD = AB$.

Bài 2: Cho đường tròn (O), điểm A nằm bên trong đường tròn. Vẽ dây BC vuông góc với OA tại A. Vẽ dây EF bất kì đi qua A và không vuông góc với OA. Hãy so sánh độ dài hai dây BC và EF ?

Bài 3: Cho (O), hai dây AB và CD bằng nhau, các tia AB và CD cắt nhau tại E nằm bên ngoài đường tròn. Gọi H và K theo thứ tự là trung điểm của AB và CD. Chứng minh: $EH = EK$ và $EA = EC$.

Bài 4: Cho (O), hai dây AB, CD ($AB < CD$), các tia AB và CD cắt nhau tại K nằm bên ngoài đường tròn. Đường tròn (O; OK) cắt KA và KC tại M và N. Chứng minh: $KM < KN$.

Bài 5: Cho (O), hai dây AB và CD bằng nhau, các tia AB và CD cắt nhau tại I nằm bên ngoài đường tròn. Chứng minh:

a) IO là phân giác góc \widehat{AIC}

b) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh: O, M, I, N cùng thuộc một đường tròn.

Bài 6: Cho (O), các bán kính OA, OB. Trên cung nhỏ AB lấy các điểm M và N sao cho $AM = BN$. Gọi C là giao điểm của AM và BN. Chứng minh:

a) OC là phân giác góc AOB.

b) OC vuông góc với AB.

Bài 7: Cho đường tròn (O; R). Vẽ hai bán kính OA, OB. Trên các bán kính OA, OB lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $OM = ON$. Vẽ dây CD đi qua M, N (M ở giữa C và N).

a) Chứng minh $CM = DN$.

b) Giả sử $\widehat{AOB} = 90^\circ$. Tính OM theo R sao cho $CM = MN = ND$.

Bài 8: Cho tam giác ABC ($AB < AC$), kẻ hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh bốn điểm B, D, C, E cùng thuộc một đường tròn. xác định tâm I của đường tròn đó.

b) Chứng minh $AB.AE = AC.AD$

c) Gọi K là điểm đối xứng của H qua I. Chứng minh rằng: BHCK là hình bình hành.

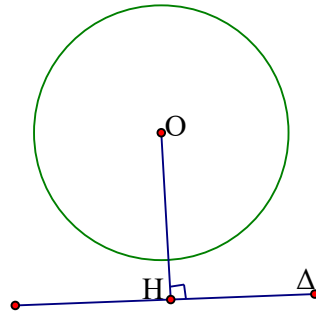
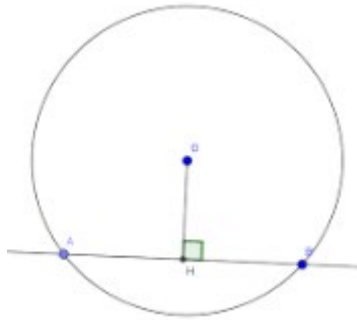
d) Xác định tâm O của đường tròn qua 4 điểm A, B, K, C.

e) Chứng minh $OI // AH$.

CHỦ ĐỀ 5: VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN.

A/ LÝ THUYẾT.

Gọi khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng là OH



1. Đường thẳng cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt:

\Leftrightarrow đường thẳng có hai điểm chung A, B với đường tròn $(O) \Leftrightarrow OH < R$

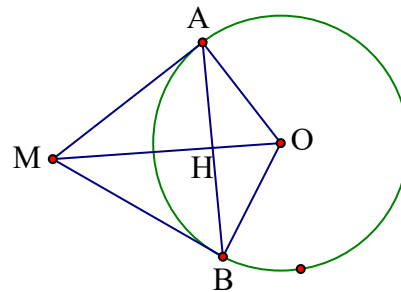
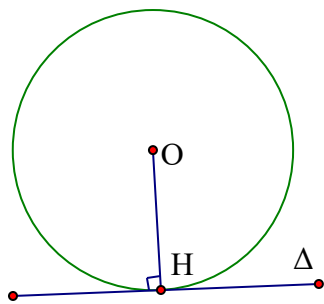
2. Đường thẳng Δ và đường tròn (O) không giao nhau.

\Leftrightarrow Đường thẳng Δ và đường tròn (O) không có điểm chung

$\Leftrightarrow OH > R$

3. Đường thẳng tiếp xúc với đường tròn.

\Leftrightarrow đường thẳng Δ chỉ có một điểm chung H với đường tròn $(O) \Leftrightarrow OH = R$.



4. Tiếp tuyến của đường tròn.

Δ là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm $H \Leftrightarrow \Delta$ tiếp xúc với đường tròn tại H

Điểm H gọi là tiếp điểm của tiếp tuyến với đường tròn (O) . Ta có $OH = R$

* Nếu Δ là tiếp tuyến của (O) thì Δ vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm

* Nếu hai tiếp tuyến của đường tròn cắt nhau tại một điểm thì

+ Điểm đó cách đều hai tiếp điểm

+ Tia kẻ từ điểm đó đến tâm O là tia phân giác góc tạo bởi 2 tiếp tuyến

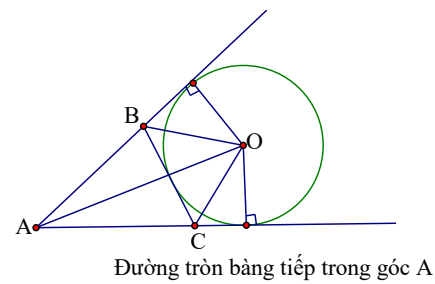
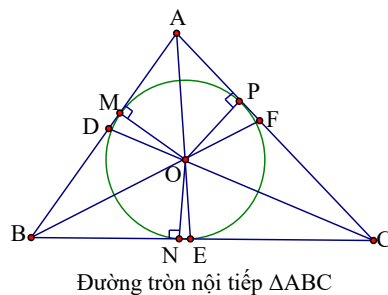
- + Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm
- + Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó thì vuông góc với đoạn thẳng nối hai tiếp điểm tại trung điểm của đoạn thẳng đó.

4. Đường tròn nội tiếp tam giác

- + là đường tròn tiếp xúc với 3 cạnh tam giác là
- + có tâm là giao điểm 3 đường phân giác trong của tam giác

5. Đường tròn bàng tiếp tam giác

- + là đường tròn tiếp xúc với một cạnh của tam giác và phần kéo dài hai cạnh kia
- + Đường tròn bàng tiếp tam giác trong góc A có tâm là giao điểm của hai đường phân giác ngoài góc B và góc C
- + Mỗi tam giác có 3 đường tròn bàng tiếp.



B/ BÀI TẬP VỀ TIẾP TUYẾN

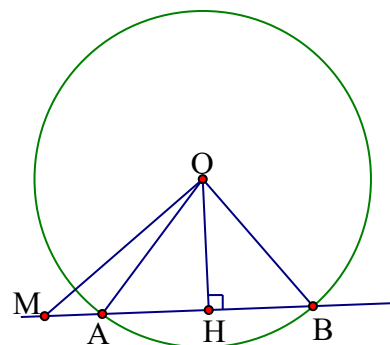
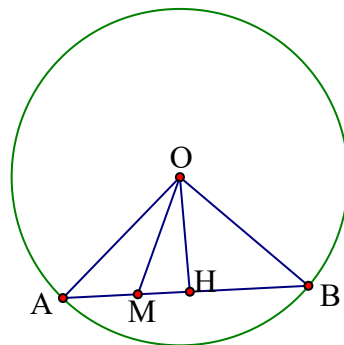
I/ Phương pháp: Xét (O, R) và đường thẳng d

* Bài toán về khoảng cách OH từ tâm O tới đường thẳng d khi d cắt (O) tại hai điểm.

Xét $OH \perp AB \Rightarrow OH < R, HA = HB = \sqrt{R^2 - OH^2}$. Theo định lý Pitago ta có: $OH^2 = MO^2 - MH^2$

Mặt khác ta cũng có: $OH^2 = R^2 - AH^2$

$$\Rightarrow MO^2 - MH^2 = R^2 - AH^2 \Leftrightarrow MH^2 - AH^2 = MO^2 - R^2 \Leftrightarrow (MH - AH)(MH + AH) = MO^2 - R^2$$



CÁC KẾT QUẢ THU ĐƯỢC

- + Nếu M nằm ngoài đoạn AB thì $MA \cdot MB = MO^2 - R^2$

+ Nếu M nằm trong đoạn AB thì $MA \cdot MB = R^2 - MO^2$

+ Mọi liên hệ khoảng cách và dây cung: $R^2 = OH^2 + \frac{AB^2}{4}$

*** Để chứng minh một đường thẳng d là tiếp tuyến (tiếp xúc) với đường tròn (O, R):**

+ **Cách 1:** Chứng minh khoảng cách từ O đến d bằng R. Hay nói cách khác ta vẽ $OH \perp d$, chứng minh $OH = R$.

+ **Cách 2:** Nếu biết d và (O) có một giao điểm là A, ta chỉ cần chứng minh $OA \perp d$.

+ **Cách 3:** Sử dụng phương pháp trùng khít (Cách này sẽ được đề cập trong phần **góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây**)

II/ BÀI TẬP MẪU.

Ví dụ 1. Cho hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$) có O là trung điểm của AB và góc $\widehat{COD} = 90^\circ$. Chứng minh CD là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AB

Giải

Kéo dài OC cắt BD tại E vì $\widehat{COD} = 90^\circ$ suy ra $\widehat{EOD} = 90^\circ$.

Vì \widehat{COD} nên xét $\Delta_{\text{vuông}} COD$ và $\Delta_{\text{vuông}} EOD$ ta có

OD chung

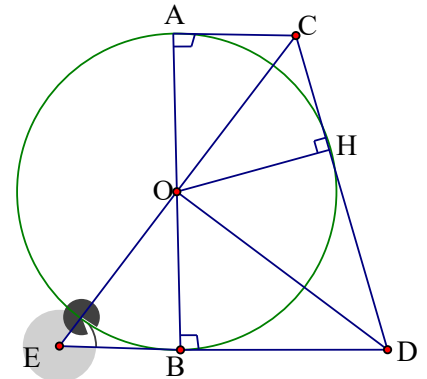
$$\frac{OC}{OD} = \frac{OA}{OB} = 1 \Rightarrow OC = OD.$$

$\Rightarrow \Delta COD = \Delta EOD \Rightarrow DC = DE \Rightarrow \Delta ECD$ cân tại D.

Kẻ $OH \perp CD$ thì $\Delta OBD = \Delta OHD \Rightarrow OH = OB$

mà $OB = OA \Rightarrow OH = OB = OA$ hay A, H, B thuộc đường tròn (O).

Do đó CD là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AB.



Ví dụ 2. Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Gọi M, N là hai điểm trên các cạnh AB, AD sao cho chu vi tam giác AMN bằng $2a$. Chứng minh đường thẳng MN luôn tiếp xúc với 1 đường tròn cố định

Giải

Trên tia đối của BA ta lấy điểm E sao cho $BE = ND$.

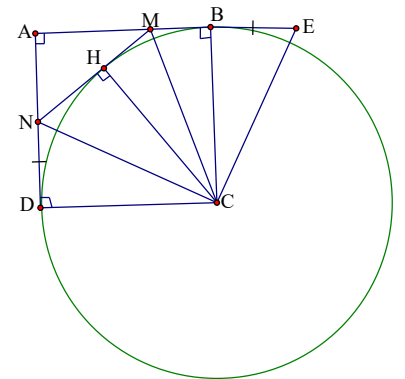
Ta có $\Delta BCE = \Delta DCN \Rightarrow CN = CE$.

Theo giả thiết ta có:

$$MN + AM + AN = AB + AD = AM + MB + AN + DN = AM + AN + MB + BE$$

Suy ra $MN = MB + BE = ME$.

Từ đó ta suy ra $\Delta MNC = \Delta MEC \Rightarrow \widehat{CMN} = \widehat{CMB}$.



Kẻ $CH \perp MN \Rightarrow CH = CB = CD = a$.

Vậy D, H, B thuộc đường tròn tâm C bán kính $CB = a$ suy ra MN luôn tiếp xúc với đường tròn tâm C bán kính bằng a .

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC cân tại A đường cao BH . Trên nửa mặt phẳng chứa C bờ AB vẽ $Bx \perp BA$ cắt đường tròn tâm B bán kính BH tại D . Chứng minh CD là tiếp tuyến của (B)

Giải

Vì tam giác ABC cân tại A nên ta có: $\widehat{B} = \widehat{C} = \alpha$.

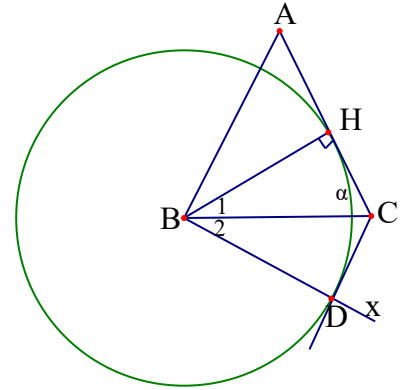
Vì $Bx \perp BA \Rightarrow \widehat{B}_2 + \alpha = 90^\circ$.

Mặt khác ta cũng có $\widehat{B}_1 + \alpha = 90^\circ \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$.

Hai tam giác BHC và $\triangle BDC$ có BC chung, $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$, $BH = BD = R$

suy ra $\triangle BHC = \triangle BDC$ (c.g.c) suy ra $\widehat{BHC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$.

Nói cách khác CD là tiếp tuyến của đường tròn (B)



Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) đường cao AH . Gọi E là điểm đối xứng với B qua H . Đường tròn tâm O đường kính EC cắt AC tại K . Chứng minh HK là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Giải

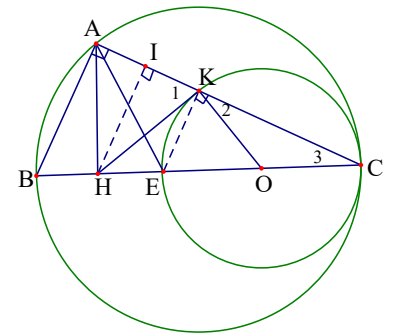
Vì tam giác EKC có một cạnh EC là đường kính của (O) nên $\widehat{EKC} = 90^\circ$.

Kẻ $HI \perp AC \Rightarrow BA \parallel HI \parallel EK$ suy ra $AI = IK$ từ đó ta có tam giác AHK cân tại H .

Do đó $\widehat{K}_1 = \widehat{B}$ (cùng phụ với góc hai góc bằng nhau là $\widehat{BAH}, \widehat{IHK}$)

Mặt khác ta cũng có: $\widehat{K}_2 = \widehat{C}_3$ (do tam giác KOC cân tại O).

Mà $\widehat{B} + \widehat{C}_3 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{K}_1 + \widehat{K}_2 = 90^\circ$ suy ra $\widehat{HKO} = 90^\circ$ hay HK là tiếp tuyến của (O) .

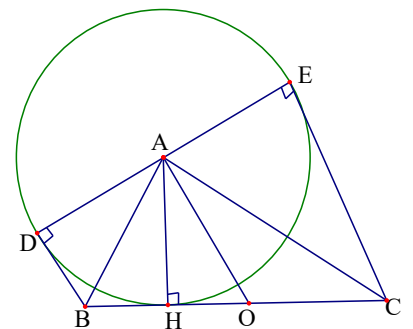


Ví dụ 5. Cho tam giác ABC vuông tại A đường cao AH . Vẽ đường tròn tâm A bán kính AH kẻ các tiếp tuyến BD, CE với (A) (D, E là các tiếp điểm khác H). Chứng minh DE tiếp xúc với đường tròn đường kính BC

Giải

Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau có: $\widehat{DAB} = \widehat{HAB}, \widehat{CAH} = \widehat{CAE}$.

Suy ra $\widehat{DAB} + \widehat{CAE} = \widehat{HAB} + \widehat{CAH} = \widehat{BAC} = 90^\circ$



hay $\widehat{DAB} + \widehat{CAE} + \widehat{HAB} + \widehat{CAH} = 180^\circ \Rightarrow D, A, E$ thẳng hàng.

Gọi O là trung điểm của BC thì O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Mặt khác $AD = AE$ nên OA là đường trung bình của hình thang vuông $BDEC$

Suy ra $OA \perp DE$ tại A . Nói cách khác DE là tiếp tuyến của đường tròn (O) . Đường kính BC

III/ LUYỆN TẬP.

Bài 1: Cho đường tròn (O) đường kính AB . C là một điểm thay đổi trên đường tròn (O) . Tiếp tuyến của (O) tại C cắt AB tại D . Qua O vẽ đường thẳng vuông góc với phân giác góc ODC , đường này cắt CD tại M . Chứng minh rằng đường thẳng d qua M song song với AB luôn tiếp xúc với (O) khi C thay đổi.

Bài 2: Cho tam giác ABC nhọn. Vẽ đường tròn tâm O đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại E và F . BF và CE cắt nhau tại I . Gọi M là trung điểm AI . Chứng minh: MF là tiếp tuyến của (O) .

Bài 3: Cho đường tròn $(O; R)$ có đường kính BC , lấy điểm A thuộc (O) sao cho $AB = R$

a. Chứng minh tam giác ABC vuông và tính độ dài BC theo R .

b. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt đường thẳng BC tại M . Trên (O) lấy điểm D sao cho $MD = MA$ (D khác A). Chứng minh MD là tiếp tuyến của (O) .

Bài 4: Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn (O) , $AB = 4\sqrt{3}$. Đường kính AD cắt BC tại H . Đường thẳng BO cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) ở điểm E .

a. Chứng minh AH vuông góc với BC , tính độ dài AH và bán kính của đường tròn (O) .

b. Chứng minh EC là tiếp tuyến của (O) và tứ giác $ABCE$ là hình thoi.

Bài 5: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$. Trên nửa đường tròn lấy điểm C (C khác A và B). Gọi D là giao điểm của đường thẳng BC với tiếp tuyến tại A của nửa đường tròn tâm O và I là trung điểm AD .

a. Chứng minh $BC \cdot BD = 4R^2$

b. Chứng minh IC là tiếp tuyến của nửa đường tròn tâm O .

Bài 6. Cho tam giác ABC nhọn, đường cao BD và CE cắt nhau tại H . Gọi I là trung điểm của BC . Chứng minh rằng ID, IE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE .

Bài 7: Cho đường tròn (O) đường kính AB . Ax, By là 2 tia tiếp tuyến của (O) (Ax, By cùng nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB). Trên Ax lấy điểm C , trên By lấy điểm D sao cho góc COD bằng 90° . Chứng minh rằng: CD tiếp xúc với đường tròn (O) .

Bài 8. Cho đường tròn tâm O đường kính AB . Một nửa đường thẳng qua A cắt đường kính CD vuông góc với AB tại M và cắt (O) tại N .

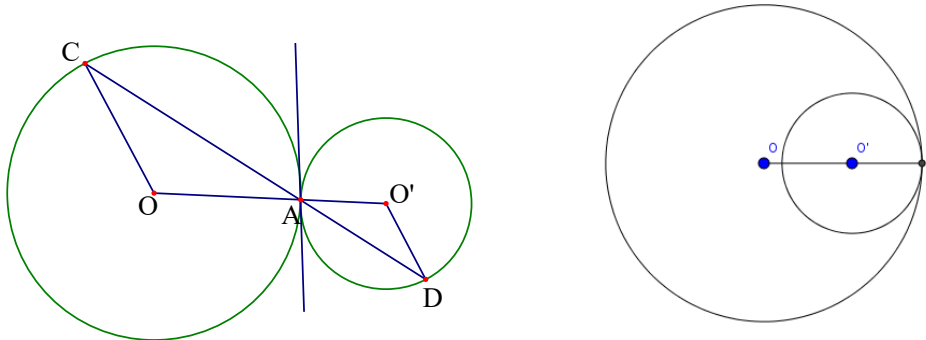
a. Chứng minh $AM \cdot AN = AC^2$

b. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN tiếp xúc với AC tại C.

CHỦ ĐỀ 6: VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN.

Xét hai đường tròn $(O;R), (O';R')$ và giả sử $R > R'$

I/ Hai đường tròn tiếp xúc nhau: chỉ có một điểm chung



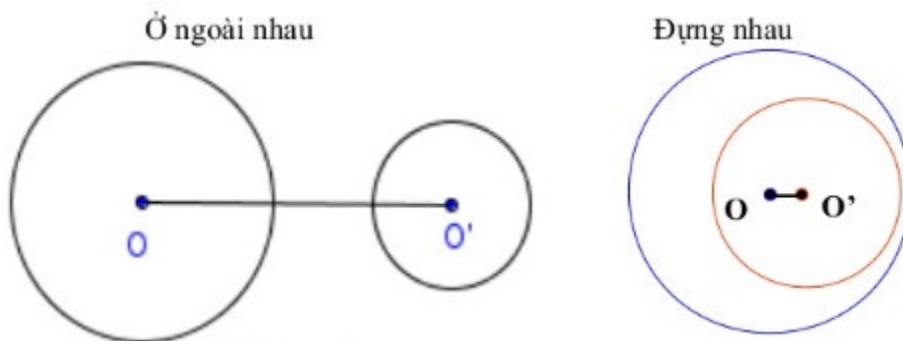
1. Hai đường tròn tiếp xúc ngoài:

- + Điều kiện $R + R' = OO'$.
- + Tiếp điểm nằm trên đường nối tâm của hai đường tròn.
- + Đường nối tâm là trục đối xứng của hai đường tròn.

2. Hai đường tròn tiếp xúc trong tại A.

- + Điều kiện: $OO' = R - R' = OA - O'A$
- + Tiếp điểm nằm trên đường nối tâm của hai đường tròn.
- + Đường nối tâm là trục đối xứng của hai đường tròn.

II/ Hai đường tròn không giao nhau: không có điểm chung.



1. Hai đường tròn ở ngoài nhau.

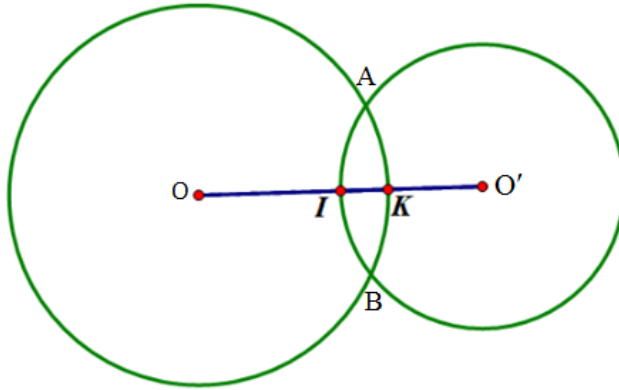
- + Điều kiện: $OO' > R + R'$
- + Đường nối tâm là trục đối xứng của hai đường tròn.

2. Hai đường tròn đựng nhau.

- + Điều kiện: $OO' < R - R'$
- + Đường nối tâm là trục đối xứng của hai đường tròn.

III/ HAI ĐƯỜNG TRÒN CẮT NHAU tại A và B: (Có hai điểm chung A và B)

- + Điều kiện: $R - R' < OO' < R + R'$
- + Đường nối tâm là trục đối xứng của hai đường tròn.
- + Đường nối tâm là đường trung trực của AB.



B/ BÀI TẬP VẬN DỤNG.

I. BÀI TẬP MẪU.

Bài 1: Cho đường tròn tâm O, bán kính R. Lấy điểm A tùy ý trên (O). Vẽ đường tròn đường kính OA. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn.

Hướng dẫn

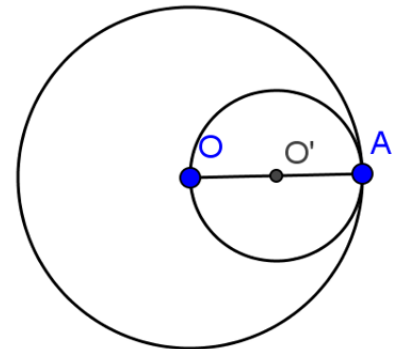
Gọi O' là tâm đường tròn đường kính OA.

Ta có O' là trung điểm của OA và bán kính đường tròn(O') là

$$R' = OA/2 = R/2.$$

Độ dài đoạn nối tâm: $d = OO' = OA/2 = R/2.$

Ta có: $R - R' = R/2 = d$ nên (O) và (O') tiếp xúc trong tại A.



Bài 2: Cho hai đường tròn (O;R) và (O'; R) cắt nhau tại M và N. Biết $OO'=24\text{cm}$, $MN=10\text{cm}$. Tính R.

Hướng dẫn

Gọi giao điểm của OO' và MN là I.

Vì $OM = ON = O'M = O'N = R$

\Rightarrow tứ giác $OMO'N$ là hình thoi

$\Rightarrow OO' \perp MN$ tại điểm I là trung điểm của mỗi đoạn OO' và

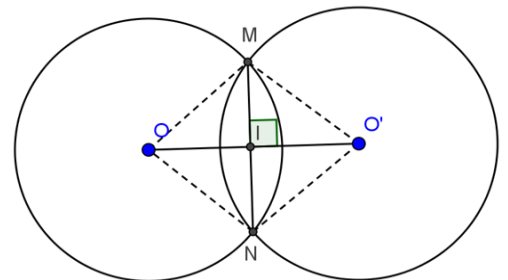
MN .

Do đó: $IM = MN/2 = 5\text{cm}$; $IO = OO'/2 = 12\text{cm}$.

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác MIO ta có:

$$R = OM = \sqrt{IM^2 + OI^2} = 13$$

Vậy $R = 13(\text{cm})$



Bài 3: Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài MN với M thuộc (O) , N thuộc (O') . Biết $R = 9\text{cm}$, $R' = 4\text{cm}$. Tính độ dài đoạn MN.

Hướng dẫn

Ta có: $OO' = OA + O'A = 9 + 4 = 13(\text{cm})$

Kẻ $OH \perp OM$ tại H

\Rightarrow tứ giác $O'NMH$ là hình chữ nhật

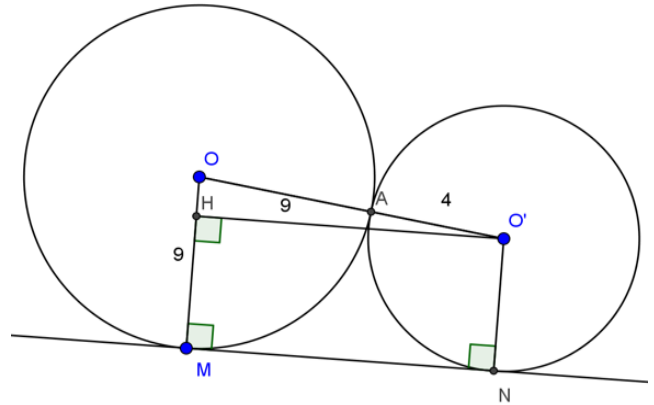
$\Rightarrow MH = O'N = 4\text{cm}$; $MN = O'H$

$\Rightarrow OH = OM - MH = 9 - 4 = 5(\text{cm})$

Áp dụng định lí py-ta-go vào tam giác $OO'H$,

ta có: $MN = O'H = \sqrt{OO'^2 + OH^2} = 12(\text{cm})$

Vậy $MN = 12\text{cm}$.



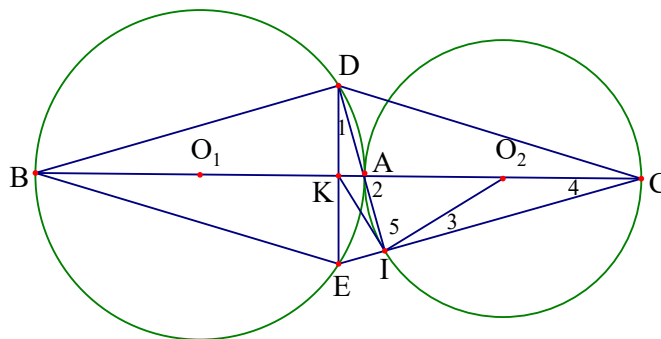
Bài 4: Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ tiếp xúc ngoài tại A với $(R > R')$. Đường nối tâm OO' cắt $(O), (O')$ lần lượt tại B, C. Dây DE của (O) vuông góc với BC tại trung điểm K của BC

a) Chứng minh BDCE là hình thoi

b) Gọi I là giao điểm của EC và (O') . Chứng minh D, A, I thẳng hàng

c) Chứng minh KI là tiếp tuyến của (O')

Hướng dẫn



a) Vì BC vuông góc với đường thẳng DE nên $DK = KE, BK = KC$ (theo giả thiết)

\Rightarrow tứ giác BDCE là hình bình hành, lại có $BC \perp DE$ nên là hình thoi.

b) Vì tam giác BDA nội tiếp đường tròn (O_1) có BA là đường kính nên $\triangle BDA$ vuông tại D.

Gọi I' là giao điểm của DA với CE thì $\widehat{AI'C} = 90^\circ$ (1) (vì so le trong với \widehat{BDA}).

Lại có $\triangle AIC$ nội tiếp đường tròn (O_2) có AC là đường kính

\Rightarrow tam giác AIC vuông tại I, hay $\widehat{AIC} = 90^\circ$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $I \equiv I'$. Vậy D, A, I thẳng hàng.

c) Vì tam giác DIE vuông tại I có IK là trung tuyến ứng với cạnh huyền DE

$$\Rightarrow KD = KI = KE \Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{I_2} \quad (1).$$

Lại có $\widehat{D_1} = \widehat{C_4}$ (2) do cùng phụ với \widehat{DEC} và $\widehat{C_4} = \widehat{C_3}$ (3), vì $O_2C = O_2I$ là bán kính của đường tròn (O_2) .

$$\text{Từ (1),(2),(3) suy ra } \widehat{I_2} = \widehat{I_3} \Rightarrow \widehat{I_2} + \widehat{I_5} = \widehat{I_5} + \widehat{I_3} = 90^\circ \text{ hay } \widehat{KIO_2} = 90^\circ$$

$\Rightarrow KI$ vuông góc với bán kính O_2I của đường tròn (O_2) .

Vậy KI là tiếp tuyến của đường tròn (O_2) .

II/ LUYỆN TẬP.

Bài 1: Cho tam giác ABC vuông ở A , đường cao AH . Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của điểm H trên các cạnh AB và AC .

a) Chứng minh $AD \cdot AB = AE \cdot AC$

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BH và CH . Chứng minh DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn $(M; MD)$ và $(N; NE)$.

c) Gọi P là trung điểm MN , Q là giao điểm của DE và AH . Giả sử $AB = 6 \text{ cm}$, $AC = 8 \text{ cm}$. Tính độ dài PQ .

Bài 2. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A . Gọi CD là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn (với $C \in (O)$ và $D \in (O')$).

a) Tính số đo góc CAD .

b) Tính độ dài CD biết $OA = 4,5 \text{ cm}$, $O'A = 2 \text{ cm}$.

Bài 3. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A . Kẻ tiếp tuyến chung ngoài MN với M thuộc (O) và N thuộc (O') . Gọi P là điểm đối xứng với M qua OO' , Q là điểm đối xứng với N qua OO' . Chứng minh rằng :

a) $MNQP$ là hình thang cân.

b) PQ là tiếp tuyến chung của của hai đường tròn (O) và (O') .

c) $MN + PQ = MP + NQ$.

Bài 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H . Chứng minh hai đường tròn ngoại tiếp hai tứ giác $BDHF$ và $CDHE$ cắt nhau.

Bài 5. Cho đường tròn tâm O , bán kính R và điểm A cố định bên trong đường tròn (O) . Gọi M là điểm di động trên đường tròn (O) , đường trung trực của dây AM cắt (O) tại P và P' .

a) Chứng tỏ tập hợp các hình chiếu của O lên PP' là đường tròn (I) .

b) Chứng tỏ đường tròn (I) và đường tròn (A, R) đụng nhau.

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 5\text{cm}$, $AC = 12\text{cm}$. Xét vị trí tương đối của hai đường tròn $(B, 6\text{cm})$ và $(C, a\text{cm})$, ($a \in \mathbb{R}$) theo a .

Bài 7. Cho tam giác $OA'O'$ vuông tại A có $OA = 6\text{cm}$, $O'A = 8\text{cm}$. Chứng minh đường tròn $(O, 5\text{cm})$ và đường tròn $(O', \sqrt{65}\text{cm})$ cắt nhau tại hai điểm M và N . Tính độ dài MN .

Bài 8. Cho đường tròn (O) có đường kính BC , dây AD vuông góc với BC tại H . Gọi E, F là chân các đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AC . Gọi $(I), (K)$ theo thứ tự là các đường tròn ngoại tiếp tam giác HBE, HCF . Xác định vị trí tương đối giữa các đường tròn: (I) và (O) , (K) và (O) , (I) và (K) .

Bài 9. Cho hai đường tròn (O, R) và (O', R') tiếp xúc ngoài nhau cố định. Bán kính OA quay quanh O , bán kính $O'A'$ quay quanh O' sao cho OA luôn song song với $O'A'$. Gọi M là trung điểm của AA' .

Bài 10. Cho tam giác ABC có $AB = 3a$, $AC = 4a$, $BC = 5a$. Đường trung trực của AC cắt đường phân giác của góc BAC tại K . Đường tròn tâm K tiếp xúc với đường thẳng AB . Chứng minh rằng đường tròn (K) tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$ và $AC = 2a/3$. Xác định bán kính của đường tròn tâm C để đường tròn này tiếp xúc với đường tròn (O') tại M' .

a) Chứng minh các đường thẳng vuông góc với d tại M và M' đi qua các điểm N và N' cố định và thẳng hàng với B .

b) Chứng minh trung điểm I của NN' là tâm của đường tròn tiếp xúc với hai đường tròn (O) và (O') .

CHỦ ĐỀ 7: TỔNG ÔN CHƯƠNG II

PHIẾU SỐ 1

Bài 1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh rằng:

- 1/ Bốn điểm B, C, E, F cùng nằm trên một đường tròn.
- 2/ $AE.AC = AH.AD$; $AD.BC = BE.AC$.

Lời giải:

1/ Theo giả thiết: BE là đường cao $\Rightarrow BE \perp AC \Rightarrow \angle BEC = 90^\circ$.

CF là đường cao $\Rightarrow CF \perp AB \Rightarrow \angle BFC = 90^\circ$.

Lấy I là trung điểm của BC $\Rightarrow IB = IC = IF = IE$.

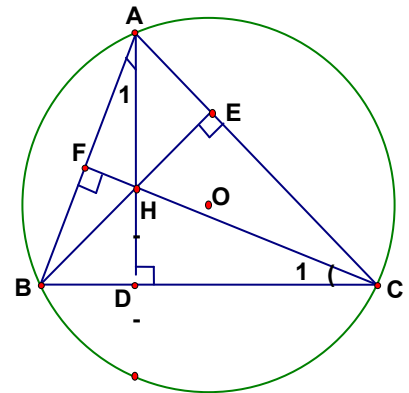
Vậy bốn điểm B, C, E, F cùng nằm trên một đường tròn đường kính BC

1. Xét hai tam giác AEH và ADC ta có: $\angle AEH = \angle ADC = 90^\circ$; $\angle A$ là góc chung

$$\Rightarrow \triangle AEH \sim \triangle ADC \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AE.AC = AH.AD.$$

* Xét hai tam giác BEC và ADC ta có: $\angle BEC = \angle ADC = 90^\circ$; $\angle C$ là góc chung

$$\Rightarrow \triangle BEC \sim \triangle ADC \Rightarrow \frac{BE}{AD} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow AD.BC = BE.AC.$$



Bài 2. Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$), các đường cao AD, BE, cắt nhau tại H. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE.

1/ Bốn điểm A, E, D, B cùng nằm trên một đường tròn.

