BẤT ĐẲNG THỨC

I. BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI 2
DẠNG 1: DẠNG TỔNG SANG TÍCH 2
DẠNG 2: DẠNG TÍCH SANG TỔNG, NHÂN BẰNG SỐ THÍCH HỢP. 3
DẠNG 3: QUA MỘT BƯỚC BIẾN ĐỔI RỒI SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI 4
DẠNG 4: GHÉP CẶP ĐÔI 7
DẠNG 5: DỰ ĐOÁN KẾT QUẢ RỒI TÁCH THÍCH HỢP 7
DẠNG 6: KẾT HỢP ĐẶT ẨN PHỤ VÀ DỰ ĐOÁN KÊT QUẢ 10
DẠNG 7: TÌM LẠI ĐIỀU KIỆN CỦA ẨN 13
II. BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIA 15
III. PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG 18
DẠNG 1: ĐƯA VỀ BÌNH PHƯƠNG 18
DẠNG 2: TẠO RA BẬC HAI BẰNG CÁCH NHÂN HAI BẬC MỘT 20
DẠNG 3: TẠO RA ab+bc+ca 22
DẠNG 4: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT TRONG BA SỐ BẤT KÌ LUÔN TÒN TẠI HAI SỐ CÓ TÍCH KHÔNG ÂM 22
DẠNG 5: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CỦA MỘT SỐ BỊ CHẶN TỪ 0 ĐẾN 1 25
DẠNG 6 : DỰ ĐOÁN KẾT QUẢ RỒI XÉT HIỆU 27
HỆ THỐNG BÀI TẬP SỬ DỤNG TRONG CHỦ ĐỀ 75
I. BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI 75
II. BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIA 77
III. PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG 77

I. BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI

1. Dạng hai số không âm x, y

- Dạng tổng sang tích: $x+y\geq 2\sqrt{xy}$.
- Dạng tích sang tổng: $\sqrt{xy}\leq\frac{x+y}{2}$ hay $xy\leq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$.
- Dạng lũy thừa: $x^2+y^2\geq 2xy$ hay $xy\leq\frac{x^2+y^2}{2}$.

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow x=y$.

- Dạng đặc biệt: $x=x.1\leq\frac{x^2+1}{2}$.

2. Dạng ba số không âm x, y, z

- Dạng tổng sang tích: $x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}$.
- Dạng tích sang tổng: $\sqrt[3]{xyz}\leq\frac{x+y+z}{3}$ hay $xyz\leq\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$.
- Dạng lũy thừa: $x^3+y^3+z^3\geq 3xyz$ hay $xyz\leq\frac{x^3+y^3+z^3}{3}$.

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$.

- Dạng đặc biệt: $x=x.1.1\leq\frac{x^3+1+1}{3}$.

3. Dạng tổng quát với n **số không âm** $x_1, x_2, ..., x_n$

- Dạng tổng sang tích: $x_1+x_2+...+x_n\geq n\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}$.
- Dạng tích sang tổng: $\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}\leq\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$ hay $x_1x_2...x_n\leq\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)^n$.
- Dạng lũy thừa: $x_1^n+x_2^n+...+x_n^n\geq x_1x_2...x_n$ hay $x_1x_2...x_n\leq\frac{x_1^n+x_2^n+...+x_n^n}{n}$.

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow x_1=x_2=...=x_n$.

- Dạng đặc biệt: $x=x.\underbrace{1.1...1}_{n-1}\leq\frac{x^n+n-1}{n}$.

4. Bất đẳng thức trung gian

- $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}\ \forall x>0, y>0$. Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow x=y$.
- $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{9}{x+y+z}\ \forall x>0, y>0, z>0$. Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$.

DẠNG 1: DẠNG TỔNG SANG TÍCH

Ví dụ 1. Cho $x\neq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=8x^2-4x+\frac{1}{4x^2}+15$.

Lời giải

Có $T=\left(4x^2-4x+1\right)+\left(4x^2+\dfrac{1}{4x^2}\right)+14$

$=\left(2x-1\right)^2+\left(4x^2+\dfrac{1}{4x^2}\right)+14\geq 0+2\sqrt{4x^2.\dfrac{1}{4x^2}}+14=16$

Vậy $MinT=16$ khi $x=\dfrac{1}{2}$

***Ví dụ* 2.** Cho $x>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=4x^2-3x+\dfrac{1}{4x}+2011$.

Lời giải

Có $M=4x^2-4x+1+x+\dfrac{1}{4x}+2010$

$=\left(2x-1\right)^2+\left(x+\dfrac{1}{4x}\right)+2010\geq 0+2\sqrt{x.\dfrac{1}{4x}}+2010=2011$.

Vậy $MinM=2011$ khi $x=\dfrac{1}{2}$

***Ví dụ* 2.** Cho $x>y>0$ và $xy=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $H=\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$.

Lời giải

Có $H=\dfrac{x^2+y^2-2xy+2xy}{x-y}=\dfrac{\left(x-y\right)^2+4}{x-y}$

$=\left(x-y\right)+\dfrac{4}{x-y}\geq 2\sqrt{\left(x-y\right).\dfrac{4}{x-y}}=4$.

Vậy $Min\,H=4$ khi $\begin{cases}x-y=\dfrac{4}{x-y}\\ xy=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=2\\ xy=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2-x\\ x^2-2x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\sqrt{3}+1\\ y=\sqrt{3}-1\end{cases}$.

DẠNG 2: DẠNG TÍCH SANG TỔNG, NHÂN BẰNG SỐ THÍCH HỢP.

Ví dụ 1: Cho a ≥ 1, b ≥ 1. Chứng minh : $a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1}\leq ab$

Lời giải

Có $\sqrt{b-1}=\sqrt{1.(b-1)}\leq\dfrac{1+(b-1)}{2}=\dfrac{b}{2}\Rightarrow a\sqrt{b-1}\leq\dfrac{ab}{2}$;

Và tương tự: $b\sqrt{a-1}\leq\dfrac{ab}{2}\Rightarrow a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1}\leq\dfrac{ab}{2}+\dfrac{ab}{2}=ab\Rightarrow$ đpcm

Dấu '=" xảy ra khi a = b = 2

Ví dụ 2: Cho a ≥ 9, b≥ 4, c≥ 1. Chứng minh: $ab\sqrt{c-1}+bc\sqrt{a-9}+ca\sqrt{b-4}\leq\dfrac{11abc}{12}$

Lời giải:

Có:

$$ab\sqrt{c-1}+bc\sqrt{a-9}+ca\sqrt{b-4}=ab\sqrt{(c-1).1}+\frac{bc}{3}.\sqrt{(a-9).9}+\frac{ca}{2}.\sqrt{(b-4).4}$$

$$\le ab.\frac{(c-1)+1}{2}+\frac{bc}{3}.\frac{(a-9)+9}{2}+\frac{ca}{2}.\frac{(b-4)+4}{2}=\frac{11abc}{12}$$

Dấu "=" xảy ra khi a = 18, b = 8, c = 2

Ví dụ 3: Cho a ≥ 0, b ≥ 0, $a^2+b^2\le 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: M = $a\sqrt{b(a+2b)}+b\sqrt{a(b+2a)}$

Lời giải

Xét:

$$M.\sqrt{3}=a.\sqrt{3b(a+2b)}+b\sqrt{3a(b+2a)}\le a.\frac{3b+(a+2b)}{2}+b.\frac{3a+(b+2a)}{2}=\frac{a^2+b^2}{2}+5ab$$

$$\le\frac{a^2+b^2}{2}+5.\frac{a^2+b^2}{2}\le 6\Rightarrow M\le 2\sqrt{3}$$

Vậy MaxM = $2\sqrt{3}$ khi a = b = 1

Ví dụ 4. Cho $x\ge 0$, $y\ge 0$ và $x^2+y^2\le 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{x(14x+10y)}+\sqrt{y(14y+10x)}$$

Lời giải

Xét: $P.\sqrt{24}=\sqrt{24x(14x+10y)}+\sqrt{24y(14y+10x)}$

$$\le\frac{24x+(14x+10y)}{2}+\frac{24y+(14y+10x)}{2}=24(x.1+y.1)$$

$$\le 24\left(\frac{x^2+1}{2}+\frac{y^2+1}{2}\right)=24\left(\frac{x^2+y^2+1}{2}\right)\le 48\Rightarrow P\le\frac{48}{\sqrt{24}}\Rightarrow P\le 4\sqrt{6}.$$

Vậy $\text{Max}P=4\sqrt{6}$ khi $x=y=1$.

Ví dụ 5. Cho $x>0$, $y>0$ và $\sqrt{xy}(x-y)=x+y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=x+y$.

Lời giải

Từ $\sqrt{xy}(x-y)=x+y\Rightarrow x>y$

và $x+y=\sqrt{xy(x-y)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4xy(x-y)^2}\le\frac{1}{2}\frac{(4xy)+(x-y)^2}{2}=\frac{(x+y)^2}{4}$

$\Rightarrow(x+y)^2-4(x+y)\ge 0\Rightarrow x+y\ge 4$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}(x-y)^2=4xy\\x+y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)^2=8xy\\x+y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=2\\x+y=4\end{cases}$

$\Rightarrow x$, y là hai nghiệm phương trình $t^2-4t+2=0\Leftrightarrow t=2\pm\sqrt{2}$.

Do $x>y\Rightarrow x=2+\sqrt{2}$, $y=2-\sqrt{2}$.

Vậy $MinP=4$ khi $x=2+\sqrt{2}$, $y=2-\sqrt{2}$.

DẠNG 3: QUA MỘT BƯỚC BIẾN ĐỔI RỒI SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI

Ví dụ 1. Cho a, b, $c>0$ và $ab+bc+ac=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+1}}.$$

Lời giải

Thay $1=ab+bc+ac$, ta được:

$$P=\frac{a}{\sqrt{a^2+ab+bc+ac}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+ab+bc+ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+ab+bc+ac}}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}}+\frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}$$

$$=\sqrt{\frac{a}{a+b}.\frac{a}{a+c}}+\sqrt{\frac{b}{b+a}.\frac{b}{b+c}}+\sqrt{\frac{c}{c+a}.\frac{c}{c+b}}$$

$$\le\frac{\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}}{2}+\frac{\frac{b}{b+a}+\frac{b}{b+c}}{2}+\frac{\frac{c}{c+a}+\frac{c}{c+b}}{2}$$

$$=\frac{\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}\right)+\left(\frac{a}{a+c}+\frac{c}{a+c}\right)+\left(\frac{b}{b+c}+\frac{c}{b+c}\right)}{2}=\frac{3}{2}$$

Vậy $MaxP=\frac{3}{2}$ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 2. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh:

$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{b+ca}}\le\frac{3}{2}$$

Lời giải

Ta có $\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{b+ca}}=\sqrt{\frac{ab}{c.1+ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a.1+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{b.1+ca}}$

$$=\sqrt{\frac{ab}{c(a+b+c)+ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a(a+b+c)+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{b(a+b+c)+ca}}$$

$$=\sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}}+\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}+\sqrt{\frac{ac}{(b+c)(b+a)}}$$

$$=\sqrt{\frac{a}{a+c}.\frac{b}{c+b}}+\sqrt{\frac{b}{a+b}.\frac{c}{a+c}}+\sqrt{\frac{c}{b+c}.\frac{a}{b+a}}$$

$$\le\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{c+a}+\frac{b}{c+b}\right)+\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{a+c}\right)+\left(\frac{c}{b+c}+\frac{a}{a+b}\right)\right]=\frac{3}{2}\ \text{(đpcm).}$$

Ví dụ 3. Cho $a>0$, $b>0$, $c>0$ và $ab+bc+ac=3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P=\frac{a^2}{c(c^2+a^2)}+\frac{b^2}{a(a^2+b^2)}+\frac{c^2}{b(b^2+c^2)}.$$

Lời giải

Có $P=\frac{a^2}{c(c^2+a^2)}+\frac{b^2}{a(a^2+b^2)}+\frac{c^2}{b(b^2+c^2)}$

$$=\frac{a^2+c^2-c^2}{c\left(c^2+a^2\right)}+\frac{b^2+a^2-a^2}{a\left(a^2+b^2\right)}+\frac{c^2+b^2-b^2}{b\left(b^2+c^2\right)}$$
$$=\left(\frac{1}{c}-\frac{c}{c^2+a^2}\right)+\left(\frac{1}{a}-\frac{a}{a^2+b^2}\right)+\left(\frac{1}{b}-\frac{b}{b^2+c^2}\right)$$
$$\geq\left(\frac{1}{c}-\frac{c}{2\sqrt{c^2a^2}}\right)+\left(\frac{1}{a}-\frac{a}{2\sqrt{a^2b^2}}\right)+\left(\frac{1}{b}-\frac{b}{2\sqrt{b^2c^2}}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{2a}\right)+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2b}\right)+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{2c}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{ab+bc+ac}{2abc}=\frac{3}{2}.$$

Vậy $MinP=\frac{3}{2}$ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 4. Cho $a>0$, $b>0$, $c>0$ và $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$T=\frac{a}{1+9b^2}+\frac{b}{1+9c^2}+\frac{c}{1+9a^2}.$$

Lời giải

Có $T=\frac{a\left(1+9b^2\right)-9ab^2}{1+9b^2}+\frac{b\left(1+9c^2\right)-9bc^2}{1+9c^2}+\frac{c\left(1+9a^2\right)-9ca^2}{1+9a^2}$
$$=\left(a-\frac{9ab^2}{1+9b^2}\right)+\left(b-\frac{9bc^2}{1+9c^2}\right)+\left(c-\frac{9ca^2}{1+9a^2}\right)$$
$$\geq\left(a-\frac{9ab^2}{2\sqrt{1.9b^2}}\right)+\left(b-\frac{9bc^2}{2\sqrt{1.9c^2}}\right)+\left(c-\frac{9ca^2}{2\sqrt{1.9a^2}}\right)$$
$$=a+b+c-\frac{3}{2}(ab+bc+ac)\geq a+b+c-\frac{1}{2}(a+b+c)^2=\frac{1}{2}\quad(\text{do } a+b+c=1).$$

Vậy $MinT=\frac{1}{2}$ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Ví dụ 5. Cho a, b, $c>0$ và $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2$. Chứng minh: $abc\leq\frac{1}{8}$.

Lời giải

Có $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2$
$$\Rightarrow\frac{1}{1+a}=\left(1-\frac{1}{1+b}\right)+\left(1-\frac{1}{1+c}\right)=\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}\overset{\text{cosi}}{\geq}2\sqrt{\frac{b}{1+b}.\frac{c}{1+c}}=2\sqrt{\frac{bc}{(1+b)(1+c)}}.$$

Tương tự: $\frac{1}{1+b}\geq2\sqrt{\frac{ac}{(1+a)(1+c)}}$; $\frac{1}{1+c}\geq2\sqrt{\frac{ab}{(1+a)(1+b)}}$.

Nhân các bất đẳng thức dương, cùng chiều ta được:
$$\frac{1}{(1+a)(1+b)(1+c)}\geq\frac{8abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}\text{ hay } abc\leq\frac{1}{8}\ \ (\text{đpcm}).$$

DẠNG 4: GHÉP CẶP ĐÔI

Tách $x+y+z=\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{2}(y+z)+\frac{1}{2}(z+x)$.

$xyz=\sqrt{xy}.\sqrt{yz}.\sqrt{zx} \quad \forall x,y,z\ge 0$.

Ví dụ 1. Cho $a>0$, $b>0$, $c>0$ và $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh:

a) $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\ge a+b+c$;

b) $\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\ge\sqrt{3}$.

Lời giải

a) Có $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}=\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\right)$

$$\ge\frac{1}{2}.2\sqrt{\frac{bc}{a}.\frac{ca}{b}}+\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{ca}{b}.\frac{ab}{c}}+\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{ab}{c}.\frac{bc}{a}}=a+b+c \text{ (đpcm)}.$$

b) Xét $\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)^2=\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{c^2a^2}{b^2}+\frac{a^2b^2}{c^2}+2\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{c^2a^2}{b^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c^2a^2}{b^2}+\frac{a^2b^2}{c^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}\right)+2$$

$$\ge\frac{1}{2}.2\sqrt{\frac{b^2c^2}{a^2}.\frac{c^2a^2}{b^2}}+\frac{1}{2}.2\sqrt{\frac{c^2a^2}{b^2}.\frac{a^2b^2}{c^2}}+\frac{1}{2}.2\sqrt{\frac{a^2b^2}{c^2}.\frac{b^2c^2}{a^2}}$$

$=a^2+b^2+c^2+2=3$, do đó $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{2}\ge\sqrt{3}$ (đpcm).

Ví dụ 2. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của ΔABC. Chứng minh $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le abc$.

Lời giải

Vì a,b,c là độ dài ba cạnh của ΔABC nên

$$\mathrm{a+b-c>0, b+c-a>0, c+a-b>0}.$$

Có $0<\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}\le\frac{(a+b-c)+(b+c-a)}{2}=b$;

$0<\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}\le\frac{(b+c-a)+(c+a-b)}{2}=c$;

$0<\sqrt{\mathrm{(c+a-b)(a+b-c)}}\le\frac{\mathrm{(c+a-b)+(a+b-c)}}{2}=\mathrm{a}$;

Nhân ba đẳng thức dương cùng chiều ta được

$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le abc$ (điều phải chứng minh).

DẠNG 5: DỰ ĐOÁN KẾT QUẢ RỒI TÁCH THÍCH HỢP

Bước 1: *Kẻ bảng dự đoán giải trị lớn nhất,nhỏ nhất và đạt tại giá trị nào của biến.*

Bước 2: *Kẻ bảng xác định số nào sẽ đi với nhau.*

Bước 3: *Tách ghép thích hợp số hạng và sử dụng bất đẳng thức Cô-si.*

Ví dụ 1. Cho $a\ge 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2a+\frac{5}{a}$.

Lời giải

Phân tích bài toán

a	2	3	4	$\ldots$
P	$\frac{13}{2}\approx 6,5$	$\frac{23}{3}\approx 7,7$	$\frac{37}{4}\approx 9,25$	$\ldots$

Từ bảng thứ nhất dự đoán $\min P=\frac{13}{2}\Leftrightarrow a=2$.

	a	$\frac{1}{a}$
$a=2$	2	$\frac{1}{2}$

Từ bảng thứ hai, ta suy ra $\frac{1}{a}$ sẽ đi với $\frac{a}{4}$ nên $\frac{5}{a}$ sẽ đi với $\frac{5a}{4}$.

<u>Trình bày lời giải</u>

Có $P=\left(\frac{5}{a}+\frac{5a}{4}\right)+\frac{3a}{4}\geq 2\sqrt{\frac{5}{a}\cdot\frac{5a}{4}}+\frac{3a}{4}=5+\frac{3a}{4}\geq 5+\frac{3.2}{4}=\frac{13}{2}$(do $a\geq 2$).

Vậy $\min P=\frac{13}{2}$ khi $\begin{cases}\frac{5}{a}=\frac{5a}{4}\\ a=2\end{cases}\Leftrightarrow a=2$ (thỏa mãn).

Ví dụ 2. Cho $x>0,\ y>0$ và $x+y\leq 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=x+y+\frac{6}{x}+\frac{24}{y}$.

Lời giải

<u>Phân tích bài toán</u>

$(x\,;\,y)$	$(1\,;\,5)$	$(2\,;\,4)$	$(3\,;\,3)$	$(4\,;\,2)$	$(5\,;\,1)$
F	$\frac{84}{5}=16,8$	15	16	$\frac{39}{2}=19,5$	$\frac{156}{5}=31,2$

Từ bảng thứ nhất, ta dự đoán $\min F=15$ khi $x=2,y=4$.

	x	$\frac{1}{x}$	y	$\frac{1}{y}$
$x=2,y=4$	2	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{1}{4}$

Từ bảng thứ hai, ta suy ra $\frac{1}{x}$ sẽ đi với $\frac{x}{4}$ nên $\frac{6}{x}$ sẽ đi với $\frac{6x}{4}=\frac{3x}{2}$; $\frac{1}{y}$ sẽ đi với $\frac{y}{16}$ nên $\frac{24}{y}$ sẽ đi với $\frac{24y}{16}=\frac{3y}{4}$.

<u>Trình bày lời giải</u>

Có

$$F=\left(\frac{6}{x}+\frac{3x}{2}\right)+\left(\frac{24}{y}+\frac{3y}{2}\right)-\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{6}{x}\cdot\frac{3x}{2}}+2\sqrt{\frac{24}{y}\cdot\frac{3y}{2}}-\frac{1}{2}(x+y)=18-\frac{1}{2}(x+y)$$

$$\geq 18-\frac{1}{2}\cdot 6=15 \text{ (do } x+y\leq 6).$$

Vậy $\min F = 15$ khi $\frac{6}{x} = \frac{3x}{2}; \frac{24}{y} = \frac{3y}{2}; x + y = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Ví dụ 3. Cho $x > 0,\ y > 0$ và $x + y \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2x^2 + y^2 + \frac{28}{x} + \frac{1}{y}$.

Lời giải

Phân tích bài toán

$(x;y)$	$(1;2)$	$(2;1)$
P	$\frac{69}{2} = 34,5$	24

Từ bảng thứ nhất, ta dự đoán $\min P = 24$ khi $x = 2, y = 1$.

	x	$\frac{1}{x}$	y	$\frac{1}{y}$
$x = 2, y = 1$	2	$\frac{1}{2}$	1	1

Từ bảng thứ hai, ta suy ra $\frac{1}{x}$ sẽ đi với $\frac{x}{4}$ nên $\frac{28}{x}$ sẽ đi với $\frac{28x}{4} = 7x$; $\frac{1}{y}$ se đi với y.

Trình bày lời giải

Có

$$P = \left(\frac{28}{x} + 7x\right) + \left(\frac{1}{y} + y\right) + 2x^2 + y^2 - 7x - y$$

$$= \left(\frac{28}{x} + 7x\right) + \left(\frac{1}{y} + y\right) + 2(x-2)^2 + (y-1)^2 + (x+y) - 9$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{28}{x} \cdot 7x} + 2\sqrt{\frac{1}{y} \cdot y} + 0 + 0 + 3 - 9 = 24.$$

Vậy $\min P = 24$ khi $\frac{28}{x} = 7x; \frac{1}{y} = y; x - 2 = 0; y - 1 = 0; x + y = 3 \Leftrightarrow x = 2, y = 1$.

Ví dụ 4. Cho $2 \leq x \leq 3, 4 \leq y \leq 6, 4 \leq z \leq 6$ và $x + y + z = 12$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xyz$.

Lời giải

Nhận xét: Do y và z vai trò như nhau nên sử dụng bất đẳng thức Cô-si đối với tích yz, ta được

$$P = x(yz) \leq x\left(\frac{y+z}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}x(12-x)(12-x).$$

Đến đây ta kẻ bảng để dự đoán giá trị lớn nhất của P

x	2	3
P	50	$\frac{243}{4} = 60,75$

Từ bảng thứ nhất dự đoán $\max P = \frac{243}{4}$ khi $x = 3$.

	x	$12 - x$
$x = 3$	3	9

Từ bảng thứ hai, ta suy ra $3x$ sẽ đi với $12 - x$ nên ta biến đổi

$$P \le \frac{1}{12}[(3x)(12-x)(12-x)] \le \frac{1}{12}\left(\frac{x+24}{3}\right)^3 \le \frac{1}{12}\left(\frac{3+24}{3}\right)^3 \le \frac{243}{4}.$$

Vậy $\max P = \frac{243}{4}$ khi $x = 3, y = z = \frac{9}{2}$.

