

---

---

## MỤC LỤC

VẤN ĐỀ 1. HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG (PHẦN I)	3
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT .....	3
B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN .....	3
C. BÀI TẬP VỀ NHÀ .....	4
VẤN ĐỀ 2. HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG (PHẦN II)	6
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT .....	6
B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN .....	6
Dạng 2. Chứng minh các hệ thức liên quan đến tam giác vuông.....	6
VẤN ĐỀ 3 : LUYỆN TẬP HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG .....	8
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT .....	8
B. BÀI TẬP TỰ LUYỆN .....	8
C. BÀI TẬP VỀ NHÀ .....	9
VẤN ĐỀ 4. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN (PHẦN I).....	10
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT .....	10
B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN .....	10
Dạng 1. Tính tỉ số lượng giác của góc nhọn, tính cạnh, tính góc.....	10
C. BÀI TẬP VỀ NHÀ .....	11
VẤN ĐỀ 5. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN (PHẦN II) .....	13
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT .....	13
B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN .....	13
Dạng 2. Sắp thứ tự dãy các tỉ số lượng giác.....	13
Dạng 3. Dựng góc nhọn $\alpha$ biết tỉ số lượng giác của nó là $\frac{m}{n}$ .....	14
C. BÀI TẬP VỀ NHÀ : .....	15
VẤN ĐỀ 6. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG (PHẦN I).....	16
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT .....	16
B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN .....	16
Dạng 1. Giải tam giác vuông.....	16
Dạng 2. Tính cạnh và góc của tam giác .....	17
C. BÀI TẬP VỀ NHÀ .....	17
VẤN ĐỀ 7. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG (PHẦN II).....	19
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT .....	19

---

---

---

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN .....	19
Dạng 3. Toán ứng dụng thực tế.....	19
Dạng 4. Toán tổng hợp.....	20
C. BÀI TẬP VỀ NHÀ .....	20
ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 3 .....	21
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.....	21
B. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	22
HƯỚNG DẪN GIẢI.....	26
VẤN ĐỀ 1.....	26
VẤN ĐỀ 2.....	26
VẤN ĐỀ 3.....	27
VẤN ĐỀ 4.....	28
VẤN ĐỀ 5.....	29
VẤN ĐỀ 6.....	31
VẤN ĐỀ 7.....	32
ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 3.....	32

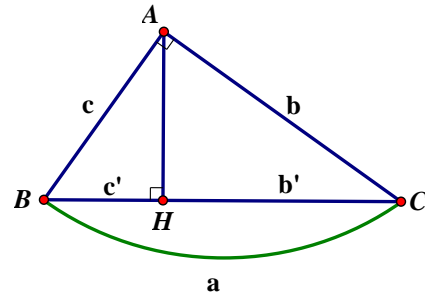
## CHỦ ĐỀ 3. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

### VẤN ĐỀ 1. HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG (PHẦN 1)

#### A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Khi đó ta có các hệ thức sau:

- $AB^2 = BH.BC$  hay  $c^2 = a.c'$
- $AC^2 = CH.BC$  hay  $b^2 = a.b'$
- $AB.AC = BC.AH$  hay  $cb = ah$
- $HA^2 = HB.HC$  hay  $h^2 = c'b'$
- $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$  hay  $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}$ .
- $BC^2 = AB^2 + AC^2$  (Định lí Pitago).



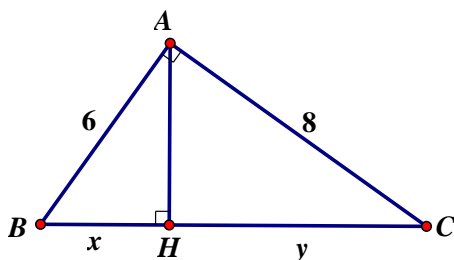
#### B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

##### Dạng 1. Tính độ dài các đoạn thẳng trong tam giác vuông

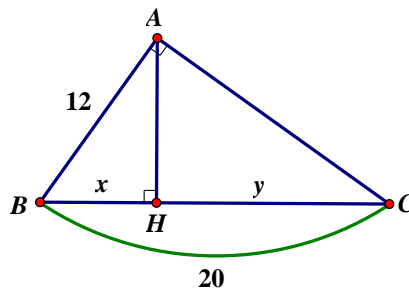
*Phương pháp giải:* Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Nếu biết độ dài hai trong sáu đoạn thẳng  $AB, AC, BC, HA, HB, HC$  thì ta luôn tính được độ dài bốn đoạn thẳng còn lại.

- *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

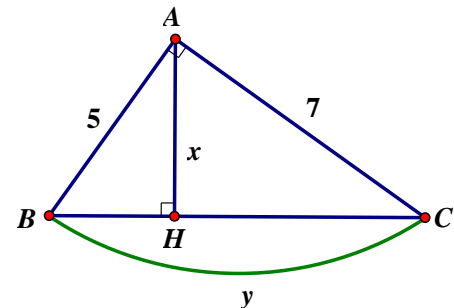
**Bài 1.** Tính  $x, y$  trong mỗi hình vẽ sau:



Hình 1



Hình 2



Hình 3

**Bài 2.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ .

a) Cho biết  $AB = 3\text{cm}$ ,  $AC = 4\text{cm}$ . Tính độ dài các đoạn thẳng  $BH, CH, AH$  và  $BC$ .

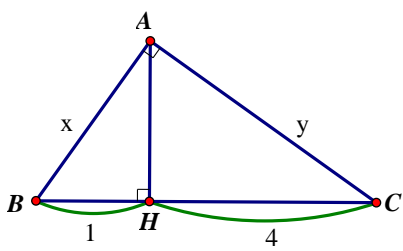
b) Cho biết  $BH = 9\text{cm}$ ,  $ch = 16\text{cm}$ . Tính độ dài các đoạn thẳng  $AB, AC, BC$  và  $AH$ .

**Bài 3.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AH \perp BC$  ( $H$  thuộc  $BC$ ). Cho biết  $AB : AC = 3 : 4$  và  $BC = 15\text{cm}$ . Tính độ dài các đoạn thẳng  $BH$  và  $CH$ .

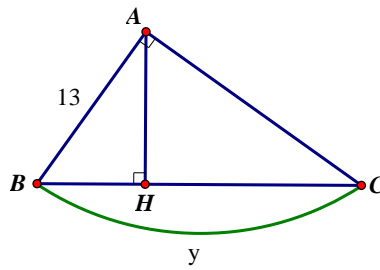
**Bài 4.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Cho biết  $AB : AC = 3 : 4$  và  $AH = 6\text{cm}$ . Tính độ dài các đoạn thẳng  $BH$  và  $CH$ .

\* Học sinh tự luyện tập các bài tập sau tại lớp :

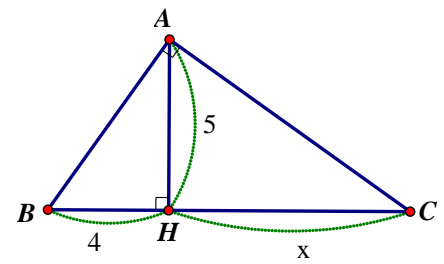
**Bài 5.** Tính  $x, y$  trong các hình vẽ sau :



Hình 4



Hình 5



Hình 6

**Bài 6.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ .

- Cho biết  $AB = 3\text{cm}$ ,  $BC = 5\text{cm}$ . Tính độ dài các đoạn thẳng  $BH$ ,  $CH$ ,  $AH$  và  $AC$ .
- Cho biết  $AH = 60\text{cm}$ ,  $CH = 144\text{cm}$ . Tính độ dài các đoạn thẳng  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$  và  $BH$ .
- Cho biết  $AC = 12\text{cm}$ ,  $AH = \frac{60}{13}\text{cm}$ . Tính độ dài các đoạn thẳng  $AB$ ,  $BC$ ,  $BH$  và  $CH$ .

**Bài 7.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Cho biết  $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{6}$  và  $BC = 122\text{cm}$ .  
Tính độ dài các đoạn thẳng  $BH$ ,  $CH$ .

**Bài 8.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Cho biết  $AB : AC = 3 : 4$  và  $AH = 12\text{cm}$ . Tính độ dài các đoạn thẳng  $BH$ ,  $CH$ .

### C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

**Bài 9.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Cho biết  $AB = 4\text{cm}$ ,  $BC = 7,5\text{cm}$ . Tính độ dài các đoạn thẳng  $BH$ ,  $CH$ .

**Bài 10.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ .

- Biết  $AH = 6\text{cm}$ ,  $BH = 4,5\text{cm}$ . Tính  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$ ,  $HC$ .
- Biết  $AB = 6\text{cm}$ ,  $BH = 3\text{cm}$ . Tính  $AH$ ,  $AC$ ,  $CH$ .

**Bài 11.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Tính diện tích tam giác  $ABC$ , biết  $AH = 12\text{cm}$ ,  $BH = 9\text{cm}$ .

**Bài 12.** Cho tam giác  $ABC$ , biết  $BC = 7,5\text{cm}$ ,  $CA = 4,5\text{cm}$ ,  $AB = 6\text{cm}$ .

- Tính độ dài đường cao  $AH$  của tam giác  $ABC$ .
- Tính độ dài các đoạn thẳng  $BH$ ,  $CH$ .

**Bài 13.** Cho tam giác vuông với các cạnh góc vuông là 7 và 24. Kẻ đường cao ứng với cạnh huyền. Tính độ dài đường cao và các đoạn thẳng mà đường cao đó chia ra trên cạnh huyền.

**Bài 14.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Biết  $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{7}$ ,  $AH = 15\text{cm}$ . Tính độ dài các đoạn thẳng  $HB$  và  $HC$ .

---

**Bài 15.** Cho ABCD là hình thang vuông tại A và D. Đường chéo BD vuông góc với BC. Biết  $AD = 12\text{cm}$ ,  $DC = 25\text{cm}$ . Tính độ dài AB, BC và BD.

