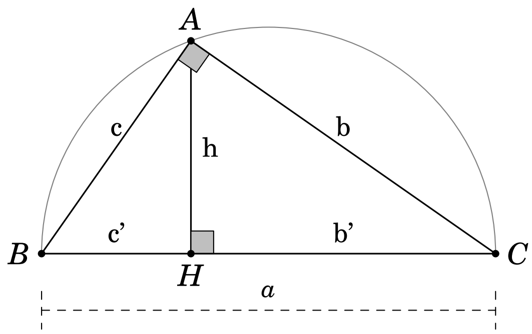
Chương 1 HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Chủ đề 1: HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG

A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, cạnh huyền $BC = a$, các cạnh góc vuông $AC = b$ và $AB = c$. Gọi $AH = h$ là đường cao ứng với cạnh huyền $CH = b'$, $BH = c'$ lần lượt là hình chiếu của AC, AB trên cạnh huyền BC.



1 Ba hệ thức về cạnh

- $b^2 = ab'$ (1)
- $c^2 = ac'$ (2)
- $a^2 = b^2 + c^2$ (hệ thức Pytago) (3)

2 Ba hệ thức về đường cao

- $h^2 = b'c'$ (4)
- $ah = bc$ (5)
- $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$ (6)

3 Dấu hiệu nhận biết tam giác vuông

- Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng một nữa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.

- Dấu hiệu này sinh ra cách vẽ một tam giác vuông bằng thước kẻ và compa gồm hai bước:

  B1: Vẽ một nữa đường tròn tâm O, đường kính BC.

  B2: Lấy điểm A bất kì trên nữa đường tròn thu được $\triangle ABC$ vuông tại A.

B Các dạng bài tập cơ bản

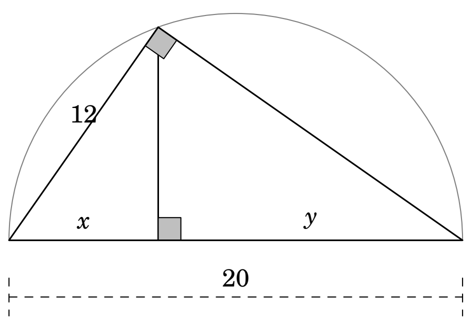
Dạng 1: Tính độ dài đoạn thẳng trong tam giác vuông

1. - Xác định vị trí cạnh huyền.
   - Áp dụng hệ thức về cạnh hoặc đường cao.
2. - Dùng kĩ thuật đại số hóa hình học: Nếu $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{m}{n}$ (m,n là hằng số) thì $AB = mt$, $CD = nt$, với $t > 0$.
   - Xác định độ dài cạnh huyền.
   - Áp dụng hệ thức về độ dài cạnh và đường cao.

VÍ DỤ MINH HỌA

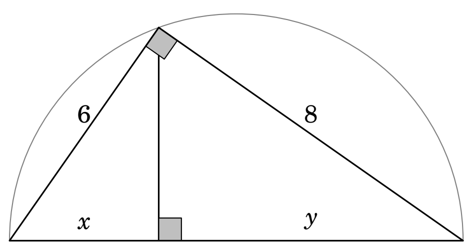
Ví dụ 1.

Hãy tính x, y với các kích thước như hình bên.



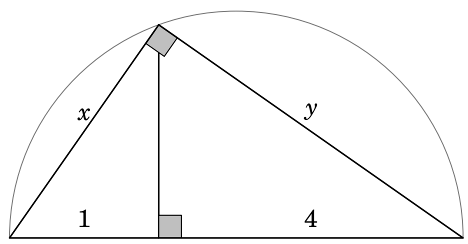
Ví dụ 2.

Hãy tính x, y với các kích thước như hình bên.



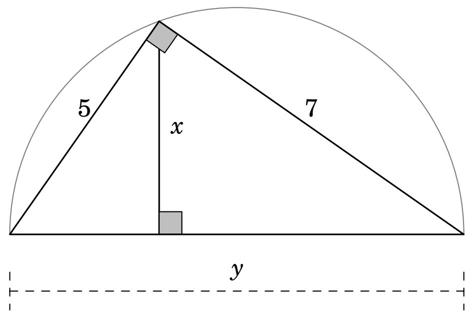
Ví dụ 3.

Hãy tính x, y với các kích thước như hình bên.



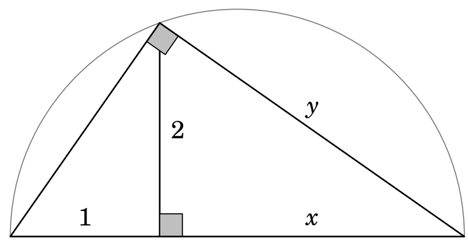
Ví dụ 4.

Hãy tính x, y với các kích thước như hình bên.



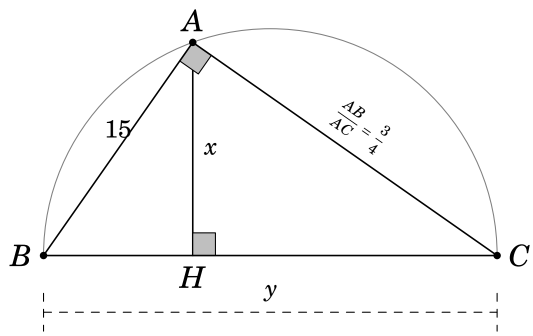
Ví dụ 5.

Hãy tính x, y với các kích thước như hình bên.



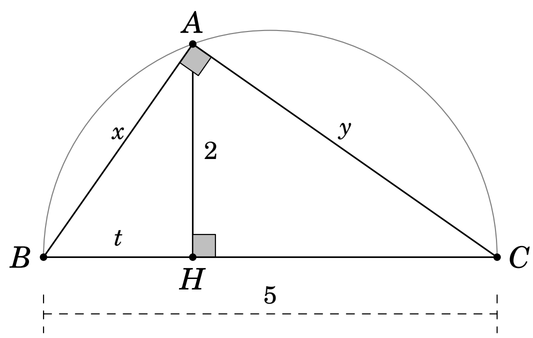
Ví dụ 6.

Hãy tính x, y với các kích thước như hình bên.



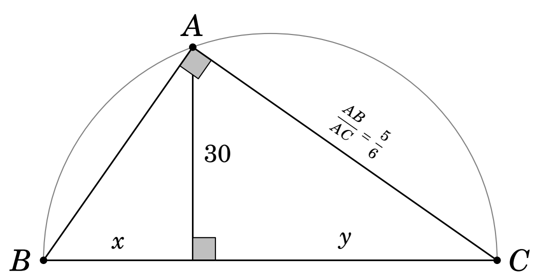
Ví dụ 7.

Hãy tính x, y với các kích thước như hình bên.



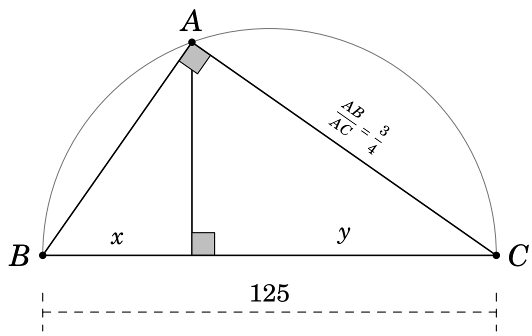
Ví dụ 8.

Hãy tính x, y với các kích thước như hình bên.



Ví dụ 9.

Hãy tính x, y với các kích thước như hình bên.



BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ $(\widehat{A}=90^\circ)$, $AB=12$cm, $BC=13$cm. Tính AC, đường cao AH, các đoạn thẳng BH, CH và diện tích của tam giác.

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ vuông cạnh huyền AB, cạnh $AC=15$, đường cao CH chia AB thành hai đoạn AH và HB với $HB=16$. Tính diện tích tam giác ABC.

Bài 3. Cho tam giác ABC cân tại A có cạnh bên bằng 15 cm, cạnh đáy bằng 18 cm. Tính độ dài các đường cao.

Bài 4. Tính diện tích của một tam giác cân có chiều cao ứng với cạnh đáy bằng 10cm, chiều cao ứng với với cạnh bên bằng 12cm.

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác trong BE, biết $EC=3$, $BC=6$. Tính độ dài các đoạn thẳng AB, AC.

Bài 6. Tính diện tích tam giác có độ dài ba cạnh là 10cm, 17cm, 21cm.

Dạng 2: Dựng đoạn thẳng Py-ta-go; Dựng đoạn trung bình nhân

1. **Dựng đoạn thẳng Py-ta-go**
   - *Loại 1.* Cho trước hai đoạn thẳng a và b. Dựng đoạn thẳng $x=\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow x^2 = a^2+b^2$.

     Dựng tam giác vuông có 2 cạnh góc vuông là a và b thì cạnh huyền bằng x.
   - *Loại 2.* Cho trước hai đoạn thẳng a và b. Dựng đoạn thẳng
     $$y=\sqrt{a^2-b^2}(a>b) \Leftrightarrow y^2+b^2=a^2.$$
     Dựng tam giác vuông có cạnh huyền là a, cạnh góc vuông là b thì cạnh góc vuông kia là y.
2. **Dựng đoạn trung bình nhân**

   Cho trước hai đoạn thẳng a và b. Dựng đoạn thẳng $x=\sqrt{ab}$.

   Dựng tam giác ABC có cạnh huyền $BC=a+b$ $(\widehat{A}=90^\circ)$ thì đường cao ứng với cạnh huyền là x với $BH=a$, $HC=b$.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Dựng đoạn thẳng $\sqrt{2}$ bằng cách dựng đoạn thẳng Py-ta-go.

Ví dụ 2. Dựng đoạn thẳng $\sqrt{5}$ bằng cách dựng đoạn thẳng Py-ta-go.

Ví dụ 3. Dựng đoạn thẳng $\sqrt{5}$ bằng cách dựng đoạn thẳng Py-ta-go.

Ví dụ 4. Dựng đoạn thẳng $\sqrt{3}$ bằng cách dựng đoạn thẳng Py-ta-go.

Ví dụ 5. Dựng đoạn thẳng $\sqrt{3}$ bằng cách dựng trung bình nhân.

Ví dụ 6. Dựng đoạn thẳng $\sqrt{5}$ bằng cách dựng đoạn trung bình nhân.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Dựng đoạn thẳng $\sqrt{6}$ bằng cách dựng đoạn thẳng Py-ta-go.

Bài 2. Dựng đoạn thẳng $\sqrt{7}$ bằng cách dựng trung bình nhân.

Dạng 3: Chứng minh hệ thức hình học

1. Chọn các tam giác vuông thích hợp chứa các đoạn thẳng có trong hệ thức. Tính các đoạn thẳng đó nhờ các hệ thức về cạnh và đường cao.

2. Liên kết các giá trị trên rút ra hệ thức phải chứng minh.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB và AC. Chứng minh rằng:

a) $AM \cdot AB = AN \cdot AC$;

b) $HB \cdot HC = MA \cdot MB + NA \cdot NC$;

c) $\dfrac{HB}{HC} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$.

Ví dụ 2. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi I là một điểm nằm giữa A và B. Tia DI cắt tia CD ở K. Kẻ $Dx \perp DI$ cắt tia BC ở L.

a) Tam giác DIL là một tam giác cân.

b) Tổng $\dfrac{1}{DI^2} + \dfrac{1}{DK^2}$ không đổi khi I di động trên cạnh AB.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho tam giác ABC cân tại A $\left(\widehat{A} < 90^\circ\right)$,kẻ $BM \perp CA$. Chứng minh rằng
$$\frac{AM}{MC} = 2\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 - 1.$$

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A với đường cao AH. Trên nữa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A lấy điểm D sao cho $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{\sqrt{2}}$. Chứng minh rằng BD, DH, HA là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC. Hãy chứng minh các hệ thức sau:

a) $\dfrac{CE}{BD}=\left(\dfrac{CA}{AB}\right)^2$;

b) $AH^3=BC\cdot BD\cdot CE$;

c) $3AH^2+BD^2+CE^2=BC^2$;

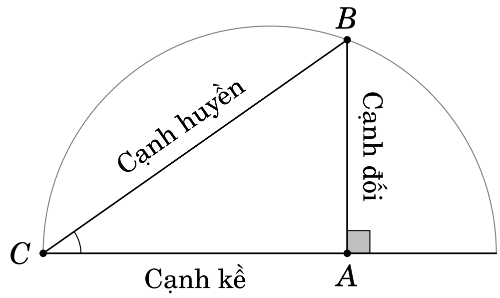
d) $\sqrt[3]{BD^2}+\sqrt[3]{CE^2}=\sqrt[3]{BC^2}$.

Chủ đề 2: Tỉ số lượng giác của một góc nhọn.

A Kiến thức cần nhớ

I. Định nghĩa

Cho góc nhọn α, từ một điểm bất kì trên một cạnh của góc α, kẻ đường vuông góc với cạnh kia. Khi đó



- $\sin\alpha=\dfrac{\text{Cạnh đối}}{\text{Cạnh huyền}}=\dfrac{AB}{AC}$;
- $\cos\alpha=\dfrac{\text{Cạnh kề}}{\text{Cạnh huyền}}=\dfrac{AC}{BC}$;
- $\tan\alpha=\dfrac{\text{Cạnh đối}}{\text{Cạnh kề}}=\dfrac{AB}{AC}$;
- $\cot\alpha=\dfrac{\text{Cạnh kề}}{\text{Cạnh đối}}=\dfrac{AC}{AB}$.

Nhận xét: Vì độ dài các cạnh trong một tam giác vuông đều dương và hai cạnh góc vuông nhỏ hơn cạnh huyền nên $0<\sin\alpha<1$, $0<\cos\alpha<1$, $\tan\alpha>0$, $\cot\alpha>0$.

II. Tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau

Nếu hai góc phụ nhau (có tổng số đo bằng 90°) thì: sin góc này bằng cos góc kia, tan góc này bằng cot góc kia.

Cụ thể: $\sin B=\cos C$; $\cos B=\sin C$; $\tan B=\cot C$; $\cot B=\tan C$.

III. Tỉ số lượng giác góc đặc biệt

Tỉ số lượng giác góc α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

B Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Tính tỉ số lượng giác

1. Xác định cạnh đối, cạnh kề, cạnh huyền, viết tỉ số lượng giác theo định nghĩa.

2. Tính cạnh còn lại nhờ hệ thức Py-ta-go hoặc hệ thức về cạnh, đường cao.

3. Tính tỉ số lượng giác còn lại theo định lí tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại C, có $BC = 1{,}2$, $CA = 0{,}9$. Tính các tỉ số lượng giác của góc B, từ đó suy ra các tỉ số lượng giác của góc A.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB = 6$, $AC = 8$. Tính các tỉ số lượng giác của góc B, từ đó suy ra các tỉ số lượng giác của góc C.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ đường cao AH. Tính $\sin B$, $\sin C$ (làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư) biết rằng $AB = 13$, $BH = 5$.

$BH = 3$, $CH = 4$.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ đường cao AH. Tính $\sin B$, $\sin C$ (làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư) biết rằng $BH = 3$, $CH = 4$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho tam giác ABC có hai cạnh góc vuông là $AB = 16\text{mm}$, $AC = 3\text{cm}$.

a) Tính tỉ số lượng giác của các góc nhọn;

b) Tính tổng $\sin^2 B + \sin^2 C$.

Dạng 2: Dựng góc α biết một tỉ số lượng giác là $\dfrac{m}{n}$

1. Dựng một tam giác vuông có

- Cạnh góc vuông và cạnh huyền là m, n nếu cho $\sin\alpha$ hoặc $\cos\alpha$ bằng $\dfrac{m}{n}$.
- Hai cạnh góc vuông là m, n nếu cho $\tan\alpha$ hoặc $\cot\alpha$ bằng $\dfrac{m}{n}$.

2. Xác định tỉ số lượng giác để nhận ra góc α.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Dựng góc nhọn α biết $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$.

Ví dụ 2. Dựng góc nhọn α biết $\cos\alpha = 0{,}6$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Dựng góc nhọn α biết $\tan\alpha = \dfrac{3}{4}$.

Bài 2. Dựng góc nhọn α biết $\cot\alpha = \dfrac{3}{2}$.

Dạng 3: Tính cạnh, tỉ số lượng giác của góc còn lại khi biết tỉ số lượng giác của một góc

Phương pháp giải:

a) Xác định cạnh đối, cạnh lề của một góc, viết tỉ số lượng giác theo định nghĩa.

b) Dùng kĩ thuật đại số hóa hình học

$$\text{Nếu } \frac{AB}{CD}=\frac{m}{n} \text{ thì } \begin{cases} AB=mt \\ CD=nt \end{cases} \text{ (với } t>0\text{).}$$

c) Áp dụng hệ thức Py-ta-go

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Biết $\sin B = 0,8$. Hãy tính tỉ số lượng giác của góc C.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 6$ cm, $\widehat{B} = \alpha$. Biết $\tan\alpha = \frac{5}{12}$. Hãy tính

a) Độ dài cạnh AC.

b) Độ dài cạnh BC.

Ví dụ 3. Hãy tính $\sin\alpha, \cos\alpha$ (làm tròn đến số thập phân thứ tư) nếu biết

a) $\tan\alpha = \frac{1}{3}$.

b) $\cot\alpha = \frac{3}{4}$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Tính $\cos\alpha, \tan\alpha$ biết $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

Bài 2. Tính $\sin\alpha, \tan\alpha$ biết $\cos\alpha = \frac{1}{4}$.

Bài 3. Tính $\sin\alpha, \cos\alpha$ biết $\tan\alpha = 0,8$.

Bài 4. Tính $\sin\alpha, \cos\alpha$ biết $\cot\alpha = 3$.

Dạng 4: Sắp thứ tự các tỉ số lượng giác mà không dùng bảng số và máy tính

Phương pháp giải:

a) Đưa các tỉ số lượng giác về cùng một loại.

b) Biểu diễn tỉ số lượng giác của các góc đặc biệt trên trục số.

c) Chèn các tỉ số cần sắp xếp lên trục số ta được thứ tự của chúng.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Không dùng bảng số hoặc máy tính, hãy so sánh

a) $\sin 20^\circ$ và $\sin 70^\circ$.

b) $\cos 25^\circ$ và $\cos 63^\circ 15'$.

c) $\tan 73^\circ 20'$ và $\tan 45^\circ$.

d) $\cot 20^\circ$ và $\cot 37^\circ 40'$.

Ví dụ 2. Sắp xếp các tỉ số lượng giác theo thứ tự tăng dần

a) $\sin 78^\circ, \cos 14^\circ, \sin 47^\circ, \cos 87^\circ$.

b) $\tan 73^\circ, \cot 25^\circ, \tan 62^\circ, \cot 38^\circ$.

Ví dụ 3. So sánh

a) $\tan 25^\circ$ và $\sin 25^\circ$.

b) $\cot 32^\circ$ và $\cos 32^\circ$.

c) $\tan 45^\circ$ và $\cos 45^\circ$.

d) $\cot 60^\circ$ và $\sin 30^\circ$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Áp dụng quan hệ giữa tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau để biết tỉ số lượng giác sau thành tỉ số lượng giác của các góc nhỏ hơn 45° : $\sin 60^\circ, \cos 75^\circ, \sin 52^\circ 30', \cot 82^\circ, \tan 80^\circ$.

Dạng 5: Chứng minh hệ thức lượng giác

Phương pháp giải:

a) Tính tỉ số lượng giác theo định nghĩa.

b) Nhân hay chia theo vế các tỉ số lượng giác.

c) Áp dụng hệ thức Py-ta-go.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Với góc nhọn α tùy ý, chứng minh rằng

a) $\tan \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

b) $\cot \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

c) $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$.

d) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Ví dụ 2. Với góc nhọn α tùy ý, chứng minh rằng

a) $1 + \tan^2 \alpha = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$.

b) $1 + \cot^2 \alpha = \dfrac{1}{\sin^2 \alpha}$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Sử dụng định nghĩa các tỉ số lượng giác của một góc nhọn, chứng minh rằng với góc nhọn α tùy ý ta có

a) $\tan \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$;

b) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Bài 2. Áp dụng kết quả của bài 1, hãy đơn giản các biểu thức sau

a) $1-\sin^2\alpha$;

b) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

c) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)$;

d) $1+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$;

e) $\tan^2\alpha-\sin^2\alpha\tan^2\alpha$;

f) $\cos^2\alpha+\cos^2\alpha\tan^2\alpha$;

g) $\sin\alpha-\sin\alpha\cos^2\alpha$;

h) $\tan^2\alpha\left(2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-1\right)$.

