Mục lục

Phần II Hình học

Phần

I

Đại số

Chương 1

Căn bậc hai - Căn bậc ba

§1 Căn bậc hai

1 Tóm tắt lý thuyết

Định nghĩa 1.

1. Căn bậc hai của số thực a là số x sao cho $x^2 = a$.
   - Mỗi số dương a đều có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau, số dương kí hiệu là $\sqrt{a}$ còn số âm kí hiệu là $-\sqrt{a}$.
   - Số 0 có đúng một căn bậc hai chính là số 0, ta viết $\sqrt{0} = 0$.
   - Số âm không có căn bậc hai.
2. Với mỗi số dương a, số $\sqrt{a}$ được gọi là ***căn bậc hai số học*** của a.

1. Chú ý

- Số 0 cũng được gọi là căn bậc hai số học của 0.
- $\sqrt{a}$ xác định khi và chỉ khi $a \geq 0$.

Định lí 1. Với hai số a, b không âm ta có $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

2 Các dạng toán

Dạng 1. Tìm căn bậc hai hoặc căn bậc hai số học của một số

Phương pháp giải: Sử dụng định nghĩa hoặc máy tính cầm tay.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tính căn bậc hai của các số sau

1. 1
2. 9
3. $\dfrac{16}{9}$
4. 0,36

Lời giải.

Ta có

1. Căn bậc hai của số 1 là ± 1 vì $1^2 = (-1)^2 = 1$.
2. Căn bậc hai của số 9 là ± 3 vì $3^2 = (-3)^2 = 9$.
3. Căn bậc hai của số $\dfrac{16}{9}$ là $\pm\dfrac{4}{3}$ vì $\left(\dfrac{4}{3}\right)^2 = \left(-\dfrac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{16}{9}$.
4. Căn bậc hai của số 0,36 là $\pm 0{,}6$ vì $(0{,}6)^2 = (-0{,}6)^2 = 0{,}36$.

2. Học sinh có thể sử dụng máy tính cầm tay để kiểm tra kết quả.

□

Ví dụ 2. Tính căn bậc hai số học của các số sau

1. 0,01
2. 0,04
3. 0,25
4. $\dfrac{4}{9}$

Lời giải.

Ta có

1. $\sqrt{0{,}01} = 0,1$ vì $0{,}1^2 = 0{,}01$.
2. $\sqrt{0{,}04} = 0,2$ vì $0{,}2^2 = 0{,}04$.
3. $\sqrt{0{,}25} = 0,5$ vì $0{,}5^2 = 0{,}25$.
4. $\sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{2}{3}$ vì $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$.

3. Học sinh có thể sử dụng máy tính cầm tay để kiểm tra kết quả.

□

Ví dụ 3. Tính tổng $S = \sqrt{0{,}49} + \sqrt{\dfrac{1}{9}} - \sqrt{\dfrac{25}{4}}$.

Lời giải.

Ta có $S = 0{,}7 + \dfrac{1}{3} - \dfrac{5}{2} = -\dfrac{22}{15}$ □

.

4. Học sinh có thể sử dụng máy tính cầm tay để kiểm tra kết quả.

Dạng 2. So sánh các căn bậc hai

Ta thường sử dụng tính chất cơ bản của bất đẳng thức, cụ thể:

- Nếu $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases}$ thì $a + c > b + d$.
- Nếu $\begin{cases} a > b \\ c > 0 \end{cases}$ thì $ac > bc$.
- Nếu $\begin{cases} a > b \\ c < 0 \end{cases}$ thì $ac < bc$.
- Nếu $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases}$ thì $ac > bd$.
- Với hai số a, b không âm ta có $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. So sánh các số sau:

1. $\sqrt{26}$ và 5.
2. $\sqrt{7} + \sqrt{15}$ và 7.
3. $\sqrt{2} + \sqrt{11}$ và $\sqrt{3} + 5$.
4. $-5\sqrt{35}$ và -30.

Lời giải.

1. Ta có $26 > 25 \Rightarrow \sqrt{26} > \sqrt{25}$ hay $\sqrt{26} > 5$.
2. Ta có $\begin{cases} 7 < 9 \\ 15 < 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{7} < \sqrt{9} \\ \sqrt{15} < \sqrt{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{7} < 3 \\ \sqrt{15} < 4. \end{cases}$
   Như vậy $\sqrt{7} + \sqrt{15} < 3 + 4 = 7$.
3. Ta có $\begin{cases} 2 < 3 \\ 11 < 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2} < \sqrt{3} \\ \sqrt{11} < \sqrt{25} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2} < \sqrt{3} \\ \sqrt{11} < 5. \end{cases}$
   Như vậy $\sqrt{2} + \sqrt{11} < \sqrt{3} + 5$.
4. Ta có $35 < 36 \Rightarrow \sqrt{35} < \sqrt{36} = 6 \Rightarrow -5\sqrt{35} > (-5) \cdot 6 \Rightarrow -5\sqrt{35} > -30$.

□

Ví dụ 2. Cho $a > 0$. Chứng minh rằng

1. Nếu $a > 1$ thì $a > \sqrt{a}$.
2. Nếu $a < 1$ thì $a < \sqrt{a}$.

Lời giải.

1. Ta có tính chất, nếu $a > b > 0$ thì $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, do đó từ giả thiết $a > 1 \Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{1} = 1$.
   Nhân cả hai vế với $\sqrt{a} > 0$ ta được $a > \sqrt{a}$.
2. Tương tự như trên ta có $a < 1 \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{1} = 1$.
   Nhân cả hai vế với $\sqrt{a} > 0$ ta được $a < \sqrt{a}$.

□

Dạng 3. Tìm x

Phương pháp giải: Thường biến đổi biểu thức về dạng $\sqrt{f(x)} = a$. $(*)$

- Nếu $a < 0$ thì $(*)$ vô nghiệm.
- Nếu $a = 0$ thì $(*) \Leftrightarrow f(x) = 0$.
- Nếu $a > 0$ thì $(*) \Leftrightarrow f(x) = a^2$.

5. Nếu không biến đổi tương đương được các phương trình thì có thể dùng phép biến đổi suy ra sau đó phải thử lại.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tìm x thỏa mãn:

1. $\sqrt{x} = -2018$.
2. $\sqrt{x+1} - 1 = 2$.

Lời giải.

1. Vì $\sqrt{x} \geq 0$ và $-2018 < 0$ nên không tồn tại x thỏa mãn.
2. Điều kiện $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.
Khi đó $\sqrt{x+1} - 1 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 3 \Leftrightarrow x + 1 = 9 \Leftrightarrow x = 8$ (thỏa mãn điều kiện).
Vậy $x = 8$.

□

Ví dụ 2. Tìm x thỏa mãn

1. $\sqrt{x^2 + 5x + 20} = 4$.
2. $3 - \sqrt{x^2 + 5} = 4$.

Lời giải.

1. Ta có $x^2 + 5x + 20 = x^2 + 5x + \frac{25}{4} + \frac{55}{4} = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{55}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó
$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2 + 5x + 20} = 4 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 20 = 16 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+4) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -4. \end{array}\right. \end{aligned}$$
Vậy $x = -1$ hoặc $x = -4$.
2. Điều kiện $x^2 + 5 \geq 0$ (luôn đúng). Ta có
$$3 - \sqrt{x^2+5} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+5} = 3 - 4 = -1.$$
Vì $\sqrt{x^2+5} > 0$ còn $-1 < 0$ nên không tồn tại x thỏa mãn.

□

3 Luyện tập

Bài 1. Tìm căn bậc hai số học và căc bậc hai của các số sau:

1. 0,25.
2. 81.
3. 169.
4. 2,25.

Lời giải.

1. Vì $0{,}25 = 0{,}5^2$ nên căn bậc hai số học của 0,25 là 0,5 và căn bậc hai của 0,25 là $\pm 0{,}5$.
2. Vì $81 = 9^2$ nên căn bậc hai số học của 81 là 9 và căn bậc hai của 81 là ± 9.
3. Vì $169 = 13^2$ nên căn bậc hai số học của 169 là 13 và căn bậc hai của 169 là ± 13.
4. Vì $2{,}25 = 1{,}5^2$ nên căn bậc hai số học của 2,25 là 1,5 và căn bậc hai của 2,25 là $\pm 1{,}5$.

□

Bài 2. Rút gọn biểu thức:

1. $A = 2\sqrt{27} + 5\sqrt{12} - 3\sqrt{48}$.
2. $B = \sqrt{147} + \sqrt{54} - 4\sqrt{27}$.
3. $C = 3\sqrt{2}(4 - \sqrt{2}) + 3(1 - 2\sqrt{2})^2$.
4. $D = 2\sqrt{5} - \sqrt{125} - \sqrt{80} + \sqrt{605}$.

Lời giải.

1. $A = 2\sqrt{27} + 5\sqrt{12} - 3\sqrt{48} = 6\sqrt{3} + 10\sqrt{3} - 12\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.
2. $B = \sqrt{147} + \sqrt{75} - 4\sqrt{27} = 7\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 12\sqrt{3} = 0$.
3. $C = 3\sqrt{2}(4-\sqrt{2}) + 3(1-2\sqrt{2})^2 = 12\sqrt{2} - 6 + 3(1 - 4\sqrt{2} + 8) = 12\sqrt{2} - 6 + 27 - 12\sqrt{2} = 21$.
4. $D = 2\sqrt{5} - \sqrt{125} - \sqrt{80} + \sqrt{605} = 2\sqrt{5} - 5\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 11\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$.

□

Bài 3. So sánh các số sau:

1. 6 và $\sqrt{41}$.
2. $2\sqrt{27}$ và $\sqrt{147}$.
3. $-3\sqrt{5}$ và $-5\sqrt{3}$.
4. $2\sqrt{2} - 1$ và 2.

Lời giải.

1. Ta có $6 = \sqrt{36}$. Mà $36 < 41$ nên $6 < \sqrt{41}$.
2. Ta có $2\sqrt{27} = \sqrt{108}$. Mà $108 < 147$ nên $2\sqrt{27} < \sqrt{147}$.
3. Ta có $3\sqrt{5} = \sqrt{45}$ và $5\sqrt{3} = \sqrt{75}$. Mà $45 < 75$ nên $3\sqrt{5} < 5\sqrt{3} \Rightarrow -3\sqrt{5} > -5\sqrt{3}$.
4. Ta có $2\sqrt{2} - 1 = \sqrt{8} - 1$ và $2 = 3 - 1 = \sqrt{9} - 1$. Mà $8 < 9$ nên $2\sqrt{2} - 1 < 2$.

□

Bài 4. Tìm số thực x thỏa mãn:

1. $\sqrt{-2x^2-9}=2$.
2. $\sqrt{x^2+1}+2=0$.
3. $\sqrt{3x-1}=4$.
4. $\sqrt{-3x+4}=12$.
5. $\sqrt{(\sqrt{x}-7)(\sqrt{x}+7)}=2$.
6. $\sqrt{9(x-1)}-19=2$.

Lời giải.

1. Điều kiện xác định $-2x^2-9\geq 0$ (vô lí).
Vậy không tồn tại x thỏa mãn đề bài.

2. Điều kiện xác định $x^2+1\geq 0$ (luôn đúng).
Ta có $\sqrt{x^2+1}+2=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=-2$ (vô lí vì $\sqrt{x^2+1}>0$ với mọi x).
Vậy không tồn tại x thỏa mãn đề bài.

3. Điều kiện xác định $3x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \dfrac{1}{3}$.
Ta có $\sqrt{3x-1}=4 \Leftrightarrow 3x-1=16 \Leftrightarrow x=\dfrac{17}{3}$ (thỏa mãn điều kiện).
Vậy $x=\dfrac{17}{3}$.

4. Điều kiện xác định $-3x+4\geq 0 \Leftrightarrow x\leq \dfrac{4}{3}$.
Ta có $\sqrt{-3x+4}=12 \Leftrightarrow -3x+4=144 \Leftrightarrow x=-\dfrac{140}{3}$ (thỏa mãn điều kiện).
Vậy $x=-\dfrac{140}{3}$.

5. Điều kiện xác định $\begin{cases}x\geq 0\\(\sqrt{x}-7)(\sqrt{x}+7)\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 0\\x-49\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow x\geq 49$.
Ta có $\sqrt{(\sqrt{x}-7)(\sqrt{x}+7)}=2 \Leftrightarrow x-49=4 \Leftrightarrow x=53$ (thỏa mãn điều kiện).
Vậy $x=53$.

6. Điều kiện xác định $9(x-1)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$.
Ta có $\sqrt{9(x-1)}-19=2 \Leftrightarrow \sqrt{9(x-1)}=21 \Leftrightarrow 9(x-1)=441 \Leftrightarrow x-1=49 \Leftrightarrow x=50$ (thỏa mãn điều kiện).
Vậy $x=50$.

□

Bài 5. (*) Chứng minh rằng $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ.

Lời giải.

Giả sử $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ. Suy ra $\sqrt{2}=\dfrac{m}{n}$, trong đó $m,\ n\in\mathbb{N}^*$ và phân số $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản.

Khi đó $\sqrt{2}=\dfrac{m}{n} \Leftrightarrow 2=\left(\dfrac{m}{n}\right)^2 \Leftrightarrow m^2=2n^2$. (1)

Do $2n^2 \vdots 2$ nên $m^2 \vdots 2 \Rightarrow m \vdots 2 \Rightarrow m=2m_1, m_1\in\mathbb{N}^* \Rightarrow m^2=4m_1^2$.

Thay vào (1) suy ra $2n^2=4m_1^2 \Leftrightarrow n^2=2m_1^2 \vdots 2 \Rightarrow n^2 \vdots 2 \Rightarrow n \vdots 2$.

Do đó m,n cùng chia hết cho 2 nên phân số $\dfrac{m}{n}$ không tối giản, điều này mâu thuẫn với giả sử ở trên.

Vậy $\sqrt{2}$ là số vô tỉ. □

Bài 6. (*) Chứng minh rằng $\sqrt{5}$ là một số vô tỉ.

Lời giải.

Giả sử $\sqrt{5}$ là số hữu tỉ. Suy ra $\sqrt{5} = \dfrac{m}{n}$, trong đó m, $n \in \mathbb{N}^*$ và phân số $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản.
Khi đó $\sqrt{5} = \dfrac{m}{n} \Leftrightarrow 5 = \left(\dfrac{m}{n}\right)^2 \Leftrightarrow m^2 = 5n^2$. (1)
Do $5n^2 \,\vdots\, 5$ nên $m^2 \,\vdots\, 5 \Rightarrow m \,\vdots\, 5 \Rightarrow m = 5m_1, m_1 \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m^2 = 25m_1^2$.
Thay vào (1) suy ra $5n^2 = 25m_1^2 \Leftrightarrow n^2 = 5m_1^2 \,\vdots\, 5 \Rightarrow n^2 \,\vdots\, 5 \Rightarrow n \,\vdots\, 5$.
Do đó m, n cùng chia hết cho 5 nên phân số $\dfrac{m}{n}$ không tối giản, điều này mâu thuẫn với giả sử ở trên.
Vậy $\sqrt{5}$ là số vô tỉ.

□

§2 Căn thức bậc hai và hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

1 Tóm tắt lý thuyết

1. Ta có $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A \text{ nếu } A \geq 0 \\ -A \text{ nếu } A < 0. \end{cases}$

   ⚠ **6.** Cần phân biệt $\sqrt{A^2}$ với $\left(\sqrt{A}\right)^2$. Khi viết $\sqrt{A^2}$ thì A có thể là số âm. Khi viết $\left(\sqrt{A}\right)^2$ thì A phải là số không âm.

2. Điều kiện xác định (hay có nghĩa) của $\sqrt{A}$ là $A \geq 0$.

3. Cách giải các bất phương trình dạng $|x| \leq a$ và $|x| \geq a$ với $a > 0$ như sau

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a.$$
$$|x| \geq a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq a \\ x \leq -a. \end{array}\right.$$

2 Các dạng toán

Dạng 4. Tìm điều kiện để $\sqrt{A}$ xác định

Phương pháp giải

- ☑ $\sqrt{A}$ có nghĩa khi $A \geq 0$.
- ☑ $\dfrac{1}{\sqrt{A}}$ có nghĩa khi $A > 0$.

Kiến thức bổ sung: Chú ý rằng với a là số dương ta luôn có:

$$x^2 \leq a^2 \Leftrightarrow -a \leq x \leq a.$$
$$x^2 \geq a^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq a \\ x \leq -a. \end{array}\right.$$

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tìm x để căn thức $\sqrt{5-2x}$ có nghĩa.

Lời giải.

$\sqrt{5-2x}$ có nghĩa khi $5 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -5 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{5}{2}$. □

Ví dụ 2. Tìm x để căn thức $\sqrt{\dfrac{1}{x^2-4x+4}}$ có nghĩa.

Lời giải.

$\sqrt{\dfrac{1}{x^2-4x+4}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{1}{(x-2)^2}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow (x-2)^2>0 \Leftrightarrow x\neq 2$. □

Ví dụ 3. Với giá trị nào của x thì biểu thức $\sqrt{25-x^2}$ có nghĩa?

Lời giải.

$\sqrt{25-x^2}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 25-x^2\geq 0 \Leftrightarrow -x^2\geq -25 \Leftrightarrow x^2\leq 25 \Leftrightarrow |x|\leq 5 \Leftrightarrow -5\leq x\leq 5$. □

Ví dụ 4. Tìm các giá trị của x để biểu thức $\sqrt{\dfrac{1}{x^2-100}}$ có nghĩa.

Lời giải.

$\sqrt{\dfrac{1}{x^2-100}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow x^2-100>0 \Leftrightarrow x^2>100 \Leftrightarrow |x|>10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>10 \\ x<-10 \end{array}\right.$. □

Ví dụ 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để biểu thức $M=\sqrt{x+4}+\sqrt{2-x}$ có nghĩa?

Lời giải.

M có nghĩa khi $\begin{cases} x+4\geq 0 \\ 2-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -4 \\ x\leq 2. \end{cases}$

Vì $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{-4;-3;-2;-1;0;1;2\}$.

Vậy có 7 giá trị nguyên của x để biểu thức M có nghĩa. □

Dạng 5. Rút gọn biểu thức dạng $\sqrt{A^2}$

Đưa biểu thức dưới căn về dạng bình phương.

$$\sqrt{A^2}=|A|.$$

7. Điều kiện xác định của $\sqrt{A}$ là $A\geqslant 0$.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Rút gọn các biểu thức sau

1. $\sqrt{13+4\sqrt{3}}+2\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.
2. $(\sqrt{10}-\sqrt{2})\cdot\sqrt{3+\sqrt{5}}$.

Lời giải.

1. $\sqrt{13+4\sqrt{3}}+2\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{(1+2\sqrt{3})^2}+2\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}=1+2\sqrt{3}+2(2-\sqrt{3})=5$.
2. $(\sqrt{10}-\sqrt{2})\cdot\sqrt{3+\sqrt{5}}=(\sqrt{5}-1)\cdot\sqrt{6+2\sqrt{5}}=(\sqrt{5}-1)\cdot\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}=(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)=4$.

□

Ví dụ 2. Rút gọn các biểu thức sau

1. $\dfrac{a+b-2\sqrt{ab}}{a-b}$ với $a>b>0$.
2. $\dfrac{2}{x-1}\cdot\sqrt{\dfrac{x^2-2x+1}{4x^2}}$ với $0<x<1$.

Lời giải.

1. $\dfrac{a+b-2\sqrt{ab}}{a-b}=\dfrac{\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}}{a-b}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.
2. $\dfrac{2}{x-1}\cdot\sqrt{\dfrac{x^2-2x+1}{4x^2}}=\dfrac{2}{x-1}\sqrt{\dfrac{(x-1)^2}{(2x)^2}}=\dfrac{2}{x-1}\dfrac{|x-1|}{2|x|}$.
   Do $0<x<1$ nên $|x-1|=1-x; |x|=x$. Suy ra $\dfrac{2}{x-1}\dfrac{|x-1|}{2|x|}=-\dfrac{1}{x}$.

□

Ví dụ 3. Rút gọn các biểu thức sau:

1. $\sqrt{x^4-4x^2+4}-x^2$.
2. $\dfrac{\sqrt{x^4-2x^2+1}}{x+1}$, với $x>1$.

Lời giải.

1. $\sqrt{x^4+4x^2+4}-x^2=\sqrt{(x^2+2)^2}-x^2=x^2+2-x^2=2,\ (x^2+2>0)$.
2. Vì $x>1$ nên $\dfrac{\sqrt{x^4-2x^2+1}}{x+1}=\dfrac{\sqrt{(x^2-1)^2}}{x+1}=\dfrac{x^2-1}{x+1}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x+1}=x-1$.

□

3 Luyện tập

Bài 1. Với giá trị nào của x thì các căn thức sau có nghĩa

1. $\sqrt{-3x}$.
2. $\sqrt{2x-4}$.
3. $\sqrt{7-6x}$.
4. $\sqrt{-3x+2}$.

Lời giải.

1. $\sqrt{-3x}$ có nghĩa $\Leftrightarrow -3x\ge 0\Leftrightarrow x\le 0$.
2. $\sqrt{2x-4}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 2x-4\ge 0\Leftrightarrow 2x\ge 4\Leftrightarrow x\ge 2$.
3. $\sqrt{7-6x}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 7-6x\ge 0\Leftrightarrow 6x\le 7\Leftrightarrow x\le\dfrac{7}{6}$.
4. $\sqrt{-3x+2}$ có nghĩa $\Leftrightarrow -3x+2\ge 0\Leftrightarrow 3x\le 2\Leftrightarrow x\le\dfrac{2}{3}$.

□

Bài 2. Với giá trị nào của x thì các căn thức sau có nghĩa

1. $\dfrac{x}{x-2}+\sqrt{x-2}$. 2. $\dfrac{x}{x+2}+\sqrt{x-2}$. 3. $\sqrt{\dfrac{1}{3-2x}}$. 4. $\sqrt{\dfrac{-2}{x+1}}$.

Lời giải.

1. $\dfrac{x}{x-2}+\sqrt{x-2}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases}x-2\neq 0\\ x-2\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq 2\\ x\geq 2\end{cases} \Leftrightarrow x>2$.

2. $\dfrac{x}{x+2}+\sqrt{x-2}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases}x+2\neq 0\\ x-2\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq -2\\ x\geq 2\end{cases} \Leftrightarrow x\geq 2$.

3. $\sqrt{\dfrac{1}{3-2x}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \dfrac{1}{3-2x}\geq 0 \Leftrightarrow 3-2x>0 \Leftrightarrow x<\dfrac{3}{2}$.

4. $\sqrt{\dfrac{-2}{x+1}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \dfrac{-2}{x+1}\geq 0 \Leftrightarrow x+1<0 \Leftrightarrow x<-1$.

$\square$

Bài 3. (*) Với giá trị nào của x thì các căn thức sau có nghĩa

1. $\sqrt{\dfrac{4x^2}{3x-1}}$. 2. $\sqrt{\dfrac{2-3x}{4x^2}}$.

Lời giải.

1. $\sqrt{\dfrac{4x^2}{3x-1}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \dfrac{4x^2}{3x-1}\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2\geq 0\\ 3x-1>0\end{cases}\\ \begin{cases}x^2=0\\ 3x-1\neq 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\forall x\in\mathbb{R}\\ x>\dfrac{1}{3}\end{cases}\\ \begin{cases}x=0\\ x\neq\dfrac{1}{3}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>\dfrac{1}{3}\\ x=0.\end{array}\right.$

2. $\sqrt{\dfrac{2-3x}{4x^2}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \dfrac{2-3x}{4x^2}\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq 0\\ 2-3x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq 0\\ x\leq\dfrac{2}{3}.\end{cases}$

$\square$

Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau

1. $\sqrt{11-6\sqrt{2}}-\sqrt{11+6\sqrt{2}}$.

2. $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}$.

3. $\left(2+\sqrt{7}\right)\sqrt{11-4\sqrt{7}}$.

4. $\sqrt{\left(3+\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}$.

5. $\sqrt{9-3\sqrt{8}}-\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

6. $\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

Lời giải.

1. $\sqrt{9+2-2\cdot 3\cdot \sqrt{2}}-\sqrt{9+2+2\cdot 3\cdot \sqrt{2}}=\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}-\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}=3-\sqrt{2}-3-\sqrt{2}=-2\sqrt{2}$.
2. $\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}+\sqrt{9+5-2\cdot 3\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2+\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}=\sqrt{5}-2+3-\sqrt{5}=1$.
3. $(2+\sqrt{7})\sqrt{7+4-2\cdot 2\sqrt{7}}=(2+\sqrt{7})\sqrt{(\sqrt{7}-2)^2}=(\sqrt{7}+2)(\sqrt{7}-2)=7-4=3$.
4. $3+\sqrt{2}+\sqrt{4+2-2\cdot 2\sqrt{2}}=3+\sqrt{2}+\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}=3+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=5$.
5. $\sqrt{9-3\sqrt{8}}-\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$
$=\sqrt{6+3-2\sqrt{6}\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+\sqrt{3+2-2\sqrt{3}\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{8-4\sqrt{3}}}{2}$
$=\sqrt{\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)^2}-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}-\dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}}{2}$
$=\sqrt{6}-\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$
$=0$.
6. $\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}}+\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$
$=\dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3+\sqrt{3}}+\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3-\sqrt{3}}=\dfrac{\left(2\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)+\left(2\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)}{\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)}$
$=\dfrac{6\sqrt{2}-2\sqrt{6}-3\sqrt{6}+3\sqrt{2}+6\sqrt{2}+2\sqrt{6}+3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)}=3\sqrt{2}$.

□

Bài 5. Cho các biểu thức

$$A=\sqrt{20a+92+\sqrt{a^4+16a^2+64}}$$
$$B=a^4+20a^3+100a^2$$

1. Rút gọn A.
2. Tìm a để $A+B=0$.

Lời giải.

1. $A=\sqrt{20a+92+\sqrt{(a^2+8)^2}}=\sqrt{(a+10)^2}=|a+10|$.
2. $A+B=|a+10|+a^2\cdot(a+10)^2=0\Leftrightarrow a=-10$.

□

Bài 6. Rút gọn các biểu thức sau

1. $\sqrt{19-8\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.
2. $\sqrt{12+3\sqrt{3}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}}-2\sqrt{3}$.

Lời giải.

1. $\sqrt{19-8\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{\left(4-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=4-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1=3.$

2. $\sqrt{12+3\sqrt{3}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}}-2\sqrt{3}=\sqrt{12+3\sqrt{3}+\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}}-2\sqrt{3}.$
$=\sqrt{12+3\sqrt{3}+1+\sqrt{3}}-2\sqrt{3}=\sqrt{13+4\sqrt{3}}-2\sqrt{3}.$
$=\sqrt{\left(2\sqrt{3}+1\right)^2}-2\sqrt{3}=2\sqrt{3}+1-2\sqrt{3}=1.$

□

Bài 7. Rút gọn các biểu thức sau

1. $\frac{1}{2}\sqrt{12-8\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}-4\sqrt{2}.$
2. $\sqrt{10+4\sqrt{6}}.$

Lời giải.

1. $\frac{1}{2}\sqrt{12-8\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}-4\sqrt{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(2\sqrt{2}-2\right)^2}+\sqrt{\left(3-2\sqrt{2}\right)^2}-4\sqrt{2}.$
$=\frac{1}{2}\left|2\sqrt{2}-2\right|+\left|3-2\sqrt{2}\right|-4\sqrt{2}=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}-2\right)+3-2\sqrt{2}-4\sqrt{2}=-5\sqrt{2}+2.$

2. $\sqrt{10+4\sqrt{6}}=\sqrt{\left(\sqrt{6}+2\right)^2}=\sqrt{6}+2.$

□

Bài 8. Rút gọn các biểu thức sau

1. $\dfrac{\sqrt{4x^2+4x+1}}{4x^2-1}$ với $x>-\frac{1}{2}.$
2. $9+x+\sqrt{4-4x+x^2}$ với $x<2.$

Lời giải.

1. $A=\dfrac{\sqrt{4x^2+4x+1}}{4x^2-1}=\dfrac{\sqrt{(2x+1)^2}}{(2x+1)(2x-1)}=\dfrac{|2x+1|}{(2x+1)(2x-1)}.$
Do $x>-\frac{1}{2}$ nên $2x+1>0$. Suy ra $A=\dfrac{2x+1}{(2x+1)(2x-1)}=\dfrac{1}{2x-1}.$

2. $B=9+x+\sqrt{4-4x+x^2}=9+x+\sqrt{(2-x)^2}=9+x+|2-x|.$
Do $x<2$ nên $2-x>0$. Suy ra $B=9+x+2-x=11.$

□

Bài 9. Tính

1. $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}.$
2. $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\sqrt{\dfrac{2}{4-\sqrt{15}}}+6\sqrt{\dfrac{1}{3}}.$

Lời giải.

1. $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1+\sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2}-1+3-\sqrt{2}=2.$

2. $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\sqrt{\dfrac{2}{4-\sqrt{15}}}+6\sqrt{\dfrac{1}{3}}=\dfrac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2}-\sqrt{2\left(4+\sqrt{15}\right)}+\dfrac{6\sqrt{3}}{3}$
$=\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{8+2\sqrt{15}}+2\sqrt{3}=\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{5}+\sqrt{3}-\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)=0.$

□

Bài 10. Giải phương trình

1. $\sqrt{x^2} = 1$.
2. $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 3$.

Lời giải.

1. $\sqrt{x^2} = 1 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.
2. $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(2x-1)^2} = 3 \Leftrightarrow |2x - 1| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1. \end{array}\right.$

□

§3 Liên hệ giữa phép nhân và phép khai phương

1 Tóm tắt lý thuyết

Định lí 2. Với hai số a và b không âm, ta có $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Hệ quả 1. Muốn khai phương một tích của các số không âm, ta có thể khai phương từng thừa số rồi nhân các kết quả với nhau.

Hệ quả 2. Muốn nhân các căn bậc hai của các số không âm, ta có thể nhân các số dưới dấu căn với nhau rồi khai phương kết quả đó.

Hệ quả 3. Với hai biểu thức A và B không âm, ta có $\sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$. Đặc biệt, với biểu thức A không âm, ta có $\left(\sqrt{A}\right)^2 = \sqrt{A^2} = A$.

2 Các dạng toán

Dạng 6. Khai phương một tích

Phương pháp giải

Áp dụng định lý: Với hai số a và b không âm, ta có $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

⚠ **8.** Định lý trên có thể mở rộng cho tích của nhiều số không âm như sau:

Với $n \geq 2$ và các số $a_1, a_2, \ldots, a_n$ không âm, ta có $\sqrt{a_1 a_2 \cdots a_n} = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdots \sqrt{a_n}$.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tính

1. $\sqrt{27 \cdot 75}$;
2. $\sqrt{200 \cdot 18}$;
3. $\sqrt{160 \cdot 12{,}1}$;
4. $\sqrt{3{,}6 \cdot 25{,}6}$.

Lời giải.

1. $\sqrt{27 \cdot 75} = \sqrt{9 \cdot 9 \cdot 25} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{25} = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 45$.
2. $\sqrt{200 \cdot 18} = \sqrt{100 \cdot 4 \cdot 9} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 10 \cdot 2 \cdot 3 = 60$.
3. $\sqrt{160 \cdot 12{,}1} = \sqrt{16 \cdot 100 \cdot 1{,}21} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{100} \cdot \sqrt{1{,}21} = 4 \cdot 10 \cdot 1{,}1 = 44$.
4. $\sqrt{3{,}6 \cdot 25{,}6} = \sqrt{0{,}36 \cdot 100 \cdot 2{,}56} = \sqrt{0{,}36} \cdot \sqrt{100} \cdot \sqrt{2{,}56} = 0{,}6 \cdot 10 \cdot 1{,}6 = 9{,}6$.

□

Ví dụ 2. 1. Cho a và b là các số âm. Chứng minh rằng $\sqrt{ab} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$.

2. Áp dụng tính $\sqrt{(-81) \cdot (-36) \cdot 0{,}25}$.

Lời giải.

1. Ta có $\sqrt{ab} = \sqrt{(-a) \cdot (-b)} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$.
2. $\sqrt{(-81) \cdot (-36) \cdot 0{,}25} = \sqrt{(-81) \cdot (-36)} \cdot \sqrt{0{,}25} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{36} \cdot \sqrt{0{,}25} = 9 \cdot 6 \cdot 0{,}5 = 27$.

□

Dạng 7. Nhân các căn bậc hai

Phương pháp giải

Áp dụng quy tắc: Muốn nhân các căn bậc hai của các số không âm, ta có thể nhân các số dưới dấu căn với nhau rồi khai phương kết quả đó.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tính

1. $\sqrt{45} \cdot \sqrt{180}$;
2. $\sqrt{7} \cdot \sqrt{105}$;
3. $\sqrt{250} \cdot \sqrt{0,9}$;
4. $\sqrt{8} \cdot \sqrt{162}$.

Lời giải.

1. $\sqrt{45} \cdot \sqrt{180} = \sqrt{45 \cdot 180} = \sqrt{8100} = 90$.
2. $\sqrt{7} \cdot \sqrt{175} = \sqrt{7 \cdot 175} = \sqrt{1225} = 35$.
3. $\sqrt{250} \cdot \sqrt{0,9} = \sqrt{250 \cdot 0{,}9} = \sqrt{225} = 15$.
4. $\sqrt{8} \cdot \sqrt{162} = \sqrt{8 \cdot 162} = \sqrt{1296} = 36$.

□

Dạng 8. Rút gọn, tính giá trị biểu thức

Phương pháp giải

Kết hợp các hằng đẳng thức đáng nhớ và các quy tắc khai phương và nhân các căn bậc hai.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tính

1. $\sqrt{10{,}6^2 - 5{,}6^2}$;
2. $\sqrt{29 + 12\sqrt{5}} + \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}$;
3. $\dfrac{\sqrt{10} + \sqrt{26}}{2\sqrt{5} + \sqrt{52}}$;
4. $\left(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}\right)\left(1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$;
5. $\left(\sqrt{5 + \sqrt{21}} + \sqrt{5 - \sqrt{21}}\right)^2$;
6. $\dfrac{3\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6} + \sqrt{16}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{4}}$.

Lời giải.

1. $\sqrt{5{,}3^2-2{,}8^2}=\sqrt{8{,}1\cdot 2{,}5}=\sqrt{81\cdot 100\cdot 0{,}25}=9\cdot 10\cdot 0{,}5=45.$
2. $\sqrt{29+12\sqrt{5}}+\sqrt{29-12\sqrt{5}}=\sqrt{\left(3+2\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(3-2\sqrt{5}\right)^2}$
$$=\left(3+2\sqrt{5}\right)+\left(2\sqrt{5}-3\right)=4\sqrt{5}.$$
3. $\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{26}}{2\sqrt{5}+\sqrt{52}}=\dfrac{\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{13}\right)}{2\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{13}\right)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$
4. $\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)=1-\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2=1-\left(5-2\sqrt{6}\right)=2\sqrt{6}-4.$
5. $\left(\sqrt{5+\sqrt{21}}+\sqrt{5-\sqrt{21}}\right)^2=5+\sqrt{21}+2\cdot\sqrt{5+\sqrt{21}}\cdot\sqrt{5-\sqrt{21}}+5-\sqrt{21}$
$$=10+2\sqrt{\left(5+\sqrt{21}\right)\left(5-\sqrt{21}\right)}$$
$$=10+2\sqrt{4}=14.$$
6. $\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}+\sqrt{16}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{4}}=\dfrac{\sqrt{4}-\sqrt{6}+\sqrt{8}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{4}}$
$$=\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{4}}$$
$$=\sqrt{2}+1.$$

□

Ví dụ 2. Rút gọn các biểu thức

1. $A=\sqrt{(a-1)^2(2a+1)^2}$ với $a>1$;
2. $B=\sqrt{(b-1)(b+7)+16}$ với $b<-3$;
3. $C=\sqrt{c^2+10c+25}-\sqrt{c^2-10c+5}$ với $-5\le c\le 5$;
4. $D=\dfrac{1-d}{\sqrt{d^2-2d+1}}+\dfrac{\sqrt{d^2-4d+4}}{d-2}$ với $d>2$.

Lời giải.

1. $A=\sqrt{(a-1)^2}\cdot\sqrt{(2a+1)^2}=(a-1)(2a+1).$
2. $B=\sqrt{b^2+6b+9}=\sqrt{(b+3)^2}=-(b+3).$
3. $C=\sqrt{(c+5)^2}-\sqrt{(c-5)^2}=(c+5)-(5-c)=2c.$
4. $D=\dfrac{1-d}{\sqrt{(d-1)^2}}+\dfrac{\sqrt{(d-2)^2}}{d-2}=\dfrac{1-d}{d-1}+\dfrac{d-2}{d-2}=(-1)+1=0.$

□

Dạng 9. Phân tích biểu thức chứa căn thành nhân tử

Phương pháp giải
Kết hợp các hằng đẳng thức đáng nhớ và các quy tắc khai phương và nhân các căn bậc hai.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Phân tích các biểu thức sau thành nhân tử

1. $A=\sqrt{x^2-16}+\sqrt{x^2-4x}$ với $x>4$;
2. $B=\sqrt{x^3-8}+\sqrt{x(x+2)+4}$ với $x>2$;
3. $C=\sqrt{4x^2+4x+1}-\sqrt{4x^2+4x}$ với $x>0$.

Lời giải.

1. $$\begin{aligned}A&=\sqrt{x^2-16}+\sqrt{x^2-4x}\\&=\sqrt{x-4}\cdot\sqrt{x+4}+\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-4}\\&=\sqrt{x-4}\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x}\right).\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}B&=\sqrt{x^3-8}+\sqrt{x(x+2)+4}\\&=\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x^2+2x+4}+\sqrt{x^2+2x+4}\\&=\sqrt{x^2+2x+4}\left(\sqrt{x-2}+1\right).\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}C&=\sqrt{4x^2+4x+1}-\sqrt{4x^2+4x}\\&=\sqrt{(2x+1)^2}-\sqrt{4x(x+1)}\\&=2x+1+2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}\\&=\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)^2.\end{aligned}$$

□

Dạng 10. Giải phương trình

Phương pháp giải

- Xác định điều kiện phương trình.
- Dùng các hằng đẳng thức và tính chất của dấu giá trị tuyệt đối.
- Phân tích đa thức thành nhân tử.

Một số công thức cần lưu ý.

- $\sqrt{A^2}=|A|$.
- $A^2=B^2\Leftrightarrow A=\pm B$.
- $\sqrt{A}=\sqrt{B}\Leftrightarrow\begin{cases}A\ge 0 \quad (\text{hoặc } B\ge 0)\\A=B.\end{cases}$
- $\sqrt{A}=B\Leftrightarrow\begin{cases}B\ge 0\\A=B^2.\end{cases}$
- $\sqrt{A}+\sqrt{B}=0\Leftrightarrow\begin{cases}A=0\\B=0.\end{cases}$
- $|A|=B\Leftrightarrow\begin{cases}A\ge 0\\A=B\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}A<0\\A=-B.\end{cases}$
- $|A|=B\Leftrightarrow\begin{cases}B\ge 0\\A=B \text{ hoặc } A=-B.\end{cases}$
- $|A|=|B|\Leftrightarrow A=B$ hoặc $A=-B$.
- $|A|+|B|=0\Leftrightarrow\begin{cases}A=0\\B=0.\end{cases}$

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

1. $\sqrt{(x-1)^2} = 3 - x$;
2. $\sqrt{2x+5} = \sqrt{1-x}$;
3. $\sqrt{x^2-4x+3} = x - 3$;
4. $\sqrt{x^2-4} + \sqrt{x^2+4x+4} = 0$.

Lời giải.

1. $\sqrt{(x-1)^2} = 3 - x \Leftrightarrow |x-1| = 3 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x - 1 = 3 - x \\ x - 1 = -(3-x) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$

2. $\sqrt{2x+5} = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ 2x + 5 = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 3x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\dfrac{4}{3}.$

3. $\sqrt{x^2-4x+3} = x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 = (x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 2x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$

4. $\sqrt{x^2-4} + \sqrt{x^2+4x+4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ x^2 + 4x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-2) = 0 \\ (x+2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2.$

□

3 Luyện tập

Bài 1. Rút gọn các biểu thức sau

1. $\sqrt{48} - 2\sqrt{75} + \sqrt{108} - \dfrac{1}{7}\sqrt{147}$;
2. $\left(\sqrt{44} + \sqrt{11}\right)\sqrt{11}$;
3. $\sqrt{24} - 6\sqrt{\dfrac{1}{6}} - \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$;
4. $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} - \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$;
5. $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$;
6. $\left(2 + \sqrt{7}\right)\sqrt{11 - 4\sqrt{7}}$;
7. $\sqrt{\left(3+\sqrt{2}\right)^2} + \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}$;
8. $\sqrt{9 - 3\sqrt{8}} - \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

Lời giải.

1. $$\begin{aligned} \sqrt{48} - 2\sqrt{75} + \sqrt{108} - \frac{1}{7}\sqrt{147} &= 4\sqrt{3} - 2\cdot 5\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - \frac{1}{7}\cdot 7\sqrt{3} \\ &= \sqrt{3}\left(4 - 2\cdot 5 + 6 - \frac{1}{7}\cdot 7\right) = -\sqrt{3}. \end{aligned}$$

2. $\left(\sqrt{44} + \sqrt{11}\right)\sqrt{11} = \left(2\sqrt{11} + \sqrt{11}\right)\sqrt{11} = 3\sqrt{11}\cdot\sqrt{11} = 3\cdot 11 = 33.$

3. $\sqrt{24} - 6\sqrt{\dfrac{1}{6}} - \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{6} - \sqrt{6} - \sqrt{6} = 0.$

4. $\sqrt{11-6\sqrt{2}}-\sqrt{11+6\sqrt{2}}=\sqrt{9+2-2\cdot 3\cdot\sqrt{2}}-\sqrt{9+2+2\cdot 3\cdot\sqrt{2}}$
$=\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}-\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}$
$=3-\sqrt{2}-\left(3+\sqrt{2}\right)=-2\sqrt{2}.$

5. $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)^2}+\sqrt{9+5-2\cdot 3\sqrt{5}}$
$=\sqrt{5}-2+\sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)^2}$
$=\sqrt{5}-2+3-\sqrt{5}=1.$

6. $\left(2+\sqrt{7}\right)\sqrt{11-4\sqrt{7}}=(2+\sqrt{7})\sqrt{7+4-2\cdot 2\sqrt{7}}$
$=\left(2+\sqrt{7}\right)\sqrt{\left(\sqrt{7}-2\right)^2}$
$=\left(\sqrt{7}+2\right)\left(\sqrt{7}-2\right)=7-4=3.$

7. $\sqrt{\left(3+\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}=3+\sqrt{2}+\sqrt{4+2-2\cdot 2\sqrt{2}}$
$=3+\sqrt{2}+\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}$
$=3+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=5.$

8. $\sqrt{9-3\sqrt{8}}-\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$
$=\sqrt{6+3-2\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+\sqrt{3+2-2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{8-4\sqrt{3}}}{2}$
$=\sqrt{\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)^2}-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}-\dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}}{2}$
$=\sqrt{6}-\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}=0.$

□

Bài 2. Rút gọn các biểu thức sau

1. $A=x+3+\sqrt{x^2-6x+9}$, $(x\le 3)$.
2. $B=|x-2|+\dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}$, $(x<2)$.
3. $C=\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{x^2}$, $(-2\le x\le 0)$.
4. $D=2x-1-\dfrac{\sqrt{x^2-10x+25}}{x-5}$.

Lời giải.

1. $A=x+3+\sqrt{x^2-6x+9}=x+3+|x-3|=x+3+(3-x)=6.$
2. $B=|x-2|+\dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}=-(x-2)+\dfrac{|x-2|}{x-2}=-x+2+\dfrac{2-x}{x-2}=-x+1.$
3. $C=\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{x^2}=|x+2|+|x|=x+2-x=2.$
4. $D=2x-1-\dfrac{\sqrt{x^2-10x+25}}{x-5}=2x-1-\dfrac{|x-5|}{x-5}$

- Với $x \geq 5$ thì $D = 2x - 1 - \dfrac{x-5}{x-5} = 2x - 1 - 1 = 2x - 2$.
- Với $x < 5$ thì $D = 2x - 1 - \dfrac{-(x-5)}{x-5} = 2x - 1 + 1 = 2x$.

□

Bài 3. Giải các phương trình sau

1. $\sqrt{1 - 12x + 36x^2} = 5$.
2. $\sqrt{x^2 - x - 6} = \sqrt{x-3}$.
3. $|3x+1| = |x+1|$.
4. $|x^2 - 1| + |x+1| = 0$.

Lời giải.

1. $\sqrt{1 - 12x + 36x^2} = 5 \Leftrightarrow |1 - 6x| = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - 6x = 5 \\ 1 - 6x = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{2}{3} \\ x = 1 \end{array}\right.$.

2. $\sqrt{x^2 - x - 6} = \sqrt{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x^2 - x - 6 = x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$

3. $|3x+1| = |x+1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x + 1 = x + 1 \\ 3x + 1 = -(x+1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

4. $|x^2 - 1| + |x+1| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$

□

§4 Liên hệ giữa phép chia và phép khai phương

1 Tóm tắt lý thuyết

Định lí 3. Với $A \geq 0, B > 0$ thì $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$.

2 Các dạng toán

Dạng 11. Khai phương một thương

Quy tắc. Muốn khai phương một thương $\dfrac{A}{B}$ của hai biểu thức $A \geq 0, B > 0$, ta có thể khai phương lần lượt biểu thức bị chia A và biểu thức chia B. Sau đó lấy kết quả thứ nhất chia cho kết quả thứ hai.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tính:

1. $A = \sqrt{\dfrac{49}{81}}$;
2. $B = \dfrac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$.

Lời giải.

1. Ta có $A = \sqrt{\dfrac{49}{81}} = \dfrac{\sqrt{49}}{\sqrt{81}} = \dfrac{7}{9}$.
2. Ta có

$$B = \sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\dfrac{6+2\sqrt{5}}{4}} = \dfrac{\sqrt{5+2\sqrt{5}+1}}{\sqrt{4}} = \dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

□

Ví dụ 2. Rút gọn các biểu thức:

1. $A = \sqrt{\dfrac{a^2}{b}} \cdot \sqrt{\dfrac{a^6}{b^3}}$, với $b > 0$;
2. $B = b^5\sqrt{\dfrac{a^2+6a+9}{b^8}}$.

Lời giải.

1. Ta sử dụng quy tắc nhân hai căn bậc hai rồi biến đổi tiếp

$$A = \sqrt{\dfrac{a^2}{b}} \cdot \sqrt{\dfrac{a^6}{b^3}} = \sqrt{\dfrac{a^2}{b} \cdot \dfrac{a^6}{b^3}} = \sqrt{\dfrac{a^8}{b^4}} = \dfrac{\sqrt{a^8}}{\sqrt{b^4}} = \dfrac{a^4}{b^2}.$$

2. Ta biến đổi

$$B = b^5 \cdot \sqrt{\frac{(a+3)^2}{b^8}} = b^5 \cdot \frac{\sqrt{(a+3)^2}}{\sqrt{b^8}} = b^5 \cdot \frac{|a+3|}{b^4} = b \cdot |a+3|$$
$$= \begin{cases} b \cdot (a+3) \text{ nếu } a \geq -3 \\ -b \cdot (a+3) \text{ nếu } a < -3. \end{cases}$$

□

Dạng 12. Chia các căn bậc hai

Phương pháp giải:
Quy tắc chia hai căn thức bậc hai: Muốn chia căn bậc hai của biểu thức không âm A cho căn bậc hai của số dương B, ta có thể chia biểu thức A cho biểu thức B rồi lấy căn bậc hai của thương đó.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Thực hiện phép tính:

1. $A = \sqrt{98} \colon \sqrt{2}$;
2. $B = \left(\sqrt{48} - \sqrt{27} + \sqrt{3}\right) : \sqrt{3}$;
3. $C = \left(5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}\right) : \sqrt{15}$.

Lời giải.

1. Ta có $A = \sqrt{98} \colon \sqrt{2} = \sqrt{98 \colon 2} = \sqrt{49} = 7$.
2. Ta có $B = \left(\sqrt{48} - \sqrt{27} + \sqrt{3}\right) : \sqrt{3} = \sqrt{48 : 3} - \sqrt{27 : 3} + \sqrt{3 : 3} = \sqrt{16} - \sqrt{9} + 1 = 2$.
3. $C = \left(5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}\right) : \sqrt{15} = \left(5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}\right) : \left(\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}\right) = \dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}} + \dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$.

□

Dạng 13. Rút gọn, tính giá trị biểu thức

Ta sử dụng tính chất

$$\text{Với } a \geq 0 \text{ và } b > 0 \text{ thì ta có } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

⚠ **9.** Chú ý khi giải bài dạng này phải xét trong điều kiện có nghĩa của biểu thức chứa căn.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Rút gọn các biểu thức sau:

1. $\sqrt{\dfrac{(x-1)^2}{16}}$ với $x \geq 1$;
2. $\sqrt{\dfrac{x^4}{(a-1)^2}}$ với $a < 1$.

Lời giải.

1. Vì $(x-1)^2 \geq 0$ và $16 > 0$ nên ta có

$$\sqrt{\frac{(x-1)^2}{16}} = \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{\sqrt{16}} = \frac{|x-1|}{4} \stackrel{\text{vì } x\geq 1}{=} \frac{x-1}{4}.$$

2. Vì $x^4 \geq 0$ và $(a-1)^2 > 0$ nên ta có

$$\sqrt{\frac{x^4}{(a-1)^2}} = \frac{\sqrt{x^4}}{\sqrt{(a-1)^2}} = \frac{x^2}{|a-1|} \stackrel{\text{vì } a<1}{=} \frac{x^2}{1-a}.$$

□

Ví dụ 2. Rút gọn các biểu thức sau:

1. $\dfrac{\sqrt{27(x-5)^2}}{\sqrt{3}}$ với $x \geq 5$;
2. $\dfrac{\sqrt{(x-4)^4}}{\sqrt{9(x-4)^2}}$ với $x < 4$.

Lời giải.

1. Với $x \geq 5$ ta có

$$\frac{\sqrt{27(x-5)^2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{27(x-5)^2}{3}} = \sqrt{9(x-5)^2} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{(x-5)^2} = 3\cdot|x-5| \stackrel{\text{vì } x\geq 5}{=} 3(x-5).$$

2. Với $x < 4$ ta có

$$\frac{\sqrt{(x-4)^4}}{\sqrt{9(x-4)^2}} = \sqrt{\frac{(x-4)^4}{9(x-4)^2}} = \sqrt{\frac{(x-4)^2}{9}} = \frac{\sqrt{(x-4)^2}}{\sqrt{9}} = \frac{|x-4|}{3} \stackrel{\text{vì } x<4}{=} \frac{4-x}{3}.$$

□

Ví dụ 3. Rút gọn biểu thức với điều kiện đã cho và tính giá trị của nó:

1. $\sqrt{\dfrac{x-2\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}+1}}$ với $x \geq 0$; tính giá trị tại $x = 4$.
2. $\sqrt{\dfrac{(x-2)^4}{(3-x)^2}} + \dfrac{x^2-1}{x-3}$ với $x < 3$; tính giá trị tại $x = 0{,}5$.

Lời giải.

1. Với $x \geq 0$ ta có

$$\sqrt{\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}+1}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}+1)^2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{x}-1)^2}}{\sqrt{(\sqrt{x}+1)^2}} = \frac{|\sqrt{x}-1|}{|\sqrt{x}+1|} = \frac{|\sqrt{x}-1|}{\sqrt{x}+1}.$$

Thay $x = 4$ vào ta có

$$\frac{|\sqrt{4}-1|}{\sqrt{4}+1} = \frac{1}{3}.$$

2. Với $x<3$ ta có

$$\sqrt{\frac{(x-2)^4}{(3-x)^2}}+\frac{x^2-1}{x-3}=\frac{\sqrt{(x-2)^4}}{\sqrt{(3-x)^2}}+\frac{x^2-1}{x-3}=\frac{(x-2)^2}{|3-x|}+\frac{x^2-1}{x-3}$$
$$=\frac{x^2-4x+4}{3-x}-\frac{x^2-1}{3-x}$$
$$=\frac{-4x+5}{3-x}.$$

Thay $x=0{,}5$ vào ta có

$$\frac{-4\cdot 0{,}5+5}{3-0{,}5}=\frac{6}{5}.$$

□

Dạng 14. Giải phương trình

Tìm điều kiện của biểu thức có mặt trong phương trình.
Thu gọn trong điều kiện của biến sau đó giải phương trình.

⚠ **10.** Chú ý khi giải bài dạng này phải xét điều kiện có nghĩa của biểu thức chứa căn và cuối cùng phải đối chiếu nghiệm tìm được với điều kiện.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tìm x thỏa mãn điều kiện:

1. $\sqrt{\dfrac{(x-1)^4}{x^2-2x+1}}=2$;
2. $\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-x}}=3$.

Lời giải.

1. Điều kiện là $\dfrac{(x-1)^4}{x^2-2x+1}\ge 0$. Vì $(x-1)^4\ge 0$ với mọi x nên điều kiện là $x^2-2x+1>0$ hay $(x-1)^2>0$ nghĩa là $x\ne 1$. Khi đó ta có

$$\sqrt{\frac{(x-1)^4}{x^2-2x+1}}=2\Leftrightarrow\sqrt{\frac{(x-1)^4}{(x-1)^2}}=2\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2}=2\Leftrightarrow|x-1|=2.$$

Ta xét hai trường hợp:

TH1: $x-1=2$ hay $x=3$;

TH2: $x-1=-2$ hay $x=-1$.

Đối chiếu điều kiện ta nhận $x=3$ và $x=-1$.

2. Điều kiện là $x-1\ge 0$ và $x^2-x>0$. Vì $x^2-x=x(x-1)$ nên điều kiện sẽ là $x-1>0$ và $x>0$. Từ đó suy ra điều kiện là $x>1$. Khi đó ta có

$$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-x}}=3\Leftrightarrow\sqrt{\frac{x-1}{x^2-x}}=3\Leftrightarrow\sqrt{\frac{1}{x}}=3\Leftrightarrow\sqrt{x}=\frac{1}{3}.$$

Sử dụng định nghĩa của căn bậc hai số học ta có

$$x=\frac{1}{9}.$$

Đối chiếu điều kiện ta loại $x=\dfrac{1}{9}$. Vậy không có giá trị x thỏa mãn đề bài.

□

Ví dụ 2. Tìm x thỏa mãn điều kiện:

1. $\sqrt{\dfrac{2x-3}{x-1}}=2$;
2. $\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3x-4}}=1$.

Lời giải.

1. Điều kiện $\dfrac{2x-3}{x-1}\geq 0$, nghĩa là x thỏa mãn một trong hai trường hợp sau:

   TH1. $2x-3\geq 0$ và $x-1>0$, ta tìm được $x\geq \dfrac{3}{2}$;

   TH2. $2x-3\leq 0$ và $x-1<0$, ta tìm được $x<1$.

   Khi đó ta có
   $$\sqrt{\dfrac{2x-3}{x-1}}=2\Rightarrow \dfrac{2x-3}{x-1}=4\Rightarrow 2x-3=4x-4\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}.$$
   Đối chiếu điều kiện ta thấy $x=\dfrac{1}{2}$ thỏa mãn.

2. Điều kiện là $x-2\geq 0$ và $3x-4>0$, suy ra $x\geq 2$ là điều kiện. Khi đó
   $$\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3x-4}}=1\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{x-2}{3x-4}}=1\Rightarrow \dfrac{x-2}{3x-4}=1\Rightarrow x=1.$$
   Đối chiếu điều kiện ta loại $x=1$. Vậy không có giá trị x thỏa mãn đề bài.

□

3 Luyện tập

Bài 1. Áp dụng quy tắc khai phương một thương, hãy tính

1. $\sqrt{\dfrac{121}{9}}$;
2. $\sqrt{\dfrac{144}{169}}$;
3. $\sqrt{3\dfrac{6}{25}}$;
4. $\sqrt{4\dfrac{21}{25}}$.

Lời giải.

1. $\sqrt{\dfrac{121}{9}}=\dfrac{\sqrt{121}}{\sqrt{9}}=\dfrac{11}{3}$.
2. $\sqrt{\dfrac{144}{169}}=\dfrac{\sqrt{144}}{\sqrt{169}}=\dfrac{12}{13}$.
3. $\sqrt{3\dfrac{6}{25}}=\sqrt{\dfrac{81}{25}}=\dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{25}}=\dfrac{9}{5}$.
4. $\sqrt{4\dfrac{21}{25}}=\sqrt{\dfrac{121}{25}}=\dfrac{\sqrt{121}}{\sqrt{25}}=\dfrac{11}{5}$.

□

Bài 2. Áp dụng quy tắc chia hai căn bậc hai, hãy tính

1. $\dfrac{\sqrt{999}}{\sqrt{444}}$;
2. $\dfrac{\sqrt{160}}{\sqrt{0{,}4}}$;
3. $\dfrac{\sqrt{9+6\sqrt{2}}}{\sqrt{3}}$;
4. $\sqrt{2+\sqrt{3}}:\sqrt{\dfrac{1}{2}}$.

Lời giải.

1. $\dfrac{\sqrt{999}}{\sqrt{444}}=\sqrt{\dfrac{999}{444}}=\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}=\dfrac{3}{2}$.
2. $\dfrac{\sqrt{160}}{\sqrt{0{,}4}}=\sqrt{\dfrac{160}{0{,}4}}=\sqrt{\dfrac{1600}{4}}=\dfrac{\sqrt{1600}}{\sqrt{4}}=\dfrac{40}{2}=20$.
3. $\dfrac{\sqrt{9+6\sqrt{2}}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{9+6\sqrt{2}}{3}}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}=\sqrt{2}+1$;
4. $\sqrt{2+\sqrt{3}}:\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right):\dfrac{1}{2}}=\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}=\sqrt{3}+1$.

□

Bài 3. Rút gọn các biểu thức sau

1. $\sqrt{1\dfrac{9}{16}\cdot 5\dfrac{4}{9}\cdot 0{,}01}$;
2. $\sqrt{\dfrac{165^2-124^2}{164}}$;
3. $\sqrt{\dfrac{149^2-76^2}{457^2-384^2}}$.

Lời giải.

1. $\sqrt{1\dfrac{9}{16}\cdot 5\dfrac{4}{9}\cdot 0{,}01}=\sqrt{\dfrac{25}{16}\cdot\dfrac{49}{9}\cdot\dfrac{1}{100}}=\sqrt{\dfrac{25}{16}}\cdot\sqrt{\dfrac{49}{9}}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{100}}=\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{7}{3}\cdot\dfrac{1}{10}=\dfrac{7}{24}$.
2. $\sqrt{\dfrac{165^2-124^2}{164}}=\sqrt{\dfrac{(165-124)(165+124)}{164}}=\sqrt{\dfrac{41\cdot 289}{164}}=\sqrt{\dfrac{289}{4}}=\dfrac{\sqrt{289}}{\sqrt{4}}=\dfrac{17}{2}$.
3. $\sqrt{\dfrac{149^2-76^2}{457^2-384^2}}=\sqrt{\dfrac{(149-76)(149+76)}{(457-384)(457+384)}}=\sqrt{\dfrac{73\cdot 225}{73\cdot 841}}=\sqrt{\dfrac{225}{841}}=\dfrac{\sqrt{225}}{\sqrt{841}}=\dfrac{15}{29}$.

□

Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau

1. $\dfrac{\sqrt{96x^5}}{\sqrt{24x}}$ $(x>0)$;
2. $\dfrac{\sqrt{18(x+1)^3}}{\sqrt{2}x+\sqrt{2}}$ $(x>-1)$;
3. $\dfrac{\sqrt{3x^4y^4}}{\sqrt{27x^2y^4}}$ $(x<0,\ y>0)$.

Lời giải.

1. $\dfrac{\sqrt{96x^5}}{\sqrt{24x}}=\sqrt{\dfrac{96x^5}{24x}}=\sqrt{4x^4}=2x^2$.
2. $\dfrac{\sqrt{18(x+1)^3}}{\sqrt{2}x+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{18(x+1)^3}}{\sqrt{2(x+1)^2}}=\sqrt{\dfrac{18(x+1)^3}{2(x+1)^2}}=\sqrt{9(x+1)}=3\sqrt{x+1}$ (với $x>-1$).
3. $\dfrac{\sqrt{3x^4y^4}}{\sqrt{27x^2y^4}}=\sqrt{\dfrac{3x^4y^4}{27x^2y^4}}=\sqrt{\dfrac{x^2}{9}}=\dfrac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{9}}=\dfrac{-x}{3}$ (với $x<0,\ y>0$).

□

Bài 5. Rút gọn các biểu thức sau

1. $(2x-2)\sqrt{\dfrac{(x-2)^4}{(x-1)^2}}$ $(x<1)$;

2. $\sqrt{\dfrac{4+12a+9a^2}{b^2}}$ $\left(a \le -\dfrac{2}{3}\right)$.

Lời giải.

1. $(2x-2)\sqrt{\dfrac{(x-2)^4}{(x-1)^2}} = 2(x-1)\cdot\dfrac{\sqrt{(x-2)^4}}{\sqrt{(x-1)^2}} = 2(x-1)\cdot\dfrac{(x-2)^2}{-(x-1)} = -2(x-2)^2$ (với $x<1$).

2. $\sqrt{\dfrac{4+12a+9a^2}{b^2}} = \sqrt{\dfrac{(2+3a)^2}{\sqrt{b^2}}} = \dfrac{\sqrt{(2+3a)^2}}{b^2} = \dfrac{-(2+3a)}{|b|}$ (với $a \le -\dfrac{2}{3}$).

□

Bài 6. Giải các phương trình sau

1. $\sqrt{\dfrac{(x+1)^4}{x}} = 4\sqrt{x}$;

2. $(x-1)\sqrt{\dfrac{2x-x^2-1}{x}} - 2x = -2$.

Lời giải.

1. Điều kiện $\begin{cases} x>0 \\ \dfrac{(x+1)^4}{x} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x>0$. Khi đó phương trình tương đương với

$$\frac{\sqrt{(x+1)^4}}{\sqrt{x}} = 4\sqrt{x} \Leftrightarrow (x+1)^2 = 4x \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Vậy nghiệm phương trình là $x=1$.

2. Điều kiện

$$\frac{2x-x^2-1}{x} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{-(x-1)^2}{x} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x<0. \end{array}\right.$$

Khi đó phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}
& (x-1)\sqrt{\frac{(x-1)^2}{-x}} - 2(x-1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x-1)\left(\sqrt{\frac{(x-1)^2}{-x}} - 2\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ \sqrt{\dfrac{(x-1)^2}{-x}} - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=1 & \text{(thỏa mãn)} \\ \sqrt{\dfrac{(x-1)^2}{-x}} = 2. & (1) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Phương trình (1) tương đương với

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{\sqrt{-x}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} = 2\sqrt{-x} \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{-4x} \Leftrightarrow (x-1)^2 = -4x \\
\Leftrightarrow\ & (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \quad \text{(thỏa mãn)}.
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm phương trình là $x = \pm 1$.

□

Bài 7. Chứng minh các bất đẳng thức sau

1. $\sqrt{\dfrac{a+b}{2}} \geq \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$, với $a, b \geq 0$;

2. $\sqrt{a}+\sqrt{\dfrac{1}{a}} \geq 2$, với $a > 0$.

Lời giải.

1. Ta có

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow 2(a+b) \geq a+b+2\sqrt{ab} \Leftrightarrow 2(a+b) \geq \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{4} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \sqrt{\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{4}}.$$

Mà $\sqrt{\dfrac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}}{\sqrt{4}} = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$. Nên $\sqrt{\dfrac{a+b}{2}} \geq \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$, với $a, b \geq 0$.

2. Ta có

$$\sqrt{a}+\sqrt{\frac{1}{a}} = \sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a})^2+1}{\sqrt{a}} = \frac{a+1}{\sqrt{a}}.$$

Mà $(\sqrt{a}-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a+1 \geq 2\sqrt{a}$. Nên $\sqrt{a}+\sqrt{\dfrac{1}{a}} \geq \dfrac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = 2$.

□

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 8. Cho $x = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$, với $a, b < 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $x = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. B. $x = -\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. C. $x = \dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$. D. $x = -\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$.

Lời giải.

Ta có $a, b < 0$ nên $-a > 0$ và $-b > 0$ do đó

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{-a}{-b}} = \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}.$$

Chọn đáp án C □

Bài 9. Điều kiện để $\sqrt{\dfrac{x}{x+1}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$ là

A. $x \in \mathbb{R}$. B. $x \geq 0$. C. $x \geq -1$. D. $x > -1$.

Lời giải.

Để xảy ra đẳng thức thì điều kiện là

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Chọn đáp án B □

Bài 10. Cho $\dfrac{\sqrt{10-4\sqrt{6}}}{\sqrt{2}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ với a, b là các số nguyên dương. Khi đó $a-b$ bằng?

A. 1. B. -1. C. 2. D. -2.

Lời giải.

Ta có

$$\frac{\sqrt{10-4\sqrt{6}}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{10-4\sqrt{6}}{2}}=\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

Do đó $a=3$, $b=2$ và $a-b=1$.

Chọn đáp án A □

§5 Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn thức bậc hai

1 Tóm tắt lý thuyết

1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

   Với $B \geq 0$, ta có $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B} = \begin{cases} A\sqrt{B} & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A\sqrt{B} & \text{nếu } A < 0. \end{cases}$

2. Đưa thừa số vào trong dấu căn

   Với $B \geq 0$, ta có $A\sqrt{B} = \begin{cases} \sqrt{A^2B} & \text{nếu } A \geq 0 \\ -\sqrt{A^2B} & \text{nếu } A < 0. \end{cases}$

3. Khử mẫu của biểu thức lấy căn

   Với A, B mà $AB \geq 0$, $B \neq 0$ ta có $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \sqrt{\dfrac{AB}{B^2}} = \dfrac{\sqrt{AB}}{|B|}$.

4. Trục căn thức ở mẫu

   - Với $B > 0$ ta có $\dfrac{A}{\sqrt{B}} = \dfrac{A\sqrt{B}}{B}$.
   - Với $A \geq 0, A \neq B^2$ ta có

   $$\frac{C}{\sqrt{A}+B} = \frac{C\left(\sqrt{A}-B\right)}{A-B^2}; \quad \frac{C}{\sqrt{A}-B} = \frac{C\left(\sqrt{A}+B\right)}{A-B^2}.$$

   - Với $A \geq 0, B \geq 0, A \neq B$ ta có

   $$\frac{C}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} = \frac{C\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)}{A-B}; \quad \frac{C}{\sqrt{A}-\sqrt{B}} = \frac{C\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)}{A-B}.$$

2 Các dạng toán

Dạng 15. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

Phương pháp giải: Cách đưa thừa số A^2 ra ngoài dấu căn:

$$\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B} = \begin{cases} A\sqrt{B} & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A\sqrt{B} & \text{nếu } A < 0. \end{cases} \quad \text{với } B \geq 0.$$

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

1. $\sqrt{8x^2}$ với $x \geq 0$;
2. $\sqrt{27xy^2}$ với $x \geq 0$; $y \leq 0$.

Lời giải.

a) Vì $x \geq 0$ nên $\sqrt{8x^2} = \sqrt{2^2x^2 \cdot 2} = 2|x|\sqrt{2} = 2x\sqrt{2}$.

b) Vì $x \geq 0$ và $y \leq 0$ nên $\sqrt{27xy^2} = \sqrt{3^2y^2 \cdot 3x} = 3|y|\sqrt{3x} = -3y\sqrt{3x}$.

□

Ví dụ 2. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn:
a) $\sqrt{25x^3}$ với $x > 0$;
b) $\sqrt{48(x-1)^2y^4}$ với $x < 1$; $y \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

a) $\sqrt{25x^3} = \sqrt{5^2x^2 \cdot x} = 5|x|\sqrt{x} = 5x\sqrt{x}$ (do $x > 0$)
b) $\sqrt{48(x-1)^2y^4} = 4|x-1|y^2\sqrt{3} = 4(1-x)y^2\sqrt{3}$ (do $x < 1$). □

Ví dụ 3. Rút gọn các biểu thức sau:
a) $A = 5\sqrt{4x} - 3\sqrt{\dfrac{100x}{9}} - \dfrac{4}{x}\sqrt{\dfrac{x^3}{4}}$ với $x > 0$;
b) $B = \dfrac{1}{3}\sqrt{9+6y+y^2} + \dfrac{4y}{3} + 5$ với $y \leq -3$.

Lời giải.

a) Vì $x > 0$ nên ta có

$$\begin{aligned} A &= 5\sqrt{4x} - 3\sqrt{\frac{100x}{9}} - \frac{4}{x}\sqrt{\frac{x^3}{4}} \\ &= 5 \cdot 2\sqrt{x} - 3 \cdot \frac{10}{3}\sqrt{x} - \frac{4}{x} \cdot \frac{x}{2}\sqrt{x} \\ &= 10\sqrt{x} - 10\sqrt{x} - 2\sqrt{x} = -2\sqrt{x}. \end{aligned}$$

b) Vì $y \leq -3$ nên $\sqrt{9+6y+y^2} = \sqrt{(3+y)^2} = |3+y| = -3-y$. Do đó

$$B = \frac{1}{3}(-3-y) + \frac{4y}{3} + 5 = y + 4.$$

□

Dạng 16. Đưa thừa số vào trong dấu căn

Phương pháp giải: Cách đưa thừa số vào trong dấu căn:

$$A\sqrt{B} = \begin{cases} \sqrt{A^2B} & \text{nếu } A \geq 0 \\ -\sqrt{A^2B} & \text{nếu } A < 0. \end{cases}$$

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Đưa thừa số vào trong dấu căn:

a) $a\sqrt{11}$ với $a \geq 0$; b) $a\sqrt{\dfrac{-23}{a}}$ với $a < 0$.

Lời giải.

a) Vì $a \geq 0$ nên $a\sqrt{11} = \sqrt{11a^2}$.

b) Vì $a < 0$ nên $a\sqrt{\dfrac{-23}{a}} = -\sqrt{a^2 \cdot \dfrac{-23}{a}} = -\sqrt{-23a}$. □

Ví dụ 2. Đưa thừa số vào trong dấu căn:

a) $\dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{12}{a}}$ với $a > 0$; b) $(a-2)\sqrt{3}$ với $a < 2$.

Lời giải.

a) Vì $a > 0$ nên $\dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{12}{a}} = \sqrt{\dfrac{a^2}{2^2} \cdot \dfrac{12}{a}} = \sqrt{3a}$.

b) Vì $a < 2$ nên $(a-2)\sqrt{3} = -\sqrt{3(2-a)^2}$. □

Dạng 17. Khử mẫu

Phương pháp giải:

Vận dụng công thức $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt{AB}}{|B|}$ $(A \cdot B \geq 0; B \neq 0)$. Cụ thể gồm các bước sau:

- Biến đổi mẫu thành bình phương của một số hoặc một biểu thức (nếu cần);
- Khai phương mẫu và đưa ra ngoài dấu căn.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Khử mẫu của biểu thức lấy căn

1. $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$;
2. $\sqrt{\dfrac{3m}{5n}}$ với $m \cdot n > 0$;
3. $\sqrt{\dfrac{5}{14}}$;
4. $\sqrt{\dfrac{7x}{18y}}$ với $x \cdot y > 0$.

Lời giải.

1. $\sqrt{\dfrac{5}{2}} = \sqrt{\dfrac{5.2}{3.2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{2^2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$.
2. $\sqrt{\dfrac{3m}{5n}} = \sqrt{\dfrac{3m \cdot 5n}{5n \cdot 5n}} = \dfrac{\sqrt{15mn}}{(5n)^2} = \dfrac{\sqrt{15mn}}{5|n|}$.
3. $\sqrt{\dfrac{5}{14}} = \sqrt{\dfrac{5 \cdot 14}{14 \cdot 14}} = \dfrac{\sqrt{70}}{\sqrt{14^2}} = \dfrac{\sqrt{70}}{14}$.
4. $\sqrt{\dfrac{7x}{18y}} = \sqrt{\dfrac{7x \cdot 18y}{18y \cdot 18y}} = \dfrac{\sqrt{126xy}}{(18y)^2} = \dfrac{3\sqrt{14xy}}{18|y|} = \dfrac{\sqrt{14xy}}{6|y|}$.

11. Trong câu d) ta có cách khác xử lý bài toán đơn giản hơn

$$\sqrt{\frac{7x}{18y}}=\sqrt{\frac{7x\cdot 2y}{18y\cdot 2y}}=\frac{\sqrt{14xy}}{(6y)^2}=\frac{\sqrt{14xy}}{6|y|}.$$

□

Ví dụ 2. Khử mẫu của biểu thức lấy căn

1. $\sqrt{\dfrac{1}{x^3+3x^2+3x+1}}$, với $x>-1$;
2. $\sqrt{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{a^3}}$, với $a<0$ hoặc $a\geq 1$.

Lời giải.

1. $\sqrt{\dfrac{1}{x^3+3x^2+3x+1}}=\sqrt{\dfrac{1}{(x+1)^3}}=\sqrt{\dfrac{x+1}{(x+1)^4}}=\dfrac{\sqrt{x+1}}{(x+1)^2}.$

2. $\sqrt{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{a^3}}=\sqrt{\dfrac{a-1}{a^3}}=\sqrt{\dfrac{a(a-1)}{a^4}}=\dfrac{\sqrt{a(a-1)}}{a^2}.$

□

Ví dụ 3. Khử mẫu của các biểu thức dưới dấu căn

1. $-x^2y\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ với $x>0; y\geq 0$;
2. $\sqrt{\dfrac{-2x}{15}}$ với $x<0$;
3. $\sqrt{\dfrac{5x}{13y}}$ với $x\geq 0; y>0$;
4. $\sqrt{\dfrac{2x-1}{2x+1}}$ với $x\geq\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

1. $-x^2y\sqrt{\dfrac{y}{x}}=-x^2y\sqrt{\dfrac{xy}{x^2}}=\dfrac{-x^2y\sqrt{xy}}{x}=-xy\sqrt{xy}.$

2. $\sqrt{\dfrac{-2x}{15}}=\sqrt{\dfrac{-30x}{15^2}}=\dfrac{\sqrt{-2x}}{15}.$

3. $\sqrt{\dfrac{5x}{13y}}=\sqrt{\dfrac{65xy}{(13y)^2}}=\dfrac{\sqrt{65xy}}{13y}.$

4. $\sqrt{\dfrac{2x-1}{2x+1}}=\sqrt{\dfrac{(2x-1)(2x+1)}{(2x+1)^2}}=\dfrac{\sqrt{4x^2-1}}{2x+1}.$

□

Dạng 18. Trục căn thức ở mẫu

Phương pháp giải:
Để trục căn thức ở mẫu, ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Phân tích tử và mẫu ra thừa số chung chứa căn rồi rút gọn thừa số đó.

Cách 2: Nhân tử và mẫu với thừa số thích hợp để làm mất căn thức ở mẫu. Có các dạng cơ bản sau:

1. $\dfrac{A}{\sqrt{B}} = \dfrac{A\sqrt{B}}{B}$ $(B > 0)$.
2. $\dfrac{1}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \dfrac{\sqrt{A} \mp \sqrt{B}}{A - B}$ với $A > 0; B > 0; A \neq B$.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Trục căn thức ở mẫu của các phân thức sau

1. $\dfrac{3+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$;
2. $\dfrac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}$;
3. $\dfrac{3\sqrt{5}+\sqrt{15}}{\sqrt{5}}$
4. $\dfrac{1}{2-3\sqrt{3}}$.

Lời giải.

1. $\dfrac{3+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{3\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{3}$;
2. $\dfrac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1} = \dfrac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{5}+1} = \sqrt{5}$;
3. $\dfrac{3\sqrt{5}+\sqrt{15}}{\sqrt{5}} = \dfrac{(3\sqrt{5}+\sqrt{15})\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{15+5\sqrt{3}}{5} = 3+\sqrt{3}$;
4. $\dfrac{1}{2-3\sqrt{3}} = \dfrac{2+3\sqrt{3}}{(2-3\sqrt{3})(2+3\sqrt{3})} = \dfrac{2+3\sqrt{3}}{4-27} = -\dfrac{2+3\sqrt{3}}{23}$.

□

Ví dụ 2. Trục căn thức ở mẫu của các phân thức sau, với các biểu thức đều có nghĩa.

1. $\dfrac{1}{\sqrt{m}+n}$;
2. $\dfrac{2}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$;
3. $\dfrac{3}{2\sqrt{m}+1}$;
4. $\dfrac{2ab}{2\sqrt{a}+3\sqrt{b}}$.

Lời giải.

1. $\dfrac{1}{\sqrt{m}+n} = \dfrac{\sqrt{m}-n}{(\sqrt{m}-n)(\sqrt{m}+n)} = \dfrac{\sqrt{m}-n}{m-n^2}$;

2. $\dfrac{2}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}=\dfrac{2(\sqrt{m}+\sqrt{n})}{(\sqrt{m}+\sqrt{n})(\sqrt{m}-\sqrt{n})}=\dfrac{2(\sqrt{m}-\sqrt{n})}{m-n}$;

3. $\dfrac{3}{2\sqrt{m}+1}=\dfrac{3(2\sqrt{m}-1)}{(2\sqrt{m}-1)(2\sqrt{m}+1)}=\dfrac{6\sqrt{m}-3}{4m-1}$;

4. $\dfrac{2ab}{2\sqrt{a}+3\sqrt{b}}=\dfrac{2ab(2\sqrt{a}-3\sqrt{b})}{(2\sqrt{a}+3\sqrt{b})(2\sqrt{a}-3\sqrt{b})}=\dfrac{2ab(2\sqrt{a}-3\sqrt{b})}{4a-9b}$.

□

Ví dụ 3. Trục căn thức ở mẫu của các phân thức sau

1. $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}$;
2. $\dfrac{1}{\sqrt{14}-\sqrt{6+\sqrt{35}}}$.

Lời giải.

1.

$$\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-1}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}{2\sqrt{6}+4}=\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)(2\sqrt{6}-4)}{24-16}$$
$$=\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)(2\sqrt{6}-4)}{8};$$

2.

$$\dfrac{1}{\sqrt{14}-\sqrt{6+\sqrt{35}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{7}-\sqrt{12+2\sqrt{35}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{7}-\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{7})^2}}$$
$$=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{7-5}=\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{10}}{2}.$$

□

3 Luyện tập

Bài 1. Rút gọn các biểu thức
a) $A=\sqrt{12}+3\sqrt{27}-5\sqrt{48}$;
b) $B=3\sqrt{a^2+3}-3\sqrt{16a^2+48}+4\sqrt{25a^2+75}$.

Lời giải.

a) Vì

$$\sqrt{12}=\sqrt{4\cdot 3}=2\sqrt{3};$$
$$3\sqrt{27}=3\sqrt{9\cdot 3}=9\sqrt{3};$$
$$5\sqrt{48}=5\sqrt{16\cdot 3}=20\sqrt{3}$$

nên $A=2\sqrt{3}+9\sqrt{3}-20\sqrt{3}=-9\sqrt{3}$.
b) Vì

$$3\sqrt{16a^2+48}=3\sqrt{16(a^2+3)}=12\sqrt{a^2+3};$$
$$4\sqrt{25a^2+75}=4\sqrt{25(a^2+3)}=20\sqrt{a^2+3}$$

nên $B=3\sqrt{a^2+3}-12\sqrt{a^2+3}+20\sqrt{a^2+3}=11\sqrt{a^2+3}$. □

Bài 2. So sánh các cặp số dưới đây:

a) $2\sqrt{29}$ và $3\sqrt{13}$; b) $\frac{5}{4}\sqrt{2}$ và $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Lời giải.

a) Ta có $2\sqrt{29}=\sqrt{2^2\cdot 29}=\sqrt{116}$ và $3\sqrt{13}=\sqrt{3^2\cdot 13}=\sqrt{117}$.
Mà $\sqrt{116}<\sqrt{117}$ nên $2\sqrt{29}<3\sqrt{13}$.
b) Ta có $\frac{5}{4}\sqrt{2}=\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2\cdot 2}=\sqrt{\frac{25}{8}}$ và $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2\frac{3}{2}}=\sqrt{\frac{27}{8}}$.
Mà $\sqrt{\frac{25}{8}}<\sqrt{\frac{27}{8}}$ nên $\frac{5}{4}\sqrt{2}<\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$. □

Bài 3. Tìm số bé hơn trong các cặp số sau:

a) $5\sqrt{2}$ và $4\sqrt{3}$; b) $\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{6}}$ và $6\sqrt{\frac{1}{37}}$.

Lời giải.

a) Ta có $5\sqrt{2}=\sqrt{5^2\cdot 2}=\sqrt{50}$ và $4\sqrt{3}=\sqrt{4^2\cdot 3}=\sqrt{48}$.
Mà $\sqrt{50}>\sqrt{48}$ nên số bé hơn là $4\sqrt{3}$.
b) Ta có $\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{6}}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6}}=\sqrt{\frac{25}{24}}$ và $6\sqrt{\frac{1}{37}}=\sqrt{6^2\frac{1}{37}}=\sqrt{\frac{36}{37}}$.
Mà $\sqrt{\frac{25}{24}}>\sqrt{\frac{36}{37}}$ nên số bé hơn là $6\sqrt{\frac{1}{37}}$. □

Bài 4. Sắp xếp các cặp số sau theo thứ tự tăng dần:
a) $3\sqrt{5}$; $2\sqrt{6}$; $\sqrt{29}$ và $4\sqrt{2}$.
b) $5\sqrt{2}$; $\sqrt{39}$; $3\sqrt{8}$ và $2\sqrt{15}$.

Lời giải.

a) Ta có

$$3\sqrt{5}=\sqrt{9\cdot 5}=\sqrt{45};$$
$$2\sqrt{6}=\sqrt{4\cdot 6}=\sqrt{24};$$
$$4\sqrt{2}=\sqrt{16\cdot 2}=\sqrt{32}.$$

Do $\sqrt{24}<\sqrt{29}<\sqrt{32}<\sqrt{45}$ nên $2\sqrt{6}<\sqrt{29}<4\sqrt{2}<3\sqrt{5}$.
b) Ta có

$$5\sqrt{2}=\sqrt{25\cdot 2}=\sqrt{50};$$
$$3\sqrt{8}=\sqrt{9\cdot 8}=\sqrt{72};$$
$$2\sqrt{15}=\sqrt{4\cdot 15}=\sqrt{60}.$$

Do $\sqrt{39}<\sqrt{50}<\sqrt{60}<\sqrt{72}$ nên $\sqrt{39}<5\sqrt{2}<2\sqrt{15}<3\sqrt{8}$. □

Bài 5. Sắp xếp các cặp số sau theo thứ tự giảm dần:
a) $7\sqrt{2}$; $2\sqrt{8}$; $\sqrt{28}$ và $5\sqrt{2}$.

b) $3\sqrt{10}$; $5\sqrt{3}$; $\dfrac{20}{\sqrt{5}}$ và $12\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Lời giải.

a) Ta có

$$7\sqrt{2} = \sqrt{49 \cdot 2} = \sqrt{98};$$
$$2\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 8} = \sqrt{32};$$
$$5\sqrt{2} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{50}.$$

Do $\sqrt{98} > \sqrt{50} > \sqrt{32} > \sqrt{28}$ nên $7\sqrt{2} > 5\sqrt{2} > 2\sqrt{8} > \sqrt{28}$.
b) Ta có

$$3\sqrt{10} = \sqrt{9 \cdot 10} = \sqrt{90};$$
$$5\sqrt{3} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{75};$$
$$\frac{20}{\sqrt{5}} = \sqrt{400 \cdot \frac{1}{5}} = \sqrt{80}$$
$$12\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{144 \cdot \frac{2}{3}} = \sqrt{96}$$

Do $\sqrt{96} > \sqrt{90} > \sqrt{80} > \sqrt{75}$ nên $12\sqrt{\dfrac{2}{3}} > 3\sqrt{10} > \dfrac{20}{\sqrt{5}} > 5\sqrt{3}$. □

Bài 6. Giải phương trình

$$\sqrt{18x+9} - \sqrt{8x+4} + \frac{1}{3}\sqrt{2x+1} = 4. \quad (1)$$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\dfrac{1}{2}$.

$$(1) \Leftrightarrow 3\sqrt{2x+1} - 2\sqrt{2x+1} + \frac{1}{3}\sqrt{2x+1} = 4$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = 3 \Leftrightarrow 2x+1 = 9 \Leftrightarrow x = 4.$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm là $x = 4$. □

Bài 7. Giải phương trình

$$25\sqrt{\frac{x-3}{25}} - 7\sqrt{\frac{4x-12}{9}} - 7\sqrt{x^2-9} + 18\sqrt{\frac{9x^2-81}{81}} = 0. \quad (2)$$

Lời giải.

Cách 1. Điều kiện $x \geq 3$.

$$(2) \Leftrightarrow \frac{1}{3}\sqrt{x-3} = \sqrt{x^2-9}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x-3} = 3\sqrt{x^2-9} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ (x-3) = 9(x^2-9) \end{cases} \Rightarrow x = 3.$$

Vậy phương trình (2) có nghiệm là $x=3$.
Cách 2. Điều kiện $x \geq 3$.

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow \frac{1}{3}\sqrt{x-3}=\sqrt{x^2-9}\\ &\Leftrightarrow \sqrt{x-3}\left(\frac{1}{3}-\sqrt{x+3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x-3}=0,\\ \sqrt{x+3}=\dfrac{1}{3}\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x=3 & \text{(thỏa mãn)}\\ x=-\dfrac{26}{9} & \text{(loại)}\end{cases} \Rightarrow x=3.\end{aligned}$$

Vậy phương trình (2) có nghiệm là $x=3$. □

Bài 8. Cho biểu thức

$$M=\left(4x^5+4x^4-5x^3+2x-2\right)^{2018}+2019$$

Tính giá trị của M tại $x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

Từ $x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ suy ra $2x+1=-\sqrt{5} \Rightarrow (2x+1)^2=5 \Leftrightarrow x^2+x-1=0$. Do đó

$$\begin{aligned}M&=\left(4x^5+4x^4-5x^3+2x-2\right)^{2018}+2019\\ &=\left[4x^3(x^2+x-1)-x(x^2+x-1)+(x^2+x-1)-1\right]^{2018}+2019\\ &=1+2019=2020.\end{aligned}$$

□

Bài 9. Khử mẫu của các biểu thức sau

1. $\sqrt{\dfrac{7}{27}}$;
2. $\sqrt{\dfrac{5}{11}}$;

Lời giải.

1. $\sqrt{\dfrac{7}{27}}=\sqrt{\dfrac{7\cdot 3}{27\cdot 3}}=\sqrt{\dfrac{21}{9^2}}=\dfrac{\sqrt{21}}{9}$;
2. $\sqrt{\dfrac{5}{11}}=\sqrt{\dfrac{55}{11^2}}=\dfrac{\sqrt{55}}{11}$;

□

Bài 10. Trục căn thức các biểu thức sau

1. $\dfrac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}$;
2. $\dfrac{2}{1-2\sqrt{5}}$.

Lời giải.

1. $\dfrac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}=\dfrac{(\sqrt{3}-2)^2}{3-4}=-7+4\sqrt{3}$;

2. $\dfrac{2}{1-2\sqrt{5}}=\dfrac{2(1+2\sqrt{5})}{1-20}=-\dfrac{2+4\sqrt{5}}{19}$.

□

Bài 11. Trục căc thức biểu thức $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}}$.

Lời giải.

$$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}+\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$$
$$=\dfrac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2}=\dfrac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3}.$$

□

Bài 12. Cho $x=\dfrac{\sqrt{3}-2}{2+\sqrt{3}}$. Tính $x+\dfrac{2}{x}$.

Lời giải.

Ta có $x=\dfrac{\sqrt{3}-2}{2+\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{3}-2)^2}{3-4}=-7+4\sqrt{3}$.

Khi đó $x+\dfrac{2}{x}=-7+4\sqrt{3}+\dfrac{2}{4\sqrt{3}-7}=-7+4\sqrt{3}+\dfrac{8\sqrt{3}+14}{48-49}=-21-4\sqrt{3}$.

□

Bài 13. Tính

$$A=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{10-2\sqrt{6}+2\sqrt{10}-2\sqrt{15}}}.$$

Lời giải.

$$\begin{aligned}A&=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{10-2\sqrt{6}+2\sqrt{10}-2\sqrt{15}}}\\&=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}}\\&=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}\\&=\dfrac{1}{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}{12-5}+\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{12-5}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}.\end{aligned}$$

□

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 14. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn của biểu thức $\sqrt{25\cdot(-a)^2b^3}$ với $b\geq 0$, ta được

A. $-5ab\sqrt{b}$. B. $5ab\sqrt{b}$. C. $5|a|b\sqrt{b}$. D. $-5|a|b\sqrt{b}$.

Lời giải.

Với $b\geq 0$ thì $\sqrt{25\cdot(-a)^2b^3}=\sqrt{5^2a^2b^2\cdot b}=5|a|b\sqrt{b}$.

Chọn đáp án C

□

Bài 15. Đưa thừa số vào trong dấu căn của biểu thức $(1-x)\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$ với $x>1$, ta được

A. $\sqrt{x(x-1)}$. B. $\sqrt{x(1-x)}$. C. $-\sqrt{x(x-1)}$. D. $-\sqrt{x(1-x)}$.

Lời giải.

Vì $x>1$ nên $(1-x)\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}=-(x-1)\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}=-\sqrt{(x-1)^2\cdot\dfrac{x}{x-1}}=-\sqrt{x(x-1)}$.

Chọn đáp án C □

Bài 16. Khử mẫu của biểu thức $\sqrt{\dfrac{3}{5\sqrt{5}}}$ ta được:

A. $\dfrac{\sqrt{3\sqrt{5}}}{3}$. B. $\dfrac{\sqrt{3\sqrt{5}}}{5}$. C. $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. D. $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải.

$\sqrt{\dfrac{3}{5\sqrt{5}}}=\sqrt{\dfrac{3\sqrt{5}}{5^2}}=\dfrac{\sqrt{3\sqrt{5}}}{5}$.

Chọn đáp án B □

Bài 17. Trục căn thức của biểu thức $\dfrac{m}{\sqrt{5m^3}}$, $m>0$ ta được

A. $\dfrac{\sqrt{5m}}{5|m|}$. B. $\dfrac{\sqrt{5m}}{-5m}$. C. $\dfrac{\sqrt{5m}}{5m}$. D. $\dfrac{\sqrt{5m}}{5m^2}$.

Lời giải.

$\dfrac{m}{\sqrt{5m^3}}=\dfrac{m\sqrt{5m^3}}{5m^3}=\dfrac{m^2\sqrt{5m}}{5m^3}=\dfrac{\sqrt{5m}}{5m}$.

Chọn đáp án C □

Bài 18. Trục căn thức ở mẫu của biểu thức $\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ ta được

A. $-3+2\sqrt{2}$. B. $3+2\sqrt{2}$. C. $-3-2\sqrt{2}$. D. $3-2\sqrt{2}$.

Lời giải.

$\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=\dfrac{(1-\sqrt{2})^2}{1-2}=-3+2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án A □

§6 Rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai

1 Tóm tắt lý thuyết

1) Tính chất về phân số (Phân thức)

$$\frac{A\cdot M}{B\cdot M}=\frac{A}{B}\ (M\neq 0,\ B\neq 0)$$

.

2) Các hằng đẳng thức đáng nhớ cơ bản thường được sử dụng

- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.
- $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.
- $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.
- $(a+b)^3=a^3+3ab(a+b)+b^3$
- $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.
- $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.
- $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

3) Các phép biến đổi căn thức cơ bản

- Nếu $a\geq 0,\ x\geq 0,\ \sqrt{a}=x\Leftrightarrow x^2=a$.
- Để $\sqrt{A}$ có nghĩa thì $A\geq 0$.
- $\sqrt{A^2}=|A|=\begin{cases}A \text{ nếu } A\geq 0\\ -A \text{ nếu } A<0\end{cases}$.
- $\sqrt{A^2\cdot B}=|A|\cdot\sqrt{B}\ (B\geq 0)$.
- $\sqrt{AB}=\sqrt{A}\cdot\sqrt{B}.\ (A,B\geq 0)$.
- $\sqrt{\dfrac{A}{B}}=\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}\ (A\geq 0, B>0)$
- $A\sqrt{B}=\sqrt{A^2B}$ (với $A\geq 0$ và $B\geq 0$).
- $A\sqrt{B}=-\sqrt{A^2B}$ (với $A<0$ và $B\geq 0$).
- $\sqrt{\dfrac{A}{B}}=\dfrac{AB}{|B|}$ (với $AB\geq 0$ và $B\neq 0$).
- $\dfrac{A}{\sqrt{B}}=\dfrac{A\sqrt{B}}{B}$ (với $B>0$).
- $\dfrac{C}{\sqrt{A}\pm B}=\dfrac{C(\sqrt{A}\pm B)}{A-B^2}$ (Với $A\geq 0$ và $A\neq B^2$).
- $\dfrac{C}{\sqrt{A}\pm\sqrt{B}}=\dfrac{C(\sqrt{A}\mp\sqrt{B})}{A-B}$ (với $A\geq 0,\ B\geq 0$ và $A\neq B$).

- Các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử: Bằng cách phân tích thành nhân tử ta có thể rút gọn nhân tử chung ở cả tử và mẫu của một phân thức.
- Các tính chất cơ bản của một phân thức. Sử dụng các tính chất này ta có thể nhân với biểu thức liên hợp của tử (hoặc mẫu) của một phân thức, giản ước cho một số hạng khác 0, đổi dấu phân thức, ...đưa phân thức về dạng rút gọn.

2 Các dạng toán

Dạng 19. Rút gọn biểu thức không chứa biến

Phương pháp giải

- Để rút gọn biểu thức có chứa căn thức bậc hai, ta cần biết vận dụng thích hợp các phép tính và các phép biến đổi đã biết.
- Rút gọn biểu thức được áp dụng trong nhiều bài toán về biểu thức có chứa các căn thức bậc hai.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Rút gọn các biểu thức sau.

1. $5\sqrt{\dfrac{1}{5}}+\dfrac{1}{2}\sqrt{20}+\sqrt{5}$.
2. $\sqrt{\dfrac{1}{2}}+\sqrt{4{,}5}+\sqrt{12{,}5}$.
3. $\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{18}+\sqrt{72}$.
4. $0{,}1\cdot\sqrt{200}+2\cdot\sqrt{0{,}08}+0{,}4\cdot\sqrt{50}$.

Lời giải.

1. $5\sqrt{\dfrac{1}{5}}+\dfrac{1}{2}\sqrt{20}+\sqrt{5}=5\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{5}+\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}+\sqrt{5}=\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{5}=3\sqrt{5}$.
2. $\sqrt{\dfrac{1}{2}}+\sqrt{4{,}5}+\sqrt{12{,}5}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{\dfrac{9}{2}}+\sqrt{\dfrac{25}{2}}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}+\dfrac{3}{2}\cdot\sqrt{2}+\dfrac{5}{2}\sqrt{2}=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}\right)\cdot\sqrt{2}=\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$.
3. $\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{18}+\sqrt{72}=2\sqrt{5}-3\sqrt{5}+9\sqrt{2}+6\sqrt{2}=(2-3)\sqrt{5}+(9+6)\sqrt{2}=-\sqrt{5}+15\sqrt{2}$.
4. $0{,}1\cdot\sqrt{200}+2\cdot\sqrt{0{,}08}+0{,}4\cdot\sqrt{50}=0{,}1\cdot 10\sqrt{2}+2\cdot 0{,}2\sqrt{2}+0{,}4\cdot 5\sqrt{2}=\sqrt{2}+0{,}4\sqrt{2}+2\sqrt{2}$
$=(1+0{,}4+2)\sqrt{2}=3{,}4\cdot\sqrt{2}$.

□

Ví dụ 2. Rút gọn các biểu thức sau.

1. $\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{18}+\sqrt{72}$.
2. $(\sqrt{28}-2\sqrt{3}+\sqrt{7})\sqrt{7}+\sqrt{84}$.

3. $(\sqrt{6}+\sqrt{5})^2-\sqrt{120}$.

4. $\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}}-\dfrac{3}{2}\sqrt{2}+\dfrac{4}{5}\sqrt{200}\right):\dfrac{1}{8}$

Lời giải.

1. $\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{18}+\sqrt{72}=\sqrt{2^2\cdot 5}-\sqrt{3^2\cdot 5}+3\sqrt{3^2\cdot 2}+\sqrt{6^2\cdot 2}=2\sqrt{5}-3\sqrt{5}+9\sqrt{2}+6\sqrt{2}$
$=(2-3)\sqrt{5}+(9+6)\sqrt{2}=15\sqrt{2}-\sqrt{5}$.

2. $(\sqrt{28}-2\sqrt{3}+\sqrt{7})\sqrt{7}+\sqrt{84}=\sqrt{2^2\cdot 7}\cdot\sqrt{7}-2\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}+\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}+\sqrt{2^2\cdot 21}$
$=2\cdot 7-2\sqrt{21}+7+2\sqrt{21}=14+7+(2-2)\sqrt{21}=21$.

3. $(\sqrt{6}+\sqrt{5})^2-\sqrt{120}=6+2\sqrt{30}+5-\sqrt{2^2\cdot 30}=6+5+2\sqrt{30}-2\sqrt{30}=11$.

4. $\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}}-\dfrac{3}{2}\sqrt{2}+\dfrac{4}{5}\sqrt{200}\right):\dfrac{1}{8}=\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{2^2}}-\dfrac{3}{2}\sqrt{2}+\dfrac{4}{5}\sqrt{10^2\cdot 2}\right):\dfrac{1}{8}$
$=\left(\dfrac{1}{4}\sqrt{2}-\dfrac{3}{2}\sqrt{2}+8\sqrt{2}\right)\cdot 8=2\sqrt{2}-12\sqrt{2}+64\sqrt{2}=54\sqrt{2}$.

□

Ví dụ 3. Rút gọn các biểu thức sau.

1. $A=\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

2. $B=\dfrac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$.

Lời giải.

1. $A=\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})-(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3}=-\sqrt{3}$.

2. $B=\dfrac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{|\sqrt{3}-1|}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

□

Ví dụ 4. Rút gọn các biểu thức sau.

1. $A=\sqrt{127-48\sqrt{7}}-\sqrt{127+48\sqrt{7}}$.

2. $B=\sqrt{\dfrac{2\sqrt{10}+\sqrt{30}-2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2\sqrt{10}-2\sqrt{2}}}:\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$

Lời giải.

1. $A=\sqrt{127-48\sqrt{7}}-\sqrt{127+48\sqrt{7}}=\sqrt{(8-3\sqrt{7})^2}-\sqrt{(8+3\sqrt{7})^2}=|8-3\sqrt{7}|-|8+3\sqrt{7}|$
$=8-3\sqrt{7}-8-3\sqrt{7}=-6\sqrt{7}$ Vì $(8>3\sqrt{7})$.

2. $B=\sqrt{\dfrac{2\sqrt{10}+\sqrt{30}-2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2\sqrt{10}-2\sqrt{2}}}:\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{\dfrac{2\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)+\sqrt{6}(\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

$=\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}=\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{4}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}=\dfrac{1}{2}.$

□

Dạng 20. Chứng minh đẳng thức

Phương pháp giải

Biến đổi vế trái bằng vế phải bằng cách sử dụng các phép biến đổi căn thức và vận dụng thích hợp các phép tính và các phép biến đổi đã biết.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Chứng minh đẳng thức $\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Biến đổi vế trái ta có

$VT=\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=\left(1+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=1+2\sqrt{2}+2-3=2\sqrt{2}=VP.$

Vậy đẳng thức được chứng minh. □

Ví dụ 2. Chứng minh đẳng thức

$$\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \text{ với } a>0,\ b>0.$$

Lời giải.

Ta có $VT=\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}-a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{a(\sqrt{a}-\sqrt{b})-b(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

$=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a-b)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=VP.$

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Ví dụ 3. Chứng minh các đẳng thức (với a,b không âm và $a\neq b$)

1. $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{a}-2\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2\sqrt{a}+2\sqrt{b}}-\dfrac{2b}{b-a}=\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.$

2. $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2=1.$

Lời giải.

1. Ta có $VT = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2(\sqrt{a}-\sqrt{b})} - \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})} - \dfrac{2b}{b-a} = \dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+4b}{2(a-b)}$
$= \dfrac{a+2\sqrt{ab}+b-a+2\sqrt{ab}-b+4b}{2(a-b)} = \dfrac{4\sqrt{ab}+4b}{2(a-b)} = \dfrac{4\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{2(a-b)}$
$= \dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = VP.$

2. Ta có $VT = \left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$
$= \left[\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right]\cdot\left[\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}\right]^2$
$= (a-2\sqrt{ab}+b)\cdot\dfrac{1}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}$
$= (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\cdot\dfrac{1}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} = 1 = VP.$

□

Ví dụ 4. Chứng minh các đẳng thức sau.

1. $\left(\dfrac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)\cdot\left(\dfrac{1-\sqrt{a}}{1-a}\right)^2 = 1$ với $a \geq 0$ và $a \neq 1$.
2. $\dfrac{a+b}{b^2}\sqrt{\dfrac{a^2b^4}{a^2+2ab+b^2}} = |a|$ với $a+b>0$ và $b \neq 0$.

Lời giải.

1. Với $a \geq 0$ và $a \neq 0$ ta có

$$\begin{aligned}VT &= \left(\dfrac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)\cdot\left(\dfrac{1-\sqrt{a}}{1-a}\right)^2 = 1\\ &= \left[\dfrac{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a}+a)}{1-\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right]\cdot\left[\dfrac{1-\sqrt{a}}{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a})}\right]^2\\ &= (1+2\sqrt{a}+a)\cdot\dfrac{1}{(1+\sqrt{a})^2}\\ &= (1+\sqrt{a})^2\cdot\dfrac{1}{(1+\sqrt{a})^2} = 1 = VP.\end{aligned}$$

2. Với $a+b>0$ và $b \neq 0$ ta có

$$VT = \dfrac{a+b}{b^2}\sqrt{\dfrac{a^2b^4}{a^2+2ab+b^2}} = \dfrac{a+b}{b^2}\cdot\sqrt{\dfrac{(ab^2)^2}{(a+b)^2}} = \dfrac{a+b}{b^2}\cdot\dfrac{|a|b^2}{a+b} = |a| = VP.$$

□

Dạng 21. Rút gọn biểu thức chứa biến và các câu hỏi phụ liên quan

Rút gọn biểu thức chứa biến. Sử dụng kết quả rút gọn để:

- Tính giá trị của biểu thức khi biết giá trị của biến.
- Giải phương trình, bất phương trình (so sánh biểu thức với một số).
- Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của một biểu thức.
- Tìm giá trị nguyên của biểu thức ứng với các giá trị nguyên của biến.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{x-2}{x+2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x>0$ và $x\neq 1$.

1. Rút gọn P.
2. Tìm các giá trị x để $2P=2\sqrt{x}+5$.

Lời giải.

1. Ta có $P=\left(\dfrac{x-2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\left[\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}\right]\cdot\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.
2. Theo câu a) ta có $P=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.

   $\Rightarrow 2P=2\sqrt{x}+5\Leftrightarrow\dfrac{2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+5\Leftrightarrow 2\sqrt{x}+2=2x+5\sqrt{x}$

   $\Leftrightarrow 2x+3\sqrt{x}-2=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}$.

   Vậy với $x=\dfrac{1}{4}$ thỏa yêu cầu bài toán.

□

Ví dụ 2. Cho biểu thức

$$A=\left(\frac{2}{\sqrt{x}-2}+\frac{3}{2\sqrt{x}+1}-\frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2}\right):\frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}}\text{ với }(x>0,x\neq 4)$$

1. Rút gọn biểu thức A .
2. Tìm x sao cho A nhận giá trị là một số nguyên.

Lời giải.

1. Với $x>0,x\neq 4$ biểu thức có nghĩa ta có

$$\begin{aligned}A&=\left(\frac{2}{\sqrt{x}-2}+\frac{3}{2\sqrt{x}+1}-\frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2}\right):\frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}}\\&=\frac{2\left(2\sqrt{x}+1\right)+3\left(\sqrt{x}-2\right)-\left(5\sqrt{x}-7\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(2\sqrt{x}+1\right)}:\frac{2\sqrt{x}+3}{5\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}\end{aligned}$$

$$= \frac{2\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{5\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{2\sqrt{x}+3} = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}.$$

Vậy với $x > 0, x \neq 4$ thì $A = \dfrac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$.

2. Ta có $\forall x > 0, x \neq 4$ nên $A = \dfrac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} > 0$.
   $A = \dfrac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} = \dfrac{5}{2} - \dfrac{5}{2(2\sqrt{x}+1)} < \dfrac{5}{2}, x > 0, x \neq 4 \Rightarrow 0 < A < \dfrac{5}{2}$.
   Kết hợp với A nhận giá trị là một số nguyên thì $A \in \{1, 2\}$.
   - $A = 1 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 2\sqrt{x}+1 \Rightarrow \sqrt{x} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{9}$ (thỏa mãn điều kiện).
   - $A = 2 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 4\sqrt{x}+2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$ (không thỏa mãn điều kiện).

   Vậy với $x = \dfrac{1}{9}$ thì A nhận giá trị là nguyên.

□

Ví dụ 3. Cho biểu thức $A = \dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 - 4\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \dfrac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$.

1. Tìm điều kiện để A có nghĩa.
2. Khi A có nghĩa, chứng tỏ giá trị của A không phụ thuộc vào a.

Lời giải.

1. Biểu thức A có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ \sqrt{a}-\sqrt{b} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ a \neq b. \end{cases}$

2. Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{a + 2\sqrt{ab} + b - 4\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{ab}} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{1} = \sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{a}-\sqrt{b} = -2\sqrt{b}. \end{aligned}$$

   Vậy giá trị của A không phụ thuộc vào a mà chỉ phụ thuộc vào b.

□

Ví dụ 4. Cho biểu thức: $A = \dfrac{x+1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$, với $x \geq 0$.

1. Tìm x để A có nghĩa.
2. Rút gọn biểu thức A.
3. Với giá trị nào của x thì $A < 1$?.

Lời giải.

1. A có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x}-1 \neq 0 \\ \sqrt{x}+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1. \end{cases}$

2. Ta có $A = \dfrac{x+1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}-1} + \dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1}$
$= \sqrt{x}-1+\sqrt{x} = 2\sqrt{x}-1.$

3. Ta có $A < 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x}-1 < 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1.$
Vậy với $0 \leq x < 1$ thì $A < 1$.

□

Ví dụ 5.
1. Cho biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}$. Tính giá trị của biểu thức A với $x = 36$.
2. Rút gọn biểu thức $B = \left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} + \dfrac{4}{\sqrt{x}-4}\right) : \dfrac{x+16}{\sqrt{x}+2}$ (với $x \geqslant 0, x \neq 16$).
3. Với các biểu thức A và B nói trên, hãy tìm các giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức $B(A-1)$ là số nguyên.

Lời giải.

1. Với $x = 36$, ta có $A = \dfrac{\sqrt{36}+4}{\sqrt{36}+2} = \dfrac{10}{8} = \dfrac{5}{4}$.

2. Với $x \geqslant 0, x \neq 16$ ta có

$$B = \left(\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-4\right)}{x-16} + \frac{4\left(\sqrt{x}+4\right)}{x-16}\right) \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{x+16} = \frac{(x+16)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-16)(x+16)} = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16}.$$

3. Biểu thức $B\left(A-1\right) = \dfrac{\sqrt{x}+2}{x-16}\left(\dfrac{\sqrt{x}+4-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}\right) = \dfrac{2}{x-16}.$
$B\left(A-1\right)$ nguyên khi $(x-16) \in \text{Ư}(2) \Leftrightarrow (x-16) \in \{-2;-1;1;2\} \Leftrightarrow x \in \{14;15;17;18\}$.
Kết hợp điều kiện, để $B\left(A-1\right)$ nguyên thì $x \in \{14;15;17;18\}$.

□

Ví dụ 6. Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{3\sqrt{a}}{a+\sqrt{ab}+b} - \frac{3a}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right) : \frac{(a-1)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{2a+2\sqrt{ab}+2b}$$

1. Rút gọn P.
2. Tìm những giá trị nguyên của a để P có giá trị nguyên.

Lời giải.

1. ĐKXĐ: $a, b > 0; a \neq b; a \neq 1$.

$$P = \left(\frac{3\sqrt{a}}{a+\sqrt{ab}+b} - \frac{3a}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{ab}+b\right)} + \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \right) \cdot \frac{2\left(a+\sqrt{ab}+b\right)}{(a-1)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}$$
$$= \frac{3a-3\sqrt{ab}-3a+a+\sqrt{ab}+b}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{ab}+b\right)} \cdot \frac{2\left(a+\sqrt{ab}+b\right)}{(a-1)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}$$
$$= \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(a+\sqrt{ab}+b\right)} \cdot \frac{2\left(a+\sqrt{ab}+b\right)}{(a-1)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)} = \frac{2}{a-1}.$$

2. Để P nhận giá trị nguyên thì $(a-1) \in \text{Ư}(2) \Leftrightarrow (a-1) \in \{-2;-1;1;2\} \Leftrightarrow a \in \{-1;0;2;3\}$.
Vậy với $a \in \{-1;0;2;3\}$ thì P có giá trị nguyên.

□

3 Luyện tập

Bài 1. Rút gọn biểu thức

1. $\dfrac{15}{3\sqrt{20}}$.
2. $\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.
3. $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$.
4. $\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$.
5. $\dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.
6. $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}} + \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$.
7. $\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}}$.
8. $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$.
9. $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$.
10. $\sqrt{6-2\sqrt{5}} + \sqrt{6+2\sqrt{5}}$.

Lời giải.

1. $\dfrac{15}{3\sqrt{20}} = \dfrac{15\sqrt{20}}{3\cdot 20} = \dfrac{15\sqrt{20}}{60} = \dfrac{\sqrt{20}}{4} = \dfrac{2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.
2. $\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\left(3+\sqrt{3}\right)\sqrt{3}}{3} = \dfrac{3\sqrt{3}+3}{3} = \sqrt{3}+1$.
3. $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1$.
4. $\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}} = \dfrac{\left(\sqrt{15}-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)} = \dfrac{\sqrt{30}-\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{30}}{2-5} = \dfrac{-2\sqrt{3}+5\sqrt{3}}{-3} = -\sqrt{3}$.

5. $\dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \dfrac{\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)} = \dfrac{6-2\sqrt{6}+3\sqrt{6}-6}{2-3} = \dfrac{\sqrt{6}}{-1} = -\sqrt{6}.$

6. $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}} + \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)} + \dfrac{2-\sqrt{3}}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)} = \dfrac{2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}}{4-3} = 4.$

7. $\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)} = \sqrt{4-3} = 1.$

8. $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}+1} = \sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2} = \left|\sqrt{3}+1\right| = \sqrt{3}+1.$

9. $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2} = \left|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right| = \sqrt{3}-\sqrt{2}.$

10. $\sqrt{6-2\sqrt{5}}+\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2} = \left|\sqrt{5}-1\right|+\left|\sqrt{5}-1\right| = \sqrt{5}-1+\sqrt{5}+1 = 2\sqrt{5}.$

□

Bài 2. Chứng minh các đẳng thức sau

1. $\sqrt{2006-2\sqrt{2005}}+\sqrt{2006+2\sqrt{2005}} = 2\sqrt{2005}.$
2. $\sqrt{8+2\sqrt{15}}-\sqrt{8-2\sqrt{15}} = 2\sqrt{3}.$
3. $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{6}.$
4. $\sqrt{8+\sqrt{63}}-\sqrt{8-3\sqrt{7}} = \sqrt{14}.$
5. $\sqrt{6-2\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{12}+\sqrt{18-\sqrt{128}}}} = \sqrt{3}-1.$
6. $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}} = 1.$
7. $\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}} = 5+3\sqrt{2}.$

Lời giải.

1. $\sqrt{2006-2\sqrt{2005}}+\sqrt{2006+2\sqrt{2005}} = 2\sqrt{2005}.$

$$\begin{aligned} VT &= \sqrt{2006-2\sqrt{2005}}+\sqrt{2006+2\sqrt{2005}} = \sqrt{\left(\sqrt{2005}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2005}+1\right)^2} \\ &= \left|\sqrt{2005}-1\right|+\left|\sqrt{2005}+1\right| = \sqrt{2005}-1+\sqrt{2005}+1 \\ &= 2\sqrt{2005} = VP. \end{aligned}$$

2. $\sqrt{8+2\sqrt{15}}-\sqrt{8-2\sqrt{15}} = 2\sqrt{3}.$

$$\begin{aligned} VT &= \sqrt{8+2\sqrt{15}}-\sqrt{8-2\sqrt{15}} = \sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2} \\ &= \left|\sqrt{5}+\sqrt{3}\right|-\left|\sqrt{5}-\sqrt{3}\right| = \left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)-\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right) \\ &= 2\sqrt{3} = VP. \end{aligned}$$

3. $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{6}$.

$$\begin{aligned}VT&=\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}\\&=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\\&=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\sqrt{6}=VP.\end{aligned}$$

4. $\sqrt{8+\sqrt{63}}-\sqrt{8-3\sqrt{7}}=\sqrt{14}$.

$$\begin{aligned}VT&=\sqrt{8+\sqrt{63}}-\sqrt{8-3\sqrt{7}}=\sqrt{8+3\sqrt{7}}-\sqrt{8-3\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{16+6\sqrt{7}}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{16-6\sqrt{7}}}{\sqrt{2}}\\&=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{7}+3\right)^2}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{\left(\sqrt{7}-3\right)^2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{7}+3}{\sqrt{2}}-\frac{3-\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\\&=\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{2}}=\sqrt{14}=VP.\end{aligned}$$

5. $\sqrt{6-2\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{12}+\sqrt{18-\sqrt{128}}}}=\sqrt{3}-1$.

$$\begin{aligned}VT&=\sqrt{6-2\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{12}+\sqrt{18-\sqrt{128}}}}=\sqrt{6-2\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{12}+\sqrt{18-2\sqrt{32}}}}\\&=\sqrt{6-2\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{12}+\sqrt{\left(4-\sqrt{2}\right)^2}}}=\sqrt{6-2\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{12}+4-\sqrt{2}}}\\&=\sqrt{6-2\sqrt{\sqrt{12}+4}}=\sqrt{6-2\sqrt{2\sqrt{3}+4}}=\sqrt{6-2\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}}\\&=\sqrt{6-2\left(\sqrt{3}+1\right)}=\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}\\&=\sqrt{3}-1=VP.\end{aligned}$$

6. $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}=1$.

$$\begin{aligned}VT&=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{\left(3-2\sqrt{5}\right)^2}}}\\&=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\left(2\sqrt{5}-3\right)}}=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}\\&=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}=\sqrt{\sqrt{5}-\left(\sqrt{5}-1\right)}\\&=\sqrt{1}=1=VP.\end{aligned}$$

7. $\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}=5+3\sqrt{2}$.

$$VT=\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}=\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{\left(1+2\sqrt{2}\right)^2}}}=\sqrt{13+30\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$$

$$= \sqrt{13 + 30\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}} = \sqrt{13 + 30\left(\sqrt{2}+1\right)} = \sqrt{43 + 30\sqrt{2}} = \sqrt{\left(5+3\sqrt{2}\right)^2}$$
$$= 5 + 3\sqrt{2} = VP.$$

□

Bài 3. Cho biểu thức

$$V = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}-2}\right)\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} \qquad \text{với } x > 0; x \neq 4.$$

1. Rút gọn biểu thức V.
2. Tìm giá trị của x để $V = \dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

1. Rút gọn biểu thức V.

$$\begin{aligned} V &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}-2}\right)\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)} + \frac{\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}\right)\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}-2}. \end{aligned}$$

2. Tìm giá trị của x để $V = \dfrac{1}{3}$.

$$V = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}-2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 8 \Leftrightarrow x = 64.$$

□

Bài 4. Cho

$$A = \left(\frac{1}{x-1} + \frac{3\sqrt{x}+5}{x\sqrt{x}-x-\sqrt{x}+1}\right)\left(\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{4\sqrt{x}} - 1\right)$$

1. Rút gọn biểu thức A.
2. Đặt $B = \left(x - \sqrt{x} + 1\right)A$. Chứng minh $B > 1$ với $x > 0$, $x \neq 1$.

Lời giải.

1. Rút gọn biểu thức A.

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{x-1} + \frac{3\sqrt{x}+5}{x\sqrt{x}-x-\sqrt{x}+1}\right)\left(\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{4\sqrt{x}} - 1\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}-1}{(x-1)\left(\sqrt{x}-1\right)} + \frac{3\sqrt{x}+5}{(x-1)\left(\sqrt{x}-1\right)}\right)\left(\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2 - 4\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}\right) \\ &= \left(\frac{4\sqrt{x}+4}{(x-1)\left(\sqrt{x}-1\right)}\right)\left(\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{4\sqrt{x}}\right) \\ &= \left(\frac{4\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}\right)\left(\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{4\sqrt{x}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

2. $B=(x-\sqrt{x}+1)A=B=(x-\sqrt{x}+1)\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}-1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

   Vì $x\neq 1$ nên $\left(\sqrt{x}-1\right)^2>0\Leftrightarrow x+1>2\sqrt{x}\Rightarrow\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}>2$ (do $x>0$).

   Suy ra $B=\sqrt{x}-1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}>1$ với $x>0$, $x\neq 1$.

□

Bài 5. Cho biểu thức

$$P=\frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3}+\frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}+\frac{2\sqrt{x}+3}{3+\sqrt{x}}$$

1. Rút gọn biểu thức P.
2. Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để P là một số nguyên.

Lời giải.

1. Rút gọn biểu thức P.

$$\begin{aligned}
P&=\frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3}+\frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}+\frac{2\sqrt{x}+3}{3+\sqrt{x}}\\
&=\frac{15\sqrt{x}-11}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}-\frac{\left(3\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}+\frac{\left(2\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}\\
&=\frac{15\sqrt{x}-11}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}-\frac{3x+7\sqrt{x}-6}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}+\frac{2x+\sqrt{x}-3}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}\\
&=\frac{-x+9\sqrt{x}-8}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}\\
&=-\frac{\left(\sqrt{x}-8\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}\\
&=\frac{8-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}.
\end{aligned}$$

2. Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để P là một số nguyên.

   Ta có $P=\dfrac{8-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}=\dfrac{11}{\sqrt{x}+3}-1$.

   Do đó

$$P\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{11}{\sqrt{x}+3}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 11\,\vdots\,\left(\sqrt{x}+3\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}+3=1\\ \sqrt{x}+3=-1\\ \sqrt{x}+3=11\\ \sqrt{x}+3=-11\end{array}\right.\Leftrightarrow\sqrt{x}+3=11\Leftrightarrow x=64.$$

□

Bài 6. Cho biểu thức

$$P=\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}+\frac{2-x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{x+2}}+\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{3}}{x+2-\sqrt{3x+6}}\right)$$

1. Tìm điều kiện của x để biểu thức P xác định.

2. Rút gọn và tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P.

Lời giải.

1. Điều kiện của x để biểu thức P xác định.

$$\begin{cases} x+2>0 \\ x+1 \geqslant 0 \\ \sqrt{x+2} \neq \sqrt{x+1} \\ \sqrt{x+1} \neq \sqrt{3} \\ \sqrt{x+2} \neq \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -1 \\ x \neq 1 \\ x \neq 2 \end{cases}.$$

2. Rút gọn và tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P.

$$\begin{aligned}
P &= \left(\frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}+\frac{2-x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{x+2}}+\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{3}}{x+2-\sqrt{3x+6}}\right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{x+1}\right)^2}+\frac{(2-x)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}\right)\left(\frac{-2\sqrt{x+2}+\sqrt{x+2}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+2}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{3}\right)}\right) \\
&= \left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}-\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3}\right)\right)\left(\frac{-\sqrt{x+2}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+2}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{3}\right)}\right) \\
&= \left(\sqrt{x+2}-\sqrt{3}\right)\left(\frac{-\sqrt{x+2}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+2}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{3}\right)}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x+2}}-1.
\end{aligned}$$

Mặt khác ta có: $x \geqslant -1 \Rightarrow \sqrt{x+2} \geqslant 1 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{x+2}} \leqslant \sqrt{3} \Rightarrow P \leqslant \sqrt{3}-1$.

Do đó $\max P = \sqrt{3}-1 \Leftrightarrow x=-1$.

□

§7 Căn bậc ba

1 Tóm tắt lý thuyết

Định nghĩa 2. Cho $a, b \in \mathbb{R}$, $\sqrt[3]{a} = b \Leftrightarrow a = b^3$.

Tính chất 1. Cho $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$. Khi đó ta có

1. $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$.
2. $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$.
3. $a \leqslant b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} \leqslant \sqrt[3]{b}$.

2 Các dạng toán

Dạng 22. Tìm căn bậc ba của một số

Phương pháp giải
Dùng các phép biến đổi đưa biểu thức dưới dấu căn về dạng a^3 rồi tính.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tính $\sqrt[3]{8}$; $\sqrt[3]{-64}$.

Lời giải.

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$$
$$\sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4$$

□

Ví dụ 2. Tính $\sqrt[3]{\dfrac{1}{0{,}008}}$; $\sqrt[3]{(-27) \cdot 8}$.

Lời giải.

$$\sqrt[3]{\frac{1}{0{,}008}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{0{,}008}} = \frac{\sqrt[3]{1^3}}{\sqrt[3]{0{,}2^3}} = \frac{1}{0{,}2} = 5.$$
$$\sqrt[3]{(-27) \cdot 8} = \sqrt[3]{(-27)} \cdot \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{(-3)^3} \cdot \sqrt[3]{2^3} = -3 \cdot 2 = -6.$$

□

Ví dụ 3. Tính $\dfrac{\sqrt[3]{36}\cdot\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{16}}$.

Lời giải.

$$\frac{\sqrt[3]{36}\cdot\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{16}}=\sqrt[3]{\frac{36\cdot 12}{16}}=\sqrt[3]{\frac{3^2\cdot 4\cdot 4\cdot 3}{4^2}}=\sqrt[3]{3^3}=3.$$

□

Dạng 23. So sánh các căn bậc ba

Phương pháp giải

- Đưa hai biểu tức cần so sánh về dạng cơ bản $\sqrt[3]{a}\leqslant\sqrt[3]{b}$.
- Áp dụng tính chất cơ bản suy ra kết quả.

12. Những bài không thể đưa ngay về dạng cơ bản thì có thể lập phương hai biểu thức đã cho rồi so sánh: Nếu $a^3\geqslant b^3\Leftrightarrow a\geqslant b$.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. So sánh $\sqrt[3]{5}$ và $\sqrt[3]{4}$.

Lời giải.

Ta có $4<5\Rightarrow\sqrt[3]{4}<\sqrt[3]{5}$. □

Ví dụ 2. So sánh $\sqrt[3]{5}$ và 2.

Lời giải.

Ta có $8>5\Rightarrow\sqrt[3]{8}>\sqrt[3]{5}\Rightarrow 2>\sqrt[3]{5}$. □

Ví dụ 3. So sánh $4\sqrt[3]{5}$ và $5\sqrt[3]{4}$.

Lời giải.

Ta có

$$5\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{5^3\cdot 4}=\sqrt[3]{500}$$
$$4\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{4^3\cdot 5}=\sqrt[3]{320}$$

Suy ra $\sqrt[3]{320}<\sqrt[3]{500}\Leftrightarrow 4\sqrt[3]{5}<5\sqrt[3]{4}$. □

Ví dụ 4. So sánh $\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{7}$ và $\sqrt[3]{12}$.

Lời giải.

Ta có

$$\left(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{7}\right)^3=5+3\sqrt[3]{5^2\cdot 7}+3\sqrt[3]{5\cdot 7^2}+7=12+3\sqrt[3]{175}+3\sqrt[3]{245}>12=\left(\sqrt[3]{12}\right)^3$$

$\Rightarrow \sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{7}>\sqrt[3]{12}.$

□

Dạng 24. Rút gọn biểu thức chứa căn bậc ba

Phương pháp giải
Dùng các phép biến đổi đưa biểu thức dưới dấu căn về dạng a^3 hoặc mũ 3 cả hai vế của biểu thức đưa về giải phương trình bậc ba.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Rút gọn biểu thức sau

1. $A=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}.$
2. $B=\sqrt[3]{72-32\sqrt{5}}\cdot\sqrt{7+3\sqrt{5}}.$

Lời giải.

1. $A=\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}\right)^3+3\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot 1+3\sqrt{2}\cdot 1^2+1^3}+\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}\right)^3-3\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot 1+3\sqrt{2}\cdot 1^2-1^3}$
$=\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}+1\right)^3}+\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}-1\right)^3}=\left(\sqrt{2}+1\right)+\left(\sqrt{2}-1\right)=2\sqrt{2}.$

2. $B=\sqrt[3]{(3)^3-3\cdot(3)^2\cdot\sqrt{5}+3\cdot 3\cdot\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^3}\cdot\dfrac{\sqrt{14+6\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$
$=\sqrt[3]{\left(3-\sqrt{5}\right)^3}\cdot\dfrac{\sqrt{\left(3+\sqrt{5}\right)^2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\left(3-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}.$

□

Ví dụ 2. Rút gọn biểu thức sau $A=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}.$

Lời giải.

$A^3=2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5}+3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)=4-3A.$
$\Rightarrow A^3+3A-4=0\Leftrightarrow (A-1)(A^2+A+4)=0\Leftrightarrow A=1$ (do $A^2+A+4=\left(A+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{15}{4}>0,\forall A$)
□

Dạng 25. Giải phương trình chứa căn bậc ba

Phương pháp giải
Lũy thừa bậc ba hai vế của phương trình rồi đưa về dạng phương trình tích hoặc ta có thể đặt ẩn phụ.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+7}-3=1$

Lời giải.

$\sqrt[3]{x+7}-3=1\Leftrightarrow\sqrt[3]{x+7}=4\Leftrightarrow x+7=64\Leftrightarrow x=57.$ □

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}=0$.

Lời giải.

Phương trình tương đương với $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x+1}=-\sqrt[3]{x+2}$ (1)
Lũy thừa bậc ba cả hai vế ta được

$$\begin{aligned}
&x+x+1+3\sqrt[3]{x(x+1)}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x+1}\right)=-x-2\\
\Leftrightarrow &3x+3+3\sqrt[3]{x(x+1)}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x+1}\right)=0\\
\Rightarrow &x+1-\sqrt[3]{x(x+1)(x+2)}=0\\
\Leftrightarrow &x(x+1)(x+2)=(x+1)^3\\
\Leftrightarrow &x=-1.
\end{aligned}$$

Thử lại ta thấy $x=-1$ là nghiệm của phương trình. □

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sqrt[3]{2+x}+\sqrt[3]{5-x}=1$.

Lời giải.

Đặt $a=\sqrt[3]{2+x}$, $b=\sqrt[3]{5-x}$.
Ta có

$$\begin{aligned}
\begin{cases}a+b=1\\ a^3+b^3=2+x+5-x=7\end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases}a+b=1\\ (a+b)(a^2-ab+b^2)=7\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}a+b=1\\ (a+b)^2-3ab=7\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}a+b=1\\ ab=-2\end{cases}
\end{aligned}$$

Khi đó a,b là nghiệm của phương trình $X^2-X-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}X=-1\\ X=2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll}\begin{cases}a=-1\\ b=2\end{cases} & (1)\\ \begin{cases}a=2\\ b=-1\end{cases} & (2)\end{array}\right.$

- (1) $\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt[3]{2+x}=-1\\ \sqrt[3]{5-x}=2\end{cases} \Leftrightarrow x=-3$.
- (2) $\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt[3]{2+x}=2\\ \sqrt[3]{5-x}=-1\end{cases} \Leftrightarrow x=6$.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=-3$ và $x=6$. □

3 Luyện tập

Bài 1. Tính các căn bậc ba sau

1. $\sqrt[3]{64}$.
2. $\sqrt[3]{-512}$.
3. $\sqrt[3]{0{,}064}$.
4. $\sqrt[3]{-0{,}216}$.
5. $\dfrac{\sqrt[3]{500}}{\sqrt[3]{4}}+\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{18}$.
6. $\dfrac{\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{576}}-\dfrac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{4}}$.

Lời giải.

1. $\sqrt[3]{64}=4$.
2. $\sqrt[3]{-512}=-8$.
3. $\sqrt[3]{0{,}064}=\sqrt[3]{\dfrac{64}{1000}}=\dfrac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{1000}}=\dfrac{4}{10}$.
4. $\sqrt[3]{-0{,}216}=\sqrt[3]{(-6)^3}=-6$.
5. $\dfrac{\sqrt[3]{500}}{\sqrt[3]{4}}+\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{18}=\sqrt[3]{\dfrac{500}{4}}+\sqrt[3]{12\cdot 18}=\sqrt[3]{125}+\sqrt[3]{216}=5+6=11$.
6. $\dfrac{\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{576}}-\dfrac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{\dfrac{12\cdot 6}{576}}-\sqrt[3]{\dfrac{32}{4}}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}}-\sqrt[3]{8}=\dfrac{1}{2}-2=-\dfrac{3}{2}$.

□

Bài 2. So sánh các biểu thức sau

1. $\sqrt[3]{9}$ và 2.
2. $\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}}$ và $\dfrac{3}{4}$.
3. $2\sqrt[3]{3}$ và $3\sqrt[3]{2}$.
4. $-6\sqrt[3]{7}$ và $7\sqrt[3]{(-6)}$.
5. $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{7}$ và $\sqrt[3]{11}$.
6. $\sqrt[3]{10}-2$ và $\sqrt[3]{2}$.
7. $\sqrt{2}+1$ và $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$.
8. $\sqrt{3}-2$ và $\sqrt[3]{15\sqrt{3}-25}$.

Lời giải.

1. $\sqrt[3]{9}>2$.
2. $\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}}<\dfrac{3}{4}$.
3. $\begin{cases}2\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{2^3\cdot 3}=\sqrt[3]{24}\\ 3\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{3^3\cdot 2}=\sqrt[3]{54}\end{cases}\Rightarrow 2\sqrt[3]{3}<3\sqrt[3]{2}$.
4. $\begin{cases}-6\sqrt[3]{7}=\sqrt[3]{(-6)^3\cdot 7}=\sqrt[3]{-1512}\\ 7\sqrt[3]{(-6)}=\sqrt[3]{7^3\cdot(-6)}=\sqrt[3]{-2058}\end{cases}\Rightarrow -6\sqrt[3]{7}>7\sqrt[3]{(-6)}$.
5. $\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{7}\right)^3=4+3\sqrt[3]{112}+3\sqrt[3]{196}+7=11+3\sqrt[3]{112}+3\sqrt[3]{196}>11=\left(\sqrt[3]{11}\right)^3$
$\Rightarrow\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{7}>\sqrt[3]{11}$.

6. $\begin{cases} \left(\sqrt[3]{10}\right)^3 = 10 \\ \left(\sqrt[3]{2}+2\right)^3 = 2 + 6\sqrt[3]{4} + 12\sqrt[3]{2} + 8 = 10 + 6\sqrt[3]{4} + 12\sqrt[3]{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \left(\sqrt[3]{10}\right)^3 < \left(\sqrt[3]{2}+2\right)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{10} < \sqrt[3]{2} + 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{10} - 2 < \sqrt[3]{2}$.

7. $\left(\sqrt{2}+1\right)^3 = 2\sqrt{2} + 6 + 3\sqrt{2} + 1 = 7 + 5\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} + 1 = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$.

8. $\left(\sqrt{3}-2\right)^3 = 3\sqrt{3} - 18 + 12\sqrt{3} - 8 = 15\sqrt{3} - 26 < 15\sqrt{3} - 25$

$\Rightarrow \sqrt{3} - 2 < \sqrt[3]{15\sqrt{3} - 25}$.

□

Bài 3. Rút gọn các biểu thức sau:

1. $A = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.
2. $B = \sqrt[3]{182+\sqrt{33125}} + \sqrt[3]{182-\sqrt{33125}}$.

Lời giải.

1. $A = \sqrt[3]{2^3 + 3\cdot 2^2\left(\sqrt{2}\right) + 3\cdot 2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^3} + \sqrt[3]{2^3 - 3\cdot 2^2\left(\sqrt{2}\right) + 3\cdot 2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^3}$

$= \sqrt[3]{\left(2+\sqrt{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(2-\sqrt{2}\right)^3} = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$.

2. $B^3 = 182 + \sqrt{33125} + 182 - \sqrt{33125} + 3\sqrt[3]{182^2 - 33125}B = 364 - 3B$.
Nên $B^3 + 3B - 364 = 0 \Leftrightarrow (B-7)(B^2+7B+52) = 0 \Leftrightarrow B = 7$
$\left(\text{do } B^2 + 7B + 52 = \left(B + \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{159}{4} > 0\right)$.

□

Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau:

1. $A = \left[\left(\frac{1}{a} - \sqrt[6]{\frac{1}{a}} + \sqrt[3]{a^2}\right) + \left(\frac{a}{a^2}\sqrt[6]{a^5} - \frac{3}{a}\sqrt[3]{a^2}\right)\right] \cdot a\sqrt[3]{a}$.
2. $B = \sqrt{a^2 + \sqrt[3]{a^4b^2}} + \sqrt{b^2 + \sqrt[3]{a^2b^4}}$.

Lời giải.

1. Ta có $A = \left[\left(\frac{1}{a} - \sqrt[6]{\frac{1}{a}} + \sqrt[3]{a^2}\right) + \left(\frac{a}{a^2}\sqrt[6]{a^5} - \frac{3}{a}\sqrt[3]{a^2}\right)\right] a\sqrt[3]{a}$

$= \left[\left(\frac{1}{a} - \sqrt[6]{\frac{1}{a}} + \sqrt[3]{a^2}\right) + \left(\sqrt[6]{\frac{1}{a}} - 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}}\right)\right] a\sqrt[3]{a}$

$= \left(\frac{1}{a} + \sqrt[3]{a^2} - 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}}\right) a\sqrt[3]{a}$

$= a^2 - 3a + \sqrt[3]{a}$.

2. Ta có $B = \sqrt[3]{a^2}\sqrt{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}} + \sqrt[3]{b^2}\sqrt{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}}$

$= \left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}\right)\sqrt{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}}$

$= \sqrt{\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}\right)^3}$.

□

Bài 5. Giải các phương trình sau

1. $\sqrt[3]{1000x} - \sqrt[3]{64x} - \sqrt[3]{27x} = 15$
2. $\sqrt[3]{x-3} + 3 = x$

Lời giải.

1. $\sqrt[3]{1000x} - \sqrt[3]{64x} - \sqrt[3]{27x} = 15 \Leftrightarrow 10\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{x} = 15 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 5 \Leftrightarrow x = 125.$
   Vậy phương trình có một nghiệm $x = 125$.

2. Ta có $\sqrt[3]{x-3} + 3 = x \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-3} = x - 3 \Leftrightarrow x - 3 = (x-3)^3$
$$\Leftrightarrow (x-3)\left[(x-3)^2 - 1\right] = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-3)(x-2)(x-4) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 2 \\ x = 4. \end{array}\right.$$
   Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{2; 3; 4\}$.

□

Bài 6. Giải các phương trình sau

1. $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{3x-2}$.
2. $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$.

Lời giải.

1. Ta có $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{3x-2}$
$$\Leftrightarrow 2x - 1 + x - 1 + 3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}\left(\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1}\right) = 3x - 2$$
$$\Rightarrow 3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)(3x-2)} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = \dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$$
   Thử lại ta thấy các nghiệm đều thỏa mãn phương trình.
   Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\dfrac{1}{2}; 1; \dfrac{2}{3}\right\}$.

2. Ta có $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$
$$\Leftrightarrow x + 5 + x + 6 + 3\sqrt[3]{(x+5)(x+6)}\left(\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6}\right) = 2x + 11$$
$$\Rightarrow 3\sqrt[3]{(x+5)(x+6)(2x+11)} = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -5 \\ x = -6 \\ x = -\dfrac{11}{2}. \end{array}\right.$$
   Thử lại ta thấy các nghiệm đều thỏa mãn phương trình.
   Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{-5; -\dfrac{11}{2}; -6\right\}$.

□

§8 Ôn tập chương 1

1 Rút gọn biểu thức không chứa căn.

Dạng 26. Rút gọn biểu thức không chứa căn.

Chúng ta thực hiện bài toán rút gọn biểu thức không chứa căn thông qua những bước như sau:

B1: Tìm điều kiện xác định.

B2: Đưa các mẫu về dạng tích.

B3: Quy đồng mẫu.

B4: Rút gọn biểu thức.

13. Nếu trong biểu thức tồn tại dạng $A : B$ thì chú ý điều kiện $B \neq 0$.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho biểu thức $P = \dfrac{1}{x+5} + \dfrac{2}{x-5} - \dfrac{2x+10}{(x+5)(x-5)}$.

1. Tìm điều kiện xác định của P.
2. Rút gọn biểu thức P.

Lời giải.

1. Điều kiện xác định
$$\begin{cases} x+5 \neq 0 \\ x-5 \neq 0 \\ (x-5)(x+5) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 5 \\ x \neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \pm 5.$$

2. Ta có
$$\begin{aligned} P &= \dfrac{1}{x+5} + \dfrac{2}{x-5} - \dfrac{2x+10}{(x+5)(x-5)} \\ &= \dfrac{x-5}{(x+5)(x-5)} + \dfrac{2(x+5)}{(x-5)(x+5)} - \dfrac{2x+10}{(x+5)(x-5)} \\ &= \dfrac{x-5+2(x+5)-(2x+10)}{(x+5)(x-5)} = \dfrac{x-5}{(x+5)(x-5)} = \dfrac{1}{x+5}. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 2. Cho biểu thức $P = \dfrac{3}{x+3} + \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{18}{9-x^2}$.

1. Tìm điều kiện xác định của P.
2. Rút gọn biểu thức P.

Lời giải.

1. Biểu thức P xác định khi $\begin{cases} x+3 \neq 0 \\ x-3 \neq 0 \\ 9-x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \pm 3$.

2. Ta có
$$\begin{aligned} P &= \frac{3}{x+3} + \frac{1}{x-3} - \frac{18}{9-x^2} \\ &= \frac{3(x-3)}{(x-3)(x+3)} + \frac{x+3}{(x-3)(x+3)} + \frac{18}{(x-3)(x+3)} \\ &= \frac{3x-9+x+3+18}{(x-3)(x+3)} = \frac{4x+12}{(x-3)(x+3)} \\ &= \frac{4(x+3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{4}{x-3}. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 3. Cho các biểu thức $P = \dfrac{x}{x-3} - \dfrac{x+1}{x+3} + \dfrac{3x+2}{9-x^2}$ và $Q = 2 + \dfrac{(7-2x)x}{x^2-3x}$. Rút gọn biểu thức P và Q.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x \neq \pm 3$ và $x \neq 0$.

$P = \dfrac{x(x+3)-(x-3)(x+1)-(3x+2)}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{2x+1}{(x-3)(x+3)}$.

$Q = 2 + \dfrac{7-2x}{x-3} = \dfrac{1}{x-3}$.

□

Dạng 27. Bài toán phụ sau khi rút gọn biểu thức.

Sau khi thực hiện bài toán rút gọn, ta thực hiện thêm một số yêu cầu với biểu thức sau rút gọn, các yêu cầu đó có thể thuộc một trong các dạng sau:

Dạng 1: Tính giá trị biểu thức.

Dạng 2: Giải phương trình.

Dạng 3: Giải bất phương trình.

Dạng 4: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Dạng 5: Bài toán số nguyên.

......

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho biểu thức $P = \dfrac{1}{x+5} + \dfrac{2}{x-5} - \dfrac{2x+10}{(x+5)(x-5)}$.

1. Tìm điều kiện xác định của P.
2. Rút gọn biểu thức P.
3. Tìm giá trị của P tại $x = 1$.
4. Tìm giá trị của x để $P = 2$.
5. Cho $P = -3$. Tính giá trị của biểu thức $Q = 9x^2 - 42x + 49$

Lời giải.

1. Điều kiện xác định: $\begin{cases} x+5 \neq 0 \\ x-5 \neq 0 \\ (x-5)(x+5) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 5 \\ x \neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \pm 5$.
2. Ta có
$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{x+5} + \frac{2}{x-5} - \frac{2x+10}{(x+5)(x-5)} \\ &= \frac{x-5}{(x+5)(x-5)} + \frac{2(x+5)}{(x-5)(x+5)} - \frac{2x+10}{(x+5)(x-5)} \\ &= \frac{x-5+2(x+5)-(2x+10)}{(x+5)(x-5)} = \frac{x-5}{(x+5)(x-5)} = \frac{1}{x+5}. \end{aligned}$$
3. Với $x = 1$ thì $P = \dfrac{1}{1+5} = \dfrac{1}{6}$.
4. Ta có
$P = 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+5} = 2 \Leftrightarrow 1 = 2x + 10 \Leftrightarrow x = \dfrac{-9}{2}$ (TMĐKXĐ).
Vậy $x = \dfrac{-9}{2}$.
5. Ta có
$P = -3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+5} = -3 \Leftrightarrow 1 = -3x - 15 \Leftrightarrow x = \dfrac{-16}{3}$.
Khi đó $Q = 9\left(\dfrac{-16}{3}\right)^2 - 42.\dfrac{-16}{3} + 49 = 529$.

□

Ví dụ 2. Cho biểu thức $P = \dfrac{3}{x+3} + \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{18}{9-x^2}$.

1. Tìm điều kiện xác định của P.
2. Rút gọn biểu thức P.
3. Tìm giá trị x để $P > 0$.
4. Tìm giá trị nguyên của x để P là số nguyên.

Lời giải.

1. Biểu thức P xác định khi $\begin{cases} x+3 \neq 0 \\ x-3 \neq 0 \\ 9-x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \pm 3.$

2. Ta có
$$\begin{aligned} P &= \frac{3}{x+3} + \frac{1}{x-3} - \frac{18}{9-x^2} \\ &= \frac{3(x-3)}{(x-3)(x+3)} + \frac{x+3}{(x-3)(x+3)} + \frac{18}{(x-3)(x+3)} \\ &= \frac{3x-9+x+3+18}{(x-3)(x+3)} \\ &= \frac{4x+12}{(x-3)(x+3)} = \frac{4(x+3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{4}{x-3} \end{aligned}$$

3. $P > 0 \Leftrightarrow \dfrac{4}{x-3} > 0 \Leftrightarrow x-3 > 0 \Leftrightarrow x > 3.$

4. Với $x \in \mathbb{Z}$ thì
$P \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-3 \in \text{Ư}(4) \Leftrightarrow x-3 \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\} \Leftrightarrow x \in \{2; 4; 1; 5; -1; 7\}.$
Vậy $x \in \{2; 4; 1; 5; -1; 7\}.$

□

Ví dụ 3. Cho các biểu thức $P = \dfrac{x}{x-3} - \dfrac{x+1}{x+3} + \dfrac{3x+2}{9-x^2}$ và $Q = 2 + \dfrac{(7-2x)x}{x^2-3x}$.

1. Rút gọn biểu thức P và Q.

2. Tìm x để $\dfrac{P}{Q} < 2$.

Lời giải.

1. ĐKXĐ: $x \neq \pm 3$ và $x \neq 0$.
$P = \dfrac{x(x+3)-(x-3)(x+1)-(3x+2)}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{2x+1}{(x-3)(x+3)}.$
$Q = 2 + \dfrac{7-2x}{x-3} = \dfrac{1}{x-3}.$

2. $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{2x+1}{x+3} = 2 - \dfrac{5}{x+3} < 2 \Leftrightarrow \dfrac{-5}{x+3} < 0 \Leftrightarrow x > -3$. Kết hợp điều kiện suy ra $x > -3$ và $x \neq 0$.

□

2 Luyện tập

Bài 1. Cho biểu thức $P = \left(\dfrac{x+3}{x+2} - \dfrac{2-x}{3-x} - \dfrac{x-8}{x^2-x-6}\right) : \left(1 - \dfrac{x+6}{2x+4}\right)$.

1. Rút gọn P và tìm điều kiện xác định của P.

2. Tính giá trị của P biết $|2x-3|+1=x$.

3. Tìm x nguyên để $P\cdot(x-1)$ có giá trị là số tự nhiên.

Lời giải.

1. Ta có

$$\begin{aligned}P&=\left(\frac{x+3}{x+2}-\frac{2-x}{3-x}-\frac{x-8}{x^2-x-6}\right):\left(1-\frac{x+6}{2x+4}\right)\\&=\left(\frac{x+3}{x+2}-\frac{2-x}{3-x}-\frac{x-8}{(x+2)(x-3)}\right):\left(\frac{2x+4-x-6}{2x+4}\right)\\&=\left(\frac{x^2-9+4-x^2-x+8}{(x+2)(x-3)}\right):\left(\frac{x-2}{2(x+2)}\right)\\&=\left(\frac{3-x}{(x+2)(x-3)}\right)\cdot\left(\frac{2(x+2)}{x-2}\right)\\&=-\frac{2}{x-2}.\end{aligned}$$

Điều kiện xác định $\begin{cases}x\neq\pm2\\x\neq3\end{cases}$.

2. $|2x-3|+1=x\Leftrightarrow|2x-3|=x-1$ (điều kiện $x\geq1$)
$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-3=x-1\\2x-3=1-x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\text{ (loại)}\\x=\dfrac{4}{3}\text{ (thỏa mãn).}\end{array}\right.$
Với $x=\dfrac{4}{3}$ ta có $P=3$.

3. $P\cdot(x-1)=-\dfrac{2(x-1)}{x-2}=-2-\dfrac{2}{x-2}$.
Để $P\cdot(x-1)$ là số tự nhiên thì $x-2\in Ư(2)=\{\pm1;\pm2\}$. Ta có bảng giá trị

$x-2$	-2	-1	1	2
x	0	1	3	4
Kết luận	loại	thỏa mãn	loại	loại

Vậy với $x=1$ thì $P\cdot(x-1)$ có giá trị là số tự nhiên.

□

Bài 2. Cho biểu thức $A=\dfrac{x^2}{x^2-4}-\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{2}{x+2}$.

1. Với điều kiện nào của x thì giá trị của biểu thức A được xác định?

2. Rút gọn biểu thức A.

3. Tìm giá trị biểu thức A tại $x=1$.

Lời giải.

1. Giá trị của biểu thức A xác định $\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-4\neq0\\x-2\neq0\\x+2\neq0\end{cases}\Leftrightarrow x\neq\pm2$.

2. Ta có

$$\begin{aligned}A &= \frac{x^2}{x^2-4} - \frac{x}{x-2} + \frac{2}{x+2}\\ &= \frac{x^2}{(x-2)(x+2)} - \frac{x(x+2)}{(x-2)(x+2)} + \frac{2(x-2)}{(x-2)(x+2)}\\ &= \frac{x^2-x^2-2x+2x-4}{(x-2)(x+2)} = \frac{-4}{(x-2)(x+2)}.\end{aligned}$$

3. Tại $x=1$ thì ta có $A = \dfrac{-4}{(1-2)(1+2)} = \dfrac{4}{3}$.

□

Bài 3. Cho biểu thức $P = \dfrac{x+2}{x+3} - \dfrac{5}{x^2+x-6} + \dfrac{1}{2-x}$.

1. Tìm điều kiện xác định của P.
2. Rút gọn biểu thức P.
3. Tìm x để $P = \dfrac{-3}{4}$.
4. Tìm các giá trị nguyên của x để P cũng có giá trị nguyên.
5. Tính giá trị của biểu thức P khi $x^2-9=0$.

Lời giải.

1. P xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \neq 0\\ x^2+x-6 \neq 0\\ 2-x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -3\\ (x+3)(x-2) \neq 0\\ x \neq 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -3\\ x \neq 2\end{cases}$.

2. Ta có

$$\begin{aligned}P &= \frac{x+2}{x+3} - \frac{5}{x^2+x-6} + \frac{1}{2-x}\\ &= \frac{(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-2)} - \frac{5}{(x-2)(x+3)} - \frac{x+3}{(x+3)(x-2)}\\ &= \frac{x^2-4-5-x-3}{(x+3)(x-2)}\\ &= \frac{x^2-x-12}{(x+3)(x-2)} = \frac{(x+3)(x-4)}{(x+3)(x-2)} = \frac{x-4}{x-2}.\end{aligned}$$

3. Ta có $P = \dfrac{-3}{4} \Leftrightarrow \dfrac{x-4}{x-2} = \dfrac{-3}{4} \Leftrightarrow 4(x-4) = -3(x-2) \Leftrightarrow 4x-16 = -3x+6$
$\Leftrightarrow 7x = 22 \Leftrightarrow x = \dfrac{22}{7}$.

4. Có $P = 1 - \dfrac{2}{x-2}$.
Với $x \in \mathbb{Z}$ thì để P nguyên thì $x-2 \in \text{Ư}(2)$
Hay $x \in \{\pm1; \pm2\} \Leftrightarrow x \in \{0; 1; 3; 4\}$.

5. $x^2-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3\\ x=3\end{array}\right.$ kết hợp với điều kiện xác định $\Rightarrow x=3 \Rightarrow P = \dfrac{3-4}{3-2} = -1$.

□

3 Rút gọn biểu thức chứa căn

Trả lời và ghi nhớ các câu hỏi sau:

i) Khi nào $\sqrt{A}$ có nghĩa (xác định)? ....

ii) $\sqrt{A^2} =?$ ....

iii) Khi nào $\sqrt{A^2} = A$? ....

iv) Khi nào $\sqrt{A^2} = -A$? ....

v) $(\sqrt{X}+\sqrt{Y})(\sqrt{X}-\sqrt{Y}) =$ ....

vi) $(\sqrt{X}+1)(\sqrt{X}-1) =$ ....

vii) $(\sqrt{X}-\sqrt{Y})^2 =$ ....

viii) $(\sqrt{X}+\sqrt{Y})^2 =$ ....

ix) $X\sqrt{X}-1 =$ ....

x) $X\sqrt{X}+1 =$ ....

3.1 Rút gọn biểu thức chứa căn và các câu hỏi phụ

Dạng 28. Tính giá trị của biểu thức khi biết x

Đối với dạng toán này sau khi rút gọn biểu thức ta mới thay giá trị cụ thể của x vào.
Trong nhiều bài tập x được cho dưới dạng $x = a^2 \pm 2a\sqrt{b} + b$ ta cần biến đổi $x = (a \pm \sqrt{b})^2$.
Chú ý thêm một số công thức:

i) $x\sqrt{x} = (\sqrt{x})^3$

ii) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

⚠ **14.** Giá trị cụ thể của x phải thỏa mãn điều kiện xác định của biểu thức ban đầu (chứ không phải biểu thức đã rút gọn) thì ta mới thực hiện tính.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho biểu thức

$$B = \left(\frac{x}{\sqrt{x}+3} - \frac{x+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{6x+\sqrt{x}}{x-9}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} - 1\right), \text{ với } x \geq 0, x \neq 9.$$

Hãy rút gọn biểu thức B và tính giá trị của B khi $x = 12 + 6\sqrt{3}$.

Lời giải.

$$B = \left(\frac{x}{\sqrt{x}+3} - \frac{x+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{6x+\sqrt{x}}{x-9}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} - 1\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x(\sqrt{x}-3)-(x+1)\left(\sqrt{x}+3\right)+6x+\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)} : \frac{\sqrt{x}-3-\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}\\
&= \frac{-3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}\cdot\frac{\sqrt{x}+3}{-6} = \frac{1}{2(\sqrt{x}-3)}.
\end{aligned}$$

Khi $x = 12+6\sqrt{3} = (3+\sqrt{3})^2$ ta có $B = \dfrac{1}{2(3+\sqrt{3}-3)} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. □

Ví dụ 2. Cho biểu thức $B = \left(\dfrac{\sqrt{x}-4}{x-2\sqrt{x}}+\dfrac{3}{\sqrt{x}-2}\right) : \left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}\right)$ với $x > 0, x \neq 4$. Hãy rút gọn B và tính giá trị của B khi $x = 3+\sqrt{8}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
B &= \left(\frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}+\frac{3}{\sqrt{x}-2}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}\sqrt{x}-\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}\right)\\
&= \frac{4\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}.\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}{4}\\
&= \sqrt{x}-1
\end{aligned}$$

Với $x = 3+\sqrt{8} = \left(\sqrt{2}+1\right)^2$ ta có $\sqrt{x} = \sqrt{2}+1$. Do đó $B = \sqrt{2}+1-1 = \sqrt{2}$. □

Ví dụ 3. Cho biểu thức

$$A = \left(5-\frac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right).\left(5+\frac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right) \text{ với } x \geq 0, y \geq 0 \text{ và } x \neq y.$$

1. Rút gọn biểu thức A.
2. Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 1-\sqrt{3}$, $y = 1+\sqrt{3}$.

Lời giải.

1. $$\begin{aligned}
A &= \left(5-\frac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right).\left(5+\frac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)\\
&= \left(5-\frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right).\left(5+\frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)\\
&= (5-\sqrt{xy})(5+\sqrt{xy})\\
&= 25-xy.
\end{aligned}$$

2. Vì $1-\sqrt{3} < 0$ mâu thuẫn với điều kiện $x \geq 0$ nên không tồn tại giá trị của A khi $x = 1-\sqrt{3}$, $y = 1+\sqrt{3}$.

□

Ví dụ 4. Cho biểu thức $P = \dfrac{2x-11\sqrt{x}+15}{(x-4\sqrt{x}+3)}+\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$.

1. Rút gọn biểu thức P.

2. Tính giá trị của biểu thức P khi $x = 11 + 6\sqrt{2}$.

Lời giải.

1. Điều kiện xác định: $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 9$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{(\sqrt{x}-3)(2\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-1)} + \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} \\ &= 5 - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} \\ &= \frac{4\sqrt{x}-14}{\sqrt{x}-3}. \end{aligned}$$

2. Với $x = 11 + 6\sqrt{2} = (3+\sqrt{2})^2$ ta có

$$P = \frac{4(3+\sqrt{2})-14}{3+\sqrt{2}-3} = \frac{4\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}} = 4 - \sqrt{2}.$$

□

Dạng 29. Tìm x để biểu thức thỏa mãn phương trình

Đối với dạng toán này ta sử dụng biểu thức đã rút gọn để thay vào phương trình của đề bài, từ đó thực hiện giải phương trình bậc nhất hoặc bậc hai để tìm x.

⚠ **15.** Giá trị của x tìm được phải thỏa mãn điều kiện xác định của biểu thức ban đầu (chứ không phải biểu thức đã rút gọn).

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho biểu thức: $P = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \dfrac{3\sqrt{x}}{x-9}$, với $x \geq 0$; $x \neq 9$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm giá trị của x để $P = 2$.

Lời giải.

a) $P = \dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)+3\sqrt{x}}{x-9} = \dfrac{x-3\sqrt{x}+3\sqrt{x}}{x-9} = \dfrac{x}{x-9}$.

b) $P = 2 \Leftrightarrow \dfrac{x}{x-9} = 2 \Leftrightarrow x = 2x - 18 \Leftrightarrow x = 18$ (nhận).

□

Ví dụ 2. Cho biểu thức $P = \dfrac{(x+1)(x+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} - x - \sqrt{x}$, với $x > 0$.

1. Rút gọn biểu thức P.
2. Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức P bằng 2.

Lời giải.

1. Với $x > 0$, ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{(x+1)\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}} - x - \sqrt{x} \\ &= (x+1)\left(\sqrt{x}+1\right) - x - \sqrt{x} \\ &= x\sqrt{x} + x + \sqrt{x} + 1 - x - \sqrt{x} \\ &= x\sqrt{x} + 1. \end{aligned}$$

2. Với $x > 0$, theo câu $a)$ ta có $P = 2$ khi

$$x\sqrt{x} + 1 = 2 \Leftrightarrow x\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

   Vậy $P = 2$ khi $x = 1$.

□

Ví dụ 3. Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-\sqrt{x}}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-1}\right) \text{ với } x > 0; x \neq 1.$$

1. Rút gọn biểu thức A.
2. Tìm giá trị của x để $A = 1$.

Lời giải.

1. Ta có
$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-\sqrt{x}}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-1}\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\right) \\ &= \left(\frac{x-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1+2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\right) \\ &= \frac{x-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{x-2}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

2. $A = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{\sqrt{x}} = 1 \Leftrightarrow x - 2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = -1 \text{ (loại)} \\ \sqrt{x} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 4.$

   Vậy với $x = 4$ thì $A = 1$.

□

Ví dụ 4. Cho biểu thức $P = \dfrac{1}{x^2 - \sqrt{x}} : \dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.

1. Rút gọn biểu thức P.
2. Tìm các giá trị x sao cho $3P = 1 + x$.

Lời giải.

1. Ta có

$$P=\frac{1}{x^2-\sqrt{x}}:\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x}(x\sqrt{x}-1)}.\frac{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}.\frac{\sqrt{x}(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{x-1}.$$

2. $3P=1+x\Leftrightarrow\dfrac{3}{x-1}=1+x\Leftrightarrow x^2-1=3\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=2$ vì $x>0$ và $x\neq 1$.

□

Dạng 30. Tìm x để biểu thức thỏa mãn bất phương trình

Đối với dạng toán này, ta thay biểu thức sau khi rút gọn vào phương trình. Cần chú ý các công thức

i) Nếu $ab\geq 0$ và $b>0$ thì $a\geq 0$.

ii) Nếu $\dfrac{a}{b}\geq 0$ và $a>0$ thì $b>0$.

iii) Khi nhân hai vế với số âm thì phải đổi chiều của bất phương trình.

iv) $0\leq a<b\Leftrightarrow a^2<b^2$.

⚠ **16.** Sau khi giải bất phương trình phải kết hợp với điều kiện xác định ban đầu để đưa ra tập nghiệm đúng.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{x}{x-2\sqrt{x}}+\dfrac{x}{\sqrt{x}-2}\right):\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-4\sqrt{x}+4}$ với $x>0,x\neq 4$.

1. Rút gọn biểu thức P.
2. Tìm tất cả các giá trị của x để $P>0$.

Lời giải.

1. Với điều kiện $x>0,x\neq 4$ ta có

$$P=\left(\frac{x}{x-2\sqrt{x}}+\frac{x}{\sqrt{x}-2}\right):\frac{\sqrt{x}+1}{x-4\sqrt{x}+4}=\left(\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}+\frac{x}{\sqrt{x}-2}\right):\frac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}+\frac{x}{\sqrt{x}-2}\right).\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}-2}.\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}{\sqrt{x}+1}$$
$$=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}-2}.\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}{\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right).$$

2. Với điều kiện $x>0,x\neq 4$ ta có

$$P>0\Leftrightarrow\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)>0\Leftrightarrow\sqrt{x}-2>0$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{x}>2\Leftrightarrow x>4.$$

Kết hợp điều kiện ta có $x>4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

Ví dụ 2. Cho biểu thức

$$P=\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2}{x-1}\right)\text{(với } x>0, x\neq 1)$$

. Rút gọn biểu thức P và tìm các giá trị của x để $P>1$.

Lời giải.

Với $x>0$ và $x\neq 1$ ta có

$$\begin{aligned}P&=\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2}{x-1}\right)\\&=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{(\sqrt{x}-1)+(\sqrt{x}+1)-2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}\\&=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{2(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}\\&=\frac{2}{\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Khi đó $P>1\Leftrightarrow\dfrac{2}{\sqrt{x}}>1\Leftrightarrow\sqrt{x}<2\Leftrightarrow x<4$.

Kết hợp với điều kiện ta được $P>1$ khi và chỉ khi $0<x<4$ và $x\neq 1$. □

Ví dụ 3. Cho biểu thức

$$A=\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right).\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2\quad(x>0; x\neq 1).$$

1. Rút gọn A.
2. Tìm tất cả các giá trị của x để $\dfrac{A}{\sqrt{x}}>3$.

Lời giải.

1. Ta có

$$\begin{aligned}A&=\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right).\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2\\&=\frac{(\sqrt{x}-1)^2-(\sqrt{x}+1)^2}{x-1}.\left(\frac{1-x}{2\sqrt{x}}\right)^2\\&=\frac{-4\sqrt{x}}{x-1}.\frac{(1-x)^2}{4x}\\&=\frac{1-x}{\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

2. Ta có $\dfrac{A}{\sqrt{x}}>3\Leftrightarrow\dfrac{1-x}{x}>3\Leftrightarrow\dfrac{1-x}{x}-3>0\Leftrightarrow\dfrac{1-4x}{x}>0\Leftrightarrow 1-4x>0\Leftrightarrow x<\dfrac{1}{4}$.
   Vậy $0<x<\dfrac{1}{4}$.

□

Dạng 31. Tìm x để biểu thức nhận giá trị nguyên

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hai biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}; B = \dfrac{2}{\sqrt{x}+2} + \dfrac{4\sqrt{x}}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

a) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 9$.

b) Rút gọn biểu thức $T = A - B$.

c) Tìm x để T là số nguyên.

Ví dụ 2. Cho biểu thức

$$A = \left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \dfrac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right)$$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Ví dụ 3. Cho biểu thức $P = \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \dfrac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \dfrac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$.

1. Tìm x để $P(x)$ xác định và rút gọn $P(x)$.

2. Tìm các giá trị của x để biểu thức $Q(x) = \dfrac{2\sqrt{x}}{P(x)}$ nhận giá trị nguyên.

4 Giải phương trình chứa căn

Dạng 32. Giải phương trình chứa căn

Để giải phương trình có căn bậc hai, căn bậc ba, ta thực hiện theo các bước:

- Đặt điều kiện phương trình có nghĩa ($\sqrt{A}$ có nghĩa $\Leftrightarrow A \geq 0$).
- Đưa thừa số ra ngoài dấu căn: $\sqrt{A^2B} = |A|\sqrt{B}$; $\sqrt[3]{A^3B} = A\sqrt[3]{B}$.
- Rút gọn các căn thức đồng dạng.
- Biến đổi phương trình về dạng: $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow A = B^2$ (với $B \geq 0$) hoặc $\sqrt[3]{A} = B \Leftrightarrow A = B^3$.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{x^2+x}=x-1$;
2. $\sqrt{x^2+3}=\sqrt{4x}$;
3. $2\sqrt{3x}-4\sqrt{3x}=27-3\sqrt{3x}$;
4. $\sqrt{x^2-3}=0$;
5. $2-\sqrt{x^2-2}=0$;
6. $x+\sqrt{3x+10}=0$.

Lời giải.

1. Ta có

$$\sqrt{x^2+x}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1\geq 0 \\ x^2+x=(x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1\geq 0 \\ x^2+x=x^2-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ 3x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x=\dfrac{1}{3} \text{ loại.} \end{cases}$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

2. Ta có

$$\sqrt{x^2+3}=\sqrt{4x} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x\geq 0 \\ x^2+3=4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x^2-4x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x\in\{1;3\}$.

3. Điều kiện xác định: $x\geq 0$.

$$2\sqrt{3x}-4\sqrt{3x}=27-3\sqrt{3x} \Leftrightarrow 2\sqrt{3x}-4\sqrt{3x}+3\sqrt{3x}=27 \Leftrightarrow \sqrt{3x}=27 \Leftrightarrow 3x=729 \Leftrightarrow x=243.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=243$.

4.
$$\sqrt{x^2-3}=0 \Leftrightarrow x^2-3=0 \Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=\pm\sqrt{3}$.

5.
$$2-\sqrt{x^2-2}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2}=2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\geq 0 \text{ luôn đúng} \\ x^2-2=4 \end{cases} \Leftrightarrow x^2=6 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{6}.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=\pm\sqrt{6}$.

6. Ta có
$$x+\sqrt{3x+10}=0 \Leftrightarrow \sqrt{3x+10}=-x$$

Điều kiện xác định: $-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 0$.

$$3x+10=x^2 \Leftrightarrow x^2-3x-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-2. \end{array}\right.$$

So với điều kiện xác định, ta có nghiệm của phương trình $x=-2$.

□

Ví dụ 2. Giải phương trình

1. $\sqrt[3]{2x+1}=3$;
2. $\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[3]{x^2-1}$.

Lời giải.

1. Ta có
$$\sqrt[3]{2x+1}=3\Leftrightarrow 2x+1=27\Leftrightarrow 2x=26\Leftrightarrow x=13.$$

2. Ta có
$$\begin{aligned}&\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[3]{x^2-1}\Leftrightarrow x+1=x^2-1\Leftrightarrow x+1=(x-1)(x+1)\\ \Leftrightarrow\ &(x+1)(x-1-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=2.\end{array}\right.\end{aligned}$$
Vậy phương trình có hai nghiệm $x=-1$ và $x=2$.

□

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau:

1. $x^6-5x^3-24=0$;
2. $\sqrt[3]{2x+1}-1=2x$

Lời giải.

1. Biến đổi phương trình về dạng
$$\begin{aligned}&x^6+3x^3-8x^3-24=0\Leftrightarrow x^3(x^3+3)-8(x^3+3)=0\Leftrightarrow(x^3+3)(x^3-8)=0\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x^3+3=0\\ x^3-8=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt[3]{-3}\\ x=2.\end{array}\right.\end{aligned}$$
Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=\sqrt[3]{-3}$ hoặc $x=2$.

2. Biến đổi phương trình về dạng
$$\begin{aligned}&\sqrt[3]{2x+1}=2x+1\Leftrightarrow 2x+1=(2x+1)^3\Leftrightarrow(2x+1)[(2x+1)^2-1]=0\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}2x+1=0\\ (2x+1)^2=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+1=0\\ 2x+1=1\\ 2x+1=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{2}\\ x=0\\ x=-1.\end{array}\right.\end{aligned}$$
Vậy nghiệm của phương trình là $x\in\left\{-1;0;-\dfrac{1}{2}\right\}$.

□

5 Luyện tập

Bài 1. Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{2x-3}-\sqrt{3}=0$;
2. $\sqrt{3-x}-\sqrt{x-5}=0$;
3. $\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{\dfrac{x^2}{2}-8}=0$;
4. $\sqrt{2x^2-2x\sqrt{6}+3}-\sqrt{5-\sqrt{24}}=0$;
5. $\sqrt{25x+25}-\sqrt{16x+16}=12-\sqrt{4(x+1)}$.

Lời giải.

1. Ta có
$$\sqrt{2x-3}-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-3}=\sqrt{3} \Leftrightarrow 2x-3=3 \Leftrightarrow x=3.$$
Vậy phương trình có nghiệm $x=3$.

2. Ta có
$$\sqrt{3-x}-\sqrt{x-5}=0 \Leftrightarrow \sqrt{3-x}=\sqrt{x-5} \Leftrightarrow \begin{cases} x-5\ge 0 \\ 3-x=x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 5 \\ x=4 \text{ (loại)}. \end{cases}$$
Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

3.
$$\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{\frac{x^2}{2}-8}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+4x}=\sqrt{\frac{x^2}{2}-8} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}-8\ge 0 & (1) \\ x^2+4x=\dfrac{x^2}{2}-8 & (2) \end{cases}$$
- $(1) \Leftrightarrow x^2\ge 16 \Leftrightarrow |x|\ge 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -4 \\ x\ge 4. \end{array}\right.$
- $(2) \Leftrightarrow x^2+8x+16=0 \Leftrightarrow (x+4)^2=0 \Leftrightarrow x=-4$ (thỏa (1) nên nhận).

Vậy phương trình có nghiệm $x=-4$.

4. Ta có
$$\begin{aligned} &\sqrt{2x^2-2x\sqrt{6}+3}-\sqrt{5-\sqrt{24}}=0 \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{2}x-\sqrt{3})^2}-\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left|\sqrt{2}x-\sqrt{3}\right|-\left|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right|=0 \Leftrightarrow \left|\sqrt{2}x-\sqrt{3}\right|=\left|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right| \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}x-\sqrt{3}=\sqrt{3}-\sqrt{2} \\ \sqrt{2}x-\sqrt{3}=-(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}x=2\sqrt{3}-\sqrt{2} \\ \sqrt{2}x=\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{6}-1 \\ x=1. \end{array}\right. \end{aligned}$$
Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x=1$ hoặc $x=\sqrt{6}-1$.

□

Bài 2. Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{x^2-9}-\sqrt{x-3}=0$;
2. $\sqrt{x+4}-\sqrt{1-x}=\sqrt{1-2x}$;
3. $\dfrac{3}{2}\sqrt{4x-8}-9\sqrt{\dfrac{x-2}{81}}=6$.

Lời giải.

1. Điều kiện xác định: $\begin{cases} x^2-9\geq 0\\ x-3\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\geq 9\\ x\geq 3\end{cases} \Leftrightarrow x\geq 3.$

   Biến đổi phương trình về dạng

$$\sqrt{(x-3)(x+3)}-\sqrt{x-3}=0\Leftrightarrow \sqrt{x-3}(\sqrt{x+3}-1)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&\sqrt{x-3}=0\\ &\sqrt{x+3}=1\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&x-3=0\\ &x+3=1\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&x=3\\ &x=-2.\end{aligned}\right.$$

   So với điều kiện xác định, ta có nghiệm $x=3$.

2. Điều kiện xác định: $\begin{cases} x+4\geq 0\\ 1-x\geq 0\\ 1-2x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow -4\leq x\leq \dfrac{1}{2}.$

   Biến đổi phương trình về dạng

$$\sqrt{1-x}+\sqrt{1-2x}=\sqrt{x+4}\Leftrightarrow 1+x+1-2x+2\sqrt{(1-x)(1-2x)}=x+4$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(1-2x)}=2x+1\Leftrightarrow \begin{cases}2x+1\geq 0\\ (1-x)(1-2x)=(2x+1)^2\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\geq -\dfrac{1}{2}\\ 2x^2+7x=0\end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

   Vậy phương trình có nghiệm $x=0$.

3. Biến đổi phương trình về dạng

$$\frac{3}{2}\sqrt{4(x-2)}-9\sqrt{\frac{x-2}{9^2}}=6\Leftrightarrow \frac{3}{2}\cdot 2\sqrt{x-2}-9\cdot\frac{1}{9}\sqrt{x-2}=6$$
$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-2}-\sqrt{x-2}=6\Leftrightarrow 2\sqrt{x-2}=6$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}=3\Leftrightarrow x-2=9\Leftrightarrow x=11.$$

   Thay $x=11$ vào phương trình ban đầu, ta thấy thỏa, vậy $x=11$ là nghiệm cần tìm.

$\square$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{x^4-8x^2+16}+\sqrt{x^2-4x+4}=0$;
2. $\sqrt[3]{x+3}=\sqrt[3]{x^2-9}$;
3. $\sqrt[3]{x+2}-\sqrt{x+1}=1$.

Lời giải.

1. Ta có

$$\sqrt{x^4-8x^2+16}+\sqrt{x^2-4x+4}=0\Leftrightarrow \sqrt{(x^2-4)^2}+\sqrt{(x-2)^2}=0$$
$$\Leftrightarrow |x^2-4|+|x-2|=0\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-4=0\\ x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=\pm 2\\ x=2\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$$

   Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.

2. Ta có

$$\sqrt[3]{x+3}=\sqrt[3]{x^2-9}\Leftrightarrow\sqrt[3]{x+3}\left(\sqrt[3]{x-3}-1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{x+3}=0\\ \sqrt[3]{x-3}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+3=0\\ x-3=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\ x=4.\end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=-3$ hoặc $x=4$.

3. Điều kiện xác định: $x+1\geq 0\Leftrightarrow x\geq -1$.
Đặt $t=\sqrt{x+1}\Leftrightarrow x=t^2-1$. Phương trình đã cho trở thành:

$$\sqrt[3]{t^2+1}-t=1\Leftrightarrow\sqrt[3]{t^2+1}=t+1$$
$$\Leftrightarrow t^2+1=t^3+3t^2+3t+1\Leftrightarrow t^3+2t^2+3t=0$$
$$\Leftrightarrow t(t^2+2t+3)=0\Leftrightarrow t=0\ (\text{Vì } t^2+2t+3>0).$$

Khi đó ta có $\sqrt{x+1}=0\Leftrightarrow x=-1$. So với điều kiện, ta có nghiệm của bài toán là $x=-1$.

□

6 Các bài toán nâng cao

Bài 4. Tính giá trị biểu thức $A=\sqrt{6-2\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}$.

Lời giải.

Ta có $A=\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}+\sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{5}-1+3-\sqrt{5}=2$. □

Bài 5. Rút gọn $A=\sqrt{127-48\sqrt{7}}-\sqrt{127+48\sqrt{7}}$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}A&=\sqrt{64-2\cdot 8\cdot 3\sqrt{7}+63}+\sqrt{64+2\cdot 8\cdot 3\sqrt{7}+63}\\&=\sqrt{(8-3\sqrt{7})^2}+\sqrt{(8+3\sqrt{7})^2}\\&=\left|8-3\sqrt{7}\right|+\left|8+3\sqrt{7}\right|\\&=8-3\sqrt{7}+8+3\sqrt{7}=16.\end{aligned}$$

□

Bài 6. Tính $A=\dfrac{1+\sqrt{11}}{2+\sqrt{11}}+\sqrt{\dfrac{2}{18-5\sqrt{11}}}$.

Lời giải.

Ta có

$$A=\frac{(1+\sqrt{11})(2-\sqrt{11})}{4-11}+\sqrt{\frac{2(18+5\sqrt{11})}{49}}=\frac{-9+\sqrt{11}}{-7}+\frac{\sqrt{36+10\sqrt{11}}}{7}$$
$$=\frac{9-\sqrt{11}}{7}+\frac{5+\sqrt{11}}{7}=\frac{14}{7}=2.$$

□

Bài 7. Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{4+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}+\dfrac{4-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}P&=\frac{4+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}+\frac{4-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}=\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2+\sqrt{6+2\sqrt{5}}}+\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}\\&=\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2+\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}}+\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}}=\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{10}}{3+\sqrt{5}}+\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{10}}{3-\sqrt{5}}\\&=\frac{24\sqrt{2}-10\sqrt{2}}{4}=\frac{7\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

□

Bài 8. Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{2}\left(3+\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}+\dfrac{\sqrt{2}\left(3-\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}A&=\frac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{4+\sqrt{6+2\sqrt{5}}}+\frac{2\left(3-\sqrt{5}\right)}{4-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}=\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{4+\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}}+\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{4-\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}\\&=\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{\sqrt{5}+5}+\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{5-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=2.\end{aligned}$$

□

Bài 9. Khử căn ở mẫu số biểu thức $A=\dfrac{59}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}A&=\frac{59}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\frac{59\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)}\\&=\frac{59\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)}{8+2\sqrt{15}-7}=\frac{59\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)\left(1-2\sqrt{15}\right)}{\left(1+2\sqrt{15}\right)\left(1-2\sqrt{15}\right)}\\&=\frac{59\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)\left(1-2\sqrt{15}\right)}{1-60}=\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)\left(2\sqrt{15}-1\right).\end{aligned}$$

□

Bài 10. Tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}}{1+\dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2}}+\dfrac{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}}{1-\dfrac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2}}$.

Lời giải.

Ta có

$$P=\frac{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}}{1+\dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2}}+\frac{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}}{1-\dfrac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2}}=\frac{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{2+\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}}{2}}+\frac{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{2-\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}}{2}}$$
$$=\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}+1}+\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}+1}=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3}+\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$
$$=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)}{\left(3-\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)}=\frac{\sqrt{3}+3+3-\sqrt{3}}{6}=1.$$

□

Bài 11. Tính tổng $S=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2011}+\sqrt{2013}}$.

Lời giải.

Ta có
$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)}=\frac{\sqrt{n+2}}{2}-\frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Áp dụng tính chất trên cho từng số hạng của tổng trên ta được

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$$
$$\ldots$$
$$\frac{1}{\sqrt{2011}+\sqrt{2013}}=\frac{\sqrt{2013}}{2}-\frac{\sqrt{2011}}{2}.$$

Cộng theo từng vế ta được $S=\dfrac{\sqrt{2013}-\sqrt{3}}{2}$. □

Bài 12. Rút gọn biểu thức sau

$$X=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2017^2}+\frac{1}{2018^2}}.$$

Lời giải.

Với mọi số tự nhiên $n>0$ ta có

$$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=\sqrt{\frac{[n(n+1)]^2+(n+1)^2+n^2}{n^2(n+1)^2}}=\sqrt{\frac{(n^2+n)^2+n^2+2n+1+n^2}{n^2(n+1)^2}}$$
$$=\sqrt{\frac{(n^2+n)^2+2(n^2+n)+1}{n^2(n+1)^2}}=\sqrt{\frac{(n^2+n+1)^2}{n^2(n+1)^2}}=\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$$
$$=1+\frac{1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Áp dụng kết quả trên ta được

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2017^2}+\frac{1}{2018^2}} \\ &= 1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+1+\frac{1}{2017}-\frac{1}{2018} \\ &= 2017+1-\frac{1}{2018}=2018-\frac{1}{2018}=\frac{2018^2-1}{2018}. \end{aligned}$$

□

Bài 13. Rút gọn biểu thức $\dfrac{\sqrt[3]{2}+\sqrt{7+2\sqrt{10}}+\sqrt[3]{3\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{2}-1}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+1}$.

Lời giải.

Ta có $A=\dfrac{\sqrt[3]{2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1-\sqrt[3]{2}\right)^3}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+1}=\dfrac{\sqrt[3]{2}+\sqrt{5}+\sqrt{2}+1-\sqrt[3]{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+1}=1.$ □

Bài 14. Đặt $m=\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$. Tính giá trị của biểu thức $\left(m^3+3m-1\right)^{100}$.

Lời giải.

Gọi $m=\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$.
Đặt $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}=a$ và $b=\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$ thì $a^3+b^3=2$ và $ab=\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)}=-1$.
Từ hằng đẳng thức $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ ta có $m^3=2-3m$ nên $m^3+3m-2=0$.
Suy ra $m^3+3m-1=1$. Do đó $(m^3+3m-1)^{100}=1$. □

Bài 15. Cho $x=\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}$. Tính $A=\left(x^4-x^3-x^2+2x-1\right)^{2017}$.

Lời giải.

Ta có $x\sqrt{2}=\sqrt{8+2\sqrt{7}}-\sqrt{8-2\sqrt{7}}=(\sqrt{7}+1)-(\sqrt{7}-1)=2$ nên $x=\sqrt{2}$.
Do đó $A=\left[(\sqrt{2})^4-(\sqrt{2})^3-(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}-1\right]^{2017}=1$. □

Bài 16. Cho $x=\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$. Tính $P=\left(1+5x^{2015}-x^{2017}\right)^{2018}$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta thấy $x>0$, ta thực hiện phép biến đổi

$$\begin{aligned} & x=\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{2}x=\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}} \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2=3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}+2\sqrt{\left(3+\sqrt{5}\right).\left(3-\sqrt{5}\right)} \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2=10\Leftrightarrow x^2=5\Rightarrow x=\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} P=\left(1+5x^{2015}-x^{2017}\right)^{2018} &= \left(1+5\sqrt{5}^{2015}-\sqrt{5}^{2017}\right)^{2018} \\ &= \left(1+\sqrt{5}^{2017}-\sqrt{5}^{2017}\right)^{2018}=1^{2018}=1. \end{aligned}$$

□

Bài 17. Cho $x=\dfrac{(\sqrt{5}-1)\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}}{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}-\sqrt{3}}$. Tính giá trị biểu thức $A=(77x^2+35x+646)^{2017}$.

Lời giải.

Ta tính x như sau

- $\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}=\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}-1}\right)^3\cdot 2\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}=2\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}-1\right)^3}=2\sqrt[3]{8}=4.$
- $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}-\sqrt{3}=\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{3}}\right)^3-\sqrt{3}=1.$

Do đó $x=4$.
Thay vào A ta có $A=(77\cdot 4^2+35\cdot 4+646)^{2017}=2018^{2017}$. □

Bài 18. Cho $x=\dfrac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}}$. Tính giá trị của biểu thức: $P=(12x^2+4x-55)^{2017}$.

Lời giải.

Ta có

$$\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-1\right)=\sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^3}\left(\sqrt{3}-1\right)=\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)=2.$$
$$\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}=\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}-\sqrt{5}=\sqrt{5}+1-\sqrt{5}=1.$$

Vậy $x=2$. Thay giá trị x vào P ta được

$$P=(12\cdot 2^2+4\cdot 2-55)^{2017}=1^{2017}=1.$$

□

Bài 19. Tính giá trị của biểu thức $M=(x-y)^3+3\left(x-y\right)\left(xy+1\right)$ biết

$$x=\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}-\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}};\ y=\sqrt[3]{17+12\sqrt{2}}-\sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}.$$

Lời giải.

Áp dụng biến đổi $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$, ta có

$$x^3=4\sqrt{2}-3x\Rightarrow x^3+3x=4\sqrt{2}.$$
$$y^3=24\sqrt{2}-3y\Rightarrow y^3+3y=24\sqrt{2}.$$

Trừ từng vế hai đẳng thức trên ta được $x^3-y^3+3(x-y)=-20\sqrt{2}$. Suy ra $M=-20\sqrt{2}$. □

Bài 20. Rút gọn biểu thức $A=\sqrt{a^2+1}+\sqrt{2\left(\sqrt{a^2+1}-a\right)\left(\sqrt{a^2+1}-1\right)}$, với $a>0$.

Lời giải.

Đặt $B^2=2\left(\sqrt{a^2+1}-a\right)\left(\sqrt{a^2+1}-1\right)$.
Khi đó

$$\begin{aligned}B^2&=2\left[a^2+1-(a+1)\sqrt{a^2+1}+a\right]=(a^2+1+2a)-2(a+1)\sqrt{a^2+1}+(a^2+1)\\&=\left(a+1-\sqrt{a^2+1}\right)^2.\end{aligned}$$

Vì $a>0$ nên $B=a+1-\sqrt{a^2+1}$.
Vậy $A=\sqrt{a^2+1}+a+1-\sqrt{a^2+1}=a+1$. □

Bài 21. Cho biểu thức

$$P=\left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}+\frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}-a+b}\right)\cdot\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \text{ với } a>b>0.$$

Rút gọn biểu thức P.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}P &= \left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}+\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}\right)\cdot\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\\ &= \frac{\sqrt{a-b}\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right)+\sqrt{a-b}\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\right)}{a+b-a+b}\cdot\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\\ &= \frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{2b}\cdot\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{a^2+b^2}{b}.\end{aligned}$$

□

Bài 22. Cho biểu thức

$$Q=\frac{\left(\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{3a^2+3b\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}-a}{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}} \text{ với } a>0;b>0;a\neq b.$$

Chứng minh rằng giá trị biểu thức Q không phụ thuộc vào a, b.

Lời giải.

Với $a>0;b>0;a\neq b$, ta có

$$\begin{aligned}Q &= \frac{\left(\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{3a^2+3b\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}-a}{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}}\\ &= \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{3a^2+3b\sqrt{ab}}-\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}(a-b)}\\ &= \frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}-3a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{3a^2+3b\sqrt{ab}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\\ &= \frac{3a\sqrt{a}-3a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}}{3a^2+3b\sqrt{ab}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\\ &= \frac{3\sqrt{a}\left(a-\sqrt{ab}+b\right)}{3a^2+3b\sqrt{ab}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\\ &= \frac{3\sqrt{a}\left(a-\sqrt{ab}+b\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)-\left(3a^2+3b\sqrt{ab}\right)}{\left(3a^2+3b\sqrt{ab}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}\\ &= \frac{3\sqrt{a}\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}\right)-3a^2-3b\sqrt{ab}}{\left(3a^2+3b\sqrt{ab}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}\\ &= \frac{3a^2+3b\sqrt{ab}-3a^2-3b\sqrt{ab}}{\left(3a^2+3b\sqrt{ab}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=0.\end{aligned}$$

□

Bài 23. Rút gọn biểu thức $P = \dfrac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}-\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}}$ với điều kiện $x \geq 2$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(x-1)+2\sqrt{x-1}+1} = \sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2} = \sqrt{x-1}+1$.
Tương tự ta cũng có

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1}-1,$$
$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2x-1}+1\right),$$
$$\sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2x-1}-1\right).$$

Suy ra $P = \dfrac{\left(\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1\right)\sqrt{2}}{\sqrt{2x-1}+1-\sqrt{2x-1}+1} = \sqrt{2}\sqrt{x-1}$. □

Bài 24. Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa $ab+bc+ca=1$. Tính giá trị biểu thức

$$P = a\cdot\sqrt{\frac{(1+b^2)(1+c^2)}{1+a^2}} + b\cdot\sqrt{\frac{(1+c^2)(1+a^2)}{1+b^2}} + c\cdot\sqrt{\frac{(1+a^2)(1+b^2)}{1+c^2}}.$$

Lời giải.

Sử dụng giả thiết, ta có

$$\begin{cases} 1+a^2 = ab+bc+ca+a^2 = (a+b)(a+c) \\ 1+b^2 = ab+bc+ca+b^2 = (b+c)(b+a) \\ 1+c^2 = ab+bc+ca+c^2 = (c+a)(c+b). \end{cases}$$

Với a, b, c không âm ta có

$$\frac{(1+c^2)(1+a^2)}{1+b^2} = \frac{(c+a)(c+b)(a+b)(a+c)}{(b+c)(b+a)} = (a+c)^2.$$

Nên $b\cdot\sqrt{\dfrac{(1+c^2)(1+a^2)}{1+b^2}} = b\cdot|a+c| = b\cdot(a+c)$.
Từ các biểu thức tương tự, ta được

$$P = a(b+c)+b(c+a)+c(a+b) = 2(ab+bc+ca) = 2.$$

□

Bài 25. Rút gọn biểu thức $A = \dfrac{2\sqrt{x}-13}{x-5\sqrt{x}+6} - \dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \dfrac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0$, $x \neq 4$, $x \neq 9$.

Lời giải.

Với điều kiện $x \geq 0$, $x \neq 4$, $x \neq 9$ ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{2\sqrt{x}-13}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} \\ &= \frac{2\sqrt{x}-13}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} - \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} + \frac{(2\sqrt{x}+1)\cdot(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\sqrt{x}-13-(x-9)+2x-3\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x-\sqrt{x}-6}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}\\
&= \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}.
\end{aligned}$$

□

Bài 26. Cho biểu thức

$$P = \frac{x-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} + \frac{1+2x-2\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{x}} \text{ với } x>0, x\neq 1.$$

Rút gọn P.

Lời giải.

Với điều kiện $x>0$, $x\neq 1$ ta có

$$\begin{aligned}
P &= \frac{\sqrt{x}(x-2\sqrt{x})+(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)+1+2x-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}\\
&= \frac{x\sqrt{x}+x-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}\\
&= \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}.
\end{aligned}$$

□

Bài 27. Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}}\right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2} \text{ với } 0 \le x \neq 1.$$

Rút gọn biểu thức P.

Lời giải.

Với điều kiện $0\le x\neq 1$, ta biến đổi biểu thức P

$$\begin{aligned}
P &= \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}}\right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}\\
&= \left(\frac{x+2}{\left(\sqrt{x}\right)^3-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}\right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}\\
&= \frac{x+2+\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)-\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)} : \frac{\sqrt{x}-1}{2}\\
&= \frac{x-2\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}\cdot\frac{2}{\sqrt{x}-1}\\
&= \frac{2}{x+\sqrt{x}+1}.
\end{aligned}$$

□

Bài 28. Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{3\sqrt{x}+1}{1-x}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1}\right) \text{ với } x\ge 0, x\neq 1$$

Rút gọn biểu thức A.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+\frac{3\sqrt{x}+1}{1-x}\right):\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\frac{2}{x-1}\right) \\ &= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+1)+(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1)-(3\sqrt{x}+1)}{x-1}:\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)-2}{x-1} \\ &= \frac{2x-3\sqrt{x}+1}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x+\sqrt{x}-2} \\ &= \frac{2x-3\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}-2}=\frac{(\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}. \end{aligned}$$

□

Bài 29. Cho $A=\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$.

Rút gọn biểu thức $B=1-\sqrt{2A-4\sqrt{x}+1}$ với $0\le x\le\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{x-\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}^3-1)}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}^3+1)}{x-\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{x-\sqrt{x}+1} \\ &= x-\sqrt{x}+x+\sqrt{x}=2x. \end{aligned}$$

Khi đó $B=1-\sqrt{4x-4\sqrt{x}+1}=1-\sqrt{2A-4\sqrt{x}+1}=1-|2\sqrt{x}-1|$.

Vì $0\le x\le\dfrac{1}{4}$ nên $2\sqrt{x}-1\le 0$. Do đó $B=1+(2\sqrt{x}-1)=2\sqrt{x}$. □

Bài 30. Cho biểu thức

$$P=\frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n+1}+1}+\frac{\sqrt{n+1}+3}{\sqrt{n+1}-3}-\frac{n-\sqrt{n+1}+7}{n-2\sqrt{n+1}-2}\text{ với } n\in\mathbb{N}, n\ne 8.$$

Rút gọn biểu thức $Q=\dfrac{P}{n+3\sqrt{n+1}+1}$ với $n\in\mathbb{N}, n\ne 8$.

Lời giải.

Quy đồng $P=\dfrac{(\sqrt{n+1}-1)(\sqrt{n+1}-3)+(\sqrt{n+1}+3)(\sqrt{n+1}+1)-(n-\sqrt{n+1}+7)}{(\sqrt{n+1}+1)(\sqrt{n+1}-3)}$.

Do đó $P=\dfrac{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+1)}{(\sqrt{n+1}+1)(\sqrt{n+1}-3)}=\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-3}$.

Suy ra $Q=\dfrac{P}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+3)}=\dfrac{1}{n-8}$. □

Bài 31. Cho biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}}{\sqrt{1-\dfrac{8}{x}+\dfrac{16}{x^2}}}$. Rút gọn A. Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Lời giải.

Điều kiện $x > 4$.
Ta có $A = \dfrac{\sqrt{x-4}+2+\left|\sqrt{x-4}-2\right|}{\dfrac{x-4}{x}}$.
Nếu $x > 8$ thì $A = \dfrac{2x}{\sqrt{x-4}}$.
Nếu $4 < x \leq 8$ thì $A = \dfrac{4x}{x-4}$.
Với $A = \dfrac{4x}{x-4} = 4 + \dfrac{16}{x-4}$.
$A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 16 \vdots (x-4)$. Do $x \in \mathbb{Z}, 4 < x \leq 8$ nên $x \in \{5, 6, 8\}$.
Với $A = \dfrac{2x}{\sqrt{x-4}} \in \mathbb{Z}$ thì do $x \in \mathbb{Z}$ nên $\sqrt{x-4} = a \in \mathbb{Z} \Rightarrow A = \dfrac{2(a^2+4)}{a} = 2a + \dfrac{8}{a} \Rightarrow 8 \vdots a$.
Lại có $x > 8 \Rightarrow a > 2$, do đó $a = 4$ hoặc $a = 8$. Từ đó suy ra $x = 20$ hoặc $x = 68$.
Vậy $x \in \{5, 6, 8, 20, 68\}$. □

Bài 32. Cho $a \geq 0$, $a \neq 1$. Rút gọn biểu thức

$$S = \sqrt{6-4\sqrt{2}}.\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{(a+3)\sqrt{a}-3a-1} : \left[\frac{a-1}{2(\sqrt{a}-1)} - 1\right].$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\sqrt{6-4\sqrt{2}} = \sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2} = 2-\sqrt{2}\\
&\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\left(2+\sqrt{2}\right)^3} = 2+\sqrt{2}\\
&\sqrt[3]{(a+3)\sqrt{a}-3a-1} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{a}-1\right)^3} = \sqrt{a}-1\\
&\frac{a-1}{2\left(\sqrt{a}-1\right)} - 1 = \frac{\sqrt{a}+1}{2} - 1 = \frac{\sqrt{a}-1}{2}.
\end{aligned}$$

Suy ra $S = \left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right) + (\sqrt{a}-1) : \dfrac{\sqrt{a}-1}{2} = 4-2+2 = 4$. □

Bài 33. Chứng minh rằng $\sqrt{2009^2+2009^2\cdot 2010^2+2010^2}$ là một số nguyên dương.

Lời giải.

Đặt $a = 2009$, ta có

$$\begin{aligned}
2009^2+2009^2\cdot 2010^2+2010^2 &= a^2+a^2(a+1)^2+(a+1)^2\\
&= a^4+2a^3+3a^2+2a+1\\
&= a^4+a^2+1+2a^3+2a^2+2a\\
&= (a^2+a+1)^2.
\end{aligned}$$

Vậy $\sqrt{2009^2+2009^2\cdot 2010^2+2010^2} = \sqrt{(a^2+a+1)^2} = a^2+a+1$ là một số nguyên dương. □

Bài 34. Chứng minh đẳng thức $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$.

Lời giải.

Đặt $\sqrt[3]{2}=a \Leftrightarrow 2=a^3$.
Đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt[3]{a-1}=\frac{1-a+a^2}{\sqrt[3]{9}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{9(a-1)}=a^2-a+1 \Leftrightarrow (a^2-a+1)^3=9(a-1).$$

Ta có

$$\begin{aligned}(a^2-a+1)^3 &= (a^2-a+1)^2(a^2-a+1)=(a^4+a^2+1-2a^3-2a+2a^2)(a^2-a+1)\\ &= (2a+3a^2+1-4-2a)(a^2-a+1)=3(a^2-1)(a^2-a+1)\\ &= 3(a-1)(a+1)(a^2-a+1)=3(a-1)(a^3+1)\\ &= 9(a-1)\ (\text{đpcm}).\end{aligned}$$

□

Bài 35. Giả sử a và b là hai số dương khác nhau và thỏa mãn

$$a-b=\sqrt{1-b^2}-\sqrt{1-a^2}.$$

Chứng minh rằng $a^2+b^2=1$.

Lời giải.

$a-b=\sqrt{1-b^2}-\sqrt{1-a^2} \Leftrightarrow a+\sqrt{1-a^2}=b+\sqrt{1-b^2} \Leftrightarrow a\sqrt{1-a^2}=b\sqrt{1-b^2}$
$\Rightarrow a^2-a^4=b^2-b^4 \Leftrightarrow a^4-b^4-(a^2-b^2)=0 \Leftrightarrow (a^2-b^2)(a^2+b^2-1)=0.$
Theo đề bài ta có $a\neq b$ nên $a^2-b^2\neq 0$, suy ra $a^2+b^2-1=0$ hay $a^2+b^2=1$. □

Bài 36. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2018}$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a+b}=\sqrt{a-2018}+\sqrt{b-2018}.$$

Lời giải.

Từ giả thiết $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2018} \Leftrightarrow \frac{ab}{a+b}=2018$.
Khi đó ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{a-2018}+\sqrt{b-2018} &= \sqrt{a-\frac{ab}{a+b}}+\sqrt{b-\frac{ab}{a+b}}\\ &= \sqrt{\frac{a^2}{a+b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a+b}}=\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{a+b}}\\ &= \frac{a+b}{\sqrt{a+b}}=\sqrt{a+b}.\end{aligned}$$

Vậy đẳng thức được chứng minh. □

7 Bài tập trắc nghiệm

Bài 37. Khi quy đồng mẫu thức các phân thức $\dfrac{xy}{x^2-y^2}; \dfrac{y}{xy-x^2}; \dfrac{xy}{y^2-xy}$ thì mẫu chung là

(A) x^2-y^2. (B) $x(x^2-y^2)$. (C) $xy(x^2-y^2)$. (D) $xy(x^2+y^2)$.

Lời giải.

Ta có

- $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$.
- $xy-x^2=x(y-x)$.
- $y^2-xy=y(y-x)$

$\Rightarrow$ mẫu chung là $xy(x-y)(x+y)=xy(x^2-y^2)$.
Chọn đáp án (C) □

Bài 38. Điều kiện xác định của biểu thức $P=\dfrac{x+1}{1-x}+\dfrac{x^2}{x^2-2x+1}$ là

(A) $x\neq 1$. (B) $x\neq \pm 1$. (C) $x<1$. (D) $x>1$.

Lời giải.

Ta có $x^2-2x+1=(x-1)^2$ nên điều kiện xác định là $x-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$.
Chọn đáp án (A) □

Bài 39. Kết quả rút gọn phân thức $\dfrac{x^2-4x+4}{3x^2-12}$ là

(A) $\dfrac{2-x}{3}$. (B) $\dfrac{x-2}{3(x+2)}$. (C) $-\dfrac{2+x}{3}$. (D) $\dfrac{2+x}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{x^2-4x+4}{3x^2-12}=\dfrac{(x-2)^2}{3(x-2)(x+2)}=\dfrac{x-2}{3(x+2)}$.
Chọn đáp án (B) □

Bài 40. Điều kiện để biểu thức $\dfrac{2017}{\sqrt{x}-2}$ xác định là

(A) $0\le x<4$. (B) $x>4$. (C) $0\le x\neq 4$. (D) $x\neq 4$.

Bài 41. Giá trị của biểu thức $\sqrt{(3a-1)^2}$ là

(A) $3a-1$. (B) $1-3a$. (C) $3a-1$ và $1-3a$. (D) $|3a-1|$.

Bài 42. Biết rằng $\sqrt{x}>1$, rút gọn $P=\sqrt{(1-\sqrt{x})^2}$

(A) $\sqrt{x}-1$. (B) $1-\sqrt{x}$. (C) $(1-\sqrt{x})^2$. (D) $(\sqrt{x}-1)^2$.

Bài 43. Biết rằng $1\le a<2$, giá trị của biểu thức $\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$ là

(A) $\sqrt{a-1}-1$. (B) $1-\sqrt{a-1}$. (C) $\sqrt{a-1}$. (D) $(\sqrt{a-1}-1)^2$.

Bài 44. Phân tích $P=x\sqrt{x}-8$ thành nhân tử

(A) $(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)$. (B) $(\sqrt{x}+2)(x-2\sqrt{x}+4)$.
(C) $(\sqrt{x}-2)^3$. (D) $(\sqrt{x}+2)^3$.

Bài 45. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\sqrt{5}x - \sqrt{80} = 0$.

A $x = 4$. B $x = 16$. C $x = -4$. D $x = -16$.

Lời giải.

Ta có

$$\sqrt{5}x - \sqrt{80} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{5}x = \sqrt{80} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{80}{5}} = 4.$$

Chọn đáp án A □

Bài 46. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\sqrt{11}x^2 - \sqrt{44} = 0$.

A $x = \pm 2$. B $x = 2$. C $x = -2$. D $x = \pm\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\sqrt{11}x^2 - \sqrt{44} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{\sqrt{44}}{\sqrt{11}} = \sqrt{4} = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án D □

Bài 47. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $3x + 2\sqrt{32} - \sqrt{8} = 0$.

A $x = 2\sqrt{2}$. B $x = 3\sqrt{2}$. C $x = -2\sqrt{2}$. D $x = -3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$3x + 2\sqrt{32} - \sqrt{8} = 0 \Leftrightarrow 3x + 8\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow 3x + 6\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow x = -2\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án C □

Bài 48. Cho phương trình $\sqrt{2x^2 + 8} = 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A Phương trình có nghiệm $x = \pm 2$. B Phương trình có nghiệm $x = 0$.

C Phương trình vô nghiệm. D Phương trình vô số nghiệm.

Lời giải.

Vì $x^2 \geq 0, \forall x$ nên $2x^2 + 8 \geq 8, \forall x$, nên phương trình trên vô nghiệm.
Chọn đáp án C □

Bài 49. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\sqrt{4(2-x)^2} = 10$.

A $x = -3$. B $x = 7$.

C $x = -3$ hoặc $x = 7$. D $x = -7$.

Lời giải.

Ta có $4(2-x)^2 \geq 0, \forall x$, biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{4(2-x)^2} = 10 \Leftrightarrow 4(2-x)^2 = 100 \Leftrightarrow (2-x)^2 = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 - x = 5 \\ 2 - x = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 7 \end{array}\right..$$

□

Bài 50. Tính giá trị của biểu thức $Q = \left(\dfrac{2\sqrt{32}}{\sqrt{3}} - 1\right) : \left(7 + \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$.

A $Q = \sqrt{3}$. B $Q = \sqrt{2}$. C $Q = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. D $Q = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$Q=\left(\frac{2\sqrt{32}}{\sqrt{3}}-1\right):\left(7+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)=\frac{8\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}:\frac{8\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Chọn đáp án C □

Bài 51. Kết quả của phép tính $\dfrac{\sqrt{17-12\sqrt{2}}}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}$ bằng

A. $3+2\sqrt{2}$. B. $1+\sqrt{2}$. C. $\sqrt{2}-1$. D. $2-\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\frac{\sqrt{17-12\sqrt{2}}}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{9-2\cdot 3\cdot 2\sqrt{2}+8}}{\sqrt{2-2\cdot\sqrt{2}\cdot 1+1}}=\frac{\sqrt{\left(3-2\sqrt{2}\right)^2}}{\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}}=\frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}-1.$$

Chọn đáp án C □

Bài 52. Rút gọn biểu thức $S=\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}+\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}$ ta được kết quả

A. $A=2\sqrt{5}$. B. $A=\sqrt{5}$. C. $A=3$. D. $A=6$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}S&=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}+\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)^2}{4}}+\sqrt{\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)^2}{4}}\\&=\frac{3+\sqrt{5}}{2}+\frac{3-\sqrt{5}}{2}=3.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Bài 53. Giá trị của biểu thức $\left(4-\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10}+\sqrt{6}\right)\sqrt{4+\sqrt{15}}$ bằng

A. 2. B. $\sqrt{10}+\sqrt{6}$. C. $\sqrt{10}-\sqrt{6}$. D. $\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\left(4-\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10}+\sqrt{6}\right)\sqrt{4+\sqrt{15}}&=\left(4-\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\sqrt{8+2\sqrt{15}}\\&=\left(4-\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2}\\&=\left(4-\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2=\left(4-\sqrt{15}\right)\left(8+2\sqrt{15}\right)\\&=2\left(4-\sqrt{15}\right)\left(4+\sqrt{15}\right)=2.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Bài 54. Tính giá trị của $T=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$.

Ⓐ $T=4$. Ⓑ $T=3$. Ⓒ $T=2$. Ⓓ $T=1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{\left(2\sqrt{5}-3\right)^2}}}=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}} \\ &= \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}=1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Bài 55. Với giá trị nào của x thì $\sqrt[3]{x}\geq 4$?

Ⓐ $x\geq 64$. Ⓑ $x<64$. Ⓒ $x\geq 16$. Ⓓ $0<x<8$.

Lời giải.

Ta có

$$\sqrt[3]{x}\geq 4\Leftrightarrow x\geq 4^3\Leftrightarrow x\geq 64.$$

Chọn đáp án A □

Bài 56. Khi $x=-\sqrt{2}$ thì giá trị của $4x-2\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{x^3+2x^2}}{\sqrt{x+2}}$ bằng

Ⓐ $-6\sqrt{2}$. Ⓑ $-5\sqrt{2}$. Ⓒ $-7\sqrt{2}$. Ⓓ $4\sqrt{2}$.

Lời giải.

Khi $x=-\sqrt{2}$ ta được

$$-4\sqrt{2}-2\sqrt{2}+\frac{\sqrt{-2\sqrt{2}+4}}{\sqrt{-\sqrt{2}+2}}=-6\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}\sqrt{-\sqrt{2}+2}}{\sqrt{-\sqrt{2}+2}}=-6\sqrt{2}+\sqrt{2}=-5\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án B □

Bài 57. Với $a>0$ biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{a}-1}{a\sqrt{a}+\sqrt{a}-a}:\dfrac{1}{a^2+\sqrt{a}}$ có kết quả bằng

Ⓐ $\sqrt{a}-1$. Ⓑ -1. Ⓒ 1. Ⓓ $a-1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{a}-1}{a\sqrt{a}+\sqrt{a}-a}:\frac{1}{a^2+\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}\left(a\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}-1\right)}{\sqrt{a}\left(a-\sqrt{a}+1\right)}=\frac{\left(a\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}-1\right)}{a-\sqrt{a}+1} \\ &= \frac{\left(\sqrt{a}+1\right)\left(a-\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}-1\right)}{a-\sqrt{a}+1}=\left(\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}-1\right)=a-1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Bài 58. Tìm x sao cho $\sqrt{4x-20}+3\sqrt{\dfrac{x-5}{9}}-\dfrac{1}{3}\sqrt{9x-45}=4$.

Ⓐ $x=5$. Ⓑ $x=6$. Ⓒ $x=7$. Ⓓ $x=9$.

Lời giải.

Ta có

$$\sqrt{4x-20}+3\sqrt{\frac{x-5}{9}}-\frac{1}{3}\sqrt{9x-45}=2\sqrt{x-5}+\sqrt{x-5}-\sqrt{x-5}=2\sqrt{x-5}.$$

Khi đó

$$2\sqrt{x-5}=4\Leftrightarrow\sqrt{x-5}=2\Leftrightarrow x-5=4\Leftrightarrow x=9.$$

Chọn đáp án Ⓓ □

Bài 59. Cho biểu thức $M=\left(1-\dfrac{4}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{x-1}\right):\dfrac{x-2\sqrt{x}}{x-1}$, với $x\geq 0$, $x\neq 1$, $x\neq 4$. Với giá trị nào của x thì $M=\dfrac{1}{2}$?

Ⓐ $x=8$. Ⓑ $x=16$. Ⓒ $x=32$. Ⓓ $x=64$.

Lời giải.

Với điều kiện $x\geq 0$, $x\neq 1$, $x\neq 4$ ta có

$$\begin{aligned} M &= \left(1-\frac{4}{\sqrt{x}+1}+\frac{1}{x-1}\right):\frac{x-2\sqrt{x}}{x-1}=\frac{x-1-4\sqrt{x}+4+1}{x-1}\cdot\frac{x-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}\\ &= \frac{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Khi đó

$$M=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{x}-4=\sqrt{x}\Leftrightarrow\sqrt{x}=4\Leftrightarrow x=16.$$

Chọn đáp án Ⓑ □

§9 Giới thiệu đề kiểm tra 1 tiết chương 1

1 Đề số 1- Tự Luận cho HS đại trà

Bài 1. Tìm giá trị của x để các biểu thức sau xác định.

1. $\sqrt{2x}-1$.
2. $\sqrt{3-\dfrac{1}{2}x}$.

Lời giải.

1. Biểu thức $\sqrt{2x}-1$ xác định khi và chỉ khi $2x\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 0$.
   Vậy $x\geq 0$ thì biểu thức xác định.
2. Biểu thức $\sqrt{3-\dfrac{1}{2}x}$ xác định khi và chỉ khi $3-\dfrac{1}{2}x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 6$.
   Vậy $x\leq 6$ thì biểu thức có nghĩa.

□

Bài 2. Sắp xếp các số sau theo thứ tự tăng dần $7\sqrt{2}$; $4\sqrt{5}$; $6\sqrt{3}$; $\sqrt{97}$; $3\sqrt{11}$.

Lời giải.

Ta có $7\sqrt{2}=\sqrt{98}; 4\sqrt{5}=\sqrt{80}; 6\sqrt{3}=\sqrt{108}; 3\sqrt{11}=\sqrt{99}$.
Thứ tự tăng dần theo các số là $4\sqrt{5}; \sqrt{97}; 7\sqrt{2}; 3\sqrt{11}; 6\sqrt{3}$. □

Bài 3. Tính giá trị các biểu thức

1. $\sqrt{\left(3-\sqrt{10}\right)^2}$.
2. $\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{7})^2}$.
3. $\sqrt{\left(4-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(4+\sqrt{5}\right)^2}$.

Lời giải.

1. $\sqrt{\left(3-\sqrt{10}\right)^2}=|3-\sqrt{10}|=\sqrt{10}-3$.
2. $\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{7})^2}=|\sqrt{6}-\sqrt{7}|=\sqrt{7}-\sqrt{6}$.
3. $\sqrt{\left(4-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(4+\sqrt{5}\right)^2}=|4-\sqrt{5}|+|4+\sqrt{5}|=4-\sqrt{5}+4+\sqrt{5}=8$.

□

Bài 4. Rút gọn giá trị biểu thức

1. $A=\left(\sqrt{8}-3\sqrt{2}+\sqrt{10}\right)\cdot\sqrt{2}-2\sqrt{5}$.

2. $B = \dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} - \dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}$.

3. $C = \sqrt{\dfrac{4+\sqrt{7}}{4-\sqrt{7}}} + \sqrt{\dfrac{4-\sqrt{7}}{4+\sqrt{7}}}$

Lời giải.

1. $A = \left(\sqrt{8} - 3\sqrt{2} + \sqrt{10}\right) \cdot \sqrt{2} - 2\sqrt{5} = \sqrt{16} - 3 \cdot 2 + \sqrt{20} - 2\sqrt{5} = 4 - 6 + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = -2$.

2. $B = \dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} - \dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{-2} - \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{-2} = \sqrt{7}$.

3. $C = \sqrt{\dfrac{4+\sqrt{7}}{4-\sqrt{7}}} + \sqrt{\dfrac{4-\sqrt{7}}{4+\sqrt{7}}} = \dfrac{\sqrt{\left(4+\sqrt{7}\right)^2} + \sqrt{\left(4-\sqrt{7}\right)^2}}{\sqrt{\left(4+\sqrt{7}\right)\left(4-\sqrt{7}\right)}} = \dfrac{4+\sqrt{7}+4-\sqrt{7}}{\sqrt{9}} = \dfrac{8}{3}$.

□

Bài 5. Giải phương trình

1. $4\sqrt{x} - 2\sqrt{9x} + \sqrt{16x} = 5$.

2. $\sqrt{4x+20} - 3\sqrt{5+x} + \dfrac{4}{3}\sqrt{9x+45} = 6$.

Lời giải.

1. Điều kiện $x \geq 0$. Khi đó

$$\begin{aligned} & 4\sqrt{x} - 2\sqrt{9x} + \sqrt{16x} = 5 \\ \Leftrightarrow\ & 4\sqrt{x} - 6\sqrt{x} + 4\sqrt{x} = 5 \\ \Leftrightarrow\ & 2\sqrt{x} = 5 \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{25}{4}. \quad \text{(thỏa điều kiện)} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\dfrac{25}{4}\right\}$.

2. Điều kiện $x \geq -5$. Khi đó

$$\begin{aligned} & \sqrt{4x+20} - 3\sqrt{5+x} + \frac{4}{3}\sqrt{9x+45} = 6 \\ \Leftrightarrow\ & 2\sqrt{x+5} - 3\sqrt{x+5} + 4\sqrt{x+5} = 6 \\ \Leftrightarrow\ & 3\sqrt{5+x} = 6 \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{x+5} = 2 \\ \Leftrightarrow\ & x+5 = 4 \\ \Leftrightarrow\ & x = -1. \quad \text{(thỏa điều kiện)} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-1\}$.

□

Bài 6. Cho biểu thức $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\right) \cdot \dfrac{x-4}{\sqrt{4x}}$.

1. Rút gọn biểu thức với $x > 0$ và $x \neq 4$.
2. Tính giá trị của P khi $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

Lời giải.

1. Với $x > 0; x \neq 1; x \neq 4$, ta có

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\right) . \frac{x-4}{\sqrt{4x}} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2) + \sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{x-4} . \frac{x-4}{\sqrt{4x}} \\ &= 2\sqrt{x}.\sqrt{x}.\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \sqrt{x}. \end{aligned}$$

   Vậy $P = \sqrt{x}$.

2. Tính giá trị của P khi $x = 3 - 2\sqrt{2}$.
   Thu gọn $x = 3 - 2\sqrt{2} = \left(\sqrt{2}-1\right)^2$.
   Khi đó $P = \sqrt{x} = \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} = \sqrt{2} - 1$.

□

2 Đề số 2: Trắc nghiệm kết hợp tự luận dành cho học sinh đại

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (4.0 điểm)

Bài 1. Căn bậc hai số học của số a không âm là

(A) số có bình phương bằng a. (B) $-\sqrt{a}$.
(C) $\sqrt{a}$. (D) $\pm\sqrt{a}$.

Lời giải.

Căn bậc hai số học của số a không âm là $\sqrt{a}$.
Chọn đáp án (C) □

Bài 2. Căn bậc hai của 16 là

(A) 4. (B) -4. (C) 256. (D) ± 4.

Lời giải.