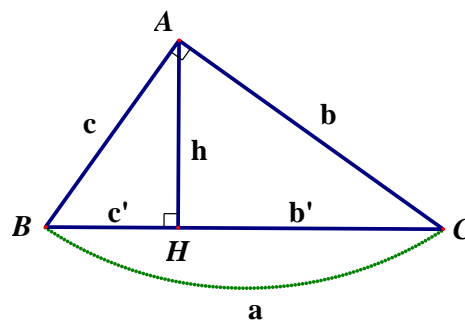
---

## VẤN ĐỀ 2. HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG (PHẦN II)

### A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Nhắc lại lý thuyết : Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Khi đó có các hệ thức sau :

- $AB^2 = BH.BC$  hay  $c^2 = a.c'$
- $AC^2 = CH.BC$  hay  $b^2 = a.b'$
- $AB.AC = BC.AH$  hay  $cb = a.h$
- $HA^2 = HB.HC$  hay  $h^2 = c'.b'$
- $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$  hay  $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}$
- $BC^2 = AB^2 + AC^2$  (Định lý Pitago)



### B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

#### Dạng 2. Chứng minh các hệ thức liên quan đến tam giác vuông

Phương pháp giải : Sử dụng các hệ thức về cạnh và đường cao một cách hợp lý theo hướng :

Bước 1. Chọn các tam giác vuông thích hợp chứa các đoạn thẳng có trong hệ thức.

Bước 2. Tính các đoạn thẳng đó nhờ hệ thức về cạnh và đường cao.

Bước 3. Liên kết các giá trị trên để rút ra hệ thức cần chứng minh.

\* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau :

**Bài 1.** Cho tam giác  $CDE$  nhọn, đường cao  $CH$ . Gọi  $M, N$  theo thứ tự là hình chiếu của  $H$  lên  $CD, DE$ . Chứng minh :

a)  $CD.CM = CE.CN$ ;

b) Tam giác  $CMN$  đồng dạng với tam giác  $CED$ .

**Bài 2.** Cho hình vuông  $ABCD$ . Gọi  $I$  là một điểm nằm chính giữa  $A$  và  $B$ . Tia  $DI$  và tia  $CB$  cắt nhau ở  $K$ . Kẻ đường thẳng qua  $D$ , vuông góc với  $DI$ , cắt đường thẳng  $BC$  tại  $L$ . Chứng minh :

a) Tam giác  $DIL$  là tam giác cân ;

b) Tổng  $\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2}$  không đổi khi  $I$  thay đổi trên cạnh  $AB$ .

\* Học sinh tự luyện tập các bài tập sau tại lớp :

**Bài 3.** Cho tam giác  $ABC$  có ba góc nhọn và  $AH$  là đường cao.

---

a) Chứng minh  $AB^2 + CH^2 = AC^2 + BH^2$ ;

b) Gọi  $M, N$  theo thứ tự là hình chiếu của  $H$  lên  $AB, AC$ . Chứng minh :

$$AM \cdot AB = AN \cdot AC.$$

**Bài 4.** Cho hình thoi  $ABCD$  có hai đường chéo cắt nhau tại  $O$ . Cho biết khoảng cách từ  $O$  tới mỗi cạnh của hình thoi là  $h, AC = m, BD = n$ . Chứng minh :  $\frac{1}{m^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{4h^2}$ .

### C.BÀI TẬP VỀ NHÀ

**Bài 5.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 8\text{cm}, BC = 15\text{cm}$ .

a) Tính độ dài đoạn thẳng  $BD$ .

b) Vẽ  $AH$  vuông góc với  $BD$  tại  $H$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $AH$ .

c) Đường thẳng  $AH$  cắt  $BC$  và  $DC$  lần lượt tại  $I$  và  $K$ . Chứng minh  $AH^2 = HI \cdot HK$ .

**Bài 6.** Cho hình thang  $ABCD$  vuông tại  $A$  và  $D$ . Cho biết  $AB = 15\text{cm}, AD = 20\text{cm}$ , các đường chéo  $AC$  và  $BD$  vuông góc với nhau ở  $O$ . Tính

a) Độ dài các đoạn thẳng  $OB$  và  $OD$ ;

b) Độ dài đoạn thẳng  $AC$  ;

c) Diện tích hình thang  $ABCD$ .

**Bài 7.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Đường cao  $AH$ , kẻ  $HE, HF$  lần lượt vuông góc với  $AB, AC$ . Chứng minh :

a)  $\frac{EB}{FC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^3$  ;

b)  $BC \cdot BE \cdot CF = AH^3$ .

**Bài 8.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  có  $AH$  và  $BK$  là hai đường cao. Kẻ đường thẳng vuông góc với  $BC$  tại  $B$  cắt tia  $CA$  tại  $D$ . Chứng minh :

a)  $BD = 2 \cdot AH$  ;

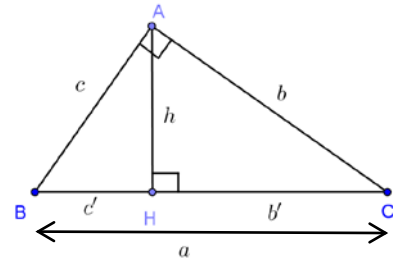
b)  $\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{4HA^2}$ .

## VẤN ĐỀ 3 : LUYỆN TẬP HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG

### A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

**Nhắc lại lý thuyết :** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Khi đó ta có các hệ thức sau:

- $AB^2 = BH \cdot BC$  hay  $c^2 = a \cdot c'$
- $AC^2 = CH \cdot BC$  hay  $b^2 = a \cdot b'$
- $AB \cdot AC = BC \cdot AH$  hay  $c \cdot b = a \cdot h$
- $HA^2 = HB \cdot HC$  hay  $h^2 = c' \cdot b'$
- $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$  hay  $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}$
- $BC^2 = AB^2 + AC^2$  (Định lý Pitago)



### B. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

\* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau :

**Bài 1.** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Cho biết  $BH = 4\text{cm}$ ,  $CH = 9\text{cm}$ . Gọi D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên các cạnh AB và AC.

- Tính độ dài đoạn thẳng DE.
- Các đường thẳng vuông góc với DE tại D và E lần lượt cắt BC tại M, N. Chứng minh  $MN = \frac{1}{2}BC$ .
- Tính diện tích của tứ giác DENM.

**Bài 2.** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB, AC. Chứng minh

- $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{HB}{HC}$ ;
- $\frac{AB^3}{AC^3} = \frac{BD}{EC}$  ;
- $DE^2 = BD \cdot CE \cdot BC$ ;
- $\sqrt[3]{BC^2} = \sqrt[3]{BD^2} + \sqrt[3]{CE^2}$  .

\*Học sinh tự luyện các bài tập sau đây

**Bài 3.** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH.

- Cho biết  $AB = 6\text{cm}$ ,  $AC = 8\text{cm}$ . Tính độ dài các đoạn thẳng BH, CH, AH và BC.
- Cho biết  $AB = 6\text{cm}$ ,  $BC = 10\text{cm}$ . Tính độ dài các đoạn thẳng BH, CH, AH và AC.



- Bài 4.** Tìm độ dài các cạnh của một tam giác vuông nếu đường cao ứng với cạnh huyền có độ dài 48cm và hình chiếu của các cạnh góc vuông trên cạnh huyền theo tỉ lệ 9 : 16.
- Bài 5.** Cho tam giác ABC vuông tại A, phân giác AD, đường cao AH. Biết  $BD = 15\text{cm}$ ,  $CD = 20\text{cm}$ . Tính độ dài các đoạn thẳng HB, HC.
- Bài 6.** Cho hình thang cân ABCD có độ dài cạnh đáy  $AB = 26\text{cm}$  và cạnh bên  $AD = 10\text{cm}$ . Cho biết đường chéo AC vuông góc với cạnh bên BC. Tính diện tích hình thang ABCD.

### C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

- Bài 7.** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH.
- Nếu  $BH = 2\text{cm}$ ,  $CH = 8\text{cm}$ . Tính độ dài các đoạn AB, AC, BC, AH.
  - Nếu  $AH = 5\text{cm}$ ,  $CH = 16\text{cm}$ . Tính độ dài các đoạn thẳng AB, AC, BC, BH.
- Bài 8.** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Cho biết  $AB : AC = 3 : 4$  và  $AH = 12\text{cm}$ . Tính độ dài các đoạn thẳng BH và CH.
- Bài 9.** Cho tam giác ABC vuông tại A, phân giác AD, đường cao AH. Cho biết  $BD = 15\text{cm}$ ,  $CD = 20\text{cm}$ . Tính độ dài các đoạn thẳng HB và HC.
- Bài 10.** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Tính chu vi của tam giác ABC biết  $AH = 14\text{cm}$ ,  $\frac{HB}{HC} = \frac{1}{4}$ .
- Bài 11.** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Tính diện tích tam giác ABC biết rằng  $AH = 12\text{cm}$ ,  $BH = 9\text{cm}$ .
- Bài 12.** Cho tam giác ABC vuông tại C, đường cao CK.
- Cho biết  $AB = 10\text{cm}$ ,  $AC = 8\text{cm}$ . Tính BC, CK, BK và AK.
  - Gọi H và I theo thứ tự là hình chiếu của K trên BC và AC. Chứng minh  $CB \cdot CH = CA \cdot CI$
  - Gọi M là chân đường vuông kẻ từ K xuống IH. Chứng minh  $\frac{1}{KM^2} = \frac{1}{CH^2} + \frac{1}{CI^2}$ .
  - Chứng minh  $\frac{AI}{BH} = \frac{AC^3}{BC^3}$ .

## VẤN ĐỀ 4. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN (PHẦN I)

### A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Cho góc nhọn  $\alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ). Dựng tam giác ABC vuông tại A sao cho  $\alpha = \widehat{ABC}$ .

Từ đó ta có:

$$\cos \alpha = \frac{AB}{AC}; \quad \sin \alpha = \frac{AC}{AB}; \quad \tan \alpha = \frac{AC}{AB}; \quad \cot \alpha = \frac{AB}{AC}.$$

- Với góc nhọn  $\alpha$  bất kì, ta luôn có:

$$0 < \sin \alpha < 1; \quad 0 < \cos \alpha < 1$$

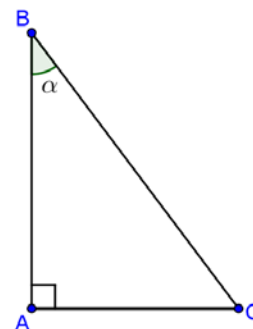
$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \cot \alpha = \frac{\tan \alpha}{\cos \alpha}; \quad \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1;$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

- Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cosin góc kia, tang góc này bằng cotang góc kia.

