# CHUYÊN ĐỀ HỆ THỨC VI-ÉT VÀ ỨNG DỤNG

## A.TRỌNG TÂM CẦN ĐẠT

### I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

**1. Hệ thức Vi-ét**

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a$ 0). Nếu $x_1$, $x_2$ là hai nghiệm của phương trình thì:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}.$$

**2. Ứng dụng của hệ thức Vi-ét**

a) Xét phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$.

- Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = 1$, nghiệm còn lại là

$x_2 = \dfrac{c}{a}$.

- Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = -1$, nghiệm còn lại là $x_2 = -\dfrac{c}{a}$.

*b) Tìm hai số biết tổng và tích của chúng:* Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng $P$ thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình:

$$X^2 - SX + P = 0.$$

### II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

**Dạng 1. Không giải phương trình, tính giá trị của biêu thức đối xứng giữa các nghiệm**

*Phương pháp giải:* Ta thực hiện theo các bước sau:

*Bước 1.* Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$. Từ đó áp dụng hệ thức Vi-ét ta có:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \text{ và } P = x_1.x_2 = \frac{c}{a}.$$

*Bước* 2. Biến đổi biểu thức đối xứng giữa các nghiệm của đề bài theo tổng $x_1 + x_2$ và tích $x_1x_2$ sau đó áp dụng *Bước 1.*

Chú ý: Một số biểu thức đối xứng giữa các nghiệm thường gặp là:

- $A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P;$

$\bullet B = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3PS;$

$\bullet C = x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2(S^2 - 2P)^2 - 2P^2;$

$\bullet D = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{S^2 - 4P}.$

**1.1.** Gọi $x_1$, $x_2$ là nghiệm của phương trình $x^2 - 5x + 3 = 0$. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của các biểu thức:

a) $A = x_1^2 + x_2^2;$ b) $B = x_1^3 + x_2^3;$

**1.2** .Cho phuoug trình: $-3x^2 - 5x - 2 = 0$. Với $x_1, x_2$ là nghiệm của phương trình, không giải phương trình, hãy tính:

a) $M = x_1 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + x_2;$ b) $N = \frac{1}{x_1 + 3} + \frac{1}{x_2 + 3};$

c) $P = \frac{x_1 - 3}{x_1^2} + \frac{x_2 - 3}{x_2^2};$ d) $Q = \frac{x_1}{x_2 + 2} + \frac{x_2}{x_1 + 2}.$

**2.1.**Cho phương trình $x^2 - 2(m - 2)x + 2m - 5 = 0$ (ra là tham số).

a) Tìm điều kiện của ra để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$.

b) Với ra tìm được ở trên, tìm biểu thức liên hệ giữa $x_1, x_2$ không phụ thuộc vào ra.

**2.2.** Cho phương trình $x^2 + (m + 2)x + 2m = 0$. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1$ ,$x_2$ ? Khi đó, hãy tìm biểu thức liên hệ giữa $x_1$, $x_2$ không phụ thuộc vào ra.

**Dạng 2. Giải phương trình bằng cách nhẩm nghiệm**

Phương pháp giải: Sử dụng ứng dụng của hệ thức Vi-ét.

**3.1.** Xét tổng a + b + c hoặc a - b + c rồi tính nhẩm các nghiệm của các phương trình sau:

a) $15x^2 - 17x + 2 = 0;$

b) $1230x^2 - 4x - 1234 = 0;$

c) $(2 - \sqrt{3})x^2 + 2\sqrt{3}x - (2 + \sqrt{3}) = 0;$

d) $\sqrt{5}x^2 - (2 - \sqrt{5})x - 2 = 0.$

**3.2.** Tính nhẩm nghiệm của các phương trình sau:

a) $7x^2 - 9x + 2 = 0;$ b) $23x^2 - 9x - 32 = 0;$

c) $1975x^2 + 4x - 1979 = 0;$ d) $31,1x^2 - 50,9x + 19,8 = 0.$

**4.1.** Cho phương trình $(ra - 2)x^2 - (2m + 5)x + ra + 7 = 0$ với tham số ra.

a) Chứng minh phương trình luôn có một nghiệm không phụ thuộc vào tham số m.

b) Tìm các nghiệm của phương trình đã cho theo tham số ra.

**4.2.** Cho phương trình $(2m - 1)x^2 + (m - 3)x - 6m - 2 = 0$.

a) Chứng minh phương trình đã cho luôn có nghiệm $x = -2$.

b) Tìm các nghiệm của phương trình đã cho theo tham số ra.

**5.1.** Cho phương trình $mx^2 - 3(m + l)x + m^2 - 13m - 4 = 0$ (ra là tham số). Tìm các giá trị của ra để phương trình có một nghiệm là $x = -2$. Tìm nghiệm còn lại.

**5.2.** Tìm giá trị của tham số ra để phương trình $x^2 + 3mx - 108 = 0$ (ra là tham số) có một nghiệm là 6. Tìm nghiệm còn lại.

**Dạng 3. Tìm hai số khi biết tổng và tích**

*Phương pháp giải:* Để tìm hai số x, *y* khi biết tổng $S = x + y$ và tích $P = x.y$, ta làm như sau:

*Bước 1.* Giải phương trình $X^2 - SX + P = 0$ để tìm các nghiệm $X_1, X_2$.

*Bước* 2. Khi đó các số x, *y* cần tìm là $x = X_1, y = X_2$ hoặc $x = X_2$, $y = X_1$.

**6.1.** Tìm hai số *u* và *v* trong mỗi trường hợp sau:

a) $u + v = 15, uv = 36$; b) $u^2 + v^2 = 13, uv = 6$.

**6.2.** Tìm hai số *u* và *v* trong mỗi trường hợp sau:

a) $u + v = 4, uv = 7$; b) $u + v = -12, uv - 20$.

**7.1.** Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $2 + \sqrt{3}$ và $2 - \sqrt{3}$.

**7.2.** Tìm phương trình bậc hai biết nó nhận 7 và -11 là nghiệm.

**8.1**.Cho phương trình $x^2 + 5x - 3m = 0$ (m là tham số).

a) Tìm tham số *m* để phương trình có hai nghiệm là $x_1$ và $x_2$.

b) Với điều kiện *m* tìm được ở câu a), hãy lập một phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\frac{2}{x_1^2}$ và $\frac{2}{x_2^2}$.

**8.2.** Cho phương trình $3x^2 + 5x - m = 0$. Với giá trị nào của tham *số m,* phương trình có hai nghiệm là $x_1$ và $x_2$ ? Khi đó, hãy viết phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\frac{x_1}{x_2 + 1}$ và $\frac{x_2}{x_1 + 1}$.

**Dạng 4. Phân tích tam thức bậc hai thành nhân tử**

*Phương pháp giải:* Nếu tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có hai nghiệm $x_1$; $x_2$ thì tam thức được phân tích thành nhân tử:

$$ax^2 + bx + c - a(x - x_1)(x - x_2).$$

**9.1.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2 - 7x + 6$; b) $30x^2 - 4x - 34$;

c) $x - 5\sqrt{x} + 6$; d) $2x - 5\sqrt{x} + 3$.

**9.2.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $4x^2 - 5x + 1$; b) $21x^2 - 5x - 26$;

c) $4x - 7\sqrt{x} + 3$; d) $12x - 5\sqrt{x} - 7$.

**Dạng 5. Xét dấu các nghiệm của phương trình bậc hai**

*Phương pháp giải:* Xét phương trình $ax^2 + bx + c - 0 (a \neq 0)$. Khi đó: 1. Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow p < 0$.

2. Phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$.

3. Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0. \\ S > 0 \end{cases}$

4. Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0. \\ S < 0 \end{cases}$

5. Phương trình có hai nghiệm trái dấu mà nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$.

*Chú ý:* Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0$; Phương trình có hai nghiệm $\Leftrightarrow \Delta > 0$.

**10.1.** Tìm các giá trị của tham số *m* để phương trình:

a) $x^2 - 2(m - 1)x + ra + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu;

b) $x^2 - 8x + 2m + 6 = 0$ có hai nghiệm phân biệt;

c) $x^2 - 2(m - 3)x + 8 - 4m = 0$ có hai nghiệm phân biệt âm;

d) $x^2 - 6x + 2m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dương;

e) $x^2 - 2(m - 1)x - 3 - ra = 0$ có đúng một nghiệm dương.

**10.2.** Tìm các giá trị của tham số ra để phương trình:

a) $2x^z - 3(m + 1)x + m^2 - ra - 2 = 0$ có hai nghiệm trái dấu;

b) $3mx^2 + 2(2m + l)x + m = 0$ có hai nghiệm âm;

*c)* $x^2 + mx + m - 1 = 0$ có hai nghiệm lớn hơn $m$;

*d)* $mx^2 - 2(m - 2)x + 3(ra - 2) = 0$ có hai nghiệm cùng dâu.

**Dạng 6. Xác định điều kiện của tham số để phương trình bậc hai có nghiệm thỏa mãn hệ thức cho trước**

*Phương pháp giải:* Ta thực hiện theo các bước sau:

*Bước* 1. Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm $\Delta \geq 0$.

*Bước 2.* Từ hệ thức đã cho và hệ thức Vi-ét, tìm được điều kiện của tham số.

*Bước 3.* Kiểm tra điều kiện của tham số xem có thỏa mãn điều kiện ở *Bước 1* hay không rồi kết luận.

**11.1.** Cho phương trình $x^2 - 5x + m + 4 = 0$. Tìm các giá trị của tham số $m$ để phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ thỏa mãn:

a) $|x_1| + |x_2| = 4$; b) $3x_1 + 4x_2 = 6$;

c) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = -3$; = -3; d) $x_1(1 - 3x\ ) + x\ (1 - 3x_1) = m^2 - 23$.

**11.2.** Cho phương trình $x^2 - mx - m - 1 = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của tham số $m$ để phương trình:

a) Có một nghiệm bằng 5. Tìm nghiệm còn lại.

b) Có hai nghiệm âm phân biệt;

c) Có hai nghiệm trái dấu, trong đó nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương;

d) Có hai nghiệm cùng dấu;

e) Có hai nghiệm $x_1, x_2$ thỏa mãn: $x_1^3 + x_2^3 = -1$;

g) Có hai nghiệm $x_1, x_2$ thỏa mãn: $|x_1 - x,| \geq 3$.

**III. BÀI TẬP VỀ NHÀ**

**12.** Cho phương trình: $-3x^2 + x + 1 = 0$. Với $x_1$, $x_2$ là nghiệm của phương trình, không giải phương trình, hãy tính:

a) $A = x_1^2 + \frac{2}{x_1} + x_2^2 + \frac{2}{x_2}$; b) $B = \frac{2}{x_1 + 3} + \frac{2}{x_2 + 3}$;

c) $B = \frac{2x_1 - 5}{x_1} + \frac{2x_2 - 5}{x_2}$; d) $D = \frac{x_1 - 1}{x_1^4} + \frac{x_2 - 1}{x_2^4}$.

**13.** Tính nhẩm các nghiệm của các phương trình:

a) $16x - 17x + 1 = 0$; c) $2x^2 - 40x + 38 = 0$;

b) $2x^2 - 4x - 6 = 0$; d) $1230x^2 - 5x - 1235 = 0$.

**14.** Tìm hai số $u,\ v$ biết rằng:

a) $u + v = -8$, $uv = -105$; b) $u + v = 9$, $uv = -90$.

**15.** Cho phương trình $x^2 + (4m + 1)x + 2(m - 4) = 0$. Tìm giá trị của tham số ra để phương trình có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ và:

a) Thoả mãn điều kiện $x_2 - x_1 = 17$;

b) Biểu thức $A = (x_1 - x_2)^2$ có giá trị nhỏ nhất;

c) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ vào ra.

**16.** Cho phương trình bậc hai: $(m + 2)x^2 - 2(m + 1)x + m - 4 = 0$. Tìm các giá trị của tham số ra để phương trình:

a) Có 2 nghiệm trái dấu;

b) Có 2 nghiệm dương phân biệt;

c) Có 2 nghiệm trái dấu trong đó nghiệm dương nhỏ hơn giá trị tuyệt đối của nghiệm âm;

d) Có 2 nghiệm $x_1, x_2$ thỏa mãn: $3(x_1 + x_2) = 5x_1, x_2$.

**17.** Cho phương trình: $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m - 6 = 0$ (ra là tham số).

a) Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Tìm các giá trị của tham số ra để phương trình có hai nghiệm âm phân biệt.

c) Gọi $x_1$, $x_2$ là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = x_1^2 + x_2^2$.

d) Tìm các giá trị của ra để phương trình có 2 nghiệm $x_1, x_2$ thỏa mãn:

$\left|x_1^3 + x_2^3\right| = 19$.

**18.** Cho phương trình: $x^2 - 2(m - 2)x + 2m - 5 = 0$ (ra là tham số).

a) Chứng minh phương trình luôn có nghiệm với mọi ra.

b) Gọi $x_1$, $x_2$ là 2 nghiệm của phương trình. Tìm ra để $x_1, x_2$ thỏa mãn: $x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_1) < 4$.

## HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

**1.1** Ta có $\Delta = 13 > 0 \Rightarrow$ PT đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$

Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1.x_2 = 3 \end{cases}$

a) Ta có $A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 5^2 - 2.3 = 19$

b) Ta có $C = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 80$

c) Ta có $D=\frac{1}{x_1^4}+\frac{1}{x_2^4}=\frac{x_1^4+x_2^4}{\left(x_1.x_2\right)^4}=\frac{(x_1^2+x_2^2)^2-2(x_1x_2)^2}{(x_1x_2)^4}=\frac{343}{81}$

d) Ta có $E=\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=\sqrt{13}$

**1.2** Tương tự 1.1

a) Ta có $M=-\frac{25}{6}$

b) Ta có $N=\frac{13}{14}$

c) Ta có $P=-\frac{49}{4}$

d) Ta có $Q=-\frac{17}{12}$

**2.1** a) Ta có $\Delta'=(m-3)^2\geq 0,\ \forall m$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ với mọi m

b) Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2m-4 \\ x_1.x_1=2m-5 \end{cases}$

Biểu thức liên hệ giữa $x_1$, $x_2$ không phụ thuộc vào m là: $x_1+x_2-x_1x_2=1$

**2.2** Tương tự 2.1

Phương trình có hai nghiệm $x_1x_2$ với mọi m

Biểu thức liên hệ giữa $x_1$, $x_2$ không phụ thuộc vào m là: $2\left(x_1+x_2\right)+x_1x_2=-4$

**3.1**

a) Ta có $a+b+c=15+\left(-17\right)+2=0\Rightarrow x_1=1, x_2=\frac{2}{15}$

b) Ta có $a-b+c=0\Rightarrow x_1=-1, x_2=\frac{1234}{1230}$

c) Ta có $a+b+c=0\Rightarrow x_1=1, x_2=-7-4\sqrt{3}$

d) Ta có $a-b+c=0\Rightarrow x_1=-1, x_2=\frac{2}{\sqrt{5}}$

**3.2** Tương tự 3.1

a) Ta có $x_1=1, x_2=\frac{2}{7}$

b) Ta có $x_1=-1, x_2=\frac{32}{23}$

c) Ta có $x_1=1, x_2=-\frac{1979}{1975}$

d) Ta có $x_1=-1, x_2=\frac{198}{311}$

**4.1**

a) Ta thấy $a+b+c=(m-2)+(-2m-5)+m+7=0 \Rightarrow$ Phương trình luôn có nghiệm x = 1 không phụ thuộc vào m.

b) Với m = 2: Phương trình chỉ có nghiệm x = 1.

