TỨ GIÁC

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

- Tứ giác ABCD :

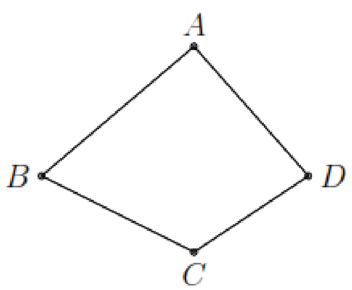
⦰ Hai cạnh kề nhau (chẳng hạn : AB; BC) không cùng thuộc một đường thẳng.

⦰ Không có ba đỉnh nào thẳng hàng

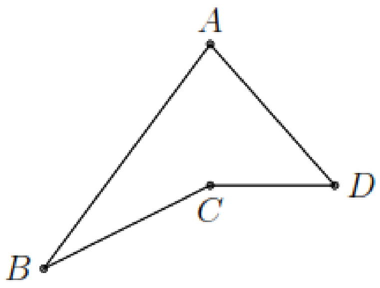
⦰ Có thể đọc góc theo tên đỉnh, chẳng hạn góc ABC còn gọi là góc B và góc đó còn gọi là góc trong của tứ giác.

❄ Tứ giác có 4 cạnh, 2 đường chéo, 4 đỉnh và 4 góc

- *Tứ giác lồi*: Tứ giác lồi là tứ giác luôn nằm về cùng một phía của đường thẳng chứa bất kì một cạnh nào của tứ giác đó. Chẳng hạn, hình 1.1 là tứ giác lồi; hình 1.2 không phải là tứ giác lồi.

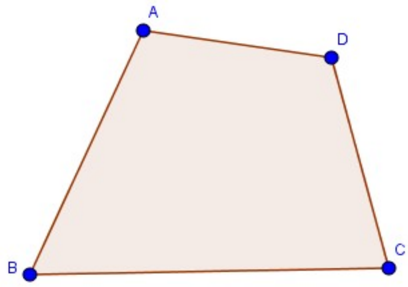


Hình 1.1



Hình 1.2

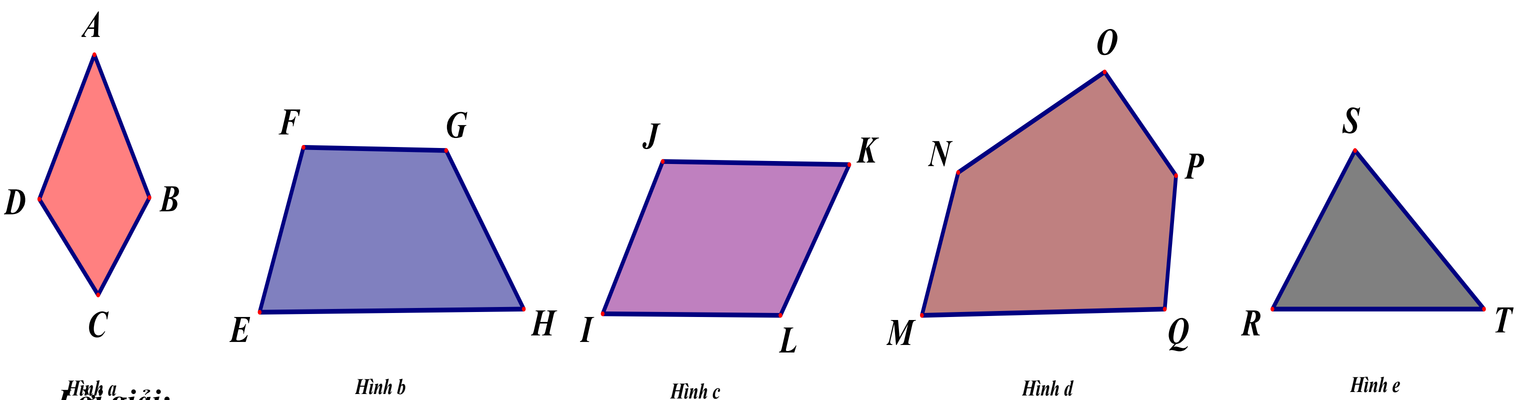
- *Tổng các góc trong một tứ giác*: Tổng các góc trong một tứ giác bằng 360°.



B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1: Nhận biết tứ giác lồi.
▪ Dựa vào phần nhận biết tứ giác lồi.

Ví dụ 1. Quan sát các hình vẽ bên dưới và cho biết hình nào là tứ giác lồi. Đọc tên các cạnh, các đỉnh, các góc của tứ giác lồi đó.



Lời giải:

Các tứ giác lồi là *hình a, hình b, hình c.*

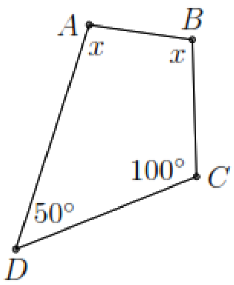
Tứ giác ABCD có : cạnh AB; BC; CD; AD. Đỉnh là đỉnh A; B; C; D. Góc là góc A; B; C; D.

Tứ giác FGHE có : cạnh FG; GH; EH;EF. Đỉnh là đỉnh F; G; H; E. Góc là góc F; G; H; E.

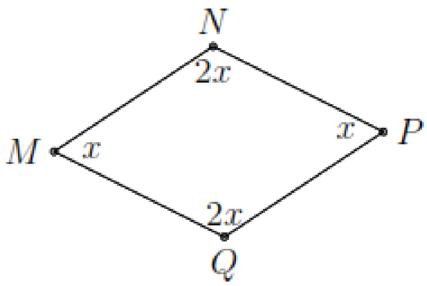
Tứ giác IJKL có : cạnh JK; KL; JL; IJ. Đỉnh là I; J; K; L. Góc là góc I; J; K; L.

Dạng 2: Tính số đo góc
▪ Dựa vào định lý tổng bốn góc trong một tứ giác .

Ví dụ 2. Tìm x trong hình vẽ.



a) Hình 1.3



b) Hình 1.4

Lời giải

a) Ta có tổng các góc trong tứ giác là 360° nên

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=360^\circ \Rightarrow x+x+50^\circ+110^\circ=360^\circ \Rightarrow x=100^\circ.$$

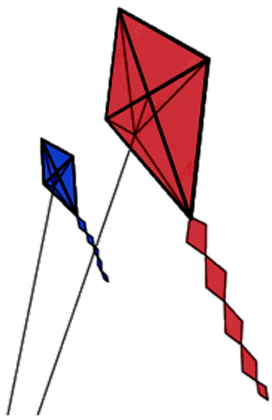
b) Ta có tổng các góc trong tứ giác là 360° nên

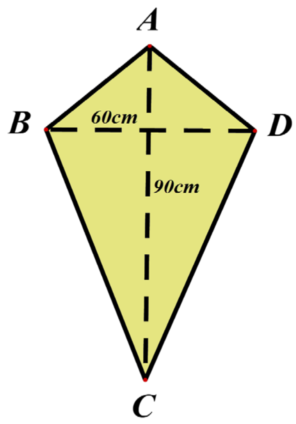
$$\hat{M}+\hat{N}+\hat{P}+\hat{Q}=360^\circ \Rightarrow x+2x+x+2x=360^\circ \Rightarrow 6x=360^\circ \Rightarrow x=60^\circ.$$

Dạng 3: Tính chu vi, diện tích hình tứ giác
▪ Vận dụng các kiến thức chu vi , diện tích môt số hình đã học

Ví dụ 3

Tùng làm một con diều có dạng tứ giác ABCD. Cho biết AC là trung trực của BD và AC = 90 cm, BD = 60 cm. Tính diện tích thân diều.





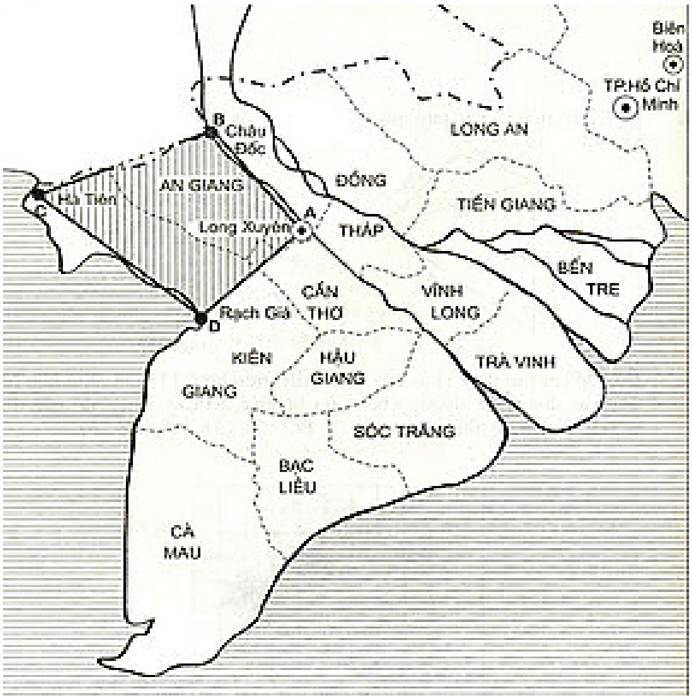
Lời giải

Tứ giác ABCD có $AC \perp BD$ *(AC là trung trực của BD)*

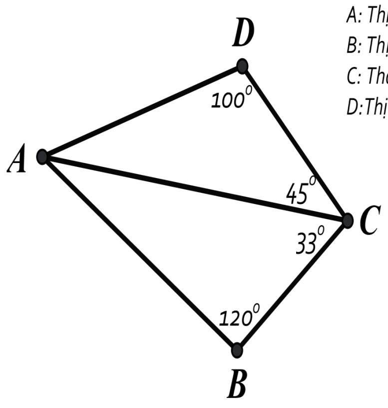
Do đó : $S_{ABCD}=\frac{1}{2}.60.90=2700(cm^2)$

Ví dụ 4

Tứ giác Long Xuyên là một vùng đất là một vùng đất hình tứ giác thuộc vùng đồng bằng sông Cửu Long trên địa phạn của ba tỉnh thành : Kiêng Giang, An Giang và Cần Thơ, Bốn cạnh của tứ giác này là biên giới Việt Nam – Campu chia, vịnh Thái Lan, kênh Cải Sắn và sông Bassac *(sông Hậu)*. Bốn đỉnh của tứ giác là thành phố Long Xuyên, thành phố Châu Đốc, thị xã Hà Tiên và thành phố Rạch Giá *(như hình vẽ bên dưới)*.



Tính góc còn lại của tứ giác ABCD.



A: Thị xã Hà Tiên, tỉnh Kiên Giang.
B: Thị xã Rạch Giá, tỉnh Kiên Giang.
C: Thành phố Long Xuyên , tỉnh An Giang.
D:Thị xã Châu Đốc, tỉnh An Giang.

Lời giải

Ta có $\hat{C} = 45^0 + 33^0 = 78^0$.

Áp dụng định lí tổng bốn góc trong một tứ giác ta có :

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^0$

$\Rightarrow \hat{A} = 360^0 - \left(100^0 + 78^0 + 120^0\right) = 360^0 - 298^0 = 62^0$

Dạng 4: Chứng minh hình học
▪ Vận dụng các kiến thức đã học ở lớp 7 về tam giác, chu vi, đường trung trực của đoạn thẳng; các đường đặc biệt trong tam giác,… để chứng minh.

Ví dụ 5. Cho tứ giác $ABCD$, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Chứng minh:

a) $AC + BD > AB + CD$; b) $AC + BD > AD + BC$.

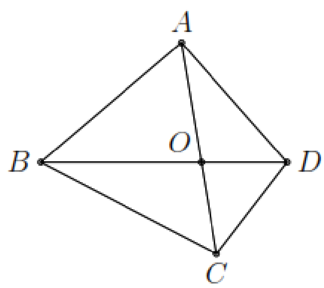
Lời giải

a) Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác ta có

$$OA + OB > AB\ (\triangle OAB);$$

$$OC + OD > CD\ (\triangle OCD);$$

$$\Rightarrow AC + BD > AB + CD.$$



b) Tương tự trên, áp dụng bất đẳng thức trong tam giác ta có

$$OA + OD > AD\ (\triangle OAD) \text{ và } OB + OC > BC\ (\triangle OCB)$$

$\Rightarrow AC + BD > AD + BC.$

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = BC$; $CD = DA$.

a) Chứng minh BD là đường trung trực của AC;

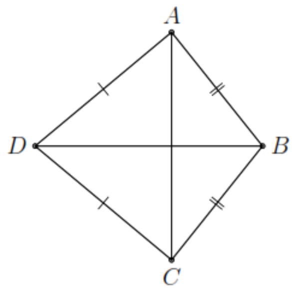
b) Cho $\hat{B} = 100^\circ$, $\hat{D} = 80^\circ$. Tính $\hat{A}$ và $\hat{C}$.

Lời giải

a) Vì $AB = BC$ suy ra B thuộc đường trung trực của AC.

Vì $DA = DC \Rightarrow D$ thuộc đường trung trực của AC.

$\Rightarrow BD$ là đường trung trực của AC.



b) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle CBD$ có

- $AB = AC$ (giả thiết);
- $AD = DC$ (giả thiết);
- BD: cạnh chung.

$\Rightarrow$ $\triangle ABD = \triangle CBD$ (c.c.c), suy ra $\hat{A} = \hat{C}$.

Vậy $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ \Rightarrow \hat{A} = \hat{C} = 90^\circ$.

Bài 2. Cho tứ giác $ABCD$, biết rằng $\dfrac{\hat{A}}{1} = \dfrac{\hat{B}}{2} = \dfrac{\hat{C}}{3} = \dfrac{\hat{D}}{4}$. Tính các góc của tứ giác $ABCD$.

ĐS: $\hat{A} = 36^\circ$, $\hat{B} = 72^\circ$; $\hat{C} = 108^\circ$, $\hat{D} = 144^\circ$.

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau

$$\frac{\hat{A}}{1} = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{C}}{3} = \frac{\hat{D}}{4} = \frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D}}{1+2+3+4} = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ.$$

Vậy $\hat{A} = 36^\circ$, $\hat{B} = 72^\circ$; $\hat{C} = 108^\circ$, $\hat{D} = 144^\circ$.

Bài 3. Cho tứ giác $MNPQ$ có $\hat{N} = \hat{M} + 10^\circ$, $\hat{P} = \hat{N} + 10^\circ$, $\hat{Q} = \hat{P} + 10^\circ$. Hãy tính các góc của tứ giác $MNPQ$.

ĐS: $\hat{M} = 75^\circ$; $\hat{N} = 85^\circ$; $\hat{P} = 95^\circ$; $\hat{Q} = 105^\circ$.

Lời giải

Ta có $\widehat{M} + \widehat{N} + \widehat{P} + \widehat{Q} = 360^\circ$.

Thay $\hat{N} = \hat{M} + 10^\circ$, $\hat{P} = \hat{N} + 10^\circ = \hat{M} + 20^\circ$, $\hat{Q} = \hat{P} + 10^\circ = \hat{M} + 30^\circ$ vào biểu thức trên, ta được

$$\widehat{M} + \widehat{N} + \widehat{P} + \widehat{Q} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{M} + \widehat{M} + 10^\circ + \widehat{M} + 20^\circ + \widehat{M} + 30^\circ = 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow 4\widehat{M} + 60^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \widehat{M} = 75^\circ.$$

Vậy $\hat{M} = 75^\circ$; $\hat{N} = 85^\circ$; $\hat{P} = 95^\circ$; $\hat{Q} = 105^\circ$.

