Chương 3

Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

§1 Phương trình bậc nhất hai ẩn. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Phương trình và hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

Phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng $ax+by=c \ \ (1)$ với a, b không đồng thời bằng 0.
Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ (2) với a, b không đồng thời bằng 0 và a', b' không đồng thời bằng 0.
Cặp số $(x_0; y_0)$ được gọi là nghiệm của (1) nếu $(x_0; y_0)$ thỏa (1).
Cặp số $(x_0; y_0)$ được gọi là nghiệm của (2) nếu $(x_0; y_0)$ thỏa mãn hai phương trình trong (2).

Ví dụ 1. Kiểm tra cặp số sau có phải là nghiệm của phương trình $2x-y-1=0$ hay không?

a) $(1; 1)$;

b) $(0{,}5; 3)$.

Lời giải.

1. Thay $x=1$ và $y=1$ vào phương trình, ta có $2\cdot 1-1-1=0$.
   Vậy $(1; 1)$ là nghiệm của phương trình.

2. Thay $x=0,5$ và $y=3$ vào phương trình, ta có $2\cdot 0,5-3-1=-3\neq 0$.
   Vậy $(0{,}5; 3)$ không là nghiệm của phương trình.

□

1.2 Tập nghiệm của phương trình và hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

Phương trình bậc nhất hai ẩn luôn có vô số nghiệm và được biểu diễn bởi đường thẳng $ax+by=c \ \ (3)$.

- Nếu $a\neq 0$ và $b\neq 0$ thì (3) có nghiệm tổng quát $\begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{c}{b}. \end{cases}$

- Nếu $a\neq 0$ và $b=0$ thì (3) có nghiệm tổng quát $\begin{cases} x=\dfrac{c}{a} \\ y\in\mathbb{R}. \end{cases}$

- Nếu $a=0$ và $b\neq 0$ thì (3) có nghiệm $\begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ y=\dfrac{c}{b}. \end{cases}$

Ví dụ 2. Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau

a) $3x-y=2$;

b) $x+5y-3=0$;

c) $4x+0y=-2$;

d) $0x+2y=5$.

Lời giải.

a) $3x-y=2 \Leftrightarrow y=3x-2$.
Vậy phương trình có nghiệm tổng quát
$\begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ y=3x-2. \end{cases}$

b) $x+5y-3=0 \Leftrightarrow x=-5y+3$.
Vậy phương trình có nghiệm tổng quát
$\begin{cases} x=-5y+3 \\ y\in\mathbb{R}. \end{cases}$

c) $4x+0y=-2$.
Phương trình có nghiệm tổng quát
$\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y\in\mathbb{R}. \end{cases}$

d) $0x+2y=5$.
Phương trình có nghiệm tổng quát
$\begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ y=\dfrac{5}{2}. \end{cases}$

□

2 Các bài toán nâng cao

Dạng 48. Xét xem cặp số có phải là nghiệm của phương trình không.

- Áp dụng nền tảng kiến thức.
- Thực hành tốt kĩ năng tính toán biểu thức.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Trong các cặp số $(2;1),(3;-1),(0;5)$, cặp số nào là nghiệm của phương trình $x+2y-4=0$.

Lời giải.

- Với $(2;1)$, ta có $2+2\cdot 1-4=0 \Rightarrow (2;1)$ là nghiệm.
- Với $(3;-1)$, ta có $3+2\cdot(-1)-4=-3\neq 0 \Rightarrow (3;-1)$ không là nghiệm.
- Với $(0;5)$, ta có $0+2\cdot 5-4=6\neq 0 \Rightarrow (0;5)$ không là nghiệm.

□

Dạng 49. Tìm nghiệm tổng quát và biểu diễn tập nghiệm của phương trình

Biến đổi biểu thức để đưa về x theo y hoặc y theo x.

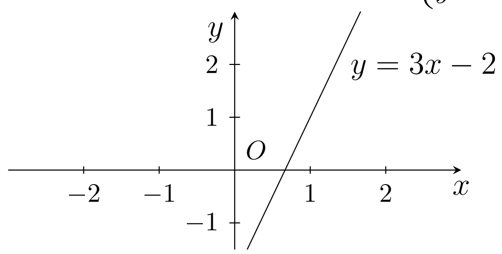
BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tìm nghiệm tổng quát và biểu diễn tập nghiệm các phương trình sau

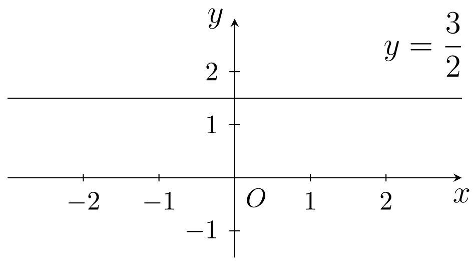
a) $3x - y - 2 = 0$; b) $0x + 2y = 3$.

Lời giải.

a) $3x - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 3x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 3x - 2. \end{cases}$



b) $0x + 2y = 3 \Leftrightarrow y = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$



□

Dạng 50. Xác định tham số khi biết nghiệm của phương trình

Thực hành tốt kỹ năng tính biểu thức.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tìm m trong mỗi trường hợp sau

1. $(1; 2)$ là nghiệm của phương trình $mx + y - 5 = 0$;
2. Điểm $A(0; 3)$ thuộc đường thẳng $4x + my - 6 = 0$.

Lời giải.

1. Thay $x = 1,\ y = 2$ vào phương trình ta có $m \cdot 1 + 2 - 5 = 0 \Leftrightarrow m = 3$.
2. Thay $x = 0,\ y = 3$ vào đường thẳng, ta có $4 \cdot 0 + m \cdot 3 = 6 \Leftrightarrow m = 2$.

□

Dạng 51. Đoán nhận số nghiệm của hệ phương trình bậc nhất

Xét hệ $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$. Nếu

- $\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất.
- $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \neq \dfrac{c}{c'}$ thì hệ phương trình vô nghiệm.
- $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Không vẽ đồ thị, hãy đoán nhận số nghiệm các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x-y=1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=2 \\ -2x+2y=3. \end{cases}$

Lời giải.

a) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x-y=1. \end{cases}$

Ta có $\dfrac{2}{1} \neq \dfrac{1}{-1}$ nên hệ có nghiệm duy nhất.

b) $\begin{cases} x-y=2 \\ -2x+2y=3. \end{cases}$

Ta có $\dfrac{1}{-2} = \dfrac{-1}{2} \neq \dfrac{2}{3}$ nên hệ vô nghiệm.

□

Dạng 52. Hai hệ phương trình tương đương

- Hai hệ phương trình được gọi là tương đương với nhau nếu chúng có chung tập nghiệm.
- Hai hệ phương trình vô nghiệm cũng được coi là tương đương.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Xét sự tương đương của các cặp hệ phương trình sau

1. (1) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x-2y=-1 \end{cases}$ và (2) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x-y=0; \end{cases}$
2. (3) $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ và (4) $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x-y=0. \end{cases}$

Lời giải.

1. $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x-2y=-1 \end{cases}$ và $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x-y=0. \end{cases}$

$\begin{cases} 2x-y=1 \\ x-2y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=1 \\ x-2y=-(2x-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=1 \\ 3x-3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=1 \\ x-y=0. \end{cases}$

Vậy (1) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x-2y=-1 \end{cases}$ và (2) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x-y=0 \end{cases}$ là hai hệ tương đương.

2. (3) $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ và (4) $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x-y=0. \end{cases}$
   Ta thấy cặp số $(2;1)$ thỏa (3) nhưng không thỏa (4).
   Vậy (3) $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ và (4) $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x-y=0 \end{cases}$ không tương đương.

□

3 Luyện tập

Bài 1. Cho phương trình $mx+(m+1)y=3$.

1. Với $m=1$, xét xem các cặp số sau, cặp số nào là nghiệm của phương trình.

   i) $(3;-2)$; ii) $(0;1)$; iii) $(-1;0)$.

2. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình trên ứng với

   i) $m=-1$; ii) $m=2$.

3. Tìm giá trị m tương ứng khi phương trình nhận các cặp số sau làm nghiệm.

   i) $(3;1)$; ii) $(2;3)$.

Lời giải.

1. Với $m=1$, ta có phương trình $2x+3y=3$.

   i) Thay $x=3,\ y=-2$ vào phương trình, ta có $2\cdot 3+3\cdot(-2)=6\neq 3$ nên $(3;-2)$ không là nghiệm của phương trình.

   ii) Thay $x=0,\ y=1$ vào phương trình, ta có $2\cdot 0+3\cdot 1=3$ nên $(0;1)$ là nghiệm của phương trình.

   iii) Thay $x=-1,\ y=0$ vào phương trình, ta có $2\cdot(-1)+3\cdot 0=-2\neq 3$ nên $(-1;0)$ không là nghiệm của phương trình.

2. Tìm nghiệm tổng quát.

   i) Với $m=-1$ ta có phương trình $-1\cdot x+(-1+1)y=3 \Leftrightarrow x=-3$.
   Vậy phương trình có nghiệm tổng quát $\begin{cases} x=-3 \\ y\in\mathbb{R}. \end{cases}$

   ii) Với $m=2$ ta có phương trình $2x+3y=3 \Leftrightarrow y=-\dfrac{2}{3}x+1$.
   Vậy phương trình có nghiệm tổng quát $\begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ y=-\dfrac{2}{3}x+1. \end{cases}$
   Hoặc: $2x+3y=3 \Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{2}y+\dfrac{3}{2}$.
   Vậy phương trình có nghiệm tổng quát $\begin{cases} x=-\dfrac{3}{2}y+\dfrac{3}{2} \\ y\in\mathbb{R}. \end{cases}$

3. Tìm giá trị m tương ứng khi phương trình nhận các cặp số sau làm nghiệm.

   i) Thay $x = 3,\ y = 1$ vào phương trình, ta có $3m + (m+1)\cdot 1 = 3 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$.

   ii) Thay $x = 2,\ y = 3$ vào phương trình, ta có $2m + (m+1)\cdot 3 = 3 \Leftrightarrow m = 0$.

□

Bài 2. Không vẽ đồ thị, hãy đoán nhận số nghiệm của các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ x + y = 1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ -2x + 4y = 3; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ -6x + 2y = -4; \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x + \dfrac{3}{2}y = 5 \\ 2y = 8. \end{cases}$

Lời giải.

a) $\begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ x + y = 1. \end{cases}$

Do $\dfrac{4}{1} \neq \dfrac{3}{1}$ nên hệ có nghiệm duy nhất.

b) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ -2x + 4y = 3. \end{cases}$

Do $\dfrac{1}{-2} = \dfrac{-2}{4} \neq \dfrac{5}{3}$ nên hệ vô nghiệm.

c) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ -6x + 2y = -4. \end{cases}$

Do $\dfrac{3}{-6} = \dfrac{-1}{2} = \dfrac{2}{-4}$ nên hệ có vô số nghiệm.

d) $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x + \dfrac{3}{2}y = 5 \\ 2y = 8. \end{cases}$

Do $\dfrac{0}{\frac{2}{3}} \neq \dfrac{2}{\frac{3}{2}}$ nên hệ có nghiệm duy nhất.

□

4 Các bài toán nâng cao

Bài 3. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x + ay &= 5 \\ 2x + y &= b \end{cases}$. Tìm a, b để hệ

a) Có nghiệm duy nhất; b) Vô nghiệm; c) Vô số nghiệm.

Lời giải.

1. Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \dfrac{3}{2} \neq \dfrac{a}{1} \Leftrightarrow a \neq \dfrac{3}{2}$.

2. Hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{3}{2} = \dfrac{a}{1} \neq \dfrac{5}{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{2} = \dfrac{a}{1} \\ \dfrac{3}{2} \neq \dfrac{5}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{2} \\ b \neq \dfrac{10}{3}. \end{cases}$

3. Hệ có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{3}{2} = \dfrac{a}{1} = \dfrac{5}{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{2} = \dfrac{a}{1} \\ \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{2} \\ b = \dfrac{10}{3}. \end{cases}$

□

§2 Phương pháp giải hệ phương trình

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Phương pháp thế

Để giải hệ phương trình bằng phương pháp thế ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Biểu thị một ẩn (giả sử ẩn x) theo ẩn còn lại (ẩn y) từ một trong các phương trình của hệ.

Bước 2. Thay biểu thức của x vào phương trình còn lại rồi tìm giá trị của y.

Bước 3. Thay giá trị y vừa tìm được vào biểu thức của x để tìm giá trị của x.

Bước 4. Kết luận nghiệm của hệ phương trình

Ví dụ 1. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế

a) $\begin{cases} 4x + 5y = 3 \\ x - 3y = 5. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7x - 2y = 1 \\ 3x + y = 6. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + 3y = 1 \\ 2x + y = -1. \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y\sqrt{5} = 0 \\ x\sqrt{5} + 3y = 1 - \sqrt{5}. \end{cases}$

Lời giải.

1. $\begin{cases} 4x + 5y = 3 \\ x - 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 3y \\ 4x + 5y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 3y \\ 4(5 + 3y) + 5y = 3 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 3y \\ 17y = -17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 3y \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 3 \cdot (-1) = 2 \\ y = -1. \end{cases}$
Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; y) = (2; -1)$.

2. $\begin{cases} 7x - 2y = 1 \\ 3x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 3x \\ 7x - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 3x \\ 7x - 2(6 - 3x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 3x \\ 13x = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 1. \end{cases}$
Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; y) = (1; 3)$.

3. $\begin{cases} 5x + 3y = 1 \\ 2x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 - 2x \\ 5x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 - 2x \\ 5x + 3(-1 - 2x) = 1 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 - 2x \\ x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 - 2 \cdot (-4) = 7 \\ x = -4. \end{cases}$
Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x; y) = (-4; 7)$.

4. $\begin{cases} x + y\sqrt{5} = 0 \\ x\sqrt{5} + 3y = 1 - \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y\sqrt{5} \\ x\sqrt{5} + 3y = 1 - \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y\sqrt{5} \\ -y\sqrt{5}\sqrt{5} + 3y = 1 - \sqrt{5} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y\sqrt{5} \\ y = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{5}}{2} - \dfrac{5}{2} \\ y = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; y) = \left(\dfrac{\sqrt{5}}{2} - \dfrac{5}{2}; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

□

1.2 Phương pháp cộng đại số

Để giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Nhân cả hai vế của các phương trình trong hệ với số thích hợp (nếu cần) để đưa hệ đã cho về hệ mới, trong đó các hệ số của một ẩn nào đó bằng nhau (hoặc đối nhau).

Bước 2. Trừ (hoặc cộng) từng vế của các phương trình trong hệ mới để khử bớt một ẩn.

Bước 3. Giải phương trình một ẩn vừa thu được.

Bước 4. Thay giá trị tìm được của ẩn này vào một trong các phương trình của hệ để tìm ẩn còn lại.

Bước 5. Kết luận nghiệm của hệ phương trình.

Ví dụ 2. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số.

a) $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x + 3y = 11. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - y = 1. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 4y = 18 \\ 4x - 3y = -1. \end{cases}$

d) $\begin{cases} \sqrt{3}x - \sqrt{2}y = 1 \\ \sqrt{2}x + 3\sqrt{3}y = 4\sqrt{6}. \end{cases}$

Lời giải.

1. $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 12 \\ x - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ 4 - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; y) = (4; 1)$.

2. $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2 - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; y) = (2; 1)$.

3. $\begin{cases} 3x + 4y = 18 \\ 4x - 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x + 16y = 72 \\ 12x - 9y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25y = 75 \\ 12x - 9y = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ 12x - 9 \cdot 3 = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; y) = (2; 3)$.

4. $\begin{cases}\sqrt{3}x-\sqrt{2}y=1\\ \sqrt{2}x+3\sqrt{3}y=4\sqrt{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{6}x-2y=\sqrt{2}\\ \sqrt{6}x+9y=12\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}11y=11\sqrt{2}\\ \sqrt{6}x-2y=\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\sqrt{2}\\ \sqrt{6}x-2\sqrt{2}=\sqrt{2}\end{cases}$
$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\sqrt{3}\\ y=\sqrt{2}.\end{cases}$
Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)=\left(\sqrt{3};\sqrt{2}\right)$.

□

1.3 Phương pháp đặt ẩn phụ

Để giải hệ phương trình ta còn dùng phương pháp đặt ẩn phụ thông qua các ẩn đã cho.
Với dạng này ta cần nhận biết được sự tương đồng của các ẩn từ đó chọn ẩn phụ đặt cho hợp lý để đưa về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn rồi áp dụng phương pháp thế hoặc phương pháp cộng đại số để giải. Sau khi tìm được nghiệm theo ẩn mới, sau đó ta thay lại ẩn ban đầu để tìm nghiệm của hệ đã cho.

Ví dụ 3. Giải các hệ phương trình.

a) $\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1\\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=5.\end{cases}$ b) $\begin{cases}\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{y-1}=2\\ \dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{y-1}=1.\end{cases}$ c) $\begin{cases}\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=1\\ \dfrac{1}{6x}+\dfrac{1}{5y}=\dfrac{2}{15}.\end{cases}$

Lời giải.

1. Điều kiện xác định $x\neq 0, y\neq 0$.
Đặt $a=\dfrac{1}{x}, b=\dfrac{1}{y}$, hệ phương trình đã cho trở thành
$\begin{cases}a-b=1\\ 3a+4b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1+b\\ 3a+4b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1+b\\ 3(1+b)+4b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1+b\\ 7b=2\end{cases}$
$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1+\dfrac{2}{7}\\ b=\dfrac{2}{7}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{9}{7}\\ b=\dfrac{2}{7}\end{cases}$. Khi đó ta có $\begin{cases}\dfrac{1}{x}=\dfrac{9}{7}\\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{7}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{7}{9}\\ y=\dfrac{7}{2}.\end{cases}$ (nhận)
Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)=\left(\dfrac{7}{9};\dfrac{7}{2}\right)$.

2. Điều kiện xác định $x\neq 2, y\neq 1$.
Đặt $a=\dfrac{1}{x-2}, b=\dfrac{1}{y-1}$, hệ phương trình đã cho trở thành
$\begin{cases}a-b=2\\ 2a+3b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2+b\\ 2(2+b)+3b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2+b\\ 5b=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2+b\\ b=-\dfrac{3}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{7}{5}\\ b=-\dfrac{3}{5}.\end{cases}$
Từ đó thay vào ta tìm được $\begin{cases}x=\dfrac{1}{a}+2=\dfrac{19}{7}\\ y=\dfrac{1}{b}+1=\dfrac{2}{5}.\end{cases}$ (nhận)
Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)=\left(\dfrac{19}{7};\dfrac{2}{5}\right)$.