Với $m \neq 2$: Phương trình có hai nghiệm x = 1 và $x=\dfrac{m+7}{m-2}$

**4.2**

a) Thay x = -2 vào phương trình đã cho, ta có $\left(2m-1\right)\left(-2\right)^2+\left(m-3\right)\left(-2\right)-6m-2=0$ (luôn đúng) $\Rightarrow$ ĐPCM.

b) Với $m=\dfrac{1}{2}$: Phương trình chỉ có nghiệm x = -2.

Với $m \neq \dfrac{1}{2}$: Phương trình có hai nghiệm $x \in \left\{-2;\dfrac{3m+1}{2m-1}\right\}$

**5.1**

Thay x = -2 vào phương trình ta tìm được m = 1 hoặc m = 2

* Với m = 1, ta có: $x^2-6x-16=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=8 \\ x=-2 \end{array}\right.$

* Với m = 2, ta có: $2x^2-9x-26=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{13}{2} \\ x=-2 \end{array}\right.$

**5.2**

Tương tự 5.1 Tính được m = 4; $x_2$ = -18.

**6.1**

a) Ta có $u,v$ là hai nghiệm của phương trình sau

$X^2-15X+36=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=12 \\ X=3 \end{array}\right. \Rightarrow (u,v) \in \left\{\left(12;3\right),\left(3;12\right)\right\}$

b) Ta có $\left(u+v\right)^2=u^2+v^2+2uv=13+2.6=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u+v=5 \\ u+v=-5 \end{array}\right.$

* Với $u+v=5$ ta có $u,v$ là hai nghiệm của phương trình sau:

$X^2-5X+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=2 \\ X=3 \end{array}\right.$

Vậy $(u,v) \in \{(2;3),(3;2),(-2;-3),(-3;-2)\}$

**6.2** Tương tự 6.1

a) Không tồn tại $u, v$ thỏa mãn vì $4^2$ - 4.7 = -12 < 0.

b) Tìm được $(u,v) \in \{(-2;-10),(-10;-2)\}$

**7.1**

Ta có $\left(2+\sqrt{3}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)=4$ và $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=1$

Do đó $2+\sqrt{3}$ và $2-\sqrt{3}$ là nghiệm của phương trình sau: $X^2 - 4X + 1 = 0$

**7.2**

Tương tự 7.1 Tìm được phương trình $X^2 + 4X - 77 = 0$.

**8.1**

a) Ta có $\Delta = 25+12m \geq 0$. Tìm được $m \geq -\dfrac{25}{12}$

b) Ta có $S = \dfrac{2}{x_1^2}+\dfrac{2}{x_2^2}=\dfrac{2\left(x_1^2+x_2^2\right)}{\left(x_1x_2\right)^2}=\dfrac{50+12m}{9m^2}$

Và $P=\dfrac{2}{x_1^2}.\dfrac{2}{x_2^2}=\dfrac{4}{\left(x_1x_2\right)^2}=\dfrac{9}{9m^2}$. Với ĐK $0 \neq m \geq \dfrac{25}{12}$ thì ta có $\dfrac{2}{x_1^2}$ và $\dfrac{2}{x_2^2}$ là hai nghiệm của phương trình bậc hai $X^2-\dfrac{50+12}{9m^2}X+\dfrac{4}{9m^2}=0 \quad ha: 9m^2X^2-2(6m+25)X+4=0.$

**8.2** Tương tự 8.1

Điều kiện $m \geq -\dfrac{25}{12}$. Phương trình tìm được là $X^2+\dfrac{10+6m}{3m+6}X+\dfrac{m}{m+2}=0$ (Điều kiện: $-2 \neq m \geq -\dfrac{25}{12}$)

**9.1**

a) Ta có $x^2 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 6)$

b) Ta có $30x^2 - 4x - 34 = 30\,(x+1)\left(x-\dfrac{17}{15}\right)$

c) Ta có $x-5\sqrt{x}+6=\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)$

d) Ta có $2x-5\sqrt{x}+3=2\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-\dfrac{3}{2}\right)$

**9.2** Tương tự 9.1

a) Ta có $4x^2-5x+1=4(x-1)\left(x-\frac{1}{4}\right)$

b) Ta có $21x^2-5x-26=21(x+1)\left(x-\frac{26}{21}\right)$

c) Ta có $4x-7\sqrt{x}+3=4(\sqrt{x}-1)\left(\sqrt{x}-\frac{3}{4}\right)$

d) Ta có $12x-5\sqrt{x}-7=12(\sqrt{x}-1)\left(\sqrt{x}+\frac{7}{12}\right)$

**10.1**

a) Phương trình có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac<0 \Leftrightarrow m<-1$

b) Phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \Delta = 8^2-4(2m+6)>0 \Leftrightarrow m<5$

c) Phương trình có 2 nghiệm phân biệt cùng âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ S<0\\ P>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4m^2-8m+4>0\\ 2(m-3)<0\\ 8-4m>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<2\\ m\neq 1\end{cases}$$

d) Phương trình có 2 nghiệm phân biệt cùng dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ S<0\\ P>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}32-8m>0\\ 6>0\\ 2m+1>0\end{cases} \Leftrightarrow \frac{-1}{2}<m<4$$

e) Vì $\Delta=(m-1)^2-4(-3-m)=(2m-1)^2+15>0,\ \forall m\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Phương trình có dungd 1 nghiệm dương $\Leftrightarrow ac=-3-m<0$. Tìm được $m>-3$

**10.2** Tương tự 10.1

a) Tìm được $-1<m<2$ b) Tìm được $\left[\begin{array}{l}m>0\\ m\leq -2-\sqrt{3}\end{array}\right.$

c) Tìm được $m<-1$ d) Tìm được $-1\leq m<0$

**11.1**

Ta có $\Delta=5^2-4(m+4)=9-4m$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m < \frac{9}{4}$

Theo hệ thức Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1.x_2 = m + 4 \end{cases}$

a) ta có $|x_1| + |x_2| = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2|x_1x_2| = 16$

$\Rightarrow 2|m+4| = 2m - 1$. Tìm được $m \in \varnothing$.

b) Ta có $3x_1 + 4x_2 = 6 \Leftrightarrow 3(x_1 + x_2) + x_2 = 6 \Rightarrow x_2 = -9$

Vì x = -9 là nghiệm của phương trình nên ta có $(-9)^2 - 5.(-9) + m + 4 = 0$. Tìm được $m = -3 \pm \sqrt{13}$

**11.2** Tương tự 10.1 và 11.1

a) Tìm được $\begin{cases} m = 4 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

b) Tìm được $\begin{cases} m < -1 \\ x_2 \neq -2 \end{cases}$

c) Tìm được $-1 < m < 0$

d) Tìm được $\begin{cases} m < -1 \\ x_2 \neq -2 \end{cases}$

3) Tìm được $m = -1$

g) Tìm được $\left[\begin{array}{l} m \geq 1 \\ m \leq -5 \end{array}\right.$

**12.** Tương tự 1.1

a) Ta có $A = -\frac{11}{9}$

b) Ta có $B = -\frac{16}{87}$

c) Ta có $C = 9$

d) Ta có $D = -41$

**13.** Tương tự 3.1

a) Ta có $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{16}$

b) Ta có $x_1 = -1, x_2 = 3$

c) Ta có $x_1 = 1, x_2 = 19$

d) Ta có $x_1 = -1, x_2 = \frac{247}{246}$

**14.** Tương tự 6.1

a) Tìm được $(u,v) \in \{(7;-15),(-15;7)\}$

b) Tìm được $(u,v) \in \{(15;-6),(-6;15)\}$

**15.** a) Tìm được $m = \pm 4$

b) Ta có $A_{\min} = 33 \Leftrightarrow m = 0$

c) Ta có hệ thức $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = -17$

**16.** Tương tự 10.1

a) Tìm được $-2 < m < 4$

b) Tìm được $\left[\begin{array}{l} m > \\ -\frac{9}{4} < m < -2 \end{array}\right.$

c) Tìm được $-2 < m < -1$

d) Tìm được $m \in \varnothing$

**17.** Tương tự 10.1 và 11.1.

a) ta có $\Delta = 25 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$

b) Tìm được $m < -3$

c) Ta có $A_{\min} = \frac{25}{2} \Leftrightarrow m = \frac{-1}{2}$

d) Tìm được $\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 0 \end{array}\right.$

**18.** a) Ta có $\Delta = 4(m-3)^2 \geq 0,\ \forall m \in \mathbb{R}$

b) Tìm được m > 1

## B.NÂNG CAO PHÁT TRIỂN TƯ DUY

**Bài 1.** Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 4 = 0$

a) Tìm $m$ để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = 26m$

b) Tìm $m$ nguyên để phương trình có hai nghiệm nguyên.

**Bài 2.** Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2x - m - 2 = 0$. Tìm $m$ để phương trình:

a) Có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 = 8$

b) Có đúng một nghiệm dương.

**Bài 3.** Cho phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$

Tìm $m$ để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 = 3$

**Bài 4.** Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2(m+1)x + 2m + 10 = 0$ với $m$ là tham số thực

a) Tìm $m$ để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$

b) Tìm $m$ để biểu thức $P = 6x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

**Bài 5.** Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2m(m+2)x + m^2 + 7 = 0$ (1). ($m$ là tham số)

a) Giải phương trình (1) khi $m = 1$

b) Tìm $m$ để phương trình (1) có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn: $x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) = 4$

**Bài 6.** Cho phương trình $x^2 - 2mx + 1 = 0$ (ẩn $x$)

a) Tìm $m$ để phương trình có hai nghiệm dương

b) Gọi $x_1; x_2$ $(x_1 \le x_2)$ là hai nghiệm dương của phương trình

Tính $P = \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}$ theo $m$ và tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = x_1 + x_2 + \dfrac{2}{x_1 + x_2}$

**Bài 7.** Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 5 = 0$ (1)

a) Tìm $m$ để phương trình có hai nghiệm dương.

b) Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm dương của phương trình (1). Tìm $m$ nguyên dương để

$A = \left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2$ có giá trị nguyên.

**Bài 8.** Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (1) và $cx^2 + bx + a = 0$ (2) (với $a > c > 0$)

a) Chứng minh rằng phương trình (1) và (2) cùng có nghiệm hoặc cùng vô nghiệm

b) Với giả thiết phương trình (1) có nghiệm $x_1;x_2$ và phương trình (2) có nghiệm là: $x_1';x_2'$ và $x_1+x_2>x_1'+x_2'$. Chứng minh rằng $b>0$

c) Trong trường hợp phương trình (1) và (2) đều vô nghiệm, chứng minh rằng $b<a+c$

**Bài 9.** Cho $p$ là số tự nhiên khác 0. Gọi $x_1,x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2+5px-1=0$; $x_3;x_4$ là hai nghiệm của phương trình $x^2+4px-1=0$. Chứng minh rằng tích $(x_1-x_3)(x_2-x_3)(x_1+x_4)(x_2+x_4)$ là một số chính phương.

**Bài 10.** Tìm $m$ để phương trình $(m+1)x^2-3mx+4m=0$ có nghiệm dương

**Bài 11.** Cho phương trình: $2x^2+2mx+m^2-2=0$

a) Xác định $m$ để phương trình có hai nghiệm

b) Gọi hai nghiệm của phương trình trên là $x_1;x_2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A=|2x_1x_2+x_1+x_2-4|$

**Bài 12.** Cho phương trình $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ có hai nghiệm thuộc đoạn $[0;2]$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{8a^2-6ab+b^2}{4a^2-2ab+ac}$

**Bài 13.** Cho phương trình $(x-2)(x^2-x)+(4m+1)x-8m-2=0$ ($x$ là ẩn số).

Tìm $m$ để phương trình có ba nghiệm phân biệt $x_1,x_2,x_3$ thỏa mãn điều kiện: $x_1^2+x_2^2+x_3^2=11$

**Bài 14.** Cho phương trình: $x^2-2(m-1)x+2m^2-3m+1=0$, với $m$ là tham số (1).

a) Chứng minh rằng phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $0\le m\le 1$.

b) Gọi $x_1,x_2$ là hai nghiệm của phương trình (1).

i. Chứng minh $|x_1+x_2+x_1x_2|\le\dfrac{9}{8}$.

ii. Tìm giá trị của $m$ để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt trái dấu thỏa mãn $|x_1-x_2|=1$.

**Bài 15.** Cho phương trình $(m^2+5)x^2-2mx-6m=0$ (1) với $m$ là tham số

a) Tìm $m$ sao cho phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng khi đó tổng của hai nghiệm không thể là số nguyên.

b) Tìm $m$ sao cho phương trình (1) có hai nghiệm $x_1, x_2$ thỏa mãn điều kiện

$\left(x_1x_2 - \sqrt{x_1 + x_2}\right)^4 = 16$.

**HƯỚNG DẪN**

**Bài 1.** Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 4 = 0$

a) Tìm $m$ để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = 26m$

b) Tìm $m$ nguyên để phương trình có hai nghiệm nguyên.

