

CHƯƠNG 2. TỔ HỢP XÁC SUẤT

BÀI 1. QUY TẮC ĐẾM

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. QUI TẮC CỘNG

Một công việc nào đó có thể được thực hiện theo một trong hai phương án A hoặc B. Nếu phương án A có m cách thực hiện, phương án B có n cách thực hiện và không trùng với bất kì cách nào trong phương án A thì công việc đó có $m + n$ cách thực hiện.

Quy tắc cộng được phát biểu ở trên thực chất là cách đếm số phần tử của hợp hai tập hợp hữu hạn không giao nhau, được phát biểu như sau:

Nếu A và B là các tập hữu hạn không giao nhau thì

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

Chú ý: Quy tắc cộng có thể mở rộng cho nhiều hành động

Ví dụ 1: Từ thành phố A đến thành phố B có 3 đường bộ và 2 đường thủy. Cần chọn một đường để đi từ A đến B. Hỏi có mấy cách chọn?

Giải

Chọn đường bộ thì có 3 cách; chọn đường thủy có 2 cách.

Vậy có : $3 + 2 = 5$ cách chọn.

Ví dụ 2: Một nhà hàng có 3 loại rượu, 4 loại bia và 6 loại nước ngọt. Thúc khách cần chọn đúng 1 loại thức uống. Hỏi có mấy cách chọn ?

Giải

Chọn rượu có 3 cách, chọn bia có 4 cách, chọn nước ngọt có 6 cách

Vậy có : $3 + 4 + 6 = 13$ cách chọn.

II. QUI TẮC NHÂN

Một công việc được hoàn thành bao gồm hai công đoạn A và B (hai hành động liên tiếp). Nếu công đoạn A có m cách thực hiện và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện công đoạn B thì công việc đó có $m.n$ cách thực hiện.

Ví dụ 1: Giữa thành phố Hồ Chí Minh và Hà Nội có 3 loại phương tiện giao thông: đường bộ, đường sắt và đường hàng không. Hỏi có mấy cách chọn phương tiện giao thông để đi từ thành phố Hồ Chí Minh đến Hà Nội rồi quay về?

Giải

Đi từ Hồ Chí Minh đến Hà Nội có 3 cách chọn phương tiện.

Khi đi về từ Hà Nội đến HCM có 3 cách.

Vậy có : $3 \times 3 = 9$ cách chọn.

Ví dụ 2: Một hội đồng nhân dân có 15 người, cần bầu ra 1 chủ tịch, 1 phó chủ tịch, 1 uỷ viên thư ký và không được bầu 1 người vào 2 hay 3 chức vụ. Hỏi có mấy cách bầu?

Giải

Có 15 cách chọn chủ tịch. Với mỗi cách chọn chủ tịch, có 14 cách chọn phó chủ tịch. Với mỗi cách chọn chủ tịch và phó chủ tịch, có 13 cách chọn thư ký.

Vậy có : $15 \times 14 \times 3 = 2730$ cách chọn.

3. Các dấu hiệu chia hết {kiến thức bổ sung}

- Chia hết cho 2: số tận cùng là 0, 2, 4, 6, 8.
- Chia hết cho 3: tổng các chữ số chia hết cho 3 (ví dụ: 276).
- Chia hết cho 4: số tận cùng là 00 hay hai chữ số cuối hợp thành số chia hết cho 4 (ví dụ : 1300, 2512, 708).
- Chia hết cho 5: số tận cùng là 0, 5.
- Chia hết cho 6: số chia hết cho 2 và chia hết cho 3.
- Chia hết cho 8: số tận cùng là 000 hay ba chữ số cuối hợp thành số chia hết cho 8 (ví dụ : 15000, 2016, 13824).
- Chia hết cho 9: tổng các chữ số chia hết cho 9 (ví dụ : 2835).
- Chia hết cho 25: số tận cùng là 00, 25, 50, 75.
- Chia hết cho 10: số tận cùng là 0.

Ví dụ. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 3 chữ số đôi một khác nhau không chia hết cho 9.

Giải

Gọi $n = \overline{abc}$ là số cần lập.

$m = \overline{a'b'c'}$ là số gồm 3 chữ số khác nhau.

$m' = \overline{a_1b_1c_1}$ là số gồm 3 chữ số khác nhau mà chia hết cho 9.