2/ Chứng minh $ED = \frac{1}{2} BC$.

3/ Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).

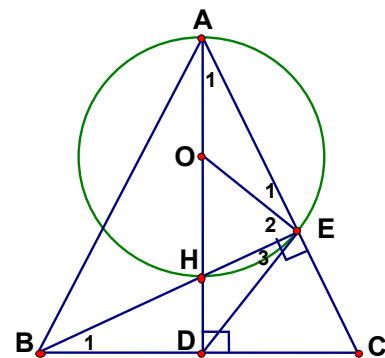
4/ Tính độ dài DE biết $DH = 2$ Cm, $AH = 6$ Cm.

Lời giải:

1. Chứng minh như bài 1

2. Theo giả thiết tam giác ABC cân tại A có AD là đường cao nên cũng là đường trung tuyến

$\Rightarrow D$ là trung điểm của BC. Theo trên ta có $\angle BEC = 90^\circ$.



Vậy tam giác BEC vuông tại E có ED là trung tuyến $\Rightarrow DE = \frac{1}{2} BC$.

3. Vì O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE nên O là trung điểm của AH $\Rightarrow OA = OE \Rightarrow$ tam giác AOE cân tại O $\Rightarrow \angle E_1 = \angle A_1$ (1).

Theo trên $DE = \frac{1}{2} BC \Rightarrow$ tam giác DBE cân tại D $\Rightarrow \angle E_3 = \angle B_1$ (2)

Mà $\angle B_1 = \angle A_1$ (vì cùng phụ với góc ACB) $\Rightarrow \angle E_1 = \angle E_3 \Rightarrow \angle E_1 + \angle E_2 = \angle E_2 + \angle E_3$

Mà $\angle E_1 + \angle E_2 = \angle BEA = 90^\circ \Rightarrow \angle E_2 + \angle E_3 = 90^\circ = \angle OED \Rightarrow DE \perp OE$ tại E.

Vậy DE là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại E.

4. Theo giả thiết AH = 6 Cm $\Rightarrow OH = OE = 3$ cm.; DH = 2 Cm $\Rightarrow OD = 5$ cm.

Áp dụng định lý Pitago cho tam giác OED vuông tại E ta có

$$ED^2 = OD^2 - OE^2 \Leftrightarrow ED^2 = 5^2 - 3^2 \Leftrightarrow ED = 4\text{cm}$$

Bài 3: Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax, By lần lượt ở C và D. Các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N.

1/ Chứng minh AC + BD = CD.

2/ Chứng minh $\angle COD = 90^\circ$.

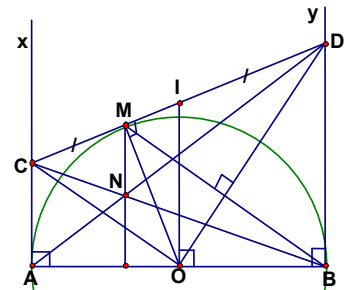
3/ Chứng minh $AC \cdot BD = \frac{AB^2}{4}$.

4/ Chứng minh OC // BM

5/ Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.

6/ Chứng minh $MN \perp AB$.

7/ Xác định vị trí của M để chu vi tứ giác ACDB đạt giá trị nhỏ nhất.



Lời giải

1/ Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có:

$$CA = CM; DB = DM \Rightarrow AC + BD = CM + DM.$$

$$\text{Mà } CM + DM = CD \Rightarrow AC + BD = CD$$

2/ Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: OC là tia phân giác của góc AOM; OD là tia phân giác của góc BOM, mà $\angle AOM$ và $\angle BOM$ là hai góc kề bù $\Rightarrow \angle COD = 90^\circ$.

3/ Theo trên $\angle COD = 90^\circ$ nên tam giác COD vuông tại O có $OM \perp CD$ (OM là tiếp tuyến).

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có $OM^2 = CM \cdot DM$,

$$\text{Mà } OM = R; CA = CM; DB = DM \Rightarrow AC \cdot BD = R^2 \Rightarrow AC \cdot BD = \frac{AB^2}{4}.$$

4/ Theo trên $\angle COD = 90^\circ$ nên $OC \perp OD$. (1)

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $DB = DM$; lại có $OM = OB = R$

$\Rightarrow OD$ là trung trực của $BM \Rightarrow BM \perp OD$. (2).

Từ (1) Và (2) $\Rightarrow OC \parallel BM$ (Vì cùng vuông góc với OD).

5/ Gọi I là trung điểm của CD ta có I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác COD đường kính CD có IO là bán kính.

Theo tính chất tiếp tuyến ta có $AC \perp AB$; $BD \perp AB \Rightarrow AC \parallel BD \Rightarrow$ tứ giác $ACDB$ là hình thang.

Lại có I là trung điểm của CD ; O là trung điểm của AB

$\Rightarrow IO$ là đường trung bình của hình thang $ACDB$

$\Rightarrow IO \parallel AC$, mà $AC \perp AB \Rightarrow IO \perp AB$ tại O

$\Rightarrow AB$ là tiếp tuyến tại O của đường tròn đường kính CD

6/ Theo trên $AC \parallel BD \Rightarrow \frac{CN}{BN} = \frac{AC}{BD}$, mà $CA = CM$; $DB = DM$ nên suy ra $\frac{CN}{BN} = \frac{CM}{DM}$

$\Rightarrow MN \parallel BD$ mà $BD \perp AB \Rightarrow MN \perp AB$.

7/ Ta có chu vi tứ giác $ACDB = AB + AC + CD + BD$ mà $AC + BD = CD$

\Rightarrow Chu vi tứ giác $ACDB = AB + 2CD$ mà AB không đổi

\Rightarrow Chu vi tứ giác $ACDB$ nhỏ nhất khi CD nhỏ nhất, mà CD nhỏ nhất khi CD là khoảng cách giữa Ax và

By tức là CD vuông góc với Ax và By . Khi đó $CD \parallel AB$

$\Rightarrow M$ phải là trung điểm của cung AB .

Bài 4. Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$), I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A , O là trung điểm của IK .

1/ Chứng minh B, C, I, K cùng nằm trên một đường tròn.

2/ Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

3/ Tính bán kính đường tròn (O) Biết $AB = AC = 20$ Cm, $BC = 24$ Cm.

Lời giải

1. Vì I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A nên BI và BK là hai tia phân giác của hai góc kề bù đỉnh B

Do đó $BI \perp BK$ hay $\angle IBK = 90^\circ$.

Tương tự ta cũng có $\angle ICK = 90^\circ$

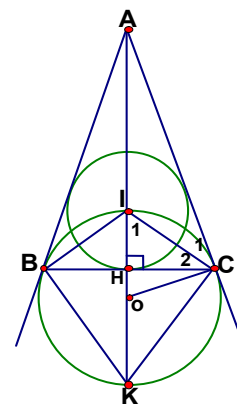
Lấy O' là trung điểm của $IK \Rightarrow O'K = O'I = OC = OB$

$\Rightarrow B, C, I, K$ cùng nằm trên một đường tròn.

2. Ta có $\angle C_1 = \angle C_2$ (1) (vì CI là phân giác của góc ACH).

$\angle C_2 + \angle I_1 = 90^\circ$ (2) (vì $\angle IHC = 90^\circ$).

$\angle I_1 = \angle ICO$ (3) (vì tam giác OIC cân tại O)



Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \angle C_1 + \angle ICO = 90^\circ$ hay $AC \perp OC$. Vậy AC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

3. Từ giả thiết $AB = AC = 20$ cm, $BC = 24$ cm $\Rightarrow CH = 12$ cm.

$$AH^2 = AC^2 - HC^2 \Rightarrow AH = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16 \text{ (cm)}$$

$$CH^2 = AH.OH \Rightarrow OH = \frac{CH^2}{AH} = \frac{12^2}{16} = 9 \text{ (cm)}$$

$$OC = \sqrt{OH^2 + HC^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15 \text{ (cm)}$$

Bài 5. Cho đường tròn $(O; R)$, từ một điểm A trên (O) kẻ tiếp tuyến d với (O) . Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kì (M khác A) kẻ cát tuyến MNP và gọi K là trung điểm của NP , kẻ tiếp tuyến MB (B là tiếp điểm). Kẻ $AC \perp MB$, $BD \perp MA$, gọi H là giao điểm của AC và BD , I là giao điểm của OM và AB .

- 1/ Chứng minh tứ A, M, B, O cùng thuộc một đường tròn.
- 2/ Chứng minh năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn.
- 3/ Chứng minh $OI.OM = R^2$; $OI. IM = IA^2$.
- 4/ Chứng minh $OAHB$ là hình thoi.
- 5/ Chứng minh ba điểm O, H, M thẳng hàng.
- 6/ Tìm quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d

Lời giải

1. (HS tự làm).

2. Vì K là trung điểm NP nên $OK \perp NP$ (quan hệ đường kính và dây cung) $\Rightarrow \angle OKM = 90^\circ$.

Theo tính chất tiếp tuyến ta có $\angle OAM = 90^\circ$; $\angle OBM = 90^\circ$.

$\Rightarrow K, A, B$ cùng nhìn OM dưới một góc 90° nên cùng nằm trên đường tròn đường kính OM .

Vậy năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn.

3. Ta có $MA = MB$ (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau); $OA = OB = R$

$\Rightarrow OM$ là trung trực của $AB \Rightarrow OM \perp AB$ tại I .

Theo tính chất tiếp tuyến ta có $\angle OAM = 90^\circ$ nên tam giác OAM vuông tại A có AI là đường cao.

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao $\Rightarrow OI.OM = OA^2$ hay $OI.OM = R^2$; và $OI. IM = IA^2$.

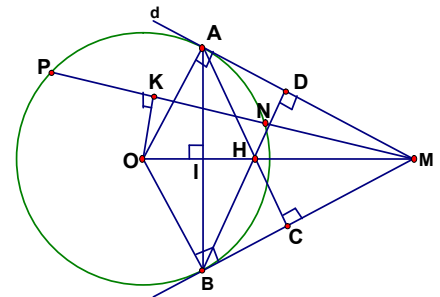
4. Ta có $OB \perp MB$ (tính chất tiếp tuyến); $AC \perp MB$ (gt) $\Rightarrow OB \parallel AC$ hay $OB \parallel AH$.

$OA \perp MA$ (tính chất tiếp tuyến); $BD \perp MA$ (gt) $\Rightarrow OA \parallel BD$ hay $OA \parallel BH$.

\Rightarrow Tứ giác $OAHB$ là hình bình hành; lại có $OA = OB (=R) \Rightarrow OAHB$ là hình thoi.

5. Theo trên $OAHB$ là hình thoi. $\Rightarrow OH \perp AB$; cũng theo trên $OM \perp AB$

$\Rightarrow O, H, M$ thẳng hàng (Vì qua O chỉ có một đường thẳng vuông góc với AB).



6. Theo trên OAHB là hình thoi. $\Rightarrow AH = AO = R$.

Vậy khi M di động trên d thì H cũng di động nhưng luôn cách A cố định một khoảng bằng R.

Do đó quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d là nửa (A) bán kính AH = R

Bài 6: Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AH. Gọi HD là đường kính của đường tròn (A; AH). Tiếp tuyến của đường tròn tại D cắt CA ở E.

1/ Chứng minh tam giác BEC cân.

2/ Gọi I là hình chiếu của A trên BE, Chứng minh rằng AI = AH.

3/ Chứng minh rằng BE là tiếp tuyến của đường tròn (A; AH).

4/ Chứng minh BE = BH + DE.

Lời giải

1. $\Delta AHC = \Delta ADE$ (g.c.g) $\Rightarrow ED = HC$ (1) và $AE = AC$ (2).

Vì $AB \perp CE$ (gt), do đó AB vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến của ΔBEC

$\Rightarrow BEC$ là tam giác cân. $\Rightarrow \angle B_1 = \angle B_2$

2. Hai tam giác vuông ABI và ABH có cạnh huyền AB chung, $\angle B_1 = \angle B_2$

$\Rightarrow \Delta AHB = \Delta AIB \Rightarrow AI = AH$.

3. $AI = AH$ và $BE \perp AI$ tại I $\Rightarrow BE$ là tiếp tuyến của (A; AH) tại I.

4. $DE = IE$ và $BI = BH \Rightarrow BE = BI + IE = BH + ED$

Bài 7: Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax và lấy trên tiếp tuyến đó một điểm P sao cho $AP > R$, từ P kẻ tiếp tuyến tiếp xúc với (O) tại M.

1/ Chứng minh rằng A, P, M, O cùng thuộc đường tròn.

2/ Chứng minh $BM \parallel OP$.

3/ Đường thẳng vuông góc với AB ở O cắt tia BM tại N. Chứng minh tứ giác OBNP là hình bình hành.

4/ Biết AN cắt OP tại K, PM cắt ON tại I; PN và OM kéo dài cắt nhau tại J. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

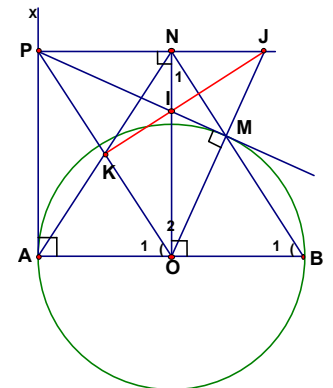
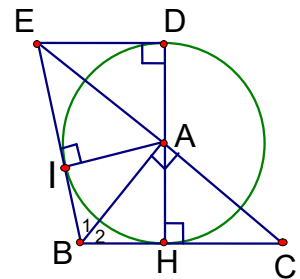
Lời giải

1. (HS tự làm).

2. Ta có $\angle ABM$ nội tiếp chắn cung AM; $\angle AOM$ là góc ở tâm chắn cung AM

$$\Rightarrow \angle ABM = \frac{\angle AOM}{2} \quad (1)$$

OP là tia phân giác $\angle AOM$ (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau)



$$\Rightarrow \angle AOP = \frac{\angle AOM}{2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \angle ABM = \angle AOP \quad (3)$$

$$\text{Mà } \angle ABM \text{ và } \angle AOP \text{ là hai góc đồng vị nên suy ra } BM \parallel OP. \quad (4)$$

3. Xét hai tam giác AOP và OBN ta có : $\angle PAO = 90^0$ (vì PA là tiếp tuyến); $\angle NOB = 90^0$ (gt $NO \perp AB$).

$$\Rightarrow \angle PAO = \angle NOB = 90^0; OA = OB = R; \angle AOP = \angle OBN \text{ (theo (3))}$$

$$\Rightarrow \Delta AOP = \Delta OBN \Rightarrow OP = BN \quad (5)$$

Từ (4) và (5) \Rightarrow OBNP là hình bình hành (vì có hai cạnh đối song song và bằng nhau).

4. Tứ giác OBNP là hình bình hành $\Rightarrow PN \parallel OB$ hay $PJ \parallel AB$, mà $ON \perp AB \Rightarrow ON \perp PJ$

Ta cũng có $PM \perp OJ$ (PM là tiếp tuyến), mà ON và PM cắt nhau tại I

$$\Rightarrow I \text{ là trực tâm tam giác } POJ. \quad (6)$$

Dễ thấy tứ giác AONP là hình chữ nhật vì có $\angle PAO = \angle AON = \angle ONP = 90^0$

$$\Rightarrow K \text{ là trung điểm của } PO \text{ (t/c đường chéo hình chữ nhật).} \quad (6)$$

$$\text{AONP là hình chữ nhật} \Rightarrow \angle APO = \angle NOP \text{ (so le)} \quad (7)$$

$$\text{Theo t/c hai tiếp tuyến cắt nhau Ta có } PO \text{ là tia phân giác } \angle APM \Rightarrow \angle APO = \angle MPO \quad (8).$$

$$\text{Từ (7) và (8)} \Rightarrow \Delta IPO \text{ cân tại I có IK là trung tuyến đồng thời là đường cao} \Rightarrow IK \perp PO. \quad (9)$$

Từ (6) và (9) \Rightarrow I, J, K thẳng hàng.

Bài 8: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và điểm M bất kì trên nửa đường tròn (M khác A,B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến Ax. Tia BM cắt Ax tại I; tia phân giác của góc IAM cắt nửa đường tròn tại E; cắt tia BM tại F, tia BE cắt AM tại K.

1) Chứng minh rằng E, F, M, K cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh rằng: $AI^2 = IM \cdot IB$.

Lời giải

1. Dùng đường tròn O và xét ΔAEB , ΔAMB đều là các tam giác vuông (suy ra từ đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh ấy)

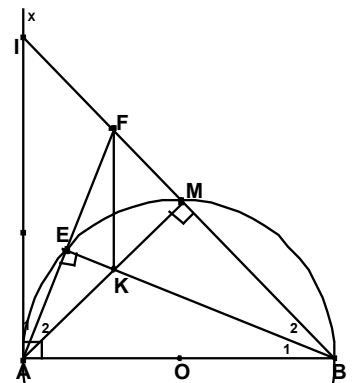
$\Rightarrow \Delta FEK$, ΔFMK cũng là các tam giác vuông.

Lấy O' là trung điểm của FK $\Rightarrow OF = OK = OM = OE = FK/2$

\Rightarrow E, F, M, K cùng thuộc đường tròn (O') đường kính FK

2. Ta có $\angle IAB = 90^0$ (vì AI là tiếp tuyến) $\Rightarrow \Delta AIB$ vuông tại A có $AM \perp IB$ (theo trên).

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao $\Rightarrow AI^2 = IM \cdot IB$.



Bài 9: Cho đoạn thẳng AB, điểm C nằm giữa A và B. Vẽ về một phía của AB các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự là AB, AC, CB. Đường vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn lớn tại D. DA, DB cắt các nửa đường tròn có đường kính AC, CB theo thứ tự tại M, N.

Hướng dẫn

a, Ta có: Tam giác AMC nội tiếp đường tròn đường kính AC

$$\Rightarrow \angle AMC = 90^\circ$$

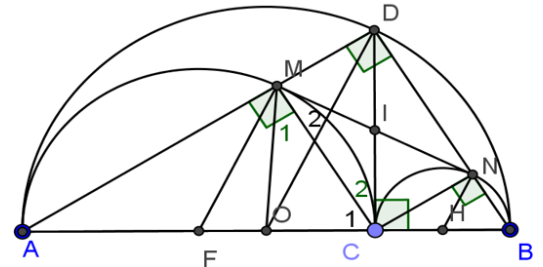
Tam giác CNB nội tiếp đường tròn đường kính CB

$$\Rightarrow \angle CNB = 90^\circ$$

Tam giác ADB nội tiếp đường tròn đường kính AB

$$\Rightarrow \angle ADB = 90^\circ$$

Suy ra tứ giác DMCN là hình chữ nhật.



b, Xét tam giác vuông DCA có :

$$DC^2 = DM.MA \quad (1) \text{ (theo hệ thức lượng trong tam giác vuông)}$$

$$\text{Xét tam giác vuông DCB có: } DC^2 = DN.DB \quad (2) \text{ (theo hệ thức lượng trong tam giác vuông)}$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta suy ra } DM.MA = DN.NB$$

c, Vì DMCN là hình chữ nhật nên $IM = IC$ suy ra tam giác IMC cân tại I $\Rightarrow \angle M_2 = \angle C_2$

Vì tam giác MFC cân tại F nên $\angle M_1 = \angle C_1$ Mà $\angle C_1 + \angle C_2 = 90^\circ$

$$\Rightarrow \angle M_1 + \angle M_2 = 90^\circ \text{ Hay } \angle FMN = 90^\circ \Rightarrow FM \perp MN$$

Chứng minh tương tự $\angle MNC = 90^\circ$

$$\Rightarrow HN \perp MN \text{ d, Ta có: } DC = MN \text{ (vì DMCN là hình chữ nhật) mà } DC \leq DO$$

$$\Rightarrow MN \leq DO \text{ MN} = DO \text{ khi } C \equiv O \text{ Suy ra C là trung điểm của AB.}$$

Bài 10: Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung DE, D thuộc đường tròn tâm O, E thuộc đường tròn tâm O'. Kẻ tiếp tuyến chung trong tại A, cắt DE ở I. Gọi M là giao điểm của OI và AD, N là giao điểm của O'I và AE.

a, Tứ giác AMIN là hình gì? Vì sao?

b, Chứng minh $IM.IO = IN.IO'$

c, Chứng minh rằng O O' là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính là DE.

d, Tính độ dài DE biết rằng $OA=5\text{cm}$, $O'A=3,2\text{ cm}$.

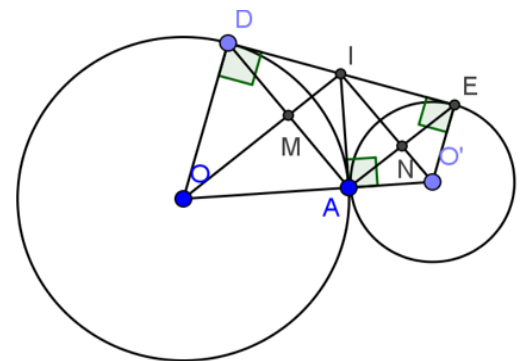
Hướng dẫn

a) Ta có: ID và IA là 2 tiếp tuyến cắt nhau tại I.

$$\text{Suy ra } ID = IA \quad (1) \text{ Mà } OD = OA$$

Suy ra IO là trung trực của AD $\Rightarrow IO \perp AD$

$$\Rightarrow \angle IMA = 90^\circ + \angle IE \text{ và IA là 2 tiếp tuyến cắt nhau tại I}$$



Suy ra $IA = IE$ (2) Mà $O'A = O'E$

Suy ra IO' là trung trực của $AE \Rightarrow IO \perp AE$

$\Rightarrow \angle INA = 90^\circ$

Từ (1) và (2) suy ra $IA = ID = IE$ Suy ra tam giác DAE vuông tại A

$\Rightarrow \angle DAE = 90^\circ$

Tứ giác $MINA$ có 3 góc $\angle IMA = 90^\circ$; $\angle INA = 90^\circ$; $\angle DAE = 90^\circ$ nên tứ giác $MINA$ là hình chữ nhật.

b) Xét tam giác vuông IAO có $AN \perp IO'$: $IA^2 = IM \cdot IO$ (3) (theo hệ thức lượng trong tam giác).

Xét tam giác vuông IAO' có: $IA^2 = IN \cdot IO'$ (4) (theo hệ thức lượng trong tam giác).

Từ (3) và (4) ta suy ra $IM \cdot IO = IN \cdot IO'$

c) Theo trên ta có tam giác DAE vuông tại A

$\Rightarrow 3$ điểm D, E, A nội tiếp đường tròn đường kính DE (5)

Do IA là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn (O) và (O') $\Rightarrow IA \perp OO'$ (6)

Từ (5) và (6) ta suy ra OO' là tiếp tuyến của đường tròn đường kính DE .

d) Xét tam giác vuông IOO' có $IA^2 = OA \cdot OA' \Rightarrow IA^2 = 5,3,2 = 16(\text{cm})$

Vậy $IA = 4\text{cm}$.

Bài 11: Cho đường tròn (O) , đường kính AB , điểm M thuộc đường tròn. Vẽ điểm N đối xứng với A qua M . BN cắt đường tròn ở C . Gọi E là giao điểm của AC và BM .

a, Chứng minh rằng $NE \perp AB$.

b, Gọi F là điểm đối xứng với E qua M . Chứng minh rằng FA là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

c, Chứng minh rằng FN là tiếp tuyến của đường tròn $(B; BA)$.

Hướng dẫn

a) Tam giác AMB nội tiếp đường tròn đường kính AB

$\Rightarrow \angle AMB = 90^\circ \Rightarrow AM \perp MB$

Tam giác ACB nội tiếp đường tròn đường kính AB

$\Rightarrow \angle ACB = 90^\circ \Rightarrow AC \perp CB$

Suy ra E là trực tâm của tam giác NAB , do đó $NE \perp AB$.

b) Tứ giác $AFNE$ có các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành (tứ giác này còn là hình thoi).

Do đó $FA \parallel NE$.

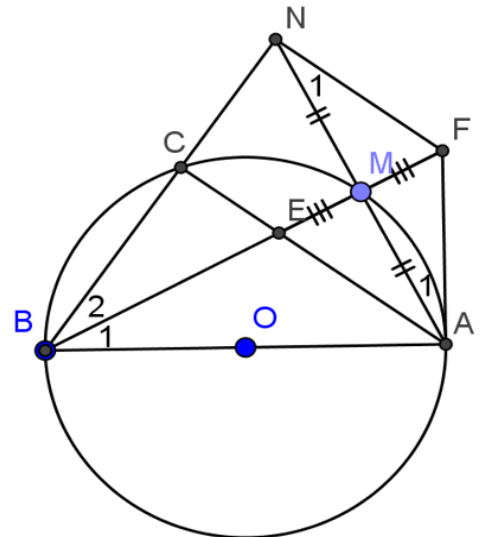
Do $NE \perp AB$ nên $FA \perp AB$.

Suy ra FA là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

c) Tam giác ABN có đường cao BM cũng là đường trung tuyến nên là tam giác cân.

Suy ra $BN = BA$.

Do đó BN là bán kính của đường tròn $(B; BA)$.



Tam giác ABN cân tại B nên $\angle BNA = \angle BAN$ (1)

Tam giác AFN có đường cao FM là đường trung tuyến nên là tam giác cân, suy ra $\angle N_1 = \angle A_1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\angle BNA + \angle N_1 = \angle BAN + \angle A_1$ tức là $\angle FNB = \angle FAB$

Ta lại có: $\angle FAB = 90^\circ$ (câu b), nên $\angle FNB = 90^\circ$.

Do đó FN là tiếp tuyến của đường tròn (B).

Bài 12: Cho tam giác vuông tại A ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) có đường kính BC. Kẻ dây AD vuông góc với BC. Gọi E là giao điểm của DB và CA. Qua E kẻ đường thẳng vuông góc với BC, cắt BC ở H, cắt AB ở F. Chứng minh rằng:

- Tam giác EBF là tam giác cân.
- Tam giác HAF là tam giác cân.
- HA là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Hướng dẫn

a) Ta có: $OB \perp AD$ tại I nên $AI = ID$.

Suy ra tam giác BAD cân, $\angle B^1 = \angle B^2$, do đó $\angle B^3 = \angle B^4$.

Tam giác EBF có đường cao cũng là đường phân giác nên là tam giác cân.

b) Tam giác BEF cân nên $EH = HF$.

Tam giác AEF vuông tại A có AH là đường trung tuyến nên $AH = HE = HF$.

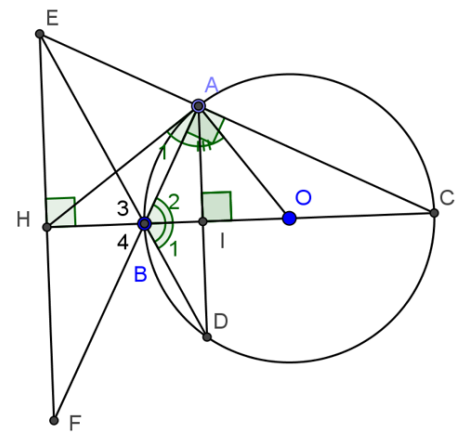
Do đó tam giác HAF cân tại H.

c) Tam giác HAF cân tại H nên $\angle A_1 = \angle F$ (1)

Tam giác OAB cân tại O nên $\angle OAB = \angle B_1 = \angle B_4$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\angle OAH = \angle A_1 + \angle OAB = \angle F + \angle B_4 = 90^\circ$

Suy ra HA là tiếp tuyến của đường tròn (O).



MỘT SỐ BÀI TẬP CHƯƠNG II

PHIẾU SỐ 2

Bài 1: Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến MA và MB (A, B là tiếp điểm). Cho biết góc AMB bằng 40° .

a/ Tính góc AOB.

b/ Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với OA cắt MB tại N. Chứng minh tam giác OMN là tam giác cân.

Bài 2: Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Kẻ các tiếp tuyến Ax, By cùng phía với nửa đường tròn đối với AB. Từ điểm M trên nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba với đường tròn, nó cắt Ax và By lần lượt tại C và D.

a/ Chứng minh: Tam giác COD là tam giác vuông.

b/ Chứng minh: $MC \cdot MD = OM^2$.

c/ Cho biết $OC = BA = 2R$, tính AC và BD theo R.

Bài 3: Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài với nhau tại B. Vẽ đường kính AB của đường tròn (O) và đường kính BC của đường tròn (O'). Đường tròn đường kính OC cắt (O) tại M và N.

a/ Đường thẳng CM cắt (O') tại P. Chứng minh: $OM \parallel BP$.

b/ Từ C kẻ đường thẳng vuông góc với CM cắt tia ON tại D. Chứng minh: Tam giác OCD là tam giác cân.

Bài 4: Cho hai đường tròn (O,R) và (O',R') cắt nhau tại A và B sao cho đường thẳng OA là tiếp tuyến của đường tròn (O',R'). Biết $R=12\text{cm}$, $R'=5\text{cm}$.

a/ Chứng minh: $O'A$ là tiếp tuyến của đường tròn (O,R).

b/ Tính độ dài các đoạn thẳng OO' , AB.

Bài 5: Cho đường tròn tâm O bán kính $R=6\text{cm}$ và một điểm A cách O một khoảng 10cm. Từ A vẽ tiếp tuyến AB (B là tiếp điểm).

Tính độ dài đoạn tiếp tuyến AB.

Bài 6: Cho hai đường tròn đồng tâm (O,R) và (O,r). Dây AB của (O,R) tiếp xúc với (O,r). Trên tia AB lấy điểm E sao cho B là trung điểm của đoạn AE. Từ E vẽ tiếp tuyến thứ hai của (O,r) cắt (O,R) tại C và D (D ở giữa E và C).

a/ Chứng minh: $EA=EC$.

b/ Chứng minh: EO vuông góc với BD.

Bài 7: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và một điểm M nằm trên nửa đường tròn đó. H là chân đường vuông góc hạ từ M xuống AB.

Khi $AH=2\text{cm}$, $MH=4\text{cm}$. Hãy tính độ dài các đoạn thẳng: AB, MA, MB.

Bài 8: Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD. Gọi H là trực tâm của tam giác.

a) Tính số đo góc ABD

b) Tứ giác BHCD là hình gì? Tại sao?

c) Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh $2OM = AH$.

Bài 9: Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Đường cao AH cắt đường tròn ở điểm D.

a) AD có phải là đường kính của đường tròn (O) không? Tại sao?

b) Chứng minh: $BC^2 = 4AH \cdot DH$

c) Cho $BC = 24\text{cm}$, $AB = 20\text{cm}$. Tính bán kính của đường tròn (O).

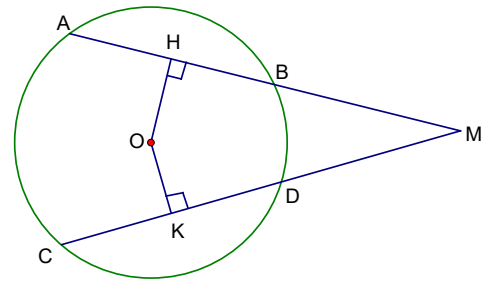
Bài 10. Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi H là trung điểm OA. Dây CD vuông góc với OA tại H.

a) Tứ giác ACOD là hình gì? Tại sao?

b) Chứng minh các tam giác OAC và CBD là các tam giác đều.

c) Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh ba điểm D, O, M thẳng hàng.

d) Chứng minh đẳng thức $CD^2 = 4AH \cdot HB$.



Bài 11. Hình bên cho biết $AB = CD$. Chứng minh rằng:

a) $MH = MK$.

b) $MB = MD$.

c) Chứng minh tứ giác ABDC là hình thang cân.

Bài 12. Cho đường tròn đường kính 10 cm, một đường thẳng d cách tâm O một khoảng bằng 3 cm.

a) Xác định vị trí tương đối của đường thẳng d và đường tròn (O).

b) Đường thẳng d cắt đường tròn (O) tại điểm A và B. Tính độ dài dây AB.

c) Kẻ đường kính AC của đường tròn (O). Tính độ dài BC và số đo \widehat{CAB} (làm tròn đến độ).

d) Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại C cắt tia AB tại M. Tính độ dài BM.

Bài 13. Cho tam giác ABC nhọn, đường tròn đường kính BC cắt AB ở N và cắt AC ở M. Gọi H là giao điểm của BM và CN.

a) Tính số đo các góc BMC và BNC.

b) Chứng minh AH vuông góc BC.

c) Chứng minh tiếp tuyến tại N đi qua trung điểm AH.

Bài 14. Cho đường tròn tâm (O;R) đường kính AB và điểm M trên đường tròn sao cho $\widehat{MAB} = 60^\circ$. Kẻ dây MN vuông góc với AB tại H.

a) Chứng minh AM và AN là các tiếp tuyến của đường tròn (B; BM):

b) Chứng minh $MN^2 = 4AH \cdot HB$.

c) Chứng minh tam giác BMN là tam giác đều và điểm O là trọng tâm của nó.

c) Tia MO cắt đường tròn (O) tại E, tia MB cắt (B) tại F. Chứng minh ba điểm N; E; F thẳng hàng.

Bài 15. Cho đường tròn (O) và điểm A cách O một khoảng bằng 2R, kẻ tiếp tuyến AB tới đường tròn (B là tiếp điểm).

a) Tính số đo các góc của tam giác OAB.

b) Gọi C là điểm đối xứng với B qua OA. Chứng minh điểm C nằm trên đường tròn O và AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

c) AO cắt đường tròn (O) tại G. Chứng minh G là trọng tâm tam giác ABC.

Bài 16. Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O;R) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là hai tiếp điểm). Gọi H là giao

điểm của OA và BC.

- Chứng minh $OA \perp BC$ và tính tích $OH \cdot OA$ theo R
- Kẻ đường kính BD của đường tròn (O). Chứng minh $CD \parallel OA$.
- Gọi E là hình chiếu của C trên BD, K là giao điểm của AD và CE. Chứng minh K là trung điểm CE.

Bài 17. Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O; R) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là các tiếp điểm). Kẻ $BE \perp AC$ và $CF \perp AB$ ($E \in AC, F \in AB$), BE và CF cắt nhau tại H.

- Chứng minh tứ giác BOCH là hình thoi.
- Chứng minh ba điểm A, H, O thẳng hàng.

Bài 18. Cho đường tròn (O ; 3cm) và điểm A có $OA = 6$ cm. Kẻ các tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC

- Tính độ dài OH.
- Qua điểm M bất kì thuộc cung nhỏ BC , kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt AB và AC theo thứ tự tại E và F.

Tính chu vi tam giác ADE.

- Tính số đo góc DOE.

Bài 19. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi Ax , By là các tia vuông góc với AB(Ax , By và nửa đường tròn thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB). Qua điểm M bất kì thuộc tia Ax kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt By ở N.

- Tính số đo góc MON.
- Chứng minh $MN = AM + BN$.
- Tính tích $AM \cdot BN$ theo R.

Bài 20: Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của điểm H trên các cạnh AB và AC.

- Chứng minh $AD \cdot AB = AE \cdot AC$
- Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BH và CH. Chứng minh DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (M; MD) và (N; NE).
- Gọi P là trung điểm MN, Q là giao điểm của DE và AH . Giả sử $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm . Tính độ dài PQ.

Bài 21. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Gọi CD là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn (với $C \in (O)$ và $D \in (O')$).

- Tính số đo góc CAD.
- Tính độ dài CD biết $OA = 4,5$ cm, $O'A = 2$ cm.

