MỤC LỤC

Chương II. HÀM SỐ BẬC NHẤT

§1. NHẮC LẠI VÀ BỔ SUNG CÁC KHÁI NIỆM VỀ HÀM SỐ

§2.HÀM SỐ BẬC NHẤT

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Khái niệm hàm số

Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho với mỗi giá trị của x, ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là *hàm số* của x, và x được gọi là *biến số*.

Khi y là hàm số của x thì ta có thể viết $y = f\left(x\right),\ y = g\left(x\right),...$

Khi hàm số được cho bằng công thức $y = f\left(x\right),$ ta hiểu rằng biến số x chỉ lấy những giá trị mà tại đó $f\left(x\right)$ xác định. Tập hợp các giá trị đó được gọi là tập xác định của hàm số, kí hiệu là D.

Giá trị của $f\left(x\right)$ tại x_0 kí hiệu $f\left(x_0\right)$ hay $y_0 = f\left(x_0\right).$ Khi x thay đổi mà y luôn nhận một giá trị không đổi thì hàm số y được gọi là hàm hằng.

2. Đồ thị hàm số

Tập hợp "G" tất cả các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng $\left(x;\ f\left(x\right)\right)$ trên mặt phẳng tọa độ goi là *đồ thị của hàm số* $y = f\left(x\right).$

$M\left(x_0;y_0\right) \in$ "G" hay "G" đi qua điểm $M\left(x_0;y_0\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \in D \\ y_0 = f\left(x_0\right) \end{cases}$

3. Hàm số đồng biến, nghịch biến

Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định trên D trong đó D là một khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng với mọi $x_1, x_2 \in D.$

- Nếu $x_1 < x_2$ mà $f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right)$ thì hàm số $y = f\left(x\right)$ *đồng biến* trên D.
- Nếu $x_1 < x_2$ mà $f\left(x_1\right) > f\left(x_2\right)$ thì hàm số $y = f\left(x\right)$ *nghịch biến* trên D.

4. Hàm số bậc nhất

Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức $y = ax + b,$ trong đó a,b là các số cho trước và $a \neq 0.$

Khi $b = 0,$ hàm số có dạng $y = ax$ (đã học ở lớp 7).

Hàm số bậc nhất $y = ax + b\ \left(a \neq 0\right)$ xác định với mọi x thuộc $\mathbb{R}.$ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 0,$ hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $a < 0$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. TÌM TẬP XÁC ĐỊNH (TXĐ) CỦA HÀM SỐ

Phương pháp giải

Hàm số $f\left(x\right)$ chứa căn bậc hai $\sqrt{A\left(x\right)},$ điều kiện: $A\left(x\right) \geq 0.$

Hàm số $f(x)$ chứa biến số ở mẫu $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ (hoặc $A(x):\mathrm{B}(x)$), điều kiện: $B(x)\neq 0$.

Ví dụ 1. Với những giá trị nào của x thì hàm số sau đây xác định?

a) $y=f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$ b) $y=g(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}$

Giải

a) $f(x)$ xác định khi: $x^2-4\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq 4 \Leftrightarrow x\neq \pm 2$.

b) $g(x)$ xác định khi: $\begin{cases} x-3\geq 0 \\ 5-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 3 \\ x\leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 3\leq x\leq 5$

Ví dụ 2. Tìm tập xác định D của hàm số $y=h(x)=\dfrac{\sqrt{-x}}{1-x^2}:\sqrt{x}$

Giải

$$h(x) \text{ xác định khi: } \begin{cases} -x\geq 0 \\ 1-x^2\neq 0 \\ x\geq 0 \\ \sqrt{x}\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 0 \\ x\neq \pm 1 \\ x\geq 0 \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing$$

Vậy tập xác định của hàm số $D=\varnothing$.

(Tức là không có giá trị nào của x để hàm số xác định).

Ví dụ 3. Tìm tập xác định D của hàm số $y=f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

Giải

$f(x)$ xác định khi: $x^2+1\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq -1 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$.

Vậy tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ví dụ 4. Tìm tập xác định D của hàm số $y=f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x^2}$.

Giải

$f(x)$ xác định khi: $\begin{cases} x-1\geq 0 \\ 1-x^2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ -1\leq x\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$.

Vậy tập xác định $D=\{1\}$.

Chú ý: Tập xác định D của hàm số có thể có một phần tử, một vài phần tử, vô số phần tử hoặc không có phần tử nào.

Dạng 2. TÍNH GIÁ TRỊ CỦA HÀM SỐ KHI BIẾT GIÁ TRỊ CỦA BIẾN SÔ.

TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIẾN SỐ KHI BIẾT GIÁ TRỊ CỦA HÀM SỐ

Phương pháp giải

Tìm tập xác định D của hàm số $y = f(x)$.

- Thế giá trị $x = x_0 \in D$ vào biểu thức của hàm số rồi tính giá trị biểu thức (đôi khi ta rút gọn biểu thức, biến đổi x_0 rồi mới thay vào để tính toán).

- Thế giá trị $y = y_0$ ta được $y_0 = f(x)$.

Giải phương trình $f(x) = y_0$ để tìm giá trị biến số x (chú ý: chọn $x \in D$).

Ví dụ 1. Tính giá trị của hàm số $y = f(x) = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}$ tại $x = 1; x = -1$.

Giải

TXĐ: $\mathbb{R}$

Ta có: $f(1) = -\frac{3}{4}.1^2 - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = -1;$

$$f(-1) = -\frac{3}{4}.(-1)^2 - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}.1 - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{4}{4} = -1.$$

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$. Khi đó f(-3) bằng bao nhiêu ?

Giải

Điều kiện $x \neq -3$.

Vì $x = -3$ không thỏa mãn điều kiện nên không tồn tại $f(-3)$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = f(x) = mx + m - 1$, biết $f(2) = 8$. Tính $f(3)$.

Giải

TXĐ: $\mathbb{R}$

Ta có $f(2) = 8 \Leftrightarrow m.2 + m - 1 = 8 \Leftrightarrow 3m = 9 \Leftrightarrow m = 3$

$\Rightarrow f(x) = 3x + 2 \Rightarrow f(3) = 3.3 + 2 = 11.$

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = f(x) = (3-2\sqrt{2})x - 1$. Tìm x, biết $f(x) = 0$.

Giải

TXĐ: $\mathbb{R}$

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow (3-2\sqrt{2})x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (3-2\sqrt{2})x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{(3-2\sqrt{2})} \Leftrightarrow x = 3+2\sqrt{2}.$$

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$.

a) Tìm x, biết $f(x) = 1$;

b) Tìm x sao cho $f(x) = 0,5$;

c) Tìm m để có giá trị x thõa mãn $f(x) = m$.

Giải

Điều kiện: $0 \le x \le 1$.

a) Ta có: $f(x) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{1-x} = 1 \Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{1-x})^2 = 1^2$

$$\Leftrightarrow x + 2\sqrt{x}\sqrt{1-x} + 1 - x = 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x}\sqrt{1-x} = 0$$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 0$ hoặc $\sqrt{1-x} = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$ (thỏa mãn điều kiện).

b) Ta có: $f(x) = 0,5 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{1-x} = 0,5 \Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{1-x})^2 = 0,5^2$.

$$\Leftrightarrow x + 2\sqrt{x}\sqrt{1-x} + 1 - x = 0,25$$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x}\sqrt{1-x} = -0,75$ (không xảy ra vì $2\sqrt{x}\sqrt{1-x} \ge 0$).

Do đó không có giá trị nào của x để $f(x) = 0,5$.

c) Ta có: $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x} \Rightarrow f^2(x) = (\sqrt{x} + \sqrt{1-x})^2$

$\Leftrightarrow f^2(x) = 2\sqrt{x}\sqrt{1-x} + 1 \ge 1$ (vì $2\sqrt{x}\sqrt{1-x} \ge 0$).

Suy ra $f(x) \ge 1$ (dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$ hoặc $x = 1$).

Mặt khác: $\sqrt{x}\sqrt{1-x} \le \dfrac{x+1-x}{2} = \dfrac{1}{2}$ (dấu bằng xảy ra khi $x = \dfrac{1}{2}$).

Do đó $m^2 = f^2(x) \le 2 \Rightarrow m \le \sqrt{2}.$

Do đó chỉ khi $1 \le m \le \sqrt{2}$ thì có giá trị của x thỏa mãn $f(x) = m.$

Chú ý: Ta có thể chứng minh $f(x) \ge 1$ bằng một số cách khác như sau:

Cách 1: Sử dụng bất đẳng thức $\sqrt{A} + \sqrt{B} \ge \sqrt{A+B}$ với $A, B \ge 0$ (dấu "=" xảy ra khi A = 0 hoặc B = 0).

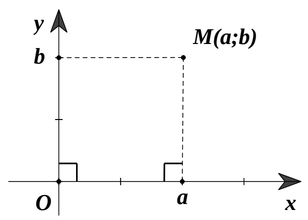
Cách 2: Sử dụng bất đẳng thức $\sqrt{A} \ge A$ với mọi A thỏa mãn điều kiện $0 \le A \le 1.$

Dạng 3. BIỂU DIỄN ĐIỂM TRÊN MẶT PHẲNG TỌA ĐỘ.

XÁC ĐỊNH KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐIỂM TRÊN MẶT PHẲNG

Phương pháp giải

- Để biểu diễn điểm $M(a;b)$ trên mặt phẳng tọa độ ta làm như sau:

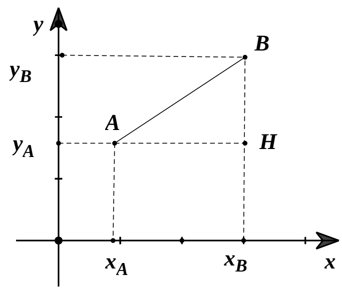


Kẻ đường thẳng vuông góc với trục hoành tại điểm a.

Kẻ đường thẳng vuông góc với trục tung tại điểm b.

Hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm đó là điểm M.

- Xác định khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$

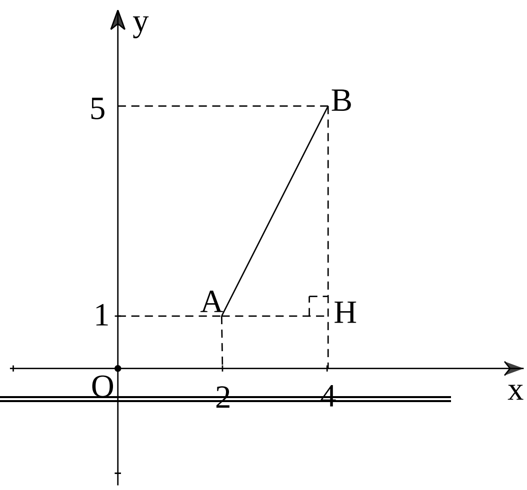


Ta có: $AH = |x_A - x_B|; BH = |y_A - y_B|$

Ta có: $AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AB = \sqrt{AH^2 + BH^2}$

hay: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. (*)

Ví dụ 1. Biểu diễn hai điểm $A(2;1)$ và $B(4;5)$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ. Tính khoảng cách giữa hai điểm đó.



Giải

Biểu diễn các điểm A, B như hình vẽ 1.

Trong ΔABH, ta có: $\widehat{H} = 90°; AH = 4-2 = 2; BH = 5-1 = 4.$

Áp dụng định lí Py-ta-go vào ΔABH vuông tại H, ta có:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = 2^2 + 4^2 = 20$$
$$\Rightarrow AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Chú ý: Sau này trong thực hành ta sẽ vận dụng ngay công thức (*).

Ta có $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(4-2)^2 + (5-1)^2} = 2\sqrt{5}.$ *Hình 1*

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có A(1;1); B(3;3) và C(5;1).

a) Tính chu vi tam giác ABC.

b) Chứng minh rằng tam giác ABC vuông cân.

Giải

a) Ta có: $AB = \sqrt{(3-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$

$$AC = \sqrt{(5-1)^2 + (1-1)^2} = 4; BC = \sqrt{(5-3)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}.$$

Vậy chu vi tam giác ABC là:

$$AB + BC + AC = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 4 = 4\left(\sqrt{2} + 1\right)$$

b) Ta có:

- $AB = BC = 2\sqrt{2}$, suy ra ΔABC cân tại B. (1)
- $\begin{cases} AB^2 = BC^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8 \\ AC^2 = 4^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow AB^2 + BC^2 = AC^2$

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại B. (2)

Từ (1) và (2) suy ra ΔABC vuông cân tại B.

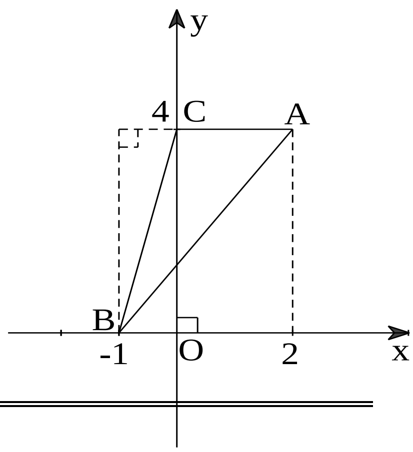
Ví dụ 3. Cho các điểm A(2;4), B(-1;0) và C(0;4).

a) Biểu diễn các điểm A, B, C trên mặt phẳng tọa độ.

b) Tính chu vi và diện tích của tam giác ABC.

Giải

a) Biểu diễn các điểm A(2;4), B(-1;0) và C(0;4) như hình 2.



Hình 2

b) Ta thấy A, B, C không thẳng hàng nên A, B, C là ba đỉnh của một tam giác. Áp dụng công thức:

$MN = \sqrt{\left(x_N - x_M\right)^2 + \left(y_N - y_M\right)^2}$, ta tính được $AB = 5; AC = 2; BC = \sqrt{17}$.

Chu vi tam giác ABC là: $5 + 2 + \sqrt{17} = 7 + \sqrt{17}$ (đvd).

Diện tích tam giác ABC là: $S_{ABC} = \frac{1}{2} BH.CA = \frac{1}{2}.4.2 = 4$ (đvdt).

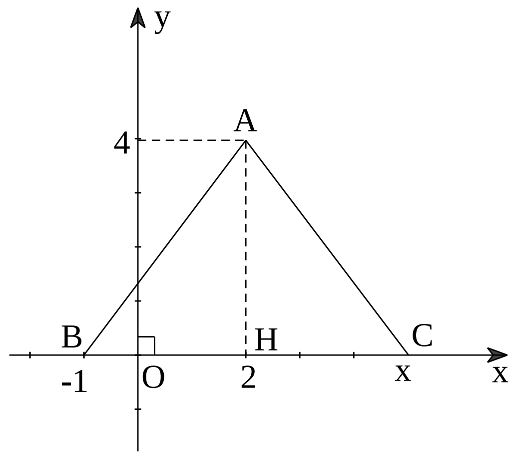
Ví dụ 4. Cho hai điểm A(2;4) và B(-1;0) trên hệ trục tọa độ Oxy.

a) Biểu diễn các điểm A, B trên mặt phẳng tọa độ.

b) Tìm điểm C trên trục hoành sao cho ΔABC cân tại A.

