Chuyên đề: BẤT ĐẲNG THỨC

A.MỤC TIÊU:

1-Học sinh nắm vững một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức.
2-Một số phương pháp và bài toán liên quan đến phương trình bậc hai sử dụng công thức nghiệm sẽ cho học sinh học sau.
3-Rèn kỹ năng và pp chứng minh bất đẳng thức.

B- NỘI DUNG

PHẦN 1 : CÁC KIẾN THỨC CẦN LƯU Ý

1- Định nghĩa
2- Tính chất
3-Một số hằng bất đẳng thức hay dùng

PHẦN 2:MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁPCHỨNG MINH BẤTĐẲNG THỨC

1-Phương pháp dùng định nghĩa
2- Phương pháp dùng biến đổi tương đương
3- Phương pháp dùng bất đẳng thức quen thuộc
4- Phương pháp sử dụng tính chất bắc cầu
5- Phương pháp dùng tính chất tỉ số
6- Phương pháp làm trội
7- Phương pháp dùng bất đẳng thức trong tam giác
8- Phương pháp đổi biến số
9- Phương pháp dùng tam thức bậc hai
10- Phương pháp quy nạp
11- Phương pháp phản chứng

PHẦN 3 :CÁC BÀI TẬP NÂNG CAO

PHẦN 4 : ỨNG DỤNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC

1- Dùng bất đẳng thức để tìm cực trị
2-Dùng bất đẳng thức để giải phương trình và bất phương trình
3-Dùng bất đẳng thức giải phương trình nghiệm nguyên

PHẦN I : CÁC KIẾN THỨC CẦN LƯU Ý

1-ĐINHNGHĨA

$$\begin{cases} A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0 \\ A \leq B \Leftrightarrow A - B \leq 0 \end{cases}$$

2-TÍNH CHẤT

+ A>B $\Leftrightarrow B < A$
+ A>B và B >C $\Leftrightarrow A > C$
+ A>B $\Rightarrow$ A+C >B + C
+ A>B và C > D $\Rightarrow$ A+C > B + D
+ A>B và C > 0 $\Rightarrow$ A.C > B.C
+ A>B và C < 0 $\Rightarrow$ A.C < B.C
+ 0 < A < B và 0 < C <D $\Rightarrow$ 0 < A.C < B.D
+ A > B > 0 $\Rightarrow$ $A^n > B^n$ $\forall n$
+ A > B $\Rightarrow$ $A^n > B^n$ với n lẻ
+ $|A| > |B|$ $\Rightarrow$ $A^n > B^n$ với n chẵn
+ m > n > 0 và A > 1 $\Rightarrow$ $A^m > A^n$
+ m > n > 0 và 0 <A < 1 $\Rightarrow$ $A^m < A^n$
+A < B và A.B > 0 $\Rightarrow$ $\frac{1}{A} > \frac{1}{B}$

3-MỘT SỐ HẰNG BẤT ĐẲNG THỨC

+ $A^2 \geq 0$ với $\forall$ A (dấu = xảy ra khi A = 0)
+ $A^n \geq 0$ với $\forall$ A (dấu = xảy ra khi A = 0)
+ $|A| \geq 0$ với $\forall A$ (dấu = xảy ra khi A = 0)
+ -$|A|$ < A <$|A|$
+ $|A+B| \geq |A|+|B|$ (dấu = xảy ra khi A.B > 0)
+ $|A-B| \leq |A|-|B|$ (dấu = xảy ra khi A.B < 0)

PHẦN II : MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

PHƯƠNG PHÁP 1 : DÙNG ĐỊNH NGHĨA

KIẾN THỨC : Để chứng minh A > B
Ta chứng minh A –B > 0
Lưu ý dùng hằng bất đẳng thức $M^2 \geq 0$ với $\forall$ M

Ví du 1 $\forall$ x, y, z chứng minh rằng :

a) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$
b) $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy - 2xz + 2yz$
c) $x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2(x + y + z)$

<u>Giải:</u>

a) Ta xét hiệu

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$$
$$= \frac{1}{2}.2.(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$
$$= \frac{1}{2}\left[(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2\right] \geq 0 \text{ đúng với mọi } x;y;z \in R$$

Vì $(x-y)^2 \geq 0$ với $\forall x$; y Dấu bằng xảy ra khi x=y
$(x-z)^2 \geq 0$ với $\forall x$; z Dấu bằng xảy ra khi x=z
$(y-z)^2 \geq 0$ với $\forall$ z; y Dấu bằng xảy ra khi z=y
Vậy $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$
Dấu bằng xảy ra khi x = y = z

b)Ta xét hiệu

$$x^2 + y^2 + z^2 - (2xy - 2xz + 2yz)$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz$$
$$= (x - y + z)^2 \geq 0 \text{ đúng với mọi } x;y;z \in R$$

Vậy $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy - 2xz + 2yz$ đúng với mọi $x;y;z \in R$
Dấu bằng xảy ra khi x+y=z

c) Ta xét hiệu

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3 - 2(x + y + z)$$
$$= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1$$
$$= (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \geq 0$$

Dấu(=)xảy ra khi x=y=z=1

<u>Ví du 2:</u> chứng minh rằng :

a) $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$;b) $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$

c) Hãy tổng quát bài toán

<u>GIẢI</u>

a) Ta xét hiệu $\frac{a^2+b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

$$= \frac{2(a^2+b^2)}{4} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4}$$
$$= \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - a^2 - b^2 - 2ab)$$
$$= \frac{1}{4}(a-b)^2 \geq 0$$

Vậy $\dfrac{a^2+b^2}{2} \ge \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$

Dấu bằng xảy ra khi a=b

b)Ta xét hiệu

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} - \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$$

$$= \frac{1}{9}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right] \ge 0$$

Vậy $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3} \ge \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^2$

Dấu bằng xảy ra khi a = b =c

c)Tổng quát

$$\frac{a_1^2+a_2^2+....+a_n^2}{n} \ge \left(\frac{a_1+a_2+....+a_n}{n}\right)^2$$

Tóm lại các bước để chứng minh A$\ge$B tho định nghĩa

Bước 1: Ta xét hiệu H = A - B

Bước 2:Biến đổi H=$(C+D)^2$ hoặc H=$(C+D)^2+\ldots+(E+F)^2$

Bước 3:Kết luận A $\ge$ B

<u>Ví dụ</u>:(chuyên Nga- Pháp 98-99)

Chứng minh $\forall$m,n,p,q ta đều có

$$m^2+n^2+p^2+q^2+1 \ge m(n+p+q+1)$$

<u>Giải:</u>

$$\Leftrightarrow \left(\frac{m^2}{4}-mn+n^2\right)+\left(\frac{m^2}{4}-mp+p^2\right)+\left(\frac{m^2}{4}-mq+q^2\right)+\left(\frac{m^2}{4}-m+1\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{m}{2}-n\right)^2+\left(\frac{m}{2}-p\right)^2+\left(\frac{m}{2}-q\right)^2+\left(\frac{m}{2}-1\right)^2 \ge 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} \dfrac{m}{2}-n=0 \\ \dfrac{m}{2}-p=0 \\ \dfrac{m}{2}-q=0 \\ \dfrac{m}{2}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=\dfrac{m}{2} \\ p=\dfrac{m}{2} \\ q=\dfrac{m}{2} \\ m=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=p=q=1 \end{cases}$

PHƯƠNG PHÁP 2 : DÙNG PHÉP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

<u>LƯU Ý:</u>

Ta biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức đúng hoặc bất đẳng thức đã được chứng minh là đúng.