Bài 4. Tứ giác $ABCD$ có $\hat{C} = 60^\circ$, $\hat{D} = 80^\circ$, $\hat{A} - \hat{B} = 10^\circ$. Tính số đo của $\hat{A}$ và $\hat{B}$.

ĐS: $\hat{A} = 115^{\circ}$, $\hat{B} = 105^{\circ}$.

Lời giải

Ta có $\hat{A} + \hat{B} = 360^{\circ} - \left(\hat{C} + \hat{D}\right) = 360^{\circ} - 80^{\circ} - 60^{\circ} = 220^{\circ}$ mà $\hat{A} - \hat{B} = 10^{\circ}$.

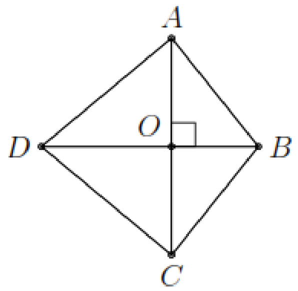
$\Rightarrow \hat{A} = \dfrac{220^{\circ} + 10^{\circ}}{2} = 115^{\circ}$, $\hat{B} = 220^{\circ} - 115^{\circ} = 105^{\circ}$.

Bài 5. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại O.

a) Chứng minh $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$;

b) Cho $AD = 5$ cm, $AB = 2$ cm, $BC = 10$ cm. Tính độ dài CD. ĐS: $CD = 11$ cm.

Lời giải



a) Áp dụng định lý Pytago vào các tam giác vuông OAB, ta có

$$AB^2 = OA^2 + OB^2.$$

Áp dụng định lý Pytago vào các tam giác vuông OBC, ta có

$$BC^2 = OB^2 + OC^2.$$

Áp dụng định lý Pytago vào các tam giác vuông OCD, ta có

$$CD^2 = OC^2 + OD^2.$$

Áp dụng định lý Pytago vào các tam giác vuông OAD, ta được

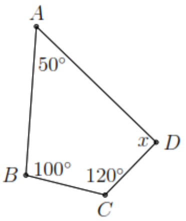
$$AD^2 = OA^2 + OD^2 \Rightarrow AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 \left(= OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2\right)$$

b) Theo câu trên, ta có

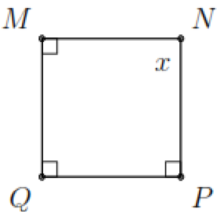
$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 \Leftrightarrow 2^2 + CD^2 = 5^2 + 10^2 \Leftrightarrow CD^2 = 121 \Rightarrow CD = 11.$$

D. BÀI TẬP VỀ NHÀ

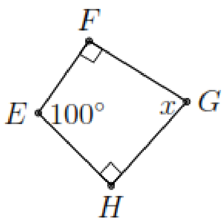
Bài 6. Tìm x trong hình vẽ.



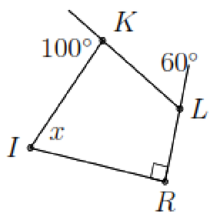
a) Hình 1.5



b) Hình 1.6



c) Hình 1.7



d) Hình 1.8

ĐS: a) 90°; b) 90°; c) 80°; d) 70°.

Lời giải

a) Ta có tổng các góc trong tứ giác là 360° nên

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^{\circ} \Rightarrow 50^{\circ} + 100^{\circ} + 120^{\circ} + x = 360^{\circ} \Rightarrow x = 90^{\circ}.$$

b) Ta có tổng các góc trong tứ giác là 360° nên

$$\hat{M}+\hat{N}+\hat{P}+\hat{Q}=360^\circ \Rightarrow 90^\circ+90^\circ+90^\circ+x=360^\circ \Rightarrow 6x=360^\circ \Rightarrow x=90^\circ.$$

c) Ta có tổng các góc trong tứ giác là 360° nên

$$\hat{E}+\hat{F}+\hat{G}+\hat{H}=360^\circ \Rightarrow 100^\circ+90^\circ+90^\circ+x=360^\circ \Rightarrow x=80^\circ.$$

d) Vì góc ngoài tại K có số đo là 100° nên $\widehat{IKL}=180^\circ-100^\circ=80^\circ$.

Góc ngoài tại L có số đo là 60° nên $\widehat{KLR}=180^\circ-60^\circ=120^\circ$.

Ta có tổng các góc trong tứ giác là 360° nên

$\widehat{IKL}+\widehat{KLR}+\hat{R}+\hat{I}=360^\circ \Rightarrow 80^\circ+120^\circ+90^\circ+x=360^\circ \Rightarrow x=70^\circ$.

Bài 7. Cho tứ giác $ABCD$ biết $\hat{A}=75^\circ$, $\hat{B}=90^\circ$, $\hat{C}=120^\circ$. Tính số đo các góc ngoài của tứ giác $ABCD$.

Lời giải

Xét tứ giác $ABCD$, ta có

$$\begin{aligned}
\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D} &= 360^\circ\\
75^\circ+90^\circ+120^\circ+\hat{D} &= 360^\circ\\
285^\circ+\hat{D} &= 360^\circ\\
\hat{D} &= 360^\circ-285^\circ\\
\hat{D} &= 75^\circ.
\end{aligned}$$

Khi đó, ta có

Góc ngoài tại A có số đo là $180^\circ-75^\circ=105^\circ$.

Góc ngoài tại B có số đo là $180^\circ-90^\circ=90^\circ$.

Góc ngoài tại C có số đo là $180^\circ-120^\circ=60^\circ$.

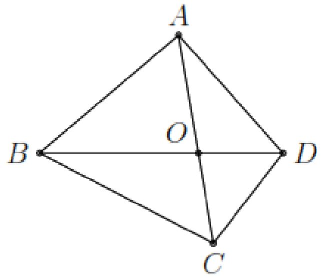
Góc ngoài tại D có số đo là $180^\circ-75^\circ=105^\circ$.

Bài 8. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Gọi chu vi của tứ giác $ABCD$ là P_{ABCD}. Chứng minh:

a) $AC+BD>\dfrac{P_{ABCD}}{2}$;

b) Nếu $AC<\dfrac{P_{ABCD}}{2}$ thì $AC+BD<P_{ABCD}$.

Lời giải



a) Theo kết quả bài trên, ta có

$$AC + BD > AB + CD; AC + BD > AD + BC.$$

Cộng vế với vế $AC + BD > \frac{P_{ABCD}}{2}$.

b) Áp dụng bất đẳng thức tam giác vào các tam giác ABC, ACD:

$AC < AB + BC$; $AC < AD + CD$ $\Rightarrow AC < \frac{P_{ABCD}}{2}$.

Tương tự $BD < \frac{P_{ABCD}}{2}$ $\Rightarrow AC + BD < P_{ABCD}$.

HÌNH THANG CÂN

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM.

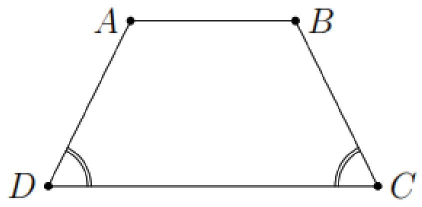
1. Định nghĩa.

- Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song.
- Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau.

2. Tính chất.

Trong hình thang cân:

- Hai góc kề một đáy bằng nhau.
- Hai cạnh bên bằng nhau.
- Hai đường chéo bằng nhau.

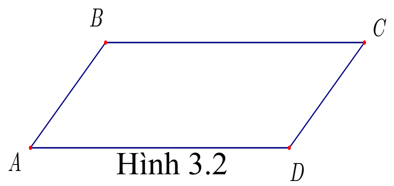


Hình 3.1

3. Dấu hiệu nhận biết.

- Hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau là hình thang cân.
- Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.

Lưu ý: Hình thang có hai cạnh bên bằng nhau chưa chắc là hình thang cân. Chẳng hạn hình thang như hình bên.



Hình 3.2

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

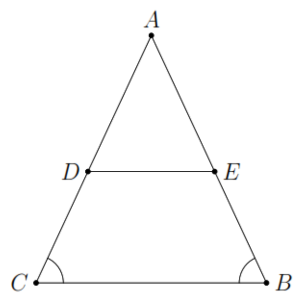
Dạng 1: Tính số đo góc
▪ Trong hình thang cân, hai góc kề một đáy bằng nhau. ▪ Trong hình thang, hai góc kề một cạnh bên bù nhau.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên các cạnh bên AB, AC lấy theo thứ tự các điểm D và E sao cho $AD = AE$.

a) Chứng minh $BDEC$ là hình thang cân;

b) Tính góc của hình thang cân đó, biết rằng $\hat{A} = 50^\circ$.

Lời giải



a) $\triangle ABC$ cân tại A nên $\widehat{BCA} = \dfrac{180^\circ - \hat{A}}{2}$. (1)

Do $AD = AE$ nên $\triangle ADE$ cân tại A

$\Rightarrow \widehat{DEA} = \dfrac{180^\circ - \hat{A}}{2}$. (2)

Từ (1) và $(2) \Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{DEA} \Rightarrow BC \parallel ED$. (3)

Lại có $\hat{B} = \hat{C}$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $BCDE$ là hình thang cân.

b) Vì $BCDE$ là hình thang cân nên

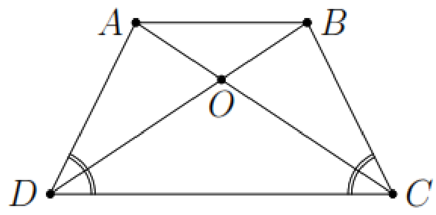
$$\hat{B} = \hat{C} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ;\ \hat{E} = \hat{D} = 180^\circ - \hat{C} = 115^\circ.$$

Dạng 2: Chứng minh đoạn thẳng hoặc góc bằng nhau
▪ Sử dụng các tính chất của hình thang cân để chứng minh. ▪ Sử dụng các kết quả đã biết về chứng minh hai đoạn thẳng hoặc hai góc bằng nhau để chứng minh.

Ví dụ 2. Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD$, gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh $OA = OB$, $OC = OD$.

Lời giải

Do $ABCD$ là hình thang cân có $AB \parallel CD$



$$\Rightarrow \begin{cases} AD = BC \\ \widehat{ADC} = \widehat{BCD}. \end{cases}$$

Xét hai tam giác $\triangle ADC$ và $\triangle BCD$ có

$$\begin{cases} AD = BC \\ \widehat{ADC} = \widehat{BCD} \\ CD \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \triangle ADC = \triangle BCD (\text{c.g.c})$$

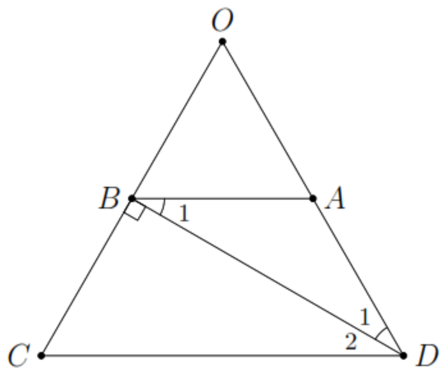
$\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{BDC}$ (cặp góc tương ứng). Suy ra $\triangle OCD$ cân tại $O \Rightarrow OC = OD$.

Chứng minh tư tương tự với $OA = OB$.

Ví dụ 3. Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD$, đường chéo DB vuông góc với cạnh bên BC, DB là tia phân giác góc D. Tính chu vi của hình thang, biết $BC = 3$ cm.

Lời giải

Trong hình thang cân $ABCD$ có $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$



$\Rightarrow \widehat{B_1} + 90^\circ + \widehat{D_1} + \widehat{D_2} = 180^\circ$

$\Leftrightarrow 3\widehat{B_1} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{B_1} = 30^\circ \Leftrightarrow \hat{C} = 60^\circ$.

Gọi $O = BC \cap AD \Rightarrow \triangle OCD$ đều nên $\widehat{AOB} = 60^\circ$.

$\triangle OAB$ có $OA = OB$, $\widehat{AOB} = 60^\circ$

$\Rightarrow \triangle OAB$ đều $\Rightarrow BA = AD = BC$.

Chu vi của hình thang $ABCD$ là $3 + 3 + 6 + 3 = 18$ cm.

Dạng 3: Chứng minh tứ giác là hình thang cân
▪ Sử dụng dấu hiệu nhận biết hình thang cân.

Ví dụ 4. Cho hình thang $MNPQ$, ($MN \parallel PQ$), có $MP = NQ$. Qua N kẻ đường thẳng song song với MP, cắt đường thẳng PQ tại K. Chứng minh

a) $\triangle NKQ$ là tam giác cân;

b) $\triangle MPQ = \triangle NQP$;

c) $MNPQ$ là hình thang cân.

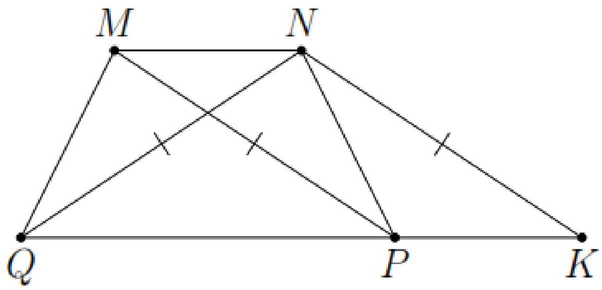
Lời giải

a) Từ N kẻ tia $Nx \parallel MP$, $Nx \cap QP = K$.

Do $MN \parallel PK \Rightarrow NK = MP \Rightarrow NK = NQ \ (= MP) \Rightarrow \triangle NKQ$ cân tại N.

b) Do $\triangle NKQ$ cân tại N nên $\widehat{NQP} = \widehat{NKQ}$. Mà $\widehat{NKQ} = \widehat{MPQ}$ (hai góc đồng vị), nên $\widehat{NQP} = \widehat{MPQ}$.

Xét $\triangle MQP$ và $\triangle NPQ$ có



- $MP = NQ$ (giả thiết);
- $\widehat{MPQ} = \widehat{NQP}$ (chứng minh trên);
- QP là cạnh chung.

$\Rightarrow \triangle MQP = \triangle NPQ$ (c.g.c).

c) Do $\triangle MPQ = \triangle NQP$ nên $\widehat{MQP} = \widehat{NPQ}$

$\Rightarrow MNPQ$ là hình thang cân.

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

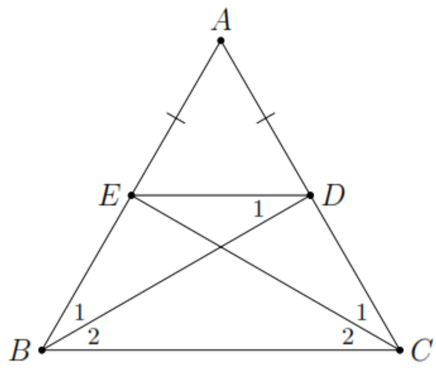
Bài 1. Cho tam giác ABC cân tại A, các đường phân giác BD, CE ($D \in AC$, $E \in AB$).

a) Chứng minh $BEDC$ là hình thang cân;

b) Tính các góc của hình thang cân $BEDC$, biết $\hat{C} = 50^\circ$.

Lời giải

a) Do $\triangle ABC$ cân tại A và BD, CE là các đường phân giác suy ra hai tam giác BCE và CDB có



- $\widehat{EBC} = \widehat{DCB}$,
- BC chung,
- $\widehat{BCE} = \widehat{DBC}$.

Vậy $\triangle BCE = \triangle CBD$ (g.c.g).