DẠNG 6: KẾT HỢP ĐẶT ẨN PHỤ VÀ DỰ ĐOÁN KÊT QUẢ

- Khi đặt ẩn phụ ta cần tìm điều kiện của ẩn phụ.
- Một số bất đẳng thức trung gian thường dùng:
  - Với mọi a,b thì $2\left(a^2+b^2\right) \ge (a+b)^2 \ge 4ab$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b$.
  - Với mọi a,b,c thì $3\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge (a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$.
  - Với mọi a,b thì $\frac{a^2+b^2}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \forall a,b; \frac{a^3+b^3}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \forall a+b \ge 0$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b$.
  - $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b} \forall a>0, b>0$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b$.
  - $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{9}{a+b+c} \forall a>0, b>0, c>0$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$.

Ví dụ 1. Cho $x>0,\ y>0$ và $\frac{x}{2}+\frac{8}{y} \le 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $K = \frac{x}{y}+\frac{2y}{x}$.

Lời giải

Đặt $a = \frac{x}{y}$, do $2 \ge \frac{x}{2}+\frac{8}{y} \ge 2\sqrt{\frac{x}{2}.\frac{8}{y}} = 4\sqrt{\frac{x}{y}} \Rightarrow \frac{x}{y} \le \frac{1}{4} \Rightarrow 0 < a \le \frac{1}{4}$

Có
$$K = a+\frac{2}{a} = \left(\frac{2}{a}+32a\right)-31a \ge 2\sqrt{\frac{2}{a}.32a}-31a$$
$$= 16-31a \ge 16-31.\frac{1}{4} = \frac{33}{4}\left(do\, 0<a\le\frac{1}{4}\right)$$

Vậy $MinK = \frac{33}{4}\, khi\, a = \frac{1}{4}\, hay\, x=2, y=8.$

Ví dụ 2. Cho $x>0, y>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{(x+y+1)^2}{xy+x+y}+\frac{xy+x+y}{(x+y+1)^2}$

Đặt $a = \frac{(x+y+1)^2}{xy+x+y} \Rightarrow \frac{xy+x+y}{(x+y+1)^2} = \frac{1}{a}$

Do $(m+n+p)^2 \ge 3(mn+np+pm) \Rightarrow (x+y+1)^2 \ge 3(xy+x+y) \Rightarrow a \ge 3$

Vậy $MinA = \frac{10}{3}\, khi\, a = 3 \Rightarrow x = y = 1.$

Ví dụ 3. Cho $x>0, y>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}$

Lời giải

Có $A=\dfrac{\left(x+y\right)^2-2xy}{xy}+\dfrac{\sqrt{xy}}{x+y}=\dfrac{\left(x+y\right)^2}{xy}+\dfrac{\sqrt{xy}}{x+y}-2=\left(\dfrac{x+y}{\sqrt{xy}}\right)^2+\dfrac{\sqrt{xy}}{x+y}-2$

Đặt $t=\dfrac{x+y}{\sqrt{xy}}, do\, x+y\geq 2\sqrt{xy}\Rightarrow \dfrac{x+y}{\sqrt{xy}}\geq 2\Rightarrow t\geq 2$

Ta được $A=t^2+\dfrac{1}{t}-2=\left(\dfrac{t^2}{8}+\dfrac{1}{t}\right)+\dfrac{7}{8}t^2-2\overset{Cosi}{\geq}2\sqrt{\dfrac{t^2}{8}.\dfrac{1}{t}}+\dfrac{7}{8}t^2-2$

$=\sqrt{\dfrac{t}{2}}+\dfrac{7}{8}t^2-2\geq\sqrt{\dfrac{2}{2}}+\dfrac{7}{8}.2^2-2=\dfrac{5}{2}$ (do $t\geq 2$).

Vậy $MinA=\dfrac{5}{2}$ khi $t=2\Rightarrow x=y$.

Ví dụ 4. Cho $a>0,b>0,c>0$ thỏa mãn $b^2+c^2\leq a^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{a^2}\left(b^2+c^2\right)+a^2\left(\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)$

Lời giải

Có $P=\dfrac{1}{a^2}\left(b^2+c^2\right)+a^2\left(\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)\geq\dfrac{2bc}{a^2}+\dfrac{2a^2}{bc}=2\left(\dfrac{bc}{a^2}+\dfrac{a^2}{bc}\right)$

Đặt $t=\dfrac{a^2}{bc}\geq\dfrac{b^2+c^2}{bc}\geq\dfrac{2bc}{bc}=2$ ta được

$P=2\left(t+\dfrac{1}{t}\right)=2\left[\left(\dfrac{t}{4}+\dfrac{1}{t}\right)+\dfrac{3t}{4}\right]\geq 2\left[2\sqrt{\dfrac{t}{4}.\dfrac{1}{t}}+\dfrac{3t}{4}\right]=2\left(1+\dfrac{3t}{4}\right)\geq 2\left(1+\dfrac{3.2}{4}\right)=5$ (do $t\geq 2$).

Vậy $MinP=5$ khi $\begin{cases}b=c\\ b^2+c^2=a^2\end{cases}\Leftrightarrow b=c=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

Ví dụ 5. Cho $x>0,y>0$ và $x+y\leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right).\sqrt{1+x^2y^2}$

Lời giải

Có $P\geq\left(2\sqrt{\dfrac{1}{x}.\dfrac{1}{y}}\right).\sqrt{1+x^2y^2}=2\sqrt{\dfrac{1}{x.y}+xy}$

Đặt $a=xy$, do $xy\leq\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2\leq\dfrac{1}{4}\Rightarrow 0<a\leq\dfrac{1}{4}$, ta được

$P\geq 2\sqrt{\dfrac{1}{a}+a}=2\sqrt{\left(\dfrac{1}{a}+16a\right)-15a}\geq 2\sqrt{2\sqrt{\dfrac{1}{a}.16a}-15a}=2\sqrt{8-15a}\geq 2.\sqrt{8-15.\dfrac{1}{4}}=\sqrt{17}\left(do\, 0<a\leq\dfrac{1}{4}\right)$

$\Rightarrow MinP=\sqrt{17}\, khi\, a=\dfrac{1}{4}\, hay\, x=y=\dfrac{1}{2}$

Ví dụ 6: Cho $x>0,y>0$ và $x+y\leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{x^2+y^2}+\dfrac{1}{xy}+4xy$.

Lời giải

Có $P=\left(\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{2xy}\right)+\left(\frac{1}{2xy}+4xy\right)$. Sử dụng $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}\forall a,b>0$, ta được

$\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{2xy}\ge\frac{4}{x^2+y^2+2xy}=\frac{4}{(x+y)^2}\ge\frac{4}{1^2}=4(do\,0<x+y\le1)$. Suy ra $P\ge4+\left(\frac{1}{2xy}+4xy\right)$.

Đặt a = xy, $do\,xy\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\le\frac{1}{4}\Rightarrow0<a\le\frac{1}{4}$ ta được

$$P\ge4+\left(\frac{1}{2a}+4a\right)=4+\left(\frac{1}{2a}+8a\right)-4a\ge4+2\sqrt{\frac{1}{2a}.8a}-4a=8-4a\ge8-4.\frac{1}{4}=7(do\,0<a\le\frac{1}{4})$$

$MinP=7\,khi\,x=y=\frac{1}{2}$

Ví dụ 7: Cho x,y >0 và $x+y\le1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $K=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2$

Lời giải

Cách 1: Sử dụng $\frac{a^2+b^2}{2}\ge\left(\frac{a+b}{c}\right)^2\forall a,b$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}\forall a,b>0$.

ta được $K=2.\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2}{2}\ge2.\left(\frac{x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}}{2}\right)^2\ge\frac{1}{2}\left(x+y+\frac{4}{x+y}\right)^2$

Đặt $a=x+y$, điều kiện $0<a\le1$, ta được:

$$K\ge\frac{1}{2}\left(a+\frac{4}{a}\right)^2=\frac{1}{2}\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)+\frac{3}{a}\right]^2\ge\frac{1}{2}\left[2\sqrt{a.\frac{1}{a}}+\frac{3}{a}\right]^2$$

$=\frac{1}{2}\left(2+\frac{3}{a}\right)^2\ge\frac{1}{2}.\left(2+\frac{3}{1}\right)^2=\frac{25}{2}$(do $0<a\le1$). Vậy, $MinK=\frac{25}{2}$khi $x=y=\frac{1}{2}$.

Cách 2: $K=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2=x^2+y^2+\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)+4\ge2.\left(xy+\frac{1}{xy}\right)+4$.

Đặt $a=xy$, do $xy\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\le\frac{1}{4}\Rightarrow0<a\le\frac{1}{4}$. Ta được:

$K\ge2.\left(\frac{1}{2}+\frac{15}{4a}\right)+4\ge2.\left(\frac{1}{2}+\frac{15}{4.\frac{1}{4}}\right)+4=\frac{25}{2}\ \left(do\ 0<a\le\frac{1}{4}\right)$. Vậy, $MinK=\frac{25}{2}$khi $x=y=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 8: Cho $x>0,y>0$ và $x+y\le1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\left(1+x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(1+y+\frac{1}{y}\right)^3$

Lời giải

Sử dụng $\frac{a^3+b^3}{2}\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^3\ \forall a+b\ge0$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}\ \forall a+b>0$, ta được

$$S=2.\frac{\left(1+x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(1+y+\frac{1}{y}\right)^3}{2}\ge 2\left(\frac{1+x+\frac{1}{x}+1+y+\frac{1}{y}}{2}\right)^3$$

Đặt $a=x+y$, điều kiện $0<a\le 1$, ta được

$$S\ge\frac{1}{4}\left(2+a+\frac{4}{a}\right)^3=\frac{1}{4}\left[2+\left(a+\frac{1}{a}\right)+\frac{3}{a}\right]^3\ \ge\frac{1}{4}\left[2+2\sqrt{a.\frac{1}{a}}+\frac{3}{a}\right]^3=\frac{1}{4}\left(4+\frac{3}{a}\right)^3\ge\frac{1}{4}\left(4+\frac{3}{1}\right)^3=\frac{343}{4}$$

Vậy $\text{MinS}=\frac{343}{4}$ khi $x=y=\frac{1}{2}$

DẠNG 7: TÌM LẠI ĐIỀU KIỆN CỦA ẨN

Ví dụ 1. Cho $x,y>0$ và $2x^2+2xy+y^2-2x\le 8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{2}{x}+\frac{4}{y}-2x-3y$.

Lời giải

Có $2x^2+2xy+y^2-2x\le 8\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2+x^2-2x+1\le 9$

$\Leftrightarrow(x+y)^2+(x-1)^2\le 9$, mà $(x+y)^2\le(x+y)^2+(x-1)^2\ \Rightarrow(x+y)^2\le 9\Rightarrow 0<x+y\le 3$

Có $P=\left(\frac{2}{x}+2x\right)+\left(\frac{4}{y}+y\right)-4x-4y\ge 2\sqrt{\frac{2}{x}.2x}+2\sqrt{\frac{4}{y}.y}-4(x+y)$

$=8-4(x+y)\ge 8-4.3=-4$ (do $0<x+y\le 3$). Vậy $\text{MinP}=-4$ khi $x=1,y=2$.

Ví dụ 2: Cho $a>0,b>0,c>0$ thỏa mãn $2\ b^2+bc+c^2\ =3\ 3-a^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=a+b+c+\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}$

Lời giải

Có $2\ b^2+bc+c^2\ =3\ 3-a^2\ \Leftrightarrow 3a^2+2b^2+2bc+2c^2=9$

$\Leftrightarrow 3a^2+2b^2+2bc++2ab+2ac+2c^2-2ab-2ac=9$

$\Leftrightarrow\ a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\ +\ a^2+b^2-2ab\ +\ a^2+c^2-2ac\ =9$

$\Leftrightarrow\ a+b+c\ ^2+\ a-b\ ^2+\ a-c\ ^2=9\Rightarrow\ a+b+c\ ^2\le 9\Rightarrow 0<a+b+c\le 3$

Sử dụng $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c}$ ta được $T\ge a+b+c+\frac{18}{a+b+c}$

Đặt $x=a+b+c, 0<x\le 3$, ta được

$T\ge x+\frac{18}{x}=\left(\frac{18}{x}+2x\right)-x\ge 2\sqrt{\frac{18}{x}.2x}-x=12-x\ge 12-3=9$ (do $0<x\le 3$)

Vậy $MinT=9$ khi $x=3$ hay $a=b=c=1$

Ví dụ 3: Cho $a>0,b>0$ và $a^3+b^3+6ab\le 8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$P=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{3}{ab}+ab$

Lời giải

Có $a^3+b^3+6ab\le 8\Leftrightarrow a^3+b^3+3a^2b+3ab^2-3a^2b-3ab^2+6ab\le 8$

$\Leftrightarrow (a+b)^3-3ab(a+b-2)\le 8\Leftrightarrow (a+b)^3-2^3-3ab(a+b-2)\le 0$

$\Leftrightarrow (a+b-2)\left[(a+b)^2+2(a+b)+4\right]-3ab(a+b-2)\le 0$

$\Leftrightarrow (a+b-2)(a^2+b^2-ab+2a+2b+4)\le 0$

$\Leftrightarrow (a+b-2)(2a^2+2b^2-2ab+4a+4b+8)\le 0$

$\Leftrightarrow (a+b-2)\left[(a-b)^2+(a+2)^2+(b+2)^2\right]\le 0$

$\Leftrightarrow 0<a+b\le 2$

Có $P=\left(\dfrac{1}{a^2+b^2}+\dfrac{1}{2ab}\right)+\left(\dfrac{5}{2ab}+ab\right)$

Sử dụng $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\ge\dfrac{4}{x+y}\ \forall x,y>0$, ta được:

$\dfrac{1}{a^2+b^2}+\dfrac{1}{2ab}\ge\dfrac{1}{a^2+2ab+b^2}=\dfrac{4}{(a+b)^2}\ge\dfrac{4}{2^2}=1$ (do $0<a+b\le 2$)

Suy ra $P\ge 1+\left(\dfrac{5}{2ab}+ab\right)$

Đặt $x=ab$, do $ab\le\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\le\dfrac{2^2}{2}=1\Rightarrow 0<x\le 1$, ta được:

$P\ge 1+\left(\dfrac{5}{2x}+x\right)=1+\left(\dfrac{5}{2x}+\dfrac{5x}{2}\right)-\dfrac{3x}{2}$

$\ge 1+2\sqrt{\dfrac{5}{2x}.\dfrac{5x}{2}}-\dfrac{3x}{2}=6-\dfrac{3x}{2}=6-\dfrac{3.1}{2}=\dfrac{9}{2}$ (do $0<x\le 1$)

Vậy $MinP=\dfrac{9}{2}$ khi $a=b=1$

Ví dụ 4: Cho $a>0,b>0$ và $a^2+b^2=a+b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=a^4+b^4+\frac{2020}{(a+b)^2}$$

Lời giải

Sử dụng $\dfrac{x^2+y^2}{2}\ge\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2$, ta được

$*\quad a+b=a^2+b^2=2.\dfrac{a^2+b^2}{2}\ge 2\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2=\dfrac{(a+b)^2}{2}\Rightarrow 1\ge\dfrac{a+b}{2}\Rightarrow 0<a+b\le 2$

$*\quad P=2.\dfrac{(a^2)^2+(b^2)^2}{2}+\dfrac{2020}{(a+b)^2}\ge 2\left(\dfrac{a^2+b^2}{2}\right)^2+\dfrac{2020}{(a+b)^2}=\dfrac{(a+b)^2}{2}+\dfrac{2020}{(a+b)^2}$

Đặt $x=(a+b)^2$,),$0<x\le 4$, ta được:

$P=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2020}{x}=\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{8}{x}\right)+\dfrac{2012}{x}\ge 2\sqrt{\dfrac{x}{2}.\dfrac{8}{x}}+\dfrac{2012}{x}$

$= 4 + \dfrac{2012}{x} \geq 4 + \dfrac{2012}{4} = 50$ (do $0 < x \leq 4$)

Vậy $MinP = 507$ khi $x = 4$ hay $a = b = 1$

Ví dụ 5: Cho $x > 0, y > 0$ và $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{y}+1) \geq 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x}$

Lời giải

Có $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{y}+1) \geq 4 \Leftrightarrow \sqrt{xy} + \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 3 \Leftrightarrow 3 \leq \sqrt{xy} + \sqrt{x.1} + \sqrt{y.1}$

Mà $\sqrt{xy} + \sqrt{x.1} + \sqrt{y.1} \leq \dfrac{x+y}{2} + \dfrac{x+1}{2} + \dfrac{y+1}{2} = x + y + 1$, suy ra $x + y \geq 2$

Có $P = \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = \left(\dfrac{x^2}{y} + y\right) + \left(\dfrac{y^2}{x} + x\right) - (x + y)$

$\geq 2\sqrt{\dfrac{x^2}{y}.y} + 2\sqrt{\dfrac{y^2}{x}.x} - (x+y) = x + y \geq 2$

Vậy $MinP = 2$ khi $x = y = 1$

II. BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIA

1. *Dạng bộ hai số $(a;b)$ và $(x;y)$ bất kỳ*

- $(ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}$

- Đặc biệt $(x+y)^2 = (1.x+1.y)^2 \leq (1^2+1^2)(x^2+y^2)$

2. *Dạng bộ ba số $(a;b;c)$ và $(x;y;z)$ bất kì*

- $(ax+by+cz)^2 \leq (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$

- Đặc biệt $(x+y+z)^2 = (1.x+1.y+1.z)^2 \leq (1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2)$

3. *Dạng tổng quát bộ n số $(a_1;a_2;\ldots;a_n)$ và $(x_1;x_2;\ldots;x_n)$*

- $(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n)^2 \leq (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{x_1}{a_1} = \dfrac{x_2}{a_2} = \ldots = \dfrac{x_n}{a_n}$

Quy ước trong dấu "=" xảy ra, nếu mẫu nào bằng 0 thì tử tương ứng bằng 0.

Ví dụ 1. Cho 4x + 9y = 13. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A = $4x^2 + 9y^2$

Lời giải

Có $13^2 = (4x + 9y)^2 = (2.2x + 3.3y)^2 \overset{\text{Bunhia}}{\leq} (2^2 + 3^2)(4x^2 + 9y^2) = 13A \Rightarrow A \geq 13$

_Ví dụ 2._ Cho 4x + 3y = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 4x^2 + 3y^2$

Lời giải

Có $1^2 = (4x + 3y)^2 = (2.2x + \sqrt{3}.\sqrt{3}y)^2 \overset{\text{Bunhia}}{\leq} (4 + 3)(4x^2 + 3y^2) = 7A \Rightarrow A \geq \frac{1}{7}$

Vậy MinA = $\frac{1}{7}$ khi $\begin{cases} \frac{2x}{3y} = \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{3}} \\ 4x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{7}$

_Ví dụ 3._ Cho x ≥ 0; y ≥ 0; z ≥ 0 và x + y + z = 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + y^2 + z^2$

Lời giải

Có $2^2 = (1.x + 1.y + 1.z)^2 \overset{\text{Bunhia}}{\leq} (1^2 + 1^2 + 1^2)(x^2 + y^2 + z^2) = 3A \Rightarrow A \geq \frac{4}{3}$

Vậy MinA = $\frac{4}{3}$ khi $\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{2}{3}$

_Ví dụ 4._ Cho $3x^2 + 2y^2 = \frac{6}{35}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A = 2x + 3y

Lời giải

Có $S^2 = (2x + 3y)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}.\sqrt{3}x + \frac{3}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}y\right)^2$

$\overset{\text{Bunhia}}{\leq} \left(\frac{4}{3} + \frac{9}{2}\right)(3x^2 + 2y^2) = \frac{35}{6}(3x^2 + 2y^2) \leq \frac{35}{6}.\frac{6}{35} = 1 \Rightarrow S \leq 1$

Vậy MaxS = 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\frac{\sqrt{3}x}{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}y}{3}}{\sqrt{2}} \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x}{2} = \frac{2y}{3} \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4y}{9} \\ \frac{8y}{9} + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{35} \\ y = \frac{9}{35} \end{cases}$

_Ví dụ 5._ Cho $4a^2 + 25b^2 \leq \frac{1}{10}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức H = 6a – 5b

Lời giải

Có $H^2 = (6a - 5b)^2 = (3.2a + (-1).5b)^2$

$\overset{\text{Bunhia}}{\leq} (9 + 1)(4a^2 + 25b^2) = 10(4a^2 + 25b^2) \leq 10.\frac{1}{10} = 1 \Rightarrow H \leq 1$

Vậy MaxH = 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2a}{3} = \dfrac{5b}{-1} \\ 6a - 5b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 15b = 0 \\ 18a - 15b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{20} \\ b = -\dfrac{1}{50} \end{cases}$

Ví dụ 6. Cho $x^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{3}{4}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P = x + y + z

Lời giải

Có $P^2 = (1.x + 1.y + 1.z)^2 \overset{\text{Bunhia}}{\leq} (1^{2+} + 1^2 + 1^2)(x^2 + y^2 + z^2) = 3.\dfrac{3}{4} = \dfrac{19}{4} \Rightarrow P \leq \dfrac{3}{2}$

Vậy MaxP = $\dfrac{3}{2}$ khi $\begin{cases} \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1} \\ x + y + z = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \dfrac{1}{2}$

Ví dụ 7. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{x - 1} + \sqrt{3 - x}$ khi $1 \leq x \leq 3$

Lời giải

Có $P^2 = \left(1.\sqrt{x - 1} + 1.\sqrt{3 - x}\right)^2 \overset{\text{Bunhia}}{\leq} \left(1^2 + 1^2\right)\left(\sqrt{x - 1}^2 + \sqrt{3 - x}^2\right) = 4 \Rightarrow P \leq 2$

Vậy MaxP = 2 khi $\dfrac{\sqrt{x-1}}{1} = \dfrac{\sqrt{3-x}}{1} \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa mãn)

Ví dụ 8. Cho $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ và a + b + c = 3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức
$K = \sqrt{4a + 5} + \sqrt{4b + 5} + \sqrt{4c + 5}$

Lời giải

Có $K^2 = \left(1.\sqrt{4a + 5} + 1.\sqrt{4b + 5} + 1.\sqrt{4c + 5}\right)^2$

$\overset{\text{Bunhia}}{\leq} (1^{2+} + 1^2 + 1^2)(4a + 5 + 4b + 5 + 4c + 5)$

$= 3[4(a + b + c) + 15] = 3(4.3 + 15) = 81 \Rightarrow K \leq 9$

Vậy MaxK = 9 khi $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{4a + 5}}{1} = \dfrac{\sqrt{4b + 5}}{1} = \dfrac{\sqrt{4c + 5}}{1} \\ a + b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1$

Ví dụ 9. Cho $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ và a + b + c = 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức
$P = \sqrt{b + c} + \sqrt{c + a} + \sqrt{a + b}$

Lời giải

Có $P^2 = \left(1.\sqrt{b + c} + 1.\sqrt{c + a} + 1.\sqrt{a + b}\right)^2$

$\overset{\text{Bunhia}}{\leq} (1^{2+} + 1^2 + 1^2)\left(\sqrt{b + c}^2 + \sqrt{c + a}^2 + \sqrt{a + b}^2\right)$

$= 6(a + b + c) = 6 \Rightarrow P \leq \sqrt{6}$

Vậy $MaxP = \sqrt{6}$ khi $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{a+b}}{1} = \dfrac{\sqrt{b+c}}{1} = \dfrac{\sqrt{c+a}}{1} \\ a+b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \dfrac{1}{3}$

_Ví dụ 10._ Cho a, b, $c \ge 0$ và $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \sqrt{\frac{a+b}{2}} + \sqrt{\frac{b+c}{2}} + \sqrt{\frac{c+a}{2}}$$

Lời giải

Ta có $\begin{cases} \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = \left(1.\sqrt{a}+1.\sqrt{b}\right)^2 \overset{\text{Bunhia}}{\le} \left(1^2+1^2\right)(a+b) = 2(a+b) \\ \left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2 = \left(1.\sqrt{b}+1.\sqrt{c}\right)^2 \overset{\text{Bunhia}}{\le} \left(1^2+1^2\right)(b+c) = 2(b+c) \\ \left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)^2 = \left(1.\sqrt{c}+1.\sqrt{a}\right)^2 \overset{\text{Bunhia}}{\le} \left(1^2+1^2\right)(c+a) = 2(c+a) \end{cases}$

Suy ra $\sqrt{a}+\sqrt{b} \le \sqrt{2(a+b)}, \sqrt{b}+\sqrt{c} \le \sqrt{2(b+c)}, \sqrt{c}+\sqrt{a} \le \sqrt{2(c+a)}$

$$\Rightarrow 2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right) \le \sqrt{2}\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \le \sqrt{\frac{a+b}{2}}+\sqrt{\frac{b+c}{2}}+\sqrt{\frac{c+a}{2}} \text{ hay } M \ge 3$$

Vậy $MinM = 3$ khi $a = b = c = 1$

III. PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

DẠNG 1: ĐƯA VỀ BÌNH PHƯƠNG

- $A^2 \pm m \ge 0 \pm m$; $-A^2 \pm m \le 0 \pm m$

  Dấu "=" xảy ra khi $A = 0$.
- $A^2 + B^2 \pm m \ge 0 + 0 \pm m$; $-A^2 - B^2 \pm m \le 0 + 0 \pm m$

  Dấu "=" xảy ra khi $A = 0, B = 0$.