Số 16 có hai căn bậc hai là -4 và 4.
Chọn đáp án (D) □

Bài 3. Kết quả khai căn của biểu thức $\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}$ là

(A) $1 - \sqrt{3}$. (B) $\sqrt{3} - 1$. (C) $-1 - \sqrt{3}$. (D) $1 + \sqrt{3}$.

Lời giải.

$\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} = \left|\left(\sqrt{3}-1\right)\right| = \sqrt{3} - 1$.
Chọn đáp án (B) □

Bài 4. Điều kiện xác định của căn thức $\sqrt{12-21x}$ là

A. $x \geq 12$. B. $x \geq \dfrac{4}{7}$. C. $x \leq \dfrac{4}{7}$. D. $x \leq 21$.

Lời giải.

Căn thức xác định khi $12-21x \geq 0 \Leftrightarrow 21x \leq 12 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{12}{21} \Leftrightarrow x \leq \dfrac{4}{7}$.

Chọn đáp án C □

Bài 5. So sánh 5 với $2\sqrt{6}$, kết luận nào sau đây là đúng?

A. $5 > 2\sqrt{6}$. B. $5 < 2\sqrt{6}$.
C. $5 = 2\sqrt{6}$. D. Không so sánh được.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{25} > \sqrt{24} \Rightarrow 5 > 2\sqrt{6}$.
Chọn đáp án A □

Bài 6. Kết quả của phép tính $\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{125}$ là

A. 2. B. -2. C. $\sqrt{98}$. D. $\sqrt{98}$.

Lời giải.

$\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{3^3} - \sqrt[3]{5^3} = 3 - 5 = -2$.
Chọn đáp án B □

Bài 7. Tất cả các giá trị của x để $\sqrt{x} \leq 4$ là

A. $x > 16$. B. $0 \leq x \leq 16$. C. $x < 16$. D. $0 \leq x < 16$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.
$\sqrt{x} \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 16$.
Vậy $0 \leq x \leq 16$.
Chọn đáp án B □

Bài 8. Cho $\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ với a, b là các số nguyên dương. Khi đó giá trị $a-b$ bằng

A. 2. B. -2. C. 3. D. -3.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \dfrac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} = \sqrt{5}-\sqrt{3} \Rightarrow a = 5, b = 3$ và $a - b = 2$.
Chọn đáp án A □

Bài 9. Thu gọn biểu thức $A = |x|\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2}}$ với $-1 \leq x < 0$ ta được

A. $A = \sqrt{x+1}$. B. $A = -\sqrt{x+1}$. C. $A = x+1$. D. $A = |x+1|$.

Lời giải.

Ta có $A = |x| \cdot \dfrac{\sqrt{x+1}}{|x|} = \sqrt{x+1}$.

Chọn đáp án A □

Bài 10. Nếu x thỏa mãn điều kiện $\sqrt{3+\sqrt{x}} = 3$ thì x nhận giá trị nào sau đây?

A. 0. B. 6. C. 9. D. 36.

Lời giải.

Với $x \geq 0$, ta có $\sqrt{3+\sqrt{x}} = 3 \Leftrightarrow 3+\sqrt{x} = 9 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 6 \Leftrightarrow x = 36$.
Chọn đáp án D □

II. PHẦN TỰ LUẬN (6.0 điểm)

Bài 11. Tìm x, biết $\sqrt{2x-5} - 2\sqrt{3} = 0$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq \dfrac{5}{2}$. Phương trình tương đương với

$\sqrt{2x-5} = 2\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 2x - 5 = 12$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{17}{2}$(thỏa mãn điều kiện)

Vậy $x = \dfrac{17}{2}$ là giá trị cần tìm. □

Bài 12. Thực hiện các phép tính

1. $A = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{8} - 2\sqrt{50}$;
2. $B = \dfrac{1}{3+\sqrt{5}} + \dfrac{1}{3-\sqrt{5}}$.

Lời giải.

1. $A = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2^2 \cdot 2} - 2\sqrt{5^2 \cdot 2} = 3\sqrt{2} + 10\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.
2. $B = \dfrac{3-\sqrt{5}+3+\sqrt{5}}{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)} = \dfrac{6}{9-5} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$.

□

Bài 13. Cho biểu thức: $P = \left(\dfrac{1}{1-\sqrt{a}} - \dfrac{1}{1+\sqrt{a}}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}} + 1\right)$ $(0 < a \neq 1)$.

1. Rút gọn biểu thức P.
2. Tính giá trị của P khi $a = 9 + 4\sqrt{2}$.
3. Với những giá trị nào của a thì $P > \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

1. Với $a > 0$ và $a \neq 1$, ta có:

$$\begin{aligned}
P &= \left(\frac{1}{1-\sqrt{a}} - \frac{1}{1+\sqrt{a}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + 1\right)\\
&= \frac{1+\sqrt{a}-1+\sqrt{a}}{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a})} \cdot \frac{1+\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{2\sqrt{a}}{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a})} \cdot \frac{1+\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{2}{1-\sqrt{a}}.
\end{aligned}$$

Vậy $P = \dfrac{2}{1-\sqrt{a}}$.

2. $a = 9 + 4\sqrt{2} = \left(1 + 2\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{a} = 1 + 2\sqrt{2}$

   Vậy $P = \dfrac{2}{1 - \sqrt{a}} = \dfrac{2}{1 - \left(1 + 2\sqrt{2}\right)} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Với $a > 0$ và $a \neq 1$ thì điều kiện để $P > \dfrac{1}{2}$ là:

$$\dfrac{2}{1 - \sqrt{a}} > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{2}{1 - \sqrt{a}} - \dfrac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{4 - 1 + \sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{3 + \sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} > 0$$
$$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{a} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} < 1 \Leftrightarrow a < 1.$$

   Kết hợp với điều kiện $a > 0$ ta được: $0 < a < 1$.

□

3 Đề số 3 - Dành cho HS Khá, Giỏi

Bài 14. Tính giá trị của các biểu thức

1. $A = \sqrt{\dfrac{3 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}} + \sqrt{\dfrac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}}$.
2. $B = \dfrac{1}{\sqrt{2} + 1} + \dfrac{3}{3 - 2\sqrt{2}} - \dfrac{4}{3\sqrt{2} - 4}$.

Lời giải.

1. Ta có

$$A = \sqrt{\dfrac{\left(3 - \sqrt{5}\right)^2}{\left(3 + \sqrt{5}\right)\left(3 - \sqrt{5}\right)}} + \sqrt{\dfrac{\left(3 + \sqrt{5}\right)^2}{\left(3 - \sqrt{5}\right)\left(3 + \sqrt{5}\right)}} = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} + \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2} = 3.$$

2. Ta có

$$B = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{\left(\sqrt{2} + 1\right)\left(\sqrt{2} - 1\right)} + \dfrac{3\left(3 + 2\sqrt{2}\right)}{\left(3 - 2\sqrt{2}\right)\left(3 + 2\sqrt{2}\right)} - \dfrac{4\left(3\sqrt{2} + 4\right)}{\left(3\sqrt{2} - 4\right)\left(3\sqrt{2} + 4\right)}$$
$$= \dfrac{\sqrt{2} - 1}{1} + \dfrac{9 + 6\sqrt{2}}{1} - \dfrac{4\left(3\sqrt{2} + 4\right)}{2} = \sqrt{2}.$$

□

Bài 15. Cho biểu thức

$$Q = \left(\dfrac{3 + \sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}} - \dfrac{3 - \sqrt{x}}{3 + \sqrt{x}} - \dfrac{36}{x - 9}\right) : \dfrac{\sqrt{x} - 5}{3\sqrt{x} - x} \quad (\text{với } x > 0,\ x \neq 9,\ x \neq 25)$$

.

1. Rút gọn Q.
2. Tìm x để $Q<0$.

Lời giải.

1. Ta có
$$\frac{3+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}-\frac{3-\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}-\frac{36}{x-9}=\frac{(3+\sqrt{x})^2-(3-\sqrt{x})^2+36}{(3+\sqrt{x})(3-\sqrt{x})}$$
$$=\frac{12(\sqrt{x}+3)}{(3+\sqrt{x})(3-\sqrt{x})}=\frac{12}{3-\sqrt{x}}.$$
Suy ra
$$Q=\frac{12}{3-\sqrt{x}}.\frac{\sqrt{x}(3-\sqrt{x})}{\sqrt{x}-5}=\frac{12\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5}.$$
2. Ta có
$$Q<0\Leftrightarrow\frac{12\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5}<0\Leftrightarrow\sqrt{x}-5<0\ (\text{do }\sqrt{x}>0\ )\Leftrightarrow\sqrt{x}<5\Leftrightarrow x<25.$$
Vậy $\begin{cases}0<x<25\\ x\neq 9\end{cases}$ là những giá trị cần tìm.

□

Bài 16. Tính giá trị biểu thức: $B=6x^3+3x^2+2014$ với $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}}$.

Lời giải.

Ta có
$\dfrac{1}{x}=\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$
$\Rightarrow\dfrac{1}{x^3}=3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}+3\sqrt[3]{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)}\left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right)=6+\dfrac{3}{x}$
$\Rightarrow 6x^3+3x^2=1.$

Do đó $B=1+2014=2015$. □

Bài 17. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta luôn có bất đẳng thức
$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\left(\sqrt{n+1}-1\right).$$

Lời giải.

Ta có
$$\frac{1}{2\sqrt{k}}>\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}.$$
Suy ra
$$\frac{1}{2\sqrt{1}}>\sqrt{2}-\sqrt{1}$$
$$\frac{1}{2\sqrt{2}}>\sqrt{3}-\sqrt{2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{2\sqrt{n}}>\sqrt{n+1}-\sqrt{n}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế ta được

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)>\sqrt{n+1}-1.$$

Suy ra

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\left(\sqrt{n+1}-1\right).$$

□

Bài 18. Cho x, y thỏa mãn: $0<x<1$, $0<y<1$ và $\dfrac{x}{1-x}+\dfrac{y}{1-y}=1$. Tính giá trị biểu thức:

$$P=x+y+\sqrt{x^2-xy+y^2}.$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{x}{1-x}+\frac{y}{1-y}=1 &\Leftrightarrow x(1-y)+y(1-x)=(1-x)(1-y)\\ &\Leftrightarrow x+y-2xy=1-x-y+xy\\ &\Leftrightarrow 3xy-2(x+y)+1=0\\ &\Leftrightarrow 3xy=2(x+y)-1.\end{aligned}$$

Mà $xy\leqslant\dfrac{(x+y)^2}{4}$ nên ta có

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}(x+y)^2\geqslant 2(x+y)-1 &\Leftrightarrow 3(x+y)^2-8(x+y)+4\geqslant 0\Leftrightarrow (x+y-2)(3(x+y)-2)\geqslant 0\\ &\Leftrightarrow 3(x+y)-2\leqslant 0\Leftrightarrow x+y\leqslant\frac{2}{3}\ (\text{do } x+y<1+1=2).\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}P&=x+y+\sqrt{(x+y)^2-3xy}=x+y+\sqrt{(x+y)^2-2(x+y)+1}\\ &=x+y+\sqrt{(x+y-1)^2}=x+y+1-(x+y)=1.\end{aligned}$$

□

Chương 2 Hàm số bậc nhất

§1 Khái niệm hàm số. Hàm số bậc nhất

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Nhắc lại khái niệm hàm số

- Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng x, sao cho với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là hàm số của biến x và x được gọi là biến số.

Ví dụ 1. y là hàm số của x được cho bởi bảng sau

x	-1	0	1	2	3
y	-1	0	1	2	3

- Hàm số có thể được cho bằng bảng hoặc bằng công thức, $\cdots$

Ví dụ 2. y là hàm số của x được cho bằng công thức

a) $y = 2x$. b) $y = 2x + 3$. c) $y = \dfrac{4}{x}$.

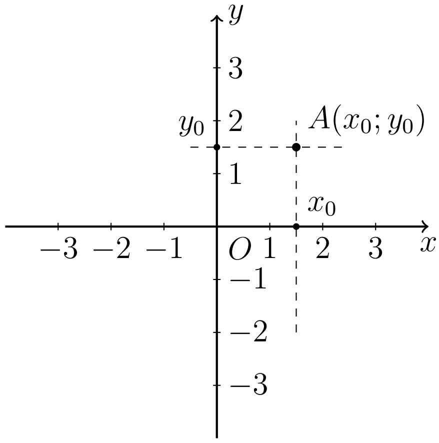
Với các hàm số $y = 2x$ và $y = 2x + 3$ biến số x có thể lấy những giá trị tùy ý; còn với hàm số $y = \dfrac{4}{x}$, biến số x chỉ lấy những giá trị khác 0.

17. Nhận xét

- Khi hàm số được cho bằng công thức $y = f(x)$, ta hiểu rằng biến số x chỉ lấy những giá trị mà tại đó $f(x)$ xác định.
- Khi y là hàm số của x, ta có thể viết $y = f(x)$, $y = g(x)$, $\cdots$
- Khi x thay đổi mà y luôn nhận một giá trị không đổi thì hàm số y được gọi là hàm hằng.

1.2 Đồ thị của hàm số

- Biểu diễn điểm $A(x_0; y_0)$ trong hệ trục tọa độ Oxy.
  1) Đánh số trên các trục số.
  2) Trên trục hoành chọn điểm có tọa độ x_0, qua đó vẽ đường thẳng song song với trục Oy.
  3) Trên trục tung chọn điểm có tọa độ y_0, qua đó vẽ đường thẳng song song với trục Ox.
  4) Giao điểm của hai đường thẳng trên chính là điểm $A(x_0; y_0)$.



- Đồ thị hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng $(x; f(x))$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

1.3 Hàm số đồng biến, nghịch biến

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định với mọi giá trị của x thuộc $\mathbb{R}$. Với $x_1; x_2$ bất kì thuộc $\mathbb{R}$,

- Nếu $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) < f(x_2)$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- Nếu $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) > f(x_2)$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

2 Hàm số bậc nhất

2.1 Định nghĩa hàm số bậc nhất

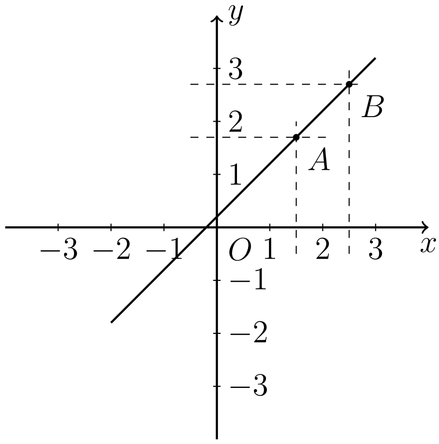
Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức $y = ax + b$, trong đó a, b là các số cho trước và a khác 0.

18. Chú ý Khi $b = 0$, hàm số có dạng $y = ax$ (đã học ở lớp 7).

2.2 Vẽ đồ thị hàm số bậc nhất

Để vẽ hàm số bậc nhất $y = ax + b$ ta làm như sau

1) Chọn hai điểm A và B thỏa mãn phương trình hàm số bậc nhất.
2) Biểu diễn hai điểm A và B trên mặt phẳng tọa độ.
3) Nối hai diểm A và B, ta được đồ thị hàm số đã cho.



2.3 Giá trị của hàm số bậc nhất

1) Cho hàm số bậc nhất $y = ax + b$, tìm giá trị y_0 của hàm bậc nhất khi biết giá trị $x = x_0$. Có 2 phương pháp tính giá trị của hàm số bậc nhất

   - Dựa vào đồ thị hàm số.
   Cách giải Muốn tính giá trị của hàm số bậc nhất $y = ax + b$ tại điểm x_0, ta làm như sau
     * Qua điểm $x = x_0$ trên trục hoành ta vẽ đường song song với trục tung cắt đồ thị hàm số tại điểm A.
     * Từ điểm A kẻ đường thẳng song song với trục hoành cắt trục tung tại điểm y_0, vậy y_0 là điểm cần tìm.
   - Dựa vào phương trình hàm số. Thế giá trị $x = x_0$ vào phương trình hàm số bậc nhất, từ đó tính được giá trị y_0.

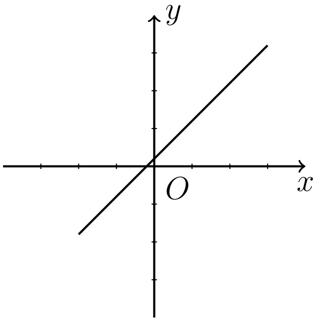
2) Cho hàm số bậc nhất $y = ax + b$, tìm giá trị x_0 của hàm bậc nhất khi biết giá trị $y = y_0$. Làm tương tự 1)

2.4 Tính chất

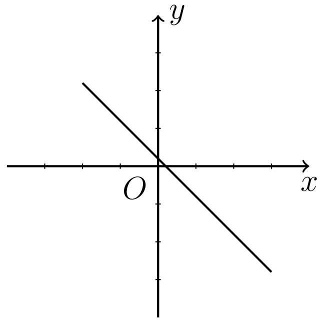
Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ xác định với mọi giá trị của x thuộc R và có tính chất:

- Đồng biến trên $\mathbb{R}$, khi $a > 0$.
- Nghịch biến trên $\mathbb{R}$, khi $a < 0$.

Hàm số đồng biến



Hàm số nghịch biến



3 Các dạng toán

Dạng 33. Biểu diễn điểm $A(x_0; y_0)$ trên hệ trục tọa độ

1. Đánh số trên các trục số.
2. Trên trục hoành chọn điểm có tọa độ x_0, qua đó vẽ đường thẳng song song với trục Oy.
3. Trên trục tung chọn điểm có tọa độ y_0, qua đó vẽ đường thẳng song song với trục Ox.
4. Giao điểm của hai đường thẳng trên chính là điểm $A(x_0; y_0)$.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Trên hệ trục tọa độ Oxy, hãy biểu diễn tọa độ các điểm sau

a) $A(1,2)$.

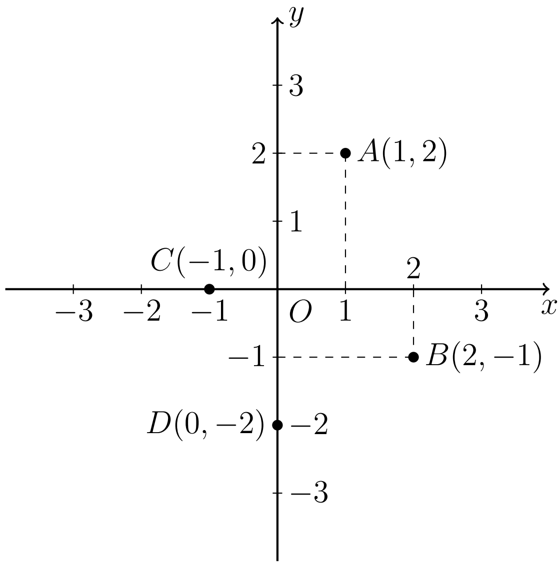
b) $B(2,-1)$.

c) $C(-1,0)$.

d) $D(0,-2)$.

Lời giải.

Biểu diễn các điểm



□

Dạng 34. Nhận dạng hàm số bậc nhất

Hàm số bậc nhất là hàm số có dạng $y = ax + b$ với $a \neq 0$.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Trong các hàm số sau hàm số nào là hàm số bậc nhất? Giải thích?

a) $y = 2x + 3$.

b) $y = 3 - 2x$.

c) $y = 3$.

d) $y = \dfrac{1}{2x} + 3$.

e) $y = 2x^2 + 3$.

Lời giải.

a) $y = 2x + 3$ là hàm bậc nhất vì có dạng $y = ax + b$ với $a = 2 \neq 0; b = 3$.

b) $y = 3 - 2x$ là hàm bậc nhất vì có dạng $y = ax + b$ với $a = -2 \neq 0; b = 3$..

c) $y = 3$ không là hàm bậc nhất vì không có dạng $y = ax + b$ với $a = 0; b = 3$..

d) $y = \dfrac{1}{2x} + 3$ không là hàm bậc nhất vì không có dạng $y = ax + b$.

e) $y = 2x^2 + 3$ không là hàm bậc nhất vì không có dạng $y = ax + b$.

□

Dạng 35. Vẽ đồ thị hàm số bậc nhất

1. Chọn hai điểm thuộc hàm số bậc nhất.
2. Nối hai điểm vừa tìm được.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Trên hệ trục tọa độ Oxy, vẽ đồ thị hàm số bậc nhất sau

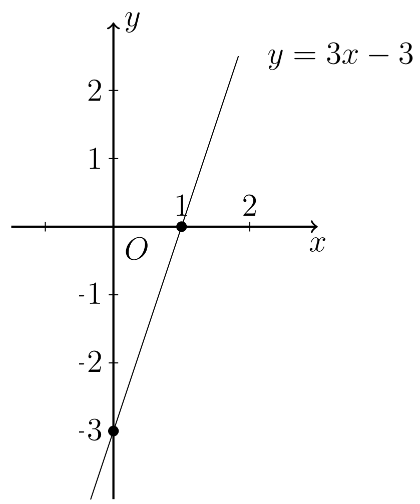
a) $y = 3x - 3$. b) $y = -x - 1$. c) $y = 2x$.

Lời giải.

a) $y = 3x - 3$.

x	0	1
y	-3	0

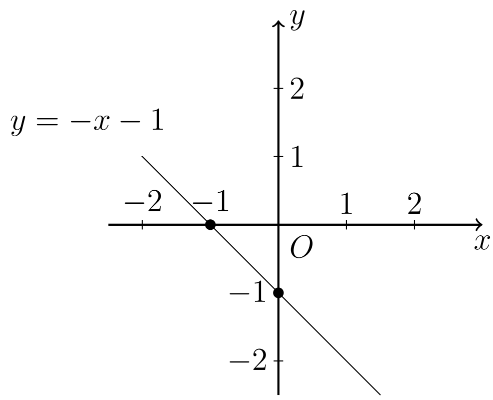
- Bước 1. Biểu diễn điểm $A(0, -3)$.
- Bước 2. Biểu diễn điểm $B(1, 0)$.
- Bước 3. Nối hai điểm A và B.



b) $y = -x - 1$.

x	0	-1
y	-1	0

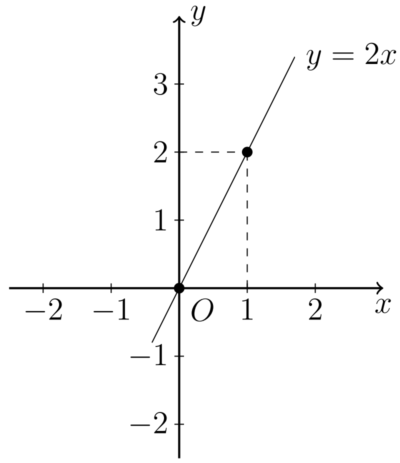
- Bước 1. Biểu diễn điểm $A(0, -1)$.
- Bước 2. Biểu diễn điểm $B(-1, 0)$.
- Bước 3. Nối hai điểm A và B.



c) $y = 2x$.

x	0	1
y	0	2

- Bước 1. Biểu diễn điểm $A(0,0)$.
- Bước 2. Biểu diễn điểm $B(1,3)$.
- Bước 3. Nối hai điểm A và B.



□

Dạng 36. Tìm giá trị của x hoặc y khi biết giá trị còn lại.

Có 2 phương pháp tính giá trị của hàm số bậc nhất
1. Dựa vào đồ thị hàm số.
2. Dựa vào biểu thức của hàm số bậc nhất.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Trên hệ trục tọa độ Oxy, cho hàm số bậc nhất $y = 2x + 1$.

a) Vẽ đồ thị hàm số.

b) Tính giá trị y của hàm số khi biết $x = 1$, bằng hai phương pháp?

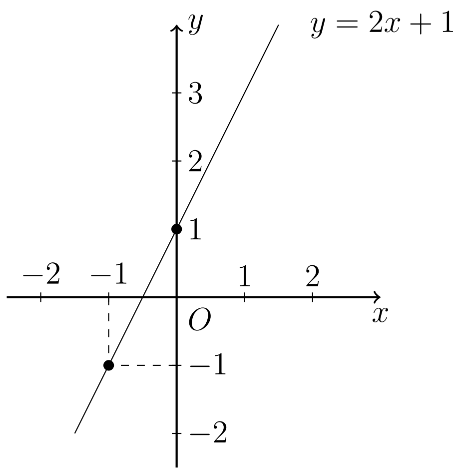
c) Tính giá trị x của hàm số khi biết $y = 2,5$.

Lời giải.

a) Vẽ đồ thị hàm số.

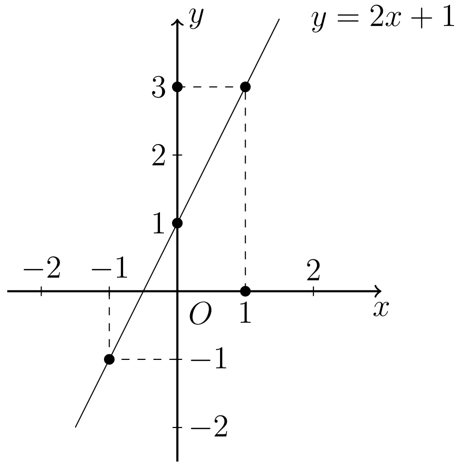
x	0	-1
y	1	-1

- Bước 1. Biểu diễn điểm $A(0,1)$.
- Bước 2. Biểu diễn điểm $B(-1,-1)$.
- Bước 3. Nối hai điểm A và B.



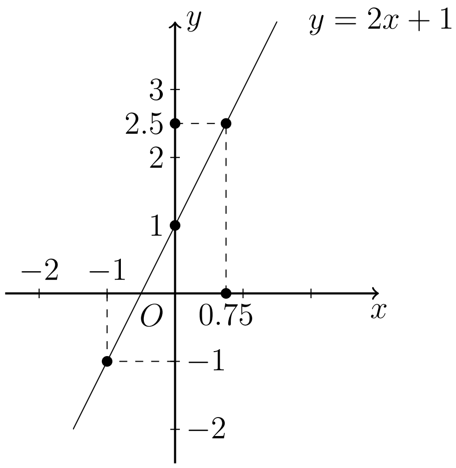
b) Tính giá trị y của hàm số khi biết $x = 1$, bằng hai phương pháp?
Phương pháp 1. Với $x = 1$ thế vào biểu thức của hàm bậc nhất ta có $y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$.
Vậy giá trị của $y = 3$ khi $x = 1$.
Phương pháp 2. Dùng đồ thị hàm số

1. Từ điểm $x = 1$ trên trục hoành kẻ đường thẳng song song với trục Oy cắt đồ thị tại A.
2. Từ A kẻ đường thẳng song song với trục Ox cắt đồ thị tại điểm có $y = 3$.
Vậy giá trị của $y = 3$ khi $x = 1$.



Vậy giá trị của $y = 3$ khi $x = 1$.

c) Tính giá trị x của hàm số khi biết $y = 2,5$. Thế $y = 2,5$ vào biểu thức của hàm số ta có $2,5 = 2x + 1 \Rightarrow x = 0,75$.
Vậy $x = 0,75$ thì $y = 2,5$.
Dựa vào đồ thị ta có như sau



□

Dạng 37. Hàm số đồng biến và nghịch biến

Hàm số $y = ax + b$
1. Đồng biến khi và chỉ khi $a > 0$.
2. Đồng biến khi và chỉ khi $a > 0$.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Trong các hàm số bậc nhất sau, hàm số nào là đồng biến, hàm số nào là nghịch biến?

a) $y = 2x + 3$.

b) $y = 3 - 2x$.

c) $y = -3x$.

d) $y = 4x$.

Lời giải.

a) $y = 2x + 3$ là hàm số đồng biến vì $a = 2 > 0$.

b) $y = 3 - 2x$ là hàm số đồng biến vì $a = -2 > 0$..

c) $y = -3x$ là hàm số đồng biến vì $a = -3 > 0$..

d) $y = 4x$ là hàm số đồng biến vì $a = 4 > 0$..

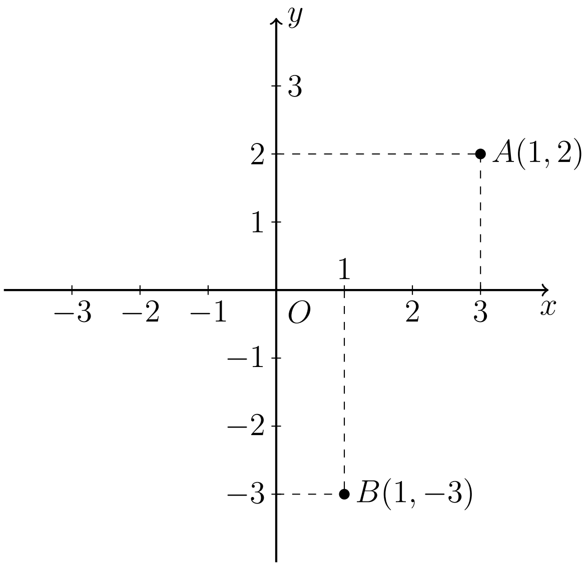
□

4 Luyện tập

Bài 1. Trên hệ trục tọa độ Oxy, hãy biểu diễn các điểm sau $A(3, 2)$; $B(1, -3)$.

Lời giải.

Biểu diễn các điểm



□

Bài 2. Trong các hàm số sau hàm số nào là hàm số bậc nhất? Giải thích?

a) $y = \frac{1}{2}x + 3$.

b) $y = -\frac{3}{5}x + 3$.

c) $y = 6$.

d) $y = \frac{1}{7x} + 3$.

e) $y = 2x^3 + 3$.

Lời giải.

a) $y = \frac{1}{2}x + 3$. là hàm bậc nhất vì có dạng $y = ax + b$ với $a = \frac{1}{2} \neq 0; b = 3$.

b) $y = -\frac{3}{5}x + 3$. là hàm bậc nhất vì có dạng $y = ax + b$ với $a = -\frac{3}{5} \neq 0; b = 3$..

c) $y = 6$ không là hàm bậc nhất vì không có dạng $y = ax + b$ với $a = 0; b = 6$.

d) $y = \dfrac{1}{7x} + 3$ không là hàm bậc nhất vì không có dạng $y = ax + b$.

e) $y = 2x^3 + 3$ không là hàm bậc nhất vì không có dạng $y = ax + b$.

□

Bài 3. Trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy, hãy vẽ hai hàm số bậc nhất $y = x + 1$ và $y = -x$.

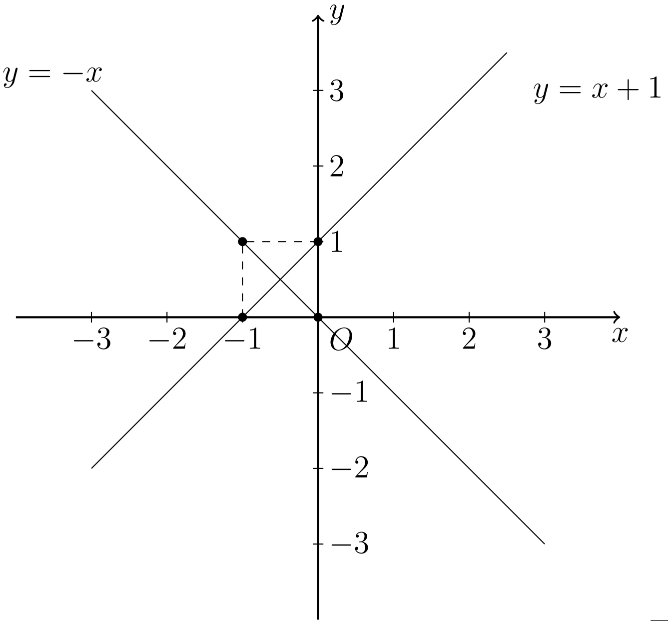
Lời giải.

Bảng giá trị của hàm số $y = x + 1$

x	0	-1
y	1	0

Bảng giá trị của hàm số $y = -x$

x	0	-1
y	0	1



□

Bài 4. Cho hàm số bậc nhất $y = (1 - \sqrt{5})x - 1$.

a) Hàm số trên là đồng biến hay nghịch biến trên $\mathbb{R}$? Vì sao?

a) Tính giá trị của y khi $x = 1 + \sqrt{5}$.

b) Tính giá trị của x khi $y = \sqrt{5}$.

Lời giải.

a) Hàm số trên là nghịch biến trên $\mathbb{R}$ vì $a = 1 - \sqrt{5} < 0$.

a) Khi $x = 1 + \sqrt{5}$ thì $y = (1 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5}) - 1 = -5$.

b) Khi $y = \sqrt{5}$ thì $\sqrt{5} = (1 - \sqrt{5})x - 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{1-\sqrt{5}} = \dfrac{(\sqrt{5}+1)^2}{1-5} = -\dfrac{2\sqrt{5}+6}{4} = -\dfrac{\sqrt{5}+3}{2}$.

□

Bài 5. Tìm m để các hàm số sau là hàm số bậc nhất:

a) $y = mx - x + 3$.

b) $y = (m^2 - 1)x - 2014$.

Lời giải.

a) $y = mx - x + 3 \Leftrightarrow y = (m - 1)x + 3$.
Để hàm số là hàm số bậc nhất thì $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

b) $y = (m^2 - 1)x - 2014$.
Để hàm số là hàm số bậc nhất thì $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$. $\square$

Bài 6. Cho hàm số bậc nhất $y = (m-1)x + 3$. Tìm m để đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1, 2)$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số bậc nhất $y = (m-1)x+3$ đi qua điểm $A(1, 2)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ 2 = (m-1)1 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} m \neq 1 \\ m = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 0$. $\square$

Bài 7. Cho đường thẳng $y = (m+1)x - 2m$, $(m \neq 1)$. Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(3; -1)$.

Lời giải.

Đường thẳng (d) đi qua điểm $A(3; -1)$ khi và chỉ khi $-1 = (m+1) \cdot 3 - 2m \Leftrightarrow m = -4$ (nhận).
Vậy $m = -4$ thì đường thẳng (d) đi qua điểm $A(3; -1)$. $\square$

Bài 8. Cho hàm số bậc nhất $y = mx + x + m$. Tìm giá trị của m để hàm số

a) Đồng biến.

b) Nghịch biến.

Lời giải.

Hàm số bậc nhất $y = mx + x + m$ được viết lại là $y = (m+1)x + m$.

a) Hàm số bậc nhất đồng biến khi và chỉ khi $m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

b) Hàm số bậc nhất nghịch biến khi và chỉ khi $m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -1$.

$\square$

5 Các bài toán nâng cao

Bài 9. Cho hàm số $y = (a-1)x + a$.

a) Chứng minh rằng đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $A(-1; 1)$ với mọi giá trị của a.

b) Xác định a để đường thẳng đi qua gốc toạ độ.

Lời giải.

a) Hàm số $y = (a-1)x + a \Leftrightarrow y + x - (x+1)a = 0$ $(\star)$.
Phương trình $(\star)$ luôn luôn đúng khi và chỉ khi $\begin{cases} y + x = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1. \end{cases}$
Vậy đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $A(-1; 1)$ với mọi giá trị của a.

b) Xác định a để đường thẳng đi qua gốc toạ độ. Đường thẳng đi qua gốc tọa độ $O(0, 0)$ khi và chỉ khi $0 = (a-1) \cdot 0 + a \Leftrightarrow a = 0$.
Vậy $a = 0$ thì đường thẳng đi qua gốc toạ độ.

□

Bài 10. Cho hàm số $y = (2a-1)x - a + 2$.

a) Xác đinh a để hàm số là hàm số bậc nhất.

b) Xác định a để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1.

c) Vẽ đồ thị.

d) Tính khoảng cách từ gốc toạ độ O đến đường thẳng đó.

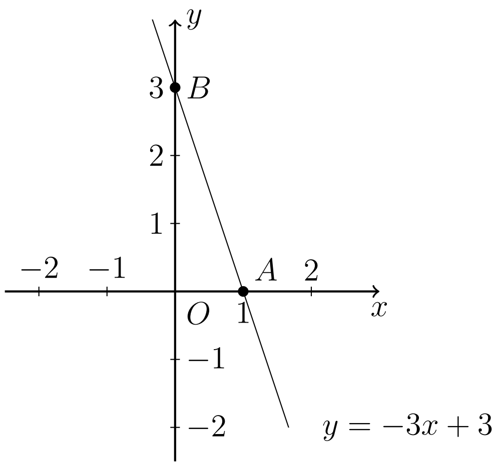
Lời giải.

a) Xác đinh a để hàm số là hàm số bậc nhất.
Để hàm số bậc nhất khi và chỉ khi $2a - 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \dfrac{1}{2}$.

b) Hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1, nghĩa là đồ thị đi qua điểm $(1, 0)$, khi đó ta có $0 = (2a-1)1 - a + 2 \Leftrightarrow a = -1$.
Hàm số bậc nhất được viết lại là $y = -3x + 3$.

c) Vẽ đồ thị.

x	0	1
y	3	0



d) Tính khoảng cách từ gốc toạ độ O đến đường thẳng đó.
Xét diện tích tam giác OAB ta có
$S_{OAB} = \dfrac{1}{2}OA \cdot OB = \dfrac{1}{2}d\{O, AB\} \cdot)B \Leftrightarrow d\{O, AB\} = \dfrac{OA \cdot OB}{AB}$.
Ta có $O(0,0); A(1,0); B(0,3)$ nên $OA = 1; OB = 3; AB = \sqrt{(1-0)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{10}$.
Khi đó $d\{O, AB\} = \dfrac{OA \cdot OB}{AB} = \dfrac{1 \cdot 3}{\sqrt{10}} = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

□

Bài 11. a) Trên hệ trục tọa độ Oxy, vẽ đồ thị hàm số $y = 2x + 2$ và $y = 2x$.

b) Gọi A là giao điểm của hai đồ thị đó. Tìm tọa độ của A.

c) Qua điểm $(0, 2)$ vẽ đường thẳng song song với trục hoành, cắt hai đường thẳng tại hai điểm B, C. Tính diện tích tam giác ABC.

Lời giải.

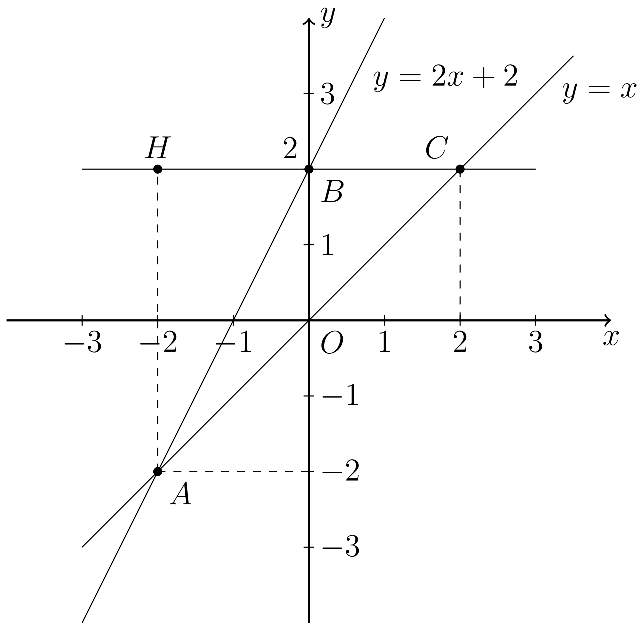
a) Trên hệ trục tọa độ Oxy, vẽ đồ thị hàm số $y = 2x + 2$ và $y = 2x$.

Bảng giá trị hàm số $y = 2x + 2$

x	0	-1
y	2	0

Bảng giá trị hàm số $y = x$

x	0	1
y	0	1



b) Gọi A là giao điểm của hai đồ thị đó. Tìm tọa độ của A.
Dựa vào đồ thị ta có giao điểm A có tọa độ $A(-2, -2)$.

c) Qua điểm $(0, 2)$ vẽ đường thẳng song song với trục hoành, cắt hai đường thẳng tại hai điểm B, C.
Tọa độ hai giao điểm là $B(0, 2)$ và $C(2, 2)$. Khi đó $BC = 2$.
Kẻ $AH \perp BC$, ta có $AH = 4$.
Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AH \cdot BC = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$ (đvdt).

□

Bài 12. Tìm m để hàm số là hàm số bậc nhất $y = (m^2 - 1)x^2 + (m + 1)x - 1$.

Lời giải.

Điều kiện để là hàm số bậc nhất là $\begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m \neq -1 \end{cases} \Rightarrow m = 1$.

Vậy $m = 1$ thì hàm số đã cho là hàm số bậc nhất có dạng $y = 2x - 1$. □

§2 Đồ thị hàm số bậc nhất

1 Tóm tắt lý thuyết

Đồ thị của hàm số bậc nhất $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ là một đường thẳng:

- Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng b.
- Song song với đường thẳng $y = ax$ nếu $b \neq 0$; trùng với đường thẳng $y = ax$ nếu $b = 0$.

Hàm số $y = ax$ là trường hợp đặc biệt của đồ thị hàm số $y = ax + b$ khi $b = 0$.

2 Các dạng toán

Dạng 38. Điểm thuộc đường thẳng, điểm không thuộc đường thẳng

Để biết điểm có thuộc đường thẳng hay không ta thay trực tiếp điểm vào phương trình đường thẳng.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Điểm nào sau đây thuộc đường thẳng $d\colon y = 2x + 3$.

a) $A(0; 3)$.

b) $B(-\dfrac{3}{2}; 0)$.

c) $C(1; 2)$.

d) $D(-1; 1)$.

Lời giải.

1. Thay tọa độ điểm $A(0; 3)$ vào đường thẳng d ta có $3 = 2 \cdot 0 + 3$ nên $A \in d$.
2. Thay tọa độ điểm $B(-\dfrac{3}{2}; 0)$ vào đường thẳng d ta có $0 = 2\left(-\dfrac{3}{2}\right) + 3$ nên $B \in d$.
3. Thay tọa độ điểm $C(1; 2)$ vào đường thẳng d ta có $2 \neq 2 \cdot 1 + 3$ nên $C \notin d$.
4. Thay tọa độ điểm $D(-1; 1)$ vào đường thẳng d ta có $1 = 2 \cdot (-1) + 3$ nên $D \in d$.

$\square$

Ví dụ 2. Cho các điểm $A(0; -5)$, $B(1; -2)$, $C(2; 1)$, $D(2{,}5; 2{,}5)$, $M(x; 14)$, $N(-5; 20)$, $P(7; -16)$.

1. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng.

2. Tìm x để ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Lời giải.

1. Gọi $d\colon y = ax + b$ là đường thẳng đi qua hai điểm A, B suy ra
$$\begin{cases} -5 = b \\ -2 = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -5. \end{cases}$$
Vậy đường thẳng d có phương trình là $d\colon y = 3x - 5$. Ta thấy $1 = 2 \cdot 3 - 5$ nên $C \in d$.
Mà $2{,}5 = 2 \cdot 2{,}5 - 5$ nên $D \in d$.
Vậy 4 điểm A, B, C, D đều thuộc đường thẳng d nên chúng thẳng hàng.

2. Gọi $\Delta\colon y = ax + b$ là đường thẳng đi qua hai điểm N, P suy ra
$$\begin{cases} 20 = -5a + b \\ -16 = 7a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36 = -12a \\ -16 = 7a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 5. \end{cases}$$
Vậy đường thẳng Δ có phương trình là $\Delta\colon y = -3x + 5$.
Ba điểm M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi $M \in \Delta \Leftrightarrow 14 = (-3) \cdot x + 5 \Leftrightarrow x = -3$.
Vậy $x = -3$ thì ba điểm M, N, P thẳng hàng.

□

Ví dụ 3. Tìm điểm cố định mà mỗi đường thẳng sau đây luôn đi qua với mọi giá trị của m.

1. $y = (m-2)x + 3$.
2. $y = mx + (m+2)$.

Lời giải.

1. Gọi $A(x_0; y_0)$ là điểm cố định thuộc đồ thị hàm số, khi đó
$$\begin{aligned} y_0 = (m-2)x_0 + 3 \text{ với mọi } m &\Leftrightarrow mx_0 - 2x_0 - y_0 + 3 = 0 \text{ với } \forall m \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ -2x_0 - y_0 + 3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 3. \end{cases} \end{aligned}$$
Vậy điểm cố định của đồ thị hàm số là $A(0;3)$.

2. Gọi $B(x_0; y_0)$ là điểm cố định thuộc đồ thị hàm số, khi đó
$$\begin{aligned} y_0 = mx_0 + m + 2 \text{ với } \forall m &\Leftrightarrow m(x_0 + 1) + 2 - y_0 = 0 \text{ với } \forall m \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 1 = 0 \\ 2 - y_0 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 2. \end{cases} \end{aligned}$$
Vậy điểm cố định của đồ thị hàm số là $B(-1;2)$.

□

Dạng 39. Xác định đường thẳng thỏa mãn tính chất nào đó

- Để viết phương trình đường thẳng qua hai điểm ta gọi đường thẳng cần tìm là $y = ax + b$ rồi thay lần lượt các điểm vào đường thẳng để tìm a, b.
- Ta thay điểm vào đường thẳng để tìm giá trị của tham số.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = (m - 1)x + 2m$.

1. Xác định giá trị của m để đồ thị của hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2.
2. Xác định giá trị của m để đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -3.

Lời giải.

1. Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2 thì
$$2 = (m - 1) \cdot 0 + 2m \Leftrightarrow m = 1.$$
Đường thẳng cần tìm là $y = 2$.
2. Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -3 thì
$$0 = (m - 1) \cdot (-3) + 2m \Leftrightarrow m = 3.$$
Đường thẳng cần tìm là $y = 2x + 6$.

□

Ví dụ 2. Xác định đường thẳng đi qua hai điểm A và B biết

a) $A(-2; 0)$, $B(0; 1)$.
b) $C(1; 4)$, $D(3; 0)$.
c) $E(-2; 2)$, $F(1; 5)$.
d) $G(2; -33)$, $H(-1; 18)$.

Lời giải.

1. Gọi đường thẳng cần tìm là $y = ax + b$.
Vì đường thẳng đi qua hai điểm $A(-2; 0)$ và $B(0; 1)$ nên $\begin{cases} 0 = -2a + b \\ 1 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = 1. \end{cases}$
Vậy đường thẳng cần tìm là $y = \dfrac{1}{2}x + 1$.
2. Gọi đường thẳng cần tìm là $y = ax + b$.
Vì đường thẳng đi qua hai điểm $C(1; 4)$, $D(3; 0)$ nên $\begin{cases} 4 = a + b \\ 0 = 3a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 6. \end{cases}$
Vậy đường thẳng cần tìm là $y = -2x + 6$.
3. Gọi đường thẳng cần tìm là $y = ax + b$.
Vì đường thẳng đi qua hai điểm $E(-2; 2)$, $F(1; 5)$ nên

$$\begin{cases}2=-2a+b\\5=a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2=-2a+b\\10=2a+2b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}12=3b\\2=-2a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=4.\end{cases}$$

Vậy đường thẳng cần tìm là $y=x+4$.

4. Gọi đường thẳng cần tìm là $y=ax+b$.
Vì đường thẳng đi qua hai điểm $G(2;-33)$, $H(-1;18)$ nên

$$\begin{cases}-33=2a+b\\18=-a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-33=2a+b\\36=-2a+2b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3b=3\\a=b-18\end{cases}\quad\begin{cases}b=1\\a=-17.\end{cases}$$

Vậy đường thẳng cần tìm là $y=-17x+1$.

□

Ví dụ 3. Cho ba đường thẳng $(d_1)\colon y=x-2$, $(d_2)\colon y=2x-1$ và $(d_3)\colon y=(m-1)x+2m$. Tìm m để ba đường thẳng đồng quy.

Lời giải.

Giao điểm M của đường thẳng (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}y=x-2\\y=2x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-1=x-2\\y=2x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=-3.\end{cases}$$

Tọa độ điểm $M(-1;-3)$.
Để ba đường thẳng đồng quy thì đường thẳng (d_3) phải đi qua giao điểm M của (d_1) và (d_2), khi đó

$$-3=(m-1)\cdot(-1)+2m\Leftrightarrow -3=1-m+2m\Leftrightarrow m=-4.$$

Vậy với $m=-4$ thì ba đường thẳng đồng quy. □

Dạng 40. Vẽ đồ thị hàm số bậc nhất, đồ thị hàm trị tuyệt đối

- Vẽ đồ thị hàm số $y=ax+b$.

☑ Khi $b=0$ thì $y=ax$. Đồ thị của hàm số $y=ax$ là đường thẳng đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ và điểm $A(1;a)$.

☑ Xét trường hợp $y=ax+b$ với $a\neq 0$ và $b\neq 0$.
Ta đã biết đồ thị của hàm số $y=ax+b$ là một đường thẳng. Do đó, để vẽ đồ thị hàm số $y=ax+b$, ta chỉ cần xác định được hai điểm phân biệt nào đó thuộc đồ thị rồi vẽ đường thẳng đi qua hai điểm đó. Thường lấy hai điểm thuộc các trục tọa độ.

- Để vẽ đồ thị hàm trị tuyệt đối ta cần phá dấu trị tuyệt đối rồi vẽ từng đồ thị một.

BÀI TẬP MẪU

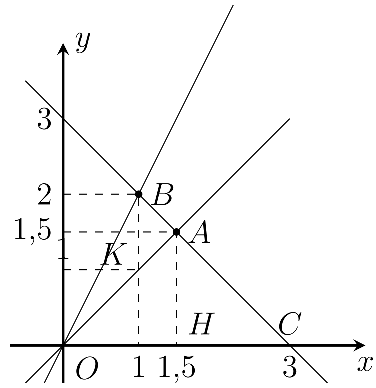
Ví dụ 1. Cho các đồ thị hàm số sau

$$(d_1)\colon y=x\quad(d_2)\colon y=2x,\quad(d_3):y=-x+3.$$

1. Vẽ trên cùng hệ trục tọa độ Oxy đồ thị trên.

2. Đường thẳng (d_3) cắt các đường thẳng (d_1), (d_2) theo thứ tự tại A, B. Tìm tọa độ của các điểm A, B và tính diện tích tam giác OAB.

Lời giải.

1. 

2. Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases} y = x \\ y = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$. Vậy $A\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$.

   Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} y = 2x \\ y = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$. Vậy $B(1; 2)$.

   Gọi H là hình chiếu của điểm A lên trục Ox, Xét tam giác OAC có $AH = \dfrac{1}{2}OC$, suy ra $\triangle OAC$ vuông tại A.

   Ta có $OA = \sqrt{OH^2 + HA^2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, $AB = \sqrt{AK^2 + KB^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   Diện tích tam giác OAB là $S_{\triangle OAB} = \dfrac{1}{2}OA \cdot AB = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3}{4}$.

□

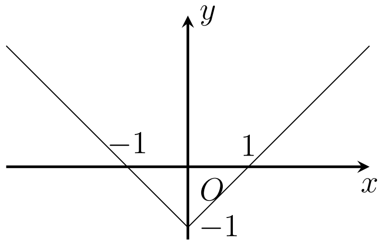
Ví dụ 2. Vẽ đồ thị của các hàm số

1. $y = |x| - 1$.
2. $y = |x + 1| + |x - 1|$.

Lời giải.

1. Ta có: $y = \begin{cases} x - 1 & \text{nếu } x \geq 0, \\ -x - 1 & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$

   Vẽ đường thẳng $y = -x - 1$. Cho $x = 0$, ta được $y = -1$.
   Cho $y = 0$ ta được $x = -1$.
   Vẽ đường thẳng $y = x - 1$. Cho $x = 0$, ta được $y = -1$.
   Cho $y = 0$ ta được $x = 1$.
   Từ đó vẽ được đồ thị hàm $y = |x| - 1$ như hình vẽ bên.



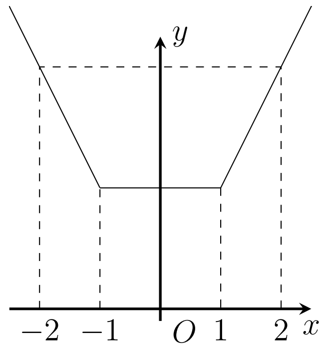
2.

Ta có: $y = \begin{cases} -2x & \text{nếu } x < 1, \\ 2 & \text{nếu } -1 \le x \le 1, \\ 2x & \text{nếu } x > 10. \end{cases}$

Vẽ đồ thị đường thẳng $y = -2x$. Cho $x = -1$, ta được $y = 2$, cho $x = -2$, ta được $y = 4$.

Vẽ đồ thị đường thẳng $y = 2x$. Cho $x = 1$, ta được $y = 2$. Cho $x = 2$, ta được $y = 4$.

Từ đó ta vẽ được đồ thị hàm số $y = |x + 1| + |x - 1|$ như hình vẽ bên.



□

3 Luyện tập

Bài 1. Cho hàm số bậc nhất $y = (a - 1)x + 2a - 3$. Tìm a biết đồ thị hàm số đi qua điểm

1. $A(1; 2)$.
2. $B(-1; -3)$.

Lời giải.

1. Vì đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1; 2)$ nên $2 = (a - 1) + 2a - 3 \Leftrightarrow 3a = 6 \Leftrightarrow a = 2$.
2. Vì đồ thị hàm số đi qua điểm $B(-1; -3)$ nên $-3 = -(a - 1) + 2a - 3 \Leftrightarrow a = -1$.

□

Bài 2. Cho đường thẳng $y = (2m + 1)x + 3 - 2m$.

1. Tìm m để hàm số là hàm nghịch biến.
2. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = 2$.
3. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ $y = -2$.

Lời giải.

1. Hàm số nghịch biến khi $2m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -\dfrac{1}{2}$.
2. Ta có $0 = (2m + 1) \cdot 2 + 3 - 2m \Leftrightarrow m = -\dfrac{5}{2}$.
3. Ta có $-2 = (2m + 1) \cdot 0 + 3 - 2m \Leftrightarrow m = \dfrac{5}{2}$.

□

Bài 3. Tìm điểm cố định của các đồ thị hàm số sau

1. $(d_1)\colon y = (m - 1)x + 2m - 3$.
2. $(d_2)\colon y = (2m + 1)x + 3 - 2m$.

Lời giải.

1. Điều kiện để đường thẳng (d_1) đi qua điểm cố định $M(x_0; y_0)$ với mọi m là:

$$\begin{aligned} & y_0 = (m-1)x_0 + 2m - 3 \text{ với mọi } m \\ \Leftrightarrow\ & (x_0+2)m - (x_0+y_0+3) = 0 \text{ với mọi } m \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x_0 + 2 = 0 \\ x_0 + y_0 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy đường thẳng (d_1) đi qua điểm cố định $M(-2;-1)$.

2. Điều kiện để đường thẳng (d_2) đi qua điểm cố định $N(x_0; y_0)$ với mọi m là:

$$\begin{aligned} & y_0 = (2m+1)x_0 + 3 - 2m \text{ với mọi } m \\ \Leftrightarrow\ & (2x_0-2)m + (x_0-y_0+3) = 0 \text{ với mọi } m \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} 2x_0 - 2 = 0 \\ x_0 - y_0 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy đường thẳng (d_2) đi qua điểm cố định $N(1;4)$.

□

Bài 4. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm

1. $A(1;3)$ và $B(2;-1)$.
2. $C(-1;2)$ và $D(0;5)$.

Lời giải.

1. Gọi đường thẳng cần tìm là $y = ax + b$.
Vì đường thẳng đi qua hai điểm $A(1;3)$, $B(2;-1)$ nên

$$\begin{cases} 3 = a + b \\ -1 = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = a + b \\ -4 = a. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 7. \end{cases}$$

Vậy đường thẳng cần tìm là $y = -4x + 7$.

2. Gọi đường thẳng cần tìm là $y = ax + b$.
Vì đường thẳng đi qua hai điểm $C(-1;2)$, $D(0;5)$ nên

$$\begin{cases} 2 = -a + b \\ 5 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 5. \end{cases}$$

Vậy đường thẳng cần tìm là $y = 3x + 5$.

□

Bài 5. Cho các đường thẳng

$$(d_1): y = x - 3;\ (d_2): y = (m-2)x + 2m.$$

Tìm m để hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau tại một điểm thuộc trục tung.

Lời giải.

Giao điểm của đường thẳng (d_1) với trục tung: Cho $x = 0$, ta được $y = -3$. Vậy điểm $A(0;-3)$ là giao điểm của (d_1) với trục tung.
Để hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau tại một điểm thuộc trục tung thì (d_2) phải đi qua A, khi đó $-3 = (m-2)\cdot 0 + 2m \Leftrightarrow m = -\dfrac{3}{2}$.
Vậy $m = -\dfrac{3}{2}$ thì (d_1) và (d_2) cắt nhau tại một điểm thuộc trục tung. □

Bài 6. Cho đường thẳng $y = mx + m - 1$ (m là tham số). (1)

1. Chứng minh rằng đường thẳng (1) luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của m.
2. Tính giá trị của m để đường thẳng (1) tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 2.

Lời giải.

1. Điều kiện để đường thẳng (1) đi qua điểm cố định $N(x_0; y_0)$ với mọi m là

$$\begin{aligned} & y_0 = mx_0 + m - 1 \text{ với mọi } m \\ \Leftrightarrow\ & (x_0+1)m - (y_0+1) = 0 \text{ với mọi } m \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x_0 + 1 = 0 \\ y_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy đường thẳng (1) đi qua điểm cố định $N(-1; -1)$.

2. Để đường thẳng $y = mx + m - 1$ cắt các trục đồ thị tạo thành tam giác thì $m \neq 0$.
Gọi A là giao điểm của đường thẳng (1) với trục tung. Với $x = 0$ thì $y = m - 1$, do đó $OA = |m-1|$.
Gọi B là giao điểm của đường thẳng (1) với trục hoành. Với $y = 0$ thì $x = \dfrac{1-m}{m}$ nên $OB = \left|\dfrac{1-m}{m}\right|$.

$$\begin{aligned} & S_{AOB} = 2 \Leftrightarrow \frac{OA \cdot OB}{2} = 2 \Leftrightarrow OA \cdot OB = 4 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{(m-1)^2}{|m|} = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & m^2 - 2m + 1 = 4m \quad (2) \\ & m^2 - 2m + 1 = -4m. \quad (3) \end{aligned}\right. \end{aligned}$$

Giải (2) ta có $m^2 - 6m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m-3)^2 = 8 \Leftrightarrow m = 3 \pm 2\sqrt{2}$.
Giải (3) ta có $m^2 + 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.
Có ba đường thẳng đi qua N tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 2:
Với $m = 3 + 2\sqrt{2}$, ta có đường thẳng $y = (3+2\sqrt{2})x + (2+2\sqrt{2})$.
Với $m = 3 - 2\sqrt{2}$, ta có đường thẳng $y = (3-2\sqrt{2})x + (2-2\sqrt{2})$.
Với $m = -1$, ta có đường thẳng $y = -x - 2$.

□

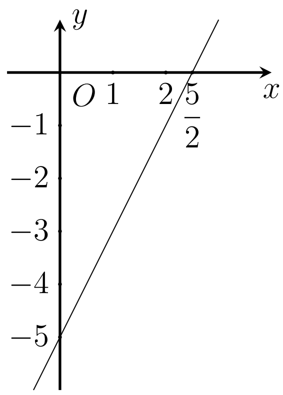
Bài 7. Vẽ đồ thị của các hàm số

1. $y = 2x - 5$.
2. $y = -3x + 6$.

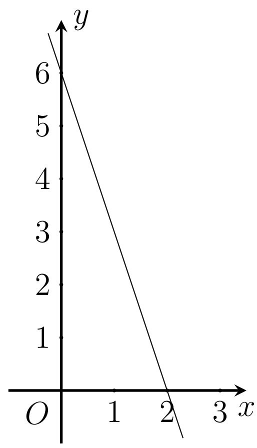
Lời giải.

1.

Cho $x = 0$, được $y = -5$, ta có $A(0; -5)$ là điểm nằm trên đường thẳng $y = 2x - 5$.
Cho $y = 0$, được $x = \dfrac{5}{2}$, ta có $B(\dfrac{5}{2}; 0)$ là điểm nằm trên đường thẳng $y = 2x - 5$.
Vẽ đường thẳng qua hai điểm $A(0; 2)$, $B(-2; 0)$ được đồ thị của hàm số như hình vẽ bên.



2. Cho $x = 0$, được $y = 6$, ta có $A(0; 6)$ là điểm nằm trên đường thẳng $y = -3x + 6$.
   Cho $y = 0$, được $x = 2$, ta có $B(2; 0)$ là điểm nằm trên đường thẳng $y = -3x + 6$.
   Vẽ đường thẳng qua hai điểm $A(0; 6)$, $B(2; 0)$ được đồ thị của hàm số như hình vẽ bên.



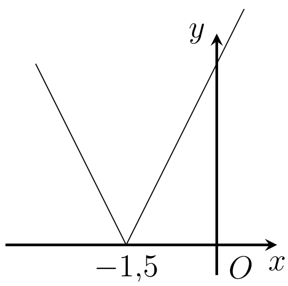
□

Bài 8. Vẽ đồ thị của các hàm số

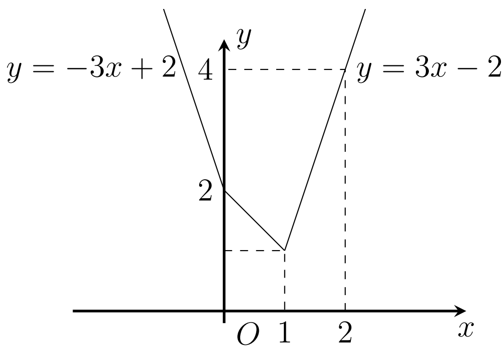
1. $y = |2x + 3|$.
2. $y = |x| + |2x - 2|$.

Lời giải.

1. Ta có: $y = \begin{cases} -2x - 3 & \text{nếu } x < -\dfrac{3}{2}, \\ 2x + 3 & \text{nếu } x \geq -\dfrac{3}{2}. \end{cases}$
   Vẽ đồ thị đường thẳng $y = -2x - 3$. Cho $x = -3$, ta được $y = 3$, cho $x = -\dfrac{3}{2}$, ta được $y = 0$.
   Vẽ đồ thị đường thẳng $y = 2x + 3$. Cho $x = 0$, ta được $y = 3$. Cho $x = -\dfrac{3}{2}$, ta được $y = 0$.
   Từ đó ta vẽ được đồ thị hàm số $y = |2x + 3|$ như hình vẽ bên.



2. Ta có: $y = \begin{cases} -3x + 2 & \text{nếu } x < 0, \\ 2 - x & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1, \\ 3x - 2 & \text{nếu } x > 1. \end{cases}$
   Vẽ đồ thị hàm số $y = -3x + 2$. Cho $x = -1$, ta được $y = 5$. Cho $x = 0$, ta được $x = 2$.
   Vẽ đồ thị hàm số $y = 2 - x$. Cho $x = 0$, ta được $y = 2$. Cho $x = 1$, ta được $y = 1$.
   Vẽ đồ thị hàm số $y = 3x - 2$. Cho $x = 1$, ta được $y = 1$. Cho $x = 2$, ta được $y = 4$.



□

Bài 9. Cho đường thẳng $y = (m - 2)x + 2$ (d)

1. Chứng minh rằng đường thẳng d luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của m.
2. Tìm giá trị của m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng d bằng 1.
3. Tìm giá trị của m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng d có giá trị lớn nhất.

Lời giải.

1. Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định thuộc đồ thị hàm số, khi đó

$$\begin{aligned} y_0 = (m-2)x_0 + 2 \text{ với } \forall m &\Leftrightarrow mx_0 - 2x_0 - y_0 + 2 = 0 \text{ với } \forall m \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ -2x_0 - y_0 + 2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

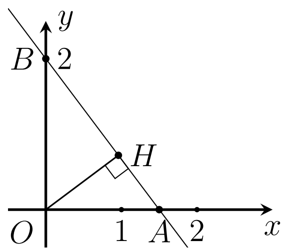
Vậy điểm cố định của đồ thị hàm số là $M(0; 2)$.

2. Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của đường thẳng d với trục hoành và trục tung.
Cho $x = 0$, ta được $y = 2$. Tọa độ điểm $B(0; 2) \Rightarrow OB = 2$. Cho $y = 0$, ta được $x = \dfrac{2}{2-m}$.
Tọa độ điểm $A(\dfrac{2}{2-m}; 0) \Rightarrow OA = \dfrac{2}{|2-m|}$.
Gọi OH là khoảng cách từ O đến AB ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{(2-m)^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{m^2 - 4m + 5}{4}.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} & OH = 1 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 5 = 4 \\ \Leftrightarrow\ & (m-2)^2 = 3 \Leftrightarrow m - 2 = \pm\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} m = 2 - \sqrt{3} \\ m = 2 + \sqrt{3}. \end{array}\right. \end{aligned}$$



Tương ứng với hai giá trị trên của M là hai đường thẳng $y = -\sqrt{3}x + 2$ và $y = \sqrt{3}x + 2$.

3. OH lớn nhất $\Leftrightarrow m^2 - 4m + 5$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow m = 2$. Khi đó đường thẳng là $y = 2$ và $OH = 2$.

□

4 Các bài toán nâng cao

Bài 10. Chứng minh rằng nếu một đường thẳng không đi qua gốc tọa độ, cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng $a (a \neq 0)$, cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $b (b \neq 0)$ thì đường thẳng đó có phương trình là

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Lời giải.

Gọi đường thẳng cần xác định là $y = mx + n$.
Đường thẳng đi qua điểm $(0; b)$ nên $b = m \cdot 0 + n \Rightarrow n = b$.
Đường thẳng $y = mx + b$ đi qua điểm $(a; 0)$ nên $0 = m \cdot a + b \Rightarrow m = -\dfrac{b}{a}$(chú ý rằng $a \neq 0$).
Đường thẳng cần xác định có phương trình là $y = -\dfrac{b}{a}x + b$ hay $\dfrac{y}{b} = -\dfrac{x}{a} + 1$ tức $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$. □

Bài 11. Xác định đường thẳng đi qua $A(4;3)$, cắt trục tung tại điểm có tung độ là một số nguyên dương, cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là một số nguyên tố.

Lời giải.

Giả sử đường thẳng phải tìm cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng a, cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng b thì đường thẳng có dạng $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$(xem bài trên).
Điểm $A(4;3)$ thuộc đường thẳng nên $\dfrac{4}{a}+\dfrac{3}{b}=1$. Do đó $b=\dfrac{3a}{a-4}=3+\dfrac{12}{a-4}$.
Do a là số nguyên tố nên $a\geq 2, a-4\geq -2$.
Lần lượt cho $a-4$ nhận các giá trị -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12 với chú ý rằng a là số nguyên tố và $b>0$, ta được $\begin{cases}a=5\\b=15\end{cases}$ và $\begin{cases}a=7\\b=7.\end{cases}$
Ta tìm được hai đường thẳng $\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{15}=1$ (hay $y=-3x+15$) và $\dfrac{x}{7}+\dfrac{y}{7}=1$ (hay $y=-x+7$). □

Bài 12. Cho các điểm $A(6;0)$, $B(0;4)$. Một điểm M di chuyển trên đoạn thẳng AB. Gọi C, D theo thứ tự là hình chiếu của M trên OA, OB. Gọi N là điểm thuộc đoạn thẳng CD sao cho $DN=2NC$. Chứng minh rằng điểm N nằm trên một đường thẳng.

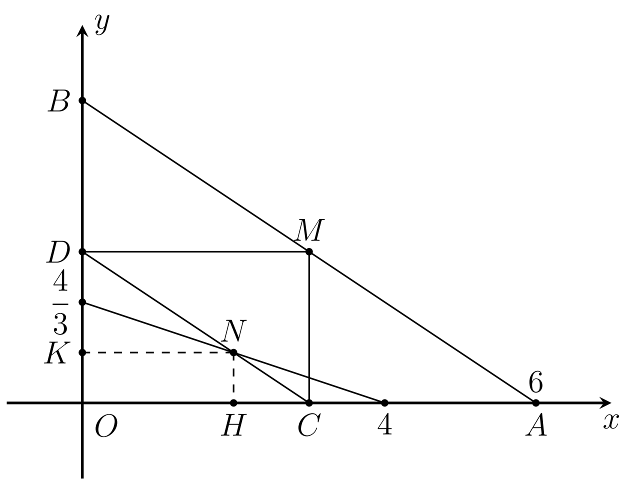
Lời giải.

Đường thẳng đi qua A, B là $y=-\dfrac{2}{3}x+4$.
Tọa độ điểm M là $(x;y)$ thì $y=-\dfrac{2}{3}x+4$. (1)
Gọi hình chiếu của N trên Ox, Oy theo thứ tự là H, K. Ta có

$$NK=\frac{2}{3}OC=\frac{2}{3}MD=\frac{2}{3}x,$$
$$NH=\frac{1}{3}OD=\frac{1}{3}MC=\frac{1}{3}y.$$

Gọi tọa độ điểm N là $(x';y')$ thì

$$x'=\frac{2}{3}x;y'=\frac{1}{3}y.$$



Thay vào (1) ta được $3y'=-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{2}x'+4$ hay $y'=-\dfrac{1}{3}x'+\dfrac{4}{3}$.
Vậy điểm N di chuyển trên đường thẳng $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{4}{3}$ (phần đường thẳng nằm trong góc phần tư thứ I). □

Bài 13. Cho các điểm $A(7;2)$, $B(2;8)$, $C(8;4)$. Xác định đường thẳng d đi qua A sao cho các điểm B, C nằm về hai phía của d và cách đều d.

Lời giải.

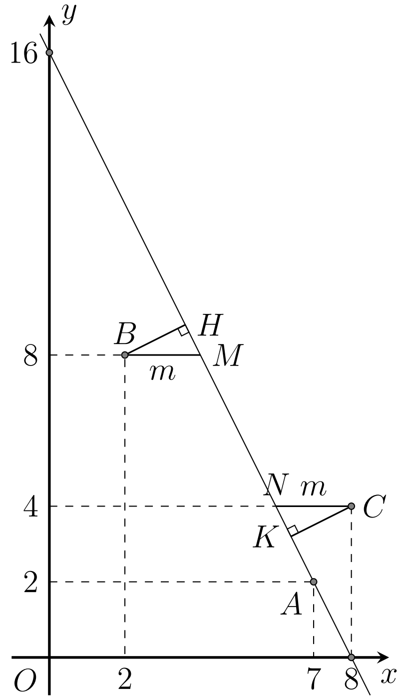
Gọi đường thẳng d phải tìm là $y = ax + b$. Điểm A thuộc d nên

$$2 = 7a + b \qquad (1)$$

Đường thẳng qua B và song song với trục hoành cắt d tại M, đường thẳng qua C và song song với trục hoành cắt d tại N.
Gọi BH, CK lần lượt là hình chiếu vuông góc kẻ từ B, C đến d.
Ta có $BH = CK \Leftrightarrow BM = CN$.
Đặt $BM = CN = m$. Tọa độ $M(2+m;8)$, $N(8-m;4)$.

$$M \in d \text{ nên } 7 = a(2+m) + b \qquad (2)$$
$$N \in d \text{ nên } 4 = a(8-m) + b \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta tìm được $a = -2$, $b = 16$, $m = 2$.
Đường thẳng phải tìm là $y = -2x + 16$.



□

§3 Đường thẳng song song và đường thẳng cắt nhau

1 Tóm tắt lý thuyết

Hai đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ và $y = a'x + b'$ $(a' \neq 0)$

1. cắt nhau khi va chỉ khi $a \neq a'$.
2. song song với nhau khi và chỉ khi $a = a'$ và $b \neq b'$.
3. trùng nhau khi và chỉ khi $a = a'$ và $b = b'$.

Đặc biệt: Người ta đã chứng minh được rằng nếu $a \cdot a' = -1$ thì hai đường thẳng vuông góc với nhau.

2 Các dạng toán

Dạng 41. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng $d_1\colon y = ax + b$ và $d_2\colon y = a'x + b'$

1. Nếu $a \neq a'$ thì d_1 cắt d_2.
2. Nếu $a = a'$ và $b \neq b'$ thì $d_1 \parallel d_2$.
3. Nếu $a = a'$ và $b = b'$ thì $d_1 \equiv d_2$.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Xét vị trí tương đối của hai trong bốn đường thẳng sau

$(d_1)\colon y = -\sqrt{3}x + 1$; $(d_3)\colon y = -\sqrt{3}x + 2$;
$(d_2)\colon y = \sqrt{3}x + 2$; $(d_4)\colon y = \sqrt{3}x + 2$.

Lời giải.

Ta thấy

- $d_2 \equiv d_4$ vì $a = a' = \sqrt{3}$ và $b = b' = 2$;
- $d_1 \parallel d_3$ vì $a = a' = -\sqrt{3}$ và $b = 1 \neq b' = 2$;
- d_1 cắt d_2 vì $a = -\sqrt{3} \neq a' = \sqrt{3}$, đương nhiên d_1 cũng cắt d_4. Cũng từ đó suy ra d_3 cắt d_2 và d_4.

□

Ví dụ 2. Hai đường thẳng nào sau đây là cắt nhau? Chúng có vuông góc không?

$(d_1)\colon y = -2x + 1$; $(d_2)\colon y = -x + 2$; $(d_3)\colon y = x - 1$.

Lời giải.

Ta có

- d_1 cắt d_2 vì $a = -2 \neq a' = -1$. Tuy nhiên $a \cdot a' = 2 \neq -1$ nên chúng không vuông góc;
- d_2 cắt d_3 vì $a = -1 \neq a' = 1$. Mặt khác $a \cdot a' = -1$ nên chúng vuông góc;
- d_1 cắt d_3 vì $a = -2 \neq a' = 1$, nhưng không vuông góc vì $a \cdot a' \neq -1$.

□

Dạng 42. Xác định giao điểm của hai đường thẳng

Để tìm giao điểm của hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = a'x + b'$ ta xét hoành độ giao điểm của hai đồ thị thỏa mãn phương trình $ax + b = a'x + b'$ ta tìm được x, rồi thay vào một trong hai phương trình tìm y và suy ra giao điểm.
Chú ý:
Để tìm giao điểm của đồ thị với Ox: cho $y = 0$ suy ra x.
Để tìm giao điểm của đồ thị với Oy: cho $x = 0$ suy ra y.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tìm giao điểm của hai đường thẳng $y = 3x - 1$ và $y = x + 5$.

Lời giải.

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị thỏa mãn phương trình
$3x - 1 = x + 5 \Leftrightarrow x = 3$ suy ra $y = 8$ (bằng cách thay $x = 3$ vào $y = 3x - 1$ hoặc $y = x + 5$).
Vậy hai đường thẳng cắt nhau tại tại $A(3; 8)$. □

Ví dụ 2. Tìm giao điểm của đồ thị $y = 2x - 4$ với Ox và Oy.

Lời giải.

Đồ thị giao $Ox\colon y = 0$ suy ra $2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Vậy đồ thị cắt Ox tại $A(2; 0)$.
Đồ thị giao $Oy\colon x = 0$ suy ra $y = -4$. Vậy đồ thị cắt Oy tại $B(0; -4)$. □

Ví dụ 3. Tìm m biết đường thẳng $y = (2m - 1)x - 2m + 2$

1. cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 3;
2. cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -1.

Lời giải.

1. Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 3 nên đồ thị đi qua $A(3; 0)$. Thay $x = 3$, $y = 0$ vào phương trình của đồ thị ta được
$0 = (2m - 1) \cdot 3 - 2m + 2 \Leftrightarrow 6m - 3 - 2m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{4}$.

2. Tương tự. Thay $x = 0$, $y = -1$ vào phương trình của đồ thị ta được
$-1 = (2m-1)\cdot 0 - 2m + 2 \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{2}$.

□

Dạng 43. Xác định hàm số thỏa mãn điều kiện cho trước

Căn cứ vào giả thiết để xác định hệ số a, b rồi từ đó suy ra phương trình của đường thẳng $y = ax + b$.

Một số trường hợp phổ biến cần lưu ý:

- Hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = a'x + b'$ cắt nhau thì $a \neq a'$;
- Hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = a'x + b'$ song song thì $a = a'$ và $b \neq b'$;
- Hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = a'x + b'$ trùng nhau thì $a = a'$ và $b = b'$;
- Hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = a'x + b'$ vuông góc thì $a \cdot a' = -1$;
- Đường thẳng $y = ax + b$ đi qua $A(x_0; y_0)$ thì ta luôn có phương trình $y_0 = a \cdot x_0 + b$;
- Hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = a'x + b'$ cắt nhau tại điểm có hoành độ bằng x_0 thì ta luôn có $ax_0 + b = a'x_0 + b'$;
- Hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = a'x + b'$ cắt nhau tại điểm có tung độ bằng y_0 thì thường thay y_0 vào một trong hai đường thẳng để tìm x_0 và thay x_0 và y_0 vào đường thẳng còn lại để tìm yếu tố yêu cầu.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Xác định hệ số a của đường thẳng $y = ax + \sqrt{2}$ trong mỗi trường hợp sau:

1. Đường thẳng $y = ax + \sqrt{2}$ song song với đường thẳng $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$;
2. Đường thẳng $y = ax + \sqrt{2}$ cắt đường thẳng $y = 2x + 1$ tại điểm có hoành độ bằng $\sqrt{2}$.

Lời giải.

1. Rõ ràng ta thấy $b = \sqrt{2} \neq b' = 1$. Mặt khác vì đường thẳng $y = ax + \sqrt{2}$ song song với đường thẳng $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$ nên ta có $a = -\dfrac{1}{2}$.
Vậy $a = -\dfrac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
2. Vì đường thẳng $y = ax + \sqrt{2}$ cắt đường thẳng $y = 2x + 1$ tại điểm có hoành độ bằng $x = \sqrt{2}$ nên ta có $y = 2\sqrt{2} + 1$. Tọa độ giao điểm là $A\left(\sqrt{2}; 2\sqrt{2}+1\right)$.
Đường thẳng $y = ax + \sqrt{2}$ đi qua điểm $A\left(\sqrt{2}; 2\sqrt{2}+1\right)$ nên ta có phương trình
$a\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 1 \Rightarrow a = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$.

□

Ví dụ 2. Xác định hàm số có đồ thị là đường thẳng đi qua điểm có tọa độ $(2; -3)$ và

1. song song với đường thẳng $y = 5x + 1$;

2. cắt đường thẳng $y = 2x - 1$ tại điểm có tung độ bằng 5.

Lời giải.

Giả sử đường thẳng cần tìm là $y = ax + b$.
Vì đường thẳng $y = ax + b$ đi qua điểm $(2; -3)$ nên ta có $2a + b = -3 \quad (1)$.

1. Vì đường thẳng $y = ax + b$ song song với đường thẳng $y = 5x + 1$ nên ta có $a = 5$, thay vào (1) suy ra $b = -13$.
   Vậy đường thẳng cần tìm là $y = 5x - 13$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

2. Vì đường thẳng $y = ax + b$ cắt đường thẳng $y = 2x - 1$ tại điểm có tung độ $y = 5$ nên hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình $5 = 2x - 1 \Rightarrow x = 3$. Tọa độ giao điểm là $A\,(3; 5)$.
   Đường thẳng $y = ax + b$ đi qua điểm $A\,(3; 5)$ nên ta có phương trình
   $3a + b = 5 \Rightarrow b = 5 - 3a$, thay vào (1) suy ra $a = 8 \Rightarrow b = 5 - 3 \cdot 8 = -19$.
   Vậy đường thẳng cần tìm là $y = 8x - 19$ thỏa yêu cầu bài toán.

□

Ví dụ 3. Xác định hàm số biết đồ thị của nó là đường thẳng song song với đường thẳng $y = 2x - 1$ và cắt đường thẳng $y = 3x + 2$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

Lời giải.

Vì đường thẳng cần tìm song song với đường thẳng $y = 2x - 1$ nên phương trình có dạng $y = 2x + b \quad (1)$.
Mặt khác hoành độ giao điểm của nó với đường thẳng $y = 3x + 2$ là $x = 1$ nên tung độ giao điểm là $y = 3 \cdot 1 + 2 = 5$, hay đường thẳng $y = 2x + b$ đi qua điểm $A(1; 5)$ nên từ (1) ta có $5 = 2 \cdot 1 + b \Rightarrow b = 3$.
Vậy đồ thị hàm số cần tìm là đường thẳng có phương trình $y = 2x + 3$. □

Dạng 44. Xác định giá trị của tham số m để đường thẳng $y = ax+b$ thỏa mãn điều kiện cho trước

Sử dụng kiến thức cần nhớ, thiết lập mối liên hệ thông qua điều kiện cho trước để tìm tham số m.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hai hàm số với biến x
$y = (m + 1)x - (2m + 1)$ và $y = (2m - 1)x + 3m$.
Tìm giá trị của m sao cho đồ thị của các hàm số đó là

1. hai đường thẳng cắt nhau;
2. hai đường thẳng song song;
3. hai đường thẳng trùng nhau.

Lời giải.

1. Hai đường thẳng đã cho cắt nhau khi thỏa mãn các điều kiện sau

$$\begin{cases} m+1 \neq 0 \\ 2m-1 \neq 0 \\ m+1 \neq 2m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq \dfrac{1}{2} \\ m \neq 2. \end{cases}$$

Vậy với $m \neq -1$, $m \neq \dfrac{1}{2}$ và $m \neq 2$ thì hai đường thẳng cắt nhau.

2. Hai đường thẳng song song khi thỏa mãn các điều kiện sau

$$\begin{cases} m+1 \neq 0 \\ 2m-1 \neq 0 \\ m+1 = 2m-1 \\ -(2m+1) \neq 3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq \dfrac{1}{2} \\ m = 2 \\ m \neq -\dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

Vì giá trị $m = 2$ đều khác các giá trị -1, $\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{1}{5}$ nên $m = 2$ là giá trị cần tìm.

3. Hai đường thẳng trùng nhau khi $\begin{cases} m+1 = 2m-1 \\ -(2m+1) = 3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -\dfrac{1}{5} \end{cases}$ (vô lý).

Vậy không có giá trị nào của m để hai đường thẳng trùng nhau. Nói cách khác hai đường thẳng trên không bao giờ trùng nhau.

□

Ví dụ 2. Cho hai đường thẳng $(d)\colon y = -x + m + 2$ và $(d')\colon y = (m^2-2)x + 3$. Tìm m để (d) và (d') song song với nhau

Lời giải.

Điều kiện để hai đường thẳng song song là

$$\begin{cases} m^2 - 2 = -1 \\ m + 2 \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

Vậy $m = -1$ là giá trị cần tìm. □

Ví dụ 3. Tìm giá trị của tham số k để đường thẳng $(d_1)\colon y = -x + 2$ cắt đường thẳng $(d_2)\colon y = 2x + 3 - k$ tại một điểm nằm trên trục hoành.

Lời giải.

Ta thấy hai đường thẳng (d_1); (d_2) luôn cắt nhau.

- Đường thẳng (d_1) cắt trục hoành tại điểm $A(2;0)$;
- Đường thẳng (d_2) cắt trục hoành tại điểm $B\left(\dfrac{k-3}{2};0\right)$.

Để hai đường thẳng (d_1); (d_2) cắt nhau tại một điểm trên trục hoành thì $\dfrac{k-3}{2} = 2 \Leftrightarrow k = 7$. □

Ví dụ 4. Tìm giá trị của m để hai đường thẳng $(d_1)\colon mx + y = 1$ và $(d_2)\colon x - my = m + 6$ cắt nhau tại một điểm M thuộc đường thẳng $(d)\colon x + 2y = 8$.

Lời giải.

Để hai đường thẳng (d_1), (d_2) cắt nhau thì $\dfrac{m}{1} \neq \dfrac{1}{-m} \Rightarrow m^2 \neq -1$ luôn thỏa mãn với mọi m.
$(d)\colon x+2y=8 \Rightarrow x=8-2y \quad (1)$;
$(d_1)\colon mx+y=1 \Rightarrow m=\dfrac{1-y}{x} \quad$;
$(d_2)\colon x-my=m+6 \Rightarrow m=\dfrac{x-6}{1+y} \quad (2)$.
Do đó $\dfrac{1-y}{x}=\dfrac{x-6}{1+y} \Rightarrow 1-y^2=x^2-6x \Leftrightarrow x^2-6x+y^2-1=0 \quad (3)$.
Thay (1) vào (3) ta được tung độ giao điểm M là nghiệm phương trình
$(8-2y)^2-6(8-2y)+y^2=1 \Leftrightarrow 5y^2-20y+15=0 \Rightarrow y_1=1$ hoặc $y_2=6$.

- Với $y_1=1 \Rightarrow x_1=6$ thay $(6;1)$ vào (2) ta được $m=0$ (thỏa mãn).
- Với $y_2=3 \Rightarrow x_2=2$ thay $(2;3)$ vào (2) ta được $m=-1$ (thỏa mãn)

Vậy với $m=0$ hoặc $m=-1$ thì hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau tại một điểm M thuộc đường thẳng (d). □

3 Luyện tập

Bài 1. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau

a) $y=2x+1$ và $y=3x+2$;

b) $y=5x+1$ và $y=5x+2$;

Lời giải.

1. $y=2x+1$ và $y=3x+2$ cắt nhau vì $a=2\neq a'=3$;
2. $y=5x+1$ và $y=5x+2$ song song với nhau vì $a=a'=5$ và $b=1\neq b'=2$.

□

Bài 2. Tìm giao điểm của đường thẳng $y=2x+3$ với

1. đường thẳng $y=3x+1$;
2. trục Ox;
3. trục Oy.

Lời giải.

1. Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y=2x+3$ với đường thẳng $y=3x+1$ là
   $2x+3=3x+1 \Leftrightarrow x=2$. Thay $x=2$ vào một trong hai phương trình của hai đường thẳng suy ra $y=7$.
   Vậy giao điểm của hai đường thẳng là điểm $A(2;7)$.
2. Vì giao điểm của đường thẳng $y=2x+3$ với trục Ox nằm trên trục hoành nên $y=0$ thay vào phương trình $y=2x+3$ ta có $2x+3=0 \Rightarrow x=-\dfrac{3}{2}$.
   Vậy giao điểm của đường thẳng $y=2x+3$ với trục hoành là điểm có hoành độ bằng $-\dfrac{3}{2}$.

3. Cho $x = 0$, thay vào phương trình $y = 2x + 3 \Rightarrow y = 2 \cdot 0 + 3 = 3$.
   Vậy giao điểm của đường thẳng $y = 2x + 3$ với trục tung là điểm $A(0; 3)$.

$\square$

Bài 3. Viết phương trình đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = 3x + 1$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 4

Lời giải.

Đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = 3x + 1$ nên (d) có dạng $y = 3x + b$ $(b \in \mathbb{R})$.
Đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 4 nên (d) đi qua điểm $A(0; 4)$ hay $4 = 3 \cdot 0 + b \Leftrightarrow b = 4$.
Vậy phương trình đường thẳng (d) là $y = 3x + 4$. $\square$

Bài 4. Xác định hàm số trong mỗi trường hợp sau, biết đồ thị của nó là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ và

1. song song với đường thẳng $y = 2x + 5$;
2. cắt đường thẳng $y = 2x - 1$ tại điểm có hoành độ bằng 5.

Lời giải.

Đường thẳng cần tìm đi qua gốc tọa độ nên phương trình có dạng $y = ax$.

1. Vì dường thẳng $y = ax$ song song với đường thẳng $y = 2x + 5$ nên ta có $a = 2$.
   Vậy đường thẳng cần tìm trong trường hợp này có phương trình là $y = 2x$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
2. Thay $x = 5$ vào phương trình $y = 2x - 1$ suy ra $y = 9$. Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng là $A(5; 9)$.
   Đường thẳng $y = ax$ đi qua điểm $A(5; 9)$ nên ta có phương trình $5a = 9 \Rightarrow a = \dfrac{9}{5}$.
   Vậy đường thẳng cần tìm là $y = \dfrac{9}{5}x$ thỏa yêu cầu bài toán.

$\square$

Bài 5. Cho hàm số: $y = (m - 1)x + m + 3$ với $m \neq -1$ (m là tham số). Tìm giá trị của m để đồ thị của hàm số song song với đường thẳng $(d)\colon y = -2x + 1$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho song song với đường thẳng $(d) : y = -2x + 1$ khi và chỉ khi
$\begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 = -2 \\ m + 3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m \neq -2 \end{cases} \Rightarrow m = -1.$
Vậy với $m = -1$ thì đồ thị hàm số $y = (m - 1)x + m + 3$ song song với đường thẳng $(d)\colon y = -2x + 1$. $\square$

Bài 6. Tìm m để các đường thẳng $y = 2x + m$ và $y = x - 2m + 3$ cắt nhau tại một điểm nằm trên trục tung.

Lời giải.

Để các đường thẳng $y = 2x + m$ và $y = x - 2m + 3$ cắt nhau tại một điểm nằm trên trục tung thì
$\begin{cases} y = m \\ y = -2m + 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2m + 3 \Leftrightarrow m = 1.$ $\square$

4 Các bài toán nâng cao

Bài 7. Cho đường thẳng $(d)\colon y = 2x + m - 1$. Tìm m để đường thẳng (d) cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại M và N sao cho tam giác OMN có diện tích bằng 1

Lời giải.

Đường thẳng (d) cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại M và N thì $M\left(\dfrac{1-m}{2}, 0\right)$ và $N\,(0, m-1)$ nên $S_{MNO} = \dfrac{1}{2}MO \cdot NO = \dfrac{1}{2}\left|(m-1)\cdot\left(\dfrac{1-m}{2}\right)\right|$.

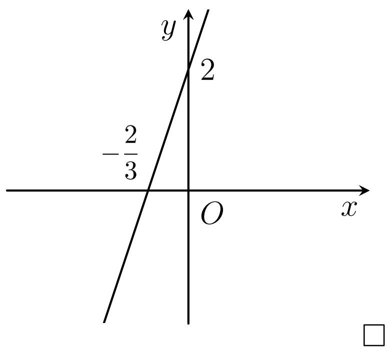
Mà $S_{MNO} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left|(m-1)\cdot\left(\dfrac{1-m}{2}\right)\right| = 1 \Leftrightarrow (m-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = -1. \end{array}\right.$ □

Bài 8.

1. Vẽ đồ thị hàm số $y = 3x + 2 \quad (1)$;
2. GọiA, B là giao điểm của đồ thị hàm số (1) với trục tung và trục hoành. Tính diện tích tam giác OAB.

Lời giải.

1. Vẽ đồ thị hàm số $y = 3x + 2 \quad (1)$;
   Đồ thị đi qua $A\,(0; 2)$ và $B\left(\dfrac{-2}{3}; 0\right)$



2. Ta có $S_{OAB} = \dfrac{1}{2}OA \cdot OB = \dfrac{1}{2}\left|2 \cdot \dfrac{-2}{3}\right| = \dfrac{2}{3}$.

□

Bài 9. Cho 2 đường thẳng $(d)\colon\ y = (m-3)\,x + 16\,(m \neq 3)$ và $(d')\colon y = x + m^2$. Tìm m để (d), (d') cắt nhau tại một điểm nằm trên trục tung

Lời giải.

Để (d), (d') cắt nhau tại một điểm nằm trên trục tung thì $\begin{cases} y = 16 \\ y = m^2 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow m = \pm 4.$

Khi $m = 4$ thì $d \equiv d'$ loại.
Vậy $m = -4$. □

§4 Hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$

1 Tóm tắt lý thuyết

1. Đường thẳng $y = ax + b$ có hệ số góc là a.

2. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ với tia Ox
 a) Nếu $\alpha < 90^\circ$ thì $a > 0$;
 b) Nếu $\alpha > 90^\circ$ thì $a < 0$.
 Các đường thẳng có cùng hệ số a (a là hệ số của x) thì tạo với Ox các góc bằng nhau.

2 Các dạng toán

Dạng 45. Xác định hệ số góc của đường thẳng

Phương pháp giải:

1. Xác định hàm số $y = ax + b$.

2. Hai đường thẳng song song với nhau thì có hệ số góc bằng nhau.

3. $\tan\alpha = \dfrac{\text{Cạnh kề}}{\text{Cạnh đối}}$.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hàm số bậc nhất $y = ax + 3$. Xác định hệ số góc a biết rằng đồ thị của hàm số đi qua điểm $M(2; 6)$.

Lời giải.

Đồ thị của hàm số đã cho đi qua điểm $M(2; 6)$ nên ta có $6 = 2 \cdot a + 3 \Leftrightarrow 2 \cdot a = 3 \Leftrightarrow a = \dfrac{3}{2}$. □

Ví dụ 2. Cho hàm số bậc nhất $y = ax + b$ $(a \neq 0)$. Xác định hệ số góc a biết rằng độ thị hàm số đi qua hai điểm $A(0; 1)$, $B(2; 5)$.

Lời giải.

Vì đồ thị hàm số đi qua hai điểm $A(0; 1)$, $B(2; 5)$ nên ta có hệ $\begin{cases} 1 = 0 \cdot a + b \\ 5 = 2 \cdot a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1. \end{cases}$

Vậy hệ số góc $a = 2$. □

Ví dụ 3. Tính hệ số góc của đường thẳng $d\colon (m-2)x+3$, biết d song song với đường thẳng $d'\colon 2x - y - 1 = 0$.

Lời giải.

Đường thẳng d' có phương trình $2x - y - 1 = 0$ hay $y = 2x - 1$. Hệ số góc của d' là $k' = 2$.

Ta có $d \parallel d' \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 = 2 \\ 3 \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4$.

Vậy đường thẳng d có hệ số góc là $k = 2$. □

Dạng 46. Xác định góc

Phương pháp giải: Vận dụng định nghĩa góc giữa đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ và trục Ox; vận dụng tỉ số lượng giác của góc nhọn; vận dụng tam giác đồng dạng.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tính góc tạo bởi đường thẳng $d\colon y = -2x + 3$ và trục Ox (làm tròn đến phút).

Lời giải.

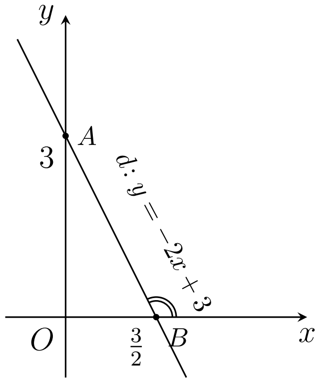
Gọi A, B lần lượt là giao điểm của d với Ox, Oy. $A(0;3)$, $B\left(\dfrac{3}{2};0\right)$.

Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng $y = -2x + 3$ với trục Ox.

Ta có $\widehat{ABx} = 180^\circ - \widehat{ABO}$.

Vì OA, OB lần lượt là cạnh đối và cạnh kề của $\widehat{ABO}$ trong tam giác AOB vuông tại O, nên $\tan\widehat{ABO} = \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{3}{1} : \dfrac{3}{2} = 2$.

Do đó $\widehat{ABO} \approx 56^\circ 19'$. Suy ra $\alpha \approx 123^\circ 41'$.



□

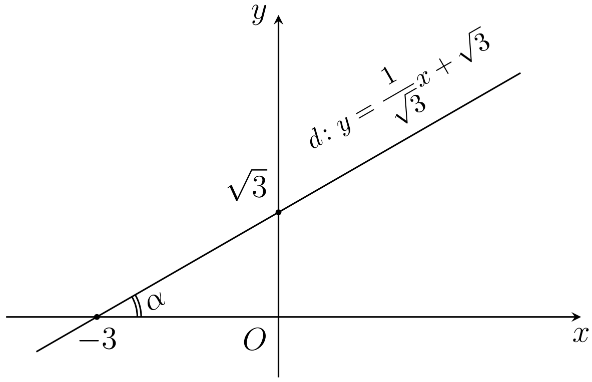
Ví dụ 2. Cho đường thẳng $d\colon y = mx + \sqrt{3}$. Tính góc tạo bởi d và trục Ox, biết d đi qua điểm $A(-3;0)$.

Lời giải.

Vì $A(-3;0) \in d$ nên suy ra $m = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Khi đó $d\colon y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x + \sqrt{3}$.

Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng d với trục Ox.

Khi đó $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$.

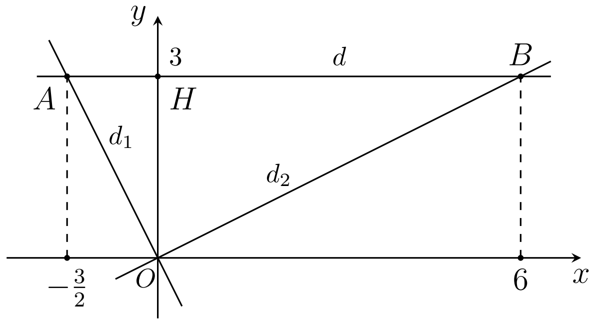


□

Ví dụ 3. Cho hai đường thẳng $d_1\colon y = -2x$ và $d_2\colon y = \frac{1}{2}x$. Đường thẳng d song song với trục Ox và cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng 3; d cắt d_1 và d_2 lần lượt tại A và B. Chứng minh rằng $\widehat{AOB} = 90^\circ$.

Lời giải.

Vẽ ba đường thẳng d_1, d_2 và d như hình bên.
Ta có $A\left(-\frac{3}{2};3\right)$, $B(6;3)$.
Hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt và vuông góc tại điểm O.
Xét hai tam giác AHO và OHB, ta có
$\widehat{AHO} = \widehat{OHB} = 90^\circ$; $\dfrac{HA}{HO} = \dfrac{HO}{HB} = \dfrac{1}{2}$.
Do đó $\triangle AHO \backsim \triangle OHB \Rightarrow \widehat{AOH} = \widehat{OBH}$.
Mà $\widehat{AOH} + \widehat{HOB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 90^\circ$.



□

Dạng 47. Xác định đường thẳng dựa vào hệ số góc

Phương pháp giải

- Gọi phương trình đường thẳng cần tìm là $y = ax + b$. Ta cần xác định a và b.
- Chú ý rằng: Gọi α là góc nhọn tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ với trục Ox, ta có
  - Khi góc α nhọn thì $a = \tan\alpha$.
  - Khi góc α tù thì $a = -\tan(180^\circ - \alpha)$.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Xác định phương trình đường thẳng d biết d đi qua điểm $A(-2;3)$ và có hệ số góc bằng -2.

Lời giải.

Gọi phương tình đường thẳng d là $y = ax + b$.
Vì d có hệ số góc là -2 nên $a = -2$, suy ra phương trình d có dạng $y = -2x + b$. Lại có d đi qua $A(-2;3)$ nên có phương trình $3 = (-2)\cdot(-2) + b \Leftrightarrow b = -1$.
Vậy phương trình đường thẳng d là $y = -2x - 1$. □

3 Luyện tập

Bài 1. Cho hàm số bậc nhất $y = ax - 3$ (1). Hãy xác định hệ số a biết đồ thị hàm số (1) cắt đường thẳng $y = 2x - 1$ tại điểm có hoành độ bằng 2.

Lời giải.

Gọi $N(x_N; y_N)$ là giao điểm. Theo đề ta có $x_N = 2 \Rightarrow y_N = 3$. Vậy $N(2;3)$.
Đồ thị hàm số (1) đi qua điểm $N(2;3)$ nên ta có $3 = a\cdot 2 - 3 \Leftrightarrow a = 3$. □

Bài 2. Xác định phương trình đường thẳng d biết d đi qua điểm $A(0;1)$ và tạo với đường thẳng $y = 2$ một góc 60°.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng d có dạng $y = ax + b$.
Vì d đi qua $A(0;1)$ nên ta có $1 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 1$.
Vì đường thẳng $y = 2$ song song với trục hoành nên từ đề bài ta có d tạo với trục Ox một góc 60°. Ta có $a = \tan\alpha = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$.
Vậy phương trình đường thẳng $d\colon y = \sqrt{3}x + 1$. □

Bài 3. Cho đường thẳng $d\colon y = mx + 3$. Tính góc tạo bởi d với trục Ox. Biết d đi qua điểm $B(6;-3)$.

Lời giải.

Vì đường thẳng d đi qua điểm $B(6;-3)$ nên ta có phương trình $-3 = 6 \cdot m + 3 \Leftrightarrow m = -1$.
Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng d và trục Ox.
Vì $m = -1$ nên $\tan\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = 135^\circ$. □

4 Các bài toán nâng cao

Bài 4. Tìm hệ số góc của đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và điểm $M(1;2)$.

Lời giải.

Gọi $y = ax + b$ là phương trình đường thẳng d cần tìm.
Vì đường thẳng d đi qua gốc tọa độ O và điểm $M(1;2)$ nên ta có hệ $\begin{cases} b = 0 \\ 2 = a \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1. \end{cases}$
Vậy hệ số góc của đường thẳng đã cho là $a = 2$. □

Bài 5. Tìm hệ số góc của đường thẳng d đi qua hai điểm $A(1;2)$ và $B(3;4)$.

Lời giải.

Gọi $y = ax + b$ là phương trình của đường thẳng d cần tìm.
Vì đường thẳng d đi qua hai điểm $A(1;2)$ và $B(3;4)$ nên ta có hệ $\begin{cases} a + b = 2 \\ 3a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1. \end{cases}$
Đường thẳng $d\colon y = x + 1$ nên có hệ số góc $a = 1$.

□

Bài 6. Xác định đường thẳng d đi qua điểm $A(0;3)$ và tạo với đường thẳng $y = 3$ một góc 60°.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng d có dạng $y = ax + b$.
Vì d đi qua $A(0;3)$ nên ta có $3 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 3$.
Vì đường thẳng $y = 4$ song song với trục hoành nên từ đề bài ta có d tạo với trục Ox một góc 60°. Ta có $a = \tan\alpha = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$.
Vậy phương trình đường thẳng $d\colon y = \sqrt{3}x + 3$. □

§5 Ôn tập chương 2

1 Trắc nghiệm

Bài 1. Đồ thị hàm số bậc nhất là một

(A) Đoạn thẳng. (B) Tia. (C) Đường thẳng. (D) Đường tròn.

Lời giải.

Đồ thị hàm số bậc nhất là một đường thẳng.

Chọn đáp án (C) □

Bài 2. Hàm số nào sau đây là hàm số bậc nhất?

(A) $y = x^2 - 3x + 2$. (B) $y = -2x + 1$. (C) $y = 1$. (D) $y = \sqrt{3x} + 1$.

Lời giải.

$y = -2x + 1$ là hàm số bậc nhất với $a = -2, b = 1$.

Chọn đáp án (B) □

Bài 3. Trong các hàm số dưới đây, hàm số bậc nhất là

(A) $y = 3 - 2x + x^2$. (B) $y = \dfrac{4}{x+3} - \dfrac{2}{5}$. (C) $y = \dfrac{3}{5}(\sqrt{x} + 5)$. (D) $y = \dfrac{2x+5}{3}$.

Lời giải.

$y = \dfrac{2x+5}{3}$ là hàm số bậc nhất với $a = \dfrac{2}{3}, b = \dfrac{5}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Bài 4. Với $x = 3 + \sqrt{2}$ thì hàm số $y = (3 - \sqrt{2})x - 3$ có giá trị là

(A) 8. (B) -2. (C) 14. (D) 4.

Lời giải.

Thay $x = 3 + \sqrt{2}$ vào hàm số $y = (3 - \sqrt{2})x - 3$, ta có

$$y = (3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2}) - 3 = 4.$$

Chọn đáp án (D) □

Bài 5. Trong các hàm số bậc nhất sau, hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

(A) $y = 1 - 3x$. (B) $y = 5x - 1$. (C) $y = \dfrac{1}{2}x - 5$. (D) $y = -\sqrt{7} + \sqrt{2}x$.

Lời giải.

Hàm số $y = 1 - 3x$ có $a = -3 < 0$ nên là hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (A) □

Bài 6. Hai đường thẳng $y = 2x + 1$ và $y = 2x - 1$ có vị trí tương đối là

(A) Song song. (B) Cắt nhau.

(C) Trùng nhau. (D) Không xác định được.

Lời giải.

Hai đường thẳng $y = 2x + 1$ và $y = 2x - 1$ có $\begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$ nên chúng song song.

Chọn đáp án (A) □

Bài 7. Trong các công thức biểu thị mối liên hệ giữa hai đại lượng x, y sau, công thức nào **không** phải hàm số của x?

(A) $y = \sqrt{x}$. (B) $y = x^2$. (C) $y^2 = x$. (D) $x = y$.

Lời giải.

Công thức $y^2 = x$, không phải hàm số vì với $x = 1 \Rightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -1 \end{array}\right.$, tức là với một giá trị của x ta xác định được hai giá trị của y.

Chọn đáp án (C) □

Bài 8. Cho hàm số $f(x) = 1 - x^2$ khi đó

(A) $f(-1) = 0$. (B) $f(-1) = 2$. (C) $f(-1) = 1$. (D) $f(-1) = -2$.

Lời giải.

Ta có $f(-1) = 1 - (-1)^2 = 1 - 1 = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Bài 9. Trong các điểm sau điểm nào thuộc đồ thị hàm số $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$?

(A) $A(0; -1)$. (B) $B(1; 0)$. (C) $C\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$. (D) $D(2; 0)$.

Lời giải.

- Với $x = 0 \Rightarrow y = 1$ nên A, C không thuộc đồ thị hàm số.
- Với $x = 1 \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}$ nên B không thuộc đồ thị hàm số.
- Với $x = 2$ thay vào hàm số ta được $y = -\dfrac{1}{2} \cdot 2 + 1 = 0 \Rightarrow D(2; 0)$ thuộc đồ thị hàm số.

Chọn đáp án (D) □

Bài 10. Cho điểm $M(1; 1)$, đồ thị hàm số nào sau đây qua điểm M?

(A) $y = 1 - x$. (B) $y = x^2 - 1$. (C) $y = x + 1$. (D) $y = 2x - 1$.

Lời giải.

Với $x = 1$ thay vào các hàm số ta được

- $y = 1 - x \Rightarrow y = 0$.
- $y = x^2 - 1 \Rightarrow y = 0$.
- $y = x + 1 \Rightarrow y = 2$.
- $y = 2x - 1 \Rightarrow y = 1$.

Do đó chỉ có đồ thị hàm số $y = 2x - 1$ đi qua điểm $M(1; 1)$.

Chọn đáp án (D) □

Bài 11. Trong đồ thị các hàm số sau, đường nào cắt trục tung tại điểm có tung độ $y = 1$?

(A) $y = 2(x + 1)$. (B) $y = -(x - 1)$. (C) $y = -2(x + 1)$. (D) $y = 2x - 1$.

Lời giải.

Với tung độ $y = 1$ thay vào các hàm số ta được

- $y = 2(x + 1) \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2}$.
- $y = -(x - 1) \Rightarrow x = 0$.
- $y = -2(x + 1) \Rightarrow x = -\dfrac{3}{2}$.
- $y = 2x - 1 \Rightarrow x = 1$.

Do đó đồ thị hàm số $y = -(x - 1)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $y = 1$.
Chọn đáp án (B) □

Bài 12. Trong các công thức sau, công thức nào là hàm số bậc nhất của x?

(A) $y - x = 0$. (B) $y = 1$. (C) $y = \dfrac{1}{x}$. (D) $y = x(x + 1)$.

Lời giải.

Hàm số bậc nhất có dạng $y = ax + b$, $(a \neq 0)$. Do đó $y - x = 0 \Leftrightarrow y = x$ là hàm số bậc nhất với $a = 1$, $b = 0$.
Chọn đáp án (A) □

Bài 13. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

(A) $y = x + 1 - 2x$. (B) $y = \sqrt{3}x + 1 - 2x$.
(C) $y = \dfrac{-x + 1}{-2}$. (D) $y = \dfrac{x + 1}{-2}$.

Lời giải.

- $y = x + 1 - 2x \Leftrightarrow y = -x + 1$ có $a = -1 < 0$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- $y = \sqrt{3}x + 1 - 2x \Leftrightarrow y = \left(\sqrt{3} - 2\right)x + 1$ có $a = \sqrt{3} - 2 < 0$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- $y = \dfrac{-x + 1}{-2} \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$ có $a = \dfrac{1}{2} > 0$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- $y = \dfrac{x + 1}{-2} \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$ có $a = -\dfrac{1}{2} < 0$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (C) □

Bài 14. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \sqrt{1 - 2m}(x + 1)$ là hàm số bậc nhất.

(A) $m > 1$. (B) $m \leq 2$. (C) $m \neq \dfrac{1}{2}$. (D) $m < \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Để $y = \sqrt{1 - 2m}(x + 1)$ là hàm số bậc nhất thì $\sqrt{1 - 2m} \neq 0 \Leftrightarrow 1 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{1}{2}$.
Chọn đáp án (D) □

Bài 15. Hàm số $y = (5-m)x + 3$ (m là tham số) đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi

Ⓐ $m = 5$. Ⓑ $m < 5$. Ⓒ $m > 5$. Ⓓ $m \neq 5$.

Lời giải.

Hàm số $y = (5-m)x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $5 - m > 0 \Leftrightarrow m < 5$.

Chọn đáp án B □

Bài 16. Trong mặt phẳng Oxy, điểm nào sau đây **không** thuộc đường thẳng $y = 3x - 2$?

Ⓐ $(1; 1)$. Ⓑ $(-1; -5)$. Ⓒ $\left(\frac{1}{3}; -1\right)$. Ⓓ $(-2; 8)$.

Lời giải.

Thay tọa độ các điểm trên vào hàm số $y = 3x - 2$, ta có tọa độ điểm $(-2; 8)$ không thỏa mãn nên điểm đó không thuộc đường thẳng đã cho.

Chọn đáp án D □

Bài 17. Đồ thị của hàm số $y = 3x + b$ đi qua điểm $B(2; 2)$ thì tung độ gốc là

Ⓐ 4. Ⓑ 3. Ⓒ 6. Ⓓ -4.

Lời giải.

Thay $x = 2; y = 2$ vào hàm số $y = 3x + b$ ta có $2 = 3 \cdot 2 + b \Leftrightarrow b = -4$.

Chọn đáp án D □

Bài 18. Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $d_1\colon y = \frac{1}{2}x - 3$ và $d_2\colon y = -\frac{3}{2}x + 5$.

Ⓐ $(2; -2)$. Ⓑ $(4; -1)$. Ⓒ $(-2; -4)$. Ⓓ $(8; 1)$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 là

$$\frac{1}{2}x - 3 = -\frac{3}{2}x + 5 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4.$$

Thay $x = 4$ vào hàm số $y = \frac{1}{2}x - 3$, ta có $y = \frac{1}{2} \cdot 4 - 3 = -1$. Vậy giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 là $A(4; -1)$.

Chọn đáp án B □

Bài 19. Nếu đường thẳng $y = ax + 5$ đi qua điểm $A(-1; 3)$ thì hệ số góc a bằng

Ⓐ -1. Ⓑ 2. Ⓒ 1. Ⓓ -2.

Lời giải.

Thay $x = -1$; $y = 3$ vào hàm số $y = ax + 5$ ta có $3 = a \cdot (-1) + 5 \Leftrightarrow a = 2$.

Chọn đáp án B □

Bài 20. Tung độ gốc của đường thẳng $y - 3x - 1 = 0$ là

Ⓐ $y = 1$. Ⓑ $y = -3$. Ⓒ $y = -1$. Ⓓ $y = 3$.

Lời giải.

Với $x = 0 \Rightarrow y - 3 \cdot 0 - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ nên đồ thị có tung độ gốc bằng $y = 1$.

Chọn đáp án A □

Bài 21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, đường thẳng d: $y = ax + 5$ đi qua $M(-1; 3)$. Hệ số góc của d là

(A) -1. (B) -2. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

$M(-1;3) \in d$ nên $3 = a \cdot (-1) + 5 \Leftrightarrow a = 2$. Vậy hệ số góc của d là $a = 2$.

Chọn đáp án (C) □

Bài 22. Trong các hàm sau, hàm số nào đồng biến?

(A) $y = 2x + 1$. (B) $y = 2 - x$.

(C) $y = \dfrac{2}{3} - \sqrt{5}x$. (D) $y = 6 - 2(x + \sqrt{3})$.

Lời giải.

Xét

- $y = 2x + 1$ có $a = 2 > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến.
- $y = 2 - x$ có $a = -1 < 0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến.
- $y = \dfrac{2}{3} - \sqrt{5}x$ có $a = -\sqrt{5} < 0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến.
- $y = 6 - 2(x + \sqrt{3}) = -2x + 6 - 2\sqrt{3}$ có $a = -2 < 0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến.

Chọn đáp án (A) □

Bài 23. Hai đường thẳng $y = kx + m - 2$ và $y = (6 - k)x + 4 - m$ trùng nhau khi

(A) $m = 3$, $k = 3$. (B) $m = -3$, $k = 3$. (C) $m = -3$, $k = -3$. (D) $m = 3$, $k = -3$.

Lời giải.

Hai đường thẳng $y = kx + m - 2$ và $y = (6 - k)x + 4 - m$ trùng nhau khi

$$\begin{cases} k = 6 - k \\ m - 2 = 4 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ m = 3. \end{cases}$$

Chọn đáp án (A) □

Bài 24. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc nhất?

(A) $y = \dfrac{2}{3} - 2x$. (B) $y = 1 - \dfrac{2}{x}$. (C) $y = 1 + \sqrt{x}$. (D) $y = 1 + x^2$.

Lời giải.

Hàm số bậc nhất có dạng $y = kx + b$ $(k \neq 0)$ nên $y = \dfrac{2}{3} - 2x$ là hàm số bậc nhất.

Chọn đáp án (A) □

Bài 25. Trong các điểm sau, điểm nào thuộc đồ thị hàm số $y = 2 - 3x$?

(A) $(1; -1)$. (B) $(1; 1)$. (C) $(-1; 1)$. (D) $(-2; 0)$.

Lời giải.

Ta có

- Với $x = 1 \Rightarrow y = -1$.
- Với $x = -1 \Rightarrow y = 5$.
- Với $x = -2 \Rightarrow y = 8$.

Chọn đáp án A □

Bài 26. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào song song với đường thẳng $y = 1 - 2x$?

A. $y = 6 - 2(1 + x)$.
B. $y = 2x - 1$.
C. $y = 2x + 1$.
D. $y = \frac{2}{3} + \sqrt{2}(1 - \sqrt{x})$.

Lời giải.

Ta có $y = 6 - 2(1 + x) = -2x + 4$.

Hai đường thẳng $y = k_1x + b_1$ và $y = k_2x + b_2$ song song với nhau nếu $\begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$.

Do đó $y = 6 - 2(1 + x)$ song song với đường thẳng $y = 1 - 2x$.

Chọn đáp án A □

Bài 27. Tìm m để đường thẳng $d_1\colon y = -3x - 4$ song song với $d_2\colon y = (m + 1)x + m$.

A. $m \in \varnothing$.
B. $m = -4$.
C. $m = 4$.
D. $m = -3$.

Lời giải.

Đường thẳng $d_1\colon y = -3x - 4$ song song với $d_2\colon y = (m + 1)x + m$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} -3 = m + 1 \\ -4 \neq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -4 \\ -4 \neq m \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing.$$

Chọn đáp án A □

Bài 28. Trong các điểm sau, điểm nào nằm trên đồ thị hàm số $y = 2x - 5$?

A. $(4; 3)$.
B. $(3; -1)$.
C. $(-4; -3)$.
D. $(2; 1)$.

Lời giải.

Ta có

- Với $x = 4 \Rightarrow y = 3$.
- Với $x = 3 \Rightarrow y = 1$.
- Với $x = -4 \Rightarrow y = -13$.
- Với $x = 2 \Rightarrow y = -1$.

Chọn đáp án A □

Bài 29. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, đồ thị hàm số $y = x + 1$ đi qua điểm

A. $M(1; 0)$.
B. $N(0; 1)$.
C. $P(3; 2)$.
D. $Q(-1; 1)$.

Lời giải.

Ta có

- Với $x = 1 \Rightarrow y = 2$.
- Với $x = 0 \Rightarrow y = 1$.
- Với $x = 3 \Rightarrow y = 4$.
- Với $x = -1 \Rightarrow y = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Bài 30. Điều kiện để hàm số $y = (m-2)x + 8$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là

(A) $m \geq 2$. (B) $m > 2$. (C) $m < 2$. (D) $m \neq 2$.

Lời giải.

Hàm số $y = (m-2)x + 8$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $m - 2 < 0 \Leftrightarrow m < 2$.

Chọn đáp án (C) □

Bài 31. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các đường thẳng $y = \dfrac{x}{2} + 5$, $y = -2x + 5$ và $y = -\dfrac{x}{2} + 5$. Kết luận nào sau đây đúng?

(A) Đồ thị các đường thẳng trên cắt nhau tại một điểm.

(B) Các hàm số trên luôn nghịch biến.

(C) Đồ thị các hàm số trên là các đường thẳng song song với nhau.

(D) Đồ thị các hàm số trên là các đường thẳng vuông góc với nhau.

Lời giải.

Nhận xét hai đường thẳng bất kỳ trong các đường thẳng $y = \dfrac{x}{2} + 5$, $y = -2x + 5$ và $y = -\dfrac{x}{2} + 5$ cắt nhau do các hệ số góc tương ứng khác nhau.

Xét $\dfrac{x}{2} + 5 = -\dfrac{x}{2} + 5 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 5$.

Thay $x = 0$, $y = 5$ vào đường thẳng $y = -2x + 5$ ta thấy thỏa mãn.

Chọn đáp án (A) □

Bài 32. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình đường thẳng song song với $y = -2x$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1.

(A) $y = -2x + 1$. (B) $y = -2x - 1$. (C) $y = 2x - 1$. (D) $y = 3 - (2x - 1)$.

Lời giải.

Gọi đường thẳng cần tìm có dạng $d\colon y = kx + b$.

Vì d cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1 nên $b = 1$.

Vì d song song với $y = -2x$ nên $k = -2$.

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $y = -2x + 1$.

Chọn đáp án (A) □

Bài 33. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $y = \dfrac{x}{2} + 5$ và $y = -\dfrac{x}{2} + 5$. Kết luận nào sau đây đúng?

(A) Hai đường thẳng cắt nhau tại điểm có tung độ bằng 5.

(B) Hai đường thẳng cắt nhau tại điểm có hoành độ bằng 5.

(C) Hai đường thẳng song song.

(D) Hai đường thẳng trùng nhau.

Lời giải.

Ta thấy $y = \dfrac{x}{2} + 5$ có hệ số góc $k_1 = \dfrac{1}{2}$ và $y = -\dfrac{x}{2} + 5$ có hệ số góc $k_2 = -\dfrac{1}{2}$. Vì $k_1 \neq k_2$ nên hai đường thẳng cắt nhau.

Lại có

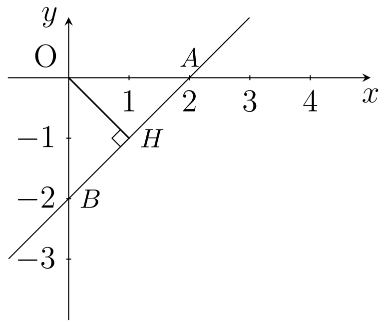
$$\frac{x}{2} + 5 = -\frac{x}{2} + 5 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 5.$$

Chọn đáp án (A) □

Bài 34. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, khoảng cách từ gốc O đến đường thẳng $d\colon y = x - 2$ là

Ⓐ $h = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Ⓑ $h = 2$. Ⓒ $h = 2\sqrt{2}$. Ⓓ $h = \sqrt{2}$.

Lời giải.



Với $y = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow A(2; 0) \Rightarrow OA = 2$.
Với $x = 0 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow B(0; -2) \Rightarrow OB = 2$.
Vì tam giác OAB vuông tại O nên $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 2\sqrt{2}$.
Diện tích tam giác OAB là $S = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$ (đvdt).
Gọi OH là đường cao kẻ từ O xuống AB. Ta có

$$OH = \frac{2S}{AB} = \sqrt{2} \text{ (đvđd)}.$$

Chọn đáp án Ⓓ □

Bài 35. Cho hàm số $y = (7 - m)x + 1$. Gọi $\mathscr{S}$ là tập hợp các số nguyên không âm để hàm số đồng biến. Tính số phần tử của $\mathscr{S}$.

Ⓐ 8. Ⓑ 7. Ⓒ 6. Ⓓ Vô số.

Lời giải.

Để hàm số $y = (7 - m)x + 1$ đồng biến thì $7 - m > 0 \Leftrightarrow m < 7$. Vì m là số nguyên không âm nên $m = 0,\ 1, \ldots,\ 6 \Rightarrow \mathscr{S}$ có 7 phần tử.
Chọn đáp án Ⓑ □

Bài 36. Cho ba đường thẳng $d_1\colon y = 2x$, $d_2\colon y = x - 1$, $d_3\colon y = 3x - 2m + 1$. Tìm m để ba đường thẳng trên đồng quy tại một điểm.

Ⓐ $m = 0$. Ⓑ $m = 1$. Ⓒ $m = -1$. Ⓓ $m = 3$.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của các đường thẳng $y = 2x$ và $y = x - 1$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 2x = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2. \end{cases}$$

Để đồ thị hàm số $y = 3x - 2m + 1$ đồng quy với các đường thẳng $y = 2x$ và $y = x - 1$ thì điểm $(-1; -2)$ phải nằm trên đồ thị hàm số $y = 3x - 2m + 1$, do đó

$$-2 = 3 \cdot (-1) - 2m + 1 \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy với $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án Ⓐ □

Bài 37. Đồ thị hàm số $y = (m - 1)x + 2m + 4$ luôn đi qua một điểm cố định. Tìm tọa độ điểm cố định đó.

Ⓐ $(0; -2)$. Ⓑ $(2; -5)$. Ⓒ $(-2; 6)$. Ⓓ $(-2; -6)$.

Lời giải.

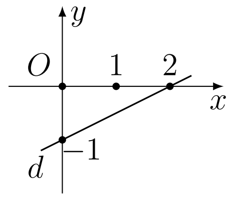
Gọi $(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà đồ thị hàm số $y = (m - 1)x + 2m + 4$ luôn đi qua với mọi m. Khi đó ta có

$$(m - 1)x_0 + 2m + 4 = y_0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \quad m(x_0+2)+(-x_0-y_0+4)=0, \forall m$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_0+2=0 \\ -x_0-y_0+4=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_0=-2 \\ y_0=6. \end{cases}$$

Vậy điểm cố định mà đồ thị hàm số d_m luôn đi qua với mọi m là $(-2;6)$.
Chọn đáp án C □

Bài 38. Đường thẳng d trong hình vẽ bên là đồ thị hàm số nào trong các hàm số sau?



A $y=\frac{1}{2}x-1$. B $y=-\frac{1}{2}x+1$. C $y=2x-1$. D $y=-2x+1$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua hai điểm $A(0;-1)$ và $B(2;0)$. Trong các đáp án tọa độ A, B chỉ đồng thời thỏa mãn hàm số $y=\frac{1}{2}x-1$.
Chọn đáp án A □

Bài 39. Đường thẳng song song với trục hoành, cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1 thì cắt đường thẳng $y=2x-3$ tại điểm có tọa độ là

A $(0;-3)$. B $(1;-1)$. C $(2;1)$. D $(1;1)$.

Lời giải.

Các điểm thuộc đường thẳng d song song với trục hoành, cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1 đều có tung độ bằng $y=1$.
Gọi A là giao điểm của d với đường thẳng $y=2x-3 \Rightarrow 1=2x-3 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow A(2;1)$.
Chọn đáp án C □

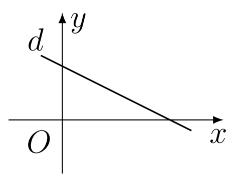
Bài 40. Hàm số $y=|m-1|x+2012$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

A $m \in \mathbb{R}$. B $m>1$. C $m<1$. D $m \neq 1$.

Lời giải.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $|m-1|>0 \Leftrightarrow m \neq 1$.
Chọn đáp án D □

Bài 41. Hàm số $y=ax+b$ có đồ thị là đường d như trong hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A $a>0$. B Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
C $b>0$. D Đồ thị hàm số là một đoạn thẳng.

Lời giải.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương, do đó $b>0$.
Chọn đáp án C □

Bài 42. Góc tạo bởi đường thẳng $y=-x+1$ và trục Ox có số đo là

A 45°. B 30°. C 60°. D 135°.

Lời giải.

Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng $y=-x+1$ và trục Ox, ta có $a=-1<0$ nên góc α là góc tù. Ta có

$$\tan(180^\circ-\alpha)=1 \Rightarrow 180^\circ-\alpha=45^\circ \Rightarrow \alpha=135^\circ.$$

Chọn đáp án D □

Bài 43. Tìm m để đường thẳng $y=(3m-2)x+3$ tạo với trục Ox một góc nhọn.

A. $m=\dfrac{2}{3}$. B. $m>\dfrac{2}{3}$. C. $m<\dfrac{2}{3}$. D. $m\neq\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Đường thẳng $y=(3m-2)x+3$ tạo với trục Ox một góc nhọn khi $3m-2>0 \Leftrightarrow m>\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án B □

Bài 44. Đường thẳng $y=kx+\dfrac{1}{2}$ song song với đường thẳng $y=\dfrac{2}{3}-\dfrac{5}{7}x$ khi k có giá trị là

A. $\dfrac{2}{3}$. B. 5. C. $\dfrac{5}{7}$. D. $-\dfrac{5}{7}$.

Lời giải.

Hai đường thẳng đã cho song song với nhau khi $\begin{cases} k=\dfrac{-5}{7} \\ \dfrac{1}{2}\neq\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow k=\dfrac{-5}{7}$.

Chọn đáp án D □

Bài 45. Tìm các giá trị m để hai đường thẳng $y=(2m+1)x-\dfrac{2}{3}$ và $y=(5m-3)x+\dfrac{3}{5}$ cắt nhau.

A. $m\neq\dfrac{4}{7}$. B. $m\neq\dfrac{4}{3}$. C. $m\neq\dfrac{-2}{7}$. D. $m\neq\dfrac{-4}{3}$.

Lời giải.

Hai đường thẳng $y=(2m+1)x-\dfrac{2}{3}$ và $y=(5m-3)x+\dfrac{3}{5}$ cắt nhau khi

$$2m+1\neq 5m-3 \Leftrightarrow -3m\neq -4 \Leftrightarrow m\neq\frac{4}{3}.$$

Chọn đáp án B □

Bài 46. Cho hai đường thẳng $(d)\colon y=2x+m-2$ và $d'\colon y=kx+4-m$. Hai đường thẳng này trùng nhau nếu

A. $k=2$ và $m=3$. B. $k=-1$ và $m=3$. C. $k=-2$ và $m=3$. D. $k=2$ và $m=-3$.

Lời giải.

Hai đường thẳng đã cho trùng nhau khi $\begin{cases} 2=k \\ m-2=4-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=2 \\ m=3. \end{cases}$

Chọn đáp án A □

2 Tự luận

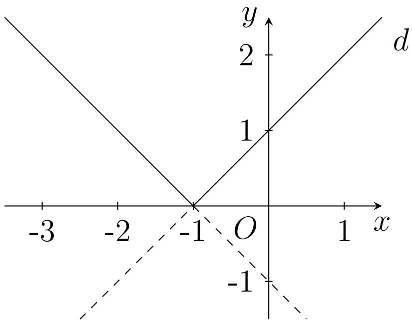
2.1 Vẽ đồ thị

Bài 47. Vẽ đồ thị hàm số $y = |x+1|$.

Lời giải.

Ta có $y = |x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{nếu } x \geq -1 \\ -x-1 & \text{nếu } x < -1. \end{cases}$

Vẽ hai đường thẳng $y = x+1$ và $y = -x-1$ trên cùng một hệ trục tọa độ. Đồ thị hàm số là đường gấp khúc liền nét d như hình vẽ.

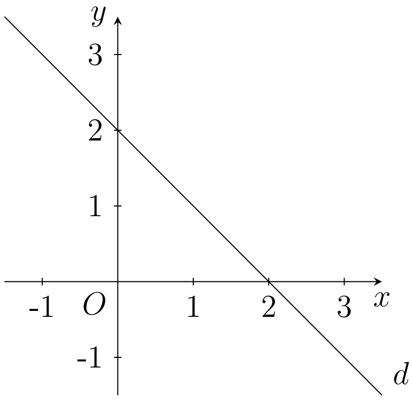


□

Bài 48. Vẽ đồ thị hàm số $y = -x+2$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = -x+2$ là đường thẳng d đi qua hai điểm $(0;2)$ và $(2;0)$.



□

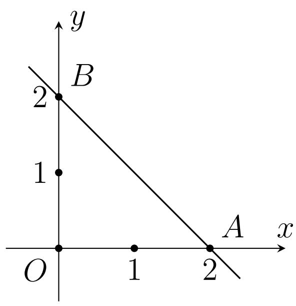
Bài 49. Vẽ đồ thị hàm số bậc nhất có hệ số góc bằng 1 và tung độ gốc bằng 2.

Lời giải.

Hàm số bậc nhất có hệ số góc bằng 1 và tung độ gốc bằng 2 nên có công thức là $y = -x+2$.

- Cho $x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow B(0;2)$.
- Cho $y = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow A(2;0)$.

Đồ thị hàm số là đường thẳng đi qua A và B.



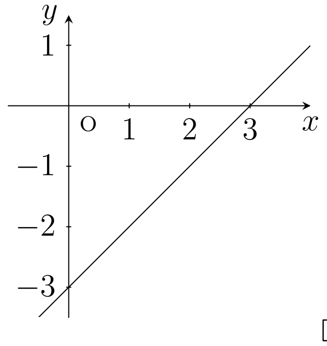
□

Bài 50. Vẽ đồ thị hàm số $y = x - 3$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Bảng giá trị

x	0	3
$y = x - 3$	-3	0

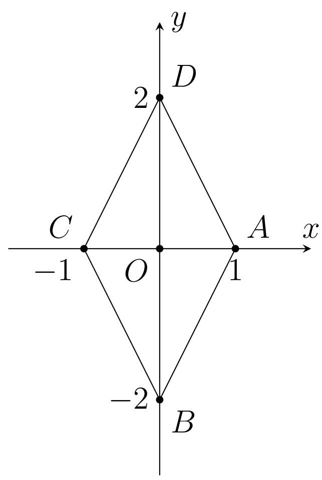


□

Bài 51. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $d_1 \colon 2x - y = 2$ cắt Ox tại A, cắt Oy tại B và đường thẳng $d_2 \colon 2x - y = -2$ cắt Ox tại C, cắt Oy tại D. Tứ giác $ABCD$ là hình gì? Vì sao?

Lời giải.

Ta có $A = d_1 \cap Ox \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 2x - 0 = 2 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow A(1; 0)$.
$B = d_1 \cap Oy \Rightarrow x = 0 \Rightarrow 2 \cdot 0 - y = 2 \Leftrightarrow y = -2 \Rightarrow B(0; -2)$.
$C = d_2 \cap Ox \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 2x - 0 = -2 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow C(-1; 0)$.
$D = d_2 \cap Oy \Rightarrow x = 0 \Rightarrow 2 \cdot 0 - y = -2 \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow D(0; 2)$.
Suy ra $A, C \in Ox$ và $OA = OC = 1$.
$B, D \in Oy$ và $OB = OD = 2$.
Do đó $AC \perp BD$ và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.
Vậy $ABCD$ là hình thoi.



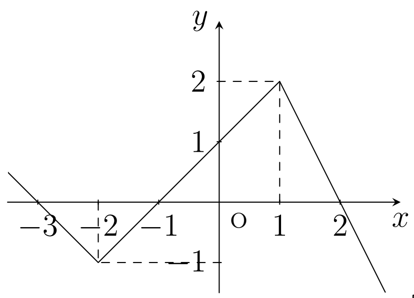
□

Bài 52. Vẽ đồ thị hàm số $y = \begin{cases} -x - 3 & \text{nếu } x \le -2 \\ x + 1 & \text{nếu } -2 < x \le 1 \\ -2x + 4 & \text{nếu } x > 1. \end{cases}$

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Bảng giá trị

x	-3	-2	1	2
y	0	-1	2	0

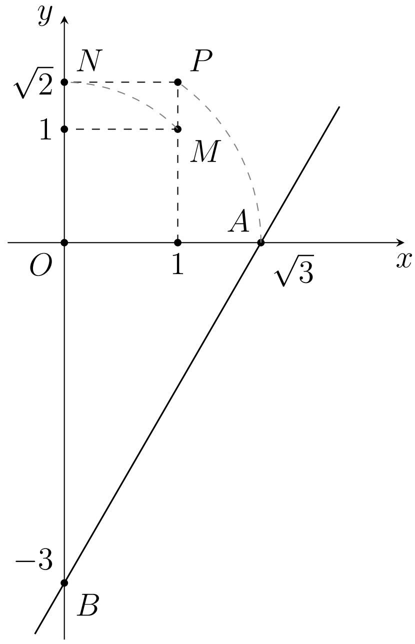


□

Bài 53. Vẽ đường thẳng $d \colon y = \sqrt{3}x - 3$ bằng thước và com-pa.

Lời giải.

Gọi $A = d \cap Ox \Rightarrow A\left(\sqrt{3}; 0\right)$.
$B = d \cap Oy \Rightarrow B(0; -3)$.
Đồ thị hàm số là đường thẳng đi qua A và B.
Bây giờ, ta sẽ xác định tọa độ A bằng com-pa.
Gọi $M(1; 1)$, thì $OM = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Gọi N là giao điểm của đường tròn $(O; OM)$ với nửa dương của trục Oy.
Khi đó ta xác định được điểm $P\left(1; \sqrt{2}\right)$
$\Rightarrow OP = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{3}$. Do đó A là giao điểm của đường tròn $(O; OP)$ với nửa dương của trục Ox.



□

Bài 54. Vẽ đồ thị hàm số $y = -x + 2|x - 1|$.

Lời giải.

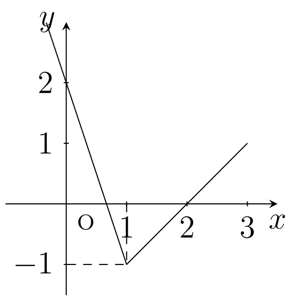
Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{nếu } x \geq 1 \\ -x + 1 & \text{nếu } x \leq 1. \end{cases}$

Do đó $y = \begin{cases} x - 2 & \text{nếu } x \geq 1 \\ -3x + 2 & \text{nếu } x \leq 1. \end{cases}$

Bảng giá trị

x	0	1	2
y	2	-1	0



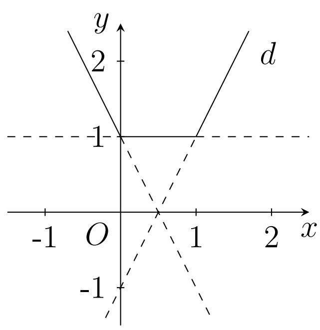
□

Bài 55. Vẽ đồ thị hàm số $y = |x| + |x - 1|$.

Lời giải.

Ta có $y = |x| + |x - 1| = \begin{cases} -2x + 1 & \text{nếu } x \leq 0 \\ 1 & \text{nếu } 0 < x < 1 \\ 2x - 1 & \text{nếu } x \geq 1. \end{cases}$

Vẽ ba đường thẳng $y = -2x + 1$, $y = 1$ và $y = 2x - 1$ trên cùng một hệ trục tọa độ. Đồ thị hàm số là đường gấp khúc d liền nét như hình vẽ.



□

2.2 Xác định đường thẳng

Bài 56. Cho đường thẳng $d\colon y = (a+1)x + 2a$. Xác định a để đường thẳng d

a) Đi qua gốc tọa độ.

b) Song song với đường thẳng $d'\colon y = 2x + 2$.

Lời giải.

a) Đường thẳng $d\colon y = (a+1)x + 2a$ đi qua gốc tọa độ khi $2a = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

b) Đường thẳng $d\colon y = (a+1)x + 2a$ song song với đường thẳng $d'\colon y = 2x + 2$ khi

$$\begin{cases} a+1 = 2 \\ 2a \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \varnothing.$$

Vậy không có giá trị a thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

Bài 57. Cho hàm số bậc nhất $y = (m^2 - 1)x + 1$ (m là tham số). Tìm m để đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1; m)$.

Lời giải.

Hàm số là hàm số bậc nhất nên $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$. Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1; m)$ nên ta có

$$m = (m^2-1)\cdot 1 + 1 \Leftrightarrow m^2 - m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m = 0 & \text{(thỏa mãn)} \\ m = 1 & \text{(loại)}. \end{array}\right.$$

Vậy $m = 0$. □

Bài 58. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(1; 1)$ và $B(0; 2)$.

Lời giải.

Giả sử phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A,\ B$ có dạng $y = kx + b$. Vì đường thẳng đi qua hai điểm $A(1; 1)$ và $B(0; 2)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} k + b = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ b = 2. \end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A,\ B$ là $y = -x + 2$. □

Bài 59. Cho hàm số bậc nhất $y = mx + m^3 - 2m$ (m là tham số). Tìm m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị đi qua gốc tọa độ.

Lời giải.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $m > 0$.
Lại có đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ nên

$$0 = m\cdot 0 + m^3 - 2m = 0 \Leftrightarrow m(m^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m = 0 & \text{(loại)} \\ m = -\sqrt{2} & \text{(loại)} \\ m = \sqrt{2} & \text{(thỏa mãn)}. \end{array}\right.$$

Vậy $m = \sqrt{2}$. □

Bài 60. Cho hàm số $y = (m-2)x + m + 3$. Tìm m để đồ thị hàm số đi qua điểm $(1; -3)$.

Lời giải.

Vì đồ thị hàm số $y = (m-2)x + m + 3$ đi qua điểm $(1; -3)$ nên ta có

$$(m-2) \cdot 1 + m + 3 = -3 \Leftrightarrow 2m = -4 \Leftrightarrow m = -2.$$

Vậy $m = -2$ thì đồ thị hàm số $y = (m-2)x + m + 3$ đi qua điểm $(1; -3)$. □

Bài 61. Cho hàm số bậc nhất $y = ax + b$ (a, b là tham số). Tìm a, b để đồ thị hàm số đi qua điểm $A(b; a+1)$ và đồ thị có hệ số góc bằng tung độ gốc.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(b; a+1)$ nên

$$a + 1 = ab + b \Leftrightarrow (a+1)(1-b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &a = -1 \\ &b = 1. \end{aligned}\right.$$

Mà đồ thị có hệ số góc bằng tung độ gốc nên $a = b$. Vậy $a = b = 1$ hoặc $a = b = -1$. □

Bài 62. Cho hàm số $y = (m-2)x + m^2 + 1$. Tìm m để đồ thị hàm số trên đồng quy với các đường thẳng $y = -x + 2$ và $y = 2x - 1$.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của các đường thẳng $y = -x + 2$ và $y = 2x - 1$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 2 \\ -x + 2 = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases}$$

Để đồ thị hàm số $y = (m-2)x + m^2 + 1$ đồng quy với các đường thẳng $y = -x + 2$ và $y = 2x - 1$ thì điểm $(1; 1)$ phải nằm trên đồ thị hàm số $y = (m-2)x + m^2 + 1$, do đó

$$(m-2) \cdot 1 + m^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &m = 1 \\ &m = -2. \end{aligned}\right.$$

Vậy với $m = 1$, $m = -2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Bài 63. Viết phương trình đường thẳng $d\colon y = ax + b$ vuông góc với $d'\colon y = -x + 3$ tại điểm có hoành độ bằng 2.

Lời giải.

Đường thẳng $d\colon y = ax + b$ vuông góc với $d'\colon y = -x + 3$ nên $a \cdot (-1) = -1 \Leftrightarrow a = 1$.
Khi đó phương trình đường thẳng d có dạng $y = x + b$. (1)
Thay $x = 2$ vào phương trình đường thẳng $d'\colon y = -x + 3$, ta có $y = -2 + 3 = 1$.
Điểm $A(2; 1)$ thuộc đường thẳng d nên thay $x = 2, y = 1$ vào (1), ta có $1 = 2 + b \Rightarrow b = -1$.
Vậy $d\colon y = x - 1$. □

2.3 Tương giao giữa các đường thẳng

Bài 64. Tìm giao điểm của hai đường thẳng $y = 3x + 2$ và $y = -2x + 7$ bằng phép tính.

Lời giải.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của hai đường thẳng đã cho là

$$3x + 2 = -2x + 7 \Leftrightarrow 5x = 5 \Leftrightarrow x = 1.$$

Thay $x = 1$ vào phương trình $y = 3x + 2$, ta có $y = 3 \cdot 1 + 2 = 5$.
Vậy giao điểm của 2 đường thẳng đó là $A(1; 5)$. □

Bài 65. Tìm k để ba đường thẳng $d_1\colon y = \frac{2}{5}x + \frac{1}{2}$, $d_2\colon y = \frac{3}{5}x - \frac{5}{2}$, $d_3\colon y = kx + \frac{7}{2}$ đồng quy tại một điểm.

Lời giải.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 là

$$\frac{2}{5}x + \frac{1}{2} = \frac{3}{5}x - \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{-1}{5}x = -3 \Leftrightarrow x = 15.$$

Thay $x = 15$ vào phương trình d_1, ta có $y = \frac{13}{2}$.
Suy ra d_1 và d_2 cắt nhau tại $A\left(15; \frac{13}{2}\right)$.
Vì d_1, d_2, d_3 đồng quy tại một điểm nên $A \in d_3$. Thay $x = 15, y = \frac{13}{2}$ vào phương trình d_3, ta có

$$\frac{13}{2} = k \cdot 15 + \frac{7}{2} \Leftrightarrow k = \frac{1}{5}.$$

Vậy $k = \frac{1}{5}$. □

Bài 66. Cho đường thẳng $d\colon y = (a-2)x + 1$. Tìm a để đường thẳng d song song với đường thẳng $y = -2x + 5$.

Lời giải.

Đường thẳng $d\colon y = (a-2)x+1$ song song với đường thẳng $y = -2x+5$ khi $a - 2 = -2 \Leftrightarrow a = 0$.
□

Bài 67. Xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng $2x - 3y = -8$ và $y = -x + 1$.

Lời giải.

Ta có $2x - 3y = -8 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$. Vì $\frac{2}{3} \neq -1$ nên hai đường thẳng cắt nhau. □

Bài 68. Tìm m để đường thẳng $d_1\colon y = mx + 1$ cắt đường thẳng $d_2\colon y = 2x - 1$ tại một điểm trên trục hoành.

Lời giải.

Gọi $A = d_2 \cap Ox \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = 2x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow A\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.
Để đường thẳng $d_1\colon y = mx+1$ cắt đường thẳng d_2 tại một điểm trên trục hoành thì $A \in d_1$, tức là

$$0 = m \cdot \frac{1}{2} + 1 \Leftrightarrow m = -2.$$

Vậy $m = -2$. □

Bài 69. Tìm m để ba đường thẳng sau đây đồng quy $(d_1)\colon y = -x + 1$, $(d_2)\colon y = x - 1$, $(d_3)\colon (1 - m)x - (m - 1)y = m + 1$.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0. \end{cases}$
Để ba đường thẳng trên đồng quy thì giao điểm của (d_1) và (d_2) phải thuộc (d_3), nghĩa là

$$(1 - m) \cdot 1 - (m - 1) \cdot 0 = m + 1 \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm. □

Bài 70. Xác định đường thẳng d đi qua giao điểm của hai đường thẳng $d_1\colon y = 2020x - 2019$, $d_2\colon y = 2019x - 2018$ và song song với đường thẳng $d_3\colon 2018x + y = 0$.

Lời giải.

Ta có $2018x + y = 0 \Leftrightarrow y = -2018x$, mà $d \parallel d_3$ nên phương trình của d có dạng $y = -2018x + m$, $m \neq 0$.
Lại có, hoành độ giao điểm của d_1 và d_2 là nghiệm phương trình

$$2020x - 2019 = 2019x - 2018 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1.$$

Do đó d_1 cắt d_2 tại điểm $A(1; 1)$.
Mà d đi qua giao điểm của d_1 và d_2 nên $A \in d$, do đó

$$1 = -2018 + m \Leftrightarrow m = 2019.$$

Vậy phương trình đường thẳng d là $y = -2018x + 2019$. □

Bài 71. Cho hàm số $y = 2mx + 3 - m - x$ (d). Tìm m để đường thẳng d song song với $2y - x = 5$.

Lời giải.

Ta có $y = 2mx + 3 - m - x \Leftrightarrow y = (2m - 1)x + 3 - m$ và $2y - x = 5 \Leftrightarrow y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{5}{2}$.
Để hai đường thẳng song song thì $\begin{cases} 2m - 1 = \dfrac{1}{2} \\ 3 - m \neq \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{3}{4} \\ m \neq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{4}$.
Vậy với $m = \dfrac{3}{4}$ thì đường thẳng d song song với $2y - x = 5$. □

Bài 72. Cho đường thẳng $d_m\colon y = (m^2 - 3m)x + m^2 - 2m + 2$ và hai điểm $A(1; 1)$ và $B(2; -1)$. Tìm m để d_m vuông góc với đường thẳng AB và đi qua điểm $M(0; 2)$.

Lời giải.

Hệ số góc của đường thẳng AB là $k = \dfrac{2 - 1}{-1 - 1} = -\dfrac{1}{2}$.
Vì đường thẳng $y = (m^2 - 3m)x + m^2 - 2m + 2$ đi qua điểm $M(0; 2)$ nên ta có

$$m^2 - 2m + 2 = 2 \Leftrightarrow m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2. \end{array}\right.$$

- Với $m = 0$ ta có $d_m\colon y = 2$.
  Vì hệ số góc của d_m là $k_1 = 0 \Rightarrow k_1 \cdot k = 0$ nên đường thẳng d_m không vuông góc với đường thẳng AB.

- Với $m = 2$ ta có $d_m\colon y = -2x + 2$.
  Vì hệ số góc của d_m là $k_1 = -2 \Rightarrow k_1 \cdot k = -1$ nên đường thẳng d_m vuông góc với đường thẳng AB.

Vậy với $m = 2$ thì đường thẳng d_m vuông góc với đường thẳng AB. □

Bài 73. Tìm m để các đường thẳng $y = 2x + m - 5$ và $y = -5x - m + 1$ cắt nhau tại một điểm trên trục tung.

Lời giải.

Hai đường thẳng $y = 2x + m - 5$ và $y = -5x - m + 1$ cắt nhau tại một điểm trên trục tung

$$\Leftrightarrow m - 5 = -m + 1 \Leftrightarrow 2m = 6 \Leftrightarrow m = 3.$$

Vậy $m = 3$. □

Bài 74. Cho hàm số bậc nhất $y = m^2x + m$ (m là tham số). Tìm m để đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = x + 1$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = x + 1$ nên $\begin{cases} m^2 = 1 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$.

Vậy $m = -1$. □

2.4 Bài toán về diện tích, khoảng cách, chu vi, góc với đường thẳng

Bài 75. Cho hàm số $y = -2x + 3 \quad (d)$. Tính góc tạo bởi đường thẳng (d) và tia Ox (làm tròn đến phút).

Lời giải.

Gọi A là giao điểm của đồ thị hàm số và Ox. Ta có $y_A = 0 \Rightarrow 0 = -2 \cdot x_A + 3 \Rightarrow x_A = \dfrac{3}{2}$.
Gọi B là giao điểm của đồ thị hàm số và Oy. Ta có $x_B = 0 \Rightarrow y_B = -2 \cdot 0 + 3 = 3$.
Trong tam giác OAB vuông tại O có $\tan \widehat{OAB} = \dfrac{OB}{OA} = 2 \Rightarrow \widehat{OAB} = 63^\circ 26'$.
Do đó góc cần tìm là $\alpha = 180^\circ - 63^\circ 26' = 116^\circ 34'$. □

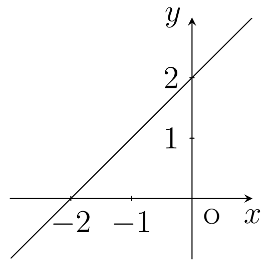
Bài 76. Cho đường thẳng $d\colon y = x + 2$.

1. Vẽ đồ thị của đường thẳng d.
2. Tính diện tích tam giác tạo bởi đường thẳng d và các trục tọa độ.

Lời giải.

1. Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
   Bảng giá trị

x	-2	0
$y = x + 2$	0	2



b) Với $x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(0; 2) \Rightarrow OA = 2$.
Với $y = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow B(-2; 0) \Rightarrow OB = 2$.
Diện tích tam giác OAB là $S = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$ (đvdt).

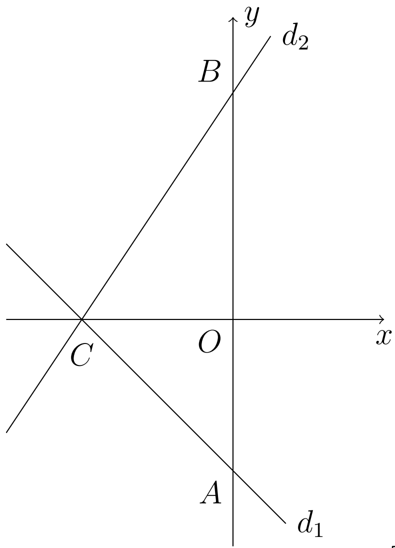
□

Bài 77. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho 2 đường thẳng $d_1\colon y = -x - 2$ và $d_2\colon y = \dfrac{3}{2}x + 3$. Gọi A, B lần lượt là giao điểm của (d_1) và (d_2) với trục Oy và C là giao điểm của (d_1) với (d_2). Tính diện tích tam giác ABC.

Lời giải.

Ta có

- $A = d_1 \cap Oy \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow A(0; -2)$.
- $B = d_2 \cap Oy \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow B(0; 3)$.
- $C = d_1 \cap d_2 \Rightarrow -x - 2 = \dfrac{3}{2}x + 3 \Leftrightarrow x = -2$
  $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow C(-2; 0)$.



Lại có $CO \perp AB$ và $OC = 2$, $AB = OA + OB = 2 + 3 = 5$.
Do đó diện tích $\triangle ABC$ là

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot OC \cdot AB = 5 \text{ (đvdt)}.$$

□

Bài 78. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đồ thị (d) của hàm số $y = -x + 2$. Tìm tọa độ của những điểm nằm trên đường thẳng (d) sao cho khoảng cách từ điểm đó đến trục Ox bằng hai lần khoảng cách từ điểm đó đến trục Oy.

Lời giải.

Gọi $M(a, b)$ là điểm thuộc (d) ta có $b = -a + 2$.

Mặt khác ta có $|b| = 2|a| \Leftrightarrow |2 - a| = 2|a| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 - a = 2a \\ 2 - a = -2a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{2}{3} \\ a = -2. \end{array}\right.$

Do đó có tọa độ M là $(-2; 4)$ hoặc $\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{4}{3}\right)$. □

Bài 79. Cho hàm số $y = \sqrt{2}x + \sqrt{2} + 1$. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ đến đồ thị hàm số đã cho.

Lời giải.

Gọi A là giao điểm của đồ thị hàm số và Ox.

Ta có $y_A = 0 \Rightarrow 0 = \sqrt{2} \cdot x_A + \sqrt{2} + 1 \Rightarrow x_A = -\dfrac{2 + \sqrt{2}}{2}$.

Gọi B là giao điểm của đồ thị hàm số và Oy.
Ta có $x_A = 0 \Rightarrow y_A = \sqrt{2} \cdot 0 + \sqrt{2} + 1 = \sqrt{2} + 1$.

Ta có $OA = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{2}$, $OB = \sqrt{2} + 1$ và $AB = \sqrt{\left(\dfrac{2 + \sqrt{2}}{2}\right)^2 + (\sqrt{2} + 1)^2} = \sqrt{\dfrac{9 + 6\sqrt{2}}{2}}$.

Gọi OH là đường cao của tam giác OAB ta có

$$OA \cdot OB = AB \cdot AH \Rightarrow AH = \frac{OA \cdot OB}{AB} = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{\sqrt{18 + 6\sqrt{2}}}.$$

□

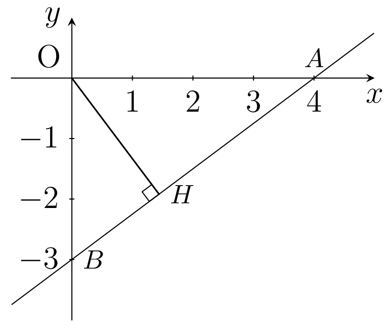
Bài 80. Cho đường thẳng $(d)\colon y = \dfrac{3x}{4} - 3$.

1. Vẽ đồ thị hàm số d.
2. Tính chu vi tam giác tạo bởi đường thẳng d và các trục tọa độ.
3. Tính khoảng cách từ gốc O đến đường thẳng d.

Lời giải.

1. Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
   Bảng giá trị

x	0	4
$y = \dfrac{3x}{4} - 3$	-3	0



b) Với $y = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow A(4;0) \Rightarrow OA = 4$.
Với $x = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow B(0;-3) \Rightarrow OB = 3$.
Vì tam giác OAB vuông tại O nên $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 5$.
Chu vi tam giác OAB là $P = 3 + 4 + 5 = 12$ (đvđd).

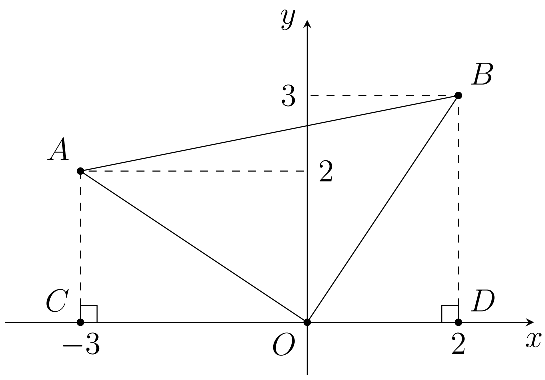
b) Diện tích tam giác OAB là $S = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$ (đvdt).
Gọi OH là đường cao kẻ từ O xuống AB. Ta có

$$OH = \frac{2S}{AB} = \frac{12}{5} \text{ (đvđd).}$$

□

Bài 81. Cho đường thẳng $d\colon x - 5y + 13 = 0$, trên d lấy điểm A có hoành độ bằng -3 và điểm B có tung độ bằng 3. Tính diện tích $\triangle OAB$.

Lời giải.



Điểm A có hoành độ $x = -3 \Rightarrow -3 - 5y + 13 = 0 \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow A(-3;2)$.
Điểm B có hoành độ $y = 3 \Rightarrow x - 5 \cdot 3 + 13 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow B(2;3)$.
Gọi $C(-3;0)$ và $D(2;0)$ lần lượt là hình chiếu của A, B lên Ox. Khi đó ta có $ACDB$ là hình thang vuông tại C và D, $CD = OC + OD = 3 + 2 = 5$, $AC = 2$, $BD = 3$. Do đó diện tích $ACDB$ bằng

$$S_{ACDB} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot (AC + BD) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = \frac{25}{2}.$$

Lại có $\triangle ACO$ và $\triangle BDO$ lần lượt vuông tại C và D nên

$$S_{ACO} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CO = 3; \quad S_{BDO} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot DO = 3.$$

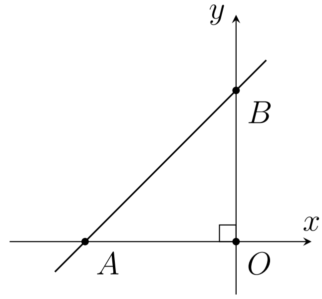
Khi đó $S_{OAB} = S_{ACDB} - S_{ACO} - S_{BDO} = \dfrac{25}{2} - 3 - 3 = \dfrac{13}{2}$ (đvdt). □

Bài 82. Cho hàm số bậc nhất $y = x + m$ (m là tham số) có đồ thị d cắt Ox, Oy lần lượt tại A và B. Tìm m để $AB = 2$.

Lời giải.

Ta có $A = d \cap Ox \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = -m \Rightarrow A(-m; 0) \Rightarrow OA = |m|$.
$B = d \cap Oy \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = m \Rightarrow B(0; m) \Rightarrow OB = |m|$.
Lại có $\triangle OAB$ vuông tại O nên

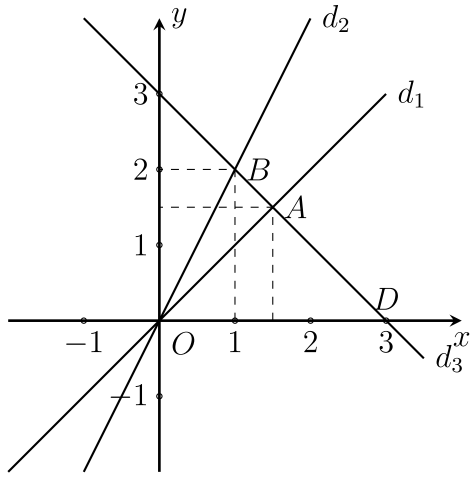
$$AB^2 = OA^2 + OB^2 \Leftrightarrow 4 = |m| + |m| \Leftrightarrow m = \pm 2.$$



□

Bài 83. Cho ba đường thẳng $(d_1)\colon y = x$, $(d_2)\colon y = 2x$ và $(d_3)\colon y = -x + 3$. Đường thẳng (d_3) cắt hai đường còn lại tại A và B. Tính diện tích tam giác OAB.

Lời giải.



Tọa độ điểm A là nghiệm hệ $\begin{cases} y = x \\ y = -x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow A\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$.

Tọa độ điểm B là nghiệm hệ $\begin{cases} y = 2x \\ y = -x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow B(1; 2)$.

Gọi D là giao điểm của (d_3) và Ox ta có $x_D = 3$ và $y_D = 0$.

Ta có $S_{OAB} = S_{OBD} - S_{OAD} = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 - \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1{,}5 = 0{,}75$. □

Bài 84. Tính diện tích tam giác được giới hạn bởi các đường thẳng $d_1\colon 4x + y + 6 = 0$, $d_2\colon 5x - 2y + 1 = 0$, $d_3\colon x - 3y + 8 = 0$.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm A của d_1 và d_2 là nghiệm của hệ

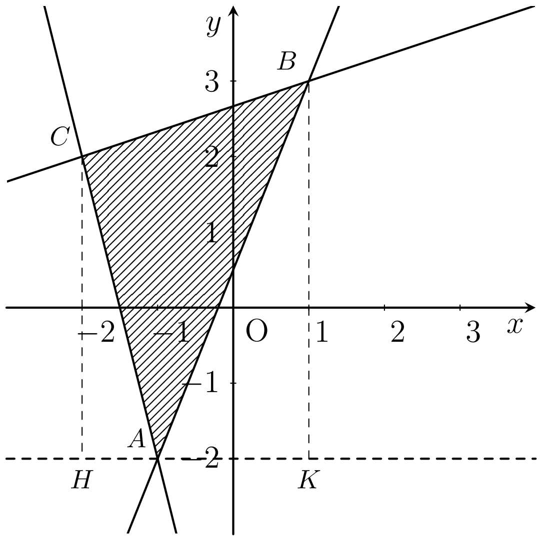
$$\begin{cases} 4x + y + 6 = 0 \\ 5x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 2y + 12 = 0 \\ 5x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow A(-1; -2).$$

Tọa độ giao điểm B của d_2 và d_3 là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}5x-2y+1=0\\x-3y+8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x-2y+1=0\\x=3y-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}13y-39=0\\x=3y-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3\\x=1\end{cases}\Rightarrow B(1;3).$$

Tọa độ giao điểm C của d_1 và d_3 là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}4x+y+6=0\\x-3y+8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+y+6=0\\x=3y-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}13y-26=0\\x=3y-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2\\x=-2\end{cases}\Rightarrow C(-2;2).$$



Qua A dựng đường thẳng d song song với trục Ox và gọi $H,\ K$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $C,\ B$ lên $d \Rightarrow CHKB$ là hình thang vuông.
Ta có $CH=4,\ BK=5,\ HK=3,\ HA=1,\ KA=2$. Do đó

$$S_{\triangle CHA}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1=2;\quad S_{\triangle BKA}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 2=5;\quad S_{CHKB}=\frac{(4+5)\cdot 3}{2}=\frac{27}{2}.$$

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC}=\dfrac{27}{2}-(2+5)=\dfrac{13}{2}$. □

2.5 Tổng hợp

Bài 85. Cho hàm số $y=(m-2)x+n$ (d). Tìm m và n để đường thẳng (d)

1. đi qua điểm $A(-1;2)$ và $B(3;-4)$.
2. cắt trục $Ox,\ Oy$ lần lượt tại điểm có hoành độ 1 và tung độ 2.
3. cắt đường thẳng $x-2y-3=0$.
4. song song với đường thẳng $3x+2y=1$.

Lời giải.

1. Vì d đi qua điểm $A(-1;2)$ và $B(3;-4)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}-(m-2)+n=2\\3(m-2)+n=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-m+n=0\\3m+n=2\end{cases}\Leftrightarrow m=n=\frac{1}{2}.$$

2. Vì d cắt trục Ox, Oy lần lượt tại điểm có hoành độ 1 và tung độ 2 nên ta có hệ phương trình
$$\begin{cases}(m-2)+n=0\\ 0\cdot(m-2)+n=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}n=2\\ m=0.\end{cases}$$

3. Xét đường thẳng $x-2y-3=0 \Leftrightarrow y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{2}$. Để đường thẳng d cắt đường thẳng $x-2y-3=0$ thì
$$m-2\neq\frac{1}{2}\Leftrightarrow m\neq\frac{5}{2}.$$

4. Xét đường thẳng $3x+2y=1 \Leftrightarrow y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}$. Vì d song song với đường thẳng $3x+2y=1$ nên
$$\begin{cases}m-2=-\dfrac{3}{2}\\ n\neq\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=\dfrac{1}{2}\\ n\neq\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

□

Bài 86. Cho hàm số bậc nhất $y=(4m^2-1)x+1-2m$, (m là tham số).

1. Vẽ đồ thị hàm số với $m=0$.
2. Tìm các giá trị nguyên của m biết đồ thị hàm số cắt tia Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho $S_{OAB}=\dfrac{1}{2}$.

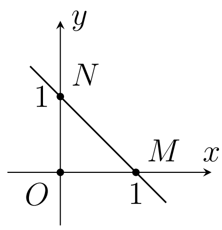
Lời giải.

1.

Với $m=0$ hàm số trở thành $y=-x+1$.

- Cho $x=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow N(0;1)$.
- Cho $y=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow M(1;0)$.

Đồ thị hàm số là đường thẳng đi qua M và N.



2.

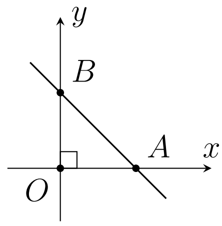
Hàm số là hàm số bậc nhất nên $4m^2-1\neq 0 \Leftrightarrow m\neq\pm\dfrac{1}{2}$.

Gọi d là đồ thị hàm số, ta có

$A=d\cap Ox \Rightarrow y=0 \Rightarrow x=2m+1 \Rightarrow A(2m+1;0) \Rightarrow OA=|2m+1|$.

$B=d\cap Oy \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=1-2m \Rightarrow B(0;1-2m) \Rightarrow OB=|1-2m|$.

Lại có $\triangle OAB$ vuông tại O nên



$$S_{OAB}=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB \Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot|2m+1|\cdot|1-2m| \Leftrightarrow |4m^2-1|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m^2=0\\ m^2=\dfrac{1}{2}\quad\text{(loại)}.\end{array}\right.$$

Vậy $m=0$ thì thỏa mãn yêu cầu đề bài.

□

Bài 87. Cho đường thẳng $(d)\colon y = (2m-1)x + m - 2$. Tìm tọa độ điểm M mà đồ thị hàm số luôn đi qua với mọi m.

Lời giải.

Gọi $M(a,b)$ là điểm cố định mà hàm số luôn đi qua với mọi m.
Ta có $b = (2m-1)a + m - 2$ đúng với mọi m.

Do đó $(2a+1)m - (a+2+b) = 0$ đúng với mọi $m \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+1=0 \\ a+2+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{3}{2}. \end{cases}$

Vậy điểm M có tọa độ là $\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{3}{2}\right)$. □

Bài 88. Tìm tập hợp các điểm M trong mặt phẳng tọa độ Oxy, biết rằng $M(m-1; 2m+3)$ với m là tham số.

Lời giải.

Ta có $x_M = m - 1 \Leftrightarrow m = x_M + 1$.
Do đó $y_M = 2m + 3 = 2(x_M + 1) + 3 = 2x_M + 5$.
Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng $y = 2x + 5$. □

Bài 89. Cho hàm số bậc nhất $y = (m-1)x + 1$ (m là tham số), có đồ thị là đường thẳng d.

1. Tìm m, biết hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và d đi qua điểm $M(m,3)$.
2. Tìm điểm cố định mà d luôn đi qua với mọi m.

Lời giải.

1. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên $m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$.
   Lại có d đi qua $M(m;3)$ nên
   $$3 = (m-1)m + 1 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &m = -1 && \text{(thỏa mãn)} \\ &m = 2 && \text{(loại)}. \end{aligned}\right.$$
   Vậy $m = -1$ thì thỏa mãn yêu cầu đề bài.
2. Gọi $A(x_0; y_0)$ là điểm mà đồ thị hàm số luôn đi qua với mọi m. Khi đó
   $$\begin{aligned} & y_0 = (m-1)x_0 + 1, \quad \forall m \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ & x_0 \cdot m - x_0 - y_0 + 1 = 0, \quad \forall m \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x_0 = 0 \\ -x_0 - y_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 1. \end{cases} \end{aligned}$$
   Vậy điểm cố định mà đồ thị hàm số luôn đi qua là $A(0;1)$.

□

Bài 90. Cho hàm số bậc nhất $y = (k-1)x + 2$ có đồ thị là đường thẳng d và hai điểm $A(0;2)$, $B(-1;0)$.

1. Tìm k để d đi qua B. Khi đó hàm số đồng biến hay nghịch biến trên $\mathbb{R}$?
2. Tìm k để d cắt Ox tại C sao cho diện tích ΔOAC gấp đôi diện tích ΔOAB.

Lời giải.

1. Ta có d đi qua $B(-1;0)$ nên
$$0=(k-1)\cdot(-1)+2\Leftrightarrow -k+1+2=0\Leftrightarrow k=3.$$
Khi đó hàm số trở thành $y=2x+2$. Vì $a=2>0$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

2. Ta có $A(0;2)\in Oy$, $B(-1;0)\in Ox$ nên $OA=2$, $OB=1$ và $S_{OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot OA\cdot OB=1$.
Vì hàm số là hàm số bậc nhất nên $k-1\neq 0\Leftrightarrow k\neq 1$. Ta có
$$C=d\cap Ox\Rightarrow y=0\Rightarrow x=\frac{-2}{k-1}\Rightarrow C\left(\frac{-2}{k-1};0\right)\Rightarrow OC=\left|\frac{2}{k-1}\right|.$$
Lại có $A\in Oy$ nên $\triangle OAC$ vuông tại O. Do đó
$$S_{OAC}=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OC=\left|\frac{2}{k-1}\right|.$$
Mà $S_{OAC}=2S_{OAB}$ nên
$$\left|\frac{2}{k-1}\right|=2\Leftrightarrow |k-1|=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}k=0\\k=2.\end{array}\right.$$
Vậy $k\in\{0;2\}$ thì thỏa mãn yêu cầu đề bài.

□

Bài 91. Cho hàm số $y=(m-1)x+m+3$ (d_m).

1. Tìm m để đồ thị hàm số (d_m) đi qua điểm $A(1;-4)$.
2. Tìm điểm cố định mà đồ thị hàm số d_m luôn đi qua với mọi m.

Lời giải.

1. Vì đồ thị hàm số (d_m) đi qua điểm $A(1;-4)$ nên ta có
$$(m-1)+m+3=-4\Leftrightarrow 2m=-6\Leftrightarrow m=-3.$$

2. Gọi $(x_0;y_0)$ là điểm cố định mà đồ thị hàm số d_m luôn đi qua với mọi m. Khi đó ta có
$$\begin{aligned}&(m-1)x_0+m+3=y_0,\ \forall m\\ \Leftrightarrow\ & m(x_0+1)+(-x_0-y_0+3)=0,\ \forall m\\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases}x_0+1=0\\ -x_0-y_0+3=0\end{cases}\\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases}x_0=-1\\ y_0=4.\end{cases}\end{aligned}$$
Vậy điểm cố định mà đồ thị hàm số d_m luôn đi qua với mọi m là $(-1;4)$.

□

Bài 92. Cho hàm số $y=(2m-1)x+4m^2-1$ (d_m).

1. Tìm m để (d_m) đồng quy với hai đường thẳng $d_1\colon y=2x-2$ và $d_2\colon y=3x+1$.

2. Tìm m để (d_m) cắt các trục tọa độ theo một tam giác cân.

Lời giải.

1. Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $d_1\colon y = 2x - 2$ và $d_2\colon y = 3x + 1$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = 3x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 2 \\ 2x - 2 = 3x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -8 \end{cases} \Rightarrow A(-3; -8).$$

Để d_m đồng quy với d_1, d_2 thì d_m phải đi qua $A(-3; -8)$, do đó

$$-3(2m-1) + 4m^2 - 1 = -8 \Leftrightarrow 4m^2 - 6m + 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \dfrac{5}{2}. \end{array}\right.$$

2. Giả sử (d_m) cắt các trục tọa độ tại A, $B \Rightarrow \triangle OAB$ vuông cân tại $O \Rightarrow \widehat{ABO} = \widehat{BAO} = 45^\circ$. Do đó, d_m song song với các đường phân giác $y = x$ hoặc $y = -x$.

- Nếu d_m song song với $y = x \Rightarrow 2m - 1 = 1 \Rightarrow m = 1$.
- Nếu d_m song song với $y = -x \Rightarrow 2m - 1 = -1 \Rightarrow m = 0$.

Vậy với $m = 0$ hoặc $m = 1$ thì d_m cắt các trục tọa độ theo tam giác cân.

□

2.6 Nâng cao

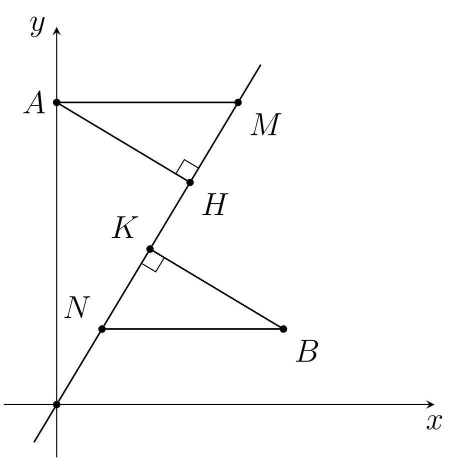
Bài 93. Cho đường thẳng $d\colon y = 2011mx - 5m^2$. Tìm trên trục tung các điểm mà đường thẳng d không đi qua với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có giao điểm của đường thẳng d với trục tung là điểm $A(0; -5m^2)$.
Vì $y_A = -5m^2 \leq 0$ nên không tồn tại m để đường thẳng d cắt trục tung tại các điểm có tung độ dương.
Vậy các điểm trên trục tung có tung độ dương thì đường thẳng đã cho không đi qua với mọi $m \in \mathbb{R}$. □

Bài 94. Cho hàm số bậc nhất $y = ax$ (a là tham số), có đồ thị là đường thẳng d và các điểm $A(0; 4)$, $B(3; 1)$. Tìm a để A, B nằm về hai phía của d và cách đều d.

Lời giải.



Gọi AH, BK là khoảng cách từ A, B đến đường thẳng d. Đường thẳng đi qua A song song với Ox cắt d tại điểm $M\left(\dfrac{4}{a};4\right)$. Đường thẳng đi qua B song song với Ox cắt d tại điểm $N\left(\dfrac{1}{a};1\right)$.
Ta có $AH = BK \Leftrightarrow AM = NB \Leftrightarrow x_M = x_B - x_N \Leftrightarrow \dfrac{4}{a} = 3 - \dfrac{1}{a} \Leftrightarrow a = \dfrac{5}{3}$. □

Bài 95. Cho hàm số bậc nhất $y = 2x + m$ (1) và $y = x - m + 1$ (2) (m là tham số), có đồ thị lần lượt là đường thẳng d_1 và d_2. Chứng minh rằng d_1, d_2 luôn cắt nhau tại một điểm và điểm đó luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

Lời giải.

Ta có $2 \neq 1$ với mọi m nên d_1 luôn cắt d_2.
Hoành độ giao điểm của d_1, d_2 là nghiệm phương trình

$$2x + m = x - m + 1 \Leftrightarrow x = -2m + 1 \Rightarrow y = -3m + 1 \Rightarrow M(-2m+1; -3m+1).$$

Ta có $3x_M - 2y_M = 1 \Leftrightarrow y_M = \dfrac{3}{2}x_M - \dfrac{1}{2} \Rightarrow M \in d\colon y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{3}$. □

Bài 96. Cho hàm số bậc nhất $y = mx - m + 1$ (m là tham số), có đồ thị là đường thẳng d.

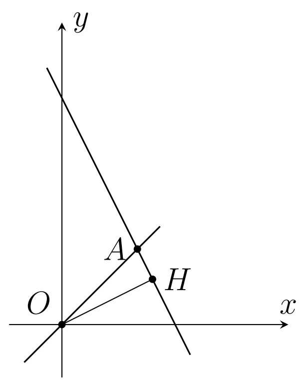
1. Tìm điểm cố định mà d luôn đi qua.
2. Tìm m để khoảng cách từ O đến d lớn nhất.

Lời giải.

1. Gọi $A(x_0; y_0)$ là điểm mà d luôn đi qua với mọi m. Khi đó

$$\begin{aligned} & y_0 = mx_0 - m + 1, \quad \forall m \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ & (x_0 - 1)\cdot m - y_0 + 1 = 0, \quad \forall m \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x_0 - 1 = 0 \\ -y_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy điểm cố định mà d luôn đi qua là $A(1;1)$.



2. Gọi $\Delta\colon y = ax$ là đường thẳng đi qua gốc tọa độ và điểm $A(1;1) \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \Delta\colon y = x$.
Kẻ $OH \perp d \Rightarrow OH \leq OA$.
Do đó OH lớn nhất khi và chỉ khi $H \equiv A$ hay $d \perp \Delta \Leftrightarrow m \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow m = -1$.

□

Bài 97. Cho hàm số $y = |x-1| + |x+2|$ (d).

1. Vẽ đồ thị hàm số (d).

2. Biện luận số nghiệm của phương trình $|x-1|+|x+2|=m$.

Lời giải.

1. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	

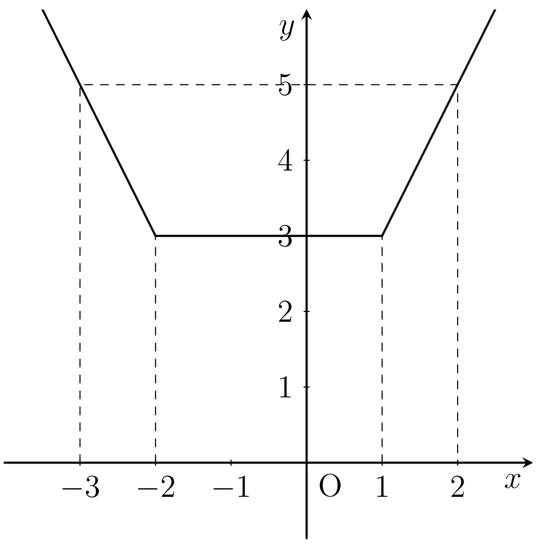
Do đó

$$y=\begin{cases} x-1+x+2 & \text{nếu } x\geq 1\\ -(x-1)+x+2 & \text{nếu } -2\leq x\leq 1\\ -(x-1)-(x+2) & \text{nếu } x\leq -2\end{cases}=\begin{cases} 2x+1 & \text{nếu } x\geq 1\\ 3 & \text{nếu } -2\leq x\leq 1\\ -2x-1 & \text{nếu } x\leq -2.\end{cases}$$

Ta có bảng giá trị

x	-3	-2	1	2
y	5	3	3	5

Đồ thị hàm số $y=|x-1|+|x+2|$:



2. Số nghiệm của phương trình $|x-1|+|x+2|=m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=|x-1|+|x+2|$ và đường thẳng $y=m$.

- Nếu $m<3$ thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu $m=3$ thì phương trình có vô số nghiệm $x\in[-2;1]$.
- Nếu $m>3$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

$\square$

Bài 98. Cho họ đường thẳng $y=(m+5)x+2m+11$ (d_m).

1. Tìm điểm cố định của d_m.
2. Tính khoảng cách lớn nhất từ O đến d_m.

Lời giải.

1. Gọi $(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà đồ thị hàm số d_m luôn đi qua với mọi m. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} & (m+5)x_0 + 2m + 11 = y_0, \forall m \\ \Leftrightarrow\ & m(x_0+2) + (5x_0 - y_0 + 11) = 0, \forall m \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x_0 + 2 = 0 \\ 5x_0 - y_0 + 11 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

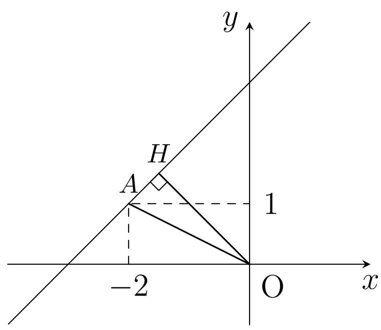
Vậy điểm cố định mà đồ thị hàm số d_m luôn đi qua với mọi m là $A(-2; 1)$.

2.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên d_m.
Xét tam giác OHA vuông tại H, ta có

$$OA = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} \text{ và } OH \leq OA.$$

Do vậy OH lớn nhất bằng $\sqrt{5}$ khi $H \equiv A$.



□

Bài 99. Cho đường thẳng $d\colon y = mx + 2m - 1$. Xác định m để khoảng cách từ O đến đường thẳng d là lớn nhất.

Lời giải.

Gọi $M(a, b)$ là điểm cố định mà đường thẳng d đi qua.
Ta có $b = ma + 2m - 1$ đúng với mọi m
Do đó $(a+2)m - b - 1 = 0$ đúng với mọi m
$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2 = 0 \\ -b - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1. \end{cases}$
Suy ra $M(-2; -1)$.
Gọi OH là khoảng cách từ O đến đường thẳng d, ta có $OH \leq OM$. Khoảng cách từ O đến đường thẳng d lớn nhất khi $H \equiv M$ hay $d \perp OM$.
Đường thẳng OM có dạng $y = ax$ đi qua $M(-2; -1)$ nên thay $x = -2; y = -1$, ta có

$$-1 = a \cdot (-2) \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Suy ra phương trình đường thẳng OM là $y = \dfrac{1}{2}x$.

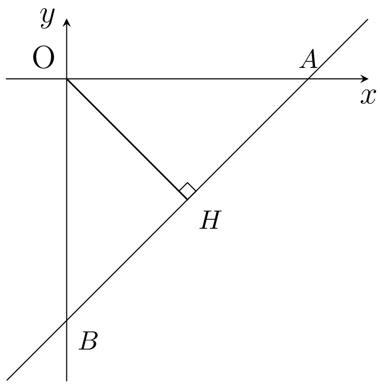
Ta có $d \perp OM \Leftrightarrow m \cdot \dfrac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow m = -2$.

Vậy $m = -2$.

□

Bài 100. Cho điểm M chạy trên đường thẳng $d\colon y = x - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của khoảng cách OM (với O là gốc tọa độ).

Lời giải.



Với $y = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow A(4; 0) \Rightarrow OA = 4$.
Với $x = 0 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow B(0; -4) \Rightarrow OB = 4$.
Vì tam giác OAB vuông tại O nên $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 4\sqrt{2}$.
Diện tích tam giác OAB là $S = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$ (đvdt).
Gọi OH là đường cao kẻ từ O xuống AB. Ta có

$$OH = \frac{2S}{AB} = 2\sqrt{2} \text{ (đvđd)}.$$

Vì $OH \perp HM \Rightarrow OM \geq OH$. Dấu bằng xảy ra khi $M \equiv H$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của $OM = 2\sqrt{2}$.

□

§6 Đề kiểm tra chương 2

1 Đề số 1 (Dành cho học sinh đại trà)

Câu 1. Cho đường thẳng $d: y = 2x - 1$.

1. Tìm tọa độ điểm A thuộc d, biết rằng A có hoành độ bằng -1.
2. Tìm tọa độ điểm B thuộc d, biết B có tung độ bằng 5.

Lời giải.

1. Ta có $x_A = -1$, nên $y_A = 2 \cdot (-1) - 1 = -3$. Vậy $A(-1; -3)$.
2. Ta có $y_B = 5$, nên $2x_B - 1 = 5 \Leftrightarrow x_B = 3$. Vậy $B(3; 5)$.

□

A

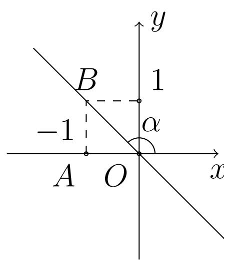
Câu 2. Cho hàm số $y = (m-2)x + 2m - 2$.

1. Tìm m để hàm số đã cho đồng biến.
2. Tìm m để đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $A(2; -8)$.
3. Vẽ đồ thị hàm số đã cho và tính góc giữa đường thẳng với trục Ox khi $m = 1$.

Lời giải.

1. Hàm số đã cho đồng biến khi $m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 2$.
2. Đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $A(2; -8)$ khi
$$-8 = (m-2)2 + 2m - 2 \Leftrightarrow -8 = 4m - 6 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$
3.

Với $m = 0$ ta có $y = -x$.
Do $a = -1 < 0$ nên hàm số nghịch biến.
Đồ thị hàm số là đường thẳng đi qua hai điểm $(0; 0)$ và $(-1; 1)$.
Ta có $\tan \widehat{AOB} = \dfrac{AB}{OA} = 1$, suy ra $\widehat{AOB} = 45^\circ$.
Do đó $\alpha = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.



□

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{(3-2a)}{2018}x + 3a$ (với a là tham số). Tìm a để $f(2017) < f(2019)$.

Lời giải.

Ta thấy $f(x)$ là hàm số có dạng $ax + b$.
Ta có $f(2017) < f(2019)$ khi và chỉ khi hàm số đồng biến, hay

$$\frac{3-2a}{2018} > 0 \Leftrightarrow 3 - 2a > 0 \Leftrightarrow a < \frac{3}{2}.$$

□

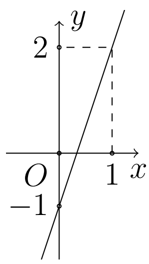
2 Đề số 2 (Dành cho học sinh khá, giỏi)

Câu 1. Cho ba đường thẳng $d_1 : y = 3x - 1$, $d_2 : y = 5 - 3x$ và $d_3 : y = (2m-1)x + 4 - m$.

1. Vẽ đường thẳng d_1.
2. Tìm m để $d_2 \parallel d_3$.
3. Tìm m để hai đường thẳng d_1 và d_3 cắt nhau tại một điểm nằm trên trục Oy.

Lời giải.

1. Đường thẳng d_1 đi qua hai điểm $M(0; -1)$, $N(1; 2)$



2. Ta có
$$d_2 \parallel d_3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 = -3 \\ 4 - m \neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m \neq -1 \end{cases} \quad \text{vô nghiệm.}$$
Vậy không tồn tại m để $d_2 \parallel d_3$.
3. Gọi B là giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_3. Vì B nằm trên Oy nên $B\,(0; y)$, mà $B \in d_1$ nên $y = -1 \Rightarrow B\,(0; -1)$.
Lại có $B \in d_3$ nên suy ra $-1 = 4 - m \Leftrightarrow m = 5$.
Vậy $m = 5$ là giá trị cần tìm.

□

Câu 2. Cho đường thẳng $d : y = (m-1)x + 2m + 1$.

1. Tìm m để $y(2017^3) > y(2019^4)$.
2. Tìm m để đường thẳng d cắt Ox, Oy tại hai điểm A, B sao cho tam giác AOB cân.

Lời giải.

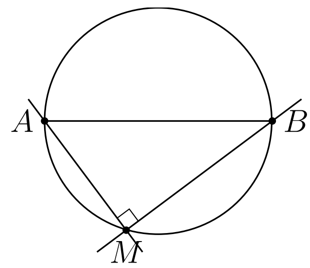
1. Ta thấy hàm số đã cho có dạng $y = ax + b$.
   Ta có $2017^3 < 2019^4$, nên $y\left(2017^3\right) > y\left(2019^4\right) \Leftrightarrow$ Hàm số đã cho nghịch biến, hay
   $$m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1.$$
2. Vì tam giác AOB vuông cân tại O, nên đường thẳng AB (tức là đường thẳng d) vuông góc với phân giác của góc $\widehat{AOB}$, tức là vuông góc với đường thẳng $y = x$ hoặc $y = -x$. Từ đó suy ra
   $$\left[\begin{aligned} & m - 1 = 1 \\ & m - 1 = -1 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & m = 2 \\ & m = 0. \end{aligned}\right.$$
   Thử lại, ta thấy cả hai giá trị này thỏa mãn.
   Vậy $m = 0,\ m = 2$ là các giá trị cần tìm.

□

Câu 3. Cho 2 đường thẳng $d_1\colon y = (m^2 + 1)x - m^2 + 2$, $d_2\colon y = \dfrac{-1}{m^2 + 1}x + \dfrac{3m^2 + 7}{m^2 + 1}$ (m là tham số). Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì $d_1,\ d_2$ luôn cắt nhau tại một điểm M nằm trên một đường tròn cố định.

Lời giải.

Ta thấy điểm $A\left(1; 3\right) \in d_1$ và $B\left(4; 3\right) \in d_2$ với mọi giá trị của m.
Đồng thời $(m^2 + 1)\left(\dfrac{-1}{m^2 + 1}\right) = -1$ nên $d_1 \perp d_2$.
Do đó, d_1 và d_2 luôn cắt nhau tại M và $\widehat{AMB} = 90^0$ nên M luôn nằm trên đường tròn đường kính AB.
Vậy bài toán được chứng minh.



□

Chương 3 Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

§1 Phương trình bậc nhất hai ẩn. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Phương trình và hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

Phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng $ax + by = c$ (1) với a, b không đồng thời bằng 0.

Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ (2) với a, b không đồng thời bằng 0 và a', b' không đồng thời bằng 0.

Cặp số $(x_0; y_0)$ được gọi là nghiệm của (1) nếu $(x_0; y_0)$ thỏa (1).

Cặp số $(x_0; y_0)$ được gọi là nghiệm của (2) nếu $(x_0; y_0)$ thỏa mãn hai phương trình trong (2).

Ví dụ 1. Kiểm tra cặp số sau có phải là nghiệm của phương trình $2x - y - 1 = 0$ hay không?

a) $(1; 1)$;

b) $(0{,}5; 3)$.

Lời giải.

1. Thay $x = 1$ và $y = 1$ vào phương trình, ta có $2 \cdot 1 - 1 - 1 = 0$.
   Vậy $(1; 1)$ là nghiệm của phương trình.
2. Thay $x = 0,5$ và $y = 3$ vào phương trình, ta có $2 \cdot 0,5 - 3 - 1 = -3 \neq 0$.
   Vậy $(0{,}5; 3)$ không là nghiệm của phương trình.

□

1.2 Tập nghiệm của phương trình và hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

Phương trình bậc nhất hai ẩn luôn có vô số nghiệm và được biểu diễn bởi đường thẳng $ax + by = c$ (3).

- Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$ thì (3) có nghiệm tổng quát $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -\dfrac{a}{b}x + \dfrac{c}{b}. \end{cases}$
- Nếu $a \neq 0$ và $b = 0$ thì (3) có nghiệm tổng quát $\begin{cases} x = \dfrac{c}{a} \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$

- Nếu $a = 0$ và $b \neq 0$ thì (3) có nghiệm $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \dfrac{c}{b}. \end{cases}$

Ví dụ 2. Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau

a) $3x - y = 2$;

b) $x + 5y - 3 = 0$;

c) $4x + 0y = -2$;

d) $0x + 2y = 5$.

Lời giải.

a) $3x - y = 2 \Leftrightarrow y = 3x - 2$.
Vậy phương trình có nghiệm tổng quát
$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 3x - 2. \end{cases}$

b) $x + 5y - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -5y + 3$.
Vậy phương trình có nghiệm tổng quát
$\begin{cases} x = -5y + 3 \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$

c) $4x + 0y = -2$.
Phương trình có nghiệm tổng quát
$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$

d) $0x + 2y = 5$.
Phương trình có nghiệm tổng quát
$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \dfrac{5}{2}. \end{cases}$

□

2 Các bài toán nâng cao

Dạng 48. Xét xem cặp số có phải là nghiệm của phương trình không.

- Áp dụng nền tảng kiến thức.
- Thực hành tốt kĩ năng tính toán biểu thức.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Trong các cặp số $(2; 1), (3; -1), (0; 5)$, cặp số nào là nghiệm của phương trình $x + 2y - 4 = 0$.

Lời giải.

- Với $(2; 1)$, ta có $2 + 2 \cdot 1 - 4 = 0 \Rightarrow (2; 1)$ là nghiệm.
- Với $(3; -1)$, ta có $3 + 2 \cdot (-1) - 4 = -3 \neq 0 \Rightarrow (3; -1)$ không là nghiệm.
- Với $(0; 5)$, ta có $0 + 2 \cdot 5 - 4 = 6 \neq 0 \Rightarrow (0; 5)$ không là nghiệm.

□

Dạng 49. Tìm nghiệm tổng quát và biểu diễn tập nghiệm của phương trình

Biến đổi biểu thức để đưa về x theo y hoặc y theo x.

BÀI TẬP MẪU

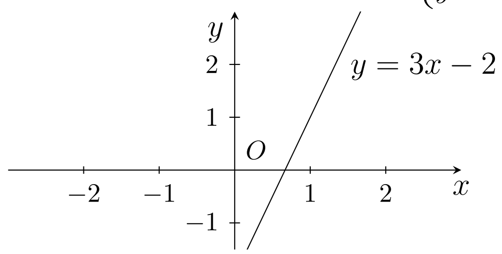
Ví dụ 1. Tìm nghiệm tổng quát và biểu diễn tập nghiệm các phương trình sau

a) $3x - y - 2 = 0$;

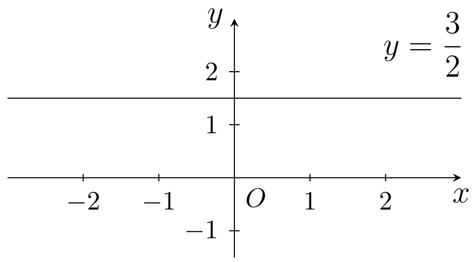
b) $0x + 2y = 3$.

Lời giải.

a) $3x - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 3x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 3x - 2. \end{cases}$



b) $0x + 2y = 3 \Leftrightarrow y = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$



□

Dạng 50. Xác định tham số khi biết nghiệm của phương trình

Thực hành tốt kỹ năng tính biểu thức.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tìm m trong mỗi trường hợp sau

1. $(1; 2)$ là nghiệm của phương trình $mx + y - 5 = 0$;
2. Điểm $A(0; 3)$ thuộc đường thẳng $4x + my - 6 = 0$.

Lời giải.

1. Thay $x = 1$, $y = 2$ vào phương trình ta có $m \cdot 1 + 2 - 5 = 0 \Leftrightarrow m = 3$.
2. Thay $x = 0$, $y = 3$ vào đường thẳng, ta có $4 \cdot 0 + m \cdot 3 = 6 \Leftrightarrow m = 2$.

□

Dạng 51. Đoán nhận số nghiệm của hệ phương trình bậc nhất

Xét hệ $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$. Nếu

- $\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất.
- $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \neq \dfrac{c}{c'}$ thì hệ phương trình vô nghiệm.
- $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Không vẽ đồ thị, hãy đoán nhận số nghiệm các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 2 \\ -2x + 2y = 3. \end{cases}$

Lời giải.

a) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 1. \end{cases}$

Ta có $\dfrac{2}{1} \neq \dfrac{1}{-1}$ nên hệ có nghiệm duy nhất.

b) $\begin{cases} x - y = 2 \\ -2x + 2y = 3. \end{cases}$

Ta có $\dfrac{1}{-2} = \dfrac{-1}{2} \neq \dfrac{2}{3}$ nên hệ vô nghiệm.

□

Dạng 52. Hai hệ phương trình tương đương

- Hai hệ phương trình được gọi là tương đương với nhau nếu chúng có chung tập nghiệm.
- Hai hệ phương trình vô nghiệm cũng được coi là tương đương.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Xét sự tương đương của các cặp hệ phương trình sau

1. (1) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$ và (2) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = 0; \end{cases}$
2. (3) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ và (4) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - y = 0. \end{cases}$

Lời giải.

1. $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$ và $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = 0. \end{cases}$

$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 2y = -(2x - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = 0. \end{cases}$

Vậy (1) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$ và (2) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$ là hai hệ tương đương.

2. (3) $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ và (4) $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x-y=0. \end{cases}$

Ta thấy cặp số $(2;1)$ thỏa (3) nhưng không thỏa (4).

Vậy (3) $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ và (4) $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x-y=0 \end{cases}$ không tương đương.

□

3 Luyện tập

Bài 1. Cho phương trình $mx+(m+1)y=3$.

1. Với $m=1$, xét xem các cặp số sau, cặp số nào là nghiệm của phương trình.

   i) $(3;-2)$; ii) $(0;1)$; iii) $(-1;0)$.

2. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình trên ứng với

   i) $m=-1$; ii) $m=2$.

3. Tìm giá trị m tương ứng khi phương trình nhận các cặp số sau làm nghiệm.

   i) $(3;1)$; ii) $(2;3)$.

Lời giải.

1. Với $m=1$, ta có phương trình $2x+3y=3$.

   i) Thay $x=3,\ y=-2$ vào phương trình, ta có $2\cdot3+3\cdot(-2)=6\neq3$ nên $(3;-2)$ không là nghiệm của phương trình.

   ii) Thay $x=0,\ y=1$ vào phương trình, ta có $2\cdot0+3\cdot1=3$ nên $(0;1)$ là nghiệm của phương trình.

   iii) Thay $x=-1,\ y=0$ vào phương trình, ta có $2\cdot(-1)+3\cdot0=-2\neq3$ nên $(-1;0)$ không là nghiệm của phương trình.

2. Tìm nghiệm tổng quát.

   i) Với $m=-1$ ta có phương trình $-1\cdot x+(-1+1)y=3 \Leftrightarrow x=-3$.

   Vậy phương trình có nghiệm tổng quát $\begin{cases} x=-3 \\ y\in\mathbb{R}. \end{cases}$

   ii) Với $m=2$ ta có phương trình $2x+3y=3 \Leftrightarrow y=-\dfrac{2}{3}x+1$.

   Vậy phương trình có nghiệm tổng quát $\begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ y=-\dfrac{2}{3}x+1. \end{cases}$

   Hoặc: $2x+3y=3 \Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{2}y+\dfrac{3}{2}$.

   Vậy phương trình có nghiệm tổng quát $\begin{cases} x=-\dfrac{3}{2}y+\dfrac{3}{2} \\ y\in\mathbb{R}. \end{cases}$

3. Tìm giá trị m tương ứng khi phương trình nhận các cặp số sau làm nghiệm.

   i) Thay $x = 3,\ y = 1$ vào phương trình, ta có $3m + (m+1)\cdot 1 = 3 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$.

   ii) Thay $x = 2,\ y = 3$ vào phương trình, ta có $2m + (m+1)\cdot 3 = 3 \Leftrightarrow m = 0$.

□

Bài 2. Không vẽ đồ thị, hãy đoán nhận số nghiệm của các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ x + y = 1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ -2x + 4y = 3; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ -6x + 2y = -4; \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x + \dfrac{3}{2}y = 5 \\ 2y = 8. \end{cases}$

Lời giải.

a) $\begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ x + y = 1. \end{cases}$
Do $\dfrac{4}{1} \neq \dfrac{3}{1}$ nên hệ có nghiệm duy nhất.

b) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ -2x + 4y = 3. \end{cases}$
Do $\dfrac{1}{-2} = \dfrac{-2}{4} \neq \dfrac{5}{3}$ nên hệ vô nghiệm.

c) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ -6x + 2y = -4. \end{cases}$
Do $\dfrac{3}{-6} = \dfrac{-1}{2} = \dfrac{2}{-4}$ nên hệ có vô số nghiệm.

d) $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x + \dfrac{3}{2}y = 5 \\ 2y = 8. \end{cases}$
Do $\dfrac{0}{\frac{2}{3}} \neq \dfrac{2}{\frac{3}{2}}$ nên hệ có nghiệm duy nhất.

□

4 Các bài toán nâng cao

Bài 3. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x + ay &= 5 \\ 2x + y &= b \end{cases}$. Tìm a, b để hệ

a) Có nghiệm duy nhất; b) Vô nghiệm; c) Vô số nghiệm.

Lời giải.

1. Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \dfrac{3}{2} \neq \dfrac{a}{1} \Leftrightarrow a \neq \dfrac{3}{2}$.

2. Hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{3}{2} = \dfrac{a}{1} \neq \dfrac{5}{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{2} = \dfrac{a}{1} \\ \dfrac{3}{2} \neq \dfrac{5}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{2} \\ b \neq \dfrac{10}{3}. \end{cases}$

3. Hệ có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{3}{2} = \dfrac{a}{1} = \dfrac{5}{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{2} = \dfrac{a}{1} \\ \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{2} \\ b = \dfrac{10}{3}. \end{cases}$

□

§2 Phương pháp giải hệ phương trình

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Phương pháp thế

Để giải hệ phương trình bằng phương pháp thế ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Biểu thị một ẩn (giả sử ẩn x) theo ẩn còn lại (ẩn y) từ một trong các phương trình của hệ.

Bước 2. Thay biểu thức của x vào phương trình còn lại rồi tìm giá trị của y.

Bước 3. Thay giá trị y vừa tìm được vào biểu thức của x để tìm giá trị của x.

Bước 4. Kết luận nghiệm của hệ phương trình

Ví dụ 1. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế

a) $\begin{cases} 4x+5y=3 \\ x-3y=5. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7x-2y=1 \\ 3x+y=6. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x+3y=1 \\ 2x+y=-1. \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y\sqrt{5}=0 \\ x\sqrt{5}+3y=1-\sqrt{5}. \end{cases}$

Lời giải.

1. $\begin{cases} 4x+5y=3 \\ x-3y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5+3y \\ 4x+5y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5+3y \\ 4(5+3y)+5y=3 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5+3y \\ 17y=-17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5+3y \\ y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5+3\cdot(-1)=2 \\ y=-1. \end{cases}$
Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)=(2;-1)$.

2. $\begin{cases} 7x-2y=1 \\ 3x+y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6-3x \\ 7x-2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6-3x \\ 7x-2(6-3x)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6-3x \\ 13x=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ x=1. \end{cases}$
Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)=(1;3)$.

3. $\begin{cases} 5x+3y=1 \\ 2x+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1-2x \\ 5x+3y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1-2x \\ 5x+3(-1-2x)=1 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-1-2x \\ x=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1-2\cdot(-4)=7 \\ x=-4. \end{cases}$
Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y)=(-4;7)$.

4. $\begin{cases} x+y\sqrt{5}=0 \\ x\sqrt{5}+3y=1-\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y\sqrt{5} \\ x\sqrt{5}+3y=1-\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y\sqrt{5} \\ -y\sqrt{5}\sqrt{5}+3y=1-\sqrt{5} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-y\sqrt{5} \\ y=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{5}{2} \\ y=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{5}{2};\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

□

1.2 Phương pháp cộng đại số

Để giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Nhân cả hai vế của các phương trình trong hệ với số thích hợp (nếu cần) để đưa hệ đã cho về hệ mới, trong đó các hệ số của một ẩn nào đó bằng nhau (hoặc đối nhau).

Bước 2. Trừ (hoặc cộng) từng vế của các phương trình trong hệ mới để khử bớt một ẩn.

Bước 3. Giải phương trình một ẩn vừa thu được.

Bước 4. Thay giá trị tìm được của ẩn này vào một trong các phương trình của hệ để tìm ẩn còn lại.

Bước 5. Kết luận nghiệm của hệ phương trình.

Ví dụ 2. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số.

a) $\begin{cases} x-3y=1 \\ 2x+3y=11. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x-y=1. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x+4y=18 \\ 4x-3y=-1. \end{cases}$

d) $\begin{cases} \sqrt{3}x-\sqrt{2}y=1 \\ \sqrt{2}x+3\sqrt{3}y=4\sqrt{6}. \end{cases}$

Lời giải.

1. $\begin{cases} x-3y=1 \\ 2x+3y=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=12 \\ x-3y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ 4-3y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)=(4;1)$.

2. $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ 2-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)=(2;1)$.

3. $\begin{cases} 3x+4y=18 \\ 4x-3y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x+16y=72 \\ 12x-9y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25y=75 \\ 12x-9y=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ 12x-9\cdot 3=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)=(2;3)$.

4. $\begin{cases}\sqrt{3}x-\sqrt{2}y=1\\ \sqrt{2}x+3\sqrt{3}y=4\sqrt{6}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{6}x-2y=\sqrt{2}\\ \sqrt{6}x+9y=12\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}11y=11\sqrt{2}\\ \sqrt{6}x-2y=\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\sqrt{2}\\ \sqrt{6}x-2\sqrt{2}=\sqrt{2}\end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\sqrt{3}\\ y=\sqrt{2}.\end{cases}$
Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)=\left(\sqrt{3};\sqrt{2}\right)$.

□

1.3 Phương pháp đặt ẩn phụ

Để giải hệ phương trình ta còn dùng phương pháp đặt ẩn phụ thông qua các ẩn đã cho.
Với dạng này ta cần nhận biết được sự tương đồng của các ẩn từ đó chọn ẩn phụ đặt cho hợp lý để đưa về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn rồi áp dụng phương pháp thế hoặc phương pháp cộng đại số để giải. Sau khi tìm được nghiệm theo ẩn mới, sau đó ta thay lại ẩn ban đầu để tìm nghiệm của hệ đã cho.

Ví dụ 3. Giải các hệ phương trình.

a) $\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1\\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=5.\end{cases}$ b) $\begin{cases}\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{y-1}=2\\ \dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{y-1}=1.\end{cases}$ c) $\begin{cases}\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=1\\ \dfrac{1}{6x}+\dfrac{1}{5y}=\dfrac{2}{15}.\end{cases}$

Lời giải.

1. Điều kiện xác định $x\neq 0, y\neq 0$.
Đặt $a=\dfrac{1}{x}, b=\dfrac{1}{y}$, hệ phương trình đã cho trở thành
$\begin{cases}a-b=1\\ 3a+4b=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1+b\\ 3a+4b=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1+b\\ 3(1+b)+4b=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1+b\\ 7b=2\end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases}a=1+\dfrac{2}{7}\\ b=\dfrac{2}{7}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{9}{7}\\ b=\dfrac{2}{7}\end{cases}$. Khi đó ta có $\begin{cases}\dfrac{1}{x}=\dfrac{9}{7}\\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{7}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{7}{9}\\ y=\dfrac{7}{2}.\end{cases}$ (nhận)
Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)=\left(\dfrac{7}{9};\dfrac{7}{2}\right)$.

2. Điều kiện xác định $x\neq 2, y\neq 1$.
Đặt $a=\dfrac{1}{x-2}, b=\dfrac{1}{y-1}$, hệ phương trình đã cho trở thành
$\begin{cases}a-b=2\\ 2a+3b=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2+b\\ 2(2+b)+3b=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2+b\\ 5b=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2+b\\ b=-\dfrac{3}{5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{7}{5}\\ b=-\dfrac{3}{5}.\end{cases}$
Từ đó thay vào ta tìm được $\begin{cases}x=\dfrac{1}{a}+2=\dfrac{19}{7}\\ y=\dfrac{1}{b}+1=\dfrac{2}{5}.\end{cases}$ (nhận)
Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)=\left(\dfrac{19}{7};\dfrac{2}{5}\right)$.

3. Điều kiện xác định $x\neq 0, y\neq 0$.
Đặt $a=\dfrac{1}{x}, b=\dfrac{1}{y}$, hệ phương trình đã trở thành

$$\begin{cases}4a+4b=3\\ \dfrac{1}{6}a+\dfrac{1}{5}b=\dfrac{2}{15}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4a+4b=3\\ 5a+6b=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}20a+20b=15\\ 20a+24b=16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4b=1\\ 20a+20b=15\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}b=\dfrac{1}{4}\\ 20a+20\cdot\dfrac{1}{4}=15\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=\dfrac{1}{4}\\ a=\dfrac{1}{2}.\end{cases} \text{ Khi đó ta có } \begin{cases}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ y=4.\end{cases} \text{ (nhận)}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)=(2;4)$.

□

2 Các dạng toán

Dạng 53. Giải và biện luận hệ phương trình

- Dùng phương pháp thế, biểu diễn 1 ẩn theo ẩn còn lại sau đó đưa về phương trình bậc nhất 1 ẩn.
- Giải và biện luận phương trình bậc nhất 1 ẩn.
- Kết luận tập nghiệm của hệ phương trình.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hệ phương trình (m là tham số)

$$\begin{cases}x+my=1 & (1)\\ (5m+2)x+3y=m-2. & (2)\end{cases}$$

Giải và biện luận hệ phương trình theo m.

Lời giải.

Từ phương trình (1) suy ra $x=1-my$, thay vào phương trình (2) ta được

$$(5m+2)(1-my)+3y=m-2 \Leftrightarrow (5m^2+2m-3)y=4m+4 \Leftrightarrow (m+1)(5m-3)y=4(m+1). \quad (3)$$

- Nếu $m=-1$ thì (3) $\Leftrightarrow 0\cdot y=0$ luôn đúng với mọi $y\in\mathbb{R}$. Vậy phương trình có vô số nghiệm.
- Nếu $m=\dfrac{3}{5}$ thì phương trình (3) $\Leftrightarrow 0\cdot y=\dfrac{-32}{5}$ (vô lý). Vậy hệ phương trình vô nghiệm.
- Nếu $m\neq -1$ và $m\neq\dfrac{3}{5}$ thì (3) $\Leftrightarrow y=\dfrac{4}{5m-3}$, do đó $x=\dfrac{m-3}{5m-3}$. Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{m-3}{5m-3};\dfrac{4}{5m-3}\right)$.

□

Ví dụ 2. Cho hệ phương trình (m là tham số)

$$\begin{cases} 3x + my = 2 & (1) \\ x + (3m-2)y = m. & (2) \end{cases}$$

Giải và biện luận hệ phương trình theo m.

Lời giải.

Từ phương trình (2) suy ra $x = m - (3m-2)y$, thay vào phương trình (1) ta được
$3m - 3(3m-2)y + my = 2 \Leftrightarrow (-8m+6)y = 2 - 3m.\quad (3)$

- Nếu $m = \dfrac{3}{4}$ thì (3) $\Leftrightarrow 0 \cdot y = -\dfrac{1}{4}$ (vô lý) nên hệ phương trình vô nghiệm.
- Nếu $m \neq \dfrac{3}{4}$ thì (3) $\Leftrightarrow y = \dfrac{2-3m}{-8m+6}$, do đó $x = \dfrac{m^2-6m+4}{-8m+6}$.
  Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y) = \left(\dfrac{m^2-6m+4}{-8m+6}; \dfrac{2-3m}{-8m+6}\right)$.

□

Dạng 54. Các bài toán về đường thẳng trong hệ trục tọa độ

- Vẽ 2 đường thẳng trong cùng 1 hệ trục tọa độ.
- Xác định vị trí tương đối của 2 đường thẳng.
- Từ đó kết luận tập nghiệm của hệ phương trình.

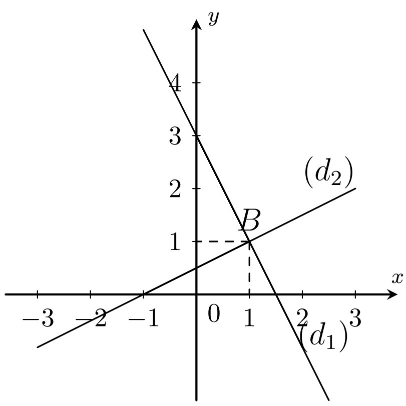
BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Dùng đồ thị giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = -1. \end{cases}$$

Lời giải.

Gọi hai đường thẳng xác định bởi hai phương trình trong hệ đã cho lần lượt là (d_1) và (d_2).
Vẽ (d_1) và (d_2) trong cùng hệ trục tọa độ, ta thấy rằng 2 đường thẳng cắt nhau tại một điểm duy nhất, có tọa độ $B(1;1)$.
Thử lại, ta thấy $(1;1)$ là một nghiệm của hệ.
Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y) = (1;1)$.



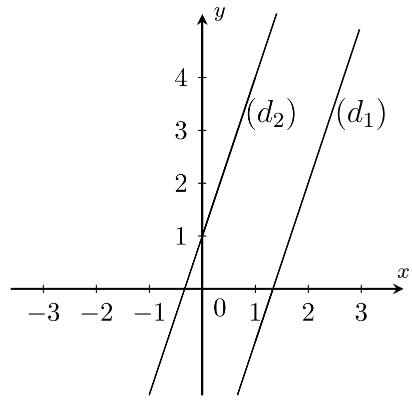
□

Ví dụ 2. Dùng đồ thị giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 3x - y = -1. \end{cases}$$

Lời giải.

Gọi hai đường thẳng xác định bởi hai phương trình trong hệ đã cho lần lượt là (d_1) và (d_2).
Vẽ (d_1) và (d_2) trong cùng hệ trục tọa độ, ta thấy rằng 2 đường thẳng song song.
Thử lại, ta có đường thẳng (d_1) và (d_2) có cùng hệ số góc bằng 3 và tung độ gốc khác nhau nên (d_1) và (d_2) song song với nhau, do đó (d_1) và (d_2) không có điểm chung.
Vậy hệ phương trình vô nghiệm.



□

Dạng 55. Xác định tham số để hệ có nghiệm duy nhất

Xét hệ $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ với các hệ số chứa tham số.

- Đầu tiên, ta lần lượt xét $a' = 0$, $b' = 0$, $c' = 0$ và kiểm tra các tham số ứng với từng trường hợp.
- Sau đó, ta xét $a', b', c' \neq 0$. Khi ấy, hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 2 \\ mx + y = 3 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ có nghiệm duy nhất.

Lời giải.

Xét $m = 0$. Khi đó hệ trở thành $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$, rõ ràng có nghiệm duy nhất.

Xét $m \neq 0$. Khi đó hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\dfrac{1}{m} \neq \dfrac{m}{1} \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

Vậy tất cả các giá trị của tham số m để hệ có nghiệm duy nhất là $m \neq \pm 1$. □

Ví dụ 2. Cho hệ phương trình $\begin{cases} ax - y = 2 \\ x + ay = 3. \end{cases}$

Chứng minh rằng với mọi a thì hệ có nghiệm duy nhất. Tìm nghiệm đó.

Lời giải.

Xét $a=0$. Khi đó hệ trở thành $\begin{cases}-y=2\\ x=3,\end{cases}$ rõ ràng có nghiệm duy nhất là $(3;-2)$.
Xét $a\neq 0$. Khi đó hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\dfrac{a}{1}\neq\dfrac{-1}{a}\Leftrightarrow a^2+1\neq 0$.
Ta thấy rằng $a^2+1\geq 1>0$ với mọi a. Do đó rõ ràng $a^2+1\neq 0$ với mọi a. Vậy hệ luôn có nghiệm duy nhất.
Ta có hệ tương đương

$$\begin{cases}ax-2=y\\ x+ay=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=ax-2\\ x+a(ax-2)=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=ax-2\\ (a^2+1)x=2a+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{3a-2}{a^2+1}\\ x=\dfrac{2a+3}{a^2+1}.\end{cases}$$

Kết luận: Với mọi a, hệ có nghiệm duy nhất là $(x;y)=\left(\dfrac{2a+3}{a^2+1};\dfrac{3a-2}{a^2+1}\right)$. □

Dạng 56. Xác định tham số để hệ vô nghiệm

Xét hệ $\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$ với các hệ số chứa tham số. Ta lần lượt xét $a'=0$, $b'=0$, $c'=0$ và kiểm tra các tham số ứng với từng trường hợp. Sau đó, xét $a',b',c'\neq 0$. Khi ấy, hệ vô nghiệm khi và chỉ khi $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hệ phương trình $\begin{cases}x+y=1\\ ax+2y=0.\end{cases}$
Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hệ vô nghiệm.

Lời giải.