**Lời giải**

a) Xét $\Delta' = m^2 - m + 4 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + 3\frac{3}{4} > 0$, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi

$m$

Gọi $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = m - 4 \end{cases}$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4m^2 - 2m + 8$

Ta có: $x_1^3 + x_2^3 = 26m \Leftrightarrow (x_1 + x_2)\left(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2\right) = 26m$

$\Leftrightarrow 2m\left(4m^2 - 3m + 12\right) = 26m$

$\Leftrightarrow 2m\left(4m^2 - 3m - 1\right) = 0 \Leftrightarrow m_1 = 0; m_2 = 1; m_3 = \frac{-1}{4}$

b) Vì $x_{1.2} = m \pm \sqrt{\Delta'}$ nên điều kiện để phương trình có hai nghiệm nguyên:

$\Delta' = m^2 - m + 4$

Đặt $\Delta' = m^2 - m + 4 = k^2 \, (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow 4m^2 - 4m + 16 = 4k^2$

$\Leftrightarrow (2m - 1)^2 + 15 = (2k)^2 \Leftrightarrow (2k - 2m + 1)(2k + 2m - 1) = 15$

Từ đó ta có bảng sau:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2k - 2m + 1$ | 1 | 3 | 5 | 15 | -1 | -3 | -5 | -15 |
| $2k + 2m - 1$ | 15 | 5 | 3 | 1 | -15 | -5 | -3 | -1 |

Suy ra:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| k | 4 | 2 | 2 | 4 | -4 | -4 | -2 | -4 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| m | 4 | 1 | 0 | -3 | -3 | 0 | 1 | 4 |

Vậy với $m \in \{4;1;0;-3\}$ thì phương trình có nghiệm nguyên

**Bài 2.** Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2x - m - 2 = 0$. Tìm $m$ để phương trình:

a) Có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 = 8$

b) Có đúng một nghiệm dương.

**Lời giải**

a) Điều kiện để phương trình có nghiệm là: $\Delta' = 1 + m + 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -3$

Theo hệ thức Vi-et, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = -m - 2 \end{cases}$

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4 + 2m + 4 = 8 \Leftrightarrow m = 0$ (thỏa mãn $m \geq -3$)

Vậy $m = 0$ thì phương trình có 2 nghiệm $x_1^2 + x_2^2 = 8$

b) Với $m \geq -3$ thì phương trình luôn có nghiệm

Theo hệ thức Vi-ét, ta có: $x_1 + x_2 = 2$ nên nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = -3$ thì phương trình có nghiệm kép là số dương

Nếu phương trình có hai nghiệm trái dấu thì phương trình cũng có một nghiệm dương

$\Leftrightarrow -m - 2 < 0 \Leftrightarrow m > -2$

Vậy với $m = -3$ hoặc $m > -2$ thì phương trình có đúng một nghiệm dương

**Bài 3.** Cho phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$

Tìm $m$ để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 = 3$

**Lời giải**

$mx^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$

$\Delta = 4(m-1)^2 - 4m(m-3) = 4m^2 - 8m + 4 - 4m^2 + 12m = 4m + 4 > 0$

$\Leftrightarrow m > -1$ và $m \neq 0$

Gọi $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình: $mx^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$

* Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m-1)}{m} \\ x_1x_2 = \dfrac{m-3}{m} \end{cases}$

Ta có: $\left(x_1+x_2\right)^2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2=3+\dfrac{2(m-3)}{m}$

$\Leftrightarrow \dfrac{4(m-1)^2}{m^2}=3+\dfrac{2(m-3)}{m} \Leftrightarrow \dfrac{4m^2-8m+4}{m^2}=3+\dfrac{2m-6}{m}$

$\Leftrightarrow \dfrac{4m^2-8m+4}{m^2}=\dfrac{5m-6}{m}$

$\Leftrightarrow 4m^2-8m+4=5m^2-6m \Leftrightarrow m^2+2m-4=0 \Leftrightarrow (m+1)^2=5 \Leftrightarrow m_1=\sqrt{5}-1$ (thỏa mãn),

$m_2=-\sqrt{5}-1$ (không thỏa mãn)

Vậy với $m=\sqrt{5}-1$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ thỏa mãn: $x_1^2+x_2^2=3$

**Bài 4.** Cho phương trình bậc hai $x^2-2(m+1)x+2m+10=0$ với $m$ là tham số thực

a) Tìm $m$ để phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2$

b) Tìm $m$ để biểu thức $P=6x_1x_2+x_1^2+x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

**Lời giải**

a) $\Delta=4(m+1)^2-8m-40=4m^2+8m+4-8m-40=4m^2-36\geq 0$

$\Leftrightarrow m^2\geq 9 \Leftrightarrow |m|\geq 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\geq 3 \\ m\leq -3 \end{array}\right.$

b) Gọi $x_1;x_2$ là nghiệm của phương trình $x^2-2(m+1)x+2m+10=0$

Áp dụng hệ thức Vi-ét: $\begin{cases} x_1+x_2=2m+2 \\ x_1x_2=2m+10 \end{cases}$

Ta có: $P=6x_1x_2+x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2+4x_1x_2=4(m+1)^2+4(2m+10)$

$=4m^2+8m+4+8m+40=4m^2+16m+44=4m^2+16m+16+28$

$=4(m+2)^2+28\geq 4.(-3+2)^2+28=32$

Vậy $P_{\max}=32$ khi và chỉ khi $m=-3$

**Bài 5.** Cho phương trình bậc hai $x^2-2m(m+2)x+m^2+7=0$ (1). ($m$ là tham số)

a) Giải phương trình (1) khi $m=1$

b) Tìm $m$ để phương trình (1) có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn: $x_1x_2-2\left(x_1+x_2\right)=4$

**Lời giải**

a) Với $m=1$, phương trình có dạng: $x^2-6x+8=0$. Giải ra ta được: $x_1=2;x_2=4$

b) Điều kiện để phương trình có nghiệm là: $\Delta'=m^2(m+2)^2-(m^2+7)\geq 0$ (*)

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=2m(m+2)\\x_1x_2=m^2+7\end{cases}$

Theo đề bài: $x_1x_2-2(x_1+x_2)=4 \Leftrightarrow m^2+7-2.2.m(m+2)=4$

$\Leftrightarrow 3m^2+8m-3=0 \Leftrightarrow m_1=\dfrac{1}{3};m_2=-3$

Thử lại với điều kiện (*) thì $m_1=\dfrac{1}{3};m_2=-3$ không thỏa mãn

Vậy không tồn tại $m$ thỏa mãn điều kiện đề bài

**Bài 6.** Cho phương trình $x^2-2mx+1=0$ (ẩn $x$)

a) Tìm $m$ để phương trình có hai nghiệm dương

b) Gọi $x_1;x_2\ (x_1\leq x_2)$ là hai nghiệm dương của phương trình

Tính $P=\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}$ theo $m$ và tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q=x_1+x_2+\dfrac{2}{x_1+x_2}$

**Lời giải**

a) Phương trình có hai nghiệm dương $\begin{cases}\Delta'\geq 0\\x_1+x_2>0\\x_1x_2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2-1\geq 0\\2m>0\\1>0\end{cases} \Leftrightarrow m\geq 1$

Vậy $m\geq 1$ thì phương trình có hai nghiệm dương

b) Với $m\geq 1$ thì phương trình có hai nghiệm dương

Theo hệ thức Vi-ét, ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=2m\\x_1x_2=1\end{cases}$

Xét: $P^2=x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2}=2m-2$. Vì $P\leq 0$ nên $P=-\sqrt{2m-2}$

Ta có: $Q=x_1+x_2+\dfrac{2}{x_1+x_2}=2m+\dfrac{2}{2m}=m+m+\dfrac{1}{m}\geq 1+2\sqrt{m.\dfrac{1}{m}}=3$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q$ là 3 khi $m=1$

**Bài 7.** Cho phương trình $x^2-2(m-1)x+2m-5=0$ (1)

a) Tìm $m$ để phương trình có hai nghiệm dương.

b) Gọi $x_1;x_2$ là hai nghiệm dương của phương trình (1). Tìm $m$ nguyên dương để

$A=\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^2+\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2$ có giá trị nguyên.

**Lời giải**

a) Phương trình có hai nghiệm dương

$$\begin{cases}\Delta'\ge 0\\ x_1+x_2>0\\ x_1x_2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m-1)^2-(2m-5)\ge 0\\ 2(m-1)>0\\ 2m-5>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-4m+6>0\\ m>1\\ m>\dfrac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow m>\dfrac{5}{2}$$

b) Theo hệ thức Vi-ét, ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=2(m-1)\\ x_1x_2=2m-5\end{cases}$

Ta có: $A=\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^2+\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2=\left(\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2-2=\left(\dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}\right)^2-2$

$$\Leftrightarrow A=\left[\dfrac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}-2\right]^2-2=\left[\dfrac{4(m-1)^2}{2m-5}-2\right]^2-2$$

$$A\in\mathbb{Z}\Leftarrow\dfrac{4(m-1)^2}{2m-5}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 2m+1+\dfrac{9}{2m-5}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 2m-5\in Ư(9)$$

Vì $m$ nguyên dương nên $2m-5\ge -5$, suy ra:

| $2m-5$ | -3 | -1 | 1 | 3 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 7 |

Vậy với $m\in\{1;2;3;4;7\}$ thì $A$ nhận giá trị nguyên

**Bài 8.** Cho phương trình $ax^2+bx+c=0$ (1) và $cx^2+bx+a=0$ (2) (với $a>c>0$)

a) Chứng minh rằng phương trình (1) và (2) cùng có nghiệm hoặc cùng vô nghiệm

b) Với giả thiết phương trình (1) có nghiệm $x_1;x_2$ và phương trình (2) có nghiệm là: $x_1';x_2'$ và $x_1+x_2>x_1'+x_2'$. Chứng minh rằng $b>0$

c) Trong trường hợp phương trình (1) và (2) đều vô nghiệm, chứng minh rằng $b<a+c$

**Lời giải**

a) Cả hai phương trình đều có: $\Delta = b^2 - 4ac$ , nên cả hai phương trình (1) và (2) cùng có nghiệm hoặc cùng vô nghiệm

b) Trong trường hợp hai phương trình trên có nghiệm. Theo hệ thức Vi-ét, ta có:

$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}; x_1' + x_2' = \frac{-b}{c}$

Xét: $x_1 + x_2 - x_1' - x_2' = \frac{-b}{a} + \frac{b}{c} = \frac{b(a-c)}{ac} > 0$ nên $b > 0$

c) Trong trường hợp phương trình vô nghiệm, ta có: $\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow b^2 < 4ac$

Mặt khác ta có: $4ac \le (a+c)^2$ , nên:

$b^2 < (a+c)^2 \Leftrightarrow b < a + c$ (vì $a > c > 0, b > 0$ )

**Bài 9.** Cho $p$ là số tự nhiên khác 0. Gọi $x_1, x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 + 5px - 1 = 0$;

$x_3; x_4$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 + 4px - 1 = 0$. Chứng minh rằng tích

$(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_4)$ là một số chính phương.

**Lời giải**

Ta có: $x^2 + 5px - 1 = 0(1); x^2 + 4px - 1 = 0(2)$

Từ (1); (2) theo hệ thức vi-ét, ta có: $x_1 + x_2 = -5p; x_1x_2 = -1$

$x_3 + x_4 = -4p; x_3x_4 = -1$

$(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_4)$

$= (x_1 - x_3)(x_2 + x_4)(x_2 - x_3)(x_1 + x_4)$

$= (x_1x_2 + x_1x_4 - x_3x_2 - x_3x_4)(x_1x_2 + x_2x_4 - x_1x_3 - x_3x_4)$

$= (x_1x_4 - x_2x_3)(x_2x_4 - x_1x_3)$

$= x_1x_2x_4^2 - x_1^2x_3x_4 - x_3x_4x_2^2 + x_1x_2x_3^2$

$= -x_4^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ (vì $x_1x_2 = -1; x_3x_4 = -1$)

$= (-x_4^2 + 2 - x_3^2) + (x_1^2 - 2 + x_2^2)$

Mà $2 = (-1)(-2) = -2x_1x_2; 2 = (-1)(-2) = -2x_3x_4$

Suy ra (*) $\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - (x_3 + x_4)^2$

$= 25p^2 - 16p^2$

$= (3p)^2 \Rightarrow$ Điều phải chứng minh

**Bài 10.** Tìm $m$ để phương trình $(m+1)x^2 - 3mx + 4m = 0$ có nghiệm dương

**Lời giải**

Khi $m = -1$, phương trình trở thành: $3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{4}{3} > 0$

Khi $m \neq -1$ thì PT: $(m+1)x^2 - 3mx + 4m = 0$ (1) là phương trình bậc hai

Gọi $S = \dfrac{3m}{m+1}; P = \dfrac{4m}{m+1}$ là tổng và tích các nghiệm $x_1; x_2$ của phương trình (1)

Phương trình (1) có nghiệm dương trong các trường hợp sau:

- $0 = x_1 < x_2$, khi đó $\Delta > 0, P = 0, S > 0$. Suy ra hệ vô nghiệm
- $x_1 < 0 < x_2$, khi đó $P < 0 \Leftrightarrow \dfrac{4m}{m+1} < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 0$
- $0 < x_1 \leq x_2$, khi đó $\Delta \geq 0, S > 0, P > 0$. Suy ra $\dfrac{-16}{7} \leq m < -1$

Đáp số: $\dfrac{-16}{7} \leq m < -1$

**Bài 11.** Cho phương trình: $2x^2 + 2mx + m^2 - 2 = 0$

a) Xác định $m$ để phương trình có hai nghiệm

b) Gọi hai nghiệm của phương trình trên là $x_1; x_2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$A = |2x_1x_2 + x_1 + x_2 - 4|$

**Lời giải**

a) $2x^2 + 2mx + m^2 - 2 = 0$

Xét $\Delta = 4m^2 - 4.2(m^2 - 2) = 4m^2 - 8m^2 + 16 = -4m^2 + 16$

Phương trình có 2 nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Rightarrow -4m^2 \geq -16 \Leftrightarrow m^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$

b) $A = |x_1 + x_2 + 2x_1x_2 - 4|$

Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có: $x_1 + x_2 = -m; 2x_1x_2 = m^2 - 2$

$A = |-m + m^2 - 2 - 4| = |(m+2)(3-m)|$

Vì $m \in [-2;2]$ nên $m+2 \ge 0$ và $m-3<0$

Do đó $A=(m+2)(3-m)=-m^2+m+6=-\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{4} \le \frac{25}{4}$

Vậy giá trị lớn nhất của $A$ là $\frac{25}{4}$, đạt được khi và chỉ khi $m=\frac{1}{2}$

**Bài 12.** Cho phương trình $ax^2+bx+c=0\,(a \ne 0)$ có hai nghiệm thuộc đoạn $[0;2]$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{8a^2-6ab+b^2}{4a^2-2ab+ac}$