Bài 3. Không dùng bảng số hoặc máy tính, áp dụng kết quả của bài 1, hãy tính giá trị của các biểu thức

$A=\sin^2 15^\circ+\sin^2 25^\circ+\sin^2 35^\circ+\sin^2 45^\circ+\sin^2 55^\circ+\sin^2 65^\circ+\sin^2 75^\circ$.

$B=\cos^2 10^\circ-\cos^2 20^\circ+\cos^2 30^\circ-\cos^2 40^\circ-\cos^2 50^\circ-\cos^2 70^\circ+\cos^2 80^\circ$.

Bài 4. Cho $\tan\alpha=\dfrac{3}{5}$. Áp dụng kết quả 1 của bài 1. Hãy tính giá trị của

a) $M=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$;

b) $N=\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$;

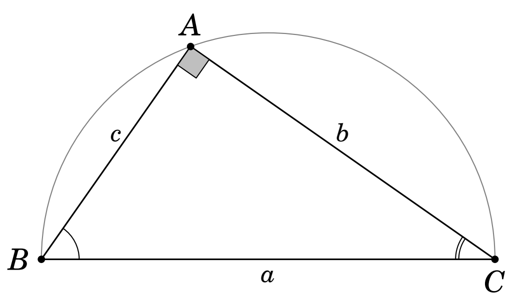
c) $P=\dfrac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{2\sin\alpha\cos^2\alpha+\cos\alpha\sin^2\alpha}$.

Chủ đề 3: HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG

A Kiến thức cần nhớ

I. Các hệ thức

Cho tam giác ABC vuông tại A, cạnh huyền a và các cạnh góc vuông b, c.



1. Định lý: Trong một tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng
   - Cạnh huyền nhân với sin góc đối hoặc nhân với côsin góc kề.
   - Cạnh góc vuông kia nhân với tang góc đối hoặc nhân với côtang góc kề.
2. Như vậy, trong tam giác ABC vuông tại A, ta có hệ thức

   $b=a\cdot\sin B=a\cdot\cos C; b=c\cdot\tan B=c\cdot\cot C$

   $c=a\cdot\sin C=a\cdot\cos B; c=b\cdot\tan C=b\cdot\cot B$.

II. Giải tam giác vuông

Trong một tam giác vuông, nếu cho trước hai cạnh hoặc một cạnh và một góc nhọn thì ta sẽ tìm được tất cả các cạnh và các góc còn lại của nó. Bài toán đặt ra như thế được gọi là bài toán "Giải tam giác vuông".

B Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Giải tam giác vuông biết độ dài một cạnh và số đo một góc nhọn

Phương pháp giải:

a) Xác định cạnh kề, cạnh đối. Viết tỉ số lượng giác để tìm độ dài các cạnh.

b) Tính góc nhọn còn lại nhờ quan hệ phụ nhau.

c) Thay giá trị rồi tính.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Giải tam giác ABC vuông tại A, biết

a) $b = 10$ cm, $\widehat{C} = 30°$;

b) $c = 10$ cm, $\widehat{C} = 45°$;

c) $a = 20$ cm, $\widehat{B} = 35°$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Để giải một tam giác vuông cần biết ít nhất mấy góc và cạnh? Có lưu ý gì về số cạnh?

Bài 2. a) Tỉ số lượng giác nào có liên quan đến cạnh huyền của tam giác vuông?

b) Nêu định lí và viết hệ thức diễn tả các tỉ số lượng giác đó.

Dạng 2: Giải tam giác vuông biết hai cạnh

Phương pháp giải:

a) Áp dụng định lý Py-ta-go để tìm cạnh còn lại.

b) Xác định cạnh kề, cạnh đối, viết tỉ số lượng giác.

c) Tính góc nhọn còn lại nhờ quan hệ phụ nhau.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Giải tam giác ABC vuông tại A, biết

a) $b = 18$ cm, $c = 21$ cm.

b) $b = 28$ cm, $c = 21$ cm.

c) $b = 10$ cm, $b = 6$ cm.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. a) Tỉ số lượng giác nào liên quan đến cả hai cạnh góc vuông của tam giác vuông?

b) Nêu định lý và viết hệ thức diễn tả các tỉ số lượng giác đó.

Bài 2. Cho tam giác $ABC, \widehat{A} = \alpha(\alpha < 90°), AB = c, AC = b$.

a) Chứng minh rằng $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\alpha$.

b) Trên tia AB lấy D, trên tia AC lấy E sao cho $AD = m, AE = n$. Chứng minh rằng $\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \frac{bc}{mn}$.

Dạng 3: Tính cạnh, tính góc của tam giác

Phương pháp giải:

a) Kẻ thêm đường cao xuống cạnh kề của góc đã biết.

b) Chuyển bài toán về giải tam giác vuông biết một cạnh và một góc.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC, trong đó $BC = 11$ cm, $\widehat{ABC} = 38^\circ, \widehat{ACB} = 30^\circ$. Gọi N là chân đường vuông góc hạ từ A xuống cạnh BC. Hãy tính

a) Độ dài đoạn thẳng AN.

b) Độ dài cạnh AC.

Ví dụ 2. Trong hình vẽ bên cho $AC = 8$ cm, $AD = 9{,}6$ cm, $\widehat{ABC} = 90^\circ, \widehat{ACB} = 54^\circ$ và $\widehat{ACD} = 74^\circ$. Hãy tính

a) Độ dài đoạn thẳng AB.

b) Số đo góc ADC.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Tính cạnh huyền và diện tích của một tam giác vuông cân nếu a là cạnh góc vuông.

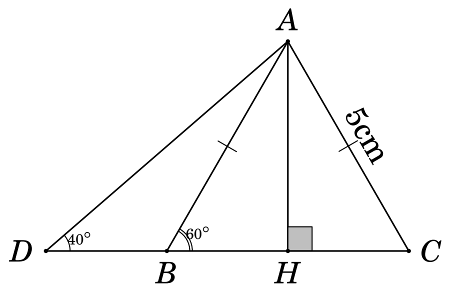
Bài 2. *Nửa tam giác đều* là cụm từ dùng để chỉ tam giác vuông có góc 60° hoặc 30°. Tính hai cạnh góc vuông và diện tích của nửa tam giác đều có cạnh huyền là a.

Bài 3. Tính chiều cao và diện tích của một tam giác đều cạnh a.

Bài 4.
Cho tam giác đều ABC cạnh 5 cm và góc $\widehat{ADB} = 40^\circ$. Hãy tính

a) Độ dài đoạn AD.

b) Độ dài đoạn DB.



Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A đường cao AH. Biết $HB = 25$ cm, $HC = 64$ cm. Tính $\widehat{B}, \widehat{C}$.

Bài 6. Cho tam giác ABC có $BC = 6$ cm, $\widehat{B} = 60^\circ, \widehat{C} = 40^\circ$. Tính

a) Chiều cao CH và cạnh AC;

b) Diện tích tam giác ABC.

Chương

2 ĐƯỜNG TRÒN

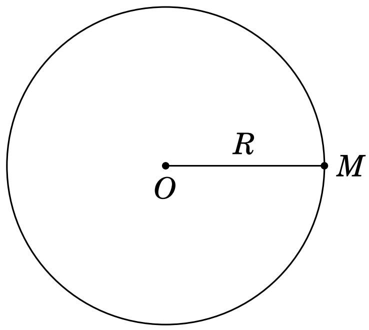
Chủ đề 1: SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN

A Kiến thức cần nhớ

I. Ba khái niệm cơ bản

1.

Đường tròn tâm O bán kính R (với $R > 0$) là hình gồm các điểm cách đều điểm O một khoảng không đổi bằng R.
Đường tròn tâm O bán kính R được kí hiệu là $(O;R)$, hay gọn hơn (O).



2. Đoạn thẳng nối hai điểm bât kì trên đường tròn gọi là một dây của đường tròn.
3. Dây đi qua tâm là đường kính của đường tròn (đường kính dài gấp đôi bán kinh).

II. Ba vị trí tương đối của điểm M và đường tròn (O,R)

Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm M. Khi đó

1. M nằm trên $(O;R)$ khi và chỉ khi $OM = R$.
2. M nằm bên trong $(O;R)$ khi và chỉ khi $OM < R$.
3. M nằm bên ngoài $(O;R)$ khi và chỉ khi $OM > R$.

III. Ba điều kiện để xác định đường tròn

1. Một đường tròn được xác định khi biết tâm và bán kính của nó.
2. Một đường tròn được xác định khi biết một đoạn thẳng là đường kính của đường tròn đó.
3. Qua ba điểm không thẳng hàng cho trước ta vẽ được một và chỉ một đường tròn.

IV. Tính chất đối xứng của đường tròn

Tính chất 1. Đường tròn là hình có tâm đối xứng. Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.

Tính chất 2. Đường tròn là hình có trục đối xứng. Bất kỳ đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn.

B Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Chứng minh nhiều điểm cùng thuộc một đường tròn

Phương pháp giải: Chứng minh các điểm đã cho cách đều một điểm cho trước.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 12$ cm, $BC = 5$ cm. Chứng minh rằng bốn điểm A,B,C,D cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm và bán kính của đường tròn đó.

Ví dụ 2. Chứng minh các định lí sau

a) Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông là trung điểm của cạnh huyền.

b) Nếu một tam giác có mộ cạnh là đường kính của đường tròn ngoại tiếp thì tam giác đó là tam giác vuông.

Nhận xét 1. Từ đây trở đi được áp dụng kết quả: Nếu các tam giác vuông có chung cạnh huyền thì các đỉnh góc vuông của tam giác vuông đó cùng thuộc một đường tròn có tâm là trung điểm của cạnh huyền chung đó.

Ví dụ 3. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. AM, BN, CP là các đường trung tuyến. Chứng minh rằng bốn điểm B,P,N,C cùng thuộc một đường tròn. Hãy vẽ đường tròn đó.

Ví dụ 4. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{C}+\widehat{D} = 90^\circ$. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của AB,BD,DC và CA. Chứng minh bốn điểm M,N,P,Q cùng thuộc một đường tròn.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho tam giác ABC ($\widehat{A} = 90^\circ$), đường cao AH. Từ M là điểm bất kì trên cạnh BC kẻ $MD \perp AB, ME \perp AC$. Chứng minh năm điểm A,D,M,H,E cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 2. Cho tam giác ABC ($\widehat{A} = 90^\circ$) gọi D là điểm đối xứng với A qua cạnh BC. Chứng minh 4 điểm A,B,C,D cùng thuộc một đường tròn.

Bài 3. Cho hình chữ nhật $ABCD$ vẽ tam giác AEC vuông tại E. Chứng minh năm điểm A,B,C,D,E cùng thuộc một đường tròn.

Bài 4. Cho hình vuông $ABCD$.

a) Chứng minh rằng bốn đỉnh hình vuông cùng nằm trên một đường tròn.

b) Tính bán kính của đường tròn đó biết cạnh của hình vuông bằng 2 dm.

Bài 5. Cho tam giác ABC, các đường cao BD, CE. Chứng minh rằng bốn điểm B,E,D,C cùng thuộc một đường tròn.

Bài 6. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{B}=\widehat{D}=90^\circ$.

a) Chứng minh bốn điểm A,B,C,D cùng thuộc một đường tròn.

b) Nếu $AC=BD$ thì tứ giác $ABCD$ là hình gì?

Bài 7. Cho tứ giác $ABCD$ có $AC\perp BD$. M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

?

Dạng 2: Xác định tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp

Phương pháp giải:

1. **Tam giác thường**. Vẽ hai đường trung trực. Giao điểm của hai đường trung trực tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.
2. **Tam giác vuông**. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm của cạnh huyền.
3. **Tam giác cân**. Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác thuộc đường hạ từ đỉnh lên đáy
4. **Tam giác đều**. Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác trùng với trục tâm, trọng tâm, tâm đường tròn nội tiếp tam giác.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác vuông cần có cạnh góc vuông bằng a.

Ví dụ 2. Xác định tâm và bán kính của đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác đều ABC có cạnh bằng a.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC cân tại A. Nội tiếp đường tròn (O). Đường cao AH cắt (O) ở D. Biết $BC=24$ cm, $AC=20$ cm. Tính chiều cao AH và bán kính đường tròn (O).

Ví dụ 4. Một tấm bìa hình tròn không còn dấu vết của tâm. Hãy tìm lại tâm của hình tròn đó.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Thế nào là đường tròn ngoại tiếp một tam giác? Nêu cách xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Bài 2. Tâm của đường tròn ngoại tiếp một tam giác có ba góc nhọn, có một góc vuông, có một góc tù nằm ở đâu?

Bài 3. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng 3.

Bài 4. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng 3. Hãy tính chiều cao và bán kính của đường tròn ngoại tiếp của nó.

Bài 5. Cho tam giác ABC cân tại A, $BC = 12$ cm, chều cao $AH = 4$ cm. Tính bán kính của dường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Dạng 3: Dựng đường tròn thỏa mãn điều kiện cho trước

Phương pháp giải:

1. Xác định tâm.

2. Xác định bán kính.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho góc nhọn xAy và hai điểm B,C thuộc tia Ax. Dựng đường tròn (O) đi qua B và C sao cho tâm O nằm trên tia Ay.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A.

a) Nêu cách dựng đường tròn (O) đi qua A và tiếp xúc với BC tại B.

b) Nêu cách dựng đường tròn (O') đi qua A và tiếp xúc với BC tại C.

Chủ đề 2: ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CUNG CỦA MỘT CUNG TRÒN

A Kiến thức cần nhớ

Định nghĩa 1.
- Dây cung là đoạn thẳng nối hai điểm phân biệt cùng nằm trên một đường tròn.
- Dây cung đi qua tâm của đường tròn gọi là đường kính của đường tròn.

I. Tính chất đặc trưng của đường kính

Định lí 1. Trong các dây cung của một đường tròn, đường kính là dây cung lớn nhất.

II. Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây

Định lí 2. Trong một đường tròn

1) Đường kính vuông góc với một dây cung thì đi qua trung điểm của dây đó.

2) Đường kính đi qua trung điểm của một dây cung không đi qua tâm của đường tròn thì vuông góc với dây đó.

Định nghĩa 2. Khoảng cách từ một điểm O đến đường thẳng a là độ dài đường vuông góc OH kẻ từ O đến a.

III. Dấu hiệu nhận biết đường thẳng song song cách đều

Tính chất 3. Những đường thẳng song song chắn trên một đường thẳng cho trước những đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau thì chúng song song cách đều.

Tính chất 4. Những đường thẳng song song cách đều chắn trên một đường thẳng bất kì những đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau.

IV. Trong một đường tròn

Định lí 3. 1) Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.

2) Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

V. Trong hai dây của một đường tròn

Định lí 4. 1) Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.

2) Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

B Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau. Hai dây bằng nhau

Phương pháp giải:

1. Trong một đường tròn, hai dây bằng nhau thì cách đều nhau và ngược lại.
2. Chứng minh hai tam giác bằng nhau.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho (O) đường kính AB, dây CD không cắt đường kính AB. Gọi H,K thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ A và B đến CD. Chứng minh rằng:

a) CD và HK có trung điểm trùng nhau;

b) $CH = DK$;

c) $DH = CK$.

Ví dụ 2. Cho (O) đường kính AB. Kẻ hai dây song song AC và BD. Chứng minh rằng

a) $AC = BD$;

b) CD là đường kính của (O).

Ví dụ 3. Cho (O) có các dây AB và CD bằng nhau. Các tia AB và CD cắt nhau tại điểm E nằm bên ngoài đường tròn. Gọi H và K theo thứ tự là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng:

a) $EH = EK$;

b) $EA = EC$.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC, các đường cao BD, CE. Chứng minh rằng

a) Bốn điểm B, E, D, C cùng thuộc một đường tròn.

b) $DE < BC$.

Ví dụ 5. Cho $(O, 5\text{ cm})$, dây $AB = 8$ cm.

a) Tính khoảng cách từ tâm O đến dây AB.

b) Lấy điểm I thuộc dây AB sao cho $AI = 1$ cm. Kẻ dây CD đi qua I và vuông góc với AB. Chứng minh $AB = CD$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Chứng minh định lí: Trong các dây của một đường tròn dây lớn nhất là đường kính.

Bài 2. Việt bảo Nam: Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm một dây thì vuông góc với dây ấy. Nam bảo Việt bạn nói sai rồi. Theo em ai nói đúng, ai nói sai? Vì sao?

Bài 3. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, dây CD, các đường vuông góc với CD tại C và D tương ứng cắt AB tại M và N. Chứng minh rằng $AM = BN$.

Bài 4. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Trên AB lấy hai điểm M và N sao cho $AM = BN$. Qua M và N kẻ hai đường thẳng song song với nhau cắt nửa đường tròn lần lượt ở C và D. Chứng minh rằng MC và ND vuông góc với CD.

Bài 5. Cho (O) đường kính AB. Dây CD cắt đường kính AB tại I. Gọi H và K thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ A và B đến CD. Chứng minh rằng $CH = DK$.

Bài 6. Cho (O) có tâm O nằm trên đường phân giác của góc xAy, cắt tia Ax ở B và C, cắt tia Ay ở D và E. Chứng minh rằng hai dây BC và DE cách đều tâm O và bằng nhau.

Bài 7. Cho hình vẽ bên, trong đó $MN = PQ$. Chứng minh rằng:

a) $AE = AF$.

b) $AN = AQ$.

Bài 8. Cho (O) hai dây AB, CD bằng nhau và cắt nhau tại điểm I nằm bên trong đường tròn. Chứng minh rằng:

a) IO là tia phân giác của một trong hai góc tạo bởi hai dây AB và CD.

b) Điểm I chia AB, CD thành các đoạn thẳng bằng nhau đôi một.

Bài 9. Cho (O) các bán kính OA và OB. Trên cung nhỏ AB lấy các điểm M và N sao cho $AM = BM$. Gọi $C = AM \cap BN$. Chứng minh rằng

a) OC là tia phân giác của góc AOB.

b) OC vuông góc với AB.

Bài 10. Cho hình vẽ bên, hai đường tròn cùng có tâm là O. Một đường thẳng cắt hai đường tròn đó theo thứ tự A,B,C,D. Chứng minh rằng:

a) $AB = CD$.

b) $AC = CD$.

Dạng 2: Tính độ dài một đoạn thẳng. Độ dài một cung

Phương pháp giải:

1. Xác định khoảnh cách từ tâm đến dây.
2. Áp dụng hệ thức Py-ta-go cho một tam giác vuông có cạnh huyền là bán kính của đường tròn.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho (O) có bán kính $OA = 3$ cm. Dây BC của đường tròn vuông góc với OA tại trung điểm của OA. Tính độ dài của dây BC.

Ví dụ 2. Cho (O,R) và điểm M nằm trong đường tròn.

a) Hãy nêu cách dựng dây AB nhận M làm trung điểm.

b) Tính dây AB ở câu a, biết $R = 5$ cm, $OM = 1{,}4$ cm.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho $(O, 25 \text{ cm})$ dây $AB = 40$ cm. Vẽ dây cung CD song song với AB và có khoảng cách đến AB bằng 22 cm. Tính độ dài dây cung CD.

Bài 2. Cho (O) trong đó hai dây cung AB, CD bằng nhau và vuông góc với nhau tại I. Biết $IC = 2$ cm, $ID = 14$ cm. Tính khoảng các từ tâm O đến mỗi dây cung.

Bài 3. Cho $(O, 25 \text{ cm})$, hai dây cung AB, CD song song với nhau và có độ dài theo thứ tự bằng 40 cm, 48 cm. Tính khoảng cách giữa hai dây cung ấy.

Dạng 3: So sánh hai dây cung - Hai đoạn thẳng

Phương pháp giải:

1. Xác định khoảng cách từ tâm đến dây.
2. Trong hai dây cung của một đường tròn, dây nào lớn hơn thì gần tâm hơn và ngược lại.

3. Quan hệ giữa đường tròn và đường xiên: Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ ở ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó, đường vuông góc là đường ngắn nhất.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hình vẽ bên trong đó hai đường tròn cùng có tâm là O. Cho biết $AB > CD$. Hãy so sánh các độ dài

a) OH và OK.
b) ME và MF.
c) MH và MK.