_Ví dụ 1._ Cho $x \ge -2$; $y \ge 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = x + y - 2\sqrt{x+2} - 4\sqrt{y-1} + 24.$$

Lời giải

Có $A = \left(x + 2 - 2\sqrt{x+2} + 1\right) + \left(y - 1 - 4\sqrt{y-1} + 4\right) + 18$

$= \left(\sqrt{x+2} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{y-1} - 2\right)^2 + 18 \ge 0 + 0 + 18 = 18$

Vậy $MinA = 18$ khi $\begin{cases} \sqrt{x+2} = 1 \\ \sqrt{y-1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases}$ (thỏa mãn)

_Ví dụ 2._ Cho $x \ge -\dfrac{1}{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $E = 5x - 6\sqrt{2x+7} - 4\sqrt{3x+1} + 2$.

Lời giải

Có $E = \left(2x + 7 - 6\sqrt{2x+7} + 9\right) + \left(3x + 1 - 4\sqrt{3x+1} + 4\right) - 19$

$= \left(\sqrt{2x+7} - 3\right)^2 + \left(\sqrt{3x+1} - 2\right)^2 - 19 \ge 0 + 0 - 19 = -19$

Vậy MinA = - 19 khi $\begin{cases} \sqrt{2x+7} = 3 \\ \sqrt{3x+1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 7 = 9 \\ 3x + 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn)

Ví dụ 3. Cho $x \ge 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = x - \sqrt{x-1} - 3\sqrt{x+7} + 28.$$

Lời giải

Xét $2T = 2x - 2\sqrt{x-1} - 6\sqrt{x+7} + 56$

$= \left(x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1\right) + \left(x + 7 - 6\sqrt{x+7} + 9\right) + 40$

$= \left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{x+7} - 3\right)^2 + 40 \ge 0 + 0 + 40 = 40 \Rightarrow T \ge 20$

Vậy Min $T = 20$ khi $\begin{cases} \sqrt{x-1} = 1 \\ \sqrt{x+7} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 1 \\ x - 7 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa mãn)

Ví dụ 4. Cho $x \ge \sqrt{15}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$F = x^2 + x - \sqrt{\left(x^2 - 15\right)\left(x - 3\right)} - \sqrt{x^2 - 15} - \sqrt{x - 3} - 38.$$

Lời giải

Xét $2F = 2x^2 + 2x - 2\sqrt{\left(x^2 - 15\right)\left(x - 3\right)} - 2\sqrt{x^2 - 15} - \sqrt{x - 3} - 76$

$= \left(x^2 - 15 + x - 3 - 2\sqrt{\left(x^2 - 15\right)\left(x - 3\right)}\right) + \left(x^2 - 15 - 2\sqrt{x^2 - 15} + 1\right) + \left(x - 3 - 2\sqrt{x - 3} + 1\right)$

$= \left(\sqrt{x^2 - 15} - \sqrt{x - 3}\right)^2 + \left(\sqrt{x^2 - 15} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{x - 3} - 1\right)^2 - 42 \ge 0 + 0 - 42 = -42$

$\Rightarrow F \ge -21$

Vậy Min $F = -21$ khi $\sqrt{x^2 - 15} = \sqrt{x - 3} = 1 \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn)

Ví dụ 5. Cho $a > 0, b > 0, c > 0$ và $a + b + c = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = \sqrt{a^2 + 4ab + b^2} + \sqrt{b^2 + 4ab + c^2} + \sqrt{c^2 + 4ca + a^2}.$$

Lời giải

Chú ý: Với $x > 0, y > 0,$ ta có

$$x^2 + 4xy + y^2 = \frac{6\left(x + y\right)^2 - 2\left(x - y\right)^2}{4} \le \frac{6\left(x + y\right)^2}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 4xy + y^2} \le \frac{\left(x + y\right)\sqrt{6}}{2}.$$

Vận dụng vào bài toán, ta có

$$T \le \frac{\left(a + b\right)\sqrt{6}}{2} + \frac{\left(b + c\right)\sqrt{6}}{2} + \frac{\left(c + a\right)\sqrt{6}}{2} = \left(a + b + c\right)\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$$

Vậy $\text{MaxT} = 6\sqrt{6}$ khi a = b = c =2.

Ví dụ 6. Cho $a > 0, b > 0, c > 0$, $x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S = \sqrt{x^2 - xy + y^2} + \sqrt{y^2 - yz + z^2} + \sqrt{z^2 - zx + z^2}.$$

Lời giải

Chú ý: Với $x > 0, y > 0$, ta có

$$a^2 - ab + b^2 = \frac{(a+b)^2 + 3(a+b)^2}{4} \geq \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 - ab + b^2} \geq \frac{a+b}{2}$$

Vận dụng vào bài toán, ta có $S \geq \frac{x+y}{2} + \frac{y+z}{2} + \frac{z+x}{2} = x + y + z = 1.$

Vậy $\text{MinS} = 1$ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

DẠNG 2: TẠO RA BẬC HAI BẰNG CÁCH NHÂN HAI BẬC MỘT

- $m \leq x \leq n \Rightarrow (x - m)(x - n) \leq 0.$
- $m \leq \sqrt{x} \leq n \Rightarrow \left(\sqrt{x} - m\right)\left(\sqrt{x} - n\right) \leq 0.$

Ví dụ 1. Cho $-2 \leq a, b, c \leq 3$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 22.$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = a + b + c.$

Lời giải

Vì $-2 \leq a \leq 3$ nên $a + 2 \geq 0, a - 3 \leq 0.$

Suy ra $(a+2)(a-3) \leq 0 \Leftrightarrow a^2 - a - 6 \leq 0 \Leftrightarrow a \geq a^2 - 6.$

Tương tự, ta cũng tìm được $b \geq b^2 - 6, c \geq c^2 - 6$

Do đó $M = a + b + c \geq a^2 + b^2 + c^2 - 18 = 22 - 18 = 4.$

Vậy MinM =4 khi $\begin{cases} a = -2, a = 3 \\ b = -2, \text{b} = 3 \\ c = -2, c = 3 \\ a + b + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b = 3, c = -2 \\ a = c = 3, b = -2 \\ b = c = 3, a = -2 \end{array}\right.$

Ví dụ 2. Cho $\text{x} \geq 0, \text{y} \geq 0, \text{z} \geq 0$ thỏa mãn $x + y + z = 6.$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + \text{y}^2 + \text{z}^2$.

Lời giải

❖ **Tìm MinA**

Cách 1 (Sử dụng bất đẳng thức Bunhia)

Có $6^2 = (1.x + 1.y + 1.z)^2 \overset{Bunhia}{\leq} \left(1^2 + 1^2 + 1^2\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 3A \Rightarrow A \geq 12.$

Vậy MinA = 12 khi $\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \\ x + y + z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 2.$

Cách 2 (Sử dụng bất đẳng thức Côsi – dự đoán min đạt tại x=y=z=2)

Có $A=x^2+y^2+z^2=\left(x^2+4\right)+\left(y^2+4\right)+\left(z^2+4\right)-12$

$\geq 2\sqrt{x^2.4}+2\sqrt{y^2.4}+2\sqrt{z^2.4}-12=4\left(x+y+z\right)-12=4.6-12=12.$

Vậy MinA $=12$ Khi $x=y=z=2.$

❖ **Tìm MaxA**

Có $x,y,z\geq 0$ và $x+y+z=6$ nên $0\leq x,y,z\leq 6.$

$\Rightarrow x\left(x-6\right)+y\left(y-6\right)+z\left(z-6\right)\leq 0$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2\leq 6\left(x+y+z\right)=6.6=36\Rightarrow A\leq 36.$

Vậy MaxA $=36$ khi $\begin{cases} x=0, \mathrm{x}=6 \\ y=0, \mathrm{y}=6 \\ z=0, \mathrm{z}=6 \\ x+y+z=6 \end{cases}$ hay $\left(x;y;z\right)$ là hoán vị của $\left(0;0;6\right)$.

Ví dụ 3. Cho $a\geq 0, \mathrm{b}\geq 0, \mathrm{c}\geq 0$ thỏa mãn $a+b+c=3.$
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $K=\sqrt{3a+1}+\sqrt{3b+1}+\sqrt{3c+1}.$

Lời giải

❖ **Tìm MaxK**

Cách 1 (Sử dụng bất đẳng thức Bunhia)

Xét $K^2=\left(1.\sqrt{3a+1}+1.\sqrt{3b+1}+1.\sqrt{3c+1}\right)^2$

$\overset{Bunhia}{\leq}\left(1^2+1^2+1^2\right)\left(3a+1+3b+1+3c+1\right)=9\left(a+b+c+1\right)=36\Rightarrow K\leq 6.$

Vậy MaxK $=6$ khi $a=b=c=1.$

Cách 2 (Sử dụng bất đẳng thức Côsi – dự đoán min đạt tại a=b=c=1)

$K=\sqrt{3a+1}+\sqrt{3b+1}+\sqrt{3c+1}=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(3a+1\right).4}+\sqrt{\left(3b+1\right).4}+\sqrt{\left(3c+1\right).4}\right]$

$\leq\frac{1}{2}\left[\frac{\left(3a+1\right)+4}{2}+\frac{\left(3b+1\right)+4}{2}+\frac{\left(3c+1\right)+4}{2}\right]=\frac{3\left(a+b+c\right)+15}{4}=\frac{3.3+15}{4}=6.$

Vậy Max $K=6$ khi $a=b=c=1.$

❖ **Tìm MinA**

Có $a+b+c=3\Leftrightarrow 3a+3b+3c=9\Leftrightarrow\left(3a+1\right)+\left(3b+1\right)+\left(3c+1\right)=12.$

Đặt $x=3a+1, y=3b+1, z=3c+1\Rightarrow x,y,z\geq 1$ và $x+y+z=12.$

Từ $x,y,z\geq 1$ và $x+y+z=12\Rightarrow 1\leq x,y,z\leq 10$

$\Rightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{10}\right)\leq 0\Rightarrow x-\left(\sqrt{10}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{10}\leq 0\Rightarrow\sqrt{x}\geq\frac{x+\sqrt{10}}{\sqrt{10}+1}.$

Tương tự $\sqrt{y}\geq\frac{y+\sqrt{10}}{\sqrt{10}+1},\sqrt{z}\geq\frac{z+\sqrt{10}}{\sqrt{10}+1}$, suy ra

$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\ge \frac{x+y+z+3\sqrt{10}}{\sqrt{10}+1}\Rightarrow K\ge \frac{12+3\sqrt{10}}{\sqrt{10}+1}=\sqrt{10}+2.$

Vậy MinK $=\sqrt{10}+2$ khi (x,y,z) là hoán vị của $(1;1;10)$ nên $(a;b;c)$ hoán vị của $(0;0;3)$.

DẠNG 3: TẠO RA ab+bc+ca

- $0\le a,b,c\le m\Rightarrow (m-a)(m-b)(m-c)\ge 0$
- $0\le a,b,c\le m\Rightarrow (m-a)(m-b)+(m-a)(m-c)+(m-b)(m-c)\ge 0$

Ví dụ 1. Cho $0\le a,b,c\le 2$ và $a+b+c=3$. Chứng minh $ab+bc+ca\ge 2$.

Lời giải

Do $0\le a,b,c\le 2$ nên $(2-a)(2-b)(2-c)\ge 0$

$\Rightarrow 8-4(a+b+c)+2(ab+bc+ca)-abc\ge 0$

$\Rightarrow 8-4.3+2(ab+bc+ca)-abc\ge 0$ (do $a+b+c=3$)

$\Rightarrow ab+bc+ca\ge 2+\frac{abc}{2}$, mà $2+\frac{abc}{2}\ge 2$ nên $ab+bc+ca\ge 2$ (đpcm).

Ví dụ 2: Cho a$\ge$1, b $\ge$1, c $\ge$ 1 và ab+bc+ca =9.
Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: P =$a^2+b^2+c^2$

Lời giải:

* Tìm Min P

Có $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0 \Rightarrow a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca \Rightarrow P\ge 9$.

Vậy MinP =9 khi a = b= c = $\sqrt{3}$

* Tìm MãP

Do a $\ge$1, b$\ge$1, c $\ge$1 => (a-1)(b-1) +(b-1)(c-1) +(c-1)(a-1) $\ge$0

<=> (ab+ bc +ca) -2(a+b+c) +3 $\ge$ 0 <=> a+ b+ c $\le$ 6

<=> $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\le 36$ <=> P $\le$ 18

Vậy MaxP=18 khi (a,b,c) là hoán vị của (1;1;4)

DẠNG 4: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT TRONG BA SỐ BẤT KÌ LUÔN TÒN TẠI HAI SỐ CÓ TÍCH KHÔNG ÂM

Tính chất 1: Nếu -1 $\le$ a $\le$1 thì $a^n\le|a|\quad \forall n\in N^*$

Dấu "=" xảy ra khi a=0 hoặc a=1 nếu n lẻ, khi a=0 hoặc a= $\pm$ 1 nếu n chẳn

Tính chất 2: Nếu hai số a và b có tích ab $\ge$ 0 thì $|a|+|b|=|a+b|$

Tính chất 3: Với ba số x, y, z bất kỳ, luôn tồn tại hai số có tích không âm.

Bài toán cơ bản: Cho -1 $\le$ x, y, z $\le$ 1, x+ y+ z =0
Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: T = $|x|+|y|+|z|$

Lời giải:

Với ba số x, y, z bất kỳ, luôn tồn tại hai số có tích không âm.

Giả sử xy $\ge$ 0 => $|x|+|y|=|x+y|=|-z|=|z|$

Nên $T=2|z|\le 2$ (do -1 $\le$z $\le$ 1).

Vậy MaxT =2 khi (x;y;z) là hoán vị (-1;0;1).

Ví dụ 1. Cho -2 ≤ x, y, z ≤ 2, x+ y+ z =0. Chứng minh rằng $a^4 + b^4 + c^4 \le 32$

Lời giải:

Có -2 ≤ x, y, z ≤ 2 => $-1 \le \frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \le 1$

Đặt $x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}, z = \frac{c}{2} \Rightarrow -1 \le x, y, z \le 1$ và x+y+z=0.

Khi đó $a^4 + b^4 + c^4 = 16(x^4 + y^4 + z^4) \le 16(|x| + |y| + |z|)$.

Với ba số x, y, z bất kỳ, luôn tồn tại hai số có tích không âm.

Giả sử: xy ≥ 0 => $|x| + |y| = |x + y| = |-z| = |z|$ nên

$|x| + |y| + |z| = 2|z| \le 2 \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 \le 32$ (đpcm)

Ví dụ 2. Cho 0 ≤ x, y, z ≤ 1 và $x + y + z = \frac{3}{2}$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x^2 + y^2 + z^2$

Lời giải:

Tìm Min P

<u>Cách 1</u>(Sử dụng bất đẳng thúc Bunhia)

Có $\left(\frac{3}{2}\right)^2 - (1.x + 1.y + 1.z)^2 \overset{\text{Bunhia}}{\le} (1^2 + 1^2 + 1^2)(x^2 + y^2 + z^2) = 3P \Rightarrow P \ge \frac{3}{4}$

Vậy $\text{MinP} = \frac{3}{4}$ Khi $\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \\ x + y + z = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow x = y = z = \frac{1}{2}$

<u>Cách 2</u>(Sử dụng bất đẳng thức Côsi – dự đoán min đạt tại $x=y=z=\frac{1}{2}$)

Có $P = x^2 + y^2 + z^2 = \left(x^2 + \frac{1}{4}\right) + \left(y^2 + \frac{1}{4}\right) + \left(z^2 + \frac{1}{4}\right) \ge 2\sqrt{x^2.\frac{1}{4}} + 2\sqrt{y^2.\frac{1}{4}} + 2\sqrt{z^2.\frac{1}{4}} - \frac{3}{4} = x + y + z - \frac{3}{4}.$

Vậy $\text{MinP} = \frac{3}{4}$ Khi $x = y = z = \frac{1}{2}$

Tìm MaxP

Có $x + y + z = \frac{3}{2} \Leftrightarrow (2x - 1) + (2y - 1) + (2z - 1) = 0$

Đặt $a = 2x - 1$, $b = 2y - 1$, $c = 2z - 1$.

Do $(2x - 1) + (2y - 1) + (2z - 1) = 0$ nên $a + b + c = 0$

Vì $0 \le x, y, z \le 1 \Rightarrow -1 \le 2x - 1, 2y - 1, 2z - 1 \le 1$ nên $-1 \le a, b, c \le 1$.

Có $P = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{c+1}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2(a + b + c) + 3}{4}$

$= \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 3}{4} \le \frac{|a| + |b| + |c| + 3}{4}$ $(do\ -1 \le a, b, c \le 1)$

Với ba số a, b, c bất kì, luôn tồn tại hai số có tích không âm.

Giả sử a.b ≥ 0 thì $|a|+|b|=|a+b|=|-c|=|c|$ nên

$$P \le \frac{2|c|+3}{4} \le \frac{2+3}{4} = \frac{5}{4} \, (do\,|c| \le 1).$$

Vậy MaxP = $\frac{5}{4}$ khi (a; b; c) là hoán vị của (- 1; 0; 1) hay (x; y; z) là hoán vị của $\left(0;\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Ví dụ 3: Cho 0 ≤ x, y, z ≤ 2 và x + y + z = 3. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$M = x^4 + y^4 + z^4 + 12(1 – x)(1 – y)(1 – z).$$

Lời giải

Có x + y + z = 3 ⇔ (x – 1) + (y – 1) + (z – 1) = 0

Đặt a = x – 1, b = y – 1, c = z – 1 ⇒ - 1 ≤ a, b, c ≤ 1 và a + b + c = 0

Với a + b + c = 0 thì $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Có $M = (a + 1)^4 + (b + 1)^4 + (c + 1)^4 – 12abc$

$= (a^4 + b^4 + c^4) + 4(a^3 + b^3 + c^3) + 6(a^2 + b^2 + c^2) + 4(a + b + c) – 12abc$

$= (a^4 + b^4 + c^4) + 6(a^2 + b^2 + c^2)$.

* Có $M = (a^4 + b^4 + c^4) + 6(a^2 + b^2 + c^2) \ge 0$

Vậy Min M = 0 khi a = b = c = 0 ⇔ x = y = z = 1

* Có $M = (a^4 + b^4 + c^4) + 6(a^2 + b^2 + c^2) \le \left(|a|+|b|+|c|\right)+6\left(|a|+|b|+|c|\right)=7\left(|a|+|b|+|c|\right)$.

Với ba số a, b, c bất kì, luôn tồn tại hai số có tích không âm.

Giả sử ab ≥ 0 ⇒ $|a|+|b|=|a+b|=|-c|=|c|$

$$\Rightarrow |a|+|b|+|c|=2|c|\le 2 \Rightarrow M \le 14.$$

Vậy MaxM = 14 khi (a; b; c) là hoán vị của (- 1; 0; 1) hay (x, y, z) là hoán vị của (0; 1; 2).

Ví dụ 4: Cho 0 ≤ a, b, c ≤ 4 và a + b + c = 6.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca$.

Lời giải

Có $P\ \frac{a^2+b^2+c^2}{2}+\frac{(a+b+c)^2}{2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+18.$

Do a + b + c = 6 ⇒ (a – 2) + (b – 2) + (c – 2) = 0 ⇒ $\frac{a-2}{2}+\frac{b-2}{2}+\frac{c-2}{2}=0$

Đặt $x=\frac{a-2}{2}, y=\frac{b-2}{2}, z=\frac{c-2}{2}$ ⇒ x + y + z = 0.

Vì 0 ≤ a, b, c ≤ 4 ⇒ - 2 ≤ a – 2, b – 2, c – 2 ≤ 2 ⇒ $-1 \le \frac{a-2}{2},\frac{b-2}{2},\frac{c-2}{2} \le 1.$

⇒ - 1 ≤ x, y, z ≤ 1.

Có $P=\frac{(2x+2)^2+(2y+2)^2+(2z+2)^2}{2}+18 = 2(x^2 + y^2 + z^2) + 4(x + y + z) + 24$

$= 2(x^2 + y^2 + z^2) + 24 \le 2\left(|x|+|y|+|z|\right)+24$

Với ba số x, y, z bất kì, luôn tồn tại hai số có tích không âm.

Giả sử $xy \ge 0 \Rightarrow |x|+|y|=|x+y|=|-z|=|z|$ nên $P=4|z|+24\le 4+24=28\,(do\ -1\le z\le 1)$.

Vậy MaxP = 28 khi (x, y, z) là hoán vị của (- 1; 0; 1) nên (a, b, c) là hoán vị của (0; 2; 4).

DẠNG 5: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CỦA MỘT SỐ BỊ CHẶN TỪ 0 ĐẾN 1

* Nếu $0\le x\le 1$ thì $\sqrt{x}\ge x$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$ hoặc $x = 1$

* Nếu $0\le x\le 1$ thì $x^n \le x \,\forall n\in \mathbb{N}^*$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$ hoặc $x = 1$.

Ví dụ 1: Cho $a\ge 0; b\ge 0; c\ge 0$ và $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}+\sqrt{a+b}$.