**Lời giải**

Gọi $x_1, x_2\,(x_1 \le x_2)$ là hai nghiệm của phương trình đã cho

Theo định lí Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$

Khi đó $P=\dfrac{8a^2-6ab+b^2}{4a^2-2ab+ac}=\dfrac{8-6\dfrac{b}{a}+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}{4-2\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}}=\dfrac{8+6(x_1+x_2)+(x_1+x_2)^2}{4+2(x_1+x_2)+x_1x_2}$

Do $0 \le x_1 \le x_2 \le 2 \Rightarrow x_1^2 \le x_1x_2, x_2^2 \le 4 \Rightarrow x_1^2+x_2^2 \le x_1x_2+4$

$\Rightarrow (x_1+x_2)^2 \le 3x_1x_2+4$

Vậy $P \le \dfrac{8+6(x_1+x_2)+3x_1x_2+4}{4+2(x_1+x_2)+x_1x_2}=3$

Đẳng thức xảy ra khi $x_1=x_2=2$ hoặc $x_1=0, x_2=2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{b}{a}=4 \\ \dfrac{c}{a}=4 \end{cases} \Leftrightarrow c=-b=4a$ hoặc $\begin{cases} -\dfrac{b}{a}=2 \\ c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2a \\ c=0 \end{cases}$

Vậy, $P_{\max}=3 \Leftrightarrow c=-b=4a$ hoặc $\begin{cases} b=-2a \\ c=0 \end{cases}$

**Bài 13.** Cho phương trình $(x-2)(x^2-x)+(4m+1)x-8m-2=0$ ($x$ là ẩn số).

Tìm $m$ để phương trình có ba nghiệm phân biệt $x_1, x_2, x_3$ thỏa mãn điều kiện: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11$

**Lời giải**

Ta có: $(x-2)(x^2-x)+(4m+1)x-8m-2=0 \qquad (1)$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2-x)+(4m+1)x-2(4m+1)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2-x+4m+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^2-x+4m+1=0 \quad (2) \end{array}\right.$

Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 2

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1-4(4m+1)>0 \\ 2^2-2+4m+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\dfrac{3}{16} \\ m \neq -\dfrac{3}{4} \end{cases}$

Khi đó $x_1, x_2$ là nghiệm của phương trình (2), theo hệ thức Vi-ét, ta có:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1x_2 = 4m+1 \end{cases}$

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 + x_3^2 = 11$

Suy ra: $1-2(4m+1)+4=11 \Leftrightarrow m=-1$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy với $m=-1$ thì phương trình có ba nghiệm phân biệt $x_1, x_2, x_3$ thỏa mãn điều kiện:

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11$

**Bài 14.** Cho phương trình: $x^2-2(m-1)x+2m^2-3m+1=0$, với $m$ là tham số (1).

a) Chứng minh rằng phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $0 \le m \le 1$.

b) Gọi $x_1, x_2$ là hai nghiệm của phương trình (1).

i. Chứng minh $|x_1 + x_2 + x_1x_2| \le \dfrac{9}{8}$.

ii. Tìm giá trị của $m$ để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt trái dấu thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 1$.

**Lời giải**

a) $x^2-2(m-1)x+2m^2-3m+1=0$, với $m$ là tham số (1)

Có $\Delta' = (m-1)^2 - (2m^2-3m+1) = -m^2+m$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = -m^2 + m \ge 0 \Leftrightarrow m(m-1) \le 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m \ge 0 \\ m - 1 \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m \le 0 \\ m - 1 \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m \ge 0 \\ m \le 1 \end{cases} \\ \begin{cases} m \le 0 \\ m \ge 1 \end{cases} (\text{VN}) \end{array}\right. \Leftrightarrow 0 \le m \le 1$$

b) Với $0 \le m \le 1$ thì phương trình có hai nghiệm $x_1, x_2$

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1x_2 = 2m^2 - 3m + 1 \end{cases}$

i. Ta có: $|x_1 + x_2 + x_1x_2| = |2(m-1) + 2m^1 - 3m + 1|$

$= |2m^2 - m - 1| = |(2m+1)(m-1)|$

Vì $0 \le m \le 1$ nên $\begin{cases} m - 1 \le 0 \\ 2m + 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow (m-1)(2m+1) \le 0$

Suy ra $|x_1 + x_2 + x_1x_2| = -(2m^2 - m - 1) = 2\left(m - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{8} \le \frac{9}{8}$

Dấu bằng xảy ra khi $m = \frac{1}{4}$ (thỏa mãn điều kiện). Vậy $|x_1 + x_2 + x_1x_2| \le \frac{9}{8}$

ii. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt trái dấu

$\Leftrightarrow x_1x_2 < 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 3m + 1 < 0 \Leftrightarrow (m-1)(2m-1) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m < 1$

Ta có $|x_1 - x_2| = 1 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1$

$\Leftrightarrow 4(m-1)^2 - 4(2m^2 - 3m + 1) = 1 \Leftrightarrow (2m-1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$ (không thỏa mãn)

Vậy không tồn tại $m$ để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt trái dấu thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 1$

**Bài 15.** Cho phương trình $(m^2+5)x^2 - 2mx - 6m = 0$ (1) với $m$ là tham số

a) Tìm $m$ sao cho phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng khi đó tổng của hai nghiệm không thể là số nguyên.

b) Tìm $m$ sao cho phương trình (1) có hai nghiệm $x_1, x_2$ thỏa mãn điều kiện

$\left(x_1x_2 - \sqrt{x_1 + x_2}\right)^4 = 16$.

**Lời giải**

a) $m^2+5\neq 0$ với mọi $m$ nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$m^2+6m\left(m^2+5\right)>0\Leftrightarrow 6m\left[\left(m+\frac{1}{12}\right)^2+\frac{719}{144}\right]>0\Leftrightarrow m>0$$

Khi đó theo hệ thức Vi-ét ta có: $x_1+x_2=\dfrac{2m}{m^2+5}$

Vì $m^2+5-2m=\left(m-1\right)^2+4>0\Leftrightarrow m^2+5>2m\Rightarrow 0<\dfrac{2m}{m^2+5}<1$ (do $m>0$)

b) $m^2+5\neq 0$ với mọi $m$ nên phương trình (1) có hai nghiệm khi và chỉ khi

$$m^2+6m\left(m^2+5\right)\geq 0\Leftrightarrow 6m\left[\left(m+\frac{1}{12}\right)^2+\frac{719}{144}\right]\geq 0\Leftrightarrow m\geq 0$$

Khi đó theo hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2m}{m^2+5} \\ x_1x_2=\dfrac{-6m}{m^2+5} \end{cases}$

$$\left(x_1x_2-\sqrt{x_1+x_2}\right)^4=16\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1x_2-\sqrt{x_1+x_2}=2 \\ x_1x_2-\sqrt{x_1+x_2}=-2 \end{array}\right.$$

***Trường hợp 1.*** Xét $x_1x_2-\sqrt{x_1+x_2}=2\Leftrightarrow \dfrac{-6m}{m^2+5}-\sqrt{\dfrac{2m}{m^2+5}}=2$

$\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{2m}{m^2+5}}=\dfrac{-6m}{m^2+5}-2$ (vô nghiệm vì $m\geq 0$)

***Trường hợp 2.*** Xét $x_1x_2-\sqrt{x_1+x_2}=-2\Leftarrow \dfrac{-6m}{m^2+5}-\sqrt{\dfrac{2m}{m^2+5}}=-2$

$\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{2m}{m^2+5}}=2-\dfrac{6m}{m^2+5}$. Đặt $t=\sqrt{\dfrac{2m}{m^2+5}}\geq 0$

Ta có: $t=2-3t^2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1\left(ktm\right) \\ t=\dfrac{2}{3}\left(tm\right) \end{array}\right.$

$t=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{2m}{m^2+5}}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow 2m^2-9m+10=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$ (thỏa mãn $m\geq 0$)

Vậy với $m \in \left\{2; \frac{5}{2}\right\}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm $x_1, x_2$ thỏa mãn điều kiện

$\left(x_1 x_2 - \sqrt{x_1 + x_2}\right)^4 = 16$

## C.TRẮC NGHIỆM RÈN LUYỆN PHẢN XẠ

**Câu 1**. Chọn phát biểu đúng. Phương trình $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ có hai nghiệm $x_1;x_2$. Khi đó:

**A.** $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1.x_2=\dfrac{c}{a}\end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{b}{a} \\ x_1.x_2=\dfrac{c}{a}\end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{b}{a} \\ x_1.x_2=-\dfrac{c}{a}\end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{b}{a} \\ x_1.x_2=-\dfrac{c}{a}\end{cases}$.

**Câu 2**. Chọn phát biểu đúng. Phương trình $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ có $a-b+c=0$. Khi đó:

**A.** Phương trình có một nghiệm $x_1=1$, nghiệm kia là $x_2=\dfrac{c}{a}$.

**B.** Phương trình có một nghiệm $x_1=-1$, nghiệm kia là $x_2=\dfrac{c}{a}$.

**C. .** Phương trình có một nghiệm $x_1=-1$, nghiệm kia là $x_2=-\dfrac{c}{a}$.

**D.** Phương trình có một nghiệm $x_1=1$, nghiệm kia là $x_2=-\dfrac{c}{a}$.

**Câu 3**. Chọn phát biểu đúng. Phương trình $ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$ có $a+b+c=0$. Khi đó:

**A.** Phương trình có một nghiệm $x_1=1$, nghiệm kia là $x_2=\dfrac{c}{a}$.

**B.** Phương trình có một nghiệm $x_1=-1$, nghiệm kia là $x_2=\dfrac{c}{a}$.

**C.** Phương trình có một nghiệm $x_1=-1$, nghiệm kia là $x_2=-\dfrac{c}{a}$.

**D.** Phương trình có một nghiệm $x_1=1$, nghiệm kia là $x_2=-\dfrac{c}{a}$.

**Câu 4**. Cho hai số có tổng là $S$ và tích là $P$ với $S^2\geq 4P$. Khi đó hai số đó là nghiệm của phương trình nào dưới đây?

**A.** $X^2-PX+S=0$. **B.** $X^2-SX+P=0$. **C.** $SX^2-X+P=0$. **D.** $X^2-2SX+P=0$.

**Câu 5**. Không giải phương trình, tính tổng hai nghiệm (nếu có) của phương trình $x^2 - 6x + 7 = 0$

.

**A.** $\frac{1}{6}$. **B.** $3$. **C.** $6$. **D.** $7$.

**Câu 6**. Không giải phương trình, tính tổng hai nghiệm (nếu có) của phương trình $-3x^2 + 5x + 1 = 0$.

**A.** $-\frac{5}{6}$. **B.** $\frac{5}{6}$. **C.** $-\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{5}{3}$.

**Câu 7**. Gọi $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $x^2 - 5x + 2 = 0$. Không giải phương trình tính giá trị của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$.

**A.** $20$. **B.** $21$. **C.** $22$. **D.** $22$.

**Câu 8**. Gọi $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $-2x^2 - 6x - 1 = 0$. Không giải phương trình tính giá trị của biểu thức $N = \frac{1}{x_1 + 3} + \frac{1}{x_2 + 3}$

**A.** $6$. **B.** $2$. **C.** $5$. **D.** $4$.

**Câu 9**. Gọi $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $-x^2 - 4x + 6 = 0$. Không giải phương trình tính giá trị của biểu thức $N = \frac{1}{x_1 + 2} + \frac{1}{x_2 + 2}$.

**A.** $-2$. **B.** $1$. **C.** $0$. **D.** $4$.

**Câu 10**. Gọi $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $x^2 - 20x - 17 = 0$. Không giải phương trình tính giá trị của biểu thức $C = x_1^3 + x_2^3$.

**A.** $9000$. **B.** $2090$. **C.** $2090$. **D.** $9020$.

**Câu 11**. Gọi $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $2x^2 - 18x + 15 = 0$. Không giải phương trình tính giá trị của biểu thức $C = x_1^3 + x_2^3$.

**A.** $1053$. **B.** $\frac{1053}{2}$. **C.** $729$. **D.** $\frac{1053}{3}$.

**Câu 12**. Biết rằng phương trình $(m-2)x^2 - (2m+5)x + m + 7 = 0$ luôn có nghiệm $x_1; x_2$ với mọi $m$. Tính $x_1; x_2$ theo $m$.

**A.** $x_1 = -1; x_2 = -\dfrac{m+7}{m-2}$. **B.** $x_1 = 1; x_2 = -\dfrac{m+7}{m-2}$.

**C.** $x_1 = 1; x_2 = \dfrac{m+7}{m-2}$. **D.** $x_1 = -1; x_2 = \dfrac{m+7}{m-2}$.

**Câu 13**. Biết rằng phương trình $mx^2 + (3m-1)x + 2m - 1 = 0 (m \neq 0)$

luôn có nghiệm $x_1; x_2$ với mọi $m$. Tính $x_1; x_2$ theo $m$.

**A.** $x_1 = -1; x_2 = \dfrac{1-2m}{m}$. **B.** $x_1 = 1; x_2 = \dfrac{2m-1}{m}$. **C.** $x_1 = 1; x_2 = \dfrac{1-2m}{m}$. **D.** $x_1 = -1; x_2 = \dfrac{2m-1}{m}$.

**Câu 14**. Tìm hai nghiệm của phương trình $18x^2 + 23x + 5 = 0$ sau đó phân tích đa thức $A: 18x^2 + 23x + 5 = 0$ sau thành nhân tử.

**A.** $x_1 = -1; x_2 = -\dfrac{5}{18}; A = 18(x+1)\left(x + \dfrac{5}{18}\right)$. **B.** $x_1 = -1; x_2 = -\dfrac{5}{18}; A = (x+1)\left(x + \dfrac{5}{18}\right)$.

**C.** $x_1 = -1; x_2 = \dfrac{5}{18}; A = 18(x+1)\left(x - \dfrac{5}{18}\right)$. **D.** $x_1 = 1; x_2 = -\dfrac{5}{18}; A = 18(x-1)\left(x + \dfrac{5}{18}\right)$.

**Câu 15**. Tìm hai nghiệm của phương trình $5x^2 + 21x - 26 = 0$ sau đó phân tích đa thức $B: 5x^2 + 21x - 26 = 0$ thành nhân tử.

**A.** $x_1 = 1; x_2 = -\dfrac{26}{5}; B = (x-1)\left(x + \dfrac{26}{5}\right)$. **B.** $x_1 = 1; x_2 = -\dfrac{26}{5}; B = 5.(x+1)\left(x - \dfrac{26}{5}\right)$.