Bài 22. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài MN với M thuộc (O) và N thuộc (O'). Gọi P là điểm đối xứng với M qua OO' , Q là điểm đối xứng với N qua OO' . Chứng minh rằng :

- MNQP là hình thang cân.
- PQ là tiếp tuyến chung của của hai đường tròn (O) và (O') và $MN + PQ = MP + NQ$.

TỔNG ÔN CHƯƠNG II - PS3

I. SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN. TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN

1. Đường tròn

Đường tròn tâm O bán kính R ($R > 0$) là hình gồm các điểm cách điểm O một khoảng bằng R .

2. Vị trí tương đối của một điểm đối với một đường tròn

Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M .

- M nằm trên đường tròn $(O; R) \Leftrightarrow OM = R$.
- M nằm trong đường tròn $(O; R) \Leftrightarrow OM < R$.
- M nằm ngoài đường tròn $(O; R) \Leftrightarrow OM > R$.

3. Cách xác định đường tròn

Qua ba điểm không thẳng hàng, ta vẽ được một và chỉ một đường tròn.

4. Tính chất đối xứng của đường tròn

- Đường tròn là hình có **tâm đối xứng**. Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.
- Đường tròn là hình có **trục đối xứng**. Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn.

Bài 1. Cho tứ giác ABCD có $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^\circ$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BD, DC và CA. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn.

HD: Chứng minh MNPQ là hình chữ nhật.

Bài 2. Cho hình thoi ABCD có $\widehat{A} = 60^\circ$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh 6 điểm E, F, G, H, B, D cùng nằm trên một đường tròn.

HD: Chứng minh EFGH là hình chữ nhật, $\triangle OBE$ là tam giác đều.

Bài 3. Cho hình thoi ABCD. Đường trung trực của cạnh AB cắt BD tại E và cắt AC tại F. Chứng minh E, F lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và ABD.

HD: Chứng minh E, F là giao điểm của các đường trung trực tương ứng.

Bài 4. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Vẽ đường tròn (I) đường kính OA. Bán kính OC của đường tròn (O) cắt đường tròn (I) tại D. Vẽ $CH \perp AB$. Chứng minh tứ giác ACDH là hình thang cân.

HD: Chứng minh $\triangle ADO = \triangle CHO \Rightarrow OD = OH, AD = CH$. Chứng minh $HD \parallel AC$.

Bài 5. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD, AB < CD$) có $\widehat{C} = \widehat{D} = 60^\circ, CD = 2AD$. Chứng minh 4 điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.

HD: Chứng minh $IA = IB = IC = ID$, với I là trung điểm của CD.

Bài 6. Cho hình thoi ABCD. Gọi O là giao điểm hai đường chéo. M, N, R và S lần lượt là hình chiếu của O trên AB, BC, CD và DA. Chứng minh 4 điểm M, N, R và S cùng thuộc một đường tròn.

HD:

Bài 7. Cho hai đường thẳng xy và $x'y'$ vuông góc nhau tại O. Một đoạn thẳng $AB = 6\text{cm}$ chuyển động sao cho A luôn nằm trên xy và B trên $x'y'$. Hỏi trung điểm M của AB chuyển động trên đường nào?

HD:

Bài 8. Cho tam giác ABC có các đường cao BH và CK.

- Chứng minh: B, K, H và C cùng nằm trên một đường tròn. Xác định tâm đường tròn đó.
- So sánh KH và BC.

HD:

Bài 9.

a)

HD:

II. DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN

1. So sánh độ dài của đường kính và dây

Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

2. Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây

- Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.
- Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

3. Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây

- Trong một đường tròn:
 - Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.
 - Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.
- Trong hai dây của một đường tròn:
 - Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.
 - Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

Bài 1. Cho đường tròn (O; R) và ba dây AB, AC, AD. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của B trên các đường thẳng AC, AD. Chứng minh rằng $MN \leq 2R$.

HD: Chứng minh bốn điểm A, B, M, N cùng nằm trên đường tròn đường kính AB $\Rightarrow MN \leq AB$.

Bài 2. Cho đường tròn (O; R). Vẽ hai dây AB và CD vuông góc với nhau.

Chứng minh rằng: $S_{ABCD} \leq 2R^2$.

HD: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AB \cdot CD$.

Bài 3. Cho đường tròn (O; R) và dây AB không đi qua tâm. Gọi M là trung điểm của AB. Qua M vẽ dây CD không trùng với AB. Chứng minh rằng điểm M không là trung điểm của CD.

HD: Dùng phương pháp phản chứng. Giả sử M là trung điểm của CD \Rightarrow vô lý.

Bài 4. Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Gọi M là một điểm nằm giữa A và B. Qua M vẽ dây CD vuông góc với AB. Lấy điểm E đối xứng với A qua M.

- Tứ giác ACED là hình gì? Vì sao?
- Giả sử $R = 6,5\text{cm}$, $MA = 4\text{cm}$. Tính CD.

c)* Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của M trên CA và CB. Chứng minh: $MH \cdot MK = \frac{MC^3}{2R}$.

HD: a) ACED là hình thoi b) $CD = 12\text{cm}$

$$c) MH = \frac{MA \cdot MC}{AC}, MK = \frac{MB \cdot MC}{BC}$$

Bài 5. Cho đường tròn (O; R) và hai dây AB, CD bằng nhau và vuông góc với nhau tại I. Giả sử $IA = 2\text{cm}$, $IB = 4\text{cm}$. Tính khoảng cách từ tâm O đến mỗi dây.

HD: $OH = OK = 1\text{cm}$.

Bài 6. Cho đường tròn (O; R). Vẽ hai bán kính OA, OB. Trên các bán kính OA, OB lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $OM = ON$. Vẽ dây CD đi qua M, N (M ở giữa C và N).

- Chứng minh $CM = DN$.
- Giả sử $\widehat{AOB} = 90^\circ$. Tính OM theo R sao cho $CM = MN = ND$.

HD: a) Vẽ $OH \perp CD \Rightarrow H$ là trung điểm của CD và MN.

b) Đặt $OH = x$. C. minh ΔHOM vuông cân $\Rightarrow HM = x$. Do $CM = MN = ND \Rightarrow HC = 3x$

$$\Rightarrow OM = \frac{R}{\sqrt{5}}$$

Bài 7. Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OA, OB. Qua M, N lần lượt vẽ các dây CD và EF song song với nhau (C và E cùng nằm trên một nửa đường tròn đường kính AB).

a) Chứng minh tứ giác CDEF là hình chữ nhật.

b) Giả sử CD và EF cùng tạo với AB một góc nhọn 30^0 . Tính diện tích hình chữ nhật CDFE.

HD: a) Vẽ $OH \perp CD$. Đường thẳng OH cắt EF tại $K \Rightarrow OH = OK \Rightarrow CD = EF$.

$$b) OH = \frac{R}{4} \Rightarrow HK = \frac{R}{2}. \text{ Vì } \hat{E} = 90^0 \text{ nên } CF \text{ là đường kính. } EF^2 = \frac{15R^2}{4}. S = \frac{\sqrt{15}R^2}{4}.$$

Bài 8. Cho đường tròn (O) và một dây CD. Từ O kẻ tia vuông góc với CD tại M, cắt (O) tại H. Tính bán kính R của (O) biết: $CD = 16\text{cm}$ và $MH = 4\text{cm}$.

HD:

Bài 9. Cho đường tròn (O; 12cm) có đường kính CD. Vẽ dây MN qua trung điểm I của OC sao cho góc NID bằng 30^0 . Tính MN.

HD:

Bài 10.

a)

HD:

III. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

1. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

Cho đường tròn $(O; R)$ và đường thẳng Δ . Đặt $d = d(O, \Delta)$.

VTTĐ của đường thẳng và đường tròn	Số điểm chung	Hệ thức giữa d và R
Đường thẳng và đường tròn cắt nhau	2	$d < R$
Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau	1	$d = R$
Đường thẳng và đường tròn không giao nhau	0	$d > R$

Khi đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau thì đường thẳng đgl **tiếp tuyến** của đường tròn. Điểm chung của đường thẳng và đường tròn đgl **tiếp điểm**.

2. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

- Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.
- Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là tiếp tuyến của đường tròn.

3. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

- Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.
- Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
- Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.

4. Đường tròn nội tiếp tam giác

- Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác đgl **đường tròn nội tiếp** tam giác, còn tam giác đgl **ngoại tiếp** đường tròn.
- Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của các đường phân giác các góc trong tam giác.

5. Đường tròn bàng tiếp tam giác

- Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của một tam giác và tiếp xúc với các phần kéo dài của hai cạnh kia đgl **đường tròn bàng tiếp** tam giác.
- Với một tam giác, có ba đường tròn bàng tiếp.
- Tâm của đường tròn bàng tiếp tam giác trong góc A là giao điểm của hai đường phân giác các góc ngoài tại B và C , hoặc là giao điểm của đường phân giác góc A và đường phân giác ngoài tại B (hoặc C).

Bài 1. Cho tam giác ABC có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H .

- Chứng minh rằng bốn điểm A, D, H, E cùng nằm trên một đường tròn (gọi tâm của nó là O).
- Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng ME là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

HD: a) D, E nằm trên đường tròn đường kính AH .

$$b) \text{ Chứng minh } \widehat{OEA} = \widehat{OAE} = \widehat{ECM} = \widehat{CEM} \Rightarrow \widehat{MEO} = \widehat{CEM} + \widehat{CEO} = \widehat{OEA} + \widehat{CEO} = 90^\circ.$$

Bài 2. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Vẽ dây AC sao cho $\widehat{CAB} = 30^\circ$. Trên tia đối của tia BA , lấy điểm M sao cho $BM = R$. Chứng minh rằng:

- MC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
- $MC^2 = 3R^2$.

HD: a) Chứng minh $\triangle COM$ vuông tại C . b) $MC^2 = OM^2 - OC^2$.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông ở A có $AB = 8, AC = 15$. Vẽ đường cao AH . Gọi D là điểm đối xứng với B qua H . Vẽ đường tròn đường kính CD , cắt AC ở E .

- Chứng minh rằng HE là tiếp tuyến của đường tròn.
- Tính độ dài HE .

HD: a) Gọi O và F là lần lượt là trung điểm của CD và AE . Chứng minh $DE \parallel AB$, $HF \perp AE$
 $\Rightarrow \widehat{HEO} = 90^\circ$. b) $HE = AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{120}{17}$.

Bài 4. Từ một điểm M ở ngoài đường tròn (O) , vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn. Trên tia OB lấy điểm C sao cho $BC = BO$. Chứng minh rằng $\widehat{BMC} = \frac{1}{2} \widehat{BMA}$.

HD: Chú ý $\triangle OMC$ cân tại M .

Bài 5. Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm A ở ngoài đường tròn. Vẽ các tiếp tuyến AB, AC . Chứng minh rằng $\widehat{BAC} = 60^\circ$ khi và chỉ khi $OA = 2R$.

HD: Chú ý $\triangle ABO$ vuông tại B .

Bài 6. Từ một điểm A ở ngoài đường tròn $(O; R)$, vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Đường thẳng vuông góc với OB tại O cắt AC tại N . Đường thẳng vuông góc với OC tại O cắt AB tại M .

a) Chứng minh rằng tứ giác $AMON$ là hình thoi.

b) Điểm A phải cách điểm O một khoảng bao nhiêu để cho MN là tiếp tuyến của (O) .

HD: a) Chứng minh $ON \parallel AB$, $OM \parallel AC$. b) $OA = 2R$.

Bài 7. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O) . Các tiếp tuyến của đường tròn vẽ từ A và C cắt nhau tại M . Trên tia AM lấy điểm D sao cho $AD = BC$. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

b) Ba đường thẳng AC, BD, OM đồng quy.

HD: a) Chứng minh $AD \parallel BC$ (cùng vuông góc với OA).

b) Gọi E là giao điểm của OM và $AC \Rightarrow E$ là trung điểm của AC .

Bài 8. Cho đường tròn $(O; r)$ nội tiếp tam giác ABC vuông tại A . Chứng minh rằng $r = p - a$, trong đó p là nửa chu vi tam giác, a là độ dài cạnh huyền.

HD: Gọi D, E, F là các tiếp điểm của (O) với các cạnh tam giác $\Rightarrow AEOF$ là hình vuông.

Bài 9. Chứng minh rằng diện tích tam giác ngoại tiếp một đường tròn được tính theo công thức: $S = pr$, trong đó p là nửa chu vi tam giác, r là bán kính đường tròn nội tiếp.

HD: Diện tích tam giác bằng tổng diện tích ba tam giác nhỏ.

Bài 10. Cho đường tròn (O) , dây cung CD . Qua O vẽ $OH \perp CD$ tại H , cắt tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) tại M . Chứng minh MD là tiếp tuyến của (O) .

HD:

Bài 11. Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính AB . Vẽ các tia $Ax \perp AB$ và $By \perp AB$ ở cùng phía nửa đường tròn. Gọi I là một điểm trên nửa đường tròn. Tiếp tuyến tại I cắt Ax tại C và By tại D . Chứng minh rằng $AC + BD = CD$.

HD:

Bài 12. Cho đường tròn $(O; 5\text{cm})$. Từ một điểm M ở ngoài (O) , vẽ hai tiếp tuyến MA và MB sao cho $MA \perp MB$ tại M .

a) Tính MA và MB .

b) Qua trung điểm I của cung nhỏ AB , vẽ một tiếp tuyến cắt OA, OB tại C và D . Tính CD .

HD:

Bài 13. Cho đường tròn (O) . Từ một điểm M ở ngoài (O) , vẽ hai tiếp tuyến MA và MB sao cho góc $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Biết chu vi tam giác MAB là 18cm , tính độ dài dây AB .

HD: $AB = 6(\text{cm})$.

Bài 14.

a)

HD:

IV. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

1. Tính chất đường nối tâm

- Đường nối tâm của hai đường tròn là trục đối xứng của hình gồm cả hai đường tròn đó.
- Nếu hai đường tròn cắt nhau thì hai giao điểm đối xứng với nhau qua đường nối tâm.
- Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.

2. Vị trí tương đối của hai đường tròn

Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$. Đặt $OO' = d$.

VTĐ của hai đường tròn	Số điểm chung	Hệ thức giữa d với R và r
Hai đường tròn cắt nhau	2	$R - r < d < R + r$
Hai đường tròn tiếp xúc nhau: – Tiếp xúc ngoài – Tiếp xúc trong	1	$d = R + r$ $d = R - r$
Hai đường tròn không giao nhau: – Ở ngoài nhau – (O) đựng (O')	0	$d > R + r$ $d < R - r$

3. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn

Tiếp tuyến chung của hai đường tròn là đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn đó.

Tiếp tuyến chung ngoài là tiếp tuyến chung không cắt đoạn nối tâm.

Tiếp tuyến chung trong là tiếp tuyến chung cắt đoạn nối tâm.

Bài 1. Cho hai đường tròn $(A; R_1)$, $(B; R_2)$ và $(C; R_3)$ đôi một tiếp xúc ngoài nhau. Tính R_1 , R_2 và R_3 biết $AB = 5\text{cm}$, $AC = 6\text{cm}$ và $BC = 7\text{cm}$.

HD: $R_1 = 2(\text{cm})$, $R_2 = 3(\text{cm})$, $R_3 = 4(\text{cm})$.

Bài 2. Cho hai đường tròn $(O; 5\text{cm})$ và $(O'; 5\text{cm})$ cắt nhau tại A và B. Tính độ dài dây cung chung AB biết $OO' = 8\text{cm}$.

HD: $AB = 6(\text{cm})$.

Bài 3. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại A và B với $R > R'$. Vẽ các đường kính AOC và AO'D. Chứng minh rằng ba điểm B, C, D thẳng hàng.

HD: Chứng minh BC, BD cùng song song với OO' hoặc chứng minh $\widehat{CBD} = 180^\circ$.

Bài 4. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ cát tuyến chung MAN sao cho $MA = AN$. Đường vuông góc với MN tại A cắt OO' tại I. Chứng minh I là trung điểm của OO' .

HD:

Bài 5. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài nhau tại A. Gọi M là giao điểm một trong hai tiếp tuyến chung ngoài BC và tiếp tuyến chung trong. Chứng minh BC là tiếp tuyến của đường tròn đường kính OO' tại M.

HD: Chứng minh $IM = \frac{OO'}{2}$ và $IM \perp BC$.

Bài 6. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R)$ tiếp xúc ngoài nhau tại M. Hai đường tròn (O) và (O') cùng tiếp xúc trong với đường tròn lớn $(O''; R'')$ lần lượt tại E và F. Tính bán kính R'' biết chu vi tam giác $OO'O''$ là 20cm .

HD:

Bài 7. Cho đường tròn $(O; 9\text{cm})$. Vẽ 6 đường tròn bằng nhau bán kính R đều tiếp xúc trong với (O) và mỗi đường tròn đều tiếp xúc với hai đường khác bên cạnh nó. Tính bán kính R .

HD:

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG II

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Vẽ đường phân giác BI.

a) Chứng minh rằng đường tròn (I; IA) tiếp xúc với BC.

b) Cho biết $AB = a$. Chứng minh rằng $AI = (\sqrt{2} - 1)a$. Từ đó suy ra $\tan 22^{\circ}30' = \sqrt{2} - 1$.

HD: a) Vẽ $ID \perp BC \Rightarrow IA = ID$

b) Xét $\triangle ABI \Rightarrow AI = a \cdot \tan 22^{\circ}30'$. $\triangle DIC$ vuông cân $\Rightarrow AI = DC = (\sqrt{2} - 1)a$.

Bài 2. Cho đường tròn (O; R) và một điểm A cố định trên đường tròn đó. Qua A vẽ tiếp tuyến xy.

Từ một điểm M trên xy vẽ tiếp tuyến MB với đường tròn (O). Hai đường cao AD và BE của tam giác MAB cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng ba điểm M, H, O thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng tứ giác AOBH là hình thoi.

c) Khi điểm M di động trên xy thì điểm H di động trên đường nào?

HD: a) Chứng minh $\triangle MAB$ cân, MH, MO là các tia phân giác của \widehat{AMB} .

b) Chứng minh AOBH là hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau.

c) H di động trên đường tròn (A; R).

Bài 3. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Từ một điểm M trên nửa đường tròn ta vẽ tiếp tuyến xy. Vẽ AD và BC vuông góc với xy.

a) Chứng minh rằng $MC = MD$.

b) Chứng minh rằng $AD + BC$ có giá trị không đổi khi điểm M di động trên nửa đường tròn.

c) Chứng minh rằng đường tròn đường kính CD tiếp xúc với ba đường thẳng AD, BC và AB.

d) Xác định vị trí của điểm M trên nửa đường tròn (O) để cho diện tích tứ giác ABCD lớn nhất.

HD: a) OM là đường trung bình của hình thang ABCD.

b) $AD + BC = 2R$ c) Vẽ $ME \perp AB$. $\triangle BME = \triangle BMC \Rightarrow ME = MC = MD$

d) $S = 2R \cdot ME \leq 2R \cdot MO \Rightarrow S$ lớn nhất $\Leftrightarrow M$ là đầu mút của bán kính $OM \perp AB$.

Bài 4. Cho tam giác đều ABC, O là trung điểm của BC. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm di động D, E sao cho $\widehat{DOE} = 60^{\circ}$.

a) Chứng minh rằng tích $BD \cdot CE$ không đổi.

b) Chứng minh $\triangle BOD \neq \triangle OED$. Từ đó suy ra tia DO là tia phân giác của góc BDE.

c) Vẽ đường tròn tâm O tiếp xúc với AB. Chứng minh rằng đường tròn này luôn tiếp xúc với DE.

HD: a) $\triangle BOD \neq \triangle CEO \Rightarrow BD \cdot CE = \frac{BC^2}{4}$ b) $\frac{BD}{OD} = \frac{OB}{OE} \Rightarrow \triangle BOD \neq \triangle OED$

c) Vẽ $OK \perp DE$. Gọi H là tiếp điểm của (O) với cạnh AB. Chứng minh $OK = OH$.

Bài 5. Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB và một điểm E di động trên nửa đường tròn đó (E không trùng với A và B). Vẽ các tia tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn. Tia AE cắt By tại C, tia BE cắt Ax tại D.

a) Chứng minh rằng tích $AD \cdot BC$ không đổi.

b) Tiếp tuyến tại E của nửa đường tròn cắt Ax, By theo thứ tự tại M và N. Chứng minh rằng ba đường thẳng MN, AB, CD đồng quy hoặc song song với nhau.

c) Xác định vị trí của điểm E trên nửa đường tròn để diện tích tứ giác ABCD nhỏ nhất. Tính diện tích nhỏ nhất đó.

HD: a) $\triangle ABD \neq \triangle BCA \Rightarrow AD \cdot BC = AB^2$

b) $\triangle MAE$ cân $\Rightarrow \triangle MDE$ cân $\Rightarrow MD = ME = MA$. Tương tự $NC = NB = NE$. Sử dụng bổ đề hình thang $\Rightarrow đpcm$.

c) $S = 2R \cdot MN \Rightarrow S$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MN$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MN \perp AD \Leftrightarrow OE \perp AB$. $S_{\min} = 4R^2$.

Bài 6. Cho đoạn thẳng AB cố định. Vẽ đường tròn (O) tiếp xúc với AB tại A, đường tròn (O') tiếp xúc với AB tại B. Hai đường tròn này luôn thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB và luôn tiếp xúc ngoài với nhau. Hỏi tiếp điểm M của hai đường tròn di động trên đường nào?

HD: Từ M vẽ tiếp tuyến chung của hai đường tròn, cắt AB tại I. Chứng minh $IA = IB = IM$. Từ đó suy ra M di động trên đường tròn tâm I đường kính AB.

Bài 7. Cho đường tròn $(O; R)$ nội tiếp ΔABC . Gọi M, N, P lần lượt là tiếp điểm của AB, AC, BC với (O) . Chứng minh rằng: $P_{\Delta ABC} = 2(AM + BP + NC)$.

HD:

Bài 8. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Dây CD cắt đường kính AB tại I. Gọi H và K lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ A và B đến CD. Chứng minh $CH = DK$.

HD: Vẽ $EH \perp CD$. Chứng minh $EH = EK \Rightarrow CH = DK$.

Bài 9. Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến MA và MB (A, B là tiếp điểm). Cho biết góc $\widehat{AMB} = 40^\circ$.

a) Tính góc \widehat{AOB} .

b) Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với OA cắt MB tại N. Chứng minh tam giác OMN là tam giác cân.

HD: a) $\widehat{AOB} = 140^\circ$ b) Chứng minh $\widehat{NOM} = \widehat{NMO}$.

Bài 10. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Vẽ các tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn cùng phía đối với AB. Từ điểm M trên nửa đường tròn (M khác A, B) vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt Ax và By lần lượt tại C và D.

a) Chứng minh: Tam giác COD là tam giác vuông.

b) Chứng minh: $MC \cdot MD = OM^2$.

c) Cho biết $OC = BA = 2R$, tính AC và BD theo R.

HD: a) $OC \perp OD$ c) $AC = R\sqrt{3}, BD = MD = \frac{R\sqrt{3}}{3}$.

Bài 11. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài với nhau tại B. Vẽ đường kính AB của đường tròn (O) và đường kính BC của đường tròn (O') . Đường tròn đường kính OC cắt (O) tại M và N.

a) Đường thẳng CM cắt (O') tại P. Chứng minh: $OM \parallel BP$.

b) Từ C vẽ đường thẳng vuông góc với CM cắt tia ON tại D. Chứng minh tam giác OCD là tam giác cân.

HD: a) $OM \perp MC, BP \perp MC$ b) $CD \parallel OM; \Delta OCD$ cân tại D.

Bài 12. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại A và B sao cho đường thẳng OA là tiếp tuyến của đường tròn $(O'; R')$. Biết $R = 12\text{cm}, R' = 5\text{cm}$.

a) Chứng minh: $O'A$ là tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$.

b) Tính độ dài các đoạn thẳng OO', AB .

HD: a) $O'A \perp OA$ b) $OO' = 13(\text{cm}); AB = \frac{120}{13}(\text{cm})$.

Bài 13. Cho đường tròn tâm O bán kính $R = 6\text{cm}$ và một điểm A cách O một khoảng 10cm. Từ A vẽ tiếp tuyến AB (B là tiếp điểm).

a) Tính độ dài đoạn tiếp tuyến AB.

b) Vẽ cát tuyến ACD, gọi I là trung điểm của đoạn CD. Hỏi khi C chạy trên đường tròn (O) thì I chạy trên đường nào?

HD:

Bài 14. Cho hai đường tròn đồng tâm $(O; R)$ và $(O; r)$. Dây AB của $(O; R)$ tiếp xúc với $(O; r)$. Trên tia AB lấy điểm E sao cho B là trung điểm của đoạn AE. Từ E vẽ tiếp tuyến thứ hai của $(O; r)$ cắt $(O; R)$ tại C và D (D ở giữa E và C).

a) Chứng minh: $EA = EC$.

b) Chứng minh: EO vuông góc với BD.

c) Điểm E chạy trên đường nào khi dây AB của $(O; R)$ thay đổi nhưng luôn tiếp xúc với $(O; r)$?

HD:

Bài 15. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và một điểm M nằm trên nửa đường tròn đó. H là chân đường vuông góc hạ từ M xuống AB.

- a) Khi $AH = 2\text{cm}$, $MH = 4\text{cm}$, hãy tính độ dài các đoạn thẳng AB , MA , MB .
 b) Khi điểm M di động trên nửa đường tròn (O) . Hãy xác định vị trí của M để biểu thức:

$$\frac{1}{MA^2} + \frac{1}{MB^2} \text{ có giá trị nhỏ nhất.}$$

- c) Tiếp tuyến của (O) tại M cắt tiếp tuyến của (O) tại A ở D , OD cắt AM tại I . Khi điểm M di động trên nửa đường tròn (O) thì I chạy trên đường nào ?

HD:

Bài 16. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD . Gọi H là trực tâm của tam giác.

- a) Tính số đo góc \widehat{ABD} ?
 b) Tứ giác $BHCD$ là hình gì? Vì sao?
 c) Gọi M là trung điểm BC . Chứng minh $2OM = AH$.

HD: a) $\widehat{ABD} = 90^\circ$ b) $BHCD$ là hình bình hành.

Bài 17. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O) . Đường cao AH cắt đường tròn (O) ở D .

- a) AD có phải là đường kính của đường tròn (O) không? Vì sao?
 b) Chứng minh: $BC^2 = 4AH \cdot DH$.
 c) Cho $BC = 24\text{cm}$, $AB = 20\text{cm}$. Tính bán kính của đường tròn (O) .

HD:

Bài 18. Cho đường tròn tâm O đường kính AB . Gọi H là trung điểm OA . Dây CD vuông góc với OA tại H .

- a) Tứ giác $ACOD$ là hình gì? Vì sao?
 b) Chứng minh các tam giác OAC và CBD là các tam giác đều.
 c) Gọi M là trung điểm BC . Chứng minh ba điểm D, O, M thẳng hàng.
 d) Chứng minh: $CD^2 = 4AH \cdot HB$.

HD: a) $ACOD$ là hình thoi.

Bài 19. Cho đường tròn đường kính 10cm , một đường thẳng d cách tâm O một khoảng bằng 3cm .

- a) Xác định vị trí tương đối của đường thẳng d và đường tròn (O) .
 b) Đường thẳng d cắt đường tròn (O) tại điểm A và B . Tính độ dài dây AB .
 c) Kẻ đường kính AC của đường tròn (O) . Tính độ dài BC và số đo góc CAB (làm tròn đến độ).
 d) Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại C cắt tia AB tại M . Tính độ dài BM .

HD:

Bài 20. Cho tam giác ABC nhọn. Đường tròn đường kính BC cắt AB ở N và cắt AC ở M . Gọi H là giao điểm của BM và CN .

- a) Tính số đo các góc BMC và BNC .
 b) Chứng minh AH vuông góc BC .
 c) Chứng minh tiếp tuyến tại N đi qua trung điểm AH .

HD: a) $\widehat{BMC} = \widehat{BNC} = 90^\circ$ b) H là trực tâm $\triangle ABC$ c) $NK \perp NO$ (K là trung điểm của AH).

Bài 21. Cho đường tròn tâm $(O; R)$ đường kính AB và điểm M trên đường tròn sao cho góc $\widehat{MAB} = 60^\circ$. Kẻ dây MN vuông góc với AB tại H .

- a) Chứng minh AM và AN là các tiếp tuyến của đường tròn $(B; BM)$.
 b) Chứng minh $MN^2 = 4AH \cdot HB$.
 c) Chứng minh tam giác BMN là tam giác đều và điểm O là trọng tâm của nó.
 d) Tia MO cắt đường tròn (O) tại E , tia MB cắt (B) tại F . Chứng minh ba điểm N, E, F thẳng hàng.

HD:

Bài 22. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A cách O một khoảng bằng $2R$, kẻ tiếp tuyến AB tới đường tròn (B là tiếp điểm).

- a) Tính số đo các góc của tam giác OAB .

- b) Gọi C là điểm đối xứng với B qua OA. Chứng minh điểm C nằm trên đường tròn O và AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).
 c) AO cắt đường tròn (O) tại G. Chứng minh G là trọng tâm tam giác ABC.

HD: a) $\widehat{OBA} = 90^\circ$, $\widehat{OAB} = 30^\circ$, $\widehat{AOB} = 60^\circ$.

Bài 23. Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O; R) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là hai tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC.

- a) Chứng minh $OA \perp BC$ và tính tích $OH.OA$ theo R
 b) Kẻ đường kính BD của đường tròn (O). Chứng minh $CD \parallel OA$.
 c) Gọi E là hình chiếu của C trên BD, K là giao điểm của AD và CE. Chứng minh K là trung điểm CE.

HD:

Bài 24. Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O; R) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là các tiếp điểm). Kẻ $BE \perp AC$ và $CF \perp AB$ ($E \in AC, F \in AB$), BE và CF cắt nhau tại H.

- a) Chứng minh tứ giác BOCH là hình thoi.
 b) Chứng minh ba điểm A, H, O thẳng hàng.
 c) Xác định vị trí điểm A để H nằm trên đường tròn (O).

HD: a) BOCH là hình bình hành và $OB = OC$ b) H là trực tâm ΔABC c) $OA = 2R$

Bài 25. Cho đường tròn (O; 3cm) và điểm A có $OA = 6$ cm. Kẻ các tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC.

- a) Tính độ dài OH.
 b) Qua điểm M bất kì thuộc cung nhỏ BC, kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt AB và AC theo thứ tự tại D và E. Tính chu vi tam giác ADE.
 c) Tính số đo góc \widehat{DOE} .

HD: a) $OH = 1,5(cm)$ b) $AB = 3\sqrt{3}9cm$, $P_{ADE} = 2AB = 6\sqrt{3}(cm)$ c) $\widehat{DOE} = \frac{\widehat{BOC}}{2} = 60^\circ$.

Bài 26. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi Ax , By là các tia vuông góc với AB (Ax , By và nửa đường tròn thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB). Qua điểm M bất kì thuộc tia Ax kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt By ở N.

- a) Tính số đo góc MON.
 b) Chứng minh $MN = AM + BN$.
 c) Tính tích $AM.BN$ theo R.

HD:

Bài 27. Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của điểm H trên các cạnh AB và AC.

- a) Chứng minh $AD.AB = AE.AC$.
 b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BH và CH. Chứng minh DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (M; MD) và (N; NE).
 c) Gọi P là trung điểm MN, Q là giao điểm của DE và AH. Giả sử $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Tính độ dài PQ.

HD:

Bài 28. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài MN với M thuộc (O) và N thuộc (O'). Gọi P là điểm đối xứng với M qua OO' , Q là điểm đối xứng với N qua OO' . Chứng minh rằng:

- a) MNQP là hình thang cân.
 b) PQ là tiếp tuyến chung của của hai đường tròn (O) và (O').
 c) $MN + PQ = MP + NQ$.

HD:

Bài 29.

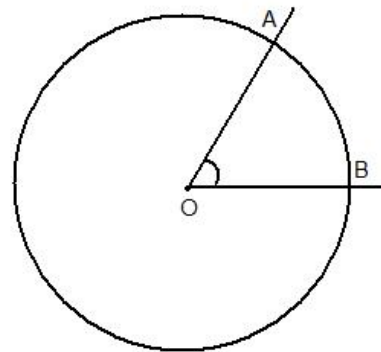
- a)
 HD:

CHỦ ĐỀ 8: GÓC Ở TÂM - SỐ ĐO CUNG.

LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY.

A/ LÝ THUYẾT.

1/ Góc ở tâm là góc có đỉnh là tâm của đường tròn. Góc này cắt đường tròn tại A và B khi đó cung nhỏ AB là cung bị chắn của góc ở tâm AOB.



2/ Số đo cung:

+ Số đo của cung nhỏ bị chắn bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.

+ Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa 360° và số đo của cung nhỏ.

+ Số đo của nửa đường tròn bằng 180°

+ Chú ý:

- Cung nhỏ có số đo nhỏ hơn 180°

- Cung lớn có số đo lớn hơn 180°

3/ So sánh cung:

+ Cung nào lớn hơn thì có số đo cũng lớn hơn và ngược lại.

+ Cung nào có góc ở tâm lớn hơn thì lớn hơn và ngược lại.

4/ Nếu C là một điểm nằm trên cung AB thì: $Sđ \widehat{AB} = Sđ \widehat{AC} + Sđ \widehat{CB}$

5/ Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:

- Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau.

- Hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau.

6/ Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:

- Cung lớn hơn căng dây lớn hơn.

- Dây lớn hơn căng cung lớn hơn.

B/ BÀI TẬP MẪU.

Bài 1: Cho đường tròn (O, R) và điểm M nằm ngoài đường tròn đó. Gọi MA, MB là hai tiếp tuyến với đường tròn tại A và B. Tính số đo của góc ở tâm tạo bởi hai bán kính OA và OB nếu:

a) $\angle AMB = 70^\circ$

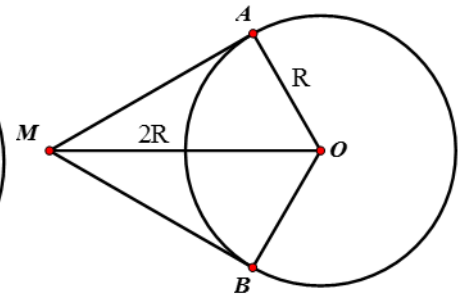
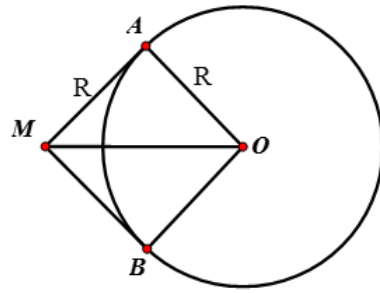
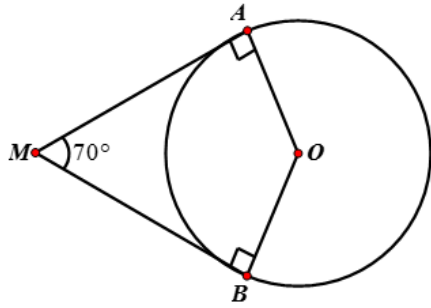
b) $MA = R$

c) $MO = 2R$

Hướng dẫn

Vì MA và MB là các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B nên: $MA \perp OA$, $MB \perp OB$

$\Rightarrow \angle MAO = \angle MBO = 90^\circ$



a) Xét tứ giác MAOB có:

$$\angle AMB + \angle AOB + \angle MAO + \angle MBO = 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow \angle AOB = 360^\circ - (\angle AMB + \angle MAO + \angle MBO) = 360^\circ - (70^\circ + 90^\circ + 90^\circ) = 110^\circ$$

Vậy số đo góc ở tâm tạo bởi hai bán kính OA, OB bằng 110° .

b) Nếu $MA = R$

Xét $\triangle MAO$ có: $MA = AO = R$ và $\angle MAO = 90^\circ \Rightarrow \triangle MAO$ vuông cân tại A $\Rightarrow \widehat{MOA} = 45^\circ$

$$\text{Vậy } \angle AOB = 2 \cdot \angle MOA = 90^\circ$$

c) Nếu $MO = 2R$

Xét $\triangle MAO$ vuông tại A có: $MO = 2 \cdot AO \Rightarrow \angle AMO = 30^\circ \Rightarrow \angle AOM = 60^\circ$

$$\text{Vậy: } \angle AOB = 2 \cdot \angle AOM = 120^\circ$$

Bài 2: Cho đường tròn (O; R) và dây AB không đi qua O. Trên dây AB lấy các điểm M, N sao cho $AM = MN = NB$. Tia OM, ON cắt (O) lần lượt tại C và D. So sánh cung AC, CD, DB.

