MỤC LỤC

CHỦ ĐỀ 4 – ĐƯỜNG TRÒN

VẤN ĐỀ 1. SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN. TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN (PHẦN I)

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Đường tròn

Tập hợp các điểm *O* cố định một khoảng bằng *R* không đổi $\left(R>0\right)$ là đường tròn tâm *O* có bán kính *R*. Kí hiệu: *(O)* hoặc *(O; R)*.

2. Vị trí tương đố của điểm M và đường tròn *(O; R)*

Vị trí tương đối	Hệ thức
M nằm trên đường tròn (O)	$OM=R$
M nằm trong đường tròn (O)	$OM<R$
M nằm ngoài đường tròn (O)	$OM>R$

3. Định lý (về sự xác định một đường tròn)

- Qua ba điểm không thẳng hàng ta vẽ được một và chỉ một đường tròn.
- Đường tròn đi qua ba đỉnh của một tam giác gọi là đường tròn ngoại tiếp tam giác. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm của ba đường trung trực của tam giác đó.

4. Tính chất đối xứng của đường tròn

Đường tròn là hình có tâm đối xứng và trục đối xứng. Tâm đối xứng là tâm đường tròn, trục đối xứng là bất kì đường kính nào.

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Chứng minh các điểm cho trước cùng nằm trên một đường tròn

Phương pháp giải: Ta có các cách sau:

Cách 1. Chứng minh các điểm cho trước cùng cách đều một điểm nào đó.

Cách 2. Dùng định lí: “Nếu một tam giác có một cạnh là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác thì tam giác đó là tam giác vuông”

* *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

Bài 1. Chứng minh các định lí sau:

a) Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông là trung điểm của cạnh huyền trong tam giác đó.

b) Nếu một tam giác có một cạnh là đường kính của đường tròn ngoại tiếp thì tam giác đó là tam giác vuông.

Bài 2. Cho tam giác ABC có các đường cao *BD, CE.* Chứng minh bốn điểm *B, E, D, C* cùng nằm trên một đường tròn. Chỉ rõ tâm và bán kính của đường tròn đó.

Bài 3. Cho tam giác *ABC* có đường cao AD và trực tâm H. Gọi *I, K* lần lượt là trung điểm của *HA, HB*. Gọi *E, F* lần lượt là trung điểm của *BC, AC.* Chứng minh:

a) Bốn điểm *E, F, I, K* cùng thuộc một đường tròn;

b) Điểm *D* cũng thuộc đường tròn đi qua bốn điểm *E, F, I, K.*

* *Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

Bài 4. Cho tứ giác *ABCD*có $\widehat{C}+\widehat{D}=90^o$. Gọi *M, N, P, Q* lần lượt là trung điểm của *AB, BD, DC, CA.* Chứng minh bốn điểm *M, N, P, Q* cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 5. Cho bốn điểm *A, B, C, D* cùng thuộc đường tròn tâm O và *M* là điểm nằm trong đường tròn đó. Chứng minh các trung điểm của các đoạn thẳng *MA, MB, MC, MD* cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 6. Cho hình thoi *ABCD*. Đường trung trực của cạnh *AB* cắt *BD* tại E và cắt AC tại *F.* Chứng minh *E, F* lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác *ABC* và *ABD.*

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 7. Cho tam giác *ABC* cân tại *A*, đường cao *AH = 2 cm, BC = 8 cm.* Đường vuông góc với *AC* tại *C* cắt đường thẳng *AH* ở *D.*

a) Chứng minh các điểm *B, C* cùng thuộc đường tròn đường kính *AD;*

b) Tính độ dài đoạn thẳng *AD.*

Bài 8. Cho tam giác nhọn *ABC*. Vẽ đường tròn (O) có đường kính *BC*, cắt các cạnh *AB, AC*theo thứ tự *D, E.*

a) Chứng minh $CD \perp AB$ và $BE \perp AC$.

b) Gọi K là giao điểm của *BE* và *CD*. Chứng minh $CD \perp AB$.

Bài 9. Cho đường tròn *(O)* đường kính *AB.* Điểm *C* di động trên đường tròn, *H* là hình chiếu của *C* trên *AB.* Trên *OC* lấy điểm *M* sao cho *OM* = *OH.*

a) Hỏi điểm *M* chạy trên đường nào?

b) Kéo dài *BC* một đoạn *CD* = *CB.* Hỏi điểm D chạy trên đường nào?

Bài 10. Cho hình thoi *ABCD* có cạnh *AB* cố định. Gọi *O* là trung điểm của *AB, P* là giao điểm của *CO* và BD. Chứng minh *P* chạy trên một đường tròn khi *C, D* thay đổi.

VẤN ĐỀ 2. SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN. TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN (phần II)

A.TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Đường tròn

Tập hợp các điểm cách điểm *O* cố định một khoảng bằng *R* không đổi $(R > 0)$ là đường tròn tâm *O* có bán kính *R*. Kí hiệu: (O) hoặc $(O; R)$.

2. Vị trí tương đố của điểm M và đường tròn *(O; R)*

Vị trí tương đối	Hệ thức
M nằm trên đường tròn *(O)*	$OM = R$
M nằm trong đường tròn *(O)*	$OM < R$
M nằm ngoài đường tròn *(O)*	$OM > R$

3. Định lý (về sự xác định một đường tròn)

- Qua ba điểm không thẳng hàng ta vẽ được một và chỉ một đường tròn.
- Đường tròn đi qua ba đỉnh của một tam giác gọi là đường tròn ngoại tiếp tam giác. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm của ba đường trung trực của tam giác đó.

4. Tính chất đối xứng của đường tròn

Đường tròn là hình có tâm đối xứng và trục đối xứng. Tâm đối xứng là tâm đường tròn, trục đối xứng là bất kì đường kính nào.

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 2. Xác định vị trí tương đối của một điểm đối với một đường tròn

Phương pháp giải: Muốn xác định vị trí của điểm *M* đối với đường tròn *(O; R)* ta so sánh khoảng cách *OM* với bán kính *R* theo bảng sau:

Vị trí tương đối	Hệ thức
M nằm trên đường tròn *(O)*	$OM = R$
M nằm trong đường tròn *(O)*	$OM < R$
M nằm ngoài đường tròn *(O)*	$OM > R$

* *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

Bài 1. Trên mặt phẳng tọa độ *Oxy*, hãy xác định vị trí tương đối của các điểm $A(-1;-1)$; $B(-1;-2)$, $C\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ đối với đường tròn tâm *O* bán kính 2.

* *Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

Bài 2. Cho tam giác đều *ABC* cạnh bằng *a*, các đường cao là *BM* và *CN*. Gọi *O* là trung điểm cạnh *BC*.

a) Chứng minh bốn điểm *B, C, M, N* cùng thuộc đường tròn tâm *O;*

b) Gọi *G* là giao điểm của *BM* và *CN*. Chứng minh điểm G nằm trong đường tròn còn điểm *A*nằm ngoài đối với đường tròn đường kính *BC*.

Dạng 3. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác và số đo của các góc liên quan

Phương pháp giải:

- Sử dụng tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông.

- Dùng định lý pytago.
- Dùng hệ thức lượng về cạnh và góc trong tam giác vuông.

** Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

Bài 3. Cho tam giác *ABC* vuông tại A, có *AB = 5 cm; AC = 12 cm.* Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC.*

Bài 4. Cho hình chữ nhật *ABCD* có *AB = 12 cm, BC = 5 cm.* Chứng minh bốn điểm *A, B, C, D* cùng nằm trên một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

** Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

Bài 5. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng 2 cm. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 6. Cho $\widehat{xAy} = 45^o$ và điểm B nằm trên tia Ax sao cho AB = 3 cm.

a) Dựng đường tròn *(O)* đi qua A và B sao cho tâm O nằm trên tia Ay.

b) Tính bán kính đường tròn *(O).*

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 7. Cho đường tròn *(O)*, đường kính *AD = 2R.* Vẽ cung tâm D bán kính *R*, cung này cắt đường tròn *(O)* ở B và C.

a) Tứ giác *OBDC* là hình gì? Vì sao?

b) Tính số đo các góc $\widehat{CBD};\widehat{CBO};\widehat{OBA}$;

c) Chứng minh tam giác ABC là tam giác đều.

Bài 8. Cho hình vuông ABCD. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *AB, BC.* Gọi *E* là giao điểm của *CM* và *DN.*

a) Tính số đo $\widehat{CEN}$;

b) Chứng minh: *A, D, E, M* cùng thuộc một đường tròn;

c) Xác định tâm của đường tròn đi qua ba điểm *B, D, E.*

VẤN ĐỀ 3. ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN (PHẦN I)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. So sánh độ dài của đường kính và dây: Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

2. Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây

- Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.

- Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

3. Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây

- Trong một đường tròn:

  + Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.

  + Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

- Trong hai dây của một đường tròn:

  + Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.

  + Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn,

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính độ dài đoạn thẳng

Phương pháp giải: Sử dụng các kiến thức sau đây:

1. Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.

2. Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

3. Dùng định lý Pitago, hệ thức lượng trong tam giác vuông.

** Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

Bài 1. Cho đường tròn tâm *O*, hai dây *AB* và *CD* vuông góc với nhau ở *M*. Biết $AB = 18$ *cm*, $CD = 14$ *cm*, $MC = 4$ *cm*. Hãy tính:

a) Khoảng cách từ tâm O đến mỗi dây *AB* và CD;

b) Bán kính của đường tròn *(O)*.

Bài 2. Cho *(O;R)* có hai dây *AB, CD* bằng nhau và vuông góc với nhau tại *I*. Giả sử $IA = 2$ *cm*; $IB = 4$ *cm*. Tính khoảng cách từ tâm *O* đến mỗi dây.

** Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

Bài 3. Cho đường tròn tâm *O*, bán kính *3 cm* và hai dây *AB, AC*. Biết $AB = 5$ *cm*, $AC = 2$ *cm*. Tính khoảng cách từ *O* đến mỗi dây.

Bài 4. Cho đường tròn *(O)* và dây *CD*. Từ O kẻ tia vuông góc với *CD* tại *M*, cắt *(O)* tại *H*. Tính bán kính R của (O) biết $CD = 16$ *cm* và $MH = 4$ *cm*.

Bài 5. Cho đường tròn tâm *O*, đường kính *AB*; dây *CD* cắt *AB* tại *M*. Biết $MC = 4$ *cm*, $MD = 12$ *cm* và $\widehat{BMD} = 30^o$. Hãy tính:

a) Khoảng cách từ *O* đến *CD*; b) Bán kính đường tròn *(O)*.

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 6. Cho đường tròn *(O; 5 cm)*. Dây AB và CD song song, có độ dài lần lượt là 8 cm và 6 cm. Tính khoảng cách giữa hai dây.

Bài 7. Cho đường tròn *(O)* bán kính $OA = 11$ *cm*. Điểm *M* thuộc bán kính *AO* và cách Okhoảng 7 cm. Qua *M* kẻ dây *CD* có độ dài *18 cm*. Tính độ dài các đoạn thẳng *MC, MD*.