3. Điều kiện xác định $x\neq 0, y\neq 0$.
Đặt $a=\dfrac{1}{x}, b=\dfrac{1}{y}$, hệ phương trình đã trở thành

$$\begin{cases}4a+4b=3\\ \dfrac{1}{6}a+\dfrac{1}{5}b=\dfrac{2}{15}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a+4b=3\\ 5a+6b=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}20a+20b=15\\ 20a+24b=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4b=1\\ 20a+20b=15\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=\dfrac{1}{4}\\ 20a+20\cdot\dfrac{1}{4}=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\dfrac{1}{4}\\ a=\dfrac{1}{2}.\end{cases}\text{ Khi đó ta có }\begin{cases}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=4.\end{cases}\text{ (nhận)}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)=(2;4)$.

□

2 Các dạng toán

Dạng 53. Giải và biện luận hệ phương trình

- Dùng phương pháp thế, biểu diễn 1 ẩn theo ẩn còn lại sau đó đưa về phương trình bậc nhất 1 ẩn.
- Giải và biện luận phương trình bậc nhất 1 ẩn.
- Kết luận tập nghiệm của hệ phương trình.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hệ phương trình (m là tham số)

$$\begin{cases}x+my=1 & (1)\\ (5m+2)x+3y=m-2. & (2)\end{cases}$$

Giải và biện luận hệ phương trình theo m.

Lời giải.

Từ phương trình (1) suy ra $x=1-my$, thay vào phương trình (2) ta được

$$(5m+2)(1-my)+3y=m-2\Leftrightarrow(5m^2+2m-3)y=4m+4\Leftrightarrow(m+1)(5m-3)y=4(m+1).\quad(3)$$

- Nếu $m=-1$ thì (3) $\Leftrightarrow 0\cdot y=0$ luôn đúng với mọi $y\in\mathbb{R}$. Vậy phương trình có vô số nghiệm.
- Nếu $m=\dfrac{3}{5}$ thì phương trình (3) $\Leftrightarrow 0\cdot y=\dfrac{-32}{5}$ (vô lý). Vậy hệ phương trình vô nghiệm.
- Nếu $m\neq-1$ và $m\neq\dfrac{3}{5}$ thì (3) $\Leftrightarrow y=\dfrac{4}{5m-3}$, do đó $x=\dfrac{m-3}{5m-3}$. Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{m-3}{5m-3};\dfrac{4}{5m-3}\right)$.

□

Ví dụ 2. Cho hệ phương trình (m là tham số)

$$\begin{cases} 3x + my = 2 & (1) \\ x + (3m-2)y = m. & (2) \end{cases}$$

Giải và biện luận hệ phương trình theo m.

Lời giải.

Từ phương trình (2) suy ra $x = m - (3m-2)y$, thay vào phương trình (1) ta được
$3m - 3(3m-2)y + my = 2 \Leftrightarrow (-8m+6)y = 2 - 3m. \quad (3)$

- Nếu $m = \dfrac{3}{4}$ thì (3) $\Leftrightarrow 0 \cdot y = -\dfrac{1}{4}$ (vô lý) nên hệ phương trình vô nghiệm.
- Nếu $m \neq \dfrac{3}{4}$ thì (3) $\Leftrightarrow y = \dfrac{2-3m}{-8m+6}$, do đó $x = \dfrac{m^2-6m+4}{-8m+6}$.
  Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y) = \left(\dfrac{m^2-6m+4}{-8m+6}; \dfrac{2-3m}{-8m+6}\right)$.

□

Dạng 54. Các bài toán về đường thẳng trong hệ trục tọa độ

- Vẽ 2 đường thẳng trong cùng 1 hệ trục tọa độ.
- Xác định vị trí tương đối của 2 đường thẳng.
- Từ đó kết luận tập nghiệm của hệ phương trình.

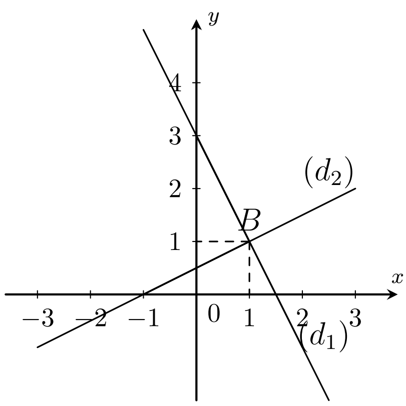
BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Dùng đồ thị giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = -1. \end{cases}$$

Lời giải.

Gọi hai đường thẳng xác định bởi hai phương trình trong hệ đã cho lần lượt là (d_1) và (d_2).
Vẽ (d_1) và (d_2) trong cùng hệ trục tọa độ, ta thấy rằng 2 đường thẳng cắt nhau tại một điểm duy nhất, có tọa độ $B(1;1)$.
Thử lại, ta thấy $(1;1)$ là một nghiệm của hệ.
Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y) = (1;1)$.



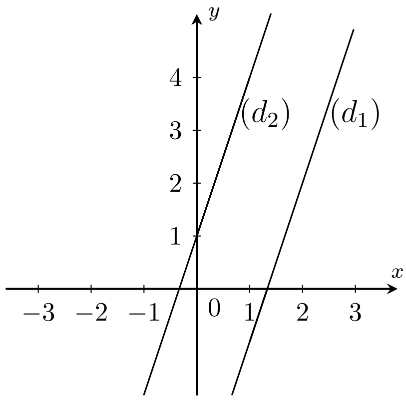
□

Ví dụ 2. Dùng đồ thị giải hệ phương trình

$$\begin{cases}3x-y=4\\3x-y=-1.\end{cases}$$

Lời giải.

Gọi hai đường thẳng xác định bởi hai phương trình trong hệ đã cho lần lượt là (d_1) và (d_2).
Vẽ (d_1) và (d_2) trong cùng hệ trục tọa độ, ta thấy rằng 2 đường thẳng song song.
Thử lại, ta có đường thẳng (d_1) và (d_2) có cùng hệ số góc bằng 3 và tung độ gốc khác nhau nên (d_1) và (d_2) song song với nhau, do đó (d_1) và (d_2) không có điểm chung.
Vậy hệ phương trình vô nghiệm.



□

Dạng 55. Xác định tham số để hệ có nghiệm duy nhất

Xét hệ $\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ với các hệ số chứa tham số.

- Đầu tiên, ta lần lượt xét $a'=0$, $b'=0$, $c'=0$ và kiểm tra các tham số ứng với từng trường hợp.
- Sau đó, ta xét $a', b', c' \neq 0$. Khi ấy, hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hệ phương trình $\begin{cases}x+my=2\\mx+y=3\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ có nghiệm duy nhất.

Lời giải.

Xét $m=0$. Khi đó hệ trở thành $\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$, rõ ràng có nghiệm duy nhất.

Xét $m \neq 0$. Khi đó hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\dfrac{1}{m} \neq \dfrac{m}{1} \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

Vậy tất cả các giá trị của tham số m để hệ có nghiệm duy nhất là $m \neq \pm 1$. □

Ví dụ 2. Cho hệ phương trình $\begin{cases}ax-y=2\\x+ay=3.\end{cases}$

Chứng minh rằng với mọi a thì hệ có nghiệm duy nhất. Tìm nghiệm đó.

Lời giải.

Xét $a=0$. Khi đó hệ trở thành $\begin{cases}-y=2\\ x=3,\end{cases}$ rõ ràng có nghiệm duy nhất là $(3;-2)$.
Xét $a\neq 0$. Khi đó hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\dfrac{a}{1}\neq\dfrac{-1}{a}\Leftrightarrow a^2+1\neq 0$.
Ta thấy rằng $a^2+1\geq 1>0$ với mọi a. Do đó rõ ràng $a^2+1\neq 0$ với mọi a. Vậy hệ luôn có nghiệm duy nhất.
Ta có hệ tương đương

$$\begin{cases}ax-2=y\\ x+ay=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=ax-2\\ x+a(ax-2)=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=ax-2\\ (a^2+1)x=2a+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{3a-2}{a^2+1}\\ x=\dfrac{2a+3}{a^2+1}.\end{cases}$$

Kết luận: Với mọi a, hệ có nghiệm duy nhất là $(x;y)=\left(\dfrac{2a+3}{a^2+1};\dfrac{3a-2}{a^2+1}\right)$. □

Dạng 56. Xác định tham số để hệ vô nghiệm

Xét hệ $\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$ với các hệ số chứa tham số. Ta lần lượt xét $a'=0$, $b'=0$, $c'=0$ và kiểm tra các tham số ứng với từng trường hợp. Sau đó, xét $a',b',c'\neq 0$. Khi ấy, hệ vô nghiệm khi và chỉ khi $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hệ phương trình $\begin{cases}x+y=1\\ ax+2y=0.\end{cases}$
Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hệ vô nghiệm.

Lời giải.

Hệ tương đương $\begin{cases}ax+2y=0\\ x+y=1.\end{cases}$
Do đó hệ vô nghiệm khi và chỉ khi $\dfrac{a}{1}=\dfrac{2}{1}\neq\dfrac{0}{1}\Leftrightarrow a=2$. □

Ví dụ 2. Cho hệ phương trình $\begin{cases}mx+3my=2\\ 2m^2x+6m^2y=m.\end{cases}$
Chứng minh rằng hệ vô nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

Lời giải.

Xét $m=0$. Khi đó hệ trở thành $\begin{cases}0x+0y=2\\ 0x+0y=0\end{cases}$, rõ ràng hệ vô nghiệm.
Xét $m\neq 0$. Khi đó hệ vô nghiệm khi và chỉ khi $\dfrac{m}{2m^2}=\dfrac{3m}{6m^2}\neq\dfrac{2}{m}(*)$
Ta thấy với mọi $m\neq 0$ thì $\dfrac{m}{2m^2}=\dfrac{3m}{6m^2}=\dfrac{1}{2m}$.
Mặt khác $\dfrac{2}{m}-\dfrac{1}{2m}=\dfrac{3}{2m}\neq 0$ với mọi m khác 0. Do đó $\dfrac{2}{m}\neq\dfrac{1}{2m}$ với mọi m khác 0.
Vậy $(*)$ đúng với mọi m khác 0. Kết hợp với trường hợp trên, ta suy ra hệ vô nghiệm với mọi giá trị của tham số m. □

Dạng 57. Xác định tham số để hệ có vô số nghiệm

Xét hệ $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ với các hệ số chứa tham số. Ta lần lượt xét $a' = 0$, $b' = 0$, $c' = 0$ và kiểm tra các tham số ứng với từng trường hợp. Sau đó, xét $a', b', c' \neq 0$. Khi ấy, hệ có vô số nghiệm khi và chỉ khi $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = m \\ mx + \sqrt{2}y = m. \end{cases}$

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ có vô số nghiệm.

Lời giải.

Xét $m = 0$. Khi đó, hệ trở thành $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ \sqrt{2}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$

Vậy khi $m = 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất. Ta loại giá trị này.

Xét $m \neq 0$. Khi đó hệ có vô số nghiệm khi và chỉ khi $\dfrac{2}{m} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{m}{m}$

Tương đương $\begin{cases} \dfrac{2}{m} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{2}{m} = 1 \end{cases}$.

Ta thấy hệ này vô nghiệm.

Vậy không có giá trị nào của tham số m để hệ có vô số nghiệm. □

Ví dụ 2. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x + (m^2 + 1)y = 5m - 10 \\ -9x + (-3m^2 - 3)y = -15m + 30. \end{cases}$

Chứng minh rằng hệ có vô số nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

Lời giải.

Xét $m = 2$. Khi đó hệ trở thành $\begin{cases} 3x + 5y = 0 \\ -9x - 15y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 5y = 0 \\ 3x + 5y = 0 \end{cases}$.

Vậy hệ có vô số nghiệm khi $m = 2$.

Xét $m \neq 2$. Khi đó hệ có vô số nghiệm khi và chỉ khi $\dfrac{3}{-9} = \dfrac{m^2 + 1}{-3m^2 - 3} = \dfrac{5m - 10}{-15m + 30} (*)$

Ta thấy với mọi $m \neq 2$ thì $\dfrac{3}{-9} = \dfrac{m^2 + 1}{-3m^2 - 3} = \dfrac{5m - 10}{-15m + 30} = \dfrac{1}{3}$.

Do đó $(*)$ đúng với mọi $m \neq 2$. Kết hợp với trường hợp trên, ta suy ra hệ có vô số nghiệm với mọi giá trị của tham số m. □

Dạng 58. Xác định tham số để hệ có nghiệm thỏa điều kiện khác

Xét hệ $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ với các hệ số chứa tham số.

Nếu yêu cầu của bài toán liên quan đến tính chất của nghiệm (chẳng hạn tìm m để hệ có nghiệm nguyên), tiến hành rút thế hoặc cộng đại số để giải ra cụ thể giá trị của x, y theo tham số. Sau đó, tùy vào yêu cầu của bài toán, tiến hành giải tiếp.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hệ phương $\begin{cases} (a+1)x-y=a+1 \\ x+(a-1)y=2 \end{cases}$ với tham số a. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số a sao cho hệ có nghiệm nguyên.

Lời giải.

Xét $a=1$. Hệ trở thành $\begin{cases} 2x-y=2 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=2. \end{cases}$
Vậy ta nhận giá trị $a=1$.
Xét $a \neq 1$. Khi đó hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\dfrac{a+1}{1} \neq \dfrac{-1}{a-1} \Leftrightarrow a \neq 0$.
Vậy xét $a \neq 0$. Khi đó, hệ tương đương

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y=(a+1)x-(a+1) \\ x+(a-1)y=2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y=(a+1)x-(a+1) \\ x+(a-1)(a+1)(x-1)=2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y=(a+1)x-(a+1) \\ a^2x+-a^2+1=2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y=\dfrac{a+1}{a^2} \\ x=1+\dfrac{1}{a^2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Để hệ có nghiệm nguyên thì x phải nguyên. Do đó $1+\dfrac{1}{a^2}$ phải nguyên. Vậy a^2 phải là ước của 1.
Mặt khác, $a^2 \geq 0$. Vậy $a^2=1$. Suy ra a chỉ có thể nhận giá trị ± 1.
Ta không xét $a=1$. Xét $a=-1$, khi đó $y=0, x=2$ (thỏa)
Kết luận: Hệ có nghiệm duy nhất, và nghiệm đó là nghiệm nguyên khi và chỉ khi $a=\pm 1$. □

Ví dụ 2. Cho hệ phương $\begin{cases} 2x+(a-2)y=a+1 \\ (a+2)x-2y=3 \end{cases}$ với tham số a. Tìm tất cả các giá trị của tham số a sao cho hệ có nghiệm duy nhất. Trong các giá trị đó, tìm giá trị của a để tổng $x+y$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

Xét $a=-2$. Khi đó hệ trở thành $\begin{cases}2x-4y=-1\\ -2y=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-4y=-1\\ y=\dfrac{-3}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{-7}{2}\\ y=\dfrac{-3}{2}.\end{cases}$

Vậy khi $a=-2$, hệ có nghiệm duy nhất. Suy ra $x+y=-5$.

Xét $a\neq -2$. Khi đó hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\dfrac{2}{a+2}\neq\dfrac{a-2}{-2} \Leftrightarrow a^2\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 0$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $a\neq 0$.

Xét $a\neq 0$. Hệ tương đương

$$\begin{aligned}&\begin{cases}2x+(a-2)y=a+1\\ y=\dfrac{a+2}{2}x-\dfrac{3}{2}\end{cases}\\ \Leftrightarrow &\begin{cases}2x+\dfrac{a^2-4}{2}x-\dfrac{3(a-2)}{2}=a+1\\ y=\dfrac{a+2}{2}x-\dfrac{3}{2}\end{cases}\\ \Leftrightarrow &\begin{cases}a^2x=5a-4\\ y=\dfrac{a+2}{2}x-\dfrac{3}{2}\end{cases}\\ \Leftrightarrow &\begin{cases}x=\dfrac{5a-4}{a^2}\\ y=\dfrac{a^2+3a-4}{a^2}.\end{cases}\end{aligned}$$

Ta có $x+y=\dfrac{a^2+8a-8}{a^2}=-\dfrac{8}{a^2}+\dfrac{8}{a}+1=-8\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{2}\right)^2-1\leq -1$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{2}=0$ hay $a=2$.

Mà khi $a=2$ thì $x+y=-5<-1$ nên $a=2$ là giá trị cần tìm. □

3 Luyện tập

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế

a) $\begin{cases}7x-3y=5\\ 4x+y=2.\end{cases}$ b) $\begin{cases}\sqrt{5}x-y=\sqrt{5}(\sqrt{3}-1)\\ 2\sqrt{3}x+3\sqrt{5}y=21.\end{cases}$ c) $\begin{cases}1{,}7x-2y=3{,}8\\ 2{,}1x+5y=0{,}4.\end{cases}$

Lời giải.

a) Thế $y=2-4x$ ở phương trình dưới vào phương trình trên ta được

$$\begin{cases}7x-3(2-4x)=5\\ y=2-4x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}19x-6=5\\ y=2-4x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{11}{19}\\ y=\dfrac{-6}{19}.\end{cases}$$

Kết luận: Nghiệm của hệ là $\left(\dfrac{11}{19};\dfrac{-6}{19}\right)$.

b) Thế $y=\sqrt{5}(x+1-\sqrt{3})$ ở phương trình trên vào phương trình dưới ta được

$$\begin{cases} y=\sqrt{5}(x+1-\sqrt{3}) \\ 2\sqrt{3}x+15(x+1-\sqrt{3})=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\sqrt{5}(x+1-\sqrt{3}) \\ (15+2\sqrt{3})x=3(2+5\sqrt{3}) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3(2+5\sqrt{3})}{15+2\sqrt{3}}=\dfrac{3(2+3\sqrt{3})(15-2\sqrt{3})}{225-12}=\dfrac{3\cdot 71\sqrt{3}}{213}=\sqrt{3} \\ y=\sqrt{5}(\sqrt{3}+1-\sqrt{3})=\sqrt{5}. \end{cases}$$

Kết luận: Nghiệm của hệ là $\left(\sqrt{3};\sqrt{5}\right)$.

c) Thế $y=\dfrac{1{,}7x-3{,}8}{2}$ ở phương trình trên vào phương trình dưới ta được

$$\begin{cases} y=\dfrac{1{,}7x-3{,}8}{2} \\ 2{,}1x+5y=0{,}4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1{,}7x-3{,}8}{2} \\ 2{,}1x+5\cdot\dfrac{1{,}7x-3{,}8}{2}=0{,}4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{198}{127} \\ y=\dfrac{-73}{127}. \end{cases}$$

Kết luận: Nghiệm của hệ là $\left(\dfrac{198}{127};\dfrac{-73}{127}\right)$.