Lời giải

**** Tìm MaxP***

<u>Cách 1:</u> (Sử dụng bất đẳng thức Bunhia)

Xét $P^2=(1.\sqrt{b+c}+1.\sqrt{c+a}+1.\sqrt{a+b})^2$

$\overset{Bunhia}{\le}\left(1^2+1^2+1^2\right)\left(\sqrt{b+c}^2+\sqrt{c+a}^2+\sqrt{a+b}^2\right)$

$=6(a+b+c)=6(\,do\,a+b+c=1)\Rightarrow P\le\sqrt{6}$

Vậy $Max\,P=\sqrt{6}$ khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$

<u>Cách 2:</u> (Sử dụng bất đẳng thức Cosi - dự đoán max đạt tại $a=b=c=\dfrac{1}{3}$)

Xét $P.\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}(b+c)}+\sqrt{\dfrac{2}{3}(c+a)}+\sqrt{\dfrac{2}{3}(\mathrm{a}+\mathrm{b})}$

$\le\dfrac{\frac{2}{3}+(b+c)}{2}+\dfrac{\frac{2}{3}+(c+a)}{2}+\dfrac{\frac{2}{3}+(\mathrm{a}+b)}{2}$

$=1+a+b+c=2\,(\,do\,a+b+c=1)\Rightarrow P\le 2:\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\sqrt{6}$

Vậy $Max\,P=\sqrt{6}$ khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$

**** Tìm MinP***

Sử dụng tính chất: $0\le x\le 1$ thì $\sqrt{x}\ge x$

Do $a,b,c\ge 0$ và $a+b+c=1$ nên $0\le a+b, b+c, c+a\le 1$

Có $P=\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}+\sqrt{a+b}\ge(b+c)+(c+a)+(a+b)\le 1$

$=2(a+b+c)=2\,(\,do\,a+b+c=1)$.

Vậy $MinP=2$ khi $(a;b;c)$ là hoán vị $(1;0;0)$.

Ví dụ 2: Cho $a \ge 0; b \ge 0; c \ge 0$ và $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $T=\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}+\sqrt{a+b}$.

Lời giải

** **Tìm** MaxP*

Cách 1: (Sử dụng bất đẳng thức Bunhia)

Xét $T^2=(1.\sqrt{b+c}+1.\sqrt{c+a}+1.\sqrt{a+b})^2$

$\overset{Bunhia}{\le}\left(1^2+1^2+1^2\right)\left(\sqrt{b+c}^2+\sqrt{c+a}^2+\sqrt{a+b}^2\right)$

$=6(a+b+c)=18\,(do\,a+b+c=3)\Rightarrow P\le 3\sqrt{2}$

Vậy $Max\,T=3\sqrt{2}$ khi $a=b=c=1$

Cách 2: (Sử dụng bất đẳng thức Cosi - dự đoán max đạt tại $a=b=c=1$)

Xét $T.\sqrt{2}=\sqrt{2(b+c)}+\sqrt{2(c+a)}+\sqrt{2(a+b)}$

$\le \dfrac{2+(b+c)}{2}+\dfrac{2+(c+a)}{2}+\dfrac{2+(a+b)}{2}$

$=3+a+b+c=6\,(do\,a+b+c=3)\Rightarrow P\le 6:\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

Vậy $Max\,T=3\sqrt{2}$ khi $a=b=c=1$

** **Tìm** MinP*

Sử dụng tính chất: $0\le x\le 1$ thì $\sqrt{x}\ge x$

Do $a,b,c\ge 0$ và $a+b+c=3\Rightarrow \dfrac{a+b+c}{3}=1$ nên $0\le \dfrac{a+b}{3};\dfrac{b+c}{3};\dfrac{c+a}{3}\le 1$

Có $T=\sqrt{3}\left(\sqrt{\dfrac{b+c}{3}}+\sqrt{\dfrac{c+a}{3}}+\sqrt{\dfrac{a+b}{3}}\right)\ge \sqrt{3}\left(\dfrac{b+c}{3}+\dfrac{c+a}{3}+\dfrac{a+b}{3}\right)$

$=\sqrt{3}\dfrac{2(a+b+c)}{3}=2\sqrt{3}\,(do\,a+b+c=3).$

Vậy $Min\,T=2\sqrt{3}$ khi $(a;b;c)$ là hoán vị $(3;0;0)$.

Ví dụ 3: Cho $a\ge 0; b\ge 0; c\ge 0$ và $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=\sqrt{3a+1}+\sqrt{3b+1}+\sqrt{3c+1}$.

Lời giải:

Cách 1: Có $a\ge 0;\ b\ge 0;\ c\ge 0;\ a+b+c=1$

$\Rightarrow 0\le a,b,c\le 1\Rightarrow a\ge a^2, b\ge b^2, c\ge c^2.$

Do đó :

$F=\sqrt{3a+1}+\sqrt{3b+1}+\sqrt{3c+1}=\sqrt{a+2a+1}+\sqrt{b+2b+1}+\sqrt{c+2c+1}$

$\ge \sqrt{a^2+2a+1}+\sqrt{b^2+2b+1}+\sqrt{c^2+2c+1}=a+b+c+3=4$.

Vậy $Min\,F=4$ khi $(a;b;c)$ là hoán vị $(0;0;1)$

Cách 2: Có $a+b+c=1\Leftrightarrow 3a+3b+3c=3\Leftrightarrow (3a+1)+(3b+1)+(3c+1)=6$

Đặt $x = 3a + 1; y = 3b = 1; z = 3c + 1$.

$\Rightarrow x, y, z \ge 1$ và $x + y + z = 6$ và $F = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$

Từ $x, y, z \ge 1$ và $x + y + z = 6 \Rightarrow 1 \le x, y, z \le 4$

$\Rightarrow \left(\sqrt{x} - 1\right)\left(\sqrt{x} - \sqrt{4}\right) \le 0 \Rightarrow x - 3\sqrt{x} + 2 \le 0 \Rightarrow \sqrt{x} \ge \dfrac{x+2}{3}$

Tương tự: $\sqrt{y} \ge \dfrac{y+2}{3}; \sqrt{z} \ge \dfrac{z+2}{3}$, suy ra $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \ge \dfrac{x+y+z+6}{3} \Rightarrow F \ge 4$

Vậy $MinF = 4$ khi $(x; y; z)$ là hoán vị $(1;1;4)$ nên $\left(a, b, c\right)$ là hoán vị $(0;0;1)$.

Ví dụ 4: Cho $a \ge 0; b \ge 0; c \ge 0$ và $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = \sqrt{2a^2 + 3a + 4} + \sqrt{2b^2 + 3b + 4} + \sqrt{2c^2 + 3c + 4}$.

Lời giải:

Có $a \ge 0;\ b \ge 0;\ c \ge 0;\ a + b + c = 1$

$\Rightarrow 0 \le a, b, c \le 1 \Rightarrow a^2 \le \text{a}, b^2 \le \text{b}, c^2 \le \text{c}$.

Do đó :

$$M = \sqrt{a^2 + \left(a^2 + 3a + 4\right)} + \sqrt{b^2 + \left(b^2 + 3b + 4\right)} + \sqrt{c^2 + \left(c^2 + 3c + 4\right)}$$

$$\le \sqrt{a^2 + \left(a + 3a + 4\right)} + \sqrt{b^2 + \left(b + 3b + 4\right)} + \sqrt{c^2 + \left(c + 3c + 4\right)} \quad .$$

$$= \sqrt{\left(a+2\right)^2} + \sqrt{\left(b+2\right)^2} + \sqrt{\left(c+2\right)^2} = a + b + c + 6 = 7$$

Vậy $MinM = 7$ khi $(a; b; c)$ là hoán vị $(0;0;1)$.

DẠNG 6 : DỰ ĐOÁN KẾT QUẢ RỒI XÉT HIỆU

Ví dụ 1: Cho $x; y \ge 0$ thỏa mãn $x + y = \sqrt{10}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \left(x^4 + 1\right)\left(y^4 + 1\right)$.

Lời giải

Có $P = \left(x^4 + 1\right)\left(y^4 + 1\right) = x^4y^4 + \left(x^4 + y^4\right) + 1 = x^4y^4 + \left(x^2 + y^2\right)^2 - 2x^2y^2 + 1$

$= x^4y^4 + \left(10 - 2xy\right)^2 - 2x^2y^2 + 1 = x^4y^4 + 2x^2y^2 - 40xy + 101.$

Đặt $t = xy > 0$ thì $xy \le \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{2} \Rightarrow 0 \le t \le \dfrac{5}{2}$

Ta được $P = t^4 + 2t^2 - 40t + 101;\ 0 \le t \le \dfrac{5}{2}$

Đến đây ta kẻ bảng dự đoán $MinP$

t	0	1	2	2,5
P	101	64	45	52,5625

Từ bảng trên ta dự đoán $MinP = 45$ khi $t = 2$ nên ta xét hiệu :

$P-45=t^4+2t^2-40t+56=\left(t^4-8t^2+16\right)+\left(10t^2-40t+40\right)$

$=\left(t^2-4\right)^2+4\left(t-2\right)^2\geq 0\Rightarrow P\geq 45$

Vậy $MinP=45$ khi $t=2\Rightarrow\begin{cases}x+y=\sqrt{10}\\ xy=2\end{cases}\Rightarrow x,y$ là hai nghiệm của phương trình :

$t^2-\sqrt{10}.t+2=0\Leftrightarrow t=\dfrac{\sqrt{10}\pm\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{10}\pm\sqrt{2}}{2};y=\dfrac{\sqrt{10}\mp\sqrt{2}}{2}$.

Ví dụ 2: Cho $a+b+4ab=4a^2+4b^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=20\left(a^3+b^3\right)-6\left(a^2+b^2\right)+2013$.

Lời giải

Có : $a+b+4ab=4a^2+4b^2\Leftrightarrow a+b+4ab=4\left[\left(a+b\right)^2-2ab\right]$

$\Leftrightarrow 12ab=4\left(a+b\right)^2-\left(a+b\right)$, mà $4ab\leq\left(a+b\right)^2$ hay $12ab\leq 3\left(a+b\right)^2$.

Nên $4\left(a+b\right)^2-\left(a+b\right)\leq 3\left(a+b\right)^2\Leftrightarrow\left(a+b\right)^2-\left(a+b\right)\leq 0\Leftrightarrow 0\leq a+b\leq 1.$

Đặt $x=a+b$ thì $0\leq x\leq 1$ và $12ab=4x^2-x$

Ta có $A=20\left[\left(a+b\right)^3-3ab\left(a+b\right)\right]-6\left[\left(a+b\right)^2-2ab\right]+2013$

$=20\left(a+b\right)^3-60ab\left(a+b\right)-6\left(a+b\right)^2+12ab+2013$

$=20x^3-5\left(4x^2-x\right)x-6x^2+4x^2-x+2013=3x^2-x+2013$

Đến đây ta kẻ bảng dự đoán $MaxA$

t	0	1
A	2013	2015

Từ bảng trên ta dự đoán $MaxA=2015$ khi $x=1$ nên ta xét hiệu $A-2015=3x^2-x-2=\left(x-1\right)\left(3x+2\right)$. Do $0\leq x\leq 1$ nên $\left(x-1\right)\left(3x+2\right)\leq 0$, suy ra $A\leq 2015$

Vậy $MaxA=2015$ khi $x=1$ hay $a=b=\dfrac{1}{2}$.

CÁC BÀI TOÁN PHÂN LOẠI VÀO LỚP 10 CÁC TỈNH NĂM 2019-2020

Câu 1: [TS10 TP Hà Nội, 2019-2020]

Cho biểu thức $\mathrm{P}=\mathrm{a}^4+\mathrm{b}^4-\mathrm{ab}$, với a, b là các số thực thỏa mãn $\mathrm{a}^2+\mathrm{ab}+\mathrm{b}^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức P

Lời giải

Ta có:

$P=a^4+b^4-ab=\left(a^2+b^2\right)^2-2a^2b^2-ab=\left(3-ab\right)^2-2a^2b^2-ab$

$=-\left(ab+\frac{7}{2}\right)^2+\frac{85}{4}$

Ta có: $a^2+b^3+2ab=3+ab\Leftrightarrow 3+ab=\left(a+b\right)^2\ge 0\Rightarrow ab\ge -3$

$3-ab=a^2+b^2\ge 2ab\Rightarrow ab\le 1$

Vì: $-3+\frac{7}{2}\le ab+\frac{7}{2}\le 1+\frac{7}{2}\Rightarrow \frac{1}{2}\le ab+\frac{7}{2}\le \frac{9}{2}\Rightarrow \frac{1}{4}\le \left(a+\frac{7}{2}\right)^2\le \frac{81}{4}$

$\Rightarrow -\frac{81}{4}\le -\left(a+\frac{7}{2}\right)^2\le -\frac{1}{4}\Leftrightarrow -1\le -\left(a+\frac{7}{2}\right)^2+\frac{85}{4}\le 21$

$\Rightarrow 1\le P\le 21$

GTLN của P là 21 khi $a=\sqrt{3},b=-\sqrt{3}$ hoặc $a=-\sqrt{3},b=\sqrt{3}$

GTNN của P là 1 khi a = b = 1.

Câu 2: [TS10 Tỉnh Bắc Ninh, 2019-2020]

Cho hai số thực không âm a, b thỏa mã: $a^2+b^2=2$. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $M=\frac{a^3+b^3+4}{ab+1}$

Lời giải

Tìm GTNN:

Ta có: $a^3+b^3+4=\left(a^3+b^3+1\right)+3\overset{AM-GM}{\ge}3ab+3.$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = 1.

Vì a, b > 0 nên $M=\frac{a^3+b^3+4}{ab+1}\ge \frac{3\left(ab+1\right)}{ab+1}=3$

Do đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức M là 3 đạt được khi a = b = 1.

Tìm GTLN:

Đặt $S=a+b,P=ab$

Vì $a^2+b^2=2\Rightarrow \left(a+b\right)^2-2ab=2\Rightarrow S^2-2P=2\Rightarrow P=\frac{S^2-2}{2}.$

Ta có: $\left(a+b\right)^2=a^2+2ab+b^2=2+2ab\ge 2\Rightarrow a+b\ge \sqrt{2}$

Do đó $S\ge \sqrt{2}$

$$M=\frac{(a+b)^2-3ab(a+b)+4}{ab+1}=\frac{S^2-3PS+4}{P+1}=\frac{S^2-3.\left(\frac{S^2-2}{2}\right).S+4}{\frac{S^2-2}{2}+1}$$

$$=\frac{-S^2+6S+8}{S^2}=\frac{8}{S^2}+\frac{6}{S}-S\le\frac{8}{2}+\frac{6}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}=4+\sqrt{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}a^2+b^2\\ ab=0\end{cases}\Leftrightarrow(a+b)=(0;\sqrt{2});(\sqrt{2};0)$

Vậy giá trị lớn nhất của M là $4+2\sqrt{2}$ khi $(0;\sqrt{2});(\sqrt{2};0)$

Câu 3: [TS10 Tỉnh Nghệ An, 2019-2020]

Giải phương trình: $\sqrt{5x^2+27x+25}-5\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2-4}$

Lời giải

ĐKXĐ: $x\ge 2$

$$\sqrt{5x^2+27x+25}=5\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-4}$$

$$\Leftrightarrow 5x^2+27x+25=25(x+1)+(x^2-4)+10\sqrt{(x^2-4)(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+x+2-5\sqrt{(x^2-4)(x+1)}=0$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2-x-2)-5\sqrt{(x^2-x-2)(x+2)}+3(x+2)=0$$

Đặt $\sqrt{x^2-x-2}=a\ge 0;\sqrt{x+2}=b\ge 2$

Phương trình trở thành:

$$2a^2-5ab+b^2=0\Leftrightarrow(2a-3b)(a-b)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\ 2a=3b\end{array}\right.$$

Với $a=b\Rightarrow\sqrt{x^2-x-2}=\sqrt{x+2}\Leftrightarrow x^2-2x-4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1+\sqrt{5}\,(TM)\\ y=1-\sqrt{5}\,(L)\end{array}\right.$

Với $2a=3b\Rightarrow 4(x^2-x-2)=9(x+2)\Leftrightarrow 4x^2-13x-26=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1+3\sqrt{65}}{8}\,(TM)\\ x=\frac{13-3\sqrt{65}}{8}\,(L)\end{array}\right.$

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $x=1+\sqrt{5};x=\frac{1+3\sqrt{65}}{8}$

Câu 4: [TS10 Tỉnh Hải Phòng, 2019-2020]

a) Cho $x,\ y,\ z$ là ba số dương. Chứng minh $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 9\cdot$

b) Cho a,b,c là ba số dương thỏa mãn $a+b+c=6.$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A=\frac{ab}{a+3b+2c}+\frac{bc}{b+3c+2a}+\frac{ca}{c+3a+2b}\cdot$$

Lời giải

a) Ta có

$$\left(x+y+z\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}\geq 6$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}-2\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}-2\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x-y\right)^2}{xy}+\frac{\left(y-z\right)^2}{yz}+\frac{\left(z-x\right)^2}{zx}\geq 0\ \forall x,\ y,\ z>0$$

Vậy $\left(x+y+z\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$

b) Áp dụng bất đẳng thức ở câu a) ta có

$$\frac{ab}{a+3b+2c}=\frac{ab}{9}\cdot\frac{9}{\left(a+c\right)+\left(b+c\right)+2b}\leq\frac{ab}{9}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{2b}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{ab}{a+3b+2c}\leq\frac{1}{9}\left(\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}+\frac{a}{2}\right)\cdot \qquad (1)$$

Chứng minh tương tự ta có:

$$\frac{bc}{b+3c+2a}\leq\frac{1}{9}\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a+c}+\frac{b}{2}\right)\cdot \qquad (2)$$

$$\frac{ca}{c+3a+2b}\leq\frac{1}{9}\left(\frac{ac}{b+c}+\frac{ac}{a+b}+\frac{c}{2}\right)\cdot \qquad (3)$$

Cộng từng vế của các bất đẳng thức (1); (2) và (3) ta có

$$A\leq\frac{1}{9}\left(\frac{ac+bc}{a+b}+\frac{ab+ac}{b+c}+\frac{bc+ab}{c+a}+\frac{a+b+c}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow A\leq\frac{1}{9}\left[\frac{c\left(a+b\right)}{a+b}+\frac{a\left(b+c\right)}{b+c}+\frac{b\left(c+a\right)}{c+a}+\frac{a+b+c}{2}\right]$$

$$\Leftrightarrow A\leq\frac{1}{9}\cdot\frac{3\left(a+b+c\right)}{2}=\frac{1}{9}\cdot\frac{3.6}{2}=1.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=2.$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức A là 1 đạt được khi $a=b=c=2.$

Câu 5: [TS10 Tỉnh Thanh Hóa, 2019-2020]

Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn abc =1.Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a^4+b^4+ab}+\frac{bc}{b^4+c^4+bc}+\frac{ca}{c^4+a^4+ca}\le 1$$

Lời giải

Ta có: $a^4+b^4\ge ab(a^2+b^2)\forall a;b\in R$

Thật vậy:

$a^4+b^4\ge ab(a^2+b^2)$

$<=> a^4+b^4\ge a^3b+ab^3$

$<=> (a-b)(a^3-b^3)\ge 0$

$<=> (a-b)^2(a^2+ab+b^2)\ge 0$ (luôn đúng $\forall a;b\in R$)

$=> a^4+b^4+ab\ge ab(a^2+b^2)+ab <=> a^4+b^4+ab\ge ab(a^2+b^2)+abc$ (vì $a;b;c>0$ và $abc=1$)

Do đó:

$$\frac{ab}{a^4+b^4+ab}\le\frac{ab}{ab(a^2+b^2)+ab}\le\frac{1}{a^2+b^2+1}=\frac{1+1+c^2}{\left(a^2+b^2+1\right)\left(1+1+c^2\right)}\le\frac{2+c^2}{\left(a+b+c\right)^2}$$

Tương tự:

$$\frac{bc}{b^4+c^4+bc}\le\frac{1+a^2}{\left(a+b+c\right)^2}(2);\qquad \frac{ca}{c^4+a^4+ca}\le\frac{1+b^2}{\left(a+b+c\right)^2}(3)$$

Mặt khác:

$2\left(ab+bc+ca\right)\ge 2.3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=6$

Cộng theo vế các bất đẳng thức (1),(2) và (3) ta có:

$$\frac{a}{b^4+c^4+a}+\frac{b}{a^4+c^4+b}+\frac{c}{a^4+b^4+c}\le\frac{a^2+b^2+c^2+6}{\left(a+b+c\right)^2}\le\frac{a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)}{\left(a+b+c\right)^2}=1$$

Vậy bài toán được chứng minh

Dấu “=” xảy ra kh $a=b=c=1$

Câu 6: [TS10 Tỉnh Quảng Ninh, 2019-2020]

Cho các số dương a, b, c thoả mãn $a+b+c\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2019}{ab+bc+ca}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 3 số dương $a+b+c\ge\sqrt[3]{abc}$; $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}$

Suy ra $\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9\ (*)$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

b) Ta có $ab+bc+ca\leq a^2+b^2+c^2 \Rightarrow ab+bc+ca\leq \frac{\left(a+b+c\right)^2}{3}\leq \frac{1}{3}$

Suy ra $\frac{2017}{ab+bc+ca}\geq 6051$

Áp dụng bất đẳng thức trong câu a, ta có

$$\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}\right)\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right)\geq 9$$

Suy ra $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2}{ab+bc+ca}\geq \frac{9}{\left(a+b+c\right)^2}\geq 9$

Do đó ta được $P=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2019}{ab+bc+ca}\geq 6060$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 6060

Dấu đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Câu 7: [TS10 Tỉnh Bắc Giang, 2019-2020]

Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x^2+y^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\left(3-x\right)\left(3-y\right)$$

Lời giải

Ta có:

$$P=\left(3-x\right)\left(3-y\right)=9-3\left(x+y\right)+xy=\frac{18-6\left(x+y\right)+2xy}{2}$$
$$=\frac{17+\left(x^2+y^2\right)-6\left(x+y\right)+2xy}{2}=\frac{8+\left(x+y\right)^2-6\left(x+y\right)+9}{2}$$
$$=\frac{\left(x+y-3\right)^2}{2}+4.$$

Từ $x^2+y^2=1$ chỉ ra được $\left(x+y\right)^2\leq 2 \Rightarrow -\sqrt{2}\leq x+y\leq \sqrt{2}$;

Suy ra $-\sqrt{2}-3\leq x+y-3\leq \sqrt{2}-3<0$.

$$P=\frac{(x+y-3)^2}{2}+4\ge\frac{\left(\sqrt{2}-3\right)^2}{2}+4=\frac{19-6\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{19-6\sqrt{2}}{2}$ khi $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 8: [TS10 Tỉnh Vũng Tàu, 2019-2020]

Cho số thực dương x, y thỏa mãn $x+y\le 3$

Tìm Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{5xy}+\frac{5}{x+2y+5}$$

Lời giải

$$P=\frac{1}{5xy}+\frac{5}{x+2y+5}=\frac{1}{5xy}+\frac{5}{(x+y)+y+5}\ge\frac{1}{5xy}+\frac{5}{y+8}$$

$$\Leftrightarrow P\ge\frac{1}{5xy}+\frac{xy}{20}+\frac{5}{y+8}+\frac{y+8}{20}-\frac{xy+y+8}{20}$$

Ta lại có: $\frac{xy+y+8}{20}=\frac{y(x+1)+8}{20}\le\frac{\frac{(x+y+1)^2}{4}+8}{20}\le\frac{3}{5}$

Khi đó:

$$P\ge\left(\frac{1}{5xy}+\frac{xy}{20}\right)+\left(\frac{5}{y+8}+\frac{y+8}{20}\right)-\frac{xy+y+8}{20}$$

$$\Leftrightarrow P\ge\frac{1}{5}+1-\frac{3}{5}\Leftrightarrow P\ge\frac{3}{5}$$

Vậy $P_{Min}=\frac{3}{5}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$

Câu 9: [TS10 Tỉnh Bình Định, 2019-2020]

Cho x,y là hai số thực thỏa $\begin{cases}x>y\\xy=1\end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^2+y^2}{x-y}$.