Chú ý các hằng đẳng thức sau:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A+B+C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$$

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

Ví dụ 1:

Cho a, b, c, d,e là các số thực chứng minh rằng

a) $a^2 + \frac{b^2}{4} \geq ab$

b) $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$

c) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$

Giải:

a) $a^2 + \frac{b^2}{4} \geq ab$

$\Leftrightarrow 4a^2 + b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow 4a^2 - 4a + b^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (2a - b)^2 \geq 0$ (bất đẳng thức này luôn đúng)

Vậy $a^2 + \frac{b^2}{4} \geq ab$ (dấu bằng xảy ra khi 2a=b)

b) $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$

$\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + 1) > 2(ab + a + b)$

$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 \geq 0$ Bất đẳng thức cuối đúng.

Vậy $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$

Dấu bằng xảy ra khi a=b=1

c) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$

$\Leftrightarrow 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \geq 4a(b + c + d + e)$

$\Leftrightarrow (a^2 - 4ab + 4b^2) + (a^2 - 4ac + 4c^2) + (a^2 - 4ad + 4d^2) + (a^2 - 4ac + 4c^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - 2b)^2 + (a - 2c)^2 + (a - 2d)^2 + (a - 2c)^2 \geq 0$

Bất đẳng thức đúng vậy ta có điều phải chứng minh

VÍ DỤ 2:

Chứng minh rằng: $(a^{10} + b^{10})(a^2 + b^2) \geq (a^8 + b^8)(a^4 + b^4)$

Giải:

$(a^{10} + b^{10})(a^2 + b^2) \geq (a^8 + b^8)(a^4 + b^4) \Leftrightarrow a^{12} + a^{10}b^2 + a^2b^{10} + b^{12} \geq a^{12} + a^8b^4 + a^4b^8 + b^{12}$

$\Leftrightarrow a^8b^2(a^2 - b^2) + a^2b^8(b^2 - a^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow a^2b^2(a^2-b^2)(a^6-b^6) \geq 0 \Leftrightarrow a^2b^2(a^2-b^2)^2(a^4+a^2b^2+b^4) \geq 0$

Bất đẳng thứccuối đúng vậy ta có điều phải chứng minh

VÍ DỤ 3: cho x.y =1 và x.y

Chứng minh $\frac{x^2+y^2}{x-y} \geq 2\sqrt{2}$

Giải:

$\frac{x^2+y^2}{x-y} \geq 2\sqrt{2}$ vì :x $\rangle$ y nên x- y $\rangle$ 0 $\Rightarrow x^2+y^2 \geq 2\sqrt{2}$ (x-y)

$\Rightarrow$ $x^2+y^2- 2\sqrt{2}\ x+2\sqrt{2}\ y \geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2+2- 2\sqrt{2}\ x+2\sqrt{2}\ y -2 \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $x^2+y^2+(\sqrt{2})^2- 2\sqrt{2}\ x+2\sqrt{2}\ y -2xy \geq 0$ vì x.y=1 nên 2.x.y=2

$\Rightarrow (x-y-\sqrt{2})^2 \geq 0$ Điều này luôn luôn đúng . Vậy ta có điều phải chứng minh

VÍ DỤ 4:

1)CM: $P(x,y)=9x^2y^2+y^2-6xy-2y+1 \geq 0 \quad \forall x, y \in R$

2)CM: $\sqrt{a^2+b^2+c^2} \leq |a|+|b|+|c|$ (Gợi ý :bình phương 2 vế)

3)choba số thực khác không x, y, z thỏa mãn:

$$\begin{cases} x.y.z = 1 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} < x+y+z \end{cases}$$

Chứng minh rằng :có đúng một trong ba số x,y,z lớn hơn 1

(đề thi Lam Sơn 96-97)

Giải:

Xét (x-1)(y-1)(z-1)=xyz+(xy+yz+zx)+x+y+z-1

=(xyz-1)+(x+y+z)-xyz($\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$)=x+y+z - ($\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$) > 0 (vì $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$< x+y+z theo gt)

$\rightarrow$2 trong 3 số x-1 , y-1 , z-1 âm hoặc cả ba sỗ-1 , y-1, z-1 là dương.

Nếủ trường hợp sau xảy ra thì x, y, z >1 $\rightarrow$x.y.z>1 Mâu thuẫn gt x.y.z=1 bắt buộc phải xảy ra trường hợp trên tức là có đúng 1 trong ba số x ,y ,z là số lớn hơn 1

PHƯƠNG PHÁP 3: DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC QUEN THUỘC

A/ MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC HAY DÙNG

1) Các bất đẳng thức phụ:

a) $x^2+y^2 \geq 2xy$

b) $x^2+y^2 \geq |\ xy\ |$ dấu(=) khi x = y = 0

c) $(x+y)^2 \geq 4xy$

d) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$

2)Bất đẳng thức Cô sy: $\frac{a_1+a_2+a_3+....+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2a_3....a_n}$ Với $a_i > 0$

3)Bất đẳng thức Bunhiacopski

$$\left(a_2{}^2+a_2^2+....+a_n^2\right)\left(x_1^2+x_2^2+....+{}_n^2\right) \geq \left(a_1x_1+a_2x_2+....+a_nx_n\right)^2$$

4) Bất đẳng thức Trê- bư-sép:

Nếu $\begin{cases} a \le b \le c \\ A \le B \le C \end{cases} \Rightarrow \dfrac{aA+bB+cC}{3} \ge \dfrac{a+b+c}{3}.\dfrac{A+B+C}{3}$

Nếu $\begin{cases} a \le b \le c \\ A \ge B \ge C \end{cases} \Rightarrow \dfrac{aA+bB+cC}{3} \le \dfrac{a+b+c}{3}.\dfrac{A+B+C}{3}$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} a = b = c \\ A = B = C \end{cases}$

B/ CÁC VÍ DỤ

VÍ DỤ 1 Cho a, b ,c là các số không âm chứng minh rằng

$$(a+b)(b+c)(c+a) \ge 8abc$$

Giải:

Cách 1:Dùng bất đẳng thức phụ: $(x+y)^2 \ge 4xy$

Tacó $(a+b)^2 \ge 4ab$; $(b+c)^2 \ge 4bc$; $(c+a)^2 \ge 4ac$

$\Rightarrow (a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 \ge 64a^2b^2c^2 = (8abc)^2$

$\Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \ge 8abc$

Dấu “=” xảy ra khi a = b = c

VÍ DỤ 2(tự giải): 1)Cho a,b,c>0 và a+b+c=1 CMR: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \ge 9$ (403-1001)

2)Cho x,y,z>0 và x+y+z=1 CMR:x+2y+z $\ge 4(1-x)(1-y)(1-z)$

3)Cho a>0 , b>0, c>0

CMR: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b} \ge \dfrac{3}{2}$

4)Cho $x \ge 0, y \ge 0$ thỏa mãn $2\sqrt{x}-\sqrt{y}=1$;CMR: $x+y \ge \dfrac{1}{5}$