Hệ tương đương $\begin{cases}ax+2y=0\\ x+y=1.\end{cases}$
Do đó hệ vô nghiệm khi và chỉ khi $\dfrac{a}{1}=\dfrac{2}{1}\neq\dfrac{0}{1}\Leftrightarrow a=2$. □

Ví dụ 2. Cho hệ phương trình $\begin{cases}mx+3my=2\\ 2m^2x+6m^2y=m.\end{cases}$
Chứng minh rằng hệ vô nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

Lời giải.

Xét $m=0$. Khi đó hệ trở thành $\begin{cases}0x+0y=2\\ 0x+0y=0\end{cases}$, rõ ràng hệ vô nghiệm.
Xét $m\neq 0$. Khi đó hệ vô nghiệm khi và chỉ khi $\dfrac{m}{2m^2}=\dfrac{3m}{6m^2}\neq\dfrac{2}{m}(*)$
Ta thấy với mọi $m\neq 0$ thì $\dfrac{m}{2m^2}=\dfrac{3m}{6m^2}=\dfrac{1}{2m}$.
Mặt khác $\dfrac{2}{m}-\dfrac{1}{2m}=\dfrac{3}{2m}\neq 0$ với mọi m khác 0. Do đó $\dfrac{2}{m}\neq\dfrac{1}{2m}$ với mọi m khác 0.
Vậy $(*)$ đúng với mọi m khác 0. Kết hợp với trường hợp trên, ta suy ra hệ vô nghiệm với mọi giá trị của tham số m. □

Dạng 57. Xác định tham số để hệ có vô số nghiệm

Xét hệ $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ với các hệ số chứa tham số. Ta lần lượt xét $a'=0$, $b'=0$, $c'=0$ và kiểm tra các tham số ứng với từng trường hợp. Sau đó, xét $a', b', c' \neq 0$. Khi ấy, hệ có vô số nghiệm khi và chỉ khi $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x-y=m \\ mx+\sqrt{2}y=m. \end{cases}$

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ có vô số nghiệm.

Lời giải.

Xét $m=0$. Khi đó, hệ trở thành $\begin{cases} 2x-y=0 \\ \sqrt{2}y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0. \end{cases}$

Vậy khi $m=0$ thì hệ có nghiệm duy nhất. Ta loại giá trị này.

Xét $m \neq 0$. Khi đó hệ có vô số nghiệm khi và chỉ khi $\dfrac{2}{m} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{m}{m}$.

Tương đương $\begin{cases} \dfrac{2}{m} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{2}{m} = 1 \end{cases}$.

Ta thấy hệ này vô nghiệm.

Vậy không có giá trị nào của tham số m để hệ có vô số nghiệm. □

Ví dụ 2. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x+(m^2+1)y=5m-10 \\ -9x+(-3m^2-3)y=-15m+30. \end{cases}$

Chứng minh rằng hệ có vô số nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

Lời giải.

Xét $m=2$. Khi đó hệ trở thành $\begin{cases} 3x+5y=0 \\ -9x-15y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+5y=0 \\ 3x+5y=0 \end{cases}$.

Vậy hệ có vô số nghiệm khi $m=2$.

Xét $m \neq 2$. Khi đó hệ có vô số nghiệm khi và chỉ khi $\dfrac{3}{-9} = \dfrac{m^2+1}{-3m^2-3} = \dfrac{5m-10}{-15m+30} (*)$

Ta thấy với mọi $m \neq 2$ thì $\dfrac{3}{-9} = \dfrac{m^2+1}{-3m^2-3} = \dfrac{5m-10}{-15m+30} = \dfrac{1}{3}$.

Do đó $(*)$ đúng với mọi $m \neq 2$. Kết hợp với trường hợp trên, ta suy ra hệ có vô số nghiệm với mọi giá trị của tham số m. □

Dạng 58. Xác định tham số để hệ có nghiệm thỏa điều kiện khác

Xét hệ $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ với các hệ số chứa tham số.

Nếu yêu cầu của bài toán liên quan đến tính chất của nghiệm (chẳng hạn tìm m để hệ có nghiệm nguyên), tiến hành rút thế hoặc cộng đại số để giải ra cụ thể giá trị của x, y theo tham số. Sau đó, tùy vào yêu cầu của bài toán, tiến hành giải tiếp.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hệ phương $\begin{cases} (a+1)x-y=a+1 \\ x+(a-1)y=2 \end{cases}$ với tham số a. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số a sao cho hệ có nghiệm nguyên.

Lời giải.

Xét $a=1$. Hệ trở thành $\begin{cases} 2x-y=2 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=2. \end{cases}$

Vậy ta nhận giá trị $a=1$.

Xét $a \neq 1$. Khi đó hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\dfrac{a+1}{1} \neq \dfrac{-1}{a-1} \Leftrightarrow a \neq 0$.

Vậy xét $a \neq 0$. Khi đó, hệ tương đương

$$\begin{aligned} &\begin{cases} y=(a+1)x-(a+1) \\ x+(a-1)y=2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} y=(a+1)x-(a+1) \\ x+(a-1)(a+1)(x-1)=2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} y=(a+1)x-(a+1) \\ a^2x+-a^2+1=2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} y=\dfrac{a+1}{a^2} \\ x=1+\dfrac{1}{a^2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Để hệ có nghiệm nguyên thì x phải nguyên. Do đó $1+\dfrac{1}{a^2}$ phải nguyên. Vậy a^2 phải là ước của 1.

Mặt khác, $a^2 \geq 0$. Vậy $a^2=1$. Suy ra a chỉ có thể nhận giá trị ± 1.

Ta không xét $a=1$. Xét $a=-1$, khi đó $y=0, x=2$ (thỏa)

Kết luận: Hệ có nghiệm duy nhất, và nghiệm đó là nghiệm nguyên khi và chỉ khi $a=\pm 1$. □

Ví dụ 2. Cho hệ phương $\begin{cases} 2x+(a-2)y=a+1 \\ (a+2)x-2y=3 \end{cases}$ với tham số a. Tìm tất cả các giá trị của tham số a sao cho hệ có nghiệm duy nhất. Trong các giá trị đó, tìm giá trị của a để tổng $x+y$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

Xét $a = -2$. Khi đó hệ trở thành $\begin{cases} 2x - 4y = -1 \\ -2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = -1 \\ y = \dfrac{-3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-7}{2} \\ y = \dfrac{-3}{2}. \end{cases}$

Vậy khi $a = -2$, hệ có nghiệm duy nhất. Suy ra $x + y = -5$.
Xét $a \neq -2$. Khi đó hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\dfrac{2}{a+2} \neq \dfrac{a-2}{-2} \Leftrightarrow a^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$.
Vậy hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $a \neq 0$.
Xét $a \neq 0$. Hệ tương đương

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 2x + (a-2)y = a + 1 \\ y = \dfrac{a+2}{2}x - \dfrac{3}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 2x + \dfrac{a^2-4}{2}x - \dfrac{3(a-2)}{2} = a + 1 \\ y = \dfrac{a+2}{2}x - \dfrac{3}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} a^2x = 5a - 4 \\ y = \dfrac{a+2}{2}x - \dfrac{3}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x = \dfrac{5a-4}{a^2} \\ y = \dfrac{a^2+3a-4}{a^2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ta có $x + y = \dfrac{a^2+8a-8}{a^2} = -\dfrac{8}{a^2} + \dfrac{8}{a} + 1 = -8\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{2}\right)^2 - 1 \leq -1$.
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{2} = 0$ hay $a = 2$.
Mà khi $a = 2$ thì $x + y = -5 < -1$ nên $a = 2$ là giá trị cần tìm. □

3 Luyện tập

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế

a) $\begin{cases} 7x - 3y = 5 \\ 4x + y = 2. \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{5}x - y = \sqrt{5}(\sqrt{3} - 1) \\ 2\sqrt{3}x + 3\sqrt{5}y = 21. \end{cases}$ c) $\begin{cases} 1{,}7x - 2y = 3{,}8 \\ 2{,}1x + 5y = 0{,}4. \end{cases}$

Lời giải.

a) Thế $y = 2 - 4x$ ở phương trình dưới vào phương trình trên ta được

$$\begin{cases} 7x - 3(2-4x) = 5 \\ y = 2 - 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 19x - 6 = 5 \\ y = 2 - 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{11}{19} \\ y = \dfrac{-6}{19}. \end{cases}$$

Kết luận: Nghiệm của hệ là $\left(\dfrac{11}{19}; \dfrac{-6}{19}\right)$.

b) Thế $y=\sqrt{5}(x+1-\sqrt{3})$ ở phương trình trên vào phương trình dưới ta được

$$\begin{cases} y=\sqrt{5}(x+1-\sqrt{3}) \\ 2\sqrt{3}x+15(x+1-\sqrt{3})=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\sqrt{5}(x+1-\sqrt{3}) \\ (15+2\sqrt{3})x=3(2+5\sqrt{3}) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3(2+5\sqrt{3})}{15+2\sqrt{3}}=\dfrac{3(2+3\sqrt{3})(15-2\sqrt{3})}{225-12}=\dfrac{3\cdot 71\sqrt{3}}{213}=\sqrt{3} \\ y=\sqrt{5}(\sqrt{3}+1-\sqrt{3})=\sqrt{5}. \end{cases}$$

Kết luận: Nghiệm của hệ là $\left(\sqrt{3};\sqrt{5}\right)$.

c) Thế $y=\dfrac{1{,}7x-3{,}8}{2}$ ở phương trình trên vào phương trình dưới ta được

$$\begin{cases} y=\dfrac{1{,}7x-3{,}8}{2} \\ 2{,}1x+5y=0{,}4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1{,}7x-3{,}8}{2} \\ 2{,}1x+5\cdot\dfrac{1{,}7x-3{,}8}{2}=0{,}4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{198}{127} \\ y=\dfrac{-73}{127}. \end{cases}$$

Kết luận: Nghiệm của hệ là $\left(\dfrac{198}{127};\dfrac{-73}{127}\right)$.

$\square$

Bài 2. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số

a) $\begin{cases} 3x+y=3 \\ 2x-y=7. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 8x-7y=5 \\ 12x+13y=-8. \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5(x+2y)=3x-1 \\ 2x+4=3(x-5y)-12. \end{cases}$

Lời giải.

a) Cộng hai phương trình của hệ cho nhau ta được phương trình

$$5x=10\Leftrightarrow x=2.$$

Do đó

$$\begin{cases} x=2 \\ 2x-y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-3. \end{cases}$$

Kết luận: Nghiệm của hệ là $(2;-3)$.

b) Nhân phương trình đầu của hệ cho 3, nhân phương trình sau của hệ cho 2 và trừ theo vế hai phương trình của hệ, ta được

$$\begin{cases} 24x-21y=15 \\ 24x+26y=-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x-7y=5 \\ 47y=-31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-31}{47} \\ x=\dfrac{9}{188}. \end{cases}$$

Kết luận: Nghiệm của hệ là $\left(\dfrac{9}{188};\dfrac{-31}{47}\right)$.

c)
$$\begin{cases} 5(x+2y)=3x-1 \\ 2x+4=3(x-5y)-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+10y=3x-1 \\ 2x+4=3x-15y-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+10y=-1 \\ -x+15y=-16 \end{cases}.$$

Nhân hai vế của phương trình sau cho 2 và cộng với phương trình đầu ta được

$$\begin{cases}2x+10y=-1\\ -2x+30y=-32\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x+15y=-16\\ 40y=-33\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{-33}{40}\\ x=\dfrac{29}{8}.\end{cases}$$

Kết luận: Nghiệm của hệ là $\left(\dfrac{29}{8};\dfrac{-33}{40}\right)$.

□

Bài 3. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp đặt ẩn phụ

a) $\begin{cases}\dfrac{15}{x}-\dfrac{7}{y}=9\\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{9}{y}=35.\end{cases}$

b) $\begin{cases}\dfrac{7}{x-y+2}-\dfrac{5}{x+y-1}=4{,}5\\ \dfrac{3}{x-y+2}+\dfrac{2}{x+y-1}=4.\end{cases}$

Lời giải.

a) Đặt $u=\dfrac{1}{x},v=\dfrac{1}{y}$ $(x\neq 0,y\neq 0)$. Ta được

$$\begin{cases}15u-7v=9\\ 4u+9v=35\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}60u-28v=36\\ 60u+135v=525\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}163v=489\\ 60u-28v=36\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=3\\ u=2.\end{cases}$$

Do đó $x=\dfrac{1}{2},y=\dfrac{1}{3}$.

b) Đặt $u=\dfrac{1}{x-y+2},v=\dfrac{1}{x+y-1},(x-y+2\neq 0,x+y-1\neq 0)$. Ta được

$$\begin{cases}7u-5v=4{,}5\\ 3u+2v=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}14u-10v=9\\ 15u+10v=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}29u=29\\ 7u-5v=4{,}5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=1\\ v=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Do đó

$$\begin{cases}x-y+2=1\\ x+y-1=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{4}\\ y=\dfrac{5}{4}.\end{cases}$$

□

Bài 4. Biện luận theo a hệ phương trình sau

$$\begin{cases}(2a+1)x-y=2\\ x+2y=3.\end{cases}$$

Lời giải.

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$$\frac{2a+1}{1}\neq\frac{-1}{2}\Leftrightarrow a\neq\frac{-3}{4}.$$

Hệ phương trình có vô số nghiệm khi và chỉ khi

$$\frac{2a+1}{1}=\frac{-1}{2}=\frac{2}{3}.$$

Điều này đương nhiên không đúng, do đó hệ trên không có vô số nghiệm.
Hệ phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\frac{2a+1}{1}=\frac{-1}{2}\neq\frac{2}{3}\Rightarrow a=\frac{-3}{4}.$$

□

Bài 5. Trong mặt phẳng Oxy cho ba đường thẳng $(d_1)\colon 2x-y=-1$; $(d_2)\colon x+y=-2$; $(d_3)\colon y=-2x-m$. Xác định m để ba đường thẳng đã cho đồng quy.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}2x-y=-1\\ x+y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=-1.\end{cases}$$

Ba đường thẳng đã cho đồng quy khi và chỉ khi (d_3) đi qua $(-1;-1)$. Tức là

$$-1=-2\cdot(-1)-m\Leftrightarrow m=3.$$

Vậy $m=3$. □

Bài 6.

1. Với giá trị nào của m,n thì hệ $\begin{cases}mx-y=1\\ x+y=n\end{cases}$ có nghiệm $(-1;0)$?

2. Xác định m,n để hệ phương trình $\begin{cases}mx-y=n\\ mx+ny=2\end{cases}$ vô nghiệm.

Lời giải.

a) Hệ có nghiệm $(-1;0)$ khi và chỉ khi cặp số trên thỏa mãn cả hai phương trình của hệ, hay

$$m\cdot(-1)-0=1 \text{ và } -1+0=n.$$

Từ đó $m=-1, n=-1$.

b) Từ phương trình thứ nhất rút ra $y=mx-n$, thay vào phương trình thứ hai ta được

$$mx+n(mx-n)=2\Leftrightarrow m(n+1)x=n^2+2.$$

Để ý rằng $n^2+2>0\,\forall n$, nên phương trình sau cùng vô nghiệm khi và chỉ khi

$$m(n+1)=0\Leftrightarrow m=0 \text{ hoặc } n=-1.$$

□

4 Các bài toán nâng cao

Bài 7. Cho ba đường thẳng

$$(d_1)\colon x-2y=-3;$$
$$(d_2)\colon \sqrt{2}x+y=\sqrt{2}+2;$$
$$(d_m)\colon mx-(1-2m)y=5-m.$$

1. Xác định m để ba đường thẳng (d_1); (d_2) và (d_m) đồng quy.

2. Chứng minh rằng (d_m) luôn đi qua một điểm cố định với mọi m.

Lời giải.

1. Tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x-2y=-3 \\ \sqrt{2}x+y=\sqrt{2}+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2. \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là $M(1;2)$.
Ba đường thẳng (d_1); (d_2) và (d_m) đồng quy khi và chỉ khi

$$M\in(d_m)\Leftrightarrow m\cdot 1-(1-2m)\cdot 2=5-m\Leftrightarrow m=\frac{7}{6}.$$

Vậy với $m=\dfrac{7}{6}$ thì ba đường thẳng (d_1); (d_2) và (d_m) đồng quy.

2. Đặt $E(x_0;y_0)$ là điểm cố định thuộc (d_m). Khi đó

$$\begin{aligned} & mx_0-(1-2m)y_0=5-m, \forall m\in\mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ & (x_0+2y_0+1)\,m=y_0+5, \forall m\in\mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x_0+2y_0+1=0 \\ y_0+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=9 \\ y_0=-5. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy điểm cố định mà (d_m) luôn đi qua là $E(9;-5)$.

□

Bài 8. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} (m-1)x-y=2 \\ mx+y=m. \end{cases}$$

1. Giải hệ phương trình khi $m=\sqrt{2}$.

2. Xác định giá trị của m để hệ có nghiệm $(x;y)$ duy nhất thỏa điều kiện $x+y>0$.

Lời giải.

1. Với $m=\sqrt{2}$ hệ phương trình đã cho trở thành $\begin{cases}\left(\sqrt{2}-1\right)x-y=2\\ \sqrt{2}x+y=\sqrt{2}.\end{cases}$ (I)

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}\left(2\sqrt{2}-1\right)x=2+\sqrt{2}\\ \sqrt{2}x+y=\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}\\ y=\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot\dfrac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{6+5\sqrt{2}}{7}\\ y=\dfrac{-10+\sqrt{2}}{7}.\end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $S=\left\{\left(\dfrac{6+5\sqrt{2}}{7};\dfrac{-10+\sqrt{2}}{7}\right)\right\}$.

2. Ta có $\begin{cases}(m-1)x-y=2\\ mx+y=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2m-1)x=2+m\\ mx+y=m.\end{cases}$

Trường hợp 1. $m=\dfrac{1}{2}$, hệ đã cho vô nghiệm.

Trường hợp 2. $m\neq\dfrac{1}{2}$, hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases}x=\dfrac{m+2}{2m-1}\\ y=m-m\cdot\dfrac{m+2}{2m-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{m+2}{2m-1}\\ y=\dfrac{m^2-3m}{2m-1}.\end{cases}$$

Suy ra $x+y=\dfrac{m+2}{2m-1}+\dfrac{m^2-3m}{2m-1}=\dfrac{m^2-2m+2}{2m-1}$.

Ta cần có $x+y>0\Leftrightarrow\dfrac{m^2-2m+2}{2m-1}>0\Leftrightarrow 2m-1>0$ (do $m^2-2m+2>0$) $\Leftrightarrow m>\dfrac{1}{2}$.

Vậy $m>\dfrac{1}{2}$ thì hệ đã cho có nghiệm $(x;y)$ duy nhất thỏa điều kiện $x+y>0$.

□

Bài 9. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases}x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x+y}=1 & (1)\\ \sqrt{x+y}=x^2-y. & (2)\end{cases}$$

Lời giải.

ĐKXĐ: $x+y>0$.

$$\begin{aligned}(1)&\Leftrightarrow(x+y)^2-1=2xy-\dfrac{2xy}{x+y}\\ &\Leftrightarrow(x+y-1)(x+y+1)=2xy\left(1-\dfrac{1}{x+y)}\right)=\dfrac{2xy(x+y-1)}{x+y}\\ &\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+y-1=0\\ x+y+1=\dfrac{2xy}{x+y}\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1-x\\ x^2+y^2+(x+y)=0\quad(\text{vô nghiệm do } x+y>0).\end{array}\right.\end{aligned}$$

Thay $y = 1 - x$ vào (2) ta được

$$1 = x^2 + x - 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2. \end{array}\right.$$

- ☑ $x = 1 \Rightarrow y = 0$.
- ☑ $x = -2 \Rightarrow y = 3$.

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $S = \{(1;0);(-2;3)\}$. □

§3 Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình

1 Tóm tắt lý thuyết

Các bước giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình:

- *Bước 1.* Lập hệ phương trình:
  - Chọn các ẩn số và đặt điều kiện thích hợp cho các ẩn số.
  - Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo các ẩn và các đại lượng đã biết.
  - Lập hệ phương trình biểu thị sự tương quan giữa các đại lượng.
- *Bước 2.* Giải hệ phương trình vừa thu được.
- *Bước 3.* Kết luận
  - Kiểm tra xem trong các nghiệm của hệ phương trình, nghiệm nào thỏa mãn điều kiện của ẩn.
  - Kết luận bài toán.

2 Các dạng toán

Dạng 59. Toán số học, phần trăm

Ta sử dụng một số kiến thức liên quan sau đây:

1. Biểu diễn số có hai chữ số: $\overline{ab} = 10a + b$ trong đó a là chữ số hàng chục và $0 < a \leq 9$, $a \in \mathbb{N}$, b là chữ số hàng đơn vị và $0 \leq b \leq 9, b \in \mathbb{N}$.
2. Biểu diễn số có ba chữ số: $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ trong đó a là chữ số hàng trăm và $0 < a \leq 9$, $a \in \mathbb{N}$, b là chữ số hàng chục và $0 \leq b \leq 9, b \in \mathbb{N}$, c là chữ số hàng đơn vị và $0 \leq c \leq 9, c \in \mathbb{N}$.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tìm hai số tự nhiên, biết rằng hiệu của số lớn với số nhỏ bằng 1814 và nếu lấy số lớn chia số nhỏ thì được thương là 9 và số dư là 182.

Lời giải.

Gọi x, y là hai số tự nhiên cần tìm, trong đó y là số lớn, x là số bé. Theo đề bài ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} y - x = 1814 \\ y = 9x + 182 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1814 \\ x + 1814 = 9x + 182 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x = 1632 \\ y = x + 1814 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 204 \\ y = 2018. \end{cases}$$

Vậy hai số cần tìm là 204 và 2018. □

Ví dụ 2. Một người mua hai loại hàng và phải trả tổng cộng 2,17 triệu đồng, kể cả thuế giá trị gia tăng (VAT) với mức 10% đối với loại hàng thứ nhất và 8% đối với loại hàng thứ hai. Nếu thuế VAT là 9% đối với cả hai loại hàng thì người đó phải trả tổng cộng 2,18 triệu đồng. Hỏi nếu không kể thuế VAT thì người đó phải trả bao nhiêu cho mỗi loại hàng?

Lời giải.

Giả sử không kể thuế VAT, người đó phải trả x triệu đồng cho loại hàng thứ nhất, y triệu đồng cho loại hàng thứ hai. ($x > 0; y > 0$).
Khi đó số tiền phải trả cho loại hàng thứ nhất (kể cả thuế VAT 10%) là $\dfrac{110}{100}x$ (triệu đồng), cho loại hàng thứ hai với thuế VAT 8% là $\dfrac{108}{100}y$ (triệu đồng).
Ta có phương trình $\dfrac{110}{100}x + \dfrac{108}{100}y = 2{,}17$ hay $1{,}1x + 1{,}08y = 2{,}17$.
Khi thuế VAT là 9% cho cả hai loại hàng thì số tiền phải trả là

$$\frac{109}{100}(x+y) = 2{,}18 \text{ hay } 1{,}09x + 1{,}09y = 2{,}18.$$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} 1{,}1x + 1{,}08y = 2{,}17 \\ 1{,}09x + 1{,}09y = 2{,}18. \end{cases}$
Giải hệ ta được $x = 0{,}5$; $y = 1{,}5$ (thỏa mãn điều kiện).
Vậy loại thứ nhất 0,5 triệu đồng, loại thứ hai 1,5 triệu đồng. □

Dạng 60. Toán năng suất công việc

Năng suất được tính bằng tỉ số giữa khối lượng công việc và thời gian hoàn thành.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Trên một cánh đồng cấy 60 ha lúa giống mới và 40 ha lúa giống cũ. Thu hoạch được tất cả 460 tấn thóc. Hỏi năng suất mỗi loại lúa trên 1 ha là bao nhiêu biết rằng 3 ha trồng lúa mới thu hoạch được ít hơn 4 ha trồng lúa cũ là 1 tấn.

Lời giải.

Gọi năng suất trên 1 ha của lúa giống mới là x (tấn), của lúa giống cũ là y (tấn); $x > 0$, $y > 0$.
Theo đề bài, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 60x + 40y = 460 \\ 4y - 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 60x + 40y = 460 \\ 40y - 30x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 90x = 450 \\ 4y - 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4. \end{cases}$$

Vậy

- ☑ Năng suất 1 ha lúa giống mới là 5 tấn.

- Năng suất 1 ha lúa giống cũ là 4 tấn.

□

Ví dụ 2. Trong tháng đầu hai tổ sản xuất được 800 chi tiết máy. Sang tháng thứ 2 tổ 1 làm vượt mức 15%, tổ 2 vượt mức 20% do đó cuối tháng hai cả hai tổ sản xuất được 945 chi tiết máy. Hỏi trong tháng đầu mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy.

Lời giải.

Gọi x, y lần lượt là số chi tiết máy mà tổ 1 và tổ 2 sản xuất được trong tháng thứ nhất $(x, y \in \mathbb{N})$.
Theo đề bài, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 800 \\ 1,15x + 1,2y = 945 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 300 \\ y = 500. \end{cases}$$

Vậy trong tháng đầu

- tổ 1 sản xuất được 300 chi tiết máy.
- tổ 2 sản xuất được 500 chi tiết máy.

□

Dạng 61. Toán chuyển động

Một số lưu ý khi giải bài toán về chuyển động:

1. Có ba đại lương tham gia là quãng đường s, vận tốc v và thời gian t.
2. Ta có công thức liên hệ giữa ba đại lượng s, v và t là $s = v \cdot t$.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Mỗi ngày ba của bạn An chở bạn ấy từ nhà đến trường mất 30 phút. Vì hôm nay là ngày thi tuyển sinh nên ba bạn ấy muốn con mình đến trường sớm hơn, do đó ông ấy đã tăng vận tốc xe lên 15 (km/h) và đến sớm hơn thường ngày là 10 phút. Hỏi quãng đường từ nhà của bạn An đến trường là bao nhiêu km?

Lời giải.

Gọi vận tốc xe thường ngày là x (km/h), $x > 0$; Quãng đường từ nhà của bạn An đến trường là y (km) $(y > 0)$. Theo đề ta có phương trình $\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2}$.
Do ba bạn An tăng vận tốc lên 15 (km/h) và đến sớm hơn 10 phút nên $\dfrac{y}{x+15} = \dfrac{1}{3}$.
Từ đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{y}{x+15} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 15. \end{cases}$
Vậy quãng đường từ nhà của bạn An đến trường là 15 km. □

Ví dụ 2. Một ô tô đi quãng đường AB với vận tốc 50 km/h rồi đi tiếp quãng đường BC với vận tốc 45 km/h. Biết quãng đường tổng cộng dài 165 km và thời gian ô tô đi trên quãng đường AB ít hơn thời gian đi trên quãng đường BC là 30 phút. Tính thời gian ô tô đi trên mỗi đoạn đường.

Lời giải.

Gọi thời gian ô tô đi trên mỗi đoạn đường lần lượt là x, y ($x, y > 0$, đơn vị: giờ).
Đổi 30 phút $= 0{,}5$ h.
Theo đề bài, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 50x + 45y = 165 \\ y - x = 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1{,}5 \\ y = 2. \end{cases}$$

Vậy thời gian ô tô đi hết quãng đường AB là 1,5 giờ. Thời gian ô tô đi hết quãng đường BC là 2 giờ. □

Ví dụ 3. Một ôtô dự định đi từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu xe chạy mỗi giờ nhanh hơn 10 km thì đến nơi sớm hơn dự định 3 giờ, còn nếu xe chạy chậm lại mỗi giờ 10 km thì đến nơi chậm mất 5 giờ. Tính vận tốc của xe lúc ban đầu, thời gian dự định và chiều dài quãng đường AB.

Lời giải.

Gọi x (km/h) là vận tốc ô tô lúc đầu ($x > 10$), và y (h) là thời gian ô tô dự định đi từ A đến B ($y > 0$).
Theo bài ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} (x + 10)(y - 3) = xy \\ (x - 10)(y + 5) = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 10y = 30 \\ 5x - 10y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 15. \end{cases}$$

Vậy vận tốc xe lúc đầu là 40 km/h. Quãng đường AB dài $40 \cdot 15 = 600$ km. □

Dạng 62. Toán có các yếu tố hình học

Kiến thức cần nhớ:
- Diện tích hình chữ nhật $S = x \cdot y$ (x là chiều rộng; y là chiều dài).
- Diện tích tam giác $S = \dfrac{1}{2} a \cdot h$ (h là chiều cao, a là cạnh đáy tương ứng).
- Độ dài cạnh huyền: $c^2 = a^2 + b^2$(c là cạnh huyền; a, b là các cạnh góc vuông).
- Số đường chéo của một đa giác $\dfrac{n(n-3)}{2}$ (n là số đỉnh).

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Một hình chữ nhật có chu vi bằng 28 cm. Tính chiều dài và chiều rộng của chữ nhật, biết rằng nếu tăng chiều dài thêm 1 cm và tăng chiều rộng thêm 2 cm thì diện tích hình chữ nhật đó tăng thêm 25 cm^2.

Lời giải.

Gọi chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là x, y (cm). Điều kiện $0 < y < x < 14$.
Theo đề bài, chu vi của hình chữ nhật là 28 cm nên ta có phương trình

$$2(x + y) = 28. \tag{3.1}$$

Mặt khác, nếu tăng chiều dài thêm 1 cm và tăng chiều rộng thêm 2 cm thì diện tích hình chữ nhật đó tăng thêm 25 cm^2, nên ta có phương trình

$$(x+1)(y+2) = xy + 25. \tag{3.2}$$

Từ (3.1) và (3.2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2(x+y) = 28 \\ (x+1)(y+2) = xy + 25. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 14 \\ 2x + y = 23. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 5. \end{cases}$$

Vậy chiều dài của hình chữ nhật là 9 cm, chiều rộng của hình chữ nhật là 5 cm. □

Ví dụ 2. Một sân trường hình chữ nhật có chu vi 340 m . Biết 3 lần chiều dài hơn 4 lần chiều rộng là 20 m. Tính chiều dài và chiều rộng của sân trường.

Lời giải.

Gọi chiều rộng của sân trường đã cho là x (m), $(0 < x < 340)$.
Gọi chiều dài của sân trường đã cho là y (m), $(y > x)$.
Khi đó chu vi của sân trường là $2(x+y) = 340$. (1)
Ta có 3 lần chiều dài hơn 4 lần chiều rộng là 20 (m) nên $3y - 4x = 20$. (2)
Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{340}{2} \\ 3y - 4x = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 70 \\ y = 100. \end{cases}$$

Vậy chiều dài của sân trường là 100 m và chiều rộng là 70 m.

□

Dạng 63. Toán việc làm chung làm riêng

Những kiến thức cần nhớ:
- Có ba đại lượng tham gia là: Toàn bộ công việc , phần công việc làm được trong một đơn vị thời gian (năng suất) và thời gian.
- Nếu một đội làm xong công việc trong x giờ thì một ngày đội đó làm được $\dfrac{1}{x}$ công việc.
- Xem toàn bộ công việc là 1.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Hai đội xe chở cát để san lấp một khu đất. Nếu hai đội cùng làm thì trong 18 ngày xong công việc. Nếu đội thứ nhất làm trong 6 ngày, sau đó đội thứ hai làm tiếp 8 ngày nữa thì được 40% công việc. Hỏi mỗi đội làm một mình thì bao lâu xong công việc ?

Lời giải.

Gọi thời gian để đội một làm một mình xong công việc là x (ngày).
Gọi thời gian để đội hai làm một mình xong công việc là y (ngày).
Một ngày đội một làm được $\dfrac{1}{x}$ (công việc).
Một ngày đội hai làm được $\dfrac{1}{y}$ (công việc).

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{18}\\ \dfrac{6}{x}+\dfrac{8}{y}=\dfrac{2}{5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{45}\\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{30}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=45\\ y=30.\end{cases}$$

Vậy đội một làm 45 ngày và đội hai làm 30 ngày. □

Ví dụ 2. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể thì sau 4 giờ 48 phút bể đầy. Nếu vòi I chảy trong 4 giờ, vòi II chảy trong 3 giờ thì cả hai vòi chảy được $\dfrac{3}{4}$ bể. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể.

Lời giải.

Ta có 4 giờ 48 phút bằng $\dfrac{24}{5}$ giờ.
Gọi thời gian vòi một chảy đầy bể là x giờ $(x>0)$.
Gọi thời gian vòi hai chảy đầy bể là y giờ $(y>0)$.
Một giờ vòi một chảy được $\dfrac{1}{x}$ bể.
Một giờ vòi hai chảy được $\dfrac{1}{y}$ bể.
Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{24}\\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=\dfrac{3}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{12}\\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{8}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=12\\ y=8.\end{cases}$$

Vậy thời gian vòi một chảy đầy bể là 12 giờ và vòi hai chảy đầy bể là 8 giờ. □

Dạng 64. Dạng toán khác

Những kiến thức cần nhớ:
- Thể tích dung dịch $V=\dfrac{m}{D}$ (V là thể tích dung dịch, m là khối lượng, D là khối lượng riêng).

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Một dung dịch chứa 30% axit nitơric (tính theo thể tích) và một dung dịch khác chứa 55% axit nitơric. Cần phải trộn thêm bao nhiêu lít dung dịch loại 1 và loại 2 để được 100 lít dung dịch 50% axit nitơric?

Lời giải.

Gọi x,y theo thứ tự là số lít dung dịch loại 1 và 2 $(x,y>0)$.
Lượng axit nitơric chứa trong dung dịch loại 1 là $\dfrac{30}{100}x$ và loại 2 là $\dfrac{55}{100}y$.
Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}x+y=100\\ \dfrac{30}{100}x+\dfrac{55}{100}y=50.\end{cases}$$

Giải hệ này ta được: $x = 20$ và $y = 80$.
Vậy lượng dung dịch loại 1 là 20 lít và loại 2 là 80 lít. □

Ví dụ 2. Hai giá sách có 450 cuốn. Nếu chuyển 50 cuốn từ giá thứ nhất sang giá thứ hai thì số sách trên giá thứ hai bằng $\dfrac{4}{5}$ số sách giá thứ nhất. Tính số sách trên mỗi giá.

Lời giải.

Gọi số sách ở giá thứ nhất là x và số sách giá thứ hai là y, x, y nguyên dương.
Hai giá sách có 450 cuốn nên ta có phương trình $x + y = 450$.
Khi chuyển 50 cuốn từ giá thứ nhất sang giá thứ hai thì số sách ở giá thứ hai bằng $\dfrac{4}{5}$ số sách giá thứ nhất nên ta có: $y + 50 = \dfrac{4}{5}(x - 50)$.
Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 450 \\ y + 50 = \dfrac{4}{5}(x - 50). \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $x = 300$ và $y = 150$.
Vậy số sách ở giá thứ nhất là 300 cuốn, ở giá thứ hai là 150 cuốn. □

Ví dụ 3. Hai anh An và Bình góp vốn cùng kinh doanh. Anh An góp 13 triệu đồng, anh Bình góp 15 triệu đồng. Sau một thời gian kinh doanh lãi được 7 triệu đồng. Lãi được chia đều theo tỉ lệ góp vốn. Tính số lãi mỗi anh được hưởng.

Lời giải.

Gọi số lãi anh Quang và anh Hùng được hưởng lần lượt là x, y (tính bằng triệu đồng) $x, y > 0$.
Vì số lãi củ cả hai anh là 7 triệu đồng nên ta có phương trình $x + y = 7$.
Vì lãi tỉ lệ với vốn đã góp nên $\dfrac{x}{15} = \dfrac{y}{13}$.
Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ \dfrac{x}{15} = \dfrac{y}{13}. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $x = 3{,}75$ và $3{,}25$.
Vậy anh Quang được lãi 3750000 đồng và anh Hùng được lãi 3250000 đồng. □

3 Luyện tập

Bài 1. Cho một số có hai chữ số. Nếu đổi chỗ hai chữ số của nó thì được một số lớn hơn số đã cho là 63. Tổng của số đã cho và số mới tạo thành bằng 99. Tìm số đã cho.

Lời giải.

Gọi số cần tìm là $\overline{ab}$ $a, b \in \mathbb{N}, 0 < a \leq 9, 0 \leq b \leq 9$.
Theo đề, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \overline{ba} - \overline{ab} = 63 \\ \overline{ab} + \overline{ba} = 99 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{ab} = 18 \\ \overline{ba} = 81. \end{cases}$$

Vậy số cần tìm là 18. □

Bài 2. Tìm 2 số biết tổng của chúng bằng 1006 nếu lấy số lớn chia cho số bé được thương là 2 và số dư 124.

Lời giải.

Gọi số lớn là x gọi số bé là y $(x, y \in \mathbb{N})$.
Theo đề, ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 1006 \\ x = 2y + 124. \end{cases}$
Giải ra ta được số lớn là 712 số bé là 294.

□

Bài 3. Người ta trộn hai loại quặng sắt với nhau, một loại chứa 72% sắt, loại thứ hai chứa 58% sắt được một loại quặng chứa 62% sắt. Nếu tăng khối lượng của mỗi loại quặng thêm 15 tấn thì được một loại quặng chứa 62,25% sắt. Tìm khối lượng quặng của mỗi loại đã trộn.

Lời giải.

Gọi khối lượng quặng loại thứ nhất là x tấn, loại thứ hai là y tấn $(x > 0, y > 0)$.
Ta có hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{72}{100}x + \dfrac{58}{100}y = \dfrac{62}{100}(x + y) \\ \dfrac{72}{100}(x + 15) + \dfrac{58}{100}(y + 15) = \dfrac{63{,}25}{100}(x + y + 30) \end{cases}$
hay $\begin{cases} 5x - 2y = 0 \\ 5(x + 15) = 3(y + 15) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 2y = 0 \\ 5x - 3y = -30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 30. \end{cases}$
Vậy khối lượng loại thứ nhất là 12 tấn, loại thứ hai là 30 tấn. □

Bài 4. Tháng đầu hai tổ sản xuất làm được 720 dụng cụ. Sang tháng thứ hai tổ 1 làm vượt mức 12%, tổ hai vượt mức 15% nên cả hai tổ làm được 819 dụng cụ. Hỏi tháng đầu mỗi tổ làm được bao nhiêu dụng cụ?

Lời giải.

Gọi x, y lần lượt là số dụng cụ mà tổ 1 và tổ 2 sản xuất được trong tháng 1 $(x, y \in \mathbb{N})$.
Theo đề bài, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 720 \\ 1,12x + 1,15y = 819 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 300 \\ y = 420. \end{cases}$$

Vậy trong tháng đầu

- ☑ tổ 1 sản xuất được 300 chi tiết máy.
- ☑ tổ 2 sản xuất được 420 chi tiết máy.

□

Bài 5. Hai tổ sản xuất cùng may một loại áo. Nếu tổ thứ 1 may trong 3 ngày, tổ thứ 2 may trong 5 ngày thì cả hai tổ may được 1310 chiếc áo. Biết rằng trong một ngày tổ 1 may được nhiều hơn tổ thứ 2 là 10 chiếc áo. Hỏi mỗi tổ trong 1 ngày may được bao nhiêu chiếc áo?

Lời giải.

Gọi lần lượt số áo tổ 1, tổ 2 may trong 1 ngày là x, y $(x, y \in \mathbb{N}^*)$.
Trong 3 ngày tổ 1 may được là $3x$ (chiếc áo).

Trong 5 ngày tổ 2 may được là $5y$ (chiếc áo).
Theo đề bài, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}3x+5y=1310\\ x-y=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=170\\ y=160.\end{cases}$$

Vậy

- Trong một ngày tổ 1 may được 170 chiếc áo.
- Trong một ngày tổ 2 may được 160 chiếc áo.

□

Bài 6. Một ô tô đi từ A đến B với một vận tốc xác định và trong một thời gian đã định. Nếu vận tốc của ô tô giảm 10 km/h thì thời gian tăng 45 phút. Nếu vận tốc của ô tô tăng 10 km/h thì thời gian giảm 30 phút. Tính vận tốc và thời gian dự định đi của ôtô?

Lời giải.

Gọi vận tốc dự định của ô tô là x (km/h).
Gọi thời gian dự định của ô tô là y (km/h).
Điều kiện: $x>10$; $y>0$,
Quãng đường AB là xy.
Nếu ô tô giảm vận tốc 10 km/h thì thời gian tăng 45 phút $(=\dfrac{3}{4}$ h).
Vậy ta có phương trình: $(x+10)(y-\dfrac{3}{4})=xy\Leftrightarrow 3x-4y=30.$ (1)
Nếu ô tô tăng vận tốc 10 km/h thì thời gian giảm 30 phút $(=\dfrac{1}{2}$ h).
Vậy ta có phương trình $(x+10)(y-\dfrac{1}{2})=xy\Leftrightarrow -x+20y=10.$ (2)
Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}3x-4y=30\\ -x+20y=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=50\\ y=3.\end{cases}$$

Vậy

- Vận tốc dự định của ô tô là 50 km/h.
- Thời gian dự định của ôtô là 3 giờ.

□

Bài 7. Hai ca nô cùng khởi hành từ A đến B cách nhau 85 km và đi ngược chiều nhau. Sau 1 giờ 40 phút thì gặp nhau. Tính vận tốc thật của mỗi ca nô, biết rằng vận tốc ca nô đi xuôi dòng lớn hơn vận tốc ca nô đi ngược dòng là 9 km/h và vận tốc dòng nước là 3 km/h.

Lời giải.

Gọi vận tốc thật của ca nô đi xuôi dòng là x (km/h), vận tốc ca nô đi ngược dòng là y (km/h) $(x,y>3)$.
Đổi 1 giờ 40 phút $=\dfrac{5}{3}$ h.
Theo bài ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}x+3-(y-3)=9\\ \dfrac{5}{3}(x+3)+\dfrac{5}{3}(y-3)=85\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=27\\ y=24.\end{cases}$$

Vậy vận tốc thật của ca nô đi xuôi dòng là 27 (km/h), vận tốc ca nô đi ngược dòng là 24 (km/h). □

Bài 8. Một ô tô dự định đi từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu xe chạy với vận tốc 35 km/h thì sẽ đến chậm 2 giờ so với dự định. Nếu xe chạy với vận tốc 50 km/h thì sẽ đến B sớm hơn 1 giờ so với dự định. Tính quãng đường AB và thời gian dự định đi từ A đến B.

Lời giải.

Gọi quãng đường AB là x (km), thời gian ô tô dự định đi từ A đến B là y (giờ) $(x > 0; y > 1)$.
Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x}{35} - 2 = y \\ y - \dfrac{x}{50} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 350 \\ y = 8. \end{cases}$$

Vậy quãng đường AB là 350 (km), thời gian ô tô dự định đi từ A đến B là 8 (giờ). □

Bài 9. Nhân dịp Lễ giỗ tổ Hùng Vương, một siêu thị điện máy đã giảm giá nhiều mặt hàng để kích cầu mua sắm. Giá niêm yết một tủ lạnh và một máy giặt có tổng số tiền là 25,4 triệu đồng, nhưng trong đợt này giá một tủ lạnh giảm 40% giá bán và giá một máy giặt giảm 25% giá bán nên Cô Lan đã mua một tủ lạnh và một máy giặt trên với tổng số tiền là 16,77 triệu đồng. Hỏi giá mỗi món đồ trên khi chưa giảm giá là bao nhiêu tiền?

Lời giải.

Gọi x, y (triệu đồng) lần lượt là giá bán niêm yết của một tủ lạnh và một máy giặt $(x, y > 0)$.
Giá bán của một tủ lạnh sau khi giảm 40% là $x \cdot 0{,}6$ (triệu đồng).
Giá bán của một tủ lạnh sau khi giảm 25% là $y \cdot 0{,}75$ (triệu đồng).
Ta có hệ phương trình sau $\begin{cases} x + y = 25{,}4 \\ 0{,}6x + 0{,}75y = 16{,}77 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15{,}2 \\ y = 10{,}2. \end{cases}$
Vậy giá bán của một tủ lạnh và một máy giặt khi chưa giảm giá lần lượt là 15,2 triệu đồng và 10,2 triệu đồng. □

Bài 10. Nhằm động viên, khen thưởng các em đạt danh hiệu "học sinh giỏi cấp thành phố" năm học 2017-2018, trường THCS ABC tổ chức chuyến tham quan ngoại khóa tại một điểm du lịch với mức giá ban đầu là 375.000 đồng/người. Biết công ty du lịch giảm 10% chi phí cho mỗi giáo viên và giảm 30% chi phí cho mỗi học sinh. Số học sinh tham gia gấp 4 lần số giáo viên và tổng chi phí tham quan (sau khi giảm giá) là 12.487.500 đồng. Tính số giáo viên và số học sinh đã tham gia chuyến đi.

Lời giải.

Gọi x (người) là số giáo viên tham gia chuyến đi.
Gọi y (người) là số học sinh tham gia chuyến đi $(x, y \in \mathbb{N}^*)$.
Theo đề bài, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x = y \\ 375000x\left(1 - \dfrac{10}{100}\right) + 375000y\left(1 - \dfrac{30}{100}\right) = 12487500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 36. \end{cases}$$

Số giáo viên tham gia chuyến đi là 9 người.
Số học sinh tham gia chuyến đi là 36 người. □

Bài 11. Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi bằng 28 mét và độ dài đường chéo bằng 10 mét. Tính chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật theo đơn vị mét.

Lời giải.

Gọi chiều dài và chiều rộng của mảnh đất lần lượt là x, y ($x \geqslant y > 0$). Chu vi của mảnh đất là 28 mét nên $x + y = 14 \Leftrightarrow y = 14 - x$. Độ dài đường chéo của mảnh đất là 10 mét nên

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 100 &\Leftrightarrow x^2 + (14 - x)^2 = 100 \\ &\Leftrightarrow x = 8 \text{ hoặc } x = 6. \end{aligned}$$

Với $x = 8$, $y = 6$ (thỏa mãn).
Với $x = 6$, $y = 8$ (loại).
Vậy chiều dài của mảnh đất 8 mét, chiều rộng là 6 mét. □

Bài 12. Cho một mảnh vườn hình chữ nhật. Biết rằng nếu giảm chiều rộng đi 3 m và tăng chiều dài thêm 8 m thì diền tích mảnh vườn đó giảm 54 m^2 so với diện tích ban đầu, nếu tăng chiều rộng thêm 2 m và giảm chiều dài đi 4 m thì diện tích mảnh vườn đó tăng 32 m^2 so với diện tích ban đầu. Tính chiều rộng và chiều dài ban đầu của mảnh vườn đó.

Lời giải.

Gọi chiều rộng và chiều dài ban đầu của mảnh vườn hình chữ nhật lần lượt là x, y (điều kiện $y > x > 3$, $y > 4$).
Diện tích ban đầu của mảnh vườn là xy (m^2).
Sau khi giảm chiều rộng 3 m, tăng chiều dài 8 m thì diền tích mảnh vườn đó giảm 54 m^2 so với diện tích ban đầu nên ta có phương trình $xy - (x - 3)(y + 8) = 54$. (1)
Sau khi tăng chiều rộng thêm 2 m và giảm chiều dài đi 4 m thì diện tích mảnh vườn đó tăng 32 m^2 so với diện tích ban đầu nên ta có phương trình $(x + 2)(y - 4) - xy = 32$. (2)
Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy - (x-3)(y+8) = 54 \\ (x+2)(y-4) - xy = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 3y = 30 \\ 2x - y = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 50. \end{cases}$$

Vậy chiều rộng của mảnh vườn là 15 m và chiều dài của mảnh vườn là 50 m. □

Bài 13. Tính ba cạnh của một tam giác vuông ABC vuông tại A biết chu vi tam giác là 12 m và tổng bình phương của ba cạnh bằng 50 m.

Lời giải.

Gọi độ dài cạnh AB là x (m), cạnh AC là y (m) và cạnh BC là z (m).
Theo đầu bài ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z = 50 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 50. \end{cases}$$

Theo định lý Pitago trong tam giác vuông ABC: $x^2 + y^2 = z^2$.
Giải ra ta được $AB = 4$, $AC = 3$, $BC = 5$. □

Bài 14. Hai người thợ cùng làm một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm 3 giờ, người thứ hai làm 6 giờ thì chỉ hoàn thành được 25% công việc. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người hoàn thành công việc trong bao lâu?

Lời giải.

Ta có $25\% = \dfrac{1}{4}$.
Gọi thời gian một mình người thứ nhất hoàn thành công việc là x giờ, ($x > 0$).
Gọi thời gian một mình người thứ hai hoàn thành công việc là y giờ, ($y > 0$).
Trong một giờ người thứ nhất làm được $\dfrac{1}{x}$ công việc.

Trong một giờ người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ công việc.

Hai người cùng làm thì xong trong 16 giờ. Vậy trong 1 giờ cả hai người cùng làm được $\frac{1}{16}$ công việc.

Ta có phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{16}$. (1)

Người thứ nhất làm trong 3 giờ, người thứ hai làm trong 6 giờ thì $25\% = \frac{1}{4}$ công việc. Ta có phương trình $\frac{3}{x}+\frac{6}{y}=\frac{1}{4}$. (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{16}\\ \frac{3}{x}+\frac{6}{y}=\frac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{3}{x}+\frac{3}{y}=\frac{3}{16}\\ \frac{3}{x}+\frac{6}{y}=\frac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{16}\\ \frac{3}{y}=\frac{1}{16}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=24\\ y=48.\end{cases}$$

Vậy nếu làm riêng thì người thứ nhất hoàn thành công việc trong 24 giờ. Người thứ hai hoàn thành công việc trong 48 giờ. □

Bài 15. Hai người thợ cùng sơn cửa cho một ngôi nhà thì 2 ngày xong việc. Nếu người thứ nhất làm trong 4 ngày rồi nghỉ, người thứ hai làm tiếp trong 1 ngày nữa thì xong việc. Hỏi mỗi người làm một mình thì bao lâu xong công việc?

Lời giải.

Gọi thời gian để một mình người thứ nhất hoàn thành công việc là x ($x>2$; ngày).
Gọi thời gian để một mình người thứ hai hoàn thành công việc là y ($y>2$; ngày).

Trong một ngày người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ công việc.

Trong một ngày người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ công việc.

Cả hai người làm xong trong 2 ngày nên trong một ngày cả hai người làm được $\frac{1}{2}$ công việc.

Từ đó ta có phương trình $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$. (1)

Người thứ nhất làm trong 4 ngày rồi người thứ hai làm trong 1 ngày thì xong công việc ta có phương trình: $\frac{4}{x}+\frac{1}{y}=1$. (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\\ \frac{4}{x}+\frac{1}{y}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\\ \frac{3}{x}=\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=6\\ y=3.\end{cases}$$

Vậy người thứ nhất làm một mình xong công việc trong 6 ngày. Người thứ hai làm một mình xong công việc trong 3 ngày. □

Bài 16. Trên một cánh đồng cấy 60 ha lúa giống mới và 40 ha lúa giống cũ, thu hoạch được tất cả 460 tấn thóc. Hỏi năng suất mỗi loại lúa trên một ha là bao nhiêu, biết rằng 3 ha trồng lúa mới thu hoạch được ít hơn 4 ha lúa giống cũ là 1 tấn.

Lời giải.

Gọi năng suất lúa trên một ha giống mới là x (tấn), của lúa giống cũ là y (tấn), $(x > 0; y > 0)$.
Cả hai loại thu được 460 tấn lúa, ta có phương trình $60x + 40y = 460$.
Vì 3 ha giống lúa mới thu hoạch ít hơn 4 ha giống lúa cũ 1 tấn, ta có phương trình $4y - 3x = 1$.
Ta có hệ phương trình
$\begin{cases} 60x + 40y = 460 \\ 4y - 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 4y = 46 \\ -6x + 8y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12y = 48 \\ 4y - 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ 4.4 - 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 5. \end{cases}$
Giá trị $x = 5; y = 4$ thỏa mãn điều kiện bài toán.
Vậy năng suất 1 ha giống mới là 5 tấn. Năng suất 1 ha giống cũ là 4 tấn. □

4 Các bài toán nâng cao

Bài 17. Bài toán có nội dung thực tế:

"Em có tưởng tượng được hai lá phổi (gọi tắt là phổi) của mình chứa khoảng bao nhiêu lít không khí hay không? Dung tích phổi của mỗi người phụ thuộc vào một số yếu tố, trong đó hai yếu tố quan trọng là chiều cao và độ tuổi.

Sau đây là một công thức ước tính dung tích chuẩn phổi của mỗi người:

Nam: $P = 0,057h - 0,022a - 4,23$

Nữ: $Q = 0,041h - 0,018a - 2,69$;

trong đó,

h: chiều cao tính bằng xentimét,

a: tuổi tính bằng năm,

P, Q: dung tích chuẩn của phổi tính bằng lít"...

(*Toán 7*, tập hai, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2017, tr. 29).

Bạn Hùng (nam) 15 tuổi, số đo chiều cao của bạn được biết qua bài toán sau:

Chiều cao của bạn Hùng tính bằng xentimét. Đó là một số tự nhiên có 3 chữ số, trong đó chữ số hàng trăm là 1, chữ số hàng chục kém chữ số hàng đơn vị là 2 và hai lần chữ số hàng chục hơn chữ số hàng đơn vị là 4. Tính dung tích chuẩn phổi của bạn Hùng.

Lời giải.

Gọi chiều cao của Hùng là số $\overline{abc}$ $(a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, a \neq 0)$. Đơn vị là (cm).
Vì chữ số hàng trăm là 1 nên $a = 1$.
Chữ số hàng chục kém chữ số hàng đơn vị là 2 nên: $c - b = 2$ (1).
Vì hai lần chữ số hàng chục hơn chữ số hàng đơn vị là 4 nên: $2b - c = 4$ (2).
Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} c - b = 2 \\ 2b - c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 + b \\ 2b - (2 + b) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 + b \\ b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 6 \\ c = 8 \end{cases} \text{(nhận)}.$$

Nên chiều cao của Hùng là 168 cm.
Áp dụng công thức tính dung tích chuẩn của phổi, ta có dung tích chuẩn phổi của bạn Hùng là

$$P = 0,057.168 - 0,022.15 - 4,23 = 5,016 \text{ lít}.$$

□

Bài 18. Giả sử có một cánh đồng cỏ dày như nhau, mọc cao đều như nhau trên toàn bộ cánh đồng trong suốt thời gian bò ăn cỏ trên cánh đồng ấy.

Biết rằng 9 con bò ăn hết cỏ trên cánh đồng trong 2 tuần, 6 con bò ăn hết cỏ trên cánh đồng trong 4 tuần. Hỏi bao nhiêu con bò ăn hết cỏ trên cánh đồng trong 6 tuần? (mỗi con bò ăn số cỏ như nhau).

Lời giải.

Gọi khối lượng cỏ có sẵn trên cánh đồng trước khi bò ăn cỏ là 1 (đơn vị khối lượng quy ước), khối lượng cỏ mọc thêm trên cánh đồng trong 1 tuần là y (với đơn vị khối lượng nói trên), $y > 0$.
Gọi số bò phải tìm là x con, x nguyên dương. Theo đề bài, ta có 9 con bò ăn trong 2 tuần hết $1 + 2y$ nên mỗi con bò trong 1 tuần ăn hết $\dfrac{1+2y}{18}$.
6 con bò ăn trong 4 tuần hết $1 + 4y$ nên mỗi con bò trong 1 tuần ăn hết $\dfrac{1+4y}{24}$.
x con bò ăn trong 6 tuần hết $1 + 6y$ nên mỗi con bò trong 1 tuần ăn hết $\dfrac{1+6y}{6x}$.
Ta có hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1+2y}{18} = \dfrac{1+4y}{24} & (1) \\ \dfrac{1+4y}{24} = \dfrac{1+6y}{6x} & (2). \end{cases}$
Phương trình (1) cho ta $y = \dfrac{1}{4}$. Thay vào (2) được $x = 5$.
Vậy 5 con bò ăn hết cỏ của cánh đồng trong 6 tuần. □

Bài 19. Một đàn ngựa giá 204 triệu đồng có ba người mua ngựa nhưng mỗi người đều không đủ tiền. Người thứ nhất nói với 2 người kia là mỗi người cho tôi vay một nửa số tiền của mình thì tôi đủ tiền mua. Người thứ hai nói với 2 người kia mỗi người cho tôi vay $\dfrac{1}{3}$ số tiền của mình thì tôi đủ tiền mua đàn ngựa. Người thứ ba nói chỉ các anh cho tôi vay $\dfrac{1}{4}$ số tiền của mình thì đàn ngựa sẽ là của tôi . Hỏi mỗi người có bao nhiêu tiền?

Lời giải.

Gọi số tiền của người thứ nhất có là x triệu đồng, $x > 0$.
Gọi số tiền của người thứ hai có là y triệu đồng, $y > 0$.
Gọi số tiền của người thứ ba có là z triệu đồng, $z > 0$.
Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + \dfrac{y+z}{2} = 204 \\ y + \dfrac{x+z}{3} = 204 \\ z + \dfrac{x+y}{4} = 204. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được: Người thứ nhất có 60 triệu đồng. Người thứ hai có 132 triệu đồng. Người thứ ba có 156 triệu đồng. □

Bài 20. Một cửa hàng điện máy trong ngày khai trương đã bán được 65 quạt điện và 65 nồi cơm điện thuộc cùng một loại. Cửa hàng thu được 55.250.000 đồng từ tiền bán hai sản phẩm trên đây và tính ra lãi được 8.125.000 đồng. Cho biết mỗi quạt điện cửa hàng được lãi 20% trên giá bán, mỗi nồi cơm điện cửa hàng được lãi 10% trên giá bán. Hãy tính giá nhập kho của cửa hàng điện máy cho mỗi loại sản phẩm quạt điện và nồi cơm điện.

Lời giải.

Gọi x, y (đồng) lần lượt là giá bán quạt điện và nồi cơm điện của cửa hàng điện máy.
Theo đề bài, ta có

$$\begin{cases}65(x+y)=55.250.000\\65(0{,}2x+0{,}1y)=8.125.000\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=850.000\\2x+y=1.250.000\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=400.000\\y=450.000.\end{cases}$$

Suy ra, giá nhập kho đối với mỗi quạt điện là $0.8\times 400.000=320.000$ đồng và mỗi nồi cơm điện là $0.9\times 450.000=405.000$ đồng. □

Bài 21. Hai người A và B làm xong công việc trông 72 giờ, còn người A và C làm xong công việc trong đó trong 63 giờ và người B và C làm xong công việc ấy trong 56 giờ. Hỏi nếu mỗi người làm một mình thì trong bao lâu thì trong bao lâu sẽ làm xong công việc. Nếu ba người cùng làm sẽ hoàn thành công việc trong mấy giờ?

Lời giải.

Gọi người A một mình làm xong công việc trong x (giờ), $x>0$ thì mỗi giờ làm được $\dfrac{1}{x}$ (công việc). Người B một mình làm xong công việc trong y (giờ), $y>0$ thì mỗi giờ làm được $\dfrac{1}{y}$ (công việc). Người C một mình làm xong công việc trong z (giờ), $z>0$ thì mỗi giờ làm được $\dfrac{1}{z}$ (công việc). Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{72}\\\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{63}\\\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{56}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{504}{3}=168\\y=\dfrac{504}{4}=126\\z=\dfrac{504}{5}.\end{cases}$

Nếu cả ba người cùng làm thì mỗi giờ làm được $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{12}{504}$ (công việc).

Vậy cả ba người cùng làm sẽ hoàn thành công việc trong $\dfrac{504}{12}=42$ (giờ). □

§4 Ôn tập chương 3

1 Toán trắc nghiệm

Bài 1. Biết $(a;b)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}7x+4y=18\\3x-4y=2\end{cases}$. Tính $S=a+b$.

A. $S=-1$. B. $S=-3$. C. $S=3$. D. $S=5$.

Lời giải.

$$\begin{cases}7x+4y=18\\3x-4y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10x=20\\3x-4y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1.\end{cases}$$

Vậy $S=2+1=3$.
Chọn đáp án C □

Bài 2. Gọi $(x;y)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}2x+7y=1\\3x+5y=-4\end{cases}$. Tính $x^2-xy+2y^2$.

A. 14. B. 8. C. 12. D. 18.

Lời giải.

$$\begin{cases}2x+7y=1\\3x+5y=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x+21y=3\\6x+10y=-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}11y=11\\6x+10y=-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\x=-3.\end{cases}$$

Vậy $x^2-xy+2y^2=14$.
Chọn đáp án A □

Bài 3. Kết luận nào sau đây về tập nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x-2y=5\\-x+2y=1\end{cases}$ là đúng?

A. Hệ có một nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;1)$.
B. Hệ vô nghiệm.
C. Hệ vô số nghiệm $(x\in\mathbb{R};y=-x+3)$.
D. Hệ có một nghiệm duy nhất $(x;y)=(-2;-1)$.

Lời giải.

$$\begin{cases}x-2y=5\\-x+2y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0x+0y=6\\x-2y=5.\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
Chọn đáp án B □

Bài 4. Với giá trị nào của a thì hệ phương trình $\begin{cases}ax+y=1\\x+y=a\end{cases}$ có vô số nghiệm?

A $a = 1$. **B** $a = -1$.
C $a = 1$ hoặc $a = -1$. **D** $a = 2$.

Lời giải.

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + y = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)x = 1 - a \\ x + y = a. \end{cases}$$

Hệ phương trình vô số nghiệm khi và chỉ khi $a - 1 = 0$ suy ra $a = 1$.
Chọn đáp án A □

Bài 5. Biết $(a; b)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 7x - 3y = 5 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 2 \end{cases}$. Tính $S = a + b$.

A $S = -3$. **B** $S = 3$. **C** $S = -5$. **D** $S = 5$.

Lời giải.

$$\begin{cases} 7x - 3y = 5 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 3y = 5 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x - 6y = 10 \\ 9x + 6y = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3. \end{cases}$$

Vậy $S = 2 + 3 = 5$.
Chọn đáp án D □

Bài 6. Với giá trị của m, n thì hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = 1 \\ x + y = n \end{cases}$ nhận cặp số $(-1; 0)$ làm nghiệm. Tính $S = 2m - 3n$.

A $S = 1$. **B** $S = 5$. **C** $S = -5$. **D** $S = -1$.

Lời giải.

Cặp số $(-1; 0)$ là nghiệm của hệ phương trình nên ta có

$$m \cdot (-1) - 0 = 1 \quad \text{và} \quad -1 + 0 = n.$$

Từ đó, $m = -1$ và $n = -1$.
Vậy $S = 2 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1) = 1$.
Chọn đáp án A □

Bài 7. Biết cặp số $(a; b)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3x\sqrt{2} - y = 3 \\ x - 2y\sqrt{2} = -5\sqrt{2} \end{cases}$. Tính $T = a^2 - 2b$.

A 6. **B** -4. **C** 4. **D** 8.

Lời giải.

$$\begin{cases} 3x\sqrt{2} - y = 3 & (1) \\ x - 2y\sqrt{2} = -5\sqrt{2} & (2) \end{cases}$$

Từ (1) rút ra $y = 3x\sqrt{2} - 3$. Thay vào (2) ta có

$$x - 2\sqrt{2}\left(3x\sqrt{2} - 3\right) = -5\sqrt{2} \Rightarrow -11x = -11\sqrt{2} \Rightarrow x = \sqrt{2}.$$

Từ đó tìm được $y = 3$.
Vậy hệ có nghiệm $(a; b) = \left(\sqrt{2}; 3\right)$. Suy ra $T = -4$.
Chọn đáp án B □

Bài 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba đường thẳng $(d_1)\colon 2x-y=-1$; $(d_2)\colon x+y=-2$; $(d_3)\colon y=-2x-m$. Tìm m để ba đường thẳng đã cho đồng quy.

A. 3. B. -3. C. -2. D. 1.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}2x-y=-1\\ x+y=-2.\end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm $x=-1$, $y=-1$.
Vậy giao điểm của hai đường thẳng (d_1), (d_2) là $M(-1;-1)$.
Ba đường thẳng (d_1), (d_2) và (d_3) đồng quy khi và chỉ khi M nằm trên đường thẳng (d_3), tức là M thỏa mãn phương trình $y=-2x-m$.
Ta có $-1=-2\cdot(-1)-m \Leftrightarrow m=3$.
Chọn đáp án A □

Bài 9. Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi là 118m. Nếu giảm chiều dài đi 5m và tăng chiều rộng thêm 3m thì diện tích giảm đi 14 m^2. Tính diện tích của mảnh vườn.

A. 858 m^2. B. 714 m^2. C. 840 m^2. D. 814 m^2.

Lời giải.

Gọi x (mét), y (mét) $(x>0, y>0)$ lần lượt là chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật.
Ta có $x+y=59$ (1)
và $(x-5)\cdot(y+3)=xy-14$ (2)
Từ (1) suy ra $y=59-x$.
Thay vào (2) ta được

$$\begin{aligned} & (x-5)\cdot(62-x)=x(59-x)-14\\ \Leftrightarrow\ & 8x=296\\ \Leftrightarrow\ & x=37.\end{aligned}$$

Với $x=37$ suy ra $y=59-37=22$.
Vậy diện tích hình chữ nhật là $37\cdot 22=814$ m^2.
Chọn đáp án D □

Bài 10. Với giá trị nào của m thì hệ phương trình $\begin{cases}mx+y=2m-1\\(2m+1)x+7y=m+3\end{cases}$ vô nghiệm.

A. $m=5$. B. $m=\dfrac{1}{5}$. C. $m=-\dfrac{1}{5}$. D. $m=-5$.

Lời giải.

$$\begin{cases}mx+y=2m-1\\(2m+1)x+7y=m+3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2m-1-mx\\(5m-1)x=13m-10.\end{cases}$$

Hệ phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $5m-1=0$ và $13m-10\neq 0$.
Suy ra $m=\dfrac{1}{5}$.
Chọn đáp án B □

Bài 11. Với giá trị nào của tham số m thì hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = 2 \\ -3mx + my = m - 3 \end{cases}$ có vô số nghiệm.

Ⓐ $m = -3$. Ⓑ $m = 0$. Ⓒ $m = 3$. Ⓓ $m \neq -3$.

Lời giải.

$\begin{cases} mx + y = 2 \\ -3mx + my = m - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - mx \\ -3mx + m(2 - mx) = m - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - mx \\ \left(-3m - m^2\right) x = -m - 3. \end{cases}$

Hệ phương trình vô số nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} -3m - m^2 = 0 \\ -m - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Bài 12. Tất cả có 120 bó cỏ để làm thức ăn cho 30 con gồm trâu và bò trong một tuần. Biết rằng trong một tuần mỗi con trâu ăn hết 5 bó cỏ, còn mỗi con bò ăn hết 3 bó cỏ. Hỏi có bao nhiêu con trâu?

Ⓐ 25. Ⓑ 10. Ⓒ 15. Ⓓ 20.

Lời giải.

Gọi số con trâu là x và số con bò là y.
Khi đó x, y nguyên, không âm và thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ 5x + 3y = 120. \end{cases}$$

Giải được $x = 15$, $y = 15$. Ta có 15 con trâu và 15 con bò.
Chọn đáp án Ⓒ □

Bài 13. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - (m+3)y = 0 \\ (m-2)x + 4y = m - 1 \end{cases}$. Tìm m để hệ phương trình nhận cặp số $(2; 1)$ làm nghiệm.

Ⓐ $m = -1$. Ⓑ $m = 1$. Ⓒ $m = 2$. Ⓓ $m = -3$.

Lời giải.

Do $(2; 1)$ là nghiệm của hệ phương trình nên

$$\begin{cases} 2 - (m+3) \cdot 1 = 0 \\ (m-2) \cdot 2 + 4 = m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

Chọn đáp án Ⓐ □

Bài 14. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = -1 \\ x + y = -m \end{cases}$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hệ phương trình có duy nhất nghiệm $(x; y)$ thỏa $y^2 = x$.

Ⓐ 0. Ⓑ 2. Ⓒ 1. Ⓓ 3.

Lời giải.

$$\begin{cases} mx + y = -1 & (1) \\ x + y = -m. & (2) \end{cases}$$

Từ (1) ta suy ra $y = -1 - mx$ thay vào (2) ta được $x - 1 - mx = -m \Leftrightarrow (1 - m)x = 1 - m$.
Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $1 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

Khi đó hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = -m - 1. \end{cases}$

Mặt khác, $y^2 = x \Leftrightarrow (-m-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -2. \end{array}\right.$

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án B □

Bài 15. Có bao nhiêu cặp số $(x;y)$ thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} + y + \dfrac{1}{y} = \dfrac{9}{2} \\ xy + \dfrac{1}{xy} = \dfrac{5}{2}. \end{cases}$

A. 2. B. 1. C. 0. D. 4.

Lời giải.

Đặt $x + y = u$, $xy = v$ với $v \neq 0$. Hệ đã cho trở thành $\begin{cases} u + \dfrac{u}{v} = \dfrac{9}{2} & (1) \\ u + \dfrac{1}{v} = \dfrac{5}{2}. & (2) \end{cases}$

Từ (2) ta được $2v^2 - 5v + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = 2 \\ v = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

- Với $v = 2$ ta được $u = 3$. Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$ nên $(x;y)$ là nghiệm của phương trình $X^2 - 3X + 2 = 0$, tức là $(x;y) = (1;2); (2;1)$.
- Với $v = \dfrac{1}{2}$ ta được $u = \dfrac{3}{2}$. Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = \dfrac{3}{2} \\ xy = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ nên $(x;y)$ là nghiệm của phương trình $X^2 - \dfrac{3}{2}X + \dfrac{1}{2} = 0$, tức là $(x;y) = \left(1;\dfrac{1}{2}\right); \left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

Chọn đáp án D □

Bài 16. Biết đường thẳng $y = (a-3)x + b$ đi qua hai điểm $A(1;2)$ và $B(-3;4)$. Tính $a + b$.

A. -5. B. $-\dfrac{5}{2}$. C. $\dfrac{5}{2}$. D. 5.

Lời giải.

Đường thẳng $y = (a-3)x + b$ đi qua hai điểm $A(1;2)$ và $B(-3;4)$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2 = (a-3) + b \\ 4 = -3 \cdot (a-3) + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ -3a + b = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{5}{2} \\ b = \dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

Vậy $a + b = 5$.

Chọn đáp án D □

Bài 17. Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $y = 2x - 3$ và $x - y = 1$.

A. $M(2;1)$. B. $N(4;3)$. C. $P(-3;-4)$. D. $Q(4;-3)$.

Lời giải.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$

Chọn đáp án (A) □

Bài 18. Tìm phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(-2; -6)$ và $B(4; 3)$.

(A) $3x - 2y = 6$. (B) $3x + 2y = -6$. (C) $2x - y = 5$. (D) $-3x - 2y = 18$.

Lời giải.

Giả sử đường thẳng có phương trình $ax + by = c$, từ giả thiết:

- $A(-2; -6)$ thuộc đường thẳng, suy ra:
  $-2a - 6b = c$. (1)
- $B(4; 3)$ thuộc đường thẳng, suy ra:
  $4a + 3b = c$. (2)

Từ (1) và (2) ta được hệ phương trình:

$\begin{cases} -2a - 6b = c \\ 4a + 3b = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a - 6b = c \\ 8a + 6b = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a = 3c \\ 8a + 6b = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{c}{2} \\ 8 \cdot \dfrac{c}{2} + 6b = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{c}{2} \\ b = -\dfrac{c}{3}. \end{cases}$

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình $\dfrac{c}{2} \cdot x - \dfrac{c}{3} \cdot y = c \Leftrightarrow 3x - 2y = 6$.

Chọn đáp án (A) □

Bài 19. Biết phương trình $ax^2 - x + b = 0$ có hai nghiệm lần lượt là $x = -2$ và $x = 3$. Tính $a^2 - 3b + 1$.

(A) -16. (B) -4. (C) 20. (D) 18.

Lời giải.

Với giả thiết:

- $x = -2$ là nghiệm của phương trình nên $4a + 2 + b = 0 \Leftrightarrow 4a + b = -2$. (1)
- $x = 3$ là nghiệm của phương trình nên $a \cdot 3^2 - 3 + b = 0 \Leftrightarrow 9a + b = 3$. (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4a + b = -2 \\ 9a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a = 5 \\ 9a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -6. \end{cases}$$

Vậy $a^2 - 3b + 1 = 20$.

Chọn đáp án (C) □

Bài 20. Một ôtô dự định đi từ A đến B trong một thời gian nhất định. Nếu xe chạy với vận tốc 35 km/h thì đến chậm mất 2 giờ. Nếu xe chạy với vận tốc 50 km/h thì đến sớm hơn 1 giờ. Tính quãng đường AB.

(A) 300 km. (B) 250 km. (C) 320 km. (D) 350 km.

Lời giải.

Gọi x (giờ) là thời gian dự định đi lúc đầu (điều kiện $x > 0$);
y là độ dài quãng đường AB (km) (điều kiện $y > 0$).
Với giả thiết:

☑ Nếu xe chạy với vận tốc 35 km/h thì đến chậm mất 2 giờ, ta được:

$$\frac{y}{35} = x + 2 \Leftrightarrow 35x - y = -70. \qquad (1)$$

☑ Nếu xe chạy với vận tốc 50 km/h thì đến sớm hơn 1 giờ, ta được:

$$\frac{y}{50} = x - 1 \Leftrightarrow 50x - y = 50. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}35x - y = -70\\50x - y = 50\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}15x = 120\\50x - y = 50\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 8\\y = 350.\end{cases}$$

Chọn đáp án D □

Bài 21. Cho hệ phương trình $\begin{cases}x - 2y = -1\\2x - y = -1\end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. Hệ vô nghiệm.
B. Hệ vô số nghiệm.
C. Hệ có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.
D. Hệ có nghiệm $(x; y) = \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases}x - 2y = -1\\2x - y = -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x - 4y = -2\\2x - y = -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3y = -1\\2x - y = -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = \dfrac{1}{3}\\x = -\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Chọn đáp án D □

Bài 22. Cho hệ phương trình sau $\begin{cases}-x + 4y = 6\\3x - 12y = 18\end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. Hệ phương trình vô nghiệm.
B. Hệ phương trình vô số nghiệm.
C. Hệ phương trình có nghiệm duy nhất.
D. Hệ phương trình có nghiệm nguyên.

Lời giải.

Nhận xét $\frac{-1}{3} = \frac{4}{-12} \neq \frac{6}{18}$ nên suy ra hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Chọn đáp án A □

Bài 23. Cho hệ phương trình $\begin{cases}x + y = 1\\2x - 2y = 5\end{cases}$. Nghiệm của hệ phương trình là

A. $\left(\frac{7}{4}; \frac{3}{4}\right)$.
B. $\left(\frac{7}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.
C. $\left(-\frac{7}{4}; \frac{3}{4}\right)$.
D. $(-\frac{3}{4}; \frac{7}{4})$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases}x + y = 1\\2x - 2y = 5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x + y = 1\\x - y = \dfrac{5}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \dfrac{7}{4}\\y = -\dfrac{3}{4}.\end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=\left(\frac{7}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

Chọn đáp án B □

Bài 24. Hãy chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định dưới đây.

A Hai hệ phương trình bậc nhất hai ẩn vô nghiệm thì tương đương với nhau.

B Hai hệ phương trình bậc nhất hai ẩn có vô số nghiệm thì tương đương với nhau.

C Nếu $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ thì hệ phương trình $\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ có vô số nghiệm.

D Nếu $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ thì hệ phương trình $\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ vô nghiệm.

Lời giải.

Hai hệ phương trình bậc nhất hai ẩn có vô số nghiệm thì chưa chắc đã tương đương với nhau.
Chọn đáp án B □

Bài 25. Hệ phương trình nào dưới đây có nghiệm $(x;y)=(2;1)$?

A $\begin{cases}x+2y=4\\2x-y=3\end{cases}$. B $\begin{cases}x-y=3\\3x-4y=2\end{cases}$. C $\begin{cases}7x-3y=5\\4x+y=2\end{cases}$. D $\begin{cases}x+y=1\\x-y=2\end{cases}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases}x+2y=4\\2x-y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+4y=8\\2x-y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5y=5\\2x-y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\x=2.\end{cases}$$

Vậy hệ $\begin{cases}x+2y=4\\2x-y=3\end{cases}$ có nghiệm $(x;y)=(2;1)$.

Chọn đáp án A □

Bài 26. Hệ phương trình $\begin{cases}7x-3y=5\\4x+y=2\end{cases}$ có nghiệm $(x;y)$ là

A $\left(\frac{11}{19};-\frac{6}{19}\right)$. B $(2;1)$. C $(1;1)$. D $\left(\frac{11}{19};\frac{12}{19}\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases}7x-3y=5\\4x+y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x-3y=5\\12x+3y=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}19x=11\\7x-3y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{11}{19}\\y=-\dfrac{6}{19}.\end{cases}$$

Chọn đáp án A □

Bài 27. Cho hệ phương trình $\begin{cases}x+y=4\\2x+2y=m\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A Hệ phương trình có nghiệm với mọi m.

B Hệ phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $m\neq 8$.

C Hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m>4$.

D Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi $m\neq 8$.

Lời giải.

Hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{2}{1} = \dfrac{2}{1} \neq \dfrac{m}{4} \Leftrightarrow m \neq 8$.

Chọn đáp án B □

Bài 28. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = m \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. Hệ phương trình vô nghiệm.
B. Hệ phương trình có vô số nghiệm.
C. Hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m = 3$.
D. Với mọi m, hệ phương trình luôn có nghiệm.

Lời giải.

Nhận xét $\dfrac{1}{2} \neq \dfrac{2}{3} \Rightarrow \forall m$ thì hệ phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Chọn đáp án D □

Bài 29. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} 3x + y = m \\ 6x + 2y = 4 \end{cases}$ có vô số nghiệm.

A. $m = 0$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = 3$.

Lời giải.

Hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm khi và chỉ khi $\dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{m}{4} \Leftrightarrow m = 2$.

Chọn đáp án C □

Bài 30. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 1 \\ 2x + 6y = 3 \end{cases}$ vô nghiệm.

A. $m = 1$. B. $m = 2$.
C. Với mọi m, hệ đã cho luôn vô nghiệm. D. $m = 3$.

Lời giải.

Hệ đã cho vô nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{m}{6} \neq \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow m = 3$.

Chọn đáp án D □

Bài 31. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} 2x + my = 1 \\ 3x + 6y = 3 \end{cases}$ có nghiệm.

A. Không tồn tại giá trị của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm.
B. Với mọi m, phương trình đã cho luôn có nghiệm.
C. $m = 4$.
D. $m \neq 4$.

Lời giải.

Hệ phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{2}{3} \neq \dfrac{m}{6} \Leftrightarrow m \neq 4$.

Chọn đáp án D □

Bài 32. Hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$ có nghiệm $(x; y)$ là

A. $(-1; 1)$. B. $(-5, 6)$. C. $\left(\dfrac{3}{2}; 1\right)$. D. $\left(1; \dfrac{3}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases}2x+5y=8\\2x-3y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8y=8\\2x-3y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\x=\dfrac{3}{2}.\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{3}{2};1\right)$

Chọn đáp án C □

Bài 33. Cặp số $(2;-3)$ là một nghiệm của hệ phương trình nào sau đây?

A $\begin{cases}2x-y=7\\x+2y=-4\end{cases}$. B $\begin{cases}\dfrac{3}{2}x+y=0\\x-y=-1\end{cases}$. C $\begin{cases}0x-2y=6\\2x+0y=1\end{cases}$. D $\begin{cases}2x+y=7\\x-y=5\end{cases}$.

Lời giải.

Nhận xét

- $(2;-3)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}2x-y=7\\x+2y=-4.\end{cases}$
- $(2;-3)$ không phải là nghiệm của phương trình $x-y=-1$.
- $(2;-3)$ không phải là nghiệm của phương trình $2x+0y=1$.
- $(2;-3)$ không phải là nghiệm của phương trình $2x+y=7$.

Chọn đáp án A □

Bài 34. Cặp số $(0;1)$ là nghiệm của hệ phương trình nào dưới đây?

A $\begin{cases}x+y=1\\2x+y=2\end{cases}$. B $\begin{cases}x-y=-1\\x+3y=1\end{cases}$. C $\begin{cases}x+0y=0\\x+y=3\end{cases}$. D $\begin{cases}3x+2y=2\\x+y=1\end{cases}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases}3x+2y=2\\x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3(1-y)+2y=2\\x=1-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\x=0.\end{cases}$$

Vậy $(0;1)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}3x+2y=2\\x+y=1.\end{cases}$

Chọn đáp án D □

Bài 35. Hệ phương trình $\begin{cases}3x+y=m\\x+2y=2m\end{cases}$ có nghiệm $(0;2)$ khi m có giá trị bằng bao nhiêu?.

A $m=0$. B $m=1$. C $m=2$. D $m=3$.

Lời giải.

Cặp số $(0;2)$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho $\Leftrightarrow\begin{cases}3\cdot0+2=m\\0+2\cdot2=2m\end{cases}\Leftrightarrow m=2$.

Chọn đáp án C □

Bài 36. Tìm m để cặp số $(3;0)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} mx+y=3 \\ 2x+3y=6m. \end{cases}$

Ⓐ $m=0$. Ⓑ $m=1$. Ⓒ $m=3$. Ⓓ $m=2$.

Lời giải.

Cặp số $(3;0)$ là nghiệm của hệ phương trình trên $\Leftrightarrow \begin{cases} 3m=3 \\ 6=6m \end{cases} \Leftrightarrow m=1$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Bài 37. Tỉ số của hai số là $3:4$. Nếu giảm số lớn đi 100 và tăng số nhỏ thêm 200 thì tỉ số mới là $5:3$. Giá trị của số lớn bằng bao nhiêu?

Ⓐ 300. Ⓑ 400. Ⓒ 500. Ⓓ 600.

Lời giải.

Gọi số bé là x và số lớn là y $(x<y)$.
Tỉ số của hai số là $3:4$ nên suy ra $\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{4}$. (1)
Theo bài, nếu giảm số lớn 100, tăng số nhỏ 200 thì tỉ số mới la $5:3$, khi đó ta có

$$\frac{x+200}{y-100}=\frac{5}{3}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x}{4}=\dfrac{3}{4} \\ \dfrac{x+200}{y-100}=\dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3y=0 \\ 3x-5y=-1100. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $\begin{cases} x=300 \\ y=400. \end{cases}$

Vậy số lớn bằng 400.
Chọn đáp án Ⓑ □

Bài 38. Một xe tải lớn chở 10 chuyến hàng và một xe nhỏ chở 5 chuyến hàng thì được 60 tấn. Biết rằng 3 chuyến xe lớn chở nhiều hơn 7 chiếc xe nhỏ là 1 tấn. Hỏi xe lớn chở được bao nhiêu tấn hàng một chuyến?

Ⓐ 5 tấn. Ⓑ 4 tấn. Ⓒ 7 tấn. Ⓓ 2 tấn.

Lời giải.

Gọi lượng hàng xe lớn chở được trong một chuyến là x (tấn).
Lượng hàng xe nhỏ chở trong một chuyến là y (tấn).
Theo đề bài, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 10x+5y=60 \\ 3x-7y=1. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $\begin{cases} x=5 \\ y=2. \end{cases}$

Vậy một chuyến xe lớn chở được 5 tấn.

Chọn đáp án Ⓐ □

Bài 39. Hai phân xưởng của nhà máy theo kế hoạch phải làm 300 sản phẩm. Nhưng phân xưởng I đã thực hiện 110% kế hoạch, phân xưởng II thực hiện 120% kế hoạch, do đó đã sản xuất được 340 sản phẩm. Số sản phẩm phân xưởng I làm theo kế hoạch là

A 100. B 200. C 300. D 150.

Lời giải.

Gọi số sản phẩm phân xưởng I làm theo kế hoạch là x (sản phẩm, $x > 0$).
Số sản phẩm phân xưởng II là theo kế hoạch là y (sản phẩm, $y > 0$).
Theo bài ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 300 \\ \dfrac{110x}{100} + \dfrac{120y}{100} = 340 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 300 \\ 11x + 12y = 3400. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $\begin{cases} x = 200 \\ y = 100 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).
Vậy số sản phẩm phân xưởng I làm theo kế hoạch là 200 sản phẩm.
Chọn đáp án B □

Bài 40. Một trường tổ chức cho học sinh đi tham quan bằng ô tô. Nếu xếp mỗi xe 40 học sinh thì còn thừa 5 học sinh. Nếu xếp mỗi xe 41 học sinh thì xe cuối cùng thừa 3 ghế trống. Hỏi nhà trường đã thuê bao nhiêu xe ô tô?

A 6. B 7. C 8. D 9.

Lời giải.

Gọi số học sinh đi tham quan là x (người, $x \in \mathbb{N}^*$) và số ô tô là y (ô tô, $y \in \mathbb{N}^*$).
Theo bài ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 40y + 5 \\ x = 41y - 3. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $\begin{cases} x = 325 \\ y = 8 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).
Vậy nhà trường đã thuê 8 xe ô tô.
Chọn đáp án C □

2 Toán tự luận

Dạng 65. Giải hệ phương trình.

- Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế.
- Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số.
- Giải hệ bằng phương pháp đặt ẩn phụ.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 4y = -1. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 6y = 17 \\ 9x - y = 7. \end{cases}$

c) $\begin{cases}2x-3y=7\\3x+2y=4.\end{cases}$

d) $\begin{cases}\dfrac{1}{2x-1}+\dfrac{4}{y+5}=3\\\dfrac{3}{2x-1}-\dfrac{2}{y+5}=-5.\end{cases}$

Lời giải.

1. $\begin{cases}2x+y=1\\3x+4y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1-2x\\3x+4(1-2x)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1-2x\\-5x=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-1.\end{cases}$
Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=(1;-1)$.

2. $\begin{cases}5x+6y=17\\9x-y=7\end{cases}\Leftarrow\begin{cases}5x+6(9x-7)=17\\y=9x-7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}59x=59\\y=9x-7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2.\end{cases}$
Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=(1;2)$.

3. Ta có hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases}6x-9y=21\\6x+4y=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}13y=-13\\3x+2y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-1\\x=2.\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;-1)$.

4. Xét hệ $\begin{cases}\dfrac{1}{2x-1}+\dfrac{4}{y+5}=3\\\dfrac{3}{2x-1}-\dfrac{2}{y+5}=-5\end{cases}\quad(I)$

Điều kiện $\begin{cases}x\neq\dfrac{1}{2}\\y\neq-5.\end{cases}$

Khi đó, $(I)\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{2x-1}+\dfrac{4}{y+5}=3\\\dfrac{6}{2x-1}-\dfrac{4}{y+5}=-10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{2x-1}+\dfrac{4}{y+5}=3\\\dfrac{7}{2x-1}=-7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=-4.\end{cases}$

So với điều kiện, thỏa mãn.
Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(0;-4)$.

□

Bài 2. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases}3x-2y=9\\2x+y=-1.\end{cases}$

b) $\begin{cases}-x+y=6\\2x+y=-3.\end{cases}$

Lời giải.

1. Ta có $\begin{cases}3x-2y=9\\2x+y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2y=9\\4x+2y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x=7\\2x+y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-3.\end{cases}$
Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=(1;-3)$.

2. Ta có $\begin{cases}-x+y=6\\2x+y=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x=9\\-x+y=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\y=3.\end{cases}$
Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=(-3;3)$.

□

Bài 3. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} \dfrac{-5}{x-1}+\dfrac{1}{y-1}=10 \\ \dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3}{y-1}=-18. \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{x}+2\sqrt{y-1}=5 \\ 4\sqrt{x}-\sqrt{y-1}=2. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2\sqrt{x-2}+\dfrac{y}{y+3}=1 \\ 4\sqrt{x-2}-\dfrac{3y}{y+3}=7. \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{2}{x-2}+\dfrac{1}{y+1}=3 \\ \dfrac{3}{x-2}-\dfrac{2}{y+1}=8. \end{cases}$

e) $\begin{cases} |x+5|-\dfrac{2}{\sqrt{y}-2}=4 \\ |x+5|-\dfrac{1}{\sqrt{y}-2}=3. \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dfrac{9}{\sqrt{2x-1}}-\dfrac{3}{y+1}=2 \\ \dfrac{4}{\sqrt{2x-1}}-\dfrac{1}{y+1}=1. \end{cases}$

Lời giải.

1. Điều kiện $x \neq 1$ và $y \neq 1$.
Đặt $\dfrac{1}{x-1}=u$; $\dfrac{1}{y-1}=v$. Hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} -5u+v=10 \\ u+3v=-18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=5u+10 \\ u+3(5v+10)=-18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=5u+10 \\ 16u=-48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=-3 \\ v=-5. \end{cases}$$

Với $u=-3$; $v=-5$ ta có hệ

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-1}=-3 \\ \dfrac{1}{y-1}=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3(x-1)=1 \\ -5(y-1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x=-2 \\ -5y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ y=\dfrac{4}{5}. \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện, hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{5}\right)$.

2. Điều kiện: $x \geq 0$, $y \geq 1$.
Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{x} \\ b=\sqrt{y-1} \end{cases}$. Điều kiện $a;b \geq 0$. Khi đó hệ phương trình ban đầu trở thành
$\begin{cases} a+2b=5 \\ 4a-b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5-2b \\ 4(5-2b)-b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5-2b \\ -9b=-18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2. \end{cases}$
Do đó $\begin{cases} \sqrt{x}=1 \\ \sqrt{y-1}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y-1=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=5. \end{cases}$
Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(1;5)$.

3. Điều kiện $x \geq 2$, $y \neq -3$. Đặt $a=\sqrt{x-2}$, $b=\dfrac{y}{y+3}$. Thu được
$\begin{cases} 2a+b=1 \\ 4a-3b=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2b=2 \\ 4a-3b=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5b=-5 \\ 2a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-1 \\ a=1. \end{cases}$
Từ đó suy ra

$$\begin{cases}\sqrt{x-2}=1\\ \dfrac{y}{y+3}=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2=1\\ y=-y-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ y=-\dfrac{3}{2}.\end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=\left(3;-\dfrac{3}{2}\right)$.

4. Điều kiện xác định $x\neq 2$ và $y\neq -1$.
Đặt $u=\dfrac{1}{x-2}$ và $v=\dfrac{1}{y+1}$, hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases}2u+v=3\\ 3u-2v=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4u+2v=6\\ 3u-2v=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7u=14\\ v=3-2u\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=2\\ v=-1.\end{cases}$$

Như vậy ta được

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x-2}=2\\ \dfrac{1}{y+1}=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{2}\\ y=-2.\end{cases}\quad\text{(thỏa mãn điều kiện xác định)}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{5}{2};-2\right)$.

5. Điều kiện $y\geq 0; y\neq 4$.
Đặt $a=|x+5|; b=\dfrac{1}{\sqrt{y}-2}(a\geq 0)$.
Ta có hệ $\begin{cases}a-2b=4\\ a+b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{10}{3}\\ b=-\dfrac{1}{3}.\end{cases}$
Ta có $\sqrt{y}-2=-3\Leftrightarrow\sqrt{y}=-1$(vô nghiệm).
Vậy hệ phương trình vô nghiệm.

6. Điều kiện $x>\dfrac{1}{2}$, $y\neq -1$.
Đặt $\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}=a$ và $\dfrac{1}{y+1}=b$, hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases}9a-3b=2\\ 4a-b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{3}\\ b=\dfrac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}=\dfrac{1}{3}\\ \dfrac{1}{y+1}=\dfrac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=5\\ y=2.\end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y)=(5;2)$.

□

Dạng 66. Giải và biện luận hệ phương trình

Biến đổi từ hệ phương trình về phương trình theo ẩn x hoặc y. Từ đó giải và biện luận phương trình một ẩn.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải và biện luận hệ phương trình $\begin{cases} x - my = 2 \\ mx - 4y = m - 2. \end{cases}$

Lời giải.

$(I)\begin{cases} x - my = 2 & (1) \\ mx - 4y = m - 2 & (2). \end{cases}$

Từ (1) ta có $x = my + 2$ thay vào (2) ta được

$$m(my+2) - 4y = m - 2 \Leftrightarrow (m-2)(m+2)y = -(m+2) \quad (3).$$

• Nếu $m = 2$ phương trình (3) trở thành $0y = -4$. Phương trình (3) vô nghiệm, do đó hệ phương trình (I) vô nghiệm.

• Nếu $m = -2$ phương trình (3) trở thành $0y = 0$. Phương trình (3) có vô số nghiệm $y \in \mathbb{R}$, do đó hệ phương trình (I) có vô số nghiệm $\begin{cases} x = -2y + 2 \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$

• Nếu $m \neq \pm 2$ thì phương trình (3) có nghiệm duy nhất $y = \dfrac{-1}{m-2}$.

Do đó hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{4-m}{2-m} \\ y = \dfrac{-1}{m-2}. \end{cases}$

Kết luận

• Với $m \neq \pm 2$ hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{4-m}{2-m} \\ y = \dfrac{-1}{m-2}. \end{cases}$

• Với $m = -2$ hệ phương trình (I) có vô số nghiệm $\begin{cases} x = -2y + 2 \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$

• Với $m = 2$ hệ phương trình (I) vô nghiệm.

Bài 2. Giải và biện luận hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = 4 \\ x - my = 1. \end{cases}$

Lời giải.

Từ phương trình thứ nhất có $y = 4 - mx$, thay vào phương trình thứ hai ta được

$$x - m(4 - mx) = 1 \Leftrightarrow (1 + m^2)x = 1 + 4m \quad (*).$$

Với mọi m, phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{1+4m}{1+m^2} \Rightarrow y = 4 - \dfrac{m(1+4m)}{1+m^2} = \dfrac{4-m}{1+m^2}$.

Kết luận: Với mọi m, hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{1+4m}{1+m^2} \\ y = \dfrac{4-m}{1+m^2}. \end{cases}$ □

Bài 3. Giải và biện luận hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = 2m & (1) \\ x + my = m + 1 & (2). \end{cases}$

Lời giải.

Từ (1) ta có $y = 2m - mx$ thay vào (2) ta được

$$x + m(2m - mx) = m + 1 \quad \Leftrightarrow \quad (1 - m^2)x = -2m^2 + m + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (m-1)(m+1)x = (m-1)(2m+1) \quad (3).$$

• Nếu $m = 1$ phương trình (3) trở thành $0x = 0$. Phương trình (3) có vô số nghiệm $x \in \mathbb{R}$, do đó hệ có vô số nghiệm $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2 - x. \end{cases}$

• Nếu $m = -1$ phương trình (3) trở thành $0x = 2$. Phương trình (3) có vô nghiệm , do đó hệ vô nghiệm.

• Nếu $m = \pm 1$ phương trình (3) có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{2m+1}{m+1}$.

Do đó hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{2m+1}{m+1} \\ y = \dfrac{m}{m+1}. \end{cases}$

Kết luận

• Với $m = \pm 1$ hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{2m+1}{m+1} \\ y = \dfrac{m}{m+1}. \end{cases}$

• Với $m = 1$ hệ có vô số nghiệm $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2 - x. \end{cases}$

• Với $m = -1$ hệ vô nghiệm. □

□

Dạng 67. Xác định tham số để hệ có nghiệm thỏa mãn điều kiện đề bài

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho hệ phương trình $\begin{cases} ax + y = 1 \\ ax + by = -5 \end{cases}$ $(a, b$ là tham số$)$.

Tìm a, b để hệ có nghiệm $(2; -3)$.

Lời giải.

Hệ phương trình có nghiệm $x = 2$ và $y = -3$ khi $\begin{cases} 2a - 3 = 1 \\ 2a - 3b = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3. \end{cases}$

Vậy $a = 2, b = 3$ thì hệ có nghiệm $(2; -3)$. □

Bài 2. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x = 2 \\ mx + y = m^2 + 3 \end{cases}$ $(m$ là tham số$)$.

Tìm m sao cho hệ có nghiệm thỏa mãn $x + y$ là nhỏ nhất.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} x = 2 \\ mx + y = m^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ m \cdot 2 + y = m^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = m^2 - 2m + 3. \end{cases}$

Vậy với mọi m hệ luôn có nghiệm duy nhất $x = 2, y = m^2 - 2m + 3$.

Có $x + y = m^2 - 2m + 5 = (m-1)^2 + 4 \geq 4, \forall m \in \mathbb{R}$.

Suy ra $x + y$ nhỏ nhất bằng 4 khi $m = 1$.

Kết luận: $m = 1$ thì hệ có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn tổng $x + y$ là nhỏ nhất. □

Bài 3. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 3 \\ mx + y = -3. \end{cases}$

Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn $x > 0$?

Lời giải.

Từ phương trình thứ hai ta được $y = -3 - mx$, thay vào phương trình thứ nhất ta được

$$x + m(-3 - mx) = 3 \Leftrightarrow (1 - m^2)x = 3m + 3 \Leftrightarrow (1 - m^2)x = 3(m + 1) \quad (*).$$

Hệ có nghiệm duy nhất khi phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow 1 - m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.
Khi đó $(*)$ có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{3(1+m)}{1-m^2} = \dfrac{3}{1-m}$.
Do điều kiện $x > 0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{1-m} > 0 \Leftrightarrow 1 - m > 0 \Leftrightarrow m < 1$.
Kết luận
Với $m < 1$ và $m \neq -1$ thì hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn $x > 0$. □

Bài 4. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 3y = m \\ 5x - y = 1. \end{cases}$
Tìm m đê hệ có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x > 0;\ y < 0$?

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} 2x + 3y = m \\ 5x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3(5x - 1) = m \\ y = 5x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{m+3}{17} \\ y = \dfrac{5m-2}{17}. \end{cases}$

Hệ có nghiệm thỏa mãn $\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m+3}{17} > 0 \\ \dfrac{5m-2}{17} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m < \dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < \dfrac{2}{5}$. □

Bài 5. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 3m + 3 & (1) \\ 4x - 3y = m - 10 & (2). \end{cases}$
Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất?

Lời giải.

Từ (1) suy ra $x = 3m + 3 - 2y \quad (3)$, thay vào (2) ta được

$$\begin{aligned} 4(3m + 3 - 2y) - 3y = m - 10 &\Leftrightarrow 12m + 12 - 8y - 3y = m - 10 \\ &\Leftrightarrow -11y = -11m - 22 \Leftrightarrow y = m + 2. \end{aligned}$$

Thay $y = m + 2$ vào (3) ta được $x = m - 1$.
Có $x^2 + y^2 = (m-1)^2 + (m+2)^2 = 2m^2 + 2m + 5 = 2\left(m + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{9}{2} \geq \dfrac{9}{2}\ \forall m \in \mathbb{R}$.
Đẳng thức xảy ra khi $m = -\dfrac{1}{2}$.
Vậy $m = -\dfrac{1}{2}$ thì hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. □

2.1 Giải toán bằng cách lập hệ phương trình

Các bước làm tổng quát.

Bước 1. Lập hệ phương trình.

- Chọn ẩn (thường là các đại lượng cần tìm) và đặt điều kiện thích hợp cho chúng.
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo các ẩn và các đại lượng đã biết.

- Lập hệ phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2. Giải hệ phương trình vừa lập.

Bước 3. Kiểm tra xem các nghiệm của hệ có thỏa mãn điều kiện đặt ra hay không, rồi trả lời yêu cầu bài toán.

Dạng 68. Toán số học, phần trăm

- Biểu diễn của một số tự nhiên. Ví dụ số tự nhiên có 3 chữ số có biểu diễn là $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, với điều kiện $a \in \mathbb{N}^*$; b, $c \in \mathbb{N}$; a, b, $c \leq 9$.
- Phép chia có dư $a = b \cdot q + r$. Trong đó a là số bị chia, b là số chia, q là thương và r là số dư.
- Phép tính cộng, trừ, nhân, chia với phần trăm.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết hiệu giữa chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị là 5. Nếu lấy số đã cho chia cho số viết theo thứ tự ngược lại ta được thương là 3 và số dư là 13.

Lời giải.

Gọi số phải tìm là $\overline{xy} = 10x + y$ ($x \in \mathbb{N}^*$; $y \in \mathbb{N}$; x, $y \leq 9$).
Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ 10x + y = 3(10y + x) + 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 1. \end{cases}$$

So với điều kiện ta thấy thỏa mãn.
Vậy số cần tìm là 61. □

Bài 2. Tìm một số có hai chữ số, biết rằng tổng các chữ số của số đó bằng 9 và viết các chữ số theo thứ tự ngược lại thì được một số bằng $\dfrac{2}{9}$ số ban đầu.

Lời giải.

Gọi số phải tìm là $\overline{xy} = 10x + y$ ($x \in \mathbb{N}^*$; $y \in \mathbb{N}$; x, $y \leq 9$).
Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 10y + x = \dfrac{2}{9}(10x + y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 1. \end{cases}$$

So với điều kiện ta thấy thỏa mãn.
Vậy số cần tìm là 81. □

Bài 3. Tháng thứ nhất hai tổ sản xuất được 900 chi tiết máy. Tháng thứ hai tổ một vượt mức 15% và tổ hai vượt mức 10% so với tháng thứ nhất. Vì vậy hai tổ đã sản xuất được 1010 chi tiết máy. Hỏi tháng thứ hai mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy?

Lời giải.

Gọi số chi tiết máy tổ một làm trong tháng thứ nhất là x, số chi tiết máy tổ hai làm trong tháng thứ hai là y (x, $y \in \mathbb{N}^*$).
Số chi tiết máy tổ một làm trong tháng thứ hai là $x + 15\%x = 1{,}15x$.

Số chi tiết máy tổ hai làm trong tháng thứ hai là $y + 10\%y = 1{,}1y$.
Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x + y = 900 \\ 1{,}15x + 1{,}1y = 1010 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 400 \\ y = 500. \end{cases}$$

So với điều kiện ta thấy thỏa.
Vậy trong tháng hai, tổ một làm được $1{,}15x = 460$ chi tiết máy, tổ hai làm được $1{,}1y = 550$ chi tiết máy. □

Dạng 69. Toán năng suất công việc

Năng suất công việc bằng khối lượng công việc chia cho thời gian hoàn thành.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Hai anh em nông dân cùng cày trên một cánh đồng. Mỗi ngày người anh cày hơn người em 10 m^2 đất. Sau ba ngày làm việc, cả hai anh em cày được 930 m^2 đất. Hỏi năng suất mỗi người làm trong một ngày là bao nhiêu?

Lời giải.

Gọi năng suất người anh làm trong một ngày là x, năng suất người em làm trong một ngày là y $(x,\, y > 0)$.
Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x - y = 10 \\ 3x + 3y = 930 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 160 \\ y = 150. \end{cases}$$

So với điều kiện ta thấy thỏa. Vậy năng suất người anh làm trong một ngày là 160 m^2, năng suất người em làm trong một ngày là 150 m^2.

□

Dạng 70. Toán chuyển động

- ☑ Công thức vận tốc, quãng đường, thời gian.
  $v = \dfrac{s}{t}$ hoặc $s = v \cdot t$ hoặc $t = \dfrac{s}{v}$.
  Trong đó v là vận tốc, s là quãng đường, t là thời gian.
- ☑ Các đại lượng phải đổi đơn vị cho phù hợp.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Một khách du lịch đi trên ô tô 5 giờ, sau đó đi tiếp bằng tàu hỏa trong 7 giờ được quãng đường dài 720 km. Hỏi vận tốc của tàu hỏa và ô tô, biết rằng mỗi giờ tàu hỏa đi nhanh hơn ô tô 12 km.

Lời giải.

Gọi vận tốc của ô tô là x (km/h), vận tốc của tàu hỏa là y (km/h) $(x > 0,\, y > 0)$.
Quãng đường khách du lịch đi bằng ô tô là $5x$ (km).
Quãng đường khách du lịch đi bằng tàu hỏa là $7x$ (km).
Theo giả thiết ta có $5x + 7y = 720$.
Do vận tốc tàu hỏa hơn ô tô 12 km nên ta có $y - x = 12$.
Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} y - x = 12 \\ 5x + 7y = 720 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 53 \\ y = 65. \end{cases}$$

So với điều kiện ta thấy thỏa.
Vậy vận tốc tàu hỏa là 65 km/h; vận tốc của ô tô là 53 km/h. □

Bài 2. Một ca nô chạy xuôi dòng sông 108 km rồi chạy ngược dòng 63 km hết tất cả 7 giờ. Một lần khác, ca nô này chạy xuôi dòng 81 km rồi ngược dòng 84 km cũng hết 7 giờ. Hãy tính vận tốc thật của ca nô và vận tốc của dòng nước (vận tốc thật của ca nô và vận tốc dòng nước ở hai lần là như nhau).

Lời giải.

Gọi vận tốc thật của ca nô là x km/h, vận tốc dòng nước là y km/h $(x > y > 0)$.
Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} \dfrac{108}{x+y} + \dfrac{63}{x-y} = 7 \\ \dfrac{81}{x+y} + \dfrac{84}{x-y} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 3. \end{cases}$$

So với điều kiện ta thấy thỏa mãn.
Vậy vận tốc thật của ca nô là 24 km/h, vận tốc của dòng nước là 3 km/h. □

Dạng 71. Toán có các yếu tố hình học

Công thức tính chu vi, diện tích của tam giác, hình thang, hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Một hình thang có diện tích 96 cm^2, chiều cao bằng 8 cm. Tính độ dài các đáy của hình thang, biết rằng chúng hơn kém nhau 10 cm.

Lời giải.

Gọi độ dài đáy lớn là x cm, độ dài đáy bé là y cm $(x > y > 0)$.
Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{(x+y)\cdot 8}{2} = 96 \\ x - y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 17 \\ y = 7. \end{cases}$$

So với điều kiện ta thấy thỏa.
Vậy độ dài đáy lớn là 17 cm, độ dài đáy bé là 7 cm. □

Bài 2. Một khu vườn có chu vi là 40 m. Nếu tăng chiều dài thêm 3 m và tăng chiều rộng thêm 2 m thì diện tích tăng thêm 53 m^2. Tìm kính thước của khu vườn.

Lời giải.

Gọi chiều dài khu vườn là x m, chiều rộng khu vườn là y m $(x > y > 0)$.
Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} (x+y)\cdot 2 = 40 \\ (x+3)(y+2) = xy + 53 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 13 \\ y = 7. \end{cases}$$

So với điều kiện ta thấy thỏa.
Vậy khu vườn có chiều dài là 13 m, chiều rộng là 7 m. □

Dạng 72. Toán làm chung làm riêng

- Dạng này có 3 đại lượng cần quan tâm là toàn bộ công việc, thời gian làm hết công việc đó, phần việc làm được trong một đơn vị thời gian.
- Xem toàn bộ công việc là 1.
- Nếu một đội làm xong công việc trong x ngày thì một ngày đội đó làm được $\dfrac{1}{x}$ công việc.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Hai vòi nước cũng chảy vào một bể cạn thì sau 1 giờ 12 phút bể sẽ đầy. Nếu mở vòi thứ nhất trong 12 phút và vòi thứ hai trong 15 phút thì được $\dfrac{11}{60}$ bể. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu mới đầy bể?

Lời giải.

Gọi thời gian vòi thứ nhất chảy một mình đầy bể là x (giờ), thời gian vòi thứ hai chảy một mình đầy bể là y (giờ) $(x > 0,\ y > 0)$.
Trong một giờ, vòi thứ nhất chảy được $\dfrac{1}{x}$ bể.
Trong một giờ, vòi thứ hai chảy được $\dfrac{1}{y}$ bể.
Trong 1 giờ 12 phút, tức $\dfrac{6}{5}$ giờ, cả hai vòi chảy đầy bể nên ta có $\dfrac{6}{5}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=1$.
Trong 12 phút, tức $\dfrac{1}{5}$ giờ, vòi thứ nhất chảy được $\dfrac{1}{5x}$ bể.
Trong 15 phút, tức $\dfrac{1}{4}$ giờ, vòi thứ hai chảy được $\dfrac{1}{4y}$ bể.
Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases}\dfrac{6}{5}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=1\\ \dfrac{1}{5x}+\dfrac{1}{4y}=\dfrac{11}{60}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ y=3.\end{cases}$$

So với điều kiện ta thấy thỏa mãn.
Vậy vòi thứ nhất chảy một mình đầy bể trong 2 giờ, vòi thứ hai chảy một mình đầy bể trong 3 giờ. □

Bài 2. Để hoàn thành một công việc, hai tổ phải làm chung trong 6 giờ. Sau 2 giờ làm chung thì tổ hai được điều đi làm việc khác, tổ một hoàn thành công việc còn lại trong 10 giờ. Hỏi nếu mỗi tổ làm riêng thì sau bao lâu sẽ làm xong công việc đó?

Lời giải.

Gọi thời gian tổ một làm riêng xong công việc là x (giờ), thời gian tổ hai làm riêng xong công việc là y (giờ) $(x > 0,\ y > 0)$.
Trong một giờ, tổ một làm được $\dfrac{1}{x}$ công việc.
Trong một giờ, tổ hai làm được $\dfrac{1}{y}$ công việc.

Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x}+\dfrac{6}{y}=1 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{10}{x}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=15 \\ y=10. \end{cases}$$

So với điều kiện ta thấy thỏa mãn.
Vậy nếu làm riêng, tổ một xong công việc trong 2 giờ, tổ hai xong công việc trong 3 giờ. □

Dạng 73. Các dạng khác

Dạng ứng dụng thêm kiến thức thực tế, hiểu biết đời sống.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Bạn Trâm có 4 tờ 200000 đồng, 1 tờ 50000 đồng và 4 tờ 10000 đồng. Trâm muốn đổi lấy 25 tờ gồm hai loại 50000 đồng và 20000 đồng. Hỏi bạn Trâm có thể đạt được ý muốn hay không?

Lời giải.

Giả sử Trâm đổi được như mong muốn.
Gọi số tờ tiền loại 50000 là x, số tờ tiền loại 20000 là y $(x,\, y \in \mathbb{N}^*)$.
Do tổng số tờ tiền là 25 nên $x+y=25$.
Do tổng số tiền không thay đổi nên $50000x+20000y=890000$.
Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x+y=25 \\ 50000x+20000y=890000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=25 \\ 5x+2y=89 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=13 \\ y=12. \end{cases}$$

So với điều kiện ta thấy thỏa.
Vậy Trâm đổi được như mong muốn. □

Bài 2. Có 54 con vừa gà vừa mèo. Tất cả có 154 chân. Hỏi có bao nhiêu con gà, bao nhiêu con mèo?

Lời giải.

Gọi số con gà là x con, số con mèo là y con $(x,\, y \in \mathbb{N}^*)$.
Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x+y=54 \\ 2x+4y=154 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=31 \\ y=23. \end{cases}$$

So với điều kiện ta thấy thỏa.
Vậy có 31 con gà, 23 con mèo. □

2.2 Một số bài toán nâng cao

Dạng 74. Giải hệ n phương trình bậc nhất n ẩn với $n=3$, $n=4$

Dùng phương pháp thế hoặc cộng đại số để khử bớt ẩn.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x+y+z=11 \\ 2x-y+z=5 \\ 3x+2y+z=14. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z+t=4 \\ x+y-z-t=8 \\ x-y+z-t=12 \\ x-y-z+t=16. \end{cases}$

Lời giải.

1. $\begin{cases} x+y+z=11 \\ 2x-y+z=5 \\ 3x+2y+z=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=11-x-y \\ x-2y=-6 \\ 2x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=11-x-y \\ -2x+4y=12 \\ 2x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=11-x-y \\ 5y=15 \\ 2x+y=3 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} z=8 \\ y=3 \\ x=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y+z+t=4 \\ x+y-z-t=8 \\ x-y+z-t=12 \\ x-y-z+t=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=4 \\ x+y-z-t=8 \\ x-y+z-t=12 \\ 4x=40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z+t=-6 \\ y-z-t=-2 \\ -y+z-t=2 \\ x=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z+t=-6 \\ 2y=-8 \\ -y+z-t=2 \\ x=10 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} z+t=-2 \\ y=-4 \\ z-t=-2 \\ x=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-2 \\ y=-4 \\ t=0 \\ x=10. \end{cases}$

□

Dạng 75. Giải toán bằng cách lập hệ phương trình

Phân tích kĩ từng ý và áp dụng các bước làm tổng quát.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Lúc 7 giờ, An khởi hành từ A để đến gặp Bích tại B lúc 9 giờ 30 phút. Nhưng đến 9 giờ, An được biết Bích bắt đầu đi từ B để đến C (không nằm trên quãng đường AB) với vận tốc bằng 3,25 lần vận tốc của An. Ngay lúc đó An tăng thêm vận tốc 1 km/h và khi tới B, An đã đi theo đường tắt đến C chỉ dài bằng $\frac{1}{3}$ quãng đường mà Bích đi từ B đến C, do đó An và Bích đến C cùng một lúc. Nếu Bích cũng đi theo đường tắt như An thì Bích đến B trước An là 2 giờ. Tính vận tốc lúc đầu của An.

Lời giải.

Gọi vận tốc lúc đầu của An là x (km/h) ($x>0$).
Vận tốc của Bích là $3{,}25x$ (km/h).
Gọi chiều dài quãng đường tắt BC là y (km) ($y>0$).
Quãng đường Bích đi từ B đến C là $3y$ (km).
Gọi N là vị trí mà An bắt đầu tăng vận tốc.
Quãng đường NB mà An dự định đi trong $\frac{1}{2}$ giờ là $0{,}5x$ (km).
An đi từ N đến C (theo đường tắt) được $0{,}5x+y$ (km) với vận tốc $x+1$ (km/h) hết $\frac{0{,}5x+y}{x+1}$ (giờ).

Trong thời gian đó, Bích đi $3y$ (km) với vận tốc $3{,}25x$ (km/h).
Ta có phương trình thứ nhất

$$\frac{0{,}5x + y}{x+1} = \frac{3y}{3{,}25x}.$$

Nếu Bích đi đường tắt từ B đến C thì chỉ hết $\dfrac{y}{3{,}25x}$ (giờ), ít hơn so với đi theo đường vòng 2 giờ.
Ta có phương trình thứ hai

$$\frac{3y}{3{,}25x} - \frac{y}{3{,}25x} = 2 \Leftrightarrow y = 3{,}25x.$$

Thay $y = 3{,}25x$ vào phương trình thứ nhất ta được $x = 4$.
So với điều kiện ta thấy thỏa.
Vậy vận tốc lúc đầu của An là 4 km/h. $\square$

§5 Đề kiểm tra 1 tiết

1 Đề số 1 (Dành cho học sinh đại trà)

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} 2x - y = -5 \\ 5x + y = -9 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 3\sqrt{5}x - 4y = 15 - 2\sqrt{7} \\ -2\sqrt{5}x + 8\sqrt{7}y = 18 \end{cases}$.

Lời giải.

1. Ta có

$$\begin{cases} 2x - y = -5 \\ 5x + y = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = -5 \\ 7x = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (-2; 1)$.

2. Ta có

$$\begin{cases} 3\sqrt{5}x - 4y = 15 - 2\sqrt{7} \\ -2\sqrt{5}x + 8\sqrt{7}y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\sqrt{5}x - 8y = 30 - 4\sqrt{7} \\ -6\sqrt{5}x + 24\sqrt{7}y = 54 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6\sqrt{5}x - 8y = 30 - 4\sqrt{7} \\ \left(24\sqrt{7} - 8\right) y = 84 - 4\sqrt{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\sqrt{5}x - 8y = 30 - 4\sqrt{7} \\ \left(3\sqrt{7} - 1\right) 8y = 4\left(21 - \sqrt{7}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6\sqrt{5}x - 8y = 30 - 4\sqrt{7} \\ y = \dfrac{21 - \sqrt{7}}{6\sqrt{7} - 2} = \dfrac{\left(21 - \sqrt{7}\right)\left(6\sqrt{7} + 2\right)}{248} = \dfrac{\sqrt{7}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5} \\ y = \dfrac{\sqrt{7}}{2}. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = \left(\sqrt{5}; \dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)$.

□

Bài 2. Tìm m để hệ phương trình sau vô nghiệm

$$\begin{cases} mx + 2y = -2 \\ 3x - y = 5 \end{cases}.$$

Lời giải.

Hệ phương trình $\begin{cases} mx + 2y = -2 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m}{3} = \dfrac{2}{-1} \\ \dfrac{m}{3} \neq \dfrac{-2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow m = -6.$

Vậy $m = -6$ là giá trị cần tìm. □

Bài 3. Một trường chuyên tuyển 70 học sinh vào hai lớp 10 Toán và lớp 10 Tin. Biết rằng nếu chuyển 5 học sinh của lớp 10 Toán sang lớp 10 Tin thì số học sinh của hai lớp bằng nhau. Tính số học sinh ban đầu của mỗi lớp.

Lời giải.

Gọi x (học sinh) là số học sinh ban đầu của lớp 10 Toán ($x \in \mathbb{N}^*, x < 70$).
Gọi y (học sinh) là số học sinh ban đầu của lớp 10 Tin ($y \in \mathbb{N}^*, y < 70$).
Tổng số học sinh của 2 lớp là 70 nên ta có $x + y = 70 \quad (1)$.
Số học sinh lớp 10 Toán lúc sau là $x - 5$ (học sinh).
Số học sinh lớp 10 Tin lúc sau là $y + 5$ (học sinh).
Theo đề bài ta có $x - 5 = y + 5$ hay $x - y = 10 \qquad (2)$.
Từ (1) và (2) ta có hệ

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ x - y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 70 \\ 2x = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \text{ (thỏa điều kiện)} \\ y = 30 \text{ (thỏa điều kiện)}. \end{cases}$$

Vậy số học sinh ban đầu của lớp 10 Toán là 40 học sinh, số học sinh ban đầu của lớp 10 Tin là 30 học sinh. □

Bài 4. Tìm $a, b \in \mathbb{R}$ để đường thẳng $y = ax + b$ (d) đi qua hai điểm $A(2; 2), B(-1; 5)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} A \in (d) \\ B \in (d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 2 \\ -a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = -3 \\ -a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4. \end{cases}$$

Vậy $a = -1, b = 4$ là giá trị cần tìm. □

2 Đề số 2 (Dành cho học sinh giỏi)

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} \dfrac{3}{2x - y} - \dfrac{6}{x + y} = -1 \\ \dfrac{1}{2x - y} - \dfrac{1}{x + y} = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \dfrac{xy}{4x + 3y} = \dfrac{4}{11} \\ \dfrac{xy}{2x + y} = \dfrac{4}{5} \end{cases}$.

Lời giải.

1. Đặt $a = \dfrac{1}{2x - y}, b = \dfrac{1}{x + y}$ với $(2x \neq y, x \neq -y)$, hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} 3a - 6b = -1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b - 6b = -1 \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Khi đó ta có

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2x - y} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{x + y} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 6 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ (thỏa điều kiện)} \\ y = 1 \text{ (thỏa điều kiện)}. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (2; 1)$.

2. Nhận thấy $(x; y) = (0; 0)$ không là nghiệm của hệ phương trình.

Do đó $\begin{cases} \dfrac{xy}{4x+3y} = \dfrac{4}{11} \\ \dfrac{xy}{2x+y} = \dfrac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4x+3y}{xy} = \dfrac{11}{4} \\ \dfrac{2x+y}{xy} = \dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{y} + \dfrac{3}{x} = \dfrac{11}{4} \\ \dfrac{2}{y} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{4}. \end{cases}$

Đặt $a = \dfrac{1}{x}, b = \dfrac{1}{y}$, với $(x \neq 0, y \neq 0)$ hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} 3a + 4b = \dfrac{11}{4} \\ a + 2b = \dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 4b = \dfrac{11}{4} \\ 2a + 4b = \dfrac{10}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 4b = \dfrac{11}{4} \\ a = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \\ b = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Khi đó ta có

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \\ y = 2 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (4; 2)$.

□

Bài 2. Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số m

$$\begin{cases} -2mx + y = 5 \\ mx + 3y = 1 \end{cases}.$$

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} -2mx + y = 5 \\ mx + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6mx + 3y = 15 \\ mx + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7mx = 14 \\ mx + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx = -2 \\ y = \dfrac{1 - mx}{3} \end{cases} (*)$

+ Với $m = 0$, $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 0x = -2 \\ y = \dfrac{1}{3} \end{cases}$ (vô nghiệm).

+ Với $m \neq 0$, $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-2}{m} \\ y = 1. \end{cases}$

Vậy với $m = 0$, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Với $m \neq 0$, hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\dfrac{-2}{m}; 1\right)$. □

Bài 3. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn thì sau 12 giờ sẽ đầy bể. Nếu cho vòi thứ nhất chảy trong 4 giờ rồi khóa vòi thứ nhất lại, cho vòi thứ hai chảy trong 6 giờ nữa thì được $\dfrac{2}{5}$ bể. Hỏi nếu chảy riêng thì mỗi vòi chảy trong bao lâu sẽ đầy bể?

Lời giải.

Gọi x (giờ) là thời gian vòi thứ nhất chảy riêng thì đầy bể $(x \in \mathbb{R}, x > 12)$.

Khi đó số phần bể vòi thứ nhất chảy vào trong một giờ là $\dfrac{1}{x}$ (bể).

Gọi y (giờ) là thời gian vòi thứ hai chảy riêng thì đầy bể $(y \in \mathbb{R}, y > 12)$.
Khi đó số phần bể vòi thứ hai chảy vào trong một giờ là $\dfrac{1}{y}$ (bể).
Số phần bể cả 2 vòi cùng chảy vào là $\dfrac{1}{12}$ (bể) nên ta có $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{12}$. (1)

Theo đề bài ta có $\dfrac{4}{x} + \dfrac{6}{y} = \dfrac{2}{5}$. (2)

Từ (1), (2) ta có hệ

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{12} \\ \dfrac{4}{x} + \dfrac{6}{y} = \dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{x} + \dfrac{4}{y} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{4}{x} + \dfrac{6}{y} = \dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{x} + \dfrac{4}{y} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{y} = \dfrac{1}{15} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{20} \\ \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{30} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \text{ (thỏa điều kiện)} \\ y = 30 \text{ (thỏa điều kiện).} \end{cases}$$

Vậy vòi thứ nhất chảy riêng một mình thì sau 20 giờ thì đầy bể. Vòi thử hai chảy riêng một mình thì sau 30 giờ thì đầy bể. ☐

Bài 4. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $2x + 3y = 21$.

Lời giải.

Ta có $3y \vdots 3, 21 \vdots 3$ nên $2x \vdots 3 \Rightarrow x \vdots 3$.
Đặt $x = 3a$ $(a \in \mathbb{Z})$, ta có
$6a + 3y = 21 \Leftrightarrow 2a + y = 7 \Leftrightarrow y = -2a + 7$.
Nghiệm nguyên của phương trình là $(x = a, y = -2a + 7)$ với $a \in \mathbb{Z}$. ☐

Chương 4

Hàm số $y = ax^2, a \neq 0$. Phương trình bậc hai một ẩn

§1 Hàm số và đồ thị hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$

1. Tập xác định: Hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

2. Tính đồng biến và nghịch biến:

   - ☑ Nếu $a > 0$ thì hàm số đồng biến với mọi $x > 0$ và nghịch biến với mọi $x < 0$.
   - ☑ Nếu $a < 0$ thì hàm số nghịch biến với mọi $x > 0$ và đồng biến với mọi $x < 0$.

3. Miền giá trị:

   - ☑ Nếu $a > 0$ thì $y \geqslant 0$ với mọi x. Khi đó $\min y = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
   - ☑ Nếu $a < 0$ thì $y \leqslant 0$ với mọi x. Khi đó $\max y = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

1.2 Đồ thị của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$

Đồ thị của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$ là một đường parabol đi qua gốc tọa độ và nhận Oy làm trục đối xứng. Gốc tọa độ O là đỉnh của parabol.

- ☑ Nếu $a > 0$ thì đồ thị nằm phía trên trục hoành, O là điểm thấp nhất của đồ thị.

- ☑ Nếu $a < 0$ thì đồ thị nằm phía dưới trục hoành, O là điểm cao nhất của đồ thị.

2 Các dạng toán

Dạng 76. Vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2$

Để vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2$, ta thực hiện các bước sau

Bước 1: Lập bảng giá trị (nên lấy ít nhất 5 giá trị).

Bước 2: Đồ thị hàm bậc số có dạng parabol nằm phía trên trục hoành nếu $a > 0$ và nằm phía dưới trục hoành nếu $a < 0$, đồng thời đi qua các điểm thuộc bảng giá trị.

Bước 3: Vẽ đồ thị.

BÀI TẬP MẪU

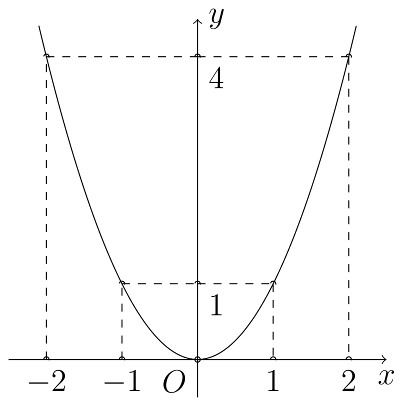
Ví dụ 1. Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2$.

Lời giải.

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Vẽ đồ thị



□

Dạng 77. Tính giá trị của hàm số

Để tính $f(x_0)$, ta thay $x = x_0$ vào $f(x)$.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x) = 4x^2$. Hãy tính $f(1)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(-2)$, $f(0)$.

Lời giải.

Ta có

$$f(1) = 4 \cdot (1)^2 = 4.$$

$$f(-1) = 4 \cdot (-1)^2 = 4.$$
$$f(2) = 4 \cdot (2)^2 = 16.$$
$$f(-2) = 4 \cdot (-2)^2 = 16.$$
$$f(0) = 4 \cdot (0)^2 = 0.$$

□

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2$ có đồ thị (C). Trong các điểm $A(2;-2)$, $B(1;0)$, $C(-1;-\dfrac{1}{2})$, điểm nào thuộc đồ thị (C), điểm nào không thuộc? Vì sao?

Lời giải.

Điểm A thuộc đồ thị (C) vì $f(x_A) = -\dfrac{1}{2} \cdot (2)^2 = -2 = y_A$.

Điểm B không thuộc đồ thị (C) vì $f(x_B) = -\dfrac{1}{2} \cdot (1)^2 = -\dfrac{1}{2} \neq y_B$.

Điểm C thuộc đồ thị (C) vì $f(x_C) = -\dfrac{1}{2} \cdot (-1)^2 = -\dfrac{1}{2} = y_C$. □

19. Điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị hàm số $(C)\colon y = f(x)$ khi và chỉ khi tọa độ điểm M thỏa mãn $y_0 = f(x_0)$.

Ví dụ 3. Tìm điểm thuộc đồ thị hàm số $(C)\colon y = 5x^2$ biết

1. Điểm đó có hoành độ bằng -2.
2. Điểm đó có tung độ bằng 5.

Lời giải.

1. $x = -2 \Rightarrow y = 5 \cdot (-2)^2 = 20$. Vậy tọa độ điểm là $(-2; 5)$.
2. $y = 5 \Rightarrow 5x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Vậy có hai điểm thỏa yêu cầu bài toán là $(1; 5)$ và $(-1; 5)$.

□

Ví dụ 4. Tìm m để điểm $M(m; 2m)$ sau thuộc đồ thị hàm số $y = f(x) = -2x^2$.

Lời giải.

Điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = f(x) = -2x^2$ khi và chỉ khi

$$-2m^2 = 2m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1. \end{array}\right.$$

Vậy với $m = 0$ hoặc $m = 1$ thì điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = f(x) = -2x^2$. □

Dạng 78. Xác định hàm số bậc hai thỏa mãn tính chất cho trước.

Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (P). Điểm $M(x_0; y_0) \in (P) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Xác định hàm số bậc hai $y = ax^2$. Biết đồ thị đi qua điểm $A(10; 30)$.

Lời giải.

Điểm $A(10; 30)$ thuộc đồ thị hàm số $y = ax^2 \Leftrightarrow 30 = a \cdot 10^2 \Leftrightarrow a = \dfrac{3}{10}$.

Vậy hàm số cần tìm là $y = \dfrac{3}{10}x^2$. □

Dạng 79. Tính biến thiên của hàm số $y = ax^2$.

Dựa vào tính chất của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$.

- Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến khi $x < 0$ và đồng biến khi $x > 0$.
- Nếu $a < 0$ thì hàm số nghịch biến khi $x > 0$ và đồng biến khi $x < 0$.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = (2m + 1)x^2 (m \neq -\dfrac{1}{2})$. Tìm m để

1. Hàm số đồng biến với mọi $x > 0$.
2. Hàm số đồng biến với mọi $x < 0$.

Lời giải.

1. Hàm số đã cho đồng biến với mọi $x > 0$ khi và chỉ khi $2m + 1 > 0 \Leftrightarrow m \geqslant -\dfrac{1}{2}$.
2. Hàm số đã cho đồng biến với mọi $x < 0$ khi và chỉ khi $2m + 1 < 0 \Leftrightarrow m \leqslant -\dfrac{1}{2}$.

□

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = -\dfrac{1}{4}x^2$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số khi $0 \leqslant x \leqslant 3$.

Lời giải.

Ta có $a = -\dfrac{1}{4} < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $0 \leqslant x \leqslant 3$. Do đó

$$f(0) \geqslant f(x) \geqslant f(3) \Leftrightarrow 0 \geqslant y \geqslant -\frac{9}{4}.$$

Vậy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất $\min y = -\dfrac{9}{4}$ khi $x = 3$ và giá trị lớn nhất $\max y = 0$ khi $x = 0$.
□

Dạng 80. Tương giao giữa parabol và đường thẳng.

Để tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d), ta tiến hành làm các bước như sau:

Bước 1: Tìm phương trình hoành độ giao điểm.

$$ax^2 = mx + n \tag{4.1}$$

Bước 2: Tìm số giao điểm

- Nếu (4.1) vô nghiệm thì (d) không cắt (P).
- Nếu (4.1) có 2 nghiệm thì phân biệt thì (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.
- Nếu (4.1) có nghiệm kép nghiệm thì (d) tiếp xúc (P) tại 1 điểm.

Bước 3: Nếu phương trình (4.1) có nghiệm x_i thì suy ra tung độ giao điểm là $y_i = ax_i^2$ hoặc $y_i = mx_i + n$.

Bước 4: Kết luận.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho parabol $(P)\colon y = x^2$ và đường thẳng $(d)\colon y = -x + 2$.

1. Tìm tọa độ giao điểm A, B $(x_A > x_B)$ của (d) và (P).
2. Tính diện tích tam giác OAB.

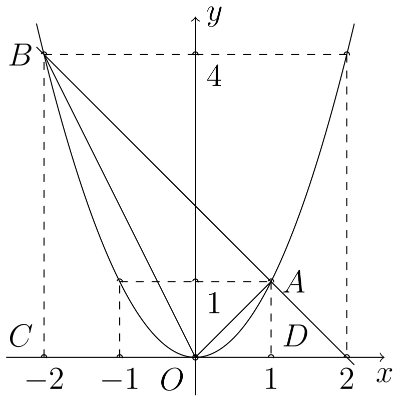
Lời giải.

1. Phương trình hoành độ giao điểm (d) và (P)

$$x^2 = -x + 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Với $x = 1 \Rightarrow y = 1$.
Với $x = -2 \Rightarrow y = 4$.
Vậy (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có tọa độ $A(1; 1)$ và $B(-2; 4)$.

2.



Gọi C, D là hình chiếu của B, A xuống Ox.
Ta có

$$S_{BCDA} = \frac{(BC + AD)CD}{2} = \frac{(4+1)\cdot 3}{2} = \frac{15}{2},$$
$$S_{BCO} = \frac{BC \cdot CO}{2} = 4,$$
$$S_{ADO} = \frac{AD \cdot DO}{2} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra

$$S_{ABO} = S_{BCDA} - S_{BCO} - S_{ADO} = 3.$$

Vậy diện tích tam giác ABO bằng 3 (đvdt).

□

3 Luyện tập

Bài 1. Cho hàm số $y = ax^2$ có đồ thị hàm số (P).

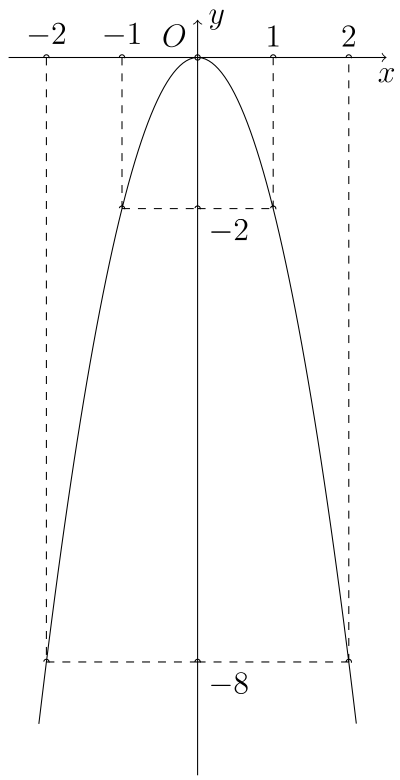
1. Xác định a biết (P) đi qua điểm $A(1; -2)$.
2. Vẽ đồ thị (P).
3. Tìm điểm thuộc (P) có hoành độ bằng 2.
4. Tìm điểm thuộc (P) có tung độ bằng -4.

Lời giải.

1. (P) đi qua điểm $A(1; -2)$ khi và chỉ khi $-2 = a \cdot 1^2 \Leftrightarrow a = -2$.
2. Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = -2x^2$	-8	-2	0	-2	-8

Vẽ đồ thị



□

Bài 2. Cho $y = (2m - 3)x^2$ với $2m - 3 \neq 0$.

1. Tìm m để hàm số đồng biến khi $x > 0$.
2. Tìm m để hàm số nghịch biến khi $x > 0$.

Lời giải.

1. Hàm số đã cho đồng biến với mọi $x > 0$ khi và chỉ khi $2m - 3 > 0 \Leftrightarrow m \geqslant \dfrac{3}{2}$.

2. Hàm số đã cho nghịch biến với mọi $x > 0$ khi và chỉ khi $2m - 3 < 0 \Leftrightarrow m \leqslant \dfrac{3}{2}$.

□

Bài 3. Cho hàm số $y = 2x^2$. Hãy tìm

1. Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-4; -2]$.

2. Giá trị lớn nhỏ của hàm số trên đoạn $[1; 3]$.

Lời giải.

1. Ta có $a = 2 > 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $-4 \leqslant x \leqslant -2$. Do đó
$$f(-4) \geqslant f(x) \geqslant f(-2) \Leftrightarrow 32 \geqslant y \geqslant 8$$
Vậy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất $\min y = 8$ khi $x = -2$ và giá trị lớn nhất $\max y = 32$ khi $x = -4$.

2. Ta có $a = 2 > 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $1 \leqslant x \leqslant 3$. Do đó
$$f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(3) \Leftrightarrow 2 \leqslant y \leqslant 18$$
Vậy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất $\min y = 2$ khi $x = 1$ và giá trị lớn nhất $\max y = 18$ khi $x = 3$.

□

Bài 4. Cho parabol $(P)\colon y = \dfrac{x^2}{2}$ và đường thẳng $(d)\colon y = x + 4$.

1. Vẽ (P) và (d) trên cùng hệ trục tọa độ.

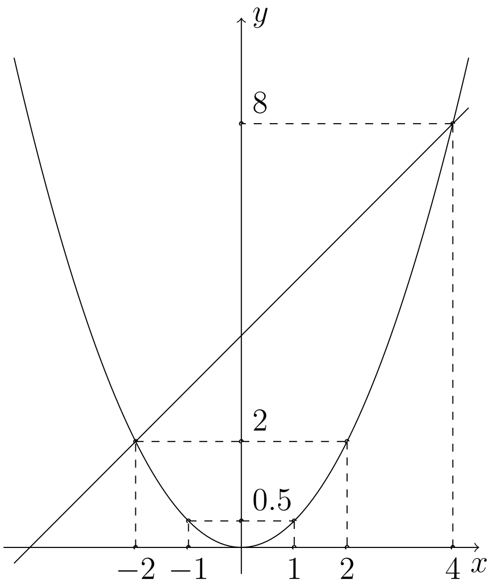
2. Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d).

Lời giải.

1. Vẽ đường thẳng (d)
Cho $x = -2 \Rightarrow y = 2$.
Cho $x = 4 \Rightarrow y = 8$.
Vẽ parabol (P):
Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = \dfrac{x^2}{2}$	2	$\dfrac{1}{2}$	0	$\dfrac{1}{2}$	2

Vẽ đồ thị



2. Phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{x^2}{2} = x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 4. \end{array}\right.$$

Với $x = -2 \Rightarrow y = 2$.
Với $x = 4 \Rightarrow y = 8$.
Vậy (d) và (P) có hai điểm chung có tọa độ là $(-2; 2)$ và $(4; 8)$.

□

4 Các bài toán nâng cao

Bài 5. Cho hàm số $y = x^2 - 2x + 3$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[1; 5]$.

Lời giải.

Ta có $y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 \Leftrightarrow y - 2 = (x-1)^2$. Đặt $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 2 \end{cases} \Rightarrow Y = X^2$.

Lại có $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 5 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} X = 0 \\ X = 4 \end{array}\right.$.

Mà hàm số $Y = X^2$ đồng biến với mọi $X > 0$. Do đó

$$0 \leqslant Y \leqslant 16 \Leftrightarrow 2 \leqslant y \leqslant 14$$

Vậy hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất $\max y = 14$ khi $x = 5$ và đạt giá trị lớn nhất $\min y = 2$ khi $x = 1$. □

Bài 6. Cho hàm số $y = 2x^2 - 8x + 9$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0; 5]$.

Lời giải.

Ta có $y = 2x^2 - 8x + 9 = 2(x-2)^2 + 1 \Leftrightarrow y - 1 = 2(x-2)^2$. Đặt $\begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y - 1 \end{cases} \Rightarrow Y = 2X^2$.

Lại có $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 5 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} X = -2 \\ X = 3 \end{array}\right.$.

Mà hàm số $Y = 2X^2$ đồng biến với mọi $0 \leqslant X \leqslant 3$. Do đó

$$2 \cdot 0^2 \leqslant Y \leqslant 2 \cdot 3^2 \Leftrightarrow 0 \leqslant Y \leqslant 18 \tag{4.2}$$

Mặt khác hàm số $Y = 2X^2$ nghịch biến với mọi $-2 \leqslant X \leqslant 0$. Do đó

$$2 \cdot (-2)^2 \geqslant Y \geqslant 2 \cdot 0^2 \Leftrightarrow 8 \geqslant Y \geqslant 0 \tag{4.3}$$

Từ (4.2) và (4.3) suy ra

$$0 \leqslant Y \leqslant 18 \Leftrightarrow 1 \leqslant y \leqslant 19$$

Vậy hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất $\max y = 19$ khi $x = 5$ và đạt giá trị lớn nhất $\min y = 0$ khi $x = 2$. □

Bài 7. Trên parabol $(P)\colon y = x^2$, ta lấy hai điểm $A(-1; 1)$ và $B(3; 9)$. Xác định điểm C trên cung nhỏ AB của (P) sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Lời giải.

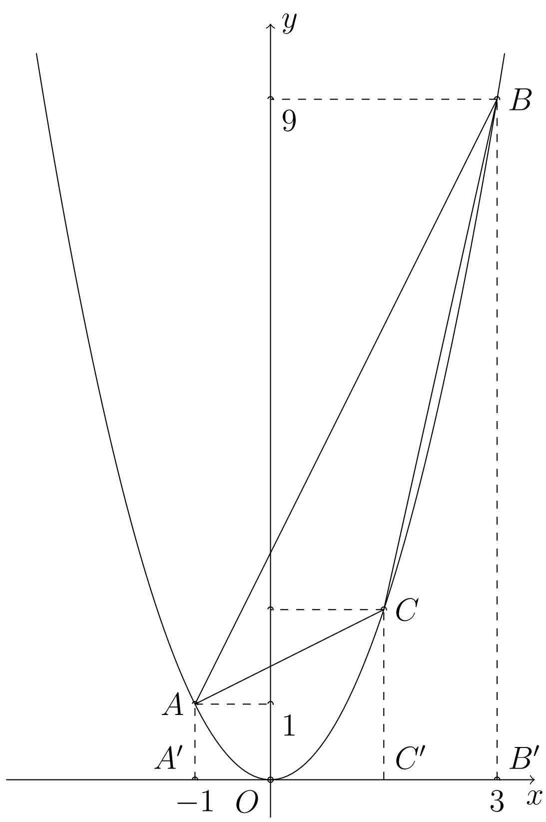
Giả sử $C(c; c^2)$ thuộc (P) với $-1 < c < 3$.
Gọi A', B', C' là hình chiếu của A, B và C xuống trục Ox. Ta có

$$S_{AA'C'C} = \frac{(AA' + CC')A'C'}{2} = \frac{(1 + c^2) \cdot (1 + c)}{2},$$
$$S_{AA'B'B} = \frac{(AA' + BB')A'B'}{2} = \frac{(1 + 9) \cdot 4}{2} = 20,$$
$$S_{CC'B'B} = \frac{(CC' + BB')C'B'}{2} = \frac{(9 + c^2) \cdot (3 - c)}{2}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{AA'B'B} - S_{CC'B'B} - S_{AA'C'C} \\ &= 6 - 2c^2 + 4c \\ &= 8 - 2(c - 1)^2 \leqslant 8. \end{aligned}$$

Vậy tam giác ABC lớn nhất bằng 8 khi và chỉ khi $C(1; 1)$.



□

§2 Phương trình bậc hai một ẩn và công thức nghiệm

1 Tóm tắt lí thuyết

1.1 Định nghĩa

Phương trình bậc hai một ẩn là phương trình có dạng

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$

trong đó x là ẩn; a, b, c là các số cho trước gọi là hệ số và $a \neq 0$.
Nhận xét. Phương trình (1) tương đương với phương trình

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0. \tag{2}$$

1.2 Giải phương trình bậc hai

Để tìm nghiệm của phương trình (1) ta dựa vào biệt số $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình (1) vô nghiệm.
- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}\cdot$
- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a};\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\cdot$$

Đặc biệt: Nếu $b = 2b'$ thì ta có $\Delta' = (b')^2 - ac$. Khi đó

- Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình (1) vô nghiệm.
- Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\dfrac{b'}{a}\cdot$
- Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a};\ x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}\cdot$$

Nhận xét. Nếu $ac < 0$ thì $\Delta > 0$, do đó phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt. Hơn nữa, hai nghiệm đó trái dấu.

2 Các dạng toán

Dạng 81. Giải phương trình bậc hai

Biến đổi phương trình về dạng (1), xác định các hệ số a, b, c rồi lập biệt số $\Delta = b^2 - 4ac$ (hoặc $\Delta' = (b')^2 - ac$). Từ đó tìm được nghiệm (nếu có) của phương trình.

BÀI TẬP MẪU

Chú ý. Trong một vài trường hợp cụ thể (ví dụ như hệ số $b = 0$) thì ta thường sử dụng cách phân tích thành nhân tử hoặc sử dụng công thức (2) để giải. Mời các bạn theo dõi ví dụ 1 và ví dụ 2 dưới đây.

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

a) $4x^2 - 9 = 0$. b) $-2x^2 + 50 = 0$. c) $3x^2 + 11 = 0$.

Lời giải.

1. $4x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{3}{2}$.
   Phương trình có tập nghiệm là $S = \left\{-\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2}\right\}$.
2. $-2x^2 + 50 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 25 \Leftrightarrow (x-5)(x+5) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 5$.
   Phương trình có tập nghiệm là $S = \{-5; 5\}$.
3. Vì $3x^2 + 11 > 0$ với mọi giá trị của x nên phương trình đã cho vô nghiệm.

□

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau

a) $x(x-2) + 4x - 8 = 0$. b) $x^2 - 4x + 2 = 0$.

c) $2x^2 + 5x = 1$.

Lời giải.

1. Ta có
$$x(x-2) + 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1) - 9 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2 - 3^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -4. \end{array}\right.$$
   Phương trình có tập nghiệm là $S = \{-4; 2\}$.
2. Ta có
$$x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 2$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = \sqrt{2} \\ x - 2 = -\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 + \sqrt{2}, \\ x = 2 - \sqrt{2}. \end{array}\right.$$
   Phương trình có tập nghiệm là $S = \left\{2 + \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2}\right\}$.

3. Ta có

$$2x^2 + 5x = 1 \Leftrightarrow x^2 + \frac{5}{2}x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{5}{4} + \frac{25}{16} = \frac{1}{2} + \frac{25}{16}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{33}{16} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{5}{4} = \frac{\sqrt{33}}{4} \\ x + \frac{5}{4} = -\frac{\sqrt{33}}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{33}}{4}, \\ x = \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{33}}{4}. \end{array}\right.$$

Phương trình có tập nghiệm là $S = \left\{-\dfrac{5 - \sqrt{33}}{4}; -\dfrac{5 + \sqrt{33}}{4}\right\}$.

□

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau

a) $\left(2 - \sqrt{5}\right) x^2 - x + \left(\sqrt{5} - 1\right) = 0$.

b) $\sqrt{2}x^2 + 4\sqrt{3}x - 2\sqrt{2} = 0$.

Lời giải.

1. Phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ với $a = 2 - \sqrt{5}$; $b = -1$; $c = \sqrt{5} - 1$.
   Ta có $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\left(2 - \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5} - 1\right) = 29 - 12\sqrt{5} = \left(2\sqrt{5} - 3\right)^2 > 0$.
   Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 2\sqrt{5} - 3}{2\left(2 - \sqrt{5}\right)} = -3 - \sqrt{5};$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 2\sqrt{5} + 3}{2\left(2 - \sqrt{5}\right)} = 1.$$

2. Phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ với $a = \sqrt{2}$; $b = 4\sqrt{3}$ $(b' = 2\sqrt{3})$; $c = -2\sqrt{2}$.
   Ta có $\Delta' = (b')^2 - ac = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - \sqrt{2} \cdot \left(-2\sqrt{2}\right) = 16 > 0$.
   Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-2\sqrt{3} + 4}{\sqrt{2}} = -\sqrt{6} + 2\sqrt{2};$$

$$x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-2\sqrt{3} + 4}{\sqrt{2}} = -\sqrt{6} - 2\sqrt{2}.$$

□

Ví dụ 4. Giải các phương trình sau

a) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{8x}{3} + 16 = 0$.

b) $0,4x^2 - 7x + 30 = 0$.

Lời giải.

1. Phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ với $a = \dfrac{1}{9}$; $b = -\dfrac{8}{3}$ $(b' = -\dfrac{4}{3})$; $c = 16$.

   Ta có $\Delta' = b'^2 - ac = \left(-\dfrac{4}{3}\right)^2 - \dfrac{1}{9} \cdot 16 = 0$ nên phương trình có nghiệm kép

$$x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a} = 12.$$

2. Phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ với $a = 0,4$; $b = -7$; $c = 30$.
   Ta có $\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 0,4 \cdot 30 = 1 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7+1}{2 \cdot 0,4} = 10;$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7-1}{2 \cdot 0,4} = \frac{15}{2}.$$

□

Dạng 82. Giải và biện luận phương trình dạng $ax^2 + bx + c = 0$

Khi gặp bài toán giải và biện luận phương trình dạng $ax^2 + bx + c = 0$, trong đó $a, b, c \in \mathbb{R}$ thì ta thực hiện các bước giải như sau

- Xét trường hợp $a = 0$. Lúc đó phương trình đã cho trở thành $bx + c = 0$. Đây là phương trình bậc nhất. Tiếp tục giải và biện luận phương trình bậc nhất này.
- Xét trường hợp $a \neq 0$. Lúc đó ta tính biệt số $\Delta = b^2 - 4ac$ (hoặc $\Delta' = (b')^2 - ac$). Dựa vào các trường hợp $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$ ($\Delta' > 0$, $\Delta' = 0$, $\Delta' < 0$) ta sẽ kết luận được nghiệm của phương trình đã cho.
- Nêu kết luận về các trường hợp đã giải quyết ở trên. Kết luận sẽ giúp ta phát hiện sự thiếu sót trong việc giải và biện luận một phương trình.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Giải và biện luận phương trình (x là ẩn, m là tham số) sau

$$x^2 - 2(m+3)x + (m^2 - 5) = 0. \quad (1)$$

1. Giải phương trình với $m = 2$.
2. Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm, nghiệm kép, vô nghiệm?
3. Tính hiệu của nghiệm lớn và nghiệm nhỏ trong trường hợp phương trình có hai nghiệm.

Lời giải.

1. Với $m = 2$ ta có phương trình
$$x^2 - 10x - 1 = 0.$$
   Ta có $\Delta' = 25 + 1 = 26 > 0$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt
$$x_1 = 5 + \sqrt{26} \text{ và } x_2 = 5 - \sqrt{26}.$$

2. Phương trình (1) có
$$\Delta' = (m+3)^2 - (m^2 - 5) = 6m + 14.$$
   - Phương trình (1) có hai nghiệm $\Leftrightarrow 6m + 14 > 0 \Leftrightarrow m > -\dfrac{7}{3}$.
   - Phương trình (1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow 6m + 14 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{7}{3}$.
   - Phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow 6m + 14 < 0 \Leftrightarrow m < -\dfrac{7}{3}$.

3. Khi $m > -\frac{7}{3}$, phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = (m+3) + \sqrt{6m+14};\ x_2 = (m+3) - \sqrt{6m+14}.$$

Rõ ràng $x_1 > x_2$. Khi ấy $x_1 - x_2 = 2\sqrt{6m+14}$.

□

Ví dụ 2. Giải và biện luận phương trình (x là ẩn, m là tham số) sau

$$mx^2 - 2(m-1)x + m + 1 = 0 \qquad (1)$$

Lời giải.

1. Với $m = 0$. Phương trình (1) trở thành: $2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.
2. Với $m \neq 0$. Ta có $\Delta' = (m-1)^2 - m(m+1) = -3m + 1$.
   - Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow -3m + 1 < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{3}$ thì phương trình (1) vô nghiệm.
   - Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$ thì phương trình (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{m-1}{m} = -2$.
   - Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{3}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{m-1+\sqrt{-3m+1}}{m};\ x_2 = \frac{m-1-\sqrt{-3m+1}}{m}.$$

Kết luận:

- $m = 0$: phương trình (1) có một nghiệm $x = -\frac{1}{2}$.
- $m < \frac{1}{3}$ và $m \neq 0$: phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{m-1 \pm \sqrt{-3m+1}}{m}$.
- $m = \frac{1}{3}$: phương trình (1) có nghiệm kép $x = -2$.
- $m > \frac{1}{3}$: phương trình (1) vô nghiệm.

□

Chú ý. Đôi khi ta gặp một bài toán giải và biện luận phương trình có mẫu số mà phương trình này đưa về được dạng phương trình bậc hai. Đây là bài toán khó hơn ví dụ 2. Lúc ấy, nghiệm của phương trình bậc hai thu được không hẳn là nghiệm của phương trình đã cho mà ta phải so sánh chúng với điều kiện tồn tại của phương trình ban đầu. Ta xét ví dụ sau đây.

Ví dụ 3. Giải và biện luận phương trình (m là tham số) sau

$$\frac{m}{x-1} + \frac{1}{x-m} = 2. \qquad (1)$$

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq 1$ và $x \neq m$. Khi đó phương trình (1) trở thành

$$\begin{aligned} n(x-m)+x-1=2(x-1)(x-m) &\Leftrightarrow (mx-m^2)+x-1=2(x^2-x-mx+m) \\ &\Leftrightarrow 2x^2-3(m+1)x+(m+1)^2=0. \qquad (2) \end{aligned}$$

Phương trình (2) có biệt số $\Delta = 9(m+1)^2 - 8(m+1)^2 = (m+1)^2 \geq 0, \forall m$. Khi đó

- Nếu $m=-1$ thì phương trình (2) có nghiệm kép $x_0 = \dfrac{3(m+1)}{4} = 0$. Ta thấy nghiệm này thỏa mãn nên cũng là nghiệm của phương trình (1).
- Nếu $m \neq -1$ thì phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3(m+1)+(m+1)}{4} = m+1; \\ x_2 &= \frac{3(m+1)-(m+1)}{4} = \frac{m+1}{2}. \end{aligned}$$

+ x_1 là nghiệm của (1) khi $\begin{cases} m+1 \neq 1 \\ m+1 \neq m \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0.$

+ x_2 là nghiệm của (1) khi $\begin{cases} \dfrac{m+1}{2} \neq 1 \\ \dfrac{m+1}{2} \neq m \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 1.$

Kết luận:

- $m=-1$: (1) có một nghiệm $x_0 = 0$.
- $m=0$: (1) có một nghiệm $x_2 = \dfrac{m+1}{2} = \dfrac{1}{2}$ (loại nghiệm x_1).
- $m=1$: (1) có một nghiệm $x_1 = m+1 = 2$ (loại nghiệm x_2).
- $m \neq 0$ và $m \neq \pm 1$: (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1 = m+1$ và $x_2 = \dfrac{m+1}{2}$.

□

3 Luyện tập

Bài 1. Giải các phương trình

a) $5x^2 - 7x - 6 = 0$.

b) $x^2 + 2x - 1 = 0$.

c) $2x^2 + 5x + 1 = 0$.

d) $2x^2 - \left(2\sqrt{6}+3\right)x + 3\sqrt{6} = 0$.

Lời giải.

1. Ta có $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-6) = 169 = 13^2 > 0$.
Do đó phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \dfrac{7+13}{2 \cdot 5} = 2$, $x_2 = \dfrac{7-13}{2 \cdot 5} = -\dfrac{3}{5}$.
Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{2; -\dfrac{3}{5}\right\}$.

2. Ta có $\Delta' = 1+1 = 2$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -1+\sqrt{2}$; $x_2 = -1-\sqrt{2}$. Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{-1+\sqrt{2}; -1-\sqrt{2}\right\}$.

3. Ta có $\Delta = 5^2 - 4\cdot 2\cdot 1 = 17$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt
$$x_1 = \frac{-5+\sqrt{17}}{2\cdot 2} = \frac{-5+\sqrt{17}}{4}; x_2 = \frac{-5-\sqrt{17}}{2\cdot 2} = \frac{-5-\sqrt{17}}{4}.$$
Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{\dfrac{-5-\sqrt{17}}{4}; \dfrac{-5+\sqrt{17}}{4}\right\}$.

4. Ta có $\Delta = \left[-\left(2\sqrt{6}+3\right)\right]^2 - 4\cdot 2\cdot 3\sqrt{6} = 33 - 12\sqrt{6} = \left(2\sqrt{6}-3\right)^2 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt
$$x_1 = \frac{\left(2\sqrt{6}+3\right)+\left(2\sqrt{6}-3\right)}{2\cdot 2} = \sqrt{6};$$
$$x_2 = \frac{\left(2\sqrt{6}+3\right)-\left(2\sqrt{6}-3\right)}{2\cdot 2} = \frac{3}{2}.$$
Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{\sqrt{6}; \dfrac{3}{2}\right\}$.

□

Bài 2. Cho phương trình (m là tham số)
$$mx^2 - (2m+1)x + (m+1) = 0. \quad (1)$$

1. Giải phương trình (1) với $m = -\dfrac{3}{5}$.
2. Chứng minh rằng phương trình (1) luôn luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.
3. Tìm giá trị của m để phương trình (1) có một nghiệm lớn hơn 2.

Lời giải.

1. Với $m = -\dfrac{3}{5}$ thì phương trình (1) trở thành
$$-\frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - x - 2 = 0.$$
Ta có $\Delta = 1 - 4\cdot 3\cdot(-2) = 25 > 0$. Phương trình có hai nghiệm
$$x_1 = \frac{1-5}{6} = -\frac{2}{3}; x_2 = \frac{1+5}{6} = 1.$$

2. Ta có
   - Nếu $m = 0$ thì phương trình (1) trở thành $-x+1 = 0$. Phương trình này có nghiệm duy nhất $x = 1$.
   - Nếu $m \neq 0$ thì (1) là phương trình bậc hai có
   $$\Delta = [-(2m+1)]^2 - 4m(m+1) = 1 > 0.$$
   Do đó phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Tóm lại, với mọi giá trị của m thì phương trình (1) luôn có nghiệm.

3. Nếu $m \neq 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là

$$x_1 = \frac{(2m+1)-1}{2m} = 1;$$
$$x_2 = \frac{(2m+1)+1}{2m} = \frac{m+1}{m}.$$

Vì nghiệm $x_1 = 1 < 2$ nên ta phải xét nghiệm $x_2 > 2$.

$$\frac{m+1}{m} > 2 \Leftrightarrow \frac{m+1}{m} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{1-m}{m} > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

Vậy khi $0 < m < 1$ thì phương trình (1) có một nghiệm lớn hơn 2.

□

Bài 3. Giải và biện luận phương trình (x là ẩn, m là tham số) sau

$$(m-3)x^2 - 2mx + m - 6 = 0. \quad (1)$$

Lời giải.

1. Với $m = 3$. Phương trình (1) trở thành: $-6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

2. Với $m \neq 3$. Ta có $\Delta' = m^2 - (m-3)(m-6) = 9m - 18$.

   - Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 9m - 18 < 0 \Leftrightarrow m < 2$ thì phương trình (1) vô nghiệm.
   - Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = 2$ thì phương trình (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = 2$.
   - Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > 2$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{m + 3\sqrt{m-2}}{m-3}; \ x_2 = \frac{m - 2\sqrt{m-2}}{m-3}.$$

Kết luận:

- $m = 3$: phương trình (1) có một nghiệm $x = -\frac{1}{2}$.
- $m > 2$ và $m \neq 3$: phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \dfrac{m \pm 3\sqrt{m-2}}{m-3}$.
- $m = 2$: phương trình (1) có nghiệm kép $x = 2$.
- $m < 2$: phương trình (1) vô nghiệm.

□

Bài 4. Cho phương trình (x là ẩn, m là tham số) sau

$$(m^2-4)x^2 + 2(m+2)x + 1 = 0 \quad (1)$$

1. Tìm m để phương trình (1) có nghiệm.

2. Tìm m để phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

Lời giải.

1. Ta có

   - Khi $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$, thử trực tiếp ta thấy phương trình chỉ có nghiệm khi $m = 2$.
   - Khi $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$. $(*)$
     Ta có $\Delta' = 4m + 8$.
     Để phương trình (1) có nghiệm thì $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 4m + 8 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -2$. $(**)$
     Từ $(*)$ và $(**)$ suy ra $m > -2$ và $m \neq 2$.

   Vậy phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $m > -2$.

2. Phương trình (1) có nghiệm duy nhất trong hai trường hợp sau

   - Trường hợp 1: $\begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ 2(m+2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$
   - Trường hợp 2: $\begin{cases} m^2 - 4 \neq 0 \\ 4m + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing.$

   Vậy với $m = 2$ thì phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

□

Bài 5. Cho $a^2 + b^2 > 0$. Chứng minh rằng phương trình sau đây luôn có nghiệm

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{x-1} = 1. \tag{1}$$

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq 0$ và $x \neq 1$. Khi đó phương trình (1) trở thành

$$a^2(x-1) + b^2x = x(x-1) \Leftrightarrow x^2 - (a^2 + b^2 + 1)x + a^2 = 0. \tag{2}$$

Phương trình (2) có $\Delta = (a^2 + b^2 + 1)^2 - 4a^2 = \left[(a-1)^2 + b^2\right]\left[(a+1)^2 + b^2\right] \geq 0, \forall a, b$.

- $\Delta = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (a-1)^2 + b^2 = 0 \\ (a+1)^2 + b^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1, b = 0; \\ a = -1, b = 0. \end{array}\right.$
  \+ Với $a = 1$ và $b = 0$ thì (1) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ nên (1) có nghiệm.
  \+ Với $a = -1$ và $b = 0$ thì (1) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ nên (1) có nghiệm.

- $\Delta > 0$ khi $a \neq \pm 1$ hoặc $b \neq 0$, lúc đó phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Ta đi chứng minh x_1 hoặc x_2 thỏa mãn $x \neq 0$ và $x \neq 1$.
  Đặt $f(x) = x^2 - (a^2 + b^2 + 1)x + a^2$. Khi đó ta có $f(0) = a^2$; $f(1) = b^2$.
  Do $a^2 + b^2 > 0$ nên $f(0)$ và $f(1)$ không đồng thời bằng 0, nên suy ra tồn tại x_1 hay x_2 khác 0 và khác -1.

Vậy phương trình (1) luôn có nghiệm. □

4 Các bài toán nâng cao

Bài 6. Giải và biện luận theo tham số m phương trình sau

$$\frac{m-1}{mx-1}+\frac{2}{x^2-1}=\frac{m+5}{(1-mx)(x^2-1)}. \quad (1)$$

Lời giải.

1. Nếu $m=0$ thì phương trình (1) có dạng

$$1+\frac{2}{x^2-1}=\frac{5}{x^2-1}\Leftrightarrow\frac{3}{x^2-1}=1\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\pm1\\x^2-1=3\end{cases}\Leftrightarrow x=\pm2.$$

2. Nếu $m\neq0$. Điều kiện $x\neq\pm1$ và $x\neq\dfrac{1}{m}$.

$$\begin{aligned}(1)&\Leftrightarrow(m-1)(x^2-1)+2(mx-1)=-m-5\\&\Leftrightarrow(m-1)x^2-m+1+2mx-2+m+5=0\\&\Leftrightarrow(m-1)x^2+2mx+4=0.\end{aligned} \quad (2)$$

- Nếu $m=1$, phương trình (2) có dạng $2x+4=0\Leftrightarrow x=-2$ (thỏa mãn điều kiện).
- Nếu $m\neq1$, phương trình (2) có

$$\Delta'=m^2-4(m-1)=(m-2)^2\geq0,\forall m.$$

Phương trình (2) có hai nghiệm

$$\begin{aligned}x_1&=\frac{-m+(m-2)}{m-1}=\frac{2}{1-m};\\x_2&=\frac{-m-(m-2)}{m-1}=\frac{-2(m-1)}{m-1}=-2.\end{aligned}$$

Nghiệm x_2 là nghiệm của (1) nếu $\dfrac{1}{m}\neq-2\Leftrightarrow m\neq-\dfrac{1}{2}$.

Nghiệm x_1 là nghiệm của (1) nếu $\begin{cases}\dfrac{2}{1-m}\neq1\\\dfrac{2}{1-m}\neq-1\\\dfrac{2}{1-m}\neq\dfrac{1}{m}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq-1,\\m\neq3,\\m\neq\dfrac{1}{3}.\end{cases}$.

Kết luận:

- Nếu $m=0$ thì phương trình (1) có nghiệm $x=\pm2$.
- Nếu $m=1$ hoặc $m=-1$ hoặc $m=3$ hoặc $m=\dfrac{1}{3}$ thì phương trình (1) có nghiệm $x=-2$.
- Nếu $m=-\dfrac{1}{2}$ thì phương trình (1) có nghiệm $x=\dfrac{4}{3}$.
- Nếu $m\notin\left\{-1;-\dfrac{1}{2};0;\dfrac{1}{3};1;3\right\}$ thì phương trình (1) có nghiệm $x_1=-2$ và $x_2=\dfrac{2}{1-m}$.

$\square$

Bài 7. Giải và biện luận phương trình (m là tham số)

$$(2m^2 - 3m - 2)x^2 + (m^2 + 7m + 2)x - m^2 - 2m = 0. \quad (1)$$

Lời giải.

1. Nếu $2m^2 - 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow (2m+1)(m-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\dfrac{1}{2}, \\ m = 2. \end{array}\right.$

   - Với $m = 2$, phương trình (1) $\Leftrightarrow 20x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{5}$.
   - Với $m = -\dfrac{1}{2}$, phương trình (1) $\Leftrightarrow -5x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{5}$.

2. Nếu $m \neq 2$ và $m \neq -\dfrac{1}{2}$, phương trình (1) là phương trình bậc hai có

$$\begin{aligned}\Delta &= (m^2 + 7m + 2)^2 + 4(2m^2 - 3m - 2)(m^2 + 2m) \\ &= 9m^4 + 18m^3 + 21m^2 + 12m + 4 \\ &= 9(m^4 + 2m^3 + m^2) + 12(m^2 + m) + 4 \\ &9(m^2 + m)^2 + 12(m^2 + m) + 4 = (3m^2 + 3m + 2)^2 \geq 0, \forall m.\end{aligned}$$

Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm là

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-(m^2 + 7m + 2) + (3m^2 + 3m + 2)}{2(2m^2 - 3m - 2)} = \frac{2m(m-2)}{2(2m+1)(m-2)} = \frac{m}{2m+1}; \\ x_2 &= \frac{-(m^2 + 7m + 2) - (3m^2 + 3m + 2)}{2(2m^2 - 3m - 2)} = \frac{-2(2m^2 + 5m + 2)}{2(2m+1)(m-2)} = \frac{m+2}{2-m}. \end{aligned}$$

Kết luận:

- Nếu $m = 2$ thì phương trình (1) có nghiệm $x = \dfrac{2}{5}$.
- Nếu $m = -\dfrac{1}{2}$ thì phương trình (1) có nghiệm $x = \dfrac{3}{5}$.
- Nếu $m \neq 2$ và $m \neq -\dfrac{1}{2}$ thì phương trình (1) có nghiệm $x_1 = \dfrac{m}{2m+1}$ và $x_2 = \dfrac{m+2}{2-m}$.

$\square$

Bài 8. Cho hai phương trình

$$2x^2 + (3m+1)x - 9 = 0, \quad (1)$$
$$6x^2 + (7m-1)x - 19 = 0. \quad (2)$$

Với giá trị nào của tham số m thì hai phương trình (1) và (2) có nghiệm chung? Tìm các nghiệm chung đó.

Lời giải.

Giả sử x_0 là nghiệm chung của hai phương trình (1) và (2). Khi đó ta có

$$\begin{cases}2x_0^2+(3m+1)\,x_0-9=0\\6x_0^2+(7m-1)\,x_0-19=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-6x_0^2-3\,(3m+1)\,x_0+27=0\\6x_0^2+(7m-1)\,x_0-19=0\end{cases}$$
$$\Rightarrow -2(m+2)x_0+8=0\Rightarrow (m+2)x_0=4. \qquad (3)$$

Do x_0 là nghiệm nên $m+2\neq 0\Leftrightarrow m\neq -2$. Khi đó từ (3) suy ra $x_0=\dfrac{4}{m+2}$.
Thay $x_0=\dfrac{4}{m+2}$ vào (1) ta được

$$2\left(\frac{4}{m+2}\right)^2+(3m+1)\cdot\frac{4}{m+2}-9=0\Leftrightarrow 3m^2-8m+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2,\\m=\dfrac{2}{3}.\end{array}\right.$$

Ngược lại:

- Với $m=2$ thì phương trình (1) có nghiệm là $x=1$ và $x=-\dfrac{9}{2}$; phương trình (2) có nghiệm là $x=1$ và $x=-\dfrac{19}{6}$. Do đó, hai phương trình (1) và (2) có nghiệm chung là $x=1$.
- Với $m=\dfrac{2}{3}$ thì phương trình (1) có nghiệm là $x=\dfrac{3}{2}$ và $x=-3$; phương trình (2) có nghiệm là $x=\dfrac{3}{2}$ và $x=-\dfrac{19}{9}$. Do đó, hai phương trình (1) và (2) có nghiệm chung là $x=\dfrac{3}{2}$.

Vậy $m=2$ hoặc $m=\dfrac{2}{3}$ là giá trị cần tìm. □

Bài 9. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=5x^2-4x+1$.

Lời giải.

Gọi a là một giá trị của P. Biểu thức P nhận giá trị a khi và chỉ khi phương trình $5x^2-4x+1=a$ có nghiệm $\Leftrightarrow 5x^2-4x+1-a=0$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta'=5a-1\geq 0\Leftrightarrow a\geq\frac{1}{5}.$$

Vậy $P_{\min}=\dfrac{1}{5}$ khi và chỉ khi $x=\dfrac{2}{5}$. □

Chú ý. Phương pháp giải ở bài tập 9 gọi là *phương pháp miền giá trị của hàm số*. Để tìm được miền giá trị này, ta sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai là $\Delta\geq 0$. Sau đây là một vài bài tập khác có thể sử dụng phương pháp miền giá trị của hàm số để giải.

Bài 10. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $Q=\dfrac{4x-3}{x^2+1}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x\in\mathbb{R}$.
Gọi a là một giá trị của Q. Biểu thức Q nhận giá trị a khi và chỉ khi phương trình $\dfrac{4x-3}{x^2+1}=a$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow ax^2-4x+(a+3)=0 \qquad (1)$$

có nghiệm.

- Nếu $a = 0$ thì (1) $\Leftrightarrow -4x = -3 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{4}$.
- Nếu $a \neq 0$ thì (1) (là phương trình bậc hai) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' = 2^2 - a(a+3) \geq 0 \Leftrightarrow -a^2 - 3a + 4 \geq 0 \Leftrightarrow -4 \leq a \leq 1.$$

Do đó ta có

- $Q_{\min} = -4$ khi và chỉ khi $x = -\dfrac{1}{2}$.
- $Q_{\max} = 1$ khi và chỉ khi $x = 2$.

□

Bài 11. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $M = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 2x + 3}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x \in \mathbb{R}$. Gọi m là một giá trị của M.
Biểu thức M nhận giá trị m khi và chỉ khi phương trình $\dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 2x + 3} = m$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow (m-1)x^2 - 2(m+1)x + (3a+1) = 0 \qquad (1)$$

có nghiệm.

- Nếu $m = 1$ thì (1) $\Leftrightarrow -4x = -4 \Leftrightarrow x = 1$.
- Nếu $m \neq 1$ thì (1) (là phương trình bậc hai) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' = (m+1)^2 - (m-1)(3m+1) \geq 0 \Leftrightarrow -2m^2 + 2m + 2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} \leq m \leq 1 + \sqrt{2}.$$

Do đó ta có

- $M_{\min} = 1 - \sqrt{2}$ khi và chỉ khi $x = 1 - \sqrt{2}$.
- $M_{\max} = 1 + \sqrt{2}$ khi và chỉ khi $x = 1 + \sqrt{2}$.

□

§3 Hệ thức Vi-ét và ứng dụng

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Hệ thức Vi -ét

Phương trình bậc hai tổng quát $ax^2 + bx + c = 0 \ \ (a \neq 0)$. (1)

Nếu phương trình (1) có hai nghiệm $x_1, \ x_2$ thì $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$

Đảo lại nếu hai số $x_1, \ x_2$ thỏa mãn $\begin{cases} S = x_1 + x_2 \\ P = x_1 x_2. \end{cases}$ thì $x_1, \ x_2$ là nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0$ (điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$).
Các hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm thường được vận dụng để giải toán.

1. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$.

2. $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$.

3. $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = \left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right]^2 - 2x_1^2x_2^2$.

4. $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$.

5. $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \dfrac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2}$ với $x_1, \ x_2 \neq 0$.

6. $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2x_2^2} = \dfrac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$ với $x_1, \ x_2 \neq 0$

7. $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$.

2 Các dạng toán

Dạng 83. Tính giá trị biểu thức đối xứng giữa các nghiệm

Biểu thức đối xứng giữa các nghiệm x_1 và x_2 của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ là biểu thức có giá trị không thay đổi khi ta hoán vị x_1 và x_2.
Ta có thể biểu thị được các biểu thức đối xứng giữa các nghiệm x_1 và x_2 theo S và P, ví dụ như

- $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$.
- $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \dfrac{S}{P}$ với $x_1,\ x_2 \neq 0$
- $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3SP$ với $x_1,\ x_2 \neq 0$
- $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2x_2^2} = \dfrac{S^2 - P}{P^2}$.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Giả sử phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.

a) $-x_1$ và $-x_2$.

b) $2x_1$ và $2x_2$.

c) x_1^2 và x_2^2.

d) $x_1 + x_2$ và x_1x_2.

e) $\dfrac{1}{x_1}$ và $\dfrac{1}{x_2}$.

Lời giải.

Giả sử phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 ta có
$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

1. Ta có $\begin{cases} (-x_1) + (-x_2) = -S \\ (-x_1)(-x_2) = P. \end{cases}$
   Do đó $-x_1$ và $-x_2$ là nghiệm của phương trình $X^2 - SX + P = 0$.

2. Ta có $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 2S \\ 2x_12x_2 = 4P. \end{cases}$
   Do đó $2x_1$ và $2x_2$ là nghiệm của phương trình $X^2 - 2SX + 4P = 0$.

3. Ta có $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P \\ x_1^2 \cdot x_2^2 = P^2. \end{cases}$
   Do đó x_1^2 và x_2^2 là nghiệm của phương trình $X^2 - (S^2 - 2P)X + P^2 = 0$.

4. Ta có $\begin{cases}(x_1+x_2)+x_1x_2=S+P\\(x_1+x_2)\cdot x_1x_2=S\cdot P.\end{cases}$
Do đó x_1+x_2 và x_1x_2 là nghiệm của phương trình $X^2-(S+P)X+S\cdot P=0$.

5. Ta có $\begin{cases}\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{S}{P}\\\dfrac{1}{x_1}\cdot\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{1}{P}.\end{cases}$
Do đó $\dfrac{1}{x_1}$ và $\dfrac{1}{x_2}$ là nghiệm của phương trình $X^2-\dfrac{S}{P}X+\dfrac{1}{P}=0$.

□

Dạng 84. Tìm giá trị của tham số khi biết hệ đối xứng giữa các nghiệm

- Ta tìm điều kiện cho tham số để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1,x_2 (thường là $a\neq 0$ và $\Delta\geq 0$).
- Từ biểu thức nghiệm đã cho, áp dụng hệ thức Vi-ét để giải phương trình (có ẩn là tham số).
- Đối chiếu với điều kiện xác định của tham số rồi sau đó xác định giá trị cần tìm.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho phương trình $x^2-5x+m=0$ (m là tham số).

1. Giải phương trình trên khi $m=6$.
2. Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $|x_1-x_2|=3$.

Lời giải.

1. Với $m=6$, ta có phương trình $x^2-5x+6=0$.
$\Delta=25-4\cdot 6=1$. Suy ra phương trình có hai nghiệm $x_1=3;\ x_2=2$.

2. Ta có $\Delta=25-4\cdot m$.
Để phương trình đã cho có nghiệm thì $\Delta\geq 0\Leftrightarrow m\leq\dfrac{25}{4}$ (*)
Theo hệ thức Vi-ét, ta có $x_1+x_2=5$ (1)
$x_1x_2=m$ (2)
Mặt khác theo đề bài ta có $|x_1-x_2|=3$. (3)
Từ (1) và (3) suy ra $|x_1-5+x_1|=3\Leftrightarrow|2x_1-5|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x_1-5=3\\2x_1-5=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=4\\x_1=1.\end{array}\right.$
Suy ra $x_1=4;\ x_2=1$ hoặc $x_1=1;\ x_2=4$. (4)
Từ (2) và (4) suy ra $m=4$. Thử lại thì thỏa mãn.
Vậy với $m=4$ thỏa yêu cầu bài toán.

□

Ví dụ 2. Giải phương trình $x^2-2(m-1)x-m-3=0$ (1) (với m là tham số).

1. Giải phương trình với $m=-3$.

2. Với giá trị nào của m thì phương trình (1) có các nghiệm $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $x_1^2+x_2^2 = 10$.

Lời giải.

1. Với $m = -3$ ta có phương trình $x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(x+8) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -8. \end{array}\right.$

2. Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khi
$$\begin{aligned} \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 + (m+3) \geq 0 &\Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 + m + 3 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow\ m^2 - m + 4 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow\ \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0 \text{ đúng với mọi m} \end{aligned}.$$
Vậy chứng tỏ phương trình có 2 nghiệm phân biệt với mọi m.
Theo hệ thức Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) & (1) \\ x_1x_2 = -m - 3 & (2). \end{cases}$
Ta có
$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 = 10 \Leftrightarrow\ & (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 && = 10 \\ \Leftrightarrow\ & 4(m-1)^2 + 2(m+3) && = 10 \\ \Leftrightarrow\ & 4m^2 - 6m + 10 && = 10 \\ \Leftrightarrow\ & 2m(2m-3) && = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \dfrac{3}{2}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy với $m = 0$ hoặc $m = \dfrac{3}{2}$ thỏa yêu cầu bài toán. □

Dạng 85. Tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng

Cho hai số x, y biết $x + y = S;\ x \cdot y = P$ thì $x,\ y$ là hai nghiệm của phương trình bậc hai $X^2 - S \cdot X + P = 0$ (điều kiện của hai số đó là $S^2 - 4P \geq 0$).

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tìm hai số a, b biết tổng $S = a + b = -3$ và tích $P = ab = -4$.

Lời giải.

Vì $a + b = -3$ và $ab = -4$ nên a, b là nghiệm của phương trình $x^2 + 3x - 4 = 0$.
Giải phương trình trên ta được $x_1 = 1$ và $x_2 = -4$.
Vậy nếu $a = 1$ thì $b = -4$, nếu $a = -4$ thì $b = 1$. □

Dạng 86. Tìm hệ thức độc lập giữa các nghiệm không phụ thuộc vào tham số

- Bước 1: Tìm điều kiện của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0. \end{cases}$$

- Bước 2: Áp dụng định lí Vi-et, ta được

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = f(m) \\ x_1 x_2 = g(m). \end{cases} \quad \text{(I)}$$

- Bước 3: Khử m từ hệ (I) ta được hệ thức cần tìm.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho phương trình $(m-1)x^2 - 2(m-4)x + m - 5 = 0$. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm của phương trình không phụ thuộc m.

Lời giải.

Điều kiện của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 là

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ 2m - 11 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \neq m \leq \frac{11}{2}.$$

Khi đó phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m-4)}{m-1} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{m-5}{m-1}. \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Khử m từ hệ (I) ta được $2(x_1 + x_2) - 3x_1x_2 = 1$. Vậy đây là hệ thức cần tìm. □

Ví dụ 2. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x - m - 3 = 0$ (1)

1. Giải phương trình với $m = -3$.
2. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc vào giá trị của m.

Lời giải.

1. Với $m = -3$ ta có phương trình $x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(x+8) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -8. \end{array}\right.$
2. Phương trình (1) có 2 nghiệm khi và chỉ khi
$$\begin{aligned} \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 + (m+3) \geq 0 &\Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 + m + 3 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow m^2 - m + 4 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} \geq 0 \text{ đúng với mọi m.} \end{aligned}$$

Chứng tỏ phương trình có 2 nghiệm phân biệt với mọi m.

Theo hệ thức Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) & (1) \\ x_1x_2 = -m-3. & (2) \end{cases}$

Từ (2) ta có $m = -x_1x_2 - 3$ thế vào (1) ta có

$x_1 + x_2 = 2(-x_1x_2 - 3 - 1) = -2x_1x_2 - 8 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + 2x_1x_2 + 8 = 0$.

Đây là hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc m.

□

Dạng 87. Xét dấu hai nghiệm của phương trình bậc hai

1. Phương trình có hai nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \ (\Delta' \geq 0). \end{cases}$

2. Phương trình có hai nghiệm cùng dấu khi $\begin{cases} \Delta > 0 \ (\Delta' > 0) \\ P > 0. \end{cases}$

3. Phương trình có hai nghiệm trái dấu $P < 0$.
   (Khi phương trình có hai nghiệm trái dấu không cần điều kiện $\Delta > 0$ $(\Delta' > 0)$ do khi $P < 0$ thì hiển nhiên $\Delta > 0 \quad (\Delta' > 0)$)

4. Phương trình có hai nghiệm dương khi và chỉ khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \ (\Delta' > 0) \\ S = x_1 + x_2 > 0 \\ P = x_1x_2 > 0. \end{cases}$

5. Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \quad (\Delta' > 0) \\ S = x_1 + x_2 < 0 \\ P = x_1x_2 > 0. \end{cases}$

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho phương trình $x^2 - 2(m+1) + m^2 - 4m + 3 = 0$ (với m là tham số).

1. Tìm m để phương trình đã cho có nghiệm.
2. Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm cùng dấu.
3. Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm khác dấu.
4. Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm dương.
5. Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm âm.

Lời giải.

1. Để phương trình có nghiệm phân biệt thì $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - (m^2 - 4m + 3) \geq 0$
$$\Leftrightarrow 6m - 2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow m \geq \frac{1}{3}.$$

Vậy khi $m \geq \dfrac{1}{3}$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

2. Phương trình đã cho có hai nghiệm cùng dấu khi

$$\begin{cases}\Delta' > 0\\ P > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(m+1)^2 - (m^2 - 4m + 3) > 0\\ m^2 - 4m + 3 > 0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{1}{3}\\ \left[\begin{array}{l} m < 1\\ m > 3.\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 3\\ \dfrac{1}{3} < m < 1.\end{array}\right.$$

Vậy khi $m > 3$ hoặc $\dfrac{1}{3} < m < 1$ phương trình có hai nghiệm cùng dấu.

3. Phương trình có hai nghiệm khác dấu khi và chỉ khi

$$P < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 3$$

.

4. Phương trình đã cho có hai nghiệm dương khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a \neq 0\\ \Delta' > 0\\ S = x_1 + x_2 > 0\\ P = x_1x_2 > 0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0\\ (m+1)^2 - (m^2 - 4m + 3) > 0\\ 2(m+1) > 0\\ m^2 - 4m + 3 > 0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{1}{3}\\ m > -1\\ \left[\begin{array}{l} m < 1\\ m > 3.\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 3\\ \dfrac{1}{3} < m < 1.\end{array}\right.$$

Vậy khi $m > 3$ hoặc $\dfrac{1}{3} < m < 1$ phương trình có hai nghiệm dương.

5. Phương trình đã cho có hai nghiệm dương khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a \neq 0\\ \Delta' > 0\\ S = x_1 + x_2 < 0\\ P = x_1x_2 > 0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0\\ (m+1)^2 - (m^2 - 4m + 3) > 0\\ 2(m+1) < 0\\ m^2 - 4m + 3 > 0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{1}{3}\\ m < -1\\ \left[\begin{array}{l} m < 1\\ m > 3.\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing.$$

Vậy không tìm được m để phương trình có hai nghiệm âm.

□

3 Luyện tập

Bài 1. Cho phương trình $x^2 - 5x + 2 = 0$. Không giải phương trình, gọi $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của phương trình. Hãy tính giá trị của biểu thức

a) $A = x_1^2 + x_2^2$.

b) $B = |x_1 - x_2|$.

c) $C = \dfrac{1}{x_1^3} + \dfrac{1}{x_2^3}$.

d) $D = \dfrac{x_1}{\sqrt{x_2}} + \dfrac{x_2}{\sqrt{x_1}}$.

Lời giải.

Vì $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 17 > 0$ nên phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.
Theo hệ thức Vi-ét, ta có

$$x_1 + x_2 = 5, x_1x_2 = 2.$$

1. Ta có
$$A = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 5^2 - 2 \cdot 2 = 21.$$

2. Ta có
$$B = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2} = \sqrt{17}.$$

3. Vì $x_1 + x_2 > 0$ và $x_1x_2 > 0$ nên $x_1 > 0, x_2 > 0$. Ta có
$$C = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^3 \cdot x_2^3} = \frac{(x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)}{(x_1x_2)^3} = \frac{5^3 - 3 \cdot 2 \cdot 5}{2^3} = \frac{95}{8}.$$

4. Ta có
$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)^2} = \sqrt{x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1x_2}} = \sqrt{5 + 2\sqrt{2}}.$$
Suy ra,
$$D = \frac{x_1\sqrt{x_1} + x_2\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2}} = \frac{\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)\left(x_1 + x_2 - \sqrt{x_1x_2}\right)}{\sqrt{x_1x_2}} = \frac{(5 - \sqrt{2})\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}.$$

□

Bài 2. Tìm hai số x và y biết

a) $x + y = 18$ và $xy = 77$.

b) $x + y = -3$ và $xy = 5$.

c) $x - y = 2\sqrt{3}$ và $xy = 1$.

d) $x^2 + y^2 = 34$ và $xy = -15$.

Lời giải.

1. Vì $x + y = 18$ và $xy = 77$ nên x, y là hai nghiệm của phương trình
$$t^2 - 18t + 77 = 0.$$
Giải phương trình trên ta được $t = 7, t = 11$.
Vậy hai số x, y cần tìm là $(x; y) = (7; 11)$, $(x; y) = (11; 7)$.

2. Vì $x + y = -3$ và $xy = 5$ nên x, y là hai nghiệm của phương trình
$$t^2 + 3t + 5 = 0.$$
Phương trình trên có $\Delta = -11 < 0$ nên vô nghiệm.
Vậy không tồn tại hai số x, y thỏa đề bài.

3. Vì $x + (-y) = 2\sqrt{3}$ và $x \cdot (-y) = -1$ nên $x, -y$ là hai nghiệm của phương trình
$$t^2 - 2\sqrt{3}t - 1 = 0.$$
Giải phương trình trên ta được các nghiệm $t = 2 - \sqrt{3}, t = 2 + \sqrt{3}$.
Do đó,
$$\begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \\ -y = -2 + \sqrt{3}. \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -2 + \sqrt{3} \\ -y = 2 + \sqrt{3}. \end{cases}$$
Vậy hai số x, y cần tìm là $(x; y) = \left(2 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3}\right)$, $(x; y) = \left(-2 + \sqrt{3}; -2 - \sqrt{3}\right)$.

4. Ta có

$$x^2+y^2=34 \Leftrightarrow (x+y)^2-2xy=34 \Leftrightarrow (x+y)^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=2 \\ x+y=-2. \end{array}\right.$$

- Với $x+y=2$, ta được hệ $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-15. \end{cases}$

Suy ra, x, y là hai nghiệm của phương trình $t^2-2t-15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-3 \\ t=5. \end{array}\right.$

Do đó,

$$\begin{cases} x=-3 \\ y=5 \end{cases} \text{hoặc } \begin{cases} x=5 \\ y=-3. \end{cases}$$

- Với $x+y=-2$, ta được hệ $\begin{cases} x+y=-2 \\ xy=-15 \end{cases}$.

Suy ra, x, y là hai nghiệm của phương trình $t^2+2t-15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=-5. \end{array}\right.$

Do đó,

$$\begin{cases} x=3 \\ y=-5 \end{cases} \text{hoặc } \begin{cases} x=-5 \\ y=3. \end{cases}$$

Vậy hai số x, y cần tìm là $(x;y)=\{(-3;5),(5;-3),(3;-5);(-5;3)\}$.

□

Bài 3. Cho phương trình $x^2-2(m+1)x+4m-1=0 \quad (1)$, với m là tham số.

1. Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=10$.
2. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm $x_1,\ x_2$ không phụ thuộc vào tham số m.

Lời giải.

1. Vì
$$\Delta'=(m+1)^2-(4m-1)=m^2-2m+2=(m-1)^2+1 \geqslant 1, \forall m \in \mathbb{R}.$$

nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$.
Hệ thức Vi-ét:
$$\begin{cases} x_1+x_2=2m+2 \\ x_1x_2=4m-1. \end{cases}$$

Theo đề

$$\begin{aligned} x_1^2+x_2^2=10 &\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=10 \\ &\Leftrightarrow 4(m+1)^2-2(4m-1)=10 \\ &\Leftrightarrow m^2=1 \Leftrightarrow m=\pm 1. \end{aligned}$$

Vậy $m=-1, m=1$ là giá trị cần tìm.

2. Hệ thức Vi-ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 2 & (1) \\ x_1x_2 = 4m - 1. & (2) \end{cases}$
Từ (1), ta được $2m = x_1 + x_2 - 2$. Thay vào (2) ta được
$$x_1x_2 = 2(x_1 + x_2 - 2) - 1 \Leftrightarrow 2x_1 + 2x_2 - x_1x_2 = 5.$$
Biểu thức $2x_1 + 2x_2 - x_1x_2 = 5$ luôn đúng với mọi m. Vậy đây là biểu thức cần tìm.

□

Bài 4. Cho phương trình $x^2 + x\sin\alpha + \cos\alpha - 1 = 0 \quad (1)$, với $0° < \alpha < 90°$.

1. Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.
2. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm $x_1,\ x_2$ không phụ thuộc vào α.

Lời giải.

1. Ta có $\Delta = \sin^2\alpha + 4(1 - \cos\alpha)$.
Vì $\sin^2\alpha > 0$ và $1 - \cos\alpha > 0$ với mọi $0° < \alpha < 90°$
nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$.
2. Hệ thức Vi-ét:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\sin\alpha \\ x_1x_2 = \cos\alpha - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 = \sin\alpha \\ x_1x_2 + 1 = \cos\alpha. \end{cases}$$
mà
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
nên suy ra
$$(x_1 + x_2)^2 + (x_1x_2 + 1)^2 = 1.$$
là biểu thức liên hệ giữa $x_1,\ x_2$ mà không phụ thuộc vào α.

□

Bài 5. Cho phương trình $(m - 1)x^2 - 2mx + 1 = 0 \quad (1)$, với m là tham số.

1. Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.
2. Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.

Lời giải.

1. Phương trình có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi
$$ac < 0 \Leftrightarrow m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1.$$
2. Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi
$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m + 1 > 0 \\ \dfrac{2m}{m-1} > 0 \\ \dfrac{1}{m-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(m - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0 \\ m > 0 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$$

□

Bài 6. Cho phương trình $x^2-2(m+1)x-m^2-1=0$, với m là tham số.

1. Chứng minh rằng với mọi m, phương trình đã cho luôn có hai nghiệm trái dấu.
2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=x_1^2+x_2^2+x_1x_2$.

Lời giải.

1. Vì $ac=-m^2-1<0, \forall m\in\mathbb{R}$ nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm trái dấu.
2. Theo hệ thức Vi-ét: $\begin{cases} x_1+x_2=2m+2 \\ x_1x_2=-m^2-1 \end{cases}$.

   Ta có
$$\begin{aligned} T=(x_1+x_2)^2-x_1x_2 &= (2m+2)^2+m^2+1=5m^2+8m+5 \\ &= 5\left(m^2+\frac{8}{5}m+\frac{16}{25}\right)+5-\frac{16}{5} \\ &= 5\left(m+\frac{4}{5}\right)^2+\frac{9}{5}\geqslant\frac{9}{5}. \end{aligned}$$
   Vậy giá trị nhỏ nhất của T bằng $\frac{9}{5}$ khi $m=-\frac{4}{5}$.

$\square$

4 Các bài toán nâng cao

Bài 7. Cho phương trình
$$x^2+7x-2=0. \tag{1}$$
Hãy lập một phương trình bậc hai có các nghiệm là lũy thừa bậc 6 của các nghiệm của phương trình (1).

Lời giải.

Vì phương trình (1) có $ac=-1<0$ nên (1) luôn có hai nghiệm trái dấu.
Gọi $x_1,\ x_2$ là các nghiệm của phương trình đã cho, theo Vi-ét ta có
$$x_1+x_2=-7,\ x_1x_2=-2.$$
Gọi y_1,y_2 là các nghiệm của phương trình phải lập, khi đó giả sử
$$y_1=x_1^6,\ y_2=x_2^6.$$
Ta có
$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=7^2-2\cdot(-2)=53.$$
Do đó,
$$y_1+y_2=x_1^6+x_2^6=\left(x_1^2+x_2^2\right)^3-3x_1^2x_2^2\left(x_1^2+x_2^2\right)=53^2-3\cdot(-2)^2\cdot 53=2173.$$
và
$$y_1y_2=x_1^6x_2^6=(x_1+x_2)^6=(-2)^6=64.$$
Phương trình phải lập có tổng hai nghiệm bằng 2173 và tích hai nghiệm bằng 64 nên có dạng là
$$y^2-2173y+64=0.$$

$\square$

Bài 8. Cho phương trình $x^2 - mx + m - 1 = 0 \quad (1)$, với m là tham số.

1. Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm x_1, x_2 với mọi giá trị m.
2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)}$.

Lời giải.

1. Vì
$$\Delta = m^2 - 4(m-1) = (m-2)^2 \geqslant 0, \forall m \in \mathbb{R}$$
nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm $x_1,\ x_2$.

2. Hệ thức Vi-ét:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = m - 1 \end{cases}$$
Do đó,
$$P = \frac{2x_1x_2 + 3}{(x_1 + x_2)^2 + 2} = \frac{2m + 1}{m^2 + 2}$$
Ta có
$$1 - P = \frac{(m-1)^2}{m^2 + 2} \geqslant 0 \ \Rightarrow P \leqslant 1$$
và
$$P + \frac{1}{2} = \frac{(m+2)^2}{2(m^2 + 2)} \geqslant 0 \ \Rightarrow P \geqslant -\frac{1}{2}.$$
Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\dfrac{1}{2}$ khi $m = -2$; giá trị lớn nhất của P bằng 2 khi $m = 1$.

□

Bài 9. Tìm tham số m để phương trình $(m-16)x^2 + 2(m-19)x + m - 14 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $6(x_1^2 + x_2^2) + 2x_1^2 \cdot x_2^2 - 16x_1 - 16x_2 = 14$.

Lời giải.

Điều kiện 1. Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi
$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 16 \neq 0 \\ (m-19)^2 - (m-16)(m-14) \geqslant 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 16 \\ -8m + 137 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 16 \\ m \leqslant \dfrac{137}{8}. \end{cases} \quad (1)$$

Điều kiện 2. Với điều kiện (1), theo hệ thức Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-2m + 38}{m - 16} \\ x_1x_2 = \dfrac{m - 14}{m - 16}. \end{cases}$

Yêu cầu
$$\begin{aligned} & 6(x_1^2 + x_2^2) + 2x_1^2 \cdot x_2^2 - 16x_1 - 16x_2 = 14 \\ \Leftrightarrow\ & 3(x_1 + x_2)^2 - 6x_1x_2 + (x_1x_2)^2 - 8(x_1 + x_2) = 7 \\ \Leftrightarrow\ & 3\left(\frac{-2m + 38}{m - 16}\right)^2 - 6\left(\frac{m - 14}{m - 16}\right) + \left(\frac{m - 14}{m - 16}\right)^2 - 8\left(\frac{-2m + 38}{m - 16}\right) = 7 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\ 12(m-19)^2-6(m-14)(m-16)+(m-14)^2+16(m-19)(m-16)=7(m-16)^2$$

$$\Leftrightarrow\ 16m^2-640m+6256=0 \Leftrightarrow m^2-40m+391=0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&m=23\\&m=17.\end{aligned}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện (1), ta được $m=17$ là giá trị cần tìm.

□

Bài 10. Cho phương trình $x^2-2x+2-m=0$, m là tham số. Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ thỏa mãn hệ thức $2x_1^3+(m+2)x_2^2=5$.

Lời giải.

- **Điều kiện 1**. Phương trình có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ khi và chỉ khi

$$\Delta'\geqslant 0 \ \Leftrightarrow\ m-1\geqslant 0 \ \Leftrightarrow\ m\geqslant 1. \qquad (1)$$

- **Điều kiện 2**. Với điều kiện (1), theo hệ thức Vi-ét, ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2\\x_1x_2=2-m.\end{cases}$

Ta có $x_1^2-2x_1+2-m=0$ và $x_2^2-2x_2+2-m=0$.
Khi đó, yêu cầu đề bài

$$\begin{aligned}2x_1^3+(m+2)x_2^2=5 &\Leftrightarrow\ 2x_1(2x_1-2+m)+(m+2)x_2^2=5\\
&\Leftrightarrow\ 4x_1^2-4x_1+2mx_1+(m+2)x_2^2=0\\
&\Leftrightarrow\ 4(2x_1-2+m)-4x_1+2mx_1+(m+2)(2x_2-2+m)=0\\
&\Leftrightarrow\ (2m+4)(x_1+x_2)+m^2+4m-12=5\\
&\Leftrightarrow\ m^2+8m-9=0 \ \Leftrightarrow\ \left[\begin{aligned}&m=1\\&m=-9.\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

Đối chiếu với điều kiện (1), ta được $m=1$ là giá trị cần tìm.

□

§4 Phương trình quy về phương trình bậc hai

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Phương trình trùng phương.

1. Phương trình trùng phương là phương trình có dạng

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0). \tag{1}$$

2. ***Phương pháp giải*** Để giải phương trình trùng phương, ta thực hiện theo ba bước

   - *Bước 1:* Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$. Phương trình (1) trở thành $at^2 + bt + c = 0$.
   - *Bước 2:* Giải phương trình bậc hai theo ẩn t (chú ý điều kiện của t).
   - *Bước 3:* Với giá trị t vừa tìm được, ta trả về biến x và kết luận nghiệm của phương trình (1).

1.2 Phương trình chứa ẩn ở mẫu.

Phương pháp giải Để giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức, ta thực hiện theo bốn bước

- *Bước 1:* Tìm điều kiện xác định của phương trình.
- *Bước 2:* Quy đồng mẫu thức hai vế rồi khử mẫu thức.
- *Bước 3:* Giải phương trình vừa nhận được.
- *Bước 4:* Trong các giá trị tìm được của ẩn, loại các giá trị không thỏa mãn điều kiện xác định, các giá trị thỏa mãn điều kiện xác định là nghiệm của phương trình đã cho.

1.3 Phương trình bậc cao có thể đưa về phương trình tích.

1. ***Lược đồ Hooc-ne***

   - Lược đồ Hooc-ne dùng để tìm đa thức thương và dư trong phép chia đa thức $f(x)$ cho đa thức $x - \alpha$. Cách làm như sau:
     Giả sử $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$. Khi đó, đa thức thương

     $$g(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}$$

     được xác định theo lược đồ sau

	a_0	a_1	$\cdots\cdots$	a_{n-1}	a_n
α	$b_0 = a_0$	$b_1 = b_0 \cdot \alpha + a_1$		$b_{n-1} = b_{n-2} \cdot \alpha + a_{n-1}$	$r = b_{n-1} \cdot \alpha + a_n$

   - Quy tắc nhớ: ***“Nhân ngang cộng chéo”***.
     ⚠ **20.** Trong lược đồ trên, dòng đầu phải viết tất cả các hệ số của $f(x)$, kể cả các hệ số bằng 0. Nếu $f(\alpha) = 0$ thì $r = 0$.

2. ***Phương pháp giải***

 - Phân tích về trái thành nhân tử, vế phải bằng 0.
 - Giải phương trình tích

$$A \cdot B = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0. \end{array}\right.$$

1.4 Phương trình vô tỉ.

Phương trình vô tỉ là phương trình có chứa ẩn dưới dấu căn thức. Trong nội dung bài học này ta chỉ xét các phương trình vô tỉ là các phương trình chứa ẩn dưới dấu căn bậc hai.

1.5 Một số phương trình có dạng đặc biệt.

2 Các dạng toán

Dạng 88. Giải và biện luận phương trình trùng phương

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

a) $3x^4 - 5x^2 - 28 = 0$;

b) $x^4 + x^2 - 2 = 0$.

Lời giải.

1. Đặt $t = x^2$, $(t \geq 0)$.
   Phương trình đã cho trở thành $3t^2 - 5t - 28 = 0$ (1)
   Ta có $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-28) = 361$.
   Vì $\Delta > 0$ nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{5 - 19}{6} = \frac{-7}{3} \quad \text{(loại)}; \\ t_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{5 + 19}{6} = 4 \quad \text{(thỏa)}. \end{aligned}$$

   Với $t = 4$, ta có $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ hoặc $x = -2$.
   Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-2; 2\}$.

2. Đặt $t = x^2$, $(t \geq 0)$.
   Phương trình đã cho trở thành $t^2 + t - 2 = 0$.
   Ta có $a + b + c = 1 + 1 + (-2) = 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt $t_1 = 1$ (nhận), $t_2 = -2$ (loại).
   Với $t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -1$.
   Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = 1$ hoặc $x = -1$.

□

Ví dụ 2. Tìm các giá trị của m để phương trình $x^4 - 6x^2 + m - 1 = 0$ (m là tham số, x là ẩn số) có bốn nghiệm.

Lời giải.

Đặt $t = x^2$, $(t \geq 0)$.
Phương trình đã cho trở thành $t^2 - 6t + m - 1 = 0$. (2)
Để phương trình đã cho có bốn nghiệm thì phương trình (2) phải có hai nghiệm dương phân biệt. Tức là

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - (m-1) > 0 \\ 6 > 0 \\ m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 10 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 10.$$

Vậy với $1 < m < 10$ thì phương trình đã cho có bốn nghiệm. □

Dạng 89. Phương trình chứa ẩn ở mẫu

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

a) $\dfrac{x^2 - 3x + 6}{x^2 - 9} = \dfrac{1}{x - 3}$;

b) $\dfrac{x - 1}{x + 2} + \dfrac{2}{x - 2} = \dfrac{12}{x^2 - 4}$.

Lời giải.

1. Mẫu thức chung $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$.
   Điều kiện xác định $x \neq 3$; $x \neq -3$.
   Ta có

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2 - 9} = \frac{1}{x - 3} &\Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2 - 9} = \frac{x + 3}{x^2 - 9} \\ &\Rightarrow x^2 - 3x + 6 = x + 3 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 1 & \text{(nhận)} \\ x = 3 & \text{(loại)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

   Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$.

2. Mẫu thức chung $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.
   Điều kiện xác định $x \neq 2$; $x \neq -2$.
   Ta có

$$\begin{aligned} \frac{x - 1}{x + 2} + \frac{2}{x - 2} = \frac{12}{x^2 - 4} &\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)} + \frac{2(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{12}{(x-2)(x+2)} \\ &\Rightarrow x^2 - 3x + 2 + 2x + 4 = 12 \\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 3 & \text{(nhận)} \\ x = -2 & \text{(loại)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

   Vậy phương trình có nghiệm $x = 3$.

□

Dạng 90. Phương trình đưa về phương trình tích

$$A \cdot B = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0. \end{array}\right.$$

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

a) $x^3 + 3x^2 + 2x = 0$;

b) $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$;

c) $(2x^2 + x)^2 = (5 - 2x)^2$.

Lời giải.

1.

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 2x = 0 &\Leftrightarrow x(x^2 + 3x + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + 3x + 2 = 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = -2. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{0; -1; -2\}$.

2.

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0 &\Leftrightarrow (x^3 + 3x^2) - (x + 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2(x + 3) - (x + 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 3)(x^2 - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 3)(x - 1)(x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 3 = 0 \\ x - 1 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; -1; -3\}$.

3.

$$\begin{aligned} (2x^2 + x)^2 = (5 - 2x)^2 &\Leftrightarrow (2x^2 + x)^2 - (5 - 2x)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x^2 + x - 5 + 2x)(2x^2 + x + 5 - 2x) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x^2 + 3x - 5)(2x^2 - x + 5) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x^2 + 3x - 5 = 0 & (1) \\ 2x^2 - x + 5 = 0. & (2) \end{array}\right. \end{aligned}$$

- ☑ Giải (1) Phương trình $2x^2 + 3x - 5 = 0$ có $a + b + c = 2 + 3 + (-5) = 0$ nên phương trình (1) có hai nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = \dfrac{-5}{2}$.
- ☑ Giải (2) Phương trình $2x^2 - x + 5 = 0$ có $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -39 < 0$ nên phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{1; \dfrac{-5}{2}\right\}$.

□

Dạng 91. Phương pháp đặt ẩn phụ

Phương pháp giải

- ☑ Đặt điều kiện để phương trình xác định.
- ☑ Đặt ẩn phụ thích hợp và giải phương trình theo ẩn mới.
- ☑ Trở về ẩn ban đầu và so sánh với điều kiện.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

a) $(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 3 = 0$;

b) $(x^4 + 4x^2 + 4) - 4(x^2 + 2) - 77 = 0$;

c) $\left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right)^2 - 4\left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right) + 3 = 0$;

d) $3x^2 - 14|x| - 5 = 0$.

Lời giải.

1. Đặt $t = x^2 - 2x$. Phương trình đã cho trở thành $t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 3. \end{array}\right.$

   - ☑ Với $t = -1 \Rightarrow x^2 - 2x = -1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
   - ☑ Với $t = 3 \Rightarrow x^2 - 2x = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3. \end{array}\right.$

   Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; -1; 3\}$.

2. Ta có $(x^4 + 4x^2 + 4) - 4(x^2 + 2) - 77 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2)^2 - 4(x^2 + 2) - 77 = 0$.
   Đặt $t = x^2 + 2$; $t \geq 2$. Phương trình đã cho trở thành

   $$t^2 - 4t - 77 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = 11 & \text{(nhận)} \\ t = -7 & \text{(loại)}. \end{array}\right.$$

   Với $t = 11 \Rightarrow x^2 + 2 = 11 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -3. \end{array}\right.$
   Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{3; -3\}$.

3. Điều kiện xác định $x \neq -2$.
   Đặt $t = \dfrac{2x-1}{x+2}$. Phương trình đã cho trở thành

   $$t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 3. \end{array}\right.$$

- Với $t=1 \Rightarrow \dfrac{2x-1}{x+2}=1 \Rightarrow 2x-1=x+2 \Leftrightarrow x=3$ (nhận).
- Với $t=3 \Rightarrow \dfrac{2x-1}{x+2}=3 \Rightarrow 2x-1=3(x+2) \Leftrightarrow x=-7$ (nhận).

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{3;-7\}$.

4. Ta có $3x^2-14|x|-5=0 \Leftrightarrow 3|x|^2-14|x|-5=0$.
Đặt $t=|x|$; $t\geq 0$. Phương trình đã cho trở thành
$$3t^2-14t-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=5 & \text{(nhận)} \\ t=\dfrac{-1}{3} & \text{(loại)}. \end{array}\right.$$
Với $t=5 \Rightarrow |x|=5 \Leftrightarrow x=5$ hoặc $x=-5$.
Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{5;-5\}$.

□

Dạng 92. Phương trình bậc bốn $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=m$ với $a+b=c+d$

Phương pháp giải

- Phương trình được viết lại thành $\left[x^2+(a+b)x+ad\right].\left[x^2+(c+d)x+cd\right]=m$.
- Đặt $t=x^2+(a+b)x$, ta được phương trình bậc hai $(t+ab)(t+cd)=m$.
- Giải phương trình tìm t, từ đó tìm x.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Giải phương trình $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=24$.

Lời giải.

Cách 1: Ta có
$$\begin{aligned}(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=24 &\Leftrightarrow (x+1)(x+4)(x+2)(x+3)=24\\ &\Leftrightarrow (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=24\\ &\Leftrightarrow (x^2+5x+5-1)(x^2+5x+5+1)=24\\ &\Leftrightarrow (x^2+5x+5)^2-1=24\\ &\Leftrightarrow (x^2+5x+5)^2-25=0\\ &\Leftrightarrow (x^2+5x)(x^2+5x+10)=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2+5x=0 & \\ x^2+5x+10=0 & \text{(vô nghiệm)}\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=-5.\end{array}\right.\end{aligned}$$
Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{-5;0\}$.
Cách 2: Ta có $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=24 \Leftrightarrow (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=24$.
Đặt $t=x^2+5x$. Phương trình trở thành
$$(t+4)(t+6)=24 \Leftrightarrow t^2+10t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0\\ t=-10.\end{array}\right.$$

- Với $t = 0 \Rightarrow x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -5. \end{array}\right.$

- Với $t = -10 \Rightarrow x^2 + 5x = -10 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 10 = 0$ (vô nghiệm).

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-5; 0\}$. □

Dạng 93. Phương trình đối xứng bậc bốn, phương trình hồi quy

Phương pháp giải

1. Phương trình đối xứng bậc bốn có dạng $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ $(a \neq 0)$.
   - Kiểm tra $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.
   - Chia hai vế của phương trình cho x^2, rồi đặt ẩn phụ $x + \dfrac{1}{x} = t$.
   - Giải phương trình ẩn t rồi trả về biến x và tìm nghiệm.
2. Phương trình hồi quy có dạng $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e = 0$ $(ae \neq 0)$; trong đó $\dfrac{e}{a} = \left(\dfrac{d}{b}\right)^2$.
   - Kiểm tra $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.
   - Chia hai vế của phương trình cho x^2, rồi đặt ẩn phụ $x + \dfrac{d}{bx} = t$.
   - Giải phương trình ẩn t rồi trả về biến x và tìm nghiệm.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Giải phương trình $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$.

Lời giải.

- Nhận thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.
- Với $x \neq 0$, Chia hai vế của phương trình cho x^2, ta được

$$\begin{aligned} & 2x^2 + \frac{2}{x^2} + 3x + \frac{3}{x} - 16 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 16 = 0. \end{aligned}$$

Đặt $x + \dfrac{1}{x} = t \Leftrightarrow x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 2$. Khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 2(t^2 - 2) + 3t - 16 = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad 2t^2 + 3t - 20 = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t = -4 \\ t = \dfrac{5}{2}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

- Với $t = -4 \Rightarrow x + \dfrac{1}{x} = -4 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 - \sqrt{3} \\ x = -2 + \sqrt{3}. \end{array}\right.$

- Với $t=\dfrac{5}{2} \Rightarrow x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x=2\\ &x=\dfrac{1}{2}.\end{aligned}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S=\left\{-2+\sqrt{3};-2-\sqrt{3};2;\dfrac{1}{2}\right\}$. □

Ví dụ 2. Giải phương trình $x^4-2x^3-4x^2-4x+4=0$.

Lời giải.

- Nhận thấy $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình.
- Với $x\neq 0$, chia hai vế của phương trình cho x^2, ta được

$$\begin{aligned} &x^2+\frac{4}{x^2}-2x-\frac{4}{x}-4=0\\ \Leftrightarrow\ &\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)-2\left(x+\frac{2}{x}\right)-4=0.\end{aligned}$$

Đặt $x+\dfrac{2}{x}=t \Leftrightarrow x^2+\dfrac{4}{x^2}=t^2-4$. Khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} (t^2-4)-2t-4=0 \quad &\Leftrightarrow \quad t^2-2t-8=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &t=-2\\ &t=4.\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

- Với $t=-2 \Rightarrow x+\dfrac{2}{x}=-2 \Leftrightarrow x^2+2x+2=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+1=0$ (vô nghiệm).
- Với $t=4 \Rightarrow x+\dfrac{2}{x}=4 \Leftrightarrow x^2-4x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x=2+\sqrt{2}\\ &x=2-\sqrt{2}.\end{aligned}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S=\left\{2+\sqrt{2};2-\sqrt{2}\right\}$. □

Dạng 94. Phương trình dạng $(x+a)^4+(x+b)^4=c$

- Đặt $t=x+\dfrac{a+b}{2}$. Phương trình trở thành

$$\left(t+\frac{a-b}{2}\right)^4+\left(t-\frac{a-b}{2}\right)^4=c.$$

- Khai triển và rút gọn, giải phương trình ẩn t.
- Cách giải trên còn áp dụng cho phương trình bậc 6.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Giải phương trình $(x+4)^4+(x+6)^4=82$.

Lời giải.

Đặt $t = x + \dfrac{4+6}{2} = x + 5 \Rightarrow \begin{cases} x+4 = t-1 \\ x+6 = t+1 \end{cases}$.

Khi đó, phương trình trở thành

$$\begin{aligned}(t-1)^4 + (t+1)^4 = 82 &\Leftrightarrow \left[(t-1)^2 + (t+1)^2\right]^2 - 2(t-1)^2(t+1)^2 = 82\\ &\Leftrightarrow \left[t^2 - 2t + 1 + t^2 + 2t + 1\right]^2 - 2(t^2-1)^2 = 82\\ &\Leftrightarrow \left[2t^2+2\right]^2 - 2(t^4 - 2t^2 + 1) - 82 = 0\\ &\Leftrightarrow 4t^4 + 8t^2 + 4 - 2t^4 + 4t^2 - 2 - 82 = 0\\ &\Leftrightarrow 2t^4 + 12t^2 - 80 = 0\\ &\Leftrightarrow t^4 + 6t^2 - 40 = 0.\end{aligned}$$

Đặt $u = t^2$, $u \geq 0$. Phương trình trở thành $u^2 + 6u - 40 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} u = 4 & \text{(nhận)} \\ u = -10 & \text{(loại)}. \end{array}\right.$

Với $u = 4 \Rightarrow t^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -2. \end{array}\right.$

- Với $t = 2 \Leftrightarrow x + 5 = 2 \Leftrightarrow x = -3$.
- Với $t = -2 \Leftrightarrow x + 5 = -2 \Leftrightarrow x = -7$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\mathrm{S} = \{-3; -7\}$. □

Dạng 95. Phương trình dạng phân thức hữu tỉ

Phương pháp giải

- Trong nội dung này, chúng ta xét một số nội dung sau
  1. $\dfrac{mx}{ax^2 + bx + c} + \dfrac{nx}{ax^2 + cx + d} = p$;
  2. $\dfrac{ax^2 + mx + c}{ax^2 + nx + c} + \dfrac{ax^2 + px + c}{ax^2 + qx + c} = d$;
  3. $\dfrac{ax^2 + mx + c}{ax^2 + nx + c} + \dfrac{px}{ax^2 + qx + c} = d$.
- Chia tử và mẫu của mỗi phân thức cho x rồi đặt ẩn phụ thích hợp.
- Giải phương trình vừa tìm được.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

a) $\dfrac{4x}{x^2 + x + 3} + \dfrac{5x}{x^2 - 5x + 3} = -\dfrac{3}{2}$;

b) $\dfrac{x^2 - 10x + 15}{x^2 - 6x + 15} = \dfrac{4x}{x^2 - 12x + 15}$;

c) $\dfrac{x^2 - 13x + 15}{x^2 - 14x + 15} - \dfrac{x^2 - 15x + 15}{x^2 - 16x + 15} = -\dfrac{1}{12}$.