Lời giải

Với $x>y,xy=1$, ta có

$$P=\frac{x^2+y^2}{x-y}=\frac{(x-y)^2+2xy}{x-y}=x-y+\frac{2}{x-y}$$

Vì $x>y\Rightarrow x-y>0;\frac{2}{x-y}>0$ và $xy=1$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $x-y;\frac{2}{x-y}$, ta có

$x-y+\frac{2}{x-y}\ge 2\sqrt{\frac{2(x-y)}{x-y}}=2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

Suy ra $\min P=2\sqrt{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x-y=\frac{2}{x-y}\Leftrightarrow (x-y)^2=2\Leftrightarrow x-y=\sqrt{2}\Leftrightarrow x=y+\sqrt{2}$.

Mà $xy=1\Rightarrow (y+\sqrt{2})y=1\Leftrightarrow y^2+\sqrt{2}y=1\Leftrightarrow y^2+\sqrt{2}y-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \\ y=\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$

Vậy $\min P=2\sqrt{2}$ tại $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} \\ y=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} \\ y=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\end{cases}$.

Câu 10: [TS10 Tỉnh Đắk Lắk, 2019-2020]

Cho ba số thực dương x,y,z thỏa mãn: $x+2y+3z=2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $S=\sqrt{\frac{xy}{xy+3z}}+\sqrt{\frac{3yz}{3yz+x}}+\sqrt{\frac{3xz}{3xz+4y}}$.

Lời giải

Đặt $a=x;b=2y;c=3z$, ta được: $a,b,c>0;\ a+b+c=2$.

Khi đó: $S=\sqrt{\frac{ab}{ab+2c}}+\sqrt{\frac{bc}{bc+2a}}+\sqrt{\frac{ac}{ac+2b}}$.

Xét $\sqrt{\frac{ab}{ab+2c}}=\sqrt{\frac{ab}{ab+(a+b+c)c}}=\sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}\right)$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{a+c}=\frac{b}{b+c}$.

Tương tự ta có: $\sqrt{\frac{bc}{bc+2a}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{b}{b+a}+\frac{c}{c+a}\right);\sqrt{\frac{ac}{ac+2b}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+b}\right)$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{b}{b+a}=\frac{c}{c+a};\ \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+b}$.

Cộng các vế ta được: $S\le\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{a+b}+\frac{b+c}{b+c}+\frac{a+c}{a+c}\right)=\frac{3}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của S bằng $\frac{3}{2}$ khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{2}{3}$ hay giá trị lớn nhất của S bằng $\frac{3}{2}$ khi và chỉ khi $x=\frac{2}{3};y=\frac{1}{3};z=\frac{2}{9}$.

Câu 11: [TS10 Tỉnh Đắk Nông, 2019-2020]

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=\frac{1}{abc}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(a+b)(a+c)$.

Lời giải

Ta có: $a+b+c=\frac{1}{abc}\Rightarrow abc(a+b+c)=1$.

Theo bất đẳng thức côsi ta có:

$$P=(a+b)(a+c)=a^2+ab+ac+bc\geq 2\sqrt{a(a+b+c).bc}=2$$

Đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases}a(a+b+c)=bc\\bc=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a(a+b+c)=1\\bc=1\end{cases}$

Ta thấy hệ có vô số nghiệm dương chẳng hạn $b=c=1,a=\sqrt{2}-1$.

Vậy $P_{\min}=2$.

Câu 12: [TS10 Tỉnh Đồng Nai, 2019-2020]

Cho ba số thực a,b,c. Chứng minh rằng:

$$(a^2-bc)^3+(b^2-ca)^3+(c^2-ab)^3\geq 3(a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab)$$

Lời giải

Phương pháp:

- Đặt $x=a^2-bc,y=b^2-ca,z=c^2-ab$ đưa bất đẳng thức cần chứng minh về $x^3+y^3+z^3\geq 3xyz.$
- Chứng minh đẳng thức $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$
- Từ đó đánh gái hiệu $x^3+y^3+z^3-3xyz$ và kết luận.

Đặt $x=a^2-bc,y=b^2-ca,z=c^2-ab$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành : $x^3+y^3+z^3\geq 3xyz.$

Ta có:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=\left(x^3+y^3\right)-3xyz+z^3$$
$$=\left(x+y\right)^3-3xy\left(x+y\right)-3xyz+z^3$$
$$=\left(x+y\right)^3+z^3-3xy\left(x+y+z\right)$$
$$=\left(x+y+z\right)\left[\left(x+y\right)^2-\left(x+y\right)z+z^2\right]-3xy\left(x+y+z\right)$$
$$=\left(x+y+z\right)\left[x^2+2xy+y^2-xz-yz+z^2-3xy\right]$$
$$=\left(x+y+z\right)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)$$

Dễ thấy:

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=\frac{1}{2}\left(x^2-2xy+y^2+y^2-2yz+z^2+z^2-2zx+x^2\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(x-y\right)^2+\left(y-z\right)^2+\left(z-x\right)^2\right]\ge 0,\forall x,y,z$$

Do đó ta đi xét dấu của $x+y+z$

Ta có: $x+y+z=a^2-bc+b^2-ca+c^2-ab$

$$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\left[\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2\right]\ge 0,\forall a,\mathrm{b},\mathrm{c}$$

Suy ra

$$x+y+z\ge 0\Rightarrow\left(x+y+z\right)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)\ge 0$$

$$x+y+z\ge 0\Rightarrow\ x+y+z\quad x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\quad\ge 0$$

$\Rightarrow x^3+y^3+z^3\ge 3xyz$ hay

$\left(a^2-bc\right)^3+\left(b^2-ca\right)^3+\left(c^2-ab\right)^3\ge 3\left(a^2-bc\right)\left(b^2-ca\right)\left(c^2-ab\right)$ (đpcm)

Dấu “ =” xảy ra khi $a=b=c$

Câu 13: [TS10 Tỉnh Hà Nam, 2019-2020]

Cho $\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c}$ là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $abc=1$

Chứng minh $\dfrac{1}{2+a}+\dfrac{1}{2+b}+\dfrac{1}{2+c}\le 1$.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh $\dfrac{1}{2+a}+\dfrac{1}{2+b}+\dfrac{1}{2+c}\le 1$

$\Leftrightarrow (b+2)(c+2)+(a+2)(c+2)+(a+2)(b+2) \le (a+2)(b+2)(c+2)$

$\Leftrightarrow ab+bc+ca+4(a+b+c)+12 \le abc+2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)+8$

$\Leftrightarrow ab+bc+ca+4(a+b+c)+12 \le 1+2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)+8$

$\Leftrightarrow ab+bc+ca \ge 3$

Thật vậy áp dụng bất đẳng thức CauChy cho 3 số dương ta có $\Leftrightarrow ab+bc+ca \ge 3\sqrt[3]{(abc)^2} \ge 3$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$.

Hoàn tất chứng minh.

Câu 14: [TS10 Tỉnh Hà Tĩnh, 2019-2020]

Cho hai số thực dương a,b thỏa mãn: $a+b+3ab=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{6ab}{a+b}-a^2-b^2$.

Lời giải

Ta có: $(a-b)^2 \ge 0 \Leftrightarrow a^2+b^2 \ge 2ab \Leftrightarrow (a+b)^2 \ge 4ab;\ a^2+b^2 \ge \dfrac{(a+b)^2}{2}$

Từ giả thiết $a+b+3ab=1 \Rightarrow a+b=1-3ab \ge 1-\dfrac{3}{4}(a+b)^2$

$\Leftrightarrow 3(a+b)^2+4(a+b)-4 \ge 0 \Leftrightarrow [a+b+2][3(a+b)-2] \ge 0 \Leftrightarrow a+b \ge \dfrac{2}{3}$ (vì $a,b>0$)

$\dfrac{3ab}{a+b}=\dfrac{1-(a+b)}{a+b}=\dfrac{1}{a+b}-1 \le \dfrac{3}{2}-1=\dfrac{1}{2}$

$a^2+b^2 \ge \dfrac{(a+b)^2}{2} \ge \dfrac{2}{9} \Leftrightarrow -(a^2+b^2) \le -\dfrac{2}{9}$

$P=\dfrac{6ab}{a+b}-a^2-b^2=2\dfrac{3ab}{a+b}-(a^2+b^2) \le 1-\dfrac{2}{9}=\dfrac{7}{9}$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{7}{9}$ khi $\begin{cases} a=b \\ a+b+3ab=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\dfrac{1}{3}$.

Câu 15: [TS10 Tỉnh Hải Dương, 2019-2020]

Cho các số dương a,b,c thỏa mãn điều kiện: $a+b+c=2019$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\sqrt{2a^2+ab+2b^2}+\sqrt{2b^2+bc+2c^2}+\sqrt{2c^2+ca+2a^2}$

Lời giải

Ta có:

$$2a^2+ab+2b^2=\frac{5}{4}(a+b)^2+\frac{3}{4}(a-b)^2\ge\frac{5}{4}(a+b)^2$$

$$\Rightarrow\sqrt{2a^2+ab+2b^2}\ge\frac{\sqrt{5}}{2}(a+b)$$

Tương tự:

$$\sqrt{2b^2+bc+2c^2}\ge\frac{\sqrt{5}}{2}(b+c)\ ;\ \sqrt{2c^2+ca+2a^2}\ge\frac{\sqrt{5}}{2}(c+a)$$

$$\Rightarrow P\ge\frac{\sqrt{5}}{2}(a+b)+\frac{\sqrt{5}}{2}(b+c)+\frac{\sqrt{5}}{2}(c+a)=\sqrt{5}(a+b+c)$$

$$\Rightarrow P\ge 2019\sqrt{5}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{2019}{3}=673$

Vậy $\min P=2019\sqrt{5}\Leftrightarrow a=b=c=673$

Câu 16: [TS10 Tỉnh Hậu Giang, 2019-2020]

Với $x\neq 0$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=\frac{x^2-3x+2019}{x^2}$

Lời giải

Điều kiện $x\neq 0$

Ta có $A=\frac{x^2-3x+2019}{x^2}=1-\frac{3}{x}+\frac{2019}{x^2}$

Đặt $t=\frac{1}{x}(t\neq 0)$ ta được:

$$A=1-3t+2019t^2=2019\left(t^2-\frac{1}{673}t\right)+1=2019\ge\left[t^2-2t\frac{1}{1346}+\left(\frac{1}{1346}\right)^2\right]-2019\left(\frac{1}{1346}\right)^2+1$$

$$=2019\left(t-\frac{1}{1346}\right)^2+\frac{2689}{2692}\ge\frac{2689}{2692}$$ với mọi t thuộc R

Dấu "=" xảy ra khi $t=\frac{1}{1346}(tm)$. Vậy $\min A=\frac{2689}{2692}$ khi $t=\frac{1}{1346}\Rightarrow x=1346(tm)$

Câu 17: [TS10 Tỉnh Hòa Bình, 2019-2020]

Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $a+b=4ab$

Chứng minh rằng: $\frac{a}{4b^2+1}+\frac{b}{4a^2+1}\ge\frac{1}{2}$

Lời giải

Từ $a+b=4ab\Rightarrow 4ab\ge 2\sqrt{ab}\Rightarrow ab\ge\frac{1}{4}$

Chứng minh được BĐT: Với x, y >0 ta có $\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}\ge\dfrac{(a+b)^2}{x+y}$ (*)

Áp dụng (*) ta có

$$\frac{a}{4b^2+1}+\frac{b}{4a^2+1}=\frac{a^2}{4ab^2+a}+\frac{b^2}{4a^2b+b}\ge\frac{(a+b)^2}{4ab(a+b)+(a+b)}$$

$$=\frac{a+b}{4ab+1}=\frac{4ab}{4ab+1}=1-\frac{1}{4ab+1}\ge\frac{1}{2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=\dfrac{1}{2}$

Câu 18: [TS10 Tỉnh Hưng Yên, 2019-2020]

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn: $x^2+y^2+z^2=3xyz$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^2}{x^4+yz}+\dfrac{y^2}{y^4+xz}+\dfrac{z^2}{z^4+xy}$

Lời giải

$$x^2+y^2+z^2=3xyz\Rightarrow\frac{x}{yz}+\frac{y}{xz}+\frac{z}{xy}=3$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $\dfrac{x}{yz};\dfrac{y}{xz}$ ta có: $\dfrac{x}{yz}+\dfrac{y}{xz}\ge2\sqrt{\dfrac{x}{yz}.\dfrac{y}{x}}=\dfrac{2}{z}$

Tương tự ta cũng có: $\dfrac{y}{xz}+\dfrac{z}{xy}\ge\dfrac{2}{x};\dfrac{z}{xy}+\dfrac{x}{yz}\ge\dfrac{2}{y}$

$$\Rightarrow\left(\frac{x}{yz}+\frac{y}{xz}\right)+\left(\frac{y}{xz}+\frac{z}{xy}\right)+\left(\frac{z}{xy}+\frac{x}{yz}\right)\ge\frac{2}{z}+\frac{2}{x}+\frac{2}{y}$$

$$\Rightarrow\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\ge\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le3$$

Lại có: $x^4+yz\ge2\sqrt{x^4yz}=2x^2\sqrt{yz}\Rightarrow\dfrac{x^2}{x^4+yz}\le\dfrac{1}{2\sqrt{yz}}=\dfrac{1}{4}.2.\dfrac{1}{\sqrt{y}}.\dfrac{1}{\sqrt{z}}\le\dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z})$

Tương tự $\dfrac{y^2}{y^4+xz}\le\dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z});\dfrac{z^2}{z^4+xy}\le\dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y})$

Suy ra

$$P=\frac{x^2}{x^4+yz}+\frac{y^2}{y^4+xz}+\frac{z^2}{z^4+xy}\le\frac{1}{4}(\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z})=\frac{1}{2}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})\le\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow P\le\frac{3}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P = 3/2 khi x = y = z = 1.

Câu 19: [TS10 Tỉnh Kon Tum, 2019-2020]

Chứng minh $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{400}}<38$.

Lời giải

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{400}}=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{400}+\sqrt{400}}\right)$$

$$<2\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{400}+\sqrt{399}}\right)$$

Ta có : $2\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{400}+\sqrt{399}}\right)$

$$=\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+...+\sqrt{400}-\sqrt{399}$$

$$=2\ -\sqrt{1}+\sqrt{400}\ =38$$

Vậy $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{400}}<38$

Câu 20: [TS10 Tỉnh Lai Châu, 2019-2020]

Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{bc}{b+c+2a}+\frac{ca}{c+a+2b}\le\frac{1}{4}(a+b+c)$$

Lời giải

Ta chứng minh bất đẳng thức $\frac{1}{x+y}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ với x, y > 0.

Thậy vậy, với x, y > 0 thì:

$$\frac{1}{x+y}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\Leftrightarrow\frac{1}{x+y}\le\frac{x+y}{4xy}\Leftrightarrow(x+y)^2\ge4xy\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2-4xy\ge0$$

$\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2\ge0\Leftrightarrow(x-y)^2\ge0$ (luôn đúng)

Do đó: $\frac{1}{x+y}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ với x, y > 0.

Áp dụng bất đẳng thức trên ta có:

$$\frac{1}{a+b+2c}=\frac{1}{(a+c)+(b+c)}\le\frac{1}{4}(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c})\Rightarrow\frac{ab}{a+b+2c}\le\frac{ab}{4}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)$$

Tương tự ta có: $\begin{cases}\frac{bc}{b+c+2a}\le\frac{bc}{4}\left(\frac{1}{b+a}+\frac{1}{c+a}\right)\\ \frac{ca}{c+a+2b}\le\frac{ca}{4}\left(\frac{1}{c+b}+\frac{1}{a+b}\right)\end{cases}$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức với nhau ta được:

$$\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{bc}{b+c+2a}+\frac{ca}{c+a+2b}\le\frac{ab}{4}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)+\frac{bc}{4}\left(\frac{1}{b+a}+\frac{1}{c+a}\right)+\frac{ca}{4}\left(\frac{1}{c+b}+\frac{1}{a+b}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}+\frac{bc}{b+a}+\frac{bc}{c+a}+\frac{ca}{c+b}+\frac{ca}{a+b}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{ab+bc}{a+c}+\frac{ab+ca}{c+b}+\frac{bc+ca}{b+a}\right]=\frac{1}{4}\left[\frac{b(a+c)}{a+c}+\frac{a(b+c)}{c+b}+\frac{c(b+a)}{b+a}\right]=\frac{1}{4}(a+b+c)$$

Do đó $VT\le\frac{1}{4}VP$ (đpcm).

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c.

Câu 21: [TS10 Tỉnh Lạng Sơn, 2019-2020]

Cho ba số thực không âm *a, b, c* và thỏa mãn *a+b+c=1*. Chứng minh rằng:
$a+2b+c\ge 4(1-a)(1-b)(1-c)$

Lời giải

Ta có $a+2b+c\ge 4(1-a)(1-b)(1-c)\Rightarrow a+2b+c\ge 4(b+c)(a+c)(a+b)$

Áp dụng bất đẳng thức cô si ta có

$a+b+b+c\ge 2\sqrt{(a+b)(b+c)}\Rightarrow (a+2b+c)^2\ge 4(a+b)(b+c)\Rightarrow (a+2b+c)^2(a+c)\ge 4(a+b)(b+c)(a+c)$ Áp dụng bất đẳng thức cô si

$$\frac{a+2b+c+a+c}{2}\ge\sqrt{(a+2b+c)(a+c)}\Rightarrow\frac{2(a+b+c)}{2}\ge\sqrt{(a+2b+c)(a+c)}\Rightarrow 1\ge\sqrt{(a+2b+c)(a+c)}$$

$$\Rightarrow 1\ge(a+2b+c)(a+c)\Rightarrow a+2b+c\ge(a+2b+c)^2(a+c)$$

$$\Rightarrow a+2b+c\ge 4(a+b)(a+c)(b+c)$$

Câu 22: [TS10 Tỉnh Nam Định, 2019-2020]

Xét các số x, y, z thay đổi thoả mãn $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{2}(x+y+z)^2+4(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

Lời giải

Ta có:

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y)^3 - 3xy(x - y) + z^3 - 3xyz = 2$

$\equiv [(x + y)^3 + z^3] - 3xy(x + y + z) = 2$

$\equiv (x + y + z)^3 - 3z(x + y)(x + y + z) - 3xy(x - y - z) = 2$

$\equiv (x + y + z)[(x + y + z)^2 - 3z(x + y) - 3xy] = 2$

$\equiv (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 3xz - 3yz - 3xy) = 2$

$\equiv (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) = 2$

| $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz \neq 0$

Chứng minh: $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz \ge 0$ với mọi x, y, z

| $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz > 0$ | $x + y + z$

Đặt $x + y + z = t$ $(t > 0)$ | $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = \frac{t}{2}$ khi đó ta có

$$P=\frac{1}{2}(x+y+z)^2+4(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=\frac{t^2}{2}+\frac{8}{t}=\left(\frac{t^2}{2}+2\right)+\frac{8}{t}-2$$

Áp dụng BĐT Cô si ta có: $\frac{t^2}{2}+2\ge 2\sqrt{\frac{t^2}{2}.2}=2t$ (dấu bằng xảy ra $\equiv t=2$)

$$2t+\frac{8}{t}\ge 2\sqrt{2t.\frac{8}{t}}=8$$ (dấu bằng xảy ra $\equiv t=2$)

| $P\ge 8-2=6$. Tồn tại $x=y=1$, $z=0$ thì $P=6$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 6.

Câu 23: [TS10 Tỉnh Ninh Bình, 2019-2020]

1. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho tổng các ước nguyên dương của p^2 là một số chính phương.
2. Cho $x,\ y,\ z$ là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z\ge 2019$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$T=\frac{x^2}{x+\sqrt{yz}}+\frac{y^2}{y+\sqrt{zx}}+\frac{z^2}{z+\sqrt{xy}}$.

Lời giải

1. Ta có p là số nguyên tố ($p\in\mathbb{N}^*$) $\Rightarrow p^2$ là số có các ước dương là 1; p; p^2

Theo đề bài ta có tổng các ước nguyên dương của p là một số chính phương

$\Rightarrow 1+p+p^2=k^2 \quad (k\in\mathbb{N}^*)$

$\Rightarrow 4k^2=4+4p+4p^2$

$\Leftrightarrow 4k^2=(2p+1)^2+3$

$\Leftrightarrow 4k^2-(2p+1)^2=3$

$\Leftrightarrow (2k-2p-1)(2k+2p+1)=3 \qquad (*)$

Ta có $k,p\in\mathbb{N}^*\Rightarrow 2k+2p+1>0;\ 2k-2p-1<2k+2p+1$

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}2k-2p-1=1\\2k+2p+1=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2k-2p=2\\2k+2p=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=1 & \text{(thỏa mãn)}\\p=0 & \text{(không thỏa mãn)}\end{cases}$$

Vậy không có số nguyên tố p nào thỏa mãn đề bài

2. Ta chứng minh bất đẳng thức $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$ với $a,b,c,x,y,z>0$

Áp dụng bất đẳng thức Bu – nhi – a - cốp – xki cho ba bộ số $\left(\frac{a}{\sqrt{x}};\sqrt{x}\right),\left(\frac{b}{\sqrt{y}};\sqrt{y}\right),\left(\frac{c}{\sqrt{z}};\sqrt{z}\right)$

ta có $\left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\right)(x+y+z)=\left[\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{y}}\right)^2+\left(\frac{c}{\sqrt{z}}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{y}\right)^2+\left(\sqrt{z}\right)^2\right]$

$$\ge\left(\frac{a}{\sqrt{x}}.\sqrt{x}+\frac{b}{\sqrt{y}}.\sqrt{y}+\frac{c}{\sqrt{z}}.\sqrt{z}\right)^2=(a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \qquad (*)$$

Dấu “=” xảy khi khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có $\sqrt{yz}\le\frac{y+z}{2};\sqrt{zx}\le\frac{z+x}{2};\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$

$$\Rightarrow T\ge\frac{x^2}{x+\frac{y+z}{2}}+\frac{y^2}{y+\frac{z+x}{2}}+\frac{z^2}{z+\frac{x+y}{2}}$$

$$=\frac{2x^2}{2x+y+z}+\frac{2y^2}{x+2y+z}+\frac{2z^2}{x+y+2z}$$

$$=2\left(\frac{x^2}{2x+y+z}+\frac{y^2}{x+2y+z}+\frac{z^2}{x+y+2z}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có

$$T\ge 2\frac{(x+y+z)^2}{4(x+y+z)}=\frac{x+y+z}{2}=\frac{2019}{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x=y=z=673$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\frac{2019}{2}$ khi $x=y=z=673$

Câu 24: [TS10 Tỉnh Phú Thọ, 2019-2020]

Giải hệ phương trình sau $\begin{cases}\frac{x^2}{x+1}+\frac{y^2}{y-1}=4\\ \frac{x+2}{x+1}+\frac{y-2}{y-1}=y-x.\end{cases}$

Lời giải

ĐKXĐ: $x\ne -1;\ y\ne 1$

Hệ phương trình đã cho tương đương với hệ phương trình:

$$\begin{cases}\frac{x^2-1+1}{x+1}+\frac{y^2-1+1}{y-1}=4\\ \frac{x+1+1}{x+1}+\frac{y-1-1}{y-1}=y-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\frac{1}{x+1}+y+\frac{1}{y-1}=4\\ x+\frac{1}{x+1}-\left(y+\frac{1}{y-1}\right)=-2\end{cases}$$

Đặt $x+\frac{1}{x+1}=a\ ;\ y+\frac{1}{y-1}=b$

Hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases}a+b=4\\ a-b=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=3\end{cases}$$

+ Với a = 1 ta có:

$$x+\frac{1}{x+1}=1\Leftrightarrow\frac{x(x+1)+1}{x+1}=\frac{x+1}{x+1}$$
$$\Rightarrow x^2+x+1=x+1\Leftrightarrow x=0\quad(t/m)$$
+ Với b = 3 ta có:
$$y+\frac{1}{y-1}=3\Leftrightarrow\frac{y(y-1)+1}{y-1}=\frac{3.(y-1)}{y-1}$$
$$\Rightarrow y^2-y+1=3y-3\Leftrightarrow y^2-4y+4=0\Leftrightarrow y=2\quad(t/m)$$
Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất (x; y) =(0; 2)

Câu 25: [TS10 Tỉnh Quảng Nam, 2019-2020]

Cho hai số thực $x,\ y$ thỏa mãn $x\ge 3; y\ge 3.$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=21\left(x+\frac{1}{y}\right)+3\left(y+\frac{1}{x}\right)$

Lời giải

$$T=21x+\frac{21}{y}+3y+\frac{3}{x}=\frac{x}{3}+\frac{62}{3}x+\frac{3}{x}+\frac{21}{y}+\frac{7}{3}y+\frac{2}{3}y$$
$$=\left(\frac{x}{3}+\frac{3}{x}\right)+\left(\frac{21}{y}+\frac{7}{3}y\right)+\frac{62}{3}x+\frac{2}{3}y\ge 2+14+62+2=80$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=3\end{cases}$

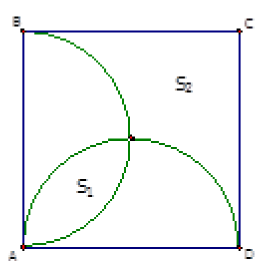
Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 80 khi x = 3; y =3.