Bài 8. Cho đường tròn *(O)* đường kính $AB = 13$ *cm*, dây *CD* có độ dài *12 cm* vuông góc với *AB* tại *H*.

a) Tính *HA, HB*;

b) Gọi *M, N* theo thứ tự là hình chiếu của *H* trên *AC, BC*. Tính diện tích tứ giác *CMHN*.

Bài 9. Cho đường tròn (O), dây $AB = 24$ *cm*, dây $AC = 20$ *cm*, $\widehat{BAC} < 90^o$ và *O* nằm trong góc $\widehat{BAC}$. Gọi M là trung điểm của *AC*. Khoảng cách từ *M* đến *AB* bằng *8 cm*.

a) Chứng minh tam giác *ABC* cân;

b) Tính bán kính của đường tròn.

VẤN ĐỀ 4. ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN (PHẦN II)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. So sánh độ dài của đường kính và dây: Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

2. Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây

- Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.

- Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

3. Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây

- Trong một đường tròn:
  + Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.
  + Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.
- Trong hai dây của một đường tròn:
  + Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.
  + Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn,

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 2. Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau

Phương pháp giải : Sử dụng các kiến thức sau đây :

- Trong một đường tròn :
  + Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.
  + Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.
- Trong hai dây của một đường tròn :
  + Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.
  + Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.
- Dùng phương pháp chứng minh hai tam giác bằng nhau.
- Dùng quan hệ giữa cạnh và góc trong tam giác, quan hệ cạnh huyền và cạnh góc vuông.

**Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài toán sau*

Bài 1. Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB và một dây CD. Kẻ AE và BF vuông góc với CD lần lượt tại E và F. Chứng minh $CE = DF$.

Bài 2. Cho đường tròn (O), đường kính AB. Kẻ hai dây AC và BD song song. Chứng minh $AC = BD$.

** Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp*

Bài 3. Cho đường tròn (O), dây cung AB và CD. Giao điểm K của các đường thẳng AB và CD nằm ngoài đường tròn. Vẽ đường tròn $(O\ ;\ OK)$, đường tròn này cắt KA và KC lần lượt tại M và N. Chứng minh : $KM < KN$.

Bài 4. Cho tam giác ABC nhọn và có các đường cao BD, CE. Chứng minh :

a) B, D, C, E cùng thuộc một đường tròn.

b) $BC > DE$.

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 5. Cho tam giác ABC, trực tâm H, nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD.

a) Chứng minh $BHCD$ là hình bình hành.

b) Kẻ đường kính OI vuông góc BC tại I. Chứng minh ba điểm I, H, D thẳng hàng.

c) Chứng minh $AH = 2.OI$.

Bài 6. Cho đường tròn (O) có AB là đường kính. Vẽ hai dây AD và BC song song nhau. Chứng minh :

a) $AD = BC$;

b) CD là đường kính của (O).

Bài 7. Cho nửa đường trong tâm O đường kính AB và dây CD. Giọi H, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ A và B đến CD. Chứng minh $CH = DK$.

Bài 8. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại trực tâm H.

a) Chứng minh bốn điểm B, D, C, E cùng nằm trên một đường tròn. Xác định tâm I của đường tròn này.

b) Chứng minh $AB.\ AE = AC.\ AD$

c) Gọi K là điểm đối xứng của H qua I. Chứng minh tứ giác $BHCK$ là hình bình hành.

d) Xác định tâm O của đường tròn qua các điểm A, B, K, C.

e) Chứng minh OI và AH song song.

Bài 9. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Điểm M thuộc cung BC không chứa A. Gọi D, E lần lượt đối xứng với M qua AB, AC. Tìm vị trí của M để độ dài đoạn thẳng DE lớn nhất.

Bài 10. Cho điểm A nằm trên đường tròn (O) có CB là đường kính, $AB < AC$. Vẽ dây AD vuông góc với BC tại H. Chứng minh

a) Tam giác ABC vuông tại A ;

b) H là trung điểm AD, $AC = CD$ và BC là phân giác của góc ABD.

c) $\overset{\frown}{ABC} = \overset{\frown}{ADC}$.

VẤN ĐỀ 5. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

Cho đường tròn $(O\,;\,R)$ và một đường thẳng bất kì. Gọi d là khoảng cách từ tâm O của đường tròn đến đường thẳng đó. Ta có bảng vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn.

Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn	*Số điểm chung*	*Hệ thức giữa d và* R
Đường thẳng và đường tròn cắt nhau	2	$d < R$
Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau	1	$d = R$
Đường thẳng và đường tròn không giao nhau	0	$d > R$

2. Định lý

Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Cho biết *d, R*, xác định vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn hoặc ngược lại

Phương pháp giải : So sánh d và R dựa vào bảng vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn đã nêu trong phần Tóm tắt lý thuyết.

** Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau*

Bài 1. Điền vào các chỗ trống (...) trong bảng sau (R là bán kính của đường tròn, d là khoảng cách từ tâm đến đường thẳng) :

R	*d*	*Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn*
5cm	3m	....
6cm	......	Tiếp xúc nhau
4cm	7cm	....

Bài 2. Trên mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho điểm $A(3;4)$. Hãy xác định vị trí tương đối của đường tròn $(A;3)$ và các trục tọa độ.

Bài 3. Cho a,b là hai đường thẳng song song và cách nhau một khoảng $2cm$. Lấy điểm O trên a và vẽ đường tròn $(O;2cm)$. Chứng minh đường tròn này tiếp xúc với đường thẳng b.

** Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

Bài 4. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $B(2;4)$. Hãy xác định vị trí tương đối của đường tròn $(B;2)$ và các trục tọa độ.

Bài 5. Cho a,b là hai đường thẳng song song và cách nhau một khoảng $3cm$. Lấy điểm O trên a và vẽ đường tròn $(O;3cm)$. Chứng minh đường tròn này tiếp xúc với đường thẳng b.

Dạng 2. Xác định vị trí tâm đường tròn có bán kính cho trước và tiếp xúc với một đường thẳng cho trước.

Phương pháp giải: Xác định xem tâm đường tròn cách đường thẳng cho trước một khoảng bằng bao nhiêu rồi sử dụng tính chất điểm cách đều một đường thẳng cho trước một khoảng cho trước.

** Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

Bài 6. Cho đường thẳng xy. Tâm của các đường tròn có bán kính bằng $1cm$ và tiếp xúc với đường thẳng xy nằm trên đường nào?

** Học sinh tự luyện bài tập sau tại lớp:*

Bài 7. Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau, cách nhau một khoảng là h. Một đường tròn (O) tiếp xúc với a và b. Hỏi tâm O di động trên đường nào?

Dạng 3. Bài liên quan đến tính độ dài

Phương pháp giải: Nối tâm với tiếp điểm để vận dụng định lý về tính chất của tiếp tuyến và định lý Pitago.

Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:

Bài 8. Cho đường tròn tâm O bán kính $6cm$ và một điểm A cách O là $10cm$. Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn (B là tiếp điểm). Tính độ dài AB.

Bài 9. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây $AB=1,6R$. Vẽ một tiếp tuyến song song với AB, cắt các tia OA,OB lần lượt tại M và N. Tính diện tích tam giác OMN.

** Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp:*

Bài 10. Cho đường tròn $(O;2cm)$ và một điểm A chạy trên đường tròn đó. Từ A vẽ tiếp tuyến xy. Trên xy lấy một điểm M sao cho $AM=2\sqrt{3}cm$. Hỏi điểm M di động trên đường nào?

Bài 11. Cho đường tròn $(O;2cm)$. Cát tuyến qua A ở ngoài (O) cắt (O) tại B và C. Cho biết $AB=BC$ và kẻ đường kính COD. Tính độ dài đoạn thẳng AD

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 12. Cho đường thẳng xy đi qua điểm A nằm trong đường tròn $(O;R)$. Chứng minh đường thẳng xy và đường tròn $(O;R)$ cắt nhau.

Bài 13. Cho đường tròn $(O;5cm)$ và điểm A sao cho $OA=5cm$. Đường thẳng xy đi qua điểm A. Chứng minh đường thẳng xy và đường tròn $(O;5cm)$ cắt nhau.

Bài 14. Trên mặt phẳng Oxy cho điểm $C(3;4)$. Hãy xác định vị trí tương đối của đường tròn $(C;2)$ và các trục tọa độ.

Bài 15. Cho đường thẳng a, tâm I của các đường tròn có bán kính $5cm$ và tiếp xúc với đường thẳng a nằm trên đường nào?

Bài 16. Điểm A cách đường thẳng xy là $12cm$.

a) Chứng minh $(A;13cm)$ cắt đường thẳng xy tại hai điểm phân biệt.

b) Gọi hai giao điểm của $(A;13cm)$ với xy là B,C. Tính BC.

Bài 17. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Lấy C là điểm thuộc (O), tiếp tuyến qua C là d. Kẻ AE,BF vuông góc với d, CH vuông góc với AB. Chứng minh: $CE=CF$ và $CH^2=AE.BF$

VẤN ĐỀ 6. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN (PHẦN I)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT:

Dấu hiệu 1. Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.

Dấu hiệu 2. Theo định nghĩa tiếp tuyến.

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Chứng minh một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn

Phương pháp giải: Để chứng minh đường thẳng a là tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$ tiếp điểm là C ta có thể làm theo cách sau:

Cách 1. $OC \perp a$ tại C và $C \in (O)$.

Cách 2. Vẽ $OH \perp a$. Chứng minh $OH = OC = R$.

Cách 3. Vẽ tiếp tuyến a' của (O). Ta chứng minh $a \equiv a'$.

** Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

Bài 1. Cho tam giác ABC có $AB = 6cm, AC = 8cm, BC = 10cm$. Vẽ đường tròn $(B;BA)$. Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn .

Bài 2. Cho tam giác ABC cân tại A; đường cao AH và BK cắt nhau tại I. Chứng minh:

a) Đường tròn đường kính AI đi qua K;

b) HK là tiếp tuyến của đường của đường tròn đường kính AI.

**Học sinh tự luyện tập các bài tập sau tại lớp:*

Bài 3. Cho tam giác ABC có hai đường cao BD, CE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh bốn điểm A, D, H, E cùng nằm trên đường tròn (O).

b) Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh ME là tiếp tuyến của (O).

Bài 4. Cho đường thẳng d, điểm A nằm trên đường thẳng d, điểm B nằm ngoài đường thẳng d. Hãy dựng đường tròn (O) đi qua điểm B và tiếp xúc với đường thẳng d tại A.

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 5. Cho tam giác ABC cân tại A, nội tiếp đường tròn tâm O. Vẽ hình bình hành $ABCD$. Tiếp tuyến tại C của đường tròn cắt đường thẳng AD tại N. Chứng minh:

a) Đường thẳng AD là tiếp tuyến của (O);

b) Ba đường thẳng AC, BD và ON đồng quy.

Bài 6. Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn $(O;R)$,vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với (O). Đường thẳng vuông góc với OB tại O cắt tia AC tại N. Đường thẳng vuông góc với OC cắt tia AB tại M.

a) Chứng minh tứ giác $AMON$ là hình thoi;

b) Điểm A phải cách O một khoảng là bao nhiêu để cho MN là tiếp tuyến của (O)?

Bài 7. Cho (O) và d không cắt (O). Dựng tiếp tuyến của (O) sao cho tiếp tuyến đó song song với d.