**C.** $x_1 = 1; x_2 = -\dfrac{26}{5}; B = 5.(x-1)\left(x + \dfrac{26}{5}\right)$. **D.** $x_1 = 1; x_2 = \dfrac{26}{5}; B = 5.(x-1)\left(x - \dfrac{26}{5}\right)$.

**Câu 16**. Tìm $u - v$ biết rằng $u + v = 15; uv = 36$ và $u > v$.

**A.** $8$. **B.** $12$. **C.** $9$. **D.** $10$.

**Câu 17**. Tìm $u - 2v$ biết rằng $u + v = 14; uv = 40$ và $u < v$.

**A.** $-6$. **B.** $16$. **C.** $-16$. **D.** $6$.

**Câu 18**. Lập phương trình nhận hai số $3 - \sqrt{5}$ và $3 + \sqrt{5}$ làm nghiệm.

**A.** $x^2 - 6x - 4 = 0$. **B.** $x^2 - 6x + 4 = 0$. **C.** $x^2 + 6x + 4 = 0$. **D.** $-x^2 - 6x + 4 = 0$.

**Câu 19**. Lập phương trình nhận hai số $2+\sqrt{7}$ và $2-\sqrt{7}$ làm nghiệm

**A.** $x^2-4x-3=0$. **B.** $x^2+3x-4=0$. **C.** $x^2-4x+3=0$. **D.** $x^2+4x+3=0$.

**Câu 20**. Biết rằng phương trình $x^2-(2a-1)x-4a-3=0$ luôn có hai nghiệm $x_1;x_2$ với mọi $a$. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc $a$.

**A.** $2(x_1+x_2)-x_1x_2=5$. **B.** $2(x_1+x_2)-x_1x_2=-5$.

**C.** $2(x_1+x_2)+x_1x_2=5$. **D.** $2(x_1+x_2)+x_1x_2=-5$.

**Câu 21**. Biết rằng phương trình $x^2-(m+5)x+3m+6=0$ luôn có hai nghiệm $x_1;x_2$ với mọi $m$. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào $m$.

**A.** $3(x_1+x_2)+x_1x_2=9$. **B.** $3(x_1+x_2)-x_1x_2=-9$. **C.** $3(x_1+x_2)-x_1x_2=9$. **D.** $(x_1+x_2)-x_1x_2=-1$.

**Câu 22**. Tìm giá trị của $m$ để phương trình $x^2-2(m-1)x-m+2=0$ có hai nghiệm trái dấu.

**A.** $m<2$. **B.** $m>2$. **C.** $m=2$. **D.** $m>0$.

**Câu 23**. Tìm các giá trị của $m$ để phương trình $x^2-2(m-3)x+8-4m=0$ có hai nghiệm âm phân biệt.

**A.** $m<2$ và $m\neq 1$. **B.** $m<3$. **C.** $m<2$. **D.** $m>0$.

**Câu 24**. Cho phương trình $3x^2+7x+m=0$. Tìm $m$ để phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng âm.

**A.** $m>\frac{49}{12}$. **B.** $m<0$. **C.** $0<m<\frac{49}{12}$. **D.** Một đáp án khác.

**Câu 25**. Tìm các giá trị nguyên của $m$ để phương trình $x^2-6x+2m+1=0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

**A.** $m\in\{-1;1;2;3\}$. **B.** $m\in\{1;2;3\}$. **C.** $m\in\{0;1;2;3;4\}$. **D.** $m\in\{0;1;2;3\}$.

**Câu 26**. Cho phương trình $x^2+(2m-1)x+m^2-2m+2=0$. Tìm $m$ để phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng dương.

**A.** $\frac{1}{2}<m<\frac{7}{4}$. **B.** $m>\frac{1}{2}$. **C.** Cả A và B đúng. **D.** Không có giá trị nào của $m$.

**Câu 27**. Tìm các giá trị của $m$ để phương trình $mx^2-2(m-2)x+3(m-2)=0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.

**A.** $m<0$. **B.** $m>1$. **C.** $-1<m<0$. **D.** $m>0$.

**Câu 28**. Tìm các giá trị của $m$ để phương trình $x^2-mx-m-1=0$ có hai nghiệm $x_1,x_2$ thỏa mãn $x_1^3+x_2^3=-1$.

**A.** $m=1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=0$. **D.** $m>-1$.

**Câu 29**. Tìm các giá trị của $m$ để phương trình $x^2-5x+m+4=0$ có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=23$.

**A.** $m=-2$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=-3$. **D.** $m=-4$.

**Câu 30**. Giá trị nào dưới đây gần nhất với giá trị của $m$ để phương trình $x^2+3x-m=0$ có hai nghiệm $x_1,x_2$ thỏa mãn: $2x_1+3x_2=13$.

**A.** $416$. **B.** $415$. **C.** $414$. **D.** $418$.

**Câu 31**. Cho phương trình $x^2+2x+m-1=0$. Tìm $m$ để phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn $3x_1+2x_2=1$ .

**A.** $m=-34$. **B.** $m=34$. **C.** $m=35$. **D.** $m=-35$.

**Câu 32**. Tìm giá trị của $m$ để phương trình $x^2+(4m+1)x+2(m-4)=0$ có hai nghiệm $x_1;x_2$ và biểu thức $A=(x_1-x_2)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

**A.** $m=1$. **B.** $m=0$. **C.** $m=2$. **D.** $m=3$.

**Câu 33**. Cho phương trình $x^2-2(m+4)x+m^2-8=0$. Xác định $m$ để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn $x_1;x_2$. Thỏa mãn $A=x_1+x_2-3x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất.

**A.** $m=\frac{1}{3}$. **B.** $m=\frac{-1}{3}$. **C.** $m=3$. **D.** $m=-3$.

**Câu 34**. Tìm giá trị của $m$ để phương trình $x^2-2(m-2)x+2m-5=0$ có hai nghiệm $x_1,x_2$ thỏa mãn $x_1(1-x_2)+x_2(1-x_1)<4$.

**A.** $m>1$. **B.** $m<0$. **C.** $m>2$. **D.** $m<3$.

**Câu 35**. Tìm giá trị của $m$ để phương trình $x^2+2(m+1)x+4m=0$ có hai nghiệm $x_1,x_2$ thỏa mãn $x_1(x_2-2)+x_2(x_1-2)>6$.

**A.** $m>\frac{1}{6}$. **B.** $m>-\frac{1}{6}$. **C.** $m<-\frac{1}{6}$. **D.** $m<\frac{1}{6}$.

**Câu 36**. Cho phương trình $x^2+mx+n-3=0$. Tìm $m$ và $n$ để hai nghiệm $x_1;x_2$ của phương trình thỏa mãn hệ $\begin{cases} x_1-x_2=1 \\ x_1{}^2-x_2{}^2=7 \end{cases}$

**A.** $m=7;n=-15$. **B.** $m=7;n=15$. **C.** $m=-7;n=15$. **D.** $m=-7;n=-15$.

**Câu 37**. Cho phương trình $x^2-(2m-3)x+m^2-3m=0$. Xác định m để phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn $1<x_1<x_2<6$.

**A.** $m<6$. **B.** $m>4$. **C.** $4\le m\le 6$. **D.** $4<m<6$.

## HƯỚNG DẪN

**Câu 1. Đáp án A.**

Cho phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$.

Nếu $x_1,x_2$ là hai nghiệm của phương trình thì $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1.x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$

**Câu 2. Đáp án C.**

+) Nếu phương trình $ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$ có $a+b+c=0$ thì phương trình có một nghiệm $x_1=1$, nghiệm kia là $x_2=\dfrac{c}{a}$.

+ ) Nếu phương trình $ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$ có $a-b+c=0$ thì phương trình có một nghiệm $x_1=-1$, nghiệm kia là $x_2=-\dfrac{c}{a}$.

**Câu 3. Đáp án A.**

+) Nếu phương trình $ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$ có $a+b+c=0$ thì phương trình có một nghiệm $x_1=1$, nghiệm kia là $x_2=\dfrac{c}{a}$.

+ ) Nếu phương trình $ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$ có $a-b+c=0$ thì phương trình có một nghiệm $x_1=-1$, nghiệm kia là $x_2=-\dfrac{c}{a}$.

**Câu 4. Đáp án B.**

Nếu hai số có tổng bằng $S$ và tích bằng $P$ thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình $X^2 - SX + P = 0$ (ĐK: $S^2 \geq 4P$ )

**Câu 5. Đáp án C.**

Phương trình $x^2 - 6x + 7 = 0$ có $\Delta = (-6)^2 - 4.1.7 = 8 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$

Theo hệ thức Vi-et ta có $x_1 + x_2 = -\dfrac{-6}{1} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 6$

**Câu 6. Đáp án D.**

Phương trình $-3x^2 + 5x + 1 = 0$ có $\Delta = 5^2 - 4.1.(-3) = 37 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$

Theo hệ thức Vi-et ta có $x_1 + x_2 = -\dfrac{5}{-3} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \dfrac{5}{3}$.

**Câu 7. Đáp án B.**

Phương trình $x^2 - 5x + 2 = 0$ có $\Delta = (-5)^2 - 4.1.2 = 17 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$

Theo hệ thức Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1.x_2 = 2 \end{cases}$

Ta có $A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 5^2 - 2.2 = 21$

**Câu 8. Đáp án A.**

Phương trình $-2x^2 - 6x - 1 = 0$ có $\Delta = (-6)^2 - 4.(-2).(-1) = 28 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$

Theo hệ thức Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \\ x_1.x_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Ta có $N=\dfrac{1}{x_1+3}+\dfrac{1}{x_2+3}=\dfrac{x_1+x_2+6}{x_1x_2+3\left(x_1+x_2\right)+9}=\dfrac{-3+6}{\dfrac{1}{2}+3.(-3)+9}=6$

**Câu 9. Đáp án C.**

Phương trình $-x^2-4x+6=0$ có $\Delta=(-4)^2-4.(-1).6=40>0$ nên phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2$

Theo hệ thức Vi-et ta có $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1.x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-4 \\ x_1.x_2=-6 \end{cases}$

Ta có $N=\dfrac{1}{x_1+2}+\dfrac{1}{x_2+2}=\dfrac{x_1+x_2+4}{x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)+4}=\dfrac{-4+4}{-6+2.(-4)+4}=0$

**Câu 10. Đáp án D.**

Phương trình $x^2-20x-17=0$ có $\Delta=468>0$ nên phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2$

Theo hệ thức Vi-et ta có $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1.x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=20 \\ x_1.x_2=-17 \end{cases}$

Ta có $C=x_1^3+x_2^3=x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+x_2^3-3x_1^2x_2-3x_1x_2^2$

$=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=20^3-3.(-17).20=9020$.

**Câu 11. Đáp án B.**

Phương trình $2x^2-18x+15=0$ có $\Delta'=61>0$ nên phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2$

Theo hệ thức Vi-et ta có $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1.x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=9 \\ x_1.x_2=\dfrac{15}{2} \end{cases}$

Ta có $C=x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=9^3-3.9.\dfrac{15}{2}=\dfrac{1053}{2}$

**Câu 12. Đáp án C.**

Phương trình $(m-2)x^2-(2m+5)x+m+7=0$ có $a=m-2; b=-2m-5; c=m+7$

Vì $a+b+c=m-2-2m-5+m+7=0$ nên phương trình có hai

nghiệm $x_1=1; x_2=\frac{m+7}{m-2}$.

**Câu 13. Đáp án A.**

Phương trình $mx^2+(3m-1)x+2m-1=0 (m\neq 0)$ có $a=m; b=3m-1; c=2m-1$

Vì $a-b+c=m-3m+1+2m-1=0$ nên phương trình có hai

nghiệm $x_1=-1; x_2=\frac{1-2m}{m}$.

**Câu 14. Đáp án A.**

Phương trình $18x^2+23x+5=0$ có $a-b+c=18-23+5=0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x_1=-1; x_2=-\frac{5}{18}$.

Khi đó $A=18.(x+1)\left(x+\frac{5}{18}\right)$.

**Câu 15. Đáp án C.**

Phương trình $5x^2+21x-26=0$ có $a+b+c=5+21-26=0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x_1=1; x_2=-\frac{26}{5}$. Khi đó $B=5.(x-1)\left(x+\frac{26}{5}\right)$.

**Câu 16. Đáp án C.**

Ta có $S=u+v=15, P=uv=36$. Nhận thấy $S^2=225>144=4P$ nên $u,v$ là hai

nghiệm của phương trình $x^2-15x+36=0 \Leftrightarrow (x-12)(x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=12 \\ x=3 \end{array}\right.$

Vậy $u=12; v=3$ (vì $u>v$) nên $u-v=12-3=9$.

**Câu 17. Đáp án C.**

Ta có $S=u+v=14, P=uv=40$. Nhận thấy $S^2=196>160=4P$ nên $u,v$ là hai nghiệm của phương trình

$$x^2-14x+40=0 \Leftrightarrow (x-4)(x-10)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=10 \end{array}\right.$$

Vậy $u = 4; v = 10$ (vì $u < v$) nên $u - 2v = 4 - 2.10 = -16$.

**Câu 18. Đáp án B.**

Ta có $S = 3 - \sqrt{5} + 3 + \sqrt{5} = 6$ và $P = \left(3 - \sqrt{5}\right)\left(3 + \sqrt{5}\right) = 4$

Nhận thấy $S^2 = 36 > 16 = 4P$ nên hai số $3 - \sqrt{5}$ và $3 + \sqrt{5}$ là nghiệm của phương trình $x^2 - 6x + 4 = 0$.

**Câu 19. Đáp án A.**

Ta có $S = 2 + \sqrt{7} + 2 - \sqrt{7} = 4$ và $P = \left(2 + \sqrt{7}\right)\left(2 - \sqrt{7}\right) = 2^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2 = 4 - 7 = -3$

Nhận thấy $S^2 = 16 > -12 = 4P$ nên hai số $2 + \sqrt{7}$ và $2 - \sqrt{7}$ là nghiệm của phương trình $x^2 - 4x - 3 = 0$.

**Câu 20. Đáp án D.**

Theo Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2a - 1 \\ x_1.x_2 = -4a - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x_1 + x_2) = 4a - 2 \\ x_1.x_2 = -4a - 3 \end{cases} \Rightarrow 2(x_1 + x_2) + x_1x_2 = -5$

Vậy hệ thức cần tìm là $2\left(x_1 + x_2\right) + x_1x_2 = -5$

**Câu 21. Đáp án C.**

Theo hệ thức Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 5 \\ x_1.x_2 = 3m + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x_1 + x_2) = 3m + 15 \\ x_1.x_2 = 3m + 6 \end{cases}$

$\Rightarrow 3\left(x_1 + x_2\right) - x_1x_2 = 3m + 15 - 3m - 6 = 9$. Vậy hệ thức cần tìm là $3\left(x_1 + x_2\right) - x_1x_2 = 9$.