$\Rightarrow \widehat{B_2} = \widehat{C_2}$, $BD = EC$, $BE = DC$;

$\Rightarrow \triangle ADE$ cân tại A $\Rightarrow BEDC$ là hình thang cân.

b) Do $BCDE$ là hình thang cân có $\hat{C} = 50^\circ$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{B} = \hat{C} = 50^\circ \\ \hat{E} = \hat{D} = 180^\circ - \hat{C} = 130^\circ. \end{cases}$$

Bài 2. Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD$, O là giao điểm của hai đường chéo, E là giao điểm của hai đường thẳng chứa cạnh bên AD và BC. Chứng minh

a) $OA = OB$, $OC = OD$;

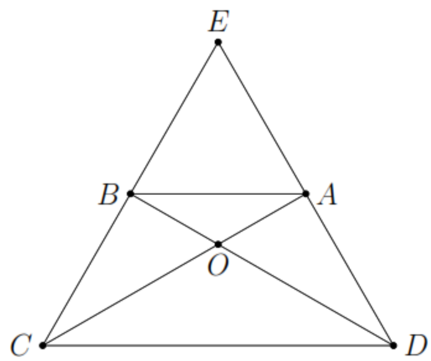
b) EO là đường trung trực của hai đáy hình thang $ABCD$.

Lời giải

a) Do $ABCD$ là hình thang cân $AB \parallel CD$

$$\Rightarrow \begin{cases} AD = BC \\ \widehat{BAD} = \widehat{ABC} \end{cases}.$$

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle BAC$ có



- $AD = BC$ ($ABCD$ là hình thang cân);
- $\widehat{BAD} = \widehat{ABC}$ ($ABCD$ là hình thang cân);
- AB là cạnh chung.

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle BAC$(c.g.c).

$\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BAC}$ (cặp góc tương ứng).

Suy ra $\triangle OAB$ cân tại $O \Rightarrow OA = OB$.

Chứng minh tư tương tự với $OC = OD$.

b) $\triangle EBA$, $\triangle EDC$ cân tại E

$\Rightarrow AE = BE$, $ED = EC \Rightarrow E$ thuộc trung trực AB, DC. (1)

Mà $OA = OB$; $OC = OD$ (cmt) $\Rightarrow O$ thuộc trung trực AB, DC. (2)

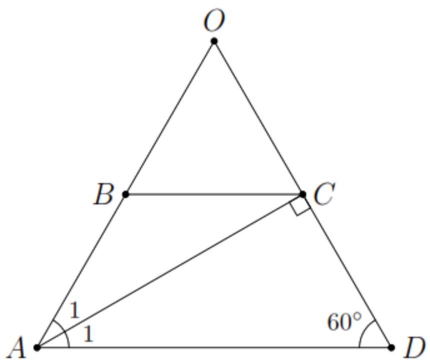
Từ (1) và $(2) \Rightarrow OE$ là đường trung trực của AB, CD.

Bài 3. Cho hình thang $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$) có đường chéo AC vuông góc với cạnh bên CD, AC là tia phân giác góc $\widehat{BAD}$ và $\hat{D} = 60^\circ$.

a) Chứng minh $ABCD$ là hình thang cân;

b) Tính độ dài cạnh AD, biết chu vi hình thang bằng 20 cm.

Lời giải



a) Gọi $O = BD \cap DC$. Tam giác OAD có AC vừa là phân giác vừa là đường cao nên $\triangle OAD$ cân tại A.

Lại có $\hat{D} = 60^\circ$ nên $\triangle OAD$ là tam giác đều. Suy ra $ABCD$ là hình thang cân.

b) Theo phần $a)$ C là trung điểm OD, $BC \parallel AD \Rightarrow BC$ là đường trung bình trong $\triangle OAD \Rightarrow AD = 2BC$.

Lại có $ABCD$ là hình thang cân $\Rightarrow AB = CD$.

Mà $AD = DO = 2CD \Rightarrow AB = CD = BC$.

Do chu vi hình thang $ABCD$ là

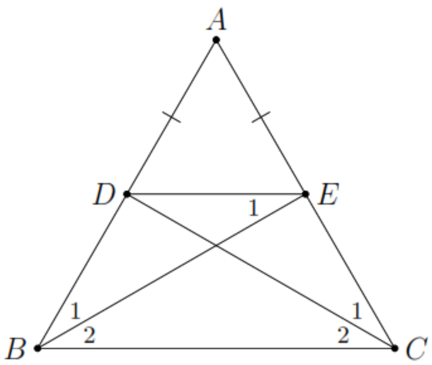
$AD + DC + CB + BA = 20 \Leftrightarrow 5BC = 20 \Rightarrow BC = 4 \Rightarrow AD = 8$ cm.

Bài 4. Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy điểm D trên cạnh AB, điểm E trên cạnh AC sao cho $AD = AE$.

a) Tứ giác $BDEC$ là hình gì? Vì sao?

b) Các điểm D, E ở vị trí nào thì $BD = DE = EC$?

Lời giải



a) $\triangle ABC$ cân tại $A \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = \dfrac{180^\circ - \hat{A}}{2}$. (1)

$\triangle ADE$ cân tại $A \Rightarrow \hat{D} = \hat{E} = \dfrac{180^\circ - \hat{A}}{2}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BDEC$ là hình thang cân do $BC \parallel DE$ và $\hat{B} = \hat{C}$.

b) Giả sử $BD = DE = EC \Rightarrow BDE$ cân tại D

$\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{E_1} = \widehat{B_2}$.

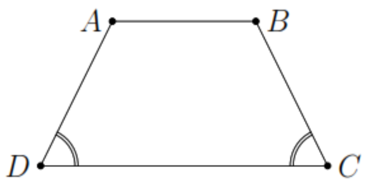
Tương tự $\triangle DEC$ cân tại $E \Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{C_2}$.

Vậy BE , DC là các đường phân giác của $\triangle ABC$ thì $BD = DE = EC$.

D. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 5. Tính các góc của hình thang cân, biết một góc bằng 40°.

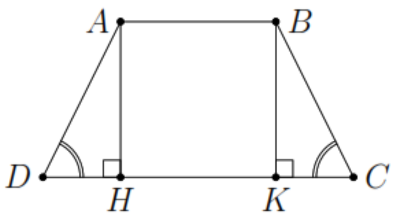
Lời giải



Giả sử $ABCD$ là hình thang cân có $\hat{C}=\hat{D}=40^\circ$, suy ra $\hat{A}=\hat{B}=180^\circ-\hat{C}=140^\circ$.

Bài 6. Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD$ $(AB<CD)$. Kẻ các đường cao AH, BK. Chứng minh $DH=CK$.

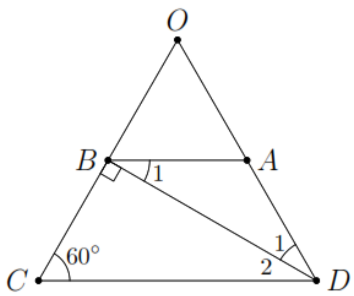
Lời giải



Xét hai tam giác vuông HAD và KBC có $AD=BC$, $\widehat{HDA}=\widehat{KCB}$ $\Rightarrow \triangle HAD=\triangle KBC \Rightarrow DH=CK$.

Bài 7. Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB \parallel CD$, $C=60^\circ$. DB là tia phân giác của góc D. Tính các cạnh của hình thang biết chu vi hình thang bằng 20 cm.

Lời giải



Gọi $O=CB\cap DA \Rightarrow \triangle OCD$ đều.

$$\Rightarrow AB=OA=OB,\ \widehat{BAD}=120^\circ.$$

Có DB là tia phân giác của góc D

$\Rightarrow \widehat{D_1}=30^\circ \Rightarrow \widehat{B_1}=30^\circ$

$\Rightarrow \triangle ABD$ cân tại A.

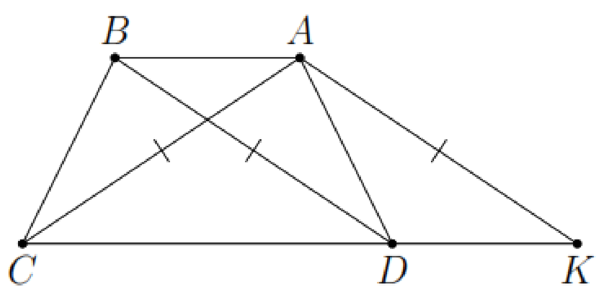
$\Rightarrow AB=AD=BC$; $CD=2AB$.

Chu vi hình thang là $CD+DA+AB+BC=5AB=20 \Rightarrow AB=4$.

Vậy $BC=AD=AB=4$ cm, $CD=8$ cm.

Bài 8. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), có $AC=BD$. Chứng minh $ABCD$ là hình thang cân.

Lời giải



Từ A kẻ tia $Ax \parallel BD$, $Ax \cap CD=K$.

Do $AB \parallel KD \Rightarrow AK=BD$

$\Rightarrow \triangle ACK$ cân tại A $\Rightarrow \widehat{ACD}=\widehat{AKC}$.

Lại có $\widehat{AKC}=\widehat{BDC}$ (hai góc đồng vị)

$\Rightarrow \widehat{ACD}=\widehat{BDC}$.

Xét hai tam giác BCD và ADC có

- $BD=AC$ (giả thiết);
- $\widehat{BDC}=\widehat{ACD}$ (chứng minh trên);

- CD là cạnh chung.

$\Rightarrow \triangle BCD = \triangle ADC$ (c.g.c).

$\Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{ADC}$

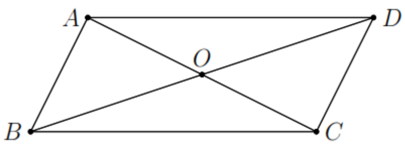
$\Rightarrow ABCD$ là hình thang cân.

--- HẾT ---

HÌNH BÌNH HÀNH

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM.

1. Định nghĩa.



- Hình bình hành là tứ giác có hai cặp cạnh đối song song.
- $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ AD \parallel BC \end{cases}$.

2. Tính chất.

Trong hình bình hành:

- Các cạnh đối bằng nhau.
- Các góc đối bằng nhau.
- Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

3. Dấu hiệu nhận biết.

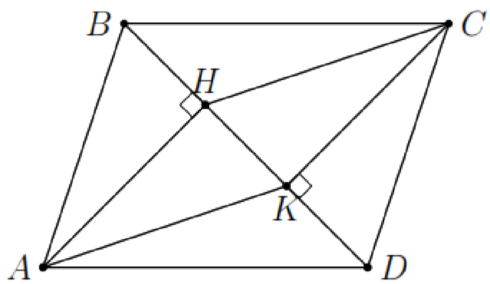
- Tứ giác có các cặp cạnh đối song song là hình bình hành.
- Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau là hình bình hành.
- Tứ giác có một cặp cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau là hình bình hành.
- Tứ giác có các góc đối bằng nhau là hình bình hành.
- Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình bình hành.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Dạng 1: Chứng minh tứ giác là hình bình hành
▪ Dựa vào một trong năm dấu hiệu.

Ví dụ 1. Cho hình bình hành $ABCD$, đường chéo BD. Kẻ AH và CK vuông góc với BD tại H và K. Chứng minh tứ giác $AHCK$ là hình bình hành.

Lời giải



Vì $ABCD$ là hình bình hành

$\Rightarrow \begin{cases} AB \parallel CD; AB = CD \\ BC \parallel AD; BC = AD. \end{cases}$

Vì $AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{CDK}$ (so le trong).

Vì $\begin{cases} AH \perp BD \\ CK \perp DB \end{cases} \Rightarrow AH \parallel CK$ (1).

Vì $\triangle HAB = \triangle KCD$ (cạnh huyền - góc nhọn).

$\Rightarrow AH = CK$ (hai cạnh tương ứng) (2).

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $AHCK$ là hình bình hành.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có H là trực tâm. Các đường thẳng vuông góc với AB tại B, vuông góc với AC tại C cắt nhau ở D. Chứng minh tứ giác $BDCH$ là hình bình hành.

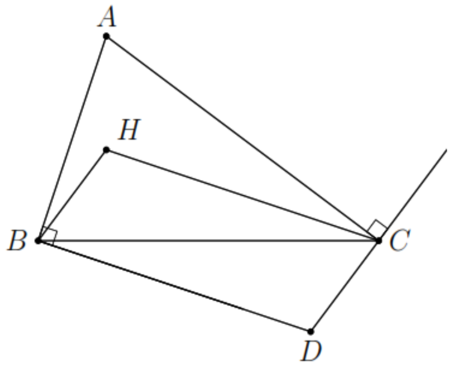
Lời giải

Xét $\triangle ABC$ có H là trực tâm, suy ra $CH \perp AB$; $BH \perp AC$.

Vì $\begin{cases} BD \perp AB \\ CH \perp AB \end{cases} \Rightarrow CH \parallel BD$ (1).

Vì $\begin{cases} BH \perp AC \\ CD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BH \parallel CD$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $BHCD$ là hình bình hành.



Dạng 2: Sử dụng tính chất hình bình hành để chứng minh tính chất hình học
▪ Sử dụng tính chất về cạnh, góc, đường chéo của hình bình hành để chứng minh các tính chất hình học.

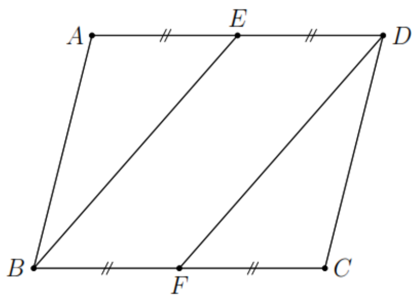
Ví dụ 3. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E là trung điểm của AD, F là trung điểm của BC. Chứng minh:

a) $BE = DF$ và $\widehat{ABE} = \widehat{CDF}$; b) $BE \parallel FD$.

Lời giải

a) Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành

$\Rightarrow \begin{cases} AB \parallel CD; AB = CD \\ \widehat{ABC} = \widehat{ADC} \end{cases} \Rightarrow ED \parallel BF \quad (1)$.



Vì E là trung điểm của $AD \Rightarrow AE = ED = \dfrac{AD}{2}$.

Vì F là trung điểm của $BC \Rightarrow BF = FC = \dfrac{BC}{2}$.

Do đó $ED = BF \quad (2)$.

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ Tứ giác $BEDF$ là hình bình hành $\Rightarrow BE = DF$.

Vì $BEDF$ là hình bình hành nên $\widehat{EBF} = \widehat{EDF}$.

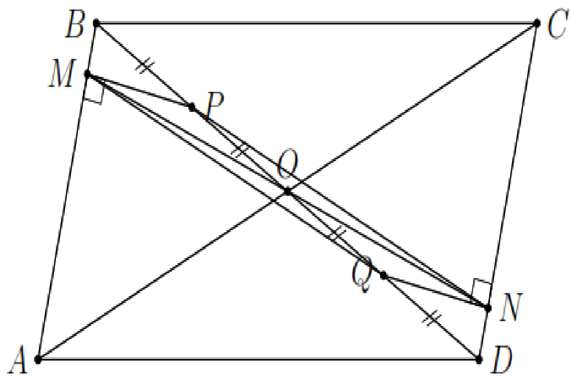
Mà $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} \Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{CDF}$.

b) Vì tứ giác $BEDF$ là hình bình hành suy ra $BE \parallel DF$.

Dạng 3: Sử dụng tính chất hình bình hành để chứng minh ba điểm thẳng hàng, ba đường thẳng đồng quy
▪ Vận dụng tính chất hai đường chéo của hình bình hành cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường để chứng minh.