Hướng dẫn

Xét $\triangle AOM$ và $\triangle BON$ có:

$$OA = OB = R$$

$$\angle OAM = \angle OBN \text{ (do } \triangle OAB \text{ cân tại O)}$$

$$AM = BN \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \triangle AOM = \triangle BON \text{ (c - g - c)}$$

$$\Rightarrow \angle AOM = \angle BON \text{ (hai góc tương ứng)}$$

$$\Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$$

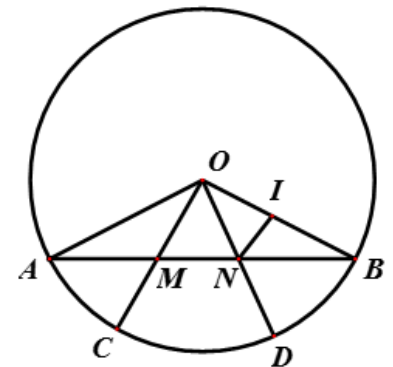
Gọi I là trung điểm của OB. Suy ra NI là đường trung bình của $\triangle OBM$

$$\Rightarrow NI \parallel OM \Rightarrow \angle MON = \angle ONI \text{ (so le trong)} \quad (1)$$

Mặt khác ta có: $OB = OC = R$, mà $M \in OC \Rightarrow OM < OB$ hay $NI < OI$.

$$\text{Xét } \triangle ONI \text{ có } NI < OI \text{ nên: } \angle NOI < \angle ONI \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \angle NOI < \angle MON \Rightarrow \widehat{CD} > \widehat{BD}$$



Bài 3: Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Kẻ dây AM của đường tròn (O) và dây BN của đường tròn (O') sao cho $AM \parallel BN$. Chứng minh $\widehat{AM} = \widehat{BN}$

Hướng dẫn

Vì $AM \parallel BN$ (gt)

$$\Rightarrow \angle MAB = \angle ABN \text{ (so le trong)} \quad (1)$$

Mặt khác: $OA = OB = O'A = O'B$

\Rightarrow Tứ giác $OAO'B$ là hình thoi

$\Rightarrow \angle OAB = \angle ABO'$ (2)

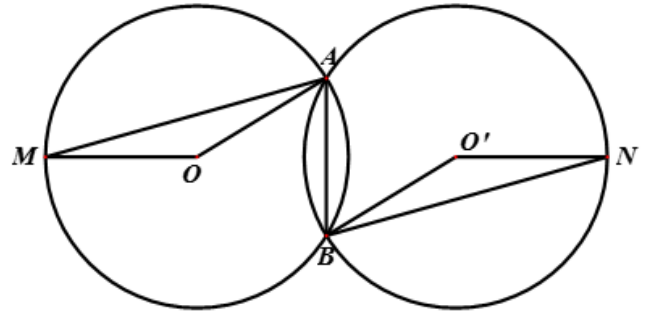
Từ (1) và (2) suy ra: $\angle MAO = \angle NBO'$

Ta có: $\triangle MOA$ cân tại O và $\triangle NO'B$ cân tại O' có góc ở đáy bằng nhau $\Rightarrow \angle MOA = \angle NO'B$

Do đó: $\triangle MOA = \triangle NO'B$ (c.g.c) $\Rightarrow AM = BN$

Mặt khác hai đường tròn (O) và (O') bằng nhau nên

$\Rightarrow \widehat{AM} = \widehat{BN}$



Bài 4: Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại hai điểm A và B ($R < R'$). Kẻ đường kính BOC và $BO'D$.

a) Chứng minh rằng: Ba điểm C, A, D thẳng hàng.

b) So sánh số đo hai cung nhỏ AC và AD .

Hướng dẫn

a) Vì $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn đường kính BC nên $\triangle ABC$ vuông tại A hay $\angle BAC = 90^\circ$.

Tương tự ta có: $\angle BAD = 90^\circ$

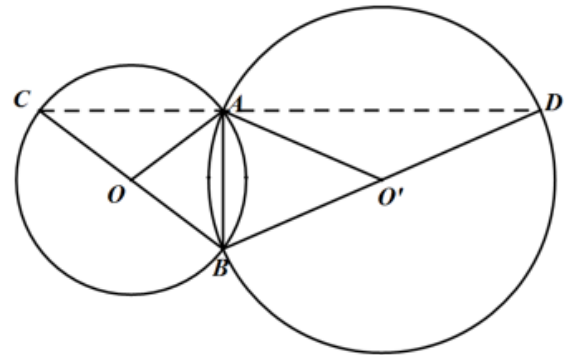
$\Rightarrow \angle CAD = \angle BAD + \angle BAC = 180^\circ$

\Rightarrow 3 điểm C, A, D thẳng hàng.

b) Xét đường tròn (O) có: $sđ\widehat{AC} = 180^\circ - sđ\widehat{AB}$

Xét đường tròn (O') có: $sđ\widehat{AD} = 180^\circ - sđ\widehat{AB}$

$\Rightarrow sđ\widehat{AC} = sđ\widehat{AD}$



Bài 5: Cho đường tròn (O) đường kính AB . Điểm C thuộc đường tròn (O) sao cho $sđ\widehat{BC} = 30^\circ$, điểm M thuộc cung AC nhỏ. Gọi D và E là các điểm đối xứng với M qua AB và OC . Chứng minh rằng: $\triangle DOE$ đều.

Hướng dẫn

Vì $sđ\widehat{BC} = 30^\circ \Rightarrow \angle BOC = 30^\circ$

Gọi I là giao điểm của MD và AB , J là giao điểm của ME và OC .

Theo giả thiết: M và D đối xứng với nhau qua AB , mà M thuộc đường tròn (O) nên D cũng thuộc đường tròn (O) .

Tương tự E thuộc đường tròn (O) .

Tứ giác $MIOJ$ có $\angle I = \angle J = 90^\circ \Rightarrow \angle IMJ + \angle IOJ = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle IMJ = 180^\circ - \angle IOJ = \angle BOC = 30^\circ$

Ta có $\triangle MOD$ và $\triangle MOE$ cân tại O nên:

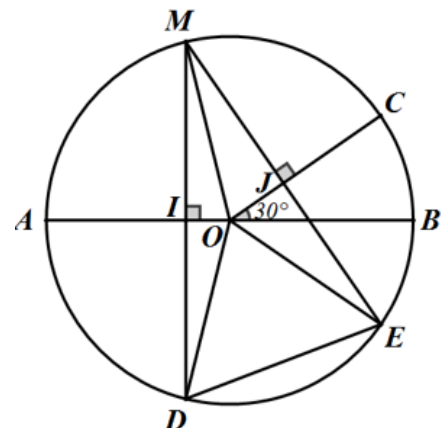
$$\angle MOD = 180^\circ - 2\angle DMO$$

$$\angle MOE = 180^\circ - 2\angle EMO$$

$\Rightarrow \angle MOD + \angle MOE = 360^\circ - 2(\angle DMO + \angle EMO)$

$\Leftrightarrow 360^\circ - \angle DOE = 360^\circ - 2\angle IMJ \Leftrightarrow \angle DOE = 2\angle IMJ = 60^\circ$

Vậy $\triangle DOE$ đều.



Bài 6: Cho điểm M chuyển động trên nửa đường tròn (O) đường kính AB. Vẽ hai tiếp tuyến Ax và By với đường tròn (O). Tiếp tuyến tại M với (O) cắt Ax tại C và cắt By tại D; các đường thẳng CO và OD cắt (O) lần lượt tại E và F.

a) Tính số đo \widehat{EF} .

b) Tìm tập hợp tâm I của đường tròn ngoại tiếp.

Hướng dẫn

a) Vì CA và BM là hai tiếp tuyến với (O) nên OC là tia phân giác của $\angle AOM$.

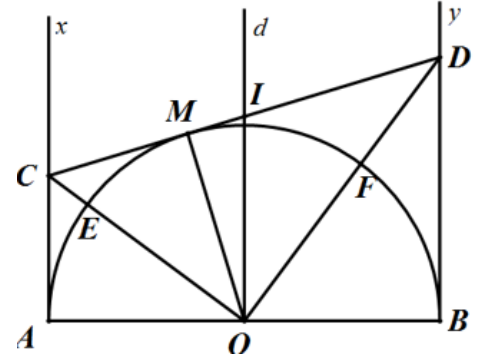
Tương tự ta có OD là tia phân giác của $\angle BOM$. Mà $\angle AOM$ và $\angle BOM$ là hai góc kề bù $\Rightarrow OC \perp OD$

Vậy ta có $\angle COD = 90^\circ$ hay số đo $\widehat{EF} = 90^\circ$.

b) Vì $\triangle COD$ vuông tại O nên tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác $\triangle COD$ là trung điểm của CD.

Để thấy tứ giác ABCD là hình thang có OI là đường trung bình nên $OI \parallel AC \Rightarrow OI \perp AB$.

Vậy I chuyển động trên đường thẳng d vuông góc với AB tại O.



Bài 7: Cho AB là dây cung của đường tròn (O), I là trung điểm của AB. Trên cung nhỏ AB lấy điểm M tùy ý. Gọi giao điểm OI và MI với (O) lần lượt C và N. So sánh \widehat{MCN} và \widehat{ACB} .

Hướng dẫn

Kẻ $OH \perp MN$. Ta có $\triangle OHI$ vuông tại H nên $OH < OI$.

Mà OH, OI lần lượt là các khoảng cách từ O đến hai dây MN và AB $\Rightarrow AB < MN$.

Do đó số đo $\widehat{MCN} > \widehat{ACB}$.

B/ BÀI TẬP VẬN DỤNG.

BT1: Cho (O; 5cm) và điểm M sao cho $OM=10$ cm. Vẽ hai tiếp tuyến MA và MB. Tính góc ở tâm do hai tia OA và OB tạo ra.

BT2: Cho tam giác đều ABC, vẽ nửa đường tròn đường kính BC cắt AB tại D và AC tại E. So sánh các cung BD; DE và EC.

BT3: Cho hai đường tròn (O; R) và (O; r) với $R > r$. Điểm M ngoài (O; R). Qua M vẽ hai tiếp tuyến với (O; r), một cắt (O; R) tại A và B (A nằm giữa M và B); một cắt (O; R) tại C và D (C nằm giữa D và M). C/m: hai cung AB và CD bằng nhau.

BT4: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A, B. Dây AC của đường tròn (O) vuông góc với AO' ; dây AD của đường tròn (O') vuông góc với AO. So sánh các góc \widehat{AOC} , $\widehat{AO'D}$.

BT5: Trên một đường tròn (O) có cung \widehat{AB} bằng 140° . Gọi A', B' lần lượt là đối xứng của A, B qua O; lấy cung \widehat{AD} nhận B' làm điểm chính giữa; lấy cung \widehat{CB} nhận A' làm điểm chính giữa. Tính số đo cung nhỏ \widehat{CD} .

BT6: Cho hai đường tròn bằng nhau (O), (O') cắt nhau tại A, B. Kẻ các đường kính AOC và $AO'D$. Gọi E là giao điểm thứ hai của đường thẳng AC với (O').

a) So sánh các cung nhỏ \widehat{CB} , \widehat{BD} .

b) Chứng minh rằng B là điểm chính giữa cung \widehat{EBD} .

BT7:

a) Cho đường tròn (O, R) với hai điểm A, B. Tìm quỹ tích trung điểm của các dây trên đường tròn có độ dài bằng dây AB.

b) Cho đường tròn (O, R) với hai tiếp tuyến AB, AC. Một tiếp tuyến di động của đường tròn (O) cắt các đoạn thẳng AB, AC tại các điểm tương ứng P, Q. Gọi P', Q' theo thứ tự là giao điểm của các đoạn thẳng OP, OQ với đường tròn (O). Chứng minh rằng cung nhỏ $\widehat{P'Q'}$ có số đo không đổi. Tìm quỹ tích trung điểm I của P'Q'.

BT8: Cho đường tròn (O), dây AB. Gọi M là điểm chính giữa cung \widehat{AB} . Vẽ dây MC cắt dây AB tại D. Vẽ đường vuông góc với AB tại D, cắt OC tại K. $\triangle KCD$ là tam giác gì ?

BT9: Cho M, N, P, Q là bốn điểm tùy ý trên đường tròn (O). Các tiếp tuyến của (O) tại bốn điểm trên cắt nhau tạo thành tứ giác ABCD. Tính số đo tổng các góc $\angle AOB + \angle COD$?

BT10: Cho đường tròn (O), dây AB. Trên dây AB lấy D rồi nối D với C trên đường tròn (C khác A, B; A, O, C không thẳng hàng). Các đường trung trực của AD và DC cắt nhau ở M. CMR: đường thẳng MO đi qua điểm chính giữa cung \widehat{AC} .

BT11: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn, lấy điểm S sao cho SA và SB lần lượt cắt nửa đường tròn tại M và N. Gọi H là giao điểm của AN và BM. Chứng minh:

- Tứ giác SMHN nội tiếp được trong một đường tròn.
- SH vuông góc với AB.

BÀI TẬP VỀ NHÀ

BT1: Cho hai đường tròn đồng tâm (O;R) và (O;2R). P là một điểm ngoài (O;2R). Vẽ đường tròn (P;PO) cắt đường tròn (O;2R) tại C và D, cắt đường tròn (O;R) ở E và F. OC và OD cắt (O;R) ở A và B. CMR:

- $CD \parallel EF$.
- PA và PB là hai tiếp tuyến của (O;R).

BT2: Cho hình thoi ABCD có cạnh AB = 5 cm và đường chéo AC = 8 cm. Đường tròn tâm A bán kính R = 5 cm tiếp xúc với đường tròn tâm C tại M thuộc đoạn AC. Đường tròn này cắt CB tại E và cắt CD tại F. Tính tỉ số độ dài của cung \widehat{BD} và cung \widehat{EF}

BT3: Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến MA và MB (A, B là tiếp điểm). Cho biết góc AMB bằng 40° .

- Tính góc AOB.
- Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với OA cắt MB tại N. Chứng minh tam giác OMN là tam giác cân.

BT4: Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Kẻ các tiếp tuyến Ax, By cùng phía với nửa đường tròn đối với AB. Từ điểm M trên nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba với đường tròn, nó cắt Ax và By lần lượt tại C và D.

- Chứng minh: Tam giác COD là tam giác vuông.
- Chứng minh: $MC \cdot MD = OM^2$.
- Cho biết $OC = BA = 2R$, tính AC và BD theo R.

BT5: Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Biết $\widehat{B} = 65^\circ$; $\widehat{C} = 102^\circ$. Tính số đo các góc A và D.

BT6: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên đường thẳng AB ta lấy một điểm M sao cho điểm B nằm giữa hai điểm A và M. Kẻ hai tiếp tuyến MN và MP với đường tròn (N, P là hai tiếp điểm).

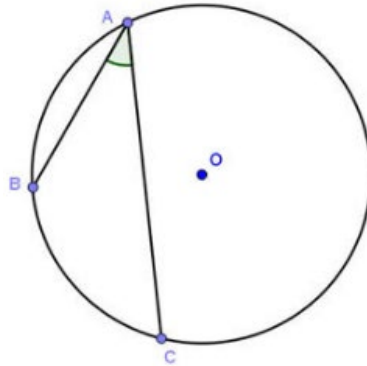
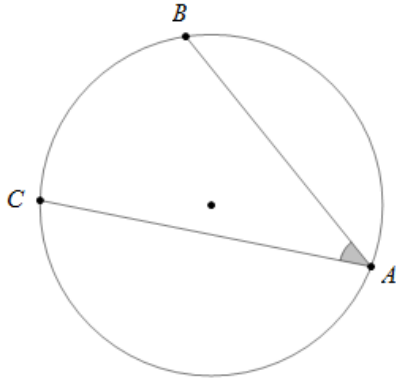
a) Chứng minh tứ giác MNOP nội tiếp.

b) Gọi H là giao điểm của NP và AB. Chứng minh $NP \perp AB$.

c) Chứng minh $OH \cdot MH = AH \cdot BH$

CHỦ ĐỀ 9: GÓC NỘI TIẾP.

A. LÝ THUYẾT.



+ Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó (\widehat{BAC} là góc nội tiếp chắn cung nhỏ \widehat{BC})

+ Cung nằm bên trong góc gọi là cung bị chắn (\widehat{BC} gọi là cung bị chắn).

2. Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng một nửa số đo của cung bị chắn.

3. Trong một đường tròn:

* Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.

$$\text{Nếu } \widehat{ABD} = \widehat{CBD} \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{CD} \Rightarrow AD = CD$$

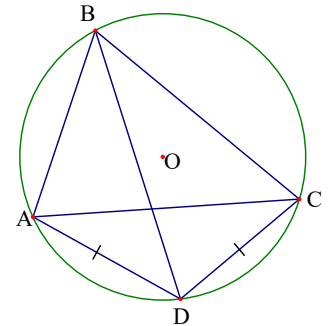
* Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.

$$\text{Trên hình vẽ: } sđ\widehat{ABD} = sđ\widehat{ACD} = \frac{1}{2}sđ\widehat{AD}.$$

$$\text{Trên hình vẽ: } AD = CD \Leftrightarrow sđ\widehat{AD} = sđ\widehat{CD} \Leftrightarrow sđ\widehat{ABD} = sđ\widehat{CAD}$$

* Góc nội tiếp có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.

* Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.



B/ BÀI TẬP VẬN DỤNG.

* **Để chứng minh tích độ dài đoạn thẳng bằng nhau cần chứng minh hai tam giác đồng dạng liên quan đến tích đó.**

* **Để chứng minh hai tam giác đồng dạng cần chứng minh**

+ Hai góc tương ứng của hai tam giác đó bằng nhau

+ Hai cặp cạnh của hai tam giác tương ứng tỉ lệ và góc xen giữa bằng nhau.

* **Để chứng minh hai góc bằng nhau ta cần chú ý:**

+ Xem góc cần chứng minh có phải là hai góc nội tiếp cùng chắn một cung, hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau (hai dây cung bằng nhau) trong một đường tròn.

+ Xem hai góc đó, mỗi góc bằng với góc nội tiếp nào và các góc nội tiếp đó có bằng nhau không

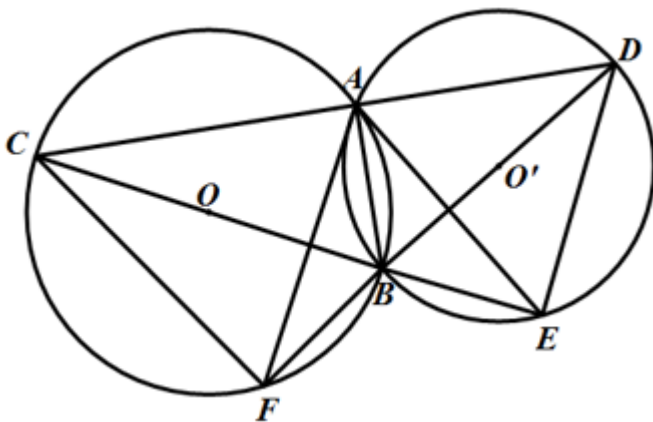
+ Xem hai góc đó có liên quan đến hai tam giác bằng nhau, góc có cạnh tương ứng vuông góc, góc sole trong, góc đồng vị không, góc của tam giác vuông...

I/ BÀI TẬP MẪU.

Bài 1: Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại A và B. Vẽ cát tuyến CAD vuông góc với AB. Tia CB cắt (O') tại E, tia BD cắt (O) tại F. Chứng minh rằng:

- $\angle CAF = \angle DAE$
- AB là tia phân giác của $\angle EAF$
- $CA \cdot CD = CB \cdot CE$
- $CD^2 = CB \cdot CE + BD \cdot CF$

Hướng dẫn



Vì $CD \perp AB \Rightarrow \angle CAB = 90^\circ$ Mà $\angle CAB = 1/2 \text{sđ } \widehat{BC} \Rightarrow \text{sđ } \widehat{BC} = 180^\circ$

Vậy ba điểm B, O, C thẳng hàng.

Chứng minh tương tự ta có B, O', D thẳng hàng.

a) Chứng minh $\angle CAF = \angle DAE$

Trong (O) ta có: $\angle CAF = \angle CBF$ (góc nội tiếp cùng chắn cung CF)

Trong (O') ta có: $\angle DAE = \angle DBE$ (góc nội tiếp cùng chắn cung DE)

Mà $\angle CBF = \angle DBE$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \angle CAF = \angle DAE$.

b) AB là tia phân giác của $\angle EAF$

Nối CF và DE ta có: $\angle CFB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

$\angle BED = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O'))

Xét $\triangle CFB$ và $\triangle DEB$ có:

$$\angle CFB = \angle BED = 90^\circ$$

$$\angle CBF = \angle DBE \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \angle FCB = \angle EDB$$

Mặt khác: $\angle FAB = \angle FCB$ (góc nội tiếp (O) cùng chắn cung FB)

$$\angle EAB = \angle EDB \text{ (góc nội tiếp (O') cùng chắn cung EB)}$$

$\Rightarrow \angle FAB = \angle EAB$ hay AB là phân giác của góc $\angle EAF$.

c) Chứng minh $CA \cdot CD = CB \cdot CE$

Xét $\triangle CAE$ và $\triangle CBD$ có:

$\angle C$ chung

$$\angle CEA = \angle BDA \text{ (góc nội tiếp (O') cùng chắn cung AB)}$$

$$\Rightarrow \triangle CAE \sim \triangle CBD \text{ (g.g)} \Rightarrow CA/CB = CE/CD \text{ hay } CA \cdot CD = CB \cdot CE \quad (1)$$

d) Chứng minh $CD^2 = CB \cdot CE + BD \cdot CF$

$$\text{Chứng minh tương tự câu c) ta có: } DA \cdot DC = DB \cdot DF \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$CA \cdot CD + DA \cdot DC = CB \cdot CE + DB \cdot DF$$

$$\Leftrightarrow (CA + DA)CD = CB \cdot CE + DB \cdot DF$$

$$\Leftrightarrow CD^2 = CB \cdot CE + DB \cdot DF$$

Bài 2: Cho đường tròn (O; R) và một điểm M bên trong đường tròn đó. Qua M kẻ hai dây cung AB và CD vuông góc với nhau (C thuộc cung nhỏ AB). Vẽ đường kính DE. Chứng minh rằng:

a) $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

b) Tứ giác ABEC là hình thang cân.

c) Tổng có giá trị không đổi khi M thay đổi vị trí trong đường tròn (O).

Hướng dẫn

a) Chứng minh $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

Xét $\triangle AMC$ và $\triangle DMB$ có:

$$\angle ACD = \angle ABD \text{ (góc nội tiếp cùng chắn cung AD)}$$

$$\angle AMC = \angle BMD = 90^\circ \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \triangle AMC \sim \triangle DMB \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow MA/MD = MC/MB \Rightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

b) Chứng minh tứ giác ABEC là hình thang cân.

Vì $\angle DCE = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow CD \perp CE$ $CD \perp AB$ (gt) $\Rightarrow AB \parallel CE$.

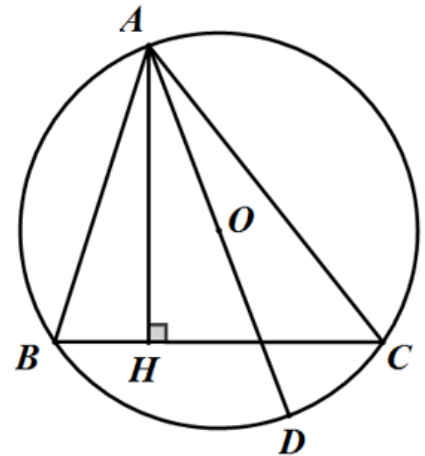
\Rightarrow Tứ giác ABEC là hình thang (1).

Mặt khác: CE và AB là hai dây song song của đường tròn (O)

chắn hai cung AC và BE

$\Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BE} \Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{BC} \Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{BAC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác ABEC là hình thang cân.



c) Tổng có giá trị không đổi khi M thay đổi vị trí trong đường tròn (O).

Ta có $\widehat{AE} = \widehat{BC}$ (cmt) $\Rightarrow EA = BC$.

Mặt khác: $\angle DAE = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 &= (MA^2 + MD^2) + (MB^2 + MC^2) \\ &= AD^2 + BC^2 = DE^2 = 4R^2 \text{ không đổi} \end{aligned}$$

Bài 4: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và C là điểm chính giữa của cung AB. Lấy điểm M thuộc cung BC và điểm N thuộc tia AM sao cho $AN = BM$. Kẻ dây CD song song với AM.

a) Chứng minh $\triangle ACN = \triangle BCM$.

b) Chứng minh $\triangle CMN$ vuông cân.

c) Tứ giác ANCD là hình gì? Vì sao?

Hướng dẫn

a) Chứng minh $\triangle ACN = \triangle BCM$

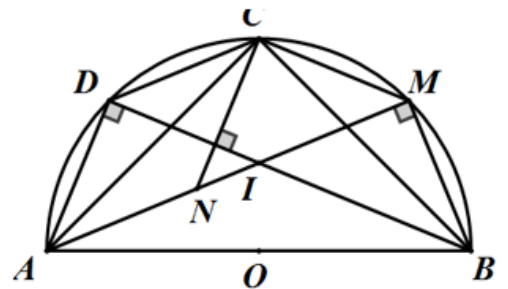
Xét $\triangle ACN$ và $\triangle BCM$ có:

$AC = BC$ (vì C là điểm chính giữa cung AB)

$\angle CAN = \angle CBN$ (góc nội tiếp cùng chắn cung CM)

$AN = BM$ (gt)

$\Rightarrow \triangle ACN = \triangle BCM$ (c.g.c)



b) Chứng minh $\triangle CMN$ vuông cân

Vì $\triangle ACN = \triangle BCM$ (chứng minh a) $\Rightarrow CN = CM \Rightarrow \triangle CMN$ cân tại C (1)

Lại có $\angle CMA = 1/2 \text{ số đo } \widehat{AC} = 1/2 \cdot 90^\circ = 45^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle CMN$ vuông cân tại C.

Vì $CD \parallel AM$ nên tứ giác ADCM là hình thang cân.

c) Tứ giác ANCD là hình gì? Vì sao?

Ta có: $\angle DAM = \angle CMN = \angle CNM = 45^\circ$

$\Rightarrow AD \parallel CN$. Vậy tứ giác ADCN là hình bình hành.

Bài 5: Cho ΔABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). M là một điểm bất kỳ thuộc cung nhỏ AC. Tia AM cắt BC tại N. Chứng minh rằng:

a) $AB^2 = AM \cdot AN$

b) $\angle ACM = \angle ANC$

Hướng dẫn

a) Chứng minh $AB^2 = AM \cdot AN$

Vì ΔABC cân tại A $\Rightarrow \angle ABC = \angle ACB$

Lại có $\angle ACB = \angle AMB$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

$\Rightarrow \angle ABN = \angle AMB$

Do đó: $\Delta ABM \sim \Delta ANB$ (g.g) $\Rightarrow AB/AN = AM/MB$

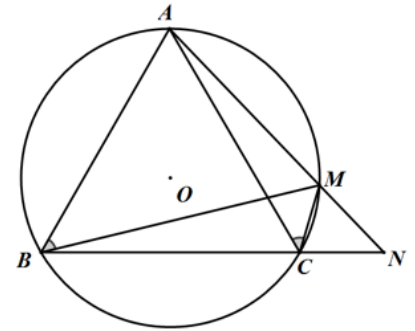
$\Rightarrow AB^2 = AN \cdot AM$

b) Chứng minh $\angle ACM = \angle ANC$

Vì $\Delta ABM \sim \Delta ANB \Rightarrow \angle ABM = \angle ANB$

Mà $\angle ABM = \angle ACM$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AM)

Do đó: $\angle ACM = \angle ANC$



Bài 6: Cho ΔABC có AD là tia phân giác trong của góc A. Qua D kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC ở E và đường thẳng song song với AC cắt AB ở F.

a) Tứ giác AEDF là hình gì? Vì sao?

b) Đường tròn đường kính AD cắt AB và AC lần lượt tại các điểm M và N. Chứng minh: $MN \parallel EF$.

Hướng dẫn

a) Chứng minh được Tứ giác AEDF là hình thoi.

b) Chứng minh: $MN \parallel EF$.

ΔABC có AD là tia phân giác trong của góc A

$\Rightarrow \angle BAD = \angle CAD$

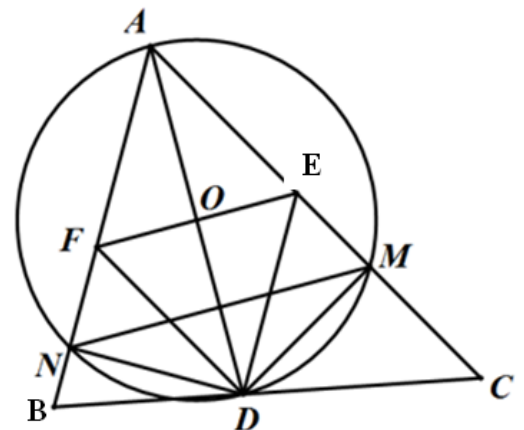
$\Rightarrow \widehat{MD} = \widehat{ND} \Rightarrow \angle DAC = \angle MND$ (hai góc nội tiếp chắn

hai cung bằng nhau)

Lại có: $\angle AND = 90^\circ$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \angle DAN + \angle ADN = 90^\circ \Rightarrow \angle MND + \angle ADN = 90^\circ$

$\Rightarrow MN \parallel AD$



Vì tứ giác AEDF là hình thoi nên $EF \perp AD \Rightarrow MN \parallel EF$

Bài 7: Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc trong với nhau tại A, $(R > R')$. Qua điểm B bất kỳ trên (O') vẽ tiếp tuyến với (O') cắt (O) tại hai điểm M và N, AB cắt (O) tại C. Chứng minh rằng:

- $MN \perp OC$
- AC là tia phân giác của $\angle MAN$

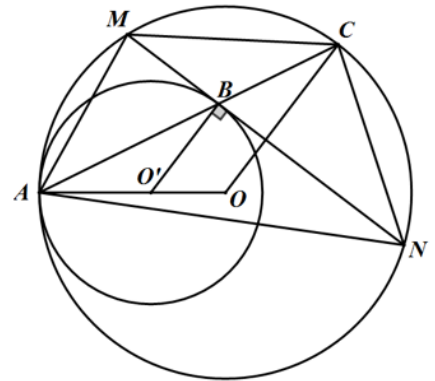
Hướng dẫn

a) Chứng minh $MN \perp OC$

Vì $\Delta O'AB$ cân tại O' nên $\angle O'AB = \angle O'BA$
 $\Rightarrow \Delta OAC$ cân tại O nên $\angle OAC = \angle OCA$
 $\Rightarrow \angle O'BA = \angle OCA$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị
 $\Rightarrow O'B \parallel OC$.

Mặt khác MN là tiếp tuyến của (O') tại B $\Rightarrow O'B \perp MN$.

Do đó $OC \perp MN$



b) Chứng minh AC là tia phân giác của $\angle MAN$

Trong đường tròn (O) : $\Rightarrow OC$ là đường trung trực của $MN \Rightarrow CM = CN$

$\Rightarrow \widehat{CM} = \widehat{CN} \Rightarrow \angle MAC = \angle NAC$ Hay AC là tia phân giác của $\angle MAN$.

Bài 8: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và C là điểm chính giữa cung AB. M là điểm bất kỳ trên cung BC, kẻ $CH \perp AM$.

a) Chứng minh ΔHCM vuông cân và OH là tia phân giác của $\angle COM$

b) Gọi I là giao điểm của OH với BC và D là giao điểm của MI với nửa đường tròn (O) . Chứng minh $MC \parallel BD$.

Hướng dẫn

a) Chứng minh ΔHCM vuông cân và OH là tia phân giác của $\angle COM$

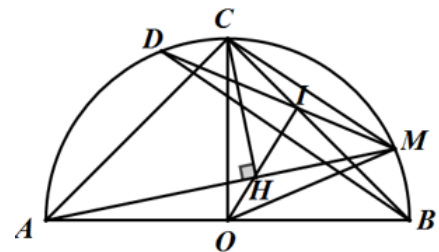
Vì C là điểm chính giữa của cung AB

$$\Rightarrow \angle CMA = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{AC} = 45^\circ$$

$\Rightarrow \Delta HCM$ vuông cân tại H $\Rightarrow CH = HM$

Dễ thấy $\Delta COH = \Delta MOH$ (c.c.c) $\Rightarrow \angle COH = \angle MOH$

Vậy OH là tia phân giác của $\angle COM$



b) Chứng minh $MC \parallel BD$.

Dễ thấy $\Delta COI = \Delta MOI$ (c.g.c) nên $CI = MI \Rightarrow \Delta CMI$ cân tại M.

Do đó $\angle CMI = \angle MCI$.

Lại có $\angle CMD = \angle CBD$ (góc nội tiếp cùng chắn cung CD)

Suy ra $\angle MCB = \angle CBD$, mà hai góc này ở vị trí so le trong

$\Rightarrow MC \parallel BD$.

Bài 9: Qua điểm M nằm trong đường tròn (O) kẻ hai dây AB và CD vuông góc với nhau. Chứng minh rằng:

a) Đường cao MH của tam giác AMD đi qua trung điểm I của BC.

b) Đường trung tuyến MI của $\triangle BMC$ vuông góc với AD.

Hướng dẫn

a) Chứng minh Đường cao MH của tam giác AMD đi qua trung điểm I của BC

Ta có $\angle ADC = \angle ABC$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC) (1)

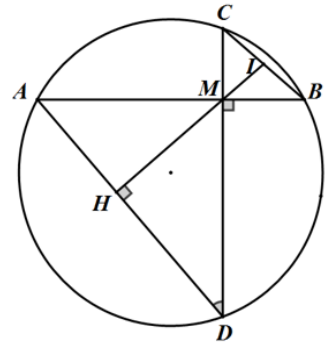
Lại có $\angle AMH = \angle ADM$ (cùng phụ với góc $\angle MAD$)

Mà $\angle AMH = \angle IMB$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \angle ADM = \angle IMB$ (2)

Do đó $IM = IB$.

Chứng minh tương tự ta có: $IM = IC$ Suy ra $IB = IC = IM$

$\Rightarrow I$ là trung điểm của BC.



b) Học sinh tự chứng minh.

Bài 10: Cho AB và CD là hai đường kính vuông góc với nhau của đường tròn (O; R). Qua điểm M thuộc cung nhỏ AC ($M \neq A, M \neq C$) kẻ tiếp tuyến với đường tròn cắt AB, CD lần lượt tại E, F.

a) Chứng minh: $\angle MFO = 2 \cdot \angle MBO$

b) Xác định vị trí điểm M trên cung nhỏ AC sao cho $\angle FEO = 30^\circ$. Khi đó tính độ dài đoạn thẳng OE, ME, EF theo R.