Câu 26: [TS10 Tỉnh Quảng Ngãi, 2019-2020]

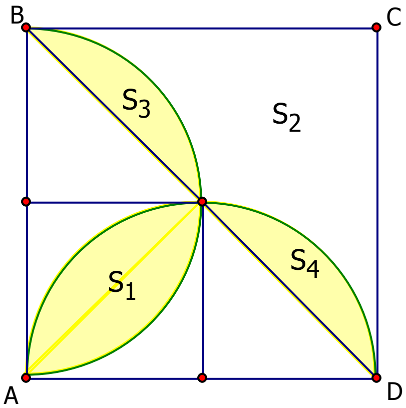
Cho hình vuông $ABCD$. Gọi S_1 là diện tích phần giao

của hai nửa đường tròn đường kính AB và AD. S_2 là diện tích phần còn lại của hình vuông nằm

ngoài hai nửa đường trong nói trên (*như hình vẽ bên*).Tính $\frac{S_1}{S_2}$



Lời giải.



Gọi a là cạnh hình vuông ABCD. Ta cm được:

$$S_3 = S_4 = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 .\pi .90}{360} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

$$S_1 = S_3 + S_4 = \frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) + \frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

$$S_2 = \frac{1}{2}a^2 - \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{a^2}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

Do đó $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)}{\frac{a^2}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{\pi - 2}{6 - \pi}$

Câu 27: [TS10 Tỉnh Quảng Ninh, 2019-2020]

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z \le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{1}{xy + yz + zx}$$

Lời giải.

Ta có $xy + yz + zx \le \dfrac{(x + y + z)^3}{3} \le \dfrac{1}{3}$ nên $\dfrac{2017}{xy + yz + zx} \ge 6051$

Áp dụng BĐT $(x + y + z)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) \ge 9$, ta có:

$$\left[(x^2 + y^2 + z^2) + (xy + yz + zx) + (xy + yz + zx)\right]\left(\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{1}{xy + yz + zx} + \frac{1}{xy + yz + zx}\right) \ge 9$$

Hay

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx)\left(\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{1}{xy + yz + zx} + \frac{1}{xy + yz + zx}\right) \ge 9$$

$$\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{2}{xy + yz + zx} \ge 9$$

Từ đó ta có: $P=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}+\frac{2}{xy+yz+zx}+\frac{2017}{xy+yz+zx}\geq 9+6051=6060$

$P=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}+\frac{21}{xy+yz+zx}+\frac{2017}{xy+yz+zx}\geq 9+6051=6060$

$\Leftrightarrow P\geq 6060$. Vậy GTNN của P là 6060 khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$ $x=y=z=\frac{1}{3}$

Câu 28: [TS10 Tỉnh Sơn La, 2019-2020]

Giải phương trình $\sqrt{\sqrt{3}-x}=x\sqrt{\sqrt{3}+x}$

Lời giải.

$\sqrt{\sqrt{3}-x}=x\sqrt{\sqrt{3}+x}$

Điều kiện $0<x\leq 9$

Bình phương hai vế phương trình đã cho, ta được:

$\sqrt{3}-x=x^2.(\sqrt{3}+x)$

$\Leftrightarrow x^3+\sqrt{3}.x^2+x=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x^3+3.x^2.\frac{1}{\sqrt{3}}+3.x.\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3=\sqrt{3}+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3=\frac{10}{3\sqrt{3}}=\frac{10\sqrt{3}}{9}$

$\Leftrightarrow x+\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt[3]{\frac{10\sqrt{3}}{9}}$

$\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{10\sqrt{3}}{9}}-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm $x=\sqrt[3]{\frac{10\sqrt{3}}{9}}-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Câu 29: [TS10 Tỉnh Vĩnh Long, 2019-2020]

Cho x, y là các số thực dương thỏa $x+y=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=2x^2-y^2+x+\frac{1}{x}+1$.

Lời giải.

Ta có: $x+y=1\Rightarrow y=1-x$ thay vào A ta được:

$A=2x^2-y^2+x+\frac{1}{x}+1=2x^2-(1-x)^2+x+\frac{1}{x}+1$

$=2x^2-\left(x^2-2x+1\right)+x+\frac{1}{x}+1=x^2+2x+x+\frac{1}{x}$

$=\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\left(4x+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(4x+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{4}$

Dễ thấy $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0, \forall x$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có $4x+\frac{1}{x} \geq 2\sqrt{4x.\frac{1}{x}} = 4$

Suy ra $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(4x+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{4} \geq 0+4-\frac{1}{4} = \frac{15}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi $x=\frac{1}{2}$

Vậy $A_{\min} = \frac{15}{4}$ khi $x=\frac{1}{2}$.

Câu 30: [TS10 Tỉnh Thái Nguyên, 2019-2020]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c+ab+bc+ac=6$. Chứng minh rằng:
$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geq 3$.

Lời giải

Đặt $P=\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}$.

Có a, b, c là các số thực dương, theo bất đẳng thức AM-GM có:

$\begin{cases} \frac{a^3}{b}+ab \geq 2a^2 \\ \frac{b^3}{c}+bc \geq 2b^2 \\ \frac{c^3}{a}+ac \geq 2c^2 \end{cases}$. $\Rightarrow P=\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geq 2\left(a^2+b^2+c^2\right)-\left(ab+bc+ac\right)$, mà $a+b+c+ab+bc+ac=6$.

$\Rightarrow P \geq 2\left(a^2+b^2+c^2\right)+\left(a+b+c\right)-6$.

Có $\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(a-c\right)^2 \geq 0 \Rightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq 2\left(ab+bc+ca\right) \Rightarrow 3\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq \left(a+b+c\right)^2$.

Suy ra $P \geq \frac{2}{3}\left(a+b+c\right)^2+\left(a+b+c\right)-6$.

Có $ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2 \Rightarrow 3\left(ab+bc+ac\right) \leq \left(a+b+c\right)^2$.

Do đó $6=a+b+c+ab+bc+ac \leq a+b+c+\frac{1}{3}\left(a+b+c\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{3}\left(a+b+c\right)^2+\left(a+b+c\right)-6 \geq 0$.

$\Rightarrow \left(a+b+c\right) \geq 3$, $\left(a+b+c\right)^2 \geq 9$.

Suy ra $P \ge \frac{2}{3}.9+3-6=3$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Vậy $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \ge 3$.

Câu 31: [TS10 Tỉnh Vĩnh Phúc, 2019-2020]

Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh:

$$\frac{2+6a+3b+6\sqrt{2bc}}{2a+b+2\sqrt{2bc}} \ge \frac{16}{\sqrt{2b^2+2(a+c)^2}+3}$$

Lời giải

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$a+2c \ge 2\sqrt{2bc} \Rightarrow VT=\frac{2}{2a+b+2\sqrt{2bc}}+3 \ge \frac{2}{2a+b+b+2c}+3=\frac{1}{a+b+c}+3$$

Mặt khác theo BĐT Bu-nhi-a-cốp –xki thì:

$$\sqrt{2b^2+2(a+c)^2}=\sqrt{(1+1)\left[b^2+(a+c)^2\right]} \ge \sqrt{\left[1.b+1.(a+c)\right]^2}=b+(a+c) \Rightarrow VP \le \frac{16}{a+b+c+3}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{1}{a+b+c}+3 \ge \frac{16}{a+b+c+3} \Leftrightarrow (a+b+c-1)^2 \ge 0 \quad (1)$$

Ta có (1) đúng hiển nhiên do đó bất đẳng thức được chứng minh.

Dấu "=" bằng xảy ra khi: $\begin{cases} a+b+c=1 \\ b=2c \\ b=a+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=c=\frac{1}{4} \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}$

ĐÁP ÁN CÁC CÂU PHÂN LOẠI CHYÊN NĂM 2019-2020

Câu 32: [TS10 Chuyên KHTN Hà Nội, 2019-2020]

Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn: $4x^2+4y^2+17xy+5x+5y \ge 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=17x^2+17y^2+16xy$

Lời giải

Ta có: $4x^2+4y^2+17xy+5x+5y \ge 1 \Leftrightarrow 4(x+y)^2+9xy+5(x+y) \ge 1$

Đặt $t=x+y$, $t>0$, theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$xy \le \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{t^2}{4}$. Do đó: $4t^2 + \frac{9}{4}t^2 + 5t \ge 1 \Rightarrow t \ge \frac{2\sqrt{2}-2}{5}$ hay $x+y \ge \frac{2\sqrt{2}-2}{5}$.

Ta có: $P = 17x^2 + 17y^2 + 16xy = 17(x+y)^2 - 18xy$

$$\ge 17(x+y)^2 - 18\frac{(x+y)^2}{4} = \frac{25}{4}(x+y)^2 \ge \frac{25}{4}\left(\frac{2\sqrt{2}-2}{5}\right)^2 = 6 - 4\sqrt{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = \frac{\sqrt{2}-1}{5}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $6 - 4\sqrt{2}$

Câu 33: [TS10 Chuyên Sư Phạm Hà Nội, 2019-2020]

Cho các số thực x, y thay đổi, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$P = xy(x-2)(y+6) + 13x^2 + 4y^2 - 26x + 24y + 46$

Lời giải

Ta có:

$P = xy(x-2)(y+6) + 13x^2 + 4y^2 - 26x + 24y + 46$

$= (x^2 - 2x)(y^2 + 6y) + 13(x^2 - 2x) + 4(y^2 + 6y) + 46$

$= \left[(x-1)^2 - 1\right]\left[(y+3)^2 - 9\right] + 13\left[(x-1)^2 - 1\right] + 4\left[(y+3)^2 - 9\right] + 46$

Đặt $a = x - 1,\ b = y + 3$, khi đó:

$P = (a^2 - 1)(b^2 - 9) + 13(a^2 - 1) + 4(b^2 - 9) + 46$

$= a^2b^2 - 9a^2 - b^2 + 9 + 13a^2 - 13 + 4b^2 - 36 + 46$

$= 4a^2 + 3b^2 + a^2b^2 + 6$

≥ 6

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1, y = -3$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 6.

Câu 34: [TS10 Chuyên Tin Hà Nội, 2019-2020]

Cho a, b, c dương thỏa mãn: $ab + bc + ca + abc = 4$

1) Chứng minh rằng: $\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} = 1$

2) Tìm giá trị nhỏ nhất: $P = \frac{1}{\sqrt{2(a^2+b^2)}+4} + \frac{1}{\sqrt{2(b^2+c^2)}+4} + \frac{1}{\sqrt{2(c^2+a^2)}+4}$.

Lời giải

1) Ta có:

$$\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}=1$$
$$\Leftrightarrow (b+2)(c+2)+(a+2)(c+2)+(b+2)(a+2)=(a+2)(b+2)(c+2)$$
$$\Leftrightarrow ab+bc+ca+4(a+b+c)+12=abc+2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)+8$$
$$\Leftrightarrow 4=ab+bc+ca.$$

Đẳng thức cuối cùng đúng theo giả thiết, các phép biến đổi là tương đương, do đó đẳng thức đã cho được chứng minh.

2) Với x, y dương ta có bất đẳng thức:

$$2(x^2+y^2)\ge(x+y)^2 \text{ (*)}$$

$$\frac{1}{x+y}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \text{ (**)}$$

Thật vậy:

$$(*)\Leftrightarrow(x-y)^2\ge 0 \text{ (luôn đúng)}$$

$$(**)\Leftrightarrow\frac{x+y}{4xy}\ge\frac{1}{x+y}\Leftrightarrow(x+y)^2\ge 4xy\Leftrightarrow(x-y)^2\ge 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Các bất đẳng thức (*), (**) xảy ra dấu "=" khi x = y.

Lần lượt áp dụng (*) và (**) ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{2(a^2+b^2)}+4}\le\frac{1}{a+b+4}=\frac{1}{(a+2)+(b+2)}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}\right)$$

Tương tự:

$$\frac{1}{\sqrt{2(b^2+c^2)}+4}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}\right);\quad \frac{1}{\sqrt{2(c^2+a^2)}+4}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{c+2}+\frac{1}{a+2}\right);$$

Cộng theo vế ta được:

$$P\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}\right)=\frac{1}{2}.1=\frac{1}{2}.$$

Dâu "=" xảy ra khi a = b = c

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{2}$

Câu 35: [TS10 Chuyên Toán Hà Nội, 2019-2020]

Cho $K=ab+4ac-4bc$ với $a,b,c\ge 0$ và a + b + 2c = 1.

1) Chứng minh rằng: $K\ge\frac{1}{2}$

2) Tìm giá trị lớn nhất của K.

Lời giải

1) Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$4bc \le 2\left(\frac{b+2c}{2}\right)^2 \le 2\left(\frac{a+b+2c}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow -4bc \ge -\frac{1}{2}$$

Mặt khác: $a,b,c \ge 0 \Rightarrow K = ab + 4ac - 4bc \ge -4bc \ge -\dfrac{1}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $a = 0, b = \dfrac{1}{2}, c = \dfrac{1}{4}$.

Cách khác:

Ta có:

$$\begin{aligned} K &= ab + 4c(a-b) = ab + 2(1-a-b)(a-b) \\ &= ab + 2(a-b) - 2(a^2 - b^2) \\ &= 2b^2 + (a-2)b + 2a - 2a^2 \end{aligned}$$

Do đó: $2b^2 + (a-2)b + 2a - 2a^2 - K = 0 \ (*)$

Để tồn tại K thì phương trình (*) Phải có 2 nghiệm:

$\Leftrightarrow \Delta \ge 0 \Leftrightarrow (a-2)^2 - 4.2.(2a - 2a^2 - K) \ge 0$

$\Leftrightarrow 8K \ge 20a - 17a^2 - 4.$

Vì $a,b,c \ge 0$ và $a+b+2c = 1 \Rightarrow 0 \le a \le 1$. Do đó:

$2a - 17a^2 = a(20 - 17a) \ge a(20 - 17.1) = 3a \ge 0$

Do đó $8K \ge -4 \Rightarrow K \ge -\dfrac{1}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $a = 0, b = \dfrac{1}{2}, c = \dfrac{1}{4}$.

2) Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$a(b+2c) \le \left(\frac{a+b+2c}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Mặt khác: $a,b,c \ge 0 \Rightarrow K = ab + 4ac - 4bc \ge ab + 4ac \le 2ab + 4ac = 2a(b+2c) \le \dfrac{(a+b+2c)^2}{2} = \dfrac{1}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi:

$$a = b + 2c, a + b + 2c = 1, bc = 0, ab = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = 0, c = \frac{1}{4}$$

Vậy giá trị lớn nhất của K là $\dfrac{1}{2}$

Câu 36: [TS10 Chuyên Thái Bình, 2019-2020]

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} 0 < a, b, c < \dfrac{1}{2} \\ 2a + 3b + 4c = 3 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2}{a(3b+4c-2)} + \frac{9}{b(4a+8c-3)} + \frac{8}{c(2a+3b-1)}$$

Lời giải

Ta có:

$$P = \frac{2}{a(3b+4c-2)} + \frac{9}{b(4a+8c-3)} + \frac{8}{c(2a+3b-1)}$$

$$= \frac{2}{a(3-2a-2)} + \frac{9}{b(6-6b-3)} + \frac{8}{c(3-4c-1)}$$

$$= \frac{2}{a(1-2a)} + \frac{3}{b(1-2b)} + \frac{4}{c(1-2c)}$$

$$= \frac{2a}{a^2(1-2a)} + \frac{3b^2}{b^2(1-2b)} + \frac{4c}{c^2(1-2c)^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$a^2(1-2a) \le \left(\frac{a+a+1-2a}{3}\right)^2 = \frac{1}{27}$$

Tương tự: $b^2(1-2b) \le \dfrac{1}{27}$; $c^2(1-2c) \le \dfrac{1}{27}$

Suy ra: $P \ge 27(2a+3b+4c) = 81$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = \dfrac{1}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 81.

Câu 37: [TS10 Chuyên Hòa Bình, 2019-2020]

Cho hai số dương a, b thỏa mãn: a + b = 4ab. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{4b^2+1} + \frac{b}{4a^2+1} \ge \frac{1}{2}$$

Lời giải

Ta có:

$$a + b = 4ab \le (a+b)^2 \Leftrightarrow (a+b)[a+b-1] \ge 0 \Leftrightarrow a+b \ge 1 (a+b>0)$$

Lại có:

$$\frac{a}{4b^2+1} = a - \frac{4ab^2}{4b^2+1} \ge a - \frac{4ab^2}{4b} = a - ab$$

$$\frac{b}{4a^2+1} = b - \frac{4a^2b}{4a^2+1} \ge b - \frac{4a^2b}{4a} = a - ab$$

Do đó: $\frac{a}{4b^2+1}+\frac{b}{4a^2+1}\ge(a+b)-2ab=(a+b)-\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}(a+b)\ge\frac{1}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=\frac{1}{2}$

Câu 38: [TS10 Chuyên Hưng Yên, 2019-2020]

Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn: $x^2+y^2+z^2\le 3y$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{4}{(y+2)^2}+\frac{8}{(z+3)^2}$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ge\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2\ge\frac{8}{(a+b)^2}\quad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta được:

$$P=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{\left(\frac{y}{2}+1\right)^2}+\frac{8}{(z+3)^2}\ge\frac{8}{\left(x+\frac{y}{2}+2\right)^2}+\frac{8}{(z+3)^2}\ge\frac{64}{\left(x+\frac{y}{2}+z+5\right)^2}.$$

Mặt khác:

$$x+z\le\sqrt{2(x^2+z^2)}\le\sqrt{2(3y-y^2)}\le\frac{2+3y-y^2}{2}.$$

$$P\ge\frac{64}{\left(6+2y-\frac{1}{2}y^2\right)^2}=\frac{64}{\left[8-\frac{1}{2}(y-2)^2\right]^2}\ge 1$$

Dấu "=" xẩy ra khi $(x,y,z)=(1,2,1)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1.

Câu 39: [TS10 Chuyên Hà Nam, 2019-2020]

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}$$

Lời giải

Ta dễ dàng chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{x+y+z}\ (\text{với } x,y,z>0)\quad (*)$$

Thật vậy: $(*)\Leftrightarrow(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$

Áp dụng AM – GM ta được:

$$\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 3\sqrt[3]{abc}.\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}=9$$

Vậy bất đẳng thức (*) được chứng minh, dấu "=" xảy ra khi x = y = z.

Sử dụng bất đẳng thức (*) ta được:

$$1\ge \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\ge \frac{9}{a+b+c+3}\Leftrightarrow a+b+c+3\ge 9\Leftrightarrow a+b+c\ge 6$$

Đặt $Q=\frac{b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{a^3}{c^2+ca+a^2}$

Ta có:

$$\begin{aligned}P-Q&=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3-c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3-a^3}{c^2+ca+a^2}\\&=\frac{\left(a-b\right)\left(a^2+ab+b^2\right)}{a^2+ab+b^2}+\frac{\left(b-c\right)\left(b^2+bc+c^2\right)}{b^2+bc+c^2}+\frac{\left(c-a\right)\left(c^2+ca+a^2\right)}{c^2+ca+a^2}\\&=\left(a-b\right)+\left(b-c\right)+\left(c-a\right)\\&=0\end{aligned}$$

Do đó: P = Q

Mặt khác: $x^2-xy+y^2\ge \frac{1}{3}\left(x^2+xy+y^2\right)\ \left(**\right)$

Thật vậy:

$$x^2-xy+y^2\ge \frac{1}{3}\left(x^2+xy+y^2\right)\Leftrightarrow 3x^2-3xy+3y^2\ge x^2+xy+y^2\Leftrightarrow 2\left(x-y\right)^2\ge 0$$

Sử dụng (**) ta được:

$$\begin{aligned}P+Q&=\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2}\\&=\frac{\left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right)}{a^2+ab+b^2}+\frac{\left(b+c\right)\left(b^2-bc+c^2\right)}{b^2+bc+c^2}+\frac{\left(c+a\right)\left(c^2-ca+a^2\right)}{c^2+ca+a^2}\end{aligned}$$

$$\ge \frac{1}{3}\left(a+b\right)+\frac{1}{3}\left(b+c\right)+\frac{1}{3}\left(c+a\right)$$

$$=\frac{2}{3}\left(a+b+c\right)\ge \frac{2}{3}.6=4$$

Mà $P=Q\Rightarrow P\ge 2$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = 2

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2.

Câu 40: [TS10 Chuyên Phan Bội Châu, 2019-2020]

Cho các số dương a, b, c dương thỏa mãn $abc=a+b+c+2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}}$

Lời giải.

Từ $abc=a+b+c+2$

$\Leftrightarrow (a+b)(b+1)(c+1)=(a+1)(b+1)+(b+1)(c+1)+(c+1)(a+1)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{1}{c+1}=1$

Đặt $\dfrac{1}{a+1}=x,\dfrac{1}{b+1}=y,\dfrac{1}{c+1}=z\Rightarrow\begin{cases}x,y,z>0\\x+y+z=1.\end{cases}$

Khi đó: $a=\dfrac{1-x}{x}=\dfrac{y+z}{x};b=\dfrac{z+x}{y};c=\dfrac{x+y}{z}$

Nên $P=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{c^2+a^2}}\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{ab}}+\dfrac{1}{\sqrt{bc}}+\dfrac{1}{\sqrt{ca}}\right)$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\dfrac{x}{y+z}.\dfrac{y}{z+x}}+\sqrt{\dfrac{y}{z+x}.\dfrac{z}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{z}{x+y}.\dfrac{x}{y+z}}\right)$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\dfrac{y}{y+z}.\dfrac{x}{z+x}}+\sqrt{\dfrac{z}{z+x}.\dfrac{y}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x}{x+y}.\dfrac{z}{y+z}}\right)$

$\le\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\dfrac{y}{y+z}+\dfrac{x}{z+x}\right)+\left(\dfrac{z}{z+x}+\dfrac{y}{x+y}\right)+\left(\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{z}{y+z}\right)\right]$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{x+y}\right)+\left(\dfrac{y}{y+z}+\dfrac{z}{y+z}\right)+\left(\dfrac{z}{z+x}+\dfrac{x}{z+x}\right)\right]=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z$ hay $a=b=c$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ khi a = b = c = 2.