□

Bài 2. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số

a) $\begin{cases} 3x+y=3 \\ 2x-y=7. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 8x-7y=5 \\ 12x+13y=-8. \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5(x+2y)=3x-1 \\ 2x+4=3(x-5y)-12. \end{cases}$

Lời giải.

a) Cộng hai phương trình của hệ cho nhau ta được phương trình

$$5x=10 \Leftrightarrow x=2.$$

Do đó
$$\begin{cases} x=2 \\ 2x-y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-3. \end{cases}$$

Kết luận: Nghiệm của hệ là $(2;-3)$.

b) Nhân phương trình đầu của hệ cho 3, nhân phương trình sau của hệ cho 2 và trừ theo vế hai phương trình của hệ, ta được

$$\begin{cases} 24x-21y=15 \\ 24x+26y=-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x-7y=5 \\ 47y=-31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-31}{47} \\ x=\dfrac{9}{188}. \end{cases}$$

Kết luận: Nghiệm của hệ là $\left(\dfrac{9}{188};\dfrac{-31}{47}\right)$.

c)
$$\begin{cases} 5(x+2y)=3x-1 \\ 2x+4=3(x-5y)-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+10y=3x-1 \\ 2x+4=3x-15y-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+10y=-1 \\ -x+15y=-16 \end{cases}.$$

Nhân hai vế của phương trình sau cho 2 và cộng với phương trình đầu ta được

$$\begin{cases}2x+10y=-1\\ -2x+30y=-32\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-x+15y=-16\\ 40y=-33\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\dfrac{-33}{40}\\ x=\dfrac{29}{8}.\end{cases}$$

Kết luận: Nghiệm của hệ là $\left(\dfrac{29}{8};\dfrac{-33}{40}\right)$.

□

Bài 3. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp đặt ẩn phụ

a) $\begin{cases}\dfrac{15}{x}-\dfrac{7}{y}=9\\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{9}{y}=35.\end{cases}$

b) $\begin{cases}\dfrac{7}{x-y+2}-\dfrac{5}{x+y-1}=4{,}5\\ \dfrac{3}{x-y+2}+\dfrac{2}{x+y-1}=4.\end{cases}$

Lời giải.

a) Đặt $u=\dfrac{1}{x}, v=\dfrac{1}{y}$ $(x\neq 0, y\neq 0)$. Ta được

$$\begin{cases}15u-7v=9\\ 4u+9v=35\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}60u-28v=36\\ 60u+135v=525\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}163v=489\\ 60u-28v=36\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}v=3\\ u=2.\end{cases}$$

Do đó $x=\dfrac{1}{2}, y=\dfrac{1}{3}$.

b) Đặt $u=\dfrac{1}{x-y+2}, v=\dfrac{1}{x+y-1}$, $(x-y+2\neq 0, x+y-1\neq 0)$. Ta được

$$\begin{cases}7u-5v=4{,}5\\ 3u+2v=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}14u-10v=9\\ 15u+10v=20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}29u=29\\ 7u-5v=4{,}5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u=1\\ v=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Do đó

$$\begin{cases}x-y+2=1\\ x+y-1=\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{1}{4}\\ y=\dfrac{5}{4}.\end{cases}$$

□

Bài 4. Biện luận theo a hệ phương trình sau

$$\begin{cases}(2a+1)x-y=2\\ x+2y=3.\end{cases}$$

Lời giải.

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$$\frac{2a+1}{1}\neq\frac{-1}{2}\Leftrightarrow a\neq\frac{-3}{4}.$$

Hệ phương trình có vô số nghiệm khi và chỉ khi

$$\frac{2a+1}{1} = \frac{-1}{2} = \frac{2}{3}.$$

Điều này đương nhiên không đúng, do đó hệ trên không có vô số nghiệm.
Hệ phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\frac{2a+1}{1} = \frac{-1}{2} \neq \frac{2}{3} \Rightarrow a = \frac{-3}{4}.$$

□

Bài 5. Trong mặt phẳng Oxy cho ba đường thẳng $(d_1)\colon 2x - y = -1$; $(d_2)\colon x + y = -2$; $(d_3)\colon y = -2x - m$. Xác định m để ba đường thẳng đã cho đồng quy.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1. \end{cases}$$

Ba đường thẳng đã cho đồng quy khi và chỉ khi (d_3) đi qua $(-1; -1)$. Tức là

$$-1 = -2 \cdot (-1) - m \Leftrightarrow m = 3.$$

Vậy $m = 3$. □

Bài 6.

1. Với giá trị nào của m, n thì hệ $\begin{cases} mx - y = 1 \\ x + y = n \end{cases}$ có nghiệm $(-1; 0)$?

2. Xác định m, n để hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = n \\ mx + ny = 2 \end{cases}$ vô nghiệm.

Lời giải.

a) Hệ có nghiệm $(-1; 0)$ khi và chỉ khi cặp số trên thỏa mãn cả hai phương trình của hệ, hay

$$m \cdot (-1) - 0 = 1 \text{ và } -1 + 0 = n.$$

Từ đó $m = -1, n = -1$.

b) Từ phương trình thứ nhất rút ra $y = mx - n$, thay vào phương trình thứ hai ta được

$$mx + n(mx - n) = 2 \Leftrightarrow m(n+1)x = n^2 + 2.$$

Để ý rằng $n^2 + 2 > 0\,\forall n$, nên phương trình sau cùng vô nghiệm khi và chỉ khi

$$m(n+1) = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ hoặc } n = -1.$$

□

4 Các bài toán nâng cao

Bài 7. Cho ba đường thẳng

$$\begin{aligned}&(d_1)\colon x-2y=-3;\\&(d_2)\colon \sqrt{2}x+y=\sqrt{2}+2;\\&(d_m)\colon mx-(1-2m)y=5-m.\end{aligned}$$

1. Xác định m để ba đường thẳng (d_1); (d_2) và (d_m) đồng quy.

2. Chứng minh rằng (d_m) luôn đi qua một điểm cố định với mọi m.

Lời giải.

1. Tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}x-2y=-3\\ \sqrt{2}x+y=\sqrt{2}+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=2.\end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là $M(1;2)$.
Ba đường thẳng (d_1); (d_2) và (d_m) đồng quy khi và chỉ khi

$$M\in(d_m)\Leftrightarrow m\cdot1-(1-2m)\cdot2=5-m\Leftrightarrow m=\frac{7}{6}.$$

Vậy với $m=\dfrac{7}{6}$ thì ba đường thẳng (d_1); (d_2) và (d_m) đồng quy.

2. Đặt $E(x_0;y_0)$ là điểm cố định thuộc (d_m). Khi đó

$$\begin{aligned}&mx_0-(1-2m)y_0=5-m,\forall m\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow\ &(x_0+2y_0+1)\,m=y_0+5,\forall m\in\mathbb{R}\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}x_0+2y_0+1=0\\ y_0+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=9\\ y_0=-5.\end{cases}\end{aligned}$$

Vậy điểm cố định mà (d_m) luôn đi qua là $E(9;-5)$.

□

Bài 8. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases}(m-1)x-y=2\\ mx+y=m.\end{cases}$$

1. Giải hệ phương trình khi $m=\sqrt{2}$.

2. Xác định giá trị của m để hệ có nghiệm $(x;y)$ duy nhất thỏa điều kiện $x+y>0$.

Lời giải.

1. Với $m=\sqrt{2}$ hệ phương trình đã cho trở thành $\begin{cases}\left(\sqrt{2}-1\right)x-y=2\\ \sqrt{2}x+y=\sqrt{2}.\end{cases}$ (I)

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}\left(2\sqrt{2}-1\right)x=2+\sqrt{2}\\ \sqrt{2}x+y=\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}\\ y=\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot\dfrac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{6+5\sqrt{2}}{7}\\ y=\dfrac{-10+\sqrt{2}}{7}.\end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $S=\left\{\left(\dfrac{6+5\sqrt{2}}{7};\dfrac{-10+\sqrt{2}}{7}\right)\right\}$.

2. Ta có $\begin{cases}(m-1)x-y=2\\ mx+y=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2m-1)x=2+m\\ mx+y=m.\end{cases}$

Trường hợp 1. $m=\dfrac{1}{2}$, hệ đã cho vô nghiệm.

Trường hợp 2. $m\neq\dfrac{1}{2}$, hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases}x=\dfrac{m+2}{2m-1}\\ y=m-m\cdot\dfrac{m+2}{2m-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{m+2}{2m-1}\\ y=\dfrac{m^2-3m}{2m-1}.\end{cases}$$

Suy ra $x+y=\dfrac{m+2}{2m-1}+\dfrac{m^2-3m}{2m-1}=\dfrac{m^2-2m+2}{2m-1}$.

Ta cần có $x+y>0\Leftrightarrow\dfrac{m^2-2m+2}{2m-1}>0\Leftrightarrow 2m-1>0$ (do $m^2-2m+2>0$) $\Leftrightarrow m>\dfrac{1}{2}$.

Vậy $m>\dfrac{1}{2}$ thì hệ đã cho có nghiệm $(x;y)$ duy nhất thỏa điều kiện $x+y>0$.

□

Bài 9. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases}x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x+y}=1 & (1)\\ \sqrt{x+y}=x^2-y. & (2)\end{cases}$$

Lời giải.

ĐKXĐ: $x+y>0$.

$$\begin{aligned}(1)&\Leftrightarrow(x+y)^2-1=2xy-\dfrac{2xy}{x+y}\\ &\Leftrightarrow(x+y-1)(x+y+1)=2xy\left(1-\dfrac{1}{x+y)}\right)=\dfrac{2xy(x+y-1)}{x+y}\\ &\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+y-1=0\\ x+y+1=\dfrac{2xy}{x+y}\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1-x\\ x^2+y^2+(x+y)=0\quad(\text{vô nghiệm do } x+y>0).\end{array}\right.\end{aligned}$$

Thay $y = 1 - x$ vào (2) ta được

$$1 = x^2 + x - 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2. \end{array}\right.$$

- $x = 1 \Rightarrow y = 0$.
- $x = -2 \Rightarrow y = 3$.

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $S = \{(1;0);(-2;3)\}$. □

§3 Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình

1 Tóm tắt lý thuyết

Các bước giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình:

- *Bước 1.* Lập hệ phương trình:
    - Chọn các ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho các ẩn số.
    - Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo các ẩn và các đại lượng đã biết.
    - Lập hệ phương trình biểu thị sự tương quan giữa các đại lượng.
- *Bước 2.* Giải hệ phương trình vừa thu được.
- *Bước 3.* Kết luận
    - Kiểm tra xem trong các nghiệm của hệ phương trình, nghiệm nào thỏa mãn điều kiện của ẩn.
    - Kết luận bài toán.

2 Các dạng toán

Dạng 59. Toán số học, phần trăm

Ta sử dụng một số kiến thức liên quan sau đây:

1. Biểu diễn số có hai chữ số: $\overline{ab} = 10a + b$ trong đó a là chữ số hàng chục và $0 < a \leq 9$, $a \in \mathbb{N}$, b là chữ số hàng đơn vị và $0 \leq b \leq 9, b \in \mathbb{N}$.
2. Biểu diễn số có ba chữ số: $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ trong đó a là chữ số hàng trăm và $0 < a \leq 9$, $a \in \mathbb{N}$, b là chữ số hàng chục và $0 \leq b \leq 9, b \in \mathbb{N}$, c là chữ số hàng đơn vị và $0 \leq c \leq 9, c \in \mathbb{N}$.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tìm hai số tự nhiên, biết rằng hiệu của số lớn với số nhỏ bằng 1814 và nếu lấy số lớn chia số nhỏ thì được thương là 9 và số dư là 182.

Lời giải.

Gọi x, y là hai số tự nhiên cần tìm, trong đó y là số lớn, x là số bé. Theo đề bài ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} y - x = 1814 \\ y = 9x + 182 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1814 \\ x + 1814 = 9x + 182 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x = 1632 \\ y = x + 1814 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 204 \\ y = 2018. \end{cases}$$

Vậy hai số cần tìm là 204 và 2018. □

Ví dụ 2. Một người mua hai loại hàng và phải trả tổng cộng 2,17 triệu đồng, kể cả thuế giá trị gia tăng (VAT) với mức 10% đối với loại hàng thứ nhất và 8% đối với loại hàng thứ hai. Nếu thuế VAT là 9% đối với cả hai loại hàng thì người đó phải trả tổng cộng 2,18 triệu đồng. Hỏi nếu không kể thuế VAT thì người đó phải trả bao nhiêu cho mỗi loại hàng?

Lời giải.

Giả sử không kể thuế VAT, người đó phải trả x triệu đồng cho loại hàng thứ nhất, y triệu đồng cho loại hàng thứ hai. ($x > 0; y > 0$).
Khi đó số tiền phải trả cho loại hàng thứ nhất (kể cả thuế VAT 10%) là $\dfrac{110}{100}x$ (triệu đồng), cho loại hàng thứ hai với thuế VAT 8% là $\dfrac{108}{100}y$ (triệu đồng).
Ta có phương trình $\dfrac{110}{100}x + \dfrac{108}{100}y = 2{,}17$ hay $1{,}1x + 1{,}08y = 2{,}17$.
Khi thuế VAT là 9% cho cả hai loại hàng thì số tiền phải trả là

$$\frac{109}{100}(x+y) = 2{,}18 \text{ hay } 1{,}09x + 1{,}09y = 2{,}18.$$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} 1{,}1x + 1{,}08y = 2{,}17 \\ 1{,}09x + 1{,}09y = 2{,}18. \end{cases}$
Giải hệ ta được $x = 0{,}5$; $y = 1{,}5$ (thỏa mãn điều kiện).
Vậy loại thứ nhất 0,5 triệu đồng, loại thứ hai 1,5 triệu đồng. □

Dạng 60. Toán năng suất công việc

Năng suất được tính bằng tỉ số giữa khối lượng công việc và thời gian hoàn thành.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Trên một cánh đồng cấy 60 ha lúa giống mới và 40 ha lúa giống cũ. Thu hoạch được tất cả 460 tấn thóc. Hỏi năng suất mỗi loại lúa trên 1 ha là bao nhiêu biết rằng 3 ha trồng lúa mới thu hoạch được ít hơn 4 ha trồng lúa cũ là 1 tấn.

Lời giải.

Gọi năng suất trên 1 ha của lúa giống mới là x (tấn), của lúa giống cũ là y (tấn); $x > 0$, $y > 0$.
Theo đề bài, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 60x + 40y = 460 \\ 4y - 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 60x + 40y = 460 \\ 40y - 30x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 90x = 450 \\ 4y - 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4. \end{cases}$$

Vậy

- ☑ Năng suất 1 ha lúa giống mới là 5 tấn.

☑ Năng suất 1 ha lúa giống cũ là 4 tấn.

□

Ví dụ 2. Trong tháng đầu hai tổ sản xuất được 800 chi tiết máy. Sang tháng thứ 2 tổ 1 làm vượt mức 15%, tổ 2 vượt mức 20% do đó cuối tháng hai cả hai tổ sản xuất được 945 chi tiết máy. Hỏi trong tháng đầu mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy.

Lời giải.

Gọi x, y lần lượt là số chi tiết máy mà tổ 1 và tổ 2 sản xuất được trong tháng thứ nhất $(x, y \in \mathbb{N})$.
Theo đề bài, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 800 \\ 1,15x + 1,2y = 945 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 300 \\ y = 500. \end{cases}$$

Vậy trong tháng đầu

☑ tổ 1 sản xuất được 300 chi tiết máy.

☑ tổ 2 sản xuất được 500 chi tiết máy.

□

Dạng 61. Toán chuyển động

Một số lưu ý khi giải bài toán về chuyển động:

1. Có ba đại lương tham gia là quãng đường s, vận tốc v và thời gian t.
2. Ta có công thức liên hệ giữa ba đại lượng s, v và t là $s = v \cdot t$.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Mỗi ngày ba của bạn An chở bạn ấy từ nhà đến trường mất 30 phút. Vì hôm nay là ngày thi tuyển sinh nên ba bạn ấy muốn con mình đến trường sớm hơn, do đó ông ấy đã tăng vận tốc xe lên 15 (km/h) và đến sớm hơn thường ngày là 10 phút. Hỏi quãng đường từ nhà của bạn An đến trường là bao nhiêu km?

Lời giải.

Gọi vận tốc xe thường ngày là x (km/h), $x > 0$; Quãng đường từ nhà của bạn An đến trường là y (km) $(y > 0)$. Theo đề ta có phương trình $\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2}$.
Do ba bạn An tăng vận tốc lên 15 (km/h) và đến sớm hơn 10 phút nên $\dfrac{y}{x+15} = \dfrac{1}{3}$.
Từ đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{y}{x+15} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 15. \end{cases}$
Vậy quãng đường từ nhà của bạn An đến trường là 15 km. □

Ví dụ 2. Một ô tô đi quãng đường AB với vận tốc 50 km/h rồi đi tiếp quãng đường BC với vận tốc 45 km/h. Biết quãng đường tổng cộng dài 165 km và thời gian ô tô đi trên quãng đường AB ít hơn thời gian đi trên quãng đường BC là 30 phút. Tính thời gian ô tô đi trên mỗi đoạn đường.

Lời giải.

Gọi thời gian ô tô đi trên mỗi đoạn đường lần lượt là x, y ($x, y > 0$, đơn vị: giờ).
Đổi 30 phút $= 0{,}5$ h.
Theo đề bài, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 50x + 45y = 165 \\ y - x = 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1{,}5 \\ y = 2. \end{cases}$$

Vậy thời gian ô tô đi hết quãng đường AB là 1,5 giờ. Thời gian ô tô đi hết quãng đường BC là 2 giờ. □

Ví dụ 3. Một ôtô dự định đi từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu xe chạy mỗi giờ nhanh hơn 10 km thì đến nơi sớm hơn dự định 3 giờ, còn nếu xe chạy chậm lại mỗi giờ 10 km thì đến nơi chậm mất 5 giờ. Tính vận tốc của xe lúc ban đầu, thời gian dự định và chiều dài quãng đường AB.

Lời giải.

Gọi x (km/h) là vận tốc ô tô lúc đầu ($x > 10$), và y (h) là thời gian ô tô dự định đi từ A đến B ($y > 0$).
Theo bài ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} (x+10)(y-3) = xy \\ (x-10)(y+5) = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 10y = 30 \\ 5x - 10y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 15. \end{cases}$$

Vậy vận tốc xe lúc đầu là 40 km/h. Quãng đường AB dài $40 \cdot 15 = 600$ km. □

Dạng 62. Toán có các yếu tố hình học

Kiến thức cần nhớ:
- Diện tích hình chữ nhật $S = x \cdot y$ (x là chiều rộng; y là chiều dài).
- Diện tích tam giác $S = \dfrac{1}{2} a \cdot h$ (h là chiều cao, a là cạnh đáy tương ứng).
- Độ dài cạnh huyền: $c^2 = a^2 + b^2$(c là cạnh huyền; a, b là các cạnh góc vuông).
- Số đường chéo của một đa giác $\dfrac{n(n-3)}{2}$ (n là số đỉnh).

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Một hình chữ nhật có chu vi bằng 28 cm. Tính chiều dài và chiều rộng của chữ nhật, biết rằng nếu tăng chiều dài thêm 1 cm và tăng chiều rộng thêm 2 cm thì diện tích hình chữ nhật đó tăng thêm 25 cm^2.

Lời giải.