- Bảng tỉ số lượng giác các góc đặc biệt

$\alpha$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
Tỉ số			
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$



### B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

#### Dạng 1. Tính tỉ số lượng giác của góc nhọn, tính cạnh, tính góc

**Phương pháp giải:** Sử dụng các kiến thức trong phần Tóm tắt lý thuyết ở trên.

\* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

**Bài 1.** Cho tam giác ABC vuông tại C có  $BC = 1,2\text{ cm}$ ,  $AC = 0,9\text{ cm}$ . Tính các tỉ số lượng giác của góc B. Từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc A.

---

**Bài 2.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Hãy tính  $\sin B$ ,  $\sin C$  trong các trường hợp sau (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 4):

a)  $AB = 13\text{ cm}, BH = 0,5\text{ dm};$       b)  $CH = 4\text{ cm}, BH = 3\text{ cm}.$

**Bài 3.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = a\sqrt{5}, AC = a\sqrt{2}, BC = a\sqrt{3}$

- a) Chứng minh rằng  $ABC$  là tam giác vuông.  
b) Tính các tỉ số lượng giác của góc  $B$ . Từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc  $A$ .

**Bài 4.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Hãy tính các tỉ số lượng giác của góc  $C$  biết rằng  $\cos B = 0,6$ .

**Bài 5.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 5\text{ cm}, \cot B = \frac{5}{8}$ . Tính độ dài các đoạn thẳng  $AC$  và  $BC$ .

*\* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 6.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 1,6\text{ cm}, CA = 1,2\text{ cm}$ . Tính các tỉ số lượng giác của góc  $B$ . Từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc  $C$ .

**Bài 7.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = a\sqrt{3}, AC = a\sqrt{2}, BC = a\sqrt{5}$ .

- a) Chứng minh rằng  $ABC$  là tam giác vuông.  
b) Tính các tỉ số lượng giác của góc  $B$ . Từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc  $C$ .

**Bài 8.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Cho biết  $\cos B = 0,8$ . Hãy tính các tỉ số lượng giác của góc  $C$ .

**Bài 9.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 6\text{ cm}, \tan B = \frac{5}{12}$ . Tính độ dài các đoạn thẳng  $AC$  và  $BC$ .

### C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

**Bài 10.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 60\text{ mm}, CA = 8\text{ cm}$ . Tính các tỉ số lượng giác của góc  $B$ . Từ đó suy ra tỉ số lượng giác của góc  $C$ .

**Bài 11.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 30\text{ cm}, \tan B = \frac{5}{12}$ . Tính độ dài các đoạn thẳng  $AC$  và  $BC$ .

**Bài 12.** Tính  $\sin \alpha, \cot \alpha, \tan \alpha$  biết  $\cos \alpha = \frac{1}{5}$ .

**Bài 13.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Tính độ dài các đoạn thẳng  $AC$  và  $BC$  biết:

a)  $AB = 12\text{ cm}, \tan B = \frac{3}{4}$ .      b)  $AB = 15\text{ cm}, \cos B = \frac{5}{13}$ .

---

**Bài 14.** Cho tam giác  $ABC$  vuông ở  $A$ ,  $\widehat{C} = 30^\circ$ ,  $BC = 10\text{cm}$ .

- a) Tính  $AB$ ,  $AC$ .
- b) Kẻ từ  $A$  các đường thẳng  $AM$ ,  $AN$  lần lượt vuông góc với các đường phân giác trong và ngoài của góc  $B$ . Chứng minh  $MN$  song song với  $BC$  và  $MN = BC$ .
- c) Chứng minh các tam giác  $MAB$  và  $ABC$  đồng dạng. Tìm tỉ số đồng dạng.

## VẤN ĐỀ 5. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN (PHẦN II)

### A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Cho góc nhọn  $\alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ). Dựng tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  sao cho  $\alpha = \widehat{ABC}$ . Từ đó ta có :

$$\cos \alpha = \frac{AB}{BC}; \sin \alpha = \frac{AC}{BC}; \tan \alpha = \frac{AC}{AB}; \cot \alpha = \frac{AB}{AC}.$$

- Với góc nhọn  $\alpha$  bất kỳ, ta luôn có:

$$0 < \sin \alpha < 1; 0 < \cos \alpha < 1.$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1.$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

- Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cosin góc kia, tang góc này bằng cotang góc kia.
- Bảng tỉ số lượng giác của các góc đặc biệt:

$\alpha$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
Tỉ số			
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

### B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

#### Dạng 2. Sắp thứ tự dãy các tỉ số lượng giác

*Phương pháp giải:* Để sắp thứ tự dãy các tỉ số lượng giác cho trước ta cần làm được hai bước sau:

*Bước 1:* Đưa về các tỉ số lượng giác trong bài toán cùng loại bằng cách sử dụng tính chất "Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cosin góc kia, tang góc này bằng cotang góc kia"

*Bước 2:* Với góc nhọn  $\alpha, \beta$ , ta có:



---

### C. BÀI TẬP VỀ NHÀ :

**Bài 7.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Biết  $AB = 30\text{cm}$ ,  $\widehat{B} = \alpha$ ,  $\tan \alpha = \frac{5}{12}$ . Tính cạnh  $BC, AC$ .

**Bài 8.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Tính  $\sin B; \sin C$  biết rằng:

a)  $AB = 13; BH = 5;$

b)  $BH = 3; HC = 4.$

**Bài 9.** Dựng góc nhọn  $\alpha$  biết rằng:

a)  $\sin \alpha = \frac{1}{2};$

b)  $\cos \alpha = \frac{2}{3};$

c)  $\tan \alpha = \frac{4}{5};$

d)  $\cot \alpha = \frac{3}{4}.$

**Bài 10.** Sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự từ bé đến lớn.

a)  $\sin 35^\circ, \cos 28^\circ; \sin 34^\circ 72'; \cos 62^\circ; \sin 45^\circ;$

b)  $\cos 37^\circ, \cos 65^\circ 30', \sin 72^\circ, \cos 59^\circ, \sin 47^\circ.$

**Bài 11.** Tính giá trị biểu thức :

a)  $A = \cos^2 52^\circ \sin 45^\circ + \sin^2 52^\circ \cos 45^\circ;$

b)  $B = \sin 45^\circ \cos^2 47^\circ + \sin^2 47^\circ \cos 45^\circ.$

**Bài 12.** Tìm  $\cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$  biết  $\sin \alpha = \frac{1}{5}$ .

**Bài 13.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $\widehat{C} = 30^\circ, BC = 10\text{cm}$ .

a) Tính độ dài các đoạn thẳng  $AB, AC$ .

b) Kẻ từ  $A$  các đoạn thẳng  $AM, AN$  lần lượt vuông góc với các đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc  $B$ . Chứng minh  $MN$  song song với  $BC$  và  $MN = BC$ .

c) Chứng minh tam giác  $MAB$  đồng dạng với tam giác  $ABC$ . Tìm tỉ số đồng dạng.

**Bài 14.** Không dùng bảng số và máy tính, hãy tính :

a)  $A = \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 70^\circ.$

b)  $A = \sin^2 5^\circ + \sin^2 25^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 65^\circ + \sin^2 85^\circ.$

**Bài 15.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB < AC$ ,  $\widehat{C} = \alpha < 45^\circ$ , đường trung tuyến  $AM$ , đường cao  $AH$ ,  $MA = MB = MC = a$ . Chứng minh :

a)  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$

b)  $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha;$

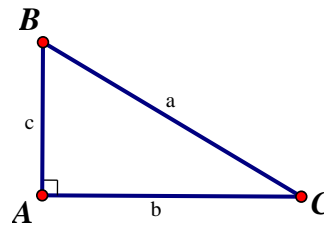
c)  $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha.$

---

## VẤN ĐỀ 6. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG (PHẦN I).

### A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

- Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $BC = a, AC = b, AB = c$ . Ta có :
- Trong một tam giác vuông :  
 $b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C$ ;  
 $c = a \cdot \sin C = a \cdot \cos B$ ;  
 $b = c \cdot \tan B = c \cdot \cot C$ ;  
 $c = b \cdot \tan C = b \cdot \cot B$ .
- Cạnh góc vuông = (cạnh huyền)  $\times$  (sin góc đối)  
= (cạnh huyền)  $\times$  (cosin góc kề)
- Cạnh góc vuông = (cạnh góc vuông)  $\times$  (tang góc đối)  
= (cạnh góc vuông còn lại)  $\times$  (cotang góc kề).



### B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN.

#### Dạng 1. Giải tam giác vuông

Phương pháp giải:

1. Giải tam giác là tính độ dài các cạnh và số đo các góc dựa vào dữ kiện cho trước của bài toán.
2. Trong tam giác vuông, ta dùng hệ thức giữa cạnh và các góc của một tam giác vuông và sử dụng máy tính cầm tay hoặc bảng lượng giác để tính các yếu tố còn lại.
3. Các bài toán về giải tam giác vuông bao gồm :
  - i) Giải tam giác vuông khi biết độ dài một cạnh và số đo một góc nhọn.
  - ii) Giải tam giác vuông khi biết độ dài hai cạnh.

\* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

**Bài 1.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , có  $BC = a, AC = b, AB = c$ . Giải tam giác  $ABC$ , biết rằng :

a)  $b = 10\text{cm}; \hat{C} = 30^\circ$ ;

b)  $a = 20\text{cm}; \hat{B} = 35^\circ$ .

**Bài 2.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , có  $BC = a, AC = b, AB = c$ . Giải tam giác  $ABC$ , biết rằng :

a)  $a = 15\text{cm}; b = 10\text{cm}$ ;

b)  $b = 12\text{cm}; c = 7\text{cm}$ .

\* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

**Bài 3.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , có  $BC = a, AC = b, AB = c$ . Giải tam giác  $ABC$ , biết rằng:



a)  $b = 28\text{cm}; c = 21\text{cm};$

b)  $a = 10\text{cm}; b = 6\text{cm}.$

**Bài 4.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , có  $BC = a, AC = b, AB = c$ . Giải tam giác  $ABC$ , biết rằng:

a)  $c = 3,8\text{cm}; \hat{B} = 51^\circ;$

b)  $a = 11\text{cm}; \hat{C} = 60^\circ.$

## Dạng 2. Tính cạnh và góc của tam giác

*Phương pháp giải:* Làm xuất hiện tam giác vuông để áp dụng các hệ thức trên bằng cách kẻ thêm đường cao.

\* Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

**Bài 5.** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = 11\text{cm}, \widehat{ABC} = 38^\circ$  và  $\widehat{ACB} = 30^\circ$ . Gọi  $N$  là chân đường vuông góc hạ từ  $A$  xuống cạnh  $BC$ . Hãy tính:

a) Độ dài đoạn thẳng  $AN$ ;

b) Độ dài đoạn thẳng  $AC$ .

**Bài 6.** Cho tam giác  $ABC$ , có  $BC = 6\text{cm}, \hat{B} = 60^\circ; \hat{C} = 40^\circ$ . Hãy tính:

a) Chiều cao  $CH$  và cạnh  $AC$ ;

b) Diện tích tam giác  $ABC$ .

\* Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:

**Bài 7.** Cho tam giác  $ABC$  có  $\hat{B} = 60^\circ, \hat{C} = 50^\circ, AC = 3,5\text{cm}$ . Tính diện tích tam giác  $ABC$  (làm tròn đến hàng đơn vị).

**Bài 8.** Tứ giác  $ABCD$  có các đường chéo cắt nhau tại  $O$ . Cho biết  $AC = 4\text{cm}, BD = 5\text{cm}, \widehat{AOB} = 50^\circ$ . Tính diện tích tứ giác  $ABCD$ .

## C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

**Bài 9.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , có  $BC = a, AC = b, AB = c$ . Giải tam giác  $ABC$ , biết rằng:

a)  $b = 5,4\text{cm}, \hat{C} = 30^\circ;$

b)  $c = 10\text{cm}, \hat{C} = 45^\circ.$

**Bài 10.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $BC = a, AC = b, AB = c$ . Giải tam giác  $ABC$ , biết rằng:

a)  $a = 15\text{cm}, b = 10\text{cm};$

b)  $b = 12\text{cm}, c = 7\text{cm}.$

**Bài 11.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $BC = a, AC = b, AB = c$ . Giải tam giác  $ABC$ , biết rằng:

a)  $\hat{A} = 40^\circ, AC = 8;$

b)  $\hat{C} = 28^\circ, AB = 5;$

c)  $AB = 8, BC = 15.$

**Bài 12.** Cho tam giác  $ABC$  có  $\hat{B} = 60^\circ, \hat{C} = 50^\circ, AC = 35\text{cm}$ . Tính diện tích tam giác  $ABC$ .

---

**Bài 13.** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ, \widehat{C} = 40^\circ, AB = 4\text{cm}, AD = 3\text{cm}$ . Tính diện tích tứ giác  $ABCD$ .

**Bài 14.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , có đường cao  $AH$ ;  $HB = 9\text{cm}, HC = 16\text{cm}$ .

a) Tính  $AB, AC, AH$ .

b) Gọi  $D$  và  $E$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $H$  trên  $AB$  và  $AC$ . Tứ giác  $ADHE$  là hình gì?

c) Tính chu vi và diện tích của tứ giác  $ADHE$ .

**Bài 15.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Biết  $AB = 3\text{cm}, BC = 5\text{cm}$ .

a) Giải tam giác vuông  $ABC$  (số đo góc làm tròn đến độ).

b) Từ  $B$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $BC$ , đường thẳng này cắt đường thẳng  $AC$  tại  $D$ . Tính độ dài các đoạn thẳng  $AD, BD$ .

c) Gọi  $E, F$  lần lượt là hình chiếu của  $A$  trên  $BC$  và  $BD$ . Chứng minh :

$$BF \cdot BD = BE \cdot BC.$$

## VẤN ĐỀ 7. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG (PHẦN II)

### A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$   
có  $BC = a, AC = b, AB = c$ . Ta có:

$$b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C;$$

$$c = a \cdot \sin C = a \cdot \cos B;$$

$$b = c \cdot \tan B = c \cdot \cot C;$$

$$c = b \cdot \tan C = b \cdot \cot B.$$

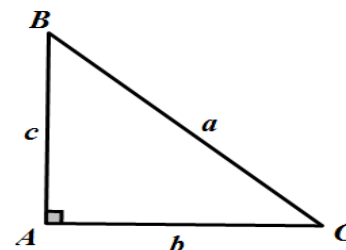
- Trong một tam giác vuông

$$\text{Cạnh góc vuông} = (\text{Cạnh huyền}) \times (\sin \text{ góc đối})$$

$$= (\text{Cạnh huyền}) \times (\cos \text{ góc kề})$$

$$\text{Cạnh góc vuông} = (\text{Cạnh góc vuông}) \times (\tan \text{ góc đối})$$

$$= (\text{Cạnh góc vuông}) \times (\cot \text{ góc kề})$$



### B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

#### Dạng 3. Toán ứng dụng thực tế

*Phương pháp giải:* Dùng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông để giải quyết tình huống trong thực tế.

*\*Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

**Bài 1.** Một cột đèn có bóng trên mặt đất dài  $7,5m$ . Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ bằng  $42^\circ$ . Tính chiều cao của cột đèn.

**Bài 2.** Một cầu trượt trong công viên có độ dốc là  $28^\circ$  và có độ cao là  $2,1m$ . Tính độ dài của mặt cầu trượt (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

*\*Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

**Bài 3.** Một cột đèn có bóng trên mặt đất dài  $5m$ . Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ bằng  $50^\circ$ . Tính chiều cao của cột đèn.

**Bài 4.** Một cột đèn điện  $AB$  cao  $6m$  có bóng in trên mặt đất là  $AC$  dài  $3,5m$ . Hãy tính góc  $\widehat{BCA}$  (làm tròn đến phút) mà tia sáng mặt trời tạo với mặt đất.

---

#### Dạng 4. Toán tổng hợp

*Phương pháp giải:* Vận dụng linh hoạt một số hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông để giải toán.

*\*Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

**Bài 5.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , có  $AC > AB$ . Đường cao  $AH$ . Gọi  $D, E$  lần lượt là hình chiếu của  $H$  trên  $AB, AC$ .

- Chứng minh  $AD \cdot AB = AE \cdot AC$  và tam giác  $ABC$  đồng dạng với tam giác  $AED$ .
- Cho biết  $BH = 2\text{cm}, HC = 4,5\text{cm}$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $DE$ .
- Tính số đo góc  $\widehat{ABC}$  (làm tròn đến độ).
- Tính diện tích tam giác  $ADE$ .

*\*Học sinh tự luyện bài tập sau tại lớp:*

**Bài 6.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$ . Qua  $B$  kẻ đường thẳng vuông góc với đường chéo  $AC$  tại  $H$ . Gọi  $E, F, G$  theo thứ tự là trung điểm của  $AH, BH, CD$ .

- Chứng minh tứ giác  $EFCH$  là hình bình hành.
- Chứng minh  $\widehat{BEG} = 90^\circ$ .
- Cho biết  $BH = h, \widehat{BAC} = \alpha$ . Tính  $S_{ABCD}$  theo  $h$  và  $\alpha$ .
- Tính độ dài đường chéo  $AC$  theo  $h$  và  $\alpha$ .

#### C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

**Bài 7.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  biết  $AB = 21\text{cm}, \widehat{C} = 40^\circ$ . Tính độ dài đường phân giác  $BD$  của góc  $\widehat{ABD}, D$  nằm trên cạnh  $AC$ .

**Bài 8.** Cho tam giác  $ABC$  vuông ở  $A, \widehat{C} = 30^\circ, BC = 10\text{cm}$ .

- Tính  $AB, AC$ .
- Kẻ từ  $A$  các đường thẳng  $AM, AN$  lần lượt vuông góc với các đường phân giác trong và ngoài của góc  $B$ . Chứng minh  $MN$  song song với  $BC$  và  $2MN = BC$ .
- Chứng minh tam giác  $MAB$  đồng dạng với tam giác  $ABC$ . Tìm tỉ số đồng dạng.

**Bài 9.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , có  $AC > AB$ , đường cao  $AH$ . Gọi  $D, E$  lần lượt là hình chiếu của  $H$  trên  $AB, AC$ .

- Chứng minh  $AD \cdot AB = AE \cdot AC$  và tam giác  $ABC$  đồng dạng với tam giác  $AED$ .
- Cho biết  $BH = 2\text{cm}, HC = 4,5\text{cm}$ . Tính:
  - Độ dài đoạn thẳng  $DE$ ;
  - Số đo  $\widehat{ABC}$  (làm tròn đến độ);
  - Diện tích tam giác  $ADE$ .

**Bài 10.** Chứng minh :

- a) Diện tích của một tam giác bằng nửa tích của hai cạnh nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa hai cạnh ấy.
- b) Diện tích của một hình bình hành bằng tích của hai cạnh kề nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa hai cạnh ấy.

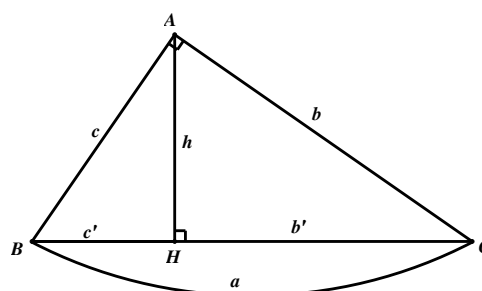
## ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 3

### A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### 1. Hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông

Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Khi đó ta có các hệ thức sau :

- $AB^2 = BH.BC$  hay  $c^2 = a.c'$
- $AC^2 = CH.BC$  hay  $b^2 = a.b'$
- $AB.AC = BC.AH$  hay  $c.b = a.h$
- $HA^2 = HB.HC$  hay  $h^2 = c'.b'$
- $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$  hay  $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}$
- $BC^2 = AB^2 + AC^2$  (Định lý Pitago)



#### 2. Tỷ số lượng giác của góc nhọn

- Cho góc nhọn  $\alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ). Dựng tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  sao cho  $\alpha = \widehat{ABC}$ . Từ đó ta có :

$$\cos \alpha = \frac{AB}{BC}; \sin \alpha = \frac{AC}{BC}; \tan \alpha = \frac{AC}{AB}; \cot \alpha = \frac{AB}{AC}.$$

- Với góc nhọn  $\alpha$  bất kỳ, ta luôn có :  
 $0 < \sin \alpha < 1; 0 < \cos \alpha < 1;$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1;$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

- Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cosin góc kia, tang góc này bằng cotang góc kia.
- Bảng tỷ số lượng giác của các góc đặc biệt :

$\alpha$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
Tỷ số			
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

### 3. Hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông

- Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $BC = a; AC = b; AB = c$ . Ta có :
 
$$b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C;$$

$$c = a \cdot \sin C = a \cdot \cos B;$$

$$b = c \cdot \tan B = c \cdot \cot C;$$

$$c = b \cdot \tan C = b \cdot \cot B.$$
- Trong một tam giác vuông
 

Cạnh góc vuông = ( cạnh huyền )  $\times$  ( sin góc đối )

= ( cạnh huyền )  $\times$  ( cosin góc kề )

Cạnh góc vuông = ( cạnh góc vuông )  $\times$  ( tang góc đối )

= ( cạnh góc vuông còn lại )  $\times$  ( cotang góc kề )

### B. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Trong các đoạn thẳng  $AB, AC, BC, AH, HB, HC$ , hãy tính độ dài các đoạn thẳng còn lại nếu biết :

- $AB = 6\text{ cm}$  và  $AC = 9\text{ cm}$  ;
- $AB = 15\text{ cm}$  và  $HB = 9\text{ cm}$  ;
- $AC = 44\text{ cm}$  và  $BC = 55\text{ cm}$  .