OE, ME, EF theo R.

Hướng dẫn

a) Chứng minh: $\angle MFO = 2 \cdot \angle MBO$

Ta có: $\angle MOA = 2 \angle MBO$ (cùng chắn cung MA)

Vì EF là tiếp tuyến với (O) tại M nên $OM \perp EF$

Ta có $\angle MOA = \angle EFO$ (cùng phụ với góc $\angle FEO$)

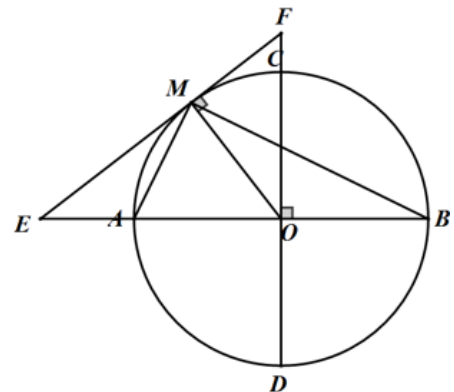
Suy ra $\angle EFO = 2 \angle MBO$

b) Tính độ dài đoạn thẳng OE, ME, EF theo R.

Ta có: $\angle FEO = 30^\circ \Leftrightarrow \angle MOA = 60^\circ \Leftrightarrow \triangle AOM$ đều nên $AM = OA = R$.

Vậy nếu $M \in (O)$ và $AM = R$ thì $\angle FEO = 30^\circ$

Khi đó $\triangle OME$ vuông tại M nên $ME = MO \cdot \tan \angle MOA = \sqrt{3} R$; $OE = 2MO = 2R$



Vì $\triangle EOF$ vuông tại O nên $\cos \angle FEO = EO/EF \Rightarrow EF = EO/\cos \angle FEO = 2R / \cos 30^\circ = 4R\sqrt{3}/3$

II/ LUYỆN TẬP.

Bài 1 : Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Tia phân giác của góc A cắt đường tròn tại M . Tia phân giác của góc ngoài tại đỉnh A cắt đường tròn tại N . Chứng minh rằng :

- Tam giác MBC cân.
- Ba điểm M, O, N thẳng hàng.

Bài 2 : Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . M là điểm tùy ý trên nửa đường tròn (M khác A và B). Kẻ $MH \perp AB$ ($H \in AB$). Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn (O) vẽ hai nửa đường tròn tâm O_1 đường kính AH và tâm O_2 đường kính BH . MA và MB cắt hai nửa đường tròn (O_1) và (O_2) lần lượt tại P và Q .

- Chứng minh $MH = PQ$.
- Chứng minh hai tam giác MPQ và MBA đồng dạng.
- Chứng minh PQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O_1) và (O_2)

Bài 3 : Cho $\triangle ABC$ đều, đường cao AH . M là điểm bất kỳ trên đáy BC . Kẻ $MP \perp AB$ và $MQ \perp AC$. Gọi O là trung của AM .

- Chứng minh năm điểm A, P, M, H, Q cùng nằm trên một đường tròn.
- Tứ giác $OPHQ$ là hình gì? chứng minh.
- Xác định vị trí của M trên BC để PQ có độ dài nhỏ nhất.

Bài 4 : Cho đường tròn (O) đường kính AB . Lấy điểm M trên đường tròn (M khác A và B) sao cho $MA < MB$. Lấy MA làm cạnh vẽ hình vuông $MADE$ (E thuộc đoạn thẳng MB). Gọi F là giao điểm của DE và AB .

- Chứng minh $\triangle ADF$ và $\triangle BMA$ đồng dạng.
- Lấy C là điểm chính giữa cung AB (không chứa M). Chứng minh $CA = CE = CB$
- Trên đoạn thẳng MC lấy điểm I sao cho $CI = CA$. Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AMB .

Bài 5 : Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$ và điểm C nằm ngoài nửa đường tròn. CA cắt nửa đường tròn ở M , CB cắt nửa đường tròn ở N . Gọi H là giao điểm của AN và BM .

- Chứng minh $CH \perp AB$.
- Gọi I là trung điểm của CH . Chứng minh MI là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O)
- Giả sử $CH = 2R$. Tính số đo cung \widehat{MN} .

Bài 6 : Trên cung nhỏ BC của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC lấy một điểm P tùy ý . Gọi Q là giao điểm của AP và BC

a) Chứng minh $BC^2 = AP \cdot AQ$.

b) Trên AP lấy điểm M sao cho $PM = PB$. Chứng minh $BP + PC = AP$.

c) Chứng minh $\frac{1}{PQ} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}$.

Bài 7: Cho (O), đường kính AB, điểm D thuộc đường tròn. Gọi E là điểm đối xứng với A qua D.

a) Tam giác ABE là tam giác gì ?

b) Gọi K là giao điểm của EB với (O). Chứng minh rằng $OD \perp AK$.

Bài 8: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A, B, O nằm trên (O'). Dây AC của (O) cắt (O') ở D, dây OE của (O') cắt (O) ở F. Chứng minh :

a) $OD \perp BC$.

b) Điểm F cách đều ba cạnh của tam giác ABE.

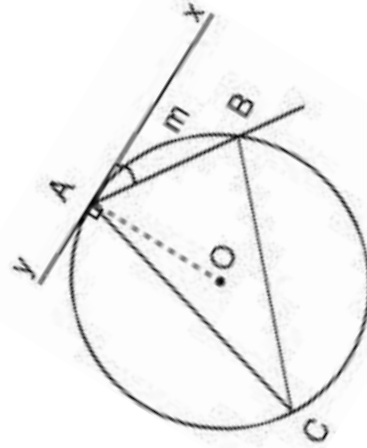
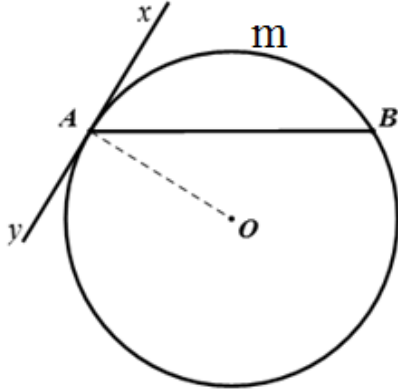
Bài 9: Cho hai đường thẳng song song. Một đường tròn tiếp xúc với một đường thẳng tại A và cắt đường thẳng kia tại B, C. Trên đường tròn lấy một điểm D (không trùng A, B, C). Chứng minh rằng A cách đều hai đường thẳng BD và CD.

Bài 10: MA và MB là hai tiếp tuyến của (O). Vẽ (M;MA), C là một điểm nằm trên cung AB của (M) (cung AB nằm trong đường tròn (O)). Tia AC, BC cắt (O) ở P, Q. Chứng minh rằng : P và Q đối xứng với nhau qua O.

Bài 11: Trên cạnh CD của hình vuông ABCD ta lấy một điểm M khác C, D. Các đường tròn đường kính CD và AM cắt nhau tại điểm thứ hai N (khác D). Tia DN cắt BC tại P. Chứng minh rằng: $AC \perp PM$.

CHỦ ĐỀ 10: GÓC TẠO BỞI TIẾP TUYẾN VÀ DÂY.

1. Định nghĩa



Cho xy là tiếp tuyến tại A với đường tròn (O) .

Góc $\angle BAx$ có đỉnh A nằm trên đường tròn, **cạnh Ax là một tia tiếp tuyến** còn **cạnh kia chứa dây cung AB** . Góc $\angle BAx$ được gọi là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung.

Dây AB căng hai cung. Cung nằm bên trong góc là cung bị chắn.

Trên hình vẽ, góc $\angle BAx$ có cung bị chắn là cung nhỏ AB (hay \widehat{AmB}), góc $\angle BAy$ có cung bị chắn là cung lớn AB (hay \widehat{AcB})

2. Số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo của cung bị chắn.

$$\widehat{xAB} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{AmB} \quad \text{Hoặc} \quad \widehat{yAB} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{AcB}$$

3. Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

$$\widehat{xAB} = \widehat{ACB} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{AmB}$$

B/ BÀI TẬP VẬN DỤNG.

I/ BÀI TẬP MẪU.

Bài 1: Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O) , ($AB < AC$). Trên tia đối của tia BC lấy điểm M sao cho $MA^2 = MB \cdot MC$. Chứng minh rằng: MA là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

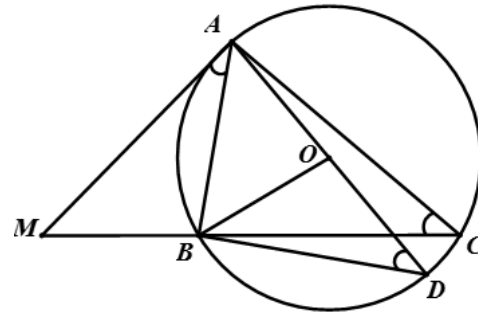
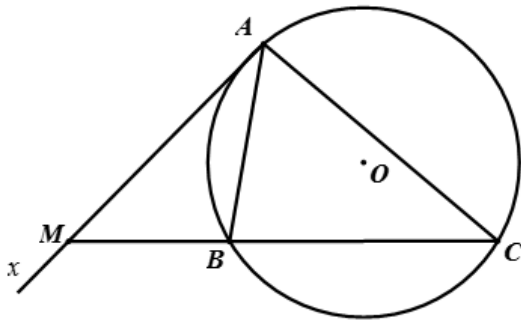
Hướng dẫn

$$\text{Vi } MA^2 = MB \cdot MC \Rightarrow MA/MB = MC/MA$$

Xét ΔMAC và ΔMBA có: $\angle M$ chung

$$MA/MB = MC/MA$$

$$\Rightarrow \Delta MAC \sim \Delta MBA \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \angle MAB = \angle MCA \quad (1)$$



Kẻ đường kính AD của (O). Ta có $\angle ACB = \angle ADB$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

Mà $\angle MAB = \angle MCA$ (chứng minh trên) Suy ra $\angle MAB = \angle ADB$ (2)

Lại có $\angle ABD = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \angle BAD + \angle BDA = 90^\circ$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $\angle BAD + \angle MAB = 90^\circ$ hay $\angle MAO = 90^\circ \Rightarrow OA \perp MA$

Do $A \in (O) \Rightarrow MA$ là tiếp tuyến của (O).

Bài 2: Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với (O) tại A và B. Qua A vẽ đường thẳng song song với MB cắt đường tròn tại C. Nối C với M cắt đường tròn (O) tại D. Nối A với D cắt MB tại E. Chứng minh rằng:

a) $\triangle ABE \sim \triangle BDE$; $\triangle MEA \sim \triangle DEM$.

b) E là trung điểm của MB.

Hướng dẫn

a) Chứng minh $\triangle ABE \sim \triangle BDE$; $\triangle MEA \sim \triangle DEM$.

Xét $\triangle ABE$ và $\triangle BDE$ có:

$\angle E$ chung

$\angle BAE = \angle DBE$ (góc nội tiếp và góc giữa tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung BD)

$\Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle BDE$ (g.g)

Vì $AC \parallel MB$ nên $\angle ACM = \angle CMB$ (so le trong)

Mà $\angle ACM = \angle MAE$ (góc nội tiếp và góc giữa tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung AD)

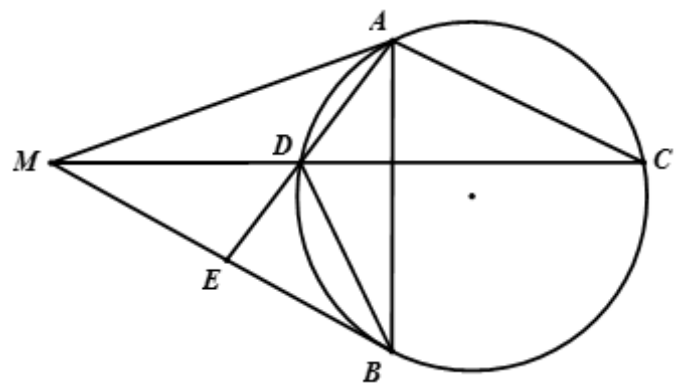
Suy ra: $\angle CMB = \angle MAE$

Xét $\triangle MEA$ và $\triangle DEM$ có:

$\angle E$ chung

$\angle MAE = \angle CMD$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \triangle MEA \sim \triangle DEM$ (g.g)



b) Chứng minh E là trung điểm của MB

Theo chứng minh a) ta có: $\Delta ABE \sim \Delta BDE \Rightarrow AE/BE = BE/DE \Rightarrow EB^2 = AE.DE$

$\Delta MEA \sim \Delta DEM \Rightarrow ME/DE = EA/EM \Rightarrow ME^2 = DE.EA$

Do đó $EB^2 = EM^2$ hay $EB = EM$.

Vậy E là trung điểm của MB.

Bài 3: Cho điểm C thuộc nửa đường tròn (O) đường kính AB. Từ điểm D thuộc đoạn AO kẻ đường thẳng vuông góc với AO cắt AC và BC lần lượt tại E và F. Tiếp tuyến C với nửa đường tròn cắt EF tại M và cắt AB tại N.

a) Chứng minh M là trung điểm của EF.

b) Tìm vị trí của điểm C trên đường tròn (O) sao cho ΔACN cân tại C.

Hướng dẫn

a) Chứng minh M là trung điểm của EF

Ta có $\angle MCA = 1/2 \text{ số } \widehat{AC}$ (góc giữa tiếp tuyến và dây cung chắn cung AC) (1)

Lại có $\angle MEC = \angle AED = 90^\circ - \angle EAD = 90^\circ - 1/2 \text{ số } \widehat{BC} = 1/2 \text{ số } \widehat{AC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\angle MCE = \angle MEC$

Vậy ΔMEC cân tại M, suy ra $MC = ME$.

Chứng minh tương tự ta có $MC = MF$.

Suy ra $ME = MF$ hay M là trung điểm của EF.

b) Tìm vị trí của điểm C trên đường tròn (O) sao cho ΔACN cân tại C.

ΔACN cân tại C khi và chỉ khi $\angle CAN = \angle CNA$

Vì MN là tiếp tuyến với (O) tại C nên $OC \perp MN$

$\Rightarrow \angle CNA = 90^\circ - \angle COB = 90^\circ - 2.\angle CAN$

Do đó:

$\angle CAN = \angle CNA \Leftrightarrow \angle CAN = 90^\circ - 2.\angle CAN \Leftrightarrow 3\angle CAN = 90^\circ$

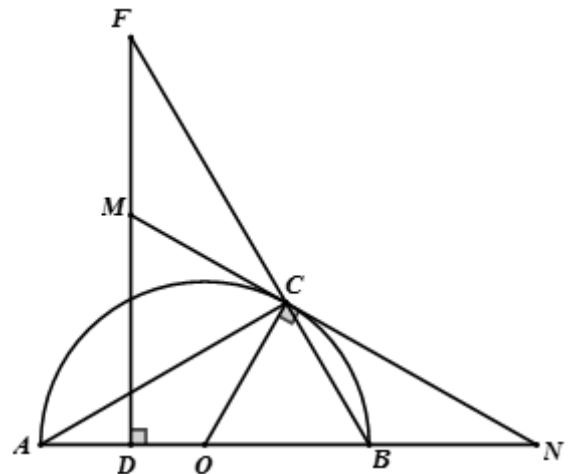
$\Rightarrow \angle CAN = 30^\circ \Rightarrow \text{Số } \widehat{BC} = 60^\circ$

Vậy ΔACN cân tại C khi C nằm trên nửa đường tròn (O) sao cho $\text{Số } \widehat{BC} = 60^\circ$.

Bài 4: Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Gọi M là một điểm thay đổi trên tiếp tuyến Bx của (O). Nối AM cắt (O) tại N. Gọi I là trung điểm của AN.

a) Chứng minh: $\Delta AIO \sim \Delta BMN$; $\Delta OBM \sim \Delta INB$

b) Tìm vị trí của điểm M trên tia Bx để diện tích ΔAIO có giá trị lớn nhất.



Hướng dẫn

a) Chứng minh: $\Delta AIO \sim \Delta BMN$; $\Delta OBM \sim \Delta INB$

Vì I là trung điểm của AN $\Rightarrow OI \perp AN \Rightarrow \angle AIO = \angle ANB = 90^\circ$

Do Bx là tiếp tuyến với (O) tại B

$\Rightarrow \angle NBM = \angle IAO = 1/2 \text{ số đo } \widehat{BN}$

$\Rightarrow \Delta AIO \sim \Delta BMN$ (g.g)

Vì $\angle OIM = \angle OBM = 90^\circ$

\Rightarrow các điểm B, O, I, M cùng thuộc đường tròn đường kính MO

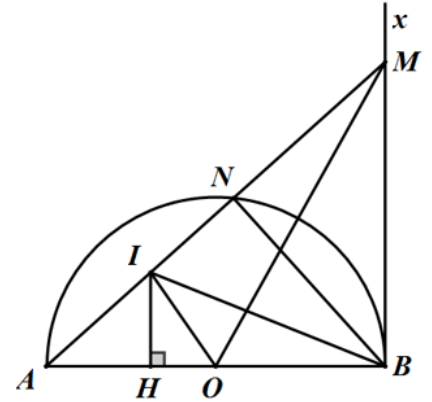
suy ra $\angle BOM = \angle BIN$

Xét ΔOBM và ΔINB có:

$$\angle OBM = \angle INB$$

$$\angle BOM = \angle BIN$$

$\Rightarrow \Delta OBM \sim \Delta INB$ (g.g)



b) Tìm vị trí của điểm M trên tia Bx để diện tích ΔAIO có giá trị lớn nhất

Kẻ $IH \perp AO$ ta có: $S_{\Delta AIO} = 1/2 AO.IH$

Vì AO không đổi nên $S_{\Delta AIO}$ lớn nhất $\Leftrightarrow IH$ lớn nhất.

Nhận thấy: Khi M chuyển động trên tia Bx thì I chạy trên nửa đường tròn đường kính AO.

Do đó IH lớn nhất khi IH là bán kính của đường tròn

$\Rightarrow \Delta AIO$ vuông cân tại I nên $\angle IAH = 45^\circ$.

$\Rightarrow \Delta ABM$ vuông cân tại B nên $BM = BA = 2R$

Vậy khi M thuộc Bx sao cho $BM = 2R$ thì $S_{\Delta AIO}$ lớn nhất.

Bài 5: Cho đường tròn (O; R) và dây AB, gọi I là trung điểm của dây AB. Trên tia đối của tia BA lấy điểm M. Kẻ hai tiếp tuyến MC, MD với đường tròn, (C, D \neq (O)).

a) Chứng minh rằng: Năm điểm O, I, C, M, D cùng nằm trên một đường tròn.

b) Gọi N là giao điểm của tia OM với (O). Chứng minh rằng N là tâm đường tròn nội tiếp.

Hướng dẫn

a) Chứng minh rằng: Năm điểm O, I, C, M, D cùng nằm trên một đường tròn.

Vì MC, MD là các tiếp tuyến tại C, D với đường tròn (O)

$\Rightarrow \angle OCM = \angle ODM = 90^\circ$ (1)

Mặt khác I là trung điểm của dây AB nên $OI \perp AB$ hay $\angle OIM = 90^\circ$ (2)

Từ (1), (2) suy ra 5 điểm M, C, D, O, I cùng thuộc đường tròn đường kính OM.

b) Chứng minh rằng N là tâm đường tròn nội tiếp

Vì MC, MD là các tiếp tuyến của (O)

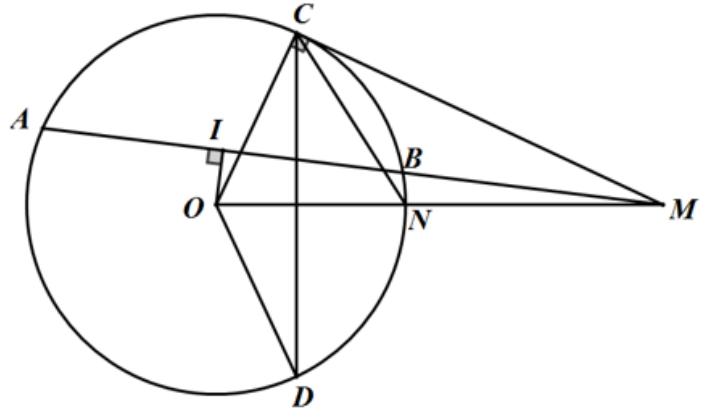
\Rightarrow MO là phân giác của $\angle CMD$ (3)

Mà: $\angle DCN = \angle NCM = 1/2 \text{ số đo } \widehat{CN}$

Suy ra CN là phân giác của $\angle DCM$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra N là giao điểm các đường phân giác trong của $\triangle CMD$

\Rightarrow N là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle CMD$



II/ LUYỆN TẬP.

Bài 1 : Từ một điểm M cố định ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ một tiếp tuyến MT (T là tiếp điểm) và một cát tuyến MAB của đường tròn đó .

a) Chứng minh : $MT^2 = MA \cdot MB$

b) Trường hợp cát tuyến MAB đi qua tâm O . Cho $MT = 20 \text{ cm}$, và cát tuyến dài nhất cùng xuất phát từ M bằng 50cm. Tính bán kính R của đường tròn (O) .

Bài 2: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Trên tia đối của tia AB lấy một điểm M . Vẽ tiếp tuyến MC với nửa đường tròn . Gọi H là hình chiếu của C trên AB .

a) Chứng minh rằng CA là tia phân giác của góc MCH .

b) Giả sử $MA = a$, $MC = 2a$. Tính AB và CH theo a .

Bài 3: Cho đường tròn (O_1) tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại A . Đường kính AB của đường tròn (O) cắt đường tròn (O_1) tại điểm thứ hai C khác A . Từ B vẽ tiếp tuyến BP với đường tròn (O_1) cắt đường tròn (O) tại Q . Chứng minh AP là phân giác của góc \widehat{QAB}

Bài 4: Cho hai đường tròn tâm O , O_1 tiếp xúc ngoài nhau tại A . Trên đường tròn (O) lấy hai điểm phân biệt B , C khác A. Các đường thẳng BA , CA cắt đường tròn (O_1) tại P và Q . Chứng minh $PQ \parallel BC$.

Bài 5: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và $(AB < AC)$. Đường tròn (I) đi qua B và C , tiếp xúc với AB tại B cắt đường thẳng AC tại D . Chứng minh rằng : $OA \perp BD$.

Bài 6 : Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$, dây AC và tia tiếp tuyến Bx nằm trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn . Tia phân giác của góc CAB cắt dây BC tại F , cắt nửa đường tròn tại H , cắt Bx ở D.

a) Chứng minh $FB = DB$ và $HF = HD$

b) Gọi M là giao điểm của AC và Bx . Chứng minh $AC \cdot AM = AH \cdot AD$

c) Tính tích $AF \cdot AH + BF \cdot BC$ theo bán kính R của đường tròn (O)

Bài 7 : Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O . Phân giác góc BAC cắt đường tròn (O) ở M . Tiếp tuyến kẻ từ M với đường tròn cắt các tia AB và AC lần lượt ở D và E . Chứng minh :

a) $BC \parallel DE$

b) ΔAMB và ΔMCE đồng dạng , ΔAMC và ΔMDB đồng dạng.

c) Nếu $AC = CE$ thì $MA^2 = MD \cdot ME$

Bài 8 : Cho hai đường tròn (O) và (O_1) ở ngoài nhau . Đường nối tâm OO_1 cắt các đường tròn (O) và (O_1) tại các điểm A, B, C, D theo thứ tự trên đường thẳng . Kẻ tiếp tuyến chung ngoài EF ($E \in (O), F \in (O_1)$) . Gọi M là giao điểm của AE và DF , N là giao điểm của EB và FC . Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $MENF$ là hình chữ nhật .

b) $MN \perp AD$

c) $ME \cdot MA = MF \cdot MD$

Bài 9: Cho tam giác ABC vuông ở A nội tiếp đường tròn tâm O đường kính 5cm . Tiếp tuyến với đường tròn tại C cắt tia phân giác của góc ABC tại K . BK cắt AC tại D và $BD = 4\text{cm}$. Tính độ dài BK .

CHỦ ĐỀ 11: GÓC CƠ ĐỈNH BÊN TRONG ĐƯỜNG TRÒN. GÓC CƠ ĐỈNH BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN.

A/ KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

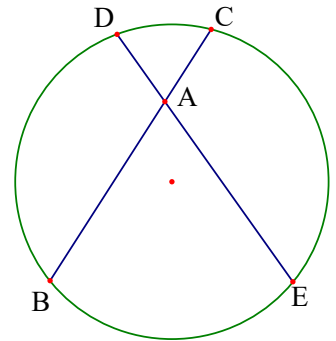
*) Với đỉnh A nằm trong đường tròn (O) là giao điểm của hai dây của đường tròn

\Rightarrow Ta có góc \widehat{BAE} ; \widehat{BAD} là các góc có đỉnh bên trong đường tròn.

Số đo của góc này bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn giữa hai cạnh của góc và các tia đối của hai cạnh đó.

$$+ \text{sđ}\widehat{BAE} = \frac{\text{sđ}\widehat{BE} + \text{sđ}\widehat{CD}}{2}.$$

$$+ \text{sđ}\widehat{BAD} = \frac{\text{sđ}\widehat{BD} + \text{sđ}\widehat{CE}}{2}$$

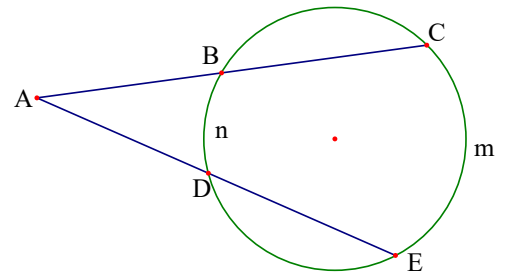


*) Với đỉnh A nằm ở ngoài đường tròn (O) là giao điểm của đường kéo dài của hai dây của đường tròn

\Rightarrow Ta có \widehat{CAE} (hoặc \widehat{BAD}) là góc có đỉnh bên ngoài đường tròn.

Số đo góc nằm ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.

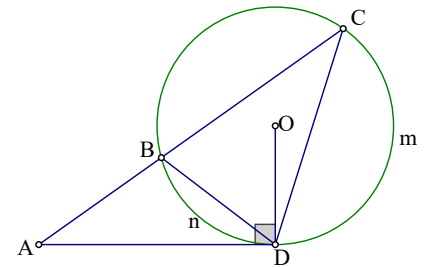
$$\text{sđ}\widehat{CAE} = \frac{1}{2} \left(\text{sđ}\widehat{EmC} - \text{sđ}\widehat{BnD} \right)$$



* Cần lưu ý đến các trường hợp sau:

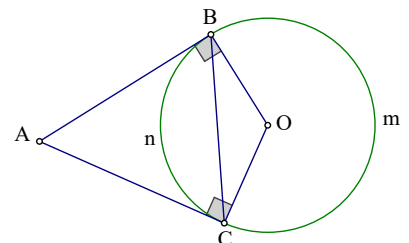
+ Với đỉnh A nằm ngoài đường tròn (O) . AD là tiếp tuyến của (O) , qua A vẽ một cát tuyến cắt đường tròn tại B, C thì:

$$\widehat{CAD} = \frac{1}{2} \left(\text{sđ}\widehat{CmD} - \text{sđ}\widehat{BnD} \right)$$



+ Với Với đỉnh A nằm ngoài đường tròn (O) . AB, AC là 2 tiếp tuyến của (O) , (A, B là các tiếp điểm) thì:

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \left(\text{sđ}\widehat{BmC} - \text{sđ}\widehat{BnC} \right)$$



B/ BÀI TẬP VẬN DỤNG.

I. BÀI TẬP MẪU.

Bài 1: Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) . Vẽ phân giác trong AD của góc A ($D \neq (O)$). Lấy điểm E thuộc cung nhỏ AC . Nối BE cắt AD và AC lần lượt tại I và K , nối DE cắt AC tại J . Chứng minh rằng:

a) $\angle BID = \angle AJE$.

b) $AI \cdot JK = IK \cdot EJ$.

Hướng dẫn

a) Ta có $\angle BID$ là góc có đỉnh nằm bên trong đường tròn (O) chắn hai cung BD và cung AE

$$\widehat{BID} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{BD} + \text{sđ}\widehat{AE})$$

$\angle AJE$ là góc có đỉnh nằm bên trong đường tròn (O) chắn hai cung CD và AE

$$\widehat{AJE} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{CD} + \text{sđ}\widehat{AE})$$

Mà AD là phân giác của góc A nên $\widehat{BD} = \widehat{CD}$

Suy ra $\angle BID = \angle AJE$

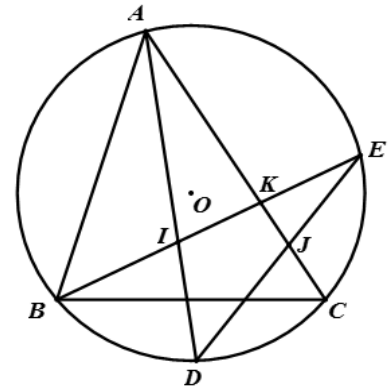
b) Xét ΔAIK và ΔEJK có:

+) $\angle AKI = \angle EKJ$ (đối đỉnh)

+) $\angle IAK = \angle KEJ$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau BD và cung CD)

Do đó $\Delta AIK \sim \Delta EJK$ (g.g)

$$\Rightarrow AI/EJ = IK/JK \Rightarrow AI \cdot JK = IK \cdot EJ$$



Bài 2: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại 2 điểm A, B sao cho $O \neq (O')$. Lấy điểm M thuộc đường tròn (O') , M ở trong đường tròn (O) . Tia AM và BM cắt đường tròn (O) lần lượt tại C và D . Chứng minh rằng:

a) $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ (Cung nhỏ của đường tròn (O))

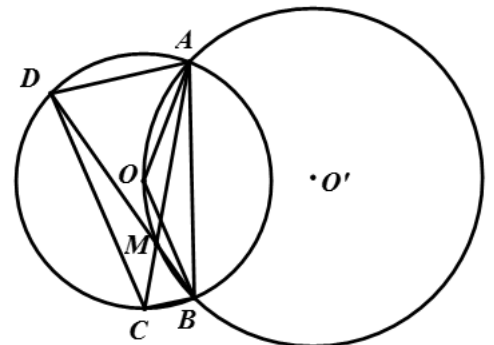
b) Tứ giác $ABCD$ là hình thang cân.

Hướng dẫn

a) Vì $\angle AMB$ là góc có đỉnh nằm bên trong đường tròn (O) chắn

hai cung AB và CD nên: $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AB} + \text{sđ}\widehat{CD})$

Mặt khác: $\angle AMB = \angle AOB$ (hai góc nội tiếp (O') cùng chắn cung AB lớn)



$\angle AOB = \text{sđ } \widehat{AB}$ (góc ở tâm đường tròn (O)).

$$\frac{1}{2}(\text{sđ } \widehat{AB} + \text{sđ } \widehat{CD}) = \text{sđ } \widehat{AB} \Rightarrow \text{sđ } \widehat{AB} = \text{sđ } \widehat{CD} \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

b) Trong đường tròn (O):

$$\widehat{DAC} = \frac{1}{2}\text{sđ } \widehat{CD} ; \widehat{ACB} = \frac{1}{2}\text{sđ } \widehat{AB}$$

$$\text{Mà } \widehat{AB} = \widehat{CD} \Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{ACB}$$

Vì hai góc này ở vị trí so le trong,

suy ra $AD \parallel BC$ (1)

Theo câu a), ta có: $\angle ADC = \angle DAB$ (2 góc chắn 2 cung bằng nhau) (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác ABCD là hình thang cân.

Bài 3: Cho ΔABC đều nội tiếp đường tròn (O). Điểm I chuyển động trên cung nhỏ BC. AB cắt CI tại M, AC cắt BI tại N. Chứng minh rằng:

a) $BC^2 = BM.CN$

b) $\angle AIN$ có số đo không đổi.

Hướng dẫn

a) Vì ΔABC đều nên: $\text{sđ } \widehat{AB} = \text{sđ } \widehat{BC} = \text{sđ } \widehat{AC} = 120^\circ$

Ta có: $\angle ANB$ là góc có đỉnh ngoài đường tròn (O) nên:

$$\widehat{ANB} = \frac{1}{2}(\text{sđ } \widehat{AB} - \text{sđ } \widehat{CI}) = 60^\circ - \frac{1}{2}\text{sđ } \widehat{CI}$$

Lại có: $\widehat{BCI} = \frac{1}{2}\text{sđ } \widehat{BI}$ (góc nội tiếp (O) chắn cung BI)

$$= \frac{1}{2}(\text{sđ } \widehat{BC} - \text{sđ } \widehat{CI}) = 60^\circ - \frac{1}{2}\text{sđ } \widehat{CI}$$

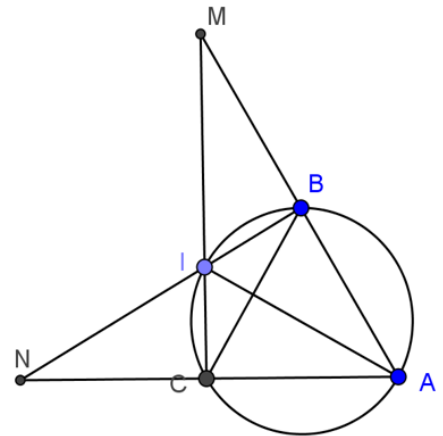
Suy ra $\angle ANB = \angle BCI$ (1)

Tương tự ta có: $\angle AMC = \angle CBI$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\Delta BCM \sim \Delta CNB$ (g-g) $\Rightarrow BC/NC = BM/BC \Rightarrow BC^2 = BM.NC$

b) Ta có: $\angle AIB = \angle ACB = 60^\circ$

$$\Rightarrow \angle AIN = 180^\circ - \angle AIB = 120^\circ \text{ không đổi}$$



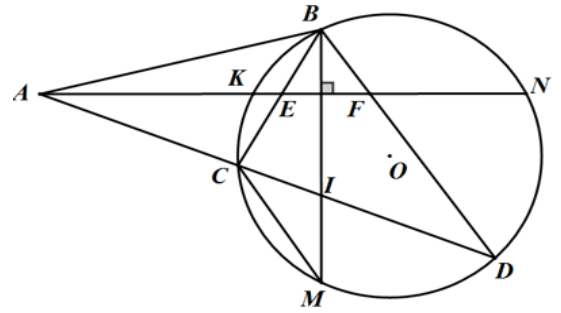
Bài 4: Qua điểm A nằm ngoài đường tròn (O) vẽ tiếp tuyến AB và cát tuyến ACD với đường tròn (C nằm giữa A và D). Vẽ dây BM vuông góc với tia phân giác của $\angle BAC$, BM cắt CD tại I. Chứng minh rằng:

a) BM là tia phân giác của

b) $MD^2 = MI.MB$

Hướng dẫn

Giả sử tia phân giác của $\angle BAC$ cắt BC tại E, cắt BD tại E và cắt đường tròn (O) tại K.



a) Ta có:

$$\widehat{A_1} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{BN} - \text{sđ}\widehat{BK}) \quad \widehat{A_2} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{DN} - \text{sđ}\widehat{CK})$$

Mà $\angle A_1 = \angle A_2$ (gt)

$$\Rightarrow \text{sđ}\widehat{BN} - \text{sđ}\widehat{BK} = \text{sđ}\widehat{DN} - \text{sđ}\widehat{CK} \Leftrightarrow \text{sđ}\widehat{BN} + \text{sđ}\widehat{CK} = \text{sđ}\widehat{DN} + \text{sđ}\widehat{BK}$$

$$\Leftrightarrow \angle BEF = \angle BFE$$

$\Rightarrow \triangle BEF$ cân tại B.

