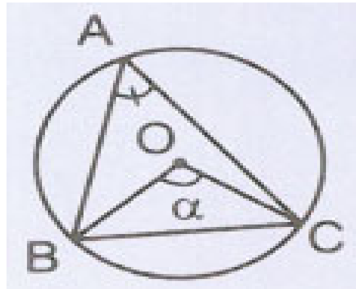
GÓC NỘI TIẾP

A.KIẾN THỨC TRỌNG TÂM



*Góc $\widehat{BAC}$ có đỉnh A nằm trên đường tròn và hai cạnh AB, AC là hai dây cung được gọi là **góc nội tiếp***

Cung BC nằm bên trong được gọi là cung bị chắn.

$sd\,\widehat{BAC}=\frac{1}{2}sd\,\overset{\frown}{BC}$ *(số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn).*

***Tính chất:** Trong một đường tròn:*

** Các góc nội tiếp bằng nhau thì chắn các cung bằng nhau.*

** Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.*

** Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90°) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.*

** Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.*

B.CÁC DẠNG BÀI MINH HỌA

Dạng 1: Chứng minh hai góc bằng nhau. Tính số đo góc.

Bài 1: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và dây AC. N là điểm chính giữa cung CB. Chứng minh rằng $\widehat{CAN}=\widehat{NAB}$

Bài 2: Cho đường tròn (O) đường kính AB và một cung AM có số đo nhỏ hơn 90°. Vẽ các dây $MC\perp AB, MD//AB$. Chứng minh rằng $\widehat{DMB}=\widehat{ADC}$

Bài 3: Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O) có đường cao AH. Chứng minh rằng $\widehat{BAH}=\widehat{OAC}$.

Bài 4: Cho lục giác $ABCDEF$ có các đỉnh thuộc đường tròn (O). Biết $AB//DE, BC/EF$.chứng minh rằng $\widehat{ADC}=\widehat{DAF}$.

Bài 5: Cho tam giác $ABC(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O), đường trung tuyến *AM*. Lấy điểm D trên cung *BC* không chứa *A* sao cho $\widehat{BAD}=\widehat{CAM}$. Chứng minh rằng $\widehat{ADB}=\widehat{CDM}$.

Bài 6: Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O) đường kính BD. Biết $\widehat{BAC}=45^\circ$. Tính số đo của góc $\widehat{CBD}$

Bài 7: Cho $\triangle ABC$ nhọn có $\widehat{BAC}=60^\circ$. Vẽ đườn tròn đường kính BC tâm O cắt AB, AC lần lượt tại D và E. tính số đo góc $\widehat{ODE}$

Bài 8: Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O). Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa A vẽ tia Bx sao cho $\widehat{xBA} = \widehat{A}$.

Tính sô đo góc $\widehat{OBx}$

Bài 9: Tính góc Acủa tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), biết $\widehat{IOK} = 90°$, trong dó I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc A.

Dạng 2: Tính độ dài, tính diện tích.

Bài 1: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Gọi Clà trung điểm của OB. Gọi D, E là các điểm thuộc nửa đường tròn sao cho $\widehat{ACD} = \widehat{BCE} < 90°$. Biết $CD - CE = a$. Tính DE theo a.

Bài 2: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có bán kính $1dm$, $\widehat{B} = 45^\circ, \widehat{C} = 15^\circ$. Tính dộ dài AC, BC, AB và diện tích tam giác ABC.

Bài 3: Cho đường tròn (O; R), hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Gọi K là trung điểm của OC. Gọi M là giao điểm thứ hai của BK với đường tròn (O), I là giao điểm của MD và AB. Tính diện tích :

a)Tam giác MAB;

b)Tam giác MIK.

Dạng 3: Bài toán dựa hệ quả của góc nội tiếp chứng minh ba điểm thẳng hàng.

Bài 1: Cho đường tròn (O)đường kính AB và một cung AM có số đo nhỏ hơn 90°. Vẽ các dây $MC \perp AB, MD // AB$. Chứng minh rằng ba điểm C, O, D thẳng hàng.

Bài 2: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Vẽ đường tròn (K)tiếp xúc với đường tròn (O)tại C. Các dây CA, CB cắt đường tròn (K) lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng E, K, F thẳng hàng.

Bài 3: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Điểm M chuyển động trên (O), $M \neq A, M \neq B$. Kẻ $MH \perp AB$. Kẻ đường tròn (O_1) đường kính MH cắt đường thẳng MA và MB tại C và D. Chứng minh rằng C, D, O thẳng hàng.

Bài 4: Cho $\triangle ABC$ nhọn có $\widehat{BAC} = 45^\circ$ nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BH, CK cắt đường tròn (O) lần lượt tại D và E. Chứng minh rằng D, O, E thẳng hàng .

Dạng 4: Bài toán dựa vào định lí, tính chất góc nội tiếp chứng minh hai đường thẳng vuông góc.

Bài 1: Cho tam giác nhọn $ABC(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC, K là giao điểm thứ hai củaAH với đường tròn (O). Đường thẳng đi qua H và vuông góc với OA cắt BC ởI. Chứng minh rằng IK là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài 2: Cho tam giác nhọn $ABC(AB < AC)$, trực tâm H. Gọi I là trung điểm của AH, M là trung điểm của BC. Tia phân giác của góc BAC cắt IM ở K. Chứng minh rằng $\widehat{AKH} = 90°$.

Bài 3: Cho tam giác ABCnội tiếp đường tròn (O). Tia phân giác góc Acắt BCởD và cắt đường tròn (O) ở M (khác A). Kẻ tiếp tuyến AK với đường tròn$(M; MB)$,K là tiếp điểm. Chứng minh rằng DK vuông góc với AM.

Bài 4: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A và B, O nằm trên đường tròn (O'). Dây AC của (O) cắt (O') ở D, dây OE của (O') cắt (O) ở F như trên hình. Chứng minh rằng: $OD \perp BC$

Bài 5: Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O). Tia phân giác góc $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn (O) tại D. đường tròn (D, DB) cắt đường thẳng AB tại Q (khác B), cắt đường thẳng AC tại P (khác C). Chứng minh rằng $AO \perp PQ$

Bài 6: Trong đường tròn (O) có dây AC và BD vuông góc với nhau tại E. Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh rằng $IM \perp AD$.

Bài 7: Cho đường tròn (O), đường kính AB. S là một điểm nằm bên ngoiaf đường tròn. SA và SB lần lượt cắt đường tròn tại M, N. Gọi H giao điểm của BM và AN. Chứng minh rằng $SH \perp AB$.

Dạng 5:Nâng cao phát triển tư duy

Bài 1. Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là trực tâm tam giác ABC, K là giao điểm thứ hai của AH với đường tròn (O). Đường thẳng đi qua H và vuông góc với OA cắt BC ở I. Chứng minh rằng IK là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài 2. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại P và Q. Tiếp tuyến chung gần P hơn của hai đường tròn tiếp xúc với (O) tại A, tiếp xúc với (O') tại B. tiếp tuyến của đường tròn (O) tại P cắt (O') tại điểm thứ hai D khác P, đường thẳng AP cắt đường thẳng BD tại R. Chứng minh rằng:

a) $\widehat{QAR} = \widehat{QBR}$;

b) Tam giác BPR cân;

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR tiếp xúc với PB và RB.

Bài 3. Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O), vẽ hai tiếp tuyến MA, MB và một cát tuyến MCD. Gọi I là giao điểm của AB và CD. Chứng minh rằng: $\frac{IC}{ID} = \frac{MC}{MD}$.

Bài 4. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O), BE và CF là các đường cao. Các tiếp tuyến của đường tròn tại B và C cắt nhau tại S, các đường thẳng BC và OS cắt nhau tại M.

a) Chứng minh rằng: $\frac{AB}{AE} = \frac{BS}{ME}$.

b) Chứng minh rằng: $\Delta AEM \backsim \Delta ABS$.

c) Gọi N là giao điểm của AM và EF, P là giao điểm của AS và BC. Chứng minh rằng NP vuông góc với BC.

Bài 5. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH và đường tròn (O) ngoại tiếp ΔHAC. Gọi D là điểm đối xứng của B qua H, nối A với D cắt đường tròn (O) tại E. Chứng minh:

a) CH là tia phân giác của góc ACE.

b) $HO // EC$.

Bài 6. Cho hình vuông ABCD; M là điểm tùy ý thuộc cạnh CD. Hai đường tròn đường kính CD và AM cắt nhau tại N (khác D). Gọi K là giao điểm của DN và BC. Chứng minh AC vuông góc KM.

Bài 7. Gọi CA, CB lần lượt là các tiếp tuyến của đường tròn (O; R) với A, B là các tiếp điểm. Vẽ đường tròn tâm I qua C và tiếp xúc với AB tại B. Đường tròn (I) cắt đường tròn (O) tại M. Chứng minh rằng đường thẳng AM đi qua trung điểm của BC.

Bài 8. Cho (O; R) và một tiếp tuyến xy tại A của (O; R). Trên tiếp tuyến lấy điểm C (Khác A). Gọi B là trung điểm của AC. Qua C vẽ đường thẳng cắt (O) tại E, M (theo thứ tự C, E, M). Tia BE cắt (O) tại F và tia CF cắt (O) tại N. Chứng minh: $MN//AC$.

Bài 9. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Dựng CD là tiếp tuyến chung của (O) và (O') sao cho C thuộc (O), D thuộc (O') và B nằm trong tam giác CDA. Đường thẳng CB cắt (O') tại M. Chứng minh tia AD là phân giác của góc CAM.

Bài 10. Cho hình bình hành ABCD, góc A < 90^o. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD cắt AC ở E. Chứng minh rằng BD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEB.

Bài 11. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại điểm P. Trên cung nhỏ BC, lấy điểm K (K khác B và C). Đường thẳng PK cắt đường tròn (O) lần thứ hai tại Q. Phân giác góc $\widehat{KBQ}$ cắt KQ tại I.

a) Chứng minh rằng CI là tia phân giác $\widehat{KCQ}$;

b) Giả sử đường thẳng AK đi qua trung điểm M của cạnh BC. Chứng minh rằng $AQ//BC$.

Bài 12. Chứng minh rằng từ 2015 điểm phân biệt cùng nằm trên một đường tròn luôn chọn được ít nhất 1008 điểm mà 3 điểm bất kỳ trong đó là các đỉnh của một tam giác tù.

Bài 13. Cho hình vuông ABCD với tâm O. Gọi M là trung điểm AB. Các điểm N, P thuộc BC, CD sao cho $MN//AP$. Chứng minh rằng:

1. Tam giác BNO đồng dạng với tam giác DOP và $\widehat{NOP}=45^o$.
2. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác NOP thuộc OC.
3. Ba đường thẳng BD, AN, PM đồng quy.

Bài 14. Cho đoạn thẳng AC có độ dài bằng a. Trên đoạn AC lấy điểm B sao cho AC = 4AB. Tia Cx vuông góc với AC tại điểm C, gọi D là một điểm bất kỳ thuộc tia Cx (D không trùng với C). Từ điểm B kẻ đường thẳng vuông góc với AD cắt hai đường thẳng AD và CD lần lượt tại K, E.

a) Tính giá trị DC, CE theo a.

b) Xác định vị trí điểm D để tam giác BDE có diện tích nhỏ nhất.

c) Chứng minh rằng khi điểm D thay đổi trên tia Cx thì đường tròn đường kính DE luôn có một dây cung cố định.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Dạng 1: Chứng minh hai góc bằng nhau. Tính số đo góc.

Bài 1: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và dây AC. N là điểm chính giữa cung CB. Chứng minh rằng $\widehat{CAN}=\widehat{NAB}$

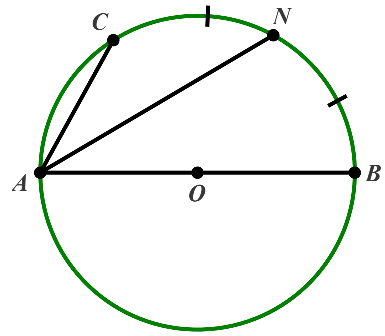
Lời giải: (h 1.1).

Ta có $\widehat{CAN}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{CN}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{NAB}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{NB}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Lại có $\overset{\frown}{CN}=\overset{\frown}{NB}$.

$\Rightarrow \widehat{CAN}=\widehat{NAB}$.



hình 1.1

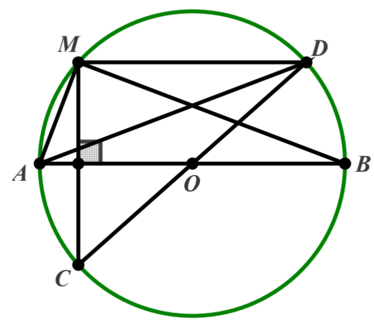
Bài 2: Cho đường tròn (O) đường kính AB và một cung AM có số đo nhỏ hơn 90°. Vẽ các dây $MC\perp AB, MD//AB$. Chứng minh rằng $\widehat{DMB}=\widehat{ADC}$.

Lời giải: (h 1.2)

Ta có $AB\perp MC\Rightarrow \overset{\frown}{MA}=\overset{\frown}{AC}$ (đường kính vuông góc với một dây).

Ta lại có: $MD//AB\Rightarrow \overset{\frown}{MA}=\overset{\frown}{DB}$ (hai cung chắn giữa hai dây song song).

$\Rightarrow \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{DB}=\overset{\frown}{MA}\Rightarrow \widehat{ADC}=\widehat{DMB}$ (góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau).



hình 1.2

Bài 3: Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O) có đường cao AH. Chứng minh rằng $\widehat{BAH}=\widehat{OAC}$.

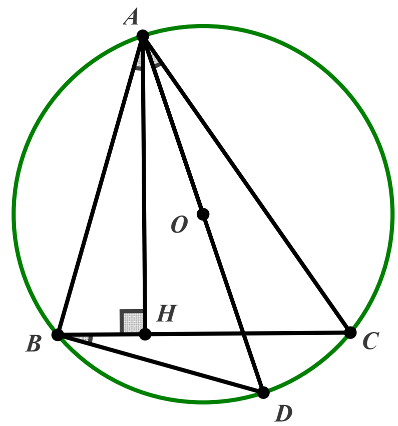
Lời giải: (h 1.3)

Dựng đường kính AD

Ta có $\widehat{CAD}=\widehat{CBD}\left(=\frac{1}{2}\overset{\frown}{DC}\right)$. (góc nội tiếp cùng chắn một cung).

Lại có $\widehat{BAH}=\widehat{DBC}$ (hai góc có các cạnh tương ứng vuông góc).

$\Rightarrow \widehat{BAH}=\widehat{DAC}\Leftrightarrow \widehat{BAH}=\widehat{OAC}$.



hình 1.3

Bài 4: Cho lục giác $ABCDEF$ có các đỉnh thuộc đường tròn (O). Biết $AB//DE, BC/EF$. chứng minh rằng $\widehat{ADC}=\widehat{DAF}$.

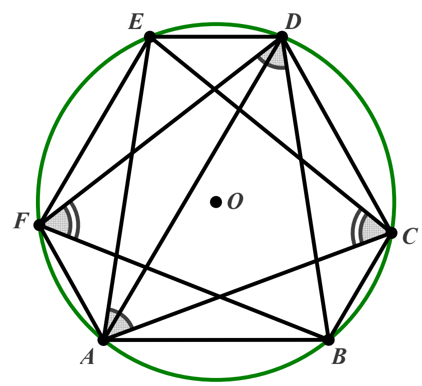
Lời giải: (h 1.4)

Do $BC//EF \Rightarrow \widehat{EDC}=\widehat{FAB}\Rightarrow \widehat{EAC}=\widehat{BDF}$

$AB//ED \Rightarrow \widehat{AEF}=\widehat{BCD}\Rightarrow \widehat{BFD}=\widehat{ACE}$

Do đó $\triangle BFD = \triangle ECA\,(g.g)$

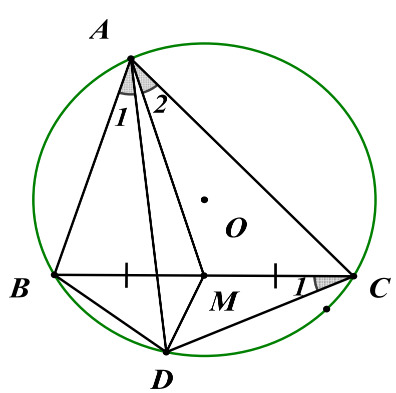
Suy ra $\widehat{DBF}=\widehat{AEC}\Rightarrow \widehat{DEF}=\widehat{ABC}\Rightarrow \widehat{ABC}=\widehat{DAF}$



hình 1.4

Bài 5: Cho tam giác $ABC\,(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O), đường trung tuyến AM. Lấy điểm D trên cung BC không chứa A sao cho $\widehat{BAD}=\widehat{CAM}$. Chứng minh rằng $\widehat{ADB}=\widehat{CDM}$.

Lời giải



$\widehat{A_1}=\widehat{A_2}\Rightarrow \widehat{BAM}=\widehat{DAC}$, lại có $\widehat{ABM}=\widehat{ADC}$ (góc nội tiếp) nên $\Delta ABM \sim \Delta ADC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BA}{AD} = \dfrac{BM}{DC} = \dfrac{MC}{CD}$.

Kết hợp với $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ suy ra $\Delta BAD \sim \Delta MCD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{CDM}$.