Gọi chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là x, y (cm). Điều kiện $0 < y < x < 14$.
Theo đề bài, chu vi của hình chữ nhật là 28 cm nên ta có phương trình

$$2(x + y) = 28. \tag{3.1}$$

Mặt khác, nếu tăng chiều dài thêm 1 cm và tăng chiều rộng thêm 2 cm thì diện tích hình chữ nhật đó tăng thêm 25 cm^2, nên ta có phương trình

$$(x+1)(y+2) = xy + 25. \tag{3.2}$$

Từ (3.1) và (3.2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2(x+y) = 28 \\ (x+1)(y+2) = xy + 25. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 14 \\ 2x + y = 23. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 5. \end{cases}$$

Vậy chiều dài của hình chữ nhật là 9 cm, chiều rộng của hình chữ nhật là 5 cm. □

Ví dụ 2. Một sân trường hình chữ nhật có chu vi 340 m . Biết 3 lần chiều dài hơn 4 lần chiều rộng là 20 m. Tính chiều dài và chiều rộng của sân trường.

Lời giải.

Gọi chiều rộng của sân trường đã cho là x (m), $(0 < x < 340)$.
Gọi chiều dài của sân trường đã cho là y (m), $(y > x)$.
Khi đó chu vi của sân trường là $2(x+y) = 340$. (1)
Ta có 3 lần chiều dài hơn 4 lần chiều rộng là 20 (m) nên $3y - 4x = 20$. (2)
Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{340}{2} \\ 3y - 4x = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 70 \\ y = 100. \end{cases}$$

Vậy chiều dài của sân trường là 100 m và chiều rộng là 70 m.

□

Dạng 63. Toán việc làm chung làm riêng

Những kiến thức cần nhớ:
- Có ba đại lượng tham gia là: Toàn bộ công việc , phần công việc làm được trong một đơn vị thời gian (năng suất) và thời gian.
- Nếu một đội làm xong công việc trong x giờ thì một ngày đội đó làm được $\dfrac{1}{x}$ công việc.
- Xem toàn bộ công việc là 1.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Hai đội xe chở cát để san lấp một khu đất. Nếu hai đội cùng làm thì trong 18 ngày xong công việc. Nếu đội thứ nhất làm trong 6 ngày, sau đó đội thứ hai làm tiếp 8 ngày nữa thì được 40% công việc. Hỏi mỗi đội làm một mình thì bao lâu xong công việc ?

Lời giải.

Gọi thời gian để đội một làm một mình xong công việc là x (ngày).
Gọi thời gian để đội hai làm một mình xong công việc là y (ngày).
Một ngày đội một làm được $\dfrac{1}{x}$ (công việc).
Một ngày đội hai làm được $\dfrac{1}{y}$ (công việc).

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{18}\\ \dfrac{6}{x}+\dfrac{8}{y}=\dfrac{2}{5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{45}\\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{30}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=45\\ y=30.\end{cases}$$

Vậy đội một làm 45 ngày và đội hai làm 30 ngày. □

Ví dụ 2. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể thì sau 4 giờ 48 phút bể đầy. Nếu vòi I chảy trong 4 giờ, vòi II chảy trong 3 giờ thì cả hai vòi chảy được $\dfrac{3}{4}$ bể. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể.

Lời giải.

Ta có 4 giờ 48 phút bằng $\dfrac{24}{5}$ giờ.
Gọi thời gian vòi một chảy đầy bể là x giờ $(x>0)$.
Gọi thời gian vòi hai chảy đầy bể là y giờ $(y>0)$.
Một giờ vòi một chảy được $\dfrac{1}{x}$ bể.
Một giờ vòi hai chảy được $\dfrac{1}{y}$ bể.
Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{24}\\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=\dfrac{3}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{12}\\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{8}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=12\\ y=8.\end{cases}$$

Vậy thời gian vòi một chảy đầy bể là 12 giờ và vòi hai chảy đầy bể là 8 giờ. □

Dạng 64. Dạng toán khác

Những kiến thức cần nhớ:
- Thể tích dung dịch $V=\dfrac{m}{D}$ (V là thể tích dung dịch, m là khối lượng, D là khối lượng riêng).

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Một dung dịch chứa 30% axit nitơric (tính theo thể tích) và một dung dịch khác chứa 55% axit nitơric. Cần phải trộn thêm bao nhiêu lít dung dịch loại 1 và loại 2 để được 100 lít dung dịch 50% axit nitơric?

Lời giải.

Gọi x, y theo thứ tự là số lít dung dịch loại 1 và 2 $(x, y>0)$.
Lượng axit nitơric chứa trong dung dịch loại 1 là $\dfrac{30}{100}x$ và loại 2 là $\dfrac{55}{100}y$.
Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}x+y=100\\ \dfrac{30}{100}x+\dfrac{55}{100}y=50.\end{cases}$$

Giải hệ này ta được: $x = 20$ và $y = 80$.
Vậy lượng dung dịch loại 1 là 20 lít và loại 2 là 80 lít. $\square$

Ví dụ 2. Hai giá sách có 450 cuốn. Nếu chuyển 50 cuốn từ giá thứ nhất sang giá thứ hai thì số sách trên giá thứ hai bằng $\frac{4}{5}$ số sách giá thứ nhất. Tính số sách trên mỗi giá.

Lời giải.

Gọi số sách ở giá thứ nhất là x và số sách giá thứ hai là y, x, y nguyên dương.
Hai giá sách có 450 cuốn nên ta có phương trình $x + y = 450$.
Khi chuyển 50 cuốn từ giá thứ nhất sang giá thứ hai thì số sách ở giá thứ hai bằng $\frac{4}{5}$ số sách giá thứ nhất nên ta có: $y + 50 = \frac{4}{5}(x - 50)$.
Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 450 \\ y + 50 = \dfrac{4}{5}(x - 50). \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $x = 300$ và $y = 150$.
Vậy số sách ở giá thứ nhất là 300 cuốn, ở giá thứ hai là 150 cuốn. $\square$

Ví dụ 3. Hai anh An và Bình góp vốn cùng kinh doanh. Anh An góp 13 triệu đồng, anh Bình góp 15 triệu đồng. Sau một thời gian kinh doanh lãi được 7 triệu đồng. Lãi được chia đều theo tỉ lệ góp vốn. Tính số lãi mỗi anh được hưởng.

Lời giải.

Gọi số lãi anh Quang và anh Hùng được hưởng lần lượt là x, y (tính bằng triệu đồng) $x, y > 0$.
Vì số lãi củ cả hai anh là 7 triệu đồng nên ta có phương trình $x + y = 7$.
Vì lãi tỉ lệ với vốn đã góp nên $\frac{x}{15} = \frac{y}{13}$.
Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ \dfrac{x}{15} = \dfrac{y}{13}. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $x = 3{,}75$ và $3{,}25$.
Vậy anh Quang được lãi 3750000 đồng và anh Hùng được lãi 3250000 đồng. $\square$

3 Luyện tập

Bài 1. Cho một số có hai chữ số. Nếu đổi chỗ hai chữ số của nó thì được một số lớn hơn số đã cho là 63. Tổng của số đã cho và số mới tạo thành bằng 99. Tìm số đã cho.

Lời giải.

Gọi số cần tìm là $\overline{ab}$ $a, b \in \mathbb{N}, 0 < a \leq 9, 0 \leq b \leq 9$.
Theo đề, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \overline{ba} - \overline{ab} = 63 \\ \overline{ab} + \overline{ba} = 99 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{ab} = 18 \\ \overline{ba} = 81. \end{cases}$$

Vậy số cần tìm là 18. □

Bài 2. Tìm 2 số biết tổng của chúng bằng 1006 nếu lấy số lớn chia cho số bé được thương là 2 và số dư 124.

Lời giải.

Gọi số lớn là x gọi số bé là y $(x, y \in \mathbb{N})$.

Theo đề, ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 1006 \\ x = 2y + 124. \end{cases}$

Giải ra ta được số lớn là 712 số bé là 294.

□

Bài 3. Người ta trộn hai loại quặng sắt với nhau, một loại chứa 72% sắt, loại thứ hai chứa 58% sắt được một loại quặng chứa 62% sắt. Nếu tăng khối lượng của mỗi loại quặng thêm 15 tấn thì được một loại quặng chứa 62,25% sắt. Tìm khối lượng quặng của mỗi loại đã trộn.

Lời giải.

Gọi khối lượng quặng loại thứ nhất là x tấn, loại thứ hai là y tấn $(x > 0, y > 0)$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{72}{100}x + \dfrac{58}{100}y = \dfrac{62}{100}(x + y) \\ \dfrac{72}{100}(x + 15) + \dfrac{58}{100}(y + 15) = \dfrac{63{,}25}{100}(x + y + 30) \end{cases}$

hay $\begin{cases} 5x - 2y = 0 \\ 5(x + 15) = 3(y + 15) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 2y = 0 \\ 5x - 3y = -30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 30. \end{cases}$

Vậy khối lượng loại thứ nhất là 12 tấn, loại thứ hai là 30 tấn. □

Bài 4. Tháng đầu hai tổ sản xuất làm được 720 dụng cụ. Sang tháng thứ hai tổ 1 làm vượt mức 12%, tổ hai vượt mức 15% nên cả hai tổ làm được 819 dụng cụ. Hỏi tháng đầu mỗi tổ làm được bao nhiêu dụng cụ?

Lời giải.

Gọi x, y lần lượt là số dụng cụ mà tổ 1 và tổ 2 sản xuất được trong tháng 1 $(x, y \in \mathbb{N})$.
Theo đề bài, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 720 \\ 1,12x + 1,15y = 819 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 300 \\ y = 420. \end{cases}$$

Vậy trong tháng đầu

- ☑ tổ 1 sản xuất được 300 chi tiết máy.
- ☑ tổ 2 sản xuất được 420 chi tiết máy.

□

Bài 5. Hai tổ sản xuất cùng may một loại áo. Nếu tổ thứ 1 may trong 3 ngày, tổ thứ 2 may trong 5 ngày thì cả hai tổ may được 1310 chiếc áo. Biết rằng trong một ngày tổ 1 may được nhiều hơn tổ thứ 2 là 10 chiếc áo. Hỏi mỗi tổ trong 1 ngày may được bao nhiêu chiếc áo?

Lời giải.

Gọi lần lượt số áo tổ 1, tổ 2 may trong 1 ngày là x, y $(x, y \in \mathbb{N}^*)$.
Trong 3 ngày tổ 1 may được là $3x$ (chiếc áo).

Trong 5 ngày tổ 2 may được là $5y$ (chiếc áo).
Theo đề bài, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}3x+5y=1310\\x-y=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=170\\y=160.\end{cases}$$

Vậy

- Trong một ngày tổ 1 may được 170 chiếc áo.
- Trong một ngày tổ 2 may được 160 chiếc áo.

□

Bài 6. Một ô tô đi từ A đến B với một vận tốc xác định và trong một thời gian đã định. Nếu vận tốc của ô tô giảm 10 km/h thì thời gian tăng 45 phút. Nếu vận tốc của ô tô tăng 10 km/h thì thời gian giảm 30 phút. Tính vận tốc và thời gian dự định đi của ôtô?

Lời giải.

Gọi vận tốc dự định của ô tô là x (km/h).
Gọi thời gian dự định của ô tô là y (km/h).
Điều kiện: $x>10$; $y>0$,
Quãng đường AB là xy.
Nếu ô tô giảm vận tốc 10 km/h thì thời gian tăng 45 phút $(=\dfrac{3}{4}$ h).
Vậy ta có phương trình: $(x+10)(y-\dfrac{3}{4})=xy\Leftrightarrow 3x-4y=30.$ (1)
Nếu ô tô tăng vận tốc 10 km/h thì thời gian giảm 30 phút $(=\dfrac{1}{2}$ h).
Vậy ta có phương trình $(x+10)(y-\dfrac{1}{2})=xy\Leftrightarrow -x+20y=10.$ (2)
Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}3x-4y=30\\-x+20y=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=50\\y=3.\end{cases}$$

Vậy

- Vận tốc dự định của ô tô là 50 km/h.
- Thời gian dự định của ôtô là 3 giờ.

□

Bài 7. Hai ca nô cùng khởi hành từ A đến B cách nhau 85 km và đi ngược chiều nhau. Sau 1 giờ 40 phút thì gặp nhau. Tính vận tốc thật của mỗi ca nô, biết rằng vận tốc ca nô đi xuôi dòng lớn hơn vận tốc ca nô đi ngược dòng là 9 km/h và vận tốc dòng nước là 3 km/h.

Lời giải.

Gọi vận tốc thật của ca nô đi xuôi dòng là x (km/h), vận tốc ca nô đi ngược dòng là y (km/h) $(x,y>3)$.
Đổi 1 giờ 40 phút $=\dfrac{5}{3}$ h.
Theo bài ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}x+3-(y-3)=9\\\dfrac{5}{3}(x+3)+\dfrac{5}{3}(y-3)=85\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=27\\y=24.\end{cases}$$

Vậy vận tốc thật của ca nô đi xuôi dòng là 27 (km/h), vận tốc ca nô đi ngược dòng là 24 (km/h). □

Bài 8. Một ô tô dự định đi từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu xe chạy với vận tốc 35 km/h thì sẽ đến chậm 2 giờ so với dự định. Nếu xe chạy với vận tốc 50 km/h thì sẽ đến B sớm hơn 1 giờ so với dự định. Tính quãng đường AB và thời gian dự định đi từ A đến B.

Lời giải.

Gọi quãng đường AB là x (km), thời gian ô tô dự định đi từ A đến B là y (giờ) $(x > 0; y > 1)$.
Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x}{35} - 2 = y \\ y - \dfrac{x}{50} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 350 \\ y = 8. \end{cases}$$

Vậy quãng đường AB là 350 (km), thời gian ô tô dự định đi từ A đến B là 8 (giờ). □

Bài 9. Nhân dịp Lễ giỗ tổ Hùng Vương, một siêu thị điện máy đã giảm giá nhiều mặt hàng để kích cầu mua sắm. Giá niêm yết một tủ lạnh và một máy giặt có tổng số tiền là 25,4 triệu đồng, nhưng trong đợt này giá một tủ lạnh giảm 40% giá bán và giá một máy giặt giảm 25% giá bán nên Cô Lan đã mua một tủ lạnh và một máy giặt trên với tổng số tiền là 16,77 triệu đồng. Hỏi giá mỗi món đồ trên khi chưa giảm giá là bao nhiêu tiền?

Lời giải.

Gọi x, y (triệu đồng) lần lượt là giá bán niêm yết của một tủ lạnh và một máy giặt $(x, y > 0)$.
Giá bán của một tủ lạnh sau khi giảm 40% là $x \cdot 0{,}6$ (triệu đồng).
Giá bán của một tủ lạnh sau khi giảm 25% là $y \cdot 0{,}75$ (triệu đồng).
Ta có hệ phương trình sau $\begin{cases} x + y = 25{,}4 \\ 0{,}6x + 0{,}75y = 16{,}77 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15{,}2 \\ y = 10{,}2. \end{cases}$
Vậy giá bán của một tủ lạnh và một máy giặt khi chưa giảm giá lần lượt là 15,2 triệu đồng và 10,2 triệu đồng. □

Bài 10. Nhằm động viên, khen thưởng các em đạt danh hiệu "học sinh giỏi cấp thành phố" năm học 2017-2018, trường THCS ABC tổ chức chuyến tham quan ngoại khóa tại một điểm du lịch với mức giá ban đầu là 375.000 đồng/người. Biết công ty du lịch giảm 10% chi phí cho mỗi giáo viên và giảm 30% chi phí cho mỗi học sinh. Số học sinh tham gia gấp 4 lần số giáo viên và tổng chi phí tham quan (sau khi giảm giá) là 12.487.500 đồng. Tính số giáo viên và số học sinh đã tham gia chuyến đi.

Lời giải.

Gọi x (người) là số giáo viên tham gia chuyến đi.
Gọi y (người) là số học sinh tham gia chuyến đi $(x, y \in \mathbb{N}^*)$.
Theo đề bài, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x = y \\ 375000x\left(1 - \dfrac{10}{100}\right) + 375000y\left(1 - \dfrac{30}{100}\right) = 12487500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 36. \end{cases}$$

Số giáo viên tham gia chuyến đi là 9 người.
Số học sinh tham gia chuyến đi là 36 người. □

Bài 11. Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi bằng 28 mét và độ dài đường chéo bằng 10 mét. Tính chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật theo đơn vị mét.

Lời giải.

Gọi chiều dài và chiều rộng của mảnh đất lần lượt là x, y $(x \geqslant y > 0)$. Chu vi của mảnh đất là 28 mét nên $x + y = 14 \Leftrightarrow y = 14 - x$. Độ dài đường chéo của mảnh đất là 10 mét nên

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 100 &\Leftrightarrow x^2 + (14 - x)^2 = 100 \\ &\Leftrightarrow x = 8 \text{ hoặc } x = 6. \end{aligned}$$

Với $x = 8$, $y = 6$ (thỏa mãn).
Với $x = 6$, $y = 8$ (loại).
Vậy chiều dài của mảnh đất 8 mét, chiều rộng là 6 mét. □

Bài 12. Cho một mảnh vườn hình chữ nhật. Biết rằng nếu giảm chiều rộng đi 3 m và tăng chiều dài thêm 8 m thì diền tích mảnh vườn đó giảm 54 m^2 so với diện tích ban đầu, nếu tăng chiều rộng thêm 2 m và giảm chiều dài đi 4 m thì diện tích mảnh vườn đó tăng 32 m^2 so với diện tích ban đầu. Tính chiều rộng và chiều dài ban đầu của mảnh vườn đó.

Lời giải.

Gọi chiều rộng và chiều dài ban đầu của mảnh vườn hình chữ nhật lần lượt là x, y (điều kiện $y > x > 3$, $y > 4$).
Diện tích ban đầu của mảnh vườn là xy (m^2).
Sau khi giảm chiều rộng 3 m, tăng chiều dài 8 m thì diền tích mảnh vườn đó giảm 54 m^2 so với diện tích ban đầu nên ta có phương trình $xy - (x - 3)(y + 8) = 54$. (1)
Sau khi tăng chiều rộng thêm 2 m và giảm chiều dài đi 4 m thì diện tích mảnh vườn đó tăng 32 m^2 so với diện tích ban đầu nên ta có phương trình $(x + 2)(y - 4) - xy = 32$. (2)
Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy - (x-3)(y+8) = 54 \\ (x+2)(y-4) - xy = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 3y = 30 \\ 2x - y = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 50. \end{cases}$$

Vậy chiều rộng của mảnh vườn là 15 m và chiều dài của mảnh vườn là 50 m. □

Bài 13. Tính ba cạnh của một tam giác vuông ABC vuông tại A biết chu vi tam giác là 12 m và tổng bình phương của ba cạnh bằng 50 m.

Lời giải.