**Bài 2.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  ( $AB < AC$ ) có đường cao  $AH$  và  $AH = 12\text{ cm}; BC = 25\text{ cm}$  .

- Tìm độ dài các đoạn thẳng  $BH, CH, AB$  và  $AC$  .
- Vẽ trung tuyến  $AM$ . Tìm số đo của góc  $\widehat{AMH}$  .
- Tính diện tích tam giác  $AHM$  .

**Bài 3.** Cho tam giác  $ABC$  có đường cao  $CH$ ,  $BC = 12\text{ cm}, \widehat{B} = 60^\circ$  và  $\widehat{C} = 40^\circ$  .

- Tính độ dài các đoạn thẳng  $CH$  và  $AC$  .
- Tính diện tích tam giác  $ABC$  .

**Bài 4.** Cho tam giác  $ABC$  vuông ở  $A$ , đường cao  $AH$ ,  $AB = 3\text{ cm}, AC = 4\text{ cm}$  .

- Tính độ dài các đoạn thẳng  $BC$  và  $AH$  .
- Tính số đo các góc  $\widehat{B}, \widehat{C}$  .
- Đường phân giác trong của góc  $\widehat{A}$  cắt cạnh  $BC$  tại  $E$ . Tính độ dài các đoạn thẳng  $BE$  và  $CE$  .

**Bài 5.** Cho tam giác nhọn  $ABC$  có đường cao  $AH$ . Từ  $H$  kẻ  $HE$  vuông góc với  $AB$  ( $E$  thuộc  $AB$ ) và kẻ  $HF$  vuông góc với  $AC$  ( $F$  thuộc  $AC$ ).

- a) Chứng minh  $AE \cdot AB = AF \cdot AC$ .
- b) Cho biết  $AB = 4\text{cm}$ ,  $AH = 3\text{cm}$ . Tính độ dài các đoạn thẳng  $AE$  và  $BE$ .
- c) Cho biết  $\widehat{HAC} = 30^\circ$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $FC$ .

**Bài 6.** Tứ giác  $MNEF$  vuông tại  $M, F$ , có  $EF$  là đáy lớn, hai đường chéo  $ME$  và  $NF$  vuông góc với nhau tại  $O$ .

- a) Cho biết  $MN = 9\text{cm}$  và  $MF = 12\text{cm}$ . Hãy:
  - i) Giải tam giác  $MNF$ .
  - ii) Tính độ dài các đoạn thẳng  $MO, FO$ .
  - iii) Kẻ  $NH$  vuông góc với  $EF$  tại  $H$ . Tính diện tích tam giác  $FNE$ . Từ đó tính diện tích tam giác  $FOH$ .
- b) Chứng minh  $MF^2 = MN \cdot FE$ .

**Bài 7.** Cho tam giác  $DEF$  biết  $DE = 6\text{cm}$ ,  $DF = 8\text{cm}$ ,  $EF = 10\text{cm}$ .

- a) Chứng minh rằng  $DEF$  là tam giác vuông.
- b) Vẽ đường cao  $DK$ . Hãy tính  $DK, FK$ .
- c) Giải tam giác vuông  $EDK$ .
- d) Vẽ phân giác trong  $DM$  của tam giác  $DEF$ . Tính các độ dài các đoạn thẳng  $ME, MF$ .
- e) Tính  $\sin F$  trong các tam giác vuông  $DFK$  và  $DEF$ . Từ đó suy ra  $ED \cdot DF = DK \cdot EF$

**Bài 8.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $\widehat{B} = 60^\circ$  và  $BC = 6\text{cm}$ .

- a) Tính độ dài các cạnh  $AB, AC$ .
- b) Trên tia đối của tia  $BA$  lấy điểm  $D$  sao cho  $BD = BC$ . Chứng minh  $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$
- c) Dường thẳng song song với phân giác góc  $\widehat{CBD}$  kẻ từ  $A$  cắt  $CD$  tại  $H$ . Chứng minh 
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2}$$

**Bài 9.** Cho hình vuông  $ABCD$  và điểm  $E$  tùy ý trên cạnh  $BC$ . Tia  $Ax$  vuông góc với  $AE$  tại  $A$  cắt  $CD$  kéo dài tại  $F$ . Kẻ trung tuyến  $AI$  của tam giác  $AEF$  và kéo dài cắt cạnh  $CD$  tại  $K$ .

- a) Chứng minh  $AE = AF$ .
- b) Chứng minh các tam giác  $AKF, CAF$  đồng dạng và  $AF^2 = KF \cdot CF$

---

c) Cho  $AB = 4\text{cm}$ ;  $BE = \frac{3}{4}BC$ . Tính diện tích tam giác  $AEF$ .

d)  $AE$  kéo dài cắt  $CD$  tại  $J$ . Chứng minh  $\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AJ^2}$  không phụ thuộc vào vị trí điểm  $E$ .

**Bài 10.** Không dùng máy tính, sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự từ bé đến lớn :

a)  $\sin 24^\circ, \cos 35^\circ, \sin 54^\circ, \cos 70^\circ, \sin 78^\circ$ .

b)  $\cot 24^\circ, \tan 16^\circ, \cot 57^\circ 67', \sin 78^\circ$ .

**Bài 11.** Không dùng máy tính, sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự tăng dần :

a)  $\sin 40^\circ, \cos 28^\circ, \sin 65^\circ, \cos 88^\circ, \cos 20^\circ$

b)  $\tan 32^\circ 48', \cot 28^\circ 36', \tan 56^\circ 32', \cot 67^\circ 18'$ .

**Bài 12.** Cho góc  $\alpha$  nhọn.

a) Tính  $\sin \alpha, \cot \alpha, \tan \alpha$  biết  $\cos \alpha = \frac{1}{5}$ .

b) Tính  $\cos \alpha, \cot \alpha, \tan \alpha$  biết  $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ .

c) Cho  $\tan \alpha = 2$ . Tính  $\sin \alpha$  và  $\cot \alpha$ .

d) Cho  $\cot \alpha = 3$ . Tính  $\sin \alpha, \cos \alpha$  và  $\tan \alpha$ .

**Bài 13.** Một cột cờ cao  $7\text{m}$  có bóng trên mặt đất dài  $4\text{m}$ . Tính góc  $\alpha$  mà tia sáng mặt trời tạo với mặt đất (làm tròn đến phút).

**Bài 14.** Một cột đèn có bóng trên mặt đất dài  $6,5\text{m}$ , các tia sáng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ  $44^\circ$ . Tính chiều cao của cột đèn.

**Bài 15.**

a) Tính giá trị biểu thức  $A = \cos^2 20^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 70^\circ$ .

b) Rút gọn biểu thức  $B = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$ .

**Bài 16.** Cho  $0^\circ < x < 90^\circ$ . Chứng minh các đẳng thức sau :

a)  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$ .

b)  $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x$ .

c)  $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2\cos^2 x$ .

**Bài 17.** Cho  $0^\circ < x < 90^\circ$ . Chứng minh các đẳng thức sau :



---

---

a)  $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$

b)  $\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin x}$

c)  $\frac{\sin x + \cos x - 1}{1 - \cos x} = \frac{\cos x}{\sin x - \cos x + 1}$

**HƯỚNG DẪN GIẢI**  
**CHỦ ĐỀ 3. HỆ THỨC LƯỢNG**  
**TRONG TAM GIÁC VUÔNG**

**VẤN ĐỀ 1.**

**Bài 1.** Hình 1:  $x = 3,6; y = 6,4;$

Hình 2:  $x = 7,2; y = 12,8;$

Hình 3:  $x = \frac{35\sqrt{74}}{74}; y = \sqrt{74}.$

**Bài 2.** a)  $BH = 1,8; CH = 3,2;$

c)  $AB = 5cm; BC = 13cm;$

$$BH = \frac{25}{13}cm; CH = \frac{144}{13}cm.$$

**Bài 7.**  $BH = 50cm; CH = 72cm.$

**Bài 8.**  $BH = 9cm; CH = 16cm.$

**Bài 9.**  $BH = \frac{32}{17}cm; CH = \frac{225}{34}cm.$

**Bài 10.** a)  $AB = 7,5cm;$   
 $AC = 10cm; BC = 12,5cm; HC = 8cm.$

b)  $AH = 3\sqrt{3}cm;$   
 $AC = 6\sqrt{3}cm; CH = 9cm.$

**Bài 11.**  $S = 150cm^2.$

**Bài 12.** a)  $AH = 3,6cm.$

b)  $BH = 4,8cm; CH = 2,7cm.$

**Bài 13.** Đường cao :  $6,72$  ; Độ dài hai đoạn  
chia cạnh huyền :  $1,96 ; 23,04.$

**Bài 14.**  $HB = \frac{75}{7}cm; CH = 21cm.$

**Bài 15.**  $AB = 9cm; BC = 20cm; BD = 15cm.$

**Bài 5.** a)  $BD = 17$  ; b)  $AH = \frac{120}{7}$  ;

$$AH = 2,4; BC = 5;$$

b)  $AB = 15; AC = 20; BC = 25; AH = 12.$

**Bài 3.**  $BH = 5,4; HC = 9,6.$

**Bài 4.**  $BH = 4,5; CH = 8.$

**Bài 5.**  $x = \sqrt{5}; y = 2\sqrt{5}.$

**Bài 6.** a)  $BH = 1,8cm; CH = 3,2cm;$

$$AH = 2,4cm; AC = 4cm;$$

b)  $AB = 65cm; AC = 156cm;$

$$BC = 169cm; BH = 25cm;$$

**VẤN ĐỀ 2**

**Bài 1.** a)  $CD.CM = CE.CN (= CH^2)$  ;

b)  $\triangle CMN \sim \triangle CDE$  (c.g.c) vì

$$\hat{C} \text{ chung và } \frac{CM}{CE} = \frac{CN}{CD}.$$

**Bài 2.** a)  $\triangle ADI = \triangle CDL$  (g.c.g)

$\Rightarrow DI = DL \Rightarrow \triangle DIL$  là tam giác cân ;

$$b) \frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2} = \frac{1}{DL^2} + \frac{1}{DK^2} = \frac{1}{DC^2}$$