Giải

a) Biểu diễn các điểm A(2;4), B(-1;0) như hình 3.



Hình 3

b) Vì C nằm trên trục hoành Ox nên tung độ của điểm C bằng 0, do đó C(x;0) với x$\neq$1.

Áp dụng công thức: $MN = \sqrt{\left(x_N - x_M\right)^2 + \left(y_N - y_M\right)^2}$, ta tính được $AB = 5; AC = \sqrt{(x-2)^2 + (0-4)^2}$.

Ta có ΔABC cân tại A $\Leftrightarrow AB = AC$.

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (0-4)^2} = 5 \Leftrightarrow (x-2)^2 + 16 = 25 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 9$

$\Leftrightarrow x = 5$ hoặc $x = -1$ (loại vì điều kiện $x \neq -1$).

Vậy C(5;0) thì ΔABC cân tại A.

Chú ý:

- Ta có thể giải cách khác như sau:

  ΔABC cân tại A $\Leftrightarrow HB = HC \Leftrightarrow HC = 3$(vì HB = 3)$\Leftrightarrow x - 2 = 3 \Leftrightarrow x = 5$.

  Do đó, nếu kết hợp với kiến thức hình học thì chúng ta có thể giải bài toán đơn giản hơn, nhanh hơn.

- Ta có thể thay đổi yêu cầu bài toán thành "Tìm điểm C trên trục hoành sao cho ΔABC cân". Với yêu cầu mới ta phải giải bài toán trong ba trường hợp:

- Trường hợp 1: ΔABC cân tại A.

- Trường hợp 2: ΔABC cân tại B.
- Trường hợp 3: ΔABC cân tại C.

Dạng 4. ĐIỂM THUỘC ĐỒ THỊ. ĐIỂM KHÔNG THUỘC ĐỒ THÌ CỦA HÀM SỐ

Phương pháp giải

Cho hàm số $y = f(x)$ có miền xác định D và có đồ thị G, khi đó: • $M\left(x_0; y_0\right)$ thuộc đồ thị G khi và chỉ khi $\begin{cases} x_0 \in D \\ y_0 \in f(x_0) \end{cases}$ • $M\left(x_0; y_0\right)$ không thuộc đồ thị G khi và chỉ khi $y_0 \neq f(x_0)$ hoặc $x_0 \notin D.$

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{x}$. Trong các điểm A(9;3), B(4; -2), M(-1;1) và $N\left(4+2\sqrt{3};\sqrt{3}-1\right)$ điểm nào không thuộc và điểm nào thuộc đồ thị (G) của hàm số đã cho ?

Giải

Ta có: $M \notin (G)$ vì khi $x = -1$ thì hàm số không xác định

$B \notin (G)$, vì $\sqrt{4} = 2 \neq -2$

$A(9;3) \in (G)$, vì $f(9) = \sqrt{9} = 3$

$N\left(4+2\sqrt{3};\sqrt{3}-1\right) \notin (G)$ vì:

$$f(4+2\sqrt{3}) = \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2} = \sqrt{3}+1 \neq \sqrt{3}-1.$$

Ví dụ 2. Điểm $M(-1;1)$ thuộc đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây ?

(A) $y = x^2$; (B) $y = x^4$; (C) $y = 3x+2$; (D) $y = -x^3$.

Giải

Loại (A), (B) vì tung độ của M âm.

Loại (D), vì hoành độ và tung độ của M cùng dấu.

Chọn (C).

Ví dụ 3. Khi m thay đổi, tìm tập hợp các điểm M có tọa độ như sau:

a) $M(m;3)$; b) $M(2;m)$.

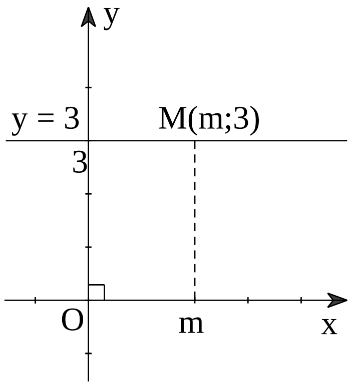
Giải

a) Ta có f(m) = 3, khi m thay đổi f(m) luôn nhận một giá trị không đổi. Hàm số y = f(m) = 3 là một hàm hằng.

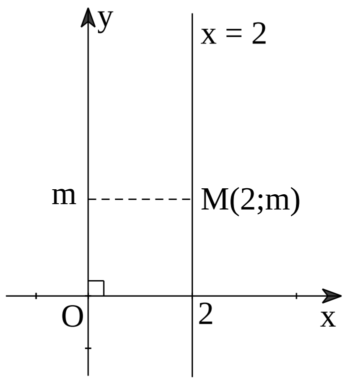
Đồ thị của hàm số y = 3 là đường thẳng song song với trục hoành và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3 (hình 4).

Tập hợp các điểm M(m;3) là đường thẳng song song với trục hoành và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3 (hình 4).

b) Tập hợp các điểm M(2; m) là đường thẳng song song với trục tung và cắt trục tung tại điểm có hoành độ bằng 2 (hình 5)



Hình 4



Hình 5

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = f(x) = (m+1)x - 2m.$

a) Tìm m để đồ thị của hàm số đã cho đi qua điểm A(1 ; 1).

b) Chứng minh rằng đồ thị của hàm số đã cho luôn đi qua một điểm cố định với mọi m.

Giải

a) $A(1;1) \in d : y = (m+1)x - 2m \Leftrightarrow 1 = (m+1).1 - 2m \Leftrightarrow m = 0.$

b) $M(x_0; y_0) \in d : y = (m+1)x - 2m \Leftrightarrow y_0 = (m+1)x_0 - 2m$

$$\Leftrightarrow m(x_0 - 2) + (x_0 - y_0) = 0. \qquad (1)$$

d đi qua M với mọi m khi (1) đúng với mọi m, tức là:

$$\begin{cases} x_0 - 2 = 0 \\ x_0 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 2 \end{cases}.$$

Vậy d luôn đi qua điểm (2; 2) cố định với mọi m.

Dạng 5. XÁC ĐỊNH HÀM SỐ BẬC NHẤT

Phương pháp giải

Hàm số bậc nhất là hàm số co dạng $y = ax + b,$ trong đó a và b là các số cho trước và $a \neq 0.$

Ví dụ 1. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc nhất ?

a) $y = 1 - 3x;$

b) $y = 2x^2 + x - 5;$

c) $y = x^2 + x\left(\sqrt{2} - x\right) + 3;$

d) $y = \left(\sqrt{3} - 1\right)^2 x + 1.$

Giải

a) Hàm số $y = 1 - 3x$ hay $y = -3x + 1$ có dạng $y = ax + b$, trong đó $a = -3 \neq 0,$ nên $y = -3x + 1$ là hàm số bậc nhất.

b) Hàm số $y = 2x^2 + x - 5$ không phải là hàm bậc nhất vì sau khi thu gọn không có dạng $y = ax + b$.

c) Hàm số $y = x^2 + x\left(\sqrt{2} - x\right) + 3 = x^2 + \sqrt{2}x - x^2 + 3 = \sqrt{2}x + 3$ là hàm số bậc nhất vì hàm số có dạng $y = ax + b$, trong đó $a = \sqrt{2} \neq 0.$

d) Hàm số $y = \left(\sqrt{3} - 1\right)^2 x + 1$ là hàm số bậc nhất vì hàm số có dạng $y = ax + b$, trong đó $a = \left(\sqrt{3} - 1\right)^2 \neq 0.$

Ví dụ 2. Cho ba hàm số $f(x) = x^2 + 3; g(x) = x^2 - x + 1$ và $h(x) = 2x^2 + 3x - 1.$

Xét các khẳng định:

(I) $f(x) - g(x)$ là hàm số bậc nhất;

(II) $h(x) - g(x)$ là hàm số bậc nhất;

(III) $f(x) + g(x) - h(x)$ là hàm số bậc nhất.

Trong các khẳng định trên, khẳng định đúng là:

(A) Chỉ (I)

(B) Chỉ (II)

(C) Chỉ (I) và (II)

(D) Chỉ (I) và (III).

Giải

Ta thực hiện phép tính cộng, trừ các đa thức được kết quả:

$f(x) - g(x) = x + 2$, là hàm số bậc nhất;

$h(x)-g(x)=x^2+4x-2$ không là hàm số bậc nhất;

$f(x)+g(x)-h(x)=-4x+5$ là hàm số bậc nhất.

Do đó, chọn (D).

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=f(x)=(1-2m)x+m^2+2.$

Tìm m để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

Giải

Hàm số $y=f(x)=(1-2m)x+m^2$ là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi:

$1-2m\neq 0\Leftrightarrow m\neq \frac{1}{2}.$

Ví dụ 4. Cho hàm số $y=f(x)=(m^2-m)x^2+mx+2.$

Tìm m để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

Giải

Hàm số $y=f(x)=(m^2-m)x^2+mx+2$ là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m^2-m=0 \\ m\neq 0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m(m-1)=0 \\ m\neq 0 \end{cases}\Leftrightarrow m-1=0\Leftrightarrow m=1.$$

Khi $m=1$, ta có hàm số $y=x+2$ là hàm số bậc nhất.

Dạng 6. XÁC ĐỊNH TÍNH ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

Phương pháp giải

- Vận dụng định nghĩa: Với mọi x_1, x_2 thuộc miền xác định D là một khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng:

  Nếu $x_1>x_2$ mà $f(x_1)>f(x_2)$ thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên D.

  Nếu $x_1>x_2$ mà $f(x_1)<f(x_2)$ thì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên D.

- Trong thực hành giải toán ta làm như sau: Với mọi $x_1, x_2\in D, x_1\neq x_2$

  Nếu $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên D.

Nếu $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$ thì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên D.

- Hàm số $y=f(x)=\text{a}x+b(a\neq 0)$

Nếu $a>0$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

Nếu $a>0$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 1. Chứng minh hàm số $y=f(x)=\sqrt{x+3}$ đồng biến trên tập xác định.

Giải

Hàm số xác định khi $x\geq -3$. Lấy x_1,x_2 bất kỳ thõa mản $x_1,x_2\geq -3, x_1\neq x_2$, ta có:

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\sqrt{x_1+3}-\sqrt{x_2+3}}{x_1-x_2}=\frac{(x_1+3)-(x_2+3)}{(x_1-x_2)\left(\sqrt{x_1+3}+\sqrt{x_2+3}\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{x_1+3}+\sqrt{x_2+3}\right)}>0$$

Do đó hàm số $y=f(x)=\sqrt{x+3}$ đồng biến trên tập xác định.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=f(x)=m-2x$ (m là hằng số). Xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số $y=f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Giải

Cách 1. Tập xác định: $\mathbb{R}$. Lấy x_1,x_2 thuộc $\mathbb{R}$ sao cho $x_1<x_2$, ta có:

$f(x_1)-f(x_2)=(\text{m}-2x_1)-(m-2x_2)=m-2x_1-m+2x_2=2(x_2-x_1)>0.$

Do đó $f(x_1)>f(x_2)$, suy ra hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Cách 2. $y=f(x)=m-2x=-2x+m$ là hàm số bậc nhất có hệ số $a=-2<0$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 3. Tìm m để hàm số $y=(m^2-2)x+1$ (m là tham số) đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Giải

Hàm số $y=(m^2-2)x+1$ là hàm số bậc nhất khi $m^2\neq 2$ với hệ số $a=m^2-2$.

Do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow m^2-2>0\Leftrightarrow m<-\sqrt{2}$ hoặc $m>\sqrt{2}$.

Chú ý: Khi $m=-\sqrt{2}$ hoặc $m=\sqrt{2}$ thì $y=0x+1=1$ nên hàm số là hàm hằng. Khi đó đồ thị của hàm số là đường thẳng song song với trục hoành và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1.

Ví dụ 4. Cho hai hàm số $f(x) = mx + 2012$ và $g(x) = (m^2 + 1)x - 2011$ (m là tham số).

Xét tính **Đúng**, **Sai** của các khẳng định sau:

(A) $f(x) + g(x)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$;

(B) $g(x) - f(x)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$;

(C) $f(x) - g(x)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Giải

Ta thực hiện phép tính cộng, trừ các đa thức, được kết quả:

$f(x) + g(x) = (m^2 + m + 1)x + 1$ là hàm số bậc nhất, với hệ số

$a = m^2 + m + 1 = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ với mọi m nên khẳng định (A) đúng.

$g(x) - f(x) = (m^2 - m + 1)x - 4023$ là hàm số bậc nhất, với hệ số

$a = m^2 - m + 1 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ với mọi m nên khẳng định (B) đúng.

$f(x) - g(x) = -(m^2 - m + 1)x + 4023$ là hàm số bậc nhất, với hệ số

$a = -(m^2 - m + 1) = -\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} < 0$ với mọi m nên khẳng định (C) đúng.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho hai hàm số $y = f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{3}$ và $y = g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$

a) Tìm tập xác định của các hàm số đã cho.

b) Tính $f(2), f\left(\frac{1}{2}\right), g(0), g(1), g\left(\frac{1}{2}\right)$.

2. Cho các điểm A(2;3), B(-2;0) và C(4;3).

a) Biểu diễn các điểm A, B, C trên mặt phẳng tọa độ.

b) Tính chu vi và diện tích của tam giác ABC.

c) Tìm điểm M trên trục hoành sao cho tam giác ABM cân tại A.

d) Tìm điểm N trên trục tung sao cho tam giác ABN cân tại B.

3. Cho hàm số $y = f(x) = -mx + m - 3$. Biết $f(-2) = 6$. Tính $f(-3)$.

4. Cho hàm số $y = f(x) = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)x + \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Tìm x sao cho $f(x) = \sqrt{3}$.

5. Cho hàm số $y = f(x) = -mx + 4$.

a) Tìm m để đồ thị của hàm số đã cho đi qua điểm $A(-1;1)$.

b) Chứng minh rằng đồ thị của hàm số đã cho luôn đi qua một điểm cố định với mọi m.

6. Với các giá trị nào của m thì hàm số sau là hàm số bậc nhất ?

a) $y = (4m^2 - 1)x$

b) $y = \sqrt{5 - m}(x - 2)$

c) $y = m^2x^2 + m(x + 2 - 4x^2) + 1 - 2x$.

7. Xác định tính đồng biến, nghịch biến của các hàm số sau:

a) $y = f(x) = (1 - \sqrt{2})x + 1$, với $x \in \mathbb{R}$

b) $y = f(x) = \sqrt{x - 2}$, với $x \geq 2$

c) $y = f(x) = x^2 + 2$, với $x < 0$.

8. Cho hàm số $y = f(x) = (1 - \sqrt{3})x - 1$ và $f(m+1), f(m + \sqrt{2})$ là hai giá trị tương ứng của hàm số tại $x = m + 1, x = m + \sqrt{2}$. Khi đó:

(A) $f(m+1) > f(m + \sqrt{2})$

(B) $f(m+1) < f(m+2)$

(C) $f(m+1) = f(m+2)$

(B) Không thể so sánh được vì phụ thuộc vào giá trị của m.