Câu 41: [TS10 Chuyên Vĩnh Phúc, 2019-2020]

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $5(x^2+y^2+z^2)-9x(y+z)-18yz=0.$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $Q=\dfrac{2x-y-z}{y+z}.$

Lời giải

Ta có:

$5(x^2+y^2+z^2)-9x(y+z)-18yz\le 0$

$\Leftrightarrow 5x^2-9x(y+z)+5(y+z)^2-28yz\le 0$

$$\Leftrightarrow 5x^2-9x(y+z)+5(y+z)^2 \le 7.4yz \le 7(y+z)^2$$
$$\Leftrightarrow 5x^2-9x(y+z)-2(y+z)^2 \le 0$$
$$\Leftrightarrow 5\left(\frac{x}{y+z}\right)^2-9.\frac{x}{y+z}-2\le 0$$
Đặt: $t=\frac{x}{y+z}\ (t>0)$ khi đó:
$$5t^2-9t-2\le 0 \Leftrightarrow (5t+1)(t-2)\le 0$$
$$\Leftrightarrow t\le 2 \quad (\text{do } 5t+1>0)$$
$$\Leftrightarrow \frac{x}{y+z}\le 2$$
Ta có: $Q=\frac{2x-y-z}{y+z}=2.\frac{x}{y+z}-1\le 2.2-1=3$

Dấu "=" xảy ra khi $y=z=\frac{x}{4}$.

Vậy giá trị lớn nhất của Q là 3.

Câu 42: [TS10 Chuyên Bắc Ninh, 2019-2020]

Cho x, y, z không âm thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm GTLN. GTNN của biểu thức
$$M=\sqrt{x^2-6x+25}+\sqrt{y^2-6y+25}+\sqrt{z^2-6z+25}$$

Lời giải

Ta có:
$$M=\sqrt{x^2-6x+25}+\sqrt{y^2-6y+25}+\sqrt{z^2-6z+25}$$
$$=\sqrt{(3-x)^2+16}+\sqrt{(3-y)^2+16}+\sqrt{(3-z)^2+16}$$
Đặt $a=3-x, b=3-y, c=3-z$, Khi đó: $\begin{cases} a+b+c=6 \\ 0\le a,b,c\le 3\end{cases}$
$$M=\sqrt{a^2+16}+\sqrt{b^2+16}+\sqrt{c^2+16}$$
Tìm GTNN:

Theo bất đẳng thức Minkowski ta có:
$$M=\sqrt{a^2+16}+\sqrt{b^2+16}+\sqrt{c^2+16}\ge\sqrt{(a+b+c)^2+(4+4+4)^2}=6\sqrt{5}$$
Đẳng thức xảy ra khi a = b = c = 2

Tìm GTLN

Sử dụng phương pháp UCT với điều kiện $0\le a\le 3$ ta được $\sqrt{a^2+16}\le\frac{a+12}{3}\ (*)$

Thật vậy:

$(*) \Leftrightarrow 9\left(a^2+16\right) \le \left(a+12\right)^2 \Leftrightarrow 8a^2-24a \le 0 \Leftrightarrow a\left(a-3\right) \le 0$ (đúng)

Hoàn toàn tương tự và suy ra: $M \le 14$

Đẳng thức xảy ra khi $\left(a,b,c\right)=\left(0,3,3\right)$ và các hóa vị.

Câu 43: [TS10 Chuyên KHTN, 2019-2020]

Cho x, y,z là các số dương thỏa mãn $xy+yz+zx=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2} \ge \frac{2}{3}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^3 \qquad (1)$$

Lời giải

Ta có: $1+x^2=xy+yz+zx+x^2=\left(x+y\right)\left(x+z\right)$

Tương tự: $1+y^2=\left(x+y\right)\left(y+z\right);1+z^2=\left(x+z\right)\left(y+z\right)$

Do đó:

$$VT_{(1)}=\frac{1}{\left(x+y\right)\left(x+z\right)}+\frac{1}{\left(x+y\right)\left(y+z\right)}+\frac{1}{\left(x+z\right)\left(z+y\right)}=\frac{2\left(x+y+z\right)}{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^2 \le \left(x+y+z\right)\left(\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}\right)$$

$$=\left(x+y+z\right)\left[\frac{x}{\left(x+y\right)\left(y+z\right)}+\frac{y}{\left(x+y\right)\left(y+z\right)}+\frac{z}{\left(x+z\right)\left(z+y\right)}\right]$$

$$=\frac{2\left(x+y+z\right)\left(xy+yz+zx\right)}{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}$$

$$=\frac{2\left(x+y+z\right)}{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}.$$

Suy ra:

$$VP_{(1)} \le \frac{4\left(x+y+z\right)}{3\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right).$$

Như thế để chứng minh bất đẳng thức đã cho ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \le \frac{3}{2} \qquad (2)$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{\left(x+y\right)\left(x+z\right)}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{x}{x+z}\right)$$

Tương tự: $\dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x+y}+\dfrac{y}{y+z}\right)$; $\dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z}{z+x}+\dfrac{z}{y+z}\right)$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được bất đẳng thức (2). Bài toán được chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Câu 44: [TS10 Chuyên TP. Hồ Chí Minh, 2019-2020]

Cho x, y, z là các số thực thuộc đoạn $\left[0;2\right]$ thỏa mãn điều kiện: $x+y+z=3$.

a) Chứng minh rằng: $x^2+y^2+z^2<6$

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=x^3+y^3+z^3-3xyz$

Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned}
&(2-x)(2-y)(2-z)\ge 0 \Rightarrow 8-4(x+y+z)+2(xy+yz+zx)-xyz\ge 0\\
&\Rightarrow x^2+y^2+z^2 \le x^2+y^2+z^2+8-4(x+y+z)+2(xy+yz+zx)-xyz\\
&=(x+y+z)^2-4(x+y+z)+8-xyz\\
&=9-4.3+8-xyz=5-xyz\le 5<6
\end{aligned}$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned}
P&=x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)\\
&=3\left[\frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2+2xy+yz+zx\right)\right]\\
&=\frac{3}{2}\left[3\left(x^2+y^2+z^2\right)-(x+y+z)^2\right]\\
&\le\frac{3}{2}\left[3.5-9\right]\\
&=9
\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $(x,y,z)=(2,1,0)$ và các hoán vị.

Câu 45: [TS10 Chuyên Hòa Bình, 2019-2020]

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $xy+yz+4zx=32$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=x^2+16y^2+16z^2$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{x^2}{2}+8y^2\ge 4xy$$

$$\frac{x^2}{2}+8z^2\ge 4xz$$

$$8y^2+8z^2\ge 16yz$$

Cộng theo vế ta được: $P=x^2+16y^2+16z^2\ge 4\left(xy+xz+4yz\right)=128$

Dấu "=" xảy ra khi x = 4y = 4z , thay và điều kiện ta được: $x=\dfrac{8\sqrt{6}}{3};y=z=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

Câu 46: [TS10 Chuyên Quốc Học Huế, 2019-2020]

Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn xyz = 2. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{2x^2+y^2+5}+\frac{2y}{6y^2+z^2+6}+\frac{4z}{3z^2+4x^2+16}\le\frac{1}{2}$$

Lời giải

Ta có:

+) $2x^2+y^2+5=x^2+y^2+x^2+1+4\ge 2xy+2x+4$

$$\Rightarrow\frac{x}{2x^2+y^2+5}\le\frac{x}{2xy+2x+4}=\frac{x}{2\left(xy+x+2\right)}$$

+) $6y^2+z^2+6=4y^2+z^2+2y^2+2+4\ge 4yz+4y+4$

$$\Rightarrow\frac{2y}{6y^2+z^2+6}\le\frac{2y}{4yz+4y+4}=\frac{y}{2\left(yz+y+1\right)}$$

Do đó:

$$VT\le\frac{x}{2\left(xy+x+2\right)}+\frac{y}{2\left(yz+y+1\right)}+\frac{z}{zx+2z+2}$$

$$=\frac{x}{2\left(xy+x+xyz\right)}+\frac{y}{2\left(yz+y+1\right)}+\frac{yz}{xyz+2yz+2y}$$

$$=\frac{1}{2\left(yz+y+1\right)}+\frac{y}{2\left(yz+y+1\right)}+\frac{yz}{2\left(yz+y+1\right)}$$

$$=\frac{yz+y+1}{2\left(yz+y+1\right)}$$

$$=\frac{1}{2}$$

Dấu "=" xảy ra x = y = 1, z = 2.

Câu 47: [TS10 Chuyên Tin Hòa Bình, 2019-2020]

Cho các số thực dương x, y thỏa mãn: $x+y\le 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\sqrt{1+x^2y^2}$

Lời giải

Theo AM-GM ta có:

$$1\ge x+y\ge 2\sqrt{xy}\Rightarrow\sqrt{xy}\le\frac{1}{2}\Rightarrow xy\le\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{xy}\ge 4$$

Do đó:

$$P=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\sqrt{1+x^2y^2}\ge\frac{2}{\sqrt{xy}}\sqrt{1+x^2y^2}=2\sqrt{\frac{1}{xy}+xy}$$

Suy ra:

$$P\ge 2\sqrt{\frac{1}{xy}+xy}=2\sqrt{\frac{1}{16xy}+xy+\frac{15}{16xy}}\ge 2\sqrt{2\sqrt{\frac{1}{16xy}.xy}+\frac{15}{16xy}}$$

$$\Rightarrow P\ge 2\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{15}{16}.4}=\sqrt{17}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=\frac{1}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\sqrt{17}$

Câu 48: [TS10 Chuyên Tiền Giang, 2019-2020]

Cho hai số dương x, y thỏa mãn $2\left(x^3+y^3\right)+6xy\left(x+y-2\right)=\left(x+y\right)^2\left(xy+4\right)$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1\right)$

Lời giải

Ta có:

$$2\left(x^3+y^3\right)+6xy\left(x+y-2\right)=\left(x+y\right)^2\left(xy+4\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x+y\right)^3-12xy=\left(x+y\right)^2\left(xy+4\right)$$

Đặt $a=x+y, b=xy\left(a,b>0\right)$ khi đó:

$$2a^3-12b=a^2\left(b+4\right)\Leftrightarrow b\left(a^2+12\right)=2a^3-4a^2$$

Do $VT>0$ nên $2a^3-4a^2>0\Leftrightarrow 2a^2\left(a-2\right)>0\Leftrightarrow a>2$

Ta có:

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+y^2+xy}{xy}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}-1\right)=\frac{a^2}{2b}-\frac{1}{2}=\frac{a^4+12a^2}{4a^3-8a^2}-\frac{1}{2}$$

Ta sẽ chứng minh: $T\ge\frac{5}{2}$

Thật vậy: $T\ge\frac{5}{2}\Leftrightarrow\frac{a^4+12a^2}{4a^3-8a^2}\ge 3\Leftrightarrow\frac{\left(a-6\right)^2a^2}{4a^2\left(a-2\right)}\ge 0$ (luôn đúng $\forall a>2$)

Dấu "=" xảy ra khi a = 6, b = 6

hay $x=3+\sqrt{3}, y=3-\sqrt{3}$ hoặc $x=3-\sqrt{3}, y=3+\sqrt{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là $\frac{5}{2}$

Câu 49: [TS10 Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu, 2019-2020]

Cho các số thực dương x, y. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\sqrt{\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+2}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}$$

Lời giải

Ta có:

$$P=\sqrt{\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+2}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}=\sqrt{\frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{x^2y^2}}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right)^2}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}=\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}$$

$$\Rightarrow P=\left(\frac{x^2+y^2}{xy}+2\right)+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}-2=\frac{(x+y)^2}{xy}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}-2$$

Đặt $t=\frac{\sqrt{xy}}{x+y}$.Theo AM – GM thì: $x+y\ge 2\sqrt{xy}\Rightarrow\frac{\sqrt{xy}}{x+y}\le\frac{1}{2}\Rightarrow t\le\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{t}\ge 2$

Khi đó:

$$P=\frac{1}{t^2}+t-2=\left(\frac{t}{2}+\frac{t}{2}+\frac{1}{16t^2}\right)+\frac{15}{16t^2}-2$$

$$\ge 3\sqrt[3]{\frac{t}{2}.\frac{t}{2}.\frac{1}{16t^2}}+\frac{15}{16}.2^2-2$$

$$=3.\frac{1}{4}+\frac{15}{4}-2$$

$$=\frac{5}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{5}{2}$

Câu 50: [TS10 Chuyên KHTN Hà Nội, 2019-2020]

Với x, y là các số thực thỏa mãn $1\le y\le 2$ và $xy+2\ge 2y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\frac{x^2+4}{y^2+1}$

Lời giải.

Theo giải thiết ta có: $4xy+8\ge 8y.$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có: $4x^2+y^2\ge 4xy.$

Suy ra: $4x^2+y^2+8\ge 4xy+8\ge 8y.$

Do đó: $4\left(x^2+4\right)\ge 8+8y-y^2=4\left(y^2+1\right)+\left(5y+2\right)\left(2-y\right)\ge 4\left(y^2+1\right).$

Suy ra: $x^2+4\ge y^2+1\Rightarrow M=\dfrac{x^2+4}{y^2+1}\ge 1$

Dấu "=" xảy ra khi x = 2, y = 1.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 1.

Câu 51: [TS10 Chuyên Hưng Yên, 2019-2020]

Với x, y là cá số thực thỏa mãn $(2+x)(y-1)=\dfrac{9}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=\sqrt{x^4+4x^3+6x^2+4x+2}+\sqrt{y^4-8y^3+24y^2-32y+17}$.

Lời giải

Ta có:

$$A=\sqrt{x^4+4x^3+6x^2+4x+2}+\sqrt{y^4-8y^3+24y^2-32y+17}$$
$$=\sqrt{1+(x+1)^4}+\sqrt{1+(y-2)^4}$$

Đặt $a=x+1,\ b=y-2$, ta được $A=\sqrt{1+a^4}+\sqrt{1+b^4}$

Từ giả thiết ta được: $(a+1)(b+1)=\dfrac{9}{4}\Leftrightarrow a+b+ab=\dfrac{5}{4}$

Theo AM – GM ta có:

$$\begin{cases}4a^2+1\ge 4a\\4b^2+1\ge 4b\end{cases}\Rightarrow a^2+b^2\ge a+b-\frac{1}{2}\quad (1)$$

$$a^2+b^2\ge 2ab\Rightarrow \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)\ge ab\qquad (2)$$

Cộng theo vế (1) và (2) ta được: $\dfrac{3}{2}\left(a^2+b^2\right)\ge a+b+ab-\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{4}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow a^2+b^2\ge\dfrac{1}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức Minicopski ta được:

$$A=\sqrt{1+a^4}+\sqrt{1+b^4}\ge\sqrt{(1+1)^2+\left(a^2+b^2\right)^2}=\sqrt{\left(a^2+b^2\right)^2+4}$$
$$\ge\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+4}=\frac{\sqrt{17}}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2},y=\dfrac{5}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$

Câu 52: [TS10 Chuyên Bình Thuận, 2019-2020]

Cho các số dương x, y, z thỏa $xyz=\dfrac{1}{2}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{yz}{x^2(y+z)}+\frac{zx}{y^2(z+x)}+\frac{xy}{z^2(x+y)}\ge xy+yz+zx.$$

Dấu "=" xảy ra khi nào:

Lời giải

Ta có:

$$\frac{yz}{x^2\left(y+z\right)}+\frac{zx}{y^2\left(z+x\right)}+\frac{xy}{z^2\left(x+y\right)}\ge xy+yz+zx$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}+\frac{\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{z}}+\frac{\frac{1}{z^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\ge\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

Đặt $a=\frac{1}{x},b=\frac{1}{y},c=\frac{1}{z}\Rightarrow abc=2$

Khi đó ta cần chứng minh:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{a+b+c}{2}$$

Thật vậy, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta được:

$$VT=\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{2\left(a+b+c\right)}=\frac{a+b+c}{2}=VP\ \text{(đpcm)}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z$.

Câu 53: [TS10 Chuyên Hải Phòng, 2019-2020]

Cho $x;y;z$ là ba số thực dương thỏa mãn $x(x-z)+y(y-z)=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x^3}{x^2+z^2}+\frac{y^3}{y^2+z^2}+\frac{x^2+y^2+4}{x+y}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi $\frac{x^3}{x^2+z^2}=x-\frac{xz^2}{x^2+z^2}\ge x-\frac{xz^2}{2xz}=x-\frac{z}{2}$.

Tương tự $\frac{y^3}{y^2+z^2}\ge y-\frac{z}{2}$. Suy ra $P\ge x+y-z+\frac{x^2+y^2+4}{x+y}$.

Theo gt $z=\frac{x^2+y^2}{x+y}\Rightarrow P\ge x+y+\frac{4}{x+y}\ge 4$.

Vậy $P_{min}=4\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Câu 54: [TS10 Chuyên Quảng Nam, 2019-2020]

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn abc = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{\left(1+a\right)^2+b^2+5}{ab+a+4}+\frac{\left(1+b\right)^2+c^2+5}{bc+b+4}+\frac{\left(1+c\right)^2+a^2+5}{ca+c+4}$$

Lời giải

Với x, y dương ta có: $(x-y)^2 \ge 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 \ge 4xy \Leftrightarrow \frac{1}{x+y} \le \frac{x+y}{4xy} \Leftrightarrow \frac{1}{x+y} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ (*)

Dấu "=" xảy ra khi $x = y$.

Ta có:

$$\frac{(1+a)^2+b^2+5}{ab+a+4} = \frac{a^2+b^2+2a+6}{ab+a+4} \ge \frac{2ab+2a+6}{ab+a+4} = \frac{2(ab+a+4)-2}{ab+a+4} = 2 - \frac{2}{ab+a+4}$$

Tương tự: $\frac{(1+b)^2+c^2+5}{bc+b+4} \ge 2 - \frac{2}{bc+b+4}$; $\frac{(1+c)^2+a^2+5}{ca+c+4} \ge 2 - \frac{2}{ca+c+4}$

Do đó: $P \ge 6 - 2\left(\frac{1}{ab+a+4} + \frac{1}{bc+4+4} + \frac{1}{ca+c+4}\right) = 6 - 2Q$

Áp dụng (*) ta được: $\frac{1}{ab+a+4} = \frac{1}{(ab+a+1)+3} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{3}\right)$.

Tương tự: $\frac{1}{bc+b+4} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{3}\right)$; $\frac{1}{ca+c+4} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{ca+c+1}+\frac{1}{3}\right)$

Do đó:

$$Q \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}+1\right) \Rightarrow 2Q = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}+1\right)$$

$$\Rightarrow P \ge 6 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}+1\right)$$

$$= 6 - \frac{1}{2}\left(\frac{c}{abc+ac+c}+\frac{ac}{bc.ac+abc+1}+\frac{1}{ca+c+1}+1\right)$$

$$= 6 - \frac{1}{2}\left(\frac{c}{ca+c+1}+\frac{ac}{ca+c+1}+\frac{1}{ca+c+1}+1\right)$$

$$= 6 - \frac{1}{2}.2$$

$$= 5$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 5.

Câu 55: [TS10 Chuyên Lai Châu, 2019-2020]

Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng: $\frac{ab}{a+b+2c} + \frac{bc}{b+c+2a} + \frac{ca}{c+a+2b} \le \frac{1}{4}(a+b+c)$

Lời giải

Với x, y dương ta có: $(x-y)^2 \ge 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 \ge 4xy \Leftrightarrow \frac{1}{x+y} \le \frac{x+y}{4xy} \Leftrightarrow \frac{1}{x+y} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ (*)

Dấu "=" xảy ra khi $x = y$.

Sử dụng (*) ta được: $\frac{ab}{a+b+2c} \le \frac{ab}{(a+c)+(b+c)} \le \frac{ab}{4}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)$

Tương tự: $\frac{bc}{b+c+2a}\le\frac{bc}{4}\left(\frac{1}{b+a}+\frac{1}{a+c}\right)$; $\frac{ca}{c+a+2b}\le\frac{ca}{4}\left(\frac{1}{c+b}+\frac{1}{b+a}\right)$

Cộng 3 bất đẳng thức trên theo vế ta được:

$$\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{bc}{b+c+2a}+\frac{ca}{c+a+2b}$$
$$\le\frac{ab}{4}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)+\frac{bc}{4}\left(\frac{1}{b+a}+\frac{1}{a+c}\right)+\frac{ca}{4}\left(\frac{1}{c+b}+\frac{1}{b+a}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{ab+bc}{c+a}+\frac{ab+ca}{b+c}+\frac{bc+ca}{a+b}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left[\frac{b(a+c)}{a+c}+\frac{a(b+c)}{b+c}+\frac{c(a+b)}{a+b}\right]$$
$$=\frac{1}{4}(a+b+c)\quad(\text{dpcm})$$

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c

Câu 56: [TS10 Chuyên Vĩnh Phúc, 2019-2020]

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn: $abc\ge 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{b+\sqrt{ac}}}+\frac{b}{\sqrt{c+\sqrt{ab}}}+\frac{c}{\sqrt{a+\sqrt{bc}}}\ge\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Lời giải

Ta có:

$$b+\sqrt{ac}\le b+\frac{a+c}{2}=\frac{a+2b+c}{2}\Rightarrow\sqrt{b+\sqrt{ac}}\le\sqrt{\frac{a+2b+c}{2}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{b+\sqrt{ac}}}\ge\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a+2b+c}}\Rightarrow\frac{a}{\sqrt{b+\sqrt{ac}}}\ge\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a+2b+c}}=\frac{2\sqrt{2}a}{\sqrt{4(a+2b+c)}}\ge\frac{4\sqrt{2}a}{a+2b+c+4}$$

Mặt khác:

$$a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}\ge 3\Rightarrow\frac{4}{3}(a+b+c)\ge 4\Rightarrow\frac{4\sqrt{2}a}{a+2b+c+4}\ge\frac{12\sqrt{2}a}{7a+10b+7c}$$

Do đó:

$$VT\ge 12\sqrt{2}\left(\frac{a}{7a+10b+7c}+\frac{b}{7b+10c+7a}+\frac{c}{10a+7b+7c}\right)$$
$$\ge 12\sqrt{2}\,\frac{(a+b+c)^2}{7(a^2+b^2+c^2)+17(ab+bc+ca)}$$

Mặt khác:

$$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca\Rightarrow 7(a^2+b^2+c^2)+17(ab+bc+ca)\le 8(a+b+c)^2$$
$$\Rightarrow\frac{12\sqrt{2}(a+b+c)^2}{7(a^2+b^2+c^2)+17(ab+bc+ca)}\ge\frac{12\sqrt{2}(a+b+c)^2}{8(a+b+c)^2}=\frac{3}{\sqrt{2}}\quad(\text{dpcm})$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$.

Câu 57: [TS10 Chuyên Tuyên Quang, 2019-2020]

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=4$ .Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3\sqrt{b}}+\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{b}+3\sqrt{c}}+\frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{c}+3\sqrt{a}}$.

Lời giải

Ta có:

$$P=\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3\sqrt{b}}+\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{b}+3\sqrt{c}}+\frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{c}+3\sqrt{a}}$$
$$=\frac{a^2}{a+3\sqrt{ab}}+\frac{b^2}{b+3\sqrt{bc}}+\frac{c^2}{c+3\sqrt{ac}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta được:

$$P=\frac{a^2}{a+3\sqrt{ab}}+\frac{b^2}{b+3\sqrt{bc}}+\frac{c^2}{c+3\sqrt{ac}}$$
$$=\frac{\left(a+b+c\right)^2}{a+b+c+3\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)}$$

Mặt khác theo AM-GM: $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\le\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}=a+b+c$

Do đó: $P\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{a+b+c+3\left(a+b+c\right)}=\frac{a+b+c}{4}=1$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\frac{4}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1.