Ta có : Tập các số n Tập các số m Tập các số

* Tìm m : có 5 cách chọn a' (vì $a' \neq 0$), có 5 cách chọn b' (vì $b' \neq a'$), có 4 cách chọn c' (vì $c' \neq a'$ và $c' \neq b'$). Vậy có : $5.5.4 = 100$ số m .

* Tìm m' : trong các chữ số đã cho, 3 chữ số có tổng chia hết cho 9 là $\{0,4,5\}$, $\{1,3,5\}$, $\{2,3,4\}$

- Với $\{0,4,5\}$: có 2 cách chọn a_1 , 2 cách chọn b_1 , 1 cách chọn c_1 , được $2.2.1 = 4$ số m'
- Với $\{1,3,5\}$: có $3! = 6$ số m'
- Với $\{2,3,4\}$: có $3! = 6$ số m'
- Vậy có : $4 + 6 + 6 = 16$ số m'

Suy ra có : $100 - 16 = 84$ số n .

Chú ý: Qua ví dụ trên, ta thấy nếu số cách chọn thỏa tính chất p nào đó quá nhiều, ta có thể làm như sau: Số cách chọn thỏa p bằng số cách chọn tùy ý trừ số cách chọn không thỏa p . Người ta còn gọi cách làm này là dùng “phần bù”.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Quy tắc cộng

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Một bó hoa gồm có: 5 bông hồng trắng, 6 bông hồng đỏ và 7 bông hồng vàng. Hỏi có mấy cách chọn lấy 1 bông hoa?

Hướng dẫn giải

* TH 1: Chọn bông hồng trắng có 5 cách chọn

* TH 2: Chọn bông hồng đỏ có 6 cách chọn

* TH 3: Chọn bông hồng vàng có 7 cách chọn

Vậy có $5+6+7=18$ cách.

Ví dụ 2: Trong một hộp có 10 quả cầu trắng và 5 quả cầu đen. Có bao nhiêu cách chọn một trong các quả cầu ấy?

Hướng dẫn giải

Có 10 cách chọn một quả cầu trắng và 5 cách chọn một quả cầu đen.

Vậy cách chọn một trong các quả cầu ấy là: $10+5=15$ (cách).

Ví dụ 3: Lớp 11A có 30 học sinh và lớp 11B có 32 học sinh, có bao nhiêu cách chọn 1 học sinh từ 2 lớp trên để tham gia đội công tác xã hội?

Hướng dẫn giải

Có 30 cách chọn một học sinh lớp 11A và 32 cách chọn một học sinh lớp 11B. Vậy số cách chọn một học sinh từ 2 lớp trên là: $30+32=62$ (cách).

Ví dụ 4: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm một chữ số?

A. 36.

B. 720.

C. 6.

D. 120.

Hướng dẫn giải

Nếu gọi \bar{x} là số tự nhiên gồm một chữ số thì $\bar{x}=1$ hoặc $\bar{x}=2$ hoặc $\bar{x}=3$ hoặc $\bar{x}=4$ hoặc $\bar{x}=5$ hoặc $\bar{x}=6$.

Vậy có 6 số tự nhiên gồm một chữ số.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Giả sử bạn muốn mua một áo sơ mi cỡ 39 hoặc cỡ 40. Áo cỡ 39 có 5 màu khác nhau, áo cỡ 40 có 4 màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu sự lựa chọn (về màu áo và cỡ áo)?

A. 9.

B. 5.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

- Nếu chọn cỡ áo 39 thì sẽ có 5 cách.
- Nếu chọn cỡ áo 40 thì sẽ có 4 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $5 + 4 = 9$ cách chọn mua áo.

Câu 2. Một người có 4 cái quần khác nhau, 6 cái áo khác nhau, 3 chiếc cà vạt khác nhau. Để chọn một cái quần hoặc một cái áo hoặc một cái cà vạt thì số cách chọn khác nhau là:

A. 13.

B. 72.

C. 12.

D. 30.

Lời giải

Chọn A

- Nếu chọn một cái quần thì sẽ có 4 cách.
- Nếu chọn một cái áo thì sẽ có 6 cách.
- Nếu chọn một cái cà vạt thì sẽ có 3 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $4 + 6 + 3 = 13$ cách chọn.