Lời giải.

1. Nhận thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên chia tử và mẫu của phương trình cho x, ta được

$$\frac{4x}{x^2+x+3}+\frac{5x}{x^2-5x+3}=-\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{4}{x+1+\dfrac{3}{x}}+\frac{5}{x-5+\dfrac{3}{x}}=-\frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{4}{x+\dfrac{3}{x}+1}+\frac{5}{x+\dfrac{3}{x}-5}=-\frac{3}{2}.$$

Đặt $t = x+\dfrac{3}{x} \Rightarrow \begin{cases} x+\dfrac{3}{x}+1=t+1 \\ x+\dfrac{3}{x}-5=t-5. \end{cases}$

Khi đó, với $t \neq -1$, $t \neq 5$ phương trình trở thành

$$\begin{aligned} \frac{4}{t+1}+\frac{5}{t-5}=-\frac{3}{2} &\Leftrightarrow \frac{8(t-5)+10(t+1)}{2(t+1)(t-5)}+\frac{3(t+1)(t-5)}{2(t+1)(t-5)}=0 \\ &\Rightarrow 8t-40+10t+10+3t^2-12t-15=0 \\ &\Leftrightarrow 3t^2+6t-45=0 \\ &\Leftrightarrow t^2+2t-15=0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=3 & \text{(nhận)} \\ t=-5 & \text{(loại)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

- Với $t=3 \Rightarrow x+\dfrac{3}{x}=3 \Rightarrow x^2-3x+3=0$ (vô nghiệm).
- Với $t=-5 \Rightarrow x+\dfrac{3}{x}=-5 \Rightarrow x^2+5x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-5+\sqrt{13}}{2} \\ x=\dfrac{-5-\sqrt{13}}{2}. \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\dfrac{-5+\sqrt{13}}{2};\dfrac{-5-\sqrt{13}}{2}\right\}$.

2. Nhận thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên chia tử và mẫu của phương trình cho x, ta được

$$\frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\frac{4x}{x^2-12x+15} \Rightarrow \frac{x-10+\dfrac{15}{x}}{x-6+\dfrac{15}{x}}=\frac{4}{x-12+\dfrac{15}{x}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x+\dfrac{15}{x}-10}{x+\dfrac{15}{x}-6}=\frac{4}{x+\dfrac{15}{x}-12}.$$

Đặt $t=x+\dfrac{15}{x}-9 \Rightarrow \begin{cases} x+\dfrac{15}{x}-10=t-1 \\ x+\dfrac{15}{x}-6=t+3 \\ x+\dfrac{15}{x}-12=t-3. \end{cases}$

Khi đó, với $t \neq -3$, $t \neq 3$ phương trình trở thành

$$\frac{t-1}{t+3}=\frac{4}{t-3} \Rightarrow (t-1)(t-3)=4(t+3)$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ t^2 - 4t + 3 - 4t - 12 = 0\\
&\Leftrightarrow\ t^2 - 8t - 9 = 0\\
&\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{ll} t = -1 & \text{(nhận)}\\ t = 9 & \text{(nhận).}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

☑ Với $t = -1 \Rightarrow x + \dfrac{15}{x} - 9 = -1 \Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3\\ x = 5.\end{array}\right.$

☑ Với $t = 9 \Rightarrow x + \dfrac{15}{x} - 9 = 9 \Rightarrow x^2 - 18x + 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 9 + \sqrt{66}\\ x = 9 - \sqrt{66}.\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{3; 5; 9 \pm \sqrt{66}\right\}$.

3. Nhận thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên chia tử và mẫu của phương trình cho x, ta được

$$\begin{aligned}
\frac{x^2 - 13x + 15}{x^2 - 14x + 15} - \frac{x^2 - 15x + 15}{x^2 - 16x + 15} = -\frac{1}{12} \quad &\Rightarrow\ \frac{x - 13 + \frac{15}{x}}{x - 14 + \frac{15}{x}} - \frac{x - 15 + \frac{15}{x}}{x - 16 + \frac{15}{x}} = -\frac{1}{12}\\
&\Leftrightarrow\ \frac{x + \frac{15}{x} - 13}{x + \frac{15}{x} - 14} - \frac{x + \frac{15}{x} - 15}{x + \frac{15}{x} - 16} = -\frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

Đặt $t = x + \dfrac{15}{x} - 15 \Rightarrow \begin{cases} x + \dfrac{15}{x} - 13 = t + 2\\ x + \dfrac{15}{x} - 14 = t + 1\\ x + \dfrac{15}{x} - 16 = t - 1.\end{cases}$

Khi đó, với $t \neq -1$, $t \neq 1$ phương trình trở thành

$$\begin{aligned}
\frac{t + 2}{t + 1} - \frac{t}{t - 1} = -\frac{1}{12} \quad &\Rightarrow\ 12(t + 2)(t - 1) - 12t(t + 1) + (t + 1)(t - 1) = 0\\
&\Leftrightarrow\ 12t^2 + 12t - 24 - 12t^2 - 12t + t^2 - 1 = 0\\
&\Leftrightarrow\ t^2 - 25 = 0\\
&\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{ll} t = -5 & \text{(nhận)}\\ t = 5 & \text{(nhận).}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

☑ Với $t = -5 \Rightarrow x + \dfrac{15}{x} - 15 = -5 \Rightarrow x^2 - 10x + 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 - \sqrt{10}\\ x = 5 + \sqrt{10}.\end{array}\right.$

☑ Với $t = 5 \Rightarrow x + \dfrac{15}{x} - 15 = 5 \Rightarrow x^2 - 20x + 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10 + \sqrt{85}\\ x = 10 - \sqrt{85}.\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{5 \pm \sqrt{10}; 10 \pm \sqrt{85}\right\}$.

□

Dạng 96. Nâng lũy thừa hai vế của phương trình

Nâng lũy thừa hai vế của phương trình để làm mất căn thức, đưa về phương trình đơn giản. Ta xét hai dạng phương trình sau

- $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^2. \end{cases}$
- $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \text{ (hoặc } g(x) \geq 0) \\ f(x) = g(x). \end{cases}$

21. Chú ý các hằng đẳng thức khi giải phương trình này.

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

1. $\sqrt{x+1} = x - 1$.
2. $\sqrt{x-2} - 3\sqrt{x^2-4} = 0$.
3. $\sqrt{x+4} - \sqrt{1-x} = \sqrt{1-2x}$.
4. $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 2\sqrt{x} + \sqrt{2x+2}$.

Lời giải.

1. Ta có

$$\sqrt{x+1} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x + 1 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3$.

2. Ta có

$$\sqrt{x-2} - 3\sqrt{x^2-4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\sqrt{x^2-4} = \sqrt{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 9(x^2-4) = x - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ 9x^2 - x - 34 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -\dfrac{17}{9} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

3. Điều kiện xác định của phương trình là $\begin{cases} x + 4 \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \\ 1 - 2x \geq 0 \end{cases}$ hay $-4 \leq x \leq \dfrac{1}{2}$.

Ta có

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{1-x} = \sqrt{1-2x}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sqrt{x+4} = \sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x}\\
&\Leftrightarrow x+4 = 1-x+2\sqrt{(1-x)(1-2x)}+1-2x\\
&\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-3x+1} = 2x+1\\
&\Leftrightarrow 2x^2-3x+1 = 4x^2+4x+1\\
&\Leftrightarrow 2x^2+7x = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0\\ x = -\dfrac{7}{2}.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta nhận $x = 0$, $x = \dfrac{-7}{2}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

4. Điều kiện xác định của phương trình là $\begin{cases} x+3 \geq 0\\ 3x+1 \geq 0\\ x \geq 0\\ 2x+1 \geq 0\end{cases}$ hay $x \geq 0$.

   Ta có

   $$\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1} = 2\sqrt{x}+\sqrt{2x+2} \Leftrightarrow \sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+2} = \sqrt{4x}-\sqrt{x+3}.$$

   Bình phương hai vế của phương trình ta được phương trình

   $$\begin{aligned}
   &3x+1-2\sqrt{(3x+1)(2x+2)}+2x+2 = 4x-2\sqrt{4x(x+3)}+x+3\\
   \Leftrightarrow\ &\sqrt{6x^2+8x+2} = \sqrt{4x^2+12x}\\
   \Leftrightarrow\ &6x^2+8x+2 = 4x^2+12x\\
   \Leftrightarrow\ &2x^2-4x+2 = 0\\
   \Leftrightarrow\ &x = 1.
   \end{aligned}$$

   Kết hợp với điều kiện xác định ta nhận $x = 1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

□

Dạng 97. Biến đổi đẳng thức, dùng hằng đẳng thức

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

1. $\sqrt{x^2-4x+4}+x = 8$.
2. $2\sqrt{x+3} = 9x^2-x-4$.
3. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$.
4. $2x^2-3x+2 = x\sqrt{3x-2}$.

Lời giải.

1. Ta có $x^2-4x+4 = (x-2)^2 \geq 0$ nên phương trình đã cho luôn xác định với mọi x. Khi đó

   $$\sqrt{x^2-4x+4}+x = 8 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2} = 8-x \Leftrightarrow |x-2| = 8-x.$$

- Nếu $x-2\ge 0$ hay $x\ge 2$ thì ta được
$$x-2=8-x\Leftrightarrow 2x=10\Leftrightarrow x=5 \text{ (thỏa mãn } x\ge 2).$$
- Nếu $x-2<0$ hay $x<2$ thì ta được
$$2-x=8-x\Leftrightarrow 0x=6 \text{ (vô nghiệm)}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=5$.

2. Điều kiện xác định của phương trình là $x+3\ge 0$ hay $x\ge -3$.
Ta có
$$\begin{aligned}2\sqrt{x+3}=9x^2-x-4 &\Leftrightarrow x+4+2\sqrt{x+3}=9x^2\Leftrightarrow x+3+2\sqrt{x+3}+1=9x^2\\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+3}+1\right)^2=(3x)^2\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&\sqrt{x+3}=3x-1\\ &\sqrt{x+3}=-3x-1.\end{aligned}\right.\end{aligned}$$
Ta giải từng phương trình trên.
- $\sqrt{x+3}=3x-1\Leftrightarrow \begin{cases}3x-1\ge 0\\ 9x^2-7x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge \dfrac{1}{3}\\ \left[\begin{aligned}&x=1\\ &x=-\dfrac{2}{7}\end{aligned}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$
- $\sqrt{x+3}=-3x-1\Leftrightarrow \begin{cases}-3x-1\ge 0\\ 9x^2+5x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\le -\dfrac{1}{3}\\ \left[\begin{aligned}&x=\dfrac{-5-\sqrt{97}}{18}\\ &x=\dfrac{-5+\sqrt{97}}{18}\end{aligned}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=-\dfrac{5+\sqrt{97}}{18}.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=1$, $x=-\dfrac{5+\sqrt{97}}{18}$.

3. Điều kiện xác định của phương trình là $x\ge 1$.
$$\begin{aligned}&\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1\\ \Leftrightarrow\ &\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-3\right)^2}=1\\ \Leftrightarrow\ &\left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|\sqrt{x-1}-3\right|=1.\end{aligned}$$
- Nếu $0\le\sqrt{x-1}<2$ hay $1\le x<5$ thì ta được
$$2-\sqrt{x-1}+3-\sqrt{x-1}=1\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=2\Leftrightarrow x-1=4\Leftrightarrow x=5 \text{ (loại)}.$$
- Nếu $2\le\sqrt{x-1}<3$ hay $5\le x<10$ thì ta được
$$\sqrt{x-1}-2+3-\sqrt{x-1}=1\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=2\Leftrightarrow 1=1 \text{ (luôn đúng với mọi } 5\le x<10).$$
- Nếu $\sqrt{x-1}\ge 3$ thì ta được
$$\sqrt{x-1}-2+\sqrt{x-1}-3=1\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=3\Leftrightarrow x-1=9\Leftrightarrow x=10 \text{ (nhận)}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $5 \leq x \leq 10$.

4. Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq \dfrac{2}{3}$.

   Ta có

$$
\begin{aligned}
& 2x^2 - 3x + 2 = x\sqrt{3x-2} \\
\Leftrightarrow\ & 8x^2 - 12x + 8 = 4x\sqrt{3x-2} \\
\Leftrightarrow\ & 9x^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2\sqrt{3x-2} + 4(3x-2) \\
\Leftrightarrow\ & (3x)^2 = \left(x + 2\sqrt{3x-2}\right)^2 \\
\Leftrightarrow\ & 3x = x + 2\sqrt{3x-2} \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{3x-2} = x \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - 3x + 2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

   Kết hợp điều kiện xác định ta được $x = 1$, $x = 2$ là các nghiệm của phương trình đã cho.

□

Dạng 98. Biến đổi thành tổng các số hạng không âm

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

1. $x^2 + 5x + 6 = 2\sqrt{3x+4}$.
2. $x^4 - 2x^2 + 2x + 21 = 6\sqrt{2x+11}$.

Lời giải.

1. Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq -\dfrac{4}{3}$.

   Ta có

$$
\begin{aligned}
& x^2 + 5x + 6 = 2\sqrt{3x+4} \\
\Leftrightarrow\ & x^2 + 2x + 1 + 3x + 4 - 2\sqrt{3x+4} + 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x+1)^2 + \left(1 - \sqrt{3x+4}\right)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x + 1 = 0 \\ 1 - \sqrt{3x+4} = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x = -1 \\ \sqrt{3x+4} = 1 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & x = -1.
\end{aligned}
$$

   Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -1$.

2. Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq -\dfrac{11}{2}$.

   Ta có

$$x^4 - 2x^2 + 2x + 21 = 6\sqrt{2x+11}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ x^4-2x^2+1+2x+11-6\sqrt{2x+11}+9=0\\
&\Leftrightarrow\ (x^2-1)^2+\left(\sqrt{2x+11}-3\right)^2=0\\
&\Leftrightarrow\ \begin{cases}x^2-1=0\\ \sqrt{2x+11}-3=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\ \begin{cases}x=\pm 1\\ \sqrt{2x+11}=3\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\ x=-1.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-1$.

□

Dạng 99. Đặt ẩn phụ hoàn toàn

Chúng ta có một số cách đặt ẩn phụ thường gặp sau:

1. Phương trình có dạng $a\cdot f(x)+b\cdot\sqrt{f(x)}+c=0$, trong đó a, b, c là các hằng số.
   Đặt $t=\sqrt{f(x)}\geq 0$ và chuyển phương trình đã cho về phương trình bậc hai theo ẩn t.
2. Phương trình có dạng $a\cdot f(x)+b\cdot\dfrac{1}{f(x)}+c=0$, trong đó a, b, c là các hằng số.
   Đặt $t=f(x)\neq 0$ và chuyển phương trình đã cho về phương trình bậc hai theo ẩn t.
3. Phương trình có dạng $a\left(\sqrt{u(x)\pm v(x)}\right)+b\sqrt{u(x)\cdot v(x)}+c=0$ với a, b, c là các hằng số và $u(x)+v(x)$ là một hằng số dương.
   Đặt $t=\left(\sqrt{u(x)\pm v(x)}\right)$ rồi bình phương hai vế để rút ra $\sqrt{u(x)\cdot v(x)}$ theo t; từ đó chuyển phương trình đã cho về phương trình bậc hai theo ẩn t.
4. Phương trình có dạng $a\cdot u^2+b\cdot u\cdot v+c\cdot v^2=0$ với a, b, c là các hằng số và $u=u(x)$, $v=v(x)$.
   Để giải phương trình này, trước hết ta xét xem khi $v(x)=0$, phương trình có nghiệm hay không.
   Trong trường hợp $v(x)\neq 0$, ta chia hai vế phương trình cho $v(x)$, phương trình trên được viết lại $a\cdot\left(\dfrac{u}{v}\right)^2+b\cdot\dfrac{u}{v}+c=0$.
   Đặt $t=\dfrac{u}{v}$ và đưa phương trình trên thành phương trình bậc hai theo t. Giải phương trình ẩn t này để tìm mối liên hệ giữa u, v và giải ra x.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Giải phương trình sau

1. $2x^2-x+\sqrt{2x^2-x+4}=2$.
2. $\sqrt{x+7}-\sqrt{2-x}+4\sqrt{14-5x-x^2}=3$.
3. $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}-3\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=4$.
4. $2x^2=5\sqrt{x^3+1}-4$.

Lời giải.

1. Điều kiện xác định của phương trình là $2x^2 - x + 4 \geq 0$.
Đặt $t = \sqrt{2x^2 - x + 4}$ với $t \geq 0$. Ta có $2x^2 - x = t^2 - 4$ và phương trình trở thành

$$t^2 - 4 + t = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -3. \end{array}\right.$$

Ta chỉ nhận $t = 2$, ta có phương trình

$$\sqrt{2x^2 - x + 4} = 2 \Leftrightarrow 2x^2 - x + 4 = 4 \Leftrightarrow 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = \dfrac{1}{2}$.

2. Điều kiện xác định của phương trình là $-7 \leq x \leq 2$.
Đặt $t = \sqrt{x+7} - \sqrt{2-x}$. Ta có $t^2 = 9 - 2\sqrt{-x^2 - 5x + 14}$ nên phương trình đã cho trở thành

$$t + 2(9 - t^2) = 3 \Leftrightarrow -2t^2 + t + 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -\dfrac{5}{2}. \end{array}\right.$$

Với $t = 3$, ta có

$$\begin{aligned}
& \sqrt{x+7} - \sqrt{2-x} = 3 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{x+7} = 3 + \sqrt{2-x} \\
\Leftrightarrow\ & x + 7 = 11 - x + 6\sqrt{2-x} \\
\Leftrightarrow\ & 3\sqrt{2-x} = x - 2 \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x \geq 2 \\ 9(2-x) = (x-2)^2 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 + 5x - 14 = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & x = 2.
\end{aligned}$$

Với $t = -\dfrac{5}{2}$, ta có

$$\begin{aligned}
& \sqrt{x+7} - \sqrt{2-x} = -\frac{5}{2} \\
\Leftrightarrow\ & 2\sqrt{x+7} + 5 = 2\sqrt{2-x} \\
\Leftrightarrow\ & 4x + 28 + 20\sqrt{x+7} + 25 = 8 - 4x \\
\Leftrightarrow\ & 20\sqrt{x+7} = -45 - 8x \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x + 7 \geq 0 \\ 64x^2 + 320x - 775 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} x \geq -7 \\ \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{5}{2} - \dfrac{5\sqrt{47}}{8} \\ x = -\dfrac{5}{2} + \dfrac{5\sqrt{47}}{8} \end{array}\right. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{5}{2} - \dfrac{5\sqrt{47}}{8} \\ x = -\dfrac{5}{2} + \dfrac{5\sqrt{47}}{8}. \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện xác định ta được $x = 2$, $x = -\dfrac{5}{2} - \dfrac{5\sqrt{47}}{8}$ là các nghiệm của phương trình đã cho.

3. Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq 1$.
Nhận thấy rằng $\sqrt{x - \sqrt{x^2-1}} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x^2-1}} = 1$ nên ta đặt $t = \sqrt{x - \sqrt{x^2-1}} \geq 0$. Lúc đó $\sqrt{x + \sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1}{t}$.

   Phương trình đã cho trở thành
$$t - \frac{3}{t} = -2 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = 1 & \text{(nhận)} \\ t = -3 & \text{(loại)}. \end{array}\right.$$
   Với $t = 1$, ta có
$$\sqrt{x - \sqrt{x^2-1}} = 1 \Leftrightarrow x - \sqrt{x^2-1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 1 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$
   Đối chiếu điều kiện, suy ra phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$.

4. Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq -1$.
Phương trình viết lại thành
$$2\left(x^2+2\right) = 5\sqrt{x^3+1} \Leftrightarrow 2\left((x+1) + x^2 - x + 1\right) = 5\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x^2-x+1}.$$
   Đặt $u = \sqrt{x+1} \geq 0$ và $v = \sqrt{x^2-x+1} \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Phương trình trở thành
$$2u^2 - 5uv + 2v^2 = 0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{u}{v}\right)^2 - 5\frac{u}{v} + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 2v \\ v = 2u. \end{array}\right.$$
   Với $u = 2v$, ta có $x + 1 = 4(x^2 - x + 1)$, phương trình này vô nghiệm.
   Với $v = 2u$, ta có $x^2 - x + 1 = 4(x+1) \Leftrightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$ (thỏa điều kiện).
   Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$.

□

Dạng 100. Đặt ẩn phụ không hoàn toàn

Phương pháp này có thể sử dụng để giải nhiều dạng phương trình khác nhau nhưng phổ biến nhất là dạng $(ax+b)\sqrt{cx^2+dx+e} = px^2+qx+r$, trong đó a, b, c, d, e, p, q, r là các hằng số.
Đặt $t = \sqrt{cx^2+dx+e}$, chuyển phương trình đã cho thành phương trình bậc hai ẩn t, tham số x và có biệt thức Δ là một biểu thức chính phương (thông thường $\Delta = (mx+n)^2$).
Giải phương trình ẩn t này để tìm mối liên hệ giữa t và x; cùng với $t = \sqrt{cx^2+dx+e}$, chúng ta giải ra được x.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Giải phương trình $x^2 + \left(3 - \sqrt{x^2+5}\right)x = 2\sqrt{x^2+5} - 2$.

Lời giải.

Phương trình được viết lại thành $x^2 + 5 + \left(3 - \sqrt{x^2+5}\right)x = 2\sqrt{x^2+5} + 3$.
Đặt $t = \sqrt{x^2+5}$, phương trình trở thành

$$t^2 + (3-t)x = 2t + 3 \Leftrightarrow t^2 - (x+2)t - 3 + 3x = 0.$$

Xem phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn t, tham số x.
Ta có $\Delta = (x+2)^2 - 4 \cdot (3x-3) = (x-4)^2 \geq 0$ nên phương trình trên có hai nghiệm

$$t = \frac{x+2+x-4}{2} = x - 1 \text{ và } t = 3.$$

Với $t = 3$, ta có $\sqrt{x^2+5} = 3 \Leftrightarrow x = \pm 2$.
Với $t = x - 1$, ta có $\sqrt{x^2+5} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 + 5 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = -2 \end{cases}$ (vô nghiệm).
Vậy, nghiệm của phương trình đã cho là $x = \pm 2$. □

Dạng 101. Dùng lượng liên hợp

Phương pháp dùng biểu thức liên hợp còn được gọi là phương pháp khử căn thức ở tử, thường dùng hơn cả là

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}; \quad (1)$$

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} = \frac{A-B}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}. \quad (2)$$

Trong các công thức (1) và (2), khi nhân và chia vế trái với biểu thức liên hợp của nó, ta được vế phải. Mục đích của việc khử căn thức ở tử nhằm làm xuất hiện nhân tử chung.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

1. $x^2 + 5x + 6 = 2\sqrt{3x+4}$.
2. $\sqrt{2x-1} - \sqrt{x+1} = 2x - 4$.

Lời giải.

1. Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq -\dfrac{4}{3}$.
   Với nhận xét -1 là một nghiệm, ta biến đổi.

$$\begin{aligned}
& x^2 + 5x + 6 = 2\sqrt{3x+4} \\
\Leftrightarrow\ & (x+1)(x+4) + 2 = 2\sqrt{3x+4} \\
\Leftrightarrow\ & (x+1)(x+4) = 2\left(\sqrt{3x+4} - 1\right) \\
\Leftrightarrow\ & (x+1)(x+4) = \frac{2(3x+4-1)}{\sqrt{3x+4}+1} \\
\Leftrightarrow\ & (x+1)(x+4) = \frac{6(x+1)}{\sqrt{3x+4}+1}.
\end{aligned}$$

Rõ ràng $x = -1$ thỏa mãn phương trình.
Với $x \neq -1$ ta có $x + 4 = \dfrac{6}{1 + \sqrt{3x+4}}$. $(*)$
Với $x > -1$ thì $(*)$ có vế trái lớn hơn 3, vế phải nhỏ hơn 3, nên phương trình vô nghiệm.
Với $-\dfrac{4}{3} \leq x < -1$ thì $(*)$ có vế trái nhỏ hơn 3, vế phải lớn hơn 3, nên phương trình vô nghiệm.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -1$.

2. Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq \dfrac{1}{2}$.
Với nhận xét 2 là một nghiệm của phương trình đã cho, ta nhân và chia vế trái của phương trình với biểu thức liên hợp ta được

$$\frac{(2x-1)-(x+1)}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}} = 2(x-2) \Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}} = 2(x-2).$$

Rõ ràng $x = 2$ là nghiệm của phương trình đã cho.
Với $x \neq 2$ ta có $\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}} = 2$. $(*)$
Do $x \geq \dfrac{1}{2}$ nên $\sqrt{x+1} > 1$. Phương trình $(*)$ có vế trái nhỏ hơn 1, vế phải bằng 2 nên vô nghiệm.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

□

Bài 1. Giải các phương trình sau

a) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$;

b) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$;

c) $\dfrac{7}{x+1} + \dfrac{x-4}{2x-2} = \dfrac{x^2+15x}{x^2-1}$;

d) $\dfrac{1}{4-x} = \dfrac{1}{3x^2+1}$.

Lời giải.

1. Đặt $t = x^2$, $(t \geq 0)$.
Phương trình đã cho trở thành $t^2 - 8t - 9 = 0$.
Ta có $a - b + c = 1 - (-8) + (-9) = 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt $t_1 = -1$ (loại), $t_2 = 9$ (nhận).
Với $t = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ hoặc $x = -3$.
Vậy tập nghiệm của phương trình là $\mathrm{S} = \{\pm 3\}$.

2. Đặt $t = x^2$, $(t \geq 0)$.
Phương trình đã cho trở thành $t^2 + 3t - 4 = 0$.
Ta có $a + b + c = 1 + 3 + (-4) = 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt $t_1 = -4$ (loại), $t_2 = 1$ (nhận).
Với $t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -1$.
Vậy tập nghiệm của phương trình là $\mathrm{S} = \{\pm 1\}$.

3. Điều kiện xác định $x \neq \pm 1$.

$$\begin{aligned}\frac{7}{x+1} + \frac{x-4}{2x-2} = \frac{x^2+15x}{x^2-1} &\Leftrightarrow \frac{7}{x+1} + \frac{x-4}{2(x-1)} = \frac{x^2+15x}{(x-1)(x+1)} \\ &\Leftrightarrow \frac{14(x-1)+(x-4)(x+1)}{2(x-1)(x+1)} = \frac{2(x^2+15x)}{2(x-1)(x+1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\ 14x - 14 + x^2 - 3x - 4 = 2x^2 + 30x\\
&\Leftrightarrow\ x^2 + 19x + 18 = 0\\
&\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{ll} x = -1 & \text{(loại)}\\ x = -18 & \text{(nhận)}.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-18\}$.

4. Điều kiện xác định $x \neq 4$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4-x} = \frac{1}{3x^2+1} &\Rightarrow 3x^2 + 1 = 4 - x\\
&\Leftrightarrow 3x^2 + x - 3 = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \dfrac{-1+\sqrt{37}}{6} & \text{(nhận)}\\ x = \dfrac{-1-\sqrt{37}}{6} & \text{(nhận)}.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\dfrac{-1 \pm \sqrt{37}}{6}\right\}$.

□

Bài 2. Giải các phương trình sau

a) $(3x^2 - 2)^2 - (x-1)^2 = 0$;

b) $3x(2x-1)^2 - 4x^2 + 1 = 0$;

c) $x^4 = 8x + 7$.

Lời giải.

1.

$$\begin{aligned}
(3x^2-2)^2 - (x-1)^2 = 0 &\Leftrightarrow (3x^2 - 2 - x + 1)(3x^2 - 2 + x - 1) = 0\\
&\Leftrightarrow (3x^2 - x - 1)(3x^2 + x - 3) = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2 - x - 1 = 0\\ 3x^2 + x - 3 = 0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{6}\\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{37}}{6}.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{6}; \dfrac{-1 \pm \sqrt{37}}{6}\right\}$.

2.

$$\begin{aligned}
3x(2x-1)^2 - 4x^2 + 1 = 0 &\Leftrightarrow 3x(2x-1)^2 - (4x^2 - 1) = 0\\
&\Leftrightarrow 3x(2x-1)^2 - (2x-1)(2x+1) = 0\\
&\Leftrightarrow (2x-1)\left[3x(2x-1) - (2x+1)\right] = 0\\
&\Leftrightarrow (2x-1)(6x^2 - 5x - 1) = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 1 = 0\\ 6x^2 - 5x - 1 = 0\end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = -\dfrac{1}{6}. \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\dfrac{1}{2}; 1; \dfrac{-1}{6}\right\}$.

3.

$$\begin{aligned} x^4 = 8x - 7 &\Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 = 2x^2 + 8x + 8 \\ &\Leftrightarrow (x^2+1)^2 - 2(x+2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 + 1 + \sqrt{2}x + 2\sqrt{2})(x^2 + 1 - \sqrt{2}x - 2\sqrt{2}) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 + \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} + 1)(x^2 - \sqrt{2}x - 2\sqrt{2} + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} + 1 = 0 (\text{vô nghiệm}) \\ x^2 - \sqrt{2}x - 2\sqrt{2} + 1 = 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2{,}23 \\ x = -0{,}88. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{2{,}23; -0{,}88\}$.

□

Bài 3. Giải các phương trình sau

a) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12$;

b) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 5\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - 12 = 0$;

c) $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) = 24$;

d) $(x+4)(x+5)(x+7)(x+8) = 4$;

e) $2x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$;

f) $(x+2)(x+3)(x-7)(x-8) = 144$;

g) $6x^4 + 25x^3 + 12x^2 - 25x + 6 = 0$;

h) $x^4 + 5x^3 - 14x^2 - 20x + 16 = 0$.

Lời giải.

1. Đặt $t = x^2 + x + 1$, $t \geq \dfrac{3}{4}$. Phương trình đã cho trở thành

$$t(t+1) = 12 \Leftrightarrow t^2 + t - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = -4 & (\text{loại}) \\ t = 3 & (\text{nhận}). \end{array}\right.$$

Với $t = 3 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1. \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; -2\}$.

2. Đặt $t = x + \dfrac{1}{x}$, $\Rightarrow x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 2$. Phương trình đã cho trở thành

$$(t^2 - 2) + 5t - 12 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 5t - 14 = 0 \left[\begin{array}{l} t = -7 \\ t = 2. \end{array}\right.$$

- Với $t = -7 \Rightarrow x + \dfrac{1}{x} = -7 \Rightarrow x^2 + 7x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{45}}{2}$.
- Với $t = 2 \Rightarrow x + \dfrac{1}{x} = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{1; \dfrac{-7 \pm \sqrt{45}}{2}\right\}$.

3. $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) = 24 \Leftrightarrow (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 24$.
(xem ví dụ 1.6 Dạng 5, nội dung này.)

4. Ta có

$$\begin{aligned}(x+4)(x+5)(x+7)(x+8) = 4 &\Leftrightarrow (x+4)(x+8)(x+5)(x+7) = 4\\ &\Leftrightarrow (x^2 + 12x + 32)(x^2 + 12x + 35) = 4.\end{aligned}$$

Đặt $t = x^2 + 12x + 32$, $t \geq -4$. Phương trình đã cho trở thành

$$t(t+3) = 4 \Leftrightarrow t^2 + 3t - 4 = 0 \left[\begin{array}{ll} t = -4 & \text{(nhận)} \\ t = 1 & \text{(nhận)}. \end{array}\right.$$

- Với $t = -4 \Rightarrow x^2 + 12x + 32 = -4 \Leftrightarrow x^2 + 12x + 36 = 0 \Leftrightarrow x = 6$.
- Với $t = 1 \Rightarrow x^2 + 12x + 32 = 1 \Leftrightarrow x^2 + 12x + 31 = 0 \Leftrightarrow x = -6 \pm \sqrt{5}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{6; -6 \pm \sqrt{5}\}$.

5. Nhận thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.
Với $x \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho x^2, ta được

$$\begin{aligned}& 2x^2 - x - 2 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = 0\\ \Leftrightarrow\ & 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 = 0.\end{aligned}$$

Đặt $x + \dfrac{1}{x} = t \Leftrightarrow x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 2$. Khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned}2(t^2 - 2) - t - 2 = 0 &\Leftrightarrow 2t^2 - t - 6 = 0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.\end{aligned}$$

- Với $t = 2 \Rightarrow x + \dfrac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
- Với $t = -\dfrac{3}{2} \Rightarrow x + \dfrac{1}{x} = -\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 2 = 0$ (vô nghiệm).

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{1\}$.

6. Ta có

$$\begin{aligned}(x+2)(x+3)(x-7)(x-8) = 144 &\Leftrightarrow (x+2)(x-7)(x+3)(x-8) = 144\\ &\Leftrightarrow (x^2 - 5x - 14)(x^2 - 5x - 24) = 144.\end{aligned}$$

Đặt $t = x^2 - 5x - 19$, $t \geq \dfrac{-87}{4}$. Phương trình đã cho trở thành

$$(t+5)(t-5)=144 \Leftrightarrow t^2-25=144 \Leftrightarrow t^2=169 \left[\begin{array}{ll} t=-13 & \text{(nhận)} \\ t=13 & \text{(nhận)}. \end{array}\right.$$

- Với $t=-13 \Rightarrow x^2-5x-19=-13 \Leftrightarrow x^2-5x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=6. \end{array}\right.$
- Với $t=13 \Rightarrow x^2-5x-19=13 \Leftrightarrow x^2-5x-32=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{5\pm3\sqrt{17}}{2}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{6;-1;\dfrac{5\pm3\sqrt{17}}{2}\right\}$.

7. Nhận thấy $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình.
Với $x\neq0$, chia hai vế của phương trình cho x^2, ta được

$$\begin{aligned} & 6x^2+25x+12-\frac{25}{x}+\frac{6}{x^2}=0 \\ \Leftrightarrow\ & 6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+25\left(x-\frac{1}{x}\right)+12=0. \end{aligned}$$

Đặt $x-\dfrac{1}{x}=t \Leftrightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2+2$. Khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 6(t^2+2)+25t+12=0 \quad & \Leftrightarrow \quad 6t^2+25t+24=0 \\ & \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{-8}{3} \\ t=\dfrac{-3}{2}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

- Với $t=\dfrac{-8}{3} \Rightarrow x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{-8}{3} \Leftrightarrow 3x^2+8x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=\dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$
- Với $t=\dfrac{-3}{2} \Rightarrow x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{-3}{2} \Leftrightarrow 2x^2+3x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình S $=\left\{-2;-3;\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3}\right\}$.

8. Nhận thấy $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình.
Với $x\neq0$, chia hai vế của phương trình cho x^2, ta được

$$\begin{aligned} & x^2+5x-14-\frac{20}{x}+\frac{16}{x^2}=0 \\ \Leftrightarrow\ & 6\left(x^2+\frac{16}{x^2}\right)+5\left(x-\frac{4}{x}\right)-14=0. \end{aligned}$$

Đặt $x-\dfrac{4}{x}=t \Leftrightarrow x^2+\dfrac{16}{x^2}=t^2+8$. Khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} (t^2+8)+5t-14=0 \quad & \Leftrightarrow \quad t^2+5t-6=0 \\ & \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-6. \end{array}\right. \end{aligned}$$

- Với $t = 1 \Rightarrow x - \dfrac{4}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$.
- Với $t = -6 \Rightarrow x - \dfrac{4}{x} = -6 \Leftrightarrow x^2 + 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \pm \sqrt{13}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $\mathrm{S} = \left\{-2; -3; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{3}\right\}$.

□

Bài 4. Giải phương trình sau $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 2$.

Lời giải.

Đặt $t = x + \dfrac{3+5}{2} = x + 4 \Rightarrow \begin{cases} x + 3 = t - 1 \\ x + 5 = t + 1. \end{cases}$

Khi đó, phương trình trở thành

$$\begin{aligned}
(t-1)^4 + (t+1)^4 = 2 &\Leftrightarrow \left[(t-1)^2 + (t+1)^2\right]^2 - 2(t-1)^2(t+1)^2 = 2 \\
&\Leftrightarrow \left[t^2 - 2t + 1 + t^2 + 2t + 1\right]^2 - 2(t^2-1)^2 = 2 \\
&\Leftrightarrow \left[2t^2 + 2\right]^2 - 2(t^4 - 2t^2 + 1) - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow 4t^4 + 8t^2 + 4 - 2t^4 + 4t^2 - 2 - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow 2t^4 + 12t^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow 2t^2\left(t^2 + 6\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2 = 0 \\ t^2 = -6 \quad \text{(vô nghiệm)} \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow t = 0.
\end{aligned}$$

Với $t = 0 \Rightarrow x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$.
Vậy tập nghiệm của phương trình là $\mathrm{S} = \{-4\}$. □

Bài 5. Giải các phương trình sau

1. $\sqrt{x^2 + x - 12} = 8 - x$.
2. $\sqrt{x^2 + 2x + 4} = \sqrt{2 - x}$.
3. $\sqrt{3x + 4} - \sqrt{2x + 1} = \sqrt{x + 3}$.
4. $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x + 3} = \sqrt{6x - 2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3}$.

Lời giải.

1. Ta có

$$\sqrt{x^2 + x - 12} = 8 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - x \geq 0 \\ 17x = 76 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ x = \dfrac{76}{17} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{76}{17}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{76}{17}$.

2. Ta có

$$\sqrt{x^2 + 2x + 4} = \sqrt{2 - x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -1$, $x = -2$.

3. Điều kiện xác định của phương trình là $\begin{cases} 3x+4\geq 0 \\ 2x+1\geq 0 \\ x+3\geq 0 \end{cases}$ hay $x\geq -\dfrac{1}{2}$.

   Ta có

$$\begin{aligned} & \sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+1}=\sqrt{x+3} \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{3x+4}=\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+3} \\ \Leftrightarrow\ & 3x+4=2x+1+2\sqrt{(2x+1)(x+3)}+x+3 \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{(2x+1)(3x+4)}=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2} \\ x=-3. \end{array}\right. \end{aligned}$$

   Kết hợp điều kiện xác định ta nhận $x=-\dfrac{1}{2}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

4. Điều kiện xác định của phương trình là $\begin{cases} x^2-3x+2\geq 0 \\ x+3\geq 0 \\ 6x-2\geq 0 \\ x^2+2x-3\geq 0. \end{cases}$

   Ta có

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{6x-2}+\sqrt{x^2+2x-3} \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{6x-2}=\sqrt{x^2+2x-3}-\sqrt{x+3}. \end{aligned}$$

   Bình phương hai vế của phương trình trên ta được

$$\begin{aligned} & x^2+3x-2\sqrt{(6x-2)(x^2-3x+2)}=x^2+3x-2\sqrt{(x+3)(x^2+2x-3)} \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{(6x-2)(x^2-3x+2)}=\sqrt{(x+3)(x^2+2x-3)} \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)(x-2)(6x-2)=(x-1)(x+3)^2 \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)(5x^2-20x-5)=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ 5x^2-20x-5=0 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2\pm\sqrt{5}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

   Kết hợp điều kiện xác định và thử lại ta nhận $x=1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

□

Bài 6. Giải các phương trình sau

1. $x^2-10x-12=4\sqrt{2x+3}$.
2. $2x^2+x-3=2\sqrt{2x+3}$.
3. $\sqrt{x-2+2\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}$.
4. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$.

Lời giải.

1. Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq -\dfrac{3}{2}$.
   Ta có

$$\begin{aligned}
& x^2 - 10x - 12 = 4\sqrt{2x+3} \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - 2x + 1 = 4(2x+3) + 4\sqrt{2x+3} + 1 \\
\Leftrightarrow\ & (x-1)^2 = \left(2\sqrt{2x+3} + 1\right)^2 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} & x - 1 = 2\sqrt{2x+3} + 1 \\ & 1 - x = 2\sqrt{2x+3} + 1 \end{aligned}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} & \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 12x - 8 = 0 \end{cases} \\ & \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 - 8x - 12 = 0 \end{cases} \end{aligned}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} & x = 6 + 2\sqrt{11} \\ & x = 4 - 2\sqrt{7}. \end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

   Kết hợp điều kiện xác định và thử lại ta được $x = 4 - 2\sqrt{7}$ và $x = 6 + 2\sqrt{11}$ là các nghiệm của phương trình đã cho.

2. Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq -\dfrac{3}{2}$.
   Ta có

$$\begin{aligned}
& 2x^2 + x - 3 = 2\sqrt{2x+3} \\
\Leftrightarrow\ & 4x^2 + 2x - 6 = 4\sqrt{2x+3} \\
\Leftrightarrow\ & 4x^2 + 4x + 1 = 2x + 3 + 4\sqrt{2x+3} + 4 \\
\Leftrightarrow\ & (2x+1)^2 = \left(\sqrt{2x+3} + 2\right)^2 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} & \sqrt{2x+3} + 2 = 2x + 1 \\ & \sqrt{2x+3} + 2 = -2x - 1 \end{aligned}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} & \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ 4x^2 - 6x - 2 = 0 \end{cases} \\ & \begin{cases} x \leq -\dfrac{3}{2} \\ 4x^2 + 10x + 6 \end{cases} \end{aligned}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} & x = \dfrac{3 + \sqrt{17}}{4} \\ & x = -\dfrac{3}{2}. \end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

   Kết hợp điều kiện xác định và thử lại ta được $x = -\dfrac{3}{2}$ và $x = \dfrac{3+\sqrt{17}}{4}$ là các nghiệm của phương trình đã cho.

3. Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq \dfrac{5}{2}$.

   Ta có

$$\begin{aligned}
& \sqrt{x-2+2\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2} \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{2x-5+2\sqrt{2x-5}+1}+\sqrt{2x-5+6\sqrt{2x-5}+9}=14 \\
\Leftrightarrow\ & \left|\sqrt{2x-5}+1\right|+\left|\sqrt{2x-5}+3\right|=14 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{2x-5}=5 \\
\Leftrightarrow\ & x=15.
\end{aligned}$$

   Kết hợp điều kiện xác định ta nhận $x=15$ là nghiệm của phương trình đã cho.

4. Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq 1$.
   Ta có

$$\begin{aligned}
& \sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}=2 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{x-1}+1+\left|\sqrt{x-1}-1\right|=2.
\end{aligned}$$

   - Nếu $x>2$ thì ta được phương trình

$$\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1=2 \Leftrightarrow x=2 \text{ (loại)}.$$

   - Nếu $x \leq 2$ thì ta được phương trình

$$\sqrt{x-1}+1+1-\sqrt{x-1}=2 \Leftrightarrow 0x=0 \text{ (luôn đúng với mọi } x \leq 2\text{)}.$$

   Kết hợp điều kiện xác định ta được $1 \leq x \leq 2$ là các nghiệm của phương trình đã cho.

□

Bài 7. Giải các phương trình sau

1. $2x^2+2x+1=\sqrt{4x+1}$.
2. $x^2-6x+26=6\sqrt{2x+1}$.

Lời giải.

1. Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq -\dfrac{1}{4}$.

   Ta có

$$\begin{aligned}
& 2x^2+2x+1=\sqrt{4x+1} \\
\Leftrightarrow\ & 4x^2+4x+2-2\sqrt{4x+1}=0 \\
\Leftrightarrow\ & (2x)^2+\left(\sqrt{4x+1}-1\right)^2=0 \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} 2x=0 \\ \sqrt{4x+1}-1=0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & x=0.
\end{aligned}$$

   Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=0$.

2. Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq -\dfrac{1}{2}$.
   Ta có
   $$\begin{aligned} & x^2 - 6x + 26 = 6\sqrt{2x+1} \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 8x + 16 + 2x + 1 - 6\sqrt{2x+1} + 9 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-4)^2 + \left(\sqrt{2x+1} - 3\right)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x - 4 = 0 \\ \sqrt{2x+1} - 3 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & x = 4. \end{aligned}$$
   Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 4$.

□

Bài 8. Giải phương trình các phương trình sau

1. $\sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x} = 2 - x^2$.
2. $\sqrt{x^4 - x^2 + 4} + \sqrt{x^4 + 20x^2 + 4} = 7x$.
3. $\dfrac{x^2 - 2x + 13}{\sqrt{4-x}} = 4\sqrt{x+2}$.
4. $2\left(5x^2 + 2\right) + 3\left(x^2 - 2x\right)\sqrt{3x-1} = 2\left(x^3 + 7x\right)$.

Lời giải.

1. Điều kiện xác định của phương trình là $-\dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{1}{2}$.
   Đặt $t = \sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x},\ t \geq 0$. Ta có $t^2 = 2 + 2\sqrt{1-4x^2}$ hay $x^2 = \dfrac{4t^2 - t^4}{16}$ với $t^2 - 2 \geq 0$.
   Phương trình đã cho trở thành
   $$t = 2 - \frac{4t^2 - t^4}{16} \Leftrightarrow t^4 - 4t^2 - 16t + 32 = 0 \Leftrightarrow (t-2)^2(t^2 + 4t + 8) = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$
   Với $t = 2$ suy ra $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
   Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

2. Từ phương trình suy ra phương trình có nghiệm với $x > 0$.
   Với $x > 0$ chia cả hai vế của phương trình cho x ta được
   $$\sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2} - 1} + \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2} + 20} = 7.$$
   Đặt $t = x^2 + \dfrac{4}{x^2} - 1 \geq 3$, ta được phương trình
   $$\begin{aligned} \sqrt{t} + \sqrt{t+21} = 7 \Leftrightarrow \sqrt{t} - 2 + \sqrt{t+21} - 5 = 0 \ & \Leftrightarrow\ (t-4)\left(\frac{1}{\sqrt{t}+2} + \frac{1}{\sqrt{t+21}+5}\right) = 0 \\ & \Leftrightarrow\ t = 4. \end{aligned}$$
   $\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}+2} + \dfrac{1}{\sqrt{t+21}+5} > 0, \forall t > 3\right)$.
   Ta được $x^2 + \dfrac{4}{x^2} - 1 = 4 \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$(do $x > 0$).
   Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 1$, $x = 2$.

3. Điều kiện xác định của phương trình là $\begin{cases}4-x>0\\x+2\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow -2\leq x<4$.

   Phương trình đã cho tương đương
   $$x^2-2x+13=4\sqrt{(4-x)(x+2)}\Leftrightarrow x^2-2x+13=4\sqrt{-x^2+2x+8}$$
   Đặt $t=\sqrt{-x^2+2x+8}$ (Điều kiện $t\geq 0$). Ta có phương trình
   $$8-t^2+13=4t\Leftrightarrow t^2+4t-21=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-7\\t=3.\end{array}\right.$$
   Kết hợp điều kiện ta được $t=3$.
   Với $t=3\Rightarrow\sqrt{-x^2+2x+8}=3\Leftrightarrow -x^2+2x+8=9\Leftrightarrow (x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$ (nhận). Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

4. Điều kiện xác định của phương trình là $x\geq\dfrac{1}{3}$.

   Ta có
   $$\begin{aligned}&2\left(5x^2+2\right)+3\left(x^2-2x\right)\sqrt{3x-1}=2\left(x^3+7x\right)\\ \Leftrightarrow\ &3x(x-2)\sqrt{3x-1}=2(x^3-5x^2+7x-2)\\ \Leftrightarrow\ &3x(x-2)\sqrt{3x-1}=2(x-2)(x^2-3x+1)\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=2\\3x\sqrt{3x-1}=2(x^2-3x+1).\quad(*)\end{array}\right.\end{aligned}$$
   Ta có $(*)\Leftrightarrow 2(3x-1)+3x\sqrt{3x-1}-2x^2=0\Leftrightarrow 2\cdot\dfrac{3x-1}{x^2}+3\cdot\dfrac{\sqrt{3x-1}}{x}-2=0$.

   Đặt $t=\dfrac{\sqrt{3x-1}}{x}$, $(t\geq 0)$, phương trình trên trở thành $2t^2+3t-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{1}{2}\\t=-2.\end{array}\right.$

   Do $t\geq 0$ nên $t=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{3x-1}}{x}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq\dfrac{1}{3}\\x^2-12x+4=0\end{cases}\Leftrightarrow x=6\pm 4\sqrt{2}$.

   Vậy phương trình có 3 nghiệm $x=6\pm4\sqrt{2}$; $x=2$.

□

Bài 9. Giải các phương trình sau

1. $\sqrt{2x^2-3x+10}+\sqrt{2x^2-5x+4}=x+3$.
2. $\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}=x^2-6x+9$.
3. $\sqrt{x}-\sqrt{x-1}=\sqrt{x+8}-\sqrt{x+3}$.
4. $\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=2x$.

Lời giải.

1. Điều kiện xác định của phương trình là $\begin{cases}2x^2-3x+10\geq 0\\2x^2-5x+4\geq 0.\end{cases}$

   Ta thấy $x=-3$ không là nghiệm của phương trình. Nhân và chia vế trái của phương trình với biểu thức liên hợp được
   $$\frac{(2x^2-3x+10)-(2x^2-5x+4)}{\sqrt{2x^2-3x+10}-\sqrt{2x^2-5x+4}}=x+3$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \frac{2(x+3)}{\sqrt{2x^2-3x+10}-\sqrt{2x^2-5x+4}} = x+3 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{2}{\sqrt{2x^2-3x+10}-\sqrt{2x^2-5x+4}} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{2x^2-3x+10}-\sqrt{2x^2-5x+4} = 2 \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{2x^2-3x+10} = 2+\sqrt{2x^2-5x+4}.
\end{aligned}
$$

Bình phương hai vế rồi rút gọn ta được

$$2\sqrt{2x^2-5x+5} = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 7x^2-22x+15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{15}{7}. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$ và $x = \dfrac{15}{7}$.

2. Điều kiện xác định của phương trình là $-2 \leq x \leq 3$.
Với nhận xét 2 là một nghiệm của phương trình đã cho, ta biến đổi

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x} = x^2-6x+9 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2}-2\right)+\left(1-\sqrt{3-x}\right) = x^2-6x+8.$$

Nhân và chia biểu thức trong dấu ngoặc với biểu thức liên hợp ta được

$$
\begin{aligned}
&\frac{(x+2)-4}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{1-(3-x)}{1+\sqrt{3-x}} = (x-2)(x-4) \\
\Leftrightarrow \quad &(x-2)\left(\frac{1}{2+\sqrt{x+2}}+\frac{1}{1+\sqrt{3-x}}+4-x\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Do $-2 \leq x \leq 3$ nên $4 - x > 0$, do đó biểu thức trong dấu ngoặc thứ hai dương.
Vậy $x - 2 = 0$ hay $x = 2$, thỏa điều kiện xác định.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

3. Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq 1$.
Nhân và chia mỗi vế với biểu thức liên hợp được

$$
\begin{aligned}
&\frac{x-(x-1)}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}} = \frac{(x+8)-(x+3)}{\sqrt{x+8}+\sqrt{x+3}} \\
\Leftrightarrow &\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}} = \frac{5}{\sqrt{x+8}+\sqrt{x+3}} \\
\Leftrightarrow &5\sqrt{x}+5\sqrt{x-1} = \sqrt{x+8}+\sqrt{x+3}. \qquad (*)
\end{aligned}
$$

Kết hợp phương trình đã cho với phương trình $(*)$ ta được

$$
\begin{aligned}
&6\sqrt{x}+4\sqrt{x-1} = 2\sqrt{x+8} \\
\Leftrightarrow &3\sqrt{x}+2\sqrt{x-1} = \sqrt{x+8}. \qquad (**)
\end{aligned}
$$

Do $x \geq 1$ nên $\sqrt{x+8} \leq \sqrt{x+8x} = \sqrt{9x} = 3\sqrt{x}$.
Để xảy ra $(**)$ thì $\begin{cases} 8 = 8x \\ \sqrt{x-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$, thỏa mãn phương trình đã cho.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

4. Điều kiện xác định của phương trình là $-1 \leq x \leq 1$.
Nhân và chia $\sqrt{1+x}-1$ với biểu thức liên hợp được

$$\frac{(1+x)-1}{\sqrt{1+x}+1}\left(\sqrt{1-x}+1\right)=2x \Leftrightarrow \frac{x\left(\sqrt{1-x}+1\right)}{\sqrt{1+x}+1}=2x.$$

Hiển nhiên $x=0$ là nghiệm của phương trình đã cho.
Với $x \neq 0$ ta có $\dfrac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1+x}+1}=2$.
Đặt $\sqrt{1+x}=a \geq 0$, $\sqrt{1-x}=b \geq 0$, ta có
$\begin{cases} \dfrac{b+1}{a+1}=2 \\ a^2+b^2=2 \end{cases} \Rightarrow 5a^2+4a-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \text{ (loại)} \\ a=\dfrac{1}{5} \text{ (nhận)}. \end{array}\right.$
Với $a=\dfrac{1}{5}$ thì $1+x=\dfrac{1}{25} \Rightarrow x=-\dfrac{24}{25}$, thỏa mãn điều kiện xác định.
Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=0$ và $x=-\dfrac{24}{25}$.

□

3 Các bài tập nâng cao

Bài 10. Giải phương trình $\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-9x+9}=2x$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2-9x+9 \geq 0$ và $x^2-x+1 \leq 0$.
Nhận thấy $x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ và $x^2-9x+9 \geq 0$ nên vế trái dương.
Do đó để phương trình có nghiệm thì vế phải dương, suy ra $x>0$.
Chia hai vế phương trình có $x>0$, ta được

$$\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{9}{x}+\frac{9}{x^2}}=2.$$

Đặt $t=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}$, ta có phương trình $\sqrt{t+1}+\sqrt{9t+1}=2$.
Giải phương trình này ta được nghiệm $t=0$. Lúc đó giải được $x=1$, thỏa mãn điều kiện ban đầu nên đây là nghiệm của phương trình đã cho.

□

Bài 11. Giải phương trình $x^2+2x\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}=8x-1$.

Lời giải.

Điều kiện $x>0$.
Chia hai vế phương trình cho $x>0$, ta được phương trình

$$x+\frac{1}{x}+2\sqrt{x+\frac{1}{x}}-8=0.$$

Đặt $t=\sqrt{x+\dfrac{1}{x}} \geq \sqrt{2}$.
Phương trình đã cho trở thành $t^2+2t-8=0 \Leftrightarrow t=2$ hoặc $t=-4$ (loại).

Với $t = 2$, ta có $x + \dfrac{1}{x} = 4 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$ (thỏa mãn điều kiện).
Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 2 \pm \sqrt{3}$.

□

Bài 12. Giải phương trình $x^4 - 2x^3 + x - \sqrt{2(x^2 - x)} = 0$.

Lời giải.

Điều kiện $x \leq 0$ hoặc $x \geq 1$.
Phương trình được viết lại $(x^2 - x)^2 - (x^2 - x) - \sqrt{2\left(x^2 - x\right)} = 0$.
Đặt $t = \sqrt{x^2 - x} \geq 0$, phương trình trở thành

$$t^4 - t^2 - \sqrt{2}t \Leftrightarrow t\left(t^3 - t - \sqrt{2}\right) = 0 \Leftrightarrow t\left(t - \sqrt{2}\right)\left(t^2 + \sqrt{2}t + 1 = 0\right) \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &t = 0,\\ &t = \sqrt{2}. \end{aligned}\right.$$

Với $t = 0$, giải được $x = 0$ và $x = 1$.
Với $t = \sqrt{2}$, giải được $x = 2$ và $x = -1$. □

Bài 13. Giải phương trình $\sqrt{5x^2 - 14x + 9} - \sqrt{x^2 - x - 20} = 5\sqrt{x + 1}$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 5x^2 - 14x + 9 \geq 0 \\ x^2 - x - 20 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)(5x - 9) \geq 0 \\ (x + 4)(x - 5) \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 5.$
Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} &\sqrt{5x^2 - 14x + 9} = \sqrt{x^2 - x - 20} + 5\sqrt{x + 1}\\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 5\sqrt{(x^2 - x - 20) \cdot (x + 1)}\\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 5\sqrt{(x + 4)(x - 5)(x + 1)}\\ &\Leftrightarrow 2\left(x^2 - 4x - 5\right) + 3(x + 4) = 5\sqrt{(x + 4)\left(x^2 - 4x - 5\right)}. \end{aligned}$$

Với điều kiện $x \geq 5$, ta có thể đặt $u = \sqrt{x^2 - 4x - 5} \geq 0$, $v = \sqrt{x + 4} > 0$ và phương trình trở thành

$$2u^2 + 3v^2 = 5uv \Leftrightarrow 2\left(\frac{u}{v}\right)^2 - 5\frac{u}{v} + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\frac{u}{v} = 1\\ &\frac{u}{v} = \frac{3}{2} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} u &= v,\\ 2u &= 3v. \end{aligned}\right.$$

Với $u = v$, ta có $\sqrt{x^2 - 4x - 5} = \sqrt{x + 4} \Leftrightarrow x = \dfrac{5 + \sqrt{61}}{2}$.
Với $2u = 3v$, ta có $2\sqrt{x^2 - 4x - 5} = v\sqrt{x + 4} \Leftrightarrow x = 8$.
Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \dfrac{5 + \sqrt{61}}{2}$ và $x = 8$. □

Bài 14. Giải phương trình $\sqrt{5x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 - 3x - 18} = 5\sqrt{x}$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 6$.
Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} &\sqrt{5x^2 + 4x} - 5\sqrt{x} = \sqrt{x^2 - 3x - 18}\\ \Rightarrow\ &5x^2 + 4x + 25x - 10x\sqrt{5x + 4} = x^2 - 3x - 18 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\quad 6(5x+4)-10x\sqrt{5x+4}+4x^2+2x-6=0.$$

Đặt $t=\sqrt{5x+4}\geq 0$, ta có phương trình $6t^2-10xt+4x^2+2x-6=0$.
Phương trình này có $\Delta'=(x-6)^2\geq 0$ nên nó có hai nghiệm $t=x-1$ và $t=\dfrac{2x+3}{3}$.
Với $t=x-1$, ta có $\sqrt{5x+4}=x-1$; giải phương trình này ta được nghiệm $x=\dfrac{7+\sqrt{61}}{2}$.
Với $t=\dfrac{2x+3}{3}$, ta có $3\sqrt{5x+4}=2x+3$; giải phương trình này ta được nghiệm $x=9$.
Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=9$ và $x=\dfrac{7+\sqrt{61}}{2}$.

□

Bài 15. Giải phương trình $4x^2+14x+11=4\sqrt{6x+10}$.

Lời giải.

Điều kiện $x\geq -\dfrac{5}{3}$.
Ta có phương trình tương đương

$$(2x+5)^2-\left(2+\sqrt{6x+10}\right)^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+5-2-\sqrt{6x+10}=0\\2x+5+2+\sqrt{6x+10}=0.\end{array}\right.$$

Vì $x\geq -\dfrac{5}{3}$ nên $2x+5+2+\sqrt{6x+10}>0$ do đó phương trình tương đương với

$$\sqrt{6x+10}=2x+3\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{13}-3}{4}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{\sqrt{13}-3}{4}$. □

Bài 16. Giải phương trình

$$\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+7x+10}\right)=3.$$

Lời giải.

Điều kiện $x\geq -2$.
Ta có phương trình tương đương

$$\begin{aligned}&\frac{3}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x+2}}\left[1+\sqrt{(x+5)(x+2)}\right]=3\\
\Leftrightarrow\ &1+\sqrt{(x+5)(x+2)}=\sqrt{x+5}+\sqrt{x+2}\\
\Leftrightarrow\ &\left(\sqrt{x+5}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x+2}-1\right)=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{ll}x=-4 & \text{(loại)}\\ x=-1 & \text{(thỏa mãn).}\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=-1$. □

Bài 17. Giải phương trình sau $(x-1)^6+(x-2)^6=1$.

Lời giải.

Ta có $(x-1)^6 + (x-2)^6 = 1 \Leftrightarrow (2x-2)^6 + (2x-4)^6 = 64 \qquad (*)$.
Đặt $t = 2x - 3$. Khi đó phương trình (*) trở thành

$$\begin{aligned}
(t+1)^6 + (t-1)^6 &\Leftrightarrow [(t+1)^3 + (t-1)^3]^2 - 2(t+1)^3(t-1)^3 = 64\\
&\Leftrightarrow [t^3 + 3t^2 + 3t + 1 + t^3 - 3t^2 + 3t - 1]^2 - 2(t^2-1)^3 = 64\\
&\Leftrightarrow [2t^3 + 6t]^2 - 2(t^6 - 3t^4 + 3t^2 - 1) = 64\\
&\Leftrightarrow 4t^6 + 24t^4 + 36t^2 - 2t^6 + 6t^4 - 6t^2 + 2 = 64\\
&\Leftrightarrow 2t^6 + 30t^4 + 30t^2 - 62 = 0\\
&\Leftrightarrow t^6 + 15t^4 + 15t^2 - 31 = 0 \quad (**)
\end{aligned}$$

Đặt $u = t^2$, $u \geq 0$. Do đó, $(**) \Rightarrow u^3 + 15u^2 + 15u - 31 = 0 \quad (***)$.
Nhẩm thấy phương trình có nghiệm $u = 1$ nên theo lược đồ Hooc-ne, ta có

	1	15	15	-31
1	1	16	31	0

Từ đó $(***) \Rightarrow (u-1)(u^2 + 16u + 31) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u - 1 = 0 \\ u^2 + 16u + 31 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} u = 1 & \text{(nhận)} \\ u = -8 \pm \sqrt{33} & \text{(loại)}. \end{array}\right.$

Với $u = 1 \Rightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 3 = 1 \\ 2x - 3 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1. \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; 2\}$. $\square$

§5 Giải toán bằng cách lập phương trình

1 Tóm tắt lý thuyết

Bước 1. Lập phương trình.

- Chọn ẩn số và đặt điều kiện thích hợp của ẩn.
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn số và các đại lượng đã biết.
- Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2. Giải phương trình vừa lập.

Bước 3. Trả lời: Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thích hợp với bài toán và trả lời.

2 Các dạng bài tập và phương pháp giải

Dạng 102. Toán số học, phần trăm

- Biểu diễn:

$$\overline{ab} = 10 \cdot a + b \ (a, b \in \mathbb{N}, 0 < a \leq 9, 0 \leq b \leq 9).$$
$$\overline{abc} = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c \ (a, b, c \in \mathbb{N}, 0 < a \leq 9, 0 \leq b, c \leq 9).$$

- Tỉ số của hai số a và b $(b \neq 0)$ là $\dfrac{a}{b}$.
- Tổng của hai số x, y là $x + y$.
- Tổng bình phương hai số x; y là $x^2 + y^2$.
- Tổng nghịch đảo của hai số x; y là $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Trong lúc học nhóm, bạn Hùng yêu cầu bạn Minh và bạn Lan mỗi người chọn một số sao cho hai số này hơn kém nhau là 5 và tích của chúng phải bằng 150. Vậy hai bạn Minh và Lan phải chọn những số nào?

Lời giải.

Gọi số mà một bạn đã chọn là x và số bạn kia là $x + 5$.
Tích của hai số là $x(x+5)$.
Theo đầu bài, ta có phương trình

$$x(x+5) = 150 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 150 = 0.$$

Giải phương trình $\Delta = 25 - 4 \cdot (-150) = 625 = 25^2$ nên $x_1 = 10$, $x_2 = -15$.
Trả lời:
- Nếu bạn Minh chọn số 10 thì bạn Lan chọn số 15 hoặc ngược lại.
- Nếu bạn minh chọn số -15 thì bạn Lan chọn số -10 hoặc ngược lại.

□

Ví dụ 2. Tìm hai số biết rằng tổng của chúng bằng 17 đơn vị. Nếu số thứ nhất tăng thêm 3 đơn vị, số thứ 2 tăng thêm 2 đơn vị thì tích của chúng bằng 105 đơn vị.

Lời giải.

Gọi số thứ nhất là x, số thứ hai là y.
Theo đề bài tổng của hai số đó bằng 17 đơn vị nên ta có phương trình $x + y = 17$. (1)
Số thứ nhất tăng thêm 3 đơn vị, số thứ hai tăng thêm 2 đơn vị thì tích của chúng bằng 105 đơn vị nên ta có phương trình $(x+3)(y+2) = 105$. (2)
Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ (x+3)(y+2) = 105. \end{cases}$$

Rút y từ (1) thế vào (2) và thu gọn, ta được

$$x^2 - 16x + 48 = 0.$$

Giải phương trình ta được $x_1 = 12$ (thỏa mãn) và $x_2 = 4$ (thỏa mãn).
Vậy nếu số thứ nhất là 12 thì số thứ hai là 5; nếu số thứ nhất là 4 thì số thứ hai là 13.

□

Dạng 103. Năng suất công việc

- Khối lượng công việc = Năng suất × Thời gian.
- Năng suất = Khối lượng công việc ÷ Thời gian.
- Thời gian = Khối lượng công việc ÷ Năng suất.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Một công nhân dự định làm 70 sản phẩm trong thời gian quy định. Nhưng do áp dụng kĩ thuật nên đã tăng năng suất thêm 5 sản phẩm mỗi giờ. Do đó, không những hoàn thành kế hoạch trước thời hạn 40 phút mà còn vượt mức 10% sản phẩm. Tính năng suất dự định.

Lời giải.

Gọi năng suất dự định là x (sản phẩm/giờ, $x \in \mathbb{N}^*$);
Thời gian dự định làm 70 sản phẩm là $\dfrac{70}{x}$ giờ;

Thời gian thực tế làm 80 sản phẩm với năng suất $x+5$ (sản phẩm/giờ) là $\dfrac{80}{x+5}$ giờ.

Theo đề bài, công nhân hoàn thành trước kế hoạch 40 phút ($=\dfrac{2}{3}$ giờ).

Ta có phương trình

$$\frac{70}{x}-\frac{80}{x+5}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow x^2+20x-525=0.$$

$\Delta=20^2-4\cdot(-525)=2500>0$ nên phương trình có nghiệm $x_1=15$ (nhận); $x_2=-35$ (loại).
Vậy năng suất dự định là 15 sản phẩm/giờ.

□

Ví dụ 2. Một công nhân dự định làm 72 sản phẩm trong thời gian quy định. Nhưng thực tế xí nghiệp lại giao 80 sản phẩm. Vì vậy mặc dù người đó đã làm mỗi giờ thêm 1 sản phẩm, song thời gian hoàn thành công việc vẫn chậm hơn so với dự định 12 phút. Tính năng suất dự kiến, biết rằng mỗi giờ người đó làm không quá 20 sản phẩm.

Lời giải.

Gọi năng suất dự kiến là x (sản phẩm/giờ, $x\in\mathbb{N}$, $0<x<20$);
Vậy năng suất thực tế là $x+1$ (sản phẩm/giờ).

Thời gian dự định làm 72 sản phẩm là $\dfrac{72}{x}$ (giờ).

Thời gian thực tế làm 80 sản phẩm là $\dfrac{80}{x+1}$ (giờ).

Theo đề bài, thời gian hoàn thành vẫn chậm hơn so với dự định là 12 phút ($=\dfrac{1}{5}$ giờ) ta có phương trình

$$\frac{80}{x+1}-\frac{72}{x}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow 80\cdot5\cdot x-72\cdot5(x+1)=x(x+1)\Leftrightarrow x^2-39x+360=0.$$

Ta có $\Delta=39^2-4\cdot360=81>0$, nên phương trình có nghiệm $x_1=24$ (loại); $x_2=15$ (nhận).
Vậy năng suất dự kiến là 15 (sản phẩm/giờ). □

Dạng 104. Toán chuyển động

- Sử dụng công thức $S=V\cdot t$; trong đó, S là quãng đường, V là vận tốc, t là thời gian. Suy ra $V=\dfrac{S}{t}$; $t=\dfrac{S}{V}$.
- Nếu chuyển động trong dòng chảy thì

$$V_{\text{xuôi dòng}}=V_{\text{riêng}}+V_{\text{dòng nước}}$$
$$V_{\text{ngược dòng}}=V_{\text{riêng}}-V_{\text{dòng nước}}.$$

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Một xuồng du lịch đi từ thành phố Cà Mau đến Đất Mũi theo một đường sông dài 120 km. Trên đường đi, xuồng có nghỉ lại một giờ ở thị trấn Nam Căn. Khi về, xuồng đi theo đường khác dài hơn đường đi 5 km và với vận tốc lúc về nhỏ hơn vận tốc lúc đi là 5 km/h. Tính vận tốc của xuồng lúc đi, biết rằng thời gian về bằng thời gian đi.

Lời giải.

Gọi vận tốc của xuồng lúc đi là x (km/h), $x > 0$, thì vận tốc lúc về là $x - 5$ (km/h).
Thời gian đi 120 km là $\dfrac{120}{x}$ (giờ).
Vì khi đi có nghỉ một giờ nên thời gian đi hết tất cả là $\dfrac{120}{x} + 1$ (giờ). Độ dài quãng đường về $120 + 5 = 125$ (km).
Thời gian về là $\dfrac{125}{x-5}$ (giờ).
Theo đầu bài, ta có phương trình

$$\frac{120}{x} + 1 = \frac{125}{x-5} \Leftrightarrow x^2 - 10x - 600 = 0.$$

Ta có $\Delta = 10^2 - 4 \cdot (-600) = 2500 > 0$, nên phương trình có nghiệm $x_1 = 30$ (nhận); $x_2 = -20$ (loại).
Vậy vận tốc của xuồng đi là 30 km/h. □

Ví dụ 2. Bác Hiệp và cô Liên đi xe đạp từ làng lên tỉnh trên quãng đường dài 30 km, khởi hành cùng một lúc. Vận tốc xe của bác hiệp lớn hơn vận tốc xe của cô Liên là 3 km/h nên bác Hiệp đã đến tỉnh trước cô Liên nửa giờ. Tính vận tốc xe của mỗi người.

Lời giải.

Gọi vận tốc xe của bác Hiệp là x (km/h, $x > 0$); khi đó vận tốc xe của cô Liên là $x - 3$ (km/h).
Thời gian bác Hiệp đi từ làng lên tỉnh là $\dfrac{30}{x}$ (giờ).
Thời gian cô Liên đi từ làng lên tỉnh là $\dfrac{30}{x-3}$ (giờ).
Vì bác Hiệp đến trước cô Liên nửa giờ, tức là thời gian đi của bác Hiệp ít hơn thời gian đi của cô Liên nửa giờ nên ta có phương trình

$$\frac{30}{x-3} - \frac{30}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 3x - 180 = 0.$$

Ta có $\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-180) = 729 > 0$, nên phương trình có nghiệm $x_1 = -12$ (loại); $x_2 = 15$ (nhận).
Vậy vận tốc xe của bác Hiệp là 15 km/h. Vận tốc xe của cô Liên là 12 km/h. □

Dạng 105. Dạng toán có nội dung hình học

Áp dụng các công thức sau:

- Định lý Pi-ta-go: ΔABC vuông tại $A \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$.
- Diện tích hình chữ nhật: $S = a \cdot b$; với a là chiều dài, b là chiều rộng.
- Diện tích hình thang: $S = \dfrac{a+b}{2}$ hoặc $S = m \cdot h$. Trong đó, a, b là độ dài hai đáy; h là đường cao; m là độ dài đường trung bình.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Một hình chữ nhật có chiều rộng bằng $\dfrac{2}{3}$ chiều dài, diện tích hình chữ nhật là 5400 cm^2. Tính chu vi hình chữ nhật.

Lời giải.

Gọi chiều dài hình chữ nhật là x (cm, $x > 0$).
Chiều rộng hình chữ nhật là $\frac{2}{3}x$ (cm).
Theo đầu bài, ta có phương trình

$$x \cdot \frac{2}{3}x = 5400 \Leftrightarrow x^2 = 8100 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 90 \\ x = -90 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

Vậy chiều dài hình chữ nhật là 90 cm, chiều rộng hình chữ nhật là 60 cm. Do đó, chu vi hình chữ nhật là $(90 + 60) \cdot 2 = 300$ cm. □

Ví dụ 2. Một thửa ruộng hình chữ nhật có diện tích là 100 m^2. Tính độ dài các cạnh của thửa ruộng. Biết rằng nếu tăng chiều rộng của thửa ruộng lên 2 m và giảm chiều dài thửa ruộng đi 5 m thì diện tích thửa ruộng tăng thêm 5 m^2.

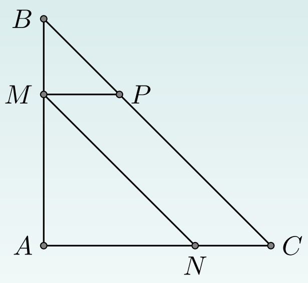
Lời giải.

Gọi chiều dài hình chữ nhật là x (m, $x > 0$), thì chiều rộng hình chữ nhật là $\frac{100}{x}$ (m).
Theo đầu bài, nếu tăng chiều rộng thửa ruộng lên 2 m và giảm chiều dài thửa ruộng đi 5 m thì diện tích thửa ruộng tăng thêm 5 m^2, ta có phương trình

$$(x - 5) \cdot \left(\frac{100}{x} + 2\right) = 100 + 5 \Leftrightarrow 2x^2 - 15x - 500 = 0$$

Ta có $\Delta = 15^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-500) = 4225 > 0$, nên phương trình có nghiệm $x_1 = -\frac{25}{2}$ (loại); $x_2 = 20$ (nhận).
Vậy chiều dài mảnh đất hình chữ nhật là 20 m, chiều rộng là 5 m. □

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông cân có $AB = AC = 12$ cm. Điểm M chạy trên AB. Tứ giác $MNCP$ là hình bình hành có đỉnh N thuộc cạnh AC (như hình bên dưới). Hỏi khi M cách A bao nhiêu thì diện tích của hình bình hành bằng 32 cm^2.



Lời giải.

Đặt $MA = x$, ta có $MB = NC = 12 - x$ (cm).
$S_{MPCN} = S_{ABC} - S_{BMP} - S_{AMN} = 72 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}(12 - x)^2 = -x^2 + 12x$.
Ta có phương trình $-x^2 + 12x = 32 \Leftrightarrow x^2 - 12x - 32 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8 \\ x = 4 \end{array}\right.$.
Ta có $\Delta = 12^2 - 4 \cdot 2 \cdot (32) = 16 > 0$, nên phương trình có nghiệm $x_1 = 8$ (nhận); $x_2 = 4$ (nhận).
Kết luận khi M cách A 8 cm hoặc 4 cm thì diện tích hình bình hành bằng 32 cm^2. □

Dạng 106. Toán làm chung làm riêng

Coi toàn bộ công việc là 1.
Năng suất $= 1 :$ Thời gian.
Tổng các năng suất riêng = Năng suất chung.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Hai công nhân cùng làm một công việc thì hoàn thành công việc đó trong 6 giờ 40 phút. Nếu họ làm riêng thì công nhân thứ nhất hoàn thành công việc đó ít hơn công nhân thứ hai là 3 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi công nhân phải làm trong bao lâu thì xong việc?

Lời giải.

Ta có 6 giờ 40 phút $= 6\dfrac{2}{3}$ giờ.
Gọi thời gian công nhân thứ nhất làm một mình xong công việc là x (giờ, $x > 6\dfrac{2}{3}$).
Thời gian công nhân thứ hai làm một mình xong việc là $x + 3$ (giờ).
Mỗi giờ công nhân thứ nhất làm được $\dfrac{1}{x}$ (công việc).
Mỗi giờ công nhân thứ hai làm được $\dfrac{1}{x+3}$ (công việc).
Theo đầu bài, hai công nhân cùng làm thì hoàn thành công việc trong $6\dfrac{2}{3}$ giờ. Nên mỗi giờ họ cùng làm được $1 : 6\dfrac{2}{3} = \dfrac{3}{20}$ (công việc).
Ta có phương trình

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{3}{20} \Leftrightarrow 3x^2 - 31x - 60 = 0.$$

Ta có $\Delta = 31^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-60) = 1681 > 0$ nên phương trình có nghiệm là $x_1 = -\dfrac{5}{3}$ (loại); $x_2 = 12$ (nhận).
Vậy thời gian công nhân thứ nhất làm xong công việc là 12 giờ.
Thời gian công nhân thứ hai làm một mình xong công việc là 15 giờ. □

Ví dụ 2. Hai vòi cùng chảy vào một bể thì đầy sau 7 giờ 12 phút. Nếu mỗi vòi chảy riêng mà đầy bể thì tổng thời gian là 30 giờ. Mỗi vòi chảy riêng thì đầy bể trong thời gian là bao lâu?

Lời giải.

7 giờ 12 phút $= 7\dfrac{1}{5}$ giờ.
Gọi thời gian vòi thứ nhất chảy riêng đầy bể là x giờ $(0 < x < 30)$.
Thời gian vời thứ hai chảy riêng đầy bể là $30 - x$ (giờ).
Theo đề, hai vòi cùng chảy mà đầy bể sau $= 7\dfrac{1}{5}$ (giờ) nên ta có phương trình

$$7\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{30-x}\right) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 30x + 216 = 0.$$

Ta có $\Delta = 30^2 - 4 \cdot (216) = 36 > 0$ nên phương trình có nghiệm là $x_1 = 18$ (loại); $x_2 = 12$ (nhận).
Vậy vòi thứ nhất chảy riêng sẽ đầy bể sau 12 giờ, vòi thứ hai chảy riêng sẽ đầy bể sau 18 giờ và ngược lại. ☐

Dạng 107. Các dạng khác

Bao gồm các bài toán thực tế, các bài toán liên quan đến lý, hóa.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Chu vi bánh sau của một máy cày lớn hơn chu vi bánh trước là 1,5 m. Khi đi trên đoạn đường dài 100 m thì bánh trước quay nhiều hơn bánh sau 15 vòng. Tính chu vi của mỗi bánh xe.

Lời giải.

Gọi x (m) là chu vi bánh trước ($x > 0$).
Chu vi của bánh sau $x + 1{,}5$ (m).
Vì hai bánh này cùng lăn trên quãng đường 100 (m).

- Số vòng quay được của bánh trước $\dfrac{100}{x}$.
- Số vòng quay được của bánh sau $\dfrac{100}{x+15}$.

Ta có phương trình
$$\frac{100}{x} - \frac{100}{x+15} = 15 \Leftrightarrow x^2 + 15x - 100 = 0.$$

Ta có $\Delta = 15^2 - 4 \cdot (-100) = 625 > 0$ nên phương trình có nghiệm là $x_1 = -20$ (loại); $x_2 = 5$ (nhận).
Kết luận: Chu vi bánh trước là 5 m, chu vi bánh sau là 6,5 (m). ☐

Ví dụ 2. Người ta trộn 8 gam chất lỏng này với 6 gam chất lỏng khác có khối lượng riêng nhỏ hơn $0,2$ g/cm^3 để được hỗn hợp có khối lượng riêng là $0,7$ g/cm^3. Tìm khối lượng riêng của chất lỏng.

Lời giải.

Gọi x (g/cm^3) là khối lượng riêng của chất lỏng thứ nhất ($x > 0{,}2$).
Khối lượng tiêng của chất lỏng thứ hai là $x - 0{,}2$ (g/cm^3).
Thể tích của chất lỏng thứ nhất là $\dfrac{8}{x}$ (cm^3).
Thể tích của chất lỏng thứ nhất là $\dfrac{6}{x-0{,}2}$ (cm^3).
Thể tích của hỗn hợp là $\dfrac{14}{0{,}7}$ (cm^3).
Ta có phương trình
$$\frac{8}{x} + \frac{6}{x-0{,}2} = \frac{14}{0{,}7} \Leftrightarrow 20x^2 - 18x + 1,6 = 0$$
.
Ta có $\Delta = 18^2 - 4 \cdot 20 \cdot 1{,}6 = 196 > 0$ nên phương trình có nghiệm là $x_1 = 0{,}1$ (loại); $x_2 = 0,8$ (nhận).

Kết luận : khối lượng riêng của chất lỏng thứ nhất là 0,8 (g/cm^3), khối lượng riêng của chất lỏng thứ hai là $0,6$ (g/cm^3). □

Ví dụ 3. Miếng kim loại thứ nhất nặng 880 g, miếng kim loại thứ hai nặng 858 g. Thể tích của miếng kim loại thứ nhất nhỏ hơn thể tích của miếng kim loại thứ hai là 10 cm^3, nhưng khối lượng riêng của miếng kim loại thứ nhất lớn hơn miếng kim loại thứ hai là 1 g/cm^3. Tính khối lượng riêng của mỗi miếng kim loại. (Biết rằng khối lượng riêng của một vật được xác định bởi công thức $D = \dfrac{M}{V}$ trong đó D là khối lượng riêng tính bằng đơn vị g/cm^3, m là khối lượng tính bằng đơn vị g, V là thể tích tính bằng đơn vị cm^3.)

Lời giải.

Gọi x (g/cm^3) là khối lượng riêng của miếng kim loại thứ nhất ($x > 1$).
Khối lượng riêng của miếng kim loại thứ hai là $x - 1$ (g/cm^3).
Thể tích của miếng kim loại thứ nhất $\dfrac{880}{x}$ (g/cm^3).
Thể tích của miếng kim loại thứ hai $\dfrac{858}{x-1}$ (g/cm^3).
Ta có phương trình

$$\frac{858}{x-1} - \frac{880}{x} = 10 \Leftrightarrow 5x^2 + 6x - 440 = 0.$$

$\Delta = 6^2 + 4 \cdot 5 \cdot 440 = 8836 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x_1 = -10$ (loại); $x_2 = 8,8$ (nhận).
Vậy khối lượng riêng của miếng kim loại thứ nhất là $8,8$ (g/cm^3).
Khối lượng riêng của miếng kim loại thứ hai là $7,8$ (g/cm^3). □

3 Luyện tập

Bài 1. Tìm hai số biết rằng hai lần số thứ nhất hơn ba lần số thứ hai là 9 và hiệu các bình phương của chúng là 119.

Lời giải.

Gọi x và y là hai số cần tìm. Theo đề bài, ta có hệ

$$\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ x^2 - y^2 = 119. \end{cases}$$

Giải ra hai số cần tìm là $(12; 5)$ hoặc $(-19{,}2; -15{,}8)$. □

Bài 2. Một tổ có kế hoạch sản xuất 350 sản phẩm theo năng suất dự định. Nếu năng suất tăng lên 10 sản phẩm thì tổ đó hoàn thành sớm 2 ngày so với giảm năng suất 10 sản phẩm mỗi ngày. Tính năng suất dự kiến.

Lời giải.

Gọi năng suất dự kiến là x (sản phẩm/ngày; $x \in \mathbb{N}$).
Nếu tăng năng suất lên 10 sản phẩm thì số ngày hoàn thành 350 sản phẩm là $\dfrac{350}{x+10}$ (ngày).
Nếu giảm năng suất 10 sản phẩm thì số ngày hoàn thành 350 sản phẩm là $\dfrac{350}{x-10}$ (ngày).

Theo đề bài, ta có phương trình

$$\frac{350}{x-10}-\frac{350}{x+10}=2\Leftrightarrow x^2=3600\Leftrightarrow x=\pm 60.$$

So với điều kiện, vậy năng suất dự kiến là 60 (sản phẩm/ngày). □

Bài 3. Một nhóm thợ phải thực hiện kế hoạch sản suất 3000 sản phẩm. Trong 8 ngày đầu, họ thực hiện đúng mức đề ra, những ngày còn lại họ đã vượt mức mỗi ngày 10 sản phẩm, nên đã hoàn thành sớm hơn dự định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày cần phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

Lời giải.

Gọi số sản phẩm theo kế hoạch mỗi ngày cần sản xuất là x (sản phẩm/ngày, $x\in\mathbb{Z}^*$).
Suy ra số sản phẩm làm trong 8 ngày đầu là $8x$ (sản phẩm);
Thời gian làm số sản phẩm còn lại là $\dfrac{3000-8x}{x+10}$ (ngày).
Thời gian làm theo kế hoạch là $\dfrac{3000}{x}$ (ngày).
Theo đề bài, nhóm thợ đã hoàn thành sớm hơn 2 ngày so với dự định, ta có phương trình

$$8+\frac{3000-8x}{x+10}+2=\frac{3000}{x}\Leftrightarrow x^2+50x-15000=0.$$

$\Delta=50^2+4\cdot 1\cdot 1500=6000>0$ nên phương trình có nghiệm $x_1=-150$ (loại); $x_2=100$ (nhận).
Vậy theo kế hoạch, mỗi ngày cần sản xuất 100 sản phẩm. □

Bài 4. Một người đi xe đạp quảng đường từ A đến B dài 30 km. Khi từ B về A, người đó chọn con đường khác dài hơn 6 km và đi với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 3 km/h, nên thời gian về ít hơn thời gian đi là 20 phút. Tính vận tốc lúc đi.

Lời giải.

Ta có 20 phút $=\dfrac{1}{3}$ giờ.
Gọi vận tốc lúc đi là x (km/h, $x>0$).
Suy ra thời gian đi quãng đường từ A đến B dài 30 km hết $\dfrac{30}{x}$ (h).
Khi về, người đó đi quãng đường dài hơn quãng đường lúc đi 6 km và đi với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 3 km/h nên thời gian hết là $\dfrac{36}{x+3}$ (h).
Theo đầu bài, vì thời gian về ít hơn thời gian đi là $\dfrac{1}{3}$ giờ nên có phương trình

$$\frac{30}{x}-\frac{36}{x+3}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x^2+21x-270=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=9\\x=-30\ (\text{loại}).\end{array}\right.$$

$\Delta=21^2-4\cdot(-270)=1521>0$ nên phương trình có nghiệm $x_1=-30$ (loại); $x_2=9$ (nhận).
Vậy vận tốc lúc đi là 9 km/h. □

Bài 5. Một tàu thủy chạy trên khúc sông dài 120 km. Cả đi lẫn về mất 6 giờ 45 phút. Tính vận tốc tàu thủy khi nước yên lặng, biết vận tốc của dòng nước là 4 km/h.

Lời giải.

Ta có 6 giờ 45 phút$=\dfrac{27}{4}$ giờ.
Gọi vận tốc của tàu thủy khi nước yên lặng là x (km/h, $x>4$).

Suy ra vận tốc của tàu thủy khi xuôi dòng là $x + 4$ (km/h).
Vận tốc của tàu thủy khi ngược dòng là $x - 4$ (km/h).
Thời gian tàu thủy đi xuôi dòng 120 km là $\dfrac{120}{x+4}$ (giờ).
Thời gian tàu thủy đi ngược dòng 120 km là $\dfrac{120}{x-4}$ (giờ).
Theo đề bài, thời gian cả đi lẫn về mất $\dfrac{27}{4}$ giờ. Ta có phương trình

$$\frac{120}{x+4} + \frac{120}{x-4} = \frac{27}{4} \Leftrightarrow 9x^2 - 320x - 144 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = 36 \\ &x = -\frac{4}{9} \text{ (loại)}. \end{aligned}\right.$$

$\Delta = 320^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-144) = 107584 > 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = -\dfrac{4}{9}$ (loại); $x_2 = 36$ (nhận).
Vậy vận tốc tàu thủy khi nước yên lặng là 36 km/h. □

Bài 6. Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi 280 m. Người ta làm một lối đi xung quanh vườn thuộc đất của vườn rộng 2 m, diện tích đất còn lại để trồng trọt là 4256 m^2. Tính các kích thước của vườn.

Lời giải.

Gọi chiều dài hình chữ nhật là x (m, $x > 70$), khi đó, chiều rộng của khi vườn hình chữ nhật $280 \div 2 - x = 140 - x$ (m).
Người ta làm một lối đi xung quanh vườn thuộc đất của vườn rộng 2 m, thì chiều dài phần đất còn lại để trồng trọt là $x - 4$ (m), chiều rộng phần đất còn lại để trồng trọt là $140 - x - 4 = 136 - x$ (m).
Theo đầu bài, diện tích đất trồng còn lại là 4256 m^2, ta có phương trình

$$(x-4) \cdot (136 - x) = 4256 \Leftrightarrow x^2 - 140x + 4800 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = 80 \\ &x = 60 \text{ (loại.)} \end{aligned}\right.$$

Vậy chiều dài mãnh đất hình chữ nhật là 80 m, chiều rộng là 60 m.

□

Bài 7. Cho một số có hai chữ số. Tìm số đó, biết rằng tổng hai chữ số của nó nhỏ hơn số đó 6 lần. Nếu thêm 25 vào tích của hai chữ số đó sẽ được số viết theo thứ tự ngược lại với số đã cho.

Lời giải.

Gọi chữ số hàng chục là x, chữ số hàng đơn vị là y (x, $y \in \mathbb{N}$, $0 < x \leq 9$, $0 \leq y \leq 9$).
Theo đề bài, tổng hai chữ số của nó nhỏ hơn số đó 6 lần, ta có phương trình

$$6(x + y) = 10x + y. \tag{1}$$

Nếu thêm 25 vào tích của hai chữ số đó sẽ được số viết theo thứ tự ngược lại với số đã cho, ta có phương trình

$$xy + 25 = 10y + x. \tag{2}$$

Từ (1) suy ra $x = \dfrac{5y}{4}$, thay vào (2) ta có $y^2 - 9y + 20 = 0$.
Giải phương trình này, ta được $y_1 = 5$, $y_2 = 4$.
Với $y_1 = 5$ thì $x_1 = 6{,}25$ (không thỏa mãn).
Với $y_2 = 4$ thì $x_2 = 5$ (thỏa mãn).
Vậy số phải tìm là 54.

□

Bài 8. Một lâm trường dự định làm 75 ha rừng trong một tuần lễ. Do trồng mỗi tuần vượt mức 5 ha so với kế hoạch nên đã trồng được 80 ha và hoàn thành sớm 1 tuần. Hỏi mỗi tuần dự định trồng bao nhiêu ha rừng?

Lời giải.

Gọi số ha dự định trồng mỗi tuần là x (ha, $x > 0$).
Suy ra thực tế mỗi tuần trồng được $x + 5$ (ha).
Thời gian dự định trồng 75 ha rừng là $\dfrac{75}{x}$ (tuần).
Thời gian thực tế trồng 80 ha rừng là $\dfrac{80}{x+5}$ (tuần).
Theo đề bài, thực tế hoàn thành sớm 1 tuần ta có phương trình

$$\frac{75}{x} - \frac{80}{x+5} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 10x - 375 = 0.$$

$\Delta = 10^2 - 4 \cdot (-375) = 1600 > 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = -25$ (loại); $x_2 = 15$ (nhận).
Vậy mỗi tuần dự định trồng 15 ha. □

Bài 9. Một ca nô xuôi dòng từ bến sông A đến bến sông B cách nhau 24 km; cũng từ A về B một chiếc bè trôi với vận tốc dòng nước là 4 km/h. Khi đến B ca nô quay lại ngay và gặp bè tại điểm C cách A là 8 km. Tính vận tốc thực của ca nô.

Lời giải.

Gọi vận tốc thực của ca nô là x (km/h, $x > 4$).
Suy ra vận tốc của ca nô khi xuôi dòng là $x + 4$ (km/h).
Vận tốc của ca nô khi ngược dòng là $x - 4$ (km/h).
Thời gian ca nô đi xuôi dòng 24 km là $\dfrac{24}{x+4}$ (giờ).
Thời gian ca nô đi ngược dòng 16 km là $\dfrac{16}{x-4}$ (giờ).
Theo đề bài, thời gian ca nô đi bằng thời gian bè trôi đến chỗ gặp nhau, nên ta có phương trình

$$\frac{24}{x+4} + \frac{16}{x-4} = \frac{8}{4} \Leftrightarrow x^2 - 20x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 20 \\ x = 0 \text{ (loại).} \end{array}\right.$$

Vậy vận tốc thực của ca nô là 20 km/h. □

Bài 10. Một mảnh đất hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 13 m và chiều dài lớn hơn chiều rộng 7 m. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó.

Lời giải.

Gọi chiều rộng mảnh đất là x (m, $0 < x < 13$), thì chiều dài mảnh đất là $x + 7$ (m). Theo đầu bài, hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 13 m, áp dụng định lí Pi-ta-go ta có phương trình

$$x^2 + (x+7)^2 = 13^2 \Leftrightarrow x^2 + 7x - 60 = 0.$$

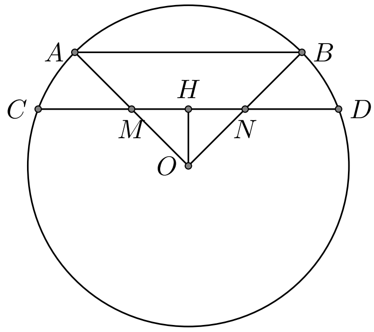
$\Delta = 7^2 - 4 \cdot (-60) = 289 > 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = -12$ (loại); $x_2 = 5$ (nhận).
Vậy chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật là 5 m và chiều dài của mảnh đất là 12 m. □

Bài 11. Cho đường tròn $(O; R)$ và hai bán kính OA, OB. Trên các bán kính OA, OB lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $OM = ON$. Vẽ dây CD đi qua M và N (M nằm giữa C và N). Giả sử $\widehat{AOB} = 90^\circ$, hãy tính OM, ON theo R sao cho $CM = MN = ND$.

Lời giải.

Đặt $OM = ON = x$ $(0 < x < R)$.
Gọi H là hình chiếu của O lên CD. Tam giác OHM vuông cân nên $MH = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}$. Ta có $CM = DN$, $HC = HD$ nên ta có $HM = HN$ và vì $CM = MN = ND$. Ta có

$$\begin{aligned} CH = 3MH &\Leftrightarrow CH^2 = 9MH^2 \Leftrightarrow OC^2 - OH^2 = 9OM^2 \\ &\Leftrightarrow OC^2 = 10OM^2 \Leftrightarrow R^2 = 10x^2 \Leftrightarrow x = \frac{R\sqrt{10}}{10}. \end{aligned}$$



Kết luận: $OM = ON = \dfrac{R\sqrt{10}}{10}$ thì $CM = MN = ND$.

□

Bài 12. Cho đường tròn (O, R) và dây $AB = 2a$ $(a < R)$. Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt đường tròn D. Tính AD theo R và a.

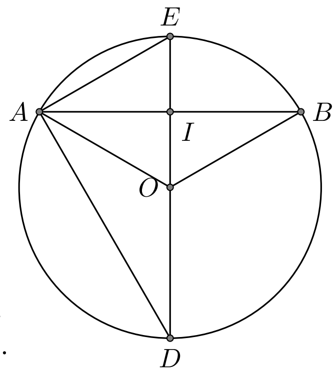
Lời giải.

Hạ $OI \perp AB$ thì $IA = IB = a$. Kéo dài DO cắt đường tròn tại E thì tam giác ADE vuông, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $AI^2 = ID \cdot IE$.
Đặt $ID = x$ ta có

$$a^2 = x(2R - x) \Leftrightarrow x^2 - 2Rx + a^2 = 0 \Leftrightarrow x = R \pm \sqrt{R^2 - a^2}.$$

Mặt khác, trong tam giác vuông ADE ta có

$$AD^2 = DE \cdot DI = 2R(R \pm \sqrt{R^2 - a^2}) \Rightarrow AD = \sqrt{2R(R \pm \sqrt{R^2 - a^2})}.$$



□

Bài 13. Hưởng ứng chiến dịch mùa hè xanh tình nguyện năm 2013, lớp 9A của trường THCS Nguyễn Văn Trỗi được giao trồng 480 cây xanh, lớp dự định chia đều số cây phải trồng cho mỗi bạn trong lớp. Đến buổi lao động có 8 bạn phải đi làm việc khác nên mỗi bạn có mặt phải trồng thêm 3 cây nữa mới xong. Tính số học sinh của lớp 9A.

Lời giải.

Gọi x (học sinh) là số học sinh của lớp 9A $(x \in \mathbb{N}^*)$.
Số cây xanh mỗi học sinh cần phải trồng lúc đầu là $\dfrac{480}{x}$ (cây).
Số cây xanh mỗi học sinh phải trồng trong buổi lao động $\dfrac{480}{x} + 3 = \dfrac{480 + 3x}{x}$ (cây).
Số học sinh đi trồng cây $x - 8$ (học sinh).
Theo đề bài, ta có phương trình

$$(x - 8)\left(\frac{480 + 3x}{x}\right) = 480 \Leftrightarrow x^2 - 8x - 1280 = 0.$$

$\Delta = 8^2 - 4 \cdot (-1280) = 5184 > 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = -32$ (loại); $x_2 = 40$ (nhận).
Vậy số học sinh của lớp 9A là 40 học sinh. □

Bài 14. Hai đội xây dựng cùng làm chung một việc và dự định hoàn thành trong 12 ngày. Họ cùng làm chung với nhau được 8 ngày thì đội 1 được điều đi làm việc khác, đội 2 tiếp tục làm. Do cải tiến kỹ thuật, năng suất tăng gấp đôi nên đội 2 đã làm xong phần việc còn lại trong $3,5$ ngày. Hỏi nếu mỗi đội làm một mình thì bao nhiêu ngày sẽ làm xong công việc nói trên (với năng suất bình thường)?

Lời giải.

Gọi thời gian đội thứ nhất làm một mình xong công việc là x (ngày, $x > 0$).
Mỗi ngày đội thứ nhất làm được $\dfrac{1}{x}$ (công việc), cả hai người làm được $\dfrac{1}{12}$ (công việc), người thứ hai làm được $\dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{x}$ (công việc).
Trong 8 ngày cả hai đội làm được $\dfrac{2}{3}$ (công việc).
Số phần việc còn lại mà đội hai phải làm là $\dfrac{1}{3}$ (công việc).
Năng suất của đội hai sau khi cải tiến kĩ thuật $\dfrac{1}{6} - \dfrac{2}{x}$ (công việc).
Theo đầu bài, đội 2 đã làm xong phần việc còn lại trong 3,5 ngày nên ta có phương trình

$$3,5\left(\frac{1}{6} - \frac{2}{x}\right) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{x} = \frac{1}{14} \Leftrightarrow x = 28.$$

Vậy thời gian công nhân thứ nhất làm xong công việc là 28 ngày.
Thời gian công nhân thứ hai làm một mình xong công việc là 21 ngày.

□

4 Các bài toán nâng cao

Bài 1. Có hai loại muối I và II. Người ta hòa 200 gam dung dịch muối I với 300 gam dung dịch muối II thì được một dung dịch muối có nồng độ muối là 33%. Tính nồng độ muối trong mỗi dung dịch I và II, biết rằng mồng độ muối trong dung dịch I lớn hơn nồng độ muối trong dung dịch II là 20%.

Lời giải.

Gọi nồng độ muối trong dung dịch I là $x\%$ ($0 < x < 100$), nồng độ muối trong dung dịch II là $y\%$ ($0 < y < 100$).
Khi đó lượng muối có trong 200 gam dung dịch muối I là $\dfrac{200x}{100} = 2x$ (gam);
Khối lượng muối có trong 300 gam dung dịch muối II là $\dfrac{300y}{100} = 3y$ (gam).
Khối lượng muối có trong $200 + 300$ gam dung dịch hỗn hợp là $500 \cdot \dfrac{33}{100} = 165$ (gam).
Vì lượng muối của dung dịch hỗn hợp bằng tổng lượng muối của muối I và muối II nên ta có phương trình

$$2x + 3y = 165.$$

Nồng độ dung dịch muối I lớn hơn muối II là 20% nên ta có $x - y = 20$.
Do đó, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y = 20 \\ 2x + 3y = 165 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 20 \\ 2(y + 20) + 3y = 165 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 45 \\ y = 25 \end{cases} \text{(Thỏa mãn).}$$

Vậy nồng độ muối trong dung dịch I là 45% và trong dung dịch II là 25%. □

Bài 2. Một ca nô chạy trên sông trong 7 giờ, xuôi dòng 108 km và ngược dòng 63 km. Một lần khác, ca nô đó cũng chạy trong 7 giờ, xuôi dòng 81 km và ngược dòng 84 km. Tính vận tốc riêng của ca nô và vận tốc của dòng nước.

Lời giải.

Gọi vận tốc riêng của ca nô và vận tốc dòng nước chảy lần lượt là x km/h và y km/h (với $x > y > 0$) thì vận tốc xuôi dòng của ca nô là $(x + y)$ km/h và khi ngược dòng là $(x - y)$ km/h.
Khi xuôi dòng 108 km và ngược dòng 63 km, ca nô lần lượt phải đi trong $\dfrac{108}{x+y}$ giờ và $\dfrac{63}{x-y}$ giờ.
Ta có phương trình $\dfrac{108}{x+y} + \dfrac{63}{x-y} = 7$.
Khi xuôi dòng 81 km và ngược dòng 84 km, ca nô lần lượt phải đi trong $\dfrac{81}{x+y}$ giờ và $\dfrac{84}{x-y}$ giờ.
Ta có phương trình $\dfrac{81}{x+y} + \dfrac{84}{x-y} = 7$.
Do đó, ta có hệ

$$\begin{cases} \dfrac{108}{x+y} + \dfrac{63}{x-y} = 7 \\ \dfrac{81}{x+y} + \dfrac{84}{x-y} = 7. \end{cases}$$

Đặt $\dfrac{1}{x+y} = u$; $\dfrac{1}{x-y} = v$ đưa về hệ

$$\begin{cases} 108u + 63v = 7 \\ 81u + 84v = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{1}{27} \\ v = \dfrac{1}{21}. \end{cases}$$

Do đó,

$$\begin{cases} x + y = 27 \\ x - y = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 3 \end{cases} \text{(thỏa mãn).}$$

Vậy vận tốc riêng của ca nô là 24 km/h; vận tốc riêng của dòng nước chảy là 3 km/h. □

Bài 3. Người ta hòa 8 gam một chất lỏng này với 6 gam chất lỏng khác có khối lượng riêng nhỏ hơn 200 kg/m^3 để được một hỗn hợp có khối lượng riêng là 700 kg/m^3. Tìm khối lượng riêng của mỗi chất lỏng (giả sử hai chất lỏng không có xảy ra phản ứng hóa học).

Lời giải.

Gọi khối lượng riêng của chất thứ nhất là x kg/m^3, $(x > 200)$; khi đó, khối lượng riêng của chất thứ hai là $x - 200$ kg/m^3.
Thể tích của chất thứ nhất là $\dfrac{0{,}008}{x}$ m^3.
Thể tích của chất thứ hai là $\dfrac{0{,}006}{x-200}$ m^3.
Thể tích của hỗn hợp chất lỏng là $\dfrac{0{,}008 + 0{,}006}{700}$ m^3.
Vì trước và sau khi trộn, tổng thể tích của hai chất lỏng đều không đổi nên ta có phương trình

$$\frac{0{,}008}{x} + \frac{0{,}006}{x-200} = \frac{0{,}008 + 0{,}006}{700} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 800 \\ x_2 = 100 \text{ (loại).} \end{array}\right.$$

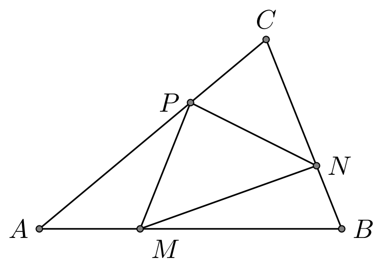
Vậy khối lượng riêng của chất thứ nhất là 800 kg/m^3; khối lượng riêng chất thứ hai là 600 kg/m^3.
□

Bài 4. Trên 3 cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC lần lượt lấy điểm M, N và P sao cho $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{BN}{NC} = \dfrac{CP}{PA} = k$. Tìm k để $S_{MNP} = \dfrac{5}{8}S_{ABC}$.

Lời giải.

Ta có $S_{AMP} = S_{BMN} = S_{CPN} = \dfrac{AM}{AB} \cdot \dfrac{AP}{AC} = \dfrac{k}{k+1} \cdot \dfrac{1}{k+1}$

Do $S_{MNP} = \dfrac{5}{8}S_{ABC}$ suy ra $S_{AMP} = \dfrac{1}{3}S_{ABC}$. Do đó, ta có phương trình:



$$\frac{k}{(k+1)^2} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow k^2 + 2k + 1 = 8k \Leftrightarrow k^2 - 6k + 1 = 0$$

Giải phương trình ta được $k = 3 + 2\sqrt{2}, k = 3 - 2\sqrt{2}$.

□

Bài 5. Hai đội công nhân A và B dự định cùng làm một công việc trong 4 giờ 48 phút thì hoàn thành. Sau khi hai đội làm chung với nhau trong 2 giờ, thì số lượng công nhân ở đội A và đội B bị thay đổi nên năng suất làm việc của đội A bằng $\dfrac{1}{2}$ năng suất làm việc ban đầu của đội A và năng suất làm việc của đội B bằng $\dfrac{11}{4}$ năng suất làm việc ban đầu của đội B; vì vậy hai đội đã hoàn thành công việc trước 48 phút so với dự định. Hỏi nếu số lượng công nhân ở đội A không bị thay đổi thì một mình đội A hoàn thành công việc trên trong mấy giờ?

Lời giải.

4 giờ 48 phút $= \dfrac{24}{5}$ giờ; 48 phút $= \dfrac{4}{5}$ giờ.

Gọi x (giờ) là thời gian một mình đội A hoàn thành công việc ($x > \dfrac{24}{5}$).

Gọi y (giờ) là thời gian một mình đội B hoàn thành công việc ($y > \dfrac{24}{5}$).

Trong $\dfrac{24}{5}$ giờ, đội A làm được $\dfrac{24}{5x}$ (công việc), đội B làm được $\dfrac{24}{5y}$ (công việc).

Theo đề ta có phương trình $\dfrac{24}{5x} + \dfrac{24}{5y} = 1$ (1)

Vì hai đội đã hoàn thành công việc trước 48 phút so với dự định nên thực tế hai đội làm trong 4 giờ.

Trong 2 giờ đầu, đội A làm được $\dfrac{2}{x}$ (công việc), đội B làm được $\dfrac{2}{y}$ (công việc).

Trong 2 giờ sau, đội A làm được $\dfrac{2}{x} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{x}$ (công việc), đội B làm được $\dfrac{2}{x} \cdot \dfrac{11}{4} = \dfrac{11}{2y}$ (công việc).

Theo đề ta có phương trình $\dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{y} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{11}{2y} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{3}{x} + \dfrac{15}{2y} = 1$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{24}{5x} + \dfrac{24}{5y} = 1 \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{15}{2y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 12. \end{cases}$$

Vậy nếu số lượng công nhân ở đội A không bị thay đổi thì một mình đội A hoàn thành công việc trong 8 giờ. $\square$

§6 Ôn tập chương 4

1 Toán trắc nghiệm

1.1 Hàm số và đồ thị của hàm số $y = ax^2$

Bài 1. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m-7)x - m$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số của m để (P) và (d) có hai điểm chung phân biệt.

A 3. B 4. C 2. D 1.

Lời giải.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 2(m-7)x + m = 0$.

Ta có $\Delta' = -14m + 49 > 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{7}{2}$. Vậy có 3 số nguyên dương thỏa mãn.

Chọn đáp án A □

Bài 2. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m-6)x + m$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số của m nhỏ hơn 10 để (P) và (d) không có điểm chung phân biệt.

A 6. B 7. C 5. D 4.

Lời giải.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 2(m-6)x + m = 0$.
Ta có $\Delta' = -12m + 36 < 0 \Leftrightarrow m > 3$.
Mà $m < 10$. Vậy có 6 số nguyên dương thỏa mãn.
Chọn đáp án A □

Bài 3. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m-9)x + m$ với m là tham số. Biết rằng (P) và (d) có đúng một điểm chung. Hỏi m có tính chất nào sau đây?

A $4 < m < 5$. B $m > 5$. C $3 < m < 4$. D $m < 3$.

Lời giải.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 2(m-9)x + m = 0$.

Ta có $\Delta' = -18m + 81 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{9}{2}$.

Vậy $4 < m < 5$.
Chọn đáp án A □

Bài 4. Cho parabol $(P): y = (m^2+1)x^2$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị của m để (P) đi qua điểm $A(2;8)$?

A 0. B 1. C 2. D 3.

Lời giải.

Vì (P) đi qua A nên $8 = 4(m^2+1) \Leftrightarrow m = \pm 1$.
Chọn đáp án C □

Bài 5. Cho parabol $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $(d) : y = 2(m^2 - 4)x - m^2$ với m là tham số. Có bao nhiều giá trị của tham số của m để (P) và (d) có một điểm chung.

Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 2. Ⓓ 1.

Lời giải.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 2(m^2 - 4)x + m^2 = 0$.
Ta có $\Delta' = -8m^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$. Vậy có 2 số nguyên dương thỏa mãn.
Chọn đáp án Ⓒ □

Bài 6. Cho parabol $(P) : y = x^2$ và một số dương a cố định, có bao nhiêu điểm trên (P) có tung độ bằng a?

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 0.

Lời giải.

Xét phương trình $x^2 = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a}$.
Chọn đáp án Ⓑ □

Bài 7. Cho parabol $(P) : y = x^2$, biết rằng không có điểm trên (P) có tung độ bằng a. Hỏi a có tính chất nào sau đây

Ⓐ $\sqrt{a^2} = a$. Ⓑ $\sqrt{a^2} = -a$. Ⓒ $|a| = a$. Ⓓ $a = 0$.

Lời giải.

Phương trình $x^2 = a$ vô nghiệm nên $a < 0$.
Chọn đáp án Ⓑ □

Bài 8. Cho parabol $(P) : y = x^2$ và số a có tính chất trên (P) đúng 1 điểm có tung độ bằng a. Có bao nhiêu số a như vậy?

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Lời giải.

Phương trình $x^2 = a$ có nghiệm duy nhất nên $a = 0$.
Chọn đáp án Ⓑ □

1.2 Phương trình bậc hai một ẩn và công thức nghiệm

Bài 9. Tập nghiệm của phương trình $x^2 + x - 2 = 0$ là

Ⓐ $S = \{1; 2\}$. Ⓑ $S = \{-2; 1\}$. Ⓒ $S = \{-2; -1\}$. Ⓓ $S = \{-1; 2\}$.

Lời giải.

Ta có $\Delta = 9 > 0$.
Do đó phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-1 + 3}{2} = 1, x_2 = \frac{-1 - 3}{2} = -2.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{-2; 1\}$.
Chọn đáp án Ⓑ □

Bài 10. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 - 3 = 0$ vô nghiệm.

Ⓐ $m < -2$. Ⓑ $m \geq -2$. Ⓒ $m > -2$. Ⓓ $m \leq -2$.

Lời giải.

Phương trình $x^2-2(m+1)x+m^2-3=0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta' < 0 \Leftrightarrow (m+1)^2-(m^2-3)<0 \Leftrightarrow 2m+4<0 \Leftrightarrow m<-2.$$

Chọn đáp án A □

Bài 11. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $(m-1)x^2+6x-1=0$ có nghiệm duy nhất?

A 0. B 1. C 2. D Vô số.

Lời giải.

- Với $m=1$ phương trình trở thành $6x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{6}$, thoả mãn.
- Với $m\neq 1$, phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$$\Delta'=0 \Leftrightarrow 9+(m-1)=0 \Leftrightarrow m=-8.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi $m\in\{1;-8\}$.
Chọn đáp án C □

Bài 12. Biết phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ có một nghiệm $x=2$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A $a+b+c=0$. B $a+b+c=2$. C $4a+2b+c=0$. D $c=2$.

Lời giải.

Phương trình có một nghiệm $x=2$ nên $a\cdot 2^2+b\cdot 2+c=0$ hay $4a+2b+c=0$.
Chọn đáp án C □

Bài 13. Cho hàm số $y=ax^2$ có đồ thị là parabol (P) và hàm số $y=-bx+c$ có đồ thị là đường thẳng d, với a, b là các số thực khác 0. Giả sử đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt. Chọn khẳng định đúng.

A $b^2-4ac<0$. B $b^2-4ac>0$. C $b^2+4ac<0$. D $b^2+4ac>0$.

Lời giải.

Đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $ax^2+bx-c=0$ có hai nghiệm phân biệt, hay $\Delta=b^2+4ac>0$.
Chọn đáp án D □

Bài 14. Biết phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ có hai nghiệm phân biệt. Kết luận nào sau đây là **đúng**?

A Phương trình $ax^2-2bx+c=0$ có hai nghiệm phân biệt.
B Phương trình $ax^2-2bx+c=0$ có nghiệm kép.
C Phương trình $ax^2-2bx+c=0$ vô nghiệm.
D Phương trình $ax^2-2bx+c=0$ có nhiều nhất một nghiệm.

Lời giải.

Vì phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ có hai nghiệm phân biệt nên $\Delta_1=b^2-4ac>0$.
Khi đó $\Delta_2=4b^2-4ac=3b^2+\Delta_1>0$ nên phương trình $ax^2-2bx+c=0$ cũng có hai nghiệm phân biệt.
Chọn đáp án A □

Bài 15. Có bao nhiêu số nguyên dương m để phương trình $x^2 - 2\sqrt{3}x + m - 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

(A) Vô số. (B) 5. (C) 6. (D) 7.

Lời giải.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow 3 - (m-4) > 0 \Leftrightarrow m < 7.$$

Mà $m \in \mathbb{Z}^+$ suy ra $m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Chọn đáp án (C) □

Bài 16. Biết phương trình $3x^2 - 4x - 15 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$. Giả sử $x_1 > x_2$ khi đó biểu thức $\dfrac{x_2}{x_1}$ có giá trị

(A) $\dfrac{5}{9}$. (B) $-\dfrac{5}{9}$. (C) -5. (D) 5.

Lời giải.

Ta có $\Delta' = (-2)^2 - 3 \cdot (-15) = 49 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 7$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt $\begin{cases} x_1 = \dfrac{2+7}{3} = 3 \\ x_2 = \dfrac{2-7}{3} = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$. Khi đó $\dfrac{x_2}{x_1} = -\dfrac{5}{9}$.

Chọn đáp án (B) □

1.3 Hệ thức Viet và áp dụng

Bài 17. Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2x^2 + 3x - 10 = 0$. Khi đó tích x_1x_2 bằng

(A) $\dfrac{3}{2}$. (B) $-\dfrac{3}{2}$. (C) -5. (D) 5.

Lời giải.

Theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{3}{2} \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = -\dfrac{10}{2} = -5. \end{cases}$

Vậy $x_1x_2 = -5$.

Chọn đáp án (C) □

Bài 18. Phương trình nào sau đây có nghiệm là $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ và $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

(A) $x^2 + 2\sqrt{3}x + 1 = 0$. (B) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$.

(C) $x^2 + 2\sqrt{3}x - 1 = 0$. (D) $x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = 0$.

Lời giải.

Tổng hai số $S = \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$ và tích hai số $P = (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 1$.
Theo định lý đảo của định lý Vi-ét, hai số đã cho là nghiệm của phương trình

$$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0.$$

Chọn đáp án (B) □

Bài 19. Giả sử x_1; x_2 là hai nghiệm của phương trình $2x^2+3x-5=0$. Biểu thức $x_1^2+x_2^2$ có giá trị là

Ⓐ $\frac{29}{2}$. Ⓑ 29. Ⓒ $\frac{29}{4}$. Ⓓ $\frac{25}{4}$.

Lời giải.

Theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{3}{2} \\ x_1x_2=\frac{c}{a}=-\frac{5}{2}\end{cases}$. Suy ra

$$x_1^2+x_2^2=S^2-2P=\left(-\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{29}{4}.$$

Chọn đáp án Ⓒ □

Bài 20. Cho phương trình $x^2-4x+1-m=0$, với giá trị nào của m thì phương trình có 2 nghiệm thỏa mãn $5(x_1+x_2)-4x_1x_2=0$.

Ⓐ $m=4$. Ⓑ $m=-5$.

Ⓒ $m=-4$. Ⓓ Không có giá trị nào.

Lời giải.

Điều kiện để phương trình có nghiệm là $\Delta'\geq 0 \Leftrightarrow m+3\geq 0\Leftrightarrow m\geq -3$.

Theo định lý Vi-ét $\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a}=4 \\ x_1x_2=\frac{c}{a}=1-m\end{cases}$. Từ đó ta có

$$5(x_1+x_2)-4x_1x_2=0\Leftrightarrow 5\cdot 4-4(1-m)=0\Leftrightarrow m=-4.$$

Chọn đáp án Ⓒ □

Bài 21. Giả sử phương trình $mx^2-(2m+1)x+m-2=0$ có hai nghiệm x_1; x_2. Biểu thức nào sau đây không phụ thuộc vào m?

Ⓐ $x_1+x_2-2x_1x_2$. Ⓑ $2(x_1+x_2)-x_1x_2$. Ⓒ $2(x_1+x_2)+x_1x_2$. Ⓓ $x_1+x_2-2x_2x_2$.

Lời giải.

Theo định lý Vi-ét

$$\begin{cases} x_1+x_2 &= -\frac{b}{a} &= \frac{2m+1}{m}=2+\frac{1}{m} \\ x_1x_2 &= \frac{c}{a} &= \frac{m-2}{m}=1-\frac{2}{m}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_1+x_2-2=\frac{1}{m} \\ x_1x_2-1=-\frac{2}{m}.\end{cases}$$

Từ đó ta có

$$x_1x_2-1=-2(x_1+x_2-2)\Leftrightarrow 2(x_1+x_2)+x_1x_2=5.$$

Vậy biểu thức $2(x_1+x_2)+x_1x_2$ không phụ thuộc m.

Chọn đáp án Ⓒ □

Bài 22. Với giá trị nào của m thì phương trình $(m-1)x^2+2mx+1-m=0$ có hai nghiệm trái dấu

Ⓐ Với mọi m. Ⓑ Không có giá trị nào.

Ⓒ $m<1$. Ⓓ $m\neq 1$.

Lời giải.

Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow -(m-1)^2 < 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.
Chọn đáp án D □

Bài 23. Giả sử phương trình $x^2 - mx + m - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1; x_2. Phương trình nào sau đây nhận $x_1 + 1$ và $x_2 + 1$ làm nghiệm?

A. $x^2 + (m+2)x - 2m = 0$.
B. $x^2 - (m+2)x + 2m = 0$.
C. $x^2 - (m-2)x - 2m = 0$.
D. $x^2 + (m-2)x + 2m = 0$.

Lời giải.

Theo định lý Vi-ét $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = m \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = m - 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1+1) + (x_2+1) = x_1 + x_2 + 2 = m + 2 \\ (x_1+1)\cdot(x_2+1) = x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1 = m - 1 + m + 1 = 2m. \end{cases}$$

Vậy phương trình cần tìm là $x^2 - (m+2)x + 2m = 0$.
Chọn đáp án B □

Bài 24. Định m để phương trình $x^4 - 2mx^2 + m - 3 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. $m > 0$.
B. $m > 3$.
C. $0 < m < 3$.
D. $m < 3$.

Lời giải.

Đặt $t = x^2$. Điều kiện $t \geq 0$. Phương trình trở thành $t^2 - 2mt + m - 3 = 0 \quad (1)$.
Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \quad \text{(luôn đúng)} \\ m^2 - m + 3 > 0 \quad \text{(luôn đúng)} \\ m > 0 \\ m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$$

Chọn đáp án B □

1.4 Phương trình quy về phương trình bậc hai

Bài 25. Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$ là

A. 0.
B. $\dfrac{5}{2}$.
C. 5.
D. 1.

Lời giải.

Đặt $x^2 = t$ $(t \geq 0)$.

Phương trình đã cho trở thành $2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{2} \\ t = 2 \end{array}\right.$.

TH1. Với $t = \dfrac{1}{2}$, ta có $x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

TH2. Với $t = 2$, ta có $x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình đã cho bằng 0.

Chọn đáp án A □

Bài 26. Biết rằng phương trình $x^3-2x^2-8x+9=0$ có ba nghiệm phân biệt, trong đó có đúng một nghiệm âm có dạng $\dfrac{a-\sqrt{b}}{c}$ (với a,b,c là các số tự nhiên và phân số $\dfrac{a}{c}$ tối giản). Tính $S=a+b+c$.

A. $S=40$. B. $S=38$. C. $S=42$. D. $S=44$.

Lời giải.

Ta có $x^3-2x^2-8x+9=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-x-9)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x^2-x-9=0. \end{array}\right.$

Xét $x^2-x-9=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{37}}{2} \Rightarrow a=1,\ b=37,\ c=2 \Rightarrow a+b+c=40$.

Chọn đáp án A □

Bài 27. Phương trình $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)=9$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải.

Ta có $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)=9 \Leftrightarrow (x^2+8x+7)(x^2+8x+15)=9$.

Đặt $t=x^2+8x+7$.

Ta được phương trình $t^2+8t-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-9 \end{array}\right.$.

TH1. Với $t=1$ suy ra $x=-4\pm\sqrt{10}$.

TH2. Với $t=-9$ suy ra $x=-4$.

Chọn đáp án C □

Bài 28. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $(3x^2-x-5)^2-(4x-1)^2=0$ là

A. $\dfrac{2}{3}$. B. $\dfrac{8}{3}$. C. $-\dfrac{1}{3}$. D. -1.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&(3x^2-x-5)^2-(4x-1)^2=0\\
\Leftrightarrow\ &(3x^2-x-5-4x+1)(3x^2-x-5+4x-1)=0\\
\Leftrightarrow\ &(3x^2-5x-4)(x^2+x-2)=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} 3x^2-5x-4=0 \\ x^2+2x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5\pm\sqrt{73}}{6} \\ x=1 \\ x=-2. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình $S=\dfrac{5-\sqrt{73}}{6}+\dfrac{5+\sqrt{73}}{6}+1+(-2)=\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án A □

Bài 29. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^4-(3m+2)x^2+3m+1=0$ có bốn nghiệm phân biệt nhỏ hơn 2.

A. $m>-\dfrac{1}{3}$ và $m\neq 0$. B. $-\dfrac{1}{3}<m<1$.

(C) $-\dfrac{1}{3} < m < 1$ và $m \neq 0$. (D) $m < 1$.

Lời giải.

Ta có $x^4 - (3m+2)x^2 + 3m + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$ hoặc $x^2 = 3m+1$.

Phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt nhỏ hơn 2 khi và chỉ khi: $\begin{cases} 0 < 3m+1 < 4 \\ 3m+1 \neq 1 \end{cases}$.

Do đó $-\dfrac{1}{3} < m < 1$ và $m \neq 0$.

Chọn đáp án (C) □

Bài 30. Để giải phương trình $|x+1| = x - 3$, bạn Huy đã làm theo các bước như sau:

Bước 1. Điều kiện xác định của phương trình $x \in \mathbb{R}$.

Bước 2. $|x+1| = x - 3 \Leftrightarrow |x+1|^2 = (x-3)^2$.

Bước 3. $\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow 8x - 8 = 0$.

Bước 4. $\Leftrightarrow x = 1$. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Trong các bước giải ở trên bạn Huy đã làm sai từ bước nào?

(A) Bước 1. (B) Bước 2. (C) Bước 3. (D) Bước 4.

Lời giải.

Ở bước 2 sau khi bình phương hai vế thì phương trình nhận được chỉ là phương trình hệ quả của phương trình đầu nên không được dùng dấu tương đương.

Chọn đáp án (B) □

Bài 31. Biết rằng phương trình $\sqrt{2x-9} = x - 5$ có nghiệm duy nhất $x = a + b\sqrt{c}$ với a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của $S = a + b + c$.

(A) $S = 9$. (B) $S = 7$. (C) $S = 5$. (D) $S = 3$.

Lời giải.

ĐKXĐ: $2x - 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{9}{2}$.

Với điều kiện trên, ta có

$$\sqrt{2x-9} = x - 5 \Rightarrow 2x - 9 = (x-5)^2 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 34 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 - \sqrt{2} \\ x = 6 + \sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Do chỉ có $x = 6 + \sqrt{2}$ thỏa mãn phương trình nên phương trình đã cho chỉ có một nghiệm $x = 6 + \sqrt{2}$. Suy ra $a = 6; b = 1; c = 2$ nên $S = 9$.

Chọn đáp án (A) □

Bài 32. Cho phương trình $\sqrt{x^2 - 8x + m} = x - 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình đã cho vô nghiệm.

(A) $1 \leq m < 4$. (B) $m < 7$. (C) $m > 9$. (D) $6 \leq m < 10$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 8x + m = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = \dfrac{m-1}{6} \end{cases}$.

Phương trình đã cho vô nghiệm khi $\dfrac{m-1}{6} < 1 \Leftrightarrow m < 7$.

Chọn đáp án (B) □

1.5 Giải toán bằng cách lập phương trình

Bài 33. Năm nay tuổi mẹ gấp 3 lần tuổi Phương. Phương tính rằng 13 năm nữa thì tuổi mẹ gấp 2 lần tuổi Phương. Hỏi năm nay Phương bao nhiêu tuổi?

(A) 13 tuổi. (B) 14 tuổi. (C) 15 tuổi. (D) 16 tuổi.

Lời giải.

Giả sử năm nay Phương x tuổi ($x > 0$), mẹ Phương $3x$ tuổi.
Theo bài 13 năm nữa tuổi mẹ Phương gấp 2 lần tuổi Phương nên ta có phương trình

$$3x + 13 = (x + 13) \cdot 2 \Leftrightarrow x = 13.$$

Vậy năm nay Phương 13 tuổi.
Chọn đáp án (A) □

.

Bài 34. Chu vi một mảnh vườn hình chữ nhật là 30 m. Biết chiều dài hơn chiều rộng 5 m. Tính diện tích hình chữ nhật.

(A) 100 m^2. (B) 70 m^2. (C) 50 m^2. (D) 55 m^2.

Lời giải.

Gọi chiều rộng của mảnh vườn là x (m, $x > 0$), chiều dài của mảnh vườn là $x + 5$ (m).
Theo bài chu vi mảnh vườn là 30 m nên

$$[x + (x + 5)] \cdot 2 = 30 \Leftrightarrow x = 5.$$

Vậy chiều rộng của mảnh vườn là 5 m, chiều dài mảnh vườn là 10 m. Do đó diện tích mảnh vườn là 50 m^2.
Chọn đáp án (C) □

Bài 35. Một người đi xe máy từ A đến B với vận tốc 25 km/h. Lúc về, người đó đi với vận tốc 30 km/h nên thời gian về ít hơn thời gian đi là 20 phút. Tính quãng đường AB.

(A) 40 km. (B) 70 km. (C) 50 km. (D) 60 km.

Lời giải.

Gọi thời gian đi từ A đến B là x (giờ, $x > 0$), thời gian về là $x - \dfrac{1}{3}$.
Theo bài ta có phương trình

$$25x = 30\left(x - \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy thời gian đi từ A đến B là 2 giờ. Khi đó quãng đường AB dài $25 \cdot 2 = 50$ km.
Chọn đáp án (C) □

Bài 36. Một ca nô xuôi dòng từ A đến B hết 80 phút và ngược dòng hết 2 giờ. Biết vận tốc dòng nước là 3 km/h. Tính vận tốc riêng của ca nô.

(A) 16 km/h. (B) 18 km/h. (C) 20 km/h. (D) 15 km/h.

Lời giải.

Đổi 80 phút $= \dfrac{4}{3}$ giờ.
Gọi vận tốc riêng của ca nô là x (km/h, $x > 0$).
Vận tốc ca nô xuôi dòng là $x + 3$ (km/h).

Vận tốc ca nô ngược dòng là $x - 3$ (km/h).
Theo bài ta có phương trình

$$\frac{4}{3}(x+3) = 2(x-3) \Leftrightarrow x = 15.$$

Vậy vận tốc riêng của ca nô là 15 km/h.
Chọn đáp án D □

Bài 37. Một hình chữ nhật có chu vi 278 m, nếu giảm chiều dài 21 m và tăng chiều rộng 10 m thì diện tích tăng 715 m^2. Chiều dài hình chữ nhật là

A. 132 m. B. 124 m. C. 228 m. D. 114 m.

Lời giải.

Gọi chiều dài hình chữ nhật là x (m, $x > 0$), chiều rộng hình chữ nhật là $139 - x$ (m).
Theo bài ta có phương trình

$$(x-21)(139-x+10) = x(139-x) + 715$$

$$\Leftrightarrow x = 124.$$

Vậy chiều dài hình chữ nhật là 124 m. □

Bài 38. Một hình chữ nhật có chiều rộng bằng $\frac{2}{3}$ chiều dài, diện tích hình chữ nhật đó là 5400 cm^2, diện tích hình chữ nhật là 5400 cm^2. Chu vi hình chữ nhật là

A. 300 cm. B. 250 cm. C. 350 cm. D. 400 cm.

Lời giải.

Gọi chiều dài hình chữ nhật là x (cm, $x > 0$). Khi đó, chiều rộng hình chữ nhật là $\frac{2}{3}x$ (cm).
Theo đầu bài ta có phương trình

$$x \cdot \frac{2}{3}x = 5400 \Leftrightarrow x^2 = 8100.$$

Giải ra ta được $x = 90$ (vì $x > 0$).
Vậy chiều dài hình chữ nhật là 90 cm, chiều rộng hình chữ nhật là 60 cm. Do đó chu vi hình chữ nhật là 300 cm.

Chọn đáp án A □

Bài 39. Một thửa ruộng hình chữ nhật có diện tích là 100 m^2. Tính độ dài chiều dài của thửa ruộng. Biết rằng nếu tăng chiều rộng của thửa ruộng lên 2 m và giảm chiều dài 5 m thì diện tích của thửa ruộng tăng thêm 5 m^2.

A. 25 m. B. 15 m. C. 5 m. D. 20 m.

Lời giải.

Gọi chiều dài là x(m, $x > 0$), chiều rộng là $\frac{100}{x}$ (m).
Theo bài ta có phương trình

$$(x-5)\left(\frac{100}{x}+2\right) = 100 + 5 \Leftrightarrow 2x^2 - 15x - 500 = 0.$$

Giải phương trình ta được $x = 20$ (thỏa mãn) hoặc $x = -12,5$ (loại).
Vậy chiều dài của mảnh đất hình chữ nhật là 20 m.
Chọn đáp án D □

Bài 40. Một công nhân dự định làm 36 sản phẩm trong thời gian đã định. Sau khi làm được nửa số lượng được giao, người đó dừng lại nghỉ 30 phút. Vì vậy, mặc dù làm thêm 2 sản phẩm mỗi giờ với nửa số sản phẩm còn lại nhưng vẫn hoàn thành công việc chậm hơn dự kiến 12 phút. Tính năng suất dự kiến.

(A) 13 sản phẩm/giờ. (B) 12 sản phẩm/giờ. (C) 10 sản phẩm/giờ. (D) 11 sản phẩm/giờ.

Lời giải.

Gọi năng suất dự kiến là x (sản phẩm/giờ, $x \in \mathbb{N}$).
Theo bài ta có phương trình

$$\frac{18}{x}+\frac{1}{2}+\frac{18}{x+2}=\frac{36}{x}+\frac{1}{5}.$$

Giải phương trình ta được $x_1=-12$ (loại); $x_2=10$ (thỏa mãn).
Vậy năng suất dự kiến là 10 sản phẩm/giờ.
Chọn đáp án (C) □

2 Toán tự luận

2.1 Giải phương trình bậc hai hoặc phương trình đưa được về bậc hai

Bài 41. Giải phương trình $4x^2+\dfrac{1}{x^2}-\left|2x+\dfrac{1}{x}\right|=2$.

Lời giải.

Điều kiện: $x\neq 0$. Đặt $t=\left|2x+\dfrac{1}{x}\right|$, với $t\geqslant 0$, suy ra $t^2=4x^2+\dfrac{1}{x^2}+4$.
Phương trình đã cho trở thành

$$t^2-t-6=0\Leftrightarrow (t-3)(t+2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=3 & \text{(nhận)}\\ t=-2 & \text{(loại)}.\end{array}\right.$$

Với $t=3$, suy ra

$$4x^2+\frac{1}{x^2}+4=9\Leftrightarrow 4x^4-5x^2+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1\\ x^2=\dfrac{1}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1\\ x=\pm\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\quad \text{(thoả mãn)}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x\in\left\{-1;-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};1\right\}$. □

Bài 42. Giải phương trình $\sqrt{5x^2+10x+1}=7-x^2-2x$.

Lời giải.

Điều kiện: $5x^2+10x+1\geq 0$. Đặt $t=\sqrt{5x^2+10x+1}$ $(t\geq 0)$.
Khi đó ta có $t^2=5x^2+10x+1\Leftrightarrow x^2+2x=\dfrac{t^2-1}{5}$.
Phương trình đã cho trở thành

$$t=7-\frac{t^2-1}{5}\Leftrightarrow t^2+5t-36=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=4 & \text{(nhận)}\\ t=-9 & \text{(loại)}.\end{array}\right.$$

Với $t = 4$, ta có

$$5x^2 + 10x + 1 = 16 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = 1 \\ &x = -3 \end{aligned}\right. \quad \text{(thỏa mãn)}.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x \in \{1; 3\}$. □

Bài 43. Giải phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{x+5} + 2\sqrt{x^2+5x} + 2x = 25$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq 0$. Đặt $t = \sqrt{x} + \sqrt{x+5}$ $(t \geq 0)$.
Khi đó ta có $t^2 = 2x + 5 + 2\sqrt{x^2+5x} \Leftrightarrow 2x + 2\sqrt{x^2+5x} = t^2 - 5$.
Phương trình đã cho trở thành

$$t^2 + t - 30 = 0 \Leftrightarrow (t-5)(t+6) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &t = 5 && \text{(nhận)} \\ &t = -6 && \text{(loại)}. \end{aligned}\right.$$

Với $t = 5$, ta có

$$\begin{aligned} 2x + 5 + 2\sqrt{x^2+5x} = 25 &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+5x} = 10 - x \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 10 - x \geq 0 \\ (x^2 + 5x) = (10-x)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 10 \\ x^2 + 5x = 100 - 20x + x^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 10 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4 \quad \text{(thỏa mãn)}. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 4$. □

2.2 Phương trình bậc hai có chứa tham số. Định lí Vi-et

Bài 44. Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 5 = 0$ (1), với x là ẩn số.

1. Giải phương trình (1) khi $m = 2$.
2. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 thỏa mãn đẳng thức:

$$2x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 8 = 0.$$

Lời giải.

1. Với $m = 2$, phương trình (1) trở thành:

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

2. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi

$$\Delta' = (m+1)^2 - (m^2+5) > 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 - m^2 - 5 > 0 \Leftrightarrow 2m - 4 > 0 \Leftrightarrow m > 2.$$

Khi đó: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 2(m+1) = 2m + 2 \\ P = x_1x_2 = m^2 + 5. \end{cases}$

Ta có

$$2x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 8 = 0 \Leftrightarrow 2(m^2 + 5) - 5(2m + 2) + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 10m + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \text{ (loại)} \\ m = 4 \text{ (thỏa)}. \end{array}\right.$$

Vậy $m = 4$.

□

Bài 45. Cho phương trình bậc hai ẩn x: $x^2 + (4m + 1)x + 2m - 8 = 0$ (m là tham số).

a. Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1; x_2 với mọi tham số m.

b. Tìm m để hai nghiệm x_1; x_2 của phương trình đã cho thỏa mãn điều kiện $|x_1 - x_2| = 17$.

Lời giải.

a. Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1; x_2 với mọi tham số m.
Ta có: $\Delta = (4m + 1)^2 - 4(2m - 8) = 16m^2 + 33 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.
Do đó, phương trình đã cho luôn luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

b. Tìm m để hai nghiệm $x_1; x_2$ của phương trình đã cho thỏa mãn điều kiện $|x_1 - x_2| = 17$.
Do phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2, nên theo định lý Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = -4m - 1$ và $x_1x_2 = 2m - 8$. (1)
Từ giả thiết $|x_1 - x_2| = 17 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 17^2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 17^2$.
Thay (1) vào ta được: $(-4m - 1)^2 - 4(2m - 8) = 17^2 \Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = -4 \end{array}\right.$.
Vậy $m = \pm 4$.

□

Bài 46. Cho phương trình

$$x^2 - (2m + 1)\, x + m^2 + m = 0.$$

Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $2 \leq x_1 < x_2 \leq 5$.

Lời giải.

Ta có $\Delta = (2m + 1)^2 - 4\left(m^2 + m\right) = 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$. Suy ra phương trình có hai nghiệm $x_1 < x_2$ là:

$$x_1 = \frac{2m + 1 - 1}{2} = m,\ x_2 = \frac{2m + 1 + 1}{2} = m + 1.$$

Từ giả thiết bài toán suy ra $2 \leq m < m + 1 \leq 5 \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 4$.
Vậy $2 \leq m \leq 4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Bài 47. Cho phương trình

$$x^2 + (1 - 4m)x + 4m^2 - 2m = 0,$$

với m là tham số. Tìm giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ sao cho $|x_1| - 3\,|x_2| = 0$.

Lời giải.

Ta có:

$$\Delta = (1 - 4m)^2 - 4(4m^2 - 2m) = 1 - 8m + 16m^2 - 16m^2 + 8m = 1 > 0.$$

Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = 2m - 1; x_2 = 2m\ \left(x_1 < x_2\right).$$

Theo giả thiết $|x_1| - 3|x_2| = 0 \Leftrightarrow |x_1| = 3|x_2|$ hay:

$$|2m-1| = 3|2m| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m-1 = 6m \\ 2m-1 = -6m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4m = -1 \\ 8m = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\dfrac{1}{4} \\ m = \dfrac{1}{8}. \end{array}\right.$$

Vậy $m \in \left\{\dfrac{-1}{4}, \dfrac{1}{8}\right\}$ là giá trị cần tìm. □

Bài 48. Tìm giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - (m+4)x + 3(m+1) = 0$ có hai nghiệm là độ dài hai cạnh của một tam giác vuông, biết độ dài cạnh còn lại là 5.

Lời giải.

Ta có $\Delta = (m-2)^2 \geq 0, \forall m$. Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 3$, $x = m+1$. Ta xét hai trường hợp sau.

TH1. $m+1$ và 3 là độ dài hai cạnh góc vuông. Khi đó

$$\begin{cases} (m+1)^2 + 9 = 25 \\ 0 < m+1 < 5 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

TH2. 5 và 3 là độ dài hai cạnh góc vuông. Khi đó

$$\begin{cases} (m+1)^2 = 25 + 9 \\ m+1 > 5 \end{cases} \Leftrightarrow m = \sqrt{34} - 1.$$

Vậy giá trị cần tìm là $m = 3$, $m = \sqrt{34} - 1$. □

2.3 Tương giao giữa Parabol và đường thẳng

Bài 49. Tìm m để Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2(m+1)x - m^2 - 9$. Tìm m để

1. d cắt (P) tại hai điểm phân biệt.
2. d tiếp xúc với (P).
3. d và (P) không có điểm chung.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$x^2 = 2(m+1)x - m^2 - 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 9 = 0. \quad (1)$$
$$\Delta' = (m+1)^2 - (m^2+9) = 2m - 8.$$

1. d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 2m - 8 > 0 \Leftrightarrow m > 4.$$

2. d tiếp xúc với (P) $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 2m - 8 = 0 \Leftrightarrow m = 4.$$

3. d và (P) không có điểm chung $\Leftrightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow 2m - 8 < 0 \Leftrightarrow m < 4.$$

□

Bài 50. Cho Parabol $(P): y = -\dfrac{1}{2}x^2$. Viết phương trình đường thẳng d tiếp xúc với (P) tại điểm có hoành độ bằng -2.

Lời giải.

Giả sử đường thẳng cần lập là $d: y = ax + b$.
Thay $x = -2$ vào (P) ta được $y = -\dfrac{1}{2}(-2)^2 = -2$, suy ra tiếp điểm $M(-2; -2)$.
Vì $M \in d$ nên $-2 = a \cdot (-2) + b \Leftrightarrow b = 2a - 2$ (1)
Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$-\dfrac{1}{2}x^2 = ax + b \Leftrightarrow x^2 + 2ax + 2b = 0.$ (2)

$$\Delta' = a^2 - 2b.$$

Vì d tiếp xúc với (P) nên phương trình (1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2b = 0.$ (3)
Thay (1) vào (3) ta được

$$a^2 - 2(2a - 2) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 4 = 0 \Leftrightarrow (a - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 2.$$

Thay $a = 2$ vào (1) được $b = 2$. Vậy $d: y = 2x + 2$. □

Bài 51. Cho Parabol $(P): y = \dfrac{x^2}{2}$ và đường thẳng $d: y = mx - m + 2$.

1. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì d và (P) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

2. Giả sử $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ là các giao điểm của d và (P). Chứng minh rằng

$$y_1 + y_2 \geq (2\sqrt{2} - 1)(x_1 + x_2).$$

Lời giải.

1. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$\frac{x^2}{2} = mx - m + 2 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 2m - 4 = 0. \quad (1)$$

Ta có

$$\Delta' = m^2 - (2m - 4) = m^2 - 2m + 4 = (m - 1)^2 + 3 > 0 \ \forall m.$$

Suy ra phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt $\forall m$. Vậy d và (P) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của m.

2. Theo định lý Vi-ét $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = 2m$.
Ta có $y_1 = mx_1 - m + 2$, $y_2 = mx_2 - m + 2$. Suy ra

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= (mx_1 - m + 2) + (mx_2 - m + 2) \\ &= m(x_1 + x_2) - 2m + 4 \\ &= 2m^2 - 2m + 4 \\ &= [(\sqrt{2}m)^2 - 4\sqrt{2}m + 4] + (2\sqrt{2} - 1) \cdot 2m \\ &= (\sqrt{2}m - 2)^2 + (2\sqrt{2} - 1) \cdot 2m \\ &= (\sqrt{2}m - 2)^2 + (2\sqrt{2} - 1) \cdot (x_1 + x_2). \end{aligned}$$

Vậy $y_1 + y_2 \geq (2\sqrt{2} - 1)(x_1 + x_2)$.

□

2.4 Giải bài toán bằng cách lập phương trình

Bài 52. Một ca nô xuôi dòng từ bến sông A đến bến sông B cách nhau 24 km; cùng lúc đó, một chiếc bè trôi từ A đến B với vận tốc dòng nước là 4 km/h. Khi đến B ca nô quay lại ngay và gặp bè tại địa điểm C cách A là 8 km. Tính vận tốc thực của ca nô.

Lời giải.

Gọi vận tốc thực của ca nô là x (km/h, $x > 4$).
Vận tốc ca nô lúc xuôi dòng là $x + 4$ (km/h).
Vận tốc ca nô lúc ngược dòng là $x - 4$ (km/h).
Theo đề bài, thời gian ca nô đi bằng thời gian bè trôi đến chỗ gặp nhau nên ta có phương trình

$$\frac{24}{x+4} + \frac{16}{x-4} = \frac{8}{4} \Leftrightarrow x^2 - 20x = 0.$$

Giải ra ta có $x_1 = 20$ (thỏa mãn), $x_2 = 0$ (không thỏa mãn).
Vậy vận tốc thực của ca nô là 20 km/h. □

Bài 53. Một đội xe cần phải chuyên chở 150 tấn hàng. Hôm làm việc có 5 xe được đi làm nhiệm vụ khác nên mỗi xe còn lại phải chở thêm 5 tấn. Hỏi đội xe ban đầu có bao nhiêu chiếc? (Biết rằng, mỗi xe chở số hàng như nhau).

Lời giải.

Gọi số xe ban đầu là x (chiếc; $x \in \mathbb{N}, x > 5$).
Lúc đầu, mỗi xe dự định chở $\dfrac{150}{x}$ (tấn hàng).
Theo đề bài, mỗi xe phải chở thêm 5 tấn hàng, ta có phương trình

$$\frac{150}{x-5} - \frac{150}{x} = 5 \Leftrightarrow 5x^2 - 25x - 750 = 0.$$

Giải ra ta có $x_1 = -10$ (loại), $x_2 = 15$ (thỏa mãn).
Vậy lúc đầu có 15 chiếc xe.

□

Bài 54. Số học sinh của một trường sau 2 năm tăng từ 500 lên 720 học sinh. Vậy trung bình hàng năm, số học sinh trường đó tăng lên bao nhiêu phần trăm?

Lời giải.

Gọi x là số phần trăm chỉ số học sinh tăng trung bình hàng năm ($x > 0$).
Số học sinh tăng năm đầu là $500 \cdot \dfrac{x}{100}$ (học sinh).

Số học sinh tăng trong năm thứ hai là $(500+5x)\cdot\dfrac{x}{100}=5x+\dfrac{x^2}{20}$ (học sinh).
Theo bài, sau hai năm số học sinh tăng là $720-500=220$ (học sinh), khi đó ta có phương trình

$$5x+5x+\frac{x^2}{20}=220 \Leftrightarrow x^2+200x-4400=0.$$

Giải ra ta có $x_1=-220$ (loại), $x_2=20$ (thỏa mãn).
Vậy hàng năm, trung bình số học sinh tăng lên 20%. □

2.5 Toán nâng cao

Bài 55. Cho $a>4$ và phương trình $x^2-\sqrt{a}x+1=0$ có 2 nghiệm x_1, x_2; phương trình $x^2-\sqrt{a+1}x+1=0$ có 2 nghiệm x_3, x_4. Tính giá trị biểu thức $(x_1-x_3)(x_2-x_3)(x_1+x_4)(x_2+x_4)$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$\begin{cases} x_1+x_2=\sqrt{a}\\ x_1x_2=1\\ x_3x_4=1\end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases}1+x_3^2=\sqrt{a+1}x_3\\ 1+x_4^2=\sqrt{a+1}x_4.\end{cases}$$

Ta thấy

$$\begin{aligned}(x_1-x_3)(x_2-x_3)(x_1+x_4)(x_2+x_4) &= [x_1x_2-x_3(x_1+x_2)+x_3^2][x_1x_2+x_4(x_1+x_2)+x_4^2]\\ &=(1-\sqrt{a}x_3+x_3^2)(1+\sqrt{a}x_4+x_4^2)\\ &=(\sqrt{a+1}x_3-\sqrt{a}x_3)(\sqrt{a+1}x_4+\sqrt{a}x_4)\\ &=(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})x_3x_4=a+1-a=1.\end{aligned}$$

□

Bài 56. Giả sử phương trình $ax^2+bx+c=0, (a\neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 và thỏa mãn $ax_1+bx_2+c=0$. Tính giá trị của biểu thức $M=a^2c+ac^2+b^3-3abc$.

Lời giải.

Áp dụng định lý Viet ta có $\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}\\ x_1x_2=-\dfrac{c}{a}.\end{cases}$

Nên $ax_1+bx_2+c=0\Rightarrow x_1+\dfrac{b}{a}x_2+\dfrac{c}{a}=0\Rightarrow x_1-x_2(x_1+x_2)+x_1x_2=0\Rightarrow x_1=x_2^2$.

$$\begin{aligned}M&=a^2c+ac^2+b^3-3abc=a^3\left[\frac{c}{a}+\left(\frac{c}{a}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^3-3\frac{b}{a}\frac{c}{a}\right]\\ &=a\left(x_1x_2+x_1^2x_2^2-(x_1+x_2)^3+3(x_1+x_2)x_1x_2\right)=a\left(x_1x_2+x_1^3-x_1^3-x_2^3\right)=a.0=0.\end{aligned}$$

□

Bài 57.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P): y=mx^2$ $(m>0)$ và đường thẳng $(d): y=2x-m^2$.

1. Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B. Khi đó chứng minh A và B cùng nằm về một phía với trục tung.

2. Với m tìm được ở câu a). Gọi x_A, x_B theo thứ tự là hoành độ các điểm A và B. Tìm m để biểu thức $K = \dfrac{2}{x_A + x_B} + \dfrac{1}{4x_A x_B + 1}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

1. Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P), ta được $mx^2 - 2x + m^2 = 0$.
   Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì $\Delta = 1 - m^3 > 0 \Rightarrow m < 1$.
   Kết hợp điều kiện $m > 0 \Rightarrow 0 < m < 1$ thì d cắt P tại hai điểm phân biệt
   Áp dụng hệ thức vi-ét $x_1 \cdot x_2 = m > 0$.
   Vậy (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt nằm cùng 1 phía với trục tung.
2. Ta có $K = m + \dfrac{1}{4m+1} = \dfrac{1}{4}(4m+1) + \dfrac{1}{4m+1} - \dfrac{1}{4} \geq \dfrac{3}{4}$.
   Dấu $=$ xảy ta khi $m = \dfrac{1}{4}$

□

§7 Đề kiểm tra 45 phút

1 Đề kiểm tra - cơ bản

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$.

b) $2x^2 - 3x - 2 = 0$.

(3 điểm)

Lời giải.

1. $a = 1, b = -3, c = 2$ nên $a + b + c = 0$.
   Vậy phương trình có hai nghiệm $S = \{1, 2\}$.

2. $\Delta = (-3)^2 - 4.2.(-2) = 25 > 0$.
   Vậy phương trình có hai nghiệm $x = \dfrac{3 + \sqrt{25}}{2.2} = 2$ hoặc $x = \dfrac{3 - \sqrt{25}}{2.2} = -\dfrac{1}{2}$.

□

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$.

b) $x + \sqrt{x} - 6 = 0$.

(2 điểm)

Lời giải.

1. Đặt $t = x^2, t \geq 0$. Phương trình trở thành $t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = -2 (\text{loại}). \end{array}\right.$
   Với $t = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.
   Vậy phương trình có hai nghiệm $S = \{-2, 2\}$.

2. Đặt $t = \sqrt{x}, t \geq 0$. Phương trình trở thành $t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -3 (\text{loại}). \end{array}\right.$
   Với $t = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$.
   Vậy phương trình có hai nghiệm $S = \{4\}$.

□

Bài 3. Cho phương trình $7x^2 + 2(m - 1)x - m^2 = 0$. (1)

1. Tìm m để phương trình (1) luôn có nghiệm.

2. Gọi $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của phương trình (1). Tìm m thỏa mãn hệ thức $x_1x_2 = -7$.

(2 điểm)

Lời giải.

1. Ta có $\Delta' = (1-m)^2 + 7m^2$. Ta có $(1-m)^2 \geq 0$ và $7m^2 \geq 0$ nên $\Delta' \geq 0, \forall\, m \in \mathbb{R}$.
   Vậy phương trình (1) luôn có nghiệm.

2. Theo hệ thức Vi-et, ta có $x_1x_2 = -\dfrac{m^2}{7}$.
   Khi đó, $x_1x_2 = -7 \Leftrightarrow -\dfrac{m^2}{7} = -7 \Leftrightarrow m^2 = 49 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 7 \\ m = -7 \end{array}\right.$.
   Vậy $m = -7$ hoặc $m = 7$ là giá trị cần tìm.

□

Bài 4. Tính chiều dài và chiều rộng của một thửa ruộng hình chữ nhật. Biết chiều dài hơn chiều rộng 10 m và diện tích bằng 1200 m^2.

(2 điểm)

Lời giải.

Gọi chiều rộng của thửa ruộng hình chữ nhật là x ($x > 0$, m).
Chiều dài hơn chiều rộng 10m nên chiều dài là $x + 10$ (m).
Diện tích thửa ruộng hình chữ nhật là 1200m^2 nên ta có phương trình:

$$\begin{aligned} & x(x+10) = 1200 \\ \Leftrightarrow & x^2 + 10x - 1200 = 0 \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} x = 30 \\ x = -40 (\text{loại}) \end{array}\right. . \end{aligned}$$

Vậy chiều dài thửa ruộng hình chữ nhật là 40 m và chiều rộng thửa ruộng hình chữ nhật là 30 m.

□

Bài 5. Gọi $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 + x - 1 = 0$. Lập phương trình bậc hai nhận $3x_1$ và $3x_2$ làm nghiệm.

(1 điểm)

Lời giải.

Đặt $S = 3x_1 + 3x_2 = 3(x_1 + x_2),\ P = 3x_1 3x_2 = 9x_1x_2$.
Vì $x_1,\ x_2$ là nghiệm của phương trình $x^2 + x - 1 = 0$ nên ta có hệ thức Vi-et: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1x_2 = -1. \end{cases}$
Như vậy, $\begin{cases} S = 3(x_1 + x_2) = -3 \\ P = 9x_1x_2 = -9. \end{cases}$
Do đó: $3x_1,\ 3x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 9 = 0$. □

2 Đề kiểm tra - nâng cao

Bài 1. Tìm m để phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ tương đương với phương trình $2x^2 + mx + 4 = 0$.

(2 điểm)

Lời giải.

Ta có $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Vậy phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ tương đương phương trình $2x^2 + mx + 4 = 0$ khi và chỉ khi phương trình $2x^2 + mx + 4 = 0$ có tập nghiệm là $S = \{1; 2\}$.

Với $x = 1$ hoặc $x = 2$ là nghiệm thì $\begin{cases} 2 + m + 4 = 0 \\ 8 + 2m + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -6$.

Thử lại, với $m = -6$ thỏa mãn.

Vậy $m = -6$ là giá trị cần tìm. □

Bài 2. Cho phương trình $2x^2 + 2(m-1)x - 3m^2 = 0$. (1)

1. Chứng minh phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.
2. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$.

(2 điểm)

Lời giải.

1. Xét $\Delta' = (m-1)^2 + 6m^2 = 7m^2 - 2m + 1 = 7\left(m - \frac{1}{7}\right)^2 + \frac{6}{7}$. Vậy $\Delta' > 0, \forall\, m \in \mathbb{R}$.

   Do đó (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

2. Theo hệ thức Vi-et, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - m \\ x_1 \cdot x_2 = -\dfrac{3m^2}{2}. \end{cases}$

   $A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (1-m)^2 + 3m^2 = 4m^2 - 2m + 1 = \left(2m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.

   Do đó: $A \geq \frac{3}{4}$. $A = \frac{3}{4} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

   Vậy giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{3}{4}$ tại $m = \frac{1}{2}$.

□

Bài 3. Một chiếc ca nô theo dòng sông từ A đến B, rồi ngược dòng từ B về A hết 5 giờ. Tìm vận tốc riêng của ca nô (vận tốc của ca nô khi dòng nước đứng yên), biết rằng vận tốc của dòng nước là 4 km/h và khoảng cách từ A đến B là 48 km.

(2 điểm)

Lời giải.

Gọi vận tốc riêng của ca nô là x (km/h), ($x > 4$).

Vận tốc ca nô đi từ A đến B là $x + 4$ (km/h).

Vận tốc ca nô đi từ B về A là $x - 4$ (km/h).

Thời gian ca nô đi từ A đến B là $\dfrac{48}{x+4}$ (h).

Thời gian ca nô đi từ B đến A là $\dfrac{48}{x-4}$ (h).

Tổng thời gian cả đi và về hết 5h nên ta có phương trình:

$$\begin{aligned} &\frac{48}{x+4} + \frac{48}{x-4} = 5 \\ \Leftrightarrow &5x^2 - 96x - 80 = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 20 \\ x = -\dfrac{4}{5} \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

Vậy vận tốc riêng của ca nô là 20 km/h. □

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ xy(x+1)(y+1) = 12 \end{cases}$.

(2 điểm)

Lời giải.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ xy(x+1)(y+1) = 12 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (x^2 + x) + (y^2 + y) = 8 \\ (x^2 + x)(y^2 + y) = 12. \end{cases} \end{aligned}$$

Đặt $a = x^2 + x, b = y^2 + y$, hệ trở thành $\begin{cases} a + b = 8 \\ ab = 12. \end{cases}$

Khi đó, a, b là nghiệm của phương trình $x^2 - 8x + 12 = 0$. Giải phương trình ta được hai nghiệm là 6 và 2. Do vai trò a, b là đối xứng nên ta xét hai trường hợp:

TH1: $\begin{cases} a = x^2 + x = 6 \\ b = y^2 + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -3 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -2 \end{array}\right. \end{cases}$.

TH2: $\begin{cases} a = x^2 + x = 2 \\ b = y^2 + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = -3 \end{array}\right. \end{cases}$.

Vậy hệ đã cho có cặp nghiệm $(x; y)$ là $S = \{(2,1); (-3,1); (2,-2); (-3,-2), (1,2); (1,-3); (-2,2); (-2,-$
□

Bài 5. Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (2) sao cho $b > a > 0$. Chứng minh rằng: Nếu phương trình (2) vô nghiệm thì $\dfrac{2b + c}{a - b} < 2$.

(2 điểm)

Lời giải.

Phương trình (2) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow 4ac > b^2$.
Do đó: $4a + c \geq 2\sqrt{4ac} > 2\sqrt{b^2} = 2|b| \geq 2b$.
Vậy $4a + c > 2b \Leftrightarrow a + b + c > 3(b - a) \Leftrightarrow \dfrac{a + b + c}{a - b} < 3 \Leftrightarrow 1 + \dfrac{2b + c}{a - b} < 3 \Leftrightarrow \dfrac{2b + c}{a - b} < 2$. □

Phần

II

Hình học

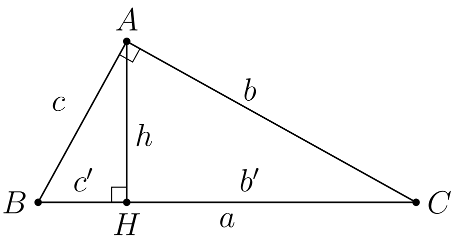
Chương 1 — Hệ thức lượng trong tam giác vuông

§1 Hệ thức lượng và đường cao

1 Tóm tắt lý thuyết

Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH.
Đặt $AB = c,\ BC = a,\ CA = b,\ AH = h,$
$BH = c',\ CH = b'$. Khi đó ta có các hệ thức sau

- ☑ $a^2 = b^2 + c^2$
- ☑ $a \cdot h = b \cdot c$
- ☑ $a \cdot b' = b^2$
- ☑ $a \cdot c' = c^2$
- ☑ $b' \cdot c' = h^2$
- ☑ $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$.



2 Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm. Tính $BC,\ AH,\ BH,\ CH$.

Lời giải.

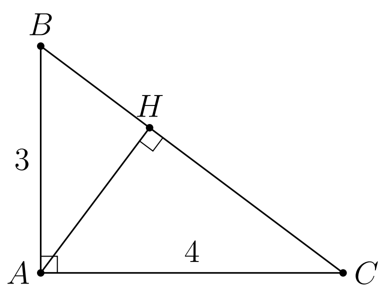
Ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow BC = 5 \text{ cm}.$$

$$AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2{,}4 \text{ cm}.$$

$$BH \cdot BC = AB^2 \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{3^2}{5} = 1{,}8 \text{ cm}.$$

$$CH = BC - BH = 3{,}2 \text{ cm}.$$



□

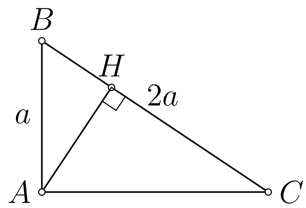
Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH (H thuộc cạnh BC) biết $AB = a$, $BC = 2a$. Tính theo a độ dài AC và AH.

Lời giải.

Theo định lí Pitago, ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2$, suy ra

$$AC^2 = BC^2 - AB^2 = (2a)^2 - a^2 = 3a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{3}.$$

Lại có $AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH = \dfrac{AB \cdot AC}{BC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



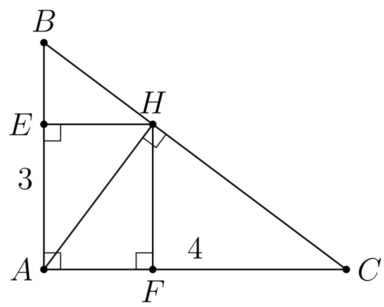
□

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông tại có $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm, đường cao AH. Gọi E, F là hình chiếu của H lên AB, AC. Tính diện tích tứ giác $AEHF$.

Lời giải.

Tứ giác $AEHF$ có ba góc A, E, F là góc vuông nên $AEHF$ là hình chữ nhật. Do đó $S_{AEHF} = AE \cdot AF$.
Ta có $BC = 5$ cm, $AH = 2{,}4$ cm, nên trong các tam giác vuông AHB và AHC ta có

$$AE \cdot AB = AH^2 \Rightarrow AE = \frac{AH^2}{AB} = 2{,}76 \text{ cm}.$$
$$AF \cdot AC = AH^2 \Rightarrow AF = \frac{AH^2}{AC} = 1{,}44 \text{ cm}.$$



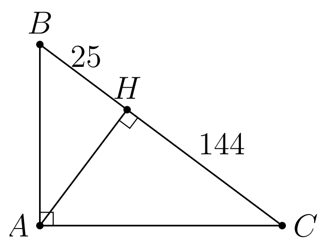
Suy ra $S_{AEHF} = 2{,}76 \cdot 1{,}44 = 3{,}9744 \text{ cm}^2$. □

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Biết $BH = 25$ cm, $CH = 144$ cm. Tính AB, AC, BC, AH.

Lời giải.

Ta có

$$BC = BH + HC = 25 + 144 = 169 \text{ cm}.$$
$$AB^2 = BH \cdot BC = 25 \cdot 169 \Rightarrow AB = 65 \text{ cm}.$$
$$AC^2 = CH \cdot CB = 144 \cdot 169 \Rightarrow AC = 156 \text{ cm}.$$
$$AH^{=}BH \cdot CH = 25 \cdot 144 \Rightarrow AH = 60 \text{ cm}.$$

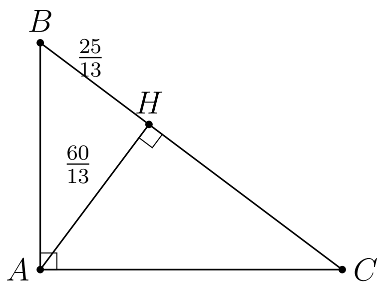


□

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Biết $BH = \dfrac{25}{13}$ cm, $AH = \dfrac{60}{13}$ cm. Tính AB, AC, BC, CH.

Lời giải.

Ta có

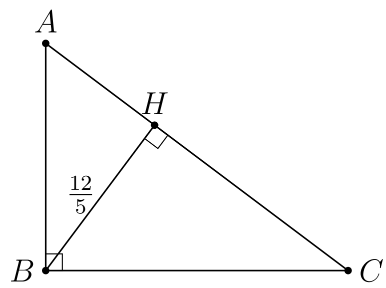


$$BH \cdot CH = AH^2 \Rightarrow CH = \frac{AH^2}{BH} = \frac{144}{13} \text{ cm.}$$
$$BC = BH + CH = 13 \text{ cm.}$$
$$AB^2 = BH^2 + CH^2 = \frac{65^2}{13^2} \Rightarrow AB = \frac{65}{13} \text{ cm.}$$
$$AC^2 = CH \cdot CB = 144 \Rightarrow AC = 12 \text{ cm.}$$

□

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC vuông tại B, đường cao $BH = \frac{12}{5}$ cm và $4AB = 3BC$. Tính AB, AC, BC, AH, CH.

Lời giải.



Từ giả thiết ta suy ra $AB = \frac{3}{4}BC$.

Mặt khác, ta có $\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BC^2}$. Suy ra

$$\frac{25}{144} = \frac{16}{9BC^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{25}{9BC^2} \Rightarrow BC^2 = 16 \Rightarrow BC = 4 \text{ cm.}$$

Suy ra $BA = 3$ cm. Từ đây, ta tìm được $AC = 5$ cm, $AH = 1{,}8$ cm, $CH = 3{,}2$ cm.

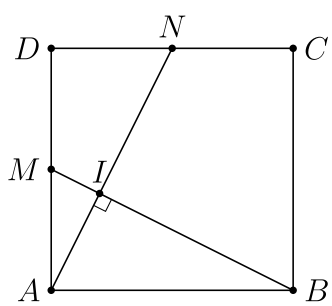
□

Ví dụ 7. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $2\sqrt{5}$ cm. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, DC và I là giao điểm của AN và BM.

1. Chứng minh rằng AN vuông góc với MB.
2. Tính AI, MI.
3. Tính diện tích tứ giác $BINC$.

Lời giải.

1.



Xét hai tam giác ADN và BAM có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $AD = AB$, $DN = AM$. Suy ra $\triangle ADN = \triangle BAM$ (c-g-c), do đó $\widehat{DAN} = \widehat{ABM}$. Suy ra

$$\widehat{MAI} + \widehat{AMI} = \widehat{DAN} + \widehat{AMB} = \widehat{ABM} + \widehat{AMB} = 90^\circ.$$

Từ đây, ta có $AN \perp BM$.

2. Ta có $BM^2 = AM^2 + AB^2 = 5 + 20 = 25 \Rightarrow BM = 5$ cm.
   Suy ra $MI = \frac{AM^2}{MB} = 1$ cm, $AI^2 = AM^2 - MI^2 = 5 - 1 = 4 \Rightarrow AI = 2$ cm.

3. Ta có $S_{BCNI} = S_{BCN} + S_{BIN} = \frac{1}{2}(BI \cdot IN + BC \cdot CN) = 11 \text{ cm}^2$.

□

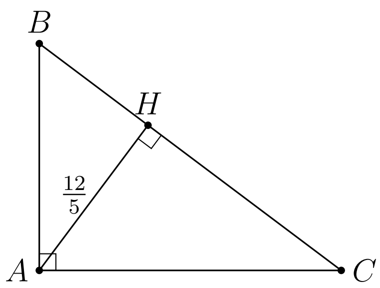
Ví dụ 8. Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 5$ cm, đường cao $AH = \dfrac{12}{5}$ cm. Tính BH, CH.

Lời giải.

Giả sử $BH \geq CH$. Ta có $BH + HC = BC = 5$. (1)

Mặt khác $BH \cdot CH = AH^2 = \dfrac{144}{25}$. Từ (1) ta có $(BH+CH)^2 = 25$, suy ra

$$BH^2 + 2BH \cdot CH + CH^2 = 25 \Rightarrow BH^2 + CH^2 = 25 - \frac{288}{25} = \frac{337}{25}.$$



Do đó

$$(BH - CH)^2 = BH^2 - 2BH \cdot CH + CH^2 = \frac{337}{25} - \frac{288}{25} = \frac{49}{25}.$$

Suy ra $BH - CH = \dfrac{7}{5}$. (2)

Từ (1) và (2) ta có

$$BH = \frac{(BH+CH)+(BH-CH)}{2} = \frac{16}{5} \text{ cm}, \; CH = BC - BH = \frac{9}{5} \text{ cm}.$$

□

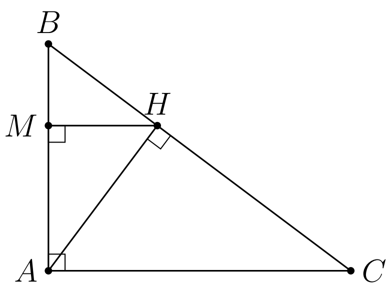
Ví dụ 9. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, kẻ HM vuông góc với AB tại M. Chứng minh rằng $BM = \dfrac{AB^3}{BC^2}$.

Lời giải.

Trong tam giác vuông AHB ta có $BM \cdot BA = BH^2$, suy ra $BM = \dfrac{BH^2}{AB}$.

Mặt khác, trong tam giác vuông ABC, ta có $BH \cdot BC = AB^2$, hay $BH = \dfrac{AB^2}{BC}$. Do đó

$$BM = \frac{AB^4}{AB \cdot BC^2} = \frac{AB^3}{BC^2}.$$



Vậy bài toán được chứng minh.

□

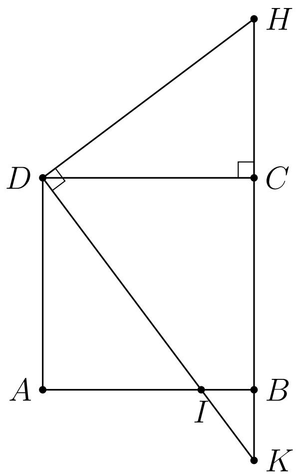
Ví dụ 10. Cho hình vuông $ABCD$, I là điểm thay đổi trên cạnh AB (I khác A và B). Đường thẳng DI cắt BC tại K. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{DI^2} + \dfrac{1}{DK^2}$ không đổi.

Lời giải.

Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với DI, cắt BC tại H.
Xét hai tam giác ADI và CDH có $\widehat{A} = \widehat{C} = 90^\circ$, $AD = DC$, $\widehat{ADI} = \widehat{CDH}$ (cùng phụ với góc $\widehat{CDI}$). Suy ra $\triangle ADI = \triangle CDH$ (g-c-g), do đó $DI = DH$. Suy ra

$$\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2} = \frac{1}{DH^2} + \frac{1}{DK^2} = \frac{1}{DC^2}.$$

Từ đó, ta có đpcm.



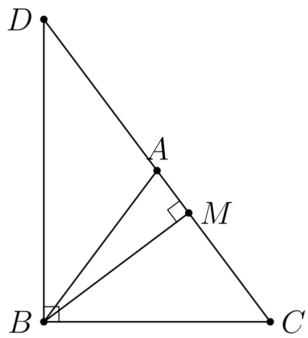
□

Ví dụ 11. Cho tam giác ABC cân tại A, có góc A nhọn. Vẽ BM vuông góc với AC. Chứng minh rằng

$$\frac{AM}{MC} = 2\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 - 1.$$

Lời giải.

Gọi D là điểm đối xứng với C qua A, khi đó $AB = AD = AC$ nên tam giác BCD vuông tại B và có đường cao BM.
Suy ra $CM \cdot CD = BC^2 \Rightarrow CM \cdot 2AC = BC^2$, suy ra $2\left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \frac{AC}{CM} = 1 + \frac{AM}{CM}$. Mà $AB = AC$, nên ta có $2\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 - 1 = \frac{AM}{CM}$.
Vậy bài toán được chứng minh.



□

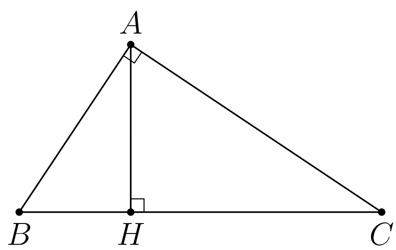
3 Luyện tập

Bài 1. Cho tam giác vuông ABC, đường cao AH, cạnh góc vuông $AC = 60$ cm, cạnh huyền $BC = 100$ cm. Tính chu vi tam giác ABC, ABH, ACH.

Lời giải.

Xét tam giác vuông ABC có $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = 80$ cm.

- $AH = \dfrac{AB \cdot AC}{BC} = \dfrac{60 \cdot 80}{100} = 48$ cm.
- $BH = \dfrac{AB^2}{BC} = 64$ cm, $CH = BC - BH = 36$ cm.
- Chu vi tam giác ABC là $AB + BC + CA = 240$ cm.



- Chu vi tam giác ABH là $AB + AH + HB = 192$ cm.
- Chu vi tam giác ACH là $AC + AH + HC = 144$ cm.

□

Bài 2. Cho tam giác vuông có các cạnh góc vuông bằng 5 cm và 12 cm. Tìm cạnh huyền và các hình chiếu của các cạnh góc vuông trên cạnh huyền.

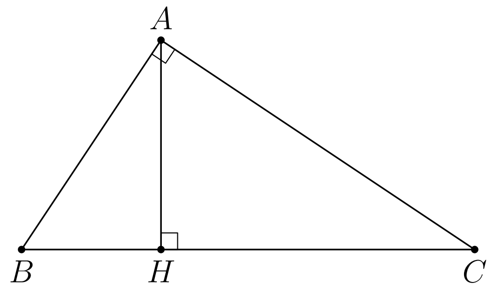
Lời giải.

Áp dụng định lý Pytago cho tam giác ABC ta có

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 13 \text{ cm}.$$

Các hình chiếu của các cạnh lên cạnh huyền là

- $BH = \dfrac{AB^2}{BC} = \dfrac{5^2}{13} = \dfrac{25}{13}$ cm.
- $CH = BC - CH = 13 - \dfrac{25}{13} = \dfrac{144}{13}$ cm.



□

Bài 3. Tìm các cạnh của tam giác vuông, biết đường cao và đường trung tuyến ứng với cạnh huyền theo thứ tự là 4 cm và 5 cm.

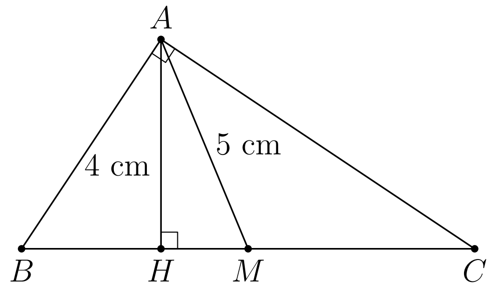
Lời giải.

Vì AM là trung tuyến của $\triangle ABC$ vuông tại A nên $AM = MC = MB = 5 \text{ cm} \Rightarrow BC = 2MA = 10$ cm.
Xét $\triangle AHM$ có $HM = \sqrt{AM^2 - AH^2} = 3$ cm. Suy ra

$$BH = MB - HM = 2 \text{ cm},\ HC = HM + MC = 8 \text{ cm}.$$

Xét tam giác vuông ABC có

- $AB^2 = BH \cdot BC = 20 \Rightarrow AB = 2\sqrt{5}$ cm.
- $AC^2 = CH \cdot CB = 80 \Rightarrow AC = 4\sqrt{5}$ cm.



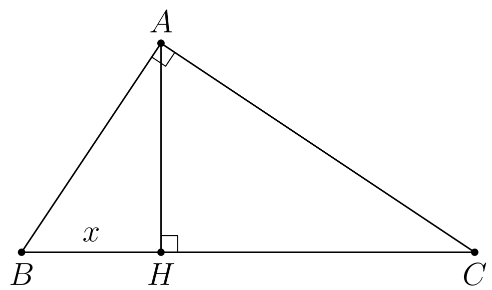
□

Bài 4. Tìm các cạnh của tam giác vuông, biết đường cao ứng với cạnh huyền là 4 cm, diện tích tam giác vuông bằng 20 cm^2.

Lời giải.

Giả sử tam giác đó là $\triangle ABC$ có đường cao AH.
Ta có $BC = \dfrac{2S_{ABC}}{AH} = \dfrac{2 \cdot 20}{4} = 10$ cm.
Đặt $BH = x$ $(x > 0)$. Ta có

$$\begin{aligned} AH^2 = BH \cdot CH &\Leftrightarrow 16 = x \cdot (10 - x) \\ &\Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = 2 \\ &x = 8. \end{aligned}\right. \end{aligned}$$



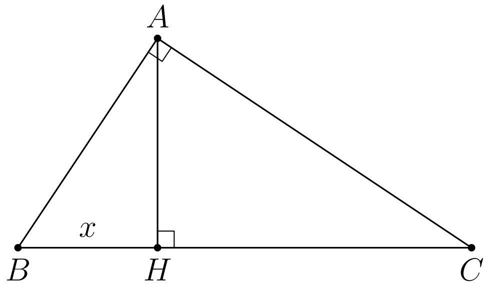
Khi $BH = 2$ cm: $AB^2 = BH \cdot BC = 2 \cdot 10 \Rightarrow AB = 2\sqrt{5}$ cm; $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 4\sqrt{5}$ cm.
Khi $BH = 8$ cm: $AB^2 = BH \cdot BC = 8 \cdot 10 \Rightarrow AB = 4\sqrt{5}$ cm; $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 2\sqrt{5}$ cm.
Khi đó ba cạnh của tam giác là $2\sqrt{5}$ cm, $4\sqrt{5}$ cm và 10 cm. □

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $AH = 6$ cm và $HC - HB = 9$ cm. Tính HB, HC.

Lời giải.

Đặt $BH = x \Rightarrow CH = 9 + x$ với $x > 0$.
Ta có

$$\begin{aligned} AH^2 = BH \cdot HC &\Leftrightarrow x(9+x) = 36 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 9x - 36 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -9 \\ x = 3. \end{array}\right. \end{aligned}$$



Vậy $HB = 3$ cm, $HC = HB + 9 = 12$ cm. □

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{3}{4}$, đường cao $AH = 18$ cm. Tính chu vi tam giác ABC.

Lời giải.

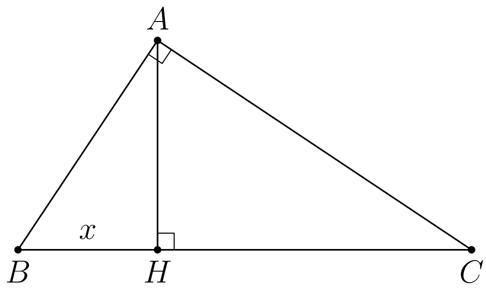
Đặt $AB = 3x \Rightarrow AC = 4x$ với $x > 0$. Suy ra $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 5x$.
Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} \Rightarrow AH = \dfrac{AB \cdot AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} = \dfrac{12x}{5} \Rightarrow x = \dfrac{15}{2}$ cm.
Chu vi tam giác ABC bằng $AB + BC + CA = 12x = 90$ cm. □

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A với $AB < AC$ và đường cao AH. Tính AB, AC biết $AH = 6$ cm và diện tích tam giác ABC bằng 37,5 cm^2.

Lời giải.

Giả sử tam giác đó là $\triangle ABC$ có đường cao AH.
Ta có $BC = \dfrac{2S_{ABC}}{AH} = \dfrac{2 \cdot 37{,}5}{6} = 12{,}5$ cm.
Đặt $BH = x$ ($x > 0$). Ta có

$$\begin{aligned} AH^2 = BH \cdot CH &\Leftrightarrow 36 = x \cdot (12,5 - x) \\ &\Leftrightarrow x^2 - 12,5x + 36 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{9}{2} \\ x = 8. \end{array}\right. \end{aligned}$$



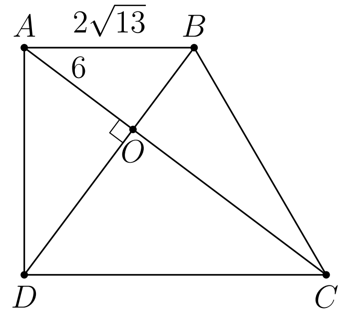
Khi $BH = \dfrac{9}{2}$ cm: $AB^2 = BH \cdot BC = \dfrac{9}{2} \cdot 12{,}5 \Rightarrow AB = \dfrac{15}{2}$ cm; $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 10$ cm.
Khi $BH = 8$ cm: $AB^2 = BH \cdot BC = 8 \cdot 12{,}5 \Rightarrow AB = 10$ cm; $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 7{,}5$ cm.
Khi đó là ba cạnh của tam giác là $AB = 7{,}5$ cm, $AC = 10$ cm và $BC = 12{,}5$ cm. □

Bài 8. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D. Hai đường chéo vuông góc với nhau tại O. Biết $AB = 2\sqrt{13}$, $OA = 6$. Tính diện tích hình thang.

Lời giải.

Xét $\triangle OAB$ vuông tại O, ta có:

$$OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{13}\right)^2 - 6^2} = 4.$$



Xét $\triangle ABD$ vuông tại A, đường cao AO ta có:

- $AB^2 = BD \cdot OB \Rightarrow BD = \dfrac{AB^2}{OB} = \dfrac{\left(2\sqrt{13}\right)^2}{4} = 13.$
- $AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{13^2 - \left(2\sqrt{13}\right)^2} = 3\sqrt{13}.$
- Ta có $OD = BD - OB = 13 - 4 = 9.$

Xét $\triangle ADC$ vuông tại D ta có: $AD^2 = OA \cdot AC \Rightarrow AC = \dfrac{AD^2}{OA} = \dfrac{AD^2}{OA} = \dfrac{\left(3\sqrt{13}\right)^2}{6} = 19{,}5.$

Mà $AD \cdot DC = OD \cdot AC \Rightarrow DC = \dfrac{OD \cdot AC}{AD} = \dfrac{9 \cdot 19{,}5}{3\sqrt{13}} = \dfrac{9\sqrt{13}}{2}.$

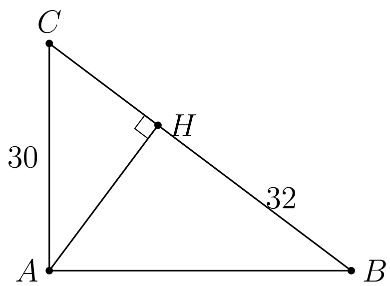
Vậy $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2} AD \cdot (AB + DC) = 126{,}75$ (đvdt) □

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường cao AH, cạnh bên $AC = 30$, $HB = 32$. Tính độ dài AH, HC, AB.

Lời giải.

Đặt $HC = x$ $(x > 0)$. Xét $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH ta có

$$\begin{aligned} AH^2 = HC \cdot HB \quad &\Leftrightarrow \quad 30^2 = x \cdot (x + 32) \\ &\Leftrightarrow \quad (x - 18)(x + 50) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 18 \text{ (nhận)} \\ x = -50 \text{ (loại)} \end{array}\right. \end{aligned}$$



Xét $\triangle AHC$ vuông tại H ta có $AH = \sqrt{AC^2 - HC^2} = 24.$
Xét $\triangle ABC$ vuông tại A ta có $AB^2 = HB \cdot BC = 32 \cdot (32 + 18) = 40.$ □

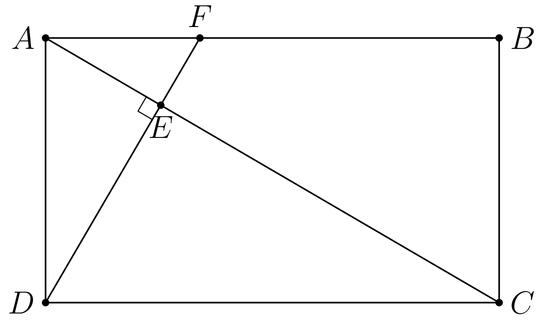
Bài 10. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có các cạnh $AB = 60$ cm, $AD = 32$ cm. Từ D kẻ đường thẳng vuông góc với đường chéo AC. Đường này cắt AC tại E và AB tại F. Tính độ dài các đoạn EA, EC, ED, FB, FD.

Lời giải.

Xét tam giác vuông ADC ta có

$$EA = \frac{AD^2}{AC} = \frac{AD^2}{\sqrt{AD^2 + CD^2}} = \frac{32^2}{\sqrt{32^2 + 60^2}} = \frac{256}{17} \text{ cm.}$$

$$EC = \frac{CD^2}{AC} = \frac{60^2}{\sqrt{32^2 + 60^2}} = \frac{900}{17} \text{ cm.}$$



Xét tam giác vuông ADE có

$$ED = \sqrt{EA \cdot EC} = \sqrt{\frac{32^2 \cdot 60^2}{32^2 + 60^2}} = \frac{480}{17} \text{ cm.}$$

$$FD = \frac{AD^2}{ED} = \frac{32^2}{\frac{32 \cdot 60}{68}} = \frac{544}{15} \text{ cm.}$$

$$AF = \sqrt{FD^2 - AD^2} = \sqrt{\frac{32^2 \cdot 68^2}{60^2} - 32^2} = \frac{256}{15} \text{ cm.}$$

$$FB = AB - AF = 60 - \frac{256}{15} = -\frac{-644}{15} \text{ cm.}$$

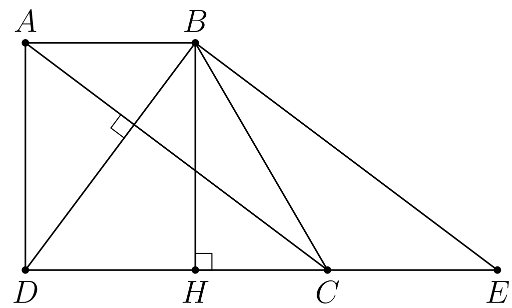
□

Bài 11. Tính diện tích hình thang $ABCD$, có đường cao bằng 12 cm, hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau, $DB = 15$ cm.

Lời giải.

Qua B vẽ đường thẳng song song với AC, cắt DC ở E. Gọi BH là đường cao của hình thang. Ta có $BE \parallel AC$, $AC \perp BD$ nên $BE \perp BD$.
Áp dụng định lí Pytago vào tam giác vuông BDH, ta có

$$BH^2 + HD^2 = BD^2 \Rightarrow 12^2 + HD^2 = 15^2$$
$$\Rightarrow HD^2 = 225 - 144 = 81 \Rightarrow HD = 9 \text{ cm.}$$



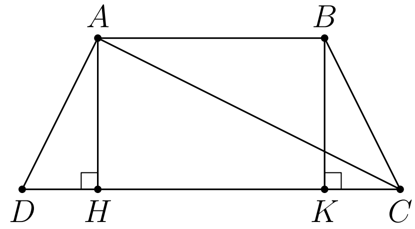
Xét tam giác BDE vuông tại B, ta có

$$BD^2 = DE \cdot DH \Rightarrow 15^2 = DE \cdot 9 \Rightarrow DE = \frac{225}{9} = 25 \text{ cm.}$$

Ta có $AB = CE$ nên $AB + CD = CE + CD = DE = 25$ cm.
Do đó $S_{ABCD} = \dfrac{25 \cdot 12}{2} = 150 \text{ cm}^2$. □

Bài 12. Hình thang cân $ABCD$ có đáy lớn $CD = 10$ cm, đáy nhỏ bằng đường cao, đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tìm đường cao của hình thang

Lời giải.



Gọi AH, BK là đường cao của hình thang.
Đặt $AB = AH = BK = x$.
Dễ dàng chứng minh được $DH = CK = \dfrac{DC - AB}{2} = \dfrac{10 - x}{2}$.
Do đó $HC = \dfrac{10 + x}{2}$.
Xét $\triangle ADC$ vuông tại A, ta có $AH^2 = HD \cdot HC$. Do đó

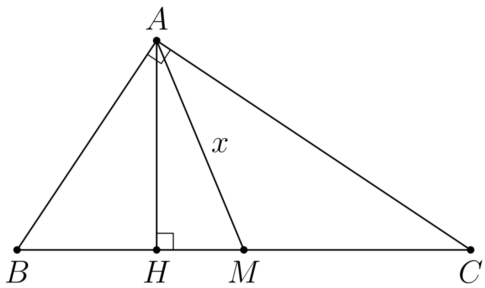
$$x^2 = \frac{10 - x}{2} \cdot \frac{10 + x}{2} = \frac{100 - x^2}{4}$$

Từ đó suy ra $x = 2\sqrt{5}$ cm.
Đường cao của hình thang bằng $2\sqrt{5}$ cm.

□

Bài 13. Tính diện tích một tam giác vuông có chu vi 72 cm, hiệu giữa đường trung tuyến và đường cao ứng với cạnh huyền bằng 7 cm.

Lời giải.



Đặt $AM = x$ $(x > 0)$, ta có $BC = 2x$, $AH = x - 7$.
Theo các hệ thức trong tam giác vuông

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 = 4x^2 \quad (1)$$
$$AB \cdot AC = BC \cdot AH = 2x(x - 7) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

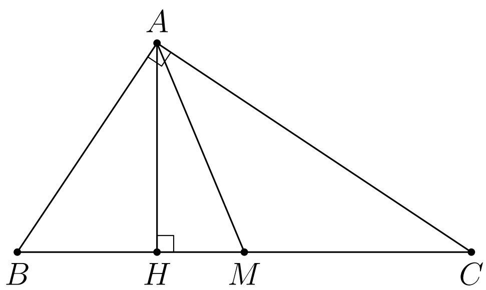
$$\begin{aligned} & AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AC = 4x^2 + 4x(x-7) \\ \Leftrightarrow\ & (AB + AC)^2 = 8x^2 - 28x \Leftrightarrow (72 - 2x)^2 = 8x^2 - 28x \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + 65x - 1296 = 0 \Leftrightarrow (x - 16)(x + 81) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 16 \text{ (nhận)} \\ x = -81 \text{ (loại)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Từ đó $BC = 32$ cm, $AH = 9$ cm.
Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 32 \cdot 9 = 144 \text{ cm}^2$.

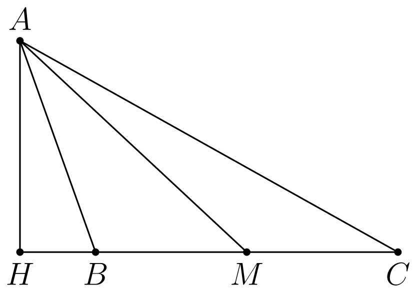
□

Bài 14. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh AB, BC, CA là ba số tự nhiên liên tiếp tăng dần. Kẻ đường cao AH, đường trung tuyến AM. Chứng minh rằng $HM = 2$.

Lời giải.



(1)



(2)

Đặt $BC = a$ thì $AB = a - 1$, $AC = a + 1$. Đặt $HM = x$. Ta thấy

$$HB = MB - MH \text{ (nếu } B \geq 90^\circ, \text{ xem hình (1))}$$

$$HB = MH - MB \text{ (nếu } B > 90^\circ, \text{ xem hình (2))}$$

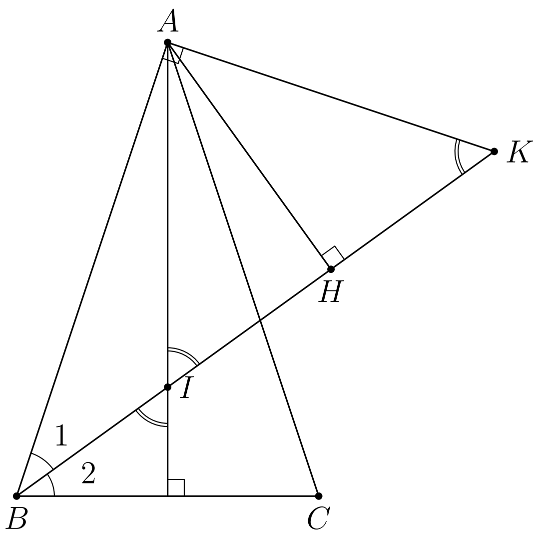
Nên $HB^2 = \left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2$. Ta có $AC^2 - HC^2 = AB^2 - HB^2$ (cùng bằng AH^2) nên

$$\begin{aligned} & (a+1)^2 - \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = (a-1)^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow\ & 4a = 2ax \Leftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

□

Bài 15. Tam giác ABC cân tại A, gọi I là giao điểm của các đường phân giác. Biết $IA = 2\sqrt{5}$ cm, $IB = 3$ cm. Tính độ dài AB.

Lời giải.



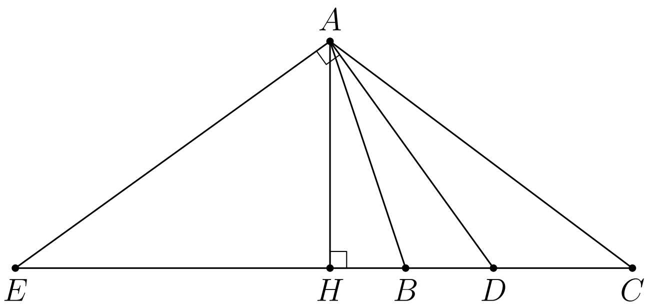
Đường vuông góc với AB tại A cắt BI ở K. Ta có $\widehat{K}$ phụ với $\widehat{B_1}$, $\widehat{AIK}$ phụ với $\widehat{B_2}$, mà $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ nên $\widehat{K} = \widehat{AIK}$.
Kẻ $AH \perp BK$. Đặt $IH = HK = x$.
Xét tam giác vuông ABK có

$$\begin{aligned} AK^2 = KH \cdot KB \ \Leftrightarrow\ & \left(2\sqrt{5}\right)^2 = x(2x+3) \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2 + 3x - 20 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (2x-5)(x+4) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{2} \text{ (nhận)} \\ x = -4 \text{ (loại).} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Suy ra $KB = 8$ cm $\Rightarrow AB = \sqrt{BK^2 - AK^2} = 2\sqrt{11}$ cm. □

Bài 16. Tam giác ABC có $BC = 40$ cm, đường phân giác trong AD dài 45 cm, đường cao AH dài 36 cm. Tính các độ dài BD, DC.

Lời giải.



Đặt $BD = x$, $DC = y$. Giả sử $x < y$.
Ta tính được $HD = 27$ cm. Vẽ tia phân giác của góc ngoài tại A, cắt BC ở E. Ta có $AE \perp AD$ nên $AD^2 = DE \cdot DH$. Suy ra

$$DE = \frac{AD^2}{DH} = \frac{45^2}{27} = 75 \text{ cm.}$$

Theo tính chất đường phân giác trong và ngoài của tam giác ta có

$$\frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{75-x}{75+y} \tag{1}$$

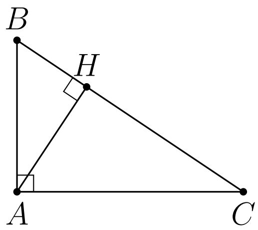
Mặt khác, thay $y = 40 - x$ vào (1) và rút gọn được

$$x^2 - 115x + 1500 = 0 \Leftrightarrow (x-15)(x-100) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 15 \text{ (nhận)} \\ x = 100 \text{ (loại).} \end{array}\right.$$

Từ đó suy ra $y = 40 - x = 25$ cm.
Vậy $DB = 15$ cm, $DC = 25$ cm. □

Bài 17. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Tính BH, CH biết $AB = 12$ cm, $BC = 20$ cm.

Lời giải.

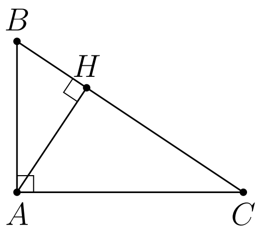


- $AB^2 = BH \cdot BC \Leftrightarrow BH = \dfrac{AB^2}{BC} = \dfrac{12^2}{20} = 7{,}2$ cm.
- $HC = 20 - 7{,}2 = 12{,}8$ cm.

$\square$

Bài 18. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Tính AC, CH biết $AH = 2$ cm, $HB = 1$ cm.

Lời giải.

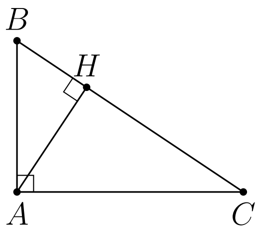


- $AH^2 = BH \cdot CH \Leftrightarrow CH = \dfrac{AH^2}{BH} = \dfrac{2^2}{1} = 4$ cm.
  nên $BC = HB + HC = 1 + 4 = 5$ cm.
- $AC^2 = CH \cdot BC = 4 \cdot 5 = 20 \Rightarrow AC = 2\sqrt{5}$ cm.

$\square$

Bài 19. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Tính AH, HB, HC biết $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm.

Lời giải.



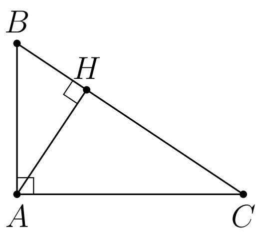
Ta có $BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ cm.

- $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} = \dfrac{25}{144}$ cm.
  Suy ra $AH = \dfrac{12}{5}$ cm.
- $AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BH = \dfrac{AB^2}{BC} = \dfrac{3^2}{5} = \dfrac{9}{5}$ cm.
- $HC = BC - HB = 5 - \dfrac{9}{5} = \dfrac{16}{5}$ cm.

$\square$

Bài 20. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Tính AB, AC biết $HB = 1$ cm, $HC = 2$ cm.

Lời giải.



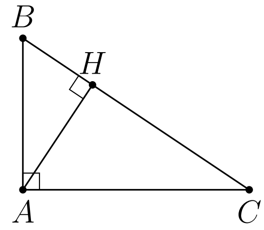
Ta có $BC = HB + HC = 2 + 1 = 3$ cm.
$AB^2 = BH \cdot BC = 1 \cdot 3 = 3 \Rightarrow AB = \sqrt{3}$ cm.
$AC^2 = CH \cdot BC = 2 \cdot 3 = 6 \Rightarrow AC = \sqrt{6}$ cm.

$\square$

Bài 21. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Tính BC, AC, AH biết $AB = 15$ cm, $HC = 16$ cm.

Lời giải.

Ta có



$$\begin{aligned} & AB^2 = BH \cdot BC \\ \Leftrightarrow\ & AB^2 = BH \cdot (BH + 16) \\ \Leftrightarrow\ & 15^2 = BH^2 + 16BH \\ \Leftrightarrow\ & BH^2 + 16BH - 225 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & BH^2 + 16BH - 225 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (BH + 25) \cdot (BH - 9) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & BH = -25 \text{ (loại) hoặc } BH = 9 \text{ (thỏa mãn).} \end{aligned}$$

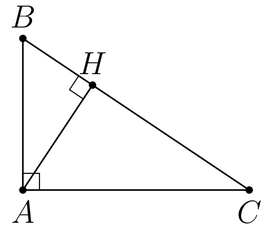
Do đó $BH = 9$ cm, suy ra $BC = HB + HC = 16 + 9 = 25$ cm.
$AB^2 = BH \cdot BC = 9 \cdot 25 = 225 \Rightarrow AB = 15$ cm.
$AC^2 = CH \cdot BC = 16 \cdot 25 = 400 \Rightarrow AC = 20$ cm.

□

Bài 22. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Tính AB, AC biết $AH = 12$ cm, $BC = 25$ cm.

Lời giải.

Ta có



$$\begin{aligned} & AH^2 = HB \cdot HC \\ \Leftrightarrow\ & 144 = HB \cdot (25 - HB) \\ \Leftrightarrow\ & HB^2 - 25HB + 144 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (HB - 9)(HB - 16 = 0) \\ \Leftrightarrow\ & HB = 9 \text{ hoặc } HB = 16. \end{aligned}$$

Vai trò của HB, HC như nhau, có thể giả sử $HB = 9$ cm và $HC = 16$ cm, nên
$AB^2 = BH \cdot BC = 9 \cdot 25 = 225 \Rightarrow AB = 15$ cm.
$AC^2 = CH \cdot BC = 16 \cdot 25 = 400 \Rightarrow AC = 20$ cm. □

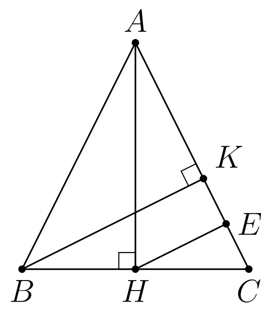
Bài 23. Cho tam giác ABC cân tại A có AH, BK là 2 đường cao. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{1}{BK^2} = \dfrac{1}{BC^2} + \dfrac{1}{4AH^2}$.

b) $BC^2 = 2CK \cdot CA$.

Lời giải.

a) Kẻ HE vuông góc với AC, suy ta $HE \parallel BK$,
nên HE là đường trung bình trong tam giác BCK.
Trong tam giác AHC vuông tại H,
$\dfrac{1}{HE^2} = \dfrac{1}{HA^2} + \dfrac{1}{HC^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\left(\dfrac{BK}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{AH^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{BC}{2}\right)^2}$.
Vậy $\dfrac{1}{BK^2} = \dfrac{1}{BC^2} + \dfrac{1}{4AH^2}$.



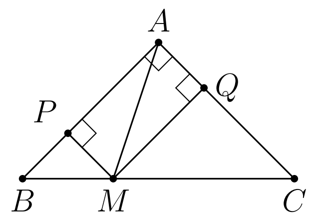
b) Ta có $HC^2 = CK \cdot CA \Leftrightarrow \left(\dfrac{BC}{2}\right)^2 = CK \cdot CA$.
Vậy $BC^2 = 4CK \cdot CA$.

□

Bài 24. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và một điểm M thuộc cạnh huyền BC. Chứng minh rằng $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$.

Lời giải.

Từ M kẻ $MP \perp AB$; $MQ \perp AC$
Do $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 45°$, khi đó tam giác MPQ và MQC vuông cân,
nên $MB^2 = 2MP^2$ và $MC^2 = 2MQ^2$.
Suy ra $MB^2 + MC^2 = 2(MP^2 + MQ^2)$. $(\star)$
Mà $APMQ$ là hình chữ nhật nên $MP^2 + MQ^2 = PQ^2 = MA^2$.
Do đó từ $(\star)$, ta có $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$.



□

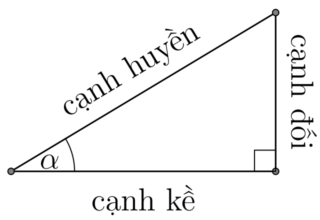
§2 Tỷ số lượng giác của góc nhọn

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Khái niệm tỉ số lượng giác của một góc nhọn

Cho tam giác vuông và góc nhọn α như hình vẽ.
Khi đó

- ☑ $\sin\alpha = \dfrac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}}$;
- ☑ $\tan\alpha = \dfrac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}}$;
- ☑ $\cos\alpha = \dfrac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}}$;
- ☑ $\cot\alpha = \dfrac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}}$.



⚠ **22.** Nhận xét

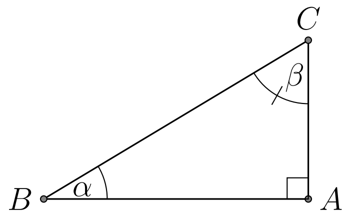
- ☑ Tỉ số lượng giác của một góc nhọn luôn dương.
- ☑ $\sin\alpha < 1$, $\cos\alpha < 1$.

1.2 Tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau

Định lí 4. Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cos góc kia, tan góc này bằng cot góc kia.

Hệ quả 4.
Cho hai góc α và β với $\alpha + \beta = 90^\circ$, khi đó

- ☑ $\sin\alpha = \cos\beta$;
- ☑ $\tan\alpha = \cot\beta$;
- ☑ $\cos\alpha = \sin\beta$;
- ☑ $\cot\alpha = \tan\beta$.



Bảng tỉ số lượng giác một số góc đặc biệt

Tỉ số lượng giác góc α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

2 Các ví dụ

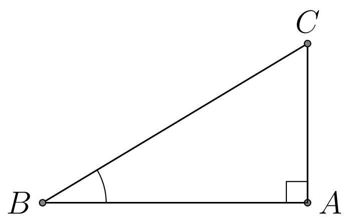
Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3$, $AC = 4$. Viết các tỉ số lượng giác của góc B.

Lời giải.

$\triangle ABC$ vuông tại A nên $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
Ta có

$\sin B = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{3}{5}$; $\quad \tan B = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{4}{3}$;

$\cos B = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{4}{5}$; $\quad \cot B = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{3}{4}$.

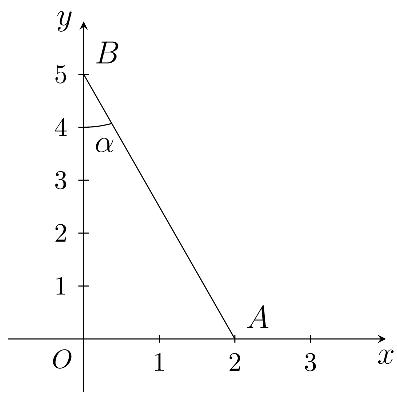


□

Ví dụ 2. Dựng góc nhọn α biết $\tan\alpha = \dfrac{2}{5}$.

Lời giải.

Dựng góc vuông xOy.
Trên tia Ox, lấy điểm A sao cho $OA = 2$;
trên tia Oy, lấy điểm B sao cho $OB = 5$.
Góc OBA là góc α cần dựng.
Thật vậy, $\tan\alpha = \tan\widehat{OBA} = \dfrac{2}{5}$.



□

Ví dụ 3. Hãy viết tỉ số lượng giác của các góc sau thành tỉ số lượng giác của các góc nhỏ hơn 45°

$$\sin 75^\circ, \cos 60^\circ, \tan 80^\circ, \cot 50^\circ.$$

Lời giải.

$\sin 75^\circ = \cos 15^\circ$; $\quad \cos 60^\circ = \sin 30^\circ$; $\quad \tan 80^\circ = \cot 10^\circ$; $\quad \cot 50^\circ = \tan 40^\circ$.

□

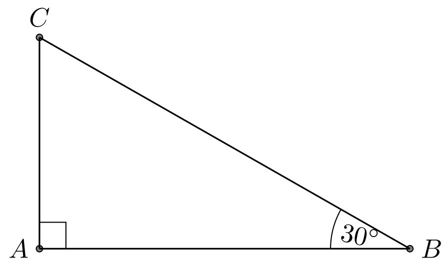
Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 60^\circ$ và $BC = 10$. Tính độ dài cạnh AB và BC.

Lời giải.

Tam giác ABC vuông tại A nên

$\sin B = \dfrac{AC}{BC} \Rightarrow AC = BC \cdot \sin B = 10 \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

$\cos B = \dfrac{AB}{BC} \Rightarrow AB = BC \cdot \cos B = 10 \cdot \dfrac{1}{2} = 5$.



□

3 Luyện tập

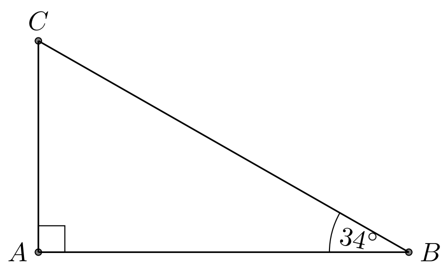
Bài 1. Vẽ một tam giác vuông có một góc nhọn 34° rồi viết tỉ số lượng giác của góc 34°.

Lời giải.

Giả sử $\widehat{B} = 34^\circ$.

$\sin 34^\circ = \sin B = \dfrac{AC}{BC}$; $\quad \tan 34^\circ = \tan B = \dfrac{AC}{AB}$;

$\cos 34^\circ = \cos B = \dfrac{AB}{BC}$; $\quad \cot 34^\circ = \cot B = \dfrac{AB}{AC}$.



□

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại C. Trong đó $AC = 0{,}9$ m, $BC = 1{,}2$ m. Tính các tỉ số lượng giác của góc B. Từ đó suy ra các tỉ số lượng giác của góc A.

Lời giải.

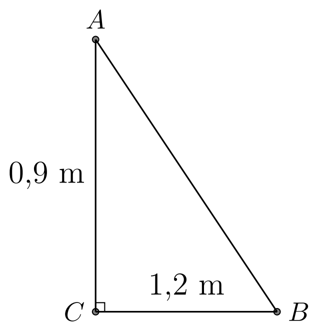
Áp dụng định lý Py-ta-go ta có:

$AB = \sqrt{CA^2 + CB^2} = \sqrt{0{,}9^2 + 1{,}2^2} = 1{,}5$ m.

Vì góc A và góc B phụ nhau nên

$\sin B = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{0{,}9}{1{,}5} = \dfrac{3}{5} = \cos A$; $\quad \tan B = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{0{,}9}{1{,}2} = \dfrac{3}{4} = \cot A$;

$\cos B = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{1{,}2}{1{,}5} = \dfrac{4}{5} = \sin A$; $\quad \cot B = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{1{,}2}{0{,}9} = \dfrac{4}{3} = \tan A$.



□

Bài 3. Hãy viết tỉ các tỉ số lượng giác sau thành tỉ số lượng giác của các góc nhỏ hơn 45°

$$\sin 60^\circ, \cos 75^\circ, \sin 52^\circ 30', \cot 82^\circ, \tan 80^\circ.$$

Lời giải.

$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ$; $\sin 52^\circ 30' = \cos 37^\circ 30'$; $\tan 80^\circ = \cot 10^\circ$.
$\cos 75^\circ = \sin 15^\circ$; $\cot 82^\circ = \tan 8^\circ$;

□

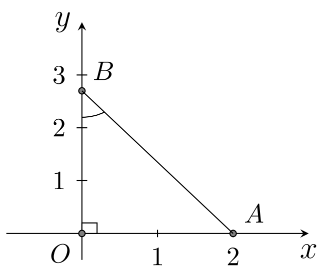
Bài 4. Dựng góc nhọn α biết

1. $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$;
2. $\cos\alpha = 0{,}6$;
3. $\tan\alpha = \dfrac{3}{4}$;
4. $\cot\alpha = \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

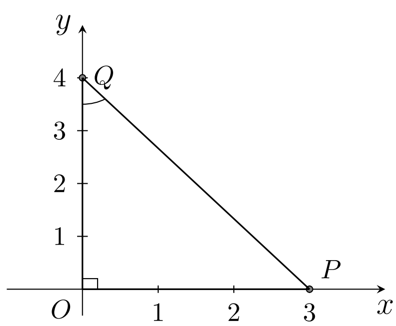
1. $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$.

Vẽ góc vuông xOy.
Trên Ox lấy điểm A sao cho $OA = 2$ cm.
Lấy A làm tâm, vẽ cung tròn bán kính 3 cm sao cho cung tròn này cắt tia Oy tại B.
Khi đó $\widehat{OBA} = \alpha$ nên $\sin\alpha = \sin\widehat{OAB} = \dfrac{OA}{AB} = \dfrac{2}{3}$.



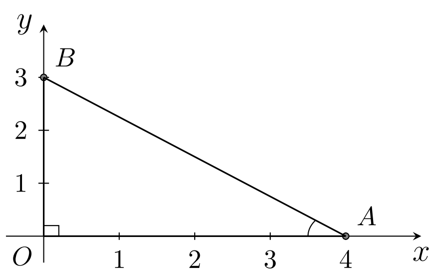
2. $\cos\alpha = 0{,}6$.

Vẽ góc vuông xOy.
Trên Ox lấy điểm P sao cho $OP = 3$ cm.
Lấy P làm tâm, vẽ cung tròn bán kính 5 cm sao cho cung tròn này cắt tia Oy tại Q.
Khi đó $\widehat{OPQ} = \alpha$ nên $\cos\alpha = \cos\widehat{OPQ} = \dfrac{OP}{OQ} = 0{,}6 = \dfrac{3}{5}$.



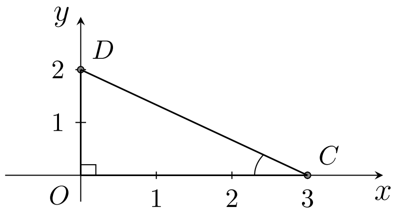
3. $\tan\alpha = \dfrac{3}{4}$.

Vẽ góc vuông xOy.
Trên Ox lấy điểm A sao cho $OA = 4$ cm.
Trên Oy lấy điểm B sao cho $OB = 3$ cm.
Khi đó $\widehat{OAB} = \alpha$ nên $\tan\alpha = \tan\widehat{OAB} = \tan\dfrac{OB}{OA} = \dfrac{3}{4}$.



4. $\cot\alpha = \dfrac{3}{2}$.

Vẽ góc vuông xOy.
Trên Ox lấy điểm C sao cho $OC = 3$ cm.
Trên Oy lấy điểm D sao cho $OD = 2$ cm.
Khi đó $\widehat{OCD} = \alpha$ nên $\cot \alpha = \cot \widehat{OCD} = \dfrac{OC}{OD} = \dfrac{3}{2}$.

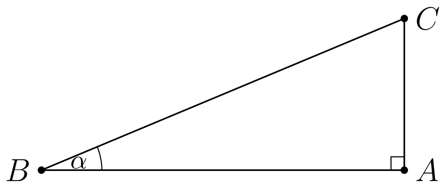


□

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6$ cm, $\widehat{B} = \alpha$. Biết $\tan \alpha = \dfrac{5}{12}$. Hãy tìm độ dài cạnh AC và BC.

Lời giải.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có
$\tan \alpha = \dfrac{AC}{AB} \Leftrightarrow \dfrac{5}{12} = \dfrac{AC}{6} \Leftrightarrow AC = \dfrac{5}{2}$ cm.
Áp dụng định lý Py-ta-go vào $\triangle ABC$ vuông tại A ta có
$AB^2 + AC^2 = BC^2$
$\Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \dfrac{13}{2}$ cm.



□

Bài 6. Tính giá trị của các biểu thức

1. $A = \dfrac{\sin 32^\circ}{\cos 58^\circ}$;
2. $B = \tan 76^\circ - \cot 14^\circ$.

Lời giải.

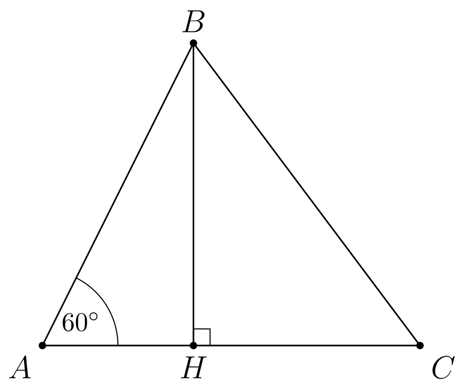
1. Ta có $32^\circ + 58^\circ = 90^\circ$
$\Rightarrow \sin 32^\circ = \cos 58^\circ$
$\Rightarrow A = 1$.
2. Ta có $76^\circ + 14^\circ = 90^\circ$
$\Rightarrow \tan 76^\circ = \cot 14^\circ$
$\Rightarrow B = 0$.