9. Chứng minh rằng không tồn tại đa thức $f(x)$ bậc ba với hệ số nguyên sao cho $f(7) = 2010$ và $f(11) = 2012$.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. a) Hàm số $y = f(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{3}$ xác định khi: $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Hàm số $y = g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ xác định khi:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1.$$

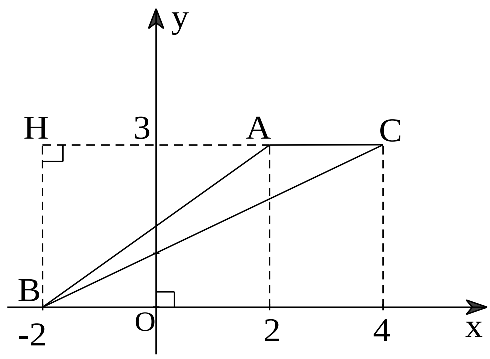
b) $f(2) = 0; f\left(\frac{1}{2}\right)$ không xác định;

$$g(0) = 1; \text{g}(1) = 1; \text{g}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

2. a) Biểu diễn các điểm A(2;3), B(-2;0) và C(4;3) như hình 6.

b) Ta thấy A, B, C không thẳng hàng nên A, B, C là ba đỉnh của một tam giác. Áp dụng công thức: $MN = \sqrt{\left(x_N - x_M\right)^2 + \left(y_N - y_M\right)^2}$, ta tính được

$AB = 5; AC = 2; BC = 3\sqrt{5}.$



Hình 6

Chu vi tam giác ABC là:

$5 + 2 + 3\sqrt{5} = 7 + 3\sqrt{5}.$

Diện tích tam giác ABC là:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BH.AH = \frac{1}{2}.3.2 = 3 \text{ (đvdt)}$$

c) M(6;0).

d) $N(0;\sqrt{21})$ hoặc $N(0;-\sqrt{21})$.

3. $f(-2) = 6 \Leftrightarrow -m(-2) + m - 3 = 6 \Leftrightarrow 3m = 9 \Leftrightarrow m = 3$

$\Rightarrow f(x) = -3x \Rightarrow f(-3) = 9.$

4. $f(x) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)x + \sqrt{2} + \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = -\left(\sqrt{6} + 2\right).$

5. a) $A(-1;-1) \in d : y = -mx + 4 \Leftrightarrow -1 = -m(-1) + 4 \Leftrightarrow m = -5.$

b) $M(x_0; y_0) \in d : y = -mx + 4 \Leftrightarrow y_0 = -mx_0 + 4 \Leftrightarrow mx_0 + y_0 - 4 = 0.$ (1)

d đi qua M với mọi m khi (1) đúng với mọi m, tức là: $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 4 \end{cases}$

Vậy d luôn đi qua điểm M(0;4) cố định với m.

6. a) $m \neq \pm\frac{1}{2}$ b) $m < 5$ c) m = 0 hoặc m = 4.

7. a) Với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 > x_2$, ta có:

$f(x_1) - f(x_2) = (1-\sqrt{2})(x_1 - x_2) < 0$, vì $1-\sqrt{2} < 0, x_1 - x_2 > 0.$

Do đó $f(x)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

b) Với mọi $x_1, x_2 \geq 2, x_1 \neq x_2$, ta có:

$$\frac{f(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\sqrt{x_1 - 2} - \sqrt{x_2 - 2}}{x_1 - x_2} = \frac{\left(\sqrt{x_1 - 2} - \sqrt{x_2 - 2}\right)\left(\sqrt{x_1 - 2} + \sqrt{x_2 - 2}\right)}{(x_1 - x_2)\left(\sqrt{x_1 - 2} + \sqrt{x_2 - 2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x_1 - 2} + \sqrt{x_2 - 2}} > 0.$$

Do đó $f(x)$ là hàm số đồng biến với mọi $x \geq 2$.

c) Với mọi $x_1, x_2 < 0, x_1 > x_2$, ta xét:

$f(x_1) - f(x_2) = (x_1^2 + 2) - (x_2^2 + 2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) < 0$

Vì $x_1 - x_2 > 0, x_1 + x_2 < 0$ với mọi $x_1, x_2 < 0, x_1 > x_2$, do đó hàm số nghịch biến với mọi $x < 0$.

8. Hàm số $y = f(x) = (1-\sqrt{3})x - 1$ là hàm số nghịch biến vì $a = 1-\sqrt{3} < 0$.

Ta có: $f(m+1) > f(m+\sqrt{2})$ vì $m+1 < m+\sqrt{2}$. Chọn (A).

9. Giả sử có đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d : a,b,c,d \in \mathbb{Z}, a \neq 0$ thỏa mãn $f(7) = 2010, f(1) = 2012$. Ta có:

$$f(11) - f(7) = (a.11^3 + b.11^2 + c.11 + d) - (a.7^3 + b.7^2 + c.7 + d)$$

$$= a.\underbrace{(11^3 - 7^3)}_{\vdots 4} + b.\underbrace{(11^2 - 7^2)}_{\vdots 4} + c.\underbrace{(11 - 7^2)}_{\vdots 4}$$

Từ đó suy ra: $\left[f(11) - f(7)\right] \vdots 4.$ (*)

Mặt khác $f(11) = 2012, f(7) = 2010$ nên $f(11) - f(7) = 2.$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $2 \vdots 4$ (vô lý), suy ra điều giả sử là sai (đpcm).

§3. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = ax + b (a \neq 0)$

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Đồ thị của hàm số $y = ax + b(a \neq 0)$

Đồ thị của hàm số $y = ax + b(a \neq 0)$ là một đường thẳng (kí hiệu là (d)):

+ Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng b hay (d) luôn đi qua điểm B(0;b)

+ Song song với đường thẳng $y = ax$ nếu $b \neq 0$; trùng với đường thẳng $y = ax$ nếu b = 0.

Chú ý. • b được gọi là tung độ gốc của đường thẳng.

• Đồ thị của hàm số $y = ax + b(a \neq 0)$ còn được gọi là đường thẳng $y = ax + b$ hoặc đường thẳng $ax - y + b = 0$.

2. Cách vẽ đồ thị của hàm số $y = ax + b(a \neq 0)$

Trường hợp 1: Khi b = 0 thì $y = ax$. Đồ thị của hàm số $y = ax$ là đường thẳng đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ và điểm $A(1;a)$.

Trường hợp 2: $y = ax + b$ với $a \neq 0$ và $b \neq 0$

Cách 1. + Xác định hai điểm bất kỳ của đồ thị

Chẳng hạn cho $x = 1$ thì $y = a.1 + b = a + b$, ta được $B(1; a + b)$; cho $x = 2$ thì $y = a.2 + b$ ta được điểm $C(2; 2a + b)$.

+ Vẽ đường thẳng BC ta được đồ thị hàm số.

Cách 2. + Xác định giao điểm của đồ thị với hai trục tọa độ:

- Cho $x = 0 \Rightarrow y = a.0 + b = b \Rightarrow M(0;b)$ thuộc trục tung.
- Cho $y = 0 \Rightarrow 0 = a.x + b \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{a} \Rightarrow N(-\dfrac{b}{a};0)$ thuộc trục hoành

+ Vẽ đường thẳng MN ta được đồ thị hàm số.

Chú ý. Khi $b = 0$ thì $y = ax$; đồ thị của hàm số $y = ax$ đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$.

Khi $b \neq 0$ thì đồ thị của hàm số $y = ax + b$ đi qua điểm B(0;b).

Khi $a > 0$ thì đồ thị của hàm số $y = ax + b$ là đường thẳng có chiều đi lên từ trái sang phải (hàm số đồng biến).

Khi $a < 0$ thì đồ thị của hàm số $y = ax + b$ là đường thẳng có chiều đi xuống từ trái sang phải (hàm số nghịch biến).

Đường thẳng $y = x$ là đường phân giác của góc phần tư thứ (I) và (III).

Đường thẳng $y = -x$ là đường phân giác của góc phần tư thứ (II) và (IV).

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. ĐIỂM THUỘC ĐƯỜNG THẲNG.

ĐIỂM KHÔNG THUỘC ĐƯỜNG THẲNG

Phương pháp giải

Cho điểm $M(x_0;y_0)$ và đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Khi đó:

$$M \in (d) \Leftrightarrow y_0 = ax_0 + b$$
$$M \notin (d) \Leftrightarrow y_0 \neq ax_0 + b$$

Ví dụ 1. Cho đường thẳng (d): $y = -3x + 1$. Trong các điểm $M(-1;2), N(0;1), P\left(\frac{1}{3};0\right)$. Hãy xác định các điểm thuộc và không thuộc đường thẳng (d).

Giải

Ta có: $M(-1;2) \notin (d)$ vì khi x = -1 thì -3(-1) + 1 = 3 + 1 = 4 $\neq$ 2;

$N(0;1) \in (d)$, vì khi x = 0 thì -3.0 +1 = 0 + 1 = 1;

$P\left(\frac{1}{3};0\right) \in (d)$, vì khi $x = \frac{1}{3}$ thì $-3.\frac{1}{3} + 1 = -1 + 1 = 0.$

Ví dụ 2. Điểm $M(\sqrt{2};1)$ thuộc đường thẳng nào trong các đường thẳng dưới đây ?

(A) $y = x + 1 - \sqrt{2}$ (B) $x + y - \sqrt{2} + 1 = 0$

(C) $y = \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2}$ (D) $x + y - \sqrt{2} = 0$

Giải

Kí hiệu các đường thẳng ở các trường hợp (A) , (B) , (C) và (D) lần lượt là

$(d_1): y = x + 1 - \sqrt{2}$

$(d_2): x + y - \sqrt{2} + 1 = 0$

$(d_3): y = \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2}$

$(d_4): x+y-\sqrt{2}=0$

Ta có: $M(\sqrt{2};1)\in(d_1)$, vì khi $x=\sqrt{2}$ thì $\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=1$

$M(\sqrt{2};1)\notin(d_2)$, vì khi $x=\sqrt{2}$ thì $-\sqrt{2}+\sqrt{2-1}=-1\neq 1$

$M(\sqrt{2};1)\notin(d_3)$, vì khi $x=\sqrt{2}$ thì $\sqrt{2}.\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=3-\sqrt{2}\neq 1$

$M(\sqrt{2};1)\notin(d_4)$, vì khi $x=\sqrt{2}$ thì $-\sqrt{2}+\sqrt{2}=0\neq 1.$

Chọn (A).

Ví dụ 3. Cho đường thẳng (d): $y=-2x+3.$ Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(-m;-3).$

Giải

Đường thẳng (d): $y=-2x+3$ đi qua điểm $A(-m;-3)$ khi:

$-3=-2.(-\mathrm{m})+3 \Leftrightarrow 2m=-6 \Leftrightarrow m=-3.$

Vậy đường thẳng (d): $y=-2x+3$ đi qua điểm $A(-m;-3)$ khi $m=-3.$

Ví dụ 4. Cho đường thẳng (d): $y=(m+2)x+3m-1.$ Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $M(-2;3).$

Giải

$M(-2;3)\in(d): y=(m+2)x+3m-1$ khi:

$3=(m+2)(-2)+3m-1 \Leftrightarrow 3=-2m-4+3m-1 \Leftrightarrow m=8.$

Vậy đường thẳng (d): $y=(m+2)x+3m-1$ đi qua điểm $M(-2;3)$ khi $m=8.$

Ví dụ 5. Chứng minh rằng đường thẳng $(m-2)x+y+4m-3=0$ luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của m.

Giải

Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm thuộc (d), ta có:

$$\left(m+2\right)x_0+y_0+4m-3=0 \Leftrightarrow m\left(x_0+4\right)+\left(2x_0+y_0-3\right)=0$$

Đường thẳng $\left(d\right)$ luôn đi qua $M\left(x_0;y_0\right)$ với mọi m khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x_0+4=0 \\ 2x_0+y_0-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-4 \\ y_0=11 \end{cases}.$$

Vậy (d) luôn đi qua điểm cố định $M(-4;11)$ với mọi giá trị của m.

Dạng 2. XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG THẲNG.

Phương pháp giải

Gọi hàm số cần cần tìm là: $y = ax + b \ (a \neq 0)$, ta phải tìm a và b.

+ Với điều kiện của bài toán xá định được các hệ số liên hệ giữa a và b.

+ Giải phương trình để tìm a,b.

Ví dụ 1. Cho hàm số bậc nhất $y = -2x + b$. Xác định b nếu:

a) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2.

b) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-1;2)$.

Lời giải

a) Đồ thị hàm số $y = -2x + b$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2, nên $b = 2$.

Vậy đồ thị hàm số cần tìm là $y = -2x + 2$.

b) Đồ thị hàm số $y = -2x + b$ đi qua điểm $A(-1;2)$ khi:

$2 = (-2).(-1) + b \Leftrightarrow 2 = 2 + b \Leftrightarrow b = 0$.

Vậy $b = 0$ thì $y = -2x$ đi qua điểm $A(-1;2)$.

Ví dụ 2. Xác định đường thẳng (d), biết (d) có dạng $y = ax - 4$ và đi qua điểm $A(-3;2)$.

Lời giải

Đường thẳng $(d): y = ax - 4$ đi qua điểm $A(-3;2)$ khi:

$2 = a.(-3) - 4 \Leftrightarrow -3a = 2 + 4 \Leftrightarrow a = -2$.

Vậy (d) có phương trình $y = -2x - 4$ đi qua điểm $A(-3;2)$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = (m-2)x + m + 2$. Xác định m, biết:

a) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -2.

b) Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ.

Lời giải

a) Đồ thị (d) của hàm số $y=(m-2)x+m+2$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -2 nên $A(-2;0)$ thuộc (d).

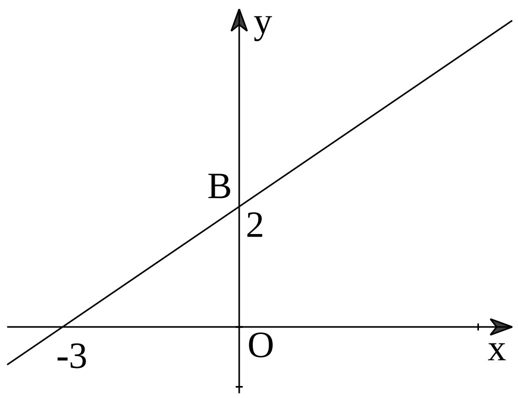
Do đó: $0=(m-2).(-2)+m+2 \Leftrightarrow -2m+4+m+2=0 \Leftrightarrow m=6$.

b) Đồ thị (d) của hàm số $y=(m-2)x+m+2$ đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ thuộc (d).

Do đó: $0=(m-2).0+m+2 \Leftrightarrow m+2=0 \Leftrightarrow m=-2$.

Ví dụ 4. Xác định đường thẳng đi qua hai điểm $A(-3;0)$ và $B(0;2)$.

Lời giải



Hình 7

Gọi phương trình đường thẳng AB là: $y=ax+b$.

Ta có:

$A(-3;0)\in AB \Rightarrow 0=a.(-3)+b$ hay $b=3a$.

$B(0;2)\in AB \Rightarrow 2=a.0+b$ hay $b=2$.