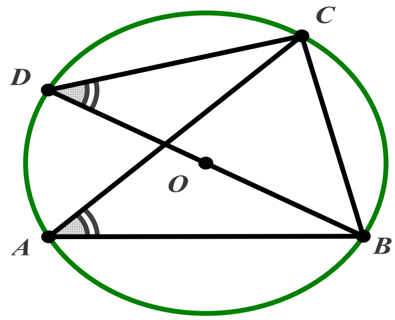
Bài 6: Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O) đường kính BD. Biết $\widehat{BAC} = 45^\circ$. Tính số đo của góc $\widehat{CBD}$

Lời giải: (h 1.5)

Ta có: $\widehat{CDB} = \widehat{CAB}\left(=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{CB}\right) \Rightarrow \widehat{CDB} = 45^\circ$

Lại có $\widehat{DCB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow \widehat{CBD} = 180^\circ - \widehat{CDB} - \widehat{DCB} = 45^\circ$



hình 1.5

Bài 7: Cho $\triangle ABC$ nhọn có $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Vẽ đường tròn đường kính BC tâm O cắt AB, AC lần lượt tại D và E. tính số đo góc $\widehat{ODE}$

Lời giải: (h1.6)

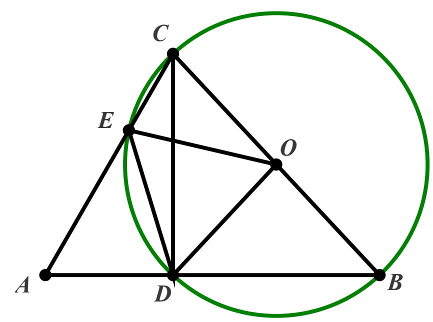
Ta có $\widehat{BDC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow \widehat{ADC} = 90^\circ \Rightarrow \triangle ADC$ vuông tại D suy ra

$\widehat{ACD} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{EOD} = 60^\circ$ (do $\widehat{EOD} = 2\widehat{ECD}\left(=\overset{\frown}{ED}\right)$

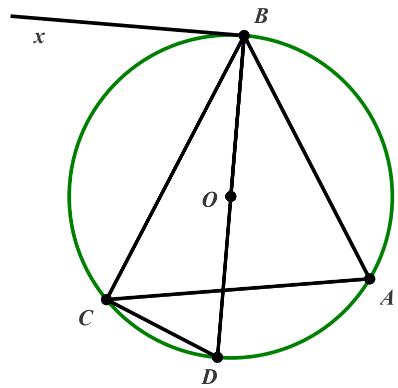
Mà ta lại có $\triangle EOD$ cân tại O

Suy ra $\triangle EOD$ đều $\Rightarrow \widehat{EDO} = 60^\circ$



hình 1.6

Bài 8: Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp (O). Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa A vẽ tia Bx sao cho $\widehat{xBC}=\widehat{A}$. Tính số đo góc $\widehat{OBx}$



hình 1.7

Lời giải: (h 1.7)

Dựng đường kính BD khi đó $\widehat{DCB}=90^{\circ}$

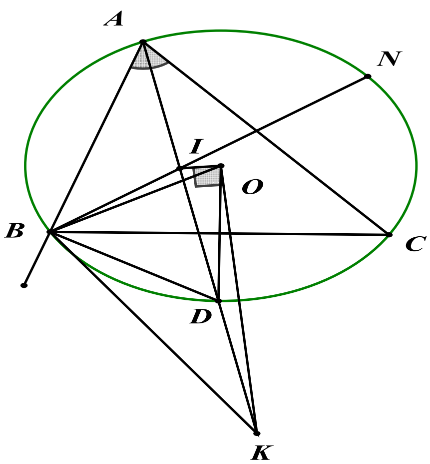
$\Rightarrow \widehat{DBC}+\widehat{CDB}=90^{\circ}$

Mà $\widehat{BDC}=\widehat{CAB}\left(=\frac{1}{2}\overset{\frown}{CB}\right)$

Lại có $\widehat{BAC}=\widehat{CBx}\Rightarrow \widehat{DBC}+\widehat{CBx}=90^{\circ}\Rightarrow \widehat{DBx}=90^{\circ}$

Bài 9:Tính góc Acủa tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), biết $\widehat{IOK}=90^{\circ}$, trong đó I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc A.

Lời giải



Gọi D là giao điểm của đoạn IK và đường tròn (O).

$\widehat{DBI}=\frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{DN}$; $\widehat{BID}=\frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{BD}+\frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AN}\Rightarrow \widehat{DBI}=\widehat{BID}\Rightarrow \Delta BDI$ cân tại D$\Rightarrow DB=DI$

ΔIBK vuông tại B có $DB=DI$ nên $DI=DK$ và $DB=\frac{1}{2}IK$. (1)

ΔIOK vuông tại O có $DI=DK$ nên $OD=\frac{1}{2}IK$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BD=OD=OB$.

ΔBOD đều $\Rightarrow \widehat{BOD}=60^{\circ}\Rightarrow \widehat{BAC}=60^{\circ}$.

Dạng 2: Tính độ dài, tính diện tích.

Bài 1: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Gọi Clà trung điểm của OB. Gọi D, E là các điểm thuộc nửa đường tròn sao cho $\widehat{ACD}=\widehat{BCE}<90^{\circ}$. Biết $CD-CE=a$. Tính DE theo a.

Lời giải

Trên CDlấy Ksao cho $CK = CE$ thì $DK = CD - CK = CD - CE = a$.

Kéo dài DCcắt đường tròn (O) ở I.

Ta có $\widehat{C_2} = \widehat{C_1} = \widehat{C_3} \Rightarrow E$ đối xứng với Iqua AB $\widehat{EOB} = \frac{1}{2}$sđ $\widehat{EI} = \widehat{D}$. (1)

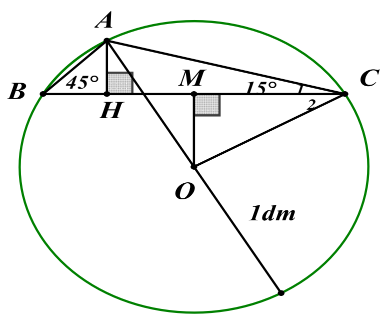
ΔECK cân $\Rightarrow \widehat{K_1} = \frac{180^\circ - \widehat{C_4}}{2} = \widehat{C_2} \Rightarrow \widehat{DKE} = \widehat{OCE}$ (bù với hai góc trên). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta DKE \sim \Delta OCE$ (g.g)

$\frac{DE}{DK} = \frac{OE}{OC} = \frac{OB}{OC} = 2$**. Vậy** $DE = 2DK = 2a$**.**

Bài 2: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có bán kính $1dm$, $\widehat{B} = 45^\circ, \widehat{C} = 15^\circ$. Tính độ dài AC, BC, AB và diện tích tam giác ABC .

Lời giải



• $\widehat{B} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{AOC} = 90^\circ \Rightarrow AC = OC\sqrt{2} = \sqrt{2}\left(dm\right)$.

• Kẻ $OM \perp BC$.

Ta có $\widehat{C_2} = \widehat{C} - \widehat{C_1} = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$

$\Rightarrow MC = OC.\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC = \sqrt{3}\left(dm\right)$.

• Kẻ $AH \perp BC$. Đặt $HC = x, HB = y$ thì $x + y = \sqrt{3}$ (1)

Ta có $HC^2 + HB^2 = HC^2 + HA^2 = AC^2 = 2$ nên $x^2 + y^2 = 2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2xy = \left(x + y\right)^2 - \left(x^2 + y^2\right) = 3 - 2 = 1$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $\left(x - y\right)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = 2 - 1 = 1 \Rightarrow x - y = 1$ (4)

Từ (1) và (4) suy ra $y = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}\left(dm\right)$. Do đó $AB = y\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\left(dm\right)$.

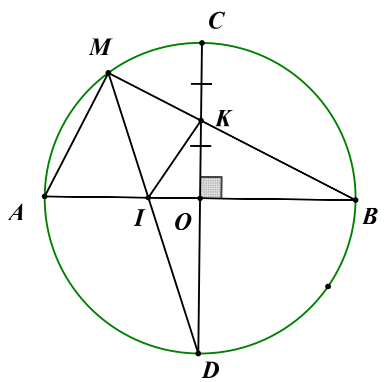
• $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC.AH = \frac{1}{2}.\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3} - 1}{2} = \frac{\sqrt{3} - 3}{4}\left(dm^2\right)$

Bài 3: Cho đường tròn (O; R), hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Gọi K là trung điểm của OC. Gọi M là giao điểm thứ hai của BK với đường tròn (O), I là giao điểm của MD và AB. Tính diện tích :

a) Tam giác MAB;

b) Tam giác MIK.

Lời giải



a) $\widehat{AMB}=90°,\ \widehat{BOK}=90°$ nên $\dfrac{MA}{MB}=\tan B=\dfrac{OK}{OB}=\dfrac{1}{2}$.

Từ $\begin{cases} MB=2MA \\ MA^2+MB^2=4R^2 \end{cases}$ dễ dàng tính được $MA=\dfrac{2R}{\sqrt{5}}, MB=\dfrac{4R}{\sqrt{5}}, S_{\Delta MAB}=\dfrac{4R^2}{5}$.   (1)

b) MI là đường phân giác của $\Delta MAB \Rightarrow \dfrac{IA}{IB}=\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{1}{2}$. Lại có $IA+IB=2R$ nên dễ dàng tính được $IB=\dfrac{4R}{3}$.

$S_{KIB}=\dfrac{1}{2}IB.KO=\dfrac{1}{2}.\dfrac{4R}{3}.\dfrac{R}{2}=\dfrac{R^2}{3}$.   (2)

$AI=\dfrac{1}{3}AB \Rightarrow S_{\Delta MAI}=\dfrac{1}{3}S_{MAB}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{4R^2}{5}=\dfrac{4R^2}{15}$.   (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$S_{\Delta MIK}=S_{\Delta MAB}-S_{\Delta KIB}-S_{\Delta MAI}=\dfrac{4R^2}{5}-\dfrac{R^2}{3}-\dfrac{4R^2}{15}=\dfrac{R^2}{5}$.

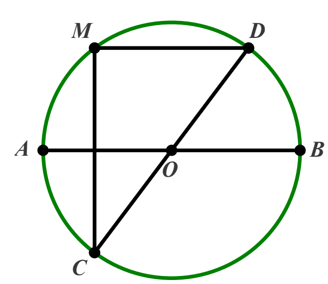
Dạng 3: Bài toán dựa hệ quả của góc nội tiếp chứng minh ba điểm thẳng hàng.

Bài 1: Cho đường tròn (O) đường kính AB và một cung AM có số đo nhỏ hơn 90°. Vẽ các dây $MC \perp AB, MD//AB$. Chứng minh rằng ba điểm $C,\ O,\ D$ thẳng hàng.

Lời giải (h 1.8)

Ta có $MD//AB$ mà $AB \perp MC$ nên $MC \perp MD \Rightarrow \widehat{DMC}=90^\circ$

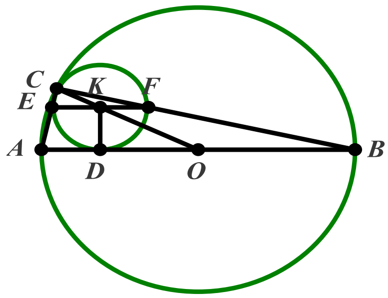
$\widehat{CMD}$ là góc nội tiếp mà bằng 90° nên phải chắn nửa đường tròn, suy ra CD là đường kính, do đó ba điểm C, O, D thẳng hàng.



hình 1.8

Bài 2: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Vẽ đường tròn (K) tiếp xúc với đường tròn (O) tại C. Các dây CA, CB cắt đường tròn (K) lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng E, K, F thẳng hàng.

Lời giải (h 1.9)



hình 1.9

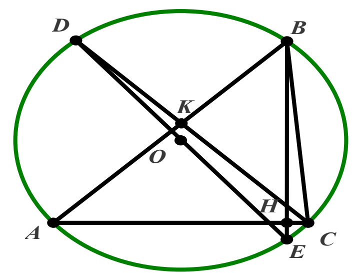
Xét (O) có $\widehat{ACB}=90^\circ$ nên $\widehat{ECF}=90^\circ$

Xét đường tròn (K) vì $\widehat{ECF}=90^\circ$ nên EF là đường kính

Suy ra ba điểm E,K,C thẳng hàng

Bài 3: Cho $\triangle ABC$ nhọn có $\widehat{BAC}=45^\circ$ nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BH, CK cắt đường tròn (O) lần lượt tại E và D. Chứng minh rằng D,O,E thẳng hàng

Lời giải (h 1.10).



hình 1.10

Ta có: $BH\perp AC \Rightarrow \triangle ABH$ vuông tại H

Mà $\widehat{BAH}=45^\circ \Rightarrow \widehat{ABH}=45^\circ$ hay $\widehat{EBA}=45^\circ$ (1)

Mặt khác có $CK\perp AB$ suy ra $\triangle ACK$ vuông tại K

Mà $\widehat{KAC}=45^\circ \Rightarrow \widehat{KCA}=45^\circ$

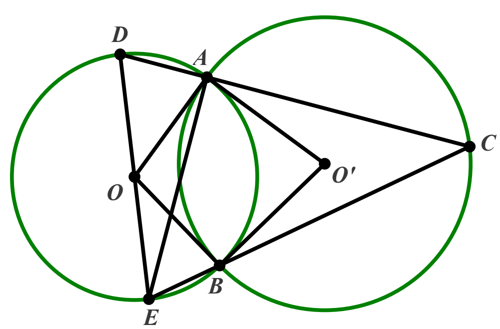
Ta lại có $\widehat{DBA}=\widehat{DCA}$ (cùng chắn cung AD)

Nên $\widehat{ABD}=45^\circ$ (2)

Từ (1)(2)$\Rightarrow \widehat{EBD}=\widehat{DBA}+\widehat{ABE}=90^\circ$ nên DE là đường kính của (O) hay D,O,E thẳng hàng

Bài 4: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B sao cho $\widehat{OAO'}=90^\circ$. Lấy điểm C thuộc (O') và ở bên ngoài đường tròn (O). Kẻ các tia CA, CB cắt đường tròn (O) tại D, E. Chứng minh rằng D,O,E thẳng hàng.

Lời giải (h 1.11)



hình 1.11

Xét (O) có $\widehat{AEB}=\frac{1}{2}\widehat{AOB}$ (1)

Xét (O') có $\widehat{ACB}=\frac{1}{2}\widehat{AO'B}$ (2)

Từ (1); (2) ta có

$\widehat{AEB}+\widehat{ACB}=\frac{1}{2}\left(\widehat{AOB}+\widehat{AO'B}\right)=90^\circ$

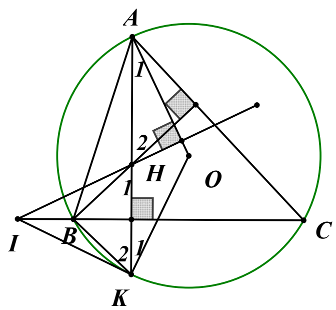
Nên $\widehat{EAC}=90^\circ \Rightarrow \widehat{DAE}=90^\circ$ nên DE là đường kính của (O)

Vậy D, O, E thẳng hàng.

Dạng 4: Bài toán dựa vào định lí, tính chất góc nội tiếp chứng minh hai đường thẳng vuông góc.

Bài 1: Cho tam giác nhọn $ABC\left(AB < AC\right)$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC, K là giao điểm thứ hai củaAH với đường tròn (O). Đường thẳng đi qua H và vuông góc với OA cắt BC ởI. Chứng minh rằng IK là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải



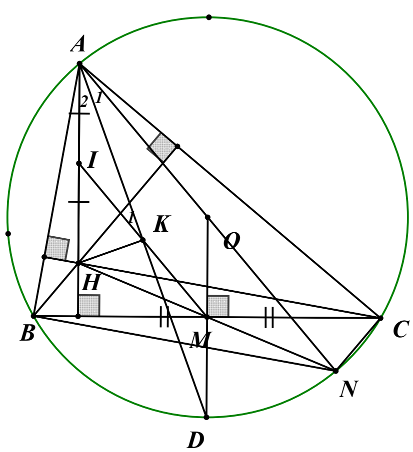
Dễ chứng minh Hđối xứng với Kqua BC, suy ra $\widehat{K_2} = \widehat{H_1} = \widehat{H_2}$ (1)

Ta lại có $\widehat{K_1} = \widehat{A_1}$ nên $\widehat{K_1}$ phụ $\widehat{H_2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{K_2}$ phụ $\widehat{K_1}$. Vậy IK là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài 2: Cho tam giác nhọn $ABC\left(AB < AC\right)$, trực tâm H. Gọi I là trung điểm của AH, M là trung điểm của BC. Tia phân giác của góc BAC cắt IM ở K. Chứng minh rằng $\widehat{AKH} = 90°$.

Lời giải



Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Vẽ bán kính OD đi qua M thì D là điểm chính giữa của cung BC nên A, K, D thẳng hàng.

Vẽ đường kính AN. Dễ chứng minh đươch BHCN là hình bình hành $\Rightarrow H, M, N$ thẳng hàng và

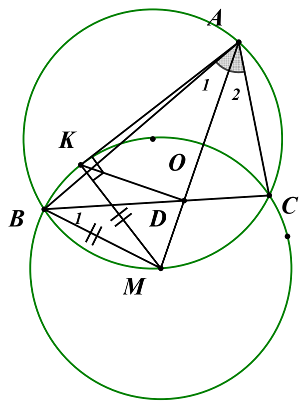
$OM = \frac{1}{2}AH = AI$. Tứ giác $AOMI$ có $AI // OM, AI = OM$ nên là hình bình hành $\Rightarrow OA // MI \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{K_1}$

Kết hợp với $\widehat{A_1} = \widehat{D} = \widehat{A_2}$ nên $\widehat{K_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow IK = IA = IH$. Vậy $\widehat{AKH} = 90^\circ$.

Bài 3:

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tia phân giác góc A cắt BC ở D và cắt đường tròn (O) ở M (khác A). Kẻ tiếp tuyến AK với đường tròn $(M;MB)$, K là tiếp điểm. Chứng minh rằng DK vuông góc với AM.

Lời giải



$\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ mà $\widehat{A_2} = \widehat{B_1}$ (góc nội tiếp)nên $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$.

$\Delta MBD \sim \Delta MAB$ **(g.g)**

$\Rightarrow \dfrac{MD}{MB} = \dfrac{MB}{MA} \Rightarrow \dfrac{MD}{MK} = \dfrac{MK}{MA}$.

Kết hợp với $\widehat{DMK} = \widehat{KMA}$ ta có

$\Delta DMK \sim \Delta KMA$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{MDK} = \widehat{MKA} = 90^\circ$. Vậy $DK \perp AM$.