Ví dụ 2. Cho O điểm A nằm bên trong đường tròn. Vẽ dây BC vuông góc với OA. Vẽ dây EF bất kì đi qua A và không vuông góc với OA. So sánh độ dài hai dây BC và EF.

Nhận xét 2. Trong các dây đi qua một điểm A ở trong một đường tròn, dây vuông góc với bán kính đi qua A là dây ngắn nhất.

Ví dụ 3. Cho $(O, 5 \text{ cm})$, điểm M cách O là 3 cm.

a) Tính độ dài dây ngắn nhất đi qua M.

b) Tính độ dài dây dài nhất đi qua M

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho (O) và hai dây cung AB và CD cắt nhau tại điểm M nằm bên trong đường tròn. Gọi H và K theo thứ tự là trung điểm của AB và CD, biết $AB > CD$. Chứng minh rằng $MH > MK$.

Bài 2. Trong (O) cho một điểm A khác điểm O. Tìm trên đường tròn này một điểm M sao cho góc AMO lớn nhất.

Chủ đề 3: VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

A Kiến thức cần nhớ

I. Ba vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

Xét đường thẳng a và đường tròn (O) trên mặt phẳng.

a) Đường thẳng a cắt $(O) \Leftrightarrow a$ và (O) có hai điểm chung phân biệt $\Leftrightarrow a$ là cát tuyến của (O).

b) Đường thẳng a tiếp xúc $(O) \Leftrightarrow a$ và (O) có một điểm chung $\Leftrightarrow a$ là tiếp tuyến của (O).

c) Đường thẳng a không giao nhau với $(O) \Leftrightarrow a$ và (O) không có điểm chung.

II. Ba mệnh đề xác định vị trí tương đối giữa đường thẳng và đường tròn

Xét đường thẳng a và đường tròn $(O;R)$ trên mặt phẳng. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ O đến a thì độ dài $d = OH$ là khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng a.

a) Đường thẳng a cắt $(O;R) \Leftrightarrow d < R$.

b) Đường thẳng a tiếp xúc $(O;R) \Leftrightarrow d = R$.

c) Đường thẳng a không giao nhau với $(O) \Leftrightarrow d > R$.

III. Tính chất của các điểm cách đều một đường thẳng cho trước

Các điểm cách đường thẳng a một khoảng cách bằng h nằm trên hai đường thẳng song song với a và cách a một khoảng bằng h.

B Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Xác định vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

Phương pháp giải:

1) Xác định khoảng cách d từ tâm O đến đường thẳng.

2) So sánh d với R.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Điền vào các chỗ trống (...) trong bảng sau (R là bán kính của đường tròn, d là khoảng cách từ tâm đến đường thẳng).

R	d	Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn
5 cm	3 cm	...
6 cm	...	Tiếp xúc nhau
4 cm	7 cm	...

Ví dụ 2. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(3;4)$. Hãy xác định vị trí tương đối giữa $(A;3)$ và các trục tọa độ Ox, Oy.

Ví dụ 3. Cho đường thẳng a và một điểm O cách a là 3 cm. Vẽ $(O;5\text{ cm})$.

a) Đường thẳng a có vị trí như thế nào đối với (O)? Vì sao?

b) Gọi B, C là các giao điểm của đường thẳng a và (O). Tính độ dài đoạn BC.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Vì sao một đường thẳng và một đường tròn không thể có nhiều hơn hai điểm chung?

Bài 2. Vì sao không thể có một tiếp tuyến đi qua một điểm bên trong đường tròn?

Bài 3. Trên mặt phẳng tọa độ cho điểm $I(-3;2)$. Vẽ đường tròn tâm I bán kính bằng 2 thì đường tròn có vị trí tương đối như thế nào đối với các trục tọa độ?

Bài 4. Cho điểm O cách đường thẳng a là 6 cm. Vẽ đường tròn $(O;10\text{ cm})$.

a) Chứng minh rằng (O) có hai giao điểm với đường thẳng a.

b) Gọi B, C là các giao điểm của đường thẳng a và (O). Tính độ dài đoạn BC.

Dạng 2: Tìm vị trí tâm của một đường tròn có bán kính cho trước tiếp xúc với một đường thẳng cho trước

Phương pháp giải:

1) Xác định khoảng cách từ tâm đến đường thẳng.

2) Áp dụng tính chất các điểm cách đều một đường thẳng.

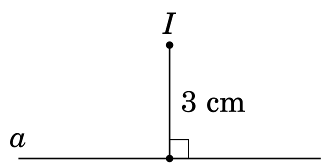
VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1 (Dương BùiĐức - Dự án 9EXV-2-2018). Cho đường thẳng xy. Tâm của các đường tròn có bán kính bằng 1 cm và tiếp xúc với xy nằm trên đường nào?

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1.

Cho đường thẳng a. Tâm I của tất cả các đường tròn bán kính 3 cm tiếp xúc với đường thẳng a nằm trên đường nào?



Bài 2. Cho hai đường thẳng $x'Ox$ và $y'Oy$ cắt nhau tại O. Tâm I của tất cả các đường tròn tiếp xúc với hai đường thẳng trên nằm trên đường thẳng nào?

Chủ đề 4: CÁC TÍNH CHẤT CỦA TIẾP TUYẾN

A Kiến thức cần nhớ

I. Định nghĩa

Đường thẳng a tiếp xúc với $(O;R)$ khi và chỉ khi khoảng cách d từ O đến đường thẳng a bằng R $(\mathrm{d}=R)$.

II. Hai tính chất của tiếp tuyến

1. Tính chất đặc trưng của tiếp tuyến

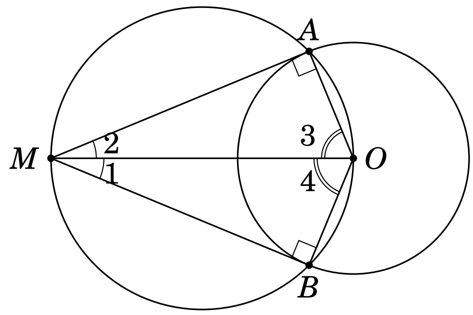
(a) Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

(b) Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.

2. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

   MA và MB là hai tiếp tuyến của (O). Khi đó

$$\begin{cases} MA = MB \\ \widehat{M_1} = \widehat{M_2} \\ \widehat{O_3} = \widehat{O_4} \end{cases}$$



III. Hai dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

1. Dấu hiệu 1: Theo định nghĩa

2. Dấu hiệu 2: Tính chất đặc trưng của tiếp tuyến.

IV. Dựng tiếp tuyến

Qua điểm M nằm bên ngoài (O) hãy dựng tiếp tuyến của đường tròn I.

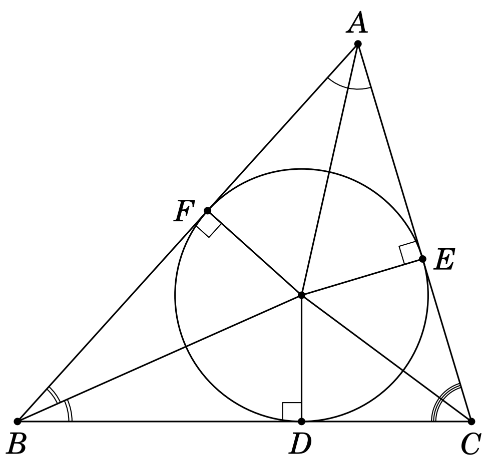
Bước 1. Dựng đường tròn phụ đường kính MO cắt (O) tại A, B.

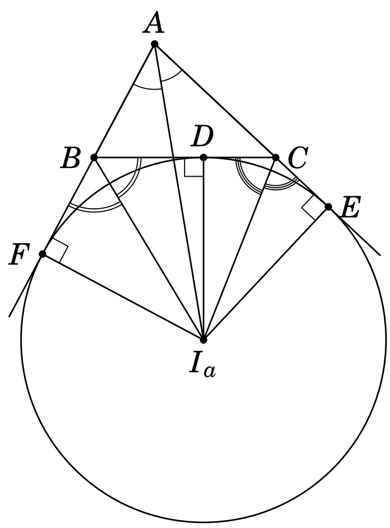
Bước 2. Nối MA, MB thu được 2 tiếp tuyến cần dựng.

V. Đường tròn nội tiếp tam giác

1. Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác gọi là đường tròn nội tiếp tam giác, còn tam giác gọi là tam giác ngoại tiếp đường tròn.

2. Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm các đường phân giác các góc trong của tam giác.





VI. Đường tròn bàng tiếp tam giác

1. Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của một tam giác và phần kéo dài của hai cạnh kia gọi là đường tròn bàng tiếp tam giác.

2. Tâm của đường tròn bàng tiếp tam giác trong góc A là giao điểm của hai đường phân giác các góc ngoài tại B và C.

3. Mỗi tam giác có ba đường tròn bàng tiếp.

B Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Tính độ dài của một đoạn tiếp tuyến

Phương pháp giải:

1. Xác định tam giác vuông có đỉnh góc vuông là tiếp điểm nhờ tính chất đặc trưng của tiếp tuyến
2. Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác vuông.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho $(O;6cm)$ và một điểm A cách O là 10 cm. Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn (B là tiếp điểm). Tính độ dài AB.

Ví dụ 2. Cho (O) có bán kính $OA = R$, dây BC vuông góc với OA tại trung điểm M của OA.

a) Tứ giác $OCAB$ là hình gì? Vì sao?

b) Kẻ tiếp tuyến với đường tròn tại B cắt đường thẳng OA tại E. Tính độ dài BE theo R.

Ví dụ 3. Từ điểm A ở ngoài (O) kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm).

a) Chứng minh rằng $OA \perp BC$.

b) Vẽ đường kính CD. Chứng minh rằng $BD \parallel AO$.

c) Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC biết $OB = 2$ cm, $OA = 4$ cm

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O). Kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn đó (M, N là các tiếp điểm).

a) Chứng minh rằng $OA \perp MN$.

b) Vẽ đường kính NOC, chứng minh rằng $MC \parallel AO$.

c) Tính độ dài các cạnh của tam giác AMN biết $OM = 3$ cm, $OA = 5$ cm.

Bài 2. Từ điểm M nằm bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến MD, ME với đường tròn (D, E là các tiếp điểm). Qua điểm I thuộc cung nhỏ DE, kẻ tiếp tuyến với đường tròn cắt MD, ME theo thứ tự ở P và Q. Biết $MD = 5$ cm. Tính chu vi tam giác MPQ.

Bài 3. Từ điểm A nằm bên ngoài $(O;6\text{cm})$ có $OA = 10$ cm, kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của AO và BC.

a) Tính độ dài OH.

b) Tính độ dài AB.

Bài 4. Cho đường tròn $(O;2\text{cm})$ các tiếp tuyến MA,MB kẻ từ M đến đường tròn vuông góc với nhau tại M (A,B là các tiếp điểm).

a) Tứ giác $MBOA$ là hình gì? Vì sao?

b) Gọi C là điểm bất kì thuộc cung nhỏ AB. Qua C kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt MA,MB thứ tự tại D và E. Tính chu vi tam giác MDE.

c) Tính số đo góc DOE.

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AB,AC lần lượt tại D,E.

a) Tứ giác $ADIE$ là hình gì? Vì sao?

b) Tính bán kính của (I) biết $AB=3$ cm, $AC=4$ cm.

Dạng 2: Chứng minh một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn

Phương pháp giải:

1. Dấu hiệu 1
   - Xác định khoảng cách d từ tâm đến đường thẳng.
   - Chứng minh $\mathrm{d}=R$.
2. Dấu hiệu 2
   - Xác định giao điểm của đường thẳng với đường tròn.
   - Chứng minh đường thẳng vuông góc với bán kính đi qua điểm đó.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có $AB=3$, $AC=4$, $BC=5$. Vẽ $(B;BA)$. Chứng minh rằng AC là tiếp tuyến của đường tròn.

Ví dụ 2. Cho (O) dây AB khác đường kính. Qua O kẻ đường vuông góc với AB, cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn ở điểm C.

a) Chứng minh CB là tiếp tuyến của đường tròn.

b) Cho bán kính của đường tròn bằng 15 cm, $AB=24$ cm. Tính độ dài OC.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Kẻ phân giác trong của $\widehat{B}$ cắt AC tại I. Chứng minh rằng BC tiếp xúc với đường tròn $(I;IA)$.

Ví dụ 4. Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\widehat{A}=\widehat{B}=90^\circ$) có I là trung điểm của AB và góc $\widehat{CID}=90^\circ$. Chứng minh rằng CD là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AB.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\widehat{A}=\widehat{D}=90^\circ$), $AB=4$ cm, $BC=13$ cm, $CD=9$ cm.

a) Tính độ dài AD.

b) Chứng minh rằng đường thẳng AD là tiếp tuyến của đường tròn đường kính BC.

Bài 2. Cho tam giác ABC cân tại A ($AB=AC$), đường cao BH. Trên nửa mặt phẳng chứa C bờ AB vẽ $Bx\perp BA$ cắt $(B;BH)$ tại D. Chứng minh rằng CD là tiếp tuyến của (B).

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ hai đường tròn $(B;BA)$ và $(C;CA)$ cắt nhau tại D (khác A). Chứng minh rằng CD là tiếp tuyến của (B).

Bài 4. Cho $(O;R)$. Vẽ đường tròn tâm I có đường kính lớn hơn R đi qua O cắt (O) tại A, B. Đường thẳng OI cắt I tại M (I nằm giữa O và M). Chứng minh rằng MA, MB là hai tiếp tuyến của (O).

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ $(A;AH)$, kẻ các tiếp tuyến BD, CE với (A) (D, E là các tiếp điểm khác H). Chứng minh rằng:

a) Ba điểm D, A, E thẳng hàng.

b) DE tiếp xúc với đường tròn đường kính BC.

Bài 6. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Vẽ các tiếp tuyến Ax, By của nửa đường tròn. Kẻ tiếp tuyến tại M là một điểm bất kỳ thuộc nửa đường tròn. Tiếp tuyến này cắt Ax, By thứ tự tại C, D. Chứng minh rằng đường tròn đường kính CD tiếp xúc với AB.

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB<AC$), đường cao AH. Gọi E là điểm đối xứng với B qua H. Đường tròn đường kính EC cắt AC ở K. Chứng minh rằng HK là tiếp tuyến của đường tròn.

Dạng 3: Chứng minh đẳng thức hình học

Phương pháp giải:

1. Xác định những đoạn tiếp tuyến bằng nhau.

2. Đại số hóa hình học.

3. Dùng phép tính cộng diện tích và phương pháp diện tích.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho I nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA thứ tự tại D, E, F. Chứng minh rằng:

a) $2AD = AB + AC - BC$.

b) Tìm các hệ thức tương tự như hệ thức ở câu a).

Ví dụ 2. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có chu vi $2p$ ngoại tiếp đường tròn $(I;r)$ thì diện tích S của tam giác có công thức $S = p \cdot r$.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có chu vi $2p$ ngoại tiếp $(I;r)$ gọi a, b, c, h_a, h_c thứ tự là độ dài và chiều cao tương ứng của các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{r}$

b) $h_a + h_b + h_c = 2pr\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$

Ví dụ 4. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Kẻ các tiếp tuyến Ax, By của nửa đường tròn. Qua điểm M bất kì thuộc nửa đường tròn (M khác A và B) kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn cắt Ax, By thứ tự tại C và D. Chứng minh rằng:

a) $\widehat{COD} = 90^\circ$.

b) $CD = AC = BD$.

c) Tích $AC \cdot BD$ không đổi khi M di chuyển trên nửa đường tròn.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Chứng minh diện tích của tam giác đều ngoại tiếp đường tròn bán kính r bằng $3r^2$.

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A ngoại tiếp $(I;r)$ và nội tiếp $(O;R)$. Chứng minh rằng:

a) $2r = AB + AC - BC$.

b) $AB + AC = 2(R + r)$.

Bài 3. Cho tam giác ABC đường tròn tâm I_a bàng tiếp trong góc A tiếp xúc với các tia AB và AC thứ tự tại E và F. Cho $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Chứng minh rằng:

a) $AE = AF = \dfrac{a+b+c}{2}$.

b) $BE = \dfrac{a+b-c}{2}$.

c) $CF = \dfrac{c+a-b}{2}$.

Bài 4. Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC vuông tại A tiếp xúc với BC tại D. Chứng minh rằng $S_{ABC} = BD \cdot DC$.

Bài 5. Cho (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với AB tại D. Chứng minh rằng ΔABC vuông tại C khi và chỉ khi $CA \cdot CB = 2DA \cdot DB$.

Chủ đề 5: VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

A Kiến thức cần nhớ

I. Ba vị trí tương đối của hai đường tròn (O) và (O')

a) (O) cắt $(O') \Leftrightarrow (O)$ và (O') có hai điểm chung phân biệt.

b) (O) tiếp xúc $(O') \Leftrightarrow (O)$ và (O') có một điểm chung.

c) (O) không giao nhau với $(O') \Leftrightarrow (O)$ và (O') không có điểm chung.

II. Ba hệ thức xác định vị trí tương đối giữa hai đường tròn

Cho đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ có tâm không trùng nhau. Đường thẳng OO' gọi là đường nối tâm, đoạn $OO' = d$ gọi là đoạn nối tâm.

a) $(O;R)$ cắt $(O';R') \Leftrightarrow |R - R'| < d < R + R'$.

b) $(O;R)$ tiếp xúc $(O';R') \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\text{Tiếp xúc ngoài: } d = R + R' \\ \text{Tiếp xúc trong: } d = |R - R'|.\end{array}\right.$

c) $(O;R)$ không giao nhau với $(O';R') \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\text{Ở ngoài nhau: } d > R + R' \\ \text{Ở trong nhau: } d < |R - R'|.\end{array}\right.$

III. Tính chất của đường nối tâm

a) Đường nối tâm là trục đối xứng của hình gồm cả hai đường tròn.

b) Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.

IV. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn

a) Tiếp tuyến chung của hai đường tròn là đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn đó.

b) Tiếp tuyến chung ngoài là tiếp tuyến chung không cắt đoạn nối tâm.

c) Tiếp tuyến chung trong là tiếp tuyến chung cắt đoạn nối tâm.

B Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn

Phương pháp giải:

1) Xác định độ dài đoạn nối tâm.

2) So sánh d với $R + R'$ hoặc $|R - R'|$.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho đường tròn (O) bán kính OA và đường tròn đường kính OA.

a) Hãy xác định vị trí của hai đường tròn (O) và đường tròn đường kính OA.

b) Dây AD của đường tròn lớn cắt đường tròn nhỏ ở C. Chứng minh rằng $AC = CD$.

Ví dụ 2. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn trong các trường hợp sau đây

a) $R = 6$ cm, $R' = 4$ cm, $d = 2$ cm.

b) $R = 5$ cm, $R' = 3$ cm, $d = 4$ cm.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Hai đường tròn có thể có bao nhiêu điểm chung? Vì sao?

Bài 2. Vì sao hai đường tròn phân biệt không thể có quá hai điểm chung?

Bài 3. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ có đường nối tâm $d = OO'$. Hãy xác định vị trí tương đối của hai đường tròn ấy theo bảng sau:

R	R'	d	Vị trí tương đối
5 cm	3 cm	7 cm	
11 cm	4 cm	3 cm	
9 cm	6 cm	15 cm	
7 cm	2 cm	10 cm	
7 cm	3 cm	4 cm	
6 cm	2 cm	7 cm	

Bài 4. Hãy điền giá trị thích hợp vào ô trống trong bảng sau:

R	R'	d	Vị trí tương đối
8 cm	2 cm		Tiếp xúc trong
7 cm	3 cm		Cắt nhau
	5 cm	11 cm	Tiếp xúc ngoài
12 cm		6 cm	Đựng nhau

Dạng 2: Các bài toán với hai đường tròn tiếp xúc nhau

Phương pháp giải:

1) Sử dụng tính chất tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.

2) Kẻ tiếp tuyến chung để sử dụng tính chất đặc trưng và tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau.

3) Đường nối tâm là trục đối xứng của hình gồm cả hai đường tròn.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho đường tròn (O) tiếp xúc ngoài với (O') tại A. Qua A kẻ cát tuyến bất kỳ cắt (O) tại C và (O') tại D. Chứng minh rằng $OC \parallel O'D$.