Gọi độ dài cạnh AB là x (m), cạnh AC là y (m) và cạnh BC là z (m).
Theo đầu bài ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z = 50 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 50. \end{cases}$$

Theo định lý Pitago trong tam giác vuông ABC: $x^2 + y^2 = z^2$.
Giải ra ta được $AB = 4$, $AC = 3$, $BC = 5$. □

Bài 14. Hai người thợ cùng làm một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm 3 giờ, người thứ hai làm 6 giờ thì chỉ hoàn thành được 25% công việc. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người hoàn thành công việc trong bao lâu?

Lời giải.

Ta có $25\% = \dfrac{1}{4}$.
Gọi thời gian một mình người thứ nhất hoàn thành công việc là x giờ, $(x > 0)$.
Gọi thời gian một mình người thứ hai hoàn thành công việc là y giờ, $(y > 0)$.
Trong một giờ người thứ nhất làm được $\dfrac{1}{x}$ công việc.

Trong một giờ người thứ hai làm được $\dfrac{1}{y}$ công việc.

Hai người cùng làm thì xong trong 16 giờ. Vậy trong 1 giờ cả hai người cùng làm được $\dfrac{1}{16}$ công việc.

Ta có phương trình: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{16}$. (1)

Người thứ nhất làm trong 3 giờ, người thứ hai làm trong 6 giờ thì $25\%=\dfrac{1}{4}$ công việc. Ta có phương trình $\dfrac{3}{x}+\dfrac{6}{y}=\dfrac{1}{4}$. (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{16}\\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{6}{y}=\dfrac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3}{x}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{3}{16}\\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{6}{y}=\dfrac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{16}\\ \dfrac{3}{y}=\dfrac{1}{16}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=24\\ y=48.\end{cases}$$

Vậy nếu làm riêng thì người thứ nhất hoàn thành công việc trong 24 giờ. Người thứ hai hoàn thành công việc trong 48 giờ. □

Bài 15. Hai người thợ cùng sơn cửa cho một ngôi nhà thì 2 ngày xong việc. Nếu người thứ nhất làm trong 4 ngày rồi nghỉ, người thứ hai làm tiếp trong 1 ngày nữa thì xong việc. Hỏi mỗi người làm một mình thì bao lâu xong công việc?

Lời giải.

Gọi thời gian để một mình người thứ nhất hoàn thành công việc là x ($x>2$; ngày).
Gọi thời gian để một mình người thứ hai hoàn thành công việc là y ($y>2$; ngày).

Trong một ngày người thứ nhất làm được $\dfrac{1}{x}$ công việc.

Trong một ngày người thứ hai làm được $\dfrac{1}{y}$ công việc.

Cả hai người làm xong trong 2 ngày nên trong một ngày cả hai người làm được $\dfrac{1}{2}$ công việc.

Từ đó ta có phương trình $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}$. (1)

Người thứ nhất làm trong 4 ngày rồi người thứ hai làm trong 1 ngày thì xong công việc ta có phương trình: $\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{y}=1$. (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{y}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{3}{x}=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\ y=3.\end{cases}$$

Vậy người thứ nhất làm một mình xong công việc trong 6 ngày. Người thứ hai làm một mình xong công việc trong 3 ngày. □

Bài 16. Trên một cánh đồng cấy 60 ha lúa giống mới và 40 ha lúa giống cũ, thu hoạch được tất cả 460 tấn thóc. Hỏi năng suất mỗi loại lúa trên một ha là bao nhiêu, biết rằng 3 ha trồng lúa mới thu hoạch được ít hơn 4 ha lúa giống cũ là 1 tấn.

Lời giải.

Gọi năng suất lúa trên một ha giống mới là x (tấn), của lúa giống cũ là y (tấn), $(x > 0; y > 0)$.
Cả hai loại thu được 460 tấn lúa, ta có phương trình $60x + 40y = 460$.
Vì 3 ha giống lúa mới thu hoạch ít hơn 4 ha giống lúa cũ 1 tấn, ta có phương trình $4y - 3x = 1$.
Ta có hệ phương trình
$\begin{cases} 60x + 40y = 460 \\ 4y - 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 4y = 46 \\ -6x + 8y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12y = 48 \\ 4y - 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ 4.4 - 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 5. \end{cases}$
Giá trị $x = 5; y = 4$ thỏa mãn điều kiện bài toán.
Vậy năng suất 1 ha giống mới là 5 tấn. Năng suất 1 ha giống cũ là 4 tấn. □

4 Các bài toán nâng cao

Bài 17. Bài toán có nội dung thực tế:

"Em có tưởng tượng được hai lá phổi (gọi tắt là phổi) của mình chứa khoảng bao nhiêu lít không khí hay không? Dung tích phổi của mỗi người phụ thuộc vào một số yếu tố, trong đó hai yếu tố quan trọng là chiều cao và độ tuổi.

Sau đây là một công thức ước tính dung tích chuẩn phổi của mỗi người:

Nam: $P = 0,057h - 0,022a - 4,23$

Nữ: $Q = 0,041h - 0,018a - 2,69$;

trong đó,

h: chiều cao tính bằng xentimét,

a: tuổi tính bằng năm,

P, Q: dung tích chuẩn của phổi tính bằng lít"...

(*Toán 7*, tập hai, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2017, tr. 29).

Bạn Hùng (nam) 15 tuổi, số đo chiều cao của bạn được biết qua bài toán sau:

Chiều cao của bạn Hùng tính bằng xentimét. Đó là một số tự nhiên có 3 chữ số, trong đó chữ số hàng trăm là 1, chữ số hàng chục kém chữ số hàng đơn vị là 2 và hai lần chữ số hàng chục hơn chữ số hàng đơn vị là 4. Tính dung tích chuẩn phổi của bạn Hùng.

Lời giải.

Gọi chiều cao của Hùng là số $\overline{abc}$ $(a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, a \neq 0)$. Đơn vị là (cm).
Vì chữ số hàng trăm là 1 nên $a = 1$.
Chữ số hàng chục kém chữ số hàng đơn vị là 2 nên: $c - b = 2$ (1).
Vì hai lần chữ số hàng chục hơn chữ số hàng đơn vị là 4 nên: $2b - c = 4$ (2).
Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} c - b = 2 \\ 2b - c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 + b \\ 2b - (2 + b) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 + b \\ b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 6 \\ c = 8 \end{cases} \text{(nhận)}.$$

Nên chiều cao của Hùng là 168 cm.
Áp dụng công thức tính dung tích chuẩn của phổi, ta có dung tích chuẩn phổi của bạn Hùng là

$$P = 0,057.168 - 0,022.15 - 4,23 = 5,016 \text{ lít}.$$

□

Bài 18. Giả sử có một cánh đồng cỏ dày như nhau, mọc cao đều như nhau trên toàn bộ cánh đồng trong suốt thời gian bò ăn cỏ trên cánh đồng ấy.

Biết rằng 9 con bò ăn hết cỏ trên cánh đồng trong 2 tuần, 6 con bò ăn hết cỏ trên cánh đồng trong 4 tuần. Hỏi bao nhiêu con bò ăn hết cỏ trên cánh đồng trong 6 tuần? (mỗi con bò ăn số cỏ như nhau).

Lời giải.

Gọi khối lượng cỏ có sẵn trên cánh đồng trước khi bò ăn cỏ là 1 (đơn vị khối lượng quy ước), khối lượng cỏ mọc thêm trên cánh đồng trong 1 tuần là y (với đơn vị khối lượng nói trên), $y > 0$.
Gọi số bò phải tìm là x con, x nguyên dương. Theo đề bài, ta có 9 con bò ăn trong 2 tuần hết $1 + 2y$ nên mỗi con bò trong 1 tuần ăn hết $\dfrac{1 + 2y}{18}$.
6 con bò ăn trong 4 tuần hết $1 + 4y$ nên mỗi con bò trong 1 tuần ăn hết $\dfrac{1 + 4y}{24}$.
x con bò ăn trong 6 tuần hết $1 + 6y$ nên mỗi con bò trong 1 tuần ăn hết $\dfrac{1 + 6y}{6x}$.
Ta có hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1 + 2y}{18} = \dfrac{1 + 4y}{24} & (1) \\ \dfrac{1 + 4y}{24} = \dfrac{1 + 6y}{6x} & (2). \end{cases}$
Phương trình (1) cho ta $y = \dfrac{1}{4}$. Thay vào (2) được $x = 5$.
Vậy 5 con bò ăn hết cỏ của cánh đồng trong 6 tuần. □

Bài 19. Một đàn ngựa giá 204 triệu đồng có ba người mua ngựa nhưng mỗi người đều không đủ tiền. Người thứ nhất nói với 2 người kia là mỗi người cho tôi vay một nửa số tiền của mình thì tôi đủ tiền mua. Người thứ hai nói với 2 người kia mỗi người cho tôi vay $\dfrac{1}{3}$ số tiền của mình thì tôi đủ tiền mua đàn ngựa. Người thứ ba nói chỉ các anh cho tôi vay $\dfrac{1}{4}$ số tiền của mình thì đàn ngựa sẽ là của tôi . Hỏi mỗi người có bao nhiêu tiền?

Lời giải.

Gọi số tiền của người thứ nhất có là x triệu đồng, $x > 0$.
Gọi số tiền của người thứ hai có là y triệu đồng, $y > 0$.
Gọi số tiền của người thứ ba có là z triệu đồng, $z > 0$.
Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + \dfrac{y + z}{2} = 204 \\ y + \dfrac{x + z}{3} = 204 \\ z + \dfrac{x + y}{4} = 204. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được: Người thứ nhất có 60 triệu đồng. Người thứ hai có 132 triệu đồng. Người thứ ba có 156 triệu đồng. □

Bài 20. Một cửa hàng điện máy trong ngày khai trương đã bán được 65 quạt điện và 65 nồi cơm điện thuộc cùng một loại. Cửa hàng thu được 55.250.000 đồng từ tiền bán hai sản phẩm trên đây và tính ra lãi được 8.125.000 đồng. Cho biết mỗi quạt điện cửa hàng được lãi 20% trên giá bán, mỗi nồi cơm điện cửa hàng được lãi 10% trên giá bán. Hãy tính giá nhập kho của cửa hàng điện máy cho mỗi loại sản phẩm quạt điện và nồi cơm điện.

Lời giải.

Gọi x, y (đồng) lần lượt là giá bán quạt điện và nồi cơm điện của cửa hàng điện máy.
Theo đề bài, ta có

$$\begin{cases}65(x+y)=55.250.000\\65(0{,}2x+0{,}1y)=8.125.000\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=850.000\\2x+y=1.250.000\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=400.000\\y=450.000.\end{cases}$$

Suy ra, giá nhập kho đối với mỗi quạt điện là $0.8\times 400.000=320.000$ đồng và mỗi nồi cơm điện là $0.9\times 450.000=405.000$ đồng. □

Bài 21. Hai người A và B làm xong công việc trông 72 giờ, còn người A và C làm xong công việc trong đó trong 63 giờ và người B và C làm xong công việc ấy trong 56 giờ. Hỏi nếu mỗi người làm một mình thì trong bao lâu thì trong bao lâu sẽ làm xong công việc. Nếu ba người cùng làm sẽ hoàn thành công việc trong mấy giờ?

Lời giải.

Gọi người A một mình làm xong công việc trong x (giờ), $x>0$ thì mỗi giờ làm được $\dfrac{1}{x}$ (công việc). Người B một mình làm xong công việc trong y (giờ), $y>0$ thì mỗi giờ làm được $\dfrac{1}{y}$ (công việc). Người C một mình làm xong công việc trong z (giờ), $z>0$ thì mỗi giờ làm được $\dfrac{1}{z}$ (công việc). Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{72}\\\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{63}\\\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{56}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{504}{3}=168\\y=\dfrac{504}{4}=126\\z=\dfrac{504}{5}.\end{cases}$

Nếu cả ba người cùng làm thì mỗi giờ làm được $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{12}{504}$ (công việc).

Vậy cả ba người cùng làm sẽ hoàn thành công việc trong $\dfrac{504}{12}=42$ (giờ). □

§4 Ôn tập chương 3

1 Toán trắc nghiệm

Bài 1. Biết $(a;b)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}7x+4y=18\\3x-4y=2\end{cases}$. Tính $S=a+b$.

A $S=-1$. B $S=-3$. C $S=3$. D $S=5$.

Lời giải.

$$\begin{cases}7x+4y=18\\3x-4y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10x=20\\3x-4y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1.\end{cases}$$

Vậy $S=2+1=3$.
Chọn đáp án C □

Bài 2. Gọi $(x;y)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}2x+7y=1\\3x+5y=-4\end{cases}$. Tính $x^2-xy+2y^2$.

A 14. B 8. C 12. D 18.

Lời giải.

$$\begin{cases}2x+7y=1\\3x+5y=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x+21y=3\\6x+10y=-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}11y=11\\6x+10y=-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\x=-3.\end{cases}$$

Vậy $x^2-xy+2y^2=14$.
Chọn đáp án A □

Bài 3. Kết luận nào sau đây về tập nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x-2y=5\\-x+2y=1\end{cases}$ là đúng?

A Hệ có một nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;1)$.
B Hệ vô nghiệm.
C Hệ vô số nghiệm $(x\in\mathbb{R};y=-x+3)$.
D Hệ có một nghiệm duy nhất $(x;y)=(-2;-1)$.

Lời giải.

$$\begin{cases}x-2y=5\\-x+2y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0x+0y=6\\x-2y=5.\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
Chọn đáp án B □

Bài 4. Với giá trị nào của a thì hệ phương trình $\begin{cases}ax+y=1\\x+y=a\end{cases}$ có vô số nghiệm?

(A) $a=1$. (B) $a=-1$.
(C) $a=1$ hoặc $a=-1$. (D) $a=2$.

Lời giải.

$$\begin{cases} ax+y=1 \\ x+y=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)x=1-a \\ x+y=a. \end{cases}$$

Hệ phương trình vô số nghiệm khi và chỉ khi $a-1=0$ suy ra $a=1$.
Chọn đáp án (A) □

Bài 5. Biết $(a;b)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 7x-3y=5 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=2 \end{cases}$. Tính $S=a+b$.

(A) $S=-3$. (B) $S=3$. (C) $S=-5$. (D) $S=5$.

Lời giải.

$$\begin{cases} 7x-3y=5 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x-3y=5 \\ 3x+2y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x-6y=10 \\ 9x+6y=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ 2y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3. \end{cases}$$

Vậy $S=2+3=5$.
Chọn đáp án (D) □

Bài 6. Với giá trị của m, n thì hệ phương trình $\begin{cases} mx-y=1 \\ x+y=n \end{cases}$ nhận cặp số $(-1;0)$ làm nghiệm. Tính $S=2m-3n$.

(A) $S=1$. (B) $S=5$. (C) $S=-5$. (D) $S=-1$.

Lời giải.

Cặp số $(-1;0)$ là nghiệm của hệ phương trình nên ta có

$$m\cdot(-1)-0=1 \quad \text{và} \quad -1+0=n.$$

Từ đó, $m=-1$ và $n=-1$.
Vậy $S=2\cdot(-1)-3\cdot(-1)=1$.
Chọn đáp án (A) □

Bài 7. Biết cặp số $(a;b)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3x\sqrt{2}-y=3 \\ x-2y\sqrt{2}=-5\sqrt{2} \end{cases}$. Tính $T=a^2-2b$.

(A) 6. (B) -4. (C) 4. (D) 8.

Lời giải.

$$\begin{cases} 3x\sqrt{2}-y=3 & (1) \\ x-2y\sqrt{2}=-5\sqrt{2} & (2) \end{cases}$$

Từ (1) rút ra $y=3x\sqrt{2}-3$. Thay vào (2) ta có

$$x-2\sqrt{2}\left(3x\sqrt{2}-3\right)=-5\sqrt{2} \Rightarrow -11x=-11\sqrt{2} \Rightarrow x=\sqrt{2}.$$

Từ đó tìm được $y=3$.
Vậy hệ có nghiệm $(a;b)=\left(\sqrt{2};3\right)$. Suy ra $T=-4$.
Chọn đáp án (B) □

Bài 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba đường thẳng $(d_1)\colon 2x-y=-1$; $(d_2)\colon x+y=-2$; $(d_3)\colon y=-2x-m$. Tìm m để ba đường thẳng đã cho đồng quy.

A. 3. B. -3. C. -2. D. 1.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}2x-y=-1\\ x+y=-2.\end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm $x=-1$, $y=-1$.
Vậy giao điểm của hai đường thẳng (d_1), (d_2) là $M(-1;-1)$.
Ba đường thẳng (d_1), (d_2) và (d_3) đồng quy khi và chỉ khi M nằm trên đường thẳng (d_3), tức là M thỏa mãn phương trình $y=-2x-m$.
Ta có $-1=-2\cdot(-1)-m \Leftrightarrow m=3$.
Chọn đáp án A □

Bài 9. Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi là 118m. Nếu giảm chiều dài đi 5m và tăng chiều rộng thêm 3m thì diện tích giảm đi 14 m^2. Tính diện tích của mảnh vườn.

A. 858 m^2. B. 714 m^2. C. 840 m^2. D. 814 m^2.

Lời giải.

Gọi x (mét), y (mét) $(x>0, y>0)$ lần lượt là chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật.
Ta có $x+y=59$ (1)
và $(x-5)\cdot(y+3)=xy-14$ (2)
Từ (1) suy ra $y=59-x$.
Thay vào (2) ta được

$$\begin{aligned}&(x-5)\cdot(62-x)=x(59-x)-14\\ \Leftrightarrow\ &8x=296\\ \Leftrightarrow\ &x=37.\end{aligned}$$

Với $x=37$ suy ra $y=59-37=22$.
Vậy diện tích hình chữ nhật là $37\cdot 22=814$ m^2.
Chọn đáp án D □

Bài 10. Với giá trị nào của m thì hệ phương trình $\begin{cases}mx+y=2m-1\\ (2m+1)x+7y=m+3\end{cases}$ vô nghiệm.

A. $m=5$. B. $m=\dfrac{1}{5}$. C. $m=-\dfrac{1}{5}$. D. $m=-5$.

Lời giải.

$$\begin{cases}mx+y=2m-1\\ (2m+1)x+7y=m+3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2m-1-mx\\ (5m-1)x=13m-10.\end{cases}$$

Hệ phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $5m-1=0$ và $13m-10\neq 0$.
Suy ra $m=\dfrac{1}{5}$.
Chọn đáp án B □

Bài 11. Với giá trị nào của tham số m thì hệ phương trình $\begin{cases} mx+y=2 \\ -3mx+my=m-3 \end{cases}$ có vô số nghiệm.

Ⓐ $m=-3$. Ⓑ $m=0$. Ⓒ $m=3$. Ⓓ $m\neq -3$.

Lời giải.