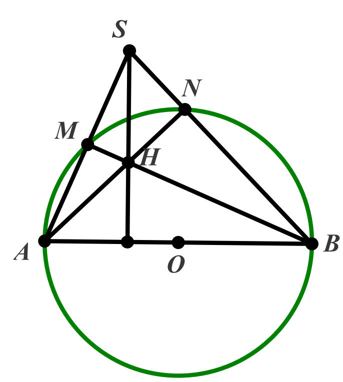
Bài 4: Cho đường tròn (O), đường kính AB. S là một điểm nằm bên ngoài đường tròn. SA và SB lần lượt cắt đường tròn tại M, N. Gọi H giao điểm của BM và AN. Chứng minh rằng $\mathrm{SH} \perp \mathrm{AB}$.

Lời giải (h 1.12)

Ta có: $\widehat{\mathrm{AMB}} = \widehat{\mathrm{ANB}} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét $\Delta\mathrm{SAB}$ có AN, BM là hai đường cao. Mà H là giao điểm của AN và BM suy ra H là trọng tâm $\Delta\mathrm{SAB}$.

$\Rightarrow \mathrm{SH}$ là đường cao trong $\Delta\mathrm{SAB} \Rightarrow \mathrm{SH} \perp \mathrm{AB}$.

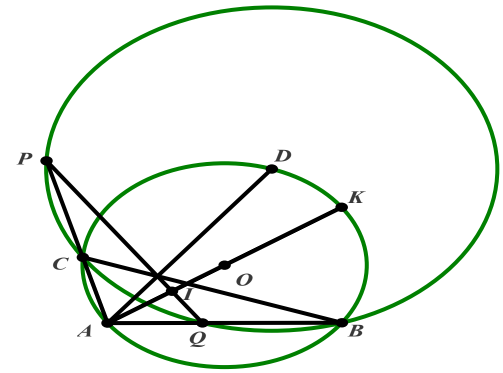


hình 1.12

Bài 5: Cho $\triangle ABC$ nội tiếp (O). Tia phân giác góc $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn (O) tại D. đường tròn (D, DB) cắt đường thẳng AB tại Q (khác B), cắt đường thẳng AC tại P (khác C). Chứng minh rằng $AO \perp PQ$

Lời giải (h 1.13)

Gọi I, K lần lượt là giao điểm của AO với $(O), PQ$.



hình 1.13

Ta có $\widehat{CPQ} = \widehat{QBC} \Rightarrow \widehat{APQ} = \widehat{ABC}$

Mà $\widehat{ABC} = \widehat{AKC}$

$\Rightarrow \widehat{APQ} = \widehat{AKC}$.(1)

Lại có $\widehat{AKC} + \widehat{CAK} = 90^\circ$ (2)

Từ (1)(2) suy ra $\widehat{APQ} + \widehat{PAK} = 90^\circ$

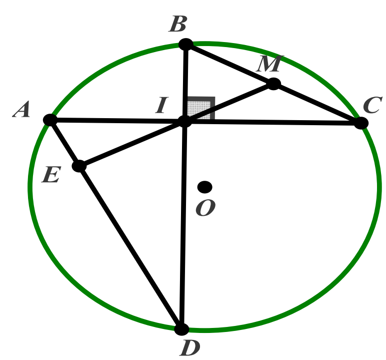
Xét $\triangle API$ có $\widehat{PAI} + \widehat{API} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AIP} = 90^\circ$

Hay $AO \perp PQ$

Bài 6: Trong đường tròn (O) có dây AC và BD vuông góc với nhau tại I. Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh rằng $IM \perp AD$.

Lời giải (h 1.14).

Gọi $E = IM \cap AD$.



hình 1.14

$AC \perp BD$ tại I nên $\triangle BCI$ vuông tại I.

Mà $MB = MC \Rightarrow MI = MB$ (tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông) nên $\triangle MBI$ cân.

do đó $\widehat{MIB} = \widehat{MBI}$ mà $\widehat{NID} = \widehat{BIM}$ đối đỉnh do đó

$\widehat{MBI} = \widehat{NID}$.

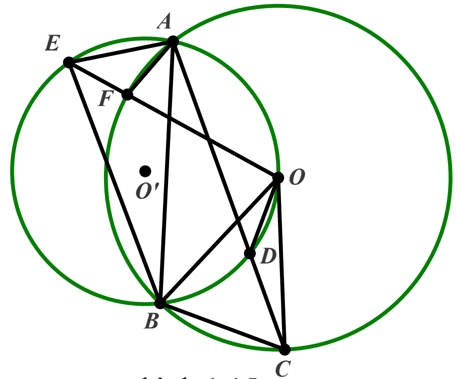
Ta có $\widehat{BDA} = \widehat{BCA}$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AB}$).

Mà $\widehat{BCA} + \widehat{MBI} = 90^\circ$ ($\triangle BCI$ vuông tại I.)

Suy ra $\widehat{NID} + \widehat{BDA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AEI} = 90^\circ$ hay $MI \perp AD$.

Bài 7: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A và B, O nằm trên đường tròn (O'). Dây AC của (O) cắt (O') ở D, dây OE của (O') cắt (O) ở F như trên hình. Chứng minh rằng: $OD \perp BC$

Lời giải(h 1.15)



hình 1.15

Dựng hai bán kính OB, OC của (O).

Xét đường tròn (O') ta có $\widehat{BAD} = \widehat{BOD}\left(=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}\right)$

Mà $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} \Rightarrow \widehat{BOD} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$.(1)

Xét đường tròn (O) ta có $\widehat{BOC} = \overset{\frown}{BC}$ (2)

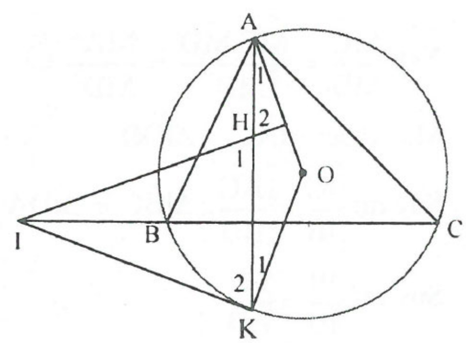
Từ (1),(2) ta được: $\widehat{BOD} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} \Rightarrow \widehat{BOD} = \widehat{DOC}$ hay OD là tia phân giác $\widehat{BOC}$

Ta lại có $\triangle BOC$ cân tại O suy ra OD vừa là tia phân giác vừa là đường cao trong $\triangle BOC$

Hay $OD \perp BC$

Dạng 5:Nâng cao phát triển tư duy

Bài 1.



Dễ dàng chứng minh được H đối xứng với K qua BC

Suy ra $\widehat{K_2} = \widehat{H_1} = \widehat{H_2}$. (1)

Ta lại có: $\widehat{A_1} = \widehat{K_1}$

nên $\widehat{K_1}$ phụ với $\widehat{H_2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{K_2}$ phụ với $\widehat{K_1}$

Vậy IK là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài 2.

a) Ta có $\widehat{QAP} = \widehat{DPQ}$ (Góc nội tiếp và góc giữa tiếp tuyến với dây cung cùng chắn một cung cung chắn một cung) và $\widehat{DPQ} = \widehat{QBP}$ (góc nội tiếp cùng chắn một cung).

Từ đó suy ra $\widehat{QAP} = \widehat{QBR}$.

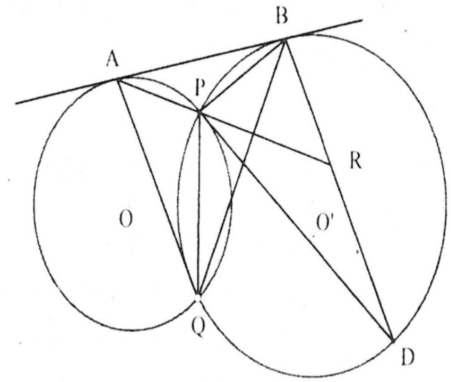
b) Ta có $\widehat{BPR} = \widehat{PAB} + \widehat{ABP}$ (tình chất góc ngoài của tam giác)

Mặt khác, $\widehat{BRP} = \widehat{BQA} = \widehat{PAB} + \widehat{ABP}$.

Suy ra hay tam giác BPR cân đỉnh B.

c) Ta có $\widehat{BQP}=\widehat{ABP}$ (1)

(góc nội tiếp và góc giữa tiếp tuyến với dây cung cùng chắn một cung)



$\widehat{BAR}=\widehat{ABP}$ (2)

(góc nội tiếp cùng chắn một cung)

$\widehat{BPR}=\widehat{PAB}+\widehat{ABP}$ (3)

$\widehat{PQR}=\widehat{PQB}+\widehat{BQR}$ (4)

Từ (1); (2); (3) (4) suy ra $\widehat{PQR}=\widehat{BPR}=\widehat{BRP}$

Do đó: Đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR tiếp xúc PB và RB (định lí bổ sung).

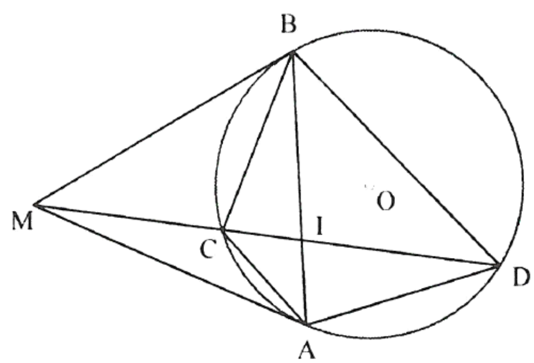
Bài 3.Ta có $\Delta MAC \sim \Delta MDA$

Suy ra: $MA^2=MC.MD$ và $\dfrac{MA}{MD}=\dfrac{AC}{AD}$

$\Delta MBC \sim \Delta MDB$ suy ra: $\dfrac{MB}{MD}=\dfrac{BC}{BD}$

Xét $\dfrac{MC}{MD}=\dfrac{MC.MD}{MD^2}=\dfrac{MA^2}{MD^2}=\dfrac{MA}{MD}.\dfrac{MB}{MD}=\dfrac{AC}{AD}.\dfrac{BC}{BD}$ (1)

Mặt khác $\Delta IAC \sim \Delta IDB$



Suy ra: $\dfrac{IC}{IB}=\dfrac{AC}{BD}$; $\Delta IBC \sim \Delta IDA$

Suy ra: $\dfrac{IB}{ID}=\dfrac{BC}{AD}$;

Do đó: $\dfrac{AC}{AD}.\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{AC}{BD}.\dfrac{BC}{AD}=\dfrac{IC}{IB}.\dfrac{IB}{ID}=\dfrac{IC}{ID}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{IC}{ID}=\dfrac{MC}{MD}$.

Bài 4.

a) Do $\widehat{BAE}=\widehat{SBM}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung) và $\widehat{AEB}=\widehat{BMS}=90^\circ$ nên

$\Delta AEB \sim \Delta BMS$, suy ra: $\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{BS}{BM}$.

Mà $BM=ME$ nên $\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{BS}{ME}$. (1)

b) ΔBME cân tại M nên $\widehat{MEB} = \widehat{MBE}$.

Lại có $\widehat{SBM} + \widehat{ABE} = \widehat{BAE} + \widehat{ABE} = 90° = \widehat{AEB}$

$\Rightarrow \widehat{SBA} = \widehat{AEM}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\Delta AEM \sim \Delta ABS$.

c) Từ câu b, suy ra: $\widehat{BAP} = \widehat{EAN}$.

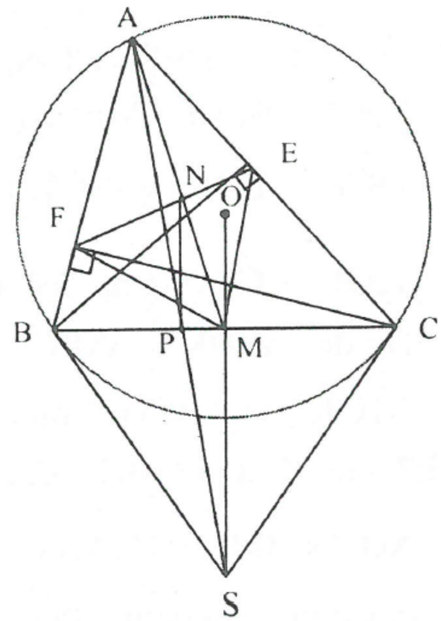
Mà $\widehat{ABP} = \widehat{AEN}$ (cùng bù với $\widehat{CEF}$)

nên $\Delta AEN \sim \Delta ABP$, suy ra:

$\dfrac{AN}{AP} = \dfrac{NE}{PB}$. (3)

Vì $\Delta AEM \sim \Delta ABS$ (câu b) và tương tự ta có:

$\Delta MAF \sim \Delta SAC$ nên $\widehat{AME} = \widehat{ASB}$, $\widehat{AMF} = \widehat{ASC}$



$\Rightarrow \widehat{EMF} = \widehat{BSC} \Rightarrow \widehat{SBP} = \widehat{MEN}$ (do hai tam giác cân có hai góc ở đỉnh bằng nhau)

Suy ra: $\Delta EMN \sim \Delta BSP \Rightarrow \dfrac{NE}{PB} = \dfrac{NM}{PS}$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra: $\dfrac{AN}{AP} = \dfrac{NM}{PS} \Rightarrow NP \,//\, MS$, mà $MS \perp BC$ nên $NP \perp BC$.

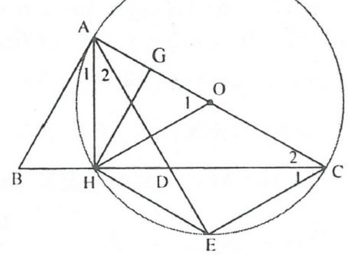
Bài 5.

a) Ta có: ΔABD cân nên: $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (1)

Mặt khác: $\widehat{A_1} = \widehat{C_2}$ (cùng phụ với góc B)

$\widehat{C_1} = \widehat{A_2}$ (cùng chắn chung HE).

Suy ra: $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$



b) Ta có: $\widehat{O_1} = sđ\,\widehat{AH} = 2.\widehat{C_2} = \widehat{ACE} \Rightarrow HO \,//\, EC$.

Bài 6.

Gọi I là giao điểm của đường tròn (O) đường kính AM và CD $\Rightarrow \widehat{AIM} = 90°$.

Tứ giác DAIM là hình chữ nhật (vì $\widehat{AIM} = \widehat{IAD} = \widehat{ADM} = 90°$)

$\Rightarrow \widehat{IMD} = 90^\circ \Rightarrow DI$ là đường kính của (O)

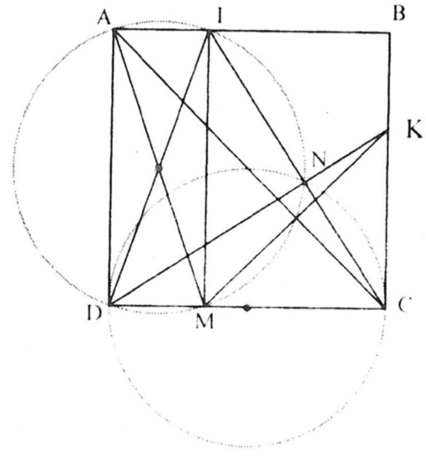
$\Rightarrow \widehat{IND} = 90^\circ$

N thuộc đường tròn đường kính DC

$\Rightarrow \widehat{DNC} = 90^\circ$

Ta có: $\widehat{IND} + \widehat{DNC} = 90^\circ + 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{INC} = 180^\circ \Rightarrow$ I, N, C thẳng hàng.



Xét ΔCDK và ΔMIC có:

$\widehat{DCK} = \widehat{IMC}\left(=90^\circ\right).DC = MI\left(=AD\right)$

$\widehat{KDC} = \widehat{CIM}$ (Cặp góc nhọn có cạnh tương ứng với góc).

Do đó: $\Delta CDK = \Delta MIC \Rightarrow CK = MC \Rightarrow \Delta CMK$ cân tại C. CA là tia phân giác $\widehat{MCK}$ (vì ABCD là hình vuông) $\Rightarrow AC \perp KM$.

Bài 7.

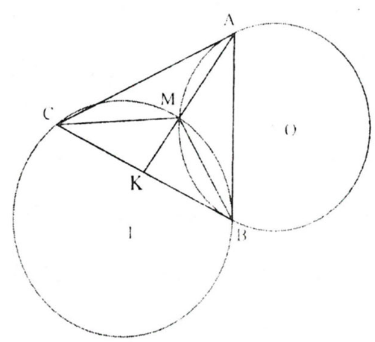
Gọi K là giao điểm của AM và BC.

Xét ΔKBM và ΔKAB có: $\widehat{K}$ chung; $\widehat{KBM} = \widehat{KAB}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến, dây cung và góc nội tiếp chắn chung $\widehat{BM}$ của $\left(O\right)$)

Do đó: $\Delta KBM \backsim \Delta KAB \Rightarrow \dfrac{KB}{KA} = \dfrac{KM}{KB} \Rightarrow KB^2 = KM.KA$ (1)

$\widehat{MCK} = \widehat{MBA}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{BM}$ của (1)).

$\widehat{KAC} = \widehat{MBA}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AM}$ của $\left(O\right)$).



Do đó: $\widehat{MCK} = \widehat{KAC}$.

Xét ΔKCM và ΔKAC có $\widehat{K}$ chung, $\widehat{MCK} = \widehat{KAC}$.

Do đó $\Delta KCM \backsim \Delta KAC \Rightarrow \dfrac{KC}{KA} = \dfrac{KM}{KC} \Rightarrow KC^2 = KM.KA$ (2).

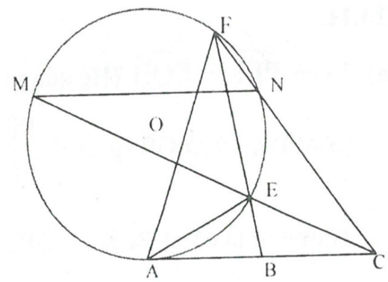
Từ (1) và (2) ta có: $KC^2 = KB^2 \Rightarrow KC = KB$.

Vậy AM đi qua trung điểm K của BC.

Bài 8.