Bài 8. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Lấy M trên (O) và tiếp tuyến tại M cắt tiếp tuyến tại A và B của (O) ở C và D; AM cắt OC tại E, BM cắt OD tại F.

a) Chứng minh góc: $COD = 90^0$;
b) Tứ giác $MEOF$ là hình gì?
c) Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.

Bài 9. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*, đường cao *AH*. Gọi *BD*, *CE* là các tiếp tuyến của đường tròn $(A; AH)$ với *D*, *E* là các tiếp điểm. Chứng minh rằng:

a) Ba điểm *D*, *A*, *E* thẳng hàng;
b) *DE* tiếp xúc với đường tròn đường kính *BC*.

Bài 10. Cho điểm *M* nằm trên đường tròn tâm *O* đường kính *AB*. Vẽ tiếp tuyến *xy*. Kẻ *AD*, *BC* cùng vuông góc với *xy* (các điểm *D*, *C* nằm trên *xy*). Xác định vị trí điểm *M* trên nữa đường tròn *(O)* sao cho diện tích tứ giác *ABCD* đạt giá trị lớn nhất.

VẤN ĐỀ 7. DẤU HIỆU NHẬN BIẾT TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

(PHẦN II)

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC

Nhắc lại lý thuyết:

Dấu hiệu 1. Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.

Dấu hiệu 1. Theo định nghĩa tiếp tuyến.

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 2. Tính độ dài

Phương pháp giải: Nối tâm với tiếp tuyến để vận dụng định lý về tính chất của tiếp tuyến và hệ thức lượng trong tam giác vuông.

* *Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

Bài 1. Cho đường tròn *(O)* có dây là *AB* đường kính. Qua *O* kẻ đường vuông góc với *AB*, cắt tiếp tuyến tại *A* của *(O)* ở điểm *C*.

a) Chứng minh *CB* là tiếp tuyến của đường tròn.

b) Cho bán kính của đường tròn *(O)* bằng *15cm* và dây *AB=24cm*. Tính độ dài đoạn thẳng *OC*.

Bài 2. Cho đường tròn *(O)* có bán kính *OA = R*, dây *BC* vuông góc với *OA* tại trung điểm *M* của OA.

a) Tứ giác*OCAB* là hình gì ? Vì sao ?

b) Kẻ tiếp tuyến của đường tròn tại *B*, cắt đường thẳng *OA* tại *E*. tính độ dài *BE* theo R.

* *Học sinh tựa luyện các bài tập sau:*

Bài 3. Cho đường tròn *(O; R)* đường kính *AB*. Vẽ dây *AC*sao cho $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Trên tia đối của tia *BA* lấy điểm *M* sao cho *BM = R*. Chứng minh:

a) *MC* là tiếp tuyến của đường tròn *(O)*;

b) $MC^2 = 3R^2$.

Bài 4. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*, đường cao *AH*. Gọi $AB = 8\,cm$, $AC = 15\,cm$. Gọi *D* là điểm đối xứng của *B* qua *H*. Vẽ đường tròn đường kính *CD* cắt *AC* ở *E*.

a) Chứng minh *HE* là tiếp tuyến của đường tròn;

b) Tính độ dài *HE*.

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 5. Cho đường tròn *(O; 6 cm)* và điểm *A* trên dường tròn. Qua *A* kẻ tiếp tuyến *Ax* với đường tròn và lấy điểm *B* trên tia*Ax* sao cho *AB = 8 cm.*

c) Tính độ dài đoạn thẳng *OB;*

d) Qua *A* kẻ đường vuông góc với *OB*, cắt đường tròn *(O)* tại *C*. Chứng minh *BC* là tiếp tuyến của đường tròn *(O)*.

Bài 6. Cho đường tròn (*O; 5 cm)*đường kính *AB,* tiếp tuyến *Bx* với đường tròn. Gọi *C* là một điểm trên đường tròn sao cho $\widehat{CAB} = 30^\circ$. Tia *AC* cắt tia*Bx* tại *E*.

e) Chứng minh rằng $BC^2 = AC$.CE.

f) Tính độ dài đoạn *BE.*

Bài 7. Cho đường tròn (*O; R)* và dây$AB = 2a$. Vẽ một tiếp tuyến song song với *AB*, nó cắt *OA, OB*theo thứ tự tại *M* và *N*. tính diện tích tam giác *MON*.

VẤN ĐỀ 8. TÍNH CHTS HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU (PHẦN I)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau

Nếu hai tiếp tuyến của đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

- Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.
- Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của các góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
- Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua tiếp điểm.

2. Đường tròn nội tiếp tam giác

- Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác gọi là *đường tròn nội tiếp* tam giác, còn tam giác gọi là *ngoại tiếp đường tròn*.
- Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao của các đường phân giác các góc trong tam giác.

3. Đường tròn bàng tiếp tam giác

- Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của tam giác và tiếp xúc với phần kéo dàicủa hai cạnh còn lại gọi là *đường tròn bàng tiếp* tam giác.
- Với một tam giác có ba đường tròn bàng tiếp.
- Tâm của đường tròn bàng tiếp tam giác góc *A* là giao điểm của hai đường phân giác ngoài tại *B, C*, hoặc là giao điểm của đường phân giác trong góc *A* và đường phân giác ngoài tại *B* (hoặc *C*).

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau, hai đường thẳng song song, hai đường thẳng vuông góc.

Phương pháp giải: Dùng tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau.

** Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau:*

Bài 1. Hai tiếp tuyến tại *B* và *C* của đường tròn *(O)* cắt nhau tại *A*.

a) Chứng minh $OA \perp BC$.

b) Chứng minh *AO* là trung trực của đoạn thẳng *BC*.

c) Vẽ đường kính *CD* của *(O)*. chứng minh *BD* và *OA* song song.

Bài 2. Cho nửa đường tròn tâm *O*, đường kính *AB*.Vẽ các tiếp tuyến *Ax, By* với nữa đường tròn cùng phía đối với *AB*. Từ điểm *M* trên nửa đường tròn (*M* khác *A, B*) vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt *Ax* và *By* lần lượt tại *C* và *D*.

a) Chứng minh COD là tam giác vuông.

b) Chứng minh $MC.MD = OM^2$;

c) Cho biết $OC = BA = 2R$. Tính AC và BD theo R.

** Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp :*

Bài 3. Từ điểm A ở ngoài đường tròn $(O;R)$ kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là các tiếp điểm). Kẻ $BE \perp AC$ và $CF \perp AB$ $(E \in AC, F \in AB)$, BE và CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác $BOCH$ là hình thoi.

b) Chứng minh ba điểm A, H, O thẳng hàng.

c) Xác định vị trí điểm A để H nằm trên đường tròn (O).

Bài 4. Hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) cắt nhau tại M. Đường thẳng vuông góc với OA cắt MB tại C. Chứng minh $CM = CO$.

C.BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 5. Hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) cắt nhau tại I Đường thẳng qua I và vuông góc với IA cắt OB tại K. Chứng minh :

a) $IK // OA$;

b) Tam giác IOK cân.

Bài 6. Từ một điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Qua điểm M thuộc cung nhỏ BC, kẻ tiếp tuyến với đường tròn (O), nó cắt các tiếp tuyến AB, AC theo thứ tự ở tiếp tuyến D và E. Chứng minh : chu vi tam giác ADE bằng $2AB$.

VẤN ĐỀ 9. TÍNH CHẤT HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU (PHẦN II)

A.TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1.Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì :

- Điểm đó cách đều hai tiếp điểm
- Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
- Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.

2. Đường tròn nội tiếp tam giác

- Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác gọi là *đường tròn nội tiếp* tam giác, còn tam giác gọi là *ngoại tiếp* đường tròn.
- Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của các đường phân giác các góc trong tam giác.

3. Đường tròn bàng tiếp tam giác

- Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của một tam giác và tiếp xúc với phần kéo dài của hai cạnh còn lại gọi là *đường tròn bàng tiếp* tam giác.
- Với một tam giác, có ba đường tròn bàng tiếp.
- Tâm của đường tròn bàng tiếp tam giác góc A là giao điểm của hai đường phân giác góc các góc ngoài tại B và C, hoặc là giao điểm của đường phân giác góc A và đường phân giác ngoài tại B (hoặc C).

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 2. Chứng minh tiếp tuyến, tính độ dài, tính số đo góc

Phương pháp giải : Sử dụng các kiến thức sau :

1. Dùng tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau.
2. Dùng khái niệm đường tròn nội tiếp, bàng tiếp.
3. Dùng hệ thức lượng về cạnh và góc trong tam giác vuông.

** Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài tập sau :*

Bài 1. Cho đường tròn (O). Từ một điểm M ở ngoài (O), vẽ hai tiếp tuyến MA và MB sao cho góc AMB bằng 60^0. Biết chu vi tam giác MAB là $18cm$, tính độ dài dây AB.

Bài 2. Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm A ở ngoài đường tròn. Vẽ các tiếp tuyến AB, AC. Chứng minh $\widehat{BAC}=60^0$ khi và chỉ khi $OA=2R$.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=9cm, AC=12cm$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, G là trọng tâm tam giác ABC. Tính độ dài IG.

** Học sinh tự luyện các bài tập sau tại lớp :*

Bài 4. Cho đường tròn (O). Từ một điểm M ở ngoài (O), vẽ hai tiếp tuyến ME và MF sao cho góc EMO bằng 30^0. Biết chu vi tam giác MEF là $30cm$, tính độ dài dây EF.

Bài 5. Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm I ở ngoài đường tròn. Vẽ các tiếp tuyến IB, IC. Chứng minh $\widehat{BIO} = 30^0$ khi và chỉ khi $OI = 2R$.

Bài 6. Cho tam giác EBC vuông tại E có $EB = 3cm, EC = 4cm$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác EBC, G là trọng tâm tam giác EBC. Tính độ dài IG.

C.BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 7. Cho đường tròn (O) và một điểm A ở ngoài đường tròn (O). Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm).

a) Chứng minh rằng $OA \perp BC$.

b) Vẽ đường kính CD. Chứng minh BD và AO song song.

c) Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC biết $OB = 2cm, OA = 4cm$.

Bài 8. Cho tam giác ABC cân tại A, I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc A. Gọi O là trung điểm của IK.

a) Chứng minh bốn điểm B, I, C, K cùng thuộc một đường tròn tâm O.

b) Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn $(O;OK)$;

c) Tính bán kính đường tròn (O) biết $AB = AC = 20cm, BC = 24cm$.

VẤN ĐỀ 10. LUYỆN TẬP TÍNH CHẤT HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1.Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì :

- Điểm đó cách đều hai tiếp điểm
- Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
- Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.

2. Đường tròn nội tiếp tam giác

- Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác gọi là *đường tròn nội tiếp* tam giác, còn tam giác gọi là *ngoại tiếp* đường tròn.
- Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của các đường phân giác các góc trong tam giác.

3. Đường tròn bàng tiếp tam giác

- Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của một tam giác và tiếp xúc với phần kéo dài của hai cạnh còn lại gọi là *đường tròn bàng tiếp* tam giác.
- Với một tam giác, có ba đường tròn bàng tiếp.
- Tâm của đường tròn bàng tiếp tam giác góc A là giao điểm của hai đường phân giác góc các góc ngoài tại B và C, hoặc là giao điểm của đường phân giác góc A và đường phân giác ngoài tại B (hoặc C).