Từ đó suy ra $a=\frac{2}{3}$.

Vậy phương trình đường thẳng AB là: $y=\frac{2}{3}x+2$.

Ví dụ 5. Cho đường thẳng $(d_1): y=2012x+2$. Xác định đường thẳng (d_2) sao cho (d_1) và (d_2) cắt nhau tại một điểm nằm trên trục tung.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = 2012x + 2$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2 vì có tung độ gốc là $b = 2 \Rightarrow$ đường thẳng (d_1) luôn đi qua điểm $A(0;2)$ nằm trên trục tung.

Vì (d_1) và (d_2) cắt nhau tại một điểm nằm trên trục tung nên $A(0;2)$ thuộc (d_2).

Do đó (d_2) có phương trình $y = 2$ hoặc $x = 0$ (trục tung) hoặc $y = ax + 2$ (với $a \neq 0, a \neq 2012$)

Chú ý. Có vô số đường thẳng đi qua điểm $A(0;2)$.

Dạng 3. VỀ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = ax + b(a \neq 0)$

Phương pháp giải

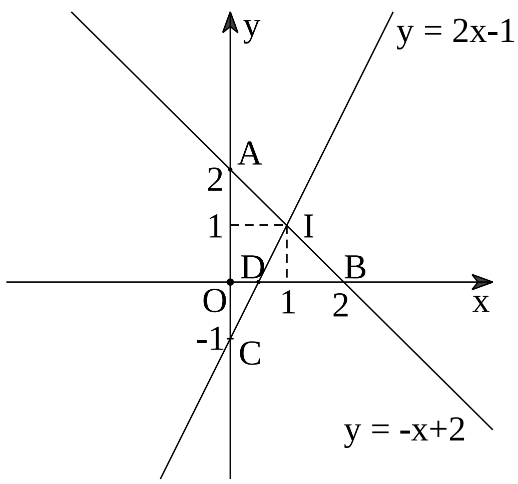
+ Tìm hai điểm thuộc đồ thị hàm số bằng cách cho x nhận hai giá trị xác định rồi tính hai giá trị tương ứng của y (thông thường ta lấy hai điểm đó là giao điểm của đồ thị với trục hoành và trục tung) + Đường thẳng đi qua hai điểm vừa tìm được là đồ thị hàm số cần vẽ.

Ví dụ 1. Cho các hàm số sau: $y = -x + 2$ (1); $y = 2x - 1$ (2).

a) Vẽ đồ thị các hàm số $(1), (2)$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

b) Xác định tọa độ giao điểm I của (1) và (2).

Lời giải



Hình 8

a) Hình 8 * Vẽ đồ thị hàm số (1):

Cho $x=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow A(0;2) \in Oy$;

$y=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow B(2;0) \in Ox$.

Đường thẳng AB là đồ thị hàm số $y=-x+2$.

* Vẽ đồ thị hàm số (2):

Cho $x=0 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow C(0;-1) \in Oy$;

$y=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow D\left(\frac{1}{2};0\right) \in Ox$.

Đường thẳng CD là đồ thị hàm số $y=2x-1$.

b) *Cách 1.* Từ giao điểm I của hai đồ thị hàm số ta vẽ đường thẳng vuông góc với trục hoành, cắt trục này tại điểm có hoành độ là 1. Vậy tọa độ giao điểm là $I(1;1)$.

Cách 2. Gọi tọa độ giao điểm I là $(x_1;y_1)$.

Vì I là giao điểm của AB và CD nên I vừa thuộc AB, vừa thuộc CD.

Vì $I(x_1;y_1) \in AB: y=-x+2$ nên $y_1=-x_1+2$.

Vì $I(x_1;y_1) \in CD: y=2x-1$ nên $y_1=2x_1-1$.

Suy ra ta có: $-x_1+2=2x_1-1 \Leftrightarrow 3x_1=3 \Leftrightarrow x_1=1$

$\Rightarrow y_1=-x_1+2=-1+2=1$.

Vậy tọa độ giao điểm I là $I(1;1)$.

Ví dụ 2. Cho hàm số: $y=\frac{1}{2}x-1\,(d)$.

a) Vẽ đồ thị (d) của hàm số đã cho.

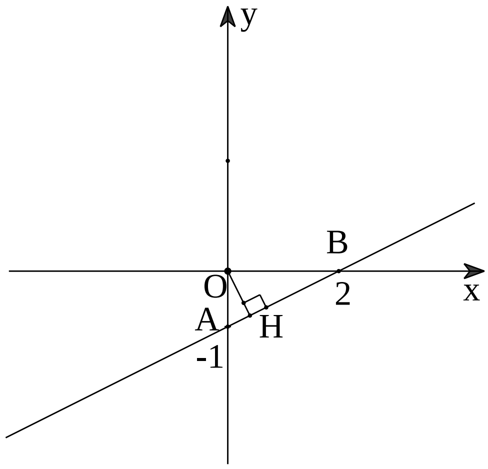
b) Tính khoảng cách từ gốc O của hệ trục tọa độ đến đường thẳng (d).

Lời giải

a) Cho $x=0 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow A(0;-1) \in Oy; y=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow B(2;0) \in Ox$.

Đường thẳng AB là đồ thị (d) của hàm số $y=\frac{1}{2}x-1$.

b) Kẻ OH vuông góc với (d) tại H. Khi đó OH là khoảng cách từ O đến đường thẳng (d) (hình 9)



Hình 9

Trong tam giác vuông OAB, ta có:

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}=\frac{5}{4}.$$

Từ đó suy ra: $OH^2=\frac{4}{5}\Rightarrow OH=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Vậy khoảng cách từ O đến (d) là $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Ví dụ 3. Cho các hàm số sau: $y=2\ (1)$; $y=|x+1|\ (2)$; $y=2mx+m-1\ (3)$.

a) Vẽ đồ thị các hàm số $(1),(2)$ trên cùng mặt phẳng tọa độ.

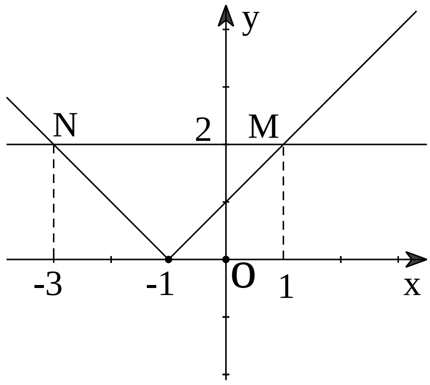
b) Tìm m để đồ thị hàm số (3) đi qua trong giao điểm của hai đồ thị (1) và (2).

Lời giải

a) Vẽ đồ thị của hàm số $y=2$ (1);

Đồ thị hàm số $y=2$ là đường thẳng song song với trục hoành và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2.

Vẽ đồ thị của hám số $y=|x+1|$ (2)



Hình 10

Ta có: $y = |x+1| = \begin{cases} x+1 \text{ khi } x \geq -1 \\ -(x+1) \text{ khi } x \leq -1 \end{cases}$.

Từ đó, ta được đồ thị có hình chữ V như hình 10.

Từ hình vẽ ta thấy đồ thị của hai hàm số (1) và (2) cắt nhau tại hai điểm $M(1;2)$ và $N(-3;2)$.

b) Đồ thị (d) của hàm số $y = 2mx + m - 1$ đi qua giao điểm của hai đồ thị hàm số (1) và đồ thị hàm số (2) khi và chỉ khi (d) đi qua điểm M hoặc N.

+ Trường hợp (d) đi qua $M(1;2)$. Kh đó: $2 = 2m.1 + m - 1 \Leftrightarrow 3m = 3 \Leftrightarrow m = 1$.

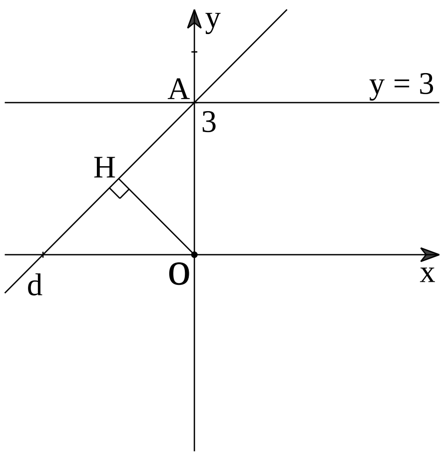
+ Trường hợp (d) đi qua $N(-3;2)$. Khi đó:

$$2 = 2.m.(-3) + m - 1 \Leftrightarrow 5m = -3 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{5}.$$

Vậy với $m = 1$ hoặc $m = -\frac{3}{5}$ thì đồ thị hàm số (3) đi qua giao điểm của đồ thị hàm số (1) và đồ thị hàm số (2).

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = mx + 3$ (d). Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (d) là lớn nhất.

Lời giải



Hình 11

Trường hợp 1. Xét $m=0$.

Khi $m=0$ thì (d) có phương trình: $y=0.x+3=3$ hay $y=3$.

Đồ thị hàm số $y=3$ là đường thẳng song song với trục hoành và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3 nên khoảng cách từ O đến (d) bằng 3.

Trường hợp 2. Xét $m\neq 0$.

Khi đó $(d): y=mx+3$ luôn đi qua điểm $A(0;3)$ nằm trên trục tung.

Kẻ OH vuông góc với (d) tại H. Khi đó OH là khoảng cách từ O đến đường thẳng (d).

Ta có: $OH\le OA$ hay $OH\le 3$ (Dấu "=" không xảy ra vì $m\neq 0$ nên H không trùng A).

Do đó $OH<3$.

Kết hợp hai trường hợp ta có khi $m=0$ thì khoảng cách từ O đến đường thẳng (d) là lớn nhất.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Đồ thị của hàm số $y=\sqrt{2}x+1-\sqrt{2}$ đi qua điểm nào sau đây?

A. $M(-1;1)$ **B.** $N(1;1)$ **C.** $P(1;-1)$ **D.** $Q(\sqrt{2};1)$

2. Điểm $E(-2;0)$ thuộc đường thẳng nào trong các đường thẳng sau đây?

$(d_1): y=x+2$; $(d_2): y=-2x-4$; $(d_3): y=3x+6$; $(d_4): y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{4}{3}$.

A. Chỉ thuộc đường thẳng (d_1) **B.** Chi thuộc (d_2) và (d_4)

C. Chỉ thuộc (d_2) và (d_3)

D. Thuộc cả bốn đường thẳng đã cho

3. Cho hai đường thẳng $(d_1): y = 2x + 2012$ và $(d_2): y = -\frac{1}{2}x + 2012$. Đường thẳng nào dưới đây không đi qua giao điểm của (d_1) và (d_2)?

A. $y = 2012x$

B. $y = x + 2012$

C. $y = 2012x + 2012$

D. $y = -x + 2012$

4. Vẽ đồ thị của các hàm số sau trên cùng một hệ trục tọa độ:

$y = \frac{1}{2}x + 2$; $y = -2x + 2$; $y = -2x + 4$.

5. Xác định đường thẳng đi qua hai điểm $A(-2;0)$ và $B(0;3)$.

6. Cho $(d_1): y = x, (d_2): y = 0,5x$; đường thẳng (d) song song với trục Ox và cắt trục tung Oy tại điểm C có tung độ bằng 2. Đường thẳng (d) lần lượt cắt (d_1), (d_2) tại D và E. Khi đó, tính diện tích tam giác ODE.

7. Với giá trị nào của m thì đồ thị của các hàm số $y = 2x + 4 - m$ và $y = 3x + m - 2$ cắt nhau tại một điểm nằm trên trục tung.

8. Cho hai đường thẳng $(d_1): (m-2)x + 4my + 1 = 0$ và $(d_2): (m-2)x + 2012y + 5 - m = 0$ (m là tham số).

a) Chứng minh rằng (d_1) luôn đi qua một điểm cố định khi m thay đổi.

b) Tìm m để hai đường thẳng $(d_1),(d_2)$ cắt nhau tại một điểm thuộc trục hoành.

9. Cho hàm số $y = f(x) = (m-2)x + 2$ có đồ thị là đường thẳng (d).

a) Tìm m để (d) đi qua điểm $M(-1;1)$.

b) Xác định m để khoảng cách từ điểm $O(0;0)$ đến (d) có giá trị lớn nhất.

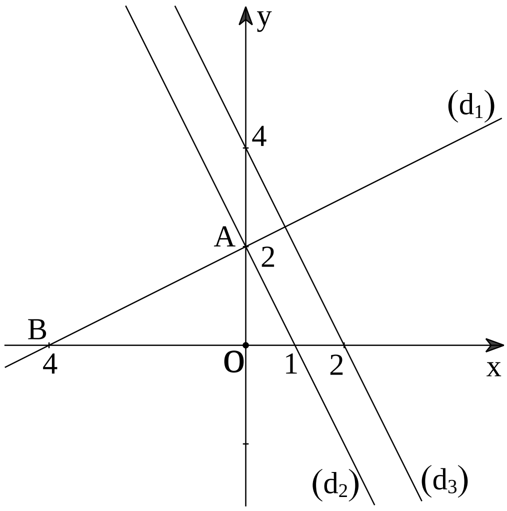
HƯỚNG DẪN GIẢI - ĐÁP SỐ

1. Ta thử cặp giá trị mà triệt tiêu $\sqrt{2}$ trước. Thử $N(1;1)$ thấy đúng. Chọn (B).

2. Thử trực tiếp ta thấy tọa độ $(-2;0)$ thỏa mãn cả bốn hàm số. Chọn (D).

3. (d_1) và (d_2) có cùng tung độ gốc 2012, hệ số a khác nhau. Các đường thẳng có cùng tung độ 2012 sẽ đi qua giao điểm của (d_1) và (d_2). Do đó, ta loại (B), (C), (D), vì có tung độ gốc là 2012. Chọn (A).

4. (h.12) Vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x + 2$ (d_1).



Hình 12

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(0;2)$.

Cho $y = 0 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow B(-4;0)$.

Biểu diễn các điểm A, B trên mặt phẳng tọa độ.

Vẽ đường thẳng AB được đồ thị (d_1).

Tương tự ta vẽ được:

$(d_2): y = -2x + 2$; $(d_3): y = -2x + 4$.

5. Gọi phương trình đường thẳng AB là: $y = ax + b$. Ta có:

$A(-2;0) \in AB \Rightarrow 0 = a.(-2) + b$ hay $b = 2a$.

$B(0;3) \in AB \Rightarrow 3 = a.0 + b$ hay $b = 3$. Từ đó suy ra $a = \frac{3}{2}$.

Vậy phương trình đường thẳng AB là: $y = \frac{3}{2}x + 3$.

6. Vẽ nhanh đồ thị. Từ đồ thị ta thấy: $DE = 2, OC = 2$.

Do đó diện tích tam giác cần tìm là: $S_{\Delta ODE} = \frac{1}{2}OC.DE = \frac{1}{2}.2.2 = 2$ (đvdt)

7. $M \in Oy \Rightarrow M\left(0; y_0\right)$. Giả sử M là giao điểm của $\left(d_1\right)$ và $\left(d_2\right)$.