VÍ DỤ 3: Cho a>b>c>0 và $a^2+b^2+c^2=1$ chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{a+c}+\frac{c^3}{a+b} \ge \frac{1}{2}$$

Giải:

Do a,b,c đối xứng ,giả sử $a \ge b \ge c \Rightarrow \begin{cases} a^2 \ge b^2 \ge c^2 \\ \dfrac{a}{b+c} \ge \dfrac{b}{a+c} \ge \dfrac{c}{a+b} \end{cases}$

áp dụng BĐT Trê- bư-sép ta có

$$a^2.\frac{a}{b+c}+b^2.\frac{b}{a+c}+c^2.\frac{c}{a+b} \ge \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)=\frac{1}{3}.\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

Vậy $\dfrac{a^3}{b+c}+\dfrac{b^3}{a+c}+\dfrac{c^3}{a+b} \ge \dfrac{1}{2}$ Dấu bằng xảy ra khi a=b=c=$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

VÍ DỤ 4:

Cho a,b,c,d>0 và abcd =1 .Chứng minh rằng :

$$a^2+b^2+c^2+d^2+a(b+c)+b(c+d)+d(c+a) \ge 10$$

Giải:

Ta có $a^2+b^2\ge 2ab$

$c^2+d^2\ge 2cd$

Do abcd =1 nên cd =$\frac{1}{ab}$ (dùng $x+\frac{1}{x}\ge\frac{1}{2}$)

Ta có $a^2+b^2+c^2\ge 2(ab+cd)=2(ab+\frac{1}{ab})\ge 4$ (1)

Mặt khác: $a(b+c)+b(c+d)+d(c+a)$

=(ab+cd)+(ac+bd)+(bc+ad)

$=\left(ab+\frac{1}{ab}\right)+\left(ac+\frac{1}{ac}\right)+\left(bc+\frac{1}{bc}\right)\ge 2+2+2$

Vậy $a^2+b^2+c^2+d^2+a(b+c)+b(c+d)+d(c+a)\ge 10$

<u>VÍ DỤ 5:</u> Cho 4 số a,b,c,d bất kỳ chứng minh rằng:

$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}\le\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$$

<u>Giải:</u> Dùng bất đẳng thức Bunhiacopski

tacó ac+bd$\le\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{c^2+d^2}$

mà $(a+c)^2+(b+d)^2=a^2+b^2+2(ac+bd)+c^2+d^2$

$\le(a^2+b^2)+2\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{c^2+d^2}+c^2+d^2$

$\Rightarrow\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}\le\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$

<u>VÍ DỤ 6</u>: Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ac$$

<u>Giải</u>: Dùng bất đẳng thức Bunhiacopski

Cách 1: Xét cặp số (1,1,1) và (a,b,c) ta có

$$(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)\ge(1.a+1.b+1.c)^2$$

$\Rightarrow$ $3(a^2+b^2+c^2)\ge a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ac$ Điều phải chứng minh Dấu bằng xảy ra khi a=b=c

<u>PHƯƠNG PHÁP 4</u>: <u>SỬ DỤNG TÍNH CHẤT BẮC CẦU</u>

<u>LƯU Ý:</u> A>B và B>C thì A>C

0< x <1 thì x^2<x

<u>VÍ DỤ 1</u>:

Cho a, b, c ,d >0 thỏa mãn a> c+d , b>c+d

Chứng minh rằng ab >ad+bc

<u>Giải:</u>

Tacó $\begin{cases}a>c+d\\b>c+d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-c>d>0\\b-d>c>0\end{cases}$

$\Rightarrow$ (a-c)(b-d) > cd

$\Leftrightarrow$ ab-ad-bc+cd >cd

$\Leftrightarrow$ ab> ad+bc (điều phải chứng minh)

VÍ DỤ 2:

Cho a,b,c>0 thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=\frac{5}{3}$

Chứng minh $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{1}{abc}$

Giải:

Ta có :(a+b- c)^2= a^2+b^2+c^2+2(ab –ac – bc) $\rangle$ 0

$\Rightarrow$ ac+bc-ab $\langle\frac{1}{2}$(a^2+b^2+c^2)

$\Rightarrow$ ac+bc-ab $\le\frac{5}{6}\langle$ 1 Chia hai vế cho abc > 0 ta có $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\langle\ \frac{1}{abc}$

VÍ DỤ 3

Cho 0 < a,b,c,d <1 Chứng minh rằng (1-a).(1-b) (1-c).(1-d) > 1-a-b-c-d

Giải:

Ta có (1-a).(1-b) = 1-a-b+ab

Do a>0 , b>0 nên ab>0

$\Rightarrow$ (1-a).(1-b) > 1-a-b (1)

Do c <1 nên 1- c >0 ta có

$\Rightarrow$(1-a).(1-b) (1-c) > 1-a-b-c

$\Rightarrow$ (1-a).(1-b) (1-c).(1-d) > (1-a-b-c) (1-d)

=1-a-b-c-d+ad+bd+cd

$\Rightarrow$ (1-a).(1-b) (1-c).(1-d) > 1-a-b-c-d

(Điều phải chứng minh)

VÍ DỤ 4

1- Cho 0 <a,b,c <1 . Chứng minh rằng

$$2a^3+2b^3+2c^3<3+a^2b+b^2c+c^2a$$

Giải :

Do a < 1 $\Rightarrow$ $a^2<1$ và

Ta có $\left(1-a^2\right).\left(1-b\right)<0$ $\Rightarrow$ 1-b-a^2+a^2b > 0

$\Rightarrow$ 1+$a^2\,b^2$ > a^2 + b

mà 0< a,b <1 $\Rightarrow$ $a^2>a^3$, $b^2>b^3$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ 1+$a^2\,b^2$> a^3+b^3

Vậy a^3+b^3 < 1+$a^2\,b^2$

Tương tự $b^3+c^3\le1+b^2c$

$c^3+a^3\le1+c^2a$

Cộng các bất đẳng thức ta có :

$$2a^3+2b^3+2c^3\le3+a^2b+b^2c+c^2a$$

b)Chứng minh rằng : Nếu $a^2+b^2=c^2+d^2=1998$ thì $|$ac+bd$|$ =1998

(Chuyên Anh –98 – 99)

Giải:

Ta có (ac + bd)^2 + (ad – bc)^2 = a^{2}c^2 + b^2$d^2+2abcd+a^2d^2+b^2c^2-2abcd$ =

= a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2) =(c^2+d^2).(a^2+ b^2) = 1998^2

rỏ ràng (ac+bd)^2 $\leq$ $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=1998^2$

$\Rightarrow |ac+bd| \leq 1998$

2-<u>Bài tập</u> : 1, Cho các số thực : a_1; a_2;a_3 ….;a_{2003} thỏa mãn : a_1+ a_2+a_3 + ….+a_{2003} =1

chứng minh rằng : $a_1^2+a_2^2+a_3^2+....+a_{2003}^2 \geq \frac{1}{2003}$ (đề thi vào chuyên nga pháp 2003- 2004Thanh hóa)

2,Cho a;b;c ≥ 0 thỏa mãn :a+b+c=1(?)