Mà BM là đường cao của $\triangle BEF$

Suy ra BM là tia phân giác của $\angle CBD$

b) Vì BM là phân giác của $\angle CBD$

$$\widehat{CM} = \widehat{MD} \Rightarrow \widehat{MDC} = \widehat{MBD}$$

Do đó: $\triangle MDI \sim \triangle MBD$ (g.g)

$$\Rightarrow MD^2 = MI.MB$$

II/ LUYỆN TẬP.

Bài 1: Cho đường tròn (O) và dây cung AB, CD cắt nhau tại điểm E nằm ngoài đường tròn. Đường thẳng kẻ từ E song song với AD cắt BC tại F. Kẻ tiếp tuyến FG với đường tròn (O). Chứng minh rằng:

a) $2\widehat{EFC} = \text{sđ}\widehat{AB} + \text{sđ}\widehat{CD}$

b) $\triangle FEC \sim \triangle FBE$, từ đó suy ra $EF^2 = FB.FC$

Bài 2: Cho hai đường tròn (O) và (O') ở ngoài nhau. Đường thẳng OO' cắt (O) và (O') lần lượt tại các điểm A, B, C, D. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài EF của hai đường tròn ($E \neq (O), F \neq (O')$). Gọi M là giao điểm của AE và DF, N là giao điểm của EB và DC. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác MENF là hình chữ nhật.

b) $MN \perp AD$

c) $ME.MA = MF.MD$.

Bài 3: Trên đường tròn (O; R) đặt liên tiếp các dây cung: $AB = BC = CD < R$. AB cắt CD tại E. Tiếp tuyến tại B và D với đường tròn (O) cắt nhau tại F. Chứng minh rằng:

a) $\triangle EBC \sim \triangle FBD$

b) $\triangle EBF \sim \triangle CBD$

c) $BC \parallel EF$.

Bài 4: Cho tứ giác ABCD có A, B, C, D nằm trên đường tròn (O); AB và CD cắt nhau tại M; AD và BC cắt nhau tại N.

a) Tính số đo các góc của tứ giác ABCD nếu $\angle AMD = 30^\circ$ và $\angle BND = 40^\circ$.

b) Hai phân giác của góc M và góc N cắt nhau tại I. Chứng minh rằng $IM \perp IN$

Bài 5: Cho đường tròn tâm O và điểm M ngoài đường tròn đó. Từ M kẻ tiếp tuyến MA và cát tuyến MBC đến đường tròn (B nằm giữa M và C). Phân giác của góc \widehat{BAC} cắt BC ở D, cắt đường tròn ở E. Chứng minh:

a) $MD = MA$

b) $AD \cdot AE = AC \cdot AB$

Bài 6: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Các tia phân giác của các góc A và B cắt nhau ở I và cắt đường tròn theo thứ tự ở D và E. Chứng minh rằng:

a) $\triangle BDI$ là tam giác cân.

b) DE là đường trung trực của IC.

c) $IF \parallel BC$ (F là giao điểm của DE và AC).

Bài 7: Cho đường tròn tâm O và điểm S ở ngoài đường tròn. Từ S kẻ hai tiếp tuyến SA và SD và cát tuyến SBC tới đường tròn (B ở giữa S và C).

a) Phân giác của góc \widehat{BAC} cắt dây cung BC ở M. Chứng minh $SA = SM$.

b) AM cắt đường tròn ở E. Gọi G là giao điểm của OE và BS; F là giao điểm của AD với BC.

Chứng minh $SA^2 = SG \cdot SF$.

c) Biết $SB = a$; Tính SF khi $BC = \frac{2a}{3}$

Bài 8: Từ điểm M ở ngoài đường tròn (I) kẻ hai tiếp tuyến ME và MF (E và F là hai tiếp điểm). Kẻ dây EG của đường tròn (I) song song MF. Gọi H là giao điểm của MG với (I) và K là giao điểm của EH với MF.

a) Chứng minh $KF^2 = KE \cdot KH$.

b) Chứng minh K là trung điểm của MF.

Bài 9: Cho đường tròn (O) đường kính EF và điểm G nằm trên đường tròn (O) sao cho $EG > GF$. Trên tia GF lấy điểm H sao cho $GH = GE$. Vẽ hình vuông EIGH có đường chéo GI cắt (O) tại K.

a) Chứng minh $\triangle KFH$ cân.

b) Tiếp tuyến tại E với đường tròn (O) cắt FK ở M. Chứng minh ba điểm M, I, H thẳng hàng

Bài 10: Cho tứ giác ABCD có A, B, C, D nằm trên đường tròn (O). Các tia AB và DC cắt nhau tại E, các tia CB và DA cắt nhau tại F. Hai phân giác của các góc \widehat{E} và \widehat{F} cắt nhau tại K. Chứng minh rằng : $\widehat{EKF} = 90^\circ$.

Bài 11: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O. điểm D di chuyển trên cung AC. Gọi E là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng :

a) $\widehat{AFB} = \widehat{ABD}$

b) Tích AE . BF không đổi .

Bài 12: Trên đường tròn (O) lấy ba điểm A, B và C. Gọi M, N và P theo thứ tự là điểm chính giữa của các cung AB, BC và AC. BP cắt AN tại I, NM cắt AB tại E. Gọi D là giao điểm của AN và BC. Chứng minh rằng :

a) $\triangle BNI$ cân .

b) $AE \cdot BN = EB \cdot AN$.

c) $EI \parallel BC$

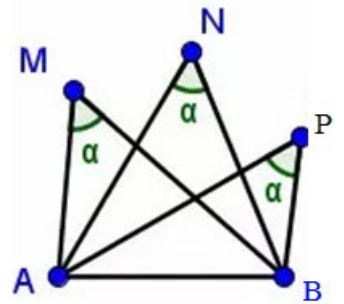
d) $\frac{AN}{BN} = \frac{AB}{BD}$

CHỦ ĐỀ 12: CUNG CHỨA GÓC.

A/ KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1/ Cung chứa góc.

* Nếu các điểm (ví dụ M, N, P) nằm cùng phía đối với đoạn thẳng AB và cùng nhìn AB dưới một góc bằng nhau $\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = \widehat{APB} = \alpha$ thì ta nói các điểm này thuộc cùng một cung chứa góc α dựng trên đoạn AB.



2/ Bài toán quỹ tích.

* Để chứng minh một điểm M chạy trên một cung tròn cố định (Tìm quỹ tích điểm M)

Bước 1: Dự đoán điểm M sẽ chạy trên cung tròn dựng trên đoạn thẳng Cố Định nào.

Bước 2: Xem đoạn cố định (ví dụ đoạn AB) là dây cung của đường tròn nào đã biết, từ đó chỉ ra góc nội tiếp có số đo không đổi chắn cung AB. Hoặc tìm một điểm N cố định với \widehat{ANB} có số đo không đổi.

Bước 3: Chứng minh \widehat{AMB} bằng số đo của góc không đổi.

=> Điểm M thuộc cung chứa góc không đổi dựng trên đoạn AB

* Để hoàn thiện một bài Toán tìm quỹ tích điểm ta cần chứng minh phần thuận và phần đảo.

+ Phần thuận: Mọi điểm có tính chất T đều thuộc hình H.

+ Phần đảo: Mọi điểm thuộc hình H đều có tính chất T.

+ Kết luận: Quỹ tích (hay tập hợp) các điểm có tính chất T là hình H.

B/ BÀI TẬP VẬN DỤNG.

I/ BÀI TẬP MẪU.

Bài 1: Cho ΔABC có cạnh BC cố định và $\angle A = \alpha$ không đổi ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$). Tìm quỹ tích tâm I của đường tròn nội tiếp ΔABC

Hướng dẫn giải

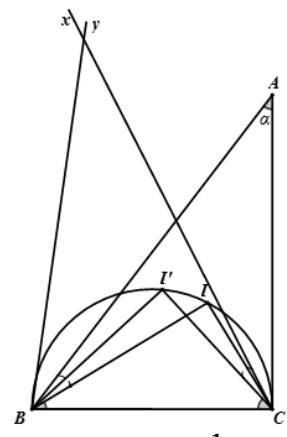
* Phần thuận:

Vì I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC nên BI là phân giác của $\angle B$

=> $\angle IBC = 1/2 \angle ABC$

CI là phân giác $\angle ACB$, do đó: $\angle ICB = 1/2 \angle ACB$

Suy ra: $\angle IBC + \angle ICB = 90^\circ - \alpha$



Trong ΔBCI có $\angle BIC = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB)$
 $= 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}\alpha) = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$

\Rightarrow Điểm I nhìn đoạn thẳng BC cố định dưới một góc $90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$

\Rightarrow I thuộc cung chứa góc $90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$ dựng trên đoạn thẳng BC (trên cùng một nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A).

* Phần đảo:

Lấy I' thuộc cung chứa góc $90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$ nói trên.

Vẽ các tia Bx và Cy sao cho BI' là tia phân giác của $\angle CBy$ và CI' là tia phân giác của góc $\angle BCx$.

Hai tia By và Cx cắt nhau tại A' .

Vì I' thuộc cung chứa góc $90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$ dựng trên đoạn BC nên: $\angle BI'C = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$

Do đó: $\angle I'BC + \angle I'CB = 180^\circ - \angle BIC = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$

Vì BI' là phân giác của $\angle A'BC$ và CI' là phân giác của $\angle A'CB$

$\Rightarrow \angle A'BC + \angle A'CB = 2(\angle I'BC + \angle I'CB) = 180^\circ - \alpha$

Mặt khác I' là giao điểm các tia phân giác của $\angle A'BC$ và $\angle A'CB$

$\Rightarrow I'$ là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta A'BC$

* Kết luận: Quỹ tích tâm I của đường tròn nội tiếp ΔABC là cung chứa góc $90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$ dựng trên đoạn BC.

Bài 2: Cho đường tròn (O) và điểm A cố định nằm trong đường tròn. Một đường thẳng d quay quanh điểm A cắt đường tròn (O) tại hai điểm M và N. Tìm quỹ tích trung điểm I của MN.

Hướng dẫn giải

* Phần thuận:

Vì I là trung điểm của dây MN suy ra $OI \perp MN$

$\Rightarrow \angle OIA = 90^\circ$

Vì điểm I nhìn đoạn OA cố định dưới góc 90° nên I nằm trên đường tròn đường kính OA.

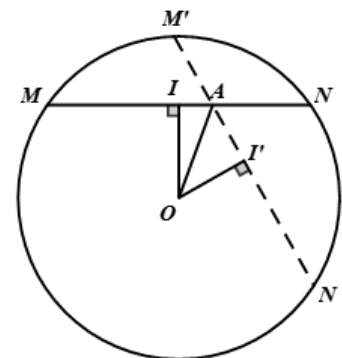
* Phần đảo:

Lấy điểm I' bất kỳ thuộc đường tròn đường kính OA.

Nối AI' cắt đường tròn (O) tại M' và N'

Vì I' thuộc đường tròn đường kính OA nên $\angle OI'A = 90^\circ$ hay $OI' \perp M'N'$

$\Rightarrow I'$ là trung điểm của $M'N'$ (theo quan hệ giữa đường kính và dây cung)



* Kết luận: Quỹ tích trung điểm I của MN là đường tròn đường kính OA.

Bài 3: Dựng ΔABC biết $BC = 8\text{cm}$; $\angle A = 60^\circ$ và trung tuyến $AM = 5\text{cm}$.

Hướng dẫn giải

* Phân tích:

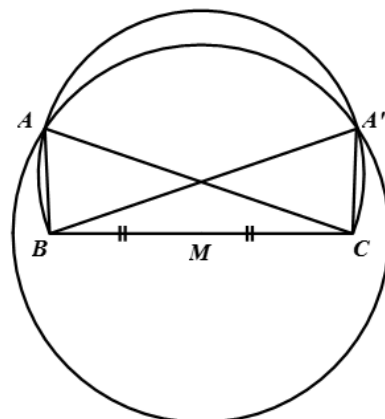
Giả sử đã dựng được ΔABC thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Vì $\angle BAC = 60^\circ$

$\Rightarrow A$ thuộc cung tròn chứa góc 60° dựng trên đoạn BC .

Lại có: $AM = 5\text{cm}$

$\Rightarrow A$ thuộc đường tròn tâm M , bán kính 5cm .



* Cách dựng:

Dựng đoạn thẳng $BC = 8\text{cm}$. Xác định trung điểm M của BC .

Dựng cung chứa góc 60° trên đoạn thẳng BC .

Dựng đường tròn tâm M , bán kính 5cm . Gọi giao điểm của cung chứa góc và đường tròn (M , 5cm) là A và A' .

Ta có hai tam giác ABC và $A'BC$ đều thỏa mãn đề bài.

* Chứng minh:

Vì A thuộc cung chứa góc 60° dựng trên đoạn BC nên $\angle A = 60^\circ$

Lại có: A thuộc đường tròn (M , 5cm) nên $AM = 5\text{cm}$.

$BC = 8\text{cm}$ theo cách dựng.

* Biện luận: Bài toán luôn có nghiệm hình.

Bài 4: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB , có C là điểm chính giữa của cung AB . M là một điểm chuyển động trên cung BC . Lấy điểm N thuộc đoạn AM sao cho $AN = MB$. Vẽ tiếp tuyến Ax với nửa đường tròn; D là điểm thuộc Ax sao cho $AD = AB$.

a) Chứng minh rằng ΔMNC vuông cân.

b) Chứng minh rằng $DN \perp AM$

c) Tìm quỹ tích điểm N .

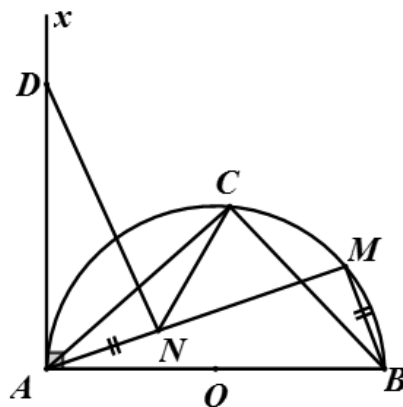
Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\Delta ANC = \Delta BMC$ (c.g.c)

Do đó: $CN = CM$

Lại có: $\angle CMA = 1/2 \text{Sđ}AC = 1/2 \cdot 90^\circ = 45^\circ$

Từ (1) và (2) suy ra ΔMNC vuông cân tại C .



b) Xét $\triangle AND$ và $\triangle BMA$ có:

$$AD = AB$$

$$\angle DAN = \angle ABM$$

$$AN = BM \text{ (gt)}$$

$\Rightarrow \triangle AND = \triangle BMA$ (c-g-c) do đó $\angle AND = \angle BMA$.

Mà $\angle BMA = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra $\angle AND = 90^\circ$ hay $DN \perp AM$.

c) Tìm quỹ tích điểm N.

* Phần thuận:

Vì $\angle AND = 90^\circ$ N nhìn đoạn AD cố định dưới một góc 90°

\Rightarrow N thuộc đường tròn đường kính AD.

Giới hạn: Nếu $M \equiv A$ thì $N \equiv C$, nếu $M \equiv C$ thì $N \equiv A$ do đó quỹ tích điểm N là cung nhỏ AN của đường tròn đường kính AD (cung này thuộc nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng Ax có chứa nửa đường tròn (O)).

* Phần đảo: Học sinh tự chứng minh.

II/ LUYỆN TẬP.

Bài 1: Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$ và dây MN có độ dài bằng bán kính (M thuộc cung AN). Các tia AM và BN cắt nhau ở I . Các dây AN và BM cắt nhau ở K .

a) Tính \widehat{MIN} và \widehat{AKB} .

b) Tìm quỹ tích điểm I và quỹ tích điểm K khi dây MN thay đổi vị trí .

c) Chứng minh I là trực tâm của tam giác KAB .

d) AB và IK cắt nhau tại H . Chứng minh $HA.HB = HI.HK$.

e) Với vị trí nào của dây MN thì tam giác IAB có diện tích lớn nhất ? Tính giá trị diện tích lớn nhất đó theo R .

Bài 2: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB , C là điểm chính giữa của cung AB . M là một điểm chuyển động trên cung CB . Gọi H là hình chiếu của C trên AM . Các tia OH và BM cắt nhau tại I . Tìm quỹ tích các điểm I .

Bài 3: Cho đường tròn (O) có đường kính AB cố định . Một điểm C chạy trên đường tròn . Kẻ CD vuông góc với AB . Trên OC đặt một đoạn $OM = CD$. Tìm quỹ tích các điểm M .

Bài 4: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB , M là một điểm chuyển động trên nửa đường tròn đó . Vẽ hình vuông BMDC ở ngoài tam giác AMB . Tiếp tuyến tại B của nửa đường tròn cắt CD ở E .

a) Chứng minh $AB = BE$.

b) Tìm quỹ tích các điểm C .

Bài 5: Cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi (I) là đường tròn nội tiếp tam giác . M ,N là các tiếp điểm trên các cạnh AC , BC . Gọi H là giao điểm của AI và MN . Chứng minh rằng điểm H thuộc đường tròn đường kính BI .

Bài 6: Cho hình bình hành ABCD . Tia phân giác của góc D cắt các đường thẳng AB , BC theo thứ tự ở I , K . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIK . Chứng minh rằng :

a) $OB \perp IK$

b) Điểm O nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Bài 7: Cho đường tròn tâm O đường kính AB cố định , M là một điểm chạy trên đường tròn . Trên tia đối của tia MA lấy điểm I sao cho $MI = 2MB$. Tìm tập hợp các điểm I khi M chạy trên đường tròn (O) .

CHỦ ĐỀ 13: TỨ GIÁC NỘI TIẾP

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Một tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (gọi tắt là tứ giác nội tiếp). Đường tròn được gọi là đường tròn ngoại tiếp tứ giác.

2. Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện bằng .

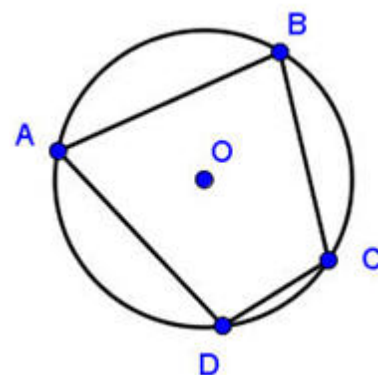
3. Nếu trong một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.

4. Nếu một tứ giác lồi có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.

5. Chú ý:

+ Chứng minh 4 điểm cùng thuộc một đường tròn tức là chứng minh tứ giác nội tiếp.

+ Chứng minh 5 điểm cùng thuộc một đường tròn tức là chứng minh hai tứ giác (có chung 3 điểm) cùng nội tiếp.



B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

I/ BÀI TẬP MẪU.

Bài 1: Cho ΔABC nhọn, các đường cao AD , BE , CF cắt nhau tại H . Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $BCEF$ nội tiếp.

b) $HA.HD = HB.HE = HC.HF$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ$

\Rightarrow các điểm E, F cùng thuộc đường tròn đường kính BC hay tứ giác $BCEF$ nội tiếp.

b) Vẽ đường tròn đường kính BC . Xét ΔBHF và ΔCHE có:

+) $\angle EBF = \angle ECF$ (hai góc nội tiếp cùng chắn).

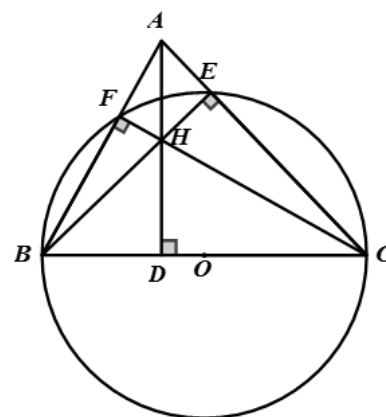
+) $\angle FHB = \angle EHC$ (đối đỉnh).

Suy ra $\Delta BHF \sim \Delta CHE$ (g.g)

$$BH/CH = HF/HE \text{ hay } HB.HE = HC.HF \quad (1)$$

Chứng minh tương tự ta có: $HA.HD = HB.HE$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $HA.HD = HB.HE = HC.HF$.



Bài 2: Cho ΔABC nhọn, đường cao AH . Các điểm M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB, AC . Chứng minh rằng:

a) $AM \cdot AB = AN \cdot AC$.

b) Tứ giác $BMNC$ nội tiếp.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\angle AMH = \angle ANH = 90^\circ$ (gt)

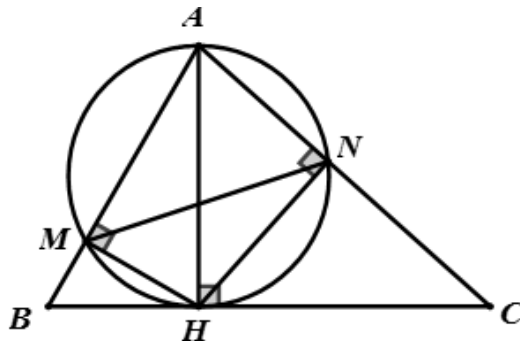
\Rightarrow các điểm M, N cùng thuộc đường tròn đường kính AH .

$\Rightarrow \angle AMN = \angle AHN$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AN)

Mặt khác: $\angle AHN = \angle ACH$

Do đó $\Delta AMN \sim \Delta ACB$ (g.g)

$\Rightarrow AM/AC = AN/AB$ hay $AM \cdot AB = AN \cdot AC$.



b) Theo chứng minh câu a) ta có:

$\angle AMN = \angle ACH$

Suy ra $\angle BMN + \angle ACH = \angle BMN + \angle AMN = 180^\circ$

Vậy tứ giác $BMNC$ nội tiếp.

Bài 3: Cho tam giác ABC có góc. Các điểm O, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng bốn điểm B, O, I, C cùng thuộc một đường tròn.

Hướng dẫn giải

Gọi D là giao điểm khác của A của đường thẳng AI với đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

Ta có: $\angle BID = \angle IAB + \angle ABI = 1/2 \angle A + 1/2 \angle B$

$\angle CID = \angle IAC + \angle ACI = 1/2 \angle A + 1/2 \angle C$

Do đó: $\angle BIC = \angle BID + \angle CID$

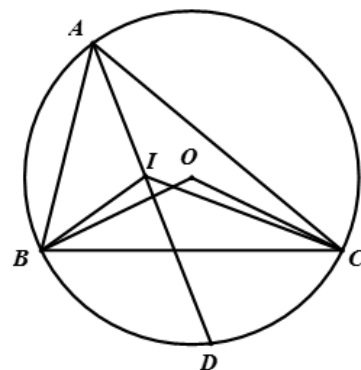
$= 1/2 \angle A + 1/2 \angle B + 1/2 \angle C + 1/2 \angle A = 1/2 \angle A + 90^\circ$

Mặt khác: $\angle BOC = 2\angle A = 120^\circ$.

Do đó hai điểm I và O cùng nhìn đoạn BC dưới những góc bằng nhau.

Ngoài ra hai điểm I và O cùng thuộc nửa mặt phẳng chứa A , bờ BC .

Do đó B, I, O, C cùng thuộc một đường tròn.



Bài 4: Cho tam giác ABC nhọn có $\angle A > \angle B > \angle C$. Đường tròn nội tiếp tâm I tiếp xúc với cạnh AB, AC tại M và N. Gọi P và Q lần lượt là các giao điểm của CI, BI với đường thẳng MN. Chứng minh rằng:

- a) Tứ giác INQC nội tiếp.
- b) Tứ giác BPQC nội tiếp.

Hướng dẫn giải

a) Vì đường tròn (I) tiếp xúc với AB, AC tại M và N nên $AM = AN$

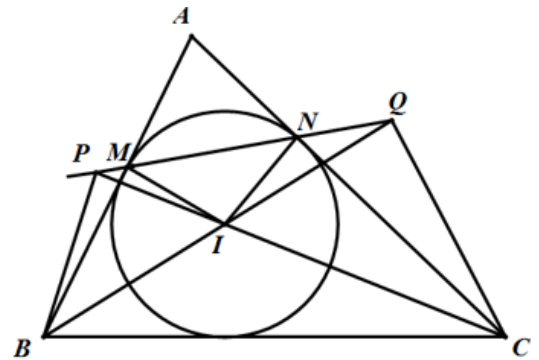
$\Rightarrow \Delta AMN$ cân tại A.

Ta có: $\angle CNQ = \angle ANM$ (đối đỉnh)

$$= (180^\circ - \angle A)/2 = (\angle B + \angle C)/2$$

$$= \angle IBC + \angle ICB = \angle CIQ$$

Tứ giác INQC có hai điểm liên tiếp I và N cùng nhìn cạnh QC dưới các góc bằng nhau nội tiếp được một đường tròn.



b) Vì INQC là tứ giác nội tiếp nên $\angle INC = \angle IQC$

Vì AC tiếp xúc với đường tròn (I) tại N nên $IN \perp AC$ hay $\angle INC = 90^\circ$

$$\Rightarrow \angle IQC = \angle BQC = 90^\circ \quad (1)$$

Chứng minh tương tự câu a) ta có tứ giác IMPB nội tiếp

$$\Rightarrow \angle IMB = \angle IPB = 90^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\angle BPC = \angle BQC = 90^\circ$

\Rightarrow tứ giác BPQC nội tiếp đường tròn đường kính BC.

Bài 5: Cho hình bình hành ABCD có $\angle BAD = 90^\circ$, có tâm là O. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của C lên BD, AD, AB. Chứng minh bốn điểm M, N, P, O cùng thuộc một đường tròn.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\angle CPA = \angle CNA = 90^\circ$ (gt)

\Rightarrow tứ giác ANCP nội tiếp đường tròn (O) đường kính AC.

Suy ra $\angle PON = 2\angle PCN$

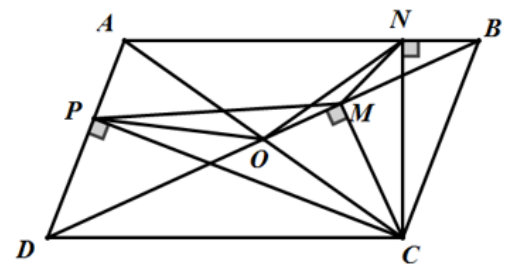
Lại có: $\angle PCN + \angle NAP = 180^\circ$

$$\Rightarrow \angle PCN = 180^\circ - \angle NAP = \angle ABC \text{ (do } AD \parallel BC)$$

$$\text{Do đó } \angle PON = 2\angle ABC \quad (1)$$

Mặt khác $\angle PMN = 180^\circ - (\angle PMB + \angle NMD)$

Mà tứ giác CDN M nội tiếp đường tròn đường kính CD



$$\Rightarrow \angle NMD = \angle NCD = 90^\circ - \angle CDN = 90^\circ - \angle ABC$$

Lại có tứ giác BCMP nội tiếp đường tròn đường kính BC

$$\Rightarrow \angle PMB = \angle PCB = 90^\circ - \angle ABC$$

$$\Rightarrow \angle PCB = 180^\circ - (90^\circ - \angle ABC + 90^\circ - \angle ABC) = 2\angle ABC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\angle PON = \angle PMN$ do đó tứ giác POMN nội tiếp.

II/ LUYỆN TẬP.

Bài 1. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến Ax và dây AC bất kỳ. Tia phân giác của góc xAC cắt nửa đường tròn tại D, các tia AD và BC cắt nhau tại E.

a) Chứng minh $\triangle ABE$ cân.

b) Đường thẳng BD cắt AC tại K, cắt tia Ax tại F. Chứng minh tứ giác ABEF nội tiếp.

c) Cho $\widehat{CAB} = 30^\circ$. Chứng minh $AK = 2CK$.

Bài 2. Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AB; AC và cát tuyến AMN không đi qua tâm O. Gọi I là trung điểm MN.

a) Chứng minh $AB^2 = AM \cdot AN$

b) Chứng minh tứ giác ABIO nội tiếp.

c) Gọi D là giao điểm của BC và AI. Chứng minh $\frac{IB}{IC} = \frac{DB}{DC}$

Bài 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Phân giác trong của \widehat{BAC} cắt BC tại D và cắt đường tròn tại M. Phân giác ngoài tại A cắt đường thẳng BC tại E và cắt đường tròn tại N. Gọi K là trung điểm của DE. Chứng minh:

a) MN vuông góc với BC tại trung điểm của BC.

b) $\widehat{ABN} = \widehat{EAK}$

c) AK là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài 4. Cho ba điểm A, B, C nằm trên đường thẳng xy theo thứ tự đó. Vẽ đường tròn (O) đi qua B và C. Từ A vẽ hai tiếp tuyến AM và AN. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của BC và MN.

a) Chứng minh $AM^2 = AN^2 = AB \cdot AC$

b) Đường thẳng ME cắt đường tròn (O) tại I. Chứng minh $IN \parallel AB$

c) Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OEF nằm trên một đường thẳng cố định khi đường tròn (O) thay đổi.

Bài 5. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Điểm C nằm trên (O) mà $AC > BC$. Kẻ $CD \perp AB$ ($D \in AB$). Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt BC tại E. Tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) cắt AE tại M. OM cắt AC tại I. MB cắt CD tại K.

- Chứng minh M là trung điểm AE.
- Chứng minh $IK \parallel AB$.
- Cho $OM = AB$. Tính diện tích tam giác MIK theo R.

Bài 6. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Đường tròn đường kính BC cắt cạnh AB, AC lần lượt tại E và F; BF cắt EC tại H. Tia AH cắt đường thẳng BC tại N.

- Chứng minh tứ giác HFCN nội tiếp.
- Chứng minh FB là phân giác của \widehat{EFN} .
- Giả sử $AH = BC$. Tính số đo góc \widehat{BAC} của ΔABC .

(Trích đề thi tốt nghiệp và xét tuyển vào lớp 10- năm học 1999- 2000)

Bài 7. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên tia AB lấy điểm D nằm ngoài đoạn AB và kẻ tiếp tuyến DC với đường tròn (O) (C là tiếp điểm). Gọi E là chân đường vuông góc hạ từ A xuống đường thẳng CD và F là chân đường vuông góc hạ từ D xuống đường thẳng AC. Chứng minh:

- Tứ giác EFDA nội tiếp.
- AF là phân giác của \widehat{EAD} .
- Tam giác EFA và tam giác BDC đồng dạng.
- Các tam giác ACD và ABF có cùng diện tích.

(Trích đề thi tốt nghiệp và xét tuyển vào lớp 10- năm học 2000- 2001)

CHỦ ĐỀ 14: ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN. CUNG TRÒN.

DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN. HÌNH QUẠT TRÒN.

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I/ Độ dài đường tròn. Cung tròn

1. Độ dài C (chu vi) của một đường tròn bán kính R là $C = 2\pi R$

Nếu gọi d là độ dài đường kính của đường tròn ($d = 2R$) thì $C = \pi \cdot d$

Trong đó $\pi \approx 3,14$

2. Trên đường tròn bán kính R , độ dài L của một cung n° là: $L \approx \pi R n / 180$.

II/ Diện tích hình tròn, quạt tròn.

1. Diện tích S của một hình tròn bán kính R là: $S = \pi R^2$

2. Hình quạt tròn là một phần hình tròn giới hạn bởi một cung tròn và hai bán kính đi qua hai mút của cung đó. Diện tích hình quạt tròn bán kính R , cung n° là:

$$S_{\text{quạt}} = \pi R^2 n / 360 \text{ hay } S_{\text{quạt}} = L \cdot R / 2 \text{ (L là độ dài cung } n^\circ \text{ của hình quạt tròn)}$$

3. Hình viên phân là phần hình tròn giới hạn bởi một cung và dây căng cung ấy.

Diện tích hình viên phân bằng hiệu (hoặc tổng) diện tích của một hình quạt tròn và diện tích của một tam giác nếu góc ở tâm hình quạt nhỏ hơn 180° (hoặc lớn hơn 180°).

4. Hình vành khăn là phần hình tròn giới hạn bởi đường tròn đồng tâm

Diện tích hình vành khăn tạo bởi hai đường tròn đồng tâm bán kính R_1 và R_2 là:

$$S_{\text{vành khăn}} = \pi(R_1^2 - R_2^2).$$

B/ BÀI TẬP VẬN DỤNG.

I/ BÀI TẬP MẪU.

Bài 1: Tính độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác đều có cạnh 5cm.

Hướng dẫn giải

Giả sử ΔABC đều cạnh 5cm nội tiếp $(O; R)$.

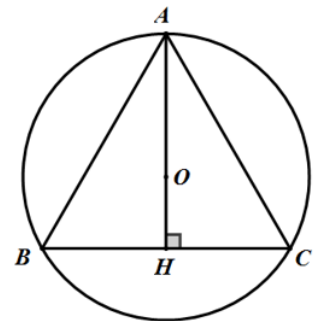
Nối OA cắt BC tại $H \Rightarrow AH \perp BC$ và H là trung điểm của BC .

ΔAHB vuông tại H nên: $AH^2 = AB^2 - BH^2 = 5^2 - (5/2)^2 = 75/4$

$$\Rightarrow AH = 5\sqrt{3}/2 \text{ (cm)}$$

Vì ΔABC đều có O là tâm đường tròn ngoại tiếp nên O cũng là trọng tâm của tam giác đó, do đó:

$$OA = 2/3 AH = 2/3 \cdot 5\sqrt{3}/2 \Rightarrow R = OA = 5\sqrt{3}/3$$



Độ dài đường tròn ngoại tiếp ΔABC là: $C = 2\pi R = 10\sqrt{5} \cdot \pi/3 \approx 54,39(\text{cm})$

Bài 2: Cho hai đường tròn đồng tâm O có bán kính lần lượt là $R_1 = 3\text{cm}$; $R_2 = 6\text{cm}$. Một dây AB của đường tròn $(O;R_1)$ tiếp xúc với đường tròn $(O;R_2)$ tại C .

- Tính độ dài cung nhỏ AB của đường tròn $(O;R_2)$.
- Tính độ dài đường tròn đường kính AB .

Hướng dẫn giải

a) Vì tiếp tuyến tại C với đường tròn $(O;R_1)$ nên $OC \perp AB$

Tam giác OAC vuông tại C có: $\cos \angle AOC = OC/OA = 1/2$

$\Rightarrow \angle AOC = 60^\circ \Rightarrow \angle AOB = 120^\circ$

Vậy độ dài cung AB của đường tròn $(O;R_2)$ là:

$$l = \pi R_2 \cdot \frac{120}{180} \approx 12,56 (\text{cm})$$

b) Vì tam giác OAC vuông tại C nên: $AC^2 = OA^2 - OC^2 = 36 - 9 = 27$

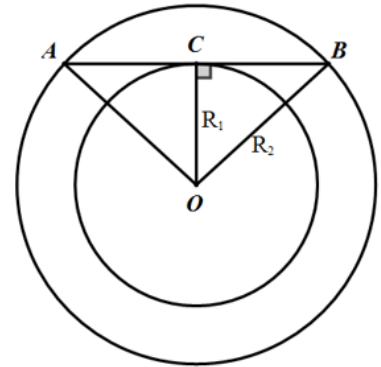
$\Rightarrow AC = 3\sqrt{3} (\text{cm})$

Trong đường tròn $(O;R_2)$ ta có: $OC \perp AB$

$\Rightarrow C$ là trung điểm của AB

\Rightarrow Đường tròn đường kính AB có tâm là C và bán kính $R = AC = 3\sqrt{3} (\text{cm})$.