$M \in \left(d_1\right): y = 2x + 4 - m \Leftrightarrow y_0 = 4 - m$;

$M \in \left(d_2\right): y = 3x + m - 2 \Leftrightarrow y_0 = m - 2$.

Suy ra $4 - m = m - 2 \Leftrightarrow m = 3$ (Thử lại thấy đúng)

Vậy khi $m = 3$ thì $\left(d_1\right)$ cắt $\left(d_2\right)$ tại $M\left(0;1\right)$ thuộc Oy.

8. a) $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{8}\right)$

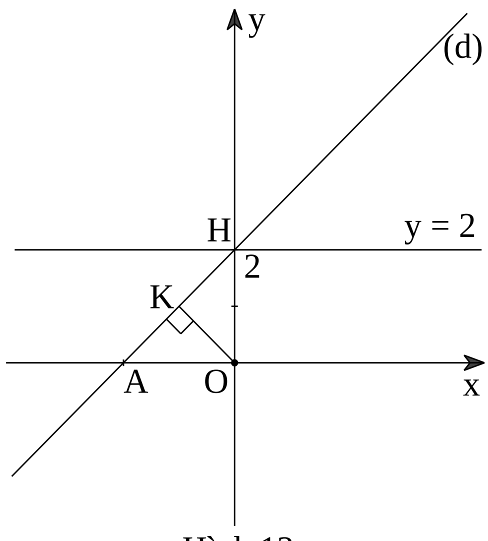
b) Giao điểm thuộc trục hoành, nên tung độ $y = 0$. Vậy:

$\left(m-2\right)x + 4m.0 + 1 = 0$ và $\left(m-2\right)x + 2012.0 + 5 - m = 0$.

Suy ra: $1 = 5 - m \Leftrightarrow m = 4$ (thử lại thấy đúng).

9. a) $m = 3$.

b)



Hình 13

(h. 13) Khi $m = 2: y = 2 \Rightarrow$ Khoảng cách từ O đến $\left(d\right)$ là $OH = 2$.

Khi $m \neq 2$: $y = \left(m-2\right)x + 2$.

Cho $y = 0 \Rightarrow x = \frac{-2}{m-2} \Rightarrow A\left(\frac{-2}{m-2}; 0\right)$

Vẽ $OK \perp (d)$. Ta có:

$H(0;2) \in d: y = (m-2)x + 2$ với mọi m.

Suy ra: $OK < OH$ hay $OK < 2$.

Vậy khoảng cách từ điểm O đến (d) lớn nhất bằng 2, đạt được khi $m = 2$.

§4. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VÀ ĐƯỜNG THẲNG CẮT NHAU

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC.

1. Hai đường thẳng song song.

Hai đường thẳng $y = ax + b(a \neq 0)$ và $y = a'x + b'(a' \neq 0)$ song song với nhau khi và chỉ khi $a = a', b \neq b'$ và trùng nhau khi và chỉ khi $a = a', b = b'$.

2. Hai đường thẳng cắt nhau

Hai đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ và $y = a'x + b'$ $(a' \neq 0)$ cắt nhau khi và chỉ khi $a \neq a'$
.

Chú ý.

+ Khi $a \neq a', b = b'$ thì hai đường thẳng có cùng tung độ gốc, do đó chúng cắt nhau tại một điển trên trục tung có tung độ là b.

+ Hai đường thẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi $a.a' = -1$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. NHẬN DẠNG CẶP ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI NHAU, CẶP ĐƯỜNG THẲNG CẮT NHAU, CẶP ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI NHAU.

Phương pháp giải

Cho hai đường thẳng $(d): y = ax + b(a \neq 0)$ và $(d'): y = a'x + b'$ $(a' \neq 0)$.

+ $(d) // (d') \Leftrightarrow a = a'$ và $b \neq b'$.

+ $(d) \equiv (d') \Leftrightarrow a = a'$ và $b = b'$.

+ (d) và (d') cắt nhau $\Leftrightarrow a \neq a'$.

+ $(d) \perp (d') \Leftrightarrow a.a' = -1$.

Ví dụ 1. Hãy chỉ ra hai cặp đường thẳng song song với nhau trong các đường thẳng sau: $(d_1): y = 2x+1; (d_2): y = \frac{x+3}{2}$; $(d_3): y = -\frac{1}{2}x+2$;

$(d_4): y = 0,5x-1$; $(d_5): y = 4+2x$; $(d_6): y = 1-2x$.

Lời giải

Hai cặp đường thẳng song song với nhau là:

$(d_1)//(d_5)$ vì $a = a'(=2)$; $b \neq b'(1 \neq 4)$;

$(d_2)//(d_4)$ vì $a \neq a'(=0,5)$; $b \neq b'(1,5 \neq -1)$.

Ví dụ 2. Hãy chỉ ra các cặp đường thẳng vuông góc với nhau trong các đường thẳng sau:

$(d_1): y = 2x+1$; $(d_2): y = \frac{x+3}{2}$; $(d_3): \mathrm{y} = -\frac{1}{2}x+2$; $(d_4): y = 0,5x-1$; $(d_5): y = 4+5x$ và $(d_6): y = 1-2x$.

Lời giải

Bốn cặp đường thẳng vuông góc với nhau: $(d_1) \perp (d_3)$; $(d_2) \perp (d_6)$; $(d_3) \perp (d_5)$; $(d_4) \perp (d_6)$ vì đều có $a.a' = -1$.

Ví dụ 3. Chứng tỏ rằng hai đường thẳng sau luôn cắt nhau với mọi giá trị của m:

a) $(d_1): y = (m^2 - m + 1)x + 1$ và $(d_2): \mathrm{y} = \frac{-x+m}{2}$.

b) $(d_3): y = (m^2+1)x + 2012$ và $(d_4): y = -mx + 2012$.

Lời giải

a) Xét (d_1) có: $a = m^2 - m + 1 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$; (d_2) có $a' = -\frac{1}{2} < 0$.

Suy ra $a \neq a'$ với mọi m nên (d_1) luôn cắt (d_2).

b) Ta có: $a - a' = m^2 + 1 - (-m) = m^2 + m + 1 = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$ nên $a \neq a'$ với mọi m, suy ra (d_3) luôn cắt (d_4).

Chú ý: Hai đường thẳng (d_3) và (d_4) có cùng tung độ gốc là 2012 nên chúng cùng đi qua điểm $A(0;2012)$ nằm trên trục tung.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng giao điểm của hai đường thẳng $y=-mx$ và $y=\frac{1}{m}x+4$ luôn nằm trên một đường tròn cố định với mọi $m\neq 0$.

Lời giải

Kí hiệu đường thẳng $y=-mx$ là (d), đường thẳng $y=\frac{1}{m}x+4$ là (d').

Ta có $(d): y=-mx$ luôn đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ cố định;

$(d'): y=\frac{1}{m}x+4$ luôn đi qua điểm $B(0;4)$ cố định.

Xét $a.a'=(-m).\frac{1}{m}=-1$ với $m\neq 0 \Rightarrow (d)\perp(d')$ tại A (A là giao điểm của hai đường thẳng (d) và (d')) $\Rightarrow \widehat{OAB}=90°$.

Do đó giao điểm A của (d) và (d') luôn nằm trên đường tròn đường kính OB cố định, với $O(0;0)$ và $B(0;4)$

Dạng 2. XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG THẲNG VỚI QUAN HỆ SONG SONG.

Phương pháp giải

Viết phương trình đường thẳng đi qua một điểm và song song với một đường thẳng cho trước: Gọi phương trình đường thẳng cần tìm là $y=ax+b$. + Sử dụng điều kiện hai đường thẳng song song với nhau để xác định hệ số a. + Với a vừa tìm được, sử dụng điều kiện còn lại để xác định tung độ gốc b.

Ví dụ 1. Tìm m để đường thẳng $(d_1): y=(2-m^2)x-m-5$ song song với đường thẳng $(d_2): y=-2x+2m+1$.

Lời giải

$(d_1)//(d_2) \Leftrightarrow 2-m^2=-2$ (1) và $-m-5\neq 2m+1$ (2).

Giải (1): $2-m^2=-2 \Leftrightarrow m^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-2 \end{array}\right.$.

Giải (2): $-m-5\neq 2m+1 \Leftrightarrow 3m\neq 6 \Leftrightarrow m\neq -2$.

Vậy với $m=2$ thì $(d_1)//(d_2)$.

Ví dụ 2. Cho đường thẳng $(d): 2x+y-3=0$ và điểm $M(-1;1)$. Viết phương trình đường thẳng (d') đi qua điểm M và song song với (d).

Lời giải

Gọi phương trình đường thẳng (d') là $y=ax+b$.

Ta có $(d): 2x+y-3=0$ hay $y=-2x+3$.

Vì $(d')//(d)$ nên $a=-2$ và $b\neq 3$. Mặt khác, (d') đi qua điểm $M(-1;1)$ nên $1=a.(-1)+b$

$\Leftrightarrow -a+b=1 \Leftrightarrow -(-2)+b=1$ (vì $a=-2$) $\Leftrightarrow b=-1(\neq 3)$.

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là: $y=-2x-1$.

Ví dụ 3. Cho $M(0;2), N(1;0), P(-1;-1)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA và AB của tam giác ABC. Viết phương trình đường thẳng AB.

Lời giải

Gọi phương trình đường thẳng MN là: $y=ax+b$. Ta có:

$N(1;0)\in MN \Rightarrow 0=a.1+b$ hay $a=-b$.

$M(0;2)\in MN \Rightarrow 2=a.0+b$ hay $b=2\Rightarrow a=-2$.

Do đó phương trình đường thẳng MN là: $y=-2x+2$.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của CB và CA nên MN là đường trung bình của ΔABC $\Rightarrow MN//AB$.

Vì $AB//MN$ nên phương trình đường thẳng AB có dạng: $y=-2x+b'(b'\neq 2)$.

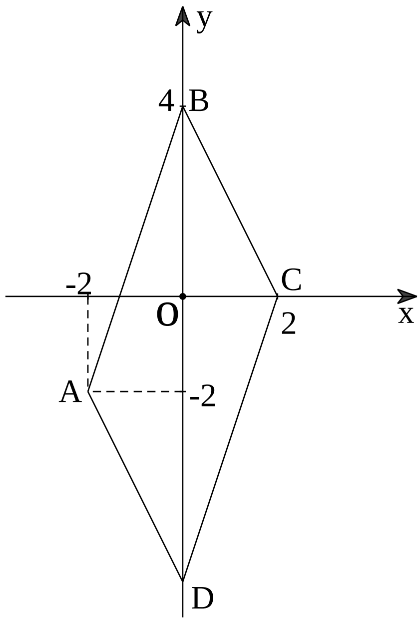
Vì $P(-1;-1)$ là trung điểm của đoạn AB nên đường thẳng AB đi qua $P(-1;-1)$

$\Rightarrow -1=-2.(-1)+b' \Leftrightarrow b'=-3$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình đường thẳng AB là: $y=-2x-3$.

Ví dụ 4. Cho ba đểm không thẳng hàng $A(-2;-2)$, $B(0;4)$ và $C(2;02)$. Xác định điểm D trên mặt phẳng tọa độ sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải



Hình 14

Dễ thấy $BC: y=-2x+4$.

Giả sử có D để $ABCD$ là hình bình hành.

Khi đó $AD//BC$ nên đường thẳng AD có phương trình: $y=-2x-6$ (vì đường thẳng AD qua A).

Vì $D\in AD$ nên $D\left(x_0;-2x_0-6\right)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên: $AD=BC \Leftrightarrow AD^2=BC^2$

$$\Leftrightarrow \left(x_0+2\right)^2+\left(-2x_0-4\right)^2=2^2+\left(-4\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=-4 \end{array}\right..$$

$\Rightarrow D_1\left(-4;2\right), D_2\left(0;-6\right)$. Từ hình 14 suy ra loại D_1 vì không đúng thứ tự các đỉnh của tứ giác $ABCD$.

Vậy $D\left(0;-6\right)$.

Dạng 3. XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG THẲNG VỚI QUAN HỆ VUÔNG GÓC

Phương pháp giải

Viết phương trình đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng cho trước: Gọi phương trình đường thẳng cần tìm là $y=ax+b$.

+ Sử dụng điều kiện hai đường thẳng vuông góc để xá định hệ số a.

+ Với a vừa tìm được, sử dụng điều kiện điểm thuộc đường thẳng để xác định tung độ gốc b.

Ví dụ 1. Tìm m để đường thẳng $(d): y = m^2x + 1 - m$ vuông góc với đường thẳng $(d'): y = -\frac{1}{4}x + 2012$.

Lời giải

$(d) \perp (d') \Leftrightarrow a.a' = -1 \Leftrightarrow m^2.\left(-\frac{1}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -2 \end{array}\right.$.

Vậy $m = \pm 2$ thì $(d) \perp (d')$.

Ví dụ 2. Tìm a và b, biết đường thẳng $(d_1): y = ax + b$ vuông góc với đường thẳng $(d_2): y = -\frac{1}{2}x$ và (d_1) đi qua điểm $P(1;-1)$.

Lời giải

Vì $(d_1) \perp (d_2)$ nên $a.a' = -1 \Leftrightarrow a.\left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow a = 3$. Ta có: $(d_1): y = 3x + b$.

Vì (d_1) đi qua điểm $P(1;-1)$ nên $3.1 + b = -1 \Leftrightarrow b = -4$.

Vậy $a = 3$ và $b = -4$.

Ví dụ 3. Cho ba điểm $A(1;2)$, $B(3;0), C(0;1)$.

a) Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Viết phương trình đường thẳng chứa đường cao AH của ΔABC.

Lời giải

a) Gọi phương trình đường thẳng đi qua $B(3;0)$ và $C(0;1)$ là $BC: y = ax + b$.

Ta có: $B \in BC$ nên $0 = a.3 + b \Leftrightarrow 3a + b = 0$ (1)

$C \in BC$ nên: $1 = a.0 + b \Leftrightarrow b = 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $3a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3} \Rightarrow BC: y = -\frac{1}{3}x + 1$.

Vì $A \notin BC$ nên ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Vậ ba điểm A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Gọi phương trình đường cao AH là $(d'): y = a'x + b'$.

Vì AH là đường cao của tam giác ABC nên

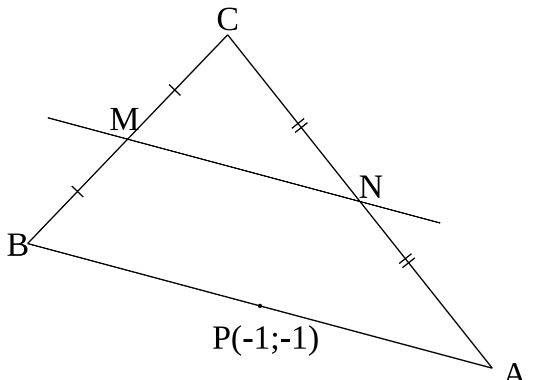
$AH \perp BC \Leftrightarrow (d') \perp BC \Leftrightarrow a.a' = -1 \Leftrightarrow a'.\left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow a' = 3.$

Mặt khác: $A(1;2) \in (d')$ nên $2 = a'.1 + b' \Leftrightarrow 2 = 3.1 + b' \Leftrightarrow b' = -1.$

Vậy phương trình đường cao AH của ΔABC là $y = 3x - 1$.