□

Bài 7. (*) Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$. Chứng minh rằng $BC^2 = AB^2 + AC^2 - AB \cdot AC$.

Lời giải.

Kẻ đường cao BH của $\triangle ABC$.
Khi đó ta có $HC^2 = (AC - AH)^2$.
Áp dụng định lý Py-ta-go ta có



$$\begin{aligned}BC^2 &= BH^2 + HC^2\\ &= BH^2 + (AC - AH)^2\\ &= BH^2 + AH^2 + AC^2 - 2AC \cdot AH\\ &= AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AH.\end{aligned}$$

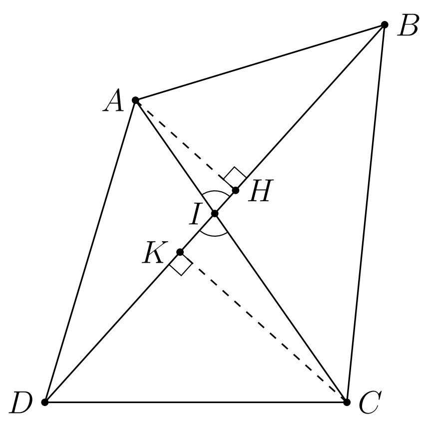
Lại có $\widehat{BAC} = 60^\circ$
$\Rightarrow \cos 60^\circ = \dfrac{AH}{AB} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{AH}{AB}$ hay $AH = \dfrac{AB}{2}$.
Vậy $BC^2 = AB^2 + AC^2 - AB \cdot AC$.

□

Bài 8. (*) Cho tứ giác $ABCD$ có α là góc nhọn tạo bởi hai đường chéo. Chứng minh rằng $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin\alpha$.

Lời giải.

Giả sử hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại $I, \widehat{AIB} = \alpha$ là góc nhọn.
Kẻ đường cao AH của $\triangle ABD$ và đường cao CK của $\triangle CBD$.
Ta có $AH = AI \sin\alpha, CK = CI \sin\alpha$.
Diện tích $\triangle ABD$ là $S_{\triangle ABD} = \dfrac{1}{2} BD \cdot AH$.
Diện tích $\triangle CBD$ là $S_{\triangle CBD} = \dfrac{1}{2} BD \cdot CK$.
Khi đó



$$\begin{aligned}S_{ABCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle CBD} &= \frac{1}{2} BD \cdot (AH + CK)\\ &= \frac{1}{2} BD \cdot (AI + CI)\sin\alpha\\ &= \frac{1}{2} BD \cdot AC \cdot \sin\alpha.\end{aligned}$$

□

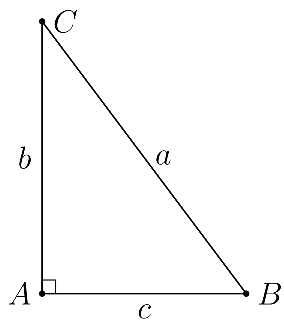
§3 Hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông

1 Tóm tắt lý thuyết

Định lí 5. Trong tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng:

1. Cạnh huyền nhân với **sin** góc đối hoặc nhân với **cos** góc kề;
2. Cạnh góc vuông kia nhân với **tan** góc đối hoặc nhân với **cot** góc kề.

Vậy, trong tam giác ABC vuông tại A, ta có các hệ thức



- ☑ $b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C$.
- ☑ $b = c \cdot \tan B = c \cdot \cot C$.
- ☑ $c = a \cdot \sin C = a \cdot \cos B$.
- ☑ $c = b \cdot \tan C = b \cdot \cot B$.

2 Các dạng toán

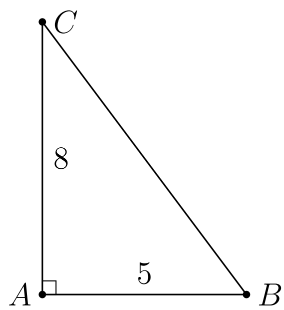
Dạng 1. Giải tam giác vuông

Sử dụng mối quan hệ giữa cạnh và góc trong tam giác vuông để giải.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC với các cạnh góc vuông $AB = 5$, $AC = 8$. Hãy giải tam giác vuông ABC.

Lời giải.



Theo định lí Py-ta-go, ta có

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{AB^2 + AC^2} \\ &= \sqrt{5^2 + 8^2} \\ &\approx 9{,}43. \end{aligned}$$

Mặt khác $\tan C = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{5}{8} = 0{,}625$.
Tra bảng hay dùng máy tính bỏ túi, ta tìm được $\widehat{C} \approx 32^\circ$.
Do đó $\widehat{B} \approx 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ$.

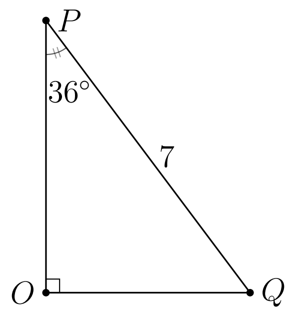
□

Ví dụ 2. Cho tam giác OPQ vuông tại O có $\widehat{P} = 36^\circ$, $PQ = 7$. Hãy giải tam giác vuông OPQ.

Lời giải.

Ta có $\widehat{Q} = 90^\circ - \widehat{P} = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$.
Theo các hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông, ta có

$$OP = PQ \cdot \sin Q = 7 \cdot \sin 54^\circ \approx 5{,}663$$
$$OQ = PQ \sin P = 7 \cdot \sin 36^\circ \approx 4{,}114.$$



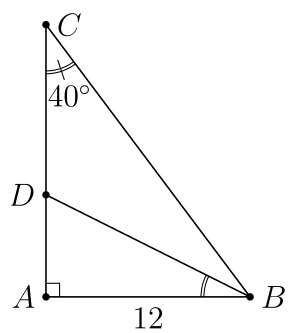
□

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 12$ cm, $\widehat{C} = 40^\circ$. Hãy tính độ dài

a) AC.
b) BC.
c) Phân giác BD.

Lời giải.

Ta có $\tan \widehat{ACB} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow AC = \dfrac{AB}{\tan 40^\circ} = \dfrac{12}{\tan 40^\circ} \approx 14{,}3$ cm,
$\sin \widehat{ACB} = \dfrac{AB}{BC} \Rightarrow BC = \dfrac{AB}{\sin 40^\circ} = \dfrac{12}{\sin 40^\circ} \approx 18{,}7$ cm.
Ta có $\widehat{ABC} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$.
Vì BD là phân giác góc $\widehat{ABC}$ nên $\widehat{ABD} = 25^\circ$.
Do đó $\cos \widehat{ABD} = \dfrac{AB}{BD} \Rightarrow BD = \dfrac{AB}{\cos \widehat{ABD}} = \dfrac{12}{\cos 25^\circ} \approx 13{,}2$ cm.



□

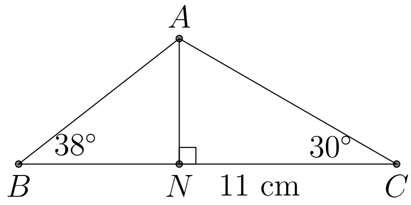
Dạng 2. Tính cạnh và góc của tam giác

Phương pháp: Kẻ thêm đường cao để xuất hiện tam giác vuông; áp dụng các hệ thức lượng trong tam giác vuông.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC, trong đó $BC = 11$ cm, $\widehat{ABC} = 38^\circ$, $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Gọi điểm N là chân của đường vuông góc kẻ từ A đến cạnh BC. Hãy tính độ dài đoạn thẳng AN.

Lời giải.



Ta có $\tan 38^\circ = \dfrac{AN}{BN} \Rightarrow BN = \dfrac{AN}{\tan 38^\circ}$.
Tương tự $NC = \dfrac{AN}{\tan 30^\circ}$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} & BC = BN + NC \\ \Leftrightarrow\ & 11 = \frac{AN}{\tan 38^\circ} + \frac{AN}{\tan 30^\circ} \\ \Leftrightarrow\ & 11 = AN \cdot \left(\frac{1}{\tan 38^\circ} + \frac{1}{\tan 30^\circ}\right) \\ \Rightarrow\ & AN = \frac{11}{\dfrac{1}{\tan 38^\circ} + \dfrac{1}{\tan 30^\circ}} \approx 3{,}65. \end{aligned}$$

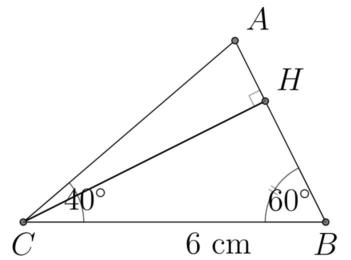
□

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $BC = 6$ cm, $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 40^\circ$. Hãy tính

a) Chiều cao CH và cạnh AC.

b) Diện tích tam giác ABC.

Lời giải.



1. Tam giác BHC vuông tại H:
$\sin \widehat{HBC} = \dfrac{CH}{BC} \Rightarrow CH = BC \cdot \sin \widehat{HBC} = 6 \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$.
Mà $\widehat{CAB} = 180^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 80^\circ$.
Tam giác AHC vuông tại H:
$\sin \widehat{CAH} = \dfrac{CH}{AC} \Rightarrow AC = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sin 80^\circ} \approx 5,28$ cm.

b) Ta có $\tan \widehat{CAH} = \dfrac{CH}{AH} \Rightarrow AH = \dfrac{CH}{\tan 80^\circ} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\tan 80^\circ}$.
Do vậy $\tan \widehat{HBC} = \dfrac{CH}{HB} \Rightarrow HB = \dfrac{CH}{\tan 60^\circ} = 3$ cm.

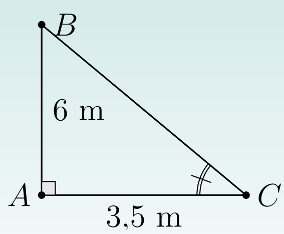
Ta có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot CH \cdot AB = \dfrac{1}{2} \cdot CH \cdot (AH + HB) = \dfrac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{\tan 80^\circ} + 3\right) \approx 10{,}17\ \text{cm}^2$. □

Dạng 3. Toán thực tế

Dùng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông để giải quyết các tính huống thực tế.

BÀI TẬP MẪU

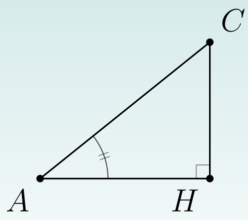
Ví dụ 1.
Một cột đèn điện AB cao 6 m có bóng in trên mặt đất là AC dài 3,5 m. Hãy tính góc $\widehat{BCA}$ (làm tròn đến phút) mà tia sáng mặt trời tạo với mặt đất.



Lời giải.

Tam giác ABC vuông tại A, ta có $\tan\widehat{BCA} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{6}{3{,}5} \approx 1{,}71$. Suy ra $\widehat{BCA} = 59°73'$. □

Ví dụ 2.
Một cầu tuột trong công viên có độ dốc là $28°$, và có độ cao là 2,1 m. Tính độ dài của mặt cầu trượt (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



Lời giải.

Đặt độ dốc là góc $\widehat{CAH} = 28°$; độ cao là $CH = 2{,}1$ m; chiều dài mặt cầu trượt là cạnh AC. Ta cần tính độ dài cạnh AC.
Tam giác AHC vuông tại H, ta có

$$\sin\widehat{CAH} = \frac{CH}{AC} \Rightarrow AC = \frac{CH}{\sin 28°} = \frac{2{,}1}{\sin 28°} \approx 6{,}8 \text{ m}.$$

□

3 Luyện tập

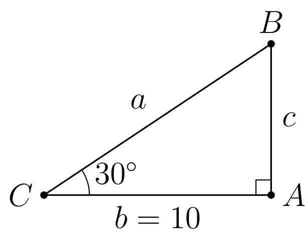
3 Dễ

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Giải tam giác ABC, biết rằng $b = 10$ cm, $\widehat{C} = 30°$.

Lời giải.

Vì $\triangle ABC$ vuông tại A, $b = 10$ cm, $\widehat{C} = 30°$ nên ta có

$$\widehat{B} = 90° - 30° = 60°.$$
$$c = b \cdot \tan 30° = 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}} \approx 5{,}773 \text{ cm}.$$
$$a = \frac{b}{\cos 30°} = 10 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 11{,}547 \text{ cm}.$$



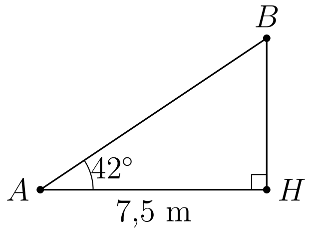
□

Bài 2. Một cột đèn có bóng trên mặt đất dài 7,5 m. Các tia nắng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ bằng $42°$. Tính chiều cao của cột đèn.

Lời giải.

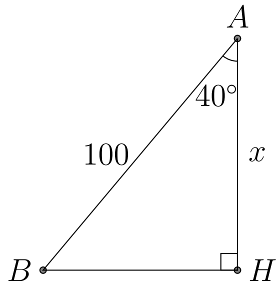
Giả sử chiều cao cột đèn là BH và chiều dài tia nắng trên mặt đất là AH. Xét tam giác ABH vuông tại H có

$$\tan A = \frac{BH}{AH} \Rightarrow BH = \tan 42^\circ \cdot AH = \tan 42^\circ \cdot 7{,}5 \approx 6{,}75 \text{ m}.$$



□

Bài 3. Một chiếc diều với đoạn dây thả diều AB dài 100 m, dây thả diều tạo với phương thẳng đứng một góc 40° (hình bên). Tính chiều cao của diều.



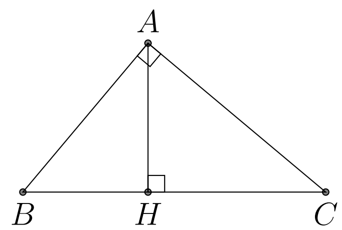
Lời giải.

Trong tam giác vuông AHB vuông tại H, ta có $AH = AB \cos 40^\circ = 100 \cdot 0{,}766 = 76{,}6$ (m). □

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH. Biết $HB = 25$ cm, $HC = 64$ cm. Tính số đo các góc B và C.

Lời giải.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC, ta có $AH^2 = HB \cdot HC = 25 \cdot 64$ nên $AH = 5 \cdot 8 = 40$ (cm).
Trong tam giác vuông AHB, ta có
$\tan B = \dfrac{AH}{BH} = \dfrac{40}{25} = 1{,}6$ nên $\widehat{B} \approx 58^\circ$ suy ra $\widehat{C} \approx 32^\circ$.



□

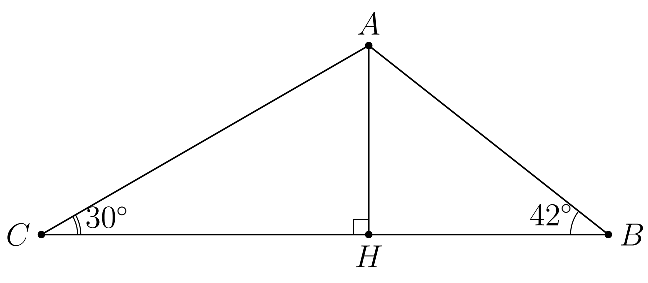
3 Trung bình

Bài 5. Cho tam giác ABC có $BC = 15$ cm, $\widehat{ABC} = 42^\circ$ và $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Gọi H là chân đường cao hạ từ đỉnh A xuống BC. Hãy tính

a) Độ dài đoạn thẳng AH.

b) Độ dài đoạn thẳng AC.

Lời giải.



1. Đặt $AH = x$. Ta có

$$CH = \frac{AH}{\tan 30^\circ} = x\sqrt{3} \approx 1{,}732x.$$
$$BH = \frac{AH}{\tan 42^\circ} \approx 1{,}1106x.$$

Do đó $BC = CH + HB \approx 2{,}8426x \Rightarrow x \approx \dfrac{15}{2{,}8426} \approx 5{,}2768$ cm.

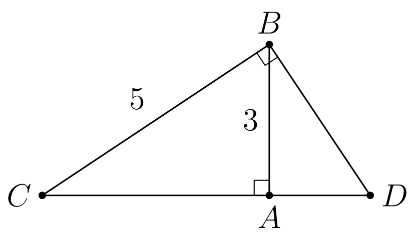
2. Ta có $AC = \dfrac{AH}{\sin 30^\circ} = 2AH \approx 10{,}5537$ cm.

□

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A. Biết $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm.

1. Giải tam giác vuông ABC.
2. Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với BC, đường thẳng này cắt đường thẳng AC tại D. Tính độ dài các đoạn thẳng AD và BD.

Lời giải.



1. Do tam giác ABC vuông tại A nên $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ cm.
   Ta có $\sin C = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \widehat{C} \approx 36^\circ 52' \Rightarrow \widehat{B} = 90^\circ - \widehat{C} \approx 53^\circ 48'$.
2. Vì $BD \perp BC$ nên $\widehat{CBD} = 90^\circ$. Xét tam giác ABD vuông tại A có $AB = 3$ cm, do vậy

$$AB^2 = AD \cdot AC \Rightarrow AD = \frac{9}{4} = 2{,}25 \text{ cm}.$$
$$BD^2 = DA \cdot DC = 2{,}25(2{,}25 + 4) = 14{,}0625 \Rightarrow BD = 3{,}75 \text{ cm}.$$

□

Bài 7. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, $AB = 21$ cm, $\widehat{C} = 40^\circ$. Tính độ dài đường phân giác BD.

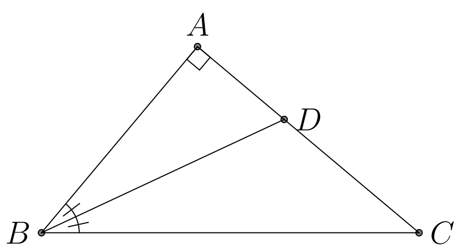
Lời giải.

Ta có $\widehat{B} = 90^\circ - \widehat{C} = 50^\circ$.

Vì BD là tia phân giác của góc $\widehat{B}$ nên $\widehat{ABD} = \dfrac{\widehat{B}}{2} = 25^\circ$.

Trong tam giác vuông ABD, ta có

$BD = \dfrac{AB}{\cos 25^\circ} = \dfrac{21}{0,9063} \approx 23{,}2$ (cm).

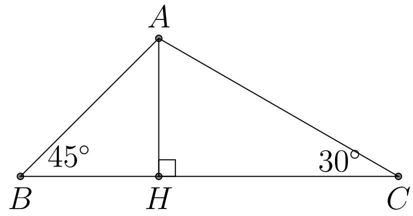


□

Bài 8. Tính diện tích $\triangle ABC$ có $BC = 40$ cm, $\widehat{B} = 40^\circ$, $\widehat{C} = 55^\circ$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{B} = 180^\circ - (105^\circ + 30^\circ) = 45^\circ$.
Kẻ đường cao AH. Ta có $HC = AH \cot 30^\circ = AH\sqrt{3}$.
Mặt khác



$$\begin{aligned} & BH + HC = 2 \\ \Rightarrow\ & AH + AH\sqrt{3} = 2 \\ \Rightarrow\ & AH(1+\sqrt{3}) = 2 \\ \Rightarrow\ & AH = \frac{2}{1+\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1. \end{aligned}$$

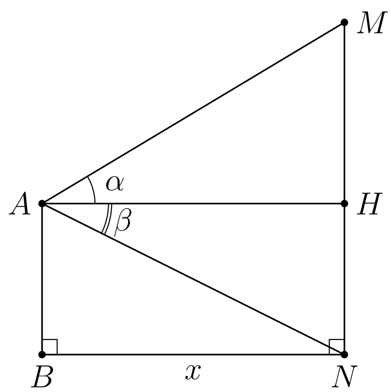
Vậy $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} BC \cdot AH = \dfrac{1}{2} \cdot 2\left(\sqrt{3}-1\right) = \sqrt{3}-1\ (\text{cm}^2)$.

□

3 Khó

Bài 9.

Khoảng cách giữa hai chân tháp AB và MN là x (như hình vẽ). Từ đỉnh A của tháp AB nhìn lên đỉnh M của tháp MN ta được góc α. Từ đỉnh A nhìn xuống chân N của tháp MN ta được góc β (so với phương nằm ngang AH). Hãy tìm chiều cao MN nếu $x = 120$ m, $\alpha = 30^\circ$ và $\beta = 20^\circ$.



Lời giải.

Xét tam giác MAH vuông tại H có $HM = AH \tan\alpha$.
Xét tam giác NAH vuông tại H có $HN = AH \tan\beta$.
Do đó $MN = MH + HN = AH(\tan\alpha + \tan\beta) = 120 \cdot (\tan 30^\circ + \tan 20^\circ) \approx 113$ m. □

Bài 10. Cho hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$, $\widehat{D} = 90^\circ$, $\widehat{C} = 38^\circ$, $AB = 3{,}5$ và $AD = 3{,}1$. Tính diện tích hình thang $ABCD$.

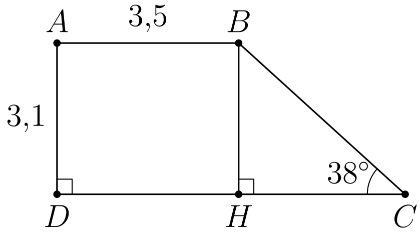
Lời giải.

Vẽ $BH \perp CD$ tại H, khi đó ta có $BH = AD = 3{,}1$ và $DH = AB = 3{,}5$.
Xét tam giác BHC vuông tại H, có

$$HC = BH \cot C = 3{,}1 \cdot \cot 38^\circ \approx 4.$$

Do vậy $CD = CH + HD \approx 4 + 3{,}5 \approx 7{,}5$.
Diện tích hình thang $ABCD$ là

$$S = \frac{(AB + CD)AD}{2} \approx \frac{(3{,}5 + 7{,}5) \cdot 3{,}1}{2} \approx 17{,}1 \text{ (đvdt)}.$$



□

Bài 11. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$), $AB = 2$ cm, $CD = 6$ cm, chiều cao bằng 4 cm. Tính góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng chứa cạnh bên hình thang.

Lời giải.

Gọi K là giao điểm của AD và BC. Kẻ AH và KI vuông góc với CD.

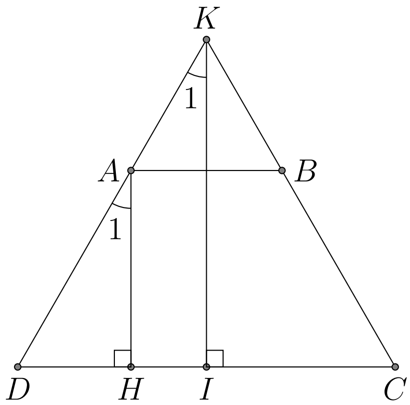
Ta có

$$\widehat{A_1} = \widehat{K_1} = \frac{1}{2}\widehat{CKD}.$$

$$HD = \frac{CD - AB}{2} = \frac{6-2}{2} = 2 \text{ (cm)}.$$

$$\tan \widehat{A_1} = \frac{HD}{AH} = \frac{2}{4} = 0{,}5$$

Nên $\widehat{A} \approx 27^\circ$. Suy ra $\widehat{CKD} \approx 54^\circ$.



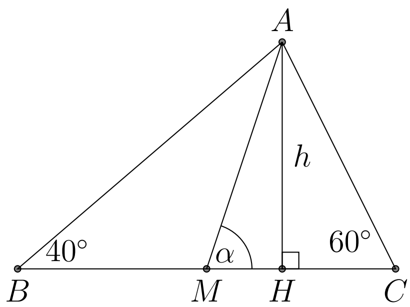
□

Bài 12. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = 40^\circ$, $\widehat{C} = 60^\circ$, đường trung tuyến AM. Tính số đo góc AMC.

Lời giải.

Kẻ đường cao AH.
Ta có $HB - HC = (HM + MB) - (MC - HM) = 2HM$.
Đặt $AH = h$, $\widehat{AMH} = \alpha$. Ta có

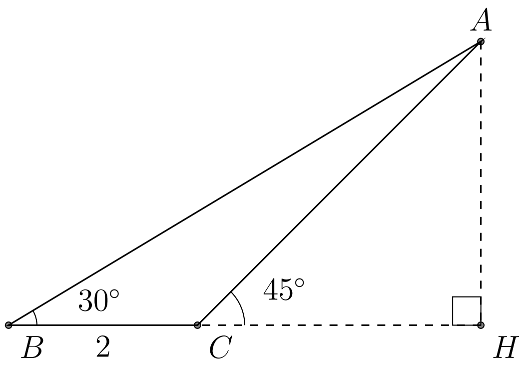
$$\begin{aligned} & HB - HC = 2HM \\ \Rightarrow\ & h\cot 40^\circ - h\cot 60^\circ = 2h\cot\alpha \\ \Rightarrow\ & \cot\alpha = \frac{\cot 40^\circ - \cot 60^\circ}{2} \approx \frac{1{,}1918 - 0{,}5774}{2} \approx 0{,}3072 \\ \Rightarrow\ & \alpha \approx 73^\circ. \end{aligned}$$



□

Bài 13. Tính diện tích tam giác ABC biết $\widehat{B} = 30^\circ$, $\widehat{C} = 135^\circ$, $BC = 2$ cm.

Lời giải.



Kẻ đường cao AH. Ta có $BC = BH - CH = AH\cot 30^\circ - AH\cot 45^\circ = AH(\sqrt{3}-1)$.
Suy ra $AH = \dfrac{BC}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1(\text{cm})$.
Vậy $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot 2(\sqrt{3}+1) = \sqrt{3}+1(\text{cm}^2)$. □

§4 Ôn tập chương

1 Tóm tắt lý thuyết

Các kiến thức trọng tâm của bài học theo sách giáo khoa hiện hành.

2 Bài tập trắc nghiệm

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ đường cao AH. Hệ thức nào sau đây là đúng?

(A) $AH^2 = BH \cdot BC$. (B) $AC^2 = CH \cdot BC$. (C) $AH^2 = AB \cdot AC$. (D) $AH = BH \cdot AB$.

Lời giải.

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông.

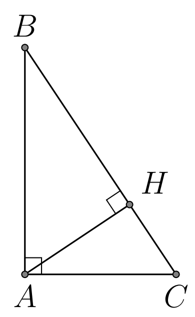
Chọn đáp án (B) □

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A và có đường cao AH. Hệ thức nào sau đây là sai?

(A) $AB^2 = BH \cdot BC$. (B) $AH^2 = BH \cdot CH$. (C) $\dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AB}{BC}$. (D) $\dfrac{AH}{HB} = \dfrac{AB}{AC}$.

Lời giải.

Ta có $\triangle AHB \backsim CAB \Rightarrow \dfrac{AH}{HB} = \dfrac{AC}{AB}$.



Chọn đáp án (D) □

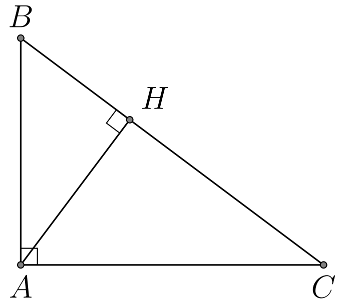
Bài 3. Cho tam giác ABC có $AB = 3; AC = 4; BC = 5$, kẻ đường cao AH. Hệ thức nào sau đây là sai?

(A) $AH^2 = BH \cdot CH$. (B) $BH^2 = AH \cdot CH$.

(C) $AB^2 = BH \cdot BC$. (D) $\dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{AH^2} - \dfrac{1}{AC^2}$.

Lời giải.

Có $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow ABC$ là tam giác vuông tại A.



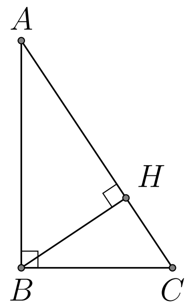
Chọn đáp án B □

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại B và có đường cao BH. Hệ thức nào sau đây là đúng?

A. $BH^2 = AH \cdot CH$.
B. $AH^2 = BH \cdot CH$.
C. $AB^2 = BH \cdot BC$.
D. $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Lời giải.

Chú ý là tam giác vuông tại B và đường cao là BH.



Chọn đáp án A □

Bài 5. Tam giác ABC có đường cao AH thỏa mãn $AH^2 = BH \cdot CH$ thì khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Tam giác ABC vuông tại A.
B. $AB^2 = BH \cdot BC$.
C. $\triangle AHB \backsim \triangle CHA$.
D. $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Lời giải.

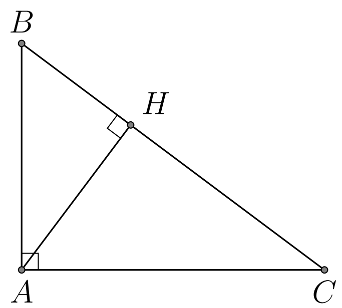
Ta chỉ có $\triangle AHB \backsim \triangle CHA$ chứ tam giác ABC có thể không vuông.
Chọn đáp án C □

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3$; $AC = 4$. Kẻ đường cao AH. Độ dài AH là

A. $AH = 5$.
B. $AH = 2{,}4$.
C. $AH = 2{,}25$.
D. $AH = \dfrac{16}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} \Rightarrow AH = 2{,}4$.



Chọn đáp án B □

Bài 7. Cho tam giác vuông tại A có $AB = 5$. Kẻ đường cao AH. Biết $BH = \dfrac{25}{13}$, độ dài AH là

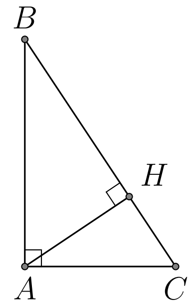
Ⓐ $AH = \dfrac{60}{13}$. Ⓑ $AH = 5$. Ⓒ $AH = \dfrac{1}{13}$. Ⓓ $AH = 13$.

Lời giải.

Ta có $AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BC = 13$

$\Rightarrow CH = BC - BH = \dfrac{144}{13}$.

Ta có $AH^2 = BH \cdot CH \Rightarrow AH = \dfrac{60}{13}$.



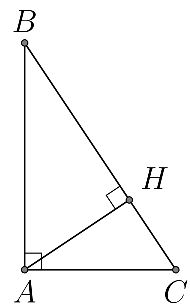
Chọn đáp án Ⓐ □

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A và đường cao AH. Biết $AH = 9, BH = 12$. Giá trị $\dfrac{AB}{AC}$ là

Ⓐ $\dfrac{4}{5}$. Ⓑ $\dfrac{3}{5}$. Ⓒ $\dfrac{4}{3}$. Ⓓ $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\triangle BAC \backsim \triangle AHB \Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AH}{HB} = \dfrac{3}{4}$.



Chọn đáp án Ⓓ □

Bài 9. Cho tam giác vuông ABC vuông tại A có $AB = 6$, $BC = 10$. AH là đường cao. Độ dài BH và AH lần lượt là

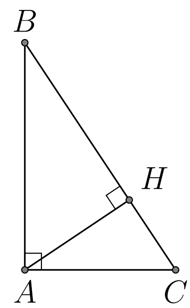
Ⓐ $BH = 6{,}4; AH = 4{,}6$. Ⓑ $BH = 3{,}6; AH = 4{,}8$.

Ⓒ $BH = 3{,}6; AH = 6{,}4$. Ⓓ $BH = 6{,}4; AH = 4{,}8$.

Lời giải.

Ta có $AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BH = 3{,}6$.

Ta có $CH = BC - BH = 6{,}4$ mà $AH^2 = BH \cdot CH \Rightarrow AH = 4{,}8$.



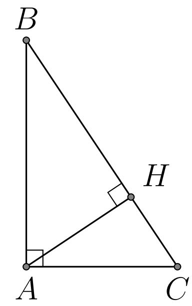
Chọn đáp án Ⓑ □

Bài 10. Cho tam giác vuông tại A có đường cao AH. Biết $BH = 9, CH = 7$. Độ dài AB và AC lần lượt là

(A) $AB = 3\sqrt{7}; AC = 12$.
(B) $AB = 12; AC = 3\sqrt{7}$.
(C) $AB = 12; AC = 4\sqrt{7}$.
(D) $AB = 3\sqrt{7}; AC = 4\sqrt{7}$.

Lời giải.

Ta có $AH^2 = BH \cdot CH \Rightarrow AH = 3\sqrt{7}$.
Ta có tam giác ABH vuông tại H nên ta có $AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AB = 12$.
Ta có tam giác ACH vuông tại H nên ta có $AC^2 = AH^2 + CH^2 \Rightarrow AC = 4\sqrt{7}$.



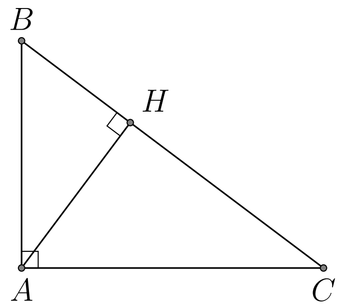
Chọn đáp án (C) □

Bài 11. Tam giác vuông ABC có $AB : AC$ lần lượt tỉ lệ với $3 : 4$. Biết $AH = 6$. Cạnh BC có độ dài là bao nhiêu

(A) $BC = 11{,}5$.
(B) $BC = 12$.
(C) $BC = 12{,}5$.
(D) $BC = 13$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{6^2}$
mà $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow AB = \dfrac{3}{4}AC$.
Từ đó $\dfrac{1}{AC^2\frac{9}{16}} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{36} \Leftrightarrow AC = 10 \Rightarrow AB = 7{,}5$.
Vậy $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 12{,}5$.



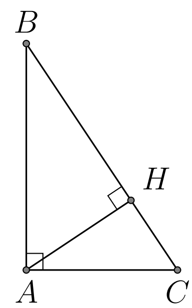
Chọn đáp án (C) □

Bài 12. Cho tam giác ABC vuông tại A và đường cao AH. Biết $AH = 6$ và $AB^2 = 135 + AC^2$. Tính tỉ số $\dfrac{AB}{AC}$.

(A) 5.
(B) 3.
(C) 4.
(D) 6.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$
mà $AB = AC + 10 \Rightarrow \dfrac{1}{AC^2 + 135} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{6^2}$
$\Leftrightarrow AC = 3 \Rightarrow AB = 12 \Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = 4$.



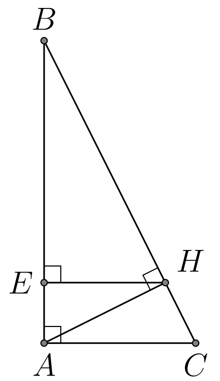
Chọn đáp án (C) □

Bài 13. Cho tam giác ABC vuông tại A và đường cao AH. Kẻ $HE \perp AB$ $(H \in AB)$.Cho $AB = 4; AC = 2$, hãy tính độ dài đoạn HE.

(A) $HE = \frac{8}{5}$. (B) $HE = \frac{9}{5}$. (C) $HE = \frac{7}{5}$. (D) $HE = 2$.

Lời giải.

Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AH = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.
Ta có $AH^2 = AE \cdot AB \Rightarrow AE = \frac{4}{5}$.
$HE^2 = AH^2 - AE^2 = \frac{8}{5}$.



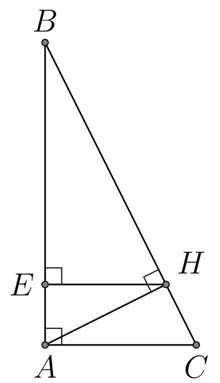
Chọn đáp án (A) □

Bài 14. Cho tam giác ABC vuông tại A và đường cao AH. Kẻ $HE \perp AB (H \in AB)$.Cho $HE = 6; AC = 9$, tính độ dài đoạn BC.

(A) $BC = 9\sqrt{2}$. (B) $BC = 6\sqrt{3}$. (C) $BC = 9\sqrt{3}$. (D) $BC = 18$.

Lời giải.

Ta có $HE \parallel AC \Rightarrow \frac{BE}{AB} = \frac{HE}{AC} = \frac{2}{3}$.
Gọi $BE = x \Rightarrow AE = \frac{3}{2}x - x = \frac{1}{2}x$.
Mà $HE^2 = BE \cdot AE \Rightarrow x \cdot \frac{1}{2}x = 6^2 \Leftrightarrow x = 6\sqrt{2}$.
Ta có $BH^2 = BE^2 + EH^2 \Rightarrow BH = 6\sqrt{3}$.
Mà $\frac{BH}{BC} = \frac{HE}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow BC = 9\sqrt{3}$.



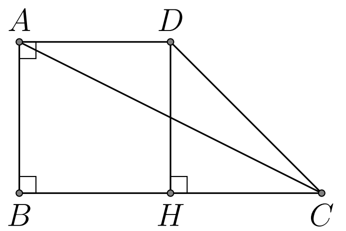
Chọn đáp án (C) □

Bài 15. Cho hình thang vuông $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{B} = 90°, AB = AD = 2, DC = 2\sqrt{2}$. Tính độ dài đường chéo AC.

(A) $AC = 8$. (B) $AC = 6$. (C) $AC = 4\sqrt{2}$. (D) $AC = 2\sqrt{5}$.

Lời giải.

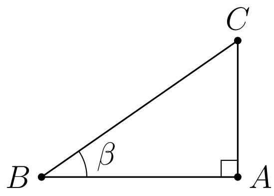
Kẻ $DH \perp BC (H \in BC)$.
Ta có $DC^2 = DH^2 + HC^2 \Rightarrow HC = 2$.
Vậy $BC = BH + HC = AD + HC = 4$
$\Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2\sqrt{5}$.



Chọn đáp án (D) □

Bài 16. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = \beta$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) $\sin\beta = \frac{AC}{BC}$. (B) $\cos\beta = \frac{AB}{BC}$. (C) $\tan\beta = \frac{AC}{CB}$. (D) $\cot\beta = \frac{AB}{AC}$.



Lời giải.

Theo định nghĩa về tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông, ta có

$$\sin\beta=\frac{AC}{BC};\quad \cos\beta=\frac{AB}{BC};\quad \tan\beta=\frac{AC}{AB};\quad \cot\beta=\frac{AB}{AC}.$$

Chọn đáp án C □

Bài 17. Cho $\cos\alpha=\dfrac{12}{13}$, với $0<\alpha<90^\circ$. Giá trị của $\sin\alpha$ bằng

A $\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$. B $\sin\alpha=\dfrac{7}{13}$. C $\sin\alpha=\dfrac{5}{12}$. D $\sin\alpha=\dfrac{25}{169}$.

Lời giải.

Ta có

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\left(\frac{12}{13}\right)^2=\frac{25}{169}.$$

Suy ra $\sin\alpha=\sqrt{\dfrac{25}{169}}=\dfrac{5}{13}$ (do $\sin\alpha>0$, với $0<\alpha<90^\circ$).

Chọn đáp án A □

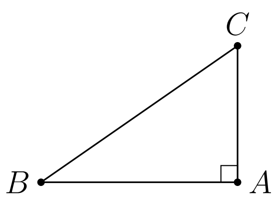
Bài 18. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB=\dfrac{2}{3}BC$. Tính $\cot C$.

A $\cot C=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$. B $\cot C=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. C $\cot C=\dfrac{6}{5}$. D $\cot C=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.

Ta có

$$\sin C=\frac{AB}{BC}=\frac{2}{3}.$$



Mặt khác,

$$\sin^2 C+\cos^2 C=1\Rightarrow \cos^2 C=1-\sin^2 C=\frac{5}{9}.$$

Do $0<\cos C<1$ nên $\cos C=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. Suy ra, $\cot C=\dfrac{\cos C}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Chọn đáp án B □

Bài 19. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $\sin 55^\circ=\cos 45^\circ$. B $\cos 12^\circ=\sin 78^\circ$. C $\tan 60^\circ=\sin 30^\circ$. D $\cot 75^\circ=\sin 15^\circ$.

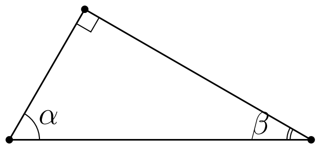
Lời giải.

Định lý.

Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cos góc kia, tan góc này bằng cot góc kia.

Do đó, chỉ có khẳng định $\cos 12^\circ = \sin 78^\circ$ là đúng.
Chọn đáp án (B) □

Bài 20.
Cho tam giác như hình bên. Hỏi khẳng định nào sau đây đúng?



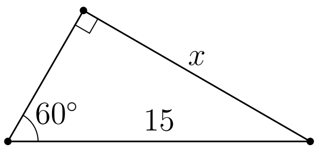
(A) $\sin\alpha = \sin\beta$. (B) $\cos\alpha = \cos\beta$.
(C) $\cot\alpha = \sin\beta$. (D) $\tan\alpha = \cot\beta$.

Lời giải.

Vì α và β là hai góc phụ nhau nên sin góc này bằng cos góc kia, tan góc này bằng cot góc kia.
Chọn đáp án (D) □

Bài 21. Trong hình bên, cạnh x được tính như thế nào?

(A) $x = \dfrac{15}{\sin 60^\circ}$. (B) $x = 15 \cdot \tan 60^\circ$. (C) $x = 15 \cdot \cos 30^\circ$. (D) $x = \dfrac{15}{\cot 60^\circ}$.



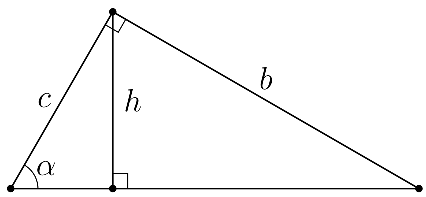
Lời giải.

Áp dụng tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông, ta có

$$\sin 60^\circ = \frac{x}{15} \Rightarrow x = 15 \cdot \sin 60^\circ = 15 \cdot \cos 30^\circ.$$

Chọn đáp án (C) □

Bài 22.
Cho hình vẽ bên. Hỏi khẳng định nào sau đây đúng?



(A) $\sin\alpha = \dfrac{c}{b}$. (B) $\cos\alpha = \dfrac{h}{b}$.
(C) $\tan\alpha = \dfrac{h}{c}$. (D) $\cot\alpha = \dfrac{b}{c}$.

Lời giải.

Chỉ có công thức $\cos\alpha = \dfrac{h}{b}$ là đúng.
Chọn đáp án (D) □

Bài 23. Cho tam giác ABC vuông tại A và $\cos C = 0{,}6$. Hãy tính $\tan B$.

(A) $\tan B = \dfrac{3}{4}$. (B) $\tan B = \dfrac{4}{3}$. (C) $\tan B = \dfrac{3}{5}$. (D) $\tan B = \dfrac{4}{5}$.

Lời giải.

Ta có

$$\sin B = \cos\left(90^\circ - B\right) = \cos C = 0{,}6.$$

Mặt khác, $0 < \cos B < 1$ và

$$\sin^2 B + \cos^2 B = 1 \Rightarrow \cos^2 B = 1 - 0{,}6^2 = 0{,}64 \Rightarrow \cos B = 0{,}8.$$

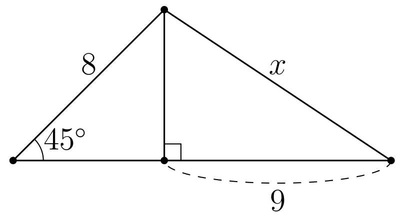
Suy ra,

$$\tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{0{,}6}{0{,}8} = \frac{3}{4}.$$

Chọn đáp án (A) □

Bài 24.
Tìm x trong hình vẽ bên.

(A) $x = \sqrt{97}$.
(B) $x = \dfrac{\sqrt{145}}{2}$.
(C) $\sqrt{65}$.
(D) $x = \sqrt{113}$.



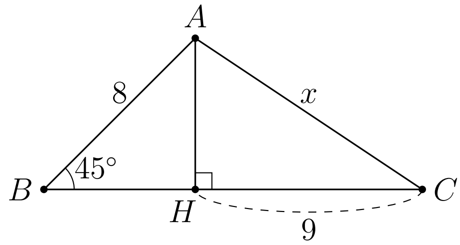
Lời giải.

Gọi tên các đỉnh như hình vẽ.

Ta có $\sin 45^\circ = \dfrac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB \cdot \sin 45^\circ = 4\sqrt{2}$.

Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông AHC

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2 + 8^2 = 96.$$



Suy ra

$$x = AC = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}.$$

Chọn đáp án (D) □

Bài 25. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

(A) $\sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ = 1$.
(B) $\cos^2 12^\circ + \cos^2 78^\circ = 1$.
(C) $\tan 35^\circ \cdot \cot 55^\circ = 1$.
(D) $\cot 85^\circ \cdot \tan 85^\circ = 1$.

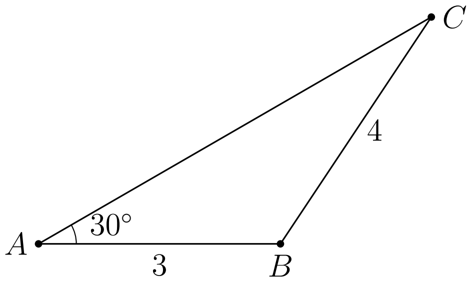
Lời giải.

- Vì $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ nên $\sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ = 1$.
- $\cos^2 12^\circ + \cos^2 78^\circ = \cos^2 12^\circ + \sin^2 12^\circ = 1$.
- Vì $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$ nên $\cot 85^\circ \cdot \tan 85^\circ = 1$.
- $\tan 35^\circ \cdot \cot 55^\circ = 1$ là khẳng định **sai**.

Chọn đáp án (C) □

Bài 26.
Cho hình vẽ bên. Hãy tính $\sin C$.

(A) $\sin C = \dfrac{3}{8}$.
(B) $\sin C = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.
(C) $\sin C = \dfrac{2}{5}$.
(D) $\sin C = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.



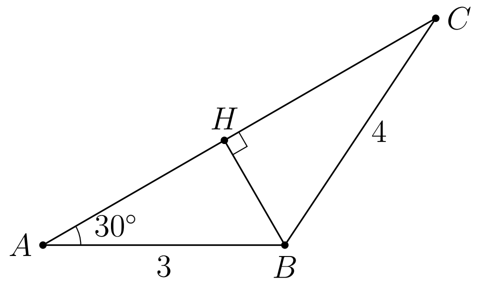
Lời giải.

Kẻ $BH \perp AC$ tại H. Tam giác AHB vuông tại B, ta có

$$\sin 30^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = AB \cdot \sin 30^\circ = \frac{3}{2}.$$

Ta lại có, tam giác BHC vuông tại H, suy ra

$$\sin C = \frac{BH}{BC} = \frac{3}{8}.$$



Chọn đáp án A □

Bài 27. Cho góc nhọn α với $\cot \alpha = \frac{3}{4}$. Tính giá trị biểu thức $P = \dfrac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}$

A $P = \frac{1}{7}$. B $P = -\frac{1}{7}$. C $P = -\frac{7}{25}$. D $P = \frac{7}{25}$.

Lời giải.

Vì $\sin \alpha > 0$ nên chia tử và mẫu của P cho $\sin \alpha$ ta được

$$P = \frac{\dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - 1}{\dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + 1} = \frac{\cot \alpha - 1}{\cot \alpha + 1} = \frac{\dfrac{3}{4} - 1}{\dfrac{3}{4} + 1} = -\frac{1}{7}.$$

Chọn đáp án B □

Bài 28. Cho tam giác ABC, biết $BC = 11\,\text{cm}$ và $\widehat{B} = 65^\circ$, $\widehat{C} = 40^\circ$. Tính độ dài đoạn AB (kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân).

A 7,32 cm. B 7,66 cm. C 6,98 cm. D 8,16 cm.

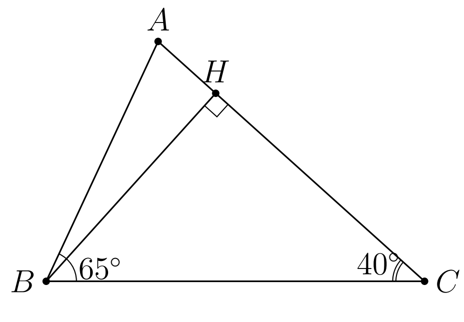
Lời giải.

Ta có $\widehat{A} = 180^\circ - \widehat{B} - \widehat{C} = 75^\circ$.
Kẻ $BH \perp AC$ tại H. Ta có

$$\sin \widehat{ACB} = \frac{BH}{BC} \Rightarrow BH = 11 \cdot \sin 40^\circ.$$

Lại có

$$\sin \widehat{BAC} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow AB = \frac{BH}{\sin 75^\circ} = 11 \cdot \frac{\sin 40^\circ}{\sin 75^\circ}.$$



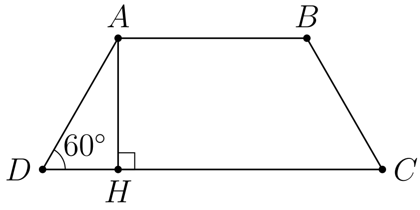
Suy ra $AB \approx 7{,}32\,\text{cm}$.

Chọn đáp án A □

Bài 29. Cho hình thang cân $ABCD$ với $AB \mathbin{/\!/} CD$. Biết $AB = 5\,\text{cm}$, $CD = 9\,\text{cm}$ và $\widehat{ADC} = 60^\circ$. Diện tích hình thang $ABCD$ gần bằng với số nào dưới đây?

A $12{,}12\,\text{cm}^2$. B $48{,}49\,\text{cm}^2$. C $24{,}25\,\text{cm}^2$. D $19{,}8\,\text{cm}^2$.

Lời giải.



Kẻ $AH \perp CD$ tại H.
Vì $ABCD$ là hình thang cân với $AB \parallel CD$ nên

$$DH = \frac{CD - AB}{2} = 2\,\text{cm}.$$

Tam giác ADH vuông tại H, suy ra

$$\tan \widehat{ADC} = \frac{AH}{DH} \Rightarrow AH = 2 \cdot \tan 60^\circ = 2\sqrt{3}\,\text{cm}.$$

Khi đó, diện tích hình thang $ABCD$ là

$$S_{ABCD} = \frac{(AB + CD) \cdot AH}{2} = \frac{(5+9) \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3} \approx 24{,}25\,\text{cm}^2.$$

Chọn đáp án (C) □

Bài 30. Cho tứ giác $ABCD$ có diện tích S và α là góc nhọn tạo bởi hai đường chéo AC và BD. Khẳng định nào sau đây là đúng?

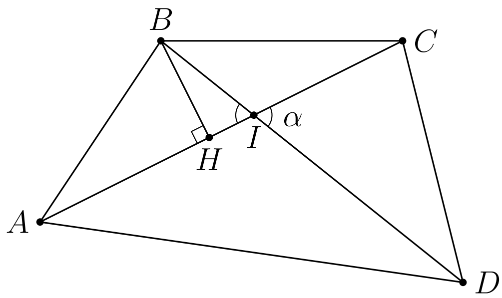
(A) $S = AC \cdot BD \cdot \sin \alpha$.

(B) $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \cos \alpha$.

(C) $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha$.

(D) $S = AC \cdot BD \cdot \cos \alpha$.

Lời giải.



Kẻ $BH \perp AC$ tại H.
Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2} BH \cdot AC = \frac{1}{2} BI \sin \alpha \cdot AC$.
Tương tự $S_{ACD} = \frac{1}{2} DI \sin \alpha \cdot AC$.
Suy ra

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{ABC} + S_{ACD} \\ &= \frac{1}{2} BI \sin \alpha \cdot AC + \frac{1}{2} DI \sin \alpha \cdot AC \\ &= \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Bài 31. Cho tam giác ABC vuông tại B. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

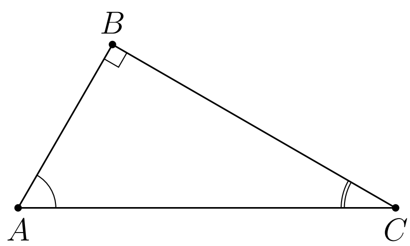
(A) $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

(B) $AB = BC \sin C$.

(C) $BC = AB \tan A$.

(D) $\sin A = \cos C$.

Lời giải.



Trong tam giác ABC tại B ta có

- ☑ Theo định lí Pi-ta-go thì $AC^2 = AB^2 + BC^2$.
- ☑ $\sin C = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow AB = AC \sin C$.
- ☑ $\tan A = \frac{BC}{AB} \Leftrightarrow BC = AB \tan A$.
- ☑ Vì $\sin A = \frac{BC}{AC}$ và $\cos C = \frac{BC}{AC}$ nên $\sin A = \cos C$.

Chọn đáp án (B) □

Bài 32. Trong tam giác vuông có góc nhọn α, mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân với sin góc đối hay nhân với cô-sin góc kề.

(B) Mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh góc vuông kia nhân với tang góc kề hay nhân với cô-tang góc đối.

(C) Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh huyền được gọi là cô-sin của góc α.

(D) Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh đối được gọi là tang của góc α.

Lời giải.

Ta có

- Mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân với sin góc đối hay nhân với cô-sin góc kề.
- Mỗi cạnh góc vuông bằng cạnh góc vuông kia nhân với tang góc đối hay nhân với cô-tang góc kề.
- Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh huyền được gọi là sin của góc α.
- Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh đối được gọi là cô-tang của góc α.

Chọn đáp án (A) □

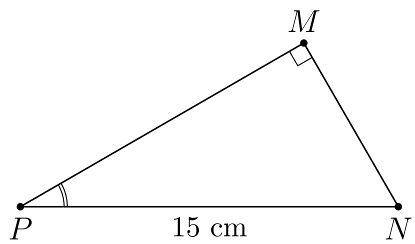
Bài 33. Cho tam giác MNP vuông tại M có $NP = 15$ cm và $\sin P = \dfrac{8}{15}$. Độ dài của cạnh MN bằng

(A) $\sqrt{161}$ cm. (B) $\dfrac{225}{8}$ cm. (C) 8 cm. (D) $\dfrac{161}{15}$ cm.

Lời giải.

Trong tam giác MNP vuông tại M thì MN là cạnh đối của $\widehat{P}$, còn NP là cạnh huyền nên

$$\sin P = \frac{MN}{NP} \Leftrightarrow MN = NP \sin P = 15 \cdot \frac{8}{15} = 8\,\text{cm}.$$



Chọn đáp án (C) □

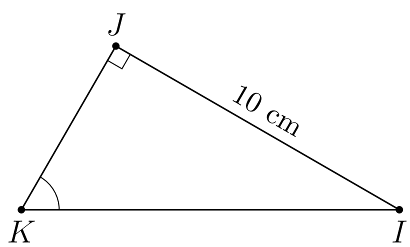
Bài 34. Cho tam giác IJK vuông tại J có $IJ = 10$ cm và $\tan K = \dfrac{12}{5}$. Tính độ dài của KJ.

(A) 24 cm. (B) $\dfrac{25}{6}$ cm. (C) $\dfrac{62}{5}$ cm. (D) $\dfrac{38}{5}$ cm.

Lời giải.

Trong tam giác IJK vuông tại J thì IJ, KJ lần lượt là cạnh đối, cạnh kề của $\widehat{K}$ nên

$$\tan K = \frac{IJ}{KJ} \Leftrightarrow KJ = \frac{IJ}{\tan K} = 10 : \frac{12}{5} = \frac{25}{6}\text{ cm}.$$



Chọn đáp án (B) □

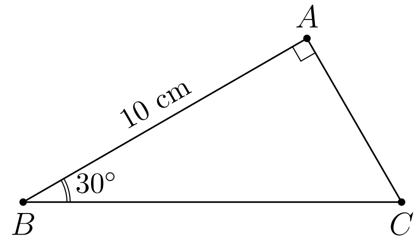
Bài 35. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 30^\circ$ và $AB = 10$ cm. Độ dài của BC bằng bao nhiêu?

Ⓐ $10\sqrt{3}$ cm. Ⓑ $20\sqrt{3}$ cm. Ⓒ $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$ cm. Ⓓ $\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ cm.

Lời giải.

Trong tam giác vuông ABC ta có

$$\cos B = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow BC = \frac{AB}{\cos B} = \frac{10}{\cos 30^\circ} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \text{ cm.}$$



Chọn đáp án Ⓓ □

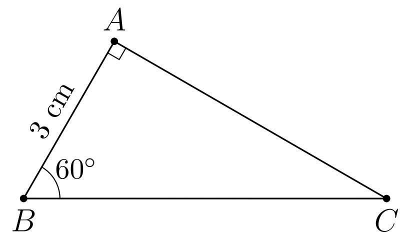
Bài 36. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3$ cm và $\widehat{B} = 60^\circ$. Độ dài cạnh AC bằng

Ⓐ 6 cm. Ⓑ $6\sqrt{3}$ cm. Ⓒ $3\sqrt{3}$ cm. Ⓓ 1,5 cm.

Lời giải.

Trong tam giác ABC ta có

$$\begin{aligned}\tan B = \frac{AC}{AB} &\Leftrightarrow AC = AB\tan B \Leftrightarrow AC = 3\tan 60^\circ\\ &\Leftrightarrow AC = 3\sqrt{3}\,\text{cm.}\end{aligned}$$



Chọn đáp án Ⓒ □

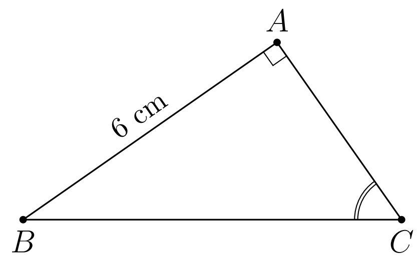
Bài 37. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6$ và $\cos C = \dfrac{3}{5}$. Độ dài của cạnh AC bằng

Ⓐ $\dfrac{9}{2}$. Ⓑ $\dfrac{15}{2}$. Ⓒ $\dfrac{18}{5}$. Ⓓ 10.

Lời giải.

Trong tam giác ABC vuông tại A thì $\widehat{C}$ là góc nhọn. Suy ra $\sin C = \sqrt{1-\cos^2 C} = \dfrac{4}{5}$. Lại có

$$\sin C = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow BC = \frac{AB}{\sin C} = \frac{15}{2}.$$



Vậy $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{\left(\dfrac{15}{2}\right)^2 - 6^2} = \dfrac{9}{2}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Bài 38. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 12$ cm và $\tan B = \dfrac{1}{3}$. Tính độ dài cạnh BC.

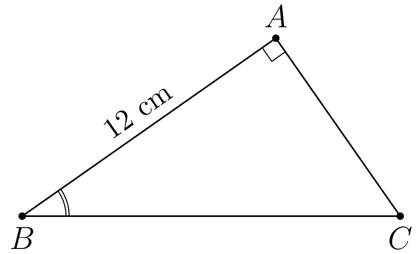
Ⓐ $BC = 16$ cm. Ⓑ $BC = 18$ cm. Ⓒ $BC = 5\sqrt{10}$ cm. Ⓓ $BC = 4\sqrt{10}$ cm.

Lời giải.

Trong tam giác ABC ta có

$$\tan B = \frac{AC}{AB} \Leftrightarrow AC = AB\tan B \Leftrightarrow AC = 12 \cdot \frac{1}{3} = 4.$$

Vậy $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{12^2 + 4^2} = 4\sqrt{10}\,\text{cm}$.



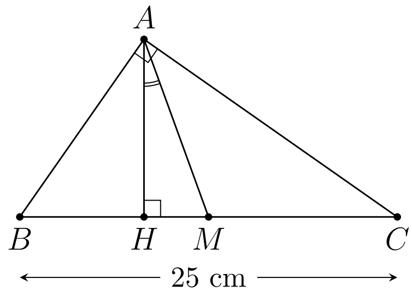
Chọn đáp án (D) □

Bài 39. Cho tam giác ABC có đường cao AH và trung tuyến AM (với H, M thuộc BC). Biết $HB = 9$ cm, $HC = 16$ cm. Tính $\tan\widehat{HAM}$.

(A) $\frac{3}{4}$. (B) $\frac{4}{3}$. (C) $\frac{9}{16}$. (D) $\frac{7}{24}$.

Lời giải.

Ta có $AH^2 = HB \cdot HC = 144$ nên $AH = 12$ cm.
Lại có $BC = HB + HC = 25\,\text{cm}$, nên $BM = \frac{BC}{2} = 12{,}5\,\text{cm}$.
Suy ra $HM = BM - HB = 3{,}5\,\text{cm}$.
Vậy $\tan\widehat{HAM} = \frac{HM}{AH} = \frac{3{,}5}{12} = \frac{7}{24}$.



Chọn đáp án (D) □

Bài 40. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Cho biết $CH = 6$ cm và $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Độ dài đường cao AH là

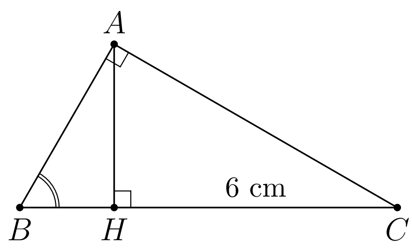
(A) 2 cm. (B) $2\sqrt{3}$ cm. (C) 4 cm. (D) $4\sqrt{3}$ cm.

Lời giải.

Tam giác ABC vuông tại A có $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, suy ra $\cos C = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Trong tam giác vuông AHC ta có

$$\cos C = \frac{CH}{AC} \Leftrightarrow AC = \frac{CH}{\cos C} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}\,\text{cm}.$$

Vậy $AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2 - 6^2} = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$.



Chọn đáp án (B) □

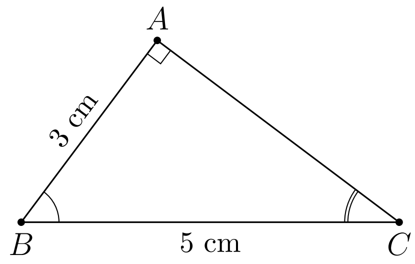
Bài 41. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3$ cm và $BC = 5$ cm. Tính giá trị của biểu thức $P = \cot B + \cot C$.

(A) $P = \frac{3}{5}$. (B) $P = \frac{25}{12}$. (C) $P = \frac{25}{9}$. (D) $P = \frac{16}{25}$.

Lời giải.

Ta có $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4\,\text{cm}$.
Khi đó

$$\cot B = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$$
$$\cot C = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{3}.$$



Vậy $P = \frac{3}{4} + \frac{4}{3} = \frac{25}{12}$.

Chọn đáp án (B) □

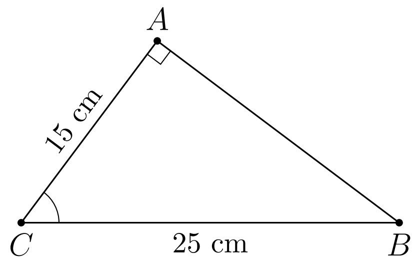
Bài 42. Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 25$, $AC = 15$. Số đo của góc C (làm tròn đến phút) bằng

(A) $53^\circ 8'$. (B) $36^\circ 52'$. (C) $53^\circ 13'$. (D) $36^\circ 53'$.

Lời giải.

Trong tam giác vuông ABC ta có

$$\cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}.$$
$$\Rightarrow \quad \widehat{C} \approx 53^\circ 8'.$$



Chọn đáp án (A) □

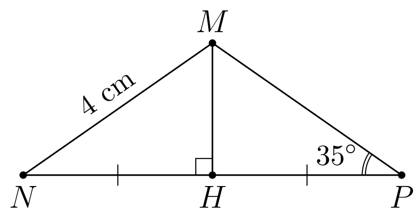
Bài 43. Cho tam giác MNP có $\widehat{M} = 110^\circ$, $\widehat{P} = 35^\circ$ và $MN = 4$ cm. Tính độ dài đường cao kẻ từ đỉnh M.

(A) 3,28 cm. (B) 3,76 cm. (C) 2,29 cm. (D) 4,26 cm.

Lời giải.

Trong tam giác MNP có $\widehat{N} = 180^\circ - \left(\widehat{M} + \widehat{P}\right) = 35^\circ$ nên nó là tam giác cân tại M, suy ra $MP = MN = 4\,\text{cm}$.
Kẻ đường cao $MH \perp NP$ tại H. Xét tam giác vuông MHP có

$$\sin P = \frac{MH}{MP} \Leftrightarrow MH = MP \sin P = 4 \sin 35^\circ \approx 2{,}29\,\text{cm}.$$



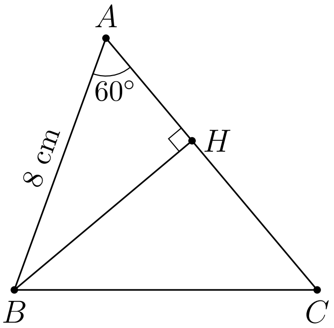
Chọn đáp án (C) □

Bài 44. Cho tam giác ABC có $AB = 8$ cm, $AC = 12$ cm và $\widehat{A} = 60^\circ$. Độ dài của cạnh BC bằng

(A) $4\sqrt{13}$ cm. (B) $4\sqrt{19}$ cm. (C) $4\sqrt{7}$ cm. (D) $4\sqrt{5}$ cm.

Lời giải.

Kẻ $BH \perp AC$ tại H. Xét tam giác vuông ABH ta có



$$\sin A = \frac{BH}{AB} \Leftrightarrow BH = AB \sin A = 8 \sin 60^\circ = 4\sqrt{3}\,\text{cm}.$$
$$\cos A = \frac{AH}{AB} \Leftrightarrow AH = AB \cos A = 8 \cos 60^\circ = 4\,\text{cm}.$$

Như vậy $CH = AC - AH = 12 - 4 = 8$ cm.

Xét tam giác BHC vuông tại C ta có

$$BC = \sqrt{BH^2 + CH^2} = \sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2 + 8^2} = 4\sqrt{7}\,\text{cm}.$$

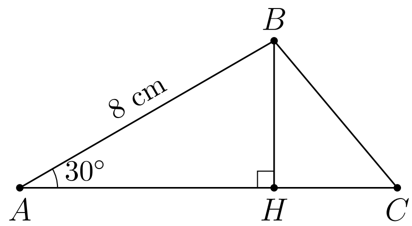
Chọn đáp án (C) □

Bài 45. Cho tam giác ABC có $AB = 8$ cm, $AC = 12$ cm và $\widehat{A} = 30^\circ$. Tính diện tích S của tam giác ABC.

(A) $S = 48\,\text{cm}^2$. (B) $S = 24\,\text{cm}^2$. (C) $S = 96\,\text{cm}^2$. (D) $S = 48\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

Lời giải.

Kẻ $BH \perp AC$ tại H nên BH là đường cao của tam giác ABC.
Xét tam giác vuông ABH ta có



$$\sin A = \frac{BH}{AB} \Leftrightarrow BH = AB \sin A = 8 \sin 30^\circ = 4\,\text{cm}.$$

Diện tích tam giác ABC là

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4 = 24\,\text{cm}^2.$$

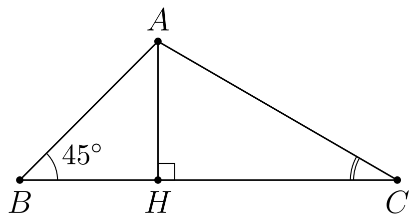
Chọn đáp án (B) □

Bài 46. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 105^\circ$, $\widehat{B} = 45^\circ$ và $BC = 4$. Độ dài của AB bằng bao nhiêu?

(A) $4\sqrt{3} - 4$. (B) $\sqrt{6} - \sqrt{2}$. (C) $\sqrt{3} - 1$. (D) $2\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$.

Lời giải.

Trong tam giác ABC ta có $\widehat{C} = 180^\circ - \left(\widehat{A} + \widehat{B}\right) = 30^\circ$.
Kẻ $AH \perp BC$ tại H.
Xét tam giác ABH vuông tại H có $BH = AH \cot B = AH$.
Xét tam giác ACH vuông tại H có $CH = AH \cot C = AH\sqrt{3}$.
Lại có



$$BH + CH = BC \Leftrightarrow AH + AH\sqrt{3} = 4 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3}+1\right) AH = 4 \Leftrightarrow AH = \frac{4}{\sqrt{3}+1} = 2\sqrt{3} - 2.$$

Trong tam giác ABH vuông tại H ta có

$$\sin B = \frac{AH}{AB} \Leftrightarrow AB = \frac{AH}{\sin B} = 2\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right).$$

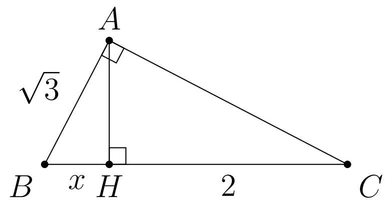
Chọn đáp án (D) □

Bài 47. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH. Biết $AB = \sqrt{3}$ cm, $HC = 2$ cm. Tính HB?

(A) $HB = 1$ cm. (B) $HB = 2$ cm. (C) $HB = 3$ cm. (D) $HB = 4$ cm.

Lời giải.

Gọi $BH = x$ cm, $x > 0$. Ta có $\triangle ABC$ vuông tại A, $AH \perp BC$ nên



$$\begin{aligned} AB^2 = BH \cdot BC &\Leftrightarrow 3 = x(x+2) \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Vậy $BH = 1$ cm.

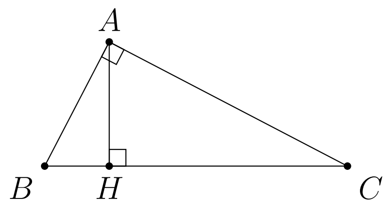
Chọn đáp án (A) □

Bài 48. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH, biết $9HB = 4HC$, $AH = 6$ cm. Tính BC.

(A) $BC = 13$ cm. (B) $BC = 12$ cm. (C) $BC = 11$ cm. (D) $BC = 9$ cm.

Lời giải.

Ta có $\triangle ABC$ vuông tại A, $AH \perp BC$ nên $AH^2 = HB \cdot CH$. Do đó



$$\begin{aligned} & 9HB = 4HC \\ \Leftrightarrow\ & 9HB^2 = 4HC \cdot HB \\ \Leftrightarrow\ & 9HB^2 = 4AH^2 = 144 \\ \Leftrightarrow\ & HB = 4 \Rightarrow HC = 9, BC = 13. \end{aligned}$$

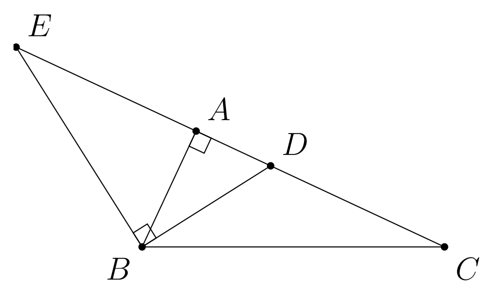
Chọn đáp án (A) □

Bài 49. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, có $AB = 4$, tia phân giác trong và phân giác ngoài tại đỉnh B của $\triangle ABC$ cắt AC tại D và E. Biết $AD = 2$ cm. Tính độ dài DE.

(A) $DE = 6$ cm. (B) $DE = 8$ cm. (C) $DE = 9$ cm. (D) $DE = 10$ cm.

Lời giải.

Ta có BD, BE là phân giác trong và ngoài đỉnh B của $\triangle ABC$ nên $BD \perp BE$. Xét $\triangle DBE$ vuông tại B, $BA \perp DE$ nên



$$\begin{aligned} AB^2 = AD \cdot AE &\Leftrightarrow 16 = 2 \cdot AE \\ &\Leftrightarrow AE = 8 \Rightarrow DE = 10 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

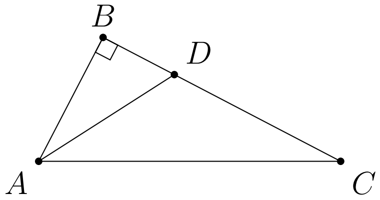
Bài 50. Cho $\triangle ABC$ vuông tại B, phân giác trong AD, biết $CD = 2BD$. Tính $\widehat{C}$.

(A) $\widehat{C} = 20^\circ$. (B) $\widehat{C} = 30^\circ$. (C) $\widehat{C} = 45^\circ$. (D) $\widehat{C} = 60^\circ$.

Lời giải.

Ta có AD là phân giác trong đỉnh A của $\triangle ABC$ nên

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} = \frac{1}{2}.$$

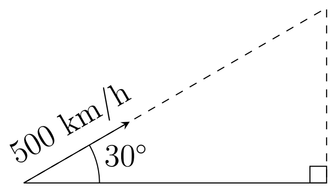


Mà $\triangle ABC$ vuông tại B nên $\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{C} = 30^\circ$.

Chọn đáp án (B) □

Bài 51.
Một chiếc máy bay, bay lên với vận tốc 500 km/h. Đường bay lên tạo với phương nằm ngang một góc 30°. Hỏi sau 1,2 phút máy bay lên cao được bao nhiêu km theo phương thẳng đứng?

(A) 50 km. (B) 10 km. (C) 25 km. (D) 5 km.



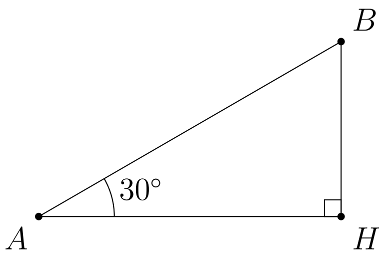
Lời giải.

Sau 1,2 phút = 0,02 giờ quãng đường máy bay bay được là

$$AB = 500 \cdot 0{,}02 = 10 \text{ km}.$$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại H, $\widehat{BAH} = 30^\circ$. Ta có

$$\sin A = \frac{BH}{AB} \Leftrightarrow BH = AB \cdot \sin A = 10 \cdot \sin 30^\circ = 5 \text{ km}.$$



Chọn đáp án (D) □

Bài 52. Lúc 2 giờ chiều, ánh nắng mặt trời chiếu nghiêng tạo với mặt đất một góc 68°, lúc đó bóng một cây cau dài 1,2 m. Chiều cao của cây cau đó gần bằng

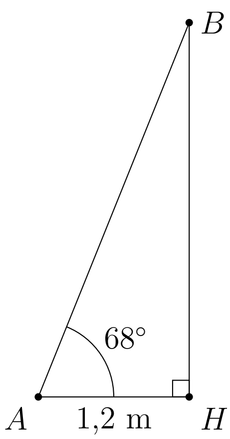
(A) 2,5 m. (B) 3 m. (C) 3,3 m. (D) 3,5 m.

Lời giải.

Xét $\triangle ABH$ vuông tại H có $\widehat{A} = 68^\circ$, $AH = 1{,}2$ m. Ta có

$$\tan A = \frac{BH}{AH} \Leftrightarrow BH = AH \cdot \tan A = 1{,}2 \cdot \tan 68^\circ \approx 3.$$

Vậy độ cao cây cau gần bằng 3 m.

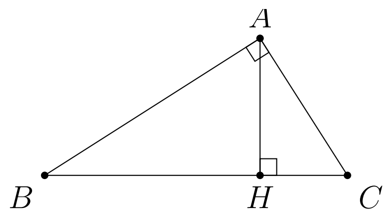


Chọn đáp án (B) □

Bài 53. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, $AH \perp BC$. Biết $\frac{AH}{HC} = \frac{4}{3}$. Tính $T = \frac{\sin B + \cos B}{\cos B}$.

(A) $\frac{7}{3}$. (B) $\frac{7}{4}$. (C) $\frac{3}{7}$. (D) $\frac{4}{7}$.

Lời giải.



Ta có $\widehat{B}+\widehat{C}=90^\circ$ nên $\tan B=\cot C$. Mà $\triangle AHC$ vuông tại H nên $\cot C=\dfrac{CH}{AH}=\dfrac{3}{4}$. suy ra $\tan B=\dfrac{3}{4}$. Khi đó

$$T=\frac{\sin B+\cos B}{\cos B}=\frac{\sin B}{\cos B}+1=\tan B+1=\frac{7}{4}.$$

Chọn đáp án B □

Bài 54. Cho góc nhọn α thỏa mãn $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$. Tính $B=\sin\alpha+\cos\alpha$.

A $\sqrt{\dfrac{5}{3}}$. B $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. C $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. D $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha>0$ và $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. Do đó

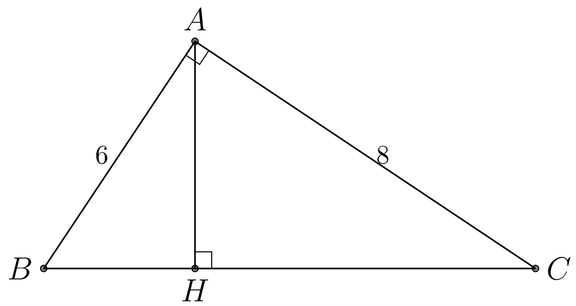
$$B^2=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}\Rightarrow B=\sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Chọn đáp án A □

3 Bài tập tự luận

Bài 55. Cho tam giác ABC vuông tại A, AH là đường cao. Biết $AB=6$ cm, $AC=8$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng AH.

Lời giải.



Cách 1.

Ta có

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{1}{36}+\frac{1}{64}=\frac{25}{567}\Rightarrow AH^2=\frac{567}{25}\Rightarrow AH=\frac{24}{5}\text{ cm}.$$

Cách 2.

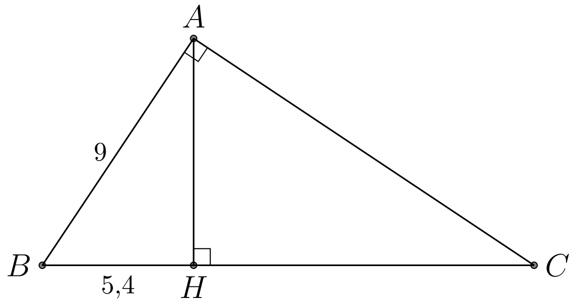
$$BC^2=AB^2+AC^2\Rightarrow BC=10\text{ cm}.$$

$$AH\cdot BC=AB\cdot AC\Rightarrow AH=\frac{24}{5}\text{ cm}.$$

□

Bài 56. Cho tam giác ABC vuông tại A, AH là đường cao. Biết $AB = 9$ cm, $HB = 5{,}4$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng AC.

Lời giải.



Cách 1.

Ta có

$$AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BC = 15 \text{ cm}.$$
$$HC = BC - BH = 15 - 5.4 = 9{,}6 \text{ cm}.$$
$$AC^2 = CH \cdot CB \Rightarrow AC = 12 \text{ cm}.$$

Cách 2.

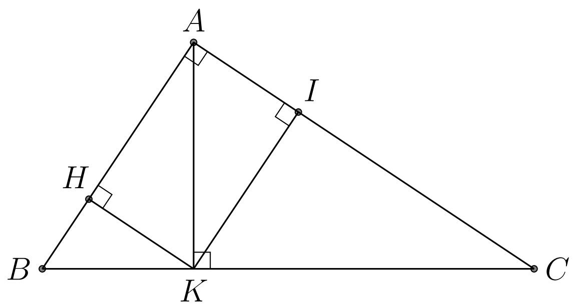
Ta có

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AH = 7{,}2 \text{ cm}.$$
$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AH^2} \Rightarrow AC = 12 \text{ cm}.$$

□

Bài 57. Cho tam giác DEF vuông tại D, DK là đường cao. Kẻ KH vuông góc DE tại H, KI vuông góc DF tại I. Biết $KE = 7{,}2$ cm, $KF = 12{,}8$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng HI.

Lời giải.



Tứ giác $DHKI$ có

$$\widehat{HDI} = 90^\circ \text{ (gt)}$$
$$\widehat{DHK} = 90^\circ \text{ (do } HK \perp DE)$$
$$\widehat{DIK} = 90^\circ \text{ (do } KI \perp DF)$$

$\Rightarrow DHKI$ là hình chữ nhật $\Rightarrow HI \perp DK$.

Ta có $DK^2 = EK \cdot KF$ (hệ thức liên quan đến đường cao) $\Rightarrow DK^2 = 7{,}2 \cdot 12{,}8 = 92,16$ nên $DK = 9{,}6$ cm.

Vậy $HI = DK = 9{,}6$ cm. □

Bài 58. Cho tam giác ABC vuông tại A. Biết $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{3}{5}$ và $AC = 20$ cm. Tính chu vi tam giác ABC.

Lời giải.

Cách 1. Ta có

$$\frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{BC}{5} = \frac{AB}{3} \Rightarrow \frac{BC^2}{25} = \frac{AB^2}{9} = \frac{BC^2 - AB^2}{25 - 9} = \frac{AC^2}{16} = \frac{400}{16} = 25.$$

Suy ra

$$\frac{BC^2}{25} = 25 \Rightarrow BC = 25 \text{ cm.}$$
$$\frac{AB^2}{9} = 25 \Rightarrow AB = 15 \text{ cm.}$$

Cách 2. Ta có

$$\frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AB}{3} = \frac{BC}{5}.$$

Đặt $\dfrac{AB}{3} = \dfrac{BC}{5} = k \Rightarrow AB = 3k$ và $BC = 5k$ $(k > 0)$.
Ta có $AB^2 + AC^2 = BC^2$ hay $9k^2 + 400 = 25k^2 \Rightarrow k = 5$.
Do đó

$$AB = 3k = 3 \cdot 5 = 15 \text{ cm.}$$
$$BC = 5k = 5 \cdot 5 = 25 \text{ cm.}$$

Vậy chu vi tam giác ABC là $15 + 20 + 25 = 60$ cm.

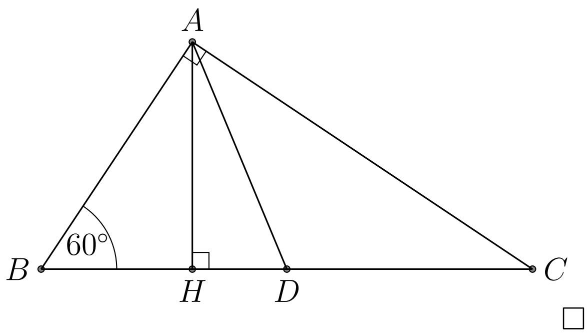
□

Bài 59. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Vẽ trung tuyến AD. Biết $BC = 2\sqrt{3}$ cm. Tính độ dài đường cao AH của tam giác ABC.

Lời giải.

Tam giác ABD đều nên
$AB = BD = \dfrac{BC}{2} = \sqrt{3}$ cm. Ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow AC = 3 \text{ cm.}$$
$$AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{3}{2} \text{ cm.}$$

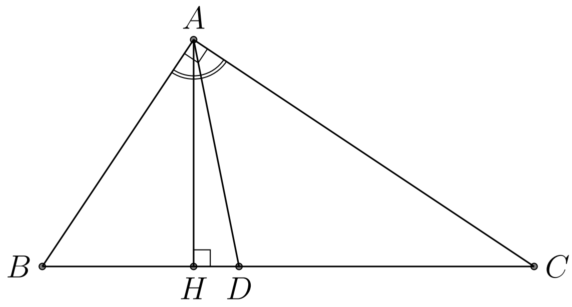


□

Bài 60. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, phân giác AD của góc $\widehat{BAC}$.

1. Chứng minh $\dfrac{AB^2}{AC^2} = \dfrac{HB}{HC}$.
2. Biết $BD = 45$ cm, $CD = 60$ cm. Tính độ dài HB, HC.

Lời giải.



1. Ta có hệ thức liên quan giữa cạnh góc vuông và hình chiếu của nó trên cạnh huyền

$$AB^2 = BH \cdot BC \text{ và } AC^2 = CH \cdot CB.$$

Do đó

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BC \cdot BC}{CH \cdot CB} = \frac{BH}{CH}.$$

2. Áp dụng tính chất đường phân giác của tam giác

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}.$$

Do đó

$$\frac{HB}{HC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}.$$
$$\Rightarrow \frac{HB}{9} = \frac{HC}{16} = \frac{HB+HC}{9+16} = \frac{BC}{25} = \frac{105}{25} = \frac{21}{5}.$$

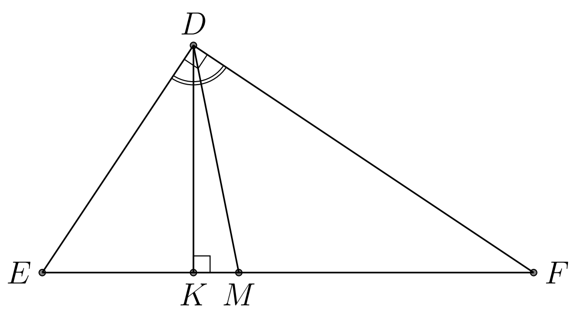
Suy ra $\frac{HB}{9} = \frac{21}{5}$ nên $HB = 37{,}8$ cm.

$$HC = BC - HB = 105 - 37{,}8 = 67{,}2 \text{ cm}.$$

□

Bài 61. Cho tam giác DEF vuông tại D, phân giác DM, đường cao DK. Biết $DE = 30$ cm, $DF = 40$ cm. Tính độ dài DM.

Lời giải.



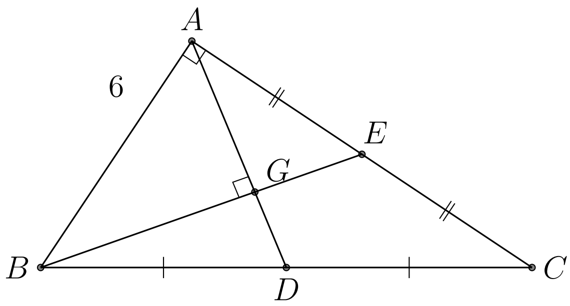
- $EF^2 = DE^2 + DF^2 \Rightarrow EF = 50$ cm.
- $DK \cdot EF = DE \cdot DF \Rightarrow DK = 24$ cm.
- $\frac{ME}{MF} = \frac{DE}{DF} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{ME}{3} = \frac{MF}{4} = \frac{ME+MF}{3+4} = \frac{50}{7} \Rightarrow ME = \frac{150}{7}$ cm.

- $DE^2 = EK \cdot EF \Rightarrow EK = 18$ cm.
- $KM = EM - EK = \dfrac{150}{7} - 18 = \dfrac{24}{7}$ cm.
- $DM^2 = DK^2 + KM^2 \Rightarrow DM \approx 24{,}24$ cm.

□

Bài 62. Cho tam giác ABC vuông tại A. Các đường trung tuyến AD và BE vuông góc với nhau tại G. Biết $AB = 6$ cm. Tính BC.

Lời giải.



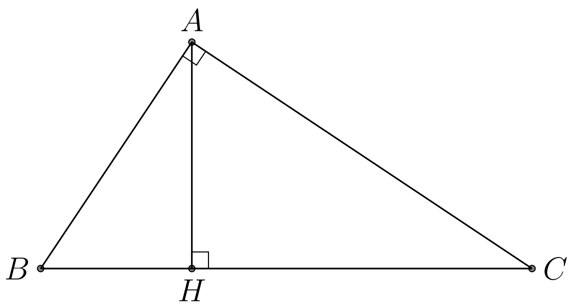
Ta có $BG = \dfrac{2}{3}BE$ (tính chất trọng tâm của tam giác).

$$AB^2 = BG \cdot BE \text{ nên } 36 = \frac{2}{3}BE^2 \Rightarrow BE = 3\sqrt{6} \text{ cm.}$$
$$AE^2 = BE^2 - AB^2 = 18 \Rightarrow AE = 3\sqrt{2} \text{ cm} \Rightarrow AC = 6\sqrt{2} \text{ cm.}$$

□

Bài 63. Cho tam giác ABC vuông tại A, AH là đường cao. Biết $AH = 24$ cm, $BC = 50$ cm, $AB < AC$. Tính chu vi tam giác ABC.

Lời giải.



Do $AB < AC$ nên $HB < HC$ (quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu).
Đặt $x = HB \Rightarrow HC = 50 - x$.
Vì $HB < HC \Rightarrow x < 50 - x \Rightarrow 0 < x < 25$.
Áp dụng hệ thức liên quan đến đường cao $AH^2 = BH \cdot HC$.

$$576 = x(50 - x) \Leftrightarrow x^2 - 50x + 576 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x - 18)(x - 32) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 18 \text{ (nhận)} \\ x = 32 \text{ (loại).} \end{array}\right.$$

Do đó

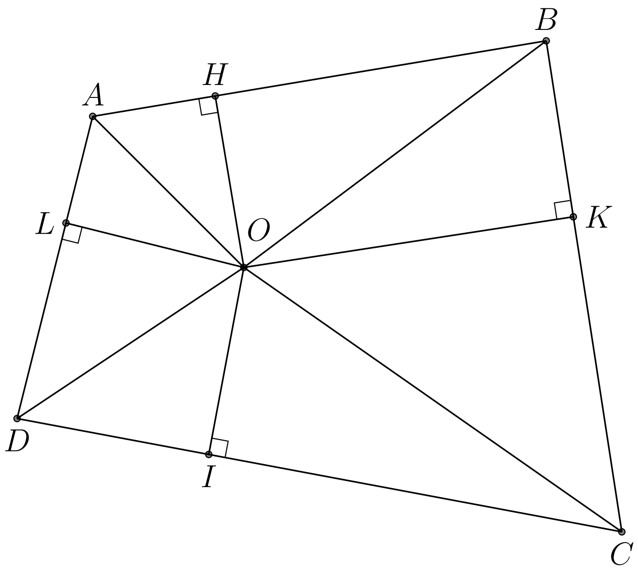
$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AB = 30 \text{ cm.}$$
$$AC^2 = AH^2 + CH^2 \Rightarrow AC = 40 \text{ cm.}$$

□

Bài 64. Cho tứ giác $ABCD$. Từ điểm O bất kì trong tứ giác kẻ OH, OK, OI, OL lần lượt vuông góc với các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh

$$HB^2 + KC^2 + ID^2 + LA^2 = AH^2 + BK^2 + CI^2 + DL^2.$$

Lời giải.



Áp dụng định lý Py-ta-go ta có

$$\begin{aligned}
&HB^2 + KC^2 + ID^2 + LA^2\\
=&(OB^2 - OH^2) + (OC^2 - OK^2) + (OD^2 - OI^2) + (OA^2 - OL^2)\\
=&(OA^2 - OH^2) + (OB^2 - OK^2) + (OC^2 - OI^2) + (OD^2 - OL^2)\\
=&AH^2 + BK^2 + CI^2 + DL^2.
\end{aligned}$$

□

Bài 65. Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$ và hai đường chéo vuông góc tại O.

1. Chứng minh rằng $AD^2 = AB \cdot DC$.

2. Cho $AB = 9$; $CD = 16$. Tính diện tích hình thang $ABCD$.

3. Tính độ dài các đoạn thẳng OA, OB, OC, OD.

Lời giải.

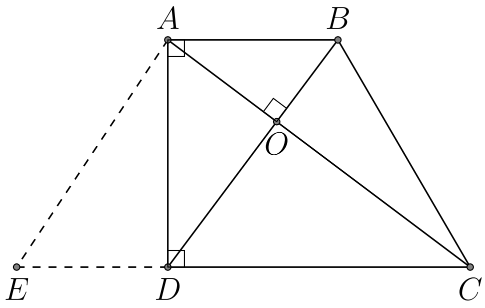
1. Vẽ $AE \parallel BD$ (E thuộc đường thẳng CD) ta được $AB = ED$ và $AE \perp AC$. Áp dụng hệ thức $h^2 = b \cdot c$ ta được $AD^2 = DE \cdot DC$ hay $AD^2 = AB \cdot DC$.

2. Ta có $AD = \sqrt{9 \cdot 16} = 12$. Vậy

$$S_{ABCD} = \frac{(9+16)\cdot 12}{2} = 150 \text{ (đvdt)}.$$

3. Áp dụng định lý Py-ta-go ta tính được $AC = 20$ cm; $BD = 15$ cm.

   Ta có $AB \parallel CD$ nên



$$\begin{aligned}&\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}\\ \Rightarrow &\frac{OA+OC}{OC} = \frac{OB+OD}{OD} = \frac{AB+CD}{CD}\\ \Rightarrow &\frac{AC}{OC} = \frac{BD}{OD} = \frac{25}{16}.\end{aligned}$$

   Thay $AC = 20$; $BD = 15$ ta tính được $OC = 12{,}8$ và $OD = 9{,}6$. Từ đó suy ra $OA = 7{,}2$ cm và $OB = 5{,}4$ cm.

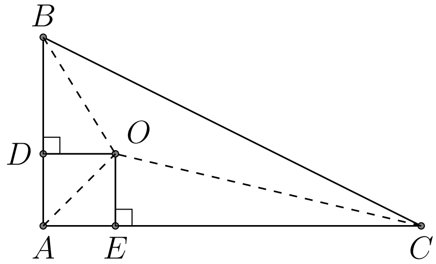
□

Bài 66. Cho biết chu vi của một tam giác bằng 120 cm. Độ dài các cạnh tỉ lệ với 8, 15, 17.

1. Chứng minh rằng tam giác đó là một tam giác vuông.
2. Tính khoảng cách từ giao điểm của ba đường phân giác đến mỗi cạnh.

Lời giải.

1. Ta có



$$\begin{aligned}&\frac{AB}{8} = \frac{AC}{15} = \frac{BC}{17}\\ = &\frac{AB+AC+BC}{8+15+17} = \frac{120}{40} = 3.\end{aligned}$$

   Suy ra $AB = 24$ cm; $AC = 45$ cm; $BC = 51$ cm. Nhận xét $24^2 + 45^2 = 51^2$ nên tam giác ABC vuông tại A.

2. Gọi khoảng cách từ giao điểm O của ba đường phân giác đến mỗi cạnh là x. Ta có

$$\begin{aligned}&S_{OBC} + S_{COA} + S_{AOB} = S_{ABC}\\ \Leftrightarrow &\frac{1}{2}\cdot x\cdot(24+45+51) = \frac{1}{2}\cdot 24\cdot 45\\ \Leftrightarrow &60x = 540\\ \Leftrightarrow &x = 9.\end{aligned}$$

   Vậy khoảng cách từ giao điểm của ba đường phân giác đến mỗi cạnh là 9 cm.

□

Bài 67. Cho góc nhọn x thỏa mãn $\sin x = 0{,}8$, tính $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$.

Lời giải.

- ☑ $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-0.64} = 0{,}6$.
- ☑ $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{0{,}8}{0{,}6} = \dfrac{4}{3}$.
- ☑ $\cot x = \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{3}{4}$.

□

Bài 68. Cho góc nhọn x thỏa mãn $\sin x = \dfrac{1}{2}$. Tính các tỉ số lượng giác của góc $(90^\circ - x)$.

Lời giải.

- $\sin(90^\circ - x) = \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
- $\cos(90^\circ - x) = \sin x = \dfrac{1}{2}$.
- $\tan(90^\circ - x) = \dfrac{\sin(90^\circ - x)}{\cos(90^\circ - x)} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{1}{2}} = \sqrt{3}$.
- $\cot(90^\circ - x) = \dfrac{1}{\tan(90^\circ - x)} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

□

Bài 69. Tính

1. $\dfrac{\sin 25^\circ}{\cos 65^\circ}$.
2. $\tan 58^\circ - \cot 32^\circ$.

Lời giải.

1. $\dfrac{\sin 25^\circ}{\cos 65^\circ} = \dfrac{\sin 25^\circ}{\sin(90^\circ - 65^\circ)} = \dfrac{\sin 25^\circ}{\sin 25^\circ} = 1$.
2. $\tan 58^\circ - \cot 32^\circ = \tan 58^\circ - \tan(90^\circ - 32^\circ) = \tan 58^\circ - \tan 58^\circ = 0$.

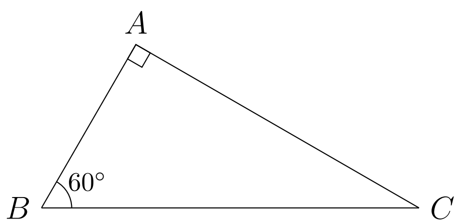
□

Bài 70. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 60^\circ$ và $BC = 8$ cm. Hãy tính độ dài của các cạnh góc vuông.

Lời giải.

Xét tam giác ABC vuông tại A, ta có

- $\sin B = \dfrac{AC}{BC} \Rightarrow AC = BC \cdot \sin B = 8\sin 60^\circ = 4\sqrt{3}$.
- $\cos B = \dfrac{AB}{BC} \Rightarrow AB = BC \cdot \cos B = 8\cos 60^\circ = 4$.



□

Bài 71. Cho tam giác ABC, vẽ đường cao AH, $(H \in BC)$. Cho biết $\widehat{ABC} = 45^\circ$, $BH = 20$ cm, $HC = 21$ cm. Tính AC.

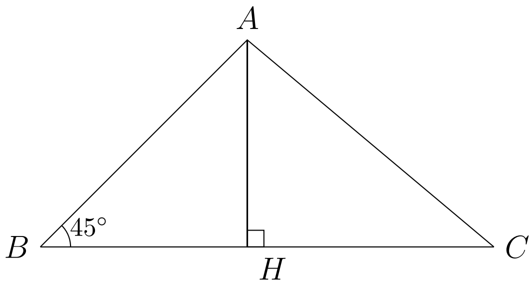
Lời giải.

Xét tam giác ABH vuông tại H, ta có

$$\tan B = \frac{AH}{BH} \Rightarrow AH \begin{aligned}[t] &= BH \cdot \tan B \\ &= 20 \cdot \tan 45^\circ = 20 \text{ cm.}\end{aligned}$$

Xét tam giác AHC vuông tại H, ta có

$$AC^2 = AH^2 + CH^2 \quad \text{(Định lý Py-ta-go)}$$
$$\Rightarrow AC = \sqrt{AH^2 + AC^2} = \sqrt{20^2 + 21^2} = 29 \text{ cm.}$$



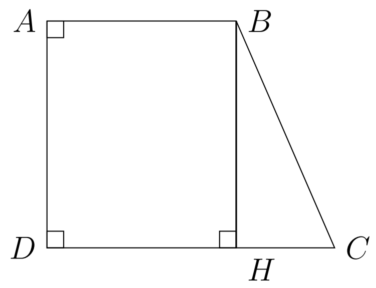
□

Bài 72. Cho hình thang vuông $ABCD\,(\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ)$, biết $AD = 12$ cm, $DC = 14$ cm, $AB = 9$ cm. Tính tỉ số lượng giác của góc C.

Lời giải.

Dựng BH vuông góc CD (H thuộc CD). Tứ giác $ABHD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{H} = 90^\circ$ nên là hình chữ nhật.
$\Rightarrow BH = AD = 12$ cm, $DH = AB = 9$ cm.
$\Rightarrow CH = DC - DH = 14 - 9 = 5$ cm.
Xét tam giác CHB vuông tại H, ta có

$$BC^2 = BH^2 + CH^2 \quad \text{(Định lý Py-ta-go)}$$
$$\Rightarrow BC = \sqrt{BH^2 + CH^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ cm.}$$



Từ đó ta có

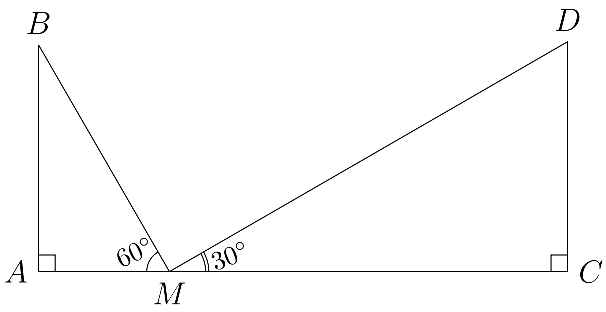
$$\sin C = \frac{BH}{BC} = \frac{12}{13},\ \cos C = \frac{CH}{BC} = \frac{5}{13},\ \tan C = \frac{BH}{CH} = \frac{12}{5},\ \cot C = \frac{CH}{BH} = \frac{5}{12}.$$

□

Bài 73. Hai trụ điện cùng chiều cao được dựng thẳng đứng hai bên lề đối diện một đại lộ rộng 80 m. Từ một điểm M trên mặt đường giữa hai trụ người ta nhìn thấy hai trụ điện với góc nâng lần lượt là 60° và 30°. Tính chiều cao của trụ điện và khoảng cách từ điểm M đến gốc mỗi trụ điện.

Lời giải.

Đặt $AB = DC = x$ (m) $(x > 0)$.
Xét tam giác ABM vuông tại A
$\tan M = \dfrac{AB}{AM} \Rightarrow AM = \dfrac{AB}{\tan M} = \dfrac{x}{\tan 60^\circ} = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$.
Xét tam giác DCM vuông tại C
$\tan M = \dfrac{DC}{CM} \Rightarrow CM = \dfrac{DC}{\tan M} = \dfrac{x}{\tan 30^\circ} = x\sqrt{3}$.
Vì $AC = AM + MC$ nên ta có phương trình



$$\begin{aligned} & \frac{x}{\sqrt{3}} + x\sqrt{3} = 80 \\ \Leftrightarrow\ & x + 3x = 80\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow\ & 4x = 80\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow\ & x = 20\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Suy ra $AM = \dfrac{x}{\sqrt{3}} = 20$ m và $CM = x\sqrt{3} = 60$ m.
Vậy trụ điện cao $20\sqrt{3}$ m và khoảng cách từ điểm M đến mỗi trụ điện lần lượt là 20 m và 60 m.

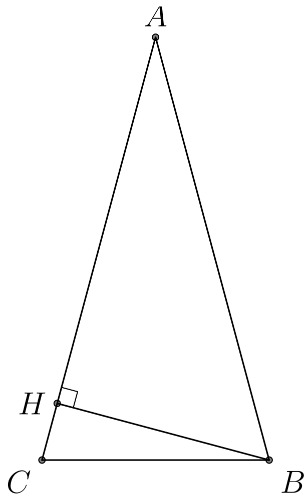
□

Bài 74. Cho $\triangle ABC$ cân tại A có $AB = 5$ và $\widehat{BAC} = 30^\circ$.

1. Tính độ dài đường cao kẻ từ B.

2. Tính độ dài BC.

Lời giải.



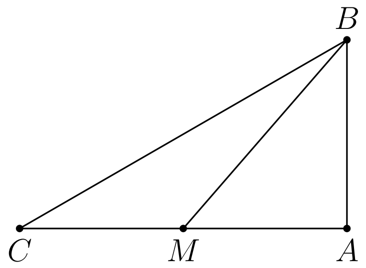
1. Kẻ $BH \perp AC$ $(H \in AC)$.
Xét $\triangle ABH$ vuông tại H, áp dụng hệ thức về cạnh và góc, ta có
$$BH = AB \cdot \sin \widehat{BAC} = 5 \cdot \sin 30^\circ = 2{,}5.$$

2. Do ΔABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 30^\circ$ nên
$$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ.$$
Xét ΔBHC vuông tại H, áp dụng hệ thức về cạnh và góc, ta có
$$BC = \frac{BH}{\sin \widehat{BCH}} = \frac{2{,}5}{\sin 75^\circ} \approx 2{,}6.$$

□

Bài 75. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có BM là đường trung tuyến. Biết $\widehat{BCA} = 30^\circ$ và $CM = 4{,}5$. Tính độ dài BM.

Lời giải.



BM là đường trung tuyến của tam giác nên M là trung điểm cạnh AC. Do đó
$$AM = CM = 4{,}5; \quad AC = 2 \cdot CM = 2 \cdot 4{,}5 = 9.$$
Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , áp dụng hệ thức về cạnh và góc, ta có
$$AB = AC \cdot \tan \widehat{ACB} = 9 \cdot \tan 30^\circ = 3\sqrt{3}.$$

Xét $\triangle ABM$ vuông tại A , áp dụng định lí Pi-ta-go, ta có
$$BM^2 = AB^2 + AM^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2 + 4{,}5^2 = 47{,}25 \Rightarrow BM = \frac{3\sqrt{21}}{2}.$$

□

Bài 76. Cho hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{A} = 45^\circ$, $AB = BD = 18$ cm.

1. Tính độ dài cạnh AD.

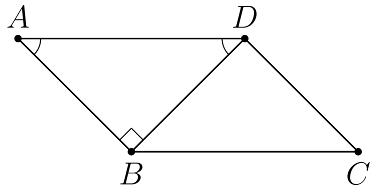
2. Tính diện tích hình bình hành $ABCD$.

Lời giải.

1. Vì $AB = BD$ và $\widehat{BAD} = 45^\circ$ nên $\triangle ABD$ vuông cân tại B.

   Áp dụng hệ thức về cạnh và góc trong $\triangle ABD$ vuông ta có

$$AD = \frac{BD}{\sin \widehat{BAD}} = \frac{18}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 18\sqrt{2} \text{ (cm)}.$$



2. Ta có $S_{\triangle ABD} = \dfrac{1}{2} AB \cdot BD = \dfrac{1}{2} \cdot 18 \cdot 18 = 162 \text{ (cm}^2)$.
   Diện tích hình bình hành $ABCD$ gấp đôi diện tích của tam giác ABD.
   Do đó, diện tích của hình bình hành $ABCD$ là $324 \text{ (cm}^2)$.

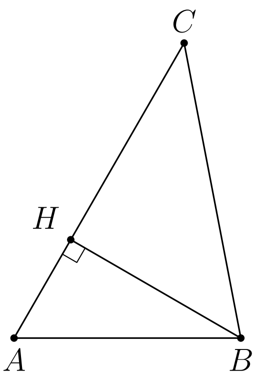
□

Bài 77. Cho tam giác ABC có $AB = 18$; $BC = 24$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh AC.

Lời giải.

$\triangle ABC$ có $AB > BC$ nên $\widehat{BCA} < \widehat{BAC} = 60^\circ$.
Trong tam giác ABC, kẻ đường cao BH. Vì các góc tại đỉnh A và C đều là góc nhọn nên $H \in AC$.
Áp dụng hệ thức về cạnh và góc cho tam giác vuông ABH, ta có

$$BH = AB \sin A = 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3},$$
$$AH = AB \cos A = 18 \cdot \frac{1}{2} = 9.$$



Áp dụng định lý Pi-ta-go cho tam giác vuông BHC ta có:

$$CH^2 = BC^2 - BH^2 = 24^2 - (9\sqrt{3})^2 = 333 \Rightarrow CH = \sqrt{333} = 3\sqrt{37}.$$

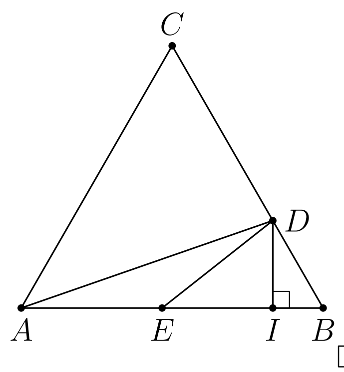
Vậy $AC = AH + CH = 9 + 3\sqrt{37}$. □

Bài 78. Cho $\triangle ABC$ đều có cạnh 60. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD = 20$. Đường trung trực của AD cắt AB tại E. Tính độ dài DE.

Lời giải.

Kẻ $DI \perp AB$.
Ta có $DI = DB \cdot \sin 60^\circ = 10\sqrt{3}$ và $BI = DB \cdot \cos 60^\circ = 10$.
Đặt $DE = AE = x$ $(x > 0)$ thì $EI = AB - BI - AE = 50 - x$.
Áp dụng định lý Pi-ta-go trong $\triangle DEI$ ta có

$$\begin{aligned} DE^2 = DI^2 + EI^2 &\Leftrightarrow x^2 = 300 + (50 - x)^2 \\ &\Leftrightarrow 100x = 2800 \\ &\Leftrightarrow x = 28. \end{aligned}$$



□

Bài 79. Cho ABC là tam giác đều cạnh 6. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD = 2$.

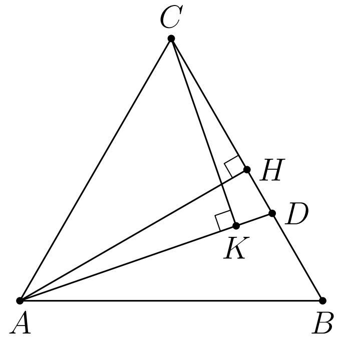
1. Tính độ dài đoạn thẳng AD.

2. Kẻ CK vuông góc với AD, $(K \in AD)$. Tính độ dài đoạn thẳng CK.

Lời giải.

1. Từ đỉnh A của tam giác ABC, kẻ đường cao AH ($H \in BC$).

   Áp dụng hệ thức về cạnh và góc trong $\triangle ABH$ vuông ta có
   $$AH = AB\sin 60^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$
   Vì $\triangle ABC$ đều, $AH \perp BC$ nên H là trung điểm của BC. Do đó
   $$DH = BH - BD = 3 - 2 = 1.$$



   Áp dụng định lý Pi-ta-go cho tam giác vuông AHD, ta có
   $$AD^2 = AH^2 + HD^2 = (3\sqrt{3})^2 + 1 = 28 \Rightarrow AD = 2\sqrt{7}.$$

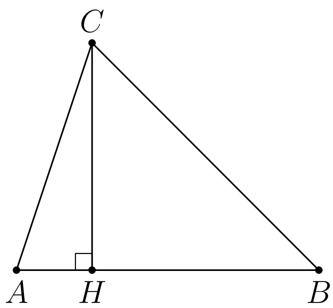
2. Trong tam giác vuông CKD ta có
   $$\frac{CK}{CD} = \sin D = \frac{AH}{AD} \Rightarrow CK = \frac{AH}{AD} \cdot CD = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \cdot 4 = \frac{6\sqrt{21}}{7}.$$

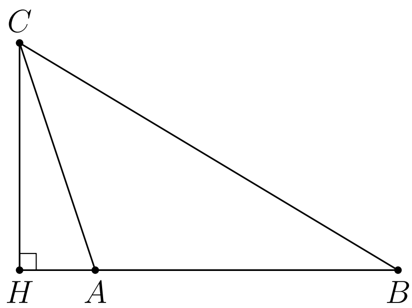
□

Bài 80. Cho $\triangle ABC$ có $AB = c$, $AC = b$, đường phân giác AD, đường trung tuyến AM. Đường thẳng đối xứng với AM qua AD cắt BC tại N. Tính $\dfrac{BN}{CN}$.

Lời giải.

Bổ đề: Cho $\triangle ABC$ có α là góc nhọn tạo bởi đường thẳng AB và AC. Khi đó,
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin\alpha.$$

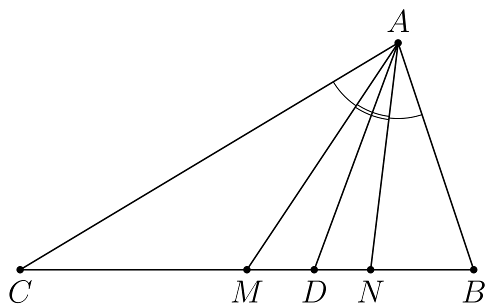




Vẽ đường cao CH, ta có $CH = CA \cdot \sin\alpha$.
Do đó $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot CH = \dfrac{1}{2}AC \cdot AB \cdot \sin\alpha$.

Quay lại bài toán.

Do AD là đường phân giác của $\triangle ABC$ nên
$$\widehat{CAD} = \widehat{BAD} < 90^\circ.$$
Mặt khác, do AN đối xứng với AM qua AD nên
$$\widehat{MAD} = \widehat{DAN}.$$



Từ đó, ta suy ra $\widehat{CAM} = \widehat{NAB}$ và $\widehat{CAN} = \widehat{BAM}$.
Áp dụng bổ để trên ta có

$$\begin{aligned}S_{\triangle CAN} &= \frac{1}{2}AC \cdot AN \cdot \sin\widehat{CAN}\\ S_{\triangle BAM} &= \frac{1}{2}AB \cdot AM \cdot \sin\widehat{BAM}.\end{aligned}$$

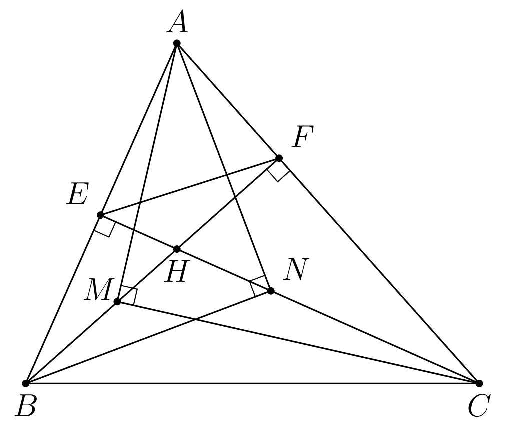
Do $\widehat{CAN} = \widehat{BAM}$ nên $\dfrac{S_{\triangle CAN}}{S_{\triangle BAM}} = \dfrac{AC \cdot AN}{AB \cdot AM} \Leftrightarrow \dfrac{CN}{BM} = \dfrac{AC \cdot AN}{AB \cdot AM}$.
Tương tự ta có $\dfrac{BN}{CM} = \dfrac{AB \cdot AN}{AC \cdot AM}$.
Vì vậy

$$\begin{aligned}\frac{BN}{CN} &= \frac{BN}{CM} : \frac{CN}{BM} \text{ (do } BM = CM)\\ &= \frac{AB \cdot AN}{AC \cdot AM} : \frac{AC \cdot AN}{AB \cdot AM}\\ &= \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{c^2}{b^2}.\end{aligned}$$

□

Bài 81. Cho tam giác ABC nhọn trực tâm H, trên đoạn BH lấy điểm M và trên đoạn CH lấy điểm N sao cho $\widehat{AMC} = \widehat{ANB} = 90^\circ$. Chứng minh rằng $AM = AN$.

Lời giải.



Ta có $\triangle AFB \backsim \triangle AEC$ (g.g) nên

$$\frac{AF}{AE} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AE \cdot AB = AF \cdot AC. \qquad (1)$$

Áp dụng hệ thức lượng cho các tam giác vuông ABN và ACM ta có

$$AE \cdot AB = AN^2;\ AF \cdot AC = AM^2. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$AM^2 = AN^2 \Rightarrow AM = AN.$$

□

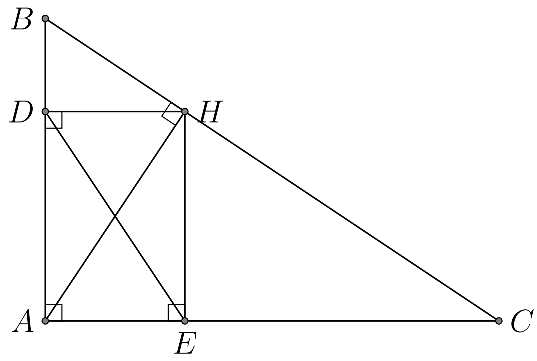
Bài 82. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H lên AB, AC. Chứng minh rằng $\sqrt[3]{BC^2} = \sqrt[3]{BD^2} + \sqrt[3]{CE^2}$.

Lời giải.

Ta có $BD = \dfrac{BH^2}{AB}, BC = \dfrac{AB^2}{BH}$ nên

$$\frac{BD^2}{BC^2} = \frac{BH^4}{AB^2}\cdot\frac{BH^2}{AB^4} = \frac{BH^6}{AB^6}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{BD^2}{BC^2}} = \frac{BH^2}{AB^2} = \frac{BH^2}{BH\cdot BC} = \frac{BH}{BC}.$$



Tương tự ta cũng có $\sqrt[3]{\dfrac{CE^2}{BC^2}} = \dfrac{CH}{BC}$.

Suy ra $\sqrt[3]{\dfrac{BD^2}{BC^2}} + \sqrt[3]{\dfrac{CE^2}{BC^2}} = \dfrac{BH+HC}{BC} = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{BC^2} = \sqrt[3]{BD^2} + \sqrt[3]{CE^2}$. □

Bài 83. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Trên tia đối của tia AH lấy điểm D sao cho $HD = AC$. Vẽ hình chữ nhật $CHDE$. Chứng minh rằng BE vuông góc với CD.

Lời giải.

Đặt $DE = HC = a,\ EC = DH = AC = b$.

Ta có $\tan\widehat{D_1} = \dfrac{EC}{DE}$. (1)

và $\tan\widehat{E_1} = \dfrac{BC}{EC} = \dfrac{BC}{b}$. (2)

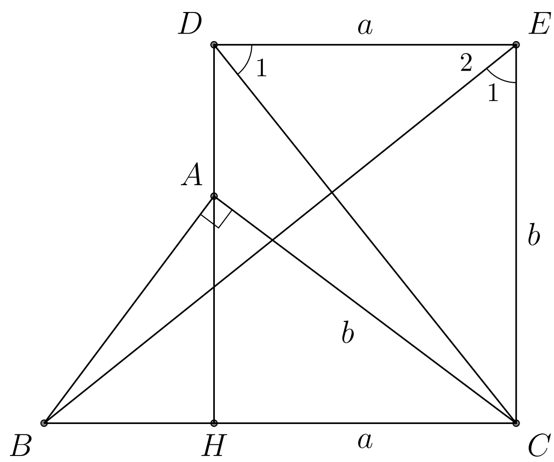
Tam giác vuông ABC có $AC^2 = BC\cdot HC$.

Suy ra $b^2 = BC\cdot a \Rightarrow \dfrac{b}{a} = \dfrac{BC}{b}$. (3)

Từ (1),(2) và (3) suy ra $\tan\widehat{D_1} = \tan\widehat{E_1}$.

Do đó $\widehat{D_1} = \widehat{E_1} \Rightarrow \widehat{D_1} + \widehat{E_2} = \widehat{E_1} + \widehat{E_2} = 90^\circ$.

Vậy $BE \perp CD$.



□

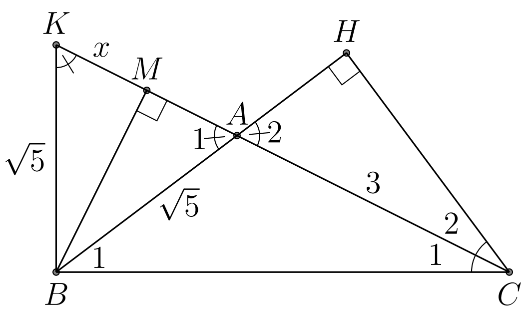
Bài 84. Cho tam giác ABC có $AB = \sqrt{5},\ AC = 3$ và $\widehat{B} + 2\widehat{C} = 90^\circ$. Tính độ dài đoạn BC.

Lời giải.

Kẻ $CH \perp AB$. Do $\widehat{B_1} + \widehat{C_1} < 90^\circ$ nên A nằm giữa B và H. Ta có

$$\widehat{B_1} + \widehat{BCH} = 90^\circ = \widehat{B_1} + 2\widehat{C_1}$$

$$\Rightarrow \widehat{BCH} = 2\widehat{C_1} \Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{C_2}.$$



Giả sử đường vuông góc với BC tại B cắt CA ở K.
Ta có $\widehat{K} = \widehat{A_1}$ (cùng phụ với $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$) $\Rightarrow \triangle ABK$ cân. Kẻ $BM \perp AK$. Đặt $KM = MA = x$ $(x > 0)$.
Từ $BK^2 = KM\cdot KC$ suy ra

$$(\sqrt{5})^2 = x(2x+3) \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x+5) = 0.$$

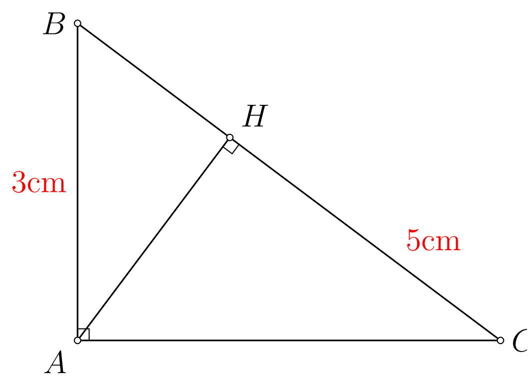
Do $x > 0$ nên $x = 1$, do đó $KC = 5$. Suy ra $BC = \sqrt{KC^2 - KB^2} = \sqrt{20}$. □

§5 Đề kiểm tra 45 phút

1 Đề số 1A (Tự luận dành cho học sinh đại trà)

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm, AH là đường cao. Tính độ dài các cạnh BH, CH, AC, AH.

Lời giải.



Áp dụng định lý Pi-ta-go cho tam giác ABC vuông tại A, ta được

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{16} = 4\,(\text{cm}).$$

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC với đường cao AH

$$\begin{aligned} AH \cdot BC &= AB \cdot AC \\ \Rightarrow AH &= \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}\,(\text{cm}). \end{aligned}$$

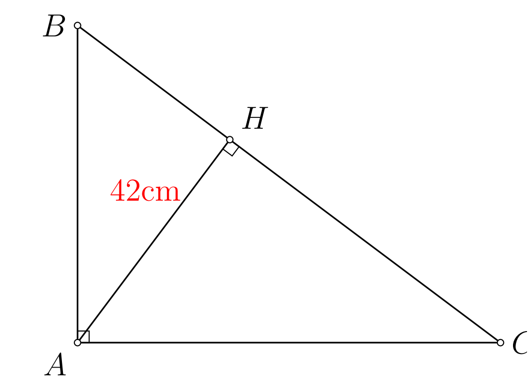
$$AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{9}{5}\,(\text{cm}).$$

$$CH = BC - BH = 5 - \frac{9}{5} = \frac{16}{5}\,(\text{cm}).$$

□

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{20}{21}$ và $AH = 42$cm. Tính chu vi tam giác ABC.

Lời giải.



Giả thiết suy ra $AB = \dfrac{20}{21} AC$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác ABC với đường cao AH, ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{AH^2} &= \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{20}{21}\right)^2 \cdot AC^2} + \frac{1}{AC^2} \\ &= \frac{841}{400} \cdot \frac{1}{AC^2} \end{aligned}$$

Suy ra

$$AC = \sqrt{\frac{841}{400} \cdot AH^2} = \sqrt{\frac{841}{400} \cdot 42^2} = \frac{609}{10}\,(\text{cm}).$$

Do đó $AB = 58\,(\text{cm})$, áp dụng Pi-ta-go cho tam giác vuông ABC ta được

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{60{,}9^2 + 58^2} = 84{,}1\,(\text{cm}).$$

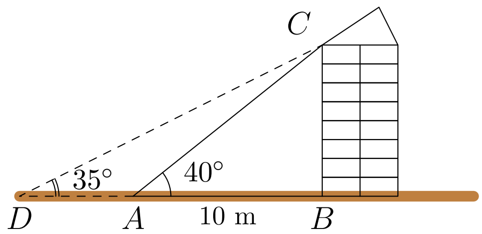
Chu vi tam giác ABC là

$$p_{\triangle ABC} = 60{,}9 + 58 + 84{,}1 = 203\,(\text{cm}).$$

□

Bài 3.

Bạn An đứng cách một tòa nhà một khoảng 10 m. Góc "nâng" từ chỗ bạn An đứng đến đỉnh tòa nhà là 40°. Hỏi nếu An di chuyển sao cho góc "nâng" là 35° thì An cách tòa nhà bao xa, (làm tròn hai chữ số thập phân, biết rằng An chỉ tiến tới hoặc lùi lại).



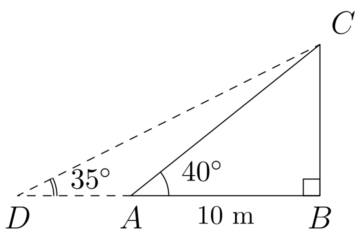
Lời giải.

Trong tam giác ABC vuông tại B, ta có $\tan\widehat{CAB} = \dfrac{BC}{AB}$.

Suy ra $BC = \tan\widehat{CAB} \cdot AB = \tan 40° \cdot 10$ m.

Trong tam giác CBD vuông tại B, ta có $\tan\widehat{CDB} = \dfrac{BC}{DB}$.

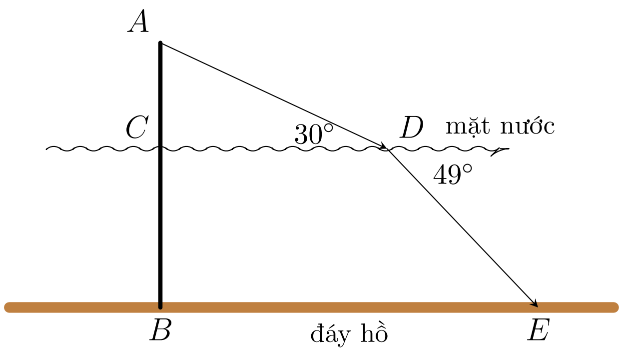
Suy ra $DB = \dfrac{BC}{\tan\widehat{CDB}} = \dfrac{\tan 40° \cdot 10}{\tan 35°} \approx 11{,}98$ m.



Vậy nếu An di chuyển sao cho góc "nâng" là 35° thì An cách tòa nhà 11,98 m. □

Bài 4.

Một cây cọc cắm thẳng đứng xuống đáy hồ sâu 1,5 m. Phần cọc nhô lên khỏi mặt nước là 0,5 m. Tia sáng mặt trời chiếu xuống hồ theo phương hợp với mặt nước góc 30°. Nhưng khi vào trong nước tia sáng bị khúc xạ nên tia sáng hợp với mặt nước một góc 49°. Tính chiều dài bóng cây cọc trên mặt nước và dưới đáy hồ, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai?



Lời giải.

Gọi $F = BC \cap DE$. Khi đó $\widehat{FDC} = \widehat{DEB} = 49°$.

Trong tam giác ADC vuông tại C, ta có $\tan\widehat{ADC} = \dfrac{CA}{CD}$.

Suy ra $CD = \dfrac{AC}{\tan\widehat{ADC}} = \dfrac{0{,}5}{\tan 30°} \approx 0{,}87$ m.

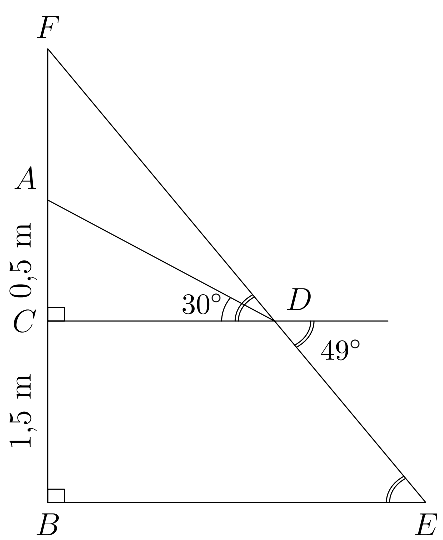
Trong tam giác CFD vuông tại C, ta có $\tan\widehat{FDC} = \dfrac{FC}{DC}$.

Suy ra $CF = CD \cdot \tan\widehat{FDC} = 0{,}87 \cdot \tan 49° \approx 1$ m.

Suy ra $BF = BC + CF = 1{,}5 + 1 = 2{,}5$ m.

Trong tam giác FBE vuông tại B, ta có $\tan\widehat{FEB} = \dfrac{BF}{BE}$.

Suy ra $BE = \dfrac{BF}{\tan\widehat{FEB}} = \dfrac{2{,}5}{\tan 49°} \approx 2{,}17$ m.

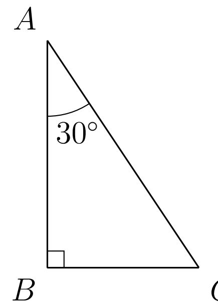


Vậy chiều dài bóng cây cọc trên mặt nước là 0,87 m và dưới đáy hồ là 2,17 m.

□

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại B có $AB = 2, \widehat{BAC} = 30^\circ$. Hãy giải tam giác vuông ABC.

Lời giải.

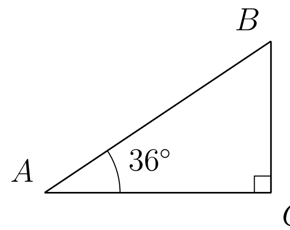


Ta có $\widehat{C} = 90^\circ - \widehat{A} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.
Theo các hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông, ta có
$BC = AB \cdot \tan A = 2 \cdot \tan 30^\circ = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$;
$AB = AC \cdot \cos A \Rightarrow AC = \dfrac{AB}{\cos A} = \dfrac{2}{\cos 30^\circ} = \dfrac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

□

Bài 6. Người ta cần kéo một vật lên cao 5 m bằng một mặt phẳng nghiêng tạo với phương nằm ngang một góc 36°. Hỏi chiều dài của mặt phẳng nghiêng là bao nhiêu?

Lời giải.



Giả sử chiều dài của mặt phẳng nghiêng là đoạn AB, chiều cao cần đưa vật lên là đoạn BC và góc tạo bởi mặt phẳng nghiêng và phương nằm ngang là $\widehat{BAC} = 36^\circ$.
Chiều dài của mặt phẳng nghiêng là
$BC = AB \cdot \sin A \Rightarrow AB = \dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{5}{\sin 36^\circ} \approx 8{,}507$ m.

□

2 Đề số 1B (Tự luận dành cho học sinh đại trà)

Bài 1. Không dùng máy tính bỏ túi, hãy sắp xếp giá trị các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự tăng dần.

$$\sin 20^\circ, \cos 20^\circ, \sin 35^\circ, \cos 40^\circ.$$

Lời giải.

Ta có

$$\cos 20^\circ = \sin 70^\circ, \cos 40^\circ = \sin 50^\circ.$$

Vì khi góc α tăng từ 0° đến 90° thì $\sin \alpha$ tăng, do đó

$$\sin 20^\circ < \sin 35^\circ < \sin 50^\circ < \sin 70^\circ.$$

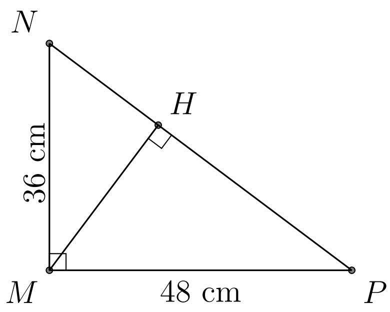
Hay

$$\sin 20^\circ < \sin 35^\circ < \cos 40^\circ < \cos 20^\circ.$$

□

Bài 2. Cho tam giác MNP vuông tại M, đường cao MH. Biết rằng $MN = 36$ cm, $MP = 48$ cm. Tính độ dài các đoạn thẳng HM, HN, HP.

Lời giải.



Xét tam giác MNP vuông tại M, đường cao MH có

- Tính NP

$$\begin{aligned} NP^2 &= MN^2 + MP^2 \quad \text{(Định lí Py-ta-go)} \\ &= 36^2 + 48^2 = 3600 \\ \Rightarrow NP &= 60 \text{ (cm)}. \end{aligned}$$

- Tính HM

$$\begin{aligned} & MH \cdot NP = MN \cdot MP \quad \text{(Hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông)} \\ \Leftrightarrow\ & MH \cdot 60 = 36 \cdot 48 \\ \Leftrightarrow\ & MH = \frac{36 \cdot 48}{60} = 28{,}8 \text{ (cm)}. \end{aligned}$$

- Tính HN

$$\begin{aligned} & MN^2 = NH \cdot NP \quad \text{(Hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông)} \\ \Leftrightarrow\ & 36^2 = NH \cdot 60 \\ \Leftrightarrow\ & NH = \frac{36^2}{60} = 21{,}6 \text{ (cm)}. \end{aligned}$$

- Tính HM

$$HP = NP - NH = 60 - 21{,}6 = 38{,}4 \text{ (cm)}.$$

Vậy

$$HM = 28{,}8 \text{ cm}, HN = 21{,}6 \text{ cm}, HP = 38{,}4 \text{ cm}.$$

□

Bài 3. Cho tam giác ABC có $AB = 6$ cm, $AC = 4{,}5$ cm, $BC = 7{,}5$ cm.

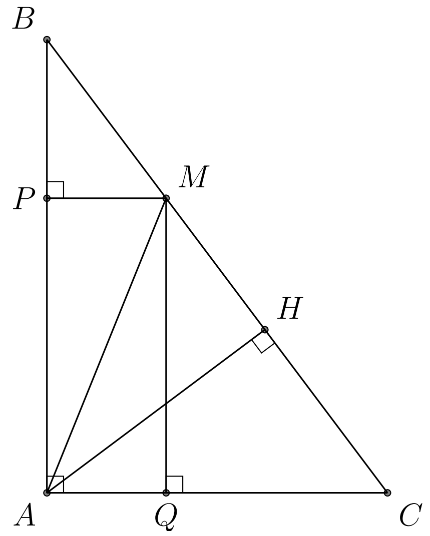
a) Chứng minh tam giác ABC vuông tại A.

b) Tính $\widehat{B}, \widehat{C}$ và đường cao AH.

c) Lấy một điểm M bất kì trên cạnh BC (M khác B, C). Gọi hình chiếu của M trên AB, AC lần lượt là P và Q. Chứng minh $PQ = AM$.

d) Xác định vị trí của điểm M để PQ có độ dài nhỏ nhất.

Lời giải.



a) Ta có $\begin{cases} BC^2 = 7{,}5^2 = 56{,}25 \\ AB^2 + AC^2 = 6^2 + 4{,}5^2 = 56{,}25 \end{cases} \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2.$

Theo định lý đảo của định lý Py-ta-go, suy ra tam giác ABC vuông tại A.

b) Xét tam giác vuông ABC, đường cao AH, ta có

- $\tan B = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{4{,}5}{6} = 0{,}75$ (Tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông)
  $\Rightarrow \widehat{B} \approx 36^\circ 52'$.
- $\widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B} \approx 90^\circ - 36^\circ 52' = 53^\circ 8'$.
- $AH \cdot BC = AB \cdot AC$ (Hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông)
  $\Rightarrow AH = \dfrac{AB \cdot AC}{AH} = \dfrac{6 \cdot 4{,}5}{7{,}5} = 3{,}6$ (cm)

Vậy

$$\widehat{B} \approx 36^\circ 52', \widehat{C} \approx 53^\circ 8', AH = 3{,}6 \text{ cm}.$$

c) Xét tứ giác $APMQ$ có $\widehat{P} = \widehat{A} = \widehat{Q} = 90^\circ$
Suy ra tứ giác $APMQ$ là hình chữ nhật.
Vậy $AM = PQ$ (Tính chất hai đường chéo của hình chữ nhật).

d) PQ có độ dài nhỏ nhất $\Leftrightarrow AM$ có độ dài nhỏ nhất
$\Leftrightarrow AM \perp BC$
$\Leftrightarrow M \equiv H$.
Vậy PQ có độ dài nhỏ nhất khi M trùng H.

□

Bài 4. Tính giá trị biểu thức $A = (3\sin\alpha + 4\cos\alpha)^2 + (4\sin\alpha - 3\cos\alpha)^2$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} A &= (3\sin\alpha + 4\cos\alpha)^2 + (4\sin\alpha - 3\cos\alpha)^2 \\ &= (9\sin^2\alpha + 24\sin\alpha\cos\alpha + 16\cos^2\alpha) + (16\sin^2\alpha - 24\sin\alpha\cos\alpha + 9\cos^2\alpha) \\ &= 25(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 25 \cdot 1 = 25. \end{aligned}$$

Vậy $A = 25$. □

3 Đề số 2A (Trắc nghiệm kết hợp tự luận dành cho học sinh đại trà

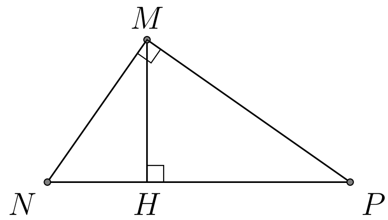
3.1 Trắc nghiệm

Bài 5. Cho tam giác MNP vuông tại M có MH là đường cao, cạnh $MN = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\widehat{P} = 60^\circ$. Kết luận nào sau đây là đúng?

Ⓐ $MP = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $MP = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$. Ⓒ $\widehat{MNP} = 60^\circ$. Ⓓ $\widehat{MNH} = 30^\circ$.

Lời giải.

Vì tam giác MNP vuông tại M và $\widehat{P} = 60^\circ$ nên $\widehat{MNH} = 30^\circ$.



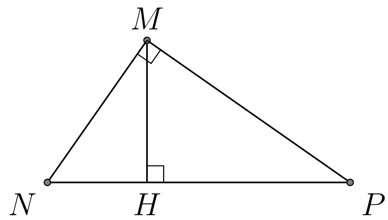
Chọn đáp án Ⓓ □

Bài 6. Cho tam giác MNP vuông tại M có MH là đường cao. Biết $NH = 5$ cm, $HP = 9$ cm. Độ dài đoạn thẳng MH bằng

Ⓐ $3\sqrt{5}$. Ⓑ 7. Ⓒ 4,5. Ⓓ 4.

Lời giải.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $MH = \sqrt{HN \cdot HP} = 3\sqrt{5}$ cm.



Chọn đáp án Ⓐ □

Bài 7. Cho $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$ với α là góc nhọn, khi đó $\sin\alpha$ bằng

Ⓐ $\dfrac{5}{9}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. Ⓒ $\dfrac{1}{3}$. Ⓓ $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{5}{9}$. Suy ra $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Bài 8. Giá trị của $P = \cos^2 20^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 70^\circ$ bằng

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 0.

Lời giải.

Ta có $\cos 50^\circ = \sin 40^\circ$ và $\cos 70^\circ = \sin 20^\circ$ nên

$$\begin{aligned} P &= \cos^2 20^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 70^\circ \\ &= (\cos^2 20^\circ + \sin^2 20^\circ) + (\cos^2 40^\circ + \sin^2 40^\circ) = 2. \end{aligned}$$

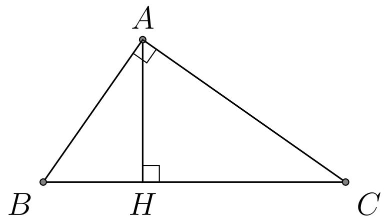
Chọn đáp án (B) □

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Hệ thức nào sau đây đúng

(A) $\cos C = \dfrac{AB}{AC}$. (B) $\tan B = \dfrac{AB}{AC}$. (C) $\cot C = \dfrac{HC}{HA}$. (D) $\cot B = \dfrac{AC}{AB}$.

Lời giải.

Xét tam giác AHC vuông tại H có $\cot C = \dfrac{HC}{HA}$.



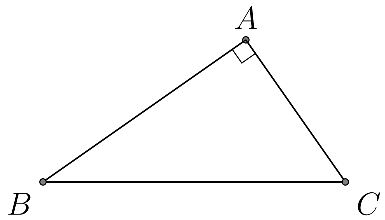
Chọn đáp án (C) □

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC = 3$; $AB = 4$. Khi đó $\cos B$ bằng

(A) $\dfrac{3}{4}$. (B) $\dfrac{3}{5}$. (C) $\dfrac{4}{5}$. (D) $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 5$. Do đó
$\cos B = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{4}{5}$.



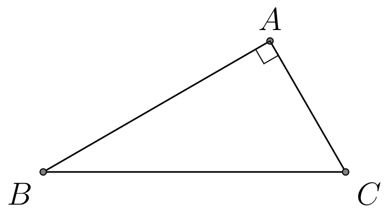
Chọn đáp án (C) □

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A, $BC = 2AC$. So sánh $\sin B$ và $\cos B$, khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\sin B < \cos B$. (B) $\sin B > \cos B$. (C) $\sin B \geq \cos B$. (D) $\sin B = \cos B$.

Lời giải.

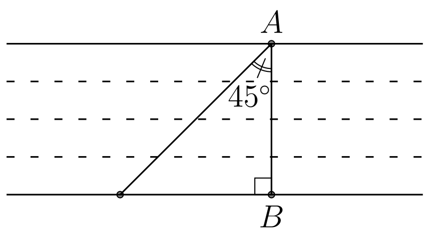
Ta có $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = AC \cdot \sqrt{3}$. Suy ra
$\sin B = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{1}{2}$ và $\cos B = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Do đó $\sin B < \cos B$.



Chọn đáp án (A) □

Bài 12.

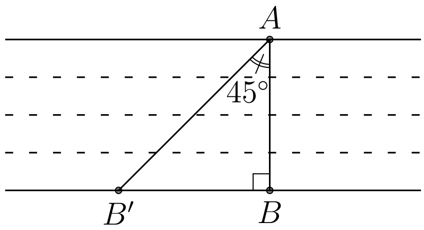
Một người muốn chèo thuyền từ bờ sông bên này (tại điểm A) sang bờ sông bên kia (tại điểm B) theo đường thẳng AB dài 50 m (xem hình vẽ bên), nhưng do dòng nước chảy mạnh nên người đó đã bơi lệch 45° so với phương ban đầu. Hỏi người đó bơi sang bờ chứa điểm B, cách vị trí dự định B bao xa?



(A) 20 m. (B) 30 m. (C) 40 m. (D) 50 m.

Lời giải.

Gọi B' là điểm đến (bờ bên kia) của người chèo thuyền.
Vì $\tan \widehat{B'AB} = \dfrac{BA}{BB'}$ nên $BB' = \dfrac{BA}{\tan \widehat{B'AB}} = 50$ m.
Vậy người đó bơi sang bờ tại B' cách vị trí dự định B là 50 m.



Chọn đáp án (D) □

3.2 Tự luận

Bài 13. a) Sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự từ nhỏ đến lớn

$$\cot 24^\circ, \tan 16^\circ, \cot 57^\circ, \cot 30^\circ, \tan 80^\circ.$$

b) Tính $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ và $\cot\alpha$ biết $\sin\alpha = \dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

a) Ta có $\cot 24^\circ = \tan 66^\circ$, $\cot 57^\circ = \tan 33^\circ$ và $\cot 30^\circ = \tan 60^\circ$.
Mà $\tan 16^\circ < \tan 33^\circ < \tan 60^\circ < \tan 66^\circ < \tan 80^\circ$ nên

$$\tan 16^\circ < \cot 57^\circ < \cot 30^\circ < \cot 24^\circ < \tan 80^\circ.$$

b) Ta có $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\dfrac{1}{5}\right)^2 = \dfrac{24}{25}$.
Suy ra $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$, $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{6}}{12}$ và $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\sqrt{6}$.

□

Bài 14. Cho hình thang $ABCD$ biết $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$ và $AB < DC$. Hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại O.

a) Cho $AB = 9$ cm, $AD = 12$ cm. Hãy

i) Giải tam giác ABD;

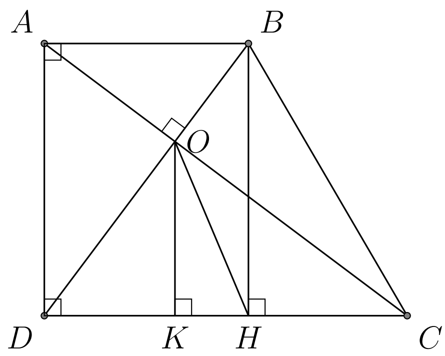
ii) Tính độ dài các đoạn thẳng AO, DO và AC;

iii) Kẻ BH vuông góc với DC tại H. Tính diện tích tam giác DOH.

b) Chứng minh $BH^2 = AB \cdot CD$.

Chú ý: Số đo góc làm tròn đến độ, độ dài các đoạn thẳng làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất.

Lời giải.



a) Ta có $AB = 9$ cm, $AD = 12$ cm.

i) Áp dụng định lí Pi-ta-go ta có
$DB = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$ cm.
Do $\cos \widehat{ADB} = \dfrac{DA}{DB} = \dfrac{12}{15}$ nên $\widehat{ADB} \approx 37^\circ$.
Từ đó suy ra $\widehat{ADB} \approx 53^\circ$.

ii) Vì $\triangle ABD$ vuông tại A, AO vuông góc với BD tại O nên $AB \cdot AD = AO \cdot BD$, suy ra $AO = \dfrac{AB \cdot AD}{BD} = \dfrac{9 \cdot 12}{15} = 7{,}2$ cm. Do đó $DO = \sqrt{AD^2 - AO^2} = 9{,}6$ cm. Mặt khác, $AD^2 = AO \cdot AC$ nên $AC = \dfrac{AD^2}{AO} = 20$ cm.

iii) Kẻ OK vuông góc với DC tại K. Ta có $DH = AB = 9$ cm; $DC = \sqrt{AC^2 - AD^2} = 16$ cm; $DK = \dfrac{DO^2}{DC} = 5{,}76$ cm và $OK = \sqrt{DO^2 - DK^2} = 7{,}68$ cm.
Từ đó suy ra $S_{DOH} = \dfrac{OK \cdot DH}{2} = \dfrac{7{,}68 \cdot 9}{2} = 34{,}56$ cm^2.

b) Xét $\triangle BAD$ và $\triangle ADC$ có $\widehat{BAD} = \widehat{ADC} = 90^\circ$, $\widehat{ABD} = \widehat{DAC}$ (cùng phụ với $\widehat{OAB}$) nên $\triangle BAD \backsim \triangle ADC$ (g.g). Do đó $AD^2 = AB \cdot CD$. Hơn nữa, $BH = AD$ (do tứ giác $ABHD$ là hình chữ nhật) nên $BH^2 = AB \cdot CD$.

□

4 Đề số 2B (Trắc nghiệm kết hợp tự luận dành cho học sinh đ

4.1 Trắc nghiệm

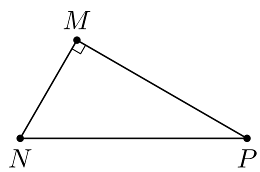
Chọn câu trả lời đúng trong mỗi câu sau

Bài 15. Tam giác MNP vuông tại M thì $\sin N$ bằng

(A) $\dfrac{MP}{NP}$. (B) $\dfrac{MP}{MN}$. (C) $\dfrac{MN}{NP}$. (D) $\dfrac{NP}{MN}$.

Lời giải.

Tam giác MNP vuông tại M, cạnh huyền NP, MP là cạnh đối diện với góc $\widehat{N}$ nên ta có $\sin N = \dfrac{MP}{NP}$.



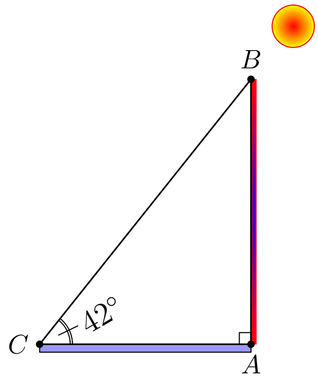
Chọn đáp án (A) □

Bài 16. Một cột đèn có bóng dài trên mặt đất là 7,5 m. Các tia sáng mặt trời tạo với mặt đất một góc xấp xỉ bằng 42°. Chiều cao của cột đèn (làm tròn đến hàng phần mười) là

(A) 7 m. (B) 6 m. (C) 6,7 m. (D) 6,8 m.

Lời giải.

Coi cột đèn là cạnh AB, bóng của nó trên mặt đất là cạnh AC thì tam giác ABC vuông tại A và góc $\widehat{C} = 42^\circ$ (như hình vẽ).
Chiều cao của cột đèn là
$AB = AC \cdot \tan C = 7{,}5 \cdot \tan 42^\circ \approx 6{,}8$ (m).



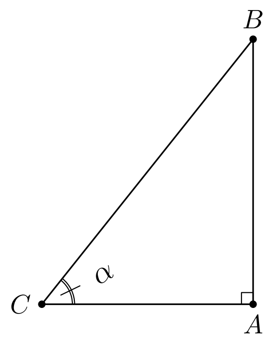
Chọn đáp án D □

Bài 17. Với α là góc nhọn, khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $0 < \cos\alpha < 1$.
B. $\cos^2\alpha = 1 + \sin^2\alpha$.
C. $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$.
D. $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$.

Lời giải.

Không làm mất tính tổng quát coi α là góc nhọn $\widehat{C}$ của tam giác vuông ABC (như hình vẽ) ta luôn có



1. $0 < \cos\alpha = \dfrac{AB}{BC} < 1$ vì $0 < AB < BC$;
2. $\cot\alpha = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{1}{\frac{AB}{AC}} = \dfrac{1}{\tan\alpha}$;
3. $\cos\alpha = \cos C = \dfrac{AC}{BC} = \sin B = \sin(90^\circ - \alpha)$;
4. $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \dfrac{AC^2}{BC^2} + \dfrac{AB^2}{BC^2} = \dfrac{AC^2 + AB^2}{BC^2} = \dfrac{BC^2}{BC^2} = 1$.

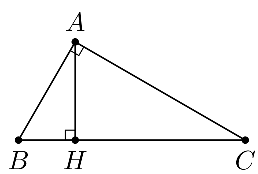
Chọn đáp án B □

Bài 18. Cho tam giác ABC vuông tại A và AH là đường cao. Cho biết $AB = 9$, $BC = 15$. Khi đó độ dài AH bằng

A. 6,5.
B. 7,2.
C. 7,5.
D. 7,7.

Lời giải.

Ta có $AC^2 = BC^2 - AC^2 = 15^2 - 9^2 = 144 \Rightarrow AC = 12$.
$AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH = \dfrac{AB \cdot AC}{BC} = \dfrac{12 \cdot 9}{15} = 7{,}2$.



Chọn đáp án B □

Bài 19. Cho $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Khi đó $\sin\alpha$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.
B. $\dfrac{4}{3}$.
C. $\dfrac{3}{4}$.
D. $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

Lời giải.

Vì $0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow \sin\alpha > 0$.
Lại có $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{5}{9} \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Bài 20. Cho $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Khi đó $\tan\alpha$ bằng

(A) $\dfrac{4}{5}$. (B) $\dfrac{3}{5}$. (C) $\dfrac{4}{3}$. (D) $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Vì $0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow \tan\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$. Ta có

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2\alpha &= \frac{1}{\cos^2\alpha} \\ \Rightarrow \tan^2\alpha &= \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 \\ &= \frac{1}{1 - \sin^2\alpha} - 1 = \frac{1}{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} - 1 = \frac{9}{16} \\ \Rightarrow \tan\alpha &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Bài 21. Biểu thức $\cos^4\alpha + \cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha + \sin^2\alpha$ bằng

(A) $\cos^2\alpha$. (B) $\sin^2\alpha$. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \cos^4\alpha + \cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha + \sin^4\alpha \\ = \; & \cos^2\alpha\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) + \sin^2\alpha \\ = \; & \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \\ = \; & 1. \end{aligned}$$

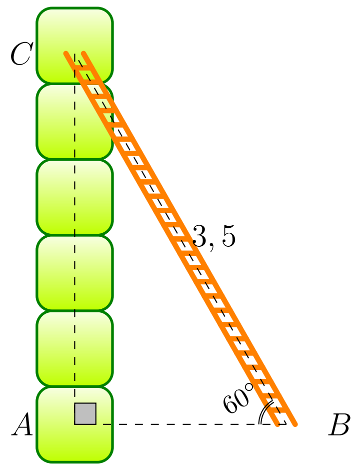
Chọn đáp án (C) □

Bài 22. Một chiếc thang dài 3,5 m đặt dựa vào tường, góc "an toàn" giữa chân thang và mặt đất để thang không đổ khi người leo lên là 60°. Khoảng cách "an toàn" từ chân tường đến chân thang là

(A) 1 m. (B) 0,5 m. (C) 2 m. (D) 1,75 m.

Lời giải.

Coi chân tường, chân thang và ngọn thang lần lượt là điểm A, B và C (như hình vẽ). Khi đó tam giác ABC là tam giác vuông tại A có $BC = 3{,}5$ m, góc "an toàn" là góc $\widehat{ABC} = 60^\circ$.
Vậy khoảng cách "an toàn" là
$AB = BC \cdot \cos B = 3{,}5 \cdot \cos 60^\circ = 1{,}75$ m.



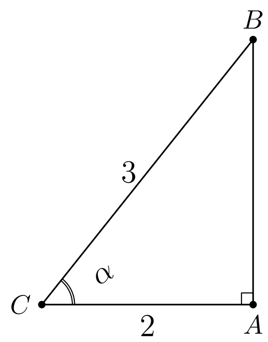
Chọn đáp án (D) □

4.2 Tự luận

Bài 23. Dựng góc nhọn α, biết $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$

Lời giải.

Dựng tam giác vuông ABC có cạnh huyền BC bằng 3, vẽ cạnh góc vuông AC có độ dài bằng 2. Khi đó góc kề với AC là góc $\widehat{C} = \alpha$ cần dựng (hình bên).
Thật vậy, từ cách dựng trên ta có $\cos\alpha = \cos C = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{2}{3}$.



□

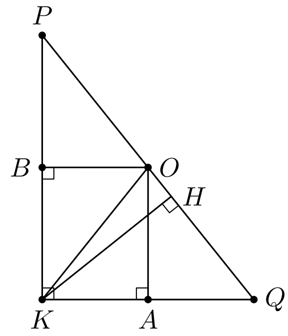
Bài 24. Cho tam giác KQP có $KQ = 5$ cm, $KP = 12$ cm và $QP = 13$ cm. Đường cao KH (H thuộc PQ).

1. Chứng minh tam giác KQP vuông.
2. Tính góc Q, góc P và độ dài KH, PH.
3. Lấy điểm O bất kỳ trên cạnh QP (O khác P, Q). Gọi hình chiếu của O trên KP, KQ lần lượt là A và B. Chứng minh $AB = KO$. Điểm O ở vị trí nào thì AB là ngắn nhất.

Lời giải.

1. Ta có $PK^2 + QK^2 = 169 = PQ^2$, suy ra tam giác KQP vuông tại K.
2. Ta có

$$\sin\widehat{PQK} = \frac{PK}{PQ} = \frac{12}{13} \Rightarrow \widehat{PQK} \approx 67^\circ 22'$$
$$\Rightarrow \quad \widehat{KPQ} = 90^\circ - 67^\circ 22' = 22^\circ 38'.$$



Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác KPQ, đường cao KH, ta có

$KH \cdot PQ = KP \cdot KQ \Rightarrow KH = \dfrac{60}{13}$ cm.

$PK^2 = PH \cdot PQ \Rightarrow PH = \dfrac{PK^2}{PQ} = \dfrac{144}{13}$ cm.

3. Tứ giác $AKBO$ có $\widehat{AKB} = \widehat{KAO} = \widehat{KBO} = 90^\circ \Rightarrow AKBO$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AB = KO$.
Ta thấy $AB = OK \geq KH$ (vì $KH \perp PQ$) $\Rightarrow AB_{min} = OK = KH \Leftrightarrow O \equiv H$. Vậy AB ngắn nhất khi điểm O trùng với điểm H.

□

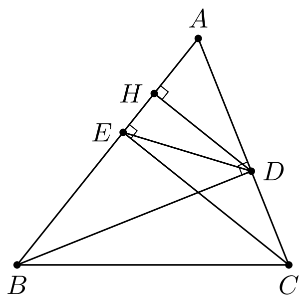
Bài 25. Cho tam giác nhọn ABC, hai đường cao BD và CE. Chứng minh

$$S_{ADE} = S_{ABC} \cdot \cos^2 A.$$

Lời giải.

Ta có $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$.
Kẻ đường cao DH của tam giác ADE
$\Rightarrow \triangle ADH \sim \triangle ABD$ (chung góc $\widehat{A}$) nên ta có $\dfrac{DH}{BD} = \dfrac{AD}{AB}$

$$\Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}DH \cdot AE}{\frac{1}{2}BD \cdot AC} = \frac{DH}{BD} \cdot \frac{AE}{AC} = \frac{AE}{AC} \cdot \frac{AE}{AC} = \left(\frac{AE}{AC}\right)^2.$$

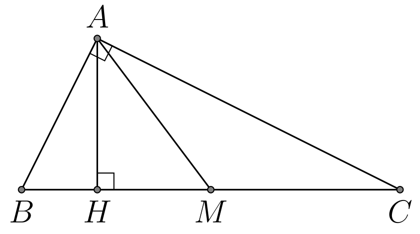


Mà trong $\triangle ACE$ có $\dfrac{AE}{AC} = \cos A \Rightarrow \dfrac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \cos^2 A \Rightarrow S_{ADE} = S_{ABC} \cdot \cos^2 A.$ □

5 Đề số 3A (Tự luận dành cho học sinh giỏi)

Bài 1. Tính diện tích của một tam giác vuông có chu vi 144 cm, biết hiệu giữa đường trung tuyến và đường cao ứng với cạnh huyền bằng 14 cm.

Lời giải.



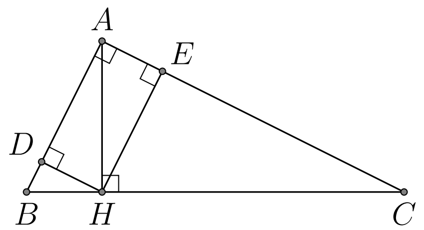
Vẽ tam giác ABC vuông tại A, có góc $\widehat{B} > \widehat{C}$. Vẽ đường cao AH và trung tuyến AM với H, M thuộc BC. Từ đó suy ra H nằm giữa B và M. Đặt $AM = x$, ta có $BC = 2x$, $AH = x - 14$ $(x > 14)$. Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông $AB^2 + AC^2 = BC^2 = 4x^2$; $AB \cdot AC = BC \cdot AH = 2x(x-14)$. Suy ra

$$\begin{aligned}
&AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AC = 4x^2 + 4x(x-14)\\
\Leftrightarrow &(AB + AC)^2 = 8x^2 - 56x\\
\Leftrightarrow &(144 - 2x)^2 = 8x^2 - 56x\\
\Leftrightarrow &\left[\begin{aligned} &x = 32\\ &x = -162 \text{ (loại)}\end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

Khi đó, $BC = 64$ cm, $AH = 18$ cm và $S_{ABC} = 567$ cm^2. □

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 20$ cm, đường cao AH. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên các cạnh AB, AC. Tính chu vi tam giác ABC sao cho diện tích tứ giác $ADHE$ lớn nhất.

Lời giải.



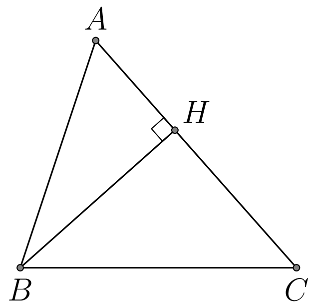
Ta có $\dfrac{HD}{AC} = \dfrac{HB}{BC}$ và $\dfrac{HE}{AB} = \dfrac{HC}{BC}$ suy ra

$$\begin{aligned}
&\frac{HD}{AC} \cdot \frac{HE}{AB} = \frac{HB \cdot HC}{BC^2} = \frac{AH^2}{BC^2}\\
\Rightarrow &S_{ADHE} = \frac{(AB \cdot AC)^3}{BC^4} \leqslant \frac{(AB^2 + AC^2)^3}{8BC^4}\\
\Rightarrow &S_{ADHE} \leqslant 25.
\end{aligned}$$

Vậy diện tích tứ giác $ADHE$ lớn nhất bằng 25 cm^2 khi tam giác ABC vuông cân và có chu vi $20 + 20\sqrt{2}$ cm. □

Bài 3. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$, $AB = 56$ cm, $AC = 70$ cm. Tính độ dài cạnh BC.

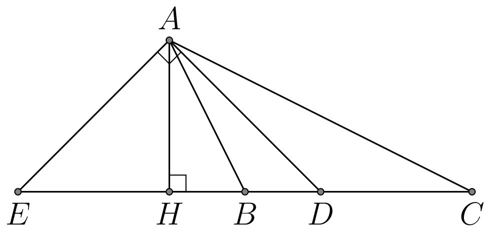
Lời giải.



Kẻ $BH \perp AC$. Ta có $AH = \frac{1}{2} \cdot AB = 28$, $BH = AB \sin 60^\circ = 28\sqrt{3}$.
Suy ra $HC = AC - AH = 70 - 28 = 42$, $BC^2 = BH^2 + HC^2 = 4116$. Vậy $BC = 14\sqrt{21}$ cm. □

Bài 4. Tam giác ABC có $BC = 40$ cm, đường phân giác AD dài 45 cm, đường cao AH dài 36 cm. Tính các độ dài BD và DC.

Lời giải.



Đặt $BD = x$, $DC = y$. Giả sử $x < y$. Áp dụng định lý Pi-ta-go ta có $HD = \sqrt{AD^2 - AH^2} = 27$. Dựng phân giác ngoài của góc ngoài tại A, cắt BC tại E. Ta có $AE \perp AD$ nên $AD^2 = DE \cdot DH$. Suy ra $DE = \frac{AD^2}{DH} = \frac{45^2}{27} = 75$ (cm). Theo tính chất đường phân giác trong và ngoài

$$\frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{75 - x}{75 + y}. \tag{1}$$

Mặt khác

$$x + y = 40. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta có

$$x^2 - 115x + 1500 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 15 \\ x = 100. \end{array}\right.$$

Do $x < 40$ nên $x = 15$, khi đó $y = 25$. Vậy $DB = 15$ cm và $DC = 25$ cm. □

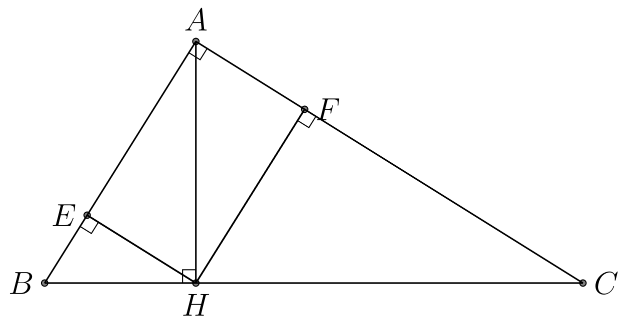
6 Đề số 3B (Tự luận dành cho học sinh giỏi)

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Kẻ HE, HF lần lượt vuông góc với AB, AC. Chứng minh rằng

1. $\frac{EB}{FC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^3$.

2. $BC \cdot BE \cdot CF = AH^3$.

Lời giải.



1. Xét tam giác vuông AHB, đường cao HE có

$$BH^2 = BA \cdot BE \tag{1.1}$$

Xét tam giác vuông AHC, đường cao HF có

$$CH^2 = CA \cdot CF \tag{1.2}$$

Từ (1.1) và (1.2) suy ra

$$\left(\frac{BH}{CH}\right)^2 = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BE}{CF} \tag{1.3}$$

Lại xét tam giác vuông ABC, đường cao AH có

$$\begin{cases} AB^2 = BH \cdot BC \\ AC^2 = CH \cdot BC \end{cases} \Rightarrow \frac{BH}{CH} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \tag{1.4}$$

Do đó, từ (1.3) và (1.4) suy ra

$$\frac{AB}{AC} \cdot \frac{BE}{CF} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^4 \Leftrightarrow \frac{BE}{CF} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^3.$$

2. Ta có $\triangle ABC \backsim \triangle EBH \Rightarrow \dfrac{BE}{BA} = \dfrac{BH}{BC} \Leftrightarrow BE = \dfrac{BH \cdot BA}{BC}$.

Mà $BH \cdot BC = AB^2 \Rightarrow BH = \dfrac{AB^2}{BC} \Rightarrow BE = \dfrac{AB^3}{BC^2}$. Tương tự ta có $CF = \dfrac{AC^3}{BC^2}$.

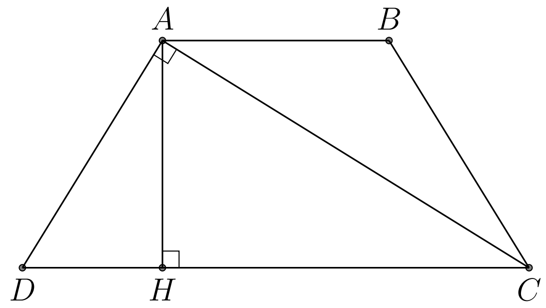
Mà $AB \cdot AC = AH \cdot BC \Rightarrow AH = \dfrac{AB \cdot AC}{BC}$. Suy ra

$$BC \cdot BE \cdot CF = \frac{AB^3}{BC^2} \cdot \frac{AC^3}{BC^2} \cdot BC = \left(\frac{AB \cdot AC}{BC}\right)^3 = AH^3.$$

□

Bài 2. Cho hình thang cân $ABCD$, đáy lớn $CD = 10$, AH là đường cao, $AH = AB$, đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính độ dài đường cao của hình thang cân đó.

Lời giải.



Gọi độ dài đường cao là $AH = x$. Suy ra

$$HD = \frac{10-x}{2} \Rightarrow AD^2 = HD^2 + AH^2 = \left(\frac{10-x}{2}\right)^2 + x^2. \tag{1.5}$$

Mặt khác, do tam giác DAC vuông tại A nên

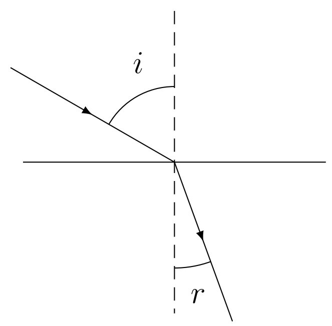
$$AD^2 = DH \cdot DC = 10\left(\frac{10-x}{2}\right) = 5\left(10-x\right). \tag{1.6}$$

Từ (1.5) và (1.6) suy ra

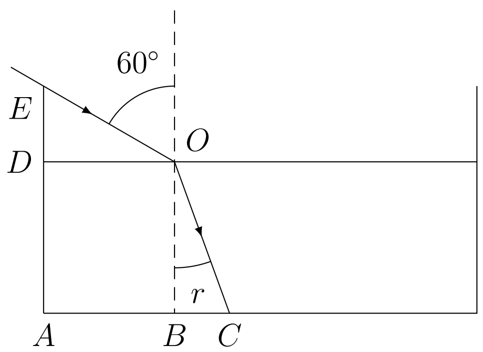
$$\left(\frac{10-x}{2}\right)^2 + x^2 = 5\left(10-x\right) \Leftrightarrow 5x^2 = 100 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{5}.$$

Vậy đường cao AH có độ dài $2\sqrt{5}$. □

Bài 3. Một bể nước có thành cao 80 cm, mực nước đo được trong bể cao 60 cm. Ánh sáng mặt trời chiếu lệch một góc 30° so với về mặt nước. Biết khi chiếu tia sáng với góc tới i thì qua mặt nước sẽ có góc khúc xạ r tính theo công thức $\dfrac{\sin i}{\sin r} = \dfrac{4}{3}$ (tia sáng như hình vẽ). Tính độ dài bóng của thành hồ in dưới đáy bể.



Lời giải.



Ta có độ dài bóng cần tính bằng $AB+BC$. Mà

$$AB = DO = \frac{DE}{\tan 30^\circ} = \frac{20}{\tan 30^\circ} = 20\sqrt{3}.$$

Mặt khác

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{\sin 60^\circ}{\sin r} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \sin r = \frac{3\sqrt{3}}{8} \Rightarrow \tan^2 r = \frac{1}{\sin^2 r} - 1 = \frac{64}{27} - 1 = \frac{37}{27} \Rightarrow \tan r = \sqrt{\frac{37}{27}}.$$

Do đó

$$BC = BF\tan r = AD\tan r = 60\sqrt{\frac{37}{27}} = \frac{20\sqrt{111}}{3}.$$

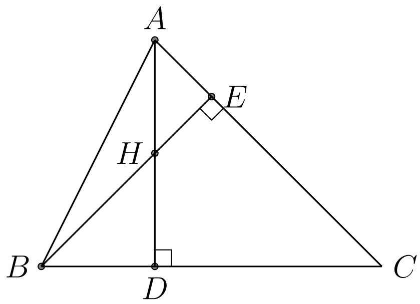
Suy ra chiều dài bóng cần tính là

$$AB + BC = 20\sqrt{3} + \frac{20\sqrt{111}}{3} = \frac{60\sqrt{3} + 20\sqrt{111}}{3}.$$

□

Bài 4. Cho tam giác $\triangle ABC$, trực tâm H là trung điểm của đường cao AD. Chứng minh rằng $\tan B \cdot \tan C = 2$.

Lời giải.



Xét tam giác vuông ABD, ta có

$$\tan B = \frac{AD}{BD} = \frac{2DH}{BD}. \qquad (1.7)$$

Kẻ đường cao BE. Xét tam giác vuông ABE, có

$$\tan C = \frac{BE}{CE}. \qquad (1.8)$$

Xét $\triangle BHD$ và $\triangle BCE$ có

$$\begin{cases} B \text{ chung} \\ E = D = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle BHD \backsim \triangle BCE \Rightarrow \frac{BD}{DH} = \frac{BE}{CE}. \qquad (1.9)$$

Do đó, từ (1.7), (1.8) và (1.9) suy ra

$$\tan B \cdot \tan C = \frac{2DH}{BD} \cdot \frac{BD}{DH} = 2.$$

□

Chương 2

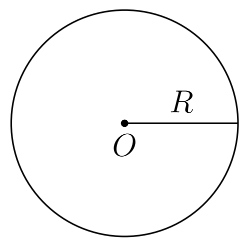
Đường tròn

§1 Sự xác định đường tròn. Tính chất đối xứng của đường tròn

1 Tóm tắt lí thuyết

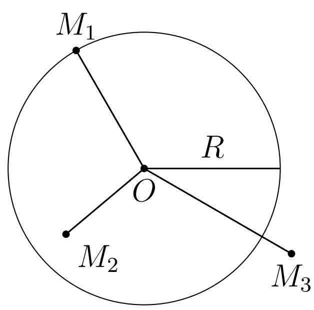
1.1 Định nghĩa đường tròn

Định nghĩa 3.
Đường tròn tâm O bán kính R (với $R > 0$) là hình gồm các điểm cách đều điểm O một khoảng không đổi bằng R.
Đường tròn tâm O bán kính R được kí hiệu là $(O; R)$, ta cũng có thể kí hiệu là (O) khi không cần chú ý đến bán kính.



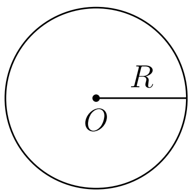
Nhận xét. Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm M. Khi đó

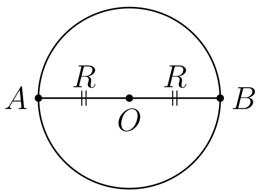
- M nằm trên $(O; R)$ khi và chỉ khi $OM = R$.
- M nằm bên trong $(O; R)$ khi và chỉ khi $OM < R$.
- M nằm bên ngoài $(O; R)$ khi và chỉ khi $OM > R$.

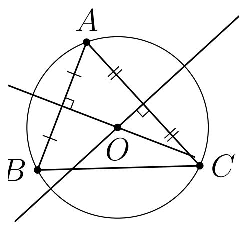


1.2 Cách xác định đường tròn

1. Một đường tròn được xác định khi biết tâm và bán kính của nó.
2. Một đường tròn được xác định khi biết một đoạn thẳng là đường kính của đường tròn đó.
3. Qua ba điểm không thẳng hàng cho trước ta vẽ được một và chỉ một đường tròn.



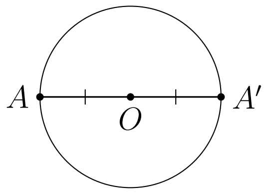


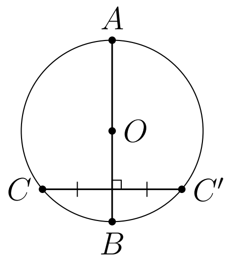


1.3 Tính chất đối xứng của đường tròn

Tính chất 2. Đường tròn là hình có tâm đối xứng. Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.

Tính chất 3. Đường tròn là hình có trục đối xứng. Bất kỳ đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn.





23. Đường tròn có một tâm đối xứng và có vô số trục đối xứng.

2 Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Xác định tâm và bán kính đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ABC.

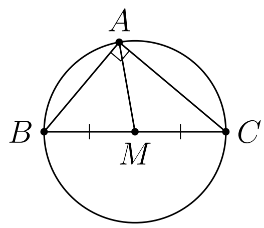
Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC.

Ta có AM là trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $AM = \dfrac{BC}{2}$.

Suy ra $MA = MB = MC = \dfrac{BC}{2}$.

Vậy đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ABC có tâm là điểm M và bán kính $R = \dfrac{BC}{2}$.



□

Ví dụ 2. Chứng minh rằng, nếu một tam giác có một cạnh là đường kính của đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác đó thì tam giác đó là tam giác vuông.

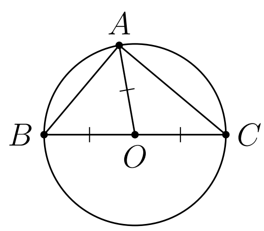
Lời giải.

Xét tam giác ABC có ba đỉnh nằm trên đường tròn (O) đường kính BC.

Ta có $OA = OB = OC$ (vì là bán kính của (O)).

Lúc đó AO là trung tuyến ứng với cạnh BC và $AO = \dfrac{BC}{2}$.

Vậy ABC là tam giác vuông tại A.

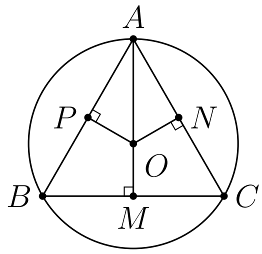


24. Đường tròn qua ba đỉnh của một tam giác vuông thì nó có tâm là trung điểm của cạnh huyền và bán kính bằng phân nửa độ dài cạnh huyền. Ngược lại, một đường tròn đi qua ba đỉnh của một tam giác nhận một cạnh của tam giác đó là đường kính thì tam giác đó là tam giác vuông.

□

Ví dụ 3. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tính bán kính đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ABC.

Lời giải.



Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB.
Dựng các đường trung trực của các cạnh AB, BC, CA, các đường trung trực này đồng quy tại O, suy ra O là tâm của đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ABC. Bán kính của đường tròn (O) là $R = OA = OB = OC$.
Vì ABC là tam giác đều nên các đường trung trực này cũng là các đường trung tuyến của tam giác ABC. Suy ra O cũng là trọng tâm của tam giác ABC.

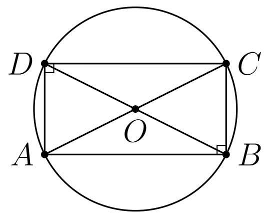
Trong tam giác ABM vuông tại M ta có $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lại có $OA = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy bán kính đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ABC là $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. □

Ví dụ 4. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 12$ cm, $BC = 5$ cm. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm và bán kính của đường tròn đó.

Lời giải.



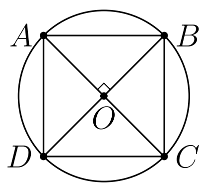
Gọi O là giao điểm AC và BD. Khi đó O là trung điểm của AC, BD.
Mà $ABCD$ là hình chữ nhật nên $AC = BD$.
Do đó $OA = OB = OC = OD$ hay bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn (O), bán kính $R = OA = \frac{AC}{2}$.
Tam giác ABC vuông tại B nên $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.
Suy ra $R = \frac{AC}{2} = 6,5$ cm.
Vậy bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn (O) bán kính $R = 6,5$ cm.

⚠ **25.** Đường tròn qua bốn đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$ có tâm là giao điểm của hai đường chéo và bán kính của nó bằng một nửa độ dài đường chéo của hình chữ nhật đó.

□

Ví dụ 5. Cho đường tròn (O) với hai đường kính AC và BD vuông góc với nhau. Chứng minh $ABCD$ là hình vuông.

Lời giải.



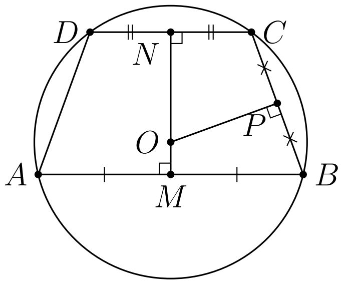
Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC, BD là đường kính của đường tròn (O) nên $ABCD$ là hình chữ nhật.
Lại có $AC \perp BD$.
Vậy $ABCD$ là hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau nên $ABCD$ là hình vuông.

□

Ví dụ 6. Cho hình thang cân $ABCD$ với $AB \parallel CD$ và $AB > CD$. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.

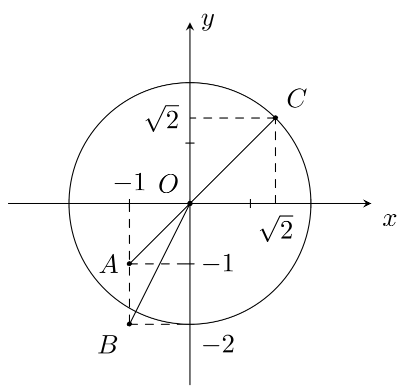
Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.
Do $ABCD$ là hình thang cân với hai đáy AB, CD nên MN đường trung trực của AB, CD.
Gọi P là trung điểm của BC. Qua P dựng đường trung trực của BC cắt MN tại O. Ta cần chứng minh $OA = OB = OC = OD$.
Thật vậy, vì O nằm trên đường trung trực của AB nên $OA = OB$.
Mà MN cũng là trung trực của CD nên $OC = OD$.
Hơn nữa, O nằm trên đường trung trực của BC nên $OB = OC$.
Từ đó suy ra $OA = OB = OC = OD$.
Vậy bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn (O) bán kính $R = OA$. □



Ví dụ 7. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy xác định vị trí của mỗi điểm $A(-1;-1)$, $B(-1;-2)$, $C\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ đối với đường tròn tâm O bán kính 2.

Lời giải.

- OA là cạnh huyền trong tam giác vuông cân cạnh bằng 1 nên $OA = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} < 2$, suy ra A nằm bên trong đường tròn $(O;2)$.
- OB là cạnh huyền trong tam giác vuông có hai cạnh góc vuông là 1; 2 nên $OB = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5} > 2$, suy ra B nằm bên ngoài đường tròn $(O;2)$.
- OC là cạnh huyền trong tam giác vuông cân cạnh bằng $\sqrt{2}$ nên $OC = \sqrt{\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2} = 2$, suy ra C nằm trên đường tròn $(O;2)$.

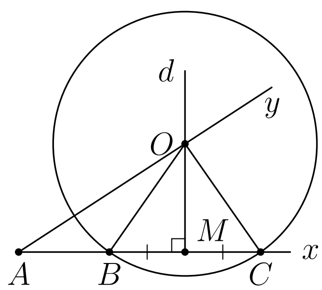


□

Ví dụ 8. Cho góc nhọn xAy và hai điểm B, C thuộc tia Ax. Dựng đường tròn (O) đi qua điểm B và C sao cho tâm O nằm trên tia Ay.

Lời giải.

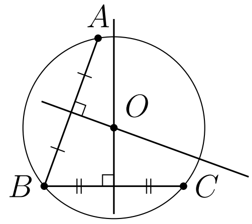
Giả sử đã dựng được (O) thỏa mãn đề bài. Khi đó $OB = OC$ bằng bán kính, nên O nằm trên đường trung trực d của BC.
Lại có O thuộc Ay nên O là giao điểm của d và Ay.
Cách dựng. Dựng đường trung trực d của BC cắt Ay tại O. Dựng đường tròn tâm O bán kính OB thì đó là đường tròn phải dựng (như hình vẽ).



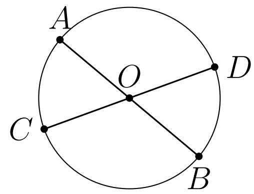
□

Ví dụ 9. Một tấm bìa hình tròn không còn dấu vết của tâm. Hãy tìm lại tâm của hình tròn đó.

Lời giải.



Cách 1. Trên đường tròn của tấm bìa lấy ba điểm A, B, C không trùng nhau.
Nối A với B và B với C.
Dựng các đường trung trực của AB, BC chúng cắt nhau tại O, khi đó O là tâm của đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ABC hay O là tâm của tấm bìa hình tròn.

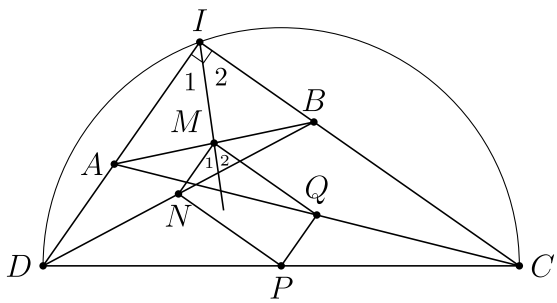


Cách 2. Gấp tấm bìa sao cho hai phần của hình tròn trùng nhau, nếp gấp là một đường kính.
Lại gấp như trên theo nếp gấp khác, ta được một đường kính thứ hai.
Giao điểm của hai đường kính này là tâm của tấm bìa hình tròn.

□

Ví dụ 10. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^\circ$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BD, DC và CA. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.



Gọi I là giao điểm của AD và BC.
Vì $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^\circ$ nên $\widehat{DIC} = 90^\circ$.
Do M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BD, DC và CA nên MN, NP, PQ, QM lần lượt là đường trung bình của tam giác ABD, BCD, ACD, ABC.
Suy ra $MN \parallel AD$, $PQ \parallel AD$, $MQ \parallel BC$, $NP \parallel BC$ do đó $MN \parallel PQ$, $NP \parallel MQ$.
Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Lại có $\begin{cases} \widehat{M_1} = \widehat{I_1} \\ \widehat{M_2} = \widehat{I_2} \end{cases}$ (góc đồng vị).

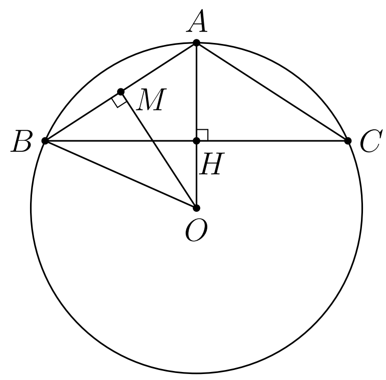
Khi đó $\widehat{NMQ} = \widehat{M_1} + \widehat{M_2} = \widehat{I_1} + \widehat{I_2} = 90^\circ$.
Do đó $MNPQ$ là hình chữ nhật.
Theo ví dụ 4 thì bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn. □

3 Luyện tập

Bài 1. Cho tam giác ABC cân tại A, $BC = 12$ cm, chiều cao $AH = 4$ cm. Tính bán kính của đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ABC.

Lời giải.

Vì tam giác ABC cân tại A nên đường cao AH cũng là đường trung trực của đoạn BC.
Qua trung điểm M của AB kẻ đường trung trực của AB cắt đường thẳng AH tại O. Khi đó O là tâm của đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ABC.
Bán kính của đường tròn (O) là $R = OA = OB$.
Tam giác BOH vuông tại H nên



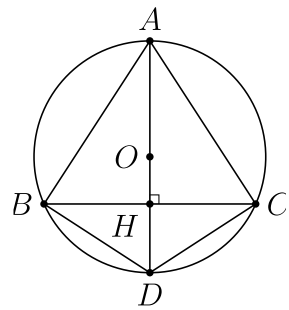
$$\begin{aligned} BO^2 = BH^2 + OH^2 \quad &\Leftrightarrow \quad BO^2 = \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + (OA - AH)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad R^2 = 36 + (R-4)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 8R = 52 \\ &\Leftrightarrow \quad R = 6,5. \end{aligned}$$

Vậy bán kính của đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác ABC bằng $6,5$ cm. □

Bài 2. Cho tam giác ABC cân tại A có ba đỉnh nằm trên đường tròn (O). Đường cao AH cắt (O) ở D. Biết $BC = 24$ cm, $AC = 20$ cm. Tính chiều cao AH và bán kính đường tròn (O).

Lời giải.

Vì tam giác ABC cân tại A nên đường cao AH cũng là đường trung trực của đoạn BC, suy ra H là trung điểm của đoạn BC.
Tam giác ACH vuông tại H nên



$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16 \text{ cm}.$$

Tam giác ACD có AD là đường kính nên tam giác ACD vuông tại C.
Áp dụng hệ thức về cạnh trong tam giác vuông ACD ta có

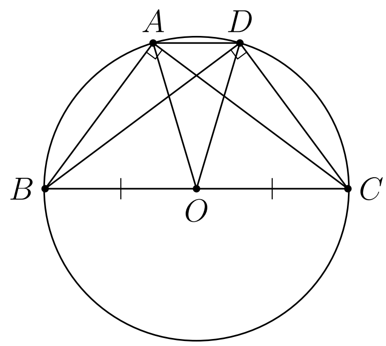
$$AC^2 = AD \cdot AH \Leftrightarrow AD = \frac{AC^2}{AH} \Leftrightarrow AD = 25 \text{ cm}.$$

Vậy bán kính của đường tròn (O) là $R = \dfrac{AD}{2} = 12,5$ cm. □

Bài 3. Cho hình thang cân $ABCD$ (với $AD \parallel BC$) có $AB = 12$ cm, $AC = 16$ cm, $BC = 20$ cm. Chứng minh rằng A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình thang cân với hai đáy AD, BC nên $AB = CD = 12$ cm và $BD = AC = 16$ cm.
Gọi O là trung điểm của BC.
Xét tam giác ABC có



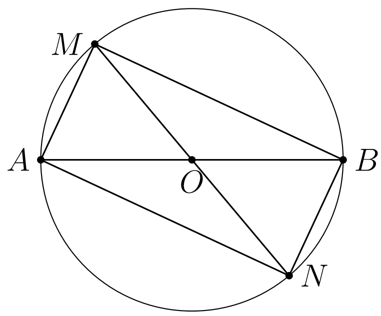
$$AB^2 + AC^2 = 12^2 + 16^2 = 20^2 = BC^2.$$

Vậy tam giác ABC vuông tại A. Do đó ba đỉnh của tam giác ABC cùng thuộc đường tròn (O).
Tương tự ta cũng có tam giác BCD vuông tại D. Do đó ba đỉnh của tam giác BCD cùng thuộc đường tròn (O).
Vậy bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc đường tròn (O) bán kính $R = \dfrac{BC}{2} = 10$ cm. □

Bài 4. Cho đường tròn (O) đường kính AB, M, N thuộc (O) sao cho $AM = BN$ và M, N nằm trên hai nửa đường tròn khác nhau. Chứng minh MN là đường kính của (O).

Lời giải.

Vì M, N thuộc đường tròn (O) nên tam giác ABM, ABN là tam giác vuông lần lượt tại M, N.
Hai tam giác vuông ABM và ABN có $AM = BN$, AB là cạnh chung nên hai tam giác này bằng nhau, suy ra $BM = AN$.
Vậy tứ giác $AMBN$ có $AM = BN$ và $BM = AN$ nên $AMBN$ là hình bình hành. Hơn nữa $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Do đó $AMBN$ là hình chữ nhật.
Vậy MN là đường kính của (O).



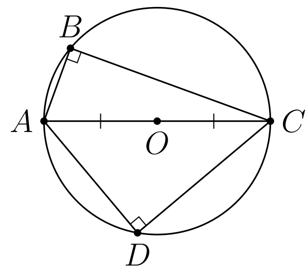
□

Bài 5. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$.

1. Chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.
2. Nếu $AC = BD$ thì tứ giác $ABCD$ là hình gì?

Lời giải.

1. Gọi O là trung điểm của AC.
Vì tam giác ABC vuông tại B nên ba đỉnh A, B, C cùng thuộc đường tròn (O).
Vì tam giác ACD vuông tại D nên ba đỉnh A, C, D cùng thuộc đường tròn (O).
Vậy bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn (O) đường kính AC.



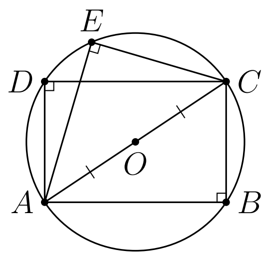
2. Nếu $BD = AC$ thì BD là đường kính của (O), suy ra $\widehat{BAD} = 90^\circ$.
Vậy tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$ nên $ABCD$ là hình chữ nhật.

□

Bài 6. Cho hình chữ nhật $ABCD$, vẽ tam giác AEC vuông tại E. Chứng minh năm điểm A, B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.

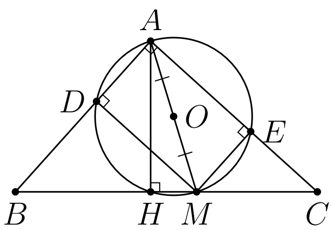
Gọi O là trung điểm của AC.
Vì tam giác ABC vuông tại B nên ba điểm A, B, C thuộc đường tròn (O) đường kính AC.
Vì tam giác ACD vuông tại D nên ba điểm A, C, D thuộc đường tròn (O) đường kính AC.
Vì tam giác ACE vuông tại E nên ba điểm A, C, E thuộc đường tròn (O) đường kính AC.
Vậy năm điểm A, B, C, D, E cùng thuộc đường tròn (O) đường kính AC.



□

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Từ M là điểm bất kỳ trên cạnh BC kẻ $MD \perp AB$, $ME \perp AC$. Chứng minh năm điểm A, D, M, H, E cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải.



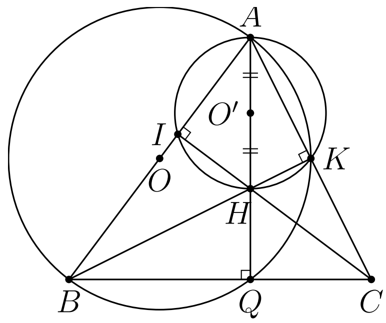
Vì $MD \perp AB$ và $AC \perp AB$ nên $MD \parallel AE$.
Vì $ME \perp AC$ và $AB \perp AC$ nên $ME \parallel AD$.
Từ hai điều trên suy ra $ADME$ là hình bình hành.
Mà $\widehat{DAE} = 90^\circ$ nên $ADME$ là hình chữ nhật, suy ra bốn điểm A, D, M, E thuộc đường tròn (O) đường kính AM (với O là trung điểm của đoạn AM).
Lại có tam giác AHM vuông tại H nên ba điểm A, H, M thuộc đường tròn (O) đường kính AM.
Vậy năm điểm A, D, M, H, E cùng nằm trên đường tròn (O) đường kính AM. □

Bài 8. Cho tam giác ABC có AQ, KB, CI là ba đường cao và H là trực tâm.

1. Chứng minh A, B, Q, K cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm của đường tròn đó.
2. Chứng minh A, I, H, K cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm của đường tròn đó.

Lời giải.

1.



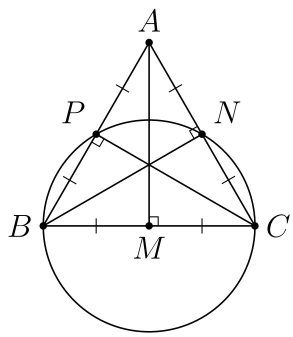
Gọi O là trung điểm của AB.
Vì tam giác ABQ vuông tại Q nên ba điểm A, B, Q thuộc đường tròn (O) đường kính AB.
Vì tam giác ABK vuông tại K nên ba điểm A, B, K thuộc đường tròn (O) đường kính AB.
Từ đó suy ra bốn điểm A, B, Q, K cùng thuộc đường tròn (O) đường kính AB.

2. Gọi O' là trung điểm của AH.
Vì $\triangle AHI$ vuông tại I nên ba điểm A, H, I thuộc đường tròn (O') đường kính AH.
Vì $\triangle AHK$ vuông tại K nên ba điểm A, H, K thuộc đường tròn (O') đường kính AH.
Từ đó suy ra bốn điểm A, I, H, K cùng thuộc đường tròn (O') đường kính AH.

□

Bài 9. Cho tam giác đều ABC có AM, BN, CP là ba đường trung tuyến. Chứng minh B, P, N, C cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.

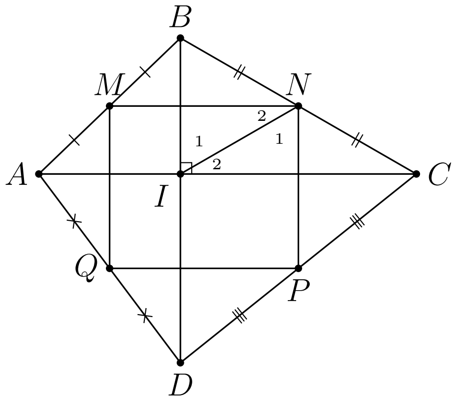


Tam giác ABC là tam giác đều nên AM, BN, CP cũng là các đường cao của tam giác ABC, suy ra các tam giác BPC, BNC là các tam giác vuông.
Vì tam giác BPC vuông tại P nên ba điểm B, P, C thuộc đường tròn (M) đường kính BC.
Vì tam giác BNC vuông tại N nên ba điểm B, N, C thuộc đường tròn (M) đường kính BC.
Vậy bốn điểm B, P, N, C cùng thuộc đường tròn (M) đường kính BC.

□

Bài 10. Cho tứ giác $ABCD$ có $AC \perp BD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.



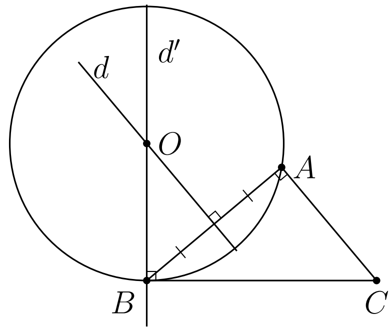
Gọi I là giao điểm của AC và BD.
Do $AC \perp BD$ nên $\widehat{BIC} = \widehat{I}_1 + \widehat{I}_2 = 90°$.
Vì M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA nên MN, NP, PQ, QM lần lượt là đường trung bình của tam giác ABC, BCD, CDA, DAB.
Suy ra $MN \parallel AC \parallel PQ$, $MQ \parallel BD \parallel NP$.
Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.
Lại có $\begin{cases} \widehat{I}_1 = \widehat{N}_1 \\ \widehat{I}_2 = \widehat{N}_2 \end{cases}$ (góc so le trong của cặp đường thẳng song song).
Khi đó $\widehat{MNP} = \widehat{N}_1 + \widehat{N}_2 = \widehat{I}_1 + \widehat{I}_2 = \widehat{BIC} = 90°$.
Do đó $MNPQ$ là hình chữ nhật.
Vậy bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn. □

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A.

1. Nêu cách dựng đường tròn (O) đi qua A và tiếp xúc với BC tại B.
2. Nêu cách dựng đường tròn (O') đi qua A và tiếp xúc với BC tại C.

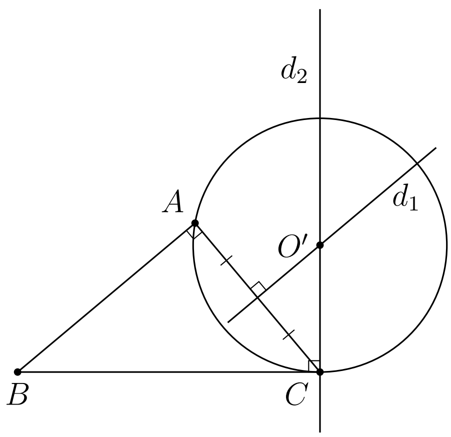
Lời giải.

1.



Giả sử đã dựng được (O) thỏa mãn đề bài. Khi đó $OA = OB$ bằng bán kính, nên O nằm trên đường trung trực d của AB.
Lại có (O) tiếp xúc với BC tại B nên $OB \perp BC$, suy ra O nằm trên đường thẳng d' đi qua B và vuông góc với BC.
Do đó O là giao điểm của d và d'.
Cách dựng. Dựng đường trung trực d của AB. Dựng đường thẳng d' vuông góc với BC tại B. Gọi O là giao điểm của d và d'. Dựng đường tròn tâm O bán kính OA thì đó là đường tròn phải dựng (như hình vẽ).

2.



Giả sử đã dựng được (O') thỏa mãn đề bài. Khi đó $O'A = O'C$ bằng bán kính, nên O' nằm trên đường trung trực d_1 của AC.
Lại có (O') tiếp xúc với BC tại C nên $O'C \perp BC$, suy ra O' nằm trên đường thẳng d_2 đi qua C và vuông góc với BC.
Do đó O' là giao điểm của d_1 và d_2.
Cách dựng. Dựng đường trung trực d_1 của AC. Dựng đường thẳng d_2 vuông góc với BC tại C. Gọi O' là giao điểm của d_1 và d_2. Dựng đường tròn tâm O' bán kính $O'A$ thì đó là đường tròn phải dựng (như hình vẽ).

□

Bài 12. Cho năm điểm A, B, C, D, E. Biết rằng qua bốn điểm A, B, C, D có thể vẽ được một đường tròn, qua bốn điểm B, C, D, E cũng vẽ được một đường tròn. Hỏi qua cả năm điểm A, B, C, D, E có thể vẽ được một đường tròn không?

Lời giải.

Gọi (O) là đường tròn đi qua qua đỉnh của tam giác ABC.
Với giả thiết:

- Bốn điểm A, B, C, D thuộc đường tròn (O_1), suy ra $(O_1) \equiv (O)$.
- Bốn điểm B, C, D, E thuộc đường tròn (O_2), suy ra $(O_2) \equiv (O)$.

Vậy cả năm điểm A, B, C, D, E cùng thuộc đường tròn (O). □

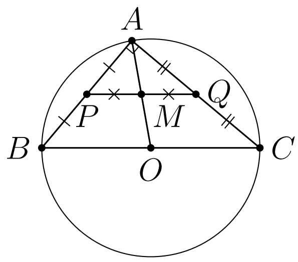
Bài 13. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính BC. Điểm A di động trên (O) , gọi P, Q theo thứ tự là trung điểm của AB và AC.

1. Chứng minh PQ có độ dài không đổi khi A di động trên (O).
2. Tìm quỹ tích trung điểm M của PQ.

Lời giải.

1.

Khi A không trùng với các điểm B, C thì PQ là đường trung bình của tam giác ABC. Do đó $PQ = \dfrac{BC}{2} = R$ (không đổi).
Khi $A \equiv B$ thì $P \equiv B$ và $Q \equiv O$ nên $PQ = OB = R$ (không đổi).
Khi $A \equiv C$ thì $Q \equiv C$ và $P \equiv O$ nên $PQ = OC = R$ (không đổi).
Vậy PQ có độ dài không đổi (luôn bằng R) khi A di động trên (O).



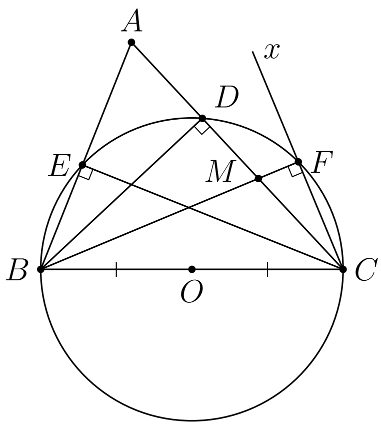
2. Vì O, P, Q lần lượt là trung điểm của BC, AB, AC nên OP, OQ là các đường trung bình của tam giác ABC, suy ra $OP \parallel AQ$, $OQ \parallel AP$.
Do đó tứ giác $APOQ$ là hình bình hành, nên AO, PQ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, suy ra M là trung điểm của AO.
Khi đó $OM = \dfrac{AO}{2} = \dfrac{R}{2}$ (không đổi).
Vậy quỹ tích điểm M là đường tròn $\left(O; \dfrac{R}{2}\right)$.

□

Bài 14. Cho tam giác ABC, các đường cao BD và CE. Trên cạnh AC lấy điểm M. Kẻ tia Cx vuông góc với tia BM tại F. Chứng minh rằng năm điểm B, C, D, E, F cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.

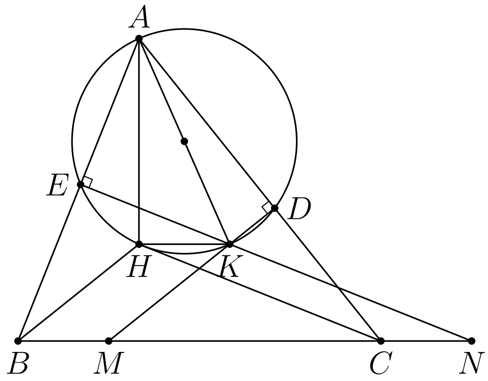
Gọi O là trung điểm của BC.
Vì tam giác BCD vuông tại D nên ba điểm B, C, D cùng thuộc đường tròn (O) đường kính BC.
Vì tam giác BCE vuông tại E nên ba điểm B, C, E cùng thuộc đường tròn (O) đường kính BC.
Vì tam giác BCF vuông tại F nên ba điểm B, C, F cùng thuộc đường tròn (O) đường kính BC.
Vậy năm điểm B, C, D, E, F cùng thuộc đường tròn (O) đường kính BC.



□

Bài 15. Cho tam giác ABC có H là trực tâm. Lấy M, N thuộc tia BC sao cho $MN = BC$ và M nằm giữa B, C. Gọi D là hình chiếu của M lên AC và E là hình chiếu của N lên AB. Chứng minh rằng các điểm A, D, E, H cùng thuộc một đường tròn.

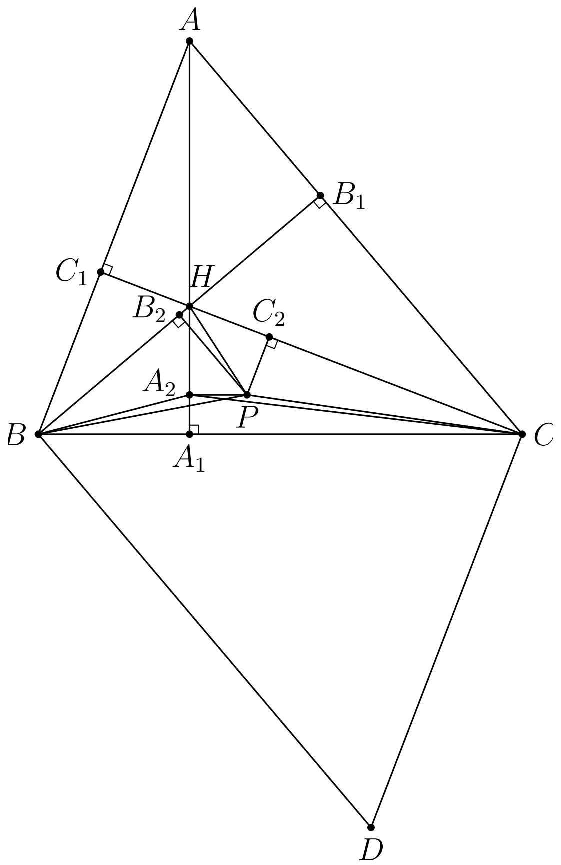
Lời giải.



Gọi K là giao điểm của MD, NE.
Ta thấy $HB \parallel MK$ do cùng vuông góc AC suy ra cặp góc đồng vị $\widehat{HBC} = \widehat{KMN}$.
Tương tự $\widehat{HCB} = \widehat{KNM}$.
Kết hợp giả thiết $BC = MN$ suy ra $\triangle BHC = \triangle MKN$.
Do đó $S_{BHC} = S_{MKN}$, suy ra $HK \parallel BC$.
Mà $AH \perp BC$ nên $AH \perp HK$, suy ra H thuộc đường tròn đường kính AK.
Vì tam giác ADK vuông tại D nên ba điểm A, D, K thuộc đường tròn đường kính AK.
Vì tam giác AEK vuông tại E nên ba điểm A, E, K thuộc đường tròn đường kính AK.
Vậy các điểm A, D, E, H cùng thuộc đường tròn đường kính AK. □

Bài 16. Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại H. Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt thuộc đoạn thẳng AA_1, BB_1, CC_1 sao cho $S_{A_2BC} + S_{B_2CA} + S_{C_2AB} = S_{ABC}$. Chứng minh rằng A_2, B_2, C_2, H cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.



Qua B_2, C_2 lần lượt dựng các đường thẳng vuông góc với BB_1, CC_1 chúng cắt nhau tại P. Dựng hình bình hành $ABDC$. Vì B_2, C_2 lần lượt thuộc đoạn BB_1, CC_1 nên P nằm ở miền trong hình

bình hành $ABDC$.
Ta dễ thấy $PB_2 \parallel CA$, $PC_2 \parallel AB$ nên

$$S_{PCA} = S_{B_2CA} \text{ và } S_{PAB} = S_{C_2AB}. \tag{2.1}$$

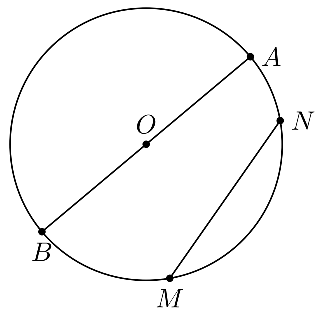
Nếu P nằm ở miền trong tam giác BCD thì $S_{B_2CA} + S_{C_2AB} = S_{PCA} + S_{PAB} > S_{ABC}$ vô lý vì trái với giả thiết, vậy P nằm ở miền trong tam giác ABC.
Khi đó kết hợp giả thiết $S_{PCA} + S_{PBA} + S_{PBC} = S_{ABC} = S_{A_2BC} + S_{B_2CA} + S_{C_2AB}$. Theo (2.1) suy ra $S_{PBC} = S_{A_2BC}$, suy ra $PA_2 \parallel BC$ hay $PA_2 \perp AA_1$.
Từ đây dễ thấy A_2, B_2, C_2 thuộc đường tròn đường kính PH hay A_2, B_2, C_2, H cùng thuộc một đường tròn. $\square$

§2 Đường kính và dây của đường tròn

1 Tóm tắt lí thuyết

Định nghĩa 4.

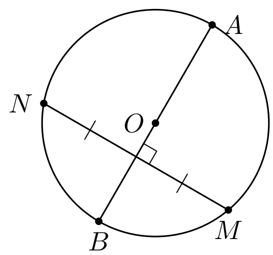
- Dây cung là đoạn thẳng nối hai điểm phân biệt cùng nằm trên một đường tròn.
- Dây cung đi qua tâm của đường tròn gọi là đường kính của đường tròn.
- Một dây cung sẽ chia đường tròn thành hai phần, tương ứng với hai cung của đường tròn (cung lớn và cung nhỏ).



Định lí 6. Trong các dây cung của một đường tròn, đường kính là dây cung lớn nhất.

Định lí 7. Trong một đường tròn

1) Đường kính vuông góc với một dây cung thì đi qua trung điểm của dây đó.
2) Đường kính đi qua trung điểm của một dây cung không đi qua tâm của đường tròn thì vuông góc với dây đó.



2 Các ví dụ

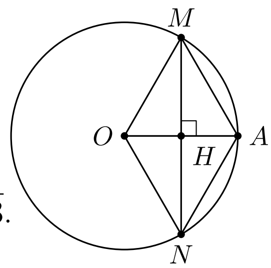
Ví dụ 1. Cho đường tròn $(O; 10)$. Lấy một điểm A tùy ý thuộc (O). Vẽ dây MN vuông góc với OA tại trung điểm của OA.

a) Chứng minh $OMAN$ là hình thoi. b) Tính độ dài dây MN.

Lời giải.

1. Gọi H là trung điểm của OA. Vì $MN \perp OA$ tại H nên H cũng là trung điểm của MN, do đó $OMAN$ là hình thoi.
2. Xét $\triangle OHM$ vuông tại H có $OH = 5$ và $OM = 10$, do đó

$$HM = \sqrt{OM^2 - OH^2} = \sqrt{100 - 25} = 5\sqrt{3} \Rightarrow MN = 2MH = 10\sqrt{3}.$$

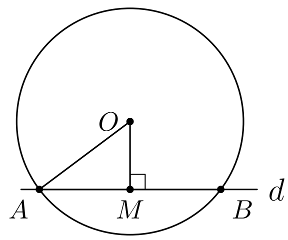


□

Ví dụ 2. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M nằm trong đường tròn (O).

1. Hãy nêu cách dựng dây AB của đường tròn (O) nhận M làm trung điểm.
2. Tính độ dài dây AB ở câu a) biết $R = 5$ cm và $OM = 1,4$ cm.

Lời giải.

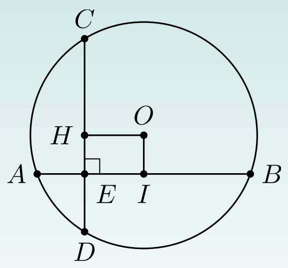


1. Dựng đường thẳng d đi qua M và vuông góc với OM. Giả sử d cắt đường tròn (O) tại A, B. Khi đó ta có M là trung điểm AB.
2. Xét tam giác AOM vuông tại M có

$$AM = \sqrt{AO^2 - OM^2} = \sqrt{5^2 - 1,4^2} = 4,8 \Rightarrow AB = 9,6 \text{ cm}.$$

□

Ví dụ 3.
Trong hình vẽ bên có $AB \perp CD$, $AE = 2$, $EB = 6$, $EC = 4$ và $ED = 3$. Tính độ dài đường kính của đường tròn (O).



Lời giải.

Ta có $AB = AE + EB = 2 + 6 = 8$ cm, $CD = CE + ED = 4 + 3 = 7$ cm.
Kẻ $OI \perp AB$ tại I và $OH \perp CD$ tại H. Khi đó I, H lần lượt là trung điểm của AB, CD. Do vậy $IA = IB = \dfrac{AB}{2} = 4$ và $HC = HD = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{7}{2}$.
Ta có

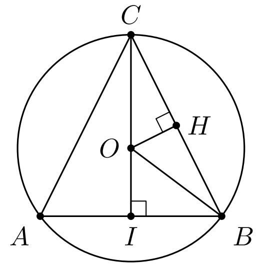
$$OI = HE = CE - CH = 4 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}.$$

Do đó $OB = \sqrt{OI^2 + IB^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + 4^2} = \dfrac{\sqrt{65}}{2} \Rightarrow 2R = \sqrt{65}$. □

Ví dụ 4. Cho đường tròn (O) và dây $AB = 2a$ sao cho khoảng cách từ tâm O đến AB bằng h. Gọi I là trung điểm của AB. Tia IO cắt đường tròn (O) tại C.

1. Chứng minh rằng tam giác ABC cân tại C.
2. Tính khoảng cách từ O đến BC.

Lời giải.



1. Vì $OA = OB$ và I là trung điểm AB nên $OI \perp AB$. Lại có $CI \perp AB$ nên CI vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến trong tam giác $CAB \Rightarrow$ tam giác ABC cân tại C.

2. Hạ $OH \perp BC$ tại $H \Rightarrow H$ là trung điểm của BC, do đó $HB = HC = \dfrac{BC}{2}$.

Xét tam giác OIB vuông tại I có $IB = a$, $OI = h$ nên $OB = \sqrt{OI^2 + IB^2} = \sqrt{a^2 + h^2}$.
Mà $CI = CO + OI = h + \sqrt{a^2 + h^2}$.
Xét tam giác IBC vuông tại I có

$$BC = \sqrt{CI^2 + IB^2} = \sqrt{(h + \sqrt{a^2 + h^2})^2 + a^2} = \sqrt{2(a^2 + h^2 + h\sqrt{a^2 + h^2})}.$$

Do đó $HB = \dfrac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + h^2 + h\sqrt{a^2 + h^2})}$.
Xét tam giác HOB vuông tại H có

$$\begin{aligned} OH &= \sqrt{OB^2 - HB^2} = \sqrt{\left(\sqrt{a^2 + h^2}\right)^2 - \left[\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + h^2 + h\sqrt{a^2 + h^2})}\right]^2} \\ &= \sqrt{\frac{a^2 - h\sqrt{a^2 + h^2} + h^2}{2}}. \end{aligned}$$

□

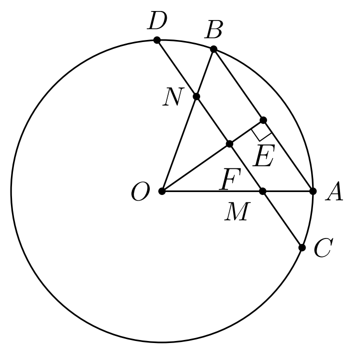
Ví dụ 5. Cho đường tròn $(O; R)$ và hai bán kính OA, OB. Trên các bán kính OA, OB lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $OM = ON$. Vẽ dây CD đi qua M và N (M nằm giữa C và N).

1. Chứng minh rằng $CM = DN$.

2. Giả sử $\widehat{AOB} = 90^\circ$ và $CM = MN = ND$, hãy tính độ dài OM theo R.

Lời giải.

1.



Hạ $OE \perp AB$ tại E và OE cắt CD tại F.
Trong tam giác OAB cân tại O, ta có

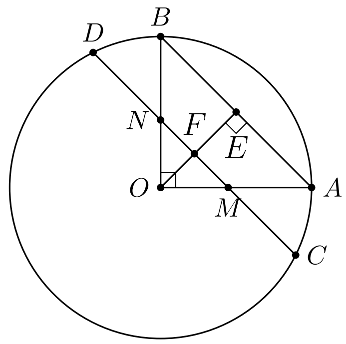
$$\frac{OM}{OA} = \frac{ON}{OB} \Rightarrow MN \parallel AB \Rightarrow OF \perp MN \text{ và } MF = NF.$$

Vì $OF \perp MN$ nên $OF \perp CD \Rightarrow F$ là trung điểm CD, do vậy $FC = FD$. Ta có

$$CM = CF - MF = DF - NF = DN \text{ (đpcm)}.$$

2.

Đặt $MF = x \Rightarrow CF = CM + MF = 3MF = 3x$. Vì tam giác OAB vuông cân tại O và $MN \,/\!/\, AB$ nên tam giác OMN vuông cân tại $O \Rightarrow OF = MF = x$.
Xét tam giác OCF vuông tại F, ta có



$$OF^2 = OC^2 - CF^2 \Leftrightarrow x^2 = R^2 - 9x^2 \Leftrightarrow x = \frac{R}{\sqrt{10}}.$$

Khi đó $OM = ON = OF\sqrt{2} = \dfrac{R}{\sqrt{5}}$.