Ví dụ 4. Cho hình bình hành $ABCD$, gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của OB, OD. Kẻ PM vuông góc với AB tại M, QN vuông góc với CD tại N. Chứng minh ba điểm M, O, N thẳng hàng và các đường thẳng AC, MN, PQ đồng quy.

Lời giải



Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel CD$.

Vì $\begin{cases} QN \perp CD \\ AB \parallel CD \end{cases} \Rightarrow QN \perp AB$.

Ta có $\begin{cases} QN \perp AB \\ MP \perp AB \end{cases} \Rightarrow MP \parallel NQ\,(1)$.

Ta có $\triangle MPB = \triangle NQD$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$\Rightarrow MP = NQ\,(2)$.

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $MPNQ$ là hình bình hành.

Xét hình bình hành $MPNQ$ có O là trung điểm của PQ.

Suy ra O là giao điểm hai đường chéo của của hình bình hành $MPNQ$.

$\Rightarrow M, O, N$ thẳng hàng.

Do đó AC, MN, PQ cùng đi qua O.

Hay AC, MN, PQ đồng quy.

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho hình bình hành $ABCD$ ($AB > BC$). Tia phân giác của góc D cắt AB ở E, tia phân giác của góc B cắt CD ở F.

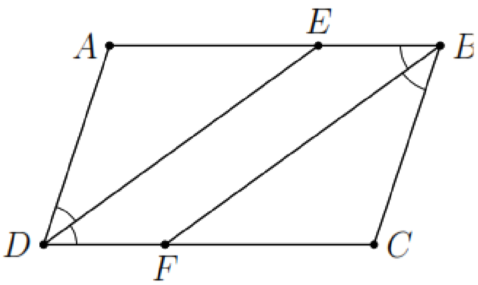
a) Chứng minh $DE \parallel BF$; b) Tứ giác $DEBF$ là hình gì?

Lời giải

a) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\begin{cases} AB \parallel CD \\ \widehat{ABC} = \widehat{ADC}. \end{cases}$

Vì DE là phân giác góc D nên $\widehat{ADE} = \widehat{EDC} = \dfrac{\widehat{ADC}}{2}$.

Vì BF là phân giác góc B nên $\widehat{ABF} = \widehat{FBC} = \dfrac{\widehat{ABC}}{2}$.



Mà $\widehat{EBF} = \widehat{BFC}$ (so le trong).

Do đó $\widehat{EDC} = \widehat{BFC} \Rightarrow DE \parallel BF$ (đồng vị).

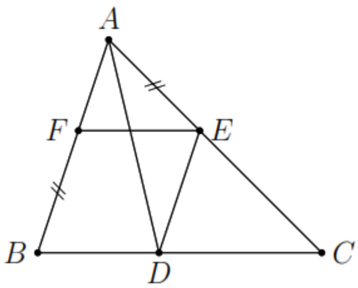
Vì $AB \parallel CD$ nên $EB \parallel DF$. Xét tứ giác $DEBF$ có $\begin{cases} EB \parallel DF \\ DE \parallel BF. \end{cases}$

Vậy tứ giác $DEBF$ là hình bình hành.

Bài 2. Cho tam giác ABC. Từ một điểm E trên cạnh AC vẽ đường thẳng song song với BC cắt AB tại F và đường thẳng song song với AB cắt BC tại D. Giả sử $AE = BF$. Chứng minh:

a) Tam giác AED cân; b) AD là phân giác của góc A.

Lời giải



a) Vì $EF \parallel BC \Rightarrow EF \parallel DB$.

Vì $ED \parallel AB \Rightarrow ED \parallel BF$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $BFED$ là hình bình hành $\Rightarrow ED = FB$.

Mà $AE = BF$ (gt) $\Rightarrow AE = ED \Rightarrow$ Tam giác EAD cân.

Vì tam giác EAD cân tại E nên $\widehat{EAD} = \widehat{EDA}$.

Vì $ED \parallel AB \Rightarrow \widehat{EDA} = \widehat{DAB}$ (so le trong).

$\Rightarrow \widehat{DAB} = \widehat{DAC}$.

$\Rightarrow AD$ là tia phân giác của góc A.

Bài 3. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là giao điểm hai đường thẳng AC và BD. Qua điểm O vẽ đường thẳng song song với AB cắt hai cạnh AD, BC lần lượt tại M, N. Trên AB, CD lần lượt lấy các điểm P, Q sao cho $AP = CQ$. Gọi I là giao điểm của AC và PQ. Chứng minh:

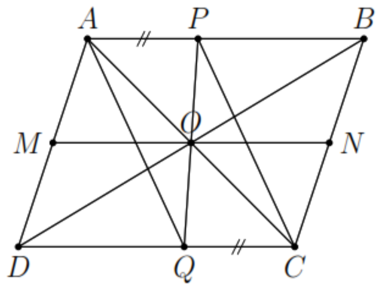
a) Các tứ giác $AMNB, APCQ$ là hình bình hành;

b) Ba điểm M, N, I thẳng hàng;

c) Ba đường thẳng AC, MN, PQ đồng quy.

Lời giải

a) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AD \parallel BC; AB \parallel CD$.



Vì $AD \parallel BC \Rightarrow AM \parallel BN$.

Xét tứ giác $AMNB$ có $\begin{cases} AM \parallel BN \\ AB \parallel MN. \end{cases}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AMNB$ là hình bình hành.

Xét tứ giác $APCQ$ có $\begin{cases} AP \parallel CQ \\ AP = CQ \end{cases}$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $APCQ$ là hình bình hành.

b) Vì $APCQ$ là hình bình hành.

Mà I là giao điểm của AC và PQ suy ra O và I trùng nhau.

Do đó M, N, I thẳng hàng.

c) Ta có I là giao điểm của AC và PQ.

Mà M, N, I thẳng hàng.

Vậy ba đường thẳng AC, MN, PQ đồng quy.

Bài 4. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi K, I lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD. Chứng minh:

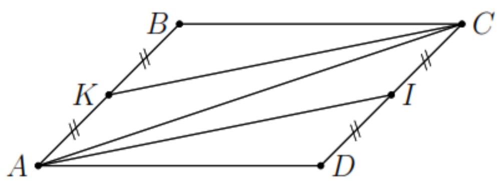
a) $AI = CK$ và $\widehat{IAC} = \widehat{KCA}$; b) $AI \parallel CK$.

Lời giải

a) Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành

$\Rightarrow AB \parallel CD; AB = CD \Rightarrow AK \parallel CI \quad (1)$.

Vì K là trung điểm của $AB \Rightarrow AK = KB = \dfrac{AB}{2}$.



Vì I là trung điểm của $CD \Rightarrow CI = ID = \dfrac{CD}{2}$.

$\Rightarrow AK = CI \quad (2)$.

Từ (1) và (2), suy ra tứ giác $AKCI$ là hình bình hành $\Rightarrow AI = CK$.

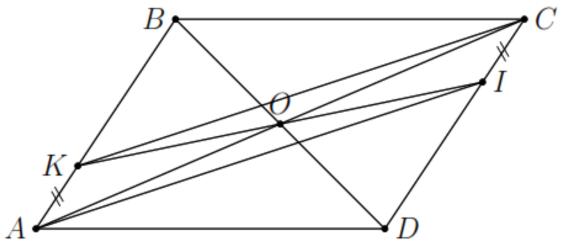
Vì tứ giác $AKCI$ là hình bình hành suy ra $KC \parallel AI$

$\Rightarrow \widehat{IAC} = \widehat{KCA}$ (so le trong).

b) Vì tứ giác $AKCI$ là hình bình hành suy ra $AK \parallel CI$.

Bài 5. Cho hình bình hành $ABCD$, gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Trên AB lấy điểm K, trên CD lấy điểm I sao cho $AK = CI$. Chứng minh rằng ba điểm K, O, I thẳng hàng và các đường thẳng AC, BD, KI đồng quy.

Lời giải



Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel CD \Rightarrow AK \parallel CI$.

Xét tứ giác $AKCI$ có $\begin{cases} AK = CI \\ AK \parallel CI. \end{cases}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AKCI$ là hình bình hành.

Xét hình bình hành $AKCI$ có O là trung điểm AC.

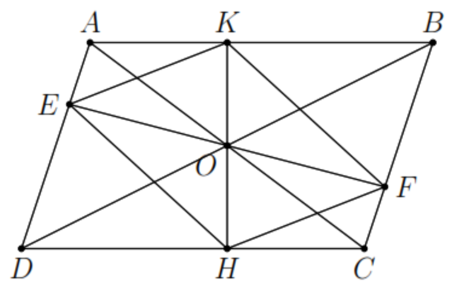
Suy ra O là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành $AKCI \Rightarrow K$, O, I thẳng hàng.

Hay AC, BD, KI đồng quy.

Bài 6. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là giao điểm hai đường thẳng AC và BD. Qua điểm O, vẽ đường thẳng a cắt hai đường thẳng AD, BC lần lượt tại E, F. Qua O vẽ đường thẳng b cắt hai cạnh AB, CD lần lượt tại K, H. Chứng minh tứ giác $EKFH$ là hình bình hành.

Lời giải

Vì O là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$ nên $OA = OC$.



Xét $\triangle OEA$ và $\triangle OFC$ có

$\widehat{EAO} = \widehat{FCO}$ (so le trong).

$OA = OC$ (chứng minh trên).

$\widehat{AOE} = \widehat{COF}$ (đối đỉnh).

$\Rightarrow \triangle OEA = \triangle OFC$ (g - c -g).

$\Rightarrow OE = OF$ (hai cạnh tương ứng).

$\Rightarrow O$ là trung điểm của EF.

Tương tự O là trung điểm của HK.

Xét tứ giác $EKFH$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Do đó tứ giác $EKFH$ là hình bình hành.

--- HẾT ---

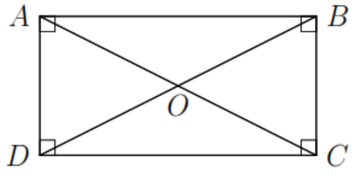
HÌNH CHỮ NHẬT

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Định nghĩa

- Hình chữ nhật là tứ giác có bốn góc vuông.
- Tứ giác ABCD là hình chữ nhật khi và chỉ khi

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ .$$



Nhận xét: Hình chữ nhật cũng là hình bình hành, cũng là hình thang.

2. Tính chất

- Hình chữ nhật có tất cả các tính chất của hình bình hành.
- Hình chữ nhật có tất cả các tính chất của hình thang cân.
- Trong hình chữ nhật, hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

3. Dấu hiệu nhận biết

- Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật.
- Hình thang cân có một góc vuông là hình chữ nhật.
- Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật.
- Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.

4. Áp dụng vào tam giác vuông

- Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền thì bằng nửa cạnh huyền.
- Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh và bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.

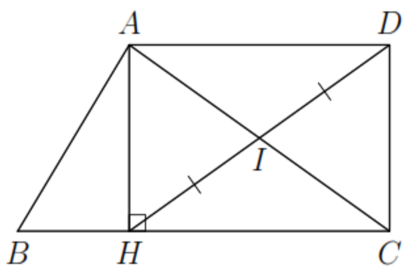
B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1: Chứng minh tứ giác là hình chữ nhật
▪ Vận dụng các dấu hiệu nhận biết hình chữ nhật.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC, đường cao AH. Gọi I là trung điểm của AC. Lấy D là điểm đối xứng với H qua I. Chứng minh tứ giác $AHCD$ là hình chữ nhật.

Lời giải

Ta có $IA = IC$ và $IH = ID$.



$\Rightarrow$ $AHCD$ là hình bình hành do có hai đường chéo AC và DH cắt nhau tại trung điểm I.

Mà $\widehat{AHC} = 90^\circ$.

$\Rightarrow$ $AHCD$ là hình chữ nhật.

Dạng 2: Áp dụng vào tam giác vuông
▪ Sử dụng định lý về tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông để chứng minh các hình bằng nhau hoặc chứng minh vuông góc…

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của AB, AC. Chứng minh: $\widehat{IHK} = 90^\circ$;

Lời giải

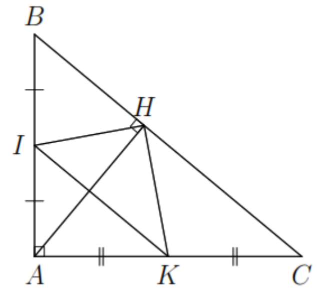
Ta có $IH = IA$ (trung tuyến tam giác vuông).

$\Rightarrow \triangle IAH$ cân tại I.

$\Rightarrow \widehat{IAH} = \widehat{IHA}$.

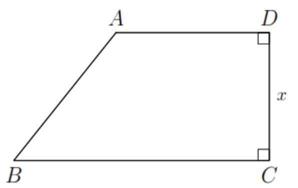
Chứng minh tương tự: $\widehat{HAK} = \widehat{AHK}$.

$\Rightarrow \widehat{IHK} = \widehat{IHA} + \widehat{AHK} = 90^\circ$.



Dạng 3: Tính độ dài đoạn thẳng
▪ Sử dụng các tính chất về vuông góc của hình chữ nhật và định lý Py-ta-go để tính toán.

Ví dụ 3. Tìm x trong hình vẽ bên, Biết $AB = 13$ cm, $BC = 15$ cm, $AD = 10$ cm.



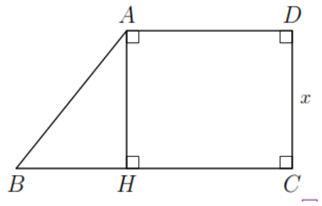
Lời giải

Kẻ $AH \perp BC$, ta có $ADCH$ là hình chữ nhật nên

$AD = CH = 10$ cm, $DC = AH = x$.

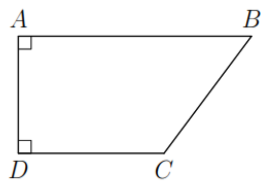
Xét $\triangle AHB$ vuông tại H có $BH = BC - HC = 5$ cm.

$\Rightarrow x = AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = 12$ cm.



C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Tìm độ dài CD trong hình vẽ bên, biết $AB = 9$ cm, $AD = 4$ cm, $BC = 5$ cm.

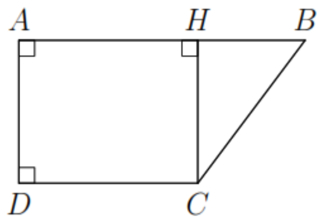


Lời giải

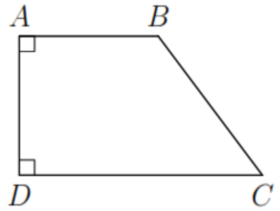
Kẻ $CH \perp AB$, ta có $ADCH$ là hình chữ nhật nên $AD = CH = 4$ cm, $CD = AH$.

Xét $\triangle CHB$ vuông tại H có $HB = \sqrt{BC^2 - CH^2} = 3$ cm.

$\Rightarrow CD = AH = AB - HB = 6$ cm.

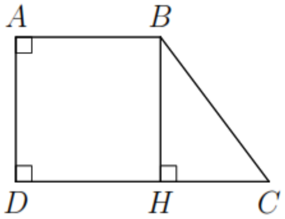


Bài 2. Tìm độ dài CD trong hình vẽ bên, biết $AB = 7$ cm, $AD = 8$ cm, $BC = 10$ cm.