**Bài 3.** a)  $AB^2 + CH^2 = (BH^2 + AH^2)$

$$+ CH^2 = BH^2 + (AH^2 + CH^2)$$

$$= BH^2 + AC^2 ;$$

b) Làm tương tự câu a) bài 1, có  
 $AM.AB = AN.AC (= AH^2).$

**Bài 4.**  $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{4}{BD} \Rightarrow đpcm.$

c)  $\triangle BHI \sim \triangle IKC$  (g.g)

$$\Rightarrow \widehat{HBI} = \widehat{IKC}.$$

$$\Rightarrow \Delta HKD \sim \Delta HBI \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{HK}{HB} = \frac{HD}{HI}$$

$$\Leftrightarrow HK \cdot HI = HD \cdot DB = AH^2.$$

$$= \left( \frac{AB^2}{BC} : \frac{AC^2}{BC} \right) \cdot \frac{AC}{AB}$$

$$= \left( \frac{AB}{AC} \right)^4 \cdot \frac{AC}{AB} = \left( \frac{AB}{AC} \right)^3$$

**Bài 6. a)**  $OB = 9 \text{ (cm)}$ ;  $OD = 16 \text{ (cm)}$

b)  $OA = 12$ ;  $AC = \frac{100}{3}$ ;

c)  $S_{ABCD} = \frac{1250}{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$

b)  $BC \cdot BE \cdot CF = BC \cdot \frac{HB^2}{AB} \cdot \frac{HC^2}{AC}$   
 $= \frac{BC}{AB \cdot AC} \cdot (HB \cdot HC)^2$

$$= \frac{1}{AH} \cdot AH^4 = AH^3$$

**Bài 7. a)**  $\frac{FB}{FC} = \frac{HB^2}{AB} : \frac{HC^2}{AC}$

**Bài 8. a)**  $AH$  là đường trung bình của  $\Delta BCD \Rightarrow BD = 2AH.$

b)  $\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{BD^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{4AH^2}.$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{BC^2}{CE^2}} = \sqrt[3]{\frac{BD^2}{CE^2}} + 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{BC^2}{CE^2}} = \left( \frac{AB}{AC} \right)^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{BC^2}{CE^2}} = \left( \frac{BC}{AC} \right)^2 \Leftrightarrow \frac{BC}{CE} = \left( \frac{BC}{AC} \right)^3$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{AC}{BC} \right)^3 = \frac{CE}{AC}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \widehat{ABC} = \frac{CE \cdot AC}{AC^2} = \frac{HC^2}{AC^2}$$

$$= \cos^2 \widehat{ACB} \text{ (đpcm)}$$

### VẤN ĐỀ 3

**Bài 1. a)**  $DE = 6 \text{ cm}$ ; b) Chứng minh  $M$  là trung điểm  $BH$ ,  $N$  là trung điểm  $CH$ ; c)  $S = 19,5 \text{ cm}^2.$

**Bài 2. a)**  $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{HB \cdot BC}{HC \cdot BC} = \frac{HB}{BC}$

b)  $\frac{ED}{EC} = \frac{HB^2}{AB} : \frac{HC^2}{AC}$

$$= \left( \frac{AB^2}{BC} : \frac{AC^2}{BC} \right) \cdot \frac{AC}{AB}$$

$$= \left( \frac{AB}{AC} \right)^4 \cdot \frac{AC}{AB} = \left( \frac{AB}{AC} \right)^3$$

c)  $BE \cdot CF \cdot BC = \frac{HB^2}{AB} \cdot \frac{HC^2}{AC} \cdot BC$

$$= (HB \cdot HC)^2 \cdot \frac{BC}{AB \cdot AC}$$

$$= AH^4 \cdot \frac{1}{AH} = AH^3 = DE^3 ;$$

d)  $\sqrt[3]{BC^2} = \sqrt[3]{BD^2} + \sqrt[3]{CE^2}$

**Bài 3. a)**  $BH = 3,6 \text{ cm}$ ;  $CH = 6 \text{ cm}$ ;  
 $AH = 4,8 \text{ cm}$ ;  $BC = 10 \text{ cm}.$

b)  $BH = 3,6 \text{ cm}$ ;  $CH = 6,4 \text{ cm}$ ;  
 $AH = 4,8 \text{ cm}$ ;  $AC = 8 \text{ cm}.$

**Bài 4.** Cạnh huyền :  $100 \text{ cm}$ ; Các cạnh góc vuông :  $60 \text{ cm}$  và  $80 \text{ cm}.$

**Bài 5.**  $HB = 22,4 \text{ cm}$ ;  $HC = 12,6 \text{ cm}.$

**Bài 6.**  $S = \frac{34560}{169} \approx 204,5 \text{ cm}^2$ .

**Bài 7.** a)  $AB = 4 \text{ cm}$ ;  $AB = 2\sqrt{5} \text{ cm}$ ;  
 $AC = 4\sqrt{5} \text{ cm}$ ;  $BC = 10 \text{ cm}$ .

b)  $AB = \frac{5\sqrt{281}}{16} \text{ cm}$ ;  $AC = \sqrt{281} \text{ cm}$ ;

$BC = \frac{281}{16} \text{ cm}$ ;  $BH = \frac{25}{16} \text{ cm}$ .

**Bài 8.**  $BH = 9 \text{ cm}$ ;  $BH = 16 \text{ cm}$ .

**Bài 9.** Tương tự Bài 3.

**Bài 10.**  $P = 35 + 21\sqrt{5} \approx 81,95 \text{ (cm)}$ .

**Bài 11.**  $S = 1500 \text{ cm}^2$ .

#### VẤN ĐỀ 4

**Bài 1.**  $\sin B = \frac{3}{5}$ ;  $OK = \sqrt{41}$ ;  $OH = 3$ .

**Bài 2.** a)  $\sin B = \frac{12}{13} \approx 0,9231$ ;

$\sin C = \frac{5}{13} \approx 0,3846$ .

b)  $\sin B = \sqrt{\frac{4}{7}} \approx 0,7559$ ;

$\sin C = \sqrt{\frac{3}{7}} \approx 0,6547$ .

**Bài 3.** a) Vì  $OK = 2\sqrt{2}$ .

b)  $\sin B = \cos A = \frac{\sqrt{10}}{5}$ ;

$\cos B = \sin A = \frac{\sqrt{15}}{5}$ ;

$\tan B = \cot A = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ;

$\cot B = \tan A = \frac{3}{\sqrt{6}}$ .

**Bài 12.** a)  $BC = 6 \text{ cm}$ ;  $CK = 4,8 \text{ cm}$ ;  
 $BK = 3,6 \text{ cm}$ ;  $AK = 6,4 \text{ cm}$ .

b)  $CB \cdot CH = CK^2 = CA \cdot CI$ .

c)  $\frac{1}{KM^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{KI^2}$   
 $= \frac{1}{CH^2} + \frac{1}{CI^2}$ .

d)  $\frac{AI}{BH} = \frac{KA^2}{AC} \cdot \frac{KB^2}{BC}$   
 $= \left( \frac{AC^2}{AB} \cdot \frac{BC^2}{AB} \right) \cdot \frac{BC}{AC}$   
 $= \left( \frac{AC}{BC} \right)^4 \cdot \frac{BC}{AC} = \left( \frac{AC}{BC} \right)^3$ .

**Bài 4.**  $\cos C = 0,8$ ;  $\sin C = 0,6$ ;  $\cot C = \frac{4}{3}$ ;  
 $\tan C = \frac{3}{4}$ .

**Bài 5.**  $AC = 8$ ;  $BC = \sqrt{89}$ .

**Bài 6.**  $\sin B = \cos C = \frac{3}{5}$ ;

$\cos B = \sin A = \frac{4}{5}$ ;

$\tan B = \cot C = \frac{3}{4}$ ;

$\cot B = \tan C = \frac{4}{3}$ .

**Bài 7.** a) Vì  $HN = \frac{18\sqrt{13}}{13}$

b)  $\sin B = \cos C = \frac{\sqrt{10}}{5}$ ;

$\cos B = \sin C = \frac{\sqrt{15}}{5}$ ;

$\tan B = \cot C = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ;

---

$$\cot B = \tan C = \frac{3}{\sqrt{6}}.$$

**Bài 8.**  $\cos C = 0,8$  ;  $\sin C = 0,6$  ;  $\cot C = \frac{4}{3}$  ;

$$\tan C = \frac{3}{4}.$$

**Bài 9.**  $AC = \frac{5}{2}$  ;  $BC = \frac{13}{2}$  .

**Bài 10.**  $O \in Ay$  .

**Bài 13.** a)  $AC = 9$  ;  $BC = 15$  .

$$AN = BM.$$

c)  $\Delta MAB \simeq \Delta ACB$  (g.g).

### VẤN ĐỀ 5

**Bài 1.** a)  $\sin 20^\circ < \sin 70^\circ$  ;

b)  $\cos 60^\circ > \cos 70^\circ$  ;

c)  $\tan 73^\circ 20' > \tan 45^\circ$  ;

d)  $\cot 20^\circ > \cot 37^\circ 40'$  .