B. BÀI TẬP TẠI LỚP

**** Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau đây :***

Bài 1. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$. Kẻ hai tiếp tuyến Ax và By (Ax, By nằm cùng phía đối với nửa đường tròn). Gọi M là một điểm thuộc nửa đường tròn (M khác A và B). Tiếp tuyến tại M với nửa đường tròn cắt Ax và By theo thứ tự ở C và D .

a) Chứng minh $\widehat{COD} = 90°$.

b) Chứng minh bốn điểm B, D, M, O nằm trên một đường tròn. Chỉ ra bán kính của đường tròn đó.

c) Chứng minh $CD = AC + BD$.

d) Chứng minh tích $AC.BD$ không đổi khi M thay đổi trên (O).

e) Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD .

g) Gọi giao điểm AD và BC là N . Chứng minh MN và AC song song.

h) Gọi BN' là tia phân giác của $\widehat{ABD}$ (N' thuộc OD). Chứng minh :

$$\frac{1}{BO} + \frac{1}{BD} = \frac{\sqrt{2}}{BN'} .$$

**** Học sinh tự luyện các bài tập sau đây tại lớp :***

Bài 2. Cho đường tròn $(O;R)$. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B,C là các tiếp điểm) . Gọi H là trung điểm của BC .

a) Chứng minh ba điểm A, H, O thẳng hàng và các điểm A, B, C, O cùng thuộc một đường tròn.

b) Kẻ đường kính BD của (O). Vẽ $CK \perp BD$. Chứng minh : $AC.CD = CK.AO$.

c) Tia AO cắt đường tròn (O) tại M (M nằm giữa A và O). Chứng minh M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

d) Gọi I là giao điểm của AD và CK. Chứng minh I là trung điểm của CK.

Bài 3. Cho đường tròn $(O;R)$, đường kính AB . Điểm M bất kỳ thuộc $(O;R)$. Tiếp tuyến tại M và B cắt nhau tại D. Qua O kẻ đường thẳng song song với MB cắt tiếp tuyến qua M tại C , cắt tiếp tuyến qua B tại N .

a) Chứng minh rằng tam giác CDN cân.

b) Chứng minh rằng AC là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) .

c) Chứng minh $AC.BD$ không phụ thuộc vào M .

d) Gọi H là hình chiếu của M trên AB. Tia phân giác của góc $\widehat{HOM}$ cắt (O) tại K (K khác M). Xác định vị trí điểm M sao cho $\dfrac{MH}{HK} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 4. Cho đường tròn $(O;3cm)$ và điểm A có $OA = 6cm$. Kẻ các tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC.

a) Tính độ dài đoạn thẳng OH .

b) Qua điểm M bất kỳ thuộc cung nhỏ BC , kẻ tiếp tuyến với đường tròn , cắt AB và AC theo thứ tự tại E và F . Tính chu vi tam giác ADE.

c) Tính số đo góc $\widehat{DOE}$.

Bài 5. Cho tam giác MBC cân tại M, I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc M . O là trung điểm của IK.

a) Chứng minh bốn điểm B, I, C, K cùng thuộc một đường tròn tâm O.

b) Chứng minh MC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

c) Tính bán kính đường tròn (O) biết $MB = MC = 10\,cm, BC = 12\,cm$.

VẤN ĐỀ II. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tính chất của đường nối tâm :

Đường nối tâm là trục đối xứng của hình tạo bởi hai đường tròn. Từ đó suy ra :

- Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.
- Nếu hai đường tròn cắt nhau thì đường nối tâm là đường trung trực của dây chung.

2. Sự liên hệ giữa vị trí của hai đường tròn với đoạn nối tâm *d* và các bán kính *R* và *r*

Vị trí tương đối của hai đường tròn (O ;R) và (O′ ;r) với R > r	*Số điểm chung*	*Hệ thức giữa d và R, r*
Hai đường tròn cắt nhau	2	$R-r<d<R+r$
Hai đường tròn tiếp xúc nhau	1	
- Tiếp xúc ngoài		$d=R+r$
- Tiếp xúc trong		$d=R-r$
Hai đường tròn không giao nhau	0	
- Ở ngoài nhau		$d>R+r$
- (O) đựng (O')		$d<R-r$
- (O) và (O') đồng tâm		$d=0$

B. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Các bài toán có cho hai đường tròn tiếp xúc nhau

Phương pháp giải :

- Vẽ đường nối tâm và chú ý rằng tiếp điểm nằm trên đường nối tâm, dùng hệ thức $d=R+r$.
- Nếu cần , có thể vẽ tiếp tuyến chung tại tiếp điểm.

** Giáo viên hướng dẫn học sinh giải bài tập sau:*

Bài 1. Cho đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC, $B\in(O), C\in(O')$. Tiếp tuyến chung trong tại A cắt tiếp tuyến chung BC ở I.

a) Chứng minh $\widehat{BAC}=90^0$.

b) Tính số đo góc OIO'.

c) Tính độ dài BC biết $OA=9cm; OA'=4cm$.

** Học sinh tự luyện bài tập sau tại lớp:*

Bài 2. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài $BC, B\in(O), C\in(O')$.

a) Chứng minh ABC là tam giác vuông.
b) Tính số đo góc OMO'.
c) Tính diện tích tứ giác $BCO'O$ theo R và r.
d) Gọi I là trung điểm của OO'. Chứng minh rằng BC là tiếp tuyến của đường tròn $(I;IM)$.

Dạng 2. Các bài toán cho hai đường tròn cắt nhau.

Phương pháp: vẽ dây chung của hai đường tròn rồi dùng tính chất đường nối tâm là đường trung trực của dây chung.

** Giáo viên hướng dẫn học sinh giải các bài toán sau:*

Bài 3. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B, trong đó OA là tiếp tuyến của đường tròn (O'). Tính độ dài dây cung AB biết $OA = 2cm, O'A = 15cm$.

** Học sinh tự luyện tập các bài tập sau tại lớp :*

Bài 4. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Từ A vẽ đường kính AOC và AOD. Chứng minh ba điểm B, C, D thẳng hàng và vuông góc với AB.

Bài 5. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Gọi M là trung điểm của OO'. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với AM, cắt các đường tròn (O) và (O') ở C và D. Chứng minh rằng $AC = AD$.

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 6. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Vẽ một cát tuyến qua A cắt hai đường tròn tại B và C. Chứng minh các tiếp tuyến tại B và C song song với nhau.

Bài 7. Cho góc vuông xOy, lấy các điểm I và K thứ tự trên các tia Ox và Oy. Vẽ đường tròn $(I;OK)$ cắt tia Ox tại M. Vẽ đường tròn $(K;OI)$ cắt tia Oy tại N (K nằm giữa O và N).

a) Chứng minh hai đường tròn (I) và (K) luôn cắt nhau.

b) Tiếp tuyến tại M của đường tròn (I), tiếp tuyến tại N của (K) cắt nhau tại C. Chứng minh tứ giác $OMCN$ là hình vuông.
c) Gọi giao điểm của hai đường tròn là A và B. Chứng minh A, B, C thẳng hàng.
d) Giả sử I và K theo thứ tự di động trên các tia Ox và Oy sao cho $OI + OK = a$ không đổi. Chứng minh đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 8. Cho đường tròn (O) và một điểm A trên đường tròn đó. Trên đoạn OA lấy điểm B sao cho $OB = \frac{1}{3}OA$. Vẽ đường tròn đường kính AB.

a) Chứng minh đường tròn đường kính AB tiếp xúc với đường tròn (O) cho trước.

b) Vẽ đường tròn đồng tâm (O) với đường tròn (O) cho trước, cắt đường tròn đường kính AB tại C. Tia AC cắt hai đường tròn đồng tâm tại D và E (D nằm giữa C và E). Chứng minh $AC = CD = DE$.

Bài 9. Cho đường tròn (O) đường kính AB, C nằm giữa A và O. Vẽ đường tròn (I) đường kính CB.

a) Xét vị trí tương đối của hai đường tròn (O) và (I).

b) Kẻ dây DE của đường tròn (O) vuông góc với AC tại trung điểm H của AC. Tứ giác $ADCE$ là hình gì? Vì sao?

c) Gọi K là giao điểm của DB và đường tròn (I). Chứng minh ba điểm E, C, K thẳng hàng.

d) Chứng minh HK là tiếp tuyến của đường tròn (I).

ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 4 (PHẦN I)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Sự xác định đường tròn, tính chất đối xứng của đường tròn.

a) Đường tròn tâm O bán kính $R(R>0)$ là hình gồm các điểm cách điểm O một khoảng bằng R.

b) Vị trí tương đối của một điểm đối với một đường tròn.

Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm M.

- M nằm trên đường tròn $(O;R) \Leftrightarrow OM = R$.
- M nằm trong đường tròn $(O;R) \Leftrightarrow OM < R$.
- M nằm ngoài đường tròn $(O;R) \Leftrightarrow OM > R$.

c) Qua ba điểm không thẳng hàng, ta vẽ được một và chỉ một đường tròn.

d) Tính đối xứng của đường tròn.

- Đường tròn là hình có *tâm đối xứng*. Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.
- Đường tròn là hình có *trục đối xứng*. Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn.

2. **Quan hệ đường kính và dây cung.**

a) So sánh độ dài của đường kính và dây: Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

b) Quan hệ vuông góc giữ đường kính và dây.

- Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.
- Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

c) Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây.

- Trong một đường tròn:

- Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.
- Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

1) Trong hai dây của một đường tròn:

a) Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn .

b) Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

3. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn.

a) Cho đường tròn *(O;R)* và đường thẳng a. Đặt *d=d(O,a)*. Ta có:

Đường thẳng và đường tròn cắt nhau	*Số điểm chung*	*Hệ thức liên hệ giữa d và R*

Đường thẳng và đường tròn cắt nhau	2	$d<R$
Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc	1	$d=R$
Đường thẳng và đường tròn không có điểm chung	0	$d>R$

b) Khi đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau thì đường thẳng được gọi là tiếp tuyến của đường tròn. Điểm chung của đường thẳng và đường tròn gọi là tiếp điểm.

4) Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến .

+) Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm .

+) Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là tiếp tuyến của đường tròn.

5) Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau:

a) Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau

Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

+) Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.

+) Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.

+) Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.

b) Đường tròn nội tiếp tam giác

* Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tam giác gọi là *đường tròn nội tiếp* tam giác, còn tam giác gọi là *ngoại tiếp* đường tròn.

* Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao của các đường phân giác của các góc trong tam giác.

c) Đường tròn bàng tiếp tam giác.

* Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của tam giác và tiếp xúc với các phần kéo dài của hai cạnh kia gọi là *đường tròn bàng tiếp* tam giác.

* Với một tam giác, có ba đường tròn bàng tiếp.

* Tâm của đường tròn bàng tiếp tam giác trong góc A là giao điểm của hai đường phân giác các góc ngoài tại A và C hoặc là giao điểm của phân giác trong góc A và phân giác ngoài tại B (hoặc C)

6. Vị trí tương đối của hai đường tròn

a) Tính chất đường nối tâm

* Đường nối tâm của hai đường tròn là trục đối xứng của hình gồm cả hai đường tròn đó.

* Nếu hai đường tròn cắt nhau thì hai giao điểm đối xứng với nhau qua đường nối tâm.

* Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.

b) Vị trí tương đối của hai đường tròn.

Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$, $R>r$. Đặt $OO'=d$. Ta có:

Vị trí tương đối của hai đường tròn	*Số điểm chung*	*Hệ thức giữa d với R và r.*
Hai đường tròn cắt nhau	2	$R-r<d<R+r$
Hai đường tròn tiếp xúc nhau:	1	

- Tiếp xúc ngoài - Tiếp xúc trong		$d = R + r$ $d = R - r$
Hai đường tròn không giao nhau: - Ở ngoài nhau - (O) đựng (O')	0	$d > R + r$ $d < R - r$

c) Tiếp tuyến chung của hai đường tròn

- *Tiếp tuyến chung* của hai đường tròn là đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn đó.
- *Tiếp tuyến chung ngoài* là tiếp tuyến chung không cắt đoạn nối tâm.
- *Tiếp tuyến chung trong* là tiếp tuyến chung cắt đoạn nối tâm.

B. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho đường tròn $(O;R)$, đường kính AB và dây AC không qua tâm O. Gọi H là trung điểm của AC .

a) Tính $\widehat{ACB}$ và chứng minh $OH // BC$.

b) Tiếp tuyến tại C của (O) cắt OH ở M. Chứng minh đường thẳng là tiếp tuyến của (O) tại A.

c) Vẽ CK vuông góc AB tại K. Gọi I là trung điểm của CK và đặt $\widehat{CAB} = \alpha$. Chứng minh $IK = 2R\sin\alpha.\cos\alpha$;

d) Chứng minh ba điểm M, I, B thẳng hàng.

Bài 2. Cho đường tròn tâm O. Từ điểm E ở ngoài đường tròn kẻ hai tiếp tuyến EM và EN (M và N là các tiếp điểm). OE cắt MN tại H.

a) Chứng minh OE vuông góc với MN.

b) Vẽ đường kính NOB. Chứng minh $OBMH$ là hình thang.

c) Cho $ON = 2cm$ và $OE = 4cm$. Tính độ dài các cạnh và diện tích tam giác EMN.

Bài 3. Cho đoạn thẳng AB, điểm C nằm giữa A và B. Vẽ về một phía của AB các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự là AB, AC, CB. Đường thẳng vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn lớn tại D. DA, DB cắt các nửa đường tròn có đường kính AC, CB theo thứ tự tại M và N.

a) Tứ giác $DMCN$ là hình gì ? Vì sao?

b) Chứng minh hệ thức: $DM.DA = DN.DB$.

c) Chứng minh rằng MN là tiếp tuyến chung của các nửa đường tròn có đường kính AC và CB.

d) Điểm C ở vị trí nào trên AB thì MN có độ dài lớn nhất?

Bài 4. Cho đường tròn (O), đường kính $AB = 2R$. Gọi I là trung điểm của BG, qua I kẻ dây CD vuông góc với OB. Tiếp tuyến của (O) tại C cắt tia AB tại E.

a) Tính độ dài OE theo R.

b) Tứ giác $ACED$ là hình gì? Tại sao?

c) Chứng minh ED là tiếp tuyến của (O).

d) Chứng minh B là trực tâm tam giác CDE.

Bài 5. Cho AB và CD là hai đường kính vuông góc của đường tròn $(O;R)$. Trên tia đối của tia CO lấy điểm S. SA cắt đường tròn (O) tại M. Tiếp tuyến tại M với đường tròn (O) cắt CD tại E, BM cắt CD tại F.

a) Chứng minh $EM.AM = MF.OA$

b) Chứng minh $ES = EM = EF$

c) Cho SB cắt (O) tại I. Chứng minh A, I, F thẳng hàng.

d) Cho $EM = R,$ tính $FA.SM$ theo R

e) Kẻ MH vuông góc với AB. Xác định vị trí điểm S sao cho diện tích tam giác MHD đạt giá trị lớn nhất.

ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 4 (PHẦN II)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Xem lại lý thuyế ở Ôn tập Chủ đề 4 (Phần I)

B. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiệp tuyến chung ngoài $DE, D \in (O)$. Tiếp tuyến chung trong tại A căt ED tại I. Gọi M là giao điểm của OI với AD, N là giao điểm AE với $O'I$.

a) Tứ giác $AMIN$ là hình gì? Tại sao?

b) Chứng minh hệ thức $IM.IO = IN.IO'$

c) Chứng minh OO' là tiếp tuyên của đường tròn đường kinh DE

d) Tính độ dài DE theo R và R'

Bài 2. Cho đường tròn $(O;R)$, đường kính AB. Qua A và B vẽ lần lượt hai tiếp tuyến (d) và (d') với đường tròn (O). Một đường thẳng qua O cắt đường thẳng (d) ở M và cắt đường thẳng (d') ở P. Từ O vẽ một tia vuông góc vơi MP và cắt đường thẳng (d') ở N.

a) Chứng minh $OM = OP$ và ΔMNP cân.

b) Hạ $OI \perp MN$. Chứng minh $OI = R$ và MN là tiếp tuyến của (O),

c) Chứng minh $AM.BN = R^2$.

d) Tìm vị trí của M để diện tích tứ giác $AMNB$ là nhỏ nhất.

Bài 3. Cho nửa đường tròn (O), đường kính $AB = 2R$. Điểm C thuộc nửa đường tròn. Kẻ phân giác BI của góc ABC (I thuộc đường tròn (O)), gọi E là giao điểm của AI và BC.

a) ΔABE là tam giác gì? Vì sao?

b) Gọi K là giao điểm của AC, BI. Chứng minh EK vuông góc với AB

c) Gọi F là điẻm đối xứng với K qua I. Chứng minh rằng AF tiếp tuyến của (O);

d) Khi điểm C di chuyển trên nửa đường tròn thì điểm E di chuyển trên đường nào?

Bài 4. Cho đường tròn (O), đường kính AB, điểm C nằm giữa A và O. Vẽ đường tròn (I) có đường kính CB.

a) Xét vị trí tương đối của hai đường tròn (O) và (I)

b) Kẻ dây DE của dường tròn (O) vuông góc với AC tại trung điểm H của AC. Tứ giac $ADCE$ là hình gì, vì sao?

c) Gọi K là giao điểm của DB là đường tròn (I). Chứng minh rằng ba điểm E, C, K thẳng hàng.

d) Chứng minh rằng HK là tiếp tuyến của đường tròn (I)

Bài 5. Cho đường tròn $(O;R)$. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm BC.

a) Chứng minh ba điểm A, H, O thẳng hàng và A, B, C, O cùng thuộc một đường tròn

b) Kẻ đường kính BD của (O). Vẽ CK vuông góc với BD. Chứng minh $AC.CD = CK.AO$

c) Tia AO cắt đường tròn (O) tại M (M nằm giữa A,O). Chứng minh M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC

d) Gọi I là giao điểm của AD,CK. Chứng minh I là trung điểm CK.

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông góc tại đỉnh A, đường cao AH. Đường tròn đường kính BH cắt AB tại D và đường tròn đường kính CH cắt AC tại E. Gọi I,J theo thứ tự là các trung điểm của các đoạn thẳng BH,CH.

a) Chứng minh rằng A,D,H,E nằm trên một đường tròn. Xác định hình dạng tứ giác $ADHE$

b) Chứng minh hai đường tròn đường kính BH và đường kính CH tiếp xúc ngoài với nhau tại điểm H và AH là tiếp tuyến chung của hai đường tròn

c) Chứng minh DE là một tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn

d) Cho $AB = 6cm, AC = 8cm$. Tinh độ dài đoạn thẳng DE.

HƯỚNG DẪN GIẢI
CHỦ ĐỀ 4. ĐƯỜNG TRÒN

VẤN ĐỀ 1.

Bài 1. a) Gọi O là trung điểm của $BC \Rightarrow O$ là tâm đường tròn đi qua A, B, C;

b) $OA = OB = OC \Rightarrow OA = \frac{1}{2}BC.$

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

Bài 2. Gọi O là trung điểm của BC. Chứng minh : B, C, D, E nằm trên $\left(O; \frac{BC}{2}\right)$.

Bài 3. a) IFEK là hình bình hành tâm O có : $CH \perp IK, KE \parallel CH$

$\Rightarrow IK \perp KE \Rightarrow$ IFEK là hình chữ nhật I, F, E, K cùng thuộc $(O; OI)$.

b) Chứng minh $KD \perp DF \Rightarrow \Delta KDF$ vuông.

Bài 4. $MNPQ$ là hình chữ nhật tâm $O \Rightarrow M, N, P, Q$ cùng thuộc $(O; OM)$.

Bài 5. Gọi E, F, P, Q lần lượt là trung điểm của MA, MB, MC, MD. Chứng minh tứ giác EFPQ có hai góc đối có tổng bằng $180^0 \Rightarrow E, F, P, Q$ cùng thuộc một đường tròn.

Bài 6. Trong hình thoi , đường chéo này là trung trực của đường chéo kia. Do đó, điểm E là giao điểm hai đường trung trực của hai cạnh AB và AC. Nên E là tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔABC. Tương tự, F là tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔABD.

Bài 7. a) Ta có : $\widehat{ACD} = 90^0 \Rightarrow C$ thuộc đường tròn đường kính AD. Chứng minh $\widehat{ABD} = 90^0 \Rightarrow B$ thuộc đường tròn đường kính $AD \Rightarrow B, C$ cùng thuộc đường tròn đường kính AD;

b) $AD = 10cm.$

Bài 8. a) Gọi O là trung điểm của BC. Mà $D \in \left(O; \frac{1}{2}BC\right) \Rightarrow OB = OD = OC$

$\Rightarrow \Delta DBC$ vuông tại $D \Rightarrow CD \perp AB.$ Tương tự $BE \perp AC$;

b) Xét ΔABC có K là trực tâm $\Rightarrow AK \perp BC.$

Bài 9. a) Gọi EF là đường kính của $\left(O; \frac{AB}{2}\right)$ sao cho $EF \perp AB$. Xét trường hợp C chạy trên nửa đường tròn $\overset{\frown}{EBF}$. Chứng minh $\Delta OMB = \Delta OHC (c.g.c)$

$\Rightarrow \widehat{OMB} = \widehat{OHC} = 90^0$. Vậy M chạy trên đường tròn đường kính OB;

b) Vì $C \in (O) \Rightarrow \widehat{ACB} = 90^0$ hay $AC \perp BD$. Mà $CD = CB \Rightarrow \Delta ABC$ có AC vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến nên ΔABD cân tại $A \Rightarrow AD = AB$ nên D chạy trên $(A; AB)$.

Bài 10. Gọi I là tâm hình thoi.

Chứng minh P là trọng tâm của ΔABC. Kẻ

$PQ \parallel AI \Rightarrow \frac{BQ}{AB} = \frac{BP}{BI} = \frac{2}{3} \Rightarrow BQ = \frac{2}{3}AB$

Q cố định P thuộc đường tròn đường kính QB.

VẤN ĐỀ 2.

