

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

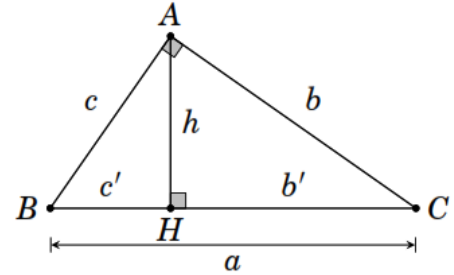
Bài 1. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Mở đầu

Từ hình vẽ bên, ta có

- Cạnh góc vuông: AB, AC .
- Cạnh huyền: BC .
- Đường cao: AH .
- HA là hình chiếu của AB trên cạnh BC .
- HC là hình chiếu của AC trên cạnh BC .
- Định lý Py-ta-go: $BC^2 = AB^2 + AC^2$



1. Hệ thức liên hệ giữa cạnh góc vuông và hình chiếu của nó trên cạnh huyền

- Trong tam giác vuông, bình phương mỗi cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền và hình chiếu của nó trên cạnh huyền.

$$BA^2 = BH \cdot BC \text{ hay } c^2 = c' \cdot a;$$

$$CA^2 = CH \cdot CB \text{ hay } b^2 = b' \cdot a.$$

2. Hệ thức liên quan đến đường cao

Trong một tam giác vuông

- Bình phương độ dài đường cao bằng tích hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền.

$$AH^2 = HB \cdot HC \text{ hay } h^2 = b' \cdot c'.$$

- Tích độ dài đường cao với cạnh huyền bằng tích độ dài hai cạnh góc vuông.

$$AH \cdot BC = AB \cdot AC \text{ hay } a \cdot h = b \cdot c.$$

- Nghịch đảo bình phương độ dài đường cao bằng tổng nghịch đảo bình phương độ dài hai cạnh góc vuông.

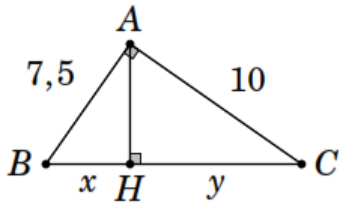
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \text{ hay } \frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

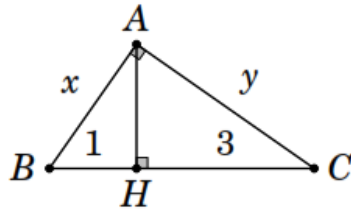
Dạng 1: Tính độ dài đoạn thẳng và các yếu tố khác dựa vào hệ thức liên hệ giữa cạnh góc vuông và hình chiếu của nó trên cạnh huyền

- Vận dụng định lý Py-ta-go để tính cạnh thứ ba (nếu cần).
- Vận dụng các hệ thức liên hệ giữa cạnh và đường cao trong tam giác.

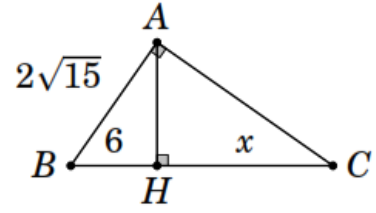
Ví dụ 1. Tính các độ dài x, y trong hình bên.



a)



b)



c)

Ví dụ 2. Một tam giác vuông có tỉ số hai cạnh góc vuông bằng $\frac{4}{9}$. Tính tỉ số hai hình chiếu của hai cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền.

Ví dụ 3. Một tam giác vuông có tỉ số hai cạnh góc vuông bằng $\frac{3}{4}$, cạnh huyền dài 10 cm. Tính độ dài các hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

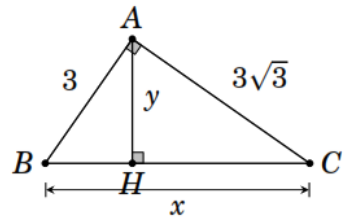
.....

.....

Dạng 2: Tính độ dài dựa vào hệ thức liên quan đến đường cao

- Vận dụng các hệ thức liên quan đến đường cao và định lý Py-ta-go.

Ví dụ 4. Tính độ dài x , y trong hình bên.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

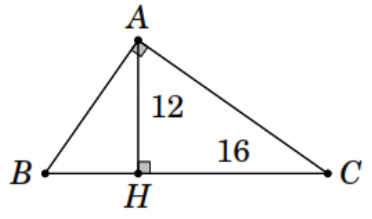
.....

.....

.....

.....

Ví dụ 5. Tính diện tích tam giác ABC trong hình bên.

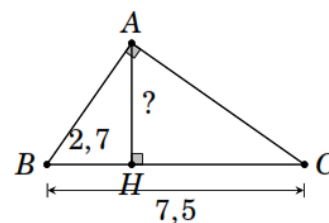


.....

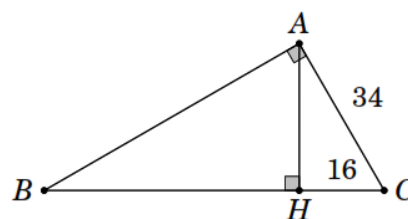
.....

.....

Ví dụ 6. Tính độ dài AH trong hình bên.



Ví dụ 7. Tính tích $HA \cdot HB \cdot HC$ trong hình bên.



Dạng 3: Chứng minh các hệ thức hình học

- Vận dụng linh hoạt các hệ thức liên quan đến cạnh và đường cao trong tam giác vuông.
- Nếu cần thì có thể vẽ thêm đường phụ (thường là đường cao) sao cho hình vẽ xuất hiện tam giác vuông để vận dụng các hệ thức.

Ví dụ 8. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $\hat{D} = 90^\circ$ và $AC \perp BD$. Chứng minh rằng AD là trung bình nhân của hai đáy.

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC cân tại A . Vẽ các đường cao BE và CD . Từ B vẽ một đường thẳng song song với CD cắt tia AC tại F . Chứng minh rằng $AC^2 = AE \cdot AF$.

Ví dụ 10. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC . Chứng minh rằng $DE^3 = BD \cdot CE \cdot BC$.

Ví dụ 11. Cho tam giác ABC cân tại A , hai đường cao AD và BE . Cho biết $BE = 2k$; $BC = 2m$; $AD = n$. Chứng minh rằng $\frac{1}{k^2} = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}$.