Lời giải

Kẻ $BH \perp DC$ ta có $ABHD$ là hình chữ nhật nên $DH = AB = 7$ cm, $BH = AD = 8$ cm.

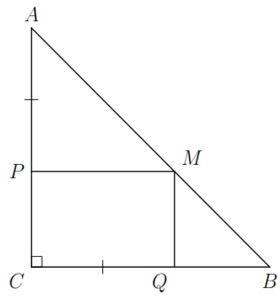


Tam giác BHC vuông tại H có $HC = \sqrt{BC^2 - BH^2} = 6$ cm.

$\Rightarrow$ $DC = DH + HC = 13$ cm.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông cân tại C. Trên các cạnh AC, BC lấy lần lượt các điểm P, Q sao cho $AP = CQ$. Từ điểm P vẽ PM song song với BC ($M \in AB$). Chứng minh tứ giác $PCQM$ là hình chữ nhật.

Lời giải



Ta có: Tam giác ABC vuông cân tại C nên $\widehat{CAB} = 45^\circ$.

$PM \parallel BC$, $AC \perp BC$ $\Rightarrow$ $PM \perp AC$ hay $PM \perp AP$.

Do đó tam giác APM vuông tại P và

$\widehat{PAM} = 45^\circ$ nên APM là tam giác vuông cân tại P $\Rightarrow$ $AP = PM$.

Mà $AP = CQ$ $\Rightarrow$ $PM = CQ$. Và $PM \parallel BC$ $\Leftrightarrow$ $PM \parallel CQ$.

Do đó $PMQC$ là hình bình hành. Hình bình hành $PMQC$ có $\widehat{MPC} = 90^\circ$.

$\Rightarrow$ $PMQC$ là hình chữ nhật.

Bài 4. Cho tam giác ABC có đường cao AI. Từ A kẻ tia Ax vuông góc với AC, từ B kẻ tia By song song với AC. Gọi M là giao điểm của tia Ax và tia By. Nối M với trung điểm P của AB, đường MP cắt AC tại Q và BQ cắt AI tại H.

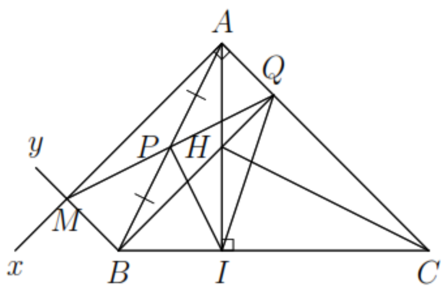
a) Tứ giác $AMBQ$ là hình gì? b) Chứng minh tam giác PIQ cân.

Lời giải

a) Ta có: $Ax \perp AC$ và $By \parallel AC$

$\Rightarrow$ $Ax \perp By$ $\Rightarrow \widehat{AMB} = 90^\circ$.

Xét $\triangle MAQ$ và $\triangle QBM$ có



- $\widehat{MQA} = \widehat{BMQ}$ (so le trong);
- MQ là cạnh chung;
- $\widehat{AMQ} = \widehat{BQM}$ ($Ax \parallel QB$).

$\Rightarrow$ $\triangle MAQ = \triangle QBM$ (g-c-g)

$\Rightarrow \widehat{MBQ} = \widehat{MAQ} = 90^\circ$ (2 góc tương ứng)

Xét tứ giác $AMBQ$ có:

$\widehat{QAM} = \widehat{AMB} = \widehat{MBQ} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ tứ giác $AMBQ$ là hình chữ nhật.

b) Do tứ giác $AMBQ$ là hình chữ nhật. Mà P là trung điểm AB $\Rightarrow PQ = \frac{1}{2}AB$ (1)

Xét $\triangle AIB$ vuông tại I và có IP là đường trung tuyến.

$\Rightarrow IP = \frac{1}{2}AB$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow QP = IP \Rightarrow \triangle PQI$ cân tại P.

--- HẾT ---

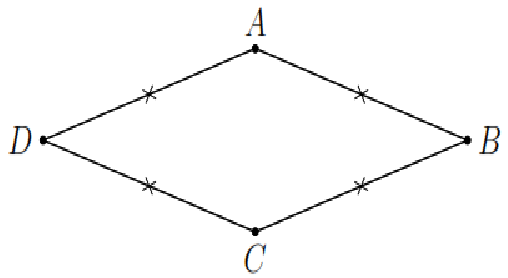
HÌNH THOI

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Định nghĩa

- Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.
- Tứ giác ABCD là hình thoi khi và chỉ khi

  $AB = BC = CD = DA$.



- Nhận xét: hình thoi là một hình bình hành đặc biệc.

2. Tính chất

- Hình thoi có tất cả các tính chất của hình bình hành.

Trong hình thoi:

- Hai đường chéo vuông góc với nhau.
- Mỗi đường chéo là đường phân giác của các góc ở đỉnh của hình thoi mà nó đi qua.

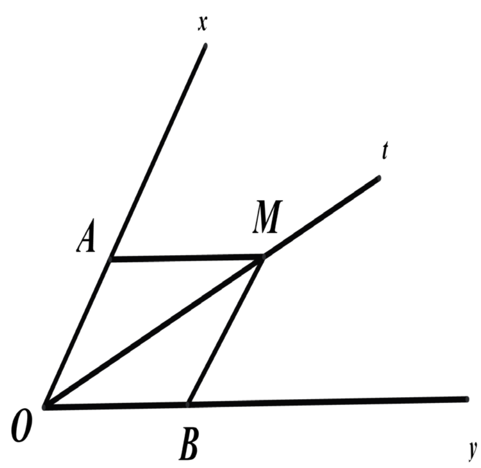
3. Dấu hiệu nhận biết

- Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi.
- Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi.
- Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc là hình thoi.
- Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc ở đỉnh mà nó đi qua là hình thoi.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1: Chứng minh tứ giác là hình thoi
▪ Vận dụng các dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác là hình thoi.

Ví dụ 1. Cho góc xOy và tia phân giác Ot. Từ điểm M thuộc Oz kẻ MA // Oy và MB // Ox (với $A \in Ox; B \in Oy$). Chứng minh tứ giác OAMB là hình thoi.



Chứng minh:

Ta có MA // Oy suy ra MA // OB (1)

MB // Ox suy ra MB // OA (2)

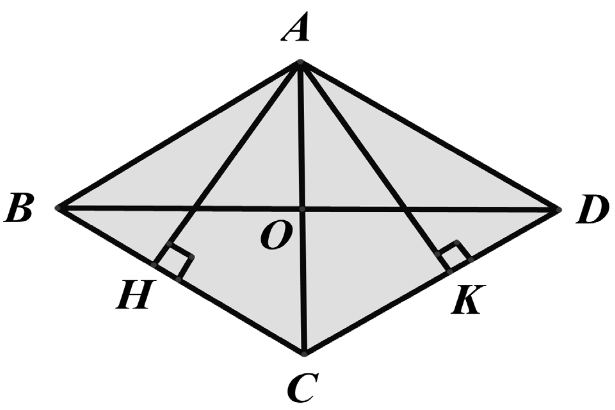
Từ (1) và (2) suy ra OAMB là hình bình hành . (*)

Mà OM là phân giác của góc AOB (**)

Từ (*);(**) suy ra OAMB là hình thoi .

(theo dấu hiệu nhận biết hình thoi).

Ví dụ 2. Cho hình bình hành ABCD có 2 đường cao AH = AK . Chứng minh ABCD là hình thoi.



Chứng minh:

Xét hai tam giác vuông AHB và AKD ta có :

AK = AH (gt).

$\widehat{D} = \widehat{B}$ (ABCD là hình bình hành).

$\Rightarrow AD = AB \Rightarrow$ ABCD là hình thoi (dấu hiệu nhận biết hình thoi).

Dạng 2: Vận dụng tính chất của hình thoi để chứng minh các tính chất khác
▪ Vận dụng các tính chất về cạnh, góc và đường chéo của hình thoi.

Ví dụ 3. Cho hình thoi $ABCD$ có $\hat{B} = 60^\circ$. Kẻ $AE \perp DC$, $AF \perp BC$. Chứng minh

a) $AE = AF$;

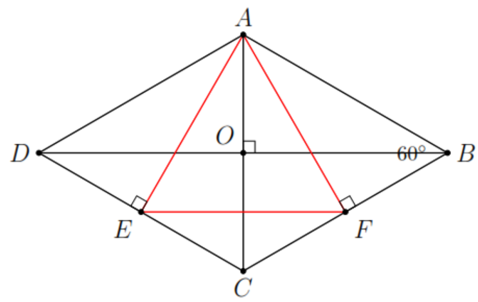
b) Tam giác AEF đều.

Lời giải

a) Vì AC là phân giác của $\widehat{BCD}$ (do $ABCD$ là hình thoi)

nên A cách đều hai cạnh BC và CD.

Hay $AE = AF$.



b) Hình thoi $ABCD$ có $AB = BC$ và $\widehat{ABC} = 60^\circ$ nên $\triangle ABC$ đều.

Do đó đường cao AF cũng là đường phân giác, suy ra $\widehat{CAF} = 30^\circ$.

Hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được $\widehat{CAE} = 30^\circ$.

Suy ra $\widehat{EAF} = 60^\circ$, vậy $\triangle AEF$ đều.

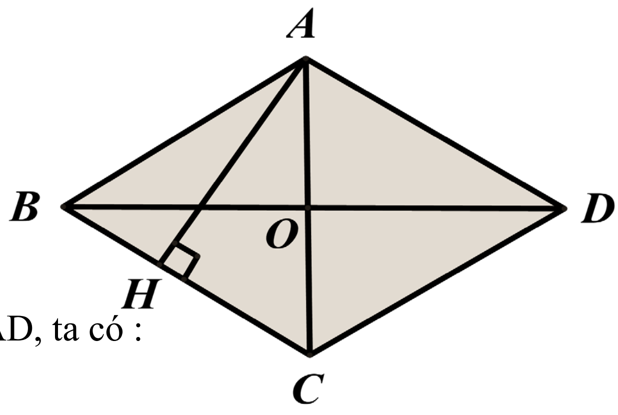
Dạng 3: Tính độ dài cạnh, góc, diện tích hình thoi.
▪ Vận dụng các kiến thức đã học để giải quyết bài toán liên quan.

Ví dụ 4.

Hai đường chéo của hình thoi có độ dài 16cm và 12cm. Tính :

a/ Diện tích hình thoi b/ Cạnh hình thoi c/ Độ dài đường cao hình thoi.

Lời giải



a/ AC = 16cm; BD = 12cm.

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD = \frac{1}{2}.16.12 = 96\ (cm^2).$

b/ OA = 8cm; OD = 6cm.

Áp dụng định lý Py ta go vào tam giác vuông OAD, ta có :

$AD^2 = OA^2 + OB^2 = 8^2 + 6^2 = 100$

$\Rightarrow AD = 10\ \ (cm).$

c/ Kẻ đường cao DH. Ta cũng có :

$S_{ABCD} = AB.DH$

$\Rightarrow\ 10.DH = 96$

$\Rightarrow DH = 96:10 = 9,6(cm).$

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho tam giác ABC, phân giác AD. Qua D kẻ đường thẳng song song với AC cắt AB tại E, qua D kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC tại F. Chứng minh EF là phân giác của $\widehat{AED}$.

Lời giải

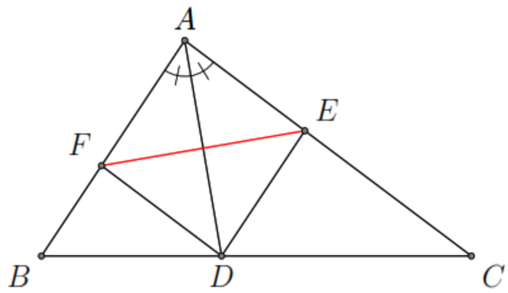
Tứ giác $AEDF$ có $AF \parallel DE$ và $AE \parallel DF$

nên là hình bình hành.

Mặc khác đường chéo AD là phân giác của $\widehat{BAC}$

nên $AEDF$ là hình thoi.

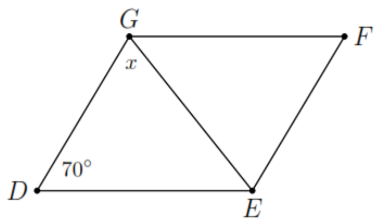
Do đó đường chéo EF là phân giác của $\widehat{AED}$.



Bài 2.

a) Cạnh của một hình thoi bằng 25, một đường chéo bằng 14. Tính độ dài đường chéo còn lại.

b) Cho hình thoi $DEFG$ như hình vẽ bên. Tính x.



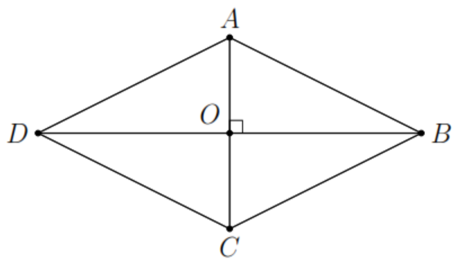
Lời giải

a) Hình thoi $ABCD$ có $AC = 14$ và $AB = 25$.

Áp dụng các tính chất của hình thoi, ta có

$$OA = \frac{AC}{2} = 7; \quad OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = 24.$$

Suy ra $BD = 2OB = 48$.



b) Vì $DEFG$ là hình thoi và $\hat{D} = 70^\circ$ nên $\widehat{DGF} = 180^\circ - \hat{D} = 110^\circ$.

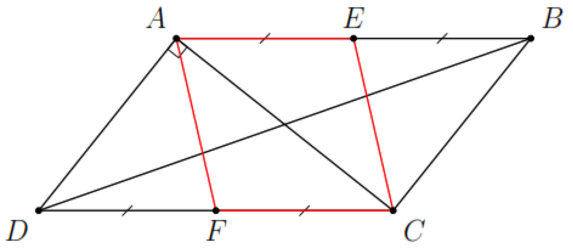
Hơn nữa, GE là phân giác của $\widehat{DEF}$ (hình thoi $DEFG$). Do đó $x = \widehat{DGE} = \frac{1}{2}\widehat{DEF} = 55^\circ$.

Bài 3. Cho hình bình hành $ABCD$ có AC vuông góc với AD. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, CD. Chứng minh tứ giác $AECF$ là hình thoi.

Lời giải

Hình bình hành $ABCD$ có $AD \parallel BC$ và $AD \perp AC$.

Suy ra $BC \perp AC$.



$\triangle ACD$ vuông tại A có AF là đường trung tuyến, nên $AF = CF = \dfrac{CD}{2}$.

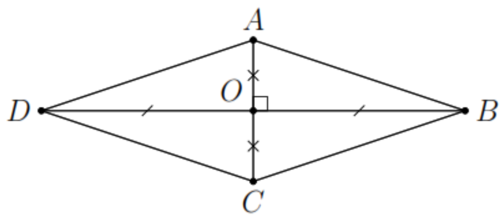
$\triangle ABC$ vuông tại C có CE là đường trung tuyến, nên $CE = AE = \dfrac{AB}{2}$.

Lại có $AB = CD$ (do $ABCD$ là hình bình hành),

Vậy $AF = CF = CE = AE$, hay $AECF$ là hình thoi.

Bài 4. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O. Độ dài $AC = 8$ cm, $BD = 10$ cm. Tính độ dài cạnh hình thoi.

Lời giải



Theo tính chất của hình thoi:

$OA = \dfrac{AC}{2} = 4$ cm và $OB = \dfrac{BD}{2} = 5$ cm.