Câu 3. Trên bàn có 8 cây bút chì khác nhau, 6 cây bút bi khác nhau và 10 cuốn tập khác nhau. Một học sinh muốn chọn một đồ vật duy nhất hoặc một cây bút chì hoặc một cây bút bi hoặc một cuốn tập thì số cách chọn khác nhau là:

A. 480.

B. 24.

C. 48.

D. 60.

Lời giải

Chọn B

- Nếu chọn một cây bút chì thì sẽ có 8 cách.
- Nếu chọn một cây bút bi thì sẽ có 6 cách.
- Nếu chọn một cuốn tập thì sẽ có 10 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $8 + 6 + 10 = 24$ cách chọn.

Câu 4. Trong một trường THPT, khối 11 có 280 học sinh nam và 325 học sinh nữ. Nhà trường cần chọn một học sinh ở khối 11 đi dự dạ hội của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

A. 45.

B. 280.

C. 325.

D. 605.

Lời giải

Chọn D

- Nếu chọn một học sinh nam có 280 cách.
- Nếu chọn một học sinh nữ có 325 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $280 + 325 = 605$ cách chọn.

Câu 5. Một trường THPT được cử một học sinh đi dự trại hè toàn quốc. Nhà trường quyết định chọn một học sinh tiên tiến lớp 11A hoặc lớp 12B. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn, nếu biết rằng lớp 11A có 31 học sinh tiên tiến và lớp 12B có 22 học sinh tiên tiến?

- A. 31. B. 9. C. 53. D. 682.

Lời giải

Chọn C

- Nếu chọn một học sinh lớp 11A có 31 cách.
- Nếu chọn một học sinh lớp 12B có 22 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $31+22=53$ cách chọn.

Câu 6. Trong một hộp chứa sáu quả cầu trắng được đánh số từ 1 đến 6 và ba quả cầu đen được đánh số 7, 8, 9. Có bao nhiêu cách chọn một trong các quả cầu ấy?

- A. 27. B. 9. C. 6. D. 3.

Lời giải

Chọn B

Vì các quả cầu trắng hoặc đen đều được đánh số phân biệt nên mỗi lần lấy ra một quả cầu bất kì là một lần chọn.

- Nếu chọn một quả trắng có 6 cách.
- Nếu chọn một quả đen có 3 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $6+3=9$ cách chọn.

Câu 7. Giả sử từ tỉnh A đến tỉnh B có thể đi bằng các phương tiện: ô tô, tàu hỏa, tàu thủy hoặc máy bay. Mỗi ngày có 10 chuyến ô tô, 5 chuyến tàu hỏa, 3 chuyến tàu thủy và 2 chuyến máy bay. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ tỉnh A đến tỉnh B?

- A. 20. B. 300. C. 18. D. 15.

Lời giải

Chọn A

- Nếu đi bằng ô tô có 10 cách.
- Nếu đi bằng tàu hỏa có 5 cách.
- Nếu đi bằng tàu thủy có 3 cách.
- Nếu đi bằng máy bay có 2 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $10+5+3+2=20$ cách chọn.

Câu 8. Trong một cuộc thi tìm hiểu về đất nước Việt Nam, ban tổ chức công bố danh sách các đề tài bao gồm: 8 đề tài về lịch sử, 7 đề tài về thiên nhiên, 10 đề tài về con người và 6 đề tài về văn hóa. Mỗi thí sinh được quyền chọn một đề tài. Hỏi mỗi thí sinh có bao nhiêu khả năng lựa chọn đề tài?

- A. 20. B. 3360. C. 31. D. 30.

Lời giải

Chọn C

- Nếu chọn đề tài về lịch sử có 8 cách.
- Nếu chọn đề tài về thiên nhiên có 7 cách.
- Nếu chọn đề tài về con người có 10 cách.
- Nếu chọn đề tài về văn hóa có 6 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $8+7+10+6=31$ cách chọn.

Dạng 2. Quy tắc nhân

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Một đội văn nghệ chuẩn bị được 2 vở kịch, 3 điệu múa và 6 bài hát. Tại hội diễn, mỗi đội chỉ được trình diễn 1 vở kịch, 1 điệu múa và 1 bài hát. Hỏi đội văn nghệ trên có bao nhiêu cách chọn chương trình biểu diễn, biết rằng chất lượng các vở kịch, điệu múa, các bài hát là như nhau?