Ví dụ 2. Cho đường tròn (O) tiếp xúc trong với (O') tại A ((O') nằm trong (O)). Qua A kẻ cát tuyến bất kỳ cắt (O) tại B và (O') tại C. Chứng minh rằng $OB \parallel O'C$.

Ví dụ 3. Cho $(O_1; 9\text{ cm})$ tiếp xúc ngoài với $(O_2; 4\text{ cm})$ tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC ($B \in (O_1)$; $C \in (O_2)$). Chứng minh rằng

a) O_1O_2 tiếp xúc với đường tròn đường kính BC.

b) BC tiếp xúc với đường tròn đường kính O_1O_2.

c) Tính độ dài cạnh BC.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho $(O_1; R_1)$ tiếp xúc $(O_2; R_2)$ tại A ($R_1 > R_2$). Hãy cho biết số tiếp tuyến chung của hai đường tròn đồng thời nêu rõ các bước vẽ tiếp tuyến chung này.

Bài 2. Cho hai đường tròn (O_1) tiếp xúc $(O_2; 1\text{ cm})$ tại A. Vẽ một cát tuyến qua A cắt hai đường tròn tại B, C. Chứng minh rằng các tiếp tuyến của hai đường tròn tại B và C song song với nhau.

Bài 3. Cho $(O_1; 3\text{ cm})$ tiếp xúc ngoài với $(O_2; 1\text{ cm})$ tại A. Vẽ hai bán kính O_1B, O_2C song song với nhau thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ O_1O_2.

a) Tính số đo góc $\widehat{BAC}$.

b) Gọi I là giao điểm của BC và O_1O_2. Tính độ dài O_1I.

Bài 4. Cho (O_1) tiếp xúc ngoài với (O_2) tại A. Đường nối tâm O_1O_2 cắt (O_1) tại B và (O_2) tại C. Gọi DE là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường ($D \in (O_1)$, $E \in (O_2)$) và M là giao điểm của BD với CE.

a) Tính số đo góc $\widehat{DAE}$.

b) Tứ giác $ADME$ là hình gì? Vì sao?

c) Chứng minh rằng MA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

Bài 5. Cho hai đường tròn (O_1) tiếp xúc ngoài với (O_2) tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài MN ($M \in (O_1)$, $N \in (O_2)$). Gọi P là điểm đối xứng với M qua O_1O_2 và Q là điểm đối xứng với N qua O_1O_2. Chứng minh rằng

a) $MNPQ$ là hình thang cân.

b) PQ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

c) $MN+PQ=MP+NQ$.

Bài 6. Cho hai đường tròn $(O_1;R_1)$ tiếp xúc ngoài với $(O_2;R_2)$ tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC ($B\in(O_1)$, $C\in(O_2)$).

a) Tính $\widehat{BAC}$.

b) Tính độ dài BC.

c) Gọi D là giao điểm của BA với (O_2). Chứng minh rằng C, O_2, D thẳng hàng.

d) Tính độ dài AB, AC.

Bài 7. Cho hai đường tròn $(O_1;R_1)$ tiếp xúc ngoài với $(O_2;R_2)$ tại A ($R_1>R_2$). Đường nối tâm O_1O_2 cắt (O_1) tại B, cắt (O_2) tại C. Dây DE của (O_1) vuông góc với BC tại trung điểm K của BC.

a) Chứng minh tứ giác $BDCE$ là hình thoi.

b) Gọi I là giao điểm của EC và (O_2). Chứng minh rằng D, A, I thẳng hàng.

c) Chứng minh rằng KI là tiếp tuyến của (O_2).

Dạng 3: Các bài toán với hai đường tròn cắt nhau

Phương pháp giải:

1) Vẽ dây chung, vẽ đường nối tâm.

2) Dùng tính chất đường nối tâm là trung trực của dây chung.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho (O_1) cắt (O_2) tại A, B. Kẻ các đường kính AC của (O_1) và AD của (O_2). Chứng minh rằng:

a) Ba điểm B, C, D thẳng hàng.

b) $CD=2O_1O_2$.

Ví dụ 2. Cho $(O_1;20\text{ cm})$ cắt $(O_2;15\text{ cm})$ tại A, B. Tính đoạn nối tâm O_1O_2 biết $AB=24$ cm (Xét hai trường hợp O_1, O_2 nằm cùng phía và khác phía đối với AB).

Ví dụ 3. Cho (O_1) cắt (O_2) tại A, B. Gọi I là trung điểm của O_1O_2. Qua A vẽ đường thẳng vuông góc với IA, cắt (O_1) tại C và (O_2) tại D (khác A). Chứng minh rằng $CA=AD$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho hai đường tròn $(O_1;R_1)$ cắt $(O_2;R_2)$ tại A và B ($R_1>R_2$). Hãy cho biết số tiếp tuyến chung của hai đường tròn, đồng thời nêu rõ các bước vẽ các tiếp tuyến chung này.

Bài 2. Cho hai đường tròn đồng tâm O. Một đường tròn (O') cắt một đường tròn tâm O tại A, B và cắt đường tròn tâm O còn lại tại C, D. Chứng minh rằng $AB\parallel CD$.

Bài 3. Cho hai đường tròn $(O_1;R_1)$ cắt $(O_2;R_2)$ tại A và B (O_1 và O_2 nằm khác phía đối với AB). Một cát tuyến PAQ quay quanh A ($P \in (O_1)$, $Q \in (O_2)$) sao cho A nằm giữa P và Q. Hãy xác định vị trí của cát tuyến PAQ trong mỗi trường hợp sau

a) A là trung điểm của PQ.

b) PQ có độ dài lớn nhất.

c) Chu vi tam giác BPQ lớn nhất.

d) Diện tích tam giác BPQ lớn nhất.

Bài 4. Cho H, K là các giao điểm của hai đường tròn (O_1) và (O_2). Đường thẳng O_1H cắt (O_1) tại A và (O_2) tại B. Đường thẳng O_2H cắt (O_1) tại C và (O_2) tại D. Chứng minh rằng ba đường thẳng AC, BD, HK đồng quy tại một điểm.

Chương

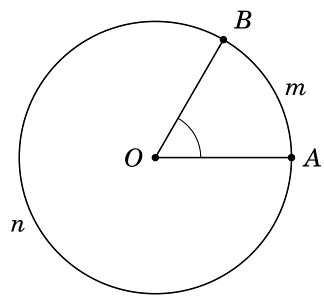
3 GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

Trong chương này chúng ta sẽ nghiên cứu góc ở tâm, góc tạo bởi hai cát tuyến (hoặc góc giữa cát tuyến và tiếp tuyến) của đường tròn, quỹ tích cung chứa góc và điều kiện để một tứ giác nội tiếp hay ngoại tiếp được một đường tròn. Qua đó rèn luyện những kỹ năng cơ bản trong việc chứng minh các tính chất hình học, cách giải các bài toán quỹ tích, dựng hình, tính toán các đại lượng hình học như độ dài đường tròn, độ dài cung tròn, diện tích hình tròn và diện tích hình quạt tròn.

Chủ đề 1: GÓC Ở TÂM, SỐ ĐO CUNG, LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY

A Kiến thức cần nhớ

Góc ở tâm có mối liên hệ chặt chẽ với cung tròn. Trong đường tròn (O), ta xét góc ở tâm $\widehat{AOB}$ (H.170) thì số đo cung nhỏ AB bằng số đo góc $\widehat{AOB}$, số đo cung lớn AB bằng $360^\circ - \widehat{AOB}$. Từ đó, để tìm số đo cung ta tìm số đo góc và ngược lại.



Hình 170

B Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: SỰ LIÊN HỆ GIỮA GÓC Ở TÂM VÀ CUNG

Phương pháp giải: Số đo góc ở tâm đường tròn bằng số đo cung bị chắn. Trên hình 170:

$$\text{sđ}\widehat{AOB} = \text{sđ}\overset{\frown}{AB}.$$

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Giả sử A là một điểm nằm ngoài đường tròn (O). Kẻ các tiếp tuyến AB và AC

tới đường tròn (B và C là các tiếp điểm). Tìm số đo cung nhỏ và cung lớn BC của đường tròn (O), biết rằng $\widehat{BAC} = \alpha$.

Ví dụ 2. Cho đường tròn (O) đường kính AB và dây cung AC. Chứng tỏ rằng

$$\text{sđ}\overset{\frown}{BAC} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BC}.$$

Ví dụ 3. Giả sử C là một điểm trên cung lớn AB của đường tròn (O). Điểm C chia cung lớn AB thành hai cung AC và CB. Chứng minh rằng cung lớn AB có sđ$\overset{\frown}{AB}$ = sđ$\overset{\frown}{AC}$ + sđ$\overset{\frown}{CB}$.

> **!** Trong các bài toán về cung tròn, bài toán chứng minh hai cung bằng nhau có ý nghĩa rất quan trọng. Từ hai cung bằng nhau, ta chứng minh được hai đoạn thẳng bằng nhau, hai góc bằng nhau.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Giả sử M là một điểm nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ sao cho $OM = 2R$. Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A và B là các tiếp điểm). Tìm số đo góc ở tâm $\widehat{AOB}$.

Bài 2. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B. Đường phân giác của góc $\widehat{OBO'}$ cắt các đường tròn (O) và (O') theo thứ tự tại C và D. So sánh hai góc $\widehat{BOC}$ và $\widehat{BO'D}$.

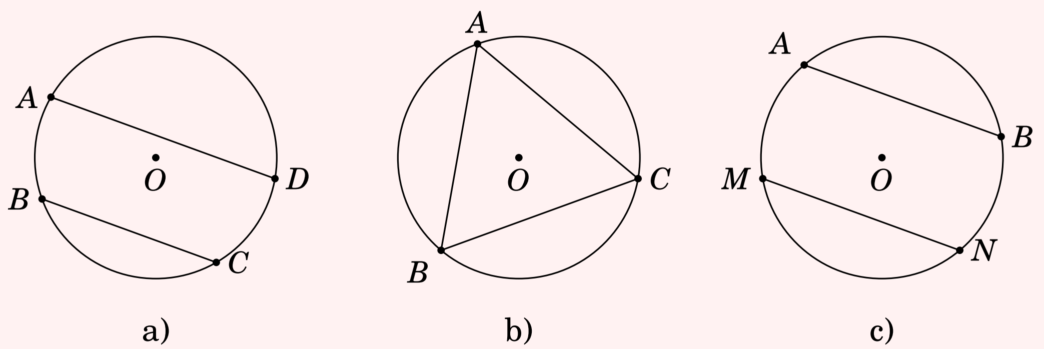
Bài 3. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 70^\circ$, $\widehat{C} = 50^\circ$. Đường tròn tâm O nội tiếp tam giác đó tiếp xúc với các cạnh AB, AC, BC theo thứ tự tại D, E, F. Tính số đo các cung DE, EF và FD.

Dạng 2: SỰ LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY

Phương pháp giải:

a) Hai đường thẳng song song cắt (O) tại A, B, C, D (H.176a) thì

$$\text{sđ}\overset{\frown}{AB} = \text{sđ}\overset{\frown}{CD}.$$



Hình 176

b) Các trường hợp cơ bản:

Trên hình 176b: $AB = AC \Leftrightarrow$ sđ$\overset{\frown}{AB}$ = sđ$\overset{\frown}{AC}$.

Trên hình 176c: $AB = MN \Leftrightarrow$ sđ$\overset{\frown}{AB}$ = sđ$\overset{\frown}{MN}$.

◊◊◊VÍ DỤ MINH HỌA◊◊◊

Ví dụ 1. Giả sử ABC là tam giác nhọn nội tiếp đường tròn (O). Đường cao AH cắt đường tròn (O) tại D. Kẻ đường kính AE của đường tròn (O). Hãy chứng minh:

a) $BC \parallel DE$.

b) Tứ giác $BCED$ là hình thang cân.

> **!** Để chứng minh hai cung bằng nhau trong một đường tròn, ngoài cách dùng định nghĩa, ta thường sử dụng các định lí sau:
>
> - Nếu hai dây bằng nhau thì hai cung căng hai dây đó bằng nhau.
> - Hai cung bị chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau.
> - Đường kính đi qua trung điểm của một dây cung (khác đường kính) thì chia cung căng dây ấy thành hai cung bằng nhau.
> - Đường kính vuông góc với một dây cung thì chia cung căng dây ấy thành hai cung bằng nhau.

Ví dụ 2. Giả sử AB là một dây cung của đường tròn (O). Trên cung nhỏ AB lấy điểm C và D sao cho $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$. Chứng minh rằng $AB \parallel CD$.

◊◊◊BÀI TẬP VẬN DỤNG◊◊◊

Bài 1. Cho đường tròn (O) đường kính AB và đường tròn (O') đường kính AO. Các điểm C, D thuộc đường tròn (O) sao cho $B \in \overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{BC} < \overset{\frown}{BD}$. Các dây cung AC và AD cắt đường tròn (O') theo thứ tự tại E và F.

a) So sánh độ dài các đoạn thẳng OE và OF.

b) So sánh số đo các cung AE và AF của đường tròn (O').

Bài 2. Cho đường tròn (O,R) hai dây cung AB và CD vuông góc với nhau tại I (C thuộc cung nhỏ AB). Kẻ đường kính BE của đường tròn (O).

a) Chứng tỏ rằng $AC = DE$.

b) Chứng minh hệ thức $IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 = 4R^2$.

Bài 3. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên nửa đường tròn đó lấy hai điểm C, D. Kẻ CH vuông góc với AB cắt đường tròn tại điểm thứ hai E. Chứng minh rằng:

a) Hai cung nhỏ CF và DB bằng nhau.

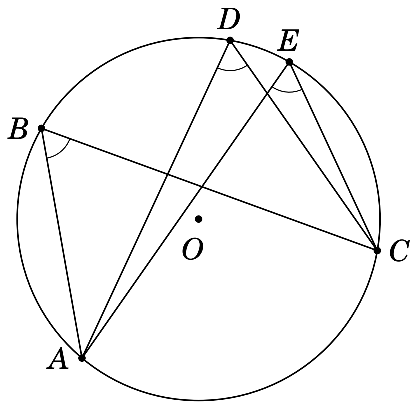
b) Hai cung nhỏ BF và DE bằng nhau.

c) $DE = BF$.

Chủ đề 2: GÓC NỘI TIẾP VÀ GÓC TẠO BỞI TIA TIẾP TUYẾN VỚI MỘT DÂY CUNG

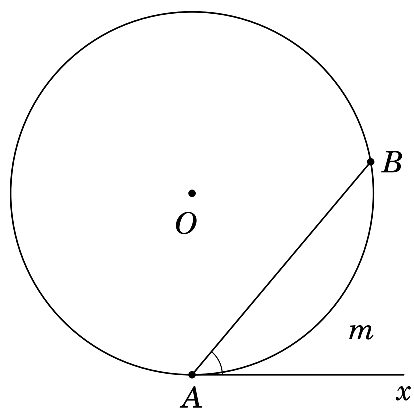
A Kiến thức cần nhớ

Góc $\widehat{ABC}$ có đỉnh nằm trên đường tròn (O) và các cạnh cắt đường tròn đó được gọi là góc nội tiếp (H.179a). Trong trường hợp các góc nội tiếp có số đo không vượt quá 90° thì số đo của chúng bằng nửa số đo của góc ở tâm, cùng chắn một cung. Các góc nội tiếp đều có số đo bằng nửa số đo cung bị chắn. Vì thế, nếu những góc này cùng chắn một cung (hoặc chắn những cung bằng nhau) thì chúng bằng nhau, nếu các góc nội tiếp này bằng nhau thì các cung bị chắn bằng nhau.



Hình 179a

Cho đường tròn (O) và dây cung AB. Từ điểm A ta kẻ tia tiếp tuyến Ax với đường tròn, khi đó $\widehat{BAx}$ được gọi là góc tạo bởi tia tiếp tuyến với dây cung AB (H.179b). Cũng như góc nội tiếp, số đo góc giữa tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo cung bị chắn sđ$\widehat{BAx} = \dfrac{1}{2}$sđ$\widehat{AmB}$.



Hình 179b

Những khái niệm, định lí, hệ quả về góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung có thể giúp chúng ta so sánh số đo các góc, từ đó chứng minh được các đường thẳng song song với nhau, các tam giác bằng nhau, các tam giác đồng dạng với nhau...

B Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: GÓC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN

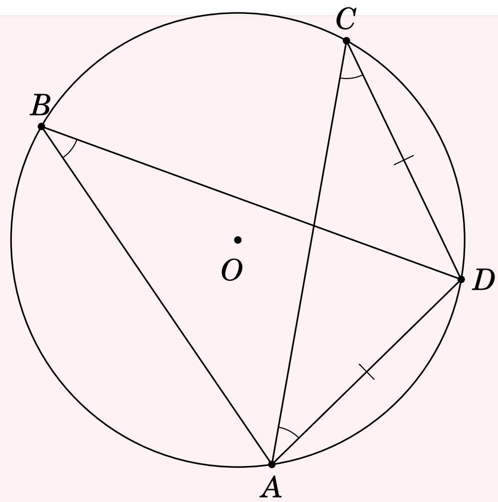
Phương pháp giải:

a) Chú ý phân biệt: Góc nằm trên đường tròn khác với góc nằm trong đường tròn.

b) Hai góc cùng chắn một cung thì bằng nhau và bằng nửa số đo cung bị chắn. Trên hình 179a: $\text{sđ}\widehat{ABC} = \text{sđ}\widehat{ADC} = \text{sđ}\widehat{AEC} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AC}$.

c) Các góc chắn hai cung bằng nhau thì bằng nhau. Trên hình 179c:

$AD = CD \Leftrightarrow \text{sđ}\overset{\frown}{AD} = \text{sđ}\overset{\frown}{CD} \Leftrightarrow \text{sđ}\widehat{ABD} = \text{sđ}\widehat{CAD}$.



Hình 179c

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Trên cạnh huyền BC của tam giác vuông ABC về phía ngoài ta dựng hình vuông với tâm tại điểm O. Chứng minh rằng AO là tia phân giác của góc vuông $\widehat{BAC}$.

Ví dụ 2. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Từ đỉnh A ta kẻ đường cao AH (H thuộc BC). Chứng minh rằng $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$.

Ví dụ 3. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Trên cung BC không chứa A ta lấy điểm P bất kì (P khác B và P khác C). Các đoạn PA và BC cắt nhau tại Q.

a) Giả sử D là một điểm cố định trên đoạn PA sao cho $PD = PB$. Chứng minh rằng tam giác PDB đều.

b) Chứng minh rằng $PA = PB + PC$.

c) Chứng minh hệ thức $\dfrac{1}{PQ} = \dfrac{1}{PB} + \dfrac{1}{PC}$.

!

- Tứ giác $ABCD$ có tính chất $AB \cdot CD = BC \cdot AD \quad (*)$ nói ở ví dụ trên được gọi là tứ giác điều hòa. Loại tứ giác đặc biệt này có nhiều ứng dụng trong việc giải các bài toán hình học phẳng khác.
- Nếu viết hệ thức $(*)$ dưới dạng $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{CD}$ và nhớ lại tính chất đường phân giác trong tam giác ta có thể nêu thêm một tính chất của tứ giác điều hòa.
- Tứ giác $ABCD$ là một tứ giác điều hòa khi và chỉ khi các đường phân giác của góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ cắt nhau tại một điểm trên đường chéo BD.
- Tứ giác $ABCD$ là tứ giác điều hòa khi và chỉ khi các đường phân giác của góc $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ADC}$ cắt nhau trên đường chéo AC.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho góc xAy và điểm M là một điểm bất kì nằm trong góc đó. Kẻ các đường vuông góc MP và MQ theo thứ tự lên các cạnh Ax, Ay (P thuộc Ax, Q thuộc Ay). Kẻ AK vuông góc với đoạn PQ. Chứng minh rằng $\widehat{PAK} = \widehat{MAQ}$.

Bài 2. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi A', B', C' là chân các đường vuông góc vẽ từ A, B, C trên cạnh BC, CA, AB; H là trực tâm của tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng AA' là đường phân giác trong của góc $\widehat{B'A'C'}$.

b) Cho $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Chứng tỏ rằng tam giác AOH cân.