Và $\triangle OAB$ vuông tại O nên áp dụng Định lí Pytago ta có

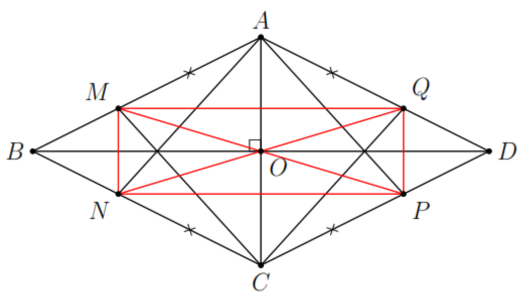
$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{41} \text{ cm.}$$

Bài 5. Cho hình thoi $ABCD$, gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Trên cạnh AB, BC, CD, DA lấy theo thứ tự các điểm M, N, P, Q sao cho $AM = CN = CP = AQ$. Chứng minh:

a) M, O, P thẳng hàng và N, O, Q thẳng hàng;

b) Tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Lời giải



a) Tứ giác $AMCP$ có $AM = CP$ và $AM \parallel CP$ (hình thoi $ABCD$) nên là hình bình hành.

Mà O là trung điểm AC (hình thoi $ABCD$) nên O là trung điểm MP.

Tứ giác $ANCQ$ có $AQ = CN$ và $AQ \parallel CN$ (hình thoi $ABCD$) nên là hình bình hành.

Mà O là trung điểm BD (vì hình thoi $ABCD$) nên O là trung điểm NQ.

Vậy M, O, P thẳng hàng và N, O, Q thẳng hàng.

b) Tứ giác $MNPQ$ có MP cắt NQ tại trung điểm O của mỗi đường nên là hình bình hành.

Hình thoi $ABCD$ có AC là phân giác của $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$, suy ra $OM = OQ$ và $ON = OP$.

Do đó $OM + OP = ON + OQ$ hay $MP = NQ$, hay $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Bài 6. Cho tam giác ABC, qua điểm D thuộc cạnh BC, kẻ các đường thẳng song song với AB và AC, cắt AC và AB theo lần lượt ở E và F.

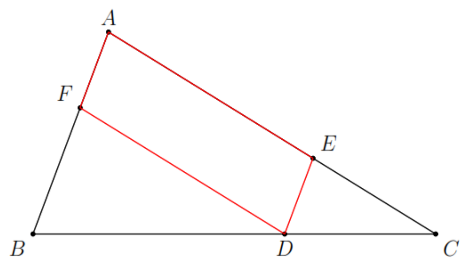
a) Tứ giác $AEDF$ là hình gì?

b) Điểm D ở vị trí nào trên BC thì $ADEF$ là hình thoi.

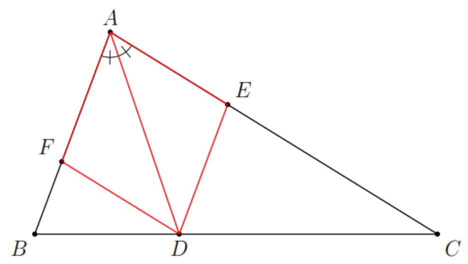
Lời giải

a) Tứ giác $AEDF$ có $AF \parallel DE$ và $AE \parallel DF$ nên là hình bình hành.

b) Để hình bình hành $AEDF$ là hình thoi thì AD là phân giác của góc $\widehat{BAC}$.



a)



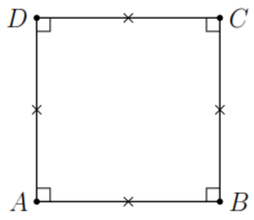
b)

--- HẾT ---

HÌNH VUÔNG

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Định nghĩa



- Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và bốn cạnh bằng nhau.
- Tứ giác ABCD là hình vuông khi và chỉ khi

Nhận xét:

- Hình vuông là hình chữ nhật có bốn cạnh bằng nhau.
- Hình vuông là hình thoi có bốn góc bằng nhau.

Do đó hình vuông vừa là hình thoi vừa là hình chữ nhật.

2. Tính chất

- Hình vuông có tất cả các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.
- *Tính chất đặc trưng*: Trong hình vuông, hai đường chéo bằng nhau và vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường.

3. Dấu hiệu nhận biết

- Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông.
- Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình vuông.
- Hình chữ nhật có một đường chéo là phân giác của một góc là hình vuông.
- Hình thoi có một góc vuông là hình vuông.
- Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.

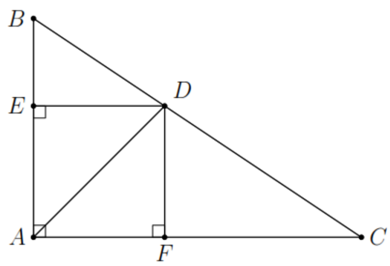
Nhận xét: Nếu một tứ giác vừa là hình chữ nhật, vừa là hình thoi thì tứ giác đó là hình vuông.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1: Chứng minh tứ giác là hình vuông
▪ Vận dụng các dấu hiệu nhận biết hình vuông.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi AD là đường phân giác của góc A (D thuộc BC), từ D kẻ DE và DF lần lượt vuông góc với AB và AC. Chứng minh rằng $AEDF$ là hình vuông.

Lời giải



Xét tứ giác $AEDF$ có $\widehat{EAF} = \widehat{AFD} = \widehat{AED} = 90^\circ$ nên tứ giác $AEDF$ là hình chữ nhật.

Mà AD là đường chéo đồng thời là đường phân giác nên tứ giác $AEDF$ là hình vuông.

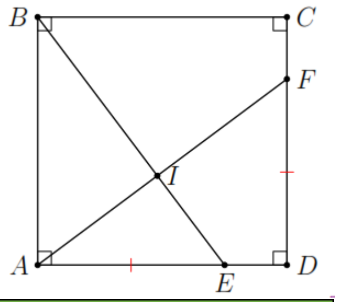
Dạng 2: Vận dụng tính chất hình vuông để chứng minh các tính chất hình học
▪ Sử dụng tính chất về cạnh, góc đường chéo của hình vuông.

Ví dụ 2. Cho hình vuông $ABCD$. Trên các cạnh AD, DC lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $AE = DF$. Chứng minh:

a) Các tam giác ADF và BAE bằng nhau.

b) $BE \perp AF$.

Lời giải



a) Có $\triangle ADF = \triangle BAE$ (c.g.c)

b) Gọi I là giao điểm của AF và BE. Ta có $\widehat{AEI} = \widehat{DFA}$.

Có $\widehat{EAI} + \widehat{AEI} = \widehat{EAI} + \widehat{DFA} = 90^\circ \Rightarrow BE \perp AF$.

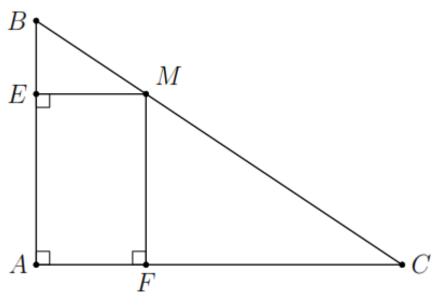
Dạng 3: Tìm điều kiện để tứ giác là hình vuông
▪ Sử dụng các dấu hiệu nhận biết của hình vuông để từ đó kết luận.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, M là một điểm thuộc cạnh BC. Qua M vẽ các đường thẳng song song với AB và AC, chúng cắt các cạnh AC, AB theo thứ tự tại E và F.

a) Tứ giác $AFME$ là hình gì?

b) Xác định vị trí điểm M trên cạnh BC để tứ giác $AFME$ là hình vuông.

Lời giải



a) Tứ giác $AFME$ có $\widehat{EAF} = \widehat{AEM} = \widehat{MFA} = 90^\circ$ nên tứ giác $AFME$ là hình chữ nhật.

b) Để tứ giác $AFME$ là hình vuông thì đường chéo AM trở thành đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$

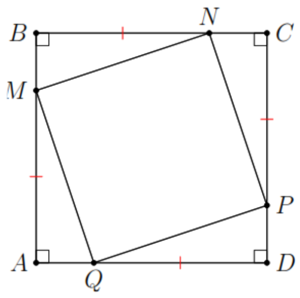
$\Rightarrow$ M là giao điểm của đường phân giác trong góc $\widehat{BAC}$ với BC.

C. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Cho hình vuông $ABCD$, trên các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt lấy M, N, P, Q sao cho $AM = BN = CP = DQ$. Chứng minh $MNPQ$ là hình vuông.

Lời giải

Bốn tam giác AQM, BNM, CPN, DQP bằng nhau $\Rightarrow$ $QM = MN = NP = PQ$ $\Rightarrow$ Tứ giác $QMNP$ là hình thoi.



Có $\triangle MBN = \triangle NCP$ nên $\widehat{BMN} = \widehat{CNP}$.

Mặt khác, $\widehat{BNM} + \widehat{BMN} = 90^\circ = \widehat{BNM} + \widehat{CNP}$ $\Rightarrow$ $\widehat{MNP} = 90^\circ$.

Vậy hình thoi $QMNP$ có một góc vuông nên tứ giác $MNPQ$ là hình vuông.

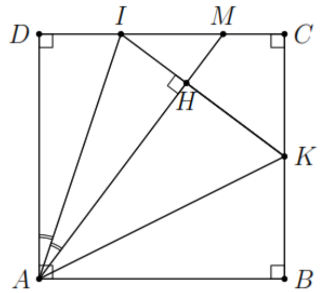
Bài 2. Cho hình vuông $ABCD$. Lấy điểm M bất kì trên cạnh DC. Tia phân giác $\widehat{MAD}$ cắt CD tại I. Kẻ IH vuông góc với AM tại H. Tia IH cắt BC tại K. Chứng minh:

a) $\triangle ABK = \triangle AHK$.

b) $\widehat{IAK} = 45^\circ$.

Lời giải

a) Dễ dàng chứng minh $\triangle ADI = \triangle AHI$ $\Rightarrow$ $AD = AH$. Suy ra $\triangle ABK = \triangle AHK$.



Ta có $\widehat{IAH} = \frac{1}{2}\widehat{DAH}$; $\widehat{HAK} = \frac{1}{2}\widehat{HAB}$.

Mà $\widehat{DAH} + \widehat{HAB} = 90^\circ$ $\Rightarrow$ $\widehat{IAH} + \widehat{HAK} = \widehat{IAK} = 45^\circ$.

Bài 3. Cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ về phía ngoài hình bình hành, hai hình vuông $ABEF$ và $ADGH$. Chứng minh:

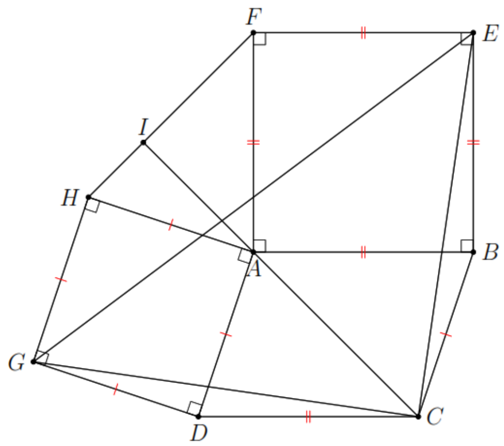
a) $AC = FH$.

b) $AC \perp FH$.

c) CEG là tam giác vuông cân.

Lời giải

a) Dễ dàng chứng minh $\triangle AFH = \triangle BAC$ (c.g.c) $\Rightarrow$ $FH = AC$.



b) Gọi giao điểm của AC và FH là I. Do $\widehat{AFH} = \widehat{BAC}$, ta có $\widehat{IAF} + \widehat{AFH} = \widehat{IAF} + \widehat{BAC} = 90^\circ$ $\Rightarrow$ $AC \perp FH$.

c) Chứng minh được $\triangle GCD = \triangle CEB$ (c.g.c)

$\Rightarrow$ $GC = CE$.

Ta có

$$180^\circ = \widehat{ECB} + \widehat{CBE} + \widehat{BEC} = \widehat{ECB} + \widehat{CBA} + 90^\circ + \widehat{BEC}$$

$\Rightarrow$ $\widehat{ECB} + \widehat{CBA} + \widehat{BEC} = 90^\circ$, mà $\widehat{BEC} = \widehat{GCD}$ $\Rightarrow$ $\widehat{ECB} + \widehat{CBA} + \widehat{GCD} = 90^\circ$ (1).

Mặt khác, do $ABCD$ là hình bình hành nên $\widehat{DCB} + \widehat{CBA} = 180^\circ$ hay $\widehat{ECB} + \widehat{GCE} + \widehat{GCD} + \widehat{CBA} = 180^\circ$ (2).

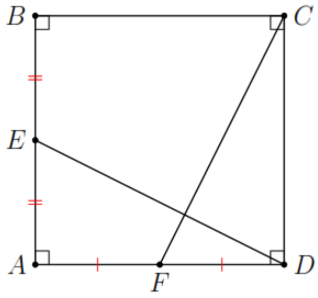
Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $\widehat{GCE} = 90^\circ$ $\Rightarrow$ $\triangle CEG$ vuông cân.

Bài 4. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, AD. Chứng minh:

a) $DE = CF$.

b) $DE \perp CF$.

Lời giải



a) Có $\triangle AED = \triangle CFD$ (c.g.c) $\Rightarrow$ $DE = DF$.

Do $\widehat{ADE} = \widehat{DCF}$ (góc tương ứng), ta có:

$\widehat{ADE} + \widehat{EDC} = \widehat{CDF} = \widehat{EDC} + \widehat{DCF} = 90^{\circ}$

$\Rightarrow$ $DE \perp CF$.

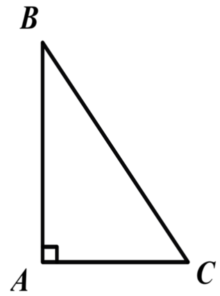
--- HẾT ---

Tam giác & Tứ giác

BÀI TẬP TỔNG HỢP TAM GIÁC & TỨ GIÁC.

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1/ *Định lý Pythagore & định lý Pythagore đảo.*



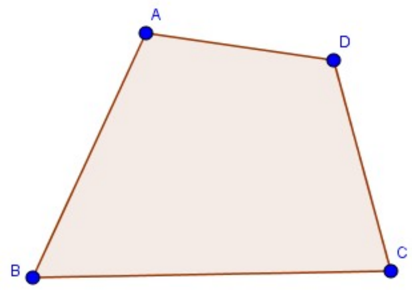
- Trong một tam giác vuông, bình phương của cạnh huyền bằng tổng các bình phương của hai cạnh góc vuông.

ΔABC vuông tại A $\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$

- Nếu một tam giác có bình phương của một cạnh bằng tổng các bình phương của hai cạnh kia thì tam giác đó là tam giác vuông.