Xét ΔBAE và ΔBFA có $\widehat{ABE}$ chung, $\widehat{BAE} = \widehat{BFA}\left(=\dfrac{1}{2}sđ\,\widehat{AE}\right)$

Do đó: $\Delta BAE \backsim \Delta BFA$



$\Rightarrow \dfrac{BA}{BF} = \dfrac{BE}{BA} \Rightarrow \dfrac{BC}{BF} = \dfrac{BE}{BC}$ (vì $BC = BA$)

Xét ΔBCE và ΔBFC có:

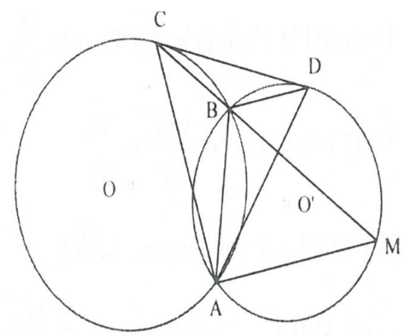
$\widehat{CBE}$ (chung), $\dfrac{BC}{BF} = \dfrac{BE}{BC}$.

Do đó $\Delta BCE \backsim \Delta BFC \Rightarrow \widehat{BCE} = \widehat{BFC}$

Mà $\widehat{EMN} = \widehat{BFC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn chung EN)

Do đó $\widehat{BCE} = \widehat{EMN} \Rightarrow MN \;//\; AC$.

Bài 9.



$\widehat{DBM} = \widehat{BCD} + \widehat{BDC}$

($\widehat{DBM}$ là góc ngoài của ΔBDC)

$\widehat{BAC} = \widehat{BCD}\left(= \dfrac{1}{2} sđ\overset{\frown}{BC}\right)$,

$\widehat{BAD} = \widehat{BDC}\left(= \dfrac{1}{2} sđ\overset{\frown}{BD}\right)$

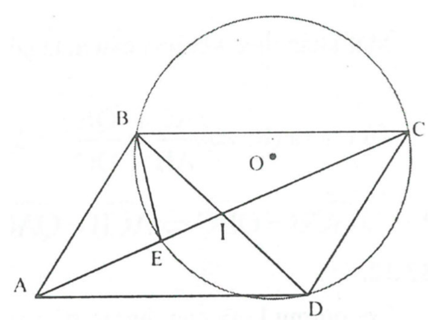
Do đó: $\widehat{CAD} = \widehat{BAC} + \widehat{BAD} = \widehat{BCD} + \widehat{BDC} = \widehat{DBM}$

Mà $\widehat{DAM} = \widehat{DBM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung DM)

Nên $\widehat{CAD} = \widehat{DAM} \Rightarrow AD$ là tia phân giác của $\widehat{CAM}$.

Bài 10.

Gọi I là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành.



$IA = IC \Rightarrow IE.IA = IE.IC$

$\Delta IBE \backsim \Delta ICD\ (g.g) \Rightarrow IE.IC = IB.ID$

Từ đó suy ra: $IE.IA = IE.IC = IB.ID = IB^2$

$\Rightarrow \dfrac{IB}{IE} = \dfrac{IA}{IB}$.

Ta có ΔIBE và ΔIAB có $\dfrac{IB}{IE} = \dfrac{IA}{IB}$ và $\widehat{BIA}$ chung

Suy ra $\Delta IBE \backsim \Delta IAB\ (c.g.c)$ nên $\widehat{IBE} = \widehat{IAB}$.

Từ đó suy ra BD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEB (định lí bổ sung)

Bài 11.

a) Ta có $\widehat{PBK} = \widehat{PQB}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

$\Rightarrow \Delta PBK \backsim \Delta PQB\left(g.g\right) \Rightarrow \frac{PB}{PQ}=\frac{BK}{QB}$ (1).

Tương tự ta có: $\Delta PCK \backsim \Delta PQC\left(g.g\right) \Rightarrow \frac{PC}{PQ}=\frac{CK}{QC}$ (2)

Từ (1) và (2) kết hợp với $PB = PC$ ta có: $\frac{BK}{QB}=\frac{CK}{QC}$ (3).

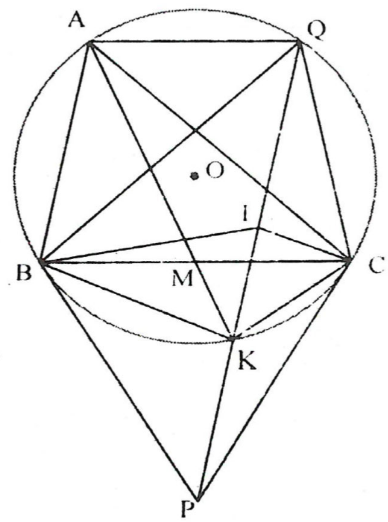
Ta có BI là phân giác $\widehat{KBQ}$ nên $\frac{IK}{IQ}=\frac{BK}{QB}$ (4)

Suy ra CI là tia phân giác $\widehat{KCQ}$

b) Ta có $\Delta MKC \backsim \Delta MBA\left(g.g\right) \Rightarrow \frac{MC}{KC}=\frac{MA}{BA}$ (5)

$\Delta MKB \backsim \Delta MCA\left(g.g\right) \Rightarrow \frac{MB}{KB}=\frac{MA}{CA}$ (6)

Từ (5) và (6) vế chia theo vế $\Rightarrow \frac{KB}{KC}=\frac{CA}{BA}$ (7) (vì $MB = MC$)



Mặt khác theo kết quả câu a, ta có: $\frac{BK}{QB}=\frac{KC}{QC} \Rightarrow \frac{BK}{KC}=\frac{QB}{QC}$ (8).

Từ (7) và (8) $\Rightarrow \frac{AC}{AB}=\frac{QB}{QC} \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta QCB\left(c.g.c\right)$

$\Rightarrow \widehat{ACB}=\widehat{QBC} \Rightarrow \widehat{ACB}=\widehat{QAC} \Rightarrow AQ \,//\, BC.$

Bài 12.

Xét đường kính của đường tròn không đi qua điểm nào trong 2015 điểm đã cho (luôn tồn tại)

Chọn nửa đường tròn chứa số điểm nhiều hơn

$\Rightarrow$ Nửa đó chứa ít nhất 1008 điểm.

Xét 3 điểm bất kỳ trong số các điểm thuộc nửa đường tròn đã chọn ta có 3 điểm đó là các đỉnh của một tam giác tù (vì có một góc nội tiếp chắn cung lớn hơn nửa đường tròn).

Bài 13.

1) Do $NB\ //\ AD$, $BM\ //\ DP$, $MN\ //\ PA$

nên $\Delta NBM \backsim \Delta ADP$.

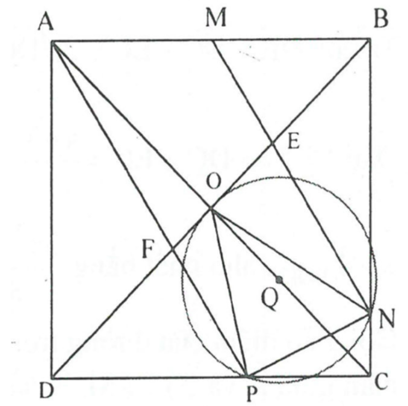
Suy ra $\dfrac{BN}{BO}=\dfrac{BN}{\sqrt{2}.BM}=\dfrac{DA}{\sqrt{2}.DP}=\dfrac{DO}{DP}$.

Kết hợp với $\widehat{NBO}=\widehat{PDO}=45^\circ$

$\Rightarrow \Delta BNO \backsim \Delta DOP$.

Suy ra: $\widehat{NOP}=180^\circ-\widehat{NOB}-\widehat{POD}$

$$=180^\circ-\widehat{NOB}-\widehat{ONB}=\widehat{NBO}=45^\circ.$$



2) Vì $\Delta BNO \backsim \Delta DOP$ và $BO=DO$ nên $\dfrac{ON}{OP}=\dfrac{BO}{DP}=\dfrac{DO}{DP}$.

Mặt khác $\widehat{NOP}=\widehat{NBO}=45^\circ$, suy ra $\Delta ONP \backsim \Delta DOP \backsim \Delta BNO$.

Gọi Q là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔONP, chú ý rằng $\Delta ONP \backsim \Delta BNO$ ta có:

$$\widehat{QON}=\frac{180^\circ-\widehat{ONQ}}{2}=90^\circ-\widehat{OPN}=\widehat{COB}-\widehat{BON}=\widehat{CON}.$$

Do đó tia OQ trùng với tia ON. Vậy Q thuộc OC.

3) Gọi E, F thứ tự là giao điểm của BD với MN, PA.

Chú ý rằng $\Delta NBM \backsim \Delta ADP$; BD là đường chéo hình vuông, ta có:

$$\frac{EM}{EN}=\frac{S_{BEM}}{S_{BEN}}=\frac{BM}{BN}=\frac{DP}{DA}=\frac{S_{DFP}}{S_{DFA}}=\frac{FP}{FA}.$$

Kết hợp với $MN\ //\ AP$, theo bổ đề hình thang

Suy ra BD, AN, PM đồng quy.

Bài 14.

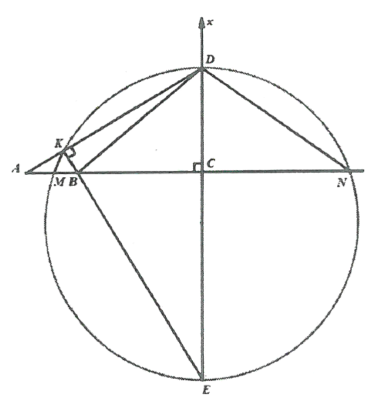
a) Ta có: $\widehat{EBC}=\widehat{ADC}$

(Cùng bù với góc $\widehat{KBC}$);

$\widehat{ACD}=\widehat{ECB}=90^\circ$

$\Rightarrow \Delta ACD \backsim \Delta ECB$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{DC}{BC}=\dfrac{AC}{EC} \Rightarrow DC.CE=AC.BC.$



Do $AB=\dfrac{a}{4}$; $BC=\dfrac{3a}{4} \Rightarrow DC.EC=AC.BC=\dfrac{3a^2}{4}$.

b) $S_{\Delta BDE}=\dfrac{1}{2}BC.DE \Rightarrow S_{\Delta BDE}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi DE nhỏ nhất.

Ta có: $DE=DC+EC\geq 2\sqrt{DC.EC}=2\sqrt{\dfrac{3a^2}{4}}=a\sqrt{3}$ (Theo chứng minh phần a)

Dấu $"=" \Leftrightarrow DC = EC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\Rightarrow S_{(BDE)}$ nhỏ nhất bằng $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{8}$ khi D thuộc tia Cx sao cho $CD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

c) Gọi giao điểm của đường tròn đường kính DE với đường thẳng AC là M, N (M nằm giữa A và B) $\Rightarrow$ M, N đối xứng qua DE.

Ta có: $\Delta AKB \backsim \Delta ACD$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{AK}{AC} = \dfrac{AB}{AD} \Rightarrow AK.AD = AC.AB$ (1)

$\Delta AKM \backsim \Delta AND$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{AK}{AN} = \dfrac{AM}{AD} \Rightarrow AK.AD = AM.AN$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AM.AN = AC.AB = \dfrac{a^2}{4}$

$\Rightarrow \dfrac{a^2}{4} = (AC - MC)(AC + NC) = AC^2 - MC^2$ (Do $MC = NC$)

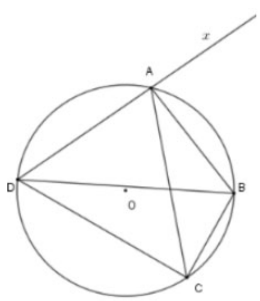
$\Rightarrow MC^2 = \dfrac{3a^2}{4} \Rightarrow MC = NC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow$ M, N là hai điểm cố định.

Vậy đường tròn đường kính DE luôn có dây cung MN cố định.

C.TRẮC NGHIỆM RÈN LUYỆN PHẢN XẠ

Câu 1. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) (hình 1). Chọn khẳng định sai?



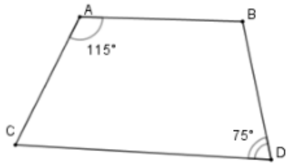
Hình 1

A. $\widehat{BDC} = \widehat{BAC}$. **B.** $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$. **C.** $\widehat{DCB} = \widehat{BAx}$. **D.** $\widehat{BCA} = \widehat{BAx}$.

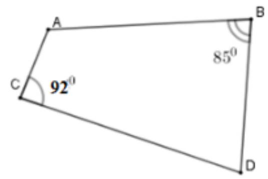
Câu 2. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp. Chọn câu sai.

A. $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^0$. **B.** $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$. **C.** $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^0$. **D.** $\widehat{ADB} = \widehat{DAC}$.

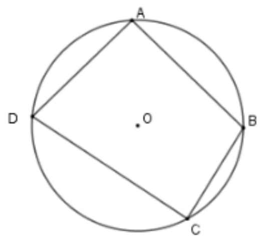
Câu 3. Tứ giác ở hình nào dưới đây là tứ giác nội tiếp?



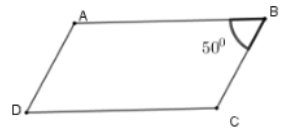
Hình 2



Hình 3



Hình 4



Hình 5

A. Hình 2. **B.** Hình 3. **C.** Hình 4. **D.** Hình 5.

Câu 4. Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính BC. Lấy điểm A trên tia đối của tia BC. Kẻ tiếp tuyến AF, Bx của nửa đường tròn (O) (với F là tiếp điểm). Tia AF cắt tia Bx của nửa đường tròn tại D. Khi đó tứ giác $OBDF$ là:

A. Hình thang. B. Tứ giác nội tiếp. C. Hình thang cân. D. Hình bình hành.

Câu 5. Cho tam giác ABC vuông tại A đường cao AH. Kẻ HE vuông góc với AB tại E. kẻ HF vuông góc với AC tại F. Chọn câu đúng.

A. Tứ giác $BEFC$ là tứ giác nội tiếp. B. Tứ giác $BEFC$ không nội tiếp.

C. Tứ giác $AFHE$ là hình vuông. D. Tứ giác $AFHE$ không nội tiếp.

Câu 6. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn có hai cạnh đối AB và CD cắt nhau tại M và $\widehat{BAD} = 70^0$ thì $\widehat{BCM} = ?$

A. 110^0. **B.** 30^0. **C.** 70^0. **D.** 55^0.

Câu 7. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Gọi H là điểm nằm giữa O và B. Kẻ dây CD vuông góc với AB tại H. trên cung nhỏ AC lấy điểm E kẻ CK vuông góc AE tại K. Đường thẳng DE cắt CK tại F. Chọn câu **đúng**?

A. $AHCK$ là tứ giác nội tiếp. **B.** $AHCK$ không nội tiếp đường tròn.

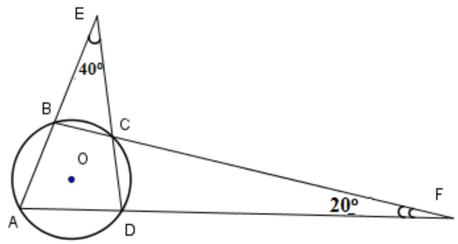
C. $\widehat{EAO} = \widehat{HCK}$. **D.** $AH.AB = AD.BD$.

Câu 8. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O) qua A kẻ hai tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (B,C là tiếp điểm). Chọn đáp án đúng:

A. Tứ giác ABOC là hình thoi. B. Tứ giác ABOC nội tiếp.

C. Tứ giác ABOC không nội tiếp. D. Tứ giác ABOC là hình bình hành.

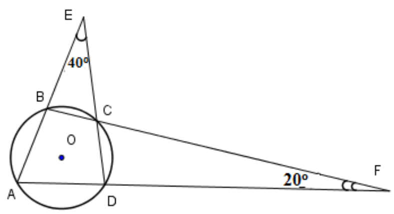
Câu 9. Cho hình vẽ dưới đây.



Khi đó mệnh đề đúng là?

A. $\widehat{ABC} = 80^0$. **B.** $\widehat{ABC} = 90^0$. **C.** $\widehat{ABC} = 100^0$. **D.** $\widehat{ABC} = 110^0$.

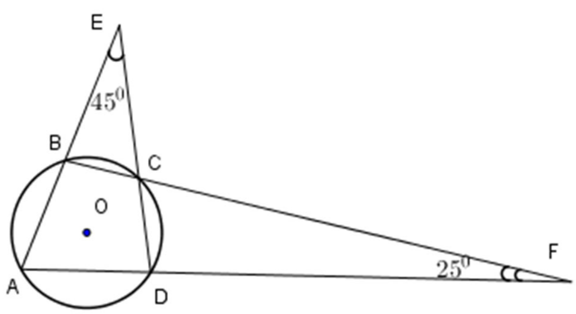
Câu 10. Cho hình vẽ dưới đây



Số đo góc $\widehat{BAD}$ là:

A. $\widehat{BAD} = 80^0$. **B.** $\widehat{BAD} = 75^0$. **C.** $\widehat{BAD} = 65^0$. **D.** $\widehat{BAD} = 60^0$.

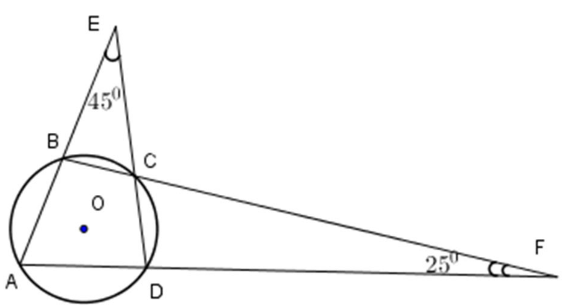
Câu 11. Cho hình vẽ dưới đây.



Chọn câu đúng:

A. $\widehat{ABC} = 80^0$. **B.** $\widehat{ABC} = 90^0$. **C.** $\widehat{ABC} = 110^0$. **D.** $\widehat{ABC} = 100^0$.