Ví dụ 4. Cho $M(0;2), N(1;0), P(-1;-1)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA và AB của tam giác ABC. Viết phương trình đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Lời giải



Hình 15

Gọi phương trình đường thẳng trung trực đoạn AB là $(d): y = mx + n$.

Gọi phương trình đường thẳng MN là: $y = ax + b$. Ta có:

$N(1;0) \in MN \Rightarrow 0 = a.1 + b$ hay $a = -b$.

$M(0;2) \in MN \Rightarrow 2 = a.0 + b$ hay $b = 2 \Leftrightarrow a = -2$.

Do đó phương trình đường thẳng MN là: $y = -2x + 2$.

Vì M, N lần lượt là trugn điểm của CB và CA nên MN là đường trung bình của ΔABC $\Rightarrow MN // AB$.

Vì (d) là đường trung trực của đoạn AB nên $(d) \perp AB$.

$\Rightarrow (d) \perp MN \Rightarrow m.(-2) = -1 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow (d): y = \frac{1}{2}x + n$.

Vì $P(-1;-1)$ là trung điểm của đoạn AB nên đường thẳng (d) đi qua $P(-1;-1)$.

$\Rightarrow -1 = \frac{1}{2}.(-1) + n \Leftrightarrow n = -\frac{1}{2}$.

Vậy phương trình đường trung trực của đoạn thẳng AB là: $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho đường thẳng $(d): y = ax + b$. Tìm giá trị của a và b trong mỗi trường hợp sau:

A. $(d)//(d_1): y = 2x + 3$;

B. (d) trùng $(d_2): y = -x + 1$;

C. (d) cắt $(d_3): y = \frac{1}{2}x$;

D. $(d) \perp (d_4): y = -\frac{1}{2}x$.

2. Viết phương trình đường thẳng (d') song song với đường thẳng $(d): y = -4x + 5$ và đi qua điểm $M(1;-1)$.

3. Xác định a và b để đường thẳng $(d_1): y = ax + b$ vuông góc với đường thẳng $(d_2): y = -\frac{1}{2}x$ và đi qua điểm $P(-1;2)$.

4. Đường thẳng $(d): y = -ax + 2011$ song song với đường phân giác của góc phần tư (I) và (III) thì hệ số a của (d) bằng:

A. 1

B. -1

C. 0

D. $-\frac{1}{2011}$

5. Cho bốn đường thẳng $(d_1): y = \frac{1}{3}x - 2$; $(d_2): y = -3x$; $(d_3): y = -3x + 4$ và $(d_4): y = \frac{1}{3}x + 2$ cắt nhau tại bốn điểm phân biệt M, N, P, Q.

Khi đó bốn điểm M, N, P, Q là bốn đỉnh:

A. Một hình thang

B. Một hình bình hành

C. Một hình chữ nhật

D. Một tứ giác không có gì đặc biệt.

6. Cho tam giác ABC có $A(1;5), B(-3;1), C(5;3)$

a) Viết phương trình đường trung trực của cạnh BC.

b) Viết phương trình đường trung bình MN của tam giác ABC $(MN // BC)$.

7. Cho $M(0;4), \mathrm{N}(2;0), P(-1;-2)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA và AB của tam giác ABC. Viết phương trình đường thẳng AB.

8. Cho hai đường thẳng $(d_1): y = mx + m$ và $(d_2): y = \sqrt{3}x + m^2 + \sqrt{3}$.

Chứng minh rằng (d_1) và (d_2) không trùng nhau với mọi giá trị của m.

9. Cho ba điểm không thẳng hàng $A(-3;0), B(0;2)$ và $C(1;0)$. Xác định điểm D trên mặt phẳng tọa độ sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. a) $(d) // (d_1) \Leftrightarrow a = 2; b \neq 3$

b) $(d) \equiv (d_2) \Leftrightarrow a = -1; b = 1$

c) (d) cắt $(d_3) \Leftrightarrow a \neq \frac{1}{2}; b \in \mathbb{R}$.

d) $(d) \perp (d_4) \Leftrightarrow a.a' = -1 \Leftrightarrow a = 2; b \in \mathbb{R}$

2. Gọi phương trình đường thẳng (d') là $y = ax + b$.

Vì $(d') // (d): y = -4x + 5$ nên $a = -4$ và $b \neq 5$. Mặt khác (d') đi qua $M(1;-1)$ nên $-1 = a.1 + b \Leftrightarrow a + b = -1 \Leftrightarrow -4 + b = -1$ (vì $a = -4$) $\Leftrightarrow b = 3$ (thỏa mãn)

Vậy $(d'): y = -4x + 3$.

3. Vì $(d_1) \perp (d_2)$ nên $a.a' = -1 \Leftrightarrow a.\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow a = 2$. Do đó $(d_1): y = 2x + b$

Vì (d_1) đi qua điểm $P(-1;2)$ nên $2.(-1) + b = 2 \Leftrightarrow b = 4$.

4. $(d'): y = x$ là đường phân giác của góc phần tư (I) và (III).

$(d) // (d') \Leftrightarrow -a = 1 \Leftrightarrow a = -1$. Chọn B.

5. $(d_1)//(d_4)$ vì $a=\dfrac{1}{3}=a';b=-2\neq 2=b'$; tương tự $(d_2)//(d_3);(d_2)\perp(d_4)$ vì $\dfrac{1}{3}.(-3)=-1$
.

Do đó, bốn điểm M,N,P,Q là bốn đỉnh của một hình chữ nhật. Chọn (C).

6. a) Gọi phương trình đường thẳng BC là: $y=ax+b$.

Vì $B(-3;1)\in BC$ nên $1=-3a+b\Rightarrow b=1+3a \quad (1)$;

$C(5;3)\in BC$ nên $3=5a+b \quad (2)$.

Thay (1) vào (2) ta được $a=\dfrac{1}{4};b=\dfrac{7}{4}$. Do đó: $BC: y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{7}{4}$.

Trung trực của BC là đường thẳng (d) vuông góc với BC tại trung điểm I của BC.

Tọa độ của điểm I là: $x_I=\dfrac{x_B+x_C}{2}=1; y_I=\dfrac{y_B+y_C}{2}=2$ hay $I(1;2)$.

Do đường trung trực $(d): y=-4x+m$ đi qua $I(1;2)$ nên ta được $m=6$.

Vậy đường thẳng (d) là: $y=-4x+6$.

b) Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB,AC. Khi đó ta có: $M(-1;3)$.

Vì $MN//BC$ nên MN có dạng: $y=\dfrac{1}{4}x+n \quad \left(n\neq\dfrac{7}{4}\right)$. Do đó $M(-1;3)$ thuộc MN nên $n=\dfrac{13}{4}$ (thỏa mãn).

Vậy MN có phương trình: $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{13}{4}$.

7. Phương trình đường thẳng MN là: $y=-2x+4$.

Vì $AB//MN$ nên phương trình đường thẳng AB có dạng: $y=-2x+b'(b'\neq 2)$.

Vì đường thẳng AB đi qua $P(-1;-2)$ nên $-2=-2.(-1)+b'\Leftrightarrow b'=-4$.

Vậy phương trình đường thẳng AB là: $y=-2x+4$.

8. *Cách 1.* $(d_1)\equiv(d_2)\Leftrightarrow\begin{cases}a=a'\\b=b'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\sqrt{3} & (1)\\ m=m^2+\sqrt{3} & (2)\end{cases}$

Thay (1) vào (2) ta được: $0=3$ (vô lí). Dô đó (d_1) không trùng (d_2) với mọi m.

Cách 2. Giả sử: $b=b' \Leftrightarrow m=m^2+\sqrt{3} \Leftrightarrow m^2-m+\frac{1}{4}+\sqrt{3}-\frac{1}{4}=0$

$\Leftrightarrow \left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}-\frac{1}{4}\right)=0$ (vô lí). Do đó điều giả sử là sai.

Vậy (d_1) không trùng (d_2) với mọi m.

Chú ý: Chỉ cần $a \neq a'$ hoặc $b \neq b'$ thì $(d_1): y=ax+b$ không trùng $(d_2): y=a'x+b'$.

9. Đáp số: $D(-2;-2)$.

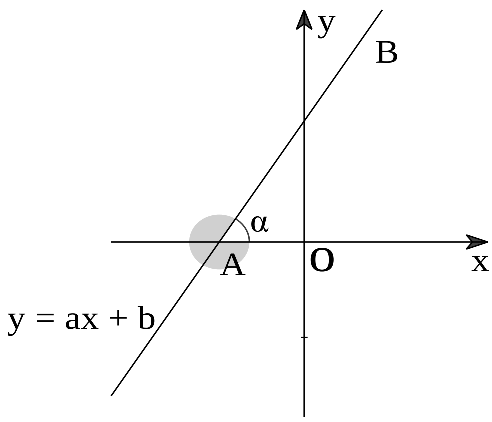
§5. HỆ SỐ GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG $y=ax+b$ $(a \neq 0)$

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Hệ số góc của đường thẳng

+ Góc α tạo bởi tia Ax (A là giao điểm của đường thẳng $y=ax+b$ với trục Ox) và tia AB, trong đó tia AB là phần của đường thẳng $y=ax+b$ nằm trong nửa mặt phẳng có bờ x'x và chứa tia Oy được gọi là góc tạo bởi đường thẳng $y=ax+b$ và trục Ox (hình 16).

+ Vì có sự liên quan giữa hệ số a với góc tạo bởi đường thẳng $y=ax+b$ và trục Ox nên người ta gọi a là hệ số góc của đường thẳng $y=ax+b$



Hình 16

Khi góc α nhọn thì $a=\tan\alpha$

Khi góc α tù thì $a=-\tan\left(180^0-\alpha\right)$

+ Các đường thẳng có cùng hệ số góc a thì tạo với Ox các góc bằng nhau.

Các đường thẳng song song hoặc trùng nhau thì có hệ số góc bằng nhau

+ Khi $a>0$ thì góc α nhọn, hệ số a càng lớn thì α càng lớn.

+ Khi $a<0$ thì góc α tù, hệ số a càng lớn thì α càng lớn.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. XÁC ĐỊNH HỆ SỐ GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Phương pháp giải

Vận dụng định nghĩa hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b \ (a \neq 0)$; góc giữa đường thẳng và trục Ox; vận dụng tỉ số lượng giác của góc nhọn.

Ví dụ 1. Đường thẳng $y = (m+1)x + 5$ đi qua điểm $F(-1;3)$ có hệ số góc bằng bao nhiêu?

Giải

Kí hiệu (d) là đường thẳng $y = (m+1)x + 5$.

Vì $F(-1;3) \in (d)$ nên $3 = (m+1)(-1) + 5 \Leftrightarrow m = 1$.

Vậy hệ số góc của đường thẳng (d) là $a = m + 1 = 1 + 1 = 2$

Ví dụ 2. Tính hệ số góc của đường thẳng $(d): y = (m-2)x + 3$ biết nó song song với đường thẳng $(d'): 2x - y - 1 = 0$. Vẽ đồ thị (d) vừa tìm được.

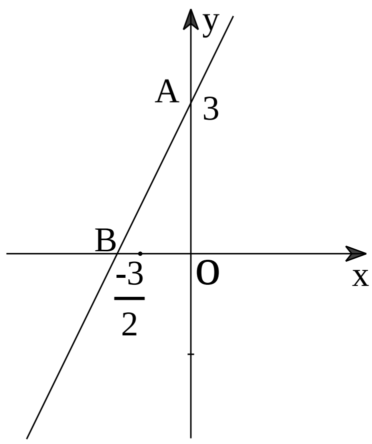
Giải

+ Đường thẳng (d') có phương trình $2x - y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 2x - 1$.

  Vì $(d)//(d') \Leftrightarrow a = a'$ và $b \neq b'$ nên $m - 2 = 2$ và $3 \neq -1$.

  Do đó hệ số góc của đường thẳng (d) là 2.

+ Ta có $(d): y = 2x + 3$. Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm $A(0;3)$ và $B\left(\frac{-3}{2};0\right)$ là đường thẳng (d) cần vẽ. (h.17)



Hình 17

Ví dụ 3. Tính hệ số góc của đường thẳng $(d): y = (1-m)x + 1$, biết nó vuông góc với đường thẳng $(d'): x - 2y - 4 = 0$. Vẽ đồ thị (d) vừa tìm được.

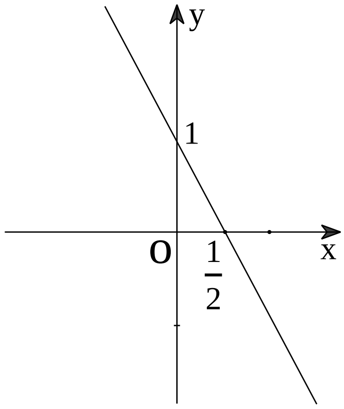
Giải

+ Đường thẳng (d') có phương trình $x-2y-4=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x-2$

Vì $(d)\perp(d') \Leftrightarrow a.a'=-1 \Leftrightarrow (1-m).\frac{1}{2}=-1 \Leftrightarrow 1-m=-2$

Do đó hệ số góc của đường thẳng (d) là -2

+ Ta có $(d): y-2x+1$. Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm $A(0;1)$ và $B\left(\frac{1}{2};0\right)$ là đường thẳng (d) cần vẽ (h.18).



Hình 18

Ví dụ 4. Tính hệ số góc của đường thẳng đi qua hai điểm $A(-1;1)$ và $B(2;-3)$

Giải

Giả sử phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(-1;1)$ và $B(2;-3)$ là $AB: y=ax+b$

Ta có: $A\in AB$ nên: $1=a.(-1)+b \Leftrightarrow -1+b=1 \Leftrightarrow b=a+1$ (1)

$B\in AB$ nên: $-3=a.2+b \Leftrightarrow b=-2a-3$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $-2a-3=a+1 \Leftrightarrow a=-\frac{4}{3}$

Vậy hệ số góc của đường thẳng AB là: $a=-\frac{4}{3}$.

Dạng 2. XÁC ĐỊNH GÓC

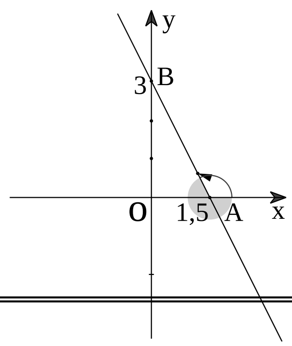
Phương pháp giải

Vận dụng định nghĩa góc giữa đường thẳng $y=ax+b$ $(a\neq 0)$ và trục Ox; vận dụng tỉ số lượng giác của góc nhọn; vận dụng tam giác đồng dạng.

Ví dụ 1. Tính góc tạo bởi đường thẳng $y=-2x+3$ và trục Ox.