**Câu 22. Đáp án B.**

Phương trình $x^2 - 2\left(m - 1\right)x - m + 2 = 0\left(a = 1; b = -2\left(m - 1\right); c = -m + 2\right)$

Nên phương trình có hai nghiệm trái dấu khi $ac < 0 \Leftrightarrow 1.\left(-m + 2\right) < 0 \Leftrightarrow m > 2$.

Vậy $m > 2$ là giá trị cần tìm.

**Câu 23. Đáp án A.**

Phương trình $x^2 - 2\left(m - 3\right)x + 8 - 4m = 0$

$\left(a = 1; b' = -\left(m - 3\right); c = 8 - 4m\right)$.

Ta có $\Delta' = \left(m - 3\right)^2 - \left(8 - 4m\right) = m^2 - 2m + 1 = \left(m - 1\right)^2$;

$S = x_1 + x_2 = 2\left(m - 3\right); P = x_1.x_2 = 8 - 4m$

Vì $a=1\neq 0$ nên phương trình có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ P>0\\ S<0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(m-1)^2>0\\ 2(m-3)<0\\ 8-4m>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq 1\\ m<3\\ m<2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m\neq 1\\ m<2\end{cases}$$

Vậy $m<2$ và $m\neq 1$ là giá trị cần tìm.

**Câu 24. Đáp án C.**

Phương trình $3x^2+7x+m=0\left(a=3;b=7;c=m\right)$

Ta có $\Delta=7^2-4.3.m=49-12m$ Gọi $x_1;x_2$ là hai nghiệm của phương trình.

Theo hệ thức Vi-ét ta có $S=x_1+x_2=-\frac{7}{3};P=x_1.x_2=\frac{m}{3}$

Vì $a=1\neq 0$ nên phương trình có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ P>0\\ S<0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}49-12m>0\\ \frac{m}{3}>0\\ -\frac{7}{3}<0 \quad (\text{luôn đúng})\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<\frac{49}{12}\\ m>0\end{cases} \Rightarrow 0<m<\frac{49}{12}$$

Vậy $0<m<\frac{49}{12}$ là giá trị cần tìm.

**Câu 25. Đáp án D.**

Phương trình $x^2-6x+2m+1=0\left(a=1;b'=-3;c=2m+1\right)$

Ta có $\Delta'=9-2m-1=8-2m$ $S=x_1+x_2=6;P=x_1.x_2=2m+1$.

Vì $a=1\neq 0$ nên phương trình có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ P>0\\ S>0\end{cases}$

$$\begin{cases} 8-2m>0 \\ 6>0 \\ 2m+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<4 \\ m>-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<m<4 \quad m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{0;1;2;3\}$$

Vậy $m\in\{0;1;2;3\}$.

**Câu 26. Đáp án D.**

Phương trình $x^2+(2m-1)x+m^2-2m+2=0(a=1;b=2m-1;c=m^2-2m+2)$ Ta có $\Delta=(2m-1)^2-4(m^2-2m+2)=4m-7$

Gọi $x_1;x_2$ là hai nghiệm của phương trình, theo hệ thức Vi-ét ta có

$S=x_1+x_2=1-2m; P=x_1.x_2=m^2-2m+2$

Vì $a=1\neq 0$ nên phương trình có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ P>0 \\ S>0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4m-7>0 \\ 1-2m>0 \\ m^2-2m+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>\dfrac{7}{4} \\ m<\dfrac{1}{2} \\ (m-1)^2+1>0\,(luôn\ đúng) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>\dfrac{7}{4} \\ m<\dfrac{1}{2} \end{cases} (vô\ lý)$$

Vậy không có giá trị của $m$ thỏa mãn đề bài.

**Câu 27. Đáp án C.**

Phương trình $mx^2-2(m-2)x+3(m-2)=0\big(a=m;b=-2(m-2);c=3(m-2)\big)$ Ta có $\Delta'=(m-2)^2-3m(m-2)=-2m^2+2m+4=(4-2m)(m+1)$

$P=x_1.x_2=\dfrac{3(m-2)}{m}$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng dấu khi $\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta>0 \\ P>0 \end{cases}$

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ (4-2m)(m+1) > 0 \\ \dfrac{3(m-2)}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} (4-2m)(m+1) > 0 \\ \dfrac{3(m-2)}{m} > 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -1 < m < 2 \Rightarrow -1 < m < 0 \\ \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

Vậy $-1 < m < 0$ là giá trị cần tìm.

**Câu 28. Đáp án B.**

Phương trình $x^2 - mx - m - 1 = 0$ có $a = 1 \neq 0$ và $\Delta = m^2 - 4(m-1) = (m-2)^2 \geq 0; \forall m$ nên phương trình luôn có hai nghiệm $x_1, x_2$ Theo hệ thức Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1.x_2 = -m-1 \end{cases}$

Xét $x_1^3 + x_2^3 = -1$ $\Leftrightarrow (x_1+x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1+x_2) = -1 \Leftrightarrow m^3 - 3m(-m-1) = -1$

$\Leftrightarrow m^3 + 3m^2 + 3m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m+1)^3 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Vậy $m = -1$ là giá trị cần tìm.

**Câu 29. Đáp án C.**

Phương trình $x^2 - 5x + m + 4 = 0$ có $a = 1 \neq 0$ và $\Delta = 25 - 4(m+4) = 9 - 4m$

Phương trình có hai nghiệm $x_1, x_2$ khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 9 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \dfrac{9}{4}$

Theo hệ thức Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1.x_2 = m+4 \end{cases}$

Xét $x_1^2 + x_2^2 = 23$ $\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = 23 \Leftrightarrow 25 - 2m - 8 = 23 \Leftrightarrow m = -3\,(TM)$

Vậy $m = -3$ là giá trị cần tìm.

**Câu 30. Đáp án D.**

Phương trình $x^2 + 3x - m = 0$ có $a = 1 \neq 0$ và $\Delta = 9 + 4m$

Phương trình có hai nghiệm $x_1, x_2$ khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 9 + 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\dfrac{9}{4}$.

Theo hệ thức Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \;(1) \\ x_1.x_2 = -m \;\;(2) \end{cases}$

Xét $2x_1 + 3x_2 = 13 \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{13 - 3x_2}{2}$ thế vào phương trình $(1)$ ta được

$\frac{13-3x_2}{2}+x_2=-3 \Leftrightarrow x_2=19 \Rightarrow x_1=-22$

Từ đó phương trình $(2)$ trở thành $-19.22=-m \Leftrightarrow m=418$ (nhận)

Vậy $m=418$ là giá trị cần tìm.

**Câu 31. Đáp án A.**

Phương trình $x^2+2x+m-1=0$ có $a=1\neq 0$ và $\Delta'=1^2-(m-1)=2-m$

Phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2 \Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 2-m\geq 0 \Leftrightarrow m\leq 2.$

Áp dụng định lý Vi – ét ta có: $x_1+x_2=-2$ (1); $x_1x_2=m-1$ (2).

Theo đề bài ta có: $3x_1+2x_2=1\,(3)$

Từ $(1)$ và $(3)$ ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-2 \\ 3x_1+2x_2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1+2x_2=-4 \\ 3x_1+2x_2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=5 \\ x_2=-7 \end{cases}$

Thế vào $(2)$ ta được: $5.(-7)=m-1 \Leftrightarrow m=-34$ (thỏa mãn)

**Câu 32. Đáp án B.**

Phương trình $x^2+(4m+1)x+2(m-4)=0$ có $a=1\neq 0$ và

$\Delta=(4m+1)^2-8(m-4)=16m^2+33>0;\forall m$

Nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2$.

Theo hệ thức Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1+x_2=-4m-1 \\ x_1.x_2=2m-8 \end{cases}$

Xét $A=\left(x_1-x_2\right)^2=\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2=16m^2+33\geq 33$

Dấu "=" xảy ra khi $m=0$

Vậy $m=0$ là giá trị cần tìm.

**Câu 33. Đáp án A.**

Phương trình $x^2-2(m+4)x+m^2-8=0$ có $a=1\neq 0$ và $\Delta'=(m+4)^2-(m^2-8)=8m+24$

Phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2 \Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 8m+24\geq 0 \Leftrightarrow m\geq -3.$

Áp dụng định lý Vi-ét ta có: $x_1+x_2=2(m+4)$; $x_1x_2=m^2-8$

Ta có: $A=x_1+x_2-3x_1x_2=2(m+4)-3(m^2-8)=-3m^2+2m+32$

$=-3\left(m^2-\frac{2}{3}m-\frac{32}{3}\right)=-3\left(m-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{97}{3}.$

Nhận thấy $A \le \frac{97}{3}$ và dấu "=" xảy ra khi $m-\frac{1}{3}=0 \Leftrightarrow m=\frac{1}{3}(TM)$

Vậy giá trị lớn nhất của A là $\frac{97}{3}$ khi $m=\frac{1}{3}$.

**Câu 34. Đáp án A.**

Phương trình $x^2-2(m-2)x+2m-5=0$ có $a=1\neq 0$ và

$\Delta'=(m-2)^2-2m+5=m^2-6m+9=(m-3)^2\ge 0;\forall m$

Nên phương trình luôn có hai nghiệm $x_1, x_2$

Theo hệ thức Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2m-4 \\ x_1.x_2=2m-5 \end{cases}$

Xét $x_1(1-x_2)+x_2(1-x_1)<4 \Leftrightarrow (x_1+x_2)-2x_1x_2-4<0$

$\Leftrightarrow 2m-4-2(2m-5)-4<0 \Leftrightarrow -2m+2<0 \Leftrightarrow m>1$

Vậy $m>1$ là giá trị cần tìm.

**Câu 35. Đáp án A.**

Phương trình $x^2+2(m+1)x+4m=0$ có $a=1\neq 0$ và

$\Delta'=(m+1)^2-4m=m^2-2m+1=(m-1)^2\ge 0;\forall m$

Nên phương trình luôn có hai nghiệm $x_1, x_2$.

Theo hệ thức Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1+x_2=-2(m+1) \\ x_1.x_2=4m \end{cases}$

Xét $x_1(x_2-2)+x_2(x_1-2)>6 \Leftrightarrow 2x_1x_2-2\left(x_1+x_2\right)>6$

$\Leftrightarrow 8m+4(m+1)-6<0 \Leftrightarrow 12m-2>0 \Leftrightarrow m>\frac{1}{6}$

Vậy $m>\frac{1}{6}$ là giá trị cần tìm.

**Câu 36. Đáp án C.**

$\Delta=m^2-4(n-3)=m^2-4n+12$ Phương trình có hai nghiệm $x_1;x_2 \Leftrightarrow \Delta\ge 0 \Leftrightarrow m^2-4n+12\ge 0$

Áp dụng định lý Vi – ét ta có: $x_1+x_2=-m\,;x_1x_2=n-3$

Ta có: $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1^2 - x_2^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 49 - 4x_1x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2 = 12 \\ x_1 + x_2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n - 3 = 12 \\ -m = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -7 \\ n = 15 \end{cases}$.

Thử lại ta có: $\Delta = (-7)^2 - 4.15 + 12 = 1 > 0\ (tm)$

Vậy $m = -7; n = 15$.

**Câu 37. Đáp án D.**

Xét phương trình $x^2 - (2m-3)x + m^2 - 3m = 0$ có $a = 1 \neq 0$ và

$\Delta = (2m-3)^2 - 4(m^2 - 3m) = 9 > 0\ \forall m$

Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

Áp dụng định lý Vi – ét ta có: $x_1 + x_2 = 2m - 3; x_1x_2 = m^2 - 3m$ .

Ta có: $1 < x_1 < x_2 < 6 \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0 \\ x_1 + x_2 > 1 \\ (x_1 - 6)(x_2 - 6) > 0 \\ x_1 + x_2 < 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1 > 0 \\ x_1 + x_2 > 1 \\ x_1x_2 - 6(x_1 + x_2) + 36 > 0 \\ x_1 + x_2 < 12 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m - 2m + 3 + 1 > 0 \\ 2m - 3 > 1 \\ m^2 - 3m - 6(2m-3) + 36 > 0 \\ 2m - 3 < 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 5m + 4 > 0 \\ 2m > 4 \\ m^2 - 15m + 54 > 0 \\ 2m < 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m > 4 \end{array}\right. \\ m > 2 \\ \left[\begin{array}{l} m < 6 \\ m > 9 \end{array}\right. \\ m < \dfrac{15}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 4 < m < 6$$ .

## D.PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN

### PHIẾU SỐ 1

**Dạng 1: Nhẩm nghiệm của PT bậc hai**

**Bài 1.** Không giải phương trình, hãy nhẩm nghiệm các phương trình sau:

a) $x^2+2x-3=0$ b) $x^2-x-2=0$ c) $x^2-6x+5=0$

d) $3x^2-7x-10=0$ e) $x^2-3x-4=0$ f) $x^2-4x+3=0$

g) $x^2+5x-6=0$ h) $3x^2-5x-8=0$ i) $5x^2+x-6=0$

**Dạng 2: Lập PT bậc hai có hai nghiệm cho trước**

**Bài 2.** Lập các phương trình bậc hai có các nghiệm là các cặp số sau:

a) 3 và 4 b) 5 và –8 c) 3 và $\frac{1}{4}$

d) $-\frac{3}{4}$ và $-\frac{2}{3}$ e) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ và $\sqrt{2}-\sqrt{3}$

**Dạng 3: Tính giá trị biểu thức theo hai nghiệm**

**Bài 3.** Giả sử $x_1, x_2$ là các nghiệm của phương trình: $x^2+2x-3=0$

Tính giá trị của các biểu thức:

$A = x_1^2 + x_2^2$; $B = x_1^3 + x_2^3$; $C = \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$; $D = \frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$

**Dạng 4: Tìm m để PT có hai nghiệm thỏa mãn điều kiện cho trước**

- Tìm ĐK để PT có nghiệm: $\Delta \geq 0$
- Sử dụng hệ thức Vi – ét tính tổng và tích các nghiệm theo m.
- Thay tổng và tích các nghiệm vào hệ thức ban đầu để tìm m.