**Bài 11.**  $AC = 72$  ;  $BC = 12\sqrt{61}$  .

**Bài 12.**  $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$  ;  $\tan \alpha = 2\sqrt{6}$  ;

$$\cot \alpha = \frac{\sqrt{6}}{12}.$$

b)  $ANBM$  là hình chữ nhật vì  $AN \parallel BM$  ;

**Bài 2.** a)  $\cot 71^\circ (= \tan 19^\circ)$

$$< \cot 69^\circ 15' (= \tan 20^\circ 85') \\ < \tan 28^\circ < \tan 38^\circ < \tan 42^\circ;$$

b)  $\cos 79^\circ 13' = \sin 10^\circ 87'$

$$< \sin 32^\circ < \sin 36^\circ \\ < \cos 51^\circ = \sin 39^\circ.$$

**Bài 3.** a)  $\sin 40^\circ < \sin 70^\circ;$

b)  $\cos 80^\circ < \cos 50^\circ;$

c)  $\tan 73^\circ 20' > \tan 65^\circ;$

d)  $\cot 53^\circ < \cot 37^\circ 40'.$

**Bài 4.** a)  $\cot 79^\circ 15' = \tan 10^\circ 85'$

$$< \tan 12^\circ < \tan 28^\circ \\ < \cot 61^\circ (= \tan 29^\circ) < \tan 58^\circ;$$

b)  $\cos 85^\circ < \cos 67^\circ (= \sin 23^\circ)$

$$< \cos 63^\circ 41' (= \sin 26^\circ 59') \\ < \sin 56^\circ < \sin 74^\circ.$$

**Bài 5.** Dựng một tam giác vuông có:

a) Độ dài cạnh góc vuông là 3, cạnh huyền là 5, góc đối diện với cạnh góc vuông đó là góc  $\alpha$ ;

b) Độ dài cạnh góc vuông là 4, cạnh huyền là 7, góc giữa cạnh góc vuông và cạnh huyền đó là  $\alpha$ ;

c) Độ dài hai cạnh góc vuông là 3 và 2, góc đối diện với cạnh góc vuông độ dài 3 là góc  $\alpha$ ;

d) Độ dài hai cạnh góc vuông là 5 và 6, góc đối diện với cạnh góc vuông độ dài 6 là góc  $\alpha$ .

**Bài 6.** Dựng một tam giác vuông có:

a) Độ dài cạnh góc vuông là 2, cạnh huyền là 3, góc đối diện với cạnh góc vuông đó là góc  $\alpha$ ;

b) Độ dài cạnh góc vuông là 2, cạnh huyền là 5, góc giữa cạnh góc vuông và cạnh huyền đó là góc  $\alpha$ ;

c) Độ dài hai cạnh góc vuông là 3 và 2, góc đối diện với cạnh góc vuông độ dài 3 là góc  $\alpha$ ;

d) Độ dài hai cạnh góc vuông là 4 và 5, góc đối diện với cạnh góc vuông có độ dài 5 là góc  $\alpha$ .

**Bài 7.**  $BC = 32,5\text{cm}; AC = 12,5\text{cm}$

**Bài 8.** a)  $\sin B = \frac{12}{13}; \sin C = \frac{5}{13}$

b)  $\sin B = \frac{2}{\sqrt{7}}; \sin C = \frac{\sqrt{21}}{7}$

**Bài 9.** Dựng một tam giác vuông có:

a) Độ dài cạnh góc vuông là 1, cạnh huyền là 2, góc đối diện với cạnh góc vuông đó là góc  $\alpha$ ;

b) Độ dài cạnh góc vuông là 2, cạnh huyền là 3, góc giữa cạnh góc vuông và cạnh huyền đó là góc  $\alpha$ ;

c) Độ dài hai cạnh góc vuông là 4 và 5, góc đối diện với cạnh góc vuông độ dài 4 là góc  $\alpha$ ;

d) Độ dài hai cạnh góc vuông là 3 và 4, góc đối diện với cạnh góc vuông độ dài 4 là góc  $\alpha$ .

**Bài 10.** a)  $\cos 62^\circ (= \sin 28^\circ) < \sin 34^\circ$

$$< \sin 35^\circ < \sin 45^\circ \\ < \cos 28^\circ (= \sin 62^\circ);$$

b)  $\cos 65^\circ 30' (= \sin 24^\circ 70')$

$$< \cos 59^\circ (= \sin 31^\circ) \\ < \sin 47^\circ < \cos 37^\circ (= \sin 53^\circ) \\ < \sin 72^\circ.$$

**Bài 11.** a)  $A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ; b)  $B = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

**Bài 12.**  $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}, \tan \alpha = \frac{1}{2\sqrt{6}},$

$$\cot \alpha = 2\sqrt{6}.$$

**Bài 13.** Tương tự Bài 14. Vấn đề 4.

**Bài 14.** a)  $A = 3$  ; b)  $B = 2,5$ .

**Bài 15.** Góc  $2\alpha$  là góc  $AMH$

a)

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= \frac{AH}{AM} = \frac{2AH}{BC} \\ &= 2 \cdot \frac{AB \cdot AC}{BC^2} = 2 \sin \alpha \cos \alpha;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } 1 + \cos 2\alpha &= 1 + \frac{HM}{AM} = \frac{HC}{AM} \\ &= 2 \frac{HC}{BC} = 2 \frac{AC^2}{BC^2} = 2 \cos^2 \alpha;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } 1 - \cos 2\alpha &= 1 - \frac{HM}{AM} = \frac{HB}{AM} \\ &= 2 \frac{HB}{BC} = 2 \frac{AB^2}{BC^2} = 2 \sin^2 \alpha\end{aligned}$$

### VẤN ĐỀ 6.

**Bài 1.** a)  $a = \frac{20\sqrt{3}}{3}$ ;  $c = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ .

b)  $b = 20 \cdot \sin 35^\circ \approx 11,48$ ;

$c = 20 \cdot \cos 35^\circ \approx 16,38$ .

**Bài 2.** a)  $c = \sqrt{115}$ ;  $\sin B = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \hat{B} \approx 41,8^\circ \Rightarrow \hat{C} \approx 48,2^\circ$ .

b)  $a = \sqrt{193}$ ;  $\tan B = \frac{12}{7}$

$\Rightarrow \hat{B} \approx 59,7^\circ \Rightarrow \hat{C} \approx 30,3^\circ$ .

**Bài 3.** a)  $a = 35$ ;  $\hat{B} \approx 53,1^\circ$ ;  $\hat{C} \approx 36,9^\circ$ ;

b)  $c = 8$ ;  $\hat{B} \approx 41,8^\circ$ ;  $\hat{C} \approx 48,2^\circ$ .

**Bài 4.** a)  $b \approx 2,95$ ;  $a \approx 4,69$ ;  $\hat{C} = 49^\circ$ .

b)  $c \approx 9,53$ ;  $b = 5,5$ ;  $\hat{B} = 30^\circ$ .

**Bài 5.**  $AN \approx 3,65\text{cm}$ ;  $AC \approx 7,3\text{cm}$ .

**Bài 6.** a)  $CH = 3\sqrt{3}\text{cm}$ ;

$AC = 3\sqrt{3}$ ;  $\sin 80^\circ \approx 5,28\text{cm}$ .

b)  $S = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 6,92 \approx 17,98\text{cm}^2$ .

**Bài 7.**  $S \approx 5,09\text{cm}^2$ .

**Bài 8.**  $S = 7,66\text{cm}^2$ .

**Bài 9.** a)  $c \approx 3,12$ ;  $a \approx 6,24$ ;  $\hat{B} = 60^\circ$ .

b)  $a = 10\sqrt{2}$ .

**Bài 10.** a)  $c = \sqrt{115}$ ;  $\sin B = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \hat{B} \approx 41,8^\circ \Rightarrow \hat{C} = 48,2^\circ$ .

b)  $a = \sqrt{193}$ ;  $\tan B = \frac{12}{7}$

$\Rightarrow \hat{B} \approx 59,7^\circ \Rightarrow \hat{C} \approx 30,3^\circ$ .

**Bài 11.** a)  $a \approx 5,14\text{cm}$ ;  $b \approx 6,13\text{cm}$ ;

$\hat{C} = 50^\circ$ . b)  $\hat{A} = 62^\circ$ ;  $a \approx 9,4\text{cm}$ ;

$\hat{A} = 61,93^\circ$ ;  $\hat{C} = 28,07^\circ$ .

**Bài 12.**  $S \approx 509,08\text{cm}^2$ .

**Bài 13.**  $S = \frac{24 + 9\sqrt{3}}{2} \text{cm}^3$ .

**Bài 14.** a)  $AB = 15\text{cm}$ ;  $AC = 20\text{cm}$ ;

$BC = 25\text{cm}$ ;  $AH = 12\text{cm}$ ;

b)  $ADHE$  là hình chữ nhật;

c)  $S = 69,12\text{cm}^2$ ;  $P = 33,6\text{cm}$ .

**Bài 15.** a)  $AC = 4\text{cm}$ ;  $\hat{B} = 53,13^\circ$ ;

$\hat{C} = 36,87^\circ$  ;

b)  $AD = 2,25\text{cm}$ ;  $BD = 3,75\text{cm}$ ;

c)  $BF \cdot BD = BA^2 = BE \cdot BC$ .

### VẤN ĐỀ 7

**Bài 1.** Chiều cao  $\approx 6,75 m$ .

**Bài 2.** Độ dài  $= \frac{2,1}{\sin 28^\circ} \approx 4,5 m$ .

**Bài 3.** Chiều cao  $= 5 \cdot \tan 50^\circ \approx 5,96 m$ .

**Bài 4.**  $\widehat{BCA} \approx 59^\circ 44'$ .

**Bài 5. a)**  $AE \cdot AC = AH^2 = AD \cdot AB$

$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta AED$  (c-g-c);

b)  $DE = 3 cm$ .

c)  $\widehat{ABC} = 56^\circ$ ;

d)  $S_{ADE} = \frac{54}{13} cm^2$ .

**Bài 6. a)** Vì  $EF = CG = \frac{1}{2} AB$ ;

$EF \parallel CG \parallel AB$ ;

b)  $CF \perp BE$  mà  $EG \parallel CF$

$\Rightarrow EG \perp BE \Rightarrow \widehat{BEG} = 90^\circ$ .

c)  $S_{ABCD} = \frac{h^2}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$ ;

d)  $AC = \frac{h}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$ .

**Bài 7.**  $BD = \frac{21}{\cos 22,5^\circ} \approx 22,73 cm$ .

**Bài 8. a)**  $AB = 5 cm$ ;  $AC = 5\sqrt{3} cm$ .

b)  $AMBN$  là hình chữ nhật

$\Rightarrow \widehat{CBM} = \widehat{ABM} = \widehat{NMB}$

$\Rightarrow MN \parallel BC$  (so le trong)

$AMBN$  là hình chữ nhật

$\Rightarrow MN = AB = \frac{1}{2} BC$ .

c)  $\widehat{CBM} = \widehat{ABM} = \frac{1}{2} \widehat{ABC}$

$= 30^\circ = \widehat{ACB}$

$\Rightarrow \Delta MAB \sim \Delta ABC$  (g-g)

Tỉ số đồng dạng:  $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$ .

