CHUYÊN ĐỀ 1 - PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

A. MỤC TIÊU:

* Hệ thống lại các dạng toán và các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử

* Giải một số bài tập về phân tích đa thức thành nhân tử

* Nâng cao trình độ và kỹ năng về phân tích đa thức thành nhân tử

B. CÁC PHƯƠNG PHÁP VÀ BÀI TẬP

I. TÁCH MỘT HẠNG TỬ THÀNH NHIỀU HẠNG TỬ:

Định lí bổ sung:

+ Đa thức f(x) có nghiệm hữu tỉ thì có dạng p/q trong đó p là ước của hệ số tự do, q là ước dương của hệ số cao nhất

+ Nếu f(x) có tổng các hệ số bằng 0 thì f(x) có một nhân tử là x – 1

+ Nếu f(x) có tổng các hệ số của các hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của các hạng tử bậc lẻ thì f(x) có một nhân tử là x + 1

+ Nếu a là nghiệm nguyên của f(x) và f(1); f(- 1) khác 0 thì $\frac{f(1)}{a-1}$ và $\frac{f(-1)}{a+1}$ đều là số nguyên. Để nhanh chóng loại trừ nghiệm là ước của hệ số tự do

1. Ví dụ 1: $3x^2 – 8x + 4$

Cách 1: Tách hạng tử thứ 2

$3x^2 – 8x + 4 = 3x^2 – 6x – 2x + 4 = 3x(x – 2) – 2(x – 2) = (x – 2)(3x – 2)$

Cách 2: Tách hạng tử thứ nhất:

$3x^2 – 8x + 4 = (4x^2 – 8x + 4) - x^2 = (2x – 2)^2 – x^2 = (2x – 2 + x)(2x – 2 – x)$

= (x – 2)(3x – 2)

Ví dụ 2: $x^3 - x^2 - 4$

Ta nhân thấy nghiệm của f(x) nếu có thì x = $\pm 1; \pm 2; \pm 4$, chỉ có f(2) = 0 nên x = 2 là nghiệm của f(x) nên f(x) có một nhân tử là x – 2. Do đó ta tách f(x) thành các nhóm có xuất hiện một nhân tử là x – 2

Cách 1:

$x^3 - x^2 - 4 = \left(x^3 - 2x^2\right) + \left(x^2 - 2x\right) + \left(2x - 4\right) = x^2\left(x - 2\right) + x(x - 2) + 2(x - 2) = \left(x - 2\right)\left(x^2 + x + 2\right)$

Cách 2:

$$x^3 - x^2 - 4 = x^3 - 8 - x^2 + 4 = \left(x^3 - 8\right) - \left(x^2 - 4\right) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4) - (x - 2)(x + 2)$$

$$= \left(x - 2\right)\left[\left(x^2 + 2x + 4\right) - (x + 2)\right] = (x - 2)(x^2 + x + 2)$$

Ví dụ 3: f(x) = $3x^3 - 7x^2 + 17x - 5$

Nhận xét: $\pm 1, \pm 5$ không là nghiệm của f(x), như vậy f(x) không có nghiệm nguyên. Nên f(x) nếu có nghiệm thì là nghiệm hữu tỉ

Ta nhận thấy x = $\frac{1}{3}$ là nghiệm của f(x) do đó f(x) có một nhân tử là 3x – 1. Nên

f(x) = $3x^3 - 7x^2 + 17x - 5$ =

$$3x^3 - x^2 - 6x^2 + 2x + 15x - 5 = \left(3x^3 - x^2\right) - \left(6x^2 - 2x\right) + \left(15x - 5\right)$$

$$= x^2(3x - 1) - 2x(3x - 1) + 5(3x - 1) = (3x - 1)(x^2 - 2x + 5)$$

Vì $x^2 - 2x + 5 = (x^2 - 2x + 1) + 4 = (x - 1)^2 + 4 > 0$ với mọi x nên không phân tích được thành nhân tử nữa

Ví dụ 4: $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$

Nhận xét: Tổng các hệ số của các hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của các hạng tử bậc lẻ nên đa thức có một nhân tử là x + 1

$x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (x^3 + x^2) + (4x^2 + 4x) + (4x + 4) = x^2(x + 1) + 4x(x + 1) + 4(x + 1)$

$= (x + 1)(x^2 + 4x + 4) = (x + 1)(x + 2)^2$

Ví dụ 5: $f(x) = x^5 – 2x^4 + 3x^3 – 4x^2 + 2$

Tổng các hệ số bằng 0 thì nên đa thức có một nhân tử là x – 1, chia f(x) cho (x – 1) ta có:

$x^5 – 2x^4 + 3x^3 – 4x^2 + 2 = (x – 1)(x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x - 2)$

Vì $x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x - 2$ không có nghiệm nguyên cũng không có nghiệm hữu tỉ nên không phân tích được nữa