Bài 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Tia phân giác của góc BAC cắt BC ở D và cắt đường tròn (O) tại E.

a) Chứng minh $AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

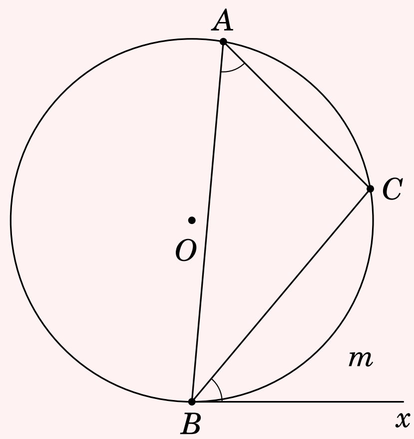
b) Chứng minh $ED \cdot EA = EB^2$.

Dạng 2: GÓC TẠO BỞI TIA TIẾP TUYẾN VÀ DÂY CUNG

Phương pháp giải:

a) Số đo góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung (tại một điểm trên đường tròn) bằng nửa số đo cung bị chắn.

b) Trên hình 183 ta có sđ$\widehat{BAC}$ = sđ$\widehat{xBC} = \dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{BC}$.



Hình 183

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Giả sử A và B là hai điểm phân biệt trên đường tròn (O). Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B cắt nhau tại điểm M. Từ A kẻ đường thẳng song song với MB, cắt đường tròn (O) tại C. MC cắt đường tròn (O) tại E. Các tia AE và MB cắt nhau tại K. Chứng minh rằng $MK^2 = AK \cdot EK$ và $MK = KB$.

Ví dụ 2. Cho đường tròn (C) tâm O, AB là một dây cung của (C) không đi qua O và I là trung điểm của AB. Một đường thẳng thay đổi đi qua A cắt đường tròn (C_1) tâm O bán kính OI tại P và Q. Chứng minh rằng tích $AP \cdot AQ$ không đổi và đường tròn ngoại tiếp tam giác BPQ luôn đi qua một điểm cố định khác B.

Ví dụ 3. Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi M, N, P theo thứ tự là chân các đường cao kẻ từ A, B, C của tam giác ABC và I là trung điểm của BC.

a) Chứng minh rằng tam giác INP đều.

b) Gọi E và K lần lượt là trung điểm của PB và NC. Chứng minh rằng các điểm I, M, E, K cùng thuộc một đường tròn.

c) Giả sử IA là phân giác của $\widehat{NIP}$. Tìm số đo góc $\widehat{BCP}$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Lấy điểm D trên cạnh AC ($AC > 2DC$) làm tâm vẽ đường tròn tiếp xúc với BC tại E. Từ B kẻ tiếp tuyến thứ hai BF cắt AD tại I và cắt AE tại K. Trung tuyến AM của tam giác ABC cắt BF tại N.

a) Chứng minh năm điểm A, B, E, D, F cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh hệ thức $\dfrac{IF}{IK} = \dfrac{BF}{BK}$.

c) Cho $\widehat{AEC} = 130^\circ$, tính số đo góc $\widehat{ANB}$.

Bài 2. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài với nhau tại điểm A. Một tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm B cắt đường tròn (O') tại C và D (C nằm giữa B và D). Các tia CA, DA cắt đường tròn (O) theo thứ tựtại E và F.

a) Chứng minh rằng $EF \parallel CD$.

b) Gọi M là điểm chính giữa của cung CD (M và A khác phía đối với CD). Tính số đo góc $\widehat{BAM}$.

Bài 3. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến ADE với đường tròn (D nằm giữa A và E). Tia phân giác của góc $\widehat{DBE}$ cắt DE tại I. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{BD}{BE} = \dfrac{CD}{CE}$.

b) $AI = AB = AC$.

c) CI là tia phân giác của góc $\widehat{DCE}$.

Bài 4. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến AKD sao cho BD song song với AC. Nối BK cắt AC ở I.

a) Nêu cách vẽ cát tuyến AKD sao cho $BD \parallel AC$.

b) Chứng minh hệ thức $IC^2 = IK \cdot IB$.

c) Cho góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Chứng tỏ rằng cát tuyến AKD đi qua điểm O.

Bài 5. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B. Qua A kẻ hai đường thẳng d và d'. Đường thẳng d' cắt (O) tại M và cắt (O') tại N. Đường thẳng d cắt đường tròn (O) tại C và cắt đường tròn (O') tại D sao cho AB là tia phân giác của góc $\widehat{MAD}$. Chứng minh rằng $CD = MN$.

Chủ đề 3: GÓC CÓ ĐỈNH Ở TRONG HOẶC NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN

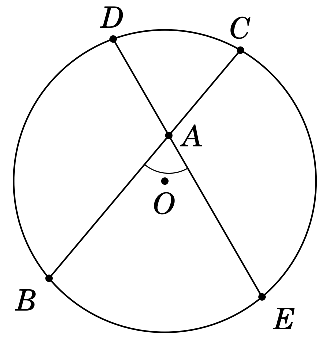
A Kiến thức cần nhớ

Với đỉnh A nằm trong đường tròn (O) ta có góc với đỉnh ở trong đường tròn (H.187).

Số đo của góc này bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn giữa hai cạnh của góc và các tia đối của hai cạnh đó.

$$\text{sđ}\widehat{BAE} = \frac{\text{sđ}\overset{\frown}{BE} + \text{sđ}\overset{\frown}{CD}}{2};$$

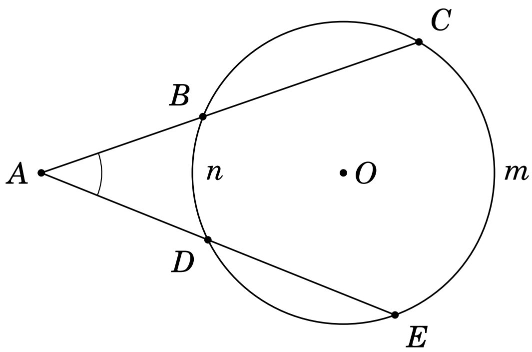
$$\text{sđ}\widehat{BAD} = \frac{\text{sđ}\overset{\frown}{BD} + \text{sđ}\overset{\frown}{CE}}{2}$$



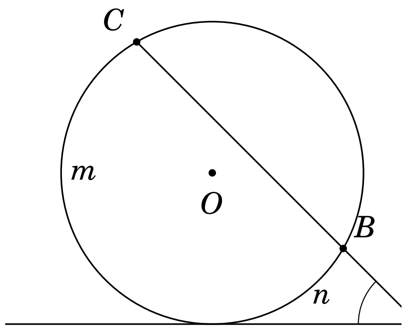
Hình 187

Với đỉnh A nằm ở ngoài đường tròn (O) ta lưu ý đến các loại góc có hai cạnh cắt đường tròn hoặc tiếp xúc với đường tròn (H.188a, H.188b, H.188c).

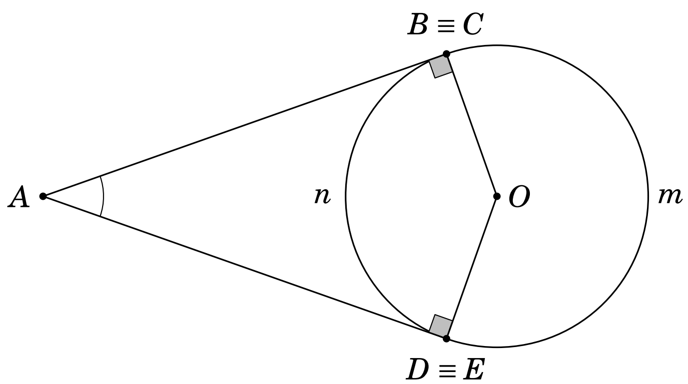
Các góc này đều có số đo bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.



Hình 188a



Hình 188b



Hình 188c

B Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: ÁP DỤNG GÓC CÓ ĐỈNH Ở TRONG ĐƯỜNG TRÒN

Phương pháp giải: Cũng như phần góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung, các định lí và hệ quả của góc có đỉnh nằm trong hoặc nằm ngoài đường tròn giúp chúng ta tìm mối quan hệ giữa các số đo các góc, chứng minh các đường song song, các tam giác bằng nhau, các tam giác đồng dạng với nhau, hai đường thẳng vuông góc với nhau.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Trên đường tròn (O) cho các điểm A, B, C, D theo thứ tự đó. Gọi A_1, B_1, C_1 và D_1 lần lượt là điểm chính giữa các cung AB, BC, CD và DA. Chứng minh các đường thẳng A_1C_1 và B_1D_1 vuông góc với nhau.

Ví dụ 2. Cho bốn điểm A, D, C, B theo thứ tự đó nằm trên đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ (C và D nằm về cùng phía so với AB). Gọi E và F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A, B trên đường thẳng CD. Tia AD cắt tia BC tại I. Biết rằng $AE + BF = R\sqrt{3}$.

a) Tính số đo góc AIB.

b) Trên cung nhỏ CD lấy điểm K. Gọi giao điểm của KA, KB với DC lần lượt là M và N. Tìm giá trị lớn nhất của MN khi K di động trên cung nhỏ CD.

Ví dụ 3. Trong tam giác ABC, đường phân giác của góc BAC cắt cạnh BC tại D. Giả sử (T) là đường tròn tiếp xúc với BC tại D và đi qua điểm A. Gọi M là giao điểm thứ hai của (T) và AC, P là giao điểm thứ hai của (T) và BM, E là giao điểm của AP và BC.

a) Chứng minh rằng $\widehat{EAB} = \widehat{MBC}$.

b) Chứng minh hệ thức $BE^2 = EP \cdot EA$.

Ví dụ 4. Trên đường tròn (O) ta lấy các điểm A, C_1, B, A_1, C, B_1 theo thứ tự đó.

a) Chứng minh rằng nếu các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 là các đường phân giác trong của tam giác ABC thì chúng là các đường cao của $\Delta A_1B_1C_1$.

b) Chứng minh rằng nếu các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 là các đường cao của tam giác ABC thì chúng là các đường phân giác của $\Delta A_1B_1C_1$.

c) Giả sử (T_1) và (T_2) là hai tam giác nội tiếp đường tròn (O), đồng thời các đỉnh của tam giác (T_2) là các điểm chính giữa của các cung của đường tròn bị chia bởi các đỉnh của tam giác (T_1). Chứng minh rằng trong hình lục giác là giao của các tam giác (T_1) và (T_2) các đường chéo nối các đỉnh đối nhau song song với các cạnh của tam giác (T_1) và đồng quy tại một điểm.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Dọc theo cạnh của một tam giác đều ta lăn một đường tròn có bán kính bằng đường cao của tam giác. Chứng minh rằng số đo của cung định trên đường tròn bởi các cạnh của tam giác bằng 60°.

Bài 2. Giả sử A,B và C là ba điểm thuộc đường tròn (O) sao cho tiếp tuyến tại A của đường tròn cắt tia BC tại D. Tia phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn tại M, tia phân giác của $\widehat{ADC}$ cắt AM tại I. Chứng minh rằng $AM \perp DI$.

Bài 3. Trên đường tròn tâm O bán kính R ta kẻ ba dây cung liên tiếp bằng nhau AB,BC và CD (mỗi dây có độ dài nhỏ hơn R). Gọi I là giao điểm của AB và CD. Các tiếp tuyến của đường tròn tại B và D cắt nhau tại K.

a) Chứng minh rằng $\widehat{BIC} = \widehat{BKD}$.

b) Chứng tỏ rằng BC là tia phân giác của góc KBD.

Bài 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Các đường phân giác trong của tam giác kẻ từ A,B,C cắt nhau tại I và cắt đường tròn (O) theo thứ tự tại D,E và F.

a) Chứng minh rằng $CI \perp ED$.

b) Gọi M là giao điểm của AC và DE. Chứng minh rằng $IM \parallel BC$.

c) Gọi K là điểm đối xứng với I qua D. Chứng tỏ rằng K là tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác ABC.

Bài 5. Cho tam giác cân ABC $(AB = AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là điểm thuộc cung BC không chứa A,E là giao điểm của BC và AD.

a) Chứng minh rằng $\widehat{AEB} = \widehat{ABD}$.

b) Chứng minh hệ thức $AC^2 = AD \cdot AE$.

c) Các kết quả ở câu a) và câu b) có thay đổi không nếu điểm D thuộc cung BC chứa A?

Bài 6. Cho đường tròn tâm O và dây AB. Trên hai cung AB ta lần lượt lấy các điểm M và N. Hai tia AM và NB cắt nhau tại C, hai tia AN và MB cắt nhau tại D. Chứng minh rằng nếu $\widehat{ACN} = \widehat{ADM}$ thì $AB \perp CD$.

Chủ đề 4: CUNG CHỨA GÓC

A Kiến thức cần nhớ

- Quỹ tích những điểm nhìn đoạn AB cố định dưới môt góc không đổi $\alpha (0\circ < \alpha < 180^)$ là hai cung chứa góc α vẽ trên đoạn AB (quỹ tích cơ bản).
- Trường hợp đặc biệt: Quỹ tích những điểm nhìn đoạn AB cố định dưới một góc vuông là đường tròn đường kính AB.

B Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: ÁP DỤNG GIẢI CÁC BÀI TOÁN VỀ QUỸ TÍCH VÀ DỰNG HÌNH

Phương pháp giải: Khái niệm cung chứa góc giúp chúng ta giải được nhiều bài toán quỹ tích, dựng hình, chứa nhiều điểm cùng thuộc một đường tròn.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho tam giác cân $ABC(AB = AC)$ và D là một điểm trên cạnh BC. Kẻ DM song song với $AB(M$ thuộc $AC)$, DN song song với AC (N thuộc AB). Gọi D' là điểm đối xứng của D qua MN. Tìm quỹ tích điểm D' khi điểm D di động trên cạnh BC.

Ví dụ 2. Cho đường tròn (O) và dây cung BC cố định. Gọi A là điểm di động trên cung lớn BC của đường tròn (O) (A khác B, A khác C). Tia phân giác của góc $\widehat{ACB}$ cắt đường tròn (O) tại điểm D khác điểm C. Lấy điểm I thuộc đoạn CD sao cho $DI = BD$. Đường thẳng BI cắt đường tròn (O) tại điểm K khác điểm B.

a) Chứng minh rằng tam giác KAC cân.

b) Chứng minh đường thẳng AI luôn đi qua một điểm J cố định.

c) Trên tia đối của AB lấy điểm M sao cho $AM = AC$. Tìm quỹ tích các điểm M khi A di động trên cung lớn BC của đường tròn (O).

Ví dụ 3. Cho trước điểm A trên đường thẳng d và hai điểm C, D thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau, bờ d. Hãy dựng một điểm B trên d sao cho $\widehat{ACB} = \widehat{ABD}$

Ví dụ 4. Giả sử AD là đường phân giác trong góc A của tam giác ABC (D thuộc đoạn BC). Trên AD lấy hai điểm M và N sao cho $\widehat{ABN} = \widehat{CBM}$. Đường thẳng BM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM tại điểm thứ hai E và CN cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM tại điểm thứ hai F.

a) Chứng minh rằng bốn điểm B,C,E,F cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh 3 điểm A,E,F thẳng hàng.

c) Chứng minh $\widehat{BCF} = \widehat{ACM}$, từ đó suy ra $\widehat{ACN} = \widehat{BCM}$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $BC = 2R$. Gọi A là điểm di động trên nửa đường tròn đó. Gọi D và E theo thứ tự là trung điểm của các dây AC và AB. Tìm quỹ tích giao điểm M của BD và CE.

Bài 2. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và một điểm C di động trên nửa đường tròn. Vẽ tam giác đều ACD với D thuộc nửa mặt phẳng bờ AC không chứa B. Tìm quỹ tích trung điểm M của đoạn CD.

Bài 3. Cho đường tròn tâm (O) bán kính R và dây cung $AB = R\sqrt{3}$. C là điểm di động trên cung nhỏ AB. Vẽ đường tròn tâm C tiếp xúc với AB. Từ A và B kẻ các tiếp tuyến (khác AB) với đường tròn tâm C, chúng cắt nhau tại M. Tìm quỹ tích các điểm M.

Bài 4. Dựng tam giác ABC, biết rằng

a) $BC = 3$ cm, $\widehat{BAC} = 50°$, độ dài đường trung tuyến $AM = 3$ cm.

b) $\widehat{BAC} = 50°$, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác bằng 2,5 cm, bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng 1 cm.

Bài 5. Cho bốn điểm A, B, C, D theo thứ tự cùng nằm trên đường tròn (O) sao cho AC vuông góc BD tại H (H khác O). Gọi M và N lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ H xuống các đường thẳng AB và BC, P và Q lần lượt là giao điểm của đường thẳng MH và NH với các đường thẳng CD và DA.

a) Chứng minh rằng $PQ \parallel AC$.

b) Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 6. Cho tam giác ABC, gọi D và E theo thứ tự là các tiếp điểm của đường tròn tâm (O) nội tiếp tam giác với các cạnh AB và AC, H là giao điểm của đường thẳng BO và đường thẳng DE.

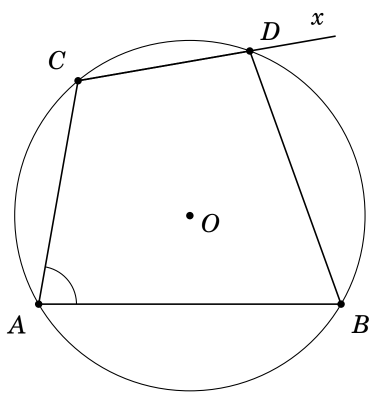
a) Chứng minh rằng bốn điểm O, E, H, C cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh đường phân giác trong của góc $\widehat{ABC}$, đường trung bình của tam giác ABC song song với cạnh AB và đường thẳng DE đồng quy.

Chủ đề 5: TỨ GIÁC NỘI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP

A Kiến thức cần nhớ

Ta đã biết một tứ giác nội tiếp có bốn đỉnh cùng nằm trên một đường tròn. Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện bằng 180°. Đảo lại, nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° thì tứ giác đó nội tiếp được trong một đường tròn.



- Từ những kiến thức cơ bản trên ta có thể rút ra các hệ quả sau:

a) Góc ngoài tại một đỉnh của tứ giác nội tiếp bằng góc trong tại đỉnh đối diện. Đảo lại, nếu góc ngoài ở một đỉnh của tứ giác bằng góc trong ở đỉnh đối diện thì tứ giác đó nội tiếp được trong một đường tròn.

$$\text{ABCD nội tiếp} \Leftrightarrow \widehat{BAD} = \widehat{DCx} \text{ (hình bên).}$$

b) Hình thang nội tiếp được trong một đường tròn khi và chỉ khi nó là hình thang cân.

- Cách nhận biết một tứ giác nội tiếp

1) Dựa vào định nghĩa tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh tứ giác đó có hai góc đối bù nhau (hoặc tứ giác đó có một góc bằng góc ngoài tại đỉnh đối diện).

3) Dựa vào khái niệm cung chứa góc: Tứ giác có hai đỉnh liên tiếp nhìn đoạn thẳng nối hai đỉnh còn lại dưới hai góc bằng nhau thì tứ giác đó nội tiếp được trong một đường tròn.

B Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Chứng minh tứ giác nội tiếp

1. Cho tứ giác $ABCD$. Nếu $\widehat{A}+\widehat{C}=\widehat{B}+\widehat{D}=180^\circ$ thì tứ giác $ABCD$ nội tiếp.

2. Dựa vào các hệ quả, cách nhận biết để giải quyết bài toán.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm là H. Giả sử M là một điểm trên cung BC không chứa A (M khác B, M khác C). Gọi N, P theo thứ tự là điểm đối xứng của M qua các đường thẳng AB, AC.

a) Chứng minh tứ giác $AHCP$ nội tiếp.

b) Chứng minh ba điểm N, H, P thẳng hàng.

c) Tìm vị trí của M để độ dài đoạn NP lớn nhất.

Ví dụ 2. Cho tam giác cân $ABC(AB=AC, \widehat{A}<90^\circ)$, đường cao BD. Gọi M, N, I theo thứ tự là trung điểm của đoạn BC, BM và BD. Tia NI cắt cạnh AC tại K. Chứng minh rằng:

a) Các tứ giác $ABMD, ABNK$ nội tiếp.

b) $BC^2=\dfrac{4}{3}CA.CK$.