Bài 1. $OA = \sqrt{2} < 2 \Rightarrow$ Điểm $A(-1;-1)$ nằm trong đường tròn $(O;2)$; $OB = \sqrt{5} > 2$

$\Rightarrow$ Điểm $B(-1;-2)$ nằm ngoài đường tròn $(O;2)$; $OC = 2 = R$

$\Rightarrow$ Điểm $C\left(\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$ nằm trên đường tròn $(O;2)$.

Bài 2. a) $\widehat{BNC} = 90^0 \Rightarrow ON = OB = OC$

$\Rightarrow N \in \left(O;\dfrac{BC}{2}\right)$,

$\widehat{BMC} = 90^0 \Rightarrow OM = OB = OC$

$\Rightarrow M \in \left(O;\dfrac{BC}{2}\right) \Rightarrow B, C, M, N$ cùng thuộc đường tròn tâm O;

b) ΔABC đều có G là trực tâm đồng thời là trọng tâm. ΔOAB vuông tại O có $R = ON = \dfrac{a}{2}$.

$OA = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} > R \Rightarrow A$ nằm ngoài tâm (O).

$OG = \dfrac{1}{3}OA = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} < R$

$\Rightarrow G$ nằm trong (O).

Bài 3. Áp dụng định lí Pitago cho tam giác vuông ABC, ta có $BC = 13cm \Rightarrow R = 6,5cm$.

Bài 4. Gọi O là giao điểm của AC và BD, ta có : $OA = OB = OC = OD$

A, B, C, D cùng thuộc $(O; R = 6,5cm)$.

Bài 5. Gọi O là giao điểm ba đường trung trực của ΔABC. Khi đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Gọi H là giao điểm của AO và BC. Ta có :

$AH = \sqrt{3} \Rightarrow AO = \dfrac{2}{3}AH = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Bài 6. a) Dựng đường thẳng d là đường trung trực của AB, d cắt tia Ay tại O. Dựng $(O;OA)$ là đường tròn cần dựng:

*Chứng minh: Vì $O \in d$ nên $OA = OB$, do đó $(O;OA)$ đi qua hai điểm A, B. Mà $O \in Ay$ nên đường tròn (O) thỏa mãn đề bài.

b) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}(cm)$.

Bài 7. a) $OB = OC = BD = CD = R$

$\Rightarrow OBDC$ là hình thoi;

b) $\widehat{CBO} = \widehat{CBD} = \widehat{ABO} = 30°$;

c) ΔABC có AO vừa là đường cao, vừa là đường trung trực nên ΔABC cân tại A có $\widehat{ABC} = 60° \Rightarrow \Delta ABC$ đều.

Bài 8. a) Chứng minh $\Delta CMB = \Delta DNC$

$\Rightarrow \widehat{NCE} = \widehat{CDN}$.

Mà $\widehat{CDN} + \widehat{DNC} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{NCE} + \widehat{DNC} = 90° \Rightarrow \widehat{CEN} = 90°$.

b) A, D, E, M cùng thuộc đường tròn đường kính DM ;

c) Gọi I là trung điểm của CD, chứng minh AI song song với

$MC \Rightarrow \Delta ADE$ cân tại A

$\Rightarrow B, E, D$ cùng thuộc $(A; AB)$.

VẤN ĐỀ 3.

Bài 1. a) Gọi H và K là hình chiếu vuông góc của O trên AB và CD. $OK = \sqrt{41}(cm)$; $OH = MK = 3(cm)$;

b) $R = 3\sqrt{10}(cm)$.

Bài 2. a) Gọi OH, OK là khoảng cách từ O đến mỗi dây. Ta có: $OH = OK = 1(cm)$;

b) $R = \sqrt{10}(cm)$.

Bài 3. a) Gọi OH, OK lần lượt là khoảng cách từ O đến AB, AC.

Ta có: $OH = \dfrac{\sqrt{11}}{2}; OK = 2\sqrt{2}$.

Bài 4. Gọi $OD = x(cm)$, ta có:

$OM = x - 4(cm) \Rightarrow x^2 = 8^2 + (x-4)^2$

$\Rightarrow x = 10(cm)$.

Bài 5. a) Gọi OH là khoảng cách từ O đến $CD: MH = 4(cm) \Rightarrow OH = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}(cm)$;

b) $OD = \dfrac{4\sqrt{39}}{3}(cm)$.

Bài 6. Gọi HK là đường thẳng qua O và vuông góc với AB và CD, $H \in AB, K \in CD$. Ta có: $OH = 3, OK = 4 \Rightarrow HK = 7(cm)$.

Bài 7. Kẻ $OE \perp CD, E \in CD$. Ta có: $OC = 11, CE = 9 \Rightarrow OE = 2\sqrt{10}$; $OM = 7 \Rightarrow ME = 3 \Rightarrow MC = EC - ME = 6(cm)$, $MD = 12(cm)$.

Bài 8. a) $HA = 4cm, HB = 9cm$;

b) $HM = \dfrac{12\sqrt{13}}{13}cm$;

$HN = \dfrac{18\sqrt{13}}{13}cm$;

$\Rightarrow S_{CMHN} = \dfrac{216}{13}cm^2$.

Bài 9. a) $\dfrac{MH}{AM} = \dfrac{BK}{AB} \Rightarrow BK = 19,2$

$\Rightarrow AK = 14,4$

$\Rightarrow KC = 5,6 \Rightarrow BC = 20(cm)$

$\Rightarrow BC = AC$;

b) CO cắt AB tại E

$\Rightarrow CE = 2HM = 16(cm)$;

$CM.CA = CO.CE$

$\Rightarrow CO = \dfrac{CM.CA}{CE} = 12,5\left(cm\right).$

VẤN ĐỀ 4.

Bài 1. Gọi I là trung điểm CD $\Rightarrow IC = ID$. Xét hình thang $AEFB, I$ là trung điểm EF $\Rightarrow IE = IF$. Từ đó $CE = DF$.

Bài 2. $\Delta AOH = \Delta BOK \Rightarrow AH = BK$ $\Rightarrow AC = BD.$

Bài 4. a) B, D, C, E cùng thuộc đường tròn đường kính BC;

b) BC là đường kính, ED dây không qua tâm.

Bài 5. a) $BD//CH$ (cùng $\perp AB$); $BH//CD$ (cùng $\perp AC$);

b) I là trung điểm BC $\Rightarrow I$ là trung điểm HD;

c) OI là đường trung bình ΔAHD $\Rightarrow AH = 2OI$.

Bài 6. Chứng minh tương tự **Bài 2.**

Bài 7. Chứng minh tương tự **Bài 1.**

Bài 8. a) B, D, C, E nằm trên đường tròn đường kính BC;

b) $\Delta ADB \backsim \Delta AEC \Rightarrow AE.AB = AD.AC$;

c) $BHCK$ có I là trung điểm hai đường chéo ;

d) $\Delta ABK, \Delta ACK$ vuông tại B và C nên A, B, K, C nằm trên đường tròn đường kính AK ;

e) OI là đường trung bình của ΔAHK $\Rightarrow OI//AH$.

Bài 9. Kẻ $MH \perp DE$ tại H.

$\widehat{DAE} = 2\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{DAH} = \widehat{BAC}$

$DE = 2DH; AD = AM = AE$

$DH = AD.$ $\sin\widehat{DAH}$ $= AM.\sin\widehat{BAC} \le d.\sin\widehat{BAC}$ (d là đường kính (O)). DE đạt giá trị lớn nhất khi AM là đường kính của (O).

Bài 10. a) $OA = OB = OC$ $\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A ;

b) H là trung điểm AD; $AC = CD$ (BC là trung trực của AD); BC là tia phân giác góc ABD (ΔABD cân tại B có BH là đường cao);

c) $\widehat{BAH}=\widehat{ACH}=\widehat{DAH}$

$\Rightarrow \widehat{ABH}=\widehat{CDH}$.

VẤN ĐỀ 5

Bài 1.

R	**d**	**Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn**
5 cm	**3 cm**	**Cắt nhau**
6 cm	**6 cm**	**Tiếp xúc nhau**
4 cm	**7 cm**	**Không giao nhau**

Bài 2. $(A;3)$ không gioa nhau với trục Ox và tiếp xúc với trục Oy.

Bài 3. O thuộc a và a // b nên O cách b một khoảng 2 cm $\Rightarrow (O;\ 2\text{ cm})$ tiếp xúc với b.

Bài 4. $(B;\ 2)$ không gioa nhau với O và $(B;\ 2)$ tiếp xúc với Oy.

Bài 5. $O\in a$ và a // b nên O cách b một khoảng 3 cm $\Rightarrow (O;\ 3\text{ cm})$ tiếp xúc với b.

Bài 6. Tâm đường tròn nằm trên hai đường thẳng song song với a, b và cách đều a, b một khoảng $\frac{h}{2}$.

Bài 7. $AB=8$ cm

Bài 8. $S_{OMN}=\frac{4}{3}R^2$

Bài 10. M di chuyển trên $(O;4\text{ cm})$

Bài 11. $AD=4$ cm

Bài 12. Kẻ OH vuông góc với xy suy ra $OH<OA$. Mặt khác A nằm trên đường tròn $(O;\ R)$ nên $OA<R$.

Bài 13. Kẻ OH vuông góc với xy suy ra $OH\le OA$. Mặt khác A nằm trên đường tròn $(O;\ R)$ nên $OA\le R$.

Bài 14. $(C;2)$ không cắt hai trục Ox, Oy.

Bài 15. Tâm I thuộc hai đường thẳng song song với a và cách a một khoảng 5 cm.

Bài 16.a) Kẻ OH vuông góc với xy thì $OH=12cm$ do đó (O) cắt xy tại hai điểm B, C ;

b) $BC=2.HC=10cm$.

Bài 17. OC là đường trung bình của hình thang AEFB nên C là trung điểm EF. *Chú ý rằng :* $AE=AH$, $BH=BF$ nên suy ra : $CH^2=HA.HB=AE.BF$.

VẤN ĐỀ 6

Bài 1. Ta có : $BC^2=AB^2+AC^2$

$\Rightarrow \widehat{BAC}=90^0$

Bài 2. a) $\widehat{BAC}=90^0$

b) Gọi O là trung điểm AI. Ta có :

+ $OK=OA\Rightarrow \widehat{OKA}=\widehat{OAK}$

+ $\widehat{OAK}=\widehat{HBK}$ (cùng phụ với $\widehat{ACB}$)

+ $HB=HK\Rightarrow \widehat{HBK}=\widehat{HKB}$

$\Rightarrow \widehat{OKA}=\widehat{HKB}\Rightarrow \widehat{HKO}=90^0$.

+ Nhận xét : Không sử dụng tính chất tam giác cân trong lời giải nên cách làm sẽ không thay đổi nếu giả thiết chỉ cho tam giác thường.

Bài 3.a) Gọi O là trung điểm của AH thì $OE=OA=OH=OD$;

b) Chứng minh tương tự **Bài 2b**

Bài 4. Trung trực AB cắt đường thẳng vuông góc với d ở A tại O. Đường tròn $(O;\ OA)$ là đường tròn cần dựng.

Bài 5. a) Tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn $(O)\Rightarrow OC\perp BC$

$\Rightarrow OA\perp AD$ (vì AD // BC)

$\Rightarrow AD$ là tiếp tuyến đường tròn (O);

b) ABCD là hình bình hành nên AC

cắt BD tại trung điểm I của AC ; AN và CN là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow$ ON, AC, BD cùng đi qua trung điểm I của AC.