$\begin{cases} mx+y=2 \\ -3mx+my=m-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-mx \\ -3mx+m(2-mx)=m-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-mx \\ \left(-3m-m^2\right)x=-m-3. \end{cases}$

Hệ phương trình vô số nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} -3m-m^2=0 \\ -m-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=-3$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Bài 12. Tất cả có 120 bó cỏ để làm thức ăn cho 30 con gồm trâu và bò trong một tuần. Biết rằng trong một tuần mỗi con trâu ăn hết 5 bó cỏ, còn mỗi con bò ăn hết 3 bó cỏ. Hỏi có bao nhiêu con trâu?

Ⓐ 25. Ⓑ 10. Ⓒ 15. Ⓓ 20.

Lời giải.

Gọi số con trâu là x và số con bò là y.
Khi đó x, y nguyên, không âm và thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y=30 \\ 5x+3y=120. \end{cases}$$

Giải được $x=15$, $y=15$. Ta có 15 con trâu và 15 con bò.
Chọn đáp án Ⓒ □

Bài 13. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x-(m+3)y=0 \\ (m-2)x+4y=m-1 \end{cases}$. Tìm m để hệ phương trình nhận cặp số $(2;1)$ làm nghiệm.

Ⓐ $m=-1$. Ⓑ $m=1$. Ⓒ $m=2$. Ⓓ $m=-3$.

Lời giải.

Do $(2;1)$ là nghiệm của hệ phương trình nên

$$\begin{cases} 2-(m+3)\cdot 1=0 \\ (m-2)\cdot 2+4=m-1 \end{cases} \Leftrightarrow m=-1.$$

Chọn đáp án Ⓐ □

Bài 14. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx+y=-1 \\ x+y=-m \end{cases}$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hệ phương trình có duy nhất nghiệm $(x;y)$ thỏa $y^2=x$.

Ⓐ 0. Ⓑ 2. Ⓒ 1. Ⓓ 3.

Lời giải.

$$\begin{cases} mx+y=-1 & (1) \\ x+y=-m. & (2) \end{cases}$$

Từ (1) ta suy ra $y=-1-mx$ thay vào (2) ta được $x-1-mx=-m \Leftrightarrow (1-m)x=1-m$.
Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $1-m\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 1$.

Khi đó hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = -m - 1. \end{cases}$

Mặt khác, $y^2 = x \Leftrightarrow (-m-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -2. \end{array}\right.$

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B □

Bài 15. Có bao nhiêu cặp số $(x;y)$ thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} + y + \dfrac{1}{y} = \dfrac{9}{2} \\ xy + \dfrac{1}{xy} = \dfrac{5}{2}. \end{cases}$

A 2. B 1. C 0. D 4.

Lời giải.

Đặt $x + y = u$, $xy = v$ với $v \neq 0$. Hệ đã cho trở thành $\begin{cases} u + \dfrac{u}{v} = \dfrac{9}{2} & (1) \\ u + \dfrac{1}{v} = \dfrac{5}{2}. & (2) \end{cases}$

Từ (2) ta được $2v^2 - 5v + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = 2 \\ v = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

- Với $v = 2$ ta được $u = 3$. Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$ nên $(x;y)$ là nghiệm của phương trình $X^2 - 3X + 2 = 0$, tức là $(x;y) = (1;2);(2;1)$.
- Với $v = \dfrac{1}{2}$ ta được $u = \dfrac{3}{2}$. Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = \dfrac{3}{2} \\ xy = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ nên $(x;y)$ là nghiệm của phương trình $X^2 - \dfrac{3}{2}X + \dfrac{1}{2} = 0$, tức là $(x;y) = \left(1;\dfrac{1}{2}\right);\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

Chọn đáp án D □

Bài 16. Biết đường thẳng $y = (a-3)x + b$ đi qua hai điểm $A(1;2)$ và $B(-3;4)$. Tính $a+b$.

A -5. B $-\dfrac{5}{2}$. C $\dfrac{5}{2}$. D 5.

Lời giải.

Đường thẳng $y = (a-3)x + b$ đi qua hai điểm $A(1;2)$ và $B(-3;4)$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2 = (a-3) + b \\ 4 = -3 \cdot (a-3) + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ -3a + b = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{5}{2} \\ b = \dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

Vậy $a + b = 5$.

Chọn đáp án D □

Bài 17. Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $y = 2x - 3$ và $x - y = 1$.

A $M(2;1)$. B $N(4;3)$. C $P(-3;-4)$. D $Q(4;-3)$.

Lời giải.

Xét hệ phương trình $\begin{cases}2x-y=3\\x-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1.\end{cases}$

Chọn đáp án A $\square$

Bài 18. Tìm phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(-2;-6)$ và $B(4;3)$.

A $3x-2y=6$. B $3x+2y=-6$. C $2x-y=5$. D $-3x-2y=18$.

Lời giải.

Giả sử đường thẳng có phương trình $ax+by=c$, từ giả thiết:

- $A(-2;-6)$ thuộc đường thẳng, suy ra:
$-2a-6b=c$. (1)
- $B(4;3)$ thuộc đường thẳng, suy ra:
$4a+3b=c$. (2)

Từ (1) và (2) ta được hệ phương trình:
$\begin{cases}-2a-6b=c\\4a+3b=c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2a-6b=c\\8a+6b=2c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6a=3c\\8a+6b=2c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{c}{2}\\8\cdot\dfrac{c}{2}+6b=2c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{c}{2}\\b=-\dfrac{c}{3}.\end{cases}$

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình $\dfrac{c}{2}\cdot x-\dfrac{c}{3}\cdot y=c\Leftrightarrow 3x-2y=6$.

Chọn đáp án A $\square$

Bài 19. Biết phương trình $ax^2-x+b=0$ có hai nghiệm lần lượt là $x=-2$ và $x=3$. Tính a^2-3b+1.

A -16. B -4. C 20. D 18.

Lời giải.

Với giả thiết:

- $x=-2$ là nghiệm của phương trình nên $4a+2+b=0\Leftrightarrow 4a+b=-2$. (1)
- $x=3$ là nghiệm của phương trình nên $a\cdot 3^2-3+b=0\Leftrightarrow 9a+b=3$. (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}4a+b=-2\\9a+b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5a=5\\9a+b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-6.\end{cases}$$

Vậy $a^2-3b+1=20$.

Chọn đáp án C $\square$

Bài 20. Một ôtô dự định đi từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu xe chạy với vận tốc 35 km/h thì đến chậm mất 2 giờ. Nếu xe chạy với vận tốc 50 km/h thì đến sớm hơn 1 giờ. Tính quãng đường AB.

A 300 km. B 250 km. C 320 km. D 350 km.

Lời giải.

Gọi x (giờ) là thời gian dự định đi lúc đầu (điều kiện $x>0$);
y là độ dài quãng đường AB (km) (điều kiện $y>0$).
Với giả thiết:

- Nếu xe chạy với vận tốc 35 km/h thì đến chậm mất 2 giờ, ta được:

$$\frac{y}{35} = x + 2 \Leftrightarrow 35x - y = -70. \qquad (1)$$

- Nếu xe chạy với vận tốc 50 km/h thì đến sớm hơn 1 giờ, ta được:

$$\frac{y}{50} = x - 1 \Leftrightarrow 50x - y = 50. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 35x - y = -70 \\ 50x - y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15x = 120 \\ 50x - y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 350. \end{cases}$$

Chọn đáp án D □

Bài 21. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

(A) Hệ vô nghiệm.
(B) Hệ vô số nghiệm.
(C) Hệ có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.
(D) Hệ có nghiệm $(x; y) = \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 2x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = -2 \\ 2x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3y = -1 \\ 2x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3} \\ x = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Chọn đáp án D □

Bài 22. Cho hệ phương trình sau $\begin{cases} -x + 4y = 6 \\ 3x - 12y = 18 \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

(A) Hệ phương trình vô nghiệm.
(B) Hệ phương trình vô số nghiệm.
(C) Hệ phương trình có nghiệm duy nhất.
(D) Hệ phương trình có nghiệm nguyên.

Lời giải.

Nhận xét $\frac{-1}{3} = \frac{4}{-12} \neq \frac{6}{18}$ nên suy ra hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Chọn đáp án A □

Bài 23. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 2y = 5 \end{cases}$. Nghiệm của hệ phương trình là

(A) $\left(\frac{7}{4}; \frac{3}{4}\right)$.
(B) $\left(\frac{7}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.
(C) $\left(-\frac{7}{4}; \frac{3}{4}\right)$.
(D) $(-\frac{3}{4}; \frac{7}{4})$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{4} \\ y = -\frac{3}{4}. \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=\left(\frac{7}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

Chọn đáp án (B) □

Bài 24. Hãy chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định dưới đây.

(A) Hai hệ phương trình bậc nhất hai ẩn vô nghiệm thì tương đương với nhau.

(B) Hai hệ phương trình bậc nhất hai ẩn có vô số nghiệm thì tương đương với nhau.

(C) Nếu $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ thì hệ phương trình $\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ có vô số nghiệm.

(D) Nếu $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ thì hệ phương trình $\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ vô nghiệm.

Lời giải.

Hai hệ phương trình bậc nhất hai ẩn có vô số nghiệm thì chưa chắc đã tương đương với nhau.
Chọn đáp án (B) □

Bài 25. Hệ phương trình nào dưới đây có nghiệm $(x;y)=(2;1)$?

(A) $\begin{cases}x+2y=4\\2x-y=3\end{cases}$. (B) $\begin{cases}x-y=3\\3x-4y=2\end{cases}$. (C) $\begin{cases}7x-3y=5\\4x+y=2\end{cases}$. (D) $\begin{cases}x+y=1\\x-y=2\end{cases}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases}x+2y=4\\2x-y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+4y=8\\2x-y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5y=5\\2x-y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\x=2.\end{cases}$$

Vậy hệ $\begin{cases}x+2y=4\\2x-y=3\end{cases}$ có nghiệm $(x;y)=(2;1)$.

Chọn đáp án (A) □

Bài 26. Hệ phương trình $\begin{cases}7x-3y=5\\4x+y=2\end{cases}$ có nghiệm $(x;y)$ là

(A) $\left(\frac{11}{19};-\frac{6}{19}\right)$. (B) $(2;1)$. (C) $(1;1)$. (D) $\left(\frac{11}{19};\frac{12}{19}\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases}7x-3y=5\\4x+y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x-3y=5\\12x+3y=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}19x=11\\7x-3y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{11}{19}\\y=-\frac{6}{19}.\end{cases}$$

Chọn đáp án (A) □

Bài 27. Cho hệ phương trình $\begin{cases}x+y=4\\2x+2y=m\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) Hệ phương trình có nghiệm với mọi m.

(B) Hệ phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $m\neq 8$.

(C) Hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m>4$.

(D) Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi $m\neq 8$.

Lời giải.

Hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{2}{1} = \dfrac{2}{1} \neq \dfrac{m}{4} \Leftrightarrow m \neq 8$.

Chọn đáp án (B) □

Bài 28. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = m \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

(A) Hệ phương trình vô nghiệm.
(B) Hệ phương trình có vô số nghiệm.
(C) Hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m = 3$.
(D) Với mọi m, hệ phương trình luôn có nghiệm.

Lời giải.

Nhận xét $\dfrac{1}{2} \neq \dfrac{2}{3} \Rightarrow \forall m$ thì hệ phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Chọn đáp án (D) □

Bài 29. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} 3x + y = m \\ 6x + 2y = 4 \end{cases}$ có vô số nghiệm.

(A) $m = 0$. (B) $m = 1$. (C) $m = 2$. (D) $m = 3$.

Lời giải.

Hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm khi và chỉ khi $\dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{m}{4} \Leftrightarrow m = 2$.

Chọn đáp án (C) □

Bài 30. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 1 \\ 2x + 6y = 3 \end{cases}$ vô nghiệm.

(A) $m = 1$. (B) $m = 2$.
(C) Với mọi m, hệ đã cho luôn vô nghiệm. (D) $m = 3$.

Lời giải.

Hệ đã cho vô nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{m}{6} \neq \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow m = 3$.

Chọn đáp án (D) □

Bài 31. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} 2x + my = 1 \\ 3x + 6y = 3 \end{cases}$ có nghiệm.

(A) Không tồn tại giá trị của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm.
(B) Với mọi m, phương trình đã cho luôn có nghiệm.
(C) $m = 4$.
(D) $m \neq 4$.

Lời giải.

Hệ phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{2}{3} \neq \dfrac{m}{6} \Leftrightarrow m \neq 4$.

Chọn đáp án (D) □

Bài 32. Hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$ có nghiệm $(x; y)$ là

(A) $(-1; 1)$. (B) $(-5, 6)$. (C) $\left(\dfrac{3}{2}; 1\right)$. (D) $\left(1; \dfrac{3}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases}2x+5y=8\\2x-3y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8y=8\\2x-3y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\x=\dfrac{3}{2}.\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{3}{2};1\right)$

Chọn đáp án (C) □

Bài 33. Cặp số $(2;-3)$ là một nghiệm của hệ phương trình nào sau đây?

(A) $\begin{cases}2x-y=7\\x+2y=-4\end{cases}$. (B) $\begin{cases}\dfrac{3}{2}x+y=0\\x-y=-1\end{cases}$. (C) $\begin{cases}0x-2y=6\\2x+0y=1\end{cases}$. (D) $\begin{cases}2x+y=7\\x-y=5\end{cases}$.

Lời giải.

Nhận xét

- $(2;-3)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}2x-y=7\\x+2y=-4.\end{cases}$
- $(2;-3)$ không phải là nghiệm của phương trình $x-y=-1$.
- $(2;-3)$ không phải là nghiệm của phương trình $2x+0y=1$.
- $(2;-3)$ không phải là nghiệm của phương trình $2x+y=7$.

Chọn đáp án (A) □

Bài 34. Cặp số $(0;1)$ là nghiệm của hệ phương trình nào dưới đây?

(A) $\begin{cases}x+y=1\\2x+y=2\end{cases}$. (B) $\begin{cases}x-y=-1\\x+3y=1\end{cases}$. (C) $\begin{cases}x+0y=0\\x+y=3\end{cases}$. (D) $\begin{cases}3x+2y=2\\x+y=1\end{cases}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases}3x+2y=2\\x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3(1-y)+2y=2\\x=1-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\x=0.\end{cases}$$

Vậy $(0;1)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}3x+2y=2\\x+y=1.\end{cases}$

Chọn đáp án (D) □

Bài 35. Hệ phương trình $\begin{cases}3x+y=m\\x+2y=2m\end{cases}$ có nghiệm $(0;2)$ khi m có giá trị bằng bao nhiêu?.

(A) $m=0$. (B) $m=1$. (C) $m=2$. (D) $m=3$.

Lời giải.

Cặp số $(0;2)$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho $\Leftrightarrow\begin{cases}3\cdot0+2=m\\0+2\cdot2=2m\end{cases}\Leftrightarrow m=2$.

Chọn đáp án (C) □

Bài 36. Tìm m để cặp số $(3;0)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} mx+y=3 \\ 2x+3y=6m. \end{cases}$

(A) $m=0$. (B) $m=1$. (C) $m=3$. (D) $m=2$.

Lời giải.

Cặp số $(3;0)$ là nghiệm của hệ phương trình trên $\Leftrightarrow \begin{cases} 3m=3 \\ 6=6m \end{cases} \Leftrightarrow m=1$.

Chọn đáp án (B) □

Bài 37. Tỉ số của hai số là $3:4$. Nếu giảm số lớn đi 100 và tăng số nhỏ thêm 200 thì tỉ số mới là $5:3$. Giá trị của số lớn bằng bao nhiêu?

(A) 300. (B) 400. (C) 500. (D) 600.

Lời giải.

Gọi số bé là x và số lớn là y $(x<y)$.

Tỉ số của hai số là $3:4$ nên suy ra $\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{4}$. (1)

Theo bài, nếu giảm số lớn 100, tăng số nhỏ 200 thì tỉ số mới la $5:3$, khi đó ta có

$$\frac{x+200}{y-100}=\frac{5}{3}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x}{4}=\dfrac{3}{4} \\ \dfrac{x+200}{y-100}=\dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3y=0 \\ 3x-5y=-1100. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $\begin{cases} x=300 \\ y=400. \end{cases}$

Vậy số lớn bằng 400.

Chọn đáp án (B) □

Bài 38. Một xe tải lớn chở 10 chuyến hàng và một xe nhỏ chở 5 chuyến hàng thì được 60 tấn. Biết rằng 3 chuyến xe lớn chở nhiều hơn 7 chiếc xe nhỏ là 1 tấn. Hỏi xe lớn chở được bao nhiêu tấn hàng một chuyến?

(A) 5 tấn. (B) 4 tấn. (C) 7 tấn. (D) 2 tấn.

Lời giải.

Gọi lượng hàng xe lớn chở được trong một chuyến là x (tấn).

Lượng hàng xe nhỏ chở trong một chuyến là y (tấn).

Theo đề bài, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 10x+5y=60 \\ 3x-7y=1. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $\begin{cases} x=5 \\ y=2. \end{cases}$

Vậy một chuyến xe lớn chở được 5 tấn.

Chọn đáp án (A) □

Bài 39. Hai phân xưởng của nhà máy theo kế hoạch phải làm 300 sản phẩm. Nhưng phân xưởng I đã thực hiện 110% kế hoạch, phân xưởng II thực hiện 120% kế hoạch, do đó đã sản xuất được 340 sản phẩm. Số sản phẩm phân xưởng I làm theo kế hoạch là

A. 100. B. 200. C. 300. D. 150.

Lời giải.

Gọi số sản phẩm phân xưởng I làm theo kế hoạch là x (sản phẩm, $x > 0$).
Số sản phẩm phân xưởng II là theo kế hoạch là y (sản phẩm, $y > 0$).
Theo bài ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 300 \\ \dfrac{110x}{100} + \dfrac{120y}{100} = 340 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 300 \\ 11x + 12y = 3400. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $\begin{cases} x = 200 \\ y = 100 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).
Vậy số sản phẩm phân xưởng I làm theo kế hoạch là 200 sản phẩm.
Chọn đáp án B □

Bài 40. Một trường tổ chức cho học sinh đi tham quan bằng ô tô. Nếu xếp mỗi xe 40 học sinh thì còn thừa 5 học sinh. Nếu xếp mỗi xe 41 học sinh thì xe cuối cùng thừa 3 ghế trống. Hỏi nhà trường đã thuê bao nhiêu xe ô tô?

A. 6. B. 7. C. 8. D. 9.

Lời giải.

Gọi số học sinh đi tham quan là x (người, $x \in \mathbb{N}^*$) và số ô tô là y (ô tô, $y \in \mathbb{N}^*$).
Theo bài ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 40y + 5 \\ x = 41y - 3. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $\begin{cases} x = 325 \\ y = 8 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).
Vậy nhà trường đã thuê 8 xe ô tô.
Chọn đáp án C □

2 Toán tự luận

Dạng 65. Giải hệ phương trình.

- Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế.
- Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số.
- Giải hệ bằng phương pháp đặt ẩn phụ.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 4y = -1. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 6y = 17 \\ 9x - y = 7. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + 2y = 4. \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{1}{2x-1} + \dfrac{4}{y+5} = 3 \\ \dfrac{3}{2x-1} - \dfrac{2}{y+5} = -5. \end{cases}$

Lời giải.

1. $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ 3x + 4(1-2x) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ -5x = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1. \end{cases}$
   Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = (1; -1)$.

2. $\begin{cases} 5x + 6y = 17 \\ 9x - y = 7 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} 5x + 6(9x-7) = 17 \\ y = 9x - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 59x = 59 \\ y = 9x - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \end{cases}$
   Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = (1; 2)$.

3. Ta có hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} 6x - 9y = 21 \\ 6x + 4y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13y = -13 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 2. \end{cases}$$

   Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; -1)$.

4. Xét hệ $\begin{cases} \dfrac{1}{2x-1} + \dfrac{4}{y+5} = 3 \\ \dfrac{3}{2x-1} - \dfrac{2}{y+5} = -5 \end{cases}$ (I)

   Điều kiện $\begin{cases} x \neq \dfrac{1}{2} \\ y \neq -5. \end{cases}$

   Khi đó, $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2x-1} + \dfrac{4}{y+5} = 3 \\ \dfrac{6}{2x-1} - \dfrac{4}{y+5} = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2x-1} + \dfrac{4}{y+5} = 3 \\ \dfrac{7}{2x-1} = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -4. \end{cases}$

   So với điều kiện, thỏa mãn.
   Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (0; -4)$.

□

Bài 2. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 9 \\ 2x + y = -1. \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + y = 6 \\ 2x + y = -3. \end{cases}$

Lời giải.

1. Ta có $\begin{cases} 3x - 2y = 9 \\ 2x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 9 \\ 4x + 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 7 \\ 2x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3. \end{cases}$
   Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = (1; -3)$.

2. Ta có $\begin{cases} -x + y = 6 \\ 2x + y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x = 9 \\ -x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 3. \end{cases}$
   Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = (-3; 3)$.

□

Bài 3. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} \dfrac{-5}{x-1}+\dfrac{1}{y-1}=10 \\ \dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3}{y-1}=-18. \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{x}+2\sqrt{y-1}=5 \\ 4\sqrt{x}-\sqrt{y-1}=2. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2\sqrt{x-2}+\dfrac{y}{y+3}=1 \\ 4\sqrt{x-2}-\dfrac{3y}{y+3}=7. \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{2}{x-2}+\dfrac{1}{y+1}=3 \\ \dfrac{3}{x-2}-\dfrac{2}{y+1}=8. \end{cases}$

e) $\begin{cases} |x+5|-\dfrac{2}{\sqrt{y}-2}=4 \\ |x+5|-\dfrac{1}{\sqrt{y}-2}=3. \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dfrac{9}{\sqrt{2x-1}}-\dfrac{3}{y+1}=2 \\ \dfrac{4}{\sqrt{2x-1}}-\dfrac{1}{y+1}=1. \end{cases}$

Lời giải.

1. Điều kiện $x \neq 1$ và $y \neq 1$.
Đặt $\dfrac{1}{x-1}=u$; $\dfrac{1}{y-1}=v$. Hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} -5u+v=10 \\ u+3v=-18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=5u+10 \\ u+3(5v+10)=-18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=5u+10 \\ 16u=-48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=-3 \\ v=-5. \end{cases}$$

Với $u=-3$; $v=-5$ ta có hệ

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-1}=-3 \\ \dfrac{1}{y-1}=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3(x-1)=1 \\ -5(y-1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x=-2 \\ -5y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ y=\dfrac{4}{5}. \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện, hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{5}\right)$.

2. Điều kiện: $x \geq 0$, $y \geq 1$.
Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{x} \\ b=\sqrt{y-1} \end{cases}$. Điều kiện $a;b \geq 0$. Khi đó hệ phương trình ban đầu trở thành
$\begin{cases} a+2b=5 \\ 4a-b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5-2b \\ 4(5-2b)-b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5-2b \\ -9b=-18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2. \end{cases}$
Do đó $\begin{cases} \sqrt{x}=1 \\ \sqrt{y-1}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y-1=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=5. \end{cases}$
Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(1;5)$.

3. Điều kiện $x \geq 2$, $y \neq -3$. Đặt $a=\sqrt{x-2}$, $b=\dfrac{y}{y+3}$. Thu được
$\begin{cases} 2a+b=1 \\ 4a-3b=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2b=2 \\ 4a-3b=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5b=-5 \\ 2a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-1 \\ a=1. \end{cases}$
Từ đó suy ra

$$\begin{cases}\sqrt{x-2}=1\\ \dfrac{y}{y+3}=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2=1\\ y=-y-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ y=-\dfrac{3}{2}.\end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=\left(3;-\dfrac{3}{2}\right)$.

4. Điều kiện xác định $x\neq 2$ và $y\neq -1$.
   Đặt $u=\dfrac{1}{x-2}$ và $v=\dfrac{1}{y+1}$, hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases}2u+v=3\\ 3u-2v=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4u+2v=6\\ 3u-2v=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7u=14\\ v=3-2u\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=2\\ v=-1.\end{cases}$$

   Như vậy ta được

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x-2}=2\\ \dfrac{1}{y+1}=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{2}\\ y=-2.\end{cases}\text{ (thỏa mãn điều kiện xác định)}$$

   Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{5}{2};-2\right)$.

5. Điều kiện $y\geq 0; y\neq 4$.
   Đặt $a=|x+5|; b=\dfrac{1}{\sqrt{y}-2}(a\geq 0)$.
   Ta có hệ $\begin{cases}a-2b=4\\ a+b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{10}{3}\\ b=-\dfrac{1}{3}.\end{cases}$
   Ta có $\sqrt{y}-2=-3\Leftrightarrow\sqrt{y}=-1$(vô nghiệm).
   Vậy hệ phương trình vô nghiệm.

6. Điều kiện $x>\dfrac{1}{2}$, $y\neq -1$.
   Đặt $\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}=a$ và $\dfrac{1}{y+1}=b$, hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases}9a-3b=2\\ 4a-b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{3}\\ b=\dfrac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}=\dfrac{1}{3}\\ \dfrac{1}{y+1}=\dfrac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=5\\ y=2.\end{cases}$$

   Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y)=(5;2)$.

□

Dạng 66. Giải và biện luận hệ phương trình

Biến đổi từ hệ phương trình về phương trình theo ẩn x hoặc y. Từ đó giải và biện luận phương trình một ẩn.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải và biện luận hệ phương trình $\begin{cases} x - my = 2 \\ mx - 4y = m - 2. \end{cases}$

Lời giải.

$(I)\begin{cases} x - my = 2 & (1) \\ mx - 4y = m - 2 & (2). \end{cases}$

Từ (1) ta có $x = my + 2$ thay vào (2) ta được

$$m(my + 2) - 4y = m - 2 \Leftrightarrow (m - 2)(m + 2)y = -(m + 2) \quad (3).$$

• Nếu $m = 2$ phương trình (3) trở thành $0y = -4$. Phương trình (3) vô nghiệm, do đó hệ phương trình (I) vô nghiệm.

• Nếu $m = -2$ phương trình (3) trở thành $0y = 0$. Phương trình (3) có vô số nghiệm $y \in \mathbb{R}$, do đó hệ phương trình (I) có vô số nghiệm $\begin{cases} x = -2y + 2 \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$

• Nếu $m \neq \pm 2$ thì phương trình (3) có nghiệm duy nhất $y = \dfrac{-1}{m - 2}$.

Do đó hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{4 - m}{2 - m} \\ y = \dfrac{-1}{m - 2}. \end{cases}$

Kết luận

• Với $m \neq \pm 2$ hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{4 - m}{2 - m} \\ y = \dfrac{-1}{m - 2}. \end{cases}$

• Với $m = -2$ hệ phương trình (I) có vô số nghiệm $\begin{cases} x = -2y + 2 \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$

• Với $m = 2$ hệ phương trình (I) vô nghiệm.

Bài 2. Giải và biện luận hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = 4 \\ x - my = 1. \end{cases}$

Lời giải.

Từ phương trình thứ nhất có $y = 4 - mx$, thay vào phương trình thứ hai ta được

$$x - m(4 - mx) = 1 \Leftrightarrow (1 + m^2)x = 1 + 4m \quad (*).$$

Với mọi m, phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{1 + 4m}{1 + m^2} \Rightarrow y = 4 - \dfrac{m(1 + 4m)}{1 + m^2} = \dfrac{4 - m}{1 + m^2}$.

Kết luận: Với mọi m, hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{1 + 4m}{1 + m^2} \\ y = \dfrac{4 - m}{1 + m^2}. \end{cases}$ □

Bài 3. Giải và biện luận hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = 2m & (1) \\ x + my = m + 1 & (2). \end{cases}$

Lời giải.

Từ (1) ta có $y = 2m - mx$ thay vào (2) ta được

$$x + m(2m - mx) = m + 1 \quad \Leftrightarrow \quad (1 - m^2)x = -2m^2 + m + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (m-1)(m+1)x = (m-1)(2m+1) \quad (3).$$

• Nếu $m = 1$ phương trình (3) trở thành $0x = 0$. Phương trình (3) có vô số nghiệm $x \in \mathbb{R}$, do đó hệ có vô số nghiệm $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2 - x. \end{cases}$

• Nếu $m = -1$ phương trình (3) trở thành $0x = 2$. Phương trình (3) có vô nghiệm , do đó hệ vô nghiệm.

• Nếu $m = \pm 1$ phương trình (3) có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{2m+1}{m+1}$.

Do đó hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{2m+1}{m+1} \\ y = \dfrac{m}{m+1}. \end{cases}$

Kết luận

• Với $m = \pm 1$ hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{2m+1}{m+1} \\ y = \dfrac{m}{m+1}. \end{cases}$

• Với $m = 1$ hệ có vô số nghiệm $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2 - x. \end{cases}$

• Với $m = -1$ hệ vô nghiệm. □

□

Dạng 67. Xác định tham số để hệ có nghiệm thỏa mãn điều kiện đề bài

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho hệ phương trình $\begin{cases} ax + y = 1 \\ ax + by = -5 \end{cases}$ (a, b là tham số).

Tìm a, b để hệ có nghiệm $(2; -3)$.

Lời giải.

Hệ phương trình có nghiệm $x = 2$ và $y = -3$ khi $\begin{cases} 2a - 3 = 1 \\ 2a - 3b = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3. \end{cases}$

Vậy $a = 2, b = 3$ thì hệ có nghiệm $(2; -3)$. □

Bài 2. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x = 2 \\ mx + y = m^2 + 3 \end{cases}$ (m là tham số).

Tìm m sao cho hệ có nghiệm thỏa mãn $x + y$ là nhỏ nhất.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} x = 2 \\ mx + y = m^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ m \cdot 2 + y = m^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = m^2 - 2m + 3. \end{cases}$

Vậy với mọi m hệ luôn có nghiệm duy nhất $x = 2, y = m^2 - 2m + 3$.

Có $x + y = m^2 - 2m + 5 = (m-1)^2 + 4 \geq 4, \forall m \in \mathbb{R}$.

Suy ra $x + y$ nhỏ nhất bằng 4 khi $m = 1$.

Kết luận: $m = 1$ thì hệ có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn tổng $x + y$ là nhỏ nhất. □

Bài 3. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 3 \\ mx + y = -3. \end{cases}$

Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn $x > 0$?

Lời giải.

Từ phương trình thứ hai ta được $y = -3 - mx$, thay vào phương trình thứ nhất ta được

$$x + m(-3 - mx) = 3 \Leftrightarrow (1 - m^2)x = 3m + 3 \Leftrightarrow (1 - m^2)x = 3(m+1) \quad (*).$$

Hệ có nghiệm duy nhất khi phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow 1 - m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.
Khi đó $(*)$ có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{3(1+m)}{1-m^2} = \dfrac{3}{1-m}$.
Do điều kiện $x > 0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{1-m} > 0 \Leftrightarrow 1 - m > 0 \Leftrightarrow m < 1$.
Kết luận
Với $m < 1$ và $m \neq -1$ thì hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn $x > 0$. □

Bài 4. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 3y = m \\ 5x - y = 1. \end{cases}$
Tìm m để hệ có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x > 0;\ y < 0$?

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} 2x + 3y = m \\ 5x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3(5x - 1) = m \\ y = 5x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{m+3}{17} \\ y = \dfrac{5m-2}{17}. \end{cases}$

Hệ có nghiệm thỏa mãn $\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m+3}{17} > 0 \\ \dfrac{5m-2}{17} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m < \dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < \dfrac{2}{5}$. □

Bài 5. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 3m + 3 & (1) \\ 4x - 3y = m - 10 & (2). \end{cases}$
Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất?

Lời giải.

Từ (1) suy ra $x = 3m + 3 - 2y \quad (3)$, thay vào (2) ta được

$$\begin{aligned} 4(3m + 3 - 2y) - 3y = m - 10 &\Leftrightarrow 12m + 12 - 8y - 3y = m - 10 \\ &\Leftrightarrow -11y = -11m - 22 \Leftrightarrow y = m + 2. \end{aligned}$$

Thay $y = m + 2$ vào (3) ta được $x = m - 1$.
Có $x^2 + y^2 = (m-1)^2 + (m+2)^2 = 2m^2 + 2m + 5 = 2\left(m + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{9}{2} \geq \dfrac{9}{2}\ \forall m \in \mathbb{R}$.
Đẳng thức xảy ra khi $m = -\dfrac{1}{2}$.
Vậy $m = -\dfrac{1}{2}$ thì hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. □

2.1 Giải toán bằng cách lập hệ phương trình

Các bước làm tổng quát.

Bước 1. Lập hệ phương trình.

- Chọn ẩn (thường là các đại lượng cần tìm) và đặt điều kiện thích hợp cho chúng.
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo các ẩn và các đại lượng đã biết.

- Lập hệ phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2. Giải hệ phương trình vừa lập.

Bước 3. Kiểm tra xem các nghiệm của hệ có thỏa mãn điều kiện đặt ra hay không, rồi trả lời yêu cầu bài toán.

Dạng 68. Toán số học, phần trăm

- Biểu diễn của một số tự nhiên. Ví dụ số tự nhiên có 3 chữ số có biểu diễn là $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, với điều kiện $a \in \mathbb{N}^*$; b, $c \in \mathbb{N}$; a, b, $c \leq 9$.
- Phép chia có dư $a = b \cdot q + r$. Trong đó a là số bị chia, b là số chia, q là thương và r là số dư.
- Phép tính cộng, trừ, nhân, chia với phần trăm.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết hiệu giữa chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị là 5. Nếu lấy số đã cho chia cho số viết theo thứ tự ngược lại ta được thương là 3 và số dư là 13.

Lời giải.

Gọi số phải tìm là $\overline{xy} = 10x + y$ ($x \in \mathbb{N}^*$; $y \in \mathbb{N}$; x, $y \leq 9$).
Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ 10x + y = 3(10y + x) + 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 1. \end{cases}$$

So với điều kiện ta thấy thỏa mãn.
Vậy số cần tìm là 61. □

Bài 2. Tìm một số có hai chữ số, biết rằng tổng các chữ số của số đó bằng 9 và viết các chữ số theo thứ tự ngược lại thì được một số bằng $\dfrac{2}{9}$ số ban đầu.

Lời giải.

Gọi số phải tìm là $\overline{xy} = 10x + y$ ($x \in \mathbb{N}^*$; $y \in \mathbb{N}$; x, $y \leq 9$).
Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 10y + x = \dfrac{2}{9}(10x + y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 1. \end{cases}$$

So với điều kiện ta thấy thỏa mãn.
Vậy số cần tìm là 81. □

Bài 3. Tháng thứ nhất hai tổ sản xuất được 900 chi tiết máy. Tháng thứ hai tổ một vượt mức 15% và tổ hai vượt mức 10% so với tháng thứ nhất. Vì vậy hai tổ đã sản xuất được 1010 chi tiết máy. Hỏi tháng thứ hai mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy?

Lời giải.

Gọi số chi tiết máy tổ một làm trong tháng thứ nhất là x, số chi tiết máy tổ hai làm trong tháng thứ hai là y (x, $y \in \mathbb{N}^*$).
Số chi tiết máy tổ một làm trong tháng thứ hai là $x + 15\%x = 1{,}15x$.

Số chi tiết máy tổ hai làm trong tháng thứ hai là $y + 10\%y = 1{,}1y$.
Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x + y = 900 \\ 1{,}15x + 1{,}1y = 1010 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 400 \\ y = 500. \end{cases}$$

So với điều kiện ta thấy thỏa.
Vậy trong tháng hai, tổ một làm được $1{,}15x = 460$ chi tiết máy, tổ hai làm được $1{,}1y = 550$ chi tiết máy. □

Dạng 69. Toán năng suất công việc

Năng suất công việc bằng khối lượng công việc chia cho thời gian hoàn thành.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Hai anh em nông dân cùng cày trên một cánh đồng. Mỗi ngày người anh cày hơn người em 10 m^2 đất. Sau ba ngày làm việc, cả hai anh em cày được 930 m^2 đất. Hỏi năng suất mỗi người làm trong một ngày là bao nhiêu?

Lời giải.

Gọi năng suất người anh làm trong một ngày là x, năng suất người em làm trong một ngày là y $(x, y > 0)$.
Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x - y = 10 \\ 3x + 3y = 930 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 160 \\ y = 150. \end{cases}$$

So với điều kiện ta thấy thỏa. Vậy năng suất người anh làm trong một ngày là 160 m^2, năng suất người em làm trong một ngày là 150 m^2.

□

Dạng 70. Toán chuyển động

- Công thức vận tốc, quãng đường, thời gian.
  $v = \dfrac{s}{t}$ hoặc $s = v \cdot t$ hoặc $t = \dfrac{s}{v}$.
  Trong đó v là vận tốc, s là quãng đường, t là thời gian.
- Các đại lượng phải đổi đơn vị cho phù hợp.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Một khách du lịch đi trên ô tô 5 giờ, sau đó đi tiếp bằng tàu hỏa trong 7 giờ được quãng đường dài 720 km. Hỏi vận tốc của tàu hỏa và ô tô, biết rằng mỗi giờ tàu hỏa đi nhanh hơn ô tô 12 km.

Lời giải.

Gọi vận tốc của ô tô là x (km/h), vận tốc của tàu hỏa là y (km/h) $(x > 0, y > 0)$.
Quãng đường khách du lịch đi bằng ô tô là $5x$ (km).
Quãng đường khách du lịch đi bằng tàu hỏa là $7x$ (km).
Theo giả thiết ta có $5x + 7y = 720$.
Do vận tốc tàu hỏa hơn ô tô 12 km nên ta có $y - x = 12$.
Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} y - x = 12 \\ 5x + 7y = 720 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 53 \\ y = 65. \end{cases}$$

So với điều kiện ta thấy thỏa.
Vậy vận tốc tàu hỏa là 65 km/h; vận tốc của ô tô là 53 km/h. □

Bài 2. Một ca nô chạy xuôi dòng sông 108 km rồi chạy ngược dòng 63 km hết tất cả 7 giờ. Một lần khác, ca nô này chạy xuôi dòng 81 km rồi ngược dòng 84 km cũng hết 7 giờ. Hãy tính vận tốc thật của ca nô và vận tốc của dòng nước (vận tốc thật của ca nô và vận tốc dòng nước ở hai lần là như nhau).