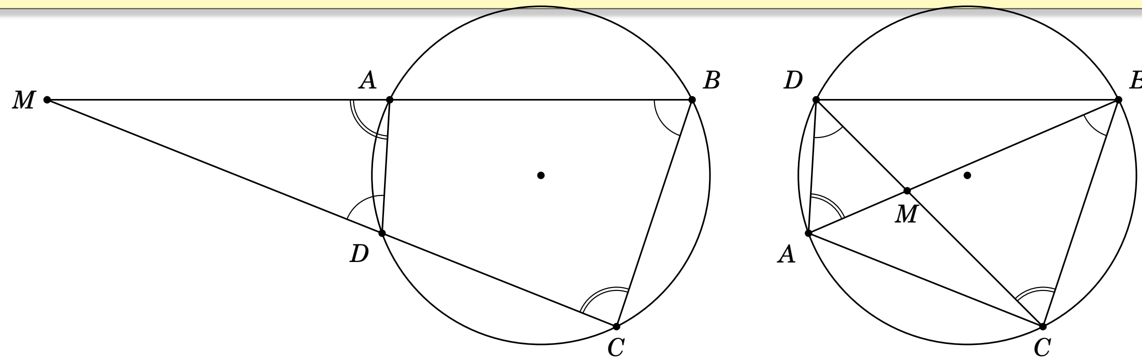
Ví dụ 3. Cho tam giác nhọn $ABC(AB<AC)$, hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H (D thuộc cạnh AC, E thuộc cạnh AB). Gọi I là trung điểm của BC. Đường tròn ngoại tiếp $\triangle BEI$ và đường tròn ngoại tiếp $\triangle CDI$ cắt nhau tại K (K khác I).

a) Chứng minh rằng $\widehat{BDK} = \widehat{CEK}$

b) Đường thẳng DE cắt BC tại M. Chứng minh ba điểm M, H, K thẳng hàng.

c) Chứng minh rằng tứ giác $BKMD$ nội tiếp.

! Sử dụng kiến thức của tam giác đồng dạng ta thấy: Nếu hai cát tuyến AB và CD của một đường tròn cắt nhau tại M thì $MA \cdot NB = MC \cdot MD$ (xem hình dưới).



Đảo lại, ta cũng chứng minh được: Nếu hai đường thẳng BA và CD cắt nhau tại điểm M sao cho $MA \cdot NB = MC \cdot MD$ thì bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn. Đây cũng là một cách nhận biết một tứ giác nội tiếp.

Ví dụ 4. Cho hình thang vuông $ABCD(\widehat{A} = \widehat{D} = 90°)$. Gọi E là trung điểm của AD. Kẻ AH vuông góc với BE, DI vuông góc với CE, K là giao điểm của AH và DI.

a) Chứng minh rằng tứ giác $BHIC$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $EK \perp BC$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn; AD và CE là hai đường cao cắt nhau tại H, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi M là điểm đối xứng của B qua O, I là giao điểm của BM và DE, K là giao điểm của AC và HM.

a) Chứng minh rằng các tứ giác $AEDC$ và $DIMC$ là các tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $OK \perp AC$.

c) Cho số đo góc AOK bằng $60°$. Chứng minh tam giác HBO cân.

Bài 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Trên hai cạnh AD và CD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\widehat{MBN} = 45°$. BM và BN cắt AC theo thứ tự tại E và F.

a) Chứng minh các tứ giác $BENC$ và $BFMA$ nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Chứng tỏ $MEFN$ cũng là tứ giác nội tiếp.

c) Gọi H là giao điểm của MF và NE, I là giao điểm BH và MN. Tính độ dài đoạn BI theo a.

Bài 3. Giả sử trong tứ giác lồi $ABCD$ có điểm M sao cho tứ giác $ABMD$ là hình bình hành và $\widehat{CBM} = \widehat{CDM}$. Dựng hình bình hành $BMCN$.

a) Chứng minh rằng tứ giác $ABNC$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $\widehat{ACD} = \widehat{BCM}$.

Dạng 2: Chứng minh nhiều điểm cùng nằm trên một đường tròn

1. Dựa vào cách chứng minh tam giác, tứ giác nội tiếp.
2. Dựa vào kết quả: Nếu $IM \cdot IH = IN \cdot IK$ thì bốn điểm H, M, N, K cùng nằm trên đường tròn.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hình chữ nhật $ABCD$, I là trung điểm của CD, E thuộc cạnh BA. Qua I kẻ IM vuông góc với DE, cắt AD tại H. Qua I kẻ IN vuông góc với CE, cắt BC tại K. Gọi G là giao điểm của EI và HK. Chứng minh rằng:

a) Bốn điểm H, M, N, K cùng nằm trên đường tròn.

b) Chứng minh năm điểm E, G, N, K, B cùng thuộc một đường tròn.

c) Năm điểm E, G, M, H, A cùng thuộc một đường tròn.

Ví dụ 2. Cho tam giác nhọn ABC với đường cao AD. Gọi M là điểm đối xứng của D qua AB, N là điểm đối xứng của D qua AC, E và F theo thứ tự là giao điểm của MN với AB và AC. Chứng minh rằng:

a) Năm điểm A, F, D, C, N cùng thuộc một đường tròn.

b) Ba đường AD, BE, CF đồng quy.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB và dây cung CD vuông góc với AB tại điểm H. Gọi I là điểm đối xứng với H qua D, K là trung điểm của đoạn HD. Vẽ dây cung EF đi qua K. Chứng minh bốn điểm E, H, I, F cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 2. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn đó. Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B và C là các tiếp điểm). Gọi I là giao điểm của OA và BC. Kẻ dây cung DE của đường tròn (O) qua I.

a) Chứng minh bốn điểm A, D, O, E cùng nằm trên một đường tròn.

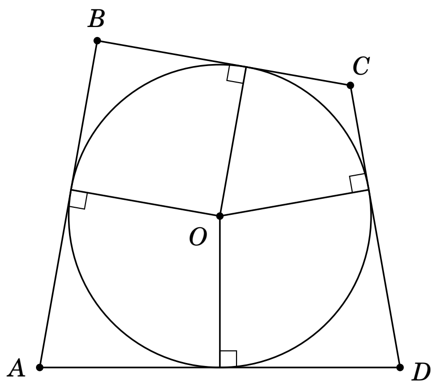
b) Chứng minh rằng $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$.

> ! Kết quả bài toán không thay đổi nếu ta hoán đổi vị trí hai điểm D và E trên đường tròn (O)

Bài 3. (Định lí Ptô-lê-mê) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O. Chứng minh rằng $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$.

Chủ đề 6: TỨ GIÁC NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

A Kiến thức cơ bản



1. Đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh của một tứ giác được gọi là đường tròn nội tiếp tứ giác và tứ giác được gọi là ngoại tiếp đường tròn.

2. Nếu một tứ giác ngoại tiếp một đường tròn thì tổng các cặp cạnh đối bằng nhau. Đảo lại nếu một tứ giác có tổng các cặp cạnh đối bằng nhau thì tứ giác đó ngoại tiếp một đường tròn.
   Tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn $(O) \Leftrightarrow AB + CD = BC + AD$ (hình bên)

B Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Chứng minh các hệ thức liên hệ giữa các cạnh của tứ giác ngoại tiếp

Tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn $(O) \Leftrightarrow AB + CD = BC + AD$.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hình thang vuông $ABCD(\widehat{A} = \widehat{D} = 90°)$ ngoại tiếp đường tròn (O). Tìm độ dài các cạnh AB và CD, biết rằng $OB = 15\text{cm}$ và $OC = 20\text{cm}$.

Ví dụ 2. Cho tứ giác lồi $ABCD$, các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại K (C nằm giữa D và K), các đường thẳng BC và AD cắt nhau tại L (C nằm giữa B và L). Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp được một đường tròn khi và chỉ khi thỏa mãn một trong hai điều kiện sau:

a) $BK + BL = DK + DL$ (1)

b) $CK + AL = AK + CL$

> ! Kết quả của VD2 cho ta thêm một dấu hiệu nhận biết một tứ giác lồi là tứ giác ngoại tiếp được một đường tròn

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho hình thang vuông $ABCD(\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ)$ ngoại tiếp đường tròn (O) bán kính 6cm, cạnh đáy nhỏ $AB = 10$cm. Tính độ dài các đoạn thẳng BC và CD.

Bài 2. Cho hình thang cân $ABCD(AB \parallel CD)$ ngoại tiếp đường tròn (O,r) và $CD = 4AB$. Tìm độ dài các đoạn thẳng AB và CD.

Dạng 2: Chứng minh tứ giác ngoại tiếp

1. Dựa vào dấu hiệu tứ giác ngoại tiếp.
2. Nếu tứ giác $ABCD$ có $AB + CD = BC + AD$ thì nó ngoại tiếp đường tròn.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC và D là một điểm bất kì nằm trong tam giác. Các đường thẳng AD, BD, CD cắt các cạnh BC, AC, AB theo thứ tự tại X, Y, Z. Chứng minh rằng nếu hai trong ba tứ giác $DYAZ, DZBX, DXCY$ ngoại tiếp thì tứ giác thứ ba cũng ngoại tiếp.

Ví dụ 2. Cho tứ giác $ABCD$, các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại K (C nằm giữa D và K), các đường thẳng BC và AD cắt nhau tại L (C nằm giữa B và L). Qua K và L kẻ hai đường thẳng chia tứ giác $ABCD$ thành bốn tứ giác nhỏ. Chứng minh rằng nếu hai tứ giác nhỏ không có cạnh chung mà ngoại tiếp thì tứ giác $ABCD$ cũng ngoại tiếp.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu tứ giác ABD ngoại tiếp đường tròn tâm I thì ta có hệ thức $BI^2 + \dfrac{AI}{DI} \cdot BI \cdot CI = AB \cdot BC$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho tứ giác ngoại tiếp $ABCD$. Chứng minh rằng đường tròn nội tiếp các tam giác ABC và ACD tiếp xúc nhau tại một điểm nằm trên đường chéo AC.

Bài 2. Cho tứ giác ngoại tiếp $ABCD$. Qua C kẻ đường thẳng song song với AD cắt đường thẳng AB tại P. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường thẳng CD tại Q. Chứng minh rằng tứ giác $APCQ$ ngoại tiếp.

Bài 3. Cho hình thang cân $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O_1, r) và ngoại tiếp đường tròn (O_2, R). Gọi $d = O_1O_2$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{r^2} \geq \frac{2}{R^2 - d^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Chủ đề 7: ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN VÀ ĐỘ DÀI CUNG TRÒN

A Kiến thức cần nhớ

I. Công thức tính độ dài đường tròn

1. Tỉ số giữa độ dài đường tròn và đường kính của nó là một số không đổi, nghĩa là như nhau cho mọi đường tròn.

Người ta kí hiệu số không đổi ấy bằng chữ π (đọc là pi). Như vậy

$$\frac{C}{2R} = \pi \approx 3{,}14 \approx \frac{22}{7}.$$

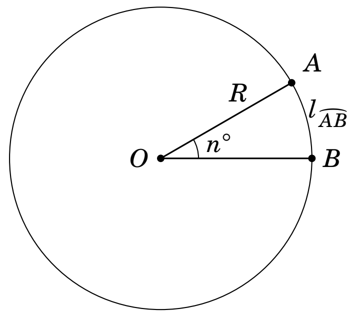
2. Độ dài C của một đường tròn bán kính R là $C = 2\pi R$ hay $C = \pi d$ với d là đường kính đường tròn.

II. Công thức tính độ dài cung tròn

1. Đường tròn bán kính R (ứng với cung 360°) có độ dài là $2\pi R$.

2. Mỗi cung 1° bán kính R có độ dài là $\dfrac{2\pi R}{360} = \dfrac{\pi R}{180}$.

3. Một cung n° bán kính R có độ dài là: $\ell_{\overset{\frown}{AB}} = \dfrac{\pi R n}{180}$.



B Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: TÍNH ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN, CUNG TRÒN HOẶC CÁC ĐẠI LƯỢNG LIÊN QUAN

Phương pháp giải:

- Xác định công thức.
- Tìm R, n, d.
- Thay giá trị và tính.

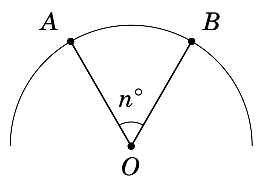
VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. a) Tính độ dài cung 60° của một đường tròn có bán kính 2 dm.

b) Tính chu vi vành xe đạp có đường kính 650 mm.

Ví dụ 2.

Bánh xe của một ròng rọc có chu vi là 540 mm. Dây curoa bao bánh xe theo cung AB có độ dài 200 mm (H.213). Tính số đo góc AOB.



Ví dụ 3. Tính bán kính của một đường tròn biết độ dài cung 30° của nó là 1 m.

Ví dụ 4. Tính độ dài đường tròn ngoại tiếp:

a) Một tam giác đều có cạnh là 6 cm.

b) Một tứ giác đều có cạnh là 4 cm.

c) Một lục giác đều có cạnh là 4 cm.

Ví dụ 5. a) Xích đạo là một đường tròn của Trái Đất có độ dài khoảng 40000 km. Hỏi bán kính Trái Đất bằng bao nhiêu.

b) Biết rằng mỗi kinh tuyến là một nửa đường tròn lớn của Trái Đất, có độ dài khoảng 20000 km. Vĩ độ của Hà Nội là $20^\circ 01'$. Tính độ dài cung kinh tuyến từ Hà Nội đến Xích Đạo.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Nêu cách tính độ dài cung n° của hình quạt tròn bán kính R.

Bài 2. Đường kính bánh xe của một xe đạp là 73 cm.

a) Bánh xe đó quay bao nhiêu vòng khi xe đi được một đoạn đường 8 km?

b) Xe đi được bao nhiêu kilômét nếu bánh xe quay 1000 vòng?

Bài 3. Nếu đường kính của một đường tròn tăng $\dfrac{1}{\pi}$ đơn vị thì chu vi của nó tăng thêm bao nhiêu?

Bài 4. Tính độ dài đường tròn ngoại tiếp

a) Một tam giác vuông có hai cạnh góc vuông là 6 cm và 8 cm.

b) Một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông là 4 cm.

c) Một tam giác cân có góc ở đỉnh là 120° và đáy là 6 cm.

Bài 5. Một tam giác đều và một tứ giác đều có cùng chu vi là 36 (cm). Hỏi độ dài đường tròn ngoại tiếp hình nào lớn hơn? Lớn hơn bao nhiêu?

Dạng 2: TÍNH ĐỘ DÀI CỦA CUNG TRÒN DO CÁC CUNG CHẮP NỐI THÀNH

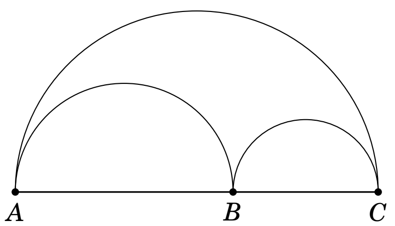
Phương pháp giải:

- Tính độ dài mỗi cung theo bán kính đường tròn tạo ra cung đó.
- Lấy tổng độ dài các cung thành phần.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1.

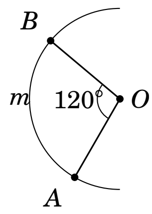
Cho ba điểm A,B,C thẳng hàng sao cho B nằm giữa A và C. Chứng minh rằng độ dài của nửa đường đường tròn đường kính AC bằng tổng các độ dài của hai nửa đường tròn đường kính AB và BC.



Ví dụ 2. Cho (O,OM). Vẽ (O') đường kính OM. Một bán kính OA của (O) cắt (O') ở B. Chứng minh $\overset{\frown}{MA}$ và $\overset{\frown}{MB}$ có độ dài bằng nhau.

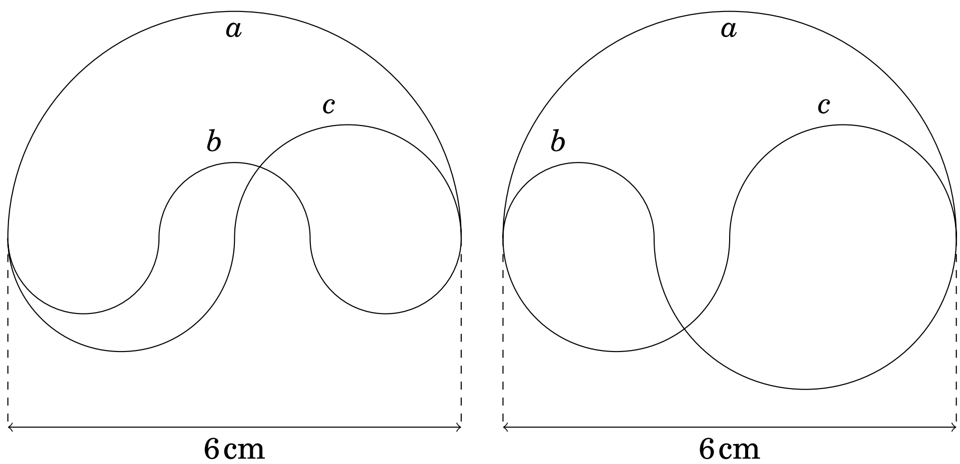
Ví dụ 3.

Xem hình vẽ bên và so sánh độ dài cung AmB với độ dài đường gấp khúc AOB.



BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Hãy so sánh độ dài ba đường cong a,b,c trong các hình sau



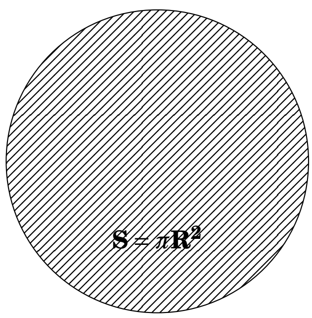
Chủ đề 8: DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN, DIỆN TÍCH HÌNH QUẠT

A Kiến thức cần nhớ

I. Công thức tính diện tích hình tròn

Diện tích S của một hình tròn bán kính R được tính theo công thức

$$S = \pi R^2.$$



II. Cách tính diện tích hình quạt tròn

1. Hình tròn bán kính R (ứng với cung 360°) có diện tích là $S = \pi R^2$.

2. Diện tích một hình quạt 1° bán kính R có diện tích là $\dfrac{\pi R^2}{360}$.

3. Diện tích một hình quạt n° bán kính R có diện tích là

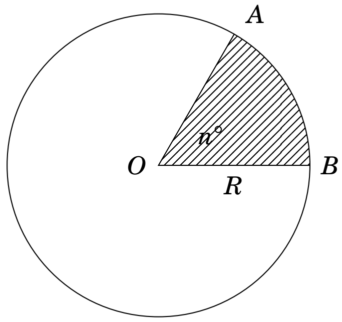
$$S_q = \frac{\pi R^2 \cdot n}{360}.$$

Viết lại thành

$$S_q = \frac{\pi R \cdot n}{180} \cdot \frac{R}{2} = L_q \cdot \frac{R}{2}.$$

Vậy công thức tính diện tích quạt tròn là

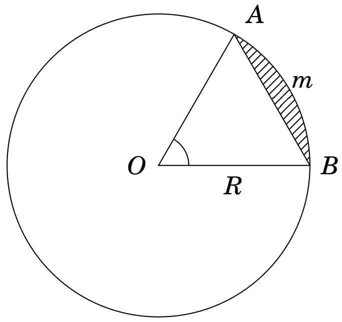
$$S_q = \frac{\pi R^2 \cdot n}{360} \text{ hay } S_q = L_q \cdot \frac{R}{2}.$$



III. Diện tích hình viên phân-Diện tích hình vành khăn

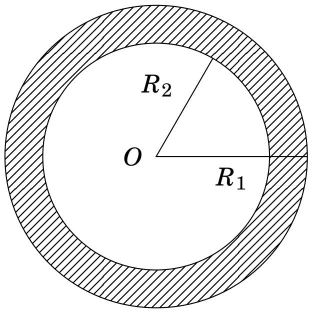
1. Hình viên phấn (phần tô đen) là phần hình tròn giới hạn bởi một cung AmB và dây căng cung AB có diện tích được tính bởi công thức

$$S_{vp} = S_{qAOB} - S_{OAB}.$$



2. Hình vành khăn (phần tô đen) là phần hình tròn nằm giữa hai đường tròn đồng tâm có diện tích được tính bởi công thức

$$S_{\text{vành khăn}} = \pi\left(R_1^2 - R_2^2\right).$$



B CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

Dạng 1: TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN, QUẠT TRÒN

Phương pháp giải:

- Xác định công thức.
- Tìm R, n°, l.
- Thay số và tính.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tính diện tích các hình tròn nội tiếp ngoại tiếp một hình vuông có cạnh là 4 cm và nêu nhận xét về kết quả tìm được.