Ví dụ 6: $x^4 + 1997x^2 + 1996x + 1997 = (x^4 + x^2 + 1) + (1996x^2 + 1996x + 1996)$

$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 1996(x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1 + 1996) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1997)$

Ví dụ 7: $x^2 - x - 2001.2002 = x^2 - x - 2001.(2001 + 1)$

$= x^2 - x – 2001^2 - 2001 = (x^2 – 2001^2) – (x + 2001) = (x + 2001)(x – 2002)$

II. THÊM , BỚT CÙNG MỘT HẠNG TỬ:

1. Thêm, bớt cùng một số hạng tử để xuất hiện hiệu hai bình phương:

Ví dụ 1: $4x^4 + 81 = 4x^4 + 36x^2 + 81 - 36x^2 = (2x^2 + 9)^2 – 36x^2$

$= (2x^2 + 9)^2 – (6x)^2 = (2x^2 + 9 + 6x)(2x^2 + 9 – 6x)$

$= (2x^2 + 6x + 9)(2x^2 – 6x + 9)$

Ví dụ 2: $x^8 + 98x^4 + 1 = (x^8 + 2x^4 + 1) + 96x^4$

$= (x^4 + 1)^2 + 16x^2(x^4 + 1) + 64x^4 - 16x^2(x^4 + 1) + 32x^4$

$= (x^4 + 1 + 8x^2)^2 – 16x^2(x^4 + 1 – 2x^2) = (x^4 + 8x^2 + 1)^2 - 16x^2(x^2 – 1)^2$

$= (x^4 + 8x^2 + 1)^2 - (4x^3 – 4x)^2$

$= (x^4 + 4x^3 + 8x^2 – 4x + 1)(x^4 - 4x^3 + 8x^2 + 4x + 1)$

2. Thêm, bớt cùng một số hạng tử để xuất hiện nhân tử chung

Ví dụ 1: $x^7 + x^2 + 1 = (x^7 – x) + (x^2 + x + 1) = x(x^6 – 1) + (x^2 + x + 1)$

$= x(x^3 - 1)(x^3 + 1) + (x^2 + x + 1) = x(x – 1)(x^2 + x + 1) (x^3 + 1) + (x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)[x(x – 1)(x^3 + 1) + 1] = (x^2 + x + 1)(x^5 – x^4 + x^2 - x + 1)$

Ví dụ 2: $x^7 + x^5 + 1 = (x^7 – x) + (x^5 – x^2) + (x^2 + x + 1)$

$= x(x^3 – 1)(x^3 + 1) + x^2(x^3 – 1) + (x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)(x – 1)(x^4 + x) + x^2 (x – 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)[(x^5 – x^4 + x^2 – x) + (x^3 – x^2) + 1] = (x^2 + x + 1)(x^5 – x^4 + x^3 – x + 1)$

Ghi nhớ:

Các đa thức có dạng $x^{3m + 1} + x^{3n + 2} + 1$ như: $x^7 + x^2 + 1$; $x^7 + x^5 + 1$; $x^8 + x^4 + 1$;

$x^5 + x + 1$; $x^8 + x + 1$; … đều có nhân tử chung là $x^2 + x + 1$

III. ĐẶT BIẾN PHỤ:

Ví dụ 1: $x(x + 4)(x + 6)(x + 10) + 128 = [x(x + 10)][(x + 4)(x + 6)] + 128$

$= (x^2 + 10x) + (x^2 + 10x + 24) + 128$

Đặt $x^2 + 10x + 12 = y$, đa thức có dạng

$(y - 12)(y + 12) + 128 = y^2 - 144 + 128 = y^2 - 16 = (y + 4)(y - 4)$

$= (x^2 + 10x + 8)(x^2 + 10x + 16) = (x + 2)(x + 8)(x^2 + 10x + 8)$

Ví dụ 2: $A = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$

Giả sử $x \neq 0$ ta viết

$x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = x^2 (x^2 + 6x + 7 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}) = x^2 [(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 6(x - \frac{1}{x}) + 7]$

Đặt $x - \frac{1}{x} = y$ thì $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2$, do đó

$A = x^2(y^2 + 2 + 6y + 7) = x^2(y + 3)^2 = (xy + 3x)^2 = [x(x - \frac{1}{x})^2 + 3x]^2 = (x^2 + 3x - 1)^2$

Chú ý: Ví dụ trên có thể giải bằng cách áp dụng hằng đẳng thức như sau:

$A = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = x^4 + (6x^3 - 2x^2) + (9x^2 - 6x + 1)$

$= x^4 + 2x^2(3x - 1) + (3x - 1)^2 = (x^2 + 3x - 1)^2$

Ví dụ 3: $A = (x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)^2 + (xy + yz + zx)^2$