Chứng minh rằng: $(\frac{1}{a}-1).(\frac{1}{b}-1).(\frac{1}{c}-1) \geq 8$

<u>PHƯƠNG PHÁP 5:</u> DÙNG TÍNH CHẤTCỦA TỶ SỐ

<u>KIẾN THỨC</u>

1) Cho a, b ,c là các số dương thì

a – Nếu $\frac{a}{b}>1$ thì $\frac{a}{b}>\frac{a+c}{b+c}$

b – Nếu $\frac{a}{b}<1$ thì $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}$

2)Nếu b,d >0 thì từ

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$$

`

<u>VÍ DỤ 1</u> :

Cho a,b,c,d > 0 .Chứng minh rằng

$$1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2$$

<u>Giải</u> :

Theo tính chất của tỉ lệ thức ta có

$$\frac{a}{a+b+c}<1 \Rightarrow \frac{a}{a+b+c}<\frac{a+d}{a+b+c+d} \qquad (1)$$

Mặt khác : $\frac{a}{a+b+c}>\frac{a}{a+b+c+d}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có

$$\frac{a}{a+b+c+d} < \frac{a}{a+b+c}<\frac{a+d}{a+b+c+d} \qquad (3)$$

Tương tự ta có

$$\frac{b}{a+b+c+d}<\frac{b}{b+c+d}<\frac{b+a}{a+b+c+d} \qquad (4)$$

$$\frac{c}{a+b+c+d}<\frac{c}{c+d+a}<\frac{b+c}{a+b+c+d} \qquad (5)$$

$$\frac{d}{a+b+c+d}<\frac{d}{d+a+b}<\frac{d+c}{a+b+c+d} \qquad (6)$$

cộng vế với vế của (3); (4); (5); (6) ta có

$1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2$ điều phải chứng minh

VÍ DỤ 2 :

Cho: $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ và b,d > 0 .Chứng minh rằng $\frac{a}{b}<\frac{ab+cd}{b^2+d^2}<\frac{c}{d}$

Giải: Từ $\frac{a}{b}<\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{ab}{b^2}<\frac{cd}{d^2} \Rightarrow \frac{ab}{b^2}<\frac{ab+cd}{b^2+d^2}<\frac{cd}{d^2}=\frac{c}{d}$

Vậy $\frac{a}{b}<\frac{ab+cd}{b^2+d^2}<\frac{c}{d}$ điều phải chứng minh

VÍ DỤ 3 : Cho a;b;c;dlà các số nguyên dương thỏa mãn : a+b = c+d =1000

tìm giá trị lớn nhất của $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}$

GIẢI : Không mất tính tổng quát ta giả sử : $\frac{a}{c} \le \frac{b}{d}$ Từ : $\frac{a}{c} \le \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} \le \frac{a+b}{c+d} \le \frac{b}{d}$

$\frac{a}{c} \le 1$ vì a+b = c+d

a, Nếu :b ≤ 998 thì $\frac{b}{d} \le 998 \Rightarrow \frac{a}{c}+\frac{b}{d} \le$ 999

b, Nếu: b=998 thì a=1 $\Rightarrow \frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{1}{c}+\frac{999}{d}$ Đạt giá trị lớn nhất khi d= 1; c=999

Vậy giá trị lớn nhất của $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}$ =999+$\frac{1}{999}$ khi a=d=1; c=b=999

PHƯƠNG PHÁP 6: PHƯƠNG PHÁPLÀM TRỘI

LƯU Ý:

Dùng các tính bất đẳng thức để đưa một vế của bất đẳng thức về dạng tính được tổng hữu hạn hoặc tích hữu hạn.

(*) Phương pháp chung để tính tổng hữu hạn :

S = $u_1+u_2+....+u_n$

Ta cố gắng biến đổi số hạng tổng quát u_k về hiệu của hai số hạng liên tiếp nhau:

$$u_k=a_k-a_{k+1}$$

Khi đó :

S = $(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+....+(a_n-a_{n+1})=a_1-a_{n+1}$

(*) Phương pháp chung về tính tích hữu hạn

P = $u_1u_2....u_n$

Biến đổi các số hạng u_k về thương của hai số hạng liên tiếp nhau:

$$u_k=\frac{a_k}{a_{k+1}}$$

Khi đó $P = \frac{a_1}{a_2}.\frac{a_2}{a_3}.....\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_1}{a_{n+1}}$

VÍ DỤ 1 :

Với mọi số tự nhiên n >1 chứng minh rằng

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n} < \frac{3}{4}$$

Giải:

Ta có $\frac{1}{n+k} > \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n}$ với k = 1,2,3,…,n-1

Do đó:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + ... + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

VÍ DỤ 2 :

Chứng minh rằng:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right)$$ Với n là số nguyên

Giải :

Ta có $\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{2\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = 2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$

Khi cho k chạy từ 1 đến n ta có

$$1 > 2\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} > 2\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$$

………………

$$\frac{1}{\sqrt{n}} > 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta có

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right)$$

VÍ DỤ 3 :

Chứng minh rằng $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2$ $\forall n \in Z$

Giải:

Ta có $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

Cho k chạy từ 2 đến n ta có

$$\frac{1}{2^2} < 1 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

....

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} < 1$$

Vậy $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2$

PHƯƠNG PHÁP 7:
DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC TRONG TAM GIÁC

LƯU Ý: Nếu a;b;clà số đo ba cạnh của tam giác thì : a;b;c> 0

Và |b-c| < a < b+c ; |a-c| < b < a+c ; |a-b| < c < b+a

VÍ DỤ1: Cho a;b;clà số đo ba cạnh của tam giác chứng minh rằng

a, $a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ac)$

b, $abc > (a+b-c).(b+c-a).(c+a-b)$

Giải

a)Vì a,b,c là số đo 3 cạnh của một tam giác nên ta có

$$\begin{cases} 0 < a < b+c \\ 0 < b < a+c \\ 0 < c < a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 < a(b+c) \\ b^2 < b(a+c) \\ c^2 < c(a+b) \end{cases}$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta có

$$a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ac)$$

b) Ta có $a > |b-c| \Rightarrow a^2 > a^2 - (b-c)^2 > 0$

$b > |a-c| \Rightarrow b^2 > b^2 - (c-a)^2 > 0$

$c > |a-b| \Rightarrow c^2 > c^2 - (a-b)^2 > 0$

Nhân vế các bất đẳng thức ta được

$$\Rightarrow a^2b^2c^2 > \left[a^2 - (b-c)^2\right]\left[b^2 - (c-a)^2\right]\left[c^2 - (a-b)^2\right]$$

$$\Rightarrow a^2b^2c^2 > (a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2$$

$$\Rightarrow abc > (a+b-c).(b+c-a).(c+a-b)$$

VÍ DỤ2: (404 – 1001)

1) Cho a,b,c là chiều dài ba cạnh của tam giác

Chứng minh rằng $ab+bc+ca < a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ca)$

2) Cho a,b,c là chiều dài ba cạnh của tam giác có chu vi bằng 2
Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2+2abc<2$

PHƯƠNG PHÁP 8: ĐỔI BIẾN SỐ

VÍ DỤ1:

Cho a,b,c > 0 Chứng minh rằng $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$ (1)

Giải :

Đặt x=b+c ; y=c+a ;z= a+b ta có a=$\frac{y+z-x}{2}$; b = $\frac{z+x-y}{2}$; c =$\frac{x+y-z}{2}$

ta có (1) $\Leftrightarrow$ $\frac{y+z-x}{2x}+\frac{z+x-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}\ge\frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{x}+\frac{z}{x}-1+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}-1+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}-1\ge 3$$

$$\Leftrightarrow (\frac{y}{x}+\frac{x}{y})+(\frac{z}{x}+\frac{x}{z})+(\frac{z}{y}+\frac{y}{z})\ge 6$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng vì $(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\ge 2;$ $\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\ge 2$; $\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\ge 2$ nên ta có điều phải chứng minh

VÍ DỤ2:

Cho a,b,c > 0 và a+b+c <1
Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}\ge 9 \qquad (1)$$

Giải:

Đặt x = a^2+2bc ; y = b^2+2ac ; z = c^2+2ab

Ta có $x+y+z=(a+b+c)^2<1$

(1) $\Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 9$ Với x+y+z < 1 và x ,y,z > 0

Theo bất đẳng thức Côsi ta có

$$x+y+z\ge 3.\sqrt[3]{xyz}$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 3..\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$$

$$\Rightarrow (x+y+z).\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 9$$

Mà x+y+z < 1

Vậy $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 9$ (đpcm)

VÍ DỤ3:

Cho $x \geq 0$, $y \geq 0$ thỏa mãn $2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1$ CMR $x + y \geq \frac{1}{5}$

Gợi ý:

Đặt $\sqrt{x} = u$, $\sqrt{y} = v$ $\Rightarrow$ 2u-v =1 và S = x+y = $u^2 + v^2 \Rightarrow$ v = 2u-1 thay vào tính S min

Bài tập

1) Cho a > 0 , b > 0 , c > 0 CMR: $\frac{25a}{b+c} + \frac{16b}{c+a} + \frac{c}{a+b} > 8$

2)Tổng quát m, n, p, q, a, b >0

CMR

$$\frac{ma}{b+c} + \frac{nb}{c+a} + \frac{pc}{a+b} \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{m} + \sqrt{n} + \sqrt{p}\right)^2 - (m+n+p)$$

PHƯƠNG PHÁP 9: DÙNG TAM THỨC BẬC HAI

LƯU Ý :

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$

Nếu $\Delta < 0$ thì $a.f(x) > 0$ $\forall x \in R$

Nếu $\Delta = 0$ thì $a.f(x) > 0$ $\forall x \neq -\frac{b}{a}$

Nếu $\Delta > 0$ thì $a.f(x) > 0$ với $x < x_1$ hoặc $x > x_2$ $(x_2 > x_1)$

$a.f(x) < 0$ với $x_1 < x < x_2$

VÍ DỤ1:

Chứng minh rằng

$$f(x,y) = x^2 + 5y^2 - 4xy + 2x - 6y + 3 > 0 \qquad (1)$$

Giải:

Ta có (1) $\Leftrightarrow$ $x^2 - 2x(2y-1) + 5y^2 - 6y + 3 > 0$

$$\Delta' = (2y-1)^2 - 5y^2 + 6y - 3$$
$$= 4y^2 - 4y + 1 - 5y^2 + 6y - 3$$
$$= -(y-1)^2 - 1 < 0$$

Vậy $f(x,y) > 0$ với mọi x, y

VÍ DỤ2:

Chứng minh rằng

$$f(x,y) = x^2y^4 + 2(x^2+2).y^2 + 4xy + x^2 > 4xy^3$$

Giải:

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$x^2y^4+2(x^2+2).y^2+4xy+x^2-4xy^3>0$$

$$\Leftrightarrow (y^2+1)^2.x^2+4y(1-y)^2x+4y^2>0$$

Ta có $\Delta'=4y^2(1-y^2)^2-4y^2(y^2+1)^2=-16y^2<0$

Vì a = $(y^2+1)^2>0$ vậy $f(x,y)>0$ (đpcm)

PHƯƠNG PHÁP 10: DÙNG QUY NẠP TOÁN HỌC

KIẾN THỨC:

Để chứng minh bất đẳng thức đúng với $n>n_0$ ta thực hiện các bước sau :

1 – Kiểm tra bất đẳng thức đúng với $n=n_0$

2 - Giả sử BĐT đúng với n =k (thay n =k vào BĐT cần chứng minh được gọi là giả thiết quy nạp)

3- Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với n = k +1 (thay n = k+1vào BĐT cần chứng minh rồi biến đổi để dùng giả thiết quy nạp)

4 – kết luận BĐT đúng với mọi $n>n_0$

VÍ DỤ1:

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+....+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n} \qquad \forall n\in N; n>1 \qquad (1)$$

Giải :

Với n =2 ta có $1+\frac{1}{4}<2-\frac{1}{2}$ (đúng)

Vậy BĐT (1) đúng với n =2

Giả sử BĐT (1) đúng với n =k ta phải chứng minh

BĐT (1) đúng với n = k+1

Thật vậy khi n =k+1 thì

(1) $\Leftrightarrow \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+....+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$

Theo giả thiết quy nạp

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+....+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1^2}+....+\frac{1}{(k+1)^2}<\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}<\frac{1}{k}$$

$\Leftrightarrow \quad \frac{k+1+1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k} \Leftrightarrow k(k+2) < (k+1)^2 \Leftrightarrow k^2+2k<k^2+2k+1$ Điều này đúng .Vậy bất đẳng thức (1)được chứng minh

VÍ DỤ2: Cho $n \in N$ và a+b> 0

Chứng minh rằng $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n+b^n}{2}$ (1)

Giải

Ta thấy BĐT (1) đúng với n=1

Giả sử BĐT (1) đúng với n=k ta phải chứng minh BĐT đúng với n=k+1

Thật vậy với n = k+1 ta có

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} \leq \frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^{k}.\frac{a+b}{2} \leq \frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2} \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow \text{Vế trái (2)} \leq \frac{a^k+b^k}{2}.\frac{a+b}{2} = \frac{a^{k+1}+ab^k+a^kb+b^{k+1}}{4} \leq \frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2} - \frac{a^{k+1}+ab^k+a^kb+b^{k+1}}{4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(a^k-b^k\right).(a-b) \geq 0 \qquad (3)$$

Ta chứng minh (3)

(+) Giả sử a ≥ b và giả thiết cho a ≥ -b ⇔ a ≥ $|b|$

$$\Leftrightarrow a^k \geq |b|^k \geq b^k \quad \Rightarrow \left(a^k-b^k\right).(a-b) \geq 0$$

(+) Giả sử a < b và theo giả thiết - a<b ⇔ $|a|^k < b^k \Leftrightarrow a^k < b^k \Leftrightarrow \left(a^k-b^k\right).(a-b) \geq 0$

Vậy BĐT (3)luôn đúng ta có (đpcm)

PHƯƠNG PHÁP 11: CHỨNG MINH PHẢN CHỨNG

LƯU Ý:

1) Giả sử phải chứng minh bất đẳng thức nào đó đúng , ta hãy giả sử bất đẳng thức đó sai và kết hợp với các giả thiết để suy ra điều vô lý , điều vô lý có thể là điều trái với giả thiết , có thể là điều trái ngược nhau .Từ đó suy ra bất đẳng thức cần chứng minh là đúng

2) Giả sử ta phải chứng minh luận đề "G ⇒ K"

phép toán mệnh đề cho ta :

Như vậy để phủ định luận đề ta ghép tất cả giả thiết của luận đề với phủ định kết luận của nó .