Ví dụ 2. Tính diện tích các hình tròn nội tiếp, ngoại tiếp một tam giác đều có cạnh là 3 cm và nêu nhận xét về kết quả tìm được.

Ví dụ 3. Tính diện tích hình tròn trong mỗi trường hợp sau:

a) Chu vi của đường tròn là C.

b) Chu vi của hình tròn bằng nghịch đảo bán kính của nó.

Ví dụ 4. Tính diện tích hình quạt tròn có bán kính 6 cm, số đo cung là 36°.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Nêu cách tính diện tích hình quạt tròn bán kính R, cung $n°$.

Bài 2. Tính diện tích hình tròn bán kính 4 cm và các hình quạt tròn có góc ở tâm 30° và 150° của hình tròn đó.

Bài 3. Một thiết diện cắt ngang của một thân cây có chu vi đo được 154 cm. Tính diện tích thiết diện đó (coi như hình tròn).

Bài 4. Ở vườn quốc gia Cúc Phương (tỉnh Ninh Bình) có cây Chò ngàn năm tuổi thân to đến mức 8 người ôm mới xuể. Hãy tính thiết diện ngang của thân cây (coi như hình tròn và mỗi sải tay khoảng 1,5 m).

Bài 5. Cho một hình tròn và một hình vuông có cùng chu vi, hình nào có diện tích lớn hơn?

Dạng 2: TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH VIÊN PHÂN, HÌNH VÀNH KHĂN VÀ NHỮNG HÌNH KHÁC CÓ LIÊN QUAN ĐẾN CUNG TRÒN

Phương pháp giải:

- Dùng tính cộng diện tích: Nếu một hình H được chia thành hai hình H_1 và H_2 không có điểm chung $S_H = S_{H_1} + S_{H_2}$.
- Xác định công thức.
- Tìm R, n thay số rồi tính.

VÍ DỤ MINH HỌA

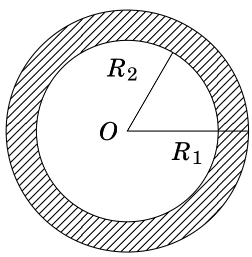
Ví dụ 1. Hãy tính diện tích hình viên phân AmB biết góc ở tâm $\widehat{AOB} = 60°$ và bán kính đường tròn là 5,1 cm.

Ví dụ 2.

Trên hình vẽ bên

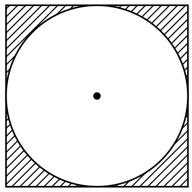
a) Tính diện tích S của hình vành khăn theo R_1 và R_2 (giả sử $R_1 > R_2$).

b) Tính S khi $R_1 = 10{,}5$ cm; $R_2 = 7{,}8$ cm.



Ví dụ 3.

Trên hình vẽ bên biết diện tích miền tô đen là 86 cm^2. Tính diện tích hình tròn.

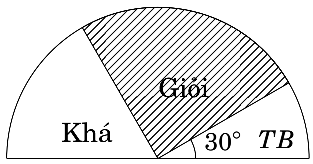


Ví dụ 4. Cho tam giác ABC nội tiếp nửa đường tròn đường kính BC. Vẽ ra phía ngoài của tam giác các nửa đường tròn đường kính AB và AC. Chứng minh rằng tổng diện tích hai hình trăng khuyết giới hạn bởi ba nửa đường tròn bằng S_{ABC} (hình trăng khuyết Hy-pô-crát)

Ví dụ 5. Cho đường tròn có đường kính AB. Trên đoạn AB lấy điểm C và D sao cho $AC = CD = DB$. Vẽ về một phía của AB hai nửa đường tròn đường kính AC và AD. Vẽ về phía bên kia của AB hai nửa đường tròn đường kính CB, DB. So sánh diện tích phần tô đen (như hình vẽ) và diện tích mỗi phần còn lại của hình tròn.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Hãy xem biểu đồ hình quạt biểu diễn xếp loại học lực học sinh của một trường THCS theo ba loại: giỏi, khá, trung bình.
Hãy trả lời các câu hỏi sau:



a) Có phải $\frac{1}{2}$ số học sinh xếp loại học lực giỏi không?

b) Có phải $\frac{1}{3}$ số học sinh xếp loại học lực khá không?

c) Số học sinh xếp loại học lực trung bình chiếm bao nhiêu phần trăm?

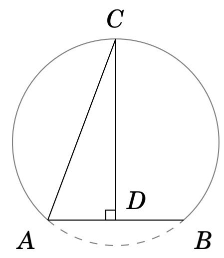
d) Tính số học sinh mỗi loại, biết tổng số học sinh là 900 em.

Bài 2. Người ta muốn may một chiếc khăn để phủ một chiếc bàn tròn đường kính 76 cm sao cho khăn rủ xuống khỏi mép bàn (khăn có dạng hình tròn). Hãy tính diện tích vải cần có để làm khăn (không kể viền, mép, phần thừa) phần diện tích vải rủ xuống khỏi mép bàn.

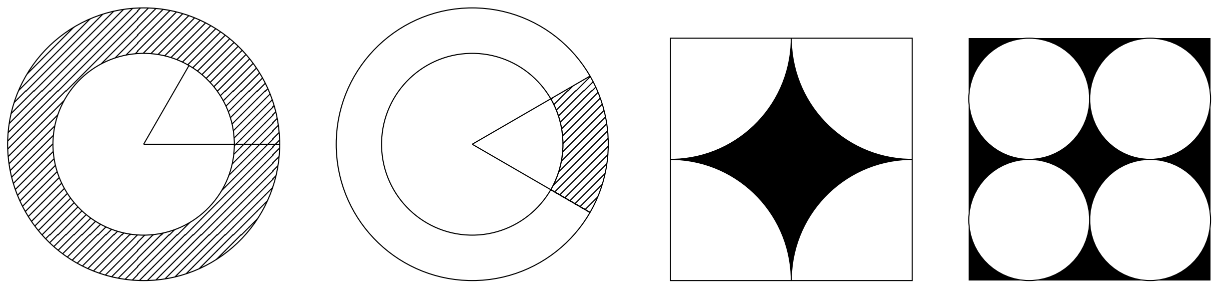
Bài 3. Cho hai đường tròn đồng tâm tạo thành một hình vành khăn. Biết rằng đường tròn nhỏ có bán kính bằng 4 cm và hình vành khăn có diện tích là $20\pi cm^2$. Tìm đường kính của đường tròn lớn.

Bài 4.

Trong hình vẽ bên $\overset{\frown}{ACB}$ là một cung của một đường tròn, CD là đoạn thẳng nằm trên đường trung trực của dây AB. Biết $AB = 6, CD = 9$. Tính diện tích của cả hình tròn.



Bài 5. Với những kiến thức đã học, có thể tính được diện tích những hình tô đen dưới đây hay không? Cần biết những dữ liệu nào đối với mỗi hình?



Chương 4 HÌNH TRỤ - HÌNH NÓN - HÌNH CẦU

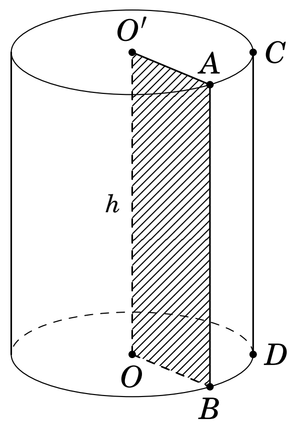
Chủ đề 1: DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH HÌNH TRỤ

A Kiến thức cần nhớ

I. Hình trụ

Khi quay hình chữ nhật $OO'AB$ một vòng tròn quanh cạnh OO' cố định, ta được một hình trụ như hình vẽ bên. Khi đó:

- OO' gọi là trục của hình trụ.
- $O'A$ và OB quét nên hai đáy của hình trụ, là hai hình tròn bằng nhau nằm trên hai mặt phẳng song song, có tâm là O' và O.
- Cạnh AB quét nên mặt xung quanh của hình trụ, mỗi vị trí của AB được gọi là một đường sinh. Chẳng hạn, CD là một đường sinh.
- Các đường sinh của hình trụ vuông góc với hai mặt phẳng đáy. Độ dài của đường sinh là chiều cao của hình trụ.



II. Diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ

- $S_{xq} = 2\pi \cdot R \cdot h$.
- $S_{tp} = 2\pi \cdot R \cdot h + 2\pi \cdot R^2$.

Ở đó R là bán kính đáy, h là chiều cao.

III. Thể tích hình trụ

- $V = \pi \cdot R^2 \cdot h = S \cdot h$.

Ở đó R là bán kính đáy, h là chiều cao và S là diện tích đáy.

B Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Tính diện tích xung quanh - Diện tích toàn phần, thể tích hình trụ hoặc các yếu tố liên quan

Phương pháp giải:

a) Xác định công thức

b) Tìm R và h.

c) Thay ví dụ và tính.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Hãy tính:

a) Diện tích xung quanh của một hình trụ có chu vi đường tròn đáy là $13\,\text{cm}$ và chiều cao là $3\,\text{cm}$.

b) Thể tích của hình trụ có bán kính đường tròn đáy là $5\,\text{mm}$ và chiều cao là $8\,\text{mm}$.

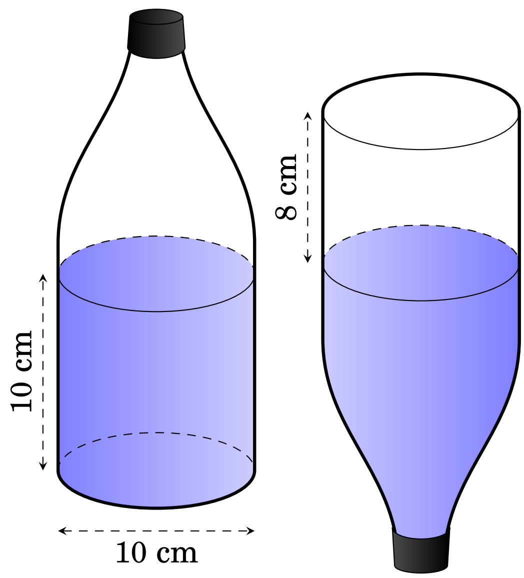
Ví dụ 2. Chiều cao của một hình trụ bằng bán kính đáy. Diện tích xung quang của hình trụ là $314\,\text{cm}^2$. Hãy tính bán kính đáy và thể tích hình trụ (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Ví dụ 3. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2a$, $BC = a$. Quay hình chữ nhật quanh cạnh AB thì được hình trụ có thể tích là V_1, quanh BC thì được hình trụ có thể tích là V_2. Hỏi V_2 gấp mấy lần V_1 .

Ví dụ 4 (Bài toán Ác-si-mét). Người ta nhấn chìm hoàn toàn một tượng đá nhỏ vào trong một lọ thủy tinh có nước dạng hình trụ. Diện tích đáy lọ thủy tinh là $12{,}8\,\text{cm}^2$. Nước trong lọ dâng thêm $8{,}5\,\text{mm}$. Hỏi thể tích tượng đá là bao nhiêu?

Ví dụ 5.

Một cái chai phía dưới là hình trụ chứa lượng nước có chiều cao $10\,\text{cm}$. Người ta lật ngược chai lại thì phần chai không chứa nước là một hình trụ có chiều cao $8\,\text{cm}$ như hình vẽ bên. Tính thể tích của chai, biết rằng đường kính của đáy chai bằng $10\,\text{cm}$.



BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Diện tích và chu vi của một hình chữ nhật $ABCD$ ($AB > AD$) theo thứ tự là $3a^2$ và $8a$. Cho hình chữ nhật quay quanh cạnh AB một vòng ta được một hình trụ. Tính thể tích, diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ này.

Bài 2. Một hình chữ nhật có chiều dài gấp 4 lần chiều rộng và có diện tích là $28\,\text{cm}^2$. Cho hình chữ nhật quay quanh chiều dài một vòng ta được một hình trụ. Tính diện tích xung quanh và thể tích hình trụ.

Bài 3. Một hình trụ có đường cao bằng đường kính đáy. Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ biết thể tích của hình trụ là $128\pi\,\text{cm}^3$.

Bài 4. Một hình trụ bán kính đáy là $4\,\text{cm}$. Biết diện tích toàn gấp đôi diện tích xung quanh. Tính chiều cao của hình trụ.

Bài 5. Một hình trụ có diện tích xung quanh là $20\pi\,\text{cm}^2$ và diện tích toàn phần là $28\pi\,\text{cm}^2$. Biết diện tích toàn gấp đôi diện tích xung quanh. Tính chiều cao của hình trụ.

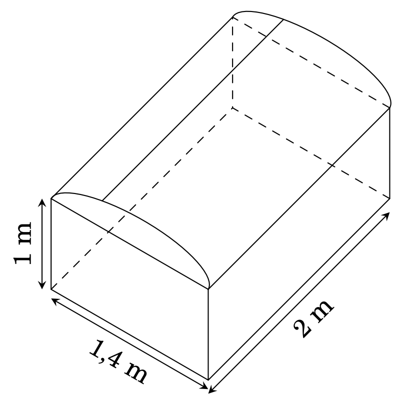
Dạng 2: Diện tích xung quanh - Thể tích của một hình hỗ hợp

Phương pháp giải: Tính diện tích xung quanh hoặc thể tích của một từng bộ phận là các hình cơ bản sau đó cộng lại hoặc trừ đi.

VÍ DỤ MINH HỌA

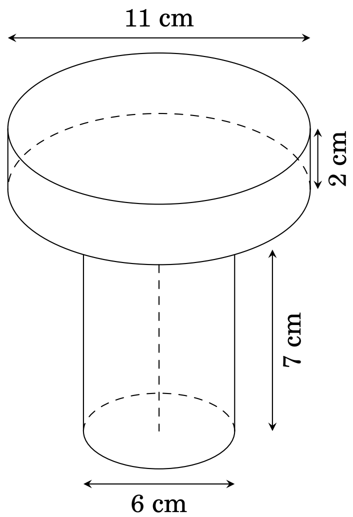
Ví dụ 1.

Một cái hầm bi-ô-ga như hình vẽ bên. Phần trên là nửa hình trụ, phần dưới là một hình hộp chữ nhật với các kích thước cho trên hình vẽ. Tính thể tích hầm bi-ô-ga (lấy $\pi = \dfrac{22}{7}$).



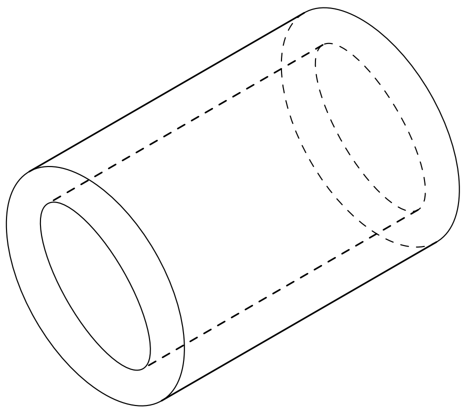
Ví dụ 2.

Hãy tính thể tích, diện tích bề mặt một chi tiết máy theo kích thước đã cho trên hình vẽ bên.



Ví dụ 3.

Một vật thể có dạng hình trụ, bán kính đáy và chiều cao đều bằng $2R$. Người ta khoan một lỗ có bán kính đáy bằng R và chiều cao bằng $2R$ như hình vẽ bên. Tính bán kính vật thể còn lại.



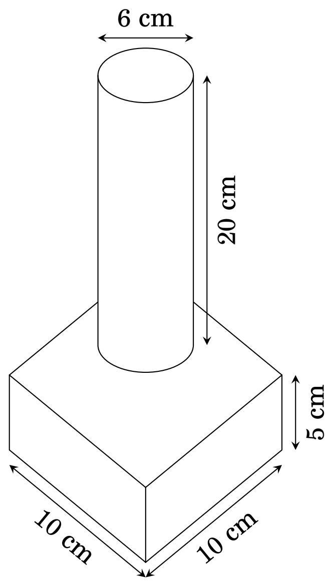
BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Một chi tiết máy có dạng hình hộp chữ nhật có các kích thước là $20\,\mathrm{cm}$, $20\,\mathrm{cm}$, $5\,\mathrm{cm}$. Người ta khoan một lỗ hình trụ có đường kính đáy là $16\,\mathrm{cm}$ và chiều cao là $5\,\mathrm{cm}$ xuyên qua chi tiết đó. Tính thể tích phần vật thể còn lại.

Bài 2. Một chi tiết máy có dạng hình trụ có đường kính đáy $25\,\mathrm{cm}$, chiều cao $5\,\mathrm{cm}$. Người ta khoét một hình hộp chữ nhật có kích thước là $16\,\mathrm{cm}$, $16\,\mathrm{cm}$, $5\,\mathrm{cm}$ xuyên qua chi tiết đó. Tính thể tích phần vật thể còn lại.

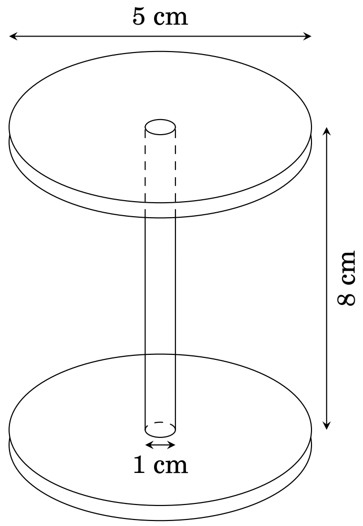
Bài 3.

Một chi tiết máy có các kích thước như hình vẽ bên. Hãy tính thể tích và diện tích bề mặt của chi tiết đó.



Bài 4.

Lõi của một cuộn chỉ có kích thước như hình vẽ bên. Tính thể tích của chỉ sau khi chỉ được cuộn đầy vào lõi (làm tròn đến số thập phân thứ 2).



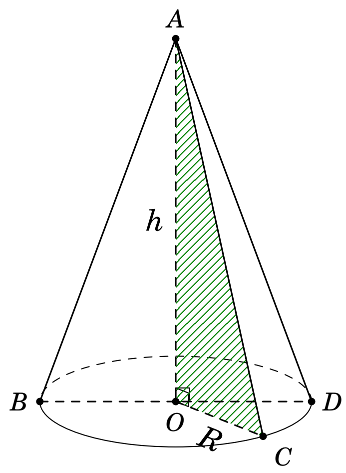
Chủ đề 2: DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH NÓN, HÌNH NÓN CỤT

A Kiến thức cần nhớ

I. Hình nón

Khi quay tam giác vuông AOC một vòng tròn quanh cạnh góc vuông AO

cố định thì được một hình nón hình như hình vẽ bên. Khi đó:



- Cạnh OC quét nên đáy của hình nón là một hình tròn tâm O. A gọi là đỉnh và OA gọi là đường cao của hình nón.
- Cạnh AC quét nên mặt xung quanh của hình nón. Mỗi vị trí của AC được gọi là một đường sinh của hình nón. Chẳng hạn AD là một đường sinh.

II. Diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón

- $S_{xq} = \pi \cdot R \cdot \ell$.
- $S_{tp} = 2\pi \cdot R \cdot \ell + \pi \cdot R^2$.

Ở đó R là bán kinh đáy, ℓ là độ dài đường sinh.

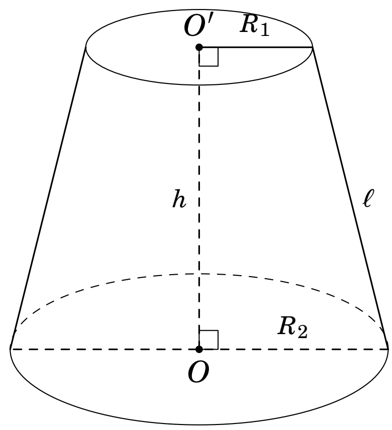
III. Thể tích của hình nón

- $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot S \cdot h$.

Ở đó R là bán kinh đáy, h là chiều cao, S là diện tích đáy.