**Bài 4:** Cho phương trình $x^2 - 2mx - 1 = 0$ (m là tham số)

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Gọi $x_1$, $x_2$ là hai nghiệm của phương trình trên. Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$.

**Bài 5:** Cho phương trình: $x^2-5x+m=0$ (m là tham số).

a) Giải phương trình trên khi m = 6.

b) Tìm m để phương trình trên có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ thỏa mãn: $|x_1-x_2|=3$.

**Bài 6**: Cho phương trình: $x^2-2mx+4=0$ (1)

a) Giải phương trình đã cho khi m = 3.

b) Tìm giá trị của m để PT (1) có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ thỏa mãn: $\left(x_1+1\right)^2+\left(x_2+1\right)^2=2$

**Bài 7**: Cho phương trình: $x^2-2mx-1=0$ (1)

a) Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1$ và $x_2$.

b) Tìm các giá trị của m để: $x_1{}^2+x_2{}^2-x_1x_2=7$.

**Bài 8**: Cho phương trình: $x^2-x+m+1=0$ (1)

a) Giải phương trình đã cho với m = 0.

b) Tìm m để PT (1) có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn: $x_1x_2(x_1x_2-2)=3(x_1+x_2)$

**Bài 9:** Cho phương trình $x^2-6x+m=0$.

1) Với giá trị nào của m thì phương trình có 2 nghiệm trái dấu.

2) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm $x_1;x_2$ thoả mãn điều kiện $x_1-x_2=4$.

**Bài 10:** Cho phương trình: $x^2-2(m-1)-m-3=0$ (1)

1) Giải phương trình với m = –3

2) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm thoả mãn hệ thức $x_1^2+x_2^2=10$.

3) Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc giá trị của m.

## HƯỚNG DẪN

**Dạng 1: Nhẩm nghiệm của PT bậc hai**

**Bài 1.** Không giải phương trình, hãy nhẩm nghiệm các phương trình sau:

a) $x^2+2x-3=0$ b) $x^2-x-2=0$ c) $x^2-6x+5=0$

d) $3x^2-7x-10=0$ e) $x^2-3x-4=0$ f) $x^2-4x+3=0$

g) $x^2+5x-6=0$ h) $3x^2-5x-8=0$ i) $5x^2+x-6=0$

**Lời giải:**

a) $x^2+2x-3=0$

PT đã cho có $a+b+c=1+2-3=0$ nên có hai nghiệm phân biệt $x_1=1;\ x_2=-3$.

b) $x^2-x-2=0$

PT đã cho có $a-b+c=1+1-2=0$ nên có hai nghiệm phân biệt $x_1=-1;\ x_2=2$.

(Làm tương tự cho các phần còn lại)

**Dạng 2: Lập PT bậc hai có hai nghiệm cho trước**

**Bài 2.** Lập các phương trình bậc hai có các nghiệm là các cặp số sau:

a) 3 và 4 b) 5 và –8 c) 3 và $\frac{1}{4}$

d) $-\frac{3}{4}$ và $-\frac{2}{3}$ e) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ và $\sqrt{2}-\sqrt{3}$

**Lời giải:**

a) Ta có $\begin{cases}3+4=7\\3.4=12\end{cases}$ nên 3 và 4 là hai nghiệm của PT: $x^2-7x+12=0$.

b) Ta có $\begin{cases}5+(-8)=-3\\5.(-8)=-40\end{cases}$ nên 5 và –8 là hai nghiệm của PT: $x^2+3x-40=0$.

(Làm tương tự cho các phần còn lại)

**Dạng 3: Tính giá trị biểu thức theo hai nghiệm**

**Bài 3.** Giả sử $x_1,x_2$ là các nghiệm của phương trình: $x^2+2x-3=0$

Tính giá trị của các biểu thức:

$A=x_1^2+x_2^2$; $B=x_1^3+x_2^3$; $C=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$; $D=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$

*Hướng dẫn:*

PT đã cho có $ac=1.(-3)=-3<0$ nên luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2$.

Theo ĐL Viét ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=-2\\x_1x_2=-3\end{cases}$

Khi đó:

- $A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-2)^2 - 2(-3) = 10$
- $B = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2) = (-2)(10+3) = -26$

*(Làm tương tự cho các phần còn lại)*

**Dạng 4: Tìm m để PT có hai nghiệm thỏa mãn điều kiện cho trước**

**Bài 4:** Cho phương trình $x^2 - 2mx - 1 = 0$ (m là tham số)

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Gọi $x_1$, $x_2$ là hai nghiệm của phương trình trên. Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$.

**Lời giải:**

a) Ta thấy: a = 1; b = – 2m; c = – 1, rõ ràng: a.c = 1.(–1) = –1 < 0

$\Rightarrow$ phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

b) Vì phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt nên theo hệ thức Vi – ét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = -1 \end{cases}$

Khi đó: $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 7$

$\Leftrightarrow (2m)^2 - 3.(-1) = 7 \Leftrightarrow 4m^2 = 4 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

**Bài 5:** Cho phương trình: $x^2 - 5x + m = 0$ (m là tham số).

a) Giải phương trình trên khi m = 6.

b) Tìm m để phương trình trên có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ thỏa mãn: $|x_1 - x_2| = 3$.

**Lời giải:**

a) Với m = 6, ta có phương trình: $x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Delta = 25 - 4.6 = 1$. Suy ra phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 3$; $x_2 = 2$.

b) Ta có: $\Delta = 25 - 4m$.

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \dfrac{25}{4}$ (*)

Theo hệ thức Vi-ét, ta có $x_1 + x_2 = 5$ (1); $x_1x_2 = m$ (2).

Khi đó: $|x_1 - x_2| = 3 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 9 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 9 \Leftrightarrow 5^2 - 4m = 9 \Leftrightarrow m = 4$.

**Bài 6**: Cho phương trình: $x^2 - 2mx + 4 = 0$ (1)

a) Giải phương trình đã cho khi m = 3.

b) Tìm giá trị của m để PT (1) có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ thỏa mãn: $(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 = 2$.

**Lời giải:**

a) Với m = 3 ta có phương trình: $x^2 - 6x + 4 = 0$.

Giải ra ta được hai nghiệm: $x_1 = 3 + \sqrt{5}$; $x_2 = 3 - \sqrt{5}$.

b) Ta có: $\Delta' = m^2 - 4$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 2 \\ m \leq -2 \end{array}\right.$ (*).

Theo hệ thức Vi – ét ta có: $x_1 + x_2 = 2m$ và $x_1x_2 = 4$.

Suy ra: $(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 = 2$

$\Leftrightarrow x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 + 2x_2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 8 + 4m = 0$

$\Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m_1 = 1 \\ m_2 = -2 \end{array}\right.$.

Đối chiếu với điều kiện (*) ta thấy chỉ có giá trị $m_2 = -2$ thỏa mãn.

Vậy $m = -2$ là giá trị cần tìm.

**Bài 7**: Cho phương trình: $x^2 - 2mx - 1 = 0$ (1)

a) Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1$ và $x_2$.

b) Tìm các giá trị của m để: $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$.

**Lời giải:**

a) Ta có $\Delta' = m^2 + 1 > 0, \forall m \in R$. Do đó phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Theo định lí Vi – ét thì: $x_1 + x_2 = 2m$ và $x_1.x_2 = -1$.

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1.x_2 = 7 \Leftrightarrow 4m^2 + 3 = 7 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

**Bài 8**: Cho phương trình: $x^2 - x + 1 + m = 0$ (1)

a) Giải phương trình đã cho với $m = 0$.

b) Tìm m để PT (1) có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ thỏa mãn: $x_1x_2(x_1x_2 - 2) = 3(x_1 + x_2)$.

**Lời giải:**

a) Với $m = 0$ ta có phương trình $x^2 - x + 1 = 0$.

Vì $\Delta = -3 < 0$ nên phương trình trên vô nghiệm.

b) Ta có: $\Delta = 1 - 4(1 + m) = -3 - 4m$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow -3 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow 4m \leq -3 \Leftrightarrow m \leq -\frac{3}{4}$ (*).

Theo hệ thức Vi – ét ta có: $x_1 + x_2 = 1$ và $x_1.x_2 = 1 + m$

Thay vào đẳng thức: $x_1x_2(x_1x_2 - 2) = 3(x_1 + x_2)$, ta được:

$(1 + m)(1 + m - 2) = 3 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Đối chiếu với điều kiện (*) suy ra chỉ có $m = -2$ thỏa mãn.

**Bài 9:** Cho phương trình $x^2 - 6x + m = 0$.

1) Với giá trị nào của m thì phương trình có 2 nghiệm trái dấu.

2) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm $x_1$, $x_2$ thoả mãn điều kiện $x_1 - x_2 = 4$.

**Lời giải:**

1) Phương trình có 2 nghiệm trái dấu khi: $m < 0$

2) Phương trình có 2 nghiệm $x_1$, $x_2$ $\Leftrightarrow$ $\Delta' = 9 - m \ge 0 \Leftrightarrow m \le 9$.

Theo hệ thứcViét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 & (1) \\ x_1.x_2 = m & (2) \end{cases}$

Theo yêu cầu của bài ra $x_1 - x_2 = 4$ (3)

Từ (1) và (3) $\Rightarrow$ $x_1 = 5$, thay vào (1) $\Rightarrow$ $x_2 = 1$

Suy ra $m = x_1.x_2 = 5$ (thoả mãn)

Vậy $m = 5$ là giá trị cần tìm.

**Bài 10:** Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x - m - 3 = 0$ (1)

1) Giải phương trình với $m = -3$

2) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm thoả mãn hệ thức $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

3) Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc giá trị của m.

**Lời giải:**

1) Với $m = -3$ ta có phương trình: $x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(x+8) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -8 \end{array}\right.$

2) Phương trình (1) có 2 nghiệm khi:

$\Delta' \ge 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 + (m+3) \ge 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 + m + 3 \ge 0$

$\Leftrightarrow m^2 - m + 4 > 0 \Leftrightarrow (m - \frac{1}{2})^2 + \frac{15}{4} > 0$ đúng $\forall m$

Chứng tỏ phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\forall m$

Theo hệ thức Vi ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) & (1) \\ x_1 - x_2 = -m - 3 & (2) \end{cases}$

Ta có $x_1^2 + x_2^2 = 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10 \Leftrightarrow 4(m-1)^2 + 2(m+3) = 10$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 6m + 10 = 10 \Leftrightarrow 2m(2m-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \frac{3}{2} \end{array}\right.$

3) Từ (2) ta có $m = -x_1x_2 - 3$ thế vào (1) ta có:

$x_1 + x_2 = 2(-x_1x_2 - 3 - 1) = -2x_1x_2 - 8$

$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + 2x_1x_2 + 8 = 0$

Đây là hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc m.

## PHIẾU SỐ 2

**Dạng 1: nhẩm nghiệm**

***Bài 1***: Tính nhẩm nghiệm của mỗi phương trình sau:

a) $-4x^2+3x+1=0$ b) $x^2+\left(1+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{3}=0$ c) $x^2-7x+10=0$

**Dạng 2: tìm hai số biết tổng và tích của chúng**

***Bài 2***: Tìm hai số x và y biết:

a) $x+y=29$ và $x.y=198$ b) $x+y=5$ và $x.y=9$

c) $x^2+y^2=13$ và $x.y=6$ d) $x-y=7$ và $x.y=120$

**Dạng 3: tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc tham số**

***Bài 3***: Cho phương trình $x^2-mx+2m-4=0$ . Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm $x_1,x_2$ không phụ thuộc tham số m.

***Bài 4***: Cho phương trình: $x^2$ - 2 (m - 1)x - m - 3 = 0 (1)

a) Giải phương trình với m = -3

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc giá trị của m.

**Dạng 4 : tính giá trị biểu thức đối xứng giữa các nghiệm**

***Bài 5***: Cho phương trình $x^2+3x+1=0$ . Không giải phương trình, gọi $x_1,x_2$ là hai nghiệm của phương trình. Hãy tính giá trị của biểu thức : $A=\dfrac{x_1^2+5x_1x_2+x_2^2}{4x_1^2x_2+4x_1x_2^2}$

***Bài 6***: Cho phương trình $2x^2-3x+1=0$. Không giải phương trình, gọi $x_1,x_2$ là hai nghiệm của phương trình. Hãy tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ b) $B=\dfrac{1-x_1}{x_1}+\dfrac{1-x_2}{x_2}$

c) $C=x_1^2+x_2^2$ d) $D=\dfrac{x_1}{x_2+1}+\dfrac{x_2}{x_1+1}$

**Dạng 5: tìm điều kiện tham số thỏa mãn điều kiện cho trước**

***Bài 7***: Cho phương trình $x^2-2\left(m+3\right)x+m^2+3=0$.Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2$ thỏa mãn $(2x_1-1)(2x_2-1)=9$

***Bài 8***: Cho phương trình $x^2-2\left(m-3\right)x-2(m-1)=0$ .Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2$ sao cho biểu thức $T=x_1^2+x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

***Bài 9***: Cho phương trình $x^2+mx-3=0$.

Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2$ sao cho biểu thức $|x_1|+|x_2|=4$

***Bài 10***: Cho phương trình $x^2-4x-m^2-1=0$

Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1,x_2$ sao cho biểu thức $x_2=-5x_1$

***Bài 11***: Cho phương tình $x^2-2mx+m^2-4=0$. Tìm $m$ để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2$ thỏa mãn $\frac{1}{x_1}+\frac{3}{x_2}=1$.

**Dạng 6: xét dấu các nghiệm của phương trình bậc hai**

***Bài 12***: Cho phương trình: $x^2-2(m+1)+m^2-4m+3=0$ (với m là tham số)

a) Tìm m để phương trình đã cho có nghiệm.

b) Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm cùng dấu.

c) Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm khác dấu.

d) Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm dương.

e) Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm âm.