Ta thường dùng 5 hình thức chứng minh phản chứng sau :

A - Dùng mệnh đề phản đảo : $\overline{K} \Rightarrow \overline{G}$

B – Phủ định rôi suy trái giả thiết :

C – Phủ định rồi suy trái với điều đúng

D – Phủ định rồi suy ra 2 điều trái ngược nhau

E – Phủ định rồi suy ra kết luận :

VÍ DU 1:

Cho ba số a,b,c thỏa mãn $a+b+c > 0$, $ab+bc+ac > 0$, $abc > 0$

Chứng minh rằng $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$

Giải :

Giả sử $a \le 0$ thì từ $abc > 0 \Rightarrow a \neq 0$ do đó $a < 0$

Mà $abc > 0$ và $a < 0 \Rightarrow cb < 0$

Từ $ab+bc+ca > 0 \Rightarrow a(b+c) > -bc > 0$

Vì $a < 0$ mà $a(b+c) > 0 \Rightarrow b + c < 0$

$a < 0$ và $b+c < 0 \Rightarrow a + b + c < 0$ trái giả thiết $a+b+c > 0$

Vậy $a > 0$ tương tự ta có $b > 0$, $c > 0$

VÍ DU 2:

Cho 4 số a , b , c ,d thỏa mãn điều kiện

$ac \ge 2.(b+d)$ .Chứng minh rằng có ít nhất một trong các bất đẳng thức sau là sai:

$a^2 < 4b$, $c^2 < 4d$

Giải :

Giả sử 2 bất đẳng thức : $a^2 < 4b$, $c^2 < 4d$ đều đúng khi đó cộng các vế ta được

$a^2 + c^2 < 4(b+d)$ (1)

Theo giả thiết ta có $4(b+d) \le 2ac$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow a^2 + c^2 < 2ac$ hay $(a-c)^2 < 0$ (vô lý)

Vậy trong 2 bất đẳng thức $a^2 < 4b$ và $c^2 < 4d$ có ít nhất một các bất đẳng thức sai

VÍ DỤ 3:

Cho $x,y,z > 0$ và $xyz = 1$. Chứng minh rằng

Nếu $x+y+z > \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ thì có một trong ba số này lớn hơn 1

Giải :

Ta có $(x-1).(y-1).(z-1) = xyz - xy - yz + x + y + z - 1$

$= x + y + z - (\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})$ vì $xyz = 1$

theo giả thiết $x+y+z > \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$

nên $(x-1).(y-1).(z-1) > 0$

Trong ba số x-1 , y-1 , z-1 chỉ có một số dương

Thật vậy nếu cả ba số dương thì $x,y,z > 1 \Rightarrow xyz > 1$ (trái giả thiết)

Còn nếu 2 trong 3 số đó dương thì $(x-1).(y-1).(z-1) < 0$ (vô lý)

Vậy có một và chỉ một trong ba số x , y,z lớn hơn 1

PHẦN III : CÁC BÀI TẬP NÂNG CAO

1/DÙNG ĐỊNH NGHĨA

1) Cho abc = 1 và $a^3 > 36$. . Chứng minh rằng $\frac{a^2}{3} + b^2+c^2 > ab+bc+ac$

Giải

Ta có hiệu: $\frac{a^2}{3} + b^2+c^2 - ab - bc - ac$

$= \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{12} + b^2+c^2 - ab - bc - ac$

$= \left(\frac{a^2}{4} + b^2+c^2 - ab - ac + 2bc\right) + \frac{a^2}{12} - 3bc$

$= \left(\frac{a}{2} - b - c\right)^2 + \frac{a^3 - 36abc}{12a}$

$= \left(\frac{a}{2} - b - c\right)^2 + \frac{a^3 - 36abc}{12a} > 0$ (vì abc=1 và $a^3 > 36$ nên a >0)

Vậy : $\frac{a^2}{3} + b^2+c^2 > ab+bc+ac$ Điều phải chứng minh

2) Chứng minh rằng

a) $x^4 + y^4 + z^2 + 1 \ge 2x.(xy^2 - x + z + 1)$

b) với mọi số thực a , b, c ta có

$a^2 + 5b^2 - 4ab + 2a - 6b + 3 > 0$

c) $a^2 + 2b^2 - 2ab + 2a - 4b + 2 \ge 0$

Giải :

a) Xét hiệu

H = $x^4 + y^4 + z^2 + 1 - 2x^2y^2 + 2x^2 - 2xz - 2x$

$= \left(x^2 - y^2\right)^2 + (x - z)^2 + (x - 1)^2$

$H \ge 0$ ta có điều phải chứng minh

b) Vế trái có thể viết

H = $(a - 2b + 1)^2 + (b - 1)^2 + 1$

$\Rightarrow$ H > 0 ta có điều phải chứng minh

c) vế trái có thể viết

H = $(a - b + 1)^2 + (b - 1)^2$

$\Rightarrow$ H $\ge$ 0 ta có điều phải chứng minh

II / DÙNG BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

1) Cho x > y và xy =1 .Chứng minh rằng

$$\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{(x-y)^2} \geq 8$$

Giải :

Ta có $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=(x-y)^2+2$ (vì xy = 1)

$$\Rightarrow \left(x^2+y^2\right)^2=(x-y)^4+4.(x-y)^2+4$$

Do đó BĐT cần chứng minh tương đương với

$$(x-y)^4+4(x-y)^2+4 \geq 8.(x-y)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-y)^4-4(x-y)^2+4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[(x-y)^2-2\right]^2 \geq 0$$

BĐT cuối đúng nên ta có điều phải chứng minh

2) Cho xy $\geq$ 1 .Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$$

Giải :

Ta có $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+y^2}\right)+\left(\frac{1}{1+y^2}-\frac{1}{1+xy}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{xy-x^2}{\left(1+x^2\right).(1+xy)}+\frac{xy-y^2}{\left(1+y^2\right).(1+xy)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x(y-x)}{\left(1+x^2\right).(1+xy)}+\frac{y(x-y)}{\left(1+y^2\right).(1+xy)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(y-x)^2(xy-1)}{\left(1+x^2\right).\left(1+y^2\right).(1+xy)} \geq 0$$

BĐT cuối này đúng do xy > 1 .Vậy ta có điều phải chứng minh

III / DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC PHỤ

1) Cho a , b, c là các số thực và a + b +c =1

Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$

Giải :

áp dụng BĐT BunhiaCôpski cho 3 số (1,1,1) và (a,b,c)

Ta có $(1.a+1.b+1.c)^2 \leq (1+1+1).\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$$\Leftrightarrow \quad (a+b+c)^2 \leq 3.\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$\Leftrightarrow \quad a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$ (vì a+b+c =1) (đpcm)