Vậy độ dài của đường tròn đường kính AB là: $C = 2\pi R \approx 32,63(\text{cm}^2)$



Bài 1: Tính diện tích hình tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC đều cạnh a .

Hướng dẫn giải

Nối AO cắt BC tại H

Vì O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC nên O đồng thời là trực tâm, trọng tâm của tam giác ABC . Do đó:

$$AH \perp BC \text{ và } HB = HC = BC/2 = a/2$$

Xét tam giác vuông ABH vuông tại H có:

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = a^2 - (a/2)^2 = 3a^2/4$$

$$\Rightarrow AH = a\sqrt{3}/2$$

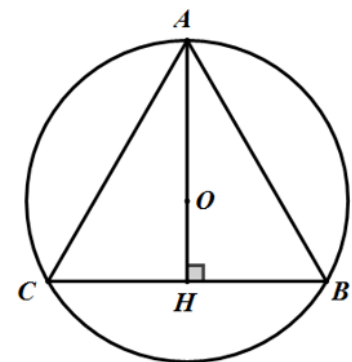
Do O là trọng tâm tam giác ABC nên: $AO = 2/3 AH = 2/3 \cdot a\sqrt{3}/2 = a\sqrt{3}/3$

Vậy diện tích hình tròn (O) là: $S = \pi R^2 = \pi(a\sqrt{3}/3)^2 = \pi a^2/3 (\text{đvdt})$

Bài 2: Một hình vuông và một hình tròn có diện tích bằng nhau. Hỏi hình nào có chu vi lớn hơn?

Hướng dẫn giải

Giả sử hình vuông có cạnh a và hình tròn có bán kính R .



Vì hình vuông và hình tròn có diện tích bằng nhau nên ta có: $a^2 = \pi R^2 \Leftrightarrow a = R\sqrt{\pi}$

Mặt khác: Chu vi hình vuông là $C_1 = 4a = 4R\sqrt{\pi}$

Chu vi hình tròn là $C_2 = 2\pi R$

$$\Rightarrow \frac{C_1}{C_2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow C_1 > C_2$$

Vậy hình vuông có chu vi lớn hơn.

Bài 3: Cho tam giác ABC đều có tâm O, cạnh 6cm. Vẽ đường tròn (O; 2cm). Tính diện tích của phần tam giác nằm ngoài hình tròn (O).

Hướng dẫn giải

Gọi diện tích phần phải tính (phần gạch sọc trên hình vẽ) là S thì: $S = 3(S_{AMON} - S_{\text{Quạt tròn } OMN})$

Giả sử giao điểm của đường tròn (O; 2cm) với hai cạnh AB, AC lần lượt là M và N.

Nối CO cắt AB tại E \Rightarrow CE là đường cao của tam giác đều ABC cạnh 6cm nên: $CE = 6\sqrt{3}/2 = 3\sqrt{3}$ (cm)

Xét tam giác OEM vuông tại E nên:

$$EM^2 = OM^2 - OE^2 = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 1 \text{ (cm)}$$

$$\Rightarrow EM = 1 \text{ (cm)} \Rightarrow AM = 2EM = 2 \text{ cm} = AN$$

Để thấy tứ giác AMON là hình thoi có $OA = OC = 2\sqrt{3}$ (cm) và $MN = 2$ cm (do tam giác MON đều) nên: $S_{AMOC} = AO.MN/2 = 2\sqrt{3}$ (cm²)

Diện tích hình quạt tròn OMN là: $S_{\text{quạt tròn } OMN} = \pi R^2 n / 360 = 2\pi/3$ (cm²)

Do diện tích tam giác cong AMN là: $S_{AMN} = S_{AMON} - S_{\text{quạt tròn } OMN} = 2\sqrt{3} - 2\pi/3$ (cm²)

Vậy diện tích phần tam giác nằm ngoài hình tròn là: $S = 3(2\sqrt{3} - 2\pi/3) = 2(3\sqrt{3} - \pi) \approx 4,1$ (cm²)

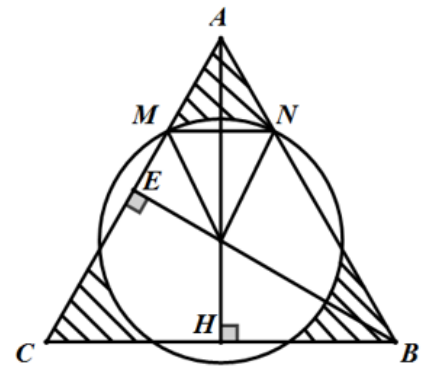
II/ LUYỆN TẬP.

Bài 1: Cho đường tròn (O) và hai điểm M và N bất kì thuộc đường tròn sao cho góc $MON = 150^\circ$.

a) Tính độ dài cung MN.

b) Tính diện tích hình quạt tròn tạo bởi góc MON.

Bài 2: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Biết góc A bằng 60° , tính diện tích hình viên phân tạo bởi cung nhỏ BC và dây BC.



Bài 3: Từ điểm c ở ngoài $(O ; R)$ sao cho $OC = 2R$, kẻ tiếp tuyến CA, CB của đường tròn (O) (B, A là tiếp điểm). Tia oc cắt (O) tại D .

a) Tính diện tích phần tam giác ABC nằm ngoài hình tròn $(O ; R)$.

b) Tính diện tích hình tròn nội tiếp tam giác ABC .

Bài 4: Cho hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại c với đường tròn cắt AB, AD kéo dài lần lượt tại E và F .

a) Chứng minh $AB.AE = AD.AF$.

b) Tính diện tích phần tam giác AEF nằm ngoài đường tròn (O) , biết $AB = 6$ và $AD = 6\sqrt{3}$

Bài 5. Cho đường tròn tâm O , bán kính R và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Từ một điểm M chuyển động trên đường thẳng d vuông góc với OA tại A , vẽ các tiếp tuyến MP, MP' với đường tròn. Dây PP' cắt OM tại N và cắt OA tại B .

a) Chứng minh rằng : $OA.OB = OM.ON = R^2$

b) Chứng minh tứ giác $POMA$ nội tiếp được trong đường tròn. Khi điểm M di chuyển trên d thì tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $POMA$ chuyển động trên đường cố định nào ?

c) Cho góc $PMP' = 60^\circ$ và $R = 8$, tính diện tích phần mặt phẳng giới hạn bởi MP, MP' và cung lớn PP' .

Bài 6: Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$, I là điểm trên nửa đường tròn sao cho cung AC bằng 60° , đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC . Tính diện tích hình giới hạn bởi nửa đường tròn đường kính AB và phần ngoài đường tròn (I) .

TỔNG ÔN HÌNH LỚP 9 CHƯƠNG III

I. GÓC VÀ ĐƯỜNG TRÒN

Bài 1 (1) Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm O, đường kính AH. Đường tròn này cắt các cạnh AB, AC thứ tự ở D và E

- Chứng minh ba điểm D, O, E thẳng hàng
- Các tiếp tuyến của đường tròn tâm O kẻ từ D và E cắt cạnh BC tương ứng tại M và N. Chứng minh M và N lần lượt là trung điểm của các đoạn HB và HC
- Cho $AB = 8 \text{ cm}$, $AC = 19 \text{ cm}$. Tính diện tích tứ giác MDEN

Hướng dẫn:

- Dễ chứng minh
- Vì $MD = MH$ và $OD = OH$, nên OM là trung trực của HD. Suy ra $OM \parallel AB$. Từ đó OM là đường trung bình của tam giác AHB. Suy ra $MB = MH$. Tương tự cho $NC = NH$
- $S_{MDEN} = 2.S_{MON} = 2 \cdot \frac{1}{4} S_{ABC} = 38 \text{ (cm}^2\text{)}$

Bài 2 (1) Đường tròn tâm O và một dây AB của đường tròn đó. Các tiếp tuyến vẽ từ A và B của đường tròn cắt nhau tại C. D là một điểm trên đường tròn có đường kính OC (D khác A và B). CD cắt cung AB của đường tròn (O) tại E (E nằm giữa C và D). Chứng minh:

- Góc BED = góc DAE
- $DE^2 = DA \cdot DB$

Hướng dẫn:

- Góc BED = góc BCE + góc CBE = góc DAB + góc EAB = góc DAE
- Ta có góc ADE = góc ABC = góc CAB = góc EDB. Từ đó chứng minh $\triangle BED$ đồng dạng với $\triangle EAD$. Suy ra đpcm

Bài 3 (1) Từ điểm P nằm ngoài đường tròn (O) vẽ tiếp tuyến PA với đường tròn. Qua trung điểm B của đoạn PA vẽ cát tuyến BCD với (O) (theo thứ tự ấy) Các đường thẳng PC và PD cắt (O) lần lượt ở E và F. Chứng minh

- Góc DCE = góc DPE + góc CAF
- $AB^2 = BC \cdot BD$
- $AP \parallel EF$

Hướng dẫn:

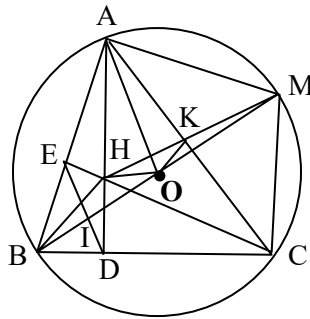
- $2(\text{Góc DPE} + \text{góc CAF}) = \text{Số cung ED} - \text{Số cung CF} + \text{Số cung CF} = 2 \cdot \text{Góc DCE}$ (đpcm)
- Chứng minh tam giác BAC đồng dạng với tam giác BDA. Suy ra đpcm

- c) Từ kết quả câu b) ta chứng minh được tam giác BPC đồng dạng với tam giác BDP (c. g. c). suy ra góc BPC = góc BDP = góc PEF. Suy ra đpcm

II- TỨ GIÁC NỘI TIẾP

Bài 1 (2). Tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Hai đường cao AD và CE cắt nhau tại H. Tia BO cắt (O) tại M, gọi I là giao của BM và DE, K là giao của AC và HM

- Chứng minh các tứ giác AEDC và CMID nội tiếp
- Chứng minh OK vuông góc với AC
- Cho góc AOK = 60° . Chứng minh tam giác HBO cân



Hướng dẫn:

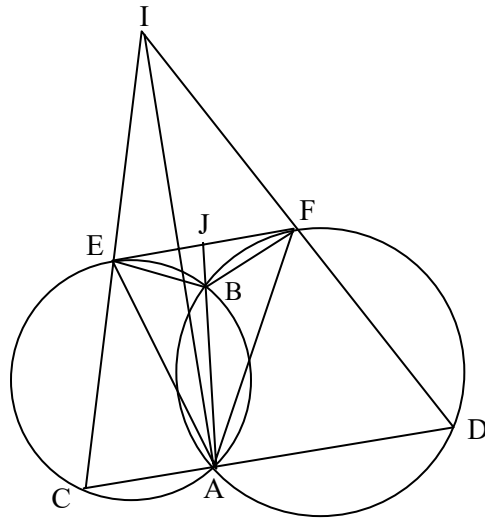
- Góc IDB = góc IMC (cùng = góc BAC), suy ra tứ giác CMID nội tiếp
- Hãy chứng minh tứ giác AMCH là hình bình hành. Suy ra OK vuông góc với AC
- Theo giả thiết $2OK = OA = OB$. Mà OK là đường trung bình của tam giác MBH, nên $2OK = BH$. Suy ra đpcm

Bài 2 (2) Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B, tiếp tuyến chung với hai đường tròn gần B hơn, có tiếp điểm thứ tự là E và F. Qua A kẻ cát tuyến song song với EF cắt hai đường tròn (O_1) và (O_2) thứ tự tại C, D. Đường thẳng CE và DF cắt nhau ở I. Chứng minh:

- $\triangle IEF = \triangle AEF$
- IA vuông góc với CD
- Tứ giác IEBF nội tiếp
- Đường thẳng AB đi qua trung điểm của EF

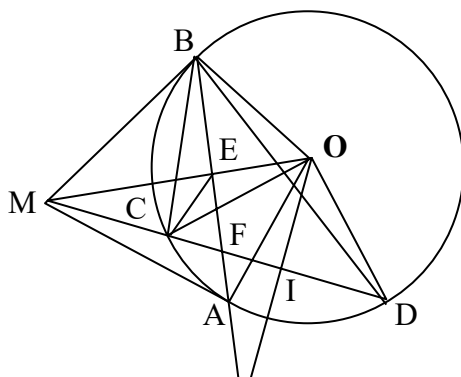
Hướng dẫn:

- Chứng minh $\triangle IEF = \triangle AEF$ (g.c.g),
- Từ a) suy ra $IE = AE$. Tam giác IEA cân tại E có EF là phân giác góc IEA nên cũng đồng thời là đường cao. Suy ra đpcm
- Góc IEB + góc IFB = Góc BAC + góc BAD = 180° . từ đó suy ra đpcm
- Gọi J là giao điểm của AB và EF. Hãy chứng minh $JE^2 = JB.JA$ và $JF^2 = JB.JA$, để suy ra đpcm



Bài 3 (2) Từ điểm M nằm ngoài (O; R) vẽ hai tiếp tuyến MA và MB (A và B là các tiếp điểm), và một cát tuyến MCD (theo thứ tự ấy). Gọi I là trung điểm của CD. Gọi E, F, K lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với các đường thẳng MO, MD, OI

- Chứng minh $R^2 = OE.OB = OI.OK$
- Chứng minh năm điểm M, A, B, O, I cùng thuộc một đường tròn
- Khi cung CAD nhỏ hơn cung CBD. Chứng minh góc DEC = 2.góc DBC

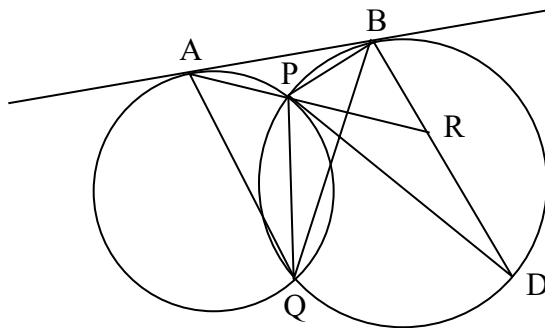


Hướng dẫn:

- Áp dụng hệ thức lượng với tam giác vuông OAM, kết hợp xét hai tam giác đồng dạng MIO và KEO (g.g), suy ra đpcm
- Vì các góc MAO, MBO, MIO cùng bằng 90^0 . Suy ra đpcm
- Chứng minh được $ME.MO = MC.MD (= MA^2)$, suy ra hai tam giác MEC và MDO đồng dạng (c.g.c), nên góc MEC = góc MDO. Suy ra tứ giác CEOD nội tiếp. Suy ra đpcm

Bài 4 (2) Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại P và Q, tiếp tuyến chung với hai đường tròn gần P hơn, có tiếp điểm với (O_1) và (O_2) thứ tự là A và B. Tiếp tuyến của (O_1) tại P cắt (O_2) tại điểm thứ hai D khác P. Đường thẳng AP cắt đường thẳng BD tại R. Hãy chứng minh.

- Góc QAP = góc QPD = góc QBD và bốn điểm A, Q, B, R cùng thuộc một đường tròn
- Tam giác BPR cân
- Đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR tiếp xúc với PB và RB



Hướng dẫn:

- Vì góc QAP = góc QBD (= góc QPD) nên bốn điểm A, Q, B, R cùng thuộc một đường tròn
- Ta có góc BRP = góc BQA (theo a) = góc BQP + góc AQP = góc ABP + góc BAP = góc BPR (góc ngoài của tam giác). Suy ra đpcm
- Ta có góc BPR = góc ABP + góc BAP = góc PQB + góc BQR (theo a) = góc PQR, suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR tiếp xúc với PB. Tương tự cho RB

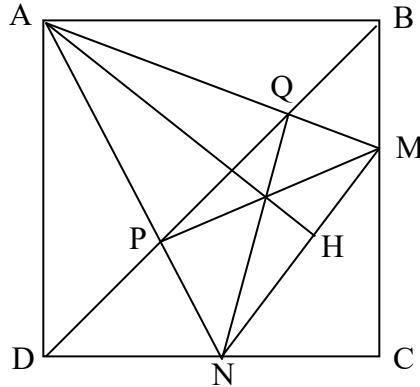
Bài 5 (2) Cho hình vuông ABCD, điểm M thay đổi trên cạnh BC (M không trùng với B) và điểm N thay đổi trên cạnh CD (N không trùng với D) sao cho góc MAN = 45^0 . BD cắt AN và AM tương ứng tại P và Q.

- Chứng minh tứ giác ABMP nội tiếp

- b) Chứng minh năm điểm P, Q, M, C, N cùng nằm trên một đường tròn
- c) Chứng minh đường thẳng MN luôn tiếp xúc với (A; AB) khi M và N thay đổi
- d) Kí hiệu diện tích của tam giác APQ là S_1 và diện tích của tứ giác PQMN là S_2 . Chứng minh tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ không đổi khi M và N thay đổi.

Hướng dẫn:

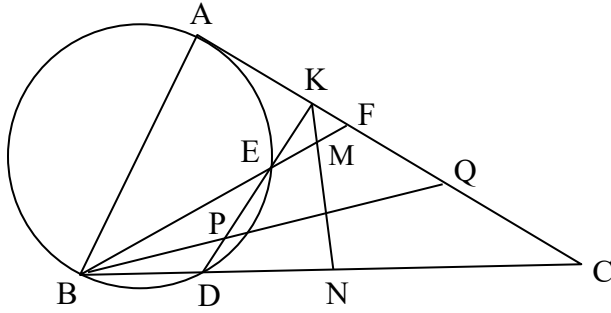
- a) Góc PAM = góc PBM = 45°



- b) Từ câu a suy ra góc APM = $180^\circ - \text{góc ABM} = 90^\circ$. Tương tự góc AQN = 90° . Từ đó năm điểm P, Q, M, C, N cùng nằm trên một đường tròn
- c) Kẻ AH vuông góc với MN. Góc AMH = góc APQ = góc AMB. Nên $\triangle AMH = \triangle AMB$ (cạnh huyền – góc nhọn), suy ra AH = AB. Suy ra đpcm
- d) Tam giác APQ đồng dạng với tam giác AMN nên $S_{APQ} : S_{AMN} = (AP : AM)^2 = \cos^2(45^\circ) = \frac{1}{2}$. Từ đó $S_1 = S_2$

Bài 6 (2) Cho tam giác ABC vuông tại A. Nửa đường tròn đường kính AB cắt BC tại D. Trên cung AD lấy một điểm E. Đường thẳng BE cắt AC tại F

- a) Chứng minh tứ giác CDEF nội tiếp
- b) Kéo dài DE cắt AC ở K. Tia phân giác góc CKD cắt EF và CD tại M và N. Tia phân giác góc CBF cắt DE và CF tại P và Q. Chứng minh tam giác BEP đồng dạng với tam giác BCQ, và tam giác KPQ cân
- c) Tứ giác MPNQ là hình gì? Vì sao?
- d) Gọi r, r_1 , r_2 theo thứ tự là bán kính các đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, ADB, ADC. Chứng minh $r^2 = r_1^2 + r_2^2$



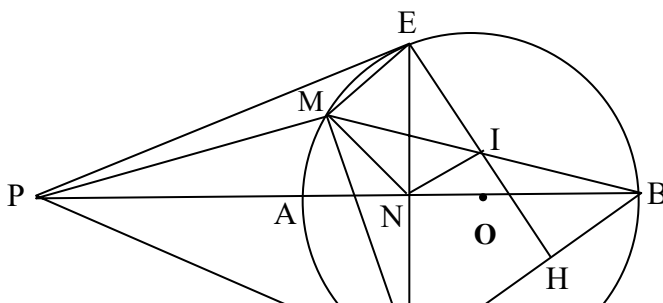
Hướng dẫn

- Vì góc $BED = \text{góc } DCF (= \text{góc } BAD)$, suy ra đpcm
- Tam giác BEP đồng dạng với tam giác BCQ (g. g). Suy ra góc $BPE = \text{góc } BQC$ nên góc $KPQ = \text{góc } KQP$ nên tam giác KPQ cân
- Tam giác KPQ cân tại K nên phân giác góc K đồng thời là trung tuyến và đường cao của tam giác KPQ . Có nghĩa là MN là đường trung trực của đoạn PQ . Hoàn toàn tương tự PQ là đường trung trực của MN . Từ đó tứ giác $MPNQ$ là hình thoi
- Ta chứng minh được các tam giác ABC, DBA, DAC đồng dạng. Áp dụng tính chất tỉ số bán kính đường tròn nội tiếp hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng, ta suy ra

$$\frac{r}{BC} = \frac{r_1}{AB} = \frac{r_2}{AC} \Leftrightarrow \frac{r^2}{BC^2} = \frac{r_1^2}{AB^2} = \frac{r_2^2}{AC^2} \Rightarrow \frac{r^2}{BC^2} = \frac{r_1^2 + r_2^2}{BC^2} \Leftrightarrow \text{đpcm}$$

Bài 7 (2) Từ điểm P ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến PE và PF . Tia PO cắt đường tròn ở A và B (A nằm giữa P và O). Kẻ EH vuông góc với FB . Gọi I là trung điểm EH . Tia BI cắt (O) tại điểm thứ hai M (M khác B), EF cắt AB tại N . Chứng minh

- $NI \parallel FB$
- Tứ giác $MEIN$ nội tiếp và góc $EMN = 90^\circ$
- Bốn điểm P, M, N, F cùng thuộc một đường tròn
- AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PEM



Hướng dẫn:

- NI là đường trung bình của tam giác EFH, suy ra đpcm
- Góc EMI = góc ENI (= góc EFB), suy ra đpcm
- Góc MFP = góc MBF (1). Mà góc MNP và góc MBF lần lượt phụ với hai góc bằng nhau là góc MNE và góc MIE nên góc MNP = góc MBF (2). Từ (1) và (2) suy ra đpcm
- Góc MPN = góc MFE = góc MEP, suy ra đpcm

Bài 8 (2) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). H là trực tâm của tam giác, M là một điểm trên cung nhỏ BC

- Xác định vị trí của điểm M để tứ giác BHCM là hình bình hành
- Gọi N và E lần lượt là điểm đối xứng của M qua AB, AC. Chứng minh các tứ giác AHCE và AHBN nội tiếp và ba điểm N, H, E thẳng hàng
- Xác định vị trí của điểm M để độ dài đoạn NE lớn nhất

Hướng dẫn:

- Để tứ giác BHCM là hình bình hành thì BM phải vuông góc với AB. Ngược lại đúng. Vậy M đối xứng với A qua O
- Giả sử AH cắt BC tại A_1 , CH cắt AB tại C_1 . Khi đó góc AHC = góc A_1HC_1 (1). Còn góc AEC = góc AMC = góc ABC (2). Do tứ giác A_1BC_1H nội tiếp nên từ (1) và (2) suy ra tứ giác AHCE nội tiếp. Tương tự với tứ giác AHBN. Từ các kết quả trên ta có góc AHE + góc AHN = góc ACE + góc ABN = góc ACM + góc ABM = 180° . Suy ra ba điểm N, H, E thẳng hàng
- Chứng minh được tam giác ANE cân tại A (vì AN = AM = AE) và góc ở đỉnh NAE = 2. góc BAC (cố định) nên cạnh đáy NE lớn nhất khi và chỉ khi cạnh bên AN lớn nhất khi và chỉ khi AM lớn nhất khi và chỉ khi M đối xứng với A qua O

Bài 9 (2) Cho ba điểm A, B, C cố định và thẳng hàng theo thứ tự đó. Vẽ đường tròn tâm O đi qua B và C. Qua A vẽ các tiếp tuyến AE, AF với (O). Gọi I là trung điểm BC, N là trung điểm của EF

- Chứng minh $AE^2 = AF^2 = AB.AC$
- Đường thẳng FI cắt đường tròn (O) ở E'. Chứng minh $EE' \parallel AB$

- c) Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ONI chạy trên một đường thẳng cố định khi đường tròn (O) thay đổi

Hướng dẫn:

- a) Dễ chứng minh
 b) Tứ giác AOIF nội tiếp (vì góc AFO = góc AIO = 90^0). Nên suy ra góc $2AIF = 2\text{góc } AOF = \text{góc } EOF = 2\text{góc } EE'F$. Suy ra $EE' \parallel AB$
 c) Gọi K là giao điểm của BC và EF. Sử dụng các cặp tam giác đồng dạng sẽ chứng minh được $AK.AI = AN.AO = AE^2 = AB.AC$, mà AI, AB, AC cố định nên AK cố định, suy ra điểm K cố định. Từ đó tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ONI hay tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ONKI chạy trên đường trung trực của đoạn KI (cố định)

Bài 10 (2) Cho đường tròn tâm O. Từ điểm M bên ngoài đường tròn vẽ các tiếp tuyến MC, MD với (O) (C, D là các tiếp điểm). Vẽ cát tuyến MAB không đi qua tâm O (A nằm giữa M và B. Tia phân giác của góc ACB cắt AB tại E

- a) Chứng minh $MC = ME$
 b) Chứng minh DE là phân giác của góc ADB
 c) Gọi I là trung điểm của đoạn AB. Chứng minh năm điểm O, I, C, M, D cùng nằm trên một đường tròn
 d) Chứng minh IM là phân giác của góc CID

Hướng dẫn:

- a) góc MEC = góc EBC + góc BCE = góc ACM + góc ECA = góc ECM. Suy ra đpcm
 b) Theo câu a, ta suy ra $ME = MD$, nên góc MED = góc MDE. Tức là góc MBD + góc BDE = góc MDA + góc ADE (1). Nhưng góc MBD = góc MDA (2). Từ (1) và (2) suy ra góc BDE = góc ADE, suy ra đpcm
 c) Dễ chứng minh
 d) Theo câu c) tứ giác CIDM nội tiếp, lại chú ý rằng $MC = MD$, nên suy ra đpcm

Bài 11 (2) Từ điểm A bên ngoài đường tròn (O), vẽ các tiếp tuyến AB và AC (B và C là các tiếp điểm) và cát tuyến ADE. Đường thẳng đi qua D và vuông góc với BO cắt BC, BE thứ tự ở H và K. Gọi M là trung điểm của DE

- a) Chứng minh năm điểm A, B, O, M, C cùng thuộc một đường tròn
 b) Chứng minh góc KDM = góc BCM
 c) Chứng minh $DH = HK$

Hướng dẫn:

- a) Dễ chứng minh
- b) Góc KDM = góc BCM (vì cùng bằng góc BAM)
- c) Từ câu b), suy ra tứ giác HDCM nội tiếp. Từ đó góc HMD = góc HCD = góc BED, suy ra HM // BE (1). Lại có DM = ME (2) nên DH = HK

Bài 12 (2) Cho tam giác đều ABC, điểm M thuộc cạnh BC. Gọi D và E là đối xứng của M lần lượt qua AB và AC. Vẽ hình bình hành DMEI.

- a) Tính góc DME
- b) Chứng minh bốn điểm D, A, E, I cùng thuộc một đường tròn
- c) Chứng minh AI // BC

Hướng dẫn:

- a) Dễ tính được góc DME = 120^0
- b) Tính được góc DAE = 120^0 và góc DIE = 120^0 . Suy ra đpcm
- c) Tính được góc IAC = góc IAE + góc EAC = góc IDE + góc EAC = góc DEM + góc KAM = góc HKM + góc KAM = góc HAM + góc KAM = góc BAC = 60^0 = góc ACB. Suy ra đpcm

BÀI TẬP HÌNH HỌC LỚP 9

CHỦ ĐỀ: BÀI TẬP TỔNG HỢP - PS 3

Bài 1: Cho đường tròn (O) và dây BC cố định không qua tâm, điểm A chuyển động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. Đường cao BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại H và cắt (O) lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh tứ giác BCEF nội tiếp.

b) Chứng minh $MN \parallel FE$.

b) Vẽ đường cao AD của tam giác ABC. Chứng minh FH là phân giác của góc EFD. Từ đó chứng minh H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF

Bài 2: Cho đường tròn (O; R), đường kính AB vuông góc với dây MN tại điểm H (H nằm giữa O và B). Trên tia đối của tia NM lấy điểm C nằm ngoài đường tròn (O ; R) sao cho đoạn AC cắt (O) tại điểm K khác A. Hai dây MN và BK cắt nhau ở E. Qua N kẻ đường vuông góc với AC cắt MK tại F. Chứng minh:

a) Tứ giác AHEK nội tiếp.

b) Tam giác NFK cân và $EM.NC = EN.CM$.

c) Giả sử $KE = KC$, chứng minh $OK \parallel MN$.

Bài 3: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và điểm M bất kì trên nửa đường tròn (M khác A,B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến Ax. Tia BM cắt Ax tại I; tia phân giác của góc IAM cắt nửa đường tròn tại E; cắt tia BM tại F tia BE cắt Ax tại H, cắt AM tại K.

a) Chứng minh rằng: EFMK là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng: $AI^2 = IM \cdot IB$.

c) Chứng minh BAF là tam giác cân.

d) Chứng minh rằng : Tứ giác AKFH là hình thoi

Bài 4: Cho đường tròn (O), một dây AB và một điểm C ở ngoài tròn nằm trên tia AB. Từ điểm chính giữa của cung lớn AB kẻ đường kính PQ của đường tròn, cắt dây AB tại D. Tia CP cắt đường tròn tại điểm thứ hai I. Các dây AB và QI cắt nhau tại K.

a/ Chứng minh tứ giác PDKI nội tiếp được.

b/ Chứng minh: $CI.CP = CK.CD$

c/ Chứng minh IC là tia phân giác của góc ở ngoài đỉnh I của tam giác AIB

Bài 5: Cho đoạn thẳng AB và một điểm C nằm giữa A,B. Người ta kẻ trên nửa mặt phẳng bờ AB hai tia Ax và By vuông góc với AB và trên tia Ax lấy một điểm I. Tia vuông góc với CI tại C cắt tia By tại K. Đường tròn đường kính IC cắt IK tại P. Chứng minh:

a/ tứ giác CPKB nội tiếp được .

b/ $AI.BK = AC.CB$

c/ tam giác APB vuông

Bài 6: Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Trên đường tròn lấy điểm C sao cho $AC < BC$ (CA). Tiếp tuyến Bx của đường tròn (O) cắt đường trung trực của BC tại D. Gọi F là giao điểm của DO và BC.

a) Chứng minh CD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

b) Gọi E là giao điểm của AD với đường tròn (O) (với E A). Chứng minh $DE \cdot DA = DC^2 = DF \cdot DO$

c) Gọi H là hình chiếu của C trên AB và AD cắt CH tại I. Chứng minh I là trung điểm của CH.

Bài 7: Cho đường tròn (O) có đường kính $AB = 2R$ và E là điểm bất kì trên đường tròn đó (E khác A và B). Đường phân giác góc AEB cắt đoạn thẳng AB tại F và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K.

1/ Chứng minh tam giác KAF đồng dạng với tam giác KEA.

2/ Gọi I là giao điểm của đường trung trực đoạn EF với OE, chứng minh đường tròn (I) bán kính IE tiếp xúc với đường tròn (O) tại E và tiếp xúc với đường thẳng AB tại F.

3/ Chứng minh $MN \parallel AB$, trong đó M và N lần lượt là giao điểm thứ hai của AE, BE với đường tròn (I).

Bài 8: Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong một đường tròn và P là trung điểm của cung AB không chứa C và D. Hai dây PC và PD lần lượt cắt AB tại E và F. Các dây AD và PC kéo dài cắt nhau tại I; các dây BC và PD kéo dài cắt nhau tại K. Chứng minh rằng:

a/ Góc CID bằng góc CKD.

b/ Tứ giác CDFE nội tiếp được.

c/ $IK \parallel AB$.

d/ Đường tròn ngoại tiếp tam giác AFD tiếp xúc với PA tại A.

Bài 9: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Trên đoạn OA lấy điểm H (H khác A và O), đường thẳng kẻ qua H vuông góc với AO cắt nửa đường tròn tại C. kẻ HE vuông góc với AC tại E, HF vuông góc với BC tại F. Chứng minh rằng:

a) $CH = EF$

b) Tứ giác AEFB nội tiếp

c) EF vuông góc với OC.

Bài 10: Cho đường tròn tâm O có hai đường kính AB và MN. Vẽ tiếp tuyến d của đường tròn (O) tại B. Đường thẳng AM, AN lần lượt cắt đường thẳng d tại E và F.

a) Chứng minh rằng MNFE là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi K là trung điểm của FE. Chứng minh rằng AK vuông góc với MN.

Bài 11: Cho đường tròn (O; R), từ một điểm A trên (O) kẻ tiếp tuyến d với (O). Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kì (M khác A) kẻ cát tuyến MNP và gọi K là trung điểm của NP, kẻ tiếp tuyến MB (B là tiếp điểm). Kẻ $AC \perp MB$, $BD \perp MA$, gọi H là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của OM và AB.

a) Chứng minh năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn .

b) Chứng minh $OI \cdot OM = R^2$; $OI \cdot IM = IA^2$.

c) Chứng minh OAHB là hình thoi.

d) Chứng minh ba điểm O, H, M thẳng hàng

BÀI TẬP TỔNG HỢP HÌNH LỚP 9 – PS 4

CÁC CHỦ ĐỀ

- * Hai đường thẳng song song.
- * Hai đường thẳng vuông góc, Δ vuông.
- * Hai góc bằng nhau.
- * Điểm là trung điểm đoạn thẳng.
- * Đường thẳng là phân giác của góc.
- * Đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn, đường tròn ngoại tiếp Δ
- * Ba đường thẳng đồng quy.
- * Ba điểm thẳng hàng.

Bài 1: Cho đường tròn $(O; R)$ có đường kính AB cố định. Vẽ đường kính MN của đường tròn $(O; R)$ (M khác A , M khác B). Tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$ tại B cắt các đường thẳng AM , AN lần lượt tại các điểm Q , P .

1) Chứng minh tứ giác $AMBN$ là hình chữ nhật.

2) Chứng minh bốn điểm M , N , P , Q cùng thuộc một đường tròn.

3) Gọi E là trung điểm của BQ . Đường thẳng vuông góc với OE tại O cắt PQ tại điểm F . Chứng minh F là trung điểm của BP và $ME \parallel NF$.

Bài 2: Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài (O) . Kẻ hai tiếp tuyến AM , AN với đường tròn (O) . Một đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm B và C ($AB < AC$, d không đi qua tâm O).

1) Chứng minh tứ giác $AMON$ nội tiếp.

2) Chứng minh $AN^2 = AB.AC$. Tính độ dài đoạn thẳng BC khi $AB = 4$ cm, $AN = 6$ cm.

3) Gọi I là trung điểm BC . Đường thẳng NI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai T . Chứng minh: $MT \parallel AC$.

Bài 3: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O ($AB < AC$). Hai tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại M . AM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D . E là trung điểm đoạn AD . EC cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F . Chứng minh rằng:

1) Tứ giác $OEBM$ nội tiếp.

2) $MB^2 = MA.MD$.

3) $\widehat{BFC} = \widehat{MOC}$.

4) $BF \parallel AM$

Bài 4 Cho đường tròn (O) có đường kính $AB = 2R$ và E là điểm bất kì trên đường tròn đó (E khác A và B). Đường phân giác góc AEB cắt đoạn thẳng AB tại F và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K.

1/ Chứng minh tam giác KAF đồng dạng với tam giác KEA.

2/ Gọi I là giao điểm của đường trung trực đoạn EF với OE, chứng minh đường tròn (I) bán kính IE tiếp xúc với đường tròn (O) tại E và tiếp xúc với đường thẳng AB tại F.