$= \left[(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + zx)\right](x^2 + y^2 + z^2) + (xy + yz + zx)^2$

Đặt $x^2+y^2+z^2$ = a, xy + yz + zx = b ta có

A = a(a + 2b) + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 = $(a + b)^2$ = ($x^2+y^2+z^2$ + xy + yz + zx$)^2$

Ví dụ 4: B =

$$2(x^4+y^4+z^4)-(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)^2+(x+y+z)^4$$

Đặt $x^4 + y^4 + z^4 = a$, $x^2 + y^2 + z^2 = b$, x + y + z = c ta có:

B = $2a – b^2 – 2bc^2 + c^4 = 2a – 2b^2 + b^2 - 2bc^2 + c^4 = 2(a – b^2) + (b – c^2)^2$

Ta lại có: $a – b^2$ = - 2($x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$) và $b – c^2$ = - 2(xy + yz + zx) Do đó;

B = - 4($x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$) + 4 $(xy + yz + zx)^2$

$$= -4x^2y^2-4y^2z^2-4z^2x^2+4x^2y^2+4y^2z^2+4z^2x^2+8x^2yz+8xy^2z+8xyz^2 = 8xyz(x+y+z)$$

Ví dụ 5: $(a+b+c)^3-4(a^3+b^3+c^3)-12abc$

Đặt a + b = m, a – b = n thì 4ab = $m^2 – n^2$

$a^3 + b^3 = (a + b)[(a – b)^2 + ab] = m(n^2 + \frac{m^2 - n^2}{4})$. Ta có:

C = $(m + c)^3 – 4.\ \frac{m^3+3mn^2}{4}-4c^3-3c(m^2-n^2)$ = 3(- c^3 +mc^2 – mn^2 + cn^2)

= 3[c^2(m - c) - n^2(m - c)] = 3(m - c)(c - n)(c + n) = 3(a + b - c)(c + a - b)(c - a + b)

III. PHƯƠNG PHÁP HỆ SỐ BẤT ĐỊNH:

Ví dụ 1: $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3$

Nhận xét: các số ± 1, ± 3 không là nghiệm của đa thức, đa thức không có nghiệm nguyên củng không có nghiệm hữu tỉ

Như vậy nếu đa thức phân tích được thành nhân tử thì phải có dạng

$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 + (a + c)x^3 + (ac + b + d)x^2 + (ad + bc)x + bd$

đồng nhất đa thức này với đa thức đã cho ta có: $\begin{cases} a+c=-6 \\ ac+b+d=12 \\ ad+bc=-14 \\ bd=3 \end{cases}$

Xét bd = 3 với b, d $\in$ Z, b $\in$ $\{\pm1, \pm3\}$ với b = 3 thì d = 1 hệ điều kiện trên trở thành

$$\begin{cases} a+c=-6 \\ ac=-8 \\ a+3c=-14 \\ bd=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c=-8 \\ ac=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-4 \\ a=-2 \end{cases}$$

Vậy: $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3 = (x^2 - 2x + 3)(x^2 - 4x + 1)$

Ví dụ 2: $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8$

Nhận xét: đa thức có 1 nghiệm là x = 2 nên có thừa số là x - 2 do đó ta có:

$2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8 = (x - 2)(2x^3 + ax^2 + bx + c)$

$= 2x^4 + (a - 4)x^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c \Rightarrow \begin{cases} a-4=-3 \\ b-2a=-7 \\ c-2b=6 \\ -2c=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-5 \\ c=-4 \end{cases}$

Suy ra: $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8 = (x - 2)(2x^3 + x^2 - 5x - 4)$

Ta lại có $2x^3 + x^2 - 5x - 4$ là đa thức có tổng hệ số của các hạng tử bậc lẻ và bậc chẵn bằng nahu nên có 1 nhân tử là $x + 1$ nên $2x^3 + x^2 - 5x - 4 = (x + 1)(2x^2 - x - 4)$

Vậy: $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8 = (x - 2)(x + 1)(2x^2 - x - 4)$

Ví dụ 3:

$12x^2 + 5x - 12y^2 + 12y - 10xy - 3 = (ax + by + 3)(cx + dy - 1)$

$= acx^2 + (3c - a)x + bdy^2 + (3d - b)y + (bc + ad)xy – 3$

$$\Rightarrow \begin{cases} ac = 12 \\ bc + ad = -10 \\ 3c - a = 5 \\ bd = -12 \\ 3d - b = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ c = 3 \\ b = -6 \\ d = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow 12x^2 + 5x - 12y^2 + 12y - 10xy - 3 = (4x - 6y + 3)(3x + 2y - 1)$