Lời giải.

Gọi vận tốc thật của ca nô là x km/h, vận tốc dòng nước là y km/h ($x > y > 0$).
Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} \dfrac{108}{x+y} + \dfrac{63}{x-y} = 7 \\ \dfrac{81}{x+y} + \dfrac{84}{x-y} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 3. \end{cases}$$

So với điều kiện ta thấy thỏa mãn.
Vậy vận tốc thật của ca nô là 24 km/h, vận tốc của dòng nước là 3 km/h. □

Dạng 71. Toán có các yếu tố hình học

Công thức tính chu vi, diện tích của tam giác, hình thang, hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Một hình thang có diện tích 96 cm^2, chiều cao bằng 8 cm. Tính độ dài các đáy của hình thang, biết rằng chúng hơn kém nhau 10 cm.

Lời giải.

Gọi độ dài đáy lớn là x cm, độ dài đáy bé là y cm ($x > y > 0$).
Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{(x+y)\cdot 8}{2} = 96 \\ x - y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 17 \\ y = 7. \end{cases}$$

So với điều kiện ta thấy thỏa.
Vậy độ dài đáy lớn là 17 cm, độ dài đáy bé là 7 cm. □

Bài 2. Một khu vườn có chu vi là 40 m. Nếu tăng chiều dài thêm 3 m và tăng chiều rộng thêm 2 m thì diện tích tăng thêm 53 m^2. Tìm kính thước của khu vườn.

Lời giải.

Gọi chiều dài khu vườn là x m, chiều rộng khu vườn là y m ($x > y > 0$).
Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} (x+y)\cdot 2 = 40 \\ (x+3)(y+2) = xy + 53 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 13 \\ y = 7. \end{cases}$$

So với điều kiện ta thấy thỏa.
Vậy khu vườn có chiều dài là 13 m, chiều rộng là 7 m. □

Dạng 72. Toán làm chung làm riêng

- Dạng này có 3 đại lượng cần quan tâm là toàn bộ công việc, thời gian làm hết công việc đó, phần việc làm được trong một đơn vị thời gian.
- Xem toàn bộ công việc là 1.
- Nếu một đội làm xong công việc trong x ngày thì một ngày đội đó làm được $\dfrac{1}{x}$ công việc.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Hai vòi nước cũng chảy vào một bể cạn thì sau 1 giờ 12 phút bể sẽ đầy. Nếu mở vòi thứ nhất trong 12 phút và vòi thứ hai trong 15 phút thì được $\dfrac{11}{60}$ bể. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu mới đầy bể?

Lời giải.

Gọi thời gian vòi thứ nhất chảy một mình đầy bể là x (giờ), thời gian vòi thứ hai chảy một mình đầy bể là y (giờ) $(x > 0,\ y > 0)$.
Trong một giờ, vòi thứ nhất chảy được $\dfrac{1}{x}$ bể.
Trong một giờ, vòi thứ hai chảy được $\dfrac{1}{y}$ bể.
Trong 1 giờ 12 phút, tức $\dfrac{6}{5}$ giờ, cả hai vòi chảy đầy bể nên ta có $\dfrac{6}{5}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right) = 1$.
Trong 12 phút, tức $\dfrac{1}{5}$ giờ, vòi thứ nhất chảy được $\dfrac{1}{5x}$ bể.
Trong 15 phút, tức $\dfrac{1}{4}$ giờ, vòi thứ hai chảy được $\dfrac{1}{4y}$ bể.
Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} \dfrac{6}{5}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right) = 1 \\ \dfrac{1}{5x}+\dfrac{1}{4y} = \dfrac{11}{60} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3. \end{cases}$$

So với điều kiện ta thấy thỏa mãn.
Vậy vòi thứ nhất chảy một mình đầy bể trong 2 giờ, vòi thứ hai chảy một mình đầy bể trong 3 giờ. □

Bài 2. Để hoàn thành một công việc, hai tổ phải làm chung trong 6 giờ. Sau 2 giờ làm chung thì tổ hai được điều đi làm việc khác, tổ một hoàn thành công việc còn lại trong 10 giờ. Hỏi nếu mỗi tổ làm riêng thì sau bao lâu sẽ làm xong công việc đó?

Lời giải.

Gọi thời gian tổ một làm riêng xong công việc là x (giờ), thời gian tổ hai làm riêng xong công việc là y (giờ) $(x > 0,\ y > 0)$.
Trong một giờ, tổ một làm được $\dfrac{1}{x}$ công việc.
Trong một giờ, tổ hai làm được $\dfrac{1}{y}$ công việc.

Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x} + \dfrac{6}{y} = 1 \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{y} + \dfrac{10}{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 10. \end{cases}$$

So với điều kiện ta thấy thỏa mãn.
Vậy nếu làm riêng, tổ một xong công việc trong 2 giờ, tổ hai xong công việc trong 3 giờ. □

Dạng 73. Các dạng khác

Dạng ứng dụng thêm kiến thức thực tế, hiểu biết đời sống.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Bạn Trâm có 4 tờ 200000 đồng, 1 tờ 50000 đồng và 4 tờ 10000 đồng. Trâm muốn đổi lấy 25 tờ gồm hai loại 50000 đồng và 20000 đồng. Hỏi bạn Trâm có thể đạt được ý muốn hay không?

Lời giải.

Giả sử Trâm đổi được như mong muốn.
Gọi số tờ tiền loại 50000 là x, số tờ tiền loại 20000 là y $(x, y \in \mathbb{N}^*)$.
Do tổng số tờ tiền là 25 nên $x + y = 25$.
Do tổng số tiền không thay đổi nên $50000x + 20000y = 890000$.
Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x + y = 25 \\ 50000x + 20000y = 890000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 25 \\ 5x + 2y = 89 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 13 \\ y = 12. \end{cases}$$

So với điều kiện ta thấy thỏa.
Vậy Trâm đổi được như mong muốn. □

Bài 2. Có 54 con vừa gà vừa mèo. Tất cả có 154 chân. Hỏi có bao nhiêu con gà, bao nhiêu con mèo?

Lời giải.

Gọi số con gà là x con, số con mèo là y con $(x, y \in \mathbb{N}^*)$.
Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x + y = 54 \\ 2x + 4y = 154 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 31 \\ y = 23. \end{cases}$$

So với điều kiện ta thấy thỏa.
Vậy có 31 con gà, 23 con mèo. □

2.2 Một số bài toán nâng cao

Dạng 74. Giải hệ n phương trình bậc nhất n ẩn với $n = 3$, $n = 4$

Dùng phương pháp thế hoặc cộng đại số để khử bớt ẩn.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x+y+z=11 \\ 2x-y+z=5 \\ 3x+2y+z=14. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z+t=4 \\ x+y-z-t=8 \\ x-y+z-t=12 \\ x-y-z+t=16. \end{cases}$

Lời giải.

1. $\begin{cases} x+y+z=11 \\ 2x-y+z=5 \\ 3x+2y+z=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=11-x-y \\ x-2y=-6 \\ 2x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=11-x-y \\ -2x+4y=12 \\ 2x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=11-x-y \\ 5y=15 \\ 2x+y=3 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} z=8 \\ y=3 \\ x=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y+z+t=4 \\ x+y-z-t=8 \\ x-y+z-t=12 \\ x-y-z+t=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=4 \\ x+y-z-t=8 \\ x-y+z-t=12 \\ 4x=40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z+t=-6 \\ y-z-t=-2 \\ -y+z-t=2 \\ x=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z+t=-6 \\ 2y=-8 \\ -y+z-t=2 \\ x=10 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} z+t=-2 \\ y=-4 \\ z-t=-2 \\ x=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-2 \\ y=-4 \\ t=0 \\ x=10. \end{cases}$

□

Dạng 75. Giải toán bằng cách lập hệ phương trình

Phân tích kĩ từng ý và áp dụng các bước làm tổng quát.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Lúc 7 giờ, An khởi hành từ A để đến gặp Bích tại B lúc 9 giờ 30 phút. Nhưng đến 9 giờ, An được biết Bích bắt đầu đi từ B để đến C (không nằm trên quãng đường AB) với vận tốc bằng 3,25 lần vận tốc của An. Ngay lúc đó An tăng thêm vận tốc 1 km/h và khi tới B, An đã đi theo đường tắt đến C chỉ dài bằng $\frac{1}{3}$ quãng đường mà Bích đi từ B đến C, do đó An và Bích đến C cùng một lúc. Nếu Bích cũng đi theo đường tắt như An thì Bích đến B trước An là 2 giờ. Tính vận tốc lúc đầu của An.

Lời giải.

Gọi vận tốc lúc đầu của An là x (km/h) $(x>0)$.
Vận tốc của Bích là $3{,}25x$ (km/h).
Gọi chiều dài quãng đường tắt BC là y (km) $(y>0)$.
Quãng đường Bích đi từ B đến C là $3y$ (km).
Gọi N là vị trí mà An bắt đầu tăng vận tốc.
Quãng đường NB mà An dự định đi trong $\frac{1}{2}$ giờ là $0{,}5x$ (km).
An đi từ N đến C (theo đường tắt) được $0{,}5x+y$ (km) với vận tốc $x+1$ (km/h) hết $\frac{0{,}5x+y}{x+1}$ (giờ).

Trong thời gian đó, Bích đi $3y$ (km) với vận tốc $3{,}25x$ (km/h).
Ta có phương trình thứ nhất

$$\frac{0{,}5x+y}{x+1}=\frac{3y}{3{,}25x}.$$

Nếu Bích đi đường tắt từ B đến C thì chỉ hết $\dfrac{y}{3{,}25x}$ (giờ), ít hơn so với đi theo đường vòng 2 giờ.
Ta có phương trình thứ hai

$$\frac{3y}{3{,}25x}-\frac{y}{3{,}25x}=2 \Leftrightarrow y=3{,}25x.$$

Thay $y=3{,}25x$ vào phương trình thứ nhất ta được $x=4$.
So với điều kiện ta thấy thỏa.
Vậy vận tốc lúc đầu của An là 4 km/h. □

§5 Đề kiểm tra 1 tiết

1 Đề số 1 (Dành cho học sinh đại trà)

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} 2x - y = -5 \\ 5x + y = -9 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 3\sqrt{5}x - 4y = 15 - 2\sqrt{7} \\ -2\sqrt{5}x + 8\sqrt{7}y = 18 \end{cases}$.

Lời giải.

1. Ta có

$$\begin{cases} 2x - y = -5 \\ 5x + y = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = -5 \\ 7x = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (-2; 1)$.

2. Ta có

$$\begin{cases} 3\sqrt{5}x - 4y = 15 - 2\sqrt{7} \\ -2\sqrt{5}x + 8\sqrt{7}y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\sqrt{5}x - 8y = 30 - 4\sqrt{7} \\ -6\sqrt{5}x + 24\sqrt{7}y = 54 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6\sqrt{5}x - 8y = 30 - 4\sqrt{7} \\ \left(24\sqrt{7} - 8\right) y = 84 - 4\sqrt{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\sqrt{5}x - 8y = 30 - 4\sqrt{7} \\ \left(3\sqrt{7} - 1\right) 8y = 4\left(21 - \sqrt{7}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6\sqrt{5}x - 8y = 30 - 4\sqrt{7} \\ y = \dfrac{21 - \sqrt{7}}{6\sqrt{7} - 2} = \dfrac{\left(21 - \sqrt{7}\right)\left(6\sqrt{7} + 2\right)}{248} = \dfrac{\sqrt{7}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5} \\ y = \dfrac{\sqrt{7}}{2}. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = \left(\sqrt{5}; \dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)$.

□

Bài 2. Tìm m để hệ phương trình sau vô nghiệm

$$\begin{cases} mx + 2y = -2 \\ 3x - y = 5 \end{cases}.$$

Lời giải.

Hệ phương trình $\begin{cases} mx + 2y = -2 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m}{3} = \dfrac{2}{-1} \\ \dfrac{m}{3} \neq \dfrac{-2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow m = -6$.

Vậy $m = -6$ là giá trị cần tìm. □

Bài 3. Một trường chuyên tuyển 70 học sinh vào hai lớp 10 Toán và lớp 10 Tin. Biết rằng nếu chuyển 5 học sinh của lớp 10 Toán sang lớp 10 Tin thì số học sinh của hai lớp bằng nhau. Tính số học sinh ban đầu của mỗi lớp.

Lời giải.

Gọi x (học sinh) là số học sinh ban đầu của lớp 10 Toán ($x \in \mathbb{N}^*, x < 70$).
Gọi y (học sinh) là số học sinh ban đầu của lớp 10 Tin ($y \in \mathbb{N}^*, y < 70$).
Tổng số học sinh của 2 lớp là 70 nên ta có $x + y = 70 \quad (1)$.
Số học sinh lớp 10 Toán lúc sau là $x - 5$ (học sinh).
Số học sinh lớp 10 Tin lúc sau là $y + 5$ (học sinh).
Theo đề bài ta có $x - 5 = y + 5$ hay $x - y = 10 \qquad (2)$.
Từ (1) và (2) ta có hệ

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ x - y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 70 \\ 2x = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \text{ (thỏa điều kiện)} \\ y = 30 \text{ (thỏa điều kiện)}. \end{cases}$$

Vậy số học sinh ban đầu của lớp 10 Toán là 40 học sinh, số học sinh ban đầu của lớp 10 Tin là 30 học sinh. □

Bài 4. Tìm $a, b \in \mathbb{R}$ để đường thẳng $y = ax + b$ (d) đi qua hai điểm $A(2; 2), B(-1; 5)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} A \in (d) \\ B \in (d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 2 \\ -a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = -3 \\ -a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4. \end{cases}$$

Vậy $a = -1, b = 4$ là giá trị cần tìm. □

2 Đề số 2 (Dành cho học sinh giỏi)

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} \dfrac{3}{2x - y} - \dfrac{6}{x + y} = -1 \\ \dfrac{1}{2x - y} - \dfrac{1}{x + y} = 0 \end{cases}$;   b) $\begin{cases} \dfrac{xy}{4x + 3y} = \dfrac{4}{11} \\ \dfrac{xy}{2x + y} = \dfrac{4}{5} \end{cases}$.

Lời giải.

1. Đặt $a = \dfrac{1}{2x - y}, b = \dfrac{1}{x + y}$ với $(2x \neq y, x \neq -y)$, hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} 3a - 6b = -1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b - 6b = -1 \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Khi đó ta có

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2x - y} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{x + y} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 6 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ (thỏa điều kiện)} \\ y = 1 \text{ (thỏa điều kiện)}. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (2; 1)$.

2. Nhận thấy $(x; y) = (0; 0)$ không là nghiệm của hệ phương trình.
Do đó $\begin{cases} \dfrac{xy}{4x+3y} = \dfrac{4}{11} \\ \dfrac{xy}{2x+y} = \dfrac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4x+3y}{xy} = \dfrac{11}{4} \\ \dfrac{2x+y}{xy} = \dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{y} + \dfrac{3}{x} = \dfrac{11}{4} \\ \dfrac{2}{y} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{4}. \end{cases}$
Đặt $a = \dfrac{1}{x}, b = \dfrac{1}{y}$, với $(x \neq 0, y \neq 0)$ hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} 3a + 4b = \dfrac{11}{4} \\ a + 2b = \dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 4b = \dfrac{11}{4} \\ 2a + 4b = \dfrac{10}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 4b = \dfrac{11}{4} \\ a = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \\ b = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Khi đó ta có

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \\ y = 2 \text{ (thỏa mãn điều kiện).} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (4; 2)$.

□

Bài 2. Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số m

$$\begin{cases} -2mx + y = 5 \\ mx + 3y = 1 \end{cases}.$$

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} -2mx + y = 5 \\ mx + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6mx + 3y = 15 \\ mx + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7mx = 14 \\ mx + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx = -2 \\ y = \dfrac{1 - mx}{3} \end{cases} (*)$

+ Với $m = 0$, $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 0x = -2 \\ y = \dfrac{1}{3} \end{cases}$ (vô nghiệm).

+ Với $m \neq 0$, $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-2}{m} \\ y = 1. \end{cases}$

Vậy với $m = 0$, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
Với $m \neq 0$, hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\dfrac{-2}{m}; 1\right)$. □

Bài 3. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn thì sau 12 giờ sẽ đầy bể. Nếu cho vòi thứ nhất chảy trong 4 giờ rồi khóa vòi thứ nhất lại, cho vòi thứ hai chảy trong 6 giờ nữa thì được $\dfrac{2}{5}$ bể. Hỏi nếu chảy riêng thì mỗi vòi chảy trong bao lâu sẽ đầy bể?

Lời giải.

Gọi x (giờ) là thời gian vòi thứ nhất chảy riêng thì đầy bể $(x \in \mathbb{R}, x > 12)$.
Khi đó số phần bể vòi thứ nhất chảy vào trong một giờ là $\dfrac{1}{x}$ (bể).

Gọi y (giờ) là thời gian vòi thứ hai chảy riêng thì đầy bể ($y \in \mathbb{R}, y > 12$).
Khi đó số phần bể vòi thứ hai chảy vào trong một giờ là $\dfrac{1}{y}$ (bể).
Số phần bể cả 2 vòi cùng chảy vào là $\dfrac{1}{12}$ (bể) nên ta có $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{12}$. (1)

Theo đề bài ta có $\dfrac{4}{x} + \dfrac{6}{y} = \dfrac{2}{5}$. (2)

Từ (1), (2) ta có hệ

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{12} \\ \dfrac{4}{x} + \dfrac{6}{y} = \dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{x} + \dfrac{4}{y} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{4}{x} + \dfrac{6}{y} = \dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{x} + \dfrac{4}{y} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{y} = \dfrac{1}{15} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{20} \\ \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{30} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \text{ (thỏa điều kiện)} \\ y = 30 \text{ (thỏa điều kiện).} \end{cases}$$

Vậy vòi thứ nhất chảy riêng một mình thì sau 20 giờ thì đầy bể. Vòi thứ hai chảy riêng một mình thì sau 30 giờ thì đầy bể. □

Bài 4. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $2x + 3y = 21$.

Lời giải.

Ta có $3y \vdots 3, 21 \vdots 3$ nên $2x \vdots 3 \Rightarrow x \vdots 3$.
Đặt $x = 3a$ ($a \in \mathbb{Z}$), ta có
$6a + 3y = 21 \Leftrightarrow 2a + y = 7 \Leftrightarrow y = -2a + 7$.
Nghiệm nguyên của phương trình là $(x = a, y = -2a + 7)$ với $a \in \mathbb{Z}$. □