IV. Diện tích xung quanh và thể tích của hình nón cụt

Khi cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đáy thì phần mặt phẳng nằm trong hình nón là một hình tròn. Phần hình nón nằm giữa mặt phẳng nói trên và đáy được gọi là hình nón cụt như hình vẽ bên.



- $S_{xq} = \pi \cdot (R_1 + R_2) \cdot \ell$.
- $V_{\text{nón cụt}} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot h \cdot \left(R_1^2 + R_2^2 + R_1 \cdot R_2\right)$.

Ở đó R_1, R_2 là bán kính đáy, h là chiều cao.

B Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Tính số đo cung hoặc bán kính hình quạt tròn hoặc nửa góc ở đỉnh của hình nón

Phương pháp giải:

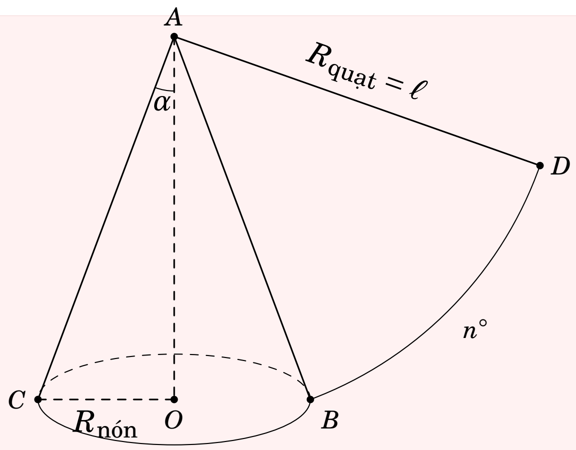
a) Vẽ hình minh họa như hình vẽ bên.

b) Tính độ dài cung BD của hình quạt theo công thức $C_{\text{đáy}} = 2\pi \cdot R_{\text{nón}}$.

c) Tính số đo cung (hoặc góc ở tâm) n° theo công thức $C_{\text{đáy}} = 2\pi \cdot R_{\text{nón}} = \dfrac{\pi \cdot R_{\text{quạt}} \cdot n}{180}$.

d) $R_{\text{quạt}} = \ell$ là đường sinh của hình nón.

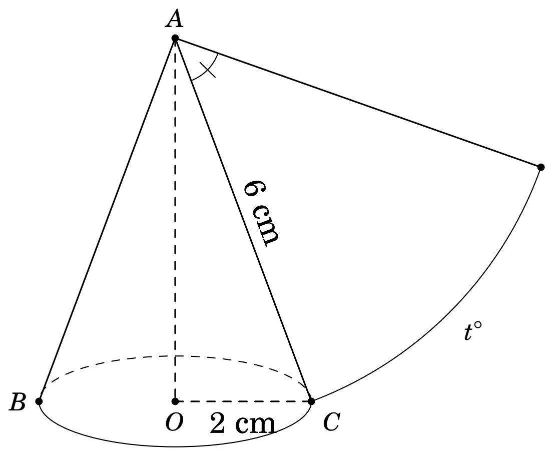
e) Tính nửa góc ở đỉnh α phải xác định cạnh kề, cạnh đối của tam giác vuông chứa α.



VÍ DỤ MINH HỌA

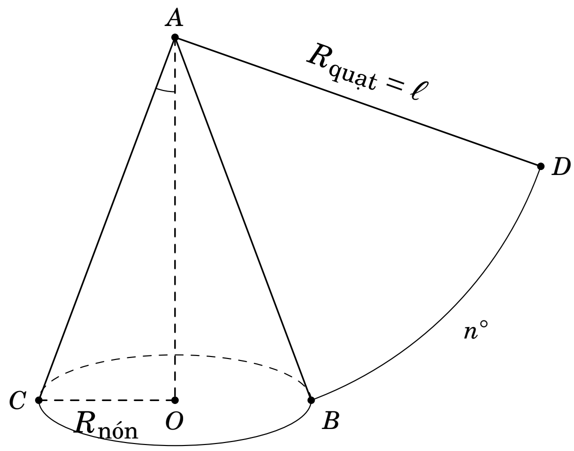
Ví dụ 1.

Tính số đo cung của quạt tròn như hình vẽ bên.



Ví dụ 2.

Khi quay tam giác vuông để tạo ra một hình nón (như hình vẽ bên) thì góc $\widehat{CAO} = 30^\circ$ gọi là góc ở đỉnh của hình nón, độ dài đường sinh là a. Tính số đo cung của hình quạt khi khai triển mặt xung quanh của hình nón.



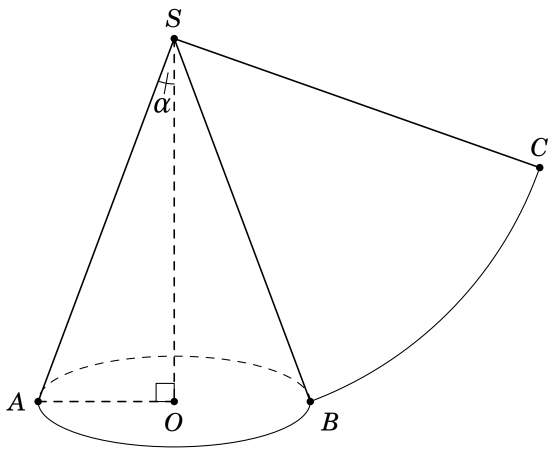
Ví dụ 3. Hình khai triển mặt xung quanh của một hình nón là một hình quạt $R_{\text{quạt}} = 16\,\text{cm}$, số đo cung là 120°. Tính tang của nửa góc ở đỉnh của hình nón.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Một hình nón có bán kính đáy $7\,\text{cm}$, chiều cao $24\,\text{cm}$. Sau khi khai triển mặt xung quanh, ta được một hình quạt. Tính số đo cung hình quạt này.

Bài 2.

Viết công thức tính góc ở nửa đỉnh một hình nón (α là góc của tam giác vuông SOA như hình vẽ bên) sao cho diện tích mặt khai triển của mặt nón bằng một phần tư diện tích hình tròn bán kính SA.



Dạng 2: Diện tích xung quanh, thể tích của hình nón, nón cụt và các đại lượng có liên quan nếu biết hai trong ba yếu tố: Bán kính đáy, chiều cao, đường sinh

Phương pháp giải:

a) Xác định công thức.

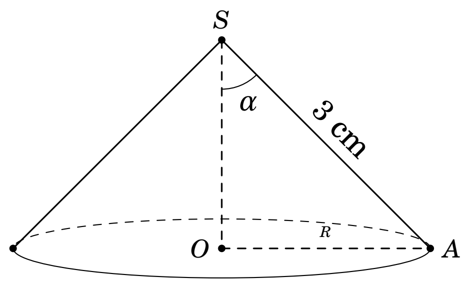
b) Tìm yếu tố còn lại nhờ hệ thức lượng trong tam giác vuông.

c) Thay giá trị rồi tính.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1.

Tính diện tích xung quanh và thể tích của một hình nón khi quay tam giác vuông cân SOA có cạnh huyền $SA = 3\,\text{cm}$ quanh cạnh góc vuông SO cố định.



Ví dụ 2. Tính diện tích xung quanh và thể tích của một hình nón khi quay tam giác vuông AOB có $\widehat{OAB} = 30^\circ$ quanh cạnh góc vuông $AO = 4\,\text{cm}$.

Ví dụ 3. Một hình nón cụt có bán kính đáy là $6\,\text{cm}$ và $9\,\text{cm}$, chiều cao $4\,\text{cm}$.

a) Tính diện tích xung quanh của hình nón cụt.

b) Tính thể tích của hình nón sinh ra hình nón cụt đó.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Một hình nón bán kính đáy bằng $5\,\text{cm}$ và diện tích xung quanh là $65\pi\,\text{cm}^2$.

a) Tính chiều cao của hình nón đó.

b) Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình nón.

Bài 2. Một hình nón có đường sinh dài 17 cm và diện tích xung quanh là $136\pi\,\text{cm}^2$. Thể tích của hình nón đó.

Bài 3. Một chiếc xô hình nón cụt làm bằng tôn để đựng nước có các bán kính đáy là 14 cm và 9 cm, chiều cao là 23 cm.

a) Tính dung tích của xô.

b) Tính diện tích tôn để làm xô (coi như diện tích các mép gấp không đáng kể).

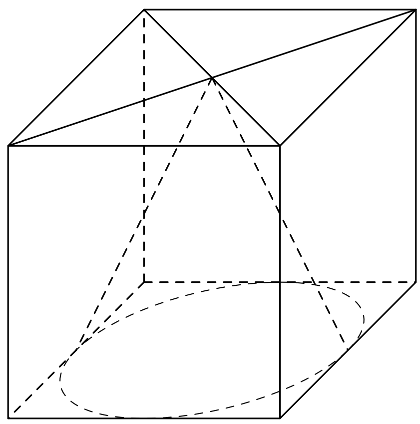
Dạng 3: Tính diện tích xung quanh, thể tích của một hình hỗn hợp, gồm nhiều hình

Phương pháp giải: Tính diện tích xung quanh hoặc thể tích của từng bộ phận rồi cộng lại hoặc trừ đi.

VÍ DỤ MINH HỌA

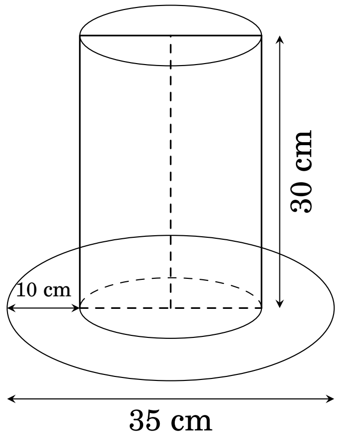
Ví dụ 1.

Từ một khúc gỗ hình lập phương có cạnh bằng 1, người thợ tiện có thể tiện ra một hình nón như hình vẽ bên. Hãy tính thể tích của hình nón và cho biết người thợ đó đã loại bỏ đi bao nhiêu vật liệu.



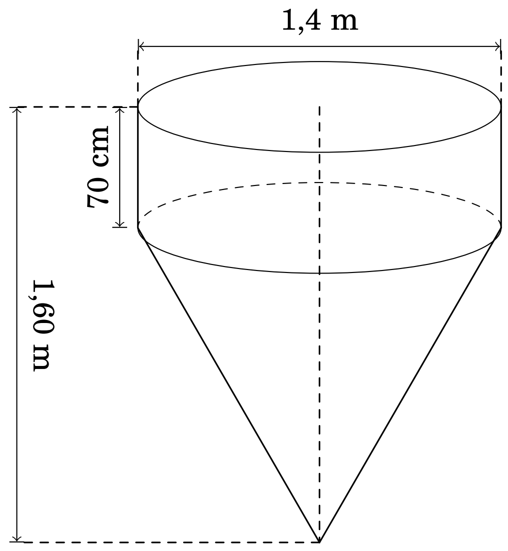
Ví dụ 2.

Cái mũ bằng vải dạ của nhà ảo thuật với các kích thước như hình vẽ bên. Hãy tính tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ (không kể viền, mép, phần thừa).



Ví dụ 3.

Một dụng cụ gồm một phần có dạnh hình trụ, phần còn lại có dạng hình nón. Các kích thước cho trên hình vẽ dưới. Hãy tính



a) Thể tích của dụng cụ này.

b) Diện tích của mặt ngoài của dụng cụ (không tính nắp đậy).

Ví dụ 4. Một hình trụ và một hình nón có chung đáy, đường cao của chúng bằng nhau như hình vẽ bên. Tìm mối liên hệ giữa bán kính đáy và đường cao của hình trụ để diện tích xung quanh của hai hình bằng nhau.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Từ một khúc gỗ hình trụ có bán kính đáy là 6cm và chiều cao 14cm người ta tiện thành một hình nón có chiều cao bằng chiều cao của hình trụ và bán kính đáy là 6cm. Hỏi thể tích phần gỗ tiện bỏ đi là bao nhiêu?

Bài 2. Cho tam giác ABC có cạnh $BC = 6$cm, chiều cao tương ứng bằng 4cm. Tính thể tích của hình tạo thành khi quay tam giác một vòng quanh BC.

Bài 3. Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$) có cạnh $AB = AD = a$, $CD = 2a$. Quay hình thang vuông một vòng quanh cạnh AD, ta được một hình có thể tích V_1. Quay hình thang vuông một vòng quanh cạnh CD, ta được một hình có thể tích V_2. Tính tỉ số $V_1 : V_2$.

Bài 4. Cho tam giác ABC ($\widehat{A} = 90^\circ$) có cạnh $BC = 10$cm và $AB = 8$cm. Tính thể tích toàn phần của hình tạo thành khi quay tam giác một vòng quanh BC.

Bài 5. Cho hình bình hành $ABCD$ với $AB = 2$, $AD = x$ ($x > 0$) và $\widehat{BAD} = 60^\circ$.

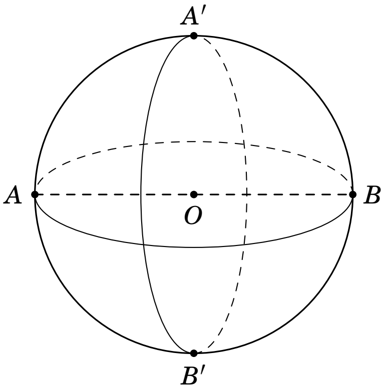
a) Tính diện tích toàn phần S của hình tạo thành khi quay hình bình hành $ABCD$ đúng một vòng quanh cạnh AB và diện tích toàn phần S_1 của hình tạo thành khi quanh quanh cạnh AD.

b) Xác định giá trị x khi $S = S_1$.

Chủ đề 3: DIỆN TÍCH MẶT CẦU VÀ THỂ TÍCH HÌNH CẦU

A Kiến thức cần nhớ

I. Hình cầu



Khi quay nửa đường tròn tâm O, bán kính R một vòng quanh đường kính AB cố định thì được một hình cầu (H.288).

- Nửa đường tròn trong phép quay nói trên quét nên mặt cầu.
- Điểm O được gọi là tâm, R là bán kính của hình cầu, mặt đó.

II. Cắt hình cầu bởi một mặt phẳng

a) Khi cắt hình cầu bởi một mặt phẳng ta được một hình tròn.

b) Khi mặt cầu bán kính R bởi một phẳng ta được một đường tròn.

- Đường tròn có bán kính R nếu mặt đi qua tâm (gọi là đường tròn lớn).
- Đường tròn có đó có bán kính r bé hơn R nếu mặt phẳng không đi qua tâm.

III. Diện tích mặt cầu

$$S = 4\pi R^2 \text{ hay } S = \pi d^2 \text{ (}R\text{ là bán kính, }d\text{ là đường kính của mặt cầu).}$$

IV. Thể tích hình cầu

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

B Các dạng bài tập cơ bản

Dạng 1: Tính diện tích mặt cầu, thể tích hình cầu khi biết bán kính của hình cầu hoặc ngược lại, tính bán kính hình cầu khi biết thể tích hoặc diện tích của nó

Phương pháp giải:

a) Xác định công thức tính V, S_{xq} theo R.

b) Tìm R từ các công thức V, S_{xq}.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Nếu thể tích của một hình cầu là $113\frac{1}{7}$ cm^3 thì bán kính của nó bằng bao nhiêu? lấy $\pi = \frac{22}{7}$.

Ví dụ 2. Một khinh khí cầu là hình cầu có đường kính 11 m. Hãy tính diện tích mặt khinh khí cầu đó (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Ví dụ 3. Các loại bóng cho trong bảng đều có dạng hình cầu. Hãy điền vào ô trống trong bảng sau (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Loại bóng	Quả bóng gôn	Quả khúc côn cầu	Quả tennit	Quả bóng bàn	Quả bi a
Đường kính	42,7 mm		6,5 cm	40 mm	61 mm
Độ dài đường tròn lớn		23 cm			
Diện tích					
Thể tích					

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 20. Một hình cầu có số đo diện tích (tính bằng cm^2) đúng bằng hai lần số đo thể tích của nó (tính bằng cm^3). Tính bán kính của hình cầu và thể tích của nó.

Bài 21. Một hình cầu có diện tích bề mặt là 120π m^2. Tính thể tích của hình cầu đó.

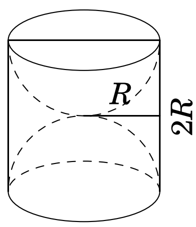
Dạng 2: Tính diện tích, thể tích của một hình hỗn hợp gồm nhiều hình

Phương pháp giải: Tính diện tích, thể tích của từng bộ phận rồi cộng lại hoặc trừ đi.

VÍ DỤ MINH HỌA

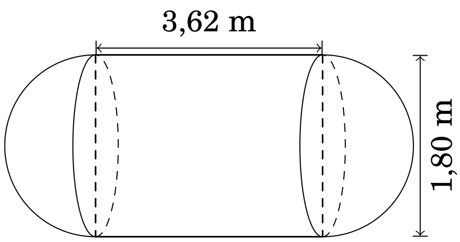
Ví dụ 1.

Một khối gỗ dạng hình trụ, bán kính đáy là R chiều cao $2R$ (đơn vị cm). Người ta khoét rỗng hai nửa hình cầu như hình bên. Hãy tính diện tích bề mặt của khối gỗ còn lại (diện tích cả ngoài lẫn trong).

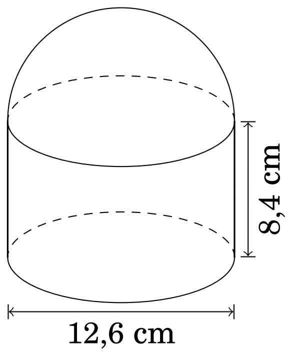


Ví dụ 2.

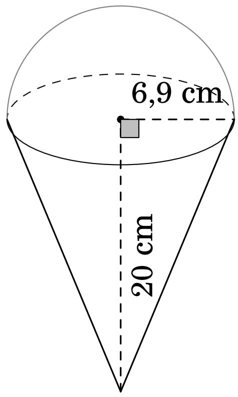
Một cái bồn chứa xăng gồm hai nửa hình cầu và một hình trụ (hình bên). Hãy tính thể tích của bồn chứa theo kích thước cho trên hình vẽ.



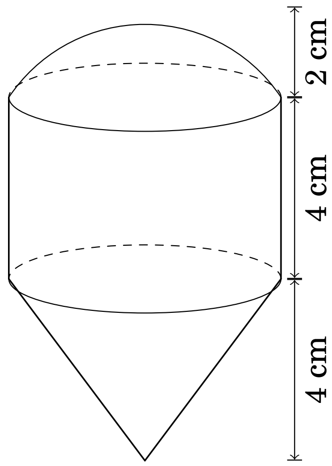
Ví dụ 3. Hãy tính thể tích tính các hình dưới đây theo kích thước đã cho (đơn vị cm).



a)



b)



c)

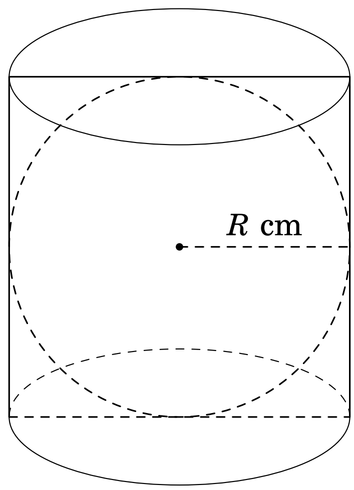
BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 22. Một bồn chứa xăng dầu có phần dưới là một hình trụ với chiều cao bằng đường kính đáy và phần trên là nửa hình cầu có đường kính bằng đường kính hình trụ. Biết diện tích bề mặt của bồn chứa là 445 m^2. Tính thể tích của nó.

Bài 23. Một đồ chơi gồm một hình nón gắn với nửa hình cầu. Biết thể tích hình nón gấp đôi thể tích. Tính tỉ số đường cao và bán kính đáy của hình tròn.

Bài 24.

Hình bên mô tả một hình cầu được đặt khít vào trong một hình trụ, các kích thước cho trên hình vẽ. Hãy tính



a) Thể tích hình cầu;

b) Thể tích hình trụ;

c) Hiệu giữa thể tích hình trụ và hình cầu.;

d) Thể tích của một hình nón có bán kính đáy là R cm và chiều cao $2R$ cm.

e) Từ các kết quả a),b),c),d) hãy tìm mối liên hệ giữa chúng.