Câu 12. Cho hình vẽ dưới đây



Số đo góc $\widehat{BAD}$ là:

A. $\widehat{BAD} = 55^0$. **B.** $\widehat{BAD} = 75^0$. **C.** $\widehat{BAD} = 65^0$. **D.** $\widehat{BAD} = 60^0$.

Câu 13. Cho ΔBCD cân tại A có $\widehat{BAC}=120^0$, trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa đỉnh A, lấy D sao cho BCD là tam giác đều. Khi đó

A. ΔACD cân. **B.** $ABDC$ nội tiếp . **C.** $ABDC$ hình thang. **D.** $ABDC$ hình vuông.

Câu 14. Cho ΔABC cân tại A có $\widehat{BAC}=130^\circ$. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa đỉnh A, kẻ $Bx\perp BA; Cx\perp CA$. chọn đáp án sai.

A. ΔBCD cân. **B.** $ABDC$ nội tiếp. **C.** $ABDC$ là hình thoi. **D.** $\widehat{BDC}=50^\circ$.

Câu 15. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). M là điểm thuộc cung nhỏ AC (cung CM bé hơn cung AM). Vẽ MH vuông góc với BC tại H, vẽ MI vuông góc với AC tại I. Chọn câu **đúng**:

A. $MIHC$ là hình chữ nhật. B. $MIHC$ là hình vuông.

C. $MIHC$ không là tứ giác nội tiếp. D. $MIHC$ là tứ giác nội tiếp.

Câu 16. Cho hình bình hành. Đường tròn đi qua ba đỉnh cắt đường thẳng tại. Khi đó.

A. $ABCP$ là hình thang cân. B. $AP=AD$.

C. $AP=BC$. D. Cả A,B,C đều đúng.

Câu 17. Cho đường tròn (O) đường kính $AB.$ Gọi H là điểm nằm giữa O và $B.$ Kẻ dây CD vuông góc với AB tại H. Trên cung nhỏ AC lấy điểm $E,$ kẻ $CK\perp AE$ tại $K.$ Đường thẳng DE cắt CK tại F.

Tứ giác $AHCK$ là:

A. Tứ giác nội tiếp. B. Hình bình hành. C. Hình thang. D. Hình thoi.

Câu 18. Cho đường tròn (O) đường kính $AB.$ Gọi H là điểm nằm giữa O và $B.$ Kẻ dây CD vuông góc với AB tại H. Trên cung nhỏ AC lấy điểm $E,$ kẻ $CK\perp AE$ tại $K.$ Đường thẳng DE cắt CK tại F.

Tích $AH.AB$ bằng:

A. $4AO^2$. **B.** $AD.BD$. **C.** BD^2. **D.** AD^2.

Câu 19. Cho đường tròn (O) đường kính $AB.$ Gọi H là điểm nằm giữa O và $B.$ Kẻ dây CD vuông góc với AB tại H. Trên cung nhỏ AC lấy điểm $E,$ kẻ $CK\perp AE$ tại $K.$ Đường thẳng DE cắt CK tại F.

Tam giác ACF là tam giác.

A. Cân tại F B. Cân tại C C. Cân tại A D. Đều

Câu 20. Cho ΔABC vuông ở A. Trên cạnh AC lấy điểm M và vẽ đường tròn đường kính MC. Kẻ BM cắt đường tròn tại D. Đường thẳng DA cắt đường tròn tại S. Chọn đáp án sai trong các đáp án sau:

A. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp. B. $\widehat{ABD}=\widehat{ACD}$.

C. CA là phân giác của $\widehat{SCB}$.　　　　D. Tứ giác $ABCS$ nội tiếp.

Câu 21. Trên các cạnh BC,CD của hình vuông $ABCD$ ta lấy lần lượt các điểm M,NM,N sao cho $\widehat{MAN}=45^0$. Đường thẳng BD cắt các đường thẳng AM,AN tương ứng tại các điểm P,Q.

I. Tứ giác $ABMQ$ nội tiếp; II tứ giác $ADNP$ nội tiếp. Chọn kết luận đúng.

A. Cả (I) và (II) đều đúng.　　　　B. Chỉ (I) đúng.

C. Chỉ (II) đúng.　　　　D. Cả (I) và (II) đều sai.

Câu 22. Trên các cạnh BC,CD của hình vuông $ABCD$ ta lấy lần lượt các điểm M,N sao cho $\widehat{MAN}=45^0$. Đường thẳng BD cắt các đường thẳng AM,AN tương ứng tại các điểm P,Q

Năm điểm nào sau đây cùng thuộc một đường tròn?

A. P,Q,N,M,B.　　**B.** P,Q,N,C,M.　　**C.** P,Q,N,C,D.　　**D.** P,A,N,C,M.

Câu 23. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Gọi I là trung điểm của OA. Dây CD vuông góc với AB tại I. Lấy K tùy ý trên cung BC nhỏ, AK cắt CD tại H. Khẳng định nào đúng?

A. Tứ giác $BIHK$ nội tiếp.　　　　B. Tứ giác $BIHK$ không nội tiếp.

C. Tứ giác $BIHK$ là hình chữ nhật.　　　　D. Các đáp án trên đều sai.

Câu 24. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), các đường cao $AD,BE,CF(D\in BC;E\in AC;F\in AB)$ cắt nhau tại H. khi đó ta có:

A. $BH.BE=BC.BD$.　　**B.** $CH.CF=CD.CB$.　　**C.** A,B đều đúng .　　**D.** A,B đều sai.

Câu 25. Cho tam giác ABC vuông tại A và B điểm nằm giữa A và B. Đường tròn đường kính BD cắt BC tại E. các đường thẳng CD,AE lần lượt cắt đường tròn tại các điểm thứ hai là F và G. Khi đó, kết luận không đúng là:

A. $\Delta ABC\backsim\Delta EBD$.　　　　B. Tứ giác $ADEC$ là tứ giác nội tiếp.

C. Tứ giác $AFBC$ không là tứ giác nội tiếp.　　　　D. Các đường thẳng AC,DE và BF đồng quy.

Câu 26. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O). M là điểm chính giữa cung AB. Nối M với D,M với C cắt AB lần lượt ở E và P. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. Tứ giác $PEDC$ nội tiếp.　　　　B. Tứ giác $PEDC$ không nội tiếp.

C. Tam giác MDC đều.　　　　D. Các câu trên đều sai.

Câu 27. Cho nửa (O) đường kính AB. Lấy $M\in OA(M\neq O,A)$. Qua M vẽ đường thẳng d vuông góc với AB. Trên d lấy N sao cho $ON>R$. Nối NB cắt (O) tại C. Kẻ tiếp tuyến NE với (O) (E là tiếp điểm, E và A cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ d) và F là giao điểm của EC và đường tròn (O).

Chọn

khẳng định sai?

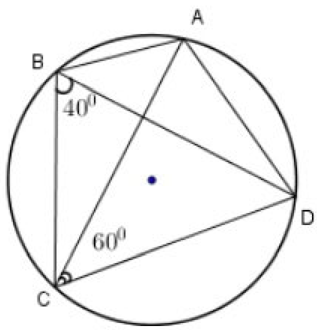
A. Bốn điểm O, E, M, N cùng thuộc một đường tròn. B. $NE^2 = NC.NB$.

C. $\widehat{NEH} = \widehat{NME}$ (H là giao điểm của AC và d). D. $\widehat{NFO} < 90^\circ$.

Câu 28. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$. Đường thẳng qua O vuông góc AB cắt cung AB tại C. Gọi E là trung điểm BC. AE cắt nửa đường tròn O tại F. Đường thẳng qua C và vuông góc AF tại G cắt AB tại H. Khi đó góc OGH có số đo là:

A. 45^0. **B.** 60^0. **C.** 90^0. **D.** 120^0.

Câu 29. Cho hình vẽ, khi đó đáp án đúng là:



A. $\widehat{ADC} = 70^0$. **B.** $\widehat{ADC} = 80^0$. **C.** $\widehat{ADC} = 75^0$. **D.** $\widehat{ADC} = 60^0$.

Câu 30. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O) và $\widehat{A} = \partial (0 < \partial < 90^\circ)$. Gọi M là một điểm tùy ý trên cung nhỏ AC vẽ tia Bx vuông góc với AM cắt tia CM tại D. Số đo góc $\widehat{BDM}$ là:

A. $\widehat{AMD} = \dfrac{\partial}{2}$. **B.** $\widehat{AMD} = 90^0 + \dfrac{\partial}{2}$. **C.** $\widehat{AMD} = 45^0 + \partial$. **D.** $\widehat{AMD} = 90^0 - \dfrac{\partial}{2}$.

Câu 31. Cho tam giác ABC vuông tại A. Điểm E di động trên cạnh AB. Qua B vẽ một đường thẳng vuông góc với CE tại D và cắt tia CA tại H. Biết $\widehat{BCA} = 30^0$. So đó $\widehat{ADH}$ là:

A. 30^0. **B.** 150^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Câu 32. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O). Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại I. Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác ABI. Tiếp tuyến của đường tròn này tại I cắt AD và BC lần lượt M và N. Chọn câu sai:

A. $MN \ // \ DC$. B. Tứ giác $ABNM$ nội tiếp.

C. Tứ giác $MICD$ nội tiếp. D. Tứ giác $INCD$ là hình thang.

Câu 33. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O bán kính bằng a. Biết rằng $AC \perp BD$. Khi đó để $AB + CD$ đạt giá trị lớn nhất thì.

A. $AC = AB$. **B.** $AC = BD$. **C.** $DB = AB$. **D.** Không có đáp án nào đúng.

Câu 34. Cho tam giác ABC không cân, nội tiếp đường tròn (O), BD là đường phân giác của góc $\widehat{ABC}$. Đường thẳng BD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E. Đường tròn (O_1) đường kính DE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là F. Khi đó đường thẳng đối xứng với đường thẳng BF qua đường thẳng BD cắt AC tại N thì:

A. $AN = NC$. **B.** $AD = DN$. **C.** $AN = 2NC$. **D.** $2AN = NC$.

HƯỚNG DẪN

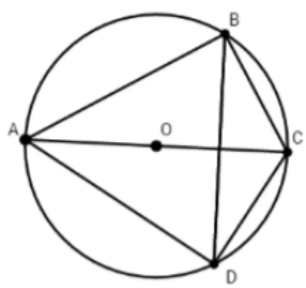
Câu 1. Đáp án D.

Vì tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{BDC} = \widehat{BAC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BC)

$\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$ (tổng hai góc đối bằng 180°)

$\widehat{DCB} = \widehat{BAx}$ (góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối với đỉnh đó).

Câu 2. Đáp án D.



+) $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$ (tổng hai góc đối)

+) $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AD)

+) $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^0$ (tổng 4 góc trong tứ giác).

Câu 3. Đáp án C.

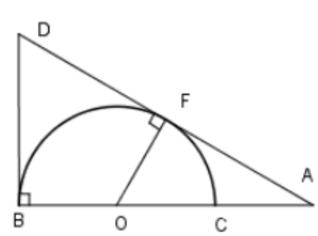
Hình 2 sai vì $\hat{A} + \hat{C} = 115^0 + 75^0 = 190^0 \neq 180^0$

Hình 3 sai vì $\hat{C} + \hat{B} = 92^0 + 85^0 = 177^0 \neq 180^0$.

Hình 5 sai vì $\hat{D} + \hat{B} = 50^0 + 50^0 = 100^0 \neq 180^0$.

Hình 4 đúng vì tứ giác này có 4 đỉnh cùng thuộc một đường tròn.

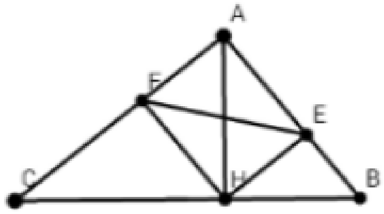
Câu 4. Đáp án B.



Ta có $\widehat{DBO} = 90^0$ và $\widehat{DFO} = 90^0$ (tính chất tiếp tuyến).

Tứ giác $OBDF$ có $\widehat{DBO} + \widehat{DFO} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ nên nội tiếp được trong một đường tròn.

Câu 5. Đáp án A.



Xét tứ giác $AEHF$ có: $\hat{A} = \hat{E} = \hat{F} = 90^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AEHF$ là hình chữ nhật (dhnb).

$\Rightarrow$ Tứ giác $AEHF$ là tứ giác nội tiếp (có tổng hai góc đối diện bằng 180^0)

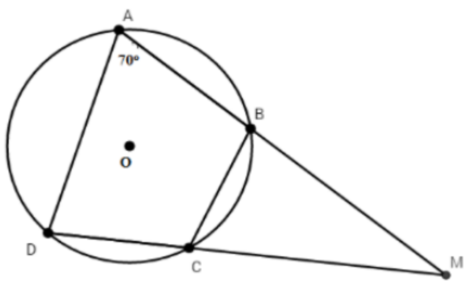
$\Rightarrow \widehat{\text{AF}E} = \widehat{AHE}$ (hai góc cùng nhìn đoạn AE).

$\widehat{\text{AHE}} = \widehat{ABH}$ (cùng phụ $\widehat{\text{BHE}}$)

$\Rightarrow \widehat{\text{AF}E} = \widehat{ABC}$ $(= \widehat{AHE})$ Xét tứ giác BEFC có: $\widehat{AFE}$ là góc ngoài tại đỉnh F

và $\widehat{AFE} = \widehat{ABC}$ (cmt). $\Rightarrow$ $BEFC$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết).

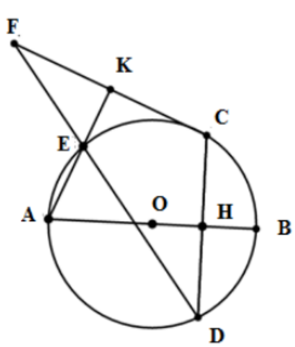
Câu 6. Đáp án C.



Tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên có: $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = 180^0 \Rightarrow \widehat{BCD} = 180^0 - 70^0 = 110^0$

Mà $\widehat{BCD} + \widehat{BCM} = 180^0$ (kề bù) $\Rightarrow \widehat{BCM} = 180^0 - 110^0 = 70^0$.

Câu 7. Đáp án A.



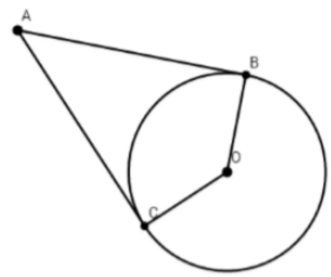
Có $\widehat{AHC} = 90^0$ (CD vuông góc AB); $\widehat{AKC} = 90^0$ (AK vuông góc CF)

$\Rightarrow \widehat{\text{AHC}} + \widehat{AKC} = 180^0 \Rightarrow$ tứ giác AHCK nội tiếp $\Rightarrow$ phương án A đúng, B sai.

$\Rightarrow \widehat{EAO}+\widehat{HCK}=180^0$ (hai góc đối diện$\Rightarrow$phương án C sai.

Xét tam giác vuông ADB có $AH.AB=AD^2$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông) nên phương án D sai.

Câu 8. Đáp án B.



Ta có AB và AC là hai tiếp tuyến cắt nhau$\Rightarrow$ $AB=AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Xét tứ giác ABOC có: $\begin{cases} AB=AC\ \ (cmt) \\ OB=OC\ \ (=R) \end{cases}$ $\Rightarrow$ tứ giác ABOC chưa là hình thoi và không là hình bình hành$\Rightarrow$ đáp án A, D sai.

Có $\widehat{\text{ABO}}=90^0$ (do AB là tiếp tuyến của (O))

$\widehat{\text{ACO}}=90^0$ (do AC là tiếp tuyến của (O))

$\Rightarrow \widehat{\text{ABO}}+\widehat{ACO}=180^0$ $\Rightarrow$ tứ giác ABOC nội tiếp (dhnb).

Câu 9. Đáp án C.

Ta có $\widehat{BCE}=\widehat{DCF}$ (hai góc đối đỉnh). Đặt $x=\widehat{BCE}=\widehat{DCF}$

Theo tính chất góc ngoài tam giác ta có: $\widehat{ABC}=x+40^0\,(1);\widehat{ADC}=x+20^0\,(2)$

Lại có $\widehat{ABC}+\widehat{ADC}=180^0\,(3)$ (hai góc đối diện của tứ giác nội tiếp).

Từ $(1);(2)$ và (3) ta nhận $(x+40^0)+(x+20^0)=180^0 \Rightarrow x=60^0$

Từ (1) ta có $\widehat{ABC}=60^0+40^0=100^0$.

Câu 10. Đáp án D.

Ta có $\widehat{BCE}=\widehat{DCF}$ (hai góc đối đỉnh). Đặt $x=\widehat{BCE}=\widehat{DCF}$

Theo tính chất góc ngoài tam giác ta có: $\widehat{ABC}=x+40^0\,(1);\widehat{ADC}=x+20^0\,(2)$

Lại có $\widehat{ABC}+\widehat{ADC}=180^0\,(3)$ (hai góc đối diện của tứ giác nội tiếp).

Từ $(1);(2)$ và (3) ta nhận được $(x+40^0)+(x+20^0)=180^0 \Rightarrow x=60^0 \Rightarrow \widehat{BCE}=60^\circ$.

Do $\widehat{BCD},\widehat{BCE}$ là hai góc kề bù nên $\widehat{BCD}+\widehat{BCE}=180^0 \Rightarrow \widehat{BCD}=180^0-60^0=120^0$

Ta lại có $\widehat{BAD},\widehat{BCD}$ là hai góc đối diện của tứ giác nội tiếp nên

$\widehat{BAD}+\widehat{BCD}=180^0 \Rightarrow \widehat{BAD}=180^0-120^0=60^0$

Câu 11. Đáp án D.

Ta có $\widehat{BCE}=\widehat{DCF}$ (hai góc đối đỉnh).

Đặt $x=\widehat{BCE}=\widehat{DCF}$

Theo tính chất góc ngoài tam giác ta có: $\widehat{ABC}=x+45^0\,(1);\widehat{ADC}=x+25^0\,(2)$

Lại có $\widehat{ABC}+\widehat{ADC}=180^0\,(3)$ (hai góc đối diện của tứ giác nội tiếp).

Từ $(1);(2)$ và (3) ta nhận được $(x+45^0)+(x+25^0)=180^0 \Rightarrow x=55^0.$

Từ (1) ta có $\widehat{ABC}=55^0+45^0=100^0$.