Bài 6. a) Dễ có AMON là hình bình hành. Ta chứng minh $OM = ON$. Xét tam giác OBM và tam giác OCN có : $\widehat{OBM} = \widehat{OCN} = 90^0$; $OB = OC = R,$ và $\widehat{OMB} = \widehat{ONC} = \widehat{A} \Rightarrow \Delta OBM = \Delta OCN$ $\Rightarrow OM = ON \Rightarrow AMON$ là hình thoi ;

b) AMON là hình thoi nên $OA \perp MN$ và

OA bằng 2 lần khoảng cách từ O đến MN. Do đó MN là tiếp tuyến đường tròn $(O;\ R) \Leftrightarrow$ khoảng cách từ O đến MN bằng R $\Leftrightarrow OA = 2R$.

Bài 7. Từ O hạ vuông góc với d. OH cắt (O) tại A và B. Qua A và B kẻ các đường thẳng vuông góc với OA và OB ta được hai (hoặc I nếu d là tiếp tuyến của (O)) tiếp tuyến song song với d.

Bài 8. a) M thuộc đường tròn đường kính AB $\Rightarrow \widehat{AMB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{EMF} = 90^0$.

Tiếp tuyến DM, DB

$\Rightarrow OD \perp BM \Rightarrow \widehat{OEM} = 90^0$

$\Rightarrow$ OEMF là hình chữ nhật

$\Rightarrow \widehat{EOF} = 90^0$ hay $\widehat{COD} = 90^0$;

b) MEOF là hình chữ nhật ;

c) Gọi I là trung điểm CD thì I là tâm đường tròn đường kính CD và $IO = IC = ID$. Có ABDC là hình thang vuông tại A và B nên IO // AC // BD và IO vuông góc với AB. Do đó AB là tiếp tuyến đường tròn đường kính CD.

Bài 9.a) BH, BD là tiếp tuyến của $(A; AH) \Rightarrow \widehat{HAD} = 2\widehat{HAB}$ vì CH, CE là tiếp tuyến của $(A; AH) \Rightarrow \widehat{HAE} = 2\widehat{HAC} \Rightarrow$ $\widehat{HAD} + \widehat{HAE} = 2(\widehat{HAB} + \widehat{HAC}) = 180^\circ$

$\Rightarrow D, A, E$ thẳng hàng

b) Tương tự **Bài 13c.**

Bài 10. Có *ABCD* là hình thang vuông tại *C* và *D*. Mà *O* là trung điểm của *AB* và *OM* vuông góc với *CD* (*CD* là tiếp tuyến của (*O*)) $. \Rightarrow AD + BC = 2OM = 2R$. Chú ý rằng $CD \le AB$ (hình chiếu đường xiên)

$\Rightarrow S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}(AD + BC).CD$ = $R.CD \le R.AB = 2R^2$. Do đó : S_{ABCD} lớn nhất khi $CD = AB$ hay *M* là điểm chính giữa nửa đường tròn đường kính *AB*.

VẤN ĐỀ 7

Bài 1.a) $\Delta OAC = \Delta OBC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OAB} = 90^\circ \Rightarrow$ (ĐPCM)

b) *OC* = 25(cm).

Bài 2. a) *OA* vuông góc với *BC* tại *M* $\Rightarrow M$ là trung điểm *BC* $\Rightarrow OCAB$ là hình thoi.

b) *OE* = 2*R*.

Bài 3. a) OCB là tam giác đều nên $BC = BO = BM = R \Rightarrow \widehat{COM} = 90^\circ \Rightarrow MC$ là tiếp tuyến của $(O; R)$.

b) $OM^2 = OC^2 + MC^2$ $\Rightarrow MC^2 = OM^2 - OC^2 = 3R^2$.

Bài 4. a) Gọi *O* là trung điểm *CD* từ giả thiết suy ra tam giác *ABD* và tam giác *ODE* đều $\Rightarrow DE = DH = DO = \dfrac{BC}{4}$

$\Rightarrow \widehat{HEO} = 90^\circ \Rightarrow HE$ là tiếp tuyến của đường tròn đường kính *CD*.

b) $HE = 4\sqrt{3}$ (cm).

Bài 5. a) OB = 10(cm).

b) $\Delta OBC = \Delta OBA$ (c.g.c) $\Rightarrow BC$ là tiếp tuyến của đương tròn *(O).*

Bài 6.a) ΔABE vuông tại B, đường cao BC $\Rightarrow BC^2 = AC.CE$.

b) $BE = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$.

Bài 7. a) $S_{\Delta OMN} = \dfrac{1}{2}OC.MN = \dfrac{a.R}{\sqrt{R^2 - a^2}}$.

VẤN ĐỀ 8

Bài 1. a), b) Có $AB = AC;\ OB = OC$ suy ra *AO* là trung trực *BC*.

c) *BD* // *OA* vì cùng vuông góc với *BC*.

Bài 2. a) $\widehat{DOM} = 90^\circ$.

b) $\Delta COM \sim \Delta ODM$.

c) $AC = R\sqrt{3}$.

Bài 3. a) BO//CH, OC//BH $\Rightarrow OCBH$ là hình thoi.

b) $OA \perp BC, OH \perp BC \Rightarrow A, H, O$ thẳng hàng.

c) Để $H \in (O)$ thì $OH = OC = CH$ $\Rightarrow \widehat{CAO} = 30^\circ \Rightarrow AO = 2R$.

Bài 4. $\widehat{AMO} = \widehat{CMO} \Rightarrow \widehat{CMO} = \widehat{COM}$.

Bài 5.a) *IK//OA* vì cùng vuông góc với *IA*.

b) $\widehat{KOI} = \widehat{AOI}$ và $\widehat{AOI} = \widehat{KIO}$ $\Rightarrow \widehat{KOI} = \widehat{KIO}$.

Bài 6. Chu vi tam giác

$C_{ADE} = AD + DM + AE + EM = AB + AC = 2AB.$

VẤN ĐỀ 9.

Bài 1. *AB* = 6(cm).

Bài 2. $\widehat{BAC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BAO} = 30^\circ \Rightarrow$ *OA* = *2OB* = *2R*, *OA* = *2R* = *2OB*,

$\Rightarrow \widehat{BAO} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ$

$\Rightarrow$ tam giác *ABC* là tam giác đều.

Bài 3. Gọi D là giao điểm của IG và AB. Khi đó ta tính được $DG = \frac{2}{3}AM$ = 4. *D* là tiếp điểm của *(I)* với *AB* nên $AD = \frac{AB + AC - BC}{2} = 3,$ $\Rightarrow ID = DA = 3$

$\Rightarrow IG = DG - ID = 1.$

Bài 4. ΔMEF đều $\Rightarrow$ *EF* =10.

Bài 5. ΔOIC vuông tại *C*. $\widehat{OIC} = 30^\circ \Rightarrow$ *OI* = 2*R*. Xét ΔOBI có OI = 2R $\Rightarrow \widehat{OIB} = 30^\circ$.

Bài 6. a) *OA* phân giác của $\widehat{BOC}$, ΔOBC cân tại *O* $\Rightarrow OA \perp BC$.

b) $\widehat{BDC} = \widehat{COA}$ (cùng phụ với góc *OCB*) $\Rightarrow$ *BD//OA*.

c) ΔABC đều $\Rightarrow AB = BC = AC = 2\sqrt{3}$.

Bài 7. a) *BI*, *BK* lần lượt là phân giác trong và ngoài góc *B* nên *BI* vuông góc *BK*, suy ra $\widehat{IBK} = 90^\circ$, tương tự $\widehat{ICK} = 90^\circ$.

b) $\widehat{ACI} = \widehat{ICB} = \widehat{IBC} = \widehat{IKC}$ mà $\widehat{IKC} + \widehat{IKC} + \widehat{KIC} = 90^\circ$ $\Rightarrow \widehat{ACI} + \widehat{OCI} = 90^\circ$.

c) *BC* và *AK* cắt nhau tại *H*. Ta được : HB=HC (*AK* là trung trực của *BC*) $\Rightarrow HB = \frac{BC}{2} = 12$.

$AH = \sqrt{AC^2 - HC^2} = 16$ $\Delta ACH \sim \Delta COH$ (hai tam giác vuông chung góc nhon tại O)

$\Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{HC}{CO}$ $\Rightarrow CO = \frac{AC.HC}{AH} = 15.$

VẤN ĐỀ 10

Bài 1. a) $\widehat{COA} = \widehat{COM}, \widehat{DOM} = \widehat{DOB}$ $\Rightarrow \widehat{COM} = 90^\circ$.

b) $\widehat{OBD} = \widehat{OMD} = 90^\circ \Rightarrow B, D, M, O$ thuộc đường tròn bán kính $\frac{OD}{2}$.

c) $CD = MC + MD = AC + BD;$

d) $AC.BD = MC.MD = MO^2 = R^2;$

e) Gọi *I*là trung điểm của $CD \Rightarrow I$ là tâm của đường tròn đường kính *CD* và *IO* là đường trung bình của hình thang vuông *ACDB* nên $IO \perp AB = O;$

f) $\frac{CM}{MD} = \frac{CA}{DB} = \frac{AN}{ND} \Rightarrow MN \parallel AC;$

g) $BN' \cap OI = \{K\} \Rightarrow OB = OK.$

Ta có $\frac{BO}{BD} = \frac{OK}{BD} = \frac{KN'}{BN'}$

$\Rightarrow \frac{KN'}{BO} = \frac{BN'}{BD}$

$\Rightarrow \frac{BN'}{BD} + \frac{BN'}{BO} = \frac{BK}{BO} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{BO} + \frac{1}{BD} = \frac{\sqrt{2}}{BN'}.$

Bài 2. a) *AO* là trung trực của *BC* $\Rightarrow A, H, O$ thẳng hàng.

$\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 180^o \Rightarrow A, B, C, O$ nằm trên đường tròn đường kính *AO*;

b) $\widehat{CDK} = \widehat{COA}$

$\Rightarrow \Delta ACO \sim \Delta CKD(g.g)$

$\Rightarrow AC.CD = CK.AO;$

c) *AM* là phân giác của góc *A*của ΔABC. Chứng minh *BM* là phân giác của góc B của $\Delta ABC \Rightarrow M$ là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC;

d) Theo câu b) : $CK = \frac{AC.CD}{AO}$,

$IK \parallel AB \Rightarrow \frac{IK}{AB} = \frac{DK}{DB}$

$\Rightarrow IK = \frac{AB.DK}{DB} = \frac{AC.DK}{2OC}$

$\Rightarrow \frac{CK}{IK} = 2\frac{CD}{AO}.\frac{OC}{DK} = 2 \Rightarrow I$ là trung điểm của *CK*;

Bài 3. a) Chứng minh DO vừa là phân giác vừa là đường cao của $\Delta CDN \Rightarrow \Delta CDN$ cân tại D.

c) $AC.BD = MC.MD = R^2$.

Bài 4. a) $OH = 1,5\ cm$;

b) $P_{\Delta ADE} = 6\sqrt{3}\ cm$;

c) $\widehat{DOE} = 60^o$.