Giải

Vẽ đường thẳng $y=-2x+3$. Khi đó $\widehat{BAx}$ là góc tạo bởi đường thẳng $y=-2x+3$ với trục Ox (hình 19)



Hình 19

Xét tam giác vuông ABO, ta có:

$$\tan\widehat{OAB}=\frac{OB}{OA}=\frac{3}{1,5}=2\Leftrightarrow\widehat{OAB}\approx 63^0 26'$$

$$\Rightarrow\widehat{BAx}=180^0-\widehat{OAB}\approx 116^0 34'$$

(Trong đó 2 chính là giá trị tuyệt đối của hệ số góc của đường thẳng $y=-2x+3$).

Ví dụ 2. Cho đường thẳng $(d): y=mx+\sqrt{3}$. Tính góc tạo bởi đường thẳng (d) với trục Ox, biết (d) đi qua điểm $A(-3;0)$.

Giải

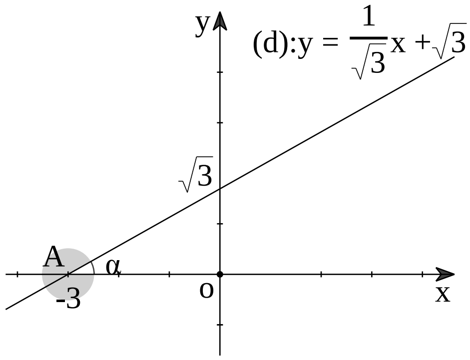
Vì $A(-3;0)\in(d): y=mx+\sqrt{3}\Rightarrow m=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Khi đó (d) có phương trình $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+\sqrt{3}$.

Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng (d) với trục Ox. Khi đó ta có:

$$\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\alpha=30^0.$$

Vậy góc tạo bởi đường thẳng (d) với trục Ox là 30^0.



Hình 20

Ví dụ 3. Cho hai đường thẳng $(d_1): y=-2x$ và $(d_2)=\frac{1}{2}x$. (d) là đường thẳng song song với trục Ox và cắt Oy tại điểm có tung độ bằng 3; (d) cắt (d_1) và (d_2) lần lượt tại A và B. Chứng minh rằng: $\widehat{AOB}=90^0$

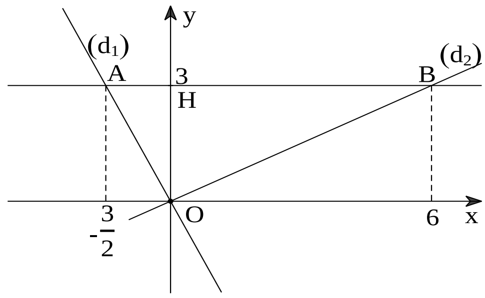
Giải

Vẽ ba đường thẳng ,(d), (d_1),(d_2) như hình 21.

Xét hai tam giác AHO và OHB, ta có:

$$A\hat{H}O=O\hat{H}B=90^0;\frac{HA}{HO}=\frac{HO}{HB}=\frac{1}{2}.$$

Do đó: $\Delta AHO\backsim\Delta OHB\Rightarrow\widehat{AOH}=\widehat{OBH}$.



Hình 21

Mà $\widehat{AOH}+\widehat{HOB}=90^0 \Rightarrow \widehat{AOB}=90^0$

Chú ý: $(d_1): y=-2x$ có hệ số góc $a_1=-2$; $(d_2)=\dfrac{1}{2}x$ có hệ số góc $a_2=\dfrac{1}{2}$.

Ta thấy: $a_1.a_2=(-2).\dfrac{1}{2}=-1$, do đó: $(d_1)\perp(d_2)$.

Dạng 3. XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG THẲNG

Phương pháp giải

- Gọi phương trình đường thẳng cần tìm là $y=ax+b$. Ta cần xác định a và b.
- Chú ý rằng: Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng $y=ax+b\ (a\neq 0)$ với trục Ox.

Ta có:

- Khi góc α nhọn thì $a=\tan\alpha$
- Khi góc α tù thì $a=-\tan\left(180^0-\alpha\right)$.

Gọi phương trình đường thẳng (d) là: $y=ax+b$.

Vì (d) có hệ số góc là -2 nên $a=-2\Rightarrow(d): y=-2x+b$

Vì $A(-2;3)\in(d)$ nên $3=(-2).(-2)+b\Leftrightarrow b=-1$.

Do đó phương trình đường thẳng (d) là $y=-2x-1$

Ví dụ 2. Xác định đường thẳng (d) đi qua điểm $A(-1;1)$ và tạo với trục Ox một góc bằng 45^0.

Giải

Đường thẳng (d) có dạng $y=ax+b$. Vì $A(-1;1)\in(d)$ nên $1=a(-1)+b\Leftrightarrow b=a+1$.

Vì (d) tạo với trục Ox một góc bằng 45^0 nên $a=\tan 45^0=1\Rightarrow b=2$

Do đó phương trình đường thẳng (d) là $y=x+2$

Ví dụ 3. Xác định đường thẳng (d) đi qua điểm $A(0;1)$ và tạo với đường thẳng $y=2$ một góc bằng 60^0.

Giải

Đường thẳng (d) có dạng $y = ax + b$.

Vì $A(0;1) \in (d)$ nên $1 = a.0 + b \Leftrightarrow b = 1$.

Vì đường thẳng $y = 2$ song song với trục hoành nên từ đề bài ta có (d) tạo với trục Ox một góc bằng 60^0.

Ta có: $a = \tan\alpha = \tan 60^0 = \sqrt{3}$. Vậy $(d): y = \sqrt{3}x + 1$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Đường thẳng (d) đi qua giao điểm của hai đường thẳng $y = x + 1$, $y = 2x$ và song song với đường thẳng $y = 2\sqrt{x} + 2 + \sqrt{2}$ là:

(A) $y = \sqrt{4}x + 2 - \sqrt{2}$; (B) $y = \left(2 + \sqrt{2}\right)x + 1$;

(C) $y = \sqrt{2}x + 2 - \sqrt{2}$; (D) $y = x + \sqrt{2}$.

2. Đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ vuông góc với đường thẳng nào dưới đây?

(A) $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$; (B) $y = 2x - \frac{3}{2}$;

(C) $y = -2x + \frac{3}{2}$; (D) $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

3. Đường thẳng $y = (m+1)x - 2$ vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + 2011$ thì m bằng ?

(A) -2 (B) -3 (C) -1 (D)1

4. Xác định đường thẳng (d) biết nó có hệ số góc bằng 2 và đi qua điểm $A(-3;2)$

5. Tính hệ số góc của đường thẳng đi qua hai điểm $A(1;2)$ và $B(3;4)$

6. Cho đường thẳng $(d): mx + 3$. Tính góc α tạo bởi đường thẳng (d) với trục Ox, biết:

a) (d) đi qua điểm $A\left(-\sqrt{3};0\right)$

b) (d) đi qua điểm $B(6;-3)$.

7. Xác định đường thẳng (d) đi qua điểm $A(0;3)$ và tạo với đường thẳng $y=2$ một góc bằng 60^0.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. (C).

2. (C).

3. (B).

4. $y=2x+8.$

5. $AB: y=x+1 \Rightarrow$ đường thẳng AB có hệ số góc $a=1.$

6. a) $\alpha=60^0.$

b) $m=-1<0$ nên $-\tan\left(180^0-\alpha\right)=-1 \Leftrightarrow 180^0-\alpha=45^0 \Leftrightarrow \alpha=135^0.$

7. $y=\sqrt{3}x+3.$

ÔN TẬP CHƯƠNG II

A. TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1. Hàm số.

+ Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x theo quy tắc f sao cho với mỗi giá trị x, ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y mà $y = f\left(x\right)$ thì y được gọi là hàm số của x và x được gọi là biến số.

+ Cách cho hàm số: Hàm số thường được cho bằng công thức.

Chú ý: Có một số cách khác cho hàm số như: Bảng, sơ đồ Ven, đồ thị.

+ Đồ thị của hàm số: Tập hợp các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng $\left(x; f\left(x\right)\right)$ trên mặt phẳng tọa độ gọi là đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$

+ Tính đồng biến, nghịch biến của hàm số: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định trên tập hợp D là một khoảng, nửa khoảng hay đoạn, với mọi $x_1, x_2 \in D$:

  Nếu $x_1 < x_2$ mà $f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right)$ thì hàm số $y = f\left(x\right)$ đồng biến trên D

  Nếu $x_1 < x_2$ mà $f\left(x_1\right) > f\left(x_2\right)$thì hàm số $y = f\left(x\right)$ nghịch biến trên D

2. Hàm số bậc nhất

+ Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức $y = ax + b$, trong đó a, b là các số cho trước và $a \neq 0$.

+ Tập xác định: $\mathbb{R}$

+ Khi $a > 0$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$; Khi $a < 0$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$

+ Đồ thị hàm số là một đường thẳng.

+ Hệ số $a\left(a \neq 0\right)$ được gọi là hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$

+ Cho hai đường thẳng $(d): y = ax + b$ $\left(a \neq 0\right)$ và đường thẳng $(d'): y = a'x + b'$ $\left(a' \neq 0\right)$. Ta có:

  $\left(d\right)//\left(d'\right) \Leftrightarrow a = a'$ và $b \neq b'$

  $\left(d\right) \equiv \left(d'\right) \Leftrightarrow a = a'$ và $b = b'$

  $\left(d\right)$ cắt $\left(d'\right)$ $\Leftrightarrow a \neq a'$

  $\left(d\right) \perp \left(d'\right)$ $a.a' = -1$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1. VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC NHẤT.

Phương pháp giải

Bước 1. Tìm tập xác định (TXĐ của hàm số bậc nhất là $\mathbb{R}$).

Bước 2. Vẽ đồ thị $y = ax + b \;\; (a \neq 0)$

Cách 1. + Xác định hai điểm phân biết bất kì của đồ thị rồi vẽ đường thẳng đi qua hai điểm đó.

Cách 2. + Xác định giao điểm của đồ thị với hai trục tọa độ:

- Cho $x = 0 \Rightarrow y = a.0 + b = b \Rightarrow M(0;b)$ thuộc trục tung.
- Cho $y = 0 \Rightarrow 0 = a.x + b \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a} \Rightarrow N\left(-\dfrac{b}{a};0\right)$ thuộc trục hoành.

Ví dụ 1. Cho hàm số $(d): y = x - 1$ và $(d'): y = -x + 3$.

Vẽ đồ thị (d) và (d') trên cùng hệ trục tọa độ. Xác định tọa độ giao điểm của (d) và (d').

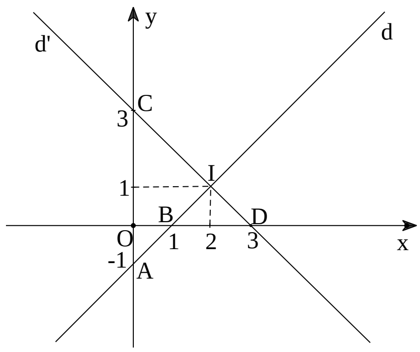
Giải

\+ TXĐ: $\mathbb{R}$

\+ Vẽ (d):

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 0 - 1 = -1 \Rightarrow A(0;-1)$ thuộc trục tung.

Cho $y = 0 \Rightarrow 0 = x - 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow B(1;0)$ thuộc trục hoành.



Hình 22

Vẽ đường thẳng AB ta được đồ thị (d) (hình 22).

\+ Vẽ (d'):

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 0 + 3 = 3 \Rightarrow C(0;3)$ thuộc trục tung.

Cho $y=0 \Rightarrow 0=-x+3 \Rightarrow x=3 \Rightarrow D(3;0)$ thuộc trục hoành.

Vẽ đường thẳng CD ta được đồ thị (d').

+ Xác định tọa độ giao điểm I của (d) và (d'):

Cách 1. Từ giao điểm I ta vẽ các đường vuông góc với hai trục tọa độ ta xác định được $I(2;1)$.

Cách 2. Gọi tọa độ giao điểm I là $(x_I;y_I)$

Vì là giao điểm của (d) và (d') nên I vừa thuộc (d), vừa thuộc (d').

Vì $I(x_I;y_I) \in (d): y=x-1$ nên $y_1=x_1-1$.

Vì $I(x_I;y_I) \in (d'): y=-x+3$ nên $y_1=-x_1+3$.

Suy ra: $x_1-1=-x_1+3 \Leftrightarrow 2x_1=4 \Leftrightarrow x_1=2 \Rightarrow y_1=-x_1+3=-2+3=1$

Vậy tọa độ giao điểm I là $(2;1)$

Chú ý.

- Hoành độ giáo điểm I là nghiệm của phương trình $x-1=-x+3$
- Số giao điểm của $(d): y=f(x)$ và $(d'): y=g(x)$ là số nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$ và ngược lại.

Ví dụ 2. Vẽ đồ thị (G) của hàm số $y=|x-2|$.

Giải

Vẽ

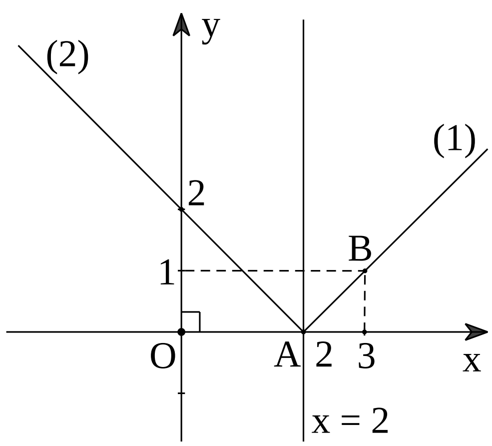
$$(G): y=|x-2|=\begin{cases} x-2 & (x \ge 2) \quad (1) \\ -x+2 & (x<2) \quad (2) \end{cases}$$

Đồ thị (G) gồm hai nhành (1) và (2).

Nhánh (1) của (G): điều kiện là $x \ge 2$.

Cho $x=2 \Rightarrow y=2-2=0 \Rightarrow A(2;0)$ thuộc trục hoành

Cho $x=3 \Rightarrow y=3-2=1 \Rightarrow B(3;1)$.



Hình 23

Vẽ tia AB ta được nhánh (1) của đồ thị (G).

Tương tự, vẽ nhánh (2) ta thu được đồ thị (G) có hình chữ V như hình 23.

Chú ý. Hai nhánh của (G) đối xứng nhau qua đường thẳng $x = 2$

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = x + |2x - 2|$

a) Vẽ đồ thị (G) của hàm số trên.

b) Biện luận theo tham số m số nghiệm của phương trình $x + |2x - 2| = m$.

Giải

a) Vẽ $(G): y = x + |2x - 2| = \begin{cases} 3x - 2 & (x \geq 1) & (1) \\ -x + 2 & (x < 1) & (2) \end{cases}$

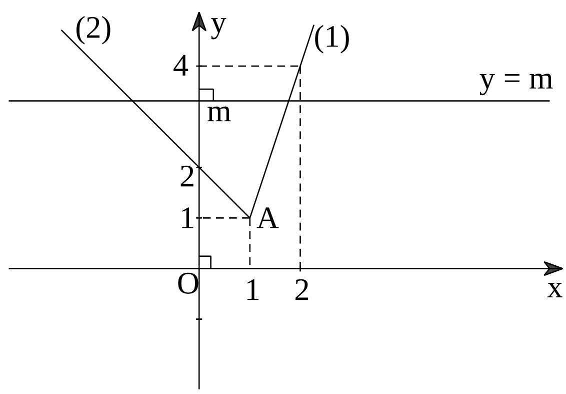
Đồ thị (G) gồm hai nhánh (1) và (2).