3/ Chứng minh $MN \parallel AB$, trong đó M và N lần lượt là giao điểm thứ hai của AE, BE với đường tròn (I).

Bài 5: Cho tam giác ABC cân tại A, $\widehat{A} < 90^\circ$, một cung tròn BC nằm trong tam giác ABC và tiếp xúc với AB, AC tại B và C. Trên cung BC lấy một điểm M rồi hạ đường vuông góc MI, MH, MK xuống các cạnh tương ứng BC, CA, BA. Gọi P là giao điểm của MB, IK và Q là giao điểm của MC, IH.

1) Chứng minh rằng các tứ giác BIMK, CIMH nội tiếp được

2) Chứng minh tia đối của tia MI là phân giác của góc HMK

3) Chứng minh tứ giác MPIQ nội tiếp được. Suy ra $PQ \parallel BC$

Bài 6: Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến Am, AN với đường tròn (M, N là các tiếp điểm). Đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm phân biệt B, C (O không thuộc (d), B nằm giữa A và C). Gọi H là trung điểm của BC.

1) Chứng minh các điểm O, H, M, A, N cùng nằm trên một đường tròn,

2) Chứng minh HA là tia phân giác của \widehat{MHN} .

3) Lấy điểm E trên MN sao cho BE song song với AM. Chứng minh $HE \parallel CM$.

Bài 7: Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong một đường tròn và P là trung điểm của cung AB không chứa C và D. Hai dây PC và PD lần lượt cắt AB tại E và F. Các dây AD và PC kéo dài cắt nhau tại I: các dây BC và PD kéo dài cắt nhau tại K. Chứng minh rằng:

1/ Góc CID bằng góc CKD. 2/ Tứ giác CDFE nội tiếp được.

3/ $IK \parallel AB$.

4/ Đường tròn ngoại tiếp tam giác AFD tiếp xúc với PA tại A.

Bài 8: Cho hình vuông ABCD. Lấy điểm E thuộc cạnh BC, với E không trùng B và E không trùng C. Vẽ EF vuông góc với AE, với F thuộc CD. Đường thẳng AF cắt đường thẳng BC tại G. Vẽ đường thẳng a đi qua điểm A và vuông góc với AE, đường thẳng a cắt đường thẳng DE tại điểm H.

1/ Chứng minh $\frac{AE}{AF} = \frac{CD}{DE}$.

2/ Chứng minh rằng tứ giác AEGH là tứ giác nội tiếp được đường tròn.

3/ Gọi b là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE tại E , biết b cắt đường trung trực của đoạn thẳng EG tại điểm K . Chứng minh rằng KG là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE .

Bài 9: Cho $(O;R)$ đường kính $AB = 2R$ và điểm C thuộc đường tròn đó (C khác A, B). D thuộc dây BC (D khác B, C). Tia AD cắt cung nhỏ BC tại E , tia AC cắt BE tại F .

1) Chứng minh tứ giác $FCDE$ nội tiếp

2) Chứng minh $DA \cdot DE = DB \cdot DC$

3) Chứng minh $\angle CFD = \angle OCB$. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $FCDE$, chứng minh IC là tiếp tuyến của (O) .

Bài 10: Cho đường tròn (O) đường kính AB . Vẽ tiếp tuyến Ax với đường tròn (O) . Trên Ax lấy điểm M sao cho $AM > AB$, MB cắt (O) tại N (N khác B). Qua trung điểm P của đoạn AM , dựng đường thẳng vuông góc với AM cắt BM tại Q .

1) Chứng minh tứ giác $APQN$ nội tiếp đường tròn.

2) Gọi C là điểm trên cung lớn NB của đường tròn (O) (C khác N và C khác B).

3) Chứng minh: $\widehat{BCN} = \widehat{OQN}$

4) Chứng minh PN là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Bài 11. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Từ A, B vẽ các tiếp tuyến Ax, By về phía có chứa nửa đường tròn (O) . Lấy điểm M thuộc đoạn thẳng OA ; điểm N thuộc nửa đường tròn (O) . Đường tròn (O') ngoại tiếp tam giác AMN cắt Ax tại C ; đường thẳng CN cắt By tại D .

1) Chứng minh tứ giác $BMND$ nội tiếp.

2) Chứng minh DM là tiếp tuyến của đường tròn (O') .

3) Gọi I là giao điểm của AN và CM ; K là giao điểm của BN và DM . Chứng minh $IK \parallel AB$.

Bài 12: Cho đường tròn (O) , từ điểm A ở ngoài đường tròn vẽ hai tiếp tuyến AB và AC (B, C là các tiếp điểm). OA cắt BC tại E .

1) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

2) Chứng minh BC vuông góc với OA và $BA \cdot BE = AE \cdot BO$.

3) Gọi I là trung điểm của BE , đường thẳng qua I và vuông góc OI cắt các tia AB, AC theo thứ

tự tại D và F . Chứng minh $\widehat{IDO} = \widehat{BCO}$ và $\triangle DOF$ cân tại O .

4) Chứng minh F là trung điểm của AC .

Bài 13: Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Trên tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A lấy điểm M (M khác A). Từ M vẽ tiếp tuyến thứ hai MC với (O) (C là tiếp điểm). Kẻ CH vuông góc với AB ($H \in AB$), MB cắt (O) tại điểm thứ hai là K và cắt CH tại N. Chứng minh rằng:

- 1) Tứ giác AKNH là tứ giác nội tiếp.
- 2) $AM^2 = MK.MB$
- 3) Góc KAC bằng góc OMB
- 4) N là trung điểm của CH.

Bài 14: Cho đường tròn (O;R) đường kính AB. Bán kính CO vuông góc với AB, M là điểm bất kỳ trên cung nhỏ AC (M khác A và C), BM cắt AC tại H. Gọi K là hình chiếu của H trên AB.

- 1) Chứng minh tứ giác CBKH là tứ giác nội tiếp.
- 2) Chứng minh $\widehat{ACM} = \widehat{ACK}$.
- 3) Trên đoạn thẳng BM lấy điểm E sao cho $BE = AM$. Chứng minh tam giác ECM là tam giác vuông cân tại C.

Bài 15: Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O, đường cao BE và CF. Tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại S, gọi BC và OS cắt nhau tại M

- 1) Chứng minh $AB.MB = AE.BS$
- 2) ΔAEM và ΔABS đồng dạng
- 3) Gọi AM cắt EF tại N, AS cắt BC tại P. Chứng minh NP vuông góc với BC.

Bài 16: Cho đường tròn (O), dây cung BC (BC không là đường kính). Điểm A di động trên cung nhỏ BC (A khác B và C; độ dài đoạn AB khác AC). Kẻ đường kính AA' của đường tròn (O), D là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BC. Hai điểm E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ B, C đến AA'. Chứng minh rằng:

- 1) Bốn điểm A, B, D, E cùng nằm trên một đường tròn.
- 2) $BD.AC = AD.A'C$.
- 3) DE vuông góc với AC.

Bài 17: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi AH và BK lần lượt là các đường cao của tam giác ABC.

- 1) Chứng minh tứ giác AKHB nội tiếp đường tròn. Xác định tâm của đường tròn này
- 2) Gọi (d) là tiếp tuyến với đường tròn (O) tại C. Chứng minh rằng $\widehat{ABH} = \widehat{HKC}$
- 3) Chứng minh $HK \perp OC$.

Bài 18: Cho đường tròn (O) và điểm M ở ngoài đường tròn. Qua M kẻ các tiếp tuyến MA, MB và cát tuyến MPQ ($MP < MQ$). Gọi I là trung điểm của dây PQ, E là giao điểm thứ 2 giữa đường thẳng BI và đường tròn (O). Chứng minh:

1/ Tứ giác BOIM nội tiếp.

2/ BOM = BEA

3/ AE // PQ

4/ Ba điểm O; I; K thẳng hàng (K là trung điểm của EA)

Bài 19: Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi M và N lần lượt là điểm chính giữa của cung nhỏ AB và cung nhỏ BC. Hai dây AN và CM cắt nhau tại I. Dây MN cắt cạnh AB, BC lần lượt tại H và K.

1) Chứng minh 4 điểm C, N, K, I cùng thuộc đường tròn.

2) Chứng minh $NB^2 = NK.NM$

3) Chứng minh tứ giác BHIK là hình thoi.

4) Gọi P, Q lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác MBK, tam giác MCK và E là trung điểm đoạn PQ. Vẽ đường kính ND của đường tròn (O). Chứng minh 3 điểm D, E, K thẳng hàng?

Bài 20: Cho đường tròn (O) có tâm O và điểm M nằm ngoài đường tròn (O). Đường thẳng MO cắt (O) tại E và F ($ME < MF$). Vẽ cát tuyến MAB và tiếp tuyến MC của (O) (C là tiếp điểm, A nằm giữa hai điểm M và B, A và C nằm khác phía đối với đường thẳng MO).

1) Chứng minh rằng $MA.MB = ME.MF$

2) Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm C lên đường thẳng MO. Chứng minh tứ giác AHOB nội tiếp.

3) Trên nửa mặt phẳng bờ OM có chứa điểm A, vẽ nửa đường tròn đường kính MF; nửa đường tròn này cắt tiếp tuyến tại E của (O) ở K. Gọi S là giao điểm của hai đường thẳng CO và KF. Chứng minh rằng đường thẳng MS vuông góc với đường thẳng KC.

4) Gọi P và Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác EFS và ABS và T là trung điểm của KS. Chứng minh ba điểm P, Q, T thẳng hàng.

Bài 21: Cho tam giác ABC vuông tại A. Lấy B làm tâm vẽ đường tròn tâm B bán kính AB. Lấy C làm tâm vẽ đường tròn tâm C bán kính AC, hai đường tròn này cắt nhau tại điểm thứ 2 là D. Vẽ AM, AN lần lượt là các dây cung của đường tròn (B) và (C) sao cho AM vuông góc với AN và D nằm giữa M; N.

1) CMR: $\triangle ABC = \triangle DBC$

2) CMR: ABDC là tứ giác nội tiếp.

3) CMR: ba điểm M, D, N thẳng hàng

Bài 22: Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC, $B \in (O), C \in (O')$. Đường thẳng BO cắt (O) tại điểm thứ hai là D.

1) Chứng minh tứ giác CO'OB là một hình thang vuông.

2) Chứng minh ba điểm A, C, D thẳng hàng.

3) Từ D kẻ tiếp tuyến DE với đường tròn (O') (E là tiếp điểm). Chứng minh rằng $DB = DE$.

Bài 23: Cho tam giác ABC vuông tại A. Lấy điểm M tùy ý giữa A và B. Đường tròn đường kính BM cắt đường thẳng BC tại điểm thứ hai là E. Các đường thẳng CM, AE lần lượt cắt đường tròn tại các điểm thứ 2 là H và K. Chứng minh

1/ Tứ giác AMEC là tứ giác nội tiếp.

2/ góc ACM bằng góc KHM.

3/ Các đường thẳng BH, EM và AC đồng quy.

Bài 24: Cho tam giác ABC ($AB > AC$; $\widehat{BAC} > 90^\circ$). I, K thứ tự là các trung điểm của AB, AC. Các đường tròn đường kính AB, AC cắt nhau tại điểm thứ hai D; tia BA cắt đường tròn (K) tại điểm thứ hai E, tia CA cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai F.

1) Chứng minh ba điểm B, C, D thẳng hàng

2) Chứng minh tứ giác BFEC nội tiếp.

3) Chứng minh ba đường thẳng AD, BF, CE đồng quy

Bài 25: Cho điểm M nằm ngoài đường tròn tâm O. Vẽ tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Vẽ cát tuyến MCD không đi qua tâm O (C nằm giữa M và D), OM cắt AB và (O) lần lượt tại H và I. Chứng minh.

1) Tứ giác MAOB nội tiếp.

2) $MC \cdot MD = MA^2$

3) $OH \cdot OM + MC \cdot MD = MO^2$

4) CI là tia phân giác góc MCH.

Bài 26: Cho đường tròn (O). Đường thẳng (d) không đi qua tâm (O) cắt đường tròn tại hai điểm A và B theo thứ tự, C là điểm thuộc (d) ở ngoài đường tròn (O). Vẽ đường kính PQ vuông góc với dây AB tại D (P thuộc cung lớn AB), Tia CP cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là I, AB cắt IQ tại K.

1) Chứng minh tứ giác PDKI nội tiếp đường tròn.

2) Chứng minh $CI \cdot CP = CK \cdot CD$

3) Chứng minh IC là phân giác của góc ngoài ở đỉnh I của tam giác AIB.

Bài 27: Cho đường tròn (O) và một điểm A và $OA = 3R$. Qua A kẻ 2 tiếp tuyến AP và AQ của đường tròn (O), với P và Q là 2 tiếp điểm. Lấy M thuộc đường tròn (O) sao cho PM song song với AQ. Gọi N là giao điểm thứ 2 của đường thẳng AM và đường tròn (O). Tia PN cắt đường thẳng AQ tại K.

1) Chứng minh APOQ là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh $KA^2 = KN \cdot KP$

3) Kẻ đường kính QS của đường tròn (O). Chứng minh tia NS là tia phân giác của góc \widehat{PNM} .

Bài 28: Cho đường tròn (O) bán kính $R = 3$ cm và một điểm I nằm ngoài đường tròn, biết rằng $OI = 4$ cm. Từ I kẻ hai tiếp tuyến IA và IB với đường tròn (A, B là tiếp điểm).

1) Chứng minh tứ giác OAIB nội tiếp.

2) Từ I kẻ đường thẳng vuông góc với OI cắt tia OA tại O'. Tính OO' và $S_{\Delta IOO'}$.

3) Từ O' kẻ O'C vuông góc BI cắt đường thẳng BI tại C. Chứng minh O'I là tia phân giác của

$\widehat{AO'C}$

BÀI TẬP TỔNG HỢP HÌNH LỚP 9 – PS 5

CHỦ ĐỀ: ĐIỂM CHUYỂN ĐỘNG TRÊN ĐƯỜNG CỐ ĐỊNH

Bài 1: Cho $(O; R)$ và một điểm A cố định ở ngoài đường tròn sao cho $OA = 2R$. Qua A kẻ một cát tuyến d cắt đường tròn tại 2 điểm B và C (B nằm giữa A và C). Tiếp tuyến AM, AN tiếp xúc với đường tròn (O) tại M và N . Gọi I là trung điểm của BC .

a) Chứng minh các điểm A, M, O, I, N cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi H là giao điểm của OA và MN . Chứng minh $OA \perp MN$ và $AH \cdot AO = AB \cdot AC$.

c) Tiếp tuyến tại B của (O) cắt AM, AN lần lượt tại E và F . Tính chu vi tam giác AEF theo R .

d) Khi cát tuyến d quay quanh A thì trọng tâm G của tam giác MBC chạy trên đường nào?

Bài 2: Cho $(O; R)$ và dây AB cố định. C là điểm chính giữa của cung AB , từ C kẻ đường kính CD . N là một điểm bất kì trên cung nhỏ AD . CN cắt AB tại M .

a) Chứng minh $AM \cdot MB = CM \cdot CN$.

b) CD cắt AB tại I . Chứng minh tứ giác $MNDI$ nội tiếp.

c) Gọi S là giao điểm của AB với DN . Chứng minh $AM \cdot SB = SA \cdot BM$

d) Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác ABN khi N chuyển động trên cung nhỏ AD .

Bài 3: Cho $(O; R)$ và dây AB cố định ($AB < 2R$) và một điểm M tùy ý trên cung lớn AB (M khác A và B). Gọi I là trung điểm của dây AB và (O') là đường tròn qua M và tiếp xúc với AB tại A . Đường thẳng MI cắt $(O), (O')$ lần lượt tại các điểm thứ hai là N và P .

a) Chứng minh $IA^2 = IP \cdot IM$

b) Chứng minh tứ giác $ANBP$ là hình bình hành.

c) Chứng minh IB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MBP

d) Chứng minh khi M di chuyển thì trọng tâm G của tam giác PAB chạy trên một cung tròn cố định.

Bài 4: Cho ba điểm A, B, C trên một đường thẳng theo thứ tự ấy và một đường thẳng d vuông góc với AC tại A . Vẽ đường tròn đường kính BC và trên đó lấy một điểm M bất kì. Tia CM cắt

đường thẳng d tại D , tia AM cắt đường tròn tại điểm thứ hai N , tia DB cắt đường tròn tại điểm thứ hai P .

a) Chứng minh tứ giác $ABMD$ nội tiếp.

b) Chứng minh tích $CM \cdot CD$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M .

c) Tứ giác $APND$ là hình gì? Tại sao?

d) Chứng minh trọng tâm G của $\triangle MAC$ chạy trên một đường tròn cố định khi M di động.

Bài 5: Cho $(O; R)$ và $(O'; R')$ ($R > R'$) tiếp xúc ngoài tại A và một dây cung AB cố định của (O) . Một cát tuyến di động qua A cắt (O) tại M và cắt (O') tại N . Đường thẳng qua N và song song với AB cắt MB tại Q và cắt (O') tại điểm thứ hai P .

a) Chứng minh $OM \parallel O'N$

b) Chứng minh $\frac{BQ}{BM} = \frac{R'}{R}$

c) Tứ giác $ABQP$ là hình gì? Tại sao?

d) Chứng minh trọng tâm G của $\triangle MAB$ chạy trên một đường tròn cố định.

Bài 6: Cho $(O; R)$ đường kính AB , dây CD vuông góc với AB tại H . Điểm M di động trên đoạn CD , tia AM cắt (O) tại N . Chứng minh:

a) Tứ giác $MNBH$ nội tiếp.

b) $MC \cdot MD = MA \cdot MN$ và tích $AM \cdot AN$ không đổi.

c) AC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle CMN$.

d) Khi M di động trên đoạn CD , trọng tâm G của $\triangle CAN$ chạy trên đường tròn xác định.

Bài 7: Cho điểm M cố định nằm ngoài $(O; R)$. Qua M vẽ các tiếp tuyến MA, MB với (O) (A, B là các tiếp điểm). Gọi C là điểm bất kì trên cung nhỏ AB của (O) . Gọi D, E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ C đến AB, MA, MB .

a) Chứng minh A, D, C, E cùng thuộc một đường tròn.

b) AC cắt DE tại P ; BC cắt DF tại Q . Chứng minh $\triangle PAE$ đồng dạng với $\triangle PDC$. Từ đó suy ra $PA \cdot PC = PD \cdot PE$.

c) Chứng minh $AB \parallel PQ$

d) Khi C di động trên cung nhỏ AB của (O) thì trọng tâm G của $\triangle ABC$ di chuyển trên đường nào?

Bài 8: Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB . Điểm M tùy ý trên nửa đường tròn. Gọi N và P lần lượt là điểm chính giữa của cung AM và cung MB .

a) Chứng minh ΔONP vuông cân và suy ra dây NP có độ dài không đổi.

b) Tính diện tích hình viên phân tạo thành bởi dây NP và cung nhỏ NP .

c) Gọi các giao điểm của: AP và BN là E ; tia AN và tia BP là C ; tia CE và AB là D . Chứng minh các tứ giác $CNEP$ và $DONP$ nội tiếp.

d) Tìm quỹ tích trọng tâm G của ΔABC khi M chạy trên nửa đường tròn (O) ?

Bài 9: Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB . Điểm M tùy ý trên nửa đường tròn. Kẻ hai tiếp tuyến Ax và By với nửa đường tròn. Qua M kẻ tiếp tuyến thứ ba lần lượt cắt Ax , By tại C và D .

a) Chứng minh $CD = AC + BD$; góc COD bằng 90° .

b) Chứng minh $AC \cdot BD = R^2$.

c) Biết OC cắt AM tại E , OD cắt BM tại F . Chứng minh $EF = R$.

d) Khi M chạy trên đường tròn đường kính AB thì trọng tâm G của ΔOEF chạy trên đường nào?

Bài 10: Cho (O) trên đó có điểm A cố định. Kẻ tia Ax tiếp xúc với (O) tại A . Lấy điểm M trên tia Ax , kẻ tiếp tuyến MB với đường tròn. Gọi I là trung điểm của MA và K là giao điểm thứ hai của BI với (O) . Tia MK cắt (O) tại điểm thứ hai C .

a) Chứng minh ΔMIK đồng dạng với ΔBIM .

b) Chứng minh $BC \parallel MA$.

c) Có vị trí nào của M để tứ giác $AMBC$ là hình bình hành không? Tại sao?

d) Chứng minh M di động trên tia Ax thì trọng tâm H của ΔMAB chạy trên một đường tròn cố định.

Bài 11: Cho (O) đường kính AB cố định. Hai tia Ax và Ay thay đổi cắt đường tròn (O) tại M và N sao cho góc xAy bằng 45° . BM cắt Ay tại E , BN cắt Ax tại F .

a) Chứng minh tứ giác $MNEF$ nội tiếp.

b) Tính độ dài MN theo R

c) Chứng minh EF luôn song song với một đường thẳng cố định và có độ dài không đổi.

c) Khi góc $\angle xAy$ quay quanh A , hãy chứng minh trung điểm của EF thuộc một đường tròn cố định.

Bài 12: Cho hai đường tròn $(O ; R)$ và $(O_1 ; R_1)$ cắt nhau tại A và B , đường thẳng đi qua B và vuông góc với AB cắt (O) , (O_1) lần lượt tại C và D . Gọi E là một điểm thuộc cung nhỏ BC của (O) , đường thẳng BE cắt (O_1) tại điểm thứ hai là F . Hai đường thẳng CE và DF cắt nhau tại M . Gọi N là giao điểm của AM và (O_1) .

a) Chứng minh tứ giác $ACMD$ nội tiếp.

b) Chứng minh $BN \parallel CM$

c) Gọi K là điểm đối xứng của D qua F . Chứng minh rằng K thuộc một đường tròn cố định khi E thay đổi trên cung nhỏ BC của (O) .

BÀI TẬP TỔNG HỢP HÌNH LỚP 9 – PS 6

**CHỦ ĐỀ: TÌM VỊ TRÍ ĐIỂM ĐỂ TAM GIÁC, TỨ GIÁC
CÓ DIỆN TÍCH (CHU VI) ĐẠT Max hoặc Min**

Bài 1. Cho nửa đường tròn $(O ; R)$ và hai đường kính MN và PQ vuông góc với nhau. Lấy điểm A trên cung nhỏ PN , PA cắt MN tại B , AQ cắt MN tại E

1) Chứng minh tứ giác $OABQ$ là tứ giác nội tiếp

2) Nối AM cắt PQ và PN lần lượt tại C và I . Chứng minh rằng: $MC \cdot MA$ không đổi khi

A di chuyển trên cung nhỏ PN .

3) Chứng minh : $IN = \sqrt{2}EN$

4) Tìm vị trí của điểm A để diện tích tam giác ACE đạt giá trị lớn nhất.

Bài 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao BE và CF cắt nhau tại H .

1) Chứng minh tứ giác $BFEC$ là tứ giác nội tiếp;

2) Chứng minh $AF \cdot AB = AE \cdot AC$.

3) BE và CF lần lượt cắt (O) tại điểm thứ hai là M và N . Chứng minh $EF \parallel MN$.

4) Giả sử B, C cố định; A thay đổi. Tìm vị trí của A sao cho tam giác AEH có diện tích lớn nhất.

Bài 3. Cho $(O;R)$ đường kính AB cố định. Dây CD di động vuông góc với AB tại điểm H nằm giữa hai điểm A và O . Lấy điểm F thuộc cung AC nhỏ; BF cắt CD tại E ; AF cắt tia DC tại I .

1) Chứng minh rằng: Tứ giác $AHEF$ là tứ giác nội tiếp

2) Chứng minh rằng: $HA \cdot HB = HE \cdot HI$

3) Đường tròn ngoại tiếp $\triangle NEF$ cắt AE tại điểm thứ hai M . Chứng minh: M thuộc $(O;R)$

4) Tìm vị trí của H trên OA để $\triangle OHD$ có chu vi lớn nhất.

Bài 4. Cho đường tròn $(O; R)$. Một đường thẳng d không qua O cắt đường tròn (O) tại 2 điểm A và B . Trên đường thẳng d lấy điểm C sao cho $CA < CB$. Từ C kẻ hai tiếp tuyến CM và CN với đường tròn (M, N là các tiếp điểm). Đường thẳng qua O vuông góc với AB tại H cắt CN tại K

1) Chứng minh O, C, H, N cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh $KN \cdot KC = KO \cdot KH$

3) Đoạn thẳng CO cắt (O) tại I . Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle CMN$.

4) Một đường thẳng đi qua O và song song với MN cắt các tia CM, CN lần lượt tại E và F. Xác định vị trí của C trên đường thẳng d sao cho diện tích tam giác CEF nhỏ nhất.

Bài 5: Cho đường tròn tâm O bán kính R, dây BC cố định. Gọi A là điểm chính giữa cung nhỏ BC. E thuộc cung lớn BC. Nối AE cắt BC tại D. Gọi I là trung điểm của BC, hạ CH vuông góc với AE tại H. Đường thẳng BE cắt CH tại M

a) Chứng minh rằng: A, I, H, C cùng thuộc đường tròn

b) Chứng minh: $AD \cdot AE = AB^2$

c) Cho $BC = R\sqrt{3}$. Tính AC

d) Tìm vị trí điểm E để diện tích tam giác MAC lớn nhất

Bài 6: Cho đường tròn tâm O bán kính R. Dây cung BC thuộc đường tròn sao cho $BC < 2R$. Điểm A di động trên cung lớn BC. Gọi AD, BE, CF là 3 đường cao của tam giác ABC, H là trực tâm.

a) Chứng minh tứ giác AEHF nội tiếp đường tròn, tìm tâm I của đường tròn đó

b) Chứng minh tiếp tuyến tại E của đường tròn I luôn đi qua 1 điểm cố định

c) Tìm vị trí của A để tam giác AEF có diện tích lớn nhất

Bài 7: Cho $(O;R)$ và dây BC cố định không đi qua O. Từ A thuộc tia đối của tia BC vẽ các tiếp tuyến AM, AN với (O) (M, N là tiếp điểm, M thuộc cung nhỏ BC). Gọi I là trung điểm của BC, MI cắt (O) tại điểm thứ hai là P. Gọi giao của MN với OI là K. Tìm vị trí của A để diện tích tam giác ONK lớn nhất

Bài 8: Cho nửa đường tròn $(O;R)$, đường kính AB. Vẽ các tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn (Ax, By và nửa đường tròn cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AB). Gọi M là một điểm bất kì trên nửa đường tròn. Tiếp tuyến tại M với nửa đường tròn Ax, By lần lượt ở C, D.

a) Chứng minh $AC \cdot BD = R^2$

b) Chứng minh đường tròn đường kính CD tiếp xúc với AB

c) Chứng minh MN song song với AC

d) Tìm vị trí của M trên nửa đường tròn (O) để tứ giác ABDC có chu vi nhỏ nhất

Bài 10: Cho nửa đường tròn đường kính $BC = 2R$. Từ điểm A trên nửa đường tròn vẽ $AH \perp BC$. Nửa đường tròn đường kính BH, CH lần lượt có tâm $O_1; O_2$ cắt AB, AC thứ tự tại D và E.

a) Chứng minh tứ giác ADHE là hình chữ nhật, từ đó tính DE biết $R = 25$ và $BH = 10$

b) Chứng minh tứ giác BDEC nội tiếp đường tròn.

c) Xác định vị trí điểm A để diện tích tứ giác DEO₂O₁ đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị đó.

Bài 11: Cho đường tròn (O), đường kính AB, d₁, d₂ là các đường thẳng lần lượt qua A, B và cùng vuông góc với đường thẳng AB. M, N là các điểm lần lượt thuộc d₁, d₂ sao cho $\widehat{MON} = 90^\circ$.

1) Chứng minh đường thẳng MN là tiếp tuyến của đường tròn (O).

2) Chứng minh $AM \cdot AN = \frac{AB^2}{4}$.

3) Xác định vị trí của M, N để diện tích tam giác MON đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 12: Cho đường tròn cố định tâm O, bán kính R. Tam giác ABC thay đổi và luôn ngoại tiếp đường tròn (O). Một đường thẳng đi qua tâm O cắt các đoạn AB, AC lần lượt tại M và N. Xác định giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác AMN.

Bài 13: Cho AB là đường kính của đường tròn (O;R). C là một điểm thay đổi trên đường tròn. Kẻ CH vuông góc với AB. Gọi I là trung điểm của AC, OI cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn tại M, MB cắt CH tại K. Xác định vị trí của C để chu vi tam giác ACB đạt GTLN? Tìm GTLN đó theo R

Bài 14: Cho đường tròn (O;R) và đường thẳng d không có điểm chung với đường tròn. M là một điểm thuộc đường thẳng d. Qua M kẻ tiếp tuyến MA, MB với đường tròn. Hạ OH vuông góc với d tại H. Nối AB cắt OM tại I, OH tại K. Tia OM cắt đường tròn (O;R) tại E

a) Chứng minh E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB

b) Tìm vị trí của M trên đường thẳng d để diện tích tam giác OIK có diện tích lớn nhất

Bài 15: Cho đường tròn (O;R) đường kính CD = 2R. M là 1 điểm thay đổi trên OC. Vẽ đường tròn (O') đường kính MD. Gọi I là trung điểm của MC, đường thẳng qua I vuông góc với CD cắt (O) tại E, F. đường thẳng ED cắt (O') tại P

a) Chứng minh 3 điểm P, M, F thẳng hàng

b) Chứng minh IP là tiếp tuyến của đường tròn (O;R)

c) Tìm vị trí của M trên OC để diện tích tam giác IPO lớn nhất

BÀI TẬP TỔNG HỢP HÌNH LỚP 9 – PS 7

CHỦ ĐỀ: CHỨNG MINH ĐƯỜNG ĐI QUA ĐIỂM CỐ ĐỊNH.

ĐƯỜNG THẲNG TIẾP XÚC VỚI ĐƯỜNG TRÒN CỐ ĐỊNH.

Bài IV 1. (Thi Thử - THCS Khương Thượng 2015 – 2016)

Cho nửa đường tròn O đường kính $AB = 2R$. Vẽ bán kính OC vuông góc với AB . Lấy điểm K thuộc cung nhỏ AC , kẻ $KH \perp AB$ tại H . Tia AC cắt HK tại I , tia BC cắt HK tại E , AE cắt đường tròn (O) tại F .

- Chứng minh tứ giác $BHFE$ nội tiếp;
- Chứng minh $BI \cdot BF = BC \cdot BE$;
- Giả sử H là trung điểm của OA . Tính diện tích tam giác FEC theo R ;
- Chứng minh rằng khi K di chuyển trên cung nhỏ AC thì đường thẳng FH luôn đi qua một điểm cố định.

Bài IV 2. (KSCL - L5 - THCS Phương Liệt 2017 – 2018)

Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn (O) , kẻ các tiếp điểm AB và AC với đường tròn ấy (B, C là hai tiếp điểm $B \neq C$). Điểm M thuộc cung nhỏ BC ($M \neq B$ và $M \neq C$). Gọi I, H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc với M trên CB, BA, AC . Biết MB cắt IH tại E, MC cắt IK tại F .

- Chứng minh bốn điểm M, K, I, C cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh $\widehat{MIK} = \widehat{MHI}$ và $MI^2 = MH \cdot MK$.
- Chứng minh $EF \perp MI$
- Đường tròn ngoại tiếp $\triangle MFK$ và đường tròn ngoại tiếp tam giác $\triangle MEH$ cắt nhau tại điểm thứ hai là N . Chứng tỏ khi M di động trên cung nhỏ BC ($M \neq B$ và $M \neq C$) thì đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Bài IV 3. (KSCL - THCS Yên Hòa 2017 – 2018)

Cho đường tròn $(O; R)$ có dây CD cố định và H là trung điểm của CD . Gọi S là một điểm bất kì trên tia đối của tia DC . Qua S kẻ hai tiếp tuyến SA, SB tới đường tròn tâm O (với A, B là các tiếp điểm). Đường thẳng AB cắt SO tại E .

- Chứng minh bốn điểm O, H, A, S cùng thuộc một đường tròn;
- Chứng minh $OE \cdot OS = R^2$;

3) Cho $R = 10\text{cm}$; $SD = 4\text{cm}$; $OH = 6\text{cm}$. Tính CD và SA ;

4) Chứng minh rằng khi D di động trên tia đối của tia DC thì đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

Bài IV 4. (Thi Thử - L4 – VINSCHOOL 2017 – 2018)

Cho đường tròn $(O;R)$ có đường kính AB ; điểm I nằm giữa A và O ; dây CD vuông góc với AB tại I ; điểm M thuộc cung nhỏ BC (M khác B,C). Dây AM cắt CD tại K .

1) Chứng minh tứ giác $IKMB$ nội tiếp.

a) Chứng minh $AD^2 = AK \cdot AM$

b) Nếu cho $R = 6\text{cm}$ và I là trung điểm AO . Tính DI , từ đó tính thể tích của hình tạo thành khi tam giác ADI quay quanh trục DI .

2) Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CKM .

3) Trên tia đối của MC lấy điểm E sao cho $ME = MB$. Chứng minh rằng: khi các điểm A, B, I cố định và điểm M thay đổi trên cung nhỏ BC (M khác B,C) thì đường tròn ngoại tiếp tam giác BCE luôn đi qua một điểm cố định khác C và B .

Bài 5: (Thi Thử L3 – TTBDVH EduFly – 2017 -2018)

Cho đường tròn (O) và dây cung AB , trên tia AB lấy 1 điểm C nằm ngoài đường tròn. Từ điểm chính giữa P của cung lớn AB kẻ đường kính PQ , cắt dây AB tại A . Tia CP cắt đường tròn tại điểm thứ hai I , các dây AB và QI cắt nhau tại K .

a) Chứng minh tứ giác $PDKI$ nội tiếp được

b) Chứng minh $CI \cdot CP = CK \cdot CD$. Chứng minh hai tam giác QAI và BKI đồng dạng

c) Chứng minh IC là phân giác ngoài góc I của tam giác AIB

d) Cho A,B,C cố định. Chứng minh rằng khi (O) thay đổi nhưng vẫn đi qua A, B thì đường thẳng QI luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 6. (KSCL - L5 - THCS Vĩnh Tuy 2015 – 2016)

Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB và điểm C thuộc đường tròn. Gọi M và N là điểm chính giữa các cung nhỏ AC và BC . Nối MN cắt AC tại I . Hạ ND vuông góc AC . Gọi E là trung điểm BC . Dựng hình bình hành $ADEF$.

1) Tính góc MIC

2) Chứng minh F thuộc đường tròn $(O; R)$

3) Chứng minh DN là tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$

4) Khi C chuyển động trên đường tròn $(O; R)$ chứng minh MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định

Bài 7: (Kiểm Tra kì 2 – Quận Hoàng Mai 2016 – 2017)

Cho nửa (O) , đường kính AB. Lấy hai điểm C, M bất kì thuộc nửa đường tròn sao cho $AC = CM$ (AC và CM khác MB). Gọi D là giao điểm của AC và BM; H là giao điểm của AM và BC.

1) Chứng minh tứ giác CHMD nội tiếp.

2) Chứng minh $DA \cdot DC = DB \cdot DM$

3) Tiếp tuyến tại A của (O) cắt tia BC tại K. Chứng minh $AK + HD = 2KD$

4) Gọi Q là giao điểm của DH và AB. Chứng minh khi C di chuyển trên nửa đường tròn sao cho $AC = AM$ thì đường tròn ngoại tiếp ΔCMQ luôn đi qua một điểm cố định.