**Bài 9.** Tương tự Bài 5.

**Bài 10. a)** Giả sử tam giác  $ABC$  có  $\widehat{A} < 90^\circ$ , kẻ đường cao  $BH$ .

Ta có:  $BH = AB \cdot \sin \widehat{A}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BH \cdot AC$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{A}$ .

b)  $ABCD$  là hình bình hành

có  $\widehat{A} < 90^\circ$ ,  $\Delta ABD = \Delta CBD$ ,

$\Rightarrow S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABD} = AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{A}$ .

### ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 3



**Bài 1. a)**  $BC = 3\sqrt{13}cm$  ;

$$AH = \frac{18\sqrt{13}}{13}cm ; BH = \frac{12\sqrt{13}}{13}cm ;$$

$$CH = \frac{27\sqrt{13}}{13}cm .$$

b)  $BC = 25cm$ ;  $AC = 20cm$ ;  
 $HC = 16cm$ ;  $AH = 12cm$ .

c)  $AB = 33cm$ ;  $AH = \frac{132}{5}cm$ ;

$$BH = \frac{99}{5}cm ; CH = \frac{176}{5}cm .$$

**Bài 2. a)** Đặt  $BH = 9cm$ ;  $CH = 16cm$ ;  
 $AB = 15cm$ ;  $AC = 20cm$ .

b)  $\widehat{AMH} \approx 73,74^\circ$ .

c)  $S_{AHM} = 84cm^2$ .

**Bài 3.a)**  $CH = 6\sqrt{3}cm$ ;

$$AC = \frac{6\sqrt{3}}{\sin 80^\circ} \approx 10,55cm ;$$

b)  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}6\sqrt{3}(6+1,83)$   
 $\approx 40,69cm^2$ .

**Bài 4.a)**  $BC = 5cm$ ;  $AH = \frac{12}{5}cm$

b)  $\hat{B} \approx 53,13^\circ$ ;  $\hat{C} \approx 36,87^\circ$

c)  $BE = \frac{15}{7}cm$ ;  $CE = \frac{20}{7}cm$ .

**Bài 5.a)**  $AE \cdot AB = AH^2 = AE \cdot AC$

b)  $AE = \frac{9}{4}$ ;  $BE = \frac{7}{4}$ ;

**Bài 9. a)**  $\Delta ABE = \Delta ADF$  (g.c.g)

$$\Rightarrow AE = AF$$

b)  $\hat{F}$  chung,  $\widehat{FAK} = \widehat{FCA} = 45^\circ$

$$\Rightarrow \Delta AKF \sim \Delta CAF$$
 (g-g)

$$\Rightarrow \frac{AF}{KF} = \frac{CF}{AF} \Leftrightarrow AF^2 = KF \cdot CF ;$$

c)  $S_{\Delta AEF} = \frac{93}{2}cm^2$ ;

c)  $FC = \frac{\sqrt{3}}{2}cm$ .

**Bài 6. a) i)**  $NF = 15cm$ ;

$$\widehat{MFN} \approx 48,59^\circ ; \widehat{MNF} = 41,41^\circ .$$

ii)  $MO = \frac{36}{5}$ ;  $FO = \frac{48}{5}$ .

iii)  $S_{FNE} = 96cm^2$ .

$$\frac{S_{\Delta FOH}}{S_{\Delta FNE}} = \frac{FO}{FN} \cdot \frac{FH}{FE} = \frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta FOH} = 34,56cm^2 .$$

b)  $\Delta MFN \sim \Delta FEM$  (g-g)

$$\Rightarrow \frac{MF}{FE} = \frac{MN}{FM} \Leftrightarrow MF^2 = MN \cdot FE$$

**Bài 7. a)** Vì  $DE^2 + DF^2 = FE^2$

b)  $DK = \frac{24}{5}cm$ ;  $FK = \frac{32}{5}cm$ .

c)  $EK = \frac{18}{5}cm$ ;  $\widehat{DKE} = 90^\circ$ ;

$$\widehat{KDE} \approx 36^\circ 52' ; \widehat{KED} = 53^\circ 8'$$

d)  $ME = \frac{30}{7}cm$ ;  $MF = \frac{40}{7}cm$ .

e)  $\sin \widehat{DFK} = \frac{DK}{DF}$ ,  $\sin \widehat{DFE} = \frac{DE}{EF}$

$$\Rightarrow \frac{DK}{DF} = \frac{DE}{EF} \Leftrightarrow DE \cdot DF = DK \cdot EF .$$

**Bài 8.a)**  $AB = 3cm$ ;  $AC = 6\sqrt{3}cm$ .

b)  $\frac{AB}{BD} = \frac{AB}{BC} = \cos \widehat{ABC}$

$$= \cos 60^\circ = \cos \widehat{ACD} = \frac{AC}{CD} ;$$

c)  $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2}$ .

**Bài 12. a)**  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{24}}{5}$ ;

$$\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{24}} ; \cot \alpha = \sqrt{24}$$

b)  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ;  $\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ;

$$\cot \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2} .$$

$$\begin{aligned} \text{d) } AE = AF &\Rightarrow \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2} \\ &= \frac{1}{AF^2} + \frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AD^2} = \text{const.} \end{aligned}$$

**Bài 10.** a)  $\cos 70^\circ (= \sin 20^\circ)$   
 $< \sin 24^\circ < \sin 54^\circ$   
 $< \cos 35^\circ (= \sin 55^\circ) < \sin 78^\circ;$   
 b)  $\tan 16^\circ (= \cot 74^\circ)$   
 $< \cot 57^\circ 67' < \cot 30^\circ$   
 $< \cot 24^\circ < \tan 80^\circ (= \cot 10^\circ).$

**Bài 11.** a)  $\cos 20^\circ < \sin 65^\circ$   
 $(= \cos 25^\circ) < \cos 28^\circ$   
 $< \sin 40^\circ (= \cos 50^\circ) < \cos 88^\circ.$   
 b)  $\cot 67^\circ 18' (= \tan 22^\circ 42')$   
 $< \cot 28^\circ 36' (= \tan 61^\circ 24')$   
 $< \tan 32^\circ 48' < \tan 56^\circ 32'$

**Bài 17.** a)  $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$   
 $\Leftrightarrow (1 - \cos x)(1 + \cos x) = \sin^2 x$   
 $\Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$

b)  $VT = \frac{\sin^2 x + (1 + \cos x)^2}{\sin x(1 + \cos x)}$   
 $= \frac{2 + 2\cos x}{\sin x(1 + \cos x)} = VP;$

c) Biến đổi tương đương tương tự câu a.

#### CHỦ ĐỀ 4. ĐƯỜNG TRÒN VẤN ĐỀ 1.

**Bài 1.** a) Gọi O là trung điểm của BC  
 $\Rightarrow O$  là tâm đường tròn đi qua

$$\text{c) } \cot \alpha = \frac{1}{2}; \cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{5}};$$

$$\sin \alpha = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{d) } \tan \alpha = \frac{1}{3}; \sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{10}};$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{3}{\sqrt{10}}$$

**Bài 13.**  $\tan \alpha = \frac{7}{4} \Rightarrow \alpha \approx 60^\circ 15'.$

**Bài 14.** 6,28cm.

**Bài 15.** a)  $A = 2.$

b)  $B = 3 \sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha.$

**Bài 16.** a)  $\sin^4 x + \cos^4 x$   
 $= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$   
 $= 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x;$

b)  $\sin^6 x + \cos^6 x$   
 $= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3$   
 $- 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)$   
 $= 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x.$

c)  $\sin^4 x - \cos^4 x$   
 $= (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)$   
 $= 1 - 2 \cos^2 x.$

**Bài 4.** MNPQ là hình chữ nhật tâm O  
 $\Rightarrow M, N, P, Q$  cùng thuộc (O; OM).

**Bài 5.** Gọi E, F, P, Q lần lượt là trung điểm của MA, MB, MC, MD.  
 Chứng minh tứ giác EFPQ có hai góc đối có tổng bằng  $180^\circ$ .  
 $\Rightarrow E, F, P, Q$  cùng thuộc một đường tròn.

**Bài 6.** Trong hình thoi, đường chéo này là Trung trực của đường chéo kia. Do đó, điểm E là giao điểm hai đường trung trực của hai cạnh AB và AC. Nên E là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ . Tương tự, F là tâm đường tròn ngoại tiếp của  $\Delta ABD$ .

**Bài 7.** a) Ta có:  $\widehat{ACD} = 90^\circ \Rightarrow C$  thuộc đường tròn đường kính AD.

$A, B, C;$

b)  $OA = OB = OC \Rightarrow OA = \frac{1}{2}BC$

$\Rightarrow \Delta ABC$  vuông tại  $A$ .

**Bài 2.** Gọi  $O$  là trung điểm  $BC$ .

Chứng minh:  $B, C, D, E$  nằm

trên  $\left(O; \frac{BC}{2}\right)$ .

**Bài 3.** a)  $IFEK$  là hình bình hành tâm  $O$  có:

$CH \perp IK, KE // CH$

$\Rightarrow IK \perp KE \Rightarrow IFEK$  là hình chữ nhật

$\Rightarrow I, F, E, K$  cùng thuộc  $(O; OI)$ .

b) Chứng minh  $KD \perp DF$

$\Rightarrow \Delta KDF$  vuông.

Chứng minh  $\widehat{ABD} = 90^\circ \Rightarrow B$  thuộc đường tròn đường kính  $AD \Rightarrow B, C$  cùng thuộc đường tròn đường kính  $AD$  ;

b)  $AD = 10cm$ .

**Bài 8.** a) Gọi  $O$  là trung điểm  $BC$ .

Mà  $D \in \left(O; \frac{1}{2}BC\right)$

$\Rightarrow OB = OC = OD$

$\Rightarrow \Delta BDC$  vuông tại  $D$ .

$\Rightarrow CD \perp AB$ . Tương tự  $\Rightarrow BE \perp AC$ ;

b) Xét  $\Delta ABC$  có  $K$  là trực tâm

$\Rightarrow AK \perp BC$ .