Bài 5. ΔABC có BI, BK lần lượt là phân giác trong và phân giác ngoài tại B

$\Rightarrow \widehat{IBK} = 90^o \Rightarrow B, I, C, K \in \left(O; \dfrac{IK}{2}\right)$;

Ta có: $\widehat{MCI} = \widehat{IBC} = \widehat{IKC} = \widehat{OCK}$.

Mặt khác $\widehat{OCK} + \widehat{OCI} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{MCI} + \widehat{OCI} = 90^o$

$\Rightarrow OC \perp CM \Rightarrow MC$ là tiếp tuyến của (O);

c) Gọi D là giao điểm của MO và BC

$\Rightarrow CD = \dfrac{BC}{2} = 6\ cm$.

$\dfrac{1}{CD^2} = \dfrac{1}{MC^2} + \dfrac{1}{OC^2}$

$\Rightarrow OC = 7,5\ cm = R$.

VẤN ĐỀ 11

Bài 1. a) Có : $IA = IB = IC$ nên tam giác ABC vuông tại A;

b) $\widehat{OIO'} = 90^o$; c) $BC = 12$.

Bài 2. a) Từ $MA = MB = MC \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A;

b) $\widehat{OMO'} = 90^o$;

c) $S = (R + r)\sqrt{Rr}$

d) $OBCO'$ là hình thang vuông tại B và C có IM là đường trung bình $\Rightarrow IM \perp BC = M$.

Bài 3. $AB = 24cm$.

Bài 4. Ta có $\widehat{ABC} + \widehat{ABD} = 180^o$.

Bài 5. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AC và AD $\Rightarrow AM$ là đường trung bình của hình thang $OPQO' \Rightarrow AP = AQ \Rightarrow AC = AD$.

Bài 6. Ta có $\widehat{OBA} = \widehat{OAB}$ $= \widehat{O'AC} = \widehat{O'CA} \Rightarrow OB \parallel O'C$ $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 7. a) Ta có: $KI < OI + OK$

$\Rightarrow (I)$ và (K) luôn cắt nhau.

b) Do $OI = NK; OK = IM$

$\Rightarrow OM = ON$. Mặt khác $OMCN$ là hình chữ nhật $\Rightarrow OMCN$ là hình vuông.

c) Gọi $L = KP \cap MC, P = IB \cap NC$

$\Rightarrow OKBI$ là hình chữ nhật và $BLMI$ là hình vuông.

$\Rightarrow \Delta BLC = \Delta OKI$.

$\Rightarrow \widehat{LBC} = \widehat{OKI} = \widehat{BIK}$

Mà $\widehat{BIK} + \widehat{IBA} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{LBC} + \widehat{IBA} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{LBC} + \widehat{IBA} + \widehat{IBL} = 180^o$;

d) Có $OMCN$ là hình vuông cạnh a cố định $\Rightarrow C$ cố định và AB luôn đi qua C

Bài 8. a) Gọi I là trung điểm của AB ta có $OI = OA - IA$;

b) Ta chứng minh được $IC \parallel BD \parallel OE$ mà $OB = BI = IA \Rightarrow AC = CD = DE$.

Bài 9. a) (O) và (I) tiếp xúc trong với nhau ; b) ADCE là hình thoi.

c) Có $CK \perp AB, AD \perp DB$

$\Rightarrow CK \parallel AD$ mà $CE \parallel AD$

$\Rightarrow B, K, D$ thẳng hàng.

d) $\widehat{HKD} = \widehat{HDK}; \widehat{IKB} = \widehat{IBK}$

$\Rightarrow \widehat{HKD} + \widehat{IKB} = \widehat{HDK} + \widehat{IBK} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{IKH} = 90^o$.

ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 4 (PHẦN I)

Bài 1. a) $\widehat{ACB} = 90^o$, OH là đường trung bình của $\Delta ABC \Rightarrow OH \parallel BC$;

b) $\Delta AMO = \Delta CMO$

$\Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{MCO} = 90^o$

$\Rightarrow MA$ là tiếp tuyến của (O);

c) $IK = \dfrac{1}{2}CK = \dfrac{1}{2}AC\sin\alpha$

$= \dfrac{1}{2}AC\sin\alpha = R\cos\alpha\sin\alpha$;

d) Giả sử BI cắt AM tại N

Vì $IK \parallel AM \Rightarrow \dfrac{IK}{AN} = \dfrac{BK}{AB}$.

$\Rightarrow \dfrac{IK}{AM} = \dfrac{BK}{AB}\left(= \sin^2\alpha\right)$

$\Rightarrow M \equiv N$.

Bài 2. a) Dựa vào tính chất tiếp tuyến , chứng minh EO là đường trung bình của MN.

$\Rightarrow EO \perp MN$.

b) Chứng minh $MB // OH \perp MN$

$\Rightarrow OBMN$ là hình thang.

c) $EM = EN = 2\sqrt{3}cm$; $MN = 2NH = 2\sqrt{3}cm$.

$S_{EMN} = 3\sqrt{3}cm^2$.

Bài 3. a) Chứng minh tứ giác $DMCN$ là hình chữ nhật;

b) Chứng minh $DM.DA = DC^2$;

$DN.DB = DC^2$;

$\Rightarrow DM.DA = DN.DB$;

c) Gọi G, I, C lần lượt là tâm các nửa đường tròn đường kính AC, AB, CB. Gọi O là tâm của hình chữ nhật $CMDN$. Chứng minh $\Delta MGO = \Delta CGO$.

$\Rightarrow MN \perp MG$.

Tương tự chứng minh được $MN \perp NH$. Suy ra MN là tiếp tuyến chung của các nửa đường tròn đường kính AC, BC.

Vì $DMCN$ là hình chữ nhật nên $MN = CD$. Suy ra MN lớn nhất khi CD lớn nhất. Mà $CD \le DI$. Suy ra MN lớn nhất khi $C \equiv I$ hay C là trung điểm AB.

Bài 4. a) $OE = 2R$.

b) Chứng minh I là trung điểm của $AE\left(AI = EI = 1{,}5R\right)$.

Từ đó chứng minh $ACED$ là hình thoi (tính chất hai đường chéo vuông góc cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường)

c) Chứng minh được $\widehat{OCE} = \widehat{ODE} = 90^0$

$\Rightarrow ED$ là tiếp tuyến của đường tròn (O).

d) Từ câu c) có EB là phân giác của góc $\widehat{DEC}$. Chứng minh $\widehat{DCB} = \widehat{BCE} = 30^0$.

$\Rightarrow BE$ là phân giác của góc $\widehat{ECD}$

$\Rightarrow B$ là trực tâm của tam giác ΔDCE.

Bài 5. a) Chứng minh $\Delta MEF \backsim MAO$.

$\Rightarrow EM.AM = MF.OA$;

b) $\Delta MEF \backsim \Delta MAO$ mà $AO = OM$

$\Rightarrow ME = MF$;

ΔMSF vuông tại M mà $ME = MF$, từ đó chứng minh được $ME = ES$.

$\Rightarrow ES = EM = EF$;

Chứng minh F là trực tâm của ΔSAB, mà AI là đường cao, chứng minh được A, I, F thẳng hàng;

c) $FA.SM = 2R^2$;

d) $S_{MHD} = \dfrac{1}{2}OH.MH$;

$OH.MH \le \dfrac{1}{2}\left(OH^2 + MH^2\right)$

$= \dfrac{1}{2}MO^2 = \dfrac{1}{2}R^2 \Rightarrow S_{MHD}$ lớn nhất khi H là trung điểm của $AO \Rightarrow SO = 2MH = R\sqrt{2}$.

ÔN TẬP CHỦ ĐỀ 4 (PHẦN II)

Bài 1. a) Chứng minh $AMIN$ là hình chữ nhật (theo dấu hiệu tứ giác có ba góc vuông);

b) Chứng minh: $IM.OI = IA^2$ và $IN.IO' = IA^2 \Rightarrow IM.IO = IN.IO'$;

c) Chứng minh I là tâm đường tròn đường kính DE mà $IA \perp OO'$ nên OO' là tiếp tuyến của đường tròn đường kính DE.

d) $DE = 2\sqrt{R.R'}$.

Bài 2. a) $\Delta MAO = \Delta PBO$

$\Rightarrow MO = OP \Rightarrow \Delta MNP$ cân vì đường cao NO đồng thời là đường trung tuyến;

b) $\dfrac{1}{OI^2} = \dfrac{1}{OM^2} + \dfrac{1}{ON^2} = \dfrac{1}{OP^2} + \dfrac{1}{ON^2} = \dfrac{1}{OB^2}$

$\Rightarrow OI = R$

$\Rightarrow MN$ là tiếp tuyến của đường tròn (O);

c) $AM.BN = MI.IN = OI^2 = R^2$.

d) $S_{AMNB} = \dfrac{(MA + BN).AB}{2} = \dfrac{MN.AB}{2}$

$\Rightarrow S_{AMNB}$ nhỏ nhất khi MN nhỏ nhất

$\Leftrightarrow AM = R$.

Bài 3. a) ΔABE cân vì BI vừa là đường cao vừa là đường phân giác;

b) Chứng minh K là trực tâm $\Delta ABE \Rightarrow EK \perp AB$;

c) Chứng minh: $\widehat{AFB} + \widehat{ABF} = \widehat{KBC} + \widehat{BKC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{FAB} = 90^0$ $\Rightarrow FA$ là tiếp tuyến của (O).

d) C di chuyển trên đường tròn (O) thì E di chuyển trên $(B; BA)$;

Bài 4. a) (O) và (I) tiếp xúc ngoài;

b) $ACED$ là hình thoi (theo dấu hiệu hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm mỗi đường);

c) Chứng minh $EC//A$ và $CK//A$D, từ đó suy ra E, C, K thẳng hàng;

d) $\widehat{DFB} + \widehat{DKH} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{DKH} + \widehat{IKB} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{HIK} = 90^0 \Rightarrow HK$ là tiếp tuyến của (I).

Bài 5. a)Chứng minh $AH \perp BC \& HO \perp BC \Rightarrow A, H, O$ thẳng hàng. Chứng minh $\Delta ABO \& \Delta ACO$ cùng nội tiếp một đường tròn đường kính AO nên A, B, O, C cùng thuộc một đường tròn;

b) Chứng minh $\Delta CKD \backsim \Delta ACO \Rightarrow AC.CD = CK.AO$;

c) AM và BM là hai đường phân giác của tam giác ABC

$\Rightarrow M$ là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

d) Chứng minh $HI//BD$ mà H là trung điểm của BC nên I của trung điểm của CK.

Bài 6. a) Chứng minh ΔAHD và ΔAHE nội tiếp đường tròn đường kính AH nên A, H, D, E cùng thuộc một đường tròn. Tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật.

b) Sử dụng định nghĩa để chứng minh đường tròn đường kính BH và đường tròn đường kính CH tiếp xúc ngoài với nhau tại H. Vì $AH \perp BH, AH \perp CH$ nên AH là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

c) Gọi $O = AH \cap ED$. Chứng minh $\widehat{IDO} = \widehat{AHI} = 90^0 \& \widehat{JEO} = \widehat{AHJ} = 90^0 \Rightarrow ED$ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn;

d) $DE = 4,8cm$.