2) Cho a,b,c là các số dương

Chứng minh rằng $(a+b+c).\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$ (1)

Giải :

$$(1) \Leftrightarrow 1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{a}+1\geq 9$$

$$\Leftrightarrow 3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\geq 9$$

áp dụng BĐT phụ $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$ Với x,y > 0

Ta có BĐT cuối cùng luôn đúng

Vậy $(a+b+c).\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$ (đpcm)

IV / DÙNG PHƯƠNG PHÁP BẮC CẦU

1) Cho 0 < a, b,c <1 .Chứng minh rằng :

$$2a^3+2b^3+2c^3<3+a^2b+b^2c+c^2a$$

Giải :

Do a <1 $\Rightarrow$ $a^2<1$ và b <1

Nên $(1-a^2).(1-b^2)>0 \Rightarrow 1+a^2b-a^2-b>0$

Hay $1+a^2b>a^2+b$ (1)

Mặt khác 0 <a,b <1 $\Rightarrow$ $a^2>a^3$; $b>b^3$

$\Rightarrow 1+a^2>a^3+b^3$

Vậy $a^3+b^3<1+a^2b$

Tương tự ta có

$$b^3+c^3<1+b^2c$$

$$a^3+c^3<1+c^2a$$

$\Rightarrow 2a^3+2b^3+2c^3<3+a^2b+b^2c+c^2a$ (đpcm)

2) So sánh 31^{11} và 17^{14}

Giải :

Ta thấy $31^{11}<32^{11}=\left(2^5\right)^{11}=2^{55}<2^{56}$

Mặt khác $2^{56}=2^{4.14}=\left(2^4\right)^{14}=16^{14}<17^{14}$

Vởy $31^{11}<17^{14}$ (đpcm)

V/ DÙNG TÍNH CHẤT TỈ SỐ

1) Cho a ,b ,c ,d > 0 .Chứng minh rằng :

$$2<\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{b+c+d}+\frac{c+d}{c+d+a}+\frac{d+a}{d+a+b}<3$$

Giải :

Vì a ,b ,c ,d > 0 nên ta có

$$\frac{a+b}{a+b+c+d}<\frac{a+b}{a+b+c}<\frac{a+b+d}{a+b+c+d} \quad (1)$$
$$\frac{b++c}{a+b+c+d}<\frac{b+c}{b+c+d}<\frac{b+c+a}{a+b+c+d} \quad (2)$$
$$\frac{d+a}{a+b+c+d}<\frac{d+a}{d+a+b}<\frac{d+a+c}{a+b+c+d} \quad (3)$$

Cộng các vế của 4 bất đẳng thức trên ta có :

$$2<\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{b+c+d}+\frac{c+d}{c+d+a}+\frac{d+a}{d+a+b}<3 \qquad \text{(đpcm)}$$

2) Cho a ,b,c là số đo ba cạnh tam giác

Chứng minh rằng

$$1<\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2$$

<u>Giải</u> :

Vì a ,b ,c là số đo ba cạnh của tam giác nên ta có a,b,c > 0

Và a < b +c ; b <a+c ; c < a+b

Từ (1) $\Rightarrow \frac{a}{b+c}<\frac{a+a}{a+b+c}=\frac{2a}{a+b+c}$

Mặt khác $\frac{a}{b+c}>\frac{a}{a+b+c}$

Vậy ta có $\frac{a}{a+b+c}<\frac{a}{b+c}<\frac{2a}{a+b+c}$ Tương tự ta có $\frac{b}{a+b+c}<\frac{b}{a+c}<\frac{2b}{a+b+c}$

$$\frac{c}{a+b+c}<\frac{c}{b+a}<\frac{2c}{a+b+c}$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta có :

$$1<\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2 \qquad \text{(đpcm)}$$

V/ <u>PHƯƠNG PHÁP LÀM TRỘI</u> :

1) Chứng minh BĐT sau :

a) $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1).(2n+1)}<\frac{1}{2}$

b) $1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+...+\frac{1}{1.2.3.....n}<2$

<u>Giải</u> :

a) Ta có

$$\frac{1}{(2n-1).(2n+1)}=\frac{1}{2}.\frac{(2k+1)-(2k-1)}{(2k-1).(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

Cho n chạy từ 1 đến k .Sau đó cộng lại ta có

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1).(2n+1)}=\frac{1}{2}.\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)<\frac{1}{2} \qquad \text{(đpcm)}$$

b) Ta có

$$1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+...+\frac{1}{1.2.3.....n}<1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+.....+\frac{1}{(n-1).n}$$

$$< 1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+....+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)<2-\frac{1}{n}<2 \quad \text{(đpcm)}$$

<u>PHẦN IV</u> : ỨNG DỤNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC

1/ <u>DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC ĐỂ TÌM CỰC TRỊ</u>

<u>LƯU Ý</u>

- Nếu f(x) ≥ A thì f(x) có giá trị nhỏ nhất là A
- Nếu f(x) ≤ B thì f(x) có giá trị lớn nhất là B

<u>Ví dụ 1</u> :

Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$T = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4|$

<u>Giải</u> :

Ta có $|x-1| + |x-4| = |x-1| + |4-x| \geq |x-1+4-x| = 3$ (1)

Và $|x-2|+|x-3|=|x-2|+|3-x|\geq|x-2+3-x|=1$ (2)

Vậy $T = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4| \geq 1+3 = 4$

Ta có từ (1) $\Rightarrow$ Dấu bằng xảy ra khi $1\leq x\leq 4$

(2) $\Rightarrow$ Dấu bằng xảy ra khi $2\leq x\leq 3$

Vậy T có giá trị nhỏ nhất là 4 khi $2\leq x\leq 3$

<u>Ví dụ 2</u> :

Tìm giá trị lớn nhất của

$S = xyz.(x+y).(y+z).(z+x)$ với $x,y,z > 0$ và $x+y+z = 1$

<u>Giải</u> :

Vì x,y,z > 0 ,áp dụng BĐT Côsi ta có

$$x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{xyz}\leq\frac{1}{3}\Rightarrow xyz\leq\frac{1}{27}$$

áp dụng bất đẳng thức Côsi cho x+y ; y+z ; x+z ta có

$$(x+y).(y+z).(z+x)\geq 3\sqrt[3]{(x+y).(y+z).(x+z)}$$

$$\Rightarrow 2\geq 3\sqrt[3]{(x+y).(y+z).(z+x)}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$

Vậy $S\leq\frac{8}{27}.\frac{1}{27}=\frac{8}{729}$

Vậy S có giá trị lớn nhất là $\frac{8}{729}$ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$

<u>Ví dụ 3</u> : Cho $xy+yz+zx = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $x^4+y^4+z^4$

<u>Giải</u> :

Áp dụng BĐT Bunhiacốpski cho 6 số (x,y,z) ;(x,y,z)

Ta có $$(xy+yz+zx)^2 \le \left(x^2+y^2+z^2\right)^2$$

$$\Rightarrow 1 \le \left(x^2+y^2+z^2\right)^2 \qquad (1)$$

Ap dụng BĐT Bunhiacốpski cho (x^2, y^2, z^2) và (1,1,1)