## HƯỚNG DẪN

**Dạng 1: nhẩm nghiệm**

***Bài 1***: Tính nhẩm nghiệm của mỗi phương trình sau:

a) $-4x^2+3x+1=0$ b) $x^2+\left(1+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{3}=0$ c) $x^2-7x+10=0$

**Lời giải:**

a) Ta thấy $a+b+c=-4+3+1=0$

Suy ra phương trình có hai nghiệm $x_1=1; x_2=-\dfrac{1}{4}$

b) Ta thấy $a-b+c=1-\left(1+\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}=0$

Suy ra phương trình có hai nghiệm $x_1=-1; x_2=-\sqrt{3}$

c) Ta có $\Delta=9>0$ , theo hệ thức V-ét: $\begin{cases} x_1+x_2=7=2+5 \\ x_1.x_2=10=2.5 \end{cases}$

Suy ra phương trình có hai nghiệm $x_1=2; x_2=5$

**Dạng 2: tìm hai số biết tổng và tích của chúng**

***Bài 2***: Tìm hai số x và y biết:

a) $x+y=29$ và $x.y=198$ b) $x+y=5$ và $x.y=9$

c) $x^2+y^2=13$ và $x.y=6$ d) $x-y=7$ và $x.y=120$

**Lời giải:**

a) Ta có: $S^2-4P=29^2-4.198=49>0$ nên x, y là nghiệm của phương trình : $X^2-29X+198=0$

Giải ra ta có $X_1=11, X_2=18$

Vậy ta có hai số x, y là $\begin{cases} x=11 \\ y=18 \end{cases}; \begin{cases} x=18 \\ y=11 \end{cases}$

b) Ta có: $S^2-4P=5^2-4.9=-11<0$ nên không tồn tại hai số x, y thỏa mãn.

c) Ta có: $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=13+2.6=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=5 \\ x+y=-5 \end{array}\right.$

+) Với $x+y=5$ ta có $x, y$ là hai nghiệm của phương trình sau:

$X^2-5X+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=2 \\ X=3 \end{array}\right.$

+) Với $x+y=-5$ ta có $x, y$ là hai nghiệm của phương trình sau:

$X^2+5X+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=-2 \\ X=-3 \end{array}\right.$

Vậy $(x;y) \in \left\{(2;3),(3;2),(-2;-3),(-3;-2)\right\}$

d) Đặt $t=-y$ , ta có: $x+t=7$ và $x.t=-120$

$S^2-4P=7^2-4.(-120)=529>0$ nên $x,t$ là nghiệm của phương trình : $X^2-7X-120=0$

Giải ra ta có $X_1=15, X_2=-8$

Vậy ta có hai số $x,t$ là $\begin{cases}x=15\\t=-8\end{cases};\begin{cases}x=-8\\t=15\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=15\\y=8\end{cases};\begin{cases}x=-8\\y=-15\end{cases}$

**Dạng 3: tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc tham số**

***Bài 3***: Cho phương trình $x^2-mx+2m-4=0$ . Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm $x_1,x_2$ không phụ thuộc tham số m.

**Lời giải:**

-Xét $\Delta=m^2-4(2m-4)=(m-4)^2\ge 0$ , phương trình luôn có nghiệm.

Theo hệ thức Vi-ét : $(*)\begin{cases}x_1+x_2=m & (1)\\x_1.x_2=2m-4 & (2)\end{cases}$

Cách khử 1: Thế (1) vào (2), ta có hệ thức cần tìm $x_1.x_2=2(x_1+x_2)-4$

Cách khử 2: $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}2x_1+2x_2=2m\\x_1.x_2=2m-4\end{cases}\Rightarrow 2x_1+2x_2-x_1.x_2=4$ là hệ thức cần tìm.

Cách khử 3: $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}m=x_1+x_2\\m=\dfrac{x_1.x_2+4}{2}\end{cases}\Rightarrow x_1+x_2=\dfrac{x_1.x_2+4}{2}$.Hay $2(x_1+x_2)=x_1.x_2+4$ là hệ thức cần tìm.

***Bài 4***: Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x - m - 3 = 0$ (1)

a) Giải phương trình với m = -3

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc giá trị của m.

**Lời giải:**

a) Với m = - 3 ta có phương trình: $x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(x+8) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=-8\end{array}\right.$

b) Phương trình (1) có 2 nghiệm khi:

$\Delta' \ge 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 + (m+3) \ge 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 + m + 3 \ge 0$

$\Leftrightarrow m^2 - m + 4 > 0 \Leftrightarrow (m-\frac{1}{2})^2+\frac{15}{4}>0$ đúng $\forall m$

Chứng tỏ phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\forall$ m

Theo hệ thức Vi ét ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=2(m-1) & (1)\\x_1 - x_2 = -m-3 & (2)\end{cases}$

Từ (2) ta có $m = -x_1x_2 - 3$ thế vào (1) ta có:

$x_1 + x_2 = 2(-x_1x_2 - 3 - 1) = -2x_1x_2 - 8$

$\Leftrightarrow$ $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 + 8 = 0$

Đây là hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc m.

**Dạng 4 : tính giá trị biểu thức đối xứng giữa các nghiệm**

***Bài 5***: Cho phương trình $x^2+3x+1=0$ . Không giải phương trình, gọi $x_1, x_2$ là hai nghiệm của phương trình. Hãy tính giá trị của biểu thức : $A=\dfrac{x_1^2+5x_1x_2+x_2^2}{4x_1^2x_2+4x_1x_2^2}$

**Lời giải:**

Xét $\Delta=9-4.1.1=5>0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Theo hệ thức Vi-ét : $\begin{cases} S=x_1+x_2=-3 \\ P=x_1.x_2=1 \end{cases}$

$$A=\frac{(x_1+x_2)^2+3x_1x_2}{4x_1x_2(x_1+x_2)}=\frac{9+3.1}{4.1.(-3)}=-1$$

***Bài 6***: Cho phương trình $2x^2-3x+1=0$. Không giải phương trình, gọi $x_1, x_2$ là hai nghiệm của phương trình. Hãy tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ b) $B=\dfrac{1-x_1}{x_1}+\dfrac{1-x_2}{x_2}$

c) $C=x_1^2+x_2^2$ d) $D=\dfrac{x_1}{x_2+1}+\dfrac{x_2}{x_1+1}$

**Lời giải:**

Ta có : $\Delta=9-8=1>0$, phương trình có hai nghiệm phân biệt, hơn nữa $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$. Theo hệ thức Vi-ét, ta có : $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{3}{2} \\ x_1x_2=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

a) $A=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1.x_2}=\dfrac{3}{2}:\dfrac{1}{2}=3$

b) $B=\dfrac{1-x_1}{x_1}+\dfrac{1-x_2}{x_2}=\dfrac{x_2-x_1x_2+x_1-x_1x_2}{x_1x_2}=\dfrac{(x_1+x_2)-2x_1x_2}{x_1x_2}=\dfrac{\frac{3}{2}-2.\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1$

c) $C=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-2.\dfrac{1}{2}=1\dfrac{1}{4}$

d) $D=\dfrac{x_1}{x_2+1}+\dfrac{x_2}{x_1+1}=\dfrac{x_1^2+x_1+x_2^2+x_2}{x_1x_2+(x_1+x_2)+1}$

$$=\frac{\left(x_{13}+x_2\right)^2-2x_1x_2+\left(x_1+x_2\right)}{x_1x_2+\left(x_1+x_2\right)+1}=\frac{\frac{9}{4}-1+\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+1}=\frac{11}{4}:3=\frac{11}{12}$$

**Dạng 5: tìm điều kiện tham số thỏa mãn điều kiện cho trước**

***Bài 7***: Cho phương trình $x^2-2\left(m+3\right)x+m^2+3=0$

Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2$ thỏa mãn $(2x_1-1)(2x_2-1)=9$

**Lời giải:**

Có $\Delta'=\left[-\left(m+3\right)\right]^2-1.\left(m^2+3\right)=\left(m+3\right)^2-m^2-3=6m+6$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2$ khi $\Delta'>0\Leftrightarrow 6m+6>0\Leftrightarrow m>-1$

Theo định lí Vi ét, ta có: $x_1+x_2=\frac{-b}{a}=2(m+3);\ x_1.x_2=\frac{c}{a}=m^2+3$

Ta có: $(2x_1-1)(2x_2-1)=9\Leftrightarrow 4x_1x_2-2(x_1+x_2)+1=9$ (*)

$\Rightarrow 4(m^2+3)-4(m+3)+1=9$

$\Leftrightarrow (2m-1)^2=9$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2m-1=3\\2m-1=-3\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow$ m = -1 ( loại) , m = 2 ( thỏa mãn)

Vậy $m=2$ là giá trị cần tìm.

***Bài 8***: Cho phương trình $x^2-2\left(m-3\right)x-2(m-1)=0$

Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2$ sao cho biểu thức $T=x_1^2+x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải:**

Có $\Delta'=\left[-\left(m-3\right)\right]^2-1.\left[-2\left(m-1\right)\right]=\left(m-3\right)^2+2m-2$

$\Delta'=m^2-4m+7=\left(m-2\right)^2+3>0\forall m$

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2$

Theo định lí Vi ét, ta có: $x_1+x_2=\frac{-b}{a}=2(m-3);\ x_1.x_2=\frac{c}{a}=-2\left(m-1\right)$

Ta có: $T=x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2$

$T=\left[-2\left(m-3\right)\right]^2-2\left[-2\left(m-1\right)\right]$

$T=4m^2-20m+32=\left(2m-5\right)^2+7\geq 7$

$\Rightarrow \text{MinT} = 7$ khi $m = \dfrac{5}{2}$

Vậy $m = \dfrac{5}{2}$ là giá trị cần tìm.

***Bài 9***: Cho phương trình $x^2 + mx - 3 = 0$.

Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ sao cho biểu thức $|x_1| + |x_2| = 4$

**Lời giải:**

Có $a.c = -3 < 0 \forall m$ nên a và c trái dấu

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$

Theo định lí Vi ét, ta có: $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = -m;\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} = -3$

Ta có:

$$\left(|x_1| + |x_2|\right)^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + 2|x_1x_2| = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2 + 2|x_1x_2|$$

$$\left(|x_1| + |x_2|\right)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2|x_1x_2|$$

$$\left(|x_1| + |x_2|\right)^2 = (m)^2 - 2.(-3) + 2|-3| = m^2 + 12$$

Do đó: $|x_1| + |x_2| = 4 \Leftrightarrow m^2 + 12 = 16 \Leftrightarrow m = \pm 2$

Vậy $m = \mp 2$ là giá trị cần tìm.

***Bài 10***: Cho phương trình $x^2 - 4x - m^2 - 1 = 0$

Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1, x_2$ sao cho biểu thức $x_2 = -5x_1$

**Lời giải:**

Có $\Delta = (-2)^2 - 1.(-m^2 - 1) = m^2 + 5 > 0 \forall m$

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$

Theo định lí Vi ét, ta có: $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = 4, x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} = -m^2 - 1$

Giải hệ $\begin{cases} x_2 = -5x_1 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow -5x_1 + x_1 = 4 \Rightarrow x_1 = -1 \Rightarrow x_2 = 5$

Thay $x_1 = -1;\ x_2 = 5$ vào $x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} = -m^2 - 1$, ta được $m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$

Vậy $m = \pm 2$ là giá trị cần tìm.

***Bài 11***: Cho phương tình $x^2 - 2mx + m^2 - 4 = 0$. Tìm $m$ để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ thỏa mãn $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{3}{x_2} = 1$.

**Lời giải:**

Có $\Delta' = (-m)^2 - (m^2-4) = m^2 - m^2 + 4 = 4 > 0, \forall m.$

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt là $x = m \pm 2.$

Điều kiện: $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0 \Leftrightarrow m \pm 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2.$

Trường hợp 1: Xét $x_1 = m+2, x_2 = m-2$ thay vào $\frac{1}{x_1} + \frac{3}{x_2} = 1$ ta được:

$$\frac{1}{m+2} + \frac{3}{m-2} = 1 \Leftrightarrow \frac{m-2+3(m+2)}{(m+2)(m-2)} = 1 \Leftrightarrow \frac{4m+4}{m^2-4} = 1$$

$$\Leftrightarrow 4m+4 = m^2-4 \Leftrightarrow m^2-4m-8=0 \Leftrightarrow m^2-4m+4-12=0$$

$\Leftrightarrow (m-2)^2 = 12 \Leftrightarrow m-2 = \pm 2\sqrt{3} \Leftrightarrow m = 2 \pm 2\sqrt{3}$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2: Xét $x_1 = m-2, x_2 = m+2$ thay vào $\frac{1}{x_1} + \frac{3}{x_2} = 1$ ta được:

$$\frac{1}{m-2} + \frac{3}{m+2} = 1 \Leftrightarrow \frac{m+2+3(m-2)}{(m+2)(m-2)} = 1 \Leftrightarrow \frac{4m-4}{m^2-4} = 1$$

$\Leftrightarrow 4m-4 = m^2-4 \Leftrightarrow m^2-4m=0 \Leftrightarrow m=0; m=4$ (thỏa mãn).

Vậy $m \in \{0; 4; 2 \pm 2\sqrt{3}\}$ là giá trị cần tìm.

**Dạng 6: xét dấu các nghiệm của phương trình bậc hai**

***Bài 12***: Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1) + m^2 - 4m + 3 = 0$ (với m là tham số)

a) Tìm m để phương trình đã cho có nghiệm.

b) Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm cùng dấu.

c) Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm khác dấu.

d) Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm dương.

e) Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm âm.

**Lời giải:**

$$\Delta' = (m+1)^2 - (m^2-4m+3) = 6m-2$$

$$S = 2(m+1) \ ; \ P = m^2-4m+3$$

a) Để phương trình đã cho có nghiệm thì: $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - (m^2-4m+3) \geq 0 \Leftrightarrow 6m-2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{3}.$

Vậy khi $m \geq \frac{1}{3}$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

a) Phương trình đã cho có hai nghiệm cùng dấu khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}\Delta' > 0\\ P > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(m+1)^2 - (m^2 - 4m + 3) > 0\\ m^2 - 4m + 3 > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{1}{3}\\ m < 1 \cup m > 3\end{cases} \Leftrightarrow m > 3$$

Vậy khi $m > 3$ phương trình có hai nghiệm cùng dấu.

c) Phương trình có hai nghiệm khác dấu khi và chỉ khi: $P < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 3$

Vậy khi $1 < m < 3$ thì phương trình có hai nghiệm khác dấu.

d) Phương trình đã cho có hai nghiệm dương khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}\Delta' > 0\\ P > 0\\ S > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6m - 2 > 0\\ m^2 - 4m + 3 > 0\\ 2(m+1) > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{1}{3}\\ m < 1 \cup m > 3\\ m > -1\end{cases} \Leftrightarrow m > 3$$

Vậy khi m > 3 thì phương trình đã cho có hai nghiệm dương.

e) Phương trình đã cho có hai nghiệm âm khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}\Delta' > 0\\ P > 0\\ S < 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6m - 2 > 0\\ m^2 - 4m + 3 > 0\\ 2(m+1) < 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{1}{3}\\ m < 1 \cup m > 3\\ m < -1\end{cases} \Leftrightarrow m = \Phi$$

Vậy không tìm được giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm âm.