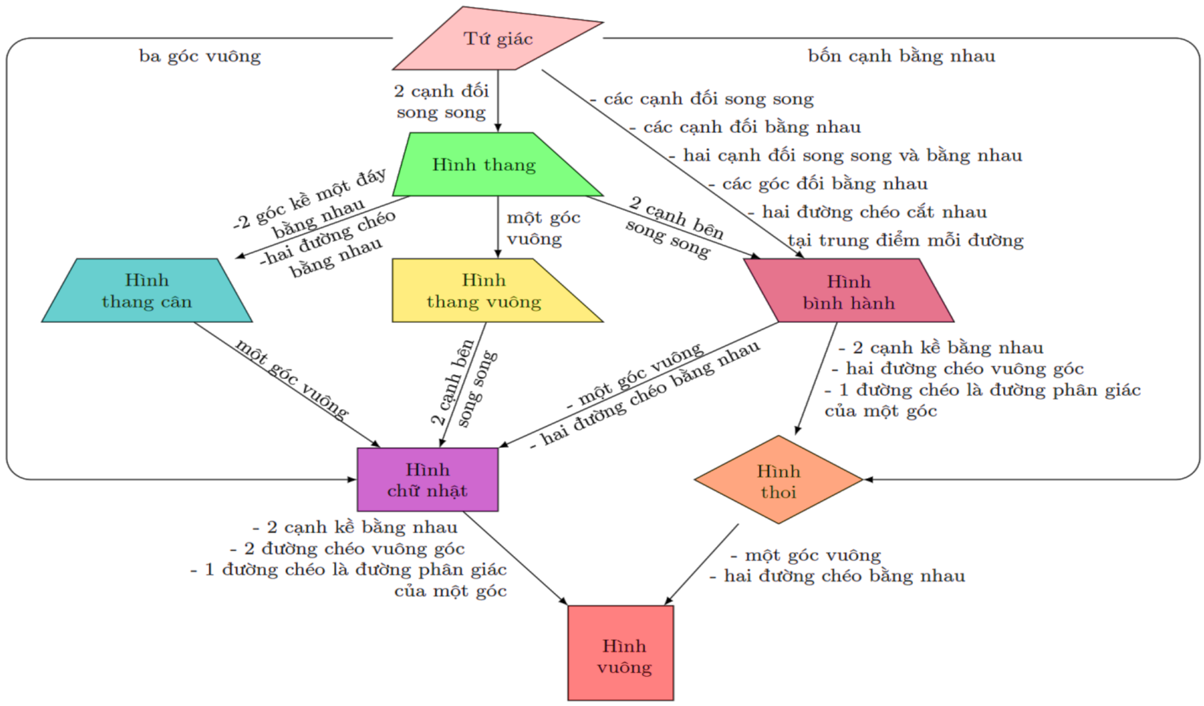
ΔABC có $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^0$

2/ *Tứ giác.*



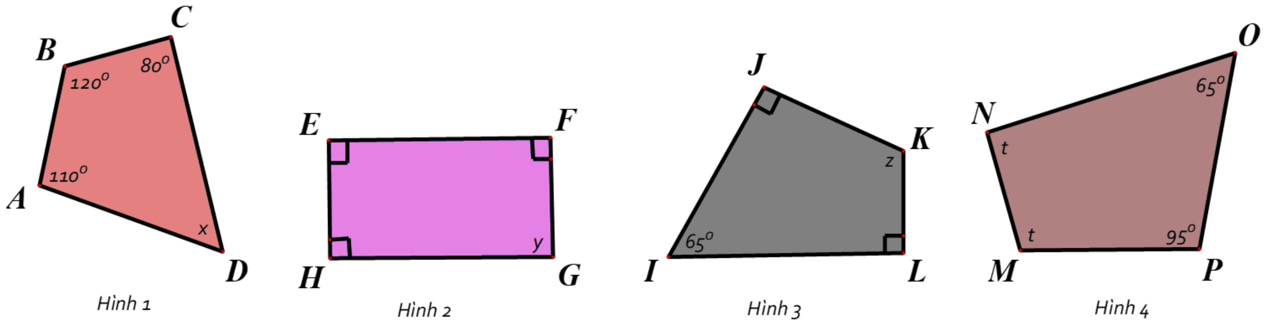
- Tứ giác có 4 cạnh, 2 đường chéo, 4 đỉnh và 4 góc.
- *Tứ giác lồi*: Tứ giác lồi là tứ giác luôn nằm về cùng một phía của đường thẳng chứa bất kì một cạnh nào của tứ giác đó.
- *Tổng các góc trong một tứ giác*: Tổng các góc trong một tứ giác bằng $360°$.

Sơ đồ nhận biết các loại tứ giác.



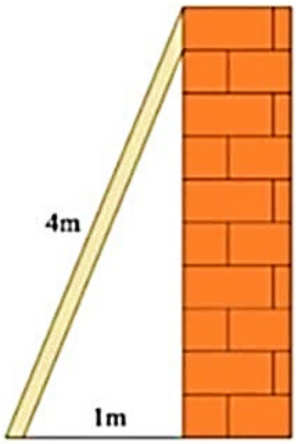
B.CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Bài 1. Tìm các góc x,y,z t chưa biết ở các hình bên dưới .



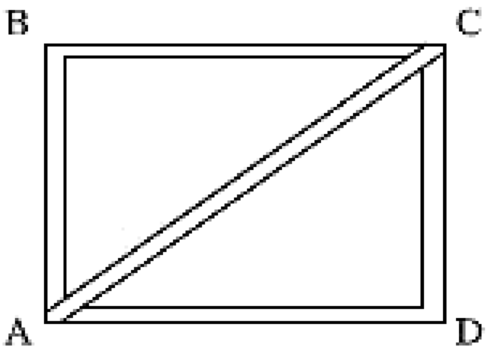
Bài 2. Cho tam giác nhọn ABC. Kẻ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Cho biết AB = 13cm, AH = 12cm, HC = 16cm. Tính các độ dài AC, BC.

Bài 3. Tính chiều cao của bức tường ở hình bên dưới biết rằng chiều dài của thang là 4m và chân thang cách tường là 1m *(làm tròn kết quả đến hàng phần mười).*

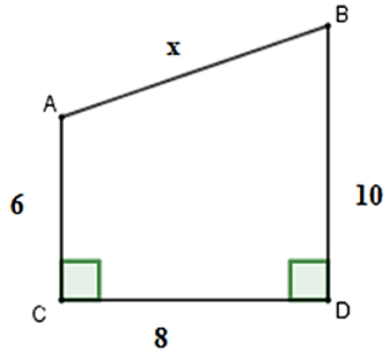


Bài 4.

Bạn Hà muốn đóng một nẹp chéo AC để chiếc khung hình chữ nhật ABCD được vững hơn. Tính độ dài AC biết rằng AD = 48 cm, CD = 36cm.

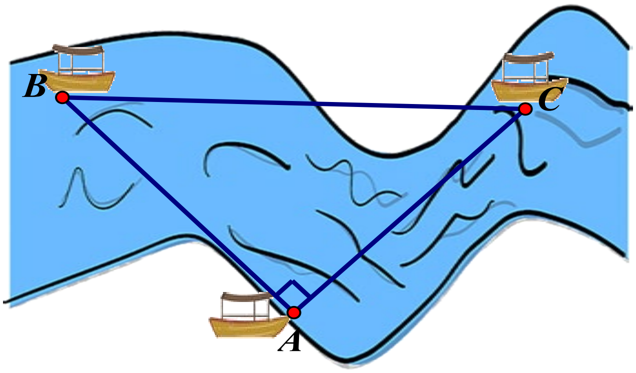


Bài 5. Tìm x trong hình vẽ sau :



Bài 6. Hình ảnh bên dưới là một thiết kế ngôi nhà hình tam giác cân đang là xu thế mới trên khắp thế giới ở phân khúc nhà nhỏ. Đây là những thiết kế cơ động, có thể thi công lắp dựng nhanh có chi phí rẻ. Trước ngôi nhà có lắp một tấm kính chống vỡ có dạng tam giác cân . Biết cạnh đáy, cạnh bên của miếng kính này lần lượt có độ dài là 8m và 10m. Tính chiều cao của tấm kính tam giác cân này *(làm tròn kết quả đến hàng phần mười)* ?

Bài 7.



Hai chiếc xuồng máy xuất phát cùng từ bến A đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc 90^0 *(hình minh họa)*. Chiếc xuồng máy thứ nhất đi được 12km thì dừng lại tại bến C, còn chiếc xuồng máy thứ hai đi được nửa giờ với vận tốc 18km/h đến B thì chuyển hướng đi thẳng về bến C với vận tốc không đổi.

a/ Hỏi sau bao nhiêu phút từ lúc chiếc xuồng máy thứ hai chuyển hướng đi được đến bến C gặp chiếc xuồng máy thứ nhất ?

b/ Tính diện tích tam giác ABC được tạo thành như hình vẽ.

Bài 8 Cho tam giác có AB = 7cm, AC = 25cm, BC = 24cm có phải là tam giác vuông không ? Bạn Linh đã giải bài toán đó như sau :

Ta có :

$$AB^2 + AC^2 = 7^2 + 25^2 = 49 + 625 = 674$$
$$BC^2 = 24^2 = 576$$

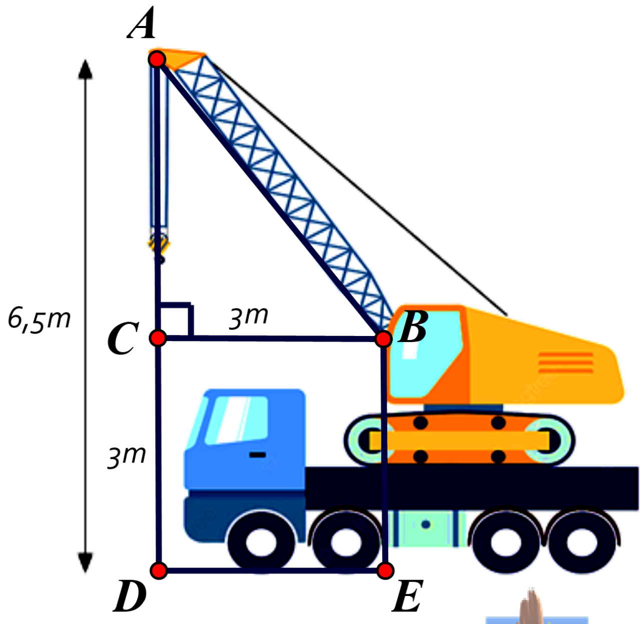
Do 674 $\neq$ 576 nên $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$.

Vậy tam giác ABC không phải là tam giác vuông.

Bạn Nhật cho rằng Bạn Linh giải sai vì tam giác ABC vuông. Theo em ai đúng , ai sai ? Giải thích ?

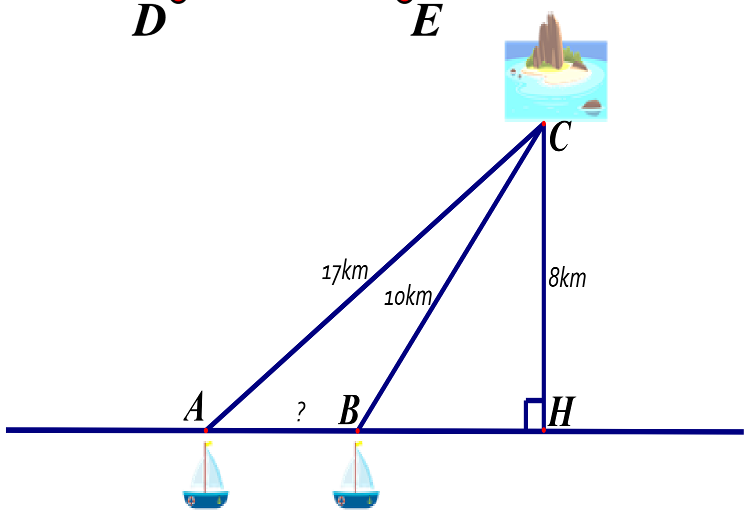
Bài 9. Khi nói đến ti vi 21 inch, ta hiểu rằng đường chéo màn hình của chiếc ti vi này dài 21 inch (*inch : đơn vị đo chiều dài được sử dụng tại nước Anh và một số nước khác, 1 inch ≈ 2,54cm).* Hỏi chiếc ti vi (hình bên) thuộc loại tivi bao nhiêu inch *(làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)* ?

Bài 10. Cho hình vẽ bên dưới. Tính chiều dài cần cẩu AB .

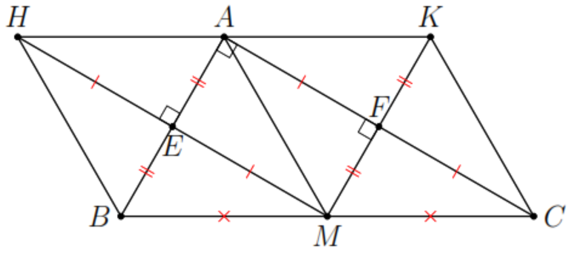


Bài 11.

Khoảng cách từ hai bến tàu A và B tới hòn đảo C lần lượt là 17km và 10km *(hình ảnh minh họa).* Tính khoảng cách AB giữa hai bến tàu biết hòn đảo cách đất liền 8km.



Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường trung tuyến AM. Gọi H là điểm đối xứng với M qua AB, E là giao điểm của MH và AB. Gọi K là điểm đối xứng với M qua AC, F là giao điểm của MK và AC.



a) Các tứ giác $AEMF$, $AMBH$, $AMCK$ là hình gì? Vì sao?

b) Chứng minh rằng H đối xứng với K qua A.

c) Tam giác vuông ABC cần thêm điều kiện gì thì tứ giác $AEMF$ là hình vuông?

Lời giải

a) Tứ giác $AEMF$ là hình chữ nhật. Các tứ giác $AMBH$, $AMCK$ là hình thoi.

b) Theo a) suy ra $HA \parallel BC$, $AK \parallel MC$ $\Rightarrow$ H, A, K thẳng hàng. Lại có $AH = AM = AK$ $\Rightarrow$ H, K đối xứng với nhau qua A.

c) Để hình chữ nhật $AEMF$ là hình vuông thì cần thêm điều kiện $AE = EM$. $\Rightarrow$ $AB = AC$. Vậy tam giác ABC vuông cân tại A.

Bài 12. Cho hình bình hành $ABCD$ có $BC = 2AB$, $\hat{A} = 60^\circ$. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của BC, AD. Vẽ I đối xứng với A qua B.

a) Tứ giác $ABEF$ là hình gì? Vì sao?

b) Chứng minh tứ giác $AIEF$ là hình thang cân.

c) Chứng minh $BICD$ là hình chữ nhật.

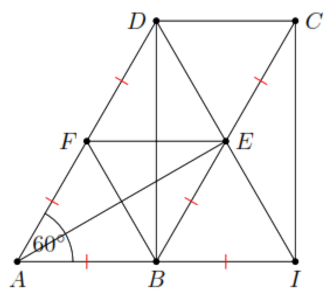
d) Tính góc $\widehat{AED}$.

Lời giải

a) Vì $AB = EF = BF = AF = \dfrac{BC}{2}$ $\Rightarrow$ Tứ giác $ABEF$ là hình thoi.

b) Dễ thấy $EF \parallel AI$, $IB = BE$; $\widehat{IBE} = \widehat{IAD} = 60^\circ$ $\Rightarrow$ $\triangle BIE$ đều. Do đó, $IE = AF$ suy ra $AIEF$ là hình thang cân.

c) $BEDF$ là hình thoi. Suy ra BD là đường phân giác trong của $\triangle ADI$.



Có $BI = AB = DC$ và $AB \parallel DC$ hay $BI \parallel DC$. Vậy tứ giác $BICD$ là hình bình hành vì có cặp cạnh đối song song và bằng nhau.