Câu 58: [TS10 Chuyên Hà Nam, 2019-2020]

Cho các số dương a, b, c. Chứng minh: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a+b+c}{\sqrt{3}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ge 4$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta được:

$$VT=\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{bc}+\frac{c^2}{ca}+\frac{a+b+c}{\sqrt{3}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{ab+bc+ca}+\frac{\sqrt{ab+bc+ca}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+2+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}$$
$$=\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2\left(ab+bc+ca\right)}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\right)+\frac{a^2+b^2+c^2}{2\left(ab+bc+ca\right)}+2$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số ta được:

$$VT \ge 3\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}}+\frac{1}{2}+2$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+2=4\ (dpcm)$$

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c.

Câu 59: [TS10 Chuyên Phú Yên, 2019-2020]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:

$a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{c^2+1}+c\sqrt{a^2+1}\ge 2$

Dấu "=" xảy ra khi nào?

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức Minicopski ta được:

$$a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{c^2+1}+c\sqrt{a^2+1}=\sqrt{(ab)^2+a^2}+\sqrt{(bc)^2+b^2}+\sqrt{(ca)^2+c^2}$$

$$\ge\sqrt{(ab+bc+ca)^2+(a+b+c)^2}\ge\sqrt{(ab+bc+ca)^2+3(ab+bc+ca)}$$

$$=\sqrt{1+3}=2\ (dpcm)$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Câu 60: [TS10 Chuyên Cao Bằng, 2019-2020]

Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện a+ b + c = 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $R=\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$\frac{a}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}\ge a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}$$

Tương tự: $\frac{b}{1+c^2}\ge b-\frac{bc}{2}$; $\frac{c}{1+a^2}=c-\frac{ca}{2}$

Cộng theo vế 3 bất đẳng trên ta được:

$$R=\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge(a+b+c)-\frac{ab+bc+ca}{2}$$

$$\ge(a+b+c)-\frac{(a+b+c)^2}{6}=3-\frac{3^2}{6}=\frac{3}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của R là $\frac{3}{2}$

Câu 61: [TS10 Chuyên Nam Định, 2019-2020]

Cho x, y, z là số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x+y+z=\frac{3}{2}$. Chứng minh rằng: $x+2xy+4xyz\le 2$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$x+2xy+4xyz=x+x.4y\left(z+\frac{1}{2}\right)$$

$$\le x+x.\left(y+z+\frac{1}{2}\right)^2=x+x\left(\frac{3}{2}-x+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=x+x(2-x)^2=x-2+x(2-x)^2+2$$

$$=(x-2)(1+x^2-2x)+2$$

$$=(x-2)(x-1)^2+2$$

Do $x+y+z=\frac{3}{2}\Rightarrow 0<x<2\Rightarrow x-2<0$. Vì thế: $x+2xy+4xyz\le (x-2)(x-1)^2+2\le 2$ (đpcm)

Dấu "=" xảy ra khi $x=1, y=\frac{1}{2}, z=0$

Câu 62: [TS10 Chuyên Bình Định, 2019-2020]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a)=8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}$

Lời giải.

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức phụ sau:

$$(a+b)(b+c)(c+a)\ge \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

Thật vậy: $(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$

Lại theo BĐT AM-GM ta có: $abc=\sqrt{ab}.\sqrt{bc}.\sqrt{ca}\le \frac{(a+b)}{2}.\frac{(b+c)}{2}.\frac{(c+a)}{2}=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}$

Suy ra: $(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$

$$\ge (a+b+c)(ab+bc+ca)-\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}$$

Suy ra đpcm: $(a+b)(b+c)(c+a)\ge \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$

$$\Rightarrow ab+bc+ca\le \frac{9}{a+b+c}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM dạng cộng mẫu số ta có:

$$\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}\ge \frac{9}{3(a+b+c)}=\frac{3}{a+b+c}\ge \frac{ab+bc+ca}{3}$$

Lại có: $(ab+bc+ca)^2\ge 3(ab^2c+a^2bc+abc^2)=3abc(a+b+c)$

$$\Rightarrow \frac{9^2}{(a+b+c)^2}\ge 3abc(a+b+c)\Leftrightarrow \frac{1}{abc}\ge \frac{(a+b+c)^2}{27}\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\ge \frac{a+b+c}{3}$$

Suy ra: $P=\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}\ge \frac{a+b+c}{3}+\frac{3}{a+b+c}\ge 2$

Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases}(a+b)(b+c)(c+a)=8\\ a=b=c\\ \frac{3}{a+b+c}=\frac{a+b+c}{3}\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2 khi a = b = c = 1.

Câu 63: [TS10 Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu, 2019-2020]

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+3c^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-ca+3a^2+1}}$$

Lời giải

Ta có:

$a^2-ab+3b^2+1=(a^2-2ab+b^2)+ab+(b^2+1)+b^2$

$=(a-b)^2+ab+(b^2+1)+b^2\ge b^2+ab+2b=b(a+b+2)$

$$\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}\ge\sqrt{b(a+b+1)}\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a^2-ab+3b^2+1}}\le \frac{1}{\sqrt{b(a+b+1)}}$$

Tương tự: $\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+3c^2+1}}\le \frac{1}{\sqrt{c(b+c+2)}}$; $\frac{1}{\sqrt{c^2-ac+3a^2+1}}\le \frac{1}{\sqrt{a(c+a+2)}}$

Với x, y dương ta có: $(x-y)^2\ge 0\Leftrightarrow (x+y)^2\ge 4xy\Leftrightarrow \frac{1}{x+y}\le \frac{x+y}{4xy}\Leftrightarrow \frac{1}{x+y}\le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ (*)

Dấu "=" xảy ra khi x = y.

Cộng theo vế và sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$P \le \frac{1}{\sqrt{b(a+b+2)}}+\frac{1}{\sqrt{c(b+c+2)}}+\frac{1}{\sqrt{a(c+a+2)}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{4b(a+b+2)}}+\frac{2}{\sqrt{4c(b+c+2)}}+\frac{2}{\sqrt{4a(c+a+2)}}$$

$$\overset{AM-GM}{\le}\left(\frac{1}{4b}+\frac{1}{a+b+2}\right)+\left(\frac{1}{4c}+\frac{1}{b+c+2}\right)+\left(\frac{1}{4a}+\frac{1}{c+a+2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{a+b+2}+\frac{1}{b+c+2}+\frac{1}{c+a+2}\right)$$

Sử dụng bất đẳng thức (*) ta được:

$$P \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{c+a}+\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$\le \frac{3}{4}+\left[\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)\right]$$

$$=\frac{3}{4}+\left[\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right]$$

$$\le \frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{3}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$.

Vậy giá trị nhỏ là P là $\frac{3}{2}$.

Câu 64: [TS10 Chuyên Tây Ninh, 2019-2020]

Chứng minh $(a+b+c)^3+9abc \ge 4(a+b+c)(ab+bc+ca)$ với x, y, z là các số thực không âm. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải

Theo bất đẳng thức Schur với a, b, c là số thực không âm thì:

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\ge 0$$

Biến đổi ta được hệ quả:

$$a^3+b^3+c^3+3abc \ge a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$$

Mặt khác ta có đẳng thức: $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$

Khi đó ta có: $(a+b+c)^3+9abc=a^3+b^3+c^3+9abc+3(a+b)(b+c)(c+a)$

Do đó: $VT \ge a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+9abc+3(a+b)(b+c)(c+a)$

Ta là có 2 đẳng thức:

+) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+9abc=(a+b+c)(ab+bc+ca)$

+) $abc+(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)$

Do đó: $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+9abc+3(a+b)(b+c)(c+a)\ge 4(a+b+c)(ab+bc+ca)$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c.

Câu 65: [TS10 Chuyên Quảng Nam, 2019-2020]

Cho 3 số dương x, y, z. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\sqrt{\frac{xy}{(2x+z)(2y+z)}}+\sqrt{\frac{yz}{(2y+x)(2z+x)}}+\sqrt{\frac{zx}{(2z+y)(2x+y)}}$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức Bunyakovski ta được:

$$(2x+z)(2y+z)=(x+x+z)(y+z+y)\ge\left(\sqrt{xy}+\sqrt{zx}+\sqrt{yz}\right)^2$$

Do đó:

$$\sqrt{\frac{xy}{(2x+z)(2y+z)}}=\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{(2x+z)(2y+z)}}\le\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)^2}}=\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}}$$

Tương tự: $\sqrt{\frac{yz}{(2y+x)(2z+x)}}\le\frac{\sqrt{yz}}{\sqrt{xy}+\sqrt{zx}+\sqrt{yz}}$; $\sqrt{\frac{zx}{(2z+y)(2x+y)}}\le\frac{\sqrt{zx}}{\sqrt{xy}+\sqrt{zx}+\sqrt{yz}}$

Cộng 3 bất đẳng thức trên theo vế ta được: $P\le\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{zx}+\sqrt{yz}}{\sqrt{xy}+\sqrt{zx}+\sqrt{yz}}=1$

Đẳng thức xảy ra khi x = y = z.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 1.

Câu 66: [TS10 Chuyên Bình Phước, 2019-2020]

1) Cho x, y là các số dương thỏa mãn $xy\le 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}\le\frac{2}{1+\sqrt{xy}}$$

2) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $(x+y)^3+4xy\le 12$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+2018xy$

Lời giải

1) Ta có:

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}\le\frac{2}{1+\sqrt{xy}}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+\sqrt{xy}}\right)+\left(\frac{1}{1+y}-\frac{1}{1+\sqrt{xy}}\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{1+\sqrt{xy}-1-x}{(1+x)\left(1+\sqrt{xy}\right)}+\frac{1+\sqrt{xy}-1-y}{(1+y)\left(1+\sqrt{xy}\right)}\le 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{xy}-x\right)(1+y)+\left(\sqrt{xy}-y\right)(1+x)}{(1+x)(1+y)\left(1+\sqrt{xy}\right)}\le 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)(1+y)+\sqrt{y}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)(1+x)}{(1+x)(1+y)\left(1+\sqrt{xy}\right)}\le 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)\left[\sqrt{x}+y\sqrt{x}-\sqrt{y}-x\sqrt{y}\right]}{(1+x)(1+y)\left(1+\sqrt{xy}\right)}\le 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)\left[\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)+\sqrt{xy}\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)\right]}{(1+x)(1+y)\left(1+\sqrt{xy}\right)}\le 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)\left[\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{xy}-1\right)\right]}{(1+x)(1+y)\left(1+\sqrt{xy}\right)}\le 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)^2\left(\sqrt{xy}-1\right)}{(1+x)(1+y)\left(1+\sqrt{xy}\right)}\le 0\ (\text{đúng }\forall xy\le 1\ )\qquad(1)$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=1$.

Bất đẳng thưc (1) đúng các phép biến đổi là tương đương nên bài toán được chứng minh.

2) Sử dụng AM-GM ta có:

$$12\ge(x+y)^3+4xy\ge\left(2\sqrt{xy}\right)^3+4xy=8xy\sqrt{xy}+4xy$$

Đặt $\sqrt{xy}=t\ (t>0)$, khi đó:

$$8t^3+4t^2-12\le 0\Leftrightarrow 2t^3+t^2-3\le 0\Leftrightarrow 2t^3-2t^2+3t^2-3\le 0$$

$$\Leftrightarrow 2t^2(t-1)+3(t-1)(t+1)\le 0\Leftrightarrow(t-1)\left(2t^2+3t+3\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow t\le 1$$

Áp dụng bất đẳng thức ở ý 1 ta có:

$$P=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+2018xy\le\frac{2}{1+\sqrt{xy}}+2018xy=\frac{2}{1+t}+2018t^2$$

Ta sẽ chứng minh: $\dfrac{2}{1+t}+2018t^2\le 2019\ (*)$

Thật vậy:

$$(*) \Leftrightarrow \left(\frac{2}{1+t}-1\right)+2018\left(t^2-1\right) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-t}{1+t}+2018(t-1)(t+1) \le 0$$

$$\Leftrightarrow (1-t)\left(\frac{1}{1+t}+2018(t+1)\right) \le 0 \text{ (đúng do } 0<t\le 1\text{)}$$

Dấu "=" xảy ra khi x = y = 1.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 2019.

Câu 67: [TS10 Chuyên Đắc Lắc, 2019-2020]

Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3+b^3}{a+2b}+\frac{b^3+c^3}{b+2c}+\frac{c^3+a^3}{c+2a} \ge 2$$

Lời giải.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta được:

+) $\displaystyle \frac{a^3}{a+2b}+\frac{b^3}{b+2c}+\frac{c^3}{c+2a}=\frac{a^4}{a^2+2ab}+\frac{b^4}{b^2+2bc}+\frac{c^4}{c^2+2ca}$

$$\ge \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca} \ge \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2+b^2+c^2+2\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}=\frac{3}{2}$$

+) $\displaystyle \frac{b^3}{a+2b}+\frac{c^3}{b+2c}+\frac{a^3}{c+2a}=\frac{b^4}{ab+2b^2}+\frac{c^4}{bc+2c^2}+\frac{a^4}{ca+2a^2}$

$$\ge \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{ab+bc+ca+2\left(a^2+b^2+c^2\right)} \ge \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2+b^2+c^2+2\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}=\frac{3}{2}$$

Cộng theo vế ta được: $\displaystyle \frac{a^3+b^3}{a+2b}+\frac{b^3+c^3}{b+2c}+\frac{c^3+a^3}{c+2a} \ge 2$ (đpcm)

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\sqrt{\frac{2}{3}}$

Câu 68: [TS10 Chuyên Quảng Nam, 2019-2020]

Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x \ge 3; y \ge 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T=21\left(x+\frac{1}{y}\right)+3\left(y+\frac{1}{x}\right)$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$T=21\left(x+\frac{1}{y}\right)+3\left(y+\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{x}{3}+\frac{3}{x}\right)+\left(\frac{7y}{3}+\frac{21}{y}\right)+\frac{62}{3}x+\frac{2}{3}y$$
$$\ge 2\sqrt{\frac{x}{3}.\frac{3}{x}}+2\sqrt{\frac{7y}{3}.\frac{21}{y}}+\frac{62}{3}.3+\frac{2}{3}.3$$
$$=2+2.7+62+2$$
$$=80$$

Dấu "=" xảy ra khi x = y = 3.

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 80.

HỆ THỐNG BÀI TẬP SỬ DỤNG TRONG CHỦ ĐỀ

I. BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI

Bài 1. Cho $x\ne 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=8x^2-4x+\frac{1}{4x^2}+15$.

Bài 2. Cho $x>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=4x^2-3x+\frac{1}{4x}+2011$.

Bài 3. Cho $x>y>0$ và $xy=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $H=\frac{x^2+y^2}{x-y}$.

Bài 4. Cho $a\ge 1;\ b\ge 1$. Chứng minh $a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1}\le ab$.

Bài 5. Cho $a\ge 9;\ b\ge 4;\ c\ge 1$. Chứng minh $ab\sqrt{c-1}+bc\sqrt{a-9}+ca\sqrt{b-4}\le \frac{11abc}{12}$.

Bài 6. Cho $a\ge 0;\ b\ge 0;\ a^2+b^2\le 2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=a\sqrt{b(a+2b)}+b\sqrt{a(b+2a)}$.

Bài 7. Cho $x\ge 0;\ y\ge 0;\ x^2+y^2\le 2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{x(14x+10y)}+\sqrt{y(14y+10x)}$.

Bài 8. Cho $x>0;\ y>0$ và $\sqrt{xy}(x-y)=x+y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y$.

Bài 9. Cho $a,b,c>0$ và $ab+bc+ca=1$.

Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+1}}$.

Bài 10. Cho các số dương $a,\ b,\ c$ thỏa mãn $a+b+c=1$

chứng minh $\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{b+ca}}\le\frac{3}{2}$

Bài 11. Cho $a>0,\ b>0,\ c>0$ và $ab+bc+ca=3abc$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{a^2}{c\left(c^2+a^2\right)}+\frac{b^2}{a\left(a^2+b^2\right)}+\frac{c^2}{b\left(b^2+c^2\right)}$

Bài 12. Cho $a>0,\ b>0,\ c>0$ và $a+b+c=1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\frac{a}{1+9b^2}+\frac{b}{1+9c^2}+\frac{c}{1+9a^2}$

Bài 13. Cho $a,b,c>0$ và $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2$. Chứng minh rằng $abc\le\frac{1}{8}$.

Bài 14. Cho $a>0,\ b>0,\ c>0$ và $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh :

a) $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\ge a+b+c$ b) $\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\ge\sqrt{3}$

Bài 15. Cho $a,\ b,\ c$ là độ dài ba cạnh của ΔABC.

Chứng minh $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le abc$

Bài 16. Cho $a\ge 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2a+\frac{5}{a}$.

Bài 17. Cho $x>0,\ y>0$ và $x+y\le 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=x+y+\frac{6}{x}+\frac{24}{y}$.

Bài 18. Cho $x>0,\ y>0$ và $x+y\ge 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2x^2+y^2+\frac{28}{x}+\frac{1}{y}$.

Bài 19. Cho $2\le x\le 3,\ 4\le y\le 6,\ 4\le z\le 6$ và $x+y+z=12$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=xyz$.

Bài 20. Cho $x>0,\ y>0$ và $\frac{x}{2}+\frac{8}{y}\le 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $K=\frac{x}{y}+\frac{2y}{x}$.

Bài 21. Cho $x>0,\ y>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\frac{(x+y+1)^2}{xy+x+y}+\frac{xy+x+y}{(x+y+1)^2}$.

Bài 22. Cho $x>0,\ y>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}$.

Bài 23. Cho $a>0,\ b>0,\ c>0$ thỏa mãn $b^2+c^2\le a^2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{a^2}\left(b^2+c^2\right)+a^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$.

Bài 24. Cho $x>0,\ y>0$ và $x+y\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\sqrt{1+x^2y^2}$.

Bài 25. Cho $x>0,\ y>0$ và $x+y\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{xy}+4xy$.

Bài 26. Cho $x>0,\ y>0$ và $x+y\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $K=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2$.

Bài 27. Cho $x>0,\ y>0$ và $x+y\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\left(1+x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(1+y+\frac{1}{y}\right)^3$.

Bài 28. Cho $x>0,\ y>0$ và $2x^2+2xy+y^2-2x\le 8$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{2}{x}+\frac{4}{y}-2x-3y$.

Bài 29. Cho $a>0,\ b>0,\ c>0$ thỏa mãn $2\left(b^2+bc+c^2\right)=3\left(3-a^2\right)$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=a+b+c+\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}$.

Bài 30. Cho $a>0,\ b>0$ và $a^3+b^3+6ab\le 8$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{3}{ab}+ab$.

Bài 31. Cho $a>0,\ b>0$ và $a^2+b^2=a+b$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^4+b^4+\dfrac{2020}{(a+b)^2}$.

Bài 32. Cho $x>0,\ y>0$ và $\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{y}+1\right)\ge 4$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}$.

II. BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIA

Bài 1. Cho $4x+9y=13$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=4x^2+9y^2$.

Bài 2. Cho $4x+3y=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=4x^2+3y^2$.

Bài 3. Cho $x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$ và $x+y+z=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=x^2+y^2+z^2$.

Bài 4. Cho $3x^2+2y^2\le\dfrac{6}{35}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S=2x+3y$.

Bài 5. Cho $4a^2+25b^2\le\dfrac{1}{10}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $H=6a-5b$.

Bài 6. Cho $x^2+y^2+z^2=\dfrac{3}{4}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x+y+z$.

Bài 7. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$ khi $1\le x\le 3$.

Bài 8. Cho $a\ge 0,\ b\ge 0,\ c\ge 0$ và $a+b+c=3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $K=\sqrt{4a+5}+\sqrt{4b+5}+\sqrt{4c+5}$.

Bài 9. Cho $a\ge 0,\ b\ge 0,\ c\ge 0$ và $a+b+c=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}+\sqrt{a+b}$.

Bài 10. Cho $a,b,c\ge 0$ và $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}+\sqrt{\dfrac{b+c}{2}}+\sqrt{\dfrac{c+a}{2}}$.

III. PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

Bài 1. Cho $x\ge -2$, $y\ge 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=x+y-2\sqrt{x+2}-4\sqrt{y-1}+24$.

Bài 2. Cho $x\ge -\dfrac{1}{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $E=5x-6\sqrt{2x+7}-4\sqrt{3x-1}+2$

Bài 3. Cho $x\ge 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T=x-\sqrt{x-1}-3\sqrt{x+7}+28$.

Bài 4. Cho $x\ge\sqrt{15}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$F=x^2+x-\sqrt{\left(x^2-15\right)(x-3)}-\sqrt{x^2-15}-\sqrt{x-3}-38$.

Bài 5. Cho $a>0,b>0,c>0$ và $a+b+c=6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$T=\sqrt{a^2+4ab+b^2}+\sqrt{b^2+4bc+c^2}+\sqrt{c^2+4ca+a^2}.$$

Bài 6. Cho $x>0,y>0,z>0,x+y+z=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S=\sqrt{x^2-xy+y^2}+\sqrt{y^2-yz+z^2}+\sqrt{z^2-zx+x^2}.$$

Bài 7. Cho $-2\le a,b,c\le 3$ và $a^2+b^2+c^2=22$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M=a+b+c$.

Bài 8. Cho $x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0$ thỏa mãn $x+y+z=6$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $A=x^2+y^2+z^2$.

Bài 9. Cho $a, b, c \geq 0$ và $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:
$K = \sqrt{3a+1} + \sqrt{3b+1} + \sqrt{3c+1}$.

Bài 10. Cho $0 \leq a, b, c \leq 2$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh: $ab + bc + ca \geq 2$.

Bài 11. Cho $a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1$ và $ab + bc + ca = 9$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:
$P = a^2 + b^2 + c^2$.

Bài 12. Cho $-1 \leq x, y, z \leq 1$, $x + y + z = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $T = |x| + |y| + |z|$.

Bài 13. Cho $-2 \leq a, b, c \leq 2$ và $a + b + c = 0$. Chứng minh: $a^4 + b^4 + c^4 \leq 32$.

Bài 14. Cho $0 \leq x, y, z \leq 1$ và $x + y + z = \frac{3}{2}$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P = x^2 + y^2 + z^2$.

Bài 15. Cho $0 \leq x, y, z \leq 2$ và $x + y + z = 3$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $M = x^4 + y^4 + z^4 + 12(1-x)(1-y)(1-z)$.

Bài 16. Cho $0 \leq a, b, c \leq 4$ và $a + b + c = 6$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca$.

Bài 17. Cho $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ và $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:
$P = \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} + \sqrt{a+b}$.

Bài 18. Cho $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ và $a + b + c = 3$.Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:
$P = \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} + \sqrt{a+b}$.

Bài 19. Cho $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ và $a + b + c = 1$.Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:
$F = \sqrt{3a+1} + \sqrt{3b+1} + \sqrt{3c+1}$.

Bài 20. Cho $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ và $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
$\sqrt{2a^2 + 3a + 4} + \sqrt{2b^2 + 3b + 4} + \sqrt{2c^2 + 3c + 4}$.

Bài 21. Cho $x, y \geq 0$ thỏa mãn: $x + y = \sqrt{10}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = (x^4 + 1)(y^4 + 1)$.

Bài 22. Cho $a + b + 4ab = 4a^2 + 4b^2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = 20(a^3 + b^3) - 6(a^2 + b^2) + 2013$.

--------Hết------