Vậy với $OM = ON = \dfrac{R}{\sqrt{5}}$ sẽ thỏa mãn đề bài.

□

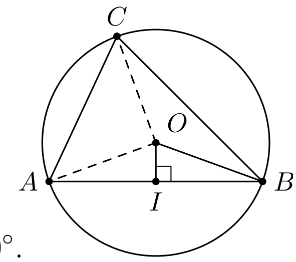
Ví dụ 6. Cho đường tròn $(O; R)$ và hai dây $AB = R\sqrt{3}$, $AC = R\sqrt{2}$ (B, C nằm về hai phía đối với đường thẳng AO). Hãy tính các góc của tam giác ABC.

Lời giải.

Xét tam giác OAC có $OA = OC = R$, $AC = R\sqrt{2}$ nên $\triangle OAC$ vuông cân tại $O \Rightarrow \widehat{OCA} = \widehat{OAC} = 45^\circ$.

Kẻ $OI \perp AB$ tại $I \Rightarrow IA = IB = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác OIB vuông tại I có



$$\cos\widehat{OBI} = \frac{IB}{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{OAI} = \widehat{OBI} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 180^\circ - 2\cdot 30^\circ = 120^\circ.$$

Do vậy $\widehat{CAB} = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$.
Lại có

$$360^\circ = \widehat{COA} + \widehat{AOB} + \widehat{COB} \Rightarrow \widehat{COB} = 360^\circ - 90^\circ - 120^\circ = 150^\circ.$$

Xét tam giác OBC cân tại O, ta có

$$\widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ.$$

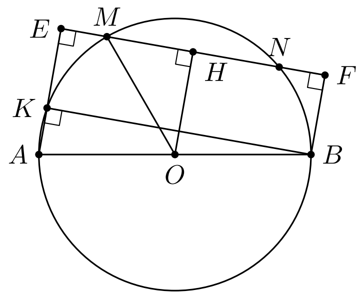
Do đó $\widehat{ACB} = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$ và $\widehat{ABC} = 30^\circ + 15^\circ = 45^\circ$.

□

Ví dụ 7. Cho nửa đường tròn (O), đường kính $AB = 10$ cm. Một dây $MN = 8$ cm có hai đầu mút di chuyển trên nửa đường tròn (O) (điểm M nằm trên cung nhỏ $\overset{\frown}{AN}$). Gọi E, F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A, B trên đường thẳng MN.

1. Chứng minh EF và MN có trung điểm trùng nhau.
2. Chứng minh $ME = NF$.
3. Xác định vị trí của MN để diện tích tứ giác $ABFE$ lớn nhất.

Lời giải.



1. Kẻ $OH \perp MN$
   $\Rightarrow H$ là trung điểm của NM và $AE \parallel OH \parallel BF$. (1)
   Do O là trung điểm AB nên $AE \parallel OH \parallel BF$ và cách đều nhau, do đó $EH = HF$. (2)
   Từ (1) và (2) ta có EF và MN có trung điểm trùng nhau.
2. Ta có $ME = EH - HM = FH - HN = NF$.
   Vậy $ME = NF$.

c) Vì H là trung điểm của MN nên $HM = HN = 4$ cm. Xét tam giác OMH vuông tại H có

$$OH = \sqrt{MO^2 - HM^2} = \sqrt{25 - 16} = 3 \text{ cm}.$$

Vì $ABFE$ là hình thang có OH là đường trung bình nên $AE + BF = 2OH = 6$ cm.
Kẻ $BK \perp AE$ tại $K \Rightarrow BK \parallel MN$ và $BK \leq AB$. Do vậy

$$S_{ABFE} = \frac{(AE + BF)BK}{2} = \frac{6BK}{2} = 3BK \leq 3AB = 30 \text{ cm}^2.$$

Dấu bằng xảy ra khi $BK = AB$, hay $MN \parallel AB$.
Vậy khi $MN \parallel AB$ thì diện tích tứ giác $ABFE$ lớn nhất.

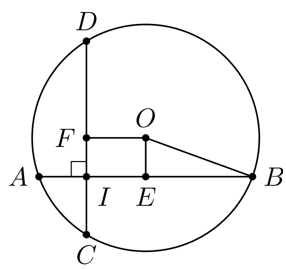
□

3 Luyện tập

Bài 1. Cho đường tròn $(O; 5 \text{ cm})$ và dây $AB = 8$ cm.

1. Tính khoảng cách từ tâm O đến dây AB.
2. Lấy điểm I trên dây AB sao cho $AI = 1$ cm. Qua I kẻ dây CD vuông góc với AB. Chứng minh rằng $AB = CD$.

Lời giải.

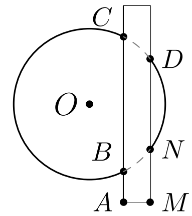


1. Kẻ $OE \perp AB$ tại E. Khi đó E là trung điểm của AB, do vậy $EA = EB = \dfrac{AB}{2} = 4$.
   Ta có $OE = \sqrt{OB^2 - EB^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$ cm.
2. Kẻ $OF \perp CD$ tại $F \Rightarrow F$ là trung điểm của CD.
   Do vậy $FC = FD = \dfrac{CD}{2}$.

   Ta có $IE = AE - AI = 4 - 1 = 3$ cm, suy ra $OEIF$ là hình vuông. Do đó $OF = 3$ cm.
   Xét tam giác OFD vuông tại F, ta có $FD = \sqrt{OD^2 - OF^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$ cm.
   Do vậy $CD = 2FD = 8$ cm, suy ra $AB = CD$.

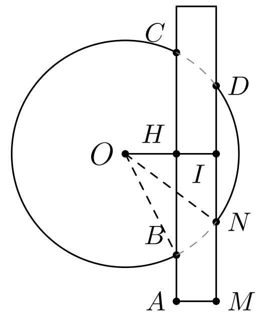
□

Bài 2.
Trong hình vẽ bên có một mảnh giấy hình chữ nhật che khuất một phần của đường tròn (O). Cho biết $AB = 1$ cm, $BC = 4$ cm và $MN = 2$ cm.



1. Tính độ dài đoạn DN.
2. Cho $AM = 1$ cm. Tính bán kính của đường tròn (O).

Lời giải.



1. Kẻ $OH \perp BC$ tại H, OH cắt DN tại I. Khi đó $H,\ I$ lần lượt là trung điểm của $BC,\ DN$.
   Ta có $HB = HC = \dfrac{BC}{2} = 2$ cm. Vì $AMIH$ là hình chữ nhật nên $IM = AH = AB + BH = 1 + 2 = 3$ cm.
   Do đó $IN = IM - MN = 3 - 2 = 1$ cm.
   Vậy $DN = 2IN = 2$ cm.

b) Xét tam giác OHB vuông tại H có $OB = \sqrt{OH^2 + 4}$.
Xét tam giác OIN vuông tại I có $OI = OH + HI = OH + 1$, do đó

$$ON = \sqrt{OI^2 + IN^2} = \sqrt{(OH+1)^2 + 1}.$$

Mà $ON = OB \Leftrightarrow \sqrt{OH^2+4} = \sqrt{(OH+1)^2+1} \Leftrightarrow OH^2 + 4 = OH^2 + 2OH + 2 \Leftrightarrow OH = 1$.
Khi đó $OB = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ cm.

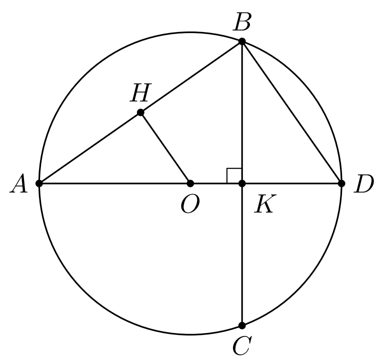
□

Bài 3. Cho đường tròn $(O; OA)$ và đường kính $AD = 12,5$ cm. Lấy điểm B thuộc đường tròn $(O; OA)$ sao cho $AB = 10$ cm. Kẻ dây BC vuông góc với đường kính AD. Tính các khoảng cách từ tâm O đến các dây AB và BC.

Lời giải.

Vì $OA = OD = OB$ nên tam giác ABD vuông tại B, do đó

$$BD = \sqrt{AD^2 - AB^2} = \sqrt{12,5^2 - 10^2} = 7,5 \text{ cm}.$$



Kẻ $OH \perp AB$ tại $H \Rightarrow OH = \dfrac{BD}{2} = 3,75$ cm.
Gọi K là giao điểm của AD và BC, khi đó $OK \perp BC$.
Xét tam giác ABD vuông tại B ta có

$$AB^2 = AK \cdot AD \Rightarrow AK = \frac{10^2}{12,5} = 8 \text{ cm}.$$

Do đó $OK = AK - AO = 8 - \dfrac{12,5}{2} = 1,75$ cm.

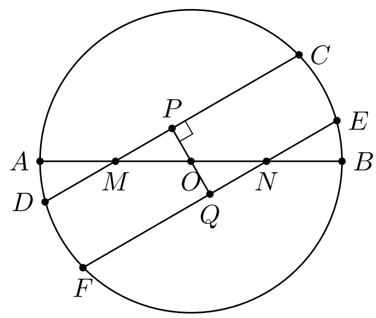
□

Bài 4. Cho đường tròn (O) và đường kính AB. Gọi $M,\ N$ theo thứ tự là trung điểm của $OA,\ OB$. Qua $M,\ N$ lần lượt vẽ các dây $CD,\ EF$ song song với nhau ($C,\ E$ cùng nằm trên một nửa đường tròn đường kính AB).

1. Chứng minh tứ giác $CDFE$ là hình chữ nhật.

2. Giả sử CD và EF cùng tạo với AB một góc 30°. Tính diện tích hình chữ nhật $CDFE$.

Lời giải.



1. Kẻ $OP \perp CD$ tại P
$\Rightarrow P$ là trung điểm CD và $OP \perp EF$ (do $CD \parallel EF$).
Giả sử OP cắt EF tại $Q \Rightarrow Q$ là trung điểm của EF.
Xét hai tam giác vuông OPM và OQN có $OM = \dfrac{OA}{2} = \dfrac{OB}{2} = ON$ và $\widehat{MOP} = \widehat{NOQ}$ nên $\triangle OPM = \triangle OQN$, do đó $OP = OQ \Rightarrow CD = EF$.
Xét tứ giác $CDFE$ có $CD = EF$ và $CD \parallel EF$ nên $CDFE$ là hình bình hành.
Lại có PQ là đường trung bình của hình bình hành $CDFE$ và $PQ \perp CE \Rightarrow CD \perp CE$.
Do đó $CDFE$ là hình chữ nhật.

b) Xét tam giác OPM vuông tại P có $\widehat{OMP} = 30^\circ$, suy ra

$$OP = \frac{OM}{2} = \frac{OA}{4} = \frac{R}{4} \Rightarrow CE = PQ = 2OP = \frac{R}{2}. \tag{1}$$

Xét tam giác OPC vuông tại P, ta có

$$CP = \sqrt{OC^2 - OP^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{16}} = \frac{R\sqrt{15}}{4} \Rightarrow CD = 2CP = \frac{R\sqrt{15}}{2}. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta có $S_{CDFE} = CD \cdot CE = \dfrac{R}{2} \cdot \dfrac{R\sqrt{15}}{2} = \dfrac{R^2\sqrt{15}}{4}$.

□

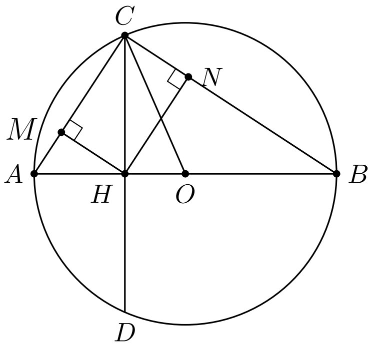
Bài 5. Cho đường tròn (O) và đường kính $AB = 13$ cm. Dây $CD = 12$ cm vuông góc với AB tại H.

1. Tính độ dài các đoạn $HA,\ HB$.

2. Gọi $M,\ N$ theo thứ tự là hình chiếu của H lên $AC,\ BC$. Tính diện tích tứ giác $CMHN$.

Lời giải.

1. Vì $CD \perp AB$ tại H nên $CH = \dfrac{CD}{2} = 6$ cm.
   Giả sử $HA < HB$. Xét tam giác OCH vuông tại H có
   $$OH = \sqrt{OC^2 - HC^2} = \sqrt{6,5^2 - 6^2} = 2,5 \text{ cm}.$$
   Do đó
   $HA = 6,5 - 2,5 = 4$ cm và $HB = 13 - 4 = 9$ cm.



2. Vì $\triangle CHN \backsim \triangle ABC$ nên
   $$\frac{S_{CHN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{CH}{AB}\right)^2 = \frac{6^2}{13^2} = \frac{36}{169}.$$
   Mà $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 13 \cdot 6 = 39 \text{ cm}^2$ nên
   $$S_{CHN} = 39 \cdot \frac{36}{169} = \frac{108}{13} \text{ cm}^2 \Rightarrow S_{CMHN} = \frac{216}{13} \text{ cm}^2.$$

□

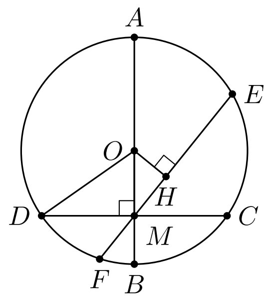
Bài 6. Cho đường tròn $(O; 5 \text{ cm})$ và điểm M cách O một đoạn là 3 cm.

1. Tính độ dài dây cung ngắn nhất của (O) đi qua M.

2. Tính độ dài dây cung dài nhất của (O) đi qua M.

Lời giải.

Giả sử EF là một dây cung tùy ý qua M, CD là dây cung đi qua M và vuông góc với OM, AB là đường kính chứa M của đường tròn (O). Kẻ $OH \perp EF$ tại $H \Rightarrow H$ là trung điểm EF.



1. Ta có $HE = \sqrt{OE^2 - OH^2}$. Vì $EF = 2HE$, $OE = 5$ cm nên EF nhỏ nhất khi HE lớn nhất.
   Lại có tam giác OHM vuông tại H nên $OH \leq OM$.
   Dấu bằng chỉ xảy ra khi $H \equiv M \Leftrightarrow EF \equiv CD$.
   Ta có $MC = \sqrt{OC^2 - OM^2} = \sqrt{25 - 9} = 4 \Rightarrow CD = 8$ cm.
   Vậy EF nhỏ nhất bằng 8 cm khi $EF \perp OM$.

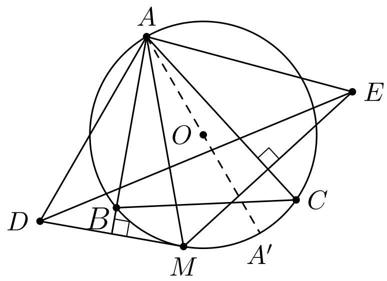
2. Vì AB là đường kính đi qua $M \Rightarrow EF \leq AB$. Do vậy EF lớn nhất bằng 10 cm khi EF là đường kính đi qua M.

□

Bài 7. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) và M là điểm bất kỳ trên cung tròn $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A. Gọi D, E lần lượt là điểm đối xứng của M qua AB, AC. Tìm vị trí của M để độ dài DE nhỏ nhất.

Lời giải.

Gọi AA' là đường kính của đường tròn (O).
Vì D, E lần lượt là điểm đối xứng của M qua AB, AC nên $AD = AM = AE$, do đó tam giác AED cân tại A.
Lại có $\widehat{DAE} = \widehat{DAM} + \widehat{MAE} = 2(\widehat{BAM} + \widehat{MAC}) = 2\widehat{BAC}$ (không đổi).
Vì vậy DE lớn nhất khi AD lớn nhất, tức là AM lớn nhất $\Leftrightarrow M \equiv A'$.



□

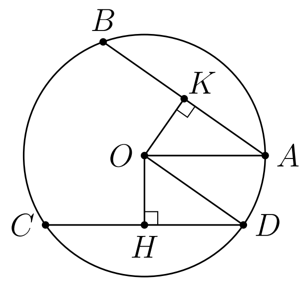
§3 Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây

1 Tóm tắt lí thuyết

Định lí 8. Trong một đường tròn:

1) Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.

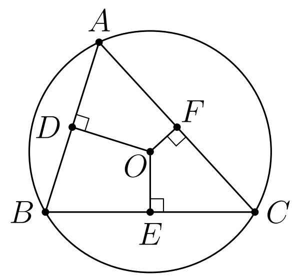
2) Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.



Định lí 9. Trong hai dây của một đường tròn:

1) Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.

2) Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.



⚠ **26.** Cả hai định lý trên vẫn đúng với trường hợp hai đường tròn có bán kính bằng nhau (gọi là hai đường tròn bằng nhau).

2 Các ví dụ

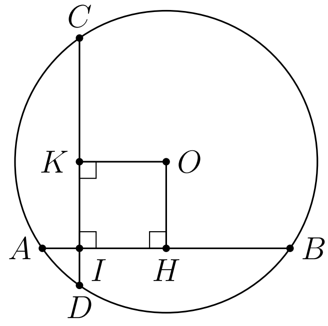
Ví dụ 1. Cho đường tròn tâm (O) bán kính $5\,\text{cm}$, dây AB bằng $8\,\text{cm}$.

1. Tính khoảng cách từ tâm O đến dây AB.

2. Gọi I là điểm thuộc dây AB sao cho $AI = 1\,\text{cm}$. Kẻ dây CD qua I và vuông góc với AB. Chứng minh rằng $CD = AB$.

Lời giải.

1. Gọi H là trung điểm của AB, suy ra $OH \perp AB$.
   Khoảng cách từ O đến dây AB là
   $$OH = \sqrt{OA^2 - HA^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3\,\text{cm}.$$
2. Kẻ $OK \perp CD$ tại K. Suy ra $OKIH$ là hình chữ nhật.
   mà $IH = AH - AI = 3\,\text{cm} \Rightarrow IH = OH$.
   suy ra $OKIH$ là hình vuông $\Rightarrow OK = OH$.
   Do đó khoảng cách từ tâm O đến hai dây AB và CD bằng nhau, suy ra $AB = CD$.



□

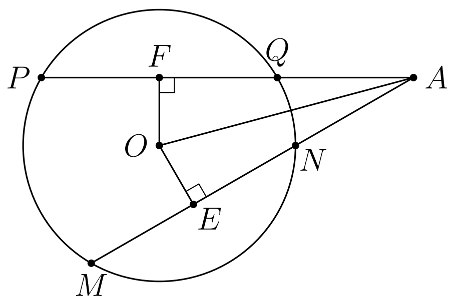
Ví dụ 2. Cho đường tròn tâm (O) các dây MN và PQ bằng nhau, các tia MN và PQ cắt nhau tại điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Gọi E và F theo thứ tự là trung điểm của MN và PQ. Chứng minh rằng:

a) $AE = AF$. b) $AN = AQ$.

Lời giải.

1. Chứng minh $AE = AF$.

   Vì E, F lần lượt là trung điểm của MN, PQ nên
   $$OE \perp MN \text{ và } OF \perp PQ.$$
   Mặt khác, $MN = PQ \Rightarrow OE = OF$.
   Suy ra
   $$AE = \sqrt{OA^2 - OE^2} = \sqrt{OA^2 - OF^2} = AF.$$



2. Chứng minh $AN = AQ$.
   Ta có
   $$AN = AE - NE \text{ và } AQ = AF - FQ$$
   mà
   $$NE = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}PQ = QF \text{ và } AE = AF$$
   Suy ra $AN = AQ$.

□

Ví dụ 3. Cho đường tròn tâm (O), dây AB và dây CD, $AB < CD$. Giao điểm K của các đường thẳng AB, CD nằm ngoài đường tròn. Đường tròn $(O; OK)$ cắt KA và KC tại M và N. Chứng minh rằng $KM < KN$.

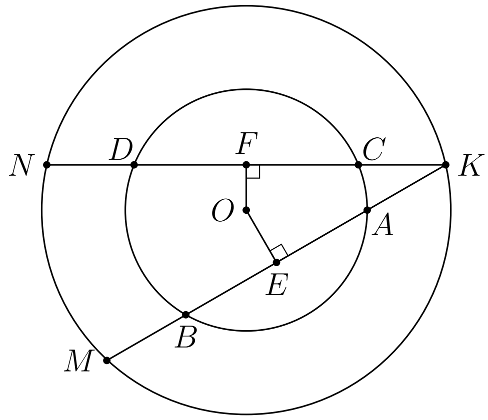
Lời giải.

Kẻ $OE \perp AB$ tại E, kẻ $OF \perp CD$ tại F.
Trong đường tròn nhỏ, ta có

$$AB < CD \Rightarrow OE > OF.$$

Trong đường tròn lớn, ta có

$$OE > OF \Rightarrow KM < KN.$$



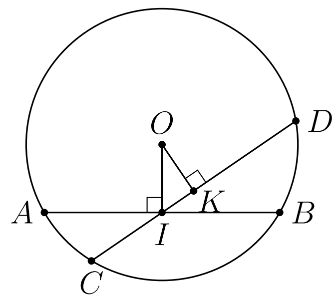
□

Ví dụ 4. Cho đường tròn tâm (O) và điểm I nằm bên trong đường tròn. Chứng minh rằng dây AB vuông góc với OI tại I ngắn hơn mọi dây khác đi qua I.

Lời giải.

Gọi CD là dây bất kỳ (khác AB) đi qua I. Ta cần chứng minh $AB < CD$.
Kẻ $OI \perp CD$ tại K.
Tam giác OKI vuông tại K nên $OI > OK$.
Trong đường tròn (O), ta có

$$OI > OK \Rightarrow AB < CD.$$



□

Ví dụ 5. Cho đường tròn tâm (O) và hai dây AB, AC sao cho $AB < AC$ và tâm O nằm trong góc $\widehat{ABC}$. Chứng minh rằng $\widehat{OAB} > \widehat{OAC}$.

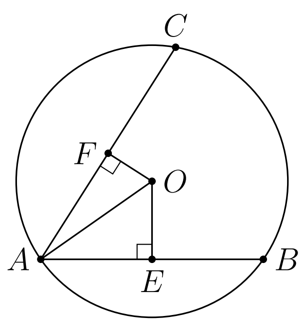
Lời giải.

Kẻ $OE \perp AB$ tại E, kẻ $OF \perp AC$ tại F.
Trong đường tròn (O), ta có

$$AB < AC \Rightarrow OE > OF.$$

$$\Rightarrow \sin \widehat{OAE} = \frac{OE}{OA} > \frac{OF}{OA} = \sin \widehat{OAF}.$$

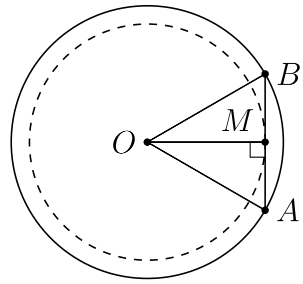
Suy ra $\widehat{OAE} > \widehat{OAF}$ hay $\widehat{OAB} > \widehat{OAC}$.



□

Ví dụ 6. Cho đường tròn tâm (O, R), dây AB di động sao cho $\widehat{AOB} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh rằng điểm M luôn di động trên một đường tròn cố định.

Lời giải.



Vì M là trung điểm của dây AB nên $OM \perp AB$.
Lại có $OA = OB$ và $\widehat{AOB} = 60^\circ$ (O), suy ra tam giác OAB đều.
Do đó,

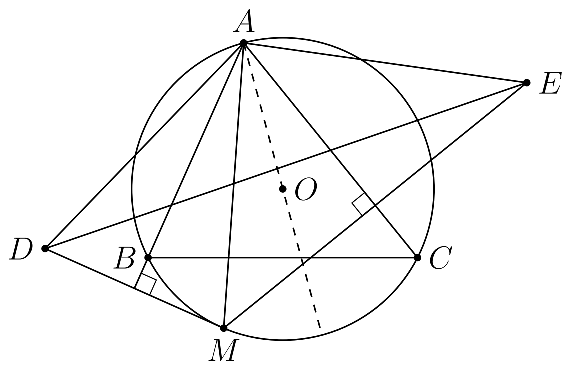
$$OM = \frac{OA\sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra M di động trên đường tròn tâm O, bán kính bằng $\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

□

Ví dụ 7. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là điểm bất kỳ thuộc cung BC không chứa A. Gọi D, E theo thứ tự là điểm đối xứng với M qua AB, AC. Tìm vị trí của M để DE có độ dài lớn nhất.

Lời giải.



Ta có AB, AC lần lượt là đường trung trực của MD và ME nên

$$AD = AM = AE.$$

Mặt khác,

$$\widehat{MAD} + \widehat{MAE} = 2\widehat{BAM} + 2\widehat{MAC} = 2\widehat{BAC}.$$

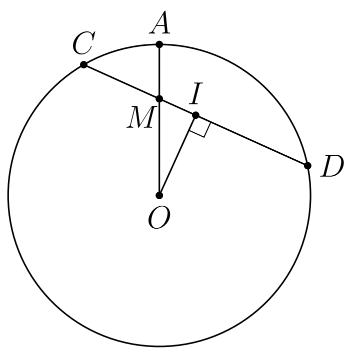
Do đó, tam giác ADE cân tại A có $\widehat{DAE}$ không đổi nên DE lớn nhất khi AD lớn nhất tương đương AM lớn nhất hay AM là đường kính của (O).

□

3 Luyện tập

Bài 1. Cho đường tròn tâm O bán kính $OA = 11\,\text{cm}$. Điểm M thuộc bán kính OA và cách O là $7\,\text{cm}$. Qua M kẻ dây CD có độ dài $18\,\text{cm}$, $MC < MD$. Tính các độ dài MC, MD.

Lời giải.



Kẻ $OI \perp CD$ tại I, suy ra I là trung điểm CD. Ta có

$$OI = \sqrt{OC^2 - CI^2} = \sqrt{11^2 - 9^2} = 2\sqrt{10}.$$

và

$$IM = \sqrt{OM^2 - OI^2} = \sqrt{7^2 - \left(2\sqrt{10}\right)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Suy ra

$$CM = CI - IM = 9 - 3 = 6\,(\text{cm})$$

và

$$DM = CD - CM = 18 - 6 = 12\,(\text{cm}).$$

□

Bài 2. Cho đường tròn tâm O bán kính $25\,\text{cm}$. Hai dây AB, CD song song với nhau và có độ dài lần lượt là $40\,\text{cm}$, $48\,\text{cm}$. Tính khoảng cách giữa hai dây AB, CD.

Lời giải.

Kẻ $OM \perp AB$ tại M; $ON \perp CD$ tại N.
Vì $AB \parallel CD$ nên M, O, N thẳng hàng. Ta có

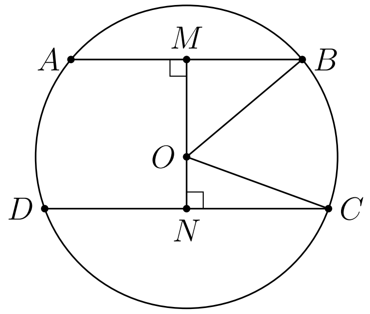
$$OM = \sqrt{OB2 - MB^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15.$$

và

$$ON = \sqrt{OC^2 - NC^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7.$$

Khoảng cách d giữa AB và CD là

$$d = OM + ON = 15 + 7 = 22\,(\text{cm}).$$



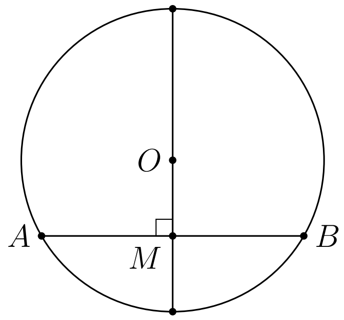
□

Bài 3. Cho đường tròn tâm O, đường kính $10\,\text{dm}$, điểm M cách O là $3\,\text{dm}$.

1. Tính độ dài dây ngắn nhất đi qua M.
2. Tính độ dài dây dài nhất đi qua M.

Lời giải.

1. Tính độ dài dây ngắn nhất đi qua M.
Theo ví dụ 1.4, gọi AB là dây cung đi qua M và vuông góc với OM, khi đó dây AB ngắn hơn mọi dây cung khác đi qua M. Ta có
$$AB = 2AM = 2\sqrt{OA^2 - OM^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4\,\text{dm}.$$
2. Tính độ dài dây dài nhất đi qua M.
Đường kính là dây cung lớn nhất. Do đó, dây cung đi qua O và M là dài nhất và bằng $10\,\text{dm}$.



□

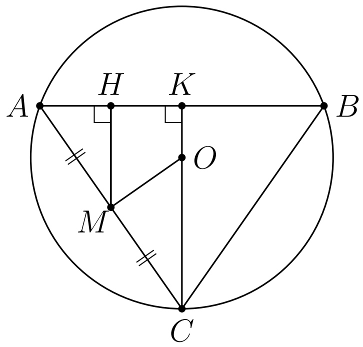
Bài 4. Cho đường tròn tâm O, dây $AB = 24\,\text{cm}$, dây $AC = 20\,\text{cm}$. Biết $\widehat{BAC} < 90^\circ$ và điểm O nằm trong góc $\widehat{BAC}$. Gọi M là trung điểm của AC, khoảng cách từ M đến AB bằng $8\,\text{cm}$.

1. Chứng minh rằng tam giác ABC cân.
2. Tính bán kính của đường tròn đã cho.

Lời giải.

1. Chứng minh tam giác ABC cân.

Kẻ $MH \perp AB$ tại H. Tam giác AHM vuông tại H, có $AM = 10\,\text{cm}$, $MH = 8\,\text{cm}$, suy ra
$$AH = \sqrt{MA^2 - MH^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6\,\text{cm}.$$
Kẻ $CK \perp AB$ tại K, suy ra $MH \parallel CK$.
Tam giác ACK có MH là đường trung bình nên
$$CK = 2MH = 16\,\text{cm}, \text{ và } AK = 2AH = 12\,\text{cm}.$$



Vì $AK = \dfrac{1}{2}AB$ nên K là trung điểm AB. Vậy tam giác ABC cân tại C.

2. Tính bán kính của đường tròn (O).
   Ta có $CK \perp AB$ và $OK \perp AB$ nên $O \in CK$.
   Hai tam giác OMC và AKC có $\widehat{C}$ chung và $\widehat{OMC} = \widehat{AKC} = 90^\circ$.
   Do đó, hai tam giác OMC và AKC đồng dạng. Suy ra
   $$\frac{MC}{KC} = \frac{OC}{AC} \Rightarrow OC = \frac{10 \cdot 20}{16} = 12{,}5\,(\text{cm}).$$
   Vậy đường tròn (O) có bán kính bằng $12{,}5\,\text{cm}$.

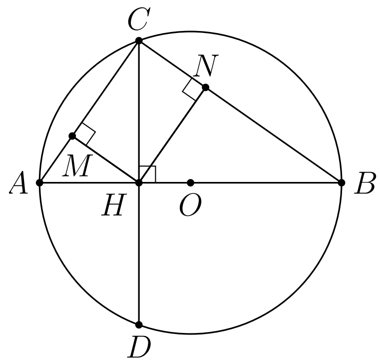
□

Bài 5. Cho đường tròn tâm O, đường kính $AB = 13\,\text{cm}$. Dây CD có độ dài $12\,\text{cm}$ và vuông góc với AB tại H.

1. Tính độ dài đoạn AH và BH.
2. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của H trên AC, BC. Tính diện tích tứ giác $CMHN$.

Lời giải.

1. Tính độ dài đoạn AH và BH.

   Ta có $AB \perp CD$, suy ra $CH = \frac{1}{2}CD = 6\,\text{cm}$.
   Tam giác CHO vuông tại H, ta có
   $$OH = \sqrt{OC^2 - OH^2} = \sqrt{(6{,}5)^2 - 6^2} = 2{,}5\,\text{cm}.$$
   Giả sử $AH < BH$, khi đó
   $$AH = AO - HO = 4\,\text{cm}, \text{ và } BH = HO + OB = 9\,\text{cm}.$$

2. Tính diện tích tứ giác $CMHN$.
   Vì AB là đường kính nên tam giác ABC vuông tại C. Do đó $CMHN$ là hình chữ nhật.
   Tam giác CHA vuông tại H, HM là đường cao nên
   $$\frac{1}{HM^2} = \frac{1}{HC^2} + \frac{1}{HA^2} = \frac{13}{144} \Rightarrow HM = \frac{12\sqrt{13}}{13}\,(\text{cm}).$$
   Tam giác CHB vuông tại H, HN là đường cao nên
   $$\frac{1}{HN^2} = \frac{1}{HC^2} + \frac{1}{HB^2} = \frac{13}{324} \Rightarrow HN = \frac{18\sqrt{13}}{13}\,(\text{cm}).$$
   Diện tích $CMHN$ là
   $$S_{CMHN} = HM \cdot HN = \frac{216}{13}\,(\text{cm}^2).$$

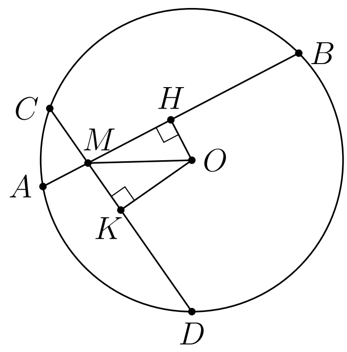
□

Bài 6. Cho đường tròn (O) và hai dây cung AB và CD cắt nhau tại điểm M nằm bên trong đường tròn. Gọi H và K theo thứ tự là trung điểm của AB và CD. Cho biết $AB > CD$, chứng minh rằng $MH > MK$.

Lời giải.

Tam giác OHM và OKM vuông tại H và K. Ta có

$$\begin{aligned} MH^2 - MK^2 &= \left(OM^2 - OH^2\right) - \left(OM^2 - OK^2\right) \\ &= OK^2 - OH^2. \end{aligned}$$



Mặt khác, trong đường tròn (O), ta có

$$AB > CD \Rightarrow OH < OK \Rightarrow OK^2 - OH^2 > 0.$$

Suy ra

$$MH^2 > MK^2 \text{ hay } MH > MK.$$

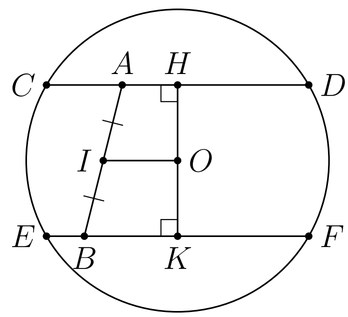
□

Bài 7. Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B nằm bên trong đường tròn và không cùng thuộc một đường kính. Dựng hai dây song song và bằng nhau sao cho điểm A nằm trên một dây, điểm B nằm trên một dây còn lại.

Lời giải.

Cách dựng.

1. Dựng trung điểm I của đoạn AB.
2. Qua A, dựng dây CD song song với OI.
3. Qua B, dựng dây EF song song với OI.



Chứng minh.
Theo cách dựng trên ta đã có hai dây CD và EF song song với nhau.

Kẻ $OH \perp CD$ và $OK \perp EF$.
Ta có IO là đường trung bình của hình thang $AHKB$ nên suy ra $OH = OK$.
Trong đường tròn (O), ta có

$$OH = OK \Rightarrow CD = EF.$$

Biện luận.
Bài toán có một nghiệm hình. □

Bài 8. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB, dây CD. Gọi H, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ A, B đến CD.

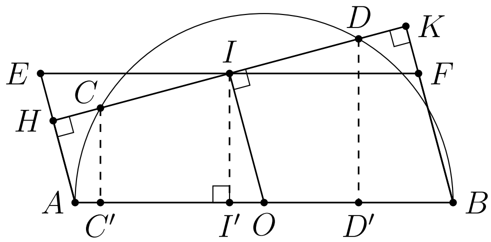
1. Chứng minh rằng $CH = DK$.
2. Chứng minh rằng $S_{AHKB} = S_{ACB} + S_{ADB}$.
3. Tính diện tích lớn nhất của tứ giác $AHBK$, biết $AB = 30\,\text{cm}$, $CD = 18\,\text{cm}$.

Lời giải.

1. Chứng minh rằng $CH = DK$.

   Kẻ $OI \perp CD$ tại I, suy ra I là trung điểm CD.
   Ta có AH, BK, OI song song với nhau (do cùng vuông góc với CD), đồng thời O là trung điểm của AB nên OI là đường trung bình của hình thang $AHKB$, suy ra $IH = IK$. Do đó

   $$CH = IH - IC = IK - ID = DK.$$



2. Qua I, kẻ đường thẳng song song với AB, cắt AH, BK lần lượt tại E, F.
Gọi I', C', D' lần lượt là hình chiếu của I, C, D lên cạnh AB. Khi đó, II' là đường trung bình của hình thang $CC'D'D$, suy ra $CC' + DD' = 2II'$.
Hai tam giác vuông IHE và IKF có $IH = IK$ và $\widehat{HIE} = \widehat{KIF}$ nên bằng nhau. Suy ra,
$$S_{AHKB} = S_{AEFB} = AB \cdot II'. \quad (1)$$
Mặt khác,
$$S_{ABC} + S_{ADB} = \frac{1}{2}CC' \cdot AB + \frac{1}{2}DD' \cdot AB = AB \cdot II'. \quad (2)$$
Từ (1) và (2), suy ra
$$S_{AHKB} = S_{ACB} + S_{ADB}.$$

3. Độ dài $OI = \sqrt{OC^2 - IC^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12\,\text{cm}$. Ta có
$$S_{AHKB} = AB \cdot II' \leqslant AB \cdot IO = 30 \cdot 12 = 360.$$
Dấu "=" xảy ra khi $I' \equiv O$ hay $CD \parallel AB$.
Vậy hình thang $AHKB$ có diện tích lớn nhất bằng $360\,\text{cm}^2$.

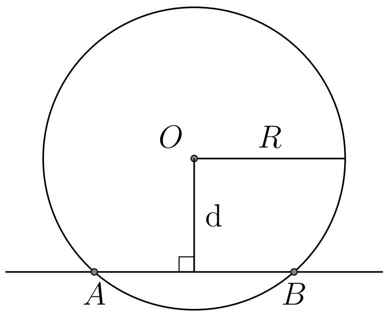
□

§4 Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

1 Tóm tắt lí thuyết

1.1 Đường thẳng và đường tròn cắt nhau

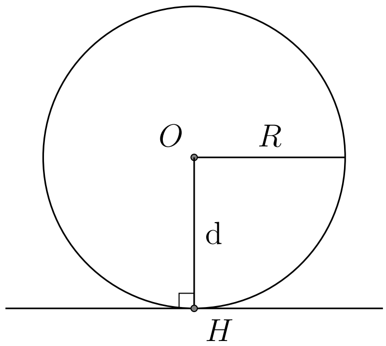
- Đường tròn và đường thẳng cắt nhau khi bán kính của đường tròn lớn hơn khoảng cách từ tâm đường tròn đó đến đường thẳng đã cho. $R > d$.
- Đường thẳng cắt đường tròn tại 2 điểm phân biệt. Số giao điểm bằng 2.



27. Số giao điểm lớn nhất của đường thẳng và đường tròn là 2 giao điểm.

1.2 Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau

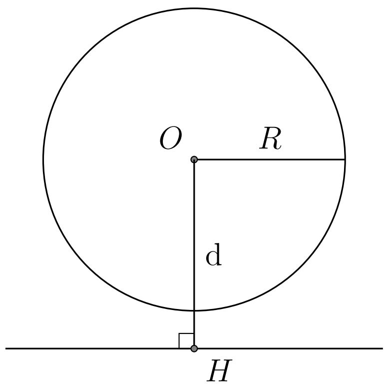
- Đường tròn và đường thẳng tiếp xúc nhau khi bán kính của đường tròn bằng khoảng cách từ tâm đường tròn đó đến đường thẳng đã cho. $R = d$.
- Đường thẳng tiếp xúc đường tròn tại 1 điểm duy nhất. Số giao điểm bằng 1.



28. Đường thẳng tiếp xúc với đường tròn được gọi là tiếp tuyến. Điểm tiếp xúc gọi là tiếp điểm. Một đường thẳng gọi là tiếp tuyến nếu đường thẳng đó vuông góc với bán kính tại tiếp điểm.

1.3 Đường thẳng và đường tròn không cắt nhau

- Đường tròn và đường thẳng không cắt nhau khi bán kính của đường tròn nhỏ hơn khoảng cách từ tâm đường tròn đó đến đường thẳng đã cho. $R < d$.
- Đường thẳng không cắt đường tròn nên số giao điểm bằng 0.



2 Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho điểm A nằm trong đường tròn (O). Chứng minh rằng mọi đường thẳng d đi qua A đều cắt (O) tại hai điểm phân biệt.

Lời giải.

Gọi d là đường thẳng đi qua A. Dựng OH vuông góc d. Suy ra

$$\mathrm{d}_{(O,d)} = OH.$$

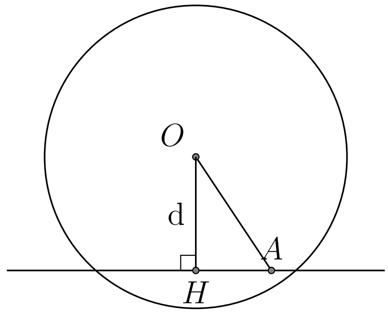
Xét tam giác vuông OAH vuông tại H, ta có OA là cạnh huyền nên

$$OA \geq OH.$$

Mà A nawmg bên trong đường tròn nên $OA < R$. Do đó suy ra

$$R > OH \Leftrightarrow R > \mathrm{d}_{(O,d)}.$$

Do đó, đường thẳng d luôn cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt.



□

Ví dụ 2. Cho đường thẳng a và một điểm O cách a là 3 cm. Dựng $(O; 5\text{ cm})$.

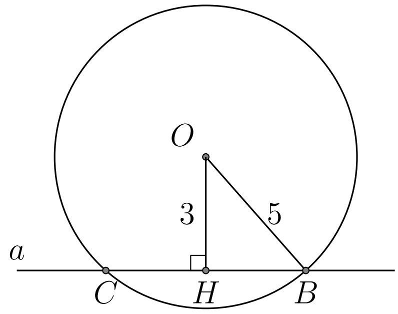
1. Xét vị trí tương đối của a và đường tròn (O).
2. Gọi B và C là các giao điểm của đường thẳng a và (O). Tính độ dài BC.

Lời giải.

1. Vì $\begin{cases} R = 5 \\ \mathrm{d} = 3 \end{cases}$, nên $R > \mathrm{d}$, do đó a cắt (O) tại hai điểm phân biệt B và C.
2. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ O xuống a. Suy ra $OH = 3$ cm và H là trung điểm BC. Do đó

$$BH = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 = 8.$$

Vậy $BC = 8$ cm.



□

Ví dụ 3. Cho hình thang vuông $ABCD(A = D = 90^\circ)$, $AB = 4$ cm, $BC = 13$ cm và $CD = 9$ cm. Tính AD và chứng minh rằng đường thẳng AD tiếp xúc với đường tròn có đường kính là BC.

Lời giải.

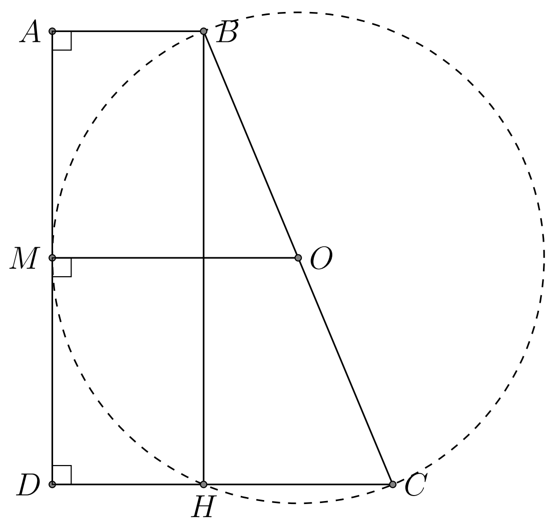
Dựng $BH \perp CD \Rightarrow ABHD$ là hình chữ nhật. Suy ra

$$AD^2 = BH^2 = BC^2 - CH^2 = 13^2 - 5^2 = 144$$
$$\Rightarrow AD = 12.$$

Gọi O và M lần lượt là trung điểm BC và AD. Ta được $MO \perp AD$ và

$$MO = \frac{AB + CD}{2} = \frac{13}{2} = \frac{BC}{2}.$$

Do đó, AD là đường thẳng vuông góc với bán kính của đường tròn (O) tại tiếp điểm M. nên AD là tiếp tuyến của đường tròn đường kính BC.

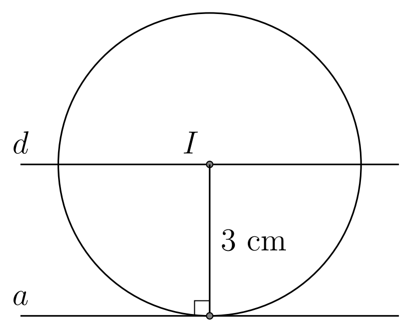


□

Ví dụ 4. Cho đường thẳng a. Tâm I của tất cả các đường tròn bán kính 3 cm, tiếp xúc với đường thẳng a nằm trên đường nào?

Lời giải.

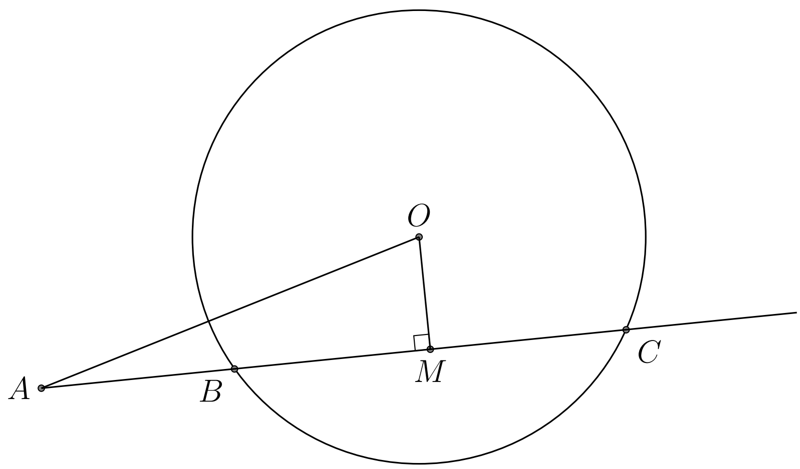
Ta có đường tròn tâm I bán kính bằng 3 cm tiếp xúc với đường thẳng a. Suy ra $\mathrm{d}_{(I,a)} = 3$ cm.
Do mọi điểm I đều cách a một khoảng 3 cm nên mọi điểm I đều nằm trên đường thẳng d song song với a và cách a là 3 cm.



□

Ví dụ 5. Cho đường tròn (O), điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Dựng đường thẳng đi qua A, cắt đường tròn ở B và C sao cho tổng $AB + AC$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm BC, ta có $OM \perp BC$ và $MB = MC$. Suy ra

$$AB + AC = AM - MB + AM + MC = 2AM.$$

Nên $AB + AC$ lớn nhất khi AM lớn nhất. Mà

$$AM^2 = OA^2 - OM^2.$$

Nên, AM lớn nhất khi OM nhỏ nhất $\Leftrightarrow M \equiv O$. Vậy $AB + AC$ lớn nhất khi đường thẳng đi qua A đi qua tâm O. □

3 Luyện tập

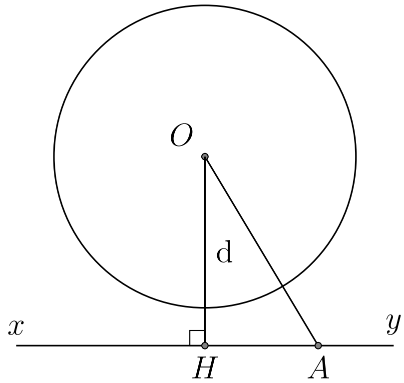
Bài 1. Cho đường thẳng xy không cắt đường tròn $(O; R)$. Chứng minh rằng mọi điểm thuộc xy đều ở bên ngoài đường tròn (O).

Lời giải.

Gọi A là điểm thuộc đường thẳng xy, H là chân đường vuông góc hạ từ O xuống xy. Ta luôn có

$$OA \geq OH.$$

Mà xy không cắt $(O; R)$ nên $OH > R \Rightarrow OA > R$. Do đó, A nằm ngoài $(O; R)$.
Vậy mọi điểm thuộc xy đều nằm ngoài $(O; R)$.

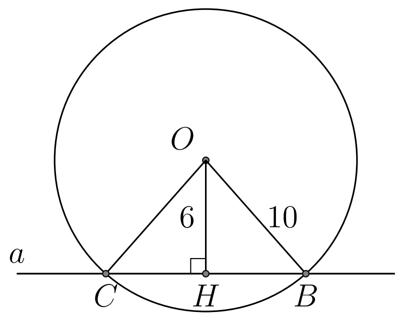


□

Bài 2. Cho điểm O cách đường thẳng a là 6 cm. Vẽ đường tròn $(O, 10 \text{ cm})$.

1. Chứng minh rằng (O) có hai giao điểm với đường thẳng a.
2. Gọi hai giao điểm nói trên là B và C. Tính diện tích tam giác OBC.

Lời giải.



1. Vì $\begin{cases} R = 10 \\ \mathrm{d} = 6 \end{cases}$, nên $R > \mathrm{d}$, do đó a cắt (O) tại hai điểm phân biệt B và C.
2. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ O xuống a. Suy ra $OH = 6$ cm và H là trung điểm BC. Do đó

$$BH = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \Rightarrow BC = 16.$$

Suy ra diện tích tam giác OBC

$$S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2} \cdot OH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 16 = 48 \text{ cm}^2.$$

□

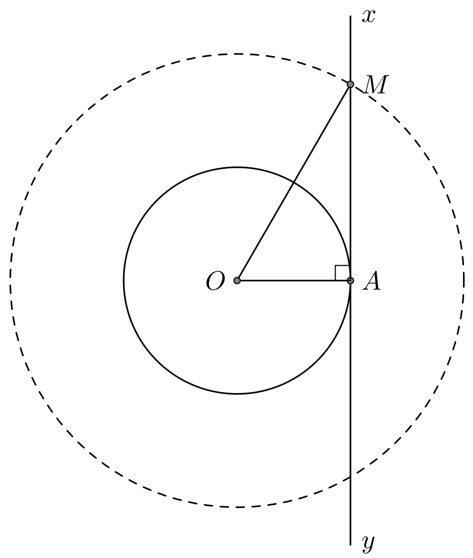
Bài 3. Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm A chạy trên đường tròn đó. Từ A vẽ tiếp tuyến xy, trên xy lấy một điểm M sao cho $AM = R\sqrt{3}$. Điểm M di động trên đường nào?

Lời giải.

Ta có xy là tiếp tuyến của $(O;R)$ tại A nên $OA \perp xy$. Xét tam giác vuông OAM vuông tại A, ta có

$$OM^2 = OA^2 + AM^2 = R^2 + 3R^2 = 4R^2$$
$$\Rightarrow OM = 2R.$$

Suy ra khi A chạy trên $(O;R)$ thì điểm M thuộc đường tròn tâm O bán kính $2R$.



□

Bài 4. Cho đường tròn $(O;R)$ có dây $AB = R$. Trên tia AB lấy điểm M sao cho $AM = a$. Qua M vẽ đường thẳng xy vuông góc với AB. Chứng minh rằng đường thẳng xy và đường tròn $(O;R)$ chỉ có điểm chung khi $a \leq \dfrac{3R}{2}$.

Lời giải.

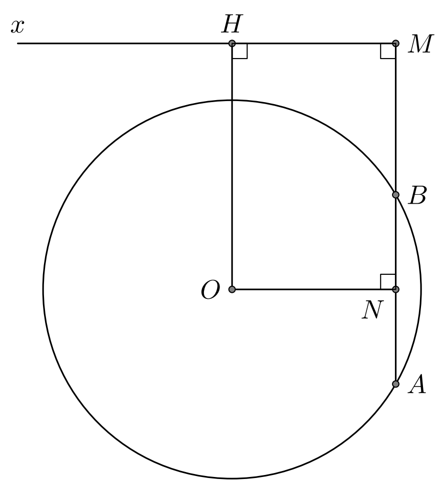
Gọi N là trung điểm AB. Ta có $ON \perp AM$ và $NM = a - \dfrac{R}{2}$. Gọi H là chân đường vuông góc dựng từ O xuống xy, ta có $OH \perp xy \Rightarrow ONMH$ là hình chữ nhật, do đó

$$\mathrm{d}_{(O,xy)} = OH = MN = a - \frac{R}{2}.$$

Đường thẳng xy và đường tròn $(O;R)$ có điểm chung khi và chỉ khi

$$\mathrm{d}_{(O,xy)} \leq R \Leftrightarrow a - \frac{R}{2} \leq R \Leftrightarrow a \leq \frac{3R}{2}.$$

Vậy đường thẳng xy và đường tròn $(O;R)$ chỉ có điểm chung khi $a \leq \dfrac{3R}{2}$.

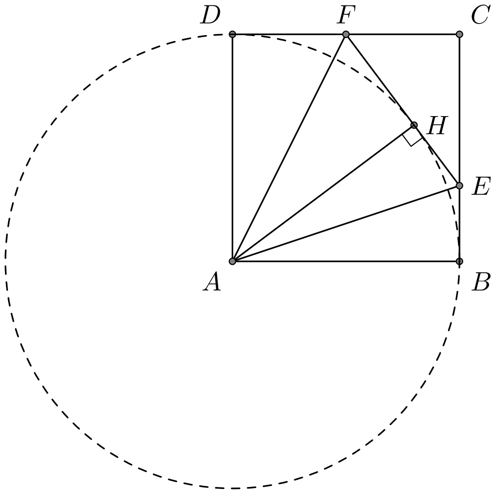


□

Bài 5. Cho hình vuông $ABCD$, lấy điểm E trên cạnh BC và điểm F trên cạnh CD sao cho $AB = 3BE = 2DF$. Chứng minh EF tiếp xúc với cung tròn tâm A, bán kính AB.

Lời giải.

Dựng $AH \perp EF$ tại H.
Gọi độ dài cạnh hình vuông bằng a. Ta có



$$EF^2 = FC^2 + CE^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{4a^2}{9} = \frac{25a^2}{36}$$
$$\Rightarrow EF = \frac{5a}{6}.$$

Mặt khác

$$S_{\triangle AEF} = S_{ABCD} - S_{\triangle ADF} - S_{\triangle CEF} - S_{\triangle AEB}$$
$$= a^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{6} = \frac{5a^2}{12}.$$

Từ đó suy ra

$$AH = \frac{2S_{\triangle AEF}}{EF} = \frac{2 \cdot \dfrac{5a^2}{12}}{\dfrac{5a}{6}} = a.$$

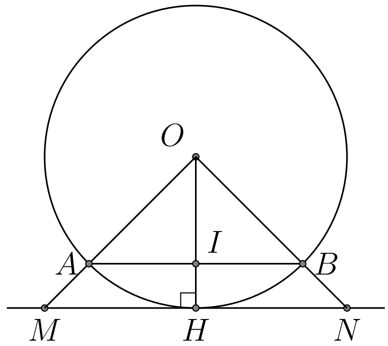
Suy ra EF vuông góc bán kính đường tròn (A, AB) tại tiếp điểm H hay EF tiếp xúc (A, AB) tại H.

□

Bài 6. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây $AB = \frac{8R}{5}$. Vẽ một tiếp tuyến song song với AB, cắt các tia OA, OB theo thứ tự tại M và N. Tính diện tích tam giác OMN.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm AB, ta có $AI = \frac{4R}{5}$. Suy ra



$$OM^2 = OA^2 - AI^2 = R^2 - \frac{16R^2}{25} = \frac{9R^2}{25}$$
$$\Rightarrow ON = \frac{3R}{5}.$$
$$\Rightarrow S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \cdot OI \cdot AB = \frac{12R^2}{25}.$$

Gọi H là tiếp điểm của tiếp tuyến MN. Do $MN \parallel AB$ nên ta có

$$\frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle OMN}} = \frac{OI^2}{OH^2} = \frac{9}{25}.$$
$$\Rightarrow S_{\triangle OMN} = \frac{25}{9} S_{\triangle OAB} = \frac{4R^2}{3}.$$

Vậy diện tích tam giác OMN bằng $\frac{4R^2}{3}$.

□

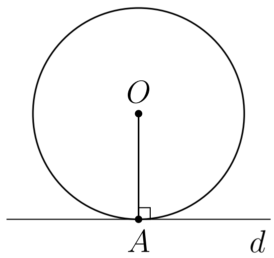
§5 Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

1 Tóm tắt lí thuyết

Định nghĩa 5. Tiếp tuyến của đường tròn là đường thẳng chỉ có một điểm chung với đường tròn đó.

Định lí 10. Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

Định lí 11.
Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là một tiếp tuyến của đường tròn.



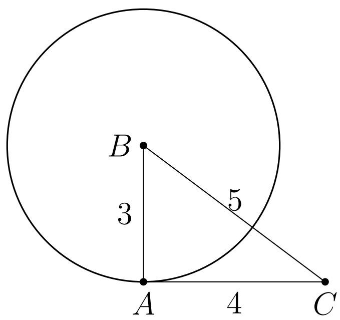
2 Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$. Vẽ đường tròn (B, BA). Chứng minh rằng AC là tiếp tuyến của đường tròn.

Lời giải.

Xét tam giác ABC có

$$\begin{cases} BC^2 = 5^2 = 25 \\ AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2.$$



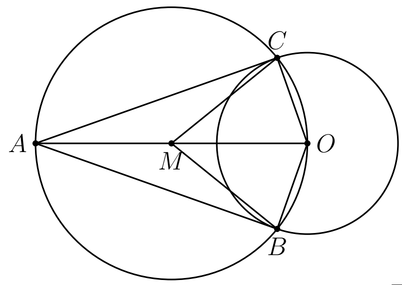
Suy ra tam giác ABC vuông tại B. Hay $CA \perp BA$.
Vậy CA là tiếp tuyến của đường tròn (B, BA).

□

Ví dụ 2. Cho đường tròn (O), điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Gọi M là trung điểm của AO. Vẽ đường tròn (M, MO), nó cắt đường tròn (O) tại hai điểm B và C. Chứng minh rằng AB và AC là các tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải.

Xét tam giác ABO có $MA = MB = MO = \dfrac{AO}{2}$.
Suy ra tam giác ABO vuông tại B. Hay $AB \perp OB$.
Vậy AB là tiếp tuyến của đường tròn (O).
Chứng minh tương tự, ta có AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

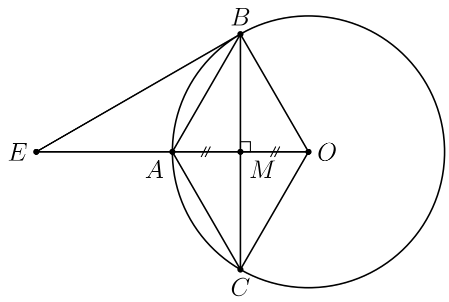


□

Ví dụ 3. Cho đường tròn (O) có bán kính OA, dây BC vuông góc với OA tại trung điểm M của OA.

1. Tứ giác $OCAB$ là hình gì? Vì sao?
2. Kẻ tiếp tuyến với đường tròn tại B, nó cắt đường thẳng OA tại E. Tính độ dài BE, biết $OB = R$.

Lời giải.



1. Ta có $BC \perp OA \Rightarrow MB = MC$ (đường kính vuông góc với một dây); $MA = MO$ (gt). Suy ra tứ giác $OCAB$ là hình bình hành.
   Mặt khác, $OA \perp BC$ nên hình bình hành $OCAB$ là hình thoi.

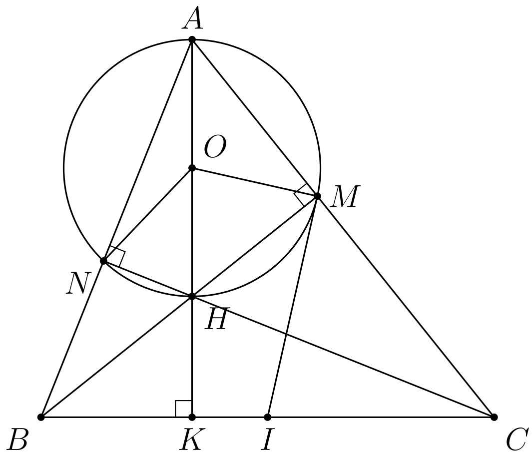
2. Xét tam giác OBA có $OB = OA = R$; $OB = AB$ (vì tứ giác $OCAB$ là hình thoi), suy ra $OA = OB = AB$. Do đó tam giác OAB là tam giác đều. Suy ra $\widehat{BOA} = 60^\circ$.
   Do BE là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $BE \perp OB$, suy ra $\triangle OBE$ vuông tại B.
   Áp dụng hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông, ta có
   $$BE = OB \cdot \tan \widehat{BOA} = R \cdot \tan 60^\circ = R\sqrt{3}.$$

□

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC, vẽ các đường cao BM, CN cắt nhau tại H.

1. Chứng minh rằng A, M, H, N cùng nằm trên một đường tròn tâm O.
2. Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh IM là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải.



1. Lấy O là trung điểm của AH.
   Áp dụng định lý đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong giác AMH vuông tại M và tam giác ANH vuông tại N, ta có

$$OM = OA = OH \text{ và } ON = OA = OH.$$

   Do đó, $OM = ON = OA = OH$. Vậy bốn điểm A, M, H, N cùng nằm trên một đường tròn tâm O.

2. Gọi K là giao điểm của AH và BC, ta có H là trực tâm của tam giác ABC nên $AK \perp BC$.
   Tam giác HBK vuông tại K nên $\widehat{KBH} + \widehat{KHB} = 90^\circ$.
   Mà $\widehat{KHB} = \widehat{MHO}$ (hai góc đối đỉnh) nên $\widehat{KBH} + \widehat{MHO} = 90^\circ$. (1)
   Tam giác MBC vuông tại M nên $MI = IB = IC$. Suy ra $\triangle IMB$ cân tại I.
   Do đó $\widehat{IMB} = \widehat{IBM}$. (2)
   Theo chứng minh trên ta có $OM = OH$ nên $\triangle OHM$ cân tại O.
   Do đó $\widehat{OMH} = \widehat{OHM}$. (3)
   Từ $(1), (2)$ và (3), ta có $\widehat{IMB} + \widehat{OMH} = 90^\circ$. Suy ra $OM \perp MI$.
   Vậy IM là tiếp tuyến của đường tròn (O).

□

Ví dụ 5. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Từ một điểm M trên nửa đường tròn ta vẽ tiếp tuyến xy. Kẻ $AD \perp xy$ và $BC \perp xy$.

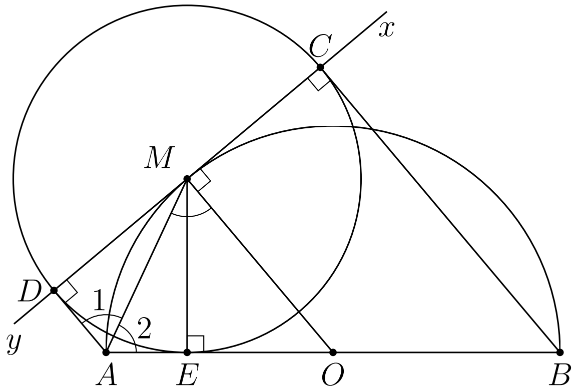
a) Chứng minh $MC = MD$.

b) Chứng minh tổng $AD + BC$ có giá trị không phụ thuộc vị trí điểm M trên nửa đường tròn.

c) Chứng minh đường tròn đường kính CD tiếp xúc với AB.

d) Xác định vị trí điểm M để tứ giác $ABCD$ có diện tích lớn nhất.

Lời giải.



1. Ta có $AD \parallel BC \parallel OM$ (cùng vuông góc với xy).
   Suy ra tứ giác $ABCD$ là hình thang.
   Lại có O là trung điểm của AB nên M là trung điểm của CD. Vậy $MC = MD$.

2. Hình thang $ABCD$ có M, O lần lượt là trung điểm của CD, AB nên MO là đường trung bình của hình thang $ABCD$. Do đó

$$AD + BC = 2MO = AB \text{ (không đổi)}.$$

3. Ta có $\triangle AMO$ cân tại O nên $\widehat{A}_2 = \widehat{OMA}$.
   Lại có $AD \parallel OM$ nên $\widehat{A}_1 = \widehat{OMA}$.
   Suy ra $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$.
   Kẻ $ME \perp AB$.
   Ta có $\triangle AMD = \triangle AME$ (ch-gn).
   Suy ra $MD = ME$. Do đó E thuộc đường tròn đường kính CD.
   Vậy đường tròn đường kính CD tiếp xúc với AB.

4. Diện tích hình thang $ABCD$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}CD \cdot (AD + BC) = \frac{1}{2}CD \cdot AB.$$

   Vì AB không đổi nên diện tích hình thang $ABCD$ lớn nhất khi CD lớn nhất.
   Mà $CD \leq AB$ nên CD lớn nhất khi $CD = AB$, lúc đó M là điểm chính giữa cung AB. Vậy S_{ABCD} lớn nhất bằng $\dfrac{AB^2}{2}$ khi M là điểm chính giữa cung AB.

□

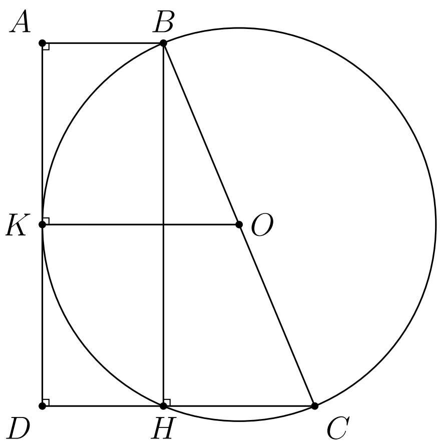
3 Luyện tập

Bài 1. Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$), $AB = 4$ cm, $BC = 13$ cm, $CD = 9$ cm.

1. Tính độ dài AD.

2. Chứng minh rằng đường thẳng AD là tiếp tuyến của đường tròn đường kính BC.

Lời giải.



1. Kẻ $BH \perp CD$ thì tứ giác $ABHD$ có ba góc vuông nên $ABHD$ là hình chữ nhật. Do đó $DH = AB = 4$ cm, $HC = 9 - 4 = 5$ cm.
   Xét tam giác BHC vuông tại H có
   $$BH = \sqrt{BC^2 - HC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ (cm)}.$$
   Vậy $AD = BH = 12$ cm.
2. Gọi O là trung điểm của BC, đường tròn đường kính BC có tâm O, bánh kính bằng $\dfrac{BC}{2} = 6{,}5$ cm.
   Kẻ $OK \perp AD$, ta có $OK \parallel AB \parallel CD$ (vì cùng vuông góc với AD). Vì O là trung điểm của BC nên K là trung điểm của AD hay OK là đường trung bình của hình thang $ABCD$. Do đó $OK = \dfrac{AB + CD}{2} = \dfrac{4+9}{2} = 6{,}5$ (cm).
   Suy ra K thuộc đường tròn đường kính BC.
   Vậy (O) tiếp xúc với AD tại K.

□

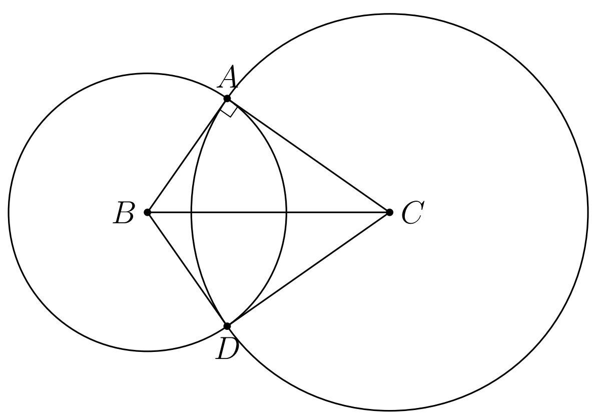
Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ hai đường tròn (B, BA) và (C, CA) cắt nhau tại D (khác A). Chứng minh rằng CD là tiếp tuyến của (B).

Lời giải.

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle DBC$ có

$$\begin{aligned} CA &= CD \\ BA &= BD \\ BC &\text{ chung} \end{aligned}$$

Suy ra $\triangle ABC = \triangle DBC$
Suy ra $\widehat{BDC} = \widehat{BAD} = 90^\circ$. hay $CD \perp BD$.
Vậy CD là tiếp tuyến của đường tròn (B).

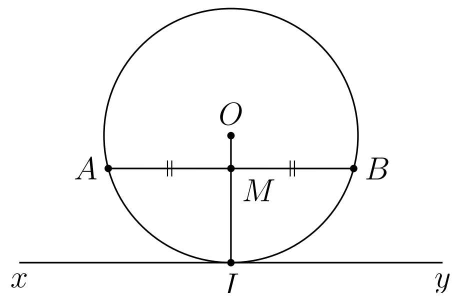


□

Bài 3. Cho đường tròn (O) và một dây AB. Gọi M là trung điểm của AB. Vẽ bán kính OI đi qua M. Từ I vẽ đường thẳng $xy \parallel AB$. Chứng minh rằng xy là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải.

Xét đường tròn (O), có M là trung điểm của AB và OI đi qua M nên $OI \perp AB$.
Mà $xy \parallel AB$ nên $xy \perp OI$.
Vậy xy là tiếp tuyến của đường tròn (O).



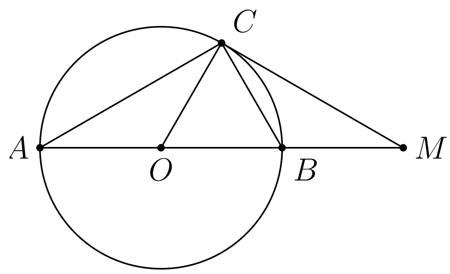
□

Bài 4. Cho đường tròn (O, R) đường kính AB. Vẽ dây AC sao cho $\widehat{CAB} = 30°$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm M sao cho $BM = R$. Chứng minh rằng

1. MC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

2. $MC^2 = 3R^2$.

Lời giải.



1. Xét tam giác ABC có $OC = OA = OB = R$ nên tam giác ABC vuông tại C.
   $\Rightarrow \widehat{CBA} = 90° - \widehat{CAB} = 90° - 30° = 60°$.
   Tam giác OCB có $OB = OC = R$ và $\widehat{CBO} = 60°$ nên tam giác OCB đều. Suy ra $CB = OB = R$.
   Xét tam giác OCM có $CB = OB = BM = R$ nên tam giác OCM vuông tại C.
   Suy ra $MC \perp OC$, do đó MC là tiếp tuyến của đường tròn O.

2. Ta có $\widehat{BCM} = 90° - \widehat{BCO} = 90° - 60° = 30°$.
   Ta có $\triangle BCM \backsim \triangle CAM$ (g-g).
   Suy ra $\dfrac{MC}{MA} = \dfrac{MB}{MC} \Rightarrow MC^2 = MA \cdot MB = 3R^2$ (đpcm)

□

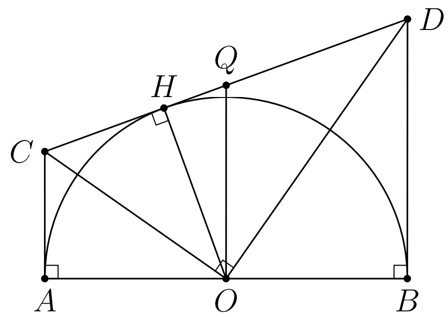
Bài 5. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn, vẽ hai tiếp tuyến Ax và By. Trên Ax lấy điểm C. Nối C với O, từ O kẻ đường thẳng vuông góc với OC cắt tia By ở D.

1. Tứ giác $ABDC$ là hình gì?

2. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác COD tiếp xúc với đường thẳng AB tại O.

3. Chứng minh $CA \cdot DB = R^2$. Tính CA, DB và CD khi $\widehat{ACD} = 60°$.

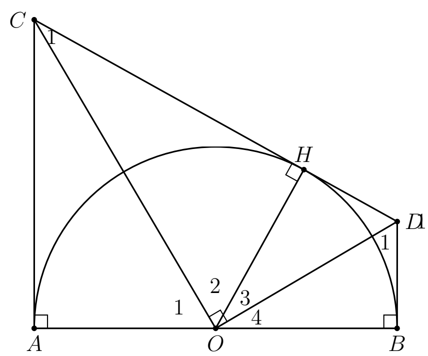
Lời giải.



1. Tứ giác $ABDC$ có $AC \parallel BD$ (cùng vuông góc với AB) nên $ABDC$ là hình thang.
   Hình thang $ABDC$ có $\widehat{CAB} = 90^\circ$ nên $ABDC$ là hình thang vuông.

2. Gọi Q là trung điểm của CD thì $QC = QO = QD$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác COD có tâm Q, bán kính QO.
   Hình thang $ABDC$ có O, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD nên OQ là đường trung bình của hình thang vuông $ABDC$. Suy ra $OQ \parallel AC$ mà $AC \perp AB$ nên $OQ \perp AB$.
   Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác COD tiếp xúc với đường thẳng AB tại O.

3.



Kẻ $OH \perp CD$.
Ta có $\widehat{O}_1 = \widehat{D}_1$ (cùng phụ với $\widehat{O}_4$); $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$.
Suy ra $\triangle OAC \backsim \triangle DBO$ (g-g).
Suy ra $\dfrac{OC}{OD} = \dfrac{AC}{BO} = \dfrac{AC}{AO} \Rightarrow \dfrac{OC}{AC} = \dfrac{OD}{AO}$.
Suy ra $\triangle OCD \backsim \triangle ACO$ (c-g-c).
Suy ra $\widehat{O}_1 = \widehat{D}_2$.
Mặt khác $\widehat{O}_2 = \widehat{D}_2$ (cùng phụ với $\widehat{C}_1$).
Do đó $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$.
Suy ra $\triangle ACO \backsim \triangle HCO$ (ch-gn).
Suy ra $CA = CH$ và $OH = OA = R$.
Tương tự, ta có $BD = DH$.
Do đó $CA \cdot DB = CH \cdot DH = OH^2 = R^2$.
Khi $\widehat{ACD} = 60^\circ$, ta có

$$CA = R\sqrt{3}, DB = \frac{R\sqrt{3}}{3}, CD = \frac{4R\sqrt{3}}{3}.$$

□

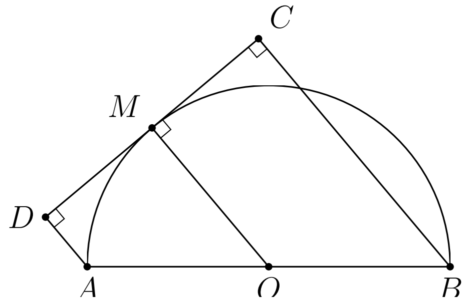
Bài 6. Cho nửa đường tròn có đường kính $AB = 2R$, một điểm M di chuyển trên nửa đường tròn. Gọi D, C theo thứ tự là các hình chiếu của A, B trên tiếp tuyến tại M của nửa đường tròn. Xác định vị trí của điểm M để tứ giác $ABCD$ có diện tích lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất ấy.

Lời giải.

Diện tích hình thang $ABCD$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}CD \cdot (AD + BC) = CD \cdot OM.$$

Vì OM không đổi nên diện tích hình thang $ABCD$ lớn nhất khi CD lớn nhất.
Mà $CD \leq AB$ nên CD lớn nhất khi $CD = AB$, lúc đó M là điểm chính giữa cung AB. Vậy S_{ABCD} lớn nhất bằng $2OM^2 = 2R^2$ khi M là điểm chính giữa cung AB.



□

§6 Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

1 Tóm tắt lí thuyết

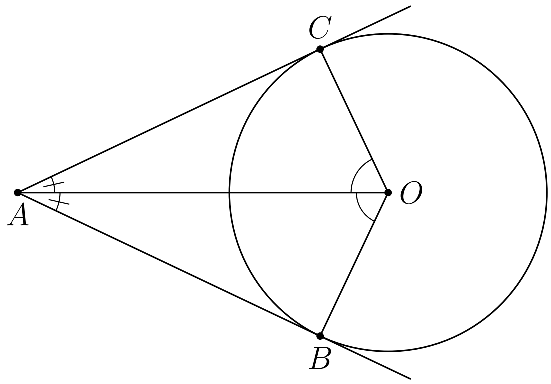
1) Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau

Định lí 12. Nếu hai tiếp tuyến của đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

a) Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.

b) Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.

c) Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.



2) Đường tròn nội tiếp tam giác

(a) Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác được gọi là đường tròn nội tiếp tam giác, còn tam giác được gọi là ngoại tiếp đường tròn.

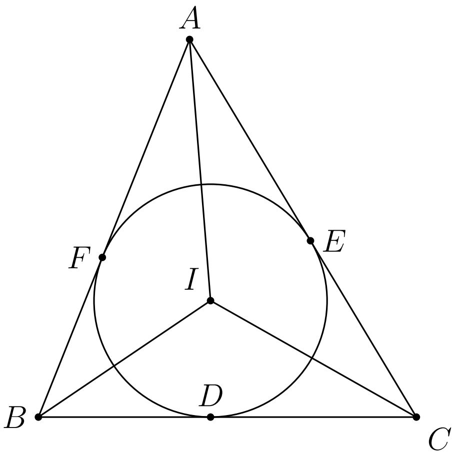
(b) Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của các đường phân giác của góc trong tam giác.

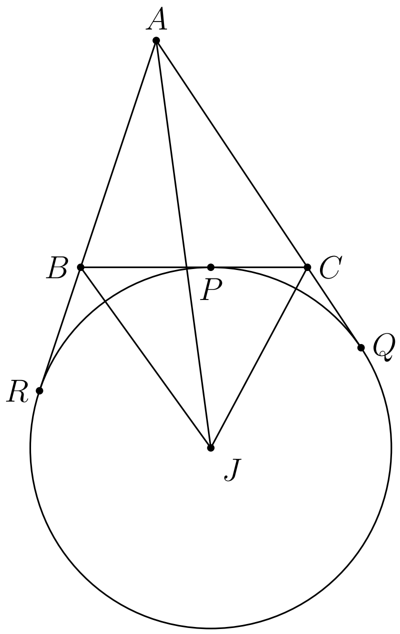
3) Đường tròn bàng tiếp tam giác

(a) Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của tam giác và tiếp xúc với phần kéo dài của hai cạnh kia gọi là đường tròn bàng tiếp tam giác.

(b) Một tam giác có ba đường tròn bàng tiếp.

(c) Tâm của đường tròn bàng tiếp trong góc A là giao điểm của hai đường phân giác các góc ngoài tại B và C (hoặc là giao điểm của đường phân giác góc A và phân giác ngoài tại B, hoặc C). Kí hiệu (J, r_A).



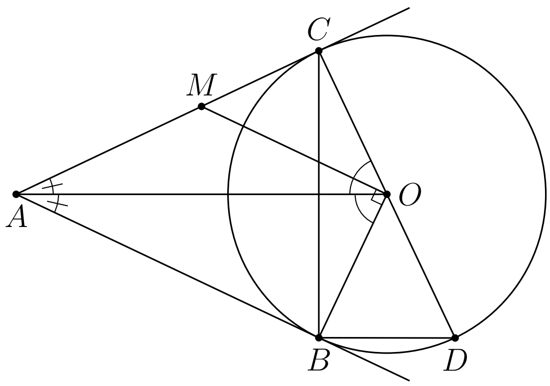


2 Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho đường tròn tâm O, bán kính R. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn tâm O với B, C là tiếp điểm.

1. Chứng minh AO là đường trung trực của BC.
2. Kẻ đường kính CD của (O). Chứng minh BD song song với AO.
3. Kẻ OM vuông góc với OB (M thuộc AC). Chứng minh $MO = MA$.

Lời giải.



1. Vì AB, AC là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow AC = AB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).
   $\Rightarrow A$ thuộc đường trung trực của BC.
   Mặt khác $OA = OB$ (cùng bằng bán kính) $\Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của BC.
   $\Rightarrow AO$ là đường trung trực của BC.

2. Vì BO là trung tuyến của tam giác DBC, $BO = \dfrac{1}{2}CD$.

$\Rightarrow \triangle DBC$ vuông tại B hay $BD \perp BC$.
Mặt khác $AO \perp BC$ (do AO là trung trực của BC) $\Rightarrow AO \parallel BD$.

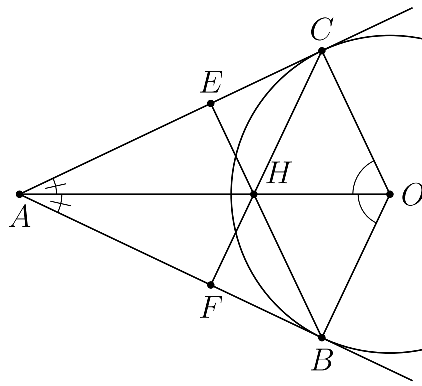
3. Vì $OM \perp OB$ (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{MOA} + \widehat{AOB} = 90^\circ$. (1)
   Ta có $\widehat{MAO} = \widehat{BAO}$ (vì A là giao điểm của hai tiếp tuyến chung của (O))
   Vì $\widehat{OAB} + \widehat{AOB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MAO} + \widehat{AOB} = 90^\circ$. (2)
   Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{MAO} = \widehat{MOA}$ suy ra $\triangle AMO$ cân tại M hay $MA = MO$.

□

Ví dụ 2. Từ điểm A nằm ngoài $(O; R)$ kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B, C là các tiếp điểm). Kẻ BE vuông góc với AC, CF vuông góc AB ($E \in AC; F \in AB$), BE và CF cắt nhau tại H.

1. Chứng minh tứ giác $BOCH$ là hình thoi.
2. Chứng minh ba điểm A, H, O thẳng hàng.
3. Tìm vị trí của điểm A để H thuộc (O).

Lời giải.



1. Vì $AC \perp OC$ (tính chất tiếp tuyến) mà $BE \perp AC$ (giả thiết)
   $\Rightarrow BE \parallel OC$ hay BH song song với OC.
   Chứng minh tương tự CH song song $OB \Rightarrow OCHB$ là hình bình hành.
   Mà $OB = OC$ (cùng bằng bán kính) $\Rightarrow BOCH$ là hình thoi.
2. Vì $OBHC$ là hình thoi $\Rightarrow OH$ là tia phân giác góc BOC.
   Mặt khác OA là tia phân giác $\widehat{BOC} \Rightarrow O,\ H,\ A$ thẳng hàng.
3. Để H thuộc (O) suy ra $OH = R$.
   Vì $OH = OC = CH = R \Rightarrow \widehat{OCH} = 60^\circ \Rightarrow \cos\widehat{COH} = \dfrac{CO}{OA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow AO = 2R$.
   Vậy A cách O một khoảng bằng $2R$ thì H nằm trên đường tròn tâm (O).

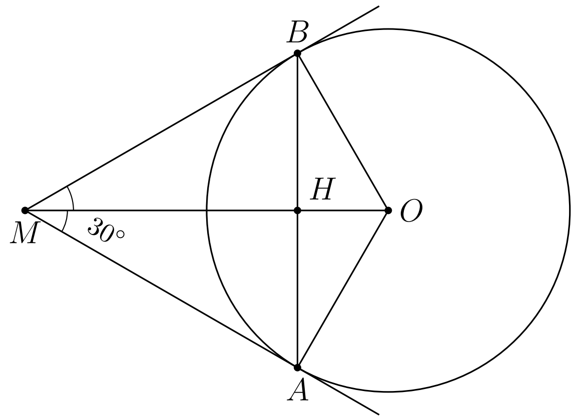
□

Ví dụ 3. Cho đường tròn $(O; R)$. Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn (O), vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là tiếp điểm) sao cho $\widehat{AMO} = 30^\circ$.

1. Chứng minh $MO = 2R$.
2. Tính AB theo R.

3. Tính S_{MAB} theo R.

Lời giải.



1. Xét $\triangle OAM$ có $\widehat{OAM} = 90°$.
   Ta có $\sin\widehat{AMO} = \dfrac{OA}{OM} = \sin 30° = \dfrac{1}{2} \Rightarrow OM = 2R$.

2. Vì MA; MB là tiếp tuyến của (O) suy ra $MA = MB; MO$ là tia phân giác AMB (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).
   $\Rightarrow \triangle MAB$ cân tại M, $\widehat{AMB} = 2 \cdot \widehat{AMO} = 60°$
   $\Rightarrow AMB$ là tam giác đều $\Rightarrow AB = AM$.
   Xét $\triangle OAM$ có $\widehat{OAM} = 90° \Rightarrow AM^2 = OM^2 - OA^2 \Rightarrow AM = \sqrt{3}R \Rightarrow AB = \sqrt{3}R$.

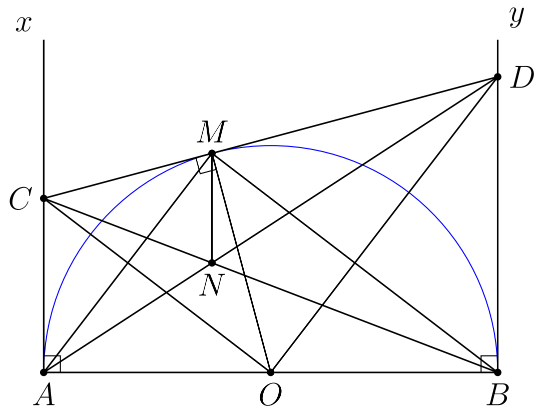
3. Xét tam giác vuông MHA có $\cos\widehat{AMH} = \cos 30° = \dfrac{MH}{AM} \Rightarrow MH = \dfrac{3R}{2}$.
   $\Rightarrow S_{AMB} = \dfrac{1}{2}MH \cdot AB = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}R$.

□

Ví dụ 4. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB vẽ hai tiếp tuyến Ax, By. Điểm M nằm trên (O) sao cho tiếp tuyến tại M cắt Ax, By lần lượt tại C, D. Đường thẳng AD cắt BC tại N.

1. Chứng minh A, C, M, O cùng thuộc một đường tròn.
2. Chứng minh OC song song BM.
3. Tìm vị trí của M để S_{ABCD} nhỏ nhất.
4. Chứng minh MN và AB vuông góc với nhau.

Lời giải.



1. Vì Ax là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow Ax \perp OA$.
   Xét $\triangle OAC$ có $\widehat{OAC} = 90^\circ \Rightarrow A$ thuộc đường tròn đường kính CO. (1)
   Vì MC là tiếp tuyến của (O)
   $\Rightarrow \widehat{CMO} = 90^\circ \Rightarrow M$ thuộc đường tròn đường kính CO. (2)
   Từ (1) và (2) suy ra A, C, O, M cùng thuộc đường tròn đường kính CO.

2. Vì CM; CA là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow OC$ là phân giác $\widehat{AOM}$.
   Mà $\triangle AOM$ cân tại O suy ra $OC \perp AM$ (tính chất tam giác cân) (3)
   Vì $M \in (O) \Rightarrow MO = OA = OB$, hay $\triangle AMO$ có đường trung tuyến MO bằng $\dfrac{1}{2}$ cạnh huyền.
   $\Rightarrow \triangle AMO$ vuông tại $M \Rightarrow BM \perp AM$. (4)
   Từ (3) và (4) suy ra $OC \parallel BM$.

3. Tìm vị trí của M để S_{ABCD} nhỏ nhất.
   $$\left.\begin{array}{l}\text{Vì } OC \text{ là phân giác } \widehat{AOM}\\ OD \text{ là phân giác } \widehat{BOM}\\ \widehat{AOM} \text{ và } \widehat{BOM} \text{ là hai góc kề bù}\end{array}\right\} \Rightarrow CO \perp OD \text{ (Tính chất phân giác hai góc kề bù).}$$
   Xét $\triangle COD$ có $\widehat{COD} = 90^\circ$; $OM \perp CD$
   $\Rightarrow CM \cdot MD = OM^2$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)
   Mà $CM = CA$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)
   $DM = DA$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)
   $OM^2 = CA \cdot DB = R^2$.
   Ta có $AC + BD \geq 2\sqrt{AC \cdot BD} = 2R$.
   $\Rightarrow S_{ABCD} = \dfrac{(AC + BD) \cdot AB}{2} \geq \dfrac{2R \cdot 2R}{2} = 2R^2$.
   Vậy S_{ABCD} nhỏ nhất bằng $2R^2 \Leftrightarrow AC = BD$ hay M là điểm chính giữa cung AB.

4. Vì $AC \parallel BD$ (cùng vuông góc với AB) $\Rightarrow \dfrac{CN}{BN} = \dfrac{AC}{BD} = \dfrac{CM}{MD}$ (vì $CM = CA; DM = DB$)
   $\Rightarrow MN \parallel BD$, mà $BD \perp AB$ (do BD là tiếp tuyến) $\Rightarrow MN \perp AB$.

□

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC cân tại A, điểm I là tâm đường tròn nội tiếp, điểm K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác.

1. Chứng minh bốn điểm B, I, C, K cùng thuộc một đường tròn.

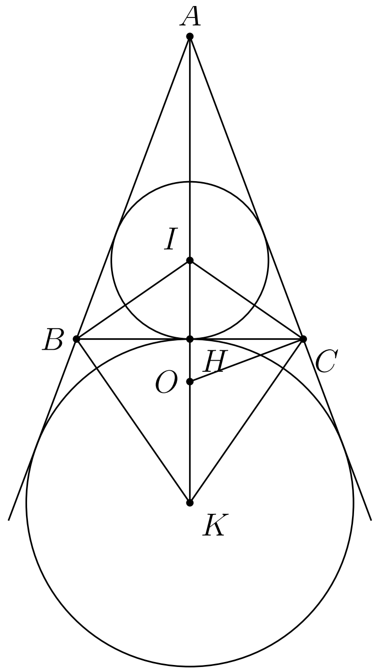
2. Gọi (O) là đường tròn đi qua bốn điểm B, I, C, K. Chứng minh AC là tiếp tuyến của

đường tròn $(O; OK)$.

3. Tính bán kính của (O), biết $AB = AC = 20$ cm, $BC = 24$ cm.

Lời giải.

1.



Vì I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC
$\Rightarrow BI; CI$ lần lượt là phân giác $\widehat{ABC}; \widehat{ACB}$.
Vì K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A
$\Rightarrow BK;\ CK$ lần lượt là phân giác ngoài $\widehat{ABC}; \widehat{ACB}$.
$\Rightarrow BI \perp BK; CI \perp CK$ (tính chất phân giác hai góc kề bù).
Gọi O là trung điểm của IK, ta có $OI = OB = OK = OC$ (tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông)
$\Rightarrow B, I, C, K$ cùng thuộc đường tròn tâm (O).

2. Ta có $\widehat{OCK} = \widehat{OKC}$ (tam giác OCK cân tại O).
Mặt khác $\widehat{OKC} + \widehat{CIK} = 90^\circ$
$\Rightarrow \widehat{OCK} + \widehat{KIC} = 90^\circ$, mà $\widehat{KIC} + \widehat{ICH} = 90^\circ$
$\Rightarrow \widehat{OCK} = \widehat{BCI}$, ta lại có $\widehat{BCI} = \widehat{ACI}$.
$\Rightarrow \widehat{OCK} = \widehat{ACI}$.
Vì $\widehat{ICK} = 90^\circ = \widehat{ICO} + \widehat{OCK} = \widehat{ICO} + \widehat{ACI} = 90^\circ$
$\Rightarrow OC \perp AC \Rightarrow AC$ là tiếp tuyến của (O).

3. Gọi H là giao điểm của AK và BC suy ra H là trung điểm của $BC \Rightarrow HC = 12$ cm.
Xét tam giác vuông AHC có $AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = 16$, $\tan \widehat{HAC} = \dfrac{HC}{AH}$.
Xét tam giác vuông ACO có $\tan \widehat{CAO} = \dfrac{OC}{AC}$.
$\Rightarrow \dfrac{HC}{AH} = \dfrac{OC}{AC} \Rightarrow OC = \dfrac{HC \cdot AC}{AH} = 15$ cm.

□

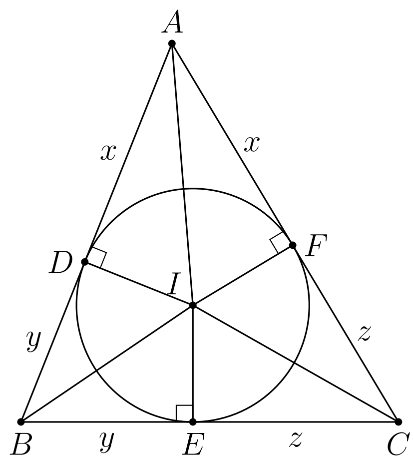
Ví dụ 6. Cho tam giác ABC, đường tròn tâm I, bán kính r nội tiếp tam giác ABC. Gọi D, E, F là các tiếp điểm $(D \in AB, E \in BC, F \in CA)$. Đặt $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $AD = x$, $BE = y$, $CF = z$.

1. Tính x, y, z theo a, b, c.

2. Chứng minh $S_{\triangle ABC} = p \cdot r$ (p là nửa chu vi tam giác ABC).

3. Chứng minh $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$ trong đó h_a; h_b; h_c lần lượt là các độ dài đường cao kẻ từ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC.

Lời giải.



1. Từ giả thiết ta có $AF = AD = x; BD = B = y, CE = CF = z$.
   Từ đó suy ra $\begin{cases} x + y = c & (1) \\ y + z = a & (2) \\ z + x = b & (3) \\ x + y + z = \dfrac{a+b+c}{2} & (4) \end{cases}$
   lần lượt trừ từng vế của phương trình (4) cho phương trình (1), (2) và (3) ta được
   $\begin{cases} z = \dfrac{a+b-c}{2} = p - c \\ y = \dfrac{a+c-b}{2} = p - b \\ x = \dfrac{b+c-a}{2} = p - a \end{cases}$ (với p là nửa chu vi của tam giác ABC).
2. Ta có $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle IAB} + S_{\triangle IBC} + S_{\triangle ICA} = \dfrac{1}{2}(r \cdot AB + r \cdot AC + r \cdot BC) = \dfrac{1}{2} r \cdot 2p = p \cdot r$.
3. Ta có $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} a \cdot h_a \Rightarrow \dfrac{1}{h_a} = \dfrac{a}{2S}, \dfrac{1}{h_b} = \dfrac{b}{2S}, \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{c}{2S}$.
   $\Rightarrow \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{2S}(a+b+c) = \dfrac{p}{S} = \dfrac{1}{r}$.

□

3 Luyện tập

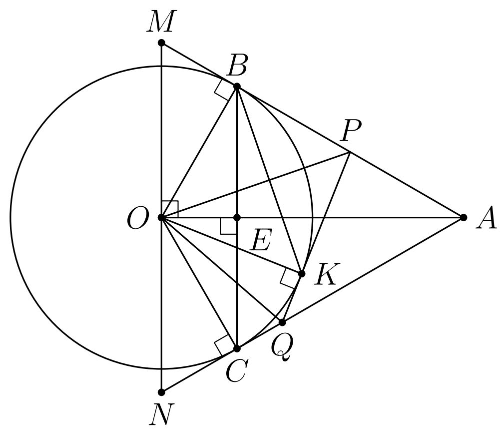
Bài 1. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm).

1. Gọi E là giao điểm của BC và OA. Chứng minh BE vuông góc với OA và $OE \cdot OA = R^2$.
2. Trên cung nhỏ BC lấy điểm K bất kỳ (K khác B và C). Tiếp tuyến tại K của đường tròn $(O; R)$ cắt AB, AC theo thứ tự tại P và Q. Chứng minh tam giác APQ có chu vi không đổi khi K chuyển động trên cung nhỏ BC.

Lời giải.

1. Vì $AB = AC$ (tính chất tiếp tuyến) và $OB = OC$
$\Rightarrow OA$ là đường trung trực của BC
$\Rightarrow BC \perp OA$ tại E.
Xét tam giác OBA có $\widehat{OBA} = 90^\circ$ và đường cao $BE \Rightarrow OE \cdot OA = OB^2 = R^2$.

2. Vì PK, PB là các tiếp tuyến của (O) cắt nhau tại P nên $PK = PB$. Tương tự, $QK = QC$.
Ta có
$$\begin{aligned} AP + PQ + QA &= AP + PB + AQ + QC \\ &= AB + AC \qquad \text{(không đổi)}. \end{aligned}$$

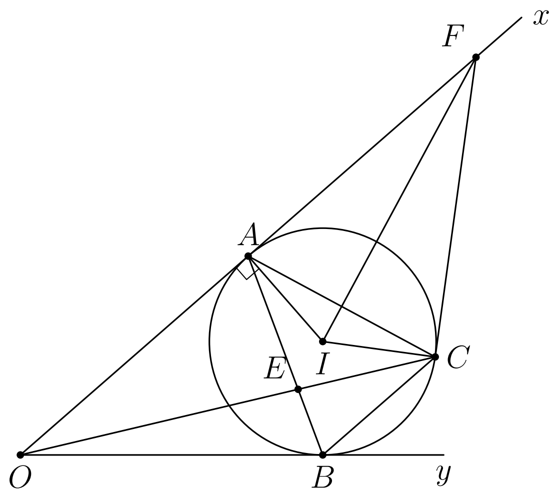


□

Bài 2. Cho góc xOy và đường tròn tâm I tiếp xúc các tia Ox, Oy tương ứng tại các điểm A, B. Một đường thẳng qua B và song song với Ox cắt đường tròn (I) lần thứ hai tại C.

1. Chứng minh rằng $AB = AC$.
2. Đường thẳng OC cắt dây cung AB tại E. Chứng minh rằng $OE > AE$.
3. Gọi F là điểm đối xứng với O qua A. Chứng minh rằng CF tiếp xúc với đường tròn (I).

Lời giải.



1. Vì OA là tiếp tuyến của đường tròn (I) nên $IA \perp OA$. Mà $BC \parallel OA$ nên $IA \perp BC$.
Lại có $IB = IC$ nên IA là đường trung trực đoạn BC, suy ra $AB = AC$.
2. Ta có $\widehat{AOE} = \widehat{ECB} < \widehat{ACB} = \widehat{ABC} = \widehat{OAE}$, suy ra $AE < OE$.
3. Vì O, F đối xứng nhau qua IA, B, C đối xứng nhau qua IA nên $OB = FC$.
Lại có $FA = OA = OB$ nên $FA = FC$. Dẫn tới $\triangle CIF = \triangle AIF$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{ICF} = \widehat{IAF} = 90^\circ$ nên FC là tiếp tuyến của đường tròn (I).

□

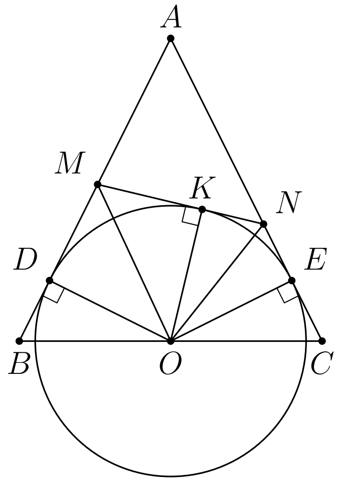
Bài 3. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi O là trung điểm của cạnh BC. Dựng đường tròn tâm O tiếp xúc với các cạnh AB, AC lần lượt tại D, E. Lấy các điểm M, N tương ứng trên các đoạn thẳng AD, AE sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với đường tròn tâm O.

1. Chứng minh rằng góc MON có số đo không đổi khi M, N thay đổi.

2. Chứng minh rằng $BM \cdot CN$ không đổi.

Lời giải.

1. Giả sử MN tiếp xúc với đường tròn (O) tại K.
   Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có $\widehat{DOM} = \widehat{MOK}$ và $\widehat{NOK} = \widehat{NOE}$ nên $\widehat{MON} = \widehat{MOK} + \widehat{KON} = \dfrac{1}{2}\widehat{DOE}$.
   Ta có $\widehat{ADO} = \widehat{AEO} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DAE} + \widehat{DOE} = 360^\circ$, suy ra $\widehat{MON} = \dfrac{1}{2}\left(180^\circ - \widehat{DAE}\right) = 90^\circ - \dfrac{\widehat{BAC}}{2}$ (không đổi).



2. Tứ giác $BMNC$ có $\widehat{MBC} + \widehat{BCN} + \widehat{CNM} + \widehat{NMB} = 180^\circ$ hay $2\widehat{BCN} + 2\widehat{CNO} + 2\widehat{OMB} = 360^\circ$ suy ra $\widehat{BCN} + \widehat{CNO} + \widehat{OMB} = 180^\circ$. Lại có $\widehat{BCN} + \widehat{CNO} + \widehat{NOC} = 180^\circ$ suy ra $\widehat{OMB} = \widehat{NOC}$. Dẫn tới $\triangle BOM \backsim \triangle CNO$ (g.g) suy ra $\dfrac{BO}{CN} = \dfrac{BM}{CO} \Rightarrow BM \cdot CN = BO \cdot CO = \dfrac{BC^2}{4}$ (không đổi).

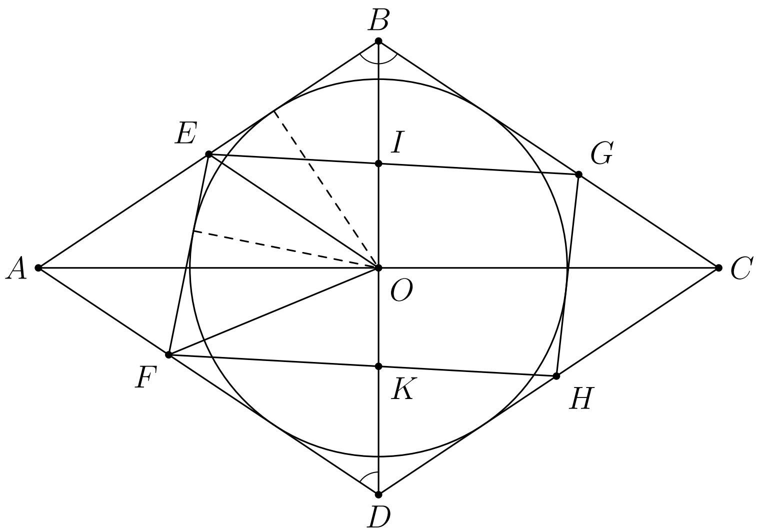
□

Bài 4. Cho đường tròn (O) nội tiếp hình thoi $ABCD$. Kẻ một tiếp tuyến với đường tròn (O) cắt các cạnh AB, AD theo thứ tự ở E, F. Kẻ một tiếp tuyến khác với đường tròn (O) cắt cạnh CB, CD theo thứ tự ở G và H. Chứng minh rằng:

1. $BE \cdot DF = OB \cdot OD$.

2. EG song song với HF.

Lời giải.



1. Tứ giác $BEFD$ có $\widehat{OBA} + \widehat{ODB} + \widehat{BEF} + \widehat{EFD} = 360^\circ \Rightarrow 2\widehat{OBE} + 2\widehat{BEO} + 2\widehat{OFD} = 360^\circ$ $\Rightarrow \widehat{OBE} + \widehat{BEO} + \widehat{OFD} = 180^\circ$ mà $\widehat{OBE} + \widehat{BEO} + \widehat{EOB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{EOB} = \widehat{OFD}$.
   Dẫn tới $\triangle BOE \backsim \triangle DFO$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BE}{OD} = \dfrac{OB}{DF} \Rightarrow BE \cdot DF = OB \cdot OD$. (1)

2. Tương tự $BG \cdot DH = OB \cdot OD$. (2)
   Từ (1) và (2) suy ra $BE \cdot DF = BG \cdot DH \Rightarrow \dfrac{BE}{DH} = \dfrac{BG}{DF} \Rightarrow \triangle BEG \backsim \triangle DHF$ (c.g.c)

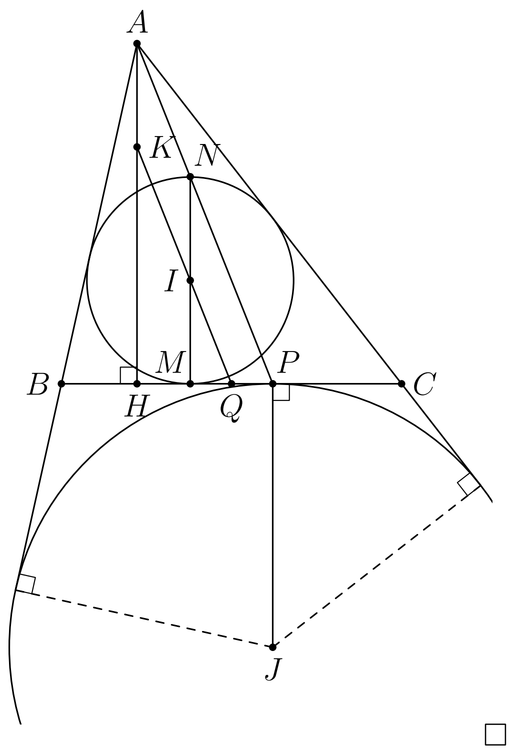
$\Rightarrow \widehat{BGE} = \widehat{DFH} \Rightarrow \widehat{BGE} + \widehat{GBI} = \widehat{BGE} + \widehat{EBI} = \widehat{DFK} + \widehat{FDK} \Rightarrow \widehat{OIG} = \widehat{OKF}$ (với I, K lần lượt là giao điểm của BD với EG, FH) $\Rightarrow EG \parallel FH$.

□

Bài 5. Đường tròn (I, r) nội tiếp và đường tròn (J, r_a) bàng tiếp góc A của tam giác ABC tiếp xúc với cạnh BC tương ứng tại các điểm M và P. Đoạn thẳng AP cắt đường tròn (I, r) tại điểm N.

1. Chứng minh rằng đoạn thẳng MN là đường kính của đường tròn (I, r).
2. Gọi Q là trung điểm của cạnh BC, đường thẳng IQ cắt đường cao AH tại K. Chứng minh rằng $AK = r$.

Lời giải.



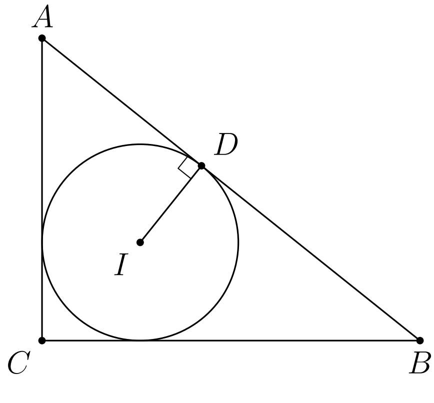
1. Gọi N' là giao điểm của AP và IM. Vì I nằm trên AJ nên $\dfrac{IN'}{JP} = \dfrac{AI}{AJ} = \dfrac{r}{r_a}$ suy ra $IN' = r$, hay N' thuộc đường tròn (I, r), dẫn tới $N \equiv N'$ hay MN là đường kính của đường tròn (I, r).
2. Ta có Q cũng là trung điểm MP, suy ra QI là đường trung bình $\triangle MNP \Rightarrow QI \parallel NP$ hay $KI \parallel AN$. Mà $AK \parallel IN$ (vì cùng vuông góc với BC) nên $AKIN$ là hình bình hành, suy ra $AK = IN = r$.

□

Bài 6. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh AB tại D.

1. Chứng minh rằng nếu $\triangle ABC$ vuông tại C thì $CA \cdot CB = 2 \cdot DA \cdot DB$.
2. Chứng minh rằng nếu $CA \cdot CB = 2 \cdot DA \cdot DB$ thì $\triangle ABC$ vuông tại C.

Lời giải.



Đặt $BC = a, AC = b, AB = c$.
Khi đó $AD = \dfrac{b + c - a}{2}, BD = \dfrac{a + c - b}{2}$, suy ra

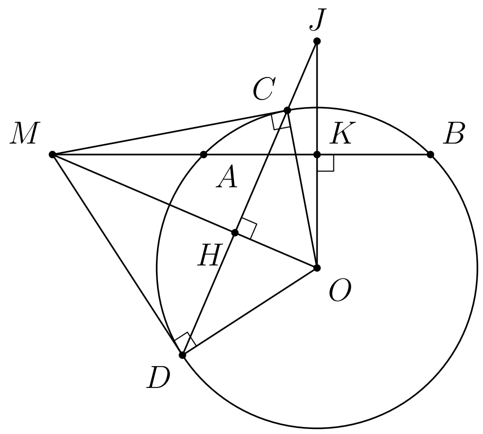
$$AD \cdot BD = \frac{c^2 - (a - b)^2}{4} = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{4} + \frac{ab}{2}. \quad (1)$$

1. Nếu $\triangle ABC$ vuông tại C thì $a^2 + b^2 = c^2$, khi đó theo (1) ta có $AD \cdot BD = \dfrac{ab}{2} = \dfrac{CA \cdot CB}{2}$.
2. Nếu $CA \cdot CB = 2 \cdot DA \cdot DB$ thì từ (1) suy ra $c^2 = a^2 + b^2$ hay $\triangle ABC$ vuông tại C.

□

Bài 7. Cho đường tròn (O, R) và đường thẳng d cắt đường tròn tại A, B. Từ điểm M là điểm nằm trên tia đối tia AB kẻ các tiếp tuyến MC, MD. Chứng minh rằng khi M di chuyển trên tia đối tia AB, đường thẳng CD luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.



Vì MC, MD là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên MO là trung trực của CD suy ra $MO \perp CD$ tại H.
Trong tam giác OCM vuông tại C có đường cao CH nên
$OH \cdot OM = CO^2 = R^2$. (1)
Kẻ $OK \perp AB$ cắt đường thẳng CD tại J.
Ta có $\triangle OKM \backsim \triangle OHJ$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{OK}{OM} = \dfrac{OH}{OJ}$
$\Rightarrow OJ = \dfrac{OH \cdot OM}{OK} = \dfrac{R^2}{OK}$ không đổi (do OK không đổi), nên J là điểm cố định.
Vậy CD luôn đi qua điểm J cố định.

□

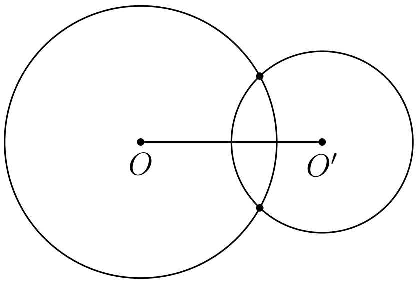
§7 Vị trí tương đối của hai đường tròn

1 Tóm tắt lí thuyết

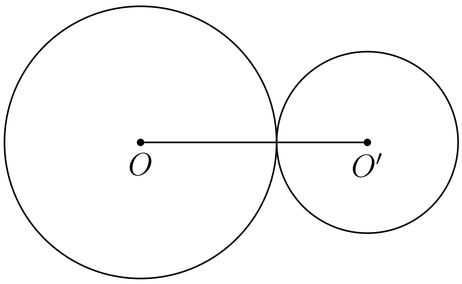
1.1 Vị trí tương đối của hai đường tròn

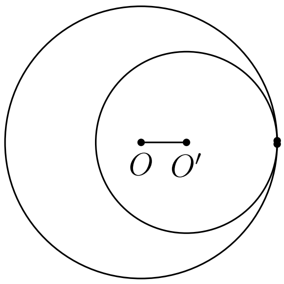
Xét vị trí tương đối của hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ với $R > r$.

1. Nếu $R - r < OO' < R + r$ thì (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

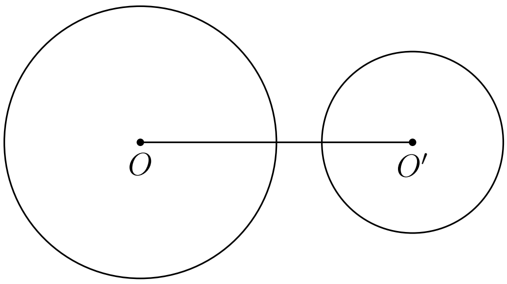


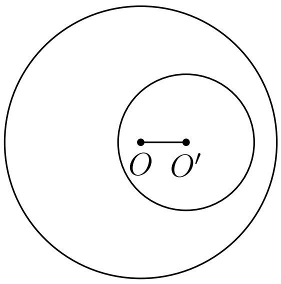
2. Nếu $OO' = R + r$ thì (O) và (O') tiếp xúc ngoài với nhau.
   Nếu $OO' = R - r$ thì (O) và (O') tiếp xúc trong với nhau.





3. Nếu $OO' > R + r$ thì (O) và (O') ở ngoài nhau.
   Nếu $OO' < R - r$ thì (O) chứa (O').





Chú ý.

- Nếu hai đường tròn cắt nhau thì hai giao điểm đối xứng với nhau qua đường nối hai tâm.
- Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối hai tâm.

1.2 Tiếp tuyến chung của hai đường tròn

1. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn là đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn đó.

2. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn không cắt đoạn nối hai tâm là tiếp tuyến chung ngoài, cắt đoạn nối tâm là tiếp tuyến chung trong.

2 Các ví dụ

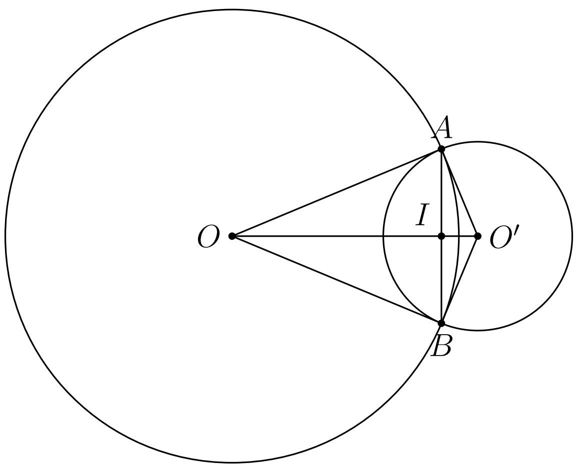
Ví dụ 1. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ với $R = 12\text{cm}$, $r = 5\text{cm}$, $OO' = 13\text{cm}$.

1. Chứng minh hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A, B và OO' là đường trung trực của AB.

2. Chứng minh AO là tiếp tuyến của đường tròn $(O'; r)$.

3. Tính độ dài AB.

Lời giải.



1. Vì $12 - 5 < 13 < 12 + 5$ nên $R - r < d < R + r$. Vậy hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A, B.
   Mặt khác ta có $OA = OB = R$ và $OA' = OB' = r$ nên OO' là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

2. Ta có $OO'^2 = OA^2 + O'A^2$ nên tam giác AOO' vuông tại A. Từ đó suy ra AO là tiếp tuyến của đường tròn $(O'; r)$.

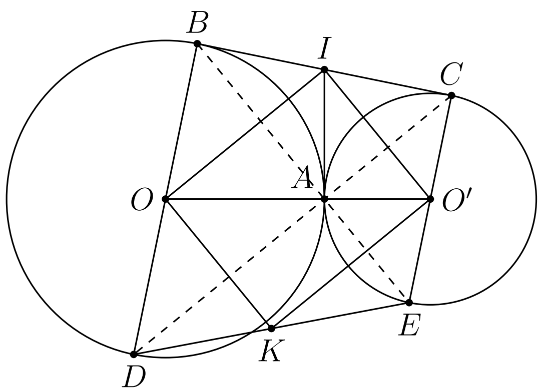
3. Gọi I là giao điểm của OO' và AB. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác AOO' vuông tại A, AI là đường cao ta có
   $$OO' \cdot AI = OA \cdot OA' \Rightarrow AI = \frac{OA \cdot OA'}{OO'} = \frac{60}{13} \text{ (cm)}.$$
   Do đó $AB = 2AI = \dfrac{120}{3}$ (cm).

□

Ví dụ 2. Cho đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC với $B \in (O)$, $C \in (O')$. Tiếp tuyến chung trong tại A cắt tiếp tuyến chung ngoài BC ở I.

1. Vẽ đường kính BOD và $CO'E$. Chứng minh các bộ ba điểm B, A, E và C, A, D thẳng hàng.
2. Chứng minh $\triangle BAC$ và $\triangle DAE$ có diện tích bằng nhau.
3. Gọi K là trung điểm của DE. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp $\triangle OKO'$ tiếp xúc với BC.

Lời giải.



1. Do IA và IB là tiếp tuyến của (O) nên $IA = IB$; IA và IC là tiếp tuyến của (O') nên $IA = IC$. Do đó $IA = IB = IC$, suy ra $\triangle BAC$ vuông tại A hay $\widehat{BAC} = 90^\circ$.
   Mặt khác, $O'A = O'C = O'E$ nên $\triangle CAE$ vuông tại A hay $\widehat{CAE} = 90^\circ$. Từ đó suy ra $\widehat{BAC} = \widehat{CAE} = 90^\circ$, do đó các bộ ba điểm B, A, E và C, A, D thẳng hàng.
2. Vì $\triangle BAD \backsim \triangle EAC$ (g.g) nên
$$\frac{BA}{EA} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AB \cdot AC = AD \cdot AE \Rightarrow S_{BAC} = S_{DAE}.$$
3. Vì IO' và OK lần lượt là đường trung bình của tam giác CBE và tam giác DEB nên $IO' \parallel BE$, $IO' = \frac{1}{2}BE$ và $OK \parallel BE$, $OK = \frac{1}{2}BE$. Do đó $IO' = OK$ và $IO' \parallel OK$, suy ra tứ giác $OIO'K$ là hình bình hành.
   Mặt khác, do OI là đường trung bình của $\triangle BDC$ nên $OI \parallel DC$, mà $OI' \parallel BE$, $DC \perp BE$ nên $OI \perp IO'$. Từ đó suy ra tứ giác $OIO'K$ là hình chữ nhật.
   Đường tròn ngoại tiếp tam giác $\triangle OKO'$ là đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $OIO'K$ có đường kính là IK. Mà $IK \perp BC$ tại I (do IK là đường trung bình của hình thang vuông $ECBD$, $\widehat{ECB} = \widehat{DBC} = 90^\circ$) nên đường tròn ngoại tiếp $\triangle OKO'$ tiếp xúc với BC.

□

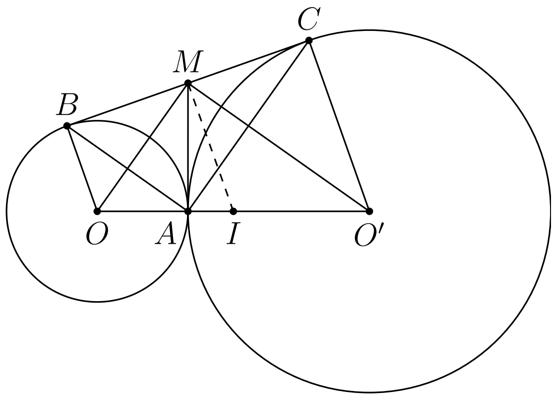
Ví dụ 3. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài tiếp xúc với (O) và (O') lần lượt ở B và C. Đường vuông góc với OO' kẻ từ A cắt BC ở M.

1. Tính MA theo R và r.

2. Tính diện tích tứ giác $BCO'O$ theo R và r.
3. Tính diện tích tam giác BAC theo R và r.
4. Gọi I là trung điểm của OO'. Chứng minh rằng BC là tiếp tuyến của đường tròn $(I; IM)$.

Lời giải.

1. Vì MA và MB là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên MO là tia phân giác của $\widehat{BMA}$, hay
$$\widehat{OMA} = \frac{1}{2}\widehat{BMA}. \qquad (1)$$
Do MA và MC là tiếp tuyến của đường tròn (O') nên MO' là tia phân giác của $\widehat{CMA}$, hay
$$\widehat{O'MA} = \frac{1}{2}\widehat{CMA}. \qquad (2)$$
Từ (1) và (2) ta có
$$\widehat{OMO'} = \widehat{OMA} + \widehat{O'MA} = \frac{1}{2}\widehat{BMA} + \frac{1}{2}\widehat{CMA} = \frac{1}{2}\widehat{BMC} = 90^\circ.$$
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OMO' vuông tại M, $MA \perp OO'$ ta có
$$MA^2 = AO \cdot AO' \Rightarrow MA^2 = Rr \Rightarrow MA = \sqrt{Rr}.$$



2. Do MA và MB là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\triangle OMB = \triangle OMA$. (3)
Do MA và MC là tiếp tuyến của đường tròn (O') nên $\triangle O'MC = \triangle O'MA$. (4)
Từ (3) và (4) ta có
$$S_{BCOO'} = S_{OBMA} + S_{O'CMA} = 2S_{OMO'} = 2 \cdot \frac{1}{2} OO' \cdot MA = (R+r)\sqrt{Rr}.$$

3. Vì $\triangle BAC \backsim \triangle OMO'$ (g.g) nên
$$\frac{S_{BAC}}{S_{OMO'}} = \left(\frac{BC}{OO'}\right)^2 \Rightarrow S_{BAC} = \frac{S_{OMO'} \cdot BC^2}{OO'^2} = \frac{4Rr\sqrt{Rr}}{R+r}.$$

4. Tứ giác $OBCO'$ là hình thang vuông tại B và C có IM là đường trung bình. Do đó $IM \perp BC$ tại M. Vậy BC là tiếp tuyến của đường tròn $(I; IM)$.

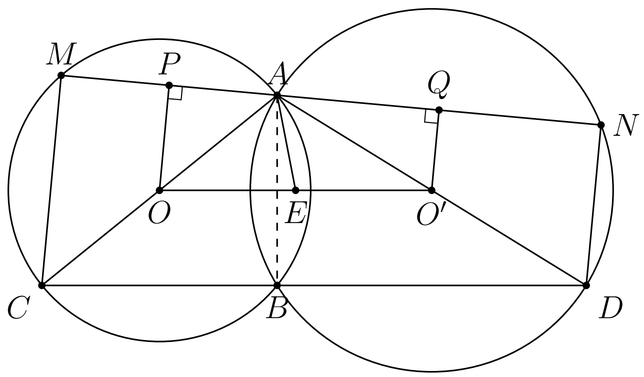
□

Ví dụ 4. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Một cát tuyến qua A cắt (O) ở M, cắt (O') ở N sao cho A nằm giữa M và N. Từ A vẽ các đường kính AOC và $AO'D$.

1. Tứ giác $CMND$ là hình gì?
2. Gọi E là trung điểm của OO'. Với $MA = NA$, chứng minh MN là tiếp tuyến của đường tròn $(E; EA)$.

Lời giải.

1. Vì $\widehat{CMA} = \widehat{DNA} = 90^\circ$ nên tứ giác $CMND$ là hình thang vuông.



2. Vẽ $OP \perp MA$ và $O'Q \perp NA$. Khi $MA = NA$ thì AE là đường trung bình của hình thang vuông $OPQO'$ ($\widehat{P} = \widehat{Q} = 90^\circ$), do đó $EA \perp MN$. Vậy khi $MA = NA$ thì MN là tiếp tuyến của đường tròn $(E; EA)$.

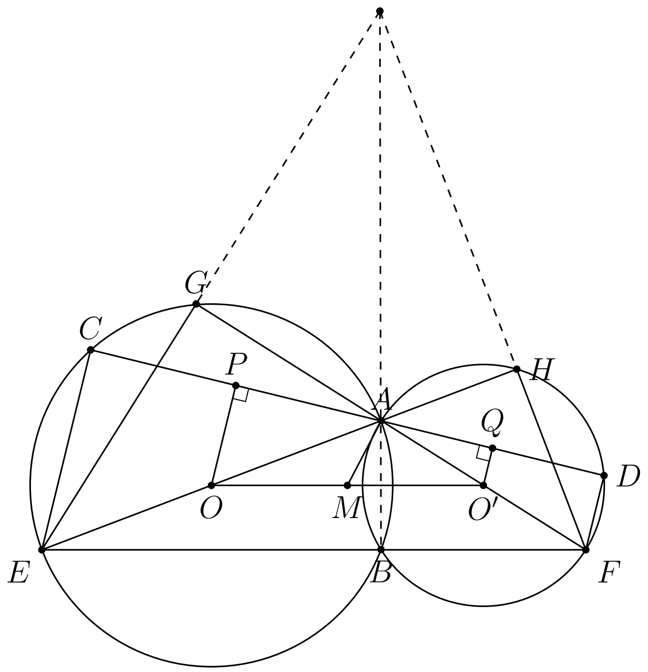
□

Ví dụ 5. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Gọi M là trung điểm của OO'. Đường thẳng qua A cắt các đường tròn (O) và (O') lần lượt ở C và D.

1. Khi $CD \perp MA$, chứng minh $AC = AD$.
2. Khi CD qua A và không vuông góc với MA.
   i) Vẽ đường kính AE của (O), AE cắt (O') ở H. Vẽ đường kính AF của (O'), AF cắt (O) ở G. Chứng minh AB, EG, FH đồng quy.
   ii) Tìm vị trí của CD để đoạn thẳng CD có độ dài lớn nhất?

Lời giải.

Vẽ $OP \perp CA$ và $O'Q \perp AD$. Khi đó tứ giác $OPQO'$ là hình thang vuông tại P và Q.



1. Vì $CD \perp MA$ và M là trung điểm của OO' nên MA là đường trung bình của hình thang $OPQO'$. Do đó $AP = AQ$ hay $AC = AD$.

2. Khi CD qua A và không vuông góc với MA.

    i) Vì tam giác AEF có ba đường cao là AB, EG, FH nên AB, EG, FH đồng quy.

    ii) Ta có $CD = 2PQ$. Mặt khác tứ giác $OPQO'$ là hình thang vuông tại P và Q nên $PQ \le OO'$. Do đó CD lớn nhất khi $CD \parallel OO'$.

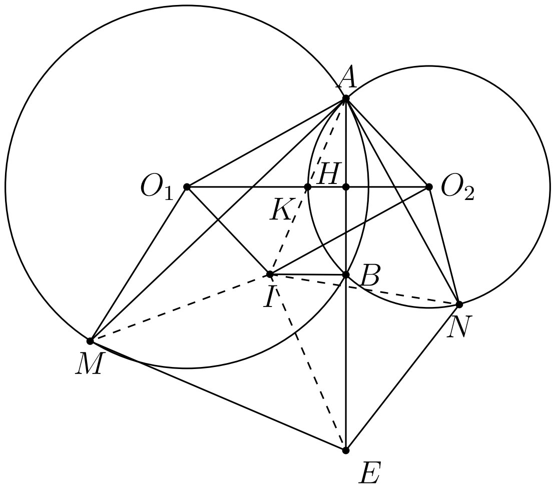
□

Ví dụ 6. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B. Gọi AM là dây cung của đường tròn (O_1) tiếp xúc với đường tròn (O_2) ở A và AN là dây cung của đường tròn (O_2) tiếp xúc với đường tròn (O_1) ở A. Gọi E là điểm đối xứng với A qua B.

1. Chứng minh rằng bốn điểm A, M, E, N cùng thuộc một đường tròn.
2. Khi hai đường tròn (O_1) và (O_2) thay đổi nhưng luôn cắt nhau tại hai điểm cố định A và B, tìm tập hợp tâm I của đường tròn qua bốn điểm A, M, E, N.

Lời giải.

1. Từ O_1 và O_2 kẻ các đường vuông góc với AM và AN, chúng cắt nhau tại I. Ta có $O_1I \parallel AO_2$ (vì cùng vuông góc với MA); $O_2I \parallel AO_1$ (vì cùng vuông góc với NA) nên tứ giác AO_1IO_2 là hình bình hành.



O_1O_2 cắt AI ở K và cắt AB ở H thì KH là đường trung bình của tam giác AIB, do đó $KH \parallel IB$. Mà $O_1O_2 \perp AB$ nên $IB \perp AB$.
Vì B là trung điểm của AE nên $IA = IE$. Ta lại có $IA = IM = IN$ (vì O_1I, O_2I lần lượt là đường trung trực của AM, AN). Vậy điểm I các đều bốn điểm A, M, E, N nên bốn điểm này cùng thuộc đường tròn tâm I.

2. Theo câu a) thì I nằm trên đường thẳng d vuông góc với AB tại B. Trên d lấy một điểm I tùy ý (I khác B), AI cắt đường trung trực xy của AB tại K. Trên xy lấy hai điểm O_1, O_2 sao cho K là trung điểm của O_1O_2.
Dựng hai đường tròn tâm O_1 và O_2 có bán kính O_1A và O_2A, chúng cắt nhau tại A và B. Dựng các dậy AM và AN của hai đường tròn tâm O_1 và O_2 lần lượt tiếp xúc với hai đường tròn (O_2) và (O_1) tại A. Khi đó tứ giác AO_1IO_2 là hình bình hành và điểm I cách đều bốn điểm A, M, E, N.

□

3 Luyện tập

Bài 1. Cho $\widehat{xOy} = 90°$. Lấy các điểm I, K theo thứ tự trên các tia Ox, Oy. Vẽ đường tròn $(I; OK)$ cắt tia Ox tại M (I nằm giữa O và M). Vẽ đường tròn $(K; OI)$ cắt Oy tại N (K nằm giữa O và N).

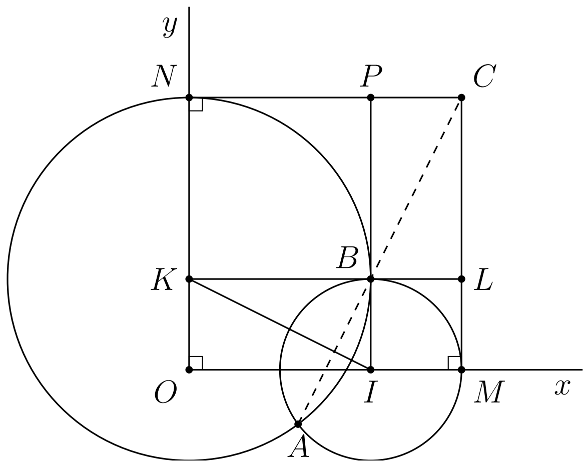
1. Chứng minh hai đường tròn (I) và (K) luôn cắt nhau.

2. Tiếp tuyến tại M của đường tròn (I) và tiếp tuyến tại N của đường tròn (K) cắt nhau tại C. Chứng minh tứ giác $OMCN$ là hình vuông.

3. Gọi giao điểm của hai đường tròn (I) và (K) là A, B. Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

4. Giả sử I và K theo thứ tự di động trên Ox và Oy sao cho $OI + OK = a$ không đổi. Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.



1. Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác ta có $|OK - OI| < IK < OK + OI$. Do đó hai đường tròn (I) và (K) luôn cắt nhau.

2. Ta có $\widehat{CMO} = \widehat{MON} = \widehat{NOC} = 90^\circ$ nên tứ giác $OMCN$ là hình chữ nhật.
Mặt khác, $OI = OK$, $OK = IM$, suy ra $OM = ON$, do đó tứ giác $OMCN$ là hình vuông.

3. Gọi L là giao điểm của KB và MC, K là giao điểm của IB và NC. Khi đó tứ giác $OKBI$ là hình chữ nhật và tứ giác $BLMI$ là hình vuông. Suy ra
$$\triangle BLC = \triangle KOI \Rightarrow \widehat{LBC} = \widehat{OKI} = \widehat{BIK}.$$
Mà $\widehat{BIK} + \widehat{IBA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{LBC} + \widehat{IBA} = 90^\circ$. Do đó $\widehat{LBC} + \widehat{LBI} + \widehat{IBA} = 180^\circ$. Vậy ba điểm A, B, C thẳng hàng.

4. Vì $OI + OK = a$ không đổi nên $OM = OI + IM = OI + OK = a$ không đổi.
Mặt khác do tứ giác $OMCN$ là hình vuông nên $OC = \sqrt{2}OM = a\sqrt{2}$ không đổi. Vậy C là điểm cố định và AB luôn đi qua C.

□

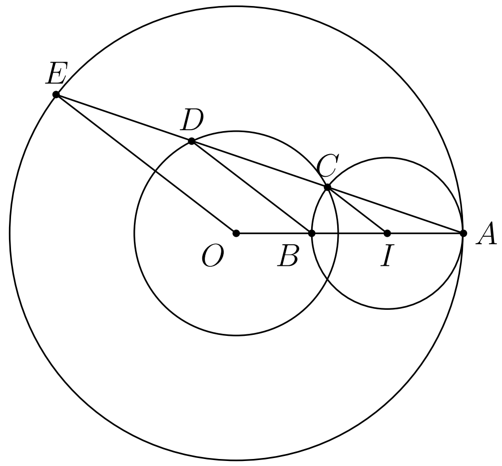
Bài 2. Cho đường tròn (O) và một điểm A trên đường tròn đó. Trên đoạn OA lấy điểm B sao cho $OB = \dfrac{1}{3}OA$. Vẽ đường tròn đường kính AB.

1. Chứng minh đường tròn đường kính AB tiếp xúc với đường tròn (O).

2. Vẽ đường tròn đồng tâm O với đường tròn (O) cho trước, cắt đường tròn đường kính AB tại C. Tia AC cắt hai đường tròn đồng tâm tại D, E (D nằm giữa C và E). Chứng minh $AC = CD = DE$.

Lời giải.

1. Gọi I là trung điểm của AB. Ta có $OI = OA - IA$ nên đường tròn đường kính AB tiếp xúc với đường tròn (O).



2. Ta có $IC = IA$ nên tam giác CIA cân tại A. Do đó

$$\widehat{CIA} = 180^\circ - \left(\widehat{ICA} + \widehat{IAC}\right) = 180^\circ - 2\widehat{IAC}.$$

Tương tự $\widehat{DBA} = 180^\circ - 2\widehat{BAD}$ và $\widehat{EOA} = 180^\circ - 2\widehat{OAE}$. Từ đó suy ra $IC \parallel BD \parallel OE$. Mặt khác, $IA = IO = \dfrac{1}{3}AB$ (do $OB = \dfrac{1}{3}OA$). Do đó $OB = BI = IA$. Suy ra

$$AC = CD = DE.$$

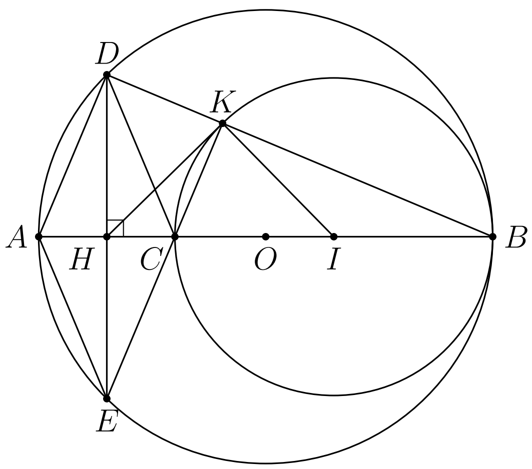
□

Bài 3. Cho đường tròn (O) đường kính AB, điểm C nằm giữa A và O. Vẽ đường tròn (I) có đường kính CB.

1. Xét vị trí tương đối của hai đường tròn (O) và (I).
2. Kẻ dây DE của đường tròn (O) vuông góc với AC tại trung điểm H của AC. Tứ giác $ADCE$ là hình gì? Vì sao?
3. Gọi K là giao điểm của DB và đường tròn (I). Chứng minh ba điểm E, C, K thẳng hàng.
4. Chứng minh HK là tiếp tuyến của đường tròn (I).

Lời giải.

1. Vì điểm C nằm giữa hai điểm A và O, I là trung điểm của BC nên I nằm giữa hai điểm B và O, dó đó $OI = OB - IB$. Vậy hai đường tròn (O) và (I) tiếp xúc trong với nhau tại I.



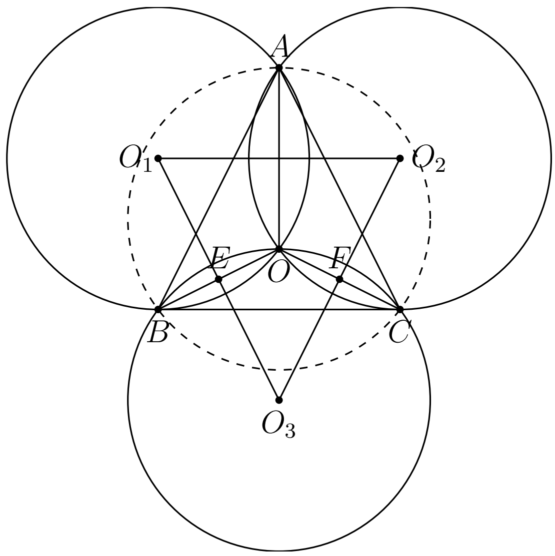
2. Vì H là trung điểm của AC và DE, $DE \perp AC$ tại H nên tứ giác $ADCE$ là hình thoi.
3. Ta có $CK \perp AB$, $AD \perp DB$ nên $CK \parallel AD$, mà $CE \parallel AD$ do đó ba điểm B, K, D thẳng hàng.
4. Ta có $\widehat{HKD} = \widehat{HDK}$, $\widehat{IKB} = \widehat{IBK}$ nên
$$\widehat{HKD} + \widehat{IKB} = \widehat{HKD} + \widehat{IBK} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{IKH} = 90^\circ.$$
Vậy HK là tiếp tuyến của đường tròn (I).

□

Bài 4. Cho ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) có cùng bán kính R và cùng đi qua điểm O. Gọi giao điểm thứ hai của từng cặp hai trong ba đường tròn là A, B, C. Chứng minh

1. Đường tròn đi qua ba điểm A, B, C có bán kính bằng R.
2. Ba đường thẳng xác định bởi tâm của một đường tròn và giao điểm của hai đường tròn còn lại cắt nhau tại một điểm.

Lời giải.



1. Gọi E là giao điểm của O_1O_3 và OB, F là giao điểm của O_2O_3 và OC. Vì EF là đường trung bình của hai tam giác $O_1O_2O_3$ và OBC nên $BC \parallel O_1O_2$ và $BC = O_1O_2$. Tương tự $AB = O_2O_3$, $AC = O_1O_3$. Do đó $\triangle ABC = \triangle O_1O_2O_3$ (c.c.c).
Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có bán kính bằng R (vì bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $O_1O_2O_3$ bằng R).
2. Ba đường thẳng AO_3, BO_2, CO_1 cắt nhau tại một điểm vì đó là các đường thẳng chứa các đường chéo của hai hình bình hành có chung một đường chéo.

□

Bài 5. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài tiếp xúc với (O) và (O') lần lượt ở B và C. Tiếp tuyến chung trong cắt BC ở I. Gọi E, F thứ tự là giao điểm của IO với AB và của IO' với AC.

1. Chứng minh A, E, I, F cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm K của đường tròn đó.

2. Chứng minh $IE \cdot IO + IF \cdot IO' = \dfrac{1}{2}(AB^2 + AC^2)$.

3. Gọi P là trung điểm của OA. Chứng minh PE tiếp xúc với (K).

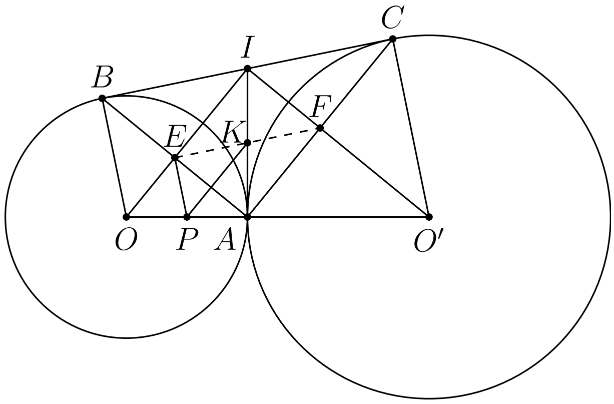
4. Cho OO' cố định và có độ dài là $2a$. Tìm điều kiện của R và R' để diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Lời giải.

1. Vì IB và IA là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $IO \perp AB$ tại E. (1)
Vì IC và IA là tiếp tuyến của đường tròn (O') nên $IO' \perp AC$ tại F. (2)
Mặt khác

$$\widehat{EIF} = \widehat{EIA} + \widehat{FIA} = \frac{1}{2}\widehat{BIA} + \frac{1}{2}\widehat{CIA} = \frac{1}{2}\left(\widehat{BIA} + \widehat{CIA}\right) = \frac{1}{2}\widehat{BIC} = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có $\widehat{AEI} = \widehat{AFI} = \widehat{EIF} = 90^\circ$, do đó tứ giác $AEIF$ là hình chữ nhật. Vì vậy, A, E, I, F cùng thuộc một đường tròn có tâm K là trung điểm của AI và EF.



2. Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông OAI ($\widehat{IAO} = 90^\circ$), $AE \perp OI$ ta có

$$IE \cdot IO == IA^2 = IB^2 = \frac{BC^2}{4}. \quad (4)$$

Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông $O'AI$ ($\widehat{IAO'} = 90^\circ$), $AE \perp O'I$ ta có

$$IF \cdot IO' = IA^2 = IC^2 = \frac{BC^2}{4}. \quad (5)$$

Từ (4) và (5) ta có

$$IE \cdot IO + IF \cdot IO' = \frac{BC^2}{4} + \frac{BC^2}{4} = \frac{BC^2}{2} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2\right).$$

3. Vì P là trung điểm của OA nên PK là đường trung bình của tam giác OAI và PK là đường trung trực của EA. Do đó $\widehat{PEK} = \widehat{PAK} = 90^\circ$. Vậy PE tiếp xúc với (K).

4. Ta có $\triangle ABC \backsim \triangle IOO'$ (g.g) nên

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle IOO'}} = \left(\frac{BC}{OO'}\right)^2 \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{S_{\triangle IOO'} \cdot BC^2}{OO'^2}. \tag{6}$$

Mà $BC = 2IA$; $OO' = 2a$; $S_{\triangle IOO'} = \frac{1}{2} \cdot OO' \cdot IA = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot IA$ nên thay vào (6) ta được

$$S_{\triangle ABC} = \frac{S_{\triangle IOO'} \cdot BC^2}{OO'^2} = \frac{a \cdot IA \cdot (2IA)^2}{(2a)^2} = \frac{IA^3}{a}.$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OIO' ($\widehat{OIO'} = 90^\circ$, $IA \perp OO'$) ta có

$$IA^2 = AO \cdot AO' = R \cdot R' \leq \left(\frac{R + R'}{2}\right)^2 = a^2.$$

Suy ra IA lớn nhất bằng a khi $R = R'$. Vậy $S_{\triangle ABC}$ lớn nhất bằng a^2 khi $R = R'$.

□

Bài 6. Cho đường tròn tâm O đường kính AB và một điểm C di động trên đoạn AB. Vẽ các đường tròn tâm I đường kính AC và đường tròn tâm K đường kính BC. Tia Cx vuông góc với AB tại C, cắt (O) tại M. Đoạn thẳng MA cắt đường tròn (I) tại E và đoạn thẳng MB cắt đường tròn (K) tại F.

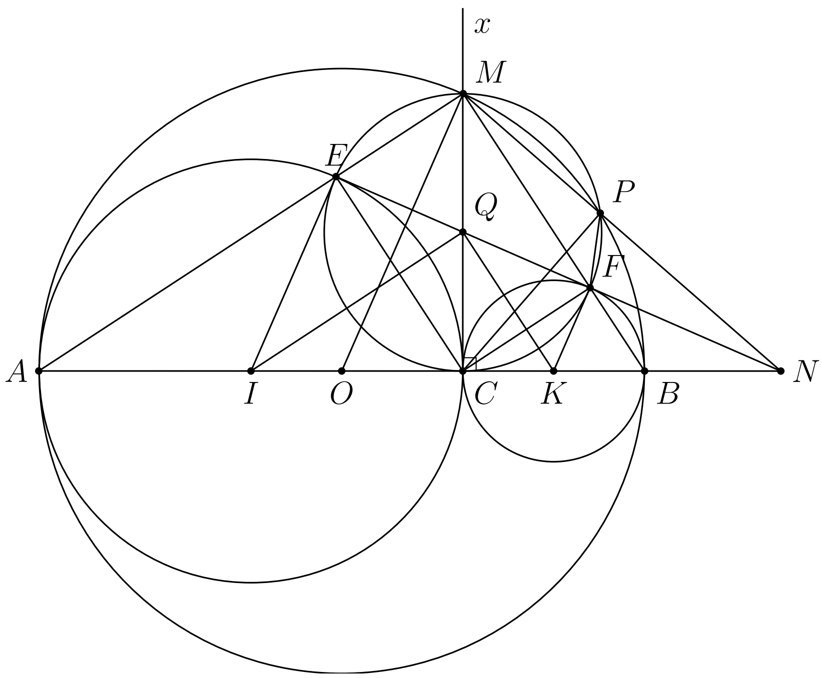
1. Chứng minh tứ giác $MECF$ là hình chữ nhật và EF là tiếp tuyến chung của (I) và (K).
2. Cho $AB = 4$cm, xác định vị trí điểm C trên AB để diện tích tứ giác $IEFK$ lớn nhất.
3. Khi C khác O, đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $MECF$ cắt đường tròn (O) tại P (khác M), đường thẳng PM cắt đường thẳng AB tại N. Chứng minh tam giác MPF đồng dạng với tam giác MBN.
4. Chứng minh ba điểm N, E, F thẳng hàng.

Lời giải.

1. Xét $\triangle AMB$ có $MO = OA = OB$ nên $\triangle AMB$ vuông tại M. Từ đó suy ra

$$\widehat{EMF} = \widehat{AMB} = 90^\circ. \tag{1}$$

Tương tự ta có $\widehat{AEC} = 90^\circ$ và $\widehat{CFB} = 90^\circ$. (2)
Từ (1) và (2) ta có $\widehat{CEM} = \widehat{EMF} = \widehat{MFC} = 90^\circ$. Do đó tứ giác $EMFC$ là hình chữ nhật.
Gọi Q là giao điểm của MC và EF. Do tứ giác $EMFC$ là hình chữ nhật nên $QE = QC$.
Mặt khác $IE = IC$ nên IQ là đường trung trực của CE. Suy ra $\widehat{IEQ} = \widehat{ICQ} = 90^\circ$. Do đó EF là tiếp tuyến của đường tròn (I). (3)
Tương tự $\widehat{KFQ} = \widehat{KCQ} = 90^\circ$, suy ra EF là tiếp tuyến của đường tròn (K). (4)
Từ (3) và (4) suy ra EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K).



2. Do $\widehat{IEF} = \widehat{KFE} = 90^\circ$ nên tứ giác $IEFK$ là hình thang vuông tại E và F. Do đó

$$S_{IEFK} = \frac{1}{2}(IE + FK) \cdot EF = \frac{1}{2}\left(\frac{AC}{2} + \frac{BC}{2}\right) \cdot EF = \frac{1}{4}AB \cdot EF.$$

Mà tứ giác $EMFC$ là hình chữ nhật nên $EF = CM$. Khi C di động trên đoạn AB và $Cx \perp AB$ thì $CM \leq \dfrac{AB}{2}$. Do đó

$$S_{IEFK} = \frac{1}{4}AB \cdot EF = \frac{1}{4}AB \cdot CM \leq \frac{1}{4}AB \cdot \frac{AB}{2} = \frac{1}{8}AB^2 = \frac{1}{8} \cdot 4^2 = 2\ (\text{cm}^2).$$

Do đó giá trị lớn nhất của S_{IEFK} bằng $2\ (\text{cm}^2)$, đạt được khi và chỉ khi C trùng với O.

3. Vì P thuộc đường tròn đường kính CM nên tam giác MCP vuông tại P. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông NCM, $CP \perp MN$, ta có

$$MC^2 = MP \cdot MN. \tag{5}$$

Tương tự, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông MCB, đường cao CF, ta có

$$MC^2 = MF \cdot MB. \tag{6}$$

Từ (5) và (6) suy ra

$$MP \cdot MN = MF \cdot MB \Rightarrow \frac{MP}{MB} = \frac{MF}{MN}.$$

Xét hai tam giác MPF và MBN có $\widehat{PMF}$ chung, $\dfrac{MP}{MB} = \dfrac{MF}{MN}$ (chứng minh trên), do đó $\triangle MPF \backsim \triangle MBN$ (c.g.c).

4. Ta có $\widehat{OMA} = \widehat{OAM} = \widehat{CMB} = \widehat{CEF}$, do đó $OM \perp EF$. (7)
Vì $QP = QM$, $OP = OM$ nên QO là đường trung trực của đoạn thẳng MP, suy ra $OQ \perp MN$. Mặt khác $MQ \perp ON$ nên Q là trực tâm của $\triangle OMN$, do đó $NQ \perp OM$. (8)
Từ (7) và (8) ta có bốn điểm N, E, F, Q thẳng hàng. Vậy ba điểm N, E, F thẳng hàng.

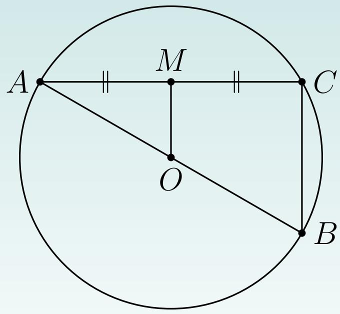
□

§8 Ôn tập chương 2

1 Các ví dụ

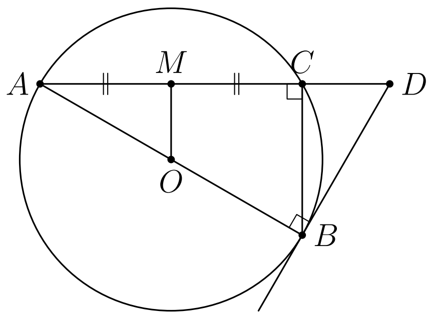
Ví dụ 1. Cho hình vẽ bên, biết đường kính $AB = 10$ cm; $OM = 3$ cm.

1. Tính số đo góc $\widehat{ACB}$;
2. Tính độ dài dây AC;
3. Tiếp tuyến tại B của đường tròn cắt tia AC ở D. Tính độ dài CD.



Lời giải.

1. Theo bài ra ta thấy $OC = OA = \dfrac{AB}{2}$.
   Tam giác ABC có trung tuyến CO bằng nửa cạnh đối AB nên $\triangle ABC$ vuông tại C.
   Vậy $\widehat{ACB} = 90^\circ$.
2. Vì M là trung điểm của AC nên $OM \perp AC$ (bán kính đi qua trung điểm của dây cung).
   Suy ra tam giác AOM vuông tại M nên
   $$AM^2 = OA^2 - OM^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow AM = 4 \text{ (cm)}.$$
   Vậy $AC = 2 \cdot AM = 8$ (cm).
3. Vì BD là tiếp tuyến của đường tròn O nên $BD \perp AB$.
   Suy ra tam giác ABD vuông tại B.
   Lại có $\widehat{ACB} = 90^\circ \Rightarrow BC \perp AD$ nên BC là đường cao ứng với cạnh huyền AD của tam giác vuông ABD, ta có
   $AB^2 = AC \cdot AD \Rightarrow AD = \dfrac{AB^2}{AC} = \dfrac{10^2}{8} = 12{,}5$ (cm).
   Từ đó suy ra $CD = AD - AC = 12{,}5 - 8 = 4{,}5$ (cm).



□

Ví dụ 2. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 12$ cm, dây MN vuông góc với AB tại trung điểm I của OB. Các tiếp tuyến của (O) tại M và N cắt nhau tại C. Vẽ đường tròn tâm I đường kính OB.

1. Xác định vị trí tương đối của (O) và (I);

2. Tính độ dài dây MN;

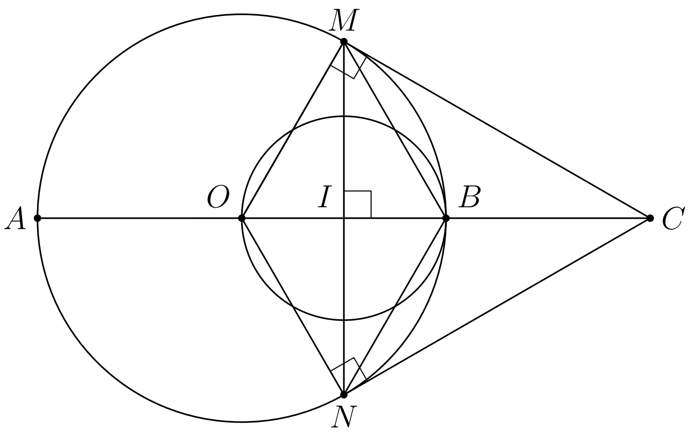
3. Tứ giác $BMON$ là hình gì? Vì sao?

4. Chứng minh: $CO \perp MN$;

5. Tính diện tích tứ giác $MONC$;

6. Chứng minh $\dfrac{4}{MN^2} = \dfrac{1}{OM^2} + \dfrac{1}{NC^2}$.

Lời giải.



1. (O) và (I) có bán kính lần lượt là OA và IB.
   Ta có $OI = OB - IB$.
   Vậy (O) tiếp xúc trong với (I) tại B.

2. Theo bài ra $MN \perp AB \Rightarrow MI \perp OI$ nên tam giác MIO là tam giác vuông tại I. Mặt khác $AB = 12$ cm $\Rightarrow OM = OB = 6$ cm, $IO = IB = 3$ cm. Ta có
   $MI^2 = OM^2 - OI^2 = 6^2 - 3^2 = 27 \Rightarrow MI = 3\sqrt{3}$ (cm).
   Vì $OB \perp MN$ tại I nên I cũng là trung điểm của MN.
   Vậy $MN = 2MI = 6\sqrt{3}$ (cm).

3. Từ giả thiết và kết quả của câu b) ta có I là trung điểm của OB và MN nên tứ giác $OMBN$ là hình bình hành.
   Mặt khác ta có $OM = ON$ (đều là bán kính) suy ra $OMBN$ là hình thoi.

4. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại C, ta có $CM = CN$.
   Mặt khác $OM = ON = R$, do đó CO là đường trung trực của MN.
   Vậy $CO \perp MN$.

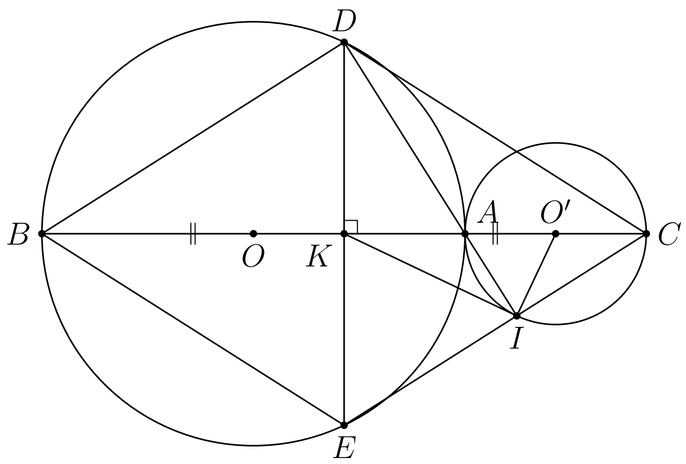
5. Tam giác MOC vuông tại M vì $OM \perp CM$ (bán kính vuông góc với tiếp tuyến tại tiếp điểm). Mặt khác từ câu c) ta có $CO \perp MN$ nên OI là hình chiếu của cạnh góc vuông OM lên cạnh huyền OC của tam giác vuông OCM.
   Vậy ta có $OM^2 = OI \cdot CO \Rightarrow OC = \dfrac{OM^2}{OI} = \dfrac{36}{3} = 12$ (cm).
   Tứ giác $OMCN$ có hai đường chéo vuông góc nên có diện tích là
   $S_{CMON} = \dfrac{1}{2}CO \cdot MN = \dfrac{1}{2}9 \cdot 6\sqrt{3} = 27\sqrt{3}$ (cm^2).

6. Ta có $MI = \dfrac{MN}{2} \Rightarrow \dfrac{4}{MN^2} = \dfrac{1}{MI^2}$. (1)
$OM = ON$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau tại C). (2)
Tam giác OMC vuông tại M có đường cao MI nên ta có
$$\frac{1}{MI^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{MC^2}. \qquad (3)$$
Từ (1), (2), (3) suy ra
$$\frac{4}{MN^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{NC^2}.$$
□

Ví dụ 3. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài tại A $(R > R')$. Vẽ các đường kính AOB, $AO'C$. Dây DE của đường tròn (O) vuông góc với BC tại trung điểm K của BC.

1. Tứ giác $BDCE$ là hình gì? Vì sao?
2. Gọi I là giao điểm của DA và đường tròn (O'). Chứng minh rằng ba điểm E, I, C thẳng hàng;
3. Chứng minh rằng KI là tiếp tuyến của (O').

Lời giải.



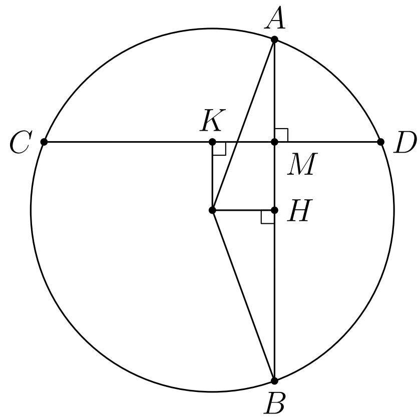
1. Tứ giác $BDCE$ có $BK = KC$, $DK = KE$ nên là hình bình hành.
Lại có $BC \perp DE$ nên $BDCE$ là hình thoi.
2. Ta có $\triangle AIC$ có $O'I = \dfrac{1}{2}AC$ nên $\widehat{AIC} = 90^\circ$ hay $AI \perp IC$.
Tương tự $AD \perp BD$. Suy ra $BD \parallel IC$.
Lại có $BD \parallel EC$ (tính chất hình thoi). Suy ra E, I, C thẳng hàng(Ơ-clit).
3. Nối KI và IO' ta có $KI = KD = KE$ (KI là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền). Do đó $\widehat{KIA} = \widehat{KDA}$. (1)
Tam giác $O'IA$ cân tại O' nên $\widehat{O'IA} = \widehat{O'AI} = \widehat{DAK}$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{KIA} + \widehat{O'IA} = \widehat{KDA} + \widehat{DAK} = 90^\circ$.
Vậy KI là tiếp tuyến của đường tròn (O').

□

Ví dụ 4. Cho đường tròn $(O; 13\text{ cm})$, dây $AB = 24$ cm.

1. Tính khoảng cách từ tâm O đến dây AB;
2. Gọi M là điểm thuộc dây AB. Qua M, vẽ dây CD vuông góc với dây AB tại điểm M. Xác định vị trí điểm M trên dây AB để $AB = CD$.

Lời giải.



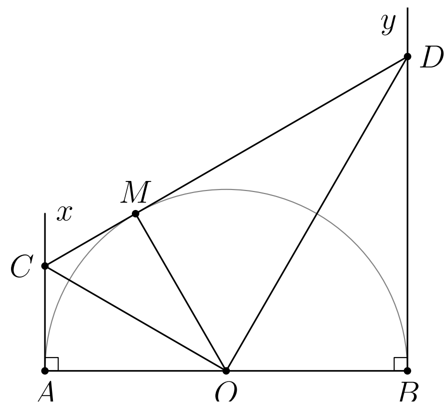
1. Hạ $OH \perp AB$. Xét $\triangle OHA$ có $\widehat{H} = 90^\circ$. Ta có
   - ☑ $AH = HB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{24}{2} = 12$ (cm).
   - ☑ $OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ (cm).
2. Hạ $OK \perp CD$. Áp dụng định lí về quan hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây ta có
   $AB = CD \Leftrightarrow OH = OK$.
   Mặt khác tứ giác $OHMK$ có $\widehat{H} = \widehat{K} = \widehat{M} = 90^\circ$ và $OH = OK$ nên $OHMK$ là hình vuông.
   Vậy để $AB = CD$ thì điểm $M \in AB$ và $HM = 5$ (cm).

□

Ví dụ 5. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Kẻ các tiếp tuyến Ax, By cùng phía với nửa đường tròn đối với AB. Từ điểm M trên nửa đường tròn kẽ tiếp tuyến thứ ba với đường tròn, nó cắt Ax và By lần lượt tại C và D.

1. Chứng minh tam giác COD là tam giác vuông;
2. Chứng minh $AC \cdot BD = OM^2$;
3. Cho biết $OC = BA = 12$ cm. Tính độ dài AC và BD.

Lời giải.



1. Ta có CA và CM là hai tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{AOC} = \widehat{MOC}$.
   Tương tự $\widehat{BOD} = \widehat{MOD}$, mà $\widehat{AOM} + \widehat{MOB} = 180^\circ$ (hai góc kề bù).
   Suy ra $\widehat{COD} = 90^\circ$ hay $\triangle COD$ vuông.
2. Áp dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có $AC = MC$; $BD = MD$.
   Mặt khác, xét $\triangle COD$, $\widehat{COD} = 90^\circ$ ta có

$OM^2 = MC \cdot MD$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông).
Suy ra $AC \cdot BD = OM^2$ (điều phải chứng minh).

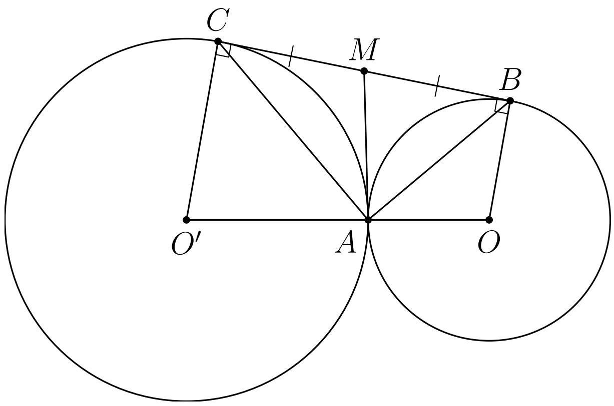
3. Từ $AB = 12$ cm $\Rightarrow OA = 6$ cm nên $AC = \sqrt{OC^2 - AO^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}$ (cm).
$BD = MD = \dfrac{OM^2}{MC} = \dfrac{OA^2}{AC} = \dfrac{6^2}{6\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ (cm).

□

Ví dụ 6. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ tiếp xúc ngoài tại A. Một đường thẳng (d) tiếp xúc với cả hai đường tròn trên tại B và C với $B \in (O)$, $C \in (O')$.

1. Chứng minh tam giác ABC vuông;
2. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh MA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O').

Lời giải.



1. Ta có $OB \parallel O'C$ (cùng vuông góc với BC).
$\Rightarrow$ Tứ giác $OBCO'$ là hình thang vuông.
$\Rightarrow \widehat{BOO'} + \widehat{CO'O} = 180^\circ$.
$\triangle CO'A$ cân tại O' có $\widehat{CAO'} = \dfrac{180^\circ - \widehat{CO'O}}{2} = 90^\circ - \dfrac{\widehat{CO'O}}{2}$. (1)
$\triangle BOA$ cân tại O có $\widehat{BAO} = \dfrac{180^\circ - \widehat{BOO'}}{2} = 90^\circ - \dfrac{\widehat{BOO'}}{2}$. (2)
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{CAO'} + \widehat{BAO} = 90^\circ - \dfrac{\widehat{CO'O}}{2} + 90^\circ - \dfrac{\widehat{BOO'}}{2}$.
$$= 180^\circ - \dfrac{\widehat{BOO'} + \widehat{CO'O}}{2}$$
$$= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$
Lại có $\widehat{CAO'} + \widehat{BAO} + \widehat{BAC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.
$\Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại A.

2. Ta có M là trung điểm của cạnh huyền $BC \Rightarrow MA = MB = MC \Rightarrow \triangle MAB$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{MBA}$.
Lại có $\triangle OAB$ cân tại O $\Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA}$
$$\Rightarrow \widehat{MAB} + \widehat{OAB} = \widehat{MBA} + \widehat{OBA}$$
$$\Leftrightarrow \widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90^\circ.$$

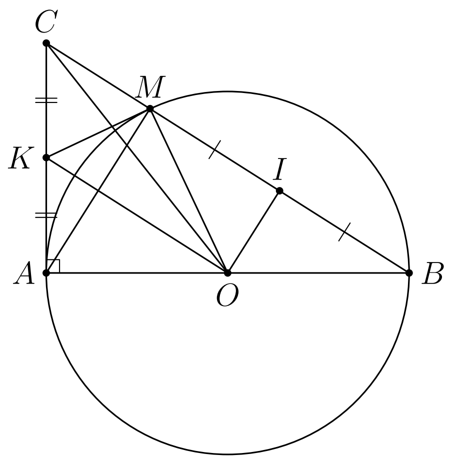
$\Rightarrow MA$ là tiếp tuyến của (O).
Chứng minh tương tự MA là tiếp tuyến của (O').
Vậy MA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O').

□

Ví dụ 7. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên tiếp tuyến Ax lấy điểm $C \neq A$. Đoạn thẳng BC cắt (O) tại M. Gọi I là trung điểm của MB, K là trung điểm của AC.

1. Chứng minh AM là đường cao của tam giác ABC và $AC^2 = CM \cdot CB$;
2. Chứng minh A, I, C, M cùng nằm trên một đường tròn;
3. Chứng minh KM là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải.



1. Tam giác AMB nội tiếp đường tròn (O) có AB là đường kính $\Rightarrow \triangle AMB$ vuông tại M hay $\widehat{AMB} = 90^\circ \Rightarrow AM$ là đường cao của tam giác ABC.
Xét tam giác ABC vuông tại A có AM là đường cao $\Rightarrow AC^2 = CM \cdot CB$ (hệ thức liên hệ giữa cạnh và đường cao).

2. Tam giác ACO vuông tại $A \Rightarrow$ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACO là trung điểm của CO. (1)
Xét tam giác AMB có I là trung điểm của AM, O là trung điểm của $AB \Rightarrow IO$ là đường trung bình của tam giác $AMB \Rightarrow IO \parallel AM$.
Mà $AM \perp MB \Rightarrow IO \perp MB$.
Tam giác CIO vuông tại $I \Rightarrow$ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CIO là trung điểm của CO. (2)
Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ bốn điểm A, I, C, O cùng thuộc một đường tròn.

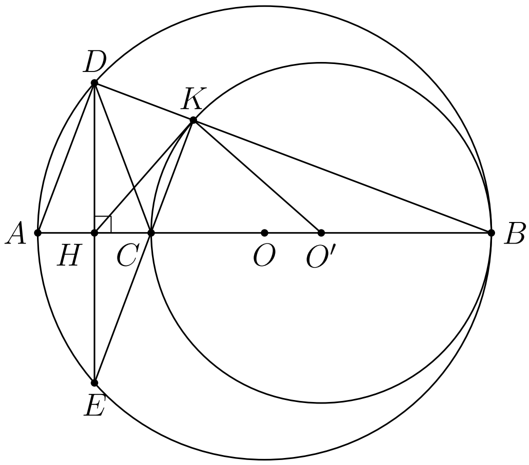
3. Tam giác CMA vuông tại M có MK là trung tuyến $\Rightarrow MK = KA = KC$.
Xét $\triangle KAO$ và $\triangle KMO$ có
$$\begin{cases} KA = KM \\ KO \text{ là cạnh chung} \\ AO = MO \text{ (bằng bán kính } (O)) \end{cases} \Rightarrow \triangle KAO = \triangle KMO \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \widehat{KAO} = \widehat{KMO}.$$
Mà $\widehat{KAO} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{KMO} = 90^\circ \Rightarrow KM$ là tiếp tuyến của (O).

□

Ví dụ 8. Cho đường tròn (O), đường kính AB, điểm C nằm giữa A và O. Vẽ đường tròn (O') có đường kính CB.

1. Hai đường tròn (O) và (O') có vị trí tương đối như thế nào?
2. Kẻ dây DE của đường tròn (O) vuông góc với AC tại trung điểm H của AC. Tứ giác $ADCE$ là hình gì? Vì sao?
3. Gọi K là giao điểm của DB và đường tròn (O'). Chứng minh rằng 3 điểm E, C, K thẳng hàng;
4. Chứng minh HK là tiếp tuyến của đường tròn (O').

Lời giải.



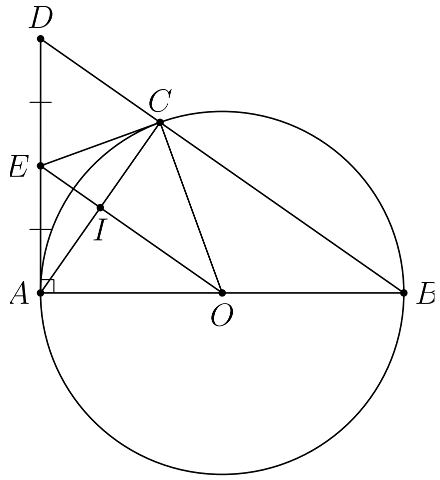
1. Ta có $OO' = OB - O'B \Rightarrow$ hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc trong tại B.
2. Dây DE của (O) vuông góc với đường kính $AB \Rightarrow AB$ đi qua trung điểm của DE hay H là trung điểm của AB.
   Xét tứ giác $ADCE$ có H là trung điểm của AB, H cũng là trung điểm của $AC \Rightarrow$ tứ giác $ADCE$ là hình bình hành.
   Lại có $AC \perp DE \Rightarrow$ tứ giác $ADCE$ là hình thoi.
3. $\triangle KCB$ có trung tuyến $KO' = \dfrac{BC}{2}$ nên vuông tại $K \Rightarrow \widehat{CKB} = 90^\circ$ hay $CK \perp BD$. (1)
   Chứng minh tương tự ta có $\widehat{ADB} = 90^\circ$ hay $AD \perp BD$. (2)
   Từ (1)và (2) $\Rightarrow CK \parallel AD$.
   Lại có $CE \parallel AD$ (vì tứ giác $ADCE$ là hình thoi) $\Rightarrow C$, E, K thẳng hàng.
4. Xét tam giác DEK vuông tại K có KH là trung tuyến nên $KH = HE$.
   Tam giác KHE có $KH = HE \Rightarrow \triangle KHE$ cân tại $H \Rightarrow \widehat{HKE} = \widehat{KEH}$.
   Lại có $\triangle O'CK$ cân tại O'
   $$\begin{aligned} &\Rightarrow \widehat{O'CK} = \widehat{O'KC} \\ &\Rightarrow \widehat{HKE} + \widehat{O'KC} = \widehat{KEH} + \widehat{O'CK} \\ &\Leftrightarrow \widehat{O'KH} = \widehat{KEH} + \widehat{O'CK}. \end{aligned}$$
   Mặt khác $\widehat{O'CK} = \widehat{HCE}$(đối đỉnh)
   Tam giác HEC vuông tại H nên $\widehat{KEH} + \widehat{HCE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{KEH} + \widehat{O'CK} = 90^\circ$ hay $\widehat{O'KH} = 90^\circ \Rightarrow KH$ là tiếp tuyến của (O').

□

Ví dụ 9. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Lấy điểm C thuộc (O). Tiếp tuyến tại A của (O) cắt đường thẳng BC tại D. Gọi E là trung điểm của AD.

1. Chứng minh EC là tiếp tuyến của (O);
2. Chứng minh EO vuông góc với AC tại trung điểm I của AC.

Lời giải.



1. Ta có $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow AC \perp BD$.
   Tam giác ACD vuông tại C có CE là trung tuyến nên $CE = EA = \dfrac{1}{2}AD$.
   Xét tam giác AEO và tam giác CEO có
   $\begin{cases} AE = CE \\ EO \text{ là cạnh chung} \\ AO = CO \end{cases} \Rightarrow \triangle AEO = \triangle CEO$ (c.c.c)
   $\Rightarrow \widehat{EAO} = \widehat{ECO} = 90^\circ \Rightarrow CE$ là tiếp tuyến của (O).

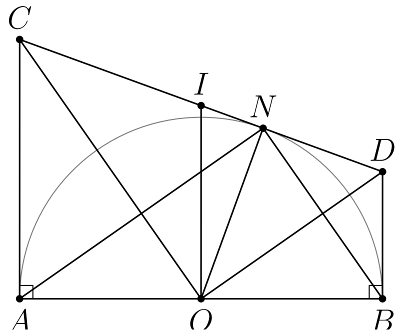
2. EA và EC là 2 tiếp tuyến của (O) cắt nhau tại $E \Rightarrow EA = EC$.
   Lại có $OA = OC \Rightarrow OE$ là đường trung trực của đoạn AC hay OE vuông góc với AC tại trung điểm I của AC

□

Ví dụ 10. Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$, N là điểm trên nửa đường tròn. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ hai tiếp tuyến Ax và By và một tiếp tuyến tại N cắt hai tiếp tuyến Ax và By lần lượt tại C và D.

1. Chứng minh $AC + BD = CD$ và $AC \cdot BD$ không đổi;
2. Chứng minh AB tiếp xúc với đường tròn đường kính CD;
3. Biết $AC = \dfrac{R}{2}$. Tính NA và NB.

Lời giải.



1. Ta có DN và DB là hai tiếp tuyến cắt nhau tại $D \Rightarrow DN = DB$.
   Lại có CA và CN là hai tiếp tuyến cắt nhau tại $C \Rightarrow CA = CN$ nên $DB + CA = DN + CN = DC$.
   Mặt khác OC và OD lần lượt là hai phân giác của hai góc $\widehat{AON}$ và $\widehat{BON}$ kề bù nên $\widehat{COD} = 90^\circ$.
   Trong tam giác vuông COD có ON là đường cao nên $DN \cdot CN = ON^2 = R^2$.
   Hay $AC \cdot BD = R^2$ (không đổi).

2. Gọi I là tâm của đường tròn đường kính CD.
   Tứ giác $CABD$ là hình thang vuông $(AC \perp AB; BD \perp AB)$ có OI là đường trung bình $\Rightarrow OI \parallel AC$ mà $AC \perp AB \Rightarrow OI \perp AB$ tại O và $OI = \dfrac{AC + BD}{2} = \dfrac{CD}{2} = IC$.
   Vậy AB tiếp xúc với đường tròn đường kính CD.

3. Ta có $OA = ON = R$, $CA = CN$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).
   Do đó OC là đường trung trực của AN.
   Gọi H là giao điểm của OC và AN.
   Xét tam giác vuông CAO có AH là đường cao nên
   $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AO^2} + \dfrac{1}{CA^2} = \dfrac{1}{R^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{R}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{R^2} + \dfrac{4}{R^2} = \dfrac{5}{R^2} \Rightarrow AH = \dfrac{R\sqrt{5}}{5} \Rightarrow AN = \dfrac{2R\sqrt{5}}{5}$.
   $AN^2 + NB^2 = AB^2$ (theo Py-ta-go).
   $NB^2 = AB^2 - NA^2 = (2R)^2 - \dfrac{4R^2}{5} = \dfrac{16R^2}{5} \Rightarrow NB = \dfrac{4R}{\sqrt{5}} = \dfrac{4\sqrt{5}R}{5}$.
   Vậy $AN = \dfrac{2\sqrt{5}R}{5}$ và $BN = \dfrac{4\sqrt{5}R}{5}$.

□

2 Luyện tập

Bài 1. Cho đường tròn tâm O, bán kính R, kẻ đường kính AB và dây cung AM có độ dài bằng R. Tia OM cắt tiếp tuyến Ax (A là tiếp điểm) của đường tròn (O) tại P. Tiếp tuyến PN của (O) (N là tiếp điểm, N khác A) cắt đường thẳng AB ở Q.

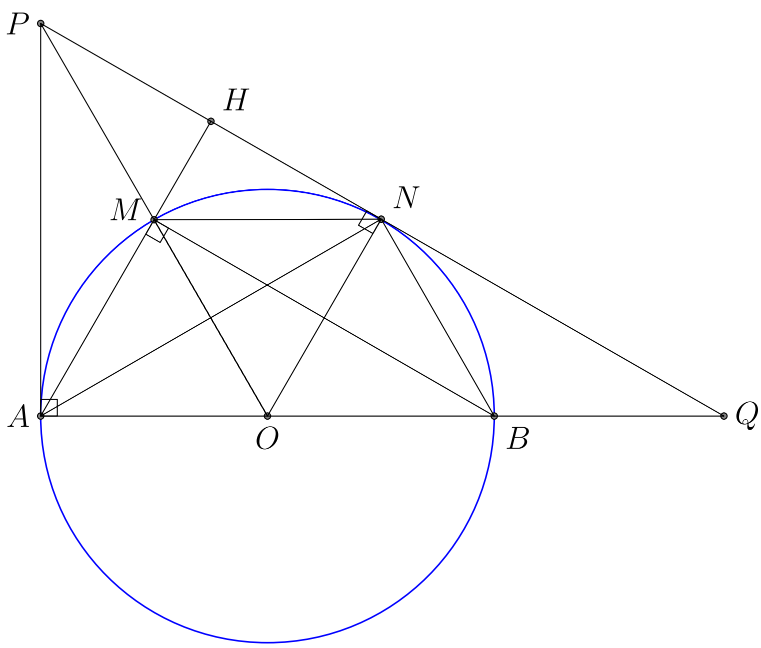
1. Chứng minh OP là đường trung trực của AN.

2. Chứng minh AM song song với ON và tính AP theo R.

3. Chứng minh tam giác APN đều và tính diện tích tam giác APQ theo R.
4. Gọi H là giao điểm của AM và PQ. Chứng minh rằng AP và AN là hai tiếp tuyến của đường tròn $(M; MH)$.

(Kiểm tra Học kì 1 Toán 9, Thừa Thiên Huế, năm học 2015 - 2016)

Lời giải.



1. Ta có $\begin{cases} PA = PB & \text{(tính chất tiếp tuyến)} \\ OA = ON = R \end{cases}$ suy ra OP là đường trung trực của AN.
2. Tam giác OAM đều $(AM = OA = OM = R) \Rightarrow \widehat{AMO} = \widehat{AOM} = 60^\circ$.
   Mà $\widehat{MON} = \widehat{AOM}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)
   Suy ra $\widehat{AMO} = \widehat{MON} = 60^\circ$.
   Vậy $AM \mathbin{/\mkern-5mu/} ON$.
   Ta có $AP \perp OA$ (vì AP là tiếp tuyến) $\Rightarrow \widehat{OAP} = 90^\circ$.
   Tam giác PAO vuông tại A nên $AP = OA \cdot \tan \widehat{AOP} = R \cdot \tan 60^\circ = R\sqrt{3}$.
3. Ta có $\widehat{PAN} = \widehat{AOM}$ (cùng phụ với $\widehat{OAN}$) do đó $\widehat{PAN} = 60^\circ$.
   Mà $PA = PN$ suy ra tam giác PAN đều suy ra $\widehat{APQ} = 60^\circ$.
   Tam giác APQ vuông tại A, nên $AQ = AP \cdot \tan \widehat{APQ} = R\sqrt{3} \cdot \tan 60^\circ = 3R$.
   Vậy $S_{APQ} = \dfrac{1}{2} \cdot PA \cdot AQ = \dfrac{1}{2} \cdot R\sqrt{3} \cdot 3R = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$(đvdt).
4. Ta có $ON \perp PN$ (vì PN là tiếp tuyến), $AM \mathbin{/\mkern-5mu/} ON$ suy ra $MH \perp PN$. Do đó, MH là khoảng cách từ M đến PN.
   Tam giác APN đều có AH là đường cao nên AH cũng là đường phân giác của tam giác APN.
   Mặt khác PO là phân giác của $\widehat{APN}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).
   Suy ra đường tròn $(M; MH)$ là đường tròn nội tiếp tam giác APN.
   Vậy AP và AN là hai tiếp tuyến của đường tròn $(M; MH)$.

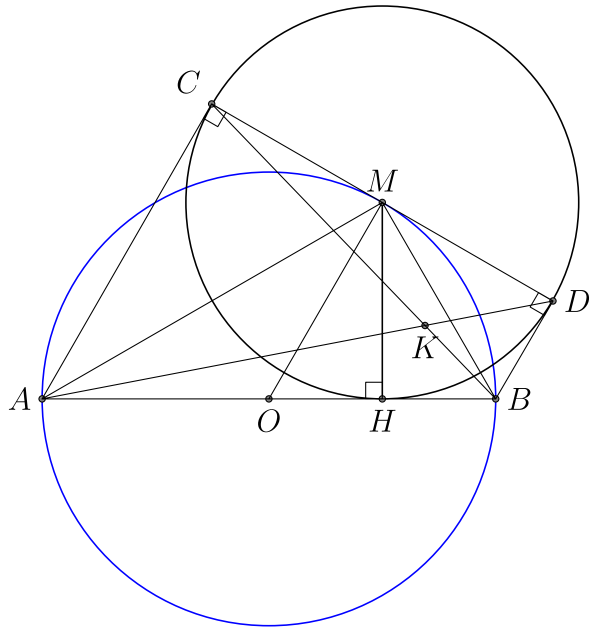
□

Bài 2. Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Gọi M là một điểm trên đường tròn (O) (M không trùng với A và B). Vẽ đường tròn tâm M tiếp xúc với AB tại H. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến AC và BD với đường tròn tâm M (C, D là hai tiếp điểm).

1. Chứng minh $AC + BD = AB$.
2. Chứng minh CD là tiếp tuyến của đường tròn (O).
3. Gọi K là giao điểm của AD và BC. Chứng minh rằng $KH \parallel AC$.

(Kiểm tra Học kì 1 Toán 9, Thừa Thiên Huế, năm học 2014 - 2015)

Lời giải.



1. Chứng minh $AC + BD = AB$.
   Ta có AC và AH là 2 tiếp tuyến cắt nhau tại A của (M) $\Rightarrow AH = AC$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau).
   Tương tự ta có $BH = BD$.
   $\Rightarrow AH + BH = AC + BD \Leftrightarrow AC + BD = AB$ (điều phải chứng minh).

2. Chứng minh CD là tiếp tuyến của đường tròn (O).
   Ta có AC và AH là 2 tiếp tuyến cắt nhau tại A của (M)
   $\Rightarrow MA$ là tia phân giác của $\widehat{CMH}$ (tính chất của 2 tiếp tuyến cắt nhau).
   $\Leftrightarrow \widehat{HMA} = \dfrac{1}{2}\widehat{CMH}$.
   Tương tự ta có $\widehat{HMB} = \dfrac{1}{2}\widehat{DMH}$.
   Suy ra

$$\begin{aligned} & \widehat{HMA} + \widehat{HMB} = \frac{1}{2}\widehat{CMH} + \frac{1}{2}\widehat{DMH} \\ \Leftrightarrow \quad & \widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{DMC} \\ \Leftrightarrow \quad & \widehat{CMD} = 180^\circ \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad C, D, M \quad \text{thẳng hàng.}$$

Suy ra M là trung điểm của CD hay tứ giác $ACDB$ là hình thang vuông, đáy AC, BD.
Mặt khác AC và BD là tiếp tuyến của (M) (giả thiết)
$\Leftrightarrow AC \perp CD; BD \perp CD \Leftrightarrow AC \parallel BD$.
Lại có O là trung điểm của AB nên OM là đường trung bình của hình thang $ACDB$ suy ra $OM \parallel BD$.
$OM \perp CD \Leftrightarrow CD$ là tiếp tuyến của (O) (điều phải chứng minh).

3. Gọi K là giao điểm của AD và BC. Chứng minh rằng $KH \parallel AC$.
   Ta có $AC \parallel BD \Rightarrow \dfrac{CK}{KB} = \dfrac{AC}{BD}$ (định lý Talet).
   Mà $AC = AH$, $BD = BH$ (chứng minh trên)
   $\Rightarrow \dfrac{CK}{KB} = \dfrac{AH}{HB} \Rightarrow HK \parallel AC$ (định lí Talet đảo).
   Xét $\triangle ACM$ và $\triangle AHM$ có: $\begin{cases} AC = AH & \text{(tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)} \\ OE = OD & \text{(bán kính).} \end{cases}$

□

Bài 3. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB và điểm C thuộc đường tròn (O) (C khác A và B), kẻ CH vuông góc với AB tại H.

1. Chứng minh tam giác ABC vuông tại C và $CH^2 = AC \cdot BC \cdot \sin A \cdot \cos A$.

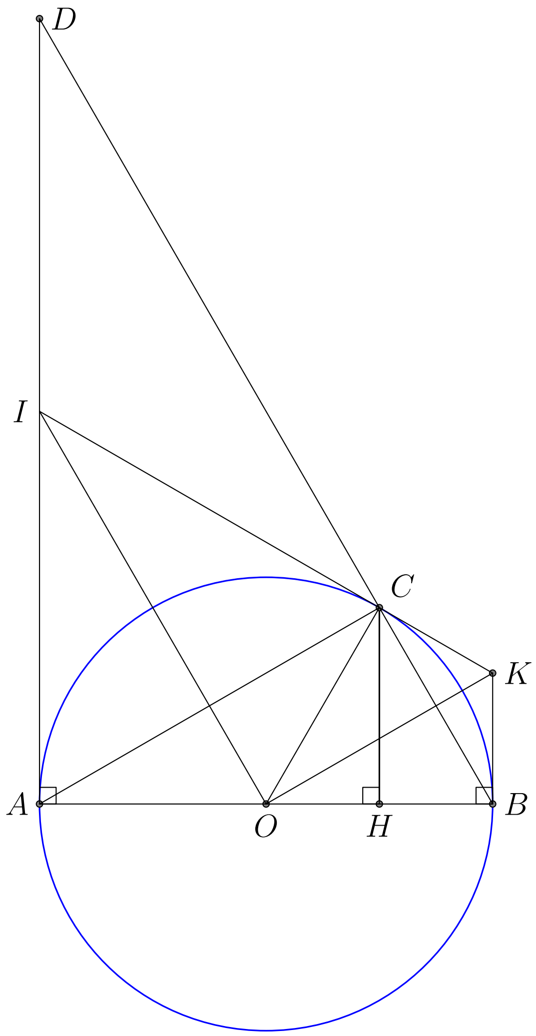
2. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt tia BC ở D. Gọi I là trung điểm của AD. Chứng minh đường thẳng IC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

3. Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt tia IC ở K. Chứng minh $IA \cdot BK = R^2$.

4. Xác định vị trí điểm C trên đường tròn (O) để diện tích tứ giác $ABKI$ nhỏ nhất.

(Kiểm tra Học kì 1 Toán 9, Thừa Thiên Huế, năm học 2013-2014)

Lời giải.



1. Chứng minh tam giác ABC vuông tại C và $CH^2 = AC \cdot BC \cdot \sin A \cdot \cos A$.

   Điểm C thuộc đường tròn (O) (C khác A và B) nên $OC = OA = OB = R = \dfrac{AB}{2}$.

   Tam giác ABC có trung tuyến $CO = \dfrac{AB}{2}$ suy ra $\triangle ABC$ vuông tại C (dấu hiệu nhận biết).

   Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ACB vuông tại C, đường cao CH ta có:

$$\begin{aligned} & CH^2 = AH \cdot BH \\ \Leftrightarrow\ & CH^2 = AC \cdot \cos A \cdot BC \cdot \sin A \\ \Leftrightarrow\ & CH^2 = AC \cdot BC \cdot \sin A \cdot \cos A \\ \Rightarrow\ & \text{Điều phải chứng minh.} \end{aligned}$$

2. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt tia BC ở D. Gọi I là trung điểm của AD. Chứng minh đường thẳng IC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

   Xét $\triangle ACD$ vuông tại C có I là trung điểm của cạnh huyền AD (giả thiết)

   $\Rightarrow IA = IC = \dfrac{AD}{2}$.

   Xét $\triangle AIO$ và $\triangle CIO$ có:

   $\begin{cases} IA = IC & \text{(Chứng minh trên)} \\ OA = OC & \text{(bán kính của đường tròn)} \\ OI \quad \text{chung.} \end{cases}$

   $\Rightarrow \triangle AIO = \triangle CIO$ (cạnh - cạnh - cạnh).

$\Rightarrow \widehat{IAO} = \widehat{ICO}$ (2 góc tương ứng của 2 tam giác bằng nhau).
$\Rightarrow \widehat{ICO} = 90^\circ \Rightarrow OC \perp IC$ hay IC là tiếp tuyến của (O).
Suy ra điều phải chứng minh.

3. Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt tia IC ở K. Chứng minh $IA \cdot BK = R^2$. Ta có IA, IC là tiếp tuyến của (O) cắt nhau tại I
$\Rightarrow IA = IC$ và OI là tia phân giác của $\widehat{ACO}$ (tính chất của 2 tiếp tuyến cắt nhau).
$\Rightarrow IA = IC$ và $\widehat{IOC} = \dfrac{\widehat{AOC}}{2}$.
Tương tự ta có $KC = KB$ và $\widehat{KOC} = \dfrac{\widehat{BOC}}{2}$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \widehat{IOC} + \widehat{KOC} = \frac{\widehat{AOC}}{2} + \frac{\widehat{BOC}}{2}\\
&\Leftrightarrow \quad \widehat{IOK} = \frac{\widehat{AOB}}{2}\\
&\Leftrightarrow \quad \widehat{IOK} = \frac{180^\circ}{2}\\
&\Leftrightarrow \quad \widehat{IOK} = 90^\circ\\
&\Leftrightarrow \quad \triangle IOK \text{ vuông tại } O.
\end{aligned}$$

Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông $\triangle IOK$ vuông tại O, đường cao OC ta có:

$$\begin{aligned}
& OC^2 = IC \cdot KC\\
\Leftrightarrow\ & OC^2 = IA \cdot BK\\
\Leftrightarrow\ & R^2 = IA \cdot BK\\
\Rightarrow\ & \text{điều phải chứng minh.}
\end{aligned}$$

4. Xác định vị trí điểm C trên đường tròn (O) để diện tích tứ giác $ABKI$ nhỏ nhất. Ta có $\triangle AIO = \triangle CIO$ (chứng minh trên).
Tương tự ta có: $\Rightarrow \triangle KBO = \triangle KCO$.
Suy ra $S_{AIKB} = 2 \cdot (S_{CIO} + S_{KOC}) = 2 \cdot S_{IOK} = OC \cdot KI = R \cdot KI$.
Mà $KI \geq AB \Rightarrow S_{AIKB} \geq R \cdot AB = 2 \cdot R^2$.
Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow KI = AN \Leftrightarrow C$ là điểm chính giữa cung AB.
Vậy S_{AIKB} đạt GTLN là $2R^2$ khi C là điểm chính giữa cung AB.

□

Bài 4. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Lấy C thuộc (O), gọi E là trung điểm BC. Tiếp tuyến tại C của O cắt OE ở D.

1. Chứng minh $\triangle ACB$ vuông và OE vuông góc với BC.

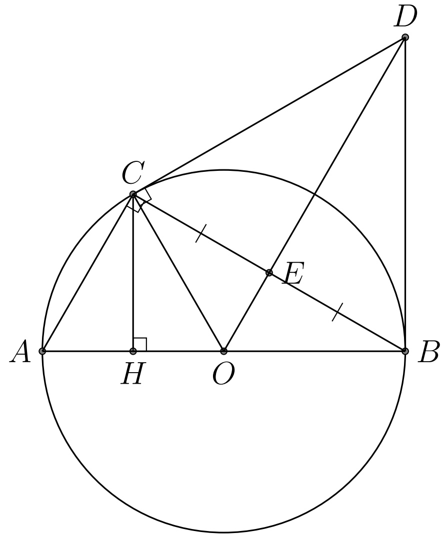
2. Chứng minh DB là tiếp tuyến của (O).

3. Kẻ CH vuông góc với AB. Chứng minh $CB \cdot OC = OD \cdot HC$.

(Đề thi Toán 9 Học kỳ 1 năm học 2017-2018, Quận 12, HCM)

Lời giải.

1. Vì C thuộc đường tròn đường kính AB nên $\widehat{ACB} = 90^\circ$ hay $\triangle ABC$ vuông tại C.
   Vì E là trung điểm BC nên $OE \perp BC$ (liên hệ đường kính và dây cung).
2. Tam giác OCB cân tại O có $OE \perp BC$ nên OE cũng là tia phân giác của góc BOC suy ra $\widehat{COE} = \widehat{BOE}$.
   Xét $\triangle ODC$ và $\triangle ODB$ có
   OD là cạnh chung
   $OC = OD = R$
   $\widehat{COE} = \widehat{BOE}$ (cmt)
   $\Rightarrow \triangle ODC = \triangle ODB$ (c.g.c)
   $\Rightarrow \widehat{DBO} = \widehat{DCO}$ (hai góc tương ứng).
   Mặt khác $\widehat{DCO} = 90^\circ$ (tính chất tiếp tuyến) nên $\widehat{DBO} = 90^\circ$ hay $DB \perp OB$, mặt khác OB là bán kính của (O).
   Vậy DB là tiếp tuyến của đường tròn (O).



c) Ta có $\widehat{CBH} = \widehat{ODB}$ (cùng phụ góc $\widehat{DBE}$), mà $\widehat{ODC} = \widehat{ODB}$ suy ra $\widehat{ODC} = \widehat{CBH}$.
Xét hai tam giác vuông CHB và OCD có $\widehat{OHC} = \widehat{OCD} = 90^\circ$ và $\widehat{ODC} = \widehat{CBH}$ nên $\triangle CHB \backsim \triangle OCD$ (g.g)
suy ra $\dfrac{CH}{OC} = \dfrac{BC}{OD} \Rightarrow CH \cdot OD = OC \cdot BC$ (đpcm).

□

Bài 5. Cho nửa đường tròn $(O; R)$, đường kính AB. Vẽ các tiếp tuyến Ax và By của đường tròn (O).

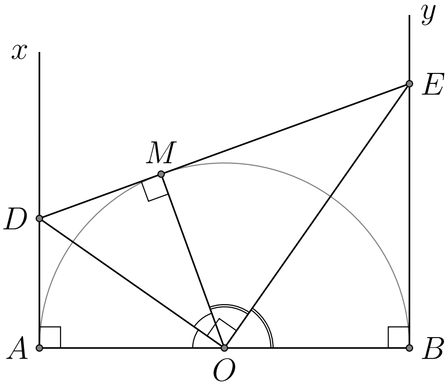
1. Chứng minh $Ax \,/\!/\, By$.
2. Trên (O) lấy điểm M. Tiếp tuyến tại M của đường tròn (O) lần lượt cắt Ax và By tại D, E. Chứng minh $DE = DA + BE$.
3. Chứng minh $\widehat{DOE} = 90^\circ$ và $DA \cdot BE = R^2$.

(Đề thi Toán 9 Học kỳ 1 năm học 2017-2018, Thủ Đức, Hồ Chí Minh)

Lời giải.

a) Ax, By là 2 tiếp tuyến của nửa đường tròn $\Rightarrow Ax \perp AB$ và $By \perp AB \Rightarrow Ax \,/\!/\, By$.

b) Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có $DA = DM$ và $BE = EM$. Suy ra $DE = DM + EM = DA + BE$.



c) Cũng theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có $\widehat{AOD} = \widehat{DOM}$ và $\widehat{MOE} = \widehat{EOB}$.
Mà $\widehat{AOD} + \widehat{DOM} + \widehat{MOE} + \widehat{EOB} = \widehat{AOB} = 180^\circ$.
Suy ra $\widehat{DOE} = \widehat{DOM} + \widehat{MOE} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOB} = \dfrac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$.
Hơn nữa, $DA \cdot BE = DM \cdot EM = OM^2 = R^2$.

□

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Vẽ đường tròn tâm O đường kính AC cắt cạnh BC tại D. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AD và DC.

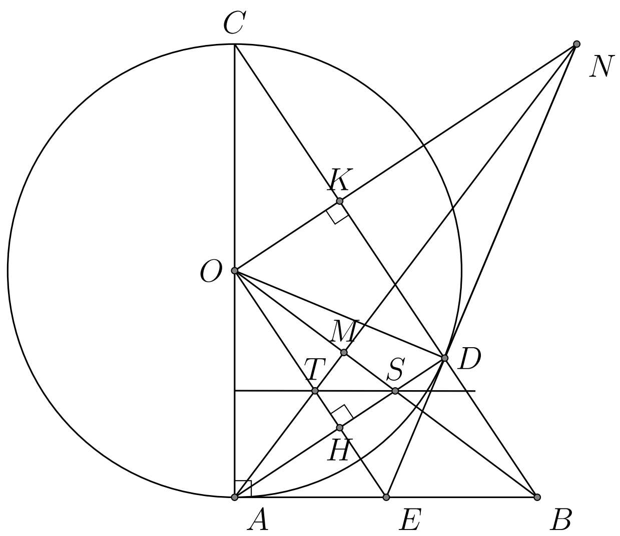
1. Chứng minh tứ giác $OHKD$ là hình chữ nhật.

2. Tia OH cắt cạnh AB tại E. Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).

3. Tia OK cắt đường thẳng DE tại N và cắt đường tròn tâm O tại I. Gọi S là giao điểm của OB với AD. Đường thẳng đi qua S và vuông góc với AO cắt tia OH tại T. Chứng minh AT vuông góc với BO và 3 điểm A, T, N thẳng hàng.

(Đề thi Toán 9 Học kỳ 1 năm học 2017-2018, Trần Đại Nghĩa, HCM)

Lời giải.



1. Ta có $OH \perp AD \Rightarrow \widehat{OHD} = 90^\circ$; $OK \perp CD \Rightarrow \widehat{KDA} = 90^\circ$.
Mặt khác, tam giác ADC vuông tại D nên $\widehat{CDA} = 90^\circ$. Do đó tứ giác $OHKD$ là hình chữ nhật.

2. Ta có $\widehat{EDA} = \widehat{EAD}$ (OE là trung trực của AD).
$\widehat{EAD} = \widehat{ACD}$ (cùng phụ với góc $\widehat{ABC}$).
$\widehat{ACD} = \widehat{CDO}$ (tam giác OAD cân).
Suy ra $\widehat{EDA} = \widehat{CDO}$.
Mặt khác $\widehat{CDO} + \widehat{DAO} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EDO} = \widehat{ADO} + \widehat{ADO} = \widehat{ADO} + \widehat{EDA} = 90^\circ$.
Vậy DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).

3. Tam giác AOS có OH và ST là hai đường cao cắt nhau tại T nên T là trực tâm
$\Rightarrow AT$ là đường cao tam giác AOS hay $AT \perp OB$.
Gọi M là giao điểm của AT với OB. Để chứng minh A, T, N thẳng hàng ta cần chứng minh

$MN \perp OB$ tại M.
Tam giác OAB vuông tại A có AM là đường cao $\Rightarrow OM \cdot OB = OA^2$.
Tam giác OND vuông tại D có DK là đường cao $\Rightarrow OK \cdot ON = OD^2$.
Vì $OA = OD$ (bán kính đường tròn (O)) nên $OM \cdot OB = OK \cdot ON \Rightarrow \dfrac{OM}{ON} = \dfrac{OK}{OB}$.
Xét tam giác OMN và tam giác OKB có $\widehat{BON}$ chung và $\dfrac{OM}{ON} = \dfrac{OK}{OB}$
$\Rightarrow \triangle OMN \backsim \triangle OKB \Rightarrow \widehat{NMO} = \widehat{OKB} = 90^\circ \Rightarrow NM \perp OB$.
Vậy A, T, N thẳng hàng.

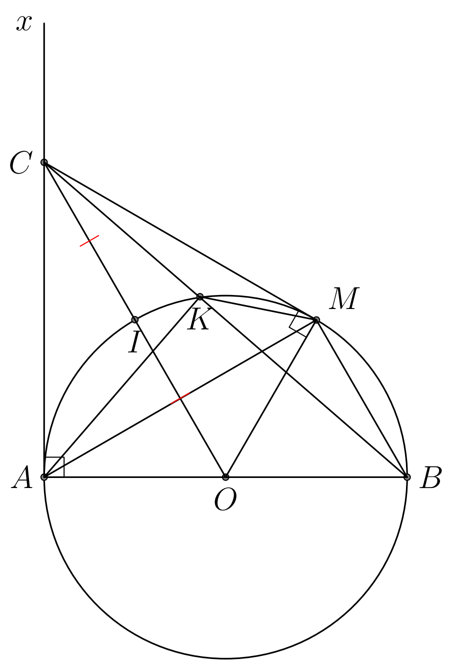
□

Bài 7. Cho đường tròn $(O; R)$ đường tính AB. Qua điểm A kẻ tia tiếp tuyến Ax đến đường tròn (O). Trên tai Ax lấy điểm C sao cho $AC > R$. Từ điểm C kẻ tiếp tuyến CM với đường tròn (O) (M là tiếp điểm).

1. Chứng minh rằng bốn điểm A, C, O, M cùng thuộc một đường tròn.
2. Chứng minh rằng $MB \parallel OC$.
3. Gọi K là giao điểm thứ hai của BC với đường tròn (O). Chứng minh rằng $BC \cdot BK = 4R^2$.
4. Chứng minh rằng $\widehat{CMK} = \widehat{MBC}$.

(Đề thi Toán 9 Học kỳ 1 năm học 2017-2018,Bắc Từ Liêm, Hà Nội)

Lời giải.



1. Gọi I là trung điểm của OC.
Tam giác vuông CAO có AI là đường trung tuyến nên $AI = IO = IC$. (1)
Tương tự $MI = IO = IC$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $IC = IO = IA = IM$.
Vậy bốn điểm A, C, O, M cùng thuộc một đường tròn đường kính OC.

2. Ta có $\begin{cases} CA = CM \\ OA = OM = R \end{cases} \Rightarrow OC$ là đường trung trực của $AM \Rightarrow OC \perp AM$. (1)

   Mặt khác, tam giác AMB có OM là đường trung tuyến và $OM = \dfrac{1}{2}AB$ nên $\triangle AMB$ vuông tại $M \Rightarrow BM \perp AM$. (2)
   Từ (1) và (2) suy ra $MB \parallel OC$.

3. Vì CA là tiếp tuyến của $(O;R)$ đường kính AB (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{CAB} = 90^\circ$ hay tam giác ABC vuông tại A.
   K thuộc $(O;R)$ đường kính $AB \Rightarrow \widehat{AKB} = 90^\circ$ hay $AK \perp BC \Rightarrow AK$ là đường cao của $\triangle ABC$.
   Xét tam giác ABC vuông tại A, đường cao AK, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$$\begin{aligned} & AB^2 = BK \cdot BC \\ \Leftrightarrow\ & BC \cdot BK = 4R^2. \end{aligned}$$

   Suy ra điều phải chứng minh.

4. Xét tam giác ABC vuông tại A, đường cao AK, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$$AC^2 = CK \cdot CB.$$

   Mà $AC = CM$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ & CM^2 = CK \cdot CB \\ \Rightarrow\ & \frac{CK}{CM} = \frac{CM}{CB} \\ \Rightarrow\ & \triangle CKM \backsim \triangle CMB \quad \text{(cạnh - góc - cạnh)} \\ \Rightarrow\ & \widehat{CMK} = \widehat{MBC}. \end{aligned}$$

□

Bài 8. Cho đường tròn tâm O bán kính R và một điểm M nằm ngoài đường tròn. Qua M kẻ tiếp tuyến MA với đường tròn (A là tiếp điểm). Tia Mx nằm giữa MA và MO cắt đường tròn $(O;R)$ tại hai điểm C và D (C nằm giữa M và D). Gọi I là trung điểm của dây CD, kẻ AH vuông góc với MO tại H.

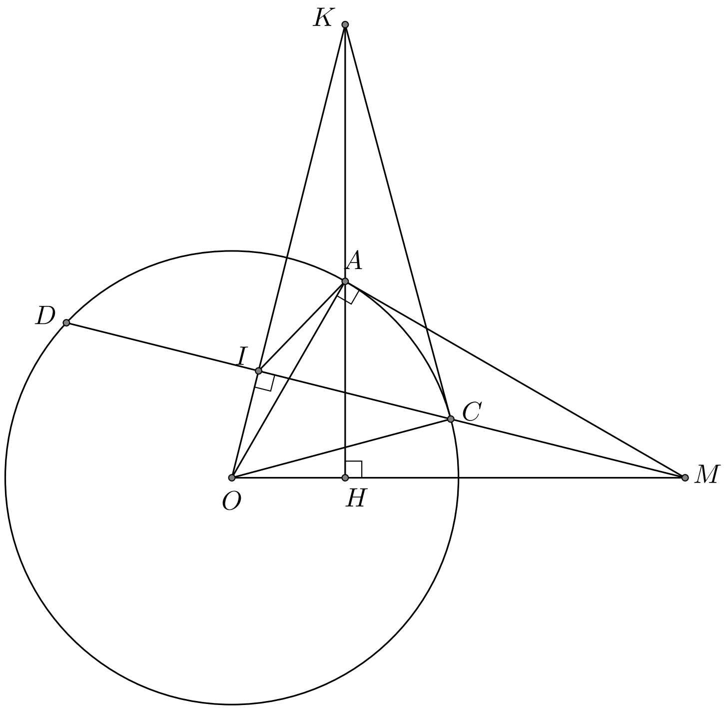
1. Tính $OH \cdot OM$ theo R.

2. Chứng minh: Bốn điểm M, A, I, O cùng thuộc một đường tròn.

3. Gọi K là giao điểm của OI với HA. Chứng minh KC là tiếp tuyến của đường tròn $(O;R)$.

(Kiểm tra Học kì 1 Toán 9, Đề A, Sở GDĐT Tỉnh Thanh Hóa, năm 2016)

Lời giải.



1. Xét tam giác AMO vuông tại A có $AH \perp MO \Rightarrow OH \cdot OM = OA^2 = R^2$.

2. Xét đường tròn (O) có I là trung điểm dây $CD \Rightarrow OI \perp CD$.
   Do đó I thuộc đường tròn đường kính OM. (1)
   Mặt khác ta lại có MA là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $OA \perp AM$.
   Do đó A thuộc đường tròn đường kính OM. (2)
   Từ (1) và (2) ta có bốn điểm A, I, O, M thuộc đường tròn đường kính OM.

3. Xét $\triangle OHK$ và $\triangle OIM$ có:
   $\widehat{OHK} = \widehat{OIM} = 90°$; $\widehat{O}$ chung.
   $\Rightarrow \triangle OHK \backsim \triangle OIM$ (g.g).
   Suy ra $\dfrac{OH}{OI} = \dfrac{OK}{OM} \Rightarrow OI.OK = OH.OM = AO^2 = OC^2$
   $\Rightarrow \dfrac{OI}{OC} = \dfrac{OC}{OK} \Rightarrow \triangle OCK \backsim \triangle OIC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OCK} = \widehat{OIC} = 90°$.
   $\Rightarrow OC \perp KC$, mà C thuộc đường tròn (O).
   Do đó KC là tiếp tuyến của đường tròn (O) (đpcm).

□

Bài 9. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB và tia tiếp tuyến Ax cùng phía với nửa đường tròn đối với AB. Từ điểm M trên Ax kẻ tiếp tuyến thứ hai MC với nửa đường tròn (C là tiếp điểm). Kẻ CH vuông góc với AB ($H \in AB$). Chứng minh rằng

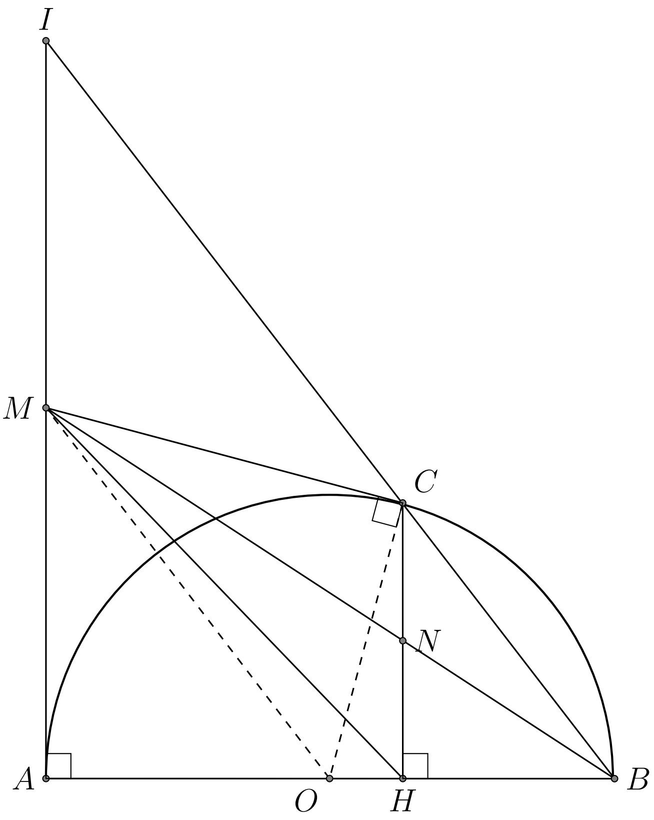
1. $\widehat{ACB} = 90°$.

2. $BC \parallel OM$.

3. MB đi qua trung điểm của đoạn thẳng CH.

(Kiểm tra Học kì 1 Toán 9, Vĩnh Long, năm 2017)

Lời giải.



1. Tam giác ABC có CO là đường trung tuyến và $CO = \frac{1}{2}AB$ nên tam giác ABC vuông tại C, do đó $\widehat{ACB} = 90^\circ$.

2. Có $MA = MC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) suy ra $\triangle MAC$ cân tại M , mà MO là phân giác của $\widehat{AMC}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau), nên MO cũng là đường cao của tam giác MAC. Do đó $MO \perp AC$. Lại có $BC \perp AC$ (ABC vuông tại C) $\Rightarrow BC \,/\!\!/\, OM$.

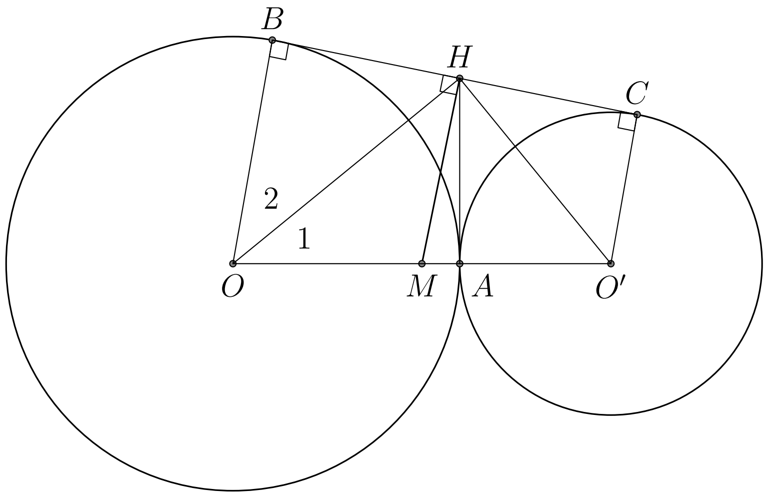
3. MB đi qua trung điểm của đoạn thẳng CH.
   Gọi I là giao điểm của đường thẳng BC với Ax và N là giao điểm của MB với CH.
   Trong tam giác ABI có $OA = OB$ (bán kính) và $OM \,/\!\!/\, BI$ (vì $OM \,/\!\!/\, BC$, $I \in BC$) $\Rightarrow MA = MI$. (1)
   Mà $CH \,/\!\!/\, AI$ (cùng vuông góc với AB), do đó
   $\frac{NH}{MA} = \frac{BN}{BM}$ và $\frac{NC}{MI} = \frac{BN}{BM}$ (hệ quả định lý Ta-let) $\Rightarrow \frac{NH}{MA} = \frac{NC}{MI}$. (2)
   Từ (1) và (2) suy ra $NH = NC$ hay BM đi qua trung điểm của đoạn thẳng CH.

□

Bài 10. Hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ tiếp xúc ngoài tại A $(R > r)$. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC, $B \in (O), C \in (O')$. Gọi M là trung điểm của OO'. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ M đến BC.

1. Tính số đo góc OHO'.
2. Chứng minh rằng OH là tia phân giác của góc AOB.
3. Chứng minh rằng AH là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O').
4. Cho $R = 5$ cm, $r = 2$ cm. Tính độ dài BC.

Lời giải.



1. Vì $\begin{cases} OB \perp BC \\ O'C \perp BC \\ MH \perp BC \end{cases} \Rightarrow OB \parallel O'C \parallel MH.$

   Hình thang $OBCO'$ có $MO = MO'$, $MH \parallel OB \parallel O'C$ nên $HB = HC$ và MH là đường trung bình.

   Suy ra $MH = \dfrac{OB + O'C}{2} = \dfrac{OA + O'A}{2} = \dfrac{OO'}{2}$.

   Tam giác OHO' có $MH = MO = MO'$ nên $\widehat{OHO'} = 90^\circ$.

2. $OB \parallel MH$ nên $\widehat{O_1} = \widehat{OHM}$ (so le trong).

   Tam giác MOH cân tại M nên $\widehat{O_2} = \widehat{OHM}$. Suy ra $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$.

   Vậy OH là tia phân giác của góc AOB.