Hướng dẫn giải

Mỗi đội chỉ được trình diễn 1 vở kịch, 1 điệu múa và 1 bài hát (gồm 3 tiết mục thuộc ba thể loại khác nhau)

- Chọn 1 vở kịch có: 2 cách chọn
- Chọn 1 điệu múa có: 3 cách chọn
- Chọn 1 bài hát có: 6 cách

Vậy có: $2 \times 3 \times 6 = 36$ cách.

Ví dụ 2: Dãy x_1, x_2, x_3, x_4 với mỗi kí tự x_i chỉ nhận giá trị 0 hoặc 1. Hỏi có bao nhiêu dãy như vậy?

Hướng dẫn giải

Mỗi kí tự x_i có hai cách chọn (0 hoặc 1).

Vậy có tất cả: $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ dãy x_1, x_2, x_3, x_4 .

Ví dụ 3: Trong một lớp học có 20 học sinh nam và 24 học sinh nữ. Giáo viên chủ nhiệm cần chọn hai học sinh: 1 nam và 1 nữ tham gia đội cờ đỏ. Hỏi giáo viên chủ nhiệm đó có bao nhiêu cách chọn?

Hướng dẫn giải

Có 20 cách chọn một học sinh nam và 24 cách chọn một học sinh nữ.

Vì vậy có $20 \times 24 = 480$ cách chọn hai học sinh (1 nam, 1 nữ).

Ví dụ 4: Số các số chẵn có hai chữ số là:

Hướng dẫn giải

Số chẵn có hai chữ số có dạng \overline{ab} với $a \neq 0$, b chẵn.

+ Chọn $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, có 9 cách chọn.

+ Chọn $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$, có 5 cách chọn.

Vậy có tất cả $9 \times 5 = 45$ số.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Có 3 kiểu mặt đồng hồ đeo tay (vuông, tròn, elip) và 4 kiểu dây (kim loại, da, vải và nhựa). Hỏi có bao nhiêu cách chọn một chiếc đồng hồ gồm một mặt và một dây?

A. 4.

B. 7.

C. 12.

D. 16.

Lời giải

Chọn C

Để chọn một chiếc đồng hồ, ta có:

- Có 3 cách chọn mặt.
- Có 4 cách chọn dây.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $3 \times 4 = 12$ cách.

Câu 2: Một người có 4 cái quần, 6 cái áo, 3 chiếc cà vạt. Để chọn mỗi thứ một món thì có bao nhiêu cách chọn bộ "quần-áo-cà vạt" khác nhau?

A. 13.

B. 72.

C. 12.

D. 30.

Lời giải

Chọn B

Để chọn một bộ "quần-áo-cà vạt", ta có:

- Có 4 cách chọn quần.
- Có 6 cách chọn áo.
- Có 3 cách chọn cà vạt.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $4 \times 6 \times 3 = 72$ cách.

Câu 3: Một thùng trong đó có 12 hộp đựng bút màu đỏ, 18 hộp đựng bút màu xanh. Số cách khác nhau để chọn được đồng thời một hộp màu đỏ, một hộp màu xanh là?

A. 13.

B. 12.

C. 18.

D. 216.

Lời giải

Chọn D

Để chọn một hộp màu đỏ và một hộp màu xanh, ta có:

- Có 12 cách chọn hộp màu đỏ.
- Có 18 cách chọn hộp màu xanh.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $12 \times 18 = 216$ cách.

Câu 4: Trên bàn có 8 cây bút chì khác nhau, 6 cây bút bi khác nhau và 10 cuốn tập khác nhau. Số cách khác nhau để chọn được đồng thời một cây bút chì, một cây bút bi và một cuốn tập.

- A. 24. B. 48. C. 480. D. 60.

Lời giải

Chọn C

Để chọn "một cây bút chì - một cây bút bi - một cuốn tập", ta có:

- Có 8 cách chọn bút chì.
- Có 6 cách chọn bút bi.
- Có 10 cách chọn cuốn tập.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $8 \times 6 \times 10 = 480$ cách.

Câu 5: Một bó hoa có 5 hoa hồng trắng, 6 hoa hồng đỏ và 7 hoa hồng vàng. Hỏi có mấy cách chọn lấy ba bông hoa có đủ cả ba màu.

- A. 240. B. 210. C. 18. D. 120.