Câu 12. Đáp án A.

Ta có $\widehat{BCE}=\widehat{DCF}$ (hai góc đối đỉnh).

Đặt $x=\widehat{BCE}=\widehat{DCF}$

Theo tính chất góc ngoài tam giác ta có: $\begin{matrix}\widehat{ABC}=x+45^0\,(1)\\ \widehat{ADC}=x+25^0\,(2)\end{matrix}$

Lại có $\widehat{ABC}+\widehat{ADC}=180^0\,(3)$ (hai góc đối diện của tứ giác nội tiếp).

Từ $(1);(2)$ và (3) ta nhận được $(x+45^0)+(x+25^0)=180^0 \Rightarrow x=55^0 \Rightarrow \widehat{BCE}=55^0$

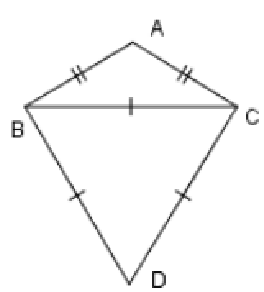
Do $\widehat{BCD},\widehat{BCE}$ là hai góc kề bù nên

$\widehat{BCD}+\widehat{BCE}=180^0 \Rightarrow \widehat{BCD}=180^0-55^0=125^0$

Ta lại có $\widehat{BAD},\widehat{BCD}$ là hai góc đối diện của tứ giác nội tiếp nên

$\widehat{BAD}+\widehat{BCD}=180^0 \Rightarrow \widehat{BAD}=180^0-125^0=55^0$

Câu 13. Đáp án B.



Ta có ΔBCD là tam giác đều nên $\widehat{DCB}=60^0\,(1)$. Mặt khác ΔABC là tam giác cân tại A

có $\widehat{BAC}=120^0$ hơn nữa tổng ba góc trong một tam giác bằng 180^0 nên ta nhận được

$\begin{cases} \widehat{ACB} = \widehat{ABXC} \\ \widehat{ACB} + \widehat{ABC} + \widehat{BAC} = 180^0 \end{cases} \Rightarrow \widehat{ACB} = 30^0 \ (2)$

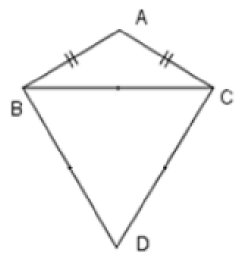
Từ (1) và (2) ta có $\widehat{DCA} = \widehat{DCB} + \widehat{BCA} = 60^0 + 30^0 = 90^0$ (3)

Chứng minh tương tự ta có $\widehat{ABD} = 90^0$ (4)

Từ (3) và (4) ta nhận được $\widehat{ABD} + \widehat{DCA} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Vậy tứ giác $ABDC$ là tứ giác nội tiếp.

Câu 14. Đáp án C.



Theo đề bài ta có $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ABD} + \widehat{ACD} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ mà hai góc $\widehat{ABD}; \widehat{ACD}$ ở vị trí đối nhau nên tứ giác $ABDC$ là tứ giác nội tiếp nên đáp án B đúng.

+ Lại có ΔABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 130^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \dfrac{180^\circ - 130^\circ}{2} = 25^\circ$

+ Ta có $\widehat{BDC} + \widehat{ABC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BDC} = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$

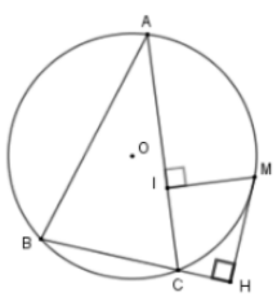
Và $\widehat{BCD} + \widehat{ACB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BCD} = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$

Từ đó suy ra tam giác BCD cân tại D nên đáp án A đúng.

+ Xét tứ giác $ABDC$ nội tiếp nên $\widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{BDC} = 180^\circ - \widehat{BAC} = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$ nên D đúng.

Ta chưa đủ điều kiện để suy ra tứ giác $ABDC$ là hình thoi nên C sai.

Câu 15. Đáp án D.

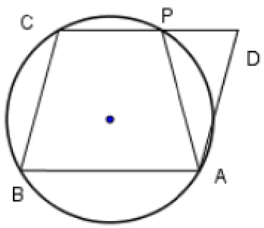


Xét tứ giác $IMHC$ ta có: $\widehat{MIC} = 90^0$ (MI vuông góc với AC); $\widehat{MHC} = 90^0$ (MH vuông góc với BC)

$\Rightarrow \widehat{\text{MIC}}+\widehat{MHC}=180^0 \Rightarrow$ tứ giác $IMHC$ nội tiếp (dhnb).

Và tứ giác $IMHC$ chưa đủ điều kiện để là hình chữ nhật và hình vuông.

Câu 16. Đáp án D.



Do tứ giác $ABCP$ nội tiếp (vì có 4 đỉnh cùng thuộc đường tròn) và $\widehat{BAP},\widehat{BCP}$ là các góc đối nên

$\widehat{BAP}+\widehat{BCP}=180^0$ (1)

Do $ABCD$ là hình bình hành nên $CD//AB$ suy ra

$\widehat{ABC}+\widehat{BCP}=180^0$ (2)

Từ (1) và (2) ta nhận được $\widehat{BAP}=\widehat{ABC}.$

Mặt khác $CP//AB$ nên $ABCP$ là hình thang cân. Đáp án A đúng.

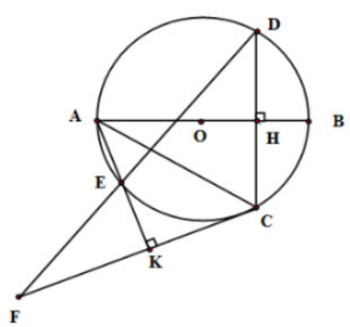
Từ đó ta suy ra $AP=BC\,(3)$ (Đáp án C đúng)

Do $BC=AD$ (vì $ABCD$ là hình bình hành) (4)

Từ (3) và (4) ta suy ra $AP=AD.$ Đáp án B đúng.

Vậy cả ba đáp án A,B,C đều đúng.

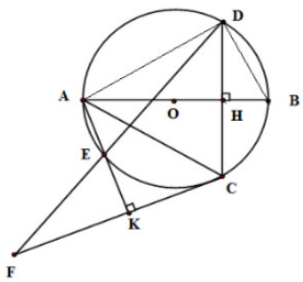
Câu 17. Đáp án A.



Tứ giác $AHCK$ có $\widehat{AHC}=90^\circ\left(AB\perp CD\right);\widehat{AKC}=90^\circ\left(AK\perp FC\right)$

nên $\widehat{AHC}+\widehat{AKC}=180^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $AHCK$ nội tiếp.

Câu 18. Đáp án D.

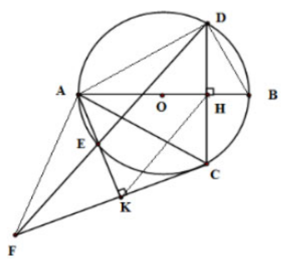


Xét tam giác ADB có $\widehat{ADB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \Delta ADB$ vuông tại D

Do đó $AD^2 = AH.AB$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

Mà $AD \neq BD; AD < AB$ nên phương án A, B, C sai.

Câu 19. Đáp án C.



Xét (O) có $\widehat{EAC} = \widehat{EDC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung)

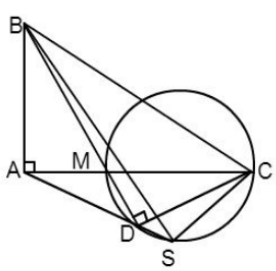
Xét tứ giác nội tiếp $AHCK$ có $\widehat{KAC} = \widehat{KHC}$ nên $\widehat{EDC} = \widehat{KHC} (= \widehat{KAC})$ mà hai góc ở vị trí đồng vị nên $KH / /ED$

Xét tam giác CFD có $KH / /ED$ mà H là trung điểm của DC

(do $AB \perp DC$) nên K là trung điểm của CF

Xét tam giác ACF có AK vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao nên ΔACF cân tại A.

Câu 20. Đáp án D.



+) Ta có: $\widehat{MDC}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính $MC \Rightarrow \widehat{MDC} = 90^0$ (tính chất góc nội tiếp).

Xét tứ giác $ABCD$ ta có:

Góc BAC và góc BDC cùng nhìn đoạn BC dưới góc 90^0.

$\Rightarrow$ $ABCD$ là tứ giác nội tiếp (dhnb) $\Rightarrow$ phương án A đúng.

+) Xét tứ giác $ABCD$ nội tiếp ta có $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ (cùng nhìn đoạn AD $\Rightarrow$ phương án B đúng.

+) Xét đường tròn đường kính MC ta có 4 điểm M, C, D, S cùng thuộc đường tròn.

$\Rightarrow$ Tứ giác $MCSD$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{ADM} = \widehat{SCM}$ (góc ngoài tại 1 đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối diện). (1)

Vì tứ giác $ABCD$ nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{ADB}$ (cùng nhìn đoạn AB) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{ACS}\ (= \widehat{ADB})$

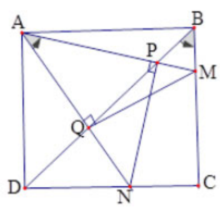
Hay CA là phân giác của $\widehat{SCB} \Rightarrow$ phương án C đúng.

+) Giả sử tứ giác $ABCS$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ASB} = \widehat{BCA}$ (hai góc cùng nhìn đoạn AB).

Mà $\widehat{ACB} = \widehat{BDA};\ \widehat{BAD} \neq \widehat{BSA}$ (xét trong đường tròn đường kính CM)

$\Rightarrow \widehat{ASB} \neq \widehat{BCA} \Rightarrow$ tứ giác $ABCS$ không là tứ giác nội tiếp

Câu 21. Đáp án A.

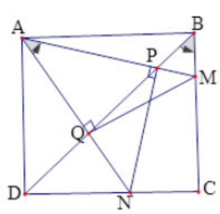


Xét hình vuông $ABCD$ có $\widehat{DBC} = \widehat{BDC} = 45^\circ$ (tính chất)

Xét tứ giác $ABMQ$ có $\widehat{QAM} = \widehat{QBM} = 45^\circ$ mà hai đỉnh A và B cùng nhìn đoạn thẳng MQ nên $ABMQ$ là tứ giác nội tiếp.

Xét tứ giác $APND$ có $\widehat{PAN} = \widehat{PDN} = 45^\circ$ mà hai đỉnh A và D cùng nhìn đoạn thẳng PN nên $APND$ là tứ giác nội tiếp.

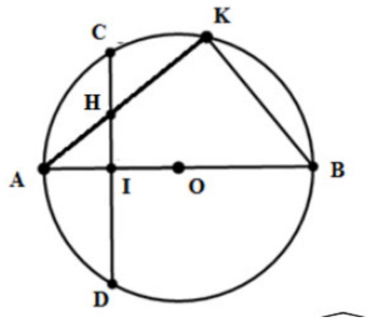
Câu 22. Đáp án B.



Từ kết quả câu trước ta suy ra $\widehat{ADP} = \widehat{ANP} = 45^0, \widehat{QAM} = \widehat{QBM} = 45^0$

$\Rightarrow NP \perp AM, MQ \perp AN$ Tập hợp các điểm P, Q, C nhìn đoạn MN dưới một góc vuông, nên các điểm này nằm trên đường tròn đường kính MN .

Câu 23. Đáp án A.



Ta có: $\widehat{AKB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O) $\Rightarrow \widehat{AKB} = 90^0 (t / c)$. Xét tứ giác $HKBI$ ta có

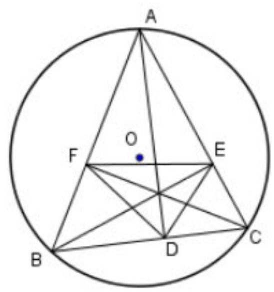
$$\begin{cases} \widehat{HKB} = 90° \\ \widehat{HIB} = 90° \; (do\, CD \perp AB = \{I\}) \end{cases} \Rightarrow \widehat{HKB} + \widehat{HIB} = 180°$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BKHI$ là tứ giác nội tiếp (dhnb) $\Rightarrow$ phương án A đúng, phương án B sai.

Lại có $\widehat{KBA} < 90^0$ do ΔAKB vuông tại $K \Rightarrow KBIH$ không là hình chữ nhật.

$\Rightarrow$ phương án C sai.

Câu 24. Đáp án C.



Do AD, BE là các đường cao nên $\widehat{HDC} = \widehat{HEC} = 90^0$.

Do đó $\widehat{HDC} + \widehat{HEC} = 90^0 + 90^0 = 180^0$. Vậy tứ giác $DCEH$ là tứ giác nội tiếp.

Các góc $\widehat{HED}, \widehat{HCD}$ cùng chắn cung HD nên

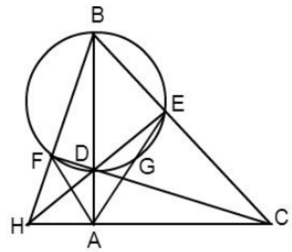
$\widehat{HED} = \widehat{HCD}\,(1)$. Xét hai tam giác $\Delta BDE, \Delta BHC$ có

$\widehat{HED} = \widehat{HCD}$ (theo (1)) và góc $\widehat{EBC}$ chung.

Do đó $\Delta BDE \sim \Delta BHC$. Từ đó ta nhận được $\dfrac{BD}{BH} = \dfrac{BE}{BC} \Rightarrow BH.BE = BC.BD$. Đáp án A đúng.

Chứng minh tương tự ta có $CH.CF = CD.CB$. Đáp án B đúng.

Câu 25. Đáp án C.



+) Xét đường tròn đường kính BD có góc BED là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $\Rightarrow \widehat{BED}=90^0$.

Xét ΔABC và ΔBED ta có: $\widehat{DBE}\ chung$ và $\widehat{DEC}+\widehat{DAC}=90^0+90^0=180^0$ $\Rightarrow$ phương án A đúng.

+) Xét tứ giác $ADEC$ có: $\widehat{DEC}+\widehat{DAC}=90^0+90^0=180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ADEC$ là tứ giác nội tiếp (dhnb)$\Rightarrow$ Đáp án B đúng.

+) Chứng minh tương tự ta được tứ giác $AFBC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow$ phương án C sai.

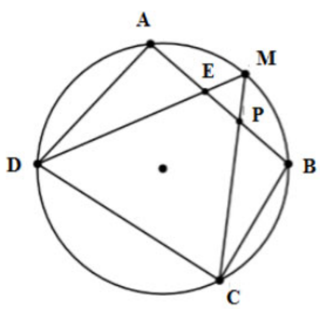
+) Gọi giao điểm của BF và AC là H.

Xét tam giác BHC có hai đường cao CF và BA cắt nhau tại $D \Rightarrow$ D là trực tâm của tam giác BHC

Mà $DE\perp AB \Rightarrow DE$ là đường cao của tam giác BHC hay H,E,D thẳng hàng.

$\Rightarrow DE, AC$ và BF đồng quy tại H $\Rightarrow$ phương án D đúng.

Câu 26. Đáp án A.



Theo đề bài ta có: M là điểm chính giữa cung AB nên $\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MB}$

Xét đường tròn (O) có:

+) $\widehat{MCD}$ là góc nội tiếp chắn cung $DM \Rightarrow \widehat{MCD}=\dfrac{1}{2}s\text{đ}\overset{\frown}{DM}$. (1)

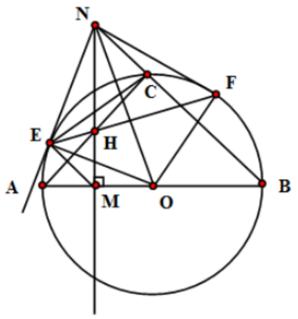
+) $\widehat{AED}$ là góc có đỉnh nằm trong đường tròn chắn cung MB và cung AD

$$\Rightarrow \widehat{MCD}=\frac{1}{2}\left(s\text{đ}\overset{\frown}{AD}+s\text{đ}\overset{\frown}{MB}\right)=\frac{1}{2}\left(s\text{đ}\overset{\frown}{AD}+s\text{đ}\overset{\frown}{MA}\right)=\frac{1}{2}s\text{đ}\overset{\frown}{DM}\ (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{MCD}=\widehat{AED}=\dfrac{1}{2}s\text{đ}\overset{\frown}{DM}$.

Xét tứ giác DEPC có: $\widehat{MCD}=\widehat{AED}\ (cmt)$ $\Rightarrow$ $PEDC$ nội tiếp (góc ngoài của một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện).

Câu 27. Đáp án D.



+) Vì $\widehat{NEO} = \widehat{NMO} = 90^\circ \Rightarrow NEMO$ là tứ giác nội tiếp nên bốn điểm O, E, M, N cùng thuộc một đường tròn

$\Rightarrow$ Phương án A đúng.

+) $\widehat{NEC} = \widehat{CBE} = \dfrac{1}{2}$ số đo cung $CE \Rightarrow \Delta NEC \backsim \Delta NBE (g-g) \Rightarrow \dfrac{NE}{NB} = \dfrac{NC}{NE}$

$\Rightarrow NB.NC = NE^2 \Rightarrow$ Phương án B đúng.

+) Hai tam giác vuông $\Delta NCH \backsim \Delta NMB (g-g) \Rightarrow \dfrac{NC}{NM} = \dfrac{NH}{NB}$

$\Rightarrow \dfrac{NC}{NM} = \dfrac{NH}{NB} \Rightarrow NC.NB = NH.NM$

Từ đó $\Delta NEH \backsim \Delta NME (c-g-c) \Rightarrow \widehat{NEH} = \widehat{EMN} \Rightarrow$ Phương án C đúng.

+) $\widehat{EMN} = \widehat{EON}$ (tứ giác $NEMO$ nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{NEH} = \widehat{NOE}$

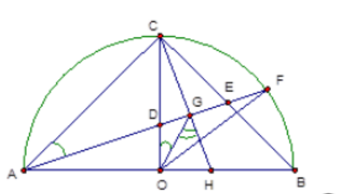
Mà góc ENO phụ với góc EON nên góc EON cũng phụ với góc $NEH \Rightarrow EH \perp NO$

$\Rightarrow \Delta OEF$ cân có ON là phân giác

$\Rightarrow \widehat{EON} = \widehat{NOF} \Rightarrow \widehat{NEF} = \widehat{NOF}$ nên tứ giác $NEOF$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{NFO} = 180^\circ - \widehat{NEO} = 90^\circ \Rightarrow$ Phương án D sai.