3. $\triangle AOH = \triangle BOH$ (c.g.c) nên $\widehat{OAH} = \widehat{OBH} = 90^\circ$. AH vuông góc vơi OA tại A nên là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O').

4. Tam giác OHO' vuông tại A, đường cao HA nên $HA^2 = OA \cdot O'A = 5 \cdot 2 = 10$. Suy ra $HA = \sqrt{10}$. Do đó $BC = 2HA = 2\sqrt{10}$ cm.

□

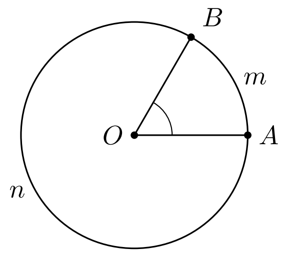
Chương 3

Góc với đường tròn

§1 Góc ở tâm. Số đo cung

1 Tóm tắt lí thuyết

Định nghĩa 6. Góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn được gọi là góc ở tâm.



Trong hình vẽ trên $\widehat{AOB}$ là một góc ở tâm, $\overset{\frown}{AmB}$ là cung nhỏ, $\overset{\frown}{AnB}$ là cung lớn.

Định nghĩa 7.

- Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.
- Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa 360° và số đo của cung nhỏ (có chung hai mút với cung lớn).
- Số đo của nửa đường tròn bằng 180°.

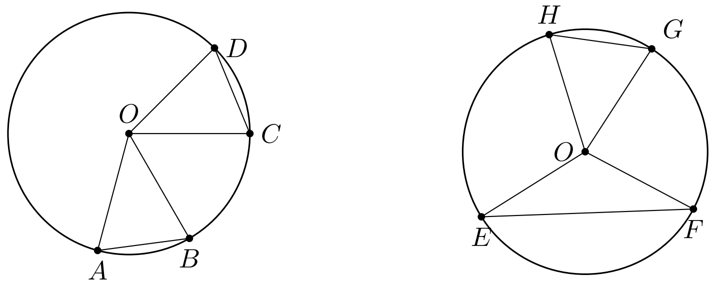
29. Chú ý

- Cung nhỏ có số đo nhỏ hơn 180°.
- Cung lớn có số đo lớn hơn 180°.
- Khi hai mút của cung trùng nhau, ta có "cung không "với số đo 0° và cung cả đường tròn có số đo 360°.

Định nghĩa 8. Trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:

- Hai cung được gọi là bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau.
- Trong hai cung, cung nào có số đo lớn hơn được gọi là cung lớn hơn.

Định lí 13. Nếu C là một điểm nằm trên cung AB thì sđ$\overset{\frown}{AB} = $ sđ$\overset{\frown}{AC} + $ sđ$\overset{\frown}{CB}$.

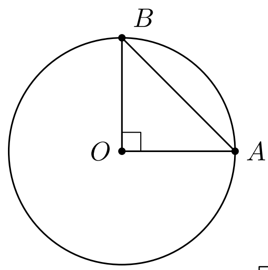


Trong hình trên $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$; $\overset{\frown}{EF} > \overset{\frown}{GH}$.

2 Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung $AB = R\sqrt{2}$. Tính số đo của hai cung AB.

Lời giải.



Xét tam giác $\triangle OAB$ ta có

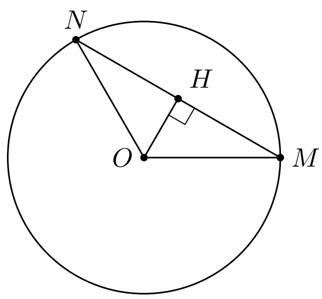
$$AB^2 = 2R^2 = OA^2 + OB^2$$

nên tam giác vuông tại O.
Suy ra $\widehat{AOB} = 90^\circ$. Vậy số đo cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ là sđ$\overset{\frown}{AB} = 90^\circ$.
Và số đo cung lớn $\overset{\frown}{AB}$ là sđ$\overset{\frown}{AB}$ lớn $= 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$.

□

Ví dụ 2. Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung $MN = R\sqrt{3}$. Tính số đo của hai dây cung MN.

Lời giải.

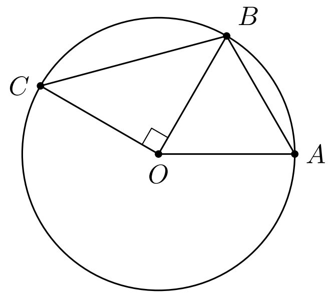


Kẻ $OH \perp MN$ tại H.
$\Rightarrow HM = HN$ (định lí về đường kính vuông góc dây cung).
Do đó $HM = HN = \dfrac{MN}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.
Ta có: $\cos HMO = \dfrac{MH}{MO} = \dfrac{\frac{R\sqrt{3}}{2}}{R} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Nên $\widehat{HMO} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{MON} = 120^\circ$.
Suy ra số đo cung nhỏ sđ$\overset{\frown}{MN} = \widehat{MON} = 120^\circ$.
Và số đo cung lớn sđ$\overset{\frown}{MN}$ lớn $= 360^\circ -$ sđ$\overset{\frown}{MN} = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$.

□

Ví dụ 3. Trên đường tròn $(O;R)$ lấy ba điểm A, B, C sao cho dây cung $AB = R$, $BC = R\sqrt{2}$ và tia BO nằm giữa hai tia BA và BC. Tính số đo các cung nhỏ AB, BC và AC.

Lời giải.

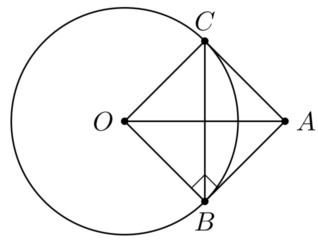


$\triangle AOB$ đều nên $\widehat{AOB} = 60^\circ$.
$\triangle BOC$ vuông cân tại O nên $\widehat{BOC} = 90^\circ$.
Suy ra sđ$\overset{\frown}{AB}$ = sđ$\widehat{AOB} = 60^\circ$.
sđ$\overset{\frown}{BC}$ = sđ$\widehat{BOC} = 90^\circ$.
sđ$\overset{\frown}{AC}$ = sđ$\overset{\frown}{AB}$ + sđ$\overset{\frown}{BC} = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$.

□

Ví dụ 4. Hai tiếp tuyến tại B và C của nửa đường tròn $(O; R)$ cắt nhau tại A. Biết $OA = R\sqrt{2}$. Tính số đo của cung BC.

Lời giải.



$$\cos\widehat{AOB} = \frac{OB}{OA} = \frac{R}{R\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{AOB} = 45^\circ.$$

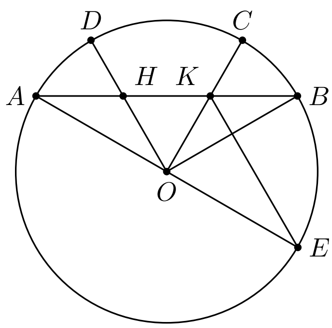
Suy ra $\widehat{BOC} = 90^\circ$.
Vậy sđ$\overset{\frown}{BC} = \widehat{BOC} = 90^\circ$.

□

Ví dụ 5. Trên dây cung AB của đường tròn (O) lấy hai điểm H và K sao cho $AH = HK = KB$. Vẽ bán kính OD qua H và bán kính OC qua K. Chứng minh rằng:

1. $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$;
2. $\overset{\frown}{AD} < \overset{\frown}{DC}$.

Lời giải.



1. Tam giác AOB cân tại O nên $\widehat{OAH} = \widehat{OBK}$.
   Do đó $\triangle OAH = \triangle OBK$ (c.g.c).
   $\Rightarrow \widehat{AOH} = \widehat{BOK} \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$.
2. Vẽ đường kính AE của đường tròn (O). Ta thấy OH là đường trung bình của tam giác $\triangle AKE$ nên $OH \parallel KE$.
   $\Rightarrow \widehat{AOH} = \widehat{OEK}$, $\widehat{HOK} = \widehat{OKE}$.
   Xét $\triangle OEK$ có $OK < OE \Rightarrow \widehat{OEK} < \widehat{OKE}$.
   $\Rightarrow \widehat{AOH} < \widehat{HOK} \Rightarrow \overset{\frown}{AD} < \overset{\frown}{DC}$.

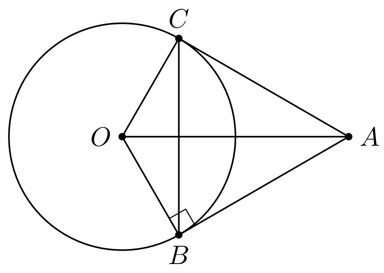
□

3 Luyện tập

Bài 1. Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm A nằm ngoài đường tròn sao cho $OA = 2R$. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (B và C là các tiếp điểm). Tìm số đo cung lớn $\overset{\frown}{BC}$ của đường tròn (O).

Lời giải.

$\cos\widehat{AOB} = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{R}{2R} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AOB} = 60^\circ$.
Suy ra $\widehat{BOC} = 120^\circ$. Nên sđ$\overset{\frown}{BC}$ nhỏ $= \widehat{BOC} = 120^\circ$.
Vậy sđ$\overset{\frown}{BC}$ lớn $= 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$.



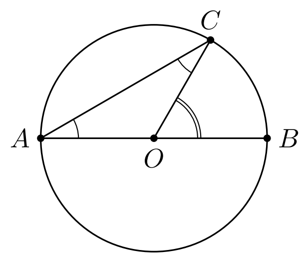
□

Bài 2. Cho đường tròn (O) đường kính AB và dây cung AC. Chứng minh rằng

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BC}.$$

Lời giải.

Mặt khác $\widehat{BOC}$ là góc ngoài của tam giác cân OAC.
Nên $\widehat{BOC} = 2\widehat{OAC}$. Suy ra $\widehat{BAC} = \dfrac{1}{2}\widehat{BOC} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BC}$.



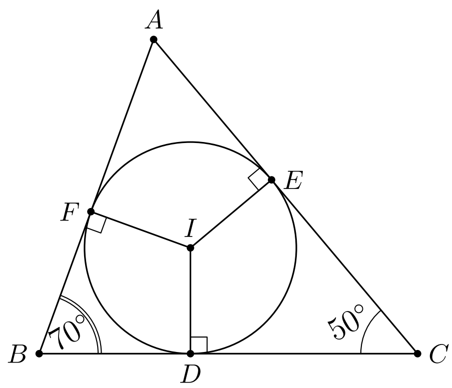
□

Bài 3. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 70^\circ, \widehat{C} = 50^\circ$. Đường tròn (O) nội tiếp tam giác đó tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA theo thứ tự tại D, E, F. Tính số đo các cung $\overset{\frown}{DE}$, $\overset{\frown}{EF}$ và $\overset{\frown}{FD}$.

Lời giải.

Tứ giác $BFID$ có $\widehat{FID} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.
Nên số đo cung nhỏ sđ$\overset{\frown}{FD} = 110^\circ$.
Tứ giác $IDCE$ có $\widehat{EID} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.
Nên số đo cung nhỏ sđ$\overset{\frown}{ED} = 130^\circ$.
Từ đó suy ra số đo cung nhỏ

$$\text{sđ}\overset{\frown}{EF} = 360^\circ - 110^\circ - 130^\circ = 120^\circ.$$



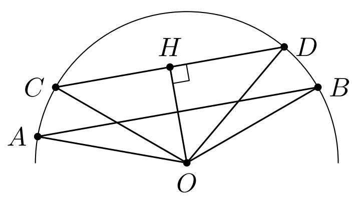
□

Bài 4. Cho một nửa đường tròn (O) và hai dây cung $AB \parallel CD$ nằm trong nửa đường tròn đó. Chứng minh rằng $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của CD ta có $OH \perp CD$. Mà $AB \parallel CD$ nên $OH \perp AB$. Hai tam giác OAB, OCD đều cân tại O nên

$$\begin{cases} \widehat{AOH} = \widehat{BOH} \\ \widehat{COH} = \widehat{DOH} \end{cases} \Rightarrow \widehat{AOH} - \widehat{COH} = \widehat{BOH} - \widehat{DOH} \Rightarrow \widehat{AOC} = \widehat{BOD}.$$



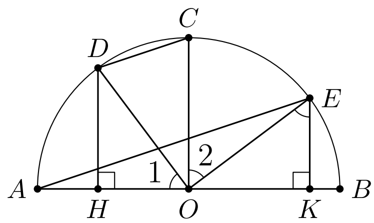
Do đó $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$.

□

Bài 5. Cho nửa đường tròn tâm (O) đường kính 20 cm, C là điểm chính giữa của của nửa đường tròn. Lấy điểm H thuộc OA sao cho $OH = 6$ cm. Đường vuông góc với OA tại H cắt nửa đường tròn tại D. Vẽ dây AE song song với CD. Gọi K là hình chiếu của E trên AB. Tính diện tích tam giác AEK.

Lời giải.

Theo bài toán trên, vì $DC \parallel AE \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CE} \Rightarrow \widehat{O_1} = \widehat{O_2}$.
Vì $OC \parallel EK$ nên $\widehat{O_2} = \widehat{OEK}$ (hai góc so le trong).
$\Rightarrow \widehat{O_1} = \widehat{OEK}$.
$\Rightarrow \triangle HOD = \Delta KEO$ (cạnh huyền – góc nhọn).
$\Rightarrow OK = DH$ và $EK = OH = 6$ (cm).
Mà $DH^2 = AH \cdot HB = 4 \cdot 16 = 64 \Rightarrow DH = OK = 8$ (cm).
$\mathrm{S}_{AEK} = \dfrac{AK \cdot EK}{2} = \dfrac{(10+8) \cdot 6}{2} = 54$ (cm^2).

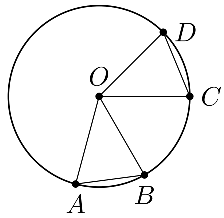


□

§2 Liên hệ giữa cung và dây

1 Tóm tắt lí thuyết

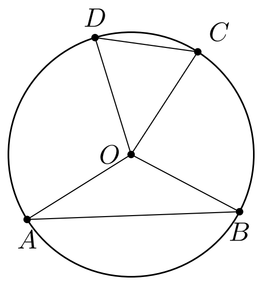
Định lí 14.
Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hoặc trong hai đường tròn bằng nhau.



1. Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau.
2. Hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau.

Nghĩa là $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \Leftrightarrow AB = CD$.

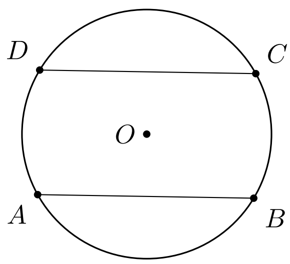
Định lí 15.
Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hoặc trong hai đường tròn bằng nhau.



1. Cung lớn hơn căng dây lớn hơn.
2. Dây lớn hơn căng cung lớn hơn.

Nghĩa là $\overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{CD} \Leftrightarrow AB < CD$.

Tính chất 4. Trong một đường tròn.



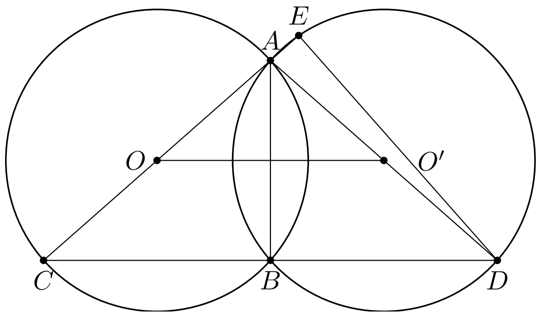
1. Hai cung bị chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau.
2. Đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì đi qua trung điểm của dây căng cung ấy và ngược lại.
3. Đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì vuông góc với dây căng cung ấy và ngược lại.

2 Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B. Kẻ các đường kính AOC, $AO'D$. Gọi E là giao điểm thứ hai của AC với đường tròn (O').

1. So sánh các cung nhỏ BC, BD.
2. Chứng minh rằng B là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{EBD}$ (tức là điểm B chia cung $\overset{\frown}{EBD}$ thành hai cung bằng nhau $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{BD}$).

Lời giải.



1. Vì $\triangle BAC$ và $\triangle BAD$ nội tiếp trong nửa đường tròn nên chúng là những tam giác vuông tại B.
   Xét hai tam giác vuông $\triangle BAC$ và $\triangle BAD$ có $\begin{cases} AC = AD & \text{đường kính} \\ AB & \text{cạnh chung} \end{cases}$.
   Vậy $\triangle BAC = \triangle BAD$. Suy ra $BC = BD$.
   Mặt khác, hai đường tròn (O) và (O') bằng nhau nên hai dây bằng nhau sẽ căng hai dây bằng nhau. Vậy $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD}$.

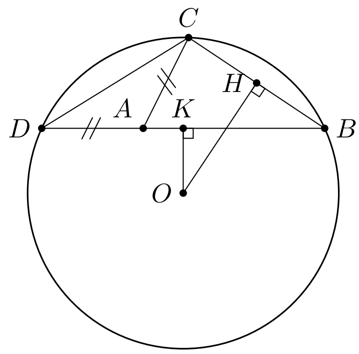
2. Vì điểm E nằm trên đường tròn đường kính AD nên $\widehat{AED} = 90^\circ$.
   Do $BC = BD$ (câu a) nên EB là đường trung tuyến của tam giác vuông ECD ($\widehat{E} = 90^\circ$).
   Suy ra $BE = BD$.
   Trong (O') ta có, $BE = BD$ suy ra $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{BD}$ hay B là điểm chính giữa của cung EBD.

□

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia AB lấy một điểm D sao cho $AD = AC$. Vẽ đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác DBC. Từ O lần lượt hạ các đường vuông góc OH, OK với BC và BD ($H \in BC$, $K \in BD$).

a) Chứng minh rằng $OH > OK$.   b) So sánh hai cung nhỏ BD và BC.

Lời giải.



1. Trong tam giác ABC, theo bất đẳng thức tam giác, ta có $BC < AB + AC = AB + AD = BD$ hay $BC < BD$.
   Theo định lí về dây cung và khoảng cách đến tâm suy ra $OH > OK$.

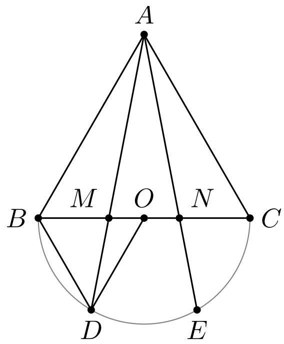
2. Vì $BC < BD$ ta suy ra $\overset{\frown}{BC} < \overset{\frown}{BD}$.

□

Ví dụ 3. Cho tam giác đều ABC. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa A dựng nửa đường tròn (O) đường kính BC. Trên nửa đường tròn lấy các điểm D, E sao cho $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EC}$. Các đường thẳng AD, AE cắt đoạn thẳng BC tại M và N. Chứng minh rằng $BM = MN = NC$.

Lời giải.

Từ $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EC}$ suy ra được $BD = DE = EC$. Do đó theo tính chất góc ở tâm suy ra $\widehat{BOD} = 60^\circ \Rightarrow \triangle OBD$ là tam giác đều.
Ta có $\triangle AMC \backsim \triangle DMB$ (g.g) suy ra $\dfrac{AC}{DB} = \dfrac{MC}{MB}$.
Mặt khác, $AC = 2BD$ suy ra $MC = 2MB$, $BC = BM + MC$
$\Rightarrow BC = 3BM$.
Tương tự, $BC = 3CN$. Vậy $BM = MN = NC$.

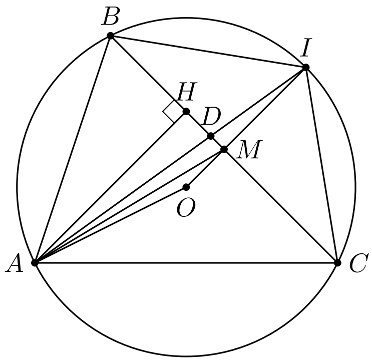


□

Ví dụ 4. Cho tam giác $\triangle ABC$ không cân, từ đỉnh A kẻ đường cao AH, phân giác AD, trung tuyến AM.

1. Chứng minh rằng điểm D nằm giữa H và M.
2. Giả sử tam giác ABC nhọn, chứng minh rằng $\widehat{MAD} < \widehat{DAH}$.

Lời giải.



1. Không mất tính tổng quát giả sử $AC > AB$, đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường phân giác AD tại $I \Rightarrow \overset{\frown}{BI} = \overset{\frown}{IC} \Rightarrow BI = IC$.
   Tam giác ABC không cân, suy ra H, D, M là ba điểm phân biệt.
   Mặt khác, D nằm giữa A và I, AM là trung tuyến $\Rightarrow IM \perp BC$, AH là đường cao $\Rightarrow AH \perp BC$. Do đó D nằm giữa H và M.
2. Tam giác ABC nhọn $\Rightarrow \widehat{BAC} < 90^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC}$ nhỏ hơn nửa đường tròn.
   $\Rightarrow M$ nằm giữa O và $I \Rightarrow AM$ nằm giữa hai tia AI và AO.
   $\Rightarrow \begin{cases} \widehat{MAD} < \widehat{OAI} \\ OA = OI \end{cases} \Rightarrow \widehat{OAI} = \widehat{OIA}$.
   Mà $AH \parallel IM \Rightarrow \widehat{OIA} = \widehat{IAH}$. Vậy $\widehat{MAD} < \widehat{DAH}$.

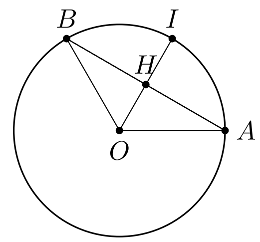
□

3 Luyện tập

Bài 1. Cho đường tròn (O). Gọi I là điểm chính giữa của cung AB (không phải là cung nửa đường tròn) và H là trung điểm của dây AB. Chứng minh rằng đường thẳng IH đi qua tâm O của đường tròn.

Lời giải.

Vì I là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{AB}$ nên $\overset{\frown}{IA} = \overset{\frown}{IB}$, suy ra $IA = IB$.
Mặt khác, $OA = OB = R$ bán kính. Do đó, IO là đường trung trực của đoạn AB.
Lại có H là trung điểm của AB nên H thuộc IO.
Vậy IH đi qua tâm O của đường tròn.

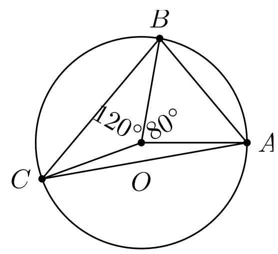


□

Bài 2. Cho đường tròn tâm O bán kính R. Vẽ góc ở tâm $\widehat{AOB} = 80^\circ$, vẽ góc ở tâm $\widehat{BOC} = 120^\circ$ kề với $\widehat{AOB}$. So sánh và sắp xếp độ dài AB, BC, CA theo thứ tự tăng dần.

Lời giải.

Ta có $\widehat{AOB} = 80^\circ$ và $\widehat{BOC} = 120^\circ$ kề nhau nên suy ra $\widehat{AOC} = 160^\circ$.
Vì số đo của cung bị chắn bằng số đo của góc ở tâm nên suy ra $AB < BC < CA$.



□

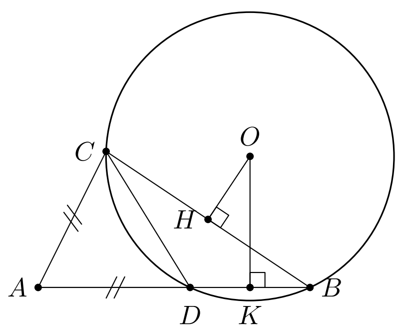
Bài 3. Cho tam giác ABC có $AB > AC$. Trên cạnh AB lấy một điểm D sao cho $AD = AC$. Vẽ đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác DBC. Từ O lần lượt hạ các đường vuông góc OH, OK với BC và BD ($H \in BC$, $K \in BD$).

a) Chứng minh rằng $OH < OK$.

b) So sánh hai cung nhỏ BD và BC.

Lời giải.

1. Trong tam giác ABC, theo bất đẳng thức tam giác, ta có $BC > AB - AC = AD + AB = BD$ hay $BC > BD$.
   Theo định lí về dây cung và khoảng cách đến tâm, từ $BC > BD$ suy ra $OH < OK$.
2. Từ bất đẳng thức về dây cung $BC > BD$ suy ra $\overset{\frown}{BC} > \overset{\frown}{BD}$.

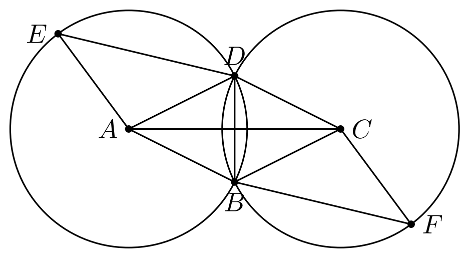


□

Bài 4. Cho hình thoi $ABCD$. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AD. Vẽ đường tròn tâm C, bán kính CB. Lấy điểm E bất kì trên đường tròn tâm A (không trùng với B và D), điểm F trên đường tròn tâm C sao cho BF song song với DE. So sánh hai cung nhỏ DE và BF.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $\overset{\frown}{EDB} = \overset{\frown}{FBD}$, suy ra $\overset{\frown}{EDA} = \overset{\frown}{FBC}$. Từ đó hai tam giác cân ADE và CBF bằng nhau, suy ra $\overset{\frown}{EAD} = \overset{\frown}{BCF}$. Vậy hai cung DE và BF bằng nhau.

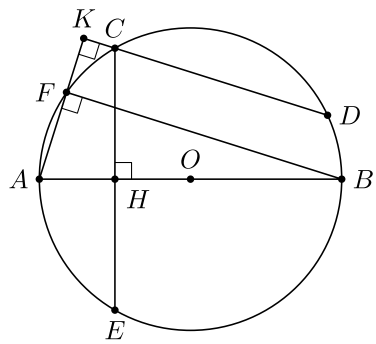


□

Bài 5. Cho đường tròn tâm O. Trên nửa đường tròn đường kính AB lấy hai điểm C, D. Từ C kẻ CH vuông góc với AB, nó cắt đường tròn tại điểm thứ hai là E. Từ A kẻ AK vuông góc với DC, nó cắt đường tròn tại điểm thứ hai là F. Chứng minh rằng:

1. Hai cung nhỏ CF và DB bằng nhau.
2. Hai cung nhỏ BF và DE bằng nhau.
3. $DE = BF$.

Lời giải.



1. CD và FB đều vuông góc với AK nên $CD \parallel FB$.
Suy ra $\overset{\frown}{CF} = \overset{\frown}{DB}$ (hai cung bị chắn giữa hai dây song song). (1)
2. Do tính chất đối xứng qua đường kính AB ta có $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BE}$ (2)
Cộng từng vế của (1) và (2) ta được
$\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CF} = \overset{\frown}{DB} + \overset{\frown}{BE}$ (tính chất cộng hai cung) hay $\overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{DE}$ (3).
3. Với (3) ta suy ra $BF = BE$.

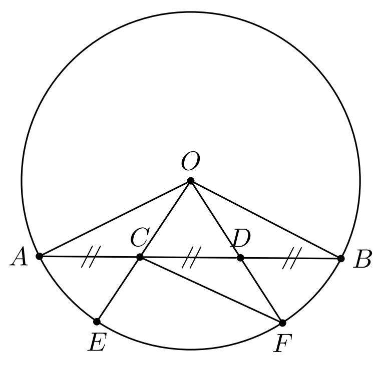
□

Bài 6. Trên dây cung AB của một đường tròn O, lấy hai điểm C và D chia dây này thành ba đoạn thẳng bằng nhau $AC = CD = DB$. Các bán kính qua C và D cắt cung nhỏ AB lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng:

a) $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{FB}$.

b) $\overset{\frown}{AE} < \overset{\frown}{EF}$.

Lời giải.



1. Tam giác cân AOB có $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$.
Mặt khác, $\triangle AOC = \triangle BOD$ (c.g.c) vì có $OA = OB$, $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$, $AC = BD$. Từ đó suy ra $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$ suy ra $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{FB}$.
2. Tam giác OCD là tam giác cân ($OC = OD$ do $\triangle AOC = \triangle BOD$) nên $\widehat{ODC} < 90°$, từ đó suy ra $\widehat{CDF} > 90°$.
Mặt khác, trong tam giác CDF có $\widehat{CDF} > \widehat{CFD}$ suy ra $CF > CD$ hay $CF > CA$.
Xét $\triangle AOC$ và $\triangle COF$ có $OA = OF$, OC chung, nhưng $CF > AC$ suy ra $\widehat{COD} > \widehat{AOC}$. Từ đó suy ra $\overset{\frown}{EF} > \overset{\frown}{AE}$.

□

§3 Góc nội tiếp

1 Tóm tắt lí thuyết

Định nghĩa 9. Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh là hai dây cung. Cung nằm bên trong góc được gọi là cung bị chắn.

Định lí 16. Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng một nửa số đo cung bị chắn.

Định lí 17. Trong một đường tròn:

1. Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.
2. Các góc nội tiếp chắn cùng một cung hoặc hai cung bằng nhau thì bằng nhau.
3. Góc nội tiếp (có số đo nhỏ hơn 90°) có số đo bằng một nửa số đo góc ở tâm chắn bởi cung đó.
4. Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

2 Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho đường tròn (O) và hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. Lấy một điểm M trên cung nhỏ AC rồi vẽ tiếp tuyến với đường tròn (O) tại M. Tiếp tuyến này cắt đường thẳng CD tại S. Chứng minh rằng $\widehat{MSD} = 2 \cdot \widehat{MBA}$.

Lời giải.

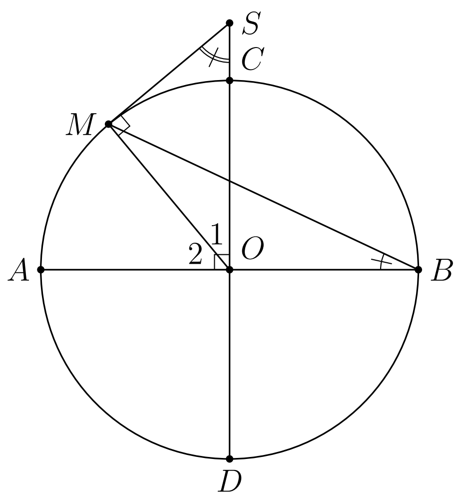
Vì SM là tiếp tuyến của (O), nên ta có $\widehat{OMS} = 90^\circ$, do đó $\widehat{O_1} + \widehat{OSM} = 90^\circ$.
Mặt khác $\widehat{O_2} + \widehat{O_1} = 90^\circ$.
Từ đó suy ra

$$\widehat{OSM} = \widehat{O_2}. \qquad (1)$$

Lại có $\widehat{O_2} = \text{sđ } \overset{\frown}{AM}$ và $\widehat{MBA} = \dfrac{1}{2}\text{sđ } \overset{\frown}{AM}$, nên ta có

$$\widehat{O_2} = 2\widehat{MBA}. \qquad (2)$$

Từu (1) và (2) ta có $\widehat{MSD} = 2 \cdot \widehat{MBA}$.



□

Ví dụ 2. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB và S là một điểm nằm ngoài đường tròn. Các đường thẳng SA và SB lần lượt cắt (O) tại điểm thứ hai M, N. Gọi H là giao điểm của AN và BM. Chứng minh rằng

1. $SH \perp AB$.
2. $HM \cdot HB = HN \cdot HA$.

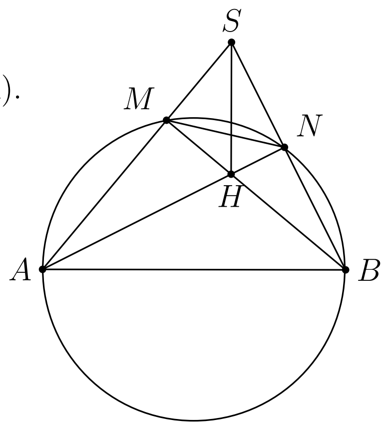
Lời giải.

1. Ta có M, N nằm trên đường tròn đường kính AB, nên ta có

   $\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = 90^\circ$ góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

   Suy ra $BM \perp AS$, $AN \perp SB$ nên H là trực tâm tam giác SAB. Suy ra $SH \perp AB$.

2. Xét hai tam giác HMA và HNB có $\widehat{MHA} = \widehat{NHB}$ (đối đỉnh) và $\widehat{MAH} = \widehat{NBH}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{MN}$). Suy ra $\triangle HMA \backsim \triangle HNB$, do đó $\dfrac{HM}{HN} = \dfrac{HA}{HB}$, hay $HM \cdot HB = HN \cdot HA$.



□

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC cân tại A, nội tiếp đường tròn (O). Phân giác trong góc B và C cắt (O) tại E và D.

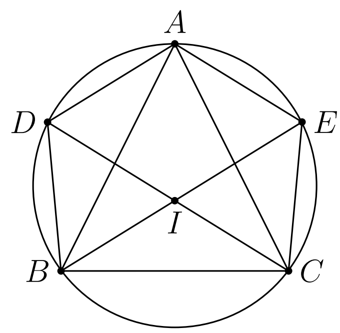
1. Chứng minh $\triangle ACE = \triangle ABD$.
2. Gọi I là giao điểm của CD và BE. Tứ giác $ADIE$ là hình gì? Tại sao?

Lời giải.

1. Ta có tam giác ABC cân tại A nên $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$. Lại có CD là phân giác của góc $\widehat{ACB}$ nên $\widehat{ACD} = \widehat{BCD}$, hay $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$. Tương tự $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$, do đó

   $$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}.$$

   Suy ra $AD = BD = AE = CE$.
   Xét hai tam giác ACE và ABD có $AC = AB$, $AD = AE$, $BD = CE$ nên $\triangle AEC = \triangle ADB$ (c-c-c).



2. Ta có $\widehat{AD} = \dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AD}$, $\widehat{ACE} = \dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{CE}$. Mà $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CE}$ nên ta có $\widehat{ACD} = \widehat{CAE}$, suy ra $CD \parallel AE$, hay $DI \parallel AE$. Chứng minh tương tự $EI \parallel AD$, kết hợp với $AD = AE$ ta có $ADIE$ là hình thoi.

□

Ví dụ 4. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại A và B. Vẽ cát tuyến CAD vuông góc với AB ($C \in (O)$, $D \in (O')$). Tia CB cắt (O') tại E, tia BD cắt (O) tại F. Chứng minh rằng $CD^2 = CB \cdot CE + BD \cdot CF$.

Lời giải.

Xét tam giác CDB và CEA có góc C chung.
Trong đường tròn (O'), ta có

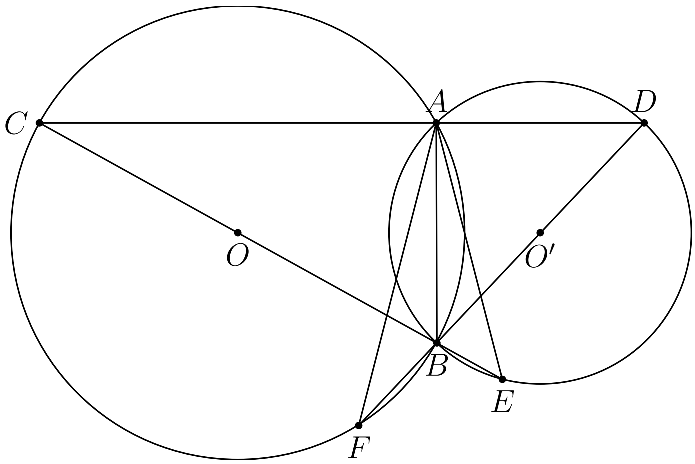
$$\widehat{CDB} = \widehat{ADB} = \frac{1}{2}\text{sđ } \overset{\frown}{AB},\ \widehat{CEA} = \widehat{BEA} = \frac{1}{2}\text{sđ } \overset{\frown}{AB}.$$

Suy ra $\widehat{CDB} = \widehat{CEA}$, do đó $\triangle CDB \backsim \triangle CEA$. Suy ra

$$\frac{CD}{CE} = \frac{CB}{CA} \Leftrightarrow CD \cdot CA = CB \cdot CE.$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có $DA \cdot DC = DB \cdot DF$. Do đó

$$CB \cdot CE + DB \cdot DF = CD \cdot CA + DA \cdot DC = DC(CA + AD) = CD^2.$$



□

Ví dụ 5. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) và M là một điểm nằm trên cung nhỏ BC. Chứng minh rằng $MA = MB + MC$.

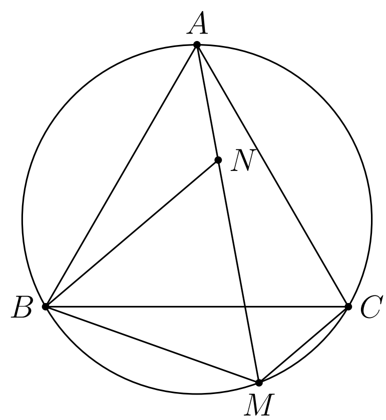
Lời giải.

Ta có $\widehat{BMC} = \frac{1}{2}\text{sđ } \overset{\frown}{BAC} = 120^\circ$, đó $BM,\ CN < BC < AM$. Trên đoạn AM lấy điểm N sao cho $BM = MN$. Do $\widehat{BMN} = \widehat{BMA} = \frac{1}{2}\text{sđ } \overset{\frown}{AB} = 60^\circ$, nên $\triangle BMN$ đều, hay $BM = BN = MN$.
Xét hai tam giác ABN và CBM có $AB = BC$, $BN = BM$ và

$$\widehat{ABN} = \widehat{ABM} - \widehat{NBM} = \widehat{ABM} - 60^\circ = \widehat{ABM} - \widehat{ABC} = \widehat{CBM}.$$

Do đó $\triangle ABN = \triangle CBM$ nên ta có $CM = AN$. Từ đó ta có được

$$BM + CM = MN + AN = AM.$$



□

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Trên cung nhỏ BC của đường tròn (O), lấy điểm M. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Lời giải.

Trong đường tròn (O) ta có

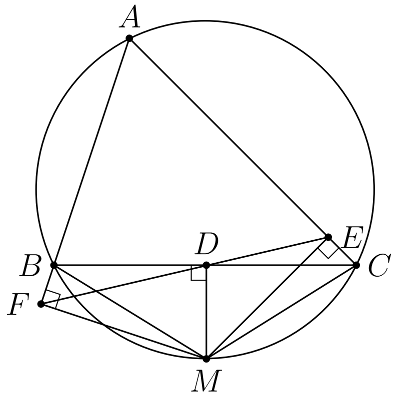
$$\widehat{ABM}+\widehat{ACM}=\frac{1}{2}\text{sđ}\,\overparen{ACM}+\frac{1}{2}\text{sđ}\,\overparen{ABM}=\frac{1}{2}\cdot 360^\circ=180^\circ.$$

Lại có $\widehat{ABM}+\widehat{FBM}=180^\circ$, nên $\widehat{ACM}=\widehat{FBM}$.
Do đó $\widehat{BMF}=\widehat{CME}$. (1)

Ta có $\widehat{MFB}=\widehat{MDB}=90^\circ$, nên bốn điểm $B,\ D,\ M,\ F$ nằm trên đường tròn đường kính BM, do đó $\widehat{BMF}=\widehat{BDF}=\frac{1}{2}\text{sđ}\,\overparen{BF}$. (2)

Chứng minh tương tự $\widehat{CDE}=\widehat{CME}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có $\widehat{BDF}=\widehat{CDE}$, suy ra $E,\ D,\ F$ thẳng hàng.



□

Ví dụ 7. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ $(R>R')$ tiếp xúc trong tại A. Một tiếp tuyến của đường tròn (O') tại M cắt đường tròn (O) tại hai điểm $B,\ C$. Đường thẳng BO' cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D và cắt đường thẳng AM tại E. Gọi F là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE với AC. Chứng minh rằng DF là phân giác của góc $\widehat{BDC}$.

Lời giải.

Gọi N là giao điểm thứ hai của AM với đường tròn (O). Ta có

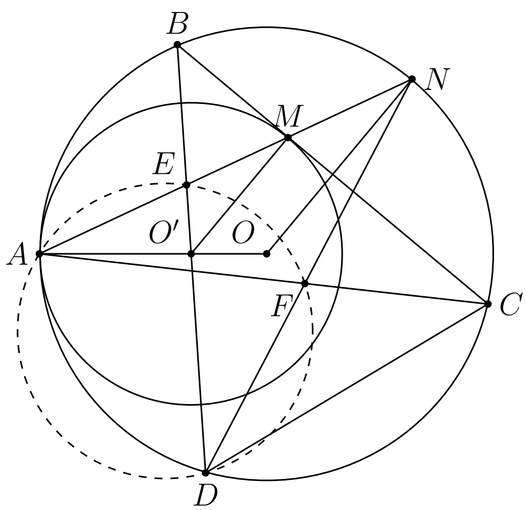
$$\widehat{AMO'}=\widehat{O'AM}=\widehat{OAN}=\widehat{ANO},$$

suy ra $O'M \parallel MN$. Mà $O'M\perp BC$, nên ta cũng có $ON\perp BC$, hay N là điểm chính giữa cung $\overparen{BC}$. Mặt khác $\widehat{NAC}=\widehat{NDC}=\frac{1}{2}\overparen{NC}$, $\widehat{BDN}=\frac{1}{2}\text{sđ}\,\overparen{BN}$ nên

$$\widehat{BDN}=\widehat{NAC}=\widehat{EAF}. \qquad (1)$$

Trong đường tròn (AED) ta có

$$\widehat{EAF}=\widehat{EDF}=\widehat{BDF}. \qquad (2)$$



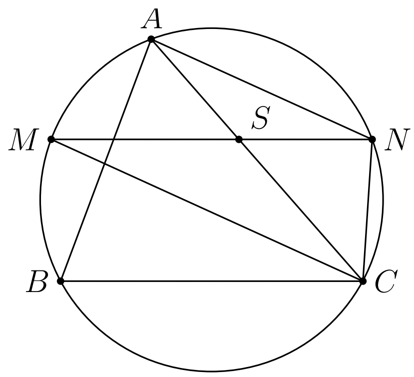
Từ (1) và (2) ta có $\widehat{BDF}=\widehat{BDN}$, suy ra $D,\ F,\ N$ thẳng hàng. Từ đó ta có $\widehat{BDN}=\widehat{NDC}$, hay DF là phân giác của góc $\widehat{BDC}$. □

3 Luyện tập

Bài 1. Cho tam giác ABC có đường tròn ngoại tiếp (O). Từ điểm M nằm chính giữa cung AB vẽ dây cung MN song song với BC cắt AC tại S. Chứng minh rằng $SM = SC$ và $SN = SA$.

Lời giải.

Ta có $MN \parallel BC$, nên $\widehat{NMC} = \widehat{MCB}$.
Mà $\widehat{CMN} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{CN}$ và $\widehat{MCB} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{BM}$.
Suy ra $\overset{\frown}{CN} = \overset{\frown}{BM}$. Mặt khác M là trung điểm của cung $\overset{\frown}{AB}$, nên $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{CN}$. Suy ra $\widehat{ACM} = \widehat{CMN}$, hay $\widehat{SMC} = \widehat{SCM}$, $\widehat{MNA} = \widehat{NAC}$, hay $\widehat{SAN} = \widehat{SNA}$.
Từ đó ta có $SM = SC$ và $SA = SN$.



□

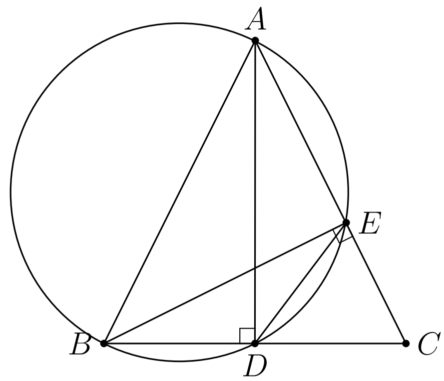
Bài 2. Cho tam giác ABC cân tại A, $A < 90^\circ$. Vẽ đường tròn đường kính AB cắt BC tại D, cắt AC tại E. Chứng minh rằng:

1. ΔDBE cân.
2. $\widehat{CBE} = \dfrac{1}{2}\widehat{BAC}$.

Lời giải.

1. Ta có D, E nằm trên đường tròn đường kính AB, nên $\widehat{ADB} = \widehat{AEB} = 90^\circ$, hay $AD \perp BC$ và $BE \perp AC$. Mà $\triangle ABC$ cân tại A nên D là trung điểm BC. Trong tam giác vuông BEC ta có $DE = DB = DC$, hay $\triangle BDE$ cân tại D.

2. Ta có AD là phân giác của góc A, nên
$$\widehat{BAD} = \widehat{CAD} = \widehat{EA}.$$
Mặt khác
$$\widehat{CBE} = \widehat{DBE} = \widehat{EAD} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{DE}.$$
Từ đó, suy ra $\widehat{CBE} = \widehat{BAD} = \dfrac{1}{2}\widehat{BAC}$.

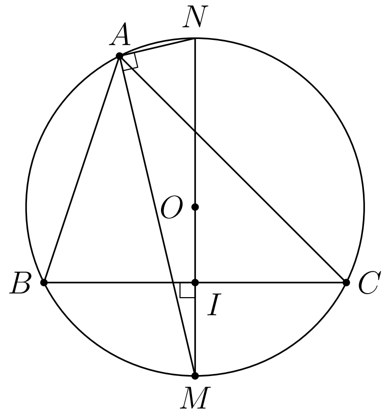


□

Bài 3. Cho tam giác ABC $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Vẽ đường kính MN vuông góc với BC (M thuộc cung BC không chứa A). Chứng minh rằng AM, AN là phân giác trong và ngoài của góc $\widehat{BAC}$.

Lời giải.

Gọi I là giao điểm của MN với BC, ta có I là trung điểm cạnh BC, nên ta có $IB = IC$ hay $\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{CM}$.
Mà $\widehat{BAM} = \dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{MB}$, $\widehat{CAM} = \dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{MC}$ nên ta có $\widehat{BAM} = \widehat{CAM}$, hay AM là phân giác trong của $\widehat{BAC}$.
Lại có MN là đường kính nên $AM \perp AN$, nên AN là phân giác ngoài của góc $\widehat{BAC}$.



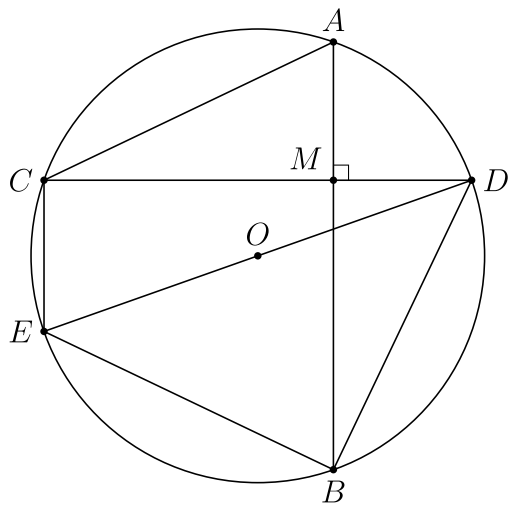
□

Bài 4. Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm M bên trong đường tròn đó. Qua M kẻ hai dây cung AB và CD vuông góc với nhau (C thuộc cung nhỏ AB). Vẽ đường kính DE. Chứng minh rằng:

1. $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.
2. Tứ giác $ABEC$ là hình thang cân.
3. Tổng $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ có giá trị không đổi khi M thay đổi vị trí trong đường tròn (O).

Lời giải.

1. Xét hai tam giác MAC và MDB có $\widehat{AMB} = \widehat{BMD} = 90^\circ$, $\widehat{ACM} = \widehat{DBM} = \dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AD}$. Do đó
$$\triangle MAC \backsim \triangle MDB \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB},$$
hay $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.
2. Vì DE là đường kính nên ta có $CE \perp CD$. Mà $AB \perp CD$, nên $AB \parallel CE$, suy ra $ABEC$ là hình thang. Hơn nữa bốn đỉnh của hình thang nằm trên đường tròn, nên $ABEC$ là hình thang cân.
3. Ta có $ABEC$ là hình thang cân nên $AC = BE$ và $\triangle DBE$ vuông tại B, nên ta có
$$MA^2+MB^2+MC^2+MD^2 = AC^2+BD^2 = BE^2+BD^2 = ED^2 = 4R^2.$$
Từ đó ta có điều phải chứng minh.



□

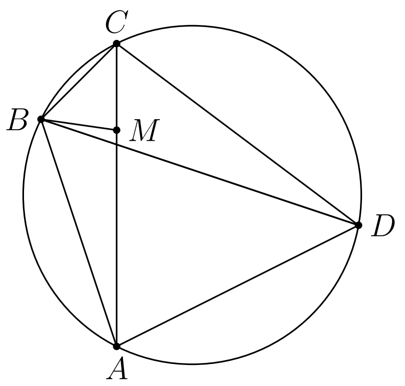
Bài 5. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Chứng minh rằng
$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

Lời giải.

Trên đoạn AC, lấy điểm M sao cho $\widehat{AMB} = \widehat{BCD}$.
Xét hai tam giác AMB và DCB có $\widehat{AMB} = \widehat{BCD}$, $\widehat{BAM} = \widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ (góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{BC}$). Suy ra $\triangle AMB \backsim \triangle DCB$, nên ta có $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{DC}{DB}$, hay $AM \cdot BD = AB \cdot CD$. (1)
Lại có

$$\widehat{BCD} + \widehat{BAD} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BAD} + \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BCD} = 180^\circ,$$

$$\widehat{BMC} + \widehat{BCD} = \widehat{BMC} + \widehat{BMA} = 180^\circ.$$



□

Suy ra $\widehat{BMC} = \widehat{BAD}$. Mà $\widehat{BCM} = \widehat{BDA}$ $\left(= \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AB}\right)$, nên ta có $\triangle BMC \backsim \triangle BAD$, dẫn tới

$$\frac{BC}{MC} = \frac{BD}{AD} \Rightarrow BC \cdot AD = BD \cdot CM. \tag{2}$$

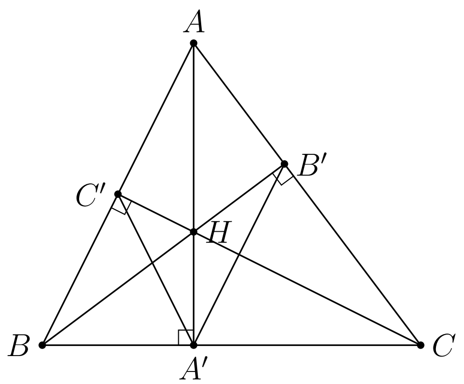
Từ (1) và (2) ta có

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AM \cdot BD + CM \cdot BD = AC \cdot BD.$$

Bài 6. Cho tam giác ABC nhọn với các đường cao AA', BB', CC'. Chứng minh rằng AA' là phân giác của góc $\widehat{B'A'C'}$.

Lời giải.

Gọi H là trực tâm tam giác ABC.
Ta có $\widehat{BC'H} = \widehat{BA'H} = 90^\circ$, nên bốn điểm B, A', H, C' nằm trên đường tròn. Do đó $\widehat{HA'C'} = \widehat{HBC'} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\ \overset{\frown}{HC'}$.
Chứng minh tương tự, ta cũng có $\widehat{HA'B'} = \widehat{HCB'}$.
Mà $\widehat{HBC'} = \widehat{HCB'}$ (cùng phụ với $\widehat{BAC}$), nên ta có $\widehat{C'A'H} = \widehat{B'A'H}$.
Từ đó, ta có AA' là phân giác của góc $\widehat{B'A'C'}$.



□

Bài 7. Cho đường tròn (O) đường kính AB, C là điểm cố định nằm trên đường tròn và M là điểm di động trên (O) sao cho M, O, C không thẳng hàng. CM và AB cắt nhau tại D. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ODM luôn đi qua một điểm cố định.

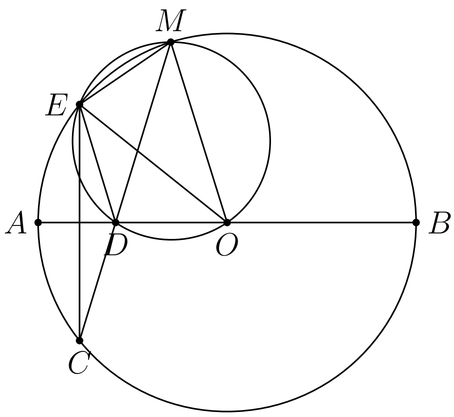
Lời giải.

Ta có $\widehat{EMO} + \widehat{EDO} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\,\overparen{EDO} + \dfrac{1}{2}\text{sđ}\,\overparen{EMO} = 180^\circ$, $\widehat{EDA} + \widehat{EDO} = 180^\circ$. Suy ra $\widehat{EDA} = \widehat{EMO}$. (1)

Lại có $\widehat{CDA} = \widehat{MDO}$ (đối đỉnh) và $\widehat{MDO} = \widehat{MEO} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\,\overparen{OM}$, nên $\widehat{CDA} = \widehat{OEM}$. Mà $\triangle MOE$ cân tại O nên $\widehat{EMO} = \widehat{MEO}$, do đó $\widehat{CDA} = \widehat{EMO}$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{EDA} = \widehat{CDA}$, nên C và E đối xứng nhau qua AB, do đó E là điểm cố định.

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác OMD luôn đi qua điểm E cố định.



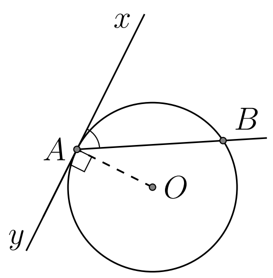
□

§4 Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung

1 Tóm tắt lí thuyết

Định nghĩa 10.

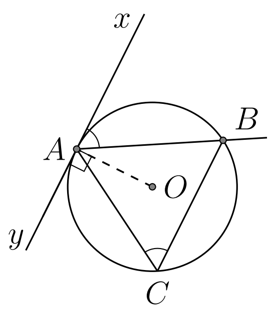
Đường thẳng xy là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A.
AB là dây cung.
Góc BAx được gọi là *góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung*.



Định lí 18. Số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo của cung bị chắn. Cụ thể như hình trên, ta có $\widehat{BAx} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB}$.

Hệ quả 5.

Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.
Cụ thể $\widehat{BAx} = \widehat{BCA}$.

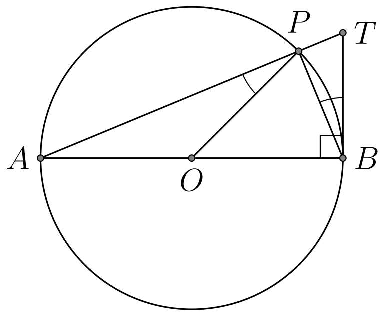


2 Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Lấy điểm P khác A và B trên đường tròn. Gọi T là giao điểm của AP với tiếp tuyến tại B của đường tròn. Chứng minh $\widehat{APO} = \widehat{PBT}$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{PBT}=\dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{PB}$ và $\widehat{PAB}=\dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{PB}$ nên $\widehat{PBT}=\widehat{PAB}$.
$\triangle OAP$ cân tại O nên $\widehat{APO}=\widehat{PAB}$.
Vậy $\widehat{APO}=\widehat{PBT}$ (đccm).

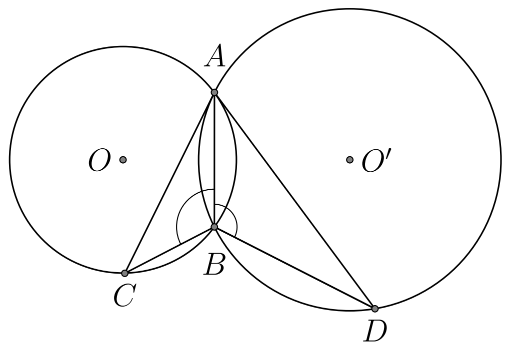


□

Ví dụ 2. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Tiếp tuyến kẻ từ A đối với đường tròn (O') cắt (O) tại C và đối với đường tròn (O) cắt (O') tại D. Chứng minh $\widehat{CBA}=\widehat{DBA}$.

Lời giải.

Xét hai tam giác ABC và DBA có
$\widehat{ACB}=\widehat{DAB}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung AB).
$\widehat{BAC}=\widehat{BDA}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung AB).
Suy ra $\widehat{ABC}=\widehat{ABD}$ (đccm).

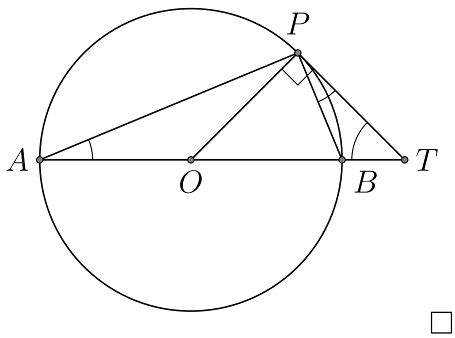


□

Ví dụ 3. Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Một tiếp tuyến của đường tròn tại P thuộc đường tròn cắt đường thẳng AB tại T (điểm B nằm giữa O và T). Chứng minh $\widehat{BTP}+2\cdot\widehat{TPB}=90^\circ$.

Lời giải.

$\widehat{BPT}=\widehat{PAB}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung PB).
$\widehat{POB}=2\widehat{BPT}$ (mối liên hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung PB).
Suy ra $\widehat{BOP}=2\widehat{BPT}$ (1)
Tam giác POT vuông tại P nên $\widehat{OPT}+\widehat{TOP}=90^\circ$. (2)
$(1),(2)\Rightarrow\widehat{BTP}+2\cdot\widehat{TPB}=90^\circ$. (đccm)

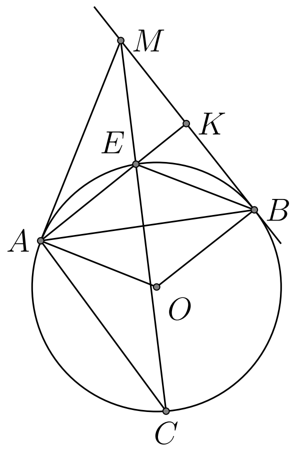


□

Ví dụ 4. Giả sử A và B là hai điểm phân biệt trên đường tròn (O). Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B cắt nhau tại M. Từ A kẻ đường thẳng song song với MB, cắt (O) tại C. MC cắt đường tròn (O) tại E. Các tia AE và MB cắt nhau tại K. Chứng minh rằng

1. $MK^2=AK\cdot EK$.
2. $MK=KB$.

Lời giải.

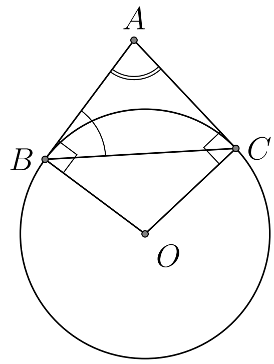


1. $MK^2 = AK \cdot EK$.
   Do $MB \parallel AC$ nên $\widehat{BMC} = \widehat{ACM}$.
   $\widehat{ACM} = \widehat{ACE} = \widehat{MAE}$ (cùng chắn cung AE).
   Suy ra $\triangle KME \backsim \triangle KAM$ (g-g)
   $\Rightarrow \dfrac{MK}{AK} = \dfrac{EK}{MK}$ hay $MK^2 = AK \cdot EK$ (đccm).
2. $MK = KB$.
   Ta có $\widehat{EAB} = \widehat{EBK}$ (cùng chắn cung BE).
   Suy ra $\triangle EBK \backsim \triangle BAK$ (g-g)
   $\Rightarrow \dfrac{BK}{AK} = \dfrac{EK}{BK}$ hay $BK^2 = AK \cdot EK$.
   Suy ra $MK^2 = KB^2$ hay $MK = KB$ (đccm).

□

Ví dụ 5. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung $BC = R$. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B, C cắt nhau tại A. Tính $\widehat{ABC}$ và $\widehat{BAC}$.

Lời giải.



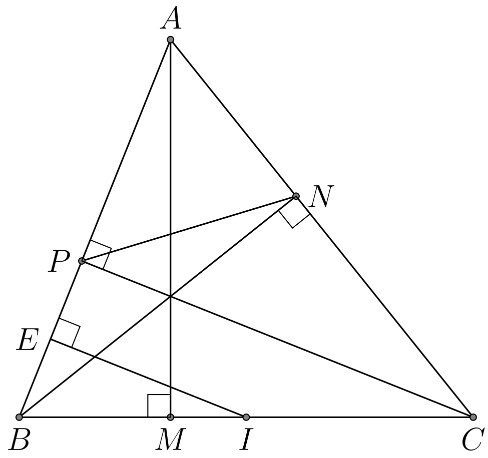
$\triangle OBC$ đều nên $\widehat{BOC} = 60^\circ$.
$\widehat{ABC} = \dfrac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{BC} = \widehat{BOC} = \dfrac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$.
Trong tứ giác $OBAC$ có $\widehat{BOC} + \widehat{OBA} + \widehat{BAC} + \widehat{ACO} = 360^\circ$
$\Rightarrow \widehat{BAC} = 360^\circ - \left(\widehat{BOC} + \widehat{OBA} + \widehat{ACO}\right) = 120^\circ$.

□

Ví dụ 6. Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi M, N, P theo thứ tự là chân các đường cao kẻ từ A, B, C của tam giác ABC và I là trung điểm của BC.

1. Chứng minh rằng tam giác INP đều.
2. Gọi E và K lần lượt là trung điểm của PB và NC. Chứng minh rằng các điểm I, M, E, K cùng thuộc một đường tròn.
3. Giả sử IA là phân giác của góc NIP. Tìm số đo góc BCP.

Lời giải.



1. Chứng minh rằng tam giác INP đều.
   Từ giả thiết, ta có $IN = IP = \dfrac{1}{2}BC$ nên tam giác INP cân tại I.
   Vì B, P, N, C cùng nằm trên đường tròn tâm I, đường kính BC nên theo mối liên hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung, ta có $\widehat{PIN} = 2\widehat{PBN} = 60^\circ$.
   Vậy tam giác INP đều.

2. Gọi E và K lần lượt là trung điểm của PB và NC. Chứng minh rằng các điểm I, M, E, K cùng thuộc một đường tròn.
   Rõ ràng bốn điểm I, M, E và K cùng nằm trên đường tròn đường kính AI.

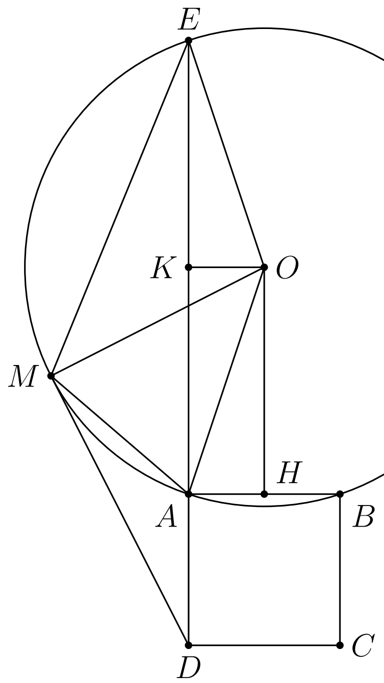
3. Giả sử IA là phân giác của góc NIP. Tìm số đo góc BCP.
   Từ điều kiện đề bài ta có AI là tia phân giác của góc BAC với $\widehat{BAC} = 60^\circ$, mà I là trung điểm của BC nên tam giác ABC đều. Suy ra $\widehat{BCP} = 60^\circ$.

□

3 Luyện tập

Bài 1. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh dài 2 cm. Tính bán kính của đường tròn đi qua A và B biết rằng đoạn tiếp tuyến kẻ từ D đến đường tròn đó bằng 4 cm.

Lời giải.



Gọi (O) là đường tròn cần tìm. Kéo dài DA cắt đường tròn (O) tại E.
Xét $\triangle DAM$ và $\triangle DME$ có

$$\begin{cases} \widehat{D} \text{ chung} \\ \widehat{DMA} = \widehat{DEM} \text{ cùng chắn cung } MA \end{cases} \Rightarrow \triangle DAM \backsim \triangle DME.$$

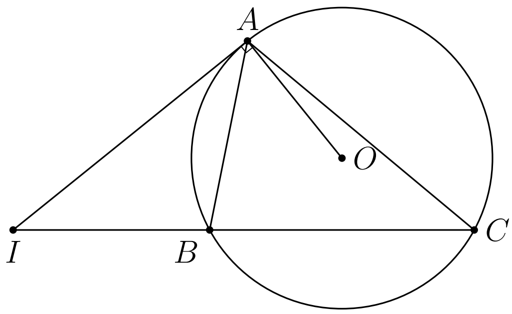
Từ $\triangle DAM \backsim \triangle DME \Rightarrow \dfrac{DA}{DM} = \dfrac{DM}{DE} \Rightarrow DE = \dfrac{DM^2}{DA} = 8 \Rightarrow AE = DE - DA = 6$ cm.
Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và AE. Khi đó ta có $OK \perp AE$, $OH \perp AB$ mà $AE \perp AB$ nên $OKAH$ là hình chữ nhật. Từ đó suy ra $OK = AH = \dfrac{1}{2}AB = 1$ cm.
Xét $\triangle OKA$ vuông tại K có $R = OA = \sqrt{OK^2 + KA^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ cm. □

Bài 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A cắt BC ở I.

1. Chứng minh rằng $\dfrac{IB}{IC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$.

2. Tính IA, IC biết rằng $AB = 20$ cm, $AC = 28$ cm, $BC = 24$ cm.

Lời giải.



1. Xét $\triangle BAI$ và $\triangle ACI$ có

$$\begin{cases}\widehat{I} \text{ chung}\\ \widehat{BAI} = \widehat{ICA} \text{ cùng chắn cung } AB\end{cases} \Rightarrow \triangle BAI \backsim \triangle ACI \text{ (g.g)}.$$

Từ đó suy ra $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{IB}{IA} \Rightarrow \dfrac{AB^2}{AC^2} = \dfrac{IB^2}{IA^2}$.
Vì $\triangle ABI \backsim \triangle ACI \Rightarrow \dfrac{IB}{IA} = \dfrac{IA}{IC} \Rightarrow IA^2 = IB \cdot IC$ nên $\dfrac{AB^2}{AC^2} = \dfrac{IB^2}{IB \cdot IC} = \dfrac{IB}{IC}$.

2. Đặt $IA = x$, $IC = y$. Ta có

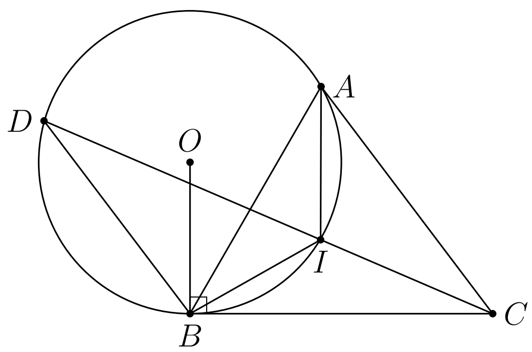
$$\triangle ABI \backsim \triangle ACI \Rightarrow \frac{AI}{CI} = \frac{BI}{AI} = \frac{AB}{CA} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y-24}{x} = \frac{20}{28} = \frac{5}{7}.$$

Từ đó ta có hệ $\begin{cases}7x = 5y\\ 5x = 7(y-24)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}35x = 25y\\ 35x = 49(y-24)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7x = 5y\\ y = 49\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 35\\ y = 49.\end{cases}$
Vậy $IA = 35$ cm, $IC = 49$ cm.

□

Bài 3. Cho tam giác ABC. Vẽ đường tròn (O) đi qua A và tiếp xúc với BC tại B. Kẻ dây BD song song với AC. Gọi I là giao điểm của CD với đường tròn. Chứng minh rằng $\widehat{IAB} = \widehat{IBC} = \widehat{ICA}$.

Lời giải.

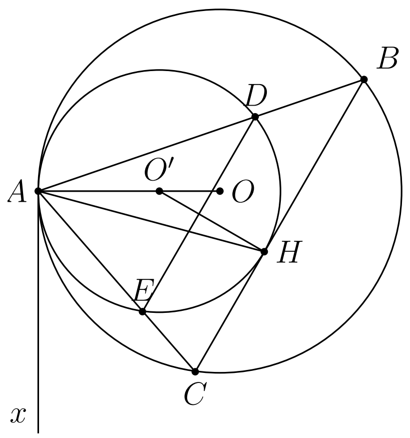


Ta có $\begin{cases}\widehat{IAB} = \widehat{IDB} = \widehat{IBC} \text{ cùng chắn cung } IB\\ \widehat{IDB} = \widehat{ICA} \text{ so le trong}\end{cases} \Rightarrow \widehat{IAB} = \widehat{IBC} = \widehat{ICA}.$ □

Bài 4. Cho đường tròn (O') tiếp xúc với đường tròn (O) tại A. Dây BC của đường tròn lớn tiếp xúc với đường tròn nhỏ tại H. Gọi D, E theo thứ tự là giao điểm (khác A) của AB, AC với đường tròn nhỏ. Chứng minh rằng

1. DE song song với BC.
2. AH là tia phân giác của góc BAC.

Lời giải.



1. Kẻ tiếp tuyến chung Ax của hai đường tròn. Ta có $\widehat{B} = \widehat{ADE}$ (cùng bằng $\widehat{CAx}$) nên $DE \parallel BC$.

2. $DE \parallel BC$ mà $BC \perp O'H$ nên $DE \perp O'H \Rightarrow \overset{\frown}{HE} = \overset{\frown}{HD}$, do đó $\widehat{BAH} = \widehat{CAH}$. Vậy AH là tia phân giác của $\widehat{BAC}$.

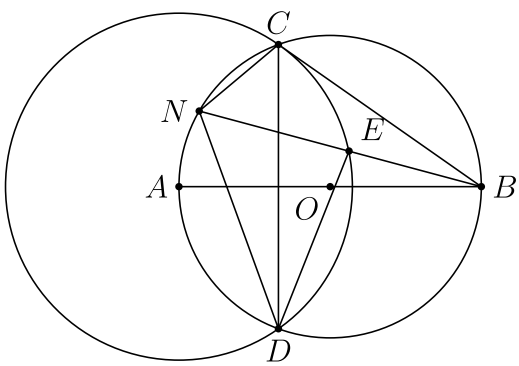
□

Bài 5. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Vẽ đường tròn tâm A cắt đường tròn (O) ở C và D. Kẻ dây BN của đường tròn (O), cắt đường tròn (A) tại điểm E ở bên trong đường tròn (O). Chứng minh rằng

1. $\widehat{CEN} = \widehat{EDN}$.

2. $NE^2 = NC \cdot ND$.

Lời giải.



1. Ta có $\widehat{CEN} = \widehat{ECB} + \widehat{CBE} = \widehat{CDE} + \widehat{CDN} = \widehat{EDN}$.

2. Ta lại có $\widehat{CNB} = \widehat{DNB}$ (do sđ$\overset{\frown}{BC}$ = sđ$\overset{\frown}{BD}$).
Xét $\triangle CEN$ và $\triangle EDN$ có

$$\begin{cases} \widehat{CEN} = \widehat{EDN} \\ \widehat{CNE} = \widehat{DNE} \end{cases} \Rightarrow \triangle CEN \backsim \triangle EDN \text{ (g.g), suy ra } \frac{NE}{ND} = \frac{NC}{NE} \Leftrightarrow NE^2 = NC \cdot ND.$$

□

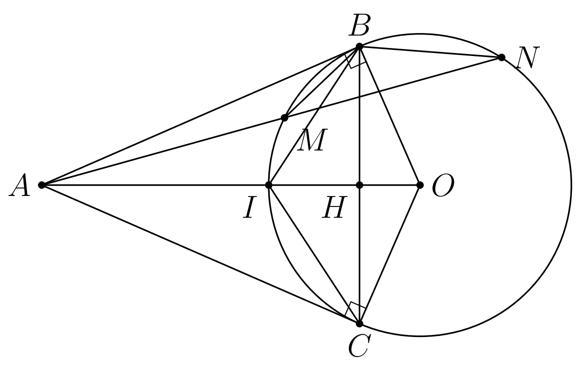
Bài 6. Cho A nằm ngoài đường tròn (O). Qua A kẻ 2 tiếp tuyến AB và AC với (O) (B, C là các tiếp điểm). Kẻ cát tuyến AMN với (O) (M nằm giữa A và N).

1. Chứng minh $AB^2 = AM \cdot AN$.

2. Gọi H là giao điểm của AO và BC. Chứng minh: $AH \cdot AO = AM \cdot AN$.

3. Đoạn AO cắt đường tròn tại I. Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

Lời giải.



1. Xét $\triangle AMB$ và $\triangle ABN$ có

$$\begin{cases} \widehat{A} \text{ chung} \\ \widehat{MBA} = \widehat{ANB} \end{cases} \Rightarrow \triangle AMB \backsim ABN \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AB}{AN} \Leftrightarrow AB^2 = AM \cdot AN.$$

2. Dễ thấy $AO \perp BC$ tại H nên $\triangle ABO$ vuông tại B và nhận BH là đường cao.
Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $AB^2 = AH \cdot AO$.
Mặt khác $AB^2 = AM \cdot AN \Rightarrow AH \cdot AO = AM \cdot AN$.

3. $\triangle ABC$ cân tại A nên I nằm trên phân giác của góc A.
Mặt khác $\widehat{ACI} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{IC} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{IB} = \widehat{ICB}$ nên I cũng nằm trên phân giác góc C. Điểm I là giao điểm của hai đường phân giác góc A và góc C của tam giác ABC nên I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

□

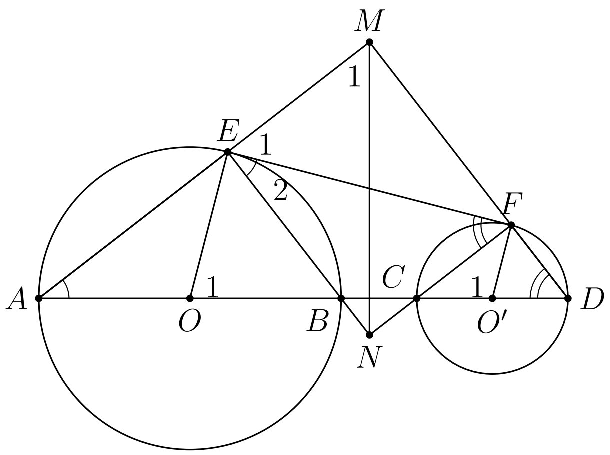
Bài 7. Cho hai đường tròn (O) và (O') nằm ngoài nhau. Đường nối tâm OO' cắt các đường tròn (O) và (O') tại các điểm A, B, C, D theo thứ tự trên đường thẳng. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài EF, $E \in (O)$, $F \in (O')$. Gọi M là giao điểm của EB và FC. Chứng minh rằng

1. $MNEF$ là hình chữ nhật.

2. MN vuông góc với AD.

3. $ME \cdot MA = MF \cdot MD$.

Lời giải.



1. Theo tính chất góc nội tiếp ta có
$\widehat{A} = \dfrac{1}{2}\widehat{O_1}$, $\widehat{D} = \dfrac{1}{2}\widehat{O'_1}$ mà $\widehat{O_1} + \widehat{O'_1} = 180^\circ$ (vì $OE \parallel O'F$) nên $\widehat{A} + \widehat{D} = 90^\circ$. Do đó $\widehat{AMD} = 90^\circ$.
Ta lại có $\widehat{MEB} = 90^\circ$, $\widehat{MFC} = 90^\circ$.
Tứ giác $MENF$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

2. Theo tính chất hình chữ nhật $\widehat{M_1} = \widehat{E_1}$.
Theo tính chất của góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung, ta có $\widehat{A} = \widehat{E_2}$.
Suy ra $\widehat{M_1} + \widehat{A} = 90^\circ$. Do đó $MN \perp AD$.

3. Xét $\triangle MFE$ và $\triangle MAD$ có

$$\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{E_2} = \widehat{MFE} \\ \widehat{M} \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \triangle MFE \backsim \triangle MAD \Rightarrow \dfrac{MF}{MA} = \dfrac{ME}{MD} \Leftrightarrow ME \cdot MA = MF \cdot MD.$$

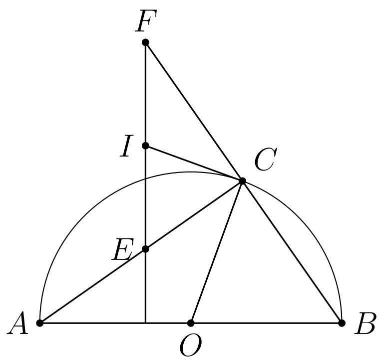
□

Bài 8. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và một điểm C trên nửa đường tròn. Gọi D là 1 điểm trên đường kính AB. Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt BC ở F, cắt AC ở E. Tiếp tuyến của nửa đường tròn ở C cắt EF ở I. Chứng minh

1. I là trung điểm của EF.

2. Đường thẳng OC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ECF$.

Lời giải.



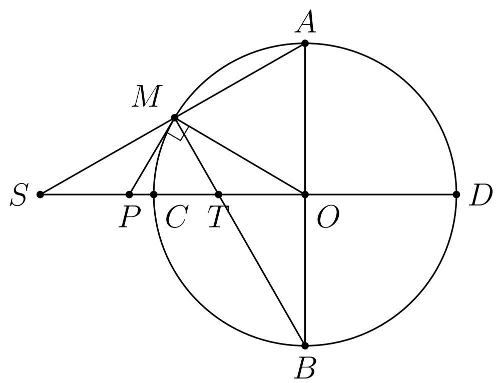
1. Vì C thuộc nửa đường tròn đường kính AB nên $\widehat{ACB}=90^\circ$.
   Ta có $\begin{cases}\widehat{ICE}=\dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{CA}\\ \widehat{ABC}=\dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{CA}\end{cases}\Rightarrow \widehat{ICE}=\widehat{ABC}.$
   Mà $\widehat{IEC}=\widehat{AED}$ (2 góc đối đỉnh) và $\widehat{AED}=\widehat{ABC}$ (cùng phụ với $\widehat{CAB}$). Từ đó suy ra $\widehat{ICE}=\widehat{IEC}\Rightarrow \triangle IEC$ cân tại $I\Rightarrow IE=IC$. (1)
   Lại có $\begin{cases}\widehat{CFI}=\widehat{CEI}=90^\circ\\ \widehat{FCI}=\widehat{ECI}=90^\circ\\ \widehat{ECI}=\widehat{CEI}\end{cases}\Rightarrow \widehat{CFI}=\widehat{FCI}\Rightarrow \triangle CFI$ cân $\Rightarrow IF=IC$. (2)
   Từ (1) và (2) ta có $IC=IE=IF\Rightarrow$ I là trung điểm của EF.
2. Vì $IE=IF=IC$ nên đường tròn ngoại tiếp $\triangle ECF$ là đường tròn tâm I, bán kính IC. Mà $\widehat{ICO}=90^\circ$, suy ra OC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ECF.

□

Bài 9. Cho đường tròn (O,R), hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên tia đối của tia CD lấy điểm S. SA cắt đường tròn tại M, tiếp tuyến của đường tròn tại M cắt CD ở O, BM cắt CD ở T. Chứng minh

1. $PT\cdot MA=MT\cdot OA$.
2. $PS=PM=PT$.
3. Biết $PM=R$, tính $TA\cdot SM$ theo R.

Lời giải.



1. $\begin{cases}\widehat{PTM}=\dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BM}\\ \widehat{MAO}=\dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BM}\end{cases}\Rightarrow \widehat{PMT}=\widehat{MAO}.$ (1)
   Có $\begin{cases}\widehat{MTS}+\widehat{MST}=90^\circ(\triangle MST \text{ vuông tại } M)\\ \widehat{OAM}=\widehat{MST}=90^\circ(\triangle AOS \text{ vuông tại } O)\\ \widehat{OAM}=\widehat{OMA}(\triangle OAM \text{ cân tại } O)\end{cases}\Rightarrow \widehat{MTS}=\widehat{OMA}.$ (2)
   Từ (1) và (2) suy ra $\triangle PMT\backsim\triangle OMA$ (g.g), suy ra $\dfrac{PT}{MT}=\dfrac{OA}{MA}\Rightarrow PT\cdot MA=OA\cdot MT$

2. Ta có

$$\begin{cases} \widehat{OAB} = \widehat{OBM} (\triangle OMB \text{ cân tại } M) \\ \widehat{OMB} = \widehat{PMS} \text{ (cùng phụ với } \widehat{PMT}) \Rightarrow \widehat{PMS} = \widehat{PSM} \Rightarrow \triangle PMS \text{ cân tại } P. \\ \widehat{MSP} = \widehat{MBO} \text{ (cùng phụ với } \widehat{A}) \end{cases}$$

Mà $\begin{cases} \widehat{PMS} + \widehat{PMT} = 90^\circ \\ \widehat{PSM} + \widehat{STM} = 90^\circ \\ \widehat{PMS} = \widehat{PSM} \end{cases} \Rightarrow \widehat{PMT} = \widehat{PTM} \Rightarrow \triangle PMT$ cân tại P.

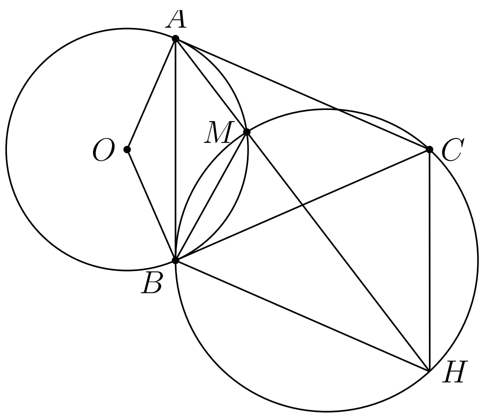
Các tam giác PMS và PMT cân tại P nên $PM = PS = PT$.

3. Điểm T nằm trên trung trực của AB nên $\triangle TAB$ cân tại T.
Mặt khác $\triangle PMS$ cân tại P và có $\widehat{PSM} = \widehat{TBA}$ (cùng phụ với $\widehat{A}$) nên $\triangle TAB \backsim \triangle PMS$.
Suy ra $\dfrac{SM}{AB} = \dfrac{PM}{TA} \Rightarrow SM \cdot TA = PM \cdot AB = 2R^2$.

□

Bài 10. Cho (O) và điểm C nằm ngoài đường tròn. Qua C kẻ 2 tiếp tuyến CA, CB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Vẽ (O') đi qua C, tiếp xúc với AB tại B, cắt (O) tại M. Chứng minh rằng đường thẳng AM đi qua trung điểm của BC.

Lời giải.



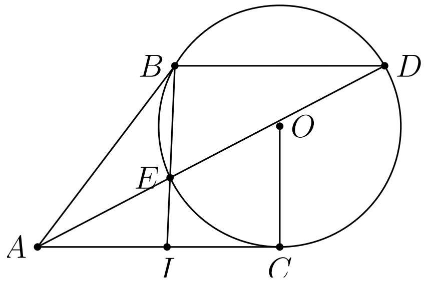
Tia AM cắt (O') tại H. Ta có

$$\begin{cases} \widehat{CAH} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AM} = \widehat{ABM} \\ \widehat{ABM} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BM} \text{ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)} \Rightarrow \widehat{CAH} = \widehat{BHA} \Rightarrow AC \parallel BH. \\ \widehat{BHA} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BM} \text{ (trong } (O')) \end{cases}$$

Tương tự $AB \parallel CH \Rightarrow$ tứ giác $ABHC$ là hình bình hành suy ra AM đi qua trung điểm của BC.
□

Bài 11. Từ điểm A nằm ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Gọi BD là dây của đường tròn song song với AC, E là giao điểm của AD với đường tròn, I là giao điểm của BE và AC. Chứng minh rằng I là trung điểm của AC.

Lời giải.

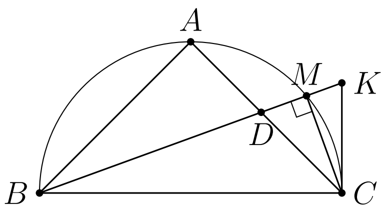


Ta có IC là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $IC^2 = IE \cdot IB$.
Theo tính chất của góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung, ta có $\widehat{EBD} = \widehat{D_1}$, mà $\widehat{D_1} = \widehat{A_1}$ (so le trong, $BD \parallel AC$) nên $\widehat{EBA} = \widehat{A_1}$.
Từ đó suy ra $\triangle IBA \backsim \triangle IAE$ (g.g) nên $\dfrac{IA}{IE} = \dfrac{IB}{IA} \Rightarrow IA^2 = IE \cdot IB$. □

4 Các bài toán nâng cao

Bài 12. Tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn (O) đường kính 5 cm. Tiếp tuyến với đường tròn C cắt tia phân giác của góc B tại K. Tính độ dài BK, biết rằng BK cắt AC tại D và $BD = 4$ cm.

Lời giải.



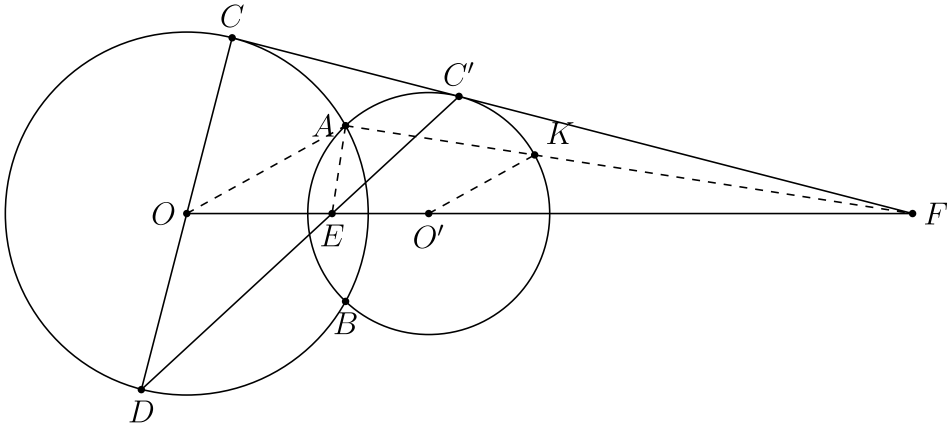
Gọi M là giao điểm của DK với nửa đường tròn. Dễ thấy $\triangle CDK$ cân. Đặt $DM = MK = x > 0$.
Ta có $BM \cdot BK = BC^2 \Leftrightarrow (x+4)(2x+4) = 25 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = \dfrac{27}{2} \Leftrightarrow (x+3)^2 = \left(\dfrac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2$.
Nghiệm dương của phương trình là $x = \dfrac{3\sqrt{6} - 6}{2}$. Do đó $DK = 3\sqrt{6} - 6$ cm, $BK = 3\sqrt{6} - 2$ cm.
□

Bài 13. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A và B. Kẻ tiếp tuyến chung CC' ($C \in (O)$, $C' \in (O')$), kẻ đường kính COD. Gọi E, F theo thứ tự là giao điểm của OO' với $C'D$, CC'. Chứng minh rằng

1. $\widehat{EAF} = 90^\circ$ (A, C, C' nằm cùng phía đối với OO').

2. FA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CAC'.

Lời giải.



1. Gọi R, R' là bán kính của đường tròn (O), (O'). Điểm E chia trong đoạn OO', điểm F chia ngoài đoạn OO' theo cùng một tỉ số $\dfrac{R}{R'}$. Do đó AE là đường phân giác trong, AF là đường phân giác ngoài của $\triangle AOO'$. Suy ra $\widehat{EAF} = 90^\circ$.

2. Kẻ bán kính $O'K$ song song và cùng chiều với OA. Gọi F' là giao điểm của AK với OO'. Theo định lí Ta-;et ta có $\dfrac{F'O'}{F'O} = \dfrac{O'K}{AO} = \dfrac{R'}{R}$ hay F chia đoạn OO' theo tỉ số $\dfrac{R}{R'}$, như vậy $F \equiv F'$.
Ta có $\widehat{COA} = \widehat{C'O'K}$ nên $\widehat{C'CA} = \widehat{C'AK}$. Từ đó AF là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CAC'.

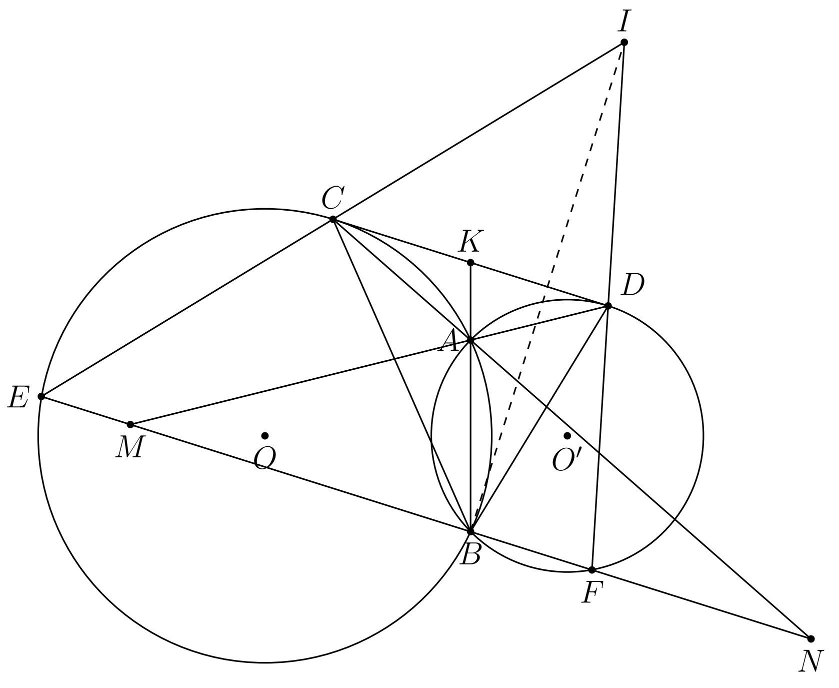
□

Bài 14. Cho hai đường tròn (O), (O') cắt nhau ở A và B, trong đó tiếp tuyến chung CD song song với cát tuyến chung EBF, C và E thuộc (O), D và F thuộc (O'), B nằm giữa E và F. Gọi M, N theo thứ tự là giao điểm của DA, CA với EF. Gọi I là giao điểm của EC và FD. Chứng minh rằng

1. $\triangle ICD = \triangle BCD$.

2. IB là đường trung trực của MN.

Lời giải.



1. Ta có $\widehat{BCD} = \widehat{E} = \widehat{ICD}$. Tương tự $\widehat{BDC} = \widehat{IDC}$. Do đó $\triangle ICD = \triangle BCD$ (g.c.g)

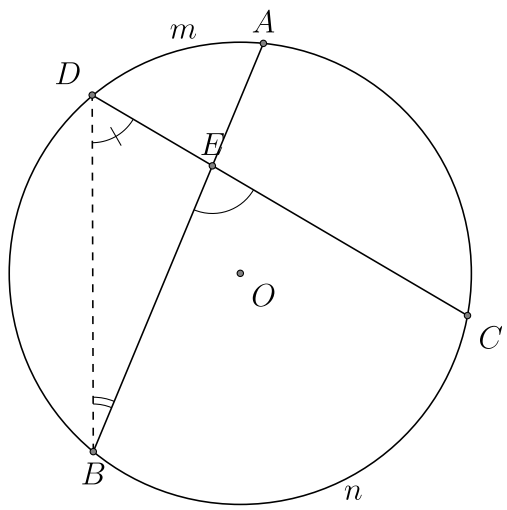
2. Từ câu a) dễ dàng chứng minh được CD là trung trực của IB. Ta lại có $CD \parallel EF$ nên $IB \perp EF$. (1)
   Gọi K là giao điểm của BA và CD. Ta có $\dfrac{KC}{BN} = \dfrac{KD}{BM}$ (cùng bằng $\dfrac{AK}{AB}$).
   Ta lại có $KC = KD$ (cùng bằng $\sqrt{KA \cdot KB}$) nên $BN = BM$. (2)
   Từ (1) và (2) suy ra IB là đường trung trực của MN.

□

§5 Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn. Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn

1 Tóm tắt lí thuyết

Quan sát hình bên ta thấy góc BEC có đỉnh E nằm bên trong đường tròn (O). Ta nói góc BEC là góc có đỉnh ở bên trong đường tròn.
Người ta quy ước: Mỗi góc có đỉnh ở bên trong đường tròn chắn hai cung, một cung nằm bên trong góc, cung kia nằm bên trong góc đối đỉnh của nó.
Theo đó, trên hình vẽ ta có góc BEC chắn cung $\overset{\frown}{BnC}$ và cung $\overset{\frown}{DmA}$. Ta có định lí sau

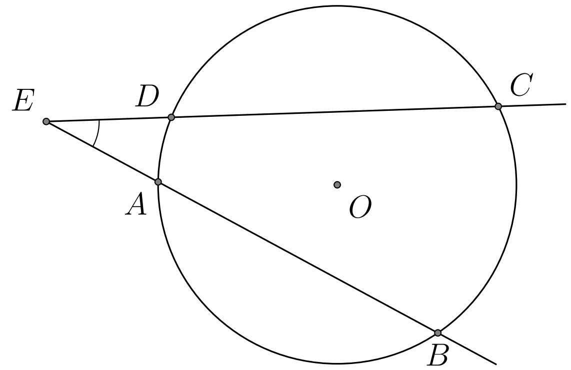


Định lí 19. Số đo của góc có đỉnh ở bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn.

$$\widehat{BEC} = \frac{\text{sđ}\overset{\frown}{BnC} + \text{sđ}\overset{\frown}{AmD}}{2}.$$

Góc có đỉnh bên ngoài đường tròn là góc có hai đặc điểm sau

- Đỉnh nằm ngoài đường tròn.
- Các cạnh đều có 1 hoặc 2 điểm chung với đường tròn.



Mỗi góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn có hai cung bị chắn. Hai cung đó nằm bên trong góc. Góc BEC ở hình bên có hai cạnh cắt đường tròn, hai cung bị chắn là hai cung nhỏ $\overset{\frown}{AD}$ và $\overset{\frown}{BC}$. Số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn được xác định qua định lí:

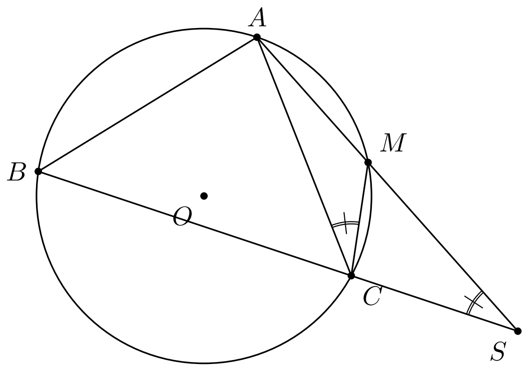
Định lí 20. Số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.

$$\widehat{BEC} = \frac{\text{sđ}\overset{\frown}{BC} - \text{sđ}\overset{\frown}{AD}}{2}.$$

2 Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho đường tròn (O) và hai dây AB, AC bằng nhau. Trên cung nhỏ AC lấy một điểm M. Gọi S là giao điểm của AM và BC. Chứng minh $\widehat{ASC} = \widehat{MCA}$.

Lời giải.



Ta có $\widehat{ASC}$ là góc có đỉnh ở bên ngoài (O) nên

$$\widehat{ASC} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{AB} - \text{sđ}\overset{\frown}{MC}). \quad (1)$$

Ta có góc $\widehat{MCA}$ là góc nội tiếp trong (O) chắn cung AM nên

$$\widehat{MCA} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AM}. \quad (2)$$

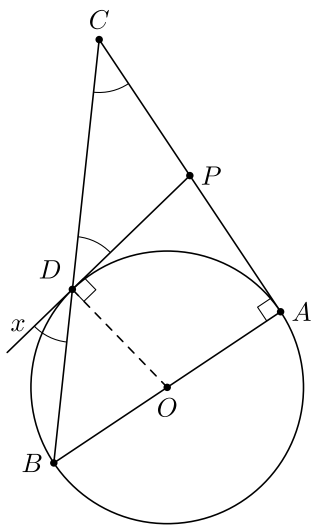
Theo giả thiết, ta có $AB = AC \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$. Thay vào (1), ta có

$$\begin{aligned}\widehat{ASC} &= \frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{AB} - \text{sđ}\overset{\frown}{MC}) \\ &= \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AM}. \quad (3)\end{aligned}$$

Từ (2) và (3) suy ra $\widehat{ASC} = \widehat{MCA}$. □

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông tại A. đường tròn đường kính AB cắt BC ở D. tiếp tuyến ở D cắt AC ở P. Chứng minh $PD = PC$.

Lời giải.



Góc $\widehat{C}$ có đỉnh ở bên ngoài đường tròn nên

$$\widehat{C} = \frac{\text{sđ}\overset{\frown}{AmB} - \text{sđ}\overset{\frown}{AD}}{2} = \frac{\text{sđ}\overset{\frown}{ADB} - \text{sđ}\overset{\frown}{AD}}{2}.$$

do đó $\widehat{C} = \dfrac{\text{sđ}\overset{\frown}{BD}}{2}$ (1).

Ta lại có $\widehat{CDP} = \widehat{BDx}$ (2),

$\widehat{BDx} = \dfrac{\text{sđ}\overset{\frown}{BD}}{2}$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{C} = \widehat{CDP}$ hay tam giác CPD cân, do đó $PD = PC$.

□

Ví dụ 3. Trên đường tròn (O) cho các điểm A, B, C, D theo thứ tự đó. Gọi A_1, B_1, C_1 và D_1 lần lượt là điểm chính giữa các cung AB, BC, CD và DA. Chứng minh các đường thẳng A_1C_1 và B_1D_1 vuông góc với nhau.

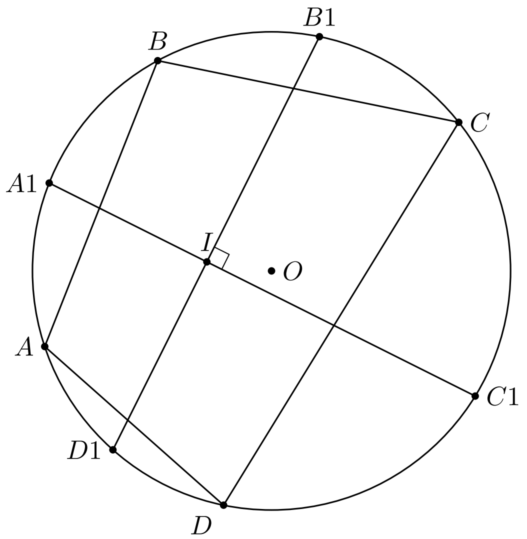
Lời giải.

Gọi I là giao điểm của A_1C_1 và B_1D_1, α, β, γ, δ theo thứ tự là số đo của các cung $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DA}$. Khi đó $\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^\circ$.

Xét góc $\widehat{A_1IB_1}$ là góc có đỉnh trong đường tròn (O) ta có

$$\begin{aligned}\widehat{A_1IB_1} &= \frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{A_1BB_1}+\text{sđ}\overset{\frown}{C_1DD_1})\\ &= \frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{A_1B}+\text{sđ}\overset{\frown}{BB_1}+\text{sđ}\overset{\frown}{C_1D}+\text{sđ}\overset{\frown}{DD_1})\\ &= \frac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=90^\circ.\end{aligned}$$

Nghĩa là $A_1C_1 \perp B_1D_1$.



□

Ví dụ 4. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Điểm D di động trên cung AC. Gọi E là giao điểm của AC và BD, gọi F là giao điểm của AD và BC. Chứng minh rằng:

1. $\widehat{AFB}=\widehat{ABD}$;
2. Tích $AE\cdot BF$ không đổi.

Lời giải.

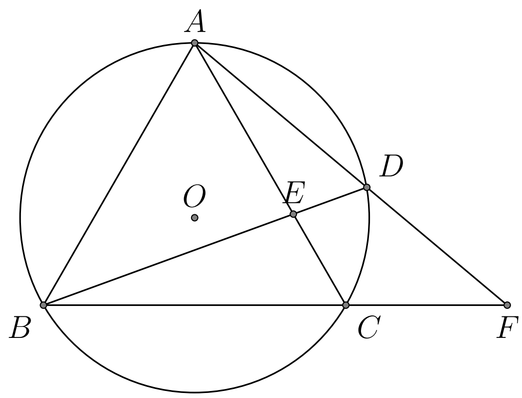
1. Theo tính chất góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn ta có

$$\widehat{AFB}=\frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{AB}-\text{sđ}\overset{\frown}{CD}). \quad (1)$$

Theo tính chất góc nội tiếp

$$\widehat{ABD}=\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AD}=\frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{AB}-\text{sđ}\overset{\frown}{CD}). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AFB}=\widehat{ABD}$.



2. $\triangle AFB$ và $\triangle EBA$ có $\widehat{AFB}=\widehat{EBA}$, $\widehat{FBA}=\widehat{BAE}=60^\circ$ nên chúng đồng dạng, suy ra $\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{BF}{AB}$. Do đó $AE\cdot BF=AB^2$.

□

Ví dụ 5. Trong tam giác ABC, đường phân giác góc $\widehat{BAC}$ cắt cạnh BC tại D. Giả sử (T) là đường tròn tiếp xúc với BC tại D và đi qua điểm A. Gọi M là giao điểm thứ hai của (T) và AC, P là giao điểm thứ hai của (T) và BM, E là giao điểm của AP và BC.

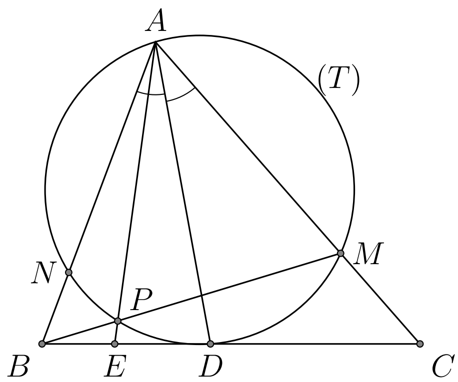
1. Chứng minh $\widehat{EAB} = \widehat{MBC}$.
2. Chứng minh $BE^2 = EP \cdot EA$.

Lời giải.

1.

Gọi N là giao điểm thứ hai của AB với đường tròn (T).
Do AD là phân giác của góc $\widehat{BAC}$ nên sđ$\overset{\frown}{DM}$ = sđ$\overset{\frown}{DN}$.
Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{MBC} &= \widehat{MBD} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{DM} - \text{sđ}\overset{\frown}{DP})\\ &= \frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{DN} - \text{sđ}\overset{\frown}{DP})\\ &= \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{NP} = \widehat{NAP} = \widehat{EAB}.\end{aligned}$$



2. Từ kết quả câu a) ta thấy $\widehat{EBP} = \widehat{EAB}$. Từ đó $\triangle EBP \backsim \triangle EAB$ suy ra

$$\frac{BE}{EP} = \frac{EA}{BE} \Leftrightarrow BE^2 = EP \cdot EA.$$

□

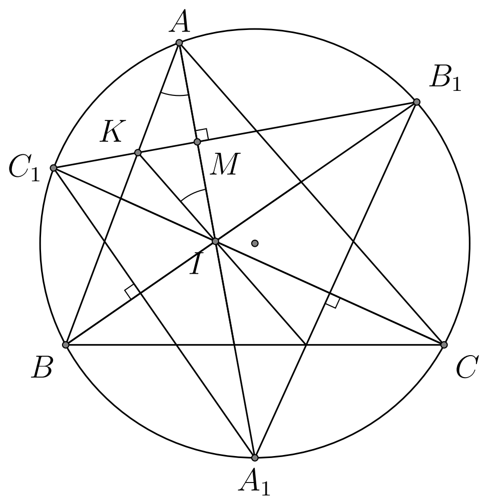
Ví dụ 6. Trên đường tròn (O) ta lấy các điểm A, C_1, B, A_1, C, B_1 theo thứ tự đó.

1. Chứng minh rằng nếu các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 là các đường phân giác trong của tam giác ABC thì chúng là các đường cao của tam giác $A_1B_1C_1$.
2. Chứng minh rằng nếu các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 là các đường cao của tam giác ABC thì chúng là các đường phân giác trong của tam giác $A_1B_1C_1$.
3. Giả sử (T_1) và (T_2) là hai tam giác nội tiếp đường tròn (O), đồng thời các đỉnh của tam giác $(T2)$ là các điểm chính giữa của các cung của đường tròn bị chia bởi các đỉnh của tam giác T_1. Chứng minh rằng trong hình lục giác là giao của các tam giác (T_1) và (T_2) các đường chéo nối các đỉnh đối diện nhau song song với các cạnh của tam giác (T_1) và đồng quy tại một điểm.

Lời giải.

1.

Ta chứng minh $AA_1 \perp BB_1$. Thật vậy, gọi M là giao điểm của AA_1 và B_1C_1 ta có



$$\begin{aligned}\widehat{AMB_1} &= \frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{AB_1} + \text{sđ}\overset{\frown}{A_1BC_1})\\ &= \frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{AB_1} + \text{sđ}\overset{\frown}{A_1B} + +\text{sđ}\overset{\frown}{BC_1})\\ &= \widehat{ABB_1} + \widehat{A_1AB} + \widehat{BCC_1}\\ &= \frac{1}{2}(\widehat{ABC} + \widehat{CAB} + \widehat{BCA}) = 90^\circ\end{aligned}$$

Chứng minh tương tự ta cũng có $BB_1 \perp A_1C_1$; $CC_1 \perp A_1B_1$.

2. Gọi M_1 là giao điểm của BB_1 và AC ta có

$$\begin{aligned}\widehat{BM_1A} &= \frac{1}{2}((\text{sđ}\overset{\frown}{AC_1B} + \text{sđ}\overset{\frown}{A_1C})\\ &= \widehat{BCA} + \widehat{A_1C_1C}. \quad (1)\end{aligned}$$

Lại có

$$\begin{aligned}\widehat{BM_2A} &= \frac{1}{2}((\text{sđ}\overset{\frown}{AC_1B} + \text{sđ}\overset{\frown}{B_1C})\\ &= \widehat{BCA} + \widehat{B_1C_1C}. \quad (2)\end{aligned}$$

Bởi vì $\widehat{BM_1A} = \widehat{BM_2A} = 90^\circ$ nên từ (1) và (2) suy ra $\widehat{A_1C_1C} = \widehat{B_1C_1C}$ tức là CC_1 là phân giác của góc $\widehat{A_1C_1B_1}$. Chứng minh tương tự ta cũng thu được AA_1 là phân giác của góc $\widehat{B_1A_1C_1}$; BB_1 là phân giác của góc $A_1B_1C_1$.

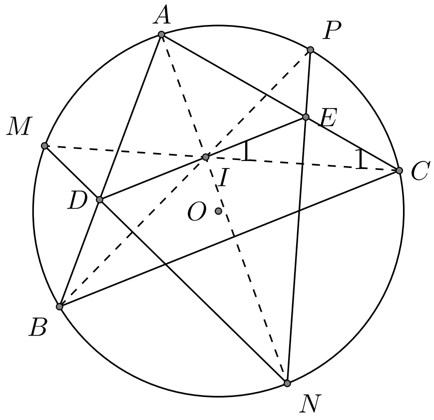
3. Kí hiệu các đỉnh của tam giác (T_1) là A, B, C; A_1, B_1, C_1 là điểm chính giữa các cung BC, CA, AB tương ứng. Khi đó (T_2) là tam giác $A_1B_1C_1$. Các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 chứa các đường phân giác của tam giác (T_1) nên chúng đồng quy tại điểm I. Giả sử K là giao điểm của AB và B_1C_1. Ta chỉ cần chứng minh $IK \parallel AC$. Thật vậy, ta thấy tam giác AB_1I cân tại B_1 nên tam giác AIK cân tại K. Từ đó $\widehat{KIA} = \widehat{KAI} = \widehat{IAC}$ nên $IK \parallel AC$.

□

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), các điểm M, N, P là điểm chính giữa của các cung AB, BC, CA. Gọi D là giao điểm của MN và AB, E là giao điểm của PN và AC. Chứng minh rằng DE song song với BC.

Lời giải.

Gọi I là giao điểm của CM và PB. Ta có A, I, N thẳng hàng. Vì $\widehat{PIC} = \widehat{PCI}$ nên $PI = PC$. Tương tự, $NI = NC$. Do đó PN là đường trung trực của IC, suy ra $IE = CE$ nên $\widehat{C_1} = \widehat{I_1}$. Ta lại có $\widehat{C_1} = \widehat{ICB}$ nên $\widehat{I_1} = \widehat{ICB}$, do đó $IE \parallel BC$. Chứng minh tương tự, $ID \parallel BC$. Suy ra I, D, E thẳng hàng và $DE \parallel BC$.



□

3 Luyện tập

Bài 1. Cho đường tròn (O) và hai dây AB, AC. Gọi M, N lần lượt là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{AB}$ và $\overset{\frown}{AC}$. Đường thẳng MN cắt dây AB tại E và cắt dây AC tại H. Chứng minh tam giác AEH cân.

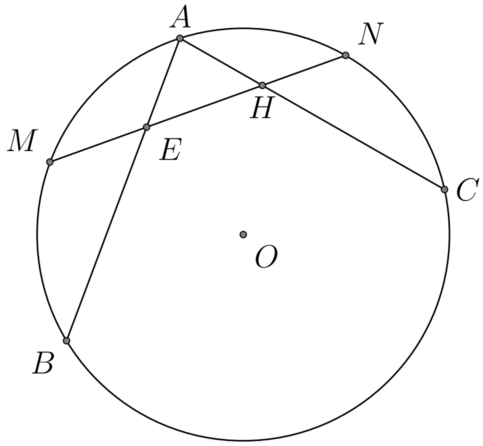
Lời giải.

Vì $\widehat{AHM}$ và $\widehat{AEN}$ là các góc có đỉnh ở bên trong (O) nên ta có

$$\begin{aligned}\widehat{AHM} &= \frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{AM} + \text{sđ}\overset{\frown}{NC}). \quad (1)\\ &= \frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{MB} + \text{sđ}\overset{\frown}{AN}). \quad (2)\end{aligned}$$

Theo giả thiết ta có $\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB}$ và $\overset{\frown}{NA} = \overset{\frown}{NC}$. Thế vào (2) ta được

$$\widehat{AEN} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{AM} + \text{sđ}\overset{\frown}{NC}). \quad (3)$$



So sánh (1) và (3) ta được $\widehat{AHM} = \widehat{AEN}$ hay tam giác AEH cân. □

Bài 2. Cho A, B, C là ba điểm thuộc đường tròn (O) sao cho tiếp tuyến tại A cắt tia BC tại D. Tia phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn ở M, tia phân giác của $\widehat{D}$ cắt AM ở I. Chứng minh $DI \perp AM$.

Lời giải.

Gọi giao điểm của AM và BC là N, ta có

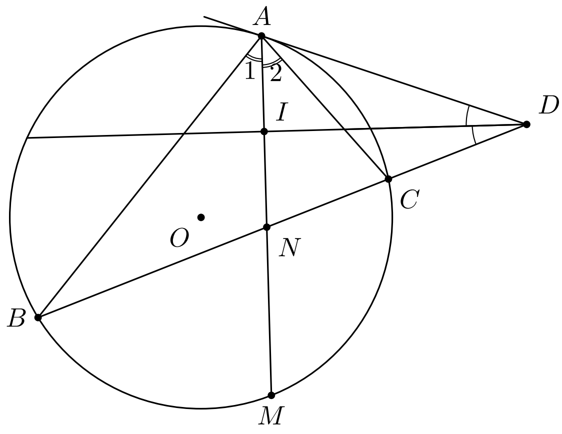
$$\widehat{AND} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{AC} + \text{sđ}\overset{\frown}{BM}).$$

Nhưng $\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{CM}$ nên

$$\widehat{AND} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{AC} + \text{sđ}\overset{\frown}{CM}) = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AM}. \quad (1)$$

Mặt khác, $\widehat{NAD} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AM}$. (2)

So sánh (1) và (2) ta có $\widehat{AND} = \widehat{NAD}$ hay tam giác DAN cân tại D. Suy ra tia phân giác DI đồng thời là đường cao. Do đó $ID \perp AM$.



□

Bài 3. Trên một đường tròn, lấy liên tiếp ba cung AC, CD, DB sao cho $\text{sđ}\overset{\frown}{AC} = \text{sđ}\overset{\frown}{CD} = \text{sđ}\overset{\frown}{DB} = 60^\circ$. Hai đường thẳng AC và BD cắt nhau tại E. Hai tiếp tuyến của đường tròn tại B và C cắt nhau tại T. Chứng minh rằng:

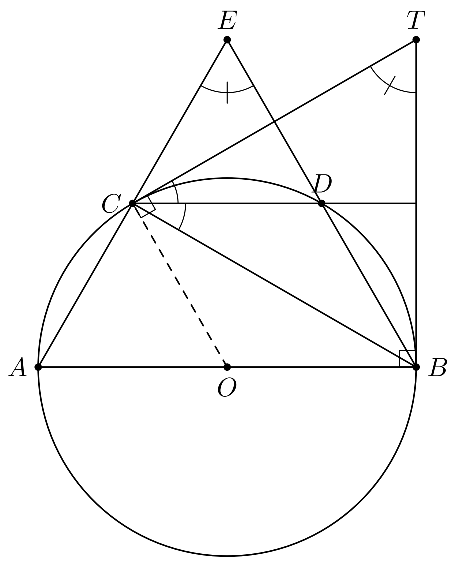
1. $\widehat{AEB} = \widehat{BTC}$;
2. CD là tia phân giác của $\widehat{BCT}$.

Lời giải.

1. Chứng minh $\widehat{AEB} = \widehat{BTC}$.
   Ta có $\widehat{AEB}$ là góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn (O) nên

   $$\widehat{AEB} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AB} - \text{sđ}\overset{\frown}{CD}\right) = \frac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ \ (1)$$

   Ta cũng có $\widehat{BTC}$ là góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn (O), nên $\widehat{BTC} = \dfrac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{BAC} - \text{sđ}\overset{\frown}{BDC}\right)$
   $= \dfrac{1}{2}\left[(180^\circ + 60^\circ) - (60^\circ + 60^\circ)\right] = 60^\circ$ (2)
   Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AEB} = \widehat{BTC}$, (đpcm).



2. Chứng minh CD là tia phân giác của $\widehat{BCT}$.

Vì $\widehat{DCT}$ là góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung nên

$$\widehat{DCT} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{CD} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ. \ (1)$$

Và $\widehat{DCB}$ là góc nội tiếp trong (O) chắn cung $\overset{\frown}{BD}$ nên

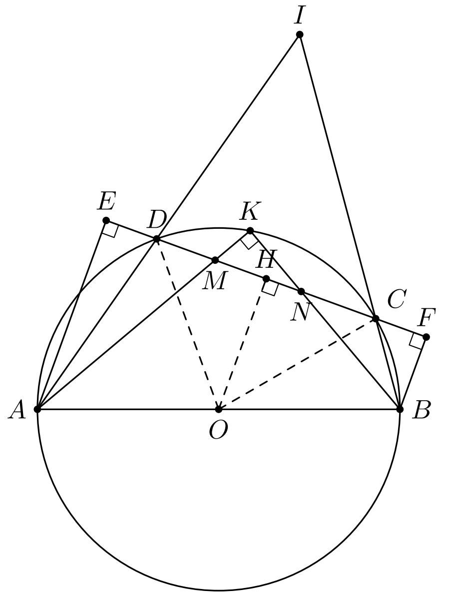
$$\widehat{DCB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BD} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ. \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{DCT} = \widehat{DCB}$. Vậy CD là tia phân giác của $\widehat{BCT}$. □

Bài 4. Cho bốn điểm A, B, C, D theo thứ tự đó nằm trên đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ (C và D nằm về cùng phía so với AB). Gọi E và F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A và B trên đường thẳng CD. Tia AD cắt tia BC tại I. Biết rằng $AE + BF = R\sqrt{3}$.

1. Tính số đo $\widehat{AIB}$.
2. Trên cung nhỏ CD lấy điểm K. Gọi giao điểm của KA, KB với CD lần lượt là M, N. Tìm giá trị lớn nhất của MN khi K di động trên cung nhỏ CD.

Lời giải.



a) Kẻ $OH \perp CD$ với H thuộc đoạn thẳng CD, ta thấy OH là đường trung bình của hình thang $ABFE$, suy ra $OH = \dfrac{1}{2}(AE + BF) = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.
Từ đó $\triangle OCD$ đều, suy ra sđ$\overset{\frown}{COD}$ = sđ$\overset{\frown}{CKD} = 60^\circ$.
Ta thấy góc $\widehat{AIB}$ có đỉnh nằm ngoài đường tròn (O) nên

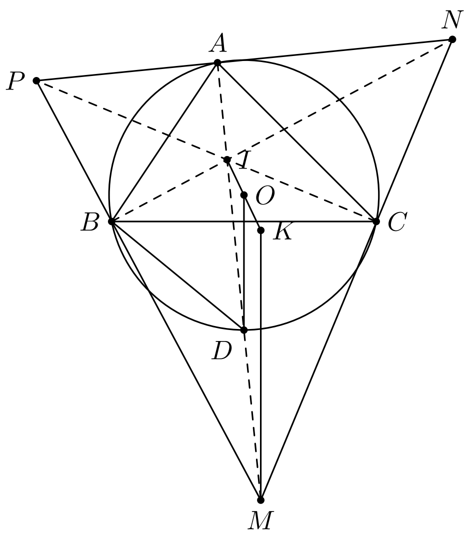
$$\text{sđ}\overset{\frown}{AIB} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AmB} - \text{sđ}\overset{\frown}{CKD}\right) = \frac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ.$$

b) Ta thấy $\triangle AEM \backsim \triangle NFB$ suy ra $EM \cdot NF = AE \cdot BF$, (không đổi). Do đó MN lớn nhất khi và chỉ khi $EM + NF$ nhỏ nhất. Theo trên $EM \cdot NF$ không đổi nên $EM + NF$ nhỏ nhất khi $EM = NF = \sqrt{AE \cdot BF}$.
Vậy giá trị lớn nhất của MN bằng $EF - 2\sqrt{AE \cdot BF}$.

□

Bài 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó; M, N, P theo thứ tự là tâm các đường tròn bàng tiếp trong các góc A, B, C. Gọi K là điểm đối xứng với I qua O. Chứng minh rằng K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP.

Lời giải.



Gọi D là giao điểm của AM với đường tròn (O). Ta chứng minh được các tam giác DBI và DBM cân suy ra $DI = DM$. Do đó OD là đường trung bình của $\triangle MIK$, suy ra $KM = 2OD = 2R$. Vậy M thuộc đường tròn $(K; 2R)$. Tương tự đối với các điểm N và P.

30. Đường tròn (O) đi qua chân ba đường cao của $\triangle MNP$ nên là đường tròn Ơ-le của tam giác đó. Theo tính chất của đường tròn Ơ-le, trung điểm H của NP thuộc đường tròn. Từ đó suy ra "Trung điểm của đoạn thẳng nối tâm của hai đường tròn bàng tiếp tam giác nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác đó".

□

Bài 6. Qua điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O) vẽ hai cát tuyến ABC và AMN sao cho hai đường thẳng BN và CM cắt nhau tại một điểm S nằm bên trong đường tròn. Chứng minh $\widehat{A}+\widehat{BSM}=2\widehat{CMN}$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{CAN}$ là góc ở bên ngoài đường tròn (O) nên

$$\widehat{A}=\frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{CN}-\text{sđ}\overset{\frown}{BM}\right)\ (1)$$

Góc $\widehat{BSM}$ là góc có đỉnh trong đường tròn (O) nên

$$\widehat{BSM}=\frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{CN}+\text{sđ}\overset{\frown}{BM}\right)\ (2)$$

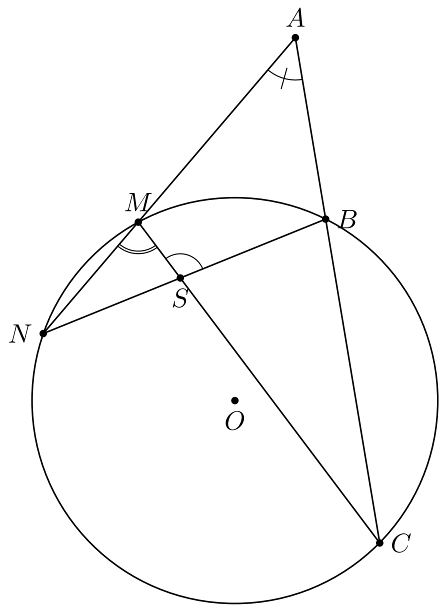
Cộng (1) và (2) vế với vế ta có

$$\widehat{A}+\widehat{BSM}=\text{sđ}\overset{\frown}{CN}\ (3)$$

Ta có $\widehat{CMN}$ là góc nội tiếp của (O) chắn $\overset{\frown}{CN}$ nên

$$\widehat{CMN}=\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{CN}\Leftrightarrow \text{sđ}\overset{\frown}{CN}=2\cdot\widehat{CMN}\ (4)$$

Thế (4) vào (3) ta được $\widehat{A}+\widehat{BSM}=2\cdot\widehat{CMN}$.



□

Bài 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Biết P, Q, R theo thứ tự là các điểm chính giữa các cung bị chắn BC, CA , AB bởi các góc A, B, C.

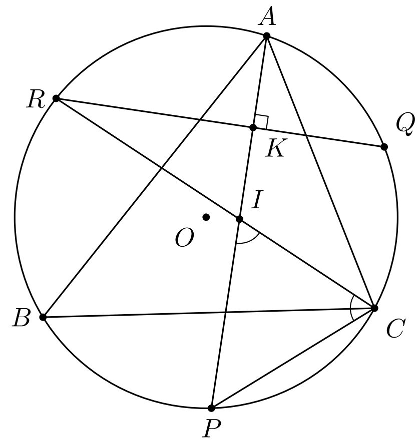
1. Chứng minh $AP\perp QR$.
2. AP cắt CR tại I. Chứng minh tam giác CPI cân.

Lời giải.

a) Gọi K là giao điểm của AP và QR. Ta có $\widehat{AKR}$ là góc có đỉnh ở bên trong đường tròn (O) nên

$$\begin{aligned}\widehat{AKR}&=\frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{AR}+\text{sđ}\overset{\frown}{QCP})\\&=\frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{AR}+\text{sđ}\overset{\frown}{QC}+\text{sđ}\overset{\frown}{CP})\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AB}+\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AC}+\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BC}\right)\\&=\frac{1}{4}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AB}+\text{sđ}\overset{\frown}{BC}+\text{sđ}\overset{\frown}{AC}\right)=\frac{360^\circ}{4}=90^\circ.\end{aligned}$$

Vì $\widehat{AKR}=90^\circ$. Suy ra $AP\perp QR$ (đpcm).



b) Ta có $\widehat{CIP}$ là góc có đỉnh ở bên trong đường tròn nên

$$\widehat{CIP} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{CP} + \text{sđ}\overset{\frown}{AR}\right). \ (1)$$

Ta có $\widehat{PCI}$ là góc nội tiếp trong đường tròn (O) chắn cung $\overset{\frown}{PR}$ nên

$$\widehat{PCI} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{PBR} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{BP} + \text{sđ}\overset{\frown}{BR}\right). \ (2)$$

Theo giả thiết ta có $\overset{\frown}{AR} = \overset{\frown}{RB}$ và $\overset{\frown}{PC} = \overset{\frown}{PB}$.
Thay vào (2), ta được $\widehat{PCI} = \dfrac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{CP} + \text{sđ}\overset{\frown}{AR}) = \widehat{CIP}$.
Điều này chứng tỏ tam giác CIP cân tại P.

$\square$

§6 Cung chứa góc

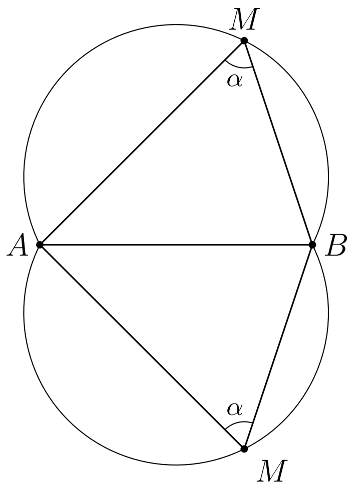
1 Tóm tắt lí thuyết

1.1 Bài toán quỹ tích cung chứa góc

Định lí 21. Quỹ tích những điểm nhìn đoạn thẳng AB dưới một góc không đổi α $(0^\circ < \alpha < 180^\circ)$ là hai cung chứa góc α vẽ trên đoạn AB (quỹ tích cơ bản).

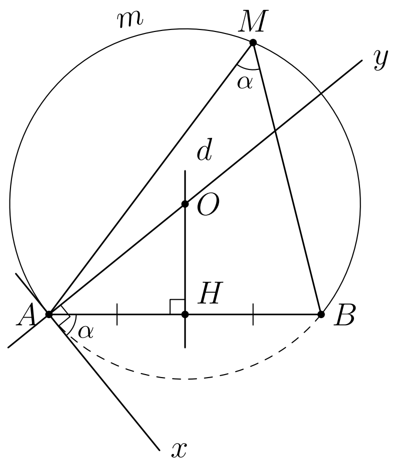
31.

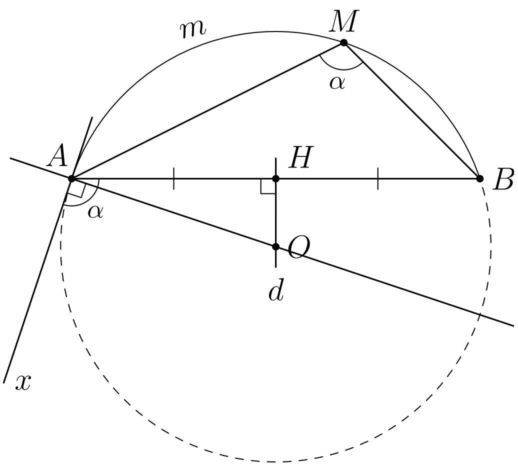
- Hai cung chứa góc α nói trên là hai cung tròn đối xứng nhau qua AB.
- Hai điểm A và B được coi là thuộc quỹ tích.
- Khi $\alpha = 90^\circ$ thì hai cung chứa góc α là hai nửa đường tròn dường kính AB. Như vậy quỹ tích các điểm nhìn đoạn thẳng AB cho trước dưới một góc vuông là đường tròn đường kính AB.



1.2 Cách vẽ cung chứa góc

Để vẽ cung chứa góc α ta thực hiện các bước sau





- Vẽ đường trung trực d của đoạn thẳng AB.
- Vẽ tia Ax tạo với đoạn thẳng AB một góc α.

- Vẽ tia Ay vuông góc với Ax. Gọi O là giao điểm của Ay với d.
- Vẽ cung AmB, tâm O, bán kính OA sao cho cung này nằm ở nửa mặt phẳng bờ AB không chứa tia Ax.

$\overset{\frown}{AmB}$ vẽ được như trên là cung chứa góc α.

1.3 Cách giải bài toán quỹ tích

Muốn chứng minh quỹ tích (tập hợp) điểm M thỏa mãn tính chất $\mathscr{T}$ là một hình $\mathcal{H}$ nào đó, ta phải chứng minh hai phần

- Phần thuận: Mọi điểm có tính chất $\mathscr{T}$ đều thuộc hình $\mathcal{H}$.
- Phần đảo: Mọi điểm thuộc hình $\mathcal{H}$ đều có tính chất $\mathscr{T}$.
- Kết luận: Quỹ tích (hay tập hợp) các điểm M có tính chất $\mathscr{T}$ là hình $\mathcal{H}$.

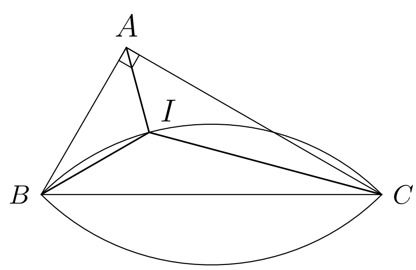
2 Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có cạnh BC cố định. Gọi I là giao điểm của ba đường phân giác trong. Tìm quỹ tích I khi điểm A thay đổi.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{BIC} &= 180^\circ - (\widehat{ICB} + \widehat{IBC}) = 180^\circ - \left(\frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2}\right)\\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^\circ - \frac{90^\circ}{2} = 135^\circ.\end{aligned}$$



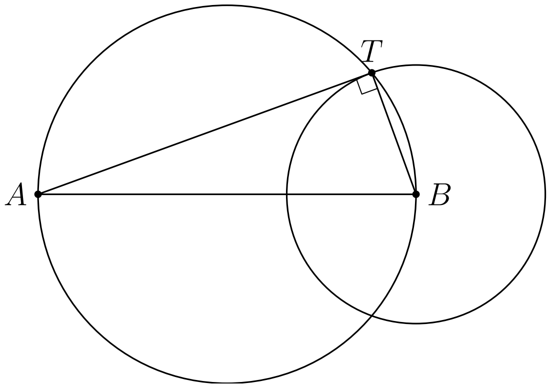
Ta thấy rằng B, C cố định, A thay đổi, I luôn nhìn cạnh BC dưới một góc 135°.
Vậy quỹ tích điểm I là cung chứa góc 135° dựng trên cạnh BC đối xứng nhau qua BC.

□

Ví dụ 2. Cho hai điểm A, B cố định. Từ A vẽ các tiếp tuyến với đường tròn tâm B có bán kính không lớn hơn AB. Tìm quỹ tích các tiếp điểm.

Lời giải.

Theo tính chất tiếp tuyến ta có $AT \perp BT$. Do đó A, B cố định, T nhìn AB dưới một góc vuông.
Vậy quỹ tích điểm T là đường tròn đường kính AB.



□

Ví dụ 3. Cho I, O lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC với $\widehat{A} = 60^\circ$. Gọi H là giao điểm của các đường cao BB' và CC'. Chứng minh các điểm B, O, C, H, I cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.

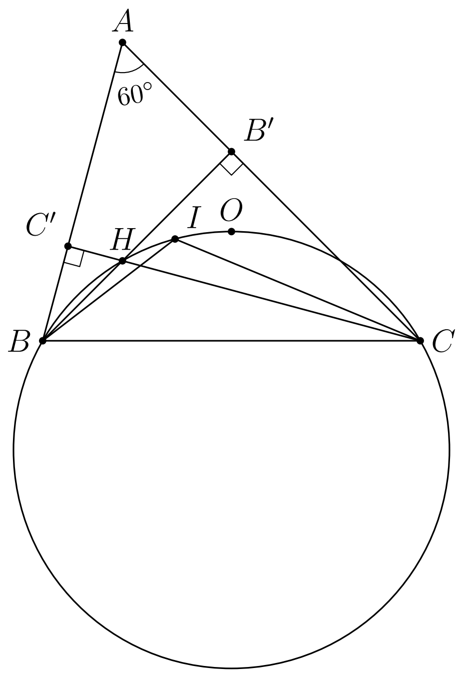
Xét tứ giác $AB'HC'$, ta có

$$\begin{aligned} &\widehat{B'HC'} = 360^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B'} + \widehat{C'}) \\ =\ & 360^\circ - (60^\circ + 90^\circ + 90^\circ) = 120^\circ. \\ \Rightarrow\ & \widehat{BHC} = \widehat{B'HC'} = 120^\circ. \end{aligned}$$

Xét $\triangle BIC$ ta có

$$\begin{aligned} &\widehat{BIC} = 180^\circ - (\widehat{IBC} + \widehat{ICB}) \\ =\ & 180^\circ - \left(\frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2}\right) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{A}) = 120^\circ. \end{aligned}$$

Mặt khác, $\triangle ABC$ nội tiếp trong đường tròn (O) nên góc nội tiếp $\widehat{BAC}$ trong đường tròn (O) có số đo là $60^\circ = \widehat{BAC} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} \Rightarrow \widehat{BOC} = 120^\circ$.
Từ đó suy ra H, I, đều nằm trên cung chứa góc 120° dựng trên BC. Vậy các điểm B, O, C, H, I cùng thuộc một đường tròn.



□

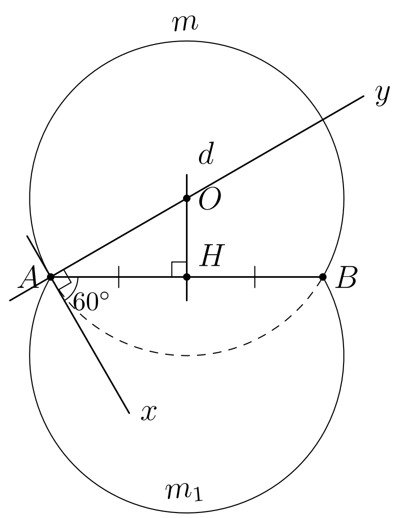
Ví dụ 4. Dựng cung chứa góc 60° trên đoạn $AB = 4$ cm.

Lời giải.

Ta lần lượt thực hiện

- Dựng đoạn thẳng $AB = 4$ cm và đường trung trực d của AB.
- Dựng tia Ax sao cho $\widehat{xAB} = 60^\circ$.
- Dựng tia Ay vuông góc với Ax cắt d tại O.
- Dựng đường tròn (O, OA) và chỉ lấy phần cung cùng phía với O, kí hiệu là $\overset{\frown}{AmB}$.
- Lấy đối xứng cung $\overset{\frown}{AmB}$ qua AB và kí hiệu là $\overset{\frown}{Am_1B}$.

Vậy hai cung $\overset{\frown}{AmB}$ và $\overset{\frown}{Am_1B}$ là cung chứa góc cần dựng.



□

Ví dụ 5. Dựng tam giác ABC biết $BC = 6$ cm, $\widehat{A} = 40^\circ$ và đường cao $AH = 4$ cm.

Lời giải.

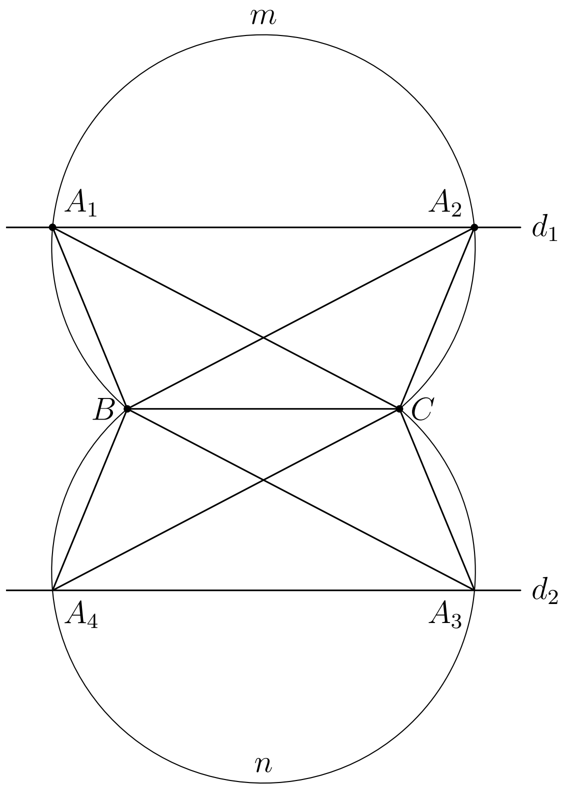
Phân tích

- Giả sử dựng được $\triangle ABC$ thỏa mãn điều kiện $BC = 6$ cm, $\widehat{A} = 40^\circ$, $AH = 4$ cm.
- Khi đó, điểm A nằm trên đường thẳng d song song với đường thẳng BC và cách BC một đoạn bằng 4 cm.
- Mặt khác, $\widehat{BAC} = 40^\circ$ nên A nằm trên cung chứa góc 40° dựng trên BC.

Cách dựng

- Dựng đoạn thẳng $BC = 6$ cm.
- Dựng các đường thẳng $d_1 \parallel \Delta$ và $d_2 \parallel \Delta$ và cách Δ một khoảng 4 cm.
- Dựng các cung chứa góc 40° dựng trên BC là $\overset{\frown}{BmC}$ và $\overset{\frown}{BnC}$. Hai cung này lần lượt cắt d_1 và d_2 tại A_1, A_2, A_3, A_4.

Vậy $\triangle A_1BC$, $\triangle A_2BC$, $\triangle A_3BC$, $\triangle A_4BC$ là các tam giác cần dựng.



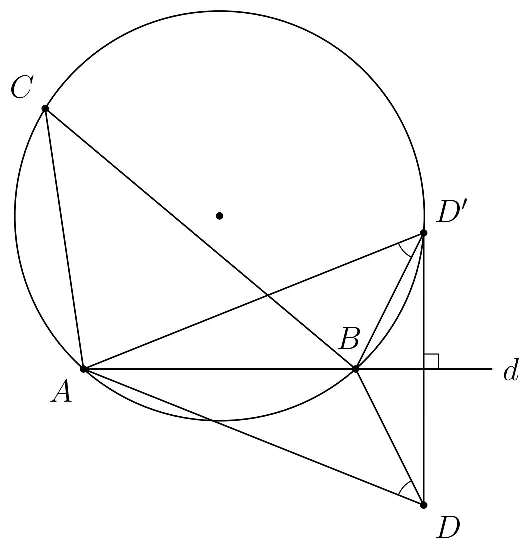
□

Ví dụ 6. Cho trước điểm A trên đường thẳng d và hai điểm C, D thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau, bờ d. Hãy dựng một điểm B trên d sao cho $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$.

Lời giải.

Phân tích
Giả sử dựng được điểm B trên d sao cho $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$. Gọi D' là điểm đối xứng của D qua d. Khi đó $\widehat{ADB} = \widehat{AD'B}$, vậy $\widehat{ACB} = \widehat{AD'B}$
Suy ra C và D' cùng nằm trên một cung chứa góc dựng trên đoạn AB. Từ đó ta thấy giao điểm của d với đường tròn ngoại tiếp $\Delta ACD'$.
Cách dựng

- Dựng điểm D' là điểm đối xứng của D qua đường thẳng d. Dựng đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD'.
- Dựng giao điểm B của đường thẳng d với đường tròn (ACD').



Chứng minh: Rõ ràng với cách dựng trên , ta có $\widehat{ACB} = \widehat{AD'B} = \widehat{ADE}$.
Biện luận: Nếu ba điểm A, C, D không thẳng hàng, hoặc nếu ba điểm này thẳng hàng nhưng CD không vuông góc với d thì bài toán có một nghiệm hình.
Nếu ba điểm A, C, D thẳng hàng và d là đường trung trực của đoạn CD thì bài toán có vô số nghiệm hình. Nếu ba điểm A, C, D thẳng hàng, $d \perp CD$ nhưng d không phải là đường trung trực của CD thì bài toán không có nghiệm hình.

□

3 Luyện tập

Bài 1. Dựng tam giác ABC biết:

1. $BC = 3$ cm, $AB = 2$ cm và $\widehat{A} = 50°$.

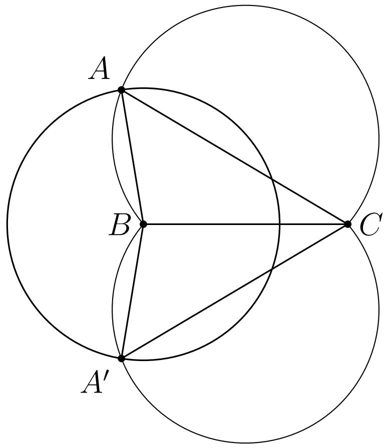
2. $BC = 6$ cm, $\widehat{A} = 45°$ và trung tuyến $AM = 5$ cm.

Lời giải.

1.

Phân tích: Giả sử đã dựng được $\triangle ABC$ thỏa mãn yêu cầu bài toán, ta có

- $\widehat{BAC} = 50^\circ$ nên A nằm trên cung chứa góc 50° dựng trên đoạn thẳng BC.
- $AB = 2$ cm nên A nằm trên đường tròn tâm B bán kính 2 cm.



Cách dựng. Ta lần lượt thực hiện

- Dựng đoạn $BC = 3$ cm.
- Dựng cung chứa góc 50° dựng trên đoạn BC.
- Dựng đường tròn tâm B bán kính 2 cm cắt cung chứa góc ở trên tại A.
- Nối AB, AC ta được $\triangle ABC$ phải dựng.

Chứng minh. Ta có ngay

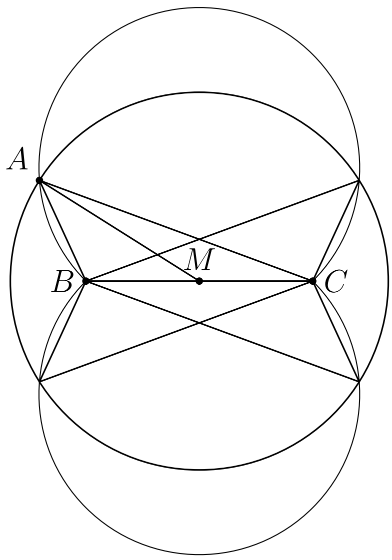
- $BC = 3$ cm theo cách dựng.
- $\widehat{A} = 50^\circ$ vì A nằm trên cung chứa góc 50° dựng trên cạnh BC.
- $AB = 2$ cm, A nằm trên đường tròn tâm B đường kính 2 cm.

Vậy tam giác ABC thỏa mãn điều kiện bài toán.
Biện luận: Ta dựng được hai tam giác thỏa mãn yêu cầu là $\triangle ABC$ và $\triangle A'BC$, nhưng hai tam giác này bằng nhau (đối xứng qua BC) nên bài toán này chỉ có một nghiệm hình (bài toán này là bài toán dựng hình về kích thước).

2.

Phân tích: Giả sử dựng được $\triangle ABC$ thỏa mãn điều kiện đề bài, ta có

- A nằm trên cung chứa góc 45° dựng trên đoạn BC.
- A nằm trên đường tròn tâm M bán kính 5 cm với M là trung điểm BC.



Vậy A là giao điểm của đường tròn tâm M bán kính 5 cm với cung chứa góc 45°.
Cách dựng

- Dựng đoạn $BC = 6$ cm.
- Dựng đường tròn tâm M bán kính 5 cm cắt cung chứa góc 45° tại A.
- Nối AB, AC ta được $\triangle ABC$ cần dựng.

Chứng minh: Ta có $BC = 6$ cm theo cách dựng.
$\widehat{A} = 45°$ vì A nằm trên cung chứa góc $45°$ dựng trên đoạn BC. Mặt khác $AM = 5$ cm vì A thuộc đường tròn tâm B bán kính 5 cm. Vậy ΔABC thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Biện luận: Để xác định xem bài toán có bao nhiêu nghiệm hình ta cần tính độ dài A_0M, trong đó A_0 là điểm chính giữa cung chứa góc $45°$. Trong ΔA_0BM vuông tại M, ta có:

$$\widehat{BA_0M} = \frac{1}{2}\widehat{A} = 22{,}5°.$$
$$\widehat{A_0BM} = 90° - \widehat{BA_0M} = 67{,}5°.$$
$$A_0M = BM\tan\widehat{A_0BM} = 3\tan 67{,}5° \approx 7,24 > AM.$$

Do đó đường tròn tâm M bán kính 5 cm cắt mỗi cung chứa góc tại hai điểm phân biệt. Vậy bài toán có hai nghiệm hình.

□

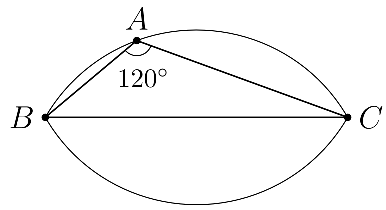
Bài 2. Xét các tam giác ABC có $BC = 6$ cm cố định, $\widehat{A} = 120°$.

1. Tìm quỹ tích các điểm A.
2. Điểm A ở vị trí nào thì tam giác ABC có diện tích lớn nhất? Tính giá trị lớn nhất đó.

Lời giải.

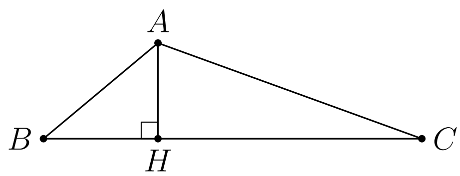
1.

Phần thuận: Do BC cố định, $\widehat{BAC} = 120°$ nên A di chuyển trên hai cung chứa góc $120°$ dựng trên BC.
Phần đảo: Lấy điểm A thuộc cung chứa góc $120°$ dựng trên BC, ta thấy ngay $120°$.
Kết luận: Quỹ tích điểm A là hai cung chứa góc $120°$ dựng trên đoạn BC.



2.

Hạ AH vuông góc với BC, ta có ngay
$S_{ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC$.
Do đó, S_{ABC} có giá trị lớn nhất khi AH lớn nhất
$\Leftrightarrow$ A là điểm chính giữa cung chứa góc.



Khi đó xét $\triangle ABH$ vuông tại H, ta có

$$\widehat{BAH} = 60° \Rightarrow AB = \frac{AH}{\cos 60°} = 2AH.$$
$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \Leftrightarrow (2AH)^2 = \left(\frac{BC}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 3AH^2 = 9 \Leftrightarrow AH = \sqrt{3}.$$

Do đó $S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 6 = 3\sqrt{3}$ cm^2.
Nhật xét: Trong ví dụ trên, việc chỉ ra quỹ tích của điểm A được suy ra ngay từ giả thiết, do đó các bước thực hiện là rất đơn giản. Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp chúng ta cần chỉ ra được cung chứa góc trong hình vẽ.

□

Bài 3. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.

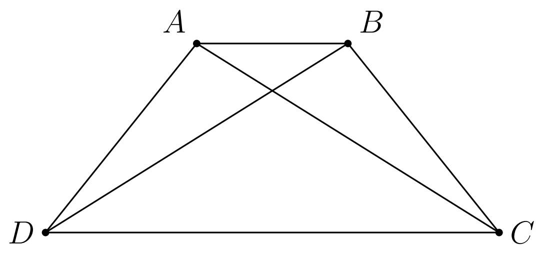
Xét hai tam giác $\triangle ABD$ và $\triangle BAC$, ta có

$$\begin{cases} AB \text{ chung} \\ \widehat{BAD} = \widehat{ABC} \\ AD = BC \text{ (cạnh bên hình thang cân)} \end{cases}$$

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle BAC$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ACB}$.

Vậy các điểm C, D nằm cùng một phía đối với AB và thỏa mãn $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ nên bốn điểm A, B, C, D thuộc cùng một đường tròn.



□

Bài 4. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$, nội tiếp đường tròn (O). Trên cung nhỏ AC lấy một điểm D. Trên dây BD lấy điểm M sao cho $DM = DC$.

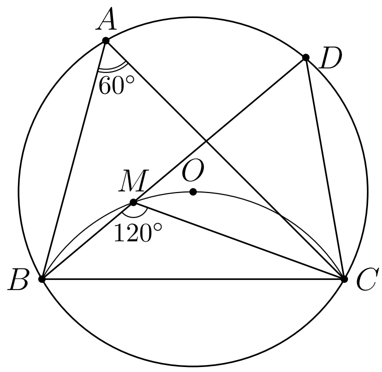
1. Chứng minh rằng tam giác MCD là tam giác đều.
2. Tìm quỹ tích các điểm M khi điểm D di động trên cung nhỏ AC.

Lời giải.

1. Xét $\triangle MCD$, ta có $DM = DC$ và $\widehat{CDM} = \widehat{CDB} = \widehat{CAB} = 60^\circ$. Do đó $\triangle MCD$ là tam giác đều.

2.

Phần thuận: Từ kết quả câu trên ta có $\widehat{BMC} = 180^\circ - \widehat{CMD} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.
Do BC cố định, $\widehat{BMC} = 120^\circ$ nên M di chuyển trên cung chứa góc 120° dựng trên BC.
Giới hạn: Vì D chỉ chạy trên cung $\overset{\frown}{AC}$ nên M chỉ chạy trên một cung chứa góc 120° dựng trên BC thuộc nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A.
Phần đảo: Lấy điểm M thuộc cung chứa góc 120° dựng trên BC thuộc nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A. Ta chứng minh $DM = DC$.



Thật vậy, xét ΔMCD, ta có

$$\begin{cases} \widehat{CDM} = \widehat{CAB} = 60^\circ \\ \widehat{CMD} = 180^\circ - \widehat{BMC} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta MCD \text{ là tam giác đều.}$$

$\Rightarrow DM = DC$.
Kết luận: Quỹ tích điểm M là một cung chứa góc 120° dựng trên BC thuộc nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A.

□

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ hai nửa đường tròn đường kính AB và AC ra phía ngoài của tam giác. Qua A vẽ cát tuyến MAN (M thuộc nửa đường tròn đường kính AB, N thuộc nửa đường tròn đường kính AC).

1. Tứ giác $BCNM$ là hình gì?
2. Tìm quỹ tích trung điểm I của MN khi cát tuyến MAN quay quanh A.

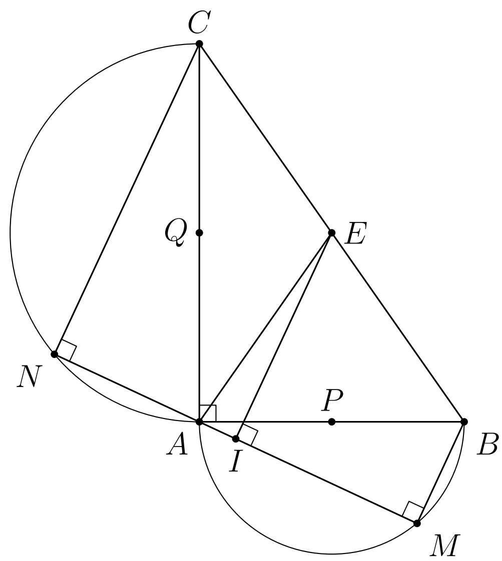
Lời giải.

1. Xét tứ giác $BCNM$, ta có

   - $\widehat{AMB} = 90°$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $\Rightarrow BM \perp MN$.
   - $\widehat{ANC} = 90°$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $\Rightarrow CM \perp MN$.

   $\Rightarrow BM \parallel CN$. Vậy tứ giác $BCNM$ là hình thang vuông.

2. Phần thuận: Gọi E là trung điểm BC, ta có

   EI là đường trung bình của hình thang $BCNM$
   $\Rightarrow EI \parallel CN \Rightarrow EI \perp MN \Leftrightarrow \widehat{AIE} = 90°$.
   Vậy điểm I nằm trên đường tròn đường kính AE.
   Giới hạn: Ta có

   - Nếu $M \equiv B \Rightarrow N \equiv A \Rightarrow I \equiv P$ là trung điểm của AB.
   - Nếu $M \equiv A \Rightarrow N \equiv B \Rightarrow I \equiv Q$ là trung điểm của AC.

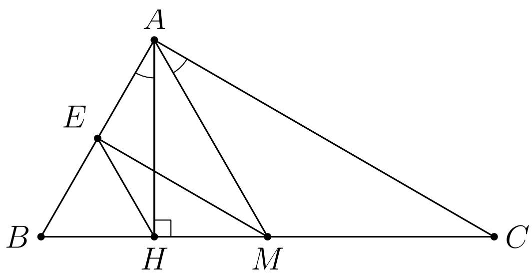
   Do đó I chỉ nằm trên cung $\overset{\frown}{PQ}$ của đường tròn đường kính AE.
   Phần đảo: Lấy điểm I nằm trên cung $\overset{\frown}{PQ}$ của đường tròn đường kính AE. Nối AI cắt (AB) và (AC) theo thứ tự tại M và N. Ta chứng minh $MI = NI$.
   Thật vậy, $\widehat{AIE} = 90°$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $\Leftrightarrow EI \perp MI$. $\Leftrightarrow EI \parallel BM \Rightarrow EI$ là đường trung bình của hình thang $BCNM \Rightarrow MI = NI$.
   Kết luận: Quỹ tích các đểm I nằm trên cung $\overset{\frown}{PQ}$ của đường tròn đường kính AE.

□

Bài 6. Cho tam giác ABC có $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ là các góc nhọn, đường cao AH, trung tuyến AM thỏa mãn $\widehat{BAH} = \widehat{MAC}$. Goi E là trung điểm AB.

1. Tam giác AEH là tam giác gì? Vì sao?
2. Chứng minh A, E, H, M cùng thuộc một đường tròn.
3. Chứng minh tam giác ABC vuông.

Lời giải.



1. Xét $\triangle ABH$ vuông tại H, ta có $EH = \dfrac{1}{2}AB$, trung tuyến ứng với cạnh huyền $\Leftrightarrow EH = EA \Leftrightarrow \Delta EAH$ cân tại E.

2. Nhận xét rằng

$$\begin{cases} \widehat{AHE} = \widehat{EAH} \text{ do } \triangle EAH \text{ cân tại } E \\ \widehat{EAH} = \widehat{MAC} \text{ theo giả thiết} \\ \widehat{MAC} = \widehat{AME} \text{ (hai góc so le trong do } ME \parallel AC) \end{cases}$$

   Suy ra $\widehat{AHE} = \widehat{AME}$. Vậy các điểm M, H nằm cùng một phía đối với AE và thỏa mãn $\widehat{AHE} = \widehat{AME}$ nên bốn điểm A, E, H, M thuộc cùng một đường tròn.

3. Từ kết quả câu trên, ta suy ra $\widehat{AEM} = \widehat{AHM} = 90^\circ$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AM}$).
   $\Rightarrow ME \perp AB$. Mặt khác ta cũng có $ME \parallel AC$, suy ra $AB \perp AC \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

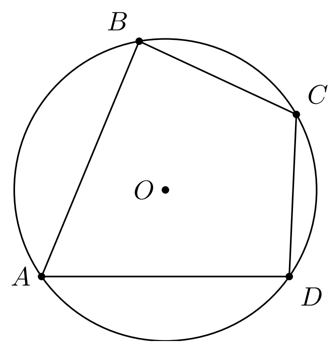
□

§7 Tứ giác nội tiếp

1 Tóm tắt lí thuyết

1.1 Định nghĩa và tính chất

Định nghĩa 11. Một tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (gọi tắt là tứ giác nội tiếp).



Định lí 22.

1. Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối nhau bằng 180°.
2. Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối nhau bằng 180° thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.

32. Từ định lí trên ta có

1. Với A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ giác thì:

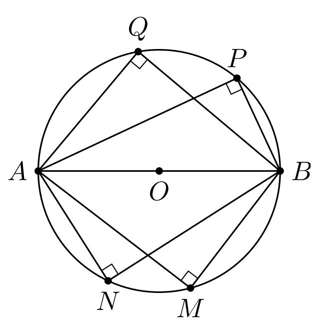
$$ABCD \text{ nội tiếp } \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\widehat{A}+\widehat{C}=180^\circ\\ \widehat{B}+\widehat{D}=180^\circ.\end{array}\right.$$

2. Hình thang nội tiếp được trong một đường tròn khi và chỉ khi nó là hình thang cân.

1.2 Dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp

- Dựa vào định nghĩa của tứ giác nội tiếp.
- Chứng minh tứ giác đó có hai góc đối bù nhau (hoặc tứ giác đó có một góc bằng góc ngoài tại đỉnh đối diện).
- Dựa vào khái niệm cung chứa góc: Tứ giác có hai đỉnh liên tiếp nhìn đoạn thẳng nối hai đỉnh còn lại dưới hai góc bằng nhau thì tứ giác đó nội tiếp được một đường tròn.

33.
Tập hợp tất cả các điểm nhìn đoạn AB cho trước dưới một góc vuông là đường tròn đường kính AB.

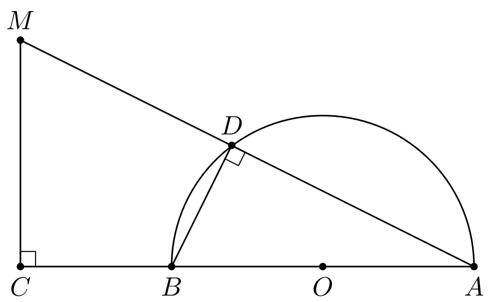


2 Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho đường tròn đường kính AB và D là một điểm thuộc đường tròn. Trên tia đối của tia BA lấy điểm C. Đường thẳng vuông góc với BC tại C cắt đường thẳng AD tại M. Chứng minh tứ giác $MCBD$ nội tiếp được đường tròn, xác định tâm đường tròn đó.

Lời giải.

Ta có $\widehat{ADB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
$\Rightarrow \widehat{MDB} = 90^\circ$,
Lại có $\widehat{MCB} = 90^\circ$ ($MC \perp BC$),
Do đó $\widehat{MDB} + \widehat{MCB} = 180^\circ$.
Tứ giác $MCBD$ có $\widehat{MDB}+\widehat{MCB} = 180^\circ$ nên $MCBD$ nội tiếp được đường tròn.

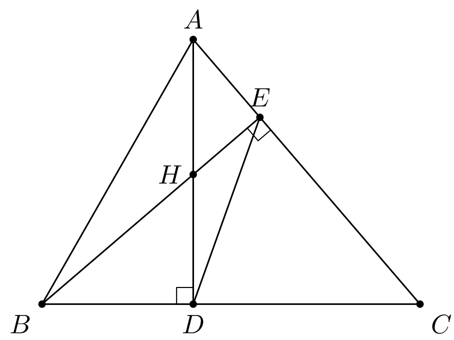


□

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} < 90^\circ$, các đường cao AD và BE cắt nhau tại H (D thuộc BC, E thuộc AC). Chứng minh các tứ giác $DHEC$ và $ABDE$ nội tiếp được đường tròn.

Lời giải.

Ta có $\widehat{HDC} = 90^\circ$ (AD là đường cao),
Lại có $\widehat{HEC} = 90^\circ$ (BE là đường cao),
$\Rightarrow \widehat{HDC} + \widehat{HEC} = 180^\circ$.
Vậy tứ giác $DHEC$ nội tiếp được đường tròn.
Ta có $\widehat{ADB} = 90^\circ$ (AD là đường cao),
Lại có $\widehat{AEB} = 90^\circ$ (BE là đường cao),
$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{AEB} = 90^\circ$.
Tứ giác $ABDE$ có E, D là hai đỉnh liên tiếp và $\widehat{ADB} = \widehat{AEB}$ nên nội tiếp được đường tròn.

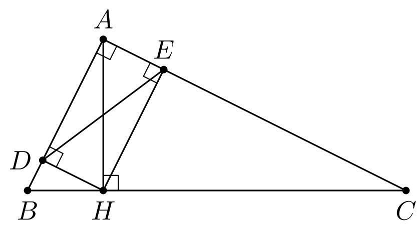


□

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Kẻ $HD \perp AB$ tại D, $HE \perp AC$ tại E. Chứng minh rằng tứ giác $BDEC$ nội tiếp.

Lời giải.

Tứ giác $ADHE$ có $\widehat{DAE} = \widehat{ADH} = \widehat{AEH} = 90^\circ$.
$\Rightarrow ADHE$ là hình chữ nhật.
$\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{AHD}$.
Mà $\widehat{AHD} = \widehat{ABC}$ (cùng phụ $\widehat{BAH}$) nên $\widehat{AED} = \widehat{ABC}$.
Suy ra tứ giác $BDEC$ nội tiếp.



□

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông ở A $(AB < AC)$, đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A, vẽ nửa đường tròn đường kính BH cắt AB tại E, nửa đường tròn đường kính HC cắt AC tại F.

1. Chứng minh tứ giác $AFHE$ là hình chữ nhật.
2. Chứng minh tứ giác $BEFC$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

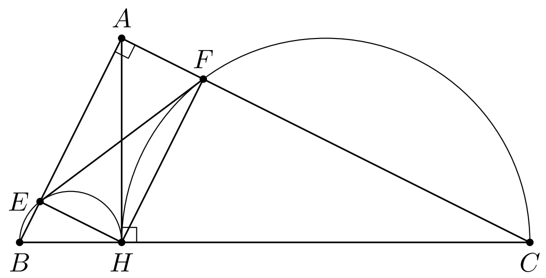
Lời giải.

1. Ta có:

   - $\widehat{BEH} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính BH) $\Rightarrow \widehat{AEH} = 90^\circ$.
   - $\widehat{CFH} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính CH) $\Rightarrow \widehat{AFH} = 90^\circ$.
   - $\widehat{EAF} = 90^\circ$ (do tam giác ABC vuông tại A).

   Tứ giác $AEHF$ có $\widehat{EAF} = \widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^\circ$ nên $AEHF$ là hình chữ nhật.

2. $AEHF$ là hình chữ nhật nên $AEHF$ nội tiếp đường tròn đường kính AH.
   $\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{AHF}$.
   Mà $\widehat{AHF} = \widehat{ACB}$ (cùng phụ với $\widehat{CAH}$) nên $\widehat{AEF} = \widehat{ACB}$.
   Vậy tứ giác $BEFC$ nội tiếp.



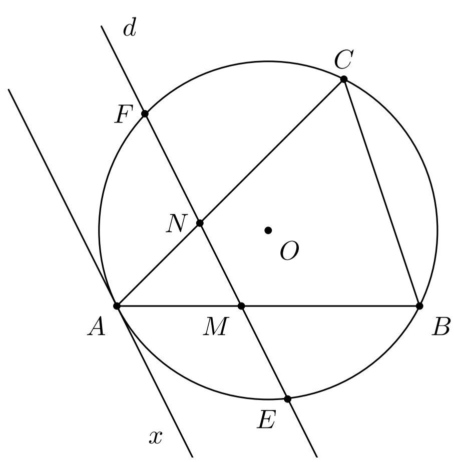
□

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O. Vẽ đường thẳng d song song với tiếp tuyến Ax của đường tròn và cắt hai dây AB,AC lần lượt tại Mvà N (M không trùng với B và N không trùng với C). Chứng minh tứ giác $BMNC$ nội tiếp.

Lời giải.

Gọi E, F là giao điểm của d với đường tròn (O).
Vì $d \parallel Ax$ nên sđ$\overset{\frown}{AE}$ = sđ$\overset{\frown}{AF}$. Do đó:

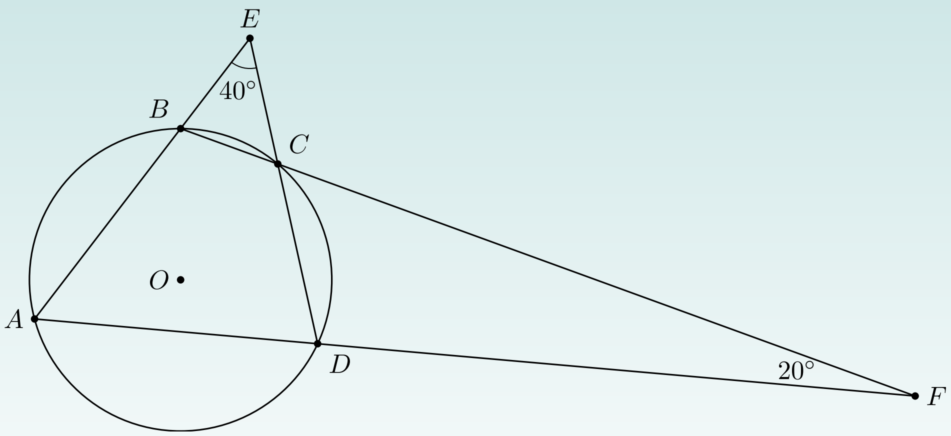
$$\begin{aligned}\widehat{AMN} &= \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AF} + \text{sđ}\overset{\frown}{EB}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AE} + \text{sđ}\overset{\frown}{EB}\right)\\ &= \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AB} = \widehat{ACB}.\end{aligned}$$



Mặt khác $\widehat{BMN} + \widehat{AMN} = 180^\circ$ (hai góc kề bù).
Suy ra $\widehat{BMN} + \widehat{NCB} = 180^\circ$.
Vậy tứ giác $BMNC$ nội tiếp được đường tròn.

□

Ví dụ 6. Hãy tìm số đo các góc của tứ giác $ABCD$ trong hình vẽ sau.



Lời giải.

Đặt $x = \widehat{BCE} = \widehat{DCF}$. Xét $\triangle BCE$ ta có $\widehat{EBC} = 180^\circ - 40^\circ - x = 140^\circ - x$.
Từ tứ giác $ABCD$ nội tiếp và tính chất góc ngoài của $\triangle DCF$ ta có

$$140^\circ - x = \widehat{EBC} = \widehat{ADC} = \widehat{DFC} + x = 20^\circ + x \Leftrightarrow x = 60^\circ.$$

Do đó

$$\begin{aligned}
\widehat{ADC} &= \widehat{DCF} + x = 20^\circ + x = 80^\circ.\\
\widehat{ABC} &= 180^\circ - \widehat{ADC} = 100^\circ \text{ (do } ABCD \text{ nội tiếp)}\\
\widehat{BCD} &= 180^\circ - \widehat{DCF} = 180^\circ - x = 120^\circ.\\
\widehat{BAD} &= 180^\circ - \widehat{BCD} = 60^\circ \text{ (do } ABCD \text{ nội tiếp).}
\end{aligned}$$

□

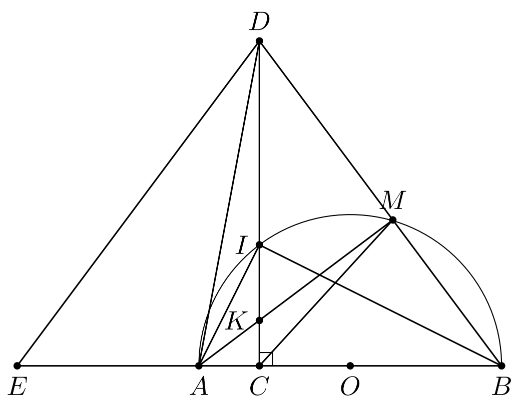
Ví dụ 7. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. C là một điểm nằm giữa O và A. Đường thẳng vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn trên tại I. K là một điểm bất kỳ nằm trên đoạn thẳng CI (K khác C và I), tia AK cắt nửa đường tròn (O) tại M, tia BM cắt tia CI tại D. Gọi E đối xứng với B qua C.

1. Chứng minh $ACMD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.
2. Chứng minh $\triangle ABD \backsim \triangle MBC$.
3. Chứng minh $AKDE$ là tứ giác nội tiếp.

Lời giải.

1. Chứng minh $ACMD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

   (O) có $\widehat{AMB}$ nội tiếp chắn nửa đường tròn.
   $\Rightarrow \widehat{AMB} = 90^\circ$.
   Vì $CI \perp AB$ nên $\widehat{ACD} = 90^\circ$.
   Tứ giác $ACMD$ có C, M là hai đỉnh kề nhau và $\widehat{ACD} = \widehat{AMD} = 90^\circ$ nên $ACMD$ nội tiếp.



2. Chứng minh $\triangle ABD \backsim \triangle MBC$.

   Xét $\triangle ABD$ và $\triangle MBC$ có
   $\begin{cases} \widehat{ABD} \text{ chung} \\ \widehat{ADB} = \widehat{MCB} \text{ (vì } ACMD \text{ nội tiếp.)} \end{cases}$
   $\Rightarrow \triangle ABD \backsim \triangle MBC$ (g-g).

3. Chứng minh $AKDE$ là tứ giác nội tiếp.
Vì E đối xứng với B qua C nên C là trung điểm của EB.
Mà $DC \perp EB$ tại C nên DC là trung trực của EB.
$\Rightarrow DE = DB \Rightarrow \triangle DEB$ cân tại D.
$\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{ABD}$.
Mà $\widehat{AKC} = \widehat{ABD}$ (cùng phụ $\widehat{CAK}$) nên $\widehat{AED} = \widehat{AKC}$.
$\Rightarrow AKDE$ nội tiếp.

□

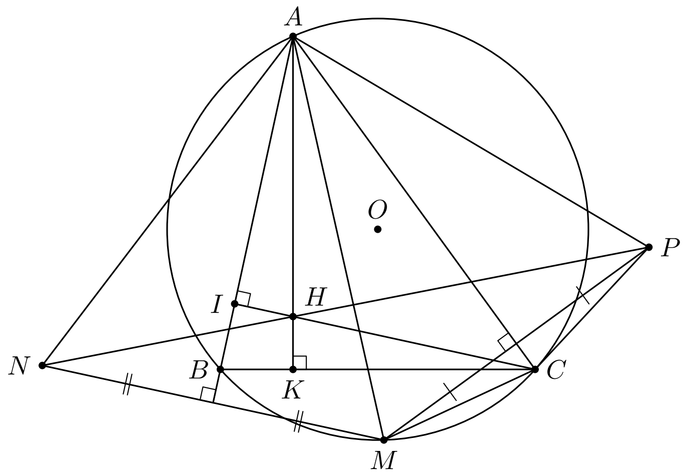
Ví dụ 8. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm là H. Giả sử M là một điểm trên cung BC không chứa A (M khác B, M khác C). Gọi N, P theo thứ tự là điểm đối xứng của M qua các đường thẳng AB, AC.

1. Chứng minh tứ giác $AHCP$ nội tiếp.
2. Chứng minh ba điểm N, H, P thẳng hàng.
3. Tìm vị trí của M để độ dài đoạn thẳng NP lớn nhất.

Lời giải.

1. Gọi I là giao điểm của CH và AB, K là giao điểm của AH và BC.
Ta có $\widehat{IBK} = \widehat{AMC}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$), $\widehat{AMC} = \widehat{APC}$ (do P đối xứng với M qua AC)
$\Rightarrow \widehat{IBK} = \widehat{APC}$. (1)
Ta thấy $BIHK$ nội tiếp nên $\widehat{IBK} + \widehat{AHC} = 180^\circ$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AHC} + \widehat{APC} = 180^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $AHCP$ nội tiếp.

2. Do tứ giác $AHCP$ nội tiếp nên $\widehat{AHP} = \widehat{ACP}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AP}$).
Có $\widehat{ACP} = \widehat{ACM}$ (tính chất đối xứng).
Suy ra $\widehat{AHP} = \widehat{ACM}$. (3)
Tương tự ta chứng minh được tứ giác $AHBN$ nội tiếp, nên $\widehat{AHN} = \widehat{ABN}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AP}$).
Có $\widehat{ABN} = \widehat{ABM}$ (tính chất đối xứng).
Suy ra $\widehat{AHN} = \widehat{ABM}$. (4).



Vì tứ giác $ABMC$ nội tiếp nên $\widehat{ACM} + \widehat{ABM} = 180^\circ$. (5)
Thay (3), (4) vào (5), ta được $\widehat{AHP} + \widehat{AHN} = 180^\circ$. Vậy ba điểm N, H, P thẳng hàng.

3. Từ $\widehat{MAN} = 2\widehat{BAM}$; $\widehat{MAP} = 2\widehat{MAC}$ (tính chất đối xứng), suy ra

$$\widehat{NAP} = 2\left(\widehat{BAM} + \widehat{MAC}\right) = 2\widehat{BAC} \text{ (không đổi)}.$$

Ta có $NP = 2AP \cdot \sin \widehat{BAC} = 2AM \cdot \sin \widehat{BAC}$. Do đó NP lớn nhất khi và chỉ khi AM lớn nhất, lúc đó AM là đường kính của đường tròn (O).
Vậy NP lớn nhất khi và chỉ khi M là điểm đối xứng của A qua O.

□

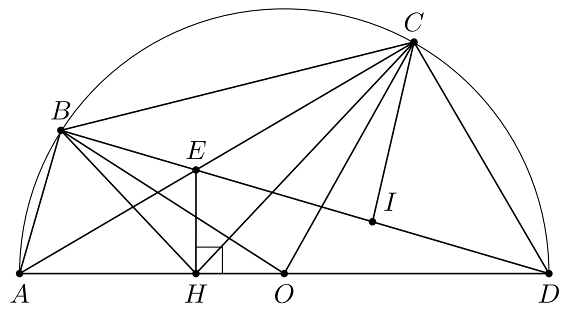
Ví dụ 9. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đỉnh B và C trên cùng một nửa đường tròn đường kính AD tâm O. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E. Gọi H là hình chiếu vuông góc của E xuống AD và I là trung điểm của DE. Chứng minh rằng

1. Tứ giác $ABEH$, $DCEH$ nội tiếp được đường tròn.
2. E là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle BCH$.
3. Năm điểm B, C, I, O, H cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.

1. Tứ giác $ABEH$, $DCEH$ nội tiếp được đường tròn.

   Ta có $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp cùng chắn nửa (O)).
   Lại có $\widehat{AHE} = \widehat{DHE} = 90^\circ$ (H là hình chiếu vuông góc của E xuống AD).
   Tứ giác $ABEH$ có $\widehat{ABE} + \widehat{AHE} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên $ABEH$ nội tiếp.
   Tứ giác $DCEH$ có $\widehat{DCE} + \widehat{DHE} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên $DCEH$ nội tiếp.



2. E là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle BCH$.

   Ta có $\begin{cases} \widehat{ECH} = \widehat{EDH} & \text{(vì } DCEH \text{ nội tiếp)} \\ \widehat{BCE} = \widehat{EDH} & \text{(vì cùng nội tiếp } (O) \text{ và chắn } \overset{\frown}{AB}). \end{cases}$
   $\Rightarrow \widehat{ECH} = \widehat{BCE}$.
   $\Rightarrow CE$ là đường phân giác của $\triangle BCH$.
   Chứng minh tương tự ta có BE cũng là đường phân giác của $\triangle BCH$.
   Mà E là giao điểm của BE và CE nên E là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle BCH$.

3. Năm điểm B, C, I, O, H cùng thuộc một đường tròn.

   Ta có I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ECD vuông tại C nên $\widehat{BIC} = 2\widehat{BDC}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn $\overset{\frown}{CE}$). (1)
   (O) có $\widehat{BOC} = 2\widehat{BDC}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn $\overset{\frown}{BC}$). (2)
   Vì E là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle BCH$ nên HE là phân giác của $\widehat{BHC}$.
   $\Rightarrow \widehat{BHC} = 2\widehat{EHC}$.
   Mà $\widehat{EHC} = \widehat{BDC}$ ($DCEH$ nội tiếp) nên $\widehat{BHC} = 2\widehat{BDC}$. (3)
   Từ (1), (2) và (3) ta có $\widehat{BIC} = \widehat{BOC} = \widehat{BHC}$.
   Vậy năm điểm B, C, I, O, H cùng thuộc một đường tròn.

□

Ví dụ 10. Cho đường tròn $(O; R)$ và đường thẳng xy cách tâm O một khoảng $OK = a$ $(0 < a < R)$. Từ một điểm A thuộc xy nằm bên ngoài đường tròn (O), vẽ hai tiếp tuyến AB và AC đến đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm; O và B nằm cùng phía với xy)

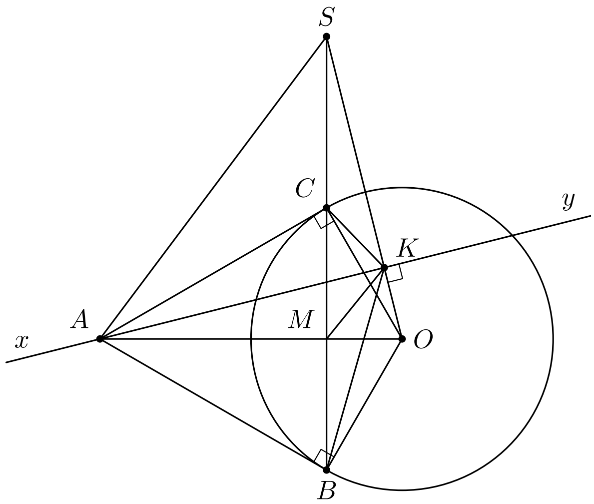
1. Chứng minh 5 điểm O, A, B, C, K cùng nằm trên một đường tròn. Xác định tâm của đường tròn này.
2. BC cắt OA và OK theo thứ tự tại M và S. Chứng minh tứ giác $AMKS$ nội tiếp được trong một đường tròn.

3. Chứng minh các tứ giác $BCKO$ nội tiếp.

Lời giải.

1. Ta có $\widehat{ACO} = \widehat{ABO} = 90^\circ$ (TC tiếp tuyến), $\widehat{AKO} = 90^\circ$ (xy cách O một khoảng OK).
$\Rightarrow C$, B, K thuộc đường tròn đường kính AO
$\Rightarrow O$, A, B, C, K cùng nằm trên đường tròn đường kính AO, tâm I là trung điểm AO.

2. Ta có $AC = AB$, $OC = OB$
$\Rightarrow AO$ là trung trực của BC
$\Rightarrow AO \perp BC \Rightarrow \widehat{AMS} = 90^\circ$.
Có $\widehat{AKS} = 90^\circ$ (xy cách O một khoảng OK).
Tứ giác $AMKS$ có K, M là hai đỉnh kề nhau và $\widehat{AMS} = \widehat{AKS} = 90^\circ$ nên $AMKS$ nội tiếp.



3. Ta có:
$\widehat{CKA} = \widehat{COA}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$ của (I)),
$\widehat{AKB} = \widehat{AOB}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$ của (I))
$\Rightarrow \widehat{CKB} = \widehat{COB}$.
Tứ giác $BCKO$ có K, O là hai đỉnh kề nhau và $\widehat{CKB} = \widehat{COB}$ nên $BCKO$ nội tiếp.

□

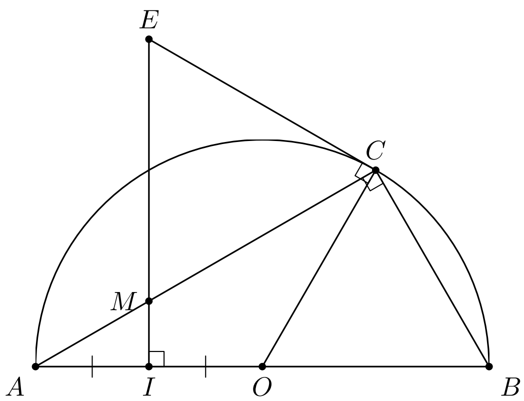
3 Luyện tập

Bài 1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) đường kính AB. Đường thẳng vuông góc với AO tại trung điểm I của AO cắt AC tại M và cắt tiếp tuyến tại C của đường tròn ở E. Chứng minh $OCEI$, $IMCB$ là các tứ giác nội tiếp, xác định tâm các đường tròn đó.

Lời giải.

- ☑ Ta có $\widehat{OIE} = 90^\circ$ (giả thiết);
$\widehat{OCE} = 90^\circ$ (tính chất tiếp tuyến)
Tứ giác $OCEI$ có $\widehat{OIE} + \widehat{OCE} = 180^\circ$ nên $OCEI$ nội tiếp.

- ☑ Ta có $\widehat{OIM} = 90^\circ$ (giả thiết);
$\widehat{BCM} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
Tứ giác $IMCB$ có $\widehat{OIM} + \widehat{BCM} = 180^\circ$ nên $IMCB$ nội tiếp.

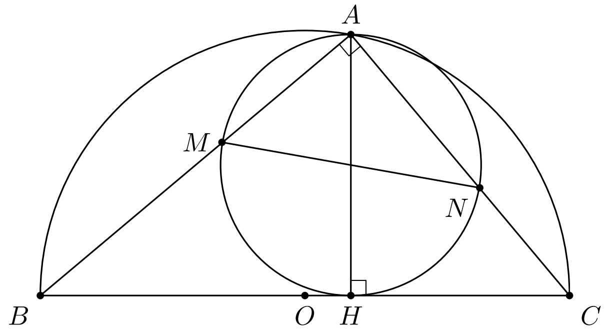


□

Bài 2. Trên nửa đường tròn tâm (O) đường kính BC lấy điểm A ($AB > AC > 0$). Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC. Đường tròn đường kính AH lần lượt cắt AB, AC tại M và N. Chứng minh tứ giác $BCNM$ nội tiếp.

Lời giải.

Xét đường tròn đường kính AH ta có:



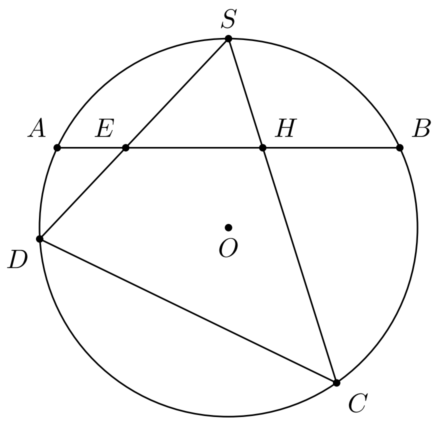
$$\begin{aligned}\widehat{MBC} &= \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AH} - \text{sđ}\overset{\frown}{MH}\right)\\ &= \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AM}\\ &= \widehat{ANM}.\end{aligned}$$

Vậy tứ giác $BCNM$ nội tiếp. □

Bài 3. Trên đường tròn tâm (O) có một cung AB và S là điểm chính giữa của cung đó. Trên dây AB lấy hai điểm E và H. Các đường thẳng SH và SE cắt đường tròn theo thứ tự tại C và D. Chứng minh $EHCD$ là một tứ giác nội tiếp.

Lời giải.

Vì S là điểm chính giữa của cung AB nên $\text{sđ}\overset{\frown}{SA} = \text{sđ}\overset{\frown}{SB}$.



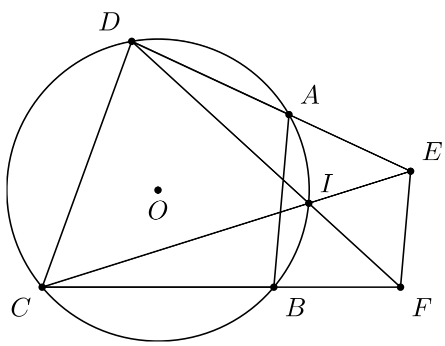
$$\begin{aligned}\widehat{DCH} &= \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{SAD} \text{ (góc nội tiếp)}\\ &= \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{SA} + \text{sđ}\overset{\frown}{AD}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{SB} + \text{sđ}\overset{\frown}{AD}\right)\\ &= \widehat{SEB} \text{ (góc có đỉnh bên trong đường tròn)}\end{aligned}$$

Vậy tứ giác $EHCD$ nội tiếp. □

Bài 4. Cho bốn điểm A, B, C, D theo thứ tự đó nằm trên đường tròn tâm O $(AB < CD)$; I là điểm chính giữa của cung nhỏ AB. Gọi E là giao điểm của IC và AD;F là giao điểm của DI và CB. Chứng minh tứ giác $CDEF$ nội tiếp.

Lời giải.

Vì I là điểm chính giữa của cung nhỏ AB nên $\text{sđ}\overset{\frown}{IA} = \text{sđ}\overset{\frown}{IB}$.
Ta có



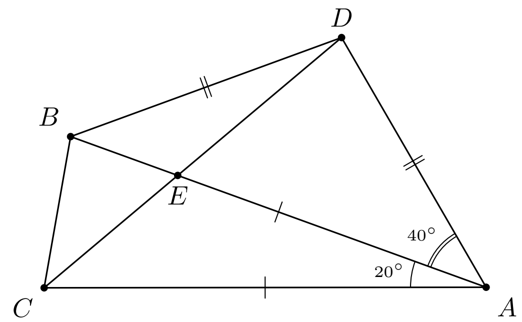
$$\begin{aligned}\widehat{CED} &= \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{CD} - \text{sđ}\overset{\frown}{IA}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{CD} - \text{sđ}\overset{\frown}{IB}\right)\\ &= \widehat{CFD}.\end{aligned}$$

Vậy tứ giác $CDEF$ nội tiếp. □

Bài 5. Cho tam giác cân ABC có đáy BC và $\widehat{A} = 20^\circ$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C lấy điểm D sao cho $DA = DB$ và $\widehat{DAB} = 40^\circ$. Gọi E là giao điểm của AB và CD. Chứng minh tứ giác $ACBD$ là tứ giác nội tiếp.

Lời giải.

$\triangle ABC$ cân tại A nên $\widehat{ABC} = \dfrac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ$
Vì $DA = DB$ nên $\triangle ADB$ cân tại D
$\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BAD} = 40^\circ$.
Ta có:
$\widehat{CBD} = \widehat{ABC} + \widehat{ABD} = 80^\circ + 40^\circ = 120^\circ$.
$\widehat{CAD} = \widehat{CAB} + \widehat{BAD} = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ$.
Tứ giác $ACBD$ có $\widehat{CAD} + \widehat{CBD} = 180^\circ$ nên tứ giác $ACBD$ nội tiếp.

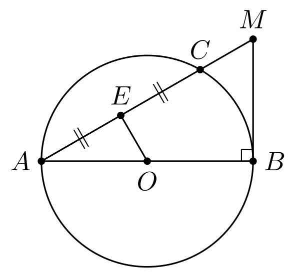


□

Bài 6. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB. Dây $BC = R$. Từ B kẻ tiếp tuyến Bx với đường tròn. Tia AC cắt Bx tại M. Gọi E là trung điểm của AC. Chứng minh tứ giác $OBME$ nội tiếp đường tròn.

Lời giải.

(O) có E là trung điểm của dây cung AC nên $OE \perp AC$ tại E.
$\widehat{OBM} = 90^\circ$ $(Bx \perp AB)$.
Tứ giác $OBME$ có $\widehat{OBM} + \widehat{OEM} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên $OBME$ nội tiếp.

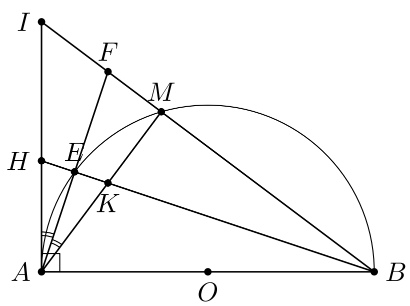


□

Bài 7. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, điểm M bất kì trên nửa đường tròn (M khác A, B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến Ax. Tia BM cắt Ax tại I, tia phân giác của góc IAM cắt nửa đường tròn tại E, cắt tia BM tại F. Tia BE cắt Ax tại H và cắt AM tại K. Chứng minh rằng $EFMK$ là tứ giác nội tiếp.

Lời giải.

(O) có $\widehat{AEB}$ và $\widehat{AMB}$ nội tiếp chắn nửa đường tròn.
$\Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{AMB} = 90^\circ$.
$\Rightarrow \widehat{KEF} = \widehat{AMB} = 90^\circ$.
$\Rightarrow EFMK$ nội tiếp.

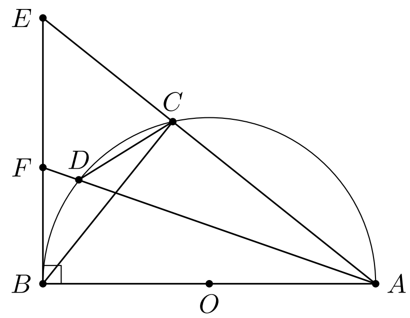


□

Bài 8. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Bx và lấy hai điểm C và D thuộc nửa đường tròn. Các tia AC và AD cắt Bx lần lượt ở E, F (F ở giữa B và E). Chứng minh $CEFD$ là tứ giác nội tiếp.

Lời giải.

(O) có $\widehat{ACB}$ nội tiếp chắn nửa đường tròn.
$\Rightarrow \widehat{ACB} = 90^\circ$.
Có $\begin{cases} \widehat{CEF} = \widehat{ABC} \text{ (vì cùng phụ } \widehat{BAC}) \\ \widehat{ADC} = \widehat{ABC} \text{ (vì cùng nội tiếp } (O) \text{ chắn } \overset{\frown}{AC}) \end{cases}$
$\Rightarrow \widehat{CEF} = \widehat{ADC}$.
Tứ giác $CEFD$ có $\widehat{CEF} = \widehat{ADC}$ nên $CEFD$ nội tiếp.



□

Bài 9. Cho đường tròn $(O; R)$; AB và CD là hai đường kính khác nhau của đường tròn. Tiếp tuyến tại B của đường tròn $(O; R)$ cắt các đường thẳng AC, AD theo thứ tự tại E và F.

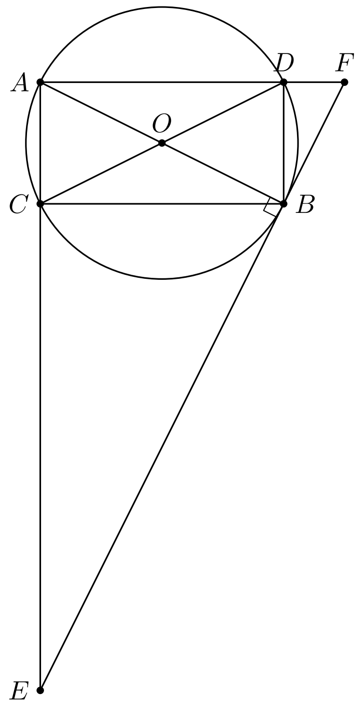
1. Chứng minh tứ giác $ACBD$ là hình chữ nhật.
2. Chứng minh $\triangle ACD = \triangle CBE$.
3. Chứng minh tứ giác $CDFE$ nội tiếp được đường tròn.

Lời giải.

1. Chứng minh tứ giác $ACBD$ là hình chữ nhật.
   Tứ giác $ACBD$ có O là trung điểm của AB và CD.
   $\Rightarrow ACBD$ là hình bình hành.
   Mà $AB = CD$ nên $ACBD$ là hình chữ nhật.

2. Chứng minh $\triangle ACD \backsim \triangle CBE$.
   Có $\begin{cases} \widehat{ACD} = \widehat{ABD} \text{ vì cùng nội tiếp } (O) \text{ chắn } \overset{\frown}{AD} \\ \widehat{CBE} = \widehat{ABD} \text{ vì cùng phụ } \widehat{ABC}. \end{cases}$
   $\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{CBE}$.
   Xét $\triangle ACD$ và $\triangle CBE$ có
   $\begin{cases} \widehat{CAD} \text{ chung} \\ \widehat{ACD} = \widehat{CBE} \text{ (cmt)} \end{cases}$.
   $\Rightarrow \triangle ACD \backsim \triangle CBE$ (g-g).

3. Chứng minh tứ giác $CDFE$ nội tiếp được đường tròn.
   Tứ giác $CDFE$ có $\widehat{ADC} = \widehat{AEF}$ ($\triangle ACD \backsim \triangle CBE$).
   $\Rightarrow CDFE$ nội tiếp.



□

Bài 10. Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ ta vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là tiếp điểm). Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M, vẽ $MI \perp AB$, $MK \perp AC$ ($I \in AB$, $K \in AC$).

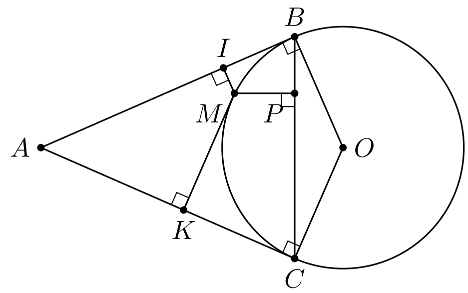
1. Chứng minh $AIMK$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.
2. Vẽ $MP \perp BC$ ($P \in BC$). Chứng minh $CPMK$ là tứ giác nội tiếp.

Lời giải.

1. Chứng minh $AIMK$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

Tứ giác $AIMK$ có $\widehat{AIM}+\widehat{AKM}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$ nên $AIMK$ nội tiếp.

2. Vẽ $MP\perp BC$ ($P\in BC$). Chứng minh $CPMK$ là tứ giác nội tiếp.
   Tứ giác $CPMK$ có $\widehat{CPM}+\widehat{CKM}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$ nên $CPMK$ nội tiếp.

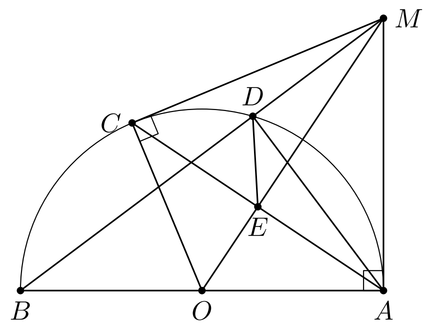


□

Bài 11. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB=2R$ và tia tiếp tuyến Ax cùng phía với nửa đường tròn đối với AB. Từ điểm M trên Ax kẻ tiếp tuyến thứ hai MC với nửa đường tròn (C là tiếp điểm). AC cắt OM tại E, MB cắt nửa đường tròn (O) tại D (D khác B). Chứng minh $AMCO$ và $AMDE$ là các tứ giác nội tiếp đường tròn.

Lời giải.

Tứ giác $AMCO$ có $\widehat{OAM}+\widehat{OCM}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$ nên $AMCO$ nội tiếp.
Hai tiếp tuyến AM và CM cắt nhau tại M nên $MA=MC$.
Mà $OA=OC=R$ nên OM là trung trực của AC.
$\Rightarrow \widehat{AEM}=90^\circ$.
$\widehat{ADB}$ nội tiếp và chắn nửa (O) nên $\widehat{ADB}=90^\circ$.
Tứ giác $AMDE$ có E, D kề nhau và $\widehat{AEM}=\widehat{ADM}=90^\circ$.
$\Rightarrow AMDE$ nội tiếp.



□

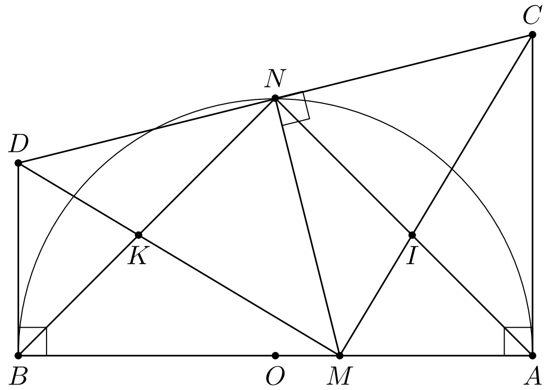
Bài 12. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Lấy điểm M thuộc đoạn thẳng OA, điểm N thuộc nửa đường tròn (O). Từ A và B vẽ các tiếp tuyến Ax và By. Đường thẳng qua N và vuông góc với NM cắt Ax, By lần lượt tại C và D.

1. Chứng minh $ACNM$ và $BDNM$ là các tứ giác nội tiếp đường tròn.
2. Gọi I là giao điểm của AN và CM, K là giao điểm của BN và DM. Chứng minh $\triangle ANB$ đồng dạng với $\triangle CMD$ từ đó suy ra $IMKN$ là tứ giác nội tiếp.

Lời giải.

1. Chứng minh $ACNM$ và $BDNM$ là các tứ giác nội tiếp đường tròn.
   Tứ giác $ACNM$ có $\widehat{MAC}+\widehat{MNC}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$ nên $ACNM$ nội tiếp.
   Tứ giác $BDNM$ có $\widehat{MBD}+\widehat{MND}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$ nên $BDNM$ nội tiếp.

2. Chứng minh $\triangle ANB$ đồng dạng với $\triangle CMD$ từ đó suy ra $IMKN$ là tứ giác nội tiếp.
   Ta có $\widehat{ANB}$ nội tiếp và chắn nửa (O) nên $\widehat{ANB}=90^\circ$. Xét $\triangle ANB$ và $\triangle CMD$ có
   $\begin{cases}\widehat{NAB}=\widehat{MCD} \text{ (vì } ACNM \text{ nội tiếp)}\\ \widehat{NBA}=\widehat{MDC} \text{ (vì } BDNM \text{ nội tiếp).}\end{cases}$
   $\Rightarrow \triangle ANB\backsim\triangle CMD$ (g-g).
   $\Rightarrow \widehat{CMD}=\widehat{ANB}=90^\circ$.
   $\Rightarrow \widehat{CMD}+\widehat{ANB}=180^\circ$.
   $\Rightarrow IMKN$ nội tiếp.



□

Bài 13. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Trên hai cạnh AD và CD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\widehat{MBN} = 45^\circ$. BM và BN cắt AC theo thứ tự tại E và F.

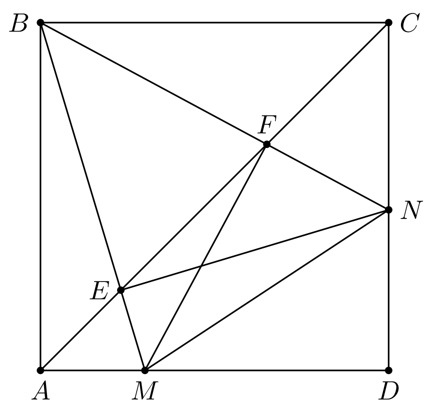
1. Chứng minh các tứ giác $BENC$ và $BFMA$ nội tiếp được trong một đường tròn.

2. Chứng tỏ $MEFN$ là tứ giác nội tiếp.

Lời giải.

1. Chứng minh các tứ giác $BENC$ và $BFMA$ nội tiếp được trong một đường tròn.

   Vì $ABCD$ là hình vuông nên $\widehat{MAF} = \widehat{ECN} = 45^\circ$.
   Tứ giác $BENC$ có B, C kề nhau và $\widehat{EBN} = \widehat{ECN} = 45^\circ$ nên $BENC$ nội tiếp.
   Tứ giác $BFMA$ có A, B kề nhau và $\widehat{MAF} = \widehat{MBF} = 45^\circ$ nên $BFMA$ nội tiếp.



2. Chứng tỏ $MEFN$ là tứ giác nội tiếp.
   $BENC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MEN} = \widehat{BCN} = 90^\circ$.
   $BFMA$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MFN} = \widehat{BAM} = 90^\circ$.
   Tứ giác $MEFN$ có E, F kề nhau và $\widehat{MEN} = \widehat{MFN} = 90^\circ$ nên $MEFN$ nội tiếp.

□

Bài 14. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn; AD và CE là hai đường cao cắt nhau tại H; O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi M là điểm đối xứng của B qua O, I là giao điểm của BM và DE, K là giao điểm của AC và HM.

1. Chứng minh rằng các tứ giác $AEDC$ và $DIMC$ nội tiếp.

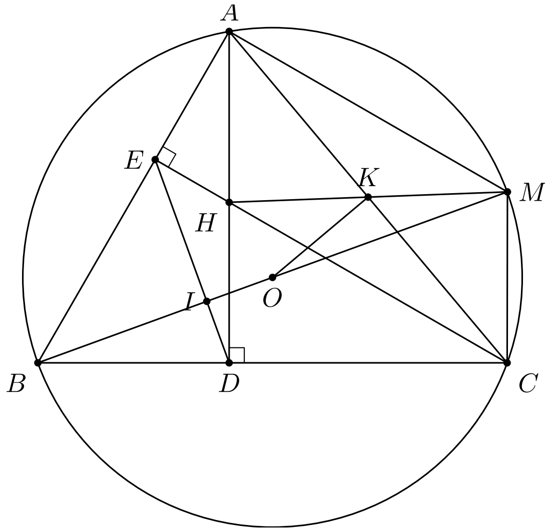
2. Chứng minh $OK \perp AC$.

3. Cho $\widehat{AOK} = 60^\circ$. Chứng minh tam giác HBO cân.

Lời giải.

1. Ta có $\widehat{AEC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$ (AD, CE là đường cao của $\triangle ABC$).
   Tứ giác $AEDC$ có hai đỉnh D, E kề nhau và $\widehat{AEC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$ nên $AEDC$ nội tiếp được đường tròn.
   Vì tứ giác $AEDC$ nội tiếp nên $\widehat{BAC} = \widehat{BDI}$ (cùng bù với $\widehat{EDC}$).
   Mặt khác $\widehat{BAC} = \widehat{BMC}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BC}$) suy ra $\widehat{BDI} = \widehat{BMC}$, do đó tứ giác $DIMC$ nội tiếp.

2. Từ giả thiết BM là đường kính, ta có $MA \perp AB$, lại có $CH \perp AB$, suy ra $AM \parallel CH$. (1)
Do $CM \perp BC$, $AD \perp BC$ nên $AH \parallel CM$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $AHCM$ là hình bình hành. Từ đó K là trung điểm của AC. Suy ra $OK \perp AC$.
3. $\triangle AKO$ vuông tại K có $\widehat{AOK} = 60^\circ$, suy ra $\widehat{OAK} = 30^\circ$, dẫn đến $OK = \dfrac{1}{2}OA = \dfrac{1}{2}OB$. Lại do OK là đường trung bình của tam giác BHM nên $OK = \dfrac{1}{2}BH$.
Từ đó $BH = OB$, hay $\triangle BHO$ cân tại O.

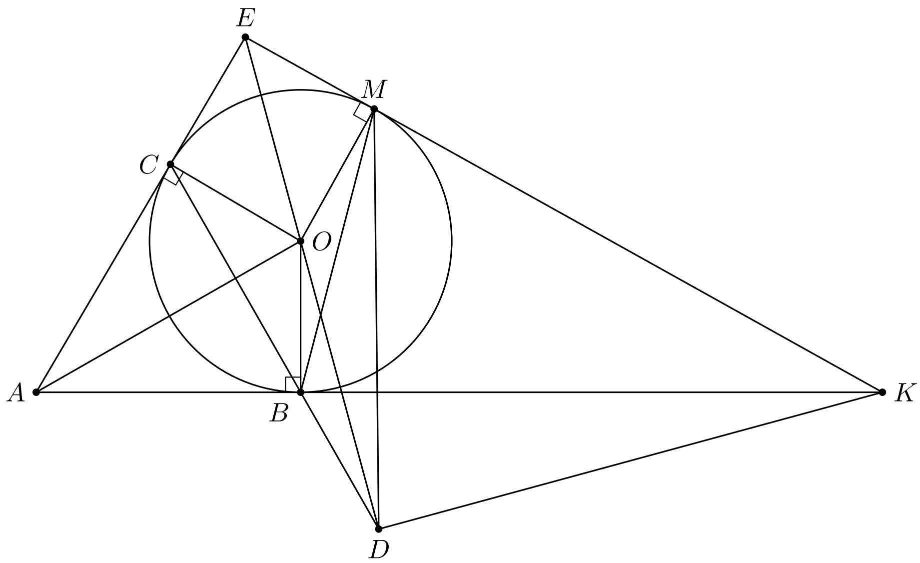


□

Bài 15. Từ một điểm A ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Trên tia đối của tia BC, lấy điểm D. Gọi E là giao điểm của DO và AC. Qua E, vẽ tiếp tuyến thứ hai với đường tròn (O), có tiếp điểm là M; tiếp tuyến này cắt đường thẳng AB ở K.

1. Chứng minh bốn điểm D, B, O, M cùng thuộc một đường tròn.
2. Chứng minh D, B, O, M, K cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.



1. Ta có OE là tia phân giác của $\widehat{MOC} \Rightarrow \widehat{MOE} = \dfrac{1}{2}\widehat{MOC}$.
Lại có $\widehat{MBC} = \dfrac{1}{2}\widehat{MOC}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn $\overset{\frown}{MC}$).
Do đó $\widehat{MOE} = \widehat{MBC} \Rightarrow \widehat{MOD} = \widehat{MBD}$.
Tứ giác $DBOM$ có O, B kề nhau và $\widehat{MOD} = \widehat{MBD}$ nên $DBOM$ nội tiếp.
Vậy bốn điểm D, B, O, M cùng thuộc một đường tròn. (1)
2. Ta có $\widehat{OMC} = \widehat{OBK} = 90^\circ$ (tính chất tiếp tuyến).
Tứ giác $BOMK$ có $\widehat{OMC} + \widehat{OBK} = 180^\circ$ nên $BOMK$ nội tiếp. (2)
Từ (1) và (2) suy ra năm điểm D, B, O, M, K cùng thuộc một đường tròn.

□

§8 Đường tròn ngoại tiếp. Đường tròn nội tiếp

1 Tóm tắt lí thuyết

Định nghĩa 12. ☑ Đường tròn đi qua tất cả các đỉnh của một đa giác gọi là *đường tròn ngoại tiếp* đa giác và đa giác được gọi là *đa giác nội tiếp đường tròn*

☑ Đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh của đa giác được gọi là *đường tròn nội tiếp đa giác* và đa giác gọi là *đa giác ngoại tiếp đường tròn*.

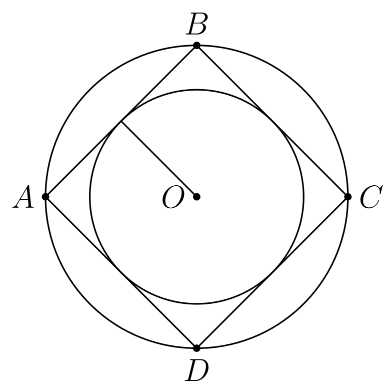
Định lí 23. Bất kì đa giác đều nào cũng có một và chỉ một đường tròn ngoại tiếp, có một và chỉ một đường tròn nội tiếp.

⚠ **34.** Trong đa giác đều, tâm của đường tròn nội tiếp trùng với tâm của đường tròn ngoại tiếp và được gọi là tâm của đa giác đều.

2 Các ví dụ

Ví dụ 1.
1. Vẽ đường tròn tâm (O), bán kính 2 cm.
2. Vẽ hình vuông nội tiếp đường tròn (O) ở câu a).
3. Tính bán kính r đường tròn nội tiếp hình vuông ở câu b) rồi vẽ đường tròn $(O; r)$.

Lời giải.



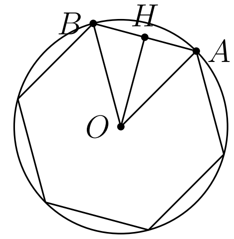
1.
2.
3. $ABCD$ là hình vuông có đường chéo $AC = 4$ (cm) $\Rightarrow AB = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$. Vậy hình vuông có cạnh $2\sqrt{2}$.
   Đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ có bán kính
   $$r = \frac{AB}{2} = \sqrt{2} \text{ cm}.$$

□

Ví dụ 2. Cho một đa giác đều n cạnh có độ dài mỗi cạnh là a. Hãy tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp và bán kính r của đường tròn nội tiếp đa giác đều đó.

Lời giải.

Gọi A, B là 2 đỉnh liên tiếp của đa giác đều n cạnh. Gọi O là tâm đa giác đều.
Ta có $\widehat{AOB} = \dfrac{360^\circ}{n}$.
Kẻ OH vuông góc AB, $H \in AB$. Ta có $\triangle OHA$ vuông tại H và



$$HA = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}.$$

Hơn nữa ta có $\widehat{HOA} = \dfrac{\widehat{AOB}}{2} = \dfrac{180^\circ}{n}$.
Khi đó

- Bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $R = OA = \dfrac{HA}{\sin \frac{180^\circ}{n}}$.
- Bán kính đường tròn nội tiếp bằng $r = OH = HA \cot \dfrac{180^\circ}{n}$.

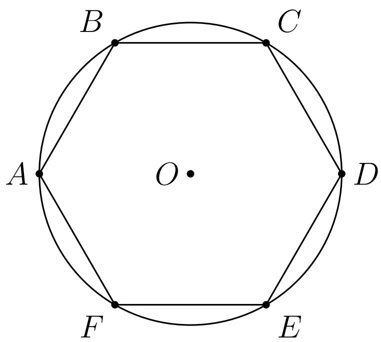
□

Ví dụ 3. Tính diện tích lục giác đều nội tiếp đường tròn bán kính R.

Lời giải.

Ta có $AB = R$ nên suy ra tam giác OAB đều. Tương tự ta có các tam giác OBC, OCD, ODE, OEF, OAF là các tam giác đều cạnh R.
Vậy diện tích lục giác $ABCDEF$ là

$$6 \cdot S_{OAB} = 6 \cdot \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2}.$$

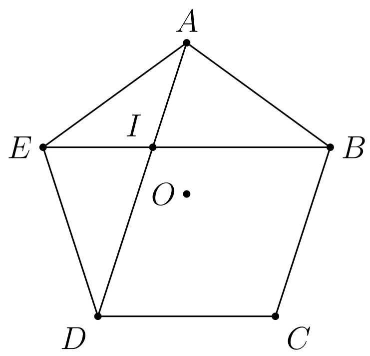


□

Ví dụ 4. Cho ngũ giác đều $ABCDE$. Gọi I là giao điểm của AD và BE. Chứng minh rằng

1. $DIBC$ là hình bình hành;
2. $DI^2 = AI \cdot AD$.

Lời giải.



1. Ta có $\widehat{EID} = \dfrac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{AB} + \text{sđ}\overset{\frown}{DE}\right) = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{EC} = \widehat{EBC}$.
   Suy ra $AD \parallel BC$, chứng minh tương tự, ta có $BE \parallel CD$.
   Vậy $DIBC$ là hình bình hành.

2. Xét tam giác AIE và tam giác AED, ta có
   - Góc A chung;
   - $\widehat{AEI} = \widehat{ADE}$.

   $\Rightarrow \triangle AIE \backsim \triangle AED$ (g - g) suy ra $\dfrac{AI}{AE} = \dfrac{AE}{AD}$ suy ra

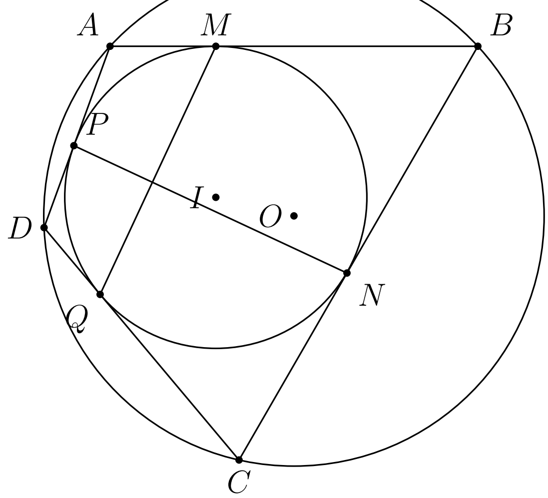
$$AI \cdot AD = AE^2 \cdot BC^2 = DI^2$$

□

Ví dụ 5. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp một đường tròn và ngoại tiếp một đường tròn khác. Gọi các tiếp điểm với đường tròn nội tiếp theo thứ tự là M, P, Q, N. Chứng minh rằng QM vuông góc PN.

Lời giải.

Ta có sđ$\overset{\frown}{PM} = 2\widehat{AMP} = 180^\circ - \widehat{A}$. (1)
sđ$\overset{\frown}{QN} = 2\widehat{QNC} = 180^\circ - \widehat{C}$. (2)
Lại có $ABCD$ nội tiếp suy ra $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$. (3)
Từ (1), (2) và (3) suy ra sđ$\overset{\frown}{PM}$ + sđ$\overset{\frown}{QN} = 180^\circ$ do đó $QM \perp PN$.



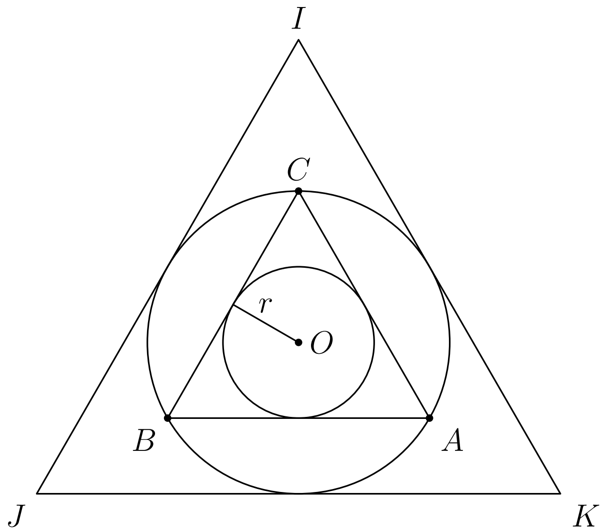
□

3 Luyện tập

Bài 1.

1. Vẽ $\triangle ABC$ đều cạnh a.
2. Vẽ đường tròn $(O; R)$ ngoại tiếp $\triangle ABC$. Tính R.
3. Vẽ đường tròn $(O; r)$ nội tiếp $\triangle ABC$. Tính r.
4. Vẽ tam giác đều IJK ngoại tiếp $(O; R)$.

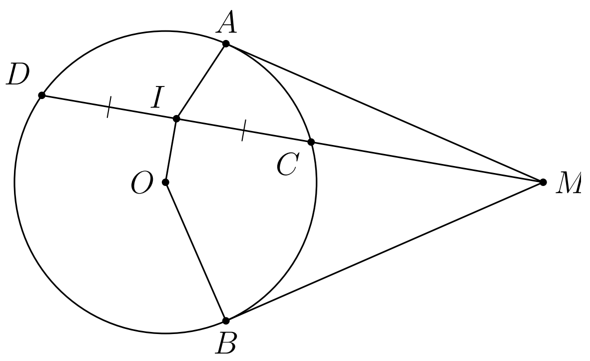
Lời giải.