Thấy rằng BD vừa là đường trung tuyến, phân giác của $\triangle ADI$. Suy ra $BD \perp BI$ hay $\widehat{DBI} = 90^\circ$ $\Rightarrow$ Tứ giác $BICD$ là hình chữ nhật vì là hình bình hành có một góc vuông.

d) Vì $BICD$ là hình chữ nhật nên E là trung điểm của DI. Ta có $\triangle DAI$ cân tại A, mà AE là đường trung tuyến nên đồng thời là đường cao. Suy ra $AE \perp DI$, vậy $\widehat{AED} = 90^\circ$.**Bài 13.** Cho hình thang cân $ABCD$ $(AB \parallel CD, AB < CD)$, các đường cao AH, BK.

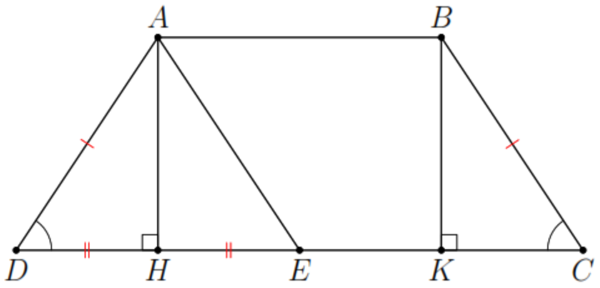
a) Tứ giác $ABKH$ là hình gì? Vì sao?

b) Chứng minh $DH = CK$.

c) Gọi E là điểm đối xứng với D qua H. Các điểm D và E đối xứng với nhau qua đường nào?

d) Tứ giác $ABCE$ là hình gì?

Lời giải



a) Tứ giác $ABKH$ là hình chữ nhật.

b) $\triangle ADH = \triangle BKC$ (ch - gn).

Nên suy ra $DH = KC$.

c) D và E đối xứng với nhau qua đường thẳng AH.

d) Dễ thấy $HE + EK = EK + KC \Rightarrow AB = EC$. Do đó, $ABCE$ là hình bình hành.

Bài 14. Cho tam giác ABC vuông tại B. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC. Kẻ Ex song song với BC cắt AB tại M.

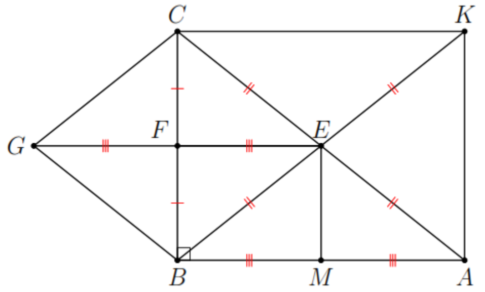
a) Chứng minh tứ giác $BMEF$ là hình chữ nhật.

b) Gọi K đối xứng với B qua E. Tứ giác $BAKC$ là hình gì? Vì sao?

c) Gọi G đối xứng với E qua F. Tứ giác $BGCE$ là hình gì? Vì sao?

d) Tam giác ABC cần thêm điều kiện gì để tứ giác $BGCE$ là hình vuông?

Lời giải



a) Tứ giác $BMEF$ là hình chữ nhật vì có 3 góc vuông.

EF là đường trung bình của tam giác ABC.

$\Rightarrow EF \perp BC \Rightarrow BFE = 90^\circ \Rightarrow$ $BMEF$ là hình chữ nhật.

b) Tứ giác $BAKC$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường. Lại có $\widehat{ABC} = 90^\circ$ nên $BAKC$ là hình chữ nhật.

c) Tứ giác $BGCE$ là hình thoi vì có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường và $BE = EC$ (trung tuyến ứng với cạnh huyền).

d) Tam giác ABC vuông cân.

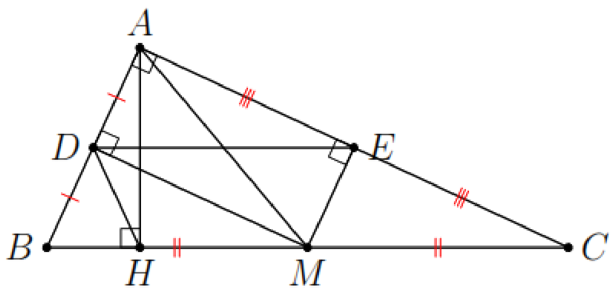
Bài 15. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của BC, kẻ MD vuông góc với AB tại D, ME vuông góc với AC tại E.

a) Chứng minh $AM = DE$.

b) Chứng minh tứ giác $DMCE$ là hình bình hành.

c) Gọi AH là đường cao của tam giác ABC ($H \in BC$). Chứng minh tứ giác $DHME$ là hình thang cân và A đối xứng với H qua DE.

Lời giải



a) Dễ thấy $ADME$ là hình chữ nhật, suy ra đpcm.

b) Dễ thấy $MD \parallel EC$, $MD = EC = \frac{1}{2}AC$ $\Rightarrow$ đpcm.

c) $ME = DH = AD = \frac{1}{2}AB$; $HM \parallel DE$ nên $DHME$ là hình thang cân và A, H đối xứng với nhau qua DE.

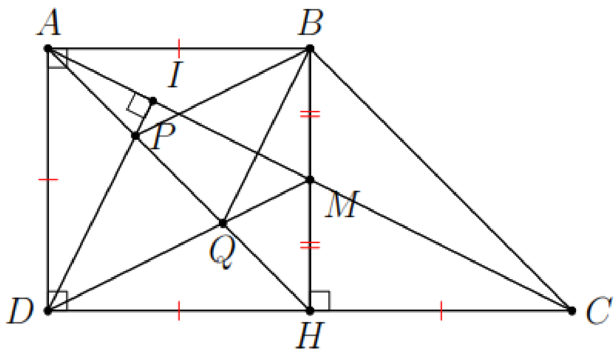
Bài 16. Cho hình thang vuông $ABCD$ có $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$ và $AB = AD = \frac{1}{2}CD$, kẻ BH vuông góc với CD.

a) Chứng minh rằng tứ giác $ABHD$ là hình vuông.

b) Gọi M là trung điểm của BH. Chứng minh A đối xứng với C qua M.

c) Kẻ DI vuông góc với AC. AH cắt DI, DM tại P và Q. Chứng minh tứ giác $DPBQ$ là hình thoi.

Lời giải



a) $ABHD$ là hình vuông vì là hình chữ nhật và có hai cạnh kề bằng nhau.

b) Có $AB \parallel HC$ và $AB = HC = DH = \frac{1}{2}DC$ nên tứ giác $ABCH$ là hình bình hành. $\Rightarrow$ M là trung điểm của AC. Vậy A đối xứng với C qua M.

c) Có $\triangle APD = \triangle APB$ (c.g.c) nên $PD = PB$; $\triangle DHQ = \triangle BHQ$ (c.g.c) nên $DQ = QB$.

Lại có $\widehat{ADP} = \widehat{MCD}$ (cùng phụ với góc $\widehat{DAC}$) $\Rightarrow$ $\widehat{ADP} = \widehat{QDH}$ (vì $\widehat{QDH} = \widehat{MCD}$). Vậy $\triangle ADP = \triangle HDQ$ (g.c.g) $\Rightarrow$ $DP = DQ$ $\Rightarrow$ Tứ giác $DPBQ$ là hình thoi vì có bốn cạnh bằng nhau.

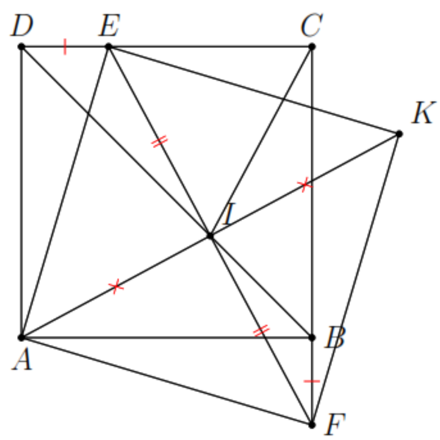
Bài 17. Cho hình vuông $ABCD$. E là điểm trên cạnh DC, F là điểm trên tia đối của tia BC sao cho $BF = DE$.

a) Chứng minh tam giác AEF vuông cân.

b) Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh I thuộc BD.

c) Lấy điểm K đối xứng với A qua I. Chứng minh tứ giác $AEKF$ là hình vuông.

Lời giải



a) $\triangle ADE = \triangle ABF$ $\Rightarrow$ $AE = AF$; $\widehat{FAB} = \widehat{DAE}$. Dễ thấy $\widehat{DAE} + \widehat{EAB} = 90^\circ$ $\Rightarrow$ $\widehat{FAB} + \widehat{EAB} = 90^\circ$. Do đó, $\triangle AEF$ là tam giác vuông cân tại A.

b) Chứng minh $AI = CI = \frac{1}{2}EF$. Do đó I nằm trên đường trung trực của AC. Mà BD là đường trung trực của AC (tính chất hình vuông $ABCD$) nên $I \in BD$.

c) Vì AEF là tam giác vuông cân nên $AI \perp EF$. Hơn nữa $AI = IK$ và $AI = \frac{1}{2}EF = IE = IF$ nên $\Rightarrow$ $AI = IK = IE = IF$. Vậy tứ giác $AEKF$ là hình vuông.

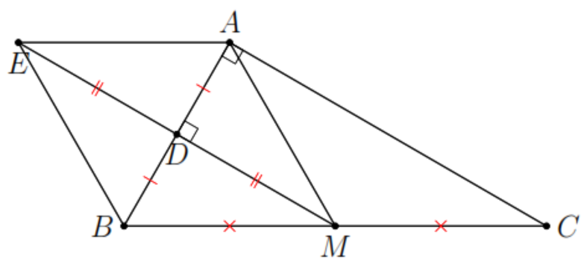
Bài 18. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường trung tuyến AM. Gọi D là trung điểm của AB, E là điểm đối xứng của M qua D.

a) Chứng minh E đối xứng với M qua đường thẳng AB.

b) Các tứ giác $AEMC$, $AEBM$ là hình gì? Vì sao?

c) Tam giác vuông ABC cần thêm điều kiện gì thì tứ giác $AEBM$ là hình vuông?

Lời giải



a) Vì $MD \parallel AC$ nên $MD \perp AB$ $\Rightarrow$ E đối xứng với M qua đường thẳng AB.

b) Có AB và EM cắt nhau tại trung điểm D của mỗi đường nên tứ giác $AEBM$ là hình bình hành. $\Rightarrow$ $AE = BM = MC$. Vậy tứ giác $AEMC$ cũng là hình bình hành vì có $AE \parallel BM$ hay $AE \parallel MC$ và $AE = MC$.

c) Hình bình hành $AEBM$ có hai đường chéo vuông góc với nhau nên là hình thoi. Để hình thoi $AEBM$ là hình vuông thì cần điều kiện $AB = EM$. Vì tứ giác $AEMC$ là hình bình hành nên $EM = AC$. Vậy nếu $AB = EM$ suy ra $AB = AC$. Lúc này tam giác ABC cân tại A. Vậy để tứ giác $AEBM$ là hình vuông thì tam giác vuông ABC cần thêm điều kiện $AB = AC$ hay tam giác ABC vuông cân tại A.

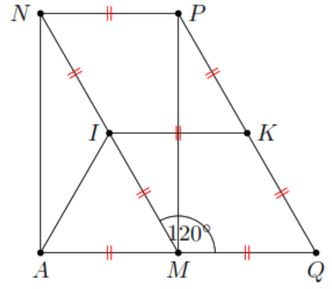
Bài 19. Cho hình bình hành $MNPQ$ có $MN = 2MQ$ và $\hat{M} = 120^\circ$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của MN, PQ và A là điểm đối xứng của Q qua M.

a) Tứ giác $MIKQ$ là hình gì? Vì sao?

b) Chứng minh tam giác AMI đều.

c) Chứng minh tứ giác $AMPN$ là hình chữ nhật.

Lời giải



a) Vì $MQ = IK = NP = \dfrac{MN}{2} = MI = IN = PK = KQ$ $\Rightarrow$ Tứ giác $MIKQ$ là hình thoi.

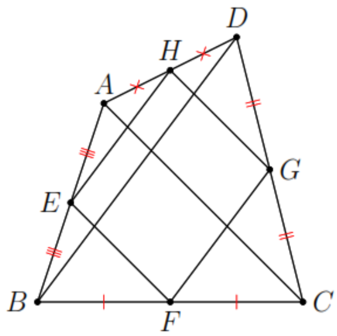
b) Tam giác AMI có $AM = MI$ nên cân tại A và $\widehat{IMA} = 60^\circ$ nên $\triangle AMI$ là tam giác đều.

c) Dễ dàng nhận thấy tứ giác $AMPN$ là hình bình hành. Vì tam giác AMI là tam giác đều nên $AI = IM = IN$. Vậy tam giác MAN có AI là đường trung tuyến và $AI = \dfrac{1}{2}MN$ nên tam giác MAN là tam giác vuông tại A (trong tam giác vuông trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền). Vậy hình bình hành $AMPN$ có một góc vuông nên tứ giác $AMPN$ là hình chữ nhật.

Bài 20. Cho tứ giác $ABCD$, E là trung điểm của cạnh AB. Qua E kẻ đường thẳng song song với AC cắt BC ở F. Qua F kẻ đường thẳng song song với BD cắt CD ở G. Qua G kẻ đường thẳng song song với AC cắt AD ở H.

a) Chứng minh tứ giác $EFGH$ là hình bình hành.

b) Tứ giác $ABCD$ cần thêm điều kiện gì để tứ giác $EFGH$ là hình chữ nhật.



Lời giải

a) Có $EH \parallel BD \parallel FG$ và $EF \parallel AC \parallel HG$ nên tứ giác $EFGH$ là hình bình hành vì có các cặp đối song song với nhau.

b) Để tứ giác $EFGH$ là hình chữ nhật thì $EH \perp HG$ hay $BD \perp AC$ vì $EH \parallel BD$ và $HG \parallel AC$. Vậy điều kiện để tứ giác $EFGH$ là hình chữ nhật thì tứ giác $ABCD$ phải có hai đường chéo vuông góc.

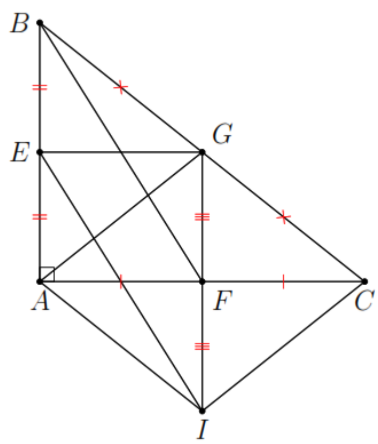
Bài 21. Cho tam giác ABC vuông ở A. Gọi E, G, F lần lượt là trung điểm của AB, BC, AC. Từ E kẻ đường thẳng song song với BF, đường thẳng này cắt GF tại I.

a) Tứ giác $AEGF$ là hình gì? Vì sao?

b) Chứng minh tứ giác $BEIF$ là hình bình hành.

c) Chứng minh tứ giác $AGCI$ là hình thoi.

d) Tìm điều kiện của tam giác ABC để tứ giác $AGCI$ là hình vuông.



Lời giải

a) Tứ giác $AEGF$ là hình chữ nhật vì có 3 góc vuông.

b) Có $GF \parallel AE$ hay $FI \parallel BE$. Vậy tứ giác $BEFI$ là hình bình hành vì có hai cặp cạnh đối song song.

c) Tứ giác $AGCI$ là hình thoi vì có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường và vuông góc với nhau ($\widehat{GFA} = 90^\circ$).

d) Để tứ giác $AGCI$ là hình vuông thì $\widehat{AGC} = 90^\circ$. Vậy tam giác ABC sẽ thành tam giác vuông cân tại A.