Câu 28. Đáp án A.



Theo giả thiết ta có $OC \perp AB, CG \perp AG$ nên ta suy ra $\widehat{AOC} = \widehat{AGC} = 90^0$.

Nói cách khác O, G cùng nhìn AC dưới một góc vuông.

Do đó tứ giác $ACGO$ nội tiếp đường tròn đường kính AC nên $\widehat{OGA} = \widehat{OCA}$.

Mà ΔOAC vuông cân tại O nên $\widehat{OCA} = 45^0$. Suy ra $\widehat{OGA} = 45^0$. Ta lại có

$\widehat{OGH} + \widehat{OGA} = \widehat{HGA} = \widehat{AGC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{OGH} = 90^0 - \widehat{OGA} = 90^0 - 45^0 = 45^0$.

Do đó $\widehat{OGH} = 45^0$.

Câu 29. Đáp án B.

Do tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O, nên ta có

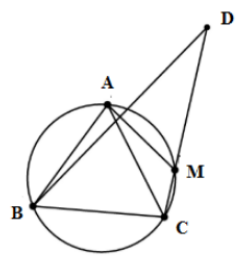
$\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$ (cùng chắn cung CD).

Do đó ta có $\widehat{CAD} = 40^0$. Tổng ba góc trong một tam giác bằng 180^0

Nên: $\widehat{CAD} + \widehat{ACD} + \widehat{ADC} = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{ADC} = 180^0 - (\widehat{CAD} + \widehat{ACD}) = 180^0 - (40^0 + 60^0) = 80^0$.

Câu 30. Đáp án A.



Xét tam giác ABC cân tại A và $\hat{A} = 60^0 \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = \dfrac{180^0 - \hat{A}}{2} = \dfrac{180^0 - \partial}{2} = 90^0 - \dfrac{\partial}{2}$.

Ta có tứ giác $AMCB$ là tứ giác nội tiếp (4 điểm A, M, B, C cùng thuộc (O)).

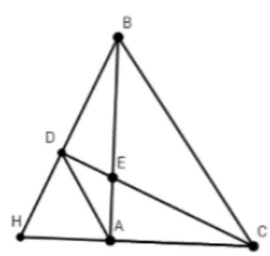
$\Rightarrow \widehat{AMC} = 180^0 - \widehat{ABC} = 180^0 - \left(90^0 - \dfrac{\partial}{2}\right) = 90^0 + \dfrac{\partial}{2} \Rightarrow \widehat{DMA} = \widehat{ABC} = 90^0 - \dfrac{\partial}{2}$

(tính chất tứ giác nội tiếp).

Gọi I là giao điểm của AM và $BD \Rightarrow \Delta DMI$ vuông tại I.

$\Rightarrow \widehat{BDM} = 90^0 - \widehat{AMD} = 90^0 - \left(90^0 - \dfrac{\partial}{2}\right) = \dfrac{\partial}{2}$.

Câu 31. Đáp án A.



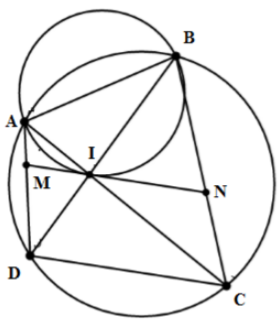
Xét tứ giác ACBD ta có: $\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = 90^0$ và cùng nhìn đoạn BC.

$\Rightarrow$ Tứ giác ACBD là tứ giác nội tiếp (dhnb).

$\Rightarrow \widehat{BDA} + \widehat{BCA} = 180^\circ$
$\Leftrightarrow \widehat{BDA} = 180^0 - \widehat{BCA} = 180^0 - 30^0 = 150^0.$

Có góc $\widehat{HDA}$ và $\widehat{BDA}$ kề bù nên $\widehat{HDA} = 180^0 - \widehat{BDA} = 30^0$.

Câu 32. Đáp án C.



Xét đường tròn ngoại tiếp tam giác ABI ta có: $\widehat{BAI}$ là góc nội tiếp chắn cung BI.

$\widehat{BIN}$ là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn cung BI.

$\Rightarrow \widehat{BAI} = \widehat{BIN}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung BI).

Xét đường tròn (O) ta có: $\widehat{BDC} = \widehat{BAC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BC).

$\Rightarrow \widehat{BIN} = \widehat{BDC} (= \widehat{BAC})$ Lại có hai góc này ở vị trí đồng vị

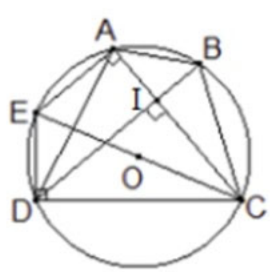
$\Rightarrow IN//CD \ hay \ MN//CD \left(dpcm\right).$ $\Rightarrow$ đáp án A đúng.

+) Xét tứ giác ABNM ta có: $\widehat{BAI} = \widehat{BIN}(cmt) \Rightarrow$ tứ giác ABNM là tứ giác nội tiếp (góc ngoài tại 1 đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối diện).

$\Rightarrow$ Đáp án B đúng.

+) Ta có: $IN//CD \left(cmt\right) \Rightarrow INCD$ là hình thang $\Rightarrow$ đáp án D đúng.

Câu 33. Đáp án B.



Vẽ đường kính CE của đường tròn (O)

Ta có $\widehat{EAC} = 90^0, \widehat{EDC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn đường kính EC).

Từ đó ta có $AE \perp AC.$ Mặt khác theo giả thiết $AC \perp BD.$ Kéo theo $AE//BD.$ Vậy $AEDB$ là hình thang.

Do hình thang $AEDB$ nội tiếp (O) nên nói phải là hình thang cân.

Kéo theo $AB = DE$ (các cạnh bên hình thang cân).

Từ đó ta có $AB^2 + CD^2 = DE^2 + DC^2 = EC^2 = (2a)^2 = 4a^2$ (do ΔEDC vuông tại D).

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho (AB^2, BD^2) ta có

$$AB^2 + BD^2 \geq 2AB.CD \Rightarrow 2(AB^2 + BD^2) \geq AB^2 + BD^2 + 2AB.CD$$
$$= (AB + CD)^2.$$

Kéo theo $(AB + CD)^2 \leq 2(4a^2) = 8a^2 \Rightarrow AB + CD \leq 2\sqrt{2}a.$

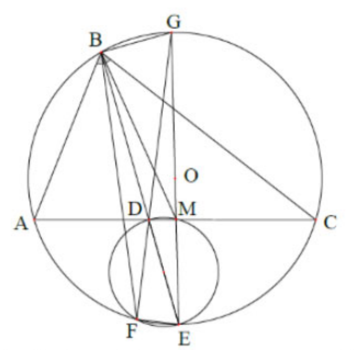
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $AB = CD.$

Xét tam giác $\Delta ABI, \Delta DCI$ có $AB = CD,$ $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AD),

$\widehat{BAC} = \widehat{DCB}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BC). Do đó $\Delta ABI = \Delta DCI (g.c.g.)$ Kéo theo $AI = ID, IB = IC.$

Suy ra $AC = AI + IC = ID + IB = BD.$

Câu 34. Đáp án A.



Gọi M là trung điểm của $AC.$ Do E là điểm chính giữa cung AC nên $EM \perp AC.$

Do đó EM đi qua tâm của đường tròn $(O).$ Giả sử rằng $\widehat{DFE} = 90^0,$ nên

$\widehat{GFE} = 90^0,$ hay GE là đường kính của $(O).$ Suy ra G, M, E thẳng hàng.

Vì vậy $\widehat{GBE} = 90^0,$ mà $\widehat{GMD} = 90^0.$

Kéo theo tứ giác $BDMG$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính $GD.$

Vì vậy $\widehat{MBD} = \widehat{DGM} = \widehat{FGE}$ (1) (cùng chắn cung DM)

Lại có tứ giác $BFEG$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{FBE} = \widehat{FGE}$ (2) (cùng chắn cung FE).

Từ (1) và (2) ta suy ra $\widehat{MBD} = \widehat{FBE}.$ Do đó BF và BM đối xứng nhau qua $BD.$ Vì vậy $M \equiv N$ hay N là trung điểm của AC nên $AN = NC$.

D.PHIẾU BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ các đường kính AC và AD

a) Chứng minh rằng B, C, D thẳng hàng

b) Đường thẳng d di động qua A cắt $(O), (O')$ lần lượt tại E, F (E, F khác A, A nằm giữa E, F)

1) Chứng minh rằng $\Delta BEF \backsim \Delta ACD$

2) Xác định vị trí d để chu vi tam giác BEF lớn nhất, diện tích tam giác BEF lớn nhất.

Bài 2: AB, BC, CA là ba dây cung của đường tròn (O). Từ trung điểm M của cung AB ta vẽ dây $MN \parallel BC$. Gọi S là giao điểm của MN và AC.

Chứng minh rằng $SM = SC$ và $SN = SA$.

Bài 3: Cho đường tròn (O), hai đường kính AB, CD vuông góc nhau. M là điểm trên cung AC, tiếp tuyến tại M cắt CD tại E.

Chứng minh rằng $\widehat{MED} = 2\widehat{MBA}$.

Bài 4: Cho điểm A ở ngoài đường tròn $(O; R)$. Vẽ các cát tuyến ABC, ADE đến đường tròn $(B, C, D, E \in (O))$

Chứng minh rằng $AB.AC = AD.AE = OA^2 - R^2$

Bài 5: Cho điểm A nằm trong đường tròn $(O; R)$ (A khác O). BC, DE là hai dây cung qua A.

Chứng minh rằng: $AB.AC = AD.AE = R^2 - OA^2$

Bài 6: Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$ có đường cao AH và đường phân giác AD cắt đường tròn (O) ở E. Vẽ đường kính AF. I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Chứng minh rằng:

a) $\Delta HAB \backsim \Delta CAF$

b) $S_{ABC} = \dfrac{AB.AC.BC}{4R}$

c) $\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{AC}{\sin B}$

d) $EB = EI = EC$

e) $AB.AC - DB.DC = AD^2$

Bài 7: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. M là điểm nằm trên cung nhỏ BC. Trên đoạn thẳng MA lấy điểm D sao cho $MD = MB$.

a) Chứng minh rằng ΔMBD đều

b) Chứng minh $MA = MB + MC$

c) Xác định vị trí điểm M để $MA + MB + MC$ lớn nhất, nhỏ nhất

Bài 8: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. D, E, F lần lượt là chính giữa của các cung AB, BC, CA. DE và EF cắt AB và AC lần lượt ở M, N

Chứng minh rằng:

a) $MN \parallel BC$

b) MN đi qua tâm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC

Bài 9: Từ một điểm A ở ngoài đường tròn (O) kẻ các tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (O). Qua điểm X thuộc dây BC, kẻ đường thẳng KL vuông góc XO. (K và L lần lượt) nằm trên AB và AC).

Chứng minh $KX = LX$.

Bài 10: Trên cạnh CD của hình vuông $ABCD$, lấy một điểm M, vẽ đường tròn tâm O đường kính AM. Gọi E là giao điểm của đường tròn tâm (O') đường kính CD. Hai đường tròn cắt nhau tại điểm thứ hai N. Tia DN cắt BC tại P. Chứng minh rằng:

a) Ba điểm E, N, C thẳng hàng

b) $CA \perp MP$

Bài 11: Cho đường tròn (O), M là điểm ở ngoài (O), hai tiếp tuyến MA và MB (A, B là hai tiếp tuyến), C là một điểm trên đường tròn tâm M bán kính MA và nằm trong đường tròn (O). Các tia AC và BC cắt đường tròn (O) lần lượt tại E và D.

Chứng minh ba điểm D, O, E thẳng hàng.

Bài 12: Cho tam giác đều ABC, đường cao AH. Trên cạnh BC lấy một điểm M hạ $MP \perp AB$ và $MQ \perp AC$. Gọi O là trung điểm của AM.

a) Chứng minh năm điểm A, P, M, H, Q cùng thuộc một đường tròn

b) Tứ giác $OPHQ$ là hình gì? Chứng minh.

c) Xác định vị trí điểm M trên BC để PQ nhỏ nhất.

Bài 13: Cho đường tròn (O) và điểm P cố định ở bên trong đường tròn (khác O). Hai dây AD và CD thay đổi qua P và vuông góc với nhau. M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC.

Chứng minh rằng: MN luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 14: Trên các cạnh AB, BC của tam giác ABC dựng ra phía ngoài tam giác các hình vuông ACA_1A_2 và BCB_1B_2. Chứng minh rằng các đường thẳng AB_1, A_1B, A_2B_2 đồng quy.

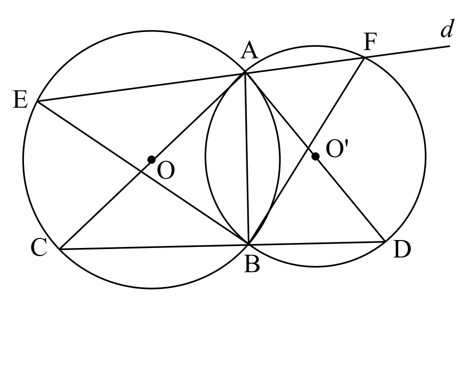
Bài 15: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AC, một dây AB cố định, M là điểm bất kỳ thuộc cung AB. Gọi K là trung điểm của đoạn MB. Từ K hạ $KB \perp AM$.

a) Chứng minh rằng: khi M di động trên AB thì đường thẳng KP luôn đi qua một điểm cố định.

b) Tìm quỹ tích các điểm K khi M di động trên cung AB.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:



a) $\widehat{ABC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow AB \perp BC$

Tương tự có $AB \perp BD$

Suy ra B, C, D thẳng hàng.

b) 1) Xét ΔBEF và ΔACD có:

$\widehat{BEF} = \widehat{ACD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB

của đường tròn (O))

$\widehat{BEF} = \widehat{ACD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB

của đường tròn (O'))

Do đó $\Delta BEF \backsim \Delta ACD$

2) * $\Delta BEF \backsim \Delta ACD$

$\Rightarrow \dfrac{CV(BEF)}{CV(ACD)} = \dfrac{BE}{AC}$

$\Rightarrow CV(BEF) = \dfrac{CV(ACD)}{AC}.BE$, $\dfrac{CV(ACD)}{AC}$ không đổi

Do đó: $CV(BEF)$ lớn nhất

$\Leftrightarrow BE$ lớn nhất

$\Leftrightarrow BE$ là đường kính của đường tròn (O)

$\Rightarrow \widehat{BAE} = 90^0 \Leftrightarrow d \perp AB$ tại A

Vậy khi d vuông góc với AB tại A thì chu vi tam giác BEF lớn nhất.

* $\Delta BEF \backsim \Delta ACD \Rightarrow \dfrac{S_{BEF}}{S_{ACD}} = \left(\dfrac{BE}{AC}\right)^2$

$\Rightarrow S_{BEF} = \dfrac{S_{ACD}}{AC^2}.BE^2$, $\dfrac{S_{ACD}}{AC^2}$ không đổi

S_{BEF} lớn nhất $\Leftrightarrow BE^2$ lớn nhất

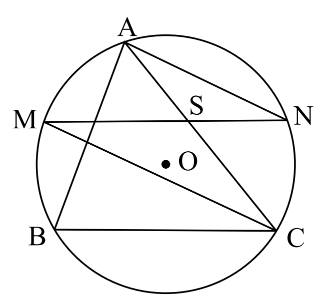
$\Leftrightarrow BE$ lớn nhất

$\Leftrightarrow BE$ là đường kính của đường tròn (O)

$\Leftrightarrow \widehat{BAE} = 90^0 \Leftrightarrow d \perp AB$ tại A

Vậy khi d vuông góc với AB tại A thì diện tích tam giác BEF lớn nhất.

Bài 2:



Ta có: $MN \parallel BC$ (gt)

$\Rightarrow \overset{\frown}{MB} = \overset{\frown}{NC}$

Mà $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$ (gt)

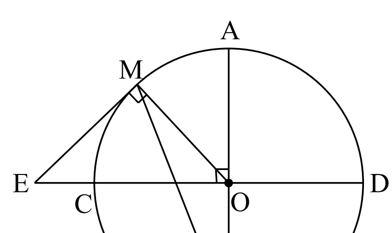
Do đó: $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{NC}$

Suy ra: $\widehat{ACM} = \widehat{NMC}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Do đó ΔSMC cân tại $S \Rightarrow SM = SC$

Chứng minh tương tự cũng có $SN = SA$.

Bài 3:



$\widehat{MBA}$ là góc nội tiếp; $\widehat{MBA} \leq 90^0$

$\Rightarrow \widehat{MBA} = \dfrac{1}{2}\widehat{MOA}$

$\Rightarrow \widehat{MOA} = 2\widehat{MBA}$

Mà $\widehat{MOA} = \widehat{MED}$ (hai góc cùng phụ với góc EOM)

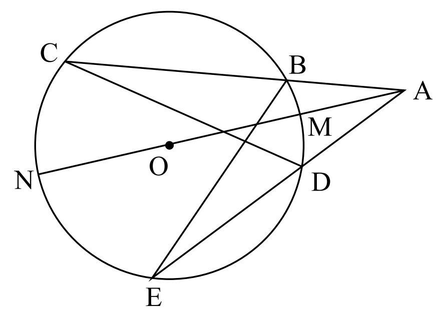
Do đó: $\widehat{MED} = 2\widehat{MBA}$.