□

Bài 2. Cho đường tròn tâm O bán kính R và điểm M nằm bên ngoài đường tròn đó. Qua điểm M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với (O). Qua điểm M kẻ cát tuyến MCD với đường tròn (O) (đường thẳng qua M cắt (O) tại C, D). Gọi I là trung điểm dây CD. Khi đó ngũ giác $MAOIB$ có phải là ngũ giác nội tiếp không?

Lời giải.



Ta có MA, MB là hai tiếp tuyến của (O) suy ra $\widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90^\circ$;
Xét đường tròn (O),

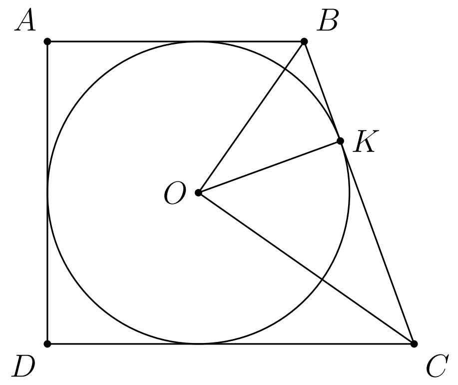
- OI là một phần đường kính;
- CD là dây;
- $IC = ID$

$\Rightarrow OI \perp CD \Rightarrow \widehat{OIM} = 90^\circ$. Vậy $MAIOB$ nội tiếp đường tròn đường kính OM. □

Bài 3. Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$) ngoại tiếp đường tròn (O), $OB = 15$ cm và $OC = 20$ cm.

1. Chứng minh rằng $\triangle BOC$ vuông;
2. Tính bán kính R của đường tròn (O);
3. Tính độ dài các cạnh AB và CD.

Lời giải.

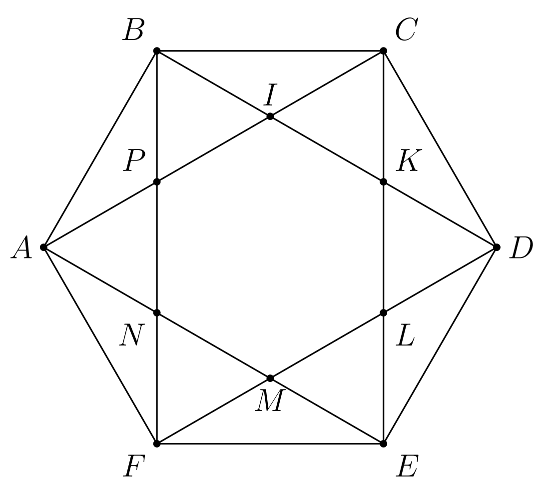


1. Ta có BA, BC là hai tiếp tuyến của (O)
   $\Rightarrow BO$ là phân giác góc BOC suy ra $\widehat{BOC} = \dfrac{1}{2}\widehat{ABC}$. (1)
   Chứng minh tương tự ta có $\widehat{BCO} = \dfrac{1}{2}\widehat{BCD}$. (2)
   Lại có tứ giác $ABCD$ là hình thang nên $\widehat{ABC} + \widehat{BCD} = 180°$. (3)
   Từ (1), (2) và (3) ta có $\widehat{BOC} + \widehat{BCO} = 90°$. Vậy tam giác BOC vuông tại O.
2. Tam giác OBC vuông tại $BC^2 = OB^2 + OC^2 = 625$. Do đó $BC = 25$.
   Gọi K là hình chiếu của O lên BC. Xét tam giác OBC vuông tại O, ta có
   $$OB \cdot OC = OK \cdot BC \Rightarrow OK = \frac{OB \cdot OC}{BC} = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12.$$
   Vậy $R = 24$.
3. Gọi H là hình chiếu của B lên CD. Ta có $BH = AD = 2R = 24$.
   Tam giác BHR vuông tại H, ta có $HC = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7$.
   Ta có $HC = CD - AB$. Suy ra $CD - AB = 7$.
   Tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp nên $AB + CD = AD + BC$ suy ra $AB + CD = 49$. Do đó $AB = 21$, $CD = 28$.

□

Bài 4. Cho một lục giác đều bán kính R. Kẻ các đường chéo nối các đỉnh cách nhau một đỉnh. Tính diện tích lục giác có đỉnh là giao điểm của các đường chéo đó.

Lời giải.



Kí hiệu các đỉnh như hình bên. Ta có $\triangle AMN$ đều (vì các góc bằng $60°$).
$\triangle ANB$ cân vì $\widehat{ABN} = \widehat{BAN} = 30°$; tương tự ta có $\triangle AMF$ cân do đó

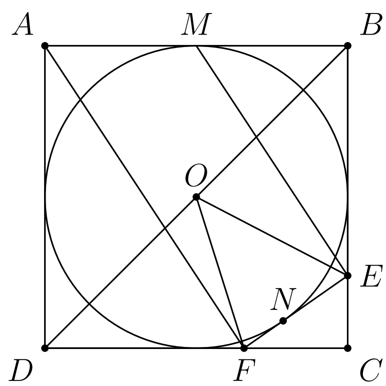
$$FM = MN = NB = \frac{BF}{3} = \frac{R}{\sqrt{3}}.$$

$MNPQ$ là lục giác đều có diện tích bằng $\dfrac{MN^2\sqrt{3}}{4} \cdot 6 = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{2}$. □

Bài 5. Đường tròn tâm O nội tiếp hình vuông $ABCD$, tiếp điểm trên AB là M. Một tiếp tuyến với (O) cắt các cạnh BC, CD lần lượt ở E, F. Chứng minh rằng

1. Các tam giác DFO và BOE đồng dạng.
2. ME song song với AF.

Lời giải.



1. Xét tam giác $\triangle DFO$, ta có $\widehat{DOF} + \widehat{DFO} + \widehat{ODF} = 180°$
$\Rightarrow \widehat{DOF} + \widehat{DFO} = 145°$ (do $\widehat{ODF} = 45°$). (1)
Xét tứ giác $DBEF$, ta có $\widehat{D} + \widehat{B} + \widehat{E} + \widehat{F} = 360° \Rightarrow \widehat{DEF} + \widehat{BEF} = 270°$.
Mặt khác ta có FO, EO lần lượt là phân giác góc DFE và BEF nên ta có

$$\widehat{DFO} = \frac{1}{2}\widehat{DFE} \text{ và } \widehat{BEO} = \frac{1}{2}\widehat{BEF}$$

Suy ra $\widehat{DFO} + \widehat{BEO} = 145°$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{DOF} = \widehat{BEO}$.
Xét tam giác DOF và tam giác BEO, ta có

- $\widehat{ODF} = \widehat{OBE} = 45°$;
- $\widehat{DOF} = \widehat{BEO}$ (chứng minh trên).

$\Rightarrow \triangle DOF \backsim \triangle BEO$ (g - g).

2. $\triangle DOF \backsim \triangle BEO \Rightarrow \dfrac{DF}{BO} = \dfrac{DO}{BE} \Rightarrow DF \cdot BE = DO \cdot BO = \dfrac{BD^2}{4} = \dfrac{AB^2}{2} = BM \cdot AD.$

$$\Rightarrow \frac{BM}{DF} = \frac{BE}{AD}$$

Xét tam giác ADF và EBM, ta có

- $\widehat{ADF} = \widehat{MBE}$;

☑ $\dfrac{BM}{DF} = \dfrac{BE}{AD}$.

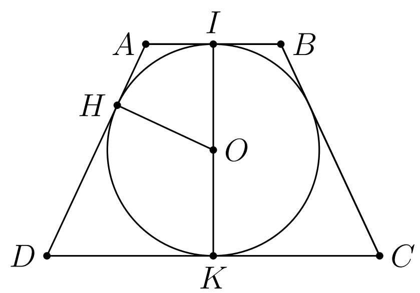
Suy ra $\triangle ADF \backsim \triangle EBM \Rightarrow \widehat{BME} = \widehat{AFD}$.
Mặt khác ta có $\widehat{BAF} = \widehat{AFD}$ ($AB \parallel CD$).
Duy ra $\widehat{BME} = \widehat{BAF}$ suy ra $ME \parallel AF$.

□

Bài 6. Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) ngoại tiếp đường tròn $(O; r)$ và $CD = 4AB$.

1. Gọi H là hình chiếu của O lên AD. Chứng minh rằng $HD = 4HA$;
2. Tính AB và CD theo r.

Lời giải.

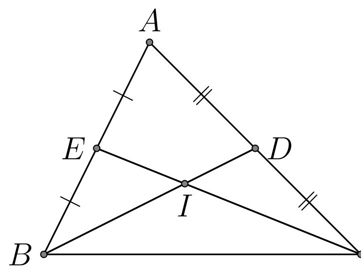


1. Gọi I, K lần lượt là hình chiếu của O lên AB và CD. Ta có $AI = \dfrac{AB}{2}$; $DK = \dfrac{CD}{2}$. (1)
Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có $HA = AI$, $HD = DK$. (2)
Lại có $CD = 4AB$. (3)
Từ (1), (2) và (3) suy ra $HD = 4HA$.
2. Tam giác AOD vuông tại O có đường cao OH, ta có
$$r^2 = OH^2 = HA \cdot HD = 4 \cdot HA^2.$$
Vậy $HA = \dfrac{r}{2}$.

□

Bài 7. Cho tam giác ABC, các đường trung tuyến BD và CE cắt nhau tại I. Cho biết tứ giác $ADIE$ ngoại tiếp được một đường tròn. Chứng minh rằng tam giác ABC cân.

Lời giải.



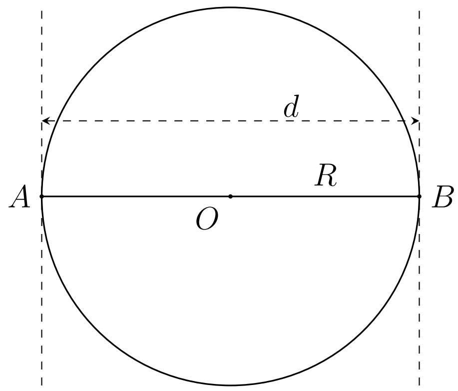
Ta có $ADIE$ là tứ giác ngoại tiếp suy ra $AD + IE = AE + ID$. Không mất tính tổng quát giả sử $AB < AC$ khi đó ta chứng minh được $BD < CE$ suy ra $ID < IE$. Do đó $AE + ID < AD + EI$ (mâu thuẩn). Vậy $AB = AC$.

□

§9 Độ dài đường tròn, cung tròn

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Độ dài đường tròn



1. Độ dài đường tròn (hay "Chu vi hình tròn") được kí hiệu là C.
2. Độ dài C của một đường tròn bán kình R được tính theo công thức
$$\mathrm{C} = 2\pi R.$$
3. Nếu gọi d là đường kính của đường tròn ($\mathrm{d} = 2R$) thì
$$\mathrm{C} = \pi \mathrm{d}.$$

Trong đó π đọc là "pi" và $\pi \approx 3{,}14$ ($\pi = 3{,}14159265\ldots$).

1.2 Độ dài cung tròn

1. Đường tròn bán kính R (ứng với cung 360°) có độ dài là $2\pi R$.
2. Mỗi cung 1° bán kính R có độ dài là
$$\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}.$$
3. Một cung n°, bán kính R có độ dài
$$l = \frac{\pi R n}{180}.$$

2 Các ví dụ

Ví dụ 1. 1. Tính độ dài cung 30° của một đường tròn có bán kính 5 cm.

2. Tính chu vi của một vành xe đạp có đường kính 65 cm.

Lời giải.

1. Độ dài cung 30° của đường tròn có bán kính 5 cm là
$$l = \frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi \cdot 5 \cdot 30}{180} = \frac{5\pi}{6} \approx 2{,}6 \text{ (cm)}.$$

2. Chu vi của vành xe đạp đường kính 65 cm là
$$\mathrm{C} = \pi d = 65\pi \approx 204{,}2 \text{ (cm)}.$$

□

Ví dụ 2. Tính độ dài của đường tròn, biết

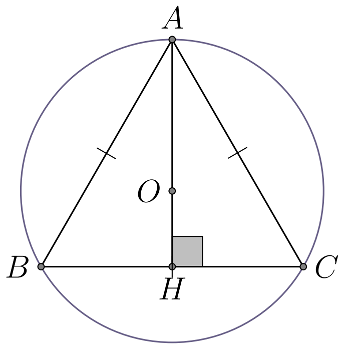
1. Đường tròn có bán kính bằng 6 cm.
2. Đường tròn có đường kính 8 cm.
3. Đường tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh bằng $2\sqrt{3}$ cm.

Lời giải.

1. Độ dài đường tròn bán kính 6 cm là
$$\mathrm{C} = 2\pi R = 2 \cdot \pi \cdot 6 \approx 37{,}7 \text{ (cm)}.$$

2. Độ dài đường tròn đường kính 8 cm là
$$\mathrm{C} = \pi d = 8\pi \approx 25{,}1 \text{ (cm)}.$$

3. Giả sử có O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Qua A kẻ đường cao AH. Khi đó ta có
$$R = OA = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 2 \text{ (cm)}.$$
Vậy độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC là
$$C = 2\pi R = 2 \cdot \pi \cdot 2 = 4\pi \approx 12{,}57 \text{ (cm)}.$$



□

Ví dụ 3. Một cái bàn tròn phục vụ trong nhà hàng có chu vi là 64π dm. Tính độ dài cung 90° của cái bàn đó.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{C} = 64\pi$ (dm) $\Rightarrow 2\pi R = 64\pi \Leftrightarrow R = \dfrac{64\pi}{2\pi} = 32$ (dm).
Vậy độ dài cung 90° của cái bàn tròn là
$$l = \frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi \cdot 32 \cdot 90}{180} = 16\pi \approx 50{,}3 \text{ (dm)}.$$

□

Ví dụ 4. Xích đạo là một đường tròn lớn của Trái Đất có độ dài khoảng 40000 km. Hãy tính bán kính của Trái Đất.

Lời giải.

Gọi R là bán kính của Trái đất. Theo đề bài ta có

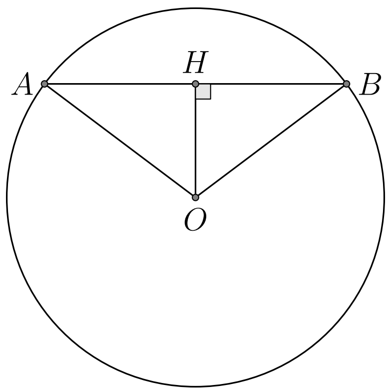
$$2\pi R = 40000 \Rightarrow R = \frac{40000}{2\pi} \approx 6636 \text{ (km)}.$$

□

Ví dụ 5. Cho đường tròn (O), dây $AB = 9$ cm có khoảng cách đến tâm bằng một nửa bán kính của đường tròn.

1. Tính chu vi đường tròn.
2. Tính độ dài cung nhỏ AB.

Lời giải.



1. Kẻ $OH \perp AB$. Khi đó $HA = HB$ (tính chất đường kính và dây cung).

$$\Rightarrow HB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 9 = 4{,}5 \text{ (cm)}.$$

Trong tam giác vuông OHB, ta có

- $\sin B = \dfrac{OH}{OB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{B} = 30^\circ$.
- $\cos B = \dfrac{HB}{OB} \Rightarrow OB = \dfrac{HB}{\cos B} = \dfrac{4{,}5}{\cos 30^\circ} = 3\sqrt{3}$ (cm).

Chu vi đường tròn: $C = 2\pi R = 2\pi \cdot 3\sqrt{3} \approx 32{,}65$ (cm).

2. Ta có $\widehat{B} = 30^\circ$;

$$\begin{aligned} \Rightarrow \widehat{BOH} &= 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ \\ \Rightarrow \widehat{AOB} &= 2\widehat{BOH} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ \\ \Rightarrow \text{sđ}\overset{\frown}{AB} &= 120^\circ. \end{aligned}$$

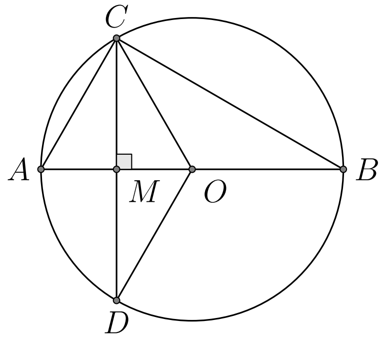
Độ dài cung nhỏ AB: $l_{\overset{\frown}{AB}} = \dfrac{\pi R n}{180} = \dfrac{\pi 3\sqrt{3} \cdot 120}{180} \approx 10{,}88$ (cm).

□

Ví dụ 6. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Vẽ dây CD vuông góc với AB tại M. Giả sử $AM = 1$ cm, $CD = 2\sqrt{3}$ cm. Tính

1. Độ dài đường tròn.
2. Độ dài của $\overset{\frown}{CAD}$.

Lời giải.



1. Ta có $AB \perp CD$ tại M (giả thiết) nên

$$MC = MD = CD : 2 = \sqrt{3} \text{ (cm) (tính chất đường kính và dây cung).}$$

Lại có $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).
Do đó, $\triangle ACB$ vuông tại C có đường cao CM ($CD \perp AB$ tại M).
Theo hệ thức liên hệ giữa đường cao trong tam giác vuông ACB ta có

$$\begin{aligned} & MC^2 = MA \cdot MB \\ \Rightarrow \quad & MB = \frac{MC^2}{MA} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{1} = 3 \\ \Rightarrow \quad & R = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(AM + MB) = 2 \text{ (cm)}. \end{aligned}$$

Độ dài đường tròn: $C = 2\pi R = 2\pi \cdot 2 = 4\pi \approx 12{,}57$ (cm).

b) Ta có $AM = 1$ cm, $OA = 2$ cm $\Rightarrow MA = MO = 1$ cm.
Xét tứ giác $OCAD$ có

$$\begin{cases} MC = MD \text{ (chứng minh trên)} \\ MA = MO \text{ (chứng minh trên)} \\ CD \perp OA \text{ (giả thiết)} \end{cases} \Rightarrow OCAD \text{ là hình thoi.}$$

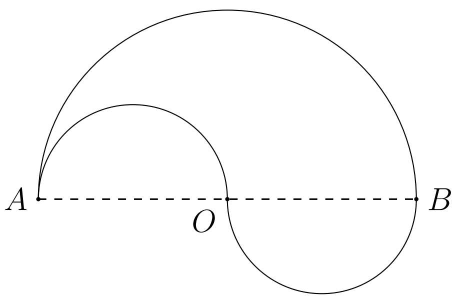
$\Rightarrow CA = CO = OA$ (cùng bằng 2 cm) nên $\triangle OAC$ đều
$\Rightarrow \widehat{AOC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{COD} = 120^\circ$.
Độ dài của $\overset{\frown}{CAD}$

$$l_{\overset{\frown}{CAD}} = \frac{\pi R n}{180} = \frac{\pi \cdot 2 \cdot 120}{180} = \frac{4\pi}{3} \approx 4{,}19 \text{ (cm)}.$$

□

3 Luyện tập

Bài 1.
Tính chu vi của hình bên, biết $OA = 4$ cm.



Lời giải.

Hình bên là hình giới hạn bởi hai nửa đường tròn đường kính 4 cm và một nửa đường tròn đường kính $AB = 8$ cm nên chu vi của hình đó là

$$\frac{1}{2} \cdot 8\pi + \pi \cdot 4 = 8\pi \approx 25{,}13 \text{ (cm)}.$$

□

Bài 2. Tính độ dài đường tròn ngoại tiếp của

1. Một tam giác vuông có hai cạnh góc vuông là 6 cm và 8 cm.
2. Một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng 4 cm.

Lời giải.

1. Đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông nhận cạnh huyền làm đường kính.
   Theo định lý Py-ta-go, ta có

   $$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow \text{cạnh huyền bằng 10 cm.}$$

   Vậy độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông với đường kính bằng 10 cm là

   $$C = \pi d = 10\pi \approx 31{,}42 \text{ (cm)}.$$

2. Tương tự câu a), ta có $d = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$.
   Vậy độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông cân với đường kính bằng $4\sqrt{2}$ cm là

   $$C = \pi d = 4\sqrt{2}\pi \approx 17{,}77 \text{ (cm)}.$$

□

Bài 3. Đường kính bánh xe của một chiếc xe đạp là 73 cm. Hỏi

1. Bánh xe đó quay được bao nhiêu vòng khi xe đi được một đoạn đường 8 km?
2. Xe đi được bao nhiêu ki-lô-mét nếu bánh xe quay đủ 1000 vòng?

Lời giải.

1. Bánh xe đạp quay được một vòng nghĩa là nó đi được một độ dài là chu vi của bánh xe.
   Chu vi của bánh xe đạp: $C = \pi d = 73\pi$ (cm).
   Số vòng mà bánh xe quay được khi đi đoạn đường dài 8 km $= 800000$ cm là

   $$800000 : (73\pi) \approx 3488 \text{ (vòng)}.$$

2. Đoạn đường mà xe đi được khi bánh xe quay đủ 1000 vòng là

   $$1000 \cdot 73\pi \approx 229336{,}3 \text{ (cm)}.$$

   Đổi 229336,3 (cm) $\approx$ 2,29 (km).
   Vậy xe đi được khoảng 2,29 km khi bánh xe quay đủ 1000 vòng.

□

Bài 4. Chiếc máy cày có bánh xe sau lớn hơn hai bánh xe trước. Biết rằng khi bơm căng, bánh xe trước có đường kính 0,8 m, bánh xe sau có đường kính 1,5 m. Hỏi bánh xe sau lăn được 16 vòng thì bánh xe trước lăn được bao nhiêu vòng?

Lời giải.

Bánh xe lăn được một vòng nghĩa là nó đi được một độ dài là chu vi của bánh xe.

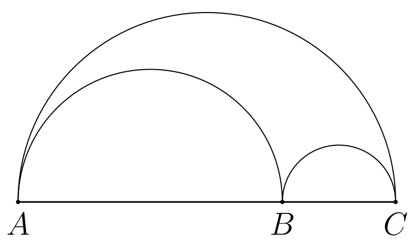
- Chu vi bánh xe trước: $C_1 = \pi d = 0{,}8\pi$ (m).
- Chu vi bánh xe sau: $C_2 = \pi d = 1{,}5\pi$ (m).

Độ dài bánh xe sau khi lăn được 16 vòng: $16 \cdot 1{,}5\pi = 24\pi$ (m).
Số vòng mà bánh xe trước đã lăn khi bánh xe sau lăn được 16 vòng là

$$24\pi : 0,8\pi = 30 \text{ (vòng)}.$$

Vậy khi bánh xe sau lăn được 16 vòng thì bánh xe trước sẽ lăn 30 vòng. □

Bài 5.
Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng sao cho điểm B nằm giữa hai điểm A và C (hình vẽ bên). Chứng minh rằng độ dài của nửa đường tròn đường kính AC bằng tổng độ dài của hai nửa đường tròn đường kính AB và BC.



Lời giải.

Gọi C_1, C_2, C_3 lần lượt là độ dài của các nửa đường tròn đường kính AC, AB và BC. Khi đó

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot AC = \frac{\pi}{2} AC; \\ C_2 &= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot AB = \frac{\pi}{2} AB; \\ C_3 &= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot BC = \frac{\pi}{2} BC. \end{aligned}$$

Xét $C_2 + C_3 = \frac{\pi}{2} AB + \frac{\pi}{2} BC = \frac{\pi}{2}(AB + BC) = \frac{\pi}{2} AC = C_1$.
Vậy $C_1 = C_2 + C_3$ (điều phải chứng minh). □

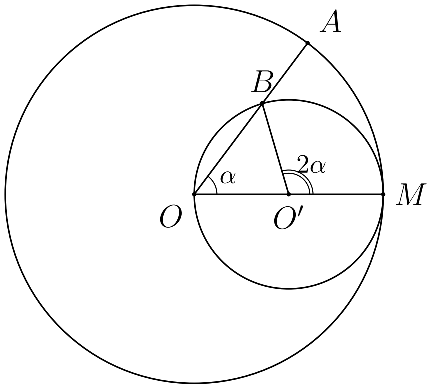
Bài 6. Cho $(O; OM)$. Vẽ đường tròn (O') đường kính OM. Một bán kính OA của (O) cắt (O') ở B. Chứng minh hai cung MA và MB có độ dài bằng nhau.

Lời giải.

Trên (O') đặt $\widehat{MOA} = \alpha$ thì $\widehat{BO'M} = 2\alpha$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung BM).
Suy ra sđ$\overset{\frown}{AM} = \alpha$, sđ$\overset{\frown}{MB} = 2\alpha$. Do đó

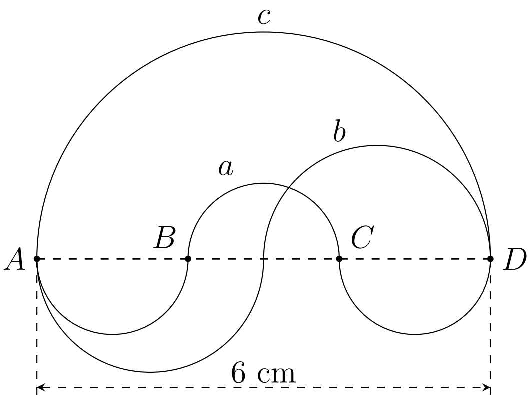
$$l_{\overset{\frown}{MA}} = \frac{\pi \cdot OM \cdot \alpha}{180^\circ} \quad (1)$$

$$l_{\overset{\frown}{MB}} = \frac{\pi \cdot OM \cdot 2\alpha}{180^\circ \cdot 2} = \frac{\pi \cdot OM \cdot \alpha}{180^\circ}. \quad (2)$$



Từ (1) và (2) suy ra $l_{\overset{\frown}{MA}} = l_{\overset{\frown}{MB}}$.
Vậy hai cung $\overset{\frown}{MA}$ và $\overset{\frown}{MB}$ có độ dài bằng nhau. □

Bài 7. Hãy so sánh độ dài của ba đường cong a, b và c trong hình vẽ bên dưới, biết $AB = BC = CD$ và $AD = 6$ cm.



Lời giải.

Gọi C_a, C_b và C_c là độ dài của ba đường cong a, b và c.
Theo hình vẽ, ta có C_a là độ dài của ba nửa đường tròn đường kính 2 cm nên

$$C_a = 3 \cdot \frac{\pi \cdot 2}{2} = 3\pi \text{ (cm)}. \quad (1)$$

Tương tự C_b là độ dài của hai nửa đường tròn đường kính 3 cm nên

$$C_b = \pi \cdot 3 = 3\pi \text{ (cm)}. \quad (2)$$

C_c là độ dài của một nửa đường tròn đường kính 6 cm nên

$$C_c = \frac{\pi \cdot 6}{2} = 3\pi \text{ (cm)}. \quad (3)$$

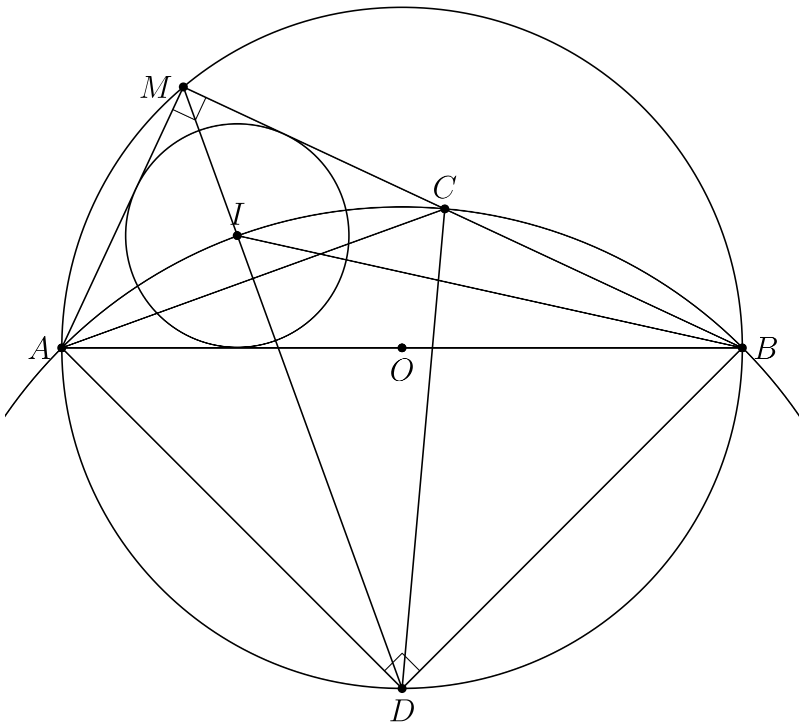
Từ (1), (2) và (3) suy ra $C_a = C_b = C_c$.
Vậy ba đường cong a, b và c có độ dài bằng nhau. □

§10 Ôn tập chương III

Bài 1. Cho đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$. Lấy $M \in (O)$ với $AM < BM$. Trên cạnh MB lấy điểm C sao cho $MC = MA$. Gọi OD là bán kính vuông góc với AB (M và D ở hai bên đường thẳng AB)

1. Chứng minh $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Tính theo R độ dài các cạnh của $\triangle ABD$.
2. Chứng tỏ MD là phân giác $\widehat{AMB}$ và $MD \perp AC$.
3. Chứng minh rằng D là tâm của đường tròn (ABC).
4. Đường tròn (ABC) cắt MD tại I. Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$.

Lời giải.



1. Vì M thuốc đường tròn đường kính AB nên $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).
   Tương tự ta có $\widehat{ADB} = 90^\circ$, và $OD \perp AB$ nên D nằm chính giữa cung AB, suy ra $DA = DB$.
   Theo định lý Pythagore, $AB^2 = DA^2 + DB^2 \Leftrightarrow (2R)^2 = 2DA^2 \Leftrightarrow DA = DB = R\sqrt{2}$.
2. Vì $OD \perp AB$ nên D nằm chính giữa cung AB, hay sđ$\overset{\frown}{DA} =$ sđ$\overset{\frown}{DB}$,
   suy ra $\widehat{AMD} = \widehat{DMB}$ (góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau).
   Vậy MD là phân giác $\widehat{AMB}$.
   Mặt khác $MA = MC$ nên $\triangle MAC$ cân tại M nên $MD \perp AC$ (trong tam giác cân đường phân giác còn là đường cao).

3. Theo câu b), ta có MD là đường trung trực AC nên $DA = DC = DB$, khi đó D là tâm của đường tròn (ABC).

4. Vì D là tâm của đường tròn (ABC) và $MD \perp AC$ nên sđ$\overset{\frown}{IA} =$ sđ$\overset{\frown}{IC}$,
suy ra $\widehat{ABI} = \widehat{IBC}$ (góc nội tiếp cùng chắn hai cung bằng nhau).
Khi đó, BI là tia phân giác góc ABI.
Vậy I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$.

□

Bài 2. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Vẽ hai tiếp tuyến AB, AC của đường tròn (O) $(B, C$ là hai tiếp điểm). Vẽ cát tuyến ADE của đường tròn (O) $(D, E$ thuộc đường tròn (O); D nằm giữa A và E, tia AD nằm giữa hai tia AB, AO).

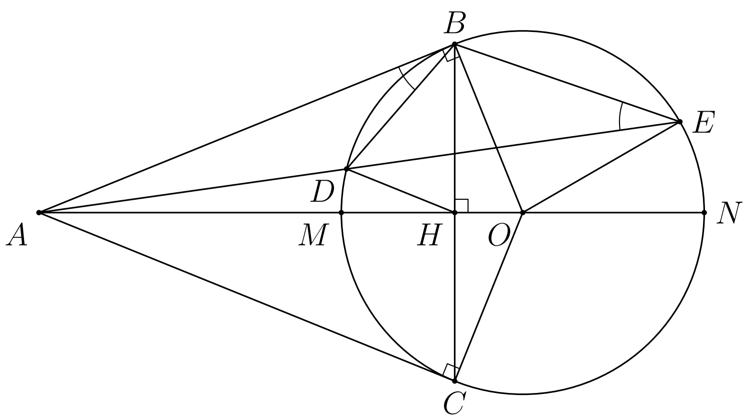
1. Chứng minh rằng A, B, O, C cùng thuộc một đường tròn và xác định tâm của đường tròn này.

2. Chứng minh rằng $AB^2 = AD \cdot AE$.

3. Gọi H là giao điểm của OA và BC. Chứng minh rằng $\triangle AHD \backsim \triangle AEO$ và tứ giác $DEOH$ nội tiếp.

4. Đường thẳng AO cắt đường tròn (O) tại M, N (M nằm giữa A và O). Chứng minh rằng $\dfrac{EH}{AN} = \dfrac{MH}{AD}$.

Lời giải.



1. Ta có: AB, AC là hai tiếp tuyến của (O) nên $AB \perp OB$, $AC \perp OC$,
suy ra $\widehat{OBA} = \widehat{OCA} = 90^\circ$.
Vậy tứ giác $OBAC$ nội tiếp đường tròn đường tròn đường kính OA có tâm K là trung điểm OA.

2. Xét hai tam giác $\triangle ABD$ và $\triangle AEB$, có

$$\widehat{BAE}: \text{ chung}$$
$$\widehat{ABD} = \widehat{BEA}(\text{ góc nội tiếp và góc tiếp tuyến cùng chắn cung } BD).$$

nên $\triangle ABD \backsim AEB$ (g-g), suy ra $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AD}{AB}$
Vậy $AB^2 = AD \cdot AE$.

3. Trong tam giác vuông ABO, ta có $AB^2 = AH \cdot AO$, do đó $AH \cdot AO = AD \cdot AE (= AB^2)$.
Suy ra, $\dfrac{AH}{AD} = \dfrac{AO}{AE}$ và $\widehat{DAH}$: chung
nên $\triangle AHD \backsim \triangle AEO$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{AEO}$.
Do đó tứ giác $DEOH$ nội tiếp (tứ giác có góc trong bằng góc đối ngoài).

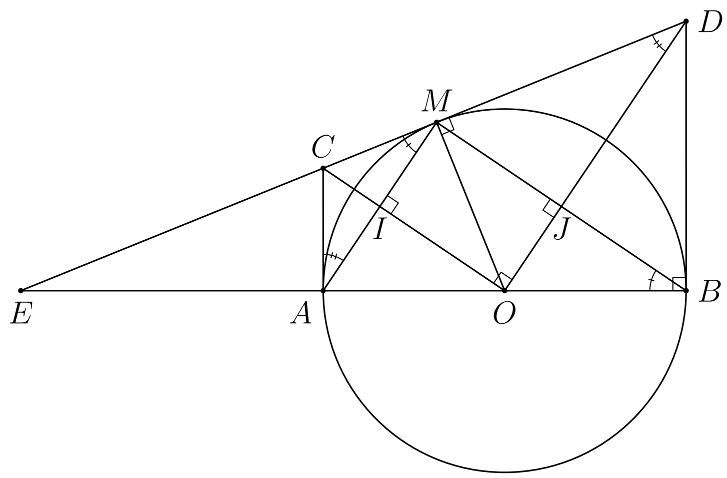
4. Ta có $\widehat{DEM} = \dfrac{\widehat{DOM}}{2}$, $\widehat{DOM} = \widehat{DEH} \Rightarrow \widehat{DEM} = \dfrac{\widehat{DEH}}{2} \Rightarrow \widehat{DEM} = \widehat{MEH}$.
Suy ra EM là đường phân giác của $\triangle EAH \Rightarrow \dfrac{EH}{AE} = \dfrac{MH}{AM}$ (1).
Mặt khác $\triangle AEM \backsim \triangle AND$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{AE}{AN} = \dfrac{AM}{AD}$ (2).
Từ $(1), (2)$ cho : $\dfrac{EH}{AE} \cdot \dfrac{AE}{AN} = \dfrac{MH}{AM} \cdot \dfrac{AM}{AD}$.
Vậy $\dfrac{EH}{AN} = \dfrac{MH}{AD}$.

□

Bài 3. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm E. Hai tiếp tuyến EM và Bx của (O) cắt nhau tại D (M thuộc (O)).

1. Chứng minh rằng 4 điểm O, M, D, B cùng thuộc một đường tròn.
2. Chứng minh $\triangle EMA \backsim \triangle EBM$, suy ra $EM^2 = EO^2 - R^2$.
3. Trên đoạn ME lấy điểm C sao cho hai góc $\widehat{CAM}$, $\widehat{EDO}$ bằng nhau.
Chứng minh rằng $OC \parallel MB$.
4. Giả sử M là trung điểm đoạn ED. Tính EM theo R.

Lời giải.



1. Vì EM và BD là tiếp tuyến với đường tròn (O) nên $\widehat{DMO} = \widehat{DBO} = 90^\circ$.
Vậy tứ giác $DMOB$ nội tiếp, suy ra 4 điểm O, M, D, B cùng thuộc một đường tròn.

2. Xét hai tam giác $\triangle EMA$ và $\triangle EBM$, ta có

$$\widehat{CEA}: \text{ chung}$$
$$\widehat{EMA} = \widehat{MBA} \text{ (góc nội tiếp và góc tiếp tuyến cùng chắn cung } MA).$$

   Vậy $\triangle EMA \backsim \triangle EBM$.
   Khi đó $\dfrac{EM}{EB} = \dfrac{EA}{EM} \Leftrightarrow EM^2 = EA \cdot EB = (EO + R)(EO - R) = EO^2 - R^2$.
   Suy ra $EM^2 = EO^2 - R^2$.

3. Ta có $\widehat{CAM} = \widehat{EDO}$.
   Mà $\widehat{CMA} = \widehat{MBA}$ (góc nội tiếp và góc tiếp tuyến cùng chắn cung MA)
   $\widehat{MDO} = \widehat{MBA}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MA trong tứ giác nội tiếp $DMOB$).
   Suy ra $\widehat{CAM} = \widehat{CMA}$, nên $\triangle CAM$ cân tại C, do đó $CM = CA$.
   Mặt khác $OA = OM = R$, suy ra OC là đường trung trực của MA, do đó $OC \perp MA$.
   Mà $MB \perp MA$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).
   Vậy $OC \parallel MB$.

4. Gọi I là giao điểm của CO và AM; J là giao điểm của DO và BM.
   Vì $CO \perp AM$; $DO \perp BM$ nên tứ giác $MIOJ$ là hình chữ nhật vì $\widehat{M} = \widehat{I} = \widehat{J}$.
   Suy ra $MA \parallel OD$, mà M là trung điểm của ED nên A là trung điểm của EO.
   Vậy $EM^2 = EO^2 - R^2 = (2R)^2 - R^2 = 3R^2 \Rightarrow EM = R\sqrt{3}$.

□

Bài 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Gọi đường tròn $(I; r)$ đường tròn nội tiếp tam giác ABC, H là tiếp điểm của AB với đường tròn (I), D là giao điểm của AI với đường tròn (O), DK là đường kính của đường tròn (O). Gọi d là độ dài của OI. Chứng minh rằng

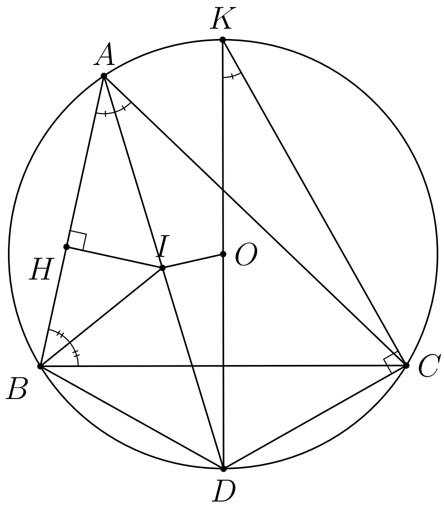
a) $\triangle AHI \backsim \triangle KCD$.

b) $DI = DB = DC$.

c) $IA \cdot ID = R^2 - d^2$.

d) $d^2 = R^2 - 2Rr$ (định lí Euler).

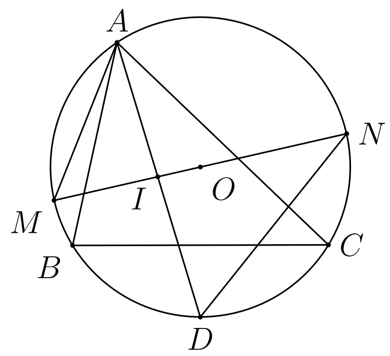
Lời giải.



1. Xét hai tam giác $\triangle AHI$ và $\triangle KCD$.
   $\widehat{AHI} = 90^\circ$ (H là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với cạnh tam giác),
   $\widehat{KCD} = 90^\circ$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).
   Suy ra $\widehat{AHI} = \widehat{KCD}$ (1).
   Vì AI là tia phân giác nên $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$.
   Mà $\widehat{DKC} = \widehat{DAC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{DC}$).
   Do đó $\widehat{DKC} = \widehat{BAD}$ (2).
   Từ (1) và (2), $\triangle AHI \backsim \triangle KCD$.

2. Vì AI là tia phân giác nên $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$, do đó $\overset{\frown}{DC} = \overset{\frown}{DB}$ (tính chất góc nội tiếp).
   Suy ra $DB = DC$ (3).
   Mặt khác $\widehat{BID} = \widehat{IAB} + \widehat{IBA}$ (góc ngoài tam giác).
   $\widehat{IBD} = \widehat{IBC} + \widehat{CBD}$.
   mà $\widehat{IBC} = \widehat{IBD}$ và $\widehat{IBA} = \widehat{IAC} = \widehat{CBD}$.
   Nên $\widehat{BID} = \widehat{IBD}$, do đó tam giác DBI cân tại D, suy ra $DI = DB$ (4).
   Từ (3) và (4), $DI = DB = DC$.

3.
   Gọi M, N là giao điểm của IO với đường tròn (O).
   Xét hai tam giác $\triangle MAI$ và $\triangle DNI$.
   $\widehat{MAI} = \widehat{IND}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{MD}$).
   $\widehat{MIA} = \widehat{DIN}$ (đối đỉnh).
   Suy ra $\triangle MAI \backsim \triangle DNI$, do đó $\dfrac{IA}{IN} = \dfrac{IM}{ID}$.



   Khi đó $IA \cdot ID = IM \cdot IN = (OM - OI)(ON + OI) = (R - d)(R + d) = R^2 - d^2$.

4. Theo câu a), ta có $\triangle AHI \backsim \triangle KCD$,
   suy ra $\dfrac{AI}{KD} = \dfrac{IH}{CD} \Rightarrow AI \cdot CD = IH \cdot KD = 2Rr \Leftrightarrow AI \cdot ID = 2Rr$ (do $DI = DC$).
   mà $IA \cdot ID = R^2 - d^2$.
   Vậy $d^2 = R^2 - 2Rr$ (định lí Euler).

□

Bài 5. Cho điểm C thuộc nửa đường tròn đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax của nửa đường tròn đó (Ax nằm trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB chứa nửa đường tròn). Tia phân giác của góc CAx cắt nửa đường tròn tại D. Kéo dài AD và BC cắt nhau tại E. Kẻ EH vuông góc với Ax tại H.

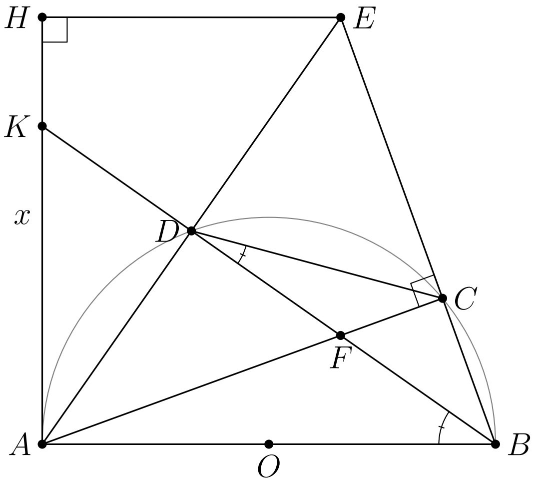
1. Chứng minh tứ giác $AHEC$ nội tiếp đường tròn.

2. Chứng minh $\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$.

3. Chứng minh tam giác ABE cân.

4. Tia BD cắt AC và Ax lần lượt tại F và K. Chứng minh $AKEF$ là hình thoi.

Lời giải.



1. Ta có $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).
   Suy ra $\widehat{ACE} = 90^\circ$ (kề bù).
   Xét tứ giác $AHEC$ ta có $\widehat{ACE} = \widehat{AHE} = 90^\circ$, suy ra tứ giác $AHEC$ nội tiếp đường tròn đường kính AE (tổng hai góc đối diện bằng 180°).

2. Ta có $ABCD$ nội tiếp nên $\widehat{BDC} = \widehat{DAC}$ (1) (cùng nhìn cạnh DC).
   Lại có $\widehat{ABD} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$ (góc nội tiếp); $\widehat{DAx} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung).
   Suy ra $\widehat{ABD} = \widehat{DAx}$.
   Mà $\widehat{DAx} = \widehat{DAC}$ (do là phân giác).
   Suy ra $\widehat{ABD} = \widehat{DAC}$ (2).
   Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$.

3. Xét $\triangle DAB$ và $\triangle DEB$ có

   $\widehat{ADB} = \widehat{EDB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn – kề bù).
   BD chung.
   $\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$ (cmt).

   Suy ra $\triangle DAB = \triangle DEB$ (g-c-g).
   $\Rightarrow BA = BE$(tương ứng).
   Vậy tam giác ABE cân tại B.

4. Theo câu c), ta có $\triangle DAB = \triangle DEB \Rightarrow DA = DE \Rightarrow D$ là trung điểm AE (3).
   Xét $\triangle DAF$ và $\triangle DAK$ có

   $\widehat{ADF} = \widehat{ADK} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn – kề bù).
   AD chung.
   $\widehat{DAF} = \widehat{DAK}$ (do AD là phân giác).

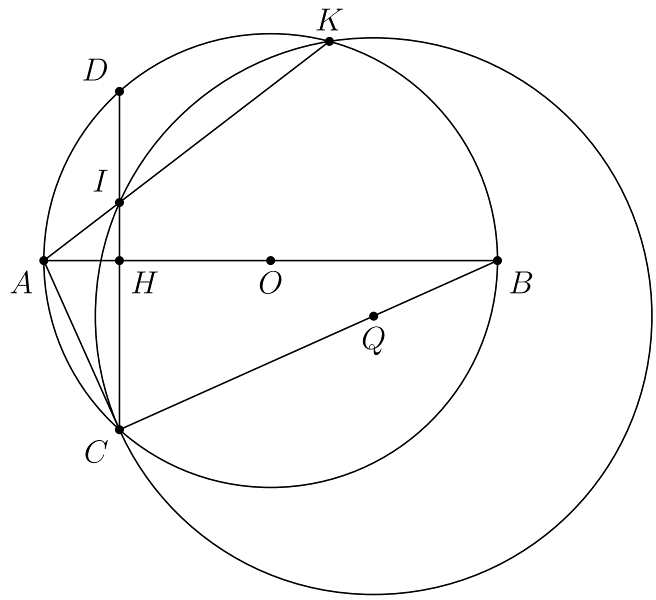
   Suy ra $\triangle DAF = \triangle DAK$ (g-c-g).
   $\Rightarrow DK = DF$(tương ứng).
   $\Rightarrow D$ là trung điểm KF (4).
   Từ (3) và (4) ta có $AKEF$ là hình bình hành (tứ giác có các đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường). Mà $AE \perp KF \Rightarrow$, suy ra $AKEF$ là hình thoi.

□

Bài 6. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB cố định. H là điểm cố định thuộc đoạn OA (H không trùng O và A). Qua H vẽ đường thẳng vuông góc với AB cắt đường tròn tâm O tại C và D. Gọi K là điểm tùy ý thuộc cung lớn CD (K không trùng các điểm $C; D$ và B). Gọi I là giao điểm của AK và CD.

1. Chứng minh tứ giác $HIKB$ nội tiếp đường tròn.
2. Chứng minh $AI \cdot AK = AH \cdot AB$.
3. Chứng minh khi điểm K thay đổi trên cung lớn CD của đường tròn tâm O thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KCI luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Lời giải.



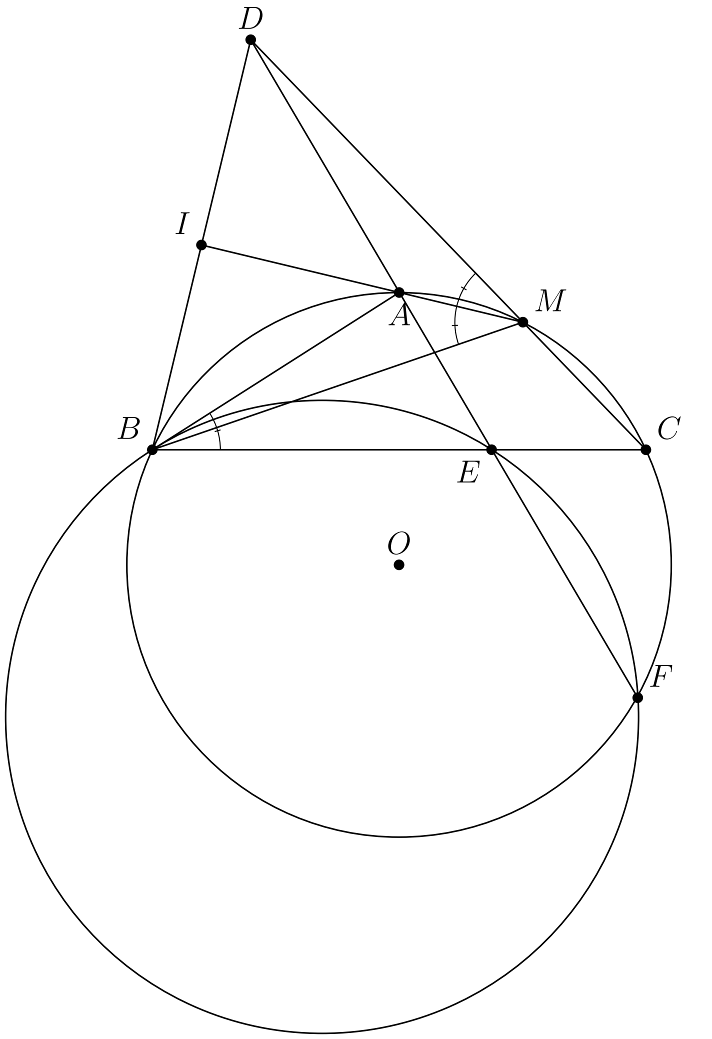
1. Tứ giác $HIKB$ có $\widehat{IHB} = 90^\circ$ (theo giả thiết).
   Mặt khác $\widehat{IKB} = \widehat{AKB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) suy ra tứ giác $HIKB$ nội tiếp đường tròn (tổng hai góc đối diện bằng 180°)(đpcm).
2. Xét $\triangle AIB$ và $\triangle AHK$ có góc A chung, có $\widehat{IKH} = \widehat{IBH}$ (cùng chắn cung HI của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $HIKB$). Suy ra $\triangle AIB$ đồng dạng với $\triangle AHK$. Suy ra $\dfrac{AI}{AH} = \dfrac{AB}{AK}$
   $\Rightarrow AI \cdot AK = AH \cdot AB$(đpcm).
3. Đường kính AB vuông góc với dây CD tại H (gt), suy ra $HC = HD \Rightarrow AC = AD$.
   Suy ra sđ$\overset{\frown}{AC} =$ sđ$\overset{\frown}{AD}$.
   Suy ra $\widehat{ACD} = \widehat{AKC}$ (cùng chắn hai cung bằng nhau).
   Mặt khác tia CA và điểm K nằm trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ là đường thẳng CI.
   Suy ra CA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác KCI tại tiếp điểm C.
   (Có thể chứng minh $AC^2 = AI \cdot AK$ để suy ra CA là tiếp tuyến).
   Gọi Q là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KCI, suy ra Q nằm trên đường thẳng vuông góc với CA tại C.
   Mặt khác $CB \perp CA$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).
   Vậy Q thuộc đường thẳng CB cố định (đpcm).

□

Bài 7. Cho đường tròn (O) bán kính R và một dây cung BC cố định. Gọi A là điểm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$. Lấy điểm M bất kì trên cung nhỏ $\overset{\frown}{AC}$, kẻ tia Bx vuông góc với tia MA ở I và cắt tia CM tại D.

1. Chứng minh $\widehat{AMD} = \widehat{ABC}$ và MA là tia phân giác của góc $\widehat{BMD}$.
2. Chứng minh A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và góc $\widehat{BCD}$ có độ lớn không phụ thuộc vào vị trí điểm M.
3. Tia DA cắt BC tại E và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là F, Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BEF.

Lời giải.



1. Ta có $\widehat{MAC} + \widehat{MCA} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{MC} + \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AM} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AC} = \widehat{ABC}$.
   Mặt khác $\widehat{AMD} = \widehat{MAC} + \widehat{MCA}$ (góc ngoài của tam giác ACM) $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AMD}$.
   Ta có $\widehat{AMB} = \widehat{ACM} = \widehat{AMB} = \widehat{AMD} \Rightarrow MA$ là tia phân giác của góc $\widehat{BMD}$.
2. Do $MI \perp BD \Rightarrow$ tam giác MBD cân tại M.
   Suy ra MI là đường trung trực của $BD \Rightarrow AB = AD$,
   mà $AB = AC \Rightarrow AB = AC = AD \Rightarrow A$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

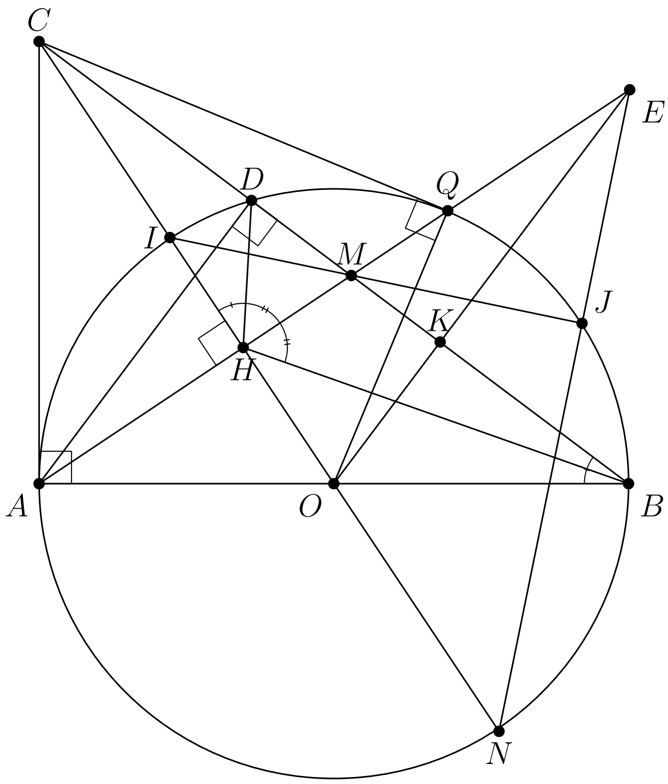
3. Trong tam giác vuông MID ta có $\widehat{IDM} + \widehat{IMD} = 90^o \Rightarrow \widehat{IDM} = 90^o - \widehat{IDM}$.
Vì $\widehat{IMD} = \widehat{ABC}$ (không đổi) nên $\widehat{IDM}$ không đổi hay $\widehat{BDM}$ không đổi.
Xét đường tròn nội tiếp tam giác BEF ta có $\widehat{BFE}$ là góc nội tiếp chắn cung BE.
Mà $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \widehat{AFB}$
nên AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BEF.

□

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường tròn tâm O đường kính AB cắt các đoạn BC và OC lần lượt tại D và I. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên OC; AH cắt BC tại M.

1. Chứng minh tứ giác $ACDH$ là nội tiếp và $\widehat{CHD} = \widehat{ABC}$.
2. Chứng minh hai tam giác OHB và OBC đồng dạng với nhau và HM là tia phân giác của góc $\widehat{BHD}$.
3. Gọi K là trung điểm của BD chứng minh $MD \cdot BC = MB \cdot CD$ và $MB \cdot MD = MK \cdot MC$.
4. Gọi E là giao điểm của AM và OK; J là giao điểm của IM và (O) (J khác I). Chứng minh hai đường thẳng OC và EJ cắt nhau tại một điểm trên (O).

Lời giải.



1. Ta có $\widehat{AHC} = 90°$ ($AH \perp OC$).
$\widehat{ADB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AB).
Vậy $AHDC$ nội tiếp đường tròn đường kính AC.
$\Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{CHD}$ (1) (góc nội tiếp cùng chắn cung CD).

Mặt khác $\widehat{DAC} = \widehat{ABC} = \dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AID}$ (2). (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung).
Từ $(1),(2) \Rightarrow \widehat{CHD} = \widehat{ABC}$.

2. Xét hai tam giác $\triangle AHO$ và $\triangle CAO$ có

$$\widehat{CHO} = \widehat{CAO} = 90^\circ.$$
$$\widehat{HAO} = \widehat{ACO} \text{ (cùng phụ góc } \widehat{COA}).$$

Do đó, $\triangle AHO \backsim \triangle CAO$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{AO}{CO} = \dfrac{HO}{AO}$.
Mà $OA = OB$ vì AB đường kính đường tròn tâm (O).
Vậy $\dfrac{OB}{CO} = \dfrac{HO}{OB}$.
Xét $\triangle OHB$ và $\triangle OBC$ có

$$\widehat{HOB} = \widehat{BOC}(\text{chung góc}\widehat{O})$$
$$\frac{OB}{CO} = \frac{HO}{OB}.$$

Vậy $\triangle OHB \backsim \triangle OBC$ (c-g-c).
Ta có $\widehat{CDA} = \widehat{CHD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CD của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ACDH$).
$\widehat{DBA} = \widehat{DAC}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung của đường tròn tâm O).
Mặt khác $\triangle OHB \backsim \triangle OBC \Rightarrow \widehat{OHB} = \widehat{CBO} = \widehat{DBA}$.
Vậy $\widehat{OHB} = \widehat{DHC}$ mà $\widehat{OHB} + \widehat{BHM} = \widehat{DHC} + \widehat{DHM} = 90^\circ$ $(AH \perp OC)$. $\Rightarrow \widehat{BHM} = \widehat{DHM} \Rightarrow HM$ là đường phân giác của góc $\widehat{BHD}$.

3. Xét tam giác BHD, vì HM là phân giác của $\widehat{BHD} \Rightarrow \dfrac{HB}{HD} = \dfrac{MB}{MD}$ $(\star)$.
Mặt khác $HM \perp HC \Rightarrow HC$ là đường phân giác ngoài tam giác BHD.
$\Rightarrow \dfrac{HB}{HD} = \dfrac{CB}{CD}$ $(\star\star)$.
Từ $(\star)$ và $(\star\star) \Rightarrow \dfrac{CB}{CD} = \dfrac{MB}{MD} \Rightarrow CB \cdot MD = CD \cdot MB$.
Gọi Q là giao điểm của AM với (O)
vì $AH \perp OC \Rightarrow CQ$ là tiếp tuyến của của $(O) \Rightarrow \widehat{CQO} = 90^\circ$.
Vậy năm điểm $C;O;A;K;Q$ nội tiếp một đường tròn đường kính CO.
Bốn điêm $B;A;D;Q$ cùng thuộc $(O) \Rightarrow MB \cdot MD = MA \cdot MQ$ (3).
Năm điểm $C;O;A;K;Q$ cùng thuộc một đường tròn $(O) \Rightarrow MC \cdot MK = MA \cdot MQ$ (4).
Từ (3) và (4) $\Rightarrow MB \cdot MD = MC \cdot MK$.

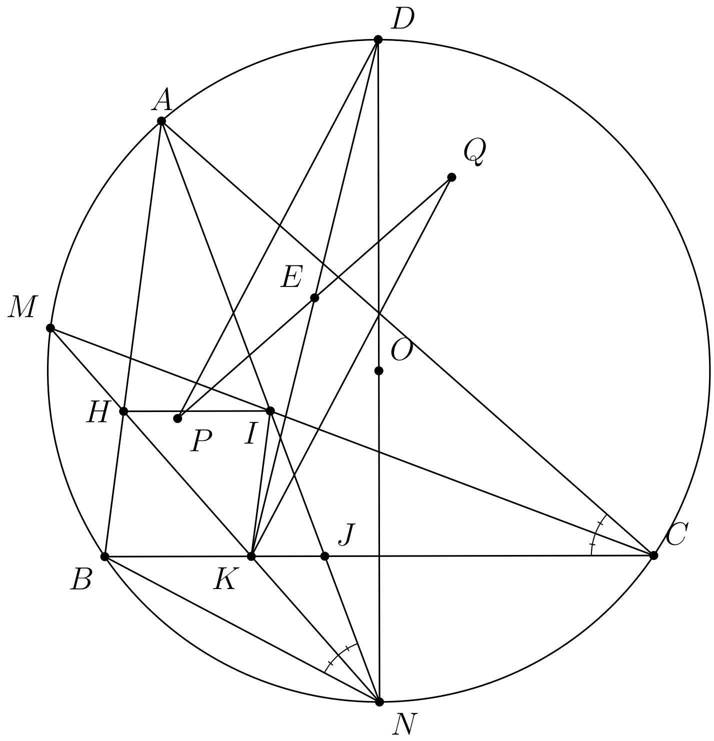
4. Gọi N là giao điểm của CO và $(O) \Rightarrow \widehat{IJN} = 90^\circ$ (5).
Mà $MI \cdot MJ = MD \cdot MB = MK \cdot MC$ (chứng minh trên).
Vậy $\triangle MCI \backsim \triangle MKJ$
$\Rightarrow \widehat{MCI} = \widehat{MJK} = \widehat{MEO} \Rightarrow MKJE$ nội tiếp.
$\Rightarrow \widehat{EJM} = 90^\circ(6)$ Từ (5) và (6) $\Rightarrow E;J;N$ thẳng hàng.

□

Bài 9. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác nhọn ABC. Gọi M và N lần lượt là điểm chính giữa của cung nhỏ AB và cung nhỏ BC. Hai dây AN và CM. cắt nhau tại điểm I. Dây MNcắt các cạnh AB và BC lần lượt tại các điểm H và K.

1. Chứng minh bốn điểm C, N, K, I cùng thuộc một đường tròn.
2. Chứng minh $NB^2 = NK \cdot NM$.
3. Chứng minh tứ giác $BHIK$ là hình thoi.
4. Gọi P, Q lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác MBK, tam giác MCK và E là trung điểm của đoạn PQ. Vẽ đường kính ND của đường tròn (O) . Chứng minh ba điểm D, E, K thẳng hàng.

Lời giải.



1. Chứng minh bốn điểm C, N, K, I cùng thuộc một đường tròn.
   Vì M là điểm chính giữa cung nhỏ AB của (O) (giả thiết) nên
   sđ$\overset{\frown}{AM}$ = sđ$\overset{\frown}{MB} \Rightarrow \widehat{ANM} = \widehat{BCM}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau).
   Xét tứ giác $CNKI$ ta có
   $\widehat{INK} = \widehat{ICK}$(vì $\widehat{ANM} = \widehat{BCM}$)
   $\Rightarrow CNKI$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh kề nhau cùng nhìn một cạnh dưới hai góc bằng nhau).
   Vậy C, N, K, I cùng thuộc một đường tròn.

2. Chứng minh $NB^2 = NK \cdot NM$.
   Vì N là điểm chính giữa cung nhỏ BC của (O) (giả thiết)
   $\Rightarrow$ sđ$\overset{\frown}{BN}$ = sđ$\overset{\frown}{NC}$
   $\Rightarrow \widehat{BMN} = \widehat{NBC}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau).
   Xét $\triangle BMN$ và $\triangle KBN$ ta có
   $\widehat{BNM}$ là góc chung.
   $\widehat{BMN} = \widehat{NBK}$ (vì $\widehat{BMN} = \widehat{NBC}$)
   $\Rightarrow \triangle BMN \backsim \triangle KBN$ (g-g)
   $\Rightarrow \dfrac{NB}{NK} = \dfrac{NM}{NB}$.
   Vậy $NB^2 = NK \cdot NM$.

3. Chứng minh tứ giác $BHIK$ là hình thoi.
 • Chứng minh $BHIK$ là hình bình hành.
 Gọi J là giao điểm của AN và BC.
 Ta có sđ$\overset{\frown}{AM}$ = sđ$\overset{\frown}{MB}$ (cmt).
 $\Rightarrow \widehat{ACM} = \widehat{BCM}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)
 $\Rightarrow CM$ là phân giác của $\widehat{ACB} \Rightarrow CI$ là phân giác trong của $\triangle CAJ$.
 $\Rightarrow \dfrac{IA}{IJ} = \dfrac{CA}{CJ}$ (1).
 Ta có sđ$\overset{\frown}{AM}$ = sđ$\overset{\frown}{MB}$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{ANM} = \widehat{BNM}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)
 $\Rightarrow NM$ là phân giác của $\widehat{ANB}$.
 $\Rightarrow NH$ là phân giác trong của $\triangle NAB \Rightarrow \dfrac{HA}{HB} = \dfrac{NA}{NB}$ (2).
 Ta có sđ$\overset{\frown}{BN}$ = sđ$\overset{\frown}{NC}$
 $\Rightarrow \widehat{BAN} = \widehat{CAN}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau).
 Xét $\triangle CAJ$ và $\triangle NAB$ ta có
 $\widehat{ACJ} = \widehat{ANB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$)
 $\widehat{BAN} = \widehat{CAJ}$ (cmt)
 $\Rightarrow \triangle CAJ \sim \triangle NAB$ (g-g).
 $\Rightarrow \dfrac{CA}{NA} = \dfrac{CJ}{NB} \Rightarrow \dfrac{CA}{CJ} = \dfrac{NA}{NB}$ (3).
 Từ $(1), (2), (3)$ suy ra $\dfrac{IA}{IJ} = \dfrac{HA}{HB} \Rightarrow HI \parallel BJ$ (định lí Thales đảo) hay $HI \parallel BK$ (4).
 Chứng mình tương tự các ý ở trên, ta được $KI \parallel BH$ (5).
 Từ (4) và (5) suy ra $BHIK$ là hình bình hành.
 • Chứng minh $BH = BK$.
 Ta có $\triangle KBN \backsim \triangle BMN$ (cmt)
 $\Rightarrow \dfrac{BK}{BM} = \dfrac{BN}{MN} \Rightarrow BK = \dfrac{BM.BN}{MN}$ (6).
 Chứng minh tương tự câu $b)$ ta có
 $\triangle HMB \backsim \triangle BMN$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{BH}{BN} = \dfrac{BM}{MN} \Rightarrow BH = \dfrac{BM \cdot BN}{MN}$ (7).
 Từ (6) và (7) suy ra $BH = BK$.
 Mà $BHIK$ là hình bình hành nên $BHIK$ là hình thoi.

4. Gọi P, Q lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác MBK, tam giác MCK và E là trung điểm của đoạn PQ. Vẽ đường kính ND của đường tròn (O). Chứng minh ba điểm D, E, K thẳng hàng.
 Ta có $\widehat{NBK} = \widehat{BMK}$ (cmt) $\Rightarrow BN$ là tiếp tuyến tại B của $(P) \Rightarrow BN \perp BP$.
 Mà $BN \perp BD$ (vì $\widehat{DBN} = 90^\circ$ góc nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm (O)
 nên B, P, D thẳng hàng.
 Ta có $\triangle PBK$ cân tại P $(PB = PK) \Rightarrow \widehat{BPK} = 180^\circ - 2 \cdot \widehat{PBK}$ (8).
 Ta có
 $\begin{cases} NB = NC \left(s\text{Ø}\overset{\frown}{NB} = s\text{Ø}\overset{\frown}{NC}\right) \\ OB = OC \end{cases}$
 $\Rightarrow ON$ là đường trung trực của đoạn $BC \Rightarrow DB = DC$ (D thuộc đường thẳng ON)
 $\Rightarrow \triangle DBC$ cân tại $D \Rightarrow \widehat{BDC} = 180^o - 2 \cdot \widehat{DBC}$ (9).
 Từ (8) và (9) suy ra $\widehat{BPK} = \widehat{BDC}$.
 Mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $PK \parallel DC \Rightarrow PK \parallel DQ$ (10).
 Chứng minh tương tự ta có C, Q, D thẳng hàng và $QK \parallel DP$ (11).
 Từ (10) và (11) suy ra $DPKQ$ là hình bình hành.

Mà E là trung điểm của đường chéo PQ nên E cũng là trung điểm của đường chéo DK. Vậy D, E, K thẳng hàng.

□

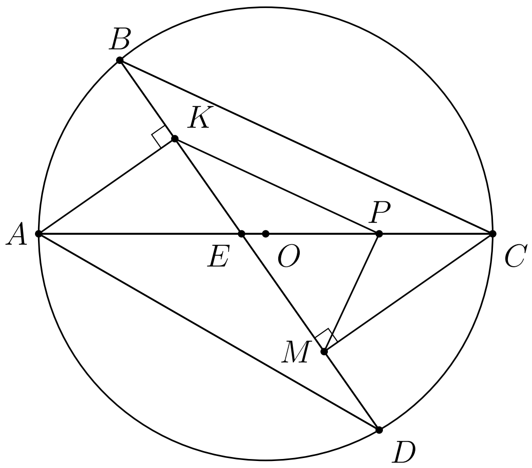
Bài 10. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) đường kính $AC = 2R$. Gọi K và M lần lượt là chân đường cao hạ từ A và C xuống BD, E là giao điểm của AC và BD, biết K thuộc đoạn $BE(K \neq B, K \neq E)$. Đường thẳng qua K song song với BC cắt AC tại P.

1. Chứng minh tứ giác $AKPD$ nội tiếp.

2. Chứng minh $KP \perp PM$.

3. Biết $\widehat{ABD} = 60^\circ$ và $AK = x$. Tính BD theo R và x.

Lời giải.



1. Chứng minh tứ giác $AKPD$ nội tiếp.
   Xét tứ giác $AKPD$ có $\widehat{APK} = \widehat{ACB}$ (2 góc ở vị trí đồng vị)
   Mặt khác: $\widehat{ACB} = \widehat{ADK}$(góc nội tiêó cùng chắn cung AB)
   $\Rightarrow \widehat{ADK} = \widehat{APK}$
   $\Rightarrow ADPK$ là tứ giác nội tiếp.

2. Chứng minh $KP \perp PM$.
   Theo câu a), tứ giác $AKPD$ nội tiếp nên $\widehat{APD} = \widehat{AKD} = 90^\circ$ và $\widehat{DKP} = \widehat{DAP}$
   Xét tứ giác $DMPC$ có $\widehat{DMC} = \widehat{DPC} = 90^\circ$
   $\Rightarrow DMPC$ nội tiếp
   $\Rightarrow \widehat{PMK} = \widehat{DCA}$
   mà $\widehat{DCA} + \widehat{DAC} = 90^\circ$ và $\widehat{PMK} + \widehat{PKM} = 90^\circ$
   $\Rightarrow KP \perp PM$ (đpcm)

3. Biết $\widehat{ABD} = 60^\circ$ và $AK = x$. Tính BD theo R và x .
   Xét tam giác ADC vuông tại D có $\widehat{ACD} = \widehat{ABD} = 60^\circ$ nên
   $AD = 2R.\sin 60 = R\sqrt{3}$ và $CD = 2R.\cos 60 = R$.
   Xét tam giác vuông AKB có $AB = \dfrac{AK}{\sin 60} = \dfrac{2\sqrt{3}x}{3}$.
   Xét tam giác ABC vuông tại C có $BC = \sqrt{4R^2 - \dfrac{4x^2}{3}}$.
   Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $ABCD$, ta có:

$AC.BD = AD.BC + AB.CD$

$\Leftrightarrow 2R.BD = R\sqrt{3}\sqrt{4R^2 - \dfrac{4x^2}{3}} + \dfrac{2\sqrt{3}x}{3}.R$

$\Leftrightarrow BD = \sqrt{3R^2 - x^2} + \dfrac{x}{\sqrt{3}}$

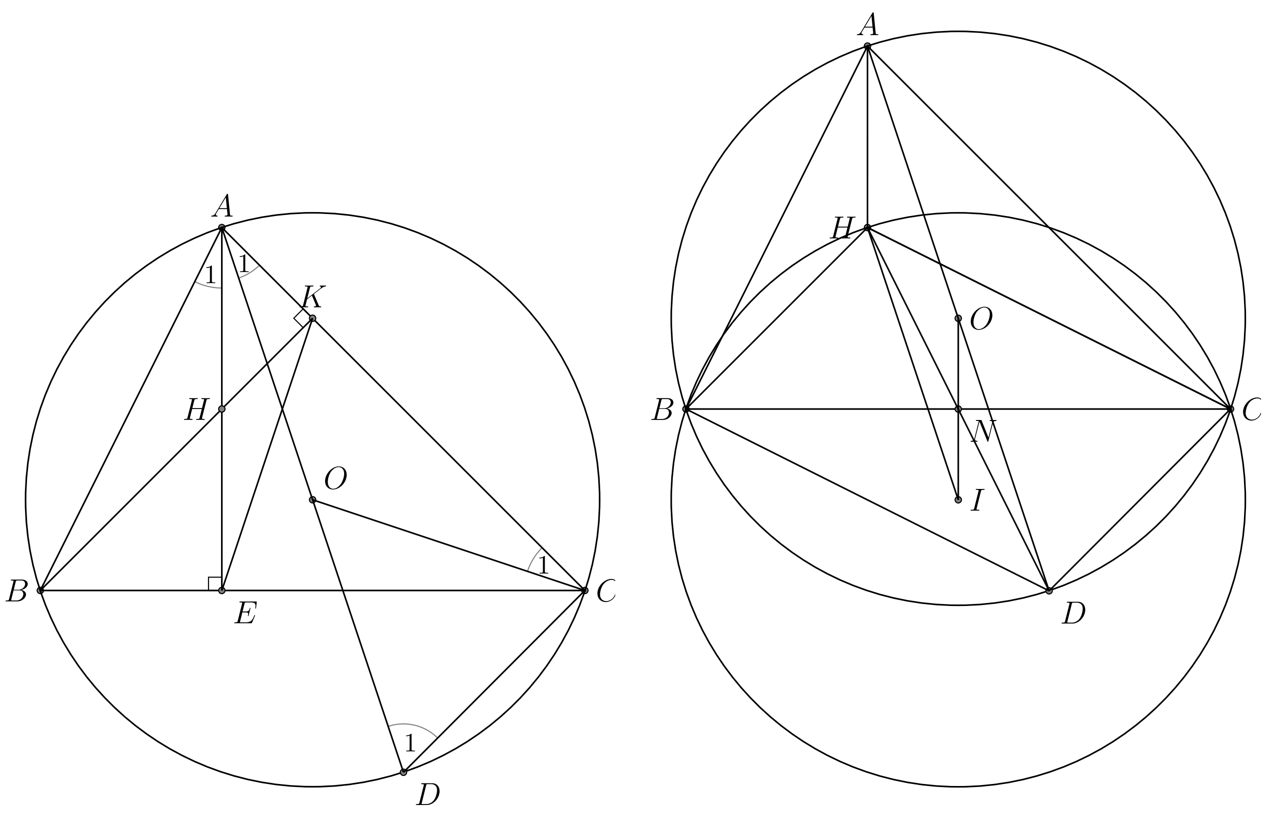
□

Bài 11.

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (C) tâm O bán kính R. Hai đường cao AE và BK của tam giác ABC cắt nhau tại H (với E thuộc BC, K thuộc AC).

1. Chứng minh tứ giác $ABEK$ nội tiếp được trong một đường tròn.
2. Chứng minh $CE.CB = CK.CA$.
3. Chứng minh $\widehat{OCA} = \widehat{BAE}$.
4. Cho B, C cố định và A di động trên (C) nhưng vẫn thỏa mãn điều kiện tam giác ABC nhọn, khi đó H thuộc một đường tròn (T) cố định. Xác định tâm I và tính bán kính r của đường tròn (T), biết $R = 3$ cm.

Lời giải.



1. Tứ giác $ABEK$ có: $\begin{cases} \widehat{AEB} = 90^\circ \ (AE \perp BC) \\ \widehat{AKB} = 90^\circ \ (BK \perp AC) \end{cases}$

   $\Rightarrow$ Tứ giác $ABEK$ nội tiếp một đường tròn.

2. ΔCEA và ΔCKB có:
$\begin{cases} \widehat{ACB} \text{ chung} \\ \widehat{CEA} = \widehat{CKB} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta CEA \backsim \Delta CKB$ (g.g)
$\Rightarrow \dfrac{CE}{CK} = \dfrac{CA}{CB} \Rightarrow CE.CB = CK.CA$

3. Vẽ đường kính AD của (O).
Tam giác ABE vuông tại E nên $\widehat{A_1} + \widehat{ABC} = 90^\circ$.
Mà $\widehat{ABC} = \widehat{D_1}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC của (O)) $\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{D_1} = 90^\circ$
ΔACD có $\widehat{ACD} = 90^\circ$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{A_2} + \widehat{D_1} = 90^\circ$.
Mặt khác $\widehat{A_2} = \widehat{C_1}$ (ΔOAC cân tại O) $\Rightarrow \widehat{C_1} + \widehat{D_1} = 90^\circ$
Từ đó suy ra: $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$

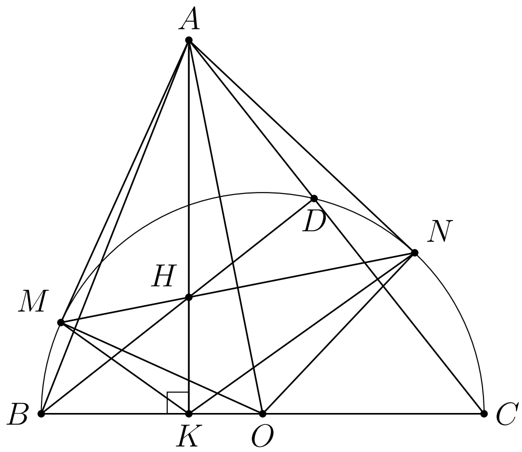
4. Gọi I là điểm đối xứng với O qua BC, OI cắt BC tại N
$\Rightarrow N$ là trung điểm của OI, BC và các điểm I, N cố định.
Ta có $BH \parallel CD$ (cùng $\perp AC$)
Tương tự: $CH \parallel BD$
$\Rightarrow$ Tứ giác $BHCD$ là hình bình hành
$\Rightarrow N$ là trung điểm của BC thì N cũng là trung điểm của HD.
ΔAHD có ON là đường trung bình$\Rightarrow AH = 2ON \Rightarrow AH = OI\,(= 2ON)$
Lại có: $AH \parallel OI$ (cùng $\perp BC$) $\Rightarrow$ Tứ giác $AHIO$ là hình bình hành
$\Rightarrow IH = OA = R = 3$ (cm) $\Rightarrow H$ thuộc đường tròn $(I; 3$ cm$)$ cố định

□

Bài 12. Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ và đường cao AK. Vẽ đường tròn tâm O đường kính BC. Từ A kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O) (M, N là các tiếp điểm; M và B nằm trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AO). Gọi H là giao điểm của hai đường thẳng MN và AK. Chứng minh rằng:

1. Tứ giác $AMKO$ nội tiếp đường tròn.
2. KA là tia phân giác của $\widehat{MKN}$.
3. $AN^2 = AK \cdot AH$.
4. H là trực tâm của tam giác ABC.

Lời giải.



1. Chứng minh tứ giác $AMKO$ nội tiếp đường tròn.
   AM, AN là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\widehat{AMO} = \widehat{ANO} = 90^\circ$.
   AK là đường cao của tam giác ABC nên $\widehat{AKO} = \widehat{AKC} = 90^\circ$.
   Ba điểm điểm M, K, N cùng nhìn đoạn AO dưới một góc vuông nên năm điểm điểm M, K, N, A, O thuộc đường tròn đường kính AO.
   Vậy tứ giác $AMKO$ nội tiếp đường tròn.

2. Chứng minh KA là tia phân giác của $\widehat{MKN}$.
   AM, AN là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $AM = AN$. (1)
   Theo chứng minh ở câu a), năm điểm M, K, N, O, A cùng thuộc một đường tròn nên ta có tứ giác $AMKN$ nội tiếp. (2)
   Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AKM} = \widehat{AKN}$ (các góc nội tiếp cùng chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau). Vậy KA là tia phân giác của $\widehat{MKN}$.

3. Chứng minh $AN^2 = AH.AK$
   $\begin{cases} \widehat{ANH} = \widehat{AKM} & \text{(tứ giác } AMKN \text{ nội tiếp)} \\ \widehat{AKM} = \widehat{AKN} & \text{(chứng minh ý b)} \end{cases} \Rightarrow \widehat{AKN} = \widehat{ANH}.$
   ΔAHN và ΔANK có $\widehat{AKN} = \widehat{ANH}$, $\widehat{HAN} = \widehat{KAN}$ nên $\Delta AHN \backsim \Delta ANK$ (g.g). Suy ra $\dfrac{AN}{AK} = \dfrac{AH}{AN}$, hay $AN^2 = AH.AK$. (3)

4. Chứng minh H là trực tâm của tam giác ABC.
   Gọi D là giao điểm của AC và đường tròn (O).
   ΔAND và ΔACN có $\widehat{NAD} = \widehat{NAC}$, $\widehat{AND} = \widehat{ACN}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau) nên $\Delta AND \backsim \Delta ACN$ (g.g). Suy ra $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AD}{AN}$, hay $AN^2 = AD.AC$. (4)
   Từ (3) và (4) suy ra $AH.AK = AD.AC$, hay $\dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AD}{AK}$.
   ΔAHD và ΔACK có $\begin{cases} \widehat{HAD} = \widehat{KAC} \\ \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AD}{AK} \end{cases}$ nên $\Delta AHD \backsim \Delta ACK$ (c.g.c).
   Suy ra $\widehat{ADH} = \widehat{AKC} = 90^\circ$. Dẫn đến $\widehat{HDC} = 90^\circ$. (5)
   Điểm D thuộc đường tròn đường kính BC nên $\widehat{BDC} = 90^\circ$. (6)
   Từ (5) và (6) suy ra B, H, D thẳng hàng. Nghĩa là $BH \perp AC$. Lại có $AH \perp BC$ nên H là trực tâm của tam giác ABC.

□

Bài 13. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là hai tiếp điểm). Lấy điểm C trên cung nhỏ AB (C không trùng với A, B). Từ điểm C kẻ CD vuông góc với AB, CE vuông góc với MA, CF vuông góc với MB ($D \in AB, E \in MA, F \in MB$). Gọi I là giao điểm của AC và DE, K là giao điểm của BC và DF. Chứng minh rằng

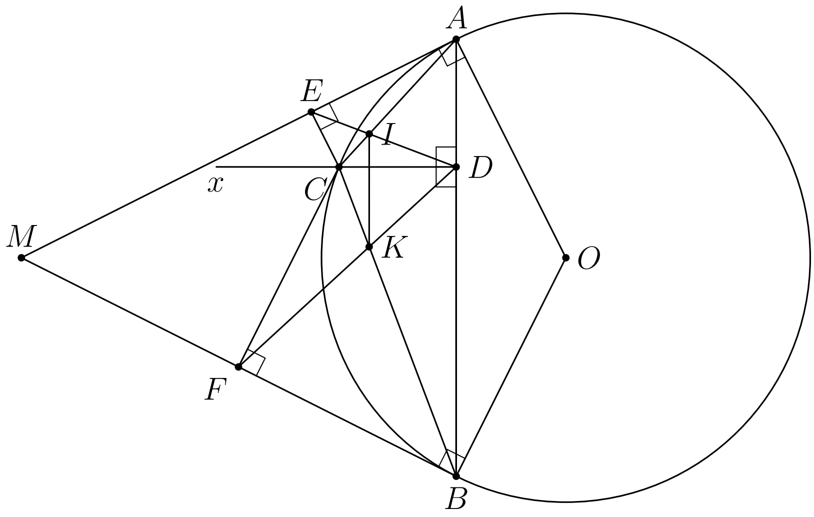
1. Tứ giác $ADCE$ nội tiếp đường tròn.

2. Hai tam giác CDE và CFD đồng dạng.

3. Tia đối của tia CD là tia phân giác của góc $\widehat{ECF}$

4. Đường thẳng IK song song với đường thẳng AB.

Lời giải.



1. Tứ giác $ADCE$ có $\widehat{ADC} = \widehat{AEC} = 90^\circ$ nên $ADCE$ là tứ giác nội tiếp.

2. Tứ giác $ADCE$ nội tiếp nên $\widehat{EAC} = \widehat{EDC}$.
   Tương tự, tứ giác $BDCF$ nội tiếp, suy ra $\widehat{CFD} = \widehat{CBD}$.
   Mặt khác, theo tính chất của góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung thì $\widehat{EAC} = \widehat{CBD}$.
   Do đó $\widehat{EDC} = \widehat{CFD}$.
   Chứng minh tương tự thì $\widehat{CED} = \widehat{CDF}$.
   Vậy hai tam giác $\triangle CDE$ và $\triangle CFD$ đồng dạng với nhau.

3. Gọi Cx là tia đối của tia CD. Tam giác $\triangle CDE$ đồng dạng với $\triangle CFD$ suy ra $\widehat{DCE} = \widehat{DCF}$.
   Do đó $\widehat{ECx} = \widehat{FCx}$. Vậy Cx là tia phân giác của góc $\widehat{ECF}$.

4. Ta có $\widehat{ICK} + \widehat{IDK} = \widehat{ICK} + \widehat{IDC} + \widehat{KDC} = \widehat{ACB} + \widehat{ABC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$. Suy ra tứ giác $ICKD$ nội tiếp, do đó $\widehat{CIK} = \widehat{KDC} = \widehat{CBF} = \widehat{CAB}$. Vậy $IK \parallel AB$.

□

Bài 14. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác nhọn ABC. Gọi M và N lần lượt là điểm chính giữa của cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ và cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$. Hai dây AN và CM cắt nhau tại điểm I. Dây MN cắt các cạnh AB và BC lần lượt tại các điểm H và K.

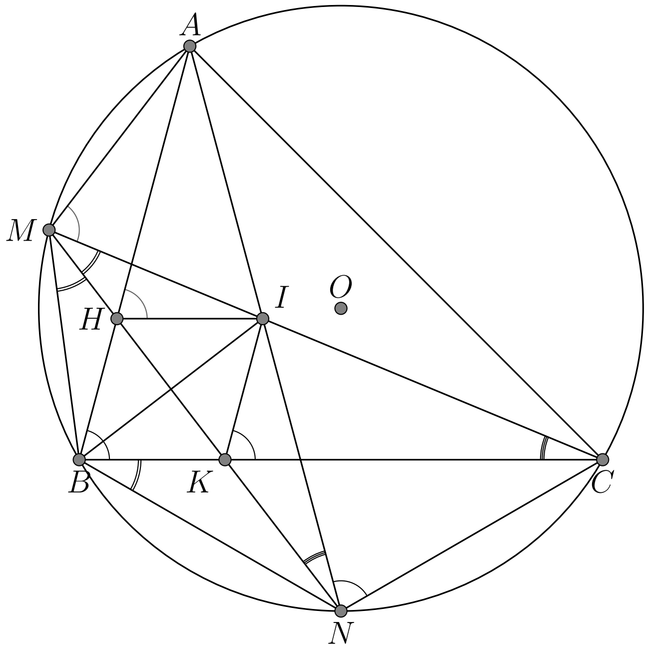
1. Chứng minh các điểm C, N, K, I cùng thuộc một đường tròn.

2. Chứng minh $NB^2 = NK.MN$.

3. Chứng minh tứ giác $BHIK$ là hình thoi.

4. Gọi PQ lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác MBK , tam giác MCK và E là trung điểm của đoạn PQ. Vẽ đường kính ND của đường tròn (O). Chứng minh ba điểm D, E, K thẳng hàng.

Lời giải.



1. Chứng minh bốn điểm C, N, K, I cùng thuộc một đường tròn. Ta có M là điểm chính giữa cung $AB \Rightarrow AM = BM \Rightarrow \widehat{MNA} = \widehat{MCB} \Rightarrow \widehat{KNI} = \widehat{ICK}$. Tứ giác $CNKI$ có C và N là hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh KI dưới hai góc bằng nhau nên $CNKI$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp).

   Do đó bốn điểm C, N, I, K cùng thuộc một đường tròn.

2. Chứng minh $NB^2 = NK.MN$.

   Ta có N là điểm chính giữa cung $BC \Rightarrow \overset{\frown}{BN} = \overset{\frown}{CN} \Rightarrow \widehat{BMN} = \widehat{CMN}$ (góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

   Mà $\widehat{CBN} = \widehat{CMN}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{CN}$)

   $\Rightarrow \widehat{CBN} = \widehat{BMN}$ (cùng bằng góc $\widehat{CNN}$) $\Rightarrow \widehat{KBN} = \widehat{BMN}$

   Xét $\triangle KBN$ và $\triangle BMN$ có: $\begin{cases} \widehat{N} \text{ chung} \\ \widehat{KBN} = \widehat{BMN} \end{cases}$

   $\Rightarrow \triangle KBN \sim \triangle BMN \Rightarrow \dfrac{KN}{BN} = \dfrac{BN}{MN} \Rightarrow NB^2 = NK.NM$(điều phải chứng minh).

3. Chứng minh tứ giác $BHIK$ là hình thoi.

   Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{ANC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AC}$)

   Mà $\widehat{AMC} = \widehat{AHI}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{IC}$)

   $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{IKC}$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $HB \,//\, IK$ (1).

   Chứng minh tương tự phần 1 ta có tứ giác $AMHI$ nội tiếp

   $\Rightarrow \widehat{ANC} = \widehat{IKC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AI}$)

   Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{AMC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AC}$)

   $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AHI}$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $BK \,//\, HI$ (2)

   Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $BHIK$ là hình bình hành.

Mặt khác AN, CM lần lượt là các tia phân giác của các góc A và C trong tam giác ABC nên I là giao điểm ba đường ph56.90463an giác, do đó BI là tia phân giác của góc B.

Vậy tứ giác $BHIK$ là hình thoi (dấu hiệu nhận biết hình thoi).

4. Chứng minh ba điểm D, E, K thẳng hàng.

   Vì N là điểm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{NC}$ nên DN là trung trực của $BC \Rightarrow DN$ là phân giác $\widehat{BDC}$. Ta có $\widehat{KQC} = 2\widehat{KMC}$ (góc nội tiếp bằng nữa góc ở tâm của đường tròn (Q))

   Lại có $\widehat{NDC} = \widehat{KMC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{BC}$)

   Mà $\widehat{BDC} = 2\widehat{NDC} \Rightarrow \widehat{KQC} = \widehat{BDC}$

   Xét tam giác $\triangle BDC$ và $\triangle KQC$ là các tam giác cân tại D và Q có hai góc $\widehat{BCD} = \widehat{BCQ}$ do vậy D, Q, C thẳng hàng nên $KQ \parallel PK$

   Chứng minh tương tự ta có ta có D, P, B thẳng hàng và $DQ \parallel PK$

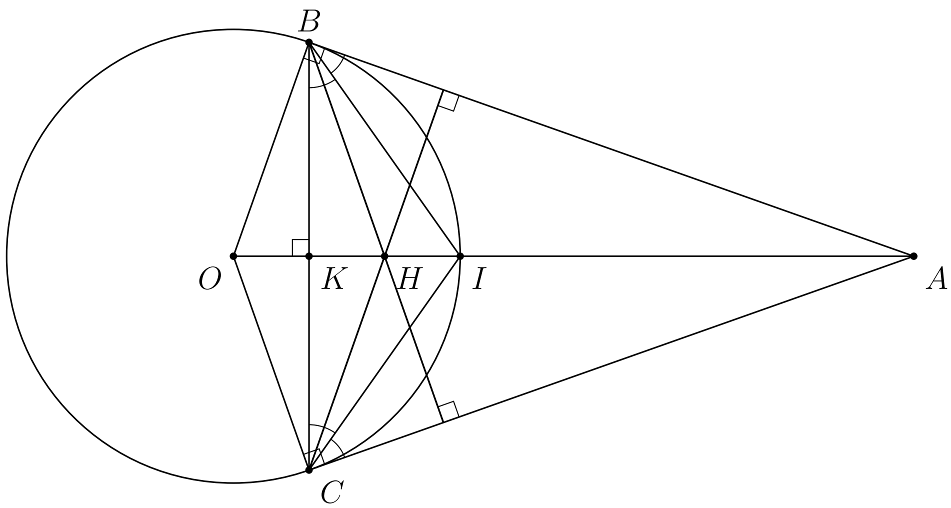
   Do đó tứ giác $PDQK$ là hình bình hành nên E là trung điểm của PQ cũng là trung điểm của DK . Vậy D, E, K thẳng hàng (điều phải chứng minh).

□

Bài 15. Cho đường tròn tâm O và điểm A nằm ngoài đường tròn. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB và AC (B, C là các tiếp điểm).

1. Chứng minh tứ giác $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.
2. Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Chứng minh tứ giác $BOCH$ là hình thoi.
3. Gọi I là giao điểm của đoạn OA với đường tròn (O). Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
4. Cho $OB = 3$ cm, $OA = 5$ cm. Tính diện tích tam giác ABC.

Lời giải.



1. Vì AB, AC là các tiếp tuyến của (O) (tại B, C) nên $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^\circ$ $\Rightarrow ABOC$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AO.

2. Vì $\begin{cases} OB \perp AB \\ CH \perp AB \end{cases} \Rightarrow OB \parallel CH$ (1). Tương tự $OC \parallel BH$ (2).
   Từ (1) và (2) ta có $BOCH$ là hình bình hành. Mà $OB = OC$ nên $BOCH$ là hình thoi.

3. Vì AB, AC là các tiếp tuyến của (O) nên AO là tia phân giác $\widehat{BAC}$. Vì I là giao điểm của đoạn AO với (O) nên I là điểm chính giữa của cung (nhỏ) $\overset{\frown}{BC} \Rightarrow \widehat{IBC} = \dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{BC}$ (3) (tính chất góc nội tiếp).
   Vì I là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BC}$ và AB là tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{ABI} = \dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{BC}$ (4).
   Từ (3) và (4) ta suy ra BI là tia phân giác $\widehat{ABC}$, do vậy I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

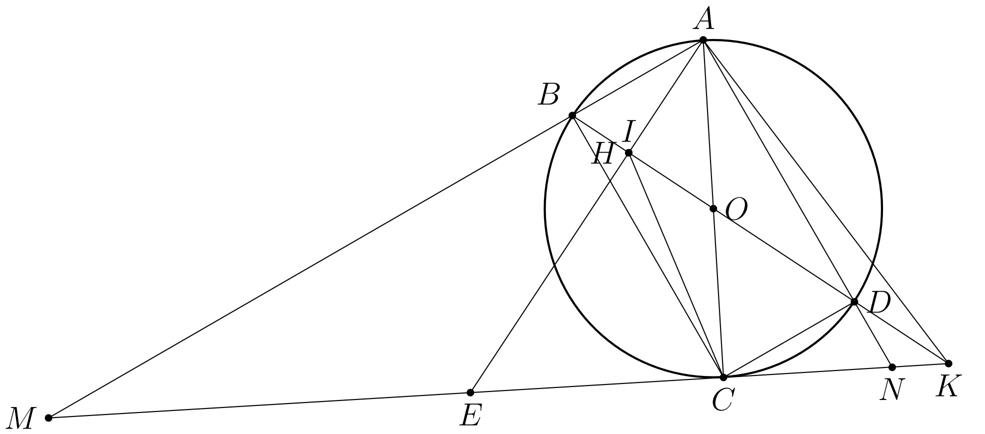
4. Gọi K là giao điểm của OA và $BC \Rightarrow K$ là trung điểm của BC và $BK \perp AO$.
   Áp dụng định lý Pitago cho tam giác AOB vuông tại B: $AB = \sqrt{AO^2 - OB^2} = 4$ cm.
   Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác AOB vuông tại B:
   $\dfrac{1}{BK^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{OB^2} = \dfrac{25}{144} \Rightarrow BK = \dfrac{12}{5} \Rightarrow AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \dfrac{16}{5}$ cm.
   Diện tích tam giác ABC là $S(\Delta ABC) = \dfrac{1}{2} \cdot AK \cdot BC = \dfrac{192}{25}$ cm^2.

□

Bài 16. Cho hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O. Tiếp tuyến của đường tròn tâm O tại điểm C cắt các đường thẳng AB và AD theo thứ tự tại M, N. Dựng AH vuông góc với BD tại điểm H; K là giao điểm của hai đường thẳng MN và BD.

1. Chứng minh tứ giác $AHCK$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh rằng: $AD \cdot AN = AB \cdot AM$.
3. Gọi E là trung điểm của MN. Chứng minh ba điểm A, H, E thẳng hàng.
4. Cho $AB = 6$ cm và $AD = 8$ cm. Tính độ dài đoạn MN.

Lời giải.



1. Xét tứ giác $AHCK$ ta có $\widehat{AHK} = 90^\circ$,
   CK là tiếp tuyến của đường tròn O và AC là đường kính nên $AC \perp CK \Rightarrow \widehat{ACK} = 90^\circ$.
   Vậy H và C cùng nhìn AK dưới một góc vuông nên tứ giác $AHCK$ nội tiếp một đường tròn.

2. Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ACB}$,
   đồng thời $\widehat{AMN} = \widehat{ACD}$ (cùng phụ với $\widehat{BAC}$) $\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{AMN}$.
   Xét hai tam giác ΔAMN và ΔADB có $\widehat{DAB} = \widehat{MAN} = 90^\circ$ và $\widehat{ADB} = \widehat{AMN}$,
   Nên hai tam giác ΔAMN và ΔADB đồng dạng $\Rightarrow \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{AN}{AB} \Leftrightarrow AD \cdot AN = AB \cdot AM$.

3. Giả sử AE cắt BD tại I, ta chứng minh H trùng với I. Thật vậy
   Ta có ΔAMN vuông tại A có E là trung điểm của cạnh $MN \Rightarrow \Delta AEN$ cân tại $E \Rightarrow \widehat{EAN} = \widehat{ENA}$.
   Theo chứng minh trên ta có $\widehat{ADB} = \widehat{AMN}$.
   Do đó $\widehat{EAN} + \widehat{ADB} = \widehat{AMN} + \widehat{ENA} = 90^\circ$ hay $\widehat{AID} = 90^\circ$.
   Suy ra $AI \perp BD$ tại I, do đó H và I trùng nhau hay A, H, E thẳng hàng.

4. Đặt $AN = x > 0$ và $AM = y > 0$, ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 10$.
   Ta có $\begin{cases} AD \cdot AN = AB \cdot AM \\ \dfrac{1}{AN^2} + \dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{1}{AC^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 3y \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{100} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{25}{2} \\ y = \dfrac{50}{3} \end{cases}$.
   Mặt khác $AM \cdot AN = AC \cdot MN \Rightarrow MN = \dfrac{125}{6}(cm)$.

□

Bài 17. Cho tam giác ABC $(AB < AC)$ nội tiếp trong đường tròn tâm (O), M là một điểm nằm trên cung BC không chứa điểm A. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

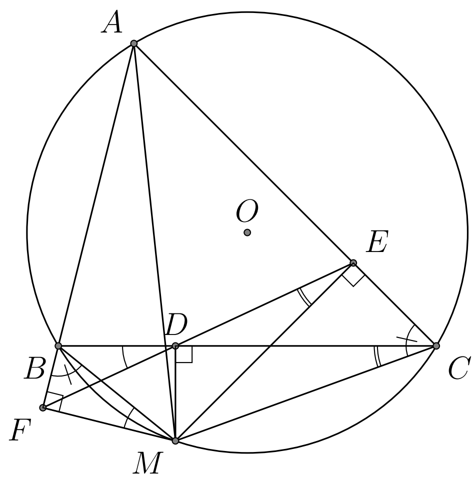
a) Bốn điểm M, D, B, F thuộc một đường tròn và bốn điểm M, D, E, C thuộc một đường tròn;

b) Ba điểm D, E, F thẳng hàng;

c) $\dfrac{BC}{MD} = \dfrac{CA}{ME} + \dfrac{AB}{MF}$.

Lời giải.

1. Ta có: D và F lần lượt là hình chiếu của M lên BC và AB.
   $\Rightarrow \widehat{BDM} + \widehat{BFM} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$
   $\Rightarrow DMFB$ nội tiếp đường tròn.
   $\Rightarrow M, D, B, F$ thuộc một đường tròn.
   Ta có: D và E lần lượt là hình chiếu của M lên BC và AC.
   $\Rightarrow \widehat{MDC} = 90^\circ = \widehat{MEC}$
   $\Rightarrow MDEC$ nội tiếp đường tròn.
   $\Rightarrow M, D, E, C$ thuộc một đường tròn.



b) Ta có: $\widehat{FMB} = \widehat{FDB}$ (do $MDBF$ nội tiếp). (i)
   $\widehat{CME} = \widehat{CDE}$ (do $DECM$ nội tiếp). (ii)
   Mặt khác, tứ giác $ACMB$ nội tiếp (O) nên $\widehat{FBM} = \widehat{ACM}$. (1)
   Xét hai tam giác vuông FBM và ECM, ta có: $\begin{cases} \widehat{FBM} + \widehat{FMB} = 90^\circ \\ \widehat{CME} + \widehat{ECM} = 90^\circ \end{cases}$. (2)
   Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{FMB} = \widehat{CME}$. (iii)
   Từ (i), (ii) và (iii) suy ra $\widehat{FDB} = \widehat{CDE}$.
   $\Rightarrow E, F, D$ thẳng hàng (đpcm).

c) Ta có:

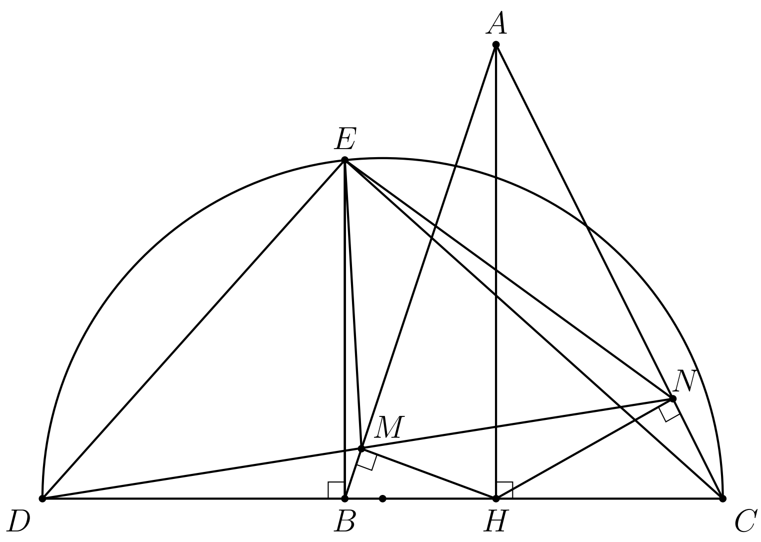
$$\begin{aligned}
\frac{AC}{ME}+\frac{AB}{MF} &= \frac{AE-EC}{ME}+\frac{AF+FB}{MF}\\
&= \frac{AE}{ME}-\frac{EC}{ME}+\frac{AF}{MF}+\frac{FB}{MF}\\
&= \tan\widehat{AME}-\tan\widehat{CME}+\tan\widehat{AMF}+\tan\widehat{FMB}\\
&= \tan\widehat{AME}+\tan\widehat{AMF} \text{ (cmt câu b)}\\
&= \tan\widehat{BMD}+\tan\widehat{MDC} \text{ (do tứ giác } ABMC \text{ nội tiếp)}\\
&= \frac{BD}{MD}+\frac{CD}{MD}\\
&= \frac{BC}{MD} \text{ (đpcm).}
\end{aligned}$$

□

Bài 18. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$), dựng AH vuông góc với BC tại điểm H. Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của điểm H trên AB và AC. Đường thẳng MN cắt đường thẳng BC tại điểm D. Trên nửa mặt phẳng bờ CD chứa điểm A vẽ nửa đường tròn đường kính CD. Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với CD cắt nửa đường tròn trên tại điểm E.

1. Chứng minh rằng tứ giác $AMHN$ là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh $\widehat{EBM}=\widehat{DNH}$.
3. Chứng minh rằng $DM.DN = DB.DC$.
4. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNE. Chứng minh rằng $OE \perp DE$.

Lời giải.



1. Xét tứ giác $AMHN$ có
$\widehat{AMH}=90^\circ$ (gt)
$\widehat{ANH}=90^\circ$ (gt)
suy ra $\widehat{AMH}+\widehat{ANH}=180^\circ$.
Mà hai góc ở vị trí đối nhau nên $AMHN$ là tứ giác nội tiếp.

2. Ta có $\begin{cases} EB \perp DC \\ AH \perp CD \end{cases} \Rightarrow EB \parallel AH$, suy ra $\widehat{EBA} = \widehat{BAH}$ (1) (so le trong).
   Tứ giác $AMHN$ nội tiếp nên ta có $\widehat{MAH} = \widehat{MNH}$ (2)(hai góc nội tiếp cùng chắn một cung).
   Từ (1)và (2) suy ra $\widehat{EBM} = \widehat{DNH}$.

3. Ta có
$$\left.\begin{array}{l} \widehat{DMB} = \widehat{AMN} \text{ (đối đỉnh)} \\ \widehat{AMN} = \widehat{AHN} \text{ (do tứ giác } AMHN \text{nội tiếp)} \\ \widehat{AHN} = \widehat{NCH} \text{ (do cùng phụ với góc } \widehat{NHC}) \end{array}\right\} \text{ suy ra } \widehat{DMB} = \widehat{NCH}.$$
   Xét tam giác DMB và DCN có $\widehat{DMB} = \widehat{NCD}$ và chung góc $\widehat{NDC}$, suy ra ΔDMB đồng dạng với ΔDCN theo trường hợp góc-góc. Từ đó suy ra $\dfrac{DM}{DC} = \dfrac{DB}{DN} \Rightarrow DM.DN = DB.DC$.

4. Ta có ΔDEC vuông tại E, EB là đường cao nên $DE^2 = DB.DC$ mặt khác $DM.DN = DB.DC$ suy ra $DE^2 = DM.DN \Rightarrow \dfrac{DM}{DE} = \dfrac{DE}{DN}$.
   Từ đó suy ra ΔDEM đồng dạng với ΔDNE do $\dfrac{DM}{DE} = \dfrac{DE}{DN}$ và chung góc $\widehat{NDE}$.
   Suy ra $\widehat{DEM} = \widehat{ENM}$ suy ra DE là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác MNE tại E hay $DE \perp OE$.

□

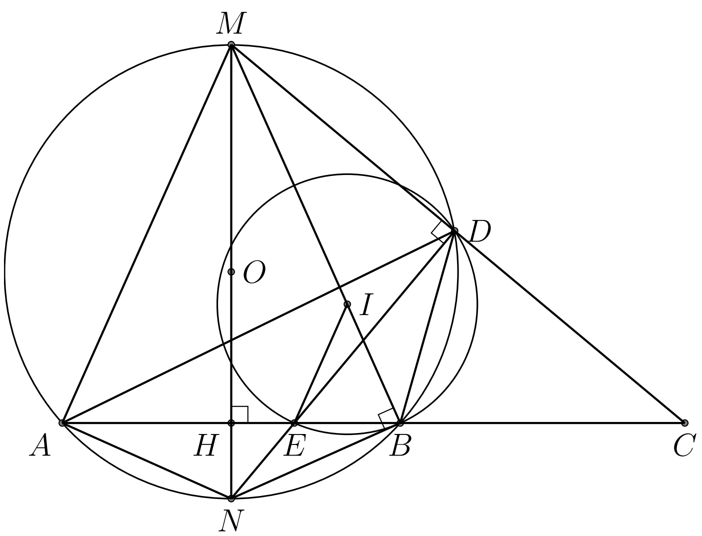
Bài 19. Tam giác AMB cân tại M nội tiếp trong đường tròn $(O; R)$. Kẻ MH vuông góc AB $(H \in AB)$, MH cắt đường tròn tại N. Biết $MA = 10$ cm, $AB = 12$ cm.

1. Tính MH và bán kính R của đường tròn.

2. Trên tia đối tia BA lấy điểm C. Tia MC cắt đường tròn tại D, ND cắt AB tại E. Chứng minh tứ giác $MDEH$ nội tiếp và chứng minh các hệ thức sau: $NB^2 = NE.ND$ và $AC.BE = BC.AE$.

3. Chứng minh NB tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE.

Lời giải.



1. Theo tính chất đường kính và dây cung suy ra H là trung điểm AB và $AH = 6$ cm.
ΔAMH vuông tại $H \Rightarrow MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ cm.
ΔAMN vuông tại A, đường cao AH, do đó$AH^2 = HM.HN \Rightarrow HN = \dfrac{AH^2}{MH} = \dfrac{36}{8} = 4,5$ cm.
Bán kính $R = \dfrac{MN}{2} = \dfrac{MH + HN}{2} = \dfrac{8 + 4,5}{2} = 6,25$ cm.

2. $\widehat{MDN} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), $\widehat{MHE} = 90^\circ$ $(MH \perp AB)$. Từ đó suy ra $\widehat{MDE} + \widehat{MHE} = 180^\circ$, do đó tứ giác $MDEH$ nội tiếp.
Xét các tam giác ΔNBE và ΔNDB có góc N chung, $\widehat{NBE} = \widehat{NDB}$ (cùng chắn hai cung bằng nhau là cung NA, NB).
Suy ra $\Delta NBE \backsim \Delta NDB$, do đó $\dfrac{NB}{ND} = \dfrac{NE}{NB} \Rightarrow NB^2 = NE.ND$.
Ta có cung NA bằng cung NB (tính chất đường kính và dây cung), suy ra $\widehat{ADE} = \widehat{EDB} \Rightarrow$ DE là phân giác trong của ΔABD.
Vì $ED \perp DC \Rightarrow DC$ là phân giác ngoài của ΔABD.
Từ đó suy ra: $\dfrac{DA}{DB} = \dfrac{EA}{EB} = \dfrac{CA}{CB} \Rightarrow AC.BE = BC.AE$.

3. Kẻ $EI \| AM$ $(I \in BM) \Rightarrow \Delta AMB \backsim \Delta EIB \Rightarrow \Delta EIB$ cân tại $I \Rightarrow IE = IB$.
Gọi (O') là đường tròn tâm I ngoại tiếp $\Delta EBD'$. Ta có $NB \perp BM$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O), từ đó suy ra $BN \perp BI \Rightarrow BN$ là tiếp tuyến đường tròn $(O') \Rightarrow \widehat{EBN} = \widehat{ED'B}$ (cùng chắn cung BE).
Mặt khác trên đường tròn (O), $\widehat{EBN} = \widehat{EDB}$ (cùng chắn hai cung bằng nhau NA, NB) $\Rightarrow D$ nằm trên đường tròn (O').
Vậy NB tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE.

□

Bài 20. Cho ba điểm cố định A, B, C thẳng hàng (B nằm giữa A và C). Gọi (O) là một đường tròn thay đổi luôn đi qua B và C (tâm O không thuộc đường thẳng BC). Từ A kẻ các tiếp tuyến AD, AE đến đường tròn (O) (D, E là các tiếp điểm và D, O nằm cùng trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng BC). Gọi K, H lần lượt là trung điểm của BC và DE.

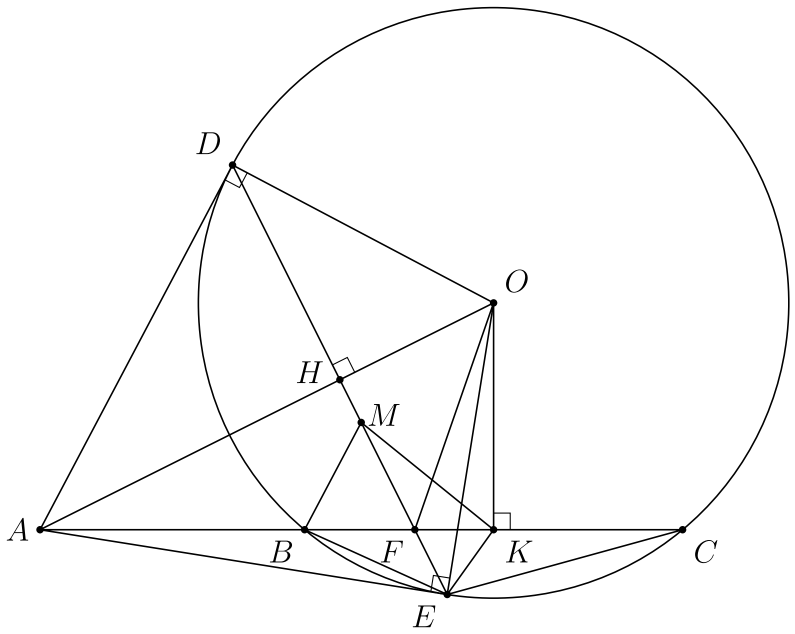
1. Chứng minh $AE^2 = AB \cdot AC$.

2. Trên DE lấy điểm M sao cho BM song song với AD. Chứng minh tứ giác $BMKE$ nội tiếp đường tròn và MK song song với DC.

3. Chứng minh rằng khi đường tròn (O) thay đổi thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OHK thuộc một đường thẳng cố định.

Lời giải.

Giáo viên: ....



1. Ta có $\triangle ABE \backsim \triangle AEC$ (g.g), suy ra $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AE}{AC}$. Vậy $AE^2 = AB \cdot AC$.

2. Dễ thấy, năm điểm O, A, D, E, K nằm trên đường tròn đường kính OA. Suy ra $\widehat{DEK} = \widehat{DAK}$, mà $\widehat{DAK} = \widehat{MBK}$ (do $AD \parallel BM$), nên $\widehat{MBK} = \widehat{MEK}$. Vậy tứ giác $BMKE$ là tứ giác nội tiếp.

3. Gọi F là giao điểm của DE và AC. Khi đó tứ giác $OHFK$ nội tiếp đường tròn đường kính OF. Suy ra
$$AF \cdot AK = AH \cdot AO = AE^2 = AB \cdot AC,$$
hay $AF = \dfrac{AB \cdot AC}{AK}$, do đó F là điểm cố định. Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OHK (cũng chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OHFK$) chạy trên đường trung trực của đoạn thẳng FK.

□

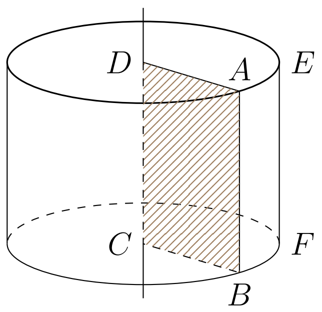
Chương 4 Hình trụ - Hình nón - Hình cầu

§1 Hình trụ. Diện tích xung quanh và thể tích hình trụ

1 Tóm tắt lí thuyết

1 Hình trụ

Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ một vòng quay cạnh CD cố định, ta được một hình trụ ($h.73$). Khi đó:
- Hai đáy là hai hình tròn (C) và (D) bằng nhau và nằm trên hai mặt phẳng song song.
- Đường thẳng CD là trục của hình trụ.
- AB là một đường sinh. Đường sinh vuông góc với hai mặt phẳng đáy. Độ dài đường sinh là chiều cao hình trụ.



Hình 73

2 Diện tích xung quanh của hình trụ
$S_{\text{xq}} = 2\pi Rh$.
$S_{\text{tp}} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$.

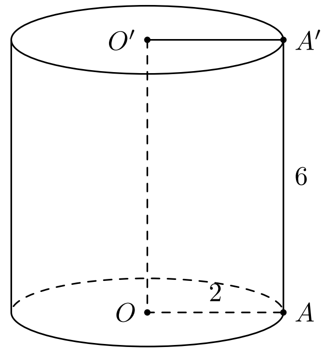
3 Thể tích hình trụ
$V = Sh = \pi R^2 h$ (R là bán kính đáy, h là chiều cao, S là diện tích đáy).

2 Các ví dụ

Ví dụ 1. Một hình trụ có bán kính đường tròn đáy là 2 cm, chiều cao là 6 cm. Hãy tính:

1. Diện tích xung quanh của hình trụ.
2. Diện tích toàn phần của hình trụ.
3. Thể tích hình trụ.

Lời giải.



1. Diện tích xung quanh của hình trụ là
   $S_{\text{xq}} = 2\pi Rh = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 6 = 24\pi \approx 24 \cdot 3,14 = 75,36\ (\text{cm}^2)$

2. Diện tích toán phần của hình trụ là

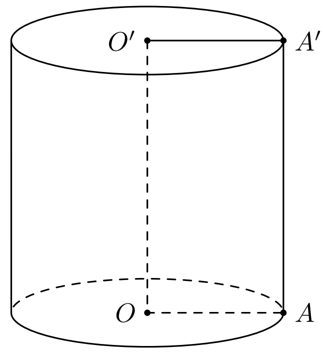
$$\begin{aligned} S_{\text{tp}} &= 2\pi Rh + 2\pi R^2 \\ &= 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 6 + 2 \cdot \pi \cdot 2^2 \\ &= 24\pi + 8\pi = 32\pi \approx 32 \cdot 3,14 = 100,48\ (\text{cm}^2). \end{aligned}$$

3. Thể tích hình trụ là:
   $V = \pi R^2 h = \pi \cdot 2^2 \cdot 6 = 24\pi \approx 24 \cdot 3.14 = 75,36\ (\text{cm}^3)$

□

Ví dụ 2. Một hình trụ có diện tích xung quanh là 20π cm^2 và diện tích toàn phần là 28π cm^2 . Tính thể tích của hình trụ đó.

Lời giải.

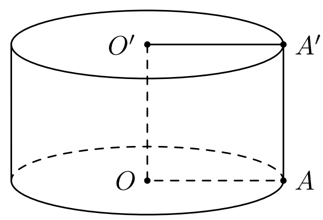


Ta có $S_{\text{đ}} = \dfrac{S_{\text{tp}} - S_{\text{xq}}}{2} = \dfrac{28\pi - 20\pi}{2} = 4\pi\ (\text{cm}^2)$.
Mà $S_{\text{đ}} = \pi R^2 \Leftrightarrow \pi R^2 = 4\pi \Leftrightarrow R = 2\ (\text{cm})$.
Ta có $S_{\text{xq}} = 2\pi Rh \Rightarrow h = \dfrac{20\pi}{2\pi R} = \dfrac{10}{2} = 5\ (\text{cm})$.
Thể tích của hình trụ đó là
$V = \pi R^2 h = \pi \cdot 2^2 \cdot 5 = 20\pi \approx 62,8\ (\text{cm}^3)$.

□

Ví dụ 3. Một hình trụ có chiều cao bằng 5 cm. Biết diện tích toàn phần gấp đôi diện tích xung quanh. Tính thể tích hình trụ.

Lời giải.



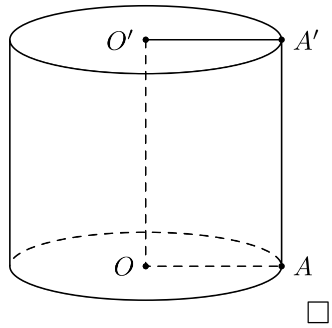
Vì diện tích toàn phần bằng hai lần diện tích xung quanh nên
$2\pi Rh + 2\pi R^2 = 4\pi Rh \Leftrightarrow 2\pi R^2 = 2\pi Rh \Leftrightarrow R = h$.
Vậy bán kính đáy là 5 cm.
Thể tích của hình trụ là $V = \pi R^2 h = \pi \cdot 5^2 \cdot 5 = 125\pi\ (\text{cm}^3)$.

□

Ví dụ 4. Một thùng phuy hình trụ có số đo diện tích xung quanh (tính bằng mét vuông) đúng bằng số đo thể tích (tính bằng mét khối). Tính bán kính đáy của hình trụ.

Lời giải.

Gọi bán kính đáy và chiều cao hình trụ lần lượt là R và h.
Ta có $S_{\text{xq}} = 2\pi Rh$ (m^2); $V = \pi R^2 h$ (m^3).
Theo đề bài hai số đo trên bằng nhau nên ta có $2\pi Rh = \pi R^2 h$ suy ra $R = 2$ (m).

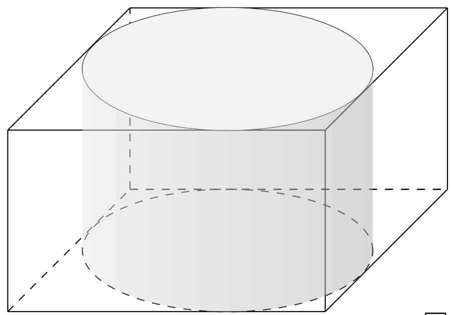


□

Ví dụ 5. Một lọ hình trụ được "đặt khít" trong một hộp giấy hình hộp chữ nhật. Biết thể tích của lọ hình trụ là 270 cm^3, tính thể tích của hộp giấy.

Lời giải.

Gọi bán kính và chiều cao của hình trụ lần lượt là R và h.
Khi đó hình hộp chữ nhật có cạnh đáy là $2R$ và chiều cao là h.
Gọi V_1 và V_2 lần lượt là thể tích của hình trụ và hình hộp.
Ta có $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\pi R^2 h}{4R^2 h}$. Do đó $\dfrac{270}{V_2} = \dfrac{\pi}{4}$.
Suy ra $V_2 = \dfrac{270 \cdot 4}{\pi} \approx 344$ (cm^3).
Vậy thể tích hình hộp là 344 (cm^3).



□

Ví dụ 6. Cho hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 2a, BC = a$. Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh AB một vòng thì được hình trụ có thể tích V_1 và khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh BC một vòng thì được hình trụ có thể tích V_2. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

Lời giải.

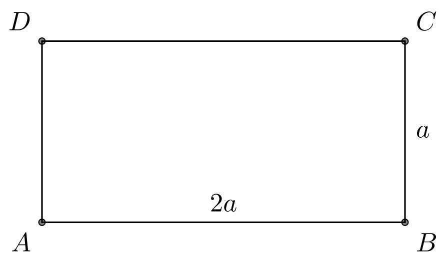
Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh AB một vòng thì được hình trụ có chiều cao $h = AB = 2a$, bán kính đáy $R = BC = a$ nên có thể tích

$$V_1 = \pi R^2 h = \pi a^2 \cdot 2a = 2\pi a^3 (\text{đvtt})$$

Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh cạnh BC một vòng thì được hình trụ có chiều cao $h' = BC = a$, bán kính đáy $R' = CD = 2a$ nên có thể tích

$$V_2 = \pi R'^2 h' = \pi (2a)^2 \cdot a = 4\pi a^3 (\text{đvtt})$$

. Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{2\pi a^3}{4\pi a^3} = \dfrac{1}{2}$.

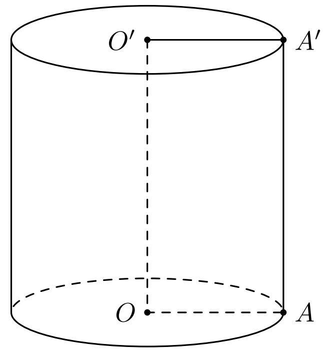


□

Ví dụ 7. Một hộp sữa hình trụ có chiều cao hơn đường kính là 3 cm. Biết diện tích vỏ hộp (kể cả nắp) là $292,5\pi \text{cm}^2$. Tính thể tích của hộp sữa đó.

Lời giải.

Gọi R là bán kính đáy của hộp sữa, h là chiều cao của nó.
Ta có $h = 2R + 3$.
Vì diện tích toàn phần của hộp sữa là $292,5\pi\text{cm}^2$ nên



$$\begin{aligned} & 2\pi R(h+R) = 292,5\pi \\ \Leftrightarrow\ & 2\pi R(h+R) = 292,5\pi \\ \Leftrightarrow\ & 2\pi R(2R+3+R) = 292,5\pi \\ \Leftrightarrow\ & R(R+1) = 48,75 \\ \Leftrightarrow\ & R^2 + R - 48,75 = 0 \end{aligned}$$

Giải ra được $R_1 = 6,5$ (chọn); $R_2 = -7,5$ (loại). Vậy bán kính đáy hộp sữa là $6,5$ cm.
Chiều cao hộp sữa là 16 cm. Thể tích hộp sữa là
$V = \pi R^2 h = \pi \cdot (6,5)^2 \cdot 16 = 676\pi\ (\text{cm}^3)$

□

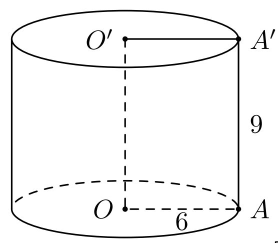
3 Luyện tập

Bài 1. Một hình trụ có bán kính đường tròn đáy là 6 cm, chiều cao là 9 cm. Hãy tính

1. Diện tích xung quanh của hình trụ.
2. Thể tích của hình trụ.

Lời giải.

1. Diện tích xung quanh của hình trụ là $2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 9 = 108\pi\ (\text{cm}^2)$.
2. Thể tích của hình trụ là $\pi \cdot 6^2 \cdot 9 = 324\pi\ (\text{cm}^3)$.

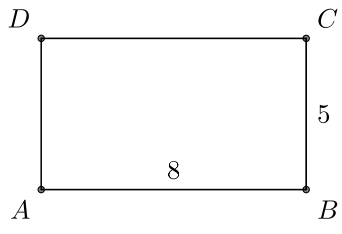


□

Bài 2. Một hình chữ nhật có chiều dài và chiều rộng lần lượt là 8 cm, 5 cm. Quay hình chữ nhật đó một vòng quanh chiều dài hay chiều rộng thì thể tích lớn hơn.

Lời giải.

Khi quay quanh chiều dài thì $R = 5$, $h = 8$ (cm).
$V_1 = \pi \cdot 5^2 \cdot 8 = 200\pi\ (\text{cm}^3)$.
Khi quay quanh chiều rộng thì $R = 8$, $h = 5$ (cm).
$V_2 = \pi \cdot 8^2 \cdot 5 = 320\pi\ (\text{cm}^3)$.
Vì $V_2 > V_1$ nên khi quay quanh chiều rộng thì thể tích sẽ lớn hơn khi quay quanh chiều dài.

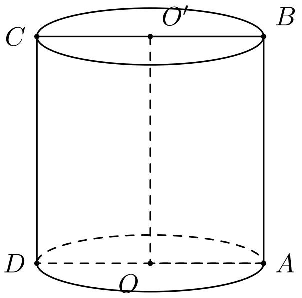


□

Bài 3. Người ta cắt hình trụ bằng một mặt phẳng chứa trục. Biết thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng 36 cm^2. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ.

Lời giải.

Độ dài mỗi cạnh của thiết diện là $a = \sqrt{35} = 6$ (cm).
Vậy chiều cao của hình trụ là $h = 6$ (cm),
bằng đường kính của đáy hình trụ. Ta có $2R = 6$ do đó $R = 3$ (cm).



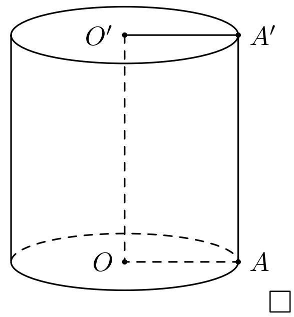
- Diện tích xung quanh của hình trụ là
  $S_{\text{xq}} = 2\pi Rh = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 6 \approx 113,4$ (cm^2).
- Thể tích của hình trụ là
  $V = \pi R^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 6 \approx 169,56$ (cm^3).

□

Bài 4. Một hình trụ có chu vi đáy là 24π cm và diện tích toàn phần là $768\pi\text{cm}^2$. Tính thể tích của hình trụ.

Lời giải.

Ta có $C = 2\pi R$, suy ra
$R = \dfrac{C}{2\pi} = \dfrac{24\pi}{2\pi} = 12$ (cm). Vì dện tích toàn phần của hình trụ là 768π cm^2
nên $2\pi R(h + R) = 768\pi$, hay $2\pi \cdot 12(h + 12) = 768\pi \Rightarrow h + 12 = 32$
$\Rightarrow h = 20$ (cm).
Vậy thể tích của hình trụ là
$V = \pi R^2 h = \pi \cdot 12^2 \cdot 20 = 2880\pi$ (cm^3).

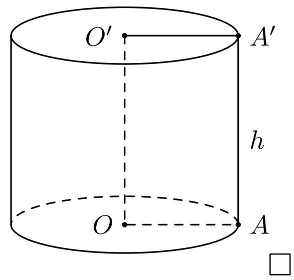


□

Bài 5. Tỉ số giữa diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của một hình trụ là $\dfrac{3}{5}$. Biết bán kính đáy là 6 cm, tính chiều cao của hình trụ.

Lời giải.

Gọi bán kính đáy và chiều cao của hình trụ lần lượt là R và h. ta có
$S_{\text{xq}} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 6h = 12\pi h$.
$S_{\text{tp}} = 2\pi R(h + R) = 2\pi \cdot 6(h + 6)$. Theo đề bài ta có $\dfrac{S_{\text{xq}}}{S_{\text{xq}}} = \dfrac{3}{5}$.
Suy ra $\dfrac{12\pi h}{12\pi(h + 6)} = \dfrac{3}{5}$. Giải ra ta được $h = 9$ (cm).

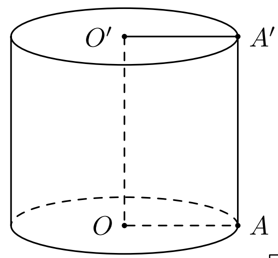


□

Bài 6. Một hình trụ có thể tích là 300 cm^3 và diện tích xung quanh là 120 cm^2. Tính diện tích toàn phần của hình trụ đó.

Lời giải.

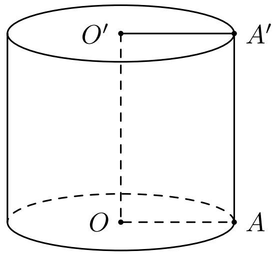
Gọi bán kính đáy và chiều cao của hình trụ lần lượt là R và h.
Ta có $V = \pi R^2 h = 300$ (cm^3).
$S_{\text{xq}} = 2\pi Rh = 120$ (cm^2).
Do đó $\dfrac{\pi R^2 h}{2\pi Rh} = \dfrac{300}{120} \Rightarrow R = 5$ (cm).
$S_{\text{tp}} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 120 + 157 = 277$ (cm^2).



□

Bài 7. Một hình trụ có diện tích xung quanh là 24π cm^2 và diện tích toàn phần là 42π cm^2. Tính thể tích của hình trụ đó.

Lời giải.

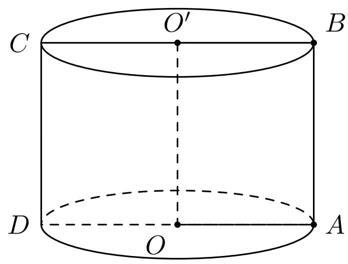


Gọi bán kính đáy và chiều cao của hình trụ lần lượt là R và h.
Ta có
$S_{đ} = \dfrac{S_{tp} - S_{xq}}{2} = \dfrac{42\pi - 24\pi}{2} = 9\pi\ (\text{cm}^2)$.
$S_{đ} = 9\pi \Leftrightarrow \pi R^2 = 9\pi \Leftrightarrow R = 3\ (\text{cm})$.
Ta có $S_{xq} = 2\pi Rh \Rightarrow h = \dfrac{S_{xq}}{2\pi R} = 4\ (\text{cm})$.
Do đó thể tích của hình trụ là $V = \pi R^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 36\pi\ (\text{cm}^3)$.

□

Bài 8. Một hình trụ có bán kính đáy bằng chiều cao, thiết diện đi qua trục có diện tích bằng $72\ \text{cm}^2$. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình trụ.

Lời giải.



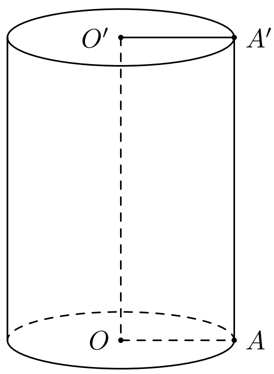
Gọi bán kính đáy là R, chiều cao là h.
Theo đề bài ta có $R = h$ và $2Rh = 72 \Leftrightarrow R^2 = 36 \Leftrightarrow R_1 = 6$ (thỏa mãn), $R_2 = -6$ (loại). Do đó $R = h = 6$ cm.

- Diện tích xung quanh bằng $2\pi Rh = 2\pi \cdot Rh = 2\pi \cdot 6 \cdot 6 = 72\pi\ (\text{cm}^2)$.
- Diện tích toàn phần bằng $2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi \cdot 6 \cdot 6 + 2\pi \cdot 6^2 = 144\pi\ (\text{cm}^2)$.
- Thể tích của hình trụ bằng $\pi R^2 h = \pi \cdot 6^2 \cdot 6 = 216\pi\ (\text{cm}^3)$.

□

Bài 9. Một hình trụ có chiều cao là 18 cm và diện tích toàn phần là $176\ \text{cm}^2$. Chứng minh rằng diện tích xung quanh hình trụ bằng 9 lần diện tích đáy.

Lời giải.



Gọi bán kính đáy và chiều cao của hình trụ lần lượt là R và h.
Vì diện tích toàn phần bằng $176\pi\ \text{cm}^2$ nên ta có

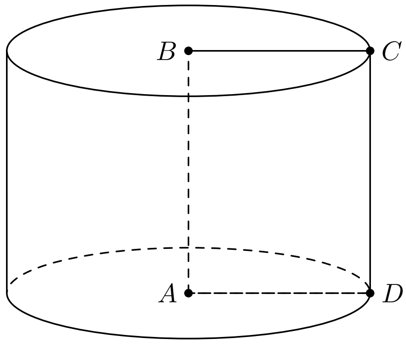
$$\begin{aligned} & 2\pi R(h+R) = 176\pi \\ \Leftrightarrow\ & 2\pi R(18+R) = 176\pi \\ \Leftrightarrow\ & R^2 + 18R - 88 = 0 \end{aligned}$$

Giải ra được $R_1 = 4$ (chọn); $R_2 = -22$ (loại).
Vậy diện tích đáy hình trụ là $S_{đ} = \pi R^2 = 16\pi\ (\text{cm}^2)$.
Diện tích xung quanh hình tru là
$S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 4 \cdot 18 = 144\pi\ (\text{cm}^2)$. Do đó $\dfrac{S_{xq}}{S_{đ}} = \dfrac{144\pi}{16\pi} = 9$ (lần).

□

Bài 10. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB > BC$. Biết diện tích hình chữ nhật là $48\ \text{cm}^2$, chu vi là 28 cm. Cho hình chữ nhật quay quanh cạnh AB một vòng ta được một hình trụ. Tính dện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình trụ này.

Lời giải.



Từ đề bài ta có $\begin{cases} AB + BC = 14 \\ AB \cdot BC = 48. \end{cases}$
Suy ra AB, BC là nghiệm của phương trình: $x^2 - 14x + 48 = 0$.
Giải phương trình ta đươc $x_1 = 6$, $x_2 = 8$.
Do $AB > BC$ nên $AB = 8$; $BC = 6$.

1. Diện tích xung quanh của hình trụ là
   $S_{\text{xq}} = 2 \cdot \pi \cdot BC \cdot AB = 2\pi \cdot 6 \cdot 8 = 96\pi$ (cm^2).

2. Diện tích toàn phần của hình trụ là
   $S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + 2S_{\text{đ}} = 96\pi + 2\pi R^2 = 96\pi + 2\pi \cdot 6^2 = 168\pi$ (cm^2).

3. Thể tích của hình trụ là
   $V = \pi \cdot BC^2 \cdot AB = \pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 288\pi$ (cm^3).

□

§2 Hình nón - Hình nón cụt - Diện tích xung quanh và thể tích của hình nón, hình nón cụt

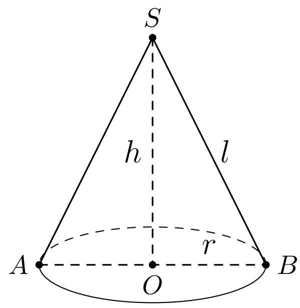
1 Tóm tắt lí thuyết

- Mô tả hình nón

+) Đáy của hình nón là hình tròn (O);

+) SA là một đường sinh;

+) S là đỉnh, SO là đường cao.



- Diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón

$$\begin{aligned} S_{\text{xq}} &= \pi r l \\ S_{\text{tp}} &= \pi r l + \pi r^2 \end{aligned}$$

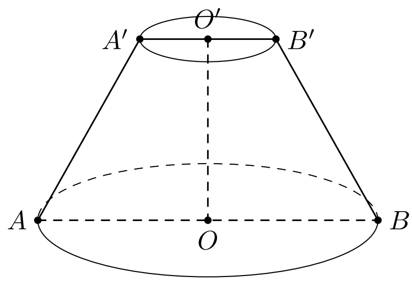
(r, l lần lượt là bán kính đáy và độ dài đường sinh của hình nón).

- Thể tích hình nón

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \ (h \text{ là chiều cao}).$$

- Hình nón cụt

Khi cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đáy thì phần mặt phẳng bị giới hạn bởi hình nón là một hình tròn. Phần hình tròn nằm giữa mặt phẳng nói trên và đáy là một hình nón cụt.



- Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình nón cụt

$$\begin{aligned} S_{\text{xq}} &= \pi(R + r)l \\ S_{\text{tp}} &= \pi(R + r)l + \pi R^2 + \pi r^2 \end{aligned}$$

R, r lần lượt là bán kính hai đáy, l là độ dài đường sinh của hình nón cụt).

- Thể tích hình nón cụt:

$$V = \frac{\pi}{3} h(R^2 + r^2 + Rr)$$

(h là đường cao của hình nón cụt).

⚠ **35.** Hình khai triển mặt xung quanh của một hình nón là một hình quạt.

⚠ **36.** Một hình nón được xác định khi biết 2 trong 3 yếu tố: bán kính đáy, chiều cao, đường sinh.

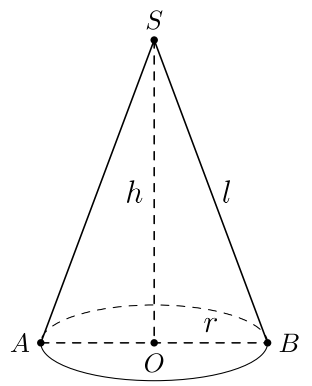
2 Các ví dụ

Ví dụ 1. Một hình nón có bán kính đáy bằng r, diện tích xung quanh gấp đôi diện tích đáy. Tính theo r

1. Diện tích xung quanh của hình nón;
2. Thể tích của hình nón.

Lời giải.

1. Diện tích xung quanh gấp đôi diện tích đáy nên $\pi r l = 2\pi r^2$ suy ra $l = 2r$.
   Vậy $\pi r l = \pi r \cdot 2r = 2\pi r^2$. Diện tích xung quanh bằng $2\pi r^2$.
2. Xét tam giác SOA vuông tại O, ta có $h^2 = l^2 - r^2 = (2r)^2 - r^2 = 3r^2$ nên $h = r\sqrt{3}$.
   Thể tích hình nón bằng $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi r^2 \cdot r\sqrt{3} = \dfrac{\pi r^3\sqrt{3}}{3}$.



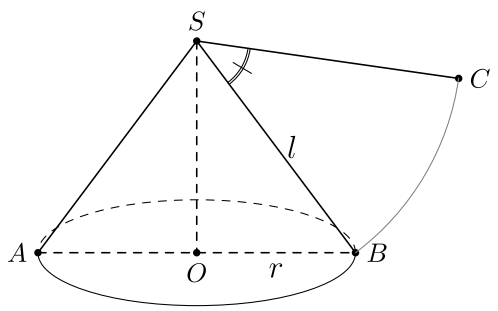
□

Ví dụ 2. Một hình nón có bán kính đáy bằng r, đường sinh bằng l. Khai triển mặt xung quanh hình nón ta được một hình quạt. Tính số đo cung của hình quạt theo r và l.

Lời giải.

Khi cắtmặt xung quanh của một hình nón theo một đường sinh và trải phẳng ra thành một hình quạt. Khi đó bán kính hình quạt tròn SBC bằng độ dài đường sinh $SB = l$ và độ dài $\overset{\frown}{BC}$ bằng chu vi đáy. Độ dài $\overset{\frown}{BC}$ của hình quạt bằng chu vi đáy của hình nón bằng $2\pi r$.
Độ dài đường tròn $(S;\ SA)$ bằng $2\pi l$.
Ta có $S_{\text{quạt}} = \dfrac{2\pi \cdot l^2 \cdot n}{360} = l \cdot 2\pi \cdot r \Rightarrow \dfrac{2\pi \cdot l^2 \cdot n}{360} = l \cdot 2\pi \cdot r$
$\Rightarrow \dfrac{l \cdot n}{360} = r$. Do đó, số đo cung AB của hình quạt là

$$n^\circ = 360^\circ \cdot \frac{2\pi r}{2\pi l} = 360^\circ \cdot \frac{r}{l}.$$



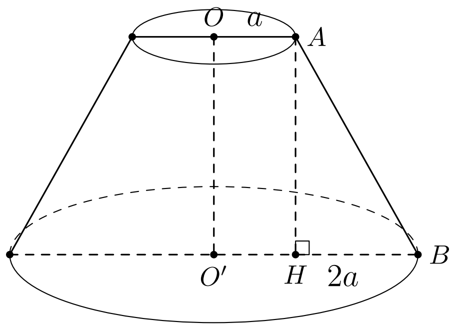
□

Ví dụ 3. Một hình nón cụt có các bán kính đáy bằng a và $2a$, chiều cao bằng a.

1. Tính diện tích xung quanh của hình nón cụt;
2. Tính thể tích của hình nón cụt.

Lời giải.

1. Trong mặt phẳng $OABO'$, kẻ $AH \perp O'B$. Ta có $O'H = OA = a$ nên $HB = a$. Tam giác AHB vuông cân nên $AB = HB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.
   Ta có $S_{\text{xq}} = \pi(r_1 + r_2)l = \pi(a + 2a) \cdot a\sqrt{2} = 3\pi a^2\sqrt{2}$.
2. Tính thể tích của hình nón cụt:
$$V = \frac{1}{3}\pi a[a^2 + (2a)^2 + a \cdot 2a] = \frac{7}{3}\pi a^3.$$

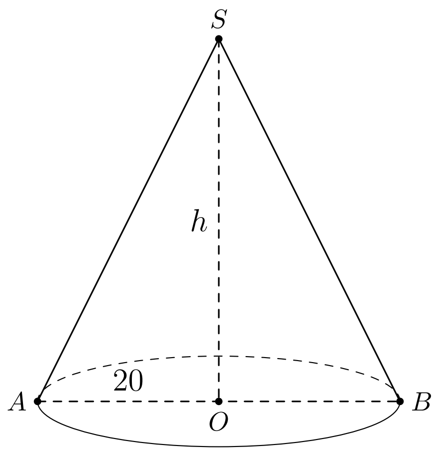


□

Ví dụ 4. Một hình nón có bán kính đáy bằng 20 cm, số đo thể tích (tính bằng cm^2) bằng bốn lần số đo diện tích xung quanh (tính bằng cm^2). Tính chiều cao của hình nón.

Lời giải.

Gọi h là chiều cao của hình nón. Thể tích của hình nón bằng
$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 20^2 \cdot h = \frac{400}{3}\pi h.$$
Đường sinh SA bằng $\sqrt{h^2 + 20^2}$.
Diện tích xung quanh của hình nón bằng
$S_{\text{xq}} = \pi \cdot 20\sqrt{h^2 + 400}$.
Do $V = 4S_{\text{xq}}$ nên
$$\begin{aligned} \frac{400}{3}\pi h &= 4 \cdot 20\pi\sqrt{h^2+400} \\ &\Leftrightarrow 5h = 3\sqrt{h^2+400} \Leftrightarrow 25h^2 = 9(h^2+400) \\ &\Leftrightarrow h^2 = 225 \Leftrightarrow h = 15. \end{aligned}$$



Vậy chiều cao của hình nón bằng 15 cm

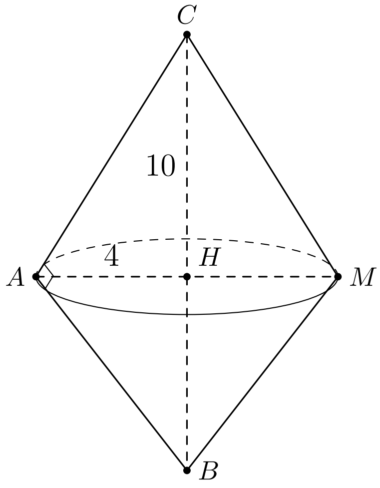
□

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC vuông tại A, $BC = 10$ cm, đường cao $AH = 4$ cm. Quay tam giác ABC một vòng quanh cạnh BC. Tính thể tích hình tạo thành.

Lời giải.

Khi quay tam giác ABC một vòng quanh cạnh BC, hình tạo thành gồm hai hình nón có đường cao theo thứ tự là HB và HC. Thể tích của hình tạo thành bằng

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\pi \cdot AH^2 \cdot BH + \frac{1}{3}\pi \cdot AH^2 \cdot CH &= \frac{1}{3}\pi \cdot AH^2(BH + CH)\\ &= \frac{1}{3}\pi \cdot AH^2 \cdot BC\\ &= \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 10 = \frac{160}{3}\pi(\text{cm}^3).\end{aligned}$$

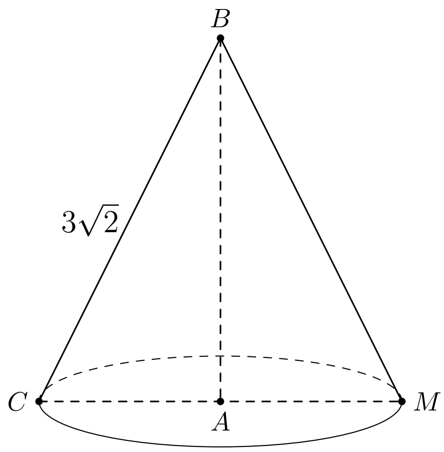


□

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC vuông cân, $\widehat{A} = 90^\circ$, $BC = 3\sqrt{2}$ cm. Quay tam giác ABC một vòng quanh cạnh góc vuông AB cố định. Tính diện tích xung quanh và thể tích hình tạo thành.

Lời giải.

Quay tam giác vuông cân ABC một vòng quanh cạnh góc vuông AB cố định, ta được hình nón đỉnh B, đường sinh BC, bán kính đường tròn đáy là AC.
Tam giác ABC vuông cân tại A, theo định lý Pitago ta có $AB^2 + AC^2 = BC^2$ hay $2AC^2 = (3\sqrt{2})^2 = 18$, suy ra $AC^2 = 9$, do đó $AC = 3$ (cm).
Diện tích xung quanh của nón là $S_{\text{xq}} = \pi \cdot AC \cdot BC = \pi \cdot 3 \cdot 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}\pi \approx 39,85$ (cm^2).
Thể tích hình nón là $V = \frac{1}{3}AC^2 \cdot AB = \frac{1}{3} \cdot AC^3 = \frac{1}{3} \cdot 3^3 = 9$ (cm^3).



□

3 Luyện tập

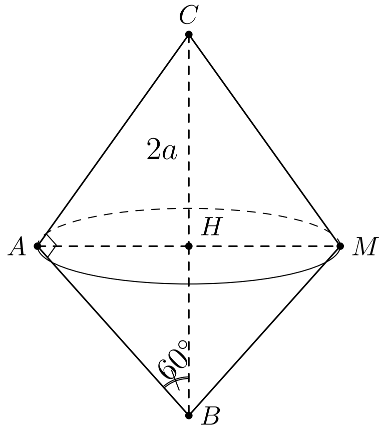
Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{B} = 60^\circ$ và $BC = 2a$ (đơn vị độ dài). Quay xung quanh tam giác một vòng quanh cạnh huyền BC. Tìm diện tích xung quanh và thể tích hình tạo thành.

Lời giải.

Khi quay tam giác vuông ABC một vòng xung quanh cạnh huyền BC, ta được hai hình nón có các đáy úp vào nhau, bán kính đường tròn đáy bằng đường cao AH kẻ từ A đến cạnh huyền BC. Ta có $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (đơn vị độ dài).

Diện tích xung quanh hình tạo thành là $S = \pi \cdot AH(AB + AC) = \dfrac{\pi a^2(3+\sqrt{3})}{2}$ (đơn vị diện tích).

Thể tích hình tạo thành là $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot AH^2 \cdot BC = \dfrac{\pi a^3}{2}$ (đơn vị thể tích).



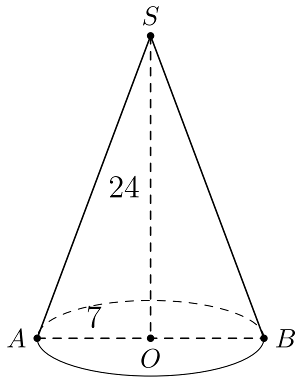
□

Bài 2. Một hình nón có bán kính đáy bằng 7 cm, chiều cao bằng 24 cm.

1. Tính số đo cung hình quạt khi khai triển mặt xung quanh của hình nón;
2. Tính diện tích toàn phần của hình nón;
3. Tính thể tích của hình nón.

Lời giải.

1. Đường sinh bằng $l = 25$ cm. Số đo cung của hình quạt là $n^\circ = 360^\circ \cdot \dfrac{r}{l} = 360^\circ \cdot \dfrac{7}{25} = 100,8^\circ$.
2. Diện tích toàn phần của hình nón $S_{\text{tp}} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r) = 224\pi$.
3. Tính thể tích của hình nón $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 7^2 \cdot 27 = 392\pi$.



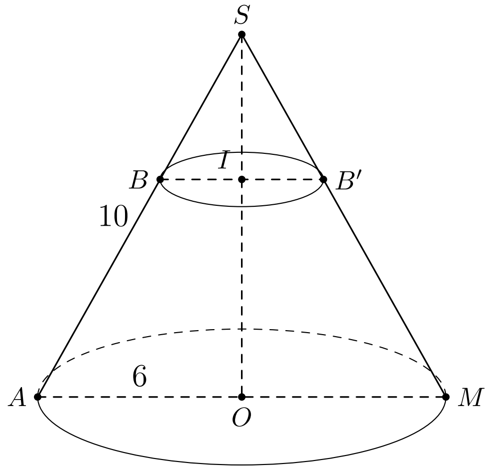
□

Bài 3. Một hình nón có bán kính đáy bằng 6 cm, đường sinh bằng 10 cm.

1. Tính diện tích xung quanh của hình nón;
2. Tính thể tích của hình nón;
3. Một mặt phẳng đi qua trung điểm của đường cao và song song với đáy hình nón chia hình nón thành một hình nón nhỏ và một hình nón cụt. Tính thể tích hình nón cụt.

Lời giải.

1. Diện tích xung quanh của hình nón $S_{xq} = \pi r l = 60\pi$ (cm^2).
2. Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông SAO, ta có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = 8$. Thể tích của hình nón $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi$ (cm^3).
3. Trong $\triangle SOA$, ta có $SI = IO$, $IB \parallel OA$ nên $IB = \dfrac{1}{2}OA = 3$ cm. Thể tích hình nón nhỏ bằng $\dfrac{1}{3}\pi \cdot r'^2 \cdot h' = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi$ (cm^3).



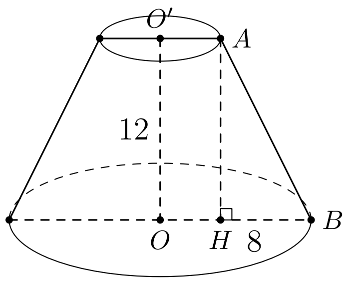
□

Bài 4. Một hình nón cụt có bán kính đáy lớn bằng 8 cm, chiều cao bằng 12 cm và đường sinh bằng 13 cm.

1. Tính bán kính đáy nhỏ của hình nón cụt;
2. Tính diện tích xung quanh của hình nón cụt;
3. Tính thể tích của hình nón cụt.

Lời giải.

1. Vẽ $AH \perp OB$ ta được $OH = O'A = r$, $HB = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ (cm), suy ra $r = 8 - 5 = 3$ (cm).
2. Tính diện tích xung quanh của hình nón cụt $S_{xq} = \pi r l = 143\pi$ (cm^2).
3. Tính thể tích của hình nón cụt $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = 388\pi$ (cm^3).

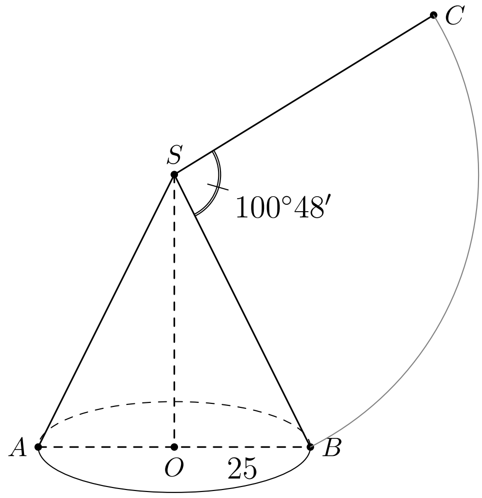


□

Bài 5. Mặt xung quanh của một hình nón khai triển thành một hình quạt $100^\circ 48'$, bán kính 25 cm.

1. Tính diện tích toàn phần của hình nón;
2. Tính thể tích của hình nón.

Lời giải.



1. Độ dài cung AB của hình quạt là

$$l = \frac{\pi \cdot 25 \cdot 100,8}{180} = 14\pi \text{ (cm)}.$$

Chu vi của hình tròn đáy là 14π (cm).
Bán kính của hình tròn đáy là $R = \frac{14\pi}{2\pi} = 7$ (cm).
Chiều cao của hình nón là
$h = SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$ (cm).
Diện tích toàn phần của hình nón là
$S_{\text{tp}} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi \cdot 7 \cdot 25 + \pi \cdot 7^2 = 224\pi$ (cm^2).

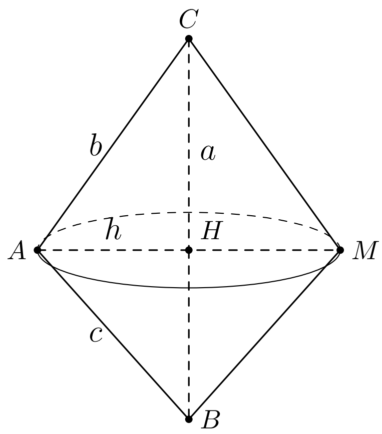
2. Tính thể tích của hình nón là
$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 7^2 \cdot 27 = 392\pi$ (cm^3).

□

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi V_1, V_2, V_3 theo thứ tự là thể tích của các hình sinh ra khi quay tam giác ABC một vòng xung quanh các cạnh BC, AB, AC. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{V_1^2} = \frac{1}{V_2^2} + \frac{1}{V_3^2}.$$

Lời giải.



Gọi độ dài các cạnh của tam giác là $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$ và $AH = h$ là chiều cao dựng từ đỉnh A xuống cạnh huyền BC.
Ta có $h = \frac{bc}{a}$. Theo giả thiết ta có:
$V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot AH^2 \cdot HC + \frac{1}{3}\pi \cdot AH^2 \cdot HB = \frac{1}{3}\pi AH^2 \cdot BC = \frac{\pi b^2 c^2}{3a}$,
suy ra $\frac{1}{V_1^2} = \frac{9a^2}{\pi^2 b^4 c^4}$.
Tương tự ta có $\frac{1}{V_2^2} = \frac{9}{\pi^2 b^4 c^2}$ và $\frac{1}{V_3^2} = \frac{9}{\pi^2 b^2 c^4}$, do đó $\frac{1}{V_2^2} + \frac{1}{V_3^2} = \frac{9}{\pi^2 b^4 c^2} + \frac{9}{\pi^2 b^2 c^4} = \frac{9(b^2 + c^2)}{\pi^2 b^4 c^4} = \frac{9a^2}{\pi^2 b^4 c^4}$.
Vậy $\frac{1}{V_1^2} = \frac{1}{V_2^2} + \frac{1}{V_3^2}$.

□

§3 Hình cầu - Diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu

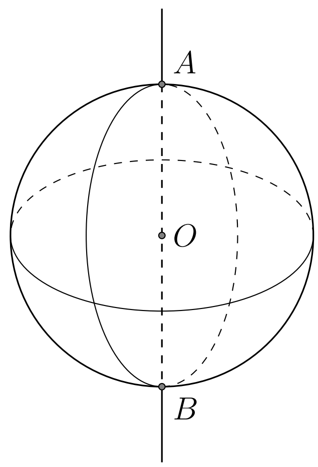
1 Tóm tắt lí thuyết

1.1 Hình cầu

Định nghĩa 13. Khi quay nửa hình tròn $(0; R)$ một vòng quanh đường kính AB cố định, ta được một hình cầu.

- Nửa hình tròn khi quay quét nên mặt cầu.
- Điểm O gọi là tâm, R là bán kính của hình cầu hay mặt cầu.

Khi cắt hình cầu bởi một mặt phẳng thì mặt cắt là một hình tròn.



1.2 Diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu

- Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2$ hay $S = \pi d^2$, với R là bán kính; d là đường kính.
- Thể tích hình cầu $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

2 Các ví dụ

Ví dụ 1. Một phao cơ hình cầu tự động đóng nước chảy vào bể khi bể đầy. Biết diện tích bề mặt của phao là 804 cm^2, tính bán kính của phao.

Lời giải.

Từ công thức $S = 4\pi R^2 \Rightarrow R = \sqrt{\dfrac{S}{4\pi}}$.

Bán kính của phao là $R = \sqrt{\dfrac{804}{4\pi}} \approx 8$ cm. □

Ví dụ 2. Phần trên của một chiếc cốc chân cao có dạng nửa hình cầu. Biết cốc này có thể chứa được $56,5$ ml nước. Tính đường kính của miệng cốc.

Lời giải.

Vì dung dích của cốc là 56,5 ml nên thể tích của cốc là 56,5 cm^3.
Ta có $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ do đó có thể tích của nửa hình cầu là $\dfrac{2}{3}\pi R^3$.
Theo đề bài, ta có $\dfrac{2}{3}\pi R^3 = 56{,}5 \Rightarrow R^3 = \dfrac{3 \cdot 56 \cdot 5}{2\pi} \approx 27\ \text{cm}^3$, suy ra $R = 3$ cm.
Vậy đường kính của miệng cốc là $3 \cdot 2 = 6$ cm. □

Ví dụ 3. Một trái dưa có dạng hình cầu. Bổ đôi trái dưa này ra thì mặt cắt có diện tích là 314 cm^2. Tính thể tích của trái dưa đó.

Lời giải.

Khi bổ đôi trái dưa thì mặt cắt là một hình tròn.
Ta có: $S = \pi R^2 \Rightarrow R = \sqrt{\dfrac{S}{\pi}} \approx \sqrt{\dfrac{314}{3{,}14}} = 10$ cm.
Vậy bán kính của trái dưa là 10 cm.
Thể tích của trái dưa là:
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 10^3 \approx 4187\ \text{cm}^3.$$
□

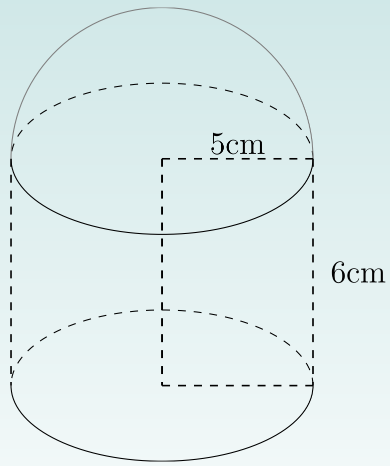
Ví dụ 4. Trái đất có bán kính 6400 km. Diện tích biển và đại dương chiếm $\dfrac{3}{4}$ bề mặt trái đất. Hãy tính diện tích biển và đại dương của trái đất (làm tròn đến triệu km^2).

Lời giải.

Diện tích bề mặt trái đất là $S = 4\pi R^2 = 4 \cdot \pi \cdot 6400^2 \approx 514457600\ \text{km}^2$.
Diện tích các biển và đại dương là $514457600 \cdot \dfrac{3}{4} \approx 386000000\ \text{km}^2$. □

Ví dụ 5.
Hình bên minh họa bộ phận lọc của một bình nước. Bộ phận này gồm một hình trụ và một nửa hình cầu với kích thước ghi trên hình. Hãy tính

1. Thể tích của bộ phận đó;
2. Diện tích mặt ngoài của bộ phận này.



Lời giải.

1. Thể tích phần hình trụ là $V_1 = \pi R^2 h = \pi \cdot 5^2 \cdot 6 = 150\pi\ \text{cm}^3$.
   Thể tích nửa hình cầu:
$$V_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot 5^3 = \frac{250}{3}\pi\ \text{cm}^3.$$

Thể tích bộ phận lọc là:

$$V = V_1 + V_2 = 150\pi + \frac{250}{3}\pi = \frac{700}{3}\pi \text{ cm}^3 \approx 733 \text{ cm}^3.$$

2. Diện tích xung quanh của hình trụ là:

$$S_1 = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 5 \cdot 6 = 60\pi \text{ cm}^2.$$

Diện tích đáy hình trụ là:

$$S_2 = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi \text{ cm}^3.$$

Diện tích nửa mặt cầu là:

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot 4\pi R^2 = 2\pi \cdot 5^2 = 50\pi \text{ cm}^3.$$

Diện tích mặt ngoài của bộ phận lọc:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 60\pi + 25\pi + 50\pi = 135\pi \text{ cm}^2 \approx 424 \text{ cm}^2.$$

□

3 Luyện tập

Bài 1. Cho hình cầu có bán kính $R = \dfrac{5a\sqrt{2}}{2}$.

1. Tính diện tích mặt cầu.
2. Tính thể tích của khối cầu tương ứng.

Lời giải.

1. Ta có $S = 4\pi \left(\dfrac{5a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 50\pi a^2$ đvdt.
2. $V = \dfrac{4}{3}\pi \left(\dfrac{5a\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \dfrac{125a^3\sqrt{2}}{3}$đvtt.

□

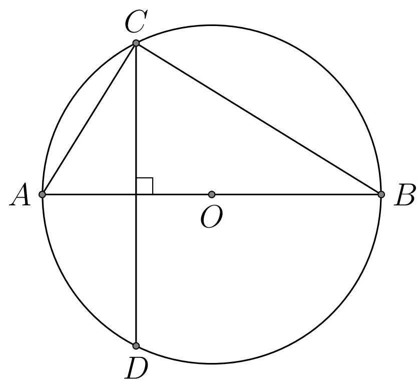
Bài 2. Cho đường tròn (O) đường kính AB, dây $CD \perp AB$ tại H. Cho biết $CD = 12$ cm và $AH = 4$ cm. Quay đường tròn này một vòng quanh AB. Tính diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu được tạo thành.

Lời giải.

Vẽ các đoạn thẳng CA, CB ta được: $\widehat{ACB} = 90^\circ$.
Vì $AB \perp CD$ nên $HD = HC = 6$ cm.
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có

$$CH^2 = HA \cdot HB.$$

Suy ra: $HB = \dfrac{CH^2}{HA} = \dfrac{6^2}{4} = 9$ cm.
Do đó, bán kính của đường tròn là $(4+9) : 2 = 6{,}5$ cm, bán kính hình cầu là $6{,}5$ cm.
Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 4 \cdot \pi \cdot (6{,}5)^2 \approx 531$ cm^2.
Diện tích hình cầu là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot (6{,}5)^3 \approx 1150$ cm^3.



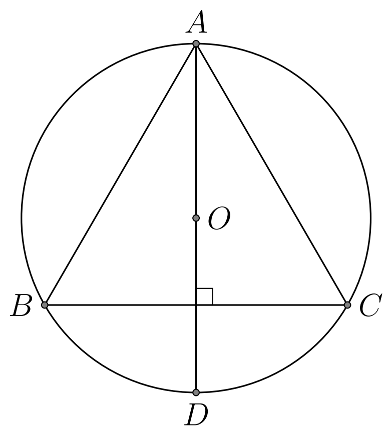
□

Bài 3. Cho đường tròn $(O; R)$ ngoại tiếp tam giác đều ABC. Quay đường tròn này một vòng quanh đường kính AOD ta được một hình cầu ngoại tiếp một hình nón. Tính thể tích phần bên trong hình cầu và bên ngoài hình nón.

Lời giải.

Độ dài cạnh của tam giác đều là $AB = R\sqrt{3}$.
Bán kính đáy hình tròn là $r = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.
Chiều cao của hình nón là $h = \dfrac{R\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \dfrac{3R}{2}$.
Thể tích hình cầu là $V_1 = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.
Thể tích hình nón là

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{2}R = \frac{3}{8}\pi R^3.$$



Thể tích phần cần tìm là

$$V = V_1 - V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{3}{8}\pi R^3 = \frac{23}{24}\pi R^3.$$

□

Bài 4. Bạn An lấy thước dây đo vòng theo đường xích đạo của quả địa cầu trong thư viện được độ dài $94{,}2$ cm. Hãy tính

1. Diện tích mặt ngoài của quả địa cầu.
2. Thể tích của quả địa cầu.

Lời giải.

Ta có chu vi của đường tròn xích đạo là $94{,}2$ cm nên

$$R = \frac{C}{2\pi} \approx \frac{94{,}2}{2 \cdot 3{,}14} = 15 \text{ cm}.$$

Do đó

1. Diện tích mặt ngoài của quả địa cầu là $S = 4\pi R^2 = 900\pi$ cm^2.

2. Thể tích của quả địa cầu $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = 4500\ \text{cm}^3$.

□

Bài 5. Quả bóng bàn có số đo diện tích bề mặt (tính bằng cm^2) gấp 1,5 lần số đo thể tích của nó (tính bằng cm^3). Tính bán kính, diện tích và thể tích của quả bóng bàn.

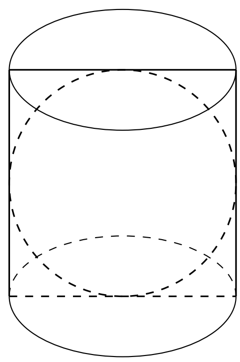
Lời giải.

Theo đề bài, ta có $4\pi R^2 = 1{,}5 \cdot \dfrac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R = 2$ cm.
Do đó, diện tích quả bóng là $S = 4\pi R^2 = 16\pi\ \text{cm}^2$.
Thể tích của quả bóng là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{32}{3}\pi\ \text{cm}^3$. □

Bài 6. Một hình cầu đặt vừa khít trong một hình trụ có chiều cao là 18 cm. Tính thể tích phần không gian nằm trong hình trụ nhưng nằm bên ngoài hình cầu.

Lời giải.

Vì hình cầu đặt vừa khít trong hình trụ nên chiều cao của hình trụ bằng đường kính đáy và bằng đường kính của hình cầu.
Bán kính đáy của hình cầu là 9 cm.
Khi đó, thể tích hình trụ là $V_1 = \pi R^2 h = \pi \cdot 9^2 \cdot 18 = 1458\ \text{cm}^3$.
Thể tích hình cầu là $V_2 = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = 972\pi\ \text{cm}^3$.
Vậy thể tích cần tính là $V = V_1 - V_2 = 486\pi \approx 1526\ \text{cm}^3$.



□

Bài 7. Một trái bưởi hình cầu có đường kính 18 cm. Lớp vỏ dày 1 cm. Tính thể tích của lớp vỏ bưởi.

Lời giải.

Bán kính trái bưởi là $R = 9$ cm. Bán kính trái bưởi sau khi gọt hết vỏ là $r = 9 - 1 = 8$ cm. Khi đó, thể tích lớp vỏ bưởi là

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(R^3 - r^3\right) = \frac{4}{3}\pi\left(9^3 - 8^3\right) \approx 909\ \text{cm}^3.$$

□

Bài 8. Một hình cầu có số đo diện tích mặt cầu (tính bằng cm^2) đúng bằng số đo thể tích của nó (tính bằng cm^3). Tính bán kính của hình cầu đó.

Lời giải.

Theo đề bài, ta có $4\pi R^2 = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R = 3$ cm. □

Bài 9. Một hình cầu có diện tích bề mặt là $100\pi\ \text{m}^2$. Tính thể tích của hình cầu đó.

Lời giải.

Theo đề bài, ta có $4\pi R^2 = 100\pi \Rightarrow R = 5$ m. Vậy thể tích hình cầu là $V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 5^3 = \dfrac{500\pi}{3}\ \text{m}^3$.
□

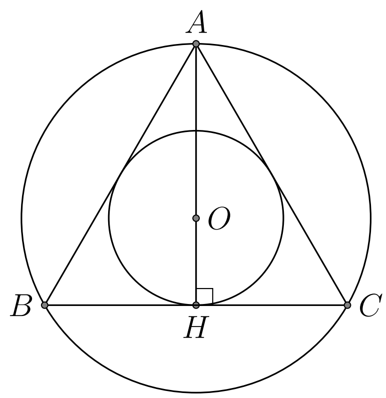
Bài 10. Cho tam giác đều ABC cạnh a, đường cao AH. Ta quay nửa đường tròn nội tiếp và nửa đường tròn ngoại tiếp tam giác đều này một vòng quanh AH. Tính

1. Tỉ số diên tích hai mặt cầu nội tiếp, ngoại tiếp hình nón.
2. Tỉ số thể tích của hai hình cầu nói trên.
3. Tính thể tích phần không gian giới hạn bởi hình nón và hình cầu ngoại tiếp hình nón.

Lời giải.

Gọi R và r lần lượt là các bán kính đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp tam giác đều. Ta có $R = 2r$.
Vì $BC = a$ nên $HC = \frac{a}{2}$. Và $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

1. Tỉ số diện tích hai mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp hình nón là
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4\pi r^2}{4\pi R^2} = \frac{r^2}{(2r)^2} = \frac{1}{4}.$$
2. Tỉ số thể tích hai hình cầu nội tiếp và ngoại tiếp hình nón là
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{r^3}{(2r)^3} = \frac{1}{8}.$$
3. Thể tích hình cầu ngoại tiếp là
$$V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{27} \text{ đvdt.}$$
Thể tích hình nón là
$$V_3 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{q\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{24} \text{ đvdt.}$$
Thể tích phần không gian giới hạn bởi hình nón và hình cầu ngoại tiếp là
$$V = V_2 - V_3 = \frac{23\sqrt{3}\pi a^3}{216} \approx 0{,}58a^3 \text{ đvdt.}$$



□

§4 Ôn tập chương IV

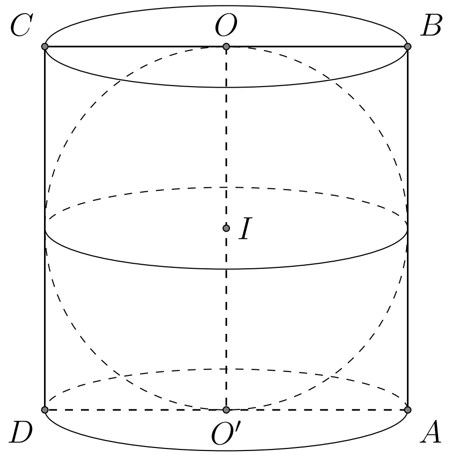
1 Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình tròn $(I, 1\,\text{cm})$ nội tiếp hình vuông $ABCD$.

1. Tính thể tích và diện tích của hình cầu tạo thành khi quay hình tròn $(I, 1\,\text{cm})$ quanh một đường kính của nó.

2. Tính thể tích và diện tích toàn phần của hình trụ tạo thành khi quay hình vuông $ABCD$ quanh OO', với O, O' lần lượt là trung điểm BC và AD.

Lời giải.



1. Hình cầu tạo thành khi quay hình tròn $(I, 1\,\text{cm})$ quanh một đường kính của nó cũng có tâm là I và bán kính $R = 1$ cm. Do đó, thể tích của khối cần là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4\pi}{3}$ cm^3 và diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 4\pi$ cm^2.

2. Hình trụ tạo thành khi quay hình vuông $ABCD$ quanh OO' có hai đáy là hai hình tròn (O, OB) và $(O', O'A)$.
Vì hình vuông $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn $(I, 1$ cm$)$ nên $AB = BC = 2$ cm.
Do đó $OB = 1$ cm.
Suy ra, thể tích hình trụ là $V = \pi \cdot OB^2 \cdot AB = 2\pi$ cm^3. Diện tích toàn phần của hình trụ là $S_{\text{tp}} = 2\pi \cdot OB \cdot AB + 2\pi \cdot OB^2 = 6\pi$ cm^2.

□

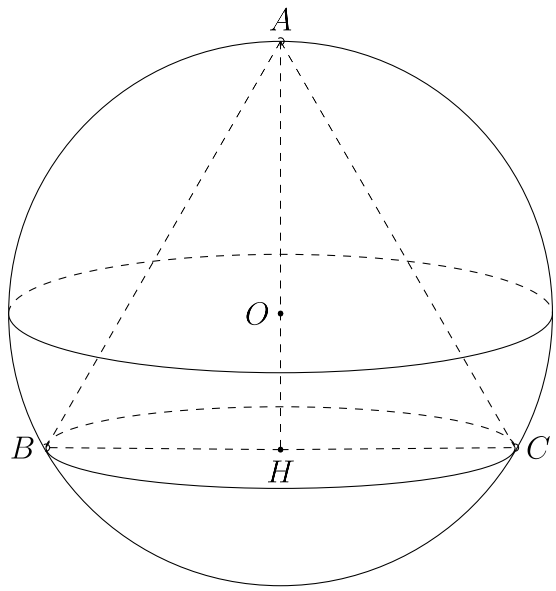
Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh a, đường cao AH, nội tiếp đường tròn tâm O.

1. Tính thể tích hình nón và hình cầu tạo thành khi quay $\triangle ABC$ và đường tròn (O) quanh trục AH, biết $a = 2$ cm.

2. Tính tỉ số diện tích xung quanh hình nón và diện tích mặt cầu tạo thành khi quay

$\triangle ABC$ và đường tròn (O) quanh trục AH.

Lời giải.



1. Hình nón tạo thành khi quay $\triangle ABC$ quanh trục AH tạo thành hình nón có đáy là hình tròn tâm O bán kính HB, chiều cao AH.
   Hình cầu tạo thành khi quay hình tròn tâm O ngoại tiếp $\triangle ABC$ quanh trục AH là hình cầu tâm O bán kính OA.
   Lại có $a = 2$ cm, $AH = AB\sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ cm, $HB = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a}{2} = 1$ cm. Do $\triangle ABC$ đều nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp đồng thời là trọng tâm $\triangle ABC$, suy ra $OA = \dfrac{2}{3}AH = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ cm.
   Khi đó thể tích hình nón là
   $$V_{\text{nón}} = \frac{1}{3}\cdot AH\cdot\pi\cdot HB^2 = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\ \text{cm}^3.$$
   Thể tích hình cầu
   $$V_{\text{cầu}} = \frac{4}{3}\pi\cdot OA^3 = \frac{32\pi\sqrt{3}}{27}\ \text{cm}^3.$$
2. Đường sinh của hình nón là $AB = a$. Diện tích xung quanh hình nón là
   $$S_1 = \pi\cdot HB\cdot AB = \frac{a^2\pi}{2}.$$
   Diện tích mặt cầu là
   $$S_2 = 4\pi\cdot OA^2 = \frac{4a^2\pi}{2}.$$
   Do đó tỉ số diện tích xung quanh hình nón và diện tích mặt cầu là
   $$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a^2\pi}{2} : \frac{4a^2\pi}{2} = \frac{1}{4}.$$

□

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $AB = \sqrt{3}$ cm, $\widehat{B} = 60^\circ$.

1. Tính AC, BC và AH.
2. Tính thể tích khối tạo thành khi quay $\triangle ABC$ quanh trục AC.
3. Tính thể tích khối tạo thành khi quay $\triangle ABC$ quanh trục BC.

Lời giải.

1.

Ta có $\triangle ABC$ vuông nên

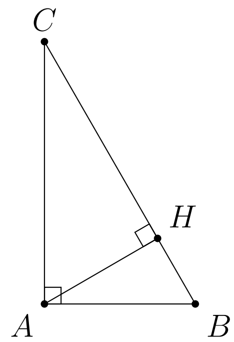
$$AC = AB \cdot \tan B = \sqrt{3} \cdot \tan 60^\circ = 3 \text{ cm}.$$

Theo định lí Pi-ta-go lại có

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Mặt khác $\triangle AHB$ vuông tại H nên

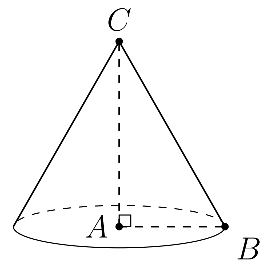
$$AH = AB \cdot \sin B = \frac{3}{2} \text{ cm}.$$



2.

Khi quay $\triangle ABC$ quanh trục AC tạo thành khối nón đỉnh C đáy là hình tròn tâm A bán kính AB. Thể tích khối nón là

$$V_{\text{nón}} = \frac{1}{3} \cdot AC \cdot \pi \cdot AB^2 = 3\pi \text{ cm}^3.$$



3.

Khi quay $\triangle ABC$ quanh trục BC tạo thành hai khối nón đỉnh B và đỉnh C chung đáy là hình tròn tâm H, bán kính HA (hình vẽ).

Lại có $AC^2 = CH \cdot BC \Rightarrow CH = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ cm $\Rightarrow BH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ cm.

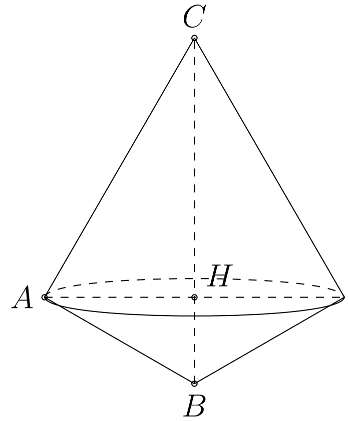
Khi đó thể tích khối nón đỉnh C, đáy hình tròn (H, HA) là

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot CH \cdot \pi \cdot AH^2 = \frac{9\pi\sqrt{3}}{8} \text{ cm}^3.$$

Thể tích khối nón đỉnh B, đáy hình tròn (H, HA) là

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot BH \cdot \pi \cdot AH^2 = \frac{3\pi\sqrt{3}}{8} \text{ cm}^3.$$

Vậy thể tích khối cần tính là $V = V_1 + V_2 = \dfrac{3\pi\sqrt{3}}{2}$ cm^3.



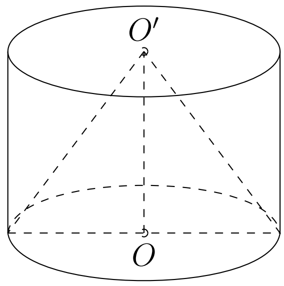
□

Ví dụ 4. Cho hình trụ (T) có hai đáy là hình tròn $(O; R)$ và (O', R) và hình nón (N) có đỉnh là O', đáy là hình tròn (O, R).

1. Từ miếng xốp hình trụ (T), người ta gọt bỏ để tạo thành khối xốp hình nón (N). Tính thể tích phần bị gọt bỏ đi. Biết $R = 3$ cm và $OO' = 4$ cm.

2. Nếu tăng gấp đôi bán kính R thì thể tích hình trụ (T) và hình nón (N) thay đổi như nào?

Lời giải.



1. Thể tích khối xốp hình trụ là $V_{\text{trụ}} = OO' \cdot \pi \cdot R^2 = 36\pi \text{ cm}^3$.
   Thể tích khối xốp hình nón là $V_{\text{nón}} = \dfrac{1}{3} \cdot OO' \cdot \pi \cdot R^2 = 12\pi \text{ cm}^3$.
   Vậy thể tích phần xốp bị gọt bỏ là $V = V_{\text{trụ}} - V_{\text{nón}} = 24\pi \text{ cm}^3$.

2. Thể tích hình trụ với bán kính R là $V_1 = OO' \cdot \pi \cdot R^2$.
   Thể tích hình trụ với bán kính $R' = 2R$ là $V_1 = OO' \cdot \pi \cdot (2R)^2 = 4 \cdot OO' \cdot \pi \cdot R^2$.
   Khi đó ta có $\dfrac{V_1}{V_1'} = \dfrac{1}{4}$.
   Vậy khi tăng gấp đôi bán kính R thì thể tích hình trụ tăng lên 4 lần.
   Thể tích hình nón với bán kính R là $V_2 = \dfrac{1}{3} \cdot OO' \cdot \pi \cdot R^2$.
   Thể tích ình nón với bán kính $R' = 2R$ là $V_2 = \dfrac{1}{3} \cdot OO' \cdot \pi \cdot (2R)^2 = \dfrac{4}{3} \cdot OO' \cdot \pi \cdot R^2$.
   Khi đó ta có $\dfrac{V_2}{V_2'} = \dfrac{1}{4}$.
   Vậy khi tăng gấp đôi bán kính R thì thể tích hình nón tăng lên 4 lần.

□

Ví dụ 5. Cho một cái phễu chứa nước hình nón ngược. Miệng phễu là đường tròn đường kính 6 dm. Khoảng cách từ đáy phễu đến một điểm bất kì trên miệng phễu bằng 5 dm.

1. Tính lượng nước để đổ đầy phễu (giả thiết rằng thành phễu có độ dày không đáng kể).

2. Người ta đổ đầy nước vào phễu rồi rút ra sao cho chiều cao của lượng nước còn lại chỉ bằng một nửa lượng nước ban đầu. Tính thể tích lượng nước còn lại trong phễu.

Lời giải.

1.

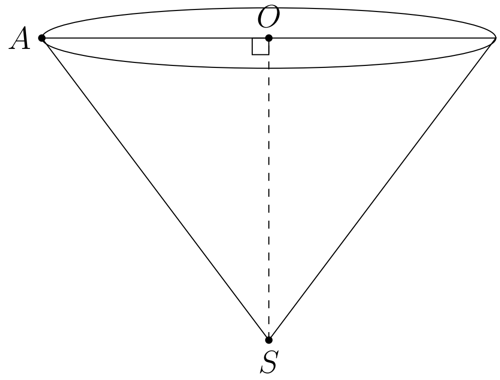
Gọi O là tâm đường tròn đáy của cái phễu và A là một điểm trên đường tròn ấy, khi đó $SA = 5$ dm, $OA = 3$ dm và $SO \perp OA$.
Suy ra, chiều cao của cái phễu là

$$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = 4 \text{ dm}.$$

Thể tích của cái phễu là

$$V = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot \pi \cdot OA^2 = 12\pi \text{ dm}^3.$$

Lượng nước đổ đầy phễu cũng chính là thể tích của cái phễu, tức là 12π dm^3.



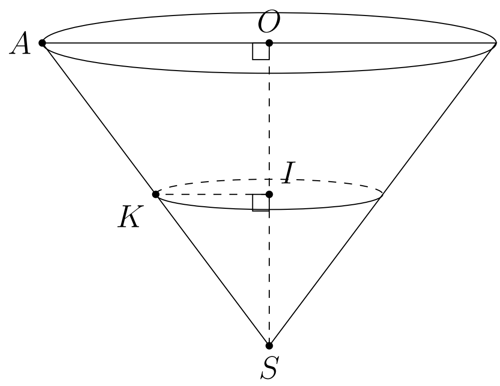
2.

Gọi I là trung điểm SO, K là trung điểm SA thì phần nước còn lại trong phễu cũng là một khối nón đỉnh S đáy là hình tròn tâm I bán kính IK.
Ta có IK là đường trung bình $\triangle SOA$ nên

$$IK = \frac{OA}{2} = \frac{3}{2} \text{ dm}.$$

Do đó thể tích phần nước còn lại trong phễu là

$$V = \frac{1}{3} \cdot SI \cdot \pi \cdot IK^2 = \frac{3\pi}{2} \text{ dm}.$$



□

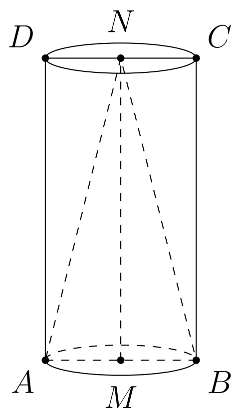
2 Luyện tập

Bài 1. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1$ cm và $AD = 2$ cm. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD.

1. Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh trục MN thì được khối gì? Tính thể tích của khối đó.

2. Khi quay $\triangle NAB$ quanh trục MN thì được khối gì? Tính diện tích xung quanh của khối đó.

Lời giải.



1. Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh trục MN thì được khối trụ có đáy là hình tròn tâm M bán kính $MA = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{1}{2}$ và hình tròn tâm N bán kính ND có thể tích là
$$V = AD \cdot \pi \cdot MA^2 = \frac{\pi}{2}\ \text{cm}^3.$$

2. Khi quay $\triangle NAB$ quanh trục MN thì được khối nón đỉnh N đáy là hình tròn (M, AM), độ dài đường sinh là $AN = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$ và có diện tích xung quanh là
$$S = \pi \cdot AM \cdot AN = \frac{\pi\sqrt{17}}{4}\ \text{cm}^2.$$

□

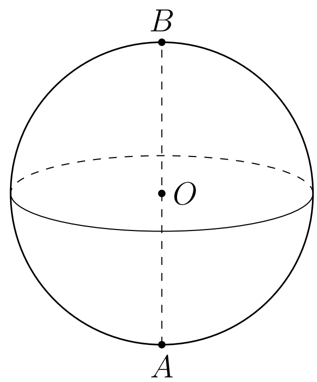
Bài 2. Cho hình tròn (O, R) có diện tích bằng 4π. Quay hình tròn quanh một đường kính ta được hình cầu tâm O bán kính R.

1. Tính thể tích hình cầu.
2. Nếu diện tích hình tròn giảm một nửa thì diện tích của mặt cầu sẽ thay đổi như nào?

Lời giải.

1.

Diện tích hình tròn là
$$\pi \cdot R^2 = 4\pi \Leftrightarrow R = 2.$$
Do đó thể tích hình cầu là
$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{32\pi}{3}.$$



2. Diện tích mặt cầu là
$$S = 4\pi \cdot R^2 = 16\pi.$$
Nếu diện tích hình tròn giảm một nửa thì được tròn bán kính R' và
$$\pi \cdot R'^2 = 2\pi \Leftrightarrow R' = \sqrt{2}.$$
Khi đó diện tích của mặt cầu mới là
$$S' = 4\pi \cdot R'^2 = 8\pi.$$
Suy ra $\dfrac{S}{S'} = 2$. Vậy diện tích mặt cầu cũng giảm đi một nửa.

□

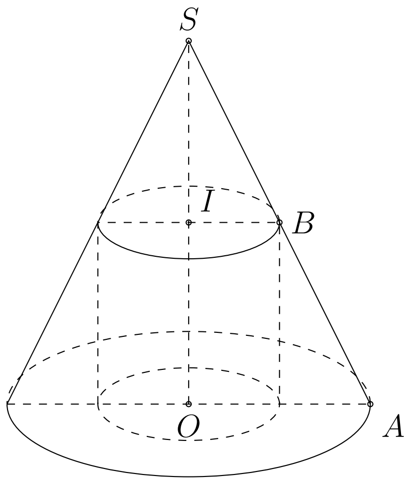
Bài 3. Cho một khối xốp hình nón có đường kính đáy bằng 18 cm và độ dài từ đỉnh đến một điểm trên đường tròn đáy bằng 15 cm.

1. Tính chiều cao và thể tích của hình nón đó.

2. Cắt chỏm của khối xốp sao cho phần còn lại là hình nón cụt có chiều cao bằng một nửa chiều cao của hình nón ban đầu. Tính thể tích của phần bị cắt bỏ đi.

3. Tiếp tục cắt khối nón cụt trên để tạo thành hình trụ có đáy là đáy nhỏ của hình nón cụt. Tính thể tích của hình trụ mới tạo thành.

Lời giải.



1. Giả sử hình nón có đỉnh là điểm S đáy là đường tròn tâm O, A là một điểm trên đường tròn đáy. Khi đó bán kính đáy hình nón là $OA = \dfrac{18}{2} = 9$ cm và chiều cao của hình nón là
$$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12 \text{ cm}.$$
Thể tích của hình nón là
$$V = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot \pi \cdot OA^2 = 324 \text{ cm}^3.$$

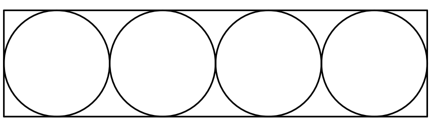
2. Gọi I là trung điểm SO, B là trung điểm SA. Phần bị cắt bỏ đi cũng là khối nón có đỉnh S đáy là hình tròn (I, IB).
IB là đường trung bình của $\triangle SOA$ nên $IB = \dfrac{OA}{2} = \dfrac{9}{2}$. Thể tích khối nón bị cắt là
$$\frac{1}{3} \cdot SI \cdot \pi \cdot IB^2 = \frac{81\pi}{2} \text{ cm}^3.$$

3. Khối trụ có đáy là hình tròn (I, IB) chiều cao IO nên có thể tích là
$$V' = IO \cdot \pi \cdot IB^2 = \frac{243\pi}{2} \text{ cm}^3.$$

□

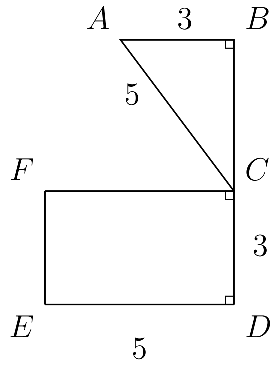
Bài 4. Một cái hộp hình trụ chứa vừa khít 4 quả ten-nít. Biết diện tích toàn phần của hộp là 597cm^2. Tính đường kính và thể tích của mỗi quả ten-nít.

Lời giải.



Gọi R là bán kính của mỗi quả ten-nít thì bán kính đáy hộp là R, chiều cao của trụ là $8R$.
Ta có $S_{\text{dttp}} = 2 \cdot S_{\text{đáy}} + S_{\text{xq}} = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot 8R = 18\pi R^2$.
Ta lại có diện tích xung quanh đề bài cho là $597\text{cm}^2 \Rightarrow R \approx 3,25\text{cm}$.
Vậy $V = \dfrac{4}{3}\pi R \approx \dfrac{4}{3}\pi \cdot (3,25)^3 \approx 144\text{cm}^3$. □

Bài 5.
Cho hình vẽ bên. Tính tổng thể tích của các khối tạo thành khi quay hình bên quanh trục BD.



Lời giải.

Tam giác ABC quay quanh trục BD sẽ tạo thành hình nón với bán kính đáy bằng cạnh AB và đường cao là BC.
Thể tích hình nón này là

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{3}\pi \cdot AB^2 \cdot BC \\ &= \frac{1}{3}\pi \cdot AB^2 \cdot \sqrt{AC^2 - BC^2} \\ &= \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot \sqrt{5^2 - 3^2} \\ &= 12\pi \text{ (đvtt)}. \end{aligned}$$

Hình chữ nhật $CDEF$ quay quanh trục BD sẽ tạo thành hình trụ với bán kính đáy bằng cạnh DE và đường cao là CD.
Thể tích hình trụ này là

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \cdot DE^2 \cdot CD \\ &= \pi \cdot 5^2 \cdot 3 \\ &= 75\pi \text{ (đvtt)}. \end{aligned}$$

Thể tính khối tạo thành khi quay hình trên quanh trục BD là

$$V = V_1 + V_2 = 87\pi \text{ (đvtt)}.$$

□

Bài 6. Một hình nón có đỉnh là tâm một hình cầu và có đáy là hình tròn tạo bởi một mặt phẳng cắt hình cầu. Biết diện tích đáy hình nón là $144\pi\text{cm}^2$ và diện tích xung quanh của nó là $180\pi\text{cm}^2$. Tính thể tích phần không gian bên trong hình cầu và bên ngoài hình nón.

Lời giải.

Tính bán kính đáy hình nón là

$$\pi \cdot IM^2 \cdot 144\pi \Leftrightarrow r = IM = 12\text{cm}.$$

Tính đường sinh hình nón là

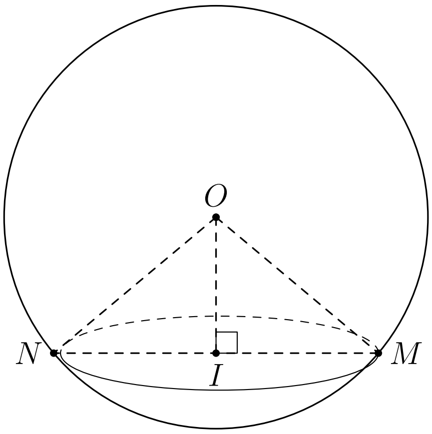
$$S_{\text{xq}} = 180\pi \Leftrightarrow \pi \cdot r \cdot l = 180\pi \Leftrightarrow l = OM = 15\text{cm}.$$

Chiều cao hình nón là

$$h = OI = \sqrt{OM^2 - IM^2} = \sqrt{l^2 - r^2} = 9\text{cm}.$$

Tính hiệu thể tích giữa hình cầu và hình nón được

$$V = V_{\text{cầu}} - V_{\text{nón}} = \frac{4}{3}\pi \cdot OM^3 - \frac{1}{3}\pi \cdot IM^2 \cdot h = 4068\pi\text{cm}^3.$$



□

Bài 7. Tam giác đều ABC có độ dài cạnh là a, ngoại tiếp một đường tròn. Cho hình quay một vòng xung quanh đường cao AH của tam giác đó, ta được một hình nón ngoại tiếp hình cầu. Tính thể tích phần hình nón nằm ngoài hình cầu.

Lời giải.

Gọi I là tâm của tam giác ABC. Bán kính hình cầu là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC, nghĩa là IH.

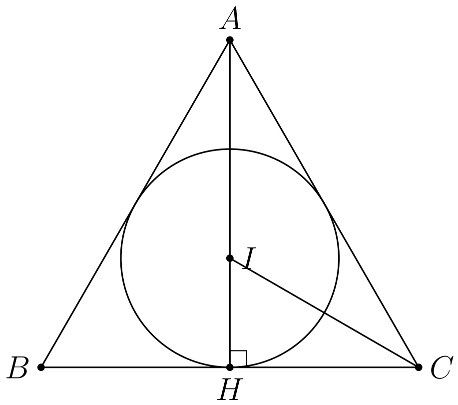
Ta có $AH^2 = CA^2 - CH^2 = \dfrac{3a^2}{4} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $R = IH = \dfrac{1}{3} \cdot AH = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Do đó thể tích hình cầu là $V_c = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{54}$ (đvtt).

Thể tích hình nón là

$$V_n = \frac{1}{3}\pi \cdot AH \cdot HB^2 = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{8} \text{ (đvtt)}.$$



Vậy phần thể tích hình nón nằm ngoài hình cầu là $V' = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8} - \dfrac{a^3\sqrt{3}}{54} = \dfrac{23a^3\sqrt{3}}{216}$ (đvtt). □

Bài 8. Một hình nón cụt có bán kính đáy lớn là 9 cm và bán kính đáy bé là 6 cm, chiều cao bằng 4 cm.

1. Tính diện tích xung quanh hình nón cụt.

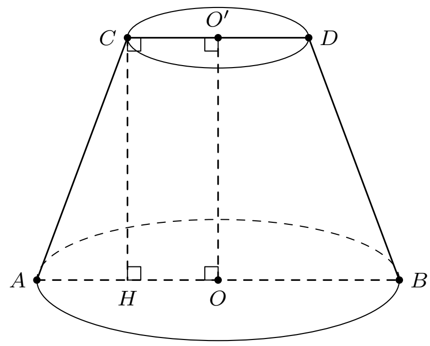
2. Tính thể tích của hình nón sinh ra hình nón cụt đó.

Lời giải.

1.

Kẻ $CH \perp AB$ (tại H). Khi đó $CH = OO' = 4$ (cm).
Mặt khác, $HA = OA - OH = OA - O'C = 3$ (cm).
Vậy $l = CA = \sqrt{CH^2 + HA^2} = 5$ (cm).
Diện tích xung quanh hình nón cụt là

$$S_{xq} = \pi(r_1 + r_2)l = 75\pi.$$



2. Gọi giao điểm của OO' và CA là S.
   Theo hệ quả của định lý Ta-lét, ta có $\dfrac{SO'}{CO'} = \dfrac{SO}{AO}$.
   Gọi $SO' = x$ (cm) $(x > 0)$ thì từ đẳng thức trên ta có
   $$\frac{x}{6} = \frac{x+4}{9}.$$
   Giải phương trình này ta có nghiệm $x = 8$ (nhận).
   Vậy chiều cao của hình nón sinh ra hình nón cụt đó là $h = SO = SO' + OO' = 12$ (cm).
   Thể tích cần tìm là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 9^2 \cdot 12 = 324\pi$ (đvtt).

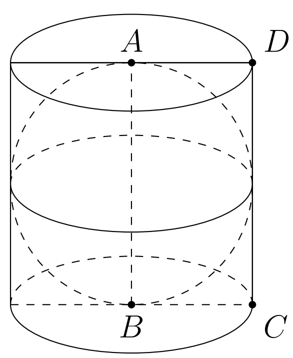
□

Bài 9. Cho hình chữ nhật $ABCD$ $(AB > AD)$ có chu vi là diện tích lần lượt là 6 cm và 2 cm^2.

1. Tính thể tích và diện tích hình trụ được sinh ra khi quay hình chữ nhật quanh cạnh AB.
2. Hình trụ này có thể chứa vừa khít một khối cầu bán kính R. Tính R và phần thể tích giữa hình trụ và khối cầu.

Lời giải.

1. Ta có
   $$\begin{cases} 2(AB + AD) = 6 \\ AB \cdot AD = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB + AD = 3 \\ AB \cdot AD = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = 2\,(\text{cm}) \\ AD = 1\,(\text{cm}). \end{cases}$$
   Thể tích của hình trụ
   $$V = AB \cdot \pi AD^2 = 2\pi\,(\text{cm}^3).$$
   Diện tích của hình trụ
   $$S = AB \cdot 2\pi AD + 2 \cdot \pi AD^2 = 4\pi + 2\pi = 6\pi\,(\text{cm}^2).$$



2. Ta có bán kính khối cầu
   $$R = \frac{AB}{2} = 1\,(\text{cm}).$$
   Thể tích khối cầu
   $$V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi}{3}\,(\text{cm}^3).$$

Phần thể tích giữa khối trụ và khối cầu bằng

$$V - V_1 = \frac{14}{3}\pi\,(\text{cm}^3).$$

□

Bài 10. Cho ba điểm A, O, B thẳng hàng theo thứ tự đó và $OA = a$, $OB = b$. Vẽ hai tia Ax, By vuông góc với AB. Qua O vẽ hai tia vuông góc với nhau tại O và lần lượt cắt Ax, By tại C, D. Cho $\widehat{COA} = 30^\circ$.

1. Tính tỉ số thể tích của các hình do tam giác AOC và BOD tạo thành khi quay hình này quanh trục AB.
2. Giả sử $\widehat{BDC} = 60^\circ$. Tính thể tích hình nón cụt được tạo thành khi quay hình vẽ quanh trục AB.

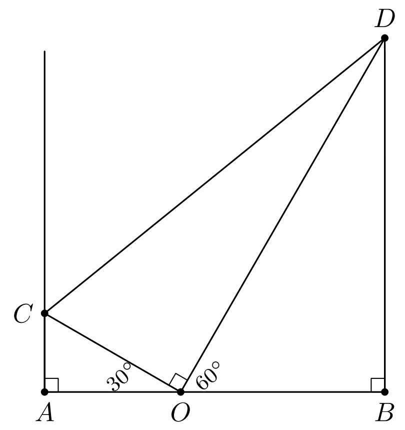
Lời giải.

1.

Quay $\triangle AOC$ quanh trục AB ta được hình nón có

+ Chiều cao $h = OA = a$.

+ Bán kính đáy $r = AC = OA \cdot \tan 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.



Khi đó thể tích của hình nón này là

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi a^3}{9}.$$

Quay $\triangle BOD$ quanh trục AB ta được hình nón có

+ Chiều cao $h = OB = b$.

+ Bán kính đáy $r = BD = OB \cdot \tan 60^\circ = b\sqrt{3}$.

Khi đó thể tích của hình nón này là

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \pi b^3.$$

Vậy thể tích cần tìm là $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{a^3}{9b^3}$.

2. Quay hình vẽ quanh trục AB ta được hình nón cụt có

+ Bán kính đáy lớn $R = BD = b\sqrt{3}$.

+ Bán kính đáy nhỏ $r = AC = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

+ Chiều cao $h = AB = OA + OB = a + b$.

Suy ra thể tích của hình nón cụt cần tìm là

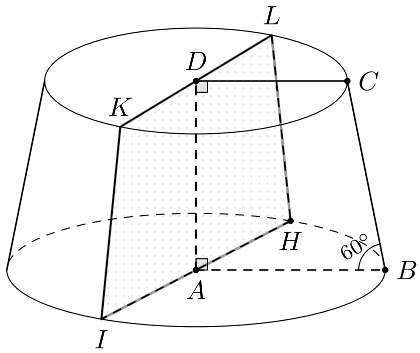
$$V = \frac{1}{3}\pi h\left(R^2 + r^2 + rR\right) = \frac{1}{3}\pi(a+b)\left(3b^2 + \frac{1}{3}a^2 + ab\right).$$

□

Bài 11. Cho hình thang vuông $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $BC = 4$ cm, $CD = 2$ cm, $\widehat{B} = 60^\circ$. Khi quay hình thang vuông $ABCD$ quanh trục AD tạo thành một hình nón cụt.

1. Tính thể tích của hình nón cụt.
2. Cắt hình nón cụt trên bởi một mặt phẳng qua trục AD thì mặt cắt tạo thành là hình gì? Tính diện tích của hình đó.

Lời giải.



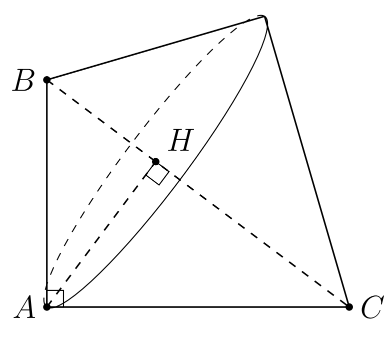
1. Ta có $r = CD = 2$ (cm), $R = AB$, $h = AD$.
$h = AD = \sin 60^\circ \cdot BC = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 2\sqrt{3}$ (cm).
$R = AB = DC + \cos 60^\circ \cdot BC = 2 + \dfrac{1}{2} \cdot 4 = 3$ (cm).
Vậy $V = \dfrac{1}{3}\pi h\left(r^2 + R^2 + rR\right) = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2\sqrt{3} \cdot (2^2 + 3^2 + 2 \cdot 3) = \dfrac{38\pi\sqrt{3}}{3}\ (\text{cm}^3)$.
2. Cắt hình nón cụt trên bởi một mặt phẳng qua trục AD thì mặt cắt tạo thành là hình thang cân có độ dài 2 đáy lần lượt là $2r$ và $2R$ và chiều cao là h.
Diện tích của hình thang này là
$$S = \frac{h(2r + 2R)}{2} = h(r + R) = 2\sqrt{3} \cdot (2 + 3) = 10\sqrt{3}\ (\text{cm}^2).$$

□

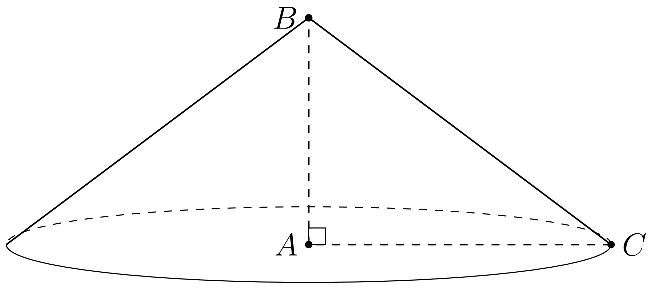
Bài 12. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi V_1, V_2, V_3 theo thứ tự là thể tích của những hình sinh ra khi quay tam giác ABC một vòng xung quanh các cạnh BC, AB, AC. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{V_1^2} = \frac{1}{V_2^2} + \frac{1}{V_3^2}.$$

Lời giải.

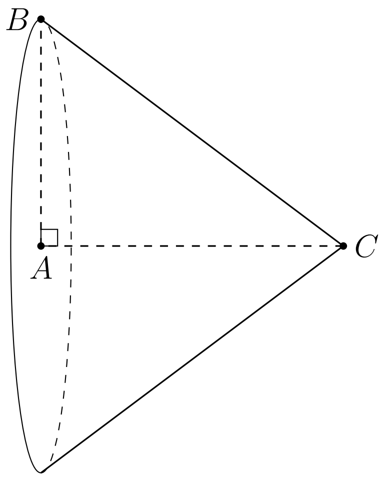
Gọi H là chân đường cao xuất phát từ A. Khi quay ΔABC quanh cạnh BC, ta thu được hai hình nón có bán kính đáy chung là HA, chiều cao lần lượt là HB và HC.
Thể tích của hình sinh ra là tổng thể tích hai hình nón này.
Vậy $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi(CH \cdot AH^2 + BH \cdot AH^2) = \dfrac{1}{3}\pi BC \cdot AH^2$.



Khi quay ΔABC quanh cạnh AB, ta thu được hình nón có bán kính đáy AC, chiều cao AB. Vậy $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi AB \cdot AC^2$.



Khi quay ΔABC quanh cạnh AC, ta thu được hình nón có bán kính đáy AB, chiều cao AC. Vậy $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi AC \cdot AB^2$.



Do đó

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V_2^2} + \frac{1}{V_3^2} &= \frac{9}{\pi^2} \cdot \frac{1}{AB^2 \cdot AC^2} \cdot \left(\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}\right) \\
&= \frac{9}{\pi^2} \cdot \frac{1}{AB^2 \cdot AC^2} \cdot \frac{1}{AH^2} \\
&= \frac{9}{\pi^2} \cdot \frac{AB^2 + AC^2}{AB^2 \cdot AC^2} \cdot \frac{1}{AH^2} \cdot \frac{1}{AB^2 + AC^2} \\
&= \frac{9}{\pi^2} \cdot \left(\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}\right) \cdot \frac{1}{AH^2} \cdot \frac{1}{BC^2} \\
&= \frac{9}{\pi^2} \cdot \frac{1}{AH^2} \cdot \frac{1}{AH^2} \cdot \frac{1}{BC^2} = \frac{9}{\pi^2} \cdot \frac{1}{AH^4} \cdot \frac{1}{AH^2} \cdot \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{V_1^2}.
\end{aligned}$$

□

Bài 13. Cho nửa đường tròn $(O; R)$, đường kính AB.

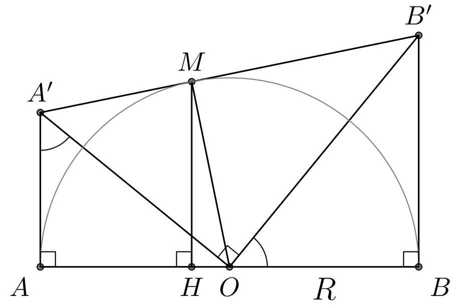
1. Trên AB lấy điểm H sao cho $\dfrac{HA}{HB} = \dfrac{2}{3}$. Tính HA, HB theo R.

2. Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt nửa đường tròn $(O; R)$ tại M; tiếp tuyến tại M với nửa đường tròn cắt các tiếp tuyến tại A, B lần lượt tai A', B'. Chứng minh rằng tam giác $A'OB'$ vuông và $AA' \cdot BB' = R^2$.

3. Đặt $AA' = x; BB' = y$. Tính x, y theo R.

4. Cho nửa hình tròn $(O; R)$ quay một vòng quanh cạnh AB được một hình có thể tích là V_1; cho hình thang vuông $ABB'A'$ quay quanh AB ta được một hình có thể tích là V_2. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

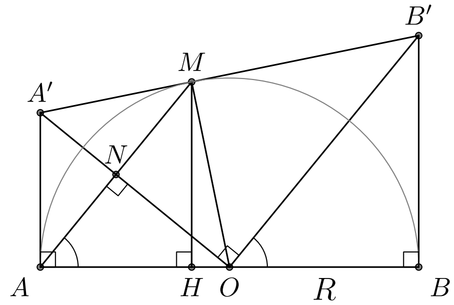
Lời giải.



1. Ta có $\dfrac{HA}{HB}=\dfrac{2}{3}$
$\Rightarrow \dfrac{HA}{2}=\dfrac{HB}{3}=\dfrac{HA+HB}{5}=\dfrac{AB}{5}=\dfrac{2}{5}R$
$\Rightarrow \begin{cases} HA=\dfrac{4}{5}R \\ HB=\dfrac{6}{5}R. \end{cases}$

b) Hai tam giác OAA' và $B'BO$ có
$\begin{cases} \widehat{A}=\widehat{B}=90^\circ \\ \widehat{AOA'}=\widehat{BB'O} \quad \text{(cặp góc có cạnh tương ứng vuông góc)} \end{cases}.$
Suy ra $OAA' \backsim \triangle B'BO$.
Do đó $\widehat{AA'O}=\widehat{B'OB}$.
Mà $\widehat{AA'O}+\widehat{A'OA}=90^\circ$.
Suy ra $\widehat{B'OB}+\widehat{A'OA}=90^\circ$.
Vậy $\widehat{A'OB'}=90^\circ$ hay tam giác $A'OB'$ là tam giác vuông.
Mặt khác, do $\triangle OAA' \backsim \triangle B'BO$ nên $\dfrac{AA'}{BO}=\dfrac{OA}{BB'} \Leftrightarrow AA'\cdot BB'=OA\cdot OB=R^2$.

Cách khác:



Gọi N là giao điểm của AM và OA'.
Ta có $\widehat{MAB}=\dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AM}$.
Mà $\widehat{B'OB}=\dfrac{1}{2}\widehat{BOM}=\dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AM}$.
Suy ra $\widehat{MAB}=\widehat{B'OB}$.
Tam giác vuông AON có
$\widehat{NAO}+\widehat{NOA}=90^\circ$ hay $\widehat{MAB}+\widehat{A'OA}=90^\circ$.
Do đó $\widehat{B'OB}+\widehat{A'OA}=90^\circ$.
Suy ra $\widehat{A'OB'}=180^\circ-\left(\widehat{B'OB}+\widehat{A'OA}\right)=90^\circ$.
Vậy tam giác $A'OB'$ là tam giác vuông.
Mặt khác, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông $OA'B'$, ta có $OM^2=A'M\cdot B'M$.
Mà theo tính chất của tiếp tuyến thì $\begin{cases} AA'=A'M \\ BB'=B'M \end{cases}.$
Suy ra $AA'\cdot BB'=OM^2=R^2$.

c) Ta có $OH=OA-AH=R-\dfrac{4}{5}R=\dfrac{R}{5}$
$\Rightarrow MH=\sqrt{OM^2-OH^2}=\sqrt{R^2-\left(\dfrac{R}{5}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}R.$
$\Rightarrow AM=\sqrt{MH^2+AH^2}=\sqrt{\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{5}R\right)^2+\left(\dfrac{4}{5}R\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}R.$

$\Rightarrow AN = \dfrac{AM}{2} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}R.$

$\Rightarrow ON = \sqrt{OA^2\triangle - AN^2} = \sqrt{R^2 - \left(\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}R.$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OAA', ta có

$OA^2 = ON.OA' \Rightarrow OA' = \dfrac{OA^2}{ON} = \dfrac{R^2}{\frac{\sqrt{15}}{5}R} = \dfrac{\sqrt{15}}{3}R.$

$\Rightarrow AA' = x = \sqrt{OA'^2 - OA^2} = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{15}}{3}R\right)^2 - R^2} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}R.$

Mặt khác, ta đã chứng minh được

$AA' \cdot BB' = R^2 \Rightarrow BB' = y = \dfrac{R^2}{AA'} = \dfrac{R^2}{\frac{\sqrt{6}}{3}R} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}R.$

Vậy $x = \dfrac{\sqrt{6}}{3}R$ và $y = \dfrac{\sqrt{6}}{2}R.$

d) Nửa hình tròn $(O;R)$ quay một vòng quanh cạnh AB được hình cầu bán kính R có thể tích là

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Hình thang vuông $ABB'A'$ quay quanh AB được hình nón cụt với hai bán kính đáy lần lượt bằng AA', BB' và chiều cao bằng AB có thể tích là

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{1}{3}\pi \cdot AB \cdot (AA'^2 + BB'^2 + AA' \cdot BB') \\ &= \frac{1}{3}\pi \cdot 2R \cdot \left[\left(\frac{\sqrt{6}}{3}R\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}R\right)^2 + R^2\right] \\ &= \frac{19}{9}\pi R^3. \end{aligned}$$

Vậy $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{12}{19}.$

□