<u>BÀI TẬP:</u>

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1) $x^3 - 7x + 6$

2) $x^3 - 9x^2 + 6x + 16$

3) $x^3 - 6x^2 - x + 30$

4) $2x^3 - x^2 + 5x + 3$

5) $27x^3 - 27x^2 + 18x - 4$

6) $x^2 + 2xy + y^2 - x - y - 12$

7) $(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24$

8) $4x^4 - 32x^2 + 1$

10) $64x^4 + y^4$

11) $a^6 + a^4 + a^2b^2 + b^4 - b^6$

12) $x^3 + 3xy + y^3 - 1$

13) $4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1$

14) $x^8 + x + 1$

15) $x^8 + 3x^4 + 4$

16) $3x^2 + 22xy + 11x + 37y + 7y^2 + 10$

17) $x^4 - 8x + 63$

B. KIẾN THỨC:

I. Chỉnh hợp:

1. định nghĩa: Cho một tập hợp X gồm n phần tử. Mỗi cách sắp xếp k phần tử của tập hợp X ($1 \leq k \leq n$) theo một thứ tự nhất định gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử ấy

Số tất cả các chỉnh hợp chập k của n phần tử được kí hiệu A_n^k

2. Tính số chỉnh chập k của n phần tử

$$\boxed{A_n^k = n(n - 1)(n - 2)...[n - (k - 1)]}$$

II. Hoán vị:

1. Định nghĩa: Cho một tập hợp X gồm n phần tử. Mỗi cách sắp xếp n phần tử của tập hợp X theo một thứ tự nhất định gọi là một hoán vị của n phần tử ấy

Số tất cả các hoán vị của n phần tử được kí hiệu P_n

2. Tính số hoán vị của n phần tử

$$\boxed{P_n = A_n^n = n(n - 1)(n - 2) ...2 .1 = n!}$$

(n! : n giai thừa)

III. Tổ hợp:

1. Định nghĩa: Cho một tập hợp X gồm n phần tử. Mỗi tập con của X gồm k phần tử trong n phần tử của tập hợp X ($0 \leq k \leq n$) gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử ấy

Số tất cả các tổ hợp chập k của n phần tử được kí hiệu C_n^k

2. Tính số tổ hợp chập k của n phần tử

$$C_n^k = A_n^n : k! = \frac{n(n - 1)(n - 2)...[n - (k - 1)]}{k!}$$

C. Ví dụ:

1. Ví dụ 1:

Cho 5 chữ số: 1, 2, 3, 4, 5

a) có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số, các chữ số khác nhau, lập bởi ba trong các chữ số trên

b) Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số, các chữ số khác nhau, lập bởi cả 5 chữ số trên

c)Có bao nhiêu cách chọn ra ba chữ số trong 5 chữ số trên

Giải:

a) số tự nhiên có ba chữ số, các chữ số khác nhau, lập bởi ba trong các chữ số trên là chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử: A_5^3 = 5.(5 - 1).(5 - 2) = 5 . 4 . 3 = 60 số

b) số tự nhiên có 5 chữ số, các chữ số khác nhau, lập bởi cả 5 chữ số trên là hoán vị cua 5 phần tử (chỉnh hợp chập 5 của 5 phần tử):

A_5^5 = 5.(5 - 1).(5 - 2).(5 - 3).(5 - 4) = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120 số

c) cách chọn ra ba chữ số trong 5 chữ số trên là tổ hợp chập 3 của 5 phần tử:

$$C_5^3 = \frac{5.(5-1).(5-2)}{3!} = \frac{5 . 4 . 3}{3.(3-1)(3-2)} = \frac{60}{6} = 10 \text{ nhóm}$$

2. Ví dụ 2:

Cho 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Dùng 5 chữ số này:

a) Lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số trong đó không có chữ số nào lặp lại? Tính tổng các số lập được

b) lập được bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số khác nhau?

c) Lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số, trong đó hai chữ số kề nhau phải khác nhau

d) Lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số, các chữ số khác nhau, trong đó có hai chữ số lẻ, hai chữ số chẵn

Giải

a) số tự nhiên có 4 chữ số, các chữ số khác nhau, lập bởi 4 trong các chữ số trên là chỉnh hợp chập 4 của 5 phần tử: A_5^4 = 5.(5 - 1).(5 - 2).(5 - 3) = 5 . 4 . 3 . 2 = 120 số

Trong mỗi hang (Nghìn, trăm, chục, đơn vị), mỗi chữ số có mặt: 120 : 5 = 24 lần

Tổng các chữ số ở mỗi hang: (1 + 2 + 3 + 4 + 5). 24 = 15 . 24 = 360

Tổng các số được lập: 360 + 3600 + 36000 + 360000 = 399960

b) chữ số tận cùng có 2 cách chọn (là 2 hoặc 4)

bốn chữ số trước là hoán vị của của 4 chữ số còn lại và có P_4 = 4! = 4 . 3 . 2 = 24 cách chọn

Tất cả có 24 . 2 = 48 cách chọn