Bài 4:

Xét $\Delta\widehat{ACD}$ và $\Delta\widehat{ABE}$ có

$\widehat{CAD}$ chung

$\widehat{ACD} = \widehat{AEB}$ (Hai góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{BD}$)



Do đó $\Delta ACD \backsim \Delta AEB$

$\Rightarrow \dfrac{AC}{AE} = \dfrac{AD}{AB}$

$\Rightarrow AB.AC = AD.AE$

OA cắt đường tròn (O) tại M, N (M nằm giữa O và A)

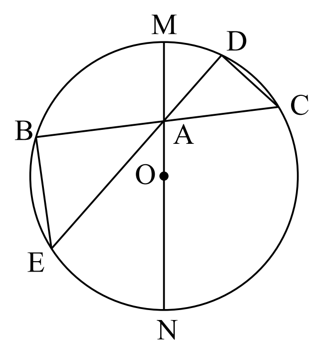
Chứng minh tương tự trên có: $AB.AC = AM.AN$

Mà $AM.AN = (OA - MA).(OA + ON)$

$= (OA - R)(OA + R) = OA^2 - R^2$.

Bài 5:

Xét ΔACD và ΔAEB có:



$\widehat{ACD} = \widehat{AEB}$ (Hai góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{BD}$)

$\widehat{ACD} = \widehat{EAB}$ (đối đỉnh)

Do đó $\Delta ACD \backsim \Delta AEB$

$\Rightarrow \dfrac{AC}{AE} = \dfrac{AD}{AB}$

$\Rightarrow AB.AC = AD.AE$

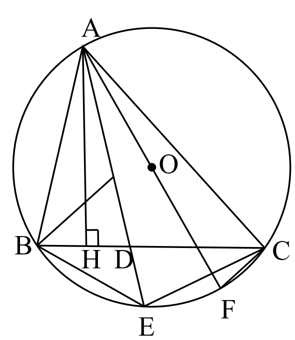
AO cắt đường tròn (O) tại M, N (A nằm giữa O và M)

Chứng minh tương tự trên có: $AB.AC = AM.AN$

Mà $AM.AN = (OM - OA).(ON + OA)$

$= (R - OA)(R + OA) = R^2 - OA^2$.

Bài 6:



a) $\widehat{ACF} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét ΔHAB và ΔCAF có:

$\widehat{AHB} = \widehat{ACF} (= 90^0)$

$\widehat{HBA} = \widehat{CFA}$ (Hai góc nội tiếp chắn cung AC)

Do đó $\Delta HAB \backsim \Delta CAF$

b) $\Delta HAB \backsim \Delta CAF$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AF} = \dfrac{AH}{AC}$ E

$\Rightarrow AH = \dfrac{AB.AC}{AF} = \dfrac{AB.AC}{2R}$

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AH.BC = \dfrac{AB.AC.BC}{4R}$

a) ΔACF vuông tại C, ta có: $AC = AF\sin\widehat{AFC}$

$AC = 2R\sin B$ (vì $\widehat{AFC} = \widehat{B}$)

$\Rightarrow \dfrac{AC}{\sin B} = 2R$

Chứng minh tương tự có: $\dfrac{AC}{\sin C} = \dfrac{BC}{\sin A} = 2R$

Do đó: $\dfrac{AC}{\sin C} = \dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{AC}{\sin B}$

b) $\widehat{BAE} = \widehat{EAC} \Rightarrow \widehat{BEB} = EC \Rightarrow EB = EC$

Mặt khác: $\widehat{BIE} = \widehat{BAI} + \widehat{BAI}$ (BIE là góc ngoài của tam giác ABI)

$\widehat{IBE} = \widehat{EBC} + \widehat{CBI}$

$\widehat{IBE} = \widehat{EBC}, \widehat{ABI} = CBI$

Do đó: $\widehat{BIE} = \widehat{IBE} \Rightarrow \Delta\widehat{EIB}$ cân tại $E \Rightarrow EB = EI$

Do đó: $EB = EI = EC$

c) Xét ΔABD và ΔAEC có:

$\widehat{BAD} = \widehat{EAC}, \widehat{ABD} = \widehat{AEC}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AC}$)

Do đó $\Delta ABD \backsim \Delta AEC$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AD}{AC} \Rightarrow AB.AC = AD.AE$

Xét ΔDAB và ΔDCE có:

$\widehat{ABD} = \widehat{CDE}$ (đối đỉnh)

$\widehat{DAB} = \widehat{DCE}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{BE}$)

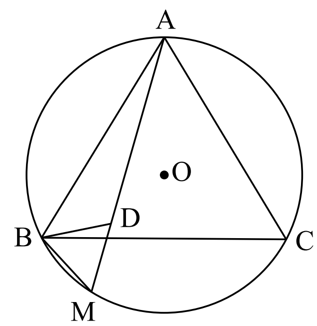
Do đó $\Delta DAB \backsim \Delta DCE$

$\Rightarrow \dfrac{AD}{DC} = \dfrac{DB}{DE} \Rightarrow DB.DC = AD.DE$

Do đó $AB.AC - DB.DC = AD.AE - AD.DE$

$= AD(AE - DE) = AD^2$.

Bài 7:



a) $\Delta BMD = \widehat{BCA} = 60^0$

(Hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset\frown{AB}$)

ΔMBD cân tại M (vì $MB = MD$) (gt)

Có $\widehat{BMD} = 60^0 \Rightarrow \Delta MBD$ đều

b) ΔMND đều $\Rightarrow MB = BD = MD, \widehat{MBD} = 60^0$

Xét ΔMBC và ΔDBA có:

$MB = BD$,

$BC = BA$ (ΔABC đều)

$\widehat{MBC} = \widehat{DBA} (= 60^0 - \widehat{ABC})$

Do đó: $\Delta MBC = \Delta DBA$ (c.g.c) $\Rightarrow MC = DA$

Ta có: $MA - MC = MD + DA = MA$

c) $MA = MB + MC$

Do đó $MA + MB + MC = 2MA$

$MA + MB + MC$ lớn nhất

$\Leftrightarrow MA$ lớn nhất

$\Leftrightarrow MA$ là đường kính của đường tròn (O)

$\Leftrightarrow M$ là trung điểm của BC

Vậy khi M là trung điểm của BC thì:

$MA + MB + MC$ lớn nhất

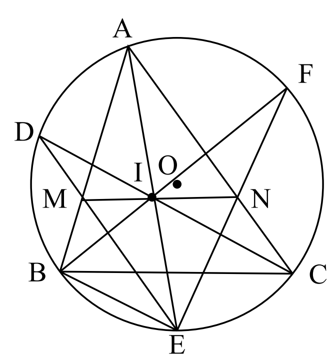
Mặt khác, xét ba điểm M, B, C có: $MB + MC \geq BC$

Do đó: $MA + MB + MC = 2(MB + MC) \geq 2BC$, không đổi

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv B$ hoặc $M \equiv C$

Vậy khi M trùng B hoặc $M \equiv C$ thì $MA + MB + MC$ nhỏ nhất

Bài 8:



a) $\overset\frown{AD} = \overset\frown{DB}$ (gt) $\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{BED}$

Xét ΔEAB có EM là đường phân giác nên:

$\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{AE}{BE}$ (1)

Tương tự: $\dfrac{NA}{NC} = \dfrac{AE}{CE}$ (2)

Mà $BE = CE$ (vì $BE = CE$)(3)

Từ (1), (2) và (3) có: $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{NA}{NC}$

Xét ΔABC có $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{NA}{NC}$, theo định luật Ta-lét đảo có $MN \parallel BC$

b) Gọi I là giao điểm BF và CD ta có I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

ΔEBI cân tại E có ED là đường phân giác nên là đường trung trực của BI.

$\Rightarrow MI = MB \Rightarrow \Delta MBI$ cân tại M $\Rightarrow \widehat{MIB}=\widehat{MBI}$

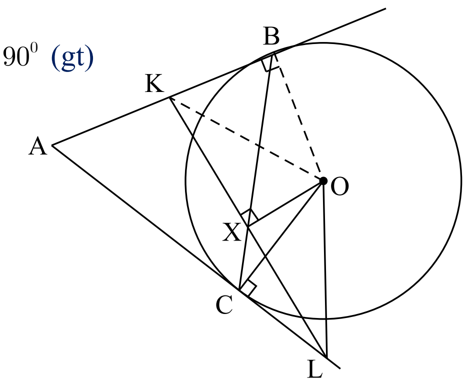
Mà $\widehat{MBI}=\widehat{IBC}$

Nên $\widehat{MIB}=\widehat{IBC} \Rightarrow MI \parallel BC$

Ta có $MI \parallel BC, MN \parallel BC \Rightarrow M, I, N$ thẳng hàng.

Vậy MN đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Bài 9:



Ta có: $\widehat{ABO}=90^0$ (AB là tiếp tuyến của (O)) và $\widehat{KXO}=90^0$ (gt)

$\Rightarrow X$ và B nằm trên đường tròn đường kính OK

$\Rightarrow \widehat{OBX}=\widehat{OKX}$ (góc nội tiếp cùng chắn một cung)

Chứng minh tương tự:

$\widehat{OLX}=\widehat{OCX}$ lại có ΔOBC cân $(OB=OC)$

$\Rightarrow \widehat{OBX}=\widehat{OCX}$

Vậy: $\widehat{OKX}=\widehat{OLX}$

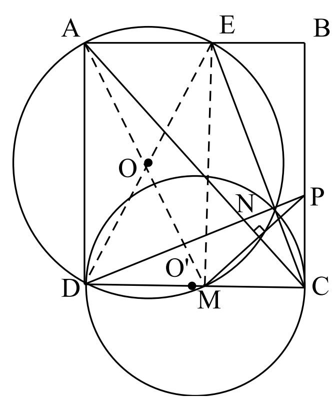
$\Rightarrow \Delta OKL$ cân có OX là đường cao cũng là đường trung tuyến

Vậy $KX = LX$.

Bài 10:

a) Ta có D là giao điểm thứ nhất của (O) và (O')

Dễ thấy $AEMD$ là hình chữ nhật và ED là đường kính của (O)



Nên $\widehat{END}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa cung đường tròn)

Mặt khác CD là đường kính của (O')

nên $\widehat{DNC}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{END}+\widehat{DNC}=180^0$ hay ba điểm

E, N, C thẳng hàng.

Ta có $AEMD$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow AECM$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow \widehat{EB}=\widehat{CM}$ (1)

Xét ΔCBE và ΔCDP có

$BCE = CDP$ (hai góc cùng phụ với góc DPC)

$CB = DC; B = C = 90^0$ (gt)

Do đó: $\Delta CBE = \Delta DCP$ (g.c.g)

$\Rightarrow EB = CP$ (2)

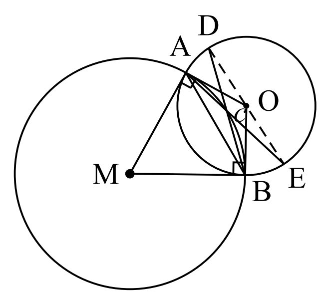
Từ (1) và (2)

$\Rightarrow CM = CP$ hay ΔPCM cân có CA là đường phân giác

$\Rightarrow CA$ cũng đồng thời là đường cao.

Vậy $CA \perp MP$.

Bài 11:



Trong đường tròn (O) ta có: $\widehat{ABD} = \frac{1}{2}\widehat{AOD}$

Mặt khác trong đường tròn (M) có:

$\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{AMC}$ (góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm cùng chắn một cung).

$\Rightarrow \widehat{AMC} = \widehat{AOD}$ (1)

Tương tự ta có: $\widehat{BMC} = \widehat{BOE}$ (2)

Do MA và MB là tiếp tuyến của (O) nên:

$\widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90^0$

Hay $\widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{AMB} + \widehat{AOB} = 180^0$

Hay $\widehat{AMC} + \widehat{BMC} + \widehat{AOB} = 180^0$ (3)

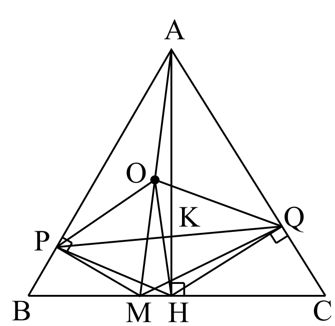
Từ (1), (2) và (3) ta có: $AOD + BOE + AOB = 180^0$

Vậy ba điểm D, O, E thẳng hàng.

Bài 12:

a) Ta có: $\widehat{APM} = \widehat{AHM} = \widehat{AQM} = 90^0$

$\Rightarrow$ Ba điểm P, H, Q nằm trên đường tròn đường kính AM hay năm điểm A, P, M, H, P cùng thuộc một đường tròn.



b) ΔAPM vuông có PO là đường trung tuyến

$\Rightarrow PO = AO = MO$

ΔAQM có QO là đường trung tuyến

$\Rightarrow QO = AO = MO \Rightarrow PO = QO$

Trong ΔAHM vuông có: HO là đường trung tuyến

$\Rightarrow HO = AO = MO$

Từ đó: $HO = PO$

Do A, P, M, H cùng thuộc đường tròn tâm O.

Nên $\widehat{POH} = 2\widehat{PAH}$ (góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm)

Mà $\widehat{PAH} = 30^0$ (ΔABC đều, AH là đường cao nên vừa là đường phân giác)

Do đó: $\widehat{POH} = 2.30^0 = 60^0$

ΔPOH có $PO = HO$ và $\widehat{POH} = 60^0$

Nên ΔPOH đều $\Rightarrow PO = PH$

Chứng minh tương tự ta có: ΔQOH đều và $QO = QH$

Tứ giác $OPQH$ có các cạnh liên tiếp bằng nhau

$OP = PH = HQ = QO$ nên là hình thoi.

c) Nối P và Q ta có:

$PQ \perp OH$ tại K và $KP = KQ = \dfrac{PQ}{2}$

$KO = KH = \dfrac{OH}{2}$ (Do tính chất đường chéo hình thoi)

ΔPKO vuông theo định lí Py-ta-go ta có:

$PK^2 = PO^2 - KO^2 = \left(\dfrac{AM}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{AM}{4}\right)^2$

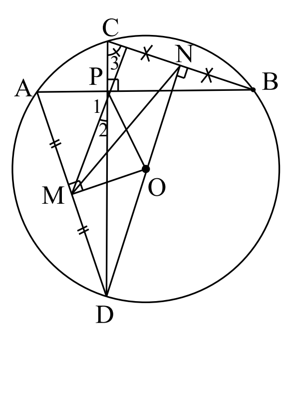
$= \dfrac{1}{4}AM^2 - \dfrac{1}{16}AM^2 = \dfrac{3}{16}AM^2$

$\Rightarrow PK = \dfrac{\sqrt{3}}{4}AM \Rightarrow PQ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AM \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}AH$ không đổi

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv H$

Vậy PQ nhỏ nhất khi $M \equiv H$.

Bài 13:



Giả sử PM cắt CB tại M'

Ta có: $\widehat{BCD} = \widehat{BDA}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BD}$)

$\widehat{PAM} = \widehat{P_1}$ (ΔAMP cân vì $MP = MA = MD$)

Do đó: $\widehat{BCD} = \widehat{P_1}$

Ta còn có: $\widehat{P_2} = \widehat{P_3}$ (đối đỉnh)

Mà $\widehat{P_1} + \widehat{P_2} = 1v \Rightarrow \widehat{C} + \widehat{P_3} = 90^0$ hay $MP \perp CB$

Mặt khác: $ON \perp CB$ (đường kính qua trung điểm của dây cung)

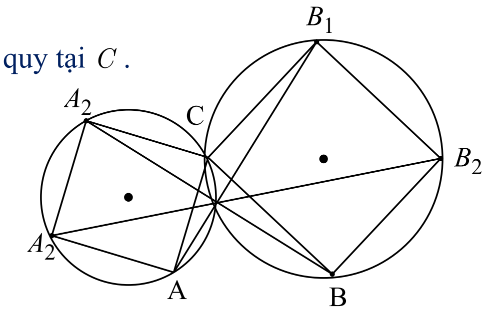
Vậy $MP \parallel ON$

Tương tự: $NP \parallel OM$

Do vậy tứ giác $PMON$ là hình bình hành

$\Rightarrow OP$ và MN cắt nhau tại trung điểm I của PO hay MN đi qua I cố định.

Bài 14:



- *Trường hợp 1:* $\widehat{C} = 90^0$. Rõ ràng AB_1, A_1B, A_2B_2 đồng quy tại C.
- *Trường hợp 2:* $\widehat{C} \neq 90^0$

Các đường tròn ngoại tiếp hình vuông ACA_1A_2 và BCB_1B_2

Có điểm chung c sẽ cắt nhau tại M (khác C)

Ta có: $\widehat{AMA_2} = 45^0$

(góc nội tiếp chắn cung một phần tư đường tròn)

$\widehat{A_2MC} = \widehat{A_2AC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Tương tự: $\widehat{CMB_1} = 45^0$

Vì tia MA_2 nằm giữa hai tia MA và MC,

tia MC nằm giữa hai tia MB và MA_2

nên $\widehat{AMA_2} + \widehat{A_2MC} + \widehat{CMB_1} = 45^0 + 90^0 + 45^0 = 180^0$

hay A, M, B thẳng hàng.

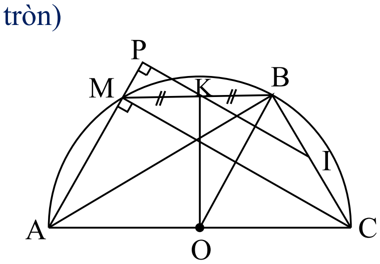
Chứng minh tương tự A_1, M, B và A_2, M, B_2 thẳng hàng

Vậy AB_1, A_1B và A_2B_2 cùng đi qua M

Hay AB_1, A_1B và A_2B_2 đồng quy.

Bài 15:

a) $CM \perp AM$ ($\widehat{MAC} = 90^0$ góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)



$KP \perp AM$ (gt) $\Rightarrow KP \parallel CM$

Gọi I là giao điểm của PK và BC.

Ta có: $PI \parallel CM$ mà $KB = KM$.

Vậy KI là đường trung bình của ΔMBC

$\Rightarrow IB = IC$

B, C cố định

$\Rightarrow I$ cố định

Vậy PK luôn đi qua điểm I cố định.

b) Ta có: $\widehat{OKB} = 90^0, O, B$ cố định

M di động trên cung AB

$\Rightarrow K$ thuộc một phần cung tròn đường kính OB./.