Lời giải

Chọn B

Để chọn ba bông hoa có đủ cả ba màu (nghĩa là chọn một bông hoa hồng trắng- một bông hoa hồng đỏ- hoa hồng vàng), ta có:

- Có 5 cách chọn hoa hồng trắng.
- Có 6 cách chọn hoa hồng đỏ.
- Có 7 cách chọn hoa hồng vàng.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $5 \times 6 \times 7 = 210$ cách.

Câu 6: Một người vào cửa hàng ăn, người đó chọn thực đơn gồm một món ăn trong năm món, một loại quả tráng miệng trong năm loại quả tráng miệng và một nước uống trong ba loại nước uống. Có bao nhiêu cách chọn thực đơn.

- A. 25. B. 75. C. 100. D. 15.

Lời giải

Chọn B

Để chọn thực đơn, ta có:

- Có 5 cách chọn món ăn.
- Có 5 cách chọn quả tráng miệng.
- Có 3 cách chọn nước uống.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $5 \times 5 \times 3 = 75$ cách.

Câu 7: Trong một trường THPT, khối 11 có 280 học sinh nam và 325 học sinh nữ. Nhà trường cần chọn hai học sinh trong đó có một nam và một nữ đi dự trại hè của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

- A. 910000. B. 91000. C. 910. D. 625.

Lời giải

Chọn B

Để chọn một nam và một nữ đi dự trại hè, ta có:

- Có 280 cách chọn học sinh nam.
- Có 325 cách chọn học sinh nữ.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $280 \times 325 = 91000$ cách.

Câu 8: Một đội học sinh giỏi của trường THPT, gồm 5 học sinh khối 12, 4 học sinh khối 11, 3 học sinh khối 10. Số cách chọn ba học sinh trong đó mỗi khối có một em?

- A. 12. B. 220. C. 60. D. 3.

Lời giải

Chọn C

Để chọn một nam và một nữ đi dự trại hè, ta có:

- Có 5 cách chọn học sinh khối 12.
- Có 4 cách chọn học sinh khối 11.
- Có 3 cách chọn học sinh khối 10.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $5 \times 4 \times 3 = 60$ cách.

Câu 9: Có 10 cặp vợ chồng đi dự tiệc. Tổng số cách chọn một người đàn ông và một người đàn bà trong bữa tiệc phát biểu ý kiến sao cho hai người đó không là vợ chồng?

- A. 100. B. 91. C. 10. D. 90.

Lời giải

Chọn D

Để chọn một người đàn ông và một người đàn bà không là vợ chồng, ta có

- Có 10 cách chọn người đàn ông.
- Có 9 cách chọn người đàn bà.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $9 \times 10 = 90$ cách.

Câu 10: An muốn qua nhà Bình để cùng Bình đến chơi nhà Cường. Từ nhà An đến nhà Bình có 4 con đường đi, từ nhà Bình tới nhà Cường có 6 con đường đi. Hỏi An có bao nhiêu cách chọn đường đi đến nhà Cường?

- A. 6. B. 4. C. 10. D. 24.

Lời giải

Chọn D

- Từ An \longrightarrow Bình có 4 cách.
- Từ Bình \longrightarrow Cường có 6 cách.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $4 \times 6 = 24$ cách.

Câu 11: Các thành phố A, B, C, D được nối với nhau bởi các con đường như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến D mà qua B và C chỉ một lần?



- A. 9. B. 10. C. 18. D. 24.

Lời giải

Chọn D

- Từ A \longrightarrow B có 4 cách.
- Từ B \longrightarrow C có 2 cách.
- Từ C \longrightarrow D có 2 cách.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $4 \times 2 \times 2 = 16$ cách.

Câu 12: Các thành phố A, B, C, D được nối với nhau bởi các con đường như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến D rồi quay lại A?



- A. 1296. B. 784. C. 576. D. 324.

Lời giải

Chọn C

Từ kết quả câu trên, ta có:

- Từ A \longrightarrow D có 24 cách.
- Tương tự, từ D \longrightarrow A có 24 cách.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $24 \times 24 = 576$ cách.

Câu 13: Trong một tuần bạn A dự định mỗi ngày đi thăm một người bạn trong 12 người bạn của mình. Hỏi bạn A có thể lập được bao nhiêu kế hoạch đi thăm bạn của mình (thăm một bạn không quá một lần)?

- A. 3991680. B. 12!. C. 35831808. D. 7!.

Lời giải

Chọn A

Một tuần có bảy ngày và mỗi ngày thăm một bạn.