Ta có $$(x^2+y^2+z^2)^2 \le (1^2+1^2+1^2)(x^4+y^4+z^4)$$
$$\rightarrow (x^2+y^2+z^2)^2 \le 3(x^4+y^4+z^4)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 1 \le 3(x^4+y^4+z^4)$

$$\Rightarrow x^4+y^4+z^4 \le \frac{1}{3}$$

Vậy $x^4+y^4+z^4$ có giá trị nhỏ nhất là $\frac{1}{3}$ khi x=y=z=$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

<u>Ví du 4</u> :

Trong tam giác vuông có cùng cạnh huyền , tam giác vuông nào có diện tích lớn nhất

<u>Giải</u> :

Gọi cạnh huyền của tam giác là 2a

Đường cao thuộc cạnh huyền là h

Hình chiếu các cạnh góc vuông lên cạnh huyền là x,y

Ta có S $=\frac{1}{2}.(x+y).h = a.h = a.\sqrt{h^2} = a.\sqrt{xy}$

Vì a không đổi mà x+y = 2a

Vậy S lớn nhất khi x.y lớn nhất $\Leftrightarrow x = y$

Vậy trong các tam giác có cùng cạnh huyền thì tam giác vuông cân có diện tích lớn nhất

II/ <u>DÙNG B.Đ.T ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH</u>

<u>Ví du 1</u> :

Giải phương trình sau

$$4\sqrt{3x^2+6x+19}+\sqrt{5x^2+10x+14} = 4-2x-x^2$$

<u>Giải</u> :

Ta có $3x^2+6x+19 = 3.(x^2+2x+1)+16$

$$= 3.(x+1)^2+16 \ge 16$$

$$5x^2+10x+14 = 5.(x+1)^2+9 \ge 9$$

Vậy $4.\sqrt{3x^2+6x+19}+\sqrt{5x^2+10x+14} \ge 2+3=5$

Dấu (=) xảy ra khi x+1 = 0 $\Rightarrow$ x = -1

Vậy $4\sqrt{3x^2+6x+19}+\sqrt{5x^2+10x+14} = 4-2x-x^2$ khi x = -1

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x = -1

<u>Ví du 2</u> :

Giải phương trình

$$x+\sqrt{2-x^2}=4y^2+4y+3$$

Giải :

áp dụng BĐT BunhiaCốpski ta có :

$$x+\sqrt{2-x^2}\le\sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{x^2+\left(2-x^2\right)}\le\sqrt{2}.\sqrt{2}=2$$

Dấu (=) xảy ra khi x = 1

Mặt khác $4y^2+4y+3=\left(2y+1\right)^2+2\ge 2$

Dấu (=) xảy ra khi $y = -\frac{1}{2}$

Vậy $x+\sqrt{2-x^2}=4y^2+4y+3=2$ khi x =1 và $y =-\frac{1}{2}$

Vậy nghiệm của phương trình là $\begin{cases} x=1 \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$

Ví du 3 :

Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^4+y^4+z^4=xyz \end{cases}$$

Giải : áp dụng BĐT Côsi ta có

$$x^4+y^4+z^4=\frac{x^4+y^4}{2}+\frac{y^4+z^4}{2}+\frac{z^4+x^4}{2}$$

$$\ge x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$$

$$\ge \frac{x^2y^2+y^2z^2}{2}+\frac{z^2y^2+z^2z^2}{2}+\frac{x^2z^2+y^2x^2}{2}$$

$$\ge y^2xz+z^2xy+x^2yz$$

$$\ge xyz.(x+y+z)$$

Vì x+y+z = 1)

Nên $x^4+y^4+z^4\ge xyz$

Dấu (=) xảy ra khi $x = y = z =\frac{1}{3}$

Vậy $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^4+y^4+z^4=xyz \end{cases}$ có nghiệm $x = y = z =\frac{1}{3}$

Ví du 4 : Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} \left|xy-4\right|=8-y^2 & (1) \\ xy=2+x^2 & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (1) $\Rightarrow 8-y^2\ge 0$ hay $\left|y\right|\le\sqrt{8}$

Từ phương trình (2) $\Rightarrow x^2+2=|x|.|y|\le 2\sqrt{2}\,|x|$

$$\Rightarrow x^2-2\sqrt{2}\,|x|+\sqrt{2^2}\le 0$$

$$\Rightarrow (|x|-\sqrt{2})^2\le 0$$

$$\Rightarrow |x|=\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

Nếu x = $\sqrt{2}$ thì y = 2$\sqrt{2}$

Nếu x = -$\sqrt{2}$ thì y = -2$\sqrt{2}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$ và $\begin{cases} x=2\sqrt{2} \\ y=-2\sqrt{2} \end{cases}$

III/ <u>DÙNG B.Đ.T ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN</u>

1) Tìm các số nguyên x,y,z thoả mãn

$$x^2+y^2+z^2\le xy+3y+2z-3$$

<u>Giải</u> :

Vì x,y,z là các số nguyên nên

$$x^2+y^2+z^2\le xy+3y+2z-3$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-xy-3y-2z+3\le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-xy+\frac{y^2}{4}\right)+\left(\frac{3y^2}{4}-3y+3\right)+\left(z^2-2z+1\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{y}{2}\right)^2+3\left(\frac{y}{2}-1\right)^2+\left(z-1\right)^2\le 0 \qquad (*)$$

Mà $\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+3\left(\frac{y}{2}-1\right)^2+\left(z-1\right)^2\ge 0 \qquad \forall x,y\in R$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{y}{2}\right)^2+3\left(\frac{y}{2}-1\right)^2+\left(z-1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{y}{2}=0 \\ \frac{y}{2}-1=0 \\ z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$$

Các số x,y,z phải tìm là $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$

<u>Ví du 2</u>:

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$$

<u>Giải</u> :

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x \ge y \ge z$

Ta có $2=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \le \frac{3}{z} \Rightarrow 2z \le 3$

Mà z nguyên dương vậy z = 1

Thay z = 1 vào phương trình ta được $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$

Theo giả sử $x \ge y$ nên $1 = \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \le \frac{1}{y} \Rightarrow y \le 2$ mà y nguyên dương

Nên y = 1 hoặc y = 2

Với y = 1 không thích hợp

Với y = 2 ta có x = 2

Vậy (2 ,2,1) là một nghiệm của phương trình

Hoán vị các số trên ta được các nghiệm của phương trình

là (2,2,1) ; (2,1,2) ; (1,2,2)

<u>Ví du 3</u> :

Tìm các cặp số nguyên thoả mãn phương trình

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} = y \qquad (*)$$

<u>Giải :</u>

(*) Với x < 0 , y < 0 thì phương trình không có nghĩa

(*) Với x > 0 , y > 0

Ta có $\sqrt{x+\sqrt{x}} = y \Leftrightarrow x+\sqrt{x} = y^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = y^2 - x > 0$

Đặt $\sqrt{x} = k$ (k nguyên dương vì x nguyên dương)

Ta có $k.(k+1) = y^2$

Nhưng $k^2 < k(k+1) < (k+1)^2$

$\Rightarrow k < y < k+1$

Mà giữa k và k+1 là hai số nguyên dương liên tiếp không tồn tại một số nguyên dương nào cả

Nên không có cặp số nguyên dương nào thoả mãn phương trình .

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là : $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$