Nhánh (1) của (G): điều kiện là $x \geq 1$

Cho $x = 1 \Rightarrow y = 3.1 - 2 = 1 \Rightarrow A(1;1)$

Cho $x = 2 \Rightarrow y = 3.2 - 2 = 4 \Rightarrow A(2;4)$

Vẽ tia AB ta được nhánh (1) của đồ thị (G).



Hình 24

Tương tự, vẽ nhánh (2) ta thu được đồ thị (G) như hình 24.

b) Số nghiệm của phương trình $x + |2x - 2| = m$ (*) là số giao điểm của đường thẳng $(d): y = m$ và đồ thị $(G): y = x + |2x - 2|$.

Từ đồ thị ta thấy:

+ Nếu $m < 1$ thì phương trình $(*)$ vô nghiệm.

+ Nếu $m = 1$ thì phương trình $(*)$ có một nghiệm.

+ Nếu $m > 1$ thì phương trình $(*)$ hai nghiệm phân biệt.

Ví dụ 4. Với giá trị nào của tham số a thì phương trình $|2x - a| + 1 = |x + 3|$ (*) có nghiệm duy nhất?

(Thi vào khối PT chuyên Toán – Tin ĐHSPHN năm học 1997-1998)

Giải

+ Ta có: $(*) \Leftrightarrow |2x-a| = |x+3| - 1 \qquad (1)$

Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị $(G): y = |2x-a|$ và đồ thị $(G'): y = |x+3| - 1$

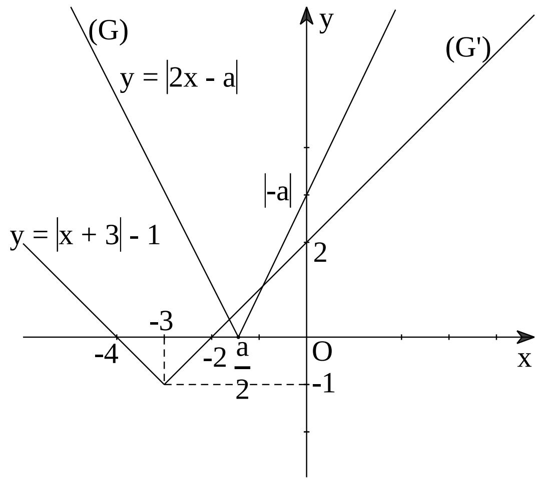
Vẽ hai đồ thị (G) và (G') như hình 25.

Phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow (G)$ và (G') có một điểm chung

$\Leftrightarrow \frac{a}{2} = -4$ hoặc $\frac{a}{2} = -2$

$\Leftrightarrow a = -8$ hoặc $a = -4.$



Hình 25

Dạng 2. XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG THẲNG

Phương pháp giải

1. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cho trước
2. Viết phương trình đường thẳng đi qua một điểm và có hệ số góc cho trước.
3. Viết phương trình đường thẳng đi qua một điểm và song song với một đường cho trước.
4. Viết phương trình đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Ví dụ 1. Tìm m và n để đường thẳng $(d): y = (m-1)x + 2 - n$ đi qua hai điểm $A(2;-1)$ và $B(-3;-6)$.

Giải

Ta có: $A \in (d)$ nên $-1 = (m-1).2 + 2 - n \Leftrightarrow 2m - n = -1 \Leftrightarrow n = 2m+1 \qquad (1)$

$B \in (d)$ nên $-6 = (m-1).(-3) + 2 - n \Leftrightarrow -3m - n = -11 \qquad (2)$

Thay (1) vào (2) ta được: $-3m - (2m+1) = -11 \Leftrightarrow -5m = -10 \Leftrightarrow m = 2$

$\Rightarrow n = 2m + 1 = 2.2 + 1 = 5$

Vậy $m=2$ và $n=5$ thì $(d): y=x-3$ đi qua hai điểm $A(2;-1)$ và $B(-3;-6)$.

Ví dụ 2. Viết phương trình đường thẳng (d) cắt (d') tại điểm có tung độ bằng -1 biết (d) có hệ số góc bằng 2.

Giải

Gọi A là giao điểm của (d) và (d'). Vì A có tung độ bằng -1 nên hoành độ của điểm A là $-1=x-3$ hay $x=2$. Do đó : $A(2;-1)$.

Gọi phương trình đường thẳng (d) là: $y=ax+b.$

Ta có (d) có hệ số góc là 2 nên $a=2 \Rightarrow (d): y=2x+b.$

Vì $A(2;-1)\in(d)$ nên $-1=2.2+b \Leftrightarrow b=-5.$

Do đó phương trình đường thẳng (d) là $y=2x-5.$

Ví dụ 3. Cho đường thẳng $(d): y=3x-2$ và điểm $M(-1;1)$. Viết phương trình đường thẳng (d') đi qua và song song với (d).

Giải

Gọi phương trình đường thẳng (d') là $y=ax+b.$

Vì $(d')//(d): y=3x-2$ nên $a=3$ và $b\neq -2.$

Mặt khác (d') đi qua $M(-1;1)$ nên:

$1=a(-1)+b \Leftrightarrow -3+b=1 \Leftrightarrow b=4$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là: $y=3x+4.$

Ví dụ 4. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho $M(2;4)$, $N(0;2)$. Tìm các điểm A trên mặt phẳng tọa độ Oxy sao cho $AM=AN$.

Giải

Cách 1. Tọa độ trung điểm của đoạn MN là:

$$x_I=\frac{x_M+x_N}{2}=1;\quad y_I=\frac{y_M+y_N}{2}=3 \text{ hay } I(1;3).$$

Gọi phương trình đường trung trực của MN là $(d): y=mx+n$

Gọi phương trình đường thẳng MN là: $y=ax+b$. Ta có

$M(2;4) \in MN \Rightarrow 4a = a.2 + b$ hay $b = -2a + 4$;

$N(0;2) \in MN \Rightarrow 2 = a.0 + b$ hay $b = 2 \Rightarrow a = 1$.

Do đó phương trình đường thẳng MN là: $y = x + 2$.

Vì AM = AN $\Rightarrow A$ thuộc đường trung trực của đoạn MN hay $A \in (d)$.

Vì (d) là đường trung trực của MN nên $(d) \perp MN \Leftrightarrow m.1 = -1 \Rightarrow m = -1$

$\Rightarrow (d): y = -x + n$

Vì $I(1;3)$ là trung điểm của đoạn MN nên đường thẳng (d) đi qua $I(1;3)$

$\Rightarrow 3 = (-1).1 + n \Rightarrow n = 4$.

Vậy tập hợp các điểm A là đường thẳng $(d): y = -x + 4$

Cách 2. Gọi tọa độ A là $(x;y)$

Ta có: AM = AN $\Leftrightarrow \sqrt{(2-x)^2 + (4-y)^2} = \sqrt{(0-x)^2 + (2-y)^2}$

$$\Leftrightarrow (2-x)^2 + (4-y)^2 = (0-x)^2 + (2-y)^2$$
$$\Leftrightarrow 4 - 4x + x^2 + 16 - 8y + y^2 = x^2 + 4 - 4y + y^2$$
$$\Leftrightarrow 16 - 4x = 4y$$
$$\Leftrightarrow y = -x + 4.$$

Vậy tập hợp các điểm A trên mặt phẳng Oxy thỏa mãn bài toán là đường thẳng có phương trình: $y = -x + 4$

Dạng 3. CỰC TRỊ

Phương pháp giải

- Vận dụng bất đẳng thức đại số
- Vận dung quan hệ giữa đường xiên và đường vuông góc
- Vận dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông
- Vận dụng đồ thị.

Ví dụ 1. Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ $O(0;0)$ đến đường thẳng (d) có phương trình $y=\frac{2m-2}{m-2}x+\frac{2}{m-2}$ đạt giá trị lớn nhất (với $m\neq -2$).

Giải

Vì tung độ gốc $b=\frac{2}{m-2}\neq 0$ nên (d) không đi qua gốc tọa độ.

Trường hợp 1: Xét $m=1$. Khi đó $(d): y=-2$. Do đó khoảng cách từ $O(0;0)$ đến (d) là 2.

Trường hợp 2. Xét $m\neq 1$.

Khi đó (d) cắt trục hoành tại điểm $A\left(\frac{-1}{m-1};0\right)$ và cắt trục tung tại điểm $B\left(0;\frac{2}{m-2}\right)\Rightarrow OA=\frac{1}{|m-1|}$ và $OB=\frac{2}{|m-2|}$.

Kẻ OH vuông góc với (d) tại H thì độ dài OH là khoảng cách từ O đến (d).

Áp dụng hệ thức $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ vào tam giác vuông ABO ta có:

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}\Rightarrow OH^2=\frac{OA^2.OB^2}{OA^2+OB^2}=\frac{4}{(m-2)^2+4(m-1)^2}$$

$$\Rightarrow OH=\frac{2}{\sqrt{5m^2-12m+8}}=\frac{2}{\sqrt{5\left(m-\frac{6}{5}\right)^2+\frac{4}{5}}}\leq\frac{2}{\sqrt{\frac{4}{5}}}=\sqrt{5}$$

(dấu “=” xảy ra khi $m=\frac{6}{5}$).

Kết hợp hai trường hợp ta có khi $m=\frac{6}{5}$ thì $OH_{\max}=\sqrt{5}$.

Ví dụ 2. Trên mặt phẳng tọa độ cho hai điểm A, B đều có hoành độ x và tung độ y thỏa mãn đẳng thức $|x-1|+|y-2|=3$ (*). Chứng minh khoảng cách $AB\leq 6$.

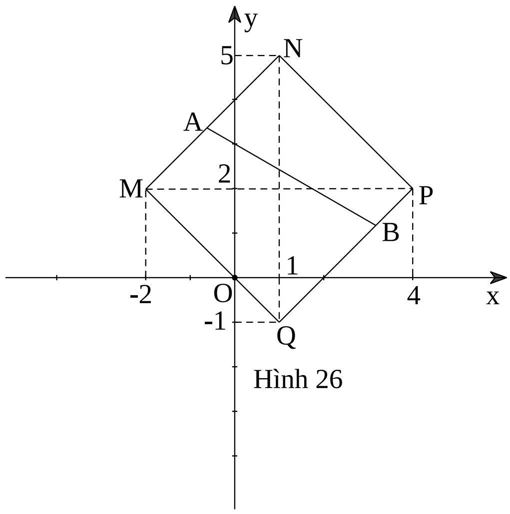
Giải

Điều kiện (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=6 & (x\ge 1; y\ge 2) \\ x-y=2 & (x\ge 1; y\le 2) \\ -x+y=4 & (x\le 1; y\ge 2) \\ -x-y=0 & (x\le 1; y\le 2) \end{cases}$

$\Rightarrow$ Tập hợp các điểm A, B thỏa mãn (*) là hình vuông MNPQ hình 26

$\Rightarrow AB \le MP \le 6$

Dấu "=" xảy ra khi A, B là hai đỉnh đối nhau của hình vuông MNPQ.



Hình 26

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$ **không** xác định với:

(A) $x=2$ (B) $x>2$ (C) $x<2$ (D) Với mọi x thuộc $\mathbb{R}$

2. Với giá trị nào của m thì hàm số $y=\left(m^2-2\right)x+1$ là hàm số bậc nhất đồng biến?

(A) $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$; (B) $m>\sqrt{2}$ hoặc $m<-\sqrt{2}$;

(C) $m\ne \pm 2$; (D) Với mọi giá trị của m thuộc $\mathbb{R}$

3. Cho hàm số $y=f(x)=ax^5+bx^3+2007x+1$ với $a,b\in\mathbb{R}^*$, biết $f\left(\sqrt{2}\right)=2$, tính $f\left(-\sqrt{2}\right)$.

4. Cho hàm số $y=(m-3)x^2+m(x-1)+2$.

a) Với giá trị nào của m thì hàm số đã cho là hàm số bậc nhất?

b) Với giá trị vừa tìm được của m ở câu a, thì hàm số đã cho đồng biến hay nghịch biến?

5. Cho đường thẳng $(d): y=\dfrac{3}{4}x+3$

a) Vẽ đường thẳng (d).

b) Tính góc tạo bởi đường thẳng (d) và trục Ox.

c) Tính diện tích tam giác do đường thẳng (d) tạo với hai trục tọa độ.

6. Xác định hàm số $y = ax + b$, biết rằng đồ thị của nó song song với đồ thị hàm số $y = -2x$ và đi qua điểm $A(1;-3)$.

7. Cho các đường thẳng $(d_1): y = -2x + 3;$ $(d_2): y = \frac{1}{2}x + 1;$ $(d_3): y = -2x - 1.$

Không vẽ đồ thị của các hàm số đó, hãy cho biết vị trí tương đối giữa các đường thẳng đó đối với nhau như thế nào?

8. Cho các đường thẳng $(d_1): y = (2m-1)x + m^2 - 1;$ $(d_2): y = (m+3)x - 3.$

a) Tìm các giá trị của m để $(d_1)//(d_2)$.

b) Tính các giá trị của m để (d_1) đi qua gốc tọa độ.

9. Tìm điểm trên đường thẳng $(d): y = -2x + 25$ sao cho khoảng cách OM nhỏ nhất, với O là gốc tọa độ.

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. (D)

2. (B)

3. $f\left(-\sqrt{2}\right) = 0$

4. a) $m = 3$.   b) Đồng biến.

5. b) $36^0 52'$;   c) 6 (đvdt).

6. $y = -2x - 1$

7. $(d_1)//(d_3)$; $(d_1) \perp (d_2)$ $(d_2) \perp (d_3)$

8. a) $m = 4$; $b) m = \pm 1$

9. Gọi tọa độ điểm M là $(a;b)$. Khoảng cách $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ta có $M(a;b) \in (d): y = -2x + 25$ nên $b = -2a + 25 \Leftrightarrow 2a + b = 25$.

Áp dụng bất đẳng thức $(ax + by)^2 \le (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$ với $(x;y) = (2;1)$, ta có:

$25^2 = (2a + b)^2 \le (2^2 + 1^2)(a^2 + b^2) \Leftrightarrow 5 \le a^2 + b^2 \Rightarrow OM \ge \sqrt{5}.$

Do đó $OM_{\min} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 25 \\ \dfrac{a}{2} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow M\left(10;5\right).$

Chú ý. Ta có thể giải bài toán như sau : $OM_{\min} \Leftrightarrow OM \perp \left(d\right)$ tại .

Ta xác định tọa độ điểm M bằng cách:

+ Lập phương trình đường thẳng $\left(d'\right)$ đi qua $O\left(0;0\right)$ và vuông góc với đường thẳng $\left(d\right)$.

+ M là giao điểm của $\left(d\right)